# 工科数分习题课二　数列极限(二)

石岩

shiyan200245@163.com

Sept.28.2012

**本节课的内容和要求**

1. 熟练运用单调有界定理和Cauchy收敛定理判断数列极限;

2. 掌握有关重要极限e的计算.

**基本概念和主要结论**

**1.数列极限**

**2.数列收敛的性质**

**3.数列极限存在的条件**

■ 定理　数列收敛的充要条件是它的任何非平凡子列[†] 都收敛.

[†] 数列本身以及去掉有限项后得到的子列成为**平凡子列**, 不是平凡子列的子列成为**非平凡子列**.

◇ 极限存在的必要条件常作为判断极限是否存在的重要方法.

■ 单调有界定理　有界的单调数列必有极限. (充分条件)

■Cauchy收敛定理　数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是$\{a_n\}$是Cauchy基本列[†].

[†]Cauchy基本列:

若$\{a_n\}$满足 : $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,N > 0,$ s.t. $|\,a_n - a_m| < \varepsilon$ for $n, m > N$,

或 $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,N > 0,$ s.t. $\forall\,p > 0,\ |\,a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ for $n > N$,

则称$\{a_n\}$是Cauchy基本列.

**4.重要极限** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

(1) $a)$ $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$严格单调递增;

$b)$ $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n\right\}$严格单调递增;

$c)$ $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$严格单调递减;

$d)$ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^k$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{q_n}\right)^{q_n} = \mathrm{e}$,

其中$\{p_n\}$是趋于 $+\infty$的任意数列, $\{q_n\}$是趋于 $-\infty$的任意数列.

1.设$c>0$,任取$0<x_0<\dfrac{1}{c},\ x_{n+1}=x_n(2-cx_n),\ n=0,1,\cdots.$

求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.设数列$\{x_n\}$由如下递推公式定义:

$$x_0=1, x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n},\ n=0,1,\cdots.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3.设数列$\{a_n\}$满足$0<a_n<1$,且有不等式$(1-a_n)a_{n+1}>\dfrac{1}{4}$.

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{2}$.

4. 用 Cauchy收敛定理证明数列$\{a_n\}$

$$a_n = \frac{\sin 2}{2(2+\sin 2)} + \frac{\sin 3}{3(3+\sin 3)} + \cdots + \frac{\sin n}{n(n+\sin n)} \text{ 收敛.}$$

5. 设数列$\{x_n\}$满足: 存在正常数$0 < k < 1$, 使得

$$|\,x_{n+1} - x_n| \leqslant k|\,x_n - x_{n-1}|,\ n \in \mathbb{N}_+.$$

证明: $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. 且有

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|, \quad |x_n - x^*| \leqslant \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|.$$

6.证明:若单调数列$\{a_n\}$含有一个子列趋于无穷,则$\{a_n\}$趋于无穷.