DSGE-Modelle

Kalibrierung und Einführung in Dynare

Dr. Andrea Beccarini Willi Mutschler, M.Sc.

Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik Münster
willi.mutschler@uni-muenster.de

Sommersemester 2012

Überblick Schätzverfahren

- Die Lösung eines DSGE-Modells lässt sich ökonometrisch in Form eines *state-space*-Modells darstellen, dessen Parameter es zu bestimmen gilt.
- Drei verschieden Ansätze:
  1. **Kalibrierung** der Parameter derart, dass sie bestimmte theoretische Momente und stilisierte Fakten der beobachteten Daten so genau wie möglich widerspiegeln.
  2. **Verfahren begrenzter Information** bzw. schwacher ökonometrischer Interpretation: Minimierung einer Distanzfunktion zwischen theoretischen und empirischen Momenten mithilfe der *General-Method-of-Moments* oder Methoden der *Indirekten Inferenz*.
  3. **Vollständige Informationsschätzung** bzw. starke ökonometrische Interpretation: Ziel ist eine genaue Charakterisierung der beobachteten Datenreihen: *Maximum-Likelihood* oder *bayesianischen Methoden*.

Kalibrierung

- Ziel: Bestimmte quantitative Fragestellung mithilfe eines strukturellen Modells zu beantworten.
- Das Modell wird so konstruiert und parametrisiert, dass es bestimmte Eigenschaften der wahren Ökonomie darstellt.
- Bei der Festlegung der Parameter betrachtet man *steady-state* Eigenschaften und wählt die Parameter im Einklang mit den beobachteten Daten.
- Häufig: Stabile langfristige Durchschnitte (Lohneinkommen, Arbeitszeit, Zinsen, Inflationsraten, Konsum- und Staatsausgabenquoten).
- Auch Mikrostudien werden zum Teil verwendet, doch Vorsicht bei der Aggregierung!

Mögliche Ansätze für die Kalibrierung eines Modells

- *Steady-state Werte* mithilfe langfristige Durchschnitte von Nominalzinsen, Inflationsraten, durchschnittlicher Wachstumsrate der Produktivität.
- Vorsicht: Weil (1989) zeigt, dass in Modellen mit repräsentativen Agenten es zu systematischer Überschätzung der Gleichgewichtszinsen kommen kann (*risk-free rate puzzle*). Es kann somit bei bestimmten Parameterkonstellation zu Widersprüchen kommen (Beispiel: Diskontfaktor $\beta > 1$).
- Üblicher Preisaufschlag (mark-up) von 1.15 (Corsetti et al (2012)).
- Intertemporale Substitutionselastizität $1/\sigma$ üblicherweise zwischen $\sigma = 1$ und $\sigma = 3$ (King, Plosser und Rebelo (1988), Rotemberg und Woodford (1992), Lucas (2003)).

- Preisstarrheitskoeffizienten: Für durchschnittliche Preisanpassung von 12-15 Monaten siehe Keen und Wang (2007).
- Reaktionskoeffizienten von Geldpolitik: Häufig Taylor-Regel, wobei durch unterschiedliche Gewichtungen entweder mehr Wert auf Preisstabilität oder auf Glättung des Outputs gelegt werden kann.
- Parameter der stochastischen Prozesse: Häufig persistent, kleine Standardabweichungen, sonst Ausschläge recht hoch. OLS-Schätzung der Produktionsfunktion und somit des Solow-Residuums auch möglich.
- Schockparameter: Ähnliche Studien: Christiano, Eichenbaum und Evans (2005), Smets und Wouters (2003).
- Letztlich: Try & Error-Verfahren!

Aufgabe 2:

Kalibrierung eines RBC-Modells mit monopolistischer Konkurrenz

Haushalte maximieren ihren Nutzen über Konsum c_t und Freizeit $1 - l_t$, wobei l_t den Arbeitseinsatz bezeichnet:

$$E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta [log(c_t) + \psi log(1 - l_t)],$$

wobei sie folgender Budgetrestriktion unterliegen:

$$c_t + k_{t+1} = \underbrace{w_t l_t + r_t k_t}_{=y_t} + (1 - \delta) k_t.$$

Dabei bezeichnet k_t den Kapitalstock, w_t den Reallohn, r_t den Realzins und δ die Abschreibungsrate. Ferner gilt für die Investitionen:

$$i_t = y_t - c_t.$$

Aufgabe 2:

Kalibrierung eines RBC-Modells mit monopolistischer Konkurrenz

Im Zwischengütersektor herrscht monopolistische Konkurrenz, während auf dem Endproduktsektor die vollständige Konkurrenz gilt. Die Produktionsfunktion eines Unternehmens $i \in [0;1]$, das Zwischengüter produziert, lautet:

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= A_t k_{it}^{\alpha} l_{it}^{1-\alpha}, &\qquad 0 < \alpha < 1,\\
log(A_t) &= \rho log(A_{t-1}) + \epsilon_t, &\qquad \epsilon_t \sim N(0,\sigma^2),
\end{aligned}
$$

wobei A_t das Technologieniveau bezeichnet. Die Unternehmen legen den Preis p_{it} für ihr Gut y_{it} fest, haben jedoch keinen Einfluss auf den Reallohn w_t und den Realzins r_t. Der Endproduktsektor ist durch eine Technologie vom Typ Dixit/Stiglitz gekennzeichnet:

$$
y_t = \left(\int_0^1 (y_{it})^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}},
$$

wobei ε die Substitutionselastizität bezeichnet.

Aufgabe 2:

Kalibrierung eines RBC-Modells mit monopolistischer Konkurrenz

(a) Zeigen Sie, dass das beschriebene DSGE-Modell folgende strukturelle Form besitzt und interpretieren Sie die Bedingungen:

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}} (1 + r_{t+1} - \delta) \right] \tag{1}$$

$$w_t = \psi \frac{c_t}{1 - l_t} \tag{2}$$

$$y_t = c_t + i_t \tag{3}$$

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \tag{4}$$

$$w_t = (1-\alpha) \frac{y_t}{l_t} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \tag{5}$$

$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \tag{6}$$

$$i_t = k_{t+1} - (1-\delta) k_t \tag{7}$$

$$log(A_t) = \rho log(A_{t-1}) + \epsilon_t \tag{8}$$

(b) Welche Parameter gibt es zu bestimmen?

(c) Schreiben Sie ein mod-File für das beschriebene Modell. Überlegen Sie sich eine Kalibrierung für den Parametervektor $\boldsymbol{\mu}$ und generieren Sie 1000 Datenpunkte mithilfe von Dynare für c_t, y_t, i_t, w_t und r_t. Speichern Sie die mittleren 100 sowohl in einer Excel-Datei, als auch in einer mat-Datei. Betrachten Sie den Konsumpfad auch grafisch.

(d) Formulieren Sie die Strukturgleichungen um, indem Sie Variablen als prozentuale Abweichung von ihrem steady-state betrachten: $x_t = e^{log(x_t)-log(x)+log(x)} = xe^{\widehat{x}_t}$. Schreiben Sie für dieses Modell nun ein mod-File. Was hat sich verändert?

- Die Kalibrierung wird sehr häufig verwendet, gibt einen ersten Eindruck von den Stärken und Schwächen eines Modells.
- Mit einer guten Kalibrierung ist ein präzises Abbild der Daten möglich.
- Mit verschiedenen Kalibrierungen lassen sich die Auswirkungen von unterschiedlichen Politikmaßnahmen vergleichen:
    - Wie reagiert die Ökonomie, wenn die Zentralbank mehr Gewicht auf die Glättung des Konjunkturzyklus als auf Preisstabilität legt?
    - Was passiert beispielsweise mit dem Konsumpfad, falls die Haushalte eine hohe intertemporale Substitutionselastizität haben, was bei einer niedrigen?

Kalibrierung

Nachteile

- Es ist ein Ad-hoc-Vorgehen und wird häufig als Kritikpunkt von DSGE-Modellen angesehen.
- Bietet keine statistische Fundierung und ist häufig durch subjektive Einschätzungen geprägt.
- Viele Parameter, insbesondere die der exogenen Prozesse, besitzen einen gewissen Spiel- und Interpretationsraum und werden auch unterschiedlich kalibriert (Intertemporale Substitutionselastizität, geld- und fiskalpolitische Parameter, Preisstarrheitskoeffizient, Standardabweichungen etc.).

Prescott (1986, S. 10) über RBC-Modelle:

The models constructed within this theoretical framework are necessarily **highly abstract**. Consequently, they are necessarily false, and statistical hypothesis testing will reject them. This does not imply, however, that nothing can be learned from such a **quantitative theoretical exercise**.

Aufgabe 3: Ein einfaches RBC-Modell

Betrachten Sie das folgende Modell

- Präferenzen des repräsentativen Agenten

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^{t-1} E_t \left[\log\left(C_t\right) - \frac{L_t^{1+\gamma}}{1+\gamma} \right].$$

  Der Haushalt bietet Arbeit und Kapital an den Unternehmenssektor an.

  - L_t ist Arbeit.
  - $\rho \in (0, \infty)$ ist ein Präferenzparameter.
  - $\gamma \in (0, \infty)$ ist ein Arbeitsangebotsparameter.
  - C_t bezeichnet Konsum.
  - w_t bezeichnet den Reallohn.
  - r_t bezeichnet den Zins.

Aufgabe 3: Ein einfaches RBC-Modell

- Der Haushalt muss eine Sequenz von Budgetrestriktionen beachten

$$K_t = K_{t-1}(1-\delta) + w_t L_t + r_t K_{t-1} - C_t,$$

  wobei
  - K_t Kapital am Ende der Periode und
  - $\delta \in (0,1)$ die Abschreibungsrate bezeichnet.
- Die Produktionsfunktion ist gegeben durch

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t L_t\right)^{1-\alpha},$$

  wobei $g \in (0,\infty)$ eine Wachstumsrate und α und β Parameter sind.
- A_t bezeichnet das Technologieniveau, welches sich nach folgendem Prozess entwickelt:

$$A_t = A_{t-1}^{\lambda} \exp(e_t),$$

  wobei e_t i.i.d. normalverteilt ist (Erwartungswert von Null, Standardabweichung von σ). $\lambda \in (0,1)$ ist ein Parameter.

Lagrangefunktion

$$L = \max_{C_t, L_t, K_t} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} E_t \Big[\log(C_t) - \frac{L_t^{1+\gamma}}{1+\gamma} \\ - \mu_t \left(K_t - K_{t-1}(1-\delta) - w_t L_t - r_t K_{t-1} + C_t\right) \Big].$$

Bedingungen erster Ordnung

$$\frac{\partial L}{\partial C_t} = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} \left(\frac{1}{C_t} - \mu_t\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial L_t} = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} \left(L_t^{\gamma} - \mu_t w_t\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_t} = -\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t-1} \mu_t + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t} E_t\left(\mu_{t+1}(1-\delta+r_{t+1})\right) = 0.$$

Eliminierung des Lagrangemultiplikators ergibt:

$$L_t^\gamma = \frac{w_t}{C_t},$$
$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{1+\rho} E_t \left(\frac{1}{C_{t+1}} (r_{t+1} + 1 - \delta) \right).$$

$$\max_{L_t, K_{t-1}} A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t L_t\right)^{1-\alpha} - r_t K_{t-1} - w_t L_t.$$

Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} r_t &= \alpha A_t K_{t-1}^{\alpha-1} \left((1+g)^t L_t\right)^{1-\alpha}, \\ w_t &= (1-\alpha) A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t\right)^{1-\alpha} L_t^{-\alpha}. \end{aligned}$$

$$K_t + C_t = K_{t-1}(1-\delta) + \underbrace{A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha}}_{w_t L_t + r_t K_t}.$$

Aufgabe 3: Ein einfaches RBC-Modell

Dynamische Gleichgewicht

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{C_t} &= \frac{1}{1+\rho} E_t\left(\frac{1}{C_{t+1}}(r_{t+1}+1-\delta)\right),\\
L_t^{\gamma} &= \frac{w_t}{C_t},\\
r_t &= \alpha A_t K_{t-1}^{\alpha-1}\left((1+g)^t L_t\right)^{1-\alpha},\\
w_t &= (1-\alpha) A_t K_{t-1}^{\alpha}\left((1+g)^t\right)^{1-\alpha} L_t^{-\alpha},\\
K_t + C_t &= K_{t-1}(1-\delta) + A_t K_{t-1}^{\alpha}\left((1+g)^t L_t\right)^{1-\alpha},\\
log(A_t) &= \lambda log(A_{t-1}) + e_t.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Ein einfaches RBC-Modell

Existenz eines gleichgewichtigen Wachstumspfads

Gleichgewicht auf dem Gütermarkt für jede Periode t:
$K_t + C_t = K_{t-1}(1-\delta) + A_t K_{t-1}^{\alpha} \left((1+g)^t L_t\right)^{1-\alpha}$.
Also muss es Wachstumsraten g_c and g_k derart geben, dass

$$
\begin{aligned}
&(1+g_k)^t K_1 + (1+g_c)^t C_1 = \\
&\qquad \frac{(1+g_k)^t}{1+g_k} K_1 (1-\delta) + A_t \left(\frac{(1+g_k)^t}{1+g_k} K_1\right)^{\alpha} \left((1+g)^t L_t\right)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow K_1 + \left(\frac{1+g_c}{1+g_k}\right)^t C_1 = \\
&\qquad \underbrace{\frac{K_1}{1+g_k}}_{K_0}(1-\delta) + A_t \left(\frac{K_1}{1+g_k}\right)^{\alpha} \left(\left(\frac{1+g}{1+g_k}\right)^t L_t\right)^{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Dies ist nur gültig, falls $g_c = g_k = g$.

Definiere

$$
\begin{aligned}
\widehat{C}_t &= C_t/(1+g)^t,\\
\widehat{K}_t &= K_t/(1+g)^t,\\
\widehat{w}_t &= w_t/(1+g)^t.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\widehat{C}_t(1+g)^t} &= \frac{1}{1+\rho} E_t \left(\frac{1}{\widehat{C}_{t+1}(1+g)(1+g)^t}(r_{t+1}+1-\delta) \right), \\
L_t^{\gamma} &= \frac{\widehat{w}_t(1+g)^t}{\widehat{C}_t(1+g)^t}, \\
r_t &= \alpha A_t \left(\widehat{K}_{t-1} \frac{(1+g)^t}{1+g} \right)^{\alpha-1} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha}, \\
\widehat{w}_t(1+g)^t &= (1-\alpha) A_t \left(\widehat{K}_{t-1} \frac{(1+g)^t}{1+g} \right)^{\alpha} \left((1+g)^t \right)^{1-\alpha} L_t^{-\alpha}, \\
\left(\widehat{K}_t + \widehat{C}_t \right) (1+g)^t &= \widehat{K}_{t-1} \frac{(1+g)^t}{1+g} (1-\delta) \\
&\quad + A_t \left(\widehat{K}_{t-1} \frac{(1+g)^t}{1+g} \right)^{\alpha} \left((1+g)^t L_t \right)^{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\widehat{C}_t} &= \frac{1}{1+\rho} E_t \left(\frac{1}{\widehat{C}_{t+1}(1+g)} (r_{t+1} + 1 - \delta) \right), \\
L_t^{\gamma} &= \frac{\widehat{w}_t}{\widehat{C}_t}, \\
r_t &= \alpha A_t \left(\frac{\widehat{K}_{t-1}}{1+g} \right)^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}, \\
\widehat{w}_t &= (1-\alpha) A_t \left(\frac{\widehat{K}_{t-1}}{1+g} \right)^{\alpha} L_t^{-\alpha}, \\
\widehat{K}_t + \widehat{C}_t &= \frac{\widehat{K}_{t-1}}{1+g}(1-\delta) + A_t \left(\frac{\widehat{K}_{t-1}}{1+g} \right)^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \\
log(A_t) &= \lambda log(A_{t-1}) + e_t.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Ein einfaches RBC-Modell

Übungen mit Dynare

(a) Schreiben Sie eine mod-Datei für dieses einfache RBC-Modell. Gehen Sie dabei von folgender Kalibrierung aus:
$\alpha = 0.33, \delta = 0.1, \rho = 0.03, \lambda = 0.97, \gamma = 0, g = 0.015.$
Benutzen Sie für initval folgende Werte:
$C = 1, K = 3, L = 0.9, w = 1, r = 0.15, A = 1.$

(b) Zeigen Sie, dass der steady-state folgende Bedingungen impliziert:

$$A = 1, \qquad r = (1+g)(1+\delta) + \delta - 1$$

$$L = \left(\frac{1-\alpha}{\frac{r}{\alpha} - \delta - g}\right)\left(\frac{r}{\alpha}\right), \qquad K = (1+g)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} L$$

$$C = (1-\delta)\frac{K}{1+g} + \left(\frac{K}{1+g}\right)^{\alpha} L^{1-\alpha} - K, \qquad w = C$$

(c) Integrieren Sie diese analytische Lösung in ihre mod-Datei, d.h. benutzen Sie steady_state_model anstelle von initval. Dynare erstellt automatisch eine steady-state m-Datei, schauen Sie sich diese an.