9/10

Contrôle TD 2

Nom : ANTON LUDWIG **Prénom :** Adrien **Classe :** 1

Questions de cours

2

1. Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $L = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E et $G = (f_1, \ldots, f_q)$ une famille génératrice de E. Compléter les « ... » par les symboles « $\leqslant$ », « $=$ » ou « $\geqslant$ » : $p \leqslant n$ et $q \geqslant n$. ✓

2. Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-ev E de dimension finie, $x \in E$ de coordonnées X dans $\mathscr{B}$ et X' dans $\mathscr{B}'$. Rappeler la relation entre X et X'.

$X = P_{B,B'} X'$ et $X' = P_{B,B'}^{-1} X$ avec $P_{B,B'}$ la matrice de passage de B vers B' ✓

Exercice 1

1

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev, $L = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ injective. Montrer que $f(L) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F.

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \, [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$ (1)

Et f inj. $\Rightarrow \forall x, y \in E, x \,!= y \Rightarrow f(x) \,!= f(y)$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i e_i)$ car $f \in \mathscr{L}(E,F)$

Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0 \Rightarrow$?

$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = 0 \to$ or, f inj. $\to \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$

(1) $\Rightarrow \forall i \, [\![1,n]\!] \; \lambda_i = 0$

Ainsi $f(L)$ est une famille libre.

Exercice 2

3

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (x, 2x - y + z, 2x - 2y + 2z) \end{cases}$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

On cherche $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f((x,y,z)) = 0_{\mathbb{R}^3}$:

$\begin{cases} x = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$

Les vecteurs de la forme $(0, y, y)$ sont solution du système.
Ainsi $\mathrm{Vect}((0,1,1))$ engendre $\mathrm{Ker}(f)$ ✓
$\mathcal{B} = ((0,1,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
D'après le théorème du rang :
$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im}(f))$
$\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker} f) = 3 - 1 = 2$ ✓

2. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, -v, v) = \mathrm{Vect}(u, v)$

- $\mathrm{Vect}(u,v) \subset \mathrm{Vect}(u,-v,v)$ car $\mathrm{Vect}(u,-v,v) = \mathrm{Vect}(u,v) + \mathrm{Vect}(-v)$
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{Vect}(u,-v,v) = \alpha u - \beta v + \gamma v$$
$$= \alpha u + (\gamma - \beta) v \in \mathrm{Vect}(u,v)$$

Donc $\mathrm{Vect}(u,-v,v) \subset \mathrm{Vect}(u,v)$

- Ainsi, $\mathrm{Vect}(u,-v,v) = \mathrm{Vect}(u,v)$ ✓

3. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.

La matrice associée à f avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{Mat}(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\quad C_1 \quad C_2 \quad C_3$$

On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de la matrice.

On a, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ or $C_2 = -C_3$

$$= \mathrm{Vect}(C_1, -C_3, C_3)$$ D'après la question précédente
$$= \mathrm{Vect}(C_1, C_3)$$

Donc $\mathcal{B}' = ((1,2,2),(0,1,2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ ✓

car $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$

Exercice ~~2~~3

3

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto \left(\int_0^1 P(x)\,dx\,, P'(0)\right) \end{cases}$. Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques.

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$,

et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ celle de $\mathbb{R}^2$, on a : car $f(1) = \left(\int_0^1 1\,dx, 0\right) = (1,0)$

$f(X) = \left(\int_0^1 x\,dx, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\mathrm{Mat}(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pourquoi ? $f(X^2) = \left(\int_0^1 x^2\,dx, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$