EPITA / S3 — Année: 2019/2020

NOM : ANTON LUDWIG PRENOM : Adrien GROUPE : 1

Contrôle 1 de Physique

21/20

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Le barème est donné à titre indicatif.

Réponses exclusivement sur le sujet. Si vous manquez de place, vous pouvez utiliser le verso des pages.

QCM (Sans points négatifs) (4 points)

4

Entourer la bonne réponse

1- En coordonnées polaires (r, θ), quel élément infinitésimal $\overrightarrow{dl}$ de longueur existe

a) $\overrightarrow{dl} = d\theta.\overrightarrow{u_\theta}$ b) $\overrightarrow{dl} = rd\theta.\overrightarrow{u_\theta}$ c) $\overrightarrow{dl} = dx.\overrightarrow{u_r}$ ✓

2 - Une distribution de charges sphérique crée au point M un potentiel électrique $V(r, \varphi)$. On peut donc affirmer que le vecteur champ électrique s'écrira :

a) $\vec{E}\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ E_\theta \\ E_\phi \end{pmatrix}$ c) $\vec{E}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \\ E_\phi \end{pmatrix}$ ✓

3 - Les lignes de champ électrique créés par une charge q sont :

a) Des demi-droites
b) Des cercles
c) Des ellipses

✓

4 – Le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé au point M est relié au potentiel électrique $V(M)$ par l'expression

a) $\vec{E}(M) = \overrightarrow{grad}(V)$ b) $\vec{E}(M) = \overrightarrow{-grad}(V)$ c) $V(M) = \overrightarrow{grad}(\vec{E})$ ✓

5 – Le vecteur champ électrique créé au point M, par une charge q_A placée au point A est donné par :

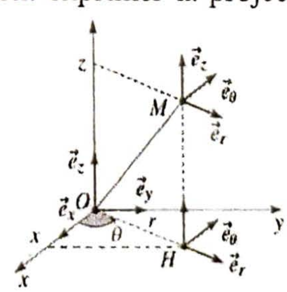
a) $\overrightarrow{E_A}(M) = k\frac{q_A}{(AM)^3}.\overrightarrow{AM}$
b) $\overrightarrow{E_A}(M) = k\frac{q_A}{(AM)^2}.\overrightarrow{AM}$
c) $\overrightarrow{E_A}(M) = k\frac{q_A}{AM}.\overrightarrow{AM}$

✓

6 - Dans le repère cylindrique de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ci-contre, comment exprimer la projection du vecteur $\overrightarrow{OH}$ sur l'axe Ox en fonction des variables r et θ ?

a) $x = r\, d\theta$
b) $x = -r\sin(\theta)$
c) $x = r\cos(\theta)$

✓



7 - On considère l'atome d'hydrogène composé d'un électron et d'un noyau contenant un proton, la force électrique $\vec{F_e}$ qui agit sur l'électron est :

a) répulsive b) tangente à la trajectoire de l'électron a) attractive ✓

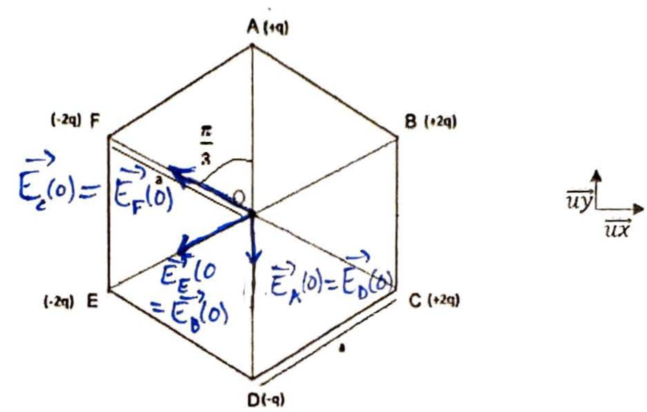
Exercice 1 **CHARGES DISCRETES** (6 points) 6 + 2

Partie I

Soit un hexagone régulier (ABCDEF) de centre O. Aux sommets on place trois charges +q +2q et +2q respectivement en A, B et C et -q -2q et -2q respectivement en D, E et F.
On note a la longueur du segment AO, on retrouve aussi cette distance en AB=BC=CD=DE=EF=a=10cm.
La valeur de la charge est q = 5µC
On rappelle que l'angle AOB vaut $\frac{\pi}{3}$.

1) Représenter sur la figure ci-dessous les vecteurs champs électriques créés au point O par les charges en A, B, C, D, E et F.

1,5



2) a) Exprimer la norme de chaque vecteur champ électrique créé en O par les charges en A, B, C, D, E et F.

$\|\vec{E_A}(0)\| = \|\vec{E_D}(0)\| = \frac{kq}{a^2}$ ✓

A et D sont à la même distance de O et ont la même charge en valeur absolue.

Idem pour B, C, E et F :

$\|\vec{E_B}(0)\| = \|\vec{E_C}(0)\| = \|\vec{E_E}(0)\| = \|\vec{E_F}(0)\|$

$= \frac{2kq}{a^2}$ ✓

1,5

2) b) Donner les composantes de ces vecteurs dans le système de base $(\vec{ux}, \vec{uy})$.

$$\vec{E_A}(0) = \vec{E_D}(0) = \frac{kq}{a^2} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{u_x} + \frac{kq}{a^2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{u_y}$$
$$= -\frac{kq}{a^2} \cdot \vec{u_y} \quad \checkmark$$

$$\vec{E_B}(0) = \vec{E_E}(0) = \frac{2kq}{a^2} \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot \vec{u_x} + \frac{2kq}{a^2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$
$$= -\frac{2kq}{a^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \vec{u_x} - \frac{2kq}{a^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
1,5
$$= -\frac{\sqrt{3}kq}{a^2} \cdot \vec{u_x} - \frac{kq}{a^2} \cdot \vec{u_y} \quad \checkmark$$

$$\vec{E_C}(0) = \vec{E_F}(0) = \frac{2kq}{a^2} \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \vec{u_x} + \frac{2kq}{a^2} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \vec{u_y}$$
$$= -\frac{2kq}{a^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \vec{u_x} + \frac{2kq}{a^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \vec{u_y}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}kq}{a^2} \cdot \vec{u_x} + \frac{kq}{a^2} \cdot \vec{u_y} \quad \checkmark$$

2) c) En déduire la norme du champ électrique résultant $\vec{E}(0)$ créé en O. Faire l'application numérique.

$$\vec{E}(0) = 2\vec{E_A}(0) + 2\vec{E_B}(0) + 2\vec{E_C}(0)$$
$$= \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{3}kq}{a^2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}kq}{a^2}\right) \cdot \vec{u_x} + \left(-\frac{2kq}{a^2} - \cancel{\frac{2kq}{a^2}} + \cancel{\frac{2kq}{a^2}}\right) \cdot \vec{u_y}$$
$$= -\frac{4\sqrt{3}kq}{a^2} \cdot \vec{u_x} - \frac{2kq}{a^2} \cdot \vec{u_y} \quad \checkmark$$

1,5
$$\|\vec{E}(0)\| = \sqrt{\left(-\frac{4\sqrt{3}kq}{a^2}\right)^2 + \left(-\frac{2kq}{a^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{52k^2q^2}{a^4}} = \frac{4\sqrt{13}kq}{a^2} \quad \checkmark$$

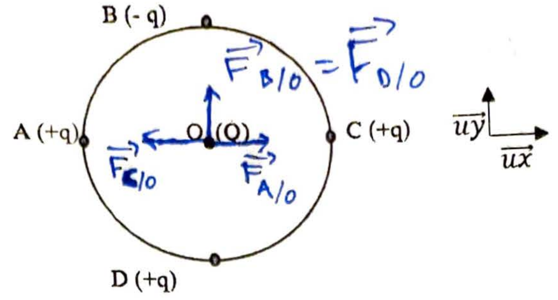
$$\|\vec{E}(0)\| = \frac{4\sqrt{13} \cdot k \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{(10 \cdot 10^{-2})^2} = \frac{4\sqrt{13} \cdot k \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{10^{-2}} = 20\sqrt{13} \cdot k \cdot 10^{-4}\ N \cdot m^{-1}$$

Partie II (bonus)

Quatre charges ponctuelles A, B,C et D sont situées sur un cercle de rayon R comme indiqué sur la figure ci-dessous . A et C sont sur l'axe Ox et B et D sur l'axe Oy. Les charges aux points A,C et D sont (+q) et au point B (-q). La charge au point O est (+Q). Les valeurs de q et Q sont positives et constantes.

1) Représenter les vecteurs forces électriques crées par chaque charge au point O sur la figure ci-dessous.

0,5



2) Exprimer les normes de chacune des forces, en déduire celle de la force résultante en O.

A, B, C et D sont à égale distance de O et ont la même charge en valeur absolue, on a :

$$\|\vec{F}_{A/O}\| = \|\vec{F}_{B/O}\| = \|\vec{F}_{C/O}\| = \|\vec{F}_{D/O}\| = \frac{kqQ}{R^2}$$

1

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{A/O} + 2\vec{F}_{B/O} + \vec{F}_{C/O} \quad \text{or} \quad \vec{F}_{A/O} = -\vec{F}_{C/O}$$

$$= 2\vec{F}_{B/O}$$

$$\|\vec{F}_{tot}\| = \frac{2kqQ}{R^2}$$

3) Exprimer le potentiel électrique au point O, en fonction de k, q et R.

A, C et D sont à égale distance de O et portent la même charge :

$$V_A(O) = V_C(O) = V_D(O) = \frac{kq}{R}$$

$$V_B(O) = -\frac{kq}{R} = -V_A(O)$$

0,5

$$V_{tot}(O) = 3V_A(O) + V_B(O)$$

$$= 3V_A(O) - V_A(O)$$

$$= 2V_A(O)$$

$$= \frac{2kq}{R}$$

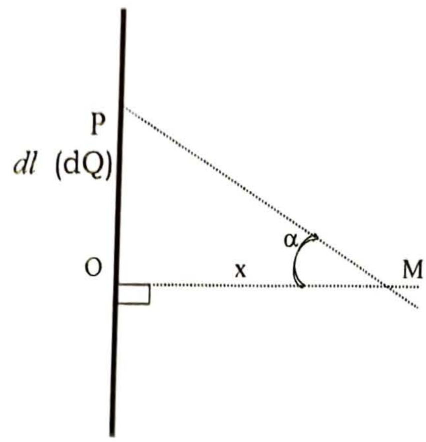
Exercice 2 *Distributions continues* (6 points)

6

Rappel: Un élément de charge linéique dQ situé au point P (appartenant à un fil ayant une charge linéique constante λ) génère un champ électrique élementaire au point M d'expression:

$$dE_x(M) = \frac{k.\lambda}{x}\cos(\alpha)d\alpha \qquad (1)$$

Avec l'angle α et la distance x définis sur la figure ci-dessous:

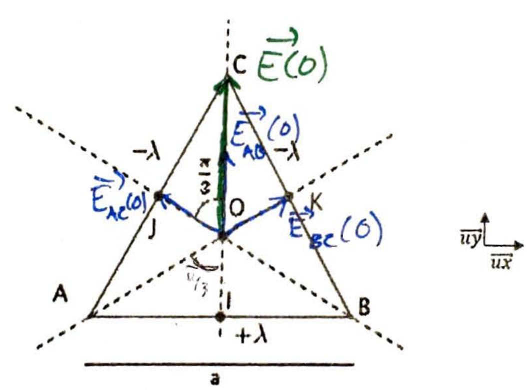


Enoncé: On considère un triangle équilatéral ABC avec une longueur de segment a. Les segments [AC] et [CB] ont une densité de charge linéique négative - λ et le segment [AB] a une densité de charge linéique positive + λ, λ étant une constante positive.

1) a) A partir d'une analyse symétrique de la distribution de charge par rapport au point O, représenter sur le schéma ci-dessous les vecteurs champs électriques $\overrightarrow{E_{AC}}(O)$, $\overrightarrow{E_{CB}}(O)$ et $\overrightarrow{E_{AB}}(O)$ crées en O par chaque segment chargé [AC], [CB] et [AB].

   b) Représenter alors sur la figure le vecteur champ électrique résultant $\vec{E}(O)$, créé en O

1,5



2) En appliquant l'expression (1) du rappel pour chaque segment, exprimer les normes $E_{AC}(O)$, $E_{CB}(O)$ et E_{AB}(O), en fonction de k, λ et a.
   On peut donner pour indice : tan $(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

AB, AC et BC sont également répartis autour du point O et ont la même densité de charge linéique en valeur absolue :

$\|\overrightarrow{E}_{AB}(0)\| = \|\overrightarrow{E}_{AC}(0)\| = \|\overrightarrow{E}_{BC}(0)\|$

$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{AB}{2}}{OI} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{2OI} \Leftrightarrow OI = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ ✓

$$E_{AB}(O) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \frac{k\lambda}{OI} \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha$$

$$= \frac{k\lambda}{OI} \cdot [\sin(\alpha)]_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

$$= \frac{k\lambda}{OI} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

2

$$= \frac{\sqrt{3}\,k\lambda}{OI}$$

$$= \sqrt{3}\,k\lambda \cdot \frac{2\sqrt{3}}{a} = \frac{6k\lambda}{a}$$

3) a) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{E_{AC}}(O)$, $\overrightarrow{E_{CB}}(O)$ et $\overrightarrow{E_{AB}}(O)$ dans le système de base $(\overrightarrow{ux}, \overrightarrow{uy})$.

b) En déduire la norme du vecteur résultant $\vec{E}(O)$ crée au point O.

$$\overrightarrow{E_{AB}}(O) = \frac{6k\lambda}{a} \cdot \overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{E_{AC}}(O) = \frac{6k\lambda}{a} \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \overrightarrow{u_x} + \frac{6k\lambda}{a} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \overrightarrow{u_y}$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}\,k\lambda}{a} \cdot \overrightarrow{u_x} + \frac{3k\lambda}{a} \cdot \overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{E_{BC}}(O) = \frac{6k\lambda}{a} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \overrightarrow{u_x} + \frac{6k\lambda}{a} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \overrightarrow{u_y}$$

2,5

$$= \frac{3\sqrt{3}\,k\lambda}{a} \cdot \overrightarrow{u_x} + \frac{3k\lambda}{a} \cdot \overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{E(O)} = \overrightarrow{E_{AC}}(O) + \overrightarrow{E_{AB}}(O) + \overrightarrow{E_{BC}}(O)$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}\,k\lambda}{a} - \frac{3\sqrt{3}\,k\lambda}{a}\right) \cdot \overrightarrow{u_x} + \left(\frac{6k\lambda}{a} + \frac{3k\lambda}{a} + \frac{3k\lambda}{a}\right) \cdot \overrightarrow{u_y}$$

$$= \frac{12k\lambda}{a} \cdot \overrightarrow{u_y} \quad \text{soit} \quad \|\overrightarrow{E(O)}\| = \frac{12k\lambda}{a}$$

Exercice 3 (4 points)

On considère l'expression d'un potentiel électrique V(M), créé en un point M par une distribution sphérique de charges électriques :

$$V(r,\theta,\varphi) = \frac{C_1}{r} \sin(\theta) e^{-C_2\varphi} \quad \text{Avec C}_1 \text{ et C}_2 \text{ constantes.}$$

1- Exprimer les composantes E_r, E_θ et E_φ du vecteur champ électrique, qui dérive de ce potentiel.

On donne les Composantes du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}; \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}; \frac{1}{r\sin(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = -\left(-\frac{C_1}{r^2} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-C_2\varphi}\right) = \frac{C_1}{r^2} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-C_2 \cdot \varphi} \quad \checkmark \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\left(\frac{C_1}{r} \cos(\theta) \cdot e^{-C_2\varphi}\right) = -\frac{C_1}{r^2} \cdot \cos(\theta) \cdot e^{-C_2\varphi} \quad \checkmark \\ E_\varphi = -\frac{1}{r\sin(\theta)}\left(-C_2 \cdot \frac{C_1}{r} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-C_2\varphi}\right) = C_2 \cdot \frac{C_1}{r^2} \cdot e^{-C_2\varphi} \quad \checkmark \end{cases}$$

3

2- Calculer ces composantes au point M ($r = 1\text{cm}$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$, $C_1 = 10^{-3}\text{V.m}$ et $C_2 = 1\text{rad}^{-1}$), ainsi que la norme du vecteur champ $\vec{E}$.

$$E_r = \frac{10^{-3}}{(1.10^{-2})^2} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cdot e^0 = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \quad \times$$

$$E_\theta = -\frac{10^{-3}}{(1.10^{-2})^2} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \cdot e^0 = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \quad \times$$

× $$E_\varphi = 1 \cdot \frac{10^{-3}}{(1.10^{-2})^2} \cdot e^0 = 10 \quad \checkmark$$

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (-5\sqrt{2})^2 + (10)^2}$$
$$= \sqrt{200}$$
$$= 10\sqrt{2}$$