Corrigé du contrôle blanc

Exercice 1

1. On utilise successivement les DL de $\sin(u)$, $\dfrac{1}{1-u}$ et $\ln(1+u)$.

   (dans le développement de $\ln(1+u)$ avec $u = -2x + \dfrac{(2x)^3}{6} + o(x^3)$, les termes négligeables ont été enlevés)

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\big(1-\sin(2x)\big)}{1-x} &= \ln\big(1-\sin(2x)\big)\ .\ \frac{1}{1-x} \\
&= \ln\left(1-\left(2x-\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3)\right)\right)\big(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\big) \\
&= \left[\left(-2x+\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3)\right)-\frac{1}{2}(-2x)^2+\frac{1}{3}(-2x)^3\right]\big(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\big) \\
&= \left(-2x-2x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)\big(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\big) \\
&= -2x-2x^2-2x^3-2x^2-2x^3-\frac{4}{3}x^3+o(x^3) \\
&= \boxed{-2x-4x^2-\frac{16}{3}x^3+o(x^3)}
\end{aligned}$$

2.

$$\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où $n\left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right) = -\dfrac{1}{4n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4n}$.

$$\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

Donc $\dfrac{n\left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)}{\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-\frac{1}{4n}}{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{4}$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)}{\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{4}}$$

Exercice 2

1. Notons $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{n^\alpha}}{n!}$.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\mathrm{e}^{(n+1)^\alpha}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{\mathrm{e}^{n^\alpha}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{(n+1)^\alpha}}{\mathrm{e}^{n^\alpha}} \times \frac{n!}{(n+1)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{[(n+1)^\alpha - n^\alpha]}}{n+1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right]}}{n+1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{n^\alpha\left[\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}}{n+1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\alpha n^{\alpha-1} + o\left(n^{\alpha-1}\right)}}{n+1}
\end{aligned}$$

On distingue alors trois cas :
— Si $\alpha < 1$ alors le numérateur tend vers 1, donc le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0.
— Si $\alpha = 1$, le numérateur vaut (exactement) e, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend donc encore vers 0.
— Si $\alpha > 1$, le numérateur tend vers $+\infty$; et, par croissance comparée, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $+\infty$.
En conclusion, via le critère de d'Alembert,

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge ssi } \alpha \leqslant 1.}$$

2. Notons $v_n = \dfrac{n+1}{n\ln(n)}$ pour $n \geqslant 2$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{(n+1)\ln(n+1)}\frac{n\ln(n)}{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} < 1$$

car $\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$ et la fonction ln est croissante et positive (pour $n \geqslant 2$).
La suite (v_n) est donc décroissante, de plus $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En utilisant le critère de Leibniz pour les séries alternées, on en déduit que

$$\boxed{\text{la série } \sum (-1)^n v_n \text{ est convergente.}}$$

Remarque : on pouvait également montrer la décroissance de (v_n) en étudiant les variations de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x\ln(x)}$.

3. Notons $w_n = \dfrac{n^\alpha}{\alpha^n}$

$$(w_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{\alpha}{n}}}{\alpha} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha\frac{\ln(n)}{n}}}{\alpha}$$

Par croissance comparée, $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\mathrm{e}^{\alpha\frac{\ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Ainsi, $(w_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\alpha}$. On distingue alors trois cas :
— si $\alpha >1$, $\dfrac{1}{\alpha} < 1$ donc d'après le critère de Cauchy $\sum w_n$ est convergente ;
— si $\alpha <1$, $\dfrac{1}{\alpha} > 1$ donc d'après le critère de Cauchy $\sum w_n$ est divergente ;

— si $\alpha = 1$ le critère de Cauchy ne permet pas de conclure.

Dans ce dernier cas, on remarque que pour $\alpha = 1$ alors on a $w_n = n$ qui est le terme d'une série divergente ; ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum w_n \text{ converge ssi } \alpha > 1}$$

4. On va comparer les deux développements asymptotiques des racines.

$$\sqrt[3]{n^3 + \alpha n} = n\sqrt[3]{1 + \frac{\alpha}{n^2}} = n\left(1 + \frac{\alpha}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$\sqrt{n^2 + \beta} = n\sqrt{1 + \frac{\beta}{n^2}} = n\left(1 + \frac{\beta}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^3 + \alpha n} - \sqrt{n^2 + \beta} &= n\left(1 + \frac{\alpha}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n\left(1 + \frac{\beta}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{2}\right)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

La partie en $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ correspond au terme général d'une série absolument convergente ; donc la série étudiée est de même nature que $\sum\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{2}\right)\frac{1}{n}$. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente :

$$\boxed{\sum\left(\sqrt[3]{n^3 + \alpha n} - \sqrt{n^2 + \beta}\right) \text{ converge si et seulement si } \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{2} = 0, \quad \text{soit } \alpha = \frac{3}{2}\beta.}$$

Exercice 3

1. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, donc d'après le critère de Leibniz pour les séries alternées,

$$\boxed{\text{la série alternée } \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ est convergente.}}$$

2.

$$\begin{aligned}u_n &= \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n} \\ &= -\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &= -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann positive et convergente ; donc par comparaison,

$$\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$$

3.

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n}\left(\ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k}\right) = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k},$$

en utilisant le fait que la somme est télescopique et que $\ln(1) = 0$.

On a donc $S_n = v_n + 1$; or la série $\sum u_n$ est convergente, c'est-à-dire la suite (S_n) est convergente, donc

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est convergente.}}$$

4. On obtient cette relation en notant γ la limite de $(-v_n)$; en effet, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\gamma$ se réécrit $v_n \underset{+\infty}{=} -\gamma + o(1)$ d'où l'on déduit l'égalité demandée.
5. $$\begin{aligned} T_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= -\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\ &= -\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= v_n - v_{2n} \end{aligned}$$
   En effet, compter les termes impairs en négatif et les termes pairs en positif revient à compter tous les termes en négatif puis tous les termes pairs deux fois en positif.
   En réutilisant l'égalité obtenue à la question précédente :
   $$T_{2n} \underset{+\infty}{=} v_n - v_{2n} = \ln(n) + \gamma + o(1) - \ln(2n) - \gamma + o(1) = -\ln(2) + o(1),$$
   puisque $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$.
   Ainsi $T_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2)$.
   Comme la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, c'est-à-dire la suite (T_n) est convergente, elle a la même limite que sa suite extraite (T_{2n}) ; cette limite est donc $-\ln(2)$. En conclusion :
   $$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2).}$$

Exercice 4

1. Comme $\sqrt[\alpha]{n} = n^{\frac{1}{\alpha}}$, et comme la suite $\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$ est décroissante et tend vers 0 pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, via le critère de Leibniz pour les séries alternées
   $$\boxed{\text{la série } \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}} \text{ est convergente.}}$$
   On ne peut pas conclure à l'aide de comparaison sur les séries alternées ; même quand les termes généraux sont équivalents, les séries associées peuvent être de nature différente.
2. (a)
   $$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)^2\right)$$
   $$\boxed{\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}} - \frac{1}{2n^{\frac{2}{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{\alpha}}}\right)}$$
   (b) La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}$ est une série alternée convergente (déjà vu).
   La nature de la série étudiée dépend donc du reste.
   Or : $-\frac{1}{2n^{\frac{2}{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{\alpha}}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{\frac{2}{\alpha}}}$; ce dernier terme est le terme général d'une série de Riemann négative, qui converge si et seulement si $\frac{2}{\alpha} > 1$, c'est-à-dire $\alpha < 2$, soit $\alpha = 1$ puisqu'on a pris α dans $\mathbb{N}^*$.
   Par comparaison de séries dont les termes sont de signe constant, $\sum\left(-\frac{1}{2n^{\frac{2}{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{\alpha}}}\right)\right)$ converge si et seulement si $\alpha = 1$. Il en va de même pour la série étudiée :
   $$\boxed{\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right) \text{ converge ssi } \alpha = 1.}$$

3. (a) Ayant $\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} + o(x^{2k+1})$, on déduit :

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \frac{(-1)^{n(2i+1)}}{\sqrt[\alpha]{n}^{2i+1}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{n}^{2k+1}}\right)$$

c'est-à-dire après opérations sur les puissances (notamment $(-1)^{2ni} = 1$) :

$$\boxed{\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \frac{(-1)^n}{n^{(2i+1)/\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{(2k+1)/\alpha}}\right)}$$

La fonction sin étant impaire, tous les termes non nuls de son développement limité en 0 sont de degré impair ; le facteur $(-1)^n$, mis à une puissance impaire, reste $(-1)^n$. On ne peut donc traiter cet exercice par équivalents.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^{(2k+1)/\alpha}}$ est une série alternée convergente car elle vérifie les conditions du critère de Leibniz pour les séries alternées : la suite $\left(\frac{1}{n^{(2k+1)/\alpha}}\right)$ est décroissante et tend vers 0.

Si de plus $2k+1 > \alpha$, alors la série est même absolument convergente puisque $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^{(2k+1)/\alpha}}\right| = \sum \frac{1}{n^{(2k+1)/\alpha}}$ est une série de Riemann avec une puissance strictement supérieure à 1, donc convergente.

(c) On reprend le développement obtenu à la question (a), en rajoutant l'hypothèse $2k+1 > \alpha$.

On remarque que notre terme général est une somme :

— de $k+1$ termes généraux de séries alternées de la forme $K(i)\frac{(-1)^n}{n^{(2i+1)/\alpha}}$, où $K(i)$ ne dépend pas de n (c'est une constante) : ces séries sont convergentes d'après le critère de Leibniz (cf. question (b)).

— d'un terme $o\left(\frac{1}{n^{(2k+1)/\alpha}}\right)$ qui d'après l'hypothèse sur k est le terme général d'une série absolument convergente – par comparaison de séries avec la série positive $\sum \frac{1}{n^{(2k+1)/\alpha}}$.

En conclusion, la série $\sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)$ est somme de $k+1$ séries convergentes et d'une série absolument convergente, elle est donc convergente.

$$\boxed{\sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right) \text{ est convergente, pout tout } \alpha \in \mathbb{N}^*.}$$