5/8 12,5/20

Contrôle TD 1

Nom : ANTON LUDWIG **Prénom :** Adrien **Classe :** 1

Question de cours

1,5

Énoncer avec soin le critère spécial des séries alternées.

Soit une suite alternée $u_n = (-1)^n . a_n$ avec $a_n > 0$, si $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ et a_n est décroissante, alors $\sum u_n$ converge.

Exercice 1

2,5

Déterminer $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1 + \sin(x)) - x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1+\sin(x)) - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (\cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - \cancel{x}}{\ln(1 + x + o(x^2)) - x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\cancel{x} + o(x^2) - \frac{x^2 + o(x^2)^2}{2} + o(x^2 + o(x^2)) - \cancel{x}}$$

$$\cancel{= \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}}$$

$$\cancel{= -\frac{3!(x^2 + o(x^2))}{x^3 + 3!\, o(x^3)}}$$

$$\cancel{= -\frac{3!\, x^2 + o(x^2)}{x^3 + o(x^3)}} = -3!\, x^2 + o(x^2) . (x^3 + o(x^3))^{-1}$$

$$\cancel{= -3!\, x^2 + o(x^2)}($$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2 + o(x^2)}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} -2 . \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -2$$

Exercice 2 1

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{2^n}{(2n)!}$.

$u_n = \frac{2^n}{(2n)!}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n} = \frac{2}{(2n+1)(2n+2)}$

$\lim_{n\to+\infty} (2n+1)(2n+2) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ (1)

(2) $u_n > 0$ car $2^n > 0$ et $(2n)! > 0$

(1) et (2), d'après la règle de d'Alembert avec $u_n > 0$ et $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.

Exercice 3 0

1. Déterminer un équivalent de $n + e^{-n}$. Justifier votre réponse.

Correc°

$\frac{n+e^{-n}}{n} = 1 + \frac{e^{-n}}{n}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{n} = \frac{1}{ne^n} = 0$

dc $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{e^{-n}}{n} = 1$

$n + e^{-n} = n + \frac{1}{e^n} = \frac{ne^n+1}{e^n}$ Ainsi, $n \sim n + e^{-n}$

$\frac{n+e^{-n}}{n}$ Oui, quelle est la limite ?

2. En déduire la nature de $\sum \frac{n+e^{-n}}{(n+1)^2}$.

~~$\frac{n+e^{-n}}{(n+1)^2} = \frac{\frac{ne^n+1}{e^n}}{(n+1)^2} = \frac{n+\frac{1}{e^n}}{n^2+2n+1} = \frac{1+\frac{1}{ne^n}}{n+2+\frac{1}{n}}$~~

$\frac{n+e^{-n}}{(n+1)^2} \sim \frac{n}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n}$ car $\frac{n}{(n+1)^2} \times n \xrightarrow[+\infty]{} 1$

$\frac{n+e^{-n}}{(n+1)^2} > 0$ et $\frac{1}{n} > 0$

$\sum \frac{1}{n}$ dv d'après Riemann

Donc $\sum \frac{n+e^{-n}}{(n+1)^2}$ dv