

جزوه هندسه

ابوالفضل احمدی

۴ اردیبهشت ۱۴۰۱

فصل ۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال

۱.۱ ترسیم‌های هندسی

۱.۱.۱ دایره

مجموعه نقاطی در صفحه که فاصله آنها از یک نقطه ثابت، مقداری ثابت باشد. نقطه ثابت را مرکز و مقدار ثابت را شعاع دایره می‌نامند
دایره‌ای به مرکز O و شعاع r را با نماد $C(O, r)$ نمایش می‌دهند.

مثال:

نقطه A به فاصله 1cm از خط d قرار دارد. نقاطی را روی خط d بیابید که فاصله آنها را نقطه A برابر با 2cm باشد.

۲.۱ استدلال

فصل ۲

قضیه‌ی تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل ۳

چند ضلعی‌ها

۱.۳ چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها

تعریف: n ضلعی شکلی است شامل n ($3 \geq n$) پاره خط متوالی که:
 (۱) هر پاره خطی، دقیقاً دو پاره خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.
 (۲) هر دو پاره خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

۱.۱.۳ قطر در چند ضلعی‌ها

در هر n ضلعی، هر پاره خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیر مجاور باشند، قطر می‌نامند.
 n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ را در نظر می‌گیریم. از رأس A_1 ، $n-1$ قطر می‌توان رسم کرد.
 با توجه به اینکه n رأس داریم، می‌توان گفت تعداد قطرهای در n ضلعی با این فرمول به دست می‌آید: $\frac{n(n-3)}{2}$

مثال:

تعداد اقطاریک چند ضلعی ۳۵ است. از هر رأس این چند ضلعی چند قطر می‌گذرد؟

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35 \Rightarrow x^2 - 3x = 70 \Rightarrow (x-10)(x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=10} & \text{قق} \\ x=-7 & \text{غقق} \end{cases}$$

تعداد اقطاریک چند ضلعی محدب از تعداد اضلاع آن ۴۲ بیشتر است. این چند ضلعی چند قطر دارد؟

$$\frac{n(n-3)}{2} = x + 42 \Rightarrow x^2 - 3x = 2x + 84 \Rightarrow x^2 - 5x - 84 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=12} & \text{قق} \\ x=-7 & \text{غقق} \end{cases}$$

مجموع تعداد اضلاع و اقطاریک $n+1$ ضلعی نصف اقطاریک $2n$ ضلعی است. n چند است؟

$$\frac{n+1(n+1-3)}{2} + n+1 = \frac{2n(2n-3)}{4} \Rightarrow \frac{n^2-n-2}{2} + n+1 = \frac{4n^2-6n}{4} \Rightarrow \frac{n^2-n-2+2n+2}{2} = \frac{2n^2-3n}{2} \Rightarrow n^2+n = 2n^2-3n \Rightarrow n^2-4n = 0 \Rightarrow n(n-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=0 & \text{غقق} \\ \boxed{n=4} & \text{قق} \end{cases}$$

در یک ۱۰۰ ضلعی محدب تعداد اقطاری که از ۲ رأس غیر مجاور می‌گذرد چند تا است؟

$$100 - 3 = 97 \quad (2 \times 97) - 1 = 193$$

مجموع تعداد اقطار و اضلاع یک چند ضلعی محدب برابر ۱۲۰ است. تعداد اضلاع چند است؟

$$\frac{n+1(n+1-3)}{2} + n = 120 \Rightarrow \frac{2n^2-3}{2} = 120 \Rightarrow n^2 - n = 240 \Rightarrow (n-16)(n+15) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \boxed{n=16} & \text{قق} \\ n=-17 & \text{غقق} \end{cases}$$

۲.۱.۳ چهارضلعی‌های مهم و ویژگی‌های آنها

تعریف:

- ۱- متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.
- ۲- متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.
- ۳- مستطیل چهارضلعی‌ای است که، همه‌ی زوایای آن قائمه باشند.
- ۴- لوزی چهارضلعی‌ای است که، هر چهارضلع آن هم‌اندازه باشند.
- ۵- مربع چهارضلعی‌ای است که، هر چهارضلع آن هم‌اندازه و حداقل یک زاویه‌ی آن قائمه باشد.

با توجه به تعاریف بالا هر یک از عبارات زیر را نیز می‌توانیم توجیه کنیم:

(آ) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

(ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یکی از زوایا قائمه باشد، مستطیل است.

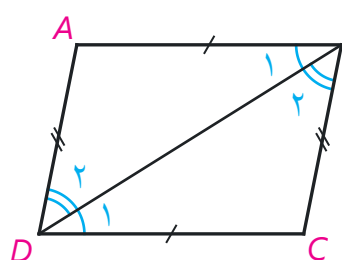
(پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است

(ت) مربع یک لوزی، مستطیل و متوازی‌الاضلاع است

۳.۱.۳ ویژگی‌هایی از متوازی‌الاضلاع

متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.

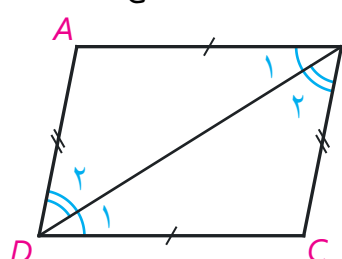
قضیه ۱: هر در متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم‌اندازه‌اند.



فرض: $AB \parallel CD, AD \parallel BC$ حکم: $AB = CD, AD = BC$

$$\left. \begin{array}{l} (AB \parallel CD, \text{مورب } BD) \rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 \\ (AD \parallel BC, \text{مورب } BD) \rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{B}_2 \\ AC = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{زضز}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow$$

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، اضلاع مقابل دوه‌دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

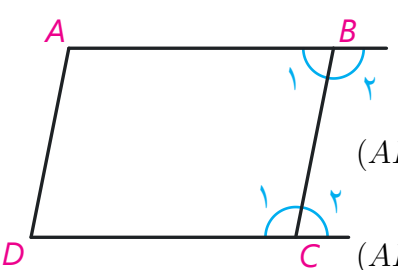


فرض: $AB = CD, AD = BC$ حکم: $AB \parallel CD, AD \parallel BC$

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{زضز}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow \begin{array}{l} \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD \\ \widehat{A}_2 = \widehat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC \end{array}$$

قضیه ۲: در متوازی‌الاضلاع هر دوزاویه‌ی مجاور مکمل‌اند.

فرض: $AB \parallel CD, AD \parallel BC$ حکم: $\left. \begin{array}{l} \widehat{B}_2 + \widehat{C}_1 = 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{D} = 180^\circ \end{array} \right\}$

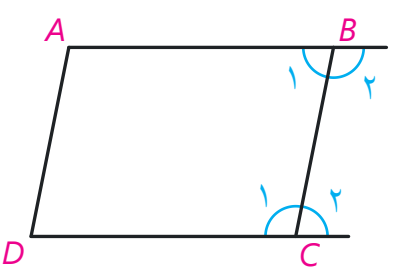


$(AB \parallel CD, \text{مورب } BC) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$

$(AD \parallel BC, \text{مورب } CD) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{D} = \widehat{C}_2 \\ \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{D} + \widehat{C}_1 = 180^\circ$

عکس قضیه ۲: هر چهارضلعی که ر دوزاویه‌ی مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.

فرض: $\left. \begin{array}{l} B_2 + D = 180^\circ \\ C_1 + D = 180^\circ \\ A + D = 180^\circ \\ A + B_2 = 180^\circ \end{array} \right\}$ حکم: $\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{array} \right\}$

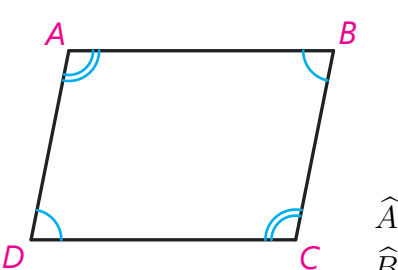


$\left. \begin{array}{l} \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{D} = \widehat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC$

$\left. \begin{array}{l} \widehat{C}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD$

قضیه ۳: در هر متوازی‌الضلاع، هر دوزاویه‌ی مقابل هم اندازه‌اند.

فرض: $\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ BC \parallel AD \end{array} \right\}$ حکم: $\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{C} \\ \widehat{B} = \widehat{D} \end{array} \right\}$



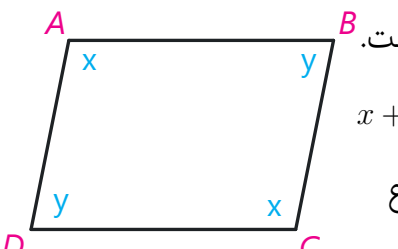
بنابر قضیه ۲ می‌توان نوشت:

$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{A} = \widehat{C}$

$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{B} = \widehat{D}$

عکس قضیه ۳: در هر یک چهارضلعی هر دوزاویه‌ی مقابل هم اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

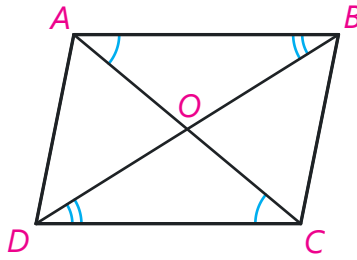
فرض: $\widehat{A} = \widehat{C} = x, \widehat{B} = \widehat{D} = y$ حکم: ABCD متوازی‌الاضلاع است.



$x + y + x + y = 360^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 360^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ$

هر دوزاویه‌ی مجاور مکمل‌اند، بنابر عکس قضیه ۲، ABCD متوازی‌الاضلاع است.

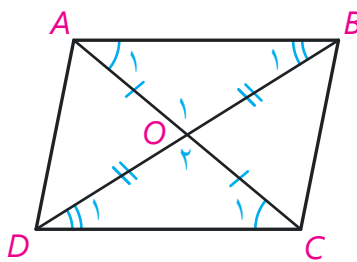
قضیه ۴: در هر متوازی‌الاضلاع اقطار منصف یکدیگرند.



فرض: $AB \parallel CD$, $AD = BC$ حکم: $OA = OC$, $OD = OB$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضرض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \end{array}$$

عکس قضیه ۴: هر چهارضلعی‌ای که اقطارش منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

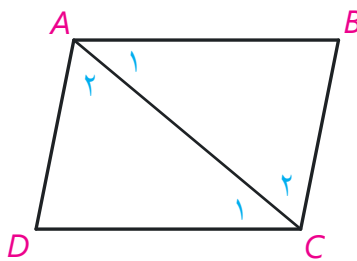


فرض: $OA = OC$, $OD = OB$ حکم: $AB \parallel CD$, $AD = BC$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB = OD \\ OA = OC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضرض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \begin{array}{l} AB = CD \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{array}$$

$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD$, مورب AC

هر در چهارضلعی که دو ضلع آن هم اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.



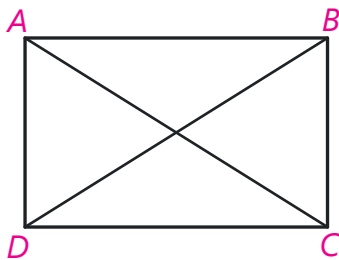
فرض: $AB = CD$, $AB \parallel CD$ حکم: $BC \parallel AD$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AB = CD \\ AC = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضرض}} \triangle ABC \cong \triangle ACD \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2$$

$\hat{A}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC$, مورب AC

۴.۱.۳ ویژگی‌هایی از مستطیل ولوزی

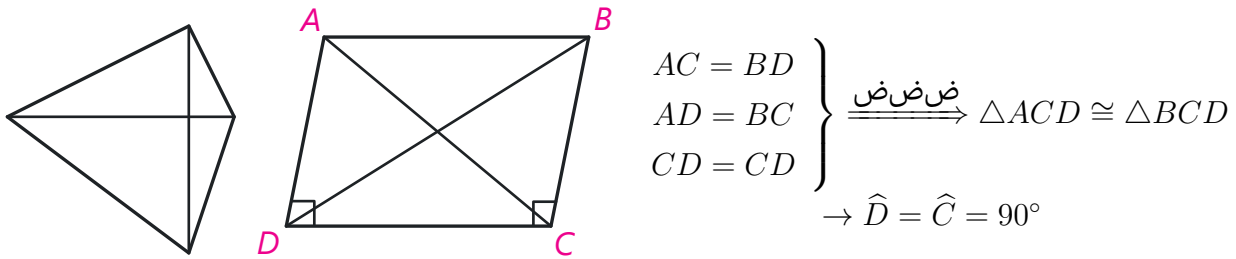
در مستطیل $ABCD$ ، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم نهشتی دو مثلث ACD و BCD می‌توان نتیجه گرفت $AC = BD$.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{C} \\ AD = BC \\ CD = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضرض}} \triangle ACD \cong \triangle BCD \Rightarrow AC = BD$$

بنابراین در هر مستطیل اقطار برابرند.

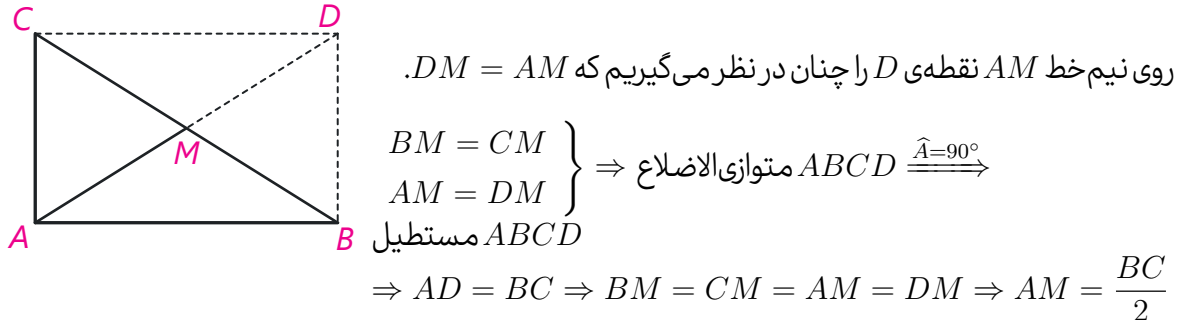
اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند. نمی‌توان نتیجه گرفت که آن چهارضلعی مستطیل است، ولی اگر آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، حتماً مستطیل است.



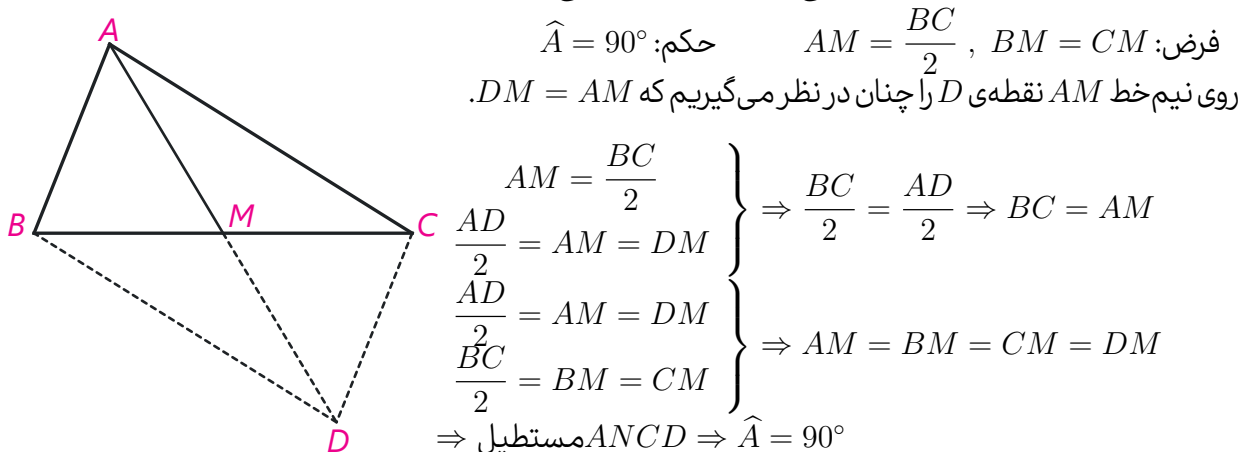
۵.۱.۳ ویژگی مهمی در مثلث قائم الزاویه

در هر مثلث قائم الزاویه اندازهی میانهی وارد بر وتر نصف اندازهی وتر است.

فرض: $\hat{A} = 90^\circ$, $BM = MC$ حکم: $AM = \frac{BC}{2}$



اگر در مثلثی اندازهی میانهی وارد بر ضلع، نصف اندازهی آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

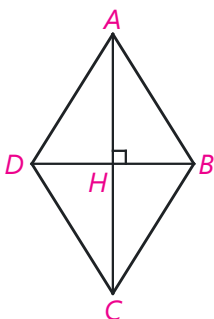


۶.۱.۳ ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

اقطار لوزی $ABCD$ را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی الاضلاع است، اقطار منصف یکدیگرند. $\triangle ABD$ نیز متساوی الساقین است.

نقطه تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD ، AH عمود منصف BD و روی نیمساز \hat{A} است.

بنابراین؛



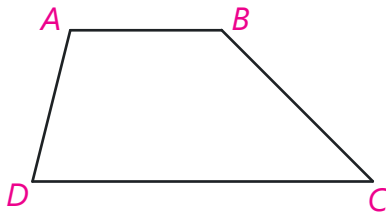
در هر لوزی اقطار عمود منصف یکدیگر و روی نیمساز زوایا هستند.

۷.۱.۳ دوزنقه

دوزنقه چهارضلعی‌ای است که با چهارضلعی‌هایی که قبلاً بررسی کردیم، کمی متفاوت است.

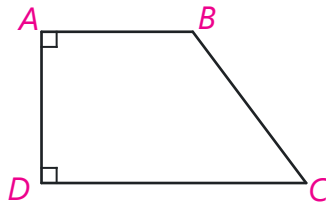
تعریف: دوزنقه چهارضلعی‌ای است که فقط دو ضلع آن موازی باشند.

هر یک از دو ضلع AB ، CD را که موازی‌اند، **قاعده** و هر یک از دو ضلع غیر موازی را **ساق** می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB ، CD و قاطع‌های AD و BC در زوایا می‌توان نتیجه گرفت که:



زوایای \hat{A} و \hat{D} مکمل‌اند، همچنین زوایای \hat{B} و \hat{C} مکمل هستند.

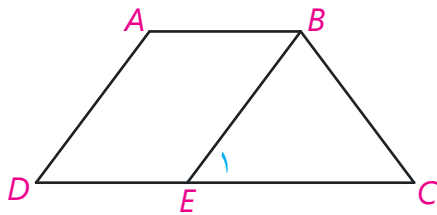
اگر در یک دوزنقه یک ساق برابر باشند، آن را دوزنقه متساوی الساقین می‌نامند.



هرگاه در یک دوزنقه یک ساق بر قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر قاعده‌ی دیگر نیز عمود است. در این صورت دوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.

در هر دوزنقه‌ی متساوی الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{D} \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array} \right\} \text{حکم} \quad \left. \begin{array}{l} AD = BC \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \text{فرض}$$

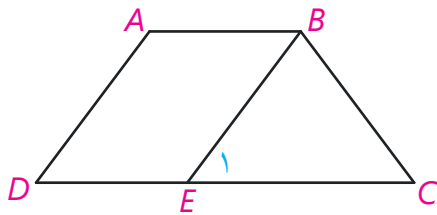


$$\left. \begin{array}{l} AD = BF \\ AD = BC \end{array} \right\} \Rightarrow BF = BC \rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E}_1 = \hat{C} \\ \hat{E}_1 = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{D}$$

اگر در یک دوزنقه دوزاویه‌ی مجاور به یک قاعده هم‌اندازه باشند، دوزنقه متساوی الساقین است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{D} \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \text{فرض} \quad \left. \begin{array}{l} AD = BC \end{array} \right\} \text{حکم}$$

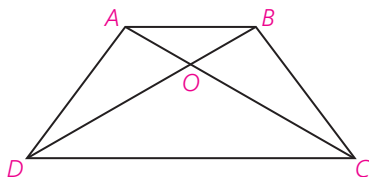


$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{E}_1 \\ \hat{C} = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C} \rightarrow BE = BC$$

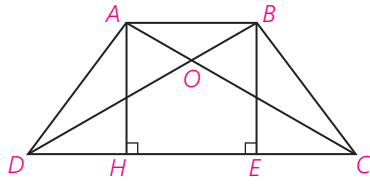
$$\left. \begin{array}{l} BF = BC \\ AD = BF \end{array} \right\} \Rightarrow AD = BC$$

در هر دوزنقه‌ی متساوی الساقین، اقطار اندازه‌های مساوی دارند و برعکس.

$$\left. \begin{array}{l} AC = BD \\ AB \parallel CD, AD = BC \end{array} \right\} \text{حکم} \quad \left. \begin{array}{l} AD = BC \\ CD = CD \\ \hat{C} = \hat{D} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.}} \triangle BDC \equiv \triangle ADC \rightarrow AC = BD$$



فرض: $AC = BD$ حکم: $AD = BC$



$$\left. \begin{array}{l} AH' = BH \\ AC = BD \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{وض}} \triangle AH'C \cong \triangle BHD \rightarrow D_1 = C_1$$

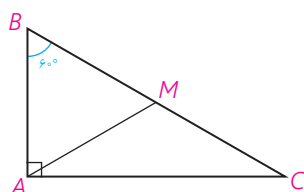
$$\left. \begin{array}{l} D_1 = C_1 \\ CD = CD \\ AC = BD \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ضضض}} \triangle ADC \cong \triangle BDC \rightarrow AD = BC$$

۸.۱.۳ تمرین

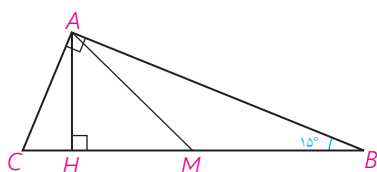
۱- در کدام n ضلعی تعداد اقطار و اضلاع برابر است؟

۲- در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$ در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟



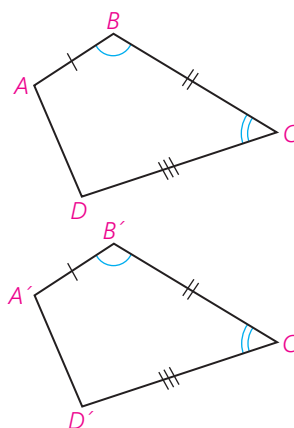
۵- در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ اندازه‌ی زاویه‌ی \widehat{B} برابر 15° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازه‌ی وتر است.



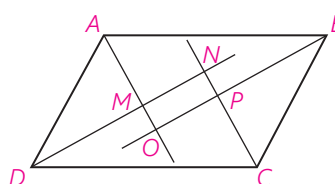
۶- در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خطوط MB و ND موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$

۷- ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشت ه باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟
چه رابطه‌ای بین محیط متوازی الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟



۳- از تقاطع نیم‌سازهای داخلی یک متوازی‌الضلاع، چهارضلعی $MNPQ$ پدید آمده‌است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است.



۴- مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازه‌ی $\angle C$ برابر 30° است، در نظر می‌گیریم. میانه‌ی وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMB و AMC چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{2}$ یعنی در هر مثلث قائم الزاویه اگر اندازه‌ی یک زاویه 30° باشد، اندازه‌ی ضلع مقابل آن نصف اندازه‌ی وتر است.

۹.۱.۳ پاسخ

(۱)

$$n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 2n = n^2 - 3n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n(n-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{قق} \\ \boxed{x=5} & \text{غقق} \end{cases}$$

(۲)

(۳)

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B} = \widehat{C} = 180^\circ &\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \widehat{P}_1 = \widehat{P}_2 = 90^\circ \\ \widehat{A} = \widehat{D} = 180^\circ &\Rightarrow 2m + 2n = 180^\circ \Rightarrow m + n = 90^\circ \Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{M}_1 = 90^\circ \\ \widehat{C} = \widehat{D} = 180^\circ &\Rightarrow 2n + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow m + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 = 90^\circ \\ \widehat{P}_2 + \widehat{M}_1 + \widehat{N}_2 + \widehat{Q}_2 &= 360^\circ \Rightarrow 270^\circ + \widehat{Q}_2 = 360^\circ \Rightarrow \widehat{Q}_2 = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow MN PQ \text{ مستطیل}$$

(۴)

$CM = AM \Rightarrow$ متساوی‌الضلعین است AC $BM = AM \Rightarrow$ متساوی‌الاضلاع است AB

$$AB = \frac{BC}{2} \Rightarrow AB = MB = \frac{BC}{2}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{BC^2}{4} + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{4} \Rightarrow AC^2 = 3BC^2 \Rightarrow AC = BC \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(۵)

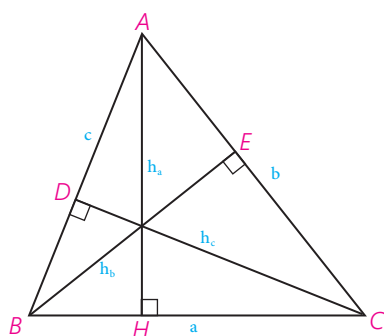
$$\left. \begin{aligned} \widehat{M} = 30^\circ \} \rightarrow \begin{aligned} AH &= \frac{1}{2}AM \\ AM &= \frac{1}{2}BC \end{aligned} \end{aligned} \right\} \rightarrow AH = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}BC \right) \Rightarrow AH = \frac{1}{4}BC \triangle AHM :$$

(۶)

(۷)

۲.۳ مساحت و کاربردهای آن

یادآوری



۱- اگر اندازه یک ضلع مربع a باشد، $S = a^2$ مساحت آن است.

۲- اگر اندازه یک ضلع مثلث a و اندازه ارتفاع نظیر آن ضلع h_a باشد، آنگاه $S = \frac{1}{2}ah_a$

بنابراین در هر مثلث ABC اگر اندازه اضلاع BC، AC و AB را به ترتیب با a, b, c و اندازه‌های ارتفاع‌های نظیر آن‌ها را به ترتیب با h_a, h_b, h_c نشان دهیم آنگاه،

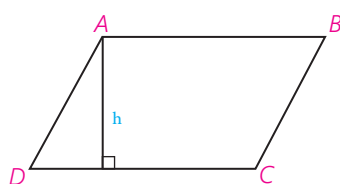
$$2S = ah_a = bh_b = ch_c$$

۳- اگر اندازه یک ضلع متوازی الاضلاع a و اندازه ارتفاع نظیر آن h باشد،
 $S = ah$

۴- اگر اندازه‌های دو قطر لوزی m و n باشند، $S = \frac{1}{2}nm$

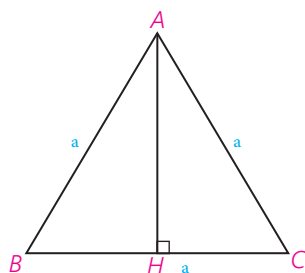
۵- اگر اندازه‌های دو قاعده یک دوزنقه a و b و اندازه ارتفاع آن h باشد

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$



کاردرکلاس

فرض کنیم اندازه هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم کنید. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟



$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \angle C = \angle B \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{و}} \triangle ABH \cong \triangle ACH \Rightarrow CH = BH$$

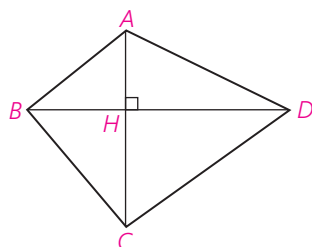
به کمک قضیه فیثاغورس نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = AH^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

فعالیت

در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB برهم عموداند.



$$S_{ADB} = BD \times AH \times \frac{1}{2}$$

$$S_{DBC} = BD \times CH \times \frac{1}{2}$$

با جمع این دو مساحت داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD(AH + CH) = \frac{1}{2}BD \times AC$$

بنابراین؛

در هر چهارضلعی‌ای که دو قطر آن برهم عمود باشند، مساحت برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر.

۱.۲.۳ کاربردهای از مساحت

قبلاً با کاربرد مساحت در اثبات قضیه تالس آشنا شدید. بعضی رابطه‌ها و ویژگی‌هایی را که با آن آشنا شده‌اید یادآوری می‌کنیم.

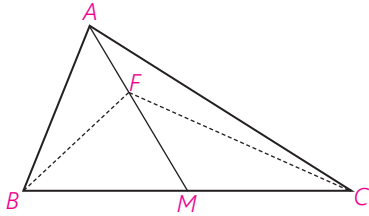
ویژگی ۱: در دو مثلث اگر اندازه قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌ی ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$$

ویژگی ۲: برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

کاردرکلاس

نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

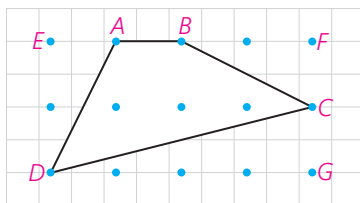


$$\left. \begin{aligned} S_{ABM} &= \frac{1}{2} \times h \times BM \\ S_{ACM} &= \frac{1}{2} \times h \times CM \end{aligned} \right\} \xrightarrow{BM=CM} S_{ABM} = S_{ACM}$$

اگر هر نقطه‌ای روی میانه‌ی AM به جز نقطه‌ی AM باشد آیا $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟
بله؛ FM میانه‌ی مثلث FBC است پس آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند.

فعالیت

۲.۲.۳ نقاط شبکه‌ای و مساحت



در دو مثلث که اندازه‌ی دو ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها نقاط شبکه‌ای و مساحت مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع اند؛ به طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.
به طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطه مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

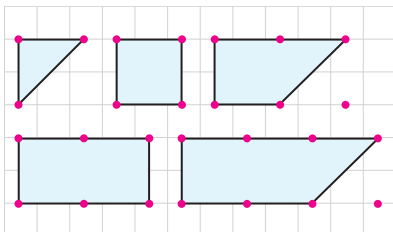
در چندضلعی‌های شبکه‌ای، تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان می‌دهند. اکنون می‌خواهیم به طور شهودی رابطه‌ی بین مساحت چندضلعی شبکه‌ای و نقاط مرزی و درونی شبکه‌ای نظیر آن را پیدا کنیم.

فعالیت

۱- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟
حداقل ۳ تا؛ زیرا برای رسم مثلث شبکه‌ای حداقل به ۳ نقطه نیازمندیم.

۲- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه درونی می‌تواند داشته باشد؟
صفر

۳- در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است، یعنی $i=0$ و تعداد نقاط مرزی، $b = 3, 4, 5, 6, 7$

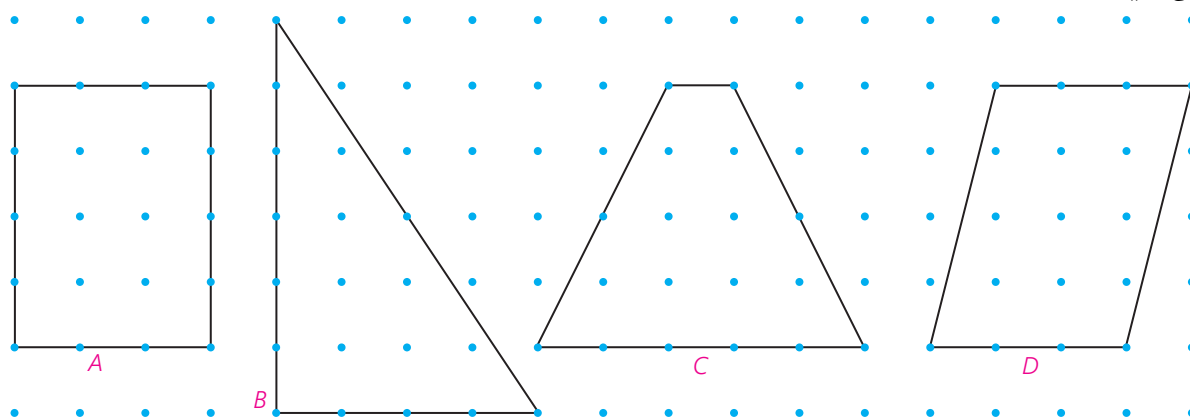


فرمول مساحت اشکال شبکه‌ای به این صورت است: $S = \frac{b}{2} - 1 + i$

توجه داشته باشید که این فرمول را به طور شهودی پیدا کرده ایم. اثبات دقیق این فرمول در حالت کلی نیاز به مقدمات بیشتری دارد.

این فرمول به فرمول پیک معروف است که جرج الکساندر پیک (۱۸۵۹-۱۹۴۳) آن را کشف کرد و از سال ۱۹۷۰ به طور گسترده‌ای در کتاب‌های هندسه مقدماتی به کار برده شده است.

به کمک این فرمول می‌توانیم مساحت شکل‌های نامنظم هندسی را نیز به طور تقریبی پیدا کنیم. چندضلعی‌های A، B، C و D را در شکل‌های زیر در نظر بگیرید. ابتدا به روش‌های هندسی که از قبل می‌دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



۳.۲.۳ تمرین

۵- مساحت دوزنقهٔ مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه ای به دست می‌آید؟

۶- در متوازی الاضلاع، M وسط ضلع BC است و پاره خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:

$$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$

۷- در مثلث ABC ، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$ است. S_{MQPB} و S_{AQN} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۸- با توجه به مساحت چندضلع یهای شبکه ای، مساحت قسمت سایه زده را محاسبه کنید. (راهنمایی: مساحت چند ضلعی داخلی را از مساحت چند ضلعی بیرونی کم کنید.)

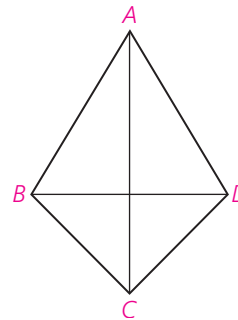
۹- یک مستطیل شبکه ای با ضل عهای افقی و قائم که اندازه های ضل عهای آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

۱۰- مساحت یک چندضلعی شبکه ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حال تهایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبک های مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شک لهای چهارضلع یهای نظیر آن را نیز رسم کنید.

۱- در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه های دو قطر $\frac{1}{2}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

۲- در چهارضلعی $ABCD$ ، مطابق شکل $AB = AD$ و $BC = CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.

۳- در شکل دو خط d و d' موازی اند و $ABCD$ و $ABEF$ هر دو متوازی الاضلاع اند. اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاع ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟



۴- در دوزنقهٔ شکل مقابل اندازه های دو قاعده a و b و اندازه های دوزاویهٔ مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت دوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.

فصل ۴

تجسم فضایی

۱.۴ خط، نقطه و صفحه

۲.۴ تفکر تجسمی