۱	سراسری ریاضی ۹۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادلهٔ درجه دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$ ، دارای دو ریشهٔ حقیقی است ؟ ۱) $-2<m<2/5$ ۲) $-2<m<3/5$ **۳) $-1<m<3/5$** ۴) $-1<m<2/5$ $\Delta'>0 \longrightarrow (3)^2-(2m-1)(m-2)>0 \longrightarrow 9-(2m^2-4m-m+2)>0$ $2m^2-5m-7<0 \xrightarrow{b=a+c} -1<m<\frac{7}{2}$
۲	سراسری ریاضی ۹۸ – خارج از کشور به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادلهٔ $y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$ ، همواره زیر محور xها است ؟ ۱) $1<m<5$ **۲) $2<m<5$** ۳) $2<m<4$ ۴) $2<m<6$ **نکته :** شرط پائین بودن نمودارتابع زیر محور xها ، II) $a<0$ I) $\Delta<0$ $(1-m)x^2+2(m-3)x-1<0 \longrightarrow \begin{cases} \text{I)}\ a<0 \longrightarrow 1-m<0 \longrightarrow m>1 \\ \text{II)}\ \Delta<0 \longrightarrow 2<m<5 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 2<m<5$ $\Delta'<0 \longrightarrow (m-3)^2-(1-m)(-1)<0 \longrightarrow m^2-7m+10<0 \longrightarrow 2<m<5$
۳	سراسری تجربی ۹۷ به ازای کدام مقادیر m ، معادلهٔ درجه دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$ ، دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی است ؟ ۱) $m<-6$ ۲) $m>3$ ۳) $0<m<3$ **۴) $3<m<6$** $(m-6)x^2-2mx-3=0 \xrightarrow[1)\Delta>0 \quad 2)S<0 \quad 3)P>0]{a=m-6\ ,\ b=-2m\ ,\ c=-3} b'=\frac{b}{2}=-m$ 1) $\Delta>0$ or $\Delta'>0 \longrightarrow (-m)^2-(m-6)(-3)>0 \longrightarrow m^2+3m-18>0$ $(m-3)(m+6)>0 \longrightarrow m<-6 \vee m>3$ (I) 2) $S<0 \longrightarrow -\frac{b}{a}<0 \longrightarrow -\frac{-2m}{m-6}<0 \longrightarrow \frac{2m}{m-6}<0 \longrightarrow 0<m<6$ (II) 3) $P>0 \longrightarrow \frac{c}{a}>0 \longrightarrow \frac{-3}{m-6}>0 \longrightarrow m-6<0 \longrightarrow m<6$ (III) $\text{(I),(II),(III)} \xrightarrow{\cap} 3<m<6$

۴

سراسری تجربی ۹۷ – خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+(m-۲)x+m+۱=۰$ ، دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است ؟

۱) $-۱<m<۰$ ۲) $m<۰$ ۳) $۲<m<۸$ ۴) $m>۸$

$$x^۲+(m-۲)x+m+۱=۰\xrightarrow[۱)\Delta>۰\quad ۲)S>۰\quad ۳)P>۰]{a=۱\ ,\ b=m-۲\ ,\ c=m+۱}(I),(II),(III)\xrightarrow{\cap}-۱<m<۰$$

$$۱)\quad \Delta>۰\longrightarrow(m-۲)^۲-۴(۱)(m+۱)>۰\longrightarrow m^۲-۸m>۰\longrightarrow(-\infty,۰)\cup(۸,+\infty)\qquad (I)$$

$$۲)\quad S>۰\longrightarrow-\frac{b}{a}>۰\longrightarrow-\frac{m-۲}{۱}>۰\longrightarrow-m+۲>۰\longrightarrow m<۲\qquad (II)$$

$$۳)\quad P>۰\longrightarrow\frac{c}{a}>۰\longrightarrow\frac{m+۱}{۱}>۰\longrightarrow m+۱>۰\longrightarrow m>-۱\qquad (III)$$

۵

سراسری تجربی ۹۴

ریشه های کدام معادله ، از معکوس ریشه های معادلهٔ درجه دوّم $۲x^۲-۳x-۱=۰$ ، یک واحد کمتر است ؟

۱) $x^۲-۳x+۱=۰$ ۲) $x^۲+۳x+۱=۰$

۳) $x^۲-۵x+۲=۰$ ۴) $x^۲+۵x+۲=۰$

نکته : تشکیل معادلهٔ درجه دوم جدید

الف) ریشهٔ معادلهٔ قدیم را x و ریشهٔ معادلهٔ جدید را y فرض می کنیم .

ب) با توجه شرط مساله ، رابطهٔ بین x و y را می یابیم .

ج) x را برحسب y نوشته و در معادلهٔ قدیم جایگذاری می کنیم تا معادلهٔ خواسته شده به دست آید .

روش اوّل :

$$y=\frac{۱}{x}-۱\longrightarrow y+۱=\frac{۱}{x}\longrightarrow x=\frac{۱}{y+۱}\xrightarrow{۲x^۲-۳x-۱=۰}۲(\frac{۱}{y+۱})^۲-۳(\frac{۱}{y+۱})-۱=۰$$

$$\xrightarrow{\times(y+۱)^۲}۲-۳(y+۱)-۱(y+۱)^۲=۰\longrightarrow y^۲+۵y+۲=۰$$

روش دوّم :

$$۲x^۲-۳x-۱=۰\longrightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۳}{۲}\qquad P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۲}$$

$$S'=\frac{۱}{\alpha}-۱+\frac{۱}{\beta}-۱=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-۲=-۳-۲=-۵$$

$$P'=(\frac{۱}{\alpha}-۱)(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+۱=-۲+۳+۱=۲\xrightarrow{x^۲-S'x+P=۰}x^۲+۵x+۲=۰$$

تذکر : با توجه به گزینه ۴ و به دست آوردن $S'=-۵$ نیازی به P' نیست .

۶

سراسری تجربی ۹۴ – خارج از کشور

به ازای کدام مقادیر a ، معادلهٔ $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است ؟

۱) $a<-4$ ۲) $a>-4$ ۳) $a<4$ ۴) $a>4$

چون مجموع ضرایب معادلهٔ $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$ است پس یکی از جواب ها $x=1$ می باشد ، در نتیجه بر $x-1$ بخش پذیر است .

$$x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0 \to (x-1)(x^2+ax+4)=0 \xrightarrow[S>0,P>0]{\Delta>0} a<-4$$

۷

سراسری تجربی ۹۳

به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^2-(m+3)x+5=0$ ، برابر ۶ می باشد ؟

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) 1 ۳) $-\frac{9}{5},1$ ۴) $-1,\frac{9}{5}$

$$mx^2-(m+3)x+5=0 \to \alpha^2+\beta^2=6 \to (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6 \to (\frac{m+3}{m})^2-2(\frac{5}{m})=6$$

$$\frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}=6 \to 5m^2+4m-9=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m_1=1 \to \text{false} \\ m_2=\frac{c}{a}=-\frac{9}{5} \end{cases}$$

چون معادلهٔ دارای ریشه حقیقی است پس باید $\Delta>0$

$$\text{if} \quad m=1 \longrightarrow x^2-4x+5=0 \longrightarrow \Delta<0 \longrightarrow \text{false}$$

۸

سراسری تجربی ۹۳ – خارج از کشور

به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y=2x^2+(m+1)x+m+6$ بر نیمساز ناحیه اوّل محورهای مختصات مماس است ؟

۱) -4 ۲) $-12,4$ ۳) $12,-4$ ۴) 12

$$\begin{cases} y=2x^2+(m+1)x+m+6 \\ y=x \end{cases} \longrightarrow 2x^2+(m+1)x+m+6=x \to 2x^2+mx+m+6=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} m^2-8m-48=0 \longrightarrow (m-12)(m+4)=0 \longrightarrow \begin{cases} m=12 \\ m=-4 \end{cases}$$

$$\text{if} \quad m=12 \longrightarrow 2x^2+12x+18=0 \longrightarrow x^2+6x+9=0 \longrightarrow (x+3)^2=0 \longrightarrow x=-3$$

$$\text{if} \quad m=-4 \longrightarrow 2x^2-4x+2=0 \longrightarrow x^2-2x+1=0 \longrightarrow (x-1)^2=0 \longrightarrow x=1$$

تذکر : به ازای $m=12$ ، نمودار تابع بر نیمساز ربع سوم مماس است .

۹

سراسری تجربی ۹۰

مجموع ریشه های حقیقی معادلهٔ $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ ، کدام است ؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

نکته : برخی از معادلات را می توان با استفاده از روش تغییر متغیر به معادلهٔ درجه دوم تبدیل کرد .

$$(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0\xrightarrow{x^2+x=t}t^2-18t+72=0\longrightarrow(t-6)(t-12)=0$$

$$\begin{cases}t=6\longrightarrow x^2+x=6\longrightarrow x^2+x-6=0\longrightarrow x=-3,x=2\\ t=12\longrightarrow x^2+x=12\longrightarrow x^2+x-12=0\longrightarrow x=-4,x=3\end{cases}$$

$$t=6\longrightarrow x^2+x=6\longrightarrow x^2+x-6=0\xrightarrow{\Delta>0}S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-1$$

$$t=12\longrightarrow x^2+x=12\longrightarrow x^2+x-12=0\xrightarrow{\Delta>0}S=x_3+x_4=-\frac{b}{a}=-1$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-1-1=-2$$

۱۰

سراسری تجربی ۹۰ – خارج از کشور

به ازای کدام مقدار m ، ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^2+3x+m^2=2$ ، معکوس یکدیگرند ؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

$$mx^2+3x+m^2=2\longrightarrow mx^2+3x+m^2-2=0\xrightarrow{\alpha=\frac{1}{\beta}}\alpha\times\beta=1\longrightarrow\frac{c}{a}=1$$

$$\frac{m^2-2}{m}=1\xrightarrow{m\neq0}m^2-m-2=0\to(m-2)(m+1)=0\longrightarrow\begin{cases}m=2\\ m=-1\end{cases}$$

$$\text{if}\quad m=2\longrightarrow 2x^2+3x+2=0\xrightarrow{\Delta\geq0}9-4(2)(2)=-7<0\to\text{false}$$

$$\text{if}\quad m=-1\longrightarrow -x^2+3x-1=0\xrightarrow{\Delta\geq0}9-4(-1)(-1)=5>0\to\text{True}$$

۱۱

سراسری تجربی ۸۹ – خارج از کشور

به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m ، معادلهٔ درجه دوّم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ ، فاقد ریشهٔ حقیقی است ؟

۱) $-3<m<5$ ۲) $-3<m<4$ ۳) $-2<m<4$ ۴) $-1<m<5$

نکته : اگر $\Delta<0$ ، سهمی همواره مثبت یا منفی است . (سهمی محور x ها را قطع نمی کند)

$$2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0\xrightarrow{\Delta<0}(m+1)^2-4(2)(\frac{1}{2}m+2)<0\to m^2-2m-15<0$$

$$(m-5)(m+3)<0\longrightarrow-3<m<5$$

۱۲

سراسری تجربی ۸۸

به ازای کدام مقادیر m ، از معادلۀ $mx-۳\sqrt{x}+m-۲=۰$ ، فقط یک جواب برای x حاصل می شود ؟

۱) $-\frac{۳}{۲}<m<۲$ **۲) $۰<m<۲$** ۳) $\frac{۳}{۲}<m<\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}<m<۲$

از تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ استفاده می کنیم .

برای این که معادلۀ درجه دوم ، دو ریشه مختلف العلامه داشته باشد باید :

$$mx-۳\sqrt{x}+m-۲=۰\xrightarrow[t>۰]{\sqrt{x}=t}mt^۲-۳t+m-۲=۰$$

اگر معادلۀ فوق یک ریشۀ مثبت و یک ریشۀ منفی داشته باشد ، در این صورت مقدار منفی t غیر قابل قبول خواهد بود

چون $\sqrt{x}$ منفی نمی شود و فقط یک جواب مثبت برای t و در نتیجه برای $\sqrt{x}$ به دست می آید .

$$mt^۲-۳t+m-۲=۰\longrightarrow P<۰\longrightarrow\frac{c}{a}<۰\longrightarrow\frac{m-۲}{m}<۰\longrightarrow(۰,۲)$$

تذکر : اگر $\Delta=۰$ و $m=-\frac{b}{۲a}>۰$ باشد ، معادلۀ درجه دوم ، دارای ریشه مضاعف مثبت است .

$$\Delta=۰\longrightarrow۹-۴m(m-۲)=۰\longrightarrow۴m^۲-۸m-۹=۰$$

$$\xrightarrow[\Delta'==۵۲]{b'=\frac{b}{۲}=-۴}x=\frac{۴\pm\sqrt{۵۲}}{۴}=\frac{۴\pm۲\sqrt{۱۳}}{۴}=۱\pm\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\xrightarrow{-\frac{b}{۲a}>۰}x=۱+\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\quad(۲)$$

$$m\in(۰,۲)\cup\left\{۱+\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\right\}$$

۱۳

سراسری تجربی ۸۸ – خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادلۀ $x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰$ ، دو جواب متمایز برای x حاصل می شود ؟

۱) $m\geq۱$ ۲) $m<۲$ **۳) $۱\leq m<۲$** ۴) هیچ مقدار m

حالت اول : دارای دو ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد .

$$x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰\xrightarrow{\sqrt{x}=t}t^۲-۲t+m-۱=۰\xrightarrow{۱)\ \Delta>۰\ \ ۲)\ S>۰\ \ ۳)\ P>۰}$$

$$۱)\quad ۴-۴(m-۱)>۰\longrightarrow m<۲$$

$$۲)\quad -\frac{b}{a}>۰\longrightarrow۲>۰\qquad\qquad\xrightarrow{\cap}۱<m<۲\quad(۱)$$

$$۳)\quad \frac{c}{a}>۰\longrightarrow m-۱>۰\to m>۱$$

حالت دوم : دارای یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت باشد . برای این منظور باید $c=۰$ و $-\frac{b}{a}=۲>۰$ باشد .

$$m-۱=۰\longrightarrow m=۱\quad(۲)\qquad\qquad\xrightarrow{(۱)\cup(۲)}۱\leq m<۲$$

۱۴

سراسری تجربی ۸۷

ریشه های معادلهٔ درجه دوّم $x^۲ + ax + b = ۰$ ، یک واحد از ریشه های معادله $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$ بیشتر است . b کدام است ؟

۱) -۲ **۲)** -۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

روش اول :

$$۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰ \xrightarrow[x=y-۱]{y=x+۱} ۳(y-۱)^۲ + ۷(y-۱) + ۱ = ۰$$

$$۳y^۲ + y - ۳ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} y^۲ + \frac{۱}{۳}y - ۱ = ۰ \xrightarrow{x^۲+ax+b=۰} a = \frac{۱}{۳} \wedge b = -۱$$

روش دوم :

$$۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰ \longrightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{۷}{۳} \qquad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳}$$

$$x^۲ + ax + b = ۰ \longrightarrow \begin{cases} S' = -a = (\alpha+۱) + (\beta+۱) = -\frac{۷}{۳} + ۲ = -\frac{۱}{۳} \longrightarrow a = \frac{۱}{۳} \\ P' = b = (\alpha+۱)(\beta+۱) = \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ = -۱ \longrightarrow b = -۱ \end{cases}$$

۱۵

سراسری تجربی ۸۶

اگر هر یک از ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشد ، a کدام است ؟

۱) -۱۴ ۲) -۱۲ ۳) -۸ ۴) -۶

$$\xrightarrow[x=\frac{۲}{y}]{y=\frac{۲}{x}} ۴(\frac{۲}{y})^۲ - ۷(\frac{۲}{y}) + ۳ = ۰ \longrightarrow ۳y^۲ - ۱۴y + ۱۶ = ۰ \xrightarrow{۳x^۲+ax+b=۰} \begin{cases} a = -۱۴ \\ b = ۱۶ \end{cases}$$

روش دوم :

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \longrightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۷}{۴} \\ P = \alpha.\beta = \frac{c}{a} = \frac{۳}{۴} \end{cases}$$

$$۳x^۲ + ax + b = ۰ \longrightarrow \begin{cases} S' = -\frac{a}{۳} = \frac{۲}{\alpha} + \frac{۲}{\beta} = \frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha.\beta} \longrightarrow a = -۱۴ \\ P' = \frac{b}{۳} = \frac{۴}{\alpha.\beta} \longrightarrow b = ۱۶ \end{cases}$$

۱۶

سراسری تجربی ۸۶ – خارج از کشور

خط به معادلهٔ $y = mx + ۴$ با منحنی به معادلهٔ $y = -x^۲ + ۲x$ ، هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند . مجموعهٔ مقادیر m ، به کدام صورت است ؟

۱) $m < ۰$ ۲) $m > ۴$ ۳) $-۱ < m < ۴$ **۴) $-۲ < m < ۶$**

$$\begin{cases} y = -x^۲ + ۲x \\ y = mx + ۴ \end{cases} \longrightarrow -x^۲ + ۲x = mx + ۴ \longrightarrow x^۲ + (m-۲)x + ۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta < ۰}$$

$$(m-۲)^۲ - ۱۶ < ۰ \longrightarrow (m-۲)^۲ < ۱۶ \longrightarrow -۴ < m - ۲ < ۴ \xrightarrow{+۲} -۲ < m < ۶$$

۱۷

سراسری تجربی ۸۶ – خارج از کشور

ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$ ، از ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ یک واحد بیشتر است . b ، کدام است ؟

۱) -۵ ۲) ۲ ۳) ۴ **۴) ۶**

$$۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \xrightarrow[x=y-۱]{y=x+۱} ۳(y-۱)^۲ - ۴(y-۱) - ۱ = ۰ \longrightarrow ۳y^۲ - ۱۰y + ۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{۳x^۲+ax+b=۰} a = -۱۰ \quad \wedge \quad b = ۶$$

۱۸

سراسری تجربی ۸۵

اگر معادلهٔ $x^۴ - (m+۲)x^۲ + m + ۵ = ۰$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد ، مجموعه مقادیر m کدام است ؟

۱) $m < -۴$ **۲) $m > ۴$** ۳) $-۴ < m < ۴$ ۴) $۴ < m < ۹$

نکته : معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ در صورتی دارای دو ریشهٔ مثبت است که :

الف) $\Delta > ۰$ ب) $S = -\frac{b}{a} > ۰$ ج) $P = \frac{c}{a} > ۰$

از تغییر متغیر $x^۲ = t$ استفاده می کنیم . اگر معادلهٔ زیر دارای دو ریشهٔ مثبت باشد ، در این صورت معادلهٔ اصلی دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز خواهد داشت .

$$x^۴ - (m+۲)x^۲ + m + ۵ = ۰ \xrightarrow{x^۲ = t > ۰} t^۲ - (m+۲)t^۲ + m + ۵ = ۰$$

$$\begin{cases} ۱)\ (m+۲)^۲ - ۴(m+۵) > ۰ \longrightarrow m^۲ > ۱۶ \longrightarrow \begin{cases} m > ۴ \\ m < -۴ \end{cases} \\ ۲)\ \frac{c}{a} > ۰ \longrightarrow m + ۵ > ۰ \longrightarrow m > -۵ \\ ۳)\ -\frac{b}{a} > ۰ \longrightarrow m + ۲ > ۰ \longrightarrow m > -۲ \end{cases} \xrightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)} m > ۴$$

۱۹

سراسری تجربی ۸۴ – خارج از کشور

در معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+ax+۹=۰$ یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است . مجموع دو ریشه مثبت کدام است ؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

$$۲x^۲+ax+۹=۰ \xrightarrow[\beta=۲\alpha]{\alpha} \alpha+\beta=-\frac{a}{۲} \longrightarrow ۳\alpha=-\frac{a}{۲} \longrightarrow ۳(\frac{۳}{۲})=-\frac{a}{۲} \longrightarrow a=-۹$$

$$\alpha.\beta=\frac{۹}{۲} \longrightarrow ۲\alpha^۲=\frac{۹}{۲} \longrightarrow \alpha^۲=\frac{۹}{۴} \longrightarrow \alpha=\pm\frac{۳}{۲}$$

$$\alpha+\beta=-\frac{a}{۲} \longrightarrow \alpha+\beta=-\frac{-۹}{۲}=۴/۵$$

۲۰

سراسری تجربی ۸۳

اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم $y=(a-۱)x^۲+x+۳$ نسبت به خط $x=۲$ متقارن باشد ، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می کند ؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

نکته : در تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ معادلهٔ محور تقارن $x=-\frac{b}{۲a}$ می باشد .

چون خط $x=۲$ محور تقارن تابع است پس طول رأس سهمی نیز می باشد .

$$x=-\frac{b}{۲a} \xrightarrow{x=۲} -\frac{۱}{۲a-۲}=۲ \longrightarrow ۴a-۴=-۱ \longrightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

$$y=(a-۱)x^۲+x+۳ \longrightarrow y=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳ \xrightarrow{y=۰} x^۲-۴x-۱۲=۰ \longrightarrow \begin{cases} x=۶ \\ x=-۲ \end{cases}$$

نکته : ریشه های معادلهٔ $f(x)=۰$ ، همان برخورد نمودار تابع f با محور xها می باشد .

۲۱

سراسری تجربی ۸۱

به ازای کدام مقادیر a ، معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+ax+a-\frac{۳}{۲}=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است ؟

۱) $(-\infty,۲)\cup(۶,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۳)\cup(۴,+\infty)$ ۳) $(۲,۶)$ ۴) $(۳,۴)$

نکته : در صورتی معادلهٔ درجه دوم ، دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است که $\Delta>۰$ باشد .

$$۲x^۲+ax+a-\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} (a)^۲-۴(۲)(a-\frac{۳}{۲})>۰ \longrightarrow a^۲-۸a+۱۲>۰$$

$$(a-۲)(a-۶)>۰ \longrightarrow (-\infty,۲)\cup(۶,+\infty)$$

۲۲

سراسری تجربی ۷۹

به ازای کدام مقدار k ، در معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-x+k=۰$ بین ریشه ها ، رابطهٔ $x_۱+۲x_۲=۳$ برقرار است ؟

۱) -۱۲ **۲) -۱۰**   ۳) ۸ ۴) ۶

$$۲x^۲-x+k=۰\longrightarrow x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲}\qquad x_۱.x_۲=\frac{c}{a}=\frac{k}{۲}$$

$$x_۱+۲x_۲=۳\longrightarrow(x_۱+x_۲)+x_۲=۳\longrightarrow\frac{۱}{۲}+x_۲=۳\longrightarrow x_۲=\frac{۵}{۲}$$

$$x_۱+۲(\frac{۵}{۲})=۳\longrightarrow x_۱=-۲\qquad x_۱.x_۲=\frac{k}{۲}\longrightarrow-۵=\frac{k}{۲}\longrightarrow k=-۱۰$$

$$\text{or}\qquad x_۲=\frac{۵}{۲}\longrightarrow\frac{۲۵}{۲}-\frac{۵}{۲}+k=۰\longrightarrow k=-۱۰$$

۲۳

سراسری تجربی ۷۸

در معادلهٔ $(x+۱)(x^۲-x+۶m)=۰$ ، حاصلضرب سه ریشه -۶ است ، مقدار m کدام است ؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

$$(x+۱)(x^۲-x+۶m)=۰\xrightarrow{x=-۱,\alpha,\beta}(-۱)\alpha\beta=-۶\longrightarrow\alpha\beta=۶\xrightarrow{P=۶}۶m=۶\to m=۱$$

۲۴

سراسری تجربی ۷۷

در معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+(۲k-۱)x-k=۰$ به ازای کدام مقدار k ، مجموع معکوس هر دو ریشه برابر $\frac{۷}{۳}$ است ؟

۱) -۴ **۲) -۳**   ۳) ۳   ۴) ۴

$$۲x^۲+(۲k-۱)x-k=۰\xrightarrow{\alpha,\beta}\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{۷}{۳}\longrightarrow\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{۷}{۳}\longrightarrow\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{۷}{۳}\longrightarrow$$

$$\frac{-b}{c}=\frac{۷}{۳}\longrightarrow\frac{۲k-۱}{k}=\frac{۷}{۳}\longrightarrow k=-۳$$

۲۵

سراسری تجربی ۷۵

در معادلهٔ درجه دوم $x^۲-ax+a+۲=۰$ تفاضل دو ریشه برابر ۲ است ، a کدام است ؟

۱) $-۶,-۲$ ۲) $-۶,۲$ **۳) $۶,-۲$**   ۴) $۶,۲$

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\xrightarrow{\alpha-\beta=۲}\frac{\sqrt{a^۲-۴(a+۲)}}{۱}=۲\longrightarrow a^۲-۴a-۱۲=۰\longrightarrow\begin{cases}a=۶\\a=-۲\end{cases}$$

۲۶

سراسری ریاضی ۹۷

معادلهٔ $(x^2-2x)^2-(x^2-2x)=2$ ، چند ریشهٔ حقیقی دارد ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$(x^2-2x)^2-(x^2-2x)=2 \xrightarrow{x^2-2x=t} t^2-t-2=0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} t=-1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$t=-1 \longrightarrow x^2-2x=-1 \longrightarrow x^2-2x+1=0 \xrightarrow{\Delta=0} \boxed{1}$$

$$t=2 \longrightarrow x^2-2x=2 \longrightarrow x^2-2x-2=0 \xrightarrow{\Delta>0} \boxed{2}$$

۲۷

سراسری ریاضی ۹۶

به ازای کدام مقدار a ، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$ ، دارای دو ریشهٔ مثبت است ؟

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ۴) $5<a<14$

نکته : معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ در صورتی دارای دو ریشهٔ مثبت است که :

$$1)\quad \Delta'>0 \qquad b'=\frac{b}{2}=2-a \qquad \Delta'>0 \longrightarrow b'^2-ac>0 \longrightarrow (2-a)^2-1(14-a)>0$$

$$4-4a+a^2-14+a>0 \longrightarrow a^2-3a-10>0 \longrightarrow (a-5)(a+2)>0 \longrightarrow \begin{cases} a>5 \\ a<-2 \end{cases} \quad (I)$$

$$2)\quad P=\frac{c}{a}>0 \longrightarrow 14-a>0 \longrightarrow a<14 \quad (II)$$

$$3)\quad S=-\frac{b}{a}>0 \longrightarrow -\frac{-2(a-2)}{1}>0 \longrightarrow a-2>0 \longrightarrow a>2 \quad (III)$$

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)\cap(III)} 5<a<14$$

۲۸

سراسری ریاضی ۹۶

به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ می باشد ؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$$2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0 \longrightarrow \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2 \longrightarrow \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=4$$

$$\frac{m+1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{16}}=4 \longrightarrow \frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}=4 \longrightarrow m+1+1=8 \longrightarrow \boxed{m=6}$$

۲۹

سراسری ریاضی ۹۶ – خارج از کشور

به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y=(1-a)x^2+2\sqrt{6}x-a$ ، همواره بالای محور x ها است ؟

۱) $a<1$ ۲) $\mathbf{a<-2}$ ۳) $a>3$ ۴) $-2<a<1$

نکته : نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ در صورتی همواره بالای محور طول هاست که :

$$1)\quad a>0 \longrightarrow 1-a>0 \longrightarrow a<1 \quad (I)$$

$$2)\quad \Delta'<0 \qquad b'=\frac{b}{2}=\sqrt{6} \qquad \Delta'<0 \longrightarrow b'^2-ac<0 \longrightarrow (\sqrt{6})^2-(1-a)(-a)<0$$

$$6+a-a^2<0 \longrightarrow a^2-a-6>0 \longrightarrow (a-3)(a+2)>0 \longrightarrow a>3 \vee a<-2 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} a<-2$$

۳۰

سراسری ریاضی ۹۶ – خارج از کشور

به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه های معادلهٔ درجه دوم $8x^2-mx-8=0$ ، توان سوم ریشه های معادلهٔ $2x^2-x-2=0$ می باشد ؟

۱) ۹   ۲) ۱۱   ۳) **۱۳**   ۴) ۱۵

$$2x^2-x-2=0 \xrightarrow{\alpha,\beta} S=\alpha+\beta=\frac{1}{2} \qquad P=\alpha.\beta=-1$$

$$8x^2-mx-8=0 \xrightarrow{\alpha^3,\beta^3} S=\alpha^3+\beta^3=\frac{m}{8} \qquad P=\alpha^3.\beta^3=-1$$

$$\alpha^3+\beta^3=\frac{m}{8} \longrightarrow (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{m}{8} \longrightarrow (\frac{1}{2})^3-3(-1)(\frac{1}{2})=\frac{m}{8}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{2}=\frac{m}{8} \longrightarrow 1+12=m \longrightarrow \boxed{m=13}$$

۳۱

سراسری ریاضی ۹۵

به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m ، منحنی به معادلهٔ $y=(m-2)x^2-2(m+1)x+12$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی ، قطع می کند ؟

۱) $m>2$ ۲) $-1<m<2$ ۳) هر مقدار m ۴) **هیچ مقدار m**

نکته : نمودار تابع $ax^2+bx+c=0$ در صورتی محور طول ها را در دو نقطه با طول های منفی قطع می کند که :

$۱)\quad \Delta' > ۰ \qquad b' = \frac{b}{۲} = -m-۱ \qquad b'^{۲} - ac > ۰ \longrightarrow (-m-۱)^{۲} - ۱۲(m-۲) > ۰$

$m^{۲} + ۲m + ۱ - ۱۲m + ۲۴ > ۰ \longrightarrow m^{۲} - ۱۰m + ۲۵ > ۰ \longrightarrow (m-۵)^{۲} > ۰ \longrightarrow (I)$

$۲)\quad P = \frac{c}{a} > ۰ \longrightarrow \frac{۱۲}{m-۲} > ۰ \longrightarrow m-۲ > ۰ \longrightarrow m > ۲ \quad (II)$

$۳)\quad S = -\frac{b}{a} < ۰ \longrightarrow -\frac{-۲(m+۱)}{m-۲} < ۰ \longrightarrow \frac{۲(m+۱)}{m-۲} < ۰ \longrightarrow -۱ < m < ۲ (III)$

$\xrightarrow{(I)\cap(II)\cap(III)} \varnothing$

۳۲

سراسری ریاضی ۹۵ – خارج از کشور

به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m ، منحنی به معادلهٔ $y = (m+۲)x^{۲} + ۳x + ۱ - m$ ، محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات ، قطع می کند ؟

۱) **$m < -۲$ یا $m > ۱$** ۲) $-۲ < m < ۱$ ۳) فقط $m < -۲$ ۴) فقط $m > ۱$

نکته : نمودار تابع $ax^{۲} + bx + c = ۰$ در صورتی محور طول ها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می کند که :

$I)\quad P < ۰ \qquad II)\quad \Delta > ۰$

$P < ۰ \longrightarrow \frac{c}{a} < ۰ \longrightarrow \frac{۱-m}{m+۲} < ۰ \longrightarrow m < -۲ \vee m > ۱$

نکته : هرگاه $p < ۰$ باشد ، چون ac منفی است ، Δ همواره مثبت می شود و نیازی به بررسی Δ نیست .

۳۳

سراسری ریاضی ۹۴

حاصل ضرب ریشه ای حقیقی معادلهٔ $x^{۲} + ۴x + ۳ = \sqrt{x^{۲} + ۴x + ۵}$ ، کدام است ؟

۱) -۲ ۲) **۱** ۳) ۲ ۴) ۴

$x^{۲} + ۴x + ۳ = \sqrt{x^{۲} + ۴x + ۵} \xrightarrow{x^{۲}+۴x+۳=t} t = \sqrt{t+۲} \longrightarrow t^{۲} = t + ۲$

$t^{۲} - t - ۲ = ۰ \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} t = -۱ \\ t = ۲ \end{cases}$

$t = -۱ \longrightarrow x^{۲} + ۴x + ۳ = -۱ \longrightarrow x^{۲} + ۴x + ۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۰} x = -۲$

$t = ۲ \longrightarrow x^{۲} + ۴x + ۳ = ۲ \longrightarrow x^{۲} + ۴x + ۱ = ۰ \longrightarrow P = \frac{c}{a} = ۱$

۳۴

سراسری ریاضی ۹۲

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x)=(a-3)x^2+ax-1$ از ناحیهٔ اوّل محورهای مختصات نمی گذرد ؟

۱) $a\le 2$ ۲) $0<a\le 2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $0<a<3$

نکته : برای آن که تابع $y=ax^2+bx+c$ از ناحیهٔ اول نگذرد

اولاً : باید ضریب x^2 عددی نامثبت باشد ، یعنی $a\le 0$

ثانیاً : اگر $\Delta\le 0$ باشد آن گاه با توجه به $a<0$ ، نمودار تابع به طور قطع از ناحیهٔ اول نخواهد گذشت .

ثالثاً : اگر $\Delta>0$ باشد ، آن گاه تابع دو ریشهٔ حقیقی خواهد داشت . با توجه به $a<0$ ، در صورتی از ناحیهٔ اول نمی گذرد که هر دو ریشه نامثبت باشند .

به a مقدار داده و بعد نمودار را رسم می کنیم .

$$a=0\longrightarrow y=-3x^2-1\longrightarrow \text{Reject}(2),(3),(4)$$

۳۵

سراسری ریاضی ۹۲

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $2x^2-3x-4=0$ باشند ، مجموعهٔ جواب های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1,\frac{1}{\beta}+1\right\}$ است ؟

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$

۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

$$2x^2-3x-4=0\longrightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}\qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-2$$

$$S'=\alpha'+\beta'=\frac{1}{\alpha}+1+\frac{1}{\beta}+1=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}+2=\frac{5}{4}\qquad P=\alpha'\beta'=(\frac{1}{\alpha}+1)(\frac{1}{\beta}+1)=-\frac{1}{4}$$

$$x^2-S'x+P'=0\longrightarrow x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}=0\longrightarrow 4x^2-5x-1=0$$

۳۶

سراسری ریاضی ۹۲ – خارج از کشور

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند ؟

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

نکته : تابع $y=ax^2+bx+c$ در صورتی محور طول ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند که سه شرط زیر برقرار باشد :

۱) $\Delta>0$ ۲) $P>0$ ۳) $S<0$

$f(x)=ax^۲+(a+۳)x-۱$

$۱)\quad \Delta>۰ \longrightarrow (a+۳)^۲-۴(a)(-۱)>۰ \longrightarrow a^۲+۱۰a+۹>۰ \longrightarrow (-\infty,-۹)\cup(-۱,+\infty)$

$۲)\quad P>۰ \longrightarrow \frac{c}{a}>۰ \longrightarrow \frac{-۱}{a}>۰ \longrightarrow a<۰ \longrightarrow (-\infty,۰)$

$۳)\quad S<۰ \longrightarrow -\frac{b}{a}<۰ \longrightarrow -\frac{a+۳}{a}<۰ \longrightarrow \frac{a+۳}{a}>۰ \longrightarrow (-\infty,-۳)\cup(۰,+\infty)$

$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)} (-\infty,-۹)$

۳۷

سراسری ریاضی ۹۱

اگر عبارت $(a-۱)x^۲+(a-۱)x+۱$ به ازای هر مقدار x منفی باشد ، a به کدام مجموعه تعلّق دارد ؟

۱) $۱<a<۵$ ۲) $a<۱$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

نکته : شرط آن که عبارت درجه دوم $ax^۲+bx+c$ برای هر x ، همواره منفی باشد آن است که :

$۱)\quad a<۰ \qquad ۲)\quad \Delta<۰$

$(a-۱)x^۲+(a-۱)x+۱ \xrightarrow{(۱)\cap(۲)} \varnothing$

$۱)\quad a<۰ \longrightarrow a-۱<۰ \longrightarrow a<۱$

$۲)\quad \Delta<۰ \longrightarrow (a-۱)^۲-۴(a-۱)(۱)<۰ \longrightarrow (a-۱)(a-۵)<۰ \longrightarrow (۱,۵)$

از آن جا که اشتراک (۱) و (۲) تهی است بنابراین عبارت نمی تواند همواره منفی باشد ، پس مقداری برای a یافت نمی شود .

۳۸

سراسری ریاضی ۹۱ – خارج از کشور

در معادلهٔ $x^۲-۸x+m=۰$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیش تر است ، مقدار m کدام است ؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

$x^۲-۸x+m=۰ \xrightarrow{\alpha,\beta} \beta=\frac{\alpha}{۲}+۵ \longrightarrow \boxed{۲\beta-\alpha=۱۰} \qquad S=\alpha+\beta=۸$

$\begin{cases}۲\beta-\alpha=۱۰\\ \alpha+\beta=۸\end{cases} \longrightarrow ۳\beta=۱۸ \longrightarrow \boxed{\beta=۶} \longrightarrow \boxed{\alpha=۲}$

$P=\alpha\beta=\frac{c}{a} \longrightarrow ۱۲=m$

۳۹

سراسری ریاضی ۹۰

به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادلهٔ $y=۲x-۴$ بر منحنی به معادلهٔ $y=(m+۳)x^۲+mx$ ، مماس است ؟

۱) $-۲,۱۸$ ۲) $۲,۲۲$ ۳) $-۲,۲۲$ ۴) $۴,۱۱$

نکته : معادلهٔ حاصل از تقاطع ضابطه های خط و منحنی باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد .

$$\begin{cases} y=(m+۳)x^۲+mx \\ y=۲x-۴ \end{cases} \longrightarrow (m+۳)x^۲+mx=۲x-۴ \longrightarrow (m+۳)x^۲+(m-۲)x+۴=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=۰} (m-۲)^۲-۴(m+۳)(۴)=۰ \longrightarrow m^۲-۲۰m-۴۴=۰ \longrightarrow (m-۲۲)(m+۲)=۰$$

$m=۲۲$ or $m=-۲$

۴۰

سراسری ریاضی ۹۰

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x(۵x+۳)=۲$ باشند ، به ازای کدام مقدار k ، مجموعهٔ جواب های معادلهٔ $۴x^۲-kx+۲۵=۰$ به صورت $\left\{\frac{۱}{\alpha^۲},\frac{۱}{\beta^۲}\right\}$ است ؟

۱) ۲۷ ‏ ‏ ‏ ۲) **۲۹** ‏ ‏ ‏ ۳) ۲۸ ‏ ‏ ‏ ۴) ۳۱

$$x(۵x+۳)=۲ \longrightarrow ۵x^۲-۳x-۲=۰ \xrightarrow{\alpha,\beta} S=\alpha+\beta=\frac{۳}{۵} \qquad P=\alpha\beta=-\frac{۲}{۵}$$

$$۴x^۲-kx+۲۵=۰ \xrightarrow{\frac{۱}{\alpha^۲},\frac{۱}{\beta^۲}} S'=\alpha'+\beta'=\frac{k}{۴} \longrightarrow \frac{۲۹}{۴}=\frac{k}{۴} \longrightarrow \boxed{k=۲۹}$$

$$\alpha'+\beta'=\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{۲۹}{۴}$$

۴۱

سراسری ریاضی ۹۰ – خارج از کشور

به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-۱)x^۲+۶x+۲m+۱$ ، برای هر مقدار دلخواه x ، مثبت است ؟

۱) $m<-۲$ ‏ ‏ ‏ ۲) **$m>۲/۵$** ‏ ‏ ‏ ۳) $۱<m<۲$ ‏ ‏ ‏ ۴) $۱<m<۲/۵$

نکته : برای آن که عبارت درجه دوم $ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد ، باید $\text{I)}\ a>۰ \quad \text{II)}\ \Delta<۰$
و نمودارش تماماً بالای محور طول ها است .

$$(m-۱)x^۲+۶x+۲m+۱>۰ \longrightarrow \begin{cases} ۱)\ a>۰ \longrightarrow m-۱>۰ \longrightarrow m>۱ \\ ۲)\ \Delta<۰ \longrightarrow (-\infty,۲)\cup(\frac{۵}{۲},+\infty) \end{cases} \xrightarrow{\cap} (\frac{۵}{۲},+\infty)$$

$$b'=۳ \xrightarrow{\Delta'<۰} (۳)^۲-(m-۱)(۲m+۱)<۰ \longrightarrow ۹-۲m^۲-m+۲m+۱<۰$$

$$-۲m^۲+m+۱۰<۰ \longrightarrow ۲m^۲-m-۱۰<۰ \longrightarrow (-\infty,۲)\cup(\frac{۵}{۲},+\infty)$$

۴۲

سراسری ریاضی ۹۰ – خارج از کشور

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $۲x^۲-۳x=۱$ باشند ، به ازای کدام مقدار k ، مجموعهٔ جواب های معادلهٔ $۸x^۲+kx-۱=۰$ به صورت $\{\alpha^۲\beta,\alpha\beta^۲\}$ است ؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۲ \qquad ۲x^۲-۳x-۱=۰\xrightarrow{\alpha,\beta}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$S'=\alpha'+\beta'=-\frac{k}{۸}\longrightarrow\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲=-\frac{k}{۸}\longrightarrow-\frac{۳}{۴}=-\frac{k}{۸}\longrightarrow k=۶$$

$$\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-۲(\frac{۳}{۲})=-\frac{۳}{۴}$$

۴۳

سراسری ریاضی ۸۹

به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادلهٔ $y=ax^۲-(a+۲)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی گذرد ؟

۱) $a\ge ۲$ ۲) $a\le -۲$ ۳) $a>۰$ ۴) $-۲\le a<۰$

نکته : اولاً : باید ضریب $x^۲$ منفی باشد **ثانیاً :** باید طول رأس سهمی مثبت باشد .

$$y=ax^۲-(a+۲)x\longrightarrow\begin{cases}۱)\ \ a<۰\\ ۲)\ \ x>۰\end{cases}\xrightarrow{\ \cap\ }(-\infty,-۲]$$

$$x_S=-\frac{b}{۲a}\ge۰\longrightarrow-\frac{-(a+۲)}{۲a}\ge۰\longrightarrow\frac{a+۲}{۲a}\ge۰\longrightarrow(-\infty,-۲]\cup[۰,+\infty)$$

۴۴

سراسری ریاضی ۸۹ – خارج از کشور

به ازای کدام مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x)=(a-۱)x^۲+۲\sqrt{۲}x+a$ ، در بالای محور xها است ؟

۱) $a<-۱$ ۲) $a>۱$ ۳) $a>۲$ ۴) $۱<a<۲$

نکته : تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ همواره بالای محور x ها قرار دارد اگر $۱)\ \ a>۰ \quad ۲)\ \ \Delta<۰$

$$f(x)=(a-۱)x^۲+۲\sqrt{۲}x+a<۰\longrightarrow\begin{cases}۱)\ \ a<۱\\ ۲)\ \ \Delta<۰\end{cases}\xrightarrow{\ \cap\ }(۲,+\infty)$$

$$۱)\ \ a-۱>۰\longrightarrow a>۱$$

$$۲)\ \ \Delta<۰\longrightarrow(۲\sqrt{۲})^۲-۴a(a-۱)<۰\longrightarrow a^۲-a-۲>۰\xrightarrow{b=a+c}(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$$

۴۵

سراسری ریاضی ۸۸

منحنی به معادلهٔ $y=(۲x+۱)(x+۸)$ با خطوط $y=mx$ ، نقطهٔ مشترک ندارد . مجموعهٔ مقادیر m چگونه است ؟

۱) $۹<m<۲۵$ ۲) $۱۵<m<۲۳$ ۳) $۷<m<۱۵$ ۴) $۵<m<۱۳$

نکته : اگر دو منحنی به معادلات $y=f(x)$ و $y=g(x)$ ، با یکدیگر نقطهٔ مشترک نداشته باشند بایستی معادلهٔ $f(x)=g(x)$ جواب نداشته باشد .

$$\begin{cases} y=(۲x+۱)(x+۸) \\ y=mx \end{cases} \longrightarrow (۲x+۱)(x+۸)=mx \longrightarrow ۲x^۲+(۱۷-m)x+۸=۰ \xrightarrow{\Delta<۰}$$

$$(۱۷-m)^۲-۶۴<۰ \longrightarrow (۱۷-m)^۲<۶۴ \longrightarrow -۸<۱۷-m<۸ \longrightarrow ۹<m<۲۵$$

۴۶

سراسری ریاضی ۸۸ – خارج از کشور

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}$ ، در بازهٔ (a,b) پایین تر از خط به معادلهٔ $y=۲$ است . بیش ترین مقدار $b-a$ کدام است ؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ∞

$$f(x)<۲ \longrightarrow \frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}<۲ \longrightarrow \frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}-۲<۰ \longrightarrow \frac{۳x^۲-۲x-۲x^۲-۸}{x^۲+۴}<۰$$

$$\frac{x^۲-۲x-۸}{x^۲+۴}<۰ \xrightarrow{x^۲+۴>۰} x^۲-۲x-۸<۰ \longrightarrow (x-۴)(x+۲)<۰ \longrightarrow (-۲,۴)$$

۴۷

سراسری ریاضی ۸۷

در معادلهٔ $۳x^۲-۱۷x+m=۰$ ، یک ریشه از سه برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بیش تر است ، مقدار m کدام است ؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

$$۳x^۲-۱۷x+m=۰ \xrightarrow{\alpha,\beta} \beta=۳\alpha+۳ \longrightarrow \beta-۳\alpha=۳$$

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۱۷}{۳} \longrightarrow ۳\alpha+۳\beta=۱۷$$

$$\begin{cases} \beta-۳\alpha=۳ \\ ۳\alpha+۳\beta=۱۷ \end{cases} \longrightarrow \boxed{\beta=۵} \longrightarrow \boxed{\alpha=\frac{۲}{۳}}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a} \longrightarrow \frac{۱۰}{۳}=\frac{m}{۳} \longrightarrow \boxed{m=۱۰}$$

۴۸

سراسری ریاضی ۸۷

اگر منحنی به معادلهٔ $y=2x^2-4x+m-3$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند ، آن گاه مجموعه مقادیر m ، به کدام صورت است ؟

۱) $m>3$ ۲) $3<m<4$ **۳) $3<m<5$** ۴) $4<m<5$

نکته : تابع $y=ax^2+bx+c$ در صورتی محور طول ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع می کند که سه شرط زیر برقرار باشد : $1)\ \Delta>0$ $2)\ P=\frac{c}{a}>0$ $3)\ S=-\frac{b}{a}>0$

اولاً : دلتای معادله مثبت باشد ، تا معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد .

ثانیاً : حاصل ضرب ریشه ها ، مثبت باشد تا دو ریشه هم علامت باشند .

ثالثاً : مجموع ریشه ها نیز باید مثبت باشد ، تا دو ریشه هم علامت مثبت باشند .

$$y=2x^2-4x+m-3\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)}(3,5)$$

$$1)\ \Delta>0\xrightarrow[\Delta'>0]{b'=-2}(-2)^2-(2)(m-3)>0\longrightarrow m<5$$

$$2)\ P=\frac{c}{a}>0\longrightarrow\frac{m-3}{2}>0\longrightarrow m-3>0\longrightarrow m>3$$

$$3)\ S=-\frac{b}{a}>0\longrightarrow 2>0$$

۴۹

سراسری ریاضی ۸۷ – خارج از کشور

با کدام مقادیر m ، منحنی به معادلهٔ $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می گذرد ؟

۱) $m<-2$ ۲) $m<-1$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $-4<m<-2$

نکته : اگر معادلهٔ $f(x)=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی ، یکی مثبت و دیگری منفی باشد ، آن گاه نمودار تابع f از هر چهار ناحیه می گذرد . شرط آن که معادله دارای دو ریشهٔ مختلف العلامت باشد ، آن است که $P=\frac{c}{a}<0$ باشد .

$$y=(m+2)x^2-2x+1\longrightarrow P=\frac{c}{a}<0\longrightarrow\frac{1}{m+2}<0\longrightarrow m+2<0\longrightarrow m<-2$$

۵۰

سراسری ریاضی ۸۷ – خارج از کشور

اگر یکی از ریشه های معادلهٔ $x(ax^2-x-5)=2$ برابر ۲ باشد ، مجموع دو ریشهٔ دیگر آن کدام است ؟

۱) -2 **۲) $-\frac{3}{2}$** ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$$x(ax^2-x-5)=2\xrightarrow{x=2}2(4a-2-5)=2\longrightarrow a=2$$

$$2x^3-x^2-5x-2=0\xrightarrow{x=2}(x-2)(2x^2+3x+1)=0\longrightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$$

۵۱

سراسری ریاضی ۸۵

به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره در زیر محور x ها است ؟

۱) $m<-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}<m<1$ ۳) $1<m<\frac{3}{2}$ ۴) $m>\frac{3}{2}$

نکته : تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ همواره زیر محور x ها قرار دارد اگر $1)\ a<0 \quad 2)\ \Delta<0$

$$y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m<0 \longrightarrow \begin{cases} 1)\ a<0 \\ 2)\ \Delta<0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} (-\infty,-\frac{1}{2})$$

$$1)\ m-1<0 \longrightarrow m<1$$

$$2)\ (\sqrt{3})^2-4m(m-1)<0 \longrightarrow 4m^2-4m-3>0 \longrightarrow (-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty)$$

۵۲

سراسری ریاضی ۸۵ – خارج از کشور

به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y=(m+2)x^2-2mx+1$ ، همواره در بالای محور x ها است ؟

۱) $m>-2$ ۲) $-2<m<-1$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $-1<m<2$

نکته : تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور x ها قرار دارد اگر $1)\ a>0 \quad 2)\ \Delta<0$

$$y=(m+2)x^2-2mx+1>0 \longrightarrow \begin{cases} 1)\ a>0 \\ 2)\ \Delta<0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} (-1,2)$$

$$1)\ a>0 \longrightarrow m+2>0 \longrightarrow \boxed{m>-2}$$

$$2)\ \Delta<0 \longrightarrow (-2m)^2-4(m+2)<0 \longrightarrow m^2-m-2<0 \xrightarrow{b=a+c} \boxed{-1<m<2}$$

۵۳

سراسری ریاضی ۸۵ – خارج از کشور

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $4x^2-12x+1=0$ باشند ، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

$$4x^2-12x+1=0 \longrightarrow S=\alpha+\beta=3 \qquad P=\alpha\beta=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

$$k=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \longrightarrow k^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta} \longrightarrow k^2=3+2(\frac{1}{2}) \longrightarrow k=2$$

۵۴

سراسری ریاضی ۸۴

به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادلهٔ $y=(\frac{1}{2}x+a)(x^2-4)$ بر محور xها در یک نقطه مماس است ؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\{-2,2\}$

نکته : برای این که منحنی تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)$ بر محور xها مماس باشد ، بایستی معادلهٔ $f(x)=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد . بنابر این باید ریشه های $x^2-4=0$ در معادلهٔ $\frac{1}{2}x+a=0$ صدق کند .

$$x^2-4=0 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow x=\pm 2$$

$$x=2 \longrightarrow \frac{1}{2}x+a=0 \longrightarrow 1+a=0 \longrightarrow a=-1$$

$$x=-2 \longrightarrow \frac{1}{2}x+a=0 \longrightarrow -1+a=0 \longrightarrow a=1$$

۵۵

سراسری ریاضی ۸۴

به ازای کدام مقدار m ، عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ عددی بین دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است ؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۴ ۴) ۴-

$$(m^2-4)x^2-3x+m=0 \xrightarrow{\alpha,b,\beta} 2b=\alpha+\beta \longrightarrow 2(\frac{1}{8})=\frac{3}{m^2-4} \longrightarrow m=\pm 4$$

$$m=4 \longrightarrow 12x^2-3x+4=0 \longrightarrow \Delta<0$$

$$m=-4 \longrightarrow 12x^2-3x-4=0 \longrightarrow \Delta>0$$

۵۶

سراسری ریاضی ۸۴ – خارج از کشور

به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطهٔ هندسی بین دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $mx^2-5x+m^2-3=0$ است ؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

$$mx^2-5x+m^2-3=0 \xrightarrow{\alpha,b,\beta} b^2=\alpha\beta \longrightarrow (\sqrt{2})^2=\frac{m^2-3}{m}$$

$$m^2-2m-3=0 \xrightarrow{b=a+c} m=-1 \wedge m=3$$

$$m=-1 \longrightarrow -x^2-5x-2=0 \longrightarrow x^2+5x+2=0 \longrightarrow \Delta>0$$

$$m=3 \longrightarrow 9x^2-5x+6=0 \longrightarrow \Delta<0$$

۵۷

سراسری ریاضی ۸۳

منحنی به معادلهٔ $(x-1)(x^2-ax+a)=0$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می کند ، مجموعهٔ مقادیر a به کدام صورت است ؟

۱) $-4<a<0$ ۲) $0<a<2$ **۳) $0<a<4$** ۴) $a>4$

نکته : برای به دست آوردن طول محل تقاطع تابع $f(x)$ با محور x ها $(y=0)$ ، بایستی معادلهٔ $f(x)=0$ باشد .

$$(x-1)(x^2-ax+a)=0 \xrightarrow{x=1} x^2-ax+a=0 \xrightarrow{\Delta<0} a^2-4a<0 \longrightarrow a(a-4)<0$$

$(0,4)$

۵۸

سراسری ریاضی ۸۳

اگر بیشترین مقدار تابع $f(x)=(k+3)x^2-4x+k$ برابر صفر باشد ، مقدار k ، کدام است ؟

۱) -4 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 4

نکته : تابع درجه دوم وقتی ماکزیمم دارد که ضریب x^2 منفی باشد تا تقعر آن رو به پائین باشد .

$$1)\quad a<0 \longrightarrow k+3<0 \longrightarrow k<-3$$

$$2)\quad y_{max}=0 \longrightarrow \frac{-\Delta}{4a}=0 \longrightarrow \Delta=0 \xrightarrow{b'=-2} (-2)^2-(k+3)(k)=0 \longrightarrow k^2+3k-4=0$$

$$(k+4)(k-1)=0 \longrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-4 \end{cases}$$

۵۹

سراسری ریاضی ۸۲

به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ ، بالای محور x ها و مماس بر آن است ؟

۱) -3 ۲) $-\frac{5}{2}$ **۳) $\frac{5}{2}$** ۴) 3

نکته : چون نمودار تابع بر محور x ها مماس است پس محل برخورد تابع با خط $y=0$ بایستی ریشهٔ مضاعف داشته باشد . یعنی $\Delta=0$ و $a>0$ باشد .

$$a>0 \longrightarrow m-2>0 \longrightarrow \boxed{m>2}$$

$$\begin{cases} y=(m-2)x^2-3x+m+2 \\ y=0 \end{cases} \longrightarrow (m-2)x^2-3x+m+2=0 \xrightarrow{\Delta=0}$$

$$(-3)^2-4(m-2)(m+2)=0 \longrightarrow m^2=\frac{25}{4} \longrightarrow m=\pm\frac{5}{2} \xrightarrow{m>2} m=\frac{5}{2}$$

۶۰

سراسری ریاضی ۸۲

در معادلهٔ $3x^2-15x+m=0$ ، اگر یکی از ریشه ها ۲ واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر باشد ، m کدام است ؟

۱) $\frac{59}{5}$ ۲) $\frac{63}{5}$ ۳) $\frac{59}{4}$ ۴) $\frac{63}{4}$

$$\begin{cases}\beta=\alpha+2\\ \alpha+\beta=5\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\beta-\alpha=2\\ \alpha+\beta=5\end{cases}\xrightarrow[\alpha=\frac{3}{2}]{\beta=\frac{7}{2}}3(\frac{7}{2})^2-15(\frac{7}{2})+m=0\longrightarrow m=\frac{63}{4}$$

۶۱

سراسری ریاضی ۷۸

به ازای کدام مقدار m ، در معادلهٔ درجه دوم $(m+1)x^2-3x+m=0$ یکی از ریشه ها دو برابر ریشهٔ دیگر است ؟

۱) $-2,3$ ۲) $-3,2$ ۳) $-1,2$ ۴) $-2,1$

$$(m+1)x^2-3x+m=0\xrightarrow{\alpha,\beta}\beta=2\alpha$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{3}{m+1}\longrightarrow\alpha+2\alpha=\frac{3}{m+1}\longrightarrow3\alpha=\frac{3}{m+1}\longrightarrow\boxed{\alpha=\frac{1}{m+1}}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{m}{m+1}\longrightarrow2\alpha^2=\frac{m}{m+1}\longrightarrow2(\frac{1}{m+1})^2=\frac{m}{m+1}\longrightarrow\frac{2}{(m+1)^2}=\frac{m}{m+1}$$

$$\frac{2}{m+1}=\frac{m}{1}\longrightarrow m^2+m-2=0\xrightarrow{a+b+c=0}m=1\wedge m=-2$$

نکته : اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ، یک ریشه k برابر ریشهٔ دیگر باشد ، داریم : $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$

۶۲

معادلهٔ $۳x^۲ - ۸x + ۴ = \frac{۱}{[x]+[-x]}$ دارای چند جواب است ؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است)

۱) **۱**   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۰

$$۳x^۲ - ۸x + ۴ = \frac{۱}{[x]+[-x]} \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} ۳x^۲ - ۸x + ۴ = -۱ \longrightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x = ۱ \in \mathbb{Z} \\ \boxed{x = \frac{۵}{۳} \notin \mathbb{Z}} \end{cases}$$

$$[x]+[-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۶۳

ریشه های معادلهٔ $۲(x + \frac{۱}{x})^۲ + ۳(x + \frac{۱}{x}) = ۵$ چگونه است ؟

۱) دو ریشهٔ مثبت   ۲) **دو ریشهٔ منفی**

۳) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی   ۴) فاقد ریشه

$$۲(x + \frac{۱}{x})^۲ + ۳(x + \frac{۱}{x}) = ۵ \longrightarrow x + \frac{۱}{x} = t$$

$$۲t^۲ + ۳t - ۵ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} t = ۱ \wedge t = -\frac{۵}{۲}$$

$$t = ۱ \longrightarrow x + \frac{۱}{x} = ۱ \longrightarrow x^۲ - x + ۱ = ۰ \longrightarrow \Delta < ۰$$

$$t = -\frac{۵}{۲} \longrightarrow x + \frac{۱}{x} = -\frac{۵}{۲} \longrightarrow ۲x^۲ + ۵x + ۲ = ۰ \longrightarrow \Delta > ۰ \wedge P > ۰ \wedge S < ۰$$

۶۴

به ازای کدام مقادیر m ، سهمی به معادلهٔ $y = (m+۳)x^۲ + ۴x + m$ ، همواره در زیر محور x ها است ؟

۱) **$m < -۴$**   ۲) $m < -۳$ ۳) $m < -۲$ ۴) $m < ۰$

$$y = (m+۳)x^۲ + ۴x + m \xrightarrow{y<۰} \begin{cases} I)\ \ a < ۰ \\ II)\ \Delta < ۰ \end{cases} \xrightarrow{\cap} m < -۴$$

$$a < ۰ \longrightarrow m + ۳ < ۰ \longrightarrow \boxed{m < -۳}$$

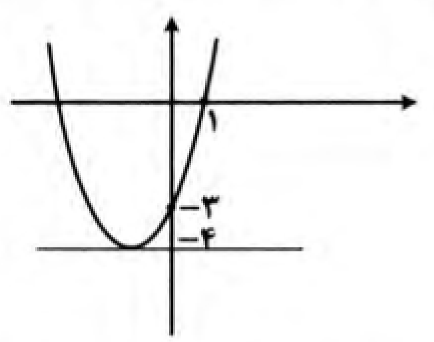
$$\Delta' < ۰ \longrightarrow b'^۲ - ac < ۰ \longrightarrow ۴ - (m+۳)(m) < ۰ \longrightarrow ۴ - m^۲ - ۳m < ۰$$

$$m^۲ + ۳m - ۴ > ۰ \longrightarrow (m+۴)(m-۱) > ۰ \longrightarrow \boxed{m < -۴ \vee m > ۱}$$

۶۵

اگر نمودار تابع درجه دوم با ریشه های صحیح $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به صورت زیر باشد ، مقدار b ، کدام است ؟

۱) -۶	۲) -۳	۳) ۳	۴) ۲



$f(x)=ax^{۲}+bx+c$

$(۰,-۳)\longrightarrow \boxed{c=-۳}$

$(۱,۰)\longrightarrow a+b-۳=۰\longrightarrow \boxed{a+b=۳}$

$y_S=-۴\longrightarrow \frac{-\Delta}{۴a}=-۴\longrightarrow \frac{b^{۲}+۱۲a}{۴a}=۴$

$b^{۲}+۱۲a=۱۶a\longrightarrow \boxed{b^{۲}=۴a}$

$۴a+۴b=۱۲\longrightarrow b^{۲}+۴b-۱۲=۰$

$(b+۶)(b-۲)=۰\longrightarrow b=-۶\wedge b=۲$

$x=-\frac{b}{۲a}<۰\longrightarrow \frac{b}{۲a}>۰$

$b=-۶\longrightarrow a=۹\longrightarrow f(x)=۹x^{۲}-۶x-۳$

$\boxed{b=۲}\longrightarrow \boxed{a=۱}\longrightarrow f(x)=x^{۲}+۲x-۳$

۶۶

به ازای چند عدد صحیح برای m ، معادلهٔ $mx^{۲}+۴x+m-۲=۰$ دارای دو ریشهٔ متمایز مثبت است ؟

۱) صفر	۲) یک	۳) دو	۴) بی شمار

$mx^{۲}+۴x+m-۲=۰$

$\text{I)}\quad \Delta>۰\longrightarrow ۱۶-۴(m)(m-۲)>۰\longrightarrow ۴-m^{۲}+۲m>۰$

$m^{۲}-۲m-۴<۰\xrightarrow{\Delta=۲۰}\boxed{۱-\sqrt{۵}<m<۱+\sqrt{۵}}$

$\text{II)}\quad P=\frac{c}{a}>۰\longrightarrow \frac{m-۲}{m}>۰\longrightarrow \boxed{m<۰\vee m>۲}$

$\text{III)}\quad S=-\frac{b}{a}>۰\longrightarrow \frac{-۴}{m}>۰\longrightarrow \boxed{m<۰}$

$\xrightarrow{(I)\cap(II)\cap(III)}۱-\sqrt{۵}<m<۰\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}\boxed{m=-۱}$

۶۷

یکی از ریشه های معادلهٔ $a(x-2)^2 = x$ از ۱۰ برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد کمتر است ، مقدار مبثت a کدام است ؟

۱) $\frac{9}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{5}{4}$

$$a(x-2)^2 = x \longrightarrow ax^2 + (-4a-1)x + 4a = 0 \xrightarrow{\alpha,\beta} \boxed{\beta = 10\alpha - 3}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{4a+1}{a} \qquad P = \alpha\beta = \frac{4a}{a} = 4 \longrightarrow \alpha(10\alpha - 3) = 4$$

$$10\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = 169} \alpha_1 = \frac{3+13}{20} = \frac{4}{5} \quad \wedge \quad \alpha_2 = \frac{3-13}{20} = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{4}{5} \longrightarrow a(\frac{4}{5} - 2)^2 = \frac{4}{5} \longrightarrow \frac{36a}{25} = \frac{4}{5} \longrightarrow 9a = 5 \longrightarrow \boxed{a = \frac{5}{9}}$$

$$\alpha_2 = \frac{4}{5} \longrightarrow a(-\frac{1}{2} - 2)^2 = -\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{25a}{4} = -\frac{1}{2} \longrightarrow 25a = -2 \longrightarrow \boxed{a = -\frac{2}{25}}$$

۶۸

تمام محدودهٔ a کدام باشد تا سهمی به معادلهٔ $y = (a+6)x^2 + (a-2)x + 1$ از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات عبور نکند ؟

۱) $-6 < a < -2$ ۲) $a \le -2$ ۳) $a \ge -2$ ۴) $a > 5$

حالت اول : نمودار از ناحیه های اول و دوم بگذرد . $\quad$ I) $a > 0$ $\quad$ II) $\Delta \le 0$

$$\text{I)}\ \ a > 0 \longrightarrow a + 6 > 0 \longrightarrow \boxed{a > -6}$$

$$\text{II)}\ \ \Delta \le 0 \longrightarrow (a-2)^2 - 4(a+6) \le 0 \longrightarrow a^2 - 8a - 20 \le 0 \longrightarrow \boxed{-2 \le a \le 10}$$

$$\xrightarrow{(\text{I})\cap(\text{II})} \boxed{-2 \le a \le 10} \quad (1)$$

حالت دوم : نمودار از ناحیه های اول و دوم و سوم بگذرد . $\quad$ I) $a > 0$ $\quad$ II) $\Delta > 0$ $\quad$ III) $x_S < 0$

$$\text{I)}\ \ a > 0 \longrightarrow a + 6 > 0 \longrightarrow \boxed{a > -6}$$

$$\text{II)}\ \ \Delta > 0 \longrightarrow a^2 - 8a - 20 > 0 \longrightarrow (a-10)(a+2) > 0 \longrightarrow \boxed{a < -2 \vee a > 10}$$

$$\text{III)}\ \ x = -\frac{b}{2a} < 0 \longrightarrow -\frac{a-2}{2(a+6)} < 0 \longrightarrow \frac{a-2}{2(a+6)} > 0 \xrightarrow{a+6>0} \boxed{a > 2}$$

$$\xrightarrow{(\text{I})\cap(\text{II})\cap(\text{III})} \boxed{a > 10} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cup(2)} \boxed{a \ge -2}$$

۶۹

اگر $\alpha=\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}$ و $\beta=\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}$ باشد ، آن گاه حاصل $A=(\alpha^3+\beta^3-2\alpha\beta)(\alpha^3+\beta^3+2\alpha\beta)$ کدام است ؟

۱) $10\sqrt{2}+2$　　۲) $10\sqrt{2}$　　۳) $10\sqrt{2}-2$　　۴) $10\sqrt{2}+1$

$$A=(\alpha^3+\beta^3-2\alpha\beta)(\alpha^3+\beta^3+2\alpha\beta)=(\alpha^3+\beta^3)^2-(2\alpha\beta)^2$$

$$=\alpha^6+\beta^6+2(\alpha\beta)^3-4(\alpha\beta)^2=5\sqrt{2}-7+5\sqrt{2}+7+2-4=10\sqrt{2}-2$$

$$\alpha^6=5\sqrt{2}-7 \qquad \beta^6=5\sqrt{2}+7$$

$$\alpha\beta=\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}\times\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}=\alpha=\sqrt[6]{(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7)}=\sqrt[6]{50-49}=1$$

۷۰

به ازای کدام مقدار m ، معادلهٔ $(m+4)x^2+mx+\frac{1}{2}=0$ تنها یک ریشه دارد که علامت آن منفی است ؟

۱) $\{4\}$　　۲) $\{-2\}$　　۳) $\{-2,4\}$　　۴) $\varnothing$

$$(m+4)x^2+mx+\frac{1}{2}=0$$

$$\text{I)}\quad \Delta=0\longrightarrow m^2-4(m+4)(\frac{1}{2})=0\longrightarrow m^2-2m-8=0\longrightarrow(m-4)(m+2)=0$$

$$m=4\vee m=-2$$

$$\text{II)}\quad S=-\frac{b}{a}<0\longrightarrow\frac{-m}{m+4}<0\longrightarrow\frac{m}{m+4}>0\longrightarrow m<-4\vee m>0\longrightarrow\boxed{m=4}$$

$$\boxed{m=4}\longrightarrow\frac{4}{8}>0 \qquad m=-2\longrightarrow\frac{-2}{2}\not>0$$

۷۱

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^2-5x+a=0$ باشند ، به طوری که $\left|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right|=1$ ، آن گاه نمودار تابع $y=ax^2-2ax+1$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات <u>عبور نمی کند</u> ؟

۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم　　۴) چهارم

$$x^2-5x+a=0\longrightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=5\\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=a\end{cases}$$

$$\left|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right|=1\xrightarrow{\wedge 2}\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=1\longrightarrow5-2\sqrt{a}=1\longrightarrow2\sqrt{a}=4\longrightarrow\boxed{a=4}$$

$$y=4x^2-8x+1\longrightarrow x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-8}{8}=1\longrightarrow f(1)=-3 \qquad S(1,-3)$$

۷۲

یکی از ریشه های معادلهٔ $x^۲+x+\frac{۴}{x^۲+x+۲}+m=۰$ برابر ۲− است ، قدر مطلق اختلاف ریشهٔ دیگر این معادله از ۲− کدام است ؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

$$x^۲+x+\frac{۴}{x^۲+x+۲}+m=۰\xrightarrow{x=-۲}۲+۱+m=۰\longrightarrow \boxed{m=-۳}$$

$$x^۲+x+\frac{۴}{x^۲+x+۲}-۳=۰\xrightarrow[x^۲+x=t-۲]{x^۲+x+۲=t}t-۲+\frac{۴}{t}-۳=۰\longrightarrow t+\frac{۴}{t}-۵=۰$$

$$t^۲-۵t+۴=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}t=۱\quad\wedge\quad t=۴$$

$$t=۱\longrightarrow x^۲+x+۲=۱\longrightarrow x^۲+x+۱=۰\longrightarrow \Delta=-۳<۰$$

$$t=۴\longrightarrow x^۲+x+۲=۴\longrightarrow x^۲+x-۲=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}x=۱\ \wedge\ x=-۲$$

۷۳

دو خط $mx-(m+۱)y=۴$ و $۲x+(۲m-۱)y=۳$ عمود بر هم و در ناحیهٔ چهارم متقاطع اند ، m در کدام فاصله قرار دارد ؟

۱) $۲<m<۳$ ۲) $۰<m<۲$ ۳) $-۱<m<۰$ ۴) $-۲<m<-۱$

$$mx-(m+۱)y=۴\longrightarrow a=-\frac{m}{-(m+۱)}=\frac{m}{m+۱}$$

$$۲x+(۲m-۱)y=۳\longrightarrow a'=-\frac{۲}{۲m-۱}=\frac{-۲}{۲m-۱}$$

$$a\times a'=-۱\longrightarrow \frac{m}{m+۱}=\frac{۲m-۱}{۲}\longrightarrow ۲m^۲-m-۱=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}m=۱\wedge m=-\frac{۱}{۲}$$

$$m=۱\longrightarrow\begin{cases}x-۲y=۴\\ ۲x+y=۳\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x-۲y=۴\\ ۴x+۲y=۶\end{cases}\longrightarrow x=۲\wedge y=-۱\longrightarrow \boxed{A(۲,-۱)}$$

$$m=-\frac{۱}{۲}\longrightarrow\begin{cases}x+y=-۸\\ ۲x-۲y=۳\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}۲x+۲y=-۱۶\\ ۲x-۲y=۳\end{cases}\longrightarrow x=-\frac{۱۳}{۴}\wedge y=-\frac{۱۹}{۴}$$

۷۴

به ازای کدام مقدار a ، معادلهٔ درجه دوم $(a+۱)x^۲+a(a^۲-۹)x+۲=۰$ دو ریشهٔ حقیقی قرینه دارد ؟

۱) ۳− ۲) ۲ ۳) ۲− ۴) ۳

$$(a+۱)x^۲+a(a^۲-۹)x+۲=۰$$

$$a(a^۲-۹)=۰\longrightarrow a=۰\vee a=۳\vee a=-۳$$

$$a=۰\longrightarrow x^۲+۲=۰\qquad\qquad a=۳\longrightarrow ۴x^۲+۲=۰$$

$$\boxed{a=-۳}\longrightarrow -۲x^۲+۲=۰\longrightarrow x^۲=۱\longrightarrow x=\pm۱$$

۷۵

اگر $x-\sqrt{x}>0$ باشد ، مجموع معکوس ریشه های معادلهٔ $|x^2-1|=|5x+1|-8$ کدام است ؟

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{5}$

$$x-\sqrt{x}>0 \longrightarrow x>\sqrt{x} \xrightarrow{x>0} x^2>x \longrightarrow x^2-x>0 \longrightarrow x(x-1)>0$$

$$\longrightarrow x<0 \vee \boxed{x>1}$$

$$x>1 \longrightarrow x^2-1=5x+1-8 \longrightarrow x^2-5x+6=0 \longrightarrow (x-2)(x-3)=0$$

$$x=2 \wedge x=3 \longrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

۷۶

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^2+7x-1=0$ باشند ، حاصل $\sqrt{\alpha^2(1-7\beta)}$ کدام است ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۱-

$$x^2+7x-1=0 \xrightarrow{\alpha,\beta} \beta^2+7\beta-1=0 \longrightarrow \boxed{\beta^2=1-7\beta}$$

$$\sqrt{\alpha^2(1-7\beta)}=\sqrt{\alpha^2\beta^2}=\sqrt{(\alpha\beta)^2}=|\alpha\beta|=|-1|=1$$

۷۷

به ازای چه مقادیری از m ، سهمی به معادلهٔ $y=(m-2)x^2+2x+1-m$ ، فقط از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات عبور نمی کند ؟

۱) $-1<m\le 3$ ۲) $m<2$ ۳) $m>2$ ۴) $1\le m<2$

$$\text{I)}\quad \Delta>0 \longrightarrow 4-4(m-2)(1-m)>0 \longrightarrow m^2-3m+3>0 \longrightarrow \Delta<0$$

$$\text{II)}\quad a<0 \longrightarrow m-2<0 \longrightarrow \boxed{m<2} \qquad \text{III)}\quad b>0 \longrightarrow b=2>0$$

$$\text{IV)}\quad c\le 0 \longrightarrow 1-m\le 0 \longrightarrow \boxed{m\ge 1} \qquad \xrightarrow{\cap} \boxed{1\le m<2}$$

۷۸

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند ، آن گاه حاصل $(\alpha+\frac{1}{\beta})^3+(\beta+\frac{1}{\alpha})^3$ کدام است ؟

$$x^2-3x+1=0 \xrightarrow{\alpha,\beta} S=\alpha+\beta=3 \qquad P=\alpha\beta=1 \longrightarrow \alpha=\frac{1}{\beta}$$

$$(\alpha+\frac{1}{\beta})^3+(\beta+\frac{1}{\alpha})^3=(\alpha+\alpha)^3+(\beta+\beta)^3=8(\alpha^3+\beta^3)$$

$$=8[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)]=8(27-9)=144$$

۷۹

اگر هر یک از ریشه های معادلهٔ $۳x^۲+ax+b=۰$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادلهٔ $۴x^۲-۷x+۳=۰$ باشد مقدار a کدام است ؟

۱) -۱۴ ۲) -۱۲ ۳) -۸ ۴) -۶

$$۴x^۲-۷x+۳=۰\xrightarrow{\alpha,\beta}S=\alpha+\beta=\frac{۷}{۴}\qquad P=\alpha\beta=\frac{۳}{۴}$$

$$۳x^۲+ax+b=۰\xrightarrow[\beta'=\frac{۲}{\beta}]{\alpha'=\frac{۲}{\alpha}}S'=\alpha'+\beta'=-\frac{a}{۳}\longrightarrow\frac{۲}{\alpha}+\frac{۲}{\beta}=\frac{-a}{۳}$$

$$\frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{-a}{۳}\longrightarrow\frac{۱۴}{۳}=\frac{-a}{۳}\longrightarrow\boxed{a=-۱۴}$$

۸۰

به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ ، برابر ۶ می باشد ؟

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱ ۳) $-۱,\frac{۹}{۵}$ ۴) $-\frac{۹}{۵},۱$

$$mx^۲-(m+۳)x+۵=۰\xrightarrow{\alpha,\beta}S=\alpha+\beta=\frac{m+۳}{m}\qquad P=\alpha\beta=\frac{۵}{m}$$

$$\alpha^۲+\beta^۲=۶\longrightarrow(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=۶\longrightarrow(\frac{m+۳}{m})^۲-۲(\frac{۵}{m})=۶$$

$$\frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}=۶\longrightarrow۵m^۲+۴m-۹=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}m=۱\wedge m=-\frac{۹}{۵}$$

$$m=۱\longrightarrow x^۲-۴x+۵=۰\longrightarrow\Delta=-۴<۰$$

$$\boxed{m=-\frac{۹}{۵}}\longrightarrow۹x^۲-x-۲۵=۰\longrightarrow\Delta>۰$$

۸۱

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$ باشند ، ریشه های کدام معادلهٔ زیر $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta-۱$ است ؟

۱) $x^۲-۴x-۴=۰$ ۲) $-۲x^۲+۴=۰$

۳) $x^۲-۴=۰$ ۴) $x^۲+۴x-۴=۰$

$$x^۲-۲x-۱=۰\xrightarrow{\alpha,\beta}S=\alpha+\beta=۲\qquad P=\alpha\beta=-۱$$

$$\alpha'=\alpha+\beta=۲\qquad\beta'=\alpha\beta-۱=-۱-۱=-۲$$

$$S'=\alpha'+\beta'=۰\qquad P'=\alpha'\beta'=-۴$$

$$x^۲-S'x+P'=۰\longrightarrow x^۲-۴=۰$$

۸۲

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$ باشند ، کدام معادلهٔ ریشه هایش $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ است ؟

۱) $x^۲+x-۲=۰$ **۲) $x^۲-x-۲=۰$**

۳) $x^۲-۲x-۱=۰$ ۴) $۲x^۲-x-۱=۰$

$$x^۲-۲x-۱=۰\xrightarrow{\alpha,\beta}S=\alpha+\beta=۲\qquad P=\alpha\beta=-۱$$

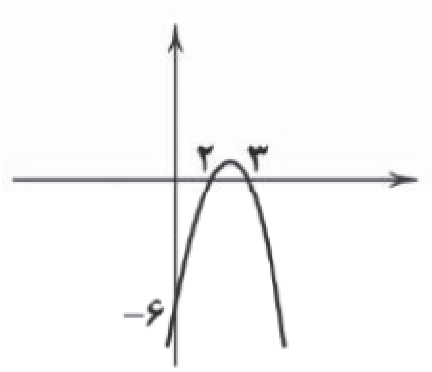
$$\alpha'=\alpha+\beta=۲\qquad \beta'=\alpha\beta=-۱\longrightarrow S'=\alpha'+\beta'=۱\qquad P'=\alpha'\beta'=-۲$$

$$x^۲-S'x+P'=۰\longrightarrow x^۲-x-۲=۰$$

۸۳

شکل زیر نمودار یک سهمی است ، بیش ترین مقدار این سهمی کدام است ؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ **۳) $\frac{۱}{۴}$**   ۴) $-\frac{۱}{۴}$



$$f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$$

$$f(x)=a(x-۲)(x-۳)$$

$$(۰,-۶)\longrightarrow -۶=۶a\longrightarrow \boxed{a=-۱}$$

$$f(x)=-(x-۲)(x-۳)=-x^۲+۵x-۶$$

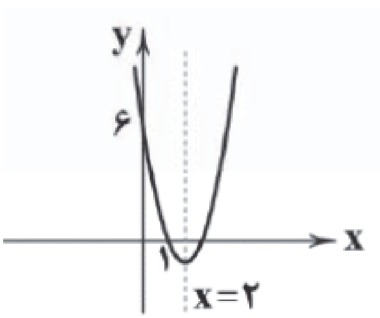
$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۵}{-۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$f(\frac{۵}{۲})=-\frac{۲۵}{۴}+\frac{۲۵}{۲}-۶=\frac{-۲۵+۵۰-۲۴}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۸۴

اگر نمودار تابع درجه دوم $f(x)$ به شکل زیر باشد ، $f(۵)$ کدام است ؟

۱) ۸   ۲) ۹۶   ۳) ۴۸   **۴) ۱۶**



$$f(x)=ax^۲+bx+c\longrightarrow \boxed{c=۶}$$

$$(۱,۰)\longrightarrow a+b+۶=۰\longrightarrow a+b=-۶$$

$$x=-\frac{b}{۲a}\longrightarrow ۲=-\frac{b}{۲a}\longrightarrow b=-۴a$$

$$a-۴a=-۶\longrightarrow \boxed{a=۲}\longrightarrow \boxed{b=-۸}$$

$$f(x)=۲x^۲-۸x+۶\longrightarrow f(۵)=۵۰-۴۰+۶=۱۶$$

۸۵

به ازای کدام مقدار m ، منحنی به معادلهٔ $y=۲x^۲+(m-۲)x+m+۴$ بر محور x ها مماس است ؟

۱) $۲,-۱۴$ ۲) $-۲,۱۴$ ۳) $-۴,۷$ ۴) $۴,-۷$

$$y=۲x^۲+(m-۲)x+m+۴\xrightarrow{\Delta=۰}(m-۲)^۲-۴(۲)(m+۴)=۰\longrightarrow m^۲-۱۲m-۲۸=۰$$

$$(m-۱۴)(m+۲)=۰\longrightarrow m=۱۴\wedge m=-۲$$

۸۶

به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y=۲x^۲+mx+۲$ همواره بالای نیمساز ربع اول و سوم است ؟

۱) $-۳<m<۵$ ۲) $-۲<m<۵$ ۳) $-۳<m<۴$ ۴) $-۲<m<۴$

$$۲x^۲+mx+۲>x\longrightarrow ۲x^۲+(m-۱)x+۲>۰\xrightarrow{\Delta<۰}(m-۱)^۲-۴(۲)(۲)<۰$$

$$(m-۱)^۲-۱۶<۰\longrightarrow(m-۱)^۲<۱۶\longrightarrow -۴<m-۱<۴\longrightarrow\boxed{-۳<m<۵}$$

۸۷

اگر منحنی به معادلهٔ $y=۲x^۲-۴x+m-۳$ محور x ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند ، آن گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است ؟

۱) $m>۳$ ۲) $۳<m<۴$ ۳) $۳<m<۵$ ۴) $۴<m<۵$

$$y=۲x^۲-۴x+m-۳\xrightarrow{(I)\cap(II)}\boxed{۳<m<۵}$$

$$I)\quad \Delta>۰\xrightarrow{\Delta'=b'^۲-ac}(-۲)^۲-۲(m-۳)>۰\longrightarrow ۴-۲m+۶>۰\longrightarrow\boxed{m<۵}$$

$$II)\quad P=\frac{c}{a}>۰\longrightarrow\frac{m-۳}{۲}>۰\longrightarrow m-۳>۰\longrightarrow\boxed{m>۳}$$

$$III)\quad S=-\frac{b}{۲a}>۰\longrightarrow-\frac{-۴}{۴}=۱>۰$$

۸۸

حدود m برای آن که عبارت $(m-۱)x^۲+x+m+۱$ همواره مثبت باشد ، کدام است ؟

۱) $m>۱$ ۲) $m>\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $۰<m<۲$ ۴) $-۱<m<۱$

$$(m-۱)x^۲+x+m+۱>۰\xrightarrow{(I)\cap(II)}m>\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$I)\quad a>۰\longrightarrow m-۱>۰\longrightarrow\boxed{m>۱}$$

$$II)\quad \Delta<۰\longrightarrow(۱)^۲-۴(m-۱)(m+۱)<۰\longrightarrow ۱-۴(m^۲-۱)<۰\longrightarrow ۱-۴m^۲+۴<۰$$

$$۵-۴m^۲<۰\longrightarrow ۴m^۲-۵>۰\longrightarrow m^۲>\frac{۵}{۴}\longrightarrow\boxed{m<-\frac{\sqrt{۵}}{۲}\vee m>\frac{\sqrt{۵}}{۲}}$$

۸۹

به ازای کدام مقادیر m ، معادلهٔ درجه دوم $x^{۲}+(m+۱)x+m+\frac{۹}{۴}=۰$ ، دارای دو ریشهٔ حقیقی می باشد ؟

۱) $-۲<m<۴$ ۲) $m>۱$

۳) $-۳<m<۳$ **۴) $m<-۲ \vee m>۴$**

نکته : در معادلهٔ درجه دوم ، اگر $\Delta>۰$ باشد ، آن گاه معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است .

$$x^{۲}+(m+۱)x+m+\frac{۹}{۴}=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} (m+۱)^{۲}-۴(m+\frac{۹}{۴})>۰ \longrightarrow m^{۲}-۲m-۸>۰$$

$$(m-۴)(m+۲)>۰ \longrightarrow m<-۲ \vee m>۴$$

۹۰

اگر α و β ریشه های معادلهٔ درجه دوم $۲x^{۲}-۶x+۱=۰$ باشند ، حاصل $\frac{\alpha}{\beta+۱}+\frac{\beta}{\alpha+۱}$ کدام است ؟

۱) $\frac{۲۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱۹}{۹}$ ۳) ۲   ۴) $\frac{۵}{۳}$

$$۲x^{۲}-۶x+۱=۰ \longrightarrow S=\alpha+\beta=۳ \qquad P=\alpha\beta=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{\alpha}{\beta+۱}+\frac{\beta}{\alpha+۱}=\frac{\alpha(\alpha+۱)+\beta(\beta+۱)}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}=\frac{\alpha^{۲}+\alpha+\beta^{۲}+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}=\frac{(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+۱}=$$

$$=\frac{۹-۱+۳}{۳+\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{۱۱}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۲۲}{۹}$$

۹۱

ریشه های معادلهٔ درجه دوم $x^{۲}+ax+b=۰$ ، دو برابر ریشه های معادلهٔ $۵x^{۲}-۴x-۱=۰$ می باشند ، مقدار a کدام است ؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$ **۳) $-\frac{۸}{۵}$**   ۴) $-\frac{۲}{۵}$

$$۵x^{۲}-۴x-۱=۰ \xrightarrow{\alpha,\beta} S=\alpha+\beta=\frac{۴}{۵} \qquad P=\alpha\beta=-\frac{۱}{۵}$$

$$x^{۲}+ax+b=۰ \xrightarrow[\beta'=۲\beta]{\alpha'=۲\alpha} S'=\alpha'+\beta'=-a \longrightarrow ۲\alpha+۲\beta=-a \longrightarrow ۲(\alpha+\beta)=-a$$

$$-a=۲(\frac{۴}{۵}) \longrightarrow a=-\frac{۸}{۵}$$

۹۲

به ازای کدام مقادیر m ، معادلهٔ $mx^{2}+(m-1)x+m=0$ ، دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی می باشد ؟

۱) $-1<m<2$ ۲) $0<m<1$ **۳) $-1<m<0$** ۴) $0<m<\frac{1}{3}$

نکته : شرط آن که معادلهٔ درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد آن است که :

$\text{I)}\ \Delta>0 \qquad \text{II)}\ S<0 \qquad \text{III)}\ P>0$

$$\text{I)}\ (m-1)^{2}-4(m)(m)>0\longrightarrow 3m^{2}+2m-1<0\xrightarrow{b=a+c}\boxed{-1<m<\frac{1}{3}}$$

$$\text{II)}\ S=-\frac{b}{a}<0\longrightarrow -\frac{m-1}{m}<0\longrightarrow \frac{m-1}{m}>0\longrightarrow \boxed{m<0 \vee m>1}$$

$$\text{I)}\ P=\frac{c}{a}>0\longrightarrow \frac{m}{m}>0\longrightarrow \boxed{1>0} \qquad \xrightarrow{(I)\cap(II)}\boxed{-1<m<0}$$

۹۳

اگر رأس تابع $f(x+4)=x^{2}-ax+5$ نقطهٔ $S(1,k)$ باشد ، مجموع طول و عرض نقطهٔ رأس تابع $f(x)$ کدام است ؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۷ **۴) ۹**

$$f(x+4)=x^{2}-ax+5\xrightarrow{x\to x-4}f(x-4+4)=(x-4)^{2}-a(x-4)+5$$

$$f(x)=x^{2}-8x+16-ax+4a+5\longrightarrow \boxed{f(x)=x^{2}-(8+a)x+4a+21}$$

$$S(1,k)\longrightarrow S'(1+4,k)\longrightarrow S'(5,k)$$

$$x=-\frac{b}{2a}\longrightarrow 5=\frac{8+a}{2}\longrightarrow 8+a=10\longrightarrow \boxed{a=2}$$

$$f(x)=x^{2}-10x+29\xrightarrow{S'(5,k)}k=25-50+29\longrightarrow k=4\longrightarrow \boxed{S'(5,4)}$$

۹۴

با کدام مقادیر m ، منحنی به معادلهٔ $y=(m-1)x^{2}-3x+m+2$ از هر چهار ناحیه می گذرد و دارای می نیمم است ؟

۱) $\mathbb{R}$ **۲) $\varnothing$** ۳) $m>1$ ۴) $m<-2$

$$y=(m-1)x^{2}-3x+m+2\xrightarrow{(I)\cap(II)}\varnothing$$

$$\text{I)}\ a>0\longrightarrow m-1>0\longrightarrow \boxed{m>1}$$

$$\text{II)}\ P=\frac{c}{a}<0\longrightarrow \frac{m+2}{m-1}<0\longrightarrow \boxed{-2<m<1}$$

۹۵

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^2-5x+1=0$ باشند ، ریشه های کدام معادلهٔ زیر $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ می باشد ؟

۱) $x^2+17x+1=0$ ۲) $x^2-17x+1=0$

۳) $x^2-23x+1=0$ ۴) $x^2+23x+1=0$

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=5 \qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$$

$$S'=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=25-2=23$$

$$P'=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1 \qquad x^2-S'x+P'=0\longrightarrow\boxed{x^2-23x+1=0}$$

۹۶

معادله ای که هر یک از ریشه ها یش دو برابر ریشه های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشد ، کدام است ؟

۱) $x^2+6x+4=0$ ۲) $x^2-6x-4=0$

۳) $x^2+6x-4=0$ ۴) $x^2-6x+4=0$

$$x^2-3x+1=0\xrightarrow{\alpha}\beta=2\alpha\longrightarrow\alpha=\frac{\beta}{2}$$

$$(\frac{\beta}{2})^2-3(\frac{\beta}{2})+1=0\longrightarrow\frac{\beta^2}{4}-\frac{3\beta}{2}+1=0\longrightarrow\boxed{\beta^2-6\beta+4=0}$$

۹۷

نقطهٔ $S(2,-5)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y=2x^2+nx+m$ است ، این سهمی خط $y=-3$ را در دو نقطه قطع می کند ، مجموع طول های نقاط برخورد کدام اند ؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) -5 ۴) -4

$$y=2x^2+nx+m \qquad S(2,-5)$$

$$\text{I)}\quad x=-\frac{b}{2a}\longrightarrow 2=-\frac{n}{4}\longrightarrow\boxed{n=-8}$$

$$\text{II)}\quad y=2x^2-8x+m\xrightarrow{S(2,-5)}-5=8-16+m\longrightarrow\boxed{m=3}$$

$$\text{III)}\quad y=2x^2-8x+3\xrightarrow{y=-3}-3=2x^2-8x+3\longrightarrow 2x^2-8x+6=0$$

$$x^2-4x+3=0\longrightarrow(x-1)(x-3)=0\longrightarrow\boxed{x=1\wedge x=3}$$

۹۸

به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $mx^{۲}+(m+۲)x+\frac{m}{۲}+\frac{۷}{۴}$ ، همواره منفی است ؟

۱) $m<-۴$ ۲) $-۴<m<۱$ ۳) $-۱<m<۴$ ۴) $m<۰$

$$mx^{۲}+(m+۲)x+\frac{m}{۲}+\frac{۷}{۴}<۰ \longrightarrow \begin{cases} \text{I)}\ \ a<۰ \longrightarrow \boxed{m<۰} \\ \text{II)}\ \ \Delta<۰ \end{cases}$$

$$(m+۲)^{۲}-۴(m)(\frac{۲m+۷}{۴})<۰ \longrightarrow m^{۲}+۴m+۴-۲m^{۲}-۷m<۰$$

$$-m^{۲}-۳m+۴<۰ \longrightarrow m^{۲}+۳m-۴>۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \boxed{a<-۴ \vee m>۱}$$

$$\xrightarrow{(I)\bigcap(II)} \boxed{m<-۴}$$

۹۹

به ازای کدام مقادیر m ، در معادلهٔ $x^{۲}+۷x+m^{۲}+m=۰$ ، یک ریشه از دو برابر ریشهٔ دیگر ، ۲ واحد بیش تر است ؟

۱) $-۴,۳$ ۲) $-۳,۴$ ۳) $-۵,۲$ ۴) $-۲,۵$

$$x^{۲}+۷x+m^{۲}+m=۰ \xrightarrow{\alpha,\beta} \beta=۲\alpha+۲ \qquad S=\alpha+\beta=-۷$$

$$\begin{cases} ۲\alpha-\beta=-۲ \\ \alpha+\beta=-۷ \end{cases} \longrightarrow ۳\alpha=-۹ \longrightarrow \boxed{\alpha=-۳} \longrightarrow \boxed{\beta=-۴}$$

$$P=\alpha.\beta=\frac{c}{a} \longrightarrow ۱۲=m^{۲}+m \longrightarrow m^{۲}+m-۱۲=۰ \longrightarrow (m+۴)(m-۳)=۰$$

$$m=-۴ \wedge m=۳$$

۱۰۰

اگر هر یک از ریشه های معادلهٔ $x^{۲}+ax+b=۰$ ، دو برابر قرینهٔ هر ریشه از معادلهٔ $x^{۲}+۴x-۱=۰$ باشد ، $a-b$ کدام است ؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۴

$$\text{I)}\ \ x^{۲}+۴x-۱=۰ \longrightarrow x \qquad \text{II)}\ \ x^{۲}+ax+b=۰ \xrightarrow{y=-۲x} x=-\frac{y}{۲}$$

$$\text{III)}\ \ (-\frac{y}{۲})^{۲}+۴(-\frac{y}{۲})-۱=۰ \longrightarrow \frac{y^{۲}}{۴}-۲y-۱=۰ \longrightarrow y^{۲}-۸y-۴=۰$$

$$a=-۸ \wedge b=-۴ \longrightarrow a-b=-۸+۴=-۴$$

۱۰۱

اگر معادلهٔ $x^۴-(m+۲)x^۲-۲m+۱=۰$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز باشد ، حدود m کدام است ؟

۱) $۰<m<\frac{۱}{۲}$ ۲) $-۲<m<۰$

۳) $m>۰ \vee m<-۲$ ۴) $m<-۳ \vee m>-\frac{۱}{۲}$

$$x^۴-(m+۲)x^۲-۲m+۱=۰ \xrightarrow{x^۲=t} \boxed{t^۲-(m+۲)t-۲m+۱=۰}$$

$$\text{I)}\quad \Delta>۰ \longrightarrow (m+۲)^۲-۴(۲m+۱)>۰ \longrightarrow m^۲+۱۲m>۰ \longrightarrow \boxed{m<-۱۲ \vee m>۰}$$

$$\text{II)}\quad P=\frac{c}{a}>۰ \longrightarrow -۲m+۱>۰ \longrightarrow \boxed{m<\frac{۱}{۲}}$$

$$\text{III)}\quad S=-\frac{b}{a}<۰ \longrightarrow m+۲>۰ \longrightarrow \boxed{m>-۲}$$

$$\xrightarrow{(\text{I})\cap(\text{II})\cap(\text{III})} ۰<m<\frac{۱}{۲}$$

۱۰۲

به ازای کدام مقدار m ، منحنی به معادلهٔ $y=۲x^۲+mx-m-\frac{۳}{۲}$ بر محور x ها مماس است ؟

۱) $۲,۶$ ۲) $-۲,-۶$ ۳) $۲,-۶$ ۴) $-۲,۶$

$$y=۲x^۲+mx-m-\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\Delta=۰} (m)^۲-۴(۲)(-m-\frac{۳}{۲})=۰ \longrightarrow m^۲+۸m+۱۲=۰$$

$$(m+۲)(m+۶)=۰ \longrightarrow m=-۲ \wedge m=-۶$$

۱۰۳

به ازای چه مقداری از a ، عبارت $(a+۱)x^۲-ax+\frac{۱}{۴}(a+۳)$ ، همواره منفی است ؟

۱) $-۱<a<-\frac{۳}{۴}$ ۲) $a<-۱$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

$$(a+۱)x^۲-ax+\frac{۱}{۴}(a+۳)<۰ \longrightarrow \begin{cases} \text{I)}\quad a<۰ \\ \text{II)}\quad \Delta<۰ \end{cases}$$

$$a+۱<۰ \longrightarrow \boxed{a<-۱}$$

$$(-a)^۲-۴(a+۱)(\frac{۱}{۴})(a+۳)<۰ \longrightarrow a^۲-a^۲-۴a-۳<۰ \longrightarrow \boxed{a>-\frac{۳}{۴}}$$

$$\xrightarrow{(\text{I})\cap(\text{II})} \varnothing$$

۱۰۴

مجموع ریشه های معادلهٔ $۲x^۲+\frac{۲}{x^۲}-x-\frac{۱}{x}=۶$ ، کدام است ؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

$$۲x^۲+\frac{۲}{x^۲}-x-\frac{۱}{x}=۶\longrightarrow ۲(x^۲+\frac{۱}{x^۲})-(x+\frac{۱}{x})-۶=۰$$

$$\boxed{x+\frac{۱}{x}=t}\longrightarrow (x+\frac{۱}{x})^۲=t^۲\longrightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲=t^۲\longrightarrow \boxed{x^۲+\frac{۱}{x^۲}=t^۲-۲}$$

$$۲(t^۲-۲)-t-۶=۰\longrightarrow ۲t^۲-t-۱۰=۰\longrightarrow t=\frac{۵}{۲}\wedge t=-۲$$

$$t=\frac{۵}{۲}\longrightarrow x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲}\xrightarrow{x\neq ۰}۲x^۲-۵x+۲=۰\xrightarrow{\Delta=۹}\begin{cases}x=۲\\ x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$t=-۲\longrightarrow x+\frac{۱}{x}=-۲\xrightarrow{x\neq ۰}x^۲+۲x+۱=۰\xrightarrow{\Delta=۰}\begin{cases}x=-۱\\ x=-۱\end{cases}$$

$$۲+\frac{۱}{۲}-۱-۱=\frac{۱}{۲}$$

۱۰۵

به ازای کدام مقدار m ، معادلهٔ درجه دوم $m(x^۲+۱)+۲x^۲+۴x=۱$ دارای دو ریشهٔ منفی می باشد ؟

۱) $-۳<m<-۲$ ۲) $-۲<m<۱$

۳) $۱<m<۲$ ۴) $-۳<m<۱$

$$\underline{mx^۲}+m+\underline{۲x^۲}+۴x-۱=۰\longrightarrow \boxed{(m+۲)x^۲+۴x+m-۱=۰}$$

$$\text{I)}\quad \Delta>۰\longrightarrow ۱۶-۴(m+۲)(m-۱)>۰\longrightarrow m^۲+m-۶>۰\longrightarrow (m+۳)(m-۲)>۰$$

$$\boxed{-۳<m<۲}$$

$$\text{II)}\quad P=\frac{c}{a}>۰\longrightarrow \frac{m-۱}{m+۲}>۰\longrightarrow \boxed{m<-۲\vee m>۱}$$

$$\text{III)}\quad S=-\frac{b}{a}<۰\longrightarrow \frac{-۴}{m+۲}<۰\longrightarrow m+۲>۰\longrightarrow \boxed{m>-۲}$$

$$\xrightarrow{(\text{I})\cap(\text{II})\cap(\text{III})}۱<m<۲$$

۱۰۶ نمودار تابع $f(x)=(m-1)x^2+2mx+m+3$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می گذرد ، حدود m کدام است ؟

۱) $-3<m<1$ ۲) $-4<m<0$

۳) $m>1 \vee m<-3$ ۴) $m<-4 \vee m>0$

نکته : اگر معادلهٔ $f(x)=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی ، یکی مثبت و دیگری منفی باشد ، آن گاه نمودار تابع f از هر چهار ناحیه می گذرد . شرط آن که معادله دارای دو ریشهٔ مختلف العلامت باشد آن است که $P=\frac{c}{a}<0$ باشد .

$$P=\frac{c}{a}<0 \longrightarrow \frac{m+3}{2(m-1)}<0 \longrightarrow \frac{m+3}{m-1}<0 \longrightarrow -3<m<1$$

۱۰۷ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند ، معادلهٔ درجه دومی که ریشه های آن -2α و -2β باشد ، کدام است ؟

۱) $x^2+6x+2=0$ ۲) $x^2+6x+4=0$

۳) $x^2-6x+4=0$ ۴) $x^2-6x+6=0$

$$x^2-3x+1=0 \longrightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=3 \qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$$

$$S'=-2\alpha-2\beta=-2(\alpha+\beta)=-6$$

$$P'=(-2\alpha)(-2\beta)=4 \qquad x^2-S'x+P'=0 \longrightarrow \boxed{x^2+6x+4=0}$$

۱۰۸ به ازای کدام مقادیر m ، سهمی به معادلهٔ $y=(m+3)x^2+4x+m$ ، همواره در زیر محور x ها است ؟

۱) $m<-4$ ۲) $m<-3$ ۳) $m<-2$ ۴) $m<0$

نکته : در صورتی منحنی محور x ها را قطع نمی کند که : I) $\Delta<0$ II) $a<0$

$$\text{I)}\ \Delta'<0 \longrightarrow (2)^2-m(m+3)<0 \longrightarrow m^2+3m-4>0 \longrightarrow (m+4)(m-1)>0$$

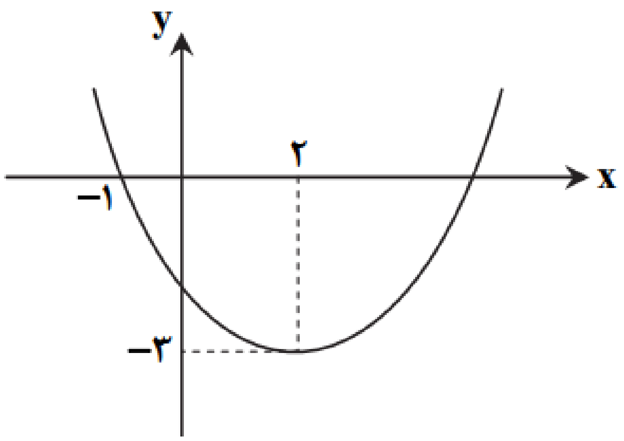
$$m<-4 \vee m>1$$

$$\text{II)}\ a<0 \longrightarrow m+3<0 \longrightarrow m<-3 \qquad (\text{I})\cap(\text{II}) \longrightarrow \boxed{m<-4}$$

۱۰۹

نمودار سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به صورت زیر است ، مقدار $f(۸)$ کدام است ؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۸



$$S(۲,-۳)\longrightarrow x=-\frac{b}{۲a}\longrightarrow ۲=-\frac{b}{۲a}\longrightarrow \boxed{b=-۴a}$$

$$S(۲,-۳)\longrightarrow -۳=۴a+۲b+c\longrightarrow -۳=۴a-۸a+c\longrightarrow \boxed{۴a-c=۳}$$

$$(-۱,۰)\longrightarrow ۰=a-b+c\longrightarrow ۵a+c=۰\longrightarrow \boxed{c=-۵a}$$

$$۴a+۵a=۳\longrightarrow \boxed{a=\frac{۱}{۳}}\longrightarrow \boxed{b=-\frac{۴}{۳}}\longrightarrow \boxed{c=-\frac{۵}{۳}}$$

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۲}-\frac{۴}{۳}x-\frac{۵}{۳}\longrightarrow f(۸)=\frac{۶۴}{۳}-\frac{۳۲}{۳}-\frac{۵}{۳}=\frac{۲۷}{۳}=۹$$

۱۱۰

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^{۲}-۲x-۱=۰$ باشند ، کدام معادله ریشه هایش $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ است ؟

۱) $x^{۲}+x-۲=۰$ ۲) $x^{۲}-x-۲=۰$

۳) $x^{۲}-۲x-۱=۰$ ۴) $۲x^{۲}-۲x-۱=۰$

$$x^{۲}-۲x-۱=۰\longrightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۲ \qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

$$S'=(\alpha+\beta)+(\alpha\beta)=۲-۱=۱$$

$$P'=(\alpha+\beta)(\alpha\beta)=-۲ \qquad x^{۲}-S'x+P'=۰\longrightarrow \boxed{x^{۲}-x-۲=۰}$$

۱۱۱

اگر یکی از ریشه های معادلهٔ $x^۲+\frac{۱}{k}x+۲۷=۰$ ، مربع ریشهٔ دیگر باشد ، آن گاه $۱۲k$ کدام است ؟

۱) ۲ ‏ ‏ ۲) -۲ ‏ ‏ ۳) ۱ ‏ ‏ ۴) -۱

$$x^۲+\frac{۱}{k}x+۲۷=۰\xrightarrow[\beta=\alpha^۲]{\alpha,\beta}P=\alpha\beta=۲۷\xrightarrow{\beta=\alpha^۲}\alpha^۳=۲۷\longrightarrow\boxed{\alpha=۳}\wedge\boxed{\beta=۹}$$

$$S=\alpha+\beta=-\frac{۱}{k}\longrightarrow ۱۲=-\frac{۱}{k}\longrightarrow k=-\frac{۱}{۱۲}\longrightarrow ۱۲k=۱۲(-\frac{۱}{۱۲})=-۱$$

۱۱۲

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^۲-x=۳$ باشند ، حاصل $(\alpha-\beta)^۲$ کدام است ؟

۱) ۱۱ ‏ ‏ ۲) ۱۰ ‏ ‏ ۳) ۱۲ ‏ ‏ ۴) ۱۳

$$x^۲-x-۳=۰\longrightarrow S=\alpha+\beta=۱\quad\wedge\quad P=\alpha\beta=-۳$$

$$(\alpha-\beta)^۲=(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta=۱+۱۲=۱۲$$

۱۱۳

ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادلهٔ $۳x^۲+۵x+۱=۰$ یک واحد بیشتر است ؟

۱) $x^۲+۳x-۱=۰$ ‏ ‏ ۲) $x^۲-۳x+۱=۰$

۳) $x^۲+۳x+۱=۰$ ‏ ‏ ۴) $x^۲-۳x-۱=۰$

$$۳x^۲+۵x+۱=۰\longrightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{۵}{۳}\qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}$$

$$S'=(\frac{۱}{\alpha}+۱)+(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=-۵+۲=۳$$

$$P'=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=۳-۵+۱=-۱$$

$$x^۲-S'x+P'=۰\longrightarrow\boxed{x^۲+۳x-۱=۰}$$

۱۱۴

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $۳x^۲-۲۱x+۸=۰$ باشند ، حاصل $\alpha^۲+\beta^۲+۲\alpha\beta$ کدام است ؟

۱) $\frac{۸}{۳}$ ‏ ‏ ۲) ۴۹ ‏ ‏ ۳) $\frac{۶۴}{۹}$ ‏ ‏ ۴) ۷

$$۳x^۲-۲۱x+۸=۰\longrightarrow S=\alpha+\beta=۷\quad\wedge\quad P=\alpha\beta=\frac{۸}{۳}$$

$$\alpha^۲+\beta^۲+۲\alpha\beta=(\alpha+\beta)^۲=۴۹$$

۱۱۵	اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^2-2x-1=0$ باشند ، کدام معادله ریشه هایش $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta-1$ است ؟ ۱) $x^2-4x-4=0$ ۲) $-2x^2+4=0$ **۳) $x^2-4=0$** ۴) $x^2+4x-4=0$ $x^2-2x-1=0 \longrightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=2$ $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$ $S'=(\alpha+\beta)+(\alpha\beta-1)=2+(-1-1)=0$ $P'=(\alpha+\beta)(\alpha\beta-1)=(2)(-2)=-4$ $x^2-S'x+P'=0 \longrightarrow \boxed{x^2-4=0}$
۱۱۶	اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ باشند ، حاصل $(\alpha+2)(\beta+2)$ کدام است ؟ ۱) ۱۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ **۴) ۱۶** $x^2-5x+2=0 \longrightarrow S=\alpha+\beta=5 \ \wedge\ P=\alpha\beta=2$ $(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=2+10+4=16$
۱۱۷	در مورد معادلهٔ $5x^2+13x-7=0$ ، کدام گزینه درست است ؟ ۱) دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت متمایز است ۲) دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی متمایز است **۳) دارای دو ریشهٔ حقیقی مختلف العلامت است** ۴) فاقد ریشهٔ حقیقی است **نکته :** در معادلهٔ درجه دوم ، اگر a و c مختلف العلامت باشند ، آن گاه Δ مثبت است و معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است . از طرفی اگر حاصل ضرب ریشه ها منفی باشد ، ریشه ها مختلف العلامت هستند . $5x^2+13x-7=0 \longrightarrow \Delta>0 \ \wedge\ P=-\frac{7}{5}<0$
۱۱۸	اگر $x=-2$ ، ریشه ای از معادلهٔ $x^2+3x+k+1=0$ باشد ، ریشهٔ دیگر کدام است ؟ **۱) $-k$** ۲) k ۳) $2k$ ۴) $-2k$ $x^2+3x+k+1=0 \xrightarrow{x=-2} 4-6+k+1=0 \longrightarrow \boxed{k=1}$ $x^2+3x+2=0 \longrightarrow (x+2)(x+1)=0 \longrightarrow x=-2 \ \wedge\ \boxed{x=-1} \longrightarrow x=-k$

۱۱۹

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^{۲}+۳x-۱=۰$ باشند ، ریشه های کدام معادله ، $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ است ؟

۱) $x^{۲}-۳x-۱=۰$ ‏ ۲) $x^{۲}+۳x-۱=۰$

۳) $x^{۲}+۳x+۱=۰$ ‏ ۴) $x^{۲}-۳x+۱=۰$

$$x^{۲}+۳x-۱=۰ \longrightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۳ \qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

$$S'=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۳ \qquad P'=\frac{۱}{\alpha}\times\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\alpha\beta}=-۱$$

$$x^{۲}-S'x+P'=۰ \longrightarrow \boxed{x^{۲}-۳x-۱=۰}$$

۱۲۰

ریشه های کدام معادله ، دو برابر ریشه های معادلهٔ $(x+۱)^{۲}=۳x+۲$ می باشد ؟

۱) $x^{۲}-۲x+۲=۰$ ‏ ۲) $x^{۲}+۲x-۲=۰$

۳) $x^{۲}-۲x-۴=۰$ ‏ ۴) $x^{۲}-۲x-۲=۰$

$$x^{۲}-x-۱=۰ \longrightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۱ \qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

$$S'=۲\alpha+۲\beta=۲(\alpha+\beta)=۲ \qquad P'=۲\alpha\times۲\beta=۴(\alpha\beta)=-۴$$

$$x^{۲}-S'x+P'=۰ \longrightarrow \boxed{x^{۲}-۲x-۴=۰}$$

۱۲۱

مستطیل طلائی ، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل ، برابر با نسبت طول به عرض آن می باشد . نسبت طول به عرض مستطیل کدام است ؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ‏ ۲) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ‏ ۳) $\frac{\sqrt{۵}+۲}{۲}$ ‏ ۴) $\frac{\sqrt{۵}-۲}{۲}$

$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y} \longrightarrow ۱+\frac{y}{x}=\frac{x}{y} \xrightarrow{\frac{x}{y}=t} ۱+\frac{۱}{t}=t \longrightarrow t+۱=t^{۲} \longrightarrow t^{۲}-t-۱=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=۵} \boxed{t_{۱}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}} \longrightarrow t_{۲}=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{x,y>۰} \boxed{\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}$$

۱۲۲ معادلهٔ $۴x^۶+۱=۵x^۳$ ، چند ریشهٔ حقیقی دارد ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

$$۴x^۶+۱=۵x^۳ \longrightarrow ۴x^۶-۵x^۳+۱=۰ \xrightarrow{x^۳=t} ۴t^۲-۵t+۱=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰}$$

$$t=۱ \longrightarrow x^۳=۱ \longrightarrow \boxed{x=۱} \quad \wedge \quad t=\frac{۱}{۴} \longrightarrow x^۳=\frac{۱}{۴} \longrightarrow \boxed{x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}}$$

۱۲۳ اگر $y+۳x=۱۲$ باشد ، بیشترین مقدار xy کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

$$y+۳x=۱۲ \longrightarrow y=۱۲-۳x \longrightarrow xy=x(۱۲-۳x)=۱۲x-۳x^۲$$

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۲}{-۶}=۲ \longrightarrow y=۱۲-۶=۶ \qquad \boxed{xy=۱۲}$$

۱۲۴ اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین ریشهٔ معادلهٔ $x^۴-۲۰x^۲+۳۶=۰$ ، چند برابر $\sqrt{۲}$ است ؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

$$x^۴-۲۰x^۲+۳۶=۰ \xrightarrow{x^۲=t} t^۲-۲۰t+۳۶=۰ \longrightarrow (t-۲)(t-۱۸)=۰$$

$$t=۲ \longrightarrow x^۲=۲ \longrightarrow x=\pm\sqrt{۲} \quad \wedge \quad t=۱۸ \longrightarrow x^۲=۱۸ \longrightarrow x=\pm ۳\sqrt{۲}$$

$$۳\sqrt{۲}-(-۳\sqrt{۲})=۶\sqrt{۲}$$

۱۲۵ صفرهای تابع درجه دوم f به صورت $\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$ و $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$ می باشد ، اگر نمودار تابع f ، محور y ها را به عرض (-۱) قطع کند ، حاصل $f(\frac{۱}{۲})$ کدام است ؟

۱) $\frac{۳-۲\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{-۳-۲\sqrt{۳}}{۲}$

$$f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲) \longrightarrow f(x)=a(x-\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲})(x-\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲})$$

$$(۰,-۱) \longrightarrow a(-\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲})=-۱ \longrightarrow a(\frac{-۲}{۴})=-۱ \longrightarrow \boxed{a=۲}$$

$$f(x)=۲(x-\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲})(x-\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}) \longrightarrow f(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲}-\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲})(\frac{۱}{۲}-\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲})$$

$$=۲(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۳}{۲}$$

۱۲۶

تعداد ریشه های معادلهٔ $(x^۲-۱)^۲-۳(x^۲-۱)-۴=۰$ ، کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$(x^۲-۱)^۲+۳(x^۲-۱)-۴=۰ \xrightarrow{x^۲-۱=t} t^۲+۳t-۴=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰}$

$t=۱ \longrightarrow x^۲-۱=۱ \longrightarrow x^۲=۲ \longrightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{۲}}$

$t=-۴ \longrightarrow x^۲-۱=-۴ \longrightarrow x^۲=-۳$

۱۲۷

ضابطهٔ تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به صورت $f(x)=x^۲-۶x+۸$ است ، حاصل ضرب صفرهای تابع $y=f(x+۳)$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

$f(x)=x^۲-۶x+۸ \longrightarrow f(x+۳)=(x+۳)^۲-۶(x+۳)+۸=x^۲-۱$

$y=۰ \longrightarrow x^۲-۱=۰ \longrightarrow x^۲=۱ \longrightarrow \boxed{x=\pm۱} \longrightarrow ۱\times(-۱)=-۱$

۱۲۸

معادلهٔ $mx^۲+(m+۱)x+m=۲$ دارای دو ریشهٔ مختلف العلامت است ، حدود m کدام است ؟

۱) $۰<m<۲$ ۲) $-۱<m<۰$ ۳) $۰<m<۱$ ۴) $-۲<m<۰$

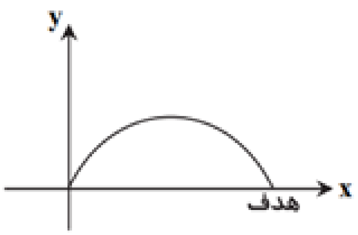
$mx^۲+(m+۱)x+m-۲=۰ \longrightarrow P=\frac{c}{a}<۰ \longrightarrow \frac{m-۲}{m}<۰ \longrightarrow \boxed{۰<m<۲}$

نکته : هرگاه $p<۰$ باشد ، چون ac منفی است ، Δ همواره مثبت می شود و نیازی به بررسی Δ نیست .

۱۲۹

توپی را همانند شکل ، به سمت هدفی پرتاب می کنیم ، معادلهٔ حرکت توپ به شکل یک تابع درجه دو با ضابطهٔ $y=-\frac{۱}{۴۰}x^۲+x$ است که x مسافت افقی طی شده (بر حسب متر) و y ارتفاع توپ از سطح زمین (بر حسب متر) می باشد . بیشترین ارتفاعی که توپ از سطح زمین دارد ، چند متر است .

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰



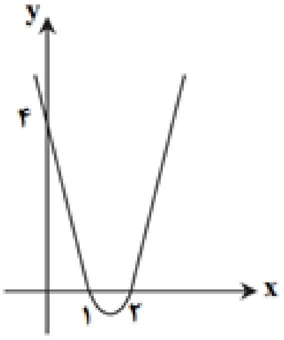
$y=-\frac{۱}{۴۰}x^۲+x \longrightarrow x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱}{۲(-\frac{۱}{۴۰})}=۲۰ \longrightarrow y_{max}=f(۲۰)=۱۰$

۱۳۰

شکل مقابل ، نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ است ، مقدار $f(۴)$ کدام است ؟

۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۱۰ **۴) ۱۲**



$$f(x)=ax^{۲}+bx+c\xrightarrow[x=۲]{x=۱}f(x)=a(x-۱)(x-۲)\xrightarrow{(۰,۴)}f(۰)=۴$$

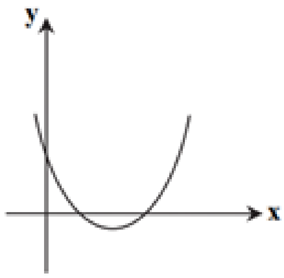
$$a(-۱)(-۲)=۴\longrightarrow\boxed{a=۲}\longrightarrow f(x)=۲(x-۱)(x-۲)\longrightarrow\boxed{f(۴)=۱۲}$$

۱۳۱

اگر شکل مقابل ، نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-mx+m+\frac{۵}{۴}$ باشد ، حدود m کدام است ؟

۱) $m>۰$ ۲) $-۱<m<۰$

۳) $m>۵$ ۴) $m>-\frac{۵}{۴}$



نکته : تابع $y=ax^{۲}+bx+c$ در صورتی محور طول ها را در دو نقطه با طول های مثبت قطع می کند که سه شرط زیر برقرار باشد :

$$۱)\ \Delta>۰\qquad ۲)\ P=\frac{c}{a}>۰\qquad ۳)\ S=-\frac{b}{a}>۰$$

$$f(x)=x^{۲}-mx+m+\frac{۵}{۴}$$

$$\text{I)}\ \ \Delta>۰\longrightarrow(-m)^{۲}-۴(۱)(m+\frac{۵}{۴})>۰\longrightarrow m^{۲}-۴m-۵>۰$$

$$(m-۵)(m+۱)>۰\longrightarrow\boxed{m<-۱\vee m>۵}$$

$$\text{II)}\ \ a>۰\longrightarrow۱>۰\qquad\qquad \text{III)}\ \ b<۰\longrightarrow-m<۰\longrightarrow\boxed{m>۰}$$

$$\text{IV)}\ \ c>۰\longrightarrow m+\frac{۵}{۴}>۰\longrightarrow\boxed{m>-\frac{۵}{۴}}\qquad\xrightarrow{\cap}\boxed{m>۵}$$

۱۳۲

منحنی تابع $y=-x^{۲}+mx-n$ ، محور تقارن خود را در نقطهٔ $(۳,۶)$ قطع می کند ، منحنی محور yها را در کدام عرض قطع می کند ؟

۱) ۳ ۲) **−۳** ۳) ۶ ۴) −۶

$$y=-x^{۲}+mx-n\xrightarrow{S(۳,۶)}x=-\frac{b}{۲a}\longrightarrow ۳=-\frac{m}{-۲}\longrightarrow \boxed{m=۶}$$

$$y=-x^{۲}+۶x-n\xrightarrow{S(۳,۶)}۶=-۹+۱۸-n\longrightarrow \boxed{n=۳}$$

$$y=-x^{۲}+۶x-۳\xrightarrow{x=۰}\boxed{y=-۳}$$

۱۳۳

اگر عبارت $(m-۱)x^{۲}+۳x+m-۱$ ، به ازای هر مقدار x ، منفی باشد ، حدود m کدام است ؟

۱) $m<۰$ ۲) $\mathbf{m<-\frac{۱}{۲}}$ ۳) $m<۱$ ۴) $m<\frac{۳}{۲}$

نکته : در صورتی عبارت درجه دوم $ax^{۲}+bx+c$ همواره منفی است که : $\text{I)}\ a<۰ \qquad \text{II)}\ \Delta<۰$

$$(m-۱)x^{۲}+۳x+m-۱<۰\xrightarrow{(I)\cap(II)}\boxed{m<-\frac{۱}{۲}}$$

$$\text{I)}\ a<۰\longrightarrow m-۱<۰\longrightarrow \boxed{m<۱}$$

$$\text{II)}\ \Delta<۰\longrightarrow (۳)^{۲}-۴(m-۱)(m-۱)<۰\longrightarrow ۹-۴(m-۱)^{۲}<۰$$

$$-۴(m-۱)^{۲}<-۹\longrightarrow (m-۱)^{۲}>\frac{۹}{۴}\longrightarrow$$

$$m-۱>\frac{۳}{۲}\longrightarrow \boxed{m>\frac{۵}{۲}}\ \vee\ m-۱<-\frac{۳}{۲}\longrightarrow \boxed{m<-\frac{۱}{۲}}$$

۱۳۴

اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x^{۲}-۳x+۱=۰$ باشند ، حاصل $\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha^{۳}+\beta^{۳}}$ کدام است ؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲۷}$ ۳) $\mathbf{\frac{\sqrt{۵}}{۱۸}}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

$$x^{۲}-۳x+۱=۰\longrightarrow S=\alpha+\beta=۳\ \wedge\ P=\alpha\beta=۱$$

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\longrightarrow A^{۲}=\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=۳+۲=۵\longrightarrow A=\sqrt{۵}$$

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۲۷-۹=۱۸ \qquad \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha^{۳}+\beta^{۳}}=\frac{\sqrt{۵}}{۱۸}$$

۱۳۵ مجموع ریشه های حقیقی معادلهٔ $(x^۲-x)^۲+۴(x^۲-x)-۹۶=۰$ ، کدام است ؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) -۲ ۴) -۱

$$(x^۲-x)^۲+۴(x^۲-x)-۹۶=۰ \xrightarrow{x^۲-x=t} t^۲+۴t-۹۶=۰ \longrightarrow (t+۱۲)(t-۸)=۰$$

$$t=-۱۲ \longrightarrow x^۲-x=-۱۲ \longrightarrow x^۲-x+۱۲=۰ \longrightarrow \Delta<۰$$

$$t=۸ \longrightarrow x^۲-x=۸ \longrightarrow x^۲-x-۸=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \boxed{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۱}$$

۱۳۶ معادلهٔ درجه دوم $x^۲-۲x-۵=۰$ مفروض است ، معادلهٔ درجه دومی که ریشه های آن دو برابر مربع ریشه های این معادله باشد ، کدام است ؟

۱) $x^۲-۲۶x+۱۴۴=۰$ ۲) $x^۲-۲۶x+۱۰۰=۰$

۳) $x^۲-۲۸x+۱۴۴=۰$ ۴) $x^۲-۲۸x+۱۰۰=۰$

$$x^۲-۲x-۵=۰ \longrightarrow S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۲ \qquad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۵$$

$$S'=۲\alpha^۲+۲\beta^۲=۲(\alpha^۲+\beta^۲)=۲\left[(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta\right]=۲(۴+۱۰)=۲۸$$

$$P'=۲\alpha^۲\times۲\beta^۲=۴(\alpha\beta)^۲=۴(۲۵)=۱۰۰$$

$$x^۲-S'x+P'=۰ \longrightarrow \boxed{x^۲-۲۸x+۱۰۰=۰}$$