第一章 实数集与函数

习题 1.1

1. 设a为有理数，b为无理数，证明：

（1）$a+b$为无理数；（2）当$a\neq 0$时，ab为无理数.

证：（1）$a+b$是有理数，则$(a+b)-a$是有理数. 这与题设b是无理数相矛盾，故$a+b$为无理数.

（2）假设ab是有理数，则$\dfrac{ab}{a}=b$为有理数，这与题设b为无理数相矛盾，故ab为无理数.

2. 设$a,b\in R$，证明：若对任何正数ε有$|a-b|<\varepsilon$，则$a=b$.

证：用反证法. 假设结论不成立，则$a>b$ (或$a<b$同理可证).

令$\varepsilon=a-b$，则ε为正数且$a=b+\varepsilon$，这与条件$|a-b|<\varepsilon$相矛盾，从而$a=b$.

3. 试在数轴上表示出下列不等式的解：

（1）$|2x+1|>|x-1|$； （2）$x(x+1)(x-2)>0$；

（3）$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}>\sqrt{2x\text{-}1}$.

解（1）由原不等式有$(2x+1)^2>(x-1)^2$，化简有$3x(x+2x)>0$. 解此不等式，得$x>0$或$x<-2$. 故（1）得解如图 1-1.

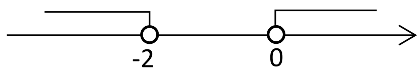


图 1-1

（2）由原不等式有

$$\begin{cases}x(x+1)>0\\x-2>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x(x+1)<0\\x-2<0\end{cases}$$

前一个不等式组得解是$x>2$，后一个不等式的解是$-1<x<0$，故（2）的解如图 1-2.

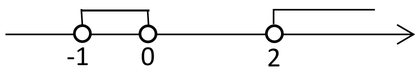


图 1-2

（3）不等式两端平方，有

$$x+1+x+2+2\sqrt{(x+1)(x+2)}>2x-1,$$

因此有$\sqrt{(x+1)(x+2)}>-2$。故当$x>-1$时，上述不等式总成立。

4.证明：对任何$x\in R$有

（1）$|2x-1|+|2x-3|\geq 2$；

（2）$|2x-1|+|2x-3|+|2x-5|\geq 4$.

证：（1）因为$2-|2x-1|\leq|2-2x+1|=|2x-3|$.

所以$|2x-1|+|2x-3|\geq 2$.

（2）因为$4-|2x-5|\leq|2x-1|\leq|2x-1|+|2x-3|$.

所以$|2x-1|+|2x-3|+|2x-5|\geq 4$.

5. 证明均值不等式：设实数$x_i\geq 0(i=1,2,\cdots n)$，记

$$M(x_i)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\ G(x_i)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},\ H\left(x_i\right)=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$

则有$H(x_i)\leq G\left(x_i\right)\leq M\left(x_i\right)$.等号当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时成立.

证明：记$A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

当$n=2$时，不等式$A_2\geq G_2$显然成立.

假设当$n=k$时，$A_k\geq G_k$成立.

则当$n=k+1$时，有$a_{k+1}+(k-1)G_{k+1}\geq k\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}\cdot G_{k+1}^{k-1}}$，于是

$$G_{k+1}=(G_k\cdot a_{k+1}^{\frac{1}{k}}\cdot G_{k+1}^{\frac{k-1}{k}})^{\frac{1}{2}}\leq(G_k\cdot\frac{a_{k+1}+(k-1)G_{k+1}}{k})^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq\frac{1}{2}(G_k+\frac{a_{k+1}+(k-1)G_{k+1}}{k})\leq\frac{1}{2}(A_k+\frac{a_{k+1}+(k-1)G_{k+1}}{k}).$$

所以$2k\cdot G_{k+1}\leq(k+1)A_{k+1}+(k-1)G_{k+1}$，于是$A_{k+1}\geq G_{k+1}$. 当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_k$时等号成立. 由数学归纳法知，$A_n\geq G_n$对一切$n$成立.

故而$M(x_i)\geq G(x_i)$. 当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时等号成立.

将$\dfrac{1}{x_i}$代替$M(x_i)$与$G(x_i)$中的x_i，即可得到$G(x_i)\geq H(x_i)$.

6.设a是正实数，n是正整数，证明：（1）$\sqrt[n]{a}-1\leq\dfrac{a-1}{n}$；（2）当$n>1$时，$n!<(\dfrac{n+1}{2})^n$.

证明 (1) 在题5中取$x_1=a,x_2=x_3=\cdots=x_n=1$，利用$M(x_i)\geq G(x_i)$，则有$\sqrt[n]{a}\leq\dfrac{a+n-1}{n}$，此即$\sqrt[n]{a}-1\leq\dfrac{a-1}{n}$.

(2) 在题5中取$x_i=i$，利用$M(x_i)\geq G(x_i)$，则当$n>1$时，有

$$\sqrt[n]{n!}<\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}.$$ 故$n!<(\dfrac{n+1}{2})^n$.

习题 1.2

1．用区间表示下列不等式的解集：

（1）$2x-|x-3|\geq 1$；　（2）$|x+\dfrac{4}{x}|<5$；　（3）$\sin x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

（4）$(x-a)(x-b)(x-c)>0$ (a,b,c 为常数，且 $a<b<c$)．

解（1）由原不等式有 $\begin{cases}x\geq 3\\ x+3\geq 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<3\\ 3x-3\geq 1\end{cases}$

前一个不等式组的解为 $x\geq 3$，后一个不等式组的解为 $\dfrac{4}{3}\leq x<3$，所以原不等式的解为 $x\in[\dfrac{4}{3},+\infty)$．

（2）由 $|x+\dfrac{4}{x}|<5$ 有 $-5<x+\dfrac{4}{x}<5$，

当 $x>0$ 时 $-5x<x^2+4<5x$，它的解为 $x\in(1,4)$；

当 $x<0$ 时 $5x<x^2+4<-5x$，它的解为 $x\in(-4,-1)$．

所以原不等式的解为 $x\in(-4,-1)\cup(1,4)$．

（3）当 $x\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4})$ 时 $\sin x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．由正弦函数的周期性知 $\sin x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的解是 $x\in(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{3\pi}{4})$，其中 k 为整数.

（4）当 $x\leq a$ 或 $b\leq x\leq c$ 时，由 $a<b<c$ 知 $(x-a)(x-b)(x-c)\leq 0$，所以 $x\leq a$ 与 $b\leq x\leq c$ 都不是原不等式的解.

当 $a<x<b$ 或 $x>c$ 时，由 $a<b<c$ 知 $(x-a)(x-b)(x-c)>0$，所以 $a<x<b$ 与 $x>c$ 都是原不等式的解.

原不等式的解是 $x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$．

2．试证：

（1）数集 $S=\left\{y\mid y=\dfrac{x^2}{2x^2-1},x>1\right\}$ 有界;

（2）数集 $S=\{y\mid y=2x^2-1,x\in R\}$ 有下界而无上界;

（3）数集 $S=\{y\mid y=x^3,x\in R\}$ 无界.

证（1）对任意的 $x>1$，$0<\dfrac{x^2}{2x^2-1}<1$，故数集 S 有界.

（2）对任意的$x\in R$，$y=2x^2-1\geq -1$，所以数集S有下界-1．而对任意的$M>0$，取$x_1=\sqrt{1+M}$，则$y_1=2x_1^2-1=2M+1\in S$，但$y_1>M$，因之数集S无上界.

（3）对任意的$M>0$，取$x_1=\sqrt[3]{M+1}$，则$y_1=M+1\in S$，但$|y_1|>M$，因之数集S无界.

3．求下列数集的上、下确界，并依定义加以验证：

（1）$S=\{y\mid y=3x-x^2,1<x<5\}$；（2）$S=\left\{x\mid x=2-\dfrac{1}{3^n},n\in N_+\right\}$；

（3）$S=\{x\mid x\text{为}(0,1)\text{内的有理数}\}$

（4）$S=\{x\mid x=n!,n\in N_+\}$.

解（1）$\sup S=\dfrac{9}{4}$，$\inf S=-10$．以下依定义验证，由$y=3x-x^2=-(x-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{9}{4}$知在区间$(1,\dfrac{3}{2})$内$y$随$x$增加而增加，在区间$(\dfrac{3}{2},5)$内$y$随$x$增加而减少．因之对任意$1<x<5$，有$-10<y<\dfrac{9}{4}$，即$\dfrac{9}{4},-10$分别是$S$的上、下界．又对$\forall\varepsilon>0$，不妨设$0<\varepsilon<1$，于是存在$x_0=\dfrac{9}{4}-\dfrac{\varepsilon}{2},x_1=-10+\dfrac{\varepsilon}{2}$，使得$x_0,x_1\in S$，但$x_0>\dfrac{9}{4}-\varepsilon,x_1<-10+\varepsilon$，所以$\sup S=\dfrac{9}{4}$，$\inf S=-10$.

（2）$\sup S=2$，$\inf S=\dfrac{5}{3}$．以下依定义验证，对任意$x\in S$，$\dfrac{5}{3}\leq x<2$，所以$2,\dfrac{5}{3}$分别是S的上、下界．对任意$\varepsilon>0$，存在$n_0>\log_3\dfrac{1}{\varepsilon}$使得$x_0=2-\dfrac{1}{3^{n_0}}\in S$且$x_0>2-\varepsilon$，所以$\sup S=2$；存在$x_1=2-\dfrac{1}{3}\in S$使得$x_1<\dfrac{5}{3}+\varepsilon$．所以$\inf S=\dfrac{5}{3}$.

（3）$\sup S=1$，$\inf S=0$．以下依定义验证，对任意$x\in S$有$0<x<1$，所以所以$2,\dfrac{5}{3}$分别是S的上、下界．对任意$\varepsilon>0$，取$0<\eta<\varepsilon$，且使$1-\eta$为有理数，则$1-\eta\in S$，$1-\eta>1-\varepsilon$，所以$\sup S=1$；由η的取法知η是有理数，$\eta\in S$，$\eta<\varepsilon=0+\varepsilon$，所以$\inf S=0$.

（4）$\sup S=+\infty$，$\inf S=1$．以下依定义验证，对任意的$x\in S$，$1\leq x<+\infty$，所以1是S的下界．对任意自然数n，$n!<+\infty$，所以$\sup S=+\infty$；对任意的$\varepsilon>0$，存在$x_1=1!=1\in S$，使$x_1<1+\varepsilon$，所以$\inf S=1$.

4．设S为非空有下界数集，证明：$\inf S=\xi\in S\Leftrightarrow\xi=\min S$.

证　充分性：设$\xi=\min S$，则对一切的$x\in S,x\geq\xi$；又对任意的$\varepsilon>0$，存在

$\xi \in S,\ \xi < \xi + \varepsilon$，所以 $\inf S = \xi$.

必要性：设 $\inf S = \xi \in S$，则对一切的 $x \in S,\ x \geq \xi$ 且 $\xi \in S$，所以 $\xi = \min S$.

5. 试证明上下确界的基本性质（1）和（2）.

证:（1）设 $\inf X = \boldsymbol{\alpha}_1, \inf Y = \boldsymbol{\alpha}_2$，对任意的 $z \in X + Y$，存在 $x \in X, y \in Y$ 使得 $z = x + y$，于是 $x \geq \boldsymbol{\alpha}_1, y \geq \boldsymbol{\alpha}_2$. 从而 $z \geq \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，对任意的 $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$，必存在 $x_0 \in X, y_0 \in Y$，且 $x_0 < \boldsymbol{\alpha}_1 + \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}, y_0 < \boldsymbol{\alpha}_2 + \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}$，则存在 $z_0 = x_0 + y_0 \in X + Y$ 使 $z_0 < \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}$，所以 $\inf\{X + Y\} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = \inf X + \inf Y$.

同理可证 $\sup\{X + Y\} = \sup X + \sup Y$.

（2）设 $\boldsymbol{\xi} = \inf\{-X\}$，由下确界的定义知，对任意的 $x \in -X$，有 $x \geq \boldsymbol{\xi}$，且对任意的 $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$，存在 $x_0 \in -X$，使得 $x_0 < \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon}$.

由 $-X$ 的定义知，对任意的 $-x \in X, -x \leq -\boldsymbol{\xi}$，且存在 $-x_0 \in X$，使得 $-x_0 > -\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\varepsilon}$，由上确界的定义知 $\sup X = -\boldsymbol{\xi}$，即 $\inf\{-X\} = -\sup X$.

同理可证 $\sup\{-X\} = -\inf X$.

6. 设 $a > 0, a \neq 1$，x 为有理数，证明：

$$a^x = \begin{cases} \sup\{a^r \mid r\text{为有理数}, r < x\}, \text{当} a > 1, \\ \inf\{a^r \mid r\text{为有理数}, r < x\}, \text{当} a < 1. \end{cases}$$

证：只证明 $a > 1$ 的情况，$a < 1$ 的情况可以类似地予以证明.

设 $S = \{a^r \mid r\text{为有理数}, r < x\}$，因为 $a > 1$，a^r 严格递增，故对任意的有理数 $r < x$，有 $a^r < a^x$，即 a^x 是 S 的一个上界. 对任意的 $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$，不妨设 $\boldsymbol{\varepsilon} < a^x$，于是存在有理数 $r_0 < x$，使得 $a^x - \boldsymbol{\varepsilon} < a^{r_0} < a^x$.

事实上，由 $0 < a^x - \boldsymbol{\varepsilon} < a^x$ 及 $\log_a(a^x - \boldsymbol{\varepsilon}) < \log_a a^x = x$. 根据实数稠密性，取有理数 r_0 使得 $\log_a(a^x - \boldsymbol{\varepsilon}) < r_0 < x$.

所以 $a^x = \sup E$，即 $a^x = \sup\limits_{r < x}\{a^r \mid r\text{为有理数}\}$.

习题 1.3

1. 设 $f(x)=|x-2|+|x+1|$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(-1)$ 和 $f(-2)$.

解：$f(0)=f(1)=f(2)=f(-1)=3, f(-2)=5$.

2. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{5-x^2}$；　（2）$y=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$；　（3）$y=\arcsin\dfrac{2x-1}{2}$；

（4）$y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；　（5）$y=\dfrac{\ln(6-2x)}{\sqrt{2x-1}}$；　（6）$y=\log_{x-1}(9-x^2)$.

解（1）$\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $x\in(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$，$\sqrt{5-x^2}$ 的定义域是 $x\in[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$，所以 $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{5-x^2}$ 的定义域是 $x\in[-\sqrt{5},0)\bigcup(0,\sqrt{5}]$.

（2）$y=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ 的定义域是 $x\in(-\infty,-3)\bigcup(-3,-2)\bigcup(-2,+\infty)$.

（3）$\arcsin u$ 的定义域是 $[-1,1]$，而 $-1\le\dfrac{2x-1}{2}\le 1$ 等价于 $-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}$，所以 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{2}$ 的定义域是 $x\in[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}]$.

（4）$\sqrt{3-x}$ 的定义域是 $x\in(-\infty,3]$，$\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $x\in(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$，所以 $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $x\in(-\infty,0)\bigcup(0,3]$.

（5）$\ln(6-2x)$ 的定义域是 $x\in(-\infty,3)$，$\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 的定义域是 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$，所以 $y=\dfrac{\ln(6-2x)}{\sqrt{2x-1}}$ 的定义域是 $x\in(\dfrac{1}{2},3)$.

（6）对于对数函数 $\log_a u$ 要求 $a>0, a\ne 1$ 与 $u>0$，而不等式组 $\begin{cases}x-1>0\\x-1\ne 1\\9-x^2>0\end{cases}$ 等价于 $1<x<3$ 且 $x\ne 2$，所以 $y=\log_{x-1}(9-x^2)$ 的定义域是 $x\in(1,2)\bigcup(2,3)$.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\ln x^3$，$g(x)=3\ln x$；

（2）$f(x)=\ln x^4$，$g(x)=4\ln x$；

（3）$f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-7}$，$g(x)=\ln(x+1)-\ln(x-7)$；

（4） $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x^2+1}$， $g(x)=\ln(x+1)-\ln(x^2+1)$.

解（1）相同，因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域与表达式均相同.

（2）不相同，因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$， $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

（3）不相同，因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(7,+\infty)$， $g(x)$ 的定义域为 $(7,+\infty)$.

（4）相同，因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域与表达式均相同.

4. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解： $f[f(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\dfrac{x}{2x+1}$， $f\{f[f(x)]\}=\dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1}=\dfrac{x}{3x+1}$.

5. 设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$，且 $a^2+bc\neq 0$，证明 $f[f(x)]=x\ \ (x\neq\dfrac{a}{c})$.

证： $f[f(x)]=\dfrac{a\cdot\dfrac{ax+b}{cx-a}+b}{c\cdot\dfrac{ax+b}{cx-a}-a}=\dfrac{a(ax+b)+b(cx-a)}{c(ax+b)-a(cx-a)}=\dfrac{(a^2+bc)x}{a^2+bc}=x$.

6. 求下列函数的反函数（不用求反函数的定义域）：

（1） $y=\sqrt[3]{x^3+1}$； （2） $y=\dfrac{3^x}{3^x+2}$； （3） $y=\dfrac{2x-1}{2x+1}$；

（4） $y=1+\ln(x+2)$；（5） $y=4\tan 3x$.

解（1） $y=\sqrt[3]{x^3+1}$ 等价于 $\sqrt[3]{y^3-1}=x$，所以原函数的反函数为 $y=\sqrt[3]{x^3-1}$.

（2） $y=\dfrac{3^x}{3^x+2}$ 等价于 $x=\log_3\dfrac{-2y}{y-1}$，所以原函数的反函数为 $y=\log_3\dfrac{-2x}{x-1}$.

（3） $y=\dfrac{2x-1}{2x+1}$ 等价于 $x=-\dfrac{y+1}{2y-2}$，所以原函数的反函数为 $y=-\dfrac{x+1}{2x-2}$.

（4） $y=1+\ln(x+2)$ 等价于 $x=e^{y-1}-2$，所以原函数的反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

（5） $y=4\tan 3x$ 等价于 $x=\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{y}{4}$，所以原函数的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{x}{4}$.

7. 试问下列函数是由哪些基本初等函数复合而成：

（1） $y=(\tan\sqrt{1-x^2})^2$；（2） $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$；（3） $y=2^{\sin^2 x}$.

解（1） $y=u^2,u=\tan v,v=\sqrt{w},w=1-x^2$.

（2） $y=\ln u,u=1+v,v=\sqrt{w},w=1+x^2$.

（3） $y=2^u, u=v^2, v=\sin x$.

8. 设 $f(x)=\sin x$，$f[g(x)]=1-x^2$，求 $g(x)$ 及其定义域.

解：令 $u=g(x)$，则 $f[g(x)]=f(u)=\sin u=1-x^2$，从而 $u=\arcsin(1-x^2)$，这里要求 $-1\le 1-x^2\le 1$ 等价于 $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

所以 $g(x)=\arcsin(1-x^2)$，其定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

9. 证明关于函数 $y=[x]$ 的如下不等式：

（1）当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$；

（2）当 $x<0$ 时，$1<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1-x$.

证：因为当 $x\ne 0$ 时，$\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x}$，所以

1° 当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$.

2° 当 $x>0$ 时，$1\le x\left[\dfrac{1}{x}\right]<1-x$.

习题 1.4

1. 判断下列函数的有界性：

（1）$y=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2},x\in R$；　（2）$y=\dfrac{1}{x^2},x\in(0,1]$.

解（1）利用不等式$|x+1|=\sqrt{(x+1)^2}<\sqrt{(x+1)^2+1}$，有$|y|=\dfrac{2|x+1|}{x^2+2x+2}<\dfrac{2}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$

≤ 2对一切$x\in R$均成立，故$y=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$是R上的有界函数.

（2）对任意的正数M，存在$x_0=\dfrac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1)$，使$y(x_0)=\dfrac{1}{x_0^2}=M+1>M$，所以

$y=\dfrac{1}{x^2}$是$(0,1]$上的无界函数.

2. 证明下列函数在指定区间上的单调性：

（1）$y=-2x+1$在$(-\infty,+\infty)$上严格递减；

（2）$y=\cos x$在$[\pi,2\pi]$上严格递增；

（3）$y=\sin x$在$[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$上严格递减.

证：（1）任取$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty),x_1<x_2$，则$f(x_1)-f(x_2)=(-2x_1+1)-(-2x_2+1)$
$=2(x_2-x_1)>0$，可见$f(x_1)>f(x_2)$，所以$f(x)=-2x+1$在$(-\infty,+\infty)$上严格递减.

（2）任取$x_1,x_2\in[\pi,2\pi],x_1<x_2$，则有$\pi<\dfrac{x_1+x_2}{2}<2\pi$，$-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，从而

$\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}<0,\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，$f(x_1)-f(x_2)=-2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，从而

$f(x_1)<f(x_2)$，所以$f(x)$在$[\pi,2\pi]$上严格递增.

（3）任取$x_1,x_2\in[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}],x_1<x_2$，则有$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\dfrac{3\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，从而

$\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}<0,\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}<0$，$f(x_1)-f(x_2)=2\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}>0$，从而

$f(x_1)>f(x_2)$，所以$f(x)$在$[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$上严格递减.

3. 设$\lambda+\mu=1\ (\lambda>0,\mu>0)$，证明：

（1）若$f(x)$是定义在$[0,+\infty)$上的单减函数，则$f(x)\le\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x)$；

（2）若$\dfrac{f(x)}{x}$是定义在$(0,+\infty)$上的单减函数，则$f(x)\le f(\lambda x)+f(\mu x)$.

证（1）因为$0<\lambda,\mu<1$，则对任意$x\in[0,+\infty)$，有$f(x)\le f(\lambda x),f(x)\le f(\mu x)$，从而

$f(x)=\lambda f(x)+\mu f(x)\le\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x)$.

（2）由（1）的结论可知 $\dfrac{f(x)}{x}\le\lambda\dfrac{f(\lambda x)}{\lambda x}+\mu\dfrac{f(\mu x)}{\mu x}=\dfrac{f(\lambda x)}{x}+\dfrac{f(\mu x)}{x}$，即有 $f(x)\le f(\lambda x)+f(\mu x)$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^4+x^2+1$；（2）$f(x)=x^2+\cos x$；

（3）$f(x)=x^3e^{x^2}$；（4）$f(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解（1）因 $f(-x)=(-x)^4+(-x)^2+1=x^4+x^2+1=f(x)$，故 $f(x)=x^4+x^2+1$ 是偶函数.

（2）因 $f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x)$，故 $f(x)=x^2+\cos x$ 是偶函数.

（3）因 $f(x)=(-x)^3e^{(-x)^2}=-x^3e^{x^2}=-f(x)$，故 $f(x)=x^3e^{x^2}$ 是奇函数.

（4）因

$$\begin{aligned}f(-x)&=\log_2(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x))=\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)\\&=\log_2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x)\end{aligned}$$

故 $f(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$ 是奇函数.

5. 求下列函数的周期：

（1）$\sin^2x$；（2）$\tan 4x$；（3）$\sin\dfrac{x}{2}+3\cos\dfrac{x}{3}$.

解（1）$f(x)=\sin^2x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$，而 $1-\cos 2x$ 得周期是 π，所以 $f(x)=\sin^2x$ 的周期是 π.

（2）$\tan x$ 的周期是 π，所以 $f(x)=\tan 4x$ 的周期是 $\dfrac{\pi}{4}$.

（3）$\sin\dfrac{x}{2}$ 的周期是 4π，$\cos\dfrac{x}{3}$ 的周期是 6π，所以 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+3\cos\dfrac{x}{3}$ 的周期是 12π.

6. 试证：函数 $f(x)=x+\sin x$ 不是周期函数.

证：反证法，假设 $f(x)=x+\sin x$ 是周期函数，则存在 $T>0$，使得对任意 $x\in R$，有

$$\begin{aligned}f(x+T)&=x+T+\sin(x+T)\\&=x+T+\sin x\cos T+\cos x\sin T\\&=x+\sin x=f(x),\end{aligned}$$

要使上式成立，必有 $T=0$，这与假设矛盾，所以原命题成立.

7. 设 f,g 为定义在 D 上的有界函数，满足 $f(x)\le g(x),x\in D$. 证明：

（1）$\sup\limits_{x\in D} f(x)\le \sup\limits_{x\in D} g(x)$； （2）$\inf\limits_{x\in D} f(x)\le \inf\limits_{x\in D} g(x)$.

证（1）假设$\sup\limits_{x\in D} f(x)>\sup\limits_{x\in D} g(x)$，令$\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup\limits_{x\in D} f(x)-\sup\limits_{x\in D} g(x))>0$，由上确界定义知，存在$x_0\in D, f(x_0)>\sup\limits_{x\in D} f(x)-\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x))$，又对任意的$x\in D$，$g(x)<\sup\limits_{x\in D} g(x)+\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x))$. 由此，知$f(x_0)>g(x)$，这与题设$f(x)\le g(x), x\in D$相矛盾，所以$\sup\limits_{x\in D} f(x)\le \sup\limits_{x\in D} g(x)$.

（2）同理可证结论成立.

8. 设f为定义在D上的有界函数，证明：

（1）$\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D} f(x)$； （2）$\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D} f(x)$.

证（1）令$\inf\limits_{x\in D} f(x)=\xi$. 由下确界的定义知，对任意的$x\in D, f(x)\ge\xi$，即$-f(x)\le-\xi$，可见$-\xi$是$-f(x)$的一个上界；对任意的$\varepsilon>0$，存在$x_0\in D$，使$f(x_0)<\xi+\varepsilon$，即$-f(x_0)>-\xi-\varepsilon$，可见$-\xi$是$-f(x)$的上界中的最小者，所以$\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\xi=-\inf\limits_{x\in D} f(x)$.

（2）同理可证结论成立.

总练习题一

1. 设 $a,b\in R$，证明：

（1）$\max\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)$；

（2）$\min\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

证：因为 $\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)=\begin{cases}a, & 当a\ge b时\\ b, & 当a<b时\end{cases}$

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)=\begin{cases}a, & 当a\ge b时\\ b, & 当a<b时\end{cases}$$

所以 $\max\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)$， $\min\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

2. 设 $f(x)=\sin x, x\in[0,2\pi]$， $g(x)=\cos x, x\in[0,2\pi]$， 令 $G(x)=\max\limits_{0\le x\le 2\pi}\{f(x),g(x)\}$，$H(x)=\min\limits_{0\le x\le 2\pi}\{f(x),g(x)\}$.

（1）求 $G(x),H(x)$ 的表达式；（2）当 $a\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时，求 $G(a)$ 和 $H(a)$.

解（1）先作出 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图像（如图 1-3 所示），所以

$$G(x)=\begin{cases}\cos x, x\in[0,\dfrac{\pi}{4}],\\ \sin x, x\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}],\\ \cos x, x\in(\dfrac{5\pi}{4},2\pi],\end{cases} \qquad ①$$

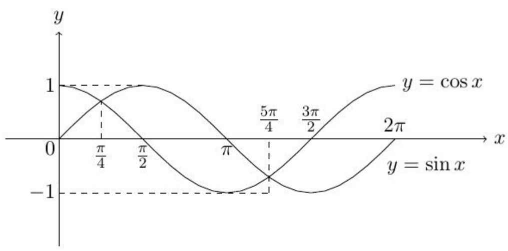


图 1-3

$$H(x)=\begin{cases}\sin x, x\in[0,\dfrac{\pi}{4}],\\ \cos x, x\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}],\\ \sin x, x\in(\dfrac{5\pi}{4},2\pi].\end{cases} \qquad ②$$

（2）由上面①, ②两式可知，当 $a\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时， $G(a)=\sin a, H(a)=\cos a$.

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试验证 $f\{f[f(f(x))]\}=x$，并求 $f(x+1), f(\dfrac{1}{x}), \dfrac{1}{f(x)}, f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$，$(x\ne 0, x\ne 1)$.

解：$f\left[f(x)\right]=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x$，所以 $f\left\{f\left[f(f(x))\right]\right\}=f\left[f(x)\right]=x$.

又有 $f(x+1)=\dfrac{x+1}{x+1-1}=1+\dfrac{1}{x}$， $f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-1}=\dfrac{1}{1-x}$，

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x},\quad f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1}=1-x.$$

4. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，设 $f_n(x)=f\left\{f\left[\cdots\left(f(x)\right)\cdots\right]\right\}(n\text{ 个 }f)$，求 $f_n(x)$.

解：令 $f_1(x)=f(x)$，可用数学归纳法证明 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. ①

当 $n=1$ 时，显然①式成立.

假设当 $n=k$ 时，①式成立，当 $n=k+1$ 时，

$$f_{k+1}(x)=f\left[f_k(x)\right]=f(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}})=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

即对 $n=k+1$ ①式也成立，即证①式.

5. 在底为 a，高为 h 的三角形中内接一矩形，将矩形面积 S 表示为其底 x 的函数.

解：如图 1-4 所示，已知 $BC=a, EH=FG=x, AM=h$，有 $EH:BC=(AM-EF):AM$，所以 $x:a=(h-EF):h$，由此可得 $EF=\dfrac{h(a-x)}{a}$，则有

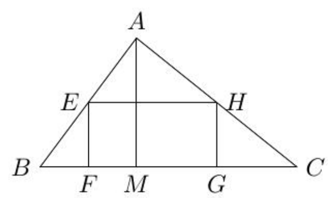


图 1-4

$$S=EF\cdot EH=\frac{hx(a-x)}{a},(0<x<a).$$

6. 已知 $y=f(x)$ 的图形（如图 1-5 所示），试作下列各函数的图形：

（1） $y=-f(x)$；（2） $y=|f(x)|$；

（3） $y=\left[f(x)\right]+1$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数；

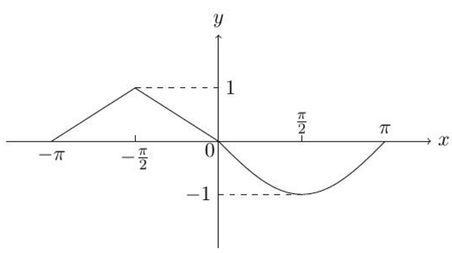


图 1-5

（4） $y=\operatorname{sgn}\left(f(x)\right)$；（5） $y=\frac{1}{2}\left(|f(x)|+f(x)\right)$.

解：它们的图形分别如下：

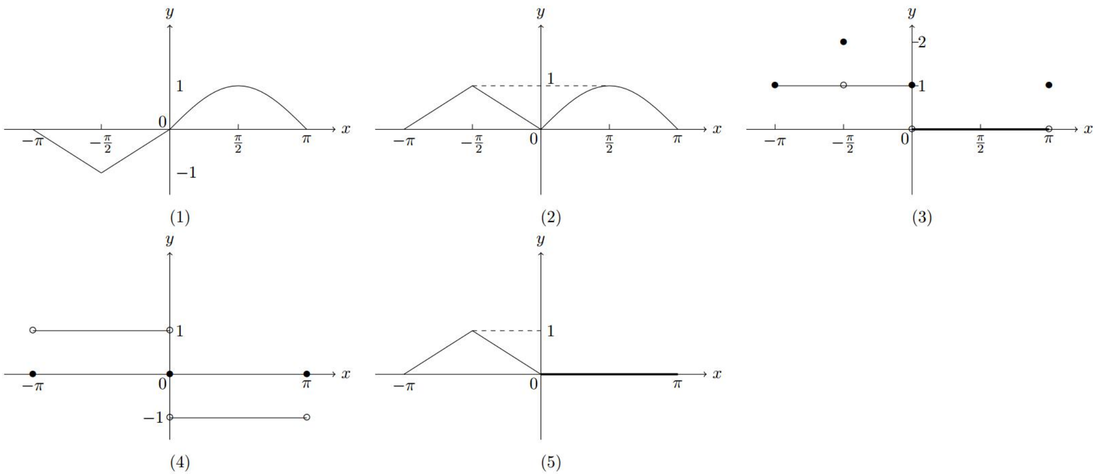


图 1-6

7. 设 $f(x)=x-[x]$，讨论它的单调性，有界性，周期性，并作出它的图像.

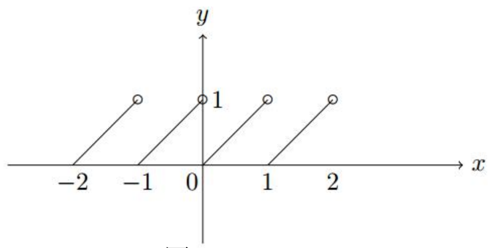


图 1-7

解:（1）$f(x)$ 不是单调函数，因为 $0.3<1.2<2.3$ 但 $f(0.3)>f(1.2), f(1.2)<f(2.3)$.

（2） $f(x)$ 是有界函数，因为 $|f(x)|\le 1$.

（3）$f(x)$ 是周期为 1 的函数，$\forall x\in R$，令 $x=[x]+a$，其中 $0\le a<1$，则 $x+1=[x]+1+a$.

$$f(x+1)=\{[x]+1+a\}-[[x]+1+a]=\{[x]+1+a\}-[x]+1=a=f(x),\forall x\in R.$$

（4） $y=f(x)=x-[x]$ 图像如图 1-7 所示.

8. 设 $f(x), g(x)$ 为区间 (a,b) 上递减函数，令

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\},\ G(x)=\min\{f(x),g(x)\},$$

证明： $F(x), G(x)$ 都是 (a,b) 上递减函数.

证： $\forall x_1,x_2\in(a,b), x_1<x_2$，则由

$$F(x_1)=\max\{f(x_1),g(x_1)\}\ge\max\{f(x_2),g(x_2)\}=F(x_2),$$
$$G(x_1)=\min\{f(x_1),g(x_1)\}\ge\min\{f(x_2),g(x_2)\}=G(x_2),$$

即证 $F(x), G(x)$ 都是 (a,b) 上递减函数.

9. 设 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$（其中 a,b,c 是整数）是奇函数，且在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$f(1)=2,\ f(2)<3$.

（1）求 a,b,c 的值；（2）证明: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

解（1）由于 $f(x)$ 是奇函数，所以 $c=0$. 再由 $f(1)=2$ 可得 $a=2b-1$， ①

又因 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=2$，所以

$$2=f(1)<f(2)=\frac{4a+1}{2b}<3, \qquad ②$$

再将①代入②可得 $\frac{3}{2}<2b<3$．因为 b 是整数，所以 $b=1$，从而 $a=1$．那么有

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}.$$

（2）任取 $x_1,x_2\in(0,1),x_1<x_2$，有

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\frac{1}{x_1})-(x_2+\frac{1}{x_2})=(x_1-x_2)(1-\frac{1}{x_1x_2}),$$

因为 $x_1-x_2<0,1-\frac{1}{x_1x_2}<0$，所以 $f(x_1)>f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

10. 证明:（1）两个奇函数之和为奇函数, 其积为偶函数.

（2）两个偶函数之和与积都为偶函数.

（3）奇函数与偶函数之积为奇函数.

证：只证（1），其余可以类似地证明.

设 f_1,f_2 为 D 上的奇函数，令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x),G(x)=f_1(x)f_2(x)$，则对任意的 $x\in D$，有

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=(-f_1(x))+(-f_2(x))=-(f_1(x)+f_2(x))=-F(x),$$

$$G(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x),$$

所以 $F(x),G(x)$ 是 D 上的奇、偶函数.

11. 设 f,g 为 D 上的有界函数, 证明：

（1）$\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$；

（2）$\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)\le\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$.

证：对任意的 $x\in D$，由于 $\inf\limits_{x\in D}f(x)\le f(x),\inf\limits_{x\in D}g(x)\le g(x)$，

所以 $\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\le f(x)+g(x)$，

故 $\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\le\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$ （1）

由不等式（1）又有 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\inf\limits_{x\in D}\{-g(x)\}\le\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)-g(x)\}=\inf\limits_{x\in D}f(x)$，

所以 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf\limits_{x\in D}f(x)-\inf\limits_{x\in D}\{-g(x)\}=\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

同（1）可得 $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\sup\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$ （2）

由不等式（2）又有 $\sup\limits_{x\in D}\left\{f(x)+g(x)-f(x)\right\}\le\sup\limits_{x\in D}\left\{f(x)+g(x)\right\}+\sup\limits_{x\in D}\left\{-f(x)\right\}$，所以

$-\sup\limits_{x\in D}\left\{-f(x)\right\}+\sup\limits_{x\in D}g(x)\le\sup\limits_{x\in D}\left\{f(x)+g(x)\right\}$，

即 $\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)\le\sup\limits_{x\in D}\left\{f(x)+g(x)\right\}$.

12. 设 f,g 为 D 上的非负有界函数，证明：

（1）$\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)\le\inf\limits_{x\in D}\left\{f(x)g(x)\right\}$；

（2）$\sup\limits_{x\in D}\left\{f(x)g(x)\right\}\le\sup\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

证：对任意的 $x\in D$，由于 $\inf\limits_{x\in D}f(x)\le f(x),\inf\limits_{x\in D}g(x)\le g(x)$，且 $f(x)\ge 0,g(x)\ge 0$，所以 $\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)\le f(x)\cdot g(x)$，故 $\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)\le\inf\limits_{x\in D}\left\{f(x)\cdot g(x)\right\}$. 同理可证（2）成立.

13. 设 f 是定义在 R 上以 h 为周期的函数，a 为实数. 证明：若 f 在 $[a,a+h]$ 上有界，则 f 在 R 上有界.

证：因为 f 在 $[a,a+h]$ 上有界，从而对任意的 $x\in[a,a+h]$，存在 $M>0$，使 $|f(x)|\le M$，对任意的 $y\in R$，一定存在整数 K，使 $y=Kh+x$，其中 $x\in[a,a+h]$，于是 $|f(y)|=|f(Kh+x)|=f(x)\le M$，所以 $f(x)$ 在 R 上有界.

14. 设 f 在区间 I 上有界，记 $M=\sup\limits_{x\in I}f(x),m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$.

证明：$\sup\limits_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m$.

证：对任意的 $x',x''\in I$，有 $|f(x')-f(x'')|\le M-m$. 任意的 $\boldsymbol{\varepsilon}>0$，因为 $M=\sup\limits_{x\in I}f(x)$，所以存在 $x_0'\in I,f(x_0')>M-\boldsymbol{\varepsilon}$. 又因为 $m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$，所以存在 $x_0''\in I,f(x_0'')<m+\boldsymbol{\varepsilon}$. 所以存在 $x_0',x_0''\in I$，使得 $|f(x_0')-f(x_0'')|>(M-\boldsymbol{\varepsilon})-(m+\boldsymbol{\varepsilon})=M-m-2\boldsymbol{\varepsilon}$，即

$\sup\limits_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m$.

第二章 数列的极限 练习题参考答案

习题 2.1

1. 对每个自然数k，均有自然数N_k，且当$n>N_k$时，有$|a_n-a|<\frac{1}{k}$，问是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$？

答：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$成立，因为$\forall\varepsilon>0$，则存在自然数$k_0$，使$\frac{1}{k_0}<\varepsilon$，再由假设存在自然数$N_{k_0}$，当$n>N_{k_0}$时，有$|a_n-a|<\frac{1}{k_0}<\varepsilon$.

2. 按$\varepsilon-N$定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{n^2+n+1}=3$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$； (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots(2n)}=0$.

证 (1) 因为$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$，所以对任意的$\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$，则当$n>N$时，$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$.

(2) 因为$\left|\frac{3n^2+2}{n^2+n+1}-3\right|=\frac{3n+1}{n^2+n+1}<\frac{3n+3}{n^2+n}=\frac{3}{n}(n\geq 1)$，所以任给$\varepsilon>0$，取$N=[\frac{3}{\varepsilon}]+1$，则当$n>N$时，$\left|\frac{3n^2+2}{n^2+n+1}-3\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{n^2+n+1}=3$.

(3) 因为$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\cdots\frac{n}{n}\leq\frac{1}{n},n=1,2,\cdots$，所以任给$\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$，则当$n>N$时，$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|\leq\frac{1}{n}<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

(4) 因为$\left|\sin\frac{\pi}{n}-0\right|<\frac{\pi}{n}<\frac{4}{n}$，所以任给$\varepsilon>0$，取$N=[\frac{4}{\varepsilon}]+1$，则当$n>N$时，$\left|\sin\frac{\pi}{n}-0\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$.

(5) 利用$2n>\sqrt{2n-1}\cdot\sqrt{2n+1}$，有

$$\left|\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}-0\right|<\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(\sqrt{1}\cdot\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})\cdots(\sqrt{2n-1}\cdot\sqrt{2n+1})}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

所以任给 $0<\varepsilon<1$，取 $N=[\frac{1}{2\varepsilon^2}-\frac{1}{2}]+1$，则当 $n>N$ 时，$\left|\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}=0$.

3. 证明极限： $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证：令 $x_n=\sqrt[n]{n}-1>0$，则 $n=(1+x_n)^n=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2}x_n^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2}x_n^2$，故而有 $0<x_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}(n\geq 2)$. 所以任给 $0<\varepsilon<1$，取 $N=[\frac{2}{\varepsilon^2}]+2$，则当 $n>N$ 时，$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

4. 设 $a_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a<1$，任给 $\varepsilon>0$，不妨设 $0<\varepsilon<\min\{1-a,a\}$，存在 $N_1>0$ 使得当 $n>N_1$ 时，有 $|\sqrt[n]{a_n}-a|<\varepsilon$，即 $0<a-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<a+\varepsilon<1$，从而有

$$0<(a-\varepsilon)^n<a_n<(a+\varepsilon)^n<1.$$

取 $N_2=\max\{N_1,[\log_{a+\varepsilon}\varepsilon]+1\}$，则当 $n>N_2$ 时，有 $|a_n-0|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

注：此证明不严谨！缺少对 $a=0$ 的讨论。因为由保序性只能保证 $a\geq 0$，如取 $a_n=\frac{1}{n^n}$。上面的证明可修改为：

5. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则对任一正整数 k，有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

证：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则由定义知，任给 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$. 于是当 $n>N$ 时，$n+k>n>N$，所以 $|a_{n+k}-a|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

6. 试用定义 $1'$ 证明：

(1) 数列 $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ 不以 1 为极限； (2) 数列 $\{(1+(-1)^n)^2\}$ 发散.

解：设 $\{a_n\}$ 是一数列，a 是确定的数，若 $\exists\varepsilon_0>0$，对 $\forall N>0$，总 $\exists n_0>N$，使得 $|a_{n_0}-a|\geq\varepsilon_0$，则 a 不是 $\{a_n\}$ 的极限.

(1) 对于常数 1，$\exists \boldsymbol{\varepsilon}_0=\frac{1}{2}>0$，$\forall$ 自然数 N，总 $\exists n_0=N+1>N$，使得 $\left|\frac{1}{n_0+1}-1\right|=\frac{N+1}{N+2}\geq\frac{1}{2}$，所以数列$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$不以 1 为极限.

(2) 当$n=2k$时，$a_n=4$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$.

当$n=2k-1$时，$a_n=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

故而极限不存在，发散.

7. 判断下列命题是否成立. (若成立, 说明理由; 若不成立, 举出反例)

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则两数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中至少有一个为无穷小量 (即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$);

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 为无穷大量, 又数列 $\{b_n\}$ 满足 $|b_n|>0$，当 $n\geq 1$. 则数列 $\{a_nb_n\}$ 为无穷大量.

解 (1) 命题不成立. 例如

$$a_n=\begin{cases}1, n\text{为奇数，}\\0, n\text{为偶数，}\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}0, n\text{为奇数，}\\1, n\text{为偶数，}\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$.

(2) 命题不成立. 例如 $a_n=n,(n=1,2,\cdots)$, $b_n=\frac{1}{n},(n=1,2,\cdots)$.

则 $a_nb_n=1,(n=1,2,\cdots)$，即数列$\{a_nb_n\}$不是无穷大量.

8. 按$\boldsymbol{\varepsilon}-N$定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，其中

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, & n\text{为偶数，}\\[2ex]\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n\text{为奇数.}\end{cases}$$

证明 (1) 因为 $|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$，所以任给 $\varepsilon>0$，可取

$N=[\frac{1}{4\varepsilon^2}]+1$，则当$n>N$时，$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

(2) 因为$\left|\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right|=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$，所以任给$\varepsilon>0$，可取$N=[\frac{1}{2\varepsilon}]+1$，当$n>N$时，$\left|\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$.

(3) 任给$\varepsilon>0$，当n为奇数时，$|a_n-1|=\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\frac{1}{n}$；当$n$为偶数时，$|a_n-1|=\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$，当$n>N$时，$|a_n-1|<\varepsilon$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

习题 2.2

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2+n}{4n^3+1}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+n^2}{3n^3+1}$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}$； (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$.

答案 (1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{2}$； (2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^3}}=0$；

(3) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$； (4) 原式$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-\frac{2}{3})^n+1}{2\times(-\frac{2}{3})^n-3}=-\frac{1}{3}$；

(5) 原式$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2}$.

2. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$且$a<b$. 证明：存在正数$N$，使得当$n>N$时有$a_n<b_n$.

证 取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}(b-a)>0$，根据两个极限值知分别存在$N_1,N_2$，当$n>N_1$时，$|a_n-a|<\varepsilon_0$，从而$a_n<a+\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}(a+b)$；当$n>N_2$时，$|b_n-b|<\varepsilon_0$，从而$b_n>b-\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}(a+b)$.

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时，必有$a_n<\dfrac{1}{2}(a+b)<b_n$. 得证.

3. 判断下列命题是否成立. (若成立, 说明理由; 若不成立, 举出反例)

(1) 对数列$\{a_n\}$和$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，若$\{S_n\}$是有界数列, 则$\{a_n\}$是有界数列;

(2) 数列$\{a_n\}$存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的充分必要条件是：对任一自然数$p$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+p}-a_n|=0$.

答案：(1) 命题成立. 理由：设存在$M>0$，使得对任意$n\in N$，有$|S_n|<M$，则$|a_n|=|S_n-S_{n-1}|<2M$，故$\{a_n\}$有界.

(2) 命题不成立. 例：$a_n=\sqrt{n},|a_{n+p}-a_n|=\dfrac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\to 0$，但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在.

4. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\cdots\cdots\sqrt{3}}}$ (n个根号);

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{n}}$;

(4) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2})$;

(5) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$;

(6) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\frac{3}{n^2+n+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n})$.

答案：(1) 因为$1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$，所以

原式$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

(2) 原式$=\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdots\cdots 3^{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}3^{1-(\frac{1}{2})^n}=3$.

(3) 当$n>2$时，$\frac{1}{2}<1-\frac{1}{n}<1$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$，由迫敛性定理知，原式$=1$.

(4) 由于$0<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}\to 0$ ($n\to\infty$) 由迫敛性定理知，原式$=0$.

(5) 由于$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，而当$n\to\infty$，两边分式极限均为 1. 由迫敛性定理知，原式$=1$.

(6) 记$x_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\frac{3}{n^2+n+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$.，则

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<x_n<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

所以$\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}<x_n<\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$. 因为$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$，由迫敛性定理知，原式$=\frac{1}{2}$.

5. 证明：从任一数列$\{a_n\}$中, 必可选出一个(不一定严格)单调的子数列.

证 (1) 若$\{a_n\}$中存在递减子列，则问题得证.

(2) 若$\{a_n\}$中不存在递减子列，则存在自然数n_1，使得$x_n>x_{n_1},\forall n>n_1$. 从中取$n_2>n_1$，有$a_{n_2}>a_{n_1}$

在$\{a_n\}_{n>n_2}$中也不存在递减子列，类似可取$n_3>n_2$，有$a_{n_3}>a_{n_2}$. 这样继续下去，

可找到严格递增子列 $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots\cdots$. 得证.

6. 若 $a_n > 0\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ 且 $\exists C>0$，当 $m<n$ 时，有 $a_n \le Ca_m$，已知 $\{a_n\}$ 存在子序列 $a_{n_k} \to 0$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证 $\forall \varepsilon > 0$，由 $a_{n_k} \to 0$，存在自然数 N_1，当 $k > N_1$ 时，有 $\left|a_{n_k}\right| < \dfrac{\varepsilon}{C}$. 再令 $N = n_{N_1} + 1$，于是当 $n > N$ 时 $|a_n - 0| = a_n \le C \cdot a_{n_{N_1}+1} < C \cdot \dfrac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

7. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中一个是收敛数列，另一个是发散数列.

证明：$\{a_n \pm b_n\}$ 是发散数列. 又问 $\{a_n b_n\}$ 和 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}(b_n \ne 0)$ 是否必为发散数列？

证 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\{b_n\}$ 发散. 假设 $\{a_n + b_n\}$ 收敛于 b，则由极限性质知 $b_n = a_n + b_n - a_n$ 收敛于 $b-a$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b - a$，这与 $\{b_n\}$ 发散相矛盾，故 $\{a_n + b_n\}$ 发散. 同理可得 $\{a_n - b_n\}$ 发散.

$\{a_n b_n\}$ 与 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}(b_n \ne 0)$ 不一定发散，例如取 $\{a_n\} = \{\dfrac{1}{n}\}, \{b_n\} = \{n\}$，则 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散，但 $\{a_n b_n\}$ 与 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 都收敛.

8. 证明以下数列发散

(1) $\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right\}$；(2) $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$；(3) $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$.

证 (1) 令 $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$. 故而数列 $\left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right\}$ 发散.

(2) 因为 $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ 为无界数列，这与收敛数列的有界性相矛盾，故 $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ 发散.

(3) 令 $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{8k} = \lim\limits_{k\to\infty} \sin 2k\pi = 0, \lim\limits_{k\to\infty} a_{8k+2} = \lim\limits_{k\to\infty} \sin(2k + \dfrac{1}{2})\pi = 1$. 故而数列 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$ 发散.

9. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdots \dfrac{2n-1}{2n}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=1}^{n} k!$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^a-n^a]$，其中$0<a<1$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots\cdots(1+q^{2^n})$，其中$|q|<1$.

答 案 (1) 因 为 $0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3\cdot 5}}\cdots\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0$ $(n\to\infty)$. 由迫敛性定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}=0$.

(2) 因 为 当 $n>2$ 时， $n!<\sum\limits_{k=1}^{n}k!=1!+2!+\cdots+(n-2)!+(n-1)!+n!<(n-2)(n-2)!$ $+(n-1)!+n!<2(n-1)!+n!$，所以当$n>2$时， $1<\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}k!<\frac{2(n-1)!}{n!}+1=\frac{2}{n}+1\to 1$ $(n\to\infty)$. 由迫敛性定理知， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}k!=1$.

(3) 因为$-1<a-1<0$，所以$(1+n)^{a-1}<n^{a-1}$， 即$(1+n)^a<n^{a-1}(n+1)=n^{a-1}+n^a$. 因此有$0<(1+n)^a-n^a<n^{a-1}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}n^{a-1}=0$. 由迫敛性定理知，原式$=0$.

(4) 因为$(1-q)(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})=1-q^{4^n}$，因此

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots\cdots(1+q^{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^{4^n}}{1-q}=\frac{1}{1-q}$.

10. 设$a_1,a_2,\cdots,a_m$为m个正数, 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

证 设 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=a_j,1\le j\le m$ ， 则 $a_j=\sqrt[n]{a_j^n}<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$ $\le a_j\sqrt[n]{m}\to a_j(n\to\infty)$. 由迫敛性定理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a_j=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

习题 2.3

1. 利用$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$, 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1})^{2-n}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{n+1}$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n+2})^n$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3n})^n$； (5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$.

答案 (1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}\cdot\frac{n}{n-1}=\frac{1}{e}$. (2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{e}$.

(3) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{e}$. (4) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{3n})^{3n}\right]^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$.

(5) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e}=1$.

2. 证明下列数列极限存在并求其值：

(1) 设$a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{3}{a_n}), n=1,2,\cdots$;

(2) 设$c>0, 0<a_1<c$, $a_{n+1}=2a_n-\frac{a_n^2}{c}, n=1,2,\cdots$;

(3) 设$a_1=\sqrt{c}(c>0)$, $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}, n=1,2,\cdots$;

(4) $a_n=\frac{c^n}{n!}(c>0), n=1,2,\cdots$.

答案 (1) 证 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{3}{a_n})\ge\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{a_n\cdot\frac{3}{a_n}}=\sqrt{3}$，因此$\{a_n\}$有界. 又因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{3}{a_n^2})\le\frac{1}{2}(1+\frac{3}{3})=1$，所以$\{a_n\}$单调递减. 由单调有界定理知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$存在. 从而有$b=\frac{1}{2}(b+\frac{3}{b})$，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$.

(2) 证 先用数学归纳法证明$0<a_n<c, \forall n\in N$. 当$n=1$时结论成立，归纳假设结论对n成立. 在$n+1$时，因为$a_{n+1}=2a_n-\frac{a_n^2}{c}=-\frac{1}{c}(a_n-c)^2+c$，所以$0<a_{n+1}<c$，即$0<a_n<c, \forall n\in N$. 又因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2-\frac{a_n}{c}>2-\frac{c}{c}=1$，所以$\{a_n\}$单调递增. 由单调有界定理知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$存在. 从而有$b=2b-\frac{b^2}{c}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.

(3) 证 由$a_1=\sqrt{c}>0$知$a_1=\sqrt{c}<\sqrt{a_1+c}=a_2$. 设$a_k<a_{k+1}$，即$a_k<\sqrt{a_k+c}$，则

$a_k + c < \sqrt{a_k + c} + c = a_{k+1} + c$．从而 $\sqrt{a_k + c} < \sqrt{a_{k+1} + c}$，即 $a_{k+1} < a_{k+2}$．由数学归纳法，对任意 $n \in N$，有 $a_n < a_{n+1}$，即 $\{a_n\}$ 单调递增.

当 $c > 0$ 时，$a_1 = \sqrt{c} < 1 + \sqrt{c}$．设 $a_n < 1 + \sqrt{c}$，则 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{1 + \sqrt{c} + c}$ $< \sqrt{1 + 2\sqrt{c} + c} = 1 + \sqrt{c}$，所以 $\{a_n\}$ 有上界．由单调有界定理知 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$ 存在．从而有 $b^2 = b + c$，解得 $b = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}$，由于 $a_n > 0$，故 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$.

(4) 证 易见 $a_{n+1} - a_n = \dfrac{c^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{c^n}{n!} = \dfrac{c^n}{n!}(\dfrac{c}{n+1} - 1)$ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$．取自然数 N，使得 $c < N$，从而当 $n > N$ 时，$a_{n+1} - a_n = \dfrac{c^n}{n!}(\dfrac{c}{n+1} - 1) < 0$，故 $\{a_n\}$(不计前 N 项)为递减数列；又 $a_1 = c > 0, a_n = \dfrac{c^n}{n!} > 0$，可见 $\{a_n\}$ 有下界.

由单调有界定理知 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$ 存在．因 $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{c}{n+1}$，从而有 $b = b \cdot 0$，故 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

3．设 $\{a_n\}$ 为单调数列，证明 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow$ 存在子列 $\{a_{n_k}\}$，有 $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a$.

证 $\Rightarrow$ 由子列的性质即得.

$\Leftarrow$ 已知 $\left\{a_{n_k}\right\}$ 收敛，不妨设 $\{a_n\}$ 递增，从而 $\left\{a_{n_k}\right\}$ 仍为递增数列，所以 $a_{n_k} \le a (k = 1, 2, \cdots)$．对任一 n，取 k 使 $n_k > n$．那么 $a_n \le a_{n_k} \le a$，由此知对任意的自然数 n，有 $a_n \le a$，从而 $\{a_n\}$ 是递增且有上界的数列，由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛且极限一定为 a.

4．设数列 $\{a_n\}$ 有一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛，且 $\{a_{n_k}\} \cap \{a_{2n}\}$ 与 $\{a_{n_k}\} \cap \{a_{2n+1}\}$ 都有无穷多个元，而 $\{a_{2n}\}$ 与 $\{a_{2n+1}\}$ 都为单调数列，问 $\{a_n\}$ 是否收敛？为什么？

答案：收敛，设 $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = l$.

因为 $\{a_{n_k}\} \cap \{a_{2n}\}$ 与 $\{a_{n_k}\} \cap \{a_{2n+1}\}$ 都有无穷多个元，所以 $\{a_{2n}\}$ 中有子列收敛于 l．同理 $\{a_{2n+1}\}$ 中也有子列收敛于 l．而且 $\{a_{2n}\}$ 与 $\{a_{2n+1}\}$ 都为单调数列，根据第 3 题的结论知 $\lim\limits_{n \to \infty} a_{2n} = l, \lim\limits_{n \to \infty} a_{2n+1} = l$．此即有 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$.

5. 证明：(1) $\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$为递减数列, 并由此推出$\left\{(1+\frac{1}{n})^{n}\right\}$为有界数列;

(2) $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots\cdots.$

证明提示：利用不等式$a^{n+1}-b^{n+1}>(n+1)a^n(b-a)$，$b>a>0$.

证 (1) 由题设不等式可得$b^{n+1}>a^n[(n+1)b-na]$.

令$a=1+\frac{1}{n+1}, b=1+\frac{1}{n}$，代入以上不等式得

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^{n+1}&>(1+\frac{1}{n+1})^n[(n+1)(1+\frac{1}{n})-n(1+\frac{1}{n+1})]\\&=(1+\frac{1}{n+1})^n[1+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2}{n+1}]\\&>(1+\frac{1}{n+1})^n(1+\frac{1}{n+1})^2=(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}.\end{aligned}$$

所以$\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$是递减数列.

而$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}<(1+1)^2=4$，所以$\left\{(1+\frac{1}{n})^{n}\right\}$是有界数列.

(2) 由$(1+\frac{1}{n})^n$严格增且$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，故$(1+\frac{1}{n})^n<e$.

再由$(1+\frac{1}{n})^{n+1}$严格减且$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e$，故$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>e$，即有

$$(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}.$$

取对数，$n\ln(1+\frac{1}{n})<1<(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})$，

$$n<\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}<n+1,$$

于是 $$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}.$$

6. 应用柯西收敛准则, 证明以下数列$\{a_n\}$收敛：

(1) $a_n=\frac{\cos 1}{2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos n}{2^n}$;

(2) $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

证 (1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，于是对任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时，$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，所以当$n>N$时，对任意的自然数$P$，有

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=|\frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\cos(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\cos(n+p)}{2^{n+p}}|\\&<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^n}(1-\frac{1}{2^p})<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.\end{aligned}$$

由柯西收敛准则知$\{a_n\}$收敛.

(2) 对任给$\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$，当$m>n>N$时，有

$$\begin{aligned}|a_m-a_n|&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\\&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}<\varepsilon.\end{aligned}$$

由柯西收敛准则知$\{a_n\}$收敛.

7. 设$a_n\neq 0\,(n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，若存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$，证明：$|l|\leq 1$.

证 反证法，假设$|l|>1$，取C满足$|l|>C>1$，由题意有$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|l|$. 存在$N>0$，当$n>N$时有$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>C$，所以

$$|a_{n+1}|>C|a_n|>C^2|a_{n-1}|>\cdots\cdots>C^{n-N+1}|a_N|.$$

由$C>1$，上式两边取极限可得$\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}|=+\infty$，这与$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$的假设相矛盾，所以$|l|\leq 1$.

8. 证明：若实数列$\{a_n\}$单调递减有下界，则$\{a_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\inf\limits_{n\in N}\{a_n\}$.

证 显然，$\{a_n\}$是收敛数列. 由于$\{a_n\}$有界，由确界原理知$\{a_n\}$存在下确界，设$\inf\{a_n\}=\gamma$. 由确界定义知，对任意$\varepsilon>0$，存在n_0使得$\gamma-\varepsilon<\gamma\leq a_{n_0}<\gamma+\varepsilon$. 因为$\{a_n\}$单调递减，所以当$n>n_0$时，就有$\gamma-\varepsilon<\gamma\leq a_n\leq a_{n_0}<\gamma+\varepsilon$. 故$|a_n-\gamma|<\varepsilon(n>n_0)$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\gamma=\inf\{a_n\}$.

9. 设a_1和b_1是任意两个正数，并且$a_1 \le b_1$，令$a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$，$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，证明：数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均收敛，并且有相同的极限.

证 由题设有$a_n>0, b_n>0, n=1,2,\cdots$，所以

$$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\ge\sqrt{a_n b_n}=a_{n+1},$$

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}\ge\sqrt{a_n a_n}=a_n,\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\le\frac{b_n+b_n}{2}=b_n,$$

$$a_n\le b_n\le b_2=\frac{a_1+b_1}{2}<b_1,\ b_n\ge a_n\ge a_2=\sqrt{a_1 b_1}>b_1,$$

所以$\{a_n\},\{b_n\}$都是单调有界数列，它们的极限都存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，对$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$两端令$n\to\infty$取极限，$b=\dfrac{a+b}{2}$，所以$a=b$.

10. 设$\{a_n\}$为有界数列，记

$$\overline{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\ \underline{a_n}=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}.$$

证明：(1) 对任何正整数n，$\overline{a}_n\ge\underline{a_n}$；

(2) $\{\overline{a}_n\}$为递减有界数列，$\{\underline{a_n}\}$为递增有界数列，且对任何正整数n,m有$\overline{a}_n\ge\underline{a_m}$；

(3) 设$\overline{a}$与$\underline{a}$分别为$\{\overline{a}_n\}$与$\{\underline{a_n}\}$的极限，则$\overline{a}\ge\underline{a}$；

(4) $\{a_n\}$收敛的充要条件是$\overline{a}=\underline{a}$.

证 (1) 由于$\overline{a}_n$, $\underline{a_n}$为同一数集的上下确界，所以$\overline{a}_n\ge\underline{a_n}(n=1,2,\cdots)$.

(2) 由于$\{a_n,a_{n+1},\cdots\}\cdots\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}$，故$\overline{a}_n\ge\overline{a}_{n+1}$，即$\{\overline{a}_n\}$递减，同理可证$\{\underline{a_n}\}$递增. 因为$\{a_n\}$有界，故$\{\overline{a}_n\}$有界. 由$\{\overline{a}_n\}$递减，$\{\underline{a_n}\}$递增知，对任意自然数$m,n$，当$m<n$时，由$\overline{a}_n$, $\underline{a_m}$的定义仍有$\overline{a}_n\ge\underline{a_m}$.

(3) 因为对任意的自然数m,n，$\overline{a}_n\ge\underline{a_m}$，从而$\{\overline{a}_n\}$有下界，$\{\underline{a_n}\}$有上界，由单调有界定理知$\{\overline{a}_n\},\{\underline{a_n}\}$的极限存在，且$\overline{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a}_n\ge\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a_n}=\underline{a}$，即$\overline{a}\ge\underline{a}$.

(4) 必要性. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则对任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时，$|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

即$a-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<a+\frac{\varepsilon}{2}$，从而当$n>N$时，

$\overline{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\}\le a+\frac{\varepsilon}{2}$，$\underline{a_n}=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}\ge a-\frac{\varepsilon}{2}$，

所以$0\le\overline{a}-\underline{a}\le(a+\frac{\varepsilon}{2})-(a-\frac{\varepsilon}{2})=\varepsilon$．由$\varepsilon$的任意性知$\overline{a}=\underline{a}$．

充分性，设$\overline{a}=\underline{a}=a,\ \varepsilon>0$，则对充分大的自然数$n$，有$a-\varepsilon<\underline{a}\le a_n\le\overline{a}<a+\varepsilon$，从而$|a_n-a|<\varepsilon$，故$\{a_n\}$的极限存在(且等于$a$).

总练习题

1. 求下列数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2^n}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n}$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+4}-2\sqrt{n+2}+\sqrt{n})$.

答案 (1) 当$n>4$时，$2^n>n^2$，所以$2=\sqrt[n]{2^n}<\sqrt[n]{n^2+2^n}<2\cdot\sqrt[n]{2}\to 2(n\to\infty)$．由迫敛性定理知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2^n}=2$.

(2) 当$n>10$时，有$n^3<2^n$，从而$0<\frac{n^3}{3^n}<\frac{2^n}{3^n}\to 0\ (n\to\infty)$．由迫敛性定理知

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n}=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+4}-2\sqrt{n+2}+\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2})-(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{2}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}]=0.$$

2. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0\,(|q|<1)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n^a}=0\,(a\ge 1)$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}=1$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{1/n}=\max\{a,b,c\}\,(a\ge 0,b\ge 0,c\ge 0)$.

证 (1) 当$q=0$时，$n^2q^n=0,\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0$.

当$|q|\ne 0$时，令$|q|=\frac{1}{p}$，则$p>1$．设$p=1+h,h>0$．则由

$$(1+h)^n > \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)h^3 (n>2)$$

得 $0<|n^2q^n|=\dfrac{n^2}{(1+h)^n}<\dfrac{6}{h^3}\cdot\dfrac{n^2}{n(n-1)(n-2)}=\dfrac{6}{h^3}\cdot\dfrac{1}{n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}\to 0\ (n\to\infty)$．由迫敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0$.

(2) 任给 $\varepsilon>0$，$10^\varepsilon>1$，而 $\sqrt[n]{n}\to 1\ (n\to\infty)$，故存在 N，当 $n>N$ 时，$1<\sqrt[n]{n}<10^\varepsilon$，取对数后得 $0<\dfrac{\lg n}{n}<\varepsilon\ (n>N)$．故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n}=0$.

当 $a\geq 1$ 时，由 $0<\dfrac{\lg n}{n^a}\leq\dfrac{\lg n}{n}\to 0\ (n\to\infty)$ 及迫敛性定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n^a}=0$.

(3) $1\leq(n!)^{1/n^2}\leq(n^n)^{1/n^2}=\sqrt[n]{n}\to 1\ (n\to\infty)$．由迫敛性定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}=1$.

(4) 令 $d=\max\{a,b,c\}$，则 $(d^n)^{1/n}\leq(a^n+b^n+b^n)^{1/n}\leq(3d^n)^{1/n}$．

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(d^n)^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}(3d^n)^{1/n}=d$，所以由迫敛性定理知

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n+b^n)^{1/n}=d=\max\{a,b,c\}.$$

3．设 $a_n>0\,(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

证 (1) 因为对任意的自然数 n, $a_n>0$，所以当 $a\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$，这也说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a.$$

又 $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，则由迫敛性定理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

当$a=0$时，对$\forall\varepsilon>0$，存在N_1，使得当$n>N_1$时，$0<a_n<\varepsilon,$于是当$n>N_1$时，

$$0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}}\cdot\sqrt[n]{a_{N_1+1}a_{N_1+2}\cdots a_n}$$

$$<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}}\,\varepsilon^{\frac{n-N_1}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}\varepsilon^{-N_1}}\cdot\varepsilon.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}\varepsilon^{-N_1}}=1$，从而存在$N_2$，使得当$n>N_2$时，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}\varepsilon^{-N_1}}<2$，故当$n>N=\max\{N_1,N_2\}$时，必有$0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<2\varepsilon$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$.

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=b$，因为$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\dfrac{a_1}{a_0}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$ $(a_0=1)$，由(1)小题知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=b$.

4. 应用上题的结论证明下列各题：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>0)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n\,!}}=0$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n\,!}}=e$.

证 (1) 令$a_1=a,\ a_n=1(n=2,3,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$. 由 3(1) 知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

(2) 由于$n=1\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdots\dfrac{n}{n-1}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1$，由 3(1)知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(3) 令$a_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，由 3(1)知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$.

(4) 令$a_n=\dfrac{n^n}{n!}(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. 而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=(1+\dfrac{1}{n-1})^{n-1}=e$，由 3(1)知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

5. 证明：若$a_{n+1}=a_n+a_n^{-1}\,(n>1)\,,a_1=1$，则

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{-1}=+\infty$.

证 (1) 由题设知$\{a_n\}$为单调递增的正数列. 若$\{a_n\}$有界，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$存在，且$l>0$. 因为$a_{n+1}=a_n+a_n^{-1}$，两边取极限得$l=l+\dfrac{1}{l}$，所以$\dfrac{1}{l}=0$矛盾，即$\{a_n\}$无界. 又由于$\{a_n\}$单调递增，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

(2) 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1}$，则

$$S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$
$$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$$
$$=a_{n+1}-a_1$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1}=+\infty$.

6. 证明：若 $\{a_n\}$ 为递增数列，$\{b_n\}$ 为递减数列，且 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，则 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛，并且有相同的极限.

证 由于 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，从而 $\{a_n-b_n\}$ 有界.

不妨设 $A\le a_n-b_n\le B$，其中 A,B 为常数. 再由 $\{a_n\}$ 递增，$\{b_n\}$ 递减知 $a_n\le b_n+B\le b_1+B,\ b_n\ge a_n-B\ge a_1-B$. 从而 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都是单调有界数列，它们极限存在. 而

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=0$，所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

7. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：存在正数 M，对一切 n 有

$$|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_2-a_1|\le M,$$

则称 $\{a_n\}$ 为有界变差数列，试证明：有界变差数列必收敛.

证 令 $b_1=0,\ b_n=|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_2-a_1|,(n=2,3,\cdots)$. 那么 $\{b_n\}$ 单调递增. 由题设知 $\{b_n\}$ 有界，则 $\{b_n\}$ 收敛，从而对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n>m>N$ 时，有

$$|b_n-b_m|<\varepsilon,$$

此即 $|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_{m+1}-a_m|<\varepsilon$.

而 $|a_n-a_m|\le|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_{m+1}-a_m|<\varepsilon$，由柯西收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

8. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：存在正数 $0<r<1$，对一切 $n\ge3$ 有

$$|a_n-a_{n-1}|\le r|a_{n-1}-a_{n-2}|,$$

则称它为压缩变差数列(简称为压缩数列). 试证明：任意压缩数列一定收敛.

证 由题设有 $|a_n-a_{n-1}|\le r^2|a_{n-2}-a_{n-3}|\le\cdots\le r^{n-2}|a_2-a_1|$.

所以

$$|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_2-a_1|\le(r^{n-2}+r^{n-3}+\cdots+1)|a_2-a_1|<\frac{|a_2-a_1|}{1-r}.$$

令 $M=\dfrac{|a_2-a_1|}{1-r}$ 为常数，则由第 7 题结论知 $\{a_n\}$ 收敛.

9. 设 $a_1=3,a_2=3+\dfrac{4}{3},a_3=3+\dfrac{4}{3+\frac{4}{3}},\cdots\cdots$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛并计算其极限.

证　由题设有 $a_{n+1}=3+\dfrac{4}{a_n}$. 用数学归纳法可证 $3\le a_n\le\dfrac{13}{3}$.

$$|a_{n+1}-a_n|\le\left|(3+\frac{4}{a_n})-(3+\frac{4}{a_{n-1}})\right|=\frac{4|a_n-a_{n-1}|}{a_na_{n-1}}\le\frac{4}{9}|a_n-a_{n-1}|.$$

由第 8 题结论知 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $a=3+\dfrac{4}{a}$，解得 $a=4$ 或 $a=-1$ (舍去).

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$.

10. 已知 $a_1=\alpha,a_2=\beta,(\alpha>\beta)$,

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2}(n=1,2,\cdots).$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在且相等, 并求出极限值.

证　由 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+b_n}{2}$，相减可得 $b_{n+1}=\dfrac{3a_{n+1}-a_n}{2}$，从而

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{4}=\frac{a_{n-2}-a_{n-3}}{4^2}\\&=\cdots=\frac{a_2-a_1}{4^{n-2}}=\frac{\beta-\alpha}{4^{n-2}}<0,\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 单调递减.

因为 $a_1=\alpha>2\beta-\alpha,\ a_2=\beta>2\beta-\alpha,\ b_1=2\beta-\alpha,\ b_2=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}>2\beta-\alpha$, 用数学归纳法易证 $a_n>2\beta-\alpha,\ b_n>2\beta-\alpha,(n=2,3,\cdots)$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$ (存在).

又 $b_n=2a_{n+1}-a_n$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2l-l=l$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 其次由于 $a_n-a_{n-1}=\dfrac{\beta-\alpha}{4^{n-2}}$，所以

$$a_n=a_{n-1}+\frac{\beta-\alpha}{4^{n-2}}=a_{n-2}+\frac{\beta-\alpha}{4^{n-3}}+\frac{\beta-\alpha}{4^{n-2}}$$
$$=\cdots=a_1+\frac{\beta-\alpha}{1}+\frac{\beta-\alpha}{4}+\frac{\beta-\alpha}{4^2}+\cdots+\frac{\beta-\alpha}{4^{n-2}}$$

两边取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_1+\dfrac{\beta-\alpha}{1-\frac{1}{4}}=\alpha+\dfrac{4}{3}(\beta-\alpha)=\dfrac{4\beta-\alpha}{3}$，同样 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{4\beta-\alpha}{3}$.

11. 设 a_1 和 b_1 是任意两个正数，并且 $a_1\le b_1$，还设 $a_n=\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}$，$b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$，$(n=2,3,\cdots)$. 求证：数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛，并且有相同的极限.

证 令 $c_n=\dfrac{1}{a_n},d_n=\dfrac{1}{b_n}$，则 $c_n=\dfrac{c_{n-1}+d_{n-1}}{2}$, $d_n=\sqrt{c_{n-1}d_{n-1}}$ $(n=2,3,\cdots)$, $c_1\ge d_1$，所以由习题 2.3 第 9 题的结论知 $\{c_n\}$ 和 $\{d_n\}$ 均收敛，并且有相同的极限. 故而数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛，并且有相同的极限.

12. 按柯西收敛准则叙述数列 $\{a_n\}$ 发散的条件，并用它证明下列数列 $\{a_n\}$ 是发散的：

(1) $a_n=(-1)^n n$； (2) $a_n=\cos\dfrac{n\pi}{4}$； (3) $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

解 数列 $\{a_n\}$ 发散的充要条件：存在 $\boldsymbol{\varepsilon}_0>0$，对任意的自然数 N，都存在 $n_0>m_0>N$，使 $|a_{n_0}-a_{m_0}|\ge\boldsymbol{\varepsilon}_0$.

(1) 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对任意的自然数 N，取 $n_0=N+3,m_0=N+1$，则

$\left|a_{n_0}-a_{m_0}\right|=\left|(-1)^{N+3}(N+3)-(-1)^{N+1}(N+1)\right|=\left|(-1)^{N+1}\right|\left|(-1)^2(N+3)-(N+1)\right|=2>\varepsilon_0$，

所以 $\left\{(-1)^n n\right\}$ 发散.

(2) 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对任意的 $N>0$，取 $n_0=2N+1,m_0=2N$，则

$$\left|a_{n_0}-a_{m_0}\right|=\left|\cos\frac{(2N+1)\pi}{2}-\cos\frac{2N\pi}{2}\right|=\left|0-1\right|=1>\varepsilon_0,$$

所以 $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 发散.

(3) 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对任意的 $N>0$，取 $m_0>N,n_0=2m_0$，则

$$\left|a_{n_0}-a_{m_0}\right|=\left|\frac{1}{m_0+1}+\frac{1}{m_0+2}+\cdots+\frac{1}{2m_0}\right|>m_0\cdot\frac{1}{2m_0}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

所以$\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$发散.

13. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 记

$$S_n=\max\{a_n,b_n\},T_n=\min\{a_n,b_n\},n=1,2,\cdots.$$

证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\max\{a,b\}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\min\{a,b\}$.

证明提示：参考第一章总练习题 1.

证 (1) 若$a=b$，则$\max\{a,b\}=\min\{a,b\}=a$，

令$C_n=\begin{cases}a_n & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时}\\ b_n & \text{当 } n=2k \text{ 时}\end{cases}$ $k=1,2,\cdots$，

则$\lim\limits_{n\to\infty}C_n=a$，而$\{S_n\},\{T_n\}$都是$\{C_n\}$的一个子列，由子列的性质知

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}T_n=a.$$

(2) 若$a\neq b$，不妨设$a>b$. 由保号性定理，存在自然数N，当$n>N$时$a_n>b_n$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a_n=a=\max\{a,b\},$$
$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}b_n=b=\min\{a,b\}.$$

第三章习题详解

习题 3.1

1. 在函数极限的定义中，对任意正数ε是否可以加限制$\varepsilon \geq d$（d是某正数）？.

   答：在函数极限定义中，对任意正数ε不可以加限制$\varepsilon \geq d$，因为加此限制，则正数ε就不能任意小了.

2. 在函数极限的定义中，对任意正数ε是否可以加限制$\varepsilon \leq d$（d是某正数）？

   答：在函数极限的定义中，对任意正数ε可以加限制$\varepsilon \leq d$,因为这样并不妨碍ε可以取任意小.

3. 证明$\lim\limits_{x\to\infty} c = c$.

   证明：任给$\varepsilon > 0$，可任取正数M，则当$|x| > M$时有

$$|c-c| = 0 < \varepsilon ,$$

   所以$\lim\limits_{x\to\infty} c = c$.

4. 用极限定义证明下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1} = 1$；　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|}{x+2} = -1$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2\sin x}{x+1} = 0$；　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{3}{2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x} = -1$；　　(6) $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x^2-1} = 0$；

证明：（1）任给 $1 > \varepsilon > 0$，取$M = \dfrac{2}{\varepsilon}$，则当$x > M+1$时，有

$$\left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| = \left|\frac{2}{x-1}\right| = \frac{2}{x-1} < \frac{2}{M} = \varepsilon 。$$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1} = 1$。

（2）

任给$\varepsilon>0$ ，取$M=\frac{2}{\varepsilon}$，则当$x<-M-2$ 时，有

$$\left|\frac{|x|}{x+2}-(-1)\right|=\left|\frac{2}{x+2}\right|=\frac{2}{-x-2}<\frac{2}{M}=\varepsilon$$ 。

所以$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x+2}=-1$

。

（3）任给$\varepsilon>0$ ，取$M=\frac{3}{\varepsilon}$，则当$|x|>M+1$ 时，有

$$\left|\frac{1+2\sin x}{x+1}-0\right|=\left|\frac{1+2\sin x}{x+1}\right|<\left|\frac{3}{x+1}\right|<\frac{3}{|x|-1}<\frac{3}{M}=\varepsilon$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2\sin x}{x+1}=0$.

（4）当$x\neq1$时，有

$$\left|\frac{x^3-1}{x^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{2x^3-3x^2+1}{2(x^2-1)}\right|=\left|\frac{2x^2-x-1}{2(x+1)}\right|=\frac{|x-1||2x+1|}{2|x+1|}$$

若限制x于$0<|x-1|<1$中（此时$0<x<2$），则$|x+1|>1,|2x+1|<5$.于是，对任给

$\varepsilon>0$ ，只要取$\delta=\min\{\frac{2}{5}\varepsilon,1\}$，则当$0<|x-1|<\delta$时，总有

$$\left|\frac{x^3-1}{x^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{|x-1||2x+1|}{2|x+1|}<\frac{5}{2}|x-1|<\frac{5}{2}\delta\leq\varepsilon$$

(5) 当$x<0$ 时，$\frac{|x|}{x}=-1$ ，于是对任给$\varepsilon>0$，可任取正数δ，当$-\delta<x<0$时，

都有$\left|\frac{|x|}{x}-(-1)\right|=0<\varepsilon$成立.所以$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=-1$

（6）由于$x\to1^+$，可限制$1<x<2,$故有

$$x^2-1=(x+1)(x-1)<3(x-1)$$

于是对任给$\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{3}\varepsilon^2,1\right\}$，则当$0<1-x<\delta$时，总有

$$\sqrt{x^2-1}=\left|\sqrt{x^2-1}-0\right|=\left|\sqrt{(x+1)(x-1)}\right|<\sqrt{3(x-1)}<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}=0$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $U(\infty)$ 内有定义.证明:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

证明：设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$,使得当

$|x|>X$ 时成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$，于是当 $x>X$ 或 $x<-X$ 时，不等式

$|f(x)-A|<\varepsilon$，都成立，由极限定义知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X_1>0$,使得当 $x>X_1$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，成立；同时存在 $X_2>0$，使得当 $x<-X_2$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，也成立.取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，则当 $|x|>X$ 时成立

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

由极限定义知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

6. 证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

证明：当 $x<0$ 时，$\dfrac{|x|}{x}=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|}{x}=-1$.当 $x>0$ 时，$\dfrac{|x|}{x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|}{x}=1$

同理可以证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$.从而极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

7. 写出定义 3.1 和定义 3.4 的否命题.

解：定义 3.1 的否命题：设函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，$\boldsymbol{A}$ 为某个定数。若存在 $\varepsilon_0>0$，对任意正数 $M\ (M\ge a)$，总存在 $x>M$，使得 $|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$，则称函数 $\boldsymbol{f}$ 当 $x\to+\infty$ 时不以 $\boldsymbol{A}$ 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\ne A$.

定义 3.4 的否命题：设函数 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x_0}$ 的某个空心邻域 $\boldsymbol{U^0(x_0;\delta')}$ 内有定义，$\boldsymbol{A}$ 为某个定数.若存在一个 $\varepsilon_0>0$，对任意正数 $\delta(\delta\le\delta')$，总存在 x_1 满足 $0<|x_1-x_0|<\delta$，使得

$\left|f(x_1)-A\right|\geq\varepsilon_0$,则称函数$\boldsymbol{f}$当$x\to x_0$时不以$\boldsymbol{A}$ 为极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$.

8. 设函数$\boldsymbol{f}$在点$\boldsymbol{x_0}$的某个空心邻域$\boldsymbol{U^0}(\boldsymbol{x_0};\boldsymbol{\delta'})$内有定义，$\boldsymbol{A}$为某个定数.证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\boldsymbol{f(x)=A}\Leftrightarrow$对任给的正整数$\boldsymbol{m}$，存在正数$\boldsymbol{\delta}(<\boldsymbol{\delta'})$使得当$\boldsymbol{0<|x-x_0|<}\delta$时，有

$|f(x)-A|<\frac{1}{m}$.

证明："$\Rightarrow$" 对任给正整数m，取$\varepsilon=\frac{1}{m}$，因为$\lim\limits_{x\to x_0}\boldsymbol{f(x)=A}$，所以对正数$\varepsilon=\frac{1}{m}$，存在$\delta<\delta'$，使得使得当$\boldsymbol{0<|x-x_0|<}\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\frac{1}{m}.$$

"$\Leftarrow$" 对任意$\varepsilon>0$，取正整数$m>[1/\varepsilon]+1$，则按照此时假设，存在正数$\boldsymbol{\delta}(<\boldsymbol{\delta'})$使得当$\boldsymbol{0<|x-x_0|<}\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\frac{1}{m}<\frac{1}{1+[1/\varepsilon]}<\varepsilon.$$

由极限定义知$\lim\limits_{x\to x_0}\boldsymbol{f(x)=A}$.

9. 设$\boldsymbol{x_0>0}$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$.

证明：因为当$x>0$时有

$$\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}\right|=\frac{\left|x-x_0\right|}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}x_0}+\cdots+\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}<\frac{\left|x-x_0\right|}{\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$$

于是，对任意给定的正数ε，取$\delta=\sqrt[n]{x_0^{n-1}}\varepsilon$，则当当$\boldsymbol{0<|x-x_0|<}\delta$时，有

$$\left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}\right|<\frac{\left|x-x_0\right|}{\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}<\varepsilon.$$

由极限定义知$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$

10. 证明：对任意非零常数A都有$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\neq A$

证明：因为$A\neq 0$，取$\varepsilon_0=\frac{|A|}{2}$，则无论$\delta>0$多么小，总有$x_0:0<x_0=\frac{1}{2n\pi}<\delta$

（$n > \dfrac{1}{2\pi\delta}$ 是正整数），使得

$$\left|x_0 \sin\frac{1}{x_0} - A\right| = |A| > \varepsilon .$$

这说明 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} \neq A$.

11. 写出 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 的定义.

答：若对于任意给定的正数 G ,存在 $X > 0$,当 $x < -X$ 时成立 $|f(x)| > G$,这时称函数 $f(x)$ 在 $x \to -\infty$ 时趋于无穷，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

若对于任意给定的正数 G ,存在 $X > 0$,当 $x > X$ 时成立 $|f(x)| > G$,这时称函数 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时趋于无穷，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

若对于任意给定的正数 G ,存在 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时成立 $|f(x)| > G$,这时称函数 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时趋于无穷，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $|x| > a(\geq 0)$ 上有定义.证明:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

证明：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$，则对任意给定的 $G > 0$，存在 $X > 0$,使得当 $|x| > X$ 时成立 $f(x) > G$，于是当 $x > X$ 或 $x < -X$ 时，不等式 $f(x) > G$ 都成立，这表明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

反之，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$，则对任意给定 $G > 0$，存在 $X_1 > 0$，使得当 $x > X_1$，不等式 $f(x) > G$，成立，同时存在 $X_2 > 0$ 当 $x < -X_2$ 不等式 $f(x) > G$，也成立，取 $X = \max\{X_1, X_2\}$，则当 $|x| > X$ 时成立 $f(x) > G$，这表明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

习题 3.2

1. 求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-5}{4x^2-3x+6}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^{40}(3x-5)^{70}}{(6x+7)^{110}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x+1}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$;

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-2x^2+3}{x(x-1)+1}$;

(6) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sin x+2\tan x}{e^{\frac{\pi}{4}-x}+1}$;

(8) $\lim\limits_{x\to3^-}(x-[x])$.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$;

（10） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 5x}{x\tan 5x}$.

解:（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-5}{4x^2-3x+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x^2}}=\dfrac{3}{4}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^{40}(3x-5)^{70}}{(6x+7)^{110}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^{40}(3x-5)^{70}}{(6x+7)^{40}(6x+7)^{70}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{6x+7}\right)^{40}\cdot\left(\dfrac{3x-5}{6x+7}\right)^{70}=\left(\dfrac{2}{6}\right)^{40}\cdot\left(\dfrac{3}{6}\right)^{70}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{40}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{70}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=1$

(5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-2x^2+3}{x(x-1)+1}=\dfrac{1-2+3}{1}=2$

(6) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}(1-\dfrac{2}{x+1})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sin x+2\tan x}{e^{\frac{\pi}{4}-x}+1}=\dfrac{3}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to 3^-}(x-[x])=3-2=1$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x\tan 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{(5x)^2}\cdot\dfrac{5x}{\tan 5x}\cdot 5=5$

2. 写出$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在时的局部有界性定理.

答：若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在，则存在$X>0$，使得函数$f(x)$在$\{x:|x|>X\}$上有界.

3. 写出$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A<0$时的局部保号性定理.

答：若$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A<0$，则对任何负数$r>A$，存在$X>0$,对一切$x<-X$，有

$$f(x)<r<0$$

4. 写出$x\to+\infty$时的复合函数极限定理.

答：设函数$f(u)$在u_0的某去心邻域$U^0(u_0)$内有定义，函数$g(x)$在$[a,+\infty)$上有定义，且$g([a,+\infty))\subset U^0(u_0)$，若

$$\lim_{x\to x_0} f(u)=A,\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=u_0$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} f[g(x)]=A$$

5. 设$h(x)=f(x)+g(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在.证明：$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$不存在.

证明：（反证法）假设$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$存在.，由已知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则由极限的四则运算性质知道$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(h(x)-f(x))=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)-\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，这与已知$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在矛盾。因而假设不成立。

6. .利用迫敛性证明：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

证明　$0\le\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\le|x|$，由$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ 得$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

7. 证明$\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$

证明：当 $x>0$ 时，由于 $\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x},\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$，所以有 $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1,$ 而

$\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1,$ 故由追敛性得 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$

另一方面，当 $x<0$ 时有 $1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x,$ 故由追敛性得 $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$

综上，我们可得 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\sin\frac{x}{2})^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+x+\cdots+x^n-n-1}{x-1}$.

解：对任意正整数 k，当 $x\ne 1$ 时有

$$\frac{x^k-1}{x-1}=\frac{(x-1)\left(1+x+\cdots+x^{k-1}\right)}{x-1}=1+x+\cdots+x^{k-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+x+\cdots+x^n-n-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k-1}{x-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 1}(1+x+\cdots+x^{k-1})=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sin x+\sqrt{x}\cos x}{x^2+4}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sin x+\sqrt{x}\cos x}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{\sqrt{x}^3}}{1+\frac{4}{x^2}}=0$

习题 3.3

1. 叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 的归结原则，并用它证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$ 不存在.

   答：设 f 为定义在 $(-\infty,a]$ 上的函数. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是：对任何满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ 的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在且相等。

   现证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$ 不存在.取 $x_n=-2n\pi, x'_n=(-2n+1)\pi, n\in\mathrm{N}$，则 $x'_n\to-\infty$，$x'_n\to-\infty,(n\to\infty)$，但是

   $$\lim_{n\to\infty}\cos x_n=1,\lim_{n\to\infty}\cos x'_n=-1,$$

   所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$ 不存在.

2. 设 f 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的增（减）函数. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是 f 在 $[a,+\infty)$ 上有上（下）界.

   证明：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上的单调递增且有上界，则由单调有界法则（定理 3.11）知道 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在；反之，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则由极限的局部有界性知存在 $M>a$，使得 f 在 $[M,+\infty)$ 上有界,从而有上界；又在 $[a,M]$ 上有 f 有上界（$f(x)\le f(M)$），所以 f 在 $[a,+\infty)$ 上有上界.

3. 设 f 为定义在 $(-\infty,a]$ 上的增（减）函数. 证明: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是 f 在 $(-\infty,a]$ 上有下（上）界.

   证明：与第 2 题类似.

4. 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{\sqrt{x}}$.；　　（4） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x}{1-3x}\right)^{\frac{1}{x}}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-5}\right)^{3x+1}$.

解:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2)}=e^{-2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{(-\frac{1}{x})\cdot(-1)}=e^{-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{-x\cdot\frac{-1}{\sqrt{x}}}=e^{0}=1$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x}}=e$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x}{1-3x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-3x+5x}{1-3x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{5x}{1-3x}\right)^{\frac{1-3x}{5x}\cdot\frac{5}{1-3x}}=e^{5}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-5}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5+8}{2x-5}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{2x-5}\right)^{\frac{2x-5}{8}\cdot\frac{3x+1}{2x-5}\cdot 8}$

$=e^{12}$

5. 用归结原则求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{3}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\dfrac{3}{n}\right)$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n}$.

解:(1) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\cdot 3=3$ 所以由归结原则知 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{3}{n}=3$ 。

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e^{-1}$, 所以由归结原则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=e^{-1}$

(3) 因为

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{3}{2x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{3}{2x}}{\frac{3}{2x}}\right)^2\cdot\frac{9}{2},$$

$$=\frac{9}{2}$$

所以由归结原则知 $\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{3}{n}\right)=\frac{9}{2}$

（4） $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{1+x}\cdot\frac{2(1+x)}{x}}=e^2$

所以由归结原则知 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{2n}=e^2$

6. 叙述 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 的柯西准则，并用它证明 $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}$ 存在.

答：设函数 f 在 $U_+^o(x_0;\delta')$ 上有定义， $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在的充要条件是：对任意 $\varepsilon>0$ ，存在正数 $\delta>0(<\delta')$ ，使得对任何 $x',x''\in U_+^o(x_0;\delta)$，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

现在证明存在 $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}$. 对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2,1\right\}$，则当 $x',x''\in U_+^o(1;\delta)$, 即 $1<x'<1+\delta, 1<x''<1+\delta$ 时，有

$$\left|\sqrt{(x')^2-1}-\sqrt{(x'')^2-1}\right|\le\sqrt{(x')^2-1}+\sqrt{(x'')^2-1}\le 2\left(\sqrt{x'-1}+\sqrt{x''-1}\right)$$

$$<4\sqrt{\delta}\le 4\cdot\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2}=\varepsilon$$

由柯西准则，$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}$ 存在.

7. 根据柯西准则叙述 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 不存在的充要条件，并用它证明 $\lim_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

解：$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 不存在的充要条件：存在 $\varepsilon_0>0$ ，对任何 $\delta>0$ (无论多么小)，总可找到 $x',x''\in U_-^o(x_0;\delta)$, 使得 $|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon_0$

以下证明 $\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.取 $\varepsilon_0=1$，对任何 $\delta>0$,取正整数 $n>\frac{1}{\delta}$，令

$$x^{'}=\frac{-1}{n\pi},x^{"}=\frac{-1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$$ ，

则有 $x^{'},x^{"}\in U_-^o(0;\delta)$, 而

$$\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x"}\right|=1=\varepsilon_0$$

于是按柯西准则，极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

8.设 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数，$x_0\in\mathrm{R}$，应用归结原则证明：$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.

证明：若 x_0 为有理数，设 $x'_n=\frac{1}{n}+x_0$ $x"_n=\frac{\pi}{n}+x_0$ ，显然有

$x'_n\to x_0,x"_n\to x_0\ (n\to\infty)$ ，这时

$$D(x'_n)=1\to 1,D(x"_n)=0\to 0$$

故由归结原则得 $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.同理可证若 x_0 为无理数时 $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在。

9.设 $f(x)$ 是周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明：$f(x)\equiv 0$.

证明：假设 $f(x)$ 不恒等于 0，则存在 x_0 ，使得 $f(x_0)\neq 0$

设 $T>0$ 为 $f(x)$ 的一个正周期，这时由已知知道，有 $f(x_0+nT)=f(x_0)$，

且 $x_0+nT\to+\infty\ (n\to\infty)$，于是有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_0+nT)=f(x_0)\neq 0$$ ，

由归结原则知这与已知矛盾，因而对任意 x 有 $f(x)=0$，因此 $f(x)\equiv 0$.

10.设函数 f 为 $U^\circ(x_0)$ 内的单调减函数. 证明：$f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在，且

$$f(x_0-0)=\inf_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x),\quad f(x_0+0)=\sup_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x).$$

证明：仅证明 $f(x_0+0)$ 的存在性及相关等式. 因为函数 f 为 $U^\circ(x_0)$ 内的单调减函数，所以对 $x^*\in U_-^o(x_0)$, 及任意给定的 $x\in U_+^o(x_0)$ ，有 $f(x)<f(x^*)$，由此可见 f 在 $U_+^\circ(x_0)$ 有上确界，记 $A=\sup\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x)$. 于是对任给正数 ε，存在 $x_1\in U_+^o(x_0)$，使得

$$f(x_1)>A-\varepsilon.$$

记 $\delta=x_1-x_0>0$ ，当 $x\in U_+^o(x_0;\delta)$ 时就有 $x<x_1$ ，从而由 f 为 $U^\circ(x_0)$ 内的单调减函数知

$$A-\varepsilon<f(x_1)\le f(x)<A+\varepsilon,$$

可见 $x\in U_+^o(x_0;\delta)$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

于是 $f(x_0+0)$ 存在且 $f(x_0+0)=\sup\limits_{x\in U_+^\circ(x_0)} f(x)$.

同理可证：$f(x_0-0)$ 存在且 $f(x_0-0)=\inf\limits_{x\in U_-^\circ(x_0)} f(x)$.

习题 3.4

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{(e^x-1)\arcsin 4x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}-1)\arctan\dfrac{2}{x}}{x\sin\dfrac{1}{x^3}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^2\arctan x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x^2+1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

解：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(x+1)}{(e^x-1)\arcsin 4x}$;

由等价无穷小：$\ln(1+x)\sim x, e^x-1\sim x, \arcsin 4x\sim 4x\quad (x\to 0)$ 可得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{(e^x-1)\arcsin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x\cdot 4x}=\frac{1}{4}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}-1)\arctan\frac{2}{x}}{x\sin\frac{1}{x^3}}$;

令 $\dfrac{1}{x}=t$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$.故原极限可化为：$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(e^t-1)\arctan 2t}{\frac{\sin t^3}{t}}$.

由等价无穷小：$e^t-1\sim t, \arctan 2t\sim 2t, \sin t^3\sim t^3\quad (t\to 0)$ 可得：

$$\lim_{t\to 0}\frac{(e^t-1)\arctan 2t}{\frac{\sin t^3}{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot 2t}{\frac{t^3}{t}}=2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^2\arctan x}$;

原极限可化为：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x-1)}{x^2\cos x\cdot\arctan x}$,

由等价无穷小：$\sin x\sim x, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, \arctan x\sim x\ (x\to 0)$ 可得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^2\cos x\cdot\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(-\frac{1}{2}x^2)}{x^2\cdot 1\cdot x}=-\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2+1}$;

令 $\dfrac{1}{x}=t$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$.故原极限可化为：$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{1}{t^2}+1}$.

由重要极限：$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ 可得：$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{1}{t^2}+1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{1+t^2}=0$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;

由等价无穷小： $\sqrt{1+x^2}-1\sim\frac{1}{2}x^2, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$ 可得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=1.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$；

原极限可化为：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$. 由 $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3\ (x\to 0)$

可得：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\dfrac{1}{4}$.

2. 证明下列各式:

(1) $3x+x^2=O(x)\quad (x\to 0)$;

证: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(3+x)=3$, 故 $3x+x^2=O(x)\quad (x\to 0)$.

(2) $\sqrt{x}\sin\sqrt[3]{x}=O(x^{\frac{5}{6}})\quad (x\to 0^+)$

证: 考虑极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\sin\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{5}{6}}}$. 由重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 可知:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\sin\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{5}{6}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}}=1$, 故 $\sqrt{x}\sin\sqrt[3]{x}=O(x^{\frac{5}{6}})\quad (x\to 0^+)$.

(3) $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x\quad (x\to 0)$;

证: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=1$, 故 $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x\quad (x\to 0)$.

(4) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=o(x)\quad (x\to 0)$;

证: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}=0$,

故 $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=o(x)\ (x\to 0)$.

(5) $\sin x-\cos x=O(1)\quad (x\to\infty)$;

证：由于

$$\left|\sin x-\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin(x-\frac{\pi}{4})\right|\in[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}],$$

故 $\sin x-\cos x=O(1)\quad(x\to\infty)$.

(6) $x\sin\frac{1}{x^2}=o(1)\quad(x\to 0)$;

证：考虑极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}$，由于 $\sin\frac{1}{x^2}$ 为有界量，x 为无穷小量 $(x\to 0)$，故 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$．$x\sin\frac{1}{x^2}=o(1)\quad(x\to 0)$.

3. 试确定 k 的值，使下列函数与 x^k 是 $x\to 0$ 时的同阶无穷小量：

(1) $x^3\tan x$;　　(2) $\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2)$;

(3) $\sqrt[3]{2x^5-7x^2}$;　　(4) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x^2}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\tan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^{k-3}}$，由等价无穷小：$\tan x\sim x$ 可得：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^{k-3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{k-4}}$，故 $k=4$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^{3-k}}{1-x}}{}=\lim\limits_{x\to 0}x^{3-k}$，故 $k=3$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x^5-7x^2}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x^3-7}}{x^{k-\frac{2}{3}}}$，故 $k=\frac{2}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x^2}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^{k-2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-2x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2x^{k-2}}$，故 $k=2$.

4. 试确定 k 的值，使下列函数与 x^k 是 $x\to\infty$ 时的同阶无穷大量：

(1) $\sqrt{x+x^4}$;　　(2) $x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$

(3) $x+\ln(1+x^2)$　　(4) $x^3+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\cdot\ln(1+x^2)$

解：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+x^4}}{x^k}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^{-2}+1}}{x^{k-\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{k-\frac{3}{2}}}$，故 $k=\frac{3}{2}$.

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(2+\sin\dfrac{1}{x})}{x^k}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^{k-2}}$,故 $k=2$.

（3）考虑 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\ln(1+x^2)}{x}$,我们指出 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=0$.首先，由第二章的施托兹公式（定理 2.16），有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)-\ln[1+(n-1)^2]}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{2n-1}{1+(n-1)^2}\right]=0 \qquad (a)$$

又当 $x>1$ 时，有

$$\frac{\ln(1+[x]^2)}{x}\le\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\frac{\ln(1+[x]^2+2[x])}{x}\le\frac{\ln 3(1+[x]^2)}{[x]}$$

由 (a) 式并注意 $\dfrac{[x]}{x}$ 有界，可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3(1+[x]^2)}{[x]}=\lim_{[x]\to+\infty}\frac{\ln(1+[x]^2)+\ln 3}{[x]}=0$$

和

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+[x]^2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(1+[x]^2)}{[x]}\cdot\frac{[x]}{x}\right]=0$$

根据两边夹法则，得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=0$.据此可得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(1+y^2)}{-y}=0$$

从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=0$，于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\ln(1+x^2)}{x}=1$，所以 $k=1$.

（4） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\cdot\ln(1+x^2)}{x^k}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\cdot\ln(1+x^2)}{x^k}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+\ln(1+x^2)}{x^k}$,由(3)的结论可知， $k=3$.

5. 当 $x\to x_0$ 时 $f(x)=o(1),g(x)=O(1)$，证明 $f(x)\cdot g(x)=o(1)\quad(x\to x_0)$

证: 由已知 $g(x)=O(1)(x\to x_0)\Rightarrow\exists M>0,\ \delta_1>0$ 使得

$$|g(x)|\le M,\ x\in U^\circ(x_0;\delta_1)$$

又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, ,故对 $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta_2>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{M},$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有

$$|f(x)g(x)|\le M|f(x)|<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0$，所以 $f(x)\cdot g(x)=o(1)\quad(x\to x_0)$.

6. 证明：当 $x\to\infty$ 时， $x\sin x$ 是无界量，但不是无穷大量.

证：对 $\forall M>0$，总可以取 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k=[M]$，使得 $|x\sin x|=|x|>M$,故 $x\sin x$ 是无界量；取 $x=2k\pi$,当 $k\to\infty$ 时， $x\to\infty$，但 $|x\sin x|=0$，故 $x\sin x$ 不是无穷大量.

7. 用无穷大量的定义证明： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x+e^{-x}\right)=+\infty$.

证：对 $\forall G>0$, $\exists M=\ln(G+1)>0$,使得当 $|x|>M$ 时,

$$e^x+e^{-x}=e^{|x|}>G+1>G,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x+e^{-x})=+\infty$.

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 的任何子区间 $[c,b)$ 上都无界.证明：存在递增数列 $\{x_n\}\subset[a,b)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

证：首先，由 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上无界可知： $\exists x_1\in(a,b)$，使得 $|f(x_1)|>1$；取 $c_1=\max\{x_1,b-\dfrac{b-a}{2}\}$，因为 $f(x)$ 在区间 $[c_1,b)$ 上无界，所以 $\exists x_2\in(c_1,b)$，使得 $|f(x_2)|>2$；取 $c_2=\max\{x_2,b-\dfrac{b-a}{3}\}$，因为 $f(x)$ 在区间 $[c_2,b)$ 上无界，所以 $\exists x_3\in(c_2,b)$，使得 $|f(x_3)|>3$.这样继续下去，可得点列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_n\in(c_{n-1},b),|f(x_n)|>n,n=1,2,\cdots;$$

其中

$$c_{n-1}=\max\{x_{n-1},b-\frac{b-a}{n}\},n=1,2,\cdots,$$

由于

$$x_{n-1}\le c_{n-1}=b-\frac{b-a}{n}<x_n<b,n=1,2,\cdots,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递增，且 $\lim_{n\to+\infty}x_n=b$，并且由 $|f(x_n)|>n(n=1,2,\cdots)$ 知 $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\infty$.

总练习题三

1.给出下列几种函数极限的定义:

（1） $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$; （2） $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$;

（3） $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$; （4） $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$;

解：(1) $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\forall G>0,\exists\delta>0$,当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, $f(x)>G$.

(2) $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\forall G>0,\exists\delta>0$,当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $f(x)<-G$.

(3) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\forall G>0$，$\exists X>0$,当 $x>X$ 时, $f(x)<-G$.

(4) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\forall G>0,\ \exists X>0$,当 $x<-X$ 时, $f(x)>G$.

2.按照极限的定义证明:

（1） $\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x^2-3}=\frac{1}{3}$; （2） $\lim_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=0$;

（3） $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2-5}=1$; （4） $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-2}=\infty$;

（1）证：当 $|x|<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $|x-3|<4\Rightarrow$

$$\left|\frac{x-1}{x^2-3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{x^2-3x}{3(x^2-3)}\right|\le\frac{|x^2-3x|}{3\sqrt{3}(\sqrt{3}-|x|)}\le\frac{4|x|}{6}=\frac{2|x|}{3}=$$

$\forall\varepsilon>0$,,取 $\delta=\min\{\frac{3}{2}\varepsilon,\frac{\sqrt{3}}{3}\}$,当 $|x|<\delta$ 时,便有 $\left|\frac{x-1}{x^2-3}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$.

（2）证：注意当 $0<x<2$ 时， $\left|\sqrt{4-x^2}\right|=\sqrt{2+x}\cdot\sqrt{2-x}<2\sqrt{2-x}$.

对 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\{\frac{1}{4}\varepsilon^2,2\}$,则当 $2-\delta<x<2$ 时,有 $2-x<\delta$,从而

$$\left|\sqrt{4-x^2}\right| < 2\sqrt{2-x} < 2\sqrt{\delta} \le 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \varepsilon .$$

（3）证：当 $x>\sqrt{5}$ 时，有

$$\left|\frac{x^2-3}{x^2-5}-1\right| = \left|\frac{2}{x^2-5}\right| = \frac{2}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})} < \frac{2}{\sqrt{5}(x-\sqrt{5})} < \frac{1}{x-\sqrt{5}}$$

所以，对 $\forall\varepsilon>0$,取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}+\sqrt{5}$,则当 $x>M$ 时，有 $\left|\dfrac{x^2-3}{x^2-5}-1\right|<\varepsilon$.

（4）证：$\left|\dfrac{x}{x^2-2}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{x+\sqrt{2}}\right| \ge \dfrac{1}{2}\left(\left|\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}\right|-\left|\dfrac{1}{x+\sqrt{2}}\right|\right)$ ，当 $\left|x-\sqrt{2}\right|<\sqrt{2}$ 时，

$x>0$ ，所以 $\left|x+\sqrt{2}\right| = x+\sqrt{2} > \sqrt{2} \Rightarrow$

$$\left|\frac{x}{x^2-2}\right| > \frac{1}{2\,|\,x-\sqrt{2}\,|} - \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

于是，对 $\forall G>0$,取 $\delta=\min\{\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}G+1}\}$,则当 $\left|x-\sqrt{2}\right|<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x}{x^2-2}\right|>G$.

3.求下列函数极限:

（1） $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$； （2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+h)^2-h^2}{x}$；

（3） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x^2-3}$； （4） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^3-3x+4}$；

（5） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$； （6） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；

（7） $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}(m,n\in\mathrm{N})$； （8） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$；

（9） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$； （10） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$；

（11） $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$； （12） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+3}\right)^{x+1}$；

解（1） $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{3}$.

（2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+h)^2-h^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}(2h+x)=2h$.

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2-3}=\frac{1}{3}$.

（4） $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\text{-}2x^2+1}{x^3-3x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x^{-1}+x^{-3}}{1-3x^{-2}+4x^{-3}}=1$.

（5） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$.

（6） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$

（7） $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+...+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+...+1}=\frac{n}{m}$.

（8） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n+C_n^1x^{n-1}+...+nx}{x}=n$.

（9） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5}$.

（10） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$.

（11） $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}}\}^{-2}=e^{-2}$.

（12） $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x+3})^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}]^2\cdot(1+\frac{2}{x+3})^{-2}=e^2$.

4. 讨论函数 $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$ 在 $x=0$ 点的左、右极限;

解: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{-1}=-1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+2^{-\frac{1}{x}}}{1-2^{-\frac{1}{x}}}=1$.

5．求极限: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ （n 为非零自然数);

解: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n+x^{n-1}+...+x-n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x^i-1}{x-1}$

$$=\sum_{i}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}.$$

5. 证明：当 $x\to 0$时，$\sqrt{x+1}-1\sim\frac{x}{2}$.

证：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}=1$，故 $\sqrt{x+1}-1\sim\frac{x}{2}$ （$x\to 0$）.

6. 试确定k的值，使下列函数与x^k 是$x\to 0$时的同阶无穷小量：

(1) $2x^3\tan x$；　　(2) $\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2)$；

(3) $\sqrt[3]{2x^5-7x^2}$ ；　　(4) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x^2}$.

解（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3\tan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\tan x}{x^{k-3}}$，由等价无穷小：$\tan x\sim x$ 可得：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\tan x}{x^{k-3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^{k-4}}$，

故$k=4$

（2）解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{3-k}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{3-k}$，故$k=3$.

（3）解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x^5-7x^2}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x^3-7}}{x^{k-\frac{2}{3}}}$，故$k=\frac{2}{3}$.

（4）解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x^2}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^{k-2}(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-2x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2x^{k-2}}$，故$k=2$.

8.设$\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A,\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$.证明：$\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=A.$

证明：$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,s.t$ 对任意 $|u|>M$，有

$$|f(u)-A|<\varepsilon\ ,$$

对上述M ，存在$\delta>0$ ，当$x\in U^o(a;\delta)$ 时有

$$|g(x)|>M\ ,$$

即当$x\in U^o(a;\delta)$ 时有$|g(x)|>M$，从而有$|f(g(x))-A|<\varepsilon$，因而

$$\lim_{x\to a}f(g(x))=A.$$

9.设 $D(x)$ 是 Dirichlet 函数， $x_0\in R$，应用归结原则证明：$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.

证明：若 x_0 为有理数，设 $x'_n=\dfrac{1}{n}+x_0$ $x''_n=\dfrac{\pi}{n}+x_0$ ，显然有

$x'_n\to x_0, x''_n\to x_0\ (n\to\infty)$ ，这时

$$D(x'_n)=1\to 1, D(x''_n)=0\to 0$$

故由归结原则得 $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.同理可证若 x_0 为无理数时 $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在。

10.设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内满足方程 $f(3x)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.试证明：$f(x)\equiv A, x\in(0,+\infty)$.

证明：设 $x_0\in(0,+\infty)$ ，则

$$f(x_0)=f(3x_0)=f(3^2x_0)=\cdots=f(3^nx_0)=\cdots ,$$

可得

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(3^nx_0)=A$$

由 $x_0\in(0,+\infty)$ 的任意性，得证 $f(x)\equiv A, x\in(0,+\infty)$.

11. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内递减，且存在 $x'_n, x''_n\in(a,b)(n=1,2,\cdots)$ 满足 $x'_n\to a$，$x''_n\to b(n\to\infty)$ ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=A, \lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)=B$.试证明：$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$.

证：对 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$,使得当 $n\geq N$ 时，有

$$A-\varepsilon<f(x'_n)<A+\varepsilon .$$

取 $\delta=x'_N-a$,则当 $a<x<a+\delta$ 时,由于 $x'_n\to a$，存在 $x'_{n_1}: a<x'_{n_1}<x, n_1>N$，于是

$$x'_{n_1}<x<a+\delta=x'_N$$

由 $f(x)$ 在 (a,b) 内递减,有

$$A-\varepsilon<f(x'_N)<f(x)<f(x'_{n_1})<A+\varepsilon$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$.同理可得：$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$.

12.设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 内递增，其中常数 $b\leq 0$.证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在当且仅当 $f(x)$ 在

$(-\infty,b)$ 内有下界.

证：若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在,设为 A,则对 $\varepsilon=1$， $\exists X<0$， 当 $x\le X$ 时,有 $\left|f(x)-A\right|<1$,即 $A-1<f(x)<A+1$.又对 $x\in[X,b)$,有 $f(x)\ge f(X)$，所以，若取

$$M=\min\{A-1,f(X)\},$$

则在 $(-\infty,b)$ 上有 $f(x)\ge M$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 上有下界.

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,b)$ 内有下界,则有下确界，记为 m，那么由下确界的性质，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $X\in(-\infty,b)$ 使得 $f(X)<A+\varepsilon$. 于是，当 $x<X$ 时，由下确界的性质和函数的单调递增性，有

$$A-\varepsilon<f(x)\le f(X)<A+\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在.

13. 若存在常数 $a>0, X>0, K>1,$ 使得当 $x>X$ 时有 $f(x)\ge a$ 和 $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}>K,$ 试证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$

证：当 $x>X$ 时，有

$$f(x)\ge a,\ \frac{f(x+1)}{f(x)}>K,\frac{f(x+2)}{f(x+1)}>K,\dots\frac{f(x+n)}{f(x+n-1)}>K,$$

诸式相乘得

$$f(x+n)>aK^n\quad(x\in(X,+\infty),n\in\mathbb{N})\qquad\qquad(b)$$

对 $\forall G>a$，取 $M=X+\dfrac{\ln G-\ln a}{\ln K}+1$，则当 $x>M$ 时,$[x-X]>\dfrac{\ln G-\ln a}{\ln K}$,从而

$$K^{[x-X]}>K^{\log_K\frac{G}{a}}=\frac{G}{a}$$

记 $\alpha=x-X-[x-X]$，则 $x=X+\alpha+[x-X]$，于是由 (b) 式，有

$$f(x)=f(X+\alpha+[x-X])>aK^{[x-X]}>G$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

14.设当 $x\to 0$ 时有 $f(x)=o(1)$， $f(x)-f(\frac{x}{2})=o(x)$,试证明： $f(x)=o(x)(x\to 0)$.

证:对 $\forall\varepsilon>0$,由 $f(x)-f(\frac{x}{2})=o(x)(x\to 0)\Rightarrow\exists\delta>0$,当 $|x|<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$\left|f(x)-f(\frac{x}{2})\right|<\frac{\varepsilon}{2}|x|.$$

于是对 $\forall n\in N_+$,有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\left|\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}\right|+\left|\frac{f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{2^2})}{x}\right|+\ldots+\left|\frac{f(\frac{x}{2^{n-1}})-f(\frac{x}{2^n})}{x}\right|+\left|\frac{f(\frac{x}{2^n})}{x}\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+\left|\frac{f(\frac{x}{2^n})}{x}\right|=\varepsilon(1-\frac{1}{2^n})+\frac{\left|f(\frac{x}{2^n})\right|}{|x|}$$

又有 $f(x)=o(1)$,令 $n\to\infty$，得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\lim_{n\to+\infty}\left[\varepsilon+\frac{\left|f(\frac{x}{2^n})\right|}{|x|}\right]=\varepsilon$$

这表明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,即 $f(x)=o(x)(x\to 0)$.

15.试证明: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty\Leftrightarrow$ 对任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$.

证: 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,则 $\forall G>0$, $\exists M>0$,使得当 $x>M$ 时,有 $f(x)>G$.设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$， 则 $\exists N>0$,当 $n>N$ 时， $x_n>M$,于是 $f(x_n)>G$ 成立.这证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$.

若对任意满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$,都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=+\infty$,设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\ne+\infty$,则 $\exists G_0>0$, $\forall M>0$,存在 $x>M$，使得 $f(x)\le G_0$.取 $M=n$ $(n=1,2,\ldots)$,则得到点列 $\{x_n\}$ 满

足：$x_n > n$，$f(x_n) \le G_0, n = 1, 2 \cdots$，由此得 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \le G_0$，与 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$ 矛盾，

故 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

第四章习题详解

习题 4. 1

1. 讨论下列函数的连续性，指出其间断点并说明其类型：

(1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \qquad x=0. \end{cases}$

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，由连续的定义知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续. 又 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续，从而 $f(x)$ 在 R 上连续.

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{2x}, x\neq 0, \\ 1 \quad , x=0. \end{cases}$

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\dfrac{3}{2}\neq f(0)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 除 $x=0$ 外，$f(x)$ 在 R 上连续.

(3) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, x\neq 0, \\ 0 \quad , x=0. \end{cases}}$

解：由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1, f(0+0)\neq f(0-0)$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，除 $x=0$ 外，$f(x)$ 在 R 上连续.

(4) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} 2x+3, x\neq 0, \\ 5-x^2, x=0. \end{cases}}$

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x+3)=3\neq 5=f(0)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点.除 $x=0$ 外，$f(x)$ 在 R 上连续.

(5) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} 2x, x\in Q, \\ -x, x\in R\setminus Q. \end{cases}}$

解：当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$，函数在 $x=0$ 连续；当 $x=x_0\neq 0$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in Q}} f(x)=2x_0\neq -x_0=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in R\setminus Q}} f(x)$$

$f(x)$ 在 x_0 处间断；又 $f(x)$ 在 x_0 处有极限不存在，x_0 为第二类间断点.

(6) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}1, x\in Q,\\ 0, x\in R\setminus Q.\end{cases}}$

解：任意的 $x_0\in R$ 均为 $f(x)$ 的第二类间断点，因为 $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限均不存在. 2. 设 $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}2x+a, x>2,\\ 5-x^2, x\leq 2.\end{cases}}$ 试确定 $\boldsymbol{a}$ 的值，使 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上连续.

解：由题设易知，要使 $f(x)$ 在 R 上连续，只要保证 $f(x)$ 在 $x=2$ 连续即可. 于是有 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(x)$，即 $4+a=1$，故 $a=-3$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续，试证明：$\boldsymbol{|f(x)|}$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 也处连续.

证明：对任意 $\varepsilon>0$ 由函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，$\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon .$$

于是根据三角不等式有

$$\left\|f(x)\right|-\left|f(x_0)\right\|\leq\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon,$$

即 $\left|f(x)\right|$ 在 x_0 也连续.

4. 举例说明，若 $\boldsymbol{|f(x)|}$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续，$\boldsymbol{f(x)}$ 并不一定在在 $\boldsymbol{x_0}$ 也处连续.

解：：例如 $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ -1, x\in R\setminus Q\end{cases}$，因为 $\left|f(x)\right|\equiv 1$，所以 $\left|f(x)\right|$ 在 R 上处处连续，但 $f(x)$ 在 R 上处处不连续.

5. 函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 处连续，试证明：$\boldsymbol{f^2(x)}$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 也处连续.

证明：对任意 $\varepsilon>0$，由函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，$\exists\delta_1>0$，当 $x\in U(x_0,\delta_1)$ 时，有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon .$$

又由极限的局部有界性知，存在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta_2)$，当 $x\in U(x_0,\delta_2)$ 时，有 $|f(x)|<M$.于是取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，则有

$$\left|f^2(x)-f^2(x_0)\right|=|f(x)+f(x_0)||f(x)-f(x_0)|<\left[M+|f(x_0)|\right]\cdot\varepsilon$$

由此知，$f^2(x)$ 也在 x_0 处连续.

6. 证明：黎曼函数在 $(0,1)$ 内的任何无理数所表示的点处都连续.

证明： 设 $\xi\in(0,1)$ 为无理数．任给 $\varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<\frac{1}{2}$)，满足 $\frac{1}{q}\geq\varepsilon$ 的正整数 q 显然只有有限个(但至少有一个，如 $q=2$)，从而使 $R(x)\geq\varepsilon$ 的有理数 $x\in(0,1)$ 只有有限个(至少有一个，如 $\frac{1}{2}$)，设它们为 $x_1,\cdots,x_n$ 取 $\delta=\min\{|x_1-\xi|,\cdots,|x_n-\xi|,\xi,1-\xi\}$，则对任何 $x\in U(\xi;\delta)(\subset(0,1))$，当 x 为有理数时有 $R(x)<\varepsilon$，当 x 为无理数时 $R(x)=0$。于是，对任何 $x\in U(\xi;\delta)$，总有 $|R(x)-R(\xi)|=R(x)<\varepsilon$. 故 $R(x)$ 在无理点 ξ 处连续．

7. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调函数，由例 4.7 知 f 在每一点 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有单侧极限.现设 $x\in(-\infty,+\infty)$，定义 $g(x)=f(x-0)$.证明：g 在 $(-\infty,+\infty)$ 内每一点都左连续.

证明：不妨设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增函数，对任意的 $x_0\in R$，由于 $f(x-0)$ 存在，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|f(x)-f(x_0-0)|<\varepsilon$. 对上述 δ 与 x，取 x' 满足 $x_0-\delta<x'<x<x_0$，则有 $f(x_0-0)-\varepsilon<f(x')<f(x_0-0)+\varepsilon$ 又由 f 单调递增，进一步有 $f(x_0-0)-\varepsilon<f(x')\leq f(x-0)\leq f(x)\leq f(x_0-0)$，于是当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$，从而 $g(x)$ 在 x_0 左连续，即 g 在 $(-\infty,+\infty)$ 内每一点都左连续.

习题 4.2

1. 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-x)\cot x$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x\sqrt{1+x}-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

解: (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-x)\cot x=\dfrac{3\pi}{4}\cdot\cot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}.$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x\sqrt{1+x}-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\dfrac{1\cdot\sqrt{1+1}-\sqrt{1^2-1}}{1+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

2. 设 $f(x)=\sin x, g(x)=\begin{cases}x-\pi, x\le 0,\\ x+\pi, x>0.\end{cases}$ 证明: 复合函数 $f\circ g$ 在 $x=0$ 处连续, 但 g 在 $x=0$ 处不连续.

证明: 由题设, 易知 $f\circ g(x)=-\sin x,\ x\in R$, 显然复合函数 $f\circ g$ 在 $x=0$ 处连续, 但

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+\pi)=\pi,\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-\pi)=-\pi, g(0+0)\ne g(0-0),$$

故 g 在 $x=0$ 处不连续.

3. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明: $\max\{f(x),g(x)\}$ 和 $\min\{f(x),g(x)\}$ 都在 $[a,b]$ 上连续.

证明: 易知 $\max\{f(x),g(x)\}=\dfrac{1}{2}\Big[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\Big]$

$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\Big[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\Big].$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在区间 $[a,b]$ 上连续可知, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ 连续。再由绝对值函数的连续性, 根据复合函数的连续性质可知 $|f(x)-g(x)|$ 连续, 从而 $\max\{f(x),g(x)\}$ 和 $\min\{f(x),g(x)\}$ 都在 $[a,b]$ 上连续.

4. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 x_0 连续, 且 $f(x_0)>g(x_0)$, 证明: 存在 x_0 的邻域

$U(x_0;\delta)$，使得在其内有 $f(x)>g(x)$.

证明：令 $h(x)=f(x)-g(x)$，由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 连续知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$, 又因为 $f(x_0)>g(x_0)$，故 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=f(x_0)-g(x_0)>0$，由函数极限的局部保号性知，存在 x_0 的邻域 $U(x_0;\delta)$，使得在其内有 $h(x)>0$ ，即 $f(x)>g(x)$.。

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在，证明： $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界.

证明：由 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在，根据函数极限的局部有界性知，$\exists M_1>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in(b-\delta,b)$ 时，有 $|f(x)|<M_1$。又因为 $f(x)$ 在 $[a,b-\delta]$ 上连续，由闭区间上连续函数的性质知 $f(x)$ 在 $[a,b-\delta]$ 上有界，设为 M_2。取 $M=\max\{M_1,M_2\}$，则在 $[a,b)$ 上有 $|f(x)|<M$，即 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界.

6. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A, \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B$，证明：若 $A\cdot B<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有零点.

证明：由于 $A\cdot B<0$，A,B 异号，不妨设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A>0, \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=B<0$，由函数极限的保号性可知，存在 a 的去心右邻域 $U_+^\circ(a,\delta_1)$ 和 b 的去心左邻域 $U_-^\circ(b,\delta_2)$，在这两个邻域中分别有 $f(x)>0$ 和 $f(x)<0$，取 $c\in U_+^\circ(a,\delta_1)$ 及 $d\in U_-^\circ(b,\delta_2)$，则有 $f(c)>0$ 及 $f(d)<0$，又因为 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续，由连续函数的零点定理可知 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 内有零点.，从而在在 (a,b) 内有零点.。

7. 证明实系数方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 至少有一个实根.

证明：令 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$，易知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 故存在 x_1、x_2 分别使得 $f(x_1)>0$ 及 $f(x_2)<0$，又 $f(x)$ 在 R 上连续，由连

续函数的零点定理知，$f(x)$在(x_1,x_2)内至少有一个零点，即实系数方程

$x^3+px^2+qx+r=0$ 至少有一个实根.

8. 求下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\cos x+3}{2+x^2+\ln(1-x)}$；

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\cos x+3}{2+x^2+\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^0\cos 0+3}{2+0^2+\ln(1-0)}=2$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+\arcsin(x-1)}{x^{12}+\ln(3-\sqrt{x^2+3})}\right)^{\frac{3-x}{5\tan x}}$；

解：$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+\arcsin(x-1)}{x^{12}+\ln(3-\sqrt{x^2+3})}\right)^{\frac{3-x}{5\tan x}}=\left\{\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+\arcsin(x-1)}{x^{12}+\ln(3-\sqrt{x^2+3})}\right)\right\}^{\left(\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-x}{5\tan x}\right)}$

$=\left(\dfrac{1+\arcsin(1-1)}{1^{12}+\ln(3-\sqrt{1^2+3})}\right)^{\frac{3-1}{5\tan 1}}=1$

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x\sin x+6)\ln(1+x)}{x[2+\ln(1+x)]}$；

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x\sin x+6)\ln(1+x)}{x[2+\ln(1+x)]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x+6}{2+\ln(1+x)}=3.\quad(\because \ln(1+x)\sim x)$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{2}.$

9. 讨论函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(e^{\sin x}\arctan x+2)\ln(1+\sin^2 x)}{x^2\sqrt{x^2+1}}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$ 的连续性。

解：由初等函数的连续性知，当$x\neq 0$时，$f(x)$总是连续的，故只需考虑$f(x)$

在$x=0$处的连续性。**由**

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sin x}\arctan x+2)\ln(1+\sin^2 x)}{x^2\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sin x}\arctan x+2)\cdot\sin^2 x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sin x}\arctan x+2)}{\sqrt{x^2+1}}=2=f(0)$$

可知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.综合得 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

10. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续，证明 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界.

证明：由一致连续的定义知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall x',x''\in[a,b)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。由此，根据柯西准则，知 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在，由极限的局部有界性，存在 $c:a<c<b$，使得 $f(x)$ 在 $[c,b)$ 上有界，又因为 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续，从而也有界，所以 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界。

11. 若函数 f 和 g 都在区间 I 上一致连续，则函数 $c_1 f+c_2 g$ 在 I 上一致连续

（c_1,c_2 是常数）

证明：由 f 和 g 在区间 I 上一致连续可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall x',x''\in I$，只要满足 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 及 $|g(x')-g(x'')|<\varepsilon$。此时有，

$$\left|\left[c_1 f(x')+c_2 g(x')\right]-\left[c_1 f(x')+c_2 g(x')\right]\right|$$

$$=\left|\left[c_1 f(x')+c_2 g(x')\right]-\left[c_1 f(x'')+c_2 g(x'')\right]\right|$$

$$=\left|c_1\left[f(x')-f(x'')\right]+c_2\left[g(x')-g(x'')\right]\right|$$

$$\le|c_1||f(x')-f(x'')|+|c_2||g(x')-g(x'')|\le(|c_1|+|c_2|)\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知，函数 $c_1 f+c_2 g$ 在 I 上一致连续。

12. 若函数 f 在区间 I 上一致连续，则 f 在 I 的任意子区间上一致连续.

证明：由函数 f 在区间 I 上一致连续，根据一致连续的定义知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall x',x''\in I$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。设 I_1 为 I 的任意一子区间，显然 $\forall x',x''\in I_1\subseteq I$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，亦有

$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，即 f 在 I 的任意子区间 I_1 上一致连续.

13. 证明：若函数 f 在区间 I_1 和区间 I_2 上都一致连续（$I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$），区间 $I = I_1 \cup I_2$，则 f 在 I 上一致连续.

证明： $\forall \varepsilon > 0$，由 f 在 I_1 和 I_2 上的一致连续性可知，分别存在正数 δ_1 与 δ_2，使得 $\forall x', x'' \in I_1$，只要 $|x'-x''|<\delta_1$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.以及 $\forall x', x'' \in I_2$，只要 $|x'-x''|<\delta_2$，亦有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

由于 f 在区间 I_1 和 I_2 上都一致连续，故在区间 I_1 和 I_2 上均连续.由于 $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$，不妨设 $c \in I_1 \cap I_2$ 为 I_1 的右端点,同时亦为 I_2 的左端点 于是 f 在 c 点左连续且右连续，从而 f 在 c 点连续. 于是,对上述的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_3 > 0$，当 $|x-c|<\delta_3$ 时，则有

$$|f(x)-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$.对任意的 $x', x'' \in I$， $|x'-x''|<\delta$，考虑以下两种情形：

（1）当 x', x'' 两点同时属于 I_1 或者 I_2，则自然有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$；

（2）当 x', x'' 两点分别属于 I_1 与 I_2，不妨设 $x' \in I_1, x'' \in I_2$，则有

$$|x'-c| = c - x' < x'' - x' < \delta \le \delta_3.$$

故由前述可得 $|f(x')-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$,同理,可得 $|f(x'')-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}$,从而有

$$|f(x')-f(x'')| \le |f(x')-f(c)| + |f(c)-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

综合（1）（2）可知, f 在 I 上一致连续.

14. 证明函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续.

证明：易知初等函数的连续性知，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续. 由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1，\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{\sin x}{x}=\sin 1 \quad ，$$

现定义新函数 $F(x)$ 为：

$$F(x)=\begin{cases} 1, & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\in(0,1) \\ \sin 1, & x=1 \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，从而一致连续。进一步可知，函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续.

15. 证明函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明：对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，由于

$$\left|\sin x'-\sin x''\right|=\left|2\cos\frac{x'+x''}{2}\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\le\left|x'-x''\right|.$$

故取 $\delta=\varepsilon$，则对任意的 $x',x''\in(-\infty,+\infty)$，只要 $\left|x'-x''\right|<\delta$，就有 $\left|\sin x'-\sin x''\right|<\varepsilon$，即函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

总练习题四

1．试用函数连续的定义证明：$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续．

证明：任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，仅需证 $f(x)$ 在 x_0 连续即可，可分两种情况来证明.

（1）当 $x_0=0$ 时，$\forall\varepsilon>0$，由于

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\sqrt{x^2+1}-1\right|=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}<x^2,$$

故可取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $|x-x_0|=|x|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$．即 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处连续.

（2）当 $x_0\neq 0$ 时，不妨限制 $|x-x_0|<\dfrac{|x_0|}{2}$，　$\forall\varepsilon>0$，由于

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x_0^2+1}\right|=\frac{|x-x_0|\cdot|x+x_0|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}}<\frac{|x-x_0|\cdot 4|x_0|}{2}$$

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{|x_0|}{2},\dfrac{\varepsilon}{2|x_0|}\right\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$．即此时 $f(x)$ 亦在 x_0 处连续.

综合（1）（2）可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

2．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ k\quad, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性．

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{e}$，故当 $k=\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

当 $k\neq\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处间断.

3．设 $f(x)$ 只有可去间断点，定义 $g(x)=\lim\limits_{y\to x}f(y)$，证明 g 为连续函数.

证明：$f(x)$ 的定义域为 I，由于 $f(x)$ 只有可去间断点，则对任意的 $x\in I$，

$\lim\limits_{y\to x} f(y)$

存在，故由 $g(x)$ 的定义知，$g(x)$ 在 I 上有定义。任取 $x_0\in I$，由于 $g(x_0)=\lim\limits_{y\to x_0} f(y)$，

由极限的定义有，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $y\in U^\circ(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(y)-g(x_0)|<\varepsilon$.

即

$g(x_0)-\varepsilon<f(y)<g(x_0)+\varepsilon$，现设 $x\in U^\circ(x_0,\delta)$，因为 $g(x)=\lim\limits_{y\to x} f(y)$，故由极限的保不等式性，则有 $g(x_0)-\varepsilon\le g(x)=\lim\limits_{y\to x} f(y)\le g(x_0)+\varepsilon$，故 $\forall x\in U^\circ(x_0,\delta)$ 有 $|g(x)-g(x_0)|\le\varepsilon$，即 $g(x)$ 在 x_0 连续，由 x_0 的任意性知，$g(x)$ 为 I 上的连续函数.

4． 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$。证明：存在 $x_0\in[0,a]$，使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$

证明：设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，易知 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续且

$$F(0)=f(0)-f(a),\quad F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0),$$

若 $F(0)=f(0)-f(a)=0$，则取 $x_0=0\in[0,a]$，有 $f(0)=f(0+a)$；若 $F(0)=f(0)-f(a)\neq 0$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[0,a]$ 两端点的函数值 $F(0)$ 与 $F(a)$ 异号，由连续函数的零点定理知，存在 $x_0\in[0,a]$，使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

5．设 f 为 $[a,b]$ 上的增函数，其值域为 $[f(a),f(b)]$.证明：f 在 $[a,b]$ 上连续.

证明：（反证法）假设 f 在 (a,b) 内有间断点 x_0，则由于 f 是 $[a,b]$ 上的增函数，点 x_0

必为 f 的第一类间断点. 于是 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 均存在，$f(x_0)-f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)-f(x_0)$ 中至少有一个大于 0，不妨设 $f(x_0)-f(x_0-0)>0$，由函数的单调递增的条件可知，当 $a\le x<x_0$ 时，有 $f(x)\le f(x_0-0)$；又当 $x_0<x\le b$ 时，

有 $\boldsymbol{f(x)\ge f(x_0)}$，于是 $\boldsymbol{f}$ 无法取到介于 $\boldsymbol{f(x_0-0)}$ 与 $\boldsymbol{f(x_0)}$ 之间的数值，这与 $\boldsymbol{f}$ 的值域为 $\boldsymbol{[f(a),f(b)]}$ 相矛盾，从而 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{(a,b)}$ 内无间断点．类似地，可以证明 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{[a,b]}$ 左右两端点的连续性．综合可知， $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{[a,b]}$ 连续.

6．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $x_1,x_2,\cdots x_n\in[a,b]$，另有一组正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1.$$

满足.证明：存在点 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots\lambda_n f(x_n)$

证明：因 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，所以存在最大值和最小值。设 $M=f(\eta_1)$ 最大值为，最小值 $m=f(\eta_2)$，$\left(\eta_1,\eta_2\in\left[a,b\right]\right)$。于是有 $\lambda_j m\le\lambda_j f(x_j)\le\lambda_j M\left(j=1,2,\cdots\right)$，将 n 个不等式相加。并利用 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ 得：

$$m\le\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)\le M$$

由连续函数介值定理，必存在一点 $\xi\in\left[a,b\right]$，使 $f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

7．设函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 内连续，且 $f(a+0)$， $f(b-0)$ 存在，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.（删掉）

8．设函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 内连续，且 $f(a+0)$， $f(b-0)$ 存在，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续

证明：由于 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{(a,b)}$ 内连续， $\boldsymbol{f(a+0)}$ 与 $\boldsymbol{f(b-0)}$ 存在，构造闭区间 $\boldsymbol{[a,b]}$ 上的

新函数 $\boldsymbol{F(x)}$ 为：

$$\boldsymbol{F(x)=\begin{cases} f(a+0), & x=a \\ f(x), & x\in(a,b) \\ f(b-0), & x=b \end{cases}},$$

则由条件易知， $\boldsymbol{F(x)}$ 在闭区间 $\boldsymbol{[a,b]}$ 上连续．由一致连续定理知， $\boldsymbol{F(x)}$ 在闭区间 $\boldsymbol{[a,b]}$ 上一致连续，从而 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{(a,b)}$ 上一致连续.

9．设函数 $\boldsymbol{f}$ 定义在区间 $\boldsymbol{I}$ 上，且满足 Lipschitz 条件：$\exists L>0$，使对 $\forall \boldsymbol{x_1,x_2\in I}$ ，

有$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le L\left|x_1-x_2\right|$，则$f(x)$在区间$\boldsymbol{I}$上一致连续.

证明：对任意的正数$\boldsymbol{\varepsilon>0}$，取$\boldsymbol{\delta=\frac{\varepsilon}{L}}$，由于$\boldsymbol{f}$在区间$\boldsymbol{I}$上满足 Lipschitz 条件，

故

$\boldsymbol{\forall x_1,x_2\in I}$，当$\boldsymbol{\left|x_1-x_2\right|<\delta}$时，则有

$$\boldsymbol{\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le L\left|x_1-x_2\right|<L\cdot\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon.}$$

从而$\boldsymbol{f}$在区间$\boldsymbol{I}$上一致连续.

10. 设f为$[a,b]$上的非常数连续函数，M和m分别是其最大值和最小值. 求证：存在区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$使得：

(1) $m<f(x)<M,x\in(\alpha,\beta)$;　(2) $f(\alpha),f(\beta)$恰好是f在$[\alpha,\beta]$上的最值.

证明：由于f为$[a,b]$上的非常数连续函数，必定有$M>m$.设$x_1,x_2\in[a,b]$使得$f(x_1)=m,f(x_2)=M$，不妨设$x_1<x_2$.记$E_m=\{x\mid f(x)=m,x\in[x_1,x_2]\}$，则$E_m$非空（$x_1\in E_m$）且有上界（$E_m\subset[x_1,x_2]$），所以它有上确界，记$\alpha=\sup\{E_m\}$，则$x_1\le\alpha<x_2$，且$\alpha\in E_m$，即$f(\alpha)=m$，这是因为，对任意$\varepsilon>0$，由于$f$在$\alpha$连续，存在$\delta>0$，使得对一切$x\in[\alpha-\delta,\alpha]$有$|f(\alpha)-f(x)|<\varepsilon\Rightarrow$

$$f(\alpha)<f(x)+\varepsilon$$

但由上确界的意义知，存在$x'\in E_m$使得$x'>\alpha-\delta$，即$x'\in[\alpha-\delta,\alpha]$，于是

$$m\le f(\alpha)<f(x')+\varepsilon=m+\varepsilon$$

由ε的任意性，得到$f(\alpha)=m$.

再记$E_M=\{x\mid f(x)=M,x\in[\alpha,x_2]\}$，则$E_M$非空（$x_2\in E_M$）且有下界（$E_M\subset[\alpha,x_2]$），所以它有下确界，记$\beta=\sup\{E_M\}$，则类似于$f(\alpha)=m$的证明可得$f(\beta)=M$.由$\alpha,\beta$的意义可知，对任意$x\in(\alpha,\beta)$，有$m<f(x)<M$，且$f(\alpha)$，$f(\beta)$

恰好是 f 在$[\alpha,\beta]$上的最值..证毕.

第五章习题详解

习题 5.1.

1. 设 $f(x_0)=0, f'(x_0)=4$，求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{2\Delta x}$.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{2\Delta x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}f'(x_0)=2$

2. 设 $f'(a)$ 存在，求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}$.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}=2f'(a)$

3. 已知 $f'(a), g'(a)$ 存在，且 $g'(a)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\Big/\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

4. 证明 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导.

证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2/3}}=\infty\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}x+x^2, x\le 0,\\ \cos x-1, x>0.\end{cases}$ 求 $f'_+(0), f'_-(0)$ 和 $f'(0)$.

解 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x-1}{x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=0$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)=1$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)\Rightarrow f'(0)$ 不存在

6. 已知 $f(x)=x, g(x)=x^2$,试问当 x 取什么值时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在对应点的切线平行?

解 须 $f'(x)=1=g'(x)=2x\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 3, \\ ax+b, x<3 \end{cases}$ 试确定 a,b 的值，使得 f 在 $x=3$ 处可导.

解 $f'_+(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+3)=6$，

由 $f'_-(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{ax+b-9}{x-3}=f'_+(3)=6\Rightarrow$

$$ax+b-9=6(x-3)+o(x-3)$$

令 $x\to 3$，得 $3a+b=9$；于是

$f'_-(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{a(x-3)+3a+b-9}{x-3}=a=f'_+(3)=6\Rightarrow a=6$

从而 $b=-9$.

8. 按照微分定义证明：$f(x)=x\sin x$ 在 $x=0$ 处可微.

证 $f(0+\Delta x)-f(0)=\Delta x\sin\Delta x=o(\Delta x)\Rightarrow f$ 在 $x=0$ 处可微.且 $df\,|_{x=0}=0$

9. 求下列函数的微分：

(1) $y=\sqrt[3]{x}$ ；

解 $y'=(\sqrt[3]{x})'=\dfrac{1}{3x^{2/3}}\Rightarrow dy=\dfrac{1}{3x^{2/3}}dx \quad (x\neq 0)$

(2) $y=e^x$；

解 $y'=(e^x)'=e^x\Rightarrow dy=e^x dx$

10. 求下列近似值：

(1) $\sqrt[4]{80}$ ；

解 $f(x)=\sqrt[4]{x}, x=80, x_0=81, \Delta x=x-x_0=80-81=-1,$

$f(x_0)=\sqrt[4]{81}=3, f'(x_0)=\dfrac{1}{4x^{3/4}}=\dfrac{1}{108}$

$f(80)=\sqrt[4]{80}\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=3+\dfrac{1}{108}\cdot(-1)=\dfrac{323}{108}\approx 2.9907\cdot$

(2) $\sin 29^\circ$

解 $f(x)=\sin x, x=\frac{29\pi}{180}, x_0=\frac{\pi}{6}, \Delta x=x-x_0=-\frac{\pi}{180}, f(x_0)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$

$$f'(x_0)=\cos x_0=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 29^\circ=\sin\frac{29\pi}{180}\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)=\frac{180-\sqrt{3}\pi}{360}$$

11. 设函数 f 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$. 记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，证明：

$x\to x_0$

时，$\mathrm{d}\,y\sim\Delta y$.

证 $\because \lim\limits_{x\to x_0}\frac{dy}{\Delta y}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{1+\frac{1}{f'(x_0)}\cdot\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}}=1$

$\therefore \mathrm{d}\,y\sim\Delta y \quad (x\to x_0)$

12. 设函数 f 的导函数 f' 在区间 $[a,b]$ 上处处有 $f'(x)\neq 0$. 证明在 (a,b) 内 $g(x)=\operatorname{sgn} f'(x)$ 恒等于 1 或-1，其中 $\operatorname{sgn} z$ 是符号函数.

证 由达布定理知，在区间 $[a,b]$ 上处处有 $f'(x)>0$，或处处有 $f'(x)<0$.若处处有 $f'(x)>0$，则 $g(x)=\operatorname{sgn} f'(x)=1$，若处处有 $f'(x)<0$，则 $g(x)=\operatorname{sgn} f'(x)=-1$,证毕.

13. 设函数 f 在 a 处可导，证明：对任意实数 $c\neq f'(a)$，有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]}{f(x)-[f(a)+c(x-a)]}=0$$

证 由题设，有 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$，所以

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]}{f(x)-[f(a)+c(x-a)]}=\lim_{x\to a}\frac{o(x-a)}{[f'(a)-c](x-a)]+o(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{o(x-a)}{x-a}}{f'(a)-c+\frac{o(x-a)}{x-a}}=\frac{0}{f'(a)-c}=0$$

14. 设函数 f 在 a 的某邻域 $U(a)$ 内有定义，且在 a 处可导，证明：对任何含于 $U(a)$ 且满足 $x_n < a < y_n, \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ 的点列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(a)$$

证　由题设，有 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，所以当 $n\to\infty$ 时，有

$$f(x_n)=f(a)+f'(a)(x_n-a)+o(x_n-a),$$

$$f(y_n)=f(a)+f'(a)(y_n-a)+o(y_n-a),$$

$$\Rightarrow f(y_n)-f(x_n)=f'(a)(y_n-x_n)+o(y_n-a)+o(x_n-a)$$

由于

$$\left|\frac{o(y_n-a)+o(x_n-a)}{y_n-x_n}\right|\le\left|\frac{o(y_n-a)}{y_n-a}\cdot\frac{y_n-a}{y_n-x_n}\right|+\left|\frac{o(x_n-a)}{x_n-a}\cdot\frac{x_n-a}{y_n-x_n}\right|$$

$$\le\left|\frac{o(y_n-a)}{y_n-a}\right|+\left|\frac{o(x_n-a)}{x_n-a}\right|\to 0\quad(n\to\infty)$$

所以 $o(y_n-a)+o(x_n-a)=o(y_n-x_n)$，故

$\Rightarrow f(y_n)-f(x_n)=f'(a)(y_n-x_n)+o(y_n-x_n)$，由此得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(a)$$

习题 5.2

1. 求下列函数的导数：

（1） $y=(3x^2-2)^{10}$；

解　$y'=10(3x^2-2)^9\cdot 6x=60x(3x^2-2)^9$

(2) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

解　$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

（3）$y=\sin 2x\cos 3x$；

解　$y'=2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$

(4) $y=\sin^3\frac{x}{3}$；

解　$y'=3\sin^2\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}=\sin^2\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}$

（5）$y=\ln(2+\sin^3 x)$；

解　$y'=\frac{1}{2+\sin^3 x}\cdot 3\sin^2 x\cos x$

(6) $y=\log_3(2+\tan^2 x)$；

解　$y'=\frac{1}{(2+\tan^2 x)\ln 3}\cdot 2\tan x\cdot\sec^2 x$

（7）$y=\frac{\ln x+x}{2^x}$；

解　$y'=\frac{(\frac{1}{x}+1)\cdot 2^x-(\ln x+x)\cdot 2^x\ln 2}{2^{2x}}=\frac{x+1-(x\ln x+x^2)\cdot\ln 2}{x\cdot 2^x}$

(8) $y=\tan\frac{a}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$；

解　$y'=\sec^2\frac{a}{x}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)=-\frac{a}{x^2}\sec^2\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2-a^2}$

（9）$y=x^{\frac{1}{x}}$；

解　$y'=\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

(10) $y=(\sin x)^x$；

解　$y'=\left(e^{x\ln\sin x}\right)'(x\ln\sin x)'=(\sin x)^x\left(\ln\sin x+x\cot x\right)$

（11）　$y=\frac{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}{\sqrt{(x-3)(x-4)}}$；

解　两边取对数，得

$$\ln|y|=\frac{1}{3}(\ln|x-1|+\ln|x-2|)-\frac{1}{2}(\ln|x-3|+\ln|x-4|)$$

两边求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}\right)$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}{\sqrt{(x-3)(x-4)}}\cdot\left(\frac{2x-3}{3(x-1)(x-2)}-\frac{2x-7}{2(x-3)(x-4)}\right)$$

(12) $y=x\sqrt{1+x^2}\ln(1+x)$.

解 $y'=\sqrt{1+x^2}\ln(1+x)+x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\ln(1+x)+x\sqrt{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{1+x}$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln(1+x)+\frac{x^2\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x}$$

2. 设 $f'(\frac{1}{2})=a$， $g(x)=\cos^2 x$， 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x}=f'(g(x))g'(x)=-2f'(\cos^2 x)\cos x\cdot\sin x$

$$\Rightarrow\left.\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=-f'(1/2)\cdot\sin\frac{\pi}{2}=-a$$

3. 定义双曲函数如下:

双曲正弦函数 $shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ； 双曲余弦函数 $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切函数 $thx=\dfrac{shx}{chx}$； 双曲余切函数 $cothx=\dfrac{chx}{shx}$.

证明:

(1) $(shx)'=chx$；

(2) $(chx)'=shx$；

(3) $(thx)'=\dfrac{1}{ch^2x}$；

(4) $(cothx)'=-\dfrac{1}{sh^2x}$.

证 (1) $(shx)'=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=chx$

(2) $(chx)'=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=shx$

(3) $(thx)'=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'=\left(1-\dfrac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'=\left(1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}\right)'=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$$=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{1}{ch^2x}$$

(4) $(cothx)'=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)'=\left(1+\dfrac{2e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)'=\left(1+\dfrac{2}{e^{2x}-1}\right)'=-\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

$$=-\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}=-\frac{1}{sh^2x}$$

4. 设函数 $f(x)$ 可导，求 y'：

(1) $y=f(x\sin x)$;　　　　(2) $y=f(e^x)e^{f(x)}$;

(3) $y=f(f(f(x)))$;　　　　(4) $y=\left[f(\ln x)\right]^n$.

解　(1) $y'=f'(x\sin x)\cdot(x\sin x)'=f'(x\sin x)(\sin x+x\cos x)$

(2) $y'=f'(e^x)e^xe^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)$

(3) $y'=f'(f(f(x)))\cdot(f(f(x)))'=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$

(4) $y'=n\left[f(\ln x)\right]^{n-1}\cdot\left[f(\ln x)\right]'=n\left[f(\ln x)\right]^{n-1}\cdot f'(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$

5. 设函数 $u(x),v(x)$ 可导，求 y'：

(1) $y=\sqrt{u^2(x)+v^2(x)}$;　　　　(2) $y=\tan\dfrac{u(x)}{v(x)}$;

(3) $y=u(x)^{v(x)}$;　　　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{u^2(x)+v^2(x)}}$

解　(1) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{u^2(x)+v^2(x)}}[u^2(x)+v^2(x)]'=\dfrac{u(x)u'(x)+v(x)v'(x)}{\sqrt{u^2(x)+v^2(x)}}$

(2) $y'=\sec^2\dfrac{u(x)}{v(x)}\cdot\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\sec^2\dfrac{u(x)}{v(x)}\cdot\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

(3) $y'=[e^{v(x)\ln u(x)}]'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+\dfrac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right]$

(4) $y'=\dfrac{1}{u^2(x)+v^2(x)}(\sqrt{u^2(x)+v^2(x)})'=\dfrac{u(x)u'(x)+v(x)v'(x)}{[u^2(x)+v^2(x)]^{3/2}}$

6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, |x|\le 1, \\ \dfrac{1}{e}, \qquad |x|>1. \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$.

解　当 $|x|>1$ 时，$f'(x)=0$；当 $|x|<1$ 时，

$$f'(x)=2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}\cdot(-2x)=2x\left(1-x^2\right)e^{-x^2}.$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2e^{-x^2}-e^{-1}}{x-1}=(x^2e^{-x^2})'\,|_{x=1}=0,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{-1}-e^{-1}}{x-1}=0$$

$\Rightarrow f'(1)=0$.类似地，可得 $\Rightarrow f'(-1)=0$，所以

$$f'(x)=\begin{cases} 2e^{-x^2}(x-x^3), |x|<1, \\ 0, \qquad |x|\ge 1. \end{cases}$$

7. 证明：(1) 可导的偶函数的导函数是奇函数；(2) 可导的奇函数的导函数是偶函数.

证　(1) 设可导函数 f 是奇函数，则对任意 x 有 $f(-x)=-f(x)$，两边求导，得

$$-f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)$$

这就证明 f' 是偶函数；

(2) 设可导函数 f 是偶函数，则对任意 x 有 $f(-x)=f(x)$，两边求导，得

$$-f'(-x)=f'(x)\Rightarrow f'(-x)=-f'(x)$$

这就证明 f' 是奇函数.

8. 证明：可导的周期函数的导函数仍为周期函数.

证　设周期函数 f 的周期为 T，则对任意 x 有 $f(x+T)=f(x)$，两边求导，得

$$f'(x+T)=f'(x)$$

这表明导函数 f' 是周期函数，周期仍为 T.

9. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1], \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

解　当 $x\in(0,1]$ 时，有 $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\sin\dfrac{1}{x}+x^{3/2}\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$；而

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}=0$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1], \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 不存在，故 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上不连续性.

习题 5.3

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(2x+1)$；　(2) $y=\arctan\sqrt{x}$；

(3) $y=\arcsin x+\arccos x$；　(4) $y=\arctan x+\operatorname{arccot} x$；

(5) $y=\ln(2+\arcsin\sqrt[3]{x})$；　(6) $y=\log_3(2+\arctan^2 x)$；

解（1） $y'=\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$

（2） $y'=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

（3） $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$

（4） $y'=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$

（5） $y'=\dfrac{1}{2+\arcsin\sqrt[3]{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2/3}}}\cdot\dfrac{1}{3x^{2/3}}$

（6） $y'=\dfrac{2\arctan x}{(2+\arctan^2 x)\ln 3}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 求下列参数方程确定的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ：

（1） $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $0<t<\pi$；　　（2） $\begin{cases} x=\cos^4 t, \\ y=\sin^4 t, \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处;

（3） $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t}, \\ y=\dfrac{1-t}{1+t}, \end{cases}$ 在 $t=0$ 处；　　（4） $\begin{cases} x=a\left(\ln\tan\dfrac{t}{2}+\cos t\right), \\ y=a\sin t, \end{cases}$ 在

$t_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 处.

解（1） $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=-\dfrac{b}{a}\cot t$

（2） $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\dfrac{(\sin^4 t)'}{(\cos^4 t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\dfrac{4\sin^3 t\cdot\cos t}{4\cos^3 t\cdot(-\sin t)}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$

（3） $x'(t)=\left(1-\dfrac{1}{1+t}\right)'=\dfrac{1}{(1+t)^2}$, $y'(t)=\left(\dfrac{2}{1+t}-1\right)'=-\dfrac{2}{(1+t)^2}$,

$$\Rightarrow\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=0}=-2$$

（4） $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}=\left.\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=t_0}=\dfrac{2\cos t_0}{\sec^2\dfrac{t_0}{2}\cos\dfrac{t_0}{2}-2\sin t_0}$

3. 设曲线方程为$x=1-t^2$，$y=t-t^2$，求它在$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$处的切线与法线方程.

解 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left.\frac{1-2t}{-2t}\right|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$，所以切线方程为

$$y=\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

法线方程为：$y=\frac{\sqrt{2}-1}{2}-(2+\sqrt{2})\left(x-\frac{1}{2}\right)$

4. 设曲线的参数方程为$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$. (1) 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；(2) 证明该曲线的切线被坐标轴所截的长度为一常量.

证 (1) $x'(t)=-3a\cos^2 t\cdot\sin t$，$y'(t)=3a\sin^2 t\cdot\cos t$，$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\tan t$

(2) 曲线上在与$t\neq 0$相对应的点$(a\cos^3 t,a\sin^3 t)$处有切线，切线方程为

$$y=a\sin^3 t-\tan t\cdot(x-a\cos^3 t),$$

它与x轴的交点为$(a\cos t,0)$，与y轴的交点为$(0,a\sin t)$，切线被坐标轴所截长度为

$$\sqrt{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}=|a|$$

5. 证明：半圆$r=2a\sin\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right](a>0)$上任一点的切线与向径的夹角等于向径的极角.

证 当$\theta\neq\frac{\pi}{4}$时，曲线上点(r,θ)处切线的斜率为

$$k=\tan\alpha=\frac{(2a\sin\theta\sin\theta)'}{(2a\sin\theta\cos\theta)'}=\tan 2\theta$$

其中α为切线倾角，由于$\alpha,2\theta\in[0,\pi]$，所以由上式可得$\alpha=2\theta$.当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，该半圆在$(\sqrt{2}a,\frac{\pi}{4})$处有竖直切线，此时$\alpha=\frac{\pi}{2}=2\theta$仍成立. 设切线与向径的夹角等于$\varphi$，则$\alpha=\theta+\varphi$，于是$\varphi=\theta$.证毕.

6. 证明：两条心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 与 $r=a(1-\cos\theta)$ 在交点处的切线相互垂直.

证　交点为 $(a,\pm\frac{\pi}{2})$，则两条曲线在该点处的切线的斜率分别为

$$k_1=\frac{[a(1+\cos\theta)\sin\theta]'}{[a(1+\cos\theta)\cos\theta]'}=-\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta}{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}=1$$

$$k_2=\frac{[a(1-\cos\theta)\sin\theta]'}{[a(1-\cos\theta)\cos\theta]'}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta+\cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta}=-1$$

$\Rightarrow k_1\cdot k_2=-1\Rightarrow$ 两切线垂直.

7. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可微，$f'(a)<0,f'(b)<0$，且 $f(a)\le f(b)$.证明：f' 在 (a,b) 内至少有两个零点.

证　f 在 $[a,b]$ 上可微，从而在 $[a,b]$ 上连续，所以 f 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值. 由 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0\Rightarrow$ 存在点 $a+h(a<a+h<b)$ 使得 $f(a+h)<f(a)$，所以 $f(a)$ 不为 f 的最小值. 由 $f'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\Rightarrow$ 存在点 $b-\delta(a<b-\delta<b)$ 使得 $f(b-\delta)>f(b)$，所以 $f(b)$ 不为 f 的最大值.故 f 的最大值点 x_1 和最小值点 x_2 都在 (a,b) 内，它们必为 f 的极值点，由费马定理，$f'(x_1)=0,f'(x_2)=0$.又由

$$f(x_1)\le f(a+h)<f(a)\le f(b)<f(b-\delta)\le f(x_2)$$

知 $x_1\ne x_2$，所以 f' 在 (a,b) 内至少有两个零点.

8. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可微，证明：f' 在 (a,b) 内不可能有第一类间断点.

证　若 x_0 是 f' 在 (a,b) 内的第一类间断点，记 $c=f'(x_0-0),d=f'(x_0+0)$，则 c,d 和 $f'(x_0)$ 中至少有两个不相等.不妨设 $c\ne d$，且不妨设 $c<d$..取 c',d' 使得 $c<c'<d'<d$,则由 $c=f'(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)<c'$，和极限的局部性质，知道存在 $[x_0-\delta_1,x_0)$，使得

$$f'(x) < c', \forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0) \tag{5.1}$$

类似地，由 $d = f'(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) > d' \Rightarrow$ 存在 $(x_0, x_0 + \delta_2]$，使得

$$f'(x) > d', \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_2] \tag{5.2}$$

那么对 $\alpha \in (c', d'), \alpha \neq f'(x_0)$，有

$$f'(x_0 - \delta_1) < c' < \alpha < d' < f(x_0 + \delta_2)$$

由导数介值定理，应该存在 $\xi \in (x_0 + \delta_1, x_0 + \delta_2)$ 使得 $f'(\xi) = \alpha$，但这与和以及

$f'(\xi) = \alpha \neq f'(x_0)$ 矛盾.

习题 5.4

1. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y = \sin ax + \cos bx$；

解 $y' = a\cos ax - b\sin bx \Rightarrow$， $y'' = -a^2 \sin ax - b^2 \cos bx$

(2) $y = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$.

解 $y' = \dfrac{2x(x+1) - 3(x^2+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{-x^2 + 2x - 3}{(x+1)^4} \Rightarrow y'' = \dfrac{2x^2 - 8x + 14}{(x+1)^5}$

2. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$；

解

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) \Rightarrow y^{(n)} = \frac{1}{2}\left[\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

(2) $y = \dfrac{x^n}{1-x}$；

解 $y=\dfrac{x^n-1+1}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}-(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)\Rightarrow y^{(n)}=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(3) $y=e^x\cos x$；

解 $y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$y''=\sqrt{2}e^x\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=(\sqrt{2})^2e^x\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow y^{(n)}=(\sqrt{2})^ne^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

(4) $y=(x^2+2x+4)e^{-x}$.

解 $y'=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x+4)e^{-x}=-e^{-x}(x^2-2)$

$$y^{(n)}=(-1)^ne^{-x}\left[x^2-2(n-1)x+n^2-3n+4\right],n\geq 2$$

3. 设函数 f 存在三阶导数，求下列函数的二阶导数和三阶导数 y''， y''' ：

(1) $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ；

解 $y'=-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow y''=\frac{2f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}+\frac{f''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4},y'''=\frac{-6f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4}-\frac{6f''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^5}-\frac{f'''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^6}$$

(2) $y=f(\ln x)$.

解 $y'=\dfrac{1}{x}f'(\ln x)$

$$\Rightarrow y''=\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2},y''=\frac{f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)}{x^3}$$

4. 设 $y=\arctan x$.

(1) 证明：该函数满足方程 $(1+x^2)y''+2xy'=0$；

证 $y'=\dfrac{1}{1+x^2},y''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\Rightarrow(1+x^2)y''+2xy'=-\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}=0$

(2) 求 $y^{(n)}\big|_{x=0}$.

解　由(1)的证明中可得 $y'(0)=1, y''(0)=0$，在(1)中的方程两边求 n 阶导，

得

$$y^{(n+2)}\cdot(1+x^2)+ny^{(n+1)}\cdot 2x+\frac{n(n+1)}{2}y^{(n)}\cdot 2+y^{(n+1)}\cdot 2x+ny^{(n)}\cdot 2=0$$

$\Rightarrow y^{(n+2)}(0)+n(n+1)y^{(n)}(0)=0 \Rightarrow y^{(n+2)}(0)=-n(n+1)y^{(n)}(0)$，由此得到

$$y^{(4)}(0)=-2\cdot 3y''(0)=0, y^{(6)}(0)=-6\cdot 7y^{(4)}(0)=0,\cdots y^{(2m)}(0)=0(m\geq 1)$$

$$y^{(3)}(0)=-2\cdot 1y'(0)=-2!, y^{(5)}(0)=-4\cdot 3y^{(3)}(0)=4!,\cdots y^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!(m\geq 0)$$

即

$$y^{(n)}\big|_{x=0}=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^m(2m)!, & n=2m+1\end{cases} \quad m=0,1,2,\cdots$$

5.　求下列函数的 n 阶微分：

(1)　$y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

解　$y^{(n)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right]\Rightarrow\quad d^n y=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right]dx^n$

(2)　$y=\dfrac{x^n}{1-x}$；

解　$y^{(n)}=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\Rightarrow d^n y=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}dx^n$

(3)　$y=e^x\sin x$；

解　$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)\Rightarrow d^n y=(\sqrt{2})^n e^x\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)dx^n$

(4)　$y=(x^2+2x+4)e^{-x}$.

解　$y^{(n)}=(-1)^n e^{-x}\left[x^2-2(n-1)x+n^2-3n+4\right],(n\geq 2)\Rightarrow$

$d^n y=(-1)^n e^{-x}\left[x^2-2(n-1)x+n^2-3n+4\right]dx^n$

6. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$：

（1）$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2}, \\ y=1-t; \end{cases}$

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1}{t},\Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy}{dt}\left(\dfrac{-1}{t}\right)/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t^3}$

(2) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\dfrac{t}{2}\Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy}{dt}\left(\cot\dfrac{t}{2}\right)/\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{4a}csc^4\dfrac{t}{2}$

(3) $\begin{cases} x=3e^{-t}, \\ y=2te^{t}; \end{cases}$

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2(1+t)e^{t}}{-3e^{-t}}\Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy}{dt}\left(\dfrac{2(1+t)e^{2t}}{-3}\right)/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{9}(2t+3)e^{3t}$

(4) $\begin{cases} x=f'(t), \\ y=tf'(t)-f(t), \end{cases}(f''(t)\neq\quad).$

解 $\dfrac{dy}{dx}=t,\Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy}{dt}(t)/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{f''(t)}$

7. 设$u(x)=\ln x$， $v(x)=e^x$， 求$\mathrm{d}^3(uv)$和$\mathrm{d}^3\left(\dfrac{u}{v}\right)$.

解 $(uv)^{(3)}=(e^x\ln x)^{(3)}=e^x\ln x+3e^x\cdot\dfrac{1}{x}+3e^x\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+e^x\cdot\dfrac{2}{x^3}$

$$\Rightarrow d^3(uv)=\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x}+\ln x\right)e^x dx^3;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{(3)}=(e^{-x}\ln x)^{(3)}=-e^x\ln x+3e^{-x}\cdot\frac{1}{x}-3e^{-x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+e^{-x}\cdot\frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow d^3\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\ln x\right)e^{-x}dx^3$$

8. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$ 的高阶导数.

解 容易得到 $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x>0 \\ -2x, & x<0 \end{cases}$, 又

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x}=0, f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2-0}{x}=0 \Rightarrow f'(0)=0,$$

所以 $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -2x, & x<0 \end{cases}$,

又 $f''(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ -2, & x<0 \end{cases}$，而

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-0}{x}=2, f_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x-0}{x}=-2$$

$\Rightarrow f''(0)$ 不存在，即

$$f''(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ \text{不存在}, & x=0 \\ -2, & x<0 \end{cases};$$

由此得到 $f^{(n)}(x)=0,(n\ge 3, x\ne 0)$

总练习题五

1.求 $f(x)=e^{|x^3|}$ 的导数.

解 当 $x>0$ 时，$f'(x)=3x^2e^{x^3}$ 当 $x<0$ 时，$f'(x)=-3x^2e^{-x^3}$，而

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^3}-1}{x}=\left(e^{x^3}\right)'\Big|_{x=0}=3x^2e^{x^3}\Big|_{x=0}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x^3}-1}{x}=\left(e^{-x^3}\right)'\Big|_{x=0}=-3x^2e^{-x^3}\Big|_{x=0}=0$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2e^{x^3},x>0\\0, \quad x=0\\-3x^2e^{-x^3},x<0\end{cases}$$

2.设函数 f 可以任意次可导，求 $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(3)}$.

解 $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(1)}=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$，由莱布尼茨公式，有

$$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(3)}=-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)-2\cdot\frac{-2}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x^2}\left[f''\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]'$$

$$=-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(3)}=-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. 设 $x=1-t,\ y=1-t^2$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{-2t}{-1}=2t\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(2t)/\frac{dx}{dt}=-2$

4．设

$$f(x)=\begin{cases}\sin^\alpha x, x\text{为有理数，}\\0, \quad x\text{为无理数，}\end{cases}$$

（$\alpha\geq1$），讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的可导性.

解 当 $\alpha=1$ 时，取 x_n 为无理数，并令 $x_n\to0(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{0-0}{x_n}=0$$

取 y_n 为有理数，并令 $y_n\to0(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin y_n}{y_n}=1$$

所以 $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 不存在.

当 $\alpha>1$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\frac{|\sin x|}{|x|}\cdot|\sin x|^{\alpha-1}\to 0(x\to 0)$$

所以 $f'(0)=0$.

5．已知 a,b 为多项式函数 $P(x)$ 的两个相邻的根 $(a<b)$，且都不是重根，即 $P(x)=(x-a)(x-b)Q(x), Q(a)\cdot Q(b)\neq 0$.证明:

（1）$Q(a)\cdot Q(b)>0$;

（2）存在 $\xi\in(a,b)$，使 $P'(\xi)=0$.

证　由 $P(x)=(x-a)(x-b)Q(x), Q(a)\cdot Q(b)\neq 0$ 可知

$$P'(a)=(a-b)Q(a), P'(b)=(b-a)Q(b)\Rightarrow P'(a)P'(b)=-(b-a)^2Q(a)Q(b)$$

若 $Q(a)\cdot Q(b)<0$，则 $P'(a)P'(b)>0$，即 $P'(a)$ 与 $P'(b)$ 同号．若 $P'(a)>0, P'(b)>0$，则由导数定义和极限的局部性质，知道在 a 的右侧邻域内存在 $x_1: a<x_1<b$ 使得

$$\frac{P(x_1)-P(a)}{x_1-a}=\frac{P(x_1)}{x_1-a}>0,\Rightarrow P(x_1)>0$$

在 b 的左侧邻域内存在 $x_2: x_1<x_2<b$ 使得

$$\frac{P(x_2)-P(b)}{x_2-b}=\frac{P(x_2)}{x_2-b}>0,\Rightarrow P(x_2)<0$$

这样，由介值定理在 (x_1,x_2) 内有 $P(x)$ 的根，这与 a,b 是 $P(x)$ 的相邻根相矛盾.同样，若 $P'(a)>0, P'(b)>0$，也将导致矛盾.所以必有 $Q(a)\cdot Q(b)>0$.这证明了(1).

对 $P(x)$ 在 $[a,b]$ 上用罗尔定理，即知存在 $\xi\in(a,b)$，使 $P'(\xi)=0$，这证明了(2).

6.　设 $g(x)=f(x)+x$，在点 $x=0$ 的某邻域内有 $|f(x)|\le x^2$，证明:

(1)　$f(x)$ 在点 $x=0$ 可导;

(2)　$g(x)$ 在 $x=0$ 处无极值.

证　由已知有 $f(0)=0$，且由 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|x|$ 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可

导,且 $f'(0)=0$.这证明了(1).

由于 $g'(0)=1+f'(0)=1\neq 0$，所以由费马定理知道 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无极值，这证明了(2).证毕.

7．证明：函数 f 在点 x_0 内可微的充分必要条件是 f 在点 x_0 的某邻域内可以写成为

$$f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0),$$

其中 $\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续(上述充分必要条件称为导数的 Carathéodory 定义).

证　必要性 因为 f 在点 x_0 内可微，所以 $f'(x_0)$ 存在，令

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}$$

则 $\varphi(x_0)=f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$，即 φ 在 x_0 处连续,且当 $x\neq x_0$ 时，有

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Rightarrow f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0)$$

后一式子在 $x=x_0$ 时也成立.这就证明了必要性.

充分性 若在点 x_0 的某邻域内有 $f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0)$，其中 $\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，则当 $x\neq x_0$ 时有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\varphi(x)$，于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$$

这表明 f 在点 x_0 内可导，从而可微.充分性得证.证毕.

8.　设函数 $y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad (a\leq t\leq b)$$

确定, 其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $a\leq t\leq b$ 上二阶可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$.试求 y 作为 x 的函数的二阶微分.

解　由于 $\varphi'(t)\neq 0, a\leq t\leq b$，所以 $x=\varphi(t)$ 在 $a\leq t\leq b$ 上有可导的反函数

$t=\varphi^{-1}(x)$ 且

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\varphi'(t)}$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}$$

$$\Rightarrow d^2y=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}dx^2$$

9. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{n+1}\sin(\ln|x|), x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}(n\in\mathrm{N}_+)$.求证 f 在 $x=0$ 处有直到 n 阶导数,而 $n+1$ 阶导数不存在.

证　先证 $f'(0)$ 存在. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}\sin(\ln|x|)-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^n\sin(\ln|x|)$$

由于 $\sin(\ln|x|)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内是有界量，所有上式极限为 0，即 $f'(0)=0$. 进一步，可得

$$f'(x)=\begin{cases}x^n\left[(n+1)\sin(\ln|x|)+\cos(\ln|x|)\right], x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$$

由此可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}\left[(n+1)\sin(\ln|x|)+\cos(\ln|x|)\right]$$

同理可得 $f''(0)=0$. 而且有

$$f''(x)=\begin{cases}x^{n-1}\left[A_2\sin(\ln|x|)+B_2\cos(\ln|x|)\right], x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$$

其中 A_2,B_2 为正常数.以此类推，可得

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}x\left[A_n\sin(\ln|x|)+B_n\cos(\ln|x|)\right], x\neq 0,\\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x=0.\end{cases}$$

其中 A_n,B_n 为与仅与 n 有关的正常数.由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left[A_n\sin(\ln|x|)+B_n\cos(\ln|x|)\right]$$

而

$$A_n\sin(\ln|x|)+B_n\cos(\ln|x|)=\sqrt{A_n^{\ 2}+B_n^{\ 2}}\sin(\ln|x|+\theta_n)$$

其中 $\theta_n=\arctan\dfrac{B_n}{A_n}$，当 $x\to 0$ 时，上式不存在极限. 所以 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

10. 证明函数 $f(x)=\begin{cases}0, \quad x\le 0,\\ e^{-\frac{1}{x}}, x>0.\end{cases}$ 有任意阶导数.

证 先求 $f'(x)$. 当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$，当 $x<0$ 时，$f'(x)=0$，在 $x=0$ 处，有

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}$$

这里先指出在 $(0,+\infty)$ 上有 $e^t>\dfrac{t^2}{2}$，从而 $\dfrac{t}{e^t}<\dfrac{2}{t}\to 0(t\to+\infty)$，于是 $f'_+(0)=0$.

又

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{0-0}{x}=0$，所以 $f'(0)=0$. 即

$$f'(x)=\begin{cases}0, \quad x\le 0,\\ \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, x>0.\end{cases}$$

一般地，若已知对任意正整数 n 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x}}=0$，则可得到

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}0, \quad x\le 0,\\ P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, x>0.\end{cases}$$

其中 $P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 是关于 $\dfrac{1}{x}$ 的 $2n$ 次多项式.由此可得当 $x>0$ 时，$f^{(n+1)}(x)=P_{n+1}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$，

而

$$f^{(n+1)}{}_{+}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{tP_{n+1}(t)}{e^t}=0$$

由数学归纳法，结论得证.下面证明对任意正整数 n 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x}}=0$,也即 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^n}{e^t}=0$ (注：这一结论也可由第六章的洛必达法则证明).

令 $g(t)=t-(n+1)\ln t+(n+1)\ln n$，则 $g'(t)=1-\frac{n}{t}$，在 $t>n$ 时，总有 $g'(t)>0$，所以由定理 5.10 知道函数 $g(t)$ 在 $[n,+\infty)$ 上严格单调，于是 $t>n$ 时有

$$g(t)=t-(n+1)\ln t+(n+1)\ln n>g(n)=n>0$$

即 $e^t>\frac{t^{n+1}}{n^{n+1}}$,从而 $0<\frac{t^n}{e^t}<\frac{n^{n+1}}{t}\to 0(t\to+\infty)$，这证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^n}{e^t}=0$.证毕.

11. 设函数 f 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上连续可微（即可导且导函数 f' 连续)，在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内二阶可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.证明：存在 $c\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，使得 $f''(c)=2f(c)f'(c)$.

证　令 $F(x)=f'(x)-f^2(x)$，则 F 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内可导.若题目结论不对，则 F' 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内无零点，根据达布定理，F' 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内恒大于 0，或者恒小于 0.不妨设 F' 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内恒大于 0,则 F 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上严格单调递增，于是对任意 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，有

$$F(x)=f'(x)-f^2(x)>F(0)=f'(0)-f^2(0)=1$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}>1$$

$$\Rightarrow\left[\arctan f(x)-x\right]'>0$$

所以函数$g(x)=\arctan f(x)-x$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上严格递增，由连续性，可得$g(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上严格递增,于是

$$g(x)=\arctan f(x)-x>g(0)=0$$

$$\Rightarrow \arctan f(x)>x$$

令$x=\dfrac{\pi}{4}$，则得$\dfrac{\pi}{4}=\arctan 1=\arctan f(\dfrac{\pi}{4})>\dfrac{\pi}{4}$，矛盾.

Equation Chapter 1 Section 1第六章习题详解

习题 6.1

1. 对函数 $f(x)=\ln x$ 在 $[1,e]$ 上应用拉格朗日中值定理，试找出使得

$$f(e)-f(1)=f'(\xi)(e-1)$$

成立的 $(1,e)$ 中的点 ξ.

解： $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ ， $f(e)-f(1)=1$

所以 $f'(\xi)=\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{1}{e-1}$ ，于是 $\xi=e-1$.

2. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，试用罗尔中值定理说明：方程 $f'(x)=0$ 有多少个根？它们分别在哪些区间上？

解：因为 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，所以由罗尔中值定理知道：$f'(x)$ 至少有三个零点，又 $f'(x)$ 为三次多项式，所以 $f'(x)$ 只有三个零点，分别在

$(1,2),(2,3),(3,4)$ 三个区间上。

3. 证明下列不等式：

(1) $e^x>1+x,x\neq 0$;

(2) $|x|\le|\tan x|,x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(3) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$;

(4) $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}, 0<a<b$.

证明：（1）设 $f(t)=e^t$，显然函数在 $[0,x]$, 或 $([x,0])$ 满足拉格朗日中值定理的条件，

故存在一个 ξ 介入 0 与 x 之间，使得 $f'(\xi)=e^{\xi}=\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=\dfrac{e^x-1}{x}>1$ ，整理即得 $e^x>1+x,x\neq 0$。

（2）设 $f(t)=\tan t$ ，显然函数在$[0,x]$,或$([x,0])$（这里$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ）

满足拉格朗日中值定理的条件，故存在一个ξ介入0与x之间，使得

$f^{'}(\xi)=\sec^2\xi=\frac{\tan x-\tan 0}{x-0}=\frac{\tan x}{x}\geq 1$，因而$|x|\leq|\tan x|, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

（3）设$f(t)=\sin t$，显然函数在$[y,x]$,或$([x,y])$（$x\neq y$）上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在ξ介于x与y之间，使得$\left|f^{'}(\xi)\right|=\left|\cos\xi\right|=\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|<1$，于是$|\sin x-\sin y|<|x-y|\,(x\neq y)$.又$x=y$时等式成立，因而$|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$.

（4）设$f(t)=\ln t$，显然函数在$[a,b],(a>0)$上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在ξ介于a,b 之间，使得$f^{'}(\xi)=\frac{1}{\xi}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$，因为$\frac{1}{a}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}$ ，所以$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

4. 证明下列恒等式:

(1) $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$;

(2) $\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}, x\in(0,1)$.

证明:（1）设$f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x$ ，则有$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$，因而对任意$x\in\mathrm{R}$ 有$f(x)=C$，又$\arctan 1+\operatorname{arccot} 1=\frac{\pi}{2}$ ，所以$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$.

（2）令$f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，则$f'(x)\equiv 0\Rightarrow f(x)\equiv f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$.

5. 对函数$f(x)=x^2$, $g(x)=(1+x)^2$和区间$[0,1]$ 找出使得柯西中值定理成立的ξ.

解:由柯西中值定理:存在$\xi\in(0,1)$ ，使得$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}$，因而

$$\frac{2\xi}{2(1+\xi)}=\frac{\xi}{\xi+1}=\frac{1-0}{4-1}=\frac{1}{3}$$

故$\xi=\dfrac{1}{2}$.

6. 设函数f在点a处具有连续的二阶导数，证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

证明：设$g(x)=f(x)-f(x-h)$，并取绝对值充分小的h，使得$f''(x)$在$U(a;2|h|)$内有定义，则由拉格朗日中值定理知

$$\begin{aligned}
&f(a+h)-f(a-h)-2f(a)\\
&=[f(a+h)-f(a)]-[f(a)-f(a-h)]\\
&=g(a+h)-g(a)\\
&=g'(\xi_1)h\\
&=[f'(\xi_1)-f'(\xi_1-h)]h\\
&=f''(\xi)h^2
\end{aligned}$$

其中ξ_1在a与$a+h$之间，ξ在ξ_1与ξ_1-h 之间，因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a+h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}f''(\xi)$$

注意到当$h\to 0$ 时有$\xi\to a$，且$f''(x)$ 在点a连续，所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)\ .$$

7. 设$f(x)$在(a,b)内可导，$f(a+0)$和$f(b-0)$存在且相等，证明：存在$\xi\in(a,b)$ 使得$f'(\xi)=0$

证明：补充定义$f(a)=f(a+0)$和$f(b)=f(b-0)$，则函数$f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日定理.由拉格朗日定理可得存在$\xi\in(a,b)$ 使得$f'(\xi)=0$.

8. 证明：存在$\xi\in(1,e)$ ，使得$\sin 1=\cos\ln\xi$.

证明：设$f(x)=\sin\ln x$，$g(x)=\ln x$

则对$f(x)=\sin\ln x, g(x)$在$[1,e]$上用柯西中值定理，有

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}=\frac{\sin\ln e-\sin\ln 1}{\ln e-\ln 1}=\frac{\sin 1}{1}\quad ,$$

故有$\sin 1=\cos\ln\xi$.

9. 设函数f在$[a,b]$上连续($0<a<b$), 在(a,b)内可导, 证明: 存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\xi}=f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

证明: 对$f(x)$和$g(x)=\ln x$在$[a,b]$上用柯西中值定理, 则存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=\xi f'(\xi)$$

整理，得$\dfrac{f(b)-f(a)}{\xi}=f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

10. 设函数f在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)\neq 0$.证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{(b-a)e^\eta}.$$

证明：分别对$f(x)$和$g(x)=x$与$f(x)$和$g(x)=e^x$ 在$[a,b]$上应用柯西中值定理得到，存在$\xi\in(a,b),\eta\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad \frac{f'(\eta)}{e^\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}$$

比较可得$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{(b-a)e^\eta}$

习题 6.2

1. 求下列不定式极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+7}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right]$;

(8) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$;

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x^2)}$;

(12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+7}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{\tan x\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin x}=1$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0} e^t=1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}=e^{\frac{-1}{6}}$

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{6x\sqrt{1-x^2}-\frac{3x^3}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{6-9x^2}=-\dfrac{1}{6}$.

（7） $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right]=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=e\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{e}{2}$$

(8) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{(\ln x)^{-1}}=-\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{1}{x}}\cdot(\ln x)^2=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2\ln x}{-x}=0$；

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\frac{2}{\pi}\arctan x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arctan x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}}{\frac{-1}{x^2}}}=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{12x}=\frac{1}{3}$$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x\sqrt{1+2x}-1)}{2x\sqrt{1+2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x\sqrt{1+2x}-1)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sqrt{1+2x}+\frac{e^x}{\sqrt{1+2x}}}{2}=1$$

(12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\tan 2x\ln\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-2\csc^2 2x}}=e^{-1}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x-\sin x}{x}, x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$ 求 $f''(0)$.

解：$x\neq 0$ 时，$f'(x)=1-\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$；$x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\sin x}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0\ ,$$

所以

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\cos x+\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

3. 证明：若函数 f 和 g 在 x_0 的某右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$.若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

证明: 任给 $\varepsilon>0$, 因为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, 所以存在 $\delta_1>0$ 使得 $U_+^\circ(x_0;\delta_1)\subset U_+^\circ(x_0)$,

且对一切 $x\in U_+^\circ(x_0;\delta_1)$ 有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{6.1}$$

任取 $a\in U_+^\circ(x_0;\delta_1)$，则

$$\left|\frac{f'(a)}{g'(a)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{6.2}$$

设 $x_0<x<a$，对函数 f 和 g 在 $[x,a]$ 上用柯西中值定理，存在 $\xi\in(x,a)\subset U_+^\circ(x_0;\delta_1)$ ，使得（应用）

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-A\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{6.3}$$

又对函数 $f(a)g(x)-f(x)g(a)$ 和 $g(x)$ 在 $[x,a]$ 上用柯西中值定理，存在 $\eta\in(x,a)\subset U_+^\circ(x_0;\delta_1)$ ，使得

$$\frac{f(a)g(x)-f(x)g(a)}{[g(x)-g(a)]}=\frac{f(a)g'(\eta)-f'(\eta)g(a)}{g'(\eta)}$$

于是注意，有

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\left|\frac{f(a)g(x)-f(x)g(a)}{g(x)[g(x)-g(a)]}\right|=\left|\frac{f(a)g'(\eta)-f'(\eta)g(a)}{g(x)g'(\eta)}\right|$$

$$=\frac{1}{|g(x)|}\left|f(a)-\frac{f'(\eta)g(a)}{g'(\eta)}\right|\leq\frac{|f(a)|+(|A|+\frac{\varepsilon}{2})|g(a)|}{|g(x)|}$$

由于 $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$，所以存在 $\delta=\delta(a,\varepsilon)>0,\delta<a-x_0$，使得对一切 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le\frac{|f(a)|+(|A|+\frac{\varepsilon}{2})|g(a)|}{|g(x)|}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{6.4}$$

于是，由，和，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|\le\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-A\right|<\varepsilon$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, x\ne 0,\\ e, \quad x=0.\end{cases}$$

证明 f 在 $x=0$ 处连续.

证明：因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=f(0)$ ，所以 f 在 $x=0$ 处连续.

5. 设 $g(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $g(0)=1$，令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, x\ne 0,\\ A, \quad x=0.\end{cases}$$

(1) 试确定 A 的值，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

(2) 试求 $f'(0)$ 并证明 $f'(x)$ 连续.

解：（1）因为 $g(x)$ 具有连续的二阶导数，所以 $\lim\limits_{x\to 0}[g'(x)+\sin x]=g'(0)$，于是

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}[g'(x)+\sin x]=g'(0) \text{ ，}$$

所以当 $A=g'(0)$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（2）

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-cosx}{x}-g'(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\cos x}{2}=\frac{g''(0)+1}{2}$$

而当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{[g'(x)+\sin x]x-[g(x)-\cos x]}{x^2}$，显然它在不为 0 的任何点处都连续；又

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{[g'(x)+\sin x]x-[g(x)-\cos x]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{[g''(x)+\cos x]x+[g'(x)+\sin x]-[g'(x)+\sin x]}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{[g''(x)+\cos x]}{2}$$
$$=\frac{g''(0)+1}{2}=f'(0)$$

即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处也连续，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

习题 6.3

1. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处带 Peano 型余项的泰勒公式.

解：$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots(-1)^n(x-1)^n+o((x-1)^n)$

2. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 带拉格朗日型余项的麦克劳林公式.

解：$\frac{1}{x+1}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\frac{(-1)^{n+1}}{(\xi+1)^{n+2}}x^{n+1},(0<|\xi|<|x|)$

3. 求下列函数的麦克劳林公式（展开到 x^4）：

(1) $f(x)=e^x\ln(1+x)$；

(2) $f(x)=\sqrt{\cos x}$

(3) $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

解：（1）求出 $f^{(k)}(0), k=0,1,2,3,4$，代入泰勒公式即可，或如下利用已知泰勒公式：

$$e^x\ln(1+x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

（2）求出 $f^{(k)}(0), k=0,1,2,3,4$，代入泰勒公式即可，或如下利用已知泰勒公式：

因为 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, 而 $\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3!\cdot 2^3}+o(x^4)$，所以

$$\cos x=1-2\left[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3!\cdot 8}+o(x^4)\right]^2=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4\cdot 3!}x^4+o(x^5)$$

于是利用 $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$，得

$$\sqrt{\cos x}=\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4\cdot 3!}x^4+o(x^5)\right]^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4\cdot 3!}x^4+o(x^5)\right]+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2!}\left[-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)\right]^2+o(x^4)$$
$$=1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4+o(x^4)$$

（3）求出 $f^{(k)}(0), k=0,1,2,3,4$，代入泰勒公式即可，或如下利用已知泰勒公式：

利用

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$$

和

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+o(x^4)$$

得

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3+\frac{1}{5!}x^4+o(x^4)}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3+\frac{1}{5!}x^4+o(x^4)\right)+\left(\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3+o(x^3)\right)^2-$$

$$-\left(\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+o(x^2)\right)^3+\left(\frac{1}{2!}x+o(x)\right)^4+o(x^4)$$

$$=1-\left(\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3+\frac{1}{5!}x^4+o(x^4)\right)+\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3!}x^3+(\frac{1}{36}+\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)+\left(\frac{1}{16}x^4+o(x)\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4}\right)x^2+\left(-\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{8}\right)x^3+\left(-\frac{1}{5!}+\frac{1}{36}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)x^4+o(x^4)$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+o(x^4)$$

或利用多项式的除法，用 $x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$ 去除 x 即可.

4. 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{2x^3}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^2(e^x-x-1)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x+e^{x^2}-3}{x^4}$

解:（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))}{2x^3}=\frac{1}{12}$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^2(e^x-x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4))-\frac{1}{2}x^2}{x^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)+-x-1)}=-\frac{1}{12}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))-x(1+x)}{x^3}$

$=\frac{1}{3}$

（4）$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x+e^{x^2}-3}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4))+1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)-3}{x^4}$

$=\frac{7}{12}$

5. 计算：

(1) 数e （精确到10^{-9}）；　　　　(2) $\lg 11$（精确到10^{-5}）.

解：（1）$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$

则$e=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$ ，

因为当$n=12$时，

$$0<\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}<\frac{e^{1}}{(n+1)!}<\frac{4}{(n+1)!}=\frac{4}{13!}<10^{-9},\quad (0<\xi<1)$$

这时$e\approx 2.718281828$.

（2）$\lg 11=\lg(10+1)=\lg 10(1+\frac{1}{10})=1+\lg(1+\frac{1}{10})$ ，

利用

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}$$

这里$0<\theta<1$ ，

当$x=\frac{1}{10}$，$n=5$ 时，可得到$\lg 11\approx 1.04139$.

6. 试确定常数a,b使得函数$f(x)=\sin x-\frac{ax}{1+bx^2}$在$x\to 0$时是关于$x$的最高阶的无穷小量，求这个最高阶的阶数.

解：由

$$\begin{aligned}f(x)&=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^6)-ax\left(1-bx^2+b^2x^4+o(x^4)\right)\\&=(1-a)x-\left(\frac{1}{3!}-ab\right)x^3+\left(\frac{1}{5!}-ab^2\right)x^5+o(x^5)\end{aligned}$$

令$1-a=0,\frac{1}{3!}-ab=0$，得$a=1,b=\frac{1}{6}$,最高阶数为 5.

7. 设$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$.证明：(1) 若$f''(x)$连续且$f''(a)\neq 0$，则$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$；(2) 若$f'''(x)$连续且$f''(a)=0,f'''(a)\neq 0$,则$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

证明:（1）由泰勒公式，有

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+o(h^2)\quad(0<\theta<1)\quad ,$$

又 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$，两式相减得到:

$$[f'(a+\theta h)-f'(a)]h=\frac{f''(a)}{2}h^2+o(h^2)$$

$$\Rightarrow\theta=\left(\frac{f''(a)}{2}+\frac{o(h^2)}{h^2}\right)/\left(\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h}\right)$$

令 $h\to 0$，取极限，注意 $f''(a)\neq 0$，得到

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{\frac{f''(a)}{2}}{f''(a)}=\frac{1}{2}.$$

（2）此时，由泰勒公式得

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f'''(a)}{3!}h^3+o(h^3)\quad(0<\theta<1)$$

又 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$，两式相减得到:

$$[f'(a+\theta h)-f'(a)]h=\frac{f'''(a)}{3!}h^3+o(h^3)\ ,$$

$$\Rightarrow\theta^2=\left(\frac{f'''(a)}{3!}+\frac{o(h^3)}{h^3}\right)/\left(\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta^2h^2}\right)$$

记 $t=\theta h$，当 $h\to 0$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta^2h^2}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(a+t)-f'(a)}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f''(a+t)}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{f'''(a+t)}{2}=\frac{f'''(a)}{2}\neq 0$$

故

$$\lim_{h\to 0}\theta^2=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'''(a)}{3!}+\frac{o(h^3)}{h^3}\right)/\left(\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta^2h^2}\right)=\frac{f'''(a)}{3!}/\frac{f'''(a)}{2}=\frac{1}{3}$$

从而 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. 利用带拉格朗日余项的泰勒公式证明: e 是无理数.

证明：$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$

其中　ξ 介于 0 与 x 之间.当 $x=1$ 时，有 $e=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$

于是得：

$$n!e-(n!+n!+3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n+\cdots+n+1)=\frac{e^{\xi}}{n+1} \tag{6.5}$$

若 $e=\dfrac{p}{q}$ $(p,q$ 为正整数)，则当 $n>q$ 时， $n!e$ 为正整数，从而式左边为整数，但是当 $n\ge 2$ 时，由 $\dfrac{e^{\xi}}{n+1}<\dfrac{e}{n+1}<\dfrac{3}{n+1}$ 知右边为非整数，矛盾。从而 e 是无理数。

习题 6.4

1. 求下列函数的极值:

(1) $f(x)=2x^3-x^4$;

(2) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(3) $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$;

(4) $f(x)=|x(x^2-1)|$;

(5) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0, \\ 0, \quad x=0. \end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases} 2^x,\ x<0, \\ x+1, x\ge 0. \end{cases}$

解:（1）因为 $f'(x)=6x^2-4x^3=2x^2(3-2x)$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=0,x=\dfrac{3}{2}$.由 $f''(x)=12x-12x^2$ ， $f'''(x)=12-24x$，可得 $f''(0)=0, f''(\dfrac{3}{2})=-9$， $f'''(0)=12,$

根据极值的第二、第三判别法知道 $x=0$ 不是极值点, $x=\dfrac{3}{2}$ 是极大值点, 极大值 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{16}$.

（2）$f'(x)=\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=1,x=-1$.当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，当 $-1<x<1$ 时， $f'(x)>0$，当 $x>1$ 时， $f'(x)<0$，由函数极值的第一判别法知道：极小值 $f(-1)=-1$;极大值 $f(1)=1$.

(3) $f'(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$ $(x\neq 2)$，当 $x<2$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，由函数极值的第一判别法知道：极大值 $f(2)=1$.

(4) 由于在 $x=0$ 的邻域内 $f(x)\ge 0=f(0)$，所以 f 在 $x=0$ 处有极小值 $f(0)=0$.类似地，f 在 $x=\pm 1$ 处有极小值 $f(\pm 1)=0$.在 $x(x^2-1)>0$ 的点 x 处有 $f'(x)=3x^2-1, f''(x)=6x$，求得稳定点 $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}, f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-2\sqrt{3}<0$；在 $x(x^2-1)<0$ 的点 x 处有 $f'(x)=-3x^2+1, f''(x)=-6x$，求得稳定点 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}, f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-2\sqrt{3}<0$.所以 f 在 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 处有极大值 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

(5) 显然在 $x=0$ 的邻域内有 $f(x)\ge 0=f(0)$，所以 f 有极小值 $f(0)=0$；在 $x\ne 0$ 处有 $f'(x)=\frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$，$f$ 没有稳定点,所以在 $x\ne 0$ 处 f 没有极值点.

(6) 显然 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且在 $x<0$ 处，$f'(x)=2^x\ln 2>0$，在 $x>0$ 处 $f'(x)=1>0$，所以 f 严格单调，故 f 无极值.

2. 求下列函数在指定区域上的最值:

(1) $f(x)=x+\sqrt{1-x},[-8,1]$； (2) $f(x)=x^2e^{-x^2},[0,+\infty)$；

(3) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x,\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$； (4) $f(x)=\sqrt{x}\ln x,(0,+\infty)$；

解:（1）$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$，由 $f'(x)=0$ 得到 $x=\frac{3}{4}$，比较 $f(-8)=-5$，$f(1)=1$，$f(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$，得 $f_{\max}=\frac{5}{4}, f_{\min}=-5$；

(2) $f'(x)=(2x-2x^3)e^{-x^2}$，由 $f'(x)=0$ 得到 $x=\pm 1$，比较 $f(0)=0$，$f(1)=1/e$，$f(-1)=1/e$，得到 $f_{\max}=\frac{1}{e}, f_{\min}=0$.

(3) $f'(x)=3\sin x\cos x\cdot(\sin x-\cos x)$，由 $f'(x)=0$ 得到 $x=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$，比较 $f(\frac{\pi}{4})=0$，$f(\frac{\pi}{2})=1$，,得到 $f_{\max}=1, f_{\min}=0$；

(4) $f'(x)=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\quad(x>0)$，由 $f'(x)=0$ 得到唯一稳定点 $x=e^{-2}$，

$f''(e^{-2})=\dfrac{e}{2}>0$，所以 $f_{\min}=\dfrac{-2}{e}$，无最大值.

3. 若函数 f 在区间 I 上连续，且在 I 上有唯一的极值点 x_0.证明：若 x_0 是极大(小)值点，则 x_0 必是最大(小)值点.

证明：设 x_0 是 f 在区间 I 上唯一的极值点，且 x_0 是极大值点. 若 x_0 不是 f 在区间 I 的最大值点，则存在 $b\in I,b\neq x_0$，使得 $f(b)>f(x_0)$.不妨设 $x_0<b$.由于 f 在 $[x_0,b]$ 上连续，所以 f 必在 $[x_0,b]$ 上某点 x_1 取得最小值，由于 x_0 是极大值点，所以在 x_0 的右侧邻域内存在 $a:x_0<a<b$ 满足 $f(x_1)\le f(a)<f(x_0)<f(b)$，所以 $x_1\neq x_0,b$，即 $x_1\in(x_0,b)$，从而 x_1 点也必为极小值点，这与函数 f 在区间 I 上有唯一的极值点 x_0 矛盾，因而 x_0 必是最大值点.

4. 在半径为 R 的半圆内作内接梯形，使其底为直径，其他三边为圆的弦. 问怎样设计，才能使梯形的面积最大？

解：由题意可知半圆内接梯形为等腰梯形，设其另一底边长为 x，则梯形的高为 $\sqrt{R^2-\dfrac{x^2}{4}}$，梯形面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}(x+2R)\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}\quad(0<x<2R),$$

令

$$S'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}-\frac{1}{8}(x+2R)\frac{x}{\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}}=0,$$

得 $x=R$.所以当梯形的上底长等于 R，才能使梯形的面积最大.

5. 设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$x_1=-1$ 和 $x_2=2$ 分别是 $f(x)$ 的极大和极小值点，对应的极大和极小值分别为 8 和-19，求 a,b,c,d 的值.

解：$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，因为 $x_1=-1$ 和 $x_2=2$ 分别是 $f(x)$ 的极大和极小值点，所以由题意可得

$$\begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \\ -a+b-c+d=8 \\ 8a+4b+2c+d=-19 \end{cases}$$

解方程组得 $a=2,b=-3,c=-12,d=1$.

6. 确定下列函数的单调区间:

(1) $f(x)=3x-x^2$; (2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

解:(1) $f'(x)=3-2x$,则 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$ 为函数的单调增区间,$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 为函数的单调减区间。

(2) $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$,则函数在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 上单调增加,在 $[-1,0)\cup(0,1]$ 上减.

7. 利用单调性证明下列不等式:

(1) $\tan x > x-\dfrac{x^3}{3}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; (2) $\dfrac{2x}{\pi}>\sin x> x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

证明:(1) 设 $f(x)=\tan x-x+\dfrac{x^3}{3}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,则

$$f'(x)=\sec^2 x-1+x^2=\tan^2 x+x^2>0,$$

因而函数在给定区间上为单调增函数,于是 $\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2}), f(x)>f(0)=0$,整理可得 $\tan x > x-\dfrac{x^3}{3}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2) 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$,则 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{(x-\tan x)\cos x}{x^2}$,

记 $g(x)=x-\tan x$,则 $g'(x)=1-\sec^2 x<0, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$,因而 $g(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减,$\Rightarrow g(x)>g(0)=0$,因而 $f'(x)>0, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$,则函数 $f(x)$ 在区间

$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递增，于是 $f(x)=\frac{\sin x}{x}>f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi},x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以

$$\frac{2x}{\pi}>\sin x>x,x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right).$$

8. 证明定理 6.12：设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内无极值点.则 f 在区间 $[a,b]$ 上严格单调.

证明：设 $f(a)\le f(b)$.因为 f 在 $[a,b]$ 上连续，故 f 在 $[a,b]$ 上一定有最大值和最小值，如果最值点在 (a,b) 内，则该最值点必为极值点，所以由题设，此时必有

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)=f(a),\quad \max_{x\in[a,b]} f(x)=f(b)$$

且必有 $f(a)<f(b)$，否则 f 恒为常数，与 f 在 (a,b) 内无极值点矛盾.于是对 $\forall x\in(a,b)$ 有

$$f(a)<f(x)<f(b) \tag{6.6}$$

设 $a\le x_1<x_2\le b$，若 $x_1=a$ 或 $x_2=b$，则由可知 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立.

现在设 $a<x_1<x_2<b$，则 $f(a)<f(x_1)<f(b)$，由于 f 在 (x_1,b) 内也没有极值点，所以与上面的讨论同理可知 f 在 $[x_1,b]$ 上的最值仅在端点 x_1 和 b 处取得，于是

$$f(x_1)=\min_{x\in[x_1,b]} f(x)<f(x_2)<f(b)=\max_{x\in[x_1,b]} f(x)$$

即有 $f(x_1)<f(x_2)$.综上，即知 f 在 $[a,b]$ 上严格单调递增.

类似地，若 $f(a)\ge f(b)$，则可证 f 在 $[a,b]$ 上严格单调递减.证毕.

习题 6.5

1. 确定下列函数的凸性区间与拐点：

(1) $y=2x^3-3x^2-36x+25$； (2) $y=x+\frac{1}{x}$；

(3) $y=\ln(x^2+1)$； (4) $y=\frac{1}{1+x^2}$

解：(1) 凹区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$，凸区间 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，拐点 $\left(\frac{1}{2},\frac{13}{2}\right)$；

(2) 凹区间$\left(-\infty,0\right)$，凸区间$\left(0,+\infty\right)$，无拐点;

(3) 凹区间$\left(-\infty,-1\right)$，$\left(1,+\infty\right)$，凸区间$\left(-1,+1\right)$，拐点$\left(\pm1,\ln 2\right)$;

(4) 凹区间$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，凸区间$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$，拐点$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$

2. 问a和b为和值时，点$(1,3)$ 为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点.

解：设 $y=f(x)$，$f''(x)=6ax+2b$ ，于是由题意可得

$$\begin{cases} f''(1)=6a+2b=0 \\ f(1)=a+b=3 \end{cases}$$

解方程组得：$a=-\dfrac{3}{2}$,$b=\dfrac{9}{2}$.

3. 设$f(x)$与$g(x)$都是区间I上的凸函数，证明：

(1) $af(x)+bg(x)$也是区间I上的凸函数;

(2) $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$也是区间I上的凸函数.

证明：(1) 设x_1,x_2为任意两点，$\lambda\in(0,1)$ ，则由定理 6.19 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$
$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)$$

于是

$$af(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+bg(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda af(x_1)+(1-\lambda)af(x_2)+\lambda bg(x_1)+(1-\lambda)bg(x_2)$$
$$=\lambda(af(x_1)+bg(x_1))+(1-\lambda)(af(x_2)+bg(x_2))$$

由定理 6.19 知$af(x)+bg(x)$也是区间I上的凸函数;

（2）因为$F(x)=\dfrac{1}{2}[(f(x)+g(x))+\left|f(x)-g(x)\right|]$，由(1)知，只要证明:若$f$在区间$I$上凸，则$|f|$也在$I$上凸即可.设$x_1,x_2$为任意两点，$\lambda\in(0,1)$ ，则由定理 6.19 有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\le\lambda|f(x_1)|+(1-\lambda)|f(x_2)| \quad (6.7)$$

由上式还有

$$-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)\ge-\lambda|f(x_1)|-(1-\lambda)|f(x_2)|$$

即

$$-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge-\left(\lambda|f(x_1)|+(1-\lambda)|f(x_2)|\right) \quad (6.8)$$

由和得到

$$\left|f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\right|\le \lambda\,|f(x_1)|+(1-\lambda)\,|f(x_2)|$$

这就证明了函数$|f|$的凸性.

4. 证明：若函数f满足$f''(a)=0$，$f'''(a)\ne 0$，则a是曲线$y=f(x)$的拐点的横坐标.

证明：若$f'''(a)>0$，由于$f''(a)=0$，$f'''(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)-f''(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{x-a}>0$，和极限的保号性，知道存在$U^\circ(a;\delta)$使得当$x\in U^\circ(a;\delta)$时，有$\dfrac{f''(x)}{x-a}>0$，因而当$x\in U^\circ_+(a;\delta)$时，$f''(x)>0$，$x\in U^\circ_-(a;\delta)$时，$f''(x)<0$，故由曲线拐点的定义，知道$a$是曲线$y=f(x)$的拐点的横坐标.

5. 证明：若函数f在区间I_1和I_2上都是凸函数，且在区间$I_1\cap I_2$上也是凸函数，则f在$I_1\cup I_2$上也是凸函数.

证明：$I_1\cap I_2$不为空集，可设$I_1\cap I_2=[c,d]$.任意$a\in I_1\cup I_2$，令

$$F_a(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},x\in I_1\cup I_2-\{a\}$$

由定理 6.21，只要证明$F_a(x)$是$I_1\cup I_2-\{a\}$上的增函数即可.设$x_1,x_2\in I_1\cup I_2-\{a\}$，且$x_1<x_2$，以下分情况讨论.

1) $a\in I_1\cap I_2=[c,d]$.若$x_1,x_2\in I_1$，或$x_1,x_2\in I_1$，则由f在I_1和I_2上凸，利用定理 6.21，有

$$F_a(x_1)\le F_a(x_2).$$

若$x_1\in I_1$，$x_2\in I_2-I_1$，则$x_2>d$，于是

$$F_a(x_1)\le F_a(d)\le F_a(x_2)$$

2) $a\in I_1-I_1\cap I_2$.此时$a<c$.若$x_1,x_2\in I_1$，则显然有$F_a(x_1)\le F_a(x_2)$；若$x_1,x_2\in I_2-I_1$，则$d<x_1<x_2$，于是

6. 应用凸函数证明：对任意实数a,b 有$e^{\frac{a+b}{2}} \le \frac{1}{2}\left(e^a + e^b\right)$；

证明：设$f(x)=e^x$，则$f''(x)=e^x>0, x\in(-\infty,+\infty)$，故$f(x)$ 为$(-\infty,+\infty)$上凸函数，从而对$x_1=a, x_2=b, \lambda=\frac{1}{2}$，有

$$f(\frac{1}{2}x_1+(1-\frac{1}{2})x_2) \le \frac{1}{2}f(x_1)+(1-\frac{1}{2})f(x_2)$$

即 $e^{\frac{a+b}{2}} \le \frac{1}{2}\left(e^a + e^b\right)$。

7. 证明：f是I上的凸函数的充分必要条件是：对任意I中的任意三点$x_1<x_2<x_3$，总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

证明：必要性 记 $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$，则$x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$，由 f是I上的凸函数知

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3) \le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3) \\ &= \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3) \end{aligned}$$

从而有

$$(x_3-x_1)f(x_2) \le (x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)$$

整理后可得$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$；

充分性 在 I 上任意取两点 $x_1,x_3\ (x_1<x_3)$，在$[x_1,x_3]$上任意取一点$x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$，$\lambda\in(0,1)$，即 $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$，由必要性的推导逆过程，可证得$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3) \le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$

8. 证明：f是I上的凸函数的充分必要条件是：对任意I中的任意三点$x_1<x_2<x_3$，总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

证明方法同第 7 题。

9. 证明不等式：$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}{n}}$

证明：当 $f(x)$ 为凸函数时，由 Jensen 不等式：

$$\forall x_i\in(-\infty,+\infty),\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ \text{有}$$

$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$ ，设 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 为凸函数，这时对任意

$$\forall a_i\in(-\infty,+\infty),\lambda_i=\frac{1}{n}>0\ (i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,$$

有 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}{n}}$

10. 若函数 f 为定义在开区间(a,b)内的可导的凹函数，则 $x_0\in(a,b)$ 为 f 的极小(大)值点的充要条件是：x_0 为 f 的稳定点，即 $f'(x_0)=0$.

证明：必要性由费马引理很显然；

下证明充分性：任取 (a,b) 上的一点 $x(\ne x_0)$，则

$$f(x)\le f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\ ,$$

因为 $f'(x_0)=0$ ，故对任何 $x\in(a,b)$ 总有

$$f(x)\le f(x_0)\ 。$$

11. 证明：1）若 $f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{2k}(x_0)=0, f^{2k+1}(x_0)\ne 0$，则 x_0 是 f 的拐点；2）若 $f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{2k-1}(x_0)=0, f^{2k}(x_0)\ne 0$，则 f 在 x_0 的某邻域内严格凸或严格凹，从而 x_0 不是 f 的拐点.

证明：1）应用泰勒定理，在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某邻域内有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2k+1)}(x_0)}{(2k+1)!}(x-x_0)^{2k+1}+o\left((x-x_0)^{2k+1}\right)$$

若 $f^{(2k+1)}(x_0)>0$，则由上式可得在 x_0 的左侧某邻域 $U_-(x_0)$ 内

$$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

即 f 是凸的，在 x_0 的右侧某邻域 $U_+(x_0)$ 内

$$f(x)\le f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

即 f 是凹的，所以 x_0 是 f 的拐点. 若 $f^{(2k+1)}(x_0)<0$，同样可证 x_0 是 f 的拐点.

2) 应用泰勒定理，在 x_0 的某邻域内有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2k)}(x_0)}{(2k)!}(x-x_0)^{2k}+o\left((x-x_0)^{2k}\right)$$

若 $f^{(2k+1)}(x_0)>0$，则由上式可得在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

即 f 是严格凸的；若 $f^{(2k+1)}(x_0)<0$，则由上式可得在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内

$$f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

即 f 是严格凹的，所以 x_0 不是 f 的拐点.证毕

习题 6.6

1. 求下列曲线的渐近线：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x-5}$；

(2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$；

(3) $f(x)=\dfrac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$；

(4) $f(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$

解:（1）因为 $f(x)=\dfrac{1}{(x-5)(x+1)}$ ，所以 $\lim\limits_{x\to5}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$ ，

故曲线有两条铅直渐近线：$x=5,\quad x=-1$ ，由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ ，则曲线有一条水平渐近线 $y=0$； 又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，所以曲线没有斜渐近线。

（2）因为 $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$， $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，故曲线有两条铅直渐近线 $x=1,\quad x=-1$，一条水平渐近线 $y=1$，没有斜渐近线。

（3） $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$， $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$，

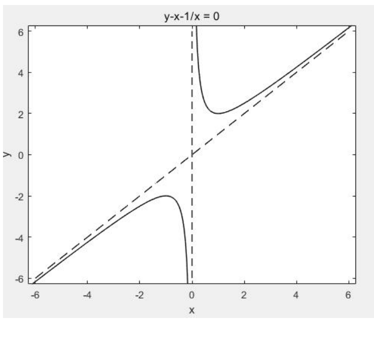
$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x-2)(x+3)-2x(x-1)}{x-1}=4$ ，故曲线有一条铅直渐近线 $x=1,$ 无水平渐近线，有斜渐近线 $y=2x+4$ 。

（4） $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$， $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$，

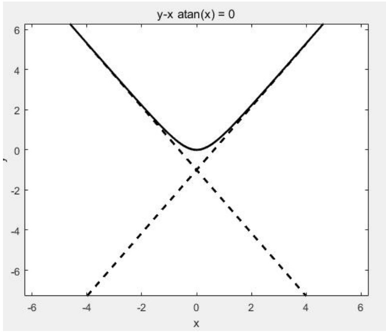
$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}[xe^{\frac{1}{x}}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=0$ ，故曲线有一条铅直渐近线 $x=0,$ 无水平渐近线，有斜渐近线 $y=x$ 。

2. 作出下列函数的图像:

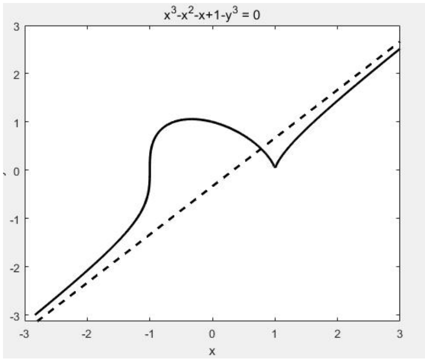
(1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$



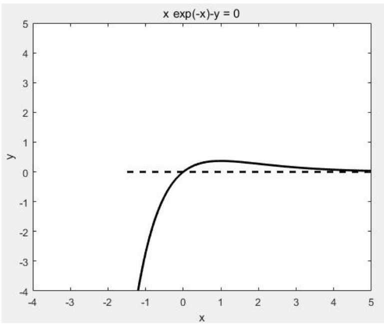
(2) $f(x)=x\arctan x$;



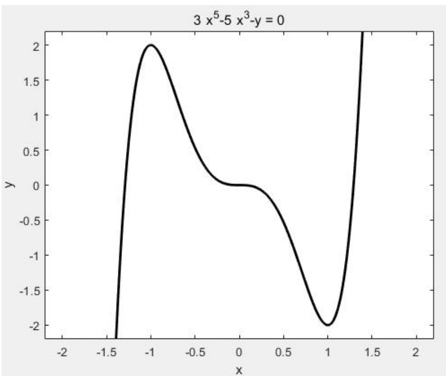
(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$;



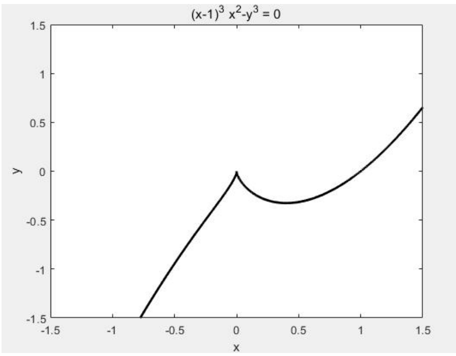
(4) $f(x)=xe^{-x}$;



(5) $f(x)=3x^5-5x^3$;



(6) $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$



总练习题六

1. 设函数 $f(x)$ 在点 a 的某邻域有连续的二阶导数，且 $f'(a)\neq 0$，求

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right].$$

解：

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-f''(a)}{2}\cdot\frac{1}{(f'(a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a))f'(a)}$$

$$=\frac{-f''(a)}{2(f'(a))^2}$$

2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，

$$f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$， $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$， $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

解：（1）应用洛必达法则得到：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\ln f(x)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\cdot\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{n}\\
&=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\\
&=\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

所以 $\lim_{x\to 0}f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 。

（2、3）设 $a=\min\left\{a_1,a_2,\cdots,a_n\right\},A=\max\left\{a_1,a_2,\cdots,a_n\right\}$

则有两边夹可得：

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\min\{a_1a_2\ldots a_n\}$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\max\{a_1a_2\ldots a_n\}$。

3. 设 $a>1,n\geq 1$，证明不等式：

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

证明：设 $f(x)=a^x$，因为 $a>1$，所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ 上单调增加，且函数

在$\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$上满足拉格朗日中值定理，故有

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=a^{\xi}\ln a\quad(\xi\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}))$$

于是 $\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)n}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}=a^{\xi}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n(n+1)}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$。

4. 设 $f(x),g(x)$都在$[a,+\infty)$ 上可微，且$|f'(x)|<g'(x)$.证明：当 $x>a$ 时，

$$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a).$$

证明：由已知$\left|f'(x)\right|<g'(x)$ 知道函数 $g(x)$ 在$\left[a,+\infty\right)$上严格单调增加，由柯

西中值定理有：

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \quad \xi\in(a,x) \ ,$$

因而 $\dfrac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\dfrac{|f'(\xi)|}{g'(\xi)}<1$，于是当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$。

5. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{3}{n}-\arctan\dfrac{3}{n+1}\right)$ ；　　(2) $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$ ；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x-3\arcsin x}{x^3}$ ；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

解：(1) 由 $\boldsymbol{\arctan x = x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)\quad (x\to 0)}$ 得

$$\boldsymbol{\arctan\frac{3}{n}=\frac{3}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad \arctan\frac{3}{n+1}=\frac{3}{n+1}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\quad (n\to\infty)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \arctan\frac{3}{n}-\arctan\frac{3}{n+1}=\frac{3}{n(n+1)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad (n\to\infty)}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{3}{n}-\arctan\dfrac{3}{n+1}\right)=3$.

(2) $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x^2)}{\ln(1-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x}{1+x}}=e$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x-3\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-9x^2}}{x^2}=4$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}=1$ 。

6. 证明：若 $x>0$ ，则

(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$,其中 $\dfrac{1}{4}\le\theta(x)\le\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$， $\lim\limits_{x\to +\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

证明:（1）由拉格朗日中值定理有:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}\quad (0<\theta(x)<1)\quad ,$$

$$2\sqrt{x+\theta(x)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{(x+1)x}-x] \tag{6.9}$$

由于 $\sqrt{(x+1)x}-x>\sqrt{x^2}-x=0$

所以 $\sqrt{x(x+1)}-x=\dfrac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}<\dfrac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\dfrac{1}{2}$

所以

$$\frac{1}{4}\le\theta(x)\le\frac{1}{2}\quad ;$$

（2）对式取极限得到:

$$\lim_{x\to\infty}\theta(x)=\frac{1}{2},\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{4}.$$

7. 若 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的凸函数，且有界，试证明: $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 存在.

证明: 设 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)\le M, x>x_1>x_0$ 为 $\left(a,b\right)$ 内任意三点，由函数为凸函数，所以当 x 增加时， $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 也增加，又因为

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{M-f(x_0)}{x_1-x_0}\quad (\forall x>x_1>x_0)$$

由单调有界定理，则

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A<+\infty\quad ,$$

从而

$$\lim_{x\to b^-}f(x)=\lim_{x\to b^-}\left[(x-x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\right]=A(b-x_0)+f(x_0)$$

存在，同理可证 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在。

8. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，试证明：存在常数 $c\in(a,b)$，使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c) \quad .$$

证明：因为函数 f 在 $\left[a,b\right]$ 上满足泰勒公式，故有

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2 \quad \xi \text{ 介于}$$

x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间，于是得到

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{a-b}{2})^2 \quad \xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{a-b}{2})^2 \quad \xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$$

两式相加得到：

$$f(a)+f(b)=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{8}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)) \quad ,$$

于是存在常数 $c\in(a,b)$，使得

$$f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c) \text{。}$$

9. 证明函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

证明：$f'(x)=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1-\ln x}{x}\right) \quad (x>0)$，

当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$. 现在令 $g(x)=1+\frac{1-\ln x}{x}$，$(x\ge e)$，则 $g'(x)=\frac{-2+\ln x}{x^2}$，可得唯一稳定点 $x=e^2$，当 $x<e^2$ 时 $g'(x)<0$，当 $x>e^2$ 时 $g'(x)>0$，说明 $x=e^2$ 是极小值点，从而是 $g(x)$ 的最小值点，于是 $g(x)\ge g(e^2)=1-\frac{1}{e^2}>0$，所以当 $x>e$ 时，也有 $f'(x)>0$，从而在 $(0,+\infty)$ 上 $\boldsymbol{f}$

严格单调递增.

10. 设 $k>0$ ，试问 k 为何值时，方程 $\arctan x-kx=0$ 有正实根.

解：若方程 $\arctan x-kx=0$ 存在正实数根 x_0，则因为

$f(x)=\arctan x-kx$ 在 $\left[0,x_0\right]$ 上可导，且 $f(0)=f(x_0)=0$ ，则由罗尔中值定理知道存在 $\xi\in(0,x_0)$ ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{1+\xi^2}-k=0$ ，于是 $0<k<1$；

反之，若 $0<k<1$，则因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-k$ 连续，$f'(0)=1-k>0$，所以存在 $x=0$ 的某一个邻域 $U\left(0;\delta\right)$,使得在这一邻域中，$f'(x)>0, f(x)$ 严格递增，从而存在 $a>0$, 使得 $f(a)>f(0)=0$，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ，所以存在 $b>a$ ，使得 $f(b)<0$ ，所以由根的存在定理知 $f(x)$ 在 $\left(a,b\right)$ 内存在根。故当且仅当 $0<k<1$ 时，方程 $\arctan x-kx=0$ 有正实根。

11. 证明：对任一多项式 $p(x)$ ，一定存在 x_1 与 x_2，使 $p(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 与 $(x_2,+\infty)$ 上分别严格单调.

证明：设 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ，其中 $a_0\neq 0$ ，

不妨假设 $a_0>0$ 。

（1） 当 $n=1$ 时， $p'(x)=a_0>0$ ，这时结论显然成立；

（2） 当 $n>1$ 时，

$$p'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots a_{n-1}$$

若 n 为奇数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}p'(x)=+\infty$, 从而对任给的 $G>0$ ，存在

$M>0$,使得当 $|x|>M$ 时， $p'(x)>G>0$,取 $x_1=M, x_2=-M$,则

$p(x)$ 在 $\left(-\infty,x_2\right),\left(x_1,+\infty\right)$ 上均严格增加；

若 n 为奇数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}p'(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty}p'(x)=-\infty$ 从而对任给的

$G>0$,存在 $M>0$,使得当 $x>M$ 时， $p'(x)>G>0$，

$x<-M$ 时，有 $p'(x)<-G<0$，,取 $x_1=M, x_2=-M$,则

$p(x)$ 在 $\left(x_1,+\infty\right)$ 与 $\left(-\infty, x_2\right)$ 上分别严格增加与严格递减；综上结论成立。

12. 设函数 f 在 $x=a$ 的某邻域内具有 $n+2$ 阶连续导数，且 $f^{(n+2)}(a)\neq 0$，

在 $x=a$ 处的泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, 0<\theta<1.$$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+2}$.

证明：因为 $f^{(n+2)}(x)$ 连续，$f^{(n+2)}(a)\neq 0$，所以在泰勒公式

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\quad(0<\theta<1)\quad ,$$

其中 $\theta=\theta(h)$ ，并且

$$f^{(n+1)}(a+\theta h)=f^{(n+1)}(a)+\theta h f^{(n+2)}(a+\theta'\theta h)\quad(0<\theta'<1)\quad ,$$

所以

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}(f^{(n+1)}(a)+\theta h f^{(n+2)}(a+\theta'\theta h))$$

同时因为 $f^{(n+2)}(x)$ 的连续性，所以还有

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+\frac{h^{n+2}}{(n+2)!}f^{(n+2)}(a+\theta''h)\quad(0<\theta''<1)$$

于是

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\theta h f^{(n+2)}(a+\theta'\theta h)=\frac{h^{n+2}}{(n+2)!}f^{(n+2)}(a+\theta''h)$$

由此得到 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+2}$。

13. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$，证明：存在点

$\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证明：因为 $f'(a)=f'(b)=0$，所以由泰勒公式，存在 $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，使得

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2$$
$$f(x)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2$$

在两式中取 $x=\dfrac{a+b}{2}$，然后相减，得到

$$\left|f(a)-f(b)\right|=\frac{(a-b)^2}{8}\left|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right|$$

因为

$$\left|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right|\le 2\max\left\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\right\}$$

于是知道 ξ_1,ξ_2 中至少有一个满足 $|f''(\xi)|\ge\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$。

14. 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上可微，且 $0\le f'(x)\le f(x)$，$f(0)=0$，证明：在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

证明：对任意 $x>0$，由拉格朗日中值定理知

$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x\le f(\xi)x\le f(x)x,$$

从而 $f(x)(1-x)\le 0$，于是当 $0\le x<1$ 时，$f(x)\le 0$；又 $f(x)\ge 0$，所以在 $[0,1)$ 上，$f(x)\equiv 0$，再由 $f(x)$ 的连续性知 $f(1)=0$，故在 $[0,1]$ 上，$f(x)\equiv 0$.

假设在 $[0,n)$ 上 $f(x)\equiv 0$，n 为某一个自然数，则对任意 $x>n$，由拉格朗日中值定理有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x)-f(n)=f'(\xi)(x-n)\\&\le f(\xi)(x-n)\\&\le f(x)(x-n)\end{aligned}$$

从而

$$f(x)(n+1-x)\le 0$$

于是，当 $n\le x<n+1$ 时，$f(x)\le 0$，又 $f(x)\ge 0$，所以在 $[n,n+1)$ 上，$f(x)\equiv 0$，由连续性得 $f(n+1)=0$，故当 $x\in[0,n+1]$ 时，$f(x)\equiv 0$。

因此由数学归纳法对任意自然数 n，函数 f 在 $[0,n]$ 上 $f(x)\equiv 0$，所以在 $[0,+\infty)$

上 $f(x)\equiv 0$.

15.证明：函数 f 在区间 I 上为凸函数的充分必要条件是对任何 $x_1,x_2\in I$，函数 $\varphi(\lambda)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ 为 $[0,1]$ 上凸函数.

证明：必要性：设函数 f 在区间 I 上的凸函数，那么对任意的

$$\lambda_1,\lambda_2\in[0,1],\kappa\in(0,1)\ ,$$

总有

$$\begin{aligned}&\varphi(\kappa\lambda_1+(1-\kappa)\lambda_2)\\&=f[(\kappa\lambda_1+(1-\kappa)\lambda_2)x_1+(1-\kappa\lambda_1-(1-\kappa)\lambda_2)x_2]\\&=f[(\kappa(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2+(1-\kappa)(\lambda_2x_1-(1-\lambda_2)x_2]\\&\le\kappa f(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2)+(1-\kappa)f((\lambda_2x_1-(1-\lambda_2)x_2)\\&=\kappa\varphi(\lambda_1)+(1-\kappa)\varphi(\lambda_2)\end{aligned}$$

由定义知道函数 $\varphi(\lambda)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ 为 $[0,1]$ 上凸函数.

充分性：设 $\varphi(\lambda)$ 为 $[0,1]$ 上的凸函数，那么对任意的 $x_1,x_2\in I$ 及 $\lambda\in(0,1)$

总有

$$\begin{aligned}&f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=\varphi(\lambda)\\&=\varphi(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0)\\&\le\lambda\varphi(1)+(1-\lambda)\varphi(0)\\&=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\end{aligned}$$

由定义知道函数 f 为 I 的凸函数。

16.设函数 f 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且有界，证明：f 的二阶导函数必有零点.

证明：假设 $f''(x)$ 没有零点，即 $f''(x)$ 不变号，不妨设 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，假设 $f'(x_0)>0$ ，由拉格朗日中值定理得：存在 $\xi\in(x_0,x)$ ，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty\quad(x\to+\infty)$$

若 $f'(x_0)<0$ ，由拉格朗日中值定理得：存在 $\xi\in(x,x_0)$ ，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty\quad(x\to-\infty)$$

这与函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界矛盾。故 f 的二阶导函数必有零点.

参考答案

第七章

总复习题

(A) 1. $\{0,2\}$. (B) 1. (1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=1, \underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=0$, (2) $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=2, \underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=0$

第八章

习题 8.1

1. (1) $-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C$； (2) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$； (3) $\frac{1}{x}-\arctan x+C$；

(4) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C$； (5) $\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}+x+C$； (6) $\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\sqrt{\frac{3}{2}}x)+C$.

2. (1) $-\sqrt{1-x^2}+C$； (2) $\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C$； (3) $-\cot x-\tan x+C$；

(4) $|x|>1$时，$\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C;0<|x|\le 1,\frac{1}{4x^4}-\ln|x|+C$；

(5) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\mathrm{In}(x+\sqrt{1+x^2})+C$； (6) $\ln|x|-\frac{1}{n}|1+x^n|+C$.

3. $f(x)=\tan x-x+C$.

习题 8.2

1. (1) $-\ln|\cos x|+C$； (2) $-2\cos\sqrt{x}+C$； (3) $\frac{1}{5}\left(4-x^2\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$；

(4) $-\frac{1}{x\ln x}+C$； (5) $-x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$； (6) $\frac{1}{2}\arctan^2 x+C$；

(7) $2x+\ln|\sin x+\cos x|+C$； (8) $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$；

(9) $2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$；或者 $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$；或者 $2\arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}}+C$；

(10) $\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$.

2. (1) $-\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}+C$； (2) $-\frac{1}{550}\left(1-5x^2\right)^{11}+\frac{1}{600}\left(1-5x^2\right)^{12}+C$；

(3) $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\arctan\sqrt[6]{x}+C$； (4) $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^{\frac{3}{2}}+C$；

(5) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$； (6) $\sqrt{1+x^2}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C$；

(7) $-\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^2}+C$； (8) $\ln\left|1+\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\right|-\ln\left|1-\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\right|-2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+C$；

(9) $-\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x}+C$； (10) $-\arcsin\frac{1}{x}+C$ (11) $\sqrt{x^2-9}+3\arcsin\frac{3}{x}+C.$

习题 8. 3

1. (1) $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$； (2) $\frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x}-\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+C$；

(3) $\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-x-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$； (4) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$；

(5) $x\tan x+\ln\left|\cos x\right|+C$； (6) $\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right)+C$；

(7) $-\frac{1}{2}\left(e^{-2x}+1\right)\arctan e^x-\frac{1}{2}e^{-x}+C$； (8) $\frac{1}{4}x^2-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$；

(9) $\frac{3e^{2x}\sin 3x+2e^{2x}\cos 3x}{13}+C$； (10) $\frac{x}{2}\left[\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right]+C$；

(11) $\frac{1}{2}\left(\sec x\tan x+\ln\left|\sec x+\tan x\right|\right)+C$； (12) $-\frac{1}{2}\left(x\cot^2 x+\cot x+x\right)+C$；

(13) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}-\arctan x\right)+C$.

3. (1) $\frac{1}{2}\tan^2 x+\mathrm{In}\left|\cos x\right|+C$； (2) $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$；

(3) $-\frac{\cos^3 x\sin^3 x}{6}+\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+C.$

§8.4

1. (1) $\frac{1}{6}\mathrm{In}\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$； (2) $\ln\left|x-1\right|-\frac{6}{x-1}+C$；

(3) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C$； (4) $\frac{1}{8}\mathrm{In}\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{1-x}{4(x^2+1)}-\frac{1}{2}\arctan x+C$；

(5) $\frac{5}{6}\text{In}\frac{x^2+1}{x^2+4}+\arctan x+C$； (6) $\frac{1}{4}\text{In}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}\right)+C$；

2. (1) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x+1}+C$； (2) $-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C$；

(3) $\frac{1}{2}\text{In}(x^2+1)+\frac{1}{2(x^2+1)}+C$； (4) $-\frac{2}{9}\text{In}|x+2|+\frac{2}{9}\text{In}|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+C$；

(5) $-\frac{5x+3}{2(2x^2+2x+1)}-\frac{5}{2}\arctan(2x+1)+C$；

(6) $\frac{1}{2}\text{In}|1+x|+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{4}\text{In}(1+x^2)+C$.

习题 8.5

1 (1) $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$ ； (2) $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$ ； (3) $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$ ；

(4) $\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$ (5) $\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C$ (6)

(7) $-\frac{5}{87}\ln|3\sin 3x+7\cos 3x|-\frac{2}{29}x+C$

2 (1) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(1+6\sqrt[6]{x}\right)+C$； (2) $\left(\sqrt[4]{2x-1}+1\right)^2+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C$；

(3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C$； (4) $\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}dx+C$; (5) $\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+\sqrt{x^2+x}+C$；

(6) $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$；(7) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$；(8) $-\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C$.

第八章总复习题

1. 1) $-\cos\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)+C$ 2) $2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C$

3) $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)+C$ ； 4) $\frac{1}{5}\left(1-x^2\right)^{5/2}-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}+C$ ；

5) $-\sqrt{4-x^2}/4x+C$

2. 1) $x\tan x+\ln\cos x-\frac{x^2}{2}+C$ 2) $\frac{1}{2}xe^x\left(\sin x-\cos x\right)+\frac{1}{2}e^x\cos x+C$

3）$x\mathrm{In}^2 x-2x\mathrm{In}x+2x+C$　　4）$\frac{x^2}{2}\mathrm{In}\frac{1+x}{1-x}+x+\frac{1}{2}\mathrm{In}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

3. 1）$(\ln x-1)\left(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right)-\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|\right)+C$

2）$-\frac{1}{x}\arcsin x-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$

3）$x\arctan(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+In\left(2+2\sqrt{x}+x\right)+C$

4）$x-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

4. （1）$\frac{1}{\sqrt{15}}\mathrm{In}\frac{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{5}}+C$，　（2）$\frac{1}{2}\arctan(2\tan\frac{x}{2})+C$，

(1)　$\tan\frac{x}{2}+\mathrm{In}(1+\tan^2\frac{x}{2})+C$　或者　$\tan\frac{x}{2}-\mathrm{In}(1+\cos x)+C$

(2)　$\frac{1}{6}\mathrm{In}(\tan^2\frac{x}{2})+\frac{1}{3}\mathrm{In}(3+\tan^2\frac{x}{2})+C$　或者　$\frac{1}{3}\mathrm{In}(2+\cos x)-\frac{1}{2}\mathrm{In}(1+\cos x)+\frac{1}{6}\mathrm{In}(1-\cos x)+C$

5. （1）$I_n=x(\mathrm{In}x)^n-nI_{n-1}$，　　(2) $I_n=\frac{2\sin(n-1)x}{n-1}+I_{n-2},\ n\geq 2.$

6. （1）$x\mathrm{In}\,\mathrm{In}x+C$　　（2）$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$　　（3）$-\arcsin\frac{1}{x}+C,$，

(4) $\frac{2}{5}(\tan x)^{\frac{5}{2}}+2(\tan x)^{\frac{1}{2}}+C$　　(5) $-\arcsin\frac{x+2}{2}-\sqrt{-x^2-4x}+C$

7. 1）当$\alpha=$-1时：$\frac{1}{2}\mathrm{In}^2 x+C$；当$\alpha\neq$-1时：$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\mathrm{In}x-\frac{1}{\alpha+1})+C$；

2）$\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arctan x+x\arctan x-\frac{1}{2}\mathrm{In}(x^2+1)+C$

8. $I=\frac{x}{2}[\sin(\mathrm{In}x)+\cos(\mathrm{In}x)]+C$；$J=\frac{x}{2}[\sin(\mathrm{In}x)-\cos(\mathrm{In}x)]+C$

9. $$\int f(x)dx=\begin{cases} x-\frac{x^3}{3}+C, & |x|\leq 1 \\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}+C, & x>1 \\ x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}+C, & x<-1 \end{cases}$$

10. $f(x)=9x-2x^2-3\mathrm{In}(3-x)+C$

第九章

习题 9. 1

2 (1) $\frac{1}{3}$；(2) $e-1$；(3) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$；(4) $1-\cos 1$; 3 (1) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\frac{5}{16}$.

习题 9.2

1. (1) $\frac{1}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)$; (2) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; (3) $\frac{3e-1}{\ln 3+1}$; (4) $\frac{1}{4}$; (5) $\ln 3-\ln 2$ (6) $\frac{8}{3}$; 3. $\frac{4}{\pi^2}$;

5. 1 6. (1) $\ln 2$; (2) $\frac{\pi}{4}$; (3) $\frac{2}{\pi}$; (4) $\frac{2}{\pi}$; (5) $\frac{1}{3}$; (6) $\frac{1}{\ln 2}$.

习题 9.6

1.（1）$(\sin x-\cos x)\cos\left(\pi\sin^2 x\right)$；（2）$\frac{1}{2e}$；（3）$2x\int_0^{x^2} f(t)dt$ （4）$\frac{1}{2}$；

5. 单调增区间 $[-1,0]\cup[1,+\infty)$，单调减区间 $(-\infty,-1]\cup[0,1]$，极小值为 0，极大值为

$f(0)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$；6. $y=x$, 2；8. $f(x)=x-2$；$f(x)=x^2\cos x+\frac{\pi^2-8}{2(2-\pi)}$.

习题 9.7

1. 0.

习题 9.8

1. (1) $2\left(\sqrt{\ln 2+1}-1\right)$； (2) $\sqrt{2}-2+\frac{\pi}{4}$； (3) $2\sqrt{2}$；(4) $1-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(3+\sqrt{2}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)$

2. (5) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ ；(6) $\frac{4}{41}\left(e^{\frac{5\pi}{4}}+1\right)$ (7) $4\ln 2-\frac{7}{3}$.

4. （1）0,（2）0. 5. $J(2m,2n)=\frac{(2n-1)!!(2m-1)!!}{2^{m+n}(m+n)!}\bullet\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}\right)$

11. 0.

第十章

习题 10. 1

1. $\frac{1}{6}$; 2. $\frac{9}{2}$; 3. $\frac{3\pi a^2}{8}$； 4. $\frac{3a^2}{2}$； 5. $\frac{\pi a^2}{4}$； 6. $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$； 7. $\frac{5\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

习题 10. 2

1. $\frac{2}{3}\left[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}\right]$； 2. $6a$； 3. $8a$； 4. $2\pi^2 a$; 5. $\frac{\sqrt{6}a}{2}+\frac{a}{2}\ln\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right|$； 6. 8；

7. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 8. $\frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right]$.

习题 10. 3

1.（1）$\sqrt{2}/2$；（2）$\sqrt{2}/4a$；（3）$2/3a$； 2. 2； 3. $\sqrt{2}/4$， $2\sqrt{2}$， $(x-3)^2+(y+2)^2=8$；

5. $(x-\frac{2}{3}a)^2+y^2=\frac{16}{9}a^2$；6. $t=\pi$ 时 $K_{\min}=\frac{1}{4a}$，曲率半径 $R=4a$；7. $(-In\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

习题 10.4

1. $\frac{16}{3}a^3$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{4}{3}ab^2\pi$；4. $\frac{32}{105}\pi a^3$；5. $\frac{8}{3}\pi a^3$；6. $\frac{\pi^2}{2}$；7. $5\pi^2a^3$；8. $\frac{16}{75}\sqrt{5}\pi$.

习题 10.5

1. $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$；2. $\frac{64}{3}\pi a^2$；

3. $\frac{12}{5}\pi a^2$；4. $4\pi^2 rR$；. 5. $\begin{cases} a>b,\ S=2\pi\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right); \\ a<b,\ S=2\pi\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2-a^2}+b}{a}\right); \\ a=b, S=4\pi a^2. \end{cases}$ 6. $8\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi a^2$.

习题 10.6

1. 14373.33(kN)；2. $\frac{1}{2}abvg\left(2h+b\sin\alpha\right)$；3. $\frac{kmM}{a\left(a+l\right)}$；4. $\frac{2k\delta}{r}$；5. 76969.02(kJ)；

6. 3920(J)；7. $\frac{27}{7}ka^{\frac{7}{3}}c^{\frac{2}{3}}$.

总复习题

答案：1. (1) $2\pi+\frac{4}{3},6\pi-\frac{4}{3}$ (2) πa^2 (3) $\frac{5}{4}\pi$；2. $\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$；3. $\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$

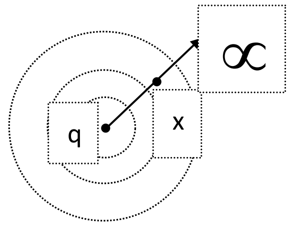
4. $2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$ 5. $\frac{a^2}{4}\left(e^{2\pi}-e^{-2\pi}\right)$ 6. (1) $S=\frac{16}{3}p^2$ (2) $V=\frac{272}{15}\pi p^2$ 7. $160\pi^2$；

8. $\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}$；9. $1108.35(kN)$；10. $\frac{kM^2}{l^2}\ln\frac{(c+l)^2}{c(c+2l)^2}$；11. $\frac{4}{3}\pi r^4 g$.

第十一章　广 义 积 分

习题 11.1

1．物理学中称电场力将单位正电荷从电场中某点移至无穷远处所做的功为电场在该点处的电位。一个带电量$+q$的点电荷产生的电场对距离r处的单位正电荷的电场力为$F=k\dfrac{q}{r^2}$（k为常数），求距电场中心x处的电位。



解　$U=\int_x^{+\infty}k\dfrac{q}{r^2}dr=\dfrac{kq}{x}$.

2. 讨论下列无穷积分是否收敛？若收敛，则求其值：

（1）$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^4}$；　(2) $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$；　(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}dx$；　(4) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$；

(5) $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$ (6) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$；(7) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx\,(a>0)$；(8) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+2x+2}$.

解：(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^4}=\left[-\dfrac{1}{3x^3}\right]_1^{+\infty}=\dfrac{1}{3}.$

$$(2)\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x^2}dx=\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)_0^a=\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

（3）$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-\frac{x}{2}}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-2e^{-\frac{a}{2}}+2\right)=2$

（4）$\int_1^t\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_1^t=2\sqrt{t}-2,$当$t\to+\infty$时，该极限不存在，故该反常积分发散.

$$(5)\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{1+x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$$

$$(6)\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^a e^{-x}\sin x dx=\lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right]_0^a$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left[-\frac{e^{-a}}{2}(\sin a+\cos a)+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$

$$(7)\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx=\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{a}.$$

$$(8)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{d\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2+1}+\int_0^{+\infty}\frac{d\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2+1}=[\arctan\left(x+1\right)]_{-\infty}^{0}+[\arctan\left(x+1\right)]_0^{+\infty}=\pi.$$

3. 讨论下列瑕积分是否收敛？若收敛，则求其值：

（1）$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；（2）$\int_0^2\frac{dx}{(1\text{-}x)^2}$；（3）$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$；（4）$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$；

（5）$\int_0^1 x\ln xdx$；（6）$\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$；（7）$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$；（8）$\int_0^1\frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

解：

$$(1)\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d\left(1-x^2\right)=-\frac{1}{2}\lim_{a\to 1^-}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d\left(1-x^2\right)=-\frac{1}{2}\lim_{a\to 1^-}2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^a=1.$$

$$(2)\int_0^t\frac{dx}{(1\text{-}x)^2}=\left[\frac{1}{1-x}\right]_0^t=\frac{1}{1-t}-1,$$ 当 $t\to 1^-$ 时极限不存在，故原反常积分发散.

$$(3)\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=\lim_{u\to 1^-}\int_0^u\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx+\lim_{u\to 1^+}\int_u^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$=\lim_{u\to 1^-}\left[-2\left(1-x\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^u+\lim_{u\to 1^+}\left[2\left(x-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]_u^2=4$$

（4）令 $\sqrt{x-1}=t$，则 $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=2\int_0^1(1+t^2)dt=\frac{8}{3}$.

$$(5)\int_0^1 x\ln xdx=\lim_{u\to 0^+}\int_u^1 x\ln xdx=\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\int_u^1\ln xd(x^2)\right]$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{2}\left(x^2\ln x\Big|_u^1-\int_u^1 xdx\right)=\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{2}\left(-u^2\ln u-(\frac{1}{2}-\frac{u^2}{2})\right)=-\frac{1}{4}.$$

$$(6)\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}=\int_1^e\frac{d\ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}}=\left[\arcsin\ln x\right]_1^e=\frac{\pi}{2}.$$

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\arcsin\left(2\varepsilon-1\right)\right] + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin\left[2\left(1-\varepsilon\right)-1\right] = \pi .$$

(8) $\int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\ln x)^p} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\ln x}{(\ln x)^p} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d\ln x}{(\ln x)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{d\ln x}{(\ln x)^p} + \lim_{u\to 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^{u} \frac{d\ln x}{(\ln x)^p}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{1-p}\left[\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{1-p} - \left(\ln\varepsilon\right)^{1-p}\right] + \lim_{u\to 1^-} \frac{1}{1-p}\left[\left(\ln u\right)^{1-p} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{1-p}\right]$$

.

上面的第一个极限发散，故原式发散.

4.试问 $\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx$ 收敛与 $\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$ 有无联系？

解：例如 $\int_1^{+\infty} x\sin x^4 dx$，令 $t=x^4$ 得 $\int_1^{+\infty} x\sin x^4 dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$ 收敛，

但 $\lim_{x\to+\infty} x\sin x^4$ 不存在.

5. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$. 证明 $A=0$.

证 用反证法. 不妨设 $A>0$，则对 $\varepsilon=\frac{1}{2}A>0$，$\exists X>a$，$\forall x>X$：$\left|f(x)-A\right|<\frac{1}{2}A$，

从而 $f(x)>\frac{1}{2}A$. 由

$$\int_a^B f(x)dx = \int_a^X f(x)dx + \int_X^B f(x)dx > \int_a^X f(x)dx + \frac{1}{2}A(B-X),$$

可知 $\lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx = +\infty$，与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛发生矛盾.

同理也可证明不可能有 $A<0$，所以 $A=0$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛，证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx = \int_a^{+\infty} df(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - f(a)$，

由 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 的收敛性, 可知 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限, 再利用上题的结论，得到

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 .$$

习题 11.2

1. 证明定理 11.2.

2. 证明性质 11.1—11.3.

3. 设无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛，且在 $[a,+\infty)$ 上成立 $f(x)\ge g(x)$，证明

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \ge \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

4. 设无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都发散，请问 $\int_a^{+\infty} (f(x)\pm g(x))dx$ 是否必发散？为什么？

5. 设无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛，请问 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 是否必收敛？为什么？

6.设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

习题 11.3

1. 设 f 与 g 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，对任何 u＞a，它们在[a，u]上都可积. 证明：若 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g^2(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]^2 dx$ 也都收敛.

证明：因为 $\left|f(x)g(x)\right|\le\frac{1}{2}\left[f^2(x)+g^2(x)\right]$，且

$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx, \int_a^{+\infty} g^2(x)dx$ 都收敛，所以 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.又由于

$\left[f(x)+g(x)\right]^2=f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)$，由比较判别法得，

$\int_a^{+\infty} [f(x)+g(x)]^2 dx$ 也都收敛.

2. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的三个连续函数，且成立不等式

$$h(x)\le f(x)\le g(x).$$

证明：若 $\int_a^{+\infty} h(x)dx=\int_a^{+\infty} g(x)dx=\lambda$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lambda$.

证明：由 $h(x)\le f(x)\le g(x)$，可得，$\int_a^{+\infty}h(x)dx\le\int_a^{+\infty}f(x)dx\le\int_a^{+\infty}g(x)dx$. 又因为 $\int_a^{+\infty}h(x)dx=\int_a^{+\infty}g(x)dx=\lambda$，由迫敛性得，$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lambda$..

3.讨论下列无穷积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$ (2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$

(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$ (4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$ (6) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xdx}{1+x^2}$

(7) $\int_1^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx$ (8) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$

解：(1) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=1$，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$ 收敛.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=1$，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ 收敛.

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}=1$，所以 $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 收敛.

(4) 由于当 $x\ge0$ 时，$\frac{1}{1+x|\sin x|}\ge\frac{1}{1+x}$，且 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x}$ 发散，因此

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(5) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x\arctan x}{1+x^3}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$ 收敛.

(6) 由于$\left|\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right| \le \dfrac{1}{1+x^2}, x\in[0,+\infty)$，以及$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{2}$.

所以$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin xdx}{1+x^2}$绝对收敛.

(7) 由于对任意实数，都有$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot x^{\alpha}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2+\alpha}}{e^x}=0$，因此根据推论 11.3(p=2, $\lambda=0$)，可得对任何实数α，$\int_1^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx$都是收敛的.

(8) 由于$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}=1$，因此根据推论 11.3($p=\dfrac{1}{2},\lambda=1$)，

$\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx$收敛.

习题 11.4

1. 讨论下列积分是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$　　(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$

(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}$　　(4) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin xdx$

解：(1) 令$F(u)=\int_0^u\cos xdx$，则$F(u)=\sin u,|F(u)|\le1$，令$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{100+x}$，则$g'(x)=\dfrac{100-x}{2\sqrt{x}(100+x)^2}$，可见$x\to+\infty$时，$g(x)$在$[100,+\infty)$上单调趋于 0，由狄利克雷判别法知，$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$收敛.

$$\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right| \geq \frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{100+x} = \frac{\sqrt{x}}{2(100+x)} + \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2(100+x)},$$ 由狄利克雷判别法知，

$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{2(100+x)}dx$ 收敛. 但由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)} = \frac{1}{2}, \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}dx$

发散，并且 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}dx = +\infty$，故 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right|dx$ 发散.综上所述，

$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$ 条件收敛.

(2)令 $x=t^2, dx=2dt,$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\cdot 2tdt = 2\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

而 $\forall u\geq 1$,有 $\int_1^u \sin tdt = |\cos 1-\cos u| \leq 2,$ 而当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 单调趋于 0.

故由狄利克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ 收敛.又 $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t}$，而

$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{2t}$ 发散.故 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{x}\right|dx$ 发散.因此，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$ 条件收敛.

(3) $\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}, \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{1}{1+x^2} = 1$,于是

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 收敛.于是 $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}dx$ 绝对收敛.

(4) 当 $x\geq e^3$ 时，

$$\left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\right| \geq \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin^2 x = \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x} - \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cos 2x.$$

由 $\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x} \geq \frac{1}{2x}$ 且 $\int_{e^3}^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散，故 $\int_{e^3}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}dx$ 发散，于是

$\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}dx$ 发散，且有 $\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}dx = +\infty$.令

$g(x) = \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}$，则 $g'(x) = \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{x}\ln(x)}{(2\ln x)^2} = \frac{2[1-\ln(\ln x)]}{4x\ln^2 x}$，

所以，当 $x \ge e^3$ 时，$g(x)$ 是单调递减的，且有 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. 令 $F(u) = \int_{e^3}^{+\infty} \cos 2x dx$ 则 $\left|F(u)\right| \le \frac{1}{2}$，由狄利克雷判别法知 $\int_{e^3}^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x} \cos 2x dx$ 收敛，于是 $\int_{e}^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x} \cos 2x dx$ 收敛. 于是 $\int_{e}^{+\infty} \left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \sin x\right| dx$ 发散. 用上面证明 $\int_{e}^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{2\ln x} \cos 2x dx$ 收敛的方法，可证明 $\int_{e}^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \sin x dx$ 收敛. 故 $\int_{e}^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \sin x dx$ 条件收敛.

2. 设反常积分 $\int_{1}^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛.证明反常积分 $\int_{1}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 绝对收敛.

解：因为 $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \frac{f^2(x) + \frac{1}{x^2}}{2}$，由于 $\int_{1}^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛，$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛，因此 $\int_{1}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 绝对收敛.

3. 讨论 $\int_{1}^{+\infty} \sin x^2 dx$ 的敛散性.

解：令 $t = x^2$，得 $\int_{1}^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$. 利用例 11.12 后的讨论可得 $\int_{1}^{+\infty} \sin x^2 dx$ 是条件收敛的. 类似可得 $\int_{1}^{+\infty} \cos x^2 dx, \int_{1}^{+\infty} x \sin x^4 dx$ 是条件收敛的.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，则

(1) $\int_{a}^{+\infty} f(x) \sin x dx$ 与 $\int_{a}^{+\infty} f(x) \cos x dx$ 都收敛；

(2)若进一步 $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛，则 $\int_{a}^{+\infty} f(x) \sin x dx$ 与 $\int_{a}^{+\infty} f(x) \cos x dx$ 都绝对收敛；若进一步 $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ 发散，则 $\int_{a}^{+\infty} f(x) \sin x dx$ 与 $\int_{a}^{+\infty} f(x) \cos x dx$ 都条件收敛；

解：(1)由于对任意 $u \ge a$，

$$\left|\int_a^u \sin x dx\right| = \left|\cos a - \cos u\right| \le 2, \left|\int_a^u \cos x dx\right| = \left|\sin a - \sin u\right| \le 2$$

由狄利克雷判别法知 $\int_{a}^{+\infty} f(x) \sin x dx$ 与 $\int_{a}^{+\infty} f(x) \cos x dx$ 都收敛.

(2) 由于 $\left|f(x)\sin x\right|\le\left|f(x)\right|=f(x)$，而 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，故 $\int_a^{+\infty}f(x)\sin xdx$ 绝对收敛，同理 $\int_a^{+\infty}f(x)\cos xdx$ 绝对收敛.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上连续，且 $\int_a^{+\infty}xf(x)dx$ 收敛. 探索 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)\frac{\ln x}{x}dx$ 的收敛性.

解：$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^{+\infty}xf(x)\cdot\frac{1}{x}dx$，因为 $\int_a^{+\infty}xf(x)dx$ 收敛，$\frac{1}{x}$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 单调，且 $\frac{1}{x}\le\frac{1}{a}$，当 $x\ge a>0$ 时. 由阿贝尔判别法知 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

$\int_a^{+\infty}f(x)\frac{\ln x}{x}dx=\int_a^{+\infty}xf(x)\cdot\frac{\ln x}{x^2}dx$. 而 $\int_a^{+\infty}xf(x)dx$ 收敛，令

$g\left(x\right)=\frac{\ln x}{x^2}$，$g'\left(x\right)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$

所以，当 $x\ge\sqrt{e}$ 时，$g\left(x\right)$ 是单调递减的，且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)=0$，且 $\left|g\left(x\right)\right|\le g\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1}{2e}$.y 于是 $\int_a^{+\infty}f(x)\frac{\ln x}{x}dx$ 收敛.

习题 11.5

1. 给出定理 11.9 及其推论 11.4 的证明.

2. 讨论下列瑕积分的收敛性：

(1) $\int_1^2\frac{dx}{\left(\ln x\right)^3}$；　　(2) $\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$；

(3) $\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}dx$；　　(4) $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$；

(5) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$；　　　　(6) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^3}dx$；

(7) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}dx$；　　　　(8) $\int_0^1 e^{-x}\ln x dx$.

3．计算下列广义积分（其中 m,n 为正整数）：

（1）$\int_0^1 x^n(\ln x)^m dx$；　　　　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$.

4. 证明定理 11. 10 和定理 11. 11.

5. 讨论下列广义积分的收敛性：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx$；　　　　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx.$

6．证明欧拉积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$ 收敛，且 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$. z

1. 给出定理 11.9 及其推论 11.4 的证明.

证明：若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，由瑕积分收敛的充要条件知，对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$，只要 $u_1,u_2\in(a,a+\delta)$，总有 $\left|\int_{u_1}^{u_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$，由 $f(x)\le g(x),x\in[a,b]$ 有 $\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|\le\left|\int_{u_1}^{u_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$,由定理 11.8 知，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛.同理可证发散的情形.

下面证明推论 11.4.

当 $0\le c<+\infty, g(x)>0$ 时，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，$c-\varepsilon<\frac{|f(x)|}{g(x)}<c+\varepsilon$，即 $(c-\varepsilon)g(x)<f(x)<(c+\varepsilon)g(x)$. 于是，当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 有相同的敛散性.

当 $c=0$ 时，由 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，可得 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

当 $c=+\infty$ 时，由 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$，取 $0<M<c,$ 则存在 $\delta>0,$ 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}>M$，即 $f(x)>Mg(x)$，知当 $\int_a^b g(x)dx$ 发散时，$\int_a^b f(x)dx$ 也发散.

2. 讨论下列瑕积分的收敛性：

(1) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{(\ln x)^3}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{1-x^3}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx$　　(8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\ln x dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}dx$;

解：(1) $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于 $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\dfrac{1}{(\ln x)^3}=+\infty$，因此

$\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{(\ln x)^3}$ 发散.

(2) $x=1$是被积函数的瑕点. 由于$\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{2}$，因此

$\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$发散.

(3) $x=1,x=2$是被积函数的两个瑕点. 由于

$\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=-1$，因此$\int_1^{1.5}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}dx$收敛；又因为

$\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=1$，因此$\int_{1.5}^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}dx$收敛；故

$\int_1^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}dx$收敛.

(4) $x=0$是瑕点. $\lim\limits_{x\to0^+}x^{1/2}\frac{\sin x}{x^{3/2}}=1$，故积分$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$收敛.

(5) $x=0,1$是瑕点. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$.由于

$\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}=1$，由推论知，积分$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$.发散，故 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$发散.

(6) $x=1$是瑕点. 由于$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\cdot\frac{\arctan x}{1-x^3}=\frac{\pi}{12}$,此时$p=1,\lambda=\frac{\pi}{12}$，故积分

$\int_0^1\frac{\arctan x}{1-x^3}dx$发散.

(7) $x=0$是瑕点. $\left|f(x)\right|=\left|\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\right|\le\frac{1}{x^\alpha}$, 于是当$0<\alpha<1$时，

$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx$绝对收敛. 当$x\in(0,1)$时，$\frac{1}{x}>1,\left|\sin\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{x},\left|\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\right|>\frac{1}{x^{\alpha-1}}$

因此，$\alpha\ge2$时，积分发散. 又$1\le\alpha<2$时由狄利克雷判别法知，积分条件收敛.

(8) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x dx=\int_0^1 \frac{\ln x}{e^x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}dx$ 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\frac{\ln x}{e^x}=0$，知 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{e^x}dx$ 收敛.

又由 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{e^x}=0$，知 $\int_0^1\frac{\ln x}{e^x}dx$ 收敛, 从而可知 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$ 收敛.

3．计算下列瑕积分的值（其中 n 为正整数）：

（1） $\int_0^1(\ln x)^n dx$；　　　　（2） $\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$

解：(1)当 $n=1$ 时，有 $\int_0^1 \ln x dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(x\ln x\right)\Big|_\varepsilon^1-\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 dx=-1;$

当 $n\ge 2$ 时，设

$$I_n=\int_0^1(\ln x)^n dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1(\ln x)^n dx=-n\int_0^1(\ln x)^{n-1}dx=-nI_{n-1}\text{；}$$

从而 $I_n=\int_0^1(\ln x)^n dx=(-1)^n n!$·

(2)令 $x=\sin^2\theta$，则有 $dx=2\sin\theta\cos\theta d\theta$，于是

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta d\theta$$

$$=2\left[-\sin^{2n}\theta\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^{2n-1}\theta d\theta\right]$$

$$=2n\left(I_{n-1}-I_n\right).$$

因此，$I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$,而 $I_0=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=2.$

从而有 $I_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot 2=\frac{2^{2n+1}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}.$

4．证明瑕积分 J=$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx$ 收敛，且 J=－$\frac{\pi}{2}$ln2 .(提示：利用 $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx$ =$\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx$，并将它们相加.)

证明：由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(\sin x)=0$，所以瑕积分 $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx$ 收敛.

同理，$\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx$ 收敛.令$t=\dfrac{\pi}{2}-x$，则有

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\ln(\cos x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx=J,$$

$$2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln(\sin x)+\ln(\cos x)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

故 $$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx-\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\overset{u=2x}{=}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{2\varepsilon}^{\pi}\frac{1}{2}\ln(\sin u)du-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$=J-\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

因此，$J=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2.$

5．利用上题结果，证明：

（1）$\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta=-\dfrac{\pi^2}{2}\ln 2$；

（2）$\int_0^{\pi}\dfrac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta=2\pi\ln 2$.

证明：(1)令$x=\pi-\theta$,则$\theta=\pi-x,d\theta=-dx$，于是

$$\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta=-\int_{\pi}^{0}(\pi-x)\ln\left[\sin(\pi-x)\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi}\pi\ln(\sin x)dx-\int_0^{\pi}x\ln(\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\pi\ln(\sin x)dx-\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta,$$

故

$$\int_0^{\pi}\theta\ln(\sin\theta)d\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

$$(2)\int_0^{\pi}\frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta=\int_0^{\pi}\theta d\ln(1-\cos\theta)=\theta\ln(1-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\ln(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=\pi\ln 2-\int_0^{\pi}\ln\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta=\pi\ln 2-\int_0^{\pi}\ln 2dx-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$$

$$=2\pi\ln 2.$$

总练习题十一

1　计算下列无穷区间的反常积分（发散也是一种计算结果）：

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx$；　　(2) $\int_0^{+\infty}e^{-3x}\cos 2xdx$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx$；　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx\,(a,b>0)$

(5) $\int_0^{+\infty}x\,e^{ax^2}\,dx\quad(a\in\mathbf{R})$；　　(6) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx\quad(p\in\mathbf{R})$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx$；　　(8) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}dx$；

(9) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$；　　(10) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

解（1）$\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx=-\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,d\cos 5x=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos 5xdx$

$$=\frac{1}{5}-\frac{2}{25}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,d\sin 5x=\frac{1}{5}-\frac{4}{25}\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin 5xdx,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x} \sin 5x dx = \frac{5}{29}.$$

（2）$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\, d\sin 2x = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x} \sin 2x dx$

$$= -\frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\, d\cos 2x = \frac{3}{4} - \frac{9}{4}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x} \cos 2x dx\,,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x} \cos 2x dx = \frac{3}{13}.$$

（3）$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

（4）当 $a \ne b$ 时，

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = \frac{1}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+b^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2b}\right) = \frac{\pi}{2ab(a+b)};$$

当 $a = b$ 时，

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2a^3} + \frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) = \frac{\pi}{2a^3} - \frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a^3} - \frac{\pi}{4a^3} = \frac{\pi}{4a^3}\,,$$

此结果等于在 $a \ne b$ 时的结果中以 $b = a$ 代入后的结果。

（5）当 $a \ge 0$ 时积分发散；当 $a < 0$ 时，

$$\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{ax^2}\, dx = \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ax^2}\, d(ax^2) = -\frac{1}{2a}.$$

（6）当 $p \le 1$ 时积分发散；当 $p > 1$ 时，

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx = \frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{p-1}(\ln 2)^{-p+1}.$$

（7）令 $x = \tan t$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2.$$

（8）令 $e^x = t$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{tdt}{(1+t^2)^2}=-\frac{1}{2(1+t^2)}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{4}.$$

（9）利用第六章第 3 节习题 1(10)的结果

$$\int\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C,$$

即可得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

（10）$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$,

对等式右端任一积分（例如第二个积分）作变量代换 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0。$$

2　计算下列无界函数的反常积分（发散也是一种计算结果）:

(1) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　(2) $\int_0^1\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$

(3) $\int_{-1}^1\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx$

解:

(1)$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to1^-}\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to1^-}\arcsin x\Big|_0^{\varepsilon}=\frac{\pi}{2}.$

（2）令 $\sqrt{1-x}=t$，则

$$\int_0^1\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}.$$

（3）$\int_{-1}^1\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^0\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx+\int_0^1\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx.$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin\frac{1}{x^2}d(\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{x^2})\Big|_{0+}^{1},$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{2}(\cos\frac{1}{x^2})$ 极限不存在，所以积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 发散；同理积分 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 也发散.

（4）令 $\sqrt{\tan x} = t$，再利用上面习题 1（9），得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3. 证明下列不等式：

（1）$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}$；（2）$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx < 1+\frac{1}{2e}$.

证明：

(1) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

证毕.

(2) $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx < \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 1+\frac{1}{2e},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx > \int_0^1 e^{-x^2}dx \ge \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

证毕.

4.证明当 $a>0$ 时，只要下式两边的反常积分有意义，就有

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx = \ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx。$$

证 $$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx - \ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx$$

$$= \int_0^a f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx + \int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx,$$

对上式右端两积分中任意一个（例如第二个）作变量代换 $x=\frac{a^2}{t}$，则当 $x: a\to +\infty$ 时，

$t: a \to 0$；且 $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{t}{a}+\frac{a}{t}$， $\frac{\ln x-\ln a}{x}dx=\frac{\ln t-\ln a}{t}dt$，于是由

$$\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx=-\int_0^a f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}dt,$$

得到

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx-\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=\int_0^a f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx-\int_0^a f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}dt=0$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微，且 $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx<+\infty$，如果 $\forall x>0$时,$|f'(x)|\le C$，其中 C 是常数，试证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

证明：$\because f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，$|f'(x)|\le C$，$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续，从而$f^2(x)$也在$[0,+\infty)$上一致连续. 若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ne 0$,则存在$\varepsilon_0>0$,对任意的$A>0,$存在$x_1>A$,使得$|f(x_1)|>\sqrt{\varepsilon_0}$.由于而$f^2(x)$也在$[0,+\infty)$上一致连续. 对于$\frac{\varepsilon_0}{2}>0$，存在$\delta>0,$当$x',x''\in[0,+\infty)$且$|x'-x''|<\delta$时，有$\left|f^2(x')-f^2(x'')\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}$.故当$x\in[x_1,x_1+\delta]$时，有

$$\left|f^2(x)\right|\ge\left|f^2(x_1)\right|-\left|f^2(x_1)-f^2(x)\right|>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

因此，$\int_{x_1}^{x_1+\delta} f^2(x)dx>\frac{\varepsilon_0}{2}\delta.$

由柯西收敛准则，$\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$发散,这与已知条件矛盾，所以假设不成立，即应有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$

6. 证明：反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx\left(p\geq 0\right)$是收敛的.

证明：因为$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx=\int_0^1\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx$，只需证明$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx$收敛即可.

记$f\left(x\right)=x\sin x^2, g(x)=\frac{1}{x\left(1+x^p\right)}$,则对任意$u>1,$

$$\left|\int_1^u f\left(x\right)dx\right|=\left|\int_1^u x\sin x^2dx\right|=\frac{1}{2}\left|\cos u^2-\cos 1\right|\leq 1,$$

$g\left(x\right)$在$[0,+\infty)$上单调递减，并且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(1+x^p\right)}=0$.由狄利克雷判别法可知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx$收敛，故$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx\left(p\geq 0\right)$收敛.

7.设$f\left(x\right)$在$[1,+\infty)$上连续，对任意$x\in[1,+\infty)$,有$f\left(x\right)>0$.另外，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f\left(x\right)}{\ln x}=-\lambda$，试证：若$\lambda>1$,则$\int_1^{+\infty}f\left(x\right)dx$收敛.

证明：因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f\left(x\right)}{\ln x}=-\lambda$，所以$\forall\varepsilon>0,\exists A>1,$当$x>A$时，有

$\frac{\ln f\left(x\right)}{\ln x}<-\lambda+\varepsilon,$即$\ln f\left(x\right)<\left(-\lambda+\varepsilon\right)\ln x=\ln x^{-\lambda+\varepsilon},$

从而当$x > A$时，有$0 < f(x) < \frac{1}{x^{\lambda-\varepsilon}}$.若$\lambda > 1$,可取$0 < \varepsilon < \lambda - 1,$则

$\lambda - \varepsilon > 1$,从而积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\lambda-\varepsilon}} dx$收敛，根据比较判别法可知，积分$\int_1^{+\infty} f(x) dx$收敛.

8.讨论反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$的敛散性.

解：当$p \geq 1$时，对任意$x \in [1, +\infty)$，有$\frac{x^{p-1}}{1+x} \geq \frac{1}{1+x}$，而$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$

发散，故$\int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$发散.从而$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = +\infty.$发散.:

当$p < 1$时，对任意$x \in [1, +\infty)$，有$0 < \frac{x^{p-1}}{1+x} = x^{p-2} \frac{x}{1+x} < x^{p-2}$，

而$\int_1^{+\infty} x^{p-2} dx$收敛，所以$\int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$收敛,又$\int_0^{1} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$存在，故

$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$收敛.

9. 设$f(x)$在$[1, +\infty)$上二阶可微，对任意$x \in [1, +\infty)$有$f(x) > 0$，且

$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = +\infty$.证明：无穷积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx$收敛.

证明;因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = +\infty$，所以对任意充分大的正数$M$，存在$x_0 \in [1, +\infty)$，

当$x_0 \in [1, +\infty)$，当$x > x_0$，有$f'(x_1) > 0.$

由泰勒定理可知,存在$\xi \in (x_1, x)$，有

$$f\left(x\right)=f\left(x_1\right)+f'\left(x_1\right)\left(x-x_1\right)+\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)\left(x-x_1\right)^2,$$

由于$f\left(x_1\right)>0, f'\left(x_1\right)>0$可得$f\left(x\right)>\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)\left(x-x_1\right)^2, x>x_1$，所以

$$\frac{1}{f\left(x\right)}<\frac{2}{f''\left(\xi\right)\left(x-x_1\right)^2}, x>x_1.$$

由于$\int_{x_1}^{+\infty}\frac{2}{f''\left(\xi\right)\left(x-x_1\right)^2}dx$收敛，根据比较原则，$\int_{x_1}^{+\infty}\frac{1}{f\left(x\right)}dx$收敛，所以$\int_1^{+\infty}\frac{1}{f\left(x\right)}dx$收敛.

10.设$f\left(x\right)$在$[0,+\infty)$上有一阶连续导数，$f\left(0\right)>0, f'\left(x\right)\geq 0, \forall x\in[0,+\infty).$

若$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f\left(x\right)+f'\left(x\right)}dx<+\infty$，证明$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f\left(x\right)}dx<+\infty.$

证明：对$\forall A>0$,由$f'(x)\geq 0$，有

$$0\leq\int_0^A\frac{1}{f\left(x\right)}dx-\int_0^A\frac{1}{f\left(x\right)+f'\left(x\right)}dx=\int_0^A\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)\left(f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right)}dx.$$

对其取极限得

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)\left(f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right)}dx\leq\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{f\left(x\right)}\right)_0^A\leq\frac{1}{f\left(0\right)}.$$

由已知条件，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}dx\le\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}dx+\frac{1}{f(0)}<+\infty$$

证毕.