جزوه هندسه

ابوالفضل احمدی

۵ شهریور ۱۴۰۱

فصل ۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال

۱.۱ ترسیم‌های هندسی

۱.۱.۱ دایره

مجموعه نقاطی در صفحه که فاصله آنها از یک نقطه ثابت، مقداری ثابت باشد. نقطه ثابت را مرکز و مقدار ثابت را شعاع دایره می‌نامند

دایره ای به مرکز O و شعاع r را با نماد $C(O, r)$ نمایش می‌دهند.

مثال:

نقطه A به فاصلهٔ $1\mathrm{cm}$ از خط d قرار دارد. نقاطی را روی خط d بیابید که فاصلهٔ آنها را نقطهٔ A برابر با $2\mathrm{cm}$ باشد.

۲.۱ استدلال

فصل ۲

قضیه‌ی تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل ۳

چند ضلعی‌ها

۱.۳ چند ضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها

تعریف: n ضلعی شکلی است شامل $(n \geq ۳)\,n$ پاره‌خط متوالی که:

۱) هر پاره‌خطی، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

۱.۱.۳ قطر در چندضلعی‌ها

در هر n ضلعی، هر پاره‌خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، قطر می‌نامند.

n ضلعی $A_۱A_۲ \ldots A_n$ را در نظر می‌گیریم. از رأس $A_۱$، $n-۱$ قطر می‌توان رسم کرد.

با توجه به اینکه n رأس داریم، می‌توان گفت تعداد اقطار در n ضلعی با این فرمول به‌دست می‌آید: $\frac{n(n-3)}{2}$

مثال:

تعداد اقطار یک چند ضلعی ۳۵ است. از هر رأس این چندضلعی چند قطر می‌گذرد؟

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35 \Rightarrow x^2 - 3x = 70 \Rightarrow (x-10)(x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 10} & \text{قق} \\ x = -7 & \text{غقق} \end{cases}$$

تعداد اقطار یک چند ضلعی محدب از تعداد اضلاع آن ۴۲ تا بیشتر است. این چند ضلعی چند قطر دارد؟

$$\frac{n(n-3)}{2} = x + 42 \Rightarrow x^2 - 3x = 2x + 84 \Rightarrow x^2 - 5x - 84 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-12) = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \boxed{x = 12} & \text{قق} \\ x = -7 & \text{غقق} \end{cases}$$

مجموع تعداد اضلاع و اقطار یک $n+۱$ ضلعی نصف اقطار یک $۲n$ ضلعی است. n چند است؟

$$\frac{n+1(n+1-3)}{2} + n + 1 = \frac{2n(2n-3)}{4} \Rightarrow \frac{n^2-n-2}{2} + n + 1 = \frac{4n^2-6n}{4} \Rightarrow$$
$$\frac{n^2-n-2+2n+2}{2} = \frac{2n^2-3n}{2} \Rightarrow n^2 + n = 2n^2 - 3n \Rightarrow n^2 - 4n = 0 \Rightarrow n(n-4) = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} n = 0 & \text{غقق} \\ \boxed{n = 4} & \text{قق} \end{cases}$$

در یک ۱۰۰ ضلعی محدب تعداد اقطاری که از ۲ رأس غیرمجاور می‌گذرد چند تا است؟

$100 - 3 = 97 \qquad (2 \times 97) - 1 = 193$

مجموع تعداد اقطار و اضلاع یک چند ضلعی محدب برابر ۱۲۰ است. تعداد اضلاع چند است؟

$$\frac{n+1(n+1-3)}{2} + n = 120 \Rightarrow \frac{2n^2-3}{2} = 120 \Rightarrow n^2 - n = 240 \Rightarrow (n-16)(n+15) = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \boxed{n=16} & \text{ق ق} \\ n=-17 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲.۱.۳ چهارضلعی‌های مهم و ویژگی‌هایی آنها

تعریف:

۱ – متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.

۲ – متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.

۳ – مستطیل چهارضلعی‌ای است که ، همه‌ی زوایای آن قائمه باشند.

۴ – لوزی چهارضلعی‌ای است که، هر چهارضلع آن هم‌اندازه باشند.

۵ – مربع چهارضلعی‌ای است که، هر چهار ضلع آن هم‌اندازه و حداقل یک زاویه‌ی آن قائمه باشد.

با توجه به تعاریف بالا هر یک از عبارات زیر را نیز می‌توانیم توجیه کنیم:

آ) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یکی از زوایا قائمه باشد، مستطیل است.

پ) لوزی یک متوازی‌الضلاع است

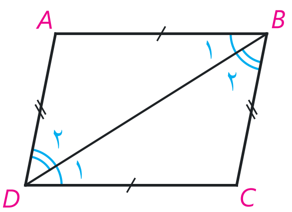
ت) مربع یک لوزی، مستطیل و متوازی‌الاضلاع است

۳.۱.۳ ویژگی‌هایی از متوازی‌الاضلاع

متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.

قضیه ۱: هر در متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم‌اندازه‌اند.

فرض: $AB \parallel CD,\ AD \parallel BC$ حکم: $AB = CD,\ AD = BC$

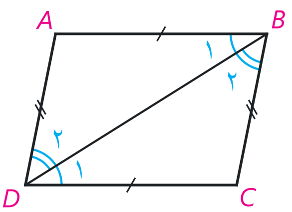


$$\left.\begin{array}{r} (AB \parallel CD,\ \text{مورب } BD) \to \widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 \\ (AD \parallel BC,\ \text{مورب } BD) \to \widehat{D}_2 = \widehat{B}_2 \\ AC = AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زض ز}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow$$

$AB = CD\ ,\ AD = BC$

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، اضلاع مقابل دوبه‌دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

فرض: $AB = CD,\ AD = BC$ حکم: $AB \parallel CD,\ AD \parallel BC$

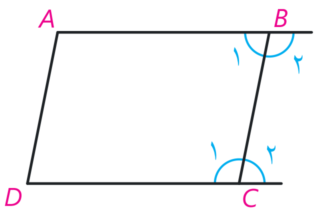


$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow \begin{array}{l} \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD \\ \widehat{A}_2 = \widehat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC \end{array}$$

قضیه ۲: در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل‌اند.

فرض: $AB \parallel CD,\ AD \parallel BC$

حکم: $\left.\begin{array}{l}\widehat{B}_2 + \widehat{C}_1 = 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{D} = 180^\circ\end{array}\right\}$



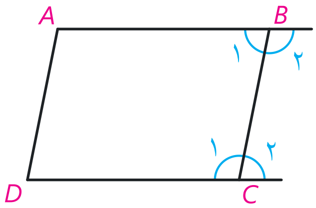
$(AB \parallel CD,\ \text{مورب}\ BC) \rightarrow \left.\begin{array}{r}\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$

$(AD \parallel BC,\ \text{مورب}\ CD) \rightarrow \left.\begin{array}{r}\widehat{D} = \widehat{C}_2 \\ \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 180^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \widehat{D} + \widehat{C}_1 = 180^\circ$

عکس قضیه ۲: هر چهارضلعی که ر دو زاویه‌ی مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.

فرض: $\left.\begin{array}{r}B_2 + D = 180^\circ \\ C_1 + D = 180^\circ \\ A + D = 180^\circ \\ A + B_2 = 180^\circ\end{array}\right\}$

حکم: $\left.\begin{array}{l}AB \parallel CD \\ AD \parallel BC\end{array}\right\}$



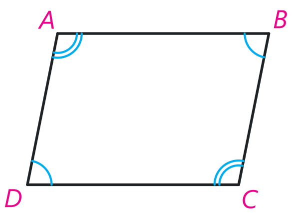
$\left.\begin{array}{r}\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 180^\circ \\ \widehat{C}_1 + \widehat{D} = 180^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \widehat{D} = \widehat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC$

$\left.\begin{array}{r}\widehat{C}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD$

قضیه ۳: در هر متوازی‌الضلاع، هر دو زاویه‌ی مقابل هم اندازه‌اند.

فرض: $\left.\begin{array}{r}AB \parallel CD \\ BC \parallel AD\end{array}\right\}$

حکم: $\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{C} \\ \widehat{B} = \widehat{D}\end{array}\right\}$



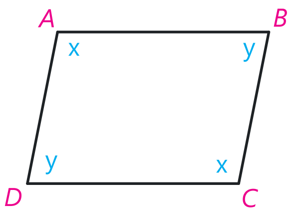
بنا بر قضیه ۲ می‌توان نوشت:

$\left.\begin{array}{r}\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \widehat{B} = \widehat{D}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{r}\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \widehat{A} = \widehat{C}$

عکس قضیه ۳: در هر یک چهارضلعی هر دو زاویه‌ی مقابل هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

فرض: $\widehat{A} = \widehat{C} = x\ ,\ \widehat{B} = \widehat{C} = y$

حکم: ABCD موازی‌الاضلاع است.



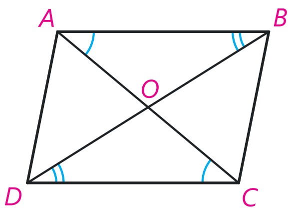
$x + y + x + y = 360^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 360^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ$

هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل‌اند، بنابر عکس قضیه ۲، ABCD متوازی‌الاضلاع است.

قضیه ۴: در هر متوازی‌الاضلاع اقطار منصف یکدیگرند.

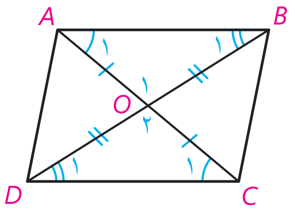
فرض: $AB \parallel CD\ ,\ AD = BC$

حکم: $OA = OC\ ,\ OD = OB$



$\left.\begin{array}{c}\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \\ \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \\ AB = CD\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زضز}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \begin{array}{l}OA = OC \\ OB = OD\end{array}$

عکس قضیه ۴: هر چهارضلعی‌ای که اقطارش منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

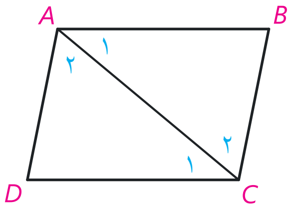


فرض: $OA = OC\ ,\ OD = OB$ حکم: $AB \parallel CD\ ,\ AD = BC$

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{O}_1=\widehat{O}_2\\ OB=OD\\ OA=OC\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{ضزض}}\triangle OAB\cong\triangle OCD\Rightarrow \begin{array}{c}AB=CD\\ \widehat{A}_1=\widehat{C}_1\end{array}$$

$\widehat{A}_1=\widehat{C}_1 \Rightarrow AB\parallel CD,$ مورب AC

هر در چهارضلعی که دو ضلع آن هم‌اندازه و موازی باشند.، متوازی‌الاضلاع است.



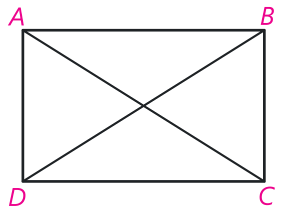
فرض: $AB = CD\ ,\ AB \parallel CD$ حکم: $BC \parallel AD$

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{A}_1=\widehat{C}_1\\ AB=CD\\ AC=AC\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{ضزض}}\triangle ABC\cong\triangle ACD\Rightarrow \widehat{A}_2=\widehat{C}_2$$

$\widehat{A}_2=\widehat{C}_2 \Rightarrow AD\parallel BC,$ مورب AC

۴.۱.۳ ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی

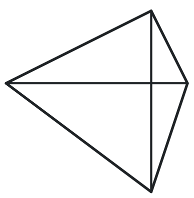
در مستطیل $ABCD$، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهشتی دو مثلث ACD و BCD می‌توان نتیجه گرفت $AC = BD$.

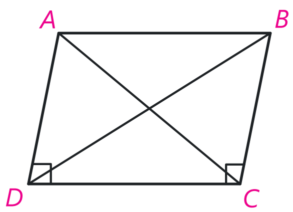


$$\left.\begin{array}{c}\widehat{D}=\widehat{C}\\ AD=BC\\ CD=CD\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{ضزض}}\triangle ACD\cong\triangle BCD\Rightarrow AC=BD$$

بنابراین در هر مستطیل اقطار برابرند.

اگر دو قطر یک چهار ضلعی هم‌اندازه باشند. نمی‌توان نتیجه گرفت که آن چهارضلعی مستطیل است، ولی اگر آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، حتما مستطیل است.



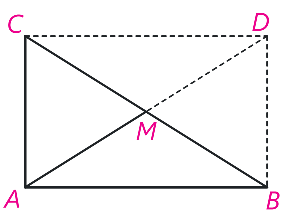


$$\left.\begin{array}{c}AC=BD\\ AD=BC\\ CD=CD\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{ضضض}}\triangle ACD\cong\triangle BCD\rightarrow \widehat{D}=\widehat{C}=90^\circ$$

۵.۱.۳ ویژگی مهمی در مثلث قائم‌الزاویه

در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است.

فرض: $\widehat{A}=90^\circ\ ,\ BM = MC$ حکم: $AM = \dfrac{BC}{2}$

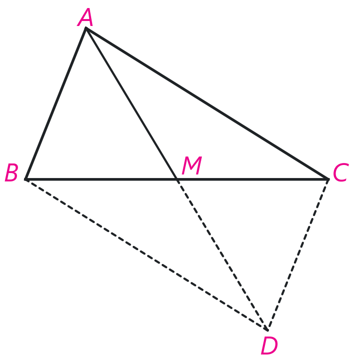


روی نیم‌خط AM نقطه‌ی D را چنان در نظر می‌گیریم که $DM = AM$.

$$\left.\begin{array}{c}BM=CM\\ AM=DM\end{array}\right\}\Rightarrow ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع } \xRightarrow{\widehat{A}=90^\circ} ABCD \text{ مستطیل}$$

$$\Rightarrow AD=BC\Rightarrow BM=CM=AM=DM\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}$$

اگر در مثلثی اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع، نصف اندازه‌ی آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.



فرض: $AM = \frac{BC}{2}\ ,\ BM = CM$ حکم: $\widehat{A} = 90^\circ$

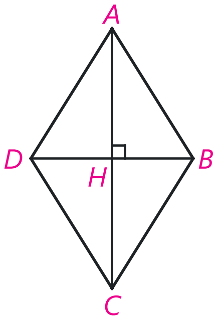
روی نیم‌خط AM نقطه‌ی D را چنان در نظر می‌گیریم که $DM = AM$.

$$\left.\begin{array}{r} AM = \frac{BC}{2} \\ \frac{AD}{2} = AM = DM \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} \Rightarrow BC = AM$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{AD}{2} = AM = DM \\ \frac{BC}{2} = BM = CM \end{array}\right\} \Rightarrow AM = BM = CM = DM$$

$\Rightarrow$ مستطیل$ANCD \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$

۶.۱.۳ ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند



اقطار لوزی $ABCD$ را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، اقطار منصف یکدیگرند. $\triangle ABD$ نیز متساوی‌الساقین است.

نقطه تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD، AH عمودمنصف BD و روی نیمساز $\widehat{A}$ است.

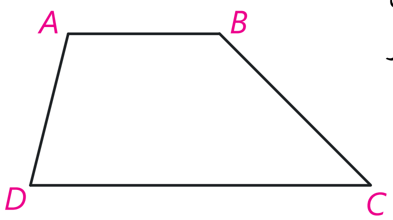
بنابراین؛

در هر لوزی اقطار عمودمنصف یکدیگیر و روی نیمساز زوایا هستند.

۷.۱.۳ ذوزنقه

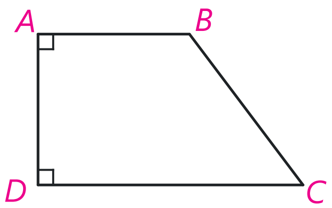
ذوزنقه چهارضلعی‌ای است که با چهارضلعی‌هایی که قبلاً بررسی کردیم، کمی متفاوت است.

تعریف: ذوزنقه چهارضلعی‌ای است که فقط دو ضلع آن موازی باشند.



هر یک از دو ضلع AB، CD را که موازی‌اند، **قاعده** و هر یک از دو ضلع غیر موازی را **ساق** می نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB، CD و قاطع‌های BC و AD در زوایا می‌توان نتیجه گرفت که:

زوایای $\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ مکمل‌اند، همچنین زوایای $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ مکمل هستند.

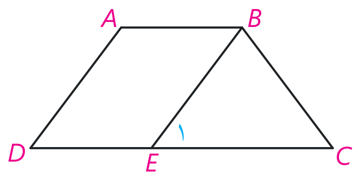


اگر در یک ذوزنقه یک ساق برابر باشند، آن را ذوزنقه متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک ذوزنقه یک ساق بر قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر قاعده‌ی دیگر نیز عمود است. در این صورت ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.

در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.

فرض: $\left.\begin{array}{r} AD = BC \\ AB \parallel CD \end{array}\right\}$ حکم: $\left.\begin{array}{r} \widehat{C} = \widehat{D} \\ \widehat{A} = \widehat{B} \end{array}\right\}$



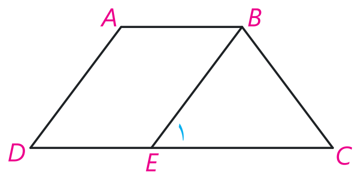
$$\left.\begin{array}{r} AD = BF \\ AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow BF = BC \to \widehat{E}_1 = \widehat{C}$$

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{E}_1 = \widehat{C} \\ \widehat{E}_1 = \widehat{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{D}$$

اگر در یک ذوزنقه دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده هم‌اندازه باشند، ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

فرض: $\left\{\begin{array}{l}\widehat{C}=\widehat{D}\\ AB \parallel CD\end{array}\right.$

حکم: $\left\{ AD = BC \right.$



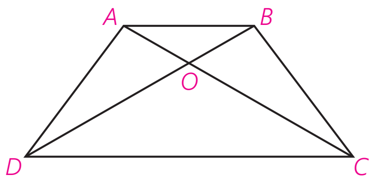
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{D}=\widehat{E}_1\\ \widehat{C}=\widehat{D}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{E}_1=\widehat{C} \rightarrow BE = BC$$

$$\left.\begin{array}{l}BF = BC\\ AD = BF\end{array}\right\} \Rightarrow AD = BC$$

در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، اقطار اندازه‌های مساوی دارند و برعکس.

فرض: $AB \parallel CD, AD = BC$

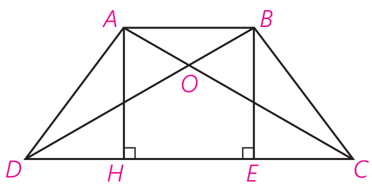
حکم: $AC = BD$



$$\left.\begin{array}{l}AD = BC\\ CD = CD\\ \widehat{C}=\widehat{D}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض‌زض}} \triangle BDC \equiv \triangle ADC \rightarrow AC = BD$$

فرض: $AC = BD$

حکم: $AD = BC$



$$\left.\begin{array}{l}AH' = BH\\ AC = BD\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وض}} \triangle AH'C \cong \triangle BHD \rightarrow D_1 = C_1$$

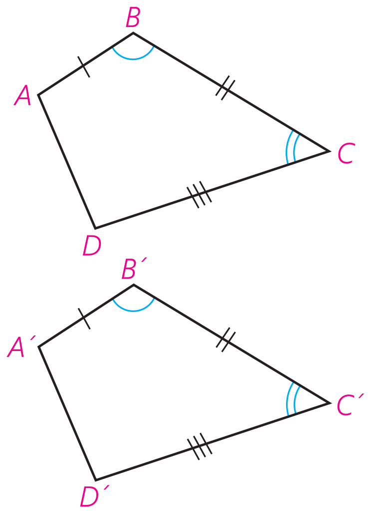
$$\left.\begin{array}{l}D_1 = C_1\\ CD = CD\\ AC = BD\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض‌زض}} \triangle ADC \cong \triangle BDC \rightarrow AD = BC$$

۸.۱.۳ تمرین

۱- در کدام n ضلعی تعداد اقطار و اضلاع برابر است؟

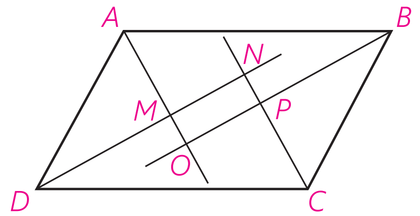
۲- در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$ در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟



شکل ۱.۳: تمرین ۲

۳- از تقاطع نیم‌سازهای داخلی یک متوازی‌الضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده‌است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است.



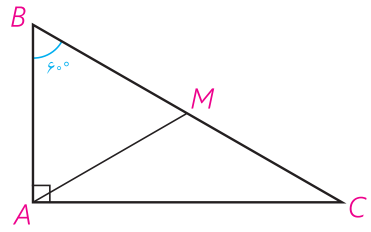
شکل ۲.۳: تمرین ۳

۴- مثلث قائم الزاویه‌ی $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازه‌ی $\angle C$ برابر $30°$ است، در نظر می‌گیریم. میانه‌ی وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث های AMC و AMB چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{2}$ یعنی در هر مثلث قائم الزاویه اگر اندازه‌ی یک زاویه $30°$ باشد، اندازه‌ی ضلع مقابل آن نصف اندازه‌ی وتر است.

سپس با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث نشان دهید: $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$.

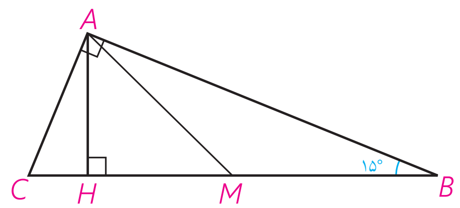
یعنی در هر مثلث قائم الزاویه اگر یک زاویه $60°$ باشد، اندازه‌ی ضلع مقابل آن اندازه‌ی وتر است.

اکنون مثلث قائم الزاویه ای رسم کنید که اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن $45°$ باشد و نشان دهید که اندازه‌ی هر ضلع زاویه‌ی قائمه در آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ اندازه‌ی وتر است.



شکل ۳.۳: تمرین ۴

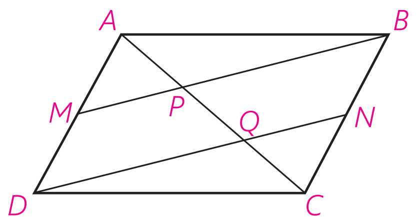
۵- در مثلث قائم الزاویه‌ی $\triangle ABC$ اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{B}$ برابر $15°$ است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازه‌ی وتر است.



شکل ۴.۳: تمرین ۵

۶- در متوازی الاضلاع $ABCD$، M و N به ترتیب وسط های ضلع های AD و BC می‌باشند. چرا خطوط MB و ND موازی‌اند؟

به کمک آن ثابت کنید: $AP = PQ = QC$.



شکل ۵.۳: تمرین ۶

۷- ثابت کنید اگر وسط های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

۹.۱.۳ پاسخ

۱)

$$n=\frac{n(n-3)}{2}\Rightarrow 2n=n^2-3n\Rightarrow n^2-5n=0\Rightarrow n(n-5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{قق}\\ \boxed{x=5} & \text{غقق}\end{cases}$$

۲)

۳)

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B}=\widehat{C}=180^\circ\Rightarrow 2\alpha+2\beta=180^\circ\Rightarrow\alpha+\beta=90^\circ\Rightarrow\widehat{P}_1=\widehat{P}_2=90^\circ\\ \widehat{A}=\widehat{D}=180^\circ\Rightarrow 2m+2n=180^\circ\Rightarrow m+n=90^\circ\Rightarrow\widehat{M}_2=\widehat{M}_1=90^\circ\\ \widehat{C}=\widehat{D}=180^\circ\Rightarrow 2n+2\alpha=180^\circ\Rightarrow m+\alpha=90^\circ\Rightarrow\widehat{N}_1=\widehat{N}_2=90^\circ\\ \widehat{P}_2+\widehat{M}_1+\widehat{N}_2+\widehat{Q}_2=360^\circ\Rightarrow 270^\circ+\widehat{Q}_2=360^\circ\Rightarrow\widehat{Q}_2=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow MNPQ\ \text{مستطیل}$$

۴)

ABM متساوی‌الاضلاع است $BM=AM\Rightarrow$ ACM متساوی‌الساقین است $CM=AM\Rightarrow$

$$AB=\frac{BC}{2}\Rightarrow AB=MB=\frac{BC}{2}$$

$$AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow\frac{BC^2}{4}+AC^2=BC^2\Rightarrow AC^2=BC^2-\frac{BC^2}{4}\Rightarrow AC^2=3bc^2\Rightarrow AC=BC\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۵)

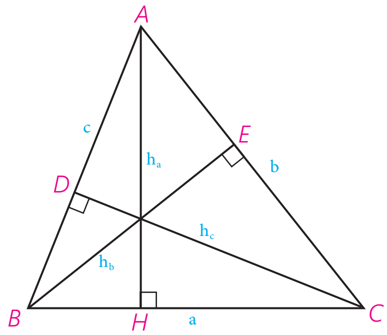
$$\widehat{M}=30^\circ\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}AH=\frac{1}{2}AM\\ AM=\frac{1}{2}BC\end{array}\right\}\rightarrow AH=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BC\right)\Rightarrow AH=\frac{1}{4}BC\ \triangle AHM:$$

۶)

۷)

۲.۳ مساحت و کاربردهای آن

یادآوری

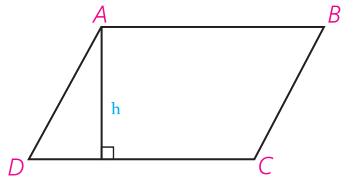


۱- اگر اندازهٔ یک ضلع مربع a باشد، $S=a^2$ مساحت آن است.

۲- اگر اندازهٔ یک ضلع مثلث a و اندازهٔ ارتفاع نظیر آن ضلع h_a باشد، آنگاه
$S=\frac{1}{2}ah_a$

بنابراین در هر مثلث ABC اگر اندازه‌ی اضلاع BC، AC و AB را به ترتیب با a، b و c و اندازه‌های ارتفاع‌های نظیر آن‌ها را به ترتیب با h_a، h_b و h_c نشان دهیم آن‌گاه،
$2S=ah_a=bh_b=ch_c$

۳- اگر اندازهٔ یک ضلع متوازی الاضلاع a و اندازهٔ ارتفاع نظیر آن h باشد،
$S=ah$.

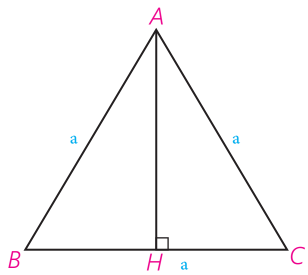


۴- اگر اندازه های دو قطر لوزی m و n باشند، $S=\frac{1}{2}nm$.

۵- اگر اندازه های دو قاعدهٔ یک ذوزنقه a و b و اندازه‌ی ارتفاع آن h باشد
$$S=\frac{(a+b)h}{2}$$

کار در کلاس

فرض کنیم اندازهٔ هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم کنید. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟



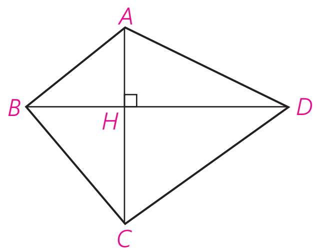
$$\left.\begin{array}{r}AB=AC\\ \angle C=\angle B\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وز}}\triangle ABH\cong\triangle ACH\Rightarrow CH=BH$$

به کمک قضیهٔ فیثاغورس نشان دهید $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$AC^2=AH^2+CH^2\Rightarrow a^2=AH^2+\frac{a^2}{4}\Rightarrow AH^2=a^2-\frac{a^2}{den4}\Rightarrow AH^2=\frac{sa^2}{4}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\times a\times\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

فعالیت

در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB برهم عموداند.



$S_{DBC}=BD\times CH\times\frac{1}{2}$ $\qquad$ $S_{ADB}=BD\times AH\times\frac{1}{2}$

با جمع این دو مساحت داریم:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}BD(AH+BH)=\frac{1}{2}BD\times AC$$

بنابراین؛

در هر چهارضلعی‌ای که دو قطر آن برهم عمود باشند، مساحت برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر.

۱.۲.۳ کاربردهایی از مساحت

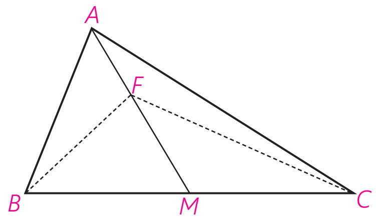
قبلاً با کاربرد مساحت در اثبات قضیهٔ تالس آشنا شدید. بعضی رابطه ها و ویژگی‌هایی را که با آن آشنا شده اید یادآوری می‌کنیم.

ویژگی ۱: در دو مثلث اگر اندازه‌ی قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌ی ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست. $\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$

ویژگی ۲: برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

کار در کلاس

نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.



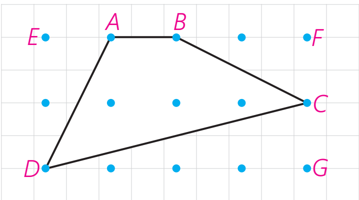
$$\left.\begin{array}{l} S_{ABM} = \frac{1}{2} \times h \times BM \\ S_{ACM} = \frac{1}{2} \times h \times CM \end{array}\right\} \xrightarrow{BM=CM} S_{ABM} = S_{ACM}$$

اگر F هر نقطه‌ای روی میانه‌ی AM به جز نقطه‌ی AM باشد آیا $S_{FBM} = F_{FMC}$ است؟ چرا؟

بله؛ FM میانه‌ی مثلث FBC است پس آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند.

فعالیت

۲.۲.۳ نقاط شبکه‌ای و مساحت



در دو مثلث که اندازه‌ی دو ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها نقاط شبکه ای و مساحت مطابق شکل نقطه ها روی خط های افقی و عمودی واقع اند؛ به طوری که فاصلهٔ هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس های آنها روی نقاط شبکه ای واقع اند، چندضلعی های شبکه ای می نامند.

نقاط شبکه ای روی رأس ها و ضلع های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه ای درون چندضلعی ها را نقاط درونی شبکه ای برای چندضلعی شبکه ای می نامند.

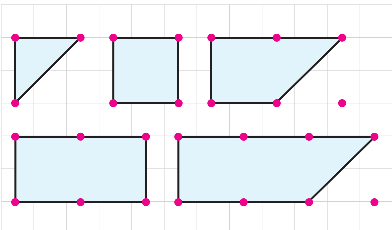
به طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه ای است که دارای ۴ نقطهٔ مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه ای است.

در چندضلعی های شبکه ای، تعداد نقاط مرزی شبکه ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه ای را با i نشان می دهند. اکنون می خواهیم به طور شهودی رابطه ای بین مساحت چندضلعی شبکه ای و نقاط مرزی و درونی شبکه ای نظیر آن را پیدا کنیم.

فعالیت

۱ـ یک چندضلعی شبکه ای حداقل چند نقطهٔ مرزی می تواند داشته باشد؟ چرا؟

حداقل ۳ تا؛ زیرا برای رسم مثلث شبکه‌ای حداقل به ۳ نقطه نیازمندیم.



۲ـ یک چندضلعی شبکه ای حداقل چند نقطهٔ درونی می تواند داشته باشد؟

صفر

۳ـ در تمام چندضلعی های شبکه ای زیر تعداد نقطه های درونی شبکه ای صفر است، یعنی i=۰ و تعداد نقاط مرزی، $b = 3, 4, 5, 6, 7$

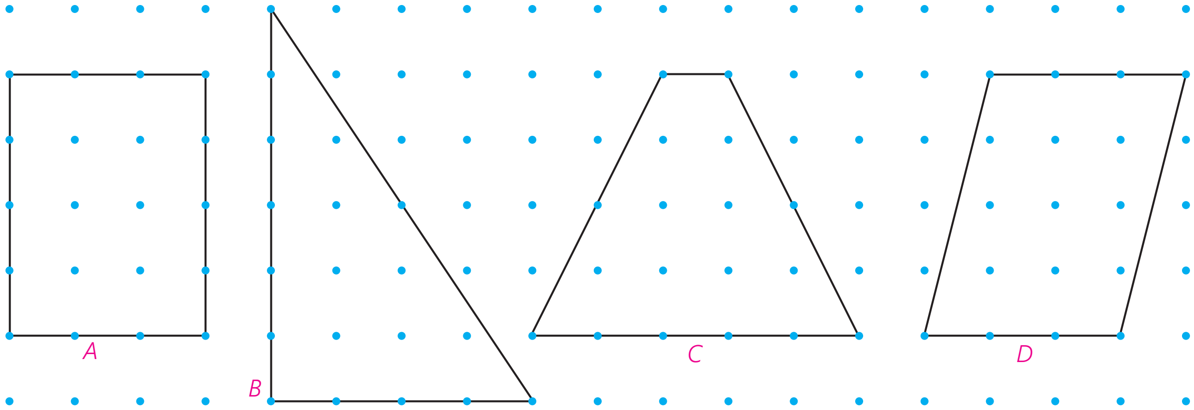
فرمول مساحت اشکال شبکه‌ای به این صورت است: $S = \frac{b}{2} - 1 + i$

توجه داشته باشید که این فرمول را به طور شهودی پیدا کرده ایم. اثبات دقیق این فرمول در حالت کلی نیاز به مقدمات بیشتری دارد.

این فرمول به فرمول پیک معروف است که جرج الکساندر پیک (۱۸۵۹–۱۹۴۳) آن را کشف کرد و از سال ۱۹۷۰ به طور گسترده‌ای در کتاب‌های هندسهٔ مقدماتی به کار برده شده است.

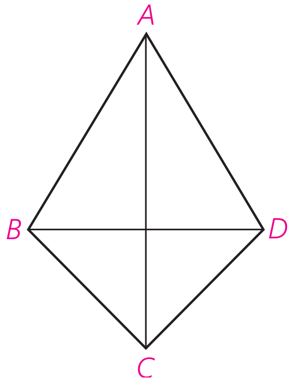
به کمک این فرمول می توانیم مساحت شکل های نامنظم هندسی را نیز به طور تقریبی پیدا کنیم.

چندضلعی های A ، B ، C و D را در شکل های زیر درنظر بگیرید. ابتدا به روش های هندسی که از قبل می دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



۳.۲.۳ تمرین

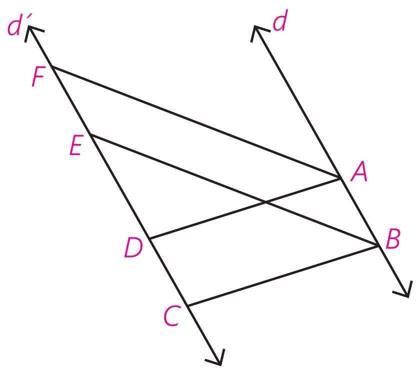
۱– در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه های دو قطر $\frac{1}{2}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.



شکل ۶.۳: تمرین ۱

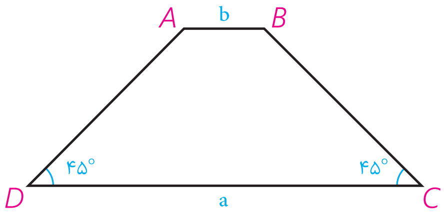
۲– در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل $AB = AD$ و $BC = CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.

۳– در شکل دو خط d و d' موازی‌اند و ABCD و ABEF هردو متوازی الاضلاع اند. اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاع ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟



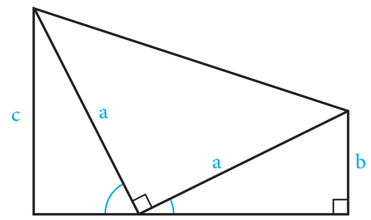
شکل ۷.۳: تمرین ۳

۴– در ذوزنقهٔ شکل مقابل اندازه های دو قاعده a و b و اندازه های دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده °۴۵ است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.



شکل ۸.۳: تمرین ۴

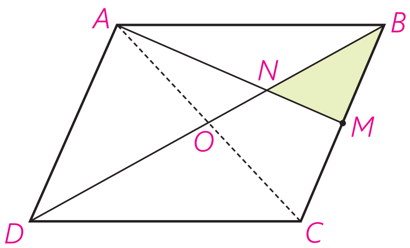
۵– مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه ای به دست می‌آید؟



شکل ۹.۳: تمرین ۵

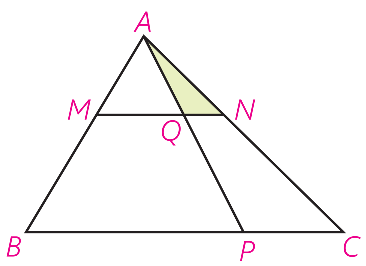
۶– در متوازی الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است وپاره خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:

$$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$



شکل ۱۰.۳: تمرین ۶

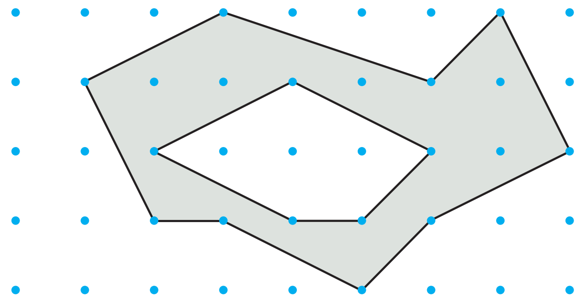
۷– در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



شکل ۱۱.۳: تمرین ۷

۸– با توجه به مساحت چند ضلعی‌های شبکه‌ای (شکل ۱۲.۳)، مساحت قسمت سایه زده را محاسبه کنید.

(راهنمایی: مساحت چند ضلعی داخلی را از مساحت چند ضلعی بیرونی کم کنید.)



شکل ۱۲.۳: تمرین ۸

۹- یک مستطیل شبکه ای با ضل عهای افقی و قائم که اندازه های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

۱۰- مساحت یک چند ضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حال تهایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبک های مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

۳.۲.۴ پاسخ

فصل ۴

تجسم فضایی