Bab 6
Barisan dan Deret

Barisan Tak Hingga

Definisi

Barisan Tak Hingga adalah fungsi dengan daerah asal bilangan asli(N).

Notasi: $f : N \to R$

$$n \mapsto f(n) = a_n$$

Fungsi tersebut dikenal sebagai *barisan bilangan Real.* Biasa ditulis $\{a_n\}$ atau $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan a_n adalah suku ke-n.

- Bentuk penulisan dari barisan :

1. bentuk *eksplisit* suku ke-n : $a_n = \dfrac{1}{n}$
2. ditulis sejumlah berhingga suku awalnya.
3. bentuk rekursif $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$

Kekonvergenan Barisan

- *Definisi:*

Barisan $\{ a_n \}$ dikatakan **konvergen** ke L ditulis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Jika $\forall\ \varepsilon > 0, \exists$ bilangan asli $N \ni$

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Sebaliknya, barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang berhingga, maka barisan dikatakan **divergen** (dalam hal ini mungkin ∞ , $-\infty$ atau berosilasi)

Sifat Barisan Konvergen

- Jika barisan $\{a_n\}$ konvergen ke L dan barisan $\{b_n\}$ konvergen ke M, maka

1.

2.

3. , untuk M 0

- Barisan $\{a_n\}$ dikatakan

  a. Monoton naik jika $a_{n+1} > a_n$

  b. Monoton turun jika $a_{n+1} < a_n$

Contoh

Periksa kekonvergenan barisan berikut

1. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n}{2n+1} \right\}$

Jawab:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1)}{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Karena $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$, maka $\left\{ \dfrac{n}{2n+1} \right\}$ konvergen ke ½.

Contoh

Periksa kekonvergenan barisan berikut

2. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n}{\sqrt{n}+3} \right\}$

Jawab:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n})}{\sqrt{n}\left(1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}} = \infty.$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, maka $\left\{ \dfrac{n}{\sqrt{n}+3} \right\}$ divergen.

Catatan

- Akan dijumpai banyak persoalan konvergensi barisan yang tidak bisa langsung dicari limit tak hingga suku ke – *n* nya. Untuk itu kita dapat menghitung limit di tak hingga dari fungsi yang sesuai.

Teorema:

Misalkan $y = f(x), x \geq 1$ memenuhi $f(n) = a_n$

Jika $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, maka $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$

Fakta ini digunakan sebagai penyederhanaan karena kita dapat memakai kaidah L'Hopital untuk soal peubah kontinu.

Contoh

Periksa kekonvergenan $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^{n}$

Jawab:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Ambil $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, sehingga

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \exp\left(\lim_{x\to\infty} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+(1/x))}{1/x}\right) = \exp\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+1}(-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{x^2})}$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}\right) = e^{1} = e$$

Karena $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n = e,$ maka dikatakan $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}^{n}$ konvergen ke e.

Latihan

Periksa kekonvergenan dari barisan berikut:

1. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{4n^2+1}{n^2-2n+3} \right\}$

2. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{3n^2+2}{n+1} \right\}$

3. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \right\}$

4. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{\pi^n}{4^n} \right\}$

5. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{\ln(n)}{n} \right\}$

6. $\left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5} \; \ldots \right\}$

7. $\{a_n\} = \left\{ n \sin \dfrac{\pi}{n} \right\}$

8. $\{a_n\} = \left\{ n^2 - n \right\}$

9. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n^2}{2n+1} \sin \dfrac{\pi}{n} \right\}$

10. $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{e^n + e^{2n}}{2e^{2n}} \right\}$

Deret Tak Hingga

- Bentuk deret tak hingga dinotasikan dengan notasi sigma, sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

dengan a_n adalah suku ke-n.

Kekonvergenan suatu deret ditentukan dari barisan jumlah parsialnya.

Barisan Jumlah Parsial

Misalkan S_n menyatakan jumlah parsial ke-n suku dari deret $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, maka

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$\{S_n\}$, dinamakan barisan jumlah parsial deret $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Dari jumlah parsial ini didapat bahwa $S_n - S_{n-1} = a_n$.

Kekonvergenan Deret Tak Hingga

Deret tak hingga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konvergen*** dan mempunyai jumlah S jika barisan jumlah parsialnya ($\{S_n\}$) ***konvergen*** ke S (artinya $\lim_{n\to\infty} S_n = S$), sebaliknya jika $\{S_n\}$ ***divergen*** maka deret ***divergen.***

Deret Geometri

- Bentuk umum deret geometri :

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{i-1}$$

dengan $a \neq 0$.

- Jumlah parsial deret ini adalah

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n \qquad -$$

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

Sehingga $S_n = \dfrac{a - ar^n}{1-r}$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & ; |r| < 1 \\ +\infty & ; |r| \geq 1 \end{cases}$$

Jadi, deret geometri konvergen jika $|r| < 1$

dengan jumlah $S = \dfrac{a}{1-r}$ $atau$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = \frac{a}{1-r}$.

Contoh
Selidiki kekonvergenan deret

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ . \ \ . \ \ .$

Jawab:
Kalau kita perhatikan, deret ini adalah deret geometri dengan rasio ½ (r<1).

Sehingga deret ini konvergen dengan jumlah

$$S=\frac{1/2}{1-1/2}=1.$$

2. Selidi kekonvergenan deret $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$ (Deret Kolaps)

Jawab:
Kalau kita perhatikan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

Dari sini kita peroleh bahwa jumlah parsial ke-n-nya

$$S_n = \qquad =$$

dan $\qquad = \qquad = 1$

Karena barisan jumlah parsialnya konvergen ke 1, maka deret di atas juga konvergen dengan jumlah 1.

3. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ (Deret Harmonik)

Jawab:

Dari sini kita dapatkan

$$S_n = 1 +$$

$$S_n = 1 +$$

$$\geq 1 +$$

$$= 1 +$$

Sehingga $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$

Jadi deret harmonik adalah deret divergen.

Sifat-sifat deret tak hingga

1. Uji kedivergenan suku ke-n

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ maka deret divergen).

Contoh: Buktikan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+3n+4}$ divergen.

Bukti:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+3n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0$$

Karena $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3} \neq 0,$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+3n+4}$ divergen.

2. Sifat linear

Jika $\sum a_n \ dan \sum b_n$ konvergen dan c konstanta, maka

$\sum ca_n \ dan \sum (a_n \pm b_n)$ konvergen, dan

$$(i) \sum ca_n = c \sum a_n$$

$$(ii) \sum a_n \pm b_n = \sum a_n \pm \sum b_n$$

3. Jika $\sum a_n$ divergen dan c konstanta, maka

$\sum ca_n$ divergen.

Uji Kekonvergenan Deret Positif $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. Uji Integral

Misalkan f fungsi kontinu, positif dan monoton turun

pada selang [1,∝). Andaikan $a_n = f(n), n \in N$

maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergen } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\ dx \text{ konvergen}$$

Contoh

1. Selidiki kekonvergenan dari $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n^2}$

Jawab: ambil $f(x) = x\, e^{-x^2}$. f kontinu, positif ,

turun di $[1,\infty)$ (buktikan sendiri !), maka

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} e^{-x^2}\, d(x^2)$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} e^{-x^2} \Big|_1^{b} = -\frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^{b^2}} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}$$

Karena $\int_1^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n^2}$ konvergen.

Contoh

2. Selidiki kekonvergenan dari $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Jawab: ambil $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, kontinu,positif,turun di$[2, \infty)$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln x}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \ln(\ln x) = \lim_{b \to \infty} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) = \infty$$

Karena $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ divergen, maka $\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n} \ln \mathrm{n}}$ divergen.

Latihan

Selidiki kekonvergenan deret berikut:

1. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+3n)^{\frac{3}{2}}}$

6. Tentukan syarat k agar deret $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^k n}, k > 0$ konvergen.

Uji Deret Positif

2. Uji Deret -p

Deret-p berbentuk $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Jika $p<0$ → $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$. Maka deret divergen.

Jika $p \geq 0$, dengan menggunakan uji integral, kita dapatkan

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \lim_{t\to\infty} \ln x \Big|_1^t = \infty;\ p=1 \\ \lim_{t\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^t \ ;\ p \neq 1 \ = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} \frac{-1}{1-p}\ ;\ p>1 \\ \infty\ ;\ 0 \leq p < 1 \end{cases} \end{cases}$$

Sehingga

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen jika $p>1$ dan divergen jika $p \leq 1$.

Contoh

Apakah deret berikut konvergen atau divergen?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,001}}$

   Berdasarkan uji deret-p, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,001}}$ konvergen karena p=1,001 > 1

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

   Berdasarkan uji deret-p, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ divergen karena p= ½ < 1

Uji Deret Positif

3. Uji banding biasa

Andaikan $\sum_{n=1`}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1`}^{\infty} b_n$ deret positif, maka

1. Jika $b_n \geq a_n$ dan $\sum_{n=1`}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1`}^{\infty} a_n$ konvergen.

2. Jika $b_n \leq a_n$ dan $\sum_{n=1`}^{\infty} b_n$ divergen, maka $\sum_{n=1`}^{\infty} a_n$ divergen.

Contoh

1. Selidiki Kekonvergenan deret $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2-5}$

Jawab:

Bandingkan $a_n = \frac{n}{n^2-5}$ dengan $b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

Perhatikan bahwa $\frac{n}{n^2} < \frac{n}{n^2-5}$ atau $\frac{1}{n} < \frac{n}{n^2-5}$.

Karena $\sum_{\text{n}=1}^{\infty} \frac{1}{\text{n}}$ deret divergen(harmonik), maka

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2-5}$ juga deret yang divergen.

2. Selidiki kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+5}$

Jawab:

Bandingkan $a_n = \frac{1}{3n^2+5}$ dengan $b_n = \frac{1}{n^2}$

Perhatikan bahwa $\frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2+5}$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen dengan uji deret-p (p=2)

maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+5}$ konvergen.

Latihan

Selidiki kekonvergenan deret berikut :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+5}$

2. $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n-5}$

3. $\displaystyle\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mathrm{n}}+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+\cos n}{n^2}$

5. $\displaystyle\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{n}-1}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

Uji Deret Positif

4. Uji Banding limit

Andaikan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deret positif dan $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

1. Jika $0 < L < \infty$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sama-sama konvergen atau divergen.

2. Jika $L = 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

Contoh

Selidiki kekonvergenan dari deret berikut :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3-5n^2+7}$

Jawab: Gunakan Uji Banding Limit.

Pilih $b_n = \frac{1}{n^2}$

sehingga

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{n^3-5n^2+7}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2}{n^3-5n^2+7} = 2$$

Karena L=2 dan $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ konvergen dengan uji deret-p, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3-5n^2+7}$ konvergen.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$

Jawab: Gunakan Uji Banding Limit.

Pilih $b_n = \dfrac{1}{n}$

sehingga

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n^2+4}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+4}} = 1$$

Karena L=1 dan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen (deret harmoik), maka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ divergen.

Latihan

Selidiki kekonvergenan dari deret berikut:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2n + 3}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{n^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3 - 4}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

Uji Deret Positif

5. Uji Hasil Bagi

Diketahui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ merupakan suatu deret dengan suku-suku yang positif, dan $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

1. Jika $\rho < 1$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen
2. Jika $\rho > 1$ maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen
3. Jika $\rho = 1$ maka tidak dapat diambil kesimpulan.

Contoh

Selidiki kekonvergenan deret berikut:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Jawab:

$$a_n = \frac{3^n}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

sehingga

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}.3}{(n+1)\cancel{n!}} . \frac{\cancel{n!}}{\cancel{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)} = 0$$

Karena $\rho = 0 < 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ konvergen.

Contoh

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

Jawab:

$$a_n = \frac{3^n}{n^2} \quad \text{dan} \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}$$

sehingga

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cancel{/(n+1)^2}}{3^n\cancel{/n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n^2}{3^n(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 3$$

Karena $\rho = 3$ maka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$ divergen.

Latihan

Selidiki kekonvergenan dari deret berikut:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n}{n!}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{n!}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$

Uji Deret Positif

6. Uji Akar

Diketahui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ merupakan suatu deret dengan suku-suku yang positif, misalkan $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

1. Jika a <1, maka deret konvergen

2. Jika a > 1, maka deret divergen

3. Jika a = 1, maka uji tidak memberi kesimpulan.

Contoh

Selidiki kekonvergenan deret

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{n-1}\right)^n$

Jawab:

$$a_n = \left(\frac{2n+2}{n-1}\right)^n$$, maka

$$a = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2n+2}{n-1}\right)^n\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n-1} = 2.$$

Karena a=2, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{n-1}\right)^n$ divergen.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^{n}$

Jawab:

$$a_n = \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^{n} \quad \text{, maka}$$

$$a = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Karena a = ½ , maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{n-1}\right)^{n}$ konvergen.

Latihan

Selidiki kekonvergenan dari deret berikut:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^n$

Kesimpulan

Untuk menguji kekonvergenan deret $\sum a_n$ perhatikan a_n ;

1. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergen.
2. Jika a_n memuat bentuk $n!, r^n, n^n$, gunakan uji hasil bagi.
3. Jika a_n hanya memuat bentuk pangkat n yang konstan, gunakan uji banding limit.
4. Usaha terakhir, cobakan uji banding biasa, uji akar, atau uji integral.

Latihan

Periksa kekonvergenan dari deret berikut :

1. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 5}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 5}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$

4. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^n + e^{2n}}{2e^{2n}}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Deret Ganti Tanda dan Kekonvergenan Mutlak

Deret Ganti Tanda

Bentuk umum : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ \ldots$

dengan a_n > 0, untuk semua n.

Contoh : deret harmonik berganti tanda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Uji Deret Ganti Tanda

Deret ganti tanda dikatakan konvergen jika

1. a_n monoton turun

$$2.\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Pengujian apakah a_n monoton turun dapat dilakukan salah satu dari cara berikut :

$1.\ \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, jika $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, maka a_n turun.

2. Tentukan $f'(x)$, jika $f'(x) < 0 \rightarrow a_n$ turun.

Contoh

1. Periksa kekonvergenan deret ganti tanda $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$

Jawab :

$$a_n=\frac{1}{n} \quad \text{dan} \quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

a. Karena $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1/n}{1/(n+1)}=\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}>1$

maka $a_{n+1}<a_n$ atau a_n turun.

$$b.\ \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Karena kedua syarat terpenuhi maka deret tersebut konvergen.

2. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$

Dari soal ini kita punya

$a_n=\frac{1}{n!}$, dan $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$

a. $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1/n!}{1/(n+1)!}=1+n>1$ → $a_n > a_{n+1}$ (a_n turun).

b. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$

Karena kedua syarat terpenuhi, maka deret konvergen.

Latihan

Selidiki kekonvergenan dari deret ganti tanda berikut:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{3n+1}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+3}{n^2+n}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^n}{n!}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{3^n}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n(n+1)}$$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

Konvergen Mutlak dan Konvergen Bersyarat

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ deret dengan suku-suku tak nol,

(i) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergen mutlak.

(ii) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ divergen, tapi $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergen, maka

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ disebut konvergen bersyarat.

Pengujian Kekonvergenan Mutlak

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ semua sukunya positif, maka gunakan

Uji deret positif.

Langkah pengujian :

Uji $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$

(uji deret pos)

Konv → deret konvergen mutlak

Div → Uji $\sum U_n$

(dgn Deret Ganti Tanda)

Konv → deret konvergen bersyarat

Div → deret divergen

Contoh

Selidiki, apakah deret konvergen mutlak, bersyarat atau divergen.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$

Jawab:

Dari soal diatas kita punya $U_n=(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$, dan $|U_n|=\frac{2^n}{(n)!}$

Sehingga dengan uji hasil bagi,

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$$

Menurut uji hasilbagi, $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$ konvergen mutlak.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Jawab:

$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergen dengan uji deret-p.

Selanjutnya uji $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ dengan uji DGT

(i) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1/\sqrt{n}}{1/\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1 + \sqrt{\frac{1}{n}} > 1 \quad \rightarrow a_n \text{ turun.}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

dari (i) dan (ii) DGT konvergen atau $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergen.

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ divergen, tapi $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergen, maka

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergen bersyarat.

Latihan

Selidiki apakah deret berikut konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{5^n}\right)$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+1}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Deret Pangkat / Deret Kuasa

Bentuk Umum deret kuasa:

1. Deret kuasa dalam x (pusat $x = 0$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

2. Deret kuasa dalam $(x - b)$ (pusat $x = b$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + a_3(x-b)^3 + \ldots$$

Selanjutnya kita akan mencari himpunan konvergenan(HK).

Yaitu himpunan semua bilangan real x sehingga deret kuasa konvergen.

Himpunan Kekonvergenan (HK)

Misalkan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$ dan $\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}$

1. Jika $\rho < 1$, maka deret konvergen mutlak.
2. Jika $\rho > 1$, maka deret divergen
3. Jika $\rho = 1$, tidak dapat diambil kesimpulan sebelumnya.

Soal

Tentukan Himpunan kekonvergenan dari

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n n!$$

4. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{2^n}$$

Jawab : $$1.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$$

Kita akan gunakan Uji Hasil bagi Mutlak, untuk menyelidiki kekonvergenan mutlak.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)} : \frac{x^n}{(n+1)2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{2} \frac{(n+1)}{(n+2)} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|$$

Deret tersebut konvergen mutlak apabila $\rho < 1$, yaitu

$$\left| \frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Kemudian akan kita cek untuk titik ujung intervalnya yaitu

x = 2 dan x = -2 .

Untuk x = 2 → $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$$

deret ini divergen dengan uji banding limit, maka $2 \notin HK$

- Untuk x = –2 → $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n+1)\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)}$$

Ini Deret Ganti Tanda, maka diuji dengan uji Deret Ganti Tanda:

(i) $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1/n+1}{1/n+2}=\dfrac{n+2}{n+1}=1+\dfrac{1}{n+1}>1$ → a_n monoton turun

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$

Dari (i) dan (ii) disimpulkan Deret Ganti Tanda konvergen, → $-2\in HK$

Sehingga selang kekonvergenannya adalah [-2,2).

Jawab : $2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Gunanakan Uji Hasil bagi Mutlak ;

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{(n+1)} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Karena $\rho = 0 < 1$, maka deret selalu konvergen untuk semua nilai x.

Jadi selang kekonvergenannya adalah (-∞,∞)=R.

Jawab: $3.\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n n!$

Gunakan Uji Hasil bagi Mutlak ;

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}(n+1)!}{x^n n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| (n+1)\, x \right| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1)$$

$$= \begin{cases} 0, & jika \quad x = 0 \\ \infty, & jika \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Jadi deret tersebut konvergen hanya untuk x = 0.

Sehingga HK={0}.

Jawab : $$4.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{n+1}}{2^n}$$

Gunakan uji hasil bagi mutlak;

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+2}}{2^{n+1}}.\frac{2^n}{(x+1)^{n+1}}\right| =\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)}{2}\right| =\left|\frac{x+1}{2}\right|$$

* Deret konvergen jika $\left|\frac{x+1}{2}\right|<1\Leftrightarrow -2<x+1<2\Leftrightarrow -3<x<1$

* Uji x=-3 → $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}.2$

Ini DGT, $\lim_{n\to\infty}a_n=2\neq 0$ jadi DGT divergen.

* Untuk x = 1 → $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2)^{n+1}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}2.$ Deret ini divergen dengan uji kedivergenan suku ke-n. Jadi HK = (-3,1).

Teorema 1

Himpunan kekonvergenan deret kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ berbentuk selang yang berupa salah satu dari ketiga jenis berikut:

1. satu titik x = 0 (jari-jari ; r = 0)
2. selang $(-c, c)$, mungkin ditambah salah satu atau kedua titik ujungnya. (jari-jari ; r = c)
3. seluruh himpunan bilangan real (jari-jari ; r = ∞)

Teorema 2

Himpunan kekonvergenan deret kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$

berbentuk selang yang berupa salah satu dari ketiga jenis berikut :

1. satu titik $x = b$ (jari-jari; $r = 0$)
2. selang $(b-c, c+b)$, mungkin ditambah salah satu atau kedua titik ujungnya (jari-jari; $r = c$)
3. seluruh himpunan bilangan real (jari-jari; $r = \infty$)

Dari contoh sebelumnya;

1. HK=[-2,2); $r = 2$; pusat $x = 0$
2. HK=R ; $r = \infty$; pusat $x = 0$
3. HK={0} ; $r = 0$; pusat $x = 0$
4. HK=(-3,1) ; $r = 2$; pusat $x = -1$

Latihan

Tentukan selang kekonvergenan deret pangkat berikut:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n\,2^n}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (2x+1)^n}{n^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n+1)}$

7. $(x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \ldots$

8. $\frac{(x+2)\ln 1}{3} + \frac{(x+2)^2 \ln 2}{2.9} + \frac{(x+2)^3 \ln 3}{3.27} + \ldots$

Operasi pada Deret Kuasa

Misal $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

maka

$$(i)\ \ S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_x\left[a_n x^n\right] = D_x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1}$$

$$(ii)\ \int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

(i) Perhatikan, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ merupakan deret geometri

dengan a = 1 ; $r = x$, maka

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \; ; |x| < 1}$$

(ii) $$\frac{1}{(1-x)^2} = D_x\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$$

(iii) $$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \int_0^x 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots\, dt$$

$$-\ln(1-x) = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \ldots\Big|_0^x = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n \;\; ; \; |x| < 1}$$

(iv)Perhatikan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Deret ini konvergen untuk setiap x bilangan real.

Misal

$$\left.\begin{aligned} S(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ S'(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}\right\} S(x) = S'(x) \rightarrow S(x) = e^x$$

Jadi

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Latihan

Tuliskan fungsi berikut dalam bentuk deret pangkat

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
5. $f(x)$=tan^{-1}(x)
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
7. $f(x) = \dfrac{1}{(2+3x)}$
8. $f(x) = e^x + e^{-x}$
9. $f(x) = e^{3x}$

Deret Taylor dan Deret Maclurin

Misalkan $f(x)$ dapat diturunkan hingga n kali pada $x = b$,

Maka $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai deret kuasa dalam $(x\text{-}b)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \left(x - b\right)^n$$

$$f(x) = f(b) + \frac{f'(b)\ (x-b)}{1\,!} + \frac{f''(b)\ (x-b)^2}{2\,!} + \ldots$$

Deret di atas disebut <u>Deret Taylor</u> dengan pusat $x = b$.

Bila b = 0, diperoleh Deret Mac Laurin, yaitu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \left(x\right)^n \quad = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

Contoh

1. Tentukan deret Taylor untuk $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ dengan pusat $x=1$

Jawab: $f(1)=\dfrac{1}{3}$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}\rightarrow f'(1)=\frac{-1}{3^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}\rightarrow f''(1)=\frac{2}{3^3}$$

$$f'''(x)=\frac{-6}{(x+2)^4}\rightarrow f'''(1)=\frac{-6}{3^4}$$

...

Sehingga

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ldots$$

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2\ 1!}(x-1) + \frac{2}{3^3\ 2!}(x-1)^2 - \frac{6}{3^4\ 3!}(x-1)^3 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^n$$

2. Tentukan deret MacLaurin untuk $f(x) = \sin x$

$f(x) = \sin x$ → $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ → $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$ → $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ → $f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin x$ → $f^{IV}(0) = 0$

Sehingga,

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. Tentukan deret Taylor dari $f(x) = e^x$ dengan pusat x = 1.

$f(x) = e^x \rightarrow f(1) = e^1$

$f'(x) = e^x \rightarrow f'(1) = e^1$

$f''(x) = e^x \rightarrow f''(1) = e^1$

$f'''(x) = e^x \rightarrow f'''(1) = e^1$

$f^{IV}(x) = e^x \rightarrow f^{IV}(1) = e^1$

Sehingga,

$$f(x) = e^x = e + e(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2!} + e\frac{(x-1)^3}{3!} + e\frac{(x-1)^4}{4!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!}$$

Atau, kita dapat menggunakan operasi deret,

$$e^{x} = e^{x-1+1}$$

$$= e.e^{x-1}$$

$$= e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e\,(x-1)^{n}}{n!}$$

Latihan

1. Perderetkan $f(x)$ berikut dalam deret Maclaurin

a. $f(x) = \cos x$

b. $f(x) = \ln(3+2x)$

c. $f(x) = \tan x$

$$d.\ f(x) = \frac{1}{x+1}$$

2. Perderetkan $f(x)$ berikut dalam deret taylor dengan pusat $x = a$

a. $f(x) = e^x$, $a = 2$

$$b.\ f(x) = \frac{1}{x+5} \ , a = 1$$

$$c.\ f(x) = \frac{1}{x} \ , a = 3$$