

一，概述

1，测角方法

- 振幅法
- 相位法

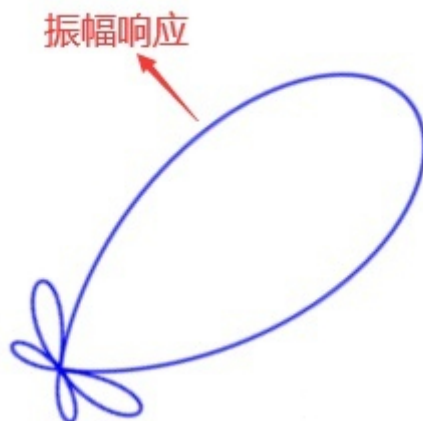
2，天线方向图

天线对于不同方向电磁波信号的响应。

$$F(\theta) = |F(\theta)|e^{j\phi(\theta)}$$

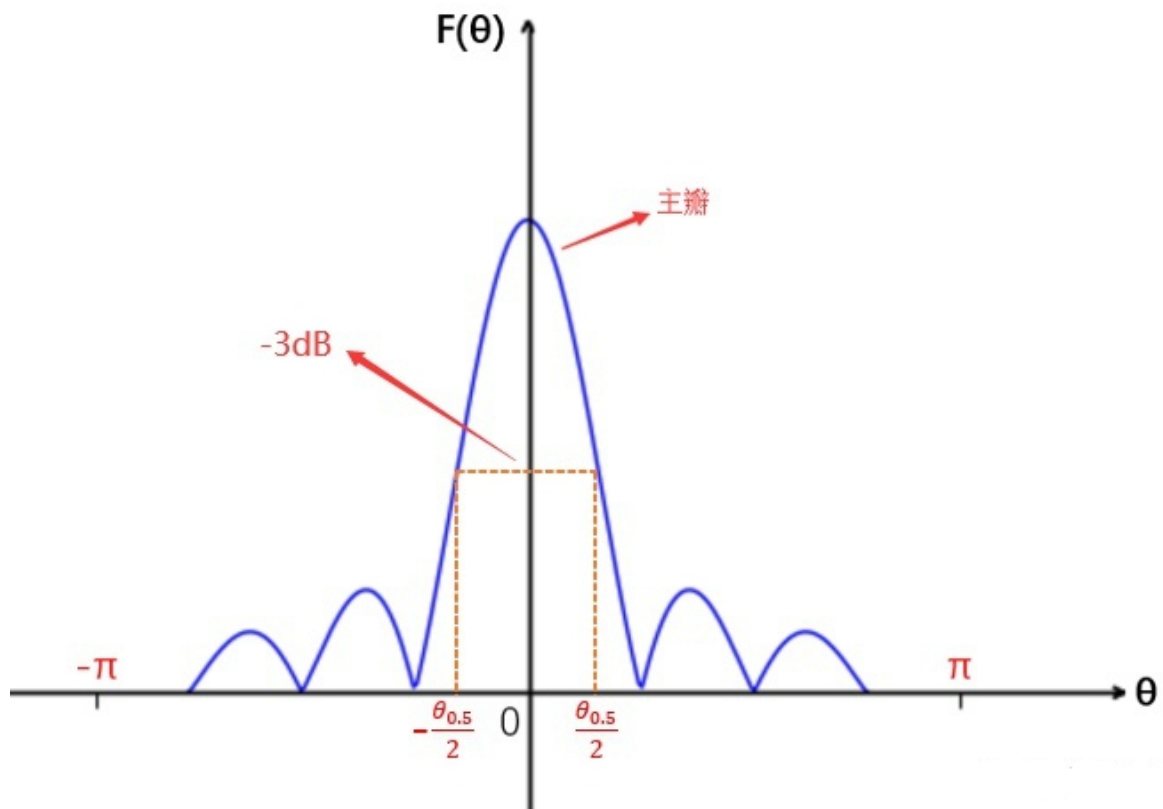
$|F(\theta)|$ ：天线方向图函数的振幅响应；

$\phi(\theta)$ ：天线方向图函数的相位响应。



(1) 天线方向图的一般性质

- 极大值, $F(0) \geq F(\theta), \forall \theta \in [-\pi, \pi]$;
- 对称性, $F(\theta) = F(-\theta)$;
- 主瓣单调性, $|\theta_1| > |\theta_2|$, 并且 θ_1, θ_2 在主瓣内, 则 $F(\theta_1) < F(\theta_2)$;
- 针对电压方向图, $F(\theta_{0.5}/2)/F(0) = \sqrt{2}/2$



(2) 典型函数

- 余弦
- 高斯
- 辛克函数

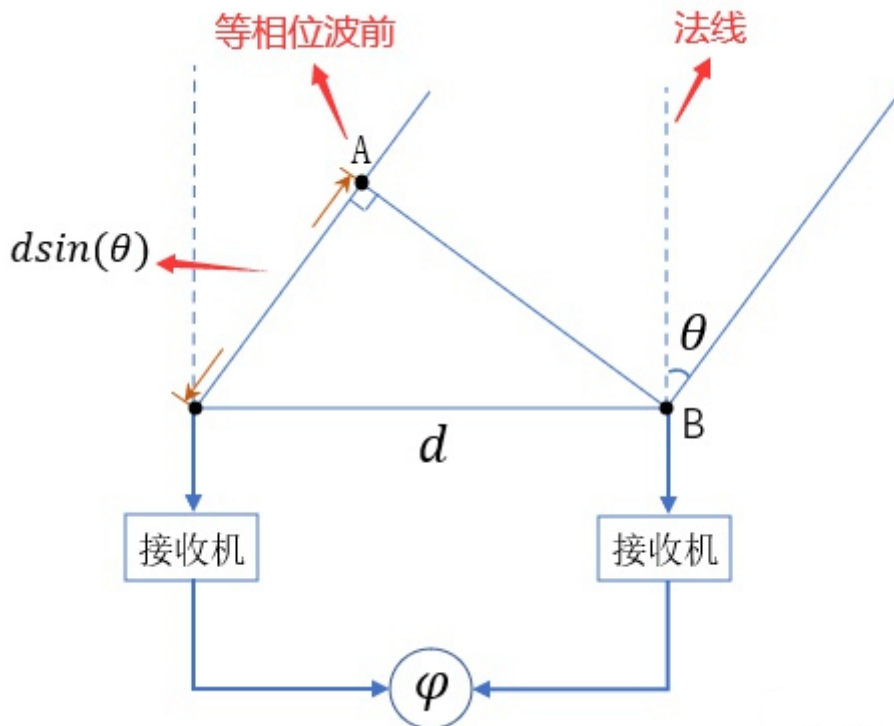
二，测角方法

1，相位法

利用多个天线所接收回波信号之间的相位差进行测角。

(1) 两天线相位法测角原理

两天线相位法测角示意图如下所示。



假设两天线之间的距离 d ，远远小于目标到振源的距离，则可以认为到达接收点的目标所反射的电磁波近似为平面波。

目标到 A, B 两点的距离相等，回波到 A, B 两点的相位也相等，回波到接收点的距离相差 $d \sin(\theta)$ ，对应相位假设为 ϕ 。一个波长对应相位差为 2π ，那么， $d \sin(\theta)$ 长的距离对应的相位 ϕ 为：

$$\phi = \frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda}$$

所以，如果用相位计进行比相，测出其相位差 ϕ ，就可以求得 θ 。

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\phi \lambda}{2\pi d}\right)$$

该值为相对于法线的夹角，需要根据 ϕ 的符号确定 θ 到底在法线的左边还是右边。

当 $\phi \in [-\pi, \pi]$ 时， θ 取值无模糊。 θ 对应的取值范围 $[-\theta_{max}, \theta_{max}]$ ，将 π 带入公式，可得：

$$\theta_{max} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right)$$

也就是说，要想无模糊的测角，测角的范围应该在 $[-\theta_{max}, \theta_{max}]$ 之间。我们当然希望无模糊测角的范围越大越好，从上式可知，只要 d/λ 越小，对应的 θ_{max} 就越大。 d 就是天线之间的距离，称之为 **(短) 基线**。短基线保证大的无模糊测角范围。也就是说，如果基线长度 d 比较短的话，无模糊测角范围就比较大；如果基线长度 d 比较长的话，无模糊测角范围就比较小。

(2) 测角误差分析与多值性

对公式：

$$\phi = \frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda}$$

两边同时取微分：

$$d\phi = \frac{2\pi d \cos(\theta)}{\lambda} d\theta$$

可得：

$$d\theta = \frac{\lambda}{2\pi d \cos(\theta)} d\phi$$

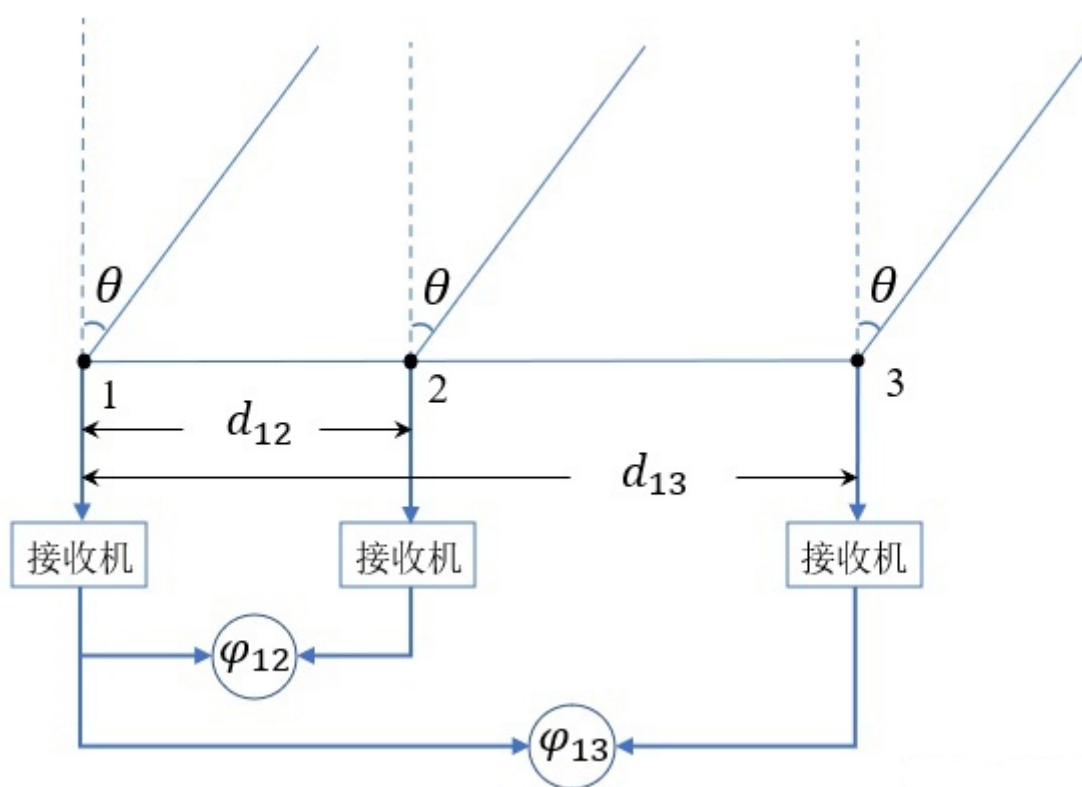
从式子中可以看出，采用读数精度高（ $d\phi$ 小）的相位计（相位比较器或鉴相器），或增大 d/λ 的值（长基线保证高的测角精度），均可以提高测角精度。

还可以得出：

- 当 $\theta = 0$ 时，即目标处在天线法线方向时，测角误差 $d\theta$ 最小；
- 当 $\theta = \pm 90^\circ$ 时，测角误差 $d\theta$ 最大。

(3) 多基线测角

短基线保证最大无模糊测角范围；长基线保证高的测角精度，但无模糊测角范围小。所以要采用多基线测角。



1 和 2 之间的间距 d_{12} 比较短，根据 $\theta_{max} = \arcsin(\lambda/2d)$ 可知， θ_{max} 就比较大，因此，短基线可以保证比较大的无模糊测角范围。长基线 d_{13} 保证高的测角精度。

$$\phi_{12} = \frac{2\pi d_{12} \sin\theta}{\lambda}$$

$$\phi_{13} = \frac{2\pi d_{13} \sin\theta}{\lambda}$$

要使 ϕ_{12} 无模糊测角， ϕ_{12} 就不能超过 2π 。因此， ϕ_{12} 就是鉴相器能测出来的值。对于 ϕ_{13} 来讲，因为 d_{13} 比较大，所以 ϕ_{13} 一般大于 2π 。

$$\phi_{13} = 2\pi N + \phi$$

其中， ϕ 是相位计测出来的值。

长基线 d_{13} 算出来的 θ 精度更高，所以有：

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\phi_{13}\lambda}{2\pi d_{13}}\right)$$

式中， λ 和 d_{13} 已知。因为只能测得 ϕ ，而 N 不知道，所以 ϕ_{13} 未知。只要求得 N ，就可以求出 ϕ_{13} 。

$$\frac{\phi_{13}}{\phi_{12}} = \frac{d_{13}}{d_{12}} = \frac{2\pi N + \phi}{\phi_{12}}$$

$$\frac{d_{13}}{d_{12}}\phi_{12} = 2\pi N + \phi$$

上式两边同时除以 2π ，得到：

$$\phi_{12} \frac{d_{13}}{d_{12}} \frac{1}{2\pi} = N + \frac{\phi}{2\pi}$$

式中的 ϕ 是可测量的，其值满足 $\phi < 2\pi$ 。因此， $\phi/2\pi < 1$ 。所以：

$$N = INT\left[\phi_{12} \frac{d_{13}}{d_{12}} \frac{1}{2\pi}\right]$$

根据已知的 ϕ_{12} ， d_{13} ， d_{12} ，可以求出 N ，进而可以得到 $\phi_{13} = 2\pi N + \phi$ 。然后就可以求得 θ ：

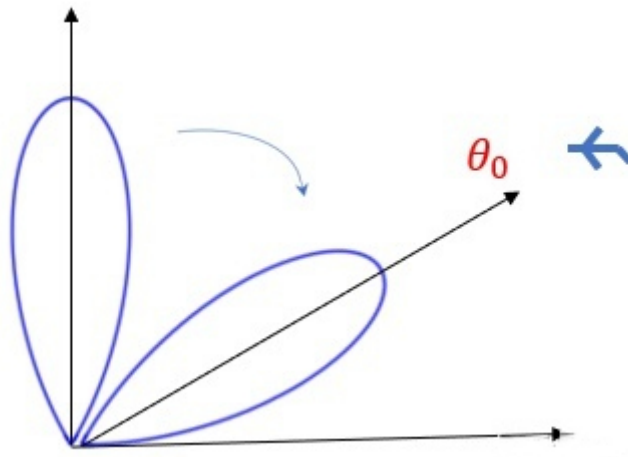
$$\theta = \arcsin\left(\frac{\phi_{13}\lambda}{2\pi d_{13}}\right)$$

2，振幅法

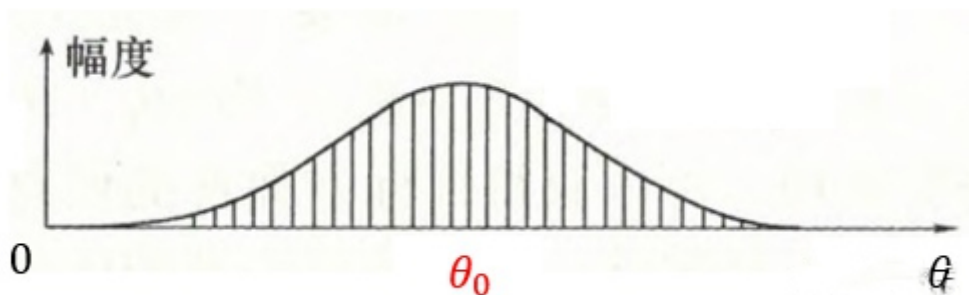
振幅法测角是用天线收到的回波信号幅度值来做角度测量的，该幅度值的变化规律取决于天线方向图以及天线扫描方式。振幅法测角可分为**最大信号法**和**等信号法**两大类

(1) 最大信号法

天线扫描的过程就是雷达天线方向图函数最大值指向不断发生变化的过程。



如果把从扫描起始时刻到扫描结束时刻，雷达收到目标回波的幅度作图，其幅度的变化过程就类似于天线方向图函数的变化过程，开始比较小，然后逐渐增大，到最大值再慢慢减小。最大信号法就是在找幅度变化过程中的极大值所在的位置。



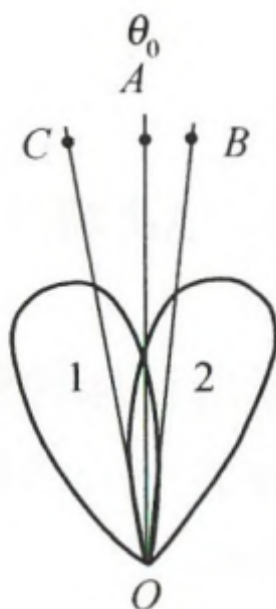
波束宽度、信噪比都会影响最大信号法测角的精度。测角精度如下所示：

$$\delta\theta = 0.5\theta_B / \sqrt{(\frac{S}{N})_m n}$$

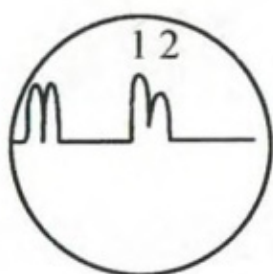
其中， θ_B 为天线波束宽度， $(S/N)_m$ 为中心脉冲的信噪比， n 为单程半功率点波束宽度内的脉冲数。（优点：信噪比较好，设备简单 缺点是不利于角度跟踪）

(2) 等信号法

等信号法测角采用两个相同且彼此部分重叠的波束，两个天线方向图交叠处大概在 3dB 点处。如果目标处在两波束的交叠轴方向，则由两波束收到的信号强度相等，否则一个波束收到的信号强度高于另一个，如图所示。故常常称 OA 为等信号轴。当两个波束收到的回波信号相等时，等信号轴所指方向即为目标方向。



当目标处在 C、A、B 三点处回波幅度大致如下所示。



OC 方向



OA 方向



OB 方向

设天线电压方向性函数为 $F(\theta)$ ，等信号轴 OA 的指向为 θ_0 。

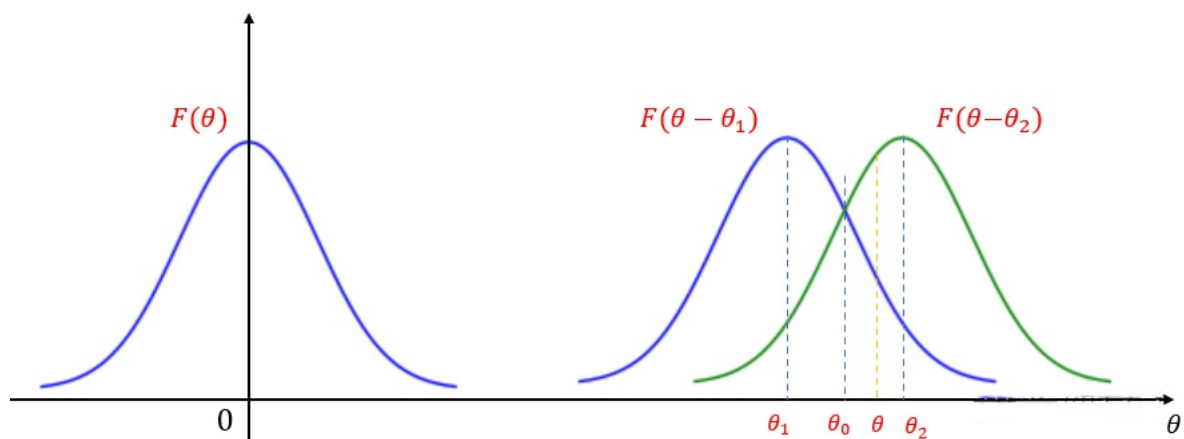
$$\theta_0 - \theta_1 = \theta_2 - \theta_0 = \theta_k$$

θ_k 为 θ_0 与波束最大值方向的偏角。

波束 1、2 的方向性函数可分别写成：

$$F_1(\theta) = F(\theta - \theta_1) = F(\theta - \theta_0 + \theta_k)$$

如下图所示。



假设 $\theta_t = \theta - \theta_0$ 为目标与等信号轴的夹角，则有：

$$F_1(\theta) = F(\theta_t + \theta_k)$$

同理，有：

$$F_2(\theta) = F(\theta - \theta_2) = F(\theta - \theta_0 - \theta_k) = F(\theta_t - \theta_k)$$

只要求得了 θ_t 就得到了 θ 。

等信号法主要可以分为**比幅法**与**和差法**。

a) 比幅法

根据雷达方程可以算得到达天线口面的回波信号功率，然后开方就可以得到幅度，用 K 表示（到达两个天线的幅度相同）。

波束 1 收到的回波信号为： $u_1(\theta) = KF(\theta_t + \theta_k)$

波束 2 收到的回波信号为： $u_2(\theta) = KF(\theta_t - \theta_k)$

比幅法就是将两者相比，得到：

$$\frac{u_1(\theta)}{u_2(\theta)} = \frac{F(\theta_t + \theta_k)}{F(\theta_t - \theta_k)}$$

式中， u_1 和 u_2 是可以测量出来的值； θ_k 为天线方向图最大值与等信号轴夹角，是已知量； F 这个函数形式也是已知的。只有 θ_t 是未知量，因此可以求得。为了计算方便，查找预先制定的表格就可估计出目标偏离 θ_0 的数值。

b) 和差法

和信号为两个天线接收到信号之和，差信号为两个天线接收到信号之差。

差信号：

$$\Delta(\theta_t) = u_1(\theta) - u_2(\theta) = K[F(\theta_t + \theta_k) - F(\theta_t - \theta_k)]$$

在 θ_0 附近做级数展开，得到：

$$\Delta(\theta_t) = 2K\theta_t F'(\theta_k)$$

和信号：

$$\begin{aligned}\Sigma(\theta_t) &= u_1(\theta) + u_2(\theta) = K[F(\theta_t + \theta_k) + F(\theta_t - \theta_k)] \\ &= 2KF(\theta_k)\end{aligned}$$

将和、差信号相比：

$$\frac{\Delta}{\Sigma} = \frac{\theta_t}{F(\theta_0)} F'(\theta_k)$$

上式中只有 θ_t 未知，因此可以求得。

等信号法的实现方法

等信号法中，两个波束可以同时存在，若用两套相同的接收系统同时工作，则称**同时波瓣法**；两波束也可以交替出现，或只要其中一个波束，使它绕 OA 轴旋转，波束便按时间顺序在 1、2 位置交替出现，只要用一套接收系统工作，则称为**顺序波瓣法**。

等信号法的优缺点

优点

- 测角精度比最大信号法高。因为等信号轴附近方向图斜率较大，目标略微偏离等信号轴时，两信号强度变化比较显著；
- 可以用于角度跟踪。

缺点

- 测角系统比较复杂
- 等信号轴方向不是方向图的最大值方向，故在发射功率相同的条件下，最大作用距离 R_{max} 比最大信号法小。

三、自动测角原理和方法

自动测角：就是指角度跟踪，目的是使等信号轴的方向指向目标方向。

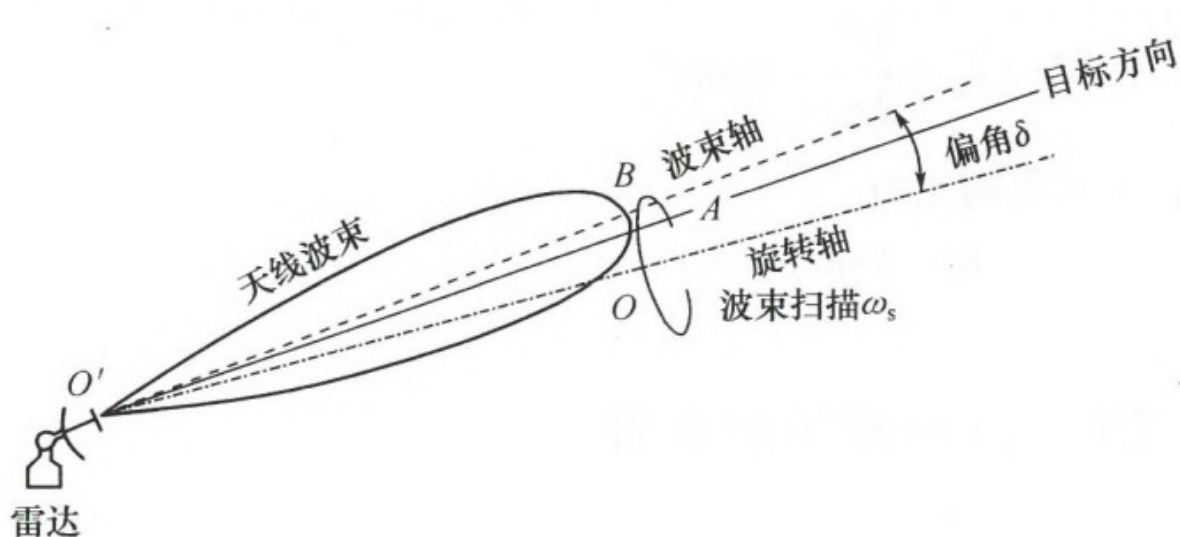
自动测角分类：

- 和顺序波瓣对应的，叫**圆锥扫描自动测角系统**；
- 和同时波瓣法对应的，叫**单脉冲自动测角系统**。

比如导弹的导引头，就是一部精密的自动测角的雷达，特别是在末制导阶段（距离目标只有几公里的时候），导引头开机之后，就是在利用等信号法进行自动测角，不断调整和目标之间的角度去跟踪目标。

1、圆锥扫描自动测角系统

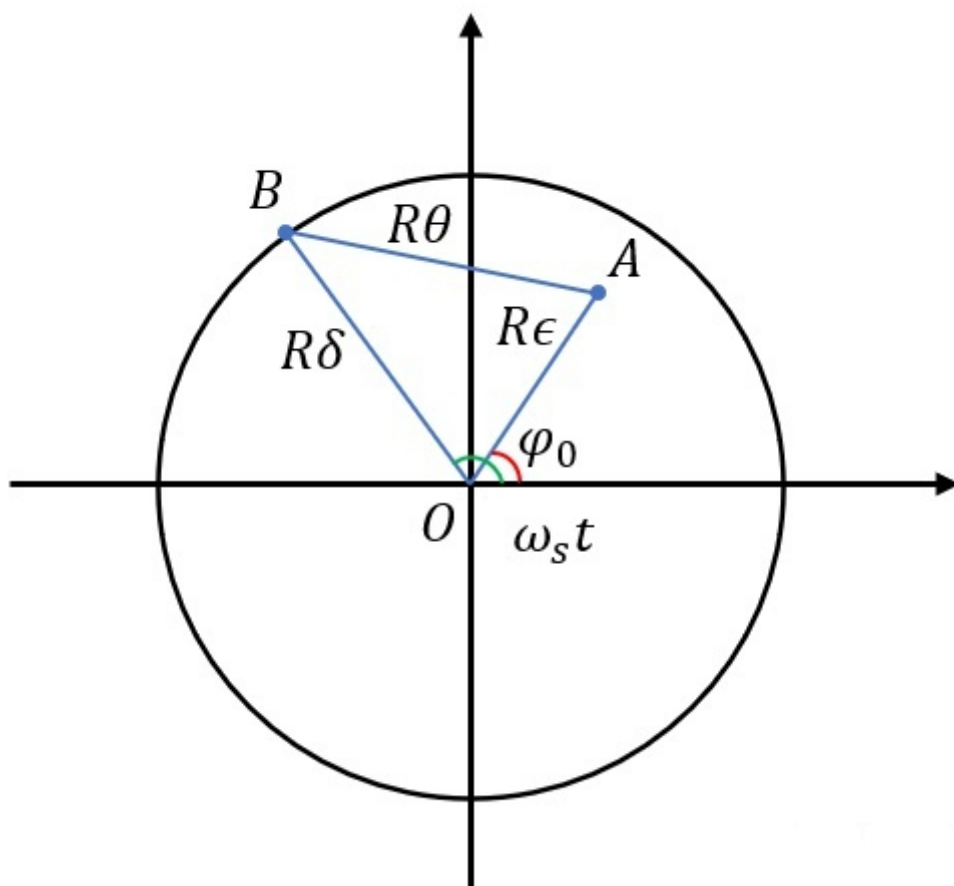
圆锥扫描波束如下图所示。



图中的 δ 就是 θ_k 也就是等信号轴与波束最大宽度的夹角。

目标与旋转轴的夹角就是 θ_t

垂直于等信号轴的截面，如下图所示。



δ 对应前面的 θ_k ，即等信号轴与波束最大值方向的偏角。

ϵ 对应前面的 θ_t ，即目标与等信号轴的夹角，是自动测角系统想要测量的值。只要 ϵ 不为 0，就要调整旋转轴的指向，使其指向目标的方向。

θ ：表示目标方向与波束最大值方向的夹角。

接收信号电压振幅大小为

$$U = KF^2(\theta)$$

根据雷达方程推导， K 包含了距离、功率等因素，且为天线最大增益处发射接收是的情况，如果目标与天线最大增益处的夹角为 θ ，就需要将天线方向图函数考虑进去。 $F(\theta)$ 为电压性天线方向图函数。假设电磁波发射到接收过程中，角度 θ 没有发生变化，发射有一个 $F(\theta)$ ，接收再乘以一个 $F(\theta)$ ，所以有一个平方项。

根据余弦定理可得：

$$R^2 \theta^2 = R^2 \delta^2 + R^2 \epsilon^2 - 2R^2 \delta \epsilon \cos(\omega_s t - \phi_0)$$

近似可得：

$$\theta = \delta - \epsilon \cos(\omega_s t - \phi_0)$$

将 θ 带入 U

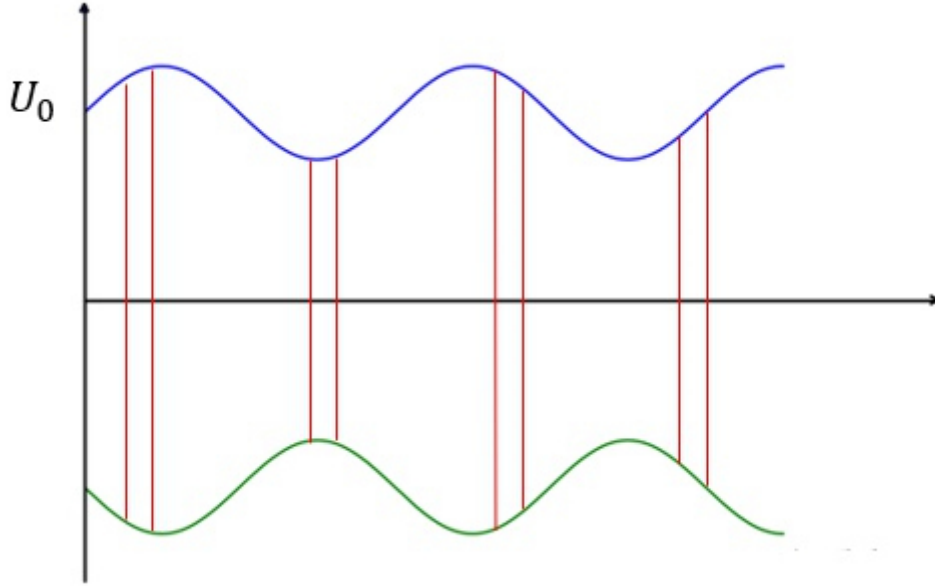
$$U = KF^2(\delta - \epsilon \cos(\omega_s t - \phi_0))$$

将上式在 δ （固定值）处展开为泰勒级数并忽略高次项，可得：

$$\begin{aligned}
U &= K[F^2(\delta) - 2F(\delta)F'(\delta)\cos(\omega_s t - \phi_0)] \\
&= KF^2(\delta)[1 - 2\frac{F'(\delta)}{F(\delta)}\epsilon\cos(\omega_s t - \phi_0)] \\
&= U_0[1 + \eta\epsilon\cos(\omega_s t - \phi_0)]
\end{aligned}$$

$U_0 = KF^2(\delta)$, $\eta = -2F'(\delta)/F(\delta)$ 均为常数。

U 反映的是回波信号的幅度，且随着时间 t 在发生变化。当 $\epsilon = 0$ 的时候， U 为一常数，说明此时目标就在旋转轴上，为一等幅信号。 ϵ 不为 0 的时候， U 为一调幅信号，其波形大致如下所示（假设为脉冲雷达）。



图中红色线条表示信号脉冲，即一个信号的多次回波。真正求信号包络的时候，实际只有蓝色那条线。

取出信号包络，消除直流分量，可得：

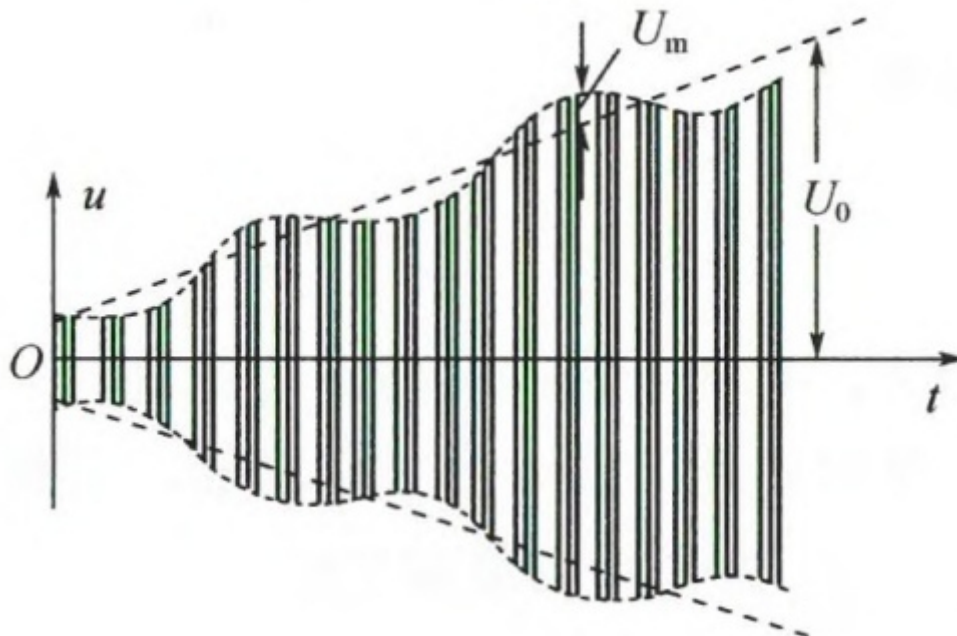
$$U_0\eta\epsilon\cos(\omega_s t - \phi_0)$$

真正进行角度跟踪，光知道 ϵ 并不能唯一确定目标位置。需要知道方位和俯仰误差两部分，即

- $U_0\eta\epsilon\cos(\phi_0)$
- $U_0\eta\epsilon\sin(\phi_0)$

误差电压分解的办法是采用两个相位鉴别器，相位鉴别器的基准电压分别为 $\cos(\omega_s t)$ 和 $\sin(\omega_s t)$ 。也就是说将这两项分别与前面的包络项相混频（相乘），然后过低通滤波器，就可以得到方位和俯仰误差两部分分量。

前面的推导是假设 U_0 为一常数，即 K 为常数，也就是说假设目标是静止不动的。如果目标远离雷达或者向着雷达运动， K 就会发生变化，不再是一个常数。如果目标向着雷达运动， K 就会逐渐变大，回波信号如下图所示。



这样的误差信号将使系统的角灵敏度变化，如果不设法消除，将使系统工作性能变坏。因此，必须在接收机里加上自动增益控制（AGC）电路，用以消除目标距离及目标截面积大小等对输出误差电压幅度的影响，使输出误差电压只取决于误差角而与距离等因素无关。为此，要取出回波信号平均值%，用它去控制接收机增益，使输出电压的平均值保持不变。

如果想要 ϵ 好检测出来，需要调幅波形 $\eta\epsilon$ 大一些，即调幅的幅度变化大一些，才有利于检测。如果 η 和 ϵ 都很小，那么调幅的幅度就很小，调幅特性就不明显，不利于检测。但是， ϵ 是没有办法控制的， η 是可以控制的。

$$\eta = -2F'(\delta)/F(\delta)$$

这个值在什么时候比较大呢？在 $3dB$ 点处。

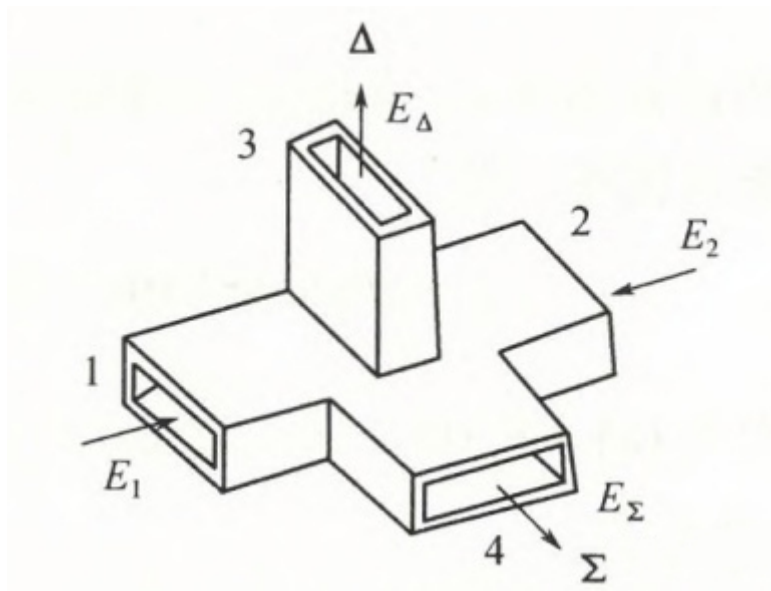
2、单脉冲自动测角系统

单脉冲自动测角属于同时波瓣测角法。

(1) 振幅和差式单脉冲工作过程

在一个角平面内，两个相同的波束部分重叠，其交叠方向即为等信号轴。将两个波束同时接收到的回波信号振幅进行比较，即可取得目标在该平面上的角误差信号，然后将此误差信号电压放大变换后加到驱动电机，控制天线向减小误差的方向运动。

和差比较器是单脉冲雷达的重要部件，由它完成和、差处理，形成和差波束。用得较多的是双T接头，如下所示。



a) 雷达发射过程

发射时，从发射机来的信号加到和差比较器的 Σ 端， Δ 端无输出，1,2 两端输出等幅同相信号。两个馈源被同相激励并辐射相同的功率，结果两波束在空间各点产生的场强同相相加，形成发射和波束 $F_{\Sigma}(\theta)$ 。 $F_1(\theta)$ 表示 1 端的电压性天线方向图函数， $F_2(\theta)$ 表示 2 端的电压性天线方向图函数，因此有：

$$AF_1(\theta) + AF_2(\theta) = A(F_1(\theta) + F_2(\theta)) = AF_{\Sigma}(\theta)$$

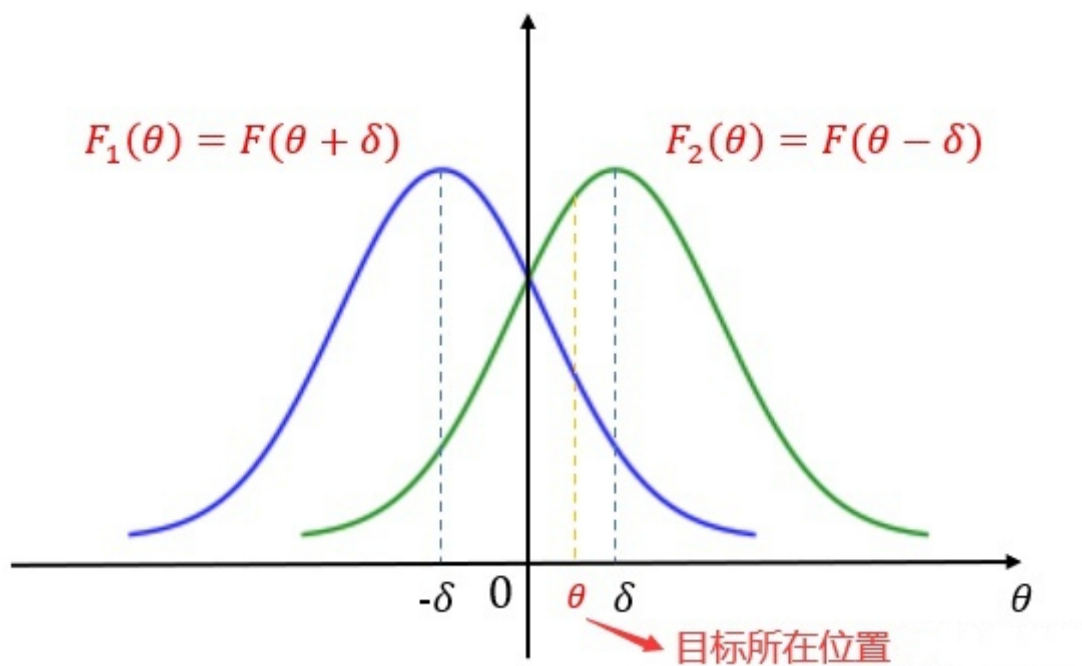
b) 雷达接收过程

双 T 接头的 1,2 端输入， Δ 端输出差信号， Σ 端输出和信号。到达 1,2 的回波信号为 $KF_{\Sigma}(\theta)$ ，振幅用 K 表示，意思是说回波信号相对于发射信号振幅发生了变化。

$$\begin{aligned}\Delta &= KF_{\Sigma}(\theta)F_2(\theta) - KF_{\Sigma}(\theta)F_1(\theta) \\ &= KF_{\Sigma}(\theta)[F_2(\theta) - F_1(\theta)] \\ &= KF_{\Sigma}(\theta)F_{\Delta}(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma &= KF_{\Sigma}(\theta)F_2(\theta) + KF_{\Sigma}(\theta)F_1(\theta) \\ &= KF_{\Sigma}(\theta)[F_2(\theta) + F_1(\theta)] \\ &= KF_{\Sigma}^2(\theta)\end{aligned}$$

(2) 理论分析



假设以 0 点对称的天线波束函数叫做 $F(\theta)$ ，上图右边为 2 天线，左边为 1 天线，两波束相对等信号轴的偏角为 δ ，那么有：

$$\begin{aligned} F_1(\theta) &= F(\theta + \delta) \\ F_2(\theta) &= F(\theta - \delta) \end{aligned}$$

从前面的分析可知，雷达通过和天线方向图将信号发射出去，接收时，得到 Δ 和 Σ 信号。我们的目的是想通过 Δ 和 Σ 将目标所在位置 θ 求出来，就达到了自动测角的目的。

$$\begin{aligned} F_{\Sigma}(\theta) &= F(\theta - \delta) + F(\theta + \delta) \\ F_{\Delta}(\theta) &= F(\theta - \delta) - F(\theta + \delta) \end{aligned}$$

式中， δ 为已知项，将 $F(\theta \pm \delta)$ 在 δ 处做泰勒级数展开，忽略高阶项得到：

$$F(\theta \pm \delta) = F(\delta) \pm F'(\delta)\theta$$

将 $F(\theta \pm \delta)$ 、 F_{Σ} 、 F_{Δ} 带入到 Σ 和 Δ 的表达式中，得到：

$$\begin{aligned} \Sigma &= 4KF^2(\delta) \\ \Delta &= -4KF(\delta)F'(\delta)\theta \end{aligned}$$

式中， Σ 、 Δ 、 δ 、 F 函数均为已知项， K 和 θ 为未知项，将两式相比得到：

$$\frac{\Delta}{\Sigma} = -\frac{F'(\delta)}{F(\delta)}\theta = \eta\theta$$

因此可以得到：

$$\theta = \frac{1}{\eta} \frac{\Delta}{\Sigma}$$

只要收到一个脉冲，就能输出 Σ 信号和 Δ 信号，将两者相比就能得到 θ 。

Σ 和 Δ 同相， θ 就为正；

Σ 和 Δ 反相， θ 就为负。

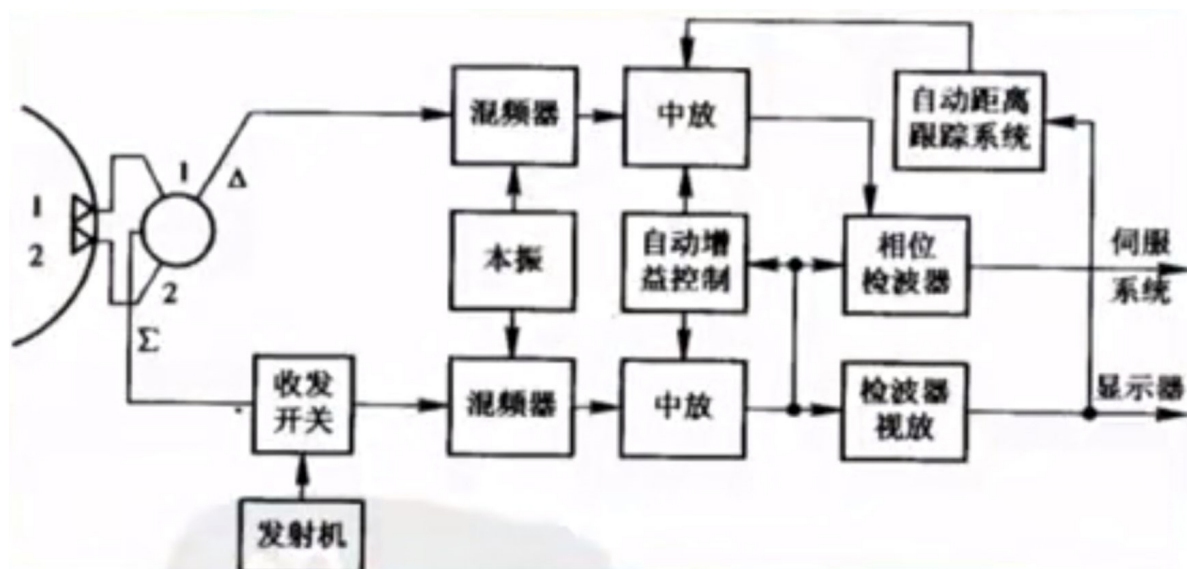
相位检波器和角误差信号的变换。和差比较器 Δ 端输出的高频角误差信号还不能用来控制天线跟踪目标，必须把它变换成**直流误差电压**，其大小应与高频角误差信号的振幅成比例，而其极性应与高频角误差信号的相位来决定，这一变换作用由相位检波器完成。

系统组成

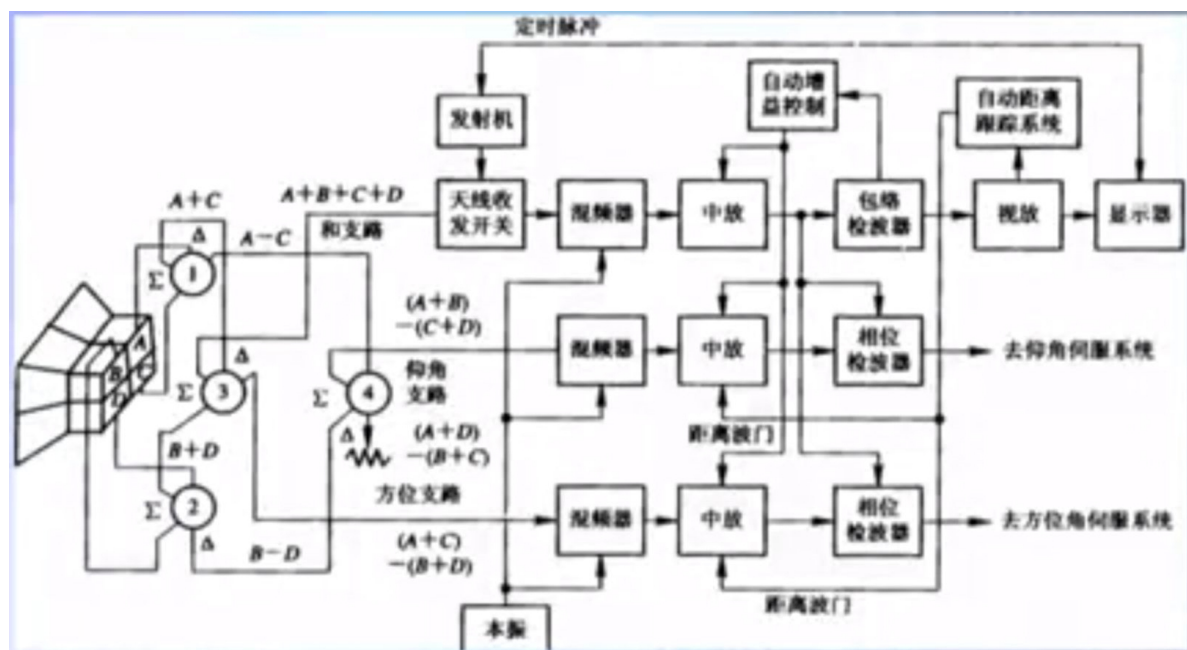
(1) 双T接头

(2) AGC

(3) 相位检波器



单平面振幅和差单脉冲雷达简化方框图



双平面振幅和差单脉冲雷达简化方框图

四、天线波束扫描方法

雷达波束通常以一定的方式依次照射给定空域，以进行目标探测和目标坐标测量，即天线波束需要扫描。本节讨论天线波束的扫描方式和方法。

1、波束形状和扫描方式

不同用途的雷达，其所用的天线波束形状不同，扫描方式也不同。两种常用的基本波束形状为扇形波束和针状波束。

(1) 波束形状

- 扇形波束

扇形波束的水平面和垂直面内的波束宽度有较大差别，也就是说在一个平面上波束窄，另一个平面上波束宽。比较窄的平面保证较高的测角精度和分辨力，比较宽的平面保证比较大的扫描范围。

- 针状波束

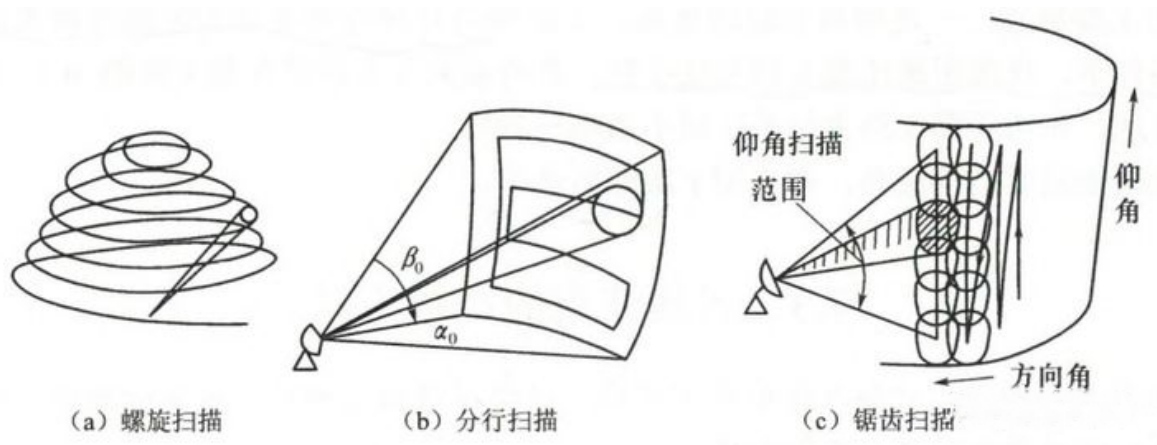
针状波束的水平面和垂直面波束宽度都很窄，好处是增益特别强。

(2) 扫描方式

扫描方式是指天线波束以什么样的轨迹变化。

扇形波束，主要扫描方式是圆周扫描和扇扫。

针状波束，根据雷达的不同用途，针状波束的扫描方式很多，包括为螺旋扫描、分行扫描、为锯齿扫描等。



2、天线波束的扫描方法

实现波束扫描的基本方法有**机械性扫描**和**电扫描**两种。

(1) 机械性扫描

利用整个天线系统或其中某一部分的机械运动来实现波束扫描称为**机械性扫描**。

机械性扫描的优点是简单。其主要缺点是机械运动惯性大，扫描速度不高。

(2) 电扫描

电扫描时，天线反射体、馈源等不必做机械运动，但可以产生最大值指向发生变化的天线方向图。因无机械惯性限制，扫描速度可大大提高，波束控制迅速灵便，故这种方法特别适用于要求波束快速扫描及巨型天线的雷达中。

电扫描的主要缺点是扫描过程中波束宽度将展宽，因而天线增益也要减小，所以扫描的角度范围有一定限制。

电扫描又可分为相位扫描法、频率扫描法、时间延迟法等。

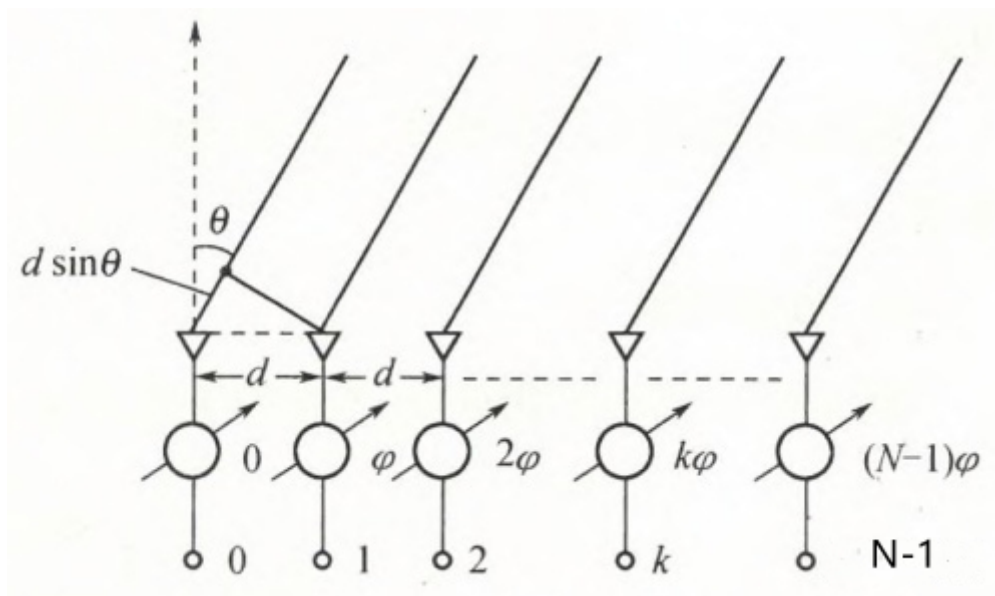
(3) 相位扫描法

在阵列天线上采用控制移相器相移量的方法来改变各阵元的激励相位，从而实现波束的电扫描。这种方法称为相位扫描法，简称相扫法。

移相器：输出信号相位相对于输入信号相位滞后 ϕ 。

a) 基本原理

从线阵进行分析。



假设远场到达天线的距离远远大于天线之间的间距，可以认为到达 N 个天线的电磁波方向是平行的。

现在考虑偏离法线 θ 方向远区某点入射信号的场强，它应为各阵元在接收到的辐射场的矢量和。忽略各阵元到该点距离上的微小差别对振幅的影响，可认为各阵元在该点辐射场的振幅相等，用 E 表示。因为电磁波波长很小， $d \sin \theta$ 的距离对相位的影响很大，所以距离差对相位的影响不能忽略。

$$\begin{aligned} E(\theta) &= E + Ee^{j(\Psi-\phi)} + Ee^{j2(\Psi-\phi)} + \dots + Ee^{j(N-1)(\Psi-\phi)} \\ &= E \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk(\Psi-\phi)} \end{aligned}$$

ϕ 为相邻阵元激励电流相位差，即移相器带来的相位差。 $\Psi = 2\pi d \sin \theta / \lambda$ 为由于波程差引起的相邻阵元辐射场的相位差。

按等比级数求和并运用欧拉公式，可得：

$$E(\theta) = E \frac{\sin\left[\frac{N}{2}(\Psi - \phi)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(\Psi - \phi)\right]} e^{j\left[\frac{N-1}{2}(\Psi - \phi)\right]}$$

因此可得：

$$|E(\theta)| = \left| E \frac{\sin\left[\frac{N}{2}(\Psi - \phi)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(\Psi - \phi)\right]} \right|$$

这个实际上就是天线方向图的幅度响应的式子。但往往我们说天线方向图函数，都是指归一化的天线方向图，也就是在 $\theta = 0$ 的时候，天线方向图函数值为 1。如果要将上式进行归一化，首先要求得其最大值，当 $\phi = \Psi$ 时，各分量同相相加，场强幅值最大，有：

$$|E(\theta)|_{max} = NE$$

故归一化方向性函数为：

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{|E(\theta)|}{|E(\theta)_{max}|} \\ &= \left| \frac{1}{N} \frac{\sin[\frac{N}{2}(\Psi - \phi)]}{\sin[\frac{1}{2}(\Psi - \phi)]} \right| \\ &= \left| \frac{1}{N} \frac{\sin[\frac{N}{2}(\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta - \phi)]}{\sin[\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta - \phi)]} \right| \end{aligned}$$

波束扫描的本质是天线方向图的最大值指向发生变化。当上式中 **sin** 的值取 0 的时候，分子、分母同时为 0，根据洛比达法则 **F(θ)** 取得最大值 1。

即当 $\phi = 2\pi d\sin\theta/\lambda$ 时， $F(\theta) = 1$ ，此时对应的偏移角为 θ_0

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{\phi\lambda}{2\pi d}\right)$$

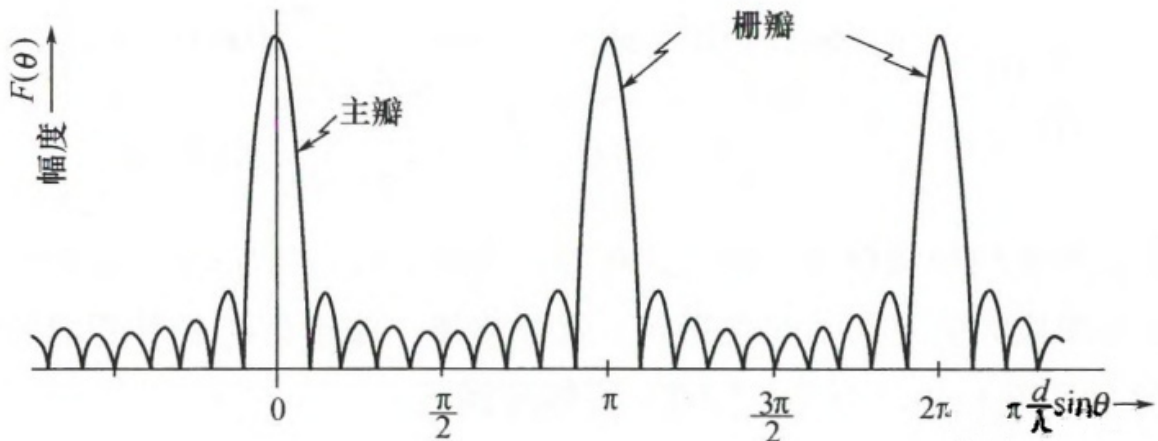
由公式可知，要想改变波束指向角 θ_0 ，只需要改变 ϕ 即可。也就是说控制移相器的相移量，改变 ϕ 的值，就可改变波束指向角 θ_0 ，从而形成波束扫描。

b) 栅瓣问题

将 ϕ 与波束指向 θ_0 之间的关系式 $\phi = 2\pi d\sin\theta_0/\lambda$ 带入 **F(θ)** 表达式中，得到：

$$F(\theta) = \left| \frac{1}{N} \frac{\sin[\frac{\pi Nd}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)]}{\sin[\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)]} \right|$$

当 $(\pi d/\lambda)(\sin\theta - \sin\theta_0) = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots, \pm n\pi$ 时，上式分子、分母同时为 0，由洛必达法则得 **F(θ) = 1**，由此可知 **F(θ)** 为多瓣状，如下所示。其中， $(\pi d/\lambda)(\sin\theta - \sin\theta_0) = 0$ ，即 $\theta = \theta_0$ 时称为主瓣，其余称为栅瓣。



出现栅瓣将会产生测角多值性，为避免出现栅瓣，只要保证：

$$|\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)| < \pi$$

即

$$\frac{d}{\lambda} < |\frac{2}{\sin\theta - \sin\theta_0}|$$

因 $|\sin\theta - \sin\theta_0| \leq 1 + |\sin\theta_0|$ ，因此不出现栅瓣的条件可取为：

$$\frac{d}{\lambda} < \frac{1}{1 + |\sin\theta_0|}$$

当波长 λ 取定以后，只要调整阵元间距 d 以满足上式，便不会出现栅瓣。当 $\theta_0 = \pm 90^\circ$ 时， $d/\lambda < 0.5$ 。也就是说当天线在 $\pm 90^\circ$ 范围内扫描时，只要满足 $d/\lambda < 0.5$ 即可。

当 θ_0 增大时，波束宽度也会增加，故波束扫描范围不宜取得过大，一般取 $\theta_0 \leq 60^\circ$ 即可，此时 $d/\lambda < 0.53$ ，为避免出现栅瓣，通常选取 $d/\lambda \leq 1/2$ 。

c) 波束宽度

归一化的天线方向图函数：

$$F(\theta) = \left| \frac{1}{N} \frac{\sin[\frac{N}{2}(\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta - \phi)]}{\sin[\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta - \phi)]} \right|$$

当天线方向图取得最大值时，满足：

$$\phi = \frac{2\pi d \sin\theta_0}{\lambda}$$

θ_0 即为天线方向图的最大值指向。

这里的波束宽度还是使用 3dB 波束宽度来描述。因为这里的 $F(\theta)$ 已经做了归一化，即最大值为 1。

另外，这里的 $F(\theta)$ 是电压性天线方向函数，因此，3dB 波束宽度对应 $F(\theta) = \sqrt{2}/2$ 的点。根据推导可得：

$$\begin{aligned} \theta_{0.5} &= \frac{0.886\lambda}{Nd\cos\theta_0} (\text{rad}) \\ &= \frac{50.8\lambda}{Nd\cos\theta_0} (\text{度}) \end{aligned}$$

$\theta_{0.5}$ 为波束的半功率波束宽度。根据上式可得：

- N 越大，即阵列个数越多， $\theta_{0.5}$ 越小，即波束越窄；
- $\theta_{0.5}$ 与 θ_0 有关。当 $\theta_0 = 0$ 时，即天线波束指向阵列法线方向时， $\theta_{0.5}$ 最小； $|\theta_0|$ 越大， $\theta_{0.5}$ 越大，也就是说天线波束最大值指向越偏离阵列法线方向，天线波束越胖，天线增益就越低。