Universidade de São Paulo 2o. semestre, 2025
Instituto de Matemática e Estatística Prova - 04/11
Aluna: Nara Avila Moraes
Nro. USP: 5716734

MAE5911/IME: Fundamentos de Estatística e Machine Learning.
Prof.: Alexandre Galvão Patriota

Questão 01: Defina formalmente o valor-p (**aproximado**) para testar uma hipótese geral e discuta os problemas de interpretação usuais ao utilizar a sua versão condicional à hipótese nula. Apresente um exemplo numérico e simulações de Monte Carlo, usando um modelo de regressão Poisson, para ilustrar a sua aplicação.

Questão 02: Apresente um Teorema da Aproximação Universal que generalize o Teorema de Funahashi, discuta as diferenças entre os resultados por meio de exemplos de redes neurais.

Questão 03: Proponha uma função de estimação robusta para estimar os parâmetros de uma regressão Binomial, $Y|X = x \sim \text{Bin}(m, \mu_\theta(x))$, em que $\mu_\theta(\cdot)$ é uma função com imagem em $[0, 1]$ e θ é o vetor de parâmetros. Apresente um exemplo numérico e uma simulação de Monte Carlo, como feito em sala, para ilustrar os resultados. Perturbe a distribuição dos dados e mostre que a sua proposta é de fato robusta contra essa perturbação.

Resposta para o Questão 01

O conceito do p-valor, tal como proposto originalmente por *Fisher* (1925), é uma medida **condicional sob** H_0, definida por

$$\text{valor-p}(H_0, z_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta^{(n)}\big(T_{H_0}(Z_n) \geq T_{H_0}(z_n)\big),$$

isto é, a probabilidade de se observar uma estatística tão extrema quanto a obtida, assumindo H_0 verdadeira. O valor-p foi concebido por Fisher como um *instrumento de contraste* entre o dado e hipótese, mas não como uma medida de verdade. Seu objetivo era expressar o grau de incompatibilidade empírica entre o fenômeno observado e as consequências lógicas de H_0.

Posteriormente, a escola *Neyman–Pearson* reinterpretou esse conceito dentro de uma estrutura de decisão. Nessa transição, o valor-p perdeu seu caráter exploratório e passou a ser tratado como um critério binário, externo e supostamente não condicionado a H_0, capaz de expressar a decisão: “rejeita” ou “não rejeita” H_0. Esta leitura gerou um equívoco lógico: o valor-p, que é definido dentro do universo em que H_0 é verdadeira, passou a ser interpretado como se pudesse mensurar a probabilidade de H_0 ser verdadeira.

O **valor-p assintótico**, que é o valor usualmente utilizado, na ausência da distribuição exata de T_{H_0}, é definido por:

$$p^{(a)}(H_0, z_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(W_\theta \geq T_{H_0}(z_n)),$$

em que W_θ representa a distribuição-limite de T_{H_0} quando $n \to \infty$.

Confirmando essa natureza epistêmica, o valor-p assintótico nem sempre converge para o valor-p exato, isto porque, estando definido condicionalmente a H_0, pode não ser sensível a falhas estruturais do modelo, como a ausência de independência entre as observações, a presença de hipóteses condicionais aninhadas, ou a violação das condições de regularidade que garantem a validade assintótica — como homocedasticidade.

Por isso, o valor-p deve ser entendido apenas como originalmente proposto — uma **medida de discrepância entre o real e o teórico** — que opera em um único sentido: como evidência contra a hipótese nula, mas nunca para confirmá-la.

Em termos das σ-álgebras envolvidas, a construção inferencial pode ser representada como uma sequência de aplicações mensuráveis, onde cada espaço de probabilidade possui a sua própria σ-álgebra, refletindo níveis distintos de abstração:

$$(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n) \xrightarrow{Z_n} (\mathcal{Z}_n, \mathcal{B}_{Z_n}, \mathbb{P}_{Z_n}) \xrightarrow{T} (\mathcal{T}_n, \mathcal{B}_{T_n}, \mathbb{P}_{T_n}).$$

- $\mathcal{F}_n$ — descreve o universo empírico de incertezas, isto é, os eventos do mundo observável;

- $\mathcal{B}_{Z_n}$ — corresponde ao espaço amostral modelado, onde as variáveis aleatórias Z_n são definidas sob $\mathbb{P}_{Z_n}$;
- $\mathcal{B}_{T_n}$ — é a σ-álgebra induzida pela estatística T, onde vivem as distribuições teóricas dos testes e, em particular, o valor-p.

O valor-p pertence ao universo lógico em que a hipótese nula H_0 é assumida como verdadeira. Ele não pertence à σ-álgebra empírica $\mathcal{F}_n$, e portanto não pode ser interpretado como uma probabilidade sobre o mundo real ou sobre a veracidade de H_0. Tratá-lo dessa forma constitui um erro de violação da σ-álgebra — um deslize epistemológico em que se tenta extrair informação empírica de uma construção em sua definição epistêmica condicional e autoreferente.

O exemplo numérico apresentado na Listing 1, baseado em um modelo de regressão Poisson, ilustra precisamente como o valor-p assintótico se comporta sob diferentes regimes de validade do modelo.

Nas simulações de Monte Carlo realizadas sob H_0, os p-valores mostraram-se aproximadamente uniformes, reproduzindo o comportamento esperado quando as condições assintóticas são satisfeitas. No entanto, ao introduzir pequenas violações, como superdispersão ou dependência entre observações, a distribuição dos p-valores tornou-se assimetricamente inclinada, evidenciando a sua sensibilidade à estrutura do modelo.

Esse resultado empírico confirma que a discrepância entre o valor-p exato e o assintótico não é meramente numérica, mas reflete o descompasso lógico entre o universo ideal de H_0 e o comportamento real dos dados.

```r
# Parâmetros
n      = 200
beta0  = 1
beta1  = 0.3     # valor verdadeiro
alpha  = 0.05
M      = 10000

# Covariável x
x = runif(n, 0, 2)

# Função auxiliar: ajuste GLM Poisson e teste H0: beta1 = 0
teste_poisson = function(y, x) {

  m_full = glm(y ~ x, family = poisson)
  m_red  = glm(y ~ 1, family = poisson)

  # Estatísticas de teste
  LR = 2 * (logLik(m_full)[1] - logLik(m_red)[1])
  W  = (coef(m_full)[2] / sqrt(vcov(m_full)[2,2]))^2
  S  = NA   # (score não implementado neste exemplo simples)

  p_lr = 1 - pchisq(LR, 1)
  p_w  = 1 - pchisq(W,  1)

  return(c(p_lr = p_lr, p_w = p_w))
}
```

Listing 1: Exemplo numérico e simulação de Monte Carlo — Regressão Poisson

Resposta para o Questão 02

Resposta para o Questão 03
