

# EPITA

## Mathématiques

Partiel (S3)

décembre 2017

Nom :

Prénom :

Entourer le nom de votre professeur de TD : M. Cartailier / M. Euvrard / M. Goron / M. Rodot

Classe :

NOTE :



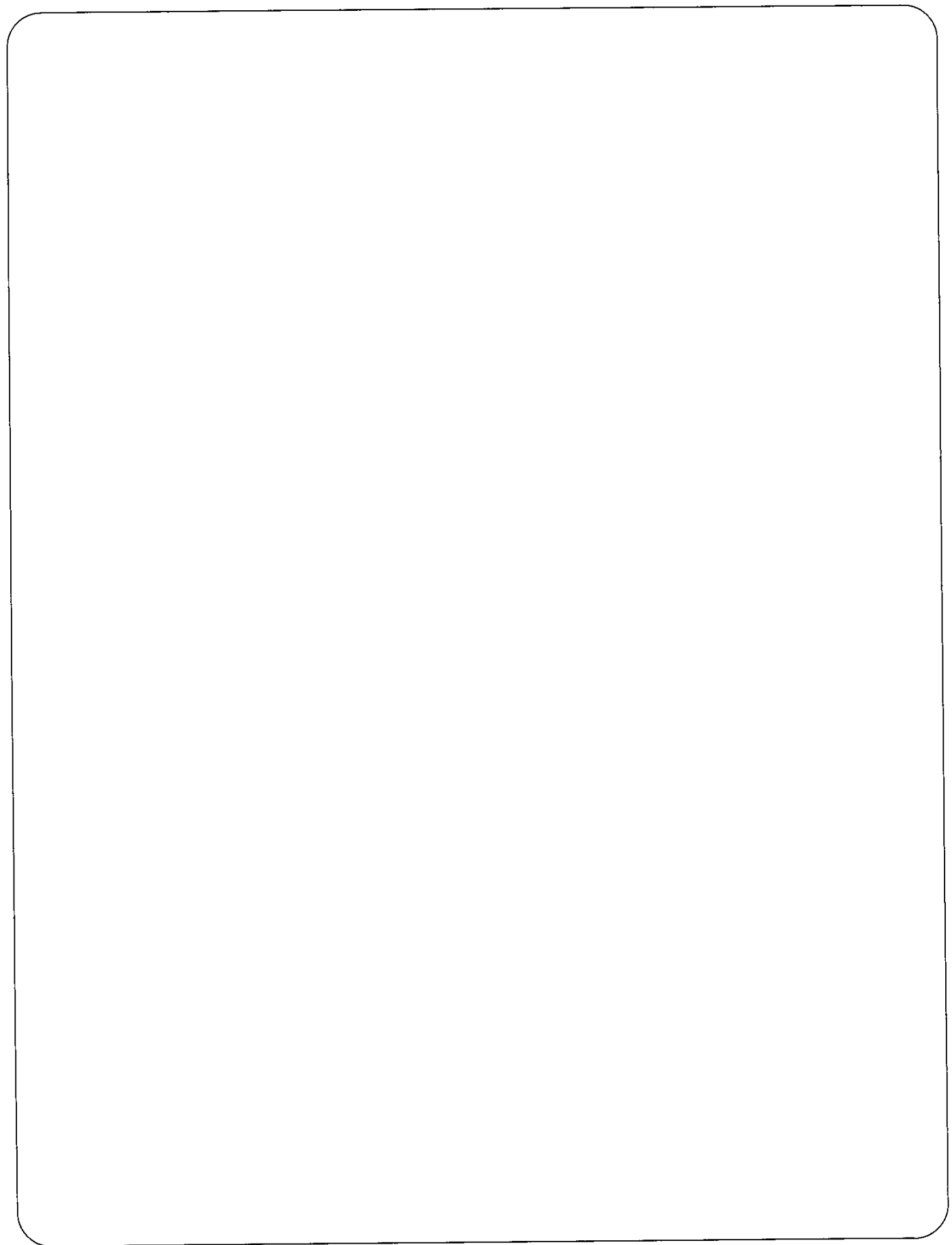
### Exercice 1 (6 points)

Soient  $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

$A$  et  $B$  sont-elles diagonalisables dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? Si oui, déterminer  $D$  et  $P$ .

N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

[suite du cadre page suivante]



## Exercice 2 (4 points)

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a^2 - a & -a - 1 & a^2 + 1 \end{pmatrix}$ .

Discuter de la diagonalisabilité de  $A$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivant les valeurs de  $a$ .

N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.

[suite du cadre page suivante]

### Exercice 3 (4 points)

1. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto \int_0^1 P(t) dt \end{cases}$ .

Déterminer la matrice de  $f$  relativement aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

2. Soient  $E = \mathbb{R}_3[X]$  et  $f : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ P(X) & \longmapsto (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X) \end{cases}$ .

Déterminer la matrice de  $f$  relativement à la base canonique  $(1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

### Exercice 4 (4 points)

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sev supplémentaires dans  $E$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_q)$  une base de  $G$ . Montrer, SANS utiliser l'assertion  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ , que la concaténation de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$ .

[suite du cadre page suivante]

**Exercice 5 (3 points)**

Calculer le déterminant de la matrice carrée d'ordre  $n \geq 2$  suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$