Naïve Bayes

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al-Azhar Indonesia

aliakbars@live.com

March 16, 2020

Selayang Pandang

1. Ulasan
2. Naïve Bayes
   - Klasifikasi Bayesian
   - Conditional Independence
   - Kasus Diskrit
   - Kasus Kontinu

Ulasan

Minggu lalu...

- Distribusi uniform
- Distribusi normal/Gaussian
- Maximum Likelihood Estimation
- Distribusi Bernoulli, Binomial, dan Beta

Apa itu central limit theorem?

Ingat kembali tentang Bayes' rule!

Naïve Bayes

Contoh

Seorang dokter tahu bahwa meningitis memiliki probabilitas menyebabkan kekakuan leher sekitar 50%. Kasus meningitis sendiri ditemukan dalam 1 dari 50,000 orang. Di sisi lain, probabilitas ditemukannya kasus kekakuan leher adalah 1/20.

Pertanyaan: Jika seseorang menderita kekakuan leher, berapa peluangnya orang tersebut terkena meningitis?

Contoh

Diketahui

$P(s|m) = 0.5$
$P(m) = 1/50,000 = 2 \times 10^{-5}$
$P(s) = 1/20 = 0.05$

Solusi

$$P(m|s) = \frac{P(s|m)P(m)}{P(s)} = \frac{0.5 \times 2 \times 10^{-5}}{0.05} = 0.0002$$

Klasifikasi Bayesian

- Tujuan: fungsi pembelajaran $f(x) \rightarrow y$
- Klasifikasi probabilistik: kelas yang paling mungkin jika diberikan hasil observasinya, i.e. $\hat{y} = \underset{y}{argmax} P(y|x)$
- Probabilitas Bayesian dari sebuah kelas:

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{\sum_{y'} P(x|y')P(y')}$$

Glosarium

Data

Data merupakan kumpulan objek (*instances*) yang memiliki atribut-atribut tertentu

Atribut

Karakteristik dari suatu objek; variabel atau fitur

Kelas

Penanda kelompok suatu objek; label

Objek

Dikenal juga dengan nama record, poin, sampel, entitas, atau instance

Klasifikasi Bayesian: Komponen

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)} = \frac{P(x|y)P(y)}{\sum_{y'} P(x|y')P(y')}$$

- $P(y)$: probabilitas *prior* dari kelas
  "mana kelas yang sering muncul, mana yang jarang"
- $P(x|y)$: *class-conditional model* atau *likelihood*
  "seberapa sering observasi x dalam kasus y"
- $P(x)$: faktor normalisasi

Asumsi Independensi

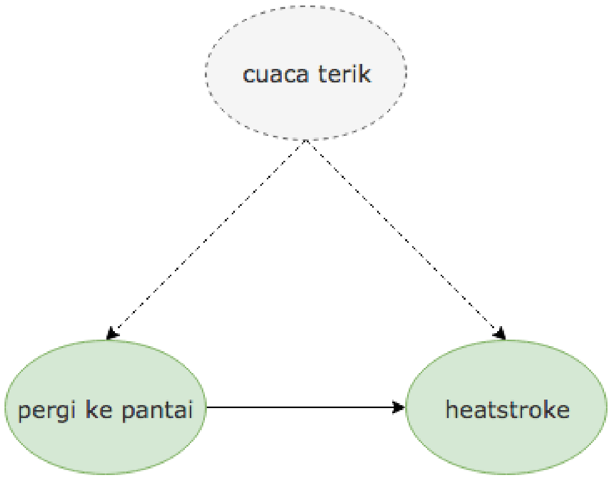
- Apa yang terjadi kalau harus menghitung $P(\mathbf{x}|y)$ sedangkan variabelnya bisa banyak sekali?
- Contoh: MNIST punya 784 variabel, dengan nilai biner saja artinya ada 2^{784} kemungkinan pola!
- Namun, kita mengetahui observasi untuk masing-masing nilai x_i untuk setiap kelas
- Asumsi yang digunakan Naïve Bayes adalah $x_1 ... x_d$ *conditionally independent* jika diberikan y

$$P(\mathbf{x}|y) = \prod_{i=1}^{d} P(x_i|x_1, ..., x_{i-1}, y) = \prod_{i=1}^{d} P(x_i|y)$$

Conditional Independence

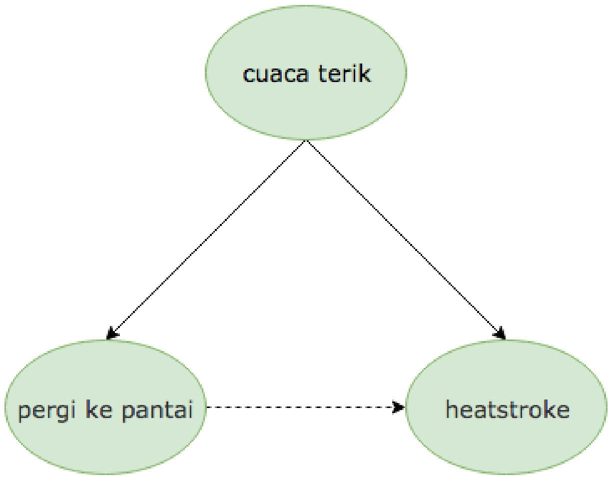
- Probabilitas pergi ke pantai dan *heatstroke* tidak independen
- Bisa jadi independen jika kita tahu cuaca sedang terik
- Cuaca terik "menjelaskan" dependensi antara pergi ke pantai dan *heatstroke*
- Dalam klasifikasi, nilai kelas menjelaskan hubungan antaratribut

Ilustrasi



Gambar: Kita belum mengobservasi cuaca

Ilustrasi



Gambar: Setelah kita tahu kondisi cuaca, *heatstroke* tidak lagi dijelaskan oleh pergi ke pantai

Model Generatif

- Naïve Bayes menghitung probabilitas untuk masing-masing kelas yang ada
- "Apakah datanya lebih besar probabilitasnya sebagai kelas 1 atau kelas 0?"
- Model generatif selalu melakukan klasifikasi probabilistik
- Klasifikasi probabilistik tidak berarti generatif, e.g. *logistic regression*

Contoh Kasus Diskrit

Asumsi: Distribusi Bernoulli
Contoh pada kasus identifikasi spam e-mail

D1: "send us your password" (s)
D2: "send us your review" (h)
D3: "review your password" (h)
D4: "review us" (s)
D5: "send your password" (s)
D6: "send us your account" (s)
Dokumen baru: "review us now"

word	**spam**	**ham**
password	2/4	1/2
review	1/4	2/2
send	3/4	1/2
us	3/4	1/2
your	3/4	1/2
account	1/4	0/2

$P(spam) = 4/6,\ P(ham) = 2/6$

Contoh Kasus Diskrit

$P(review\ us|spam) = P(0, 1, 0, 1, 0, 0|spam)$
$P(review\ us|ham) = P(0, 1, 0, 1, 0, 0|ham)$
$P(ham|review\ us) \approx 0.87$

Masalah Zero-frequency

- Berdasarkan contoh sebelumnya, setiap e-mail dengan kata "account" akan dianggap spam karena $P(account|ham) = 0/2$
- Solusi: Laplace smoothing, i.e. penambahan angka positif kecil ke semua pencacahan

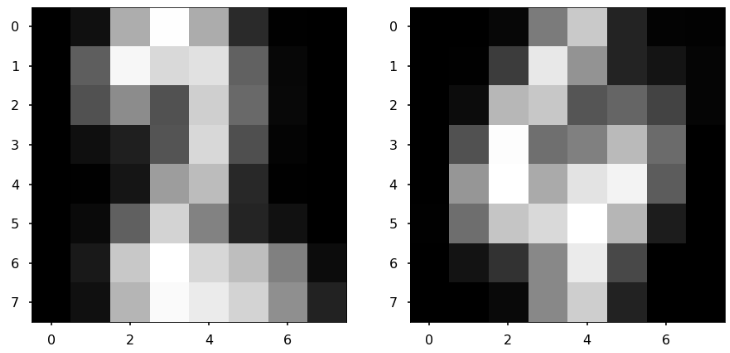
$$P(w|c) = \frac{num(w, c) + \epsilon}{num(c) + 2\epsilon}$$

- Nilai ϵ contohnya 1 atau 0.5, tetapi bisa juga dengan $num(w)/num$
- Kasus ini sering terjadi karena Zipf's law (50% kata hanya muncul sekali)

Missing Values

- Misalkan kita tidak punya nilai untuk atribut X_i, bagaimana kita bisa menghitung $P(X_1 = x_1, ..., X_i = ?, ..., X_d = x_d|y)$?
- Naïve Bayes dapat mengabaikan atribut tersebut karena *conditional independence*
- Hitung saja berdasarkan atribut yang bernilai!
- Nilai yang hilang tersebut tidak perlu diganti

Contoh Kasus Kontinu



Gambar: Gambar rata-rata pixel angka 2 vs 4. Apakah kita dapat menggunakan pixel (0,2) dan (4,6) saja untuk mengklasifikasikan gambar?

Contoh Kasus Kontinu

- Identifikasi angka 2 atau 4 berdasarkan pixel (0,2) dan (4,6): $y = \{2, 4\}$, atribut: $\{tl, mr\}$
- Probabilitas kelas:
  $P(y = 2) = \frac{177}{177+181} \approx 0.49$,
  $P(y = 4) = 1 - P(y = 2) \approx 0.51$
- Asumsi: atribut terdistribusi Gaussian dan independen jika diketahui kelasnya

Distribusi Gaussian

PDF

$$P(x|\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Maximum Likelihood Estimation (MLE)

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{\mu})^2$$

Parameter Distribusi Gaussian untuk Naïve Bayes

Dicocokkan dengan *maximum likelihood estimation* (MLE) untuk Gaussian, e.g.

$$\hat{\mu}_{tl,2} = \frac{1}{177}\sum_{i=1}^{177} tl_i$$

$$\hat{\sigma}^2_{tl,2} = \frac{1}{177}\sum_{i=1}^{177}(tl_i - \hat{\mu}_{tl,2})^2$$

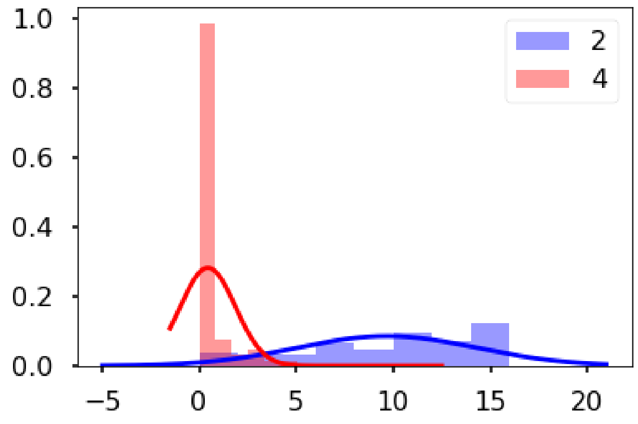
Naïve Bayes

$$\begin{aligned} P(y|\mathbf{x}) &= \frac{P(\mathbf{x}|y)P(y)}{P(x)} \\ &= \frac{P(x_{tl}|y)P(x_{mr}|y)P(y)}{\sum_y P(x_{tl}|y)P(x_{mr}|y)P(y)} \end{aligned}$$

Batas Keputusan

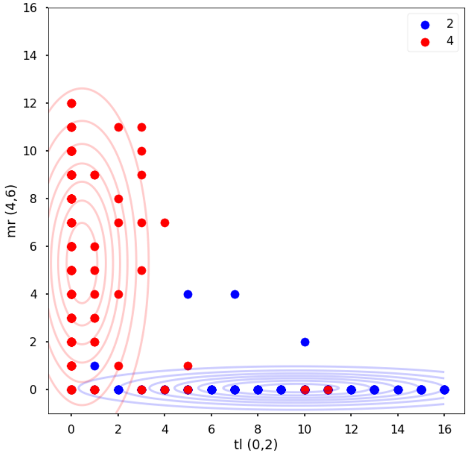
- Beda rataan, variansi sama: garis lurus atau bidang lurus
- Rataan sama, beda variansi: lingkaran atau elips
- Kasus umum: kurva parabola

Batas Keputusan



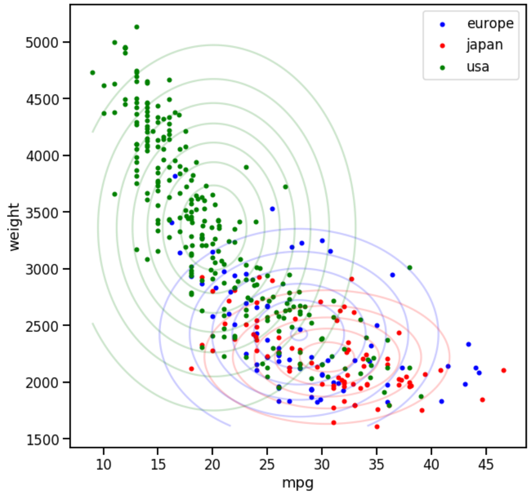
Gambar: Dalam satu dimensi, perbandingan pixel (0,2) dari dua kelas

Batas Keputusan



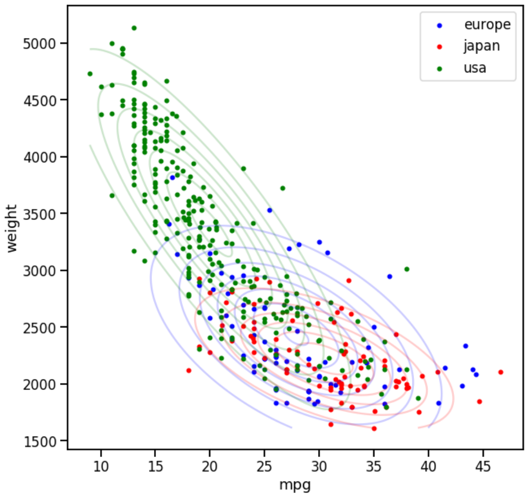
Gambar: Dalam dua dimensi, perbandingan pixel (0,2) dan (4,6) dari dua kelas

Naïve Bayes pada Dua Dimensi



Gambar: Asumsi naif → *diagonal covariance matrix*

Melunakkan Asumsi



Gambar: Menggunakan *full covariance matrix* untuk melunakkan asumsi

Ikhtisar

- Naïve Bayes
- Conditional independence
- Penggunaan distribusi Gaussian dan Bernoulli untuk NB
- Diagonal dan full covariance matrix saat klasifikasi

Pertemuan Berikutnya

- Dimensionality Reduction
- Eigenvector & Eigenvalue
- Principal Component Analysis

Terima kasih

Salindia ini dipersiapkan dengan sangat dipengaruhi oleh:
Victor Lavrenko (2014)