Correction du Partiel de Maths 2022

Exercice 1:
1. Aucun tudiant n'aime organiser des soires festives
2. Tous les tudiants partiront dans la destination de leur choix au S4
3. Certains tudiants de l'EPITA ne s'investissent pas dans leurs projets de prpas
4.Certains tudiants de l'EPITA sont du par la formation de l'cole axe sur le savoir-faire

Exercice 2:
Soit P(n) la proposition "f$^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.\ (n)!}{(x+1)^n}$" *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$

Initialisation :
$f^{(1)}(x) = (ln(x+1))' = \frac{1}{x+1} = \frac{(-1)^0\ .\ (1-1)!}{(x+1)^1}$
$P(1)$ *est vraie*

Hrdit :
Supposons que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\ .\ (n-1)!\ .\ (x+1)^{-n}$

On drive $f^{(n)}(x)$ *selon* x
$\left(f^{(n)}(x)\right)' = (-1)^{n-1}\ .\ (n-1)!\ .\ ((x+1)^{-n})'$
On reconnait la forme u^n, *et la driv de* u^n *est* $n.u'.u^{n-1}$ *d'o* :
$\left(f^{(n)}(x)\right)' = (-1)^{n-1}\ .\ (n-1)!\ .(-1).n.1.(x+1)^{-n-1}$
$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n.\ (n)!}{(x+1)^{n+1}}$
Donc $P(n+1)$ *est vraie*

Conclusion :
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.\ (n)!}{(x+1)^n}$

Exercice 3 :
1.$\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 < x$

2.$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{Z}\ m = k.n$
ou $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ m \equiv 0\ [n]$

3.$\nexists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ m \leqslant n$
ou $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ m < n$

4.$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y = \sqrt{x}$

Exercice 4 :
1. $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$ *si* $n \neq m$, $n+1 \neq m+1$ *donc* f *est injective*

$0 \in \mathbb{N}$ *or,* $\nexists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n+1=0$ *donc* f *n'est pas surejective*

$g(0)=0$ *et* $g(1) = 1-1 = 0$ *donc* g *n'est pas injective*
$\forall n \in \mathbb{N},\ g(n{+}1) = n{+}1{-}1 = n$ *donc tout entier* n *a au moins un antcdent par* g
donc g *est surejective*

2.

$$g \circ f \ : \ \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \to \ n \end{cases}$$

$$f \circ g \ : \ \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \to \begin{cases} 1 \ si \ n=0 \\ n \ si \ n \geqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 5 :
1. $972x + 504y = 72$
$36.27x + 36.14y = 36.2$
$27x + 14y = 2$

$$\begin{array}{ccc} 27 = 14 \times 1 + 13 & \to & 13 = 27 - 14 \\ 14 = 13 \times 1 + 1\ (PGCD) & \to & 1 = 14 - 13 \\ 13 = 13 \times 1 + 0 & & 1 = 14 - (27 - 14) \\ Le\ PGCD\ divise\ 2 & & 1 = 14 \times 2 + 27 \times (-1) \\ donc\ il\ y\ a\ des\ solutions & & 2 = 27 \times (-2) + 14 \times 4 \end{array}$$

Donc une solution particulire de l'equation est $(-2, 4)$

2. *Soient* $x_0 = -2$ *et* $y_0 = 4$, *des solutions particulires de l'quation*
$27x_0 + 14y_0 = 2$ *et* $27x + 14y = 2$
$\Longleftrightarrow 27x + 14y = 27x_0 + 14y_0$
$\Longleftrightarrow 27(x - x_0) = 14(y_0 - y)$

$14 \mid 27(x - x_0)$ *or* $PGCD(14, 27) = 1$ *donc* $14 \mid (x - x_0)$
Donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x - x_0 = 14k$
$x = 14k + x_{.0}$
D'o $27(x - x_0) = 14(y_0 - y)$
$\Longleftrightarrow 27(14k + x_{.0} - x_0) = 14(y_0 - y)$
$\Longleftrightarrow 27k = y_0 - y$
$\Longleftrightarrow y = y_0 - 27k$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'quation sont
$\{(14k - 2, 4 - 27k) \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 6
Soit n *le nombre mystre*
"*Quand on me divise par* 4, *le reste est* 3" $\Longleftrightarrow n = q \times 4 + 3 \ (q \in \mathbb{N})$

$"Quand\ on\ me\ divise\ par\ 5,\ le\ reste\ est\ 1" \iff n = p \times 5 + 1\ (p \in \mathbb{N})$
$"le\ quotient\ reste\ inchang" \iff q = p$

$D'o$
$n = q \times 4 + 3\ et\ n = q \times 5 + 1$
$\iff 4q + 3 = 5q + 1$
$\iff 5q - 4q = 3 - 1$
$\iff q = 2$

$D'o\ n = 5q + 1 = 5 \times 2 + 1 = 11$

$Exercice\ 7$
$1357 \equiv 2\ [5]$
$donc\ 1357^{2013} \equiv 2^{2013}\ [5]$
$\iff 1357^{2013} \equiv 2 \times 2^{2012}\ [5]$
$\iff 1357^{2013} \equiv 2 \times 4^{1006}\ [5]$
$\iff 1357^{2013} \equiv 2 \times (-1)^{1006}\ [5]$
$\big(1006\ est\ pair\ donc\ (-1)^{1006} = 1\big)$
$\iff 1357^{2013} \equiv 2\ [5]$

$Exercice\ 9:$
$1.a \wedge b = 1\ donc\ d'aprs\ le\ thorme\ de\ Bzout$
$\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2\ tels\ que$
$au + bv = 1$
$auc + bcv = c$
$Or\ a \mid bc\ donc\ \exists k \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ ak = bc$
$d'o\ auc + kav = c$
$a(uc + kv) = c$
$u, v, k\ et\ c\ tant\ des\ entiers,\ (uc + kv)\ est\ un\ entier\ donc$
$a|c$

$2.a \wedge b = 1\ et\ a \wedge c = 1\ donc\ d'aprs\ le\ thorme\ de\ Bzout$
$\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2\ tels\ que$
$au_1 + bv_1 = 1$
$et\ \exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2\ tels\ que$
$au_2 + cv_2 = 1$

$d'o\ (au_1 + bv_1)(au_2 + cv_2) = 1$
$\iff a(au_1u_2 + bu_2v_1 + cu_1v_2) + bc(v_1v_2) = 1$
$u_1, u_2, v_1, v_2, a, b\ et\ c\ tant\ des\ entiers,\ il\ existe\ bien\ 2\ entiers\ U\ et\ V\ tels\ que$
$aU + bcV = 1$
$\iff a \wedge (bc) = 1$