Contrôle TD 2 blanc – Corrigé

Question de cours

cf. cours :-þ

Exercice 1

Les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ sont les polynômes de la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(P) = (0,0) \iff \begin{cases} P(0) + P(1) = 0 \\ 2P(2) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + b + c + 2d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + b + c + 2d = 0 \\ -4b + -6c - 15d = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b = -\frac{3}{2}c - \frac{15}{4}d \\ a = \frac{1}{2}c + \frac{7}{4}d \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(X^3 - 3X^2 + 2X, 7X^3 - 15X^2 + 4)$$

Ensuite, d'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) = \dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) - \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = 4 - 2 = 2$$

$\operatorname{Im}(f)$ étant un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^2$ (lui-même de dimension 2), on a nécessairement $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

— Supposons $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.
On a toujours $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$; montrons donc que $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) \subset \operatorname{Ker}(u)$.
Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$: on a alors $u\big(u(x)\big) = 0_E$.
Donc $u(x)$ est à la fois un élément de $\operatorname{Im}(u)$ et de $\operatorname{Ker}(u)$.
Or par hypothèse, $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$ donc $u(x) = 0_E$.
Donc $x \in \operatorname{Ker}(u)$.
Conclusion : $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) \subset \operatorname{Ker}(u)$, d'où par double inclusion $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u)$.

— Supposons $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$.
Soit $x \in \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)$.
$x \in \operatorname{Im}(u)$: $\exists y \in E, x = u(y)$.
$x \in \operatorname{Ker}(u)$: $u(x) = u\big(u(y)\big) = 0$.
Donc $y \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$; or par hypothèse $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$ donc $y \in \operatorname{Ker}(u)$.
D'où $x = u(y) = 0_E$.
Conclusion : $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Exercice 3

$$
\begin{aligned}
P_M(X) = \det(M - XI_3) \quad &= \begin{vmatrix} -2-X & 4 & 3 \\ -5 & 7-X & 5 \\ 6 & -6 & -5-X \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \longleftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 2-X & 4 & 3 \\ 2-X & 7-X & 5 \\ 0 & -6 & -5-X \end{vmatrix} \\
&\underset{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 2-X & 4 & 3 \\ 0 & 3-X & 2 \\ 0 & -6 & -5-X \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{dvlp selon colonne 1}}{=} (2-X) \begin{vmatrix} 3-X & 2 \\ -6 & -5-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)\big[(3-X)(-5-X) - (-6).2\big] = (2-X)(X^2 + 2X - 3)
\end{aligned}
$$

Le polynôme $X^2 + 2X - 3$ a pour discriminant $\Delta = 16 = 4^2$ et pour racines 1 et -3 ; d'où :

$$P_M(X) = (2-X)(1-X)(-3-X)$$

Remarque : on pouvait aussi commencer par l'opération $C_1 + C_3$.