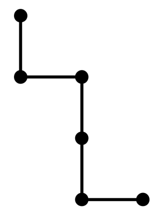
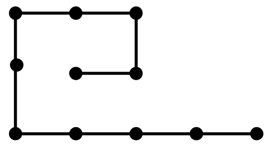
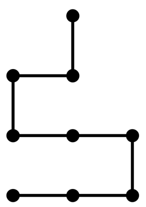
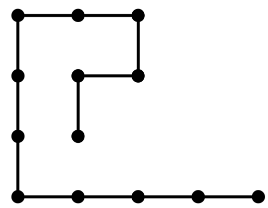
آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور ☺

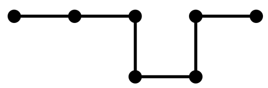
۱. با کنار هم قرار دادن دو نسخهٔ مشابه از کدام نوع سیم، می‌توان یک چندضلعی بسته ساخت که خودش را قطع نکند و همهٔ اضلاعش افقی و یا عمودی باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵) 

۲. در مثلث ABC زاویهٔ $\angle BAC = 60^\circ$ است. نقطهٔ E درون ضلع AC و نقطهٔ D روی امتداد ضلع BC از این مثلث به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که C بین B و D قرار دارد و به علاوه $AB = DE$. اگر $\angle DEC = 30^\circ$ باشد، نسبت $\frac{BC}{CD}$ چند است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۵) $\sqrt{3}$

۳. اعداد حقیقی a، b، c و d در تساوی‌های $ab = 2$، $b + c = 3$، $cd = 4$ و $d + a = 5$ صدق می‌کنند. چند مقدار ممکن برای a وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) بی‌نهایت

۴. سه جفت پیچ و مهرهٔ کوچک، متوسط و بزرگ داریم که نمی‌دانیم کدام پیچ برای کدام مهره است. هر بار می‌توانیم یک پیچ و یک مهره را با هم امتحان کنیم. کم‌ترین تعداد امتحان‌های مورد نیاز برای این که در هر صورت مهرهٔ نظیر هر پیچ را بیابیم، برابر کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

a و b دو عدد حقیقی هستند که $a^۲ + b^۲ = ۸$. حداکثر مقدار $ab - (b + a)۲$ چند است؟

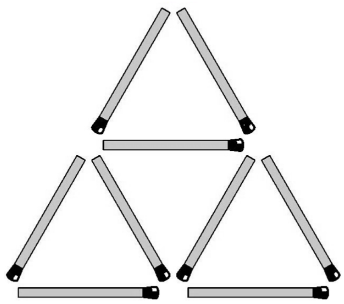
۱) ۴   ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۸}$ ۴) ۶   ۵) ۸

آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور ☺

۱۰. در ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ نقطه‌های P، Q، R، S و T را به ترتیب وسط‌های AB، BC، CD، AC و BD هستند. می‌دانیم نسبت مساحت مثلث PQR به مساحت مثلث PST برابر $\frac{۱۳۹۵}{۱۳۹۴}$ است. نسبت دو قاعدهٔ این ذوزنقه کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳۹۴}$ ۲) $\sqrt{۱۳۹۵}$ ۳) ۶۹۷ ۴) ۱۳۹۵ ۵) ۲۷۸۹

۱۱. به چند طریق می‌توان ۳ چوب‌کبریت از ۹ چوب‌کبریت موجود در شکل روبه‌رو را حذف کرد که هیچ مثلثی در شکل باقی نماند؟



۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۷ ۵) ۸۰

۱۲. یک مستطیل با اضلاع ۳۰ و ۴۰ را با رسم خطوطی موازی اضلاع به شبکه‌ای ۴۰×۳۰ از مربع‌های واحد تبدیل کرده‌ایم. یکی از قطرهای مستطیل اولیه را در نظر بگیرید. دایرهٔ محاطی چند تا از مربع‌های واحد شبکه‌بندی به این قطر مماس هستند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۸ ۵) ۴۰

۱۳. طول جهش‌های یک قورباغه می‌تواند هر یک از اعداد $۱, ۵, ۵^۲, ۵^۳, \ldots$ باشد. این قورباغه روی نقطهٔ صفر از محور اعداد صحیح نشسته و در هر مرحله می‌تواند به سمت راست یا چپ جهش کند. اگر این قورباغه نتواند دو جهش با طول مساوی انجام دهد، به چند تا از اعداد $\{۱, ۲, \ldots, ۱۳۹۴\}$ می‌تواند برود؟

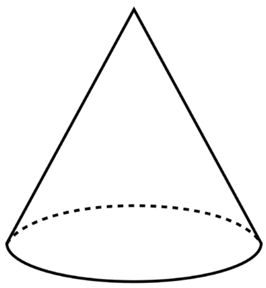
۱) ۶۳ ۲) ۶۴ ۳) ۸۱ ۴) ۱۲۱ ۵) ۲۴۳

۱۴. چند چهارتایی مرتب (a,b,c,d) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق کند؟

$$\begin{cases} a^۳ + bc = d^۳ \\ b^۳ + cd = a^۳ \\ c^۳ + da = b^۳ \\ d^۳ + ab = c^۳ \end{cases}$$

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۲۵ ۴) ۴۹ ۵) بی‌نهایت

۱۵. نقطهٔ P در جسم A را «خاص» گوییم، اگر نقطه‌های متمایز X و Y در A وجود نداشته باشند که P نقطهٔ وسط پاره‌خط XY باشد. کدام گزینه در مورد نقاط خاص یک مخروط توپر با قاعدهٔ دایره صحیح است؟



۱) مخروط تنها یک نقطهٔ خاص دارد.
۲) هر خطی که وجه دایره‌ای مخروط را قطع کند، حتماً شامل یک نقطهٔ خاص مخروط است.
۳) هر صفحه‌ای که مخروط را قطع کند، حتماً شامل نقطه‌ای خاص از مخروط است.
۴) همهٔ نقطه‌های سطح جانبی مخروط، خاص هستند.
۵) یک و فقط یک کره در فضا وجود دارد که همهٔ نقاط خاص مخروط روی سطح آن قرار بگیرند.

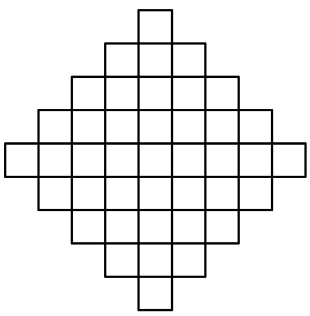
۱۶. علی فرمولی برای چندجمله‌ای‌های درجهٔ ۲ کشف کرده است که با کمک آن می‌تواند مقدار چندجمله‌ای درجهٔ دویی را در نقطهٔ ۳ بر حسب مقدار آن در نقاط صفر و ۱ و ۲ به دست آورد. فرمول علی برای چندجمله‌ای P به شکل زیر است:

$$P(۳) = aP(۰) + bP(۱) + cP(۲),$$

که در آن a، b و c سه عدد ثابت هستند. این سه عدد را پیدا کنید و مشخص کنید که مقدار $a - b + c$ چند است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶   ۵) ۷

۱۷. به چند طریق می‌توان در شکل روبه‌رو ۸ خانه را انتخاب کرد که هیچ دو تایی از آن‌ها هم‌سطر و یا هم‌ستون نباشند؟



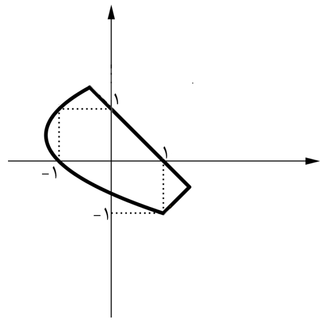
۱) ۱۵   ۲) ۲۰   ۳) ۲۸   ۴) ۳۲   ۵) ۶۴

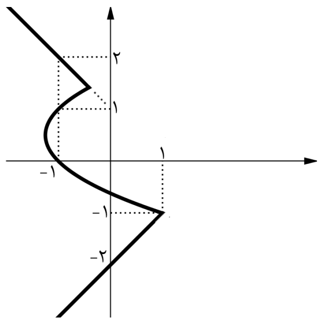
آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور ☺

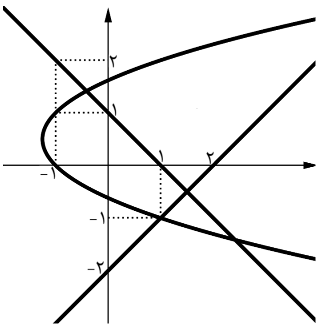
۱۸. حداکثر چند عدد از میان اعداد $\{۱,۲,\ldots,۱۳۹۴\}$ می‌توان انتخاب کرد که حاصل‌ضرب هر ۵ تا از آن‌ها مضرب ۱۴ باشد؟

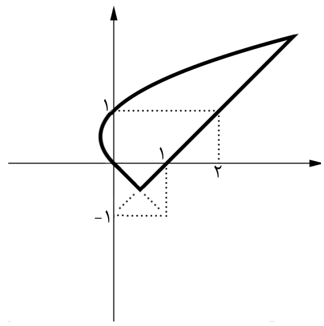
۱) ۹۹   ۲) ۱۰۳   ۳) ۱۰۷   ۴) ۱۱۱   ۵) ۱۱۴

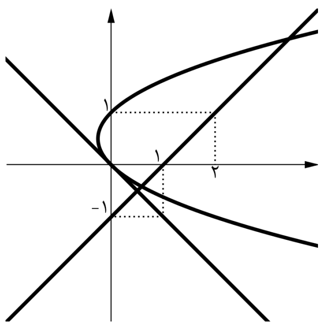
۱۹. کدام گزینه مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند (x,y) در صفحه را با این خاصیت نمایش می‌دهد که بیش‌ترین مقدار در بین سه عبارت $x-y-۱$، $x+y$ و $y^۲-x-y$ برابر یک است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۵)


۲۰. در ابتدای روز اول یک ویروس موذی وارد بدن شده است. در انتهای هر روز، هر ویروس موذی که k روز عمر کرده باشد، k ویروس موذی جدید تولید می‌کند و خودش نیز به زندگی ادامه می‌دهد. در انتهای روز ششم چند ویروس موذی متولد می‌شود؟

۱) ۸۹   ۲) ۱۱۲   ۳) ۱۲۸   ۴) ۱۴۴   ۵) ۲۴۳

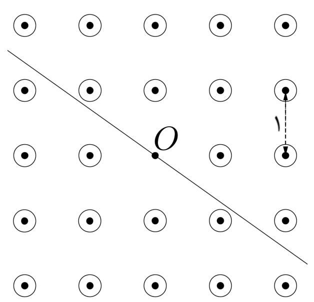
۲۱. به چند طریق می‌توان عدد $۱۵۰^۷$ را به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی (بیش از یک عدد) نوشت که در آن ترتیب اعداد مهم نباشد؟

۱) صفر   ۲) ۵۹   ۳) ۱۱۹   ۴) ۱۷۹   ۵) ۲۳۹

۲۲. به چند طریق می‌توان یک جدول 7×1 را با کاشی‌های 2×1 پر کرد، طوری که هر خانه توسط حداقل یک کاشی و حداکثر دو کاشی پر شده باشد؟

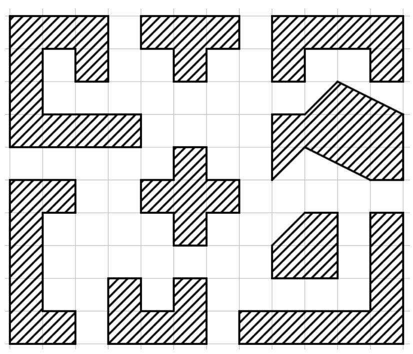
۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸ ۵) ۱۹

۲۳. می‌خواهیم در تمام نقاط یک شبکهٔ منظم 5×5، غیر از نقطهٔ مرکزی، ستون‌هایی استوانه‌ای و برابر نصب کنیم، به‌نحوی که نقطهٔ مرکزی از بیرون دیده نشود؛ یعنی در نقشهٔ مسطحی که می‌بینید، هر خط گذرنده از نقطهٔ مرکزی دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع کند. در صورتی که فاصلهٔ بین نقاط مجاور یک متر باشد، کم‌ترین مقدار لازم برای شعاع مقطع ستون‌ها چند متر است؟



۱) $\sqrt{\frac{1}{13}}$ ۲) $\sqrt{\frac{1}{10}}$ ۳) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ ۴) $\sqrt{\frac{4}{17}}$ ۵) $\sqrt{\frac{2}{5}}$

۲۴. می‌گوییم با یک چندضلعی می‌توان صفحه را کاشی‌کاری کرد، هرگاه بتوان نامتناهی شکل هم‌نهشت با آن چندضلعی را در صفحه کنار هم قرار داد به گونه‌ای که کل صفحه را بپوشانند و ضمناً به جز احتمالاً در اضلاع هم‌پوشانی نداشته باشند. با چند تا از اشکال روبه‌رو <u>نمی‌توان</u> صفحه را کاشی‌کاری کرد؟



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲
۴) ۳ ۵) ۴

۲۵. اعداد $\sqrt{7}^{\sqrt{3}}$، $\sqrt{5}^{\sqrt{5}}$ و $\sqrt{3}^{\sqrt{7}}$ را به ترتیب با A، B و C نمایش می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

۱) $A < B < C$ ۲) $B < C < A$ ۳) $C < B < A$ ۴) $A < C < B$ ۵) $C < A < B$

۲۶. چند دنبالهٔ $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ از اعداد مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ داریم به گونه‌ای که برای هر $1 \le i, j \le 15$ که $i + j \le 15$، داشته باشیم: $a_{i+j} > a_i + a_j$ ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۹ ۵) ۱۵

آزمون مرحلهٔ اول سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۲۷. حاصل‌ضرب اعضای مجموعهٔ A را با $f(A)$ نشان می‌دهیم. اگر A_1، A_2، . . . و A_{1023} تمام زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $\{1,2,\dots,10\}$ باشد، باقی‌ماندهٔ

$$f(A_1)+f(A_2)+\dots+f(A_{1023})$$

بر ۱۳ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۵　　۴) ۶　　۵) ۱۲

۲۸. دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ از اعداد حقیقی برای هر $n \geq 0$، در رابطه‌های بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_n y_n + y_n^2, \qquad y_{n+1} = x_n^2 - x_n y_n + y_n^2.$$

اگر x_0 و y_0 اعدادی مثبت باشند و $x_0 + y_0 = 2$ ، در مورد $S = x_8 + y_8$ کدام درست است؟

۱) $S < 2^{50}$　　۲) $2^{50} \leq S < 2^{200}$　　۳) $2^{200} \leq S < 2^{800}$　　۴) $2^{800} \leq S < 2^{2000}$　　۵) $2^{2000} \leq S$

۲۹. نقطهٔ D روی خط BC از مثلث ABC با $\angle BAC = 40^\circ$ مفروض است. از B و D به ترتیب بر BC و AB عمود می‌کنیم تا یک‌دیگر را در E قطع کنند. به طور مشابه از C و D به ترتیب عمودهایی بر BC و AC رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در F قطع کنند. پای عمود وارد از D بر EF را K می‌نامیم. می‌دانیم K روی خط AB قرار دارد و منطبق بر B نیست. زاویهٔ $\angle ACK$ چند درجه است؟

۱) ۴۰　　۲) ۶۰　　۳) ۸۰　　۴) ۱۰۰　　۵) ۱۴۰

۳۰. یک فرمول سه‌متغیره با متغیرهای x, y, z را «جالب» می‌گوییم، هرگاه در آن فقط از ترکیب توابع مینیمم و ماکسیمم استفاده شده باشد. مثل سه فرمول زیر:

$$\min(\max(x,z),y),\ \min(x,x),\ \max(x,\min(x,y)).$$

دو فرمول را متفاوت می‌گوییم، اگر یک مقداردهی برای متغیرهای x, y, z وجود داشته باشد که دو فرمول مقادیر مختلفی را برای آن‌ها محاسبه کنند. مثلاً دو فرمول $\min(x,x)$ و $\max(x,\min(x,y))$ متفاوت نیستند. چند فرمول متفاوت داریم؟

۱) ۱۱　　۲) ۱۸　　۳) ۶۴　　۴) ۲۵۶　　۵) بی‌نهایت