

# DSGE-Modelle

## Linearisierung und Lösung

Dr. Andrea Beccarini

Willi Mutschler, M.Sc.

Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik Münster  
[willi.mutschler@uni-muenster.de](mailto:willi.mutschler@uni-muenster.de)

Sommersemester 2012

- ① Was bisher geschah. . .
- ② Allgemeine Form und Lösung eines DSGE-Modells
- ③ Wiederholung: Aufgabe 1
- ④ Lineare Lösungsverfahren
  - Der Sims (2001)-Algorithmus
  - Aufgabe 1: Fortsetzung

# Was bisher geschah...

- Theorie und Intuition des Smets/Wouters-Modells als Prototyp aktueller DSGE-Modelle.
- Herleitung der strukturellen Form und Log-Linearisierung.

## Erkenntnis

Ein DSGE-Modell besteht aus einer Menge von erwarteten, nichtlinearen Optimalitätsbedingungen und Bewegungsgleichungen für stochastische Prozesse, die es zu lösen gilt.

- Ein DSGE-Modell lässt sich somit allgemein formulieren als:

## Allgemeine Form

$$\Gamma(E_t \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{v}_{t+1} | \boldsymbol{\mu}) = \Gamma(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{v}_{t+1}, \boldsymbol{\eta}_{t+1} | \boldsymbol{\mu}) = 0, \quad (1)$$

wobei  $\mathbf{x}_t$ :  $(n \times 1)$ -Vektor stationärer Variablen,  $\mathbf{v}_t$ :  $(m \times 1)$ -Vektor struktureller Schocks,  $\boldsymbol{\mu}$ :  $(k \times 1)$ -Vektor von Parametern.

# Allgemeine Form

- Rationale Erwartungen:  $\eta_{t+1} = E_t \mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_{t+1}$ .
- Nicht-prognostizierbarer Erwartungsfehler  $\eta_{t+1}$  tritt aufgrund der Realisation der strukturellen Schocks auf:  $\eta_t = f(\mathbf{v}_t)$ .
- $\mathbf{x}_t$  lässt sich zusätzlich in  $n_c$  Kontrollvariablen und  $n_s$  Zustandsvariablen unterteilen.
- Kontrollvariablen werden mit  $\mathbf{c}_t$  bezeichnet: optimale Verhalten der Akteure als Funktion des aktuellen Zustands der Ökonomie.
- Zustandsvariablen werden mit  $\mathbf{s}_t$  bezeichnet und unterteilen sich in exogene - sich von den Entscheidungen der Akteure unabhängig entwickelnde - und endogene Zustandsvariablen, die von den Entscheidungen beeinflusst werden können.
- $\mathbf{s}_t$  ist eine Funktion vergangener Zustände und aktueller Schocks.

# Lösung eines DSGE-Modells

- Ein solches Modell rationaler Erwartungen zu lösen bedeutet, sogenannte *policy-functions*  $c$  und  $s$  zu finden, die das obige System  $\Gamma$  (approximativ) lösen:

## Policy-functions

$$\mathbf{c}_t = c(\mathbf{s}_t), \quad \mathbf{s}_t = s(\mathbf{s}_{t-1}, \mathbf{v}_t).$$

- DSGE-Modelle lassen sich somit als *state-space-Modelle* interpretieren.
- Es gibt lineare und nichtlineare Lösungsverfahren:
  - Lineare Verfahren: Blanchard/Khan (1980), Binder und Pesaran (1997), Christiano (2002), King und Watson (1998), Klein (2000), Sims (2001) und Uhlig (1999).
  - Häufig verwendetes nichtlineare Verfahren: Schmitt-Grohé/Uribe (2004). Guter Überblick: Heer und Maussner (2009).

# Wiederholung: Aufgabe 1

Betrachten Sie das einfache stochastische Wachstumsmodell:

$$\max_{c_t, k_{t+1}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \quad \text{mit } U(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma},$$

$$c_t + k_{t+1} = z_t f(k_t) + (1 - \delta)k_t \quad \text{mit } f(k_t) = k_t^\alpha, \quad k_0 \text{ gegeben,}$$
$$\log(z_t) = \rho \log(z_{t-1}) + \varepsilon_t \quad \text{mit } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon), \quad 0 < \rho < 1.$$

- (a) Wie lautet der unbedingte Erwartungswert von  $\log(z_t)$ , wie der von  $z_t$ ? Wie lautet die unbedingte Varianz von  $\log(z_t)$ ?
- (b) Finden Sie die Bedingungen erster Ordnung (FOC), indem Sie die Bellman-Gleichung aufstellen und die Methoden der dynamischen Programmierung verwenden. Was sind Zustands-, was sind Kontrollvariablen?
- (c) Finden Sie die Bedingungen erster Ordnung (FOC), indem Sie die Lagrangefunktion maximieren.
- (d) Berechnen Sie den *steady-state* und linearisieren Sie die FOC.

# Lineare Lösungsverfahren

## Vorteile:

- Einfache lineare state-space Repräsentation des Modells, die für viele Fragestellungen ausreichend exakt ist.
- Kalman-Filter ermöglicht es, das System empirisch zu analysieren.

## Nachteile:

- Wichtige Informationen gehen bei der Linearisierung verloren.
- Höhere Momente spielen bei Markt- und Risikostrukturen, sowie Wohlfahrtsimplikationen eine wichtige Rolle.
- Schon eine Linearisierung zweiter Ordnung kann hier zu unterschiedlichen Resultaten führen, da die Varianz der zukünftigen Schocks im Erwartungswert nicht Null ist.

## *Certainty-equivalence-property*

In stochastischen Modellen rationaler Erwartungen berücksichtigen die Akteure bei ihren Entscheidungen die Auswirkungen zukünftiger Schocks. Bei einer Linearisierung erster Ordnung sind diese im Erwartungswert gleich Null, so dass sie keine Rolle bei der Entscheidung spielen.

# Lineare Lösungsverfahren

- Zunächst wird die allgemeine Form (1) um den *steady-state* linearisiert bzw. log-linearisiert.
- Zusammen mit den Bewegungsgleichungen für die stochastischen Prozesse, ergibt sich das reduzierte Modell:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_t + \mathbf{C}\mathbf{v}_{t+1} + \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_{t+1} + \mathbf{E}.$$

- Die Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  sind dabei Funktionen des strukturellen Parametervektors  $\boldsymbol{\mu}$ ;  $\mathbf{E}$  ist ein Vektor von Konstanten (oft Null).
- Die Lösung dieser linearen Repräsentation besitzt eine VAR(1)-Form:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{x}_t + \mathbf{G}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{v}_{t+1}, \quad (2)$$

wobei  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{G}$  Funktionen des Parametervektors  $\boldsymbol{\mu}$  bezeichnen.

- Die treibende Kraft des Modells sind hierbei die exogenen Schocks  $\mathbf{v}_t$ .
- (2) beschreibt somit die Fluktuationen um den *steady-state*, sowie das Modellverhalten als Antwort auf die stochastischen Innovationen.



# Der Sims (2001)-Algorithmus

## Konzepte

### Notation

Im Voraus bestimmte Variablen:  $E_t X_{1,t+1} = X_{1,t+1}$ ,

Im Voraus nicht bestimmte Variablen:  $E_t X_{2,t+1} = E_t X_{2,t+1}$ .

### Unitäre Matrizen

$\mathbf{M}'\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{M}' = \mathbf{I}$  sind das komplexe Analogon zu orthogonalen Matrizen. Sie sind zudem diagonalisierbar.

- Die Methode von Sims (2001) beginnt mit einer *QZ-Faktorisierung* (Verallgemeinerte Schur Dekomposition), bei der die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  in unitäre obere Dreiecksmatrizen transformiert werden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{Z}', \quad \mathbf{B} = \mathbf{Q}'\mathbf{\Omega}\mathbf{Z}'.$$

- $\mathbf{\Lambda}$  und  $\mathbf{\Omega}$  sind hier obere Dreiecksmatrizen mit den verallgemeinerten Eigenwerten von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ , und werden in aufsteigender Reihenfolge von links nach rechts sortiert.

# Der Sims (2001)-Algorithmus

- Die Eigenwerte sind entscheidend dafür, ob ein Teilsystem konvergiert oder explodiert.

## Blanchard/Khan-Bedingungen

Die Anzahl der Eigenwerte, die betragsmäßig größer gleich 1 sind, muss gleich der Anzahl der im Voraus unbestimmten Variablen sein, damit ein stabiler Sattelpfad existiert.

- Bezeichne  $\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{Z}'\mathbf{x}_{t+1}$ , dann wird das System in einen nicht-explosiven Teil (oben) und einen explosiven Teil (unten) aufgeteilt:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{1,t+1} \\ \mathbf{z}_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \mathbf{0} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{1,t} \\ \mathbf{z}_{2,t} \end{pmatrix} \quad (3)$$
$$+ \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{v}_{1,t+1} + \mathbf{D}_1 \boldsymbol{\eta}_{1,t+1} \\ \mathbf{E}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{v}_{2,t+1} + \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\eta}_{2,t+1} \end{bmatrix}.$$

# Der Sims (2001)-Algorithmus

- Die Differenzengleichungen zu den Eigenwerten größer als eins werden vorwärts gelöst.
- Beachte:  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Omega_{22}^{-1} \Lambda_{22})^t \mathbf{z}_{2,t} = \mathbf{0}$  und für alle  $s > 0 : E_t \mathbf{v}_{2,t+s} = E_t \boldsymbol{\eta}_{2,t+s} = \mathbf{0}$  (Erwartungsfehler spielen keine Rolle)

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{2,t} &= \Omega_{22}^{-1} \Lambda_{22} \mathbf{z}_{2,t+1} - \Omega_{22}^{-1} \mathbf{Q}_2 [\mathbf{E}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{v}_{2,t+1} + \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\eta}_{2,t+1}] \\ &= - \sum_{i=0}^{\infty} (\Omega_{22}^{-1} \Lambda_{22})^i \Omega_{22}^{-1} \mathbf{Q}_2 [\mathbf{E}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{v}_{2,t+1+i} + \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\eta}_{2,t+1+i}] \\ &= - \sum_{i=0}^{\infty} (\Omega_{22}^{-1} \Lambda_{22})^i \Omega_{22}^{-1} \mathbf{Q}_2 \mathbf{E}_2 \\ &= - [\mathbf{I} - \Omega_{22}^{-1} \Lambda_{22}]^{-1} \Omega_{22}^{-1} \mathbf{Q}_2 \mathbf{E}_2 = [\Lambda_{22} - \Omega_{22}]^{-1} \mathbf{Q}_2 \mathbf{E}_2. \end{aligned}$$

# Der Sims (2001)-Algorithmus

- Die Differenzengleichungen zu den Eigenwerten kleiner als eins werden rückwärts gelöst.
- Beachte: Systematische Verknüpfung der Erwartungsfehler  $\eta_{1,t}$  &  $\eta_{2,t}$ .

Hinreichende Bedingung für stabilen Sattelpfad

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{D} = \Phi \mathbf{Q}_2 \mathbf{D}.$$

- $\Phi$  hat Dimension  $n_s \times n_c$  (mit  $\mathbf{z}_{1,t} : n_s \times 1$  und  $\mathbf{z}_{2,t} : n_c \times 1$ ).
- Damit lässt sich (3) umformen zu:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Phi \\ n_s \times n_s & n_s \times n_c \end{bmatrix}}_{n_s \times (n_s + n_c)} \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{1,t} \\ \mathbf{z}_{2,t} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \mathbf{0} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{1,t-1} \\ \mathbf{z}_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} [\mathbf{E} + \mathbf{C}v_t + \mathbf{D}\eta_t].$$

# Der Sims (2001)-Algorithmus

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} - \Phi \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} - \Phi \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{pmatrix} \\ + \begin{bmatrix} Q_1 - \Phi Q_2 \end{bmatrix} [E + Cv_t] + \underbrace{[(Q_1 - \Phi Q_2) D \eta_t]}_{=0}.$$

## Der Algorithmus

QZ-Faktorisierung:  $A = Q' \Lambda Z'$ ,  $B = Q' \Omega Z'$ ,  $x_t = Z \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{pmatrix}$ ,

$$z_{1,t} = -\Lambda_{11}^{-1} (\Lambda_{12} - \Phi \Lambda_{22}) z_{2,t} + \Lambda_{11}^{-1} \Omega_{11} z_{1,t-1} \\ + \Lambda_{11}^{-1} (\Omega_{12} - \Phi \Omega_{22}) z_{2,t-1} + \Lambda_{11}^{-1} (Q_1 - \Phi Q_2) (E + Cv_t), \\ z_{2,t} = (\Lambda_{22} - \Omega_{22})^{-1} Q_2 E.$$

# Aufgabe 1: Fortsetzung

Der Sims (2001)-Algorithmus ist für verschiedene Programmpakete vorprogrammiert, sowie in Dynare implementiert.

(e) Bringen Sie das linearisierte Modell in die Form

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_t + \mathbf{C}\mathbf{v}_{t+1} + \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_{t+1} + \mathbf{E}$$

(f) Berechnen Sie die *policy-function* mithilfe des Sims (2001)-Algorithmus, nehmen Sie dafür folgende Parameterwerte an:

$$\beta = 0.99, \quad \alpha = 0.36, \quad \sigma = 2, \quad \delta = 0.025, \quad \rho = 0.9.$$

# Hausaufgabe

- Installieren Sie die aktuelle Version von Matlab.
- <https://zivdav.uni-muenster.de/ddfs/Soft.ZIV/TheMathWorks/> .
- Für die Lizenz müssen Sie im Universitätsnetz per Wlan bzw. per VPN verbunden sein.
- Laden Sie alle Dateien von <http://sims.princeton.edu/yftp/gensys/mfiles/> in einen Ordner gensys. Binden Sie diesen in Matlab ein (File-SetPath-Add Folder).
- Installieren Sie die aktuelle Version von Dynare (<http://www.dynare.org/>). Binden Sie den Dynare Ordner *c : \dynare\aktuelle Version\matlab* in Matlab ein (File-SetPath-Add Folder).