Beberapa Distribusi Kontinu dan Diskrit

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al-Azhar Indonesia

aliakbars@live.com

March 20, 2018

Selayang Pandang

Ulasan

Minggu lalu...

- Peubah acak, ruang sampel, kejadian
  Jika dilempar sebuah dadu, $p(X = 5) = \ldots$

Minggu lalu...

- Peubah acak, ruang sampel, kejadian
  Jika dilempar sebuah dadu, $p(X = 5) = ...$
- Ekspektasi dan variansi
  $\mathbb{E}[X] = ...$ dan $Var[X] = ...$

Minggu lalu...

- Peubah acak, ruang sampel, kejadian
  Jika dilempar sebuah dadu, $p(X = 5) = ...$
- Ekspektasi dan variansi
  $\mathbb{E}[X] = ...$ dan $Var[X] = ...$
- Marginal probability, conditional probability
  sum rule, product rule, chain rule

Minggu lalu...

- Peubah acak, ruang sampel, kejadian
  Jika dilempar sebuah dadu, $p(X = 5) = \ldots$
- Ekspektasi dan variansi
  $\mathbb{E}[X] = \ldots$ dan $Var[X] = \ldots$
- Marginal probability, conditional probability
  sum rule, product rule, chain rule
- Bayes' rule
  $p(y|x) = \frac{p(x|y)p(y)}{p(x)}$

Ekspektasi Kontinu dan Variansi

Ekspektasi

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

Ekspektasi Kontinu dan Variansi

Ekspektasi

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)dx$$

Variansi

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Tunjukkan!

Sudah coba soal latihan?

Sudah enroll ke e-learning?

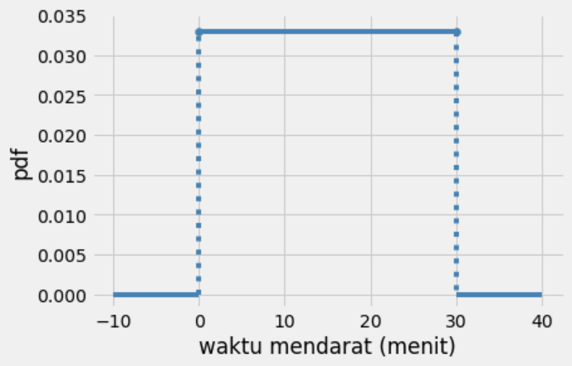
Distribusi Uniform

Peubah Acak Seragam

- Semua bernilai sama peluangnya dalam interval tertentu
- Dituliskan sebagai $X \sim Uni(\alpha, \beta)$
- Bisa berupa diskrit maupun kontinu
- PDF:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & if \ x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Contoh

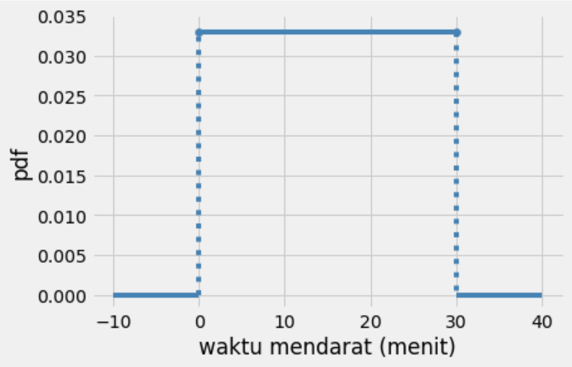


Gambar: Berapa probabilitas pesawat mendarat ada di antara 25-30 menit?

Mengapa PDF di satu titik bisa > 1?

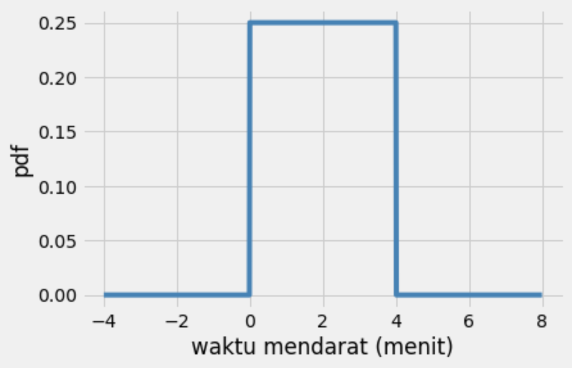
Perhatikan!

Ingat bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ sehingga luas area di bawah (persegi panjang) harus bernilai 1.

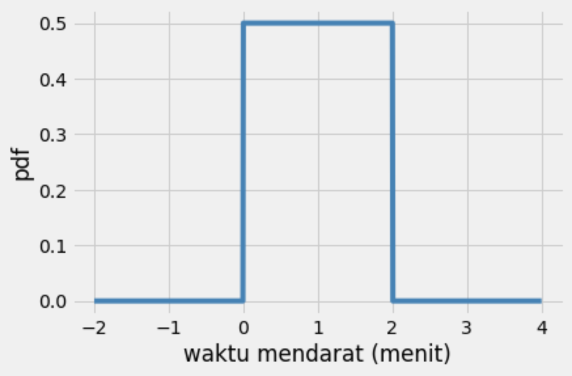


Apa yang terjadi kalau intervalnya kita perkecil?

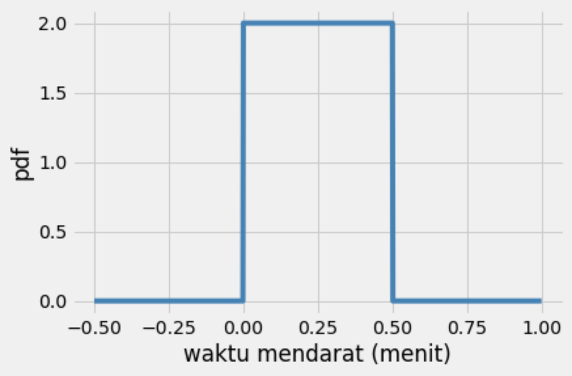
Perhatikan!



Perhatikan!



Perhatikan!



2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
pdf
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
waktu mendarat (menit)

Ekspektasi dan Variansi

Ekspektasi

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Variansi

$$Var[X] = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Distribusi Gaussian

Distribusi Gaussian/Normal

- Salah satu yang paling sering muncul untuk variabel kontinu
- Berhubungan dengan central limit theorem
- Dituliskan sebagai $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Apa itu "terdistribusi normal"?

- Dapat ditemukan dalam berbagai fenomena di alam, e.g. tinggi badan, berat badan, ...

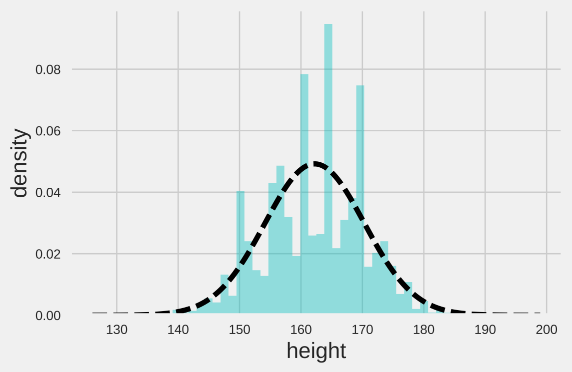
Apa itu "terdistribusi normal"?

- Dapat ditemukan dalam berbagai fenomena di alam, e.g. tinggi badan, berat badan, ...
- Jumlah dari berbagai peubah acak yang independen

Apa itu “terdistribusi normal”?

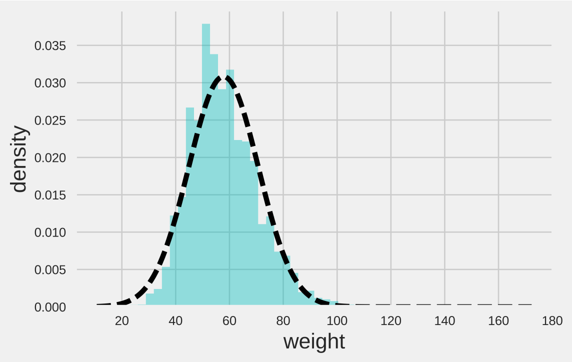
- Dapat ditemukan dalam berbagai fenomena di alam, e.g. tinggi badan, berat badan, ...
- Jumlah dari berbagai peubah acak yang independen
- Dengan jumlah sampel yang cukup, bisa menggambarkan populasi dengan baik

Contoh



Gambar: Hasil “pengukuran” tinggi badan

Contoh



Gambar: Hasil pengukuran berat badan

Fakta

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

PDF

$$p(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Ekspektasi

$\mathbb{E}[X] = \mu$

Variansi

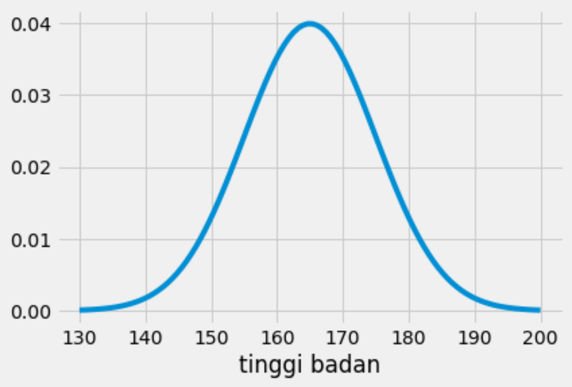
$Var[X] = \sigma^2$

CDF

- Karena kita berurusan dengan distribusi kontinu, kita perlu cumulative density function
- CDF:
$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$
- e.g. Berapa peluangnya untuk mendapatkan orang dengan tinggi badan antara 150 dan 160?

Solusi

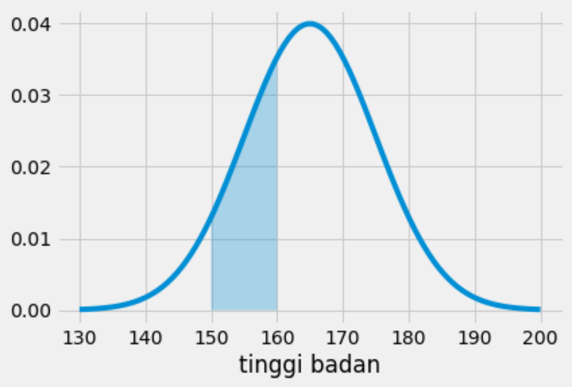
$$p(150 < X < 160) = F(160) - F(150)$$



Gambar: Distribusi tinggi badan

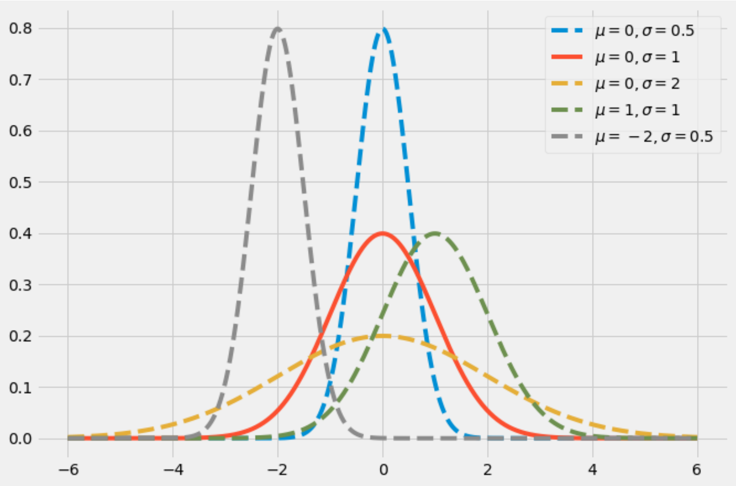
Solusi

$$p(150 < X < 160) = F(160) - F(150)$$



Gambar: Distribusi tinggi badan

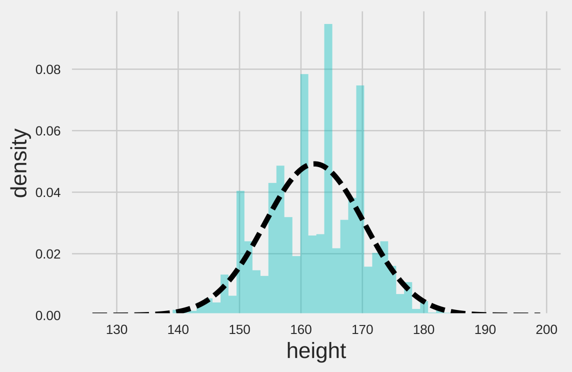
Perhatikan bahwa...



Gambar: Distribusi Gaussian dengan berbagai nilai parameter

Jika semua nilai hasil observasi sama, bagaimana grafiknya?

Contoh



Gambar: Bagaimana cara mendapatkan distribusi Gaussian[1]?

[1] digambarkan dengan garis putus-putus

Likelihood

- $p(\mathcal{D}|\mathcal{M})$, yaitu probabilitas melihat data $\mathcal{D}$ jika diberikan distribusi (atau model) $\mathcal{M}$
- Merupakan hasil perkalian dari peluang yang menghasilkan tiap titik dalam data

$$L(\mathcal{M}) = p(\mathcal{D}|\mathcal{M}) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i|\mathcal{M})$$

- Kita menggunakan asumsi *independent and identically distributed* (i.i.d.)
- Datanya tetap, modelnya (parameternya) yang dapat berubah

Maximum Likelihood Estimation

- Coba berbagai model $\mathcal{M}$ yang dapat memaksimalkan nilai *likelihood*, i.e. *maximum likelihood estimation*
- Dalam kasus distribusi Gaussian

$$L(\mathcal{M}) = p(X|\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp \left\{ -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

- Atur $\gamma = 1/\sigma^2$, lalu cari titik optimumnya.
- Bagaimana?

Beberapa trik...

- Terapkan fungsi logaritma
- Cari turunan parsial pertama
- Atur sama dengan nol

Maximum Likelihood Estimation

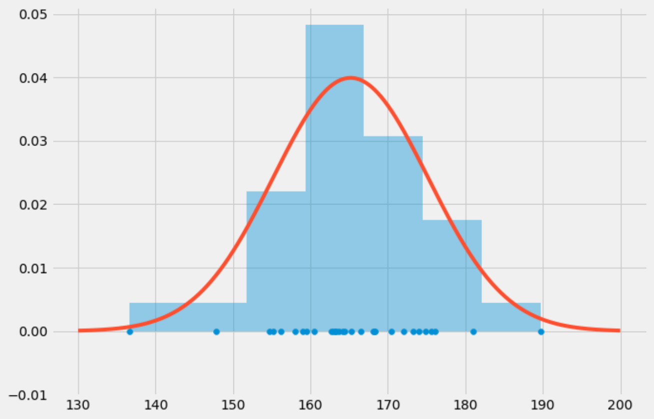
$$\log p(X|\mu,\gamma) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\gamma(x_i-\mu)^2 - \frac{N}{2}\log(2\pi) + \frac{N}{2}\log\gamma$$

$$\frac{\partial p(X|\mu,\gamma)}{\partial\mu} = \gamma\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)$$

$$\frac{\partial p(X|\mu,\gamma)}{\partial\gamma} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 + \frac{N}{2\gamma}$$

sehingga pada titik maksimum: $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ dan $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$. Terlihat familiar?

Grafik MLE



Gambar: Gaussian MLE dari 30 objek dalam data

Multivariate Gaussian

- Vektor $\mathbf{x}$ adalah multivariate Gaussian jika untuk *mean* μ dan *covariance matrix* Σ, nilainya terdistribusi menurut

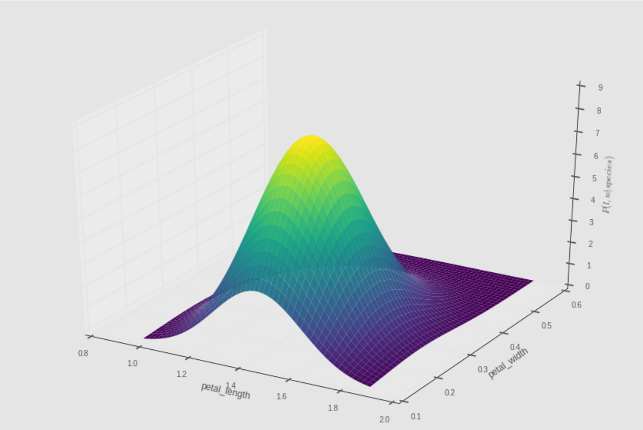
$$p(\mathbf{x}|\mu, \Sigma) = \frac{1}{|(2\pi)\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^- 1(\mathbf{x} - \mu)\right)$$

- Univariate Gaussian adalah kasus khusus dari distribusi ini
- Σ adalah *covariance matrix*, i.e. setiap elemen $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ dengan

$$Cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

- Σ harus simetris

Bivariate Gaussian

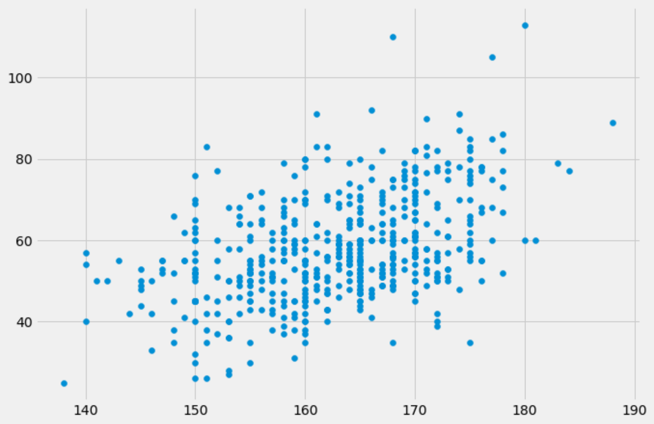


Gambar: Multivariate Gaussian dengan dua variabel yang dibuat dalam tiga dimensi

Maximum Likelihood

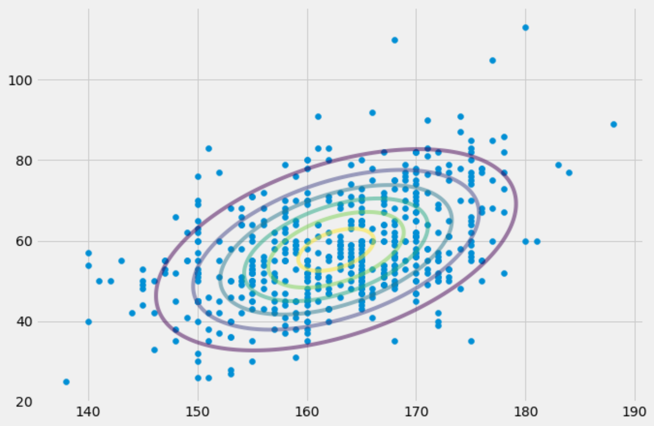
- Sama dengan kasus univariate
- $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i$
- $\Sigma = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{x}_i - \mu)(\mathbf{x}_i - \mu)^T$

Grafik MLE



Gambar: Data tinggi vs berat badan

Grafik MLE



Gambar: MLE dari data

Poin Penting

- Jumlah dari Gaussian RVs adalah Gaussian
- Model yang terdiri dari kombinasi linear Gaussian akan memiliki *joint distribution* berupa Gaussian
- Jika $p(x, y)$ adalah multivariate Gaussian, maka $p(x)$ maupun $p(y)$ serta $p(x|y)$ dan $p(y|x)$ adalah Gaussian

Distribusi Beta, Bernoulli, dan Binomial

Distribusi Bernoulli

- X adalah RV yang bisa bernilai 0 atau 1
- Jika $p(X = 1|\theta) = \theta$ dan mengakibatkan $p(X = 0|\theta) = 1 - \theta$, maka
- X mengikuti distribusi Bernoulli

Example

Data: 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1.

Tiga hipotesis:

- $\mathcal{M} = 1$ - dari koin setimbang $1 = H$, $0 = T$
- $\mathcal{M} = 2$ - dari lemparan dadu $1 = 1$, $0 = 2, 3, 4, 5, 6$
- $\mathcal{M} = 3$ - dari koin yang keduanya muka $1 = H$, $0 = T$

Model Bernoulli

Example

Data: 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1.

Likelihood of data. Jika $N_1 = \text{jumlah1}$, $N_0 = \text{jumlah0}$, dengan $N = N_0 + N_1$:

$$\prod_{i=1}^{N} p(x_i|\mathcal{M}) = p(1|\mathcal{M})^{N_1} p(0|\mathcal{M})^{N_0}$$

maka

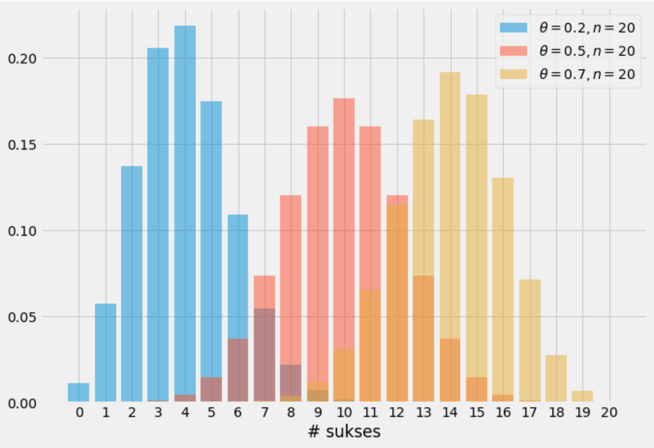
- $\mathcal{M} = 1 : L(\mathcal{M}) = 0.5^{20} = 9.5 \times 10^{-7}$
- $\mathcal{M} = 2 : L(\mathcal{M}) = (\frac{1}{6})^9 (\frac{5}{6})^{11} = 1.3 \times 10^{-8}$
- $\mathcal{M} = 3 : L(\mathcal{M}) = 1^9 0^{11} = 0$

Coba cari MLE-nya!

Distribusi Binomial

- Didapatkan dari n percobaan Bernoulli independen
- Distribusinya menunjukkan jumlah kemunculan 1
- X dapat bernilai $0, 1, 2, ..., n$
- Jika $p(X = r|\theta) = \binom{n}{r}\theta^r(1-\theta)^{(n-r)}$,
- maka X mengikuti distribusi Binomial

Grafik PMF



Gambar: Probability mass function (PMF) dari distribusi Binomial

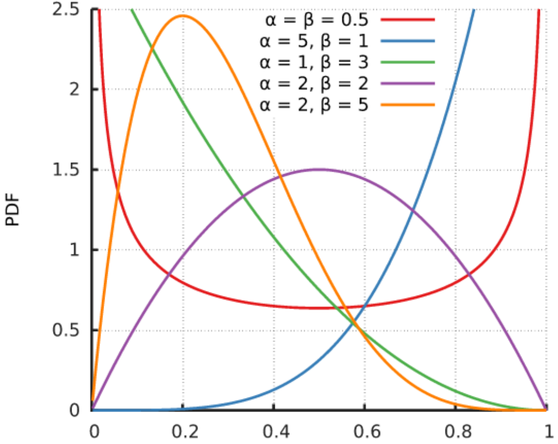
Distribusi Beta

- Merepresentasikan keluaran dari persentase atau proporsi
- Berguna untuk dipakai sebagai *prior probability*
- Jika X adalah RV yang bernilai $x \in [0, 1]$,
- dan

$$p(X = x|a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{(a-1)}(1-x)^(b-1)$$

- maka $X \sim Beta(a, b)$.

Grafik PDF



Gambar: PDF dari distribusi Binomial

Ikhtisar

- Distribusi uniform
- Distribusi normal/Gaussian
- Maximum Likelihood Estimation
- Distribusi Bernoulli, Binomial, dan Beta

Pertemuan Berikutnya

- Bayes classifier
- Naïve Bayes & conditional independence
- Linear Discriminant Analysis

Office hours minggu ini di
hari Rabu, 08.00-09.00

Referensi

Chris Piech (Jul. 2017)
The Normal Distribution
http://web.stanford.edu/class/cs109/

Chris Williams (Sep. 2015)
Probability - Machine Learning and Pattern Recognition
https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/mlpr/2015/

Chris Williams (Sep. 2015)
The Gaussian Distribution - Machine Learning and Pattern Recognition
https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/mlpr/2015/

Terima kasih