Example-2 : প্রমাণ কর [Prove that] $\text{erf}(x) + \text{erf}_c(x) = 1$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি [We know]

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \cdots (1)$$

এবং $$\text{erf}_c(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt \cdots (2)$$

এখন [Now] (1) + (2) $\Rightarrow$

$$\text{erf}(x) + \text{erf}_c(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^x e^{-t^2}\, dt + \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt \cdots (3)$$

ধরি [we put] $t^2 = u$ | সীমা অপরিবর্তিত [limit unchanged]

তবে [then] $2t\, dt = du$

$$\therefore dt = \frac{du}{2t} = \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} u^{-1/2}\, du$$

$$\therefore (3) \Rightarrow \text{erf}(x) + \text{erf}_c(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u} \frac{1}{2} u^{-1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u} u^{1/2-1}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}$$

$= 1$. Proved

———x———

সপ্তম অধ্যায় [CHAPTER–7]
ল্যাপলাস রূপান্তর
[The Laplace Transform]

7.1 : সূচনা ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর একটি অতি গুরুত্বপূর্ণ নতুন ধারণা (topic), যাহা গণিতের ডিফারেনসিয়াল সমীকরণ, পদার্থবিদ্যা এবং ইঞ্জিনিয়ারিং এ Boundary value problem এর সমাধানে অতীব কার্যকর এক পদ্ধতি।

7.2 : সংজ্ঞা ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর **[The Laplace transform]**

মনেকরি $F(t)$ হইল t এর একটি ফাংশন, যাহা $t > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত, তবে $F(t)$ এর ল্যাপলাস রূপান্তরকে $L\{F(t)\}$, অথবা $f(s)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং ইহা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$L\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,$$ যখন s বাস্তব অথবা জটিল

যদি s এর কতিপয় মানের জন্য $\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$ ইনটিগ্র্যালটি অভিসারী হয়, তবে $L\{F(t)\}$ বিদ্যমান আছে অন্যথায় ইহা বিদ্যমান নাই।

Definition : Let $F(t)$ be a function of t defined for $t > 0$ then the Laplace transform of $F(t)$ is denoted by $L\{F(t)\}$, or $f(s)$ and is defined as follows :

$$L\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,$$ where s is real, or complex.

If the integral $\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$, converges for some value of s then $L\{F(t)\}$ is said to exist otherwise it does not exist.

উদাহরণ–1 ঃ নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর ঃ

[Find the Laplace transform of the followintg functions.]

(i). $F(t) = 1$ (ii). $F(t) = t$ (iii). $F(t) = t^n$

সমাধান-(i) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,\ s > 0 \cdots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = 1$ বসাইয়া পাই [we put $F(t) = 1$ in (1) then we get]

$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} 1\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow L\{1\} = -\frac{1}{s}(e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{s}(0-1)$$

$$\Rightarrow L\{1\} = \frac{1}{s}.$$

সমাধান-(ii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,\ s > 0 \cdots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = t$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = t$ in (1) then we get]

$$L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t\, dt$$

$$\Rightarrow L\{t\} = \left[t.\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 1.\frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$\Rightarrow L\{t\} = -\frac{1}{s}\left[\frac{t}{e^{st}}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow L\{t\} = -\frac{1}{s}(0) + \frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow L\{t\} = 0 - \frac{1}{s^2}(e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{s^2}(0-1)$$

$$\Rightarrow L\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

সমাধান-(iii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে পাই [From the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,\ s > 0 \cdots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = t^n$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = t^n$ in (1) then we get]

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}.\, t^n\, dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \left[t^n \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - n\int_0^\infty t^{n-1}\frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = -\frac{1}{s}\left[\frac{t^n}{e^{st}}\right]_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = 0 + \frac{n}{s}\left(\left[t^{n-1}\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}.\frac{e^{-st}}{-s} dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n}{s}\left(0 + \frac{n-1}{s}\int_0^\infty t^{n-2} e^{-st} dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2}\int_0^\infty t^{n-2} e^{-st} dt$$

$$L\{t^n\} = \frac{n(n-2+1)}{s^2}\int_0^\infty t^{n-2} e^{-st} dt.$$

একইভাবে ইহাকে আরও $n-2$ বার ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [In the same way integrate this more $n-2$ times then we get]

$$L\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{s^n}\int_0^\infty t^0 e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3.\,2.\,1}{s^n}\int_0^\infty e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n!}{s^n}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = -\frac{n!}{s^{n+1}}(e^{-\infty} - e^0) = -\frac{n!}{s^{n+1}}(0-1)$$

$$\Rightarrow L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ অথবা } L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}.$$

Alternate method by Gamma function :

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt$$

ধরি $st = u$

বা $t = \frac{u}{s}$ তবে $dt = \frac{du}{s}$

সীমা ঃ যদি $t = 0$ হয়, তবে $u = 0$

যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$

$$\therefore L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{du}{s}$$

$$= \int_0^\infty e^{-u}\frac{u^n}{s^n}\frac{du}{s}$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-u}\, u^{n+1-1}\, du$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

$$\therefore L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

উদাহরণ-2 : নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর [Find the Laplace transform of the following functions]

(i). e^{at} **[NUH-2007]** (ii). e^{-at} **[DUH-1990]**

সমাধান-(i). ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,\ s > 0 \cdots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = e^{at}$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = e^{at}$ in (1) then we get]

$$L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt$$

$$\text{বা } L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt$$

$$\text{বা } L\{e^{at}\} = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty = -\frac{1}{(s-a)}(e^{-\infty} - e^0)$$

$$\text{বা } L\{e^{at}\} = -\frac{1}{s-a}(0-1)$$

$$\therefore L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$

সমাধান-(ii) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে জানি [From the definition of Laplace transform, we know]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,\ s > 0 \cdots (1)$$

(1) নং এ $F(t) = e^{-at}$ বসাইয়া পাই [We put $F(t) = e^{-at}$ in (1) then we get]

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at}\, dt$$

$$\text{বা } L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$\text{বা } L\{e^{-at}\} = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty = -\frac{1}{(s+a)}(e^{-\infty} - e^0)$$

$$\text{বা } L\{e^{-at}\} = -\frac{1}{(s+a)}(0-1)$$

$$\therefore L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}.$$

উদাহরণ-3 : প্রমাণ কর :

(i). $L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$ (ii). $L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$.

সমাধান-(i) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By definition of Laplace transform, we get]

$$L\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\, dt,\ s > 0$$

$$\text{বা } L\{\cos at\} = \left[\frac{e^{-st}(-s\cos at + a\sin at)}{s^2+a^2}\right]_0^\infty$$

$$\text{বা } L\{\cos at\} = \frac{1}{(s^2+a^2)}\{0 - e^0(-s\cos 0 + a\sin 0)\};\ \text{যেহেতু } e^{-\infty} = 0$$

$$\text{বা } L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}.$$

সমাধান-(ii) : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\, dt,\ s > 0$$

$$\text{বা } L\{\sin at\} = \left[\frac{e^{-st}(-s\sin at - a\cos at)}{s^2+a^2}\right]_0^\infty$$

$$\text{বা } L\{\sin at\} = \frac{1}{(s^2+a^2)}\{0 - e^0(-s.\sin 0 - a\cos 0)\},\ \text{যেহেতু } e^{-\infty} = 0$$

$$\text{বা } L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

নোট ঃ $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$

$$\int e^{at}\sin bt\,dt = \frac{e^{at}(a\sin bt - b\cos bt)}{a^2+b^2}.$$

উদাহরণ–4 ঃ প্রমাণ কর ঃ

(i). $L\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$ [NUH-2005]

(ii). $L\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$.

প্রমাণ-(i) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{\cosh at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cosh at\,dt,\ s>0$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}(e^{at}+e^{-at})\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \{e^{-(s-a)t}+e^{-(s+a)t}\}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}+\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{(s-a)}(e^{-\infty}-e^0)-\frac{1}{(s+a)}(e^{-\infty}-e^0)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{(s-a)}(0-1)-\frac{1}{(s+a)}(0-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{(s-a)(s+a)}$$

$$\therefore L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

প্রমাণ-(ii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{\sinh at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sinh at\,dt,\ s>0$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}(e^{at}-e^{-at})\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \{e^{-(s-a)t}-e^{-(s+a)t}\}\,dt$$

$$L\{\sinh at\} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}-\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{(s-a)}(e^{-\infty}-e^0)+\frac{1}{s+a}(e^{-\infty}-e^0)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{s-a}(0-1)+\frac{1}{s+a}(0-a)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{(s-a)(s+a)}$$

$$\therefore L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}.$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের কতিপয় ধর্ম [Some properties of Laplace transform]

7.3 ঃ রৈখিক ধর্ম [The linarity property]

সংজ্ঞা ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর $L\{F(t)\}$ কে রৈখিক বলা হইবে যদি প্রত্যেক জোড়া ফাংশন $F_1(t)$ এবং $F_2(t)$ এর জন্য নিম্নলিখিত শর্তটি সিদ্ধ করে ঃ

$$L\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\}+c_2L\{F_2(t)\}$$

যেখানে c_1 এবং c_2 যে কোন ধ্রুবক।

Definition : A Laplace transform $L\{F(t)\}$ is said to be linear if for every pair of functions $F_1(t)$ and $F_2(t)$ satisfy the following condition :

$$L\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\}+C_2L\{F_2(t)\}$$

where c_1 and c_2 are any constants.

উপপাদ্য–1 ঃ যদি $L\{F_1(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F_1(t)\,dt$ এবং

$$L\{F_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F_2(t)\,dt \text{ হয়}$$

তবে $L\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\}+c_2L\{F_2(t)\}$

যেখানে c_1 এবং c_2 যে কোন ধ্রুবক।

প্রমাণ ঃ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে আমরা লিখিতে পারি [By the definition of Laplace transform, we can write]

$$L\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} c_1F_1(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-st} c_2 F_2(t)\,dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} F_1(t)\,dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} F_2(t)\,dt$$

$$= c_1 L\{F_1(t)\} + c_2 L\{F_2(t)\}.$$

উদাহরণ–1 : $4e^{5t} + 6t^3 - 3\cos 4t + 4\sin 5t$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর। [Find the L. T. of $4e^{5t} + 6t^3 - 3\cos 4t + 4\sin 5t$.]

সমাধান : রৈখিক বৈশিষ্ট প্রয়োগ করিয়া পাই [Applying the linearity property, we get]

$$L\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\cos 4t + 4\sin 5t\}$$

$$= 4L\{e^{5t}\} + 6L\{t^3\} - 3L\{\cos 4t\} + 4L\{\sin 5t\}$$

$$= 4\left(\frac{1}{s-5}\right) + 6\left(\frac{3!}{s^4}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+4^2}\right) + 4\left(\frac{5}{s^2+5^2}\right)$$

$$= \frac{4}{s-5} + \frac{36}{s^4} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{20}{s^2+25}.$$

7.4 : প্রথম স্থানান্তরের ধর্ম : [First translation or Shifting property]

উপপাদ্য–2 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে $L\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$

[If $L\{F(t)\} = f(s)$ then $L\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$]. **[NUH–1994]**

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \cdots (1)$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt,\ s > 0$$

বা $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt \cdots (2)$, (1) নং দ্বারা।

আবার ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [Again by the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{e^{at} F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} F(t)\,dt$$

বা $L\{e^{at} F(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t)\,dt$

বা $L\{e^{at} F(t)\} = \int_0^\infty e^{-ut} F(t)\,dt$, যখন $s - a = u$

বা $L\{e^{at} F(t)\} = f(u)$, (2) নং এর সাহায্যে।

বা $L\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$.

$\boxed{\text{উদাহরণ :}}$ $e^{-2t}\cos 3t$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর। [Find the Laplace transfor m of $e^{-2t}\cos 3t$]

সমাধান : আমরা জানি [We know]

$$L\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\therefore L\{e^{-2t}\cos 3t\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$\Rightarrow L\{e^{-2t}\cos 3t\} = \frac{s+2}{s^2+4s+13}.$$

7.5 : দ্বিতীয় স্থানান্তরের ধর্ম [Second translation or shiftng property]

উপপাদ্য–3 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয় এবং $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{যখন } t > a \\ 0 & \text{যখন } t < a \end{cases}$

হয়, তবে দেখাও যে $L\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$.

প্রমাণ : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt,\ s > 0$$

বা $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt \cdots (1)$, যেহেতু $L\{F(t)\} = f(s)$

দেওয়া আছে [Given that] $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{যখন } t > a \\ 0 & \text{যখন } t < a \end{cases} \cdots (2)$

আবার ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [Again by the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} G(t)\,dt$$

বা $L\{G(t)\} = \int_0^a e^{-st} G(t)\,dt + \int_a^\infty e^{-st} G(t)\,dt$

বা $L\{G(t)\} = \int_0^a e^{-st} . 0\, dt + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\, dt$, (2) নং হইতে।

বা $L\{G(t)\} = 0 + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\, dt \cdots (3)$

ধরি $t - a = u$ তবে $dt = du$	we put $t - a = u$ then $dt = du$
সীমা : যদি $t = a$ হয় তবে $u = 0$	**Limits :** If $t = a$ then $u = 0$
যদি $t = \infty$ হয় তবে $u = \infty$	If $t = \infty$ then $u = \infty$

$\therefore (3) \Rightarrow L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(a+u)} F(u)\, du$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = e^{-as} \int_0^\infty e^{-su} F(u)\, du$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$, (1) নং এর সাহায্যে।

উদাহরণ : $F(t)$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর যখন [Find the Laplace transform of $F(t)$ where]

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & \text{যখন} \quad t > 2\pi/3 \\ 0 & \text{যখন} \quad t < 2\pi/3 \end{cases}$$

সমাধান : দেওয়া আছে [Given that]

$$F(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & \text{যখন} \quad t > 2\pi/3 \\ 0 & \text{যখন} \quad t < 2\pi/3 \end{cases} \cdots (1)$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইতে [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

বা $L\{F(t)\} = \int_0^{2\pi/3} e^{-st} F(t)\, dt + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} F(t)\, dt$

বা $L\{F(t)\} = \int_0^{2\pi/3} e^{-st} . 0\, dt + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} \cos(t - 2\pi/3)\, dt$, (1) নং হইতে

বা $L\{F(t)\} = 0 + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} \cos(t - 2\pi/3)\, dt \cdots (2)$

ধরি $t - 2\pi/3 = u$	we put $t - 2\pi/3 = u$
$\therefore dt = du$	$\therefore dt = du$
সীমা : যদি $t = 2\pi/3$ হয়, তবে $u = 0$	**Limits :** If $t = 2\pi/3$ then $u = 0$
যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$	If $t = \infty$ then $\infty - 2\pi/3 = u \Rightarrow u = \infty$

$\therefore (2) \Rightarrow L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(u+2\pi/3)} \cos u\, du$

বা $L\{F(t)\} = e^{-2\pi s/3} \int_0^\infty e^{-su} \cos u\, du$

বা $L\{F(t)\} = e^{-2\pi s/3} . L\{\cos u\}$

বা $L\{F(t)\} = e^{-2\pi s/3} . \frac{s}{s^2+1}$

$\therefore L\{F(t)\} = \frac{s e^{-2\pi s/3}}{s^2+1}$.

7.6 : স্কেল পরিবর্তনের ধর্ম [Change of scale property]

উপপাদ্য–4 : যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right).$$ **[NUH–1994, 2000, 2008]**

প্রমাণ : ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt.$$

বা $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \cdots (1)$, যেহেতু $L\{F(t)\} = f(s)$

এবং $L\{F(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(at)\, dt \cdots (2)$

ধরি $at = u$	we put $at = u$
বা $t = \frac{u}{a}$ তবে $dt = \frac{1}{a} du$	or $t = \frac{u}{a}$ then $dt = \frac{du}{a}$
সীমা : যদি $t = 0$ হয়, তবে $u = 0$	**Limits :** If $t = 0$ then $u = 0$
যদি $t = \infty$ হয়, তবে $u = \infty$	If $t = \infty$ then $u = \infty$

$\therefore (2) \Rightarrow L\{F(at)\} = \int_0^\infty e^{-us/a} F(u) \frac{du}{a}$

বা $L\{F(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-us/a} F(u)\, du$

বা $L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$, (1) নং এর সাহায্যে।

উদাহরণ ঃ cos3t এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় কর [Find the Laplace transform of cos3t]

সমাধান ঃ আমরা জানি [we know] $L\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$.

$$\Rightarrow L\{\cos 3t\} = \frac{1}{3}\frac{s/3}{(s/3)^2+1},$$ উপরের উপপাদ্যের সাহায্যে।

$$\Rightarrow L\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9}.$$

7.7 ঃ অন্তরীকরণের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of derivatives]

উপপাদ্য–5 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0).$$ **[DUH–1988]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \cdots (1)$

∴ ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F'(t)\, dt$$

ইনটিগ্রেশনের অংশক্রমের সাহায্যে [Integration by parts]

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = \left[e^{-st}F(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = 0 - e^0 F(0) + sL\{F(t)\},$$ যেহেতু $e^{-\infty} = 0$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = -F(0) + sf(s),$$ (1) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0).$$ প্রমাণিত।

উপপাদ্য–6 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0).$$ **[NUH–2005, 2000]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \cdots (1)$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F''(t)\, dt$$

ইনটিগ্রেশনের অংশক্রমের সাহায্যে [Integration by parts]

$$L\{F''(t)\} = \left[e^{-st}F'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} F'(t)\, dt$$

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = 0 - e^0 F'(0) + s\left(\left[e^{-st}F(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = -F'(0) + s\left(0 - e^0 F(0) + sL\{F(t)\}\right)$$

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = -F'(0) - sF(0) + s^2 f(s),$$ (1) দ্বারা।

$$\Rightarrow L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0).$$ প্রমাণিত।

উপপাদ্য–7 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - sF'(0) - F''(0).$$

[NUH–2001, DUH–1987]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \cdots (1)$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F'''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F'''(t)\, dt$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = \left[e^{-st}F''(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} F''(t)\, dt$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = 0 - e^0 F''(0) + s\left(\left[e^{-st}F'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} F'(t)\, dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) + s\left(0 - e^0 F'(0) + s\int_0^\infty e^{-st} F'(t)\, dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sF'(0) + s^2\int_0^\infty e^{-st} F'(t)\, dt$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sF'(0) + s^2\left(\left[e^{-st}F(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt\right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sF'(0) + s^2\left(0 - e^0 F(0) + sL\{F(t)\}\right)$$

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = -F''(0) - sF'(0) - s^2 F(0) + s^3 f(s),$$ (1) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - sF'(0) - F''(0).$$ প্রমাণিত।

উপপাদ্য–৪ ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show than]

$$L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that] $L\{F(t)\} = f(s) \cdots (1)$

আরোহ পদ্ধতি প্রয়োগ করিয়া নিম্নের উপপাদ্যটি প্রমাণ করিব [We shall prove the following theorem by the method of induction]

$$L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0) \cdots (2)$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By the definition of Laplace transform, we get]

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = \left[e^{-st}F(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = 0 - e^0F(0) + sL\{F(t)\}$$

$\Rightarrow L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$, (1) নং দ্বারা।

সুতরাং (2) নং উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য। [Hence the theorem (2) is true for $n = 1$]

মনেকরি উপপাদ্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য [Let the theorem is true for $n = m$]

i. e. $L\{F^m(t)\} = s^m f(s) - s^{m-1}F(0) - s^{m-2}F'(0)$

$$- \cdots - sF^{m-2}(0) - F^{m-1}(0) \cdots (3)$$

আবার (3) নং এর বামপক্ষ হইতে পাই [Again from L. H. S. of (3) we get]

$$L\{F^m(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F^m(t)\,dt$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = \left[F^m(t)\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty F^{m+1}(t)\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}F^m(t)\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}F^{m+1}(t)\,dt$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = -\frac{1}{s}\{0 - e^0F^m(0)\} + \frac{1}{s}L\{F^{m+1}(t)\}$$

$$\text{বা } L\{F^m(t)\} = \frac{1}{s}F^m(0) + \frac{1}{s}L\{F^{m+1}(t)\} \cdots (4)$$

এখন (3) নং এবং (4) নং হইতে পাই [Now from (3) and (4), we get]

$$\frac{1}{s}F^m(0) + \frac{1}{s}L\{F^{m+1}(t)\} = s^m f(s) - s^{m-1}F(0) - s^{m-2}F'(0) - \cdots$$
$$- sF^{m-2}(0) - F^{m-1}(0)$$

$$\text{বা } F^m(0) + L\{F^{m+1}(t)\} = s^{m+1}f(s) - s^mF(0) - s^{m-1}F'(0) - \cdots$$
$$- s^2F^{m-2}(0) - sF^{m-1}(0)$$

$$\text{বা } L\{F^{m+1}(t)\} = s^{m+1}f(s) - s^mF(0) - s^{m-1}F'(0) - \cdots$$
$$- sF^{m-1}(0) - F^m(0) \cdots (5)$$

$\therefore$ উপপাদ্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য হইলে $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য হইবে।

কিন্তু উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য প্রমাণিত হইয়াছে। অতএব উপপাদ্যটি $n = 1 + 1 = 2$, $n = 2 + 1 = 3$, $n = 3 + 1 = 4 \cdots$ ইত্যাদির জন্য সত্য। সুতরাং উপপাদ্যটি n এর সকল যোগবোধক পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্য। অর্থাৎ

$$L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$

[$\therefore$ If the theorem is true for $n = m$ then it is true for $n = m + 1$.

But the theorem was proved for $n = 1$. Therefore the theorem is true for $n = 1 + 1 = 2$, $n = 2 + 1 = 3$, $n = 3 + 1 = 4 \cdots$ etc. Hence the theorem is true for all positive integral n. i. e.

$$L\{F^n(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)]$$

উদাহরণ ঃ প্রথম অন্তরীকরণের ল্যাপলাস রূপান্তর প্রয়োগ করিয়া দেখাও যে [Applying the Laplace transform of first derivative, show that]

(i). $L(t) = \frac{1}{s^2}, s > 0$ (ii). $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

সমাধান-(i) ঃ আমরা জানি [We know] $L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0) \cdots (1)$

ধরি $F(t) = t$, তাহা হইলে $F'(t) = 1$ এবং $F(0) = 0$

$\therefore (1) \Rightarrow L\{1\} = sL(t) - 0 \cdots (2)$

আবার (1) নং এ $F(t) = 1$ ধরি [Again we put $F(t) = 1$ in (1)]

$\therefore F'(t) = 0$ এবং $F(0) = 1$

$\therefore (1) \Rightarrow L\{0\} = sL\{1\} - 1$

$\Rightarrow 0 = sL\{1\} - 1$, যেহেতু $L\{0\} = 0$

$\Rightarrow sL\{1\} = 1$

$\Rightarrow L\{1\} = \frac{1}{s} \cdots (3)$

(2) নং এবং (3) নং হইতে পাই [From (2) and (3) we get]

$$\frac{1}{s} = sL\{t\} - 0$$

$$\Rightarrow L\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

সমাধান-(ii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0) \cdots (1)$$

ধরি $F(t) = e^{at}$ তবে $F'(t) = ae^{at}$ এবং $F(0) = e^0 = 1$

$$(1) \Rightarrow L\{ae^{at}\} = sL\{e^{at}\} - 1$$

$$\Rightarrow aL\{e^{at}\} = sL\{e^{at}\} - 1$$

$$\Rightarrow 1 = (s-a)\,L\{e^{at}\}$$

$$\Rightarrow L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$

উদাহরণ-2 ঃ দ্বিতীয় অন্তরীকরণের ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া প্রমাণ কর [Applying the Laplace transform of second derivative, prove that]

(i). $L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, s>0$ (ii). $L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}, s>|a|$

সমাধান-(i) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - sF(0) - F'(0) \cdots (1)$$

ধরি $F(t) = \sin at$, তাহা হইলে

$F'(t) = a\cos at$ এবং $F''(t) = -a^2 \sin at$

$\therefore F(0) = \sin 0 = 0$ এবং $F'(0) = a\cos 0 = a$

$$\therefore (1) \Rightarrow L\{-a^2 \sin at\} = s^2 L\{\sin at\} - s.0 - a$$

$$\Rightarrow -a^2 L\{\sin at\} = s^2 L\{\sin at\} - a$$

$$\Rightarrow a = s^2 L\{\sin at\} + a^2 L\{\sin at\}$$

$$\Rightarrow (s^2+a^2)\,L\{\sin at\} = a$$

$$\Rightarrow L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

সমাধান-(ii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - sF(0) - F'(0) \cdots (1)$$

ধরি $F(t) = \cosh at$, তাহা হইলে

$F'(t) = a\sinh at$ এবং $F''(t) = a^2 \cosh at$

$\therefore F(0) = \cosh 0 = 1$ এবং $F'(0) = a\sinh 0 = 0$

$$\therefore (1) \Rightarrow L\{a^2 \cosh at\} = s^2 L\{\cosh at\} - s.1 - 0$$

$$\Rightarrow a^2 L\{\cosh at\} = s^2 L\{\cosh at\} - s$$

$$\Rightarrow s = (s^2 - a^2)\,L\{\cosh at\}$$

$$\Rightarrow L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

7.8 ঃ t^n দ্বারা গুণিতক ফাংশনের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of a function multiplication by t^n]

উপপাদ্য-9 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^n(s) \text{ যেখানে } n = 1, 2, 3, \cdots$$

[NUH-1993, 2007]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$L\{F(t)\} = f(s) \cdots (1)$$

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞা হইল [Definition of Laplace transform is]

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$$

$$\Rightarrow f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt, \quad (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

লিবনীজের নিয়মে ইনটিগ্রেশন চিহ্নের ভিতরে s এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [By Leibnitz's rule, differentiating w. r. to s under the sign of integration, we get]

$$\frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-t)\, F(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} \{tF(t)\}\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = -L\{tF(t)\}$$

$$\Rightarrow L\{tF(t)\} = -\frac{d}{ds} f(s) = -f'(s)$$

$$\Rightarrow L\{tF(t)\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} f(s) = (-1)^1 f'(s)$$

সুতরাং উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য [Thus the theorem is true for $n = 1$]

উপপাদ্যটি প্রমাণের জন্য গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি ব্যাবহার করিব। মনেকরি উপপাদ্যটি $n = k$ এর জন্য সত্য, অর্থাৎ ধরি [To establish the theorem, we use mathematical induction. Let the theorem is true for $n = k$, i. e assume]

$$L\{t^k F(t)\} = (-1)^k f^k(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st}\, t^k F(t)\, dt = (-1)^k f^k(s)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} \{t^k F(t)\}\, dt = (-1)^k \frac{d}{ds} f^k(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} \{t^k F(t)\}\, dt = (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} (-t) \{t^k F(t)\}\, dt = (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow (-1)^1 \int_0^\infty e^{-st}\{t^{k+1} F(t)\}\, dt = (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow (-1)^2 \int_0^\infty e^{-st} \{t^{k+1} F(t)\}\, dt = (-1)^1 (-1)^k f^{k+1}(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} \{t^{k+1} F(t)\}\, dt = (-1)^{k+1} f^{k+1}(s)$$

ইহা অনুসরণীয় যে, যদি উপপাদ্যটি $n = k$ এর জন্য সত্য হয়, তবে উপপাদ্যটি $n = k + 1$ এর জন্য সত্য হইবে। কিন্তু উপপাদ্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য প্রমাণিত হইয়াছে। সুতরাং উপপাদ্যটি $n = 1 + 1 = 2$ এবং $n = 2 + 1 = 3, \cdots$ ইত্যাদির জন্য সত্য। অর্থাৎ উপপাদ্যটি n এর সকল যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যার জন্য সত্য।

i. e. $L\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^n(s)$, যেখানে $f^n(s) = \frac{d^n}{ds^n} f(s)$

[It follows that if the theorem is true for $n = k$ then the theorem must be true for $n = k + 1$. But the theorem was proved for $n = 1$. Hence it is true for $n = 1 + 1 = 2$ and $n = 2 + 1 = 3, \cdots$ etc and thus for all positive integral values of n. i. e.

$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^n(s)$ where $f^n(s) = \frac{d^n}{ds^n} f(s)$]

উদাহরণ ঃ নির্ণয় কর [Find] (i). $L\{t\sin at\}$,

(ii). $L\{t^2 \cos at\}$ **[NUH-2008]**

(iii). $L\{t^3 e^t\}$. **[DUH-1989]**

সমাধান-(i) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \cdots (1)$$

$$\therefore L\{t\sin at\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} f(s)$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right), \text{ (1) নং দ্বারা।}$$

$$= -\frac{(-a).\,2s}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$= \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$$

সমাধান-(ii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \cdots (1)$$

$$\therefore L\{t^2 \cos at\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} f(s)$$

$$= \frac{d}{ds} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right), \text{ (1) নং হইতে।}$$

$$= \frac{d}{ds}\left\{\frac{(s^2 + a^2)\, 1 - s.2s}{(s^2 + a^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{d}{ds}\left\{\frac{a^2 - s^2}{(s^2 + a^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{(s^2 + a^2)^2 (-2s) - (a^2 - s^2) \,.\, 2(s^2 + a^2).2s}{(s^2 + a^2)^4}$$

$$\therefore L\{t^2\cos at\} = \frac{(s^2+a^2)(-2s)-(a^2-s^2)4s}{(s^2+a^2)^3}$$
$$= \frac{2s^3-6a^2s}{(s^2+a^2)^3}.$$

সমাধান-(iii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$$
$$\Rightarrow f(s) = \frac{1}{s-1} \cdots (1)$$
$$\therefore L\{t^3 e^t\} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} f(s)$$
$$= -\frac{d^2}{ds^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right),\ (1) \text{ নং হইতে।}$$
$$= -\frac{d}{ds}\cdot\frac{d}{ds}\frac{(-1)}{(s-1)^2}$$
$$= -\frac{d}{ds}\frac{(-1)(-2)}{(s-1)^3}$$
$$= -\frac{(-1)(-2)(-3)}{(s-1)^4}$$
$$= \frac{6}{(s-1)^4}.$$

7.9 ঃ t দ্বারা ভাগ ফাংশনের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of a function division by t]

উপপাদ্য-10 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয় তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that]

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du.$$

প্রমাণ ঃ ধরি $\frac{F(t)}{t} = G(t) \cdots (1)$

তবে $F(t) = tG(t) \cdots (2)$

ধরি $L\{G(t)\} = g(s) \cdots (3)$

(2) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করিয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (2) then we get]

$$L\{F(t)\} = L\{tG(t)\}$$
$$\Rightarrow f(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds} g(s),\ \text{যেহেতু } L\{t^n G(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} g(s)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{ds} g(s) = -f(s)$$

উভয় পক্ষকে s এর সাপেক্ষে ইনটিগ্রেট করিয়া পাই [Integrating both sides w. r. to s then we get]

$$g(s) = -\int_\infty^s f(u)\,du$$
$$\Rightarrow g(s) = \int_s^\infty f(u)\,du$$
$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \int_s^\infty f(u)\,du,\ (3) \text{ নং দ্বারা।}$$
$$\Rightarrow L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du,\ (1) \text{ নং দ্বারা।}$$

নোট ঃ ধ্রুব পদকে এমনভাবে নির্বাচন করা হইয়াছে যেন $\lim_{s\to\infty} g(s) = 0$.

উপপাদ্য-11 ঃ দেখাও যে $\int_0^\infty \frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty f(u)\,du$, যেখানে ইনটিগ্র্যালদ্বয় অভিসারী। [Show that $\int_0^\infty \frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty f(u)\,du$, Provided the integrals converge]

সমাধান ঃ t দ্বারা ভাগ ফাংশনের ল্যাপলাস রূপান্তর হইল [Laplace transform of a function division by t is]

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du$$

বা $$\int_0^\infty e^{-st}\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_s^\infty f(u)\,du \cdots (1)$$

উভয় পক্ষ limit $s \to 0+$ লইয়া পাই [Taking limit $s \to 0+$ on both sides, we get]

$$\lim_{s\to 0+}\int_0^\infty e^{-st}\frac{F(t)}{t}\,dt = \lim_{s\to 0}\int_s^\infty f(u)\,du$$

বা $$\int_0^\infty \left(\lim_{s\to 0+} e^{-st}\right)\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty f(u)\,du$$

বা $$\int_0^\infty 1.\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty f(u)\,du$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty f(u)\,du.$$

উদাহরণ ঃ প্রমাণ কর [Prove that] $\int_0^\infty \frac{\sin at}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, $a > 0$. **[NUH-2000]**

সমাধান ঃ ধরি $F(t) = \sin at \cdots (1)$

$$\Rightarrow L\{F(t)\} = L\{\sin\ at\}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \cdots (2)$$

আমরা জানি [We know]

$$\int_0^\infty \frac{F(t)}{t} dt = \int_0^\infty f(u)\, du$$

বা $\int_0^\infty \frac{\sin at}{t} dt = \int_0^\infty \frac{a}{u^2 + a^2} du$, (1) নং এবং (2) নং দ্বারা।

$$= a.\frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{u}{a}\right]_0^\infty$$

$$= \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

7.10 ঃ ইনটিগ্র্যালের ল্যাপলাস রূপান্তর [Laplace transform of integrals]

উপপাদ্য–12 ঃ যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L\{F(t)\} = f(s)$ then show that.

(i). $L\left\{\int_0^t F(u)\, du\right\} = \frac{f(s)}{s}$.

[NUH-2006, NU(Pass)- 2009, DUH-1987, 1989]

(ii). $L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$

[NUH- 2003, 2005, 2006, 2008, NU(Pass)-2007, 2009]

প্রমাণ-(i) ঃ ধরি $G(t) = \int_0^t F(u)\, du \cdots (1)$

$$\Rightarrow G(0) = \int_0^0 F(u)\, du = 0 \cdots (2)$$

$$\Rightarrow G'(t) = F(t)$$

$$\Rightarrow L\{G'(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow sL\{G(t)\} - G(0) = L\{F(t)\}$$

$\Rightarrow sL\{G(t)\} - 0 = L\{F(t)\}$, (2) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \frac{L\{F(t)\}}{s}$$

$\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)\, du\right\} = \frac{L\{F(t)\}}{s}$, (1) নং দ্বারা।

$\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)\, du\right\} = \frac{f(s)}{s}$, যেহেতু $L\{F(t)\} = f(s)$.

প্রমাণ-(ii) ঃ ধরি $F(t) = \sin t \cdots (1)$

$$\Rightarrow L\{F(t)\} = L\{\sin t\}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \cdots (2)$$

আবার ধরি [Again we put]

$$G(t) = \frac{F(t)}{t} \cdots (3)$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\, du$$

$\Rightarrow L\{G(t)\} = \int_s^\infty \frac{1}{u^2 + 1} du$, (2) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_s^{1/\epsilon} \frac{du}{u^2 + 1}$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\tan^{-1} u\right]_s^{1/\epsilon}$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0} \{\tan^{-1}(1/\epsilon) - \tan^{-1}s\}$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0} \tan^{-1}\frac{1/\epsilon - s}{1 + (1/\epsilon)s}$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0} \tan^{-1}\frac{1 - \epsilon s}{\epsilon + s}$$

$$\Rightarrow G(L(t)) = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

$\Rightarrow g(s) = \tan^{-1}\frac{1}{s} \cdots (4)$ (ধরি)

কিন্তু আমরা জানি [But we know]

$$L\left\{\int_0^t G(u)\,du\right\} = \frac{g(s)}{s}$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t \frac{F(u)}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s},\ \text{(3) নং এবং (4) নং দ্বারা।}$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s},\ \text{(1) নং দ্বারা।}$$

প্রমাণিত।

বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর [The Inverse Laplace Transform]

7.11 : সংজ্ঞা : যদি $L\{F(t)\} = F(s)$ হয়, তবে $F(t)$ কে $f(s)$ এর বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর বলা হয় এবং ইহাকে $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে L^{-1} কে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর অপারেটর বলা হয়।

Definition : If $L\{F(t)\} = f(s)$ then $F(t)$ is called an **inverse Laplace transform** of $f(s)$ and it is denoted by $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$.

where L^{-1} is called the **invrese Laplace transformation operator.**

উদাহরণ : (i). $L\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a} \Rightarrow e^{at} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}$

(ii). $L\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} \Rightarrow \cos at = L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\}$

(iii). $L\{t^2\} = \dfrac{2!}{s^3} \Rightarrow t^2 = L^{-1}\left\{\dfrac{2!}{s^3}\right\}$

7.12 : বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তরের কতিপয় ধর্ম [Some properties of inverse Laplace transform]

উপপাদ্য–13 : যদি $L\{F_1(t)\} = f_1(s)$ এবং $L\{F_2(t)\} = f_2(s)$ হয় এবং c_1, c_2 ধ্রুব সংখ্যা হইলে

$$L^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{f_2(s)\}$$
$$= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t).$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that]

$$L\{F_1(t)\} = f_1(s) \cdots (1) \Rightarrow F_1(t) = L^{-1}\{f_1(s)\} \cdots (2)$$

এবং $L\{F_2(t)\} = f_2(s) \cdots (3) \Rightarrow F_2(t) = L^{-1}\{f_2(s)\} \cdots (4)$

এখন $L\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\} + c_2 L\{F_2(t)\}$. উপপাদ্য-1 : দ্বারা।

$\Rightarrow L\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$, (1) নং এবং (3) নং দ্বারা

$\Rightarrow c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) = L^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\}$

$\Rightarrow c_1 L^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{f_2(s)\} = L^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\}$

(2) নং এবং (4) নং দ্বারা।

অর্থাৎ $L^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{f_2(s)\}$.

উদাহরণ : নির্ণয় কর $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{s-3} - \dfrac{2s}{s^2+25} + \dfrac{3}{s^2+4} + \dfrac{1}{s^4}\right\}$

সমাধান : $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{s-3} - \dfrac{2s}{s^2+25} + \dfrac{3}{s^2+4} + \dfrac{1}{s^4}\right\}$

$$= 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5^2}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} + \frac{1}{3!}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\}$$

$$= 5e^{3t} - 2\cos 5t + \frac{3}{2}\sin 2t + \frac{1}{6}t^3.$$

7.13 : প্রথম স্থানান্তরের ধর্ম [First translation or shifting property]

উপপাদ্য–14 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয় তবে দেখাও যে

[If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that] $L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$.

প্রমাণ : দেওয়া আছে [Given that]

$$L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow f(s) = L\{F(t)\}$$

আমরা জানি [We know] $L\{F(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$

$$\text{বা } f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt \cdots (1)$$

(1) নং এ s এর স্থলে s – a স্থাপন করিয়া পাই [Replacing s by s – a in (1) then we get]

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)\,dt$$

$$\text{বা } f(s-a) = \int_0^\infty e^{-st}\{e^{at}F(t)\}\,dt$$

বা $f(s-a) = L\{e^{at}F(t)\}$

$\Rightarrow L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$. প্রমাণিত।

উদাহরণ ঃ প্রমাণ কর

(i). $L^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}=2e^{2t}(3\cos 4t+\sin 4t).$

[NU(Pass)-2008, DUS-1989]

(ii). $L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}=e^{-3t}\left[\cos 4t-\dfrac{1}{2}\sin 4t\right]$

(iii). $L^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}=4e^{-4t}(1-t)$ **[NUH-2006]**

সমাধান-(i) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}=L^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{(s-2)^2+4^2}\right\}$

$$=L^{-1}\left\{\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+4^2}\right\}$$

$$=6L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+4^2}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2+4^2}\right\}$$

$$=6.e^{2t}\cos 4t+2.e^{2t}\sin 4t$$

$$=2e^{2t}(3\cos 4t+\sin 4t).$$

সমাধান-(ii) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}=L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s+3)^2+4^2}\right\}$

$$=L^{-1}\left\{\frac{(s+3)-2}{(s+3)^2+4^2}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4^2}\right\}-\frac{2}{4}L^{-1}\left\{\frac{4}{(s+3)^2+4^2}\right\}$$

$$=e^{-3t}\cos 4t-\frac{1}{2}e^{-3t}\sin 4t$$

$$=e^{-3t}\left(\cos 4t-\frac{1}{2}\sin 4t\right).$$

সমাধান-(iii) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}=L^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{(s+4)^2}\right\}$

$$=L^{-1}\left\{\frac{4(s+4)-4}{(s+4)^2}\right\}$$

$$=4L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}-4L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}$$

$$=4e^{-4t}-4te^{-4t}$$

$$=4e^{-4t}(1-t).$$

7.14 ঃ দ্বিতীয় স্থানান্তরের ধর্ম [Second translation or shifting property]

উপপাদ্য-15 ঃ যদি $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ হয় তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{e^{-as}f(s)\}=\begin{cases}F(t-a) & , t>a\\ 0 & , t<a\end{cases}$$

প্রমাণ ঃ ধরি $e^{-as}f(s)=L\{G(t)\}$

তবে $L^{-1}\{e^{-as}f(t)\}=G(t)=\begin{cases}F(t-a) & , t>a\\ 0 & , t<a\end{cases}$

কাজেই $L\{G(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt$

বা $L\{G(t)\}=\int_0^a e^{-st}G(t)\,dt+\int_a^\infty e^{-st}G(t)\,dt$

বা $L\{G(t)\}=\int_0^a e^{-st}\,0\,dt+\int_a^\infty e^{-st}F(t-a)\,dt$

বা $L\{G(t)\}=0+\int_a^\infty e^{-st}F(t-a)\,dt \cdots (1)$

ধরি $t-a=u$ তবে $dt=du$	we put $t-a=u$ then $dt=du$
সীমা ঃ যদি $t=a$ তবে $u=0$	**Limits :** If $t=a$ then $u=0$
যদি $t=\infty$ তবে $u=\infty$	If $t=\infty$ then $u=\infty$

$\therefore (1)\Rightarrow L\{G(t)\}=\int_0^\infty e^{-s(a+u)}F(u)\,du$

বা $L\{G(t)\}=e^{-as}\int_0^\infty e^{-su}F(u)\,du$

বা $L\{G(t)\}=e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$

বা $L\{G(t)\}=e^{-as}L\{F(t)\}$

বা $L\{G(t)\}=e^{-as}f(s)$

বা $G(t)=L^{-1}\{e^{-as}f(s)\}$

$\Rightarrow L^{-1}\{e^{-as}f(s)\}=G(t)=\begin{cases}F(t-a) & , t>a\\ 0 & , t<a\end{cases}$

$\Rightarrow L^{-1}\{e^{-as}f(s)\}=\begin{cases}F(t-a) & , t>a\\ 0 & , t<a\end{cases}$ প্রমাণিত।

উদাহরণ ঃ দেখাও যে [Show that]

(i). $L^{-1}\left\{\frac{8e^{-3s}}{s^2+4}\right\}=\begin{cases}4\sin 2(t-3) & , t>3\\ 0 & , t<3\end{cases}$

(ii). $L^{-1}\left\{\frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+9}\right\}=\begin{cases}\cos 3t & , t>2\pi/3\\ 0 & , t<2\pi/3\end{cases}$

(iii). $L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{6}(t-5)^3e^{2(t-5)} & , t>5\\ 0 & , t<5\end{cases}$

সমাধান-(i) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}=\sin 2t$$

বা $4L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}=4\sin 2t$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{8e^{-3s}}{s^2+4}\right\}=\begin{cases}4\sin 2(t-3) & , t>3\\ 0 & , t<3\end{cases}$$

সমাধান-(ii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}=\cos 3t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+9}\right\}=\begin{cases}\cos 3(t-2\pi/3) & , t>2\pi/3\\ 0 & , t<2\pi/3\end{cases}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{se^{-2\pi s/3}}{s^2+9}\right\}=\begin{cases}\cos 3t & , t>2\pi/3\\ 0 & , t<2\pi/3\end{cases}$$

সমাধান-(iii) ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{t^3\}=\frac{3!}{s^4}$$

$$\Rightarrow L\{e^{2t}t^3\}=\frac{6}{(s-2)^4}$$

$$\Rightarrow e^{2t}t^3=L^{-1}\left\{\frac{6}{(s-2)^4}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\}=\frac{1}{6}e^{2t}t^3$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{6}e^{2(t-5)}(t-5)^3 & , t>5\\ 0 & , t<5\end{cases}$$

7.15 ঃ স্কেল পরিবর্তনের ধর্ম [Change of scale property]

উপপাদ্য-16 ঃ যদি $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ হয় তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{f(as)\}=\frac{1}{a}F(t/a).$$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি [We know]

$$L\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

$$\Rightarrow f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

s এর পরিবর্তে as বসাইয়া পাই [Replacing s by as then we get]

$$f(as)=\int_0^\infty e^{-ast}F(t)\,dt \cdots (1)$$

ধরি at = u তাহা হইলে $dt=\frac{du}{a}$

সীমা ঃ যদি t = 0 হয়, তবে u = 0

যদি $t=\infty$ হয়, তবে $u=\infty$

we put at = u then $dt=\frac{du}{a}$

Limits : If t = 0 then u = 0

If $t=\infty$ then $u=\infty$

$$\therefore (1)\Rightarrow f(as)=\int_0^\infty e^{-su}F(u/a)\frac{du}{a}$$

$$\Rightarrow f(as)=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-su}F(u/a)\,du$$

$$\Rightarrow f(as)=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-st}F(t/a)\,dt$$

$$\Rightarrow f(as)=\frac{1}{a}L\{F(t/a)\}$$

$$\Rightarrow f(as)=L\left\{\frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(as)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right).$$ প্রমাণিত।

উদাহরণ ঃ প্রমাণ কর

(i). $L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2+16}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t$ (ii). $L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2s^2+b^2}\right\}=\frac{1}{a}\cos\frac{bt}{a}$

সমাধান-(i) ঃ ধরি $F(t)=\sin 4t \cdots (1)$

আমরা জানি [we know]

$$L\{\sin 4t\} = \frac{4}{s^2 + 4^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{4}{s^2 + 16}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2 + 16}\right\}$$

s এর পরিবর্তে 2s বসাইয়া পাই [Replacing s by 2s, we get]

$$L^{-1}\{f(2s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{(2s)^2 + 16}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} F\left(\frac{t}{2}\right) = L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2 + 16}\right\},$$ স্কেল পরিবর্তনের ধর্মের দ্বারা।

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{4t}{2}\right) = L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2 + 16}\right\},$$ (1) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{4}{4s^2 + 16}\right\} = \frac{1}{2} \sin 2t.$$ প্রমাণিত।

সমাধান-(ii) ঃ ধরি $F(t) = \cos bt \cdots (1)$

আমরা জানি [We know]

$$L\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + b^2}\right\}$$

s এর পরিবর্তে as বসাইয়া পাই [Replacing s by as, we get]

$$L^{-1}\{f(as)\} = L^{-1}\left\{\frac{as}{(as)^2 + b^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{t}{a}\right) = L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2s^2 + b^2}\right\},$$ স্কেল পরিবর্তনের ধর্মের দ্বারা

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \cos(bt/a) = L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2s^2 + b^2}\right\},$$ (1) নং দ্বারা।

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{as}{a^2s^2 + b^2}\right\} = \frac{1}{a} \cos(bt/a).$$

7.16 ঃ অন্তরীকরণের বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর [Inverse Laplace transform of derivatives]

উপপাদ্য-17 ঃ যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{f^n(s)\} = (-1)^n t^n F(t).$$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে [we know, if $L\{F(t)\} = f(s)$ then]

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$$

$$\Rightarrow L\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^n(s)$$

$$\Rightarrow (-1)^n L\{t^n F(t)\} = (-1)^n (-1)^n f^n(s)$$

$$\Rightarrow L\{(-1)^n t^n F(t)\} = (-1)^{2n} f^n(s)$$

$$\Rightarrow f^n(s) = L\{(-1)^n t^n F(t)\},$$ যেহেতু 2n জোড়

$$\Rightarrow L^{-1}\{f^n(s)\} = (-1)^n t^n F(t).$$ প্রমাণিত।

উদাহরণ ঃ প্রমাণ কর $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \frac{t\sin at}{2a}$ **[NUH-2007, DUS-1986]**

সমাধান ঃ ধরি $F(t) = \frac{\sin at}{a} \cdots (1)$

আমরা জানি [We know]

$$L\left\{\frac{\sin at}{a}\right\} = \frac{1}{s^2 + a^2} = f(s)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2 + a^2} = f(s)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2 + a^2}\right) = \frac{d}{ds} f(s)$$

$$\Rightarrow \frac{-2s}{(s^2 + a^2)^2} = f'(s)$$

$$\Rightarrow \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2} f'(s)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2} L^{-1}\{f'(s)\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2}(-1)^1\, tF(t),$$ যেহেতু $L^{-1}\{f^n(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{\sin at}{a},$$ (1) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{t\sin at}{2a},$$ প্রমাণিত।

7.17 : ইনটিগ্র্যালের বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর [Inverse Laplace transform of integrals]

উপপাদ্য-18 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয় তবে দেখাও যে

[If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that] $L^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)\,du\right\} = \frac{F(t)}{t}$.

প্রমাণ : আমরা জানি, যদি $L\{F(t)\} = f(s)$ হয়, তবে [We know, if $L\{F(t)\} = f(s)$ then]

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du$$

$$\Rightarrow \frac{F(t)}{t} = L^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)\,du\right\}$$

i. e. $L^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)\,du\right\} = \frac{F(t)}{t}$. প্রমাণিত।

উদাহরণ : দেখাও যে $L^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{du}{u^2(u^2+1)}\right\} = \frac{t-\sin t}{t}$.

সমাধান : ধরি $f(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = t - \sin t = F(t) \cdots (1)$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{1}{u^2(u^2+1)}\,du\right\} = \frac{F(t)}{t},$$ উপপাদ্য 18 এর সাহায্যে।

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{du}{u^2(u^2+1)}\right\} = \frac{t-\sin t}{t},$$ (1) নং দ্বারা।

7.18 : s^n দ্বারা গুণ [Multiplication by s^n]

উপপাদ্য-19 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ এবং $F(0) = 0$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ and $F(0) = 0$ then show that]

$$L^{-1}\{sf(s)\} = F'(t).$$

প্রমাণ : আমরা জানি [We know]

$$L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$$

$$\Rightarrow L\{F'(t)\} = sf(s) - 0$$

$$\Rightarrow \{F'(t)\} = L^{-1}\{sf(s)\}$$

i. e. $L^{-1}\{sf(s)\} = F'(t) = \frac{d}{dt}F(t)$. প্রমাণিত।

উদাহরণ : যদি $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\sin t$ হয়, তবে $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\sin t$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{s.\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t\sin t\right),$$ উপপাদ্য 19 দ্বারা।

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{(s^2+1)-1}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t\sin t)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}(1.\sin t + t\cos t)$$

$$\Rightarrow \sin t - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \sin t - \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

7.19 : s দ্বারা ভাগ [Division by s]

উপপাদ্য-20 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\,du.$$

প্রমাণ : ধরি $G(t) = \int_0^t F(u)\,du \cdots (1)$ তবে

$$\therefore G'(t) = F(t) \text{ এবং } G(0) = \int_0^0 F(u)\,du = 0$$

$$\Rightarrow L\{G'(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow sL\{G(t)\} - G(0) = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow sL\{G(t)\} - 0 = f(s)$$

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s}$$

$$\Rightarrow G(t) = L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\}$$

i. e. $L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\,du$, (1) নং দ্বারা। প্রমাণিত।

উপপাদ্য-21 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ then show that]

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv.$$

প্রমাণ : ধরি $G(t) = \int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv \cdots (1)$

তাহা হইলে $G'(t) = \int_0^t F(u)\,du \cdots (2)$ এবং $G''(t) = F(t) \cdots (3)$

$$\text{এবং } G(0) = \int_0^0 \int_0^v F(u)\,du\,dv = 0$$

$$G'(0) = \int_0^0 F(u)\,du = 0$$

অর্থাৎ $G(0) = G'(0) = 0 \cdots (4)$

(3) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (3) then we get]

$$L\{G''(t)\} = L\{F(t)\}$$

$$\Rightarrow s^2 L\{G(t)\} - sG(0) - G'(0) = f(s)$$

$\Rightarrow s^2 L\{G(t)\} - 0 - 0 = f(s)$. (4) নং দ্বারা।

$$\Rightarrow L\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s^2}$$

$$\Rightarrow G(t) = L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\}$$

i. e. $L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv$. (1) নং দ্বারা। (প্রমাণিত)

নোট-1 : $L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v f(u)\,du\,dv$ কে নিম্নরূপেও লিখা যায়।

$$L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^t F(t)\,dt.\,dt$$

নোট-2 : $L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)\,(dt)^n$

উদাহরণ : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর। **[NUH-2005]**

সমাধান : আমরা জানি [We know]

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t.$$

$$\therefore L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \sin t\,dt\,dt\,dt$$

$$= \int_0^t \int_0^t [-\cos]_0^t\,dt\,dt$$

$$= \int_0^t \int_0^t (1 - \cos t)dt\,dt$$

$$= \int_0^t [t - \sin t]_0^t\,dt = \int_0^t (t - \sin t)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} + \cos t\right]_0^t = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

7.20 : কনভলিউশনের ধর্ম [Convolution property] :

উপপাদ্য-22 : যদি $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ হয়, তবে দেখাও যে [If $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ then show that]

$$L^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du. \qquad \text{[NUH-2005, 2009]}$$

প্রমাণ : আমরা প্রমাণ করিতে চাই [We want to prove that]

$$L^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du$$

ইহার জন্য আমাদের দেখাইতে হইবে [For this we shall have to show that]

$$f(s)\,g(s) = L\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\}$$

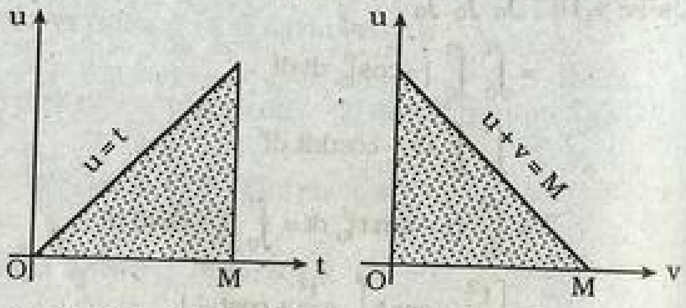
যখন $f(s) = L\{F(t)\}$ এবং $g(s) = L\{G(t)\}$. [where $f(s) = L\{F(t)\}$ and $g(s) = L\{G(t)\}$].

ল্যাপলাস রূপান্তরের সংজ্ঞানুসারে পাই [By definition of Laplace transform, we get]

$$L\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\}dt$$

$$= \int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} e^{-st}\,F(u)\,G(t-u)\,du\,dt$$

$$= \lim_{M\to\infty}\int_{t=0}^{M}\int_{u=0}^{t} e^{-st}\,F(u)\,G(t-u)\,du\,dt \cdots (1)$$



ধরি $t - u = v$, বা $t = u + v \Rightarrow dt = dv$

$$\therefore (1) \Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\}$$

$$= \lim_{M\to\infty}\int_0^M\int_0^{M-v} e^{-s(u+v)}\,F(u)\,G(v)\,du\,dv$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\} = \int_0^\infty e^{-su}\,F(u)\,du\int_0^\infty e^{-sv}\,G(v)\,dv$$

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\} = f(s)\,g(s)$$

$$\Rightarrow \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du = L^{-1}\{f(s)\,G(s)\}$$

$$\therefore L^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du. \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

নোট : $L^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t G(u)\,F(t-u)\,du.$

উদাহরণ : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^3}\right\}$ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি $f(s) = \dfrac{1}{s^2}$ এবং $g(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$.

$$\therefore F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$$

এবং $G(t) = L^{-1}\{g(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^3}\right\} = \dfrac{t^2}{2!}e^{-t} = \dfrac{1}{2}t^2e^{-t}$

$$\therefore L^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t G(u)\,F(t-u)\,du$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{1}{(s+1)^3}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}u^2e^{-u}(t-u)\,du$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^3}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^t (u^2t - u^3)\,e^{-u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[(u^2t-u^3)(-e^{-u}) - (2ut-3u^2)(e^{-u}) + (2t-6u)(-e^{-u}) - (-6)e^{-u}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\left[\{0-(-t^2)\,e^{-t} + (-4t)(-e^{-t}) + 6e^{-t}\} - \{2t(-1)+6\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(t^2e^{-t} + 4te^{-t} + 6e^{-t} + 2t - 6)$$

$$= \frac{1}{2}t^2e^{-t} + 2te^{-t} + 3e^{-t} + t - 3.$$

7.21 ঃ আংশিক অন্তরকে ল্যাপলাস রূপান্তরের প্রয়োগ [Application of Laplace transform in partial derivative] :

যদি প্রদত্ত ফাংশন U(x, t) সংজ্ঞায়িত হয় $a \le x \le b,\ t > 0$ এর জন্য তবে নির্ণয় কর [If the given function U(x, t) defined for $a \le x \le b,\ t > 0$ then find]

(i). $L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\}$, (ii) $L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\}$, (iii). $L\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}$, (iv). $L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$.

সমাধান–(i) ঃ ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u \cdots (1)$

$$\therefore L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}U(x, t)\,dt$$
$$= \left[e^{-st}\,U(x, t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,U(x, t)\,dt$$
$$= 0 - U(x, 0) + sL\{U(x, t)\}$$
$$= su(x, s) - U(x, 0);\ \text{by (1)}$$
$$= su - U(x, 0).$$

সমাধান–(ii) ঃ ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u.$

$$\therefore L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(x, t)\,dt.$$
$$\Rightarrow L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \left[e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}U(x, t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial t}U(x, t)\,dt$$
$$= \left[e^{-st}\,U_t(x, t)\right]_0^\infty + s\left\{\left[e^{-st}\,U(x, t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,U(x, t)\,dt\right\}$$
$$= 0 - U_t(x, 0) + s\{0 - U(x, 0)\} + s^2L\{U(x, t)\}$$
$$= -U_t(x, 0) - sU(x, 0) + s^2\,u(x, s)$$
$$= s^2u - sU(x, 0) - U_t(x, 0)$$

সমাধান–(iii) ঃ ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u$

$$L\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial x}U(x, t)\,dt$$
$$= \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}\,U(x, t)\,dt$$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \frac{d}{dx}L\{U(x, t)\}$$
$$= \frac{d}{dx}u(x, s)$$
$$= \frac{du}{dx}.$$

সমাধান–(iv) ঃ ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u$

$$\therefore L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x, t)\,dt$$
$$= \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}\,U(x, t)\,dt$$
$$= \frac{d^2}{dx^2}L\{U(x, t)\}$$
$$= \frac{d^2}{dx^2}u(x, s)$$
$$= \frac{d^2u}{dx^2}.$$

উদাহরণমালা [EXAMPLES]

উদাহরণ–1 ঃ $4e^{2t}$, e^{-t}, $\sin t$, $t^2 e^t$ এবং $\cos 2t$ এর ল্যাপলাস রূপান্তর নির্ণয় **[DUS–1992]**

সমাধান ঃ সংজ্ঞানুসারে আমরা লিখিতে পারি [By definition we can write]

$$L\{4e^{2t}\} = \int_0^\infty e^{-st}\,4e^{2t}\,dt = 4\int_0^\infty e^{-(s-2)t}\,dt$$
$$= 4\left[\frac{e^{-(s-2)t}}{-(s-2)}\right]_0^\infty = \frac{-4}{s-2}(0-1)$$
$$= \frac{4}{s-2}$$

$$L\{e^{-t}\} = \int_0^\infty e^{-st}\,e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+1)t}\,dt$$
$$= \left[\frac{e^{-(s-1)t}}{-(s+1)}\right]_0^\infty$$
$$= -\frac{1}{(s+1)}(0-1)$$
$$= \frac{1}{s+1}$$

$$L\{\sin t\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin t \, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-st}(-s\sin t - \cos t)}{s^2+1}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s^2+1}\{0 - e^0(s\sin 0 - \cos 0)\}$$

$$= \frac{1}{s^2+1}$$

আমরা জানি $L\{t^2\} = \frac{2!}{s^3}$

$$\Rightarrow L\{e^t t^2\} = \frac{2!}{(s-1)^3}$$

$$\Rightarrow L\{e^t t^2\} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$L\{\cos 2t\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos 2t \, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-st}(-s\cos 2t + 2\sin 2t)}{s^2+2^2}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s^2+4}\{0 - e^0(-s\cos 0 + 2\sin 0)\}$$

$$= \frac{s}{s^2+4}.$$

উদাহরণ-2. মান নির্ণয় কর [Find] (i) $L\{t^2 \sin t\}$ **[NUH-200**

(ii). $L\{t^2 \sin 3t\}$. **[NUH-2000, 200**

সমাধান-2(i) : আমরা জানি [We know]

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdots (1)$$

$$\therefore L\{t^2 \sin t\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} f(s)$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right); \text{ (1) নং দ্বারা ।}$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}(s^2+1)^{-1}$$

$$= \frac{d}{ds}(-1)\cdot(s^2+1)^{-2}(2s)$$

$$L\{t^2 \sin t\} = (-1)\cdot 2\frac{d}{ds}\{s(s^2+1)^{-2}\}$$

$$= (-1)\cdot 2[(s^2+1)^{-2} + s(-2)(s^2+1)^{-3}\, 2s]$$

$$= -2\left[\frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{4s^2}{(s^2+1)^3}\right]$$

$$= -2\left[\frac{s^2+1-4s^2}{(s^2+1)^3}\right] = \frac{-2(-3s^2+1)}{(s^2+1)^3}$$

$$= \frac{2(3s^2-1)}{(s^2+1)^3}.$$

সমাধান-2(ii) : আমরা জানি [We know]

$$L\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+3^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \frac{3}{s^2+9} \cdots (1)$$

$$\therefore L\{t^2 \sin 3t\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} f(s)$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right); \text{ by (1)}$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}[3(s^2+9)^{-1}]$$

$$= \frac{d}{ds}[3(-1)(s^2+9)^{-2}\cdot 2s]$$

$$= -6\frac{d}{ds}[s(s^2+9)^{-2}]$$

$$= -6[1(s^2+9)^{-2} + s(-2)(s^2+9)^{-3}\, 2s]$$

$$= -6\left[\frac{1}{(s^2+9)^2} - \frac{4s^2}{(s^2+9)^3}\right]$$

$$= -6\left[\frac{s^2+9-4s^2}{(s^2+9)^3}\right] = -\frac{6[-3s^2+9]}{(s^2+9)^3}$$

$$= \frac{18(s^2-3)}{(s^2+9)^3}.$$

উদাহরণ-3 : মান নির্ণয় কর :

3(i). $L^{-1}\left\{\frac{8}{s^2-6s+25}\right\}$ **[DUH-1987]**

3(ii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2-1)}\right\}$ **[NUH-2008]**

3(iii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$ **[NUH-2002, 2008]**

3(iv). $L^{-1}\left\{\dfrac{7s+12}{s^2+9}\right\}$ **[NUH-2002]**

3(v). $L^{-1}\left\{\dfrac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\}$ **[NUH-2006, 2009]**

সমাধান-3(i) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{8}{s^2-6s+25}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{8}{(s-3)^2+4^2}\right\}$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{4}{(s-3)^2+4^2}\right\}$$

$$= 2e^{3t}\sin 4t.$$

সমাধান-3(ii) : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2-1)}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-1} - \dfrac{1}{s}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$= \cosh t - 1.$$

সমাধান-3(iii) : $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$= 1 - \cos t.$$

সমাধান-3(iv) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{7s+12}{s^2+9}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{7s}{s^2+9}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{12}{s^2+9}\right\}$

$$= 7L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} + 4L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}$$

$$= 7\cos 3t + 4\sin 3t$$

সমাধান-3(v) ঃ

$$L^{-1}\left\{\frac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-4-11}{(s+2)(-2-3)} + \frac{6-11}{(3+2)(s-3)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{3}{s+2} - \frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= 3e^{-2t} - e^{3t}.$$

উদাহরণ-3(vi) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^2(s-1)-5s(s-1)+6(s-1)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{(s-1)(s^2-5s+6)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2-6+5}{(s-1)(-1)(-2)} + \frac{8-12+5}{1(s-2)(-1)} + \frac{18-18+5}{2.1(s-3)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{s-2} + \frac{5}{2(s-3)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{t} - e^{2t} + \frac{5}{2}e^{3t}.$$

উদাহরণ-3(vii) ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{6}{2s-3} - \dfrac{3+4s}{9s^2-16} + \dfrac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{6}{2s-3} - \dfrac{3+4s}{9s^2-16} + \dfrac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{6}{2s-3} - \frac{3}{9s^2-16} - \frac{4s}{9s^2-16} + \frac{8}{16s^2+9} - \frac{6s}{16s^2+9}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{6}{2(s-3/2)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3}{9(s^2-16/9)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4s}{9(s^2-16/9)}\right\}$$

$$+ L^{-1}\left\{\frac{8}{16(s^2+9/16)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{6s}{16(s^2+9/16)}\right\}$$

$$= 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3/2}\right\} - \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-(4/3)^2}\right\} - \frac{4}{9}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-(4/3)^2}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(3/4)^2}\right\} - \frac{3}{8}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(3/4)^2}\right\}$$

$$= 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3/2}\right\} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4/3}L^{-1}\left\{\frac{4/3}{s^2-(4/3)^2}\right\} - \frac{4}{9}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-(4/3)^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{2.3/4}L^{-1}\left\{\frac{3/4}{s^2+(3/4)^2}\right\} - \frac{3}{8}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(3/4)^2}\right\}$$

$$= 3e^{3t/2} - \frac{1}{4}\sinh\frac{4t}{3} - \frac{4}{9}\cosh\frac{4t}{3} + \frac{2}{3}\sin\frac{3t}{4} - \frac{3}{8}\cos\frac{3t}{4}.$$

উদাহরণ-3(viii) : $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : আংশিক ভগ্নাংশের কভার আপ নিয়ম অনুসারে পাই [By the rule of cover up partial fraction, we get]

$$\frac{1}{(s+2)^2(s-2)} = \frac{1}{(s+2)^2(-2-2)} + \frac{A}{s+2} + \frac{1}{(2+2)^2(s-2)}$$

বা $\frac{1}{(s+2)^2(s-2)} = \frac{1}{-4(s+2)^2} + \frac{A}{s+2} + \frac{1}{16(s-2)} \cdots (1)$

এখন উভয় পক্ষ s = 0 বসাইয়া পাই [Now putting s = 0 on both sides then we get]

$$\frac{1}{2^2(-2)} = \frac{1}{-4(2)^2} + \frac{A}{2} + \frac{1}{16(-2)}$$

বা $\frac{A}{2} = \frac{1}{-8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

বা $\frac{A}{2} = \frac{-4+2+1}{32}$

বা $\frac{A}{2} = \frac{-1}{32} \Rightarrow A = -\frac{1}{16}$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} = \frac{-1/4}{(s+2)^2} + \frac{-1/16}{s+2} + \frac{1/16}{s-2}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করিয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-1/4}{(s+2)^2} + \frac{-1/16}{s+2} + \frac{1/16}{s-2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} - \frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{16}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} - \frac{1}{16}e^{-2t} + \frac{1}{16}e^{2t} \cdots (2)$$

আমরা জানি $L\{e^{-2t}\} = \frac{1}{s+2}$

$$\Rightarrow L\{te^{-2t}\} = (-1)^1\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$= L\{te^{-2t}\} = (-1)\frac{(-1)}{(s+2)^2}$$

$$\Rightarrow te^{-2t} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} \cdots (3)$$

এখন (2) নং এবং (3) নং হইতে পাই [From (2) and (3), we get]

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\} = -\frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{16}e^{-2t} + \frac{1}{16}e^{2t}.$$

উদাহরণ-4 : $L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি $\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \cdots (1)$

বা $3s+1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1) \cdots (2)$

বা $3s+1 = As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C \cdots (3)$

এখন (2) নং এর উভয় পক্ষে s = 1 বসাইয়া পাই [Putting s = 1 on both sides of (2), we get]

$$4 = A(2) + 0 \Rightarrow A = 2$$

(3) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^2 এবং s এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই [Equating the coefficient of s^2, s from both sides of (3), we get]

$0 = A + B$, বা $0 = 2 + B \Rightarrow B = -2$

এবং $3 = -B + C$

বা $3 = 2 + C \Rightarrow C = 1$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1}$$

এখন উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} - \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2e^t - 2\cos t + \sin t.$$

উদাহরণ-5 : নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর [Find the following inverse Laplace transforms; :

(i). $L^{-1}\left\{\frac{(s+1)\,e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$. (ii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\}$.

সমাধান-5(i) : $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1/2)^2+3/4}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{(s+1/2)+1/2}{(s+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}}L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right\}$$

$$= e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}$$

$$= \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{(s+1)\,e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\} = \begin{cases} \dfrac{e^{-(t-\pi)/2}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2} + \sin\dfrac{\sqrt{3}\,(t-\pi)}{2}\right\}, & t > \pi \\ 0, & t < \pi \end{cases}$$

সমাধান-5(ii) : আমরা জানি [We know]

$$J_0(at) = 1 - \frac{a^2t^2}{2^2} + \frac{a^4t^4}{2^2\cdot4^2} - \frac{a^6t^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2} + \cdots$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = L\left\{1 - \frac{a^2t^2}{2^2} + \frac{a^4t^4}{2^2\cdot4^2} - \frac{a^6t^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2} + \cdots\right\}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = L\{1\} - \frac{a^2}{2^2}L\{t^2\} + \frac{a^4}{2^2\cdot4^2}L\{t^4\} - \frac{a^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}L\{t^6\} + \cdots$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = \frac{1}{s} - \frac{a^2}{2^2}\cdot\frac{2!}{s^3} + \frac{a^4}{2^2\cdot4^2}\cdot\frac{4!}{s^5} - \cdots$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{s^2}\right) + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{a^2}{s^2}\right)^2 - \cdots\right\}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = \frac{1}{s}\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = \frac{1}{s}\left(\frac{s^2}{s^2+a^2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow L\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

উভয় পক্ষকে a এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করিয়া পাই [Differentiating both sides w. r. to a then we get]

$$L\{tJ_0'(at)\} = -\frac{1}{2}(s^2+a^2)^{-3/2}\cdot 2a$$

বা $L\{tJ_0'(at)\} = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = -\frac{t}{a}J_0'(at)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = -\frac{t}{a}\{-J_1(at)\};$$ যেহেতু $J_0'(x) = -J_1(x)$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = \frac{tJ_1(at)}{a}.$$

উদাহরণ-6(i) : সমাধান কর [Solve] :

$Y''(t) - 2Y'(t) - 8Y(t) = 0,\ Y(0) = 3,\ Y'(0) = 6.$ **[NUH-2000]**

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণসমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) - 2Y'(t) - 8Y(t) = 0 \quad \cdots (1)$$

এবং $Y(0) = 3,\ Y'(0) = 6 \quad \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$, তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on (1) we get]

$$L\{Y''(t)\} - 2L\{Y'(t)\} - 8L\{Y(t)\} = 0$$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - 2\{sy(s) - Y(0)\} - 8y(s) = 0$

বা $s^2y(s) - 3s - 6 - 2\{sy(s) - 3\} - 8y(s) = 0$

বা $(s^2 - 2s - 8)\,y(s) - 3s - 6 + 6 = 0$

বা $y(s) = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8}$

বা $y(s) = \frac{3s}{(s-4)(s+2)}$

বা $y(s) = \frac{12}{6(s-4)} + \frac{-6}{-6(s+2)}$

বা $y(s) = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-4}+\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\text{বা } Y(t) = 2e^{4t}+e^{-2t}.$$

উদাহরণ–6(ii) ঃ সমাধান কর [Solve] ঃ

$Y''(x) - Y'(x) = x$ যখন $Y(0) = 2$ এবং $Y'(0) = -3$. **[DUS–1990]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণসমূহ [Given equations are]

$$Y''(x) - Y'(x) = x \cdots (1)$$

এবং $Y(0) = 2,\ Y'(0) = -3 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(x)\} = y(s)$, তবে $Y(x) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on (1), we get]

$$L\{Y''(x)\} - L\{Y'(x)\} = L(x)$$

$$\text{বা } s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - \{sy(s) - Y(0)\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\text{বা } s^2y(s) - 2s + 3 - sy(s) + 2 = \frac{1}{s^2}, \text{ (2) নং দ্বারা।}$$

$$\text{বা } (s^2 - s)\,y(s) = \frac{1}{s^2} + 2s - 5$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{1}{s^2(s^2-s)} + \frac{2s}{s^2-s} - \frac{5}{s^2-s}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{1}{s^3(s-1)} + \frac{2}{s-1} - \frac{5}{s(s-1)} \cdots (2)$$

$$\text{ধরি } \frac{1}{s^3(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-1} \cdots (3)$$

$$\text{বা } \frac{1}{s^3(s-1)} = \frac{As^2(s-1) + Bs(s-1) + C(s-1) + Ds^3}{s^3(s-1)}$$

$$\text{বা } 1 = As^2(s-1) + Bs(s-1) + C(s-1) + Ds^3 \cdots (4)$$

এখন (4) নং এ পর্যায়ক্রমে $s = 0$ এবং $s = 1$ বসাইয়া পাই [Putting $s = 0$ and $s = 1$ successively in (4) then we get]

$$1 = C(0-1) \Rightarrow C = -1$$

$$\text{এবং } 1 = D.1^3 \Rightarrow D = 1$$

এখন (4) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^3 এবং s^2 এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই [Now equating the coefficients of s^3 and s^2 from both sides of (4) then we get]

$$0 = A + D, \quad \text{বা } A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1$$

$$\text{এবং } 0 = -A + B, \text{ বা } B - (-1) = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$\therefore (3) \Rightarrow \frac{1}{s^3(s-1)} = \frac{-1}{s} + \frac{-1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s-1} \cdots (5)$$

$$\text{এবং } \frac{5}{s(s-1)} = \frac{5}{s(0-1)} + \frac{5}{1(s-1)}$$

$$\text{বা } \frac{5}{s(s-1)} = -\frac{5}{s} + \frac{5}{s-1} \cdots (6)$$

এখন (5) নং এবং (6) নং এর সাহায্যে (2) নং কে নিম্নরূপে লিখা যায় [By using (5) and (6), (2) can be written as follows] :

$$y(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-1} + \frac{5}{s} - \frac{5}{s-1}$$

$$\text{বা } y(s) = \frac{4}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s-1}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} - \frac{2}{s-1}\right\}$$

$$\text{বা } Y(x) = 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$\text{বা } Y(x) = 4(1) - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - 2e^x, \text{ যেহেতু } L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore Y(x) = 4 - x - \frac{1}{2}x^2 - 2e^x.$$

উদাহরণ-6(iii) ঃ সমাধান কর [Solve] $Y''(t) + 9Y(t) = \cos 2t$ যদি $Y(0) = 1$ এবং $Y(\pi/2) = -1$. **[NUH-2000, NU(Pass)-2006, DUH-1993, 198]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণসমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) + 9Y(t) = \cos 2t \quad \cdots (1)$$

এবং $Y(0) = 1$, $Y(\pi/2) = -1 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$, তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L\{Y''(t)\} + 9L\{Y(t)\} = L\{\cos 2t\}$$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + 9y(s) = \dfrac{s}{s^2 + 2^2}$

বা $s^2 y(s) - s - Y'(0) + 9y(s) = \dfrac{s}{s^2 + 4}$, (2) নং দ্বারা।

বা $(s^2 + 9)\, y(s) - s - a = \dfrac{s}{s^2 + 4}$, যখন $a = Y'(0)$.

বা $(s^2 + 9)\, y(s) = \dfrac{s}{s^2 + 4} + s + a$

বা $y(s) = \dfrac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)} + \dfrac{s}{s^2 + 9} + \dfrac{a}{s^2 + 9}$

বা $y(s) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{s}{s^2 + 4} - \dfrac{s}{s^2 + 9}\right) + \dfrac{s}{s^2 + 9} + \dfrac{a}{s^2 + 9}$

বা $y(s) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{s}{s^2 + 4} + \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{s}{s^2 + 9} + \dfrac{a}{s^2 + 9}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{a}{s^2 + 9}\right\}$$

বা $Y(t) = \dfrac{1}{5} L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + 2^2}\right\} + \dfrac{4}{5} L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + 3^2}\right\} + \dfrac{a}{3} L^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2 + 3^2}\right\}$

বা $Y(t) = \dfrac{1}{5}\cos 2t + \dfrac{4}{5}\cos 3t + \dfrac{a}{3}\sin 3t \cdots (2)$

এখন (2) নং এ $t = \pi/2$ বসাইয়া পাই [Now putting $t = \pi/2$ in (2) then we get]

$$Y(\pi/2) = \frac{1}{5}\cos\pi + \frac{4}{5}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{a}{3}\sin\frac{3\pi}{2}$$

বা $-1 = -\dfrac{1}{5} + 0 + \dfrac{a}{3}(-1)$, (2) নং দ্বারা।

বা $1 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{a}{3} \Rightarrow \dfrac{a}{3} = \dfrac{4}{5}$

$\therefore (2) \Rightarrow Y(t) = \dfrac{1}{5}\cos 2t + \dfrac{4}{5}\cos 3t + \dfrac{4}{5}\sin 3t.$

উদাহরণ-6(iv) : সমাধান কর [Solve] : $Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) = 4\sin t$, $Y(0) = -2$, $Y'(0) = 1$. **[NUH-2001]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$$Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) = 4\sin t \quad \cdots (1)$$

এবং $Y(0) = -2$, $y'(0) = 1 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L\{Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t)\} = L\{4\sin t\}$$

বা $L\{Y''(t)\} + 2L\{Y'(t)\} + L\{Y(t)\} = 4L\{\sin t\}$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + 2\{sy(s) - Y(0)\} + y(s) = \dfrac{4}{s^2 + 1}$

বা $s^2y(s) + 2s - 1 + 2\{sy(s) + 2\} + y(s) = \dfrac{4}{s^2 + 1}$

বা $(s^2 + 2s + 1)\, y(s) = \dfrac{4}{s^2 + 1} - 2s + 1 - 4$

বা $(s + 1)^2\, y(s) = \dfrac{4}{s^2 + 1} - 2s - 3$

বা $y(s) = \dfrac{4}{(s + 1)^2 (s^2 + 1)} - \dfrac{2s + 3}{(s + 1)^2}$

$= \dfrac{4}{(s + 1)^2 (s^2 + 1)} - \dfrac{2(s + 1) + 1}{(s + 1)^2}$

$= \dfrac{4}{(s + 1)^2 (s^2 + 1)} - \dfrac{2}{s + 1} - \dfrac{1}{(s + 1)^2}$

$$\Rightarrow y(s) = -\frac{2}{s+1} + \frac{4-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)}$$

$$= \frac{-2}{s+1} - \frac{s^2-3}{(s+1)^2(s^2+1)} \cdots (3)$$

ধরি $\frac{s^2-3}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \cdots (4)$

বা $\frac{s^2-3}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{A(s+1)(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s+1)^2}{(s+1)^2(s^2+1)}$

বা $s^2-3 = A(s^3+s^2+s+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+2s+1)$

বা $s^2-3 = A(s^3+s^2+s+1) + B(s^2+1) + C(s^3+2s^2+s) + D(s^2+2s+1)$

উভয় পক্ষ হইতে একজাতীয় পদগুলো সমীকৃত করিয়া পাই [Equating like terms from both sides we get]

$0 = A + C \cdots (i)$, $\quad 1 = A + B + 2C + D \cdots (ii)$

$0 = A + C + 2D \cdots (iii)$ এবং $-3 = A + B + D \cdots (iv)$

$(iii) - (i) \Rightarrow 2D = 0 \Rightarrow D = 0$

$(ii) - (iv) \Rightarrow 1 + 3 = 2C \Rightarrow C = 2$

$(iii) \Rightarrow A + 2 + 0 = 0 \Rightarrow A = -2$

$(iv) \Rightarrow -2 + B + 0 = -3 \Rightarrow B = -1$

এখন (4) নং এ $A = -2$, $B - 1$, $C = 2$ এবং $D = 0$ স্থাপন করি [Now putting $A = -2$, $B = -1$, $C = 2$ and $D = 0$ in (4)]

$$\frac{s^2-3}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{-2}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{2s+0}{s^2+1}$$

$$\therefore (3) \Rightarrow y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2s}{s^2+1}$$

বা $y(s) = -\frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

বা $Y(t) = -2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$

বা $Y(t) = -2\cos t - te^{-t}$.

উদাহরণ-6(v) ঃ সমাধান কর [Solve]

$Y''(t) + Y(t) = t\cos 2t$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0$. **[NUH-2004]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$Y''(t) + Y(t) = t\cos 2t \cdots (1)$

এবং $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1), we get]

$L\{Y''(t) + Y(t)\} = L\{t\cos 2t\}$

বা $L\{Y''(t)\} + L\{Y(t)\} = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + y(s) = (-1)\left[\frac{1}{s^2+4} - \frac{2s^2}{(s^2+4)^2}\right]$

বা $s^2y(s) - 0 - 0 + y(s) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$

বা $(s^2+1)\,y(s) = \frac{(s^2+4)-8}{(s^2+4)^2}$

বা $(s^2+1)\,y(s) = \frac{1}{s^2+4} - \frac{8}{(s^2+4)^2}$

বা $y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{8}{(s^2+1)(s^2+4)^2}$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right] - \frac{8}{(s^2+1)(s^2+4)^2} \cdots (3)$$

এখন $\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)^2}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয় করিব।

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)^2} = \frac{1}{(k+1)(k+4)^2} \text{ যখন } s^2 = k.$$

আংশিক ভগ্নাংশের কভার আপ নিয়ম অনুসারে পাই

$$\frac{1}{(k+4)^2(k+1)} = \frac{1}{(k+4)^2(-4+1)} + \frac{A}{k+4} + \frac{1}{(-1+4)^2(k+1)}$$

বা $\frac{1}{(k+4)^2(k+1)} = -\frac{1}{3(k+4)^2} + \frac{A}{k+4} + \frac{1}{9(k+1)} \cdots (4)$

উভয় পক্ষে k = 0 বসাইয়া পাই [Putting k = 0 on both sides we get]

$$\frac{1}{16(1)} = \frac{1}{-3(16)} + \frac{A}{4} + \frac{1}{9}$$

বা $\frac{A}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{3(16)} - \frac{1}{9} = \frac{9+3-16}{144} = \frac{-4}{9(16)}$

বা $A = \frac{-16}{9(16)} \Rightarrow A = -\frac{1}{9}$

$$(4) \Rightarrow \frac{1}{(k+4)^2\,(k+1)} = -\frac{1}{3(k+4)^2} - \frac{1}{9(k+4)} + \frac{1}{9(k+1)}$$

বা $\frac{1}{(s^2+4)^2\,(s^2+1)} = -\frac{1}{3(s^2+4)^2} - \frac{1}{9(s^2+4)} + \frac{1}{9(s^2+1)}$

$$\therefore (3) \Rightarrow y(s) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right] - 8\left[-\frac{1}{3(s^2+4)^2} - \frac{1}{9(s^2+4)} + \frac{1}{9(s^2+1)}\right]$$

বা $y(s) = \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{9}\right)\frac{1}{s^2+1} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{8}{9}\right)\frac{1}{s^2+4} + \frac{8}{3(s^2+4)^2}$.

$$y(s) = \frac{-5}{9}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{s^2+4} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{(s^2+4)^2}$$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{-5}{9}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{s^2+4} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{(s^2+4)^2}\right\}$$

বা $Y(t) = \frac{-5}{9}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} + \frac{8}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2^2)^2}\right\}$

$$= \frac{-5}{9}\,\text{sint} + \frac{5}{18}\,\text{sin2t} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{16}\,(\text{sin2t} - 2t\,\text{cos2t})$$

$$= -\frac{5}{9}\,\text{sint} + \left(\frac{5}{18} + \frac{1}{6}\right)\text{sin2t} - \frac{t\,\text{cos2t}}{3}$$

$$= -\frac{5}{9}\,\text{sint} + \frac{4}{9}\,\text{sin2t} - \frac{t\cdot\text{cos2t}}{3}.$$

উদাহরণ-6(vi) ঃ সমাধান কর [Solve] :

$X''(t) - X(t) = 6\cos 2t,\ X(0) = 3,\ X'(0) = 1.$ **[NUH-2006]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$X''(t) - X(t) = 6\cos 2t \cdots (1)$

এবং $X(0) = 3,\ X'(0) = 1 \cdots (2)$

ধরি $L\{X(t)\} = x(s)$ তবে $X(t) = L^{-1}\{x(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1), we get]

$L\{X''(t) - X(t)\} = L\{6\cos 2t\}$

বা $L\{X''(t)\} - L\{X(t)\} = 6\,L\{\cos 2t\}$

বা $s^2 x(s) - sX(0) - X'(0) - x(s) = 6\cdot\frac{s}{s^2+4}$

বা $s^2 x(s) - 3s - 1 - x(s) = \frac{6s}{s^2+4}$

বা $(s^2-1)\,x(s) = 3s + 1 + \frac{6s}{s^2+4}$

বা $x(s) = \frac{3s+1}{s^2-1} + \frac{6s}{(s^2+4)\,(s^2-1)}$

বা $x(s) = \frac{3s}{s^2-1} + \frac{1}{s^2-1} + \frac{6}{5}\left[\frac{s}{s^2-1} - \frac{s}{s^2+4}\right]$

বা $x(s) = \left(3 + \frac{6}{5}\right)\frac{s}{s^2-1} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{6}{5}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides we get]

$$L^{-1}\{x(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{21}{5}\cdot\frac{s}{s^2-1} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{6}{5}\cdot\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

বা $X(t) = \frac{21}{5}\cdot L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} - \frac{6}{5}\cdot L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}$

বা $X(t) = \frac{21}{5}\cdot\text{cosht} + \text{sinht} - \frac{6}{5}\,\text{cos2t}.$

উদাহরণ-6(vii) ঃ সমাধান কর [Solve] :

$Y''(t) - 6Y'(t) + 9Y(t) = t^2 e^{3t},\ Y(0) = 2,\ Y'(0) = 6.$

[NUH-2002]

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ সমূহ [Given equations are]

$Y''(t) - 6Y'(t) + 9Y(t) = t^2 e^{3t} \cdots (1)$

এবং $Y(0) = 2,\ Y'(0) = 6 \cdots (2)$

ধরি $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1), we get]

$$L\{Y''(t) - 6Y'(t) + 9Y(t)\} = L\{t^2 e^{3t}\}$$

বা $L\{Y''(t)\} - 6L\{Y'(t)\} + 9L\{Y(t)\} = L\{t^2 e^{3t}\}$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - 6\{sy(s) - Y(0)\} + 9y(s) = (-1)^2 \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{1}{s-3}\right)$

বা $s^2y(s) - 2s - 6 - 6sy(s) + 12 + 9y(s) = \dfrac{d}{ds}\dfrac{(-1)}{(s-3)^2}$

বা $(s^2 - 6s + 9)\, y(s) = 2s - 6 + \dfrac{(-1)(-2)}{(s-3)^3}$

বা $y(s) = \dfrac{2(s-3)}{(s-3)^2} + \dfrac{2}{(s-3)^5}$

বা $y(s) = \dfrac{2}{s-3} + \dfrac{2}{(s-3)^5}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides, we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}\right\}$$

বা $Y(t) = 2e^{3t} + 2\dfrac{t^4 e^{3t}}{4!}$

বা $Y(t) = 2e^{3t} + \dfrac{t^4 e^{3t}}{12}$.

উদাহরণ–6(viii) ঃ সমাধান কর [Solve] $Y''(t) + a^2Y(t) = F(t)$

যখন $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -2$. **[NU(Pass)–2007, DUH–199**

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equations are]

$$Y''(t) + a^2Y(t) = F(t) \cdots (1)$$

এবং $Y(0)] = 1. Y'(0) = -2 \cdots (2)$

ধরি $L\{F(t)\} = f(s)$, $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L\{Y''(t)\} + a^2 L\{Y(t)\} = L\{F(t)\}$$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + a^2y(s) = f(s)$

বা $s^2y(s) - s + 2 + a^2y(s) = f(s)$, (2) নং দ্বারা।

বা $(s^2 + a^2)\, y(s) = s - 2 + f(s)$

বা $y(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2} - \dfrac{2}{s^2+a^2} + \dfrac{f(s)}{s^2+a^2}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{2}{s^2+a^2} + \frac{f(s)}{s^2+a^2}\right\}$$

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} - \frac{2}{a}L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2+a^2}\right\}$$

বা $Y(t) = \cos at - \dfrac{2}{a}\sin at + \dfrac{1}{a}L^{-1}\left\{f(s).\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\}$

বা $Y(t) = \cos at - \dfrac{2}{a}\sin at + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^t F(u)\sin a(t-u)\,du$

[কনভলিউশন উপপাদ্যের সাহায্যে]

উদাহরণ–6(ix) ঃ সমাধান কর $Y'' - a^2Y = F(t)$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ [Given equation is]

$$Y''(t) - a^2Y(t) = F(t) \cdots (1)$$

ধরি $Y(0) = b$ এবং $Y'(0) = c \cdots (2)$

ধরি $L\{F(t)\} = f(s)$, $L\{Y(t)\} = y(s)$ তবে $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$

এখন (1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform in (1) then we get]

$$L\{Y''(t)\} - a^2 L\{Y(t)\} = L\{F(t)\}$$

বা $s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - a^2y(s) = f(s)$

বা $s^2y(s) - bs - c - a^2y(s) = f(s)$, (2) নং দ্বারা।

বা $(s^2 - a^2)\, y(s) = bs + c + f(s)$

বা $y(s) = \dfrac{bs}{s^2-a^2} + \dfrac{c}{s^2-a^2} + \dfrac{f(s)}{s^2-a^2}$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking inverse Laplace transform on both sides then we get]

$$L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{bs}{s^2-a^2} + \frac{c}{s^2-a^2} + \frac{f(s)}{s^2-a^2}\right\}$$

বা $Y(t) = bL^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} + \frac{c}{a}L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2-a^2}\right\}$

বা $Y(t) = b\cosh at + \frac{c}{a}\sinh at + \frac{1}{a}L^{-1}\left\{f(s)\cdot\frac{a}{s^2-a^2}\right\}$

বা $Y(t) = b\cosh at + \frac{c}{a}\sinh at + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\sinh a(t-u)\,du$

[By convolution theorem]

উদাহরণ-7(i) : ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{dx}{dt} - y = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} + x = \sin t, \text{ with } x(0) = 1,\ y(0) = 0$$

সমাধান : দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{dx}{dt} - y = e^t \cdots (1)$$

$$\frac{dy}{dt} + x = \sin t \cdots (2)$$

$x(0) = 1 \cdots (3)$ এবং $y(0) = 0 \cdots (4)$

ধরি $L\{x\} = X \Rightarrow x = L^{-1}\{X\}$ এবং $L\{y\} = Y \Rightarrow y = L^{-1}\{Y\}$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লই [Taking Laplace transform on both sides of (1)]

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} - L\{y\} = L\{e^t\}$$

বা $sX - x(0) - Y = \frac{1}{s-1}$

বা $sX - 1 - Y = \frac{1}{s-1}$; (3) নং দ্বারা।

বা $sX - Y = 1 + \frac{1}{s-1}$

বা $sX - Y = \frac{s}{s-1} \cdots (5)$

এখন (2) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Now taking Laplace transform on both sides of (2)]

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + L\{x\} = L\{\sin t\}$$

বা $sY - y(0) + X = \frac{1}{s^2+1}$

বা $X + sY = \frac{1}{s^2+1} \cdots (6)$, যেহেতু $y(0) = 0$

$(5)\,s + (6) \Rightarrow (s^2+1)X = \frac{s^2}{s-1} + \frac{1}{s^2+1}$

বা $X = \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)^2} \cdots (7)$

ধরি $\frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \cdots (8)$

বা $s^2 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1) \cdots (9)$

বা $s^2 = As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C \cdots (10)$

এখন (9) নং $s = 1$ স্থাপন করি [Putting $s = 1$ in (9)]

$$1 = A(2) + 0 \Rightarrow A = 1/2$$

(10) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^2 এর সহগ এবং ধ্রুবসংখ্যা সমীকৃত করি [Equating the coefficient of s^2 and constant terms from both sides of (10)]

$1 = A + B$, বা $1 = \frac{1}{2} + B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

এবং $0 = A - C$, বা $0 = \frac{1}{2} - C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$\therefore (8) \Rightarrow \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{s+1}{2(s^2+1)}$

$\therefore (7) \Rightarrow X = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{s+1}{2(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)^2}$

বা $X = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{(s^2+1)^2}\right]$

বা $X = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{s^2+1+2}{(s^2+1)^2}\right]$

বা $X = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{(1-s^2)+(2+2s^2)}{(s^2+1)^2}\right]$

বা $X = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{s^2+1}\right]$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking inverse Laplace transform on both sides]

$$L^{-1}\{X\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}+\frac{s}{s^2+1}+\frac{2}{s^2+1}+\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2}[e^t + \cos t + 2\sin t - t\cos t]$$

$$\therefore (6) \Rightarrow sY = \frac{1}{s^2+1} - X$$

বা $sY = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)}$; by (7)

বা $Y = \frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{1}{s(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$

বা $Y = \frac{s^2+1-1}{s(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$

বা $Y = \frac{s^2}{s(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} \cdots (11)$

ধরি $\frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{D}{s-1} + \frac{Es+F}{s^2+1} \cdots (12)$

বা $s = D(s^2+1) + (Es+F)(s-1) \cdots (13)$

(13) নং এ $s = 1$ বসাই [Putting $s = 1$ in (13)]

$$1 = D(2) + 0 \Rightarrow D = 1/2$$

(13) নং এর উভয় পক্ষ হইতে s^2 এবং s এর সহগ সমীকৃত করি [Equating the coefficients of s^2 and s from both sides of (13)]

$$0 = D + E, \text{ বা } 0 = \frac{1}{2} + E \Rightarrow E = -\frac{1}{2}$$

এবং $1 = -E + F$, বা $1 = \frac{1}{2} + F \Rightarrow F = \frac{1}{2}$

$$\therefore (12) \Rightarrow \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{s-1}{2(s^2+1)}$$

$$\therefore (11) \Rightarrow Y = \frac{s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{s-1}{2(s^2+1)}$$

বা $Y = \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right]$

$$\Rightarrow L^{-1}\{Y\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}[t\sin t - e^t + \cos t - \sin t]$$

∴ নির্ণেয় সমাধান [Required solution is]

$$x = \frac{1}{2}[e^t + \cos t + 2\sin t - t\cos t]$$

$$y = \frac{1}{2}[t\sin t - e^t + \cos t - \sin t]$$

উদাহরণ-7(ii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যাবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$(D^2+2)x - Dy = 1$$

$$Dx + (D^2+2)y = 0$$

with $t > 0$; $x = 0$, $Dx = Dy = y = 0$ when $t = 0$.

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণসমূহকে নিম্নরূপে লিখা যায় [Given equations can be written as follows]

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2x = 1 \cdots (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2y = 0 \cdots (2)$$

$$x(0) = 0 \cdots (3),\ x'(0) = y'(0) = y(0) = 0 \cdots (4)$$

ধরি $L\{x\} = X \Rightarrow x = L^{-1}\{X\}$ এবং $L\{y\} = Y \Rightarrow y = L^{-1}\{Y\}$

(1) নং এবং (2) নং এর উভয় পক্ষে পর্যায়ক্রমে ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking Laplace transform on both sides of (1) and (2) successively]

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} - L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2L\{x\} = L\{1\}$$

বা $s^2X - sx(0) - x'(0) - \{sY - y(0)\} + 2X = \frac{1}{s}$

বা $s^2X - 0 - 0 - sY + 0 + 2X = \frac{1}{s}$; by (3) and (4)

বা $(s^2+2)X - sY = \frac{1}{s} \cdots (5)$

এবং $L\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 2L\{y\} = 0$

বা $s^2Y - sy(0) - y'(0) + sX - x(0) + 2Y = 0$

বা $s^2Y - 0 - 0 + sX - 0 + 2Y = 0$; (3) নং এবং (4) নং দ্বারা।

বা $sX + (s^2+2)Y = 0 \cdots (6)$

এখন (5) $s - (6)\,(s^2+2) \Rightarrow -s^2Y - (s^2+2)^2\,Y = 1$

বা $[(s^2+2)^2 + s^2]Y = -1$

বা $[s^4 + 5s^2 + 4]Y = -1$

বা $(s^2+4)(s^2+1)\,Y = -1$

বা $Y = \dfrac{-1}{(s^2+4)(s^2+1)}$

বা $Y = \dfrac{-1}{3}\left[\dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+4}\right] \cdots (7)$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking inverse Laplace transform on both sides]

$L^{-1}\{Y\} = -\dfrac{1}{3}L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+4}\right\}$

বা $L^{-1}\{Y\} = -\dfrac{1}{3}L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+2^2}\right\}$

বা $y = -\dfrac{1}{3}\sin t + \dfrac{1}{6}\sin 2t$

$\therefore (6) \Rightarrow sX = -(s^2+2)Y$

বা $sX = \dfrac{1}{3}(s^2+2)\cdot\left[\dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+4}\right]$; by (7)

বা $sX = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{(s^2+1)+1}{s^2+1} - \dfrac{(s^2+4)-2}{s^2+4}\right]$

বা $sX = \dfrac{1}{3}\left[1 + \dfrac{1}{s^2+1} - 1 + \dfrac{2}{s^2+4}\right]$

বা $X = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{s(s^2+1)} + \dfrac{2}{s(s^2+4)}\right]$

বা $X = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+4}\right)\right]$

বা $X = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{2s} - \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}\right]$

উভয় পক্ষে বিপরীত ল্যাপল্যাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking inverse Laplace transform on both sides]

$L^{-1}\{X\} = \dfrac{1}{3}L^{-1}\left\{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s}{s^2+2^2}\right\}$

বা $x = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{3}{2}\cdot 1 - \cos t - \dfrac{1}{2}\cos 2t\right]$

$\therefore x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\cos t - \dfrac{1}{6}\cos 2t$

∴ নির্ণেয় সমাধান [Required solution is]

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{6}\cos 2t \\ Y &= -\frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{6}\sin 2t \end{aligned}\right\}.$$

উদাহরণ-7(iii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 1 - 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + x = 0$$

যখন $x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ x'(0) = 0$

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 1 - 2t \cdots (1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + x = 0 \cdots (2)$$

যখন [when] $x(0) = 0 \cdots (3)$, $y(0) = 0 \cdots (4)$ এবং $x'(0) = 0 \cdots (5)$

ধরি $L\{x\} = X$ তবে $x = L^{-1}\{X\}$ এবং $L\{y\} = Y$ তবে $y = L^{-1}\{Y\}$

(1) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ করি [Taking Laplace transform in (1)]

i.e. $L\left\{\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} - 2x + 2y\right\} = L\{1 - 2t\}$

বা $sX - x(0) - sY + y(0) - 2X + 2Y = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s^2}$

বা $sX - 0 - sY + 0 - 2X + 2Y = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s^2}$; by (3), (4)

বা $(s-2)X - (s-2)Y = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s^2} \cdots (6)$

এখন (2) নং এ ল্যাপলাস রূপান্তর গ্রহণ কর [Now taking Laplace transform in (2)]

i.e. $L\left\{\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + x\right\} = 0$

বা $s^2X - sx(0) - x'(0) + 2sY - 2y(0) + X = 0$

বা $s^2X - 0 - 0 + 2sY - 0 + X = 0$

বা $(s^2+1)X + 2sY = 0 \cdots (7)$

(6) নং এবং (7) নং এ আছে [We have in (6) and (7)]

$$(s-2)X-(s-2)Y-\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}\right)=0$$

$$(s^2+1)X+2sY-0=0$$

$$\therefore \frac{X}{0+2-4/s}=\frac{Y}{-(s^2+1)\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}\right)-0}=\frac{1}{2s(s-2)+(s^2+1)(s-2)}$$

$$\Rightarrow X=\frac{2-4/s}{(s-2)(s^2+2s+1)} \text{ এবং } Y=\frac{(s^2+1)(2/s^2-1/s)}{(s-2)(2s+s^2+1)}$$

বা $X=\dfrac{2(s-2)}{s(s-2)(s+1)^2}=\dfrac{2}{s(s+1)^2}\cdots(8)$

ধরি $\dfrac{2}{s(s+1)^2}=\dfrac{2}{s(0+1)^2}+\dfrac{2}{-1(s+1)^2}+\dfrac{A}{s+1}$

বা $\dfrac{2}{s(s+1)^2}=\dfrac{2}{s}-\dfrac{2}{(s+1)^2}+\dfrac{A}{s+1}\cdots(9)$

(9) নং এ $s=1$ বসাইয়া পাই [Putting $s = 1$ in (9) we get]

$$\frac{2}{1(4)}=\frac{2}{1}-\frac{2}{4}+\frac{A}{2}.$$

বা $\dfrac{A}{2}=\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{4}-2$, বা $\dfrac{A}{2}=-1\Rightarrow A=-2.$

$$(9)\Rightarrow \frac{2}{s(s+1)^2}=\frac{2}{s}-\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1}$$

$$\Rightarrow X=\frac{2}{s}-\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1};\ \text{by (8)}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{X\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s}-\frac{2}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1}\right\}$$

$$\Rightarrow x=2-2te^{-t}-2e^{-t}$$

$$\therefore x=2(1-te^{-t}-e^{-t})$$

এবং $Y=\dfrac{(s^2+1)(2-s)}{s^2(s-2)(s+1)^2}$

$$=\frac{-(s-2)(s^2+1)}{s^2(s-2)(s+1)^2}=\frac{-(s^2+1)}{s^2(s+1)^2}\cdots(10)$$

ধরি $\dfrac{s^2+1}{s^2(s+1)^2}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{C}{s+1}+\dfrac{D}{(s+1)^2}\cdots(11)$

বা $s^2+1=As(s+1)^2+B(s+1)^2+Cs^2(s+1)+Ds^2\cdots(12)$

(12) নং এ পর্যায়ক্রমে $s=0$ এবং $s=-1$ বসাই

$$1=B(1)\Rightarrow B=1,\ \text{এবং } 2=D(1)\Rightarrow D=2$$

উভয় পক্ষ হইতে s এবং s^2 এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই

$$0=A+2B,\ \text{বা } A=-2B\Rightarrow A=-2$$

এবং $1=2A+B+C+D$, বা $1=-4+1+C+2\Rightarrow C=2$

$$(11)\Rightarrow \frac{s^2+1}{s^2(s+1)^2}=\frac{-2}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow Y=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2};\ \text{by (10)}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{Y\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow y=2-t-2e^{-t}-2te^{-t}$$

$$=-t(1+2e^{-t})+2(1-e^{-t})$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান [Required solution is]

$$\begin{cases} x=2(1-te^{-t}-e^{-t}) \\ y=-t(1+2e^{-t})+2(1-e^{-t}). \end{cases}$$

উদাহরণ-8(i) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{\partial U}{\partial t}=2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ U(0,t)=0,\ U(5,t)=0$$

$$U(x,0)=10\sin 4\pi x-5\sin 6\pi x.$$ **[NUH-2006]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{\partial U}{\partial t}=2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdots(1),\ U(0,t)=0\cdots(2)$$

$U(5,t)=0\cdots(3)$ এবং $U(x,0)=10\sin 4\pi x-5\sin 6\pi x\cdots(4)$

ধরি $L\{U(x,t)\}=u(x,s)=u$ তবে $U(x,t)=L^{-1}\{u(x,s)\}=L^{-1}\{u\}$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (1) we get]

$$L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\}=L\left\{2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$$

বা $su-U(x,0)=2L\left\{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$

বা $su-(10\sin 4\pi x-5\sin 6\pi x)=2\dfrac{d^2u}{dx^2}$; (4) নং দ্বারা।

বা $\dfrac{d^2u}{dx^2}-\dfrac{s}{2}u=\dfrac{1}{2}(5\sin 6\pi x-10\sin 4\pi x)$

বা $\left(D^2-\dfrac{s}{2}\right)u=\dfrac{1}{2}(5\sin 6\pi x-10\sin 4\pi x)\cdots(5)$, যখন $D=\dfrac{d}{dx}$

সহায়ক সমীকরণ [A. E. is] $D^2 - \frac{s}{2} = 0$ বা $D^2 = \frac{s}{2} \Rightarrow D = \pm\sqrt{s/2}$

$\therefore u_c = c_1 e^{\sqrt{s/2}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/2}\,x}$

∴ বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [Particular integral is]

$$u_p = \frac{1}{D^2 - s/2}\cdot\frac{1}{2}(5\sin 6\pi x - 10\sin 4\pi x)$$

বা $u_p = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{D^2 - s/2}\sin 6\pi x - 5\cdot\frac{1}{D^2 - s/2}\sin 4\pi x$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{-36\pi^2 - s/2}\sin 6\pi x - 5\cdot\frac{1}{-16\pi^2 - s/2}\sin 4\pi x$$

$$= -\frac{5}{2}\cdot\frac{2\sin 6\pi x}{72\pi^2 + s} + \frac{5(2\sin 4\pi x)}{32\pi^2 + s}$$

$$= \frac{10\sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \frac{5\sin 6\pi x}{s + 72\pi^2}$$

∴ (5) নং এর সাধারণ সমাধান [General solution of (5) is]

$u = u_c + u_p$

বা $u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s/2}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/2}\,x} + \frac{10\sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \frac{5\sin 6\pi x}{s + 72\pi^2} \cdots (6)$

এখন (2) নং এবং (3) নং সীমা শর্তে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on the boundary conditions (2) and (3), we get]

$L\{U(0, t)\} = u(0, s) = 0 \cdots (7)$

এবং $L\{U(5, t)\} = u(5, s) = 0 \cdots (8)$

(6) নং এ পর্যায়ক্রমে $x = 0$ এবং $x = 5$ স্থাপন করিয়া পাই [Putting $x = 0$ and $x = 5$ in (6) successively, we get]

$u(0, s) = c_1 + c_2 + 0$

বা $0 = c_1 + c_2$, (7) নং দ্বারা।

$\Rightarrow c_1 = -c_2 \cdots (9)$

এবং $u(5, s) = c_1 e^{5\sqrt{s/2}} + c_2 e^{-5\sqrt{s/2}} + 0$; যেহেতু $\sin 20\pi = 0$, $\sin 30\pi = 0$

বা $0 = -c_2 e^{5\sqrt{s/2}} + c_2 e^{-5\sqrt{s/2}}$, by (8) and (9)

বা $c_2(e^{-5\sqrt{s/2}} - e^{5\sqrt{s/2}}) = 0$

$\Rightarrow c_2 = 0$, যেহেতু [since] $e^{-5\sqrt{s/2}} - e^{5\sqrt{s/2}} \neq 0$

$\therefore (9) \Rightarrow c_1 = 0$

$$\therefore (6) \Rightarrow u(x, s) = \frac{10\sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \frac{5\sin 6\pi x}{s + 72\pi^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{u(x, s)\} = L^{-1}\left[\frac{10\sin 4\pi x}{s + 32\pi^2} - \frac{5\sin 6\pi x}{s + 72\pi^2}\right]$$

$$\Rightarrow U(x, t) = 10\sin 4\pi x\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 32\pi^2}\right\} - 5\sin 6\pi x\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 72\pi^2}\right\}$$

$$\Rightarrow U(x, t) = 10\sin 4\pi x \cdot e^{-32\pi^2 t} - 5\sin 6\pi x \cdot e^{-72\pi^2 t}$$

$$\therefore U(x, t) = 10e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x - 5e^{-72\pi^2 t}\sin 6\pi x$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [Which is the required solution]

উদাহরণ-৪(ii) ঃ ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ y(0, t) = 0,\ y(2, t) = 0,\ y_t(x, 0) = 0$$

$$y(x, 0) = 20\sin 2\pi x - 10\sin 5\pi x.$$

সমাধান ঃ দেওয়া আছে [Given that]

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdots (1),\ y(0, t) = 0 \cdots (2),\ y(2, t) = 0 \cdots (3)$

$y_t(x, 0) = 0 \cdots (4),\ y(x, 0) = 20\sin 2\pi x - 10\sin 5\pi x \cdots (5)$

ধরি $L\{y(x, t)\} = Y(x, s) = Y$ তবে $y(x, t) = L^{-1}\{Y(x, s)\} = L^{-1}\{Y\}$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (1), we get]

$$L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} = L\left\{9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}$$

বা $s^2Y - sy(x, 0) - y_t(x, 0) = 9L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}$

বা $s^2Y - s(20\sin 2\pi x - 10\sin 5\pi x) - 0 = 9\frac{d^2Y}{dx^2}$; by (4) & (5)

বা $\frac{d^2Y}{dx^2} - \frac{s^2}{9}Y = -\frac{20}{9}s\sin 2\pi x + \frac{10}{9}s\sin 5\pi x$

বা $\left(D^2 - \frac{s^2}{3^2}\right)Y = \frac{-20}{9}s\sin 2\pi x + \frac{10}{9}s\sin 5\pi x \cdots (6)$

∴ সহায়ক সমীকরণ [Auxiliary equation is]

$D^2 - \frac{s^2}{3^2} = 0$, বা $D^2 = \frac{s^2}{3^2} \Rightarrow D = \pm\frac{s}{3}$

$Y_c = c_1 e^{(s/3)x} + c_2 e^{-(s/3)x}$

বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [Particular integral is]

$$Y_p = \frac{1}{D^2-(s/3)^2}\left[\frac{-20}{9}\, s\sin 2\pi x + \frac{10s}{9}\sin 5\pi x\right]$$

$$= \frac{-20s}{9}\cdot\frac{1}{D^2-s^2/9}\sin 2\pi x + \frac{10s}{9}\cdot\frac{1}{D^2-s^2/9}\sin 5\pi x$$

$$= \frac{-20s}{9}\cdot\frac{\sin 2\pi x}{-4\pi^2-s^2/9} + \frac{10s}{9}\cdot\frac{\sin 5\pi x}{-25\pi^2-s^2/9}$$

$$= \frac{-20s}{9}\cdot\frac{(-9\sin 2\pi x)}{36\pi^2+s^2} - \frac{10s}{9}\cdot\frac{9\sin 5\pi x}{225\pi^2+s^2}$$

$$= \frac{20s}{s^2+36\pi^2}\sin 2\pi x - \frac{10s}{s^2+225\pi^2}\sin 5\pi x$$

$\therefore$ (6) নং এর সাধারণ সমাধান [General solution of (6) is]

$$Y = Y_c + Y_p$$

বা $Y(x, s) = c_1 e^{(s/3)x} + c_2 e^{-(s/3)x} + \frac{20s\sin 2\pi x}{s^2+36\pi^2} - \frac{10s\sin 5\pi x}{s^2+225\pi^2} \cdots (7)$

এখন (2) নং এবং (3) নং সীমা শর্তে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on the boundary conditions (2) and (3), we get]

$L\{y(0, t)\} = Y(0, s) = 0 \cdots (8)$

এবং $L\{y(2, t)\} = Y(2, s) = 0 \cdots (9)$

(7) নং এ $x = 0$ স্থাপন করি [Putting $x = 0$ in (7)]

$Y(0, s) = c_1 + c_2 + 0$

বা $0 = c_1 + c_2$; (8) নং দ্বারা।

$\Rightarrow c_1 = -c_2 \cdots (10)$

আবার (7) নং এ $x = 2$ স্থাপন করি [Again putting $x = 2$ in (7)]

$Y(2, s) = c_1 e^{(s/3)2} + c_2 e^{-(s/3)2} + 0$

বা $0 = -c_2 e^{(s/3)2} + c_2 e^{-(s/3)2}$; by (9)

বা $c_2 (e^{(s/3)2} - e^{-(s/3)2}) = 0$

$\Rightarrow c_2 = 0$, যেহেতু $e^{(s/3)2} - e^{-(s/3)2} \neq 0$

$\therefore (10) \Rightarrow c_1 = 0$

$\therefore (7) \Rightarrow Y(x, s) = \frac{20s}{s^2+36\pi^2}\sin 2\pi x - \frac{10s}{s^2+225\pi^2}\sin 5\pi x$

$\Rightarrow L^{-1}\{Y(x, s)\} = L^{-1}\left\{\frac{20s\cdot\sin 2\pi x}{s^2+36\pi^2} - \frac{10s\cdot\sin 5\pi x}{s^2+225\pi^2}\right\}$

$\Rightarrow L^{-1}\{Y(x, s)\} = 20\cdot\sin 2\pi x\, L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(6\pi)^2}\right\}$

$$- 10\cdot\sin 5\pi x\, L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(15\pi)^2}\right\}$$

$\Rightarrow y(x, t) = 20\sin 2\pi x\cdot\cos 6\pi t - 10\sin 5\pi x\cdot\cos 15\pi t.$

উদাহরণ–8(iii) : ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ U_x(0, t) = 0,\ U(\pi/2, t) = 0$$

$$U(x, 0) = 20\cos 3x - 5\cos 9x.$$

সমাধান : দেওয়া আছে [Given that]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdots (1),\ U_x(0, t) = 0 \cdots (2)$$

$$U(\pi/2, t) = 0 \cdots (3) \text{ এবং } U(x, 0) = 20\cos 3x - 5\cos 9x \cdots (4)$$

ধরি $L\{U(x, t)\} = u(x, s) = u$ তবে $U(x, t) = L^{-1}\{u(x, s)\} = L^{-1}\{u\}$

(1) নং এর উভয় পক্ষে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Taking Laplace transform on both sides of (1), we get]

$$L\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = L\left\{3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$$

বা $su - U(x, 0) = 3L\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$

বা $su - (20\cos 3x - 5\cos 9x) = 3\frac{d^2u}{dx^2}$; (4) নং দ্বারা।

বা $\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{s}{3}u = -\frac{1}{3}(20\cos 3x - 5\cos 9x)$

বা $\left(D^2 - \frac{s}{3}\right)u = \frac{1}{3}(5\cos 9x - 20\cos 3x) \cdots (5)$

$\therefore$ সহায়ক সমীকরণ [Auxiliary equation is]

$D^2 - \frac{s}{3} = 0$, বা $D^2 = \frac{s}{3} \Rightarrow D = \pm\sqrt{s/3}$

$\therefore u_c = c_1 e^{\sqrt{s/3}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/3}\,x}$

$\therefore$ বিশেষ ইনটিগ্র্যাল [Particular integral is]

$$u_p = \frac{1}{D^2 - s/3}\cdot\frac{1}{3}(5\cos 9x - 20\cos 3x)$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{D^2 - s/3}\cos 9x - \frac{20}{3}\cdot\frac{1}{D^2 - s/3}\cos 3x$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\frac{\cos 9x}{-9^2 - s/3} - \frac{20}{3}\cdot\frac{\cos 3x}{-3^2 - s/3}$$

$$= \frac{20}{3}\cdot\frac{\cos 3x}{9 + s/3} - \frac{5}{3}\cdot\frac{\cos 9x}{81 + s/3}$$

$$= \frac{20}{3}\cdot\frac{3\cos 3x}{s + 27} - \frac{5}{3}\cdot\frac{3\cos 9x}{s + 243}$$

$$= \frac{20\cos 3x}{s + 27} - \frac{5\cos 9x}{s + 243}$$

$\therefore$ (5) নং এর সাধারণ সমাধান [General solution of (5) is]

$$u = u_c + u_p$$

বা $u(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s/3}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/3}\,x} + \frac{20\cos 3x}{s + 27} - \frac{5\cos 9x}{s + 243}$ ··· (6)

এখন (2) নং এবং (3) নং সীমাশর্তে ল্যাপলাস রূপান্তর লইয়া পাই [Now taking Laplace transform on the boundary conditions (2) and (3), we get]

$$L\{U_x(0, t)\} = \frac{du(0, s)}{dx} = 0 \cdots (7)$$

এবং $L\{U(\pi/2, t)\} = u(\pi/2, s) = 0 \cdots (8)$

(6) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি [Differentiating (6) w. r. to x]

$$\frac{du(x, s)}{dx} = \sqrt{\frac{s}{3}}\,c_1 e^{\sqrt{s/3}\,x} - \sqrt{\frac{s}{3}}\,c_2 e^{-\sqrt{s/3}\,x} - \frac{60\sin 3x}{s + 27} + \frac{45\sin 9x}{s + 243} \cdots (9)$$

(9) নং এ x = 0 স্থাপন করি [Putting x = 0 in (9)]

$$\frac{du(0, s)}{dx} = \sqrt{\frac{s}{3}}\,c_1 - \sqrt{\frac{s}{3}}\,c_2 - 0$$

বা $0 = \sqrt{\frac{s}{3}}\,(c_1 - c_2)$; (7); নং দ্বারা।

বা $c_1 - c_2 = 0$ যেহেতু $\sqrt{s/3} \neq 0$

$\therefore c_1 = c_2 \cdots (10)$

আবার (6) নং এ $x = \pi/2$ স্থাপন করি [Again putting $x = \pi/2$ in (6)]

$$u(\pi/2, s) = c_1 e^{(\pi/2)\sqrt{s/3}} + c_2 e^{-(\pi/2)\sqrt{s/3}} + 0$$

বা $0 = c_2 e^{(\pi/2)\sqrt{s/3}} + c_2 e^{-(\pi/2)\sqrt{s/3}}$; by (8) and (10)

বা $c_2\{e^{(\pi/2)\sqrt{s/3}} + e^{-(\pi/2)\sqrt{s/3}}\} = 0$

$\therefore c_2 = 0$, যেহেতু [since] $e^{(\pi/2)\sqrt{s/3}} + e^{-(\pi/2)\sqrt{s/3}} \neq 0$

$\therefore (10) \Rightarrow c_1 = 0$

$$(6) \Rightarrow u(x, s) = \frac{20\cos 3x}{s + 27} - \frac{5\cos 9x}{s + 243}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{u(x, s)\} = L^{-1}\left\{\frac{20\cos 3x}{s + 27} - \frac{5\cos 9x}{s + 243}\right\}$$

$$\Rightarrow U(x, t) = 20\cos 3x\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 27}\right\} - 5\cos 9x\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 243}\right\}$$

$$\Rightarrow U(x, t) = 20\cos 3x \cdot e^{-27t} - 5\cos 9x \cdot e^{-243t}$$

$$\therefore U(x, t) = 20e^{-27t}\cos 3x - 5e^{-243t}\cos 9x$$

ইহাই নির্ণেয় সমাধান [Which is the required solution].

প্রশ্নমালা [EXERCISE]–7

1. নিম্নলিখিত ল্যাপলাস রূপন্তর সমূহ নির্ণয় কর :

(i). $L(a)$, $L\{t^{-1/2}\}$ (ii). $L\{(t^2 - 3t + 2)\sin 3t\}$

(iii). $L\{t^3\cos t\}$ (iv). $L\{J_0(t)\}$

(v). $L\{J_0(at)\}$ (vi). $L\{J_1(t)\}$

(vii). $L\{J_0(at)\}$ (viii). $L\{e^{-at}J_0(bt)\}$

2. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর :

(i). $L^{-1}\left\{\frac{2s}{4s^2 + 16}\right\}$ (ii). $L^{-1}\left\{\frac{b}{a^2s^2 + b^2}\right\}$

(iii). $L^{-1}\left\{\frac{3s - 4}{s^2 - 4s + 8}\right\}$ (iii). $L^{-1}\left\{\frac{4s + 12}{s^2 + 8s + 16}\right\}$

[NUH–2000, 2006, 2008]

(v). $L^{-1}\left\{\frac{3s-8}{s^2+4} - \frac{4s-24}{s^2-16}\right\}$

3. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর :

(i). $L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{(s+2)(s-3)}\right\}$ [NUH-2006, 2009]

(ii). $L^{-1}\left\{\frac{2s+16}{(s-3)(s+2)}\right\}$ (iii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)\cdot(s-2)}\right\}$

(iv). $L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\right\}$ (v). $L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s(s-1)(s+1)}\right\}$

(vi). $L^{-1}\left\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\}$ (vii). $L^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$

(viii). $L^{-1}\left\{\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}$ (ix). $L^{-1}\left\{\frac{8s+20}{s^2-12s+32}\right\}$

(x). $L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$

(xi). $L^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\}$ [NUH-2003]

(xii). $L^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\}$ (xiii). $L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2(s+3)}\right\}$

4. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর :

(i). $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$ (ii). $L^{-1}\left\{\frac{4s}{(s-2)(s^2+4)}\right\}$

(iii). $L^{-1}\left\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$

5. নিম্নলিখিত বিপরীত ল্যাপলাস রূপান্তর সমূহ নির্ণয় কর।

a(i). $L^{-1}\left\{\frac{2(s-a)}{(s-a)^2+b^2} + \frac{8-6s}{16s^2+9} + \frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}$

(ii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+5}}\right\}$ (iii). $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}$

(iv). $L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

(v). $L^{-1}\left\{\frac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}\right\}$

(vi). $L^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}$

b(i). $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$ [NUH-2004, 2005, 2008]

(ii). $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$ (iii). $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+1)^2}\right\}$

c(i). $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^3}\right\}$ (ii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$

(iii). $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)^2}\right\}$ (iv). $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s+1)}\right\}$

(v). $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^5(s+2)}\right\}$

d(i). $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$ (ii). $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$ [NUH-2007]

(iii). $L^{-1}\left\{\ln\frac{s+2}{s+1}\right\}$ (iv). $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\frac{s+2}{s+1}\right\}$

(v). $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$

6. ল্যাপলাস রূপান্তরের সাহায্যে নিম্নলিখিত ডিফারিনসিয়াল সমীকরণ সমূহ সমাধান কর :

(i). $Y''(x) + Y(x) = x$ যখন $Y(0) = 0,\ Y'(0) = -3$ [DUH-1990]

(ii). $Y''(t) + Y(t) = 0$ যখন $Y(0) = 0,\ Y'(0) = 1$

(iii). $Y'' - Y' - 2Y = t^2$ যখন $Y(0) = 1,\ Y'(0) = 3$ [DUH-1989]

(iv). $Y''(t) + 9Y(t) = \cos t$ যদি $Y(0) = 1,\ Y(\pi/2) = -1$ [DUH-1987]

(v). $Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t}\sin t$ যদি $Y(0) = 0,\ Y'(0) = 1$

[NUH-2000, 2003, NU(Pass)-2009]

(vi). $Y''(t) + Y(t) = 1$ যখন $Y(0) = 2$, $Y'(0) = 0$

(vii). $Y''(t) + Y(t) = t$ যখন $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -2$ [DUH-1991]

(viii). $Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t}$ যদি $Y(0) = -3$, $Y'(0) = 5$ [NU(Pass)-2008]

(ix). $Y'' + 2Y' + Y = 3te^{-t}$ যদি $Y(0) = 4$, $Y'(t) = 2$

(x). $Y''(t) + Y(t) = t$ যদি $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 2$

(xi). $Y''(t) + 4Y(t) = 9t$ যদি $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 7$

(xii). $Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4t + 12e^{-t}$ যদি $Y(0) = 6$, $Y'(0) = -1$

(xiii). $Y''(t) + 2Y'(t) + 5Y(t) = e^{-t}\sin t$

(xiv). $Y''(t) - 4Y'(t) + 5Y(t) = 125t^2$ যদি $Y(0) = Y'(0) = 0$

(xv). $Y''(t) + Y(t) = 8\cos t$ যদি $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -1$

(xvi). $Y'' + 9Y = 18t$ যদি $Y(0) = 0$, $Y(\pi/2) = 0$

(xvii). $Y''(t) + tY'(t) - Y(t) = 0$ যদি $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$ [NUH-2007]

(xviii). $tY''(t) + (1 - 2t)Y'(t) - 2Y(t) = 0$ যদি $Y(0) = 1$, $Y'(0) = 2$

[DUH-1993]

(xix). $tY''(t) + 2Y'(t) + tY(t) = 0$ যদি $Y(0) = 1$, $Y(\pi) = 0$

(xx). $tY''(t) + Y'(t) + 4tY(t) = 0$ যদি $Y(0) = 3$, $Y'(0) = 0$

(xxi). $Y''(t) - tY'(t) + Y(t) = 1$ যদি $Y(0) = 1$, $Y'(0) = 2$

(xxii). $tY''(t) + (t - 1)Y'(t) - Y(t) = 0$ যদি $Y(0) = 5$, $Y(\infty) = 0$

(xxiii). $Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2 e^t$ যদি $Y(0) = 1$, $Y'(t) = 0$, $Y''(0) = -2$

[NUH-2005, 2009]

(xxiv). $Y'' + k^2 Y = F(t)$ যদি $Y(0) = A$, $Y'(0) = B$

(xxv). $Y'' - 4Y' + 3Y = F(t)$ যদি $Y(0) = 1$, $Y'(0) = 0$

(xxvi). $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$.

ল্যাপলাস রূপান্তরের সাহায্যে নিম্নলিখিত ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ জোট সমাধান কর [Solve the following simultaneous differential equation by the Laplace transform] :

(i). $(D - 2)x + 3y = 0$

$2x + (D - 1)y = 0$

যখন [when] $x(0) = 8$, $y(0) = 3$.

(ii). $(D - 2)x - (D + 1)y = 6e^{3t}$

$(2D - 3)x + (D - 3)y = 6e^{3t}$

যখন $x(0) = 3$, $y(0) = 0$.

(iii). $\dfrac{dx}{dt} + y = \sin t$

$\dfrac{dy}{dt} + x = \cos t$

যখন $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.

ল্যাপলাস রূপান্তর ব্যবহার করিয়া সমাধান কর [Solve by using the Laplace transform] :

(i). $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, t) = 0$, $U(5, t) = 0$ এবং $U(x, 0) = 10\sin 4\pi x$.

(ii). $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_x(0, t) = 0$, $U(\pi/2, t) = 0$ এবং $U(x, 0) = 30\cos 5x$.

(iii). $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4U$, $U(0, t) = 0$, $U(\pi, t) = 0$

এবং $U(x, 0) = 6\sin x - 4\sin 2x$

(iv). $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, t) = 0$, $U(1, t) = 0$

$U(x, 0) = 3\sin 2\pi x$ যেখানে $0 < x < 1$, $t > 0$

(v). $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y(0, t) = 0$, $Y(2, t) = 0$

এবং $Y(x, 0) = 20\sin 2\pi x - 10\sin 5\pi x$

(vi). $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y_x(0, t) = 0$, $Y(3/2, t) = 0$

$Y(x, 0) = 0$ এবং $Y_t(x, 0) = 12\cos \pi x + 16\cos 3\pi x - 8\cos 5\pi x$.

উত্তরমালা [ANSWERS]–7

1(i). $L\{a\} = \frac{s}{a}$; $L\{t^{-1/2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$

(ii). $\frac{6s^4 - 18s^3 + 126s^2 - 162s + 432}{(s^2+9)^3}$

(iii). $\frac{6(s^4 - 6s^2 + 1)}{(s^2+1)^4}$ (iv). $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

(v). $\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ (vi). $\frac{\sqrt{s^2+1} - s}{\sqrt{s^2+1}}$

(vii). $\frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$ (viii). $\frac{1}{\sqrt{(s+a)^2+b^2}}$.

2(i). $\frac{\cos 2t}{2}$ (ii). $\frac{\sin(bt/a)}{a}$

(iii). $e^{2t}(3\cos 2t + \sin 2t)$ (iv). $4e^{-4t}(1-t)$

(v). $3\cos 2t - 4\sin 2t - 4\cosh 4t + 6\sinh 4t$.

3(i). $e^{-2t} + e^{3t}$ (ii). $2(11e^{3t} - 6e^{-2t})/5$

(iii). $(e^{2t} - e^{-t})/3$ (iv). $4e^{3t} - e^{-t}$

(v). $(2 + e^{t} - 3e^{-t})/2$ (v). $5e^{2t} - 3e^{-t} - 2e^{-3t}$

(vii). $(21e^{3t} - 8e^{2t} - e^{-t})/6$ (viii). $(10e^{2t} - 3e^{t/2} + 4e^{-t})/2$

(ix). $21e^{8t} - 13e^{4t}$ (x). $\frac{e^{2t}}{3} + 4te^{2t} - \frac{7t^2e^{2t}}{2} - \frac{e^{-t}}{3}$

(xi). $e^{-t}(\sin t + \sin 2t)/3$ (xii). $(2te^{t} - e^{t} + 3e^{-t})/2$

(xiii). $(6t + 1 - e^{-3t})/9$ 4(i). $(e^{-t} - \cos t + \sin t)/2$

(ii). $e^{2t} - \cos 2t + \sin 2t$ (iii). $3(e^{-4t} - \cos 3t)$

5a(i). $2e^{at}\cos bt + \frac{2}{3}\sin\frac{3t}{4} - \frac{3}{8}\cos\frac{3t}{4} + 4t^3 - \frac{16t^{5/2}}{\sqrt{\pi}}$

(ii). $\frac{t^{-1/2}e^{-5t/2}}{\sqrt{2\pi}}$ (iii). $\frac{e^{-3t}(2\cos 4t - \sin 4t)}{2}$

(iv). $4e^{3t} - e^{-t}$ b(i). $2e^{-2t} - e^{-t}$

(ii). $\begin{cases} 4(t-3)^{3/2}e^{-4(t-4)}, & t > 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases}$

(iii). $\begin{cases} \frac{e^{-(t-\pi)/2}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2} + \sin\frac{\sqrt{3}(t-\pi)}{2}\right\}, & t > \pi \\ 0, & t < \pi \end{cases}$

c(i). $\frac{t\sin at}{2a}$ (ii). $\frac{2t\cos 2t + \sin 2t}{4}$

(iii). $\frac{te^{-t}\sin t}{2}$ d(i). $-\frac{e^{-t}(t^2+2t+2)}{2} + 1$

(ii). $te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2$ (iii). $(2t - 3\sin t + t\cos t)/2$

(iv). $\frac{t^2}{2} - e^{-t} - t + 1$

(v). $\frac{e^{t}}{72}\left(t^4 - \frac{4t^3}{3} + \frac{4t^2}{3} - \frac{8t}{9} + \frac{8}{27}\right) - \frac{e^{-2t}}{243}$

e(i). $\{(3 - t^2)\sin t - 3t\cos t\}/8$

(ii). $t(\sin 2t - 2t\cos 2t)/64$

(iii). $\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ (iv). $\int_0^t \frac{(e^{-u} - e^{-2u})}{u}\,du$

(v). $2\int_0^t \frac{(1-\cos u)}{u}\,du$ (vi). $\frac{tJ_1(at)}{a}$

6(i). $Y(x) = x - 4\sin x$ (ii). $Y(t) = \sin t$

(iii). $Y(t) = -\frac{3}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{17e^{2t}}{12} + \frac{e^{-t}}{3}$

(iv). $Y(t) = \frac{\sin t}{8} + \frac{9\sin 3t}{8} + \cos 3t$

(v). $Y(t) = e^{-t}(\sin t + 2\sin 2t)/3$

(vi). $Y(t) = 1 + \cos t$

(vii). $Y(t) = t - 3\sin t + \cos t$

(viii). $Y(t) = 4e^{2t} - 7e^{t} + 4te^{2t}$

(ix). $Y(t) = (4 + 6t + t^3/2)e^{-t}$

(x). $Y(t) = t + \sin t$

(xi). $Y(t) = \frac{9t}{4} + \frac{19\sin 2t}{8}$

(xii). $Y(t) = 3 + 2t + 3e^{t} - 2e^{2t} + 2e^{-t}$

(xiii). $Y(t) = \frac{e^{-t}\sin t}{3} - \frac{e^{-t}\sin 2t}{6} + ae^{-t}\cos 2t + (a + b)\, e^{-t}\sin 2t$

(xiv). $Y(t) = 22 + 40t + 25t^2 - 22e^{2t}\cos t + 4e^{2t}\sin t$

(xv). $Y(t) = \cos t - \sin t + 4t\sin t$

(xvi). $Y(t) = 2t + \pi \sin 3t$

(xvii). $Y(t) = t$ (xviii). $Y(t) = e^{2t}$

(xix). $Y(t) = \frac{\sin t}{t}$ (xx). $Y(t) = 3J_0(2t)$

(xxi). $Y(t) = 1 + 2t$ (xxii). $Y(t) = 5e^{-t}$

(xxiii). $Y(t) = e^t - te^t - \frac{t^2 e^t}{2} + \frac{t^5 e^t}{60}$

(xxiv). $Y(t) = A\cos kt + \frac{B}{k}\sin kt + \frac{1}{k}\int_0^t F(u)\sin k(t-u)\, du$

(xxv). $T(t) = \frac{3e^t}{2} - \frac{e^{3t}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t (e^{3u} - e^u) F(t-u)\, du.$

7(i). $x = 5e^{-t} + 3e^{4t}$

$y = 5e^{-t} - 2e^{4t}$

(ii). $x = (1 + 2t)\, e^t + 2e^{3t}$

$y = (1 - t)\, e^t - e^{3t}$

(iii). $x = e^t + e^{-t}$

$y = e^{-t} - e^t + \sin t.$

8(i). $U(x, t) = 10e^{-32\pi^2 t}\sin 4\pi x$

(ii). $U(x, t) = 30e^{-75t}\cos 5x$

(iii). $U(x, t) = 6e^{-5t}\sin x - 4e^{-8t}\sin 2x$

(iv). $U(x, t) = 3e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x.$

(v). $Y(x, t) = 20\sin 2\pi x\cos 6\pi t - 10\sin 5\pi x\cos 15\pi t.$

(vi). $Y(x, t) = \frac{3}{\pi}\cos\pi x \cdot \sin 4\pi t + \frac{4}{3\pi}\cos 3\pi x \cdot \sin 12\pi t - \frac{2}{5\pi}\cos 5\pi x\sin 20\pi t.$

———x———

অষ্টম অধ্যায় [CHAPTER–8]

প্রথম পরিচ্ছেদ [SECTION–1]

ফ্যুরিয়ার ধারা

[Fourier Series]

8-1.1 : ত্রিকোনমিতিক ধারা : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ আকারের অসীম ধারাকে ত্রিকোনমিতিক ধারা বলা হয়, যেখানে a_0, a_n এবং b_n ধ্রুবসংখ্যা।

Trigonometric series : The infinite series of the form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

is called Trigonometric series where a_0, a_n and b_n are constants.

8-1.2 : পর্যায়বৃত্ত ফাংশন : যদি $f(x + T) = f(x)$ হয়, তবে $f(x)$ কে পর্যায়বৃত্ত ফাংশন বলা হয় এবং T কে পর্যায় কাল বলা হয়। **[NUH–2006]**

উদাহরণ : যেহেতু $\sin(2\pi + x) = \sin x$, কাজেই $\sin x$ পর্যায়বৃত্ত ফাংশন এবং ইহার পর্যায়কাল 2π.

Periodic function : If $f(x + T) = f(x)$ then $f(x)$ is called periodic function and T is called its period.

Example : Since $\tan(\pi + x) = \tan x$, so $\tan x$ is a periodic function and its period is π.

8-1.3 : ফ্যুরিয়ার ধারা : **[NUH–2005]**

যদি $f(x)$ ফাংশনকে $(-\pi, \pi)$ ব্যবধিতে 2π পর্যায় কালে সংজ্ঞায়িত করা হয় এবং একে ত্রিকোনমিতিক ধারায় বিস্তার করা হয়,

অর্থাৎ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cdots (1)$

তবে (1) নং কে ফ্যুরিয়ার ধারা বলা হয় যেখানে

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$ এবং

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$

এখানে a_0, a_n এবং b_n কে ফ্যুরিয়ার সহগ বলা হয়।