

Calcolo Parallelo e Distribuito

Introduzione al nucleo computazionale matriceXvettore
e alle strategie standard di parallelizzazione in ambiente multicore

Docente: Prof. L. Marcellino

Tutor: Prof. P. De Luca

Previously on... CPD

Previously on... CPD

- Classificazione di Flynn - **MIMD (SM) multicore**
- I° nucleo computazionale: **somma tra due vettori di lunghezza N** – decomposizione del dominio (**algoritmi full parallel**)
- II° nucleo computazionale: **somma di N numeri** – decomposizione del dominio – collezione dei risultati (**1-2 strategia**)
- III° nucleo computazionale: **prodotto scalare tra due vettori di lunghezza N** – collezione dei risultati (**1-2 strategia**)
- IV° nucleo computazionale: **prodotto di uno scalare per una matrice** – decomposizione del dominio 2D (**algoritmi full parallel: 1-2-3 strategia**)
- Parametri di valutazione algoritmo parallelo:
 - Speedup, efficienza, overhead, isoefficienza, scalabilità, legge di Ware-Amadhal (stima per I°, II°, III°, IV°)
- Implementazione in ambiente multicore (usando openMP) dei nuclei computazionali:
 - I° – II° - calcolo PiGreco – III°-IV°

Seminario ordinamento e ricerca in ambiente multicore con openMP.



Siamo pronti per passare ad un
altro nucleo computazionale
fondamentale

PROBLEMA: Prodotto Matrice-Vettore

Progettazione
di un algoritmo parallelo
per architettura MIMD

per il calcolo del prodotto
di una matrice A per un vettore x :

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Qual è l'algoritmo sequenziale?

Algoritmo sequenziale

```
for  $i=0, n-1$  do
```

```
     $y_i = 0$ 
```

```
    for  $j=0, n-1$  do
```

```
         $y_i = y_i + a_{ij} x_j$ 
```

```
    endfor
```

```
endfor
```

Prodotto **Matrice-Vettore**

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

In particolare ...

Algoritmo sequenziale

```
for  $i=0, n-1$  do
```

```
     $y_i = 0$ 
```

```
    for  $j=0, n-1$  do
```

```
         $y_i = y_i + a_{ij} x_j$ 
```

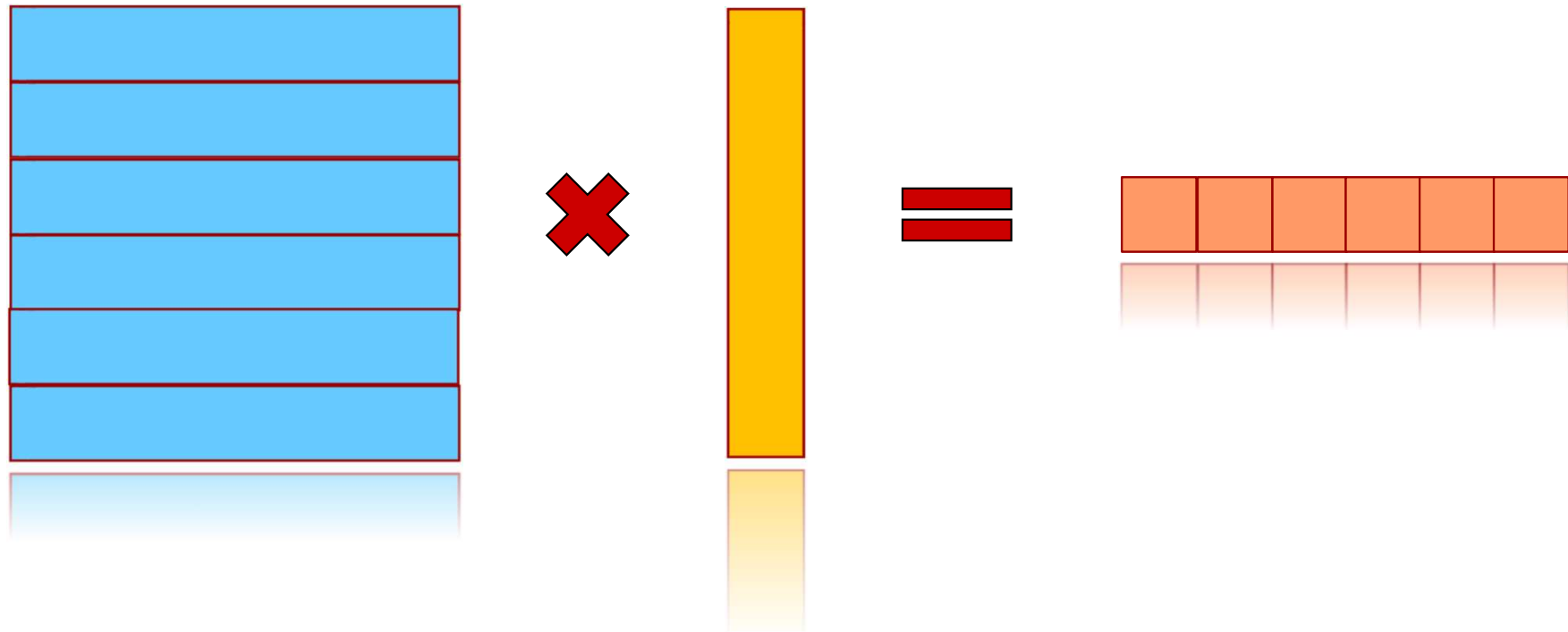
```
    endfor
```

```
endfor
```

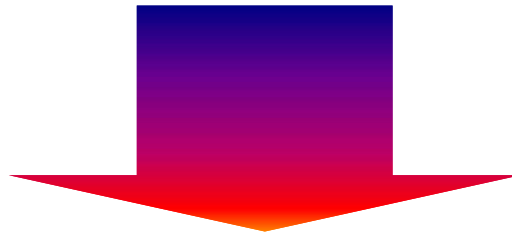
Su un calcolatore tradizionale il
vettore y
viene "generalmente" calcolato
componente per componente
secondo un ordine prestabilito

L' i -esimo elemento di y
è il prodotto scalare della
 i -esima riga di A per il vettore x

Le componenti di y sono
calcolate effettuando i
prodotti scalari di
ciascuna riga di A per il vettore x



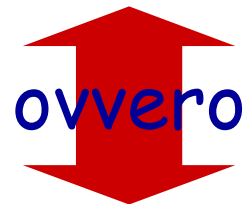
Le componenti di y sono
calcolate effettuando i
prodotti scalari di
ciascuna riga di A per il vettore x



I prodotti scalari possono essere
calcolati in maniera indipendente
l'uno dall'altro

Domanda

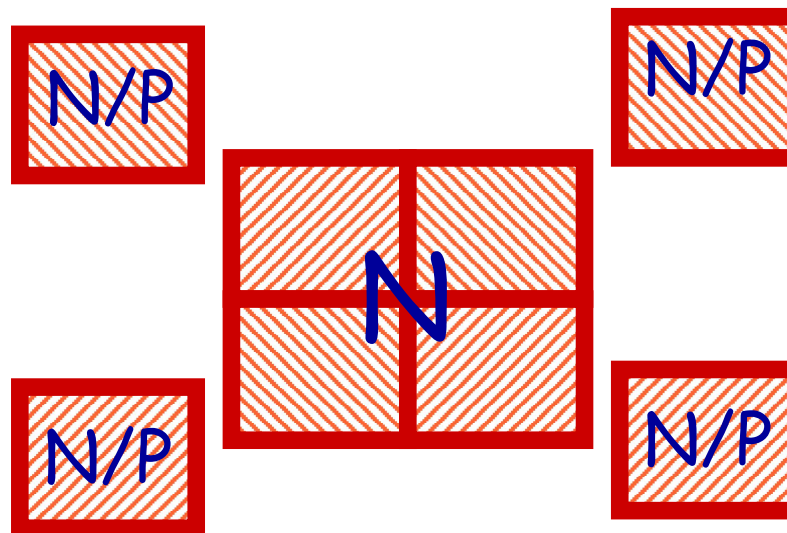
Qual è
l'algoritmo parallelo
?



Come decomporre
il problema
Matrice-Vettore ?

DECOMPOSIZIONE: IDEA GENERALE

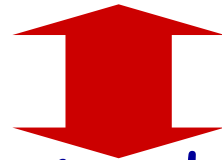
Decomporre un problema di dimensione N
in P sottoproblemi di dimensione N/P
e risolverli **contemporaneamente**
su più calcolatori



Quali sono i sotto-problemi indipendenti?

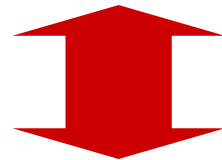
Decomposizione del problema

Matrice-Vettore



Partizionamento della matrice A

IN BLOCCHI



Riformulazione dell'algoritmo sequenziale

"A BLOCCHI"

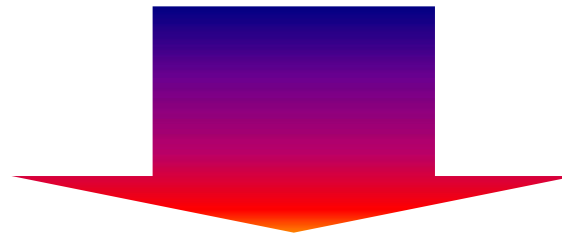


Parallelismo dell'algoritmo

"A BLOCCHI"

Algoritmo a blocchi

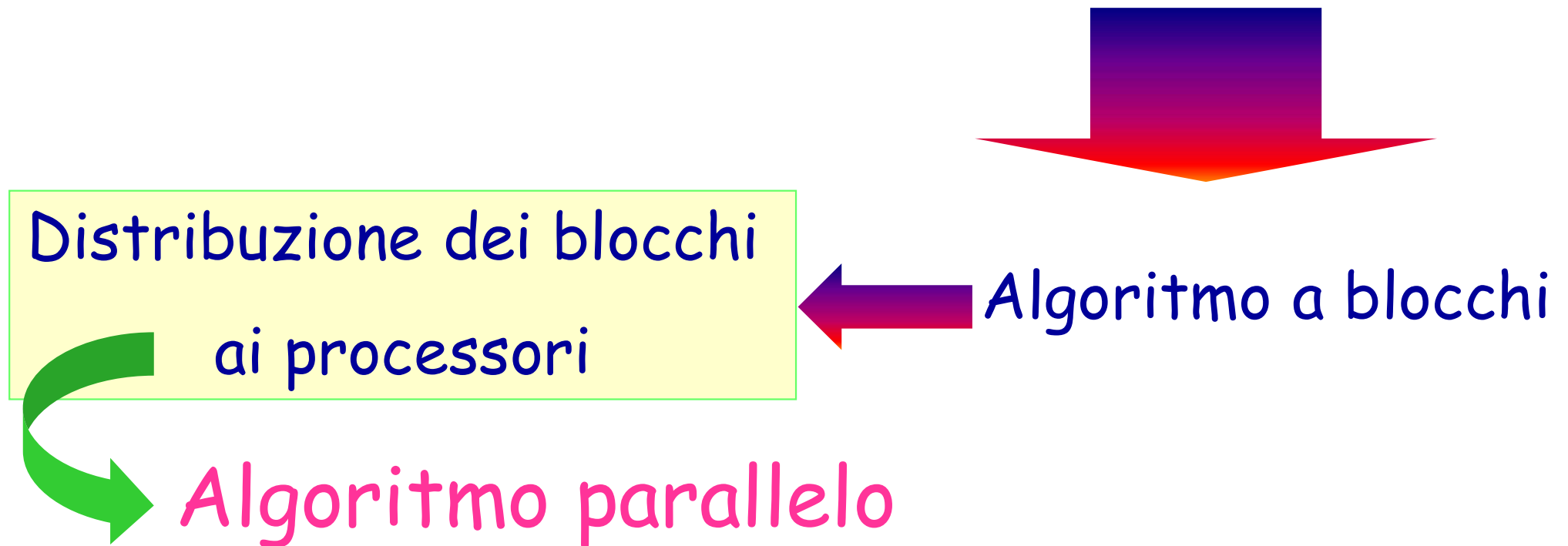
La decomposizione dei dati del problema
in questo caso
corrisponde ad un partizionamento in "blocchi"
della matrice e del vettore



Il calcolo della soluzione viene ricondotto
al calcolo della soluzione relativa
a ciascun "blocco"

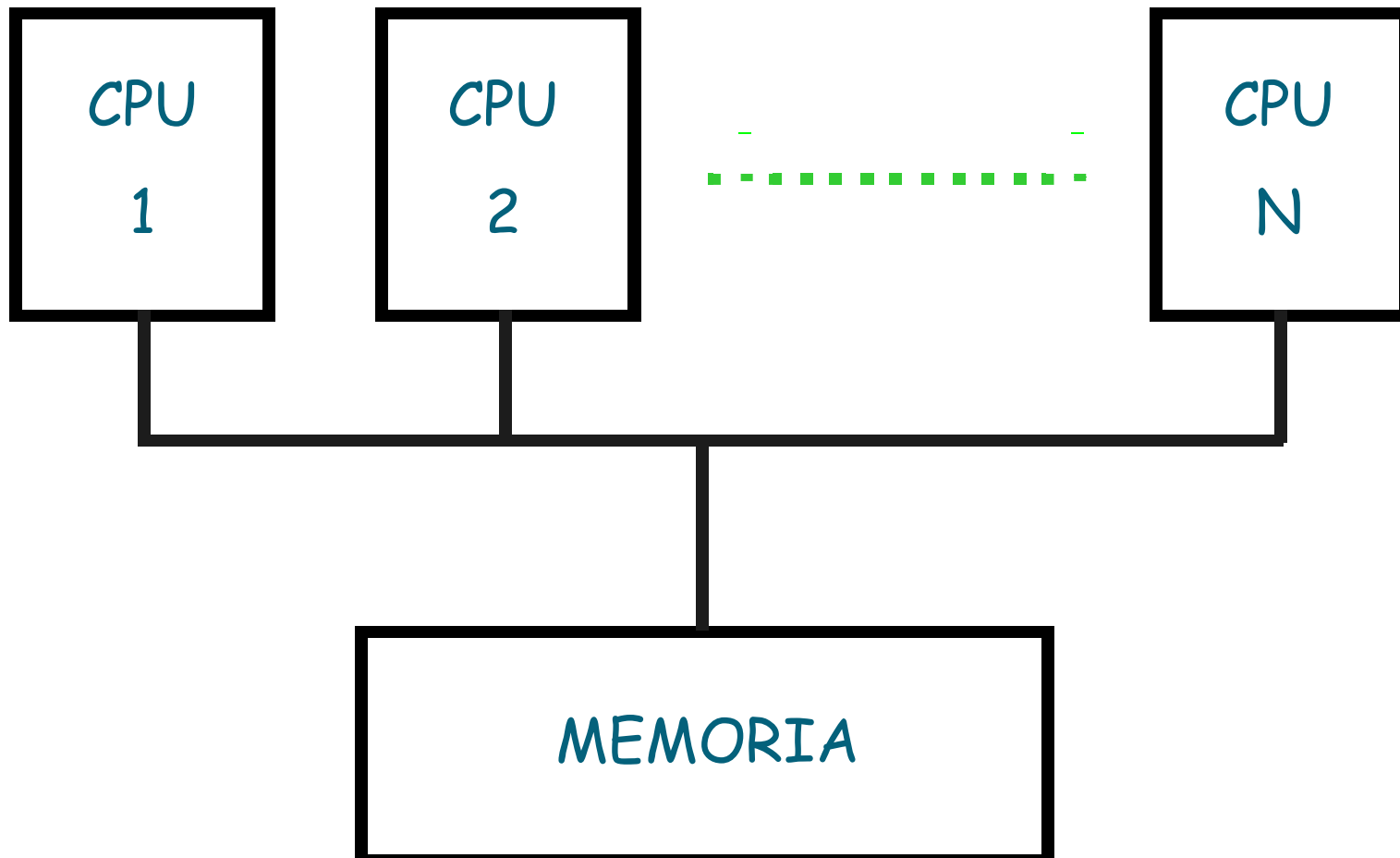
Qual è l'algoritmo parallelo ?

Partizionamento della matrice



Schema Calcolatori

MIMD a memoria **condivisa** (shared-memory)



I STRATEGIA

Suddivisione del
lavoro sulla matrice
A per
BLOCCHI di RIGHE

I STRATEGIA: Esempio n= 6

blocchi di righe

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Il core 0 calcola le prime tre componenti del vettore y

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Core 0

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Il core 1 calcola
le altre tre componenti
del vettore y

$$\begin{bmatrix} a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

Core 1

II STRATEGIA

Suddivisione del lavoro
sulla
matrice A per
BLOCCHI di COLONNE

II STRATEGIA: Esempio n= 6

blocchi di colonne

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Blocchi del vettore x

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

The diagram illustrates the block structure of the vector x in the matrix multiplication. The vector x is partitioned into two blocks: the first block contains elements x_0, x_1, x_2 and is highlighted with an orange dashed border; the second block contains elements x_3, x_4, x_5 and is highlighted with a green dashed border. A blue dot is positioned between the matrix and the vector, indicating the dot product operation.

II STRATEGIA: Esempio n= 6

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$

Core 0

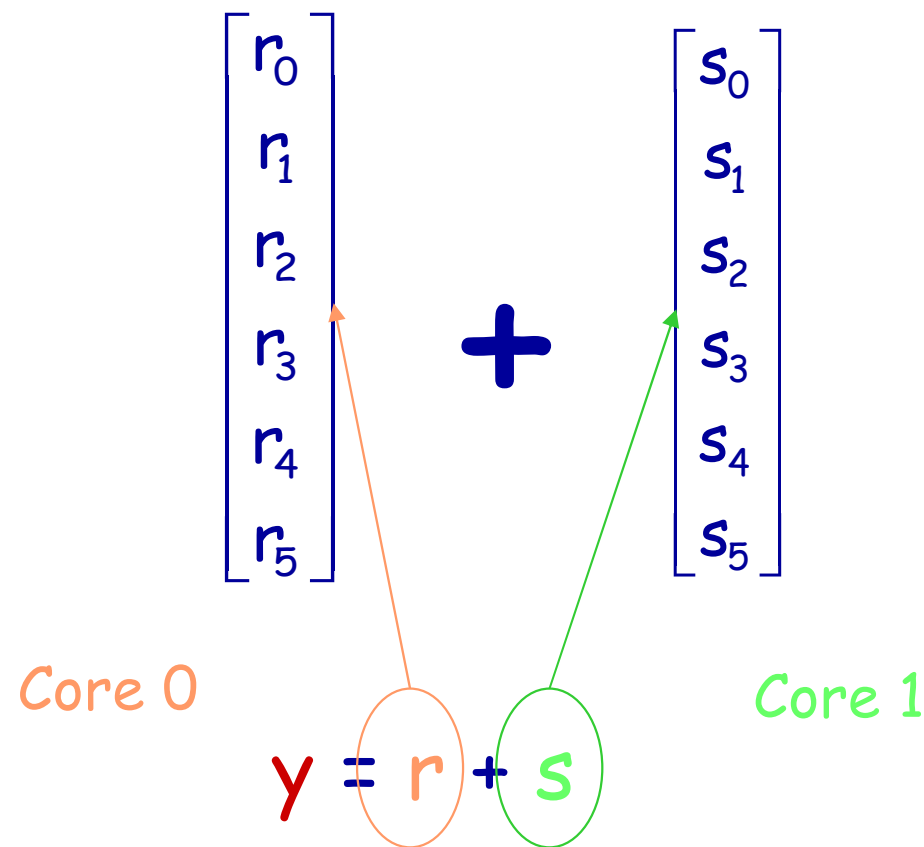
II STRATEGIA: Esempio n= 6

$$\begin{bmatrix} a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}$$

Core 1

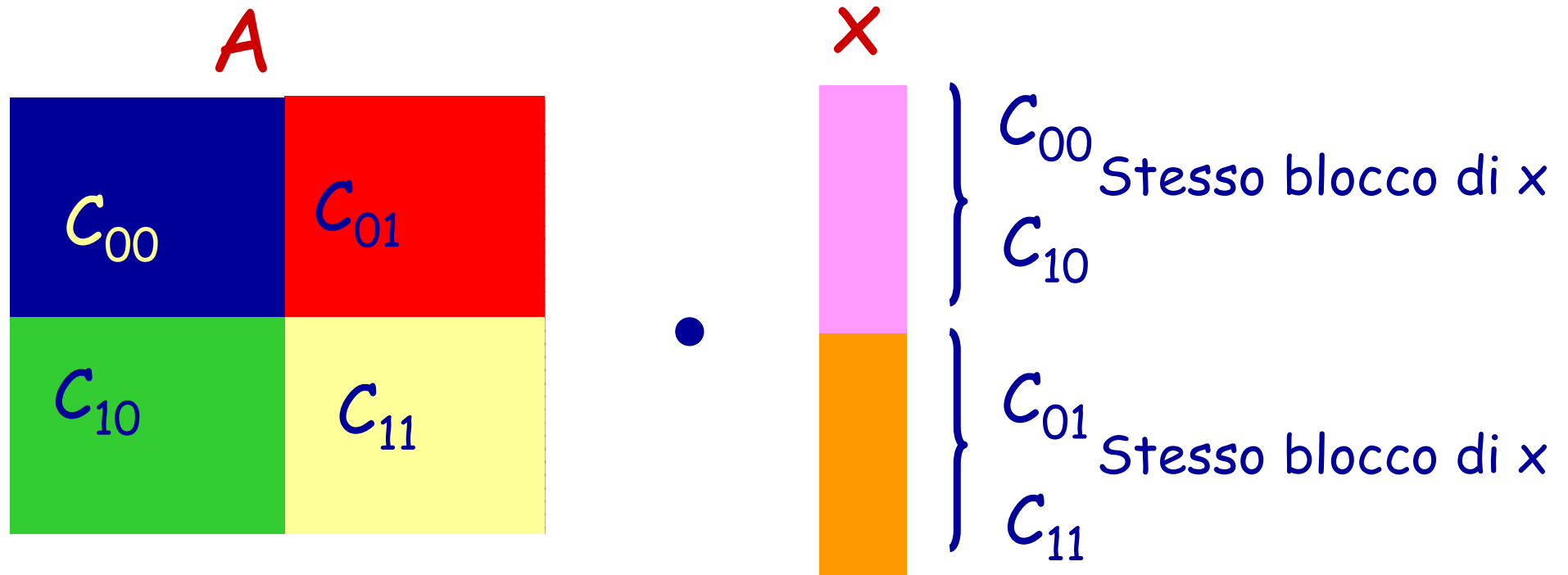
II STRATEGIA: Esempio n= 6

Uno dei due core **somma i risultati parziali**



III Strategia: Esempio (4 core)

Distribuzione del lavoro sulla matrice A
per blocchi righe & colonne



Ogni core lavora col pezzo di x che gli serve

Esempio $N = 6$, $\text{Core}=4$

 C_{00}

$$a_{00} \cdot x_0 + a_{01} \cdot x_1 + a_{02} \cdot x_2$$

$$a_{10} \cdot x_0 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2$$

$$a_{20} \cdot x_0 + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2$$

 C_{10}

$$a_{30} \cdot x_0 + a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2$$

$$a_{40} \cdot x_0 + a_{41} \cdot x_1 + a_{42} \cdot x_2$$

$$a_{50} \cdot x_0 + a_{51} \cdot x_1 + a_{52} \cdot x_2$$

 C_{01}

$$a_{03} \cdot x_3 + a_{04} \cdot x_4 + a_{05} \cdot x_5$$

$$a_{13} \cdot x_3 + a_{14} \cdot x_4 + a_{15} \cdot x_5$$

$$a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 + a_{25} \cdot x_5$$

 C_{11}

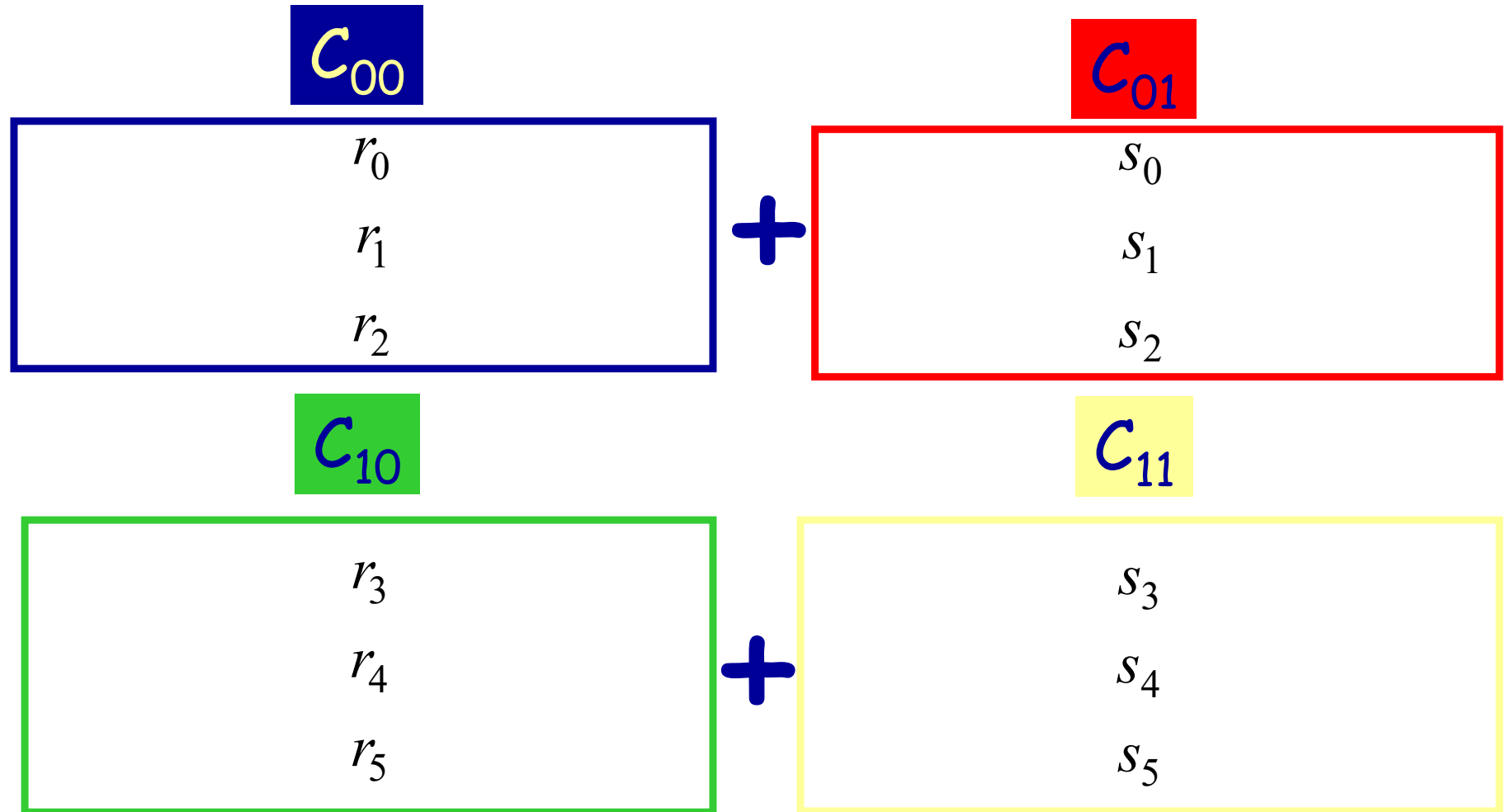
$$a_{33} \cdot x_3 + a_{34} \cdot x_4 + a_{35} \cdot x_5$$

$$a_{43} \cdot x_3 + a_{44} \cdot x_4 + a_{45} \cdot x_5$$

$$a_{53} \cdot x_3 + a_{54} \cdot x_4 + a_{55} \cdot x_5$$

Calcolo dei prodotti parziali

Esempio $N = 6$, Core=4



C_{00} e C_{10} sommano in parallelo