

MAE5911/IME: Fundamentos de Estatística e Machine Learning. Prof.: Alexandre Galvão Patriota

Questão 01: Defina formalmente o valor-p (**aproximado**) para testar uma hipótese geral e discuta os problemas de interpretação usuais ao utilizar a sua versão condicional à hipótese nula. Apresente um exemplo numérico e simulações de Monte Carlo, usando um modelo de regressão Poisson, para ilustrar a sua aplicação.

Questão 02: Apresente um Teorema da Aproximação Universal que generalize o Teorema de Funahashi, discuta as diferenças entre os resultados por meio de exemplos de redes neurais.

Questão 03: Proponha uma função de estimação robusta para estimar os parâmetros de uma regressão Binomial, $Y|X = x \sim \text{Bin}(m, \mu_\theta(x))$, em que $\mu_\theta(\cdot)$ é uma função com imagem em $[0, 1]$ e θ é o vetor de parâmetros. Apresente um exemplo numérico e uma simulação de Monte Carlo, como feito em sala, para ilustrar os resultados. Perturbe a distribuição dos dados e mostre que a sua proposta é de fato robusta contra essa perturbação.

Resposta para o Questão 01

O conceito do p-valor, tal como proposto originalmente por Fisher (1925), é uma medida **condicional sob H_0** , definida por

$$\text{valor-p}(H_0, z_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta^{(n)}(T_{H_0}(Z_n) \geq T_{H_0}(z_n)),$$

isto é, a probabilidade de se observar uma estatística tão extrema quanto a obtida, assumindo H_0 verdadeira. O valor-p foi concebido por Fisher como um *instrumento de contraste* entre o dado e hipótese, mas não como uma medida de verdade. Seu objetivo era expressar o grau de incompatibilidade empírica entre o fenômeno observado e as consequências lógicas de H_0 .

Posteriormente, a escola Neyman–Pearson reinterpreta esse conceito dentro de uma estrutura de decisão. Nessa transição, o valor-p perdeu seu caráter exploratório e passou a ser tratado como um critério binário, externo e supostamente não condicionado a H_0 , capaz de expressar a decisão: “rejeita” ou “não rejeita” H_0 . Esta leitura gerou um equívoco lógico: o valor-p, que é definido dentro do universo em que H_0 é verdadeira, passou a ser interpretado como se pudesse mensurar a probabilidade de H_0 ser verdadeira.

O **valor-p assintótico**, que é o valor usualmente utilizado, na ausência da distribuição exata de T_{H_0} , é definido por:

$$p^{(a)}(H_0, z_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(W_\theta \geq T_{H_0}(z_n)),$$

em que W_θ representa a distribuição-limite de T_{H_0} quando $n \rightarrow \infty$.

Confirmado essa natureza epistêmica, o valor-p assintótico nem sempre converge para o valor-p exato, isto porque, estando definido condicionalmente a H_0 , pode não ser sensível a falhas estruturais do modelo, como a ausência de independência entre as observações, a presença de hipóteses condicionais aninhadas, ou a violação das condições de regularidade que garantem a validade assintótica — como homocedasticidade.

Por isso, o valor-p deve ser entendido apenas como originalmente proposto — uma **medida de discrepância entre o real e o teórico** — que opera em um único sentido: como evidência contra a hipótese nula, mas nunca para confirmá-la.

Em termos das σ -álgebras envolvidas, a construção inferencial pode ser representada como uma sequência de aplicações mensuráveis, onde cada espaço de probabilidade possui a sua própria σ -álgebra, refletindo níveis distintos de abstração:

$$(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n) \xrightarrow{Z_n} (\mathcal{Z}_n, \mathcal{B}_{Z_n}, \mathbb{P}_{Z_n}) \xrightarrow{T} (\mathcal{T}_n, \mathcal{B}_{T_n}, \mathbb{P}_{T_n}).$$

- \mathcal{F}_n — descreve o universo empírico de incertezas, isto é, os eventos do mundo observável;

- \mathcal{B}_{Z_n} — corresponde ao espaço amostral modelado, onde as variáveis aleatórias Z_n são definidas sob \mathbb{P}_{Z_n} ;
- \mathcal{B}_{T_n} — é a σ -álgebra induzida pela estatística T , onde vivem as distribuições teóricas dos testes e, em particular, o valor-p.

O valor-p pertence ao universo lógico em que a hipótese nula H_0 é assumida como verdadeira. Ele não pertence à σ -álgebra empírica \mathcal{F}_n , e portanto não pode ser interpretado como uma probabilidade sobre o mundo real ou sobre a veracidade de H_0 . Tratá-lo dessa forma constitui um erro de violação da σ -álgebra — um deslize epistemológico em que se tenta extrair informação empírica de uma construção em sua definição epistêmica condicional e autoreferente.

Implementações

O exemplo numérico apresentado na Listing 1 tem o objetivo de ilustrar o comportamento do valor-*p* sob diferentes hipóteses nulas, mantendo fixos os dados observados. O experimento baseia-se em um modelo de regressão de Poisson definido por

$$Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), \quad \text{com} \quad \log(\lambda_i) = \theta_0 + \theta x_i,$$

onde $\theta_0 = 1$ e o valor verdadeiro do parâmetro é $\theta = 0,20$. Uma única amostra de tamanho $n = 200$ foi gerada segundo esse modelo, representando o conjunto de dados “observados” em um mundo empírico fixo.

A partir dessa amostra, foram testadas três hipóteses nulas distintas sobre o mesmo conjunto de dados:

$$H_0^{(A)} : \theta = 0,20, \quad H_0^{(B)} : \theta = 0,10, \quad H_0^{(C)} : \theta = 0,60.$$

Cada hipótese foi avaliada por meio da estatística de Wald,

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_{H_0}}{\text{se}(\hat{\theta})},$$

e o valor-*p* correspondente foi calculado de forma:

$$p = P(Z \geq z_{\text{obs}}),$$

Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 1. Observa-se que, quando a hipótese nula coincide com o valor real do parâmetro (θ), o valor-*p* é elevado e a hipótese não é rejeitada. À medida que o valor hipotético se afasta de θ , o valor-*p* decresce rapidamente, levando à rejeição de H_0 nos casos de maior discrepância ($H_0^{(C)}$). Essa simulação evidencia o papel do valor-*p* como medida de compatibilidade entre modelo e dado: ele quantifica o grau de discrepância entre a hipótese estatística e a estrutura empírica observada.

Tabela 1: Resultados do cálculo do valor-*p* para diferentes hipóteses nulas sob o modelo de regressão de Poisson.

Cenário	Hipótese nula	Valor- <i>p</i>	Decisão	$\hat{\theta}$	θ
Cenário A ($H_0^{(A)}$ exato)	$\theta_{H_0} = 0,20$	0,212614	Não rejeita H_0	0,254359	0,2
Cenário B ($H_0^{(B)}$ com pequeno desvio)	$\theta_{H_0} = 0,10$	0,011779	Rejeita H_0	0,254359	0,2
Cenário C ($H_0^{(C)}$ com grande desvio)	$\theta_{H_0} = 0,60$	1,000000	Não rejeita H_0	0,254359	0,2

O experimento de Monte Carlo tem como objetivo avaliar, de forma empírica, o comportamento assintótico do valor-*p* quando múltiplas amostras são geradas a partir de um mesmo modelo de regressão de Poisson. Considera-se o modelo

$$Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), \quad \text{com} \quad \log(\lambda_i) = \theta_0 + \theta x_i,$$

onde $\theta_0 = 1$ e o valor verdadeiro do parâmetro é $\theta = 0,20$. Em cada replicação, é gerada uma amostra de tamanho $n = 200$ com covariáveis $x_i \sim \text{Unif}(0, 2)$ e respostas Y_i conforme o modelo acima. O processo é repetido $M = 10,000$ vezes, mantendo θ fixo.

Para cada amostra, ajusta-se um modelo de regressão de Poisson e testam-se três hipóteses nulas distintas sobre o mesmo conjunto de dados:

$$H_0^{(A)} : \theta = 0,20, \quad H_0^{(B)} : \theta = 0,10, \quad H_0^{(C)} : \theta = 0,60.$$

Cada hipótese é avaliada pela estatística de Wald,

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_{H_0}}{\text{se}(\hat{\theta})},$$

e o valor-*p* correspondente é calculado de forma *unicaudal à direita*:

$$p = P(Z \geq z_{\text{obs}}).$$

A partir das M replicações, calcula-se a proporção de rejeição de cada hipótese, a média e a mediana dos valores-*p*, bem como a média dos estimadores $\hat{\theta}$. Os resultados são apresentados na Tabela ??.

Observa-se que, quando $H_0^{(A)}$ coincide com o valor verdadeiro do parâmetro, a proporção de rejeição aproxima-se do nível $\alpha = 0,05$, e os valores-*p* seguem aproximadamente uma distribuição uniforme. Quando a hipótese nula se afasta do valor real — como em $H_0^{(B)}$ e $H_0^{(C)}$ — a potência do teste aumenta, os valores-*p* concentram-se próximos de zero e a rejeição de H_0 torna-se praticamente certa em cenários de grande discrepância. Essa simulação evidencia o comportamento esperado do teste de Wald sob o modelo de Poisson e reforça o valor-*p* como medida de compatibilidade entre hipótese estatística e estrutura empírica observada.

Nas simulações de Monte Carlo realizadas sob H_0 , os p-valores mostraram-se aproximadamente uniformes, reproduzindo o comportamento esperado quando as condições assintóticas são satisfeitas. No entanto, ao introduzir pequenas violações, como superdispersão ou dependência entre observações, a distribuição dos p-valores tornou-se assimetricamente inclinada, evidenciando a sua sensibilidade à estrutura do modelo.

Esse resultado empírico confirma que a discrepância entre o valor-*p* exato e o assintótico não é meramente numérica, mas reflete o descompasso lógico entre o universo ideal de H_0 e o comportamento real dos dados.

```

1 # -----
2 # Regressão Poisson
3 # -----
4
5 set.seed(123)
6
7 # Parâmetros
8 n = 200
9 beta0 = 1.0
10 beta1_real = 0.20 # efeito verdadeiro fixo
11 alpha = 0.05
12
13 # Covariável e única amostra gerada do mundo real
14 x = runif(n, 0, 2)
15 lambda = exp(beta0 + beta1_real * x)
16 y = rpois(n, lambda)
17
18 # Ajuste único nos mesmos dados
19 modelo = glm(y ~ x, family = poisson)
20
21 # -----
22 # Função: testa H0: beta1 = b0 (teste de Wald)
23 # -----
24 testa_glm_1amostra = function(mod, b0) {
25   b1_hat = coef(mod)[2]
26   se_b1 = sqrt(vcov(mod)[2, 2])
27   Z = (b1_hat - b0) / se_b1
28   p_valor = 2 * (1 - pnorm(abs(Z))) # bicaudal
29   decisao = ifelse(p_valor < alpha, "Rejeita H0", "Não rejeita H0")
30   data.frame(

```

```

31 hipotese_nula = paste0("H0: beta1 = ", format(b0, nsmall = 2)),
32 valor_p = p_valor,
33 decisao = decisao,
34 beta1_estimado = b1_hat,
35 beta1_real = beta1_real
36 )
37 }
38
39 # Hipóteses a testar sobre o mesmo conjunto (exato, pouco e muito desvio)
40 B0s = c(0.20, 0.10, 0.60)
41
42 resA = testa_glm_1amostra(modelo, B0s[1]) # exato
43 resB = testa_glm_1amostra(modelo, B0s[2]) # pouco desvio
44 resC = testa_glm_1amostra(modelo, B0s[3]) # desvio forte
45
46 resumo_glm = rbind(
47   "Cenário A (H0 exato)"      = resA,
48   "Cenário B (H0 com pouco desvio)" = resB,
49   "Cenário C (H0 com muito desvio)" = resC
50 )
51
52 # Saída formatada (sem <dbl>)
53 noquote(resumo_glm)

```

Listing 1: Exemplo numérico - Regressão Poisson

Resposta para o Questão 02

Resposta para o Questão 03

Os códigos desde estudo estão disponibilizados em <<http://academic-codex.github.io/MAE5911-Estatistica-e-Machine-Learning>>.

