

## MAC5911/IME: Fundamentos de Estatística e Machine Learning. Prof.: Alexandre Galvão Patriota

**Questão 01:** Apresente um texto de no máximo duas páginas que introduza uma medida de possibilidade condicional, incluindo pelo menos um exemplo numérico e um teorema. Sugiro que leia o paper do Friedman e Halpern (1995) e busque referências adicionais sobre o assunto que estejam publicadas em revistas internacionais. Por exemplo, os autores Didier Dubois e Henry Prade estudaram o assunto em vários artigos.

**Questão 02:** Na discussão sobre 'The Dutch Book Argument', considere um jogador que não utiliza probabilidades e a banca escolhe uma configuração para explorar a perda certa que o jogador terá. Apresente:

- (2.1) Os valores numéricos de  $P(H,E)$  diferentes dos discutidos em sala para cada "H1", "H2", e "H1 U H2";
- (2.2) As apostas escolhidas pela banca para explorar a perda certa do jogador;
- (2.3) A tabela demonstrando que, em todas as possibilidades, o jogador perde para a banca;
- (2.4) Comentários sobre os resultados.

### Resposta para o Questão 01

#### Introdução à Medida de Possibilidade Condicional

## 1. Para Além da Probabilidade: A Teoria da Possibilidade

No campo da modelagem da incerteza, a Teoria da Probabilidade é a ferramenta predominante, baseada numa axiomática aditiva que descreve a frequência de eventos. Contudo, em muitas situações do mundo real, especialmente em sistemas de inteligência artificial e raciocínio humano, a incerteza não provém da aleatoriedade, mas sim da incompletude ou da imprecisão da informação. Para lidar com este tipo de incerteza, a Teoria da Possibilidade, introduzida por L. A. Zadeh e extensivamente desenvolvida por Didier Dubois e Henri Prade, oferece um arcabouço matemático alternativo e complementar.

A teoria baseia-se em uma distribuição de possibilidade,  $\pi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , que atribui a cada elemento  $\omega$  do universo de discurso  $\Omega$  um grau de possibilidade, onde  $\pi(\omega) = 1$  significa que  $\omega$  é totalmente possível e  $\pi(\omega) = 0$  significa que é impossível. A partir de  $\pi$ , duas medidas duais são definidas para qualquer evento  $A \subseteq \Omega$ :

- **Medida de Possibilidade ( $\Pi$ ):** Avalia o grau em que o evento  $A$  é consistente com a informação disponível. É definida como  $\Pi(A) = \sup_{\omega \in A} \pi(\omega)$ . Esta medida satisfaz a propriedade axiomática:  $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$ .
- **Medida de Necessidade ( $N$ ):** Avalia o grau em que o evento  $A$  é certamente implicado pela informação. É definida como  $N(A) = 1 - \Pi(A^c)$ , onde  $A^c$  é o complementar de  $A$ .

A grande vantagem deste formalismo é a sua capacidade de distinguir entre a falta de crença e a descrença. Se  $N(A) = 0$ , não significa que  $A$  é falso, mas apenas que não há evidência que o torne necessário.

## 2. Condicionamento Possibilístico: Atualizando Crenças

Assim como a probabilidade condicional é essencial para a atualização de crenças no modelo probabilístico, a possibilidade condicional é crucial para a revisão de crenças possibilísticas quando uma nova informação, um evento  $B$ , é observada. O objetivo é definir  $\Pi(A|B)$ , o grau de possibilidade de um evento  $A$  dado que  $B$  ocorreu.

A relação fundamental é:

$$\Pi(A \cap B) = \min(\Pi(A|B), \Pi(B)).$$

**Definição:** A medida de possibilidade condicional de um evento  $A$  dado um evento  $B$ , com  $\Pi(B) > 0$ , é definida como:

$$\Pi(A|B) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Pi(A \cap B) = \Pi(B), \\ \Pi(A \cap B) & \text{se } \Pi(A \cap B) < \Pi(B). \end{cases}$$

### 3. Um Teorema Fundamental: A Lei da Possibilidade Total

De forma análoga à Lei da Probabilidade Total, existe um teorema correspondente na Teoria da Possibilidade:

**Teorema (Lei da Possibilidade Total):** Seja  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  uma partição do universo  $\Omega$ . Então, para qualquer evento  $A \subseteq \Omega$ , sua possibilidade incondicional pode ser calculada a partir das possibilidades condicionais:

$$\Pi(A) = \max_{i=1, \dots, n} \Pi(A \cap B_i) = \max_{i=1, \dots, n} \min(\Pi(A|B_i), \Pi(B_i)).$$

### 4. Exemplo Numérico: Diagnóstico Médico

Suponha que um paciente pode ter uma de três doenças mutuamente exclusivas:  $D_1$  (Gripe),  $D_2$  (Virose Comum) ou  $D_3$  (Alergia). A distribuição inicial é:

$$\pi(D_1) = 1.0, \quad \pi(D_2) = 0.8, \quad \pi(D_3) = 0.4.$$

Um sintoma  $S$  (febre alta) é observado, com possibilidades condicionais:

$$\Pi(S|D_1) = 0.9, \quad \Pi(S|D_2) = 0.5, \quad \Pi(S|D_3) = 0.1.$$

**Passo 1:** Calcular a possibilidade do sintoma  $S$ :

$$\Pi(S) = \max\{\min(0.9, 1.0), \min(0.5, 0.8), \min(0.1, 0.4)\} = \max\{0.9, 0.5, 0.1\} = 0.9.$$

**Passo 2:** Calcular as possibilidades atualizadas (posteriores):

- Para  $D_1$ :  $\Pi(D_1|S) = 1.0$ .
- Para  $D_2$ :  $\Pi(D_2|S) = 0.5$ .
- Para  $D_3$ :  $\Pi(D_3|S) = 0.1$ .

**Resultado:** Após observar febre alta, a nova distribuição é:

$$\pi(D_1|S) = 1.0, \quad \pi(D_2|S) = 0.5, \quad \pi(D_3|S) = 0.1.$$

Resposta para o Ítem 2.1

---

Resposta para o Ítem 2.2

---

Resposta para o Ítem 2.3

---

Resposta para o Ítem 2.4

---

@inproceedingsfriedman1995plausibility, author = Nir Friedman and Joseph Y. Halpern, title = Plausibility Measures: A User's Guide, booktitle = Proceedings of the Eleventh Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'95), year = 1995, pages = 249–258, publisher = Morgan Kaufmann Publishers Inc., address = San Francisco, CA, USA

@articledubois2006possibility, author = Didier Dubois and Henri Prade, title = Possibility Theory and its Applications: A Retrospective and Prospective View, journal = International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, year = 2006, volume = 14, number = 06, pages = 623–641, publisher = World Scientific Publishing Company

@articledubois1994survey, author = Didier Dubois and Henri Prade, title = A survey of belief revision and updating rules in various uncertainty models, journal = International Journal of Intelligent Systems, year = 1994, volume = 9, number = 7, pages = 611–644, publisher = Wiley

@articledubois2003stand, author = Didier Dubois and Henri Prade, title = Possibility theory and its applications: where do we stand?, journal = Fuzzy Sets and Systems, year = 2003, volume = 140, number = 2, pages = 223–252, publisher = Elsevier

@articledubois1991conditioning, author = Didier Dubois and Henri Prade, title = Conditioning in possibility and evidence theories — a logical viewpoint, journal = Artificial Intelligence, year = 1991, volume = 50, number = 3, pages = 365–379, publisher = Elsevier

@articlepuhalskii1997large, author = Anatolii A. Puhalskii, title = Large deviations of the long-term distribution of a non-Markov process, journal = Stochastic Processes and their Applications, year = 1997, volume = 68, number = 1, pages = 45–72, publisher = Elsevier