2021 年全国硕士研究生招生考试
数学(三)试题

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \to 0$ 时,$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的(　　)

(A) 低价无穷小　　(B) 等价无穷小

(C) 高阶无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x=0\end{cases}$,在 $x=0$ 处(　　)

(A) 连续且取得极大值　　(B) 连续且取得极小值

(C) 可导且导数等于 0　　(D) 可导且导数不为 0

(3) 设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有 2 个零点,则$\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是(　　)

(A) $(e,+\infty)$　　(B) $((0,e)$　　(C) $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

(4) 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$,$f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则 $df(1,1)=$(　　)

(A) $dx+dy$　　(B) $dx-dy$

(C) dy　　(D) $-dy$

(5) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为(　　)

(A) 2,0　　(B) 1,1　　(C) 2,1　　(D) 1,2

(6) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$为 4 阶正交矩阵,若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\\\boldsymbol{\alpha}_3^T\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 表示任意常数,则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$

(7) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & -1 & 1\\-1 & 2 & -5\end{pmatrix}$,若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵,则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以分别取(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

(8) 设 A,B 为随机事件且 $0<P(B)<1$，则下列命题中为假命题的是（　　）

(A) 若 $P(A\mid B)=P(A)$，则 $P(A\mid\bar{B})=P(A)$

(B) 若 $P(A\mid B)>P(A)$，则 $P(\bar{A}\mid\bar{B})>P(\bar{A})$

(C) 若 $P(A\mid B)>P(A\mid\bar{B})$，则 $P(A\mid B)>P(A)$

(D) 若 $P(A\mid A\cup B)>P(\bar{A}\mid A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$

(9) 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本. 令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}$，则（　　）

(A) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$ (B) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(C) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$ (D) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(10) 设总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=\dfrac{1-\theta}{2}$，$P\{X=2\}=P\{X=3\}=\dfrac{1+\theta}{4}$. 利用来自总体 X 的样本值 1,3,2,2,1,3,1,2，可得 θ 的最大似然估计值为（　　）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{3}{8}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{5}{8}$

二、填空题：11 ～ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) 若 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$________.

(12) $\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x=$________.

(13) 设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\sin\pi x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为________.

(14) 差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为 $y_t=$________.

(15) 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&2x\\1&x&2&-1\\2&1&x&1\\2&-1&1&x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为________.

(16) 甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一个球，观察颜色后放入乙盒，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和从乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数为________.

三、解答题：17 ～ 22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)（本题满分 10 分）

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值.

(18)（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

(19)(本题满分 12 分)

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分,计算二重积分

$$\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(20)(本题满分 12 分)

设 n 为正整数,$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(Ⅰ)求 $y_n(x)$;

(Ⅱ)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

(21)(本题满分 12 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值,若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵,求 a,b 的值,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 12 分)

在区间(0,2)上随机取一点,将该区间分成两段,较短一段的长度记为 X,较长一段记为 Y,令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(Ⅰ)求 X 的概率密度;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度;

(Ⅲ)求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

2021 年数学(三)试题解析

一、选择题

(1)【答案】(C)　(2)【答案】(D)　(3)【答案】(A)　(4)【答案】(C)

(5)【答案】(B)　(6)【答案】(D)　(7)【答案】(C)　(8)【答案】(D)

(9)【答案】(B)　(10)【答案】(A)

二、填空题

(11)【答案】$\frac{\sin e^{-1}}{2e}$.　(12)【答案】6.

(13)【答案】$\frac{\pi}{4}$.　(14)【答案】$C+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t$(其中 C 为任意常数).

(15)【答案】-5.　(16)【答案】$\frac{1}{5}$.

三、解答题

(17)【答案】 $\frac{1-e^2}{e\pi}$.

(18)【答案】 极小值为 $f\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{1}{2}-2\ln 2, f(-1,0)=2$.

(19)【答案】 $\frac{1}{8}(e-1)^2$.

(20)【答案】 (Ⅰ)$y_n(x)=\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$.

(Ⅱ)$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, & x\in[-1,1),\\ 1, & x=1.\end{cases}$

(21)【答案】 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(22)【答案】 (Ⅰ)$f_X(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$.

(Ⅱ)$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, & z>1\\ 0, & z\leqslant 1\end{cases}$.

(Ⅲ)$2\ln 2-1$.

答案详解请参考《考研数学真题大解析》(标准版)(数学三) 丁勇主编 中国政法大学出版社出版