79. 12/410

07/6

Examen de rattrapage du semestre 3

Durée : 1h30
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : DEBERT **Prénom :** François

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

*Vous devez justifier rigoureusement votre réponse en déterminant **OBLIGATOIREMENT** avec précision les sous-espaces propres. L'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.*

$$P_A = \begin{vmatrix} -1-x & -2 & -2 \\ -3 & -1-x & -3 \\ 3 & 2 & 4-x \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} -1-x & -2 & 0 \\ -3 & -1-x & -2+x \\ 3 & 2 & 2-x \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} -1-x & -2 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 3 & 2 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)(-1-x)(1-x)$$

P_A est scindé dans $\mathbb{R}$

1

On a $sp_{\mathbb{R}}(P_A) = \{-1, 1, 2\}$

A est diagonalisable si $\dim(E_x) = m(x)$ où x est une solution du polynome

De plus, si $m(x) = 1$ alors $\dim(E_x) = 1$

On a donc
- $m(-1) = \dim(E_{-1}) = 1$
- $m(1) = \dim(E_1) = 1$ $\Rightarrow$ A est diagonalisable.
- $m(2) = \dim(E_2) = 1$

[suite du cadre page suivante]

$$P_B = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -2+x \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 2-x \\ 1 & -1 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & -1 & 5-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)(2-x)(5-x)$$

$$= (2-x)^2(5-x)$$

P_B est scindé dans $\mathbb{R}$

$Sp_{\mathbb{R}}(P_B) = \{2, 5\}$ B est diago. si $\dim(E_2) = m(2) = 2$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \left| \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right. \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2

$\dim(E_2) = m(2)$ donc B est diagonalisable.

car $\dim(E_2) = m(2)$ et $\dim(E_5) = m(5) = 1$

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Discuter de la diagonalisabilité de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivant les valeurs de a.

La diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée mais vous devez comme dans l'exercice 1 justifier votre réponse en déterminant avec précision les sous-espaces propres via un raisonnement logique et non en prenant des valeurs particulières.

$$P_A = \begin{vmatrix} 1-x & a & a \\ -1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 1-x & a & 0 \\ -1 & 1-x & -2+x \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 1-x & a & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$$

1

$$= (2-x)(1-x)^2$$

P_A est scindé dans $\mathbb{R}$

$$Sp_{\mathbb{R}}(P_A) = \{1, 2\}$$

A est diagonalisable si $\dim(E_1) = m(1) = 2$

• a n'influe pas sur les solutions de P_A, on prend des valeurs particulières, ici $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$E_1 = \left\{ \text{Soit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \left| \begin{array}{l} ay + az = 0 \\ -x \quad\quad - z = 0 \\ x \quad\quad + z = 0 \end{array} \right. \right. = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2

A n'est pas diagonalisable pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• Pour $a = 0$:

Même conditions pour la diagonalisation

$$E_1 = \left\{ \text{Soit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \right| x + z = 0 \quad = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A est diagonalisable pour $a = 0$

[suite du cadre page suivante]

Exercice 3

Déterminer, en utilisant obligatoirement la règle de d'Alembert, la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \cancel{(n+1)} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{\cancel{(n+1)}}$$

$$= e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$= e^{-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{-n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$= e^{-1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sim \frac{1}{2n}$$

1

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0 < 1$$

D'après de d'Alembert, la serie $\sum U_n$ CV