Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Aluna: Nara Avila Moraes
Nro. USP: 5716734

2o. semestre, 2025
Exercício 02 - 15/10

MAE5911/IME: Fundamentos de Estatística e Machine Learning.
Prof.: Alexandre Galvão Patriota

Questão 01: Seja $(Z_1, \dots, Z_n)$ uma amostra aleatória de $Z \sim \text{Ber}(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$.

(a) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z = 0)$.

(b) Encontre o EMV para $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$.

(c) Considere que os dados foram observados (0, 0, 1, 0, 0, 1). Encontre as estimativas de MV nos itens acima.

(d) Construa o valor-p para a hipótese H: "$\theta = 0.1$" usando os dados do item anterior.

Podemos calcular os ítens (a) e (b) utilizando a propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança (EMV).

Teorema (Invariância do EMV). Seja $\hat{\theta}_{MV}$ o estimador de máxima verossimilhança de um parâmetro $\theta \in \Theta$ e seja $g : \Theta \to \mathcal{G}$ uma função. Então o estimador de máxima verossimilhança de

$$\tau = g(\theta)$$

é dado por

$$\hat{\tau}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}).$$

Isto é, para obter o EMV de qualquer função de θ, basta aplicar essa função ao EMV de θ.

Cálculo do EMV de θ ($\hat{\theta}_{MV}$)

Função de verossimilhança

Seja $Z_1, \dots, Z_n$ uma amostra aleatória de $Z \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, $\quad \theta \in (0, 1)$. Com:

$$P_\theta(Z_i = 1) = \theta, \qquad P_\theta(Z_i = 0) = 1 - \theta.$$

A função de probabilidade para Z_i é então:

$$f(z_i; \theta) = \theta^{z_i}(1 - \theta)^{1 - z_i}.$$

Como $Z_1, \dots, Z_n$ são independentes, a probabilidade conjunta, definida como a função de verossimilhança é:

$$\ell(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{z_i}(1 - \theta)^{1 - z_i}.$$

Juntando os expoentes, temos:

$$\ell(\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n z_i}\,(1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n (1 - z_i)} = \theta^{\sum_{i=1}^n z_i}\,(1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n z_i}.$$

Seja

$$S = \sum_{i=1}^{n} z_i,$$

Podemos escrever:

$$\ell(\theta) = \theta^S(1 - \theta)^{n - S}.$$

Função Log-verossimilhança

Podemos simplificar os cálculos trabalhando com o logaritmo desta função, mantendo o estimador de máxima verossimilhança inalterado, uma vez que este trata-se do ponto crítico desta função. Maximizar $\ell(\theta)$ ou $\mathcal{L}(\theta) = \log \ell(\theta)$ é equivalente, devido ao fato do logaritmo ser estritamente crescente. Portanto, aplicando o logaritmo, simplificamos para:

$$\mathcal{L}(\theta) = \log \ell(\theta) = \log \left(\theta^S (1-\theta)^{n-S}\right) = S \log \theta + (n-S)\log(1-\theta).$$

Ponto crítico da log-verossimilhança

Calculando a derivada:

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = S \cdot \frac{1}{\theta} + (n-S) \cdot \left(-\frac{1}{1-\theta}\right) = \frac{S}{\theta} - \frac{n-S}{1-\theta}.$$

Seja a condição de máximo:

$$\frac{S}{\theta} - \frac{n-S}{1-\theta} = 0.$$

$$\frac{S}{\theta} = \frac{n-S}{1-\theta}.$$

$$S(1-\theta) = \theta(n-S).$$

$$S - S\theta = n\theta - S\theta.$$

Os termos $-S\theta$ cancelam em ambos os lados, restando:

$$S = n\theta.$$

Isolando θ:

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \frac{S}{n}.}$$

Substituindo de volta em funcão da variável aleatória Z_i, obtemos:

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \bar{Z}.$$

(a) $g(\theta) = P_\theta(Z=0)$

$$g(\theta) = P_\theta(Z=0) = 1-\theta.$$

Pelo teorema da **invariância do EMV**:

$$\widehat{g}_{MV} = g(\widehat{\theta}_{MV}) = 1 - \widehat{\theta}_{MV}.$$

Já encontramos que $\widehat{\theta}_{MV} = \overline{Z}$, então:

$$\boxed{\widehat{g}_{MV} = 1 - \overline{Z}}.$$

(b) $g(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(Z)$

Para uma Bernoulli, a variância é dada por:

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2.$$

Pela definição de esperança para variáveis discretas,

$$E(Z) = \sum_{z \in \{0,1\}} z\, P(Z = z).$$

Mas $P(Z = 1) = \theta$ e $P(Z = 0) = 1 - \theta$, então:

$$E(Z) = 0 \cdot (1 - \theta) + 1 \cdot \theta = \theta.$$

$E(Z^2) = E(Z) = \theta$ (pois $Z \in \{0, 1\}$), então:

$$\text{Var}_\theta(Z) = \theta - \theta^2 = \theta(1 - \theta).$$

Portanto:

$$g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z) = \theta(1 - \theta).$$

Pela **invariância do EMV**:

$$\widehat{g}_{MV} = g(\widehat{\theta}_{MV}) = \widehat{\theta}_{MV}(1 - \widehat{\theta}_{MV}).$$

Para $\widehat{\theta}_{MV} = \overline{Z}$, encontramos:

$$\boxed{\widehat{g}_{MV} = \overline{Z}(1 - \overline{Z}).}$$

(c) Sejam os dados observados: $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$

Para o cálculo da média temos: $n = 6$ e $\sum z_i = 2$, portanto

$$\hat{\theta}_{MV} = \bar{Z} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Assim:

$$(a) \quad g_{\hat{MV}} = \widehat{P(Z = 0)} = 1 - \hat{\theta}_{MV} = \frac{2}{3},$$

$$(b) \quad g_{\hat{MV}} = \widehat{\text{Var}}(Z) = \hat{\theta}_{MV}(1 - \hat{\theta}_{MV}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

—

Questão 02: Seja $(Z_1, \ldots, Z_n)$ uma amostra aleatória de $Z \sim \text{Exp}(\theta)$, $\theta \in (0, \infty)$.

(a) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z > 1)$.

(b) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(0.1 < Z < 1)$.

(c) Encontre o EMV para $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$.

(d) Considere que os dados foram observados (0.2, 0.6, 0.3, 0.2, 0.8, 0.12). Encontre um IC aproximado de 95% de confiança para $g(\theta)$ nos itens acima.

(e) Faça uma simulação de Monte Carlo para verificar se os IC's aproximados obtidos no passo anterior têm cobertura próxima do nível de confiança estabelecido. Caso não tenham, proponha um tamanho amostral que produza IC's mais confiáveis para cada caso.

Questão 03: Seja $(Z_1, \ldots, Z_n)$ uma amostra aleatória de $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$.

(a) Encontre o EMV para $g(\theta) = E_\theta(Z)$.

(b) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z < 2)$.

(c) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(2.6 < Z < 4)$.

(d) Encontre o EMV para $g(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(Z)$.

(e) Considere que os dados foram observados (2.4, 2.7, 2.3, 2, 2.5, 2.6). Encontre as estimativas de MV nos itens acima.

(a) $g(\theta) = E_\theta(Z)$

Esperança matemática. A esperança (ou valor esperado) de uma variável aleatória é o análogo contínuo da média ponderada. Ela representa o valor médio que esperaríamos observar após infinitas repetições do experimento.

- **Caso discreto:** se Z assume valores z_i com probabilidades p_i, então
$$E(Z) = \sum_i z_i p_i.$$
- **Caso contínuo:** se Z tem densidade $f(z)$, então
$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f(z)\, dz.$$

Exemplo: Normal $N(\mu, \sigma^2)$. A densidade é

$$f(z \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Então:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\, f(z \mid \mu, \sigma^2)\, dz.$$

Fazendo a mudança de variável $x = \frac{z-\mu}{\sigma}$, obtemos

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx}_{=1} + \sigma \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx}_{=0}.$$

Logo,

$$\boxed{E(Z) = \mu.}$$

Fato conhecido da Normal: se $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $E(Z) = \mu$.

▷ **Como justificar rapidamente:** pela *linearidade da esperança* e pela *padronização* $Z = \mu + \sigma T$ com $T \sim N(0, 1)$,
$$E(Z) = E(\mu + \sigma T) = \mu + \sigma E(T) = \mu + \sigma \cdot 0 = \mu.$$

Logo, $g(\theta) = \mu$ e, pela **invariância do EMV**,

$$\boxed{\widehat{g}_{(a)} = \widehat{\mu}_{MV} = \overline{Z}}$$

(b) $g(\theta) = P_\theta(Z < 2)$

Passo 1 — Padronização (transformação linear): Se $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ então

$$T = \frac{Z - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Passo 2 — Troca de variável na probabilidade (monotonicidade):

$$P_\theta(Z < 2) = P\left(\frac{Z - \mu}{\sigma} < \frac{2 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2 - \mu}{\sigma}\right).$$

(Usamos que a função $z \mapsto (z - \mu)/\sigma$ é estritamente crescente quando $\sigma > 0$.)

Passo 3 — Invariância do EMV (plug-in):

$$\boxed{\widehat{g}_{(b)} = \Phi\left(\frac{2 - \widehat{\mu}_{MV}}{\widehat{\sigma}_{MV}}\right)}$$

(c) $g(\theta) = P_\theta(2.6 < Z < 4)$

Passo 1 — Padronização:

$$T = \frac{Z - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Passo 2 — Regra da janela + CDF da Normal padrão:

$$P_\theta(2.6 < Z < 4) = P\left(\frac{2.6 - \mu}{\sigma} < T < \frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2.6 - \mu}{\sigma}\right).$$

Passo 3 — Invariância do EMV (plug-in):

$$\boxed{\widehat{g}_{(c)} = \Phi\left(\frac{4 - \widehat{\mu}_{MV}}{\widehat{\sigma}_{MV}}\right) - \Phi\left(\frac{2.6 - \widehat{\mu}_{MV}}{\widehat{\sigma}_{MV}}\right)}$$

(d) $g(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(Z)$

Variância. A **variância** de uma variável aleatória Z mede a dispersão dos valores em torno da média $E(Z)$. Formalmente, ela é definida por

$$\mathrm{Var}(Z) = E\big[(Z - E(Z))^2\big].$$

Definição expandida. Usando a propriedade de linearidade da esperança e a expansão do quadrado,

$$(Z - E(Z))^2 = Z^2 - 2Z\,E(Z) + E(Z)^2,$$

temos

$$\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - 2E(Z)E(Z) + [E(Z)]^2 = E(Z^2) - [E(Z)]^2.$$

Portanto,

$$\boxed{\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2.}$$

Cálculo para a Normal. Se $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, já sabemos que $E(Z) = \mu$. Logo precisamos calcular $E(Z^2)$.

Por definição:

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\, f(z \mid \mu, \sigma^2)\, dz, \quad \text{onde} \quad f(z \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Mudança de variável (padronização). Definimos $x = \frac{z-\mu}{\sigma}$, de modo que $z = \mu+\sigma x$ e $dz = \sigma dx$. Substituímos na integral:

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma x)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Expandindo o quadrado:

$$(\mu + \sigma x)^2 = \mu^2 + 2\mu\sigma x + \sigma^2 x^2.$$

Substituindo e separando termos:

$$E(Z^2) = \mu^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx}_{=1} + 2\mu\sigma \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx}_{=0} + \sigma^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx}_{=1}.$$

Usamos propriedades da Normal padrão $X \sim N(0,1)$:

$$E(X) = 0, \quad E(X^2) = 1.$$

Logo:

$$E(Z^2) = \mu^2 + \sigma^2.$$

Substituindo na definição da variância:

$$\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = (\mu^2 + \sigma^2) - \mu^2 = \sigma^2.$$

Conclusão.

$$\boxed{\mathrm{Var}(Z) = \sigma^2.}$$

Assim, o parâmetro σ^2 da distribuição normal é, por definição, a variância populacional — ele controla a dispersão dos valores de Z em torno da média μ. **Fato conhecido da Normal:** se $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\mathrm{Var}(Z) = \sigma^2$.

- ▷ **Justificativa curta:** pela padronização $Z = \mu + \sigma T$ com $T \sim N(0,1)$, usando *homogeneidade da variância* para fatores constantes,

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(\mu + \sigma T) = \sigma^2\, \mathrm{Var}(T) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2.$$

Logo, $g(\theta) = \sigma^2$ e, pela **invariância do EMV**, com o EMV já obtido para σ^2,

$$\boxed{\widehat{g}_{(d)} = \widehat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2}$$

(Recordando: para a Normal com μ desconhecido, o EMV de σ^2 usa divisor n, não $n-1$.)

Questão 04: Seja $(Z_1, \ldots, Z_n)$ uma amostra aleatória de $Z \sim f_\theta$, $\theta \in (0, \infty)$, tal que a função densidade de probabilidade é dada por

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}, \quad x \in (0,1),$$

e $f_\theta(x) = 0$, caso contrário.

(a) Encontre o EMV para $g(\theta) = E_\theta(Z)$.

(b) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z > 0.3)$.

(c) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(0 < Z < 0.1)$.

(d) Encontre o EMV para $g(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(Z)$.

(e) Considere que os dados foram observados $(0.12, 0.50, 0.20, 0.23, 0.30, 0.11)$. Encontre as estimativas de MV para os itens acima.

Objetivo. Procuramos uma densidade $f(x)$ em $(0,1)$, flexível o bastante para modelar proporções, com dois parâmetros de forma que controlem o comportamento perto de 0 e 1.

1) Escolha do núcleo. Uma família natural em $(0,1)$ é

$$f(x) \;\propto\; x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0<x<1,$$

com $\alpha>0,\ \beta>0$. *Justificativas:* (i) $x^{\alpha-1}$ controla a massa perto de 0; (ii) $(1-x)^{\beta-1}$ controla a massa perto de 1; (iii) quando $\alpha=\beta$ a forma é simétrica; (iv) a família é conjugada à Binomial.

Logo, tomamos

$$f(x) = C\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathbf{1}_{(0,1)}(x),$$

e determinamos a constante de normalização C impondo $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

2) Normalização (Integral Beta). Defina a *função Beta* de Euler

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \qquad \alpha,\beta>0.$$

Então

$$1 = \int_0^1 f(x)\,dx = C\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = C\,B(\alpha,\beta) \implies C = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}.$$

Assim, a densidade fica

$$\boxed{f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0<x<1.}$$

3) Ligação com Γ. Recorde a função Gama: $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty u^{t-1}e^{-u}\,du$. Vale a identidade clássica

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Logo,

$$\boxed{f(x;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0<x<1.}$$

4) Construção alternativa (razão de Gammas). Se $U\sim\mathrm{Gamma}(\alpha,1)$ e $V\sim\mathrm{Gamma}(\beta,1)$ são independentes e definimos

$$X = \frac{U}{U+V}\in(0,1), \qquad T = U+V\in(0,\infty),$$

então $X\sim\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$.

Esboço da prova: O jacobiano da transformação $(u,v)\mapsto(x,t)$ é $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,t)}\right| = t$. O conjunto transformado é $\{0<x<1,\ t>0\}$. A densidade conjunta de (X,T) é

$$f_{X,T}(x,t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}e^{-t}.$$

Integrando t em $(0,\infty)$,

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,T}(x,t)\,dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.$$

5) Momentos (fórmulas conhecidas). Para $X\sim\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$,

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

No caso particular Beta$(\theta, 1)$, obtém-se

$$E[X] = \frac{\theta}{\theta+1}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}.$$

Distribuição Beta. A distribuição Beta é contínua no intervalo $(0,1)$, com densidade

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1,$$

onde $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ é a função Beta. No caso particular Beta$(\theta, 1)$,

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1,$$

e a normalização é verificada por

$$\int_0^1 \theta x^{\theta-1}\, dx = 1.$$

Modelo. Se $X \sim$ Beta$(\theta, 1)$, então a densidade é

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}\, \mathbf{1}_{(0,1)}(x), \qquad \theta > 0.$$

Esperança $E[X]$. Usamos a definição (caso contínuo) e regras elementares de integração:

$$E[X] = \int_0^1 x\, f_\theta(x)\, dx = \int_0^1 x\, \theta\, x^{\theta-1}\, dx = \theta \int_0^1 x^\theta\, dx.$$

Propriedade usada: $\displaystyle\int_0^1 x^a\, dx = \frac{1}{a+1}$ para $a > -1$.

Como $\theta > 0$, segue que

$$E[X] = \theta \cdot \frac{1}{\theta+1} = \boxed{\frac{\theta}{\theta+1}}.$$

Segundo momento $E[X^2]$. De modo análogo,

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 f_\theta(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, \theta\, x^{\theta-1}\, dx = \theta \int_0^1 x^{\theta+1}\, dx = \theta \cdot \frac{1}{\theta+2} = \boxed{\frac{\theta}{\theta+2}}.$$

Variância $\mathrm{Var}(X)$. Pela definição, $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\theta}{\theta+2} - \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^2 = \frac{\theta(\theta+1)^2 - \theta^2(\theta+2)}{(\theta+2)(\theta+1)^2}.$$

Álgebra no numerador:

$$\theta(\theta+1)^2 - \theta^2(\theta+2) = \theta\big(\theta^2 + 2\theta + 1\big) - \theta^2(\theta+2) = \theta^3 + 2\theta^2 + \theta - \theta^3 - 2\theta^2 = \theta.$$

Logo,

$$\mathrm{Var}(X) = \boxed{\frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}}.$$

O parâmetro θ controla a concentração: valores $\theta < 1$ favorecem x próximos de 0, $\theta > 1$ favorecem x próximos de 1, e $\theta = 1$ dá a distribuição uniforme.

Função de verossimilhança. Como as observações são independentes e identicamente distribuídas, a densidade conjunta é o produto das individuais:

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1}.$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto:

$$L(\theta; x) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1} = \theta^n \exp\left\{(\theta-1)\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right\}.$$

—

Função log-verossimilhança. Usando as propriedades dos logaritmos:

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \ \log(ab) = \log a + \log b,\\ &\text{(ii)}\ \ \log(a^b) = b\log a,\\ &\text{(iii)}\ \ \log\Big(\prod_i a_i\Big) = \sum_i \log a_i, \end{aligned}$$

temos:

$$\ell(\theta) = \log L(\theta; x) = n\log\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} \log x_i.$$

—

Derivada primeira. Aplicando as propriedades diferenciais:

$$\frac{d}{d\theta}\log\theta = \frac{1}{\theta}, \qquad \frac{d}{d\theta}\big[(\theta-1)c\big] = c,$$

obtemos:

$$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i.$$

—

Ponto crítico (máxima verossimilhança). Igualando a derivada a zero:

$$\ell'(\theta) = 0 \iff \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 \iff \boxed{\widehat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}}.$$

Como $0 < x_i < 1$, temos $\log x_i < 0$, logo o estimador é positivo.

—

Segunda derivada.

$$\ell''(\theta) = \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{n}{\theta}\Big) = -\frac{n}{\theta^2} < 0,$$

garantindo que o ponto crítico é um *máximo*.

—

Resultado final (EMV).

$$\boxed{\widehat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log X_i}}, \qquad X_i \in (0,1).$$

—

Observações.

- O estimador de máxima verossimilhança é sempre positivo, pois $\log X_i < 0$.
- A estatística suficiente é $T = -\sum_{i=1}^{n} \log X_i$, que segue uma distribuição Gamma$(n, \text{taxa} = \theta)$.
- Pela *invariância do EMV*, para qualquer função $g(\theta)$,

$$\widehat{g}_{MV} = g(\widehat{\theta}_{MV}).$$

Por exemplo, para $g(\theta) = P_\theta(X > c) = 1 - c^\theta$, tem-se

$$\widehat{g}_{MV} = 1 - c^{\widehat{\theta}_{MV}}.$$

Questão 04. Seja $(Z_1, \ldots, Z_n)$ uma amostra i.i.d. de densidade

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}, \qquad x \in (0,1), \quad \theta > 0,$$

e $f_\theta(x) = 0$ caso contrário. (Trata-se de uma Beta$(\theta, 1)$.)

EMV de θ. A verossimilhança é

$$L(\theta; \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, z_i^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} z_i^{\theta-1} = \theta^n \Big(\prod_{i=1}^{n} z_i\Big)^{\theta-1}.$$

A log-verossimilhança é

$$\ell(\theta) = \log L(\theta; \mathbf{z}) = n \log\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} \log z_i.$$

Derivando e igualando a zero,

$$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log z_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log Z_i}.$$

A segunda derivada é

$$\ell''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \quad (\theta > 0),$$

logo o ponto crítico é máximo global. Assim,

$$\boxed{\widehat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log Z_i}}.$$

Momentos e probabilidades. Para $X \sim f_\theta$, para $a > -\theta$,

$$\mathbb{E}_\theta(X^a) = \int_0^1 x^a\, \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^{a+\theta-1} dx = \frac{\theta}{a+\theta}.$$

Em particular,

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \frac{\theta}{\theta+1}, \qquad \mathbb{E}_\theta(X^2) = \frac{\theta}{\theta+2}, \qquad \mathrm{Var}_\theta(X) = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}.$$

Para $0 < a < b \le 1$,

$$P_\theta(a < X < b) = \int_a^b \theta x^{\theta-1} dx = \Big[x^\theta\Big]_a^b = b^\theta - a^\theta.$$

(a) $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta(Z)$**.**

$$\mathbb{E}_\theta(Z) = \frac{\theta}{\theta+1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\widehat{g}_{(a)} = \frac{\widehat{\theta}_{MV}}{\widehat{\theta}_{MV} + 1}}.$$

(b) $g(\theta) = P_\theta(Z > 0.3)$.

$$P_\theta(Z > 0.3) = 1 - P_\theta(0 < Z \leq 0.3) = 1 - (0.3)^\theta \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\widehat{g}_{(b)} = 1 - (0.3)^{\widehat{\theta}_{MV}}}.$$

(c) $g(\theta) = P_\theta(0 < Z < 0.1)$.

$$P_\theta(0 < Z < 0.1) = (0.1)^\theta \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\widehat{g}_{(c)} = (0.1)^{\widehat{\theta}_{MV}}}.$$

(d) $g(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(Z)$.

$$\mathrm{Var}_\theta(Z) = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\widehat{g}_{(d)} = \frac{\widehat{\theta}_{MV}}{(\widehat{\theta}_{MV}+1)^2(\widehat{\theta}_{MV}+2)}}.$$

(e) Estimativas numéricas. Dados: (0.12, 0.50, 0.20, 0.23, 0.30, 0.11). Com $n = 6$,

$$\sum_{i=1}^{n} \log z_i = \log(0.12) + \log(0.50) + \log(0.20) + \log(0.23) + \log(0.30) + \log(0.11) \approx -9.3038.$$

Logo,

$$\widehat{\theta}_{MV} = -\frac{6}{-9.3038} \approx 0.6449.$$

Então,

$$\widehat{g}_{(a)} = \frac{\widehat{\theta}}{1+\widehat{\theta}} \approx \frac{0.6449}{1.6449} \approx 0.3921,$$

$$\widehat{g}_{(b)} = 1 - (0.3)^{\widehat{\theta}} \approx 1 - (0.3)^{0.6449} \approx 0.5400,$$

$$\widehat{g}_{(c)} = (0.1)^{\widehat{\theta}} \approx (0.1)^{0.6449} \approx 0.2265,$$

$$\widehat{g}_{(d)} = \frac{\widehat{\theta}}{(\widehat{\theta}+1)^2(\widehat{\theta}+2)} \approx \frac{0.6449}{(1.6449)^2(2.6449)} \approx 0.0901.$$

Resumo: $\widehat{\theta}_{MV} = -n/\sum \log Z_i \approx 0.6449$ e, por invariância, as estimativas de (a)–(d) são os valores de $g(\theta)$ avaliados em $\widehat{\theta}$ como mostrado acima.