Westfälische-Wilhelms-Universität Münster
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät

Lehrstuhl für
Empirische Wirtschaftsforschung

Ausarbeitung zu der Vorlesung
DSGE-Modelle
im Sommersemester 2012

DSGE-Modelle anhand von: Smets-Wouters An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model for the Euro area

Themensteller:	Dr. Andrea Beccarini
Betreuer:	Dr. Andrea Beccarini
Vorgelegt von:	Markus Lange
	4. Semester VWL
Matrikelnummer:	377624
Adresse:	Catharina-Müller-Str. 2
	48149 Münster
Email:	Master.VWL@uni-muenster.de
Telefon:	0251 - 200 6161
Abgabedatum:	31.08.2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Ausarbeitung fasst den Inhalt der Veranstaltung „DSGE-Modelle“ zusammen, dabei wird im ersten Teil anhand des Artikels „An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model for the Euro area“ von Frank Smets und Raf Wouters[1] die Analyse eines DSGE-Modells erläutert und im zweiten Teil auf die empirische Schätzung eines DSGE-Modells eingehen. DSGE steht dabei für Dynamic stochastic general equilibrium, daher betrachten wir ein Modell, in welchem sich die Größen über die Zeit verändern können (dynamic) und die genaue Realisation der endogenen Variablen von Schocks abhängen (stochastic).

1 Theoretischer Teil

Wir wollen nun kurz die Grundideen von Smets-Wouters Modell betrachten: Das Modell wird insbesondere von der EZB dazu genutzt, die europäische Wirtschaft zu analysieren und vorauszusagen. Es wird von einer geschlossenen Wirtschaft ausgegangen, in der Calvo-sticky Gehälter und Preise vorliegen und sowohl auf der Zwischengüterebene als auch auf dem Arbeitsmarkt monopolistische Konkurrenz herrscht. In die Nutzenfunktion der Haushalte fließen dabei die Größen Arbeit, Vermögen, in Form von Bargeld und Bonds, und das Konsumniveau ein. Dabei wir davon ausgegangen, dass der Nutzen des Konsums abhängig von dem Konsumniveau der vorherigen Perioden ist. Auch können Haushalte Firmen Geld leihen. Diese wiederum können mit den Imputgrößen Arbeit und Kapital produzieren und die Preise festlegen. Dabei gehen wir davon aus, dass die Realisation der relevanten Größen von Schocks beeinflusst werden. Wie diese genau wirken und um welche es sich handelt, wird in den folgenden Kapiteln erläutert.
Wir wollen nun das oben formulierte Modell formal ausdrücken und lösen. Dazu betrachten wir erst die Optimierung der Haushalte, danach die der Firmen und abschließend den Steady-State und das linearisierte Modell.

[1] s. [SW08]

1.1 Haushalte

Es gebe ein Kontinuum $[0\ldots1]$ von Haushalten, wobei wir mit τ einen einzelnen Haushalt bezeichnen. Die aggregierte Nutzenfunktion lautet also

$$\mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_t^{\tau}, \tag{1}$$

wobei β den Diskontfaktor bezeichne. Die Nutzenfunktion sei definiert durch

$$U_t^{\tau} = \epsilon_t^B \left(\frac{1}{1-\sigma_c} (C_{\tau}^t - H_t^{\tau})^{1-\sigma_c} - \frac{\epsilon_t^L}{1+\sigma_l} (l_t^{\tau})^{1+\sigma_l} + \frac{\epsilon_t^M}{1-\sigma_m} \left(\frac{M_t^{\tau}}{P_t} \right)^{1-\sigma_M} \right) \tag{2}$$

Dabei gehen der Konsum C und das Realvermögen M positiv, das vorangegangene Konsumniveau (Habit) H, definiert durch

$$H_t = hC_{t-1}$$

und die Arbeit l negativ in den Nutzen ein. σ_c ist der Koeffizient der relativen Risikoaversion, σ_m ist die Inverse der Substitutionselastizität von Barvermögen im Bezug auf den Zinssatz und σ_l analog die Inverse der Substitutionselastizität von Arbeit im Bezug auf den Lohn.
Weiter bezeichnet ϵ_t^B einen generellen Präferenzenschok, ϵ_t^L einen Schock des Arbeitsangebots und ϵ_t^M einen Schock der Geldnachfrage. Die Schocks werden durch eine Autoregression erster Ordnung modelliert

$$\epsilon_t^X = \gamma^X \epsilon_{t-1}^X + \eta_t^X, \quad \eta_t^X \sim N(0,1) \text{ und } X \in \{M, L, B\}\,. \tag{3}$$

Weiter sind die Haushalte an folgende Budgetrestriktion gebunden:

$$\frac{M_t^{\tau}}{P_t} + b_t \frac{B_t^{\tau}}{P_t} + I_t + C_t = \frac{M_{t-1}^{\tau}}{P_t} + \frac{B_{t-1}^{\tau}}{P_t} + Y_t^{\tau}. \tag{4}$$

Rechts stehen die realen Einnahmen des Haushaltes und links die Ausgaben der Periode t, dabei steht B_t^{τ} für gehaltene Bonds zum Kaufpreis $b^t = \frac{1}{1+i_t} = \frac{1}{R_t}$. Das Einkommen Y_t^{τ} hat dabei die Form

$$Y_t^{\tau} = \frac{W_t^{\tau}}{P_t} l_t^{\tau} + A_t^{\tau} + (r) + (r_t^k z_t^{\tau} - \Psi)(z_t^{\tau})) K_{t-1}^{\tau} + Div_t^{\tau}.$$

$\frac{W_t^{\tau}}{P_t} l_t^{\tau}$ ist der Reallohn, A_t^{τ} der Erlös aus zustandsabhängigen Sicherheiten (der Term lässt sich als eine Art Versicherungszahlung gegenüber Schwankungen im

Realeinkommen auffassen), $(r_t^k z_t^\tau - \Psi)(z_t^\tau))K^\tau$ sind Gewinne aus dem realen Kapitalstock abzüglich der Kosten der Ausnutzung von eben diesem und Div_t^τ die Dividendenzahlungen der Firmen. Damit ist die Haushaltsseite des Modells hinreichend beschrieben.

1.1.1 Haushaltsoptimierung

Als erstes stellen wir die zur Nutzenfunktion 1) gehörende Lagrangefunktion unter der Nebenbedingung 4) auf.

$$\mathcal{L} = \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(U_t^\tau - \lambda_t \left(\frac{M_t^\tau}{P_t} + b_t \frac{B_t^\tau}{P_t} + I_t + C_t - \frac{M_{t-1}^\tau}{P_t} - \frac{B_{t-1}^\tau}{P_t} - Y_t^\tau \right) \right),$$

wobei U_t^τ wie in 2) definiert ist. Diese sind nach den vom Haushalt wählbaren Größen abzuleiten, daher nach C_t^τ, B_t^τ und M_t^τ. Da die Haushaltsentscheidung für alle Haushalte identisch und unabhängig ist, können zur Vereinfachung die Exponenten weggelassen werden.
Es ergibt sich für alle t

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \mathrm{E}_t \left[\beta^t \left(U_t^C - \lambda_t \right) \right] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow &\lambda_t = U_t^C = \epsilon_t^B \left(C_t - H_t \right)^{-\sigma_c} && (5) \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_t} = \mathrm{E}_t \left[\beta^t \left(\frac{\epsilon_t^B \epsilon_t^M}{P_t} \left(\frac{M_t}{P_t} \right)^{-\sigma_m} - \frac{\lambda_t}{P_t} \right) \right] + \mathrm{E}_t \left[\frac{\beta^{t+1} \lambda_{t+1}}{P_{t+1}} \right] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow &\mathrm{E}_t \left[\frac{\lambda_t}{P_t} \right] = \mathrm{E}_t \left[\frac{\epsilon_t^B \epsilon_t^M}{P_t} \left(\frac{M_t}{P_t} \right)^{-\sigma_m} \right] + \mathrm{E}_t \left[\frac{\beta \lambda_{t+1}}{P_{t+1}} \right] \\
\Leftrightarrow &\lambda = \epsilon_t^B \epsilon_t^M \left(\frac{M_t}{P_t} \right)^{-\sigma_m} + \mathrm{E}_t \left[\beta \frac{\lambda_{t+1} P_t}{P_{t+1}} \right] && (6) \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\mathrm{E}_t \left[\beta^t \lambda_t \frac{b_t}{P_t} \right] - \mathrm{E}_t \left[\beta^{t+1} \lambda_{t+1} \frac{-1}{P_{t+1}} \right] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow &1 = \mathrm{E}_t \left[\beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \frac{1}{b_t} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] && (7)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der anderen beiden Gleichungen lässt sich Gleichung 6) umschreiben in

$$\epsilon_t^m \left(\frac{M_t}{P_t} \right)^{-\sigma_m} = (C_t - H_t)^{-\sigma_c} \frac{i_t}{1 + i_t}. \tag{8}$$

Dies ist die newkeynesian LM-Kurve. Wir sehen, dass das Barvermögen unabhängig von den anderen Gleichungen ist und über den Zinsatz i_t gesteuert werden kann.

1.1.2 Arbeitsnachfrage bzw. -angebot

Der monopolistische Wettberwerb der Arbeiter lässt sich durch eine Dixit-Steglitz Arbeitsnachfrage-Funktion modellieren

$$L_t = \Big[\int_0^1 (l_t^\tau)^{\frac{1}{1+\lambda_{w,t}}} \, \mathrm{d}\tau \Big]^{1+\lambda_{w,t}},$$

wobei $\lambda_{w,t} > 0$ die Substitionselastität zwischen den Arbeitern darstellt, diese wird durch einen Schock derart beeinflusst, dass gilt $\lambda_{w,t} = \lambda_w + \eta_w^t$ mit $\eta_w^t \sim N(0,1)$ gilt.

Die Firmen minimieren nun die aggregierten Lohnkosten unter der Nebenbedingung, dass die nötige Menge Arbeit erzielt wird, daher

$$\mathcal{L} = \int_0^1 W_t^\tau l_t^\tau \mathrm{d}\tau + W_t \Big(\hat{L}_t - \Big[\int_0^1 (l_t^\tau)^{\frac{1}{1+\lambda_{w,t}}} \, \mathrm{d}\tau \Big]^{1+\lambda_{w,t}} \Big).$$

Der Ausdruck W_t ist der Lagrange-Multiplikator, $\hat{L}_t$ die gewünschte aggregierte Arbeitsmenge und der Term $\int_0^1 W_t^\tau l_t^\tau \mathrm{d}\tau$ entspricht den Durchschnittslohnkosten. Dabei ist zu beachten, das eine Minimierung von eben diesen äquivalent dazu ist, die Gesammtlohnkosten zu minimieren. Die direkte Modellierung der Optimierung über die Gesammtlohnkosten ist sinnlos, da diese immer unendlich sind. Allerdings kann man die Durschnittslohnkosten minimieren, indem man für jeden Haushalt τ die Gesammtlohnkosten minimiert, da die Lohnkosten der einzelnen Haushalte unabhängig von einander sind. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_t^\tau} &= W_t^\tau - W_t \Big(\Big[\int_0^1 (l_t^\tau)^{\frac{1}{1+\lambda_{w,t}}} \, \mathrm{d}\tau \Big]^{\lambda_{w,t}} (l_t^\tau)^{\frac{-\lambda_{w,t}}{1+\lambda_{w,t}}} \Big) \overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow l_t^\tau &= L_t \left(\frac{W_t^\tau}{W_t} \right)^{\frac{-(1+\lambda_{w,t})}{\lambda_{w,t}}} . \end{aligned} \tag{9}$$

Einsetzen in L_t ergibt

$$W_t = \Big[\int_0^1 (W_t^\tau)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}}\,\mathrm{d}\tau\Big]^{-\lambda_{w,t}}. \tag{10}$$

Daher entspricht der Schattenpreis für eine weitere Arbeitsstunde wie zu erwarten genau dem Durchschnittsgehalt.
Zur Modellierung der Calvo-sticky Gehälter gehen wir davon aus, dass konstant $1-\xi_W$ der Haushalte in jeder Periode ihr Gehalt W_t^τ neu verhandeln können. So können ξ_W der Haushalte ihren Lohn nicht neu wählen ihr Lohn ist damit

$$W_t^\tau = \left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right)^{\gamma_w} W_{t-1}^\tau \tag{11}$$

mit γ_w dem Grad der Lohnindexierung, für $\gamma_w = 1$ ist der Lohn also komplett inflationsbereinigt, bzw. für $\gamma_w = 0$ unbereinigt. Es sei $\tilde{W}_t$ der Lohn der Haushalte, die in Periode t den Lohn neu aushandeln konnten. Es bezeichne $M_t \subset [0,1]$ mit $|M_t| = \xi_w$ die Menge der Haushalte, die in Periode t ihr Gehalt nicht neu festlegen dürfen. Da diese Haushalte zufällig bestimmt werden, gilt für den aggregierten Lohnsatz mit der Hilfe von 10)

$$\begin{aligned}
(W_t)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} &= \int_{[0,1]} (W_t^\tau)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{M_t} \left(\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right)^{\gamma_w} W_{t-1}^\tau\right)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} \mathrm{d}\tau + \int_{[0,1]\backslash M_t} \left(\tilde{W}_t\right)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} \mathrm{d}\tau \\
&= \left[\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right)^{\gamma_w}\right]^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} \int_{M_t} (W_{t-1}^\tau)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}}\,\mathrm{d}\tau + \left(\tilde{W}_t\right)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} \int_{[0,1]\backslash M_t} 1\mathrm{d}\tau \\
&= \xi_w \left[\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right)^{\gamma_w} W_{t-1}\right]^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}} + (1-\xi_w)\left(\tilde{W}_t\right)^{\frac{-1}{\lambda_{w,t}}}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Die Haushalte wählen nun den optimalen Lohnsatz unter Berücksichtigung der Tatsachen, dass sie mit der Wahrscheinlichkeit von $(\xi_w)^i$ erst nach der $t+i$-ten Periode den Lohnsatz neu aushandeln können. Es ergibt sich folgende

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = \mathrm{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\xi_w)^i \beta^i \Bigg[U(C^\tau_{t+i}, l^\tau_{t+i}, M^\tau_{t+i}) - \lambda_{t+i} \left(\cdots - \frac{W^\tau_{t+i}}{P_{t+i}} l^\tau_{t+i} + \cdots \right) - \mu_{t+i} \left(l^\tau_{t+i} - L_{t+i} \left(\frac{W^\tau_{t+i}}{W_{t+i}} \right)^{\frac{-1-\lambda_{w,t+i}}{\lambda_{w,t+i}}} \right) \Bigg]$$

Nach einsetzen von 9) muss man die Funktion nur noch nach $\tilde{W}_t$ optimieren, dabei sei bemerkt, dass wir immer noch nur einen speziellen Haushalt betrachten und daher W_t als konstant angesehen wird. Die Optimierung führt dann zu folgender Mark-Up Regel für das Gehalt

$$\frac{\tilde{W}_t}{P_t} \mathrm{E}_t \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \xi_w^i \left(\frac{P_{t+i-1}}{P_{t-1}} \right)^{\gamma_w} \frac{P_t}{P_{t+i}} \left(\frac{l^\tau_{t+i} U^c_{t+i}}{1 + \lambda_{w,t+i}} \right) \right\} = \mathrm{E}_t \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \xi_w^i l^\tau_{t+i} U^l_{t+i} \right\}. \tag{13}$$

Es bezeichnet hierbei U_t^C den Grenznutzen des Konsums und U_t^l den negativen Grenznutzen der Arbeit.

1.1.3 Investmententscheidung

Die letzte noch ausstehende Haushaltsentscheidung ist die Menge an Kapital, das die Haushalte den Firmen zu einem Zinssatz von r_t^k verleihen können. Dabei können sie sowohl die Menge an Kapital I_t festlegen, welches sich erst in der nächsten Periode bemerkbar macht, als auch den Nutzungsgrad des vorhanden Kapitals z_t optimieren. Für die Bewegungsgleichung des Kapitals ergibt sich

$$K_t = (1-\tau) K_{t-1} + \left(1 - S\left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}} \right) \right) I_{t-1}. \tag{14}$$

Wobei τ die Abschreibungsrate und S eine positive Funktion der Anpassungskosten des Investments sind, dabei gilt im steady state, dass die Anpassungskosten gleich Null sind, auch gilt $S(1) = S'(1) = 0$ und weiter bezeichnet ϵ_t^I den analog zu 3) definierten Investmentshock. Unter Berücksichtigung der

Bewegungsgleichung des Kapitals ergibt sich folgende Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \mathrm{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Bigg[U(C_t^\tau, l_t^\tau, M_t^\tau) - \lambda_t \left(I_t + (\Psi(z_t) - r_t^k z_t) K_{t-1} + \cdots \right) \\ + \lambda_t Q_t \Bigg((1-\tau) K_{t-1} + \left(1 - S\left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}} \right) \right) I_{t-1} - K_t \Bigg) \Bigg],$$

der zur Bewegungsgleichung gehörende Lagrange-Multipikator wird dabei mit $\lambda_t Q_t$ bezeichnet. Die Haushalte optimieren nun über K_t, I_t und z_t, dies ergibt die Optimalitätsbedingungen

$$Q_t = \mathrm{E}_t \left[\beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \left(Q_{t+1}(1-\tau) + z_{t+1} r_{t+1}^k - \Psi(zt+1) \right) \right] \tag{15}$$

$$1 = \left(1 - S\left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}} \right) - S'\left(\frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}} \right) \frac{\epsilon_t^I I_t}{I_{t-1}} \right) \\ + \mathrm{E}_t\, \beta Q_t \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \left(S'\left(\frac{\epsilon_{t+1}^I I_{t+1}}{I_t} \right) \frac{\epsilon_{t+1}^I I_{t+1}}{I_t} \right) \tag{16}$$

$$r_t^k = \Psi(z_t). \tag{17}$$

Gleichung 15) besagt, dass der Wert einer Einheit Kapital mehr gleich dem zukünftigen Wert unter Berücksichtigung heutiger Investitionen ist.

1.2 Firmen

Die Modellierung und Optimierung der Firmenseite geht im wesentlichen völlig analog zu der der Haushalte. Es existiert genau ein Gut Y_t, das die Haushalte kaufen können und die Firmen in perfektem Wettbewerb verkaufen, weiter existitiere ein Kontinuum $[0 \ldots 1]$ von Zwischengüttern, wobei wir mit j ein einzelnes dieser Güter bezeichnen. Die Firmen kaufen von jedem Gut j eine Menge y_t^j zum Preis p_t^j und bilden daraus das Endkundenprodukt.

1.2.1 Gütermarkt

Die Zwischengüter haben hier also die selbe Rolle, wie die Arbeit der einzelnen Haushalte bei der Bildung der aggregierten Arbeit, daher wird der Gütermarkt auch analog zum Arbeitsmarkt modelliert

$$Y_t = \left[\int_0^1 \left(y_t^j\right)^{\frac{1}{1+\lambda_{p,t}}} \mathrm{d}j \right]^{1+\lambda_{p,t}}. \tag{18}$$

Die Firmen minimieren nun ihre Kosten analog zu Kapitel 1.1.2. Es ergibt sich

$$P_t = \left[\int_0^1 \left(p_t^j\right)^{\frac{-1}{\lambda_{p,t}}} \mathrm{d}j \right]^{-\lambda_{p,t}} \tag{19}$$

$$y_t^j = \left(\frac{p_t^j}{P_t}\right)^{\frac{1+\lambda_{p,t}}{\lambda_{p,t}}} Y_t, \tag{20}$$

wobei P_t der Preis des Endproduktes ist. Das Mark-Up $\lambda_{p,t}$ sei dabei analog zu $\lambda_{w,t}$ definiert.

1.2.2 Zwischengütermarkt

Als Produktionsfunktion der Zwischengüter dient eine Cobb-Dooglas Produktionsfunktion

$$y_t^j = \epsilon_t^a \tilde{K}_{j,t}^\alpha L_{j,t}^{1-\alpha} - \Phi, \tag{21}$$

das effektive Kapital $\tilde{K}_{j,t}^\alpha$ ist dabei durch $\tilde{K}_{j,t}^\alpha = z_t K_{j,t-1}$ definiert, $L_{j,t}$ ist gemäß 9) definiert und das Produktivitätslevel $epsilon_t^a$ folgt einem Ar(1) Prozess gemäß 3). Die Firmen minimieren nun die Lohn Kosten $C_t = r_t^k \tilde{K}_{j,t} + W_t L_{j,t}$ bei gegebener Produktionsmenge. Dies entspricht folgender Lagrangen-Funktion

$$\mathcal{L} = r_t^k \tilde{K}_{j,t} + W_t L_{j,t} + \gamma(\bar{y}_t^j - \epsilon_t^a \tilde{K}_{j,t}^\alpha L_{j,t}^{1-\alpha} + \Phi).$$

Die Bedingungen erster Ordnung $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{K}_{j,t}} \stackrel{!}{=} 0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_{j,t}}$ liefern durch Division

$$\frac{W_t L_{j,t}}{r_t^k \tilde{K}_{j,t}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{22}$$

Einsetzen dieser Identität in die Kostenfunktion C_t liefert mithilfe der Definition von y_t^j

$$C_t = (y_t^j + \Phi)\frac{1}{\epsilon_t^a} W_t^{1-\alpha} (r_t^k)^\alpha (\alpha^{-1}(1-\alpha)^{1-\alpha}).$$

Man sieht sofort, dass die Grenzkosten $\mathrm{MC}_t = \frac{\partial C_t}{\partial y_t^j}$ konstant sind. Der Gewinn der Firmen ist unter Berücksichtigung von 20) somit

$$\pi_t^j = (p_t^j y_t^j - \mathrm{MC}_t) \left(\frac{p_t^j}{P_t} \right)^{-\frac{1+\lambda_{p,t}}{\lambda_{p,t}}} Y_t - \mathrm{MC}_t \, \Phi. \tag{23}$$

Firmen optimieren nun diese erwarteten Gewinne über die Zeit. Sie verwenden dazu den Diskontfaktor $\beta^k \rho_{t+k}$ wobei

$$\rho_{t+k} = \frac{\lambda_{t+k}}{\lambda_t P_t}$$

entspricht und damit konsistent zu dem Diskontierungsverhalten der Haushalte ist (vgl. 7)). Dabei dürfen analog zu Kapitel 1.1.2 nur $1 - \xi_p$ Firmen die Preise anpassen. Das selbe Vorgehen wie in Kapitel 1.1.2 liefert, dass der aggregierte Preisindex

$$P_t^{\frac{-1}{\lambda_{p,t}}} = \xi_p \left[\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right)^{\gamma_p} P_{t-1} \right]^{\frac{-1}{\lambda_{p,t}}} + (1 - \xi_p) \left(\tilde{p}_t^j \right)^{\frac{-1}{\lambda_{p,t}}} \tag{24}$$

ist, wobei $\tilde{p}_t^j$ der neu angepasste Preis ist. Für das Optimierungskalkül ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathrm{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\xi_p)^i \beta^i \rho_{t+i} \Bigg[Y_{t+i} \Bigg(\left(\frac{P_{t-1+i}}{P_{t-1}} \right)^{\gamma_p} \tilde{p}_t - \mathrm{MC}_{t+1} \Bigg) \cdot \\ \left(\frac{(P_{t-1+i}/P_{t-1})^{\gamma_p} \, \tilde{p}_t}{P_{t+i}} \right)^{-\frac{1+\lambda_{p,t+1}}{\lambda_t}} - \Phi \, \mathrm{MC}_{t+i} \Bigg]. \end{aligned}$$

Ableiten nach $\tilde{p}_t$ liefert

$$\mathrm{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} (\xi_p)^i \beta^i \rho_{t+i} \frac{\lambda_{t+i}}{\lambda_t} y_{t+i}^j \left[\frac{\tilde{p}_t}{P_t} \left(\frac{P_{t-1+i}/P_{t-1}}{P_{t+i}/P_{t-1}} \right)^{\gamma_p} - (1 + \lambda_{p,t+i}) \frac{\mathrm{MC}_{t+i}}{P_{t+i}} \right] = 0. \tag{25}$$

Der Optimale Preis ist also der Durchschnitt der Grenzkosten multipliziert mit dem Mark-Up.

1.3 Das linearisierte Modell

Um den theoretischen Teil abzuschließen, wollen wir nun das linearisierte Modell herleiten. Diese hat den Vorteil, dass es ausreichend genau Ergebnisse liefert und empirisch leicht lösbar ist. Dazu substituieren wir alle zeitlichen Variablen mit der Identität $x_t = xe^{\hat{x}}$, wobei $\hat{x} = \ln x_t - \ln x$ ist und x den steady-state Wert der Variable bezeichnet. Mit dieser Substitution lässt sich nun einfach das linearisierte Modell bilden, indem man die Taylorentwicklung ersten Grades bildet. Da die Terme $\hat{x}$ gerade Null im steady-state sind, gilt, dass die Terme $e^{\hat{x}}$ gerade Eins sind. Wir wollen im folgenden die Bewegungsgleichung des Kapitals 14) linearisieren. Dasselbe Vorgehen ist bei den anderen Gleichungen auch durchzuführen, da es aber im Wesentlichen identisch funktioniert, wird auf die Herleitung der anderen linearisierten Gleichungen verzichtet. Zunächst wollen wir den steady-state bestimmen, es ergibt sich

$$\begin{aligned} K &= (1-\tau)K + I\left(1 - S\left(\frac{\epsilon^I I}{I}\right)\right) = (1-\tau)K + I \\ \Leftrightarrow & I = \tau K. \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass im steady-state $\epsilon^I = 1$ und $S(1) = S'(1) = 0$ gilt. Schreiben wir Gleichung 14) mit oben genannter Methode um, ergibt sich

$$Ke^{\hat{K}_t} = Ke^{\hat{K}_{t-1}}(1-\tau) + Ie^{\hat{I}_{t-1}}\left(1 - S\left(\epsilon e^{\hat{\epsilon}_t^I + \hat{I}_t - \hat{I}_{t-1}}\right)\right).$$

Bilden der Taylorentwicklung ersten Grades beider Seiten ergibt

$$\begin{aligned} Ke^0 + \hat{K}_t e^0 K &= Ke^0(1-\tau) + Ie^0 + (1-\tau)e^0\hat{K}_{t-1}K + e^0 I\hat{I}_{t-1} - Ie^0 S\left(\epsilon^I e^0\right) \\ \hat{K}_t K &= K(1-\tau) - K + I + (1-\tau)\hat{K}_{t-1}K + I\hat{I}_{t-1} \\ \hat{K}_t &= (1-\tau)\hat{K}_{t-1} + \tau\hat{I}_{t-1}. \end{aligned} \tag{26}$$

Die Gleichungen für die restlichen endogenen Variablen $\hat{C}_t$, $\hat{I}_t$, $\hat{Q}_t$, $\hat{\pi}_t$, $\hat{W}_t$, $\hat{r}_t^k$ und $\hat{L}_t$ findet man durch das gleiche Vorgehen. Dabei steht π für die Inflation und auch findet man aus den steady-state Bedingungen, dass $\beta = 1/(1-\tau+\bar{r}^k)$ gelten muss. Lediglich für die Ermittlung der Gleichung für $\hat{R}_t$ ist noch etwas Arbeit vonnöten, so ist hierfür die Kostenfunktion der Zentralbank, ergo der quadratische Abstand der Inflation zur Zielinflation und der Produktionslücke, unter Berüksichtigung der IS-Funktion und der Phillipskurve $\hat{\pi}_t$ zu minimieren. Wir erhalten also neun Gleichungen, die durch die fünf Technologie-Schocks ϵ_t^a, ϵ_t^I, ϵ_t^b, ϵ_t^L, ϵ_t^G, die drei Kosten Schocks η_t^w, η_t^p, η_Q^w sowie den beiden geldpolitischen Schocks $\bar{\pi}_t$ und η_t^R getrieben werden.

Damit ist der theoretische Teil der Betrachtung eines DSGE-Modelles abgeschlossen. Als generelles Vorgehen zur Analyse eines DSGE-Modells lässt sich folgendes festhalten: Zuerst müssen die Modellgleichungen aufgestellt werden, dabei ist zu beachten, dass genug aussagekräftige Schocks enthalten sind, da sich das Modell, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, sonst nicht schätzen lässt. Auch ist eine gleiche Modellierung ähnlicher Aspekte (hier z.B. die Marktmacht der Arbeiter und die der Anbieter des Zwischengutes) ratsam, um die spätere Analyse nicht unnötig zu verkomplizieren. Der nächste Schritt ist dann die Lösung bzw. Vereinfachung des Gleichungssystems, sowie die Linearisierung der gewonnen Gleichungen.

2 Empirischer Teil

Wie schon erwähnt, ist einer der großen Vorteile des linearisierten Modells, dass man es einfach empirisch lösen kann. Dazu schreiben wir das linearisierte Modell in Matrixschreibweise auf, es ergibt sich folgende Form

$$Ax_{t+1} = Bx_t + C\upsilon_{t+1} + D\eta_{t+1} + E, \tag{27}$$

wobei x_t der n dimensionaler Vektor der Zufallsvariablen ist, υ_t der m dimensionale Vektor der strukturellen Schocks ist und η_t der n dimensionale Vektor der Erwartungsfehler $\mathrm{E}_t\, x_{t+1} - x_{t+1}$ ist, weiter seien A, B, C, D, E Matrizen, die durch entsprechende Funktionen über den k-dimensionalen Parametervektor μ des Modells gebildet werden. Die Zufallsvariablen werden dabei noch in Kontrollvariablen c_t, die das optimale Verhalten in Abhängigkeit von dem aktuellen Zustand der Wirtschaft (den Zustandsvariablen) bestimmen, und Zustandsvariablen s_t, die von dem Zustand der Wirtschaft der letzten Periode sowie aktueller Schocks bestimmt werden, unterteilt. Gesucht wird nun eine Lösung des Models, bzw. eine sogenannte policy function, der Form $c_t = c(s_t)$ und $s_t = s(s_{t-1}, \mu_t)$. In Matrixschreibweise ausgedrückt ergibt sich

$$x_{t+1} = Fx_t + G\mu_{t+1} + H,$$

wobei die Matrizen F, G, H analog zu obigen Matrizen-Funktionen von μ sind. Das Gleichungssystem 27) lässt sich, falls es eine stabile Lösung besitzt, mit Standard Methoden der Numerik wie dem Sims-Algorithmus in die gewünschte Form bringen. Es ist a priori nicht klar, dass eine stabile Lösung existiert, so überprüfen die Blanchard/Khan-Bedingungen im Sims-Algorithmus dies beispielsweise. Auch muss beachtet werden, dass das linearisierte Modell nur eine Näherung der Modelllösung ist, so werden alle Momente höherer Ordnung nicht beachtet, was mitunter schon bei einer geringen Abweichung vom steady-state zu nicht aussagekräftigen Ergebnissen führen kann.

2.1 Kalibrierung

, Um das Modell aber numerisch lösen zu können, müssen die Parameter bekannt sein. Daher stellt sich die Frage wie man zu den Werten der Parameter kommt.
Die einfachste Möglichkeit, die Parameter zu bestimmen, ist sie einfach passend a priori zu wählen. Dies macht natürlich nur Sinn, wenn wir entsprechende Informationen über die Parameter haben. Die Parameter werden dabei so gewählt, dass das Modell im steady-state mit den beobachteten Daten übereinstimmt. Auch kann es eine Hilfe sein, sich an Kalibrierungen anderer Ökonomen zu orientieren, so fanden Corsetti et al (2012) z.B. für den mark-up einen Wert von 1.15 als sinnvoll.
Generell lassen sich mit einer guten Kalibrierung der Parameter die Daten meist recht gut erklären, auch kann man die Effekte der einzelnen Parameter auf die Wirtschaft so recht einfach nachvollziehen, allerdings werden einige Parameter von unterschiedlichen Personen auch deutlich unterschiedlich kalibriert und auch ist das Verfahren statistisch nicht fundiert.

2.2 Verfahren vollständiger Information

Die Idee hinter diesen Verfahren ist, die Log-Likelihood-Funktion $\log L(X|\mu)$, die der Wahrscheinlichkeit, dass die Daten X mit dem Parametervektor μ erzeugt wurden, entspricht, zu betrachten. Die kanonische Wahl, den Vektor zu wählen, der diese Wahrscheinlichkeit maximiert, führt direkt zu dem Maximum-Likelihood-Verfahren

$$\hat{\mu}_{ML} = \underset{\mu}{\operatorname{argmax}} \log L(X|\mu). \tag{28}$$

Zur Berechnung der Likelihood kann bei linearen Modellen der Kalman-Filter benutzt werden. Damit dies allerdings funktioniert, müssen mindestens so viele Schocks wie Zufallsvariablen vorhanden sein.
Dieser Ansatz liefert in der Regel recht brauchbare Ergebnisse, hat allerdings das Problem, dass Parameter unrealistische Werte annehmen können. Auch kann es ein, dass wenn die Daten nicht aussagekräftig genug sind und damit ein Großteil der Parameter ähnlich wahrscheinlich ist, ein recht unaussage-

kräftiges Ergebnis zustande kommen kann. Auch liefert jede Realisierung der Daten einen anderen Parametervektor.
Um dieses Verhalten abzustellen, kann man das Problem einfach von der anderen Seite betrachten: Man nimmt die Daten als fest gegeben und fasst die Parameter als Realisierung einer Zufallsvariable auf. Dies führt zur Bayesianischen Schätzung, in der wir die posteriori Dichte $\wp(\mu|X)$ maximieren wollen. Mit Hilfe der Regel von Bayes führt dies zu

$$\wp = \frac{L(x|\mu)\wp(\mu)}{\wp(X)}.$$

Da $\wp(X)$ eine von dem Parametern unabhängige Konstante ist, ergibt sich nach logarithmieren das Optimierungsproblem

$$\hat{\mu}_B = \underset{\mu}{\operatorname{argmax}}\{\log L(X|\mu) + \log \wp(\mu)\}. \tag{29}$$

Zur Ermittlung der Likelihood kann wieder dar Kalman-Filter genutzt werden, wobei in diesem Fall genauso viele Schocks wie Zustandsvariablen vorhanden sein müssen, für $\wp(\mu)$ müssen Monte-Carlo- bzw. Sampling-Algorithmen bemüht werden. Vorzugsweise wird hierbei der Metropolis-Hastings-Algorithmus benutzt.
Dabei wird zuerst 29) mit frei gewählter a priori Verteilung $\wp(\mu)$ optimiert, der resultierende Parametervektor wird Modus genannt. Die a priori Verteilung kann beliebig gewählt werden, sollte aber relativ breit sein und sollte entsprechend bereits vorhandener Informationen angepasst werden, da sie großen Einfluss auf die posteriori Dichte hat. So stellt die Bayesianische Schätzung ein Bindeglied zwischen der Kalibrierung und Maximum-Likelihood-Schätzung dar. Nun wird die Inverse Hesse-Matrix der a priori Verteilung am Modus ausgewertet. Entsprechend der sich so ergebenden Varianz Σ, wird nun der Parametervektor $\mu^* \sim N(\mu^i, c^2\Sigma)$ gezogen ($\mu*$ kann zur Initialisierung beliebig gewählt werden, solange $\wp(\mu^*) > 0$ gilt). Mit der Wahrscheinlichkeit von

$$\alpha = \frac{\log L(X|\mu^*) + \log \wp(\mu^*)}{\log L(X|\mu_i) + \log \wp(\mu_i)}$$

wird nun $\mu_{i+1} = \mu^*$ gesetzt, i um Eins erhöht und ein neues μ^* gezogen. Dies geschieht solange, bis i ein vorher definiertes I erreicht hat. Mit der Gegenwahrscheinlichkeit wird der Schritt i wiederholt. Die auf diese Art und Weise generierte Markov-Kette μ_i entspricht dann für hinreichend große I $\wp(\mu|X)$. Es sei bemerkt, dass für gewöhnlich α ungefähr zwischen 0.2 und 0.3 liegen

sollte, sollte das nicht der Fall sein so sollte c, I oder der Startwert verändert werden.
Die Vorteile dieses Verfahrens liegen auf der Hand: So kann man durch die a priori Verteilung nicht modellierte Informationen ist Modell einfließen lassen und unmöglich Parameter ausschließen, wobei zu beachten ist, dass diese Parameter auch in diesem Setting nicht richtig geschätzt werden, sondern lediglich die a priori Verteilung übernehmen.
Ein weitere Vorteil ist, dass man durch die Bayesianische Schätzung Modelle vergleichen kann. Dazu wird die Wahrscheinlichkeit $m(x)$, dass das Modell gegeben der Daten das wahre ist, analog zu oben berechnet. Bildet man nun von Zwei Modellen 1, 2 die posteriori Odds

$$P0_{1,2} = \frac{p_1 m_1(X)}{p_2 m_2(X)},$$

wobei p_i die a priori Wahrscheinlichkeit der Modelle ist, so bekommt man ein Maß dafür, welches Modell die Daten besser erklärt. Ab einem Wert von ca. 10 sagt man, dass starke Evidenz für Modell 1 vorliegt.
Die Nachteile dieser Verfahren sind, dass sie doch recht restriktiv sind, so sind die Anzahl der Schocks festvorgegeben und auch die Likelihood muss hinreichend aussagekräftig sein, um ein zufriedenstellendes Ergebnis zu erhalten. Ein weiterer Nachteil ist, dass für nichtlineare Modelle die Berechnung der Likelihood mitunter nicht realisierbar ist. Um dieses Problem zu umgehen, kann man Verfahren begrenzter Information benutzen.

2.3 Verfahren begrenzter Information

Ein möglicher Ansatz bildet die General Method of Moments. Dabei wird nicht probiert die gesamte Likelihood zu maximieren, sondern man schränkt seine Betrachtung auf bestimmte Momente $M(\mu)$ ein. In diesem Kontext benutzt man hierzu die Bedingungen erster Ordnung, die steady-state Bedingungen und stochastischen Eigenschaften der exogenen Prozesse. Nun ermittelt man den Parametervektor $\hat{\mu}_G$, der die empirische Version der Bedingungen möglichst gut erfüllt, daher $\langle \hat{M}(\mu) \rangle_\Omega^2$ minimiert. Dabei bezeichnet $\langle . \rangle_\Omega$ die durch die zu wählende Gewichtmatrix Ω induzierte Norm.
Ein anderer Ansatz bildet die Methode der Indirekten Inferenzen. Die Idee dahinter ist, dass man neben seinem eigentlichen Modell ein zweites Hilfsmodell schätzt. Dieses Hilfsmodell muss dabei das eigentlich Modell nicht genau

wiedergeben, sollte aber eine bekannte bzw. leicht zu berechnende Likelihood-Funktion haben. Weiter muss es mindestens so viele Parameter β besitzen wie das eigentlich zu schätzende Modell. Nun wird $\hat{\beta}$ mittels Maximum-Likelihood geschätzt. Im nächsten Schritt wird jetzt der Parametervektor $\hat{\mu}_I$ des eigentlichen Modelles so gewählt, dass wenn man die Daten, welche mit dem Modell unter Benutzung der Parametern $\hat{\mu}_I$ simuliert wurden, zur Schätzung von β benutzt ein möglichst gleiches Ergebnis heraus kommt. Als Hilfsmodell bieten sich in dem Kontext von DSGE-Modellen VAR Modelle an, diese haben auch den Vorteil, dass es reicht die Impuls-Antwort-Funktionen zu schätzen und man so die dynamischen Eigenschaften des VAR-Modells auf das DSGE-Modell übertragen kann. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist allerdings die Begrenzte Identifierbarkeit der Parameter in den Impuls-Antwort-Funktionen. Generell liefert das Verfahren schlechtere Ergebnisse als Verfahren vollständiger Information, dafür benötigen sie deutlich weniger Voraussetzungen: Es reicht, dass man Daten simulieren kann und dass die Momente erster und zweiter Ordnung geeignet sind.

2.4 Fazit

Im obigen Abschnitten haben wir gesehen mit welchen Methoden sich DSGE empirische schätzen lassen. Dabei haben wir gesehen, dass Bayesianische Schätzung sehr gute Ergebnisse liefert, leider es aber nicht immer möglich ist dieses Verfahren anzuwenden. Daher ist gerade der Bereich der Verfahren begrenzter Information von großem Forschungsinteresse.
Praktisch lassen sich DSGE-Modell leicht in Matlab mit Hilfe von Dynare schätzen. So sind dort bereits alle wichtigen Funktionen vorprogrammiert, so dass man nur noch das Modell und die Daten spezifizieren muss, damit das Modell geschätzt werden kann.

Literaturverzeichnis

[Smi08] SMITH, Anthony: indirect inference. In: *The New Palgrave Dictionary of Economics* (2008)

[SW08] SMETS, Frank ; WOUTERS, Raf: *An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model for the Euro area.* 2008