Доразберемся с несобственными интрегалами.

Доказательства в качестве упражнения

Теорема 7. *$f_n : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ - набор функций*
$\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \in C\big([a, \infty)\big)$
$\forall x \in [a, \infty)\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: \varphi(x)$
$\forall R > a$ сходимость равномерна на $[a, R]$
$\forall n\ \exists \int_a^\infty f_n(x)dx$ и сходится равномерно по n
Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)dx = \int_a^\infty \varphi(x)dx$$

$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \varphi(x)dx = \int_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

Доказательство. Упражнение :) □

Теорема 8. *$f : [a, \infty] \times (c, d), \quad f \in C\big([a, \infty) \times (c, d)\big)$*
$\forall x, y \in \big([a, \infty) \times (c, d)\big)\ \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(x, y), \varphi \in C\big([a, \infty) \times (c, d)\big)$
$\forall y \in (c, d)\ \exists \int_a^\infty f(x, y)dx, \exists \int_a^\infty \varphi(x, y)dx$, схю равномерно по $y \in (c, d)$
Тогда

$$\exists \frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty \varphi(x, y)dx$$

$\frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$ ф нерп, дфду непр, справа равн

Теорема 9. *$f : [a, \infty) \times [c, d] \to \mathbb{R}, f \in C\big([a, \infty) \times (c, d)\big)$*
$\int_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно по $y \in [c, d]$
Тогда

$$\exists \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)dy$$

Внешняя алгебра

L - линейное пространство размерности n, базис: $e_1, \ldots, e_n$

$\bigwedge^2 L$ - формальные суммы $\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i \wedge b_i \quad \alpha_i, N \in \mathbb{R}, a_i b_i \in L$,

профакторизованные по отношению эквивалентности, заданному правилами:

$(\alpha a_1 + \beta b_1) \wedge a_2 = \alpha a_1 \wedge a_2 + \beta b_1 \wedge a_2$

$a_1 \wedge a_2 = -a_2 \wedge a_1 \quad (\implies a \wedge a = 0 \forall a\ )$

$\wedge$ - внешнее произведение

Утверждаем, что базис сего пространства...

$a = \sum_{i=1}^n a^i e_i, b = \sum_{i=1}^n b^i e_i$

$$a\wedge b=\sum_{i,j=1}^{n}a^ib^je_i\wedge e_j=\sum_{\substack{i,j\in\{1,\dots,n\}\\ i\neq j}}a^ib^je_i\wedge e_j=\sum_{\substack{i,j\in\{1,\dots,n\}\\ i<j}}(a^ib^j-b^ia^j)e_i\wedge e_j$$

$\{e_i\wedge e_j \mid 1\le i<j\le n\}$ - базис $\bigwedge^2 L$, $\dim\bigwedge^2 L=C_n^2$

Обобщим

$\bigwedge^0 L=\mathbb{R}, \bigwedge^1 L=L,$

$\bigwedge^p L$ - формальные суммы $\sum \alpha a_1\wedge a_2\wedge\dots\wedge a_p$, факторизованные по правилам $(\alpha a_1+\beta b_1)\wedge a_2\wedge\dots\wedge a_p=\alpha a_1\wedge a_2\wedge\dots\wedge a_p+\beta b_1\wedge a_2\wedge\dots\wedge a_p$

$a_1\wedge\dots\wedge a_p$ меняет знак при перестаовке любых двух индексов

Базис $\bigwedge^p L \quad e_{h_1}\wedge e_{h_2}\wedge\dots\wedge e_{h_p}$, где $1\le h_1<h_2<h_p\le n,\ H=(h_1,\dots,h_p)$

$\dim\bigwedge^p L=C_n^p$

Если π - перестановка $\{1,\dots,n\}\quad a_{\pi(1)}\wedge a_{\pi(2)}\wedge\dots\wedge a_{\pi(p)}=\mathrm{sign}\pi a_1\wedge\dots\wedge a_p$

$e_H=(e_{h_1},\dots,e_{h_p})$

Рассмотрим $\lambda=\sum_H a^He_H$.

Введём коэффициент $b^{h_1\dots h_p}$: если $h_1<h_2<\dots<h_p$, то $b^H=a^H$. При всех остальных – по антисимметричности

$$\lambda=\frac{1}{n!}\sum_{h_1,\dots,h_p=1}^{n}b^{h_1\dots h_p}e_{h_1}\wedge\dots\wedge e_{h_p}$$

$\dim\bigwedge^n L=1, \bigwedge^n L=\{c\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n \mid c\in\mathbb{R}\}$

$A\in B(L)$ - ограниченный оператор в L.

$g_A : L^n\to\bigwedge^n L$

$g_A(a_1,\dots,a_n)=(Aa_1)\wedge\dots\wedge(Aa_n)$

$\exists f_a\in\bigwedge^n L : f_A(a_1,\dots,a_n)=g_A(a_1,\dots,a_n)$

f_A - умноженное на число

Замечание. $f_A(a_1\wedge\dots\wedge a_n)=(\det A)\cdot a_1\wedge\dots\wedge a_n$

Доказательство. $a_1,\dots,a_n$ линейно зависимы: $0=0$;

$a_1,\dots,a_n$ линейно независимы: $\implies$ это базис L.

$Aa_i=\sum_{k=1}^n A_{ki}a_k$

$f_A(a_1\wedge\dots\wedge a_n)=g(a_1,\dots,a_n)=(Ae_1)\wedge\dots\wedge(Aa_n)=\left(\sum_{k_1=1}^n A_{k_11}a_{k_1}\right)\wedge\dots\wedge\left(\sum_{k_n=1}^n A_{k_nn}a_{k_n}\right)=$

$$= \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\in\{1,\dots,n\}\\ k_i\neq k_j, i\neq j}} A_{k_1 1}\cdot\ldots\cdot A_{k_n n}\cdot \underbrace{a_{k_1}\wedge\dots\wedge a_{k_n}}_{\mathrm{sign}(k_1,\dots,k_n)\cdot a_1\wedge\ldots\wedge a_n} = (\det A)\cdot a_1\wedge\ldots\wedge a_n$$

$$(Aa_1)\wedge\ldots\wedge(Aa_n) = (\det A)a_1\wedge\ldots\wedge a_n$$

$\square$

Внешнее произведение

$\underbrace{(a_1\wedge\ldots a_p)}_{\in\bigwedge^p L}\wedge\underbrace{(b_1\wedge\ldots\wedge b_q)}_{\in\bigwedge^q L} := a_1\wedge\ldots\wedge a_p\wedge b_1\wedge\ldots\wedge b_q\in\bigwedge^{p+q} L$

На полиномах - по линейности

$\underbrace{\lambda}_{\bigwedge^p L}\bigwedge\underbrace{\mu}_{\bigwedge^q L} = (-1)^{pq}\mu\bigwedge\lambda$

$a_1\wedge\ldots\wedge a_p\wedge$ фото 15:19

Пример 1. $L=\mathbb{R}^3$, $\quad e_1, e_2, e_3$ - *базис*

$(a^1e_1+a^2e_2+a^3e_3)\wedge(b^1e_1+b^2e_2+b^3e_3) =$

$(a^1b^2-b^1a^2)e_1\wedge e_2+(a^2b^3-b^2a^3)e_2\wedge e_3+(a^3b^1-b^3a^1)e_3\wedge e_1$

Это компоненты $a\times b$

Пример 2. $(a^1e_1+a^2e_2+a^3e_3)\wedge(b^1e_2\wedge e_3+b^2e_3\wedge e_1+b^3e_1\wedge e_2) =$

$(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3)e_1\wedge e_2\wedge e_3$

Это $a\cdot b$

Внешняя степень оператора

$A\in B(M,N), \quad \bigwedge^p A\in B(\bigwedge^p M, \bigwedge^p N)$

$(\bigwedge^p A)\underbrace{(a_1\wedge\ldots\wedge a_p)}_{\in\bigwedge^p M} = (Aa_1)\wedge\ldots\wedge(Aa_p), \quad \bigwedge^n A = \det A$, если $M=N$

$e_1,\dots,e_m$ - базис M, $f_1,\dots,f_n$ - базис N.

$$(\bigwedge^p A)(e_{h_1}\wedge\ldots\wedge e_{h_p}) = (Ae_{h_1})\wedge\ldots\wedge(Ae_{h_p}) = \Big(\sum_{k_1=1}^n A_{k_1h_1}f_{k_1}\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{k_p=1}^n A_{k_ph_p}f_{k_p}\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\dots,k_p\in\{1,\dots,n\}\\ k_i\neq k_j, i\neq j}} A_{k_1h_1}\cdot\ldots\cdot A_{k_ph_p}f_{k_1}\wedge\ldots\wedge f_{k_p} = \sum_{\substack{k=(k_1,\dots,k_p)\\ 1\le k_1<\ldots<k_p\le n}}\sum_\pi A_{k_1h_1}\cdot\ldots\cdot A_{k_ph_p}\mathrm{sign}\pi\cdot f_k$$

Обозначим внутреннюю сумму без f_k как A_{KH}:

$\bigwedge^p Ae_H = \sum_K A_{KH} f_K, \quad (A_{KH})_{KH}$ - изображающая матрица оператора $\bigwedge^p A$ в паре базисов $(e_H), (f_K)$.

Свойства внешней степени оператора

Предложение. $\bigwedge^p(AB) = \bigwedge^p A \bigwedge^p B$

Доказательство. $\big(\bigwedge^p(AB)\big)(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) = (ABa_1) \wedge \ldots \wedge (ABa_p) = (\bigwedge^p A)((Ba_1) \wedge \ldots \wedge (Ba_p)) = (\bigwedge^p A \ldots \bigwedge^p B)(a_1 \wedge \ldots \wedge a_p)$ □

Предложение. $\lambda \in \bigwedge^p M, \mu \in \bigwedge^q M$

$(\bigwedge^{p+q} A)(\lambda \wedge \mu) = (\bigwedge^p A\lambda) \wedge (\bigwedge^q A\mu)$

Доказательство. По линейности разложить, там сразу видно короче □

Индефинитное скалярное произведение

Скалярное произведение, внутреннее произведение, "индефинитная метрика"

$(\cdot, \cdot)$ - невырожденная симметричная билинейная форма.

$(a, b) = 0 \ \forall b \in L \implies a = 0$

Пример 1. *Лоренцева метрика в* $\mathbb{R}^4$.

$a = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad (a_1, a_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$

Невырожденность ещё можно записать как ненулёвость определителя матрицы Грама.

$\exists$ ОНБ $\sigma_i, i = 1, \ldots, n \quad (\sigma_i, \sigma_i) = \pm\delta_{ij}$

r_+ – число знаков $+$, r_- – число знаков -, $s = r_+ - r_-$ – сигнатура

$f \in L^* \ \exists b_f \in L : \forall a \in L \ f(a) = (b_f, a)$

Давайте посчитаем какое пространство получается че...

Скалярное произведение в $\bigwedge^p L$

$\lambda = a_1 \wedge \ldots \wedge a_p$

$\mu = b_1 \wedge \ldots \wedge b_p$

$$(\lambda, \mu)_{\bigwedge^p L} := \det\big((a_i, b_j)\big)_{i,j=1}^p$$

$\sigma_H = \sigma_{h_1} \wedge \ldots \wedge \sigma_{n_p}$

$(\sigma_H, \sigma_K)_{\bigwedge^p L} = 0, H \neq K$ (столбец из нулей в матрице $(\sigma_{n_i}, \sigma_{n_j})_{i,j=1}^p$)

$(\sigma_H, \sigma_H) = \det \operatorname{diag}\{(\sigma_{h_i}, \sigma_{h_i}), i = 1, \ldots, p\} = \prod_{i=1}^{p} (\sigma_{n_i}, \sigma_{n_i}) \neq 0 = \pm 1 = (-1)^{r_-}$

$\bigwedge^{n-1} L, \dim = n$

$\alpha_n \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \ldots \wedge \sigma_{n-1}, \alpha_{n-1} \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_{n-2} \wedge \sigma_n$

$\alpha_i = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_{i=1} \wedge s_{i+1} \wedge \ldots \wedge \sigma_n$

$(\alpha_i, \alpha_i)_{\bigwedge^{n-1} L} = \prod_{j \in \{1, \ldots, n\}, j \neq i} (\sigma_j, \sigma_j) = (-1)^{r_-} (\sigma_i, \sigma_i)_L$