DSGE Mini Kurs - Teil 3 (Lösungsmethoden)

Willi Mutschler

1. Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Darstellung und Lösung

Die strukturelle Form eines DSGE-Modells besteht aus

- Menge von erwarteten, nichtlinearen Optimalitätsbedingungen,
- Bewegungsgleichungen für stochastische Prozesse,
- Messgleichungen, zur Verknüpfung von Modellvariablen mit Daten.

Kurzum: Strukturelle Form ist ein nichtlineares System erwarteter Differenzengleichungen

$$E_t f(x_{t+1}, \varepsilon_{t+1}, y_{t+1}, x_t, \varepsilon_t, y_t | \theta) = 0 \tag{1}$$

- Vektor ε_t enthält die stochastischen Innovationen (Schocks und Spezifikationsfehler)
    - mit $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t \varepsilon_s') = \begin{cases} \Sigma_\varepsilon = \eta\eta' & \text{für } s = t, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- Vektor y_t enthält die Kontrollvariablen
- Vektor x_t enthält die exogenen und endogenen Zustandsvariablen
    - Exogene: von den Entscheidungen der Akteure unabhängig entwickelnde Variablen
    - Endogene: von den Entscheidungen der Akteure beeinflussbare Variablen
- θ ist der Vektor der Modellparameter

Zustandsraumdarstellung

- Ein solches Modell rationaler Erwartungen zu lösen bedeutet, sogenannte Politikfunktionen h und g zu finden, die das obige System (zumindest approximativ) lösen:

$$x_{t+1} = h(x_t, \varepsilon_{t+1}) \tag{2}$$

$$y_{t+1} = g(x_t, \varepsilon_{t+1}) \tag{3}$$

- DSGE Modelle lassen sich als Zustandsraummodelle auffassen:
  - wir suchen das Optimale Verhalten der Akteure als Funktion des aktuellen Zustands der Ökonomie
  - Aktueller Zustand ist eine Funktion vergangener Zustände und aktueller Innovationen
- Problem: g und h sind nichtlinear und im Allgemeinen analytisch nicht herleitbar
- Gesucht ist eine Sattelpfad-stabile Lösung, d. h. eine eindeutigen Zuordnung von Zustands- und Kontrollvariablen.

Lösungsmethoden

Lösung eines DSGE-Modells

Es gibt lineare und nichtlineare Lösungsverfahren:

- Lineare Verfahren:
  - Log-linearisierung der Modellgleichungen (1) um den steady-state liefert:

$$\Gamma_0 E_t \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1} \\ \hat{y}_{t+1} \end{bmatrix} = \Gamma_1 \begin{bmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{y}_t \end{bmatrix} + \Gamma_\varepsilon \varepsilon_{t+1} \tag{4}$$

    mit $\hat{x}_t = log(x_t) - log(x)$ und $\hat{y}_t = log(y_t) - log(y)$
  - Anderson/Moore (1983), Binder und Pesaran (1997), Blanchard/Khan (1980), Christiano (2002), King/Watson (1998), $\boxed{\mathit{Klein}(2000)}$, $\boxed{\mathit{Sims}(2001)}$, Uhlig (1999)
  - Guter Überblick: Anderson (2008).
- Nichtlineare Verfahren:
  - Projektion, Iteration oder $\boxed{\mathit{Perturbation}}$
  - Guter Überblick DeJong/Dave (2011) und Herr/Maussner (2009).

Lösungsmethoden

- Take derivative of F w.r.t. x_t and evaluate at the non-stochastic steady-state

$$F_x(\bar{x}, 0) = f_1 h_x + f_2 g_x h_x + f_3 + f_4 g_x = 0$$

$$\underbrace{-\begin{bmatrix} \underset{(n\times n_x)}{f_1} & \underset{(n\times n_y)}{f_2} \end{bmatrix}}_{:=A} \begin{bmatrix} \underset{(n_x\times n_x)}{h_x} \\ \underset{(n_y\times n_x)}{g_x}\underset{(n_x\times n_x)}{h_x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underset{(n\times n_x)}{f_3} & \underset{(n\times n_y)}{f_4} \end{bmatrix}}_{:=B} \begin{bmatrix} \underset{(n_x\times n_x)}{I} \\ \underset{(n_y\times n_x)}{g_x} \end{bmatrix}$$

- $n \times n_x$ equations for $n \times n_x$ unknown elements of h_x and g_x
- Postmultiply by $\widehat{x}_t := (x_t - \bar{x})$

$$A \begin{bmatrix} h_x \widehat{x}_t \\ g_x h_x \widehat{x}_t \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ g_x \widehat{x}_t \end{bmatrix}$$

- Notice that the coefficient matrices are equivalent to the first order approximation

$$A E_t \begin{bmatrix} \widehat{x}_{t+1} \\ \widehat{y}_{t+1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{y}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma \eta_x \varepsilon_{t+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lineare Verfahren: Klein (2000) (I)

- Ausgangspunkt ist das log-linearisierte Modell in Gleichung (4)

$$\Gamma_1 E_t \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1} \\ \hat{y}_{t+1} \end{bmatrix} = \Gamma_0 \begin{bmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{y}_t \end{bmatrix} + \Gamma_\varepsilon \varepsilon_{t+1}$$

- Die lineare Lösung besitzt die Form

$$\hat{x}_t = h_x \hat{x}_{t-1} + h_\varepsilon \varepsilon_t$$
$$\hat{y}_t = g_x \hat{x}_{t-1} + g_\varepsilon \varepsilon_t$$

- Γ_1, Γ_0 und Γ_ε sind bekannte Matrizen, wir müssten nur Γ_1 invertieren...
- **ABER:** Γ_1 ist im Allgemeinen singulär und nicht invertierbar
- Klein (2000)'s Ansatz:
  - Entkopplung des Systems in ein Block-dreieckiges Gleichungssystem mithilfe der verallgemeinerten Schur Dekomposition
  - System lässt sich dann rekursiv lösen

Aside: Matrix theory

Matrix pencil

Let A and B be two $n \times n$ matrices. The set of all matrices of the form $A - \lambda B$ with $\lambda \in \mathbb{C}$ is said to be a *pencil*. The eigenvalues of the pencil are elements of the set $\lambda(A, B)$ defined by

$$\lambda(A, B) = \{z \in \mathbb{C} : det(A - zB) = 0\}$$

Generalized Eigenvalue problem

Let A and B be two $n \times n$ matrices. Then $\lambda \in \lambda(A, B)$ is called a generalized Eigenvalue if there exist a nonzero vector $q \in \mathbb{C}^n$ such that

$$Aq = \lambda Bq$$

- If $B = I$, then this simplifies to the ordinary Eigenvalue problem: $Aq = \lambda q$
- A always has n eigenvalues, which can be ordered (in more than one way) to form an $n \times n$ diagonal matrix Λ and a corresponding matrix of nonzero columns Q that satisfies the eigenvalue equation:

$$AQ = Q\Lambda$$

Aside: Matrix theory

Schur decomposition (Complex version)

Let A be an $n \times n$ matrix. Then there exist a **unitary** $n \times n$ matrix S (that is, $S^*S = SS^* = S^{-1}S = I_n$) and an upper triangular matrix M whose diagonal elements are the eigenvalues of B, such that

$$S^*AS = M \Leftrightarrow A = SMS^*$$

Schur decomposition (Real version)

Let A be a real symmetric $n \times n$ matrix. Then there exist an **orthogonal** real $n \times n$ matrix S (that is, $S'S = SS' = S^{-1}S = I_n$), whose columns are eigenvectors of A and a diagonal matrix Λ whose diagonal elements are the eigenvalues of A, such that

$$S'AS = \Lambda \Leftrightarrow A = S\Lambda S'$$

- $*$ denotes conjugate or Hermitian transpose, $'$ denotes the ordinary transpose.
- A complex matrix always has a complex Schur decomposition.
- A real matrix has a real Schur decomposition if and only if all eigenvalues are real.
- S is structured, i.e. unitary or orthogonal.
- Useful for proofs (e.g. Eigenvalues of Kronecker products, differentials,...) and numerically attractive.

Generalized (complex) Schur decomposition or QZ decomposition

Let A and B be $n \times n$ matrices. Then there exist matrices Q, Z, T and S such that

$$Q^*AZ = S \Leftrightarrow A = QSZ^*$$
$$Q^*BZ = T \Leftrightarrow B = QTZ^*$$

1. Q and Z are unitary, i.e. $Q^*Q = QQ^* = I_n$ and $Z^*Z = ZZ^* = I_n$.
2. S and T are upper triangular.
3. pairs (s_{ii}, t_{ii}) can be arranged in any desired order.
4. If for some i, t_{ii} and s_{ii} are both zero, then $\lambda(A, B) = \mathbb{C}$. Otherwise: $\lambda(A, B) = \left\{ \frac{t_{ii}}{s_{ii}} : s_{ii} \neq 0 \right\}$

- There is also a real version.
- We will limit ourselves to the case $\lambda(A, B) \neq \mathbb{C}$ and rule-out unit roots, that is t_{ii} and s_{ii} are not both zero, and $|t_{ii}| \neq |s_{ii}|$.
- Eigenvalues
    - If A is singular, then there are some generalized eigenvalues missing, i.e. $s_{ii} = 0$ for some $i \Rightarrow$ call these *infinite*,
    - If $|\lambda_i| > 1 \Leftrightarrow |s_{ii}| < |t_{ii}| \Rightarrow$ call these finite and unstable,
    - If $|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow |s_{ii}| > |t_{ii}| \Rightarrow$ call these finite and stable.

Lineare Verfahren: Klein (2000) (II)

- Die verallgemeinerte Schur Dekomposition von Γ_1 und Γ_0 ist gegeben durch

$$Q^*\Gamma_1 = SZ^*, \qquad Q^*\Gamma_0 = TZ^*$$

  - wobei folgende Anordnung gewählt wird: stabile verallgemeinerte Eigenwerte ($|s_{ii}| > |t_{ii}|$) kommen zuerst

- Multiplikation mit Q^* und $\begin{bmatrix} \underset{n_x \times 1}{s_t} \\ \underset{n_y \times 1}{u_t} \end{bmatrix} := Z^* \begin{bmatrix} \underset{n_x \times 1}{\widehat{x}_t} \\ \underset{n_y \times 1}{\widehat{y}_t} \end{bmatrix}$, ergibt

$$S \begin{bmatrix} E_t s_{t+1} \\ E_t u_{t+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix}$$

Lineare Verfahren: Klein (2000) (III)

- S und T sind obere Dreiecksmatrizen:

$$\begin{bmatrix} \underset{n_x \times n_x}{S_{11}} & \underset{n_x \times n_y}{S_{12}} \\ \underset{n_y \times n_x}{0} & \underset{n_y \times n_y}{S_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t s_{t+1} \\ E_t u_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{n_x \times n_x}{T_{11}} & \underset{n_x \times n_y}{T_{12}} \\ \underset{n_y \times n_x}{0} & \underset{n_y \times n_y}{T_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix}$$

- Lösung des unteren Blocks ergibt

$$S_{22} E_t[u_{t+1}] = T_{22} u_t$$

- Aufgrund der gewählten Anordnung gilt für den unteren Block $|s_{ii}| < |t_{ii}|$ (oder $|s_{ii}| \leq |t_{ii}|$).
- Vorwärts einsetzen ergibt, dass für eine Lösung mit beschränktem Erwartungswert und beschränkter Varianz ungleich 0 gelten muss, dass $u_t = 0$ für alle t gilt. Sonst hätten wir ein explosives System.

Lineare Verfahren: Klein (2000) (IV)

- **Achtung:** Die Anzahl der Zustandsvariablen muss der Anzahl verallgemeinerter Eigenwerte mit $|s_{ii}| > |t_{ii}|$ entsprechen!
- Diese Eigenschaft hat einen Namen

Blanchard/Khan Bedingungen

Die Anzahl der verallgemeinerten Eigenwerte, die im Modulus kleiner als 1 sind, muss gleich der Anzahl der Zustandsvariablen sein, um eine stabile Lösung zu erhalten.

Lineare Verfahren: Klein (2000) (V)

Gegeben $u_t = 0$, können wir x_t und y_t aus der Definition von s_t und u_t zurück herleiten:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_t \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} s_t \\ Z_{21} s_t \end{bmatrix}$$

Wenn Z_{11} invertierbar ist, dann folgt

$$y_t = \underbrace{Z_{21} Z_{11}^{-1}}_{=g_x} x_t$$

Um also g_x zu berechnen, brauchen wir die Nichtsingularität von Z_{11}!

Lineare Verfahren: Klein (2000) (VI)

Mithilfe von $u_t = 0$ und nichtsingulärem Z_{11} lässt sich der erste Block lösen

$$E_t[s_{t+1}] = S_{11}^{-1} T_{11} s_t$$

S_{11} ist so konstruiert, dass es immer invertierter ist. Einsetzen von $s_t = Z_{11}^{-1} x_t$ ergibt

$$E_t[x_{t+1}] = \underbrace{Z_{11} S_{11}^{-1} T_{11} Z_{11}^{-1}}_{=h_x} x_t$$

Für die Berechnung von h_x benötigt man nichtsinguläre S_{11} und Z_{11}.

Algorithmus Klein (2000)

- Berechne verallgemeinerte Schur Dekomposition von $\Gamma_1 = -\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ und $\Gamma_0 = \begin{bmatrix} f_3 & f_4 \end{bmatrix}$.
- Ordne die verallgemeinerten Eigenwerte nach Größe an, so dass $|s_{ii}| > |t_{ii}|$ oben links ist.
- Überprüfe die Anzahl stabiler Eigenwerte (Blanchard-Khan Bedingungen).
- Überprüfe, ob Z_{11} invertierbar ist.
- Berechne $h_x = Z_{11} S_{11}^{-1} T_{11} Z_{11}^{-1}$ und $g_x = Z_{21} Z_{11}^{-1}$.

Lineare Verfahren: Klein (2000) (VI)

Excercise

Consider the log-linearized version of the CGG-model:

$$
\begin{aligned}
\pi_t &= \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t && \text{(Phillips curve)}\\
x_t &= E_t x_{t+1} - (r_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^{**}) && \text{(IS equation)}\\
r_t &= \alpha r_{t-1} + (1-\alpha)\left[\phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t\right] && \text{(baseline Taylor-rule)}\\
\Delta a_t &= \rho_a \Delta a_{t-1} + \varepsilon_t^a && \text{(technological shock)}\\
\tau_t &= \rho_\tau \tau_{t-1} + \varepsilon_t^\tau && \text{(preference shock)}\\
r_t^{**} &= \rho_a \Delta a_t + \frac{1-\rho_\tau}{1+\varphi}\tau_t && \text{(natural interest rate)}\\
\Delta y_t &= x_t - x_{t-1} + \Delta a_t - \frac{\tau_t - \tau_{t-1}}{1+\phi} && \text{(output growth)}
\end{aligned}
$$

1. What are state variables, what are control variables?
2. Solve this model using Klein(2000)'s algorithm with Matlab.
3. Compare the solution to Dynare's policy functions

Lineare Lösungsverfahren

- Zunächst wird die allgemeine Form (??) um den *steady-state* linearisiert bzw. log-linearisiert.
- Zusammen mit den Bewegungsgleichungen für die stochastischen Prozesse, ergibt sich das reduzierte Modell:

$$\mathrm{A}\mathrm{x}_{\mathrm{t}+1} = \mathrm{B}\mathrm{x}_{\mathrm{t}} + \mathrm{C}\upsilon_{t+1} + \mathrm{D}\eta_{t+1} + \mathrm{E}.$$