第一章 经典集合论

郑征

北京航空航天大学

软件与控制研究室

2018年9月11日星期二

第2讲 集合恒等式

1. 集合恒等式与对偶原理

2. 集合恒等式的证明

1. 集合恒等式与对偶原理

1.1 集合恒等式

集合恒等式与对偶原理

集合恒等式(关于∪与∩)

- 等幂律(idempotent laws)

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

- 交换律(commutative laws)

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

顺序对结果没有影响

集合恒等式(关于∪与∩、续)

- 结合律(associative laws)

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

顺序对结果没有影响

- 分配律(distributive laws)

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

集合恒等式(关于∪与∩ 、续)

- 吸收律(absorption laws)

$$A\cup(A\cap B)=A$$

$$A\cap(A\cup B)=A$$

集合恒等式(关于~)

- 双重否定律(double complement law)

$$\sim\sim A = A$$

- 德●摩根律(DeMorgan's laws)

$$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$$

$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

集合恒等式(关于∅与E)

- 零律(dominance laws)

$$A \cup E = E$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

- 同一律(identity laws)

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap E = A$$

集合恒等式(关于∅,E)

- 排中律(excluded middle)

$$A \cup \sim A = E$$

- 矛盾律(contradiction)

$$A \cap \sim A = \varnothing$$

- 全补律

$$\sim \varnothing = E$$

$$\sim E = \varnothing$$

集合恒等式(关于-)

- 补交转换律(difference as intersection)

$$A-B=A\cap\sim B$$

1.2 对偶原理

集合恒等式与对偶原理

对偶(dual)原理

- 对偶式(dual)：一个集合关系式, 如果只含有 $\cap$, $\cup$, ~, $\varnothing$, E, =, $\subseteq$, 那么, 同时把$\cup$与$\cap$互换, 把$\varnothing$与E互换, 把$\subseteq$与$\supseteq$互换, 得到的式子称为原式的对偶式.

- 对偶原理：对偶式同真假．或者说, 集合恒等式的对偶式还是恒等式.

对偶原理(举例)

- 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- 排中律

$$A \cup \sim A = E$$

- 矛盾律

$$A \cap \sim A = \varnothing$$

对偶原理(举例、续)

- 零律

$$A \cup E = E$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

- 同一律

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap E = A$$

对偶原理(举例、续)

- $A \cap B \subseteq A$
  $A \cup B \supseteq A$
- $\varnothing \subseteq A$
  $E \supseteq A$

- 集合论在提出以后衍生出若干理论，其中对这些恒等式的证明及满足条件的研究是这些理论的一个重要研究点。

2. 集合恒等式证明

- 逻辑演算法
- 集合演算法
- 文氏图法
- 反例法

集合恒等式证明(方法)

由于这里会用到命题逻辑的部分内容，下章会涉及

- 逻辑演算法

  利用逻辑等值式和推理规则。

- 集合演算法

  利用集合恒等式和已知结论。

- 文氏图法

  通过文氏图定性的分析，主要式作为前两种方法的辅助。

- 反例法

  主要用于证明不等式。

2.2 集合演算法

集合恒等式证明

集合演算法(格式)

题目: A=B.

证明: A

=...(????)

= B

∴ A=B. #

证明等式

题目: A⊆B.

证明: A

⊆ ...(????)

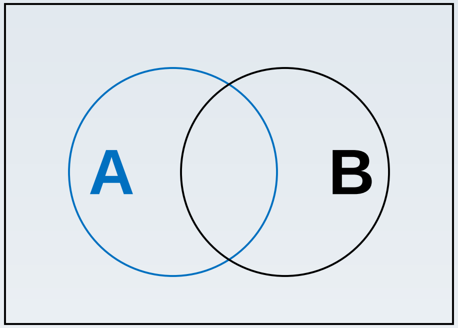
⊆ B

∴ A⊆B. #

证明包含关系

吸收律(证明)

- $A \cup (A \cap B) = A$



证明: $A \cup (A \cap B)$

$= (A \cap E) \cup (A \cap B)$ (同一律)

$= A \cap (E \cup B)$ (分配律)

$= A \cap E$ (零律)

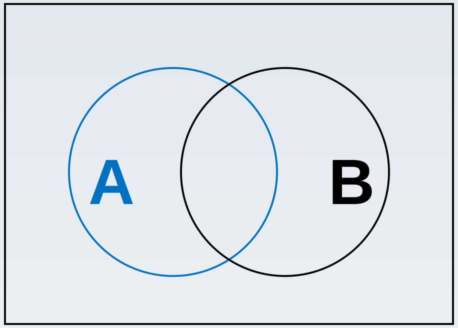
$= A$ (同一律)

$\therefore\ A \cup (A \cap B) = A$

直觉 vs.
规范的证明方法

吸收律(证明、续)

- $A \cap (A \cup B) = A$



证明: $A \cap (A \cup B)$

$= (A \cap A) \cup (A \cap B)$ (分配律)

$= A \cup (A \cap B)$ (等幂律)

$= A$ (吸收律第一式)

$\therefore A \cap (A \cup B) = A$

集合演算法(格式,续)

构造法

题目: $A=B$.

证明: ($\subseteq$) …

$\therefore A \subseteq B$

($\supseteq$) …

$\therefore A \supseteq B$

$\therefore A = B$. #

说明: 分=成$\subseteq$与$\supseteq$

题目: $A \subseteq B$.

证明: $A \cap B$ (或$A \cup B$)

$=$…(????)

$=$ A (或B)

$\therefore A \subseteq B$. #

说明: 化$\subseteq$成=

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

集合恒等式证明(举例)

- 基本集合恒等式
- 对称差(⊕)的性质
- 幂集(P( ))的性质

德●摩根律的相对形式

- $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
- $A-(B\cap C)=(A-B)\cap(A-C)$

针对相对补

证明: $A-(B\cup C)$

$= A\cap\sim(B\cup C)$ (补交转换律)

$= A\cap(\sim B\cap\sim C)$ (德●摩根律，注：针对绝对补)

$= (A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C)$ (等幂律)

$= (A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)$ (交换律,结合律)

$= (A-B)\cap(A-C)$ (补交转换律). #

对称差的性质

1. 交换律: $A \oplus B = B \oplus A$

2. 结合律: $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

3. 分配律: $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

4. $A \oplus \varnothing = A$, $A \oplus E = \sim A$

5. $A \oplus A = \varnothing$, $A \oplus \sim A = E$

对称差的性质(讨论)

- 有些作者用△表示对称差: $A\oplus B=A\triangle B$
- 消去律: $A\oplus B=A\oplus C \Leftrightarrow B=C$

  $A=B\oplus C \Leftrightarrow B=A\oplus C \Leftrightarrow C=A\oplus B$
- 对称差与补: $\sim(A\oplus B) = \sim A\oplus B = A\oplus\sim B$

  $A\oplus B = \sim A\oplus\sim B$
- 问题: $A\oplus B\oplus C=\sim A\oplus\sim B\oplus\sim C$?

幂集的性质

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$
2. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
3. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
4. $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$

多引入了一些元素，所以其组合的可能情况增多

无论是等式左边还是右边，其交集必然只能包含A和B同时具有的元素

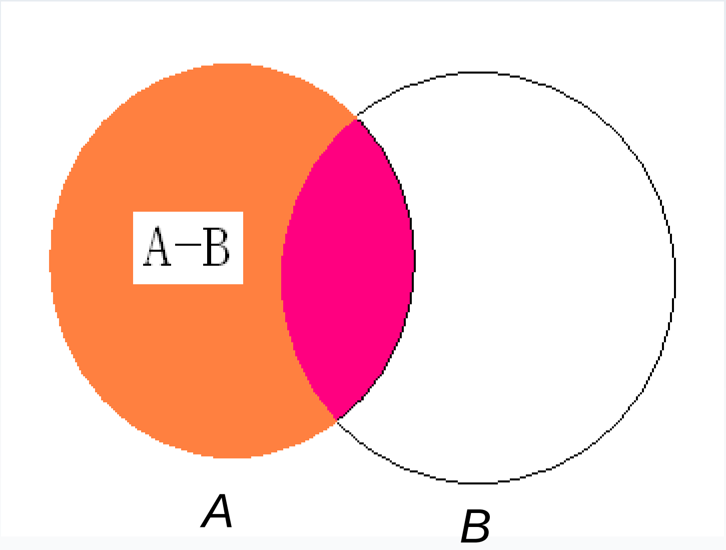
相关证明请自学

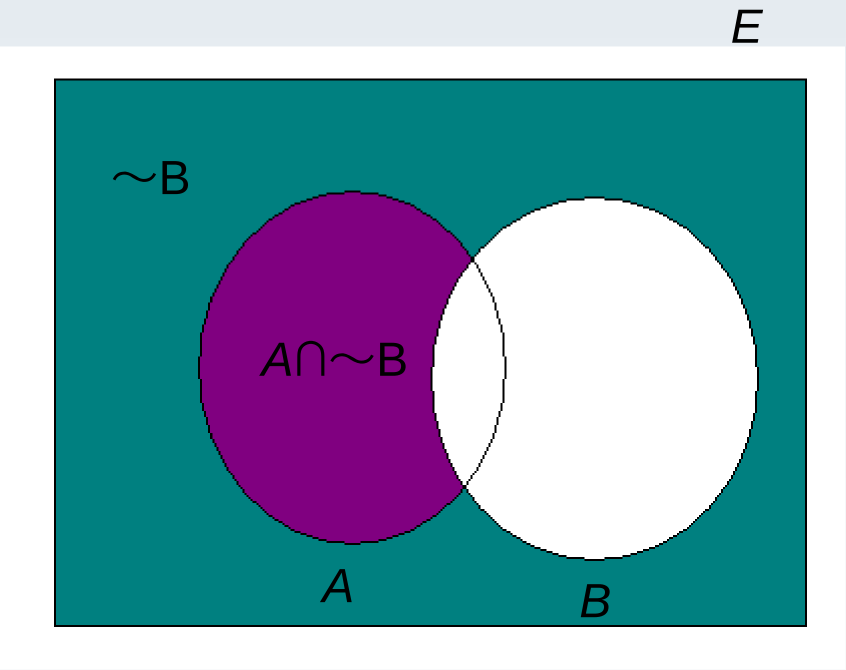
2.3 文氏图证明法和反例证明法

集合恒等式证明

文氏图证明法示例

- $A-B=A\cap\sim B$





这样证明完了么？？

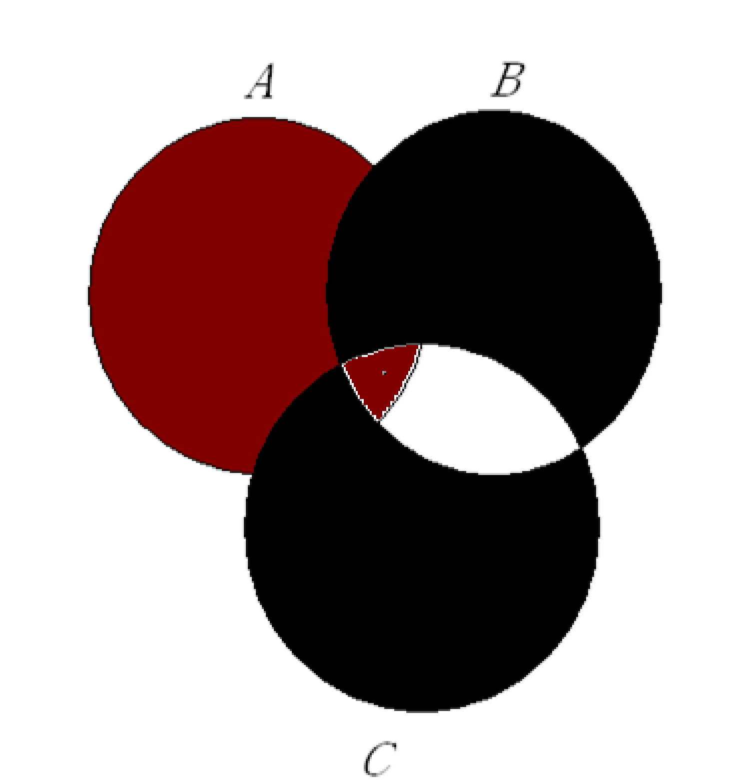
注意：文氏图证明法通常只是一种示意性证明

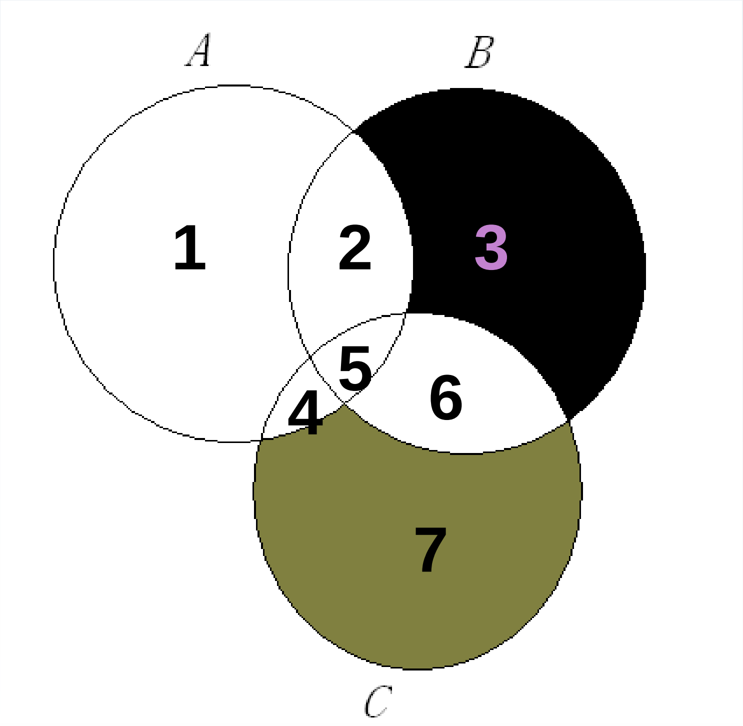
反例证明法

- 主要用于证明某等式不成立

？？？

$$A \cup (B \oplus C) \neq (A \cup B) \oplus (A \cup C)$$





集合运算的优先级

- 分三级：第一级最高，依次降低
- 第一级：补~，幂P()
- 第二级：广义并∪，广义交∩
- 第三级：并∪，交∩，相对补-，对称差⊕
- 同一级：用括号表示先后顺序

总结

内容提要

1. 集合恒等式与对偶原理
2. 集合恒等式的证明

关键内容：

元素和集合之间的关系，集合和集合之间的关系

- 遇到各种方法、定义、性质等，要学会问：
  - 是什么?
  - 为什么?
  - 怎么验证?