Mathematik für Medieninformatik 2

Übungsblatt 2

Abgabe: 10.05.2013, 10 Uhr (in den Übungskästen)

Aufgabe 5: (5 Punkte)

a) Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{u}\| = 7$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -9$ und $\|\vec{v}\| = 5$. Berechnen Sie $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|$.

b) Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^5$ mit $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ und $\langle 2\vec{u} - 3\vec{v}, 4\vec{u} + 5\vec{v} \rangle = -10$. Bestimmen Sie $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $\|\vec{u}\| = \| - \vec{u}\|$

b) $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{v} - \vec{u}\|$

c) $\|\vec{u} - \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

d) $\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$

e) $\Big| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \Big| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$

f) $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\|$

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

a) In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|v\|^2$. Zeigen Sie

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|v\|^2,$$
$$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

b) Zeigen Sie die Parallelogrammgleichung

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right).$$

c) Zeigen Sie die Polarisationsgleichung

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$

Aufgabe 8: (9 Punkte)

a) Seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^5$. Verifizieren Sie, dass die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Dreiecksungleichung für diese konkreten Vektoren erfüllt sind.

b) Seien jetzt $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

   i) Sei $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass in der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung dann Gleichheit herrscht.

   ii) Sei $\vec{v} \neq \vec{0}$ und sei $\vec{u} \neq \lambda\vec{v}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass in der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung dann eine echte Ungleichung herrscht.

   iii) Sei $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann die Dreiecksungleichung mit Gleichheit erfüllt ist. Erklären Sie dies auch geometrisch! Was passiert im Fall $\lambda < 0$?

Zusatzaufgabe (2 Bonuspunkte):

a) Schreiben Sie ein Programm (C oder Java), das einen Vektor $\vec{v}$ einliest und die Länge des Vektors $\vec{v}$ ausgibt.

b) Schreiben Sie ein Programm (C oder Java), das zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{u}$ einliest und das Skalarprodukt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ausgibt.

Testen Sie Ihre Programme an den Vektoren aus Aufgabe 8.

Anmerkung: Mit den Zusatzaufgaben wird versucht, eine Verbindung von der Mathematik zur Informatik zu erreichen. Zusatzaufgaben sollen einen Denkanstoß liefern, wie man die gelernten mathematischen Konzepte in einem Computerprogramm umsetzen kann. Mit den Zusatzaufgaben können Bonuspunkte erzielt werden, die zu den Punkten für das Übungsblatt addiert werden.

Viel Erfolg!