

# Model Linear

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al-Azhar Indonesia

*aliakbars@live.com*

April 22, 2019

# Selayang Pandang

## ① Ulasan

## ② Regresi Linear

Simple Linear Regression

Basis Function Regression

Regularisation

## ③ Regresi Logistik

## ④ Optimasi

## ⑤ Klasifikasi

## Bahan Bacaan

- ① VanderPlas, J. (2016). Python Data Science Handbook. (In Depth: Linear Regression) <http://nbviewer.jupyter.org/github/jakevdp/PythonDataScienceHandbook/blob/master/notebooks/05.06-Linear-Regression.ipynb>
- ② Murray, I. (2016). MLPR class notes. (Linear Regression; Regression and Gradients; Logistic Regression) <http://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/mlpr/2016/notes/> (graduate level)

# Ulasan

## Minggu lalu...

- Dimensionality Reduction
- Eigenvector & Eigenvalue
- Principal Component Analysis

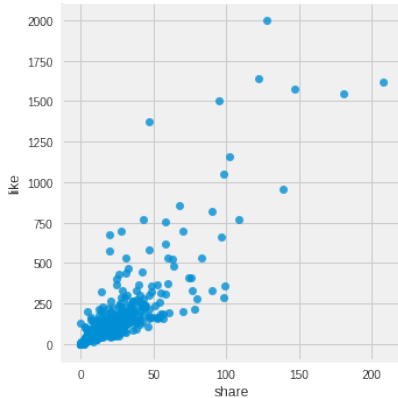
Apa interpretasi dari determinan?  
Apa hubungannya dengan nilai eigen?

Video dari Victor Lavrenko untuk PCA

# Regresi Linear

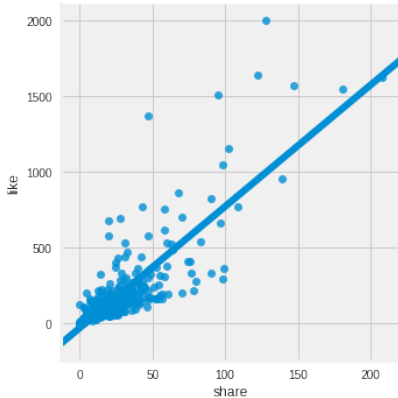


## Prediksi hubungan antara dua variabel



Gambar: Data hubungan antara 'share' dengan 'like' pada Facebook

## Prediksi hubungan antara dua variabel



Gambar: Data hubungan antara 'share' dengan 'like' pada Facebook

# Simple Linear Regression

## Fungsi linear

Kasus paling sederhana adalah mencocokkan garis lurus ke sekumpulan data

$$y = ax + b$$

dengan  $a$  adalah *slope*, sedangkan  $b$  dikenal dengan nama *intercept*.

## Notasi lain

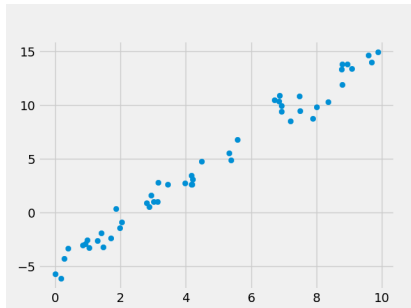
$$y = w_0 + w_1x_1$$

dengan  $w$  adalah bobot atau koefisien.

# Simple Linear Regression

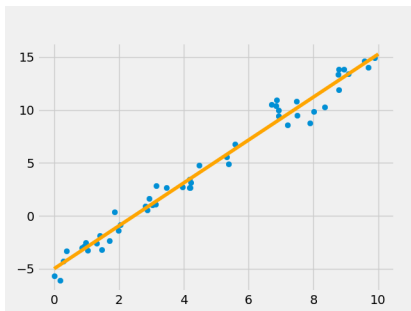
## Example

```
rng = np.random.RandomState(1)
x = 10 * rng.rand(50)
y = 2 * x - 5 + rng.randn(50)
plt.scatter(x, y);
```



**Gambar:** Data yang dimunculkan secara acak [VanderPlas, 2016]

## Mencocokkan Garis



Gambar: Hasil pencocokan garis [VanderPlas, 2016]

Model slope: 2.02720881036

Model intercept: -4.99857708555

Bagaimana kalau ada lebih dari dua variabel  
yang ingin kita lihat hubungannya?

# Multidimensional Linear Regression

## Model

$$y = w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_Dx_D = \sum_{j=0}^D w_jx_j$$

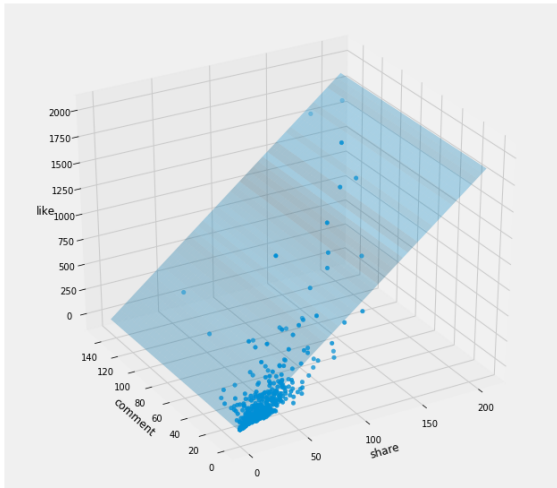
dengan  $x_0 = 1$

## Notasi matriks-vektor

$$y = \phi \mathbf{w}$$

dengan  $\phi = (1, \mathbf{x}^T)$

## Regresi linear untuk dua variabel



**Gambar:** Hubungan antara 'share', 'comment', dan 'like' pada foto di Facebook



## Prediktor linear (contoh)

Vektor bobot  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^D$

bias: -20.24

share: 6.65

comment: 3.53

Vektor fitur  $\phi(x) \in \mathbb{R}^D$

bias: 1

share: 147

comment: 58

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \mathbf{w} \cdot \phi(x) \\ &= \sum_{j=1}^D w_j \phi_j(x) \\ &= -20.24(1) + 6.65(147) + 3.53(58) = 1162.05\end{aligned}$$

Jadi, *diprediksi* bahwa untuk foto dengan *share* = 147 dan *comment* = 58, foto tersebut akan mendapatkan  $\approx 1162.05$  *likes*.

Kita sudah tahu nilai  $y$  dan  $\phi$ ,  
tapi berapa nilai  $\mathbf{w}$ ?

Nyatanya, kita tidak bisa mencari nilai  $\phi^{-1}$

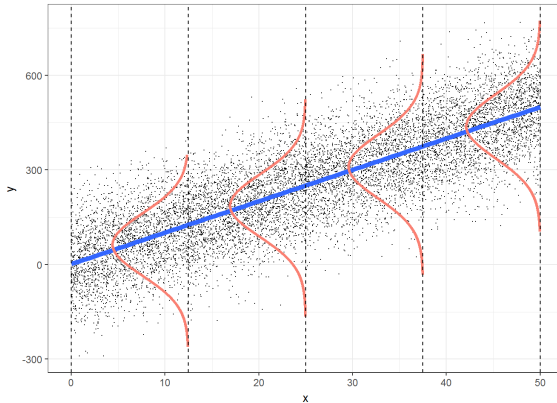
$\phi$  bukan matriks bujur sangkar dan datanya mengandung *noise*

## Asumsi Gaussian Noise

- Asumsikan  $y = \mathbf{w}^T \phi + \epsilon$  dengan  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$
- Berdasarkan asumsi distribusi Gaussian, implikasinya  $p(y|\phi, \mathbf{w}) = \mathcal{N}(y; \mathbf{w}^T \phi, \sigma_\epsilon^2)$
- Dengan asumsi i.i.d., nilai log likelihood menjadi

$$\begin{aligned} L(\mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^N \log p(y|\phi, \mathbf{w}) \\ &= -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma_\epsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbf{w}^T \phi_i)^2 \end{aligned}$$

# Fungsi Linear dengan Gaussian Noise



**Gambar:** Fungsi linear dengan Gaussian *noise* dalam asumsi *ordinary least squares*

## Meminimalkan Error

$$\begin{aligned} L(\mathbf{w}) &= -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma_\epsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbf{w}^T \phi_i)^2 \\ &= -C_2 - C_1 \sum_{i=1}^N (y_i - \mathbf{w}^T \phi_i)^2 \end{aligned}$$

dengan  $C_1 > 0$  dan  $C_2$  tidak terpengaruh oleh  $\mathbf{w}$ . Beberapa hal yang perlu diketahui:

- Mengalikan dengan konstanta positif tidak akan mengubah titik maksimum
- Menambahkan konstanta tidak mengubah titik maksimum
- $\sum_{i=1}^N (y_i - \mathbf{w}^T \phi_i)^2$  adalah *sum of squared errors*

Jadi, **memaksimalkan** *likelihood* akan sama dengan  
**meminimalkan** *sum of squared error*.



# Loss Function

- Harus menggunakan *loss function*  $E(\mathbf{w})$  yang dapat diminimalkan
- Pilihan umum: *squared error*

$$\begin{aligned} E(\mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i)^2 \\ &= (\mathbf{y} - \phi \mathbf{w})^T (\mathbf{y} - \phi \mathbf{w}) \end{aligned}$$

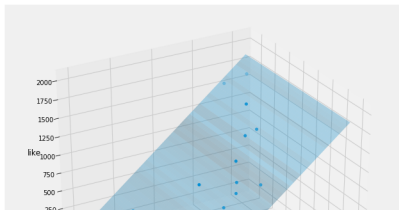
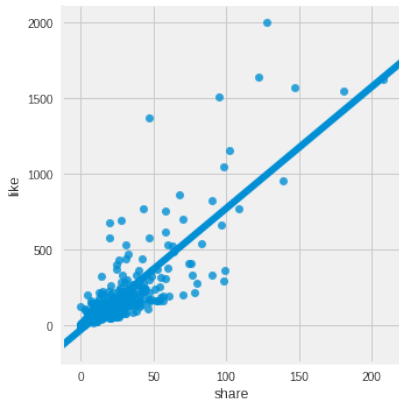
## Solusi

- Jawaban: Minimalkan  $E(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i)^2$  dengan mencari turunan parsial yang diatur sama dengan 0
- Solusi analitis:

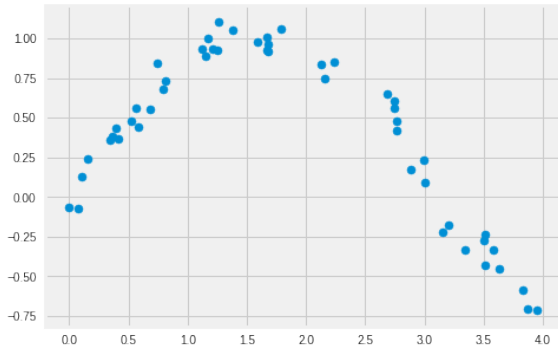
$$\hat{\mathbf{w}} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \mathbf{y}$$

- Bagian  $(\phi^T \phi)^{-1} \phi^T$  dikenal sebagai *pseudo-inverse*

Perhatikan kembali



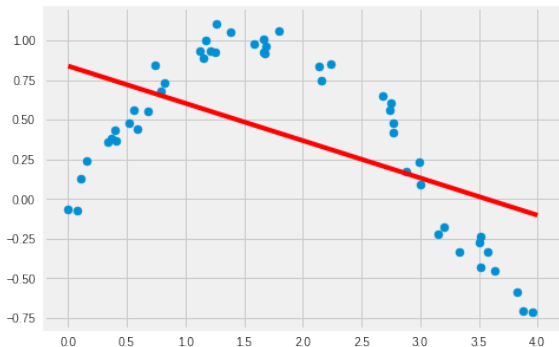
## Non-linearity



Gambar: Data yang dihasilkan dari fungsi sin dengan *noise*

Bagaimana kalau datanya seperti ini?

# Underfitting



Gambar: Hasil *fitting* regresi linear sederhana

Jika model yang dihasilkan lebih sederhana dibandingkan data yang seharusnya dicocokkan, maka model tersebut disebut mengalami underfitting.

# Polynomial Basis Functions

## Regresi linear dengan fungsi basis polinomial

Jika kita mengubah  $x_p = f_p(x)$ , dengan  $f_p()$  adalah fungsi transformasi, maka untuk  $f_p() = x^p$  dan  $x$  adalah input berdimensi satu, modelnya menjadi

$$y = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + \dots$$

# Polynomial Basis Functions

In

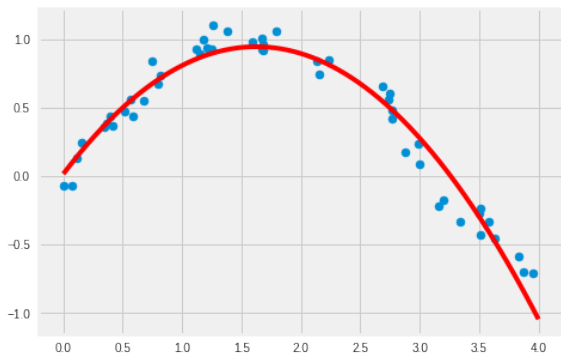
```
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures  
x = np.array([2, 3, 4])  
poly = PolynomialFeatures(3, include_bias=False)  
poly.fit_transform(x[:, None])
```

Out

```
array([[ 2.,  4.,  8.],  
       [ 3.,  9., 27.],  
       [ 4., 16., 64.]])
```



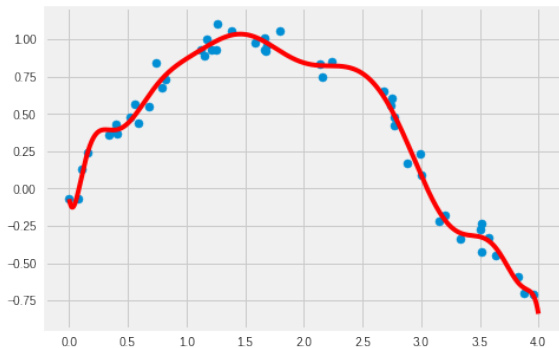
## Best-fit



Gambar: Hasil *fitting* fungsi basis polinomial  $p = 2$

Apa yang terjadi jika  $p$  dibuat lebih besar?

# Overfitting



Gambar: Hasil *fitting* fungsi basis polinomial  $p = 15$

Jika model yang dihasilkan lebih kompleks ( $\sim$  parameternya banyak) dibandingkan data yang seharusnya dicocokkan, maka model tersebut disebut mengalami **overfitting**.

Kita dapat menggunakan fungsi basis Gaussian sebagai alternatif  
(*non-examinable*)

Bagaimana cara menghindari *overfitting*?

# Ridge Regression

- Digunakan untuk menghindari *overfitting*
- Dikenal juga sebagai  $L_2$  *regularisation* atau *Tikhonov regularisation*
- Pemberian penalti untuk koefisien model

$$P = \alpha \sum_{j=1}^p w_j^2 = \alpha \|\mathbf{w}\|_2^2$$

## Loss Function pada Ridge Regression

- *Loss function* yang harus diminimalkan menjadi

$$E(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i)^2 - \alpha \|\mathbf{w}\|_2^2$$

dengan  $\|\mathbf{w}\|_d = (\sum_{j=1}^p |w_j|^d)^{\frac{1}{d}}$



## Loss Function pada Ridge Regression

- *Loss function* yang harus diminimalkan menjadi

$$E(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i)^2 - \alpha \|\mathbf{w}\|_2^2$$

dengan  $\|\mathbf{w}\|_d = (\sum_{j=1}^p |w_j|^d)^{\frac{1}{d}}$

- Parameter  $\alpha$  (terkadang juga ditulis sebagai  $\lambda$ ) bernilai bebas (ditentukan oleh pengguna)

# Loss Function pada Ridge Regression

- *Loss function* yang harus diminimalkan menjadi

$$E(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i)^2 - \alpha \|\mathbf{w}\|_2^2$$

dengan  $\|\mathbf{w}\|_d = (\sum_{j=1}^p |w_j|^d)^{\frac{1}{d}}$

- Parameter  $\alpha$  (terkadang juga ditulis sebagai  $\lambda$ ) bernilai bebas (ditentukan oleh pengguna)
- Solusi analitis:

$$\hat{\mathbf{w}} = (\phi^T \phi + \alpha I_p)^{-1} \phi^T \mathbf{y}$$

# Lasso Regression

- Secara konsep mirip seperti *ridge regression*
- Penalti dengan jumlah nilai absolut dari koefisien (1-norms;  $L_1$  *regularisation*)

$$P = \alpha \sum_{j=1}^p |w_j|$$

- Bekerja dengan membuat banyak koefisien bernilai nol

Break

# Regresi Logistik

## Mengubah Keluaran

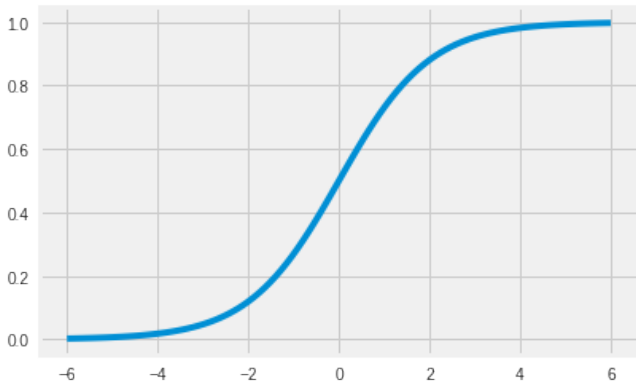
- Berdasarkan keluaran regresi linear, kita bisa memaksanya menjadi  $[0, 1]$
- Gunakan fungsi sigmoid:

$$P(y = 1|\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \mathbf{w}) = \sigma(\mathbf{w}^T \mathbf{x}) = \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{w}^T \mathbf{x}}}$$

- Nilai  $[0, 1]$  dapat diartikan sebagai probabilitas dari kelas
- Karena probabilitas harus memiliki total 1, maka

$$P(y = 0|\mathbf{x}) = 1 - P(y = 1|\mathbf{x})$$

## Funksi Sigmoid



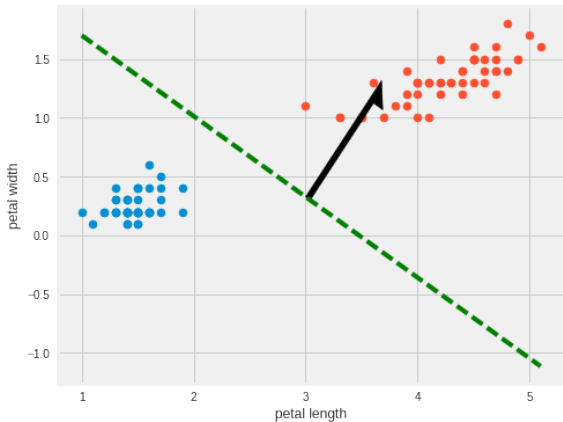
Gambar: Fungsi sigmoid/logistik  $\sigma(z) = \frac{1}{1+\exp(-z)}$

## Decision Boundary

- $\sigma(z) = 0.5$  saat  $z = 0$  sehingga batas keputusannya diberikan oleh  $\mathbf{w}^T \mathbf{x} = 0$
- Batas keputusannya merupakan  $M - 1$  *hyperplane* untuk masalah  $M$  dimensi
- Kita perlu mencari nilai  $\mathbf{w}$



## Decision Boundary



**Gambar:** Batas keputusan dan vektor bobot untuk klasifikasi dua kelas

## Likelihood

- Asumsi i.i.d.
- Dataset  $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n)\}$
- *Likelihood*-nya menjadi

$$\begin{aligned} p(\mathcal{D}|\mathbf{w}) &= \prod_{i=1}^N p(y = y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{w}) \\ &= \prod_{i=1}^N p(y = 1|\mathbf{x}_i, \mathbf{w})^{y_i} (1 - p(y = 1|\mathbf{x}_i, \mathbf{w}))^{1-y_i} \end{aligned}$$

- *Log likelihood*  $L(\mathbf{w}) = \log p(\mathcal{D}|\mathbf{w})$

$$L(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N y_i \log \sigma(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) + (1 - y_i) \log(1 - \sigma(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i))$$

## Solusi

- Nilai optimum untuk kasus ini unik, i.e. *convex*
- Untuk memaksimalkan nilainya, gunakan gradien

$$\frac{\partial L}{\partial w_j} = \sum_{i=1}^N (y_i - \sigma(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i)) x_{ij}$$

- Tidak ada solusi tertutup sehingga harus menggunakan *optimasi numerik*, e.g. dengan *gradient descent*

# Optimasi

Mengapa dinamakan *machine learning*?

# Alasan Melakukan Optimasi

- Belajar  $\rightarrow$  masalah optimasi kontinu
- Contoh: regresi linear, regresi logistik, jaringan saraf tiruan, SVM
- Salah satu caranya adalah dengan *maximum likelihood*

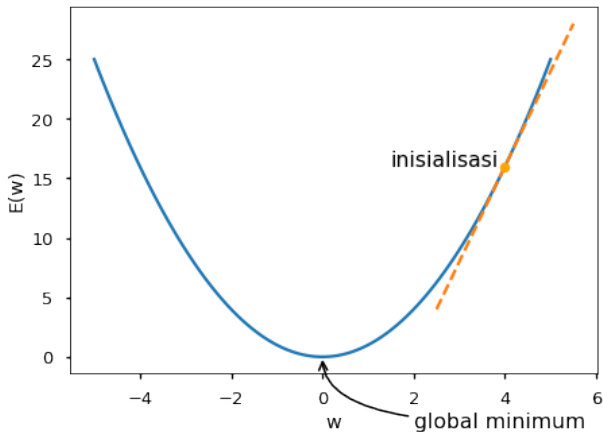
“Berapa peluangnya kita melihat data ini jika diketahui parameternya?”

# Cara Melakukan Optimasi

- Menggunakan fungsi galat/error  $E(\mathbf{w})$  yang akan diminimalkan
- e.g. dapat berupa  $-L(\mathbf{w})$
- Beda nilai  $\mathbf{w}$ , beda besar error
- Belajar  $\equiv$  menuruni permukaan error

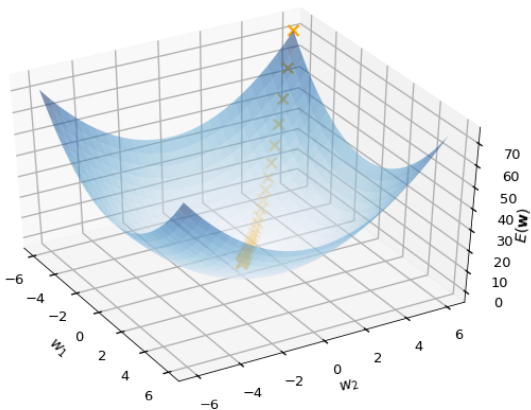


## Menuruni Permukaan Fungsi Error



Gambar: Menuruni lembah fungsi error  $E(w)$

## Menuruni Permukaan Fungsi Error



**Gambar:** Menuruni lembah fungsi error

# Gradient Descent

```
begin  
  Inisialisasi  $\mathbf{w}$   
  while  $E(\mathbf{w})$  masih terlalu besar do  
    Hitung  $\mathbf{g} \leftarrow \frac{\partial E}{\partial \mathbf{w}}$   
     $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} - \eta \mathbf{g}$   
  end  
  return  $\mathbf{w}$   
end
```

**Algorithm 1:** Melatih dengan gradient descent

# Learning Rate

- $\eta$  (baca: “eta”) dikenal sebagai *step size* atau *learning rate* dengan nilai  $\eta > 0$
- $\eta$  terlalu kecil  $\rightarrow$  lambat
- $\eta$  terlalu besar  $\rightarrow$  tidak stabil

## Batch vs Online

- Untuk data yang sedikit, kita bisa menjumlahkan semua error sebelum memperbarui nilai  $\mathbf{w}$  (*batch*)

## Batch vs Online

- Untuk data yang sedikit, kita bisa menjumlahkan semua error sebelum memperbarui nilai  $\mathbf{w}$  (*batch*)
- Bagaimana untuk 10 juta data?

## Batch vs Online

- Untuk data yang sedikit, kita bisa menjumlahkan semua error sebelum memperbarui nilai  $\mathbf{w}$  (*batch*)
- Bagaimana untuk 10 juta data?
- Ternyata, kita bisa memperbarui nilai  $\mathbf{w}$  untuk setiap satu data (*online*)

## Gradient Descent (Batch)

```
begin  
  Inisialisasi  $\mathbf{w}$   
  while  $E(\mathbf{w})$  masih terlalu besar do  
    Hitung  $\mathbf{g} \leftarrow \sum_{i=1}^N \frac{\partial E_i}{\partial \mathbf{w}}$   
     $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} - \eta \mathbf{g}$   
  end  
  return  $\mathbf{w}$   
end
```

**Algorithm 2:** Melatih dengan batch gradient descent



# Stochastic Gradient Descent

```
begin  
  Inisialisasi  $\mathbf{w}$   
  while  $E(\mathbf{w})$  masih terlalu besar do  
    Pilih  $j$  sebagai integer acak antara 1..N  
    Hitung  $\mathbf{g} \leftarrow \frac{\partial E_j}{\partial \mathbf{w}}$   
     $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} - \eta \mathbf{g}$   
  end  
  return  $\mathbf{w}$   
end
```

**Algorithm 3:** Stochastic gradient descent (SGD)

# Kelebihan dan Kekurangan

- **Batch** lebih *powerful*
- **Batch** lebih mudah dianalisis
- **Online** lebih praktikal untuk data yang besar

## Pengembangan Gradient Descent (non-examinable)

- “Why **Momentum** Really Works” [Goh, 2017]
- **Performance-dependent**  $\eta$ , e.g. “NewBOB”:  $\eta$  berubah menjadi setengahnya saat validation set tidak menjadi lebih baik
- **Time-dependent schedules**, e.g. eksponensial:  
 $\eta(t) = \eta(0)\exp(-t/r)$  ( $r \sim$  ukuran data latih)

# Tentang Metode Optimasi

- Masih banyak metode optimasi yang tidak dibahas, e.g. linear programming, Newton's method, dll.
- Optimasi merupakan bidang matematika yang kompleks
- Masalah convex: optimum global. Non-convex: optimum lokal.
- Pahami mengapa *gradient descent* bisa mengalami masalah

# Klasifikasi

# Model Generatif dan Diskriminatif

- Naïve Bayes memodelkan bagaimana kelas “menghasilkan” vektor fitur  $p(\mathbf{x}|y)$  untuk kemudian diklasifikasikan dengan

$$p(y|\mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x}|y)p(y)$$

## Model Generatif dan Diskriminatif

- Naïve Bayes memodelkan bagaimana kelas “menghasilkan” vektor fitur  $p(\mathbf{x}|y)$  untuk kemudian diklasifikasikan dengan

$$p(y|\mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x}|y)p(y)$$

- Regresi logistik langsung memodelkan  $p(y|\mathbf{x})$ , i.e. diskriminatif

## Model Generatif dan Diskriminatif

- Naïve Bayes memodelkan bagaimana kelas “menghasilkan” vektor fitur  $p(\mathbf{x}|y)$  untuk kemudian diklasifikasikan dengan

$$p(y|\mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x}|y)p(y)$$

- Regresi logistik langsung memodelkan  $p(y|\mathbf{x})$ , i.e. diskriminatif
- Keuntungan metode diskriminatif: Buat apa memodelkan  $p(\mathbf{x})$ ? Kita selalu punya input.



## Model Generatif dan Diskriminatif

- Naïve Bayes memodelkan bagaimana kelas “menghasilkan” vektor fitur  $p(\mathbf{x}|y)$  untuk kemudian diklasifikasikan dengan

$$p(y|\mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x}|y)p(y)$$

- Regresi logistik langsung memodelkan  $p(y|\mathbf{x})$ , i.e. diskriminatif
- Keuntungan metode diskriminatif: Buat apa memodelkan  $p(\mathbf{x})$ ? Kita selalu punya input.
- Keuntungan metode generatif: Bisa menangani kasus data yang hilang, mendeteksi pencilan, atau mungkin *memang* perlu menghasilkan input

## Klasifikasi Multikelas

- Buat vektor bobot  $\mathbf{w}_k$  untuk setiap kelas, untuk mengklasifikasikan  $k$  dan bukan- $k$
- Gunakan fungsi *softmax*

$$p(y = k|\mathbf{x}) = \frac{\exp(\mathbf{w}_k^T \mathbf{x})}{\sum_{j=1}^C \exp(\mathbf{w}_j^T \mathbf{x})}$$

- Perhatikan bahwa  $0 \leq p(y = k|\mathbf{x}) \leq 1$  dan  $\sum_{j=1}^C p(y = j|\mathbf{x}) = 1$

- Regresi linear sebagai fungsi dengan Gaussian *noise*
- Asumsi Gaussian noise  $\rightarrow$  *sum of squared error*
- *Ordinary least squares* (OLS) didapatkan dengan solusi analitis dari fungsi error
- Transformasi fitur dan regularisasi
- Klasifikasi dengan regresi logistik dan *gradient descent*
- Model generatif vs diskriminatif

# Referensi



Jake VanderPlas (2016)

In Depth: Linear Regression

*Python Data Science Handbook*



Gabriel Goh (2017)

“Why Momentum Really Works”

Distill <http://distill.pub/2017/momentum/>

Terima kasih