10/

EPITA

Mathématiques

Partiel (S2#)

janvier 2019

Nom : DARCHE

Prénom : Flavien

Entourer le nom de votre professeur de TD : M. Euvrard / M. Goron

Classe : A2 #

NOTE :

Exercice 1 (3 points)

3

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^{-1} en prenant soin de vérifier (au brouillon) le résultat final.

$AU = V \qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3x - 3y + z = X \\ -3x + 5y - 2z = Y \\ x - 2y + z = Z \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 3y + z = X \\ 2y - z = X + Y \\ 3y - 2z = X - 3Z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x - 3y + z = X \\ 2y - z = X + Y \\ y = X + 2Y - 3Z \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 3y + z = X \\ y = X + 2Y - 3Z \\ z = X + 3Y + 6Z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x = X + 3y - z \\ y = X + 2Y - 3Z \\ z = X + 3Y + 6Z \end{cases} \iff \begin{cases} x = X + Y + Z \\ y = X + 2Y + 3Z \\ z = X + 3Y + 6Z \end{cases}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

3

Exercice 2 (5 points)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X) = \dfrac{2X^2 - X + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

$F(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x-3}$

$[(x-1)F(x)]_{x=1} = \dfrac{2-1+1}{(1-2)(1-3)} = 1 \iff a = 1$

$[(x-2)F(x)]_{x=2} = \dfrac{2\times 2^2 - 2 + 1}{(2-1)(2-3)} = 7 \iff b = -7$

$[(x-3)F(x)]_{x=3} = \dfrac{2\times 3^2 - 3 + 1}{(3-1)(3-2)} = \dfrac{16}{2} = 8 \iff c = 8$

CCL : $F(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{-7}{x-2} + \dfrac{8}{x-3}$

1

2. $G(X) = \dfrac{2X^4 - X^3 + X^2 - X + 1}{(X-1)^2(X-2)}$

$(x-1)^2(x-2) = (x^2 - 2x + 1)(x-2)$
$= x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 & x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \\
-(2x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 4x) & 2x + 7 \\
\hline
7x^3 - 9x^2 + 3x + 1 & \\
-(7x^3 - 28x^2 + 35x - 14) & \\
\hline
\cancel{-37x^2 - 38x - 13} & \\
19x^2 - 32x + 15 &
\end{array}
$$

$J(x) =$

$G(x) = 2x + 7 + \dfrac{19x^2 - 32x + 15}{(x-1)^2(x-2)}$

$J(x) = \dfrac{19x^2 - 32x + 15}{(x-1)^2(x-2)}$

$= \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x-2}$

$[J(x)(x-1)^2]_{x=1} = \cancel{\dfrac{-37+38-13}{-1} = \dfrac{-12}{-1} = 12 \iff b = 12}$ $\dfrac{19-32+15}{-1} = -7$
$b = -7$

$[J(x)(x-2)]_{x=2} = \cancel{\dfrac{-37\times 2^2 + 38\times 2 - 13}{(2-1)^2}} =$

$19\times 4 - 32\times 2 + 15 = 27 \iff c = 27$

$\times$ Limite : $\lim\limits_{+\infty} x\,J(x) = \dfrac{19x^2 \cdot x}{x^3} = 19$ $\quad a + c = 19$

$= a + c$

$a = 19 - c$
$a = -8$

CCL : $\dfrac{-8}{x-1} + \dfrac{-7}{(x-1)^2} + \dfrac{27}{x-2} = G(x)$

1,5

3. $H(X) = \dfrac{X^2+2X-1}{(X-2)(X^2+1)}$

$H(x) = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{bX+c}{X^2+1}$

$[(x-2)H(x)]_{x=2} = \dfrac{2^2+2\times 2-1}{2^2+1} = \dfrac{7}{5} \iff a = \dfrac{7}{5}$

$[(x^2+1)H(x)]_{x=i} = \dfrac{i^2+2i-1}{i-2} = \dfrac{2i-2}{i-2} = \cancel{\dfrac{8}{5}} \cancel{+} -\dfrac{4}{5}i$

$\iff b = \dfrac{8}{5}$ et $c = \dfrac{-4}{5}$

<u>ccl</u> : $\dfrac{\frac{7}{5}}{x-2} + \dfrac{\frac{8}{5}X + \frac{-4}{5}}{x^2+1} = H(x)$

0,5

Exercice 3 (3 points)

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto \begin{pmatrix} P(-1) \\ P(0) \\ P(1) \end{pmatrix} \end{cases}$

1,5

Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

Base $\mathbb{R}_2[x] = (1, x, x^2)$

$f(1) = (1,1,1)$

$f(x) = (-1,0,1)$

$f(x^2) = (1,0,1)$

$Mat_{\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto P'''(2) \end{cases}$ où P''' désigne la dérivée d'ordre 3 de P

Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

Exercice 4 (3 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $(u,v) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) \Longrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$$

Exercice 5 (3 points)

3

Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-2y-3z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

1. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension en exhibant une de ses bases.

$$\begin{cases} 2x+3y+z=0 & (1) \\ x-2y-3z=0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1)-2(2) \\ 3(1)+(2) \end{array} \begin{cases} 7y+7z=0 \\ 7x+7y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=-y=z \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$$

$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(f)) = 1$

$\{(1,-1,1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$

2. Déterminer l'image de f.

THM du rang :

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$

$3 = 1 + \dim \operatorname{Im}(f)$

$\dim \operatorname{Im}(f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

$\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ et $(\operatorname{Im}(f) \supset \mathbb{R}^2) \Rightarrow \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

Exercice 6 (3 points)

1

Soient $p \in \mathbb{R}$, $u = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$. Discuter, suivant la valeur de p, la liberté de la famille (u, v, w).

$(\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$$\begin{cases} \alpha p + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta p + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma p = 0 \end{cases}$$

Pour $p = 1$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta - \gamma \\ \beta = \beta \\ \gamma = \gamma \end{cases}$$

Pour $p = 1$ la famille est lié

[suite du cadre page suivante]