工科数学分析(1)期中考试试题 答案

2007 年 11 月 25 日

一、 填空题（每小题 4 分, 共 20 分）。 得分[ ]

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-1})=$ ______4______ ；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\dfrac{8}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{\sqrt{1+\frac{7}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=4$ ；

2、设数列 $x_n=\dfrac{(2n)!}{n^n\cdot n!}$，（$n=1,2,3,\cdots$），则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=$ ______$\dfrac{4}{e}$______ ；

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{4}{e}$；

3、$\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{x}{3})^{\frac{\sin 2x}{x^2}}=$ ______$e^{-\frac{2}{3}}$______ ；

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{x}{3})^{\frac{\sin 2x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{x}{3})^{\frac{1}{-\frac{x}{3}}(-\frac{2}{3})\frac{\sin 2x}{2x}}=e^{-\frac{2}{3}}$ ；

4、设 $f(x)=\arccos x$，$|x|<1$，则有 $f''(x)=$ _$-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$___ ；

解 $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x)=-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

5、$\lim\limits_{x\to+\infty}x(x^{\frac{1}{x}}-1)=$ ___$+\infty$_______ ；

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(x^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}\dfrac{1-\ln x}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}(\ln x-1)=+\infty$$ 。

二、选择题(每小题 4 分,共 20 分)将代表答案的字母填入右边括号内。

得分[ ]

1、 设数列$\{x_n\}$，与$\{x_n\}$不是基列**不等价**的一个命题是 【 D 】

（A）$\exists\varepsilon_0>0$**，** 对任意大的正整数N，总存在正整数$m_N,n_N>N$，使得

$$|x_{m_N}-x_{n_N}|\geq 2\varepsilon_0\ \mathbf{;}$$

（B）$\exists\varepsilon_0>0$，无论正整数N多么大，总存在正整数$n_N>N$和正整数p_N，使得

$$|x_{n_N+p_N}-x_{n_N}|\geq 3\varepsilon_0\,;$$

（C）$\exists\varepsilon_0>0$**，** 存在两个子列$\{x_{n_k}\}$和$\{x_{m_k}\}$，满足$|x_{n_k}-x_{m_k}|\geq\varepsilon_0$，$k=1,2,\cdots$；

（D）$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N\in\mathrm{N}^*$，对于所有满足$m,n>N$的$m,n\in\mathrm{N}^*$，都有$|x_m-x_n|\geq\varepsilon_0$ 。

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$，则既正确又最好的结果是 【 C 】

（A）f 在 $[0,1]$ 上不一致连续； （B） f在$x=0$处连续可导；

（C） $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，$x=0$是$f'(x)$的第二类间断点；

（D）f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续 ，且f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导。

3．设$f(x)$在(a,b)上可导，且$f'(x)\neq 0$，$\forall x\in(a,b)$。则下列结论正确的是 【 A 】

（A） $f'(x)$在(a,b)上恒为正或恒为负，且$f(x)$在(a,b)上严格单调；

（B） $f(x)$在(a,b)上恒为正或恒为负 ；（C） $f(x)$在(a,b)上有最小值和最大值；

（D） $f(x)$在(a,b)上连续，且$f'(x)$在(a,b)上连续。

4． 设$f(x)$在$x_0\in(a,b)$处可导，且$f'(x_0)>0$，则在下列结论正确的一个是 【 B 】

（A） $f(x)$在x_0处达到极小值； （B） $f(x)$在x_0处达不到极值。

（C） $f(x)$在x_0的某个邻域内严格单调递增；（D） $f(x)$在x_0处达到极大值；

5．下列命题中正确的一个是 【 D 】

（A）设β是数集E的上确界，则必有β是数集E中最大的数；

（B）从覆盖区间I的任一族开区间覆盖中，必可选出有限个开区间就能覆盖区间I；

（C）若有界的数列$\{a_n\}$中有一个子列收敛，则$\{a_n\}$必是收敛的数列；

（D）设数列$\{a_n\}$单调递增，$\{b_n\}$单调递减，且$a_n \le b_n$，$n \in N^*$，

则对$\forall m,n \in N^*$，成立$a_m \le b_n$ 。

三、（本题共 16 分）。得分[ ]

设$p>1$，函数$g(x)=\dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$，$x \in [0,+\infty)$，

求（1）$g(0),g(1)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$；（2）$g'(x)$；

（3）求函数$g(x)$的单调区间；（4）求数$g(x)$在$[0,+\infty)$上的最大值和最小值。

解（1）$g(0)=1, g(1)=2^{p-1}$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{x})^p}{1+(\frac{1}{x})^p}=1$；

（2）$g'(x)=\dfrac{p(1+x)^{p-1}(1+x^p)-(1+x)^p px^{p-1}}{(1+x^p)^2}=\dfrac{(1+x)^{p-1}p(1-x^{p-1})}{(1+x^p)^2}$；

$g'(1)=0$，

（3）由$g'(x)=\dfrac{(1+x)^{p-1}p(1-x^{p-1})}{(1+x^p)^2}$可知，$g'(1)=0$，

当$0<x<1$时，$g'(x)>0$，g在$[0,1]$上严格递增，$g(0)<g(x)<g(1)$；

当$x>1$时，$g'(x)<0$，g在$[1,+\infty)$上严格递减，

（4）由（3）得，当$0<x<1$时，有$g(0)<g(x)<g(1)$；

由（3）和（1）得，当$x>1$时，g在$[1,+\infty)$上严格递减，又$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$，

所以 $1<g(x)<g(1)$；

故 $g(0)\le g(x)\le g(1)$，$x\ge 0$，

从而得$g(0)=1$是最小值，$g(1)=2^{p-1}$是最大值。

四、计算下列各题（每小题 6 分，共 18 分）。得分[ ]

（1）设$f(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}$，$x\neq 0$，（$a$为常数，$a>0$且$a\neq 1$），求$f'(x)$

解 $f(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+a^x)}$ ，$f'(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(1+a^x)}[\frac{1}{x}\ln(1+a^x)]'$

$$=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}\frac{x\cdot\frac{1}{1+a^x}a^x\ln a-\ln(1+a^x)}{x^2},$$

$$f'(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}\frac{a^x\ln a^x-(1+a^x)\ln(1+a^x)}{(1+a^x)x^2}\quad ;$$

或者令 $y=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}$，$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+a^x)$，

$$\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{x^2}\ln(1+a^x)+\frac{1}{x}\frac{1}{1+a^x}a^x\ln a,$$

$$y'=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}[-\frac{1}{x^2}\ln(1+a^x)+\frac{1}{x}\frac{1}{1+a^x}a^x\ln a]\quad。$$

（2）设 $x=t+e^t$，$y=e^{-t^2}\sin(\cos t)$，求 $\frac{dy}{dx}$ ；

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-2te^{-t^2}\sin(\cos t)+e^{-t^2}\cos(\cos t)\cdot(-\sin t)}{1+e^t}$ ；

（3）求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\sin\frac{1}{x}-x)$ 。

解 方法一 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\sin\frac{1}{x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x})=0\ ;$$

方法二 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\sin\frac{1}{x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\cos\frac{1}{x}+1}{-\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x})=0\text{；}$$

方法三：令 $t=\frac{1}{x}$，则原式 $=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{2}=0$；

方法四：$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{3!}\frac{1}{x^3}+o(\frac{1}{x^4})$，

$$\lim_{x\to\infty}(x^2\sin\frac{1}{x}-x)=\lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{6}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\frac{o(\frac{1}{x^4})}{\frac{1}{x^4}})=0\text{ 。}$$

五、（本题满分 16 分）

设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{{x_n}^2})$，$n=1,2,\cdots$ ；

试证明：（1）成立 $x_{n+1}\ge\sqrt[3]{a}$，$n=1,2,\cdots$；（2）$\{x_{n+1}\}$ 是单调递减的；

（3）$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在；（4）求出 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 。

证明（1）$x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{{x_n}^2})$ $x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n+x_n+\frac{a}{{x_n}^2})\ge(x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{{x_n}^2})^{1/3}=\sqrt[3]{a}$，$n=1,2,\cdots$

（2）因为 $x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_{n+1}+\frac{a}{{x_{n+1}}^2})-x_{n+1}=\frac{1}{3}\frac{a-{x_{n+1}}^3}{{x_{n+1}}^2}\le 0$，

所以 $\{x_{n+1}\}$ 是单调递减的；

（3）由于 $\{x_{n+1}\}$ 是单调递减且有下界，所以 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在；

（4）设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A$，显然 $A\ge\sqrt[3]{a}$，在 $x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{{x_n}^2})$ 两边，令 $n\to\infty$ 取极限，

得，$A=\frac{1}{3}(2A+\frac{a}{A^2})$，$A^3=a$，$A=\sqrt[3]{a}$ ，故 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{a}$ 。

六、证明题（10 分）

设函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 f' 为非常值函数。

证明：必存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $|f'(\xi)| > |\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$。

证明　方法一：用反证法。假若结论不真，则对所有 $x \in [a,b]$，都有 $|f'(x)| \le |\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，

因为 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 f 既非常值函数又非线性函数，

必有 $x_0 \in [a,b]$，使得 $|f'(x_0)| < |\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，（否则，若对所有 $x \in [a,b]$，都有 $|f'(x)| = |\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，又 f' 连续，必有 f' 为常值函数）。

因为 $f'(x)$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续，$\lim\limits_{x \to x_0} |f'(x)| = |f'(x_0)| < |\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，

由极限的保号性，存在 $a_1, b_1 \in [a,b]$，$a_1 < b_1$，使得 $x_0 \in [a_1, b_1]$，

且当 $x \in [a_1, b_1]$ 时，有 $|f'(x)| < |\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$；

利用拉格朗日中值定理，得

$$|f(b)-f(a)| = |f(b)-f(b_1)+f(b_1)-f(a_1)+f(a_1)-f(a)|$$

$$\le |f(b)-f(b_1)| + |f(b_1)-f(a_1)| + |f(a_1)-f(a)|$$

$$= |f'(\xi_1)|(b-b_1) + |f'(\xi_2)|(b_1-a_1) + |f'(\xi_3)|(a_1-a)$$

$$< |\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|[(b-b_1)+(b_1-a_1)+(a_1-a)] = |f(b)-f(a)|,$$

这是矛盾的，所以假设不成立，原命题成立。

方法二：设 $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，

易知，$f(a) = F(b) = 0$，且当 $a < x < b$ 时，$F(x)$ 不恒为 0（因为 f' 为非常值函数）；

存在 $c_1 \in (a,b)$，使得 $F(c_1) \ne 0$，不妨设 $F(c_1) > 0$；

在区间 $[a, c_1]$ 与 $[c_1, b]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，可知

存在 $\xi_1 \in (a, c_1)$，使 $F'(\xi_1) = \frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a} = \frac{F(c_1)}{c_1-a} > 0$；

存在 $\xi_2 \in (c_1, b)$，使 $F'(\xi_2) = \frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1} = -\frac{F(c_1)}{b-c_1} < 0$

于是有 $f'(\xi_1) > \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，（1）

$f'(\xi_2) < \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，（2）

当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \ge 0$ 时，由（1），得 $|f'(\xi_1)| > |\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，

当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$ 时，由（2），得 $|f'(\xi_2)| > |\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$，

故必存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $|f'(\xi)| > |\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}|$。(方法二的证明，不要求 f' 连续。)

七、附加题（满分 20 分）

请认真回答以下提问：

（1）作完这份试卷，估算一下自己的得分，我个人认为可以得（　　　）分左右；

（2）根据我个人的平时学习和理解及掌握程度的情况，考前自我判断我能希望得（　　　）分左右；

（3）通过半学期的课程学习，请谈谈个人在知识和能力方面有那些提高；

（4）罗列你所记忆准确的几条定理的内容（条件和结论，不给出证明）；

（5）除了书本和辅导材料上，请列举在别的书上看到的那些结果和好的题目；

（6）在学工科数学分析中，对你来说那些内容难于理解？

（7）你对工科数分中的那些内容有兴趣并有自己的深刻理解？

（8）请列举你所知道的中外著名数学家的名字；

（9）请谈谈你对本课程教学工作的合理化建议。

（10）请谈谈对开设数学分析课程重要性的认识、体会、评价。