EPITA

Mathématiques

Contrôle (S3)

novembre 2017

Nom :

Prénom :

Entourer le nom de votre professeur de TD : M. Cartailler / M. Goron / M. Rodot

Classe :

NOTE :

Contrôle 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (3 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $e^x \ln(e+ex)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \big(1+\sin(x)\big)^{1/x}$.

Exercice 2 (5 points)

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ puis, via la règle de d'Alembert, déterminer la nature de $\sum \dfrac{\ln(n)}{(n-1)!}$.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

3. Déterminer la nature de $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$.

4. Déterminer la nature de $\sum \frac{\sin(n!)}{n^2}$.

Exercice 3 (5 points)

Le but de cet exercice est de donner la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n n^\alpha \left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \right)^\beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$.

1. Montrer que $\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

2. En déduire que $u_n = (-1)^n \dfrac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\left(1 + \dfrac{\beta}{3n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

3. Montrer que si $\beta \leqslant \alpha$, la série $\sum u_n$ diverge.

4. Étude du cas $\beta > \alpha$. On a

$$u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} + v_n \quad \text{avec} \quad v_n = (-1)^n \frac{\beta 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2+\beta-\alpha}}\right)$$

a. Étudier la nature de la série $\sum v_n$.

b. Étudier la nature de la série de terme général $w_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}$.

c. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 4 (3 points)

Soit la série $\sum u_n$ où $u_n = \left(\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$.

1. Vérifier que $\ln\left(\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+n+1}\right) = \ln\left(1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $\ln\left(\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+n+1}\right) = \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3. En déduire la nature de $\sum u_n$ via la règle de Cauchy.

Exercice 5 (5 points)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la série $\sum u_n$ où $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - a$.

1. Via un développement limité, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - a$.

[suite du cadre page suivante]

2. On suppose $a \neq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Que peut-on en conclure sur la nature de $\sum u_n$?

3. On suppose $a = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

   a. Via un développement limité, montrer que $e^{n \ln(\cos(1/\sqrt{n}))} = e^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$.

   b. En déduire un équivalent de u_n puis la nature de $\sum u_n$.