空间解析几何学习报告与心得

统计 2401 张丁祎

1 引言

本篇报告为中南大学数学与统计学院 2024-2025 学年春季学期解析几何课程的学习报告与心得, 以李养成先生所编著的《空间解析几何》为课程教材. 本篇报告对教材内容进行了整理和思考, 旨在重新梳理和总结, 并再次思考数学的学习逻辑.

2 知识梳理

2.1 向量代数

向量代数是空间解析几何的基础, 它提供了描述和操作空间中向量的工具. 本书第一章对中学的二维和三维向量相关知识重新梳理, 并将相关性质推广到一般坐标系.

向量的基本运算包括加法、减法、数乘、点积和叉积. 向量的加法和减法可以通过坐标进行直接计算, 数乘是向量与标量的乘积, 结果仍然是一个向量. 点积（内积）是两个向量的标量积, 定义为 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, 点积的几何意义是两个向量的模长乘以它们夹角的余弦值, 即 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$. 叉积（外积）是两个向量的向量积, 定义为 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$, 叉积的模表示由向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 构成的平行四边形的面积, 即 $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$.

对于叉积, 有一个重要公式——二重外积公式:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

向量的混合积是三个向量之间的一种特殊运算, 反映了三个向量构成的平行六面体的体积, 定义为 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}$, 这个值的绝对值表示由向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{c}$ 构成的平行六面体的体积.

2.2 空间的平面与直线

平面方程是描述平面几何性质的基本工具, 不同类型的平面方程提供了从不同角度描述平面的方法. 作为空间几何的最简单形式: 一次方程, 研究平面方程的思路奠定了对后续空间曲面思考逻辑的基础.

平面的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, (A,B,C) 是平面的法向量, 表示平面的垂直方向. 除此之外, 还有平面的截距式方程、平面的点法式方程、平面的三点式方程等.

单独的, 对于平面束, 有以下两个重要方程: 共轴平面束的方程为 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$. 平行平面束的方程为 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

一条直线可以看作两个平面的交线且这样的平面必然存在, 也可以看作从一个点出发, 与该点的向量全都共线的点的集合.

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的一点, $\overrightarrow{v}=(X,Y,Z)$ 为直线的方向向量.

直线的一般方程:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

直线的坐标式参数方程为:

$$\begin{cases}x=x_0+Xt\\ y=y_0+Yt\\ z=z_0+Zt\end{cases}$$

除此之外, 还有直线的标准方程、直线的向量式参数方程、直线的两点式方程等.

从不同角度研究平面和直线, 就可以快速的对应我们的" 需求", 去获取我们想要的平面和直线特征. 而通过不同的平面方程和直线方程, 便可以有针对性的使用他们去讨论平面与直线的位置关系.

谈及平面间, 则是通过 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ 去刻画. 而平面与直线间, 则是通过 $AX_0 + BY_0 + CZ_0 + D$ 和 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$ 去刻画. 对直线间, 则用混合积以及方向向量的关系加以刻画. 但上述的关系仍是相对的, 便引出对实质度量关系的思考.

点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{d}$ 的距离公式为:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \overrightarrow{d}|}{|\overrightarrow{d}|}$$

点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式为:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

直线与平面所成的角 φ 满足 $\sin\varphi = |\cos\theta|$:

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{d}||\overrightarrow{n}|}$$

平面与平面所成的角 α 满足 $\cos\alpha = |\cos\theta|$:

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

至此, 我们便成功刻画了平面与直线及他们之间的关系.

2.3 常见的曲面

于此, 先给出五种典型的二次曲面和其他常见的曲面:

椭球面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

椭圆抛物面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$

双曲抛物面: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

球面的方程为:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

柱面的方程:

$$x^2+y^2=r^2$$

圆锥面的方程:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

旋转曲面是由一条平面曲线绕着一条直线旋转而形成的曲面. 如果平面曲线的方程为 $y=f(x)$, 绕 x 轴旋转, 则旋转曲面的方程为:

$$y^2+z^2=[f(x)]^2$$

对于柱面、圆锥面、旋转曲面, 总有一个通用思路, 便是通过" 不变和变化" 构建联系, 从而生成曲面. 例如谈及旋转曲面:

轴 l , 母线 Γ :

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

l 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 母线 Γ 上一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 方向向量 $\overrightarrow{v}=(l,m,n)$

联立:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2 \\ l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0 \\ F(x_1,y_1,z_1)=0 \\ G(x_1,y_1,z_1)=0 \end{cases}$$

消去 x_1,y_1,z_1 得 $H(x,y,z)$ 即旋转曲面方程.

对于直纹曲面, 将其理解为直线族生成的曲面. 对于一个曲面方程进行因式分解, 可以分别得到他的两族直线.

2.4 二次曲面的一般理论

2.4.1 以高等代数作为工具

为便于本章的讨论, 先借助代数学知识进行一些定义和讨论.

对于曲面的主方向, 其实就是特征向量.

在此定义几个不变量:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det A^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_4 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

有 $\det(A^* - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3\lambda = 0$

通过上述, 有一套化简方法:

高代的正交变换法:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi(x, y, z) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

之后有新的方程:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

通过配方法显然有只含平方项和常数项的简化方程:

a. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$

b. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2qz = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

c. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

d. $\lambda_1 x^2 + 2py = 0$, $\lambda_1 p \neq 0$

e. $\lambda_1 x^2 + d = 0$, $\lambda_1 \neq 0$

对于上述 5 种, 再利用不变量, 其实有更快捷的计算方法:

a. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$, $I_3 \neq 0$

b. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}} z = 0$, $I_3 = 0, I_4 \neq 0$

c. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_2}{I_2} = 0$, $I_3 = I_4 = 0, I_2 \neq 0$

d. $\lambda_1 x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_2}{I_1}} y = 0$, $I_2 = I_3 = I_4 = 0, K_2 \neq 0$

e. $\lambda_1 x^2 + \frac{K_1}{I_1} = 0$, $I_2 = I_3 = I_4 = K_2 = 0$

2.4.2 二次曲面的关键量

首先, 对于曲面与直线间关系的研究, 可以通过将直线方程代入曲面方程来讨论交点情况.

设直线方程为:

$$L: \begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \\ z = z_0 + Zt \end{cases}$$

将其代入曲面方程 $F(x, y, z) = 0$ 得:

$$\Phi(X, Y, Z)t^2 + 2[XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0)]t + F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

通过判别式可讨论 t 的解的情况.

去求相切关系, 其实就是上文所述将直线和曲面联立, 求 $\Delta = 0$ 的情况.

这里给出” 半代法” 思想下切平面的一种表示形式:

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对于 $\Phi(X, Y, Z) = 0$ 的解 $X : Y : Z$ 称为曲面的渐近方向. 渐近线和渐近锥面由此定义.

渐近方向 (X,Y,Z) 为奇向当且仅当满足:

$$\begin{cases} \Phi_1(X,Y,Z)=0 \\ \Phi_2(X,Y,Z)=0 \\ \Phi_3(X,Y,Z)=0 \end{cases}$$

对给定非渐近方向 (X,Y,Z), 其对应径面方程为:

$$XF_1(x,y,z)+YF_2(x,y,z)+ZF_3(x,y,z)=0$$

$$\Phi_1(X,Y,Z)x+\Phi_2(X,Y,Z)y+\Phi_3(X,Y,Z)z+\Phi_4(X,Y,Z)=0$$

$C(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面的中心当且仅当:

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ F_2(x_0,y_0,z_0)=0 \\ F_3(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$$

对上述中心方程组, 记矩阵 A 和增广矩阵 B :

- $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=3$, 中心二次曲面
- $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=2$, 线心二次曲面
- $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=1$, 面心二次曲面
- $\operatorname{rank}(A)\neq\operatorname{rank}(B)$, 无心二次曲面

而对于二次曲线, 其实套用二次曲面的分析过程, 便可得出相应做法了.

3 心得

数学是一门研究数量、结构、变化以及空间的学科, 它在世界各个领域中都起着重要的作用. 数学是科学和工程领域的基础, 也对理解自然现象、经济学、社会科学等其他学科有着重要影响. 数学的学习具有极其重要的意义和必要性.

空间解析几何给予了解释几何体的另一种思路. 光是观察几何体, 虽然直观, 但得到的结论或许是片面的. 而" 解析" 二字, 正体现于通过将现实中的几何体放入坐标系的框架内, 使用代数的语言去描述几何体, 进行更为系统和理论化的研究.

空间解析几何, 作为一门数学的基础课程, 对数学专业乃至其他专业的学习都有至关重要的作用. 通过空间解析几何, 得以连接代数与几何. 在代数的窗口下看几何, 得到的结论优美且整合性强. 如: 描述二次曲面的中心, 写出方程组 $F_1(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F_2(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F_3(x_0, y_0, z_0) = 0$, 再用代数中线性方程组的秩去刻画, 便可以快速得到其中心的性质. 这样去写, 条理清晰, 总结性强, 反映了对称性的一般结论. 对二次曲面进行分类, 从二次型正交变换去化简, 从不变量去化简, 再从二次项前系数进行分类, 美观且具有一般性. 再到实质度量关系, 若是用纯几何方法去做, 难以构造且难以计算. 而用代数的角度去思考, 对点到平面距离公式, 就有了形如 $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 这样简明的公式. 同样, 亦有通过几何去让代数更为直观化. 学习高等代数时, 过渡矩阵和基变换, 就可以理解为坐标系的转换. 初学时对二次型方面知识不是很理解, 从空间解析几何的视角去看, 明确了应用场景, 就自然理解了变换为标准型的底层思路和意义. 而对物理、化学等其他学科, 通过空间解析几何以构建代数几何于一体的解释语言, 发掘出物理、化学模型中的数学本质, 对相关的研究亦有莫大的帮助.

代数和几何, 应同时学习. 学习空间解析几何的过程中, 忆起华罗庚的一句" 诗": " 数无形时不直观, 形无数时难入微". 数学的学习, 定然坎坷, 抽象的结论和众多的公式, 还有难以捉摸的" 注意力", 太困难了. 理解好代数和几何两种语言对问题的刻画, 对数学的学习略有思路了. 而对空间解析几何这一定义众多, 涉及知识丰富的课程, 学习过程中, 也是有了一个新的思路: 去理解一遍教材知识点, 再用自己的语言描述一遍, 会有更深刻的理解.

空间解析几何告一段落, 数学的学习还是道阻且长.

参考文献

[1] 李养成. 解析几何 *[M]* 北京: 科学出版社, 2007.