DSGE Mini Kurs - Teil 2 (Beispielmodelle)

Willi Mutschler

Dezember 2015

Inhaltsverzeichnis

An und Schorfheide (2007)

An und Schorfheide (2007)

- Vereinfachtes Smets/Wouters (2007) Modell
- Ökonomie besteht aus einem repräsentativen Haushalt, einem Endprodukt- und einem Zwischengütersektor.
- Repräsentative Unternehmen des Endproduktsektors produziert ein Konsumgut Y_t, zu dessen Herstellung ein Kontinuum von Zwischenprodukten benötigt wird.
- Ein Unternehmen $j \in [0, 1]$ des Zwischengütersektors produziert genau ein Zwischenprodukt Y_t^j.
- Endproduktsektor gilt vollständige Konkurrenz, während im Zwischengütersektor die Unternehmen in monopolistischer Konkurrenz stehen und ihre Preise vorausschauend setzen.
- Nominelle Preisrigiditäten aufgrund quadratischer Preisanpassungskosten.
- Die Fiskalpolitik folgt einem exogenen Prozess, die Geldpolitik einer Taylor (1993)-Regel.

Repräsentativer Haushalt: Nutzen

- maximiert intertemporale Nutzenfunktion über unendlichen Zeithorizont
- In jeder Periode Sequenz von Entscheidungen über Konsum und finanzielles Vermögen in Form von risikofreien Staatsanleihen oder Geld.
- Gegenwärtiger und zukünftig abdiskontierter erwarteter Nutzen

$$E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s U_{t+s} \quad \text{mit } \beta \text{ als Diskontfaktor} \tag{1}$$

- Kontemporäre Nutzenfunktion U_t:

$$U_t = \frac{(C_t/A_t)^{1-\tau} - 1}{1-\tau} + \chi_M \ln\left(\frac{M_t}{P_t}\right) - \chi_H H_{t+s} \quad \text{wobei vereinfachend } \chi_H = 1.$$

- Konsum C_t, Arbeit H_t, reale Geldhaltung M_t/P_t und P_t Preis des Endprodukts.
- τ ist Maß für relative Risikoaversion, χ_M und χ_H Skalierungsfaktoren
- Übliche Konsumniveau (*habit*), das annahmegemäß gleich dem Niveau des Technologieparameters A_t ist.

Repräsentativer Haushalt: Budgetrestriktion

$$\underbrace{\overbrace{C_t}^{\text{Konsum}} + \overbrace{\frac{M_t}{P_t}}^{\text{neues Geld}} + \overbrace{\frac{B_t}{P_t}}^{\text{neue Bonds}} + \overbrace{\frac{T_t}{P_t}}^{\text{Steuern}}}_{\text{Ausgaben}} = \underbrace{\overbrace{W_t H_t}^{\text{Lohn}} + \overbrace{D_t}^{\text{Gewinne}}}_{\text{Einkommen}} + \underbrace{\overbrace{\frac{M_{t-1}}{P_t}}^{\text{altes Geld}} + \overbrace{R_{t-1}\frac{B_{t-1}}{P_t}}^{\text{alte Bonds}}}_{\text{Vermögen}}. \tag{2}$$

- Vermögen besteht aus
  - gehaltenem Geld M_{t-1} der Vorperiode
  - Ertrag risikofreier Staatsanleihe B_{t-1} mit nominalen (Brutto-)Ertrag $R_{t-1}B_{t-1}$
- Haushalt bietet dem Zwischengütersektor Arbeit H_t an und erhält reales Arbeitseinkommen in Höhe von $W_t H_t$ (Reallohn W_t für Haushalt exogen).
- Unternehmen des Zwischengütersektors gehören den Haushalten, diese erhalten die Gewinne D_t
- Haushalte verwenden Einkommen und Vermögen für
  - Konsumgüter C_t vom Unternehmen des Endproduktsektors zum Preis P_t
  - Finanzierung weiterer Anleihen B_t
  - Halten von Geld M_t
  - Entrichtung einer pauschalen Steuer T_t

Repräsentativer Haushalt: Optimalität

- Maximiere Zielfunktion (1) unter Beachtung der Budgetrestriktion (2): Details

$$\underbrace{\left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{-\tau}\frac{1}{A_t}}_{U_t^C} = \beta E_t\left[\frac{R_t}{\pi_{t+1}}\underbrace{\left(\frac{C_{t+1}}{A_{t+1}}\right)^{-\tau}\frac{1}{A_{t+1}}}_{U_{t+1}^C}\right], \tag{3}$$

$$W_t = \left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{\tau} A_t = \frac{U_t^H}{U_t^C}, \tag{4}$$

$$\chi_M\left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{-1} = \frac{(C_t/A_t)^{-\tau}}{A_t}\left(\frac{R_t-1}{P_t R_t}\right). \tag{5}$$

- Gleichung (3) ist Euler-Gleichung der intertemporalen Optimalität.
- Gleichung (4) intratemporale optimale Arbeitsangebot
- Gleichung (5) intratemporale optimale realen Geldhaltung

Endproduktsektor: Technologie und Kostenminimierung

- Zur Herstellung des Endprodukts Y_t werden die Zwischengüter Y_t^j als Inputs benötigt, Aggregierung mit Technologie vom Typ Dixit und Stiglitz (1977):

$$Y_t = \left[\int_0^1 (Y_t^j)^{1-\nu} \, dj \right]^{\frac{1}{1-\nu}} . \tag{6}$$

- Sei P_t^j Preis des Zwischenguts Y_t^j, dann folgt aus der Kostenminimierung die Nachfragefunktion nach Gut Y_t^j: ▸ Details

$$Y_t^j = \left(\frac{P_t^j}{P_t} \right)^{\frac{-1}{\nu}} Y_t . \tag{7}$$

- $\frac{1}{\nu}$ ist also die Nachfrageelastizität nach Gut Y_t^j ist.
- Eingesetzt in (6) ergibt:

$$P_t = \left[\int_0^1 (P_t^j)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \, dj \right]^{\frac{\nu}{\nu-1}} . \tag{8}$$

- Index P_t ist somit als Preis des Endprodukts interpretierbar.

Zwischengütersektor: Marktmacht und Preisrigiditäten

- Unternehmen verfügen über Marktmacht für ihr hergestelltes Gut Y_t^j
- Lineare Produktionsfunktion:

$$Y_t^j = A_t N_t^j, \tag{9}$$

wobei A_t den exogenen Technologieparameter bezeichnet.
- Eingesetzte Arbeitsmenge N_t^j wird mit Reallohn W_t, der sich exogen auf dem kompetitiven Arbeitsmarkt einstellt, entlohnt.
- Um rigide Nominalpreise zu modellieren, unterliegen Unternehmen quadratischen Anpassungskosten nach Rotemberg (1982):

$$AC_t^j = \frac{\phi}{2}\left(\frac{P_t^j}{P_{t-1}^j} - \pi\right)^2 Y_t^j.$$

- $\pi \geq 1$ ist gleichgewichtige Wachstumsrate des Endproduktpreises (8), die von Zentralbank angestrebt wird.
- $\phi \geq 0$ misst somit die Preisstarrheit in der Ökonomie.

Zwischengütersektor: Gewinnmaximierung

- Reale Gewinn D_{t+s}^j eines Unternehmens im Zwischengütersektor ist:

$$D_{t+s}^j = \underbrace{\beta^s Q_{t+s|t}}_{\text{Diskontfaktor}} \left(\underbrace{\frac{P_{t+s}^j}{P_{t+s}} Y_{t+s}^j}_{\text{Umsatz}} - \underbrace{W_{t+s} N_{t+s}^j}_{\text{Lohnkosten}} - \underbrace{\frac{\phi}{2} \left(\frac{P_{t+s}^j}{P_{t+s-1}^j} - \pi \right)^2 Y_{t+s}^j}_{\text{Preisanpassungskosten}} \right), \quad (10)$$

- Diskontfaktor berücksichtigt, dass die Unternehmen den Haushalten gehören.
  - Aus Sicht dieser ist $\beta^s Q_{t+s|t}$ Barwert einer Einheit Konsum in Periode $t+s$ bzw. der Grenznutzen einer zusätzlichen Einheit Gewinns. Folglich gilt $Q_{t|t} = 1$.
- Jedes Unternehmen maximiert den Barwert zukünftiger erwarteter Gewinne (10) durch die Wahl der Arbeitsmenge N_t^j und des Preises P_t^j, wobei sie das Arbeitsangebot (4), die Nachfrage des Endproduktsektors nach ihrem Gut (7) und die Produktionstechnologie (9) berücksichtigen müssen.

Zwischengütersektor: Optimalität

- Optimalität ist dann gegeben durch: Details

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{v}\right) Y_t^j \frac{1}{P_t} + \frac{1}{v}\left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{\tau} Y_t^j \left(\frac{P_t^j}{P_t}\right)^{-1} \frac{1}{P_t} \\
&\qquad -\phi\left(\frac{P_t^j}{P_{t-1}^j}-\pi\right)\frac{1}{P_{t-1}^j} Y_t^j + \frac{\phi}{2v}\left(\frac{P_t^j}{P_{t-1}^j}-\pi\right)^2 Y_t^j \left(\frac{P_t^j}{P_t}\right)^{-1}\frac{1}{P_t}\Bigg] \\
&\qquad\qquad + \phi\beta E_t Q_{t+1|t}\left[\left(\frac{P_{t+1}^j}{P_t^j}-\pi\right)\frac{P_{t+1}^j}{(P_t^j)^2} Y_{t+1}^j\right] = 0. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

- Bei flexiblen Preisen ($\phi = 0$) vereinfacht sich dies zu:

$$
P_t^j = \frac{1}{1-v} P_t \left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{\tau} \overset{(4)}{=} \frac{1}{1-v} P_t \frac{W_t}{A_t}. \qquad (12)
$$

- Ohne Preisanpassungskosten ist P_t^j gleich einem Mark-Up $1/(1-v)$ auf die marginalen Kosten $W_t P_t / A_t$.
- Mit Preisanpassungskosten ist P_t^j gleich einem Mark-Up auf die zukünftig erwarteten marginalen Kosten.

Staatssektor

- Nominalzins R_t ist das Instrument der Geldpolitik und wird von der Zentralbank festgelegt. Dabei folgt sie einer modifizierten Output-Gap-Regel der Taylor(1993)-Form:

$$R_t = {R_t^*}^{1-\rho_R} R_{t-1}^{\rho_R} e^{\epsilon_{R,t}}$$

- Zwei Spezifikationen für R_t^*:

$$R_t^* = \begin{cases} r\pi^* \left(\frac{\pi_t}{\pi^*}\right)^{\psi_1} \left(\frac{Y_t}{Y_t^*}\right)^{\psi_2} & \text{(output-gap Regel)} \\ r\pi^* \left(\frac{\pi_t}{\pi^*}\right)^{\psi_1} \left(\frac{Y_t}{\gamma Y_{t-1}}\right)^{\psi_2} & \text{(output-growth Regel)} \end{cases} \tag{13}$$

- Zentralbank reagiert somit sowohl auf Abweichungen von angestrebter Inflationsrate als auch auf Abweichungen des Outputs vom Potenzialoutput bzw. gleichgewichtiger Wachstumsrate.
- Parameter ψ_1 und ψ_2 geben die jeweilige Gewichtung an, ρ_R misst zeitliche Persistenz und $\epsilon_{R,t}$ ist ein seriell unkorrelierter, geldpolitischer Schock

Staatssektor

- Regierung erhebt Steuern, emittiert neue Staatsanleihen und erhält Residualgewinn der Zentralbank.
- Einnahmen werden für Finanzierung von Staatsausgaben $P_t G_t$ verwendet.
- Staatliche Budgetrestriktion:

$$\underbrace{P_t G_t}_{\text{Staatsausgaben}} = \underbrace{T_t}_{\text{Steuern}} + \underbrace{B_t - R_{t-1} B_{t-1}}_{\text{neue Staatsanleihen}} + \underbrace{M_t - M_{t-1}}_{\text{Seignorage}}.$$

- Reale Staatsausgaben G_t betragen einen Anteil $\zeta_t \in [0;1]$ des Outputs Y_t:

$$G_t = \zeta_t Y_t \Leftrightarrow \frac{Y_t}{Y_t - G_t} = \frac{1}{1 - \zeta_t} \equiv g_t. \tag{14}$$

Stochastische Prozesse

- Aggregierte Produktivität A_t ist treibende Faktor für den gleichgewichtigen Wachstumspfad der Ökonomie

$$\ln A_t - \ln A_{t-1} = \ln \gamma + \ln z_t, \quad \ln z_t = \rho_z \ln z_{t-1} + \epsilon_{z,t}, \quad \epsilon_{z,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2). \tag{15}$$

- Logarithmus von g_t folgt einem AR(1)-Prozess:

$$\ln(g_t) = (1 - \rho_g) \ln(g) + \rho_g \ln(g_{t-1}) + \epsilon_{g,t} \qquad \text{mit } \epsilon_{g,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_g^2). \tag{16}$$

- Geldpolitischer Schock

$$\epsilon_{R,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_R^2) \tag{17}$$

Symmetrisches Gleichgewicht

- Aufgrund der Symmetrie des Optimierungskalküls verhalten sich alle Unternehmen des Zwischengütersektors im Gleichgewicht identisch, also

$$Y_t^j = Y_t \quad N_t^j = N_t, \quad P_t^j = P_t, \quad \pi_t = P_t / P_{t-1}.$$

- Für alle Perioden gelten die Markträumungsbedingungen

$$H_t = N_t, B_t = 0, M_t - M_{t-1} = 0$$

- Gleichung (10) vereinfacht sich zu

$$D_t = Y_t - W_t H_t - \frac{\phi}{2} (\pi_t - \pi)^2 Y_t.$$

- Budgetrestriktion des Staates im Gleichgewicht: $G_t = \frac{T_t}{P_t}$
- Budgetrestriktion des Haushalts (2) im Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} C_t + G_t = W_t H_t + D_t &= Y_t - \frac{\phi}{2} (\pi_t - \pi)^2 Y_t \\ \Leftrightarrow Y_t &= C_t + G_t + \frac{\phi}{2} (\pi_t - \pi)^2 Y_t. \end{aligned} \tag{18}$$

- Potenzialoutput Y_t^* berechnet sich unter Annahme flexibler Preise ($\phi = 0$). Einsetzen von (12) und (14) in (18) ergibt:

$$\begin{aligned} P_t &= \tfrac{1}{1-v} P_t \left(\tfrac{C_t}{A_t}\right)^{\tau} \Leftrightarrow C_t = (1-v)^{\frac{1}{\tau}} A_t \\ &\Rightarrow Y_t = C_t + G_t = (1-v)^{\frac{1}{\tau}} A_t + \zeta_t Y_t \\ &\Rightarrow Y_t^* = (1-v)^{\frac{1}{\tau}} A_t \tfrac{1}{1-\zeta_t} \overset{(14)}{=} (1-v)^{\frac{1}{\tau}} A_t g_t . \end{aligned} \tag{19}$$

- Gleichung (11) des repräsentativen Unternehmens des Zwischengütersektors vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned} 1 = \frac{1}{v}\left[1 - \left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{\tau}\right] + \phi(\pi_t - \pi)\left[\left(1 - \frac{1}{2v}\right)\pi_t + \frac{\pi}{2v}\right] \\ - \phi\beta E_t\left[\left(\frac{C_{t+1}/A_{t+1}}{C_t/A_t}\right)^{-\tau} \frac{Y_{t+1}/A_{t+1}}{Y_t/A_t}(\pi_{t+1} - \pi)\pi_{t+1}\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

- Dabei wird ausgenutzt, dass

$$Q_{t+s|t} = \frac{U_{t+s}^C}{U_t^C} = \left(\frac{C_{t+s}}{C_t}\right)^{-\tau}\left(\frac{A_t}{A_{t+s}}\right)^{1-\tau} \tag{21}$$

Stationarisierung

- Gleichungen (15), (3), (13), (16), (18), (20) beschreiben optimale Verhalten der 4 endogenen (Y_t, C_t, π_t, R_t) und der 2 exogenen (g_t, z_t) Variablen
- Die funktionale Form impliziert, dass im Gleichgewicht Y_t und C_t die Einheitswurzel des Prozesses A_t aufweisen.
- Für die Analyse und die Lösungsverfahren wird aber die Stationarität der Variablen vorausgesetzt.
- Deshalb werden für die weitere Analyse die um den stochastischen Trend bereinigten, stationären Variablen $y_t = \frac{Y_t}{A_t}$ und $c_t = \frac{C_t}{A_t}$ betrachtet.
- In Abwesenheit von Schocks konvergiert die Ökonomie gegen einen gleichgewichtigen Wachstumspfad, auf dem alle stationären Variablen über die Zeit konstant sind.

Steady-state

- Der *steady-state* wird dann beschrieben durch:

$$\gamma \overset{(15)}{=} \frac{A_{t+1}}{A_t},\ r \overset{(3)}{=} \frac{\gamma}{\beta},\ c \overset{(12)}{=} (1-v)^{\frac{1}{\tau}},\ R \overset{(13)}{=} r\pi,\ y \overset{(19)}{=} c \cdot g = (1-v)^{\frac{1}{\tau}} g. \tag{22}$$

- Zusätzlich wird angenommen, dass die Zielinflationsrate der Zentralbank der gleichgewichtigen Inflationsrate entspricht, $\pi = \pi^*$.
- Üblich: Modellvariablen umzuschreiben in prozentuale Abweichungen von ihrem *steady-state*, d.h.
    - $\widehat{c}_t = \ln(c_t/c)$, $\widehat{y}_t = \ln(y_t/y)$, $\widehat{g}_t = \ln(g_t/g)$, $\widehat{\pi}_t = \ln(\pi_t/\pi)$, $\widehat{R}_t = \ln(R_t/R)$ und $\widehat{z}_t = \ln(z_t/1)$.
    - Praktisch: Im langfristigen Gleichgewicht sind diese Variablen Null.
    - Beim Umschreiben wird ausgenutzt, dass $x_t = e^{\ln x_t - \ln x + \ln x} = x e^{\widehat{x}_t}$

Strukturelle Form

- Die Modellgleichungen lassen sich umformen zu: ▸ Details

$$1 = E_t\left[e^{-\tau\widehat{c}_{t+1}+\tau\widehat{c}_t+\widehat{R}_t-\widehat{z}_{t+1}-\widehat{\pi}_{t+1}}\right] \tag{23}$$

$$\frac{1-v}{v\phi\pi^2}\left(e^{\tau\widehat{c}_t}-1\right) = \left(e^{\widehat{\pi}_t}-1\right)\left[\left(1-\frac{1}{2v}\right)e^{\widehat{\pi}_t}+\frac{1}{2v}\right] - \beta E_t\left(e^{\widehat{\pi}_{t+1}}-1\right)e^{-\tau\widehat{c}_{t+1}+\tau\widehat{c}_t+\widehat{y}_{t+1}-\widehat{y}_t+\widehat{\pi}_{t+1}} \tag{24}$$

$$e^{\widehat{c}_t-\widehat{y}_t} = e^{-\widehat{g}_t} - \frac{\phi\pi^2 g}{2}\left(e^{\widehat{\pi}_t}-1\right)^2 \tag{25}$$

$$\widehat{g}_t = \rho_g\widehat{g}_{t-1}+\epsilon_{g,t} \tag{26}$$

$$\widehat{z}_t = \rho_z\widehat{z}_{t-1}+\epsilon_{z,t}, \tag{27}$$

$$\hat{R}_t = \begin{cases} \rho_R\hat{R}_{t-1}+(1-\rho_R)\psi_1\hat{\pi}_t+(1-\rho_R)\psi_2\left(\hat{y}_t-\hat{g}_t\right)+\epsilon_{R,t} & \text{(Gap)} \\ \rho_R\hat{R}_{t-1}+(1-\rho_R)\psi_1\hat{\pi}_t+(1-\rho_R)\psi_2\left(\hat{y}_t-\hat{y}_{t-1}+\hat{z}_t\right)+\epsilon_{R,t} & \text{(Growth)} \end{cases} \tag{28}$$

- Gleichungen (23) bis (27) beschreiben das Modell in Form eines nichtlinearen Systems rationaler Erwartungen in den Variablen $\widehat{c}_t$, $\widehat{y}_t$, $\widehat{\pi}_t$, $\widehat{R}_t$,$\widehat{g}_t$ und $\widehat{z}_t$, das vom Vektor der Innovationen $\epsilon_t = (\epsilon_{R,t}, \epsilon_{g,t}, \epsilon_{z,t})'$ angetrieben wird.

Messgleichungen

- Angenommen, es liegen Zeitreihen auf Quartalsebene zu folgenden Größen (in %) vor:
  - Quartalswachstumsraten des pro-Kopf BIPs (YGR_t)
  - annualisierte Inflationsraten ($INFL_t$)
  - annualisierte Nominalzinssätze (INT_t).
- Folgende Zusammenhänge bestehen zwischen beobachtbaren Daten und Modellvariablen:

$$\begin{aligned} YGR_t &= \gamma^{(Q)} + 100(\widehat{y}_t - \widehat{y}_{t-1} + \widehat{z}_t), \\ INFL_t &= \pi^{(A)} + 400\widehat{\pi}_t, \\ INT_t &= \pi^{(A)} + r^{(A)} + 4\gamma^{(Q)} + 400\widehat{R}_t. \end{aligned}$$

- Die Parameter $\gamma^{(Q)}, \pi^{(A)}$ und $r^{(A)}$ haben folgende Beziehung zu den *steady-state* Werten:

$$\gamma = e^{\frac{\gamma_Q}{100}} \approx 1 + \frac{\gamma^{(Q)}}{100}, \ \beta = e^{-\frac{r^{(A)}}{400}} \approx \frac{1}{1 + r^{(A)}/400}, \ \pi = e^{\frac{\pi^{(A)}}{400}} \approx 1 + \frac{\pi^{(A)}}{400}. \tag{29}$$

Log-Linearisierung (I)

- Log-Linearisierung ist eine Methode, das Modell direkt in logarithmierten Abweichungen zu formulieren und dieses anschließend durch eine Taylor-Erweiterung erster Ordnung in logs zu approximieren.
- Linearisierung der Gleichungen (23), (24) und (25) der strukturellen Form um den *steady-state* ▸ Details ergibt zusammen mit den Bewegungsgleichungen für den Zins, die Staatsausgaben und die Technologie folgendes reduziertes Modell:

$$
\begin{aligned}
\widehat{y}_t &= E_t[\widehat{y}_{t+1}] + \widehat{g}_t - E_t[\widehat{g}_{t+1}] - \tfrac{1}{\tau}(\widehat{R}_t - E_t[\widehat{\pi}_{t+1}] - E_t[\widehat{z}_{t+1}]),\\
\widehat{\pi}_t &= \beta E_t[\widehat{\pi}_{t+1}] + \kappa(\widehat{y}_t - \widehat{g}_t),\\
\widehat{c}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{g}_t,\\
\widehat{R}_{t+1} &= \rho_R \widehat{R}_t + (1-\rho_R)\psi_1 \widehat{\pi}_{t+1} + (1-\rho_R)\psi_2 \left(\widehat{y}_{t+1} - \widehat{g}_{t+1}\right) + \epsilon_{R,t+1}\\
\widehat{g}_{t+1} &= \rho_g \widehat{g}_t + \epsilon_{g,t+1},\\
\widehat{z}_{t+1} &= \rho_z \widehat{z}_t + \epsilon_{z,t+1},\\
\text{mit } \kappa &= \tau \frac{1-\nu}{\nu \pi^2 \phi}.
\end{aligned}
$$

Log-Linearisierung (II)

- Erste Gleichung setzt das aktuelle Output- bzw. Konsumwachstum in Relation zum Inflationsbereinigten Nominalzins, also dem Realzins unter Beachtung technologischer Schocks. Dies ist die Grundidee der sogenannten neukeynesianischen IS-Kurve.
- Zweite Gleichung hingegen spiegelt die neukeynesianische Phillips-Kurve wider, die - im Unterschied zu traditionellen Formulierungen - neben einem Maß der Outputlücke zusätzlich die erwartete Inflationsrate berücksichtigt.
    - Zukünftige Inflationserwartungen bestimmen aufgrund der Preisrigiditäten die Inflation.
    - Preis eines Gutes wird nicht in jeder Periode angepasst, ein einmal festgelegter Preis bleibt für einige Zeit bestehen.
    - Unternehmen wägen ab, ob bei zukünftig steigender Inflation ihr Gut relativ billiger wird und haben deshalb Anreiz, bereits in der aktuellen Periode den Preis zu erhöhen.
- Die dritte Gleichung ist ein Maß für die Outputlücke. Im Prinzip handelt es sich jedoch um eine Identitätsgleichung, da $\widehat{c}_t$ eine Linearkombination aus $\widehat{y}_t$ und $\widehat{\pi}_t$ ist.

Log-Linearisierung (III)

- Dieses System lässt sich kompakt darstellen als

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 & 1 & -\frac{1}{\tau} \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1-\rho_R)\psi_2 & 0 & -(1-\rho_R)\psi_1 & 1 & (1-\rho_R)\psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\Gamma_1} E_t \begin{bmatrix} \widehat{y}_{t+1} \\ \widehat{c}_{t+1} \\ \widehat{\pi}_{t+1} \\ \widehat{R}_{t+1} \\ \widehat{g}_{t+1} \\ \widehat{z}_{t+1} \end{bmatrix} =
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 1 & 0 \\ \kappa & 0 & -1 & 0 & -\kappa & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_z \end{bmatrix}}_{\Gamma_0} \begin{bmatrix} \widehat{y}_t \\ \widehat{c}_t \\ \widehat{\pi}_t \\ \widehat{R}_t \\ \widehat{g}_t \\ \widehat{z}_t \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Gamma_\varepsilon} \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_{z,t+1} \\ \epsilon_{g,t+1} \\ \epsilon_{R,t+1} \end{pmatrix}}_{\varepsilon_{t+1}}
$$

- Die Matrizen Γ_1, Γ_0 und Γ_ε sind Funktionen des strukturellen Parametervektors

$$
\theta = (\tau, \phi, \psi_1, \psi_2, \rho_R, \rho_g, \rho_z, r^{(A)}, \pi^{(A)}, \gamma^{(Q)}, \sigma_R, \sigma_g, \sigma_z, \nu, g)'.
$$

- Dieses System gilt es zu lösen.

Ein einfaches RBC-Modell

Ein einfaches RBC-Modell: Haushalte (I)

Gegeben sei das folgende Modell

- Präferenzen des repräsentativen Agenten

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} E_t \left[\log\left(C_t\right) - \frac{L_t^{1+\gamma}}{1+\gamma}\right].$$

  Der Haushalt bietet Arbeit und Kapital an den Unternehmenssektor an.
  - L_t ist Arbeit, C_t Konsum, w_t bezeichnet den Reallohn, r_t den Zins
  - $\rho \in (0, \infty)$ist ein Präferenzparameter, $\gamma \in (0, \infty)$ ein Arbeitsangebotsparameter.
- Der Haushalt muss eine Sequenz von Budgetrestriktionen beachten

$$K_t = K_{t-1}\left(1 - \delta\right) + w_t L_t + r_t K_{t-1} - C_t,$$

  wobei
  - K_t Kapital am Ende der Periode und
  - $\delta \in (0, 1)$ die Abschreibungsrate bezeichnet.

Ein einfaches RBC-Modell: Haushalte (II)

Lagrangefunktion

$$L = \max_{C_t, L_t, K_t} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} E_t \Big[\log(C_t) - \frac{L_t^{1+\gamma}}{1+\gamma} - \mu_t \left(K_t - K_{t-1}(1-\delta) - w_t L_t - r_t K_{t-1} + C_t\right) \Big].$$

Bedingungen erster Ordnung

$$\frac{\partial L}{\partial C_t} = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} \left(\frac{1}{C_t} - \mu_t\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial L_t} = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} \left(L_t^{\gamma} - \mu_t w_t\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_t} = -\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} \mu_t + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t} E_t\left(\mu_{t+1}(1-\delta+r_{t+1})\right) = 0.$$

Ein einfaches RBC-Modell: Haushalte (III)

Eliminierung des Lagrangemultiplikators ergibt:

$$L_t^{\gamma} = \frac{w_t}{C_t},$$

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{1+\rho} E_t \left(\frac{1}{C_{t+1}} (r_{t+1} + 1 - \delta) \right).$$

Ein einfaches RBC-Modell: Unternehmen (I)

- Die Produktionsfunktion ist gegeben durch

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha},$$

  wobei $g \in (0, \infty)$ eine Wachstumsrate und α und β Parameter sind.
- A_t bezeichnet das Technologieniveau

Ein einfaches RBC-Modell: Unternehmen (II)

$$\max_{L_t, K_{t-1}} A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha} - r_t K_{t-1} - w_t L_t.$$

Bedingungen erster Ordnung:

$$r_t = \alpha A_t K_{t-1}^{\alpha-1} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha},$$

$$w_t = (1-\alpha) A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t \right)^{1-\alpha} L_t^{-\alpha}.$$

Ein einfaches RBC-Modell: Stochastische Prozesse

- A_t bezeichnet das Technologieniveau, welches sich nach folgendem Prozess entwickelt:

$$A_t = A_{t-1}^{\lambda} \exp\left(e_t\right),$$

wobei e_t i.i.d. normalverteilt ist (Erwartungswert von Null, Standardabweichung von σ). $\lambda \in (0, 1)$ ist ein Parameter.

Ein einfaches RBC-Modell

$$K_t + C_t = K_{t-1}(1-\delta) + \underbrace{A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha}}_{w_t L_t + r_t K_t}.$$

Ein einfaches RBC-Modell

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{C_t} &= \frac{1}{1+\rho} E_t \left(\frac{1}{C_{t+1}} (r_{t+1} + 1 - \delta) \right), \\
L_t^{\gamma} &= \frac{w_t}{C_t}, \\
r_t &= \alpha A_t K_{t-1}^{\alpha-1} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha}, \\
w_t &= (1-\alpha) A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t \right)^{1-\alpha} L_t^{-\alpha}, \\
K_t + C_t &= K_{t-1}(1-\delta) + A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha}, \\
log(A_t) &= \lambda log(A_{t-1}) + e_t.
\end{aligned}
$$

Ein einfaches RBC-Modell

Gleichgewicht auf dem Gütermarkt für jede Periode t:
$K_t + C_t = K_{t-1}(1-\delta) + A_t K_{t-1}^{\alpha}\left((1+g)^t L_t\right)^{1-\alpha}.$
Also muss es Wachstumsraten g_c and g_k derart geben, dass

$$(1+g_k)^t K_1 + (1+g_c)^t C_1 = \frac{(1+g_k)^t}{1+g_k} K_1 (1-\delta) + A_t \left(\frac{(1+g_k)^t}{1+g_k} K_1\right)^{\alpha} \left((1+g)^t L_t\right)^{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow K_1 + \left(\frac{1+g_c}{1+g_k}\right)^t C_1 = \underbrace{\frac{K_1}{1+g_k}}_{K_0}(1-\delta) + A_t \left(\frac{K_1}{1+g_k}\right)^{\alpha} \left(\left(\frac{1+g}{1+g_k}\right)^t L_t\right)^{1-\alpha}.$$

Dies ist nur gültig, falls $g_c = g_k = g.$

Ein einfaches RBC-Modell

Definiere

$$\widehat{C}_t = C_t/(1+g)^t,$$
$$\widehat{K}_t = K_t/(1+g)^t,$$
$$\widehat{w}_t = w_t/(1+g)^t.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\widehat{C}_t(1+g)^t} &= \frac{1}{1+\rho} E_t \left(\frac{1}{\widehat{C}_{t+1}(1+g)(1+g)^t} (r_{t+1} + 1 - \delta) \right), \\
L_t^{\gamma} &= \frac{\widehat{w}_t (1+g)^t}{\widehat{C}_t (1+g)^t}, \\
r_t &= \alpha A_t \left(\widehat{K}_{t-1} \frac{(1+g)^t}{1+g} \right)^{\alpha-1} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha}, \\
\widehat{w}_t (1+g)^t &= (1-\alpha) A_t \left(\widehat{K}_{t-1} \frac{(1+g)^t}{1+g} \right)^{\alpha} \left((1+g)^t \right)^{1-\alpha} L_t^{-\alpha}, \\
\left(\widehat{K}_t + \widehat{C}_t \right) (1+g)^t &= \widehat{K}_{t-1} \frac{(1+g)^t}{1+g} (1-\delta) \\
&\quad + A_t \left(\widehat{K}_{t-1} \frac{(1+g)^t}{1+g} \right)^{\alpha} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Ein einfaches RBC-Modell

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\widehat{C}_t} &= \frac{1}{1+\rho} E_t \left(\frac{1}{\widehat{C}_{t+1}(1+g)} (r_{t+1} + 1 - \delta) \right), \\
L_t^{\gamma} &= \frac{\widehat{w}_t}{\widehat{C}_t}, \\
r_t &= \alpha A_t \left(\frac{\widehat{K}_{t-1}}{1+g} \right)^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}, \\
\widehat{w}_t &= (1-\alpha) A_t \left(\frac{\widehat{K}_{t-1}}{1+g} \right)^{\alpha} L_t^{-\alpha}, \\
\widehat{K}_t + \widehat{C}_t &= \frac{\widehat{K}_{t-1}}{1+g}(1-\delta) + A_t \left(\frac{\widehat{K}_{t-1}}{1+g} \right)^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \\
log(A_t) &= \lambda log(A_{t-1}) + e_t.
\end{aligned}
$$

Ein einfaches RBC-Modell

- Der steady-state ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= 1, & r &= (1+g)(1+\delta)+\delta-1 \\ L &= \left(\frac{1-\alpha}{\frac{r}{\alpha}-\delta-g}\right)\left(\frac{r}{\alpha}\right), & K &= (1+g)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} L \\ C &= (1-\delta)\frac{K}{1+g}+\left(\frac{K}{1+g}\right)^{\alpha} L^{1-\alpha}-K, & w &= C \end{aligned}$$

Anhang

Optimierungskalkül des repräsentativen Haushalts (I)

Mithilfe Lagrange-Ansatzes, wobei $\beta^s \lambda_{t+s}$ der Lagrange-Multiplikator ist:

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left[\frac{\left(\frac{C_{t+s}}{A_{t+s}}\right)^{1-\tau} - 1}{1-\tau} + \chi_M \ln\left(\frac{M_{t+s}}{P_{t+s}}\right) - H_{t+s} \right.$$

$$\left. -\lambda_{t+s}\left(C_{t+s} + \frac{B_{t+s}}{P_{t+s}} - R_{t+s-1}\frac{B_{t+s-1}}{P_{t+s}} + \frac{M_{t+s} - M_{t+s-1}}{P_{t+s}} + T_{t+s} - W_{t+s}H_{t+s} - D_{t+s}\right)\right].$$

◂ Zurück

Optimierungskalkül des repräsentativen Haushalts (II)

Die Ableitung nach C_t, B_t, M_t und H_t lauten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{-\tau} \frac{1}{A_t} - \lambda_t = 0 \qquad \Leftrightarrow \lambda_t = \left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{-\tau} \frac{1}{A_t} = \frac{\partial U_t}{\partial C_t} \equiv U_t^C \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\lambda_t \frac{1}{P_t} + E_t\left[\beta \lambda_{t+1} \frac{R_t}{P_{t+1}}\right] = 0 \qquad \Leftrightarrow E_t\left[\beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{P_t}{P_{t+1}} R_t\right] = 1 \tag{31}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_t} = \chi_M \frac{1}{M_t} - \lambda_t \frac{1}{P_t} + E_t\left[\beta \lambda_{t+1} \frac{1}{P_{t+1}}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \chi_M \frac{1}{M_t} = \frac{\lambda_t}{P_t} - \beta E_t\left[\frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}\right] \tag{32}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_t} = -1 + \lambda_t W_t = 0 \qquad \Leftrightarrow W_t = \frac{1}{\lambda_t} = \frac{\partial U_t / \partial H_t}{\partial U_t / \partial C_t} \equiv \frac{U_t^H}{U_t^C}. \tag{33}$$

Zurück

Optimierungskalkül des repräsentativen Haushalts (III)

Gleichung (31) ergibt zusammen mit (30) die intertemporale Optimalitätsbedingung:

$$E_t\left[\beta\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\frac{P_t}{P_{t+1}}R_t\right] = E_t\left[\beta\frac{U_{t+1}^C}{U_t^C}\frac{R_t}{\pi_{t+1}}\right] = \beta E_t\left[\left(\frac{C_{t+1}/A_{t+1}}{C_t/A_t}\right)^{-\tau}\frac{A_t}{A_{t+1}}\frac{R_t}{\pi_{t+1}}\right] = 1,$$

wobei $\pi_{t+1} = P_{t+1}/P_t$.

Die intratemporale Optimalität ergibt sich durch Einsetzen von Gleichungen (30) und (31) in (32):

$$\chi_M\left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{-1} = \frac{(C_t/A_t)^{-\tau}}{P_tA_t}\left(\frac{R_t-1}{R_t}\right).$$

Und Gleichung (33) zusammen mit Gleichung (30) beschreiben die Bedingung für das optimale Arbeitsangebot:

$$W_t = \frac{U_t^H}{U_t^C} = \left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{\tau}A_t.$$

Zurück

Optimierungskalkül des Endproduktsektors (I)

- Bezeichne P_t^j den Preis des Zwischenguts Y_t^j, dann minimiert das repräsentative Unternehmen die Kosten $\int_0^1 P_t^j Y_t^j \, dj$ einer bestimmten Inputkombination unter Berücksichtigung von (6).
- Sei P_t der Lagrange-Multiplikator und

$$\mathcal{L} = \int_0^1 P_t^j Y_t^j \, dj + P_t \left(Y_t - \left[\int_0^1 (Y_t^j)^{1-v} \, dj \right]^{\frac{1}{1-v}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_t^j} = P_t^j - P_t \frac{1}{1-v} \underbrace{\left[\int_0^1 (Y_t^j)^{1-v} \, dj \right]}_{Y_t^{1-v}}^{\frac{1}{1-v}-1} (1-v)(Y_t^j)^{-v} = 0$$

- Umgeformt folgt daraus die Nachfragefunktion nach Gut $Y_t^j = \left(\frac{P_t^j}{P_t} \right)^{\frac{-1}{v}} Y_t$.
- Eingesetzt in (6) ergibt:

$$Y_t = \left[\int_0^1 \left(\frac{P_t^j}{P_t} \right)^{\frac{v-1}{v}} Y_t^{1-v} \, dj \right]^{\frac{1}{1-v}} \Leftrightarrow P_t = \left[\int_0^1 (P_t^j)^{\frac{v-1}{v}} \, dj \right]^{\frac{v}{v-1}}.$$

Zurück

Optimierungskalkül des Zwischengütersektors (I)

- Lagrange-Ansatz nach Einsetzen der Nebenbedingungen lautet:

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s Q_{t+s|t} \Bigg[\underbrace{\left(\frac{P^j_{t+s}}{P_{t+s}}\right)^{\frac{-1}{v}+1} Y_{t+s}}_{\text{Vgl. Bedingung (7)}} - \underbrace{\left(\frac{C_{t+s}}{A_{t+s}}\right)^{\tau}}_{\overset{(4)}{=} \frac{W_{t+s}}{A_{t+s}}} \underbrace{\left(\frac{P^j_{t+s}}{P_{t+s}}\right)^{\frac{-1}{v}} Y_{t+s}}_{\text{Vgl. Bedingung (7) und (9)}}$$

$$- \frac{\phi}{2} \left(\frac{P^j_{t+s}}{P^j_{t+s-1}} - \pi\right)^2 \underbrace{\left(\frac{P^j_{t+s}}{P_{t+s}}\right)^{\frac{-1}{v}} Y_{t+s}}_{\text{Vgl. Bedingung (7)}} \Bigg]. \qquad (34)$$

Zurück

Optimierungskalkül des Zwischengütersektors (II)

- Die Bedingung erster Ordnung ist folglich:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_t^j} = Q_{t|t} \Bigg[& \left(1 - \frac{1}{v}\right) \underbrace{Y_t^j}_{(7)} \frac{1}{P_t} + \frac{1}{v} \left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{\tau} \underbrace{Y_t^j}_{(7)} \left(\frac{P_t^j}{P_t}\right)^{-1} \frac{1}{P_t} \\
& - \phi \left(\frac{P_t^j}{P_{t-1}^j} - \pi\right) \frac{1}{P_{t-1}^j} \underbrace{Y_t^j}_{(7)} + \frac{\phi}{2v} \left(\frac{P_t^j}{P_{t-1}^j} - \pi\right)^2 \underbrace{Y_t^j}_{(7)} \left(\frac{P_t^j}{P_t}\right)^{-1} \frac{1}{P_t} \Bigg] \\
& + \beta E_t Q_{t+1|t} \left[-\phi \left(\frac{P_{t+1}^j}{P_t^j} - \pi\right) \frac{-P_{t+1}^j}{(P_t^j)^2} \underbrace{Y_{t+1}^j}_{(7)} \right] = 0,
\end{aligned}
$$

wobei im Gleichgewicht $Q_{t|t} = 1$ ist, siehe Gleichung (21).

Zurück

Herleitung der strukturellen Form (I)

- Herleitung der Gleichung (23), Ausgangspunkt ist Gleichung (3):

$$1 = E_t\left[\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\tau}\frac{A_t}{A_{t+1}}\frac{R_t}{\pi_{t+1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow 1 = E_t\, exp\left\{\ln(\beta) - \tau\ln(c_{t+1}) + \tau\ln c_t + \underbrace{\ln A_t - \ln A_{t+1}}_{\overset{(15)}{=}-\ln(\gamma)-\ln(z_{t+1})} + \ln(R_t) - \ln(\pi_{t+1})\right\}$$

$$\Leftrightarrow 1 = E_t\, exp\left\{-\tau\left[\ln(c_{t+1}) - \ln(c)\right] + \tau\left[\ln c_t - \ln(c)\right] - \left[\ln(z_{t+1}) - \underbrace{\ln(z)}_{=0}\right] + \left[\ln(R_t) - \ln(R)\right]\right.$$

$$\left. - \ln(\pi_{t+1}) + \underbrace{\ln(R) + \ln(\beta) - \ln(\gamma)}_{=\ln(\frac{R\beta}{\gamma})\overset{(22)}{=}\ln\pi}\right\}$$

$$\Rightarrow 1 = E_t\, e^{-\tau\widehat{c}_{t+1}+\tau\widehat{c}_t-\widehat{z}_{t+1}+\widehat{R}_t-\widehat{\pi}_{t+1}}.$$

Zurück

Herleitung der strukturellen Form (II)

- Herleitung der Gleichung (24), Ausgangspunkt ist Gleichung (20):

$$
\begin{aligned}
& 1-\frac{1}{v}\left(1-c_t^{\tau}\right)=\phi(\pi_t-\pi)\left[\left(1-\frac{1}{2v}\right)\pi_t+\frac{\pi}{2v}\right]-\phi\beta E_t\left[(\pi_{t+1}-\pi)\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\tau}\frac{y_{t+1}}{y_t}\pi_{t+1}\right] \\
& \Leftrightarrow 1-\frac{1}{v}\left(1-\underbrace{c^{\tau}}_{\overset{(22)}{=}1-v}\, e^{\tau\ln(c_t)-\tau\ln c}\right)=\phi\left(\pi e^{\ln(\pi_t)-\ln(\pi)}-\pi\right)\left[\left(1-\frac{1}{2v}\right)\pi e^{\ln\pi_t-\ln\pi}+\frac{\pi}{2v}\right] \\
& -\phi\beta E_t\left[\left(\pi e^{\ln(\pi_{t+1})-\ln(\pi)}-\pi\right)\pi e^{-\tau\ln(c_{t+1})+\tau\ln(c)+\tau\ln(c_t)-\tau\ln(c)+\ln(y_{t+1})-\ln(y)-\ln(y_t)+\ln(y)+\ln(\pi_{t+1})-\ln(\pi)}\right] \\
& \Rightarrow \frac{1-v}{v\phi\pi^2}\left(e^{\tau\widehat{c}_t}-1\right)=\left(e^{\widehat{\pi}_t}-1\right)\left[\left(1-\frac{1}{2v}\right)e^{\widehat{\pi}_t}+\frac{1}{2v}\right]-\beta E_t\left(e^{\widehat{\pi}_{t+1}}-1\right)e^{-\tau\widehat{c}_{t+1}+\tau\widehat{c}_t+\widehat{y}_{t+1}-\widehat{y}_t+\widehat{\pi}_{t+1}}.
\end{aligned}
$$

Zurück

Herleitung der strukturellen Form (III)

- Herleitung der Gleichung (25), Ausgangspunkt ist Gleichung (18):

$$
\begin{aligned}
Y_t &= C_t + G_t + \frac{\phi}{2}\left(\pi_t - \pi\right)^2 Y_t \\
\Leftrightarrow 1 &= \frac{C_t/A_t}{Y_t/A_t} + \underbrace{\frac{G_t/A_t}{Y_t/A_t}}_{\zeta_t \overset{(14)}{=} 1 - \frac{1}{g_t}} + \frac{\phi}{2}\left(\pi_t - \pi\right)^2 \\
\Leftrightarrow 0 &= \underbrace{\frac{c}{y}}_{\overset{(22)}{=}\frac{1}{g}} e^{\ln(c_t) - \ln(c) - \ln(y_t) + \ln(y)} - \frac{1}{g} e^{-\ln(g_t) + \ln(g)} + \frac{\phi}{2}\left(\pi e^{\ln(\pi_t) - \ln(\pi)} - \pi\right)^2 \\
\Rightarrow e^{\widehat{c}_t - \widehat{y}_t} &= e^{-\widehat{g}_t} - \frac{\phi \pi^2 g}{2}\left(e^{\widehat{\pi}_t} - 1\right)^2 .
\end{aligned}
$$

◂ Zurück

Herleitung der strukturellen Form (IV)

- Herleitung der Gleichung (28) für Output-Gap-Regel, Ausgangspunkt ist Gleichung (13):

$$\ln(R_t) - \underbrace{\ln\left(\frac{r}{\pi}\right)}_{\overset{(22)}{=}\ln(R)} = \rho_R[\ln\left(R_{t-1}\right) - \underbrace{\ln\left(\frac{r}{\pi}\right)}_{\overset{(22)}{=}\ln(R)}] + (1-\rho_R)\psi_1[\ln(\pi_t) - \ln(\pi)] + (1-\rho_R)\psi_2 \ln\left(\frac{Y_t/A_t}{Y_t^*/A_t}\right)$$

Für $\frac{Y_t/A_t}{Y_t^*/A_t}$ gilt aufgrund von (19)und (22):

$$\frac{Y_t/A_t}{Y_t^*/A_t} = \frac{y_t}{(1-v)^{1/\tau}\, g_t} = \frac{y_t}{c g_t}$$

Damit ergibt sich:

$$\widehat{R}_t = \rho_R \widehat{R}_{t-1} + (1-\rho_R)\psi_1 \widehat{\pi}_t + (1-\rho_R)\psi_2 \left(\ln(y_t) - \ln(y) - \ln(g_t) + \ln(g) + \underbrace{\ln(y) - \ln(g) - \ln(c)}_{\overset{(22)}{=}0} \right)$$

$$\Rightarrow \widehat{R}_t = \rho_R \widehat{R}_{t-1} + (1-\rho_R)\psi_1 \widehat{\pi}_t + (1-\rho_R)\psi_2\left(\widehat{y}_t - \widehat{g}_t\right) + \epsilon_{R,t}.$$

Analog für Output-Growth Regel. ◂ Zurück

Herleitung des log-linearisieren Modells (I)

- Alle Variablen mit Dach sind im *steady-state* gleich Null. Dann gilt folgende Taylor-Approximation erster Ordnung: $e^{\widehat{x}_t} \approx e^0 + (\widehat{x}_t - 0) = 1 + \widehat{x}_t$.
- Linearisierung der Gleichung (25):

$$
\begin{aligned}
e^{\widehat{c}_t - \widehat{y}_t} &= e^{-\widehat{g}_t} - \frac{\phi \pi^2 g}{2} \left(e^{\widehat{\pi}_t} - 1 \right)^2 \\
\Rightarrow e^0 + (\widehat{c}_t - \widehat{y}_t) &= e^0 - \widehat{g}_t - \frac{\phi \pi^2 g}{2} \left(e^0 - 1 \right)^2 - \phi \pi^2 g \left(e^0 - 1 \right) \left(e^0 + \widehat{\pi}_t - 1 \right) \\
\Leftrightarrow \widehat{c}_t &= \widehat{y}_t - \widehat{g}_t .
\end{aligned}
$$

- Linearisierung der Gleichung (23):

$$
\begin{aligned}
1 &= E_t \left[e^{-\tau \widehat{c}_{t+1} + \tau \widehat{c}_t + \widehat{R}_t - \widehat{z}_{t+1} - \widehat{\pi}_{t+1}} \right] \approx 1 - \tau E_t \widehat{c}_{t+1} + \tau \widehat{c}_t + \widehat{R}_t - E_t \widehat{z}_{t+1} - E_t \widehat{\pi}_{t+1} \\
\Leftrightarrow \widehat{c}_t &= E_t \widehat{c}_{t+1} - \frac{1}{\tau} (\widehat{R}_t - E_t \widehat{z}_{t+1} - E_t \widehat{\pi}_{t+1}) \\
\Rightarrow \widehat{y}_t - \widehat{g}_t &= E_t \widehat{y}_{t+1} - E_t \widehat{g}_{t+1} - \frac{1}{\tau} (\widehat{R}_t - E_t \widehat{z}_{t+1} - E_t \widehat{\pi}_{t+1}).
\end{aligned}
$$

◂ Zurück

Herleitung des log-linearisieren Modells (II)

- Linearisierung der Gleichung (24):

$$\frac{1-v}{v\phi\pi^2}\left(e^{\tau\widehat{c}_t}-1\right)=\left(e^{\widehat{\pi}_t}-1\right)\left[\left(1-\frac{1}{2v}\right)e^{\widehat{\pi}_t}+\frac{1}{2v}\right]-\beta E_t\left(e^{\widehat{\pi}_{t+1}}-1\right)e^{-\tau\widehat{c}_{t+1}+\tau\widehat{c}_t+\widehat{y}_{t+1}-\widehat{y}_t+\widehat{\pi}_{t+1}}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1-v}{v\phi\pi^2}\left(e^0+\tau\widehat{c}_t-1\right)=\\ \left(e^0+\widehat{\pi}_t-1\right)\left[\left(1-\frac{1}{2v}\right)e^0+\frac{1}{2v}\right]+\left(e^0-1\right)\left[\left(1-\frac{1}{2v}\right)\left(e^0+\widehat{\pi}_t\right)+\frac{1}{2v}\right]\\ -\beta\left(e^0+E_t\widehat{\pi}_{t+1}-1\right)e^0-\beta\left(e^0-1\right)\left(e^0-\tau E_t\widehat{c}_{t+1}+\tau\widehat{c}_t+E_t\widehat{y}_{t+1}-\widehat{y}_t+E_t\widehat{\pi}_{t+1}\right)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1-v}{v\phi\pi^2}}_{\equiv\kappa}\tau\,\widehat{c}_t=\widehat{\pi}_t-\beta E_t\widehat{\pi}_{t+1}$$

$$\Rightarrow \kappa\left(\widehat{y}_t-\widehat{g}_t\right)=\widehat{\pi}_t-\beta E_t\widehat{\pi}_{t+1}.$$

◂ Zurück