Nonlinear Systems 非线性系统

第六讲

Lyapunov稳定性

Lyapunov stability

一、Lyapunov稳定性理论

- Aleksandr M Lyapunov (1857-1918, Russia)
- Classmate of Markov, taught by Chebyshev
- Doctoral thesis *The general problem of the stability of motion* became a fundamental contribution to the study of dynamic systems stability
- He shot himself three days after his wife died of tuberculosis

简化的平衡状态

在初始时刻 t_0 时,干扰引起的状态向量 x_0 与平衡状态 x_e 之差

$$y_0 = x_0 - x_e$$

称为**初始扰动向量**。由 x_0 所决定的运动过程

$$\dot{x} = f(x,t)$$

的解, 称为**被扰运动**，记为$x(t) = x(t,t_0,x_0)$。

由于平衡状态和被扰运动均为微分方程

$\dot{x}=f(t,x)$的解。由此可导出扰动向量

$$y(t):=x-x_e$$

满足微分方程

$$\frac{d}{dt}y=\frac{d}{dt}(x-x_e)=f(x,t)=f(y+x_e,t):=G(y,t)$$

称为关于平衡状态x_e的扰动方程，即

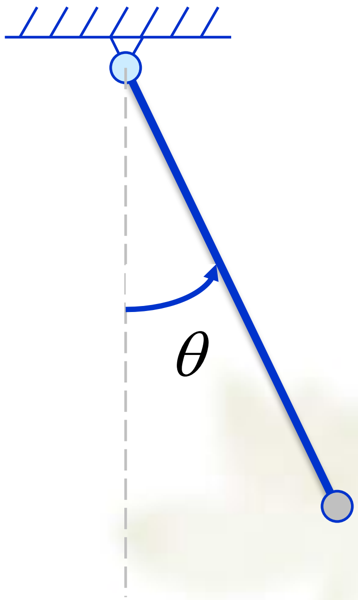
$$\dot{y}=G(y,t)$$

其中， $G(0,t)=f(x_e,t)\equiv 0$

在以下讨论平衡状态的稳定性时，只需要讨论**零解**这个平衡状态的稳定性就可以了。

例：单摆

$$\ddot{\theta}+a\sin\theta+b\dot{\theta}=0 \qquad a=\frac{g}{l}$$



引入状态变量:

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta\\\dot{\theta}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\-a\sin x_1-bx_2\end{bmatrix}$$

其平衡状态为 $\boldsymbol{x}_e=\begin{bmatrix}2n\pi\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_e=\begin{bmatrix}(2n+1)\pi\\0\end{bmatrix}$

为了描述简单，我们将这些平衡点转换成状态空间原点的方式来变换系统方程，以研究变换后系统方程原点的稳定性来确定原来系统平衡点的稳定性。

单摆平衡位置的扰动方程

单摆运动微分方程 $\ddot{\theta}+a\sin\theta+b\dot{\theta}=0,$ 引入$x_1=\theta, x_2=\dot{\theta},$得到

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-a\sin x_1-bx_2\end{cases}$$

考虑其两个平衡位置 $(\pi,0),(0,0)$ 的扰动方程

引入扰动变量 $y_1=x_1-\pi, y_2=x_2-0$

代入方程化简得 $$\begin{cases}\dot{y}_1=y_2\\ \dot{y}_2=a\sin y_1-by_2\end{cases}$$

引入扰动变量 $y_1=x_1-0, y_2=x_2-0$

代入方程得 $$\begin{cases}\dot{y}_1=y_2\\ \dot{y}_2=-a\sin y_1-by_2\end{cases}$$

根据微分方程解对初值的连续依赖性质，可知只要x_0充分小，对于$[t_0,T]$之间的任一时刻，$x(t,t_0,x_0)$偏离$x=0$（**平衡状态**）也可以任意小。现在要研究这一性质是否对$[t_0,+\infty)$均成立。

定义1 对于任意的$\varepsilon>0$，都存在$\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得当$\|x(t_0)\|<\delta(t_0,\varepsilon)$时有

$\|x(t,t_0,x_0)-0\|<\varepsilon$

$\|x(t_0)-0\|$

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon \qquad \forall t\geq t_0$$

成立。则称系统关于平衡状态（或原点）$x=0$是（Lyapunov意义下）稳定的。

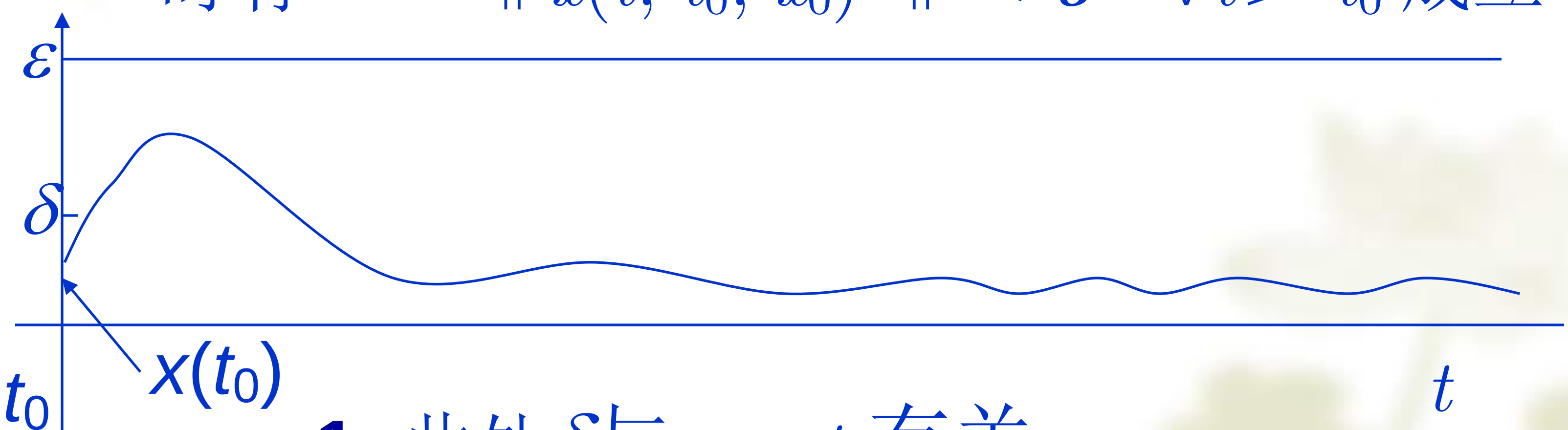
定义2 若定义1中的$\delta=\delta(\varepsilon)$，即$\delta$与$t_0$无关(关于$t_0$一致)，则称所定义的稳定为一致稳定。

定义1（Lyapunov意义下稳定）的图示：

对于任意的$\varepsilon>0$，都存在$\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得当

$$\|x(t_0)\| < \delta(t_0,\varepsilon)$$

时有 $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ 成立



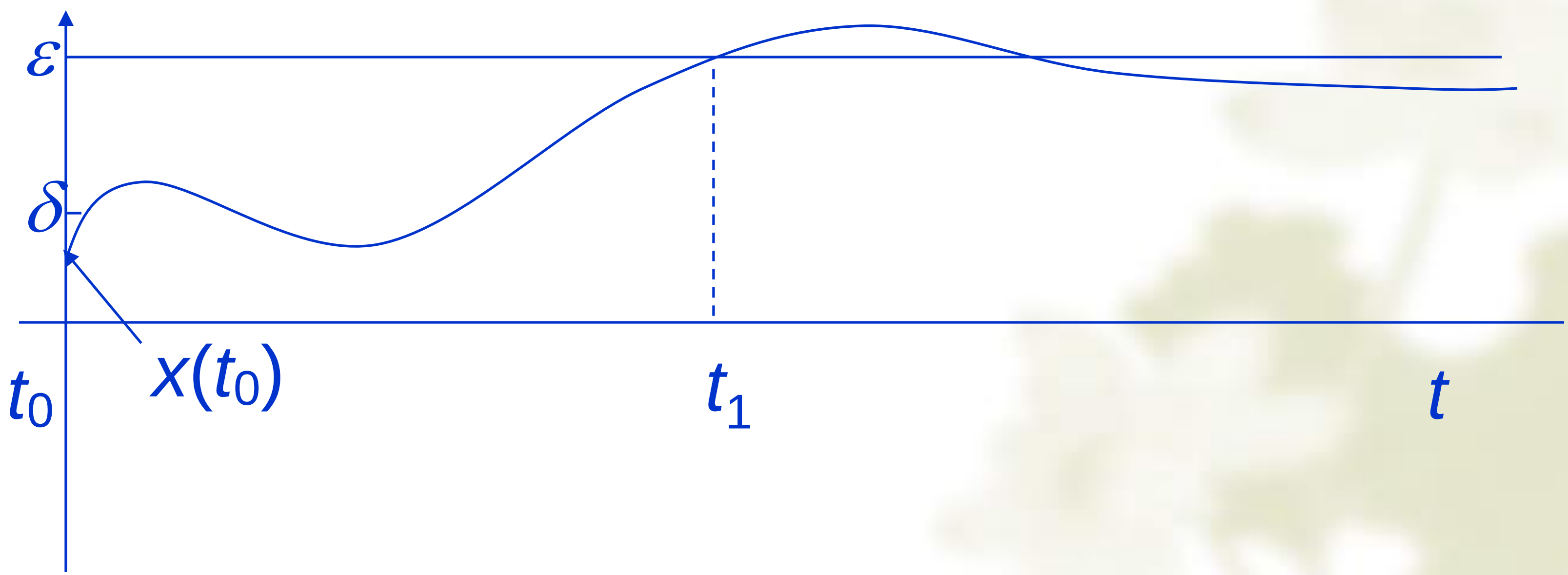
1. 此处δ与ε、t_0有关；

2.$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \qquad \forall t \geq t_0$

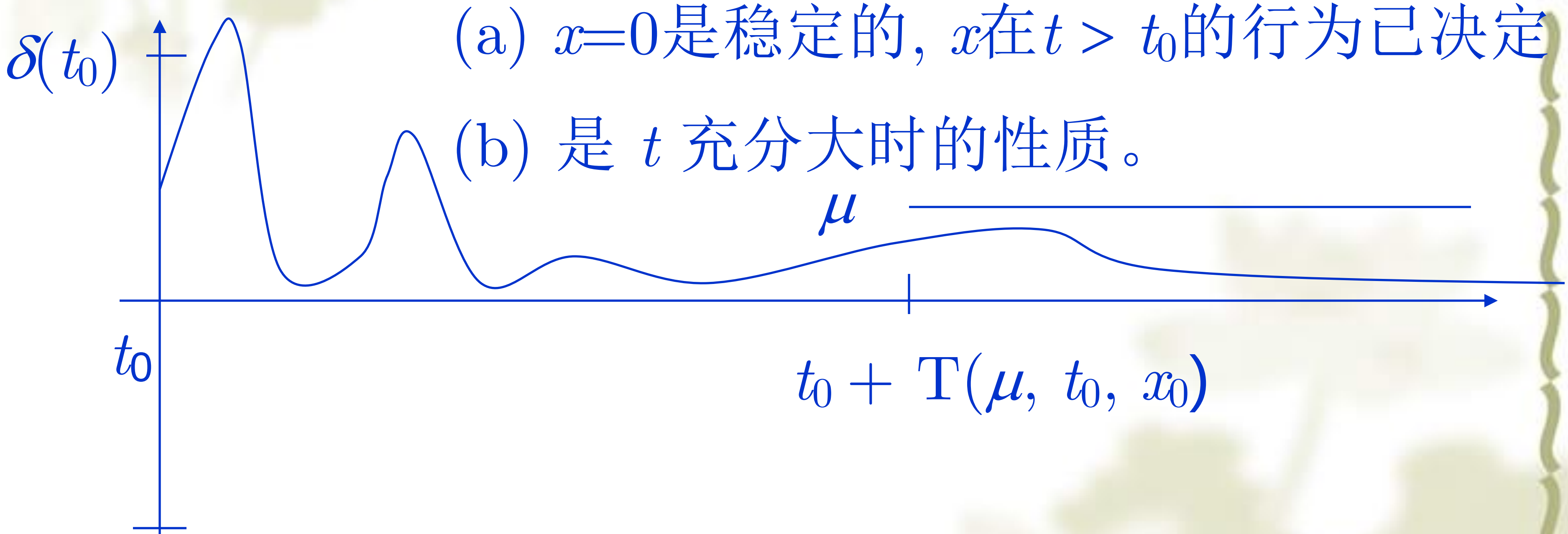
初值变化充分小时，解的变化($t \geq t_0$)可任意小(不是无变化)；**3**.显然，$\delta(t_0,\varepsilon) \leq \varepsilon$。

关于不稳定的定义：

定义： 若对任意给定的$\varepsilon>0$，无论δ多么小，总可以找到满足 $\| x(t_0) \| < \delta$ 的某一初值x_0，使得从它出发的运动轨线 $x(t, t_0, x_0)$ 在某一时刻$t_1>t_0$，有 $\| x(t, t_0, x_0) \| = \varepsilon$，则称系统的零解是不稳定的。



定义3 若 (a) $x=0$是稳定的。 (b)存在$\delta(t_0)>0$，使得对任意的$\mu>0$，存在$T(\mu, t_0, x_0)$，当$\|x(t_0)\| < \delta(t_0)$，$t > t_0 + T(\mu, t_0, x_0)$时，有$\|x(t, t_0, x_0)\| < \mu$。则称$x=0$为渐近稳定。



(a) $x=0$是稳定的, x在$t > t_0$的行为已决定

(b) 是 t 充分大时的性质。

1. 此处$\delta(t_0)$是**固定的**一个范围(称为**吸引区**，不是任意小的； T 称为吸引时间或衰减时间)；

2. $\|x(t, t_0, x_0)\| < \mu$， $t > t_0 + T(\mu, t_0, x_0)$

讨论:

1) 定义3的第二部分(b)又称为**关于零解是吸引的**。它反映的是解的渐近性质。可以将(b)改成:

$\exists\delta(t_0)>0$,使得 $\|x(t_0)\|<\delta(t_0)$ 蕴涵

$$\lim_{t\to\infty} x(t,t_0,x_0)=0$$

2) 稳定和吸引(即(a)和(b))是相互独立的概念,对于一般的系统,它们之间不存在蕴涵关系。苏联人给出了一个著名的反例 (参见黄琳教授的"稳定性理论",或"稳定性与鲁棒性理论基础"),表明一个微分方程的解是吸引的但却不是关于零解稳定的。

3) 正数$\delta(t_0)$ 确定的区域称为系统渐近稳定的吸引区。若吸引区是整个空间，称系统是**关于原点全局渐近稳定的。**

定义4 若

a) $x=0$是一致稳定的。

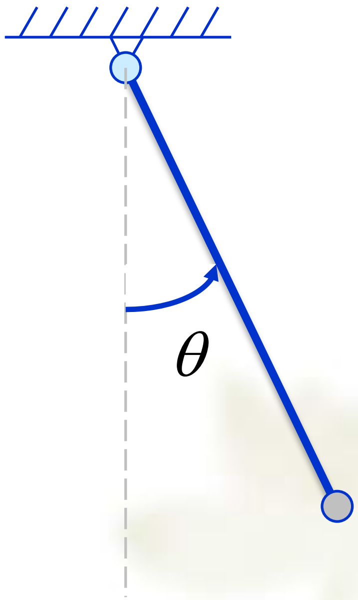
b) 存在$\delta_0>0$，使得对任意的$\mu>0$，存在$T(\mu)$，当‖$x(t_0)$‖$<\delta_0$，$t>t_0+T(\mu)$时有‖$x(t, t_0, x_0)$‖$<\mu$。则称$x=0$为一致渐近稳定，即

$$x(t,t_0,x_0)\xrightarrow{\text{关于}t_0\text{、}x_0\text{均一致}}0$$

这里，一致性在于：δ_0不依赖于t_0、且T仅依赖于μ，不依赖于t_0、x_0。

例：单摆

$$\ddot{\theta}+a\sin\theta+b\dot{\theta}=0 \qquad a=\frac{g}{l}$$



引入状态变量：
$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta\\\dot{\theta}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\-a\sin x_1-bx_2\end{bmatrix}$$

其平衡状态为 $\boldsymbol{x}_e=\begin{bmatrix}2n\pi\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_e=\begin{bmatrix}(2n+1)\pi\\0\end{bmatrix}$

为了描述简单，我们将这些平衡点转换成状态空间原点的方式来变换系统方程，以研究变换后系统方程原点的稳定性来确定原来系统平衡点的稳定性。

单摆平衡位置的稳定性

单摆运动微分方程 $\ddot{\theta}+a\sin\theta+b\dot{\theta}=0,$ 引入$x_1=\theta, x_2=\dot{\theta},$得到

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-a\sin x_1-bx_2\end{cases}$$

考虑忽略摩擦力后系统平衡点 $(0,0)$ 的稳定性，其扰动方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-a\sin x_1\end{cases}$$

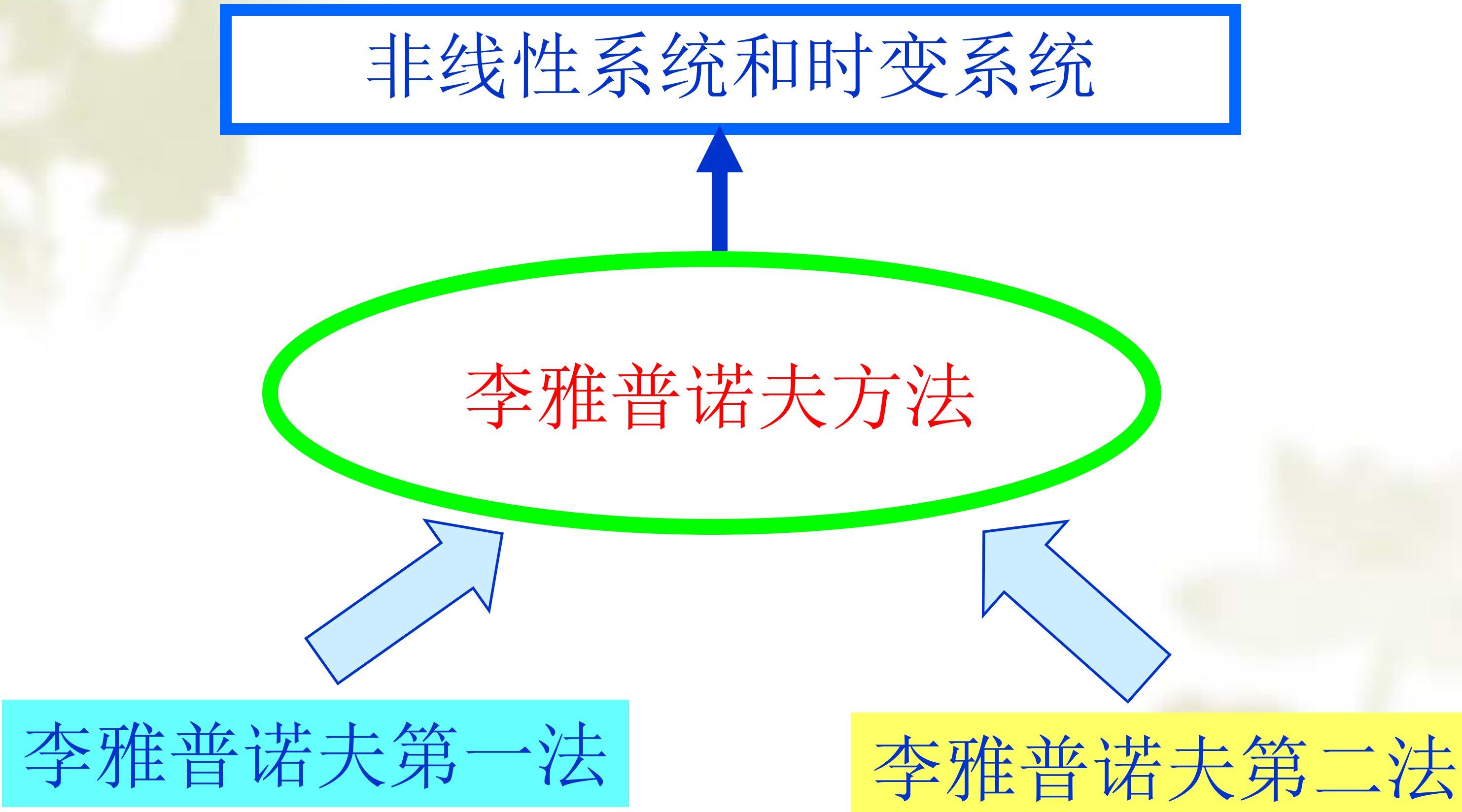
取能量函数 $E(x)=\int_0^{x_1}a\sin y\,dy+\frac{1}{2}x_2^2=a(1-\cos x_1)+\frac{1}{2}x_2^2$

能量函数沿着系统解对时间t的一阶导数满足 $\dot{E}(x)=0$ 平衡点稳定。

考虑有摩擦力，即 $b>0$

能量函数沿着系统解对时间t的一阶导数满足 $\dot{E}(x)=-bx_2^2\le 0$，最终可以得到状态趋于系统状态原点，所以零平衡点渐近稳定。

系统稳定的Lyapunov函数方法



定常非线性系统的稳定性方法

考虑系统方程 $\dot{x} = f(x), x = [x_1, \cdots, x_n]^T, f(0) = 0.$

函数$v(x_1, \cdots, x_n)$视为关于t的复合函数，其对时间的导数

$$\frac{d}{dt} v(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= [\text{grad } v(x)]^T f(x)$$

$$= [\nabla v(x)]^T f(x)$$

$$= w(x)$$

Lyapunov函数方法

考虑一个简单例子，含阻尼线性振动二阶系统 $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$

引入变量 $x_1=x, x_2=\dot{x}$ 系统转化为一阶方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-x_2\end{cases}$$

取Lyapunov函数，即v函数 $v(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2$

则 $3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2=C$ 是平面(x1,x2)上的一族椭圆曲线.现求v沿系统的时间导数

$$\dot{v}(x_1,x_2)=\frac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial v}{\partial x_2}\dot{x}_2=(6x_1+2x_2)x_2-(2x_1+4x_2)(x_1+x_2)=-2(x_1^2+x_2^2)$$

负定，运动轨线从椭圆族的外面穿过椭圆走向内部，系统原点是渐近稳定的。

Lyapunov函数方法：不求解运动方程，直接研究系统的稳定性。

Lyapunov函数

Lyapunov函数一般假设：设实函数 $v(x_1,\cdots,x_n)$ 定义于原点的某个领域内，且满足

1）在该领域内单值，且对各变量连续可微；

2）$v(0,\cdots,0)=0$

记$v(x_1,\cdots,x_n)$为$v(x), x=[x_1,\cdots,x_n]^T, v:R^n \to R.$

定义：$v(x)$是

1）正定的（负定的），若 $v(x)>0\ (v(x)<0), \forall x \neq 0,$ 且$v(0)=0.$

2）半正定的（半负定的），若 $v(x)\geq 0\ (v(x)\leq 0), \forall x \in R^n.$

3）变号的，若x在定义域中原点的任一领域内变化时，v(x)可以取值负、正和零。

例：

$v(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2, x\in R^3,$ 正定.

$v(x)=x_1^2+x_2^2, x\in R^3,$ 半正定.

$v(x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2, x\in R^3,$ 不定号.

$v(x)=(x_1-x_2)^2+x_3^2, x\in R^3,$ 半正定.

例:

对 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$$ 正定;

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3$$ 不属于定号函数;

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, x_3) = 1 - \cos(x_1 + x_2 + x_3)$$ 半正定;

在原点的充分小邻域内:

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)$$ 正定.

二次型Lyapunov函数

最常用的Lyapunov函数是二次型： $v(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$

不失一般性，假设 $a_{ij}=a_{ji}$.

二次型的向量形式：

$$v(x)=x^TAx,\ x=[x_1,\cdots,x_n]^T,A^T=A.$$

结论1：二次型$v(x)$是(半)正定的/不定当且仅当矩阵*A*(半)正定/不定。

结论2： 对对称矩阵*A*，

1） *A*正定的充要条件是其顺序主子式均大于零；

2） *A*负定的充要条件是- *A*正定的；

3） *A*半正定的充要条件是其所有主子式均不小于零；

4） *A*半负定的充要条件是- *A*半正定的；

任何对称矩阵经过正交变换化为对角型

$OAO^T=diag[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$,其中*O*为正交阵，即$O^T=O^{-1}$.

$$v(x) = x^T A x = x^T \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} x = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 .$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x,$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$v(y) = x^T Q^T A Q x = x^T \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} x = \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{3}{2} y_2^2$$

对称矩阵基于特征值描述

结论3： 对对称矩阵A，

1）A正定的充要条件是其特征根均为正；

2）A负定的充要条件是其特征根均为负；

3）A半正定的充要条件是其特征值均不小于零；

4）A半负定的充要条件是其特征值均不大于零；

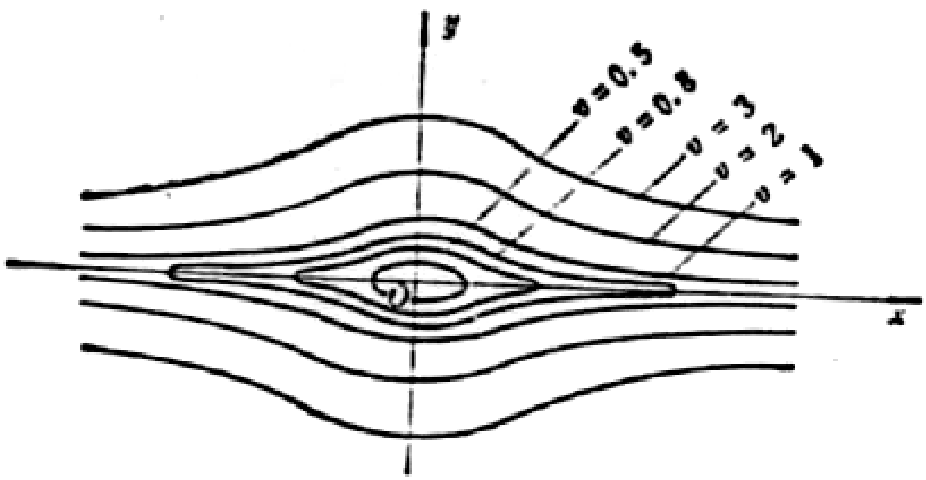
5）A变号的充要条件是其特征值既有正又有负.

二次型$v(x), x \in R^n$, 正定, 则$v(x) = C (C > 0)$是一椭球.

一般Lyapunov函数的几何特性

v正定，$v(x,y)=C$也不一定是一闭曲面族。

$$V=y^2+\frac{x^2}{1+x^2}=C$$



对于任意正定$V(x)$，可以证明：在原点的小邻域里，$V(x)=C$（>0）是一个闭超曲面族，包围原点，层层相套，且当$C\to 0$时向原点退缩。这说明，在原点附近$V(x)=C$具有二次型的几何形象。

证明了：只要C是甚小(<l)的正数，$V(x)=C$是一包围原点的闭曲面，且随$C\to 0$而向原点退缩。

一般Lyapunov函数的符号

首先将v函数展成Taylor级数

$$V(x)=U_m(x)+U_{m+1}(x)+\cdots$$

1. 奇次型一定是变号函数。

2. 在原点领域，若Um是定号函数或变号函数，则v函数也是同号或变号函数。

3. 在原点领域，若Um是定号函数或变号函数，且存在可任意小的A>0，使得

$$|U^*(x)|<A\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^m \quad 则 \quad V(x)=U_m(x)+U^*(x)$$

也和Um是同样的符号性质。

4. 在原点领域，若Um是定号函数或变号函数，U*m是可任意小的m次型，则

$$V(x)=U_m(x)+U^*(x)$$

也和Um是同样的符号性质。

函数的正定性又可进一步区分为：局部正定、全局正定和全局径向无界正定。

全局径向无界正定：全局正定，且当$\|x\| \to \infty$时$V(x) \to \infty$。

对于二阶系统，$V = x_1^2 + x_2^2 + x_1^3$，$V = (1 - \cos x_1) + x_2^2$ 为局部正定，$V = \dfrac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2$ 为全局正定，$V = x_1^2 + x_2^2$ 为全局径向无界正定。

作业: 熟悉各种稳定性及函数定号性基本概念