Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik

Studiengang: Volkswirtschaftslehre

Sommersemester 2014

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Seminararbeit

Dynamic Stochastic Equilibrium Models
-
Herleitung und Analyse am Beispiel eines neu-keynesianischen Modells

Vorgelegt von:	David van Leuven
Matrikelnummer:	372991
Adresse:	Steinfurter Straße 99a
	48149 Münster
Fachsemester:	2 FS Volkswirtschaftslehre
Themensteller/Betreuer:	Willi Mutschler
Abgabetermin:	3. September 2014

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1. Einleitung

Dynamic stochastic general equilibrium Modelle, kurz DSGE Modelle, erfreuen sich einer immer größeren Beliebtheit. Mit Hilfe dieser mikrofundierten Modelle kann der Einfluss von fiskal- und geldpolitischen Maßnahmen simuliert werden. Diese Modelle erlauben es zu schätzen, wie eine Volkswirtschaft auf verschiedene Schocks, z.B. Technologieschocks, reagieren wird. Auf Grundlage dieser Schätzungen und weiterer Analysen treffen Zentralbanken ihre geldpolitischen Entscheidungen. Aktuell verwendet die Europäische Zentralbank das Smets-Wouters Modell (2003), um damit die Lage der Eurozone zu simulieren.

In dieser Arbeit wird das Modell von Christiano, Trabandt und Walentin (2011) untersucht, das auf dem Modell von Christiano, Eichenbaum und Evans (2005) basiert. Es ist in die Reihe der neu-keynesianischen Ansätze einzuordnen, die die Unvollkommenheiten des Marktes in die DSGE-Modelle aufnehmen und die Folgen dieser analysieren. In dem untersuchten Modell als auch im Basismodell von Christiano, Eichenbaum und Evans (2005) wird der Unternehmenssektor durch zwei Sektoren modelliert, den End- und Zwischengütersektor. Während auf dem Endgütersektor vollkommene Konkurrenz herrscht, wird auf dem Zwischengütersektor monopolistische Konkurrenz angenommen. Die Unternehmen haben auf dieser Ebene Preissetzungsspielräume. Ebenfalls werden Preisrigiditäten modelliert: Die Unternehmen können nicht jederzeit ihre Preise neu festlegen und berücksichtigen diese Tatsache in ihrem Entscheidungskalkül. Das dargestellte Modell erweitert das Basismodel , indem zwei weitere Aspekte eingebaut werden: Zum einen wird für die Unternehmen im Zwischengütersektor eine teils andere Produktionsfunktion angenommen, sodass neben Arbeit noch Güter anderer Unternehmen zur Produktion benötigt werden. Zum anderen wird ein sogenannter "working capital channel" eingeführt, wodurch die Unternehmen einen Teil ihrer laufenden Kosten durch kurzfristige Anleihen finanzieren. Die Gewichtung dieser Aspekte hängt von den gewählten Parameterkonstellationen des Modells ab.

Die Arbeit ist in zwei Teile gegliedert. Im nachfolgenden zweiten Kapitel wird das Modell von Christiano, Trabandt und Walentin (2011) mit allen Zwischenschritten hergeleitet. Der Aufbau dieses Kapitels orientiert sich folglich sehr stark an Christiano, Trabandt und Walentin (2011). Zuerst werden die Konsumenten betrachtet und danach der Unternehmenssektor dargestellt, der, wie oben erwähnt, in einen Endprodukt- und Zwischengütersektor unterteilt ist. Anschließend werden die Gleichgewichtsbedingungen und die effiziente Allokation, bei der keine Unvollkommenheiten herrschen, dargestellt. Im dritten Teil werden für verschiedene

Parameterwerte die Reaktionen des Modells auf Schocks untersucht. Dabei wird die um den steady state linearisierte Form des hergeleiteten Modelles verwendet. Es wird ein Vergleich mit dem Modell ohne angepasste Produktionsfunktion und "working capital channel" gezogen. Ein Fazit schließt die Arbeit.

2. Herleitung des DSGE-Modells

2.1. Haushalte

Ein repräsentativer Konsument löst das folgende dynamische Optimierungsproblem:

$$\max_{C_t, H_t, B_{t+1}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log C_t - \frac{H_t^{1+\emptyset}}{1+\emptyset})\,; 0 < \beta < 1, \emptyset \geq 0 \tag{1}$$

unter der Nebenbedingung:

$$P_t C_t + B_{t+1} \leq B_t R_{t-1} + W_t H_t + T_t. \tag{2}$$

Der Haushalt zieht Nutzen aus dem Konsum C_t und Disnutzen aus Arbeit H_t. Das Einkommen des Haushaltes ergibt sich aus den Zinseinnahmen seiner Bonds $B_t R_{t-1}$ aus seinem Lohneinkommen $W_t H_t$ und aus Transfers und Profiten T_t. Sein Einkommen nutzt er für den Konsum $P_t C_t$ und den Erwerb von Bonds B_{t+1}.

Die Lagrange-Funktion für dieses Optimierungsproblems lautet:

$$L = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log C_t - \frac{H_t^{1+\emptyset}}{1+\emptyset}) - \lambda_t (P_t C_t + B_{t+1} - B_t R_{t-1} - W_t H_t - T_t).$$

Folglich ergeben sich die Kuhn-Tucker Bedingungen:

$$\frac{\partial L}{\partial C_t} = \beta^t \frac{1}{C_t} - \lambda_t P_t = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_t = \beta^t \frac{1}{C_t P_t} \tag{I}$$

$$\frac{\partial L}{\partial H_t} = \beta^t \left(-H_t^{\emptyset}\right) + \lambda_t W_t = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_t = \beta^t \frac{H_t^{\emptyset}}{W_t} \tag{II}$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_{t+1}} = -\lambda_t + E_t(\lambda_{t+1} R_t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_t = E_t(\lambda_{t+1} R_t). \tag{III}$$

Gleichsetzen von (I) und (II) ergibt:

$$\beta^t \frac{1}{C_t P_t} = \beta^t \frac{H_t^{\emptyset}}{W_t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{W_t}{P_t} = C_t H_t^{\emptyset}. \tag{3}$$

Gleichsetzen von (I)und (III) ergibt:

$$\beta^t \frac{1}{C_t P_t} = E_t(\beta^{t+1} \frac{1}{C_{t+1} P_{t+1}})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{C_t} = \beta E_t \frac{1}{C_{t+1}} \frac{R_t}{\pi_{t+1}} \tag{4}$$

wobei $\pi_{t+1} = \frac{P_{t+1}}{P_t}$ die Bruttoinflation in t+1 darstellt.

2.2. Firmen

2.2.1. Endproduktsektor

Das hier untersuchte Modell besteht aus zwei Sektoren, dem End- und Zwischengütersektor. Im Endgütersektor herrscht vollkommene Konkurrenz. Die Produktionstechnologie der repräsentativen Firma im Endproduktsektor lautet:

$$Y_t = (\int_0^1 Y_{i,t}^{\frac{1}{\lambda_f}} di)^{\lambda_f}, \lambda_f > 1. \tag{5}$$

Das Endprodukt Y_t wird mit den Zwischenprodukten $Y_{i,t}$ hergestellt. Die Zwischenprodukte lassen sich substituieren, dabei stellt λ_f die Substitutionselastizität dar. Für $\lambda_f = 1$ wären die Zwischenprodukte perfekte Substitute.

Die Gewinnfunktion der repräsentativen Firma ergibt sich als:

$$G_t = P_t Y_t - \int_0^1 P_{i,t} Y_{i,t} di = P_t (\int_0^1 Y_{i,t}^{\frac{1}{\lambda_f}} di)^{\lambda_f} - \int_0^1 P_{i,t} Y_{i,t} di.$$

$\int_0^1 P_{i,t} Y_{i,t} di$ stellt die Ausgaben der Firma für die Zwischengüter dar. Aufgrund von vollkommener Konkurrenz im Endproduktsektor nimmt die repräsentative Firma den Preis für das Endprodukte, P_t, und den Preis für das Zwischenprodukt i, $P_{i,t}$, als nicht beeinflussbar, d.h. exogen, an. Die Firma maximiert ihren Gewinn durch die Wahl von $Y_{i,t}$:

$$\frac{\partial G_t}{\partial Y_{i,t}} = P_t \lambda_f (\int_0^1 Y_{i,t}^{\frac{1}{\lambda_f}} di)^{\lambda_f - 1} \frac{1}{\lambda_f} Y_{i,t}^{\frac{1-\lambda_f}{\lambda_f}} - P_{i,t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_{i,t}}{P_t} = (\int_0^1 Y_{i,t}^{\frac{1}{\lambda_f}} di)^{\lambda_f - 1} Y_{i,t}^{\frac{1-\lambda_f}{\lambda_f}}.$$

Die Funktion wird mit λ_f potenziert:

$$\Leftrightarrow \frac{P_{i,t}}{P_t}^{\lambda_f} = (\int_0^1 Y_{i,t}^{\frac{1}{\lambda_f}} di)^{\lambda_f{}^2 - \lambda_f} Y_{i,t}^{1-\lambda_f}.$$

Da $Y_t = (\int_0^1 Y_{i,t}^{\frac{1}{\lambda_f}} di)^{\lambda_f}$ ergibt sich:

$$\frac{P_{i,t}}{P_t}^{\lambda_f} = Y_t^{\lambda_f - 1} Y_{i,t}^{1-\lambda_f}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_{i,t}}{P_t}^{\lambda_f} Y_t^{1-\lambda_f} = Y_{i,t}^{1-\lambda_f}$$

$$\Leftrightarrow Y_{i,t} = Y_t(\frac{P_{i,t}}{P_t})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}.^{1} \qquad (6)$$

Einsetzen in $Y_t = (\int_0^1 Y_{i,t}^{\frac{1}{\lambda_f}} di)^{\lambda_f}$ ergibt:

$$Y_t = (\int_0^1 Y_t^{\frac{1}{\lambda_f}} (\frac{P_{i,t}}{P_t})^{-\frac{1}{\lambda_f-1}} di)^{\lambda_f}.$$

Da Y_t und P_t unabhängig von i sind, können sie vor dass Integral gezogen werden:

$$Y_t = \frac{Y_t}{P_t^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}} (\int_0^1 P_{i,t}^{-\frac{1}{\lambda_f-1}} di)^{\lambda_f}$$

$$\Leftrightarrow P_t^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} = (\int_0^1 P_{i,t}^{-\frac{1}{\lambda_f-1}} di)^{\lambda_f}$$

$$\Leftrightarrow P_t = \left(\int_0^1 P_{i,t}^{-\frac{1}{\lambda_f-1}} di\right)^{-(\lambda_f-1)}. \qquad (7)$$

Die Endproduktpreise bzw. das allgemeine Preisniveau P_t ergibt sich aus den Preisen der Zwischenprodukte, gewichtet mit der Substitutionselastizität. Das i-te Produkt wird von einem Monopolisten hergestellt, der der Gleichung (6) als Nachfragekurve gegenüber steht. Ist die Substitutionselastizität λ_f sehr groß, lassen sich die Zwischengüter schwerer substituieren was dazu führt, dass die Endproduktfirma i viel Marktmacht hat und P_t sehr groß ist. Bei einem großen λ_f ist die Nachfragekurve des i-ten Monopolisten ebenfalls unelastisch. Ist λ_f nahe eins, sind die Zwischengüter nahezu perfekte Substitute, die Firma i hat kaum Marktmacht, die Nachfrage ist sehr elastisch.

2.2.2. Zwischengütersektor

Die Unternehmen im Zwischengütersektor konkurrieren unter monopolistischer Konkurrenz, d.h. es besteht Marktmacht. Die Produktionsfunktion des i-ten Monopolisten lautet:

$$Y_{i,t} = z_t H_{i,t}^{\gamma} I_{i,t}^{1-\gamma}, 0 < \gamma < 1 \qquad (8)$$

wobei z_t das Technologieparalevel mit Schock u_t ist mit folgender Form:[2]

$$\log(z_t) = \rho_z \log(z_{t-1}) + u_t \qquad (9)$$

mit $u_t \sim N(0,1), iid.$ $H_{i,t}$ beschreibt den Arbeitseinsatz des i-ten Monopolisten und $I_{i,t}$ den Gebrauch der Güter aus dem Zwischengütersektor.[3] Bei $\gamma < 1$ braucht jeder

[1] Man beachte hierbei, dass im Nenner nun $\lambda_f - 1$ anstatt $1 - \lambda_f$ und vor dem Bruch ein negatives Vorzeichen steht.

[2] Die Form ist angelehnt an Christiano, Trabandt und Walentin (2011, S. 309), allerdings wird hier kein Schock betrachtet, der zusätzlich Informationen aus der letzten Periode t-1 eenthält.

Zwischengüterproduzent zur Produktion den Output aller anderen Zwischengüterproduzenten. Bei $\gamma = 1$ wird der Output der anderen Zwischengüterproduzenten nicht benötigt und die Produktionsfunktion ähnelt der von Christiano, Eichenbaum und Evans (2005), bei der neben einem Technologiefaktor nur der Arbeitseinsatz in die Produktionsfunktion eingeht.

Jetzt gilt es, die Kosten- bzw. die Grenzkostenfunktion der Firma i zu bestimmen. Die Kostenfunktion ergibt sich aus einem Minimierungskalkül, bei dem die Kosten gegeben einer bestimmten Outputmenge $Y_{i,t}$ minimiert werden. Die Zielfunktion lautet:[4]

$$\min_{I_t, H_t} \overline{P_t}\, I_t + \overline{W_t} H_t{}^5$$

mit der Nebenbedingung:

$$z_t H_t^{\gamma} I_t^{1-\gamma} = Y_t.$$

Dies führt zu folgendem Lagrange-Problem:

$$L = \overline{P_t} I_t + \overline{W_t} H_t - \mu_t \left(z_t H_t^{\gamma} I_t^{1-\gamma} - Y_t \right).$$

Die Lösung dieses Problems ergibt die Kostenfunktion:[6]

$$C_t = \frac{Y_t}{z_t} \left(\frac{\overline{P_t}}{1-\gamma} \right)^{1-\gamma} \left(\frac{\overline{W_t}}{\gamma} \right)^{\gamma}.$$

Die Grenzkostenfunktion ergibt sich damit als:

$$MC_t = \frac{\partial C_t}{\partial Y_t} = \frac{1}{z_t} \left(\frac{\overline{P_t}}{1-\gamma} \right)^{1-\gamma} \left(\frac{\overline{W_t}}{\gamma} \right)^{\gamma}.$$

Christiano, Trabandt und Walentin (2011) nehmen an, dass $\overline{W_t}$ und $\overline{P_t}$ die folgende Form haben:

$$\overline{W_t} = (1 - v_t)(1 - \Psi + \Psi R_t) W_t$$
$$\overline{P_t} = (1 - v_t)(1 - \Psi + \Psi R_t) P_t.$$

Dies bedeutet, dass die nominalen Löhne bzw. Zwischenproduktpreise einen Aufschlag in Höhe von $(1 - v_t)(1 - \Psi + \Psi R_t)$ enthalten. $(1 - \Psi + \Psi R_t)$ beschreibt dabei den "working capital channel".[7] Für $0 < \Psi < 1$ müssen die Firmen einen Teil der

---

[3] Die Idee geht auf Basu (1995) zurück. Er schätzt das ca. die Hälfte des Outputs einer Firma als Input für eine andere Firma benutzt wird (Christiano, Trabandt und Walentin, 2011, S. 289). Daher wird in Kapitel 3, das die Reaktion des Modells auf den Technologieschock untersucht, auch γ=0,5 gesetzt.

[4] Da die Firma als repräsentativ angenommen wird, wird $Y_{i,t}$ aus Lesbarkeitsgründen durch Y_t ersetzt.

[5] Hier werden $\overline{P_t}$ und $\overline{W_t}$ anstelle von P_t und W_t verwendet, da der "working capital channel" eingeführt wird. Die Erläuterungen erfolgen weiter unten.

[6] Aus Platzgründen wird die Lösung des Problems im Anhang A) aufgezeigt.

[7] Die Wichtigkeit des "working capital channels" wird von Barth und Ramey (2002) betont, die Daten amerikanischer Firmen ausgewertet haben und dabei zum Schluss kamen, dass viele Unternehmen ihre kurzfristigen Kosten mit Krediten decken (Christiano, Trabandt und Walentin, 2011, S. 284).

Lohnkosten als auch die Kosten für die Zwischengüter, am Anfang der Periode durch kurzfristige Kredite zum Zinssatz R_t decken. Falls $\Psi = 1$ werden die gesamten Kosten, also sowohl die Lohnkosten als auch die Kosten für Zwischengüter, am Anfang der Periode bezahlt. Falls $\Psi = 0$ ist keine Kostendeckung bereits am Anfang der Periode notwendig, der "working capital channel" entfällt und man befindet sich diesbezüglich im Modell von Christiano, Eichenbaum und Evans (2005). Für $\Psi > 0$ stellt also auch der Zinssatz einen Teil der Kostenfunktion dar. v_t ist dabei eine Subvention die den Unternehmen gezahlt wird, um, wie später noch gezeigt wird, die Unvollkommenheit des Marktes – die Marktmacht und den "working capital channel" – auszugleichen.

Die realen Grenzkosten ergeben sich aus der Division der nominellen Grenzkosten durch das allgemeine Preisniveau P_t:

$$s_t = \frac{MC_t}{P_t} = \left(\frac{\overline{P_t}}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{\overline{W_t}}{\gamma}\right)^{\gamma} \frac{1}{z_t}\frac{1}{P_t}$$

mit $P_t = \frac{\bar{P}_t}{(1-v_t\ )(1-\Psi+\Psi R_t\ )}$ ergibt sich:

$$s_t = \frac{MC_t}{P_t} = \left(1 - v_t\ \right)\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{\overline{w}_t}{\gamma}\right)^{\gamma} \left(1 - \Psi + \Psi R_t\ \right) \tag{10}$$

wobei $\overline{w}_t$ das, um das Technologielevel korrigierte, reale Lohneinkommen ist:

$$\overline{w}_t \equiv \frac{\overline{W_t}}{z_t^{1/\gamma} P_t}.$$

Die nominalen Gewinne ergeben sich somit aus:

$$Gew_i = P_{i,t}Y_{i,t} - P_t s_t Y_{i,t} = (P_{i,t} - P_t s_t)Y_{i,t}.$$ [8]

$Y_{i,t}$ wird dann durch Gleichung (6) ersetzt:

$$Gew_i = \left(P_{i,t} - P_t s_t\right) Y_t \left(\frac{P_{i,t}}{P_t}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}}.$$

Die Firmen maximieren ihre Gewinne, indem sie $P_{i,t}$ optimal setzen:[9]

$$\frac{\partial Gew_i}{\partial P_{i,t}} = Y_t \left(\frac{P_{i,t}}{P_t}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} + \left(P_{i,t} - P_t s_t\right) Y_t \left(-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}\right) \left(\frac{P_{i,t}}{P_t}\right)^{\frac{1-2\lambda_f}{\lambda_f-1}} \frac{1}{P_t} = 0.$$

Kürzen von $Y_t \left(\frac{P_{i,t}}{P_t}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}$ ergibt:

$$1 + \left(P_{i,t} - P_t s_t\right)\left(-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}\right)\left(\frac{P_{i,t}}{P_t}\right)^{\frac{1-\lambda_f}{\lambda_f-1}} \frac{1}{P_t} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(P_{i,t} - P_t s_t\right)\left(-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}\right)\left(\frac{P_t}{P_{i,t}}\right)\left(\frac{1}{P_t}\right) = 0$$

---

[8] $P_t s_t$ sind dabei die nominellen Grenzkosten.

[9] Man beachte, dass $-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1} - 1 = -\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1} - \frac{\lambda_f-1}{\lambda_f-1} = \frac{1-2\lambda_f}{\lambda_f-1}$.

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1} + P_t s_t (\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1})(\frac{1}{P_{i,t}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\lambda_f - 1} + P_t s_t (\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1})(\frac{1}{P_{i,t}}) = 0.$$

Der Term wird multipliziert mit $\lambda_f - 1$ und $P_{i,t}$ und umgestellt:

$$P_{i,t} = P_t s_t \, \lambda_f. \tag{11}$$

Der Aufschlag auf die Grenzkosten $P_t s_t$ beträgt somit λ_f und ist unabhängig von i, d.h. es gilt $P_{i,t} = P_{j,t} \; \forall \; i, j$.[10] Ebenfalls gilt aus Gleichung (7), dass

$$P_t = (\int_0^1 P_{i,t}{}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} di)^{-(\lambda_f - 1)} = (P_{j,t}{}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} \int_0^1 1 di)^{-(\lambda_f - 1)} = P_{i,t} = P_{j,t}.$$

Da die Firmen identisch sind, sind auch das allgemeine Preisniveau und der Preis für alle Zwischengüter gleich.

Die vorherige Analyse wurde unter der Annahme durchgeführt, dass die Firmen die Preise zu jedem Zeitpunkt frei setzen bzw. reoptimieren könne. Ein "styliced fact" besteht aber darin, dass in der Volkswirtschaft Preisrigiditäten bestehen, d.h. die Firmen nicht in jeder Periode t+j ihre Preise wie in Gleichung (11) festlegen können. Das Modell nimmt Preisfriktionen nach Calvo (1983) an: Die Firmen können mit einer Wahrscheinlichkeit von 1-ζ_p die Preise neu setzen und mit einer Wahrscheinlichkeit von ζ_p bleibt der Preis der vorherigen Periode unverändert:

$$P_{i,t} := \begin{cases} \widetilde{P_t} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \zeta_p \\ P_{i,t-1} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \zeta_p \end{cases}$$

wobei $\widetilde{P_t}$ den neuen Preis darstellt, falls das repräsentative Unternehmen den Preis neu optimieren kann. Dieser Preis wird aufgrund der Preisrigiditäten nicht wie in Gleichung (11) gesetzt, sondern einem anderen Optimierungskalkül unterworfen. Im Rahmen dieses Optimierungskalküls wird berücksichtigt, dass das Unternehmen nicht in jeder Periode seine Preise optimieren kann. Falls optimiert werden kann, setzt die Firma den Preis, nur unter der Berücksichtigung von jenen Perioden in denen nicht optimiert werden kann:

$$\max_{\widetilde{P_t}} \; E_t \sum_{j=0}^{\infty} \left(\beta \zeta_p\right)^j v_{t+j} \left(\widetilde{P_t} - P_{t+j} s_{t+j}\right) Y_{i,t+j}. \tag{12}$$

$Y_{i,t+j}$ wird durch $Y_{i,t+j} = Y_{t+j} (\frac{\widetilde{P_t}}{P_{t+j}})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}}$ gemäß Gleichung (6) ersetzt, wobei $P_{i,t} = \widetilde{P_t}$ gesetzt wird:

[10] Wäre $\lambda_f = 1$, hätten die Unternehmen keine Marktmacht, es bestände vollkommener Wettbewerb und die Preise wären gleich den Grenzkosten.

$$\max_{\widetilde{P}_t} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\beta\zeta_p)^j v_{t+j} (\widetilde{P}_t - P_{t+j}s_{t+j}) Y_{t+j} (\frac{\widetilde{P}_t}{P_{t+j}})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}}.$$

Da die Firmen den Haushalten gehören und somit die Haushalte die Gewinne der Firma erhalten, wird die Bewertung zukünftiger Profite durch die Haushalte vorgenommen. Daher stellt $\beta^j v_{t+j}$ den Lagrange-Multiplikator der Budgetrestriktion der Haushalte in Periode t+j dar. Der eigentliche Multiplikator v_{t+j} wird um den Faktor um β^j verringert, da zukünftige Profite, d.h. zukünftiges Einkommen, aus heutiger Sicht geringer bewertet werden. Die Ableitung von Gleichung (I) nach C_{t+j} impliziert, dass $\beta^j v_{t+j} = \beta^j \frac{1}{C_{t+j}P_{t+j}}$, d.h. $v_{t+j} = \frac{1}{C_{t+j}P_{t+j}}$.[11]

Einsetzen in das Maximierungsproblem ergibt:

$$\max_{\widetilde{P}_t} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\beta\zeta_p)^j \frac{1}{C_{t+j}P_{t+j}} (\widetilde{P}_t - P_{t+j}s_{t+j}) Y_{t+j} (\frac{\widetilde{P}_t}{P_{t+j}})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}}$$

$$\Leftrightarrow \max_{\widetilde{P}_t} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\beta\zeta_p)^j \frac{Y_{t+j}}{C_{t+j}} P_{t+j}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1} - 1} (\widetilde{P}_t - P_{t+j}s_{t+j}) (\widetilde{P}_t)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}}.$$

Dabei ist $\frac{Y_{t+j}}{C_{t+j}}$ ein fixer Wert der unabhängig von der Zeit ist und vor den Erwartungswertoperator gezogen werden kann:[12]

$$\max_{\widetilde{P}_t} \frac{Y_{t+j}}{C_{t+j}} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\beta\zeta_p)^j P_{t+j}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1} - 1} \left(\widetilde{P}_t^{\,1 - \frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}} - P_{t+j}s_{t+j} \widetilde{P}_t^{\,-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}} \right).$$

Ableiten nach $\widetilde{P}_t$ und Nullsetzen ergibt:

$$\frac{Y_{t+j}}{C_{t+j}} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\beta\zeta_p)^j P_{t+j}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1} - 1} \left((1 - \frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}) \widetilde{P}_t^{\,-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}} + \frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1} P_{t+j}s_{t+j} \widetilde{P}_t^{\,-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1} - 1} \right) = 0.$$

[11] Alternativ kann v_{t+j} erklärt werden als der marginale Nutzenwert des Profites für die Haushalte: $v_{t+j} = \frac{U_{C,t+j}}{P_{t+j}} = \frac{1}{C_{t+j}P_{t+j}}$ mit $U_{c,t+j} = \frac{\partial U_{t+j}}{\partial C_{t+j}}$.

[12] Um diese Aussage zu beweisen, muss etwas vorgegriffen werden. Später wird gezeigt, dass die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion folgende Form hat: $Y_t = C_t + I_t = p_t^* z_t H_t^{\gamma} I_t^{1-\gamma}$ mit $p_t^* \leq 1$. Das Optimierungsproblem aus Gleichung (1) kann umgeschrieben werden in $\max_{c_t, H_t, i_t} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log c_t - \frac{H_t^{1+\emptyset}}{1+\emptyset})$ unter $c_t + i_t = H_t^{\gamma} i_t^{1-\gamma}$, wobei $c_t \equiv \frac{C_t}{(p_t^* z_t)^{\frac{1}{\gamma}}}$, $i_t \equiv \frac{I_t}{(p_t^* z_t)^{\frac{1}{\gamma}}}$. Da es keine "state" Variablen in diesem Optimierungsproblem gibt, gibt es keine intertemporalen Überlegungen und C_t und I_t sind ein fixer, proportionaler Anteil von $(p_t^* z_t)^{\frac{1}{\gamma}}$. Aus $Y_t = C_t + I_t$ folgt, dass auch Y_t ein fixer Anteil von $(p_t^* z_t)^{\frac{1}{\gamma}}$ist. Durch die Division $\frac{Y_t}{C_t}$ kürzt sich $(p_t^* z_t)^{\frac{1}{\gamma}}$ heraus, der Ausdruck ist folglich über die Zeit konstant und unabhängig von $(p_t^* z_t)^{\frac{1}{\gamma}}$. Ähnlich argumentieren Christiano, Trabandt und Walentin (2011, S. 296-297), um die effiziente Allokation zu ermitteln. Die effiziente Allokation wird in Kapitel 2.4 berechnet.

Dividieren durch $(1-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1})\widetilde{P}_t^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}-1}$ ergibt:[13]

$$\frac{Y_{t+j}}{C_{t+j}}E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j P_{t+j}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}-1}(\widetilde{P}_t-\lambda_f P_{t+j}s_{t+j})=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y_{t+j}}{C_{t+j}}E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j P_{t+j}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\left(\frac{\widetilde{P}_t}{P_{t+j}}-\lambda_f s_{t+j}\right)=0.$$

Da $\widetilde{P}_t$ unabhängig von j ist, kann es vor das Summenzeichen gezogen werden. Die Formel wird jetzt nach $\widetilde{P}_t$ umgeformt:

$$\frac{Y_{t+j}}{C_{t+j}}E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j P_{t+j}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\frac{\widetilde{P}_t}{P_{t+j}}=\frac{Y_{t+j}}{C_{t+j}}E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j P_{t+j}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+j}.$$

Mit $P_{t+j}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} * \frac{1}{P_{t+j}} = P_{t+j}^{\frac{1}{\lambda_f-1}}$ und kürzen von $\frac{Y_{t+j}}{C_{t+j}}$ ergibt die Auflösung nach $\widetilde{P}_t$:

$$\widetilde{P}_t=\frac{E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j P_{t+j}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+j}}{E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j P_{t+j}^{\frac{1}{\lambda_f-1}}}.$$

Dividieren der Gleichung mit P_t ergibt:[14]

$$\widetilde{p}_t\equiv\frac{\widetilde{P}_t}{P_t}=\frac{E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j\left(\frac{P_{t+j}}{P_t}\right)^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+j}}{E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j\left(\frac{P_{t+j}}{P_t}\right)^{\frac{1}{\lambda_f-1}}}.$$

Dabei gilt $\frac{P_{t+j}}{P_t}=\frac{P_{t+j}}{P_{t+j-1}}\frac{P_{t+j-1}}{P_{t+j-2}} * \ldots * \frac{P_{t+2}}{P_{t+1}}\frac{P_{t+1}}{P_t}=\pi_{t+1} * \pi_{t+2} * \ldots * \pi_{t+j}$.

Mit $X_{t,j}\equiv\begin{cases}\frac{1}{\pi_{t+1}*\pi_{t+2}\cdots\pi_{t+j}} & f\text{ür } j>0\\ 1 & f\text{ür } j=0\end{cases}$ ergibt sich:

$$\widetilde{p}_t=\frac{E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j(X_{t,j})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+j}}{E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j(X_{t,j})^{-\frac{1}{\lambda_f-1}}}\equiv\frac{K_t^f}{F_t^f}.\text{[15]} \qquad (13)$$

---

[13] Dabei gilt, dass $1-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}=\frac{\lambda_f-1}{\lambda_f-1}-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}=\frac{-1}{\lambda_f-1}$.

[14] Dividieren durch P_t bedeutet multiplizieren mit $\frac{1}{P_t}$. Um diesen Ausdruck sowohl im Nenner als auch im Zähler zu erhalten, wurde von folgender Algebra Gebrauch gemacht: $\frac{1}{P_t}=(\frac{1}{P_t})^{\frac{\lambda_f-1}{\lambda_f-1}}=(\frac{1}{P_t})^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} * (\frac{1}{P_t})^{\frac{-1}{\lambda_f-1}}=\frac{\left(\frac{1}{P_t}\right)^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}}{\left(\frac{1}{P_t}\right)^{\frac{1}{\lambda_f-1}}}$.

[15] Man beachte hier, dass $X_{t,j}$ als Kehrwert der multiplizierten Inflationsraten $\pi_{t+1} * \pi_{t+2} * \ldots * \pi_{t+j}$ definiert ist, sodass im Exponenten nun ein negatives Vorzeichen ist.

Für $\zeta_p = 0$, d.h. wenn in jeder Periode neu optimiert werden kann, zerfällt die obige Gleichung zu $\frac{\widetilde{P_t}}{P_t} = \lambda_f s_t \;\Leftrightarrow\; \widetilde{P_t} = P_t \lambda_f s_t$, was der Gleichung (11) entspricht.[16] Für $\zeta_p > 0$ setzen die Firmen ihre Preise so, dass $\widetilde{P_t} = P_t \lambda_f s_t$ über die Zeit im Schnitt erfüllt ist. K_t^f und F_t^f bezeichnen den Zähler bzw. den Nenner und können dabei auch in eine rekursive Schreibweise gebracht werden: [17]

$$K_t^f = \lambda_f s_t + \beta \zeta_p E_t (\pi_{t+1})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}} * K_{t+1}^f \tag{14}$$

$$F_t^f = 1 + \beta \zeta_p E_t (\pi_{t+1})^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} F_{t+1}^f. \tag{15}$$

Gleichung (7) muss nun umgeschrieben werden, indem man wieder die Calvo-Logik zugrunde legt: Der Anteil (1-ζ_p) der Unternehmen wählt den Preis $\widetilde{P_t}$, d.h. dieser Teil der Unternehmen optimiert neu. Folglich behält der Anteil ζ_p den alten Preis P_{t-1}. Dies impliziert:

$$P_t^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} = \int_0^{1-\zeta_p} P_{i,t}{}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} di + \int_{1-\zeta_p}^1 P_{i,t}{}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} di$$

wobei der erste Ausdruck auf der rechten Seite den Anteil der Unternehmen beinhaltet, die den Preis neu setzen. Der zweite Ausdruck beinhaltet den Anteil der Unternehmen, die den Preis nicht neu setzen können, also P_{t-1}. Da $\widetilde{P_t}$ und P_{t-1} unabhängig von i sind, können sie vor das Integral gezogen werden, es ergibt sich:

$$P_t^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} = (1 - \zeta_p) \widetilde{P_t}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} + \zeta_p P_{t-1}{}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \zeta_p) \widetilde{P_t}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} = P_t^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} - \zeta_p P_{t-1}{}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}}$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{P_t}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} = \frac{P_t^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} - \zeta_p P_{t-1}{}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}}}{1 - \zeta_p}.$$

Dividieren der Gleichung durch $P_t^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}}$ führt zu:

$$\frac{\widetilde{P_t}}{P_t}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} = \frac{1 - \zeta_p (\frac{P_{t-1}}{P_t})^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}}}{1 - \zeta_p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\widetilde{P_t}}{P_t}^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} = \frac{1 - \zeta_p (\frac{P_t}{P_{t-1}})^{\frac{1}{\lambda_f - 1}}}{1 - \zeta_p}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{p}_t \equiv \frac{\widetilde{P_t}}{P_t} = \left(\frac{1 - \zeta_p (\pi_t)^{\frac{1}{\lambda_f - 1}}}{1 - \zeta_p}\right)^{-(\lambda_f - 1)} = \frac{K_t^f}{F_t^f}.$$

[16] Hier wurde s_t und nicht s_{t+j} gewählt, da in jeder Periode neu optimiert werden kann.
[17] Die Herleitung dieser Schreibweise befindet sich im Anhang B).

Dies impliziert, dass:

$$K_t^f = F_t^f \left(\frac{1-\zeta_p(\pi_t)^{\frac{1}{\lambda_f - 1}}}{1-\zeta_p}\right)^{-(\lambda_f - 1)}. \tag{16}$$

Abschließend wird noch der Relativpreis der Arbeit und der Materialien betrachtet. Falls $\gamma < 1$ ergibt sich aus der Produktionsfunktion(Gleichung (8)), dass der i-te Monopolist neben Arbeit auch Materialien zur Herstellung von Y_i benötigt. Der Relativpreis ergibt sich aus Gleichung (8) durch die relative Grenzproduktivität:

$$\frac{\bar{W}_t}{\bar{P}_t} = \frac{W_t}{P_t} = \frac{z_t \gamma H_t^{\gamma-1} I_t^{1-\gamma}}{z_t(1-\gamma) H_t^{\gamma} I_t^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{I_t}{H_t}. \tag{17}$$

Der Relativpreis ist damit unabhängig vom Outputpreis der i-ten Firma, $P_{i,t}$.

2.3 Aggregierte Input- und Gleichgewichtsbedingungen

Christiano, Trabandt und Walentin (2011, S. 294) betonen, dass, anders als in den "alt"-keynesianischen Modellen, die neu-keynesianischen Modelle ohne eine aggregierte Produktionsfunktion auskommen. Die neu-keynesianischen Modelle betrachten viele einzelne Unternehmen, wodurch der Verteilung der Inputs innerhalb der Volkswirtschaft auf die einzelnen Unternehmen eine besondere Bedeutung zukommt. Dadurch ist bei einem gegebenen Technologiestand und einer gegeben Ausstattung der Volkswirtschaft der Output nicht sofort bestimmbar. Der Output Y_t wird maximal, wenn der Input über alle Firmen gleichmäßig verteilt ist, da die Firmen identisch sind; eine ungleichmäßige Verteilung impliziert somit eine Verringerung von Y_t. In dem hier betrachteten Modell sind die Ressourcen ungleich verteilt, falls $P_{i,t}$ für verschiedene i´s unterschiedlich ist. Die unterschiedlichen Preise entstehen, wenn Preisrigiditäten in Verbindung mit Inflation auftreten. Dies führt dazu, dass Firmen mit zu niedrigen Preisen zu viel produzieren, Firmen mit zu hohen Preisen hingegen zu wenig. Der Verlust kann mit Hilfe der Algebra von Yun (1996) berechnet werden. Dazu sei Y_t^* definiert als ein Integral über die Zwischengüterproduzenten:

$$Y_t^* \equiv \int_0^1 Y_{i,t} di = \int_0^1 z_t \left(\frac{H_{i,t}}{I_{i,t}}\right)^{\gamma} I_{i,t} di = z_t H_t^{\gamma} I_t^{1-\gamma}. \tag{18}$$

Die letzte Umformung ergibt sich aus de Eigenschaften des Gleichgewicht auf dem Arbeits- bzw. Materialmarkt. Alternativ ergibt sich die letzte Umformung aus der Tatsache, dass alle Unternehmen den gleichen Anteil von H_t und I_t in ihrer Produktionsfunktion vorweisen (Gleichung (17)). Y_t^* kann ebenfalls durch die Nachfragekurve (Gleichung (6)) dargestellt werden:

$$Y_t^* \equiv \int_0^1 Y_{i,t} di = Y_t \int_0^1 \frac{P_{i,t}}{P_t}^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}} di = Y_t P_t^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}} \int_0^1 P_{i,t}^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f - 1}} di.$$

Sei

$$P_t^* \equiv \left(\int_0^1 P_{i,t}{}^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} di\right)^{-\frac{\lambda_f-1}{\lambda_f}}. \tag{19}$$

Dann gilt:

$$Y_t^* = Y_t P_t^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} P_t^{*\,-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} = Y_t (\frac{P_t}{P_t^*})^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}$$

$$\Leftrightarrow Y_t = Y_t^* (\frac{P_t^*}{P_t})^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} = z_t H_t^{\gamma} I_t^{1-\gamma} p_t^* \tag{20}$$

wobei:

$$p_t^* \equiv \left(\frac{P_t^*}{P_t}\right)^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}. \tag{21}$$

p_t^* ist das Verhältnis zwischen dem Zwischengutpreis P_t^* und dem allgemeinen Preisniveau P_t und ein Maß für die Effizienz der Inputverteilung. Gilt $p_t^* = 1$, bedeutet dies, dass $P_{i,t} = P_{j,t}$ und j, i. Laut Gleichung (21) kann p_t^* den maximalen Wert von eins nur annehmen, falls alle Firmen identische Preise setzen. Tritt der Fall ein, dann ist der Input gleichmäßig verteilt und Y_t ist maximal. Bei $p_t^* < 1$ ist die Verteilung ineffizient.

p_t^* kann umgeschrieben werden. Dabei gilt wieder, dass der $(1-\zeta_p)$ Anteil der Firmen ihre Preise neu setzen können, der Anteil von ζ_p kann dies nicht:

$$P_t^{*\,-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} = (1-\zeta_p)\widetilde{P}_t{}^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} + \zeta_p P_{t-1}{}^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}.$$

Multiplizieren des Ausdruckes mit $(\frac{1}{P_t})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}$ ergibt:

$$(\frac{P_t^*}{P_t})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} = (1-\zeta_p)(\frac{\widetilde{P}_t}{P_t})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} + \zeta_p(\frac{P_{t-1}^*}{P_t})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}.$$

Aus $\frac{\widetilde{P}_t}{P_t}^{-\frac{1}{\lambda_f-1}} = \frac{1-\zeta_p(\frac{P_t}{P_{t-1}})^{\frac{1}{\lambda_f-1}}}{1-\zeta_p}$ folgt:

$$\frac{P_t^*}{P_t}^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} = (1-\zeta_p)(\frac{1-\zeta_p \pi_t^{\frac{1}{\lambda_f-1}}}{1-\zeta_p})^{\lambda_f} + \zeta_p(\frac{P_{t-1}^*}{P_{t-1}}\frac{P_{t-1}}{P_t})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}.$$

Der letzte Ausdruck der Gleichung wird wie folgt umgeschrieben:

$$\zeta_p(\frac{P_{t-1}^*}{P_{t-1}}\frac{P_{t-1}}{P_t})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} = \zeta_p p_{t-1}^{*\,-1}\frac{1}{\pi_t}^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} = \zeta_p \frac{\pi_t}{p_{t-1}^*}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}.$$

Mit Gleichung (21) vereinfacht sich der obige Ausdruck zu:

$$p_t^* = \left[(1-\zeta_p)\left(\frac{1-\zeta_p \pi_t^{\frac{1}{\lambda_f-1}}}{1-\zeta_p}\right)^{\lambda_f} + \zeta_p \frac{\pi_t}{p_{t-1}^*}^{\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\right]^{-1}. \tag{22}$$

In der Periode t bestehen also Preisrigiditäten, falls in der vorherigen Periode $t-1$ ebenfalls Preisrigiditäten existieren oder falls in der jetzigen Periode Inflation herrscht, d.h. $\pi_t > 1$ und/oder $p_{t-1}^* < 1$.

Der Zusammenhang zwischen aggregiertem Input und Output ist somit der folgende:

$$C_t + I_t = p_t^* z_t H_t^{\gamma} I_t^{1-\gamma}. \tag{23}$$

Das obige System besteht aus elf Variablen, $C_t, H_t, I_t, R_t, \pi_t, p_t^*, K_t^f, F_t^f, \frac{W_t}{P_t}, s_t$ und v_t, mit neun Gleichungen (3), (4), (10), (14), (15), (16), (17), (22), (23). Da das System nicht eindeutig lösbar ist, werden noch Größen für v_t und der Zins benötigt.

2.4 Taylor-Regel, optimale Subvention und effiziente Allokation

Die Gleichung für den Zins, der von der Zentralbank festgelegt wird, folgt einer Taylor-Regel, d.h. die Zentralbank setzt den Zins in Abhängigkeit der erwarteten Inflation und der Outputlücke. Die Taylor-Regel, die hier bereits im steady-state linearisiert wurde, nimmt folgende Form an:[18]

$$\hat{R}_t = r_\pi E_t(\hat{\pi}_{t+1}) + r_x x_t.$$

Die Subvention v_t wird im steady-state so gesetzt, dass jegliche Marktineffizienzen – die Marktmacht der Unternehmen und der "working capital channel" – wegsubventioniert werden und die Produktion sowie die Beschäftigung optimal sind. Die Subvention v ist effizient, wenn sie so gesetzt wird, dass die sozialen Grenzkosten dem sozialen Grenzertrag entsprechen. Dadurch wird das soziale Optimum erreicht.

Es soll nun die gesamtwirtschaftliche Kostenfunktion ermittelt werden. Dabei gilt, dass alle Unternehmen i identisch sind, d.h. $Y_{i,t} = Y_{j,t} = Y_t$, und dass die sozialen Kosten bzw. Grenzkosten sich aus der Kostenfunktion eines repräsentativen Monopolisten ergeben. Die sozialen Grenzkosten lauten:

$$\mathrm{SGK_t} = (\frac{P_t}{1-\gamma})^{1-\gamma} (\frac{W_t}{\gamma})^{\gamma} \frac{1}{z_t}.$$

Im Gegensatz zur Grenzkostenfunktion des Monopolisten werden hier direkt P_t und W_t anstatt $\overline{P_t}$ und $\overline{W_t}$ betrachtet, d.h. der "working capital channel" ist nicht Teil der sozialen Grenzkosten. Die sozialen Kosten setzen sich zusammen aus den Kosten für die Zwischenprodukte P_t, die bei der Herstellung des Endprodukts verbraucht werden, und dem Lohn, da zur Produktion Arbeit aufgewendet wird.[19] Der soziale Grenzertrag ergibt sich aus der Gleichung $G_t = P_t Y_t - \int_0^1 P_{i,t} Y_{i,t} di$. Daher stellt der Grenzertrag von Y_t das Preisniveau P_t dar. Im Optimum muss daher gelten:

---

[18] Die Form wurde entnommen aus Christiano, Trabandt und Walentin (2011), S. 299.

[19] Da es auf dem Arbeitsmarkt keine Ineffizienzen gibt, müssen diese bei der Festlegung der Subvention nicht beachtet werden.

$$(\frac{P_t}{1-\gamma})^{1-\gamma}(\frac{W_t}{\gamma})^{\gamma}\frac{1}{z_t} = P_t$$

bzw.:

$$(\frac{1}{1-\gamma})^{1-\gamma}(\frac{w_t}{\gamma})^{\gamma} = 1$$

mit $w_t = \frac{W_t}{z_t^{\frac{1}{\gamma}} P_t}$.[20]

Um die optimale Subvention zu bestimmen, wird die Gleichung (11) verwendet:

$$P_t = P_t s_t \lambda_f \text{ bzw. } s_t \lambda_f = 1.$$

Da der steady-state betrachtet wird, wird in der obigen Gleichung für s_t der steady-state Wert aus Gleichung (10) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$\lambda_f(1-v)(1-\Psi+\Psi R)[(\frac{1}{1-\gamma})^{1-\gamma}\left(\frac{w}{\gamma}\right)^{\gamma}] = 1.$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern beschreibt die, durch P_t dividierten, sozialen Grenzkosten. Da dieser Quotient im Optimum gleich eins sein muss, lautet die optimale Subvention:

$$(1-v) = \frac{1}{\lambda_f(1-\Psi+\Psi R)}. \quad (24)$$

Mit der Subvention werden zwei Ineffizienzen beseitigt: Die Marktmacht und die zusätzliche Finanzierung aufgrund des "working capital channels".

Ist die optimale Subvention bekannt, kann auch die effiziente Allokation ermittelt werden. Dabei gilt, dass aufgrund der Subvention keine Marktineffizienzen mehr vorherrschen, und dass es keine Inflation bzw. Preisrigiditäten gibt. Dies bedeutet, dass $\pi = 1$ und $p_t^* = 1$, d.h. p_t^* ist maximal, damit auch der Output Y_t.

Da alle Unternehmen i identisch sind, gilt dass $H_{i,t} = H_{j,t} = H_t$ und $Y_{i,t} = Y_{j,t} = Y_t$. Damit gilt für die gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion:

$$Y_t = C_t + I_t = z_t \; H_t^{\gamma} I_t^{1-\gamma}. \quad (25)$$

Die Produktionsfunktion wird noch um das Technologielevel korrigiert, indem man diese mit $\frac{1}{z_t^{\frac{1}{\gamma}}}$ multipliziert. Es ergibt sich:[21]

$$y_t = c_t + i_t = H_t^{\gamma} i_t^{1-\gamma}.$$

---

[20] In diesem Fall gilt nicht, dass $P_t = \frac{\bar{P}_t}{(1-v_t)(1-\Psi+\Psi R_t)}$, sondern $P_t = \bar{P}_t$.

[21] Hierbei gilt, dass $\frac{z_t}{z_t^{\frac{1}{\gamma}}} = z_t \; z_t^{-\frac{1}{\gamma}} = z_t^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = z_t^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, sodass sich $i_t^{1-\gamma}$ mit den beschriebenen Definitionen ergibt.

Dabei wurden C_t und I_t wie folgt angepasst:

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{z_t^{\frac{1}{\gamma}}}, c_t \equiv \frac{C_t}{z_t^{\frac{1}{\gamma}}},\ i_t \equiv \frac{I_t}{z_t^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

Es entsteht ein neues Optimierungsproblem. Die Lösung des folgenden Optimierungsproblems ergibt die effiziente Allokation:[22]

$$\max_{c_t,H_t,i_t} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log c_t - \frac{H_t^{1+\emptyset}}{1+\emptyset}) \text{ unter } c_t + i_t = H_t^{\gamma} i_t^{1-\gamma}. \tag{26}$$

Daraus ergibt sich folgendes Optimierungsproblem:

$$L = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log c_t - \frac{H_t^{1+\emptyset}}{1+\emptyset}) - \lambda_t\left(c_t + i_t - H_t^{\gamma} i_t^{1-\gamma}\right).$$

Die Lösung dieses Problems führt zu folgenden Werten für H_t, c_t und i_t:

$$H_t = 1 \tag{27}$$

$$i_t = (1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$c_t = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Im Optimum lautet das Arbeitsangebot eins und ist unabhängig von allen Schocks. Mit $y_t = c_t + i_t$ ergibt sich für das korrigierte Y_t:

$$y_t = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} + (1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} = (1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{1-\gamma}\right).$$ [23]

Der natürliche Zins bringt Konsum und Beschäftigung auf das natürliche Niveau. Die Berechnung erfolgt aus Gleichung (2), wobei dort wieder keine Inflation herrscht, d.h. $\pi_{t+1} = 1$ gilt. Es folgt:

$$\frac{1}{C_t^*} = \beta E_t \frac{1}{C_{t+1}^*} R_t^*$$

$$\Leftrightarrow R_t^* = \frac{1}{\beta} E_t \frac{C_{t+1}^*}{C_t^*}.$$

Mit $C_t^* = c_t z_t^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} z_t^{\frac{1}{\gamma}}$ gilt:

$$R_t^* = \frac{1}{\beta} E_t \frac{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} z_{t+1}^{\frac{1}{\gamma}}}{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} z_t^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{1}{\beta} E_t \left(\frac{z_{t+1}}{z_t}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{28}$$

---

[22] Die Lösung dieses Problems ist identisch mit der Ramsey-optimalen Lösung, die sich bei der Maximierung von Gleichung (1) mit Hilfe der elf Variablen $C_t, H_t, I_t, R_t, \pi_t, , p_t^*, K_t^f, F_t^f, \frac{W_t}{P_t}$, s_t und v_t gemäß den neun Gleichungen (3), (4), (10), (14), (15), (16), (17), (22), (23) ohne Marktineffizienzen ergeben hätte (Christiano, Trabandt und Walentin, 2011, S. 296-297).

[23] Falls γ gegen eins geht, wird dieser Ausdruck maximal. Dies ergibt aus der Tatsache, dass bei $\gamma = 1$ keine Zwischengüter in der Produktion benötigt werden und daher mehr produziert und konsumiert werden kann.

Die Interpretation des natürlichen Zinsniveaus folgt im nächsten Unterabschnitt. Hier soll noch betont werden, dass hier y_t, c_t und i_t konstante Werte sind, Y_t, C_t und I_t in der Zeit aber variabel sind, da sie noch von $z_t^{\frac{1}{\gamma}}$ abhängen.

3. Reaktion des Modells auf den technologischen Schock

Im verbleidenden Kapitel soll untersucht werden, wie das oben hergeleitete Modell bei Betrachtung verschiedener Parameterwerte auf einen Technologieschock reagiert. Dazu wird das System um den steady-state Wert linearisiert. Die linearisierten Gleichungen lauten (Christiano, Trabandt und Walentin, 2011, S. 303-304):

$$\hat{R}_t^* = E_t \frac{1}{\gamma} \frac{z_{t+1}}{z_t} \tag{29}$$

$$\hat{\pi}_t = \kappa_p \left[\gamma(1+\phi) x_t + \alpha_\Psi \hat{R}_t \right] + \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} \tag{30}$$

$$x_t = E_t \left[x_{t+1} - \left(\hat{R}_t - \hat{\pi}_{t+1} - \hat{R}_t^* \right) \right] \tag{31}$$

$$\hat{R}_t = r_\pi E_t(\hat{\pi}_{t+1}) + r_x x_t \tag{32}$$

$$\log(z_t) = \rho_z \log(z_{t-1}) + u_t \tag{33}$$

mit

$$\kappa_p \equiv \frac{\left(1-\beta\xi_p\right)(1-\xi_p)}{\xi_p}$$

$$\alpha_\Psi \equiv \frac{\Psi}{(1-\Psi)\beta + \Psi}.$$

$\hat{R}_t^*$ ist die Abweichung des natürlichen Zinssatz vom zugehörigen steady-state Wert, $\hat{\pi}_t$ die Abweichung der Inflation vom zugehörigen steady-state Wert, x_t die Outputlücke und $\hat{R}_t$ der Zinssatz, den die Zentralbank festlegt. Folgende Werte für die Parameter wurden in der Analyse mit Hilfe des Programms Dynare verwendet:[24]

Tabelle 1: Parameterwerte der Analyse

Parameter	Wert	Beschreibung
β	0,99	Diskontfaktor
r_π	1,5	Inflations-Koeffizient der Taylor-Regel
r_x	0,1	Output-Lücken-Koeffizient der Taylor-Regel
ϕ	0,1	Arbeitselastizität
ρ_z	0,9	Persistenz des Technologielevels
ξ_p	0,75	Anteil der Unternehmen, die den Preis nicht neu setzen dürfen

[24] Gegeben dieser Parameter werden γ und Ψ verändert und der jeweilige Effekt des Schocks u_t untersucht. Es werden die Gleichungen (29), (30), (31), (32) betrachtet.

Wichtig ist, dass hier Abweichungen vom steady-state Wert betrachtet werden. Der steady-state Wert bspw. des Konsums lautet $c = \frac{C_t}{z_t^{\frac{1}{\gamma}}} = (\frac{\gamma}{1-\gamma})(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$ und ist konstant gegeben $z_t^{\frac{1}{\gamma}}$. Falls sich z_t ändert, ändern sich auch der steady-state Wert von C_t etc. Falls z_t z.B. steigt, folgt aus der Produktionsfunktion (Gleichung (8)), dass auch Y_t bei gegebenen Inputfaktoren und folglich auch C_t steigt. Trotz eines gestiegenen Konsums zur negativen Abweichung c_t vom steady-state Wert kommen, da in c_t auch z_t enthalten ist. Die Abweichungen vom steady-state umfassen nur Werte, die bereits um den Schock "korrigiert" sind.

Falls der Schock u_t um eine Standardabweichung nach oben ausschlägt, wirkt sich der Ausschlag zuerst auf den Technologieparameter z_t aus, da dieser folgende, von γ und Ψ unabhängige Form hat:[25] $\log(z_t) = \rho_z \log(z_{t-1}) + u_t$. Da $\log(z_t)$ allerdings ein stationärer Prozess ist, wird z_t über die Zeit sinken und gegen den steady-state Wert von eins konvergieren. Dies bedeutet, dass der positive Technologieschock verpufft und sich die Produktionsmöglichkeiten sich ein normales Niveau einpendeln.[26] Aufgrund der additiven Nutzenfunktion wird der Konsument seinen Konsum glätten, d.h. wenn C_{t+1} sinkt wird auch C_t sinken. Aus Gleichung (28) folgt, dass sich das natürliche Zinsniveau aus dem relativen Konsum in t+1 und t ergibt. Das natürliche Zinsniveau sinkt, falls $z_{t+1} < z_t$. Da der positive Schock bald verpufft, erwartet der Konsument geringere Konsummöglichkeiten in der Zukunft. Um diesen Konsumeinbruch zu glätten, reduziert er bereits in Periode t seinen Konsum und verschiebt diesen auf die Zukunft, d.h. er spart. Der Konsumrückgang in Periode t führt zum Sinken des natürliche Zinsniveaus, da der Konsument spart. Der Effekt ist umso größer, je kleiner γ ist: Je kleiner γ, desto stärker werden die Zwischengüter in der Produktionsfunktion gewichtet und desto geringer ist der Konsum, da ein größerer Teil des Gesamtoutputs in die Produktion der Zwischengüter fließen. Aufgrund der logarithmischen Nutzenfunktion ist bei einem geringen Konsumniveau die intertemporale Verteilung besonders wichtig.

Bei einem positiven Schock wird laut Gleichung (29) der natürliche Zins $\hat{R}_t^*$ negativ vom steady-state Wert abweichen. Die Abweichung ist umso größer, je kleiner γ ist. Dies kann graphisch verdeutlicht werden anhand eines Vergleiches der Abbildungen 1 und 2 mit den Abbildungen 3 und 4 (siehe Anhang D)).[27] Bei den ersten beiden Abbildungen ist

---

[25] Hier wurde für den Schock eine Standardabweichung von 1000 angenommen, wobei das qualitative Ergebnis von der Höhe der Standardabweichung unabhängig ist.
[26] Als Beispiel eines temporären positiven "technologischen" Schocks kann ein besser funktionierender Arbeitsmarkt während einer Boomphase sein.
[27] Diese Abbildungen stellen Impulsreaktionsfunktionen dar, welche darstellen, wie die Variablen des Modells auf Schocks reagieren.

$\gamma = 1$, bei den beiden anderen $\gamma = 0{,}5$. Bei den Abbildungen 3 und 4 ist die Abweichung vom steady-state Wert größer als bei den Abbildungen 1 und 2. Der steady-state Wert wird in allen Fällen innerhalb der gleichen Anzahl von Perioden wieder erreicht.

Konnten die Wirkungen auf die Variablen z_t und $\hat{R}_t^*$ einzeln analysiert werden, müssen die drei Variablen, die Inflation $\hat{\pi}_t$, die Output-Lücke x_t und der Zins aus der Taylor-Regel $\hat{R}_t$, simultan gelöst werden, da die Wirkung wechselseitig ist.

Als erstes soll die Output-Lücke betrachtet werden, da diese positiv vom Zinssatz beeinflusst wird und den Anfang der Wirkungskette darstellt. Steigt der natürliche Zinssatz aufgrund des technologischen Schocks kann dies so interpretiert werden, dass die Konsumenten Kredite aufnehmen, um heute mehr zu konsumieren. Der Konsum liegt über dem steady-state Wert, was zu einer positiven Output-Lücke führt.

Im vorliegenden Fall sinkt das natürliche Zinsniveau bedingt durch die Konsumglättung temporär ab, d.h. es entsteht eine negative Output-Lücke. Da für kleine γ der natürliche Zinssatz stärker sinkt ist die Output-Lücke c.p. größer. Die Output-Lücke hat für $r_x > 0$ einen gleichgerichteten Einfluss auf den Zinssatz, d.h. die negative Output-Lücke veranlasst die Zentralbank zu einer Zinssenkung. Die Zinssenkung wiederum wirkt in umgekehrter Richtung auf die Output-Lücke.

Sowohl die Output-Lücke als auch der Zinssatz werden positiv von der Inflation, genauer gesagt von der erwarteten Inflation in t+1, beeinflusst. Für ein gegebenes $\hat{R}_t$ senkt $\hat{\pi}_{t+1}$ den "Realzins" $\hat{R}_t$-$\hat{\pi}_{t+1}$ und erhöht den Anreiz heute zu konsumieren, was die Nachfrage und damit die Output-Lücke erhöht.[28] Aufgrund der Form der Taylor-Regel reagiert die Zentralbank überproportional stark auf die Inflation mit $r_\pi > 1$, was der Realität entspricht. Zinserhöhungen sollen die Nachfrage und die Inflation senken.

Die Output-Lücke als auch der Zins beeinflussen ebenfalls die Inflation positiv: Eine positive Output-Lücke zeigt die Überhitzung der Volkswirtschaft an, die Inflation steigt. Wichtig ist zu erkennen, dass der Einfluss der Output-Lücke auf die Inflation vom Parameter γ abhängt. Je kleiner γ ist, desto wichtiger sind die Zwischengüter in der Produktionsfunktion der Monopolisten und desto kleiner ist der Einfluss der Output-Lücke auf die Inflation. Mit einer steigenden Bedeutung der Zwischengüter in der Produktion sinkt der Anreiz der Unternehmen im Zwischengütersektors, die Preise zu erhöhen, da dies erhöhte Grenzkosten für die Unternehmen impliziert. Für $\Psi > 0$ ist der "working capital channel" aktiv, d.h. die Unternehmen müssen zu Beginn der Periode einen Teil der Lohn- und Kapitalkosten leisten und benötigen deshalb kurzfristige Anleihen. In diesem Fall wirkt sich eine Erhöhung des Zinssatzes positiv auf die

[28] $\hat{R}_t$-$\hat{\pi}_{t+1}$ stellt nicht den Realzins dar, da die Inflation in t+1 gemessen wird, der Zins aber in t. Dennoch ist die Argumentation ähnlich.

Grenzkosten und damit auf die Inflation aus. Je größer Ψ, desto größer der Einfluss des Zinssatzes (Christiano, Trabandt und Walentin, 2011, S. 298).

Als Ausgangssituation für die Analyse einer Variation von γ und Ψ gilt der Standardfall des Neu-Keynesianismuses: Für die Produktion werden keine Zwischengüter benötigt und es gibt keinen "working capital channel", d.h. $\gamma = 1$ und $\Psi = 0$ (vgl. Abb. 1 im Anhang D)). Die Ausgangssituation wird zuerst verglichen mit dem Fall $\gamma = 1$ und $\Psi = 0{,}5$, d.h. es werden keine Zwischengüter benötigt, aber der "working capital channel" ist aktiv. Der Verlauf des natürlichen Zinssatzes ist identisch, da γ gleich ist. Die Ausschläge der Inflation und des Zinses sind beim aktiven "working capital channel" größer, der Ausschlag der Output-Lücke geringer (vgl. Abb. 2 im Anhang D)). Diese unterschiedliche Parameterkonstellation schlägt sich darin nieder, dass die Zinserhöhung bei $\Psi = 0{,}5$ einen positiven Effekt auf die Inflation hat, da sich die Grenzkosten der Unternehmen verändern. Für eine gegebene Output-Lücke führt im hier betrachteten Fall die Senkung des Zinssatzes also zu einer kleineren Inflation. Diese kleinere Inflation führt wiederrum zu einem kleineren Zinssatz, da die Zentralbank stärker eingreift usw. Die Output-Lücke ist geringer als im Fall $\Psi = 0$, da sich der niedrigere Zinssatz und die geringere Inflation teilweise ausgleichen: Da $\hat{R}_t$ mit einem positiven Vorzeichen, $\hat{\pi}_{t+1}$ mit einem negativen Vorzeichen in x_t eingehen, heben sich die Effekte teilweise auf, der "Realzins" $\hat{R}_t$-$\hat{\pi}_{t+1}$ sinkt weniger als im Standardfall, was, wie bereits beschrieben, x_t nicht so stark fallen lässt.

Als Nächstes wird der Standardfall $\gamma = 1$ und $\Psi = 0$ verglichen mit dem Fall, dass es keinen "working capital channel" gibt, allerdings Zwischengüter in der Produktion benötigt werden, d.h. $\gamma = 0{,}5$ und $\Psi = 0$ (vgl. Abb. 3 im Anhang D)). Wie bereits beschrieben ist der Ausschlag des natürlichen Zinses größer, da γ kleiner ist. Dies führt dazu, dass auch x_t stärker nach unten ausschlägt und damit auch $\hat{R}_t$ und $\hat{\pi}_t$. Im betrachteten Fall schlägt die Inflation stärker aus. Dies wird durch den Term $\gamma(1+\phi)x_t$ verursacht. γ sinkt dabei von eins auf 0,5, allerdings steigt x_t (absolut) stärker als γ sinkt. Die Output-Lücke x_t verändert sich ca. um das Dreifache, der Zins sinkt, da sowohl $\hat{\pi}_{t+1}$ als auch x_t sinken.

Jetzt wird noch der Fall betrachtet indem sowohl der "working capital channel" aktiv ist als auch Zwischengüter für die Produktion benötigt werden, d.h. es soll $\gamma = 0{,}5$ und $\Psi = 0{,}5$ gelten (Abb. 4 im Anhang D)). Zuerst soll der Vergleich nicht mit dem Standardfall, sondern mit $\gamma = 0{,}5$ und $\Psi = 0$ gezogen werden, also mit dem zuletzt betrachteten Fall. Da γ gleich groß ist, ist der Ausschlag des natürlichen Zinses in beiden Fällen identisch. Wenn beide Kanäle aktiv sind, sind die Ausschläge der Inflation und des Zinses größer, die Output-Lücke ist geringer. Da bei $\Psi = 0{,}5$ der "working capital channel" aktiv ist, hat die Senkung des Zinssatzes im Gegensatz zum Fall $\Psi = 0$ eine verstärkende Wirkung auf die Inflation. Die Inflation wiederum wirkt sich stärker auf den Zinssatz aus, sodass beide Größen stärker als vorher ausschlagen. Da beide Größen mit unterschiedlichen Vorzeichen in die Output-Lücke eingehen, neutralisieren sich die Effekte teilweise, die Output-Lücke wird kleiner.

Abschließend soll noch der Fall $\gamma = 0{,}5$ und $\Psi = 0{,}5$ mit dem Standardmodell $\gamma = 1$ und $\Psi = 0$ verglichen werden. Da γ gesunken ist, ist der Ausschlag des natürlichen Zinsen größer, der Ausschlag der Inflation ist ebenfalls größer. Zwar ist der Term $\gamma(1+\phi)x_t$ ist bei $\gamma = 0{,}5$ im Gegensatz zu $\gamma = 1$ absolut gesunken, da x_t nicht so stark gestiegen ist um die Verringerung von γ auf 0,5 zu kompensieren. Allerdings ist der "working capital channel" aktiv, der Zinsausschlag erhöht die Grenzkosten und damit die Inflation. Der "working capital channel" überkompensiert den geringeren Effekt des Terms $\gamma(1+\phi)x_t$, die Inflation sinkt stärker. Aufgrund der geringeren Inflation sinkt auch $\hat{R}_t$ stärker. Auch die Outputlücke ist größer, da ein größerer Ausschlag der Inflation und ein niedrigeres natürliches Zinsniveau den niedrigeren Zinssatz $\hat{R}_t$ überkompensieren.

4. Fazit und Ausblick

In der hier vorliegenden Arbeit wurde das Modell von Christiano, Trabandt und Walentin (2011) formal hergeleitet. Anschließend wurde untersucht, wie das Modell gegeben verschiedener Parameterwerte auf den Technologieschock reagiert. Wesentliche Neuerungen gegenüber dem Ursprungsmodell Christiano, Eichenbaum und Evans (2005) bestehen zum einen in der Produktionsfunktion des Zwischengütersektors, bei der die Unternehmen zur Produktion die Produkte des Zwischengütersektors benötigen; zum anderen im "working capital channel", bei dem die Unternehmen ein Teil der Kosten durch kurzfristige Anleihen finanzieren müssen. Der Vergleich der Impulsreaktionsfunktionen auf den Technologieschock zeigte kein eindeutiges Ergebnis. Im Vergleich zum Standardmodell kam es für verschiedene Parameterkonstellationen zu größeren, aber auch zu kleineren Abweichungen in den betrachteten Variablen.

Durch verschiedene Neuerungen, z.B. den hier betrachteten "working capital channel", sollen DSGE-Modelle die Realität genauer abbilden, um die Entscheidungen von Zentralbanken besser zu fundieren und die Auswirkungen verschiedener Schocks besser zu analysieren. Die Forschung geht daher in die Richtung, größere und komplexere Modelle zu entwickeln, die möglichst viele Einzelaspekte einer Volkswirtschaft modellieren kann.

5. Literaturverzeichnis

Basu, S. (1995). Intermediate Goods and Business Cycles: Implications for Productivity and Welfare. *The American Economic Review, 85* (3), S. 512-531.

Calvo, G. A. (1983). Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework. *Journal of Monetary Economics , 12*, S. 383-398.

Christiano, L. J., Eichenbaum, M. & Evans, C. L. (2005). Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy. *Journal of Political Economy, 113* (1), S. 1-45.

Christiano, L.,J., Trabandt, M. & Walentin, K. (2011). DSGE Models for Monetary Policy Analysis. In B. Friedman & M. Woodford, *Monetary Economics* (S. 285-367). Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Barth III, M. J. & Ramey, V. A. (2002). The Cost Channel of Monetary Transmission. (B. S. Bernanke, & K. Rogoff, Hrsg.) *NBER Macroeconomics Annual 2001* , S. 199-256.

Smets, F., & Wouters, R. (2002). An Estimated Stochastic General Equilibrium Model For The Euro Area. *European Central Bank Working Paper Series, Nr. 171*.

Yun, T. (1996). Nominal price rigidity, money supply endogeneity, and business cycles. *Journal of Monetary Economics* (37), S. 345-370.

6. Anhang

A)

Um die Kostenfunktion zu ermitteln, sei wieder folgendes Optimierungsproblem betrachtet:

$$\min_{I_t,H_t} \overline{P_t}\, I_t + \overline{W_t} H_t$$

mit der Nebenbedingung:

$$z_t H_t^{\gamma} I_t^{1-\gamma} = Y_t.$$

Dies führt zu folgendem Lagrange-Problem:

$$L = \overline{P_t} I_t + \overline{W_t} H_t - \mu_t\left(z_t H_t^{\gamma} I_t^{1-\gamma} - Y_t\right).$$

Die Kuhn-Tucker Bedingungen lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial I_t} = \overline{P_t} - \mu_t\left((1-\gamma) z_t H_t^{\gamma} I_t^{-\gamma}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu_t = \frac{\overline{P_t}}{(1-\gamma) z_t H_t^{\gamma} I_t^{-\gamma}} \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial H_t} = \overline{W_t} - \mu_t\left(\gamma z_t H_t^{\gamma-1} I_t^{1-\gamma}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu_t = \frac{\overline{W_t}}{\gamma z_t H_t^{\gamma-1} I_t^{1-\gamma}} \qquad \text{(V)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_t} = z_t H_t^{\gamma} I_t^{1-\gamma} - Y_t = 0. \qquad \text{(VI)}$$

Gleichsetzen von (IV) und (V) ergibt:

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{P_t}}{(1-\gamma) z_t H_t^{\gamma} I_t^{-\gamma}} = \frac{\overline{W_t}}{\gamma z_t H_t^{\gamma-1} I_t^{1-\gamma}}.$$

Durch das Kürzen von z_t und Umformen erhält man:

$$\gamma\, \overline{P_t} I_t = (1-\gamma) \overline{W_t} H_t$$

$$\Leftrightarrow H_t = \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\overline{P_t} I_t}{\overline{W_t}}. \qquad \text{(VII)}$$

Einsetzen in (VI) führt zu:

$$z_t \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\overline{P_t} I_t}{\overline{W_t}}\right)^{\gamma} I_t^{1-\gamma} = Y_t$$

$$\Leftrightarrow z_t\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\overline{P_t}I_t}{\overline{W_t}}\right)^{\gamma} I_t \quad = Y_t$$

$$\Leftrightarrow I_t^* = \frac{Y_t}{z_t}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{-\gamma} \left(\frac{\overline{P_t}}{\overline{W_t}}\right)^{-\gamma}.$$

I_t^* ist die optimale Nachfrage nach den Zwischengütern, gegeben $\overline{P_t}$ und $\overline{W_t}$. Voraussetzung ist, dass $0 < \gamma < 1$, da in der Produktionsfunktion sonst keine Nachfrage nach Zwischengütern enthalten wäre (Gleichung (8)).

Einsetzen von I_t^* in (VII) ergibt die optimale Nachfrage nach Arbeit gegeben den Zwischengüterpreisen und Lohn:

$$H_t = \frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{\overline{P_t}}{\overline{W_t}}\frac{Y_t}{z_t}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{-\gamma} \left(\frac{\overline{P_t}}{\overline{W_t}}\right)^{-\gamma}$$

$$\Leftrightarrow H_t^* = \frac{Y_t}{z_t}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{\overline{P_t}}{\overline{W_t}}\right)^{1-\gamma}.$$

An der Formel ist zu erkennen, dass die Arbeitsnachfrage negativ vom Lohn und positiv von dem Zwischengüterpreis abhängt. Gleiches gilt für die Nachfrage nach den Zwischengütern, nur mit umgekehrten Vorzeichen. Dieser Zusammenhang zwischen der Nachfrage nach Arbeit und den Zwischenprodukten ist dadurch bedingt, dass die Inputfaktoren der Produktionsgleichung Substitute sind.

Aus den optimalen Nachfragen ergibt sich die Kostenfunktion als

$$C_t = \overline{P_t}\frac{Y_t}{z_t}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{-\gamma} \left(\frac{\overline{P_t}}{\overline{W_t}}\right)^{-\gamma} + \overline{W_t}\ \frac{Y_t}{z_t}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{\overline{P_t}}{\overline{W_t}}\right)^{1-\gamma}$$

$$= \frac{Y_t}{z_t}\left(\overline{P_t}^{1-\gamma}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{-\gamma}\overline{W_t}^{\gamma} + \overline{P_t}^{1-\gamma}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma}\overline{W_t}^{\gamma}\right)$$

$$= \frac{Y_t}{z_t}\overline{P_t}^{1-\gamma}\overline{W_t}^{\gamma}\left(\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{-\gamma} + \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma}\right) = \frac{Y_t}{z_t}\left(\frac{\overline{P_t}}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{\overline{W_t}}{\gamma}\right)^{\gamma}.$$ [29]

[29] Letzteres ergibt sich, da: $\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{-\gamma} + \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma} \Leftrightarrow \frac{1-\gamma^{\gamma}}{\gamma^{\gamma}} + \frac{\gamma^{1-\gamma}}{(1-\gamma)^{1-\gamma}} \Leftrightarrow \frac{(1-\gamma)^{\gamma}(1-\gamma)^{1-\gamma}}{\gamma^{\gamma}(1-\gamma)^{1-\gamma}} + \frac{\gamma^{1-\gamma}\gamma^{\gamma}}{\gamma^{\gamma}(1-\gamma)^{1-\gamma}} \Leftrightarrow \frac{1-\gamma}{\gamma^{\gamma}(1-\gamma)^{1-\gamma}} + \frac{\gamma}{\gamma^{\gamma}(1-\gamma)^{1-\gamma}} = \frac{1}{\gamma^{\gamma}(1-\gamma)^{1-\gamma}}$. Diese Terme werden dann mit $\bar{P}_t^{1-\gamma}$ bzw. $\bar{W}_t^{-\gamma}$ zusammengeführt.

B)

Um K_t^f und F_t^f in eine rekursive Schreibweise zu bringen, seien folgende Formel betrachtet:

$$K_{t+1}^f = E_{t+1}\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j\left(\frac{P_{t+j+1}}{P_{t+1}}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+j+1}$$

$$= E_{t+1}[\lambda_f s_{t+1} + \beta\zeta_p\left(\frac{P_{t+2}}{P_{t+1}}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+2} + (\beta\zeta_p)^2\left(\frac{P_{t+3}}{P_{t+1}}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+3} + \cdots]$$

und

$$K_t^f = E_t[\lambda_f s_t + \beta\zeta_p\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+1} + (\beta\zeta_p)^2\left(\frac{P_{t+2}P_{t+1}}{P_tP_{t+1}}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+2}$$

$$+ (\beta\zeta_p)^3\left(\frac{P_{t+3}P_{t+1}}{P_tP_{t+1}}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+3} + \cdots]$$

$$= E_t[\lambda_f s_t + \beta\zeta_p\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} * [\lambda_f s_{t+1} + (\beta\zeta_p)^2\left(\frac{P_{t+2}}{P_{t+1}}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+2}$$

$$+ (\beta\zeta_p)^3\left(\frac{P_{t+3}}{P_{t+1}}\right)^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}}\lambda_f s_{t+3} + \cdots]]$$

$$\Rightarrow K_t^f = \lambda_f s_t + \beta\zeta_p E_t(\pi_{t+1})^{-\frac{\lambda_f}{\lambda_f-1}} * K_{t+1}^f$$

Analog gilt für:

$$F_{t+1}^f = E_{t+1}\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j\left(\frac{P_{t+j+1}}{P_{t+1}}\right)^{-\frac{1}{\lambda_f-1}}$$

$$= E_{t+1}[1 + \beta\zeta_p\left(\frac{P_{t+2}}{P_{t+1}}\right)^{-\frac{1}{\lambda_f-1}} + (\beta\zeta_p)^2\left(\frac{P_{t+3}}{P_{t+1}}\right)^{-\frac{1}{\lambda_f-1}} + \cdots]$$

und

$$F_t^f = E_t\sum_{j=0}^{\infty}(\beta\zeta_p)^j\left(\frac{P_{t+j}}{P_t}\right)^{-\frac{1}{\lambda_f-1}}$$

$$= E_t[1 + \beta\zeta_p\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)^{-\frac{1}{\lambda_f-1}} + (\beta\zeta_p)^2\left(\frac{P_{t+2}P_{t+1}}{P_tP_{t+1}}\right)^{-\frac{1}{\lambda_f-1}} + (\beta\zeta_p)^3\left(\frac{P_{t+3}P_{t+1}}{P_tP_{t+1}}\right)^{-\frac{1}{\lambda_f-1}} + \cdots]$$

$$= E_t[1 + \beta\zeta_p \left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} [1 + \beta\zeta_p \left(\frac{P_{t+2}}{P_{t+1}}\right)^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} + \left(\beta\zeta_p\right)^2 \left(\frac{P_{t+3}}{P_{t+1}}\right)^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}}] + \cdots]$$

$$\Rightarrow F_t^f = 1 + \beta\zeta_p E_t(\pi_{t+1})^{-\frac{1}{\lambda_f - 1}} F_{t+1}^f.$$

C)

Die effiziente Allokation ergibt sich aus dem folgenden Optimierungsproblem:

$$\max_{c_t, H_t, i_t} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log c_t - \frac{H_t^{1+\emptyset}}{1+\emptyset}) \text{ unter } c_t + i_t = H_t^{\gamma} i_t^{1-\gamma}. \qquad (26)$$

Daraus ergibt sich folgendes Optimierungsproblem:

$$L = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log c_t - \frac{H_t^{1+\emptyset}}{1+\emptyset}) - \lambda_t \left(c_t + i_t - H_t^{\gamma} i_t^{1-\gamma}\right).$$

Die Kuhn-Tucker Bedingungen lauten somit:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t \frac{1}{c_t} - \lambda_t = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_t = \frac{\beta^t}{c_t} \qquad (\text{VII})$$

$$\frac{\partial L}{\partial H_t} = \beta^t \left(-H_t^{\emptyset}\right) + \lambda_t (\gamma H_t^{\gamma-1} i_t^{1-\gamma}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_t = \beta^t \frac{H_t^{\emptyset}}{\gamma H_t^{\gamma-1} i_t^{1-\gamma}} \qquad (\text{IX})$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_t} = -\lambda_t (1 - (1-\gamma) H_t^{\gamma} i_t^{-\gamma}) = 0$$

$$\Leftrightarrow H_t^{\gamma} = \frac{1}{1-\gamma} i_t^{\gamma} \qquad (\text{X})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = c_t + i_t = H_t^{\gamma} i_t^{1-\gamma}. \qquad (\text{XI})$$

Einsetzen von (X) in (XI) ergibt:

$$c_t + i_t = \frac{1}{1-\gamma} i_t^{\gamma} i_t^{1-\gamma} = \frac{1}{1-\gamma} i_t$$

$$\Leftrightarrow c_t = \frac{1}{1-\gamma} i_t - i_t = (\frac{1}{1-\gamma} - 1) i_t$$

$$\Leftrightarrow c_t = \frac{\gamma}{1-\gamma} i_t.$$

Einsetzen der Lösung in (XI) führt zu:

$$\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}+1\right)i_t = H_t^{\gamma} i_t^{1-\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\gamma} i_t = H_t^{\gamma} i_t^{1-\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\gamma} i_t^{\gamma} = H_t^{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow i_t = (1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} H_t$$

Es ergibt sich daraus:

$$c_t = (\frac{\gamma}{1-\gamma})(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} H_t$$

Gleichsetzen von (VII) und (IX) ergibt:

$$\frac{\beta^t}{c_t} = \beta^t \frac{H_t^{\emptyset}}{\gamma H_t^{\gamma-1} i_t^{1-\gamma}}$$

$$\Leftrightarrow \gamma H_t^{\gamma-1} i_t^{1-\gamma} = H_t^{\emptyset} c_t$$

Einsetzen von $i_t = (1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} H_t$ und $c_t = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} H_t$ ergibt:

$$\Leftrightarrow \gamma H_t^{\gamma-1} (1-\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} H_t^{1-\gamma} = H_t^{\emptyset} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} H_t^{\gamma}.$$

Vereinfachen der Gleichung und kürzen von $(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$ führt zu:[30]

$$\gamma(1-\gamma)^{-1} = H_t^{\emptyset+1}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = H_t^{\emptyset+1}$$

$$\Leftrightarrow H_t = 1. \qquad (27)$$

[30] Dabei gilt, dass $\frac{(1-\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{(1-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} = (1-\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\frac{1}{\gamma}} = (1-\gamma)^{-1}$

D)

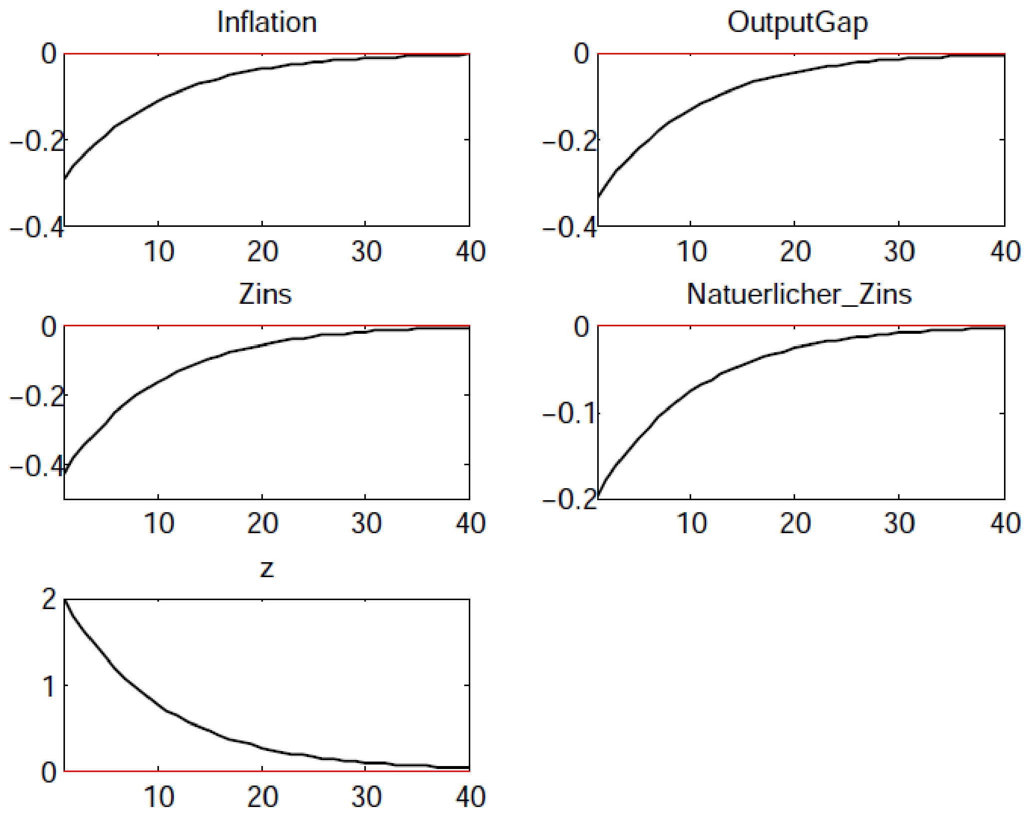

Abbildung 1: Impulsreaktionfunktion für γ=1, Ψ =0

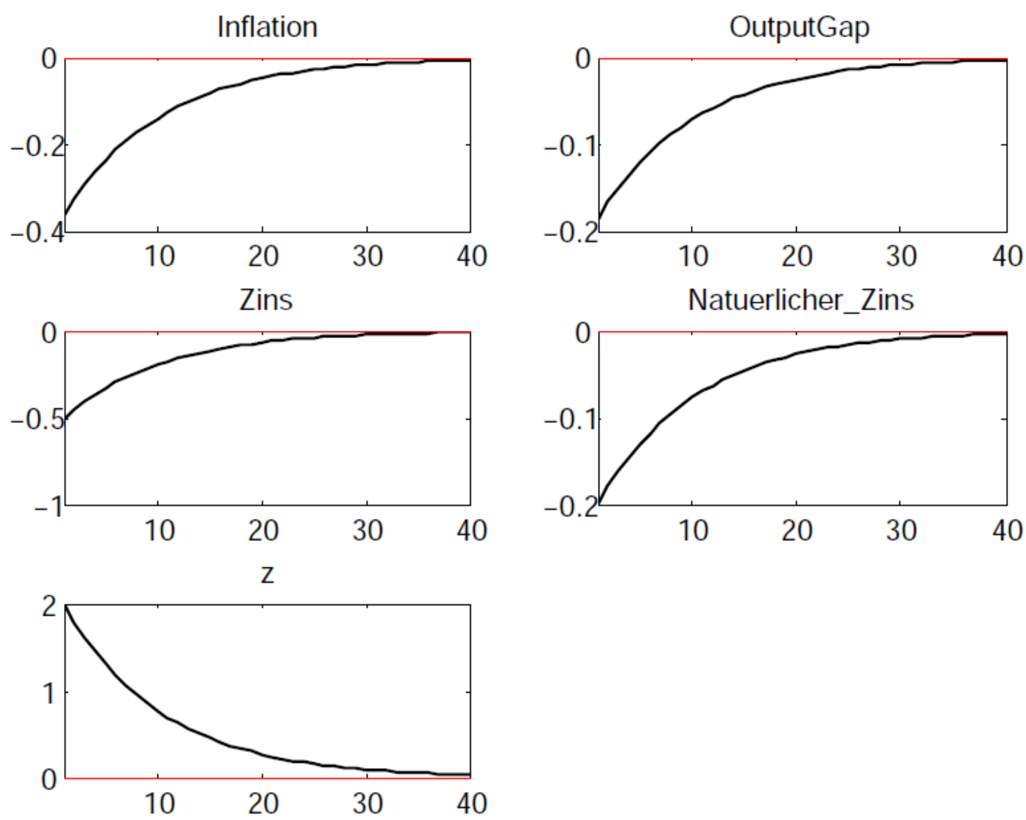

Abbildung 2: Impulsreaktionfunktion für γ=1, Ψ =0,5

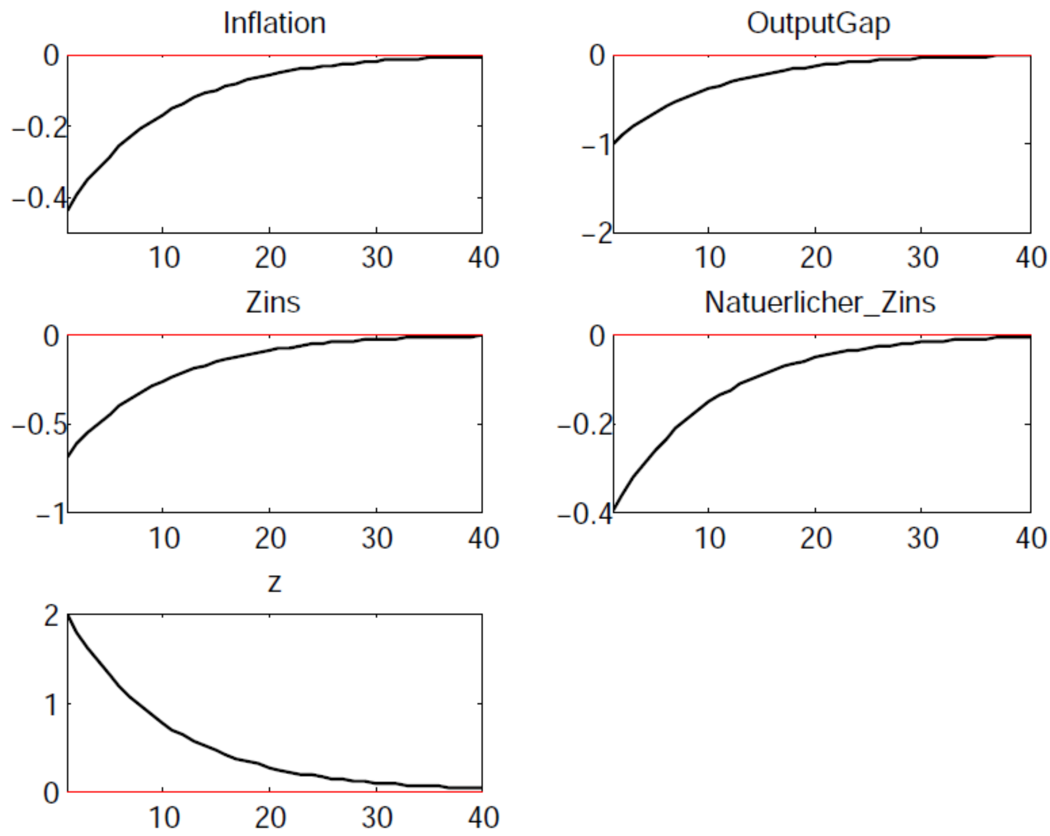

Abbildung 3: Impulsreaktionfunktion für γ=0,5, Ψ =0

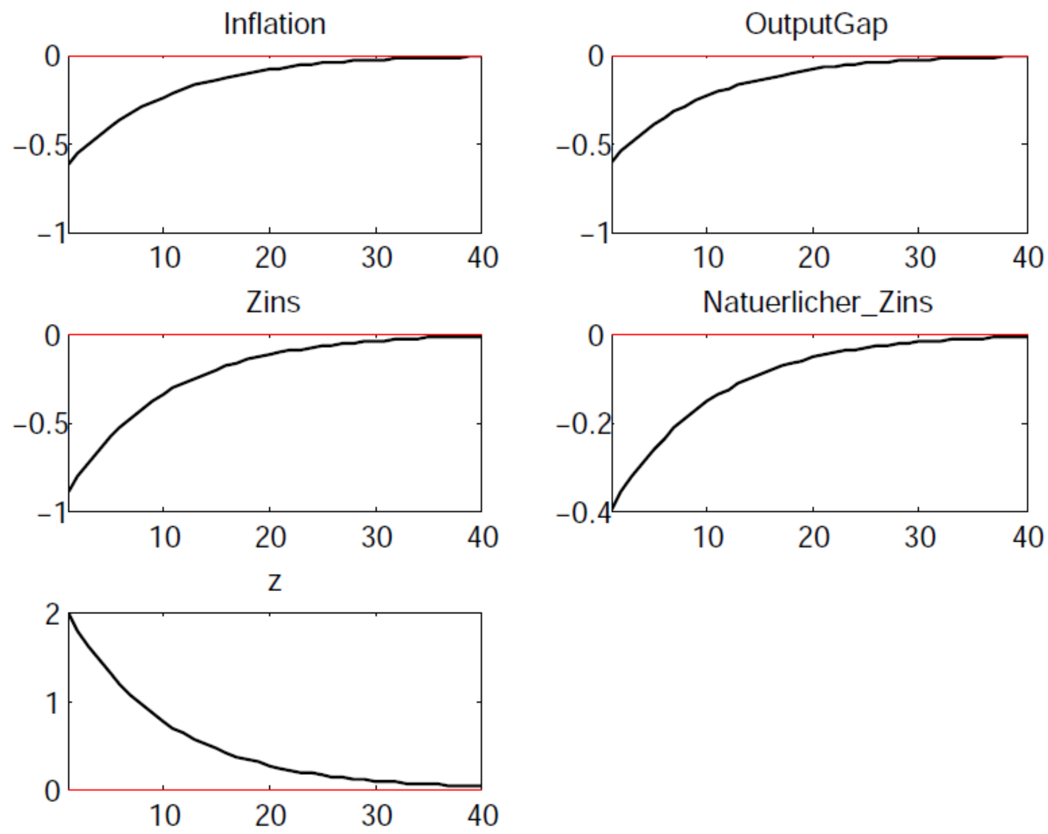

Abbildung 4: Impulsreaktionfunktion für γ=0,5, Ψ =0,5