A

北京航空航天大学

2013-2014 学年第一学期期末

考试统一用答题册

考试课程 一元微积分

班级__________学号__________姓名__________

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
阅卷人									

2014 年 01 月 13 日

本试卷包括八个大题，共五页（ 2014-01-13）

一．填空题(本题 20 分)

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax)e^{x}-1}{x}=0$，则 $a=$ ＿＿＿＿＿＿． 1

2. 设当 $x\to 0$ 时，$3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^3 是等价无穷小，则 $c=$ ＿＿＿＿＿＿＿．4

3. 螺线 $r=\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$ 与极轴围成的面积 $S=$ ＿＿＿＿＿．$\dfrac{4}{3}\pi^3$

4. 设可导函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\arcsin x\cdot\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(0)=1$，

则 $y(1)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿． $\dfrac{\pi}{2}$

5. 函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 在点 $x_0=0$ 处带佩亚诺余项的三阶泰勒公式为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．

$$f(x)=2(x+\frac{x^3}{3})+o(x^3)$$

二．单项选择题(本题 20 分)

1. 设函数 $y(x)=e^x(e^x-1)(e^x-2)\cdots(e^x-10)$，则 $y'(0)=$（ D ）.

A.10!.　　B. $-10!$.　　C. 9!.　　D. $-9!$.

2．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，则 $f(\sin x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处取得极大值的一个充分条件是（ B ）.

A. $f'(1)<0$.　　B. $f'(1)>0$.　　C. $f''(1)<0$.　　D. $f''(1)>0$.

3. 设 $I_k=\displaystyle\int_0^{k\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，则有（ A ）.

A. $I_1>I_2>0$.　　B. $I_1>0>I_2$.　　C. $I_2>I_1>0$.　　D. $I_2>0>I_1$.

4. 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是(B)

A.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.　　B.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.

C.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛.　　D.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

5. 物体的运动规律为 $s=s(t)$，介质的阻力与速度的平方成正比(比例系数为 k)，则物体从时刻 $t=a$ 运动至 $t=b$ 时，阻力所做的功为（ D ）.

A

A. $\int_a^b k[s(t)]^2 \mathrm{d}t.$ B. $\int_a^b k[s'(t)]^2 \mathrm{d}t.$ C. $\int_a^b k[s(t)]^3 \mathrm{d}t.$ D. $\int_a^b k[s'(t)]^3 \mathrm{d}t.$

三．求极限（每小题 5 分，共 10 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos 2x}{e^{x^2}-1})$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2\cos 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{1}{2}x^4-x^2[1-\frac{1}{2}(2x)^2]+o(x^4)}{x^4}=\frac{5}{2}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{2}]_0^1=\frac{\pi}{6}$

四．求导数（每小题 5 分，共 10 分）

1．设$\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$，求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}, \left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$

$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan t,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\sec^2 t}{t\cos t},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{t=\frac{\pi}{4}}=1,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{8\sqrt{2}}{\pi}.$

2．已知函数$y=y(x)$由方程$\int_1^{x+2y}e^{t^2}\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{x}}x\cos(t^2)\mathrm{d}t$所确定，求$y'(1)$.

解　将方程$\int_1^{x+2y}e^{t^2}\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{x}}x\cos(t^2)\mathrm{d}t$两端对$x$求导，得

$$e^{(x+2y)^2}(1+2y')=\int_1^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\mathrm{d}t+x\cos x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

当$x=1$时，$y=0$.

$\therefore\quad y'(1)=\frac{1}{2}(\frac{\cos 1}{2e}-1).$

五．求积分（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.=-\int xe^x\mathrm{d}\frac{1}{1+x}=-\frac{xe^x}{1+x}+\int\frac{d(xe^x)}{1+x}=-\frac{xe^x}{1+x}+\int e^x dx=-\frac{xe^x}{1+x}+e^x+C.$

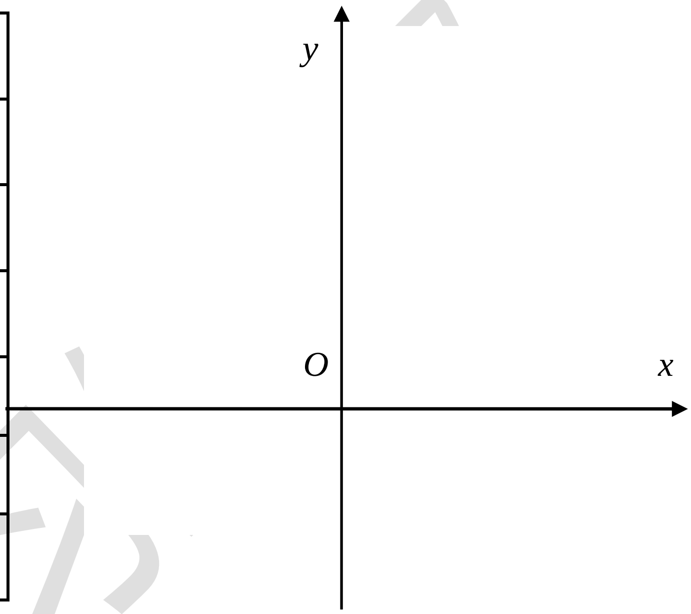
2. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1-x^2}}$.

$$\underline{\underline{x=\sin t}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^4 t dt \quad = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cot^2 t+1)\,\mathrm{d}\cot t \quad = -\left(\frac{\cot^3 t}{3}+\cot t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}.$$

六. *(14 分)* 设函数 $y = f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x+1}$.

1. 填表并作图;

单增区间	$(-\infty,-3),(1,+\infty)$
单减区间	$(-3,-1),\quad(-1,1)$
凹区间	$(-1,+\infty)$
凸区间	$(-\infty,-1)$
极大值点	$x=-3$
极小值点	$x=1$
渐近线	$x=-1, y=x-4$



2. 求曲线 $y = f(x)$对应 $x\in[0,3]$的弧段绕x轴旋转所成旋转体的体积 V.

解 $v=\int_0^3 \pi f^2(x)dx = \int_0^3 \pi(\dfrac{x^2-3x}{x+1})^2 dx$

$=\int_0^3 \pi((x-4)^2+8-\dfrac{40}{x+1}+\dfrac{16}{(x+1)^2})dx$

$=\pi\left[\dfrac{(x-4)^3}{3})+8x-40\ln(1+x)-\dfrac{16}{1+x}\right]_0^3 = (57-80\ln 2)\pi.$

七. (8 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\dfrac{\ln n}{n^p})$ $(p>0)$ 的收敛性, 若收敛, 请判断是条件收敛还是绝对收敛, 并说明理由.

解 $\because \dfrac{\ln n}{n^p}\to 0, \therefore \sin(\dfrac{\ln n}{n^p}) \sim \dfrac{\ln n}{n^p} \to 0,$

当

A

$p>1, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p}\cdot n^{\frac{1+p}{2}}=0$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{\ln n}{n^p})$ 绝对收敛;

当 $p\le 1, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p}\cdot n=\infty$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{\ln n}{n^p})$ 非绝对收敛;

设 $f(x)=\sin(\frac{\ln x}{x^p})$, $\quad f'(x)=\cos(\frac{\ln x}{x^p})\cdot\frac{x^{p-1}(1-p\ln x)}{x^{2p}}<0\ (x>e^{\frac{1}{p}})$

所以 $\sin(\frac{\ln n}{n^p})$ 当 $n>[e^{\frac{1}{p}}]$ 单调减少,由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{\ln n}{n^p})$ 收敛.

于是原级数当 $p>1$ 时绝对收敛, $p\le 1$ 时条件收敛.

八. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)\cdot f(1)>0$, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明

1. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在两个零点;
2. 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$.

证 1. $f(0)\cdot f(1)>0\Rightarrow f(0)$ 与 $f(1)$ 同号,不妨设 $f(0)>0,\ f(1)>0$.

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f(x)\ge 0$, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$. 故一定存在 $x_0\in(0,1)$, 满足 $f(x_0)<0$.

于是 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 与 $[x_0,1]$ 都满足零点存在定理的条件, 所以存在 $x_1\in(0,x_0)$, $x_2\in(x_0,1)$, 满足 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

2. 令 $F(x)=f(x)e^{3\int_0^x f^2(t)dt}$, $F(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上可导, 且 $F(x_1)=F(x_2)=0$,

由罗尔定理知存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$, 有 $F'(\xi)=0$.
而 $F'(x)=f'(x)e^{3\int_0^x f^2(t)dt}+3f^3(x)e^{3\int_0^x f^2(t)dt}$, 故存在 $\xi\in(0,1)$, 有 $f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$.