

BEBERAPA DISTRIBUSI DISKRIT

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al-Azhar Indonesia

aliakbars@live.com

March 1, 2020

SELAYANG PANDANG

- ① ULASAN
- ② DISTRIBUSI UNIFORM
- ③ DISTRIBUSI BERNOULLI
- ④ DISTRIBUSI BINOMIAL

ULASAN

MINGGU LALU...

- Peubah acak, ruang sampel, kejadian
Jika dilempar sebuah dadu, $p(X = 5) = \dots$

MINGGU LALU...

- Peubah acak, ruang sampel, kejadian
Jika dilempar sebuah dadu, $p(X = 5) = \dots$
- Ekspektasi dan variansi
 $\mathbb{E}[X] = \dots$ dan $Var[X] = \dots$

MINGGU LALU...

- Peubah acak, ruang sampel, kejadian
Jika dilempar sebuah dadu, $p(X = 5) = \dots$
- Ekspektasi dan variansi
 $\mathbb{E}[X] = \dots$ dan $Var[X] = \dots$
- Marginal probability, conditional probability
sum rule, product rule, chain rule

MINGGU LALU...

- Peubah acak, ruang sampel, kejadian
Jika dilempar sebuah dadu, $p(X = 5) = \dots$
- Ekspektasi dan variansi
 $\mathbb{E}[X] = \dots$ dan $Var[X] = \dots$
- Marginal probability, conditional probability
sum rule, product rule, chain rule
- Bayes' rule
$$p(y|x) = \frac{p(x|y)p(y)}{p(x)}$$

EKSPEKTASI DAN VARIANSI

EKSPEKTASI

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x f(x)p(x)$$

EKSPEKTASI DAN VARIANSI

EKSPEKTASI

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x f(x)p(x)$$

VARIANSI

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Tunjukkan!

Sudah coba soal latihan?

DISTRIBUSI UNIFORM

LEMPARAN DADU



PEUBAH ACAK SERAGAM

- Semua bernilai sama peluangnya dalam interval tertentu
- Dituliskan sebagai $X \sim Unif(a, b)$
- Bisa berupa diskrit maupun kontinu
- PMF:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & ,if\ x \in [a, b] \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

EKSPEKTASI DAN VARIANSI

EKSPEKTASI

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$$

VARIANSI

$$Var[X] = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

GERMAN TANK PROBLEM



DISTRIBUSI BERNOULLI

DEFINISI

- X adalah RV yang bisa bernilai 0 atau 1

DEFINISI

- X adalah RV yang bisa bernilai 0 atau 1
- Nilai 1 dapat diartikan sebagai “sukses”, e.g. muncul “angka” dari koin, muncul muka 4 atau 5 dari dadu, ads akan diklik

DEFINISI

- X adalah RV yang bisa bernilai 0 atau 1
- Nilai 1 dapat diartikan sebagai “sukses”, e.g. muncul “angka” dari koin, muncul muka 4 atau 5 dari dadu, ads akan diklik
- Jika $p(X = 1|\theta) = \theta$ dan mengakibatkan $p(X = 0|\theta) = 1 - \theta$, maka

DEFINISI

- X adalah RV yang bisa bernilai 0 atau 1
- Nilai 1 dapat diartikan sebagai “sukses”, e.g. muncul “angka” dari koin, muncul muka 4 atau 5 dari dadu, ads akan diklik
- Jika $p(X = 1|\theta) = \theta$ dan mengakibatkan $p(X = 0|\theta) = 1 - \theta$, maka
- X mengikuti distribusi Bernoulli

DISTRIBUSI BERNOULLI

PMF

$$X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$$

$$p(x) = \begin{cases} \theta & , x = 1 \\ 1 - \theta & , x = 0 \end{cases}$$

dapat diringkas sebagai

$$p(x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$$

MODEL BERNOULLI

EXAMPLE

Data: 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1.

Tiga hipotesis:

- $\mathcal{M} = 1$ - dari koin setimbang $1 = H, 0 = T$
- $\mathcal{M} = 2$ - dari lemparan dadu $1 = 1, 0 = 2, 3, 4, 5, 6$
- $\mathcal{M} = 3$ - dari koin yang keduanya muka $1 = H, 0 = T$

LIKELIHOOD

- $p(\mathcal{D}|\mathcal{M})$, yaitu probabilitas melihat data \mathcal{D} jika diberikan distribusi (atau model) \mathcal{M}
- Merupakan hasil perkalian dari peluang yang menghasilkan tiap titik dalam data

$$L(\mathcal{M}) = p(\mathcal{D}|\mathcal{M}) = \prod_{i=1}^N p(x_i|\mathcal{M})$$

- Kita menggunakan asumsi *independent and identically distributed* (i.i.d.)

MODEL BERNOULLI

EXAMPLE

Data: 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1.

Likelihood of data. Jika N_1 = jumlah 1, N_0 = jumlah 0, dengan $N = N_0 + N_1$:

$$\prod_{i=1}^N p(x_i|\mathcal{M}) = p(1|\mathcal{M})^{N_1} p(0|\mathcal{M})^{N_0}$$

maka

- $\mathcal{M} = 1 : L(\mathcal{M}) = 0.5^{20} = 9.5 \times 10^{-7}$
- $\mathcal{M} = 2 : L(\mathcal{M}) = (\frac{1}{6})^9 (\frac{5}{6})^{11} = 1.3 \times 10^{-8}$
- $\mathcal{M} = 3 : L(\mathcal{M}) = 1^9 0^{11} = 0$

MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION

- Coba berbagai model \mathcal{M} yang dapat memaksimalkan nilai *likelihood*, i.e. *maximum likelihood estimation*
- Dalam kasus distribusi Bernoulli

$$L(\mathcal{M}) = p(X|\theta) = \prod_{i=1}^N \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1-x_i}$$

- Bagaimana?

BEBERAPA TRIK...

- 1 Terapkan fungsi logaritma
- 2 Cari turunan parsial pertama
- 3 Atur sama dengan nol

Coba cari MLE-nya!

BERNOULLI MLE

$$\hat{\theta} = \frac{N_1}{N_0 + N_1}$$

DISTRIBUSI BINOMIAL

CONTOH

- 1 Anda melempar koin setimbang sebanyak 20 kali. Berapa peluang muncul gambar 10 kali?

CONTOH

- 1 Anda melempar koin setimbang sebanyak 20 kali. Berapa peluang muncul gambar 10 kali?
- 2 Anda melakukan 20 lemparan koin lagi, tetapi kali ini dengan koin yang bias dengan $\theta = 0.2$ dan kemunculan gambar sebagai “sukses”. Berapa peluangnya muncul gambar 10 kali?

CONTOH

- 1 Anda melempar koin setimbang sebanyak 20 kali. Berapa peluang muncul gambar 10 kali?
- 2 Anda melakukan 20 lemparan koin lagi, tetapi kali ini dengan koin yang bias dengan $\theta = 0.2$ dan kemunculan gambar sebagai “sukses”. Berapa peluangnya muncul gambar 10 kali?
- 3 Berapa peluang minimal ada satu kemunculan gambar?

CONTOH

- 1 Anda melempar koin setimbang sebanyak 20 kali. Berapa peluang muncul gambar 10 kali?
- 2 Anda melakukan 20 lemparan koin lagi, tetapi kali ini dengan koin yang bias dengan $\theta = 0.2$ dan kemunculan gambar sebagai “sukses”. Berapa peluangnya muncul gambar 10 kali?
- 3 Berapa peluang minimal ada satu kemunculan gambar?
- 4 Dengan kasus seperti sebelumnya. Berapa kali kemunculan gambar yang Anda harapkan?

DISTRIBUSI BINOMIAL

- Didapatkan dari n percobaan Bernoulli independen
- Distribusinya menunjukkan jumlah kemunculan 1
- X dapat bernilai $0, 1, 2, \dots, n$
- Jika

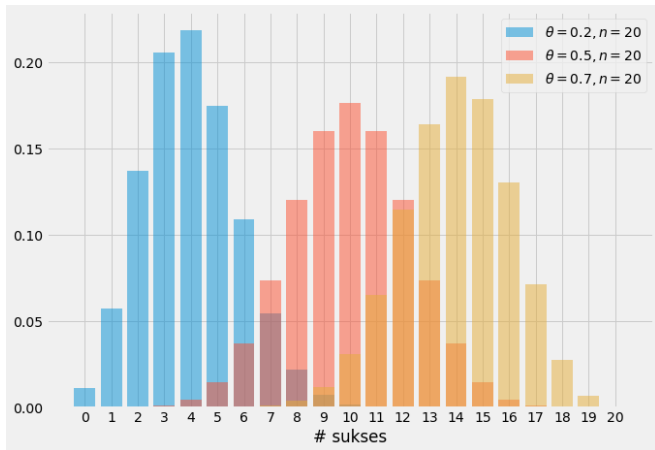
$$p(X = r|\theta) = \binom{n}{r} \theta^r (1 - \theta)^{n-r},$$

maka X mengikuti distribusi Binomial

CATATAN TENTANG BINOMIAL

- $X \sim \text{Binom}(n, \theta)$
- $\mathbb{E}[X] = n \theta$
- $\text{Var}(X) = n \theta(1 - \theta)$
- $\text{Ber}(\theta) = \text{Bin}(1, \theta)$

GRAFIK PMF



GAMBAR: Probability mass function (PMF) dari distribusi Binomial

IKHTISAR

- Distribusi uniform
- Distribusi Bernoulli
- Distribusi Binomial, dapat dianggap sebagai *Bernoulli process*
- Maximum Likelihood Estimation

TOPIK TAMBAHAN (NON-EXAMINABLE)

- Distribusi Poisson
- Distribusi Geometrik
- Distribusi Negative Binomial

PERTEMUAN BERIKUTNYA

- Distribusi Beta
- Distribusi Gaussian
- Multivariate Gaussian

REFERENSI



Will Monroe (Jul. 2017)

Bernoulli and Binomial Random Variables

<http://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs109/cs109.1178/lectureHandouts/070-bernoulli-binomial.pdf>



Chris Williams (Sep. 2015)

Probability - Machine Learning and Pattern Recognition

<https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/mlpr/2015/>

Terima kasih