۱ - به‌ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

(۱) $m<-6$ (۲) $m>3$ (۳) $0<m<3$ (۴) $3<m<6$

۲ - به ازای کدام مقادیر m، ازمعادله‌ی $mx-3\sqrt{x}+m-2=0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

(۱) $-\frac{3}{2}<m<2$ (۲) $0<m<2$ (۳) $\frac{3}{2}<m<\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}<m<2$

۳ - به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

(۱) $(-\infty,-4)-\{-5\}$ (۲) $(-\infty,-4)$ (۳) $(4,+\infty)$ (۴) $(4,+\infty)-\{5\}$

۴ - اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x(ax^2-x-5)=2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

(۱) -2 (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۵ - اگر α و β صفرهای تابع درجهٔ دوم $f(x)=x^2-6x+2$ باشند، مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\alpha x^4+13x^2-\beta=1$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۱- (۴) این معادله، فاقد ریشه است.

۶ - اگر مجموع مجذورات سه ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(x-2)(x^2+mx+m+3)=0$ برابر ۱۳ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m چند عضو دارد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۷ - مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟

(۱) 4 (۲) -2 (۳) 2 (۴) -4

۸ - قدرمطلق تفاضل حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ $(x^2+3x)^2-8=7x^2+21x$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹ - به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

(۱) $-3<m<5$ (۲) $-3<m<4$ (۳) $-2<m<4$ (۴) $-1<m<5$

۱۰ - اگر ریشه‌های معادله‌ی $9x^2+ax+b=0$، از مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-9=0$، دو واحد کم‌تر باشد، a کدام است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۳۱ (۳) ۴۲ (۴) ۱۷

۱۱ - به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m، از معادله‌ی $x-2\sqrt{x}+m-1=0$، دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

(۱) $m\geq 1$ (۲) $m<2$ (۳) $1\leq m<2$ (۴) هیچ مقدار m

۱۲ - اگر در معادلهٔ $3x^2-ax+b=0$، بین اعداد a و b رابطهٔ $2a+b=-12$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله کدام گزینه است؟

(۱) $-b$ (۲) $-\frac{b}{2}$ (۳) $-\frac{b}{3}$ (۴) $-\frac{b}{6}$

۱۳ - به‌ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ $x^4-2mx^2+2m-1=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

(۱) $(-\infty,\frac{1}{2})\cup\{1\}$ (۲) $(-\infty,1)-\{\frac{1}{2}\}$ (۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ (۴) $(-\infty,\frac{1}{2}]$

۱۴- اگر α,β جواب های معادله‌ی $x^{۲}-۳x-۱=۰$ بوده و داشته باشیم ، $P=\alpha\beta$ و $S=\alpha+\beta$ به ازای کدام مقدار k جواب های معادله‌ی $۲۵x^{۲}-۵kx-۱=۰$ برابر $\frac{\beta}{۳S+۴P}$, $\frac{\alpha}{۲S+P}$ است؟

① -۱ ② ۳ ③ -۳ ④ ۱

۱۵- معادله‌ی $(x+۱)(mx^{۲}-x-۲)=۰$ سه ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. اگر حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله از مجموع ریشه‌های آن $\frac{۴}{۳}$ واحد بیشتر باشد، مقدار m کدام است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۱۶- اگر $\frac{۱}{\alpha+۱}$ و $\frac{۱}{\beta+۱}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}+۲x-۵=۰$ باشند، در این صورت α و β ریشه‌های کدام معادله می‌باشند؟

① $۵x^{۲}-۸x-۷=۰$ ② $۵x^{۲}+۹x+۷=۰$ ③ $۵x^{۲}+۸x+۲=۰$ ④ $۵x^{۲}+۸x+۷=۰$

۱۷- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(۲-m)x^{۲}+۳x+m^{۲}=۰$ معکوس یکدیگرند؟

① ۱ ② $-۱,۲$ ③ -۲ ④ $-۲,۱$

۱۸- به ازای کدام مقدار m، در معادله‌ی $x^{۲}+۸mx+۴m+۸=۰$، یکی از جواب‌ها، ۳ برابر جواب دیگر است؟

① $\frac{۳}{۲}$ ② $\frac{۲}{۳}$ ③ $-\frac{۳}{۲}$ ④ $-\frac{۲}{۳}$

۱۹- اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x(x-۴)=۶$، α و β باشد، حاصل عبارت $\frac{\alpha}{\alpha^{۲}-۶}+\frac{\beta}{\beta^{۲}-۶}$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۸}$ ② $\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ صفر

۲۰- معادلهٔ $(\frac{x+۱}{x})^{۲}+\frac{۲}{x}=۱$ چند جواب دارد؟

① سه ② دو ③ یک ④ صفر

۲۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۲x-۶=۰$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $(\alpha^{۲}-۶)^{۳}+۸\beta^{۳}$ کدام است؟

① ۸۸ ② ۲۶۴ ③ ۴۴ ④ ۳۵۲

۲۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۴x-۲=۰$ باشند، حاصل عبارت $\alpha^{۲}-۵\alpha-\beta$ کدام است؟

① ۲ ② -۲ ③ -۶ ④ ۶

۲۳- اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۱۰x+۰/۱=۰$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log(a+b)$ کدام است؟

① -۲ ② -۱ ③ ۰ ④ ۱

۲۴- به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۸x^{۲}-mx-۸=۰$، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲}-x-۲=۰$ می‌باشد؟

① ۹ ② ۱۱ ③ ۱۳ ④ ۱۵

۲۵- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^{۲}-۵x+۲=۰$ باشند، حاصل $A=(\alpha+\frac{۲}{\beta})^{۲}+(\beta+\frac{۲}{\alpha})^{۲}$ کدام است؟

① ۲۰ ② ۳۲ ③ ۴۰ ④ ۸۴

۲۶- یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x+\frac{4}{x^2+x+2}+m=0$ برابر -2 است. قدرمطلق اختلاف ریشهٔ دیگر این معادله از -2 کدام است؟

① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱

۲۷- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-3x-6=0$ باشند، آن‌گاه حاصل $|\alpha|+|\beta|$ کدام می‌تواند باشد؟

① $\sqrt{33}$ ② $\sqrt{29}$ ③ $\frac{\sqrt{29}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{33}}{2}$

۲۸- معادلهٔ $mx^2+(m-4)x-\frac{4}{m}=0$ با ریشه‌های α و β مفروض است. اگر $\alpha^2+\beta^2$ برابر ۱ باشد، آن‌گاه حاصل $3\alpha^2-2\alpha-\beta$ کدام است؟

① ۵ ② ۱ ③ -5 ④ -3

۲۹- به‌ازای چند عدد صحیح برای m، معادلهٔ $mx^2+4x+m-2=0$ دارای دو ریشهٔ متمایز مثبت است؟

① صفر ② یک ③ دو ④ بی‌شمار

۳۰- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشند، جواب‌های کدام معادله به صورت $\{\alpha\sqrt{\beta},\beta\sqrt{\alpha}\}$ است؟

① $x^2-\sqrt{5}x+1=0$ ② $x^2+\sqrt{5}x+1=0$ ③ $x^2-\sqrt{5}x+5=0$ ④ $x^2+\sqrt{5}x-5=0$

۳۱- اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور xها را در دو نقطه، به طول‌های -1 و ۳ قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

① $\frac{3}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ ۳ ④ -3

۳۲- به ازای کدام مقدار m، منحنی تابع $y=(m+2)x^2+4x+m-1$ همواره بالای محور xهاست؟

① $m>2$ ② $m>-2$ ③ $m<-3$ ④ $-3<m<2$

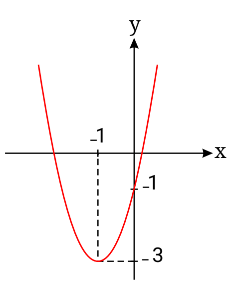
۳۳- اگر عبارت $y=ax(x+1)+1$ همواره مثبت باشد، به جای a چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟

① ۳ ② ۴ ③ ۲ ④ صفر

۳۴- اگر مساحت مثلثی که راس‌های آن نقاط برخورد منحنی به معادله‌ی $y=x^2-kx+1$ با محورهای مختصات است، برابر یک واحد مربع باشد، k کدام است؟

① ± 2 ② ± 4 ③ $\pm 2\sqrt{2}$ ④ $\pm\sqrt{2}$

۳۵- مجموع مربعات صفرهای تابع درجهٔ دو مقابل کدام است؟



① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۳۶- اگر مینیمم سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ بر ماکسیمم سهمی به معادلهٔ $g(x)=-x^2+4x-5$ منطبق بوده و فاصلهٔ بین نقاط تقاطع منحنی f با محور xها، ۶ واحد باشد، مجموع ضرایب ضابطهٔ سهمی $f(x)$ کدام است؟

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{8}{9}$

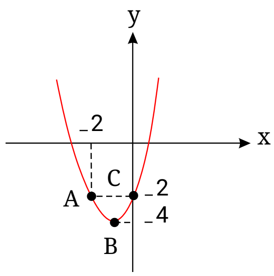
۳۷- به ازای چه حدودی از a، نمودار تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2-(a-4)x+\frac{9}{4}$ فقط از ناحیه‌ی چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

① $-1<a<0$ ② $-2<a<-1$ ③ $1<a<2$ ④ $0<a<1$

۳۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=ax^2+2(x+a)-1$ در ربع سوم قرار دارد؟

① $-1<a<\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2}<a<1$ ③ $0<a<1$ ④ $a>0$

۳۹- نمودار تابع درجه‌ی دوم $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$ کدام است؟

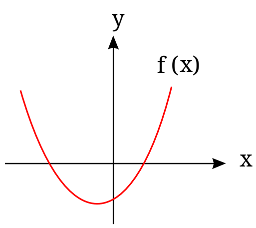


① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

۴۰- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر k، خط $y=-2$ در بالاترین نقطه‌ی سهمی $f(x)=kx^2+2\sqrt{2}x+k-1$ بر سهمی مماس است؟

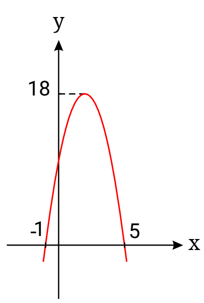
① $\{-1\}$ ② $\{-2\}$ ③ $\{-2,1\}$ ④ $\varnothing$

۴۱- اگر α و β ریشه‌های حقیقی تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ با نمودار زیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟



① $abc>0$ ② $\alpha^3+\beta^3<0$ ③ $\frac{b^2}{4}<ac$ ④ $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{\Delta}{4a}$

۴۲- اگر شکل داده‌شده نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد، آن گاه حاصل عبارت $A=-3a+\frac{b}{2}-c$ کدام است؟

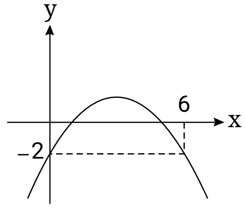


① صفر ② ۲ ③ ۴ ④ -2

۴۳- تمام محدودهٔ a کدام باشد تا سهمی به معادلهٔ $y=(a+6)x^2+(a-2)x+1$ از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات عبور نکند؟

① $-6<a<-2$ ② $a\leq -2$ ③ $a\geq -2$ ④ $a>5$

۴۴- اگر صفرهای تابع درجه دوم زیر جملات چهارم و هشتم یک دنبالهٔ حسابی باشند، مجموع جملهٔ دوم و دهم این دنبالهٔ حسابی کدام است؟



① ۶ ② ۳ ③ $\frac{3}{2}$ ④ ۱۲

۴۵- اگر قدر مطلق تفاضل ریشه‌های تابع $f(x)=-x^2+x-m$ برابر ۳ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

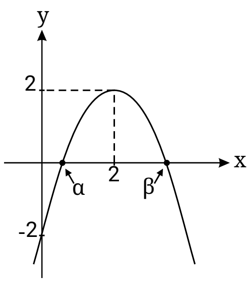
① بیش‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{4}$ است. ② کم‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{4}$ است. ③ بیش‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{2}$ است. ④ کم‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{2}$ است.

۴۶ - محور تقارن سهمی $y=x^۲+۴x+k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض (۲-) قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور xها ایجاد می‌کند، کدام است؟

① $۲\sqrt{۳}$ ② $۴\sqrt{۳}$ ③ $۲\sqrt{۲}$ ④ $۴\sqrt{۲}$

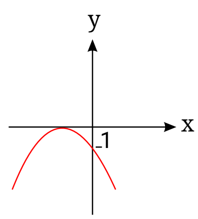
۴۷ - اگر نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+۴x+a-۳$، محور xها را در دو نقطه‌ی متمایز با طول مثبت قطع کند، راس سهمی به ازای کدام مقادیر a، زیر محور xها قرار دارد؟

① $(-۱,۰)$ ② $\varnothing$ ③ $(-\infty,۰)$ ④ $(-\frac{۱}{۲},۰)$



۴۸ - با توجه به نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$، حاصل عبارت $۲\alpha^۲+\alpha\beta^۳$ کدام است؟

① ۲۴ ② ۴۲ ③ ۱۲ ④ ۴۰



۴۹ - نمودار تابع $y=(a-۵)x^۲+(a+۳)x+b$ به صورت مقابل است. مجموعه مقادیر a چگونه است؟

① تهی است.

② شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

③ دو عضوی است.

④ تنها شامل یک عدد صحیح است.

۵۰ - به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^۲+۲(m-۳)x-۱$، همواره پایین محور xها است؟

① $۱<m<۵$ ② $۲<m<۵$ ③ $۲<m<۴$ ④ $۲<m<۶$

۵۱ - با توجه به ضابطهٔ سهمی $y=x^۲-mx+m-۱$ به‌ازای کدام مقدار مثبت m، مساحت مثلثی که دو رأس آن صفرهای این سهمی و رأس سوم آن منطبق بر رأس سهمی می‌باشد، برابر ۱ است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۵۲ - به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y=(۱-a)x^۲+۲\sqrt{۶}x-a$، همواره بالای محور xها است؟

① $a<۱$ ② $a<-۲$ ③ $a>۳$ ④ $-۲<a<۱$

۵۳ - به ازای چه حدودی از a تابع درجه‌ی دوم $f(x)=(a-۱)x^۲-۲\sqrt{۳}x+(a+۱)$، از ناحیه‌ی سوم و چهارم نمی‌گذرد؟

① $a\geq ۲$ ② $۱\leq a\leq ۲$ ③ R ④ $a>۱$

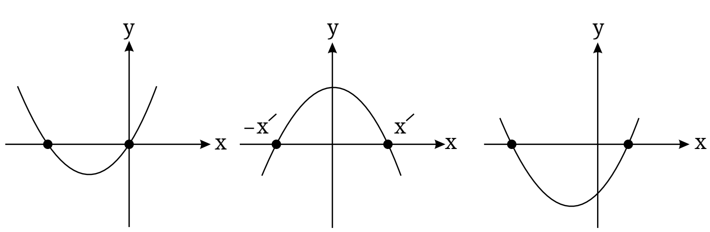
۵۴ - نمودارهای زیر مربوط به توابع درجهٔ دوم به معادلهٔ کلی $y=ax^۲+bx+c$ هستند، در چند مورد از آن‌ها حاصل abc منفی است؟

① صفر

② ۱

③ ۲

④ ۳



(الف) (ب) (ج)

۵۵- رأس سهمی $y=-x^۲+۴x-۳$ و نقطه‌های برخورد این سهمی با محور xها به‌ترتیب سه رأس A، B و C از مثلث ABC را تشکیل می‌دهند، طول میانهٔ CM کدام است؟ (نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ C، به مبدأ نزدیک‌تر است.)

① $\sqrt{۱۰}$ ② $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ③ $۲\sqrt{۱۰}$ ④ $\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$

۵۶- به‌ازای چه مقادیری از m، جدول تعیین علامت عبارت $f(x)=(m^۲-m-۲)x^۲+(m-۱)x+\frac{۱}{۴}$ به‌صورت زیر است؟

x		$x_۱$		$x_۲$	
$f(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

① $(-\infty,۳)$ ② $(۲,۳)$ ③ $(-۱,۳)$ ④ $(-۱,۲)$

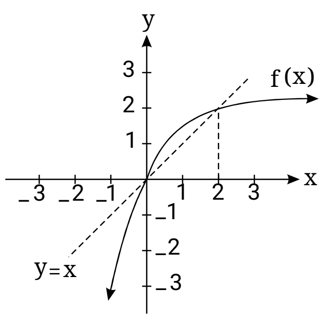
۵۷- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $mx^۲-x+m=۳$ باشند و داشته باشیم: $\alpha<۱<\beta<۲$، محدودهٔ m کدام است؟

① $۰<m<۱$ ② $۱<m<۲$ ③ $-۱<m<۰$ ④ $-۲<m<-۱$

۵۸- اگر نامعادلهٔ $\frac{۲ax^۲-ax-۶}{x^۲+x+۱} \ge -۶$ به‌ازای تمام مقادیر x برقرار باشد، a کدام است؟

① صفر ② ۶ ③ -۳ ④ ناموجود

۵۹- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $xf(x)-x^۲<۰$ به کدام صورت است؟



① $(-\infty,۰)$
② $(۰,۲)$
③ $(۲,+\infty)$
④ $(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$

۶۰- مجموعه جواب نامعادلهٔ $۱<\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳$، به کدام صورت است؟

① $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ ② $\mathbb{R}-[-۴,۶]$ ③ $x>۴$ ④ $x<-۶$

۶۱- مجموعه جواب نامعادلهٔ $x \le \frac{x^۲}{x-۱} < ۱$ کدام است؟

① $[۰,۱)$ ② $(-\infty,۰]$ ③ $(-۲,۰]$ ④ $(-\infty,۰]\cup(۱,+\infty)$

۶۲- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲} > \frac{x}{x-۲}$، به‌صورت بازه، کدام است؟

① $(-۴,۱)\cup(۲,۳)$ ② $(۲,۴)$ ③ $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ ④ $(-۱,۲)$

۶۳- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x-۱}} > x-۱$ صدق می‌کند؟

① صفر ② یک ③ دو ④ بی‌شمار

۶۴- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{۳x\quad -۳x}{\ } \ge ۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

① صفر ② ③ ④ بی‌شمار

۶۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\frac{۱}{۳}x+۴)(\sqrt{x}+۱) > x+x\sqrt{x}$ شامل چند عدد صحیح مضرب ۳ می‌باشد؟

(۱) ۱　(۲) ۲　(۳) ۳　(۴) بی‌شمار

۶۶- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $\frac{x^۴}{۱+x^۳} \leq \frac{x^۳}{۱+x^۲}$ صدق می‌کند؟

(۱) صفر　(۲) یک　(۳) دو　(۴) بی‌شمار

۶۷- معادلهٔ $\frac{x^۲+ax+۴}{x^۲-۲x-۳} = ۰$ فقط یک ریشه دارد. چند مقدار برای a ممکن است؟

(۱) ۱　(۲) ۲　(۳) ۳　(۴) ۴

۶۸- سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

(۱) ۱۲　(۲) ۱۵　(۳) ۲۰　(۴) ۲۵

۶۹- یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+x+\frac{۴}{x^۲+x+۲}+m=۰$ برابر -۲ است. مجموع ریشه‌های این معادله کدام است؟

(۱) -۲　(۲) -۱　(۳) -۳　(۴) -۴

۷۰- اگر مجموعهٔ جواب معادلهٔ $\frac{۵-x}{۴x-x^۲} = \frac{m+۱}{۳x}$ تهی باشد، مقدار m برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱) صفر　(۲) ۱　(۳) $\frac{۱۱}{۴}$　(۴) $\frac{۳}{۴}$

۷۱- شیر B مربوط به استخری را باز می‌کنیم و ۶٫۵ ساعت بعد از بازشدن شیر B، شیر A را نیز در این استخر باز می‌کنیم. پس از گذشت ۹ ساعت از بازبودن شیر B استخر کامل پر می‌شود. اگر هریک از این شیرهای آب به‌تنهایی استخر را پر می‌کردند شیر B دو ساعت بیش‌تر وقت لازم داشت. شیر A به‌تنهایی در چند ساعت استخر را پُر می‌کند؟

(۱) ۸　(۲) ۹　(۳) ۱۰　(۴) ۱۲

۷۲- به‌ازای کدام مقدار m، یک ریشهٔ معادلهٔ $\frac{۲x+۴}{x^۲-x-۲} = \frac{x}{x+۱}+\frac{m}{x-۲}$ از قرینهٔ ریشهٔ دیگر یک واحد بیش‌تر است؟

(۱) ۲　(۲) ۳　(۳) -۲　(۴) -۳

۷۳- سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۹ متر در دقیقه است. این قایق یک مسیر ۸۰ متری را در جهت موافق جریان آب رفته و در جهت مخالف برگشته است. اگر اختلاف زمان رفت و برگشت ۲ دقیقه باشد، سرعت قایق موتوری در مسیر رفت چندمتر در دقیقه است؟

(۱) ۱۰　(۲) ۸　(۳) ۱۲　(۴) ۱۵

۷۴- دو دونده در یک پیست دو و میدانی به‌طول ۳۰۰ متر با سرعت ثابت شروع به دویدن می‌کنند. نفر اول در هر ثانیه ۵ متر بیش‌تر از نفر دوم جلو می رود. بنابراین این دونده ۲ ثانیه زودتر به خط پایان می‌رسد. سرعت دوندهٔ سریع‌تر چند متر بر ثانیه است؟

(۱) ۲۰　(۲) ۲۵　(۳) ۳۰　(۴) ۳۵

۷۵- به ازای کدام مقدار a، معادلهٔ $\frac{۱}{x-۱}+\frac{a+۱}{x-x^۲} = ۱$ ریشهٔ مضاعف دارد؟

(۱) ۲　(۲) ۱　(۳) صفر　(۴) مقداری برای a یافت نمی‌شود.

۷۶- اگر $\sqrt{۴x+۸}-\sqrt{۴x-۱۶}=۳$، حاصل $\sqrt{۴x-۱۶}+\sqrt{۴x+۸}$ کدام است؟

① ۱ ② ۸ ③ ۳ ④ ۲۴

۷۷- اگر $۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲$ باشد، عدد $\dfrac{a+۱}{a}$، کدام است؟

① ۱٫۵ ② ۲٫۵ ③ ۳٫۵ ④ ۴٫۵

۷۸- معادلهٔ $\sqrt{۳x-۲x^۲}+\dfrac{۱}{\sqrt{۳x-۲x^۲}}=۲$ دارای چند ریشهٔ طبیعی است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

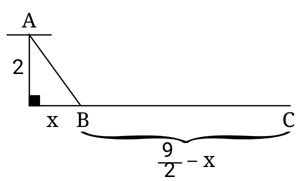
۷۹- معادلهٔ $\sqrt{۳-۳y}-\sqrt{۳y+۲}=۳$ چند جواب دارد؟

① دو ② یک ③ بی‌شمار ④ صفر

۸۰- اگر $x=a$ جواب معادلهٔ رادیکالی $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$ باشد، حاصل $a^۲+a$ کدام است؟

① ۳ ② ۱۲ ③ ۱۵ ④ ۱۴

۸۱- کلبه‌ای مطابق شکل زیر در نقطهٔ A واقع است. اگر سرعت حرکت در مسیر AB، $۲\dfrac{km}{h}$ و سرعت حرکت در مسیر BC، $۴\dfrac{km}{h}$ باشد، به‌ازای چند مقدار برای x می‌توان در مسیر ABC دو ساعته از نقطهٔ A به نقطهٔ C رسید؟ (فاصله‌ها برحسب کیلومتر هستند.)



① ۲ مقدار ② فقط یک مقدار کوچک‌تر از ۲

③ فقط یک مقدار بزرگ‌تر از ۲ ④ هیچ مقدار

۸۲- اگر $۲a+\sqrt{۳a+۱۶}=۱$ باشد، عدد $۴a+۹$، کدام است؟

① ۴ ② ۶ ③ ۱۵ ④ ۲۱

۸۳- از معادلهٔ $\sqrt{x+۳}-\sqrt{x-۱}=۱$ مقدار x کدام است؟

① ۲٫۷۵ ② ۳٫۲۵ ③ ۳٫۵ ④ ۳٫۷۵

۸۴- حاصل ضرب جواب‌های حقیقی معادلهٔ $(x+۱)(۲x+۵)=\sqrt{-(x+۳)(۲x+۱)}$ کدام است؟

① $-\dfrac{۱۱}{۲}$ ② ۲ ③ -۲ ④ ۷

۸۵- معادلهٔ $x^۲+۳=۲x+\sqrt{x^۲-۲x+۵}$ چند جواب حقیقی متمایز دارد؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > ۰$، $S < ۰$ و $P > ۰$ باشد.

$$\Delta > ۰ \xrightarrow{b^۲-۴ac>۰} ۴m^۲ - ۴(m-۶)(-۳) > ۰ \to m^۲ + ۳m - ۱۸ > ۰ \to (m+۶)(m-۳) > ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -۶ \quad \text{یا} \quad m > ۳ \quad (I)$$

$$S < ۰ \to \frac{-b}{a} < ۰ \to \frac{۲m}{m-۶} < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ < m < ۶ \qquad (II)$$

$$P > ۰ \to \frac{c}{a} > ۰ \to \frac{-۳}{m-۶} > ۰ \to m-۶ < ۰ \to m < ۶ \qquad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $۳ < m < ۶$ می‌رسیم.

۲ ـ گزینه ۲

$$mx - ۳\sqrt{x} + m - ۲ = ۰ \Rightarrow m(\sqrt{x})^۲ - ۳\sqrt{x} + m - ۲ = ۰ \ (I)$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^۲ - ۳t + m - ۲ = ۰$$

اگر این معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی باشد معادله‌ی I فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد $\sqrt{x}$ برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a} < ۰$ باشد.

$$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{m-۲}{m} < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ < m < ۲$$

دقت کنید اگر معادله‌ی $mt^۲ - ۳t + m - ۲ = ۰$ دارای یک ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد، نیز معادله‌ی I فقط یک جواب دارد.

$$\begin{cases} \Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴m(m-۲) = ۰ \Rightarrow ۴m^۲ - ۸m - ۹ = ۰ \begin{cases} m = \dfrac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲} \\ m = \dfrac{۲-\sqrt{۱۳}}{۲} \end{cases} \\ \underbrace{\dfrac{-b}{۲a}}_{\text{ریشه مضاعف}} > ۰ \Rightarrow \dfrac{۳}{۲m} > ۰ \Rightarrow m > ۰ \end{cases}$$

پس جواب می‌شود: $\left\{\frac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲}\right\} \cup ۰ < m < ۲$. بنابراین گزینه‌ی دوم می‌تواند صحیح باشد.

۳ ـ گزینه ۱

$$x^۳ + (a-۱)x^۲ + (۴-a)x - ۴ = ۰$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x = ۱$ است و معادله بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} x^۳ + (a-۱)x^۲ + (۴-a)x - ۴ & x - ۱ \\ \cline{2-2} -x^۳ + x^۲ & x^۲ + ax + ۴ \\ \hline ax^۲ + (۴-a)x - ۴ & \\ -ax^۲ + ax & \\ \hline ۴x - ۴ & \\ -۴x + ۴ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-۱)(x^۲+ax+۴) = ۰$ تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله $x = ۱$ است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$\Delta > ۰ \to b^۲ - ۴ac > ۰ \to a^۲ - ۱۶ > ۰ \to a^۲ > ۱۶ \to a > ۴$ یا $a < -۴ \quad (I)$

$S > ۰ \to -\frac{b}{a} > ۰ \to -a > ۰ \to a < ۰ \quad (II)$

$P > ۰ \to \frac{c}{a} > ۰ \to ۴ > ۰$ همواره برقرار است (III)

از اشتراک $I\,,\,II\,,\,III$ به جواب $a < -۴$ می‌رسیم.

توجه نمایید که به‌ازای $a = -۵$ معادله دارای دو ریشه خواهد بود.

۴ ـ گزینه ۲ ابتدا با قرار دادن $x = ۲$ در معادله‌ی داده شده، a را می‌یابیم:

$$x(ax^۲ - x - ۵) = ۲ \xrightarrow{x=۲} ۲(۴a - ۲ - ۵) = ۲ \Rightarrow ۴a - ۷ = ۱ \Rightarrow a = ۲$$

پس معادله به صورت $۲x^۳ - x^۲ - ۵x - ۲ = ۰$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر $x - ۲$ آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۲x^۳ - x^۲ - ۵x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(۲x^۲ + ۳x + ۱) = ۰$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه‌ی دیگر که ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داخل پرانتز می‌باشند، برابر با $-\frac{b}{a} = -\frac{۳}{۲}$ می‌شود.

۵ ـ گزینه ۱ منظور از صفرهای تابع درجهٔ دوم $f(x) = x^۲ - ۶x + ۲$، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۶x + ۲ = ۰$ است. از آنجاکه در این معادله $\begin{cases}\Delta > ۰\\ S > ۰\\ P > ۰\end{cases}$، می‌توانیم بگوییم ریشه‌ها یعنی α و β مثبت هستند.

حال به معادلهٔ $\alpha x^۴ + ۱۳x^۲ - \beta = ۱$ می‌رسیم که با تغییر متغیر $x^۲ = t$ به‌صورت $\alpha t^۲ + ۱۳t - \beta - ۱ = ۰$ در می‌آید. در این معادله:

$$ac = \alpha(-\beta - ۱) = -\alpha(\beta + ۱) \xrightarrow{\alpha,\beta>۰} \text{همواره منفی}$$

پس با توجه به $ac < ۰$ می‌توان نتیجه گرفت این معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت (مثلاً $t_۱ < ۰$ و $t_۲ > ۰$) است.

پس $x^۲ = t_۱$ جواب ندارد و $x^۲ = t_۲$ دارای دو جواب قرینهٔ $x = \pm\sqrt{t_۲}$ است که حاصل جمع آن‌ها حتماً صفر خواهد شد.

۶ ـ گزینه ۲

$$(x-۲)(x^۲+mx+m+۳) = ۰ \to \begin{cases} x = ۲ \\ x^۲+mx+m+۳ = ۰ \end{cases}$$

یک ریشه‌ی معادله $x = ۲$ است و اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ + mx + m + ۳ = ۰$ را α و β در نظر بگیریم طبق صورت مسأله $\underbrace{\alpha^۲+\beta^۲+۲^۲}_{\text{مجموع مجذورات ریشه‌ها}} = ۱۳$ است.

$$\alpha^۲+\beta^۲+۴ = ۱۳ \to \alpha^۲+\beta^۲ = ۹ \to (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta = ۹ \xrightarrow[\alpha\beta=\frac{c}{a}=m+۳]{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-m}$$

$$m^۲ - ۲(m+۳) = ۹ \to m^۲ - ۲m - ۱۵ = ۰ \to (m-۵)(m+۳) = ۰$$

$$\to \begin{cases} m = ۵ \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^۲ + ۵x + ۸ = ۰ \to \Delta = b^۲ - ۴ac = ۲۵ - ۳۲ < ۰ \to \quad \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\ m = -۳ \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^۲ - ۳x = ۰ \to x(x-۳) = ۰ \to x = ۰, x = ۳ \end{cases}$$

بنابراین فقط $m = -۳$ قابل قبول است.

۷ ـ گزینه ۲

$$(x^۲+x)^۲ - ۱۸(x^۲+x) + ۷۲ = ۰ \xrightarrow{x^۲+x=A} A^۲ - ۱۸A + ۷۲ = ۰ \Rightarrow (A-۱۲)(A-۶) = ۰$$

$$\begin{matrix} A = ۱۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -۱ \\ A = ۶ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -۱ \end{matrix} \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -۲$$

۸ ـ گزینه ۳

$$(x^۲+۳x)^۲ - ۸ = ۷(x^۲+۳x) \xrightarrow{x^۲+۳x=A} A^۲ - ۸ = ۷A \to A^۲ - ۷A - ۸ = ۰$$

$$\to (A-۸)(A+۱) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=8 \rightarrow x^2+3x=8 \rightarrow x^2+3x-8=0 \rightarrow S=-\frac{b}{a}=-3\ ,\ P=\frac{c}{a}=-8 \\ A=-1 \rightarrow x^2+3x=-1 \rightarrow x^2+3x+1=0 \rightarrow S'=-\frac{b}{a}=-3\ ,\ P'=\frac{c}{a}=1 \end{cases}$$

پس: $S+S'=-6\ ,\ PP'=-8 \rightarrow$ تفاضل $=2$

۹ـ گزینه ۱ شرط آنکه معادله‌ی درجه دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی باشد، آن است که دلتای معادله، منفی باشد. پس داریم:

$$\Delta<0 \Rightarrow b^2-4ac<0 \Rightarrow (m+1)^2-4(2)(\frac{1}{2}m+2)=(m^2+2m+1)-4m-16$$

$$=m^2-2m-15=(m-5)(m+3)<0 \rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} m & -\infty & & -3 & & 5 & & +\infty \\ \hline & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \rightarrow -3<m<5$$

۱۰ـ گزینه ۲

کافی است ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-9=0$ را به دست آوریم.

$$\Delta=b^2-4ac=9-4(2)(-9)=9+72=81 \rightarrow x_1,x_2=\frac{3\pm9}{4}=3,-\frac{3}{2}$$

$$x'_1=\frac{1}{x_1^2}-2=\frac{1}{9}-2=-\frac{17}{9} \quad \text{و} \quad x'_2=\frac{1}{x_2^2}-2=\frac{1}{\frac{9}{4}}-2=\frac{4}{9}-2=-\frac{14}{9}$$

$$x^2-Sx+P=0 \rightarrow x^2-(-\frac{17}{9}-\frac{14}{9})x+\underbrace{(-\frac{17}{9})(-\frac{14}{9})}_{P}=0 \rightarrow x^2+\frac{31}{9}x+P=0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 9x^2+31x+9P=0 \xrightarrow{\text{مقایسه با } 9x^2+ax+b=0} a=31$$

۱۱ـ گزینه ۳

برای حل معادله ی $x-2\sqrt{x}+m-1=0$ از روش تغییر متغیر بهره می گیریم. اگر به جای عبارت $\sqrt{x}$، t قرار دهیم، داریم:

$$(\sqrt{x})^2-2(\sqrt{x})+m-1=0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2-2t+m-1=0$$

برای این که معادله ی داده شده در تست، دو جواب متمایز برای x داشته باشد، باید در معادله ی $t^2-2t+m-1=0$ یکی از حالات زیر اتفاق بیفتد:

$1-$ دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز مثبت باشد، برای این منظور داریم:

$$\text{شرط وجود دو ریشه ی مثبت} \Rightarrow \begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow 4-4(m-1)>0 \Rightarrow 8-4m>0 \Rightarrow m<2 \\ \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m-1}{1}>0 \Rightarrow m-1>0 \Rightarrow m>1 \\ -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{-2}{1}>0 \Rightarrow 2>0 \quad \text{برقرار است} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1<m<2$$

$2-$ دارای یک ریشه ی صفر و یک ریشه ی مثبت باشد. برای این منظور باید $c=0$ و $-\frac{b}{a}>0$ باشد. داریم:

$$m-1=0 \Rightarrow m=1$$

حال از اجتماع مقادیر به دست آمده در (1) و (2)، حدود m برابر است با: $1\le m<2$

۱۲ـ گزینه ۴ روش اول: با کمی دقت متوجه می‌شویم که یک ریشهٔ معادله $x_1=-2$ است زیرا اگر $x_1=-2$ را در معادله صدق دهیم به رابطهٔ داده شده در سؤال می‌رسیم.

$$x_1=-2 \xrightarrow{\text{معادله}} 12+2a+b=0 \longrightarrow 2a+b=-12$$

می‌دانیم: $x_1x_2=\frac{c}{a} \longrightarrow -2x_2=\frac{b}{3} \longrightarrow x_2=-\frac{b}{6}$

روش دوم: در رابطهٔ $2a+b=-12$، a,b دلخواهی را به‌صورت $a=0$ و $b=-12$ مثال می‌زنیم:

$$3x^2-ax+b=0 \xrightarrow{a=0\ ,\ b=-12} 3x^2-12=0 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow x=\pm2$$

گزینه‌ای درست است که به‌ازای $b=-12$ یکی از دو ریشهٔ ۲ یا ۲− حاصل شود که گزینهٔ چهارم این‌چنین است. $(\frac{-b}{6}=\frac{12}{6}=2)$

۱۳ ـ گزینه ۱

از تغییر متغیر $x^۲ = t$ استفاده می‌کنیم و معادله به‌صورت مقابل درمی‌آید: $t^۲ - ۲mt + ۲m - ۱ = ۰$

به‌ازای هر جواب $t > ۰$ دو ریشهٔ $x = \pm\sqrt{t}$ به‌دست می‌آید و به‌ازای هر جواب $t = ۰$ یک ریشهٔ $x = ۰$ به‌دست می‌آید و به‌ازای $t < ۰$ نیز هیچ ریشهٔ حقیقی برای x به‌دست نمی آید. بنابراین شرط اینکه معادلهٔ داده شده دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز باشد این است که معادلهٔ $t^۲ - ۲mt + ۲m - ۱ = ۰$ یا دارای یک ریشهٔ حقیقی مثبت و یک ریشهٔ حقیقی منفی باشد (حالت ۱) و یا اینکه دارای یک ریشهٔ مضاعف مثبت باشد (حالت ۲):

حالت ۱: $\frac{c}{a} < ۰ \to ۲m - ۱ < ۰ \to m < \frac{۱}{۲}$

حالت ۲:

$$\begin{cases} \Delta = ۰ \to b^۲ - ۴ac = ۰ \to ۴m^۲ - ۴(۲m - ۱) = ۰ \to m^۲ - ۲m + ۱ = ۰ \\ (m - ۱)^۲ = ۰ \to m = ۱ \\ \frac{-b}{۲a} > ۰ \to \frac{۲m}{۲} > ۰ \to m > ۰ \end{cases}$$

پس جواب حالت دوم $m = ۱$ است بنابراین جواب کلی معادله به‌صورت $(-\infty, \frac{۱}{۲}) \cup \{۱\}$ است.

۱۴ ـ گزینه ۲ برای تشکیل معادله جدید به حاصل جمع (S') و حاصل ضرب (P') نیاز داریم بنابراین :

$$S' = \frac{\alpha}{۲S + P} + \frac{\beta}{۳S + ۴P} \xrightarrow[P = \frac{c}{a} = -۱]{S = -\frac{b}{a} = ۳} \frac{\alpha}{۲(۳) - ۱} + \frac{\beta}{۳(۳) + ۴(-۱)} = \frac{\alpha}{۵} + \frac{\beta}{۵} = \frac{\alpha + \beta}{۵} = \frac{S}{۵} = \frac{۳}{۵}$$

$$P' = \frac{\alpha}{۲S + P} \times \frac{\beta}{۳S + ۴P} = \frac{\alpha}{۵} \times \frac{\beta}{۵} = \frac{\alpha\beta}{۲۵} = \frac{P}{۲۵} = \frac{-۱}{۲۵}$$

حال با داشتن (S') و (P') معادله‌ی جدید را مینویسیم:

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \to x^۲ - \frac{۳}{۵}x - \frac{۱}{۲۵} = ۰ \xrightarrow{\times ۲۵} ۲۵x^۲ - ۱۵x - ۱ = ۰$$

با مقایسه‌ی معادله‌ی حاصل با معادله‌ی $۲۵x^۲ - ۵kx - ۱ = ۰$ داریم:

$$-۵k = -۱۵ \to k = ۳$$

۱۵ ـ گزینه ۲

$$(x + ۱)(mx^۲ - x - ۲) = ۰ \to \begin{cases} x + ۱ = ۰ \to x = -۱ \\ mx^۲ - x - ۲ = ۰ \end{cases}$$

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $mx^۲ - x - ۲ = ۰$، مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a} = \frac{۱}{m}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a} = -\frac{۲}{m}$ است.

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی داده شده $= (-۱)(\frac{c}{a}) = (-۱)(\frac{-۲}{m}) = \frac{۲}{m}$

مجموع ریشه‌های معادله‌ی داده شده $= -۱ + (-\frac{b}{a}) = -۱ + \frac{۱}{m}$

طبق فرض: $\frac{۲}{m} = -۱ + \frac{۱}{m} + \frac{۴}{۳} \to \frac{۱}{m} = \frac{۱}{۳} \to m = ۳$

توجه کنید به ازای $m = ۳$، معادله‌ی $mx^۲ - x - ۲ = ۰$ به‌صورت $۳x^۲ - x - ۲ = ۰$ درمی‌آید که ریشه‌هایش ۱ و $\frac{-۲}{۳}$ هستند و هیچ‌کدام از ریشه‌ها برابر -۱ نیست پس به ازای این مقدار m، معادله‌ی داده شده دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز است.

۱۶ ـ گزینه ۳

$$P = \frac{۱}{\alpha + ۱} \times \frac{۱}{\beta + ۱} = \frac{c}{a} \to \frac{۱}{(\alpha + ۱)(\beta + ۱)} = -۵ \to (\alpha + ۱)(\beta + ۱) = -\frac{۱}{۵} \to \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ = -\frac{۱}{۵}$$

$$\to \alpha\beta + \alpha + \beta = -\frac{۶}{۵}$$

$$S = \frac{۱}{\alpha + ۱} + \frac{۱}{\beta + ۱} = -\frac{b}{a} \to \frac{\beta + ۱ + \alpha + ۱}{(\alpha + ۱)(\beta + ۱)} = -۲ \to \frac{\alpha + \beta + ۲}{-\frac{۱}{۵}} = -۲ \to \alpha + \beta + ۲ = \frac{۲}{۵} \to \alpha + \beta = -\frac{۸}{۵}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta + \alpha + \beta = -\frac{۶}{۵}} \alpha\beta - \frac{۸}{۵} = -\frac{۶}{۵} \to \alpha\beta = \frac{۲}{۵}$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \to x^۲ + \frac{۸}{۵}x + \frac{۲}{۵} = ۰ \to ۵x^۲ + ۸x + ۲ = ۰$$

۱۷ ـ گزینه ۱ اگر دو ریشه، معکوس یکدیگر باشند حاصل ضربشان یک است.

$$x'x''=1\to\frac{c}{a}=1\to\frac{m^2}{2-m}=1\to m^2+m-2=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}m=1\\ m=\frac{c}{a}=-2\end{cases}$$

$$m=1\xrightarrow{\text{معادله}}x^2+3x+1=0\quad:\quad\Delta=b^2-4ac=9-4>0\quad:\quad \text{ق ق}$$

$$m=-2\xrightarrow{\text{معادله}}4x^2+3x+4=0\quad:\quad\Delta=b^2-4ac=9-64<0\quad:\quad \text{غ ق ق}$$

۱۸ ـ گزینه ۴ شرط آنکه در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم، یک ریشه‌ی معادله، k برابر ریشه‌ی دیگر باشد آن است که داشته باشیم: $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$

$$\frac{64m^2}{4m+8}=\frac{16}{3}\to\frac{4m^2}{4m+8}=\frac{1}{3}\to 12m^2=4m+8\to 12m^2-4m-8=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}m=1\\ m=\frac{c}{a}=\frac{-8}{12}=\frac{-2}{3}\end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند چون به ازای آنها $\Delta>0$ است.

۱۹ ـ گزینه ۳

از آن‌جایی که α و β ریشه‌های معادله هستند، در معادله صدق می‌کنند؛ داریم:

$$\begin{cases}\alpha^2-4\alpha-6=0\to\alpha^2-6=4\alpha\\ \beta^2-4\beta-6=0\to\beta^2-6=4\beta\end{cases}$$

پس: $\frac{\alpha}{\alpha^2-6}+\frac{\beta}{\beta^2-6}=\frac{\alpha}{4\alpha}+\frac{\beta}{4\beta}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

۲۰ ـ گزینه ۳

$$(\frac{x+1}{x})^2+\frac{2}{x}=1\to(1+\frac{1}{x})^2+\underbrace{\frac{2}{x}+2}-2=1$$

$$\to(1+\frac{1}{x})^2+2(1+\frac{1}{x})-3=0\xrightarrow{1+\frac{1}{x}=A}A^2+2A-3=0$$

$$\to(A+3)(A-1)=0\to\begin{cases}A=-3\to 1+\frac{1}{x}=-3\to\frac{1}{x}=-4\to x=\frac{-1}{4}\\ A=1\to 1+\frac{1}{x}=1\to\frac{1}{x}=0\ \text{امکان ندارد.}\end{cases}$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه است.

۲۱ ـ گزینه ۴ می‌دانیم $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=2$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-6$ است. α ریشهٔ معادله است پس در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}\alpha^2-2\alpha-6=0\to\alpha^2-6=2\alpha$$

پس: $(\alpha^2-6)^3+8\beta^3=(2\alpha)^3+8\beta^3=8\alpha^3+8\beta^3=8(\alpha^3+\beta^3)=8((\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta))=8(8+18(2))=8(44)=352$

۲۲ ـ گزینه ۲ α ریشه‌ی معادله است بنابراین در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha\xrightarrow{\text{صدق}}\alpha^2-4\alpha-2=0\to\alpha^2=4\alpha+2$$

پس: $\alpha^2-5\alpha-\beta=4\alpha+2-5\alpha-\beta=-\alpha-\beta+2=-(\alpha+\beta)+2$

$$=-(\frac{-b}{a})+2=-(4)+2=-2$$

۲۳ ـ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}\ ,\ \log_k^a-\log_k^b=\log_k^{\frac{a}{b}}\ ,\ \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$a+b=S=-\frac{b}{a}=10\ ,\ ab=P=\frac{c}{a}=\frac{1}{10}$$

$$\log a+\log b-\log(a+b)=\log\frac{ab}{a+b}=\log\frac{\frac{1}{10}}{10}=\log\frac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2$$

۲۴ ـ گزینه ۳ اگر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ را α و β در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های معادله‌ی $8x^2-mx-8=0$ برابر α^3 و β^3 هستند.

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\quad,\quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$$

داریم: $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{1}{8}+\frac{3}{2}=\frac{13}{8}$

$$\alpha^3\cdot\beta^3=(\alpha\cdot\beta)^3=(-1)^3=-1$$

معادله‌ی درجه‌ی دوم: $x^2-Sx+P=0\to x^2-\frac{13}{8}x-1=0\to 8x^2-13x-8=0$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } 8x^2-mx-8=0} m=13$$

۲۵ ـ گزینه ۴

می‌دانیم $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{2}{1}=2$ و $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=5$ است.

$$A=(\alpha+\frac{2}{\beta})^2+(\beta+\frac{2}{\alpha})^2=(\frac{\alpha\beta+2}{\beta})^2+(\frac{\alpha\beta+2}{\alpha})^2$$
$$\Rightarrow A=(\frac{2+2}{\beta})^2+(\frac{2+2}{\alpha})^2=\frac{16}{\beta^2}+\frac{16}{\alpha^2}=\frac{16(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha\beta)^2}=\frac{16((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^2}=\frac{16(25-4)}{4}=84$$

۲۶ ـ گزینه ۲ ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند.

$$x=-2\to 2+\frac{4}{4}+m=0\to m=-3$$

بنابراین معادله به‌صورت $x^2+x+\frac{4}{x^2+x+2}-3=0$ درمی‌آید.

$$x^2+x=t\to t+\frac{4}{t+2}-3=0\xrightarrow{\times(t+2)}t^2+2t+4-3t-6=0\to t^2-t-2=0\to(t-2)(t+1)=0$$

$$t=2\to x^2+x=2\to x^2+x-2=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}x=1\\ x=\frac{c}{a}=-2\end{cases}$$

$t=-1\to x^2+x=-1\to x^2+x+1=0\to\Delta=b^2-4ac=1-4<0$: ریشهٔ حقيقي ندارد

پس ریشهٔ حقیقی دیگر برابر یک است که قدرمطلق اختلاف آن از -2 برابر ۳ است.

۲۷ ـ گزینه ۱ در این سؤال $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-6$ و $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=3$ است یعنی α و β غیر هم علامت هستند و ریشهٔ مثبت از نظر قدرمطلق، بزرگتر است فرض می‌کنیم $\alpha>0$ و $\beta<0$ است پس داریم:

$$|\alpha|+|\beta|=\alpha-\beta=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{9+24}}{|1|}=\sqrt{33}$$

۲۸ ـ گزینه ۲

$$mx^2+(m-4)x-\frac{4}{m}=0\to\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{4-m}{m}\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{4}{m^2}\end{cases}$$

$$\alpha^2+\beta^2=1\to(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1\to\frac{(4-m)^2}{m^2}+\frac{8}{m^2}=1$$

$$\xrightarrow{\times m^2}(4-m)^2+8=m^2\to 16+m^2-8m+8=m^2\to 8m=24\to m=3\xrightarrow{\text{معادله}}3x^2-x-\frac{4}{3}=0$$

$$\xrightarrow{\alpha\ \text{در معادله صدق می‌کند.}} ۳\alpha^۲ - \alpha = \frac{۴}{۳}$$

پس: $۳\alpha^۲ - ۲\alpha - \beta = ۳\alpha^۲ - \alpha - \alpha - \beta = ۳\alpha^۲ - \alpha - (\alpha + \beta) = \frac{۴}{۳} - (\frac{۴ - m}{m}) \xlongequal{m=۳} \frac{۴}{۳} - \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۳} = ۱$

۲۹ ـ گزینه ۲ برای این منظور باید $\Delta > ۰$ و جمع و ضرب ریشه‌ها نیز مثبت باشند.

$$\Delta > ۰ \longrightarrow b^۲ - ۴ac > ۰ \longrightarrow ۱۶ - ۴m(m-۲) > ۰ \longrightarrow ۴ - m(m-۲) > ۰$$

$$\longrightarrow m^۲ - ۲m - ۴ < ۰ \longrightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۴ + ۱۶ = ۲۰ \longrightarrow \begin{cases} m = \frac{۲ + ۲\sqrt{۵}}{۲} = ۱ + \sqrt{۵} \\ m = \frac{۲ - ۲\sqrt{۵}}{۲} = ۱ - \sqrt{۵} \end{cases}$$

$$\longrightarrow ۱ - \sqrt{۵} < m < ۱ + \sqrt{۵}$$

$$S > ۰ \longrightarrow \frac{-b}{a} > ۰ \longrightarrow -\frac{۴}{m} > ۰ \longrightarrow m < ۰$$

$$P > ۰ \longrightarrow \frac{c}{a} > ۰ \longrightarrow \frac{m-۲}{m} > ۰ \longrightarrow$$

m	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
		+	ن	−	۰	+	

$\longrightarrow m < ۰$ یا $m > ۲$

اشتراک سه شرط داده‌شده برابر $(۱ - \sqrt{۵}, ۰)$ است که فقط عدد صحیح ۱− در آن قرار دارد.

۳۰ ـ گزینه ۱ از معادله‌ی اول متوجه می‌شویم که $S_{\text{قدیم}} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = ۳$ و $P_{\text{قدیم}} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = ۱$ است.

$$S_{\text{جدید}} = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \underbrace{\sqrt{\alpha\beta}}_{۱}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \sqrt{\alpha} + \sqrt{p} = \sqrt{S + ۲\sqrt{p}} = \sqrt{۳ + ۲\sqrt{۱}} = \sqrt{۵}$$

$$P_{\text{جدید}} = (\alpha\sqrt{\beta})(\beta\sqrt{\alpha}) = \alpha\beta, \sqrt{\alpha\beta} = ۱ \times ۱ = ۱$$

معادله‌ی جدید به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ یا $x^۲ - \sqrt{۵x} + ۱ = ۰$ است.

توجه کنید اگر α, β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند آن‌گاه $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + ۲\sqrt{P}}$ است.

۳۱ ـ گزینه ۱ چون رأس سهمی روی نیمساز ربع اول $(y = x)$ قرار دارد. بنابراین مختصات آن به صورت $S\left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right.$ است و چون سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول ۱− و ۳ قطع کرده است طول رأس سهمی دقیقاً وسط ۱− و ۳ است.

$$x_S = \frac{-۱ + ۳}{۲} = ۱ \to S\left|\begin{matrix}۱\\ ۱\end{matrix}\right.$$

معادله‌ی سهمی: $y = a(x-۳)(x+۱) \xrightarrow[\text{صدق}]{S|^{۱}_{۱}} ۱ = a(-۲)(۲) \to -۴a = ۱ \to a = \frac{-۱}{۴}$

معادله‌ی سهمی: $y = \frac{-۱}{۴}(x-۳)(x+۱) \xrightarrow{x=۰} y = \frac{-۱}{۴}(-۳)(۱) = \frac{۳}{۴}$

توجه کنید اگر یک سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ قطع کند می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y = a(x - x_۱)(x - x_۲)$ نشان داد.

۳۲ ـ گزینه ۱ y همواره مثبت است و می دانیم شرط مثبت بودن یک عبارت درجه‌ی دوم آن است که $\Delta < ۰$, $a > ۰$ باشد.

$$I: a > ۰ \to m + ۲ > ۰ \to m > -۲$$

$$II: \Delta < ۰ \to ۱۶ - ۴(m+۲)(m-۱) < ۰ \to ۱۶ - ۴m^۲ + ۴m - ۸m + ۸ < ۰$$

$$\to ۴m^۲ + ۴m - ۲۴ > ۰ \to m^۲ + m - ۶ > ۰ \to (m+۳)(m-۲) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -۳, m > ۲$$

از اشتراک I , II به جواب $m > ۲$ می رسیم.

۳۳ ـ گزینه ۲ برای آن که عبارت درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت یا بالای محور xها باشد، باید دو شرط مقابل همواره برقرار باشد:

$۱)\ \Delta < ۰ \qquad ۲)\ a > ۰$

ابتدا عبارت داده شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$y = ax\,(x+۱)+۱ \;\Rightarrow\; y = ax^۲ + ax + ۱$$

حال برای آن که عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \;\Rightarrow\; a^۲ - ۴a < ۰ \;\Rightarrow\; a(a-۴) < ۰ \;\Rightarrow\; ۰ < a < ۴ \\ a > ۰ \;\Rightarrow\; a > ۰ \end{cases}$$

اشتراک دو شرط فوق برابر $۰ < a < ۴$ می‌شود. اما صبر کنید در صورت سؤال نگفته عبارت حتماً باید درجه‌ی دوم باشد. به عبارت دیگر اگر $a = ۰$ باشد نیز عبارت $y = ax^۲ + ax + ۱$ برابر عدد مثبت یک خواهد شد. پس $a = ۰$ نیز درست است:

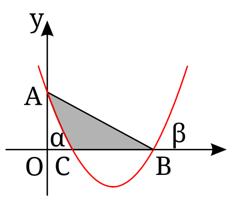
$$y = ax^۲ + ax + ۱ \xrightarrow{a=۰} y = ۰ + ۰ + ۱ = ۱$$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای a برابر است با: $(۰ < a < ۴) \cup \{۰\} = ۰ \le a < ۴$

که در بازه‌ی فوق چهار عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ موجود است.

۳۴ ـ گزینه ۳ به نمودار فرضی زیر توجه کنید: باتوجه به شکل در نقطه‌ی برخورد منحنی با محور yها، $x = ۰$ است.

$$x = ۰ \xrightarrow{\text{تابع}} y_A = ۱$$



نقاط برخورد منحنی با محور xها هم، همان ریشه‌های تابع هستند. حال برای محاسبه‌ی مساحت مثلث به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S = \frac{(BC)(OA)}{۲} \xrightarrow[BC=|\alpha-\beta|]{OA=۱} S = \frac{|\alpha-\beta|(۱)}{۲} = \frac{|\alpha-\beta|}{۲}$$

چون مساحت مثلث برابر یک است و قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها در تابع درجه‌ی دوم برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است بنابراین:

$$۱ = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{۲} \Rightarrow ۲|a| = \sqrt{\Delta} \Rightarrow ۲ = \sqrt{k^۲ - ۴} \Rightarrow ۴ = k^۲ - ۴ \Rightarrow k = \pm ۲\sqrt{۲}$$

۳۵ ـ گزینه ۳ معادلهٔ یک سهمی که مختصات رأس آن $S\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ است به‌صورت $y = a(x-\alpha)^۲ + \beta$ است چون این سهمی از نقطهٔ $\left|\begin{matrix}۰\\ -۱\end{matrix}\right.$ می‌گذرد پس:

$$-۱ = a(۰+۱)^۲ - ۳ \to a = ۲$$

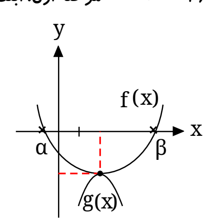
بنابراین ضابطهٔ سهمی به‌صورت $y = ۲(x+۱)^۲ - ۳$ یا به‌صورت ساده‌تر یعنی $y = ۲x^۲ + ۴x - ۱$ است. صفرهای این تابع همان ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۴x - ۱ = ۰$ هستند، پس:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{۴}{۲} = -۲\ ,\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۲}$$

پس: $\alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta = (-۲)^۲ - ۲(\frac{-۱}{۲}) = ۴ + ۱ = ۵$

۳۶ ـ گزینه ۴ مرحلهٔ اول: ابتدا شکل مسأله را تصور می‌کنیم. برای این کار، اول رأس سهمی $g(x)$ را پیدا می‌کنیم.

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۴}{-۲} = ۲ \Rightarrow y_S = g(۲) = -۱$$



پس رأس سهمی $f(x)$ هم مشخص شد:

$$\left|\begin{matrix}۲\\ -۱\end{matrix}\right. \xrightarrow{x_S=۲} \frac{\alpha+\beta}{۲} = ۲ \Rightarrow \alpha + \beta = ۴ \quad (I)$$

مرحلهٔ دوم: در صورت سؤال تفاضل ریشه‌ها داده شده است (۶ واحد)، پس داریم:

$$\beta - \alpha = ۶\ (II) \xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} \overbrace{\alpha+\beta}^{\frac{-b}{a}} = ۴ \\ \beta - \alpha = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۱ \\ \beta = ۵ \end{cases}$$

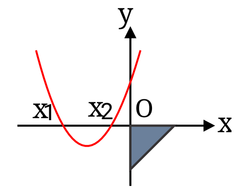
$$\Rightarrow f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) = a(x+۱)(x-۵) \quad (*)$$

مرحلهٔ آخر جایگذاری رأس سهمی در معادلهٔ $(*)$ است:

$$\begin{vmatrix} ۲ \\ -۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{(*)} a(۲+۱)(۲-۵) = -۱ \Rightarrow -۹a = -۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۹}(x^۲ - ۴x - ۵) \Rightarrow \text{مجموع ضرایب} = \frac{۱}{۹}(۱-۴-۵) = -\frac{۸}{۹}$$

۳۷ ـ گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، برای این که نمودار فقط از ناحیه‌ی چهارم نگذرد باید حالت مقابل رخ دهد، با توجه به این حالت:



$f(۰) = \frac{۹}{۴} \Rightarrow$ تابع بالای مبدأ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

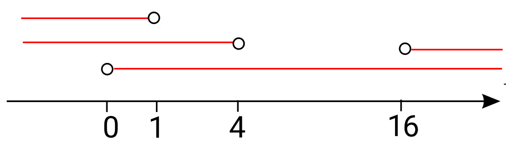
تابع باید مینیمم داشته باشد $\Rightarrow a > ۰ \quad (I)$

$$S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} < ۰ \xrightarrow{a>۰} a - ۴ < ۰ \Rightarrow a < ۴ \quad (II)$$

$$P = x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} > ۰ \xrightarrow{a>۰} c > ۰ \Rightarrow \frac{۹}{۴} > ۰$$ همواره برقرار است

$$\Delta = b^۲ - ۴ac > ۰ \Rightarrow \Delta = (a-۴)^۲ - ۹a = a^۲ - ۱۷a + ۱۶ > ۰$$

$$(a-۱)(a-۱۶) > ۰ \Rightarrow a < ۱ \text{ یا } a > ۱۶ \quad (III)$$



$$\xrightarrow{(I)\cap(II)\cap(III)} ۰ < a < ۱$$

۳۸ ـ گزینه ۳ ابتدا تابع درجه‌ی دوم داده شده را به‌صورت $f(x) = ax^۲ + ۲x + ۲a - ۱$ مرتب می‌کنیم. چون تابع درجه‌ی دوم دارای Min است بنابراین ضریب $x^۲$ باید مثبت باشد یعنی $a > ۰$ است (I). چون تابع دارای Min است و در ربع سوم قرار دارد پس محور xها را در دو نقطه‌ی متمایز قطع می‌کند یعنی $\Delta > ۰$ است.

$$\Delta > ۰ \to b^۲ - ۴ac > ۰ \to ۴ - ۴a(۲a-۱) > ۰ \to ۴ - ۸a^۲ + ۴a > ۰$$

$\to ۸a^۲ - ۴a - ۴ < ۰ \to$

x	$-\infty$	$-\frac{۱}{۲}$		۱		$+\infty$
عبارت < ۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\to \frac{-۱}{۲} < a < ۱ \; : \; II$

از اشتراک I و II به جواب $۰ < a < ۱$ می‌رسیم.

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $-\frac{b}{۲a}$ نیز باید منفی باشد.

$\frac{-b}{۲a} < ۰ \to \frac{-۲}{۲a} < ۰ \to$ برقرار است چون $۰ < a < ۱$ است.

۳۹ ـ گزینه ۲ طول نقطه‌ی B یا همان رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه‌ی هم عرض A و C است.

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{۲} = \frac{-۲+۰}{۲} = -۱$$

و توجه کنید صورت کلی یک تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = ax^۲ + bx + c$ است.

$$\left.\begin{array}{l} A\begin{vmatrix} -۲ \\ -۲ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -۲ = ۴a - ۲b + c \\ B\begin{vmatrix} -۱ \\ -۴ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -۴ = a - b + c \end{array}\right\} \xrightarrow{c=-۲} \begin{cases} ۴a - ۲b = ۰ \\ a - b = -۲ \end{cases} \to a = ۲ \, , \, b = ۴$$

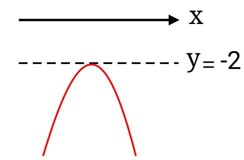
$$C\begin{vmatrix} ۰ \\ -۲ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -۲ = c$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = ۲x^۲ + ۴x - ۲$ است. برای بدست آوردن مجموع مربعات ریشه های معادله‌ی $۲x^۲ + ۴x - ۲ = ۰$ بدین صورت عمل می کنیم.

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{۴}{۲} = -۲ \quad , \quad x'x'' = \frac{c}{a} = -۱$$

مجموع مربعات ریشه‌ها: $x'^۲ + x''^۲ = (x' + x'')^۲ - ۲x'x'' = ۴ - ۲(-۱) = ۶$

۴۰ ـ گزینه ۲ با توجه به شکل زیر بالاترین نقطه‌ی سهمی یا همان عرض ماکسیمم تابع برابر -۲ است. در نتیجه:



$$\frac{4ac-b^2}{4a}=-2\to\frac{4(k)(k-1)-8}{4k}=-2\to 4k^2-4k-8=-8k\Rightarrow 4k^2+4k-8=0$$
$$\to\ k^2+k-2=0\ \Rightarrow\ (k+2)(k-1)=0\Rightarrow k=1\ ,\ k=-2$$

اما چون تابع ماکسیمم دارد، باید ضریب x^2 منفی باشد، یعنی: $k<0$. پس تنها $k=-2$ قابل قبول است.

۴۱ ـ گزینه ۲ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ اول: چون سهمی رو به بالا است پس $a>0$ است و عرض از مبدأ سهمی، منفی است پس $c<0$ است در ضمن طول رأس سهمی، منفی است یعنی:

$$\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{+}<0\longrightarrow -b<0\longrightarrow b>0\xrightarrow{a>0,b>0,c<0}abc<0\longrightarrow$$ گزینهٔ اول نادرست است.

گزینهٔ دوم: از روی شکل مشخص است که تابع دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است که اندازهٔ ریشهٔ منفی بزرگ‌تر از ریشهٔ مثبت است یعنی: $\alpha\beta<0$ و $\alpha+\beta<0$

پس : $\alpha^3+\beta^3=\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-}^3-\underbrace{3\,\underbrace{\alpha\beta}_{-}\,\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-}}_{+}<0\longrightarrow$ گزینهٔ دوم درست است.

گزینهٔ سوم: تابع داده شده دارای ۲ ریشهٔ حقیقی متمایز است یعنی:

$$\Delta>0\longrightarrow b^2-4ac>0\longrightarrow b^2>4ac\longrightarrow\frac{b^2}{4}>ac\longrightarrow$$ گزینهٔ سوم نادرست است.

گزینهٔ چهارم: می‌دانیم $x_S=\frac{\alpha+\beta}{2}$ و $y_S=\frac{-\Delta}{4a}$ است پس $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{-\Delta}{4a}$ بوده و این گزینه نیز نادرست است.

۴۲ ـ گزینه ۱ چون تابع درجه ۲ محور xها را در $x=5$ و $x=-1$ قطع می‌کند پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=a(x+1)(x-5)$ نوشته می‌شود. ضمناً طول رأس سهمی وسط دو ریشه است پس داریم:

$$x_S=\frac{5+(-1)}{2}\to x_S=2\quad,\quad S\left|\begin{matrix}2\\18\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}18=a(3)(-3)\to a=-2$$

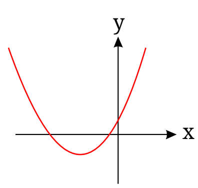
$$f(x)=a(x+1)(x-5)\overset{a=-2}{=\!=\!=}-2(x+1)(x-5)=-2(x^2-4x-5)$$

$$\to f(x)=-2x^2+8x+10\to a=-2\ ,\ b=8\ ,\ c=10$$

پس: $A=-3a+\frac{b}{2}-c=-3(-2)+\frac{8}{2}-10\to A=0$

۴۳ ـ گزینه ۳

سهمی می‌تواند از نواحی اول و دوم و سوم عبور کند.



$$\Delta>0\to b^2-4ac>0\to(a-2)^2-4(a+6)>0\to a^2+4-4a-4a-24>0$$

$$\to a^2-8a-20>0\to(a-10)(a+2)>0\to a<-2\ \text{یا}\ a>10$$

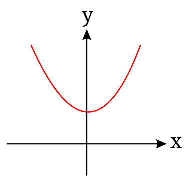
ضریب $x^2>0\to a+6>0\to a>-6$

مجموع ریشه‌ها $<0\to-\underbrace{\frac{b}{a}}_{+}<0\to-b<0\to b>0\to a-2>0\to a>2$

$$\text{ضرب ریشه ها} \geq ۰ \to \frac{c}{a} \geq ۰ \to \frac{۱}{a+۶} \geq ۰ \to a+۶>۰ \to a>-۶$$

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به $a>۱۰$ می‌رسیم.

سهمی می تواند از نواحی اول و دوم عبور کند.



$$x^۲ \text{ ضریب} >۰ \to a+۶>۰ \to a>-۶$$

$$\Delta \leq ۰ \xrightarrow[\text{ممکن است بر محور طول مماس باشد.}]{\text{مساوی به خاطر آن است که سهمی}} b^۲-۴ac \leq ۰ \to a^۲-۸a-۲۰ \leq ۰ \to (a-۱۰)(a+۲) \leq ۰ \to -۲ \leq a \leq ۱۰$$

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به $-۲ \leq a \leq ۱۰$ می‌رسیم.

$$\begin{cases} a>۱۰ \\ -۲ \leq a \leq ۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} a \geq -۲$$

۴۴ ـ گزینه ۱ دو نقطهٔ $\begin{vmatrix} ۰ \\ -۲ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۶ \\ -۲ \end{vmatrix}$ عرض یکسانی دارند و معادلهٔ محور تقارن سهمی، میانگین طول این دو نقطه می‌شود پس $x_S=۳$ است. یعنی $\frac{a_۴+a_۸}{۲}=۳$ است. طبق قاعدهٔ اندیس ها در دنبالهٔ حسابی هرگاه $m+n=p+q$ باشد، آن‌گاه $a_m+a_n=a_p+a_q$ است.

$$\frac{a_۴+a_۸}{۲}=۳ \to a_۴+a_۸=۶ \xrightarrow{۴+۸=۲+۱۰} a_۲+a_{۱۰}=۶$$

۴۵ ـ گزینه ۱ اگر ریشه‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ در نظر بگیریم، آنگاه:

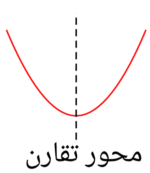
$$\text{قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها} = |x_۱-x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۱-۴(-۱)(-m)}}{|-۱|}=۳$$
$$\Rightarrow \sqrt{۱-۴m}=۳ \Rightarrow ۱-۴m=۹ \Rightarrow ۴m=-۸ \Rightarrow m=-۲$$

پس معادله‌ی تابع به صورت $f(x)=-x^۲+x+۲$ است.

چون ضریب $x^۲$، (a) منفی است بنابراین تابع ماکسیمم دارد و بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، همان عرض راس سهمی یعنی $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$ می‌باشد.

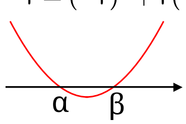
$$\text{عرض ماکسیمم} = \frac{۴(-۱)(۲)-۱}{۴(-۱)} = \frac{۹}{۴}$$

۴۶ ـ گزینه ۳



مطابق شکل مقابل محور تقارن یک سهمی، سهمی را در نقطه‌ی رأس سهمی قطع می‌کند. از آنجا که $x=-\frac{b}{۲a}=-۲$ محور تقارن سهمی است و سهمی را در نقطه‌ای به عرض $y=-۲$ قطع کرده، بنابراین نقطه‌ی $(-۲\ ,\ -۲)$ روی منحنی است، در نتیجه در تابع صدق می‌کند.

$$-۲=(-۲)^۲+۴(-۲)+k \;\;\Rightarrow\;\; k=۲$$



پس معادله‌ی تابع به صورت $y=x^۲+۴x+۲$ است. همچنین با توجه به شکل مقابل، طول پاره‌خطی که منحنی روی محور xها ایجاد می‌کند برابر قدرمطلق تفاضل ریشه‌های تابع است. یعنی:

$$\text{طول پاره‌خط} = |\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۱۶-۴(۲)}}{|۱|} = \sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۴۷ ـ گزینه ۲ چون نمودار سهمی، محور xها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند پس $\Delta>۰$ و $\frac{-b}{a}>۰$ (جمع ۲ ریشه) و $\frac{c}{a}>۰$ (ضرب دو ریشه) است.

$$I)\Delta>۰ \to b^۲-۴ac>۰ \to ۱۶-۴a(a-۳)>۰ \to ۱۶-۴a^۲+۱۲a>۰$$

$$\to ۴a^۲-۱۲a-۱۶<۰ \to a^۲-۳a-۴<۰ \to (a-۴)(a+۱)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱<a<۴$$

$II)\ \dfrac{-b}{a}>0\to\dfrac{-4}{a}>0\to a<0$

$III)\ \dfrac{c}{a}>0\to\dfrac{a-3}{a}>0\to$

a	$-\infty$		0		3		$+\infty$
عبارت >0		$+$	ن	$-$	0	$+$	

$\to a<0$ یا $a>3$

از اشتراک این سه جواب به $-1<a<0$ می‌رسیم، چون رأس سهمی زیر محور xها قرار دارد بنابراین عرض رأس سهمی یعنی $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ باید منفی باشد.

$$\frac{4ac-b^2}{4a}<0\to\frac{\overbrace{b^2-4ac}^{+}}{4a}>0\to 4a>0\to a>0$$

و توجه کنید که $a>0$ و $-1<a<0$ اشتراکی با هم ندارند.

۴۸ ـ گزینه ۱ باتوجه به اینکه $f(x)=ax^2+bx+c$ است، داریم:

$f(0)=-2\to c=-2$

$f(2)=2\to 4a+2b+c=2\ \to 4a+2b=4$

$x_S=-\dfrac{b}{a}\ \to 2=-\dfrac{b}{a}\ \to 4a=-b\xrightarrow{4a+2b=4}-b+2b=4\ \to b=4\ ,\ a=-1$

پس $f(x)=-x^2+4x-2$ است و درضمن α و β ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند و می دانیم $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=4$ و $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=2$ است.

$$\alpha\beta^3+2\alpha^2=\alpha\beta(\beta^2)+2\alpha^2\ =2\beta^2+2\alpha^2=2(\alpha^2+\beta^2)\ =2((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)=2(16-4)=24$$

۴۹ ـ گزینه ۴ نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$ روی شکل قرار دارد پس مختصات این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}-1=0+0+b\to b=-1\to f(x)=(a-5)x^2+(a+3)x-1$$

تابع درجه‌ی دوم بر محور xها مماس است بنابراین دلتا باید صفر باشد.

$$\Delta=0\to b^2-4ac=0\to(a+3)^2-4(a-5)(-1)=0\to a^2+9+6a+4a-20=0$$

$$\to a^2+10a-11=0\to(a+11)(a-1)=0\to a=-11,a=1\ (I)$$

چون تابع در سمت چپ محور yها بر محور xها مماس شده است پس ریشه‌ی مضاعف یعنی $-\dfrac{b}{2a}$ باید منفی باشد.

$\dfrac{-a-3}{2a-10}<0\to$

a	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
عبارت <0		$-$	0	$+$	ت ن	$-$	

$\to a<-3$ یا $a>5\ (II)$

از اشتراک I و II به جواب $a=-11$ می‌رسیم.

۵۰ ـ گزینه ۲

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور xها باشد، آن است که: $a<0$ و $\Delta<0$

$$a<0\Rightarrow 1-m<0\Rightarrow m>1\quad(I)$$

$$\Delta<0\xrightarrow{b^2-4ac<0}4(m-3)^2-4(1-m)(-1)<0\ \xrightarrow{\div 4}(m-3)^2+(1-m)<0$$

$$\Rightarrow m^2-6m+9+1-m<0\ \Rightarrow m^2-7m+10<0\Rightarrow(m-2)(m-5)<0\ \Rightarrow 2<m<5\quad(II)$$

از اشتراک I و II به جواب $2<m<5$ می‌رسیم.

۵۱ ـ گزینه ۳ برای محاسبهٔ مساحت مثلث مورد نظر باید قاعده و سپس ارتفاع آن را بدست آوریم. قاعدهٔ مثلث، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها و ارتفاع مثلث، قدر مطلق عرض رأس سهمی است.

$$S=\frac{|\alpha-\beta|\times|y_S|}{2}=\frac{|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}|\times|\frac{4ac-b^2}{4a}|}{2}$$

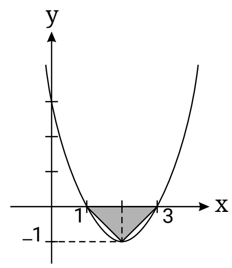
$$\frac{|\frac{\sqrt{m^2-4m+4}}{1}||\frac{4m-4-m^2}{4}|}{2}=\frac{|\sqrt{(m-2)^2}||\frac{m^2-4m+4}{4}|}{2}$$

$$= \frac{|m-۲||(m-۲)^۲|}{۸} = \frac{|(m-۲)^۳|}{۸} = ۱ \to |m-۲| = ۲$$

$$\to \begin{cases} m-۲=۲ \to m=۴ \\ m-۲=-۲ \to m=۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

برای درک مسئله به شکل زیر توجه کنید.

$$m=۴ \to y = x^۲ - ۴x + ۳ \;\to$$



۵۲ ـ گزینه ۲ شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد (بالای محور xها باشد) آن است که $a>۰$ (ضریب $x^۲$) و $\Delta<۰$ باشد.

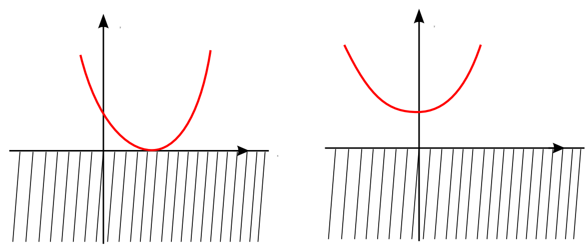
$$a>۰ \to ۱-a>۰ \to a<۱ \;:\; I$$

$$\Delta<۰ \to b^۲-۴ac<۰ \to ۲۴-۴(۱-a)(-a)<۰ \to ۲۴+۴a-۴a^۲<۰$$

$$\xrightarrow{\div(-۴)} a^۲-a-۶>۰ \to (a-۳)(a+۲)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a<-۲ \;\text{ یا }\; a>۳ \;:\; II$$

از اشتراک I و II به جواب $a<-۲$ می‌رسیم.

۵۳ ـ گزینه ۱ سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر است.



برای اینکه یک سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب $x^۲$ مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور xها مماس شود و یا ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta\leq۰$ باشد.

$$Min \Rightarrow x^۲ \;\text{ضریب}\; >۰ \Rightarrow a-۱>۰ \to a>۱ \qquad (I)$$

$$\Delta\leq۰ \to \Delta=b^۲-۴ac=(-۲\sqrt{۳})^۲-۴(a-۱)(a+۱)\leq۰$$

$$\Rightarrow ۱۲-۴a^۲+۴\leq۰ \Rightarrow ۴a^۲\geq۱۶ \Rightarrow a^۲\geq۴$$

$$\Rightarrow a\leq-۲ \;\text{ یا }\; a\geq۲ \qquad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $a\geq۲$ می‌رسیم.

۵۴ ـ گزینه ۲ در شکل (الف)، $a>۰$ و حاصل‌جمع دو ریشه منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها صفر است، چون یکی از ریشه‌ها صفر می‌باشد. بنابراین:

$$P=\frac{c}{a}=۰ \Rightarrow c=۰ \Rightarrow abc=۰$$

و در شکل (ب) دو ریشه قرینهٔ هم می‌باشند، بنابراین $S=۰$ است.

بنابراین:

$$S=-\frac{b}{a}=۰ \Rightarrow b=۰ \Rightarrow abc=۰$$

ولی در شکل (ج)، $a>۰$ و $S<۰$ و $P<۰$است:

$$S=-\frac{b}{a}<۰ \xrightarrow{a>۰} b>۰$$

$$P=\frac{c}{a}<۰ \xrightarrow{a>۰} c<۰$$

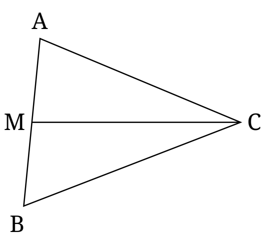
بنابراین $abc<۰$ است.

۵۵ـ گزینه ۲ می‌دانیم مختصات رأس سهمی از رابطهٔ $S\left|\begin{array}{l}-\frac{b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{array}\right.$ به‌دست می‌آید، پس:

$$A\left|\begin{array}{l}-\frac{b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{array}\right. \to A\left|\begin{array}{l}2\\ 1\end{array}\right.$$

نقاط برخورد تابع با محور x: $y=0 \to x^2-4x+3=0 \to (x-1)(x-3)=0 \to \begin{cases} B\left|\begin{array}{l}1\\ 0\end{array}\right. \\ C\left|\begin{array}{l}3\\ 0\end{array}\right.\end{cases}$

مثلث ABC را درنظر گرفته، اکنون می‌خواهیم طول میانهٔ CM را به‌دست آوریم.



$$\to M \text{ وسط } AB \left|\begin{array}{l}\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}\\ \frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

پس: $CM=\sqrt{(x_C-x_M)^2+(y_C-y_M)^2}=\sqrt{(3-\frac{3}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

۵۶ـ گزینه ۴ باتوجه به جدول تعیین علامت، $f(x)=0$ دارای ۲ ریشه می‌باشد، بنابراین $\Delta>0$ می‌باشد. ازطرفی، با رجوع کردن به جدول، مابین دو ریشه، علامت مثبت می‌باشد که طبق این مطلب باید ضریب x^2، منفی باشد.

$$I)\ \Delta>0 \Rightarrow b^2-4ac>0 \Rightarrow (m-1)^2-4(m^2-m-2)(\frac{1}{4})>0$$

$$\Rightarrow m^2-2m+1-m^2+m+2>0 \Rightarrow -m+3>0 \Rightarrow m<3 \quad (I)$$

$$II)\ a<0 \Rightarrow m^2-m-2<0 \Rightarrow (m-2)(m+1)<0 \Rightarrow -1<m<2 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $m\in(-1,2)$ می‌رسیم.

۵۷ـ گزینه ۲ باتوجه به صورت سؤال مشخص است که α و β ریشه‌های معادلهٔ $p(x)=mx^2-x+(m-3)=0$ هستند. باتوجه به آن‌که $x=1$ بین دو ریشه و $x=2$ خارج دو ریشه قرار دارد، پس علامت $p(1)$ و $p(2)$ متفاوت است:

$$\begin{cases} p(1)=m-1+(m-3)=2m-4=2(m-2) \\ p(2)=4m-2+(m-3)=5m-5=5(m-1)\end{cases}$$

$$p(1)p(2)<0 \to 10(m-1)(m-2)<0 \to (m-1)(m-2)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1<m<2$$

۵۸ـ گزینه ۲ عبارت x^2+x+1 همواره مثبت است چون $a>0$ و $\Delta<0$ است بنابراین می توانیم طرفین وسطین کنیم.

$$2ax^2-ax-6\geq -6x^2-6x-6 \longrightarrow (2a+6)x^2+(6-a)x\geq 0$$

شرط آنکه $ax^2+bx+c\geq 0$ باشد آن است که $a>0$ و $\Delta\leq 0$ باشد.

$$a>0 \longrightarrow 2a+6>0 \longrightarrow 2a>-6 \longrightarrow a>-3 \quad (I)$$
$$\Delta\leq 0 \longrightarrow b^2-4ac\leq 0 \longrightarrow (6-a)^2-0\leq 0 \longrightarrow a=6 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $a=6$ می‌رسیم.

۵۹ـ گزینه ۳

$$xf(x)-x^2<0 \Rightarrow x(f(x)-x)<0$$

مطابق شکل در فاصلهٔ $(0,2)$ تابع $y=f(x)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد یعنی $f(x)-x>0$ و در فاصلهٔ $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ پایین خط $y=x$ قرار دارد یعنی $f(x)-x<0$ می‌شود.

	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
x		$-$	۰	$+$		$+$	
$f(x)-x$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$x(f(x)-x)$		$+$	۰	$+$	۰	$-$	

$\Rightarrow x \in (۲,+\infty)$

۶۰ ـ گزینه ۱ روش اول:

هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{۲x-۳}{x+۱} > ۱ \to \frac{۲x-۳}{x+۱} - ۱ > ۰ \to \frac{x-۴}{x+۱} > ۰ \to$$

x	$-\infty$		-۱		۴		$+\infty$
		$+$	ن	$-$	۰	$+$	

$\to x < -۱$ یا $x > ۴ \quad (I)$

$$\frac{۲x-۳}{x+۱} < ۳ \to \frac{۲x-۳}{x+۱} - ۳ < ۰ \to \frac{-x-۶}{x+۱} < ۰ \to$$

x	$-\infty$		-۶		-۱		$+\infty$
		$-$	۰	$+$	ن	$-$	

$\to x < -۶$ یا $x > -۱ \quad (II)$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x > ۴$ یا $x < -۶$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R} - [-۶,۴]$ است.

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$x = ۵ \to ۱ < \frac{۷}{۶} < ۳:$ درست $\to$ گزینه‌های دوم و چهارم حذف می‌شوند

$x = -۷ \to ۱ < \frac{۱۷}{۶} < ۳:$ درست $\to$ گزینهٔ سوم حذف می‌شود

۶۱ ـ گزینه ۲ نامعادله را به دو نامعادلهٔ مجزا تقسیم می‌کنیم.

$$x \le \frac{x^۲}{x-۱} \longrightarrow \frac{x^۲}{x-۱} - x \ge ۰ \longrightarrow \frac{x^۲-x^۲+x}{x-۱} \ge ۰ \longrightarrow \frac{x}{x-۱} \ge ۰$$

$\longrightarrow$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
عبارت ≥ ۰		$+$	۰	$-$	ن	$+$	

$\longrightarrow x \le ۰$ یا $x > ۱ \quad (I)$

$$\frac{x^۲}{x-۱} < ۱ \longrightarrow \frac{x^۲}{x-۱} - ۱ < ۰ \longrightarrow \frac{x^۲-x+۱}{x-۱} < ۰ \xrightarrow[(a>۰\,,\,\Delta<۰)]{\text{صورت همواره مثبت است.}} x-۱ < ۰ \longrightarrow x < ۱ \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x \le ۰$ می‌رسیم.

۶۲ ـ گزینه ۳ روش اول:

$$\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲} > \frac{x}{x-۲} \to \frac{۷x-۸}{(x-۲)(x+۱)} - \frac{x}{x-۲} > ۰$$

$$\to \frac{۷x-۸-x^۲-x}{(x-۲)(x+۱)} > ۰ \to \frac{-x^۲+۶x-۸}{(x-۲)(x+۱)} > ۰$$

$$\to \frac{x^۲-۶x+۸}{(x-۲)(x+۱)} < ۰ \to \frac{(x-۴)(x-۲)}{(x-۲)(x+۱)} < ۰$$

$$\to \frac{x-۴}{x+۱} < ۰ \xrightarrow[\text{توجه کنید } x=۲ \text{ مخرج را صفر می‌کند.}]{\text{تعیین علامت}}$$

x	$-\infty$		-۱		۲		۴		$+\infty$
		$+$	ن	$-$	ن	$-$	۰	$+$	

$\to -۱ < x < ۲$ یا $۲ < x < ۴ \quad \to x \in (-۱,۲) \cup (۲,۴)$

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$x = ۰ \longrightarrow \frac{-۸}{-۲} > ۰ \;:\;$ درست $\longrightarrow$ گزینهٔ دوم حذف می‌شود

$x = ۳ \longrightarrow \frac{۱۳}{۴} > ۳ \;:\;$ درست $\longrightarrow$ گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند

۶۳ ـ گزینه ۱ چون دامنهٔ عبارت $\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x-۱}}$ برابر $x > ۱$ است، پس هر ۳ عبارت $x-۱$، $\sqrt{x}-۱$ و $\sqrt{x-۱}$ مثبت هستند و داریم:

$$\frac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x-۱}} > x-۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} > \sqrt{x-۱} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-۱}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)} > \sqrt{x-۱} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x}+۱} > \sqrt{x-۱}$$

با شرط $x > ۱$ اولین عدد صحیح ۲ می‌شود که با درنظرگیری $x \in \mathbb{Z}$؛ $x \geq ۲$ عبارت سمت راست همواره بزرگ‌تر از ۱ و عبارت سمت چپ کوچک‌تر از ۱ است. لذا هیچ عدد صحیحی در این نامعادله صدق نمی‌کند.

۶۴ ـ گزینه ۱ ابتدا یک طرف نامعادله را صفر می‌کنیم:

$$\frac{۳x^۲-۳x}{x^۳-۱} - ۱ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۳x^۲-۳x-x^۳+۱}{x^۳-۱} \geq ۰ \xrightarrow{\text{صورت کسر را مرتب‌تر می‌نویسیم.}} \frac{-x^۳+۳x^۲-۳x+۱}{x^۳-۱} \geq ۰$$

در صورت کسر، اتحاد مکعب کامل و در مخرج کسر، اتحاد چاق و لاغر را می‌نویسیم:

$$\frac{-(x-۱)^۳}{(x-۱)(x^۲+x+۱)} \geq ۰ \xrightarrow{x\neq۱} \frac{-(x-۱)^۲}{x^۲+x+۱} \geq ۰ \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در منفی با تغییر جهت نامساوی}} \frac{(x-۱)^۲}{x^۲+x+۱} \leq ۰$$

واضح است که عبارت $(x-۱)^۲$ همواره بزرگ‌تر مساوی صفر و عبارت $x^۲+x+۱$ (به‌دلیل $\Delta < ۰$ و $a > ۰$)، همواره بزرگ‌تر از صفر است. پس حاصل تقسیم آن‌ها نمی‌تواند کوچک‌تر از صفر باشد. شاید فکر کرده باشید $x = ۱$ از آن‌جا که حاصل کسر را صفر می‌کند، در نامعادله صدق می‌کند، اما دقت کنید که عبارت اولیه به‌ازای $x = ۱$ به‌عنوان ریشهٔ مخرج اصلاً تعریف نشده است. پس هیچ عددی در این نامعادله صدق نمی‌کند.

۶۵ ـ گزینه ۲

$$(\frac{۱}{۳}x+۴)(\sqrt{x}+۱) > x + x\sqrt{x} \rightarrow (\frac{۱}{۳}x+۴)(\sqrt{x}+۱) > x(۱+\sqrt{x}) \rightarrow (\frac{۱}{۳}x+۴)(\sqrt{x}+۱) - x(۱+\sqrt{x}) > ۰$$

$$\xrightarrow[(۱+\sqrt{x})]{\text{فاکتورگیری از}} (۱+\sqrt{x})(\frac{۱}{۳}x+۴-x) > ۰ \xrightarrow[\text{همواره مثبت است.}]{\text{عبارت } (۱+\sqrt{x})} -\frac{۲}{۳}x+۴ > ۰ \Rightarrow ۴ > \frac{۲}{۳}x \Rightarrow ۶ > x$$

امت توجه داشته باشید که x به‌دلیل قرار گرفتن در زیر رادیکال باید همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد و لذا مجموعهٔ جواب نهایی برابر است با:

$$۰ \leq x < ۶$$

واضح است که این بازه شامل دو عدد صحیح مضرب ۳ است.

$$x = ۰ \;,\; x = ۳$$

۶۶ ـ گزینه ۴

$$\frac{x^۳}{۱+x^۲} \leq \frac{x^۴}{۱+x^۳} \rightarrow \frac{x^۳}{۱+x^۲} - \frac{x^۴}{۱+x^۳} \leq ۰ \rightarrow \frac{x^۳(۱+x^۳)-x^۴(۱+x^۲)}{(۱+x^۲)(۱+x^۳)} \leq ۰ \rightarrow \frac{x^۳+x^۶-x^۴-x^۶}{(۱+x^۲)(۱+x^۳)} \leq ۰$$

$$\rightarrow \frac{x^۳(۱-x)}{(۱+x^۲)(۱+x^۳)} \leq ۰ \rightarrow \begin{cases} x^۳ = ۰ \rightarrow x = ۰ \\ ۱-x = ۰ \rightarrow x = ۱ \\ ۱+x^۲ = ۰ \rightarrow \text{ریشهٔ حقیقی ندارد} \\ ۱+x^۳ = ۰ \rightarrow x = -۱ \end{cases} \rightarrow$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
عبارت ≤ ۰		$+$	ن	$-$	۰	$+$	۰	$-$	

$$\rightarrow x \in (-۱, ۰] \cup [۱, +\infty)$$

بنابراین بی‌شمار عدد صحیح در این نامعادله صدق می‌کند.

۶۷ ـ گزینه ۴

$$\frac{x^۲+ax+۴}{x^۲-۲x-۳} = ۰ \rightarrow x^۲+ax+۴ = ۰ \;,\; \rightarrow x^۲-۲x-۳ \neq ۰ \rightarrow (x-۳)(x+۱) \neq ۰$$

$$\rightarrow x \neq ۳ \,,\; x \neq -۱$$

برای این‌که معادله یک ریشه داشته باشد، حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

۱- معادلهٔ $x^۲+ax+۴ = ۰$ یک ریشه داشته باشد، پس باید $\Delta = ۰$ باشد و داریم:

$$a^۲ - ۴(۱)(۴) = ۰ \rightarrow a^۲ - ۱۶ = ۰ \rightarrow a = \pm۴$$

$$\begin{cases} a=۴ \to x^۲+۴x+۴=۰ \to (x+۲)^۲=۰ \to x=-۲ \checkmark \\ a=-۴ \to x^۲-۴x+۴=۰ \to (x-۲)^۲=۰ \to x=۲ \checkmark \end{cases}$$

۲- معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x=۳$ باشد و داریم:

$$۳^۲+a(۳)+۴=۰ \to ۳a=-۱۳ \to a=-\frac{۱۳}{۳} \to x^۲-\frac{۱۳}{۳}x+۴=۰$$

$$\to (x-۳)(x-\frac{۴}{۳})=۰ \to x=۳\ ,\ x=\frac{۴}{۳} \to$$ قابل قبول است. $a=-\frac{۱۳}{۳}$

۳- معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x=-۱$ باشد و داریم:

$$(-۱)^۲+a(-۱)+۴=۰ \to -a+۵=۰ \to a=۵ \to x^۲+۵x+۴=۰$$

$$\to (x+۱)(x+۴)=۰ \to x=-۱\ ,\ x=-۴ \to$$ قابل قبول است. $a=۵$

۴ مقدار برای a داریم یعنی $\{\pm۴, -\frac{۱۳}{۳}, ۵\}$

۶۸ ـ گزینه ۳ می‌دانیم که $x=vt$ و از آنجا $t=\frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v در نظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب $v+۱۰۰$ و در خلاف جهت حرکت آب $۱۰۰-v$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_۱=\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v} \\ \text{مسیر برگشت } t_۲=\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v} \end{cases} \longrightarrow t_۲-t_۱=۵ \longrightarrow \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v}-\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v}=۵$$

$$\longrightarrow \frac{۱۲۰۰(۱۰۰+v)-۱۲۰۰(۱۰۰-v)}{(۱۰۰-v)(۱۰۰+v)}=۵ \longrightarrow \frac{۱۲۰۰۰۰+۱۲۰۰v-۱۲۰۰۰۰+۱۲۰۰v}{۱۰۰۰۰-v^۲}=۵$$

$$\longrightarrow ۲۴۰۰v=۵(۱۰۰۰۰-v^۲) \longrightarrow ۴۸۰v=۱۰۰۰۰-v^۲$$

$$\longrightarrow v^۲+۴۸۰v-۱۰۰۰۰=۰ \longrightarrow (v-۲۰)(v+۵۰۰)=۰$$

$$\longrightarrow \begin{cases} v=۲۰ \quad \text{قق} \\ v=-۵۰۰ \quad \text{غقق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به‌راحتی به جواب $v=۲۰$ برسید.

۶۹ ـ گزینه ۲ ریشهٔ معادله در معادله صدق می‌کند.

$$x=-۲ \to ۴-۲+\frac{۴}{۴-۲+۲}+m=۰ \to ۲+۱+m=۰ \to m=-۳$$

$$\text{پس:} x^۲+x+\frac{۴}{x^۲+x+۲}-۳=۰ \to x^۲+x+۲+\frac{۴}{x^۲+x+۲}-۵=۰$$

$$\xrightarrow{x^۲+x+۲=t} t+\frac{۴}{t}-۵=۰ \xrightarrow{\times t} t^۲+۴-۵t=۰ \to t^۲-۵t+۴=۰$$

مجموع ضرایب معادله برابر صفر است پس:

$$\begin{cases} t=۱ \to x^۲+x+۲=۱ \to x^۲+x+۱=۰ \to \Delta=۱-۴<۰ \ \text{ریشهٔ حقیقی ندارد.} \\ t=\frac{c}{a}=۴ \to x^۲+x+۲=۴ \to x^۲+x-۲=۰ \to (x+۲)(x-۱)=۰ \to x=-۲, x=۱ \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر -۱ است.

۷۰ ـ گزینه ۳

$$\frac{m+۱}{۳x}=\frac{۵-x}{۴x-x^۲} \longrightarrow \frac{m+۱}{۳x}=\frac{x-۵}{x(x-۴)}$$

$$\to (m+۱)(x-۴)=۳(x-۵) \longrightarrow (m+۱)x-۴m-۴=۳x-۱۵$$

$$\longrightarrow (m-2)x = 4m-11 \longrightarrow x = \frac{4m-11}{m-2}$$

از آن‌جایی‌که $x=0$ و $x=4$ مخرج معادله را صفر می‌کنند، اگر جواب به‌دست آمده یکی از این اعداد باشد معادله جواب ندارد. پس داریم:

$$x=0 \longrightarrow 4m-11=0 \longrightarrow m=\frac{11}{4}$$

$$x=4 \longrightarrow \frac{4m-11}{m-2}=4 \longrightarrow 4m-11=4m-8 \longrightarrow -11=-8 \longrightarrow \text{غیر ممکن}$$

همچنین اگر $m-2=0$ باشد، معادله ریشه ندارد، یعنی در حالت $m=2$ نیز ریشه وجود ندارد.

۷۱ - گزینه ۳ فرض کنیم شیر A کل استخر را در x ساعت پُر می‌کند، پس در یک ساعت می‌تواند $\frac{1}{x}$ استخر را پر کند. هم‌چنین شیر B استخر را در $x+2$ ساعت پر می‌کند، پس در یک ساعت می‌تواند $\frac{1}{x+2}$ استخر را پر کند.

بنابر صورت مسأله ۶٫۵ ساعت شیر B به‌تنهایی و ۲٫۵ ساعت هر دو شیر A و B باز بوده‌اند و حاصل عملکرد آن‌ها کل استخر را پُر کرده است:

$$6/5\left(\frac{1}{x+2}\right)+2/5\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}\right)=1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{x+2}+\frac{2/5}{x}=1 \Rightarrow \frac{9x+2/5x+5}{x(x+2)}=1 \Rightarrow 11/5x+5=x^2+2x$$

$$\Rightarrow x^2-9/5x-5=0 \Rightarrow (x+0/5)(x-10)=0 \rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} & \text{غ ق ق} \\ x=10 & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین شیر A به‌تنهایی در ۱۰ ساعت استخر را پر می‌کند.

۷۲ - گزینه ۲ در طرف چپ تساوی مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{m}{x-2}+\frac{x}{x+1}=\frac{2x+4}{x^2-x-2} \Rightarrow \frac{mx+m+x^2-2x}{x^2-x-2}=\frac{2x+4}{x^2-x-2}$$

$$\xrightarrow{x\neq -1,2} mx+m+x^2-2x=2x+4 \Rightarrow x^2+(m-4)x+(m-4)=0 \quad (*)$$

اگر ریشه‌های معادله را α و β درنظر بگیریم، با توجه به این‌که یک ریشهٔ معادله از قرینهٔ ریشهٔ دیگر یک واحد بیش‌تر است، داریم:

$$\alpha=-\beta+1 \Rightarrow \alpha+\beta=1 \quad (**)$$

با توجه به معادلهٔ $(*)$ جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{m-4}{1} \xrightarrow{(**)} -\frac{m-4}{1}=1 \Rightarrow m=3$$

۷۳ - گزینه ۱ می‌دانیم $x=vt \Rightarrow t=\frac{x}{v}$ است.

اگر سرعت حرکت آب را v درنظر بگیریم، قایق موتوری با سرعت $9+v$ رفته و با سرعت $9-v$ برگشته است:

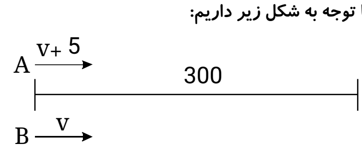
$$\left.\begin{array}{l} \text{رفت } t_1=\frac{x}{v_1}=\frac{80}{9+v} \\ \text{برگشت } t_2=\frac{x}{v_2}=\frac{80}{9-v} \end{array}\right\} \Rightarrow t_2-t_1=2 \Rightarrow \frac{80}{9-v}-\frac{80}{9+v}=2$$

$$\xrightarrow{\times(9-v)(9+v)} 720+80v-720+80v=162-2v^2 \quad \Rightarrow 2v^2+160v-162=0 \quad \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} v=1 & \text{ق ق} \\ v=\frac{c}{a}=-81 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

سرعت در مسیر رفت $=9+v=9+1=10$

۷۴ - گزینه ۳ می‌دانیم که $x=vt \rightarrow t=\frac{x}{v}$ است.

با توجه به شکل زیر داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \text{زمان } t_A=\frac{300}{v+5} \\ \text{زمان } t_B=\frac{300}{v} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{300}{v}-\frac{300}{v+5}=\frac{1500}{v(v+5)}=2$$

$$\rightarrow v^2+5v-750=0 \quad \rightarrow (v+30)(v-25)=0 \quad \rightarrow v=25$$

سرعت دوندهٔ سریع‌تر: $v+5=25+5=30$

۷۵ ـ گزینه ۴

$$\frac{a+1}{-x(x-1)}+\frac{1}{x-1}=1 \Rightarrow \frac{a+1-x}{-x(x-1)}=1$$

$$\rightarrow a+1-x=-x^2+x \Rightarrow x^2-2x+a+1=0$$

برای داشتن ریشهٔ مضاعف باید $\Delta=b^2-4ac=0$ باشد.

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(a+1)=0 \Rightarrow 4-4(a+1)=0 \Rightarrow 1-a-1=0 \Rightarrow a=0$$

اما به‌ازای $a=0$ معادلهٔ $x^2-2x+a+1=0$ به‌صورت $x^2-2x+1=0$ خواهد بود که $(x-1)^2=0$ است و ریشهٔ مضاعف $x=1$ را داریم که غیرقابل قبول است (زیرا مخرج را صفر می‌کند.) پس هیچ مقداری برای a قابل قبول نیست.

۷۶ ـ گزینه ۲

$$\sqrt{4x+8}+\sqrt{4x-16}=A$$

$$\rightarrow (\sqrt{4x+8}+\sqrt{4x-16})(\sqrt{4x+8}-\sqrt{4x-16})=(\sqrt{4x+8}-\sqrt{4x-16})A$$

$$\rightarrow (4x+8)-(4x-16)=3A$$

$$24=3A \rightarrow A=8$$

۷۷ ـ گزینه ۴

$$3a+\sqrt{2a^2+4a}=2 \rightarrow \sqrt{2a^2+4a}=2-3a \xrightarrow{\text{توان } 2} 2a^2+4a=4+9a^2-12a \rightarrow 7a^2-16a+4=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=256-112=144} \begin{cases} a=\dfrac{16+12}{14}=2 \ (\text{در معادله صدق نمی‌کند}) \ \text{غ‌ق‌ق} \\ a=\dfrac{16-12}{14}=\dfrac{2}{7} \ \text{ق‌ق} \end{cases}$$

$$\text{پس}: \frac{a+1}{a}=\frac{\frac{2}{7}+1}{\frac{2}{7}}=\frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}}=\frac{9}{2}=4/5$$

۷۸ ـ گزینه ۱ اگر $\sqrt{3x-2x^2}=A$ را در نظر بگیریم داریم:

$$A+\frac{1}{A}=2 \xrightarrow{\times A} A^2+1=2A \longrightarrow A^2-2A+1=0 \longrightarrow (A-1)^2=0 \longrightarrow A=1$$

$$\rightarrow \sqrt{3x-2x^2}=1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 3x-2x^2=1 \longrightarrow 2x^2-3x+1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \in \mathbb{N} \\ x=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

بنابراین معادله فقط دارای یک ریشهٔ طبیعی است.

۷۹ ـ گزینه ۴

$$\sqrt{3-3y}=3+\sqrt{3y+2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}3-3y=9+3y+2+6\sqrt{3y+2}$$

$$\longrightarrow -6y-8=6\sqrt{3y+2}\longrightarrow -2(3y+4)=6\sqrt{3y+2}$$

$$\longrightarrow -(3y+4)=3\sqrt{3y+2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}9y^2+16+24y=27y+18$$

$$\longrightarrow 9y^2-3y-2=0\longrightarrow \Delta=b^2-4ac=9+72=81$$

$$\longrightarrow\begin{cases}y_1=\dfrac{3+9}{18}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}\\ y_2=\dfrac{3-9}{18}=\dfrac{-6}{8}=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$$

هیچ‌کدام از دو جواب به‌دست آمده در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کنند بنابراین معادله فاقد جواب است.

۸۰ ـ گزینه ۲ معادلهٔ گنگ داده‌شده را به گونه‌ای می‌نویسیم که رادیکال‌ها در طرفین تساوی باشند. سپس طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sqrt{x+1}-1=\sqrt{2x-5}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}(x+1)+1-2\sqrt{x+1}=2x-5\Rightarrow -x+7=2\sqrt{x+1}$$

حال باز هم به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(-x+7)^2=(2\sqrt{x+1})^2\Rightarrow x^2-14x+49=4(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2-18x+45=0\Rightarrow(x-15)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=15\ (\text{در معادله صدق نمی‌کند.})\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$a=3\Rightarrow a^2+a=9+3=12$$

۸۱ ـ گزینه ۱ زمان طی‌شدهٔ یک مسیر از تقسیم طولش بر سرعت طی کردن آن پیدا می‌شود.

$$\text{زمان کل}:\ \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{\frac{9}{2}-x}{4}=2\ \Rightarrow 2\sqrt{4+x^2}+\frac{9}{2}-x=8\ \Rightarrow 2\sqrt{4+x^2}=\frac{7}{2}+x$$

طرفین به توان ۲:

$$4(4+x^2)=\frac{49}{4}+7x+x^2\ \Rightarrow 3x^2-7x+\frac{15}{4}=0\ \longrightarrow\Delta=b^2-4ac=49-45=4\ \longrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{7+2}{6}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}\\ x_2=\dfrac{7-2}{6}=\dfrac{5}{6}\end{cases}$$

که هر دو قابل قبولند.

۸۲ ـ گزینه ۱

$$2a+\sqrt{3a+16}=1\rightarrow\sqrt{3a+16}=1-2a\xrightarrow{\text{توان ۲}}3a+16=1+4a^2-4a$$

$$\rightarrow 4a^2-7a-15=0\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=49+240=289}\begin{cases}a=\dfrac{7+17}{8}=3\ (\text{در معادله صدق نمی‌کند})\ \text{غ‌ق‌ق}\\ a=\dfrac{7-17}{8}=\dfrac{-5}{4}\ \text{ق‌ق}\end{cases}$$

$$\text{پس}:\ 4a+9=4(\frac{-5}{4})+9=4$$

۸۳ ـ گزینه ۲

$$\sqrt{x+3}=1+\sqrt{x-1}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x+3=1+x-1+2\sqrt{x-1}\Rightarrow\frac{3}{2}=\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow\frac{9}{4}=x-1\Rightarrow x=1+\frac{9}{4}=3{,}25$$

۸۴ ـ گزینه ۲

$$(x+۱)(۲x+۵)=\sqrt{-(x+۳)(۲x+۱)}\longrightarrow ۲x^۲+۷x+۵=\sqrt{-(۲x^۲+۷x+۳)}$$

$$\xrightarrow{۲x^۲+۷x=t} t+۵=\sqrt{-(t+۳)}\xrightarrow{\text{توان ۲}} t^۲+۲۵+۱۰t=-t-۳$$

$$\longrightarrow t^۲+۱۱t+۲۸=۰\longrightarrow (t+۴)(t+۷)=۰\ \rightarrow \begin{cases} t=-۴ \\ t=-۷\ (\text{در معادله صدق نمی‌کند.})\ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$t=-۴\longrightarrow ۲x^۲+۷x=-۴\longrightarrow ۲x^۲+۷x+۴=۰\longrightarrow \text{حاصل ضرب ریشه ها}=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۸۵ ـ گزینه ۱ ابتدا معادلهٔ داده شده را ساده می‌کنیم:

$$x^۲-۲x+۳=\sqrt{x^۲-۲x+۵}\rightarrow (x^۲-۲x+۵)-۲=\sqrt{x^۲-۲x+۵}$$

با تغییر متغیر $t=\sqrt{x^۲-۲x+۵}$ معادلهٔ بالا به‌صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$t^۲-۲=t\rightarrow t^۲-t-۲=۰$$

واضح است که جواب‌های معادلهٔ بالا $t=-۱$ و $t=۲$ هستند. با توجه به آن‌که t برابر با رادیکال (فرجهٔ زوج) یک عبارت است، پس نمی‌تواند مقادیر منفی را بپذیرد. پس تنها جواب $t=۲$ مورد قبول است:

$$\sqrt{x^۲-۲x+۵}=۲\rightarrow x^۲-۲x+۵=۴\rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\rightarrow (x-۱)^۲=۰$$

معادلهٔ بالا یک ریشهٔ مضاعف $x=۱$ دارد.

پاسخنامه کلیدی

۱	۴
۲	۲
۳	۱
۴	۲
۵	۱
۶	۲
۷	۲
۸	۳
۹	۱
۱۰	۲
۱۱	۳
۱۲	۴
۱۳	۱
۱۴	۲
۱۵	۲
۱۶	۳
۱۷	۱
۱۸	۴
۱۹	۳
۲۰	۳
۲۱	۴
۲۲	۲
۲۳	۱
۲۴	۳
۲۵	۴
۲۶	۲
۲۷	۱
۲۸	۲
۲۹	۲
۳۰	۱
۳۱	۱
۳۲	۱
۳۳	۲
۳۴	۳
۳۵	۳
۳۶	۴
۳۷	۴
۳۸	۳
۳۹	۲
۴۰	۲
۴۱	۲
۴۲	۱
۴۳	۳
۴۴	۱
۴۵	۱
۴۶	۳
۴۷	۲
۴۸	۱
۴۹	۴
۵۰	۲
۵۱	۳
۵۲	۲
۵۳	۱
۵۴	۲
۵۵	۲
۵۶	۴
۵۷	۲
۵۸	۲
۵۹	۳
۶۰	۱
۶۱	۲
۶۲	۳
۶۳	۱
۶۴	۱
۶۵	۲
۶۶	۴
۶۷	۴
۶۸	۳
۶۹	۲
۷۰	۳
۷۱	۳
۷۲	۲
۷۳	۱
۷۴	۳
۷۵	۴
۷۶	۲
۷۷	۴
۷۸	۱
۷۹	۴
۸۰	۲
۸۱	۱
۸۲	۱
۸۳	۲
۸۴	۲
۸۵	۱