Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Aluna: Nara Avila Moraes
Nro. USP: 5716734

2o. semestre, 2025
Prova - 04/11

MAE5911/IME: Fundamentos de Estatística e Machine Learning.
Prof.: Alexandre Galvão Patriota

Questão 01: Defina formalmente o valor-p (**aproximado**) para testar uma hipótese geral e discuta os problemas de interpretação usuais ao utilizar a sua versão condicional à hipótese nula. Apresente um exemplo numérico e simulações de Monte Carlo, usando um modelo de regressão Poisson, para ilustrar a sua aplicação.

Questão 02: Apresente um Teorema da Aproximação Universal que generalize o Teorema de Funahashi, discuta as diferenças entre os resultados por meio de exemplos de redes neurais.

Questão 03: Proponha uma função de estimação robusta para estimar os parâmetros de uma regressão Binomial, $Y|X = x \sim \text{Bin}(m, \mu_\theta(x))$, em que $\mu_\theta(\cdot)$ é uma função com imagem em $[0, 1]$ e θ é o vetor de parâmetros. Apresente um exemplo numérico e uma simulação de Monte Carlo, como feito em sala, para ilustrar os resultados. Perturbe a distribuição dos dados e mostre que a sua proposta é de fato robusta contra essa perturbação.

Resposta para o Questão 01

O valor-p, tal como proposto originalmente por *Fisher* (1925), é uma medida **condicional sob** H_0, definida por

$$p(H_0, z_n) = P_\theta^{(n)}\big(T_{H_0}(Z_n) \geq T_{H_0}(z_n) \mid H_0\big),$$

isto é, a probabilidade de se observar uma estatística tão extrema quanto a obtida, assumindo H_0 verdadeira. O valor-p foi concebido por Fisher como um *instrumento de contraste* entre dado e hipótese, e não como uma medida de verdade. Seu objetivo era expressar o grau de incompatibilidade empírica entre o fenômeno observado e as consequências lógicas de H_0.

Posteriormente, a escola Neyman–Pearson reinterpretou esse conceito dentro de uma estrutura de decisão. Nessa transição, o valor-p perdeu seu caráter exploratório e passou a ser tratado como um critério binário, expresso por: "rejeita" ou "não rejeita" H_0. Essa leitura gerou um equívoco lógico: o valor-p, que é definido dentro do universo em que H_0 é verdadeira, passou a ser interpretado como se dissesse algo sobre a probabilidade de H_0 ser verdadeira.

Na ausência da distribuição exata de T_{H_0}, o **valor-p assintótico** é definido por:

$$p^{(a)}(H_0, z_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(W_\theta \geq T_{H_0}(z_n)),$$

em que W_θ representa a distribuição-limite de T_{H_0} quando $n \to \infty$. Essa versão não é um aprimoramento do valor exato, mas uma *idealização teórica*: o cálculo passa a ocorrer em um mundo em que o tamanho da amostra tende ao infinito e as condições de regularidade são perfeitamente satisfeitas. Nesse sentido, o valor-p aproximado não se aproxima da verdade empírica, mas de uma coerência lógica interna ao modelo.

Assim, o valor-p nunca mede a probabilidade de H_0, mas apenas a compatibilidade entre dado e modelo, isto é, o quanto o fenômeno observado tensiona o universo hipotético que o contém. Tratá-lo como probabilidade de H_0 é tentar inferir o mundo empírico a partir de uma suposição epistemológica autorreferente e idealizada. Por isso, o valor-p deve ser entendido não como medida de crença, mas como **medida de discrepância entre o real e o teórico** — uma forma de pontuar a coerência entre o fenômeno e o modelo, e não de confirmar a verdade da hipótese nula.

Resposta para o Questão 02

Resposta para o Questão 03

Na ausência da distribuição exata de T_{H_0}, define-se o **valor-p assintótico**:

$$p^{(a)}(H_0, z_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(W_\theta \geq T_{H_0}(z_n)),$$

em que W_θ representa a distribuição-limite de T_{H_0} quando $n \to \infty$. Essa versão não é um aprimoramento do valor exato, mas uma *idealização teórica*: o cálculo passa a ocorrer em um mundo em que o tamanho da amostra tende ao infinito e as condições de regularidade são perfeitamente satisfeitas. Nesse sentido, o valor-p aproximado não se aproxima da verdade empírica, mas de uma coerência lógica interna ao modelo.

O valor-p, tal como proposto originalmente por *Fisher* (1925), é uma medida **condicional sob** H_0, definida por

$$p(H_0, z_n) = P_\theta^{(n)}\big(T_{H_0}(Z_n) \geq T_{H_0}(z_n) \mid H_0\big),$$

isto é, a probabilidade de se observar uma estatística tão extrema quanto a obtida, assumindo H_0 verdadeira. O valor-p foi concebido por Fisher como um *instrumento de contraste* entre dado e hipótese, e não como uma medida de verdade. Seu objetivo era expressar o grau de incompatibilidade empírica entre o fenômeno observado e as consequências lógicas de H_0.

Posteriormente, a escola *Neyman–Pearson* reinterpretou esse conceito dentro de uma estrutura de decisão formal, introduzindo regras fixas de rejeição, níveis de significância (α) e poder do teste. Nessa transição, o valor-p perdeu seu caráter exploratório e passou a ser tratado como um *critério binário de decisão* — "rejeita" ou "não rejeita" H_0. Essa leitura gerou um equívoco lógico: o valor-p, que é definido dentro do universo em que H_0 é verdadeira, passou a ser interpretado como se dissesse algo sobre a probabilidade de H_0 ser verdadeira.

Assim, o valor-p nunca mede a probabilidade de H_0, mas apenas a compatibilidade entre dado e modelo, isto é, o quanto o fenômeno observado tensiona o universo hipotético que o contém. Tratá-lo como probabilidade de H_0 é tentar inferir o mundo empírico a partir de uma suposição epistemológica autorreferente e idealizada. Por isso, o valor-p deve ser entendido não como medida de crença, mas como **medida de discrepância entre o real e o teórico** — uma forma de pontuar a coerência entre o fenômeno e o modelo, e não de confirmar a verdade da hipótese nula.