14.11.22

Ряды и интрегалы, зависящие от параметра

Вспомним равномерную сходимость, непрерывность и т.д.:

X_0, X – метрические пространства,

$E \subset X_0, f : E \to X$

$\{f$ непр. в точке $x\}_{x \in E}$

Непрерывность на E:

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E\ \exists \delta > 0 : \forall x' \in E : d_0(x, x') < \delta$ выполняется $d\big(f(x), f'(x)\big) < \varepsilon$

Равномерная непрерывность:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in E : d_0(x, x') < \delta$ выполняется $d\big(f(x), f'(x)\big) < \varepsilon$

$\{a_n(p)\}_{n=1}^{\infty}, p \in P$

$\{a_n(p) \to_{h \to \infty} a(p)\}_{p \in P}$

Сходимость:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall p \in P\ \exists N : \forall n > N\ d\big(a_n(p), a(p)\big) < \varepsilon$$

Равномерная сходимость:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall p \in P, \forall n > N\ d\big(a_n(p), a(p)\big) < \varepsilon$$

Пример 1. $a_n(p) = \frac{np}{1+(np)^2}, P = [0, 1]$

$\forall p \in P\ a_n(p) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

$\varepsilon = 1/2, \forall N\ \exists p, n; np = 1 :\ \frac{np}{1+(np)^2} = 1/2$

Теорема 1. *(о двойном пределе)*

X - полное метрическое пространство, $\{a_{np}\}_{n,p \in \mathbb{N}}$ - двойная последовательность в X.

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{n \to \infty} a_{np} = u_p$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{p \to \infty} a_{np} = v_n$$

Если один из этих пределов достигается равномерно, то

$$\exists \lim_{p \to \infty} u_p, \exists \lim_{n \to \infty} v_n$$

и они равны.

Доказательство. Пусть первый предел достигается равномерно.
$a_{np} \overset{p\in\mathbb{N}}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} u_p$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n > N_1, \forall p :\ d(a_{np}, u_p) < \varepsilon/3$
$n_0 > N_1$, $a_{n_0p} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} v_n$ критерий коши для последовательности:
для $\varepsilon\ \exists N_2 : \forall p, q > N_2 :\ d(a_{n_0p}, a_{n_0q}) < \varepsilon/3$
$d(u_p, u_q) \le \underbrace{d(u_p, a_{np})}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d(a_{n_0p}, a_{n_0q})}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d(a_{n_0q}, u_q)}_{<\varepsilon/3}$ по н-ву треугольника.
Это меньше $\varepsilon\ \forall\varepsilon \implies u_p$ сходится, $\lim_{p\to\infty} u_p = w$
$d(a_{np}, u_p) < \varepsilon/3 \underset{p\to\infty}{\implies} d(v_n, w) \le \varepsilon/3 < \varepsilon$,
значит $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$ □

Замечание. *Формулировка теоремы в двойном пределе:*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} a_{np} = \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{np}$$

(можно переставить пределы, если одна из последовательностей сходится равномерно)

Непр-ть расстояния: $x_n \to x, y_n \to y \implies d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ (по н-ву треугольника)

Пример 2.

$$a_{np} = \frac{n}{1+n+p}, \quad a_{np} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \quad a_{np} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} a_{np} = 0, \lim_{p\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{np} = 1$$

Следствие 1. X *- полное метрическое пространство,*

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{np} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{p\to\infty} a_{np}$$

Следствие 2.

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Следствие 2'.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Следствие 3. $f_n(x) \rightrightarrows^{x\in E}_{n\to\infty} \varphi(x), \forall n\ f_n \in C(E) \implies \varphi \in C(E)$

Следствие 3'.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \varphi(x)$$

сходится равномерно по $x \in E, \forall n \ f_n \in C(E) \implies \varphi \in C(E)$

Следствие 4.

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)$$

(что-то равномерно должно сходиться)

Следствие 5. $f(x,y) \rightrightarrows_{y\to b}^{x\in E} \varphi(x), \quad f(\cdot,y) \in C(E), \forall y \implies \varphi \in C(E)$

Определение. X_0, X *- м.п.,* $E \subset X_0, f_p : E \to X, p \in P$
$\{f_p(x)\}_{p\in P}$ *равностепенно непрерывно, если*
$\forall \varepsilon \ \exists \delta : \forall x, x' \in E : d(x,x') < \delta, \forall p \in P \ d\big(f_p(x), f_p'(x)\big) < \varepsilon$

Следствие 3". $\sum_{k=1}^{n} f_k \in C(E), \forall n$ *равностепенно по* n, $\forall x \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \varphi(x)$ *сходится, тогда* φ *непр.*

Суммирование двойного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}$$

когда такое возможно??? $a_{nk} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$

Определение. A *- счётное множество индексов:* $\exists$ *биекция* $\varphi : \mathbb{N} \to A$
$\sum_{\alpha\in A} a_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$
$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$
корректность. $\psi : \mathbb{N} \to A$ *др* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\psi(k)}$ *(теорема об изменении порядка суммирвоания)*

соблазн сказать:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

Теорема 2. $a_{nk} \geq 0, \forall n,k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K_n} a_{nk} \leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} \implies \underbrace{\lim_{k_1\to\infty}\lim_{k_2\to\infty}\dots\lim_{k_N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K_n} a_{nk}}_{=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}} \leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

1. $\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} < \infty$
$\forall\varepsilon\ \exists L : \forall l > L : \sum_{j=1}^{l} a_{\varphi(j)} > \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon$ (обозначим правую ч за M)
$K = \{\varphi(l) \mid l = 1,\dots,L\} \quad \exists N : K = \bigcup_{n=1}^{N} K_n$
$\widetilde{K}_n = \{n\}\times K_n,\ K_n = \{k \mid (n,k)\in K\} = \pi_y \widetilde{K}_n$

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon < \sum_{j=1}^{L+1} a_{\varphi(j)} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k\in K_n} a_{nk} \leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

$$\forall\varepsilon\ \exists N : \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \geq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} - \varepsilon \implies \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \geq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$$

2. $\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk} = \infty$
(вместо ε и $\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$ ставим M, а последний переход равен бесконечности)
Аналогично $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} a_{nk}$ □

Теорема 3. $\{a_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ - *двойная последовательность в* $\mathbb{R}$, $\sum_{n,k\in\mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty$.
Тогда сходятся и равны двойные суммы
$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}$

Доказательство. $\forall n\in\mathbb{N}\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} |a_{nk}|$
$\forall n\in\mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ сходится абсолютно
$\forall\varepsilon\ \exists N : \forall m > n > N\ \sum_{i=n}^{m} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| \leq \sum_{i=n}^{m}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \varepsilon$
$\overset{\text{коши}}{\implies} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ сходится абсолютно
$\{\varphi_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ - подпоследовательность
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |a_{ij}|$
$\forall\varepsilon\ \exists N : \forall n > N\ \sum_{l=n^2+1}^{\infty} |a_{\varphi(l)}| < \varepsilon$
$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{ij}| + \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \varepsilon$
$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{ij}|$
$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$

сложим две оценки:
$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\right|<\varepsilon$
Аналогично $\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\right|<\varepsilon$
$\implies\forall\varepsilon\ \exists N:\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$ □

Интегрирование

Теорема 4. $f_n:[a,b]\to\mathbb{R},\ \forall n\ f_n\in C([a,b])$
$\forall x\in[a,b]\ \exists\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\varphi(x)$, *равномерно по* $x\in[a,b]$
Тогда $\int_a^b f_n(x)dx\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_a^b\varphi(x)dx$

Замечание. $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$, *если* f *равномерно сх.*

Доказательство. $\varphi\in C([a,b])$ по следствию (3?)
$\forall\varepsilon\exists N:\forall n>N,x\in[a,b]\ |f_n(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{|b-a|}$
Интегрируем:
$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx\right|\le\int_a^b|f_n(x)-\varphi(x)dx|<\varepsilon$ □

Следствие 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx$, *если ряд справа сходится равномерно*

Следствие 7. $\lim_{y\to c}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\lim_{y\to c}f(x,y)dx$, *если предел ф равномерно по экс*

Следствие 8. $K\subset\mathbb{R}^n$ *компактно,* $f\in C\big([a,b]\times K\big)\quad\int_a^b f(x,y)dx=\varphi(y):K\to\mathbb{R}$
Тогда $\varphi\in C(K)$

Дифференцирование

Теорема 5. $f_n(a,b)\to\mathbb{R},\forall n\ f_n\in C^1(a,b),\forall x\in(a,b)\ \exists\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\varphi(x)$
$\forall x\in(a,b)\ \exists\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\psi(x)$, *достигается равномерно.*
Тогда $\varphi\in C^1(a,b)$ *и* $\varphi'=\psi$.
$\lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x)=\frac{d}{dx}\big(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\big)$, *производная сх равн.*

Доказательство. $x_0\in(a,b)\quad f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x}f_n'(t)dt$
$\longrightarrow\varphi(x)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x}\psi(t)dt\implies\varphi'=\psi$ □

Следствие 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{df_n}{dx}(x)=\frac{d}{dx}\big(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\big)$, *ряд проивзводных должен сх равн.*

Следствие 10. $\lim_{y\to c}\frac{df}{dx}(x,y)=\frac{d}{dx}\big(\lim_{y\to c}f(x,y)\big)$, *если слева равн сх*

Теорема 6. *(Дифф интеграла по параметру)*
$f:[a,b]\times(c,d)\to\mathbb{R}, f\in C\big([a,b]\times(c,d)\big)$,
$\forall x,y\in[a,b]\times(c,d) \quad \exists\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\varphi(x,y),\ \varphi(x,y)\in C\big([a,b]\times(c,d)\big)$
Тогда

$$\exists\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\varphi(x,y)dy$$

($\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$*)*

Доказательство.

$$\frac{1}{n}\Big(\int_a^b f(x,y+h)-f(x,y)\Big)dx=\int_a^b\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx$$

Правая часть стремится к $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), h\to 0$
Левая к $\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx, h\to 0$
$g(h)=f(x,y+h)-f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot h$
$g(h)=g(h)-g(0)=g'(\xi)\cdot h,\xi\in[0,h]$ (т. Лагранжа)
$=\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)\cdot h,\xi(h)$
$\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y+\xi(h)\big)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
$\frac{\partial f}{\partial y}\in C\big([a,b]\times(c,d)\big)$, возьмём аш такую, чтобы y-h, y+h лежал в (c,d)
$\frac{\partial f}{\partial y}\in C\big([a,b]\times[y-\delta,y+\delta]\big)$
$\implies \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y+\xi(h)\big)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\underset{h\to 0}{\rightrightarrows}0$
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall\xi\in(-\delta,\delta),\forall x\in[a,b] \quad \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|<\varepsilon$
$\implies \forall h\in(-\delta,\delta),\forall\xi(h)\in[0,h],\forall x\in[a,b]:\Big|\frac{f(x,y+h)}{h}\Big|=\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\xi(h))-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|<\varepsilon$
$\implies \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\rightrightarrows^{x\in[a,b]}_{h\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
$\int_a^b\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx\longrightarrow\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$

$\square$