Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Aluna: Nara Avila Moraes
Nro. USP: 5716734

2o. semestre, 2025
Prova - 04/11

MAE5911/IME: Fundamentos de Estatística e Machine Learning. Prof.: Alexandre Galvão Patriota

Questão 01: Defina formalmente o valor-p (**aproximado**) para testar uma hipótese geral e discuta os problemas de interpretação usuais ao utilizar a sua versão condicional à hipótese nula. Apresente um exemplo numérico e simulações de Monte Carlo, usando um modelo de regressão Poisson, para ilustrar a sua aplicação.

Questão 02: Apresente um Teorema da Aproximação Universal que generalize o Teorema de Funahashi, discuta as diferenças entre os resultados por meio de exemplos de redes neurais.

Questão 03: Proponha uma função de estimação robusta para estimar os parâmetros de uma regressão Binomial, $Y|X = x \sim \text{Bin}(m, \mu_\theta(x))$, em que $\mu_\theta(\cdot)$ é uma função com imagem em $[0, 1]$ e θ é o vetor de parâmetros. Apresente um exemplo numérico e uma simulação de Monte Carlo, como feito em sala, para ilustrar os resultados. Perturbe a distribuição dos dados e mostre que a sua proposta é de fato robusta contra essa perturbação.

Resposta para o Questão 01

O conceito do p-valor, tal como proposto originalmente por *Fisher* (1925), é uma medida **condicional sob** H_0, definida por

$$\text{valor-p}(H_0, z_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta^{(n)}\big(T_{H_0}(Z_n) \geq T_{H_0}(z_n)\big),$$

isto é, a probabilidade de se observar uma estatística tão extrema quanto a obtida, assumindo H_0 verdadeira. O valor-p foi concebido por Fisher como um *instrumento de contraste* entre o dado e hipótese, mas não como uma medida de verdade. Seu objetivo era expressar o grau de incompatibilidade empírica entre o fenômeno observado e as consequências lógicas de H_0.

Posteriormente, a escola *Neyman–Pearson* reinterpretou esse conceito dentro de uma estrutura de decisão. Nessa transição, o valor-p perdeu seu caráter exploratório e passou a ser tratado como um critério binário, externo e supostamente não condicionado a H_0, capaz de expressar a decisão: “rejeita” ou “não rejeita” H_0. Esta leitura gerou um equívoco lógico: o valor-p, que é definido dentro do universo em que H_0 é verdadeira, passou a ser interpretado como se pudesse mensurar a probabilidade de H_0 ser verdadeira.

O **valor-p assintótico**, que é o valor usualmente utilizado, na ausência da distribuição exata de T_{H_0}, é definido por:

$$p^{(a)}(H_0, z_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(W_\theta \geq T_{H_0}(z_n)),$$

em que W_θ representa a distribuição-limite de T_{H_0} quando $n \to \infty$.

Confirmando essa natureza epistêmica, o valor-p assintótico nem sempre converge para o valor-p exato, isto porque, estando definido condicionalmente a H_0, pode não ser sensível a falhas estruturais do modelo, como a ausência de independência entre as observações, a presença de hipóteses condicionais aninhadas, ou a violação das condições de regularidade que garantem a validade assintótica — como homocedasticidade.

Por isso, o valor-p deve ser entendido apenas como originalmente proposto — uma **medida de discrepância entre o real e o teórico** — que opera em um único sentido: como evidência contra a hipótese nula, mas nunca para confirmá-la.

Em termos das σ-álgebras envolvidas, a construção inferencial pode ser representada como uma sequência de aplicações mensuráveis, onde cada espaço de probabilidade possui a sua própria σ-álgebra, refletindo níveis distintos de abstração:

$$(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n) \xrightarrow{Z_n} (\mathcal{Z}_n, \mathcal{B}_{Z_n}, \mathbb{P}_{Z_n}) \xrightarrow{T} (\mathcal{T}_n, \mathcal{B}_{T_n}, \mathbb{P}_{T_n}).$$

- $\mathcal{F}_n$ — descreve o universo empírico de incertezas, isto é, os eventos do mundo observável;

- $\mathcal{B}_{Z_n}$ — corresponde ao espaço amostral modelado, onde as variáveis aleatórias Z_n são definidas sob $\mathbb{P}_{Z_n}$;
- $\mathcal{B}_{T_n}$ — é a σ-álgebra induzida pela estatística T, onde vivem as distribuições teóricas dos testes e, em particular, o valor-p.

O valor-p pertence ao universo lógico em que a hipótese nula H_0 é assumida como verdadeira. Ele não pertence à σ-álgebra empírica $\mathcal{F}_n$, e portanto não pode ser interpretado como uma probabilidade sobre o mundo real ou sobre a veracidade de H_0. Tratá-lo dessa forma constitui um erro de violação da σ-álgebra — um deslize epistemológico em que se tenta extrair informação empírica de uma construção em sua definição epistêmica condicional e autoreferente.

Implementações

O exemplo numérico apresentado na Listing **??** tem o objetivo de ilustrar o comportamento do valor-p sob diferentes hipóteses nulas, mantendo fixos os dados observados. O experimento baseia-se em um modelo de regressão de Poisson definido por

$$Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), \quad \text{com} \quad \log(\lambda_i) = \theta_0 + \theta x_i,$$

onde $\theta_0 = 1$ e o valor verdadeiro do parâmetro é $\theta = 0{,}20$. Uma única amostra de tamanho $n = 200$ foi gerada segundo esse modelo, representando o conjunto de dados "observados" em um mundo empírico fixo.

A partir dessa amostra, foram testadas três hipóteses nulas distintas sobre o mesmo conjunto de dados:

$$H_0^{(A)} : \theta = 0{,}20, \qquad H_0^{(B)} : \theta = 0{,}10, \qquad H_0^{(C)} : \theta = 0{,}60.$$

Cada hipótese foi avaliada por meio da estatística de Wald,

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_{H_0}}{\text{se}(\hat{\theta})},$$

e o valor-p correspondente foi calculado de forma unicaudal:

$$p = P(Z \geq z_{\text{obs}}),$$

dado que o interesse é avaliar se o parâmetro estimado apresenta um desvio positivo em relação à hipótese nula.

Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 1. Observa-se que, quando a hipótese nula coincide com o valor real do parâmetro ($H_0^{(A)}$), o valor-p é elevado e a hipótese não é rejeitada. À medida que o valor hipotético se afasta de θ, o valor-p decresce rapidamente, levando à rejeição de H_0 nos casos de maior discrepância ($H_0^{(C)}$). Essa simulação evidencia o papel do valor-p como medida de compatibilidade entre modelo e dado: ele quantifica o grau de discrepância entre a hipótese estatística e a estrutura empírica observada.

Tabela 1: Resultados do cálculo do valor-p para diferentes hipóteses nulas sob o modelo de Poisson.

Cenário	**Hipótese nula**	**Valor-p**	**Decisão**	$\hat{\theta}$	θ
Cenário A ($H_0^{(A)}$ exato)	$\theta_{H_0} = 2{,}00$	0,8928	Não rejeita H_0	1,994	2,00
Cenário B ($H_0^{(B)}$ com pequeno desvio)	$\theta_{H_0} = 2{,}06$	0,1096	Não rejeita H_0	1,989	2,00
Cenário C ($H_0^{(C)}$ com grande desvio)	$\theta_{H_0} = 2{,}30$	0,0000	Rejeita H_0	1,991	2,00

Nas simulações de Monte Carlo realizadas sob H_0, os p-valores mostraram-se aproximadamente uniformes, reproduzindo o comportamento esperado quando as condições assintóticas são satisfeitas. No entanto, ao introduzir pequenas violações, como superdispersão ou dependência entre observações, a distribuição dos p-valores tornou-se assimetricamente inclinada, evidenciando a sua sensibilidade à estrutura do modelo.

Esse resultado empírico confirma que a discrepância entre o valor-p exato e o assintótico não é meramente numérica, mas reflete o descompasso lógico entre o universo ideal de H_0 e o comportamento real dos dados.

```
# ==============================================================
# Regressão Poisson (GLM)
# ==============================================================
```

```r

set.seed(123)

# Parâmetros
n = 200
beta0 = 1.0
beta1_real = 0.20   # efeito verdadeiro fixo
alpha = 0.05

# Covariável e única amostra gerada do mundo real
x = runif(n, 0, 2)
lambda = exp(beta0 + beta1_real * x)
y = rpois(n, lambda)

# Ajuste único nos mesmos dados
modelo = glm(y ~ x, family = poisson)

# ---------------------------------------------------------------
# Função: testa H0: beta1 = b0 (teste de Wald)
# ---------------------------------------------------------------
testa_glm_1amostra = function(mod, b0) {
  b1_hat = coef(mod)[2]
  se_b1  = sqrt(vcov(mod)[2, 2])
  Z = (b1_hat - b0) / se_b1
  p_valor = 2 * (1 - pnorm(abs(Z)))   # bicaudal
  decisao = ifelse(p_valor < alpha, "Rejeita H0", "Não rejeita H0")
  data.frame(
    hipotese_nula = paste0("H0: beta1 = ", format(b0, nsmall = 2)),
    valor_p = p_valor,
    decisao = decisao,
    beta1_estimado = b1_hat,
    beta1_real = beta1_real
  )
}

# Hipóteses a testar sobre o mesmo conjunto (exato, pouco e muito desvio)
B0s = c(0.20, 0.10, 0.60)

resA = testa_glm_1amostra(modelo, B0s[1])  # exato
resB = testa_glm_1amostra(modelo, B0s[2])  # pouco desvio
resC = testa_glm_1amostra(modelo, B0s[3])  # desvio forte

resumo_glm = rbind(
  "Cenário A (H0 exato)"              = resA,
  "Cenário B (H0 com pouco desvio)"   = resB,
  "Cenário C (H0 com muito desvio)"   = resC
)

# Saída formatada (sem <dbl>)
noquote(resumo_glm)
```

Listing 1: Exemplo numérico e simulação de Monte Carlo — Regressão Poisson

Resposta para o Questão 02

Resposta para o Questão 03

Os códigos desde estudo estão disponibilizados em <http://academic-codex.github.io/MAE5911-Estatistica-e-Machine-Learning>.