

# PELUANG

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al-Azhar Indonesia

*aliakbars@live.com*

March 27, 2020

# SELAYANG PANDANG

① PEUBAH ACAK

② PELUANG BERSYARAT

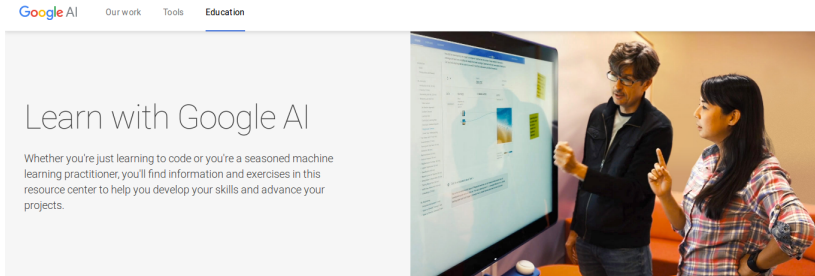
③ BAYES' RULE

# COBA INI...



## GAMBAR: Machine Learning Flashcards

# COBA INI...



Educational resources from machine learning

**GAMBAR:** Learn with Google AI

# COBA INI...

The screenshot shows the Coursera website interface for the 'Machine Learning' course. At the top, the Coursera logo is on the left, and a search bar with the text 'Search catalog' and a magnifying glass icon is in the center. To the right of the search bar, it says 'For Enterprise' and a user profile icon with the text 'All'. Below the search bar, the course title 'Machine Learning' is displayed in a large, serif font. To the left of the main content area, there is a sidebar with a list of links: 'Overview', 'Syllabus', 'FAQs', 'Creators', and 'Ratings and Reviews'. Below these links is a button labeled 'Go to Course'. Underneath the button, it says 'Already enrolled' and 'Apply for Financial Aid'. The main content area features a paragraph about the course: 'About this course: Machine learning is the science of getting computers to act without being explicitly programmed. In the past decade, machine learning has given us self-driving cars, practical speech recognition, effective web search, and a vastly improved understanding of the human genome. Machine learning is so pervasive today that you probably use it dozens of times a day without knowing it. Many'. Below this paragraph is a link that says 'More'. Further down, it says 'Created by: Stanford University' next to the Stanford University logo. At the bottom, there is a circular profile picture of Andrew Ng, followed by the text 'Taught by: Andrew Ng, Co-founder, Coursera; Adjunct Professor, Stanford University; formerly head of Baidu AI Group/Google Brain'.

**coursera** Catalog Search catalog Q

For Enterprise All

## Machine Learning

Overview

Syllabus

FAQs

Creators

Ratings and Reviews

[Go to Course](#)

Already enrolled


[Apply for Financial Aid](#)

**About this course:** Machine learning is the science of getting computers to act without being explicitly programmed. In the past decade, machine learning has given us self-driving cars, practical speech recognition, effective web search, and a vastly improved understanding of the human genome. Machine learning is so pervasive today that you probably use it dozens of times a day without knowing it. Many

[More](#)

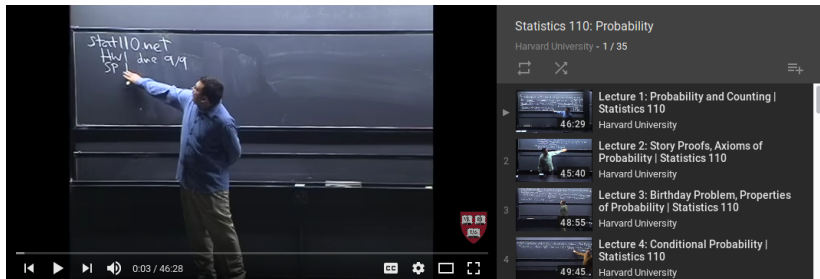
**Created by:** Stanford University

**Stanford University**

 **Taught by:** [Andrew Ng](#), Co-founder, Coursera; Adjunct Professor, Stanford University; formerly head of Baidu AI Group/Google Brain

## GAMBAR: Machine Learning - Coursera

# COBA INI...



GAMBAR: Statistics 110 - Harvard

# PEUBAH ACAK

# RUANG SAMPEL

## APA ITU?

$S$  = himpunan dari semua keluaran yang mungkin terjadi

## EXAMPLE

lemparan koin

$$S = \{Angka, Gambar\}$$

lemparan dua koin

$$S = \{(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)\}$$

lemparan dadu

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

jumlah email dalam satu hari

$$S = \mathbb{N}$$

jam bermain Mobile Legends

$$S = [0, 24]$$



## APA ITU?

$E$  = subhimpunan/subset dari  $S$  ( $E \subseteq S$ )

### EXAMPLE

lemparan koin memunculkan angka

$$E = \{Angka\}$$

$\geq 1$  angka dari dua koin

$$E = \{(A, A), (A, G), (G, A)\}$$

lemparan dadu  $\geq 3$

$$E = \{3, 4, 5, 6\}$$

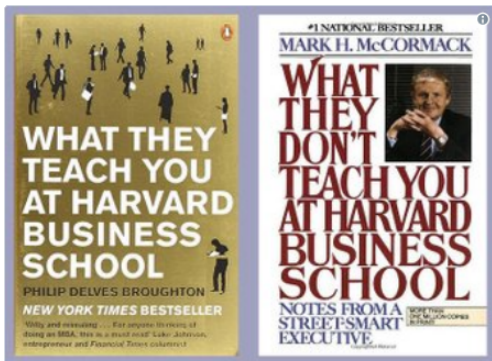
# email dalam sehari  $\leq 5$

$$E = \{x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$$

“hari-hari tidak produktif”

$$E = [8, 24]$$

# ILMU SAPU JAGAT



**James Kirkpatrick**  
@James\_Kpatrick



These two books contain the sum total of all human knowledge

7:28 PM - Apr 5, 2013

♡ 28.2K 💬 27.4K people are talking about this

# Mengapa?

$$E \cup E' = S$$

Jadi, apa itu peluang/probabilitas?

# PROBABILITAS

- Kuantifikasi dari ketidakpastian

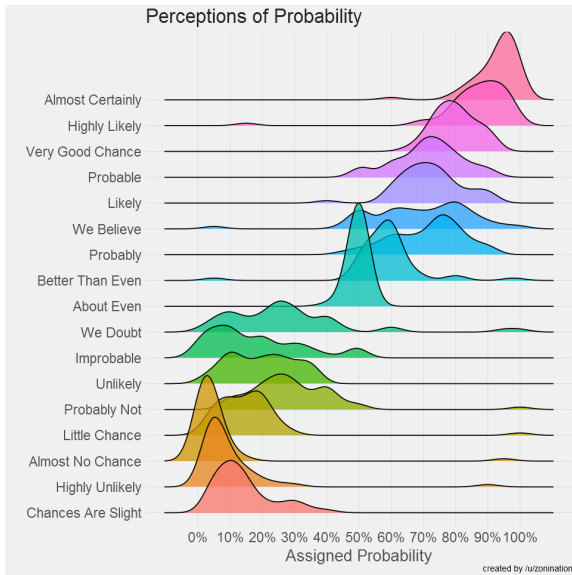
# PROBABILITAS

- Kuantifikasi dari ketidakpastian
- Nilai antara 0 dan 1 yang kita pautkan pada suatu kejadian

# PROBABILITAS

- Kuantifikasi dari ketidakpastian
- Nilai antara 0 dan 1 yang kita pautkan pada suatu kejadian
- Faktanya, persepsi kita terhadap ketidakpastian bisa berbeda-beda





**GAMBAR:** Persepsi akan probabilitas — Sumber:  
<https://github.com/zonination/perceptions>

# FREQUENTIST VS BAYESIAN

## INTERPRETASI FREQUENTIST

Frekuensi kemunculan kejadian dalam *jangka panjang*

### EXAMPLE

Peluang kemunculan sisi angka dari suatu lemparan koin adalah 0.43

# FREQUENTIST VS BAYESIAN

## INTERPRETASI FREQUENTIST

Frekuensi kemunculan kejadian dalam *jangka panjang*

### EXAMPLE

Peluang kemunculan sisi angka dari suatu lemparan koin adalah 0.43

## INTERPRETASI BAYESIAN

Kuantifikasi *derajat kepercayaan* terhadap sesuatu

### EXAMPLE

Peluang besok<sup>1</sup> hujan adalah 0.3

---

<sup>1</sup>Apakah mungkin mengulang “besok”?

## INTERPRETASI FREQUENTIST

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(E)}{n}$$

# AKSIOMA PROBABILITAS

- ①  $0 \leq P(E) \leq 1$
- ②  $P(S) = 1$
- ③ Jika  $E \cap F = \emptyset$ , maka
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

## AKIBATNYA...

- ①  $P(E') = 1 - P(E)$
- ② Jika  $E \subseteq F$ , maka  $P(E) \leq P(F)$
- ③  $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

# PEUBAH ACAK

- Peubah acak atau *random variables* (RV)  $X$  menunjukkan sebuah nilai yang dapat berubah-ubah, tergantung kejadian
- Dapat berupa **hasil eksperimen** (e.g. lemparan koin) atau pengukuran kuantitas yang fluktuatif (e.g. temperatur)
- $X$  menggambarkan RV,  $x$  menggambarkan nilai, e.g.  $p(X = x)$
- Dapat disingkat menjadi  $p(x)$
- Sebuah RV dapat bernilai **kontinu** maupun **diskrit**

## CONTOH KASUS

### EXAMPLE

Dua dadu dilempar bersamaan, berapa peluang munculnya sisi kedua dadu berjumlah 7?



## CONTOH KASUS

### EXAMPLE

Dua dadu dilempar bersamaan, berapa peluang munculnya sisi kedua dadu berjumlah 7?

### PERTANYAAN

Apa yang harus didefinisikan terlebih dahulu?

## CONTOH KASUS

### EXAMPLE

Dua dadu dilempar bersamaan, berapa peluang munculnya sisi kedua dadu berjumlah 7?

### PERTANYAAN

Apa yang harus didefinisikan terlebih dahulu?

### JAWAB

Apa yang menjadi ruang sampelnya? Apa pula kejadiannya?

## CONTOH KASUS (LANJUTAN)

- $S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$

## CONTOH KASUS (LANJUTAN)

- $S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$
- $E = \{(1, 6), (2, 5), \dots, (5, 2), (6, 1)\}$

## CONTOH KASUS (LANJUTAN)

- $S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$
- $E = \{(1, 6), (2, 5), \dots, (5, 2), (6, 1)\}$
- $p(X_1 + X_2 = 7) = ?$

## CONTOH KASUS (LANJUTAN)

- $S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$
- $E = \{(1, 6), (2, 5), \dots, (5, 2), (6, 1)\}$
- $p(X_1 + X_2 = 7) = ?$
- $p((X_1 = 1 \cap X_2 = 6) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 5) \cup \dots) = \frac{6}{36}$

## CONTOH KASUS

### EXAMPLE

Ada 3,200 mahasiswa UAI, Anda berteman dengan 40 orang di antaranya. Jika Anda pergi ke suatu acara yang didatangi 20 orang mahasiswa UAI, berapa peluang Anda menemukan *paling tidak* satu orang teman Anda?

## CONTOH KASUS

### EXAMPLE

Ada 3,200 mahasiswa UAI, Anda berteman dengan 40 orang di antaranya. Jika Anda pergi ke suatu acara yang didatangi 20 orang mahasiswa UAI, berapa peluang Anda menemukan *paling tidak* satu orang teman Anda?

### DEFINISIKAN

$$p(X \geq 1) = \dots$$

Berapa banyak yang harus dihitung?



## CONTOH KASUS (LANJUTAN)

- Hitung saja peluang tidak bertemu dengan teman sama sekali, i.e.  $p(X = 0)$ .

## CONTOH KASUS (LANJUTAN)

- Hitung saja peluang tidak bertemu dengan teman sama sekali, i.e.  $p(X = 0)$ .
- Maka nilainya dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - \frac{\binom{3200-40}{20}}{\binom{3200}{20}} = 0.2230 \end{aligned}$$

## CONTOH KASUS (LANJUTAN)

- Hitung saja peluang tidak bertemu dengan teman sama sekali, i.e.  $p(X = 0)$ .
- Maka nilainya dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - \frac{\binom{3200-40}{20}}{\binom{3200}{20}} = 0.2230 \end{aligned}$$

- Coba lihat: <http://web.stanford.edu/class/cs109/demos/serendipity.html>

## INGAT BAHWA...

- $\sum_x p(x) = 1$
- Dalam kasus RV kontinu,  $\int p(x)dx = 1$
- $p(x)$  dalam kasus kontinu dikenal sebagai *probability density function* (PDF)
- Nilai  $p(x)$  mungkin  $> 1$  (mengapa?)

# EKSPEKTASI

- Anggap kita punya fungsi  $f(x)$  yang memetakan  $x$  ke nilai numerik

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(x)] &= \sum_x f(x)p(x) \\ &= \int f(x)p(x)dx\end{aligned}$$

untuk variabel diskrit dan kontinu.

- Saat  $f(x) = x$ , kita akan mendapatkan **mean**,  $\mu_x$
- Saat  $f(x) = (x - \mu_x)^2$ , kita akan mendapatkan **variansi**

## CONTOH KASUS

### EXAMPLE

Saya akan melempar sebuah koin. Jika sisi yang keluar angka, maka saya akan memberikan Anda Rp 200,000. Jika keluarnya gambar, maka Anda harus memberikan saya Rp 100,000. Apakah Anda akan bermain?

## CONTOH KASUS

### EXAMPLE

Saya akan melempar sebuah koin. Jika sisi yang keluar angka, maka saya akan memberikan Anda Rp 200,000. Jika keluarnya gambar, maka Anda harus memberikan saya Rp 100,000. Apakah Anda akan bermain?

### SOLUSI

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(x)] &= \sum_x f(x)p(x) \\ &= 200000 \cdot \frac{1}{2} + (-100000) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 50000\end{aligned}$$

# PELUANG BERSYARAT



# JOINT DISTRIBUTIONS

- Kita akan lebih sering berurusan dengan banyak RV  $\rightarrow$  butuh **joint distributions**
- $p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_D = x_D)$
- Saat ragu, selalu mulai dari sini
- Contoh (Koller & Friedman, 2009):

	Intelligence = low	Intelligence = high
Grade = A	0.07	0.18
Grade = B	0.28	0.09
Grade = C	0.35	0.03

# MARGINAL PROBABILITY

- Berapa  $p(\text{Grade} = A)$ ?
- Gunakan *sum rule*:

$$p(x) = \sum_y p(x, y)$$

- Ganti *sum* dengan integral untuk RV kontinu

# CONDITIONAL PROBABILITY

- Peluang bersyarat:

$$p(X = x|Y = y) = p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$

- Product rule:

$$p(x, y) = p(x)p(y|x) = p(y)p(x|y)$$

- Contoh: Tentukan nilai  $p(Intelligence = high|Grade = A)$ !

## CHAIN RULE

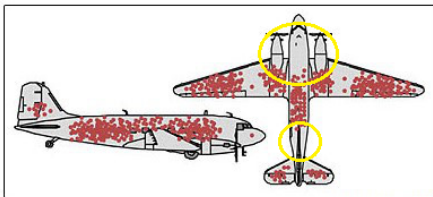
Aturan rantai (*chain rule*) didapatkan dengan mengaplikasikan *product rule* berulang kali.

$$\begin{aligned} p(X_1, \dots, X_D) &= p(X_1, \dots, X_{D-1})p(X_D|X_1, \dots, X_{D-1}) \\ &= p(X_1, \dots, X_{D-2})p(X_{D-1}|X_1, \dots, X_{D-2})p(X_D|X_1, \dots, X_{D-1}) \\ &= \dots \\ &= p(X_1) \prod_{i=2}^D p(X_i|X_1, \dots, X_{i-1}) \end{aligned}$$

Break

# BAYES' RULE

# KISAH ABRAHAM WALD



Credit: Cameron Moll

*Gentlemen, you need to put more armour-plate where the holes aren't because that's where the holes were on the airplanes that didn't return - Abraham Wald 1942.*

**GAMBAR:** Pendekatan matematisnya membuat sekutu berhasil menyelamatkan banyak pesawat pada Perang Dunia II

## BAYES' RULE

Berdasarkan *product rule*,

$$p(Y|X) = \frac{p(X|Y)p(Y)}{p(X)}$$

dengan bagian penyebut yang dapat dijabarkan dengan *sum rule* sebagai berikut

$$p(X) = \sum_Y p(X|Y)p(Y)$$



## CONTOH KASUS

### EXAMPLE

Terdapat 0.08% orang yang terkena virus Corona. Dari 1000 orang yang terkena virus Corona, 900 orang akan menunjukkan hasil tes positif. Di sisi lain, terdapat 7% orang tanpa virus Corona yang juga akan terdeteksi mengidap virus Corona berdasarkan tes yang sama. Jika seseorang menjalani tes tersebut dan dinyatakan positif, berapa peluangnya dia benar-benar mengidap virus Corona?

## CONTOH KASUS (LANJUTAN)

### SOLUSI

- $p(C) = 8 \times 10^{-4}$
- $p(T|C) = 0.9$
- $p(T|C') = 0.07$
- $p(C|T) = \frac{p(T|C)p(C)}{p(T)} \approx 0.01$

# TERMINOLOGI

$$\underbrace{P(C|T)}_{\text{posterior}} = \frac{\overbrace{P(T|C)}^{\text{likelihood}} \overbrace{P(C)}^{\text{prior}}}{\underbrace{P(T)}_{\text{normalizing constant}}}$$

## Cari: Monty Hall problem

# IKHTISAR

- Peubah acak, ruang sampel, dan kejadian
- Probabilitas dan kuantifikasi ketidakpastian
- Aksioma probabilitas,  $0 \leq p(x) \leq 1$  dan  $\sum_x p(x) = 1$
- Ekspektasi dan variansi
- Peluang bersyarat, aturan penjumlahan dan perkalian, dan aturan rantai
- Bayes' rule yang mengubah keyakinan berdasarkan observasi

# PERTEMUAN BERIKUTNYA

- PMF
- Distribusi Bernoulli
- Distribusi Binomial
- Distribusi Poisson
- Maximum Likelihood Estimation

# REFERENSI



Chris Piech (Sep. 2017)

Probability

<http://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs109/cs109.1178/lectureHandouts/035-probability.pdf>



Chris Piech (Oct. 2017)

Conditional Probability

<http://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs109/cs109.1178/lectureHandouts/040-cond-probability.pdf>



Chris Williams (Sep. 2015)

Probability - Machine Learning and Pattern Recognition

<https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/mlpr/2015/>

Terima kasih