DSGE-Modelle

Verfahren begrenzter Information
General Method of Moments und Indirekte Inferenz

Dr. Andrea Beccarini   Willi Mutschler, M.Sc.

Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik Münster
willi.mutschler@uni-muenster.de

Sommersemester 2012

Verfahren begrenzter Information

1. Überblick
2. General Method of Moments
   - Beispiel: Schätzung der Eulergleichung mit GMM
3. Indirekte Inferenz
   - Impuls-Antwort-Matching
   - Beispiel: Schätzung eines einfachen DSGE-Modells mit den Impuls-Antworten eines VAR(1)
4. Diskussion

Verfahren begrenzter Information

- Bei der Schätzung der Parameter eines DSGE-Modells gilt es einige Herausforderungen zu bewältigen: Erwartungen über zukünftige Variablen, Nichtlinearitäten, stochastische Prozesse...
- Für solche Fälle gibt es jedoch allgemeine ökonometrische Verfahren wie die *General Method of Moments (GMM)* und die Methode der *Indirekten Inferenz*.
- Klasse der *Limited-information-estimators*, da keine Likelihood, sondern nur bestimmte Momente betrachtet und an die Daten angepasst werden *(Matching-Moments)*.

Verfahren begrenzter Information

1. Überblick

2. General Method of Moments
   - Beispiel: Schätzung der Eulergleichung mit GMM

3. Indirekte Inferenz
   - Impuls-Antwort-Matching
   - Beispiel: Schätzung eines einfachen DSGE-Modells mit den Impuls-Antworten eines VAR(1)

4. Diskussion

General Method of Moments

- Entwickelt von Hansen (1982), zuerst auf DSGE-Modelle angewandt: Christiano und Eichenbaum (1992) und Burnside, Eichenbaum und Rebelo (1993).
- Idee: DSGE-Modelle in Form von sogenannten *Momenten-* bzw. *Orthogonalitätsbedingungen* darzustellen:

$$E\left[\mathfrak{g}(\underset{k\times 1}{\boldsymbol{\mu}}, \underset{a\times 1}{\boldsymbol{\Upsilon}_t})\right] = E\begin{bmatrix}\mathfrak{f}_1(\underset{d\times 1}{\mathbf{w_t}}, \underset{k\times 1}{\boldsymbol{\mu}})\underset{l\times 1}{\mathbf{u_t}} \\ \vdots \\ \mathfrak{f}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{w_t}, \boldsymbol{\mu})\mathbf{u_t}\end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

- $\boldsymbol{\mu}$ ist wahrer Parametervektor, $\mathbf{w_t}$ eine Matrix erklärender Variablen, $\mathbf{u_t}$ eine Matrix von Instrumentenvariablen und $\boldsymbol{\Upsilon}_\mathbf{t} = (\mathbf{w_t}', \mathbf{u_t}')'$.
- Vektorwertige Funktionen: $\mathfrak{g} : r \times 1$ und $\mathfrak{f}_\mathfrak{i} : l \times 1$.
- Die Anzahl der Orthogonalitätsbedingungen ist dann gleich $r = ml$.

General Method of Moments

- Orthogonalitätsbedingungen stammen aus den Bedingungen erster Ordnung, den *steady-state* Bedingungen und den stochastischen Eigenschaften der exogenen Prozesse.
- Finde denjenigen Schätzer $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{G}}$, der die empirische Version der Orthogonalitätsbedingungen so „gut“ wie möglich erfüllt, wobei eine Gewichtungsmatrix $\boldsymbol{\Omega}$ definiert, was „gut“ bedeutet.

GMM-Schätzer

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{G}} = \min_{\mu} \left\{ \left(\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} \mathfrak{g}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Upsilon}) \right)' \times \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} \mathfrak{g}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Upsilon}) \right) \right\}.$$

General Method of Moments

- Falls $r < k$ ist das Modell unter-identifiziert $\Rightarrow$ weitere Instrumente finden: verzögerte Variablen oder die Tatsache ausnutzen, dass Störterme unkorreliert sind.
- Falls $r = k$ ist das Modell genau-identifiziert: Gewichtungsmatrix spielt keine Rolle, da eine eindeutige Lösung, bei der die quadratische Form genau gleich Null ist, existiert.
- Falls $r > k$ ist das Modell über-identifiziert $\Rightarrow$ mehrere Lösungen, die analytisch bzw. mit numerischen Verfahren berechnet werden können, Gewichtungsmatrix wählt diejenigen Momentenbedingungen aus, die eine präzisere Schätzung ermöglichen.
  - Hansen (1982) zeigt, dass die optimale Gewichtungsmatrix gleich der Inversen der Varianz-Kovarianz-Matrix des empirischen Analogons ist.
  - Unter einigen Regularitätsbedingungen folgt zudem, dass $\sqrt{T}(\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu})$ normalverteilt ist.
  - Dies ermöglicht für den über-identifizierten Fall einen formalen Test (*J-Test*) der Hypothese, dass das Modell in der Lage ist, den Daten generierenden Prozess zu beschreiben.

Einfache Euler-Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\beta E_t\left[c_{t+1}^{-\tau}(1+r_{t+1}-\delta)\right] &= c_t^{-\tau}\\
\Leftrightarrow E_t\left[\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\tau}(1+r_{t+1}-\delta)\right] &= 1\\
\Leftrightarrow E_t\left[\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\tau}(1+r_{t+1}-\delta)-1\right] &= 0\\
\Rightarrow E_t\left\{\left[\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\tau}(1+r_{t+1}-\delta)-1\right]\begin{pmatrix}1\\ \frac{c_t}{c_{t-1}}\\ r_t\end{pmatrix}\right\} &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

mit zu schätzende Parameter $\boldsymbol{\mu}=(\beta,\delta,\tau)'$, exogenen Variablen (Daten) $\mathbf{w_t}=\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}, r_{t+1}\right)'$ und Instrumenten z.B. $\mathbf{u_t}=(1,\frac{c_t}{c_{t-1}},r_t)'$.

Verfahren begrenzter Information

Indirekte Inferenz

- Eingeführt von Gourieroux, Monfort und Renault (1993) und Smith (1993) für nichtlineare Zeitreihenmodelle.
- Indirekte, auf der Simulation von Daten beruhende Schätzmethode.
- Wichtige Voraussetzung: Daten für verschiedene Parameter aus dem zu schätzenden ökonomischen Modell simulieren zu können.
- Diese werden mit einem Hilfsmodell geschätzt und mit der Schätzung der wahren Daten verglichen.
- Idee der *Indirekten Inferenz*: Wähle denjenigen Parametervektor, bei dem die Schätzung der simulierten Daten mit derjenigen der wahren Daten so „gut“ wie möglich übereinstimmt.

Indirekte Inferenz

- Häufig verwendetes Hilfsmodell: VAR-Modelle.
- Hervorragende empirische Vorhersagekraft („*work-horse*").
- Lösung eines DSGE-Modells hat in seiner *state-space* Repräsentation die Form eines VAR-Modells.
- Grundsätzlich zwei Möglichkeiten der Schätzung:
  1. Parameter des VAR-Modells: Ruge-Marcia (2007).
  2. Impuls-Antwort-Matching: Christiano, Eichenbaum und Evans (2005).
- Sehr ähnlich: Impuls-Antworten sind Funktionen der Parameter.
- Zweite Verfahren bietet den Vorteil, die dynamischen Eigenschaften des VAR-Modells in das DSGE-Modell einfließen lassen zu können.
- Jedoch Identifizierbarkeitsprobleme: verschiedene Parametervektoren können die gleichen Impuls-Antworten generieren.

Indirekte Inferenz-Schätzer

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{I}} = \min_{\mu} \left\{ (\boldsymbol{\Xi} - \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\mu}))' \times \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Xi} - \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\mu})) \right\}.$$

- $\boldsymbol{\Xi}$: die mit den wahren Daten geschätzte Impuls-Antwort-Funktion des VAR-Modells, $\boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\mu})$ das analoge Gegenstück mit den simulierten Daten, $\boldsymbol{\Omega}$ eine Gewichtungsmatrix.
- Smith (1993) zeigt, dass unter Verwendung der Inversen der Varianz-Kovarianz-Matrix von $\boldsymbol{\Xi}$ für die Gewichtungsmatrix, $\sqrt{T}(\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu})$ normalverteilt ist.
- *Method-of-Moments*-Interpretation, da die Impuls-Antworten Funktionen der Kovarianzen und Autokovarianzen der Variablen des VAR-Modells sind.
- *Indirekte Inferenz*-Interpretation, da das Hilfsmodell eine fehlspezifizierte Version der wahren state-space Repräsentation ist.

Indirekte Inferenz

Beispiel: Schätzung eines einfachen DSGE-Modells mit den Impuls-Antworten eines VAR(1)

Verfahren begrenzter Information

Verfahren begrenzter Information

Diskussion

- Verfahren gerade dann hilfreich, wenn die Bestimmung eines bestimmten Kriteriums, beispielsweise der Likelihood-Funktion, analytisch nicht machbar bzw. die Evaluation sehr schwierig ist.
- Nur wenige Annahmen nötig: Erste bzw. zweite Momente der Schocks (keine Verteilung).
- Großer Vorteil gegenüber der Kalibrierung: Standardfehler $\Rightarrow$ Statistische Inferenz möglich!
- Beschränkung auf relevante Charakteristiken (Distanzfunktion zwischen dem theoretischen und dem empirischen Moment) führt zu robusten Schätzern.
- J-Test der Überidentifizierung ist formaler statistischer Test der Validität des Modells.
- Ablehnung des Tests gibt jedoch keinen Anhaltspunkt dafür, wie das Modell anders spezifiziert werden sollte.

- GMM-Schätzung robust gegenüber Missspezifikationen, insbesondere bei der Betrachtung einzelner Bedingungen.
- Eine explizite Lösung und Approximation ist für GMM nicht nötig.
- GMM-Schätzer sind zuverlässig, jedoch weniger effizient als die Schätzer der Verfahren vollständiger Information.
- Häufig Effizienzverlust und Identifkationsprobleme bei Ausnutzung von Abhängigkeitsstrukturen zwischen den Blöcken.
- Wahl der richtigen Momentenbedingungen, Instrumente und Algorithmen für die Gewichtungsmatrix sowie die numerische Optimierung sind ein eigener sehr komplexer Forschungszweig.

- *Small-Sample-Bias*: Wünschenswerte Eigenschaften von *GMM* greifen nur asymptotisch.
- Monte-Carlo-Experimente zeigen, dass im Rahmen von DSGE-Modellen die Asymptotik erst ab einem Beobachtungszeitraum von $T = 300$ greift.
- Bei Quartalsdaten also etwa 75 Jahren!
- Der für DSGE-Modelle interessante Zeitraum umfasst jedoch nur die letzten 30-40 Jahre.
- Weitere Fehlerquelle: Gutes und **Zeit-homogenes** Datenmaterial für Output-Gap, Technologieniveau, . . . ?

- Stärken und Schwächen von *GMM* gelten auch für das *Impuls-Antwort-Matching*.
- Vorteil dieser Art der *Indirekten Inferenz*: Beschränkung auf wenige relevante Zeitreihen.
- Weiterer Vorteil: Hilfsmodell muss nicht korrekt spezifiziert sein, sondern lediglich in Beziehung zum wahren Modell stehen.
- Im Gegensatz zu GMM muss das DSGE-Modell jedoch explizit gelöst werden, da sonst die Simulation der Daten und Impuls-Antworten nicht möglich ist.