

Correction du Partiel de Maths 2022

Exercice 1:

1. Aucun tudiant n'aime organiser des soires festives
2. Tous les tudians partiront dans la destination de leur choix au S4
3. Certains tudians de l'EPITA ne s'investissent pas dans leurs projets de prpas
4. Certains tudians de l'EPITA sont du par la formation de l'cole axe sur le savoir-faire

Exercice 2:

Soit $P(n)$ la proposition " $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(x+1)^n}$ " pour tout n de \mathbb{N}^*

Initialisation :

$$f^{(1)}(x) = (\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1} = \frac{(-1)^0 \cdot (1-1)!}{(x+1)^1}$$

$P(1)$ est vraie

Hrdit :

Supposons que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (x+1)^{-n}$

On drive $f^{(n)}(x)$ selon x

$$(f^{(n)}(x))' = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot ((x+1)^{-n})'$$

On reconnait la forme u^n , et la driv de u^n est $n \cdot u' \cdot u^{n-1}$ d'o :

$$(f^{(n)}(x))' = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (-1) \cdot n \cdot (x+1)^{-n-1}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion :

Pour tout n de \mathbb{N}^* , $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(x+1)^n}$

Exercice 3 :

$$1. \exists x \in \mathbb{R} \ x^2 < x$$

$$2. \exists n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ \exists k \in \mathbb{Z} \ m = k \cdot n$$

$$\text{ou } \exists n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ m \equiv 0 [n]$$

$$3. \nexists n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} \ m \leq n$$

$$\text{ou } \forall m \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N} \ m < n$$

$$4. \forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \ y = \sqrt{x}$$

Exercice 4 :

1. $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ si $n \neq m$, $n+1 \neq m+1$ donc f est injective

$0 \in \mathbb{N}$ or, $\nexists n \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 0$ donc f n'est pas surjective

$g(0) = 0$ et $g(1) = 1 - 1 = 0$ donc g n'est pas injective

$\forall n \in \mathbb{N}, g(n+1) = n+1-1 = n$ donc tout entier n a au moins un antécédent par g
donc g est surjective

2.

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \rightarrow n \end{cases}$$

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 5 :

1. $972x + 504y = 72$

$36.27x + 36.14y = 36.2$

$27x + 14y = 2$

$$\begin{array}{ll} 27 = 14 \times 1 + 13 & \rightarrow 13 = 27 - 14 \\ 14 = 13 \times 1 + 1 \text{ (PGCD)} & \rightarrow 1 = 14 - 13 \\ 13 = 13 \times 1 + 0 & 1 = 14 - (27 - 14) \\ \text{Le PGCD divise 2} & 1 = 14 \times 2 + 27 \times (-1) \\ \text{donc il y a des solutions} & 2 = 27 \times (-2) + 14 \times 4 \end{array}$$

Donc une solution particulière de l'équation est $(-2, 4)$

2. Soient $x_0 = -2$ et $y_0 = 4$, des solutions particulières de l'équation

$27x_0 + 14y_0 = 2$ et $27x + 14y = 2$

$\Leftrightarrow 27x + 14y = 27x_0 + 14y_0$

$\Leftrightarrow 27(x - x_0) = 14(y_0 - y)$

$14 \mid 27(x - x_0)$ or $\text{PGCD}(14, 27) = 1$ donc $14 \mid (x - x_0)$

Donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 14k$

$x = 14k + x_0$

D'o $27(x - x_0) = 14(y_0 - y)$

$\Leftrightarrow 27(14k + x_0 - x_0) = 14(y_0 - y)$

$\Leftrightarrow 27k = y_0 - y$

$\Leftrightarrow y = y_0 - 27k$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation sont

$\{(14k - 2, 4 - 27k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 6

Soit n le nombre mystère

"Quand on me divise par 4, le reste est 3" $\Leftrightarrow n = q \times 4 + 3$ ($q \in \mathbb{N}$)

"Quand on me divise par 5, le reste est 1" $\iff n = p \times 5 + 1$ ($p \in \mathbb{N}$)

"le quotient reste inchang" $\iff q = p$

D'o

$$n = q \times 4 + 3 \text{ et } n = q \times 5 + 1$$

$$\iff 4q + 3 = 5q + 1$$

$$\iff 5q - 4q = 3 - 1$$

$$\iff q = 2$$

$$D'o \ n = 5q + 1 = 5 \times 2 + 1 = 11$$

Exercice 7

$$1357 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\text{donc } 1357^{2013} \equiv 2^{2013} \pmod{5}$$

$$\iff 1357^{2013} \equiv 2 \times 2^{2012} \pmod{5}$$

$$\iff 1357^{2013} \equiv 2 \times 4^{1006} \pmod{5}$$

$$\iff 1357^{2013} \equiv 2 \times (-1)^{1006} \pmod{5}$$

$$(1006 \text{ est pair donc } (-1)^{1006} = 1)$$

$$\iff 1357^{2013} \equiv 2 \pmod{5}$$

Exercice 9 :

1. $a \wedge b = 1$ donc d'après le thorme de Bzout

$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au + bv = 1$$

$$auc + bcv = c$$

Or $a \mid bc$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $ak = bc$

$$d'o \ auc + kav = c$$

$$a(uc + kv) = c$$

u, v, k et c tant des entiers, $(uc + kv)$ est un entier donc

$$a \mid c$$

2. $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ donc d'après le thorme de Bzout

$\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au_1 + bv_1 = 1$$

et $\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au_2 + cv_2 = 1$$

$$d'o \ (au_1 + bv_1)(au_2 + cv_2) = 1$$

$$\iff a(au_1u_2 + bu_2v_1 + cu_1v_2) + bc(v_1v_2) = 1$$

u_1, u_2, v_1, v_2, a, b et c tant des entiers, il existe bien 2 entiers U et V tels que

$$aU + bcV = 1$$

$$\iff a \wedge (bc) = 1$$