# 工科数分习题课六　闭区间上连续函数的性质

石岩

shiyan200245@163.com

No.2.2012

**本节课的内容和要求**

1.掌握闭区间上连续函数的性质.

**基本概念和主要结论**

1.函数的连续性 $\surd$

2. 函数的一致连续性 $\surd$

3. 闭区间上连续函数的性质

■ 最大、最小值定理　若函数$f$在闭区间$[a,b]$上连续,则$f$在$[a,b]$上有最大值与最小值.

■ (推论)有界性定理　若函数$f$在闭区间$[a,b]$上连续,则$f$在$[a,b]$上有界.

■ 介值性定理　若函数$f$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a) \neq f(b)$.若$\mu$为介于$f(a)$与$f(b)$之间的任何实数,则至少存在一点$x_0 \in (a,b)$,使得

$$f(x_0) = \mu.$$

■ (推论)根的存在定理　若函数$f$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)f(b) < 0$,则至少存在一点$x_0 \in (a,b)$,使得

$$f(x_0) = 0.$$

1. 函数$f(x)$在$[a,b]$上单调, 且$f([a,b]) = [f(a),f(b)]$. 证明: $f(x) \in C[a,b]$.

2. 设$f$在$[a,b]$上连续,满足$f([a,b]) \subset [a,b]$.证明:存在$x_0 \in [a,b]$,使得

$$f(x_0) = x_0.$$

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, $\forall\, x \in [a,b], \exists\, y \in [a,b]$, 使得$|f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|f(x)|$. 求证至少存在一点$\xi \in [a,b]$, 使得$f(\xi) = 0$.

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上有定义, 且在$[a,b]$上每一点有极限. 证明$f$在$[a,b]$上有界.