Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 (3 points)

1. $$\begin{aligned} e^x \ln(e+ex) &= e^x \ln\left(e(1+x)\right) \\ &= e^x\left(1+\ln(1+x)\right) \\ &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) \\ &= 1+x-\frac{x^2}{2}+x+x^2+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \\ &= 1+2x+x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \left(1+\sin(x)\right)^{1/x} &= e^{\ln(1+\sin(x))/x} \\ &= e^{\ln(1+x+o(x))/x} \\ &= e^{(x+o(x))/x} \\ &= e^{1+o(1)} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin(x)\right)^{1/x} = e$.

Exercice 2 (5 points)

1. $$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$.

   Notons pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{\ln(n)}{(n-1)!}\cdot$

   Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\ln(n+1)}{n!}\cdot\dfrac{(n-1)!}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$.

   Ainsi, via la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. $$\begin{aligned} e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e-e^{n\ln(1+1/n)} = e-e^{n(1/n\ -1/2n^2+o(1/n^2))} \\ &= e-e^{1-1/2n+o(1/n)} = e\left(1-e^{-1/2n+o(1/n)}\right) \\ &= e\Big(1-\left(1-1/2n+o(1/n)\right)\Big) = \frac{e}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

Or $\left(\frac{e}{2n}\right)$ est de signe constant et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ diverge.

3. Via le critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge car la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et converge vers 0.

   D'autre part, $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

   Ainsi, $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$, somme d'une série convergente et d'une série divergente, diverge.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin(n!)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

   Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'où $\sum \frac{\sin(n!)}{n^2}$ converge absolument donc converge.

Exercice 3 (5 points)

1. $\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

   $$\begin{aligned}\text{donc } \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{2}{n} + \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

2. Via la question précédente, on a

   $$\left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^\beta = \frac{2^\beta}{n^\beta}\left(1+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\beta = \frac{2^\beta}{n^\beta}\left(1+\frac{\beta}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

   d'où

   $$u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\left(1+\frac{\beta}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

3. Si $\beta \leqslant \alpha$, u_n ne tend pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ diverge.

4. a. On a $|v_n| \sim \frac{|\beta| 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}}$.

   Or, comme $2+\beta-\alpha > 1$, $\sum \frac{\beta 2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}}$ est une série de Riemann convergente.

   Ainsi $\sum v_n$ converge absolument donc converge.

   b. $\sum w_n$ est une série alternée telle que $(|w_n|)$ est décroissante et converge vers 0 donc $\sum w_n$ converge.

   c. $\sum u_n = \sum(w_n + v_n)$ converge car somme de deux séries convergentes.

Exercice 4 (3 points)

1. $\ln\left(\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = \ln\left(1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. Via la question précédente, on a $\ln\left(\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+n+1}\right) = -\dfrac{3}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{4}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3. Via la question précédente, $\sqrt[n]{u_n} = \left(\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+n+1}\right)} = e^{-4+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-4} < 1$.

   Donc, via règle de Cauchy, $\sum u_n$ converge.

Exercice 5 (5 points)

1. $\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n}))} = e^{n\ln(1-1/(2n)+o(1/n))} = e^{n(-1/(2n)+o(1/n))} = e^{-1/2+o(1)}$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - a = \dfrac{1}{\sqrt{e}} - a$.

2. Si $a \neq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, (u_n) ne converge pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge.

3. a. On a
$$e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n}))} = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$
   donc
$$e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n}))} = e^{n\left(-\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

   b. Comme $a = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, via la question précédente,
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) = -\frac{1}{12n\sqrt{e}}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n\sqrt{e}}$.

   Comme $\left(-\dfrac{1}{12n\sqrt{e}}\right)$ est de signe constant et que $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, la série $\sum u_n$ diverge.