

**WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER**

Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Universität Münster

Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik

Seminararbeit

im Fach

Dynamic Stochastic General Equilibrium Models

Bayes-Schätzung von Modellparametern

Themensteller: AR Dr. Andrea Beccarini

Betreuer: Willi Mutschler, M. Sc.

Ausgabetermin: 13.08.2014

Abgabetermin: 15.09.2014

Verfasser: Mathias Middendorf

Steimanns Hof 4

59425 Unna

m_midd06@uni-muenster.de

Matrikelnummer: 372111

Fachsemester: 02

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Abkürzungsverzeichnis	VI
Symbolverzeichnis	VII
Verzeichnis der Anhänge	X
A Einleitung	1
B Beschreibung und Analyse der Modellgleichungen sowie der zugehörigen Optimalitätsbedingungen	2
B.I Modellgleichungen.....	2
B.II Optimalitätsbedingungen	4
C Beschreibung des Bayes-Schätzverfahrens	7
D Bayes-Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen ausgewählter Modellparameter unter Verwendung unterschiedlicher Modellrahmenbedingungen und mit simulierten Daten	11
D.I Verwendung einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion	11
D.II Verwendung einer additiv separablen Nutzenfunktion	14
D.III Verwendung einer unelastischen Arbeitsangebotselastizität	16
E Bayes-Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen ausgewählter Modellparameter unter Verwendung unterschiedlicher Modellrahmenbedingungen und mit echten Daten	19
F Bestimmung und Beurteilung der Schätzergebnisse der einzelnen Modelle im Vergleich anhand einer ausgewählten Kennzahl	22
G Zusammenfassung und Ausblick.....	25

Anhang	26
Literaturverzeichnis.....	44

Abbildungsverzeichnis

Abbildung		Seite
1	Vergleich Posteriori Priori bei Cobb-Douglas-Produktionsfunktion	13
2	Vergleich Posteriori Priori bei additiv separabler Nutzenfunktion	16
3	Vergleich Posteriori Priori bei unelastischem Arbeitsangebot	18
4	Vgl. Posteriori Priori bei CD-Produktionsfkt. und echten Daten	20
5	Vgl. Posteriori Priori bei additiv separabler Nutzenfkt. und echten Daten	20
6	Vgl. Posteriori Priori bei unelastischem Arbeitsangebot und echten Daten	20
7	Modus-Check Cobb-Douglas-Produktionsfunktion	30
8	Modus-Check additiv separable Nutzenfunktion	36
9	Modus-Check unelastisches Arbeitsangebot	39
10	Modus-Check bei CD-Produktionsfkt. und echten Daten	40
11	Modus-Check bei additiv separabler Nutzenfkt. und echten Daten	41
12	Modus-Check bei unelastischem Arbeitsangebot und echten Daten	42

Abkürzungsverzeichnis

Anm.	Anmerkung
Cobb-Douglas-Produktionsfunktion	CD-Produktionsfunktion
Constant Elasticity of Substitution Produktionsfunktion	CES-Produktionsfunktion
HH	Haushalt
ITSE	intertemporale Substitutionselastizität
ML-Methode	Maximum-Likelihood-Schätzmethode
Per.	Periode
PO	Posteriori-Odds
RBC-Modell	Real-Business-Cycle-Modell
SS	Steady-State

Symbolverzeichnis

(nach Aussprache der Symbole geordnet)

Symbol	Bezeichnung	Dimension
A	Technologie-Niveau im Steady-State	ohne Dimension
α	Produktionsparameter	ohne Dimension
A_t	technologischer Fortschritt in Periode t	ohne Dimension
a_t	Wachstumsrate der Technologie in Per. t	ohne Dimension
β	Diskontfaktor	ohne Dimension
c	Skalierungsfaktor	ohne Dimension
c_t	Konsum in Periode t	ohne Dimension
d	Daten	ohne Dimension
δ	Abschreibungsrate	ohne Dimension
ϵ	Element von	ohne Dimension
ε_t	technologischer Schock in Periode t	ohne Dimension
E_t	Erwartungswert aus Sicht von Periode t	ohne Dimension
$f(.)$	Funktion	ohne Dimension
$f_k(.)$	Grenzproduktivität des Kapitals	ohne Dimension
$f_l(.)$	Grenzproduktivität der Arbeit	ohne Dimension
i_t	Investitionen in Periode t	ohne Dimension
k_t	Kapitalstock in Periode t	ohne Dimension
λ	Lagrange-Multiplikator	ohne Dimension

VIII

\mathcal{L}	Lagrange-Funktion	ohne Dimension
$\mathcal{L}(\cdot)$	Likelihood	ohne Dimension
l_t	Arbeit(szeit) in Periode t	ohne Dimension, da normierte Größe
M_k	Modell k	ohne Dimension
m_k	marginale Likelihood von Modell k	ohne Dimension
μ	Parametervektor der Modi	ohne Dimension
$\hat{\mu}_B$	Schätzer für den Modus	ohne Dimension
μ^i	Parameter der i-ten Replikation	ohne Dimension
$P(\cdot)$	Wahrscheinlichkeit von/für	ohne Dimension
p_k	Priori-Wahrscheinlichkeit für Modell k	ohne Dimension
ϕ	Akzeptanzwahrscheinlichkeit	ohne Dimension
ψ	Substitutionsparameter	ohne Dimension
r	Zufallszahl	ohne Dimension
ρ	Parameter bzgl. der Nachwirkung von technologischen Schocks	ohne Dimension
σ	intertemporale Substitutionselastizität	ohne Dimension
σ_ε^2	Varianz des technologischen Schocks	ohne Dimension
Σ_B	Kovarianz-Matrix der Modi	ohne Dimension
τ	Inverse der intertemporalen Substitut- ionselastizität	ohne Dimension
θ	Präferenzparameter	ohne Dimension

IX

$u(.)$	Nutzenfunktion	ohne Dimension
$u_c(.)$	Grenznutzen des Konsums	ohne Dimension
$u_l(.)$	Grenznutzen der Arbeit	ohne Dimension
\wp	Priori-Verteilung	ohne Dimension
y_t	Produktionsergebnis/Output in Periode t	ohne Dimension
\propto	proportional zu	ohne Dimension

Verzeichnis der Anhänge

Anhang		Seite
I	Herleitung der allgemeinen Nebenbedingung.....	26
II	Herleitung der Steady-States bei Cobb-Douglas-Produktionsfunktion	27
III	Grafiken Cobb-Douglas-Produktionsfunktion.....	30
IV	Herleitung der Steady-States sowie Beschreibung des Vorgehens zur Kalibrierung bei additiv separabler Nutzenfunktion	32
V	Grafiken additiv separable Nutzenfunktion	36
VI	Herleitung der Optimalitätsbedingung und der Steady-States bei unelastischem Arbeitsangebot.....	37
VII	Grafiken unelastisches Arbeitsangebot	39
VIII	Grafiken und Erläuterungen zu den echten Daten	40
IX	CD	43

A Einleitung

Aufgrund eines stetig steigenden Wettbewerbsdrucks sowie zunehmend gesättigter Märkte wird es für Unternehmen und damit auch für die gesamte Ökonomie immer schwieriger, zu wachsen. Das in dieser Arbeit behandelte Real-Business-Cycle-Modell(RBC-Modell) greift diesen langfristigen Gleichgewichtszustand auf, indem konjunkturelle Schwankungen, d.h. Abweichungen vom Steady-State(SS), lediglich auf Technologieschocks zurückzuführen sind. Das Ziel dieser Ausarbeitung besteht in der möglichst genauen Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen ausgewählter Modellparameter unter Berücksichtigung der durch die exogenen Schocks verursachten stochastischen Einflüsse.

Nachdem im ersten Teil B die einzelnen Modellgleichungen vorgestellt sowie die für die weiteren Berechnungen notwendigen Optimalitätsbedingungen allgemein hergeleitet worden sind, wird anschließend die für die Schätzung verwendete Methode, das Bayes-Schätzverfahren, erläutert. Aufbauend auf den hierdurch gewonnenen theoretischen Erkenntnissen können die Auswertungen zunächst mit simulierten, danach mit echten Daten vorgenommen werden. Hierbei wird das in Teil B vorgestellte RBC-Modell um jeweils eine Komponente abgewandelt, sodass für jeden Datensatz jeweils drei verschiedene Modellversionen und damit auch Schätzergebnisse vorliegen. Im ersten Fall wird beispielsweise eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion anstelle der originären Constant Elasticity of Substitution-Produktionsfunktion(CES-Produktionsfunktion) angenommen. Im Anschluss daran erfolgt eine Beurteilung der einzelnen Modelle im Vergleich zu den anderen Modellen anhand einer für Bayes-Schätzungen ausgewählten Kennzahl. Die Gegenüberstellung wird jedoch ausschließlich für die echten Daten durchgeführt, da nur bei diesen ein Vergleich zwischen den verschiedenen Modellen angebracht ist. Im Simulationsfall werden die Daten nämlich gemäß der Modellrahmenbedingungen (Spezifikation der jeweiligen Funktionen sowie Festlegung der Parameter) generiert, während die echten Daten exogen vorgegeben sind und somit außerhalb der Modelle bestimmt worden sind.

B Beschreibung und Analyse der Modellgleichungen sowie der zugehörigen Optimalitätsbedingungen

B.I Modellgleichungen

In diesem Teil soll zunächst das Basismodell kurz vorgestellt werden, um bei den in Teil D bzw. E durchgeführten Auswertungen lediglich auf die jeweilige Veränderung in der Modellspezifikation einzugehen.

Das RBC-Modell geht von einem repräsentativen Haushalt(HH) aus, der über einen unendlich langen Zeithorizont seinen Nutzen durch die intertemporale Wahl von Konsum c_t , Arbeit l_t und Kapital k_t maximiert. Durch den Diskontfaktor $\beta < 1$ wird ausgedrückt, dass heutiger Nutzen ggü. zukünftigem Nutzen in gleicher Höhe präferiert wird. Formal lässt sich dies folgendermaßen zusammenfassen: $\max_{\{c_{t+j}, l_{t+j}, k_{t+j}\}_{j=0}^{\infty}} W_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j}, l_{t+j})$. (1)

Somit gehen die Konsum- und Arbeitsentscheidungen direkt über die Nutzenfunktion in das Optimierungskalkül des Haushalts ein. Die Nutzenfunktion im Ausgangsmodell ist wie folgt spezifiziert: $u(c_t, l_t) = \frac{[c_t^\theta (1-l_t)^{1-\theta}]^{1-\tau}}{1-\tau}$, (2)

wobei die Nutzenhöhe aufgrund der multiplikativen Form der Nutzenfunktion in jeder Periode vom Zusammenspiel zwischen Konsum und Freizeit (definiert als $1 - l_t$) abhängt. Durch den Parameter θ werden die Präferenzen des Haushalts für Konsum bzw. Freizeit offenbart¹. Beispielsweise deutet ein $\theta = 0.9$ darauf hin, dass der HH die Arbeit der Freizeit vorzieht, da er durch den mit der zusätzlichen Arbeit verbundenen Einkommenszuwachs mehr konsumieren kann. Während sich θ mit der intratemporalen Entscheidung zwischen Konsum und Freizeit auseinandersetzt, wird durch τ das intertemporale Entscheidungsproblem berücksichtigt. Bei τ handelt es sich um die Inverse der intertemporalen Substitutionselastizität(ITSE)². Ein hoher τ -Wert führt folglich zu einer geringen ITSE³. In diesem Fall führt ein hoher Reallohnanstieg in Periode t

1 Vgl. Campbell, J.Y. et al., Substitution 2001, S. 851-853.

2 Vgl. Lindé, J., Effects 2004, S. 6.

3 Vgl. Harms, P., Makroökonomik 2008, S. 59. Anm.: Die folgenden zwei Sätze sind ebenfalls dieser Quelle zuzuordnen.

z.B. zu einem dazu im Verhältnis moderaten Anstieg des Arbeitsangebotes bzw. bei einer Überkompensation des (hier schwachen) Substitutionseffektes durch den Einkommenseffekt sogar zu einem Rückgang des Arbeitsangebotes in den darauffolgenden Perioden. Somit kommt es bei einer geringen ITSE zu einer Glättung des Konsums bzw. der Freizeit über die Zeit. Den Teil des Einkommens, den der HH nicht für Konsum ausgibt, spart er an bzw. investiert er (da Sparen=Investieren). Sofern die Neuinvestitionen i_t den Anteil des abzuschreibenden Kapitals der Vorperiode δk_{t-1} übersteigen, kommt es zu einer Kapitalakkumulation (formal: $k_t = i_t + (1 - \delta)k_{t-1}$)⁴. (3)

Im vorliegenden Modellrahmen stellt der HH den Kapitalstock dem (repräsentativen) Unternehmen (gegen Zahlung eines Entgeltes) für dessen Produktionstätigkeit zur Verfügung. Somit beeinflussen drei Faktoren das Produktionsergebnis y_t : die Inputfaktoren Kapital und Arbeit sowie die zur Verfügung stehende Technologie A_t (formal: $y_t = A_t f(k_{t-1}, l_t)$). (4)

Ausgehend von einem Technologieniveau A steigt der technische Fortschritt exponentiell mit der Wachstumsrate a_t (formal: $A_t = A e^{a_t}$), (5)

wobei a_t einem stationären AR(1)-Prozess folgt: $a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t$, (6)

mit $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Die Stationarität des Prozesses ($\rho < 1$) stellt sicher, dass technologische Schocks ε_t nur vorübergehende und nicht permanente Wirkungen auf die Ökonomie haben. Der HH berücksichtigt die mit den Schocks einhergehende Unsicherheit in seinem Optimierungskalkül und bildet entsprechende Erwartungen.

Die Produktionsfunktion im Ausgangsmodell ist wie folgt spezifiziert:

$$f(k_{t-1}, l_t) = [\alpha k_{t-1}^\psi + (1 - \alpha) l_t^\psi]^\frac{1}{\psi}. \quad (7)$$

$\frac{\alpha k_{t-1}^\psi}{\alpha k_{t-1}^\psi + (1 - \alpha) l_t^\psi}$ bezeichnet hierbei die Produktionselastizität des Faktors Kapital,

$\frac{(1 - \alpha) l_t^\psi}{\alpha k_{t-1}^\psi + (1 - \alpha) l_t^\psi}$ die des Faktors Arbeit⁵. Die Produktionselastizität gibt die pro-

zentuale Veränderung des Outputs bei einer Änderung eines Inputfaktors um 1% bei Konstanz aller anderen Inputfaktoren an. ψ zeigt hingegen die Aus-

4 Vgl. Coenen, G., Konsolidierung 1998, S. 3-14. Anmerkung(Anm.): Diese Quelle wurde für das gesamte Kapitel B.I verwendet.

5 Vgl. Hackman, S.T., Production 2008, S. 25.

tauschbarkeit zwischen den Inputs untereinander an, denn ψ ist gemäß der Formel $\sigma = \frac{1}{1-\psi}$ eng mit der Substitutionselastizität σ zwischen Kapital und Arbeit verknüpft⁶. Für $\psi = -\infty$ strebt σ beispielsweise gegen null, was bedeutet, dass die beiden Inputs nicht gegeneinander substituierbar sind (Leontief-Fall)⁷. Ausgehend von dieser Produktionsfunktion kann das Unternehmen ein finales Gut entweder zu konsumtiven oder investiven Zwecken erstellen. Aufgrund flexibler Preise (und Löhne) ist der Gütermarkt stets geräumt, sodass die Produktion der Nachfrage entspricht (formal: $y_t = c_t + i_t$). (8)

B.II Optimalitätsbedingungen

Ausgehend von der beschriebenen Modellwelt ist der HH darin bestrebt, seinen Lebenszyklus-Nutzen im Hinblick auf seine Präferenzen, der exogenen Einflüsse sowie dem (ebenfalls) gegebenen rationalen Verhalten des Unternehmens (Ziel: Gewinnmaximierung) zu maximieren. Zu diesem Zweck werden seine Optimalitätsbedingungen in diesem Kapitel unter Berücksichtigung aller Restriktionen in allgemeiner Form bestimmt, sodass die Optimalitätsbedingungen hierdurch nicht für die einzelnen nachfolgenden Modellspezifikationen separat hergeleitet werden müssen.

Die Restriktionen (3), (4) und (8) lassen sich durch sukzessives ineinander Einsetzen zu folgender Gleichung zusammenfassen⁸:

$$c_t + k_t - A_t f(k_{t-1}, l_t) - (1 - \delta)k_{t-1} = 0 \quad (9)$$

Somit lässt sich das Optimierungsproblem (1) unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion (9) mithilfe des Lagrange-Ansatzes lösen:

$$\mathcal{L} = E_0 \{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t) - \beta^t \lambda_t (c_t + k_t - A_t f(k_{t-1}, l_t) - (1 - \delta)k_{t-1}) \}$$

Ableiten nach den zu optimierenden Größen c_t , k_t und l_t liefert

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = E_t \{ \beta^t u_c(c_t, l_t) - \beta^t \lambda_t \} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_t = u_c(c_t, l_t) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = E_t (-1) \lambda_t \beta^t + E_t \lambda_{t+1} \beta^{t+1} (1 - \delta) + E_t \lambda_{t+1} \beta^{t+1} A_{t+1} f_k(k_t, l_{t+1}) = 0$$

6 Vgl. Cantore, C. et al., Macroeconomics 2011, S. 5f..

7 Vgl. Jehle, G. A. et al., Theory 2011, S. 131.

8 Anm.: Eine ausführliche Herleitung ist im Anhang (Anhang I, S. 26) zu finden.

$$\Leftrightarrow \lambda_t = E_t \lambda_{t+1} \beta (1 - \delta + A_{t+1} f_k(k_t, l_{t+1})) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_t} = E_t \{ \beta^t u_l(c_t, l_t) + \lambda_t \beta^t A_t f_l(k_{t-1}, l_t) \} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_t = - \frac{u_l(c_t, l_t)}{A_t f_l(k_{t-1}, l_t)} \quad (12)$$

Einsetzen von (10) in (11) (mit der entsprechenden Anpassung für λ_{t+1}) und Auflösen nach null liefert die folgende Optimalitätsbedingung:

$$u_c(c_t, l_t) - \beta E_t u_c(c_{t+1}, l_{t+1}) [A_{t+1} f_k(k_t, l_{t+1}) + 1 - \delta] = 0 \quad (13)$$

Hierbei handelt es sich um die Euler-Gleichung, welche das intertemporale Entscheidungsproblem zwischen heutigem und morgigem Konsum betrachtet. Ein heutiger Konsumverzicht um eine Einheit führt demnach zu einem heutigen Nutzenverlust i.H.v. $u_c(c_t, l_t)$ und zu einem abgezinste erwarteten Nutzenzuwachs um $u_c(c_{t+1}, l_{t+1})$ bei Konsum der zusätzlichen Einheit in der nächsten Periode. Der HH erhält zusätzlich eine Rendite für die Kapitalüberlassung von dem produzierenden Unternehmen, welche vom morgigen erwarteten technischen Niveau, der erwarteten Grenzproduktivität des Kapitals sowie der Abschreibungsrate abhängig ist. Der HH trifft seine Entscheidungen in der Weise, dass er indifferent zwischen heutigem und dem erwartetem Konsum in der Folgeperiode ist. Die zweite Optimalitätsbedingung ergibt sich durch Einsetzen von (10) in (12):

$$u_c(c_t, l_t) = - \frac{u_l(c_t, l_t)}{A_t f_l(k_{t-1}, l_t)} \Leftrightarrow - \frac{u_l(c_t, l_t)}{u_c(c_t, l_t)} - A_t f_l(k_{t-1}, l_t) = 0 \quad (14)$$

In diesem Fall wird das intratemporale Entscheidungsproblem zwischen Konsum und Freizeit betrachtet. Die Gleichung ist folgendermaßen zu interpretieren: Der HH ist bereit, eine zusätzliche Einheit zu arbeiten und er erleidet hierdurch einen Nutzenverlust i.H.v. $u_l(c_t, l_t)$. Durch die Mehrarbeit erhält der HH einen zusätzlichen Lohn, welcher vom Technologieniveau sowie der Grenzproduktivität der Arbeit abhängt. Das Unternehmen ist demnach nur bereit, Arbeit nachzufragen, solange die Grenzproduktivität der Arbeit mindestens den Grenzkosten der zusätzlichen Arbeitseinheit (dem Reallohn) entspricht. Der Einkommensanstieg ist für den HH mit einem erhöhten Konsum verbunden, wodurch der Grenznutzen des Konsums wiederum sinkt. Somit ist der HH nur so lange bereit, mehr zu arbeiten, bis der Nutzenverlust aus Arbeit und zusätzlichem Konsum den zusätzlichen (Real)Lohn nicht übersteigt.

Aus den Gleichungen wird deutlich, dass sowohl die intertemporalen als auch die intratemporalen Entscheidungen vom (zukünftig erwarteten) Technologie-niveau abhängen. Somit wirken sich technologische Schocks unmittelbar auf das Verhalten des Haushalts sowie des Unternehmens aus und führen so zu den bereits einleitend angesprochenen Abweichungen vom langfristigen Gleichgewichtspfad.

C Beschreibung des Bayes-Schätzverfahrens

Bevor mit den Schätzungen der Modellparameter begonnen wird, soll die hierzu verwendete Bayes-Schätzmethode vorgestellt werden.

Das Bayes-Verfahren basiert auf den Erkenntnissen zweier anderer Methoden, nämlich der Maximum-Likelihood-Schätzmethode (ML-Methode) sowie der Kalibrierung. Bei der ML-Methode werden die Parameter einer zuvor festgelegten Verteilung so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit, bei einer erneuten Stichprobe wiederum die Realisationen der vorliegenden Stichprobe zu erhalten, maximal ist. Die Parameter werden entsprechend ausschließlich auf Basis der Daten ermittelt. Bei der Kalibrierungsmethode werden den Parametern Werte zugeordnet, welche in zahlreichen empirischen Studien nachgewiesen worden sind⁹. Somit beruht die Kalibrierungsmethode auf (Vor)Wissen. Anhand des Theorems von Bayes lassen sich diese beiden Methoden miteinander verknüpfen¹⁰:

$$\wp(\mu|d) = \frac{\mathcal{L}(d|\mu)\wp(\mu)}{\int \mathcal{L}(d|\mu)\wp(\mu)} \propto \mathcal{L}(d|\mu)\wp(\mu) \quad (15)$$

$\mathcal{L}(d|\mu)$, die Likelihood, gibt hierbei die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür an, bei gegebenem Parametervektor μ sowie Verteilungstyp die Realisationen d zu ziehen. Durch $\wp(\mu)$, die Priori-Verteilung, kann man Wissen über den vermuteten Parameterraum einfließen lassen (bevor irgendwelche Kalkulationen durchgeführt worden sind). Das Wissen fließt in Form einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ein, da unterschiedliche Studien beispielsweise zu unterschiedlichen Resultaten gelangt sind und daher Unsicherheit bzgl. des wahren Parameterwertes herrscht. Der Term im Nenner ist von untergeordneter Bedeutung, da es sich hierbei lediglich um einen Normierungsfaktor handelt¹¹. $\wp(\mu|d)$, die Posteriori-Verteilung, ist proportional zu dem Produkt der beiden Terme. Diese

9 Anm.: Für den hier verfolgten Zweck ist diese Beschreibung ausreichend. Für ein detaillierteres Vorgehen bei dieser Methode siehe Kapitel D.II, S. 15.

10 Vgl. Hoff, P.D., Course 2009, S. 2-5. Anm.: Diese Quelle wurde nicht nur für die Formel, sondern auch für die daran anschließenden Ausführungen auf S. 7f. verwendet.

11 Anm.: Diese Annahme, dass es sich nur um einen Normierungsfaktor ohne weitere Bedeutung handelt, wird in Teil F gelockert.

gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Parameter bei gegebenen Realisationen, d.h. nach Durchführung der Kalkulationen, an. Sofern die Posteriori von der Priori-Verteilung abweicht, besitzen die Daten einen Informationsgewinn und die Erwartungen bzgl. der Wahrscheinlichkeitsverteilung der jeweiligen Parameter sind anzupassen.

Ausgehend von Gleichung (15) kann der Modus der Posteriori-Verteilung bei Vorliegen der Modellgleichungen, Optimalitätsbedingungen, Daten, Steady-States sowie der Priori-Verteilung für jeden Parameter numerisch bestimmt werden. Der sich ergebende Modus ist als Bayes-Schätzer für den wahren Parameterwert anzusehen. Für die Optimierung wurde der Nelder-Mead-Simplex-Algorithmus verwendet, da dieser auf Simulationen basiert und aufgrund seines heuristischen Vorgehens robuste Ergebnisse liefert¹². Das Ziel dieses Algorithmus besteht in der Suche nach derjenigen Parameterkonstellation, für welche der Funktionswert minimal ist. Somit befinden sich die Bayes-Schätzer im Minimum der negativen Likelihood. Der Algorithmus startet hierbei mit n unterschiedlichen, zufälligen Parameterkonstellationen und berechnet für jede dieser Konstellationen den zugehörigen Funktionswert. Die Konstellation mit dem größten Funktionswert wird durch eine neue Parameterkonstellation, welche sich an den anderen, „besseren“ Parameterwerten orientiert, ersetzt. Die Konstellation mit dem niedrigsten Wert wird stets beibehalten. Dieser Algorithmus wird so lange durchgeführt, bis sich die Funktionswerte nicht mehr unterscheiden und somit das Minimum gefunden worden ist¹³.

Da es sich bei dem ermittelten Modus-Schätzer $\hat{\mu}_B$ nur um einen Wert handelt, ist dieser (wie bei der Priori-Verteilung) mit einer gewissen Skepsis zu betrachten. Zu diesem Zweck soll mithilfe des Metropolis-Hastings Algorithmus die Posteriori-Verteilung um den Modus herum generiert werden, sodass dieser (u.a.) auf statistische Signifikanz überprüft werden kann.

12 Vgl. Mead, R. et al., Simplex 1965, S. 308-312. Anm.: Diese Quelle wurde für die gesamten Ausführungen zum Nelder-Mead-Simplex-Algorithmus verwendet.

13 Anm.: Das Problem, dass der Algorithmus gegen ein lokales und nicht globales Minimum konvergieren könnte, wird in dieser Arbeit nicht behandelt (Vgl. Chelouah, R. et al., Optimization 2003, S. 637.).

Moderne Computer-Software gibt nicht nur den Vektor der Modi aus, sondern gleichzeitig deren Kovarianz-Matrix Σ_B . Diese ist mit einem bestimmten Faktor $c > 1$ zu skalieren, sodass man eine möglichst breite, symmetrische (i.d.R. normalverteilte) Verteilung um den jeweiligen Modus erhält (Annahme im Folgenden: $N(\hat{\mu}_B, c^2 \Sigma_B)$)¹⁴. Diese Verteilung, die sogenannte Vorschlagsdichte, ist so weit zu fassen, da sie alle Werte enthalten soll, welche auch die „Zieldichte“, die Posteriori-Verteilung, annehmen könnte. Aus $N(\hat{\mu}_B, c^2 \Sigma_B)$ wird nun zufällig ein Startwert μ^0 gezogen. Die Gestalt der Vorschlagsdichte kann sich mit jedem Zug ändern, sodass der nächste Parameterwert μ^1 aus $N(\mu^0, c^2 \Sigma_B)$ gezogen werden würde. Hierbei ändert sich der Erwartungswert aufgrund der Eigenschaft einer Markov-Kette, nach welcher der zukünftige Wert lediglich von der Gegenwart, nicht aber von der Vergangenheit abhängt, umgehend in den gezogenen Parameterwert. Die Kovarianz bleibt infolge der angenommenen Symmetrie der Verteilung unverändert. Es kommt jedoch nur zu dieser Änderung, sofern der ϕ -Wert der folgenden Gleichung (hier beispielhaft für die bereits erwähnten Parameter) mindestens den Wert eins annimmt:

$$\phi \equiv \phi(\mu^0, \mu^1) = \frac{\mathcal{L}(\mu^1|d)\wp(\mu^1)}{\mathcal{L}(\mu^0|d)\wp(\mu^0)} \quad (16)$$

Sofern $\phi \geq 1$, ersetzt μ^1 μ^0 und der nächste Parameter wird aus $N(\mu^1, c^2 \Sigma_B)$ gezogen. Andernfalls wird der Kandidat μ^1 nicht akzeptiert. In diesem Fall wird eine Zufallszahl r aus der Gleichverteilung ($\epsilon(0,1)$) gezogen. Wenn $r \leq \phi$, ersetzt μ^1 doch noch μ^0 , wenn jedoch $\phi \geq r$, wird weiterhin aus $N(\mu^0, c^2 \Sigma_B)$ gezogen. Dieser letzte Schritt (mit der Zufallszahl) wird durchgeführt, um zu verhindern, dass sich der Parameter zu lange in einer (Wahrscheinlichkeits-)Region aufhält. Befindet sich beispielsweise μ^1 in einer Region mit hoher Posteriori-Wahrscheinlichkeit, dann würden nur noch μ^i mit einer ähnlich hohen Posteriori-Wahrscheinlichkeit akzeptiert. Würde hingegen jedes gezogene μ^i akzeptiert, würde sich die Verteilung für jeden Parameter ebenfalls in Abhängigkeit des ersten gezogenen Wertes kaum von der Stelle bewegen. Um zu einer akzeptablen Approximation der Verteilung um den Modus zu gelangen, hat sich daher eine Akzeptanzwahrscheinlichkeit zwischen 20 und

14 Vgl. Hoff, P.D., Course 2009, S. 181-184. sowie Vgl. Lynch, S.M., Social 2007, S. 108-115. sowie Vgl. Congdon, P.D., Hierarchical 2010, S. 9-12. Anm.: Diese drei Quellen wurden für die gesamten Ausführungen zum Metropolis-Hastings Algorithmus verwendet.

30% in der Literatur durchgesetzt. Durch Anpassung des Skalierungsfaktors c ist es möglich, um auf einen Wert in diesem Intervall zu gelangen.

Aus der Vorschlagsdichte wird so lange nach dem obigen Muster gezogen, bis man mit der sich hieraus ergebenden Posteriori-Verteilung, welche sich aus den akzeptierten Werten bildet, „zufrieden“ ist¹⁵.

In der vorliegenden Untersuchung wird trotz des Mechanismus der zusätzlichen Ziehung einer Zufallszahl der Metropolis-Hastings Algorithmus dreimal durchgeführt, um sicher zu verhindern, dass der zufällig ausgewählte Startwert einen Einfluss auf das Ergebnis hat. Somit soll dem Autokorrelationsproblem der Markov-Kette entgegengewirkt werden.

Basierend auf dem beschriebenen Verfahren können nun die Auswertungen der drei verschiedenen Modellvarianten vorgenommen werden.

15 Anm.: Bei den in Teil D bzw. E folgenden Auswertungen wird verdeutlicht, was unter „Zufriedenheit“ (siehe S. 14) zu verstehen ist.

D Bayes-Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen ausgewählter Modellparameter unter Verwendung unterschiedlicher Modellrahmenbedingungen und mit simulierten Daten

D.I Verwendung einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Im ersten Fall wird eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion (CD-Produktionsfunktion) der Form $f(k_{t-1}, l_t) = f_t = k_{t-1}^\alpha l_t^{1-\alpha}$ (17) betrachtet. Diese stellt einen Spezialfall der zuvor beschriebenen CES-Produktionsfunktion dar (Gleichung (7), S. 3), denn für $\psi \rightarrow 0$ konvergiert die CES- gegen die CD-Produktionsfunktion¹⁶. Die CD-Produktionsfunktion weist daher die folgenden Eigenschaften ebenfalls auf: Sie besitzt eine konstante Substitutionselastizität zwischen den Inputfaktoren ($\lim_{\psi \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\psi \rightarrow 0} (\frac{1}{1-\psi}) = 1$) sowie eine konstante Skalenelastizität. Konstante Skalenerträge liegen vor, sofern eine gleichzeitige Erhöhung aller Inputfaktoren um 1% eine Erhöhung des Outputs um ebenfalls 1% nach sich zieht. Somit entspricht die Summe der Produktionselastizitäten der einzelnen Inputs der Skalenelastizität. Die CD-Produktionsfunktion besitzt jedoch den Vorteil, dass sich die Produktionselastizitäten im Gegensatz zur allgemeinen CES-Version direkt aus den Exponenten der jeweiligen Inputfaktoren ablesen lassen (\Rightarrow konstante Skalenelastizität, da $\alpha\% + (1 - \alpha)\% = 1\%$).

Um die Approximationen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen mithilfe des im letzten Teil beschriebenen Verfahrens in Matlab generieren zu können, werden die folgenden drei Komponenten benötigt (die hier nicht behandelten Komponenten des Modells werden in der MOD-Datei „Cobb_Douglas“ (siehe Anhang IX, S. 43 (CD)), mithilfe welcher auch die folgenden Kalkulationen durchgeführt worden sind, erläutert):

1. Zunächst sind die Grenznutzen sowie Grenzproduktivitäten für die Optimali-

¹⁶ Vgl. Hackman, S.T., Production 2008, S. 23-26. Anm.: Diese Quelle wurde für die folgenden theoretischen Ausführungen ebenfalls verwendet.

tätsbedingungen (13) und (14) zu bestimmen:

$$f_l(k_{t-1}, l_t) = (1 - \alpha)k_{t-1}^\alpha l_t^{1-\alpha} = (1 - \alpha) \left(\frac{k_{t-1}}{l_t} \right)^\alpha = (1 - \alpha) \frac{f_t}{l_t}$$

$$f_k(k_{t-1}, l_t) = \alpha k_{t-1}^{\alpha-1} l_t^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{k_{t-1}}{l_t} \right)^{\alpha-1} = \alpha \frac{f_t}{k_{t-1}}$$

$$\Rightarrow f_k(k_t, l_{t+1}) = \alpha k_t^{\alpha-1} l_{t+1}^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{k_t}{l_{t+1}} \right)^{\alpha-1} = \alpha \frac{f_{t+1}}{k_t}$$

$$u_c(c_t, l_t) = (c_t^\theta (1 - l_t)^{1-\theta})^{-\tau} \theta c_t^{\theta-1} (1 - l_t)^{1-\theta} = (c_t^\theta (1 - l_t)^{1-\theta})^{1-\tau} \frac{\theta}{c_t}$$

$$\Rightarrow u_c(c_{t+1}, l_{t+1}) = (c_{t+1}^\theta (1 - l_{t+1})^{1-\theta})^{1-\tau} \frac{\theta}{c_{t+1}}$$

$$u_l(c_t, l_t) = -\frac{1-\theta}{1-l_t} (c_t^\theta (1 - l_t)^{1-\theta})^{1-\tau}$$

2. Die Steady-States sind zu bestimmen, da diese das optimale Verhalten des Haushaltes und des Unternehmens (und somit die Entwicklung der gesamten Ökonomie) widerspiegeln, sofern keine technologischen Schocks auftreten. Für die Variablen des Modells ergeben sich die folgenden Gleichgewichtswerte¹⁷:

$$\begin{aligned} A &= A_{SS} & \frac{y}{k} &= \frac{\beta^{-1} + \delta - 1}{\alpha} & \frac{c}{k} &= \frac{y}{k} - \delta & \frac{l}{k} &= \left(\frac{y/k}{A} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ \frac{y}{l} &= \frac{y/k}{l/k} & \frac{c}{l} &= \frac{c/k}{l/k} & l &= \left\{ 1 + \frac{c/l}{(1-\alpha) \frac{\theta}{1-\theta} \left(\frac{y}{l} \right)} \right\}^{-1} \\ c &= \left(\frac{c}{l} \right) l & k &= \frac{l}{l/k} & y &= \frac{y}{k} k & i &= \delta k \end{aligned}$$

3. Aus Gleichung (15) und (16) wird (auch) formal ersichtlich, dass für die Untersuchung Daten vorliegen müssen. Für die Auswertungen in Teil D werden hierzu für eine der beobachtbaren Variablen Daten simuliert, da für das Durchführen der Schätzungen je Schock eine beobachtbare Variable vorliegen muss. Mit dem Technologieschock liegt lediglich ein Schock vor, sodass nur für y , der Summe aus konsumtivem sowie investivem Güterangebot bzw. -nachfrage, die Daten simuliert werden müssen. Zu diesem Zweck sind gemäß Kalibrierungsmethode realistische Werte für die Parameter auszuwählen, da die Daten anhand der vorgegebenen Parameter generiert werden sowie hierdurch die langfristigen Gleichgewichtswerte festgelegt werden. Für die vorliegende CD-Produktionsfunktion wurde für α beispielsweise ein Wert von 0.36 angenommen¹⁸. Die anderen Parameterwerte sind so wie in der Veranstaltung

17 Anm.: Eine ausführliche Herleitung der SS ist im Anhang (Anhang II, S. 27) zu finden.

18 Vgl. Coenen, G., Konsolidierung 1998, S. 21.

zu dieser Seminararbeit gewählt, weshalb eine Erläuterung zu deren Wahl unterbleibt.

Da in Teil F ein Modellvergleich durchgeführt wird, werden die folgenden Schätzungen lediglich für die Parameter α und τ durchgeführt. Diese sind nämlich die einzigen (interessierenden) Parameter, die in allen drei Modellvarianten vorkommen.

Für die CD-Produktionsfunktion ergeben sich die folgenden Ergebnisse:

Die Posteriori-Modi von α und τ weichen nur geringfügig von ihren Priori-Werten ab (für α 0.3659 statt 0.36, für τ 2.0117 statt 2.00). Anhand von Modus-Check-Grafiken ist zu erkennen, welche Werte die Zielfunktionen, d.h. die (logarithmierte) Posteriori $\wp(\mu|d)$ aus Gleichung (15) sowie die logarithmierte Likelihood, annehmen, sofern der zu überprüfende Parameter verschiedene Werte annimmt, während alle anderen Parameter unverändert (optimal) bleiben. Aus den Grafiken (siehe Anhang III, S. 30) ist zu erkennen, dass es sich bei den Modus-Werten um diejenigen handelt, welche die Zielfunktionen minimieren. Die flache Kurve der log-Likelihood von τ deutet jedoch darauf hin, dass die Daten keinen großen Einfluss auf das Schätzergebnis (des Modus von τ) haben.

Die folgende Grafik zeigt die mittels Metropolis-Hastings Algorithmus generierte Posteriori-Verteilung (schwarze Linie) im Vergleich zur Priori-Verteilung (graue Linie):

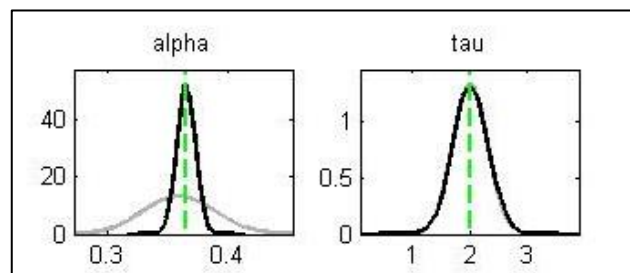


Abbildung 1: Vergleich Posteriori Priori bei Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Aus der Grafik ist ersichtlich, dass sich nur für α der gewünschte Effekt einer Verengung der Wahrscheinlichkeitsmasse um den Modus durch die Hinzunahme der Daten ergibt. Für τ stimmt die Posteriori- hingegen mit der Priori-Verteilung überein. Somit wird der obige Verdacht eines geringen Einflusses

der Daten bestätigt. Dies deutet auf ein Identifikationsproblem des Parameters hin. Hierbei ist zu beachten, dass der Skalierungsfaktor c bereits so gewählt wurde, dass die Akzeptanzwahrscheinlichkeit in dem in Teil C beschriebenen Intervall liegt (hier zwischen 25.90 und 26.70% für die drei Markov-Ketten) und die Anzahl der Replikationen so groß gewählt wurde (hier 25000), dass die empirischen gegen ihre theoretischen Momente konvergieren (siehe Anhang III, S. 30)¹⁹.

Daher soll im folgenden Kapitel untersucht werden, ob bei einer anderen Modellspezifikation (und somit auch anderen simulierten Daten) eine bessere Schätzung der Posteriori-Verteilung (v.a. für τ) gelingt.

D.II Verwendung einer additiv separablen Nutzenfunktion

In diesem Fall soll die Nutzenfunktion verändert werden. Im Gegensatz zu der in Teil B beschriebenen Nutzenfunktion (Gleichung (2)) soll sich der Periodennutzen jedoch nicht multiplikativ aus den Konsum- und Freizeitentscheidungen ergeben, sondern additiv. Die additiv separable Nutzenfunktion lautet daher wie folgt: $u(c_t, l_t) = \frac{c_t^{1-\tau}}{1-\tau} + \theta \frac{(1-l_t)^{1-\tau}}{1-\tau}$, (18)

wobei die Parameter τ und θ dieselbe Interpretation wie die der originären Nutzenfunktion aufweisen²⁰. Die Separabilität bietet den Vorteil, dass Konsum- und Freizeitentscheidungen weitgehend unabhängig voneinander betrachtet werden können. Dieser Vorteil ist jedoch gleichzeitig als kritisch anzusehen, da der HH seinen Nutzen bei hoher Präferenz für Freizeit maximieren könnte, ohne zu arbeiten und damit zu konsumieren. Kein Konsum in einer Periode ist jedoch gleichbedeutend mit dem Aussterben des Haushaltes, da in diesem Modell kein Staat mit Transferleistungen vorgesehen ist²¹. In diesem Fall wären die Entscheidungen der darauffolgenden Perioden lediglich theoretischer Natur.

19 Anm.: Sofern diese Kriterien die angegebenen Resultate liefern, kann man mit den Ergebnissen „zufrieden“ sein (siehe Teil C, S. 10).

20 Vgl. Groth, C., Real 2011, S. 943.

21 Vgl. Rodepeter, R., Lebenszyklus 1999, S. 9.

Um die Kalkulationen in Matlab durchführen zu können, ist wie im vorigen Kapitel D.I vorzugehen. Für die Grenznutzen sowie –produktivitäten (aus Gleichung (7) folgend) ergeben sich die folgenden Ergebnisse:

$$u_c(c_t, l_t) = c_t^{-\tau} \Rightarrow u_c(c_{t+1}, l_{t+1}) = c_{t+1}^{-\tau} \quad u_l(c_t, l_t) = -\frac{\theta}{(1-l_t)^\tau}$$

$$f_l(k_{t-1}, l_t) = (1 - \alpha)(\alpha k_{t-1}^\psi + (1 - \alpha)l_t^\psi)^{\frac{1}{\psi}-1} l_t^{\psi-1}$$

$$f_k(k_{t-1}, l_t) = \alpha(\alpha k_{t-1}^\psi + (1 - \alpha)l_t^\psi)^{\frac{1}{\psi}-1} k_{t-1}^{\psi-1}$$

$$\Rightarrow f_k(k_t, l_{t+1}) = \alpha(\alpha k_t^\psi + (1 - \alpha)l_{t+1}^\psi)^{\frac{1}{\psi}-1} k_t^{\psi-1}$$

Für die Steady-States ergeben sich die folgenden Werte²²:

$$A = A_{SS} \quad \frac{y}{k} = \left\{ \frac{\beta^{-1}-1+\delta}{\alpha A^\psi} \right\}^{\frac{1}{1-\psi}} \quad \frac{c}{k} = \frac{y}{k} - \delta$$

$$\frac{l}{k} = \left\{ \left(\left(\frac{y}{k} \right)^\psi - \alpha \right) (1 - \alpha)^{-1} \right\}^{\frac{1}{\psi}} \quad \frac{y}{l} = \frac{y/k}{l/k} \quad \frac{c}{l} = \frac{c/k}{l/k}$$

$$c = \left\{ \left(\frac{c}{l} \right)^{-1} + \left(\frac{\theta}{(1-\alpha)A^\psi} \left(\frac{y}{l} \right)^{\psi-1} \right)^{1/\tau} \right\}^{-1} \quad l = \left(\frac{c}{l} \right)^{-1} c \quad k = \frac{l}{l/k}$$

$$y = \frac{y}{k} k \quad i = \delta k$$

Für τ wird in der Literatur bei einer subadditiv separablen Nutzenfunktion ein Wert von ca. 1 angenommen²³. Daher wird im Folgenden ein Betrag von 1.10 angesetzt. Um θ gemäß Kalibrierungsmethode berechnen zu können, wird für die Steady-State Arbeit l_{SS} ein (realistischer) Wert von 1/3 angenommen²⁴. Unter Berücksichtigung der obigen Steady-States ergibt sich für θ ein Wert von $\theta = \left\{ \left(\frac{c}{l} \right)^{-1} \frac{1}{l} - \left(\frac{c}{l} \right)^{-1} \right\}^\tau (1 - \alpha) A^\psi \left(\frac{y}{l} \right)^{1-\psi} \approx 1.8253$.

Dieser hohe Wert impliziert zwar eine relativ hohe Freizeitpräferenz, er wurde jedoch trotzdem den folgenden Modellergebnissen zugrunde gelegt.

Die Posteriori-Modi für α bzw. τ sind 0.4417 bzw. 0.9559 (MOD-Datei „Additiv_sep_U“). Somit unterscheiden sich diese zwar deutlich von den im vorigen

22 Anm.: Eine ausführliche Herleitung der SS sowie der folgenden Kalibrierung für θ ist im Anhang (Anhang IV, S. 32) zu finden.

23 Vgl. King, R.G. et al., Cycles 2000, S. 25.

24 Vgl. Campbell, J.Y. et al., Substitution 2001, S. 857.

Kapitel ermittelten Werten ($\alpha = 0.3659$, $\tau = 2.0117$), jedoch lagen diesen auch ganz andere Ausgangswerte zugrunde. Bei Betrachtung der folgenden Grafik wird deutlich, dass durch die Änderungen der Nutzen- und Produktionsfunktion bei gleicher Priori-Verteilungsannahme für die Parameter (Beta-Verteilung für α , Normalverteilung für τ) keine deutlichen Verbesserungen erzielt werden konnten.

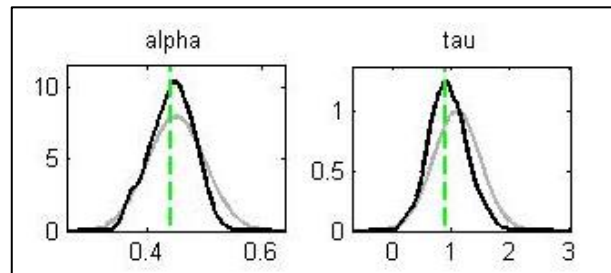


Abbildung 2: Vergleich Posteriori Priori bei additiv separabler Nutzenfunktion

Im Vergleich zur Cobb-Douglas-Auswertung wird jedoch deutlich, dass die Hinzunahme der Daten einen Informationsgewinn für die Schätzung beider Parameter (v.a. für τ) ermöglicht. Für α konzentriert sich die Wahrscheinlichkeitsmasse der Posteriori-Verteilung jedoch in weitaus geringerem Maße um den Modus als dies bei der CD-Produktionsfunktion der Fall war. Im nächsten Modell soll überprüft werden, ob eine Veränderung der Verteilungsannahme für τ noch bessere Ergebnisse liefert^{25;26}.

D.III Verwendung einer unelastischen Arbeitsangebotselastizität

Nachdem im vorigen Kapitel D.II bereits das Verhalten des Haushaltes durch eine andere Spezifikation der Nutzenfunktion verändert worden ist, soll dies nun auf andere Weise geschehen: Im Folgenden bietet der HH ein konstantes Arbeitsangebot an ($l_t = 1$). D.h., dass der HH bei einem positiven Technologieschock und dem damit verbundenen Reallohnanstieg für eine zusätzliche Arbeitseinheit (infolge der Erhöhung der Grenzproduktivität der Arbeit) nicht reagiert. Dies hat zur Folge, dass das Unternehmen nicht mehr produzieren kann als mit dem Faktor Arbeit möglich ist. Somit hat die Entscheidung des

25 Anm.: Der Modus-Check-Plot sowie die weiteren Infos befinden sich im Anhang (Anhang V, S. 36).

26 Anm.: Für α wird weiterhin eine Beta-Verteilung angenommen, da α auch dort im Intervall $[0,1]$ liegt und sich für diese Werte eine Beta-Verteilung sehr gut eignet.

Haushaltes einen dämpfenden Effekt für die Konjunktur.

In diesem Modellrahmen vereinfachen sich die Modellgleichungen sowie die Budgetrestriktion in der folgenden Weise:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\tau}}{1-\tau} \quad (19) \quad f(k_{t-1}) = f_{t..} = k_{t-1}^\alpha \quad (20)$$

$$c_t + k_t - A_t f(k_{t-1}) - (1 - \delta)k_{t-1} = 0 \quad (21)$$

Da der HH nun nur noch seine Konsum- und Kapitalentscheidungen optimiert, ergibt sich nach dem Lagrange-Ansatz lediglich die folgende Optimalitätsbedingung²⁷: $u_c(c_t) - \beta E_t u_c(c_{t+1})[A_{t+1}f_k(k_t) + 1 - \delta] = 0$ (22)

Wie in den vorangegangenen Kapiteln sind die Grenznutzen sowie die Grenzproduktivität des Kapitals zu bestimmen:

$$u_c(c_t) = c_t^{-\tau} \Rightarrow u_c(c_{t+1}) = c_{t+1}^{-\tau} \quad f_k(k_t) = \alpha k_t^{\alpha-1} = \alpha \frac{f_{t..+1}}{k_t}$$

Für die Steady-States ergeben sich die folgenden Werte²⁸:

$$A = A_{SS} \quad y = \left\{ \frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha A^{1/\alpha}} \right\}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad k = \left(\frac{y}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$i = \delta k \quad c = y - \delta k$$

Für α wird ein Wert von 0.33 angenommen²⁹, da der Faktor Arbeit weiterhin in die Produktion einfließt, jedoch in Boom-Phasen zunehmend durch Kapital substituiert werden muss. Aufgrund der abnehmenden Grenzproduktivität des Faktors Kapital wird daher ein Wert von 0.33 statt 0.36 angenommen. Für τ wird wie im Fall einer additiv separablen Nutzenfunktion ein Wert knapp übereins, hier wiederum 1.10, angenommen³⁰.

Mit den obigen Annahmen ergeben sich die Posteriori-Modi 0.3355 für α bzw. 1.3280 für τ (MOD-Datei „unel_Arbeit“). Hierbei ist zu berücksichtigen, dass für τ eine generalisierte Gamma-Verteilung angenommen worden ist, da die Normalverteilungsannahme (in den beiden vorherigen Untersuchungen im Vergleich zur Posteriori von α im CD-Fall) nur zu unzureichenden Resultaten

27 Anm.: Die Herleitung der Formel lässt sich im Anhang (Anhang VI, S. 37) finden.

28 Anm.: Eine ausführliche Herleitung ist im Anhang (Anhang VI, S. 37) zu finden.

29 Vgl. King, R.G. et al., Cycles 2000, S. 25.

30 Vgl. King, R.G. et al., Cycles 2000, S. 26. sowie Vgl. Tirelli, M., Business 2013, S. 58-62.

führte ($\text{Posteriori} \approx \text{Priori}$). Anhand der folgenden Grafik ist allerdings erkennbar, dass diese Änderung auch nicht zu Verbesserungen für τ f hrt³¹:

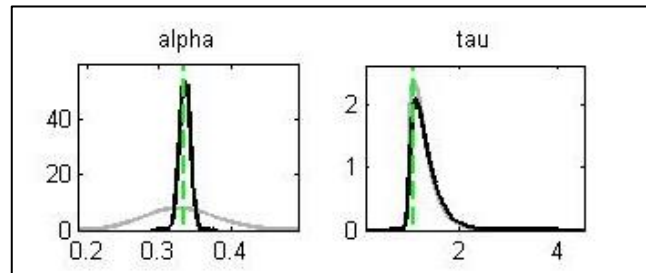


Abbildung 3: Vergleich Posteriori Priori bei unelastischem Arbeitsangebot

Das Gegenteil ist sogar der Fall, da der Metropolis-Hastings Algorithmus dafür sorgen soll, dass zumindest in der Nähe des Modus die Posteriori-Verteilung die wahre Verteilung approximativ darstellen kann. Dies bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeitsmasse durch die Berücksichtigung von Daten um den Modus herum verdichten sollte (wie bei α). In der Darstellung verringert sich jedoch die Wahrscheinlichkeitsmasse im direkten Umfeld des Modus. Dies ist gleichbedeutend mit einer höheren Wahrscheinlichkeit für Randwerte.

Somit ist festzuhalten, dass man für α (im Gegensatz zu τ) unabhängig von der Modellspezifikation und unter Berücksichtigung der Verteilungsannahme (Beta-Verteilung) gute Schätzergebnisse erhält. Im nächsten Teil E ist daher zu überprüfen, inwiefern sich die Schätzergebnisse für echte Daten  ndern³².

31 Anm.: Die Modus-Check-Grafik ist dem Anhang (Anhang VII, S. 39) zu entnehmen.

32 Anm.: Für Unterschied/Besonderheit simulierte vs. echte Daten siehe Teil A, S. 1.

E Bayes-Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen ausgewählter Modellparameter unter Verwendung unterschiedlicher Modellrahmenbedingungen und mit echten Daten

Für die folgenden Modellergebnisse wurden die preis-, saison- sowie kalenderbereinigten Quartalsdaten des Bruttoinlandsprodukts in Deutschland verwendet³³. Dies liegt darin begründet, dass die Modellannahmen auf einem repräsentativen HH sowie Unternehmen beruhen. Daher sollte auch eine gesamtwirtschaftlich repräsentative Größe verwendet werden. In die Berechnung des realen BIP gehen zwar (von der Verwendungsseite betrachtet) auch der Außenhandel sowie die Staatsausgaben ein, da das vorliegende Modell jedoch von einer offenen Volkswirtschaft sowie Staatsaktivitäten abstrahiert, vereinfacht sich die Berechnungsformel des BIP (Verwendungsseite) zu Gleichung (8) ($y_t = c_t + i_t$). Somit entspricht das BIP der konsumtiven sowie investiven Güternachfrage. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Untersuchungen können für die Kalkulationen lediglich 93 Beobachtungen (hier: Wachstumsraten ggü. dem Vorquartal) berücksichtigt werden, da die Daten für Gesamtdeutschland erst seit dem ersten Quartal 1991 vorliegen. Für Bayes-Schätzungen hat dieser geringe(re) Stichprobenumfang jedoch im Vergleich zur ML-Methode beispielsweise keine Auswirkungen auf die Ergebnisse³⁴.

Aufgrund der gleichen Vorgehensweise sowie Modellrahmenbedingungen wie in Teil D (mit Ausnahme der Daten) sollen hier nur kurz die Modellergebnisse vorgestellt werden sowie die damit verbundenen Unterschiede zu den Resultaten mit den simulierten Daten aufgezeigt werden. Aus diesem Grund wird der Vergleich wie zuvor anhand der Posteriori/Priori-Grafik durchgeführt. Die folgenden Abbildungen zeigen den Vergleich in der gleichen Reihenfolge wie sie in Teil D bearbeitet wurden, d.h. Abbildung 4 zeigt den Fall für die CD-Produktionsfunktion (MOD-Datei „CD_echte_Daten“), Abb. 5 bei einer unter-

33 Anm.: Siehe Excel-/Matlab-Dateien „Bruttoinlandsprodukt_Daten“ bzw. „Bruttoinlandsprodukt_Daten_Input“.

34 Vgl. o.V., Bayesian 2014.

stellten additiv separablen Nutzenfunktion (MOD-Datei „Adsep_U_echte_Daten“) und Abb. 6 bei unelastischer Arbeitsangebotselastizität (MOD-Datei „unAr_echte_Daten“).

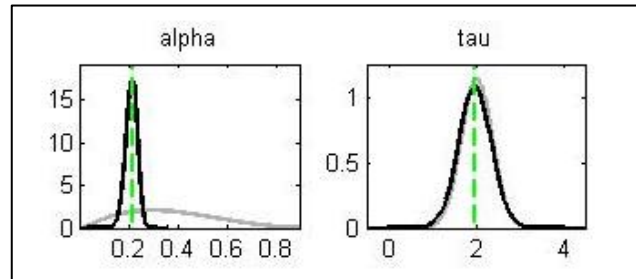


Abbildung 4: Vgl. Posteriori Priori bei CD-Produktionsfkt. und echten Daten

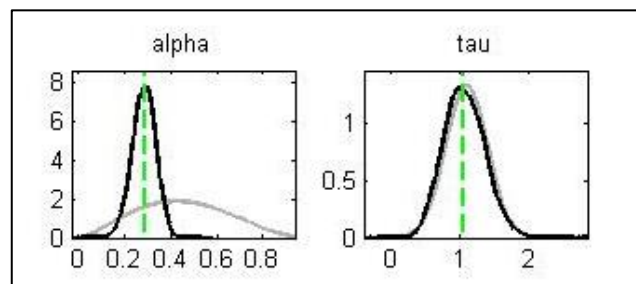


Abbildung 5: Vgl. Posteriori Priori bei additiv separabler Nutzenfkt. und echten Daten

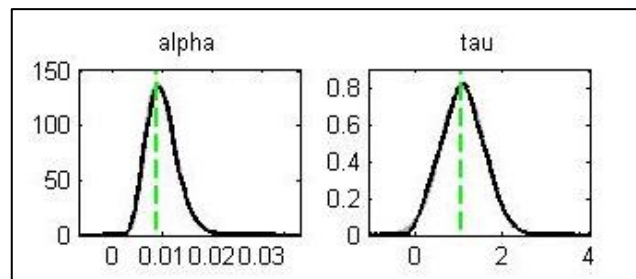


Abbildung 6: Vgl. Posteriori Priori bei unelastischem Arbeitsangebot und echten Daten

Allein bei Betrachtung der obigen Grafiken wird bereits deutlich, dass sich die Ergebnisse von denen aus Teil D deutlich unterscheiden. Auf den ersten Blick erscheinen sich die Erkenntnisse für α und τ bei der CD-Produktionsfunktion mit denen aus Kapitel D.I zu decken, da für τ die Posteriori- mit der Priori-Verteilung übereinstimmt und sich die Wahrscheinlichkeitsmasse bei α stärker um den Modus sammelt. Im Gegensatz zu Kapitel D.I konzentriert sich die Wahrscheinlichkeitsmasse für α jedoch nicht um einen Wert nahe 0,36 (wie in beiden Fällen von der Priori angenommen), sondern um den Wert 0,2048. Unter der Annahme, dass das vorgestellte Modell der realen Ökonomie in Deutschland entspricht, würde dies bedeuten, dass der Inputfaktor Kapital –

gemessen an der Produktionselastizität – unproduktiver ist als angenommen. Einschränkend ist jedoch anzuführen, dass für den zweiten Parameter der unterstellten Beta-Verteilung der Priori ein im Verhältnis zum Modus sehr hoher Wert von 0.18 anstelle von zuvor 0.03 angenommen wurde (führt über die Varianz-Formel der Beta-Verteilung zu einer erhöhten Streuung).

Für die additiv separable Nutzenfunktion ergeben sich die Posteriori-Modi 0.2830 für α bzw. 1.0660 für τ ³⁵. Da die Posteriori der Priori für τ wiederum sehr ähnelt, kann jedoch nicht der Entschluss gefasst werden, dass die echten Daten die empirischen Resultate eines Wertes von τ nahe eins bestätigen.

Das Ergebnis des Modells mit unelastischem Arbeitsangebot wird hier lediglich aus Vollständigkeitsgründen mit aufgeführt, da dieses nur bei einem (sehr unrealistischen) Wert von 0.01 für den ersten Parameterwert der Priori von α halbwegs gute Modus-Check-Plots (zumindest für die log-Posteriori) liefert.

Somit ist insgesamt festzuhalten, dass die Berücksichtigung der echten Daten wie im Fall mit simulierten Daten für α tendenziell bessere Schätzergebnisse als für τ liefert. Da die obigen Modelle (v.a. für τ) unterschiedliche Ergebnismerte aufweisen, ist im nächsten Teil F zu überprüfen, welches Modell für die Daten am geeignetsten ist. Aus dem in der Einleitung angeführten Grund ist diese Untersuchung nur für die echten Daten durchzuführen.

35 Anm.: Die Varianz-Formel mit obigem Beispiel sowie die Modus-Check-Plots befinden sich im Anhang (Anhang VIII, S. 40).

F Bestimmung und Beurteilung der Schätzergebnisse der einzelnen Modelle im Vergleich anhand einer ausgewählten Kennzahl

Der Modellvergleich soll anhand der sogenannten Posterior-Odds erfolgen. Diese Kennzahl geht von derselben (Bayes-)Idee aus, welche bereits der Schätzung der Posteriori zugrunde gelegt wurde. Denn in die Berechnung der Posterior-Odds gehen sowohl Vorwissen/Vermutungen als auch die Ergebnisse, welche auf Grundlage der Daten ermittelt worden sind, ein. Dies soll anhand der folgenden Definition der Posteriori-Odds(PO) noch weiter ausgeführt werden³⁶:

$$PO_{12} = \frac{P(M_1|d)}{P(M_2|d)} = \frac{p_1}{p_2} \frac{m_1(d)}{m_2(d)} \quad (23)$$

$P(M_k|d)$ mit $k \in [1,2]$, gibt hierbei die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Modell k für die vorliegenden Daten d das wahre Modell ist. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich wiederum in die Komponenten p_k sowie $m_k(d)$ zerlegen. p_k , die Priori-Wahrscheinlichkeit, gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher der Untersuchende selbst meint, dass das Modell k das „beste“ für die vorliegenden Daten ist. Der Quotient $\frac{p_1}{p_2}$, die Priori-Odds, gibt somit das Verhältnis dieser beiden Wahrscheinlichkeiten an. Durch einen hohen Quotienten, z.B. $\frac{0.9}{0.1}$, könnte der Untersuchende seine Präferenzen offenlegen (hier für Modell 1) bzw. hierdurch die Kennzahl zu seinen Gunsten manipulieren. Die Berechnung von $m_k(d)$, der marginalen Likelihood, ist bereits aus Teil C, Gleichung (15) bekannt (hier für Modell k):

$$m_k(d) = \int \mathcal{L}_k(d|\mu_k, M_k) \wp_k(\mu_k|M_k) d\mu_k \quad (24)$$

Der in Teil C lediglich als Normierungsfaktor bezeichnete Term gibt hierbei den erwarteten Wert der Likelihood bei gegebener Priori-Verteilung (sowie Modell k und Daten d) an. Dies bedeutet, dass die Posteriori (hier $\mathcal{L}_k(d|\mu_k, M_k)\wp_k(\mu_k|M_k)$) über alle möglichen Parameterwerte der Priori berechnet wird³⁷. Somit hat die Priori einen großen Einfluss auf das Ergebnis. Da die Integration im mehrparametrischen Fall schwierig zu berechnen ist, wird

³⁶ Vgl. Lynch, S.M., Social 2007, S. 159-161. sowie Vgl. Congdon, P.D., Hierarchical 2010, S. 43-46. Anm.: Diese Quellen wurden auch für die weiteren Ausführungen zu den PO verwendet. Die Notation orientiert sich hingegen an die in der Vorlesung verwendete.

³⁷ Anm.: Die Unsicherheit bzgl. des Parameterwertes wird somit „herausintegriert“.

auf Approximationsverfahren zurückgegriffen. Der Matlab-Output zeigt die Ergebnisse der Modified Harmonic Mean sowie der Laplace-Approximation. Im Folgenden wurden die Resultate des Laplace-Verfahrens verwendet, da bei der Modified Harmonic Mean Randwerten ein zu starkes Gewicht für die Schätzung zugerechnet wird³⁸.

Der Modellvergleich erfolgt lediglich für die Modelle mit der CD-Produktionsfunktion sowie der additiv separablen Nutzenfunktion, da die Daten – wie an dem Modus-Check-Plot sowie im obigen Vergleich Posteriori Priori (Abb. 6, S. 20) zu sehen ist - im Modell des unelastischen Arbeitsangebotes keine Informationen für die Schätzung der ausgewählten Modellparameter liefern und dieses Modell daher nicht das „beste“ für die Daten sein kann.

Damit das Vorwissen durch ihr doppeltes Auftreten in der obigen Formel (23) (Priori-Wahrscheinlichkeit und Priori) nicht zu große Bedeutung für das Ergebnis aufweist, wird für die Priori-Odds i.d.R. ein Wert von 1 angenommen. Somit hängt das Ergebnis der PO lediglich von den (logarithmierten) Werten der marginalen Likelihood ab. Unter der Annahme, dass das Modell der CD-Produktionsfunktion Modell 1 darstellt, ergibt sich der folgende PO-Wert:

$$PO_{12} = \frac{m_1(d)}{m_2(d)} = \frac{-125.4083}{-124.3505} \approx 1.0085^{39}.$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Daten aus dem Modell mit CD-Produktionsfunktion hervorgegangen sind, um den Faktor 1.0085 höher als unter Verwendung des Modells mit additiv separabler Nutzenfunktion. Dieser Wert besagt jedoch nicht, dass das Modell mit der modifizierten Produktionsfunktion das wahre Modell ist. Die Kennzahl gibt lediglich an, welches von zwei Modellen für die Daten sowie die ausgewählten Priori-Verteilungen das wahrscheinlichere ist.

Bei Betrachtung der PO-Evidenz-Tabelle nach Kass/Raftery wird deutlich, dass der niedrige Wert von 1.0085 eine geringe bis keine Begründung für ein Modell ist⁴⁰. Somit ist festzuhalten, dass aus rein statistischen Gründen keines der beiden Modelle dem anderen / der Modelle den anderen zu bevorzugen ist.

38 Vgl. o.V., Inference 2014.

39 Anm.: Für das Modell mit unelastischem Arbeitsangebot ergibt sich der Wert (-124.5201).

40 Vgl. Kass, R.E. et al., Factors 1995, S. 777.

Aufgrund der angenehmen Eigenschaften sowie der damit verbundenen leichten Interpretierbarkeit von Ergebnissen der CD-Produktionsfunktion (siehe Kapitel D.I, S. 11) ist diese Modellvariante meiner Meinung nach den anderen vorzuziehen. Im Gegensatz zur additiv separablen Nutzenfunktion verhindert die multiplikative Verbindung der Konsum- und Freizeitentscheidungen (Gleichung (2)), dass der HH seinen Nutzen durch eine einseitige Präferenz für Konsum oder Freizeit maximieren kann⁴¹. Die Verwendung einer additiv separablen Nutzenfunktion bietet zwar den Vorteil einer einfachen mathematischen Berechnung, würde jedoch zu einem unrealistischen Verhalten des Haushalts führen, da der HH bei seinen Grenzentscheidungen für ein Gut (Konsum oder Freizeit) nicht berücksichtigt, wie viel Einheiten er vom jeweils anderen Gut bereits besitzt (siehe Kapitel D.II, S. 15 (Ableitungen)), obwohl er nur Nutzen aus diesen beiden Gütern zieht. Im Vergleich dazu ist die in der dritten Modellversion unterstellte Annahme eines unelastischen Arbeitsangebotes z.B. aufgrund von Kündigungsklauseln in der kurzen Frist zwar realistisch, jedoch führt diese Variante zu den bereits angesprochenen Schätzproblemen. Daher ist meines Erachtens die Modellversion mit CD-Produktionsfunktion auszuwählen.

41 Anm.: Der Extremfall einer „Konsumverweigerung“ wurde bereits in Kapitel D.II, S. 14, erläutert.

G Zusammenfassung und Ausblick

Ausgehend von den beschriebenen Modellrahmenbedingungen wurde in dieser Arbeit ersichtlich, dass sich unabhängig von der Modell- sowie Datenwahl die Schätzergebnisse durch Hinzunahme der Daten für α systematisch verändert haben, während diese für τ keinen Informationsgewinn gegenüber der Priori lieferten⁴². Somit ist das in der Einleitung beschriebene Ziel einer möglichst genauen Schätzung der Modellparameter zumindest für α in den verschiedenen Modellen erreicht worden⁴³. Im Gegensatz dazu konnte keines der drei Modelle hervorgehoben werden, welches die echten Daten aus statistischer Sicht am besten abbildet.

Bei der Interpretation von Ergebnissen von RBC-Modellen ist stets zu berücksichtigen, dass die Modellgleichungen lediglich ein abstraktes Abbild der realen Ökonomie darstellen. Daher sind die ermittelten Resultate, wie z.B. die Produktivitätsmöglichkeiten des Faktors Kapital bei der CD-Produktionsfunktion (siehe Teil E, S. 20f.), auf die Realität nicht übertragbar (auch unter Hinzunahme eines Staates sowie des Außenhandels nicht). Nichtsdestotrotz können die Ergebnisse eines solchen Modells verwendet werden. Neben dem hier vorgestellten Modellvergleich können Wahrscheinlichkeitsaussagen über zukünftige Beobachtungen mithilfe der Posteriori (sowie der vorhandenen Daten) getroffen werden, indem die Datengenerierung nicht mehr anhand des Parameterraumes der Priori erfolgt, sondern anhand der Posteriori-Verteilung⁴⁴.

42 Anm.: Zur Vereinfachung werden hier nicht die Ausnahmen separat aufgeführt, in welchen α bzw. τ von obigen Resultaten abweichen.

43 Anm.: Der Begriff „möglichst genaue Schätzung“ soll lediglich bedeuten, dass sich die Wahrscheinlichkeitsmasse der Posteriori stärker um den Modus sammelt als bei der Priori.

44 Vgl. Lynch, S.M., Social 2007, S. 155.

Anhang

Anhang I

Herleitung der allgemeinen Nebenbedingung

Nebenbedingungen:

- $k_t = i_t + (1 - \delta)k_{t-1} \quad (3)$

- $y_t = A_t f(k_{t-1}, l_t) \quad (4)$

- $y_t = c_t + i_t \quad (8)$

Aufstellen der Nebenbedingung aus den obigen Nebenbedingungen:

- (3) nach i_t umstellen liefert $i_t = k_t - (1 - \delta)k_{t-1} \quad (3a)$
- Einsetzen von (3a) und (4) in (8) und Umstellen der Gleichung nach null liefert die Nebenbedingung für den Haushalt:

$$c_t + k_t - A_t f(k_{t-1}, l_t) - (1 - \delta)k_{t-1} = 0$$

Anhang II

Herleitung der Steady-States bei Cobb-Douglas- Produktionsfunktion

Euler-Gleichung (Gleichung (13)):

$$\begin{aligned} u_c(c_t, l_t) &= \beta E_t u_c(c_{t+1}, l_{t+1}) [A_{t+1} f_k(k_t, l_{t+1}) + 1 - \delta] \\ (c_t^\theta (1 - l_t)^{1-\theta})^{1-\tau} \frac{\theta}{c_t} &= \beta E_t (c_{t+1}^\theta (1 - l_{t+1})^{1-\theta})^{1-\tau} \frac{\theta}{c_{t+1}} \left[A_{t+1} \alpha \frac{f_{t+1}}{k_t} + 1 - \delta \right] \\ \Leftrightarrow (c_t^\theta (1 - l_t)^{1-\theta})^{1-\tau} \frac{1}{c_t} &= \beta E_t (c_{t+1}^\theta (1 - l_{t+1})^{1-\theta})^{1-\tau} \frac{1}{c_{t+1}} \left[A_{t+1} \alpha \frac{y_{t+1}}{A_{t+1} k_t} + \right. \\ &\quad \left. 1 - \delta \right] \\ \Leftrightarrow (c_t^\theta (1 - l_t)^{1-\theta})^{1-\tau} \frac{1}{c_t} &= \beta E_t (c_{t+1}^\theta (1 - l_{t+1})^{1-\theta})^{1-\tau} \frac{1}{c_{t+1}} \left[\alpha \frac{y_{t+1}}{k_t} + 1 - \delta \right] \end{aligned}$$

Konsum-Freizeit-Entscheidung (Gleichung (14)):

$$\begin{aligned} -\frac{u_l(c_t, l_t)}{u_c(c_t, l_t)} &= A_t f_l(k_{t-1}, l_t) \\ -\frac{-\frac{1-\theta}{1-l_t} (c_t^\theta (1-l_t)^{1-\theta})^{1-\tau}}{(c_t^\theta (1-l_t)^{1-\theta})^{1-\tau} \frac{\theta}{c_t}} &= A_t (1 - \alpha) \frac{f_t}{l_t} \\ \Leftrightarrow \frac{1-\theta}{\theta} \frac{c_t}{1-l_t} &= A_t (1 - \alpha) \frac{1}{l_t} \frac{y_t}{A_t} \\ \Leftrightarrow \frac{1-\theta}{\theta} \frac{c_t}{1-l_t} &= (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t} \end{aligned}$$

Ressourcenbeschränkung (Gleichung (9)):

$$\begin{aligned} c_t + k_t - A_t f(k_{t-1}, l_t) - (1 - \delta) k_{t-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow y_t &= c_t + k_t - (1 - \delta) k_{t-1} \end{aligned}$$

Stochastischer Prozess (Gleichungen (5) und (6)):

$$A_t = A e^{a_t} \quad a_t = \rho a_{t-1} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_t \quad \text{mit} \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

Ermittlung der Steady-States:

$$1. \quad a = \rho a + 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

$$\Rightarrow A = A_{SS}e^0 \Leftrightarrow A = A_{SS}$$

2. Euler-Gleichung:

$$\frac{(c^\theta(1-l)^{1-\theta})^{1-\tau}}{c} = \frac{\beta(c^\theta(1-l)^{1-\theta})^{1-\tau}}{c} \left(\alpha \left(\frac{y}{k} \right) + 1 - \delta \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \alpha \left(\frac{y}{k} \right) + 1 - \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{k} = \frac{\beta^{-1} + \delta - 1}{\alpha}$$

3. Ressourcenbeschränkung:

$$y = c + k - (1 - \delta)k$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{k} = \frac{y}{k} - \delta$$

4. Definition der Produktionsfunktion:

$$y = A_{SS}k^\alpha l^{1-\alpha} = Ak^\alpha l^{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{k} = Ak^{\alpha-1}l^{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y/k}{A} = \left(\frac{l}{k} \right)^{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{l}{k} = \left(\frac{y/k}{A} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

5. Identität:

$$\frac{y}{l} = \frac{y/k}{l/k} \quad \frac{c}{l} = \frac{c/k}{l/k}$$

6. Konsum-Freizeit-Entscheidung:

$$\frac{1-\theta}{\theta} \frac{c}{1-l} = (1-\alpha) \frac{y}{l}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{l} \right) l = (1-l)(1-\alpha) \frac{\theta}{1-\theta} \left(\frac{y}{l} \right)$$

$$\Leftrightarrow l = (1-l)(1-\alpha) \frac{\theta}{1-\theta} \left(\frac{y}{l} \right) \left(\frac{c}{l} \right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow l \left(1 + (1-\alpha) \frac{\theta}{1-\theta} \left(\frac{y}{l} \right) \left(\frac{c}{l} \right)^{-1} \right) = (1-\alpha) \frac{\theta}{1-\theta} \left(\frac{y}{l} \right) \left(\frac{c}{l} \right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow l = \left\{ \frac{1 + (1-\alpha) \frac{\theta}{1-\theta} \left(\frac{y}{l} \right) \left(\frac{c}{l} \right)^{-1}}{(1-\alpha) \frac{\theta}{1-\theta} \left(\frac{y}{l} \right) \left(\frac{c}{l} \right)^{-1}} \right\}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad l = \left\{ 1 + \frac{c/l}{(1-\alpha)\frac{\theta}{1-\theta}(\frac{y}{l})} \right\}^{-1}$$

7. Identität:

$$c = \frac{c}{l} l \quad k = \frac{l}{l/k} \Rightarrow y = \frac{y}{k} k$$

8. Investitionen:

$$i = k - (1 - \delta)k = \delta k$$

Anhang III

Grafiken Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Modus-Check-Grafik (siehe CD „Cobb_Douglas_Modus_check“):

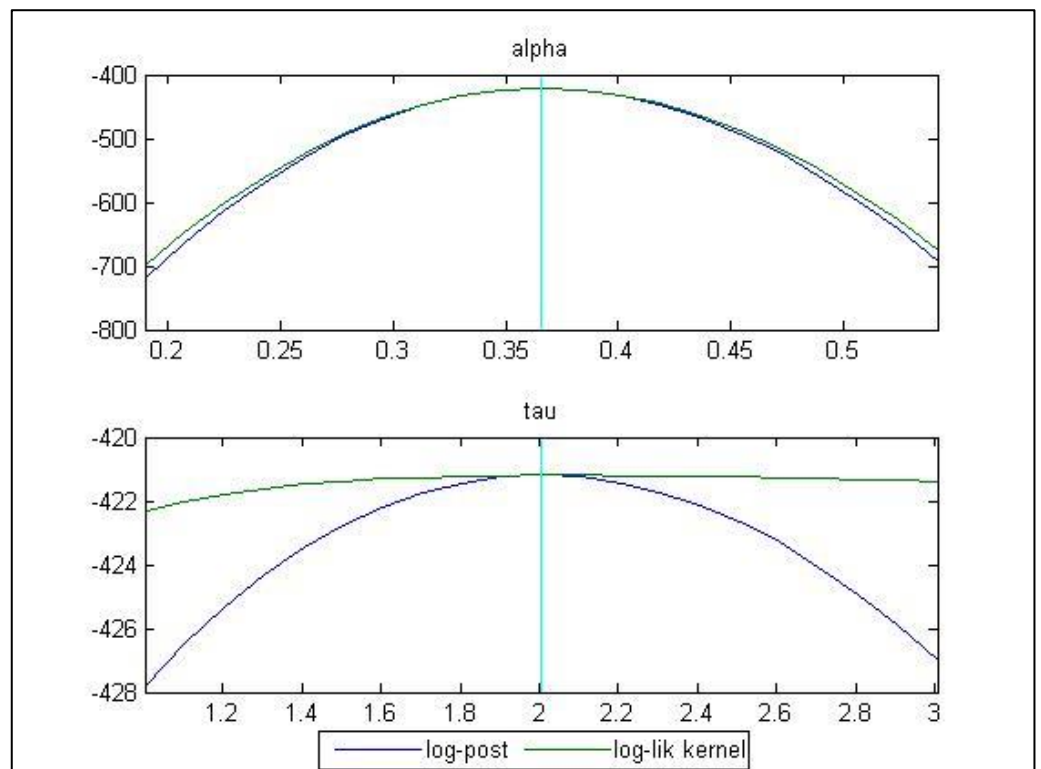


Abbildung 7: Modus-Check Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Auf diese Grafik wurde im Text zwar Bezug genommen, jedoch unterblieb die Darstellung im fließenden Text, da diese für das eigentliche Ziel der Arbeit nur bedingt relevant ist (gesucht ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, nicht nur ein einziger Wert (der Modus)).

Konvergenzgrafiken:

Univariat:

„Interval“ betrachtet die Intervallstatistik um den Durchschnittswert des Parameters, „m2“ die Varianz und „m3“ die dritten Momente (i.d.R. Schiefe) des jeweiligen Parameters.

Multivariat:

Multivariates Maß, welches auf den Eigenwerten der Varianz-Kovarianz-Matrix basiert⁴⁵.

Die zugehörigen Grafiken befinden sich auf der CD („Cobb_Douglas_Konvergenz_univariat“ und „Cobb_Douglas_Konvergenz_multivariat“, jeweils als Bild im JPEG-Format sowie im Matlab-Figure-Format), da diese nur im kleinen Format hier darstellbar wären und die geringen Unterschiede zwischen der roten und blauen Linie so nicht erkennbar wären.

⁴⁵ Vgl. Kriwoluzky, A., Dynare 2009, S. 9.

Anhang IV

Herleitung der Steady-States sowie Beschreibung des Vorgehens zur Kalibrierung bei additiv separabler Nutzenfunktion

Herleitung der Steady-States (siehe Anhang II):

Umschreibung der Grenznutzen sowie Grenzproduktivitäten:

$$\text{Gleichung (7): } f(k_{t-1}, l_t) = [\alpha k_{t-1}^\psi + (1 - \alpha) l_t^\psi]^{\frac{1}{\psi}} = f_t.$$

$$\begin{aligned} f_l(k_{t-1}, l_t) &= \frac{1}{\psi} (\alpha k_{t-1}^\psi + (1 - \alpha) l_t^\psi)^{\frac{1}{\psi}-1} (1 - \alpha) \psi l_t^{\psi-1} \\ &= (1 - \alpha) (\alpha k_{t-1}^\psi + (1 - \alpha) l_t^\psi)^{\frac{1-\psi}{\psi}} l_t^{\psi-1} = (1 - \alpha) f_t^{1-\psi} l_t^{\psi-1} \\ &= (1 - \alpha) \left(\frac{f_t}{l_t} \right)^{1-\psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k(k_{t-1}, l_t) &= \frac{1}{\psi} (\alpha k_{t-1}^\psi + (1 - \alpha) l_t^\psi)^{\frac{1}{\psi}-1} \alpha \psi k_{t-1}^{\psi-1} \\ &= \alpha (\alpha k_{t-1}^\psi + (1 - \alpha) l_t^\psi)^{\frac{1-\psi}{\psi}} k_{t-1}^{\psi-1} = \alpha f_t^{1-\psi} k_{t-1}^{\psi-1} \\ &= \alpha \left(\frac{f_t}{k_{t-1}} \right)^{1-\psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_k(k_t, l_{t+1}) &= \frac{1}{\psi} (\alpha k_t^\psi + (1 - \alpha) l_{t+1}^\psi)^{\frac{1}{\psi}-1} \alpha \psi k_t^{\psi-1} \\ &= \alpha (\alpha k_t^\psi + (1 - \alpha) l_{t+1}^\psi)^{\frac{1-\psi}{\psi}} k_t^{\psi-1} = \alpha f_{t+1}^{1-\psi} k_t^{\psi-1} \\ &= \alpha \left(\frac{f_{t+1}}{k_t} \right)^{1-\psi} \end{aligned}$$

Euler-Gleichung (für die einzelnen Schritte siehe Anhang II, S. 27 (gleiches Vorgehen)):

$$u_c(c_t, l_t) = \beta E_t u_c(c_{t+1}, l_{t+1}) [A_{t+1} f_k(k_t, l_{t+1}) + 1 - \delta]$$

$$c_t^{-\tau} = \beta E_t c_{t+1}^{-\tau} (A_{t+1}^\psi \alpha \left(\frac{y_{t+1}}{k_t} \right)^{1-\psi} + 1 - \delta)$$

Konsum-Freizeit:

$$-\frac{u_l(c_t, l_t)}{u_c(c_t, l_t)} = A_t f_l(k_{t-1}, l_t)$$

$$\frac{\theta c_t^\tau}{(1-l_t)^\tau} = A_t^\psi (1-\alpha) \left(\frac{y_t}{l_t}\right)^{1-\psi}$$

Ressourcenbeschränkung:

$$c_t + k_t - A_t f(k_{t-1}, l_t) - (1-\delta)k_{t-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow y_t = c_t + k_t - (1-\delta)k_{t-1}$$

Ermittlung der Steady-States:

$$1. \quad a = \rho a + 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

$$\Rightarrow A = A_{SS} e^0 \quad \Leftrightarrow \quad A = A_{SS}$$

2. Euler-Gleichung:

$$\frac{1}{\beta} = A^\psi \alpha \left(\frac{y}{k}\right)^{1-\psi} + 1 - \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{k} = \left\{ \frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha A^\psi} \right\}^{\frac{1}{1-\psi}}$$

3. Ressourcenbeschränkung:

$$y = c + k - (1-\delta)k$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{k} = \frac{y}{k} - \delta$$

4. Definition der Produktionsfunktion:

$$y = A f(k, l)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{k} = A \frac{f(k, l)}{k} = A \left(\alpha + (1-\alpha) \left(\frac{l}{k}\right)^\psi \right)^{\frac{1}{\psi}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{l}{k} = \left\{ \left(\left(\frac{y}{k}\right)^\psi - \alpha \right) (1-\alpha)^{-1} \right\}^{\frac{1}{\psi}}$$

5. Identität:

$$\frac{y}{l} = \frac{y/k}{l/k} \quad \frac{c}{l} = \frac{c/k}{l/k}$$

6. Konsum-Freizeit-Entscheidung:

$$\begin{aligned}\frac{\theta c^\tau}{(1-l)^\tau} &= A^\psi (1-\alpha) \left(\frac{y}{l}\right)^{1-\psi} \\ \Leftrightarrow c^\tau &= (1-l)^\tau \frac{1}{\theta} A^\psi (1-\alpha) \left(\frac{y}{l}\right)^{1-\psi} \\ \Leftrightarrow (1-l)^\tau &= \frac{\theta c^\tau}{(1-\alpha)A^\psi} \left(\frac{y}{l}\right)^{\psi-1} \\ \Leftrightarrow 1-l &= c \left\{ \frac{\theta}{(1-\alpha)A^\psi} \left(\frac{y}{l}\right)^{\psi-1} \right\}^{1/\tau} \\ \Leftrightarrow l &= 1 - c \left\{ \frac{\theta}{(1-\alpha)A^\psi} \left(\frac{y}{l}\right)^{\psi-1} \right\}^{1/\tau} \\ \Leftrightarrow \frac{l}{c} &= \frac{1}{c} - \left\{ \frac{\theta}{(1-\alpha)A^\psi} \left(\frac{y}{l}\right)^{\psi-1} \right\}^{1/\tau} \\ \Leftrightarrow c &= \left\{ \left(\frac{c}{l}\right)^{-1} + \left(\frac{\theta}{(1-\alpha)A^\psi} \left(\frac{y}{l}\right)^{\psi-1} \right)^{1/\tau} \right\}^{-1}\end{aligned}$$

7. Identität:

$$\begin{aligned}l &= \left(\frac{c}{l}\right)^{-1} c & k &= \frac{l}{l/k} \\ y &= \frac{y}{k} k & i &= \delta k\end{aligned}$$

Beschreibung des Verfahrens zur Kalibrierung von θ :

Herleitung der Formel für θ durch obige Identitätsformel sowie der Formel für c (Konsum-Freizeit):

$$\begin{aligned}l &= \left(\frac{c}{l}\right)^{-1} c = \left(\frac{c}{l}\right)^{-1} \left\{ \left(\frac{c}{l}\right)^{-1} + \left(\frac{\theta}{(1-\alpha)A^\psi} \left(\frac{y}{l}\right)^{\psi-1} \right)^{1/\tau} \right\}^{-1} \\ \Leftrightarrow l &\left\{ \left(\frac{c}{l}\right)^{-1} + \left(\frac{\theta}{(1-\alpha)A^\psi} \left(\frac{y}{l}\right)^{\psi-1} \right)^{1/\tau} \right\} = \left(\frac{c}{l}\right)^{-1} \\ \Leftrightarrow \theta &= \left\{ \left(\frac{c}{l}\right)^{-1} \frac{1}{l} - \left(\frac{c}{l}\right)^{-1} \right\}^\tau (1-\alpha)A^\psi \left(\frac{y}{l}\right)^{1-\psi}\end{aligned}$$

\Rightarrow Berechnung der einzelnen Bestandteile der Gleichung notwendig

$$\Rightarrow \frac{c}{l} = \frac{c/k}{l/k}$$

$$\text{mit } \frac{c}{k} = \frac{y}{k} - \delta = \left\{ \frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha A^\psi} \right\}^{\frac{1}{1-\psi}} - \delta$$

$$\text{und } \frac{l}{k} = \left\{ \left(\left(\frac{y/k}{A} \right)^\psi - \alpha \right) (1 - \alpha)^{-1} \right\}^{\frac{1}{\psi}}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{l} = \frac{y/k}{l/k}$$

$$\Rightarrow l = \frac{1}{3} \text{ und } \tau = 1.10 \text{ per Annahme}$$

Die Berechnung ist dem Excel-File „Kalibrierung_theta“ zu entnehmen.

Anhang V

Grafiken additiv separable Nutzenfunktion

Modus-Check-Grafik („Additiv_sep_U_Modus_check“):

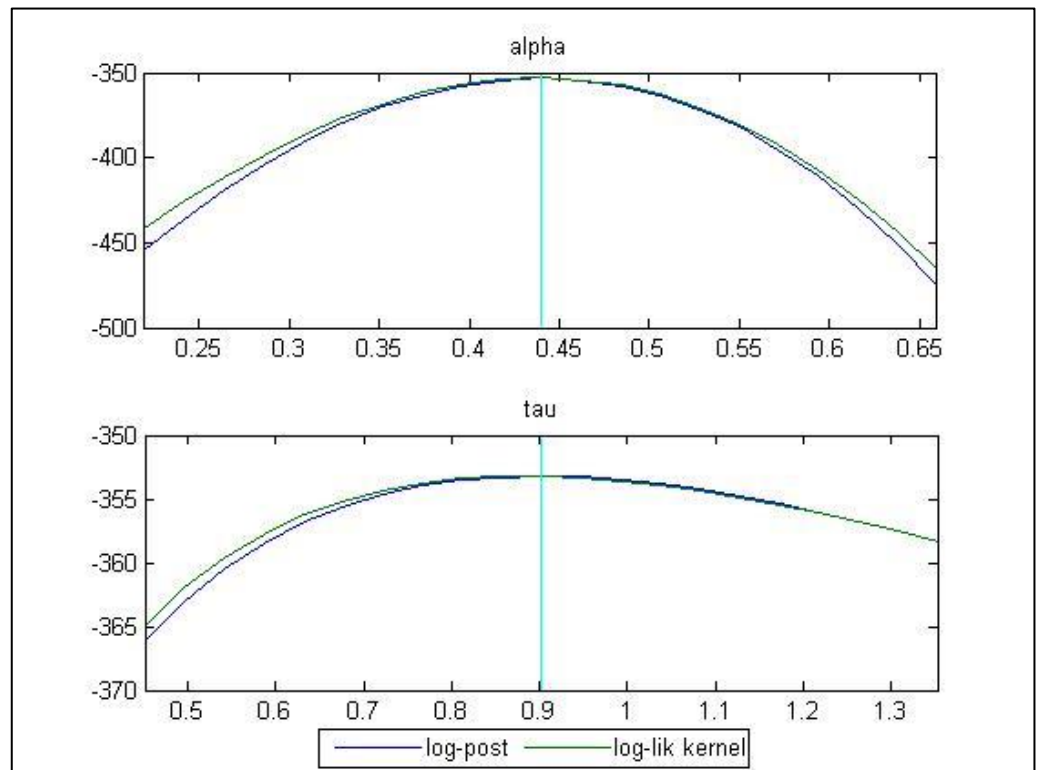


Abbildung 8: Modus-Check additiv separable Nutzenfunktion

Die zugehörigen Konvergenzgrafiken befinden sich auf der CD („Additiv_sep_U_Konvergenz_univariat“ sowie „Additiv_sep_U_Konvergenz_multivariat“ (wiederum jeweils als Bild im JPEG-Format sowie im Matlab-Figure-Format für 25000 Replikationen (Akzeptanzwahrscheinlichkeit 26.90-27.40%))).

Anhang VI

Herleitung der Optimalitätsbedingung und der Steady-States bei unelastischem Arbeitsangebot

Herleitung der Optimalitätsbedingung (siehe auch Kapitel B.II):

$$\mathcal{L} = E_0 \{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) - \beta^t \lambda_t (c_t + k_t - A_t f(k_{t-1}) - (1 - \delta)k_{t-1}) \}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = E_t \{ \beta^t u_c(c_t) - \beta^t \lambda_t \} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_t = u_c(c_t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = E_t(-1)\lambda_t \beta^t + E_t \lambda_{t+1} \beta^{t+1} (1 - \delta) + E_t \lambda_{t+1} \beta^{t+1} A_{t+1} f_k(k_t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_t = E_t \lambda_{t+1} \beta (1 - \delta + A_{t+1} f_k(k_t))$$

Gleichsetzen der beiden obigen Gleichungen liefert die Optimalitätsbedingung (Gleichung (22)):

$$u_c(c_t) - \beta E_t u_c(c_{t+1}) [A_{t+1} f_k(k_t) + 1 - \delta] = 0 \quad (22)$$

Herleitung der Steady-States (siehe Anhang II):

1. $A = A_{SS}$

2. Euler-Gleichung (Gleichung (22)):

$$u_c(c_t) = \beta E_t u_c(c_{t+1}) [A_{t+1} f_k(k_t) + 1 - \delta]$$

$$c^{-\tau} = \beta c^{-\tau} \left[A \alpha \frac{y}{A k} + 1 - \delta \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \alpha \left(\frac{y}{k} \right) + 1 - \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{k} = \frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha}$$

3. Output (mit Gleichung (20)):

$$y = A f_{t..} = A k^\alpha$$

$$\Leftrightarrow k = \left(\frac{y}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

4. k einsetzen in $\frac{y}{k}$:

$$\frac{y}{\left(\frac{y}{A}\right)^{1/\alpha}} = \frac{\beta^{-1}-1+\delta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow y = \left\{ \frac{\beta^{-1}-1+\delta}{\alpha A^{1/\alpha}} \right\}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

$$\Rightarrow k = \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow i = \delta k$$

5. Budgetrestriktion:

$$y = c + k - (1 - \delta)k$$

$$\Leftrightarrow c = y - \delta k$$

Anhang VII

Grafiken unelastisches Arbeitsangebot

Modus-Check-Grafik (“unel_Arbeit_Modus_check”):

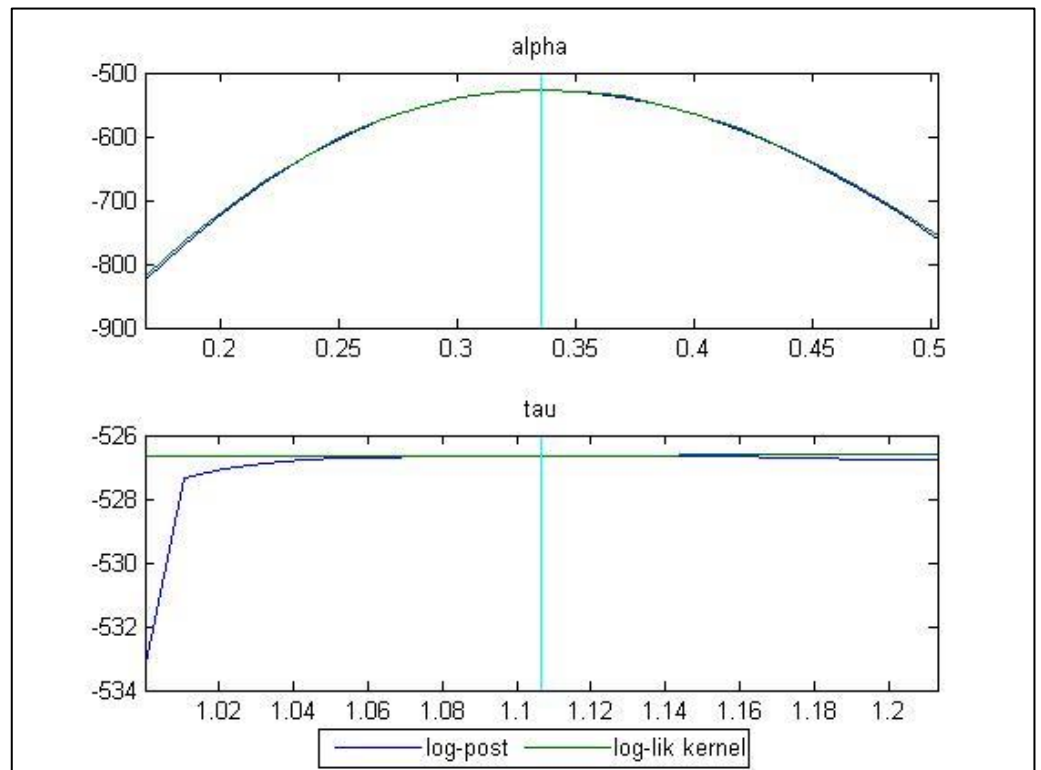


Abbildung 9: Modus-Check unelastisches Arbeitsangebot

Für τ wurden auch andere Werte ($\in(1.5,3)$) ausprobiert. Diese wiesen jedoch ebenfalls eine flache log-lik kernel aus, sodass weiterhin ein Wert von 1.10 verwendet wurde.

Die zugehörigen Konvergenzgrafiken befinden sich auf der CD (“unel_Arbeit_Konvergenz_univariat” sowie “unel_Arbeit_Konvergenz_multivariat” (wiederum jeweils als Bild im JPEG-Format sowie im Matlab-Figure-Format für 25000 Replikationen (Akzeptanzwahrscheinlichkeit 27.40-27.80%))).

Anhang VIII

Grafiken und Erläuterungen zu den echten Daten

Varianz-Formel für $X \sim B(p, q)$ ⁴⁶:

$$\text{Var}(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

Für $X_1 \sim B(0.36, 0.03)$ gilt somit $\text{Var}(X_1) \approx 0.0511$

Für $X_2 \sim B(0.36, 0.18)$ gilt somit $\text{Var}(X_2) \approx 0.1443$

$\Rightarrow \text{Var}(X_2) > \text{Var}(X_1)$

Modus-Check-Grafiken:

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion (“CD_echte_Daten_Modus_check”):

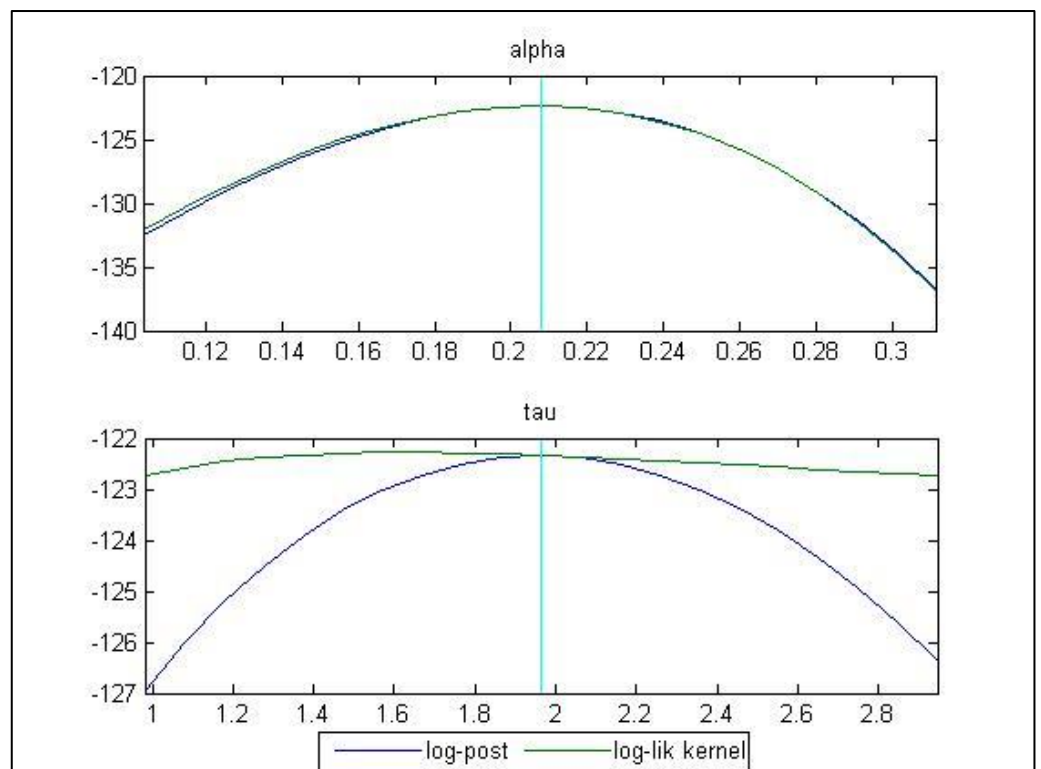


Abbildung 10: Modus-Check bei CD-Produktionsfkt. und echten Daten

Die zugehörigen Konvergenzgrafiken befinden sich auf der CD (“CD_echte_

⁴⁶ Vgl. Cottin, C. et al., Risikoanalyse 2013, S. 44.

Daten_Konvergenz_univariat” sowie “CD_echte_Daten_Konvergenz_multivariat” (wiederum jeweils als Bild im JPEG-Format sowie im Matlab-Figure-Format für 25000 Replikationen (Akzeptanzwahrscheinlichkeit 26.10-26.90%))).

Additiv separable Nutzenfunktion (“Adsep_U_echte_Daten_Modus_check”):

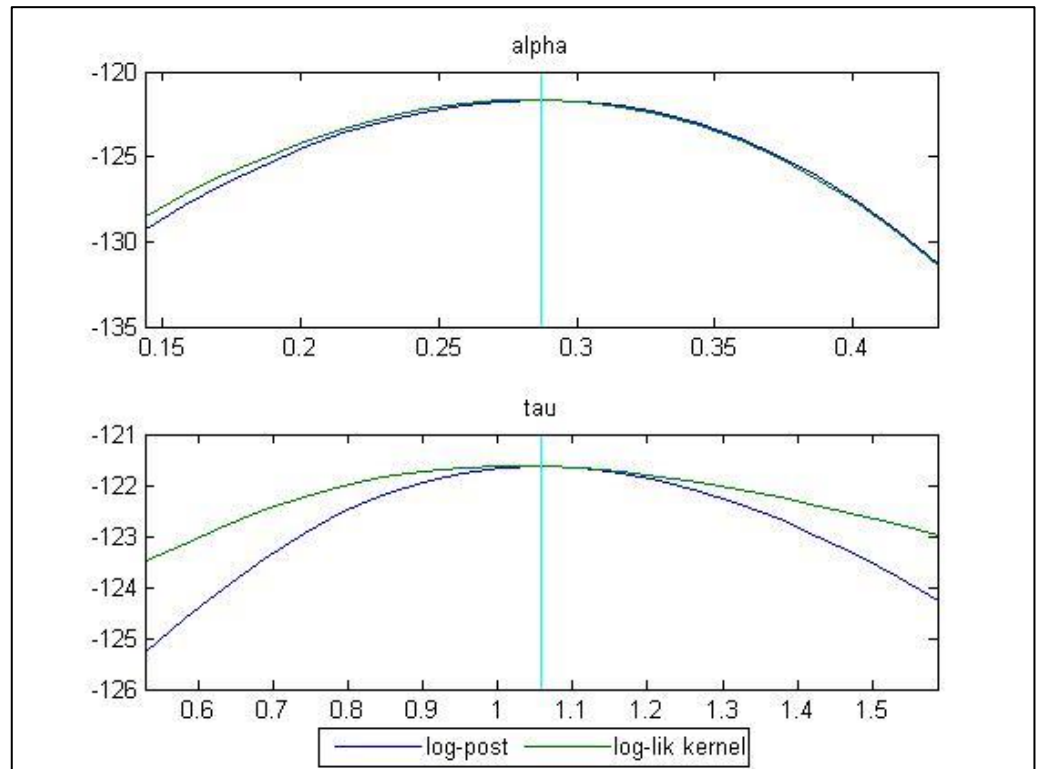


Abbildung 11: Modus-Check bei additiv separabler Nutzenfkt. und echten Daten

Die zugehörigen Konvergenzgrafiken befinden sich auf der CD (“Adsep_U_echte_Daten_Konvergenz_univariat” sowie “Adsep_U_echte_Daten_Konvergenz_multivariat” (wiederum jeweils als Bild im JPEG-Format sowie im Matlab-Figure-Format für 25000 Replikationen (Akzeptanzwahrscheinlichkeit 20.90-21.60%))).

Unelastisches Arbeitsangebot (“unAr_echte_Daten_Modus_check”):

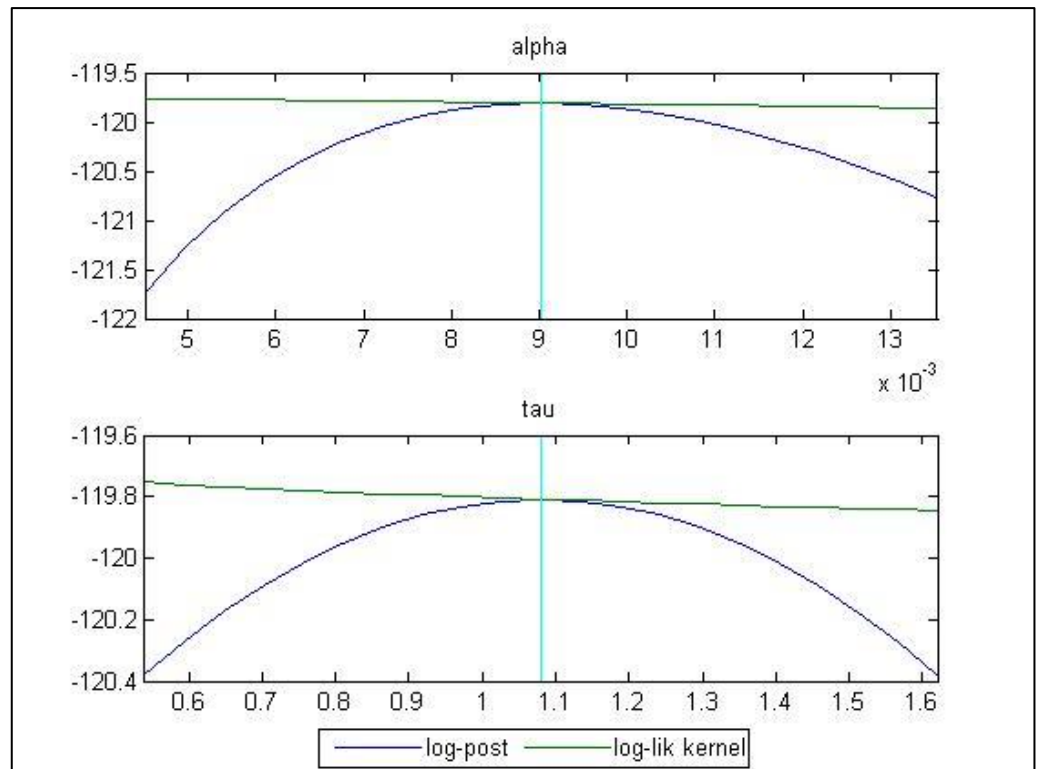


Abbildung 12: Modus-Check bei unelastischem Arbeitsangebot und echten Daten

Die zugehörigen Konvergenzgrafiken befinden sich auf der CD (“unAr_echte_Daten_Konvergenz_univariat” sowie “unAr_echte_Daten_Konvergenz_multivariat” (wiederum jeweils als Bild im JPEG-Format sowie im Matlab-Figure-Format für (ausnahmsweise) 50000 Replikationen (Akzeptanzwahrscheinlichkeit 21.50-21.70%))).

Da die generalisierte Gammaverteilung für die Priori-Verteilung in Kapitel D.III auch nicht zu einer verbesserten Schätzung für τ geführt hat, wurde hier wie für die anderen Modelle eine Normalverteilung für τ angenommen.

Anhang IX

CD

Literaturverzeichnis

- Campbell, John Y.; Ludvigson, Sydney [Substitution 2001], Elasticities of Substitution in Real Business Cycle Models with Home Production, in: Journal of Money, Credit and Banking (Vol. 33 Nr. 4, November 2001), Harvard 2001, Online im Internet: URL: <http://www.econ.nyu.edu/user/ludvigsons/Elasticities.pdf> [Stand: 14.09.2014]
- Cantore, Cristiano; Levine, Paul [Macroeconomics 2011], Getting Normalization Right: Dealing with Dimensional Constants in Macroeconomics, in: Dynare Working Paper Series (Nr. 9), Paris 2011, Online im Internet: URL: <http://www.dynare.org/wp-repo/dynarewp009.pdf> [Stand: 14.09.2014]
- Chelouah, Rachid; Siarry, Patrick [Optimization 2003], Continuous Optimization – A hybrid method combining continuous tabu search and Nelder-Mead simplex algorithms for the global optimization of multim minima functions, in: European Journal of Operational Research (161), Online im Internet: URL: http://scholar.google.de/scholar_url?hl=de&q=http://www.researchgate.net/publication/223936985_A_hybrid_method_combining_continuous_tabu_search_and_NelderMead_simplex_algorithms_for_the_global_optimization_of_multiminima_functions/file/32bfe513b473ae6817.pdf&sa=X&scisig=AAGBfm08UVQYrUVqc6ylrM2p2014h0jZ9A&oi=scholar&ei=dZ0OVNPAJOPX7Aa_ioHQCQ&ved=0CCAQgAMoATAA [Stand: 14.09.2014]
- Coenen, Günther [Konsolidierung 1998], Intertemporale Effekte einer fiskalischen Konsolidierung in einem RBC-Modell, hrsg. v. Volks-

wirtschaftliche Forschungsgruppe der Deutschen Bundesbank,
Frankfurt am Main 1998, Online im Internet: URL:
https://www.bundesbank.de/Redaktion/DE/Downloads/Veroeffentlichungen/Diskussionspapiere_1/1998/1998_03_01_dkp_02.pdf?__blob=publicationFile [Stand: 14.09.2014]

Congdon, Peter D. [Hierarchical 2010], Applied Bayesian Hierarchical Methods, CRC Press Boca Raton

Cottin, Claudia; Döhler, Sebastian [Risikoanalyse 2013], Risikoanalyse: Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen, 2. Aufl., in: Studienbücher Wirtschaftsmathematik, Springer Spektrum Wiesbaden, Online im Internet: URL:
http://books.google.de/books?id=xTqz45a_q5UC&pg=PA44&lpg=PA44&dq=beta+verteilung&source=bl&ots=trlDPvP7ID&sig=_evRpqzbrQhSj2SbZhZ4asWK78&hl=de&sa=X&ei=VWYJVOGSG8SfO9jOgYAM&sqi=2&ved=0CEIQ6AEwBQ#v=onepage&q=beta%20verteilung&f=false [Stand: 14.09.2014]

Groth, Christian [Real 2011], The real business cycle theory (Chapter 29),
Online im Internet: URL: <http://www.econ.ku.dk/okocg/VM/VM11/Lectures%20and%20lecture%20notes/Ch29-2011-1.pdf> [Stand: 14.09.2014]

Hackman, Steven T. [Production 2008], Production Economics – Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives, Springer Berlin

Harms, Philipp [Makroökonomik 2008], Internationale Makroökonomik, in: Neue ökonomische Grundrisse, Mohr Siebeck Tübingen, Online

im Internet: URL: <http://books.google.de/books?id=kek3KKFz5oYC&pg=PA520&lpg=PA520&dq=Harms,+Philipp+%5BMakro%C3%B6konomik+2008%5D,+Internationale+Makro%C3%B6konomik&source=bl&ots=RCod51zpGx&sig=P6lN4N7oC2UHSqccttQlkNFXD0&hl=de&sa=X&ei=4gkPVPeSFM0BywP25IHgDw&ved=0CDEQ6AEwAg#v=onepage&q=Harms%20%20Philipp%20%5BMakro%C3%B6konomik%202008%5D%20%20Internationale%20Makro%C3%B6konomik&f=false> [Stand: 14.09.2014]

Hoff, Peter D. [Course 2009], A First Course in Bayesian Statistical Methods, in: Springer Texts in Statistics, Springer New York/London

Jehle, Geoffrey Alexander; Reny, Philip J. [Theory 2011], Advanced Micro-economic Theory, 3. Auflage, Financial Times/Prentice Hall Harlow, New York

Kass, Robert E.; Raftery, Adrian E. [Factors 1995], Bayes Factors, in: Journal of the American Statistical Association (Vol. 90, Nr. 430), Online im Internet: URL: <https://www.andrew.cmu.edu/user/kk3n/simplicity/KassRaftery1995.pdf> [Stand: 14.09.2014]

King, Robert G.; Rebelo, Sergio T. [Cycles 2000], Resuscitating Real Business Cycles, in: NBER Working Paper Series (7534), hrsg. v. National Bureau of Economic Research, Cambridge 2000, Online im Internet: URL: <http://www.nber.org/papers/w7534.pdf> [Stand: 14.09.2014]

Kriwoluzki, Alexander [Dynare 2009], Introduction to Dynare – Handout, Berlin 2009, Online Im Internet: URL: https://www.wiwi.hu-berlin.de/professuren/vwl/wipo/team/former/kriwoluzky/intro_dynare_handout.

pdf [Stand: 14.09.2014]

Lindé, Jesper [Effects 2004], The Effects of Permanent Technology Shocks on Labor Productivity and Hours in the RBC model, hrsg. v. Sveriges Riksbank, Stockholm 2004, Online im Internet: URL: http://www.riksbank.se/Upload/WorkingPapers/WP_161.pdf [Stand: 14.09.2014]

Lynch, Scott M. [Social 2007], Introduction to Applied Bayesian Statistics and Estimation for Social Scientists, in: Statistics for Social and Behavioral Sciences, Springer New York

Mead, Roger; Nelder, John Ashforth [Simplex 1965], A simplex method for function minimization, Cambridge 1965, Online im Internet: URL: <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/7/4/308.full.pdf+html> [Stand: 14.09.2014]

ohne Verfasser [Bayesian 2014], Bayesian Inference – Sample Size, Statisticat, LLC. – Statistical Consulting and Support, Hot Springs 2014, Online im Internet: URL: <http://www.bayesian-inference.com/samplesize> [Stand: 14.09.2014]

ohne Verfasser [Inference 2014], Bayesian Inference – Logarithm of the Marginal Likelihood, Statisticat, LLC. – Statistical Consulting and Support, Hot Springs 2014, Online im Internet: URL: <http://www.bayesian-inference.com/software/doc/LML> [Stand: 14.09.2014]

ohne Verfasser [Statistisches Bundesamt 2014 (1)], Tabellenaufbau GENESIS-

Online Datenbank Statistisches Bundesamt, Online im Internet: URL:
https://www.genesis.destatis.de/genesis/online;jsessionid=363C283BD478A01BF7816B6A7439679B.tomcat_GO_1_1?operation=previous&levelindex=1&levelid=1409907639695&step=1 [Stand: 14.09.2014]
[Anm.: Aufruf kann nur über die Excel-Datei "Bruttoinlandsprodukt_Daten_Input" erfolgen]

ohne Verfasser [Statistisches Bundesamt 2014 (2)], Bruttoinlandsprodukt
2010-2014, Online im Internet: URL:
https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/GesamtwirtschaftUmwelt/VR/Inlandsprodukt/Tabellen/VJ_BIP.html [Stand: 14.09.2014]

Rodepeter, Ralf [Lebeszyklus1999], Konsum- und Sparentscheidungen im
Lebenszyklus – Theorie, Evidenz und Simulation unter klassischen und
alternativen Ansätzen, zugl. Diss.: Mannheim 1999, Online im Internet:
URL: <http://www.uni-mannheim.de/mateo/verlag/diss/rodepeter/rodepeter.pdf> [Stand: 14.09.2014]

Tirelli, Mario [Business 2013], Real Business Cycle, Online im Internet: URL:
http://host.uniroma3.it/docenti/tirelli/RM3/Mag/Doc/Lnotes13_4.pdf
[Stand: 14.09.2014]

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit, dass ich meine Seminararbeit

„Bayes-Schätzung von Modellparametern“

selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe, und dass ich alle von anderen Autoren wörtlich übernommenen Stellen wie auch die sich an die Gedankengänge anderer Autoren eng anlehnenden Ausführungen meiner Arbeit besonders gekennzeichnet und die Quellen zitiert habe.