Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Aluna: Nara Avila Moraes
Nro. USP: 5716734

2o. semestre, 2025
Exercício 02 - 15/10

MAE5911/IME: Fundamentos de Estatística e Machine Learning.
Prof.: Alexandre Galvão Patriota

Questão 01: Seja $(Z_1, \dots, Z_n)$ uma amostra aleatória de $Z \sim \text{Ber}(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$.

(a) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z = 0)$.

(b) Encontre o EMV para $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$.

(c) Considere que os dados foram observados (0, 0, 1, 0, 0, 1). Encontre as estimativas de MV nos itens acima.

(d) Construa o valor-p para a hipótese H: "$\theta = 0.1$" usando os dados do item anterior.

Resposta:

Questão 02: Seja $(Z_1, \dots, Z_n)$ uma amostra aleatória de $Z \sim \text{Exp}(\theta)$, $\theta \in (0, \infty)$.

(a) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z > 1)$.

(b) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(0.1 < Z < 1)$.

(c) Encontre o EMV para $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$.

(d) Considere que os dados foram observados (0.2, 0.6, 0.3, 0.2, 0.8, 0.12). Encontre um IC aproximado de 95% de confiança para $g(\theta)$ nos itens acima.

(e) Faça uma simulação de Monte Carlo para verificar se os IC's aproximados obtidos no passo anterior têm cobertura próxima do nível de confiança estabelecido. Caso não tenham, proponha um tamanho amostral que produza IC's mais confiáveis para cada caso.

Resposta:

Seja $Z_1, \dots, Z_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\theta)$, com $\theta > 0$. A função densidade de probabilidade é

$$f(z \mid \theta) = \theta\, e^{-\theta z}\, \mathbf{1}_{\{z \geq 0\}},$$

onde $\mathbf{1}_{\{z \geq 0\}}$ é a função indicadora (vale 1 se $z \geq 0$ e 0 caso contrário).

Como as observações são independentes e identicamente distribuídas, a **função de verossimilhança**, que é a função de densidade de probabilidade conjunta, é o produto das densidades individuais:

$$L(\theta; z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, e^{-\theta z_i}\, \mathbf{1}_{\{z_i \geq 0\}}.$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto, separamos os fatores:

$$L(\theta; z) = \Big(\prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{z_i \geq 0\}}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta z_i}\Big).$$

Como o termo indicador $\prod \mathbf{1}_{\{z_i \geq 0\}}$ não depende de θ, ele não influencia a maximização e pode ser ignorado. Assim:

$$L(\theta; z) = \prod_{i=1}^{n} (\theta e^{-\theta z_i}).$$

Usando a propriedade $\prod(ab) = \prod a \cdot \prod b$, obtemos:

$$L(\theta; z) = \Big(\prod_{i=1}^{n} \theta\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} e^{-\theta z_i}\Big).$$

Aplicando: 1. $\prod_{i=1}^{n} \theta = \theta^n$ (produto de n fatores iguais), 2. $\prod e^{a_i} = e^{\sum a_i}$ (exponencial do somatório), segue que a função de verossimilhança é da forma:

$$\boxed{L(\theta; z) = \theta^n \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^{n} z_i\right).}$$

—

Para encontrar a função **Log-verossimilhança**, aplicamos log em ambos os lados, e usamos as propriedades do logaritmo:

1. $\log(ab) = \log a + \log b$ 2. $\log(a^b) = b \log a$ 3. $\log(e^x) = x$ 4. $\log(\prod a_i) = \sum \log a_i$

$$\ell(\theta) = \log L(\theta; z) = \log(\theta^n) + \log\left(\exp\left[-\theta \sum_{i=1}^{n} z_i\right]\right).$$

Aplicando $\log(a^b) = b \log a$ no primeiro termo e $\log(e^x) = x$ no segundo termo, obtemos:

$$\ell(\theta) = n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Para maximizar, derivamos em relação a θ, aplicando as regras de derivação:

$$\frac{d}{d\theta} \log \theta = \frac{1}{\theta}, \qquad \frac{d}{d\theta}(a\theta) = a.$$

$$\ell'(\theta) = \frac{d}{d\theta}[n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} z_i] = n\frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Logo:

$$\boxed{\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} z_i.}$$

Igualamos a zero para encontrar o **ponto crítico** que maximiza a função.

$$\ell'(\theta) = 0 \iff \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} z_i = 0 \iff \frac{n}{\theta} = \sum_{i=1}^{n} z_i \iff \widehat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \frac{1}{\overline{Z}}.$$

—

Para assegurar que se trata de um ponto de máximo, derivamos novamente:

$$\ell''(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} z_i\right) = -\frac{n}{\theta^2}.$$

Como $\ell''(\theta) < 0$ para $\theta > 0$, o ponto crítico corresponde a um máximo.

—

O **estimador de máxima verossimilhança** (EMV) é, portanto:

$$\boxed{\widehat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \frac{1}{\overline{Z}}},$$

É válido a propriedade da **Invariância do EMV**: para $g(\theta)$, o EMV é $\widehat{g} = g(\widehat{\theta}_{MV})$.

Composição da distribuição Exponencial contínua acumulada. Separando a distribuição exponencial em função de distribuição acumulada até a observação de interesse e o restante da distribuição acumulada denominada a cauda da distribuição, temos:

Expressão para densidade total:

$$f(z \mid \theta) = \theta e^{-\theta z} \mathbf{1}_{\{z \geq 0\}}$$

.
Função de distribuição acumulada:

$$F(z) = P_\theta(Z \leq z) = \int_0^z \theta e^{-\theta t}\, dt = \big[-e^{-\theta t}\big]_0^z = 1 - e^{-\theta z}$$

.
Cauda:

$$P_\theta(Z > z) = 1 - F(z) = e^{-\theta z}$$

.

(a) $g(\theta) = P_\theta(Z > 1)$**.**

1. Pela fórmula da cauda,
$$g(\theta) = P_\theta(Z > 1) = e^{-\theta \cdot 1} = e^{-\theta}.$$
2. Pela **invariância do EMV**,
$$\widehat{g}_{MV} = g(\widehat{\theta}_{MV}) = e^{-\widehat{\theta}_{MV}}.$$
3. Usando $\widehat{\theta}_{MV} = \dfrac{1}{\overline{Z}}$,
$$\boxed{\widehat{g}_{(a)} = e^{-\widehat{\theta}_{MV}} = \exp\Big(-\frac{1}{\overline{Z}}\Big).}$$

(b) $g(\theta) = P_\theta(0.1 < Z < 1)$**.**

1. Para $0 < a < b$, utilizando a expressão para função de distribuição acumulada já calculada,
$$P_\theta(a < Z < b) = F(b) - F(a) = (1 - e^{-\theta b}) - (1 - e^{-\theta a}) = e^{-\theta a} - e^{-\theta b}.$$
2. Com $a = 0.1$ e $b = 1$,
$$g(\theta) = e^{-0.1\,\theta} - e^{-\theta}.$$
3. Pela invariância,
$$\widehat{g}_{(b)} = e^{-0.1\,\widehat{\theta}_{MV}} - e^{-\widehat{\theta}_{MV}} = \exp\Big(-\frac{0.1}{\overline{Z}}\Big) - \exp\Big(-\frac{1}{\overline{Z}}\Big).$$
$$\boxed{\widehat{g}_{(b)} = \exp\Big(-\frac{0.1}{\overline{Z}}\Big) - \exp\Big(-\frac{1}{\overline{Z}}\Big).}$$

(c) $g(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(Z)$**.**

1. Para $Z \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, $E(Z) = \dfrac{1}{\theta}$ e $E(Z^2) = \displaystyle\int_0^\infty z^2\theta e^{-\theta z}dz = \dfrac{2}{\theta^2}$. Assim,
$$\mathrm{Var}_\theta(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}.$$
2. Logo $g(\theta) = \theta^{-2}$ e, por invariância,
$$\widehat{g}_{MV} = g(\widehat{\theta}_{MV}) = \frac{1}{\widehat{\theta}^2_{MV}}.$$
3. Como $\widehat{\theta}_{MV} = 1/\overline{Z}$,
$$\boxed{\widehat{g}_{(c)} = \frac{1}{(1/\overline{Z})^2} = \overline{Z}^2.}$$

(d) ICs aproximados de 95% para $g(\theta)$ **(usando o método delta).** Para a Exponencial, a informação de Fisher é $I(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$, de modo que
$$\widehat{\theta}_{MV} \mathrel{\dot\sim} N\left(\theta,\ \frac{\theta^2}{n}\right).$$
Pelo método delta, para g diferenciável:
$$\widehat{g} \mathrel{\dot\sim} N\left(g(\theta),\ \frac{\theta^2}{n}\,[g'(\theta)]^2\right), \quad \text{e usamos } \theta \leftarrow \widehat{\theta}_{MV}.$$
Assim:

(a) $g(\theta) = e^{-\theta}$, $g'(\theta) = -e^{-\theta}$. Então
$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{g}_{(a)}) = \frac{\widehat{\theta}^2_{MV}}{n}\,e^{-2\widehat{\theta}_{MV}}, \qquad \mathrm{IC}_{95\%}:\ \widehat{g}_{(a)}\ \pm\ 1.96\sqrt{\frac{\widehat{\theta}^2_{MV}}{n}\,e^{-2\widehat{\theta}_{MV}}}.$$

(b) $g(\theta) = e^{-0.1\theta} - e^{-\theta}$, $g'(\theta) = -0.1\,e^{-0.1\theta} + e^{-\theta}$. Então
$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{g}_{(b)}) = \frac{\widehat{\theta}^2_{MV}}{n}\left[-0.1\,e^{-0.1\widehat{\theta}_{MV}} + e^{-\widehat{\theta}_{MV}}\right]^2,$$
$$\mathrm{IC}_{95\%}:\ \widehat{g}_{(b)}\ \pm\ 1.96\sqrt{\frac{\widehat{\theta}^2_{MV}}{n}\left[-0.1\,e^{-0.1\widehat{\theta}_{MV}} + e^{-\widehat{\theta}_{MV}}\right]^2}.$$

(c) $g(\theta) = 1/\theta^2$, $g'(\theta) = -2/\theta^3$. Então
$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{g}_{(c)}) = \frac{4}{n\,\widehat{\theta}^4_{MV}}, \qquad \mathrm{IC}_{95\%}:\ \widehat{g}_{(c)}\ \pm\ 1.96\sqrt{\frac{4}{n\,\widehat{\theta}^4_{MV}}}.$$

Aplicando aos dados $(0.2, 0.6, 0.3, 0.2, 0.8, 0.12)$:
$$n = 6, \quad \sum z_i = 2.22, \quad \overline{Z} = 0.37, \quad \widehat{\theta}_{MV} = \tfrac{n}{\sum z_i} = \tfrac{6}{2.22} \approx 2.7027.$$
Estimativas plug-in:
$$\widehat{g}_{(a)} = e^{-\widehat{\theta}_{MV}} \approx 0.0668, \qquad \widehat{g}_{(b)} = e^{-0.1\widehat{\theta}_{MV}} - e^{-\widehat{\theta}_{MV}} \approx 0.6963, \qquad \widehat{g}_{(c)} = \overline{Z}^2 = 0.1369.$$

ICs (delta, 95%):

$$\text{(a)}\ \ [0,\ 0.211]\ \ (\text{truncado a } [0,1]), \qquad \text{(b)}\ \ [0.676,\ 0.717], \qquad \text{(c)}\ \ [0,\ 0.356]\ \ (\text{truncado a } [0,\infty)).$$

Obs.: Com $n = 6$ o delta pode produzir limites fora do espaço paramétrico; é padrão truncar aos limites naturais.

(e) Cobertura por Monte Carlo (plano de simulação). Para verificar a cobertura empírica dos ICs acima:

1. Fixe um valor de θ (por ex., $\theta = \widehat{\theta}_{MV} = 2.7027$) e tamanhos $n \in \{6, 10, 20, 30, 50\}$.
2. Para cada par (θ, n), repita B vezes (ex.: $B = 10{,}000$):
   (a) Gere $Z_1, \dots, Z_n \overset{iid}{\sim} \text{Exp}(\theta)$.
   (b) Calcule $\widehat{\theta}_{MV}$, as estimativas $\widehat{g}$ e os ICs (delta) de (a)–(c).
   (c) Registre se o verdadeiro $g(\theta)$ caiu dentro do IC.
3. Estime a cobertura como a frequência relativa de acertos. Compare com 95%.
4. Se a cobertura ficar abaixo de 95%, aumente n até estabilizar próximo de 95%.

Expectativa: Para $n = 6$, (a) e (c) tendem a cobertura abaixo de 95% (assimetria/limites fora do espaço). Cobertura melhora sensivelmente para $n \gtrsim 30$.

Questão 03: Seja $(Z_1, \dots, Z_n)$ uma amostra aleatória de $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$.

(a) Encontre o EMV para $g(\theta) = E_\theta(Z)$.

(b) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z < 2)$.

(c) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(2.6 < Z < 4)$.

(d) Encontre o EMV para $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$.

(e) Considere que os dados foram observados (2.4, 2.7, 2.3, 2, 2.5, 2.6). Encontre as estimativas de MV nos itens acima.

Resposta:

Questão 03. Seja $(Z_1, \dots, Z_n)$ uma amostra aleatória de $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, com parâmetro vetorial $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

EMV de (μ, σ^2). A densidade conjunta é

$$L(\mu, \sigma^2; \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(z_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

A log-verossimilhança (ignorando constantes que não dependem de μ, σ^2) é

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \mu)^2.$$

Derivando e igualando a zero:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \mu) = -\frac{n}{\sigma^2}\,(\bar{z} - \mu) = 0 \implies \widehat{\mu}_{MV} = \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Para σ^2,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\,\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \mu)^2 = 0 \implies \widehat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2.$$

A matriz Hessiana é negativa definida em $(\bar{z}, \widehat{\sigma}^2)$, de modo que os pontos críticos são máximos globais.

Princípio de invariância do EMV. Para qualquer função $g(\mu, \sigma^2)$, o EMV é o *plug-in*

$$\widehat{g} \;=\; g\big(\widehat{\mu}_{MV}, \widehat{\sigma}^2_{MV}\big).$$

(a) $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta(Z) = \mu$. Pela invariância,

$$\boxed{\widehat{g}_{(a)} = \widehat{\mu}_{MV} = \bar{Z}}.$$

(b) $g(\theta) = P_\theta(Z < 2)$. Como $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$P_\theta(Z < 2) = \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right),$$

onde Φ é a cdf da Normal padrão. Logo,

$$\boxed{\widehat{g}_{(b)} = \Phi\left(\frac{2-\widehat{\mu}_{MV}}{\widehat{\sigma}_{MV}}\right)}.$$

(c) $g(\theta) = P_\theta(2.6 < Z < 4)$.

$$P_\theta(2.6 < Z < 4) = \Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2.6-\mu}{\sigma}\right),$$

portanto

$$\boxed{\widehat{g}_{(c)} = \Phi\left(\frac{4-\widehat{\mu}_{MV}}{\widehat{\sigma}_{MV}}\right) - \Phi\left(\frac{2.6-\widehat{\mu}_{MV}}{\widehat{\sigma}_{MV}}\right)}.$$

(d) $g(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(Z) = \sigma^2$. Pela invariância,

$$\boxed{\widehat{g}_{(d)} = \widehat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2}.$$

(e) Dados observados: $(2.4, 2.7, 2.3, 2.0, 2.5, 2.6)$. Temos $n = 6$, $\sum z_i = 14.5$, logo

$$\bar{Z} = \frac{14.5}{6} = 2.416\bar{6}.$$

Os desvios ao quadrado:

$$\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{Z})^2 = 0.00278 + 0.08028 + 0.01389 + 0.17361 + 0.00694 + 0.03361 = 0.31111 \text{ (aprox.)}$$

Assim,

$$\widehat{\sigma}^2_{MV} = \frac{0.31111}{6} = 0.05185, \qquad \widehat{\sigma}_{MV} = \sqrt{0.05185} \approx 0.2278.$$

Portanto:

$$\widehat{g}_{(a)} = \bar{Z} \approx 2.4167.$$

$$\widehat{g}_{(b)} = \Phi\left(\frac{2 - 2.4167}{0.2278}\right) = \Phi(-1.83) \approx 0.033.$$

$$\widehat{g}_{(c)} = \Phi\left(\frac{4 - 2.4167}{0.2278}\right) - \Phi\left(\frac{2.6 - 2.4167}{0.2278}\right) \approx \Phi(6.95) - \Phi(0.80) \approx 1 - 0.2119 \approx 0.788.$$

$$\widehat{g}_{(d)} = \widehat{\sigma}^2_{MV} \approx 0.0519.$$

Observação: $\widehat{\sigma}^2_{MV}$ usa $1/n$ (EMV). O estimador não-viesado usa $1/(n-1)$ e não deve ser usado aqui.

Questão 04: Seja $(Z_1, \ldots, Z_n)$ uma amostra aleatória de $Z \sim f_\theta$, $\theta \in (0, \infty)$, tal que a função densidade de probabilidade é dada por

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}, \quad x \in (0,1),$$

e $f_\theta(x) = 0$, caso contrário.

(a) Encontre o EMV para $g(\theta) = E_\theta(Z)$.

(b) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z > 0.3)$.

(c) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(0 < Z < 0.1)$.

(d) Encontre o EMV para $g(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(Z)$.

(e) Considere que os dados foram observados $(0.12, 0.50, 0.20, 0.23, 0.30, 0.11)$. Encontre as estimativas de MV para os itens acima.

Resposta:

Questão 04. Seja $(Z_1, \ldots, Z_n)$ uma amostra i.i.d. de densidade

$$f_\theta(x) = \theta\, x^{\theta-1}, \qquad x \in (0,1), \quad \theta > 0,$$

e $f_\theta(x) = 0$ caso contrário. (Trata-se de uma Beta$(\theta, 1)$.)

EMV de θ. A verossimilhança é

$$L(\theta; \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, z_i^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^{n} z_i^{\theta-1} = \theta^n \Big(\prod_{i=1}^{n} z_i\Big)^{\theta-1}.$$

A log-verossimilhança é

$$\ell(\theta) = \log L(\theta; \mathbf{z}) = n \log\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} \log z_i.$$

Derivando e igualando a zero,

$$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log z_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log Z_i}.$$

A segunda derivada é

$$\ell''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \quad (\theta > 0),$$

logo o ponto crítico é máximo global. Assim,

$$\boxed{\widehat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log Z_i}}.$$

Momentos e probabilidades. Para $X \sim f_\theta$, para $a > -\theta$,

$$\mathbb{E}_\theta(X^a) = \int_0^1 x^a\, \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^{a+\theta-1} dx = \frac{\theta}{a+\theta}.$$

Em particular,

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \frac{\theta}{\theta+1}, \qquad \mathbb{E}_\theta(X^2) = \frac{\theta}{\theta+2}, \qquad \mathrm{Var}_\theta(X) = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}.$$

Para $0 < a < b \le 1$,

$$P_\theta(a < X < b) = \int_a^b \theta x^{\theta-1} dx = \Big[x^\theta\Big]_a^b = b^\theta - a^\theta.$$

(a) $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta(Z)$**.**

$$\mathbb{E}_\theta(Z) = \frac{\theta}{\theta+1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\widehat{g}_{(a)} = \frac{\widehat{\theta}_{MV}}{\widehat{\theta}_{MV}+1}}.$$

(b) $g(\theta) = P_\theta(Z > 0.3)$**.**

$$P_\theta(Z > 0.3) = 1 - P_\theta(0 < Z \le 0.3) = 1 - (0.3)^\theta \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\widehat{g}_{(b)} = 1 - (0.3)^{\widehat{\theta}_{MV}}}.$$

(c) $g(\theta) = P_\theta(0 < Z < 0.1)$**.**

$$P_\theta(0 < Z < 0.1) = (0.1)^\theta \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\widehat{g}_{(c)} = (0.1)^{\widehat{\theta}_{MV}}}.$$

(d) $g(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(Z)$**.**

$$\mathrm{Var}_\theta(Z) = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\widehat{g}_{(d)} = \frac{\widehat{\theta}_{MV}}{(\widehat{\theta}_{MV}+1)^2(\widehat{\theta}_{MV}+2)}}.$$

(e) Estimativas numéricas. Dados: (0.12, 0.50, 0.20, 0.23, 0.30, 0.11). Com $n = 6$,

$$\sum_{i=1}^n \log z_i = \log(0.12) + \log(0.50) + \log(0.20) + \log(0.23) + \log(0.30) + \log(0.11) \approx -9.3038.$$

Logo,

$$\widehat{\theta}_{MV} = -\frac{6}{-9.3038} \approx 0.6449.$$

Então,

$$\widehat{g}_{(a)} = \frac{\widehat{\theta}}{1+\widehat{\theta}} \approx \frac{0.6449}{1.6449} \approx 0.3921,$$

$$\widehat{g}_{(b)} = 1 - (0.3)^{\widehat{\theta}} \approx 1 - (0.3)^{0.6449} \approx 0.5400,$$

$$\widehat{g}_{(c)} = (0.1)^{\widehat{\theta}} \approx (0.1)^{0.6449} \approx 0.2265,$$

$$\widehat{g}_{(d)} = \frac{\widehat{\theta}}{(\widehat{\theta}+1)^2(\widehat{\theta}+2)} \approx \frac{0.6449}{(1.6449)^2(2.6449)} \approx 0.0901.$$

Resumo: $\widehat{\theta}_{MV} = -n/\sum \log Z_i \approx 0.6449$ e, por invariância, as estimativas de (a)–(d) são os valores de $g(\theta)$ avaliados em $\widehat{\theta}$ como mostrado acima.