

## MAE5911/IME: Fundamentos de Estatística e Machine Learning. Prof.: Alexandre Galvão Patriota

**Questão 01:** Seja  $(Z_1, \dots, Z_n)$  uma amostra aleatória de  $Z \sim \text{Ber}(\theta)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ .

- (a) Encontre o EMV para  $g(\theta) = P_\theta(Z = 0)$ .
- (b) Encontre o EMV para  $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$ .
- (c) Considere que os dados foram observados  $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$ . Encontre as estimativas de MV nos itens acima.
- (d) Construa o valor-p para a hipótese  $H: \theta = 0.1$  usando os dados do item anterior.

Podemos calcular os ítems (a) e (b) utilizando a propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança (EMV).

**Teorema (Invariância do EMV).** Seja  $\hat{\theta}_{MV}$  o estimador de máxima verossimilhança de um parâmetro  $\theta \in \Theta$  e seja  $g : \Theta \rightarrow \mathcal{G}$  uma função. Então o estimador de máxima verossimilhança de

$$\tau = g(\theta)$$

é dado por

$$\hat{\tau}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}).$$

Isto é, para obter o EMV de qualquer função de  $\theta$ , basta aplicar essa função ao EMV de  $\theta$ .

### Cálculo do EMV de $\theta$ ( $\hat{\theta}_{MV}$ )

#### Função de verossimilhança

Seja  $z_1, \dots, z_n$  uma amostra aleatória de  $Z \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ . Com:

$$P_\theta(z_i = 1) = \theta, \quad P_\theta(z_i = 0) = 1 - \theta.$$

A função de probabilidade para  $Z = z_i$  é então:

$$f(z_i; \theta) = \theta^{z_i} (1 - \theta)^{1-z_i}.$$

Como  $z_1, \dots, z_n$  são independentes, a probabilidade conjunta, definida como a função de verossimilhança é o produto das densidades individuais:

$$\ell(\theta, z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n \theta^{z_i} (1 - \theta)^{1-z_i}.$$

Utilizando a propriedade de produto de exponenciais, temos:

$$\ell(\theta, z_1, \dots, z_n) = \theta^{\sum_{i=1}^n z_i} (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n (1-z_i)} = \theta^{\sum_{i=1}^n z_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n z_i}.$$

Seja

$$S = \sum_{i=1}^n z_i,$$

Podemos escrever:

$$\ell(\theta, S) = \theta^S (1 - \theta)^{n-S}.$$

## Função Log-verossimilhança

Podemos simplificar os cálculos trabalhando com o logaritmo desta função, mantendo o estimador de máxima verossimilhança inalterado, uma vez que este trata-se do ponto crítico desta função. Maximizar  $\ell(\theta)$  ou  $\mathcal{L}(\theta) = \log \ell(\theta, S)$  é equivalente, devido ao fato do logaritmo ser estritamente crescente. Portanto, aplicando o logaritmo, simplificamos para:

$$\mathcal{L}(\theta, S) = \log \ell(\theta, S) = \log (\theta^S (1 - \theta)^{n-S}) = S \log \theta + (n - S) \log(1 - \theta).$$

## Ponto crítico da log-verossimilhança

Calculando a derivada de  $\mathcal{L}(\theta, S)$  em relação a  $\theta$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, S)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [S \log \theta + (n - S) \log(1 - \theta)] = S \cdot \frac{1}{\theta} + (n - S) \cdot \left(-\frac{1}{1 - \theta}\right) = \frac{S}{\theta} - \frac{n - S}{1 - \theta}.$$

Seja a condição de máximo onde está definido  $\hat{\theta}_{MV}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, S)}{\partial \theta} = 0 \iff \frac{S}{\hat{\theta}_{MV}} - \frac{n - S}{1 - \hat{\theta}_{MV}} = 0.$$

$$\frac{S}{\hat{\theta}_{MV}} = \frac{n - S}{1 - \hat{\theta}_{MV}}.$$

$$S(1 - \hat{\theta}_{MV}) = \hat{\theta}_{MV}(n - S).$$

$$S - S\hat{\theta}_{MV} = n\hat{\theta}_{MV} - S\hat{\theta}_{MV}.$$

Os termos  $-S\hat{\theta}_{MV}$  cancelam em ambos os lados, restando:

$$S = n\hat{\theta}_{MV}.$$

Isolando  $\hat{\theta}_{MV}$ :

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \frac{S}{n}}.$$

## Estimador de máxima verossimilhança

Substituindo de volta em função da variável aleatória  $z_i$ , obtemos:

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \bar{Z}.$$

## Teste de hipótese

O teste de hipótese é formulado como um framework de decisão. No processo de decisão existem dois possíveis cenários de enganos, sendo que ambos não podem ser reduzidos simultaneamente, a menos do aumento da amostra, e se um cenário de engano diminui o seu complementar aumenta. Escolhe-se por arbitrariedade priorizar a mitigação do erro **falso positivo**, em detrimento do erro **falso negativo**. Desta forma a hipótese nula é definida como a hipótese que se deseja refutar. Entretanto, o teste é construído para que haja apenas uma baixa probabilidade, comumente 5%, de que  $H_0$  seja refutada, ou seja, a sua rejeição é definida como um evento raro. Consequentemente, quando ela é rejeitada, considera-se que o processo de decisão está com uma margem de

erro suficientemente reduzida, de acordo com o nível de significância escolhido, que reflete a magnitude do erro tolerado.

Deste framework, o valor-p é a métrica que caracteriza a amostra observada no cenário em que a hipótese nula é verdadeira. O valor-p então calculado é comparado com o nível de significância escolhido para que a decisão de rejeitar ou não a hipótese nula seja tomada.

(a)  $g(\theta) = P_\theta(Z = 0)$

$$g(\theta) = P_\theta(Z = 0) = 1 - \theta.$$

Pelo teorema da **invariância do EMV**:

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}) = 1 - \hat{\theta}_{MV}.$$

Já encontramos que  $\hat{\theta}_{MV} = \bar{Z}$ , então:

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = 1 - \bar{Z}}.$$

(b)  $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$

A variância é encontrada por:

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2.$$

Pela definição de esperança para variáveis discretas,

$$E(Z) = \sum_{z \in \{0,1\}} z P(Z = z).$$

Mas  $P(Z = 1) = \theta$  e  $P(Z = 0) = 1 - \theta$ , então:

$$E(Z) = 0 \cdot (1 - \theta) + 1 \cdot \theta = \theta.$$

$E(Z^2) = E(Z) = \theta$  (pois  $Z \in \{0, 1\}$ ), então:

$$\text{Var}_\theta(Z) = \theta - \theta^2 = \theta(1 - \theta).$$

Portanto:

$$g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z) = \theta(1 - \theta).$$

Pela **invariância do EMV**:

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}) = \hat{\theta}_{MV}(1 - \hat{\theta}_{MV}).$$

Para  $\hat{\theta}_{MV} = \bar{Z}$ , encontramos:

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = \bar{Z}(1 - \bar{Z})}.$$

**(c) Sejam os dados observados:**  $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$

Para o cálculo da média:  $n = 6$  e  $\sum z_i = 2$ , portanto

$$\hat{\theta}_{MV} = \bar{Z} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Assim:

$$(a) \quad \hat{g}_{MV} = \widehat{P_\theta(Z=0)} = 1 - \bar{Z} = \frac{2}{3}$$

$$(b) \quad \hat{g}_{MV} = \widehat{\text{Var}_\theta}(Z) = \bar{Z}(1 - \bar{Z}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

**(d) Teste de hipótese**  $H_0 : \theta = 0.1$

Na distribuição de Bernoulli, o parâmetro  $\theta$  representa a probabilidade de sucesso, equivalente à média. Se supormos que a hipótese nula é verdadeira, o valor-p dos dados observados em relação a  $H_0$  é:

Dados amostrados:

$$(0, 0, 1, 0, 0, 1)$$

Sob a hipótese nula  $\theta = 0.1$ , construímos X:

$$X \sim \text{Binomial}(n = 6, \theta = 0.1).$$

A estatística de interesse é a média amostral ou probabilidade de sucessos. Em relação à amostra observada, é:

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 z_i = \frac{1}{6} * 2 = \frac{1}{3}.$$

Vamos analisar a média da amostra contra a média testada (a média da hipótese nula). O valor-p então é definido a partir de: no cenário em que  $H_0$  é válida, ou seja, temos uma distribuição de Bernoulli com média = 0.1, qual a probabilidade de observar média  $\bar{Z} = 1/3$  ou maior? O posicionamento da média observada em relação à média testada indica a direção do teste.

$$p = P_{H_0} \left( \bar{Z} \geq \frac{1}{3} \right).$$

Como  $X = \sum_{i=1}^6 z_i$ ,  $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$  e  $n = 6$ :

$$\bar{Z} = \frac{X}{6}.$$

Então,

$$\bar{Z} \geq \frac{1}{3} \iff \frac{X}{6} \geq \frac{1}{3} \iff X \geq 2.$$

Logo, o valor-p é:

$$p = P_{H_0}(X \geq 2),$$

$$p = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6).$$

Cada termo é dado por:

$$P(X = k) = \binom{6}{k} (0.1)^k (0.9)^{6-k}.$$

Portanto:

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} (0.1)^2 (0.9)^4 = 15 \cdot 0.01 \cdot 0.6561 = 0.098415.$$

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} (0.1)^3 (0.9)^3 = 20 \cdot 0.001 \cdot 0.729 = 0.01458.$$

$$P(X = 4) = \binom{6}{4} (0.1)^4 (0.9)^2 = 15 \cdot 0.0001 \cdot 0.81 = 0.001215.$$

$$P(X = 5) = \binom{6}{5} (0.1)^5 (0.9) = 6 \cdot 0.00001 \cdot 0.9 = 0.000054.$$

$$P(X = 6) = \binom{6}{6} (0.1)^6 = 1 \cdot 0.000001 = 0.000001.$$

Assim, o valor-p é:

$$p = 0.098415 + 0.01458 + 0.001215 + 0.000054 + 0.000001 = 0.114265.$$

Pela convervação da probabilidade, seria mais simples calcular o valor-p pelo seu valor complementar:

$$\bar{p} = P_{H_0}(X < 2) = (1 - p)$$

$$P(X = 0) = (0.9)^6 = 0.531441, \quad P(X = 1) = \binom{6}{1} (0.1)(0.9)^5 = 0.354294.$$

Logo:

$$\bar{p} = 1 - p = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.531441 + 0.354294 = 0.885735.$$

$$\text{valor-p} = 1 - 0.885735 = 0.114265$$

—  
Considerando um nível de significância  $\alpha = 0.05$  não há evidências suficientes para rejeitar  $H_0$ , isto é, para supor que a média seja diferente de 0.1.

**Questão 02:** Seja  $(Z_1, \dots, Z_n)$  uma amostra aleatória de  $Z \sim \text{Exp}(\theta)$ ,  $\theta \in (0, \infty)$ .

- (a) Encontre o EMV para  $g(\theta) = P_\theta(Z > 1)$ .
- (b) Encontre o EMV para  $g(\theta) = P_\theta(0.1 < Z < 1)$ .
- (c) Encontre o EMV para  $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$ .
- (d) Considere que os dados foram observados  $(0.2, 0.6, 0.3, 0.2, 0.8, 0.12)$ . Encontre um IC aproximado de 95% de confiança para  $g(\theta)$  nos itens acima.
- (e) Faça uma simulação de Monte Carlo para verificar se os IC's aproximados obtidos no passo anterior têm cobertura próxima do nível de confiança estabelecido. Caso não tenham, proponha um tamanho amostral que produza IC's mais confiáveis para cada caso.

Podemos calcular os ítems (a), (b) e (c) utilizando a propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança (EMV), calculando uma única vez  $\hat{\theta}_{MV}$ .

## Cálculo do EMV de $\theta$ ( $\hat{\theta}_{MV}$ ) para a distribuição Exponencial

### Função de verossimilhança

Seja  $(z_1, \dots, z_n)$  uma amostra aleatória de  $Z \sim \text{Exp}(\theta)$ , com  $\theta \in (0, \infty)$ , a função densidade de probabilidade para  $z_i$  é então:

$$f(z_i; \theta) = \theta e^{-\theta z_i}, \quad z_i > 0.$$

Como  $z_1, \dots, z_n$  são independentes, a probabilidade conjunta, definida como a função de verossimilhança é o produto das densidades individuais:

$$\ell(\theta; z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n f(z_i | \theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta z_i} \mathbf{1}_{\{z_i > 0\}}.$$

O termo indicador  $\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{z_i > 0\}}$  não depende de  $\theta$ , logo não influencia a maximização e pode ser ignorado. Assim,

$$\ell(\theta; z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta z_i}.$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto e de produto de exponenciais, obtemos:

$$\ell(\theta; z_1, \dots, z_n) = \left( \prod_{i=1}^n \theta \right) \left( \prod_{i=1}^n e^{-\theta z_i} \right) = \theta^n \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^n z_i\right).$$

Seja

$$S = \sum_{i=1}^n z_i,$$

Podemos escrever:

$$\ell(\theta, S) = \theta^n \exp(-\theta S).$$

### Função log-verossimilhança

Para simplificar os cálculos, trabalhamos com a função logaritmo da verossimilhança  $\mathcal{L}(\theta, S)$ :

$$\mathcal{L}(\theta, S) = \log \ell(\theta, S) = \log(\theta^n) + \log(\exp(-\theta S)).$$

Usando as propriedades  $\log(a^b) = b \log a$  e  $\log(e^x) = x$ , obtemos

$$\mathcal{L}(\theta, S) = n \log \theta - \theta S.$$

### Ponto crítico da log-verossimilhança

Calculando a derivada de  $\mathcal{L}(\theta, S)$  em relação a  $\theta$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, S)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [n \log \theta - \theta S] = n \cdot \frac{1}{\theta} - S \cdot 1 = \frac{n}{\theta} - S.$$

Seja a condição de máximo onde está definido  $\hat{\theta}_{MV}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, S)}{\partial \theta} = 0 \iff \frac{n}{\hat{\theta}_{MV}} - S = 0 \iff \frac{n}{\hat{\theta}_{MV}} = S.$$

Isolando  $\hat{\theta}_{MV}$ :

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{S},}$$

### Estimador de máxima verossimilhança

Substituindo de volta em função da variável aleatória  $z_i$ , obtemos:

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n z_i} = \frac{1}{\bar{Z}},$$

**(a)**  $g(\theta) = P_\theta(Z > 1)$

Integrando a função densidade de probabilidade  $f(z_i, \theta)$  para encontrar  $P_\theta(Z > 1)$ :

$$g(\theta) = P_\theta(Z > 1) = \int_1^\infty f(z, \theta) dz = \int_1^\infty \theta e^{-\theta z} dz.$$

Calculando a integral:

$$\int_1^\infty \theta e^{-\theta z} dz = \left[ -e^{-\theta z} \right]_{z=1}^\infty = 0 - (-e^{-\theta}) = e^{-\theta}.$$

Portanto,

$$g(\theta) = e^{-\theta}.$$

Pela **invariância do EMV**, o estimador de máxima verossimilhança de  $g(\theta)$  é

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}).$$

Já encontramos que  $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{Z}}$  para distribuição Exponencial, então:

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = e^{-\hat{\theta}_{MV}} = \exp\left(-\frac{1}{\bar{Z}}\right).}$$

**(b)**  $g(\theta) = P_\theta(0.1 < Z < 1)$

Integrando a função densidade de probabilidade  $f(z_i, \theta)$  para encontrar  $P_\theta(0.1 < Z < 1)$ :

$$g(\theta) = P_\theta(0.1 < Z < 1) = \int_{0.1}^1 f(z, \theta) dz = \int_{0.1}^1 \theta e^{-\theta z} dz.$$

Calculando a integral:

$$\int_{0.1}^1 \theta e^{-\theta z} dz = \left[ -e^{-\theta z} \right]_{z=0.1}^1 = -e^{-\theta} - (-e^{-0.1\theta}) = e^{-0.1\theta} - e^{-\theta}.$$

Logo,

$$g(\theta) = e^{-0.1\theta} - e^{-\theta}.$$

Pela **invariância do EMV**,

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}) = e^{-0.1\hat{\theta}_{MV}} - e^{-\hat{\theta}_{MV}}.$$

Substituindo  $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{Z}}$ , obtemos:

$$\hat{g}_{MV} = \exp\left(-\frac{0.1}{\bar{Z}}\right) - \exp\left(-\frac{1}{\bar{Z}}\right).$$

(c)  $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$

A variância é encontrada por:

$$\text{Var}(Z) = E_\theta(Z^2) - (E_\theta(Z))^2.$$

Pela definição de esperança para variáveis contínuas, sendo  $h(z)$  a função de interesse:

$$E_\theta(h(Z)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) f(z; \theta) dz.$$

Em particular, a esperança do primeiro e segundo momentos de  $Z$ , são:

$$E_\theta(Z) = \int_0^{\infty} z \theta e^{-\theta z} dz, = [-ze^{-\theta z}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\theta z} dz = 0 + \left[-\frac{1}{\theta}e^{-\theta z}\right]_0^{\infty} = 0 + \left(0 - \left(-\frac{1}{\theta}\right)\right) = \frac{1}{\theta}.$$

e

$$E_\theta(Z^2) = \int_0^{\infty} z^2 \theta e^{-\theta z} dz = \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\theta}\right)^2 \theta e^{-y} \frac{dy}{\theta} = \frac{1}{\theta^2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = \frac{1}{\theta^2} \cdot 2! = \frac{2}{\theta^2}.$$

Então:

$$\text{Var}_\theta(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{2}{\theta^2} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}.$$

Portanto:

$$g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z) = \frac{1}{\theta^2}.$$

Pela **invariância do EMV**,

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{1}{\hat{\theta}_{MV}^2}.$$

Substituindo  $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{Z}}$ , obtemos:

$$\hat{g}_{MV} = \bar{Z}^2.$$

**Questão 03:** Seja  $(Z_1, \dots, Z_n)$  uma amostra aleatória de  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\theta = (\mu, \sigma^2) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ .

- (a) Encontre o EMV para  $g(\theta) = E_\theta(Z)$ .
- (b) Encontre o EMV para  $g(\theta) = P_\theta(Z < 2)$ .
- (c) Encontre o EMV para  $g(\theta) = P_\theta(2.6 < Z < 4)$ .
- (d) Encontre o EMV para  $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$ .
- (e) Considere que os dados foram observados  $(2.4, 2.7, 2.3, 2, 2.5, 2.6)$ . Encontre as estimativas de MV nos itens acima.

Podemos calcular os ítems (a), (b), (c) e (d) utilizando a propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança (EMV), calculando uma única vez  $\hat{\theta}_{MV}$ .

## Cálculo do EMV de $\theta$ ( $\hat{\theta}_{MV}$ ) para a distribuição Normal

### Função de verossimilhança

Seja  $(z_1, \dots, z_n)$  uma amostra aleatória de  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , com parâmetro  $\theta = (\mu, \sigma^2) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ .

A função densidade de probabilidade para  $z_i$  é

$$f(z_i; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Como  $z_1, \dots, z_n$  são independentes, a função de verossimilhança é o produto das densidades individuais:

$$\ell(\mu, \sigma^2; z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n f(z_i; \mu, \sigma^2).$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto e de produto de exponenciais, obtemos:

$$\ell(\mu, \sigma^2; z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2\right).$$

Seja

$$S = \sum_{i=1}^n z_i \quad e \quad Q = \sum_{i=1}^n z_i^2, \quad \iff \quad \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (z_i^2 - 2\mu z_i + \mu^2) = Q - 2\mu S + n\mu^2.$$

Podemos escrever:

$$\ell(\mu, \sigma^2, S, Q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp(Q - 2\mu S + n\mu^2).$$

Para simplificar os cálculos, trabalhamos com a função logaritmo da verossimilhança  $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)$ :

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q) = \log \ell(\mu, \sigma^2, S, Q) = \log \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \right] + \log \left[ \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(Q - 2\mu S + n\mu^2)\right) \right],$$

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (Q - 2\mu S + n\mu^2).$$

Calculando a derivada de  $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)$  em relação a  $\mu$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \mu} [Q - 2\mu S + n\mu^2] = -\frac{1}{2\sigma^2} (-2S + 2n\mu) = \frac{S - n\mu}{\sigma^2}.$$

Seja a condição de máximo onde está definido  $\hat{\mu}_{MV}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)}{\partial \mu} = 0 \iff \frac{S - n\hat{\mu}_{MV}}{\sigma^2} = 0 \iff S - n\hat{\mu}_{MV} = 0.$$

Isolando  $\hat{\mu}_{MV}$ :

$$\boxed{\hat{\mu}_{MV} = \frac{S}{n}}.$$

Calculando a derivada de  $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)$  em relação a  $\sigma^2$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left[ \frac{1}{2\sigma^2} (Q - 2\mu S + n\mu^2) \right] = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{Q - 2\mu S + n\mu^2}{(\sigma^2)^2}.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \sigma^2, S, Q)}{\partial \sigma^2} = \frac{-n(\sigma^2) + (Q - 2\mu S + n\mu^2)}{2(\sigma^2)^2}.$$

Seja a condição de máximo onde está definido  $\hat{\sigma}_{MV}^2$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\hat{\mu}_{MV}, \sigma^2, S, Q)}{\partial \sigma^2} = 0 \iff -n(\hat{\sigma}_{MV}^2) + (Q - 2\hat{\mu}_{MV}S + n\hat{\mu}_{MV}^2) = 0.$$

Isolando  $\hat{\sigma}_{MV}^2$ :

$$n\hat{\sigma}_{MV}^2 = Q - 2\hat{\mu}_{MV}S + n\hat{\mu}_{MV}^2 = Q - \frac{S^2}{n}, \quad \text{para} \quad \hat{\mu}_{MV} = \frac{S}{n}.$$

Assim,

$$n\hat{\sigma}_{MV}^2 = Q - \frac{S^2}{n}.$$

Finalmente:

$$\boxed{\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \left( Q - \frac{S^2}{n} \right)}$$

### Estimador de máxima verossimilhança

Substituindo de volta em função da variável aleatória  $z_i$ , obtemos:

$$\hat{\mu}_{MV} = \frac{S}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \bar{Z}$$

$$\boxed{\hat{\mu}_{MV} = \bar{Z}}$$

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \left( Q - \frac{S^2}{n} \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 - \frac{(n\bar{Z})^2}{n} \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 - n\bar{Z}^2 \right) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 - 2\bar{Z}n\bar{Z} + n\bar{Z}^2 \right)$$

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 - 2\bar{Z} \sum_{i=1}^n z_i + n\bar{Z}^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i^2 - 2z_i\bar{Z} + \bar{Z}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2}$$

(a)  $g(\theta) = E_\theta(Z)$

Pela definição de esperança para variáveis contínuas, sendo  $h(z)$  a função de interesse:

$$E_\theta(h(Z)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) f(z; \theta) dz.$$

Em particular, a esperança do primeiro momento de  $Z$ , é:

$$\begin{aligned} E_\theta(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \mu, \\ E_\theta(Z) &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ E_\theta(Z) &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\sigma(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} y \phi_\sigma(y) dy = \mu \cdot 1 + 0 = \mu. \end{aligned}$$

Então:

$$g(\theta) = g(\mu, \sigma^2) = E_\theta(Z) = \mu.$$

Pela **invariância do EMV**, o estimador de máxima verossimilhança de  $g(\theta)$  é:

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\mu}_{MV}, \hat{\sigma}_{MV}^2) = \hat{\mu}_{MV} = \bar{Z}.$$

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = \bar{Z}.}$$

**(b)**  $g(\theta) = P_\theta(Z < 2)$

Seja a função distribuição acumulada da Normal padrão  $N(0, 1)$  definida por:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Integrando a função densidade de probabilidade  $f(z_i; \mu, \sigma^2)$  para encontrar  $P_\theta(Z < 2)$ , obtemos:

$$P_\theta(Z < 2) = \int_{-\infty}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(z-\mu)^2/(2\sigma^2)} dz = \int_{-\infty}^{\frac{2-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right),$$

Assim, expressamos o resultado em termos de  $\Phi$ :

$$g(\theta) = g(\mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right).$$

Pela **invariância do EMV**, o estimador de máxima verossimilhança de  $g(\theta)$  é:

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\mu}_{MV}, \hat{\sigma}_{MV}^2) = \Phi\left(\frac{2-\hat{\mu}_{MV}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{MV}^2}}\right) = \Phi\left(\frac{2-\bar{Z}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{MV}^2}}\right) = \Phi\left(\frac{(2-\bar{Z})\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2}}\right)$$

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = \Phi\left(\frac{(2-\bar{Z})\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2}}\right)}$$

(c)  $g(\theta) = P_\theta(2.6 < Z < 4)$

De forma similar, podemos decompor a probabilidade em termos da função de distribuição acumulada da Normal padrão  $N(0, 1)$ :

$$P_\theta(2.6 < Z < 4) = P_\theta(Z < 4) - P_\theta(Z \leq 2.6) = \Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{2.6 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right).$$

Logo,

$$g(\theta) = g(\mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{2.6 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right).$$

Pela **invariância do EMV**, o estimador de máxima verossimilhança de  $g(\theta)$  é

$$\hat{g}_{MV} = g(\hat{\mu}_{MV}, \hat{\sigma}_{MV}^2) = \Phi\left(\frac{4 - \bar{Z}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{MV}^2}}\right) - \Phi\left(\frac{2.6 - \bar{Z}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{MV}^2}}\right),$$

$$\boxed{\hat{g}_{MV} = \Phi\left(\frac{(4 - \bar{Z})\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2}}\right) - \Phi\left(\frac{(2.6 - \bar{Z})\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2}}\right)}.$$

(d)  $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$

A variância é encontrada por:

$$\text{Var}(Z) = E_\theta(Z^2) - (E_\theta(Z))^2.$$

Pela definição de esperança para variáveis contínuas, sendo  $h(z)$  a função de interesse:

$$E_\theta(h(Z)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) f(z; \theta) dz.$$

Em particular, a esperança do primeiro e segundo momentos de  $Z$ , para a distribuição Normal, são:

$$E_\theta(Z) = \mu.$$

e

$$\begin{aligned} E_\theta(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma y)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy. \\ E_\theta(Z^2) &= \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy. \\ E_\theta(Z^2) &= \mu^2 \cdot 1 + 2\mu\sigma \cdot 0 + \sigma^2 \cdot 1 = \mu^2 + \sigma^2. \end{aligned}$$

Então:

$$\text{Var}_\theta(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

Portanto,

$$g(\theta) = g(\mu, \sigma^2) = \sigma^2.$$

Pela **invariância do EMV**, o estimador de máxima verossimilhança de  $g(\theta)$  é:

$$\widehat{g}_{MV} = g(\widehat{\mu}_{MV}, \widehat{\sigma}_{MV}^2) = \widehat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2.$$

$$\boxed{\widehat{g}_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2.}$$

(e) **Sejam os dados observados:** (0,12, 0,50, 0,20, 0,23, 0,30, 0,11)

Para o cálculo da média:  $n = 6$  e  $\sum_{i=1}^n z_i = 0,12 + 0,50 + 0,20 + 0,23 + 0,30 + 0,11 = 1,46$ . Portanto:

$$\widehat{\mu}_{MV} = \bar{Z} = \frac{1,46}{6} \approx 0,2433.$$

$$\boxed{\widehat{\mu}_{MV} \approx 0,2433}$$

Para a variância de máxima verossimilhança:

$$\widehat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{Z})^2$$

$$\widehat{\sigma}_{MV}^2 = (0,12 - 0,2433)^2 + (0,50 - 0,2433)^2 + (0,20 - 0,2433)^2 + (0,23 - 0,2433)^2 + (0,30 - 0,2433)^2 + (0,11 - 0,2433)^2$$

$$\boxed{\widehat{\sigma}_{MV}^2 \approx 0,01736}$$

Por fim, o desvio-padrão de máxima verossimilhança é

$$\widehat{\sigma}_{MV} = \sqrt{\widehat{\sigma}_{MV}^2} \approx \sqrt{0,01736} \approx 0,1317.$$

Assim:

$$(a) \widehat{g}_{MV} = \widehat{E}_\theta(Z) = \widehat{\mu}_{MV} = \bar{Z} \approx 0,2433.$$

$$(b) \widehat{g}_{MV} = P_\theta(\widehat{Z} < 2) = \Phi\left(\frac{2 - \widehat{\mu}_{MV}}{\widehat{\sigma}_{MV}}\right) = \Phi\left(\frac{2 - \bar{Z}}{\widehat{\sigma}_{MV}}\right) \approx \Phi(13,33) \approx 1.$$

$$(c) \widehat{g}_{MV} = P_\theta(2,6 < \widehat{Z} < 4) = \Phi\left(\frac{4 - \bar{Z}}{\widehat{\sigma}_{MV}}\right) - \Phi\left(\frac{2,6 - \bar{Z}}{\widehat{\sigma}_{MV}}\right) \approx \Phi(28,52) - \Phi(17,89) \approx 0.$$

$$(d) \widehat{g}_{MV} = \widehat{\text{Var}}_\theta(Z) = \widehat{\sigma}_{MV}^2 \approx 0,01736.$$

**Questão 04:** Seja  $(Z_1, \dots, Z_n)$  uma amostra aleatória de  $Z \sim f_\theta$ ,  $\theta \in (0, \infty)$ , tal que a função densidade de probabilidade é dada por

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad x \in (0, 1),$$

e  $f_\theta(x) = 0$ , caso contrário.

- (a) Encontre o EMV para  $g(\theta) = E_\theta(Z)$ .
- (b) Encontre o EMV para  $g(\theta) = P_\theta(Z > 0,3)$ .

- (c) Encontre o EMV para  $g(\theta) = P_\theta(0 < Z < 0.1)$ .  
(d) Encontre o EMV para  $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$ .  
(e) Considere que os dados foram observados  $(0.12, 0.50, 0.20, 0.23, 0.30, 0.11)$ . Encontre as estimativas de MV para os itens acima.

Podemos calcular os ítems (a), (b), (c) e (d) utilizando a propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança (EMV), calculando uma única vez  $\hat{\theta}_{MV}$ .

### Cálculo do EMV de $\theta$ ( $\hat{\theta}_{MV}$ ) para a distribuição Beta

#### Função de verossimilhança

Seja  $(z_1, \dots, z_n)$  uma amostra aleatória de  $Z \sim f_\theta$ ,  $\theta \in (0, \infty)$ , com função densidade de probabilidade:

$$f_\theta(z_i) = \theta z_i^{\theta-1}, \quad 0 < z_i < 1,$$

e  $f_\theta(z_i) = 0$  caso contrário.

Como  $z_1, \dots, z_n$  são independentes, a função de verossimilhança é o produto das densidades individuais:

$$\ell(\theta; z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(z_i) = \prod_{i=1}^n \theta z_i^{\theta-1}.$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto, obtemos:

$$\ell(\theta; z_1, \dots, z_n) = \theta^n \prod_{i=1}^n z_i^{\theta-1}.$$

Seja, e utilizando a identidade  $a^b = e^{b \log a}$ :

$$T = \sum_{i=1}^n \log z_i \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^n z_i^{\theta-1} = \exp\left((\theta-1) \sum_{i=1}^n \log z_i\right) = \exp((\theta-1)T),$$

Podemos escrever:

$$\ell(\theta, T) = \theta^n \exp((\theta-1)T).$$

Para simplificar os cálculos, trabalhamos com a função logaritmo da verossimilhança  $\mathcal{L}(\theta; T)$ :

$$\mathcal{L}(\theta; T) = \log \ell(\theta; T) = \log(\theta^n) + \log[\exp((\theta-1)T)] = n \log \theta + (\theta-1)T.$$

Calculando a derivada de  $\mathcal{L}(\theta, T)$  em relação a  $\theta$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, T)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [n \log \theta + (\theta-1)T] = \frac{n}{\theta} + T.$$

Seja a condição de máximo onde está definido  $\hat{\theta}_{MV}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, T)}{\partial \theta} = 0 \iff \frac{n}{\hat{\theta}_{MV}} + T = 0 \iff \frac{n}{\hat{\theta}_{MV}} = -T$$

Isolando  $\hat{\theta}_{MV}$ :

$$\boxed{\hat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{T}}.$$

## Estimador de máxima verossimilhança

Substituindo de volta em função da variável aleatória  $z_i$ , obtemos:

$$\widehat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log z_i}.$$

(a)  $g(\theta) = P_\theta(Z > 0,3)$

$$\mathbb{E}_\theta(Z) = \frac{\theta}{\theta + 1} \implies \widehat{g}_{(a)} = \frac{\widehat{\theta}_{MV}}{\widehat{\theta}_{MV} + 1}.$$

(b)  $g(\theta) = P_\theta(Z > 0.3)$ .

$$P_\theta(Z > 0.3) = 1 - P_\theta(0 < Z \leq 0.3) = 1 - (0.3)^\theta \implies \widehat{g}_{(b)} = 1 - (0.3)^{\widehat{\theta}_{MV}}.$$

(c)  $g(\theta) = P_\theta(0 < Z < 0.1)$ .

$$P_\theta(0 < Z < 0.1) = (0.1)^\theta \implies \widehat{g}_{(c)} = (0.1)^{\widehat{\theta}_{MV}}.$$

(d)  $g(\theta) = \text{Var}_\theta(Z)$ .

$$\text{Var}_\theta(Z) = \frac{\theta}{(\theta + 1)^2(\theta + 2)} \implies \widehat{g}_{(d)} = \frac{\widehat{\theta}_{MV}}{(\widehat{\theta}_{MV} + 1)^2(\widehat{\theta}_{MV} + 2)}.$$

(e) **Estimativas numéricas.** Dados: (0.12, 0.50, 0.20, 0.23, 0.30, 0.11). Com  $n = 6$ ,

$$\sum_{i=1}^n \log z_i = \log(0.12) + \log(0.50) + \log(0.20) + \log(0.23) + \log(0.30) + \log(0.11) \approx -9.3038.$$

Logo,

$$\widehat{\theta}_{MV} = -\frac{6}{-9.3038} \approx 0.6449.$$

Então,

$$\widehat{g}_{(a)} = \frac{\widehat{\theta}}{1 + \widehat{\theta}} \approx \frac{0.6449}{1.6449} \approx 0.3921,$$

$$\widehat{g}_{(b)} = 1 - (0.3)^{\widehat{\theta}} \approx 1 - (0.3)^{0.6449} \approx 0.5400,$$

$$\widehat{g}_{(c)} = (0.1)^{\widehat{\theta}} \approx (0.1)^{0.6449} \approx 0.2265,$$

$$\widehat{g}_{(d)} = \frac{\widehat{\theta}}{(\widehat{\theta} + 1)^2(\widehat{\theta} + 2)} \approx \frac{0.6449}{(1.6449)^2(2.6449)} \approx 0.0901.$$

*Resumo:*  $\widehat{\theta}_{MV} = -n / \sum \log Z_i \approx 0.6449$  e, por invariância, as estimativas de (a)–(d) são os valores de  $g(\theta)$  avaliados em  $\widehat{\theta}$  como mostrado acima.

$$P_\theta(Z > 0,3) = 1 - 0,3^\theta.$$

$$\boxed{\widehat{g}_{MV}^{(b)} = 1 - 0,3^{\widehat{\theta}_{MV}}}$$

(c) Probabilidade  $P_\theta(0 < Z < 0,1)$

$$P_\theta(0 < Z < 0,1) = 0,1^\theta.$$

$$\boxed{\widehat{g}_{MV}^{(c)} = 0,1^{\widehat{\theta}_{MV}}}$$

(d) Variância

Primeiro momento:

$$E_\theta(Z) = \frac{\theta}{\theta + 1}.$$

Segundo momento:

$$E_\theta(Z^2) = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

Logo,

$$\text{Var}_\theta(Z) = \frac{\theta}{\theta + 2} - \left(\frac{\theta}{\theta + 1}\right)^2 = \frac{\theta}{(\theta + 1)^2(\theta + 2)}.$$

$$\boxed{\widehat{g}_{MV}^{(d)} = \frac{\widehat{\theta}_{MV}}{(\widehat{\theta}_{MV} + 1)^2(\widehat{\theta}_{MV} + 2)}}$$

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad x \in (0,1), \quad \theta > 0,$$

e  $f_\theta(x) = 0$  caso contrário. (Trata-se de uma Beta( $\theta, 1$ )).

**EMV de  $\theta$ .** A verossimilhança é

$$L(\theta; \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^n \theta z_i^{\theta-1} = \theta^n \prod_{i=1}^n z_i^{\theta-1} = \theta^n \left( \prod_{i=1}^n z_i \right)^{\theta-1}.$$

A log-verossimilhança é

$$\ell(\theta) = \log L(\theta; \mathbf{z}) = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log z_i.$$

Derivando e igualando a zero,

$$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log z_i = 0 \implies \widehat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log z_i}.$$

A segunda derivada é

$$\ell''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \quad (\theta > 0),$$

logo o ponto crítico é máximo global. Assim,

$$\widehat{\theta}_{MV} = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log Z_i}.$$

**Momentos e probabilidades.** Para  $X \sim f_\theta$ , para  $a > -\theta$ ,

$$\mathbb{E}_\theta(X^a) = \int_0^1 x^a \theta x^{\theta-1} dx = \theta \int_0^1 x^{a+\theta-1} dx = \frac{\theta}{a+\theta}.$$

Em particular,

$$\mathbb{E}_\theta(X) = \frac{\theta}{\theta+1}, \quad \mathbb{E}_\theta(X^2) = \frac{\theta}{\theta+2}, \quad \text{Var}_\theta(X) = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}.$$

Para  $0 < a < b \leq 1$ ,

$$P_\theta(a < X < b) = \int_a^b \theta x^{\theta-1} dx = [x^\theta]_a^b = b^\theta - a^\theta.$$