

MAE5911/IME: Fundamentos de Estatística e Machine Learning. Prof.: Alexandre Galvão Patriota

Questão 01: Seja (Z_1, \dots, Z_n) uma amostra aleatória de $Z \sim \text{Ber}(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$.

- (a) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z = 0)$.
- (b) Encontre o EMV para $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$.
- (c) Considere que os dados foram observados $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$. Encontre as estimativas de MV nos itens acima.
- (d) Construa o valor-p para a hipótese $H: \theta = 0.1$ usando os dados do item anterior.

Podemos calcular os itens (a) e (b) utilizando a propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança (EMV).

Teorema (Invariância do EMV). Seja $\hat{\theta}_{MV}$ o estimador de máxima verossimilhança de um parâmetro $\theta \in \Theta$ e seja $g : \Theta \rightarrow \mathcal{G}$ uma função. Então o estimador de máxima verossimilhança de

$$\tau = g(\theta)$$

é dado por

$$\hat{\tau}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}).$$

Isto é, para obter o EMV de qualquer função de θ , basta aplicar essa função ao EMV de θ .

Cálculo do EMV de θ ($\hat{\theta}_{MV}$)

Função de verossimilhança

Seja z_1, \dots, z_n uma amostra aleatória de $Z \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$. Com:

$$P_\theta(z_i = 1) = \theta, \quad P_\theta(z_i = 0) = 1 - \theta.$$

A função de probabilidade para $Z = z_i$ é então:

$$f(z_i; \theta) = \theta^{z_i} (1 - \theta)^{1-z_i}.$$

Como z_1, \dots, z_n são independentes, a probabilidade conjunta, definida como a função de verossimilhança é o produto das densidades individuais:

$$\ell(\theta, z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n \theta^{z_i} (1 - \theta)^{1-z_i}.$$

Utilizando a propriedade de produto de exponenciais, temos:

$$\ell(\theta, z_1, \dots, z_n) = \theta^{\sum_{i=1}^n z_i} (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n (1-z_i)} = \theta^{\sum_{i=1}^n z_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n z_i}.$$

Seja

$$S = \sum_{i=1}^n z_i,$$

Podemos escrever:

$$\ell(\theta, S) = \theta^S (1 - \theta)^{n-S}.$$

Função Log-verossimilhança

Podemos simplificar os cálculos trabalhando com o logaritmo desta função, mantendo o estimador de máxima verossimilhança inalterado, uma vez que este trata-se do ponto crítico desta função. Maximizar $\ell(\theta)$ ou $\mathcal{L}(\theta) = \log \ell(\theta)$ é equivalente, devido ao fato do logaritmo ser estritamente crescente. Portanto, aplicando o logaritmo, simplificamos para:

$$\mathcal{L}(\theta, S) = \log \ell(\theta, S) = \log (\theta^S (1 - \theta)^{n-S}) = S \log \theta + (n - S) \log(1 - \theta).$$

Ponto crítico da log-verossimilhança

Calculando a derivada de $\mathcal{L}(\theta, S)$ em relação a θ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, S)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [S \log \theta + (n - S) \log(1 - \theta)] = S \cdot \frac{1}{\theta} + (n - S) \cdot \left(-\frac{1}{1 - \theta} \right) = \frac{S}{\theta} - \frac{n - S}{1 - \theta}.$$

Seja a condição de máximo onde está definido $\hat{\theta}_{MV}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, S)}{\partial \theta} = 0 \iff \frac{S}{\hat{\theta}_{MV}} - \frac{n - S}{1 - \hat{\theta}_{MV}} = 0.$$

$$\frac{S}{\hat{\theta}_{MV}} = \frac{n - S}{1 - \hat{\theta}_{MV}}.$$

$$S(1 - \hat{\theta}_{MV}) = \hat{\theta}_{MV}(n - S).$$

$$S - S\hat{\theta}_{MV} = n\hat{\theta}_{MV} - S\hat{\theta}_{MV}.$$

Os termos $-S\hat{\theta}_{MV}$ cancelam em ambos os lados, restando:

$$S = n\hat{\theta}_{MV}.$$

Isolando $\hat{\theta}_{MV}$:

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \frac{S}{n}}.$$

Estimador de máxima verossimilhança

Substituindo de volta em função da variável aleatória z_i , obtemos:

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \bar{Z}.$$

Teste de hipótese

O teste de hipótese é formulado como um framework de decisão. No processo de decisão existem dois possíveis cenários de enganos, sendo que ambos não podem ser reduzidos simultaneamente, a menos do aumento da amostra, e se um cenário de engano diminui o seu complementar aumenta. Escolhe-se por arbitrariedade priorizar a mitigação do erro **falso positivo**, em detrimento do erro **falso negativo**. Desta forma a hipótese nula é definida como a hipótese que se deseja refutar. Entretanto, o teste é construído para que haja apenas uma baixa probabilidade, comumente 5%, de que H_0 seja refutada, ou seja, a sua rejeição é definida como um evento raro. Consequentemente, quando ela é rejeitada, considera-se que o processo de decisão está com uma margem de

erro suficientemente reduzida, de acordo com o nível de significância escolhido, que reflete a magnitude do erro tolerado.

Deste framework, o valor-p é a métrica que caracteriza a amostra observada no cenário em que a hipótese nula é verdadeira. O valor-p então calculado é comparado com o nível de significância escolhido para que a decisão de rejeitar ou não a hipótese nula seja tomada.

(a) $g(\theta) = P_\theta(Z = 0)$

$$g(\theta) = P_\theta(Z = 0) = 1 - \theta.$$

Pelo teorema da **invariância do EMV**:

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}) = 1 - \hat{\theta}_{MV}.$$

Já encontramos que $\hat{\theta}_{MV} = \bar{Z}$, então:

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = 1 - \bar{Z}}.$$

(b) $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$

A variância é encontrada por:

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2.$$

Pela definição de esperança para variáveis discretas,

$$E(Z) = \sum_{z \in \{0,1\}} z P(Z = z).$$

Mas $P(Z = 1) = \theta$ e $P(Z = 0) = 1 - \theta$, então:

$$E(Z) = 0 \cdot (1 - \theta) + 1 \cdot \theta = \theta.$$

$E(Z^2) = E(Z) = \theta$ (pois $Z \in \{0, 1\}$), então:

$$\text{Var}_\theta(Z) = \theta - \theta^2 = \theta(1 - \theta).$$

Portanto:

$$g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z) = \theta(1 - \theta).$$

Pela **invariância do EMV**:

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}) = \hat{\theta}_{MV}(1 - \hat{\theta}_{MV}).$$

Para $\hat{\theta}_{MV} = \bar{Z}$, encontramos:

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = \bar{Z}(1 - \bar{Z})}.$$

(c) **Sejam os dados observados:** (0, 0, 1, 0, 0, 1)

Para o cálculo da média: $n = 6$ e $\sum z_i = 2$, portanto

$$\hat{\theta}_{MV} = \bar{Z} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Assim:

$$(a) \quad \hat{g}_{MV} = P_{\theta}(\widehat{Z} = 0) = 1 - \bar{Z} = \frac{2}{3},$$

$$(b) \quad \hat{g}_{MV} = \widehat{\text{Var}}_{\theta}(Z) = \bar{Z}(1 - \bar{Z}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

(d) **Teste de hipótese** $H_0 : \theta = 0.1$

Na distribuição de Bernoulli, o parâmetro θ representa a probabilidade de sucesso, equivalente à média. Se supormos que a hipótese nula é verdadeira, o valor-p dos dados observados em relação a H_0 é:

Dados amostrados:

$$(0, 0, 1, 0, 0, 1)$$

Sob a hipótese nula $\theta = 0.1$, contruímos X :

$$X \sim \text{Binomial}(n = 6, \theta = 0.1).$$

A estatística de interesse é a média amostral ou probabilidade de sucessos. Em relação à amostra observada, é:

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 z_i = \frac{1}{6} * 2 = \frac{1}{3}.$$

Vamos analisar a média da amostra contra a média testada (a média da hipótese nula). O valor-p então é definido a partir de: no cenário em que H_0 é válida, ou seja, temos uma distribuição de Bernoulli com média = 0.1, qual a probabilidade de observar média $\bar{Z} = 1/3$ ou maior? O posicionamento da média observada em relação à média testada indica a direção do teste.

$$p = P_{H_0} \left(\bar{Z} \geq \frac{1}{3} \right).$$

Como $X = \sum_{i=1}^6 z_i$, $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ e $n = 6$:

$$\bar{Z} = \frac{X}{6}.$$

Então,

$$\bar{Z} \geq \frac{1}{3} \iff \frac{X}{6} \geq \frac{1}{3} \iff X \geq 2.$$

Logo, o valor- p é:

$$p = P_{H_0}(X \geq 2),$$

$$p = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6).$$

Cada termo é dado por:

$$P(X = k) = \binom{6}{k} (0.1)^k (0.9)^{6-k}.$$

Portanto:

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} (0.1)^2 (0.9)^4 = 15 \cdot 0.01 \cdot 0.6561 = 0.098415.$$

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} (0.1)^3 (0.9)^3 = 20 \cdot 0.001 \cdot 0.729 = 0.01458.$$

$$P(X = 4) = \binom{6}{4} (0.1)^4 (0.9)^2 = 15 \cdot 0.0001 \cdot 0.81 = 0.001215.$$

$$P(X = 5) = \binom{6}{5} (0.1)^5 (0.9) = 6 \cdot 0.00001 \cdot 0.9 = 0.000054.$$

$$P(X = 6) = \binom{6}{6} (0.1)^6 = 1 \cdot 0.000001 = 0.000001.$$

Assim, o valor-p é:

$$p = 0.098415 + 0.01458 + 0.001215 + 0.000054 + 0.000001 = 0.114265.$$

Pela conservação da probabilidade, seria mais simples calcular o valor-p pelo seu valor complementar:

$$\bar{p} = P_{H0}(X < 2) = (1 - p)$$

$$P(X = 0) = (0.9)^6 = 0.531441, \quad P(X = 1) = \binom{6}{1} (0.1)(0.9)^5 = 0.354294.$$

Logo:

$$\bar{p} = 1 - p = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.531441 + 0.354294 = 0.885735.$$

$\text{valor-p} = 1 - 0.885735 = 0.114265$

Considerando um nível de significância $\alpha = 0.05$ não há evidências suficientes para rejeitar H_0 , isto é, para supor que a média seja diferente de 0.1.

Questão 02: Seja (Z_1, \dots, Z_n) uma amostra aleatória de $Z \sim \text{Exp}(\theta)$, $\theta \in (0, \infty)$.

- (a) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z > 1)$.
- (b) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(0.1 < Z < 1)$.
- (c) Encontre o EMV para $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$.
- (d) Considere que os dados foram observados (0.2, 0.6, 0.3, 0.2, 0.8, 0.12). Encontre um IC aproximado de 95% de confiança para $g(\theta)$ nos itens acima.
- (e) Faça uma simulação de Monte Carlo para verificar se os IC's aproximados obtidos no passo anterior têm cobertura próxima do nível de confiança estabelecido. Caso não tenham, proponha um tamanho amostral que produza IC's mais confiáveis para cada caso.

Podemos calcular os ítems (a), (b) e (c) utilizando a propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança (EMV), calculando uma única vez $\hat{\theta}_{MV}$.

Cálculo do EMV de θ ($\hat{\theta}_{MV}$) para a distribuição Exponencial

Função de verossimilhança

Seja (z_1, \dots, z_n) uma amostra aleatória de $Z \sim \text{Exp}(\theta)$, com $\theta \in (0, \infty)$, a função densidade de probabilidade para z_i é então:

$$f(z_i; \theta) = \theta e^{-\theta z_i}, \quad z_i > 0.$$

Como z_1, \dots, z_n são independentes, a probabilidade conjunta, definida como a função de verossimilhança é o produto das densidades individuais:

$$\ell(\theta; z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n f(z_i | \theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta z_i} \mathbf{1}_{\{z_i > 0\}}.$$

O termo indicador $\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{z_i > 0\}}$ não depende de θ , logo não influencia a maximização e pode ser ignorado. Assim,

$$\ell(\theta; z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta z_i}.$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto e de produto de exponenciais, obtemos:

$$\ell(\theta; z_1, \dots, z_n) = \left(\prod_{i=1}^n \theta \right) \left(\prod_{i=1}^n e^{-\theta z_i} \right) = \theta^n \exp \left(-\theta \sum_{i=1}^n z_i \right).$$

Seja

$$S = \sum_{i=1}^n z_i,$$

Podemos escrever:

$$\ell(\theta, S) = \theta^n \exp(-\theta S).$$

Função log-verossimilhança

Para simplificar os cálculos, trabalhamos com a função logaritmo da verossimilhança $\mathcal{L}(\theta, S)$:

$$\mathcal{L}(\theta, S) = \log \ell(\theta, S) = \log(\theta^n) + \log(\exp(-\theta S)).$$

Usando as propriedades $\log(a^b) = b \log a$ e $\log(e^x) = x$, obtemos

$$\mathcal{L}(\theta, S) = n \log \theta - \theta S.$$

Ponto crítico da log-verossimilhança

Calculando a derivada de $\mathcal{L}(\theta, S)$ em relação a θ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, S)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [n \log \theta - \theta S] = n \cdot \frac{1}{\theta} - S \cdot 1 = \frac{n}{\theta} - S.$$

Seja a condição de máximo onde está definido $\hat{\theta}_{MV}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, S)}{\partial \theta} = 0 \iff \frac{n}{\hat{\theta}_{MV}} - S = 0 \iff \frac{n}{\hat{\theta}_{MV}} = S.$$

Isolando $\hat{\theta}_{MV}$:

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\bar{Z}},$$

Estimador de máxima verossimilhança

Substituindo de volta em função da variável aleatória z_i , obtemos:

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n z_i} = \frac{1}{\bar{Z}},$$

Composição da distribuição Exponencial contínua acumulada. Separando a distribuição exponencial em função de distribuição acumulada até a observação de interesse e o restante da distribuição acumulada denominada a cauda da distribuição, temos:

Expressão para densidade total:

$$f(z_i | \theta) = \theta e^{-\theta z_i} \mathbf{1}_{\{z_i \geq 0\}}.$$

Função de distribuição acumulada:

$$F(z) = P_{\theta}(Z \leq z) = \int_0^z \theta e^{-\theta t} dt = [-e^{-\theta t}]_0^z = 1 - e^{-\theta z}.$$

Cauda:

$$P_{\theta}(Z > z) = 1 - F(z) = e^{-\theta z}.$$

(a) $g(\theta) = P_{\theta}(Z > 1)$

Integrando a função densidade de probabilidade $f(z_i, \theta)$ para encontrar $P_{\theta}(Z > 1)$:

$$g(\theta) = P_{\theta}(Z > 1) = \int_1^{\infty} f(z, \theta) dz = \int_1^{\infty} \theta e^{-\theta z} dz.$$

Calculando a integral:

$$\int_1^{\infty} \theta e^{-\theta z} dz = [-e^{-\theta z}]_{z=1}^{\infty} = 0 - (-e^{-\theta}) = e^{-\theta}.$$

Portanto,

$$g(\theta) = e^{-\theta}.$$

Pela **invariância do EMV**, o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta)$ é

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}).$$

Já encontramos que $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{Z}}$ para distribuição Exponencial, então:

$$\hat{g}_{MV} = e^{-\hat{\theta}_{MV}} = \exp\left(-\frac{1}{\bar{Z}}\right).$$

(b) $g(\theta) = P_{\theta}(0.1 < Z < 1)$

Integrando a função densidade de probabilidade $f(z_i, \theta)$ para encontrar $P_\theta(0.1 < Z < 1)$:

$$g(\theta) = P_\theta(0.1 < Z < 1) = \int_{0.1}^1 f(z, \theta) dz = \int_{0.1}^1 \theta e^{-\theta z} dz.$$

Calculando a integral:

$$\int_{0.1}^1 \theta e^{-\theta z} dz = \left[-e^{-\theta z} \right]_{z=0.1}^1 = -e^{-\theta} - (-e^{-0.1\theta}) = e^{-0.1\theta} - e^{-\theta}.$$

Logo,

$$g(\theta) = e^{-0.1\theta} - e^{-\theta}.$$

Pela **invariância do EMV**,

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}) = e^{-0.1\hat{\theta}_{MV}} - e^{-\hat{\theta}_{MV}}.$$

Substituindo $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{Z}}$, obtemos:

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = \exp\left(-\frac{0.1}{\bar{Z}}\right) - \exp\left(-\frac{1}{\bar{Z}}\right)}.$$

(c) $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$

A variância é encontrada por:

$$\text{Var}(Z) = E_\theta(Z^2) - (E_\theta(Z))^2.$$

Pela definição de esperança para variáveis contínuas, sendo $h(z)$ a função de interesse:

$$E_\theta(h(Z)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) f(z; \theta) dz.$$

Em particular, a esperança do primeiro e segundo momentos de Z , são:

$$E_\theta(Z) = \int_0^\infty z \theta e^{-\theta z} dz = [-ze^{-\theta z}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\theta z} dz = 0 + \left[-\frac{1}{\theta} e^{-\theta z}\right]_0^\infty = 0 + \left(0 - \left(-\frac{1}{\theta}\right)\right) = \frac{1}{\theta}.$$

e

$$E_\theta(Z^2) = \int_0^\infty z^2 \theta e^{-\theta z} dz = \int_0^\infty \left(\frac{y}{\theta}\right)^2 \theta e^{-y} \frac{dy}{\theta} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy = \frac{1}{\theta^2} \cdot 2! = \frac{2}{\theta^2}.$$

Então:

$$\text{Var}_\theta(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{2}{\theta^2} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}.$$

Portanto:

$$g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Pela **invariância do EMV**,

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{1}{\hat{\theta}_{MV}^2}.$$

Substituindo $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{Z}}$, obtemos:

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = \bar{Z}^2}.$$

Questão 03: Seja (Z_1, \dots, Z_n) uma amostra aleatória de $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$.

- (a) Encontre o EMV para $g(\theta) = E_\theta(Z)$.
- (b) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(Z < 2)$.
- (c) Encontre o EMV para $g(\theta) = P_\theta(2.6 < Z < 4)$.
- (d) Encontre o EMV para $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$.
- (e) Considere que os dados foram observados (2.4, 2.7, 2.3, 2, 2.5, 2.6). Encontre as estimativas de MV nos itens acima.

Podemos calcular os itens (a), (b), (c) e (d) utilizando a propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança (EMV), calculando uma única vez $\hat{\theta}_{MV}$.

Cálculo do EMV de θ ($\hat{\theta}_{MV}$) para a distribuição Normal

Função de verossimilhança

Seja (z_1, \dots, z_n) uma amostra aleatória de $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, com parâmetro $\theta = (\mu, \sigma^2) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$.

A função densidade de probabilidade para z_i é

$$f(z_i; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Como z_1, \dots, z_n são independentes, a função de verossimilhança é o produto das densidades individuais:

$$\ell(\mu, \sigma^2; z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n f(z_i; \mu, \sigma^2).$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto e de produto de exponenciais, obtemos:

$$\ell(\mu, \sigma^2; z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2\right).$$

Seja

$$S = \sum_{i=1}^n z_i \quad e \quad Q = \sum_{i=1}^n z_i^2, \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (z_i^2 - 2\mu z_i + \mu^2) = Q - 2\mu S + n\mu^2.$$

Podemos escrever:

$$\ell(\mu, \sigma^2, S, Q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp(Q - 2\mu S + n\mu^2).$$

Para simplificar os cálculos, trabalhamos com a função logaritmo da verossimilhança $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)$:

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q) = \log \ell(\mu, \sigma^2, S, Q) = \log \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \right] + \log \left[\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(Q - 2\mu S + n\mu^2)\right) \right],$$

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (Q - 2\mu S + n\mu^2).$$

Calculando a derivada de $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)$ em relação a μ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \mu} [Q - 2\mu S + n\mu^2] = -\frac{1}{2\sigma^2} (-2S + 2n\mu) = \frac{S - n\mu}{\sigma^2}.$$

Seja a condição de máximo onde está definido $\hat{\mu}_{MV}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)}{\partial \mu} = 0 \iff \frac{S - n\hat{\mu}_{MV}}{\sigma^2} = 0 \iff S - n\hat{\mu}_{MV} = 0.$$

Isolando $\hat{\mu}_{MV}$:

$$\boxed{\hat{\mu}_{MV} = \frac{S}{n}}.$$

Calculando a derivada de $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)$ em relação a σ^2 :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left[\frac{1}{2\sigma^2} (Q - 2\mu S + n\mu^2) \right] = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{Q - 2\mu S + n\mu^2}{(\sigma^2)^2}.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)}{\partial \sigma^2} = \frac{-n(\sigma^2) + (Q - 2\mu S + n\mu^2)}{2(\sigma^2)^2}.$$

Seja a condição de máximo onde está definido $\hat{\sigma}_{MV}^2$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\hat{\mu}_{MV}, \sigma^2, S, Q)}{\partial \sigma^2} = 0 \iff -n(\hat{\sigma}_{MV}^2) + (Q - 2\hat{\mu}_{MV}S + n\hat{\mu}_{MV}^2) = 0.$$

Isolando $\hat{\sigma}_{MV}^2$:

$$n\hat{\sigma}_{MV}^2 = Q - 2\hat{\mu}_{MV}S + n\hat{\mu}_{MV}^2 = Q - \frac{S^2}{n}, \quad \text{para} \quad \hat{\mu}_{MV} = \frac{S}{n}.$$

Assim,

$$n\hat{\sigma}_{MV}^2 = Q - \frac{S^2}{n}.$$

Finalmente:

$$\boxed{\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \left(Q - \frac{S^2}{n} \right)}$$

Estimador de máxima verossimilhança

Substituindo de volta em função da variável aleatória z_i , obtemos:

$$\hat{\mu}_{MV} = \frac{S}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \bar{Z}$$

$$\boxed{\hat{\mu}_{MV} = \bar{Z}}$$

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \left(Q - \frac{S^2}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 - \frac{(n\bar{Z})^2}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 - n\bar{Z}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 - 2\bar{Z}n\bar{Z} + n\bar{Z}^2 \right)$$

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 - 2\bar{Z} \sum_{i=1}^n z_i + n\bar{Z}^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i^2 - 2z_i\bar{Z} + \bar{Z}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2$$

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2$$

(a) $g(\theta) = E_\theta(Z)$

Pela definição de esperança para variáveis contínuas, sendo $h(z)$ a função de interesse:

$$E_\theta(h(Z)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) f(z; \theta) dz.$$

Em particular, a esperança do primeiro momento de Z , é:

$$E_\theta(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \mu,$$

$$E_\theta(Z) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$E_\theta(Z) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\sigma(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} y \phi_\sigma(y) dy = \mu \cdot 1 + 0 = \mu.$$

Então:

$$g(\theta) = g(\mu, \sigma^2) = E_\theta(Z) = \mu.$$

Pela invariância do EMV,

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\mu}_{MV}, \hat{\sigma}_{MV}^2) = \hat{\mu}_{MV} = \bar{Z}.$$

Portanto,

$$\hat{g}_{MV} = \bar{Z}.$$

(b) $g(\theta) = P_\theta(Z < 2)$

Seja a função distribuição acumulada da Normal padrão $N(0, 1)$ definida por:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Integrando a função densidade de probabilidade $f(z_i; \mu, \sigma^2)$ para encontrar $P_\theta(Z < 2)$, obtemos:

$$P_\theta(Z < 2) = \int_{-\infty}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(z-\mu)^2/(2\sigma^2)} dz = \int_{-\infty}^{\frac{2-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right),$$

Assim, expressamos o resultado em termos de Φ :

$$g(\theta) = g(\mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right).$$

Pela **invariância do EMV**, o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta)$ é:

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\mu}_{MV}, \hat{\sigma}_{MV}^2) = \Phi\left(\frac{2 - \hat{\mu}_{MV}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{MV}^2}}\right) = \Phi\left(\frac{2 - \bar{Z}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{MV}^2}}\right) = \Phi\left(\frac{(2 - \bar{Z})\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2}}\right)$$

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = \Phi\left(\frac{(2 - \bar{Z})\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2}}\right)}$$

(c) $g(\theta) = P_\theta(2.6 < Z < 4)$

De forma similar, podemos decompor a probabilidade em termos da função de distribuição acumulada da Normal padrão $N(0, 1)$:

$$P_\theta(2.6 < Z < 4) = P_\theta(Z < 4) - P_\theta(Z \leq 2.6) = \Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{2.6 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right).$$

Logo,

$$g(\theta) = g(\mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{2.6 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right).$$

Pela **invariância do EMV**, o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta)$ é

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\mu}_{MV}, \hat{\sigma}_{MV}^2) = \Phi\left(\frac{4 - \bar{Z}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{MV}^2}}\right) - \Phi\left(\frac{2.6 - \bar{Z}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{MV}^2}}\right),$$

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = \Phi\left(\frac{(4 - \bar{Z})\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2}}\right) - \Phi\left(\frac{(2.6 - \bar{Z})\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2}}\right)}.$$

(d) $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$

A variância é encontrada por:

$$\text{Var}(Z) = E_\theta(Z^2) - (E_\theta(Z))^2.$$

Pela definição de esperança para variáveis contínuas, sendo $h(z)$ a função de interesse:

$$E_\theta(h(Z)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) f(z; \theta) dz.$$

Em particular, a esperança do primeiro e segundo momentos de Z , são:

$$E_\theta(Z) = \mu.$$

e

$$E_\theta(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dz.$$

3) Ligação com Γ . Recorde a função Gama: $\Gamma(t) = \int_0^\infty u^{t-1} e^{-u} du$. Vale a identidade clássica

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Logo,

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1.$$

4) Construção alternativa (razão de Gammas). Se $U \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ e $V \sim \text{Gamma}(\beta, 1)$ são independentes e definimos

$$X = \frac{U}{U + V} \in (0, 1), \quad T = U + V \in (0, \infty),$$

então $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.

Esboço da prova: O jacobiano da transformação $(u, v) \mapsto (x, t)$ é $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, t)} \right| = t$. O conjunto transformado é $\{0 < x < 1, t > 0\}$. A densidade conjunta de (X, T) é

$$f_{X,T}(x, t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} e^{-t}.$$

Integrando t em $(0, \infty)$,

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,T}(x, t) dt = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}.$$

5) Momentos (fórmulas conhecidas). Para $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$,

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

No caso particular $\text{Beta}(\theta, 1)$, obtém-se

$$E[X] = \frac{\theta}{\theta + 1}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\theta}{(\theta + 1)^2(\theta + 2)}.$$

Distribuição Beta. A distribuição Beta é contínua no intervalo $(0, 1)$, com densidade

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1,$$

onde $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$ é a função Beta. No caso particular $\text{Beta}(\theta, 1)$,

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1,$$

e a normalização é verificada por

$$\int_0^1 \theta x^{\theta-1} dx = 1.$$

Modelo. Se $X \sim \text{Beta}(\theta, 1)$, então a densidade é

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

Esperança $E[X]$. Usamos a definição (caso contínuo) e regras elementares de integração:

$$E[X] = \int_0^1 x f_\theta(x) dx = \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^\theta dx.$$

Propriedade usada: $\int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1}$ para $a > -1$.

Como $\theta > 0$, segue que

$$E[X] = \theta \cdot \frac{1}{\theta + 1} = \boxed{\frac{\theta}{\theta + 1}}.$$

Segundo momento $E[X^2]$. De modo análogo,

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 f_\theta(x) dx = \int_0^1 x^2 \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^{\theta+1} dx = \theta \cdot \frac{1}{\theta + 2} = \boxed{\frac{\theta}{\theta + 2}}.$$

Variância $\text{Var}(X)$. Pela definição, $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$:

$$\text{Var}(X) = \frac{\theta}{\theta + 2} - \left(\frac{\theta}{\theta + 1} \right)^2 = \frac{\theta(\theta + 1)^2 - \theta^2(\theta + 2)}{(\theta + 2)(\theta + 1)^2}.$$

Álgebra no numerador:

$$\theta(\theta + 1)^2 - \theta^2(\theta + 2) = \theta(\theta^2 + 2\theta + 1) - \theta^2(\theta + 2) = \theta^3 + 2\theta^2 + \theta - \theta^3 - 2\theta^2 = \theta.$$

Logo,

$$\text{Var}(X) = \boxed{\frac{\theta}{(\theta + 1)^2(\theta + 2)}}.$$

O parâmetro θ controla a concentração: valores $\theta < 1$ favorecem x próximos de 0, $\theta > 1$ favorecem x próximos de 1, e $\theta = 1$ dá a distribuição uniforme.

Função de verossimilhança. Como as observações são independentes e identicamente distribuídas, a densidade conjunta é o produto das individuais:

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1}.$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto:

$$L(\theta; x) = \theta^n \prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1} = \theta^n \exp \left\{ (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i \right\}.$$

—

Função log-verossimilhança. Usando as propriedades dos logaritmos:

- (i) $\log(ab) = \log a + \log b$,
- (ii) $\log(a^b) = b \log a$,
- (iii) $\log \left(\prod_i a_i \right) = \sum_i \log a_i$,

temos:

$$\ell(\theta) = \log L(\theta; x) = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i.$$

—

Derivada primeira. Aplicando as propriedades diferenciais:

$$\frac{d}{d\theta} \log \theta = \frac{1}{\theta}, \quad \frac{d}{d\theta} [(\theta - 1)c] = c,$$

obtemos:

$$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log x_i.$$

—

Ponto crítico (máxima verossimilhança). Igualando a derivada a zero:

$$\ell'(\theta) = 0 \iff \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log x_i = 0 \iff \boxed{\hat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log x_i}}.$$

Como $0 < x_i < 1$, temos $\log x_i < 0$, logo o estimador é positivo.

—

Segunda derivada.

$$\ell''(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{n}{\theta} \right) = -\frac{n}{\theta^2} < 0,$$

garantindo que o ponto crítico é um *máximo*.

—

Resultado final (EMV).

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log X_i}}, \quad X_i \in (0, 1).$$

—

Observações.

- O estimador de máxima verossimilhança é sempre positivo, pois $\log X_i < 0$.
- A estatística suficiente é $T = -\sum_{i=1}^n \log X_i$, que segue uma distribuição $\text{Gamma}(n, \text{taxa} = \theta)$.
- Pela *invariância do EMV*, para qualquer função $g(\theta)$,

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}).$$

Por exemplo, para $g(\theta) = P_\theta(X > c) = 1 - c^\theta$, tem-se

$$\hat{g}_{MV} = 1 - c^{\hat{\theta}_{MV}}.$$

Questão 04. Seja (Z_1, \dots, Z_n) uma amostra i.i.d. de densidade

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad x \in (0, 1), \quad \theta > 0,$$

e $f_\theta(x) = 0$ caso contrário. (Trata-se de uma $\text{Beta}(\theta, 1)$.)

EMV de θ . A verossimilhança é

$$L(\theta; \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^n \theta z_i^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^n z_i^{\theta-1} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n z_i \right)^{\theta-1}.$$

A log-verossimilhança é

$$\ell(\theta) = \log L(\theta; \mathbf{z}) = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log z_i.$$

Derivando e igualando a zero,

$$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log z_i = 0 \implies \hat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log Z_i}.$$

A segunda derivada é

$$\ell''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \quad (\theta > 0),$$

logo o ponto crítico é máximo global. Assim,

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log Z_i}}.$$

Momentos e probabilidades. Para $X \sim f_\theta$, para $a > -\theta$,

$$\mathbb{E}_\theta(X^a) = \int_0^1 x^a \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^{a+\theta-1} dx = \frac{\theta}{a+\theta}.$$

Em particular,

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \frac{\theta}{\theta+1}, \quad \mathbb{E}_\theta(X^2) = \frac{\theta}{\theta+2}, \quad \text{Var}_\theta(X) = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}.$$

Para $0 < a < b \leq 1$,

$$P_\theta(a < X < b) = \int_a^b \theta x^{\theta-1} dx = \left[x^\theta \right]_a^b = b^\theta - a^\theta.$$

(a) $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta(Z)$.

$$\mathbb{E}_\theta(Z) = \frac{\theta}{\theta+1} \implies \boxed{\hat{g}_{(a)} = \frac{\hat{\theta}_{MV}}{\hat{\theta}_{MV}+1}}.$$

(b) $g(\theta) = P_\theta(Z > 0.3)$.

$$P_\theta(Z > 0.3) = 1 - P_\theta(0 < Z \leq 0.3) = 1 - (0.3)^\theta \implies \boxed{\hat{g}_{(b)} = 1 - (0.3)^{\hat{\theta}_{MV}}}.$$

(c) $g(\theta) = P_\theta(0 < Z < 0.1)$.

$$P_\theta(0 < Z < 0.1) = (0.1)^\theta \implies \boxed{\hat{g}_{(c)} = (0.1)^{\hat{\theta}_{MV}}}.$$

(d) $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$.

$$\text{Var}_\theta(Z) = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)} \implies \boxed{\hat{g}_{(d)} = \frac{\hat{\theta}_{MV}}{(\hat{\theta}_{MV}+1)^2(\hat{\theta}_{MV}+2)}}.$$

(e) **Estimativas numéricas.** Dados: (0.12, 0.50, 0.20, 0.23, 0.30, 0.11). Com $n = 6$,

$$\sum_{i=1}^n \log z_i = \log(0.12) + \log(0.50) + \log(0.20) + \log(0.23) + \log(0.30) + \log(0.11) \approx -9.3038.$$

Logo,

$$\hat{\theta}_{MV} = -\frac{6}{-9.3038} \approx 0.6449.$$

Então,

$$\hat{g}_{(a)} = \frac{\hat{\theta}}{1+\hat{\theta}} \approx \frac{0.6449}{1.6449} \approx 0.3921,$$

$$\hat{g}_{(b)} = 1 - (0.3)^{\hat{\theta}} \approx 1 - (0.3)^{0.6449} \approx 0.5400,$$

$$\hat{g}_{(c)} = (0.1)^{\hat{\theta}} \approx (0.1)^{0.6449} \approx 0.2265,$$

$$\hat{g}_{(d)} = \frac{\hat{\theta}}{(\hat{\theta} + 1)^2(\hat{\theta} + 2)} \approx \frac{0.6449}{(1.6449)^2(2.6449)} \approx 0.0901.$$

Resumo: $\hat{\theta}_{MV} = -n/\sum \log Z_i \approx 0.6449$ e, por invariância, as estimativas de (a)–(d) são os valores de $g(\theta)$ avaliados em $\hat{\theta}$ como mostrado acima.