Calcolo Parallelo e Distribuito

Calcolo di speedup, overhead ed efficienza (def Classica)

Ware-Amdahl - isoefficienza

somma di vettori e somma di N numeri

Docente: Prof. L. Marcellino

Tutor: Prof. P. De Luca

Abbiamo definito una serie
di metriche
per l’analisi della fattibilità di un
algoritmo parallelo

Speed-up

Si definisce il rapporto T_1 su T_p

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}$$

Lo speed up misura la riduzione della complessità computazionale rispetto all'algoritmo su 1 processore

$$S_p < p$$

SPEEDUP IDEALE

$$S_p^{ideale} = p$$

Osservazione

$$S_p^{ideale} = \frac{T_1}{T_p} = p$$

$$\boxed{O_h = (pT_p - T_1)\, t_{calc}}$$

$$T_p = (O_h + T_1)\, t_{calc} / p$$

OVERHEAD totale

$$S_p = \frac{T_1}{T_p} = \frac{T_1}{(O_h + T_1)/p} = \frac{pT_1}{O_h + T_1} = \frac{p}{\frac{O_h}{T_1} + 1}$$

L'OVERHEAD totale misura

quanto lo speed up differisce da quello ideale

Efficienza

Si definisce il rapporto E_p su p

$$E_p = \frac{S_p}{p}$$

misura quanto l'algoritmo parallelo sfrutta il parallelismo del calcolatore

EFFICIENZA IDEALE

$$E_p^{ideale} = \frac{S_p^{ideale}}{p} = 1$$

Legge di Ware-Amdhal

$$S_p = \frac{T_1}{T_p} = \frac{1}{\alpha + (1-\alpha)/p}$$

Per l'analisi asintotica dello speedup serve analizzare la frazione delle operazioni eseguite in sequenziale e la frazione delle operazioni eseguite in parallelo

Scalabilità e Isoefficienza

Un algoritmo si dice scalabile se

l'efficienza rimane costante

al crescere del numero dei processori e

della dimensione del problema,

in un rapporto costante pari a:

$$I = \frac{O_h(n_1, p_1)}{O_h(n_0, p_0)}$$

Abbiamo incominciato a
valutare le aspettative di prestazioni
per
la strategia (full-parallel) per la
somma di due vettori
e
le due strategie per la somma
parallela di N numeri

usando le metriche definite

Lezioni scorse…

Calcolo di **speedup**, **overhead** ed **efficienza** (**def classica**)

Caratterizziamo ora lo **speedup** **usando la legge di Ware-Amdahl**

generalizzata

Legge di Ware-Amdhal (W-A)

BASE

$$S_p = \frac{1}{\alpha + (1-\alpha)/p}$$

- *α frazione sequenziale*
- *(1- α) frazione parallelizzabile*
- *(1- α)/p frazione parallela*

Ma è sempre possibile distinguere nettamente la frazione sequenziale da quella parallela?

Legge di Ware-Amdhal (W-A)

GENERALIZZATA

$$S_p = \frac{1}{\alpha_1 + \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\alpha_k}{k} + \frac{\alpha_p}{p}}$$

α_1 frazione di operazioni eseguite da un solo processore (sequenziale)

α_k frazione di operazioni eseguite con parallelismo *medio* $k<p$

α_p frazione di operazioni eseguite con parallelismo *totale* p

Caratterizziamo lo **speedup** **usando la Ware-Amdahl base-generalizzata**

algoritmo parallelo per
la somma di due vettori di dimensione N

p=8, dim[a]=dim[b]=32

C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7

In sequenziale 32 somme

1 fase (tutta parallela)

Calcolo somme parziali

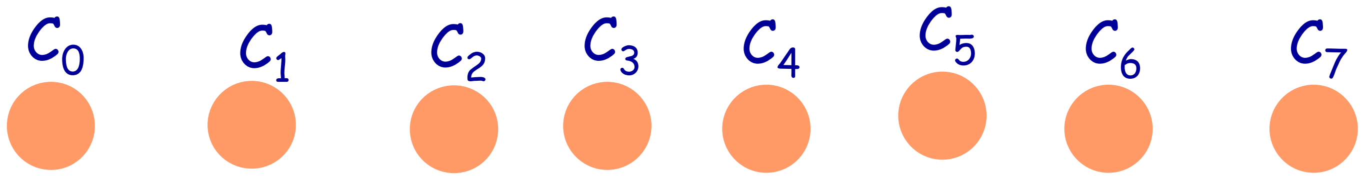
nloc = 4 somme

4 somme contemporaneamente fatte da 8 processori/core

4x8=32 delle 32 somme

$$(1-\alpha) = 32/32$$

p=8, dim[a]=dim[b]=32



In sequenziale 32 somme

$(1-\alpha) = 32/32$

$$\boxed{\frac{1-\alpha}{p} = \frac{1}{p} = \frac{1}{8}}$$

Ho finito!!! Ho parallelizzato tutto quindi a=0

$$\boxed{S_p = \frac{1}{\frac{1}{8}+0} = 8}$$

Caratterizziamo lo **speedup**
usando la Ware-Amdahl base-generalizzata

algoritmo parallelo per
la somma di N numeri

p=8, N=32, nloc=4

C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7

In sequenziale

31 somme

1 fase (tutta parallela)

Calcolo somme parziali
nloc-1 = 4-1 =
= 3 somme

3 somme contemporaneamente fatte da 8 processori/core

3x8=24 delle 31 somme

(1- α) =24/31

$$\frac{1-\alpha}{p} = \frac{24}{31}\cdot\frac{1}{8} = 3\cdot\frac{1}{31}$$

I strategia $p=8, \quad N=32, nloc=4$

C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7

In sequenziale

31 somme

2 fase (tutta sequenziale)

Aggiornamento della somma totale

p-1 = 8-1 = 7 somme

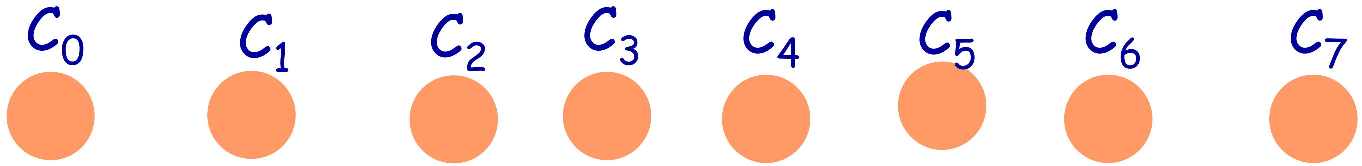
7 somme in sequenziale

7 delle 31 somme

$$\alpha = 7/31$$

$$\alpha = \frac{7}{31}$$

I strategia p=8, N=32, nloc=4



In sequenziale

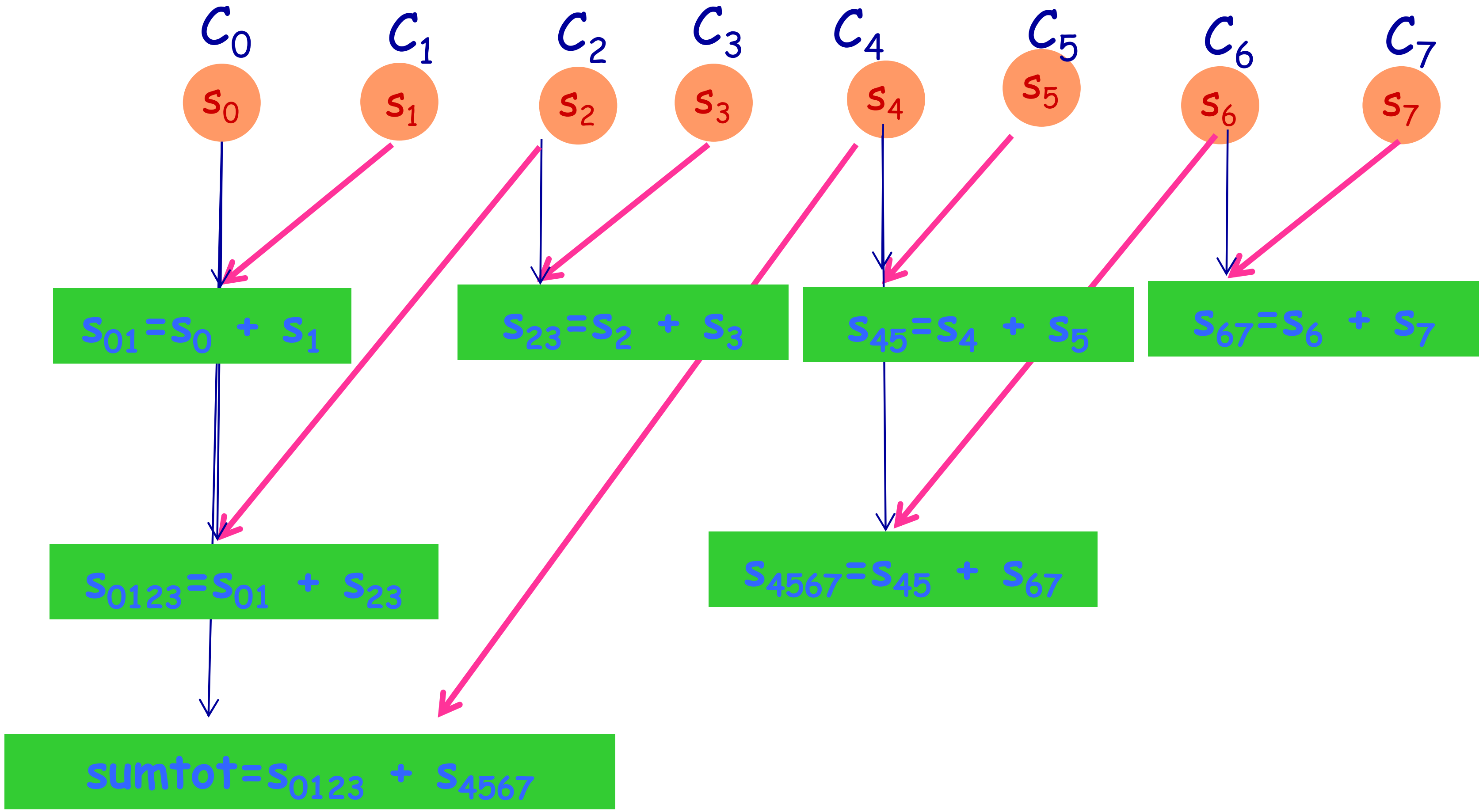
31 somme

$$\boxed{\alpha = \frac{7}{31}}$$

$$\boxed{\frac{1-\alpha}{p} = \frac{24}{31}\cdot\frac{1}{8} = 3\cdot\frac{1}{31}}$$

$$\boxed{S_p = \frac{1}{\frac{7}{31}+\frac{3}{31}} = \frac{31}{10} = 3{,}1}$$

II strategia $p=8$, $N=32$, $nloc=4$



Non è possibile separare esattamente la parte sequenziale dalla parte parallela.

II strategia $p=8, \quad N=32, nloc=4$

C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7

In sequenziale

31 somme

1 fase (tutta parallela)

Calcolo somme parziali
nloc -1 = 4-1 =
= 3 somme

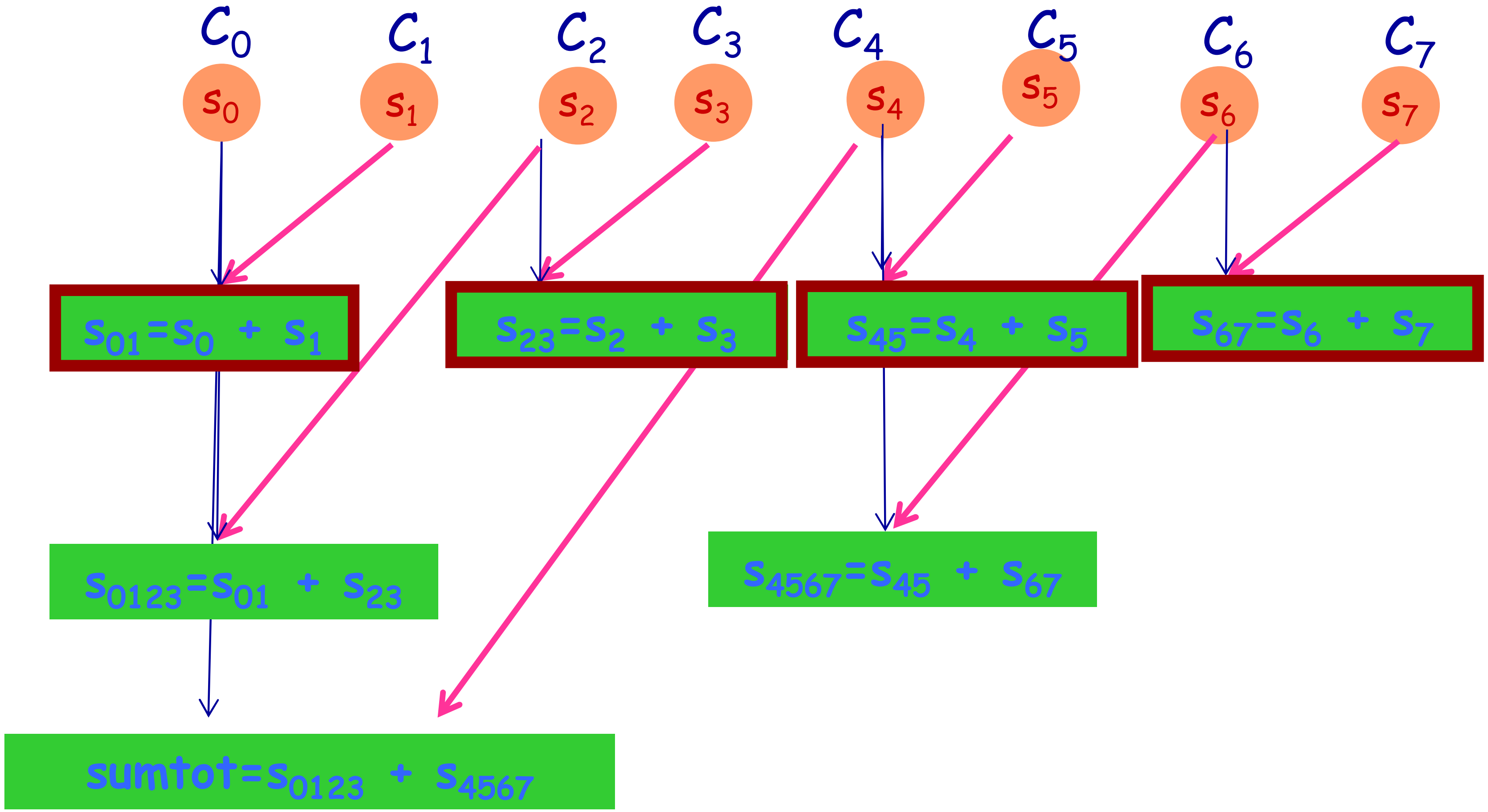
3 somme fatte contemporaneamente da 8 processori/core

3x8=24 delle 31 somme

$$\alpha_8 = 24/31$$

$$\frac{\alpha_8}{8} = \frac{24}{31} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{31}$$

II strategia p=8, N=32, nloc=4



Non c'è nessuna fase in cui lavorano contemporaneamente 7, 6, 5 processori/core. Quindi:

$$\boxed{\frac{\alpha_7}{7} = \frac{\alpha_6}{6} = \frac{\alpha_5}{5} = 0}$$

II strategia $p=8, \quad N=32, nloc=4$

C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7

In sequenziale

31 somme

2 fase (parallelo parziale)

Calcolo somme parziali
1 somma

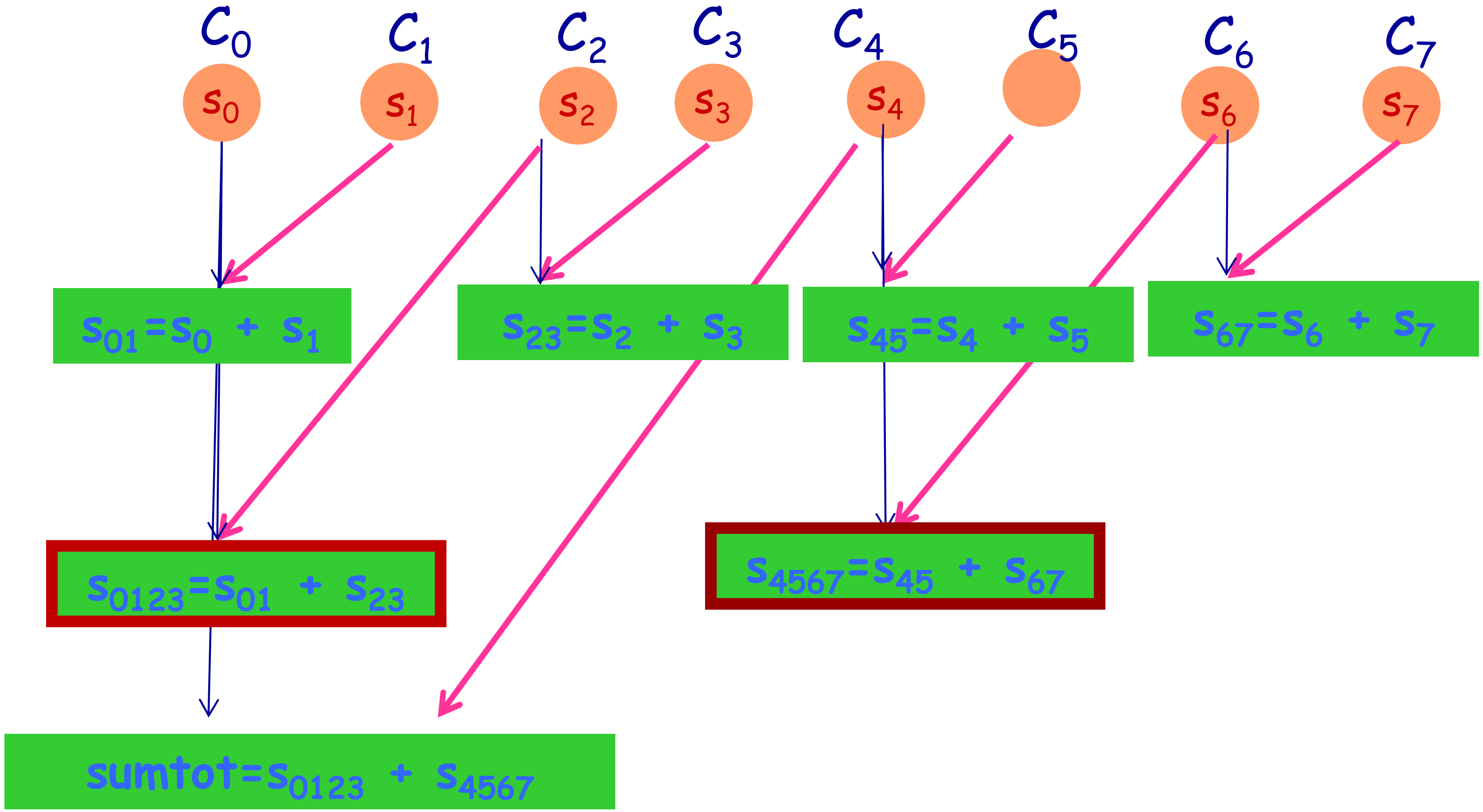
1 somma fatta contemporaneamente da 4 processori/core

1x4=4 delle 31 somme

$$\alpha_4 = 4/31$$

$$\frac{\alpha_4}{4} = \frac{4}{31} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{31}$$

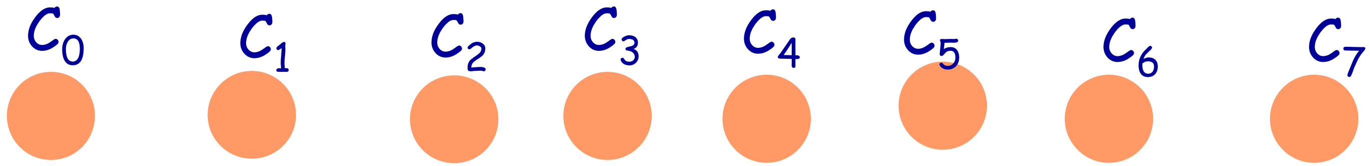
II strategia $p=8$, $N=32$, $nloc=4$



Non c'è nessuna fase in cui lavorano contemporaneamente 3 processori/core. Quindi:

$$\boxed{\frac{\alpha_3}{3} = 0}$$

II strategia $p=8, \quad N=32, nloc=4$



In sequenziale

31 somme

3 fase (parallelo parziale)

Calcolo somme parziali

1 somma

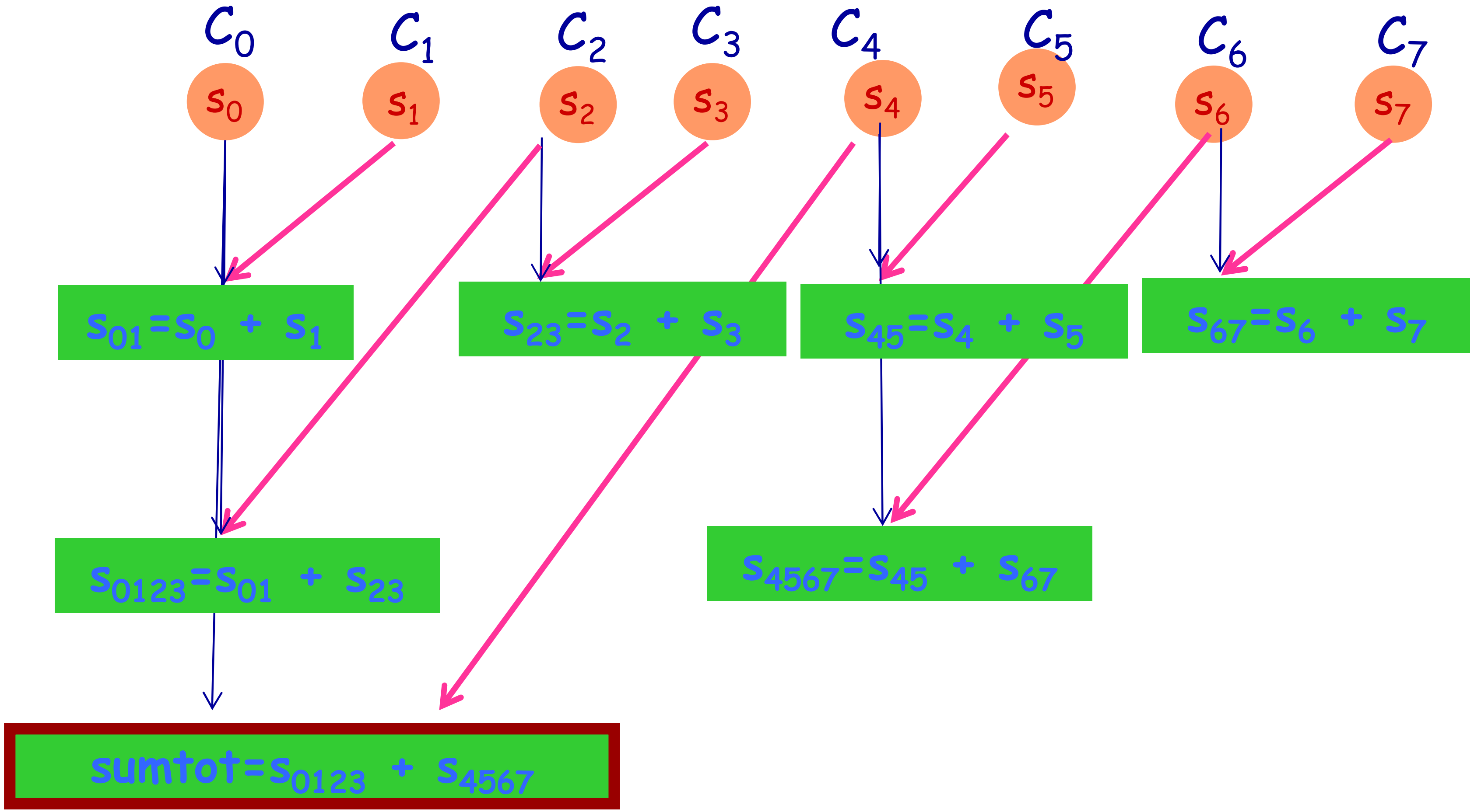
1 somma fatta contemporaneamente da 2 processori/core

1x2=2 delle 31 somme

$$\alpha_2 = 2/31$$

$$\frac{\alpha_2}{2} = \frac{2}{31} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{31}$$

II strategia $p=8$, $N=32$, $nloc=4$



...ultima fase!!!

II strategia $p=8$, $N=32$, $nloc=4$

C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7

s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7

In sequenziale

31 somme

4 fase (sequenziale)

Calcolo somma finale

1 somma

1 somma fatta
da 1 processore/core

1 delle 31 somme

$$\alpha_1 = 1/31$$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\alpha_1}{1} = \frac{1}{31}}$$

II strategia p=8, N=32, nloc=4

C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7

In sequenziale

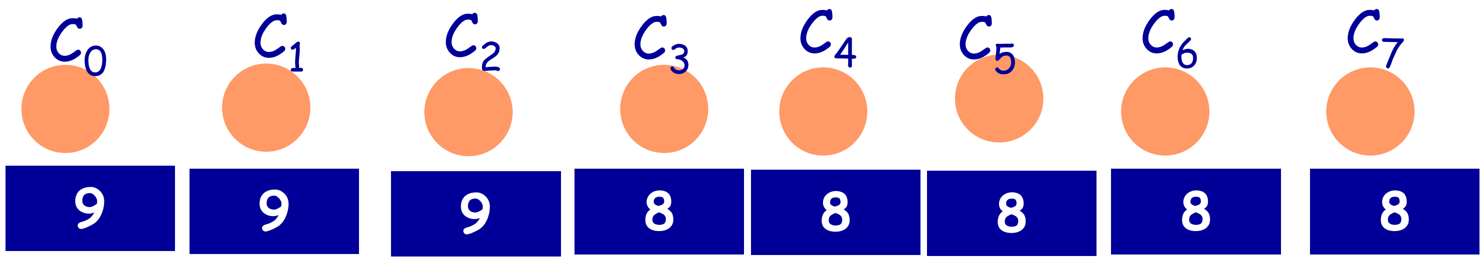
31 somme

$$\frac{\alpha_8}{8} = \frac{3}{31} \qquad \frac{\alpha_7}{7} = \frac{\alpha_6}{6} = \frac{\alpha_5}{5} = 0 \qquad \frac{\alpha_4}{4} = \frac{1}{31}$$

$$\frac{\alpha_3}{3} = 0 \qquad \frac{\alpha_2}{2} = \frac{1}{31} \qquad \alpha_1 = \frac{1}{31}$$

$$S_p = \frac{1}{\frac{1}{31} + \frac{1}{31} + \frac{1}{31} + \frac{3}{31}} = \frac{31}{6} = 5{,}1$$

Cosa succede se N non è esattamente divisibile per p???

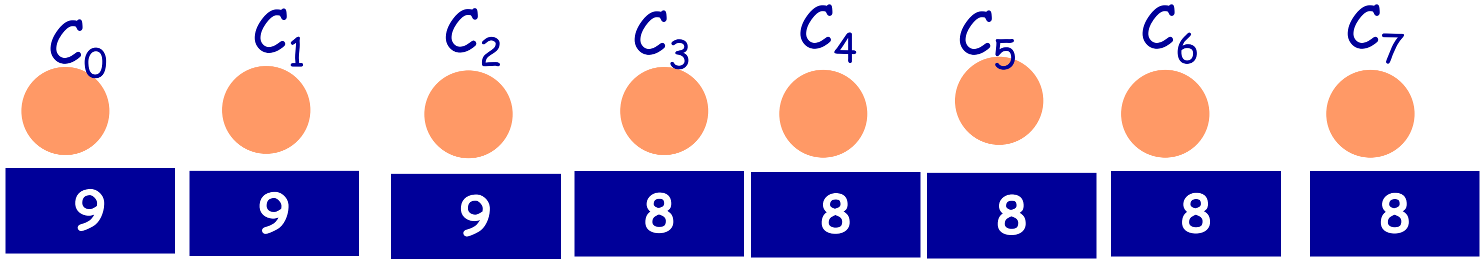


p=8, N=67

somma vettori

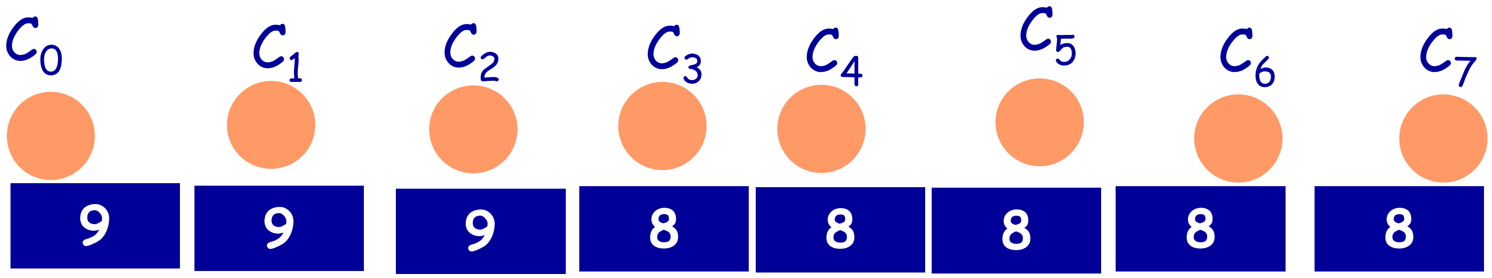
somma N numeri

Cosa succede se N non è esattamente divisibile per p???



somma vettori

p=8, N=67



Cosa succede se N non è esattamente divisibile per p???

Alcuni core faranno 1 somma in più:

Es: N=67, p=8

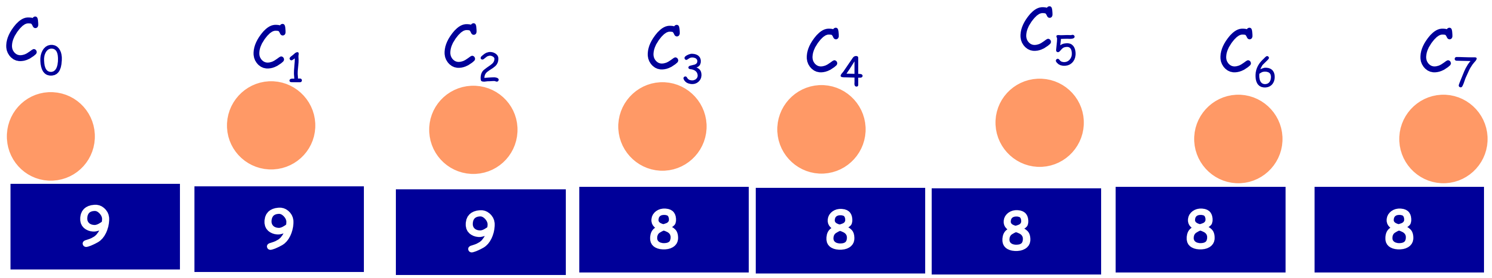
parte intera

$T_p(N) =$

$= [(\boxed{int(N/p)} + 1)\ t_{calc}$

Come se tutti i core avessero 8+1 = 9 elementi!

p=8, N=67



Cosa succede se N non è esattamente divisibile per p???

Es: N=67, p=8

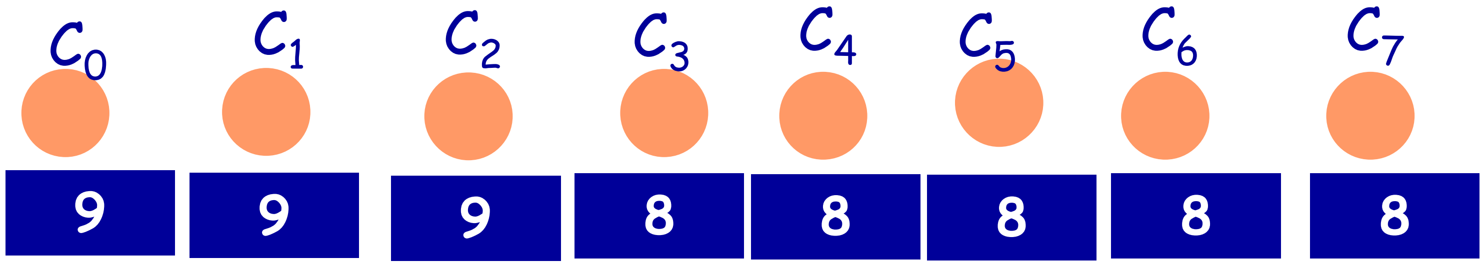
Bisogna stare attenti solo alla parte puramente parallela:

$$\alpha_8 = \frac{3 \cdot 9 + 5 \cdot 8}{67}$$

5 core 8 somme

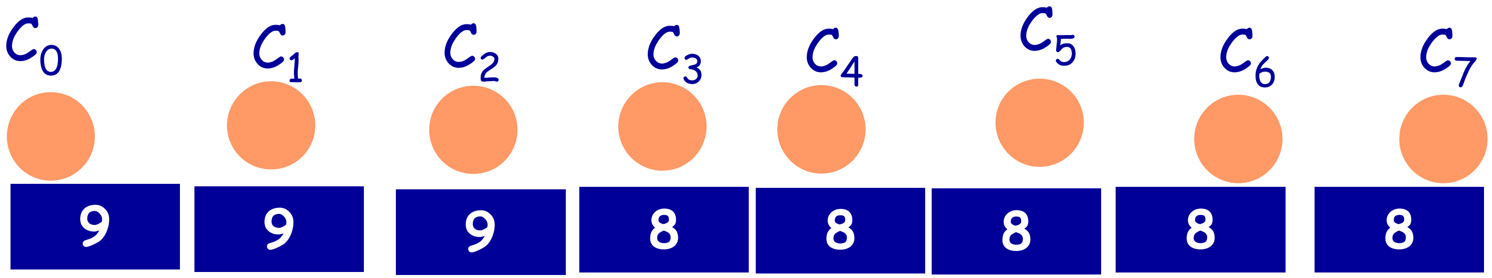
3 core fanno 9 somme

Cosa succede se N non è esattamente divisibile per p???



somma N numeri

I strategia $p=8, \quad N=67$



Cosa succede se N non è esattamente divisibile per p???

Alcuni core faranno 1 somma in più nella fase puramente parallela:

Es: $N=67, \; p=8$

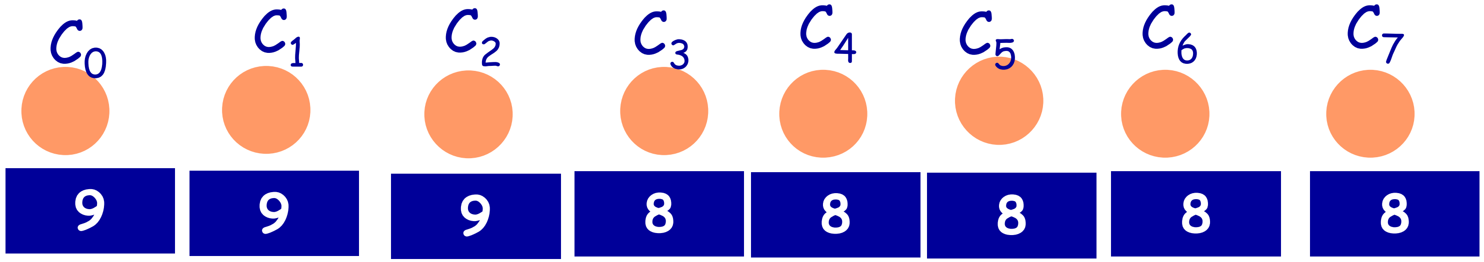
parte intera

$T_p(N) =$

$$= [\boxed{(\mathrm{int}(N/p))} + (p-1)]\, t_{calc}$$

Come se tutti i processori avessero 9 elementi da sommare tra loro!

Cosa succede se N non è esattamente divisibile per p???



Bisogna stare attenti solo alla parte puramente parallela, come negli altri casi:

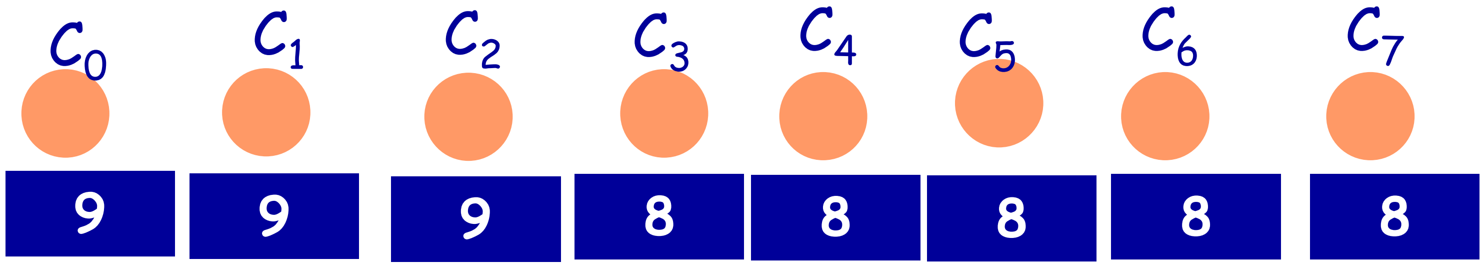
$$\alpha_8 = \frac{3 \cdot 8 + 5 \cdot 7}{66}$$

5 core hanno 8 numeri, quindi fanno 7 somme

3 core hanno 9 numeri, quindi fanno 8 somme

66 somme totali

Cosa succede se N non è esattamente divisibile per p???



$$\alpha_8 = \frac{3 \cdot 8 + 5 \cdot 7}{66}$$

Provate a farvi i conti da soli per tutto il resto

Calcolo dell' **isoefficienza**

Definizione

L'ISOEFFICIENZA

è una funzione di tre variabili p_0 , p_1 , n_0

e definisce la costante che lega la nuova dimensione del problema da scegliere n_1 per valutare la **scalabilità** di un algortimo

$$I(p_0\,, p_1\,, n_0) = O_h(p_1\,, n_1\,)/O_h(p_0\,, n_0\,)$$

Calcolo isoefficienza

somma di 2 vettori di dimensione N

$$O_h(p, N) = T_1(N) - p\ \ T_p\,(N) = N - p\,(N/p) = 0$$

$$T_1(N) = N$$

$$\boxed{I = 0/0}$$

Forma indeterminata.

Per convenzione: I può assumere qualunque valore

Gli algoritmi full parallel sono *naturalmente scalabili*

Calcolo isoefficienza

somma di N numeri (II str)

$O_h(p, N) = p \log_2 p$

$T_1(N) = N-1$

$$\boxed{I = (p_1 \log_2 p_1)/(p_0 \log_2 p_0)}$$

Calcolo isoefficienza

somma di N numeri

I strategia ?

$$T_1(N) = N-1$$

$$T_p(N) = N/p \; - 1 + \; p-1$$

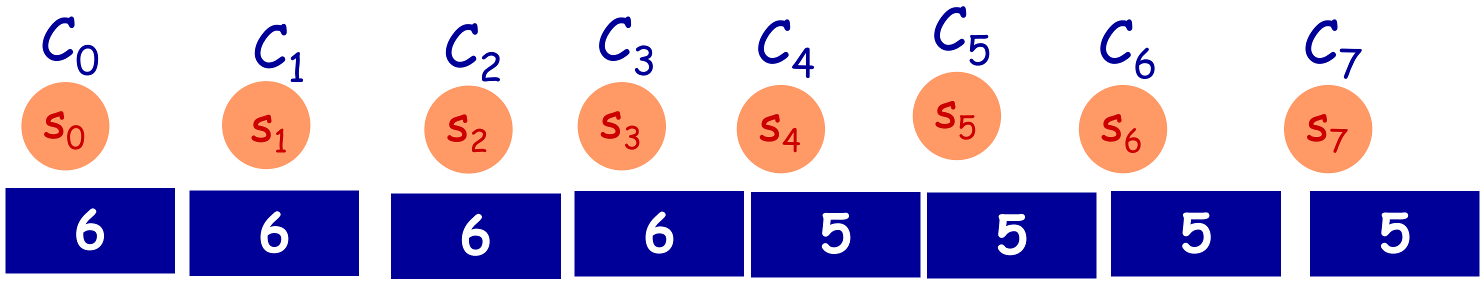
$$O_h = p\, T_p(N) \; - T_1(N) = p\,(N/p - 1 + p-1\,) - (N-1) =$$

$$= (\cancel{N} - p + p^2 - p - \cancel{N} + 1)$$

$$\boxed{I = (p_1^2 - 2\,p_1 + 1)/(p_0^2 - 2\,p_0 + 1)}$$

Esercitazione aggiuntiva:
w-a generalizzata, nei casi della non divisibilità

p=8, N=44, 5, r=4



In sequenziale

N = 44 somme

Per calcolare lo speedup con la legge di W-A, la prima domanda che mi devo fare è **se per questa strategia di parallelizzazione posso esattamente distinguere la parte parallela**

(nella fase di calcolo locale lavorano tutti e 8 i processori)

e la parte sequenziale

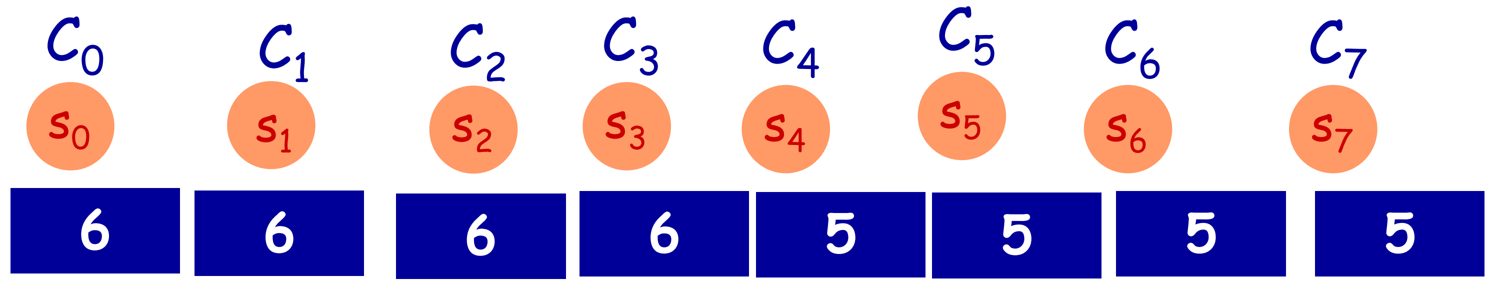
(la collezione dei risultati avviene in maniera sequenziale)

SI

$$\boxed{S_p = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}}$$

somma 2 vettori dim N

p=8, N=44, 5, r=4



In sequenziale

N = 44 somme

unica fase (calcolo locale)

Calcolo somme parziali
4 processori - 6 somme
4 processori - 5 somme

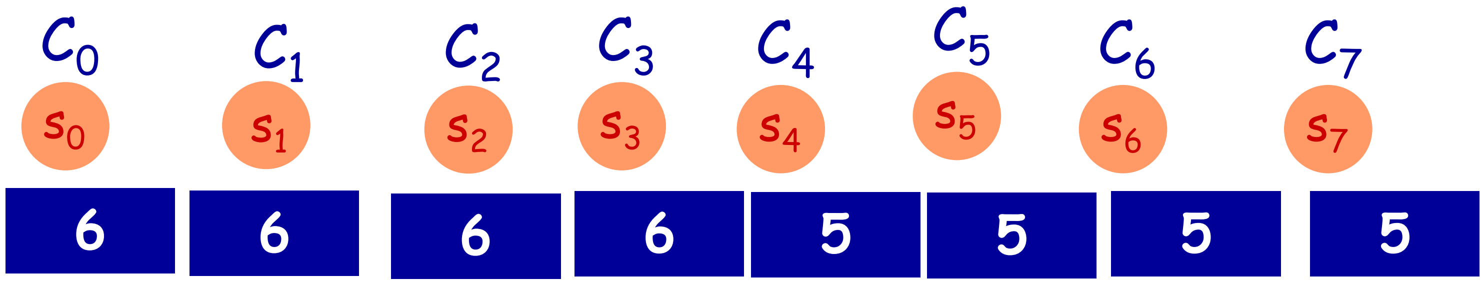
6 somme fatte contemporaneamente da 4 processori/core

\+

5 somme fatte contemporaneamente da 4 processori/core

$$1-\alpha = (6\times4+5\times4)/44=(24+20)/44$$

$p=8, \ N=44, 5, r=4$



Calcolo dello speedup

$$S_p = 1/[\alpha + (1-\alpha)/p] =$$

$$= 1/[0+(44/44)/8] =$$

$$= 1/[1/8] =$$

$$= 8$$

I strategia p=8, N=44, 5, r=4

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
6	6	6	6	5	5	5	5

In sequenziale

N-1=44-1=43 somme

Per calcolare lo speedup con la legge di W-A, la prima domanda che mi devo fare è **se per questa strategia di parallelizzazione posso esattamente distinguere la parte parallela**
(nella fase di calcolo locale lavorano tutti e 8 i processori)
e la parte sequenziale
(la collezione dei risultati avviene in maniera sequenziale)

SI

$$\boxed{S_p = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}}$$

I strategia $p=8$, $N=44, 5$, $r=4$

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
6	6	6	6	5	5	5	5

In sequenziale

$N-1=44-1=43$ somme

1 fase (calcolo locale)

Calcolo somme parziali
4 processori - 5 somme
4 processori - 4 somme

5 somme fatte contemporaneamente da 4 processori/core

+

4 somme fatte contemporaneamente da 4 processori/core

$$1-\alpha=(5\times4+4\times4)/43=36/43$$

I strategia p=8, N=44, 5, r=4

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
6	6	6	6	5	5	5	5

In sequenziale

N-1=44-1=43 somme

2 fase (tutta sequenziale)

Aggiornamento della somma totale

p -1 = 8-1 = 7 somme

7 somme in sequenziale

7 delle 43 somme

$$\alpha = 7/43$$

I strategia p=8, N=44, 5, r=4

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
6	6	6	6	5	5	5	5

In sequenziale

N-1=44-1=43 somme

$$1\text{-}\alpha = (5\times4+4\times4)/43 = 36/43$$

$$\alpha = 7/43$$

Attenzione:
La somma dei due numeratori deve essere uguale al denominatore.
Questo serve solo per fare il controllo dopo il calcolo

I strategia   p=8, N=44, 5, r=4

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
6	6	6	6	5	5	5	5

Calcolo dello speedup

$$S_p = 1/[\alpha + (1-\alpha)/p] =$$

$$= 1/[7/43 + (36/43)/8] =$$

$$= 1/[0.16 + (0.84)/8] =$$

$$= 1/[0.16 + 0.10]$$

$$= 1/0.25 = 4$$

Approssimazione alla seconda cifra decimale

II strategia $p=8$, $N=44$, 5, $r=4$

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
6	6	6	6	5	5	5	5

In sequenziale

$N-1=44-1=43$ somme

per questa strategia di parallelizzazione **NON** posso esattamente distinguere la parte parallela
(nella fase di calolo locale lavorano tutti e 8 i processori)
e la parte sequenziale
(la collezione dei risultati avviene in maniera sequenziale)

Per calcolare lo speedup con W-A DEVO usare la forma generalizzata

$$\boxed{S_p = \frac{1}{(\alpha_p/p) + \sum_{k=2}^{p-1} \frac{\alpha_k}{k} + \alpha_1}}$$

II strategia $p=8,\ N=44,\ 5,\ r=4$

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
6	6	6	6	5	5	5	5

In sequenziale

N-1=44-1=43 somme

1 fase (calcolo locale)

Calcolo somme parziali

4 processori - 5 somme

4 processori - 4 somme

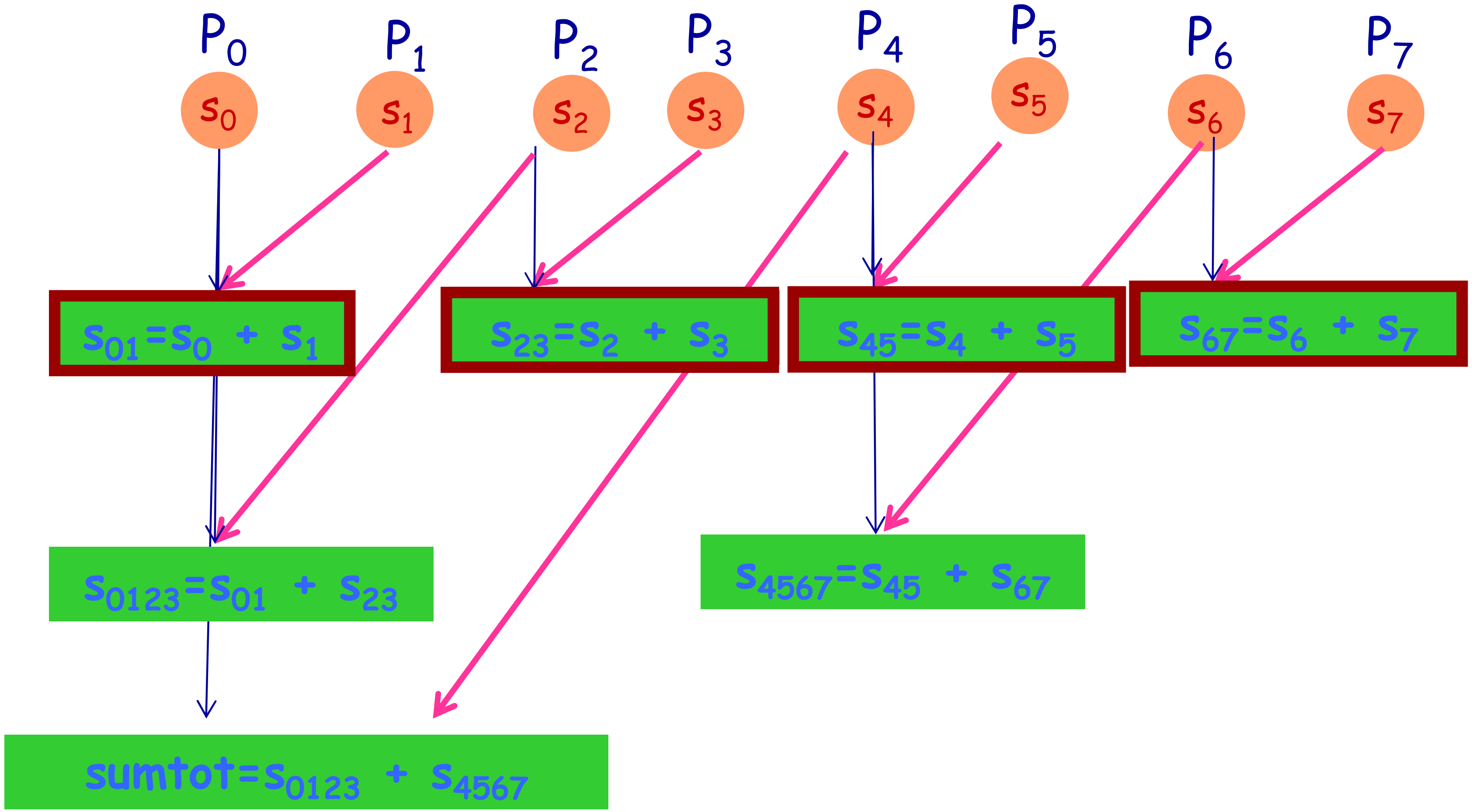
5 somme fatte contemporaneamente da 4 processori/core

+

4 somme fatte contemporaneamente da 4 processori/core

$$\alpha_8 = (5\times4+4\times4)/43 = 36/43$$

II strategia p=8, N=44, 5, r=4



Non c'è nessuna fase in cui lavorano contemporaneamente 7, 6, 5 processori/core. Quindi:

$$\boxed{\frac{\alpha_7}{7} = \frac{\alpha_6}{6} = \frac{\alpha_5}{5} = 0}$$

II strategia $\quad p=8,\ N=44,5,\ r=4$

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
6	6	6	6	5	5	5	5

In sequenziale

N-1=44-1=43 somme

2 fase
(parallelo parziale: 1 passo)

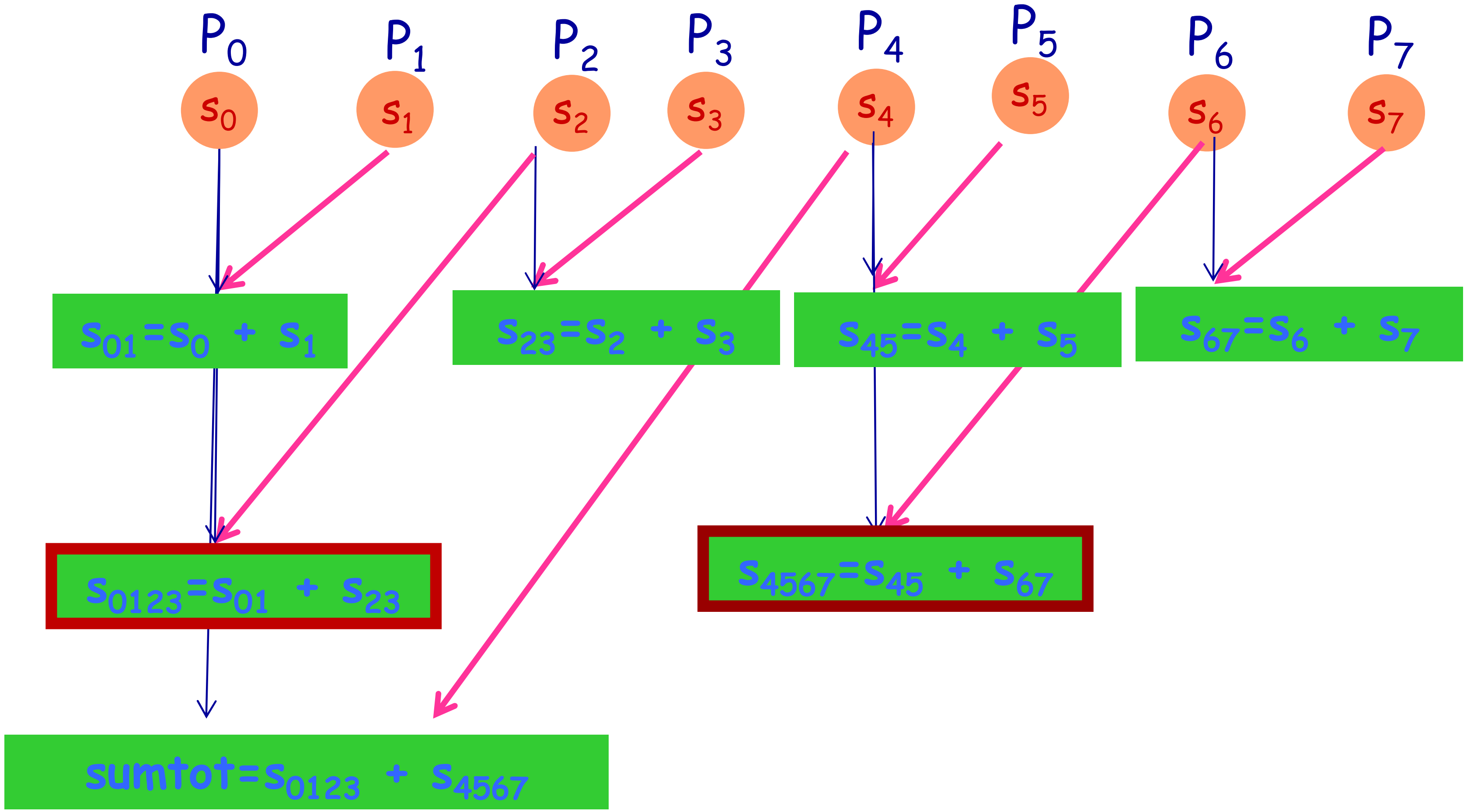
1 somma

1 somma fatta contemporaneamente da 4 processori/core

1x4=4 delle 43 somme

$$\alpha_4 = 4/43$$

II strategia p=8, N=32, nloc=4



Non c'è nessuna fase in cui lavorano contemporaneamente 3 processori/core. Quindi:

$$\boxed{\frac{\alpha_3}{3} = 0}$$

II strategia $p=8$, $N=44, 5$, $r=4$

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
6	6	6	6	5	5	5	5

In sequenziale

N-1=44-1=43 somme

2 fase
(parallelo parziale: 2 passo)

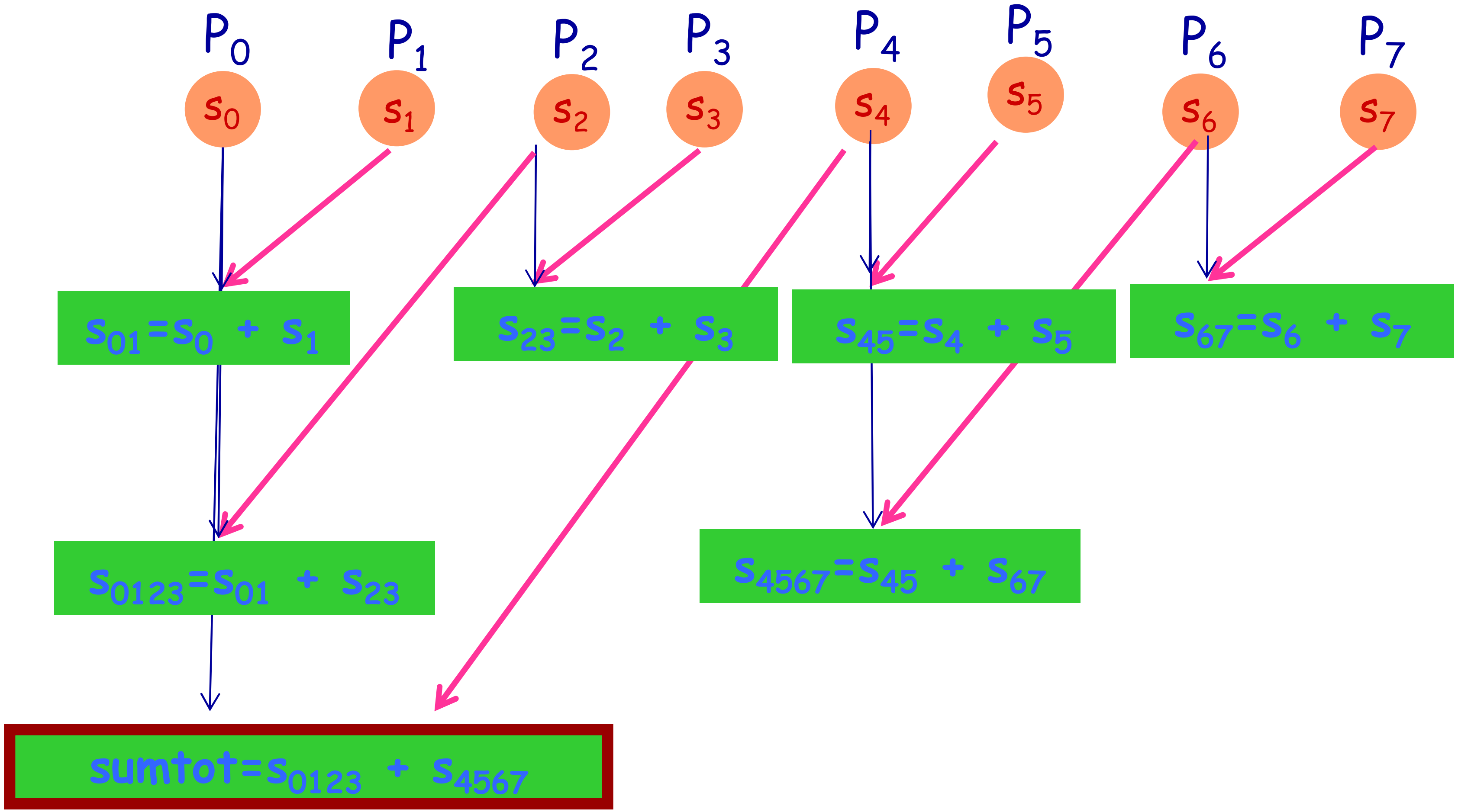
1 somma

1 somma fatta contemporaneamente da 2 processori/core

1x2=2 delle 43 somme

$$\alpha_2 = 2/43$$

II strategia p=8, N=32, nloc=4



...ultima fase!!!

II strategia $p=8$, $N=44$, 5, $r=4$

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
6	6	6	6	5	5	5	5

In sequenziale

N-1=44-1=43 somme

2 fase
(parallelo parziale: 3 passo)

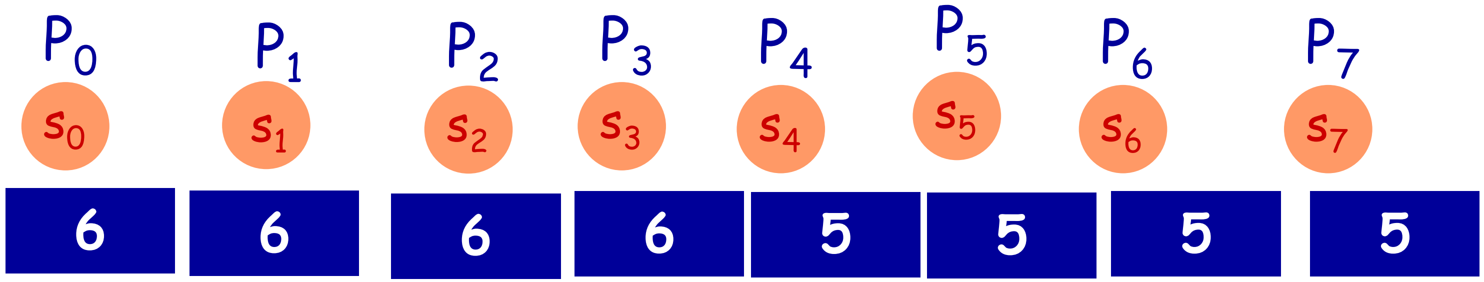
1 somma

1 somma fatta in sequenziale
da 1 processore/core

1 delle 43 somme

$$\alpha_1 = 1/43$$

II strategia $p=8$, $N=44, 5$, $r=4$



In sequenziale

N-1=44-1=43 somme

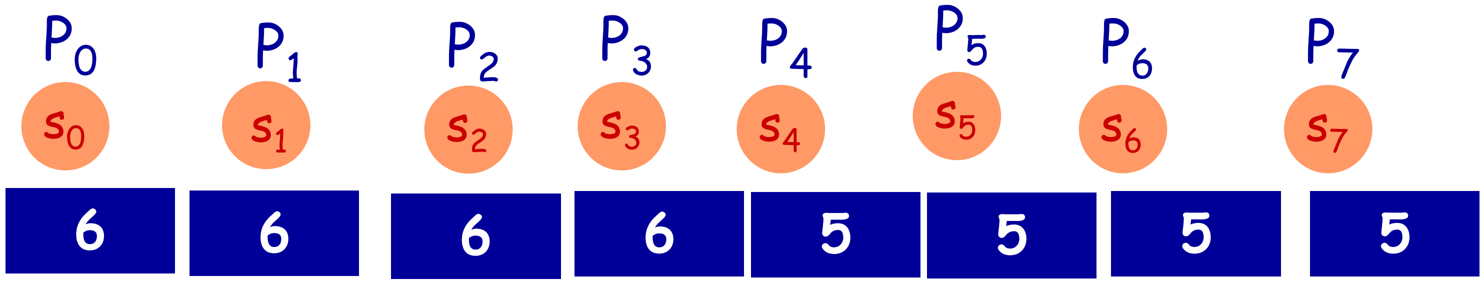
$$\alpha_8 = (5\times 4 + 4\times 4)/43 = 36/43$$

$$\alpha_4 = 4/43 \qquad \alpha_2 = 2/43 \qquad \alpha_1 = 1/43$$

Attenzione:

La somma dei due numeratori deve essere uguale al denominatore.
Questo serve solo per fare il controllo dopo il calcolo

II strategia $p=8$, $N=44, 5$, $r=4$



Calcolo dello speedup

$$S_p = 1/[\alpha_8/8 + \alpha_4/4 + \alpha_2/2 + \alpha_1/1] =$$

$$=$$

Fatevi i conti
da soli!