Professora: Ivone Freire Mota de Albuquerque
Disciplina: Eletrodinâmica Clássica I
Prova 01 - 25 de abril de 2025

Aluna: Nara Ávila Moraes
Número USP: 5716734

Formulário de Eletrodinâmica

Produto Interno

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\\ \vec{B} &= B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}\\ \vec{A}\cdot\vec{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta\end{aligned}$$

Produto Vetorial e Anticomutatividade

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= \vec{C}\\ \|\vec{C}\| &= \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\theta\\ \vec{B}\times\vec{A} &= -\vec{A}\times\vec{B}\end{aligned}$$

Notação de Einstein e Tensores

- Soma implícita sobre *índices repetidos*: $A_iB_i = \sum_i A_iB_i$
- Produto vetorial com símbolo de Levi-Civita: $(\vec{A}\times\vec{B})_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k$

Rotações e Matrizes de Transformação

$$\text{Em 2D: } \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

$$\text{Em 3D: } \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Aluna: Nara Ávila Moraes
Número USP: 5716734

Cálculo: Derivadas e Integrais

Derivadas

Definição:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Regras importantes:

- **Produto:** $(fg)' = f'g + fg'$
- **Cadeia:** $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- **Quociente:** $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Integrais

Integral indefinida:

$$\int f(x)\, dx$$

Alguns resultados e técnicas:

- **Integral definida:** $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$
- **Integração por partes:** $\displaystyle\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Aluna: Nara Ávila Moraes
Número USP: 5716734

Operadores Diferenciais

Laplaciano em Coordenadas Cartesianas

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplaciano em Coordenadas Esféricas

Para uma função $f(r, \theta, \phi)$:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Coordenadas Esféricas

Relação entre coordenadas cartesianas e esféricas:

$$x = r\sin\theta\cos\phi,$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi,$$

$$z = r\cos\theta.$$

Elementos diferenciais em coordenadas esféricas

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$$

$$d\vec{A} = r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{r}$$

$$dV = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Aluna: Nara Ávila Moraes
Número USP: 5716734

Formulário de Derivadas e Integrais

Derivadas

Sejam u e v funções deriváveis de x e n uma constante.

1. $y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'$
2. $y = u^n \quad \Rightarrow \quad y' = n\,u^{n-1}\,u'$
3. $y = e^u \quad \Rightarrow \quad y' = e^u\,u'$
4. $y = a^u \quad \Rightarrow \quad y' = a^u\,\ln(a)\,u'$
5. $y = \ln(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{u}$
6. $y = \log_a(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{u\,\ln(a)}$
7. $y = \sin(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \cos(u)\,u'$
8. $y = \cos(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin(u)\,u'$
9. $y = \tan(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \sec^2(u)\,u'$
10. $y = \cot(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -\csc^2(u)\,u'$
11. $y = \sec(u) \quad \Rightarrow \quad y' = \sec(u)\,\tan(u)\,u'$
12. $y = \csc(u) \quad \Rightarrow \quad y' = -\csc(u)\,\cot(u)\,u'$

Integrais

1. $\displaystyle\int du = u + C.$
2. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$
3. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$
4. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C.$
5. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C.$
6. $\displaystyle\int \sin(u)\,du = -\cos(u) + C.$
7. $\displaystyle\int \cos(u)\,du = \sin(u) + C.$
8. $\displaystyle\int \sec^2(u)\,du = \tan(u) + C.$
9. $\displaystyle\int \csc^2(u)\,du = -\cot(u) + C.$
10. $\displaystyle\int \sec(u)\,\tan(u)\,du = \sec(u) + C.$
11. $\displaystyle\int \csc(u)\,\cot(u)\,du = -\csc(u) + C.$
12. $\displaystyle\int \tan(u)\,du = -\ln|\cos(u)| + C.$
13. $\displaystyle\int \cot(u)\,du = \ln|\sin(u)| + C.$
14. $\displaystyle\int \sec(u)\,du = \ln|\sec(u) + \tan(u)| + C.$
15. $\displaystyle\int \csc(u)\,du = -\ln|\csc(u) + \cot(u)| + C.$

Geometria

Círculo

- Área do círculo: $A = \pi r^2$
- Comprimento do círculo: $C = 2\pi r$

Esfera

- Área da esfera: $A = 4\pi r^2$
- Volume da esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Lei de Coulomb

- Força entre duas cargas: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^2}\hat{R}$
- Campo elétrico gerado por uma carga: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{R}}{R^2}dq$

Distribuições de carga

- Linear: $dq = \lambda dl$
- Superficial: $dq = \sigma dS$
- Volumétrica: $dq = \rho dV$

Função Delta de Dirac

- Propriedade fundamental:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

- Em 3D: $\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$
- Aparece como representação de cargas pontuais.

Equações de Maxwell

Equações de Maxwell - Eletrostática

Equações de Maxwell - Eletrostática

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$
$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{(com carga)}$$
$$\nabla^2\phi = 0 \quad \text{(sem carga)}$$

Potencial expresso pelos polinômios de Legendre

$$V(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(A_{\ell m}\, r^{\ell} + \frac{B_{\ell m}}{r^{\ell+1}}\right) Y_{\ell}^{m}(\theta,\phi)$$

Potencial expresso pelos esféricos harmônicos

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_{\ell}\, r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}}\right) P_{\ell}(\cos\theta)$$

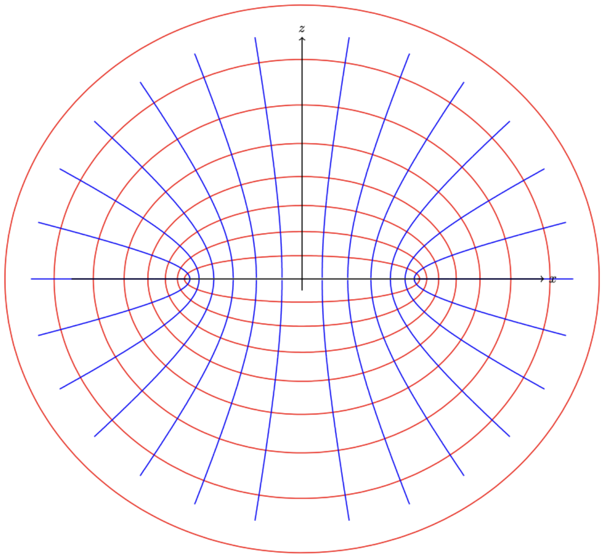
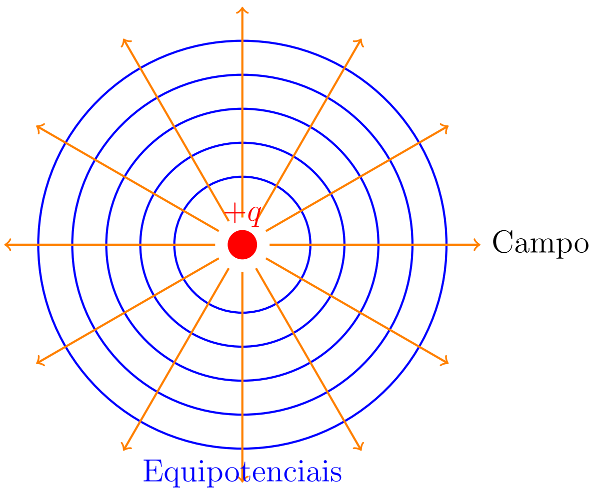


Figura 1: Linhas coordenadas no sistema esferoidal: em vermelho, as superfícies de potencial constante; em azul, as linhas do campo elétrico.

Simetrias

Cargas Discretas



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Aluna: Nara Ávila Moraes
Número USP: 5716734

1 Essay: De Cargas ao Campo Elétrico

1.1 A carga pontual como singularidade no espaço

Uma carga pontual representa um tipo especial de distribuição de carga: ela está completamente concentrada em um único ponto do espaço. Para descrever matematicamente essa situação dentro da formulação do eletromagnetismo, recorremos à Lei de Gauss em sua forma integral:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}. \tag{1}$$

Quando o campo $\vec{E}$ é gerado por uma carga pontual q colocada na origem, ele assume a forma radial conhecida:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}. \tag{2}$$

Aplicando a Lei de Gauss em uma esfera de raio arbitrário centrada na origem, encontramos que a carga interna Q_{int} deve ser igual a q. Para compatibilizar essa distribuição com a forma diferencial da Lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{3}$$

a única distribuição ρ capaz de gerar o campo acima é:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta^3(\vec{r}), \tag{4}$$

a chamada *função delta de Dirac.*

1.2 O fluxo do campo elétrico

O estudo do campo elétrico começa com a análise do efeito de **cargas pontuais** sobre o espaço ao seu redor. Para um conjunto de cargas discretas q_i localizadas em posições $\vec{r}_i$, o campo elétrico em um ponto $\vec{r}$ é dado pela superposição dos campos individuais:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \tag{5}$$

Essa expressão é a forma mais geral do campo, válida para distribuições discretas. No entanto, ao lidarmos com grandes quantidades de carga distribuídas no espaço, torna-se mais eficiente descrever o sistema por uma densidade de carga contínua $\rho(\vec{r})$, levando à formulação integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, d^3r' \tag{6}$$

A partir dessa noção de distribuição contínua, emerge naturalmente a aplicação da **Lei de Gauss**, que fornece uma forma alternativa e muitas vezes mais prática de calcular o campo elétrico, relacionando o *fluxo* do campo através de uma superfície fechada à carga total no interior:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \tag{7}$$

Quando encontramos sistemas altamente simétricos, como uma esfera condutora, um fio infinito ou um plano carregado, essa equação se revela uma aliada poderosa. Nesses cenários, o campo $\vec{E}$ é constante em módulo e direção a uma superfície que seja sempre perpendicular ao campo e nulo caso sejam paralelos, desta forma caso esta Área possa ser definida desta forma, a integral da superfície se reduz a:

$$E \cdot A = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \tag{8}$$

onde A é a área da superfície gaussiana. Com isso, extrai-se o campo para cada situação:

- Carga pontual: $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$
- Fio infinito: $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$
- Plano infinito: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

1.3 Quando a simetria não basta para aplicação da Lei de Gauss

Nem todos os sistemas possuem simetria suficiente para a aplicação fácil da Lei de Gauss. Quando o campo elétrico se torna irregular, sem que haja uma superfície facilmente integrável que acompanhe essa irregularidade, recorre-se ao conceito de potencial elétrico escalar V.

Sabendo que o campo elétrico é conservativo em regiões eletrostáticas:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{9}$$

pode-se defini-lo como o gradiente negativo de uma função escalar:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{10}$$

Esse potencial representa o trabalho por unidade de carga para mover uma carga de uma referência $\vec{r}_0$ até o ponto $\vec{r}$:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{11}$$

O ponto de referência $\vec{r}_0$ é arbitrário, pois devido ao campo elétrico ter rotacional nulo, sabemos que a integral do campo em um caminho fechado é nulo, o que vetorialmente é equivalente a dizer que apenas a diferença de potencial $V(\vec{b}) - V(\vec{a})$ tem significado físico. O referencial em $\vec{r}_0$ é utilizado para definir de forma única um potencial em um ponto de prova $\vec{r}$, e é uma escolha conveniente como por exempo a definição do potencial nulo no infinito, no centro de simetria, ou em uma borda condutora — sempre com o objetivo de simplificar o cálculo e adequar a solução às condições físicas do sistema..

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{12}$$

$$W = Q(V_b - V_a) \tag{13}$$

1.4 Do campo ao potencial: equações diferenciais

A Lei de Gauss em forma diferencial nos conduz a:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{14}$$

Substituindo $\vec{E} = -\nabla V$:

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{15}$$

Esta é a **equação de Poisson**, válida onde há carga. Em regiões sem carga, temos a **equação de Laplace**:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{16}$$

1.5 Capacitores e o papel do potencial eletrostático

A diferença de potencial ΔV entre dois condutores eletrizados define um dos dispositivos fundamentais da eletrostática: o capacitor. Um capacitor armazena energia elétrica ao manter cargas opostas em dois condutores separados, mantendo entre eles um campo elétrico estável.

A relação entre a carga Q e a diferença de potencial ΔV define a capacitância C do sistema:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}. \tag{17}$$

Para configurações geométricas simples, essa expressão pode ser calculada diretamente. Por exemplo, para um capacitor de placas paralelas com área A e separação d:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}. \tag{18}$$

O campo entre as placas é uniforme, e o potencial varia linearmente. Outros exemplos notáveis incluem:

- Esfera condutora de raio R: $C = 4\pi\varepsilon_0 R$;
- Capacitor esférico: dois cascos concéntricos de raio a e b:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \tag{19}$$

Assim, os capacitores exemplificam como a diferença de potencial adquire interpretação prática, relacionando o armazenamento de energia à geometria e à permissividade do meio.

1.6 Energia Armazenada no Campo Elétrico

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}')V(\vec{r}')\, d^3r' \tag{20}$$

$$\text{Com Lei de Gauss:} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \vec{E}^2\, d^3r \tag{21}$$

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \tag{22}$$

1.7 Caso Discreto: Energia de Interação

- Energia de interação entre cargas pontuais:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i V(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \tag{23}$$

- Auto-interação diverge:

$$\frac{q_i^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{ii}} \to \infty \quad \text{(deve ser excluída)} \tag{24}$$

1.8 Os três caminhos para resolver V

- **Método das imagens:** útil quando há planos condutores ou simetrias geométricas simples.
- **Polinômios de Legendre:** aplicáveis quando há simetria azimutal (independência de ϕ) em coordenadas esféricas.
- **Harmônicos esféricos:** usados quando não há simetria adicional — o caso mais geral.

Uma consequência prática e conceitual importante é que, sendo o potencial uma função escalar, a equação diferencial associada à sua determinação envolve uma única equação escalar — caso contrário, exigiria a solução simultânea de três equações diferenciais. Essa simplicidade torna o uso do potencial particularmente eficiente na resolução de problemas eletrostáticos.

1.9 Do potencial ao campo

Após determinar $V(\vec{r})$, volta-se finalmente à relação fundamental:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{25}$$

fechando o ciclo entre fontes ρ, potenciais e campos. O potencial atua como função intermediária, facilitando a resolução escalar em vez da vetorial, desde que as condições de contorno sejam conhecidas.