Ecole nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique

TRAVAIL PRATIQUE 3

Rédigé par :
LAWA FOUMSOU Prosper
RASAMOELINA Paulinah
Élèves Ingénieurs Statisticiens Économistes

Sous la supervision de :
M. Aboubacar HEMA
Research Analyst

Exercice 10 - Un cran au-dessus

Enoncé

Étudier la convergence des séries suivantes : 1. $u_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n!)}$ 2. $u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3(x)}{1+x}dx$ 3. $u_n = e^{-u_n/n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 11 - Série harmonique

Enoncé

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

En déduire un équivalent de H_n. On pose pour $n \geq 1$, $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Vérifier que, pour $n \geq 2$,

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Étudier la monotonie de (v_n). En déduire que (v_n) est convergente. On note γ sa limite et on pose pour $n \geq 1$,

$$w_n = H_n - \ln(n+1) - \gamma$$

Vérifier que, pour tout $x \geq 0$,

$$\ln(1+x) = x - \int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2}dt$$

En déduire que, pour tout $x \geq 0$,

$$|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$|w_n - w_{n-1}| \leq \frac{1}{2n^2}$$

Soit $M > N \geq 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{N}$$

En déduire, sous les mêmes hypothèses, que

$$|w_M - w_N| \leq \frac{1}{2N}$$

Puis que
$$|v_N - \gamma| \leq \frac{1}{2N}$$
Écrire un algorithme permettant de calculer une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Exercice 12 - Série des inverses des nombres premiers

Enoncé

Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$$

Pour $n \geq 1$, on pose
$$V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$
Montrer que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la suite $(\ln V_n)$ est convergente. En déduire que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la série

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$$

est convergente. Démontrer que

$$V_n = n \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{p_j^k}\right)$$

En déduire que
$$V_n \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$
Quelle est la nature de la série
$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$$
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de la série

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k^\alpha}$$

Exercice 13 - Valeur absolue et sinus

Énoncé

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$S_n = \sum \frac{|\sin(n)|}{n}$$

Exercice 14 - Entiers sans 9

Énoncé

On note A l'ensemble des entiers naturels non-nuls dont l'écriture (en base 10) ne comporte pas de 9.
On énumère A en la suite croissante (k_n).

Quelle est la nature de la série suivante ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$$

Convergence de séries à termes quelconques

Exercice 15 - Sans le critère des séries alternées

Énoncé

On considère la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$$

et on note, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}, \quad u_n = S_{2n}, \quad v_n = S_{2n+1}.$$

1. La série est-elle **absolument convergente** ?

2. Démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**.

3. Conclure que la série est **convergente**.

Exercice 16 - Pour commencer

Énoncé

Etudiez la nature des séries $\sum u_n$ suivantes

1. $$u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$$

2. $$u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

3. $$u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n}$$

Exercice 17 - Convergence absolue

Enoncé

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général

$$\frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t)\, dt$$

est elle convergente?