

Naïve Bayes

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al-Azhar Indonesia

aliakbars@live.com

April 7, 2019

Selayang Pandang

① Ulasan

② Naïve Bayes

- Klasifikasi Bayesian

- Conditional Independence

- Kasus Kontinu

- Kasus Diskrit

- Pros & Cons

Ulasan

Minggu lalu...

- Distribusi uniform
- Distribusi normal/Gaussian
- Maximum Likelihood Estimation
- Distribusi Bernoulli, Binomial, dan Beta

Apa itu central limit theorem?

Ada yang bisa menunjukkan bagaimana mendapatkan variansi?

Naïve Bayes

Ingat kembali tentang Bayes' rule!

Contoh

Seorang dokter tahu bahwa meningitis memiliki probabilitas menyebabkan kekakuan leher sekitar 50%. Kasus meningitis sendiri ditemukan dalam 1 dari 50,000 orang. Di sisi lain, probabilitas ditemukannya kasus kekakuan leher adalah $1/20$.

Pertanyaan: Jika seseorang menderita kekakuan leher, berapa peluangnya orang tersebut terkena meningitis?

Contoh

Diketahui

$$P(s|m) = 0.5$$

$$P(m) = 1/50,000 = 2 \times 10^{-5}$$

$$P(s) = 1/20 = 0.05$$

Solusi

$$P(m|s) = \frac{P(s|m)P(m)}{P(s)} = \frac{0.5 \times 2 \times 10^{-5}}{0.05} = 0.0002$$

Klasifikasi Bayesian

- Tujuan: fungsi pembelajaran $f(x) \rightarrow y$
- Klasifikasi **probabilistik**: kelas yang paling mungkin jika diberikan hasil **observasinya**, i.e. $\hat{y} = \arg \max_y P(y|x)$
- Probabilitas Bayesian dari sebuah kelas:

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{\sum_{y'} P(x|y')P(y')}$$

Glosarium

Data

Data merupakan **kumpulan objek** (*instances*) yang memiliki **atribut-atribut** tertentu

Glosarium

Data

Data merupakan **kumpulan objek** (*instances*) yang memiliki **atribut-atribut** tertentu

Atribut

Karakteristik dari suatu objek; **variabel** atau **fitur**

Kelas

Penanda kelompok suatu objek; **label**

Glosarium

Data

Data merupakan **kumpulan objek** (*instances*) yang memiliki **atribut-atribut** tertentu

Atribut

Karakteristik dari suatu objek; **variabel** atau **fitur**

Kelas

Penanda kelompok suatu objek; **label**

Objek

Dikenal juga dengan nama **record**, **poin**, **sampel**, **entitas**, atau **instance**

Klasifikasi Bayesian: Komponen

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)} = \frac{P(x|y)P(y)}{\sum_{y'} P(x|y')P(y')}$$

- $P(y)$: probabilitas *prior* dari kelas
“mana kelas yang sering muncul, mana yang jarang”
- $P(x|y)$: *class-conditional model* atau *likelihood*
“seberapa sering observasi x dalam kasus y ”
- $P(x)$: faktor normalisasi

Asumsi Independensi

- Apa yang terjadi kalau harus menghitung $P(\mathbf{x}|y)$ sedangkan variabelnya bisa banyak sekali?

Asumsi Independensi

- Apa yang terjadi kalau harus menghitung $P(\mathbf{x}|y)$ sedangkan variabelnya bisa banyak sekali?
- Contoh: MNIST punya 784 variabel, dengan nilai biner saja artinya ada 2^{784} kemungkinan pola!

Asumsi Independensi

- Apa yang terjadi kalau harus menghitung $P(\mathbf{x}|y)$ sedangkan variabelnya bisa banyak sekali?
- Contoh: MNIST punya 784 variabel, dengan nilai biner saja artinya ada 2^{784} kemungkinan pola!
- Namun, kita mengetahui observasi untuk **masing-masing nilai** x_i untuk setiap kelas

Asumsi Independensi

- Apa yang terjadi kalau harus menghitung $P(\mathbf{x}|y)$ sedangkan variabelnya bisa banyak sekali?
- Contoh: MNIST punya 784 variabel, dengan nilai biner saja artinya ada 2^{784} kemungkinan pola!
- Namun, kita mengetahui observasi untuk **masing-masing nilai** x_i untuk setiap kelas
- Asumsi yang digunakan Naïve Bayes adalah $x_1 \dots x_d$ ***conditionally independent*** jika diberikan y

$$P(\mathbf{x}|y) = \prod_{i=1}^d P(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}, y) = \prod_{i=1}^d P(x_i|y)$$

Conditional Independence

- Probabilitas pergi ke pantai dan *heatstroke* tidak independen

Conditional Independence

- Probabilitas pergi ke pantai dan *heatstroke* tidak independen
- Bisa jadi independen jika kita tahu cuaca sedang terik

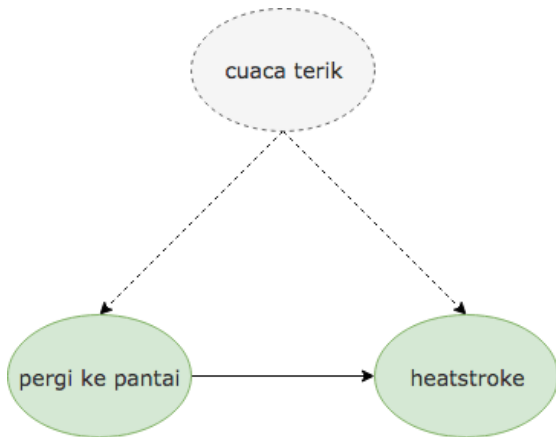
Conditional Independence

- Probabilitas pergi ke pantai dan *heatstroke* tidak independen
- Bisa jadi independen jika kita tahu cuaca sedang terik
- Cuaca terik “menjelaskan” dependensi antara pergi ke pantai dan *heatstroke*

Conditional Independence

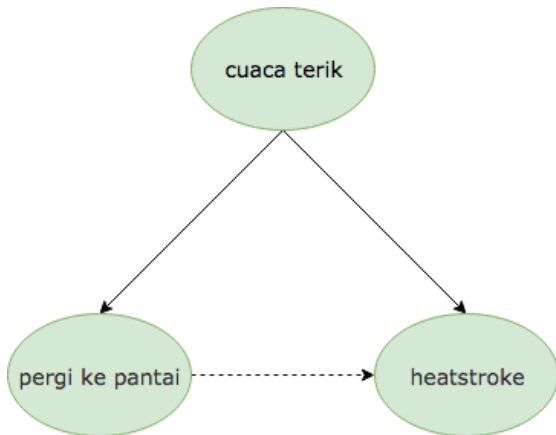
- Probabilitas pergi ke pantai dan *heatstroke* tidak independen
- Bisa jadi independen jika kita tahu cuaca sedang terik
- Cuaca terik “menjelaskan” dependensi antara pergi ke pantai dan *heatstroke*
- Dalam klasifikasi, nilai kelas menjelaskan hubungan antaratribut

Ilustrasi



Gambar: Kita belum mengobservasi cuaca

Ilustrasi



Gambar: Setelah kita tahu kondisi cuaca, *heatstroke* tidak lagi dijelaskan oleh pergi ke pantai

Model Generatif

- Naïve Bayes menghitung probabilitas untuk masing-masing kelas yang ada

Model Generatif

- Naïve Bayes menghitung probabilitas untuk masing-masing kelas yang ada
- “Apakah datanya lebih besar probabilitasnya sebagai kelas 1 atau kelas 0?”

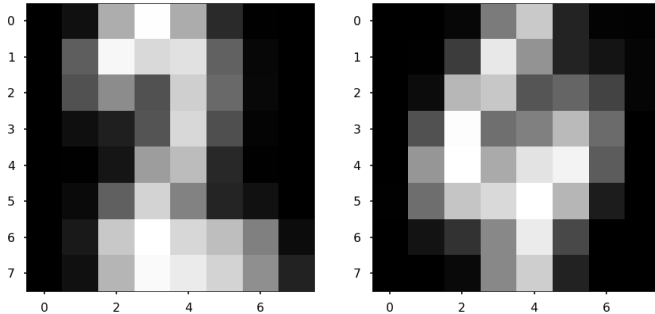
Model Generatif

- Naïve Bayes menghitung probabilitas untuk masing-masing kelas yang ada
- “Apakah datanya lebih besar probabilitasnya sebagai kelas 1 atau kelas 0?”
- Model generatif selalu melakukan klasifikasi probabilistik

Model Generatif

- Naïve Bayes menghitung probabilitas untuk masing-masing kelas yang ada
- “Apakah datanya lebih besar probabilitasnya sebagai kelas 1 atau kelas 0?”
- Model generatif selalu melakukan klasifikasi probabilistik
- Klasifikasi probabilistik tidak berarti generatif, e.g. *logistic regression*

Contoh



Gambar: Gambar rata-rata pixel angka 2 vs 4. Apakah kita dapat menggunakan pixel (0,2) dan (4,6) saja untuk mengklasifikasikan gambar?

Contoh Kasus Kontinu

- Identifikasi **angka 2 atau 4** berdasarkan pixel (0,2) dan (4,6):
 $y = \{2, 4\}$, atribut: $\{tl, mr\}$

Contoh Kasus Kontinu

- Identifikasi **angka 2 atau 4** berdasarkan pixel (0,2) dan (4,6):
 $y = \{2, 4\}$, atribut: $\{tl, mr\}$
- Probabilitas kelas:
$$P(y = 2) = \frac{177}{177+181} \approx 0.49,$$
$$P(y = 4) = 1 - P(y = 2) \approx 0.51$$

Contoh Kasus Kontinu

- Identifikasi **angka 2 atau 4** berdasarkan pixel (0,2) dan (4,6):
 $y = \{2, 4\}$, atribut: $\{tl, mr\}$
- Probabilitas kelas:
$$P(y = 2) = \frac{177}{177+181} \approx 0.49,$$
$$P(y = 4) = 1 - P(y = 2) \approx 0.51$$
- Asumsi: atribut terdistribusi Gaussian dan independen jika diketahui kelasnya

Distribusi Gaussian

PDF

$$P(x|\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Maximum Likelihood Estimation (MLE)

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2$$

Parameter Distribusi Gaussian untuk Naïve Bayes

Dicocokkan dengan *maximum likelihood estimation* (MLE) untuk Gaussian, e.g.

$$\hat{\mu}_{tl,2} = \frac{1}{177} \sum_{i=1}^{177} tl_i$$

$$\hat{\sigma}_{tl,2}^2 = \frac{1}{177} \sum_{i=1}^{177} (tl_i - \hat{\mu}_{tl,2})^2$$

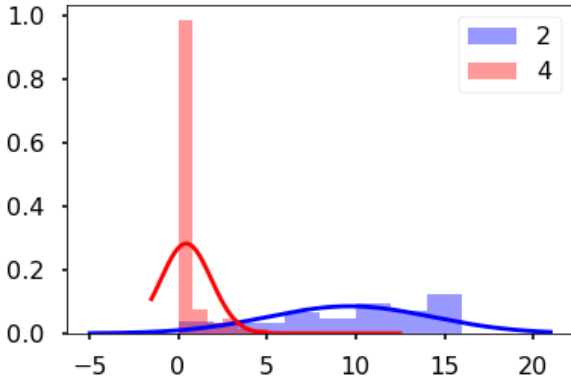
Naïve Bayes

$$\begin{aligned} P(y|\mathbf{x}) &= \frac{P(\mathbf{x}|y)P(y)}{P(\mathbf{x})} \\ &= \frac{P(x_{tl}|y)P(x_{mr}|y)P(y)}{\sum_y P(x_{tl}|y)P(x_{mr}|y)P(y)} \end{aligned}$$

Batas Keputusan

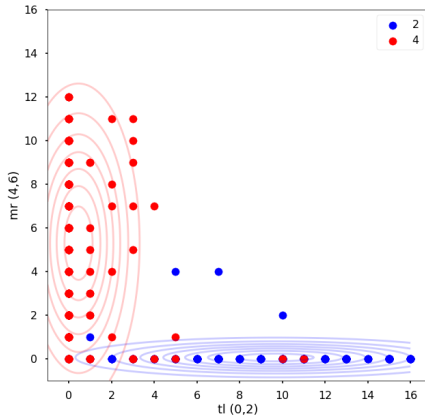
- Beda rataan, variansi sama: garis lurus atau bidang lurus
- Rataan sama, beda variansi: lingkaran atau elips
- Kasus umum: kurva parabola

Batas Keputusan



Gambar: Dalam satu dimensi, perbandingan pixel (0,2) dari dua kelas

Batas Keputusan



Gambar: Dalam dua dimensi, perbandingan pixel $(0,2)$ dan $(4,6)$ dari dua kelas

Contoh Kasus Diskrit

Asumsi: Distribusi Bernoulli

Contoh pada kasus identifikasi spam e-mail

D1: “send us your password” (s)

D2: “send us your review” (h)

D3: “review your password” (h)

D4: “review us” (s)

D5: “send your password” (s)

D6: “send us your account” (s)

Dokumen baru: “review us now”

word	spam	ham
password	2/4	1/2
review	1/4	2/2
send	3/4	1/2
us	3/4	1/2
your	3/4	1/2
account	1/4	0/2

$$P(\text{spam}) = 4/6, P(\text{ham}) = 2/6$$

Contoh Kasus Diskrit

$$P(\text{review us}|\text{spam}) = P(0, 1, 0, 1, 0, 0|\text{spam})$$

$$P(\text{review us}|\text{ham}) = P(0, 1, 0, 1, 0, 0|\text{ham})$$

$$P(\text{ham}|\text{review us}) \approx 0.87$$

Masalah Zero-frequency

- Berdasarkan contoh sebelumnya, setiap e-mail dengan kata “account” akan dianggap spam karena $P(\text{account}|\text{ham}) = 0/2$

Masalah Zero-frequency

- Berdasarkan contoh sebelumnya, setiap e-mail dengan kata “account” akan dianggap spam karena $P(\text{account}|\text{ham}) = 0/2$
- Solusi: Laplace smoothing, i.e. penambahan angka positif kecil ke semua pencacahan

$$P(w|c) = \frac{\text{num}(w, c) + \epsilon}{\text{num}(c) + 2\epsilon}$$

Masalah Zero-frequency

- Berdasarkan contoh sebelumnya, setiap e-mail dengan kata “account” akan dianggap spam karena $P(account|ham) = 0/2$
- Solusi: Laplace smoothing, i.e. penambahan angka positif kecil ke semua pencacahan

$$P(w|c) = \frac{num(w, c) + \epsilon}{num(c) + 2\epsilon}$$

- Nilai ϵ contohnya 1 atau 0.5, tetapi bisa juga dengan $num(w)/num$

Masalah Zero-frequency

- Berdasarkan contoh sebelumnya, setiap e-mail dengan kata “account” akan dianggap spam karena $P(\text{account}|\text{ham}) = 0/2$
- Solusi: Laplace smoothing, i.e. penambahan angka positif kecil ke semua pencacahan

$$P(w|c) = \frac{\text{num}(w, c) + \epsilon}{\text{num}(c) + 2\epsilon}$$

- Nilai ϵ contohnya 1 atau 0.5, tetapi bisa juga dengan $\text{num}(w)/\text{num}$
- Kasus ini sering terjadi karena Zipf's law (50% kata hanya muncul sekali)

Missing Values

- Misalkan kita tidak punya nilai untuk atribut X_i , bagaimana kita bisa menghitung $P(X_1 = x_1, \dots, X_i = ?, \dots, X_d = x_d | y)$?

Missing Values

- Misalkan kita tidak punya nilai untuk atribut X_i , bagaimana kita bisa menghitung $P(X_1 = x_1, \dots, X_i = ?, \dots, X_d = x_d | y)$?
- Naïve Bayes dapat mengabaikan atribut tersebut karena *conditional independence*

Missing Values

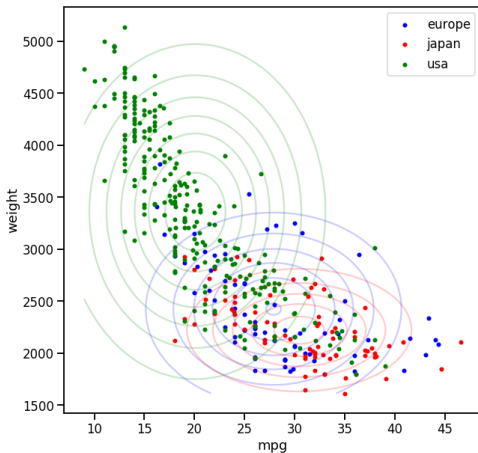
- Misalkan kita tidak punya nilai untuk atribut X_i , bagaimana kita bisa menghitung $P(X_1 = x_1, \dots, X_i = ?, \dots, X_d = x_d | y)$?
- Naïve Bayes dapat mengabaikan atribut tersebut karena *conditional independence*
- Hitung saja berdasarkan atribut yang bernilai!

Missing Values

- Misalkan kita tidak punya nilai untuk atribut X_i , bagaimana kita bisa menghitung $P(X_1 = x_1, \dots, X_i = ?, \dots, X_d = x_d | y)$?
- Naïve Bayes dapat mengabaikan atribut tersebut karena *conditional independence*
- Hitung saja berdasarkan atribut yang bernilai!
- Nilai yang hilang tersebut tidak perlu diganti

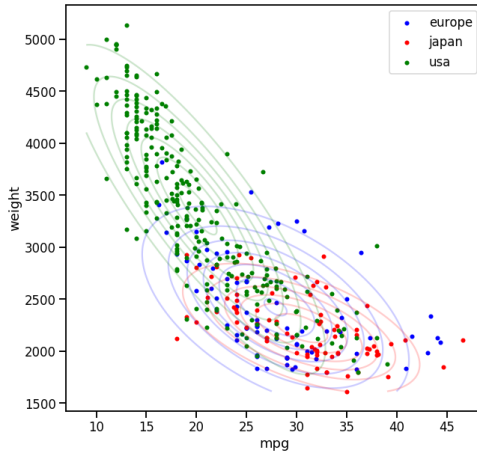
Masalah lainnya...

Naïve Bayes pada Dua Dimensi



Gambar: Asumsi naif \rightarrow *diagonal covariance matrix*

Melunakkan Asumsi



Gambar: Menggunakan *full covariance matrix* untuk melunakkan asumsi

- Naïve Bayes
- Conditional independence
- Penggunaan distribusi Gaussian dan Bernoulli untuk NB
- Diagonal dan full covariance matrix saat klasifikasi

Pertemuan Berikutnya

- Dimensionality Reduction
- Eigenvector & Eigenvalue
- Principal Component Analysis

Office hours minggu depan di
hari Senin, 08.00-09.00

Salindia ini dipersiapkan dengan sangat dipengaruhi oleh:
Victor Lavrenko (2014)

Terima kasih