

Peluang

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al-Azhar Indonesia

aliakbars@live.com

March 19, 2019

Selayang Pandang

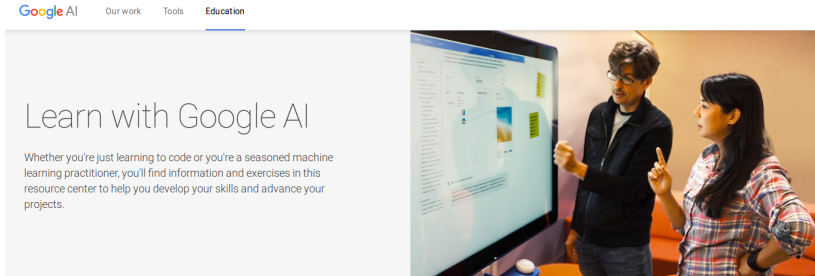
- ① Peubah Acak
- ② Peluang Bersyarat
- ③ Bayes' Rule

Coba ini...



Gambar: Machine Learning Flashcards

Coba ini...



Educational resources from machine learning

Gambar: Learn with Google AI

Coba ini...

The screenshot shows the Coursera website interface for the 'Machine Learning' course. At the top, the Coursera logo is on the left, and a search bar with the text 'Catalog' and 'Search catalog' is in the center. To the right of the search bar is a magnifying glass icon. Further right, the text 'For Enterprise' is visible, followed by a user profile icon and the text 'All'. Below the search bar, the course title 'Machine Learning' is displayed in a large, serif font. To the left of the main content area is a sidebar with a list of links: 'Overview', 'Syllabus', 'FAQs', 'Creators', and 'Ratings and Reviews'. Below these links is a button labeled 'Go to Course'. Underneath the button, the text 'Already enrolled' is displayed, followed by a link 'Apply for Financial Aid'. The main content area features a paragraph about the course: 'About this course: Machine learning is the science of getting computers to act without being explicitly programmed. In the past decade, machine learning has given us self-driving cars, practical speech recognition, effective web search, and a vastly improved understanding of the human genome. Machine learning is so pervasive today that you probably use it dozens of times a day without knowing it. Many'. Below this paragraph is a link 'More'. Further down, the text 'Created by: Stanford University' is displayed, followed by the Stanford University logo. At the bottom of the page, there is a circular profile picture of Andrew Ng, followed by the text 'Taught by: Andrew Ng, Co-founder, Coursera; Adjunct Professor, Stanford University; formerly head of Baidu AI Group/Google Brain'.

coursera

Catalog Search catalog

For Enterprise

All

Machine Learning

Overview

Syllabus

FAQs

Creators

Ratings and Reviews

[Go to Course](#)

Already enrolled

[Apply for Financial Aid](#)

About this course: Machine learning is the science of getting computers to act without being explicitly programmed. In the past decade, machine learning has given us self-driving cars, practical speech recognition, effective web search, and a vastly improved understanding of the human genome. Machine learning is so pervasive today that you probably use it dozens of times a day without knowing it. Many

[More](#)

Created by: Stanford University

Stanford University

Taught by: [Andrew Ng](#), Co-founder, Coursera; Adjunct Professor, Stanford University; formerly head of Baidu AI Group/Google Brain

Gambar: Machine Learning - Coursera

Coba ini...

The screenshot displays a video player interface for a lecture from Statistics 110 at Harvard University. The main video frame shows a professor in a blue shirt pointing at a chalkboard. The chalkboard has the text "stat110.net", "HW", "SP", and "due 9/9" written on it. The video player controls at the bottom show a progress bar at 0:03 / 46:28, along with icons for play, pause, volume, and other controls. On the right side, there is a list of four lectures:

- Lecture 1: Probability and Counting | Statistics 110 (46:29)
- Lecture 2: Story Proofs, Axioms of Probability | Statistics 110 (45:40)
- Lecture 3: Birthday Problem, Properties of Probability | Statistics 110 (48:55)
- Lecture 4: Conditional Probability | Statistics 110 (49:45)

The Harvard University logo is visible in the bottom right corner of the video frame.

Gambar: Statistics 110 - Harvard

Peubah Acak

Ruang Sampel

Apa itu?

S = himpunan dari semua keluaran yang mungkin terjadi

Example

lemparan koin

$$S = \{Angka, Gambar\}$$

lemparan dua koin

$$S = \{(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)\}$$

lemparan dadu

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

jumlah email dalam satu hari

$$S = \mathbb{N}$$

jam bermain Mobile Legends

$$S = [0, 24]$$

Kejadian

Apa itu?

E = subhimpunan/subset dari S ($E \subseteq S$)

Example

lemparan koin memunculkan angka

$$E = \{Angka\}$$

≥ 1 angka dari dua koin

$$E = \{(A, A), (A, G), (G, A)\}$$

lemparan dadu ≥ 3

$$E = \{3, 4, 5, 6\}$$

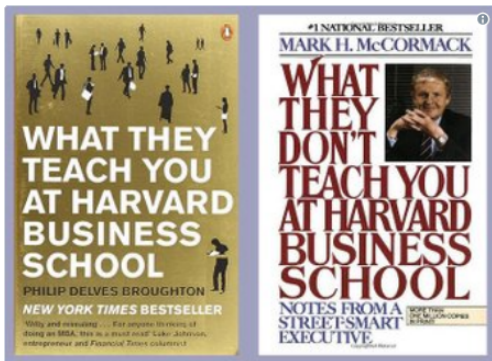
email dalam sehari ≤ 5

$$E = \{x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$$

“hari-hari tidak produktif”

$$E = [8, 24]$$

Ilmu Sapu Jagat



James Kirkpatrick
@James_Kpatrick



These two books contain the sum total of all human knowledge

7:28 PM - Apr 5, 2013

♡ 28.2K 💬 27.4K people are talking about this

Mengapa?

$$E \cup E' = S$$

Jadi, apa itu peluang/probabilitas?

Probabilitas

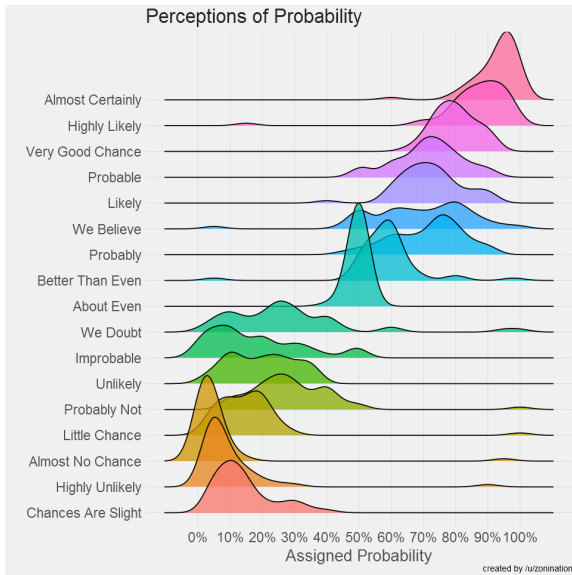
- Kuantifikasi dari ketidakpastian

Probabilitas

- Kuantifikasi dari **ketidakpastian**
- Nilai antara 0 dan 1 yang kita pautkan pada suatu **kejadian**

Probabilitas

- Kuantifikasi dari **ketidakpastian**
- Nilai antara 0 dan 1 yang kita pautkan pada suatu **kejadian**
- Faktanya, **persepsi** kita terhadap ketidakpastian bisa berbeda-beda



Gambar: Persepsi akan probabilitas — Sumber:
<https://github.com/zonination/perceptions>

Frequentist vs Bayesian

Interpretasi Frequentist

Frekuensi kemunculan kejadian dalam *jangka panjang*

Example

Peluang kemunculan sisi angka dari suatu lemparan koin adalah 0.43

Frequentist vs Bayesian

Interpretasi Frequentist

Frekuensi kemunculan kejadian dalam *jangka panjang*

Example

Peluang kemunculan sisi angka dari suatu lemparan koin adalah 0.43

Interpretasi Bayesian

Kuantifikasi *derajat kepercayaan* terhadap sesuatu

Example

Peluang besok¹ hujan adalah 0.3

¹Apakah mungkin mengulang “besok”?

Interpretasi Frequentist

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(E)}{n}$$

Aksioma Probabilitas

- ① $0 \leq P(E) \leq 1$
- ② $P(S) = 1$
- ③ Jika $E \cap F = \emptyset$, maka
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Akibatnya...

- ① $P(E') = 1 - P(E)$
- ② Jika $E \subseteq F$, maka $P(E) \leq P(F)$
- ③ $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Peubah Acak

- Peubah acak atau *random variables* (RV) X menunjukkan sebuah nilai yang dapat berubah-ubah, tergantung kejadian
- Dapat berupa *hasil eksperimen* (e.g. lemparan koin) atau pengukuran kuantitas yang fluktuatif (e.g. temperatur)
- X menggambarkan RV, x menggambarkan nilai, e.g. $p(X = x)$
- Dapat disingkat menjadi $p(x)$
- Sebuah RV dapat bernilai *kontinu* maupun *diskrit*

Contoh Kasus

Example

Dua dadu dilempar bersamaan, berapa peluang munculnya sisi kedua dadu berjumlah 7?

Contoh Kasus

Example

Dua dadu dilempar bersamaan, berapa peluang munculnya sisi kedua dadu berjumlah 7?

Pertanyaan

Apa yang harus didefinisikan terlebih dahulu?

Contoh Kasus

Example

Dua dadu dilempar bersamaan, berapa peluang munculnya sisi kedua dadu berjumlah 7?

Pertanyaan

Apa yang harus didefinisikan terlebih dahulu?

Jawab

Apa yang menjadi ruang sampelnya? Apa pula kejadiannya?

Contoh Kasus (lanjutan)

- $S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$

Contoh Kasus (lanjutan)

- $S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$
- $E = \{(1, 6), (2, 5), \dots, (5, 2), (6, 1)\}$

Contoh Kasus (lanjutan)

- $S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$
- $E = \{(1, 6), (2, 5), \dots, (5, 2), (6, 1)\}$
- $p(X_1 + X_2 = 7) = ?$

Contoh Kasus (lanjutan)

- $S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$
- $E = \{(1, 6), (2, 5), \dots, (5, 2), (6, 1)\}$
- $p(X_1 + X_2 = 7) = ?$
- $p((X_1 = 1 \cap X_2 = 6) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 5) \cup \dots) = \frac{6}{36}$

Contoh Kasus

Example

Ada 3,200 mahasiswa UAI, Anda berteman dengan 40 orang di antaranya. Jika Anda pergi ke suatu acara yang didatangi 20 orang mahasiswa UAI, berapa peluang Anda menemukan *paling tidak* satu orang teman Anda?

Contoh Kasus

Example

Ada 3,200 mahasiswa UAI, Anda berteman dengan 40 orang di antaranya. Jika Anda pergi ke suatu acara yang didatangi 20 orang mahasiswa UAI, berapa peluang Anda menemukan *paling tidak* satu orang teman Anda?

Definisikan

$$p(X \geq 1) = \dots$$

Berapa banyak yang harus dihitung?

Contoh Kasus (lanjutan)

- Hitung saja peluang tidak bertemu dengan teman sama sekali, i.e. $p(X = 0)$.

Contoh Kasus (lanjutan)

- Hitung saja peluang tidak bertemu dengan teman sama sekali, i.e. $p(X = 0)$.
- Maka nilainya dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - \frac{\binom{3200-40}{20}}{\binom{3200}{20}} = 0.2230 \end{aligned}$$

Contoh Kasus (lanjutan)

- Hitung saja peluang tidak bertemu dengan teman sama sekali, i.e. $p(X = 0)$.
- Maka nilainya dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - \frac{\binom{3200-40}{20}}{\binom{3200}{20}} = 0.2230 \end{aligned}$$

- Coba lihat: <http://web.stanford.edu/class/cs109/demos/serendipity.html>

Ingat bahwa...

- $\sum_x p(x) = 1$
- Dalam kasus RV kontinu, $\int p(x)dx = 1$
- $p(x)$ dalam kasus kontinu dikenal sebagai *probability density function* (PDF)
- Nilai $p(x)$ mungkin > 1 (mengapa?)

Ekspektasi

- Anggap kita punya fungsi $f(x)$ yang memetakan x ke nilai numerik

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(x)] &= \sum_x f(x)p(x) \\ &= \int f(x)p(x)dx\end{aligned}$$

untuk variabel diskrit dan kontinu.

- Saat $f(x) = x$, kita akan mendapatkan **mean**, μ_x
- Saat $f(x) = (x - \mu_x)^2$, kita akan mendapatkan **variansi**

Contoh Kasus

Example

Saya akan melempar sebuah koin. Jika sisi yang keluar angka, maka saya akan memberikan Anda Rp 200,000. Jika keluarnya gambar, maka Anda harus memberikan saya Rp 100,000. Apakah Anda akan bermain?

Contoh Kasus

Example

Saya akan melempar sebuah koin. Jika sisi yang keluar angka, maka saya akan memberikan Anda Rp 200,000. Jika keluarnya gambar, maka Anda harus memberikan saya Rp 100,000. Apakah Anda akan bermain?

Solusi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(x)] &= \sum_x f(x)p(x) \\ &= 200000 \cdot \frac{1}{2} + (-100000) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 50000\end{aligned}$$

Peluang Bersyarat

Joint Distributions

- Kita akan lebih sering berurusan dengan banyak RV \rightarrow butuh **joint distributions**
- $p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_D = x_D)$
- Saat ragu, selalu mulai dari sini
- Contoh (Koller & Friedman, 2009):

	Intelligence = low	Intelligence = high
Grade = A	0.07	0.18
Grade = B	0.28	0.09
Grade = C	0.35	0.03

Marginal Probability

- Berapa $p(\text{Grade} = A)$?
- Gunakan *sum rule*:

$$p(x) = \sum_y p(x, y)$$

- Ganti *sum* dengan integral untuk RV kontinu

Conditional Probability

- Peluang bersyarat:

$$p(X = x|Y = y) = p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$

- Product rule:

$$p(x, y) = p(x)p(y|x) = p(y)p(x|y)$$

- Contoh: Tentukan nilai $p(Intelligence = high|Grade = A)$!

Chain Rule

Aturan rantai (*chain rule*) didapatkan dengan mengaplikasikan *product rule* berulang kali.

$$\begin{aligned} p(X_1, \dots, X_D) &= p(X_1, \dots, X_{D-1})p(X_D|X_1, \dots, X_{D-1}) \\ &= p(X_1, \dots, X_{D-2})p(X_{D-1}|X_1, \dots, X_{D-2})p(X_D|X_1, \dots, X_{D-1}) \\ &= \dots \\ &= p(X_1) \prod_{i=2}^D p(X_i|X_1, \dots, X_{i-1}) \end{aligned}$$

Break

Bayes' Rule

Bayes' Rule

Berdasarkan *product rule*,

$$p(Y|X) = \frac{p(X|Y)p(Y)}{p(X)}$$

dengan bagian penyebut yang dapat dijabarkan dengan *sum rule* sebagai berikut

$$p(X) = \sum_Y p(X|Y)p(Y)$$

Contoh Kasus

Example

Terdapat 0.08% orang yang terkena virus Zika. Dari 1000 orang yang terkena virus Zika, 900 orang akan menunjukkan hasil tes positif. Di sisi lain, terdapat 7% orang tanpa virus Zika yang juga akan terdeteksi mengidap virus Zika berdasarkan tes yang sama. Jika seseorang menjalani tes tersebut dan dinyatakan positif, berapa peluangnya dia benar-benar mengidap virus Zika?

Contoh Kasus (lanjutan)

Solusi

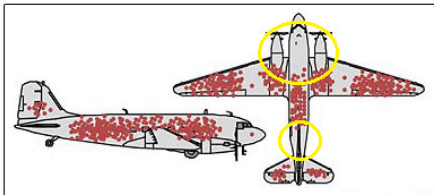
- $p(Z) = 8 \times 10^{-4}$
- $p(T|Z) = 0.9$
- $p(T|Z') = 0.07$
- $p(Z|T) = \frac{p(T|Z)p(Z)}{p(T)} \approx 0.01$

Terminologi

$$\underbrace{P(Z|T)}_{\text{posterior}} = \frac{\overbrace{P(T|Z)}^{\text{likelihood}} \overbrace{P(Z)}^{\text{prior}}}{\underbrace{P(T)}_{\text{normalizing constant}}}$$

Cari: Monty Hall problem

Penerapan Bayes' Rule



Credit: Cameron Moll

Gentlemen, you need to put more armour-plate where the holes aren't because that's where the holes were on the airplanes that didn't return - Abraham Wald 1942.

Gambar: Bayes' rule pada Perang Dunia II

Ikhtisar

- Peubah acak, ruang sampel, dan kejadian
- Probabilitas dan kuantifikasi ketidakpastian
- Aksioma probabilitas, $0 \leq p(x) \leq 1$ dan $\sum_x p(x) = 1$
- Ekspektasi dan variansi
- Peluang bersyarat, aturan penjumlahan dan perkalian, dan aturan rantai
- Bayes' rule yang mengubah keyakinan berdasarkan observasi

Pertemuan Berikutnya

- PMF
- Distribusi Bernoulli
- Distribusi Binomial
- Distribusi Poisson
- Maximum Likelihood Estimation

Referensi



Chris Piech (Sep. 2017)

Probability

<http://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs109/cs109.1178/lectureHandouts/035-probability.pdf>



Chris Piech (Oct. 2017)

Conditional Probability

<http://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs109/cs109.1178/lectureHandouts/040-cond-probability.pdf>



Chris Williams (Sep. 2015)

Probability - Machine Learning and Pattern Recognition

<https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/mlpr/2015/>

Terima kasih