Intégrales

1 Intégrations par parties

— Trouver une primitive de $x \longmapsto x^2 \mathrm{e}^{2x}$ à l'aide d'intégrations par parties

— Déterminer $\displaystyle\int_0^x \cos(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$

2 Changements de variable

— $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)}$ en posant le changement de variable $u = \sqrt{t}$

— $\displaystyle\int_2^4 \frac{\ln\big(\ln(t)\big)}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$ en posant le changement de variable $u = \ln(t)$

3 Changements de variable + intégrations par parties

— $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\mathrm{d}t$ en posant le changement de variable $u = \cos(t)$

— $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5 \sin(x^2)\mathrm{d}x$ en posant le changement de variable $u = x^2$

— $\displaystyle\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ en posant le changement de variable $u = x^2$

Intégrales

Corrigé

1 Intégrations par parties

— $\boxed{\textbf{Trouver une primitive de } x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{2x} \textbf{ à l'aide d'intégrations par parties}}$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$; afin d'en déterminer formellement une primitive, nous allons calculer

$$x \longmapsto \int^x t^2\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t.$$

La borne inférieure de l'intégrale changerait juste la constante d'intégration, en fixant un point en lequel la primitive trouvée s'annulerait. Cela n'est donc d'aucune utilité ici, nous allons la négliger.

$$\begin{aligned}
\int^x t^2\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t &= \left[t^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]^x - \int^x 2t\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t \\
&= \left[t^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]^x - \left[t\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]^x + \int^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t \\
&= \left[t^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]^x - \left[t\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]^x + \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}\right]^x \\
&= \frac{1}{4}\left[(2t^2 - 2t + 1)\mathrm{e}^{2t}\right]^x
\end{aligned}$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{2x}$ est donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{2x}$.

— $\boxed{\textbf{Déterminer } \int_0^x \cos(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t &= \Big[\cos(t)\mathrm{e}^t\Big]_0^x + \int_0^x \sin(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\
&= \Big[\cos(t)\mathrm{e}^t\Big]_0^x + \Big[\sin(t)\mathrm{e}^t\Big]_0^x - \int_0^x \cos(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$2\int_0^x \cos(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \Big[\cos(t)\mathrm{e}^t\Big]_0^x + \Big[\sin(t)\mathrm{e}^t\Big]_0^x$$

En conclusion :

$$\int_0^x \cos(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[\big(\cos(t) + \sin(t)\big)\mathrm{e}^t\Big]_0^x = \frac{\mathrm{e}^x\big(\cos(x) + \sin(x)\big) - 1}{2}.$$

2 Changements de variable

— $\boxed{\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} \text{ en posant le changement de variable } u=\sqrt{t}}$

Lorsque l'on pose $u=\sqrt{t}$, on a $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$ (ou $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$).
Après avoir effectué le changement de bornes $(1 \longrightarrow 1, 3 \longrightarrow \sqrt{3})$:

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\Big[\mathrm{Arctan}(u)\Big]_1^{\sqrt{3}} = 2\big(\mathrm{Arctan}(\sqrt{3}) - \mathrm{Arctan}(1)\big) = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

— $\boxed{\displaystyle\int_2^4 \frac{\ln\big(\ln(t)\big)}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \text{ en posant le changement de variable } u=\ln(t)}$

Lorsque l'on pose $u=\ln t$, on a $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ (ou $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^u\mathrm{d}u$).
Après avoir effectué le changement de bornes $\big(2 \longrightarrow \ln(2), 4 \longrightarrow \ln(4) = 2\ln(2)\big)$:

$$\int_2^4 \frac{\ln\big(\ln(t)\big)}{t\ln(t)}\mathrm{d}t = \int_{\ln(2)}^{2\ln(2)} \frac{\ln(u)}{u}\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln^2(u)\right]_{\ln(2)}^{2\ln(2)}$$

Remarquez que si l'on ne reconnaît pas la forme $\displaystyle\int f'f$ de l'intégrale $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{2\ln(2)}\frac{\ln(u)}{u}\mathrm{d}u$, il est possible de trouver la primitive en réutilisant le changement de variable $v=\ln(u)$.
On peut même simplifier cette expression en utilisant les propriétés de la fonction ln et une identité remarquable :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}\ln^2(u)\right]_{\ln(2)}^{2\ln(2)} &= \frac{1}{2}\Big(\ln^2\big(2\ln(2)\big) - \ln^2\big(\ln(2)\big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\ln(2)+\ln\big(\ln(2)\big)+\ln\big(\ln(2)\big)\Big)\Big(\ln(2)+\ln\big(\ln(2)\big)-\ln\big(\ln(2)\big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\ln(2)\Big(\ln(2)+2\ln\big(\ln(2)\big)\Big)
\end{aligned}$$

3 Changements de variable + intégrations par parties

— $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\mathrm{d}t \text{ en posant le changement de variable } u=\cos(t)}$

Lorsque l'on pose $u=\cos t$, on a $\mathrm{d}u = -\sin(t)\mathrm{d}t$.
Il faut changer les bornes : $0 \longrightarrow \cos(0) = 1$, $\frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
De plus, il est nécessaire de transformer quelque peu l'expression pour effectuer le changement de variable ; on réécrit $\sin^3(t)$ sous la forme $\sin(t)\big(1-\cos^2(t)\big)$ en utilisant la formule bien connue $\cos^2+\sin^2=1$.

Ainsi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\mathrm{e}^{\cos(t)}\sin(t)\mathrm{d}t = -\int_1^0 (1-u^2)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \int_0^1 (1-u^2)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u$$

Il faut maintenant calculer la dernière intégrale : comme la fonction à intégrer s'écrit comme un produit entre un polynôme et la fonction exponentielle, on peut utiliser des intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-u^2)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u &= \Big[(1-u^2)\mathrm{e}^u\Big]_0^1 + \int_0^1 2u\mathrm{e}^u\mathrm{d}u \\
&= \Big[(1-u^2)\mathrm{e}^u\Big]_0^1 + \Big[2u\mathrm{e}^u\Big]_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{e}^u\mathrm{d}u \\
&= \Big[(1-u^2)\mathrm{e}^u\Big]_0^1 + \Big[2u\mathrm{e}^u\Big]_0^1 - \Big[2\mathrm{e}^u\Big]_0^1 \\
&= \Big[(-u^2+2u-1)\mathrm{e}^u\Big]_0^1 \\
&= \Big[-(u-1)^2\mathrm{e}^u\Big]_0^1 = 1
\end{aligned}$$

En conclusion, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\mathrm{e}^{\cos(t)}\mathrm{d}t = 1$.

— $\boxed{\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5\sin(x^2)\mathrm{d}x \textbf{ en posant le changement de variable } u = x^2}$

Lorsque l'on pose $u = x^2$, on a $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$.
Il faut changer les bornes : $0 \longrightarrow 0, \sqrt{\pi} \longrightarrow \pi$.
En réécrivant $x^5 = \dfrac{1}{2}(2x)\left(x^2\right)^2$:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5\sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(x^2\right)^2\sin(x^2)2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} u^2\sin(u)\mathrm{d}u$$

On calcule cette dernière intégrale par parties :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\pi} u^2\sin(u)\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\Big[-u^2\cos(u)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} u\cos(u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}(\pi^2-0) + \Big[u\sin(u)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi^2}{2} + 0 + \Big[\cos(u)\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{2} - 2
\end{aligned}$$

En conclusion, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5\sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2} - 2$

— $\boxed{\displaystyle\int_0^1 x^3 \mathbf{e}^{x^2}\mathbf{d}x \textbf{ en posant le changement de variable } u = x^2}$

Lorsque l'on pose $u = x^2$, on a $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$.
Il faut « changer » les bornes : $0 \longrightarrow 0, 1 \longrightarrow 1$.
Comme $x^3 = \dfrac{1}{2}(2x)x^2$:

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{x^2} 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 u\mathrm{e}^u \mathrm{d}u$$

En intégrant l'intégrale obtenue par parties :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 u\mathrm{e}^u \mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\Big[u\mathrm{e}^u\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\Big[u\mathrm{e}^u\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^u\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\Big[(u-1)\mathrm{e}^u\Big]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En conclusion, $\displaystyle\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.