

فصل ۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل ۲

قضیه‌ی تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل ۳

چند ضلعی‌ها

۱.۳ چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها

تعریف: n ضلعی شکلی است شامل n ($n \geq 3$) پاره‌خط متوالی که:
 (۱) هرپاره‌خطی، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.
 (۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

۱.۱.۳ قطر در چندضلعی‌ها

در هر n ضلعی، هر پاره‌خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، قطر می‌نامند.
 n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ را در نظر می‌گیریم. از رأس A_1 ، $n-1$ قطر می‌توان رسم کرد.

با توجه به اینکه n رأس داریم، می‌توان گفت تعداد قطر‌ها در n ضلعی با این فرمول به دست می‌آید:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

مثال:

تعداد اقطار یک چند ضلعی ۳۵ است. از هر رأس این چندضلعی چند قطر می‌گذرد؟

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35 \Rightarrow x^2 - 3x = 70 \Rightarrow (x-10)(x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=10} & \text{قق} \\ x=-7 & \text{غقق} \end{cases}$$

تعداد اقطار یک چند ضلعی محدب از تعداد اضلاع آن ۴۲ تا بیشتر است. این چند ضلعی چند قطر دارد؟

$$\frac{n(n-3)}{2} = x + 42 \Rightarrow x^2 - 3x = 2x + 84 \Rightarrow x^2 - 5x - 84 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=12} & \text{قق} \\ x=-7 & \text{غقق} \end{cases}$$

مجموع تعداد اضلاع و اقطار یک $n+1$ ضلعی نصف اقطار یک $2n$ ضلعی است. n چند است؟

$$\frac{n+1(n+1-3)}{2} + n+1 = \frac{2n(2n-3)}{4} \Rightarrow \frac{n^2-n-2}{2} + n+1 = \frac{4n^2-6n}{4} \Rightarrow \frac{n^2-n-2+2n+2}{2} = \frac{2n^2-3n}{2} \Rightarrow n^2+n = 2n^2-3n \Rightarrow n^2-4n = 0 \Rightarrow n(n-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=0 & \text{غقق} \\ \boxed{n=4} & \text{قق} \end{cases}$$

در یک ۱۰۰ ضلعی محدب تعداد اقطاری که از ۲ رأس غیرمجاور می‌گذرد چند تا است؟

$$100 - 3 = 97 \quad (2 \times 97) - 1 = 193$$

مجموع تعداد اقطار و اضلاع یک چند ضلعی محدب برابر ۱۲۰ است. تعداد اضلاع چند است؟

$$\frac{n + 1(n + 1 - 3)}{2} + n = 120 \Rightarrow \frac{2n^2 - 3}{2} = 120 \Rightarrow n^2 - n = 240 \Rightarrow (n - 16)(n + 15) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n = 16 & \text{قق} \\ n = -15 & \text{غقق} \end{cases}$$

۲.۱.۳ چهارضلعی‌های مهم و ویژگی‌هایی آنها

تعریف:

- ۱ - متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.
- ۲ - متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.
- ۳ - مستطیل چهارضلعی‌ای است که، همه‌ی زوایای آن قائمه باشند.
- ۴ - لوزی چهارضلعی‌ای است که، هر چهارضلع آن هم‌اندازه باشند.
- ۵ - مربع چهارضلعی‌ای است که، هر چهار ضلع آن هم‌اندازه و حداقل یک زاویه‌ی آن قائمه باشد.

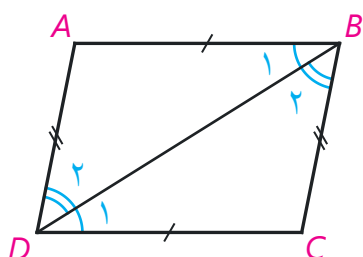
با توجه به تعاریف بالا هر یک از عبارات زیر را نیز می‌توانیم توجیه کنیم:

- (آ) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
 (ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یکی از زوایا قائمه باشد، مستطیل است.
 (پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است
 (ت) مربع یک لوزی، مستطیل و متوازی‌الاضلاع است

۳.۱.۳ ویژگی‌هایی از متوازی‌الاضلاع

متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.

قضیه ۱: هر در متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم‌اندازه‌اند.

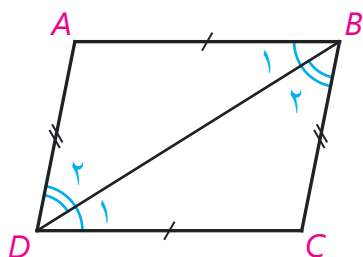


فرض: $AB \parallel CD, AD \parallel BC$ حکم: $AB = CD, AD = BC$

$$\left. \begin{array}{l} (AB \parallel CD, \text{مورب } BD) \rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 \\ (AD \parallel BC, \text{مورب } BD) \rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{B}_2 \\ AC = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ز}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow$$

$$AB = CD, AD = BC$$

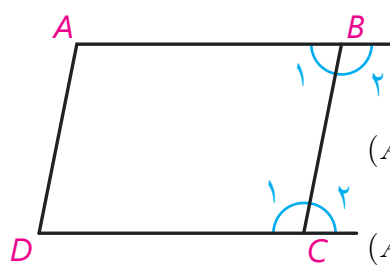
عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، اضلاع مقابل دوه‌دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



فرض: $AB = CD, AD = BC$ حکم: $AB \parallel CD, AD \parallel BC$

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ز}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow \begin{array}{l} \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD \\ \widehat{A}_2 = \widehat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC \end{array}$$

قضیه ۲: در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل‌اند.

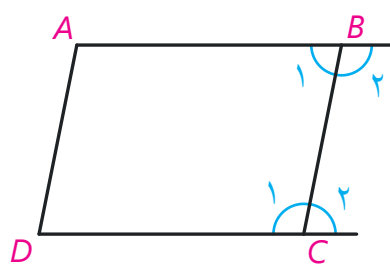


فرض: $AB \parallel CD, AD \parallel BC$ حکم: $\left. \begin{aligned} \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 &= 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{D} &= 180^\circ \end{aligned} \right\}$

$(AB \parallel CD, \text{مورب } BC) \rightarrow \left. \begin{aligned} \widehat{C}_1 &= \widehat{B}_1 \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$

$(AD \parallel BC, \text{مورب } CD) \rightarrow \left. \begin{aligned} \widehat{D} &= \widehat{C}_2 \\ \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{D} + \widehat{C}_1 = 180^\circ$

عکس قضیه ۲: هر چهارضلعی که ر دو زاویه‌ی مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.

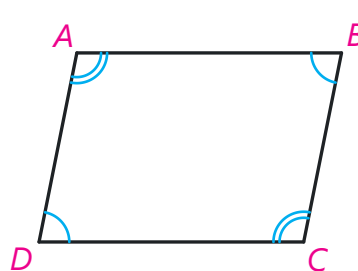


فرض: $\left. \begin{aligned} B_1 + D &= 180^\circ \\ C_1 + D &= 180^\circ \\ A + D &= 180^\circ \\ A + B_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\}$ حکم: $\left. \begin{aligned} AB &\parallel CD \\ AD &\parallel BC \end{aligned} \right\}$

$\left. \begin{aligned} \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 &= 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{D} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{D} = \widehat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC$

$\left. \begin{aligned} \widehat{C}_1 + \widehat{B}_2 &= 180^\circ \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD$

قضیه ۳: در هر متوازی‌الضلاع، هر دو زاویه‌ی مقابل هم اندازه‌اند.



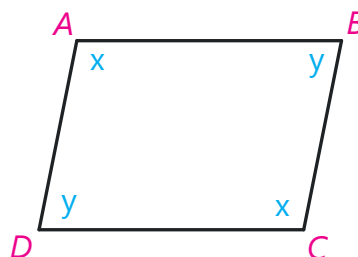
فرض: $\left. \begin{aligned} AB &\parallel CD \\ BC &\parallel AD \end{aligned} \right\}$ حکم: $\left. \begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{C} \\ \widehat{B} &= \widehat{D} \end{aligned} \right\}$

بنا بر قضیه ۲ می‌توان نوشت:

$\left. \begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{B} &= 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{A} = \widehat{C}$

$\left. \begin{aligned} \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ \widehat{C} + \widehat{D} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{B} = \widehat{D}$

عکس قضیه ۳: در هر یک چهارضلعی هر دو زاویه‌ی مقابل هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

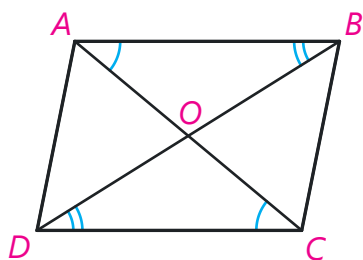


فرض: $\widehat{A} = \widehat{C} = x, \widehat{B} = \widehat{D} = y$ حکم: $ABCD$ موازی‌الاضلاع است.

$x + y + x + y = 360^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 360^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ$

هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل‌اند، بنابر عکس قضیه ۲، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

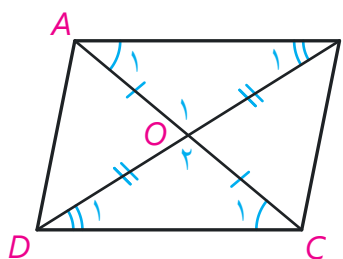
قضیه ۴: در هر متوازی‌الاضلاع اقطار منصف یکدیگرند.



فرض: $AB \parallel CD$, $AD = BC$ حکم: $OA = OC$, $OD = OB$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضضض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \end{array}$$

عکس قضیه ۴: هر چهارضلعی‌ای که اقطارش منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

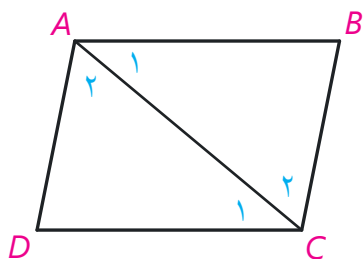


فرض: $OA = OC$, $OD = OB$ حکم: $AB \parallel CD$, $AD = BC$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB = OD \\ OA = OC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضضض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \begin{array}{l} AB = CD \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{array}$$

$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD$, مورب AC

هر دو چهارضلعی که دو ضلع آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.



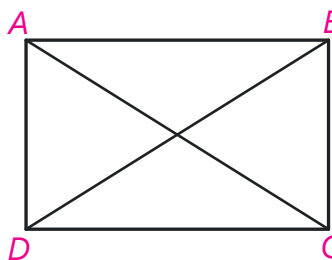
فرض: $AB = CD$, $AB \parallel CD$ حکم: $BC \parallel AD$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AB = CD \\ AC = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضضض}} \triangle ABC \cong \triangle CDA \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2$$

$\hat{A}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC$, مورب AC

۴.۱.۳ ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی

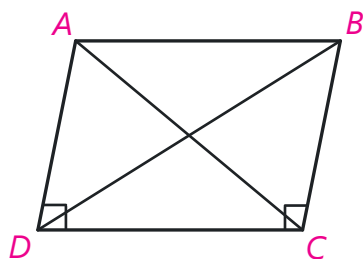
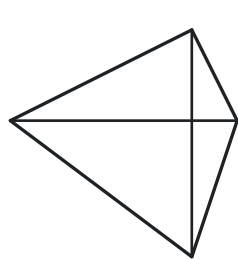
در مستطیل $ABCD$ ، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهستی دو مثلث ACD و BCD می‌توان نتیجه گرفت $AC = BD$.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{C} \\ AD = BC \\ CD = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضضض}} \triangle ACD \cong \triangle BCD \Rightarrow AC = BD$$

بنابراین در هر مستطیل اقطار برابرند.

اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند. نمی‌توان نتیجه گرفت که آن چهارضلعی مستطیل است، ولی اگر آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، حتماً مستطیل است.



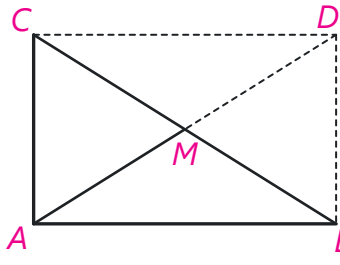
$$\left. \begin{array}{l} AC = BD \\ AD = BC \\ CD = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضضض}} \triangle ACD \cong \triangle BCD$$

$\rightarrow \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$

۵.۱.۳ ویژگی مهمی در مثلث قائم‌الزاویه

در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است.

فرض: $BM = MC$, $\hat{A} = 90^\circ$ حکم: $AM = \frac{BC}{2}$



روی نیم‌خط AM نقطه‌ی D را چنان در نظر می‌گیریم که $DM = AM$.

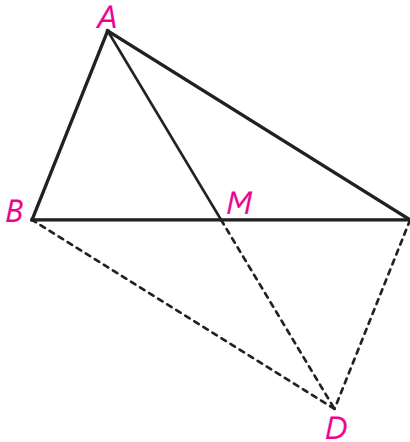
$$\left. \begin{array}{l} BM = CM \\ AM = DM \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع} \xrightarrow{\hat{A}=90^\circ} \text{مستطیل}$$

$$\Rightarrow AD = BC \Rightarrow BM = CM = AM = DM \Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$$

اگر در مثلثی اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع، نصف اندازه‌ی آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

فرض: $BM = CM$, $AM = \frac{BC}{2}$ حکم: $\hat{A} = 90^\circ$

روی نیم‌خط AM نقطه‌ی D را چنان در نظر می‌گیریم که $DM = AM$.



$$\left. \begin{array}{l} AM = \frac{BC}{2} \\ \frac{AD}{2} = AM = DM \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} \Rightarrow BC = AD$$

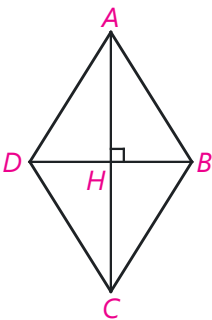
$$\left. \begin{array}{l} \frac{AD}{2} = AM = DM \\ \frac{BC}{2} = BM = CM \end{array} \right\} \Rightarrow AM = BM = CM = DM$$

$$\Rightarrow \text{مستطیل } ANCD \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

۶.۱.۳ ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

اقطار لوزی $ABCD$ را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، اقطار منصف یکدیگرند. $\triangle ABD$ نیز متساوی‌الساقین است.

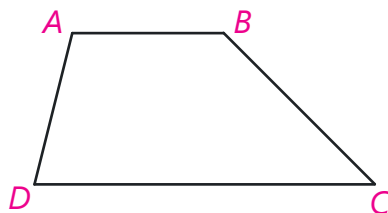
نقطه تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD ، AH عمود منصف BD و روی نیمساز \hat{A} است. بنابراین؛



در هر لوزی اقطار عمود منصف یکدیگر و روی نیمساز زوایا هستند.

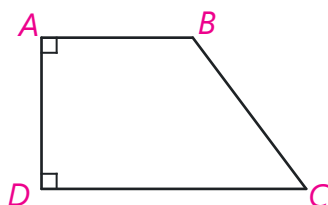
۷.۱.۳ دوزنقه

دوزنقه چهارضلعی‌ای است که با چهارضلعی‌هایی که قبلاً بررسی کردیم، کمی متفاوت است.
تعریف: دوزنقه چهارضلعی‌ای است که فقط دو ضلع آن موازی باشند.



هر یک از دو ضلع AB ، CD را که موازی‌اند، قاعده و هر یک از دو ضلع غیر موازی را ساق می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB ، CD و قاطع‌های AD و BC در زوایا می‌توان نتیجه گرفت که:

زوایای \hat{A} و \hat{D} مکمل‌اند، همچنین زوایای \hat{B} و \hat{C} مکمل هستند.

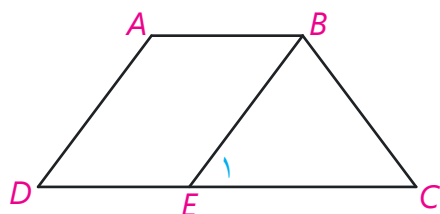


اگر در یک دوزنقه یک ساق برابر باشند، آن را دوزنقه متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک دوزنقه یک ساق بر قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر قاعده‌ی دیگر نیز عمود است. در این صورت دوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.

در هر دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{D} \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array} \right\} \text{ حکم: } \left. \begin{array}{l} AD = BC \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \text{ فرض:}$$

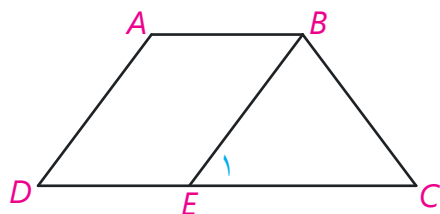


$$\left. \begin{array}{l} AD = BE \\ AD = BC \end{array} \right\} \Rightarrow BE = BC \rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E}_1 = \hat{C} \\ \hat{E}_1 = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{D}$$

اگر در یک دوزنقه دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده هم‌اندازه باشند، دوزنقه متساوی‌الساقین است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{D} \\ AD = BC \end{array} \right\} \text{ فرض: } \left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{D} \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \text{ حکم:}$$

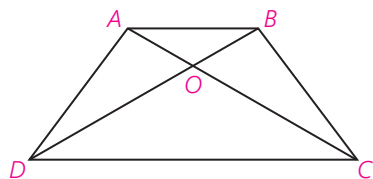


$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{E}_1 \\ \hat{C} = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C} \rightarrow BE = BC$$

$$\left. \begin{array}{l} BE = BC \\ AD = BE \end{array} \right\} \Rightarrow AD = BC$$

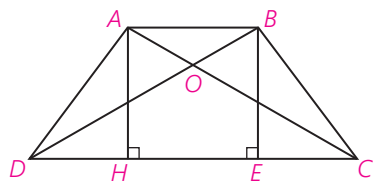
در هر دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، اقطار اندازه‌های مساوی دارند و برعکس.

$$\text{فرض: } AB \parallel CD, AD = BC \quad \text{حکم: } AC = BD$$



$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ CD = CD \\ \hat{C} = \hat{D} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ض.ض.}} \triangle BDC \cong \triangle ADC \rightarrow AC = BD$$

$$\text{فرض: } AC = BD \quad \text{حکم: } AD = BC$$



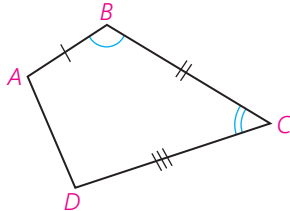
$$\left. \begin{array}{l} AH = BE \\ AC = BD \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{وض.}} \triangle AHC \cong \triangle BED \rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \\ CD = CD \\ AC = BD \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ض.ض.}} \triangle ADC \cong \triangle BDC \rightarrow AD = BC$$

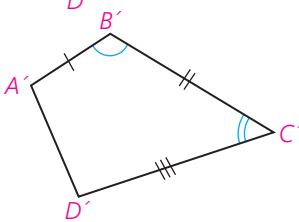
۸.۱.۳ تمرین

۱ - در کدام n ضلعی تعداد اقطار و اضلاع برابر است؟

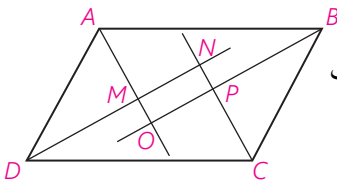
$$n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 2n = n^2 - 3n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n(n-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{قق} \\ x = 5 & \text{غقق} \end{cases}$$



۲ - در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟



اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$ در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟



۳ - از تقاطع نیم‌سازهای داخلی یک متوازی‌الضلاع، چهارضلعی $MNPQ$ پدید آمده‌است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B} = \widehat{C} = 180^\circ &\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \widehat{P}_1 = \widehat{P}_2 = 90^\circ \\ \widehat{A} = \widehat{D} = 180^\circ &\Rightarrow 2m + 2n = 180^\circ \Rightarrow m + n = 90^\circ \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ \\ \widehat{C} = \widehat{D} = 180^\circ &\Rightarrow 2n + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow m + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 = 90^\circ \\ \widehat{P}_1 + \widehat{M}_1 + \widehat{N}_1 + \widehat{Q}_1 &= 360^\circ \Rightarrow 270^\circ + \widehat{Q}_1 = 360^\circ \Rightarrow \widehat{Q}_1 = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow MNPQ \text{ مستطیل}$$

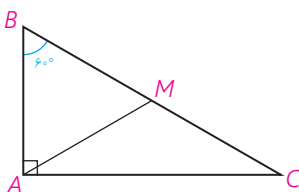
۴ - مثلث قائم الزاویه‌ی $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازه‌ی $\angle C$ برابر 30° است، در نظر می‌گیریم. میانه‌ی وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMB و AMC چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{2}$ یعنی در هر مثلث قائم الزاویه اگر اندازه‌ی یک زاویه 30° باشد، اندازه‌ی ضلع مقابل آن نصف اندازه‌ی وتر است.

سپس با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث نشان دهید $AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$

یعنی در هر مثلث قائم الزاویه اگر یک زاویه 60° باشد، اندازه‌ی ضلع مقابل آن اندازه‌ی وتر است.

اکنون مثلث قائم الزاویه‌ی $\triangle ABC$ را رسم کنید که اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن 45° باشد و نشان دهید که اندازه‌ی هر ضلع زاویه‌ی قائمه

در آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ اندازه‌ی وتر است.



$BM = AM \Rightarrow$ متساوی‌الاضلاع است $\triangle ABM$

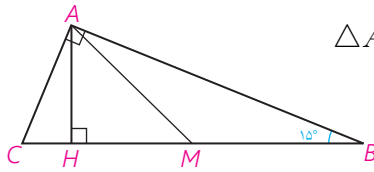
$CM = AM \Rightarrow$ متساوی‌الاضلاع است $\triangle ACM$

$$AB = \frac{BC}{2} \Rightarrow AB = MB = \frac{BC}{2}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{BC^2}{4} + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{4} \Rightarrow$$

$$AC^2 = \frac{3}{4} BC^2 \Rightarrow AC = BC \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵ - در مثلث قائم الزاویه‌ی $\triangle ABC$ اندازه‌ی زاویه‌ی \widehat{B} برابر ۱۵° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازه‌ی وتر است.



$$\triangle AHM : \left. \begin{array}{l} \widehat{M} = 30^\circ \\ AH = \frac{1}{2} AM \\ AM = \frac{1}{2} BC \end{array} \right\} \rightarrow AH = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} BC \right) \Rightarrow AH = \frac{1}{4} BC$$

۶ - در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خطوط MB و ND موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$

۷ - ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید. این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشت تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟ چه رابطه‌ای بین محیط متوازی الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

۲.۳ مساحت و کاربردهای آن

یادآوری

۱- اگر اندازه‌ی یک ضلع مربع a باشد، $S = a^2$ مساحت آن است.

۲- اگر اندازه‌ی یک ضلع مثلث a و اندازه‌ی ارتفاع نظیر آن ضلع h_a باشد، آنگاه $S = \frac{1}{2}ah_a$

بنابراین در هر مثلث ABC اگر اندازه‌ی اضلاع BC ، AC و AB را به ترتیب با a ، b و c اندازه‌های ارتفاع‌های نظیر آنها

را به ترتیب با h_a ، h_b و h_c نشان دهیم آنگاه، $2S = ah_a = bh_b = ch_c$

۳- اگر اندازه‌ی یک ضلع متوازی الاضلاع a و اندازه‌ی ارتفاع نظیر آن h باشد، $S = ah$

۴- اگر اندازه‌های دو قطر لوزی m و n باشند، $S = \frac{1}{2}nm$

۵- اگر اندازه‌های دو قاعده‌ی یک دوزنقه a و b و اندازه‌ی ارتفاع آن h باشد $S = \frac{(a+b)h}{2}$

کار در کلاس

فرض کنیم اندازه‌ی هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم کنید. ارتفاع AH میانه نیز

است؛ چرا؟

به کمک قضیه فیثاغورس نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

فعالیت

در چهارضلعی $ABCD$ دو قطر AC و DB برهم عموداند.

با جمع این دو مساحت داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD(AH + BH) = \frac{1}{2}BD \times AC$$

بنابراین؛

در هر چهارضلعی‌ای که دو قطر آن برهم عمود باشند، مساحت برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر.

۱.۲.۳ کاربردهایی از مساحت

قبلاً با کاربرد مساحت در اثبات قضیه تالس آشنا شدید. بعضی رابطه‌ها و ویژگی‌هایی را که با آن آشنا شده اید یادآوری می‌کنیم.

فصل ۴

تجسم فضایی

۱.۴ خط، نقطه و صفحه

۲.۴ تفکر تجسمی