

1 Алго ревью. Футбольная команда

Отсортируем игроков по эффективности и пронумеруем их $\{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим подмножество индексов выбранных игроков для команды, как $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in \{1, 2, \dots, n\}$, причем $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. E – массив эффективностей игроков. Тогда $E[i_1] \leq E[i_2] \leq \dots \leq E[i_k]$. Случай $|S| = 1$ всегда подходит. Будем считать, что пробуем найти команду размера $|S| \geq 2$. Если выполнено условие (*):

$$E[i_k] \leq E[i_1] + E[i_2], (*)$$

$$\Rightarrow E[w] \leq E[i_k] \leq E[i_1] + E[i_2] \leq E[u] + E[v], \forall u, v, w \in S$$

$$\Rightarrow E[w] \leq E[u] + E[v]$$

Значит условие (*) – необходимо и достаточно для сплоченности команды.

Лемма 1. *Стоит рассматривать только команды, индексы которых образуют отрезок в отсортированном массиве.*

Доказательство Для любого множества $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ можно сопоставить множество $S' = \{i_k - (k-1), i_k - (k-2), \dots, i_k\}$, с такими свойствами:

- $\forall j \in [1, k], i_j < i_{j+1} < \dots < i_k$
 $i_j + (k-j) \leq i_k \Rightarrow i_j \leq i_k - (k-j)$
 Тогда $E[i_j] \leq E[i_k - (k-j)] \Rightarrow \sum_{i \in S} E[i] \leq \sum_{i \in S'} E[i]$
- $E[i_k] \leq E[i_1] + E[i_2] \leq E[i_k - (k-1)] + E[i_k - (k-2)]$
 $\Rightarrow E[i_k] \leq E[i_k - (k-1)] + E[i_k - (k-2)] \Rightarrow (*) \Rightarrow S' - \text{сплочены}$

Значит мы нашли множество индексов S' который составляет отрезок, который оказался сплоченным и суммарная эффективность которого не меньше S . ■

Будем пробегать по отсортированному массиву двумя указателями, индексом i , и хранить левую границу отрезка $last$ и текущую сумму эффективностей. Изначально $i = last = 1$, и мы уже нашли сплоченную команду. Каждый раз после увеличения i , будем увеличивать $last$ до тех пор пока команда не станет сплоченной по условию (*). Такой $last$ всегда найдется, как минимум есть $last := i$, команда размера $|S| = 1$. И надо не забыть пересчитывать суммарную эффективность команды отнимая эффективность убранных игроков, и прибавляя эффективность добавленных игроков, и пересчитывать максимальный ответ.

Тогда мы каждый раз будем для фиксированного индекса i , находить максимальную суммарную эффективность среди всех сплоченных множеств индексов, у которых максимальный индекс это - i . А среди них взяв максимум, получим общий максимум - ответ на задачу.

2 Асимптотика

- Сортировка *QuickSort*— по времени в среднем $O(n \log n)$, по памяти в среднем $O(\log n)$
 - Два указателя— по времени $O(n)$, по памяти $O(1)$
- В итоге $O(n \log n)$ — времени, $O(\log n)$ — памяти в среднем