

Corrigé du contrôle

Exercice 1 (3 points)

1. Notons $u_n = \frac{(n+1)!}{1 \times 4 \times \dots \times (3n+1)} a^n$ et raisonnons via la règle de d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!a^{n+1}}{1 \times 4 \times \dots \times (3n+4)} \times \frac{1 \times 4 \times \dots \times (3n+1)}{(n+1)!a^n} = \frac{a(n+2)}{3n+4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{3}.$$

Si $a < 3$, $\sum u_n$ converge.

Si $a > 3$, $\sum u_n$ diverge.

2. Notons $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et raisonnons via la règle de Cauchy.

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-n \ln(1+1/n)} = e^{-n(1/n + o(1/n))} = e^{-1+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} < 1.$$

Ainsi $\sum u_n$ converge.

3. $\left| \frac{\sin(n)}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \frac{\sin(n)}{n(n+1)}$ converge absolument donc converge.

Exercice 2 (3 points)

1. (u_n) est alternée et $(|u_n|)$ converge vers 0. De plus $(|u_n|)$ est décroissante car $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(\sqrt{t}+1)}$ vérifie pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$f'(t) = -\frac{1}{\ln(\sqrt{t}+1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{t}+1} \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \leq 0$$

Ainsi, via le critère spécial des séries alternées, $\sum u_n$ converge.

2. Via le théorème des croissances comparées, $n^{1/2}|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$
3. Via la question précédente, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \implies n^{1/2}|u_n| > 1$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \implies |u_n| > \frac{1}{n^{1/2}}$$

Or $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge donc $\sum |u_n|$ diverge.

Exercice 3 (3 points)

1. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}.$

On ne peut rien conclure car la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ n'est pas de signe constant.

2. Via le développement limité de $\sin(x)$ en 0, on a $u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$

3. $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ où $(v_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ et $(w_n) = \left(-\frac{(-1)^n}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$.

(v_n) est alternée et vérifie le critère spécial donc $\sum v_n$ converge.

$$|w_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}.$$

Or $\sum \frac{1}{n^3}$ converge donc $\sum w_n$ converge absolument donc converge.

Ainsi, la série de terme général u_n , somme de deux séries convergentes, converge.

Exercice 4 (3 points)

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$

2. On cherche k tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$

Comme $\frac{a}{a+1} < 1$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{a+1}} = a+1.$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \iff k(a+1) = 1$$

d'où $k = \frac{1}{a+1}.$

3. Notons G la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi p_n .

$$G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} k \left(\frac{a}{a+1}\right)^n t^n.$$

Via la règle de D'Alembert, on en déduit immédiatement que le rayon de convergence R de cette série entière est

$$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$$

Soit $t \in]-R, R[$. Alors via le DSE classique de $\frac{1}{1-u}$, on a immédiatement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{a+1}t\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{a+1}t} = \frac{a+1}{a+1-at}$$

Ainsi, comme $k = \frac{1}{a+1}$, $G(t) = \frac{1}{1+a-at}.$

Exercice 5 (3 points)

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et utilisons la règle de D'Alembert.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ donc le rayon de convergence de la série est } R = 1.$$

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{n!}{(2n)!}$ et utilisons de nouveau la règle de D'Alembert.

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{2(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc le rayon de convergence de la série est } R = +\infty.$$

Exercice 6 (3 points)

Le DSE (en 0) de $\ln(1+x)$ est $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

Ainsi celui de $\ln(1+2x^2)$ est $\ln(1+2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n x^{2n}}{n}$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ et } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Ainsi, via le produit de Cauchy, on a immédiatement $\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Exercice 7 (3 points)

1. $G_X(1) = 1$ donc $25k = 1$ soit $k = \frac{1}{25}$.

2. $G'_X(t) = \frac{1}{25}(9 + 12t^2 + 4t^4) = \frac{9}{25} + \frac{12}{25}t^2 + \frac{4}{25}t^4$.

Ainsi, comme $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k$, on a :

$$P(X=0) = \frac{9}{25}; P(X=1) = 0; P(X=2) = \frac{12}{25}; P(X=3) = 0; P(X=4) = \frac{4}{25} \text{ et pour tout } k > 4, P(X=k) = 0.$$

3. $G'_X(t) = 2k(3 + 2t^2)4t$ donc $E(X) = G'_X(1) = 40k = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$.