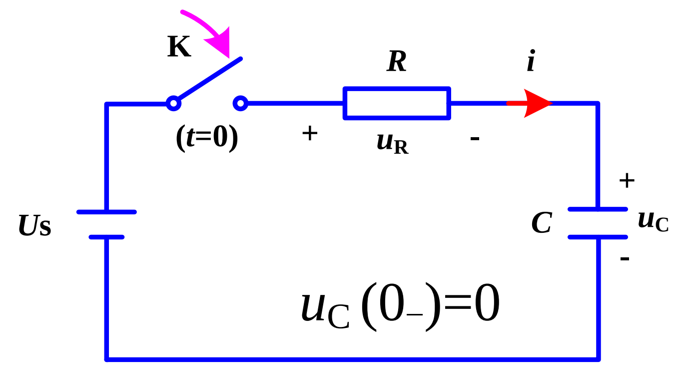
零状态响应

在**零初始储能**的条件下，在$t>0$时仅由施加于电路的激励所引起的响应。

1. RC电路的零状态响应

开关K合上前，$u_C(0_-)=0\,\mathrm{V}$



$$\begin{cases} u_R + u_C = U_S & \textbf{KVL方程} \\ u_R = Ri \\ i = c\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, u_C(0_-) = 0\,\mathrm{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_S & t \geq 0_+ \\ u_C(0_-) = 0\,\mathrm{V} \end{cases}$$

非齐次线性常微分方程

解的形式为：$u_C = u'_C + u''_C$

非齐次方程特解

齐次方程通解

u'_C → 特解（强制分量，稳态分量）

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$ 的特解 → $u'_C=U_S$

与输入激励的变化规律有关，为电路的稳态解。

u''_C → 通解（自由分量，暂态分量）

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$ 的通解 → $u''_C=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$

变化规律由电路参数和结构决定。

全解 $u_C(t)=u'_C+u''_C=U_S+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$

由初始条件 $u_C(0_+)=0$ 定常数 A

$u_C(0_+)=A+U_S=0$ → $A=-U_S$

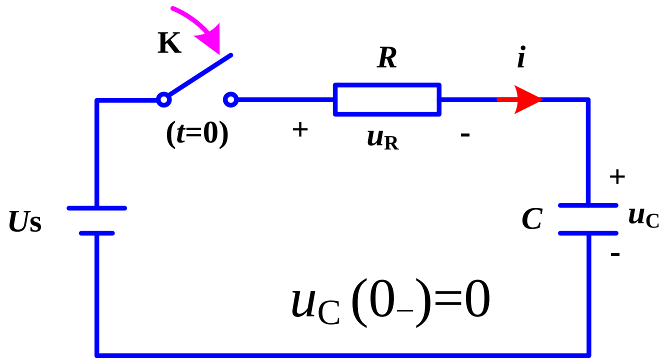
$$u_C=U_S-U_S\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\qquad(t\geq 0)$$

$$u_{\mathrm{C}}=U_{\mathrm{S}}-U_{\mathrm{S}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=U_{\mathrm{S}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\qquad(t\geq 0)$$

从以上式子可以得出：

$$i=C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}=\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

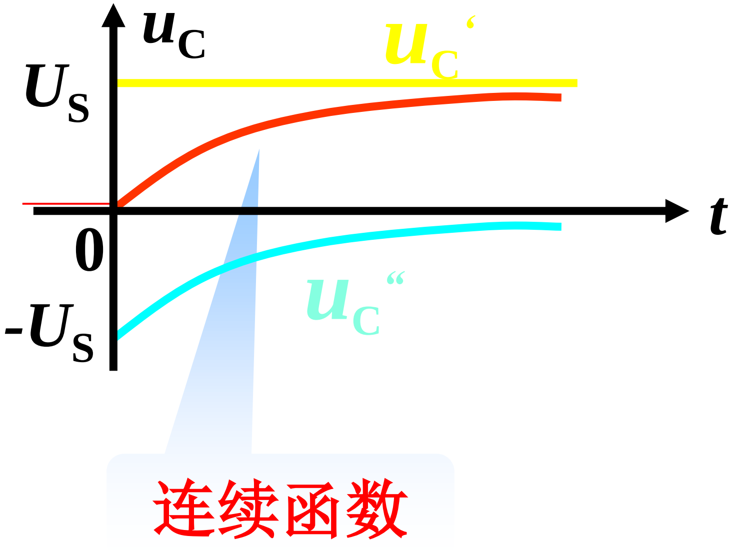
$$u_{\mathrm{R}}=Ri=U_{\mathrm{S}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$

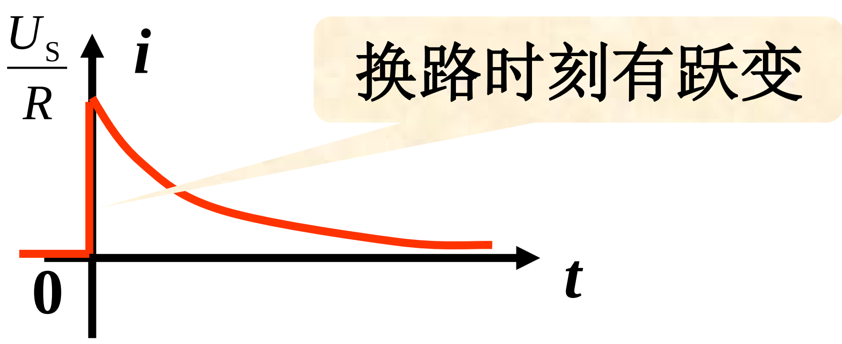


结论：

（1）电容的电压和电流是随时间按同一指数规律变化的函数；电容电压由两部分构成：

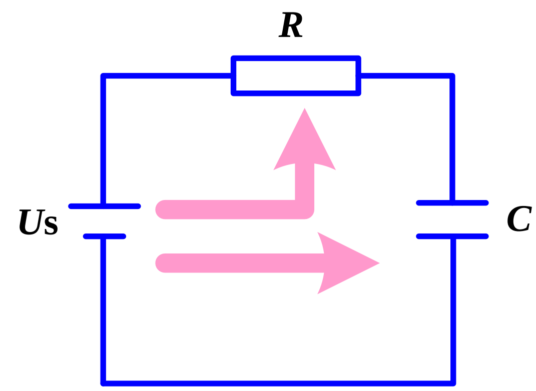
强制分量（稳态分量） + 自由分量（暂态分量）





（2）响应变化的快慢，由时间常数$\tau=RC$决定；τ大，充电慢，τ小充电就快。

（3）响应与外加激励成线性关系；



（4）能量关系

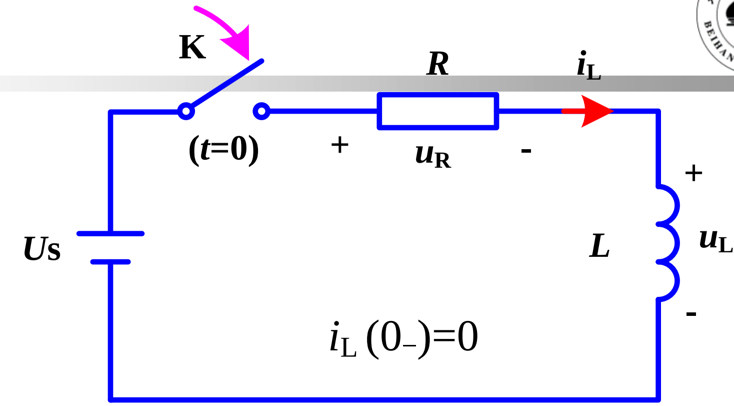
电容储存： $\frac{1}{2}CU_S^2$

电源提供能量： $\int_0^\infty U_S i \mathrm{d}t = U_S q = CU_S^2$

电阻消耗： $\int_0^\infty i^2 R \mathrm{d}t = \int_0^\infty (\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})^2 R \mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_S^2$

电源提供的能量一半消耗在电阻上，一半转换成电场能量储存在电容中。

2. RL电路的零状态响应



已知$i_L(0_-)=0$，电路方程为：

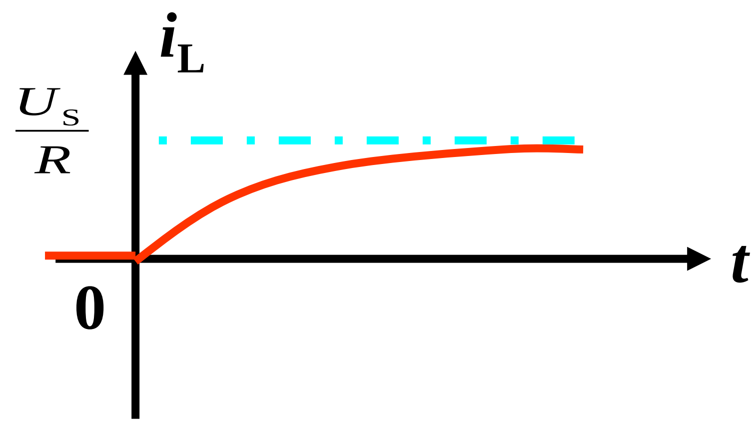
$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=U_S$$

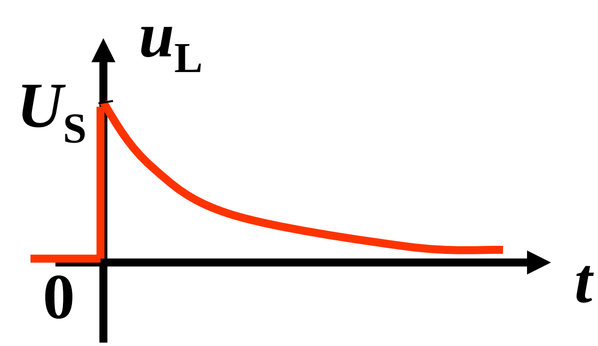
$$i_L=i_L'+i_L''=\frac{U_S}{R}+A\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(0_+)=0\rightarrow A=-\frac{U_S}{R}$$

$$i_L=\frac{U_S}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})$$

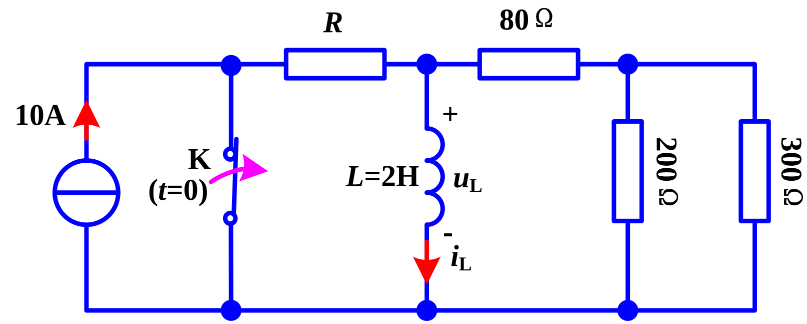
$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=U_S\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$



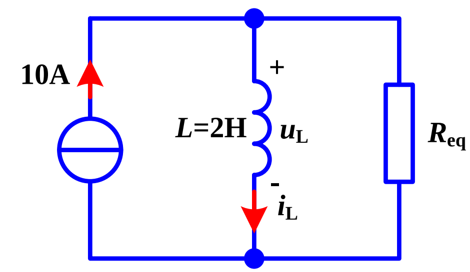


【例】 *t*=0时，开关K打开，求t>0后i_L、u_L的变化规律。

解 RL电路零状态响应问题，先化简电路，有：



t≥0



$$R_{eq}=80+200//300=200\Omega$$

$$\tau=L/R_{eq}=2/200=0.01\text{s}$$

$$i_L(\infty)=10\text{ A}$$

$$i_L(t)=10(1-e^{-100t})\text{ A}$$

$$u_L(t)=10\times R_{eq}\,e^{-100t}=2000e^{-100t}\text{ V}$$

小 结

1. 一阶电路的零状态响应是由外加激励引起的响应，初始储能为零，u_C或i_L是由零起始、按指数规律变化的函数。

直流激励

$$y(t) = y(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

RC电路 $u_C(0_+) = 0$

RL电路 $i_L(0_+) = 0$

2. 衰减快慢取决于时间常数τ

RC电路 $\tau = RC$ ， RL电路 $\tau = L/R$

R为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

4. τ 越大, 指数曲线衰减得越慢, 过渡过程经历的时间越长。在工程上, 经过3 τ ～ 5 τ 的时间, 可以认为过渡过程结束, 进入新的稳态。

单选题

设置

关于一阶电路、直流激励作用下的零状态响应，叙述正确的是：

A 电路中的电压、电流初始时均为零；

B 电路中的电压、电流过渡过程结束时均不为零；

C 激励越大，过渡过程越长；

D 响应中的$u_C(t)$或$i_L(t)$逐渐变化为不为零的常数值。

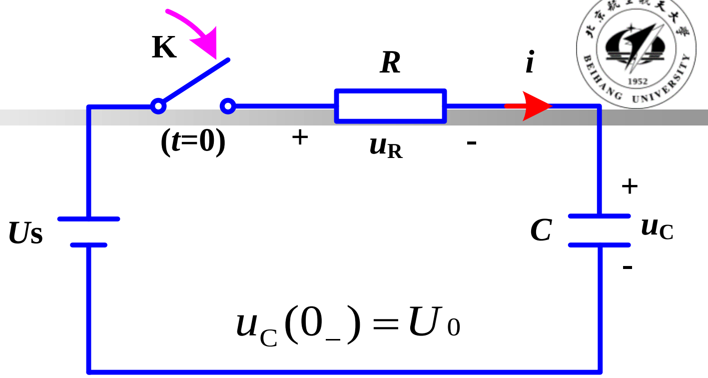
提交

全响应

由外施激励和初始储能共同作用引起的响应。

电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

1. 全响应　　以RC电路为例



K闭合前，电容C已充电 $u_C(0_-)=U_0$

电路微分方程：

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S, & t\geq 0_+ \\ u_C(0_+)=U_0 \end{cases}$$

解答为 $u_C(t)=u_C'+u_C''$

由起始值定A

通解（暂态解） $u_C''=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_C(0_-)=U_0$

特解（稳态解） $u_C'=U_S$

$u_C(0_+)=A+U_S=U_0$

$\tau=RC$

$\therefore A=U_0-U_S$

$$u_C=U_S+Ae^{-\frac{t}{\tau}}=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad t\geq 0$$

7.4 一阶电路的全响应

$$u_C = U_S + A e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

强制分量

稳态响应

非齐次方程的特解

自由分量

暂态响应

齐次方程的通解

全响应= 稳态响应 + 暂态响应

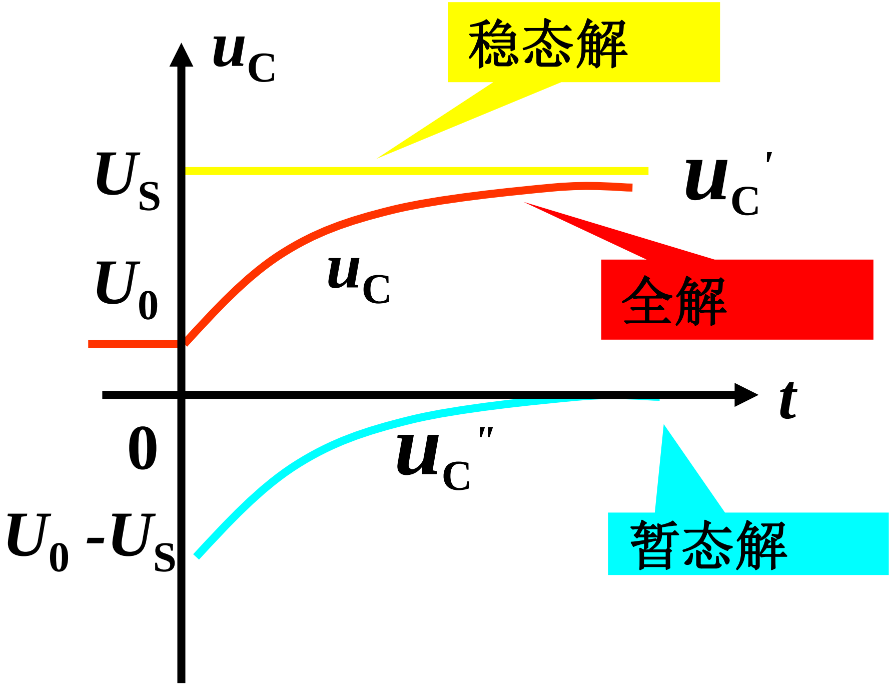
2. 全响应的两种分解方式

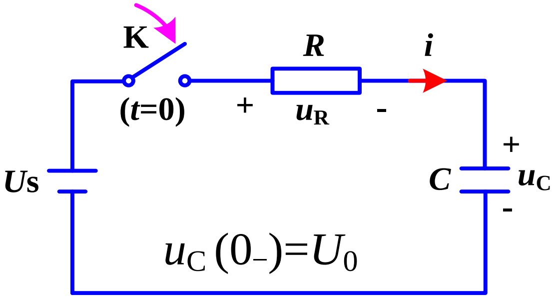
（1） 着眼于电路的两种工作状态

$$u_C = U_S + A e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

全响应=强制分量(稳态响应)+自由分量(暂态响应)

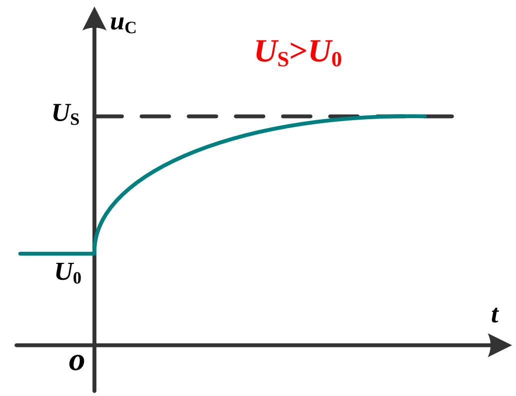
物理概念清晰

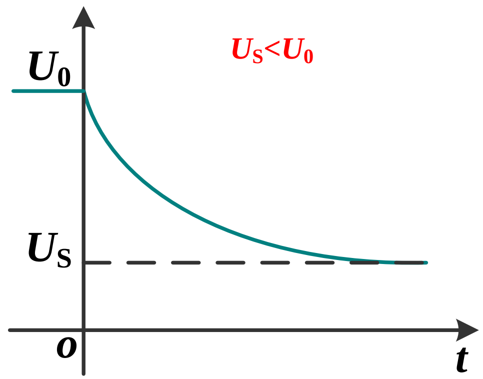


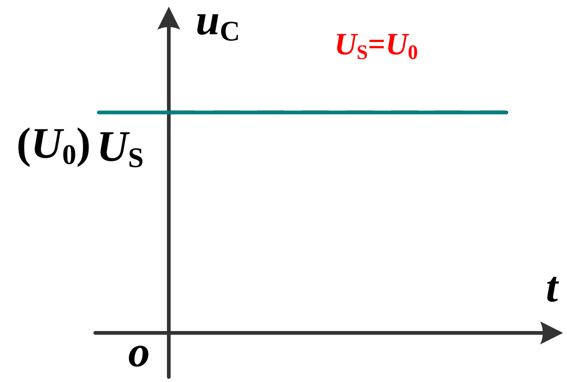


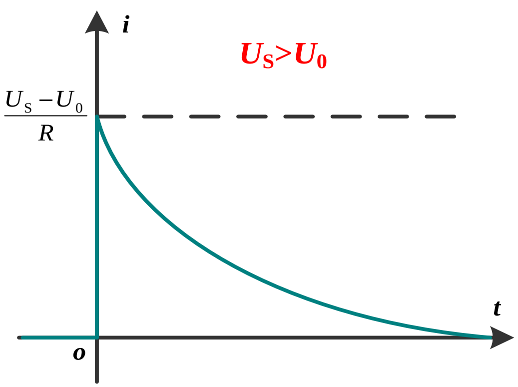
$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

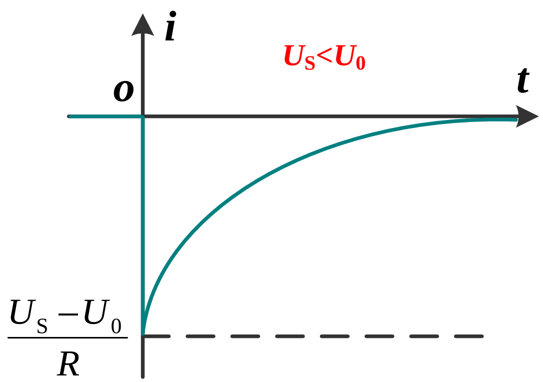
$$i = \frac{U_S - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

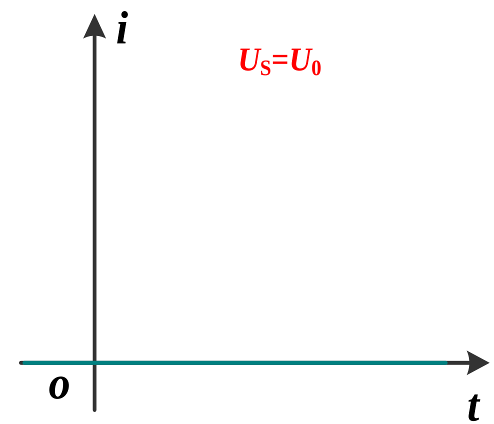










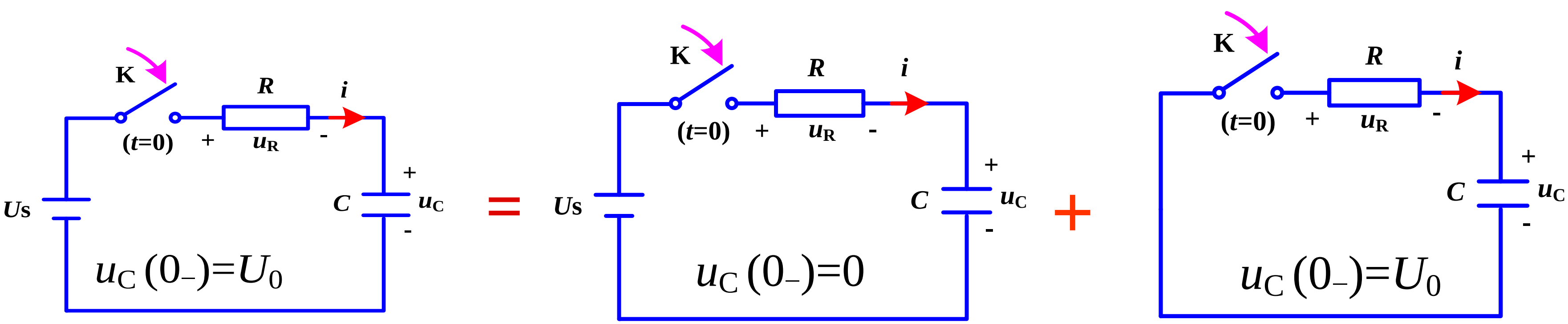


(2) 着眼于因果关系　　便于叠加计算

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

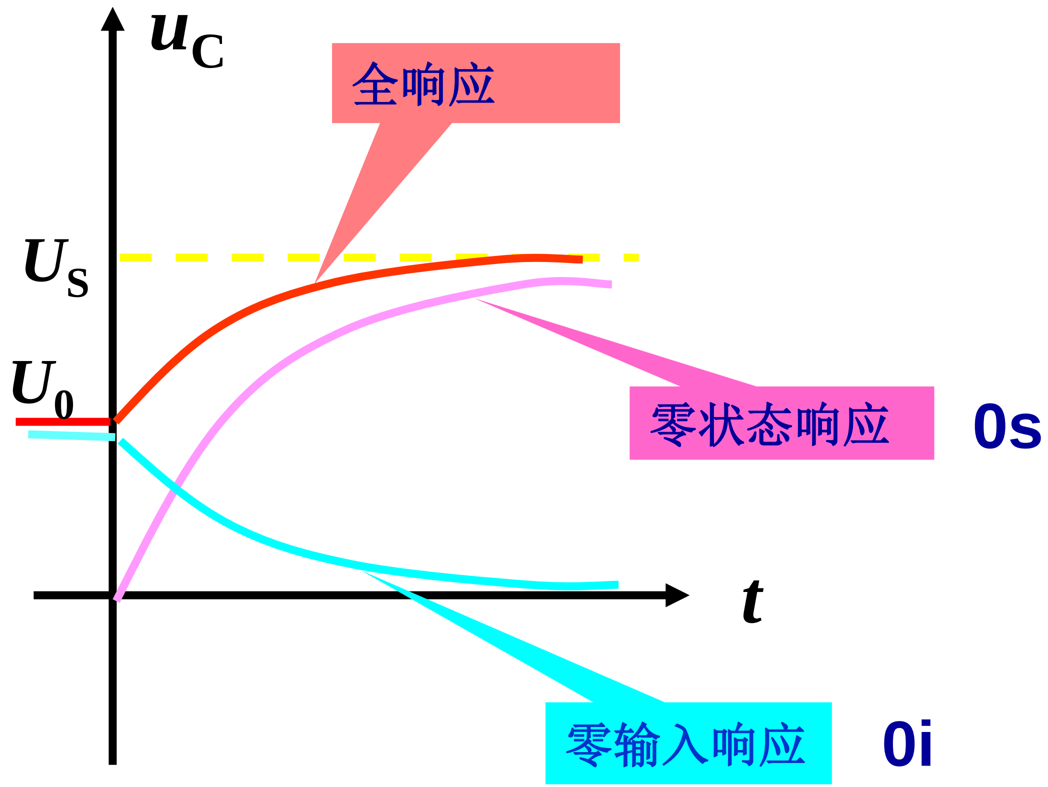
零状态响应　　零输入响应

全响应＝零状态响应 ＋ 零输入响应



$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

零状态响应　　零输入响应



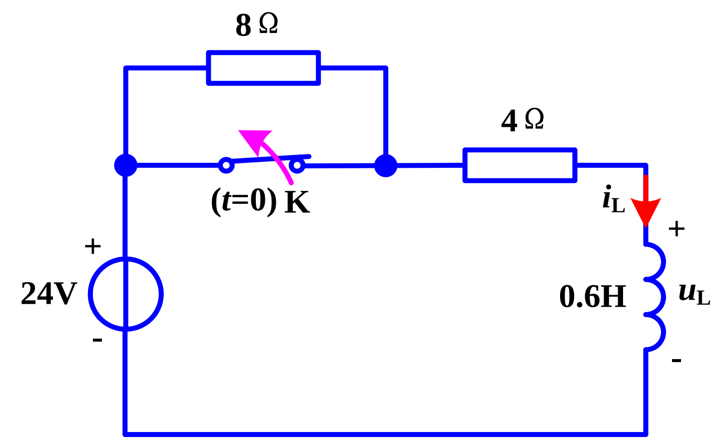
7.4 一阶电路的全响应

线性动态电路的叠加定理

- 线性动态电路的全响应是来自于独立电源的输入和来自初始状态的输入分别作用时产生的响应代数和，即就是全响应是零输入响应和零状态响应的叠加。
- 注意：这里独立电源和动态元件初始状态在电路计算中可以任意组合成组，但是在计算中每个输入仅使用一次，同时不能够遗漏。

【例】 t=0时，开关K打开，求t>0后的i_L、u_L

解 这是一个*RL*电路全响应问题，有：



$$i_L(0_-)=i_L(0_+)=U_S/R_1=6\,\mathrm{A}$$

$$\tau=L/R=0.6/12=1/20\,\mathrm{s}$$

$$i_L'=\frac{24}{8+4}=\frac{24}{12}=2\,\mathrm{A}$$

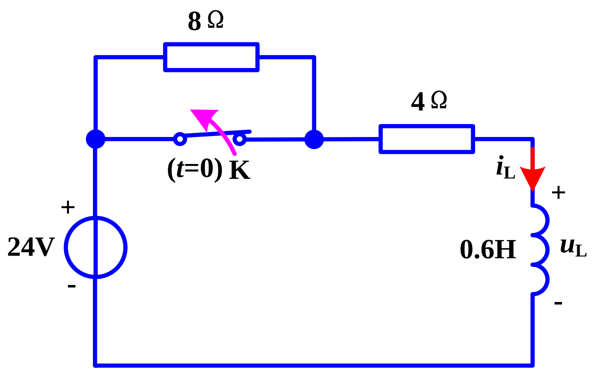
方法1：全响应= 零状态响应 + 零输入响应

零输入响应： $$i_{L0i}(t)=6\mathrm{e}^{-20t}\,\mathrm{A}$$

零状态响应： $$i_{L0S}(t)=2(1-\mathrm{e}^{-20t})\,\mathrm{A}$$

全响应： $$i_L(t)=6\mathrm{e}^{-20t}+2(1-\mathrm{e}^{-20t})=2+4\mathrm{e}^{-20t}\,\mathrm{A}$$

$$u_L(t)=-48\mathrm{e}^{-20t}\,\mathrm{V}$$



方法2：全响应= 稳态响应 + 暂态响应

求出稳态分量： $i'_L = 2\text{ A}$

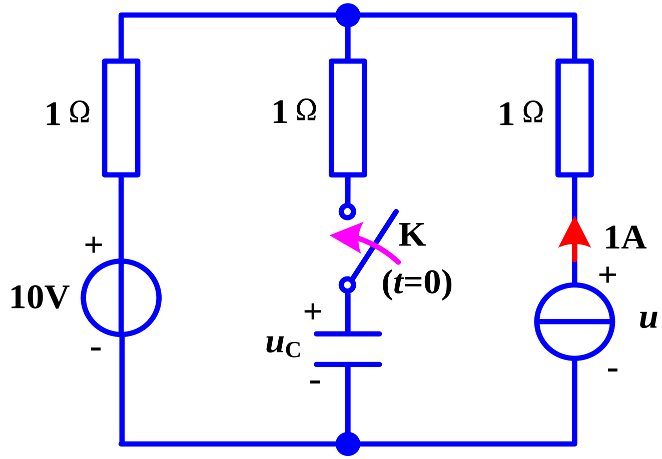
全响应： $i_L(t) = 2 + Ae^{-20t}\text{ A}$

代入初值有： $6 = 2 + A$

$\rightarrow$ $A = 4$

全响应： $i_L(t) = 2 + 4e^{-20t}\text{ A}$

【例】t=0时，开关K闭合，求t>0后的i_C、u_C及电流源两端的电压。 $(u_C(0_-)=1\text{V}, C=1\text{F})$



解 这是一个RC电路全响应问题，有：

稳态分量： $u'_C=10+1=11\text{V}$

$$\tau=RC=(1+1)\times1=2\text{s}$$

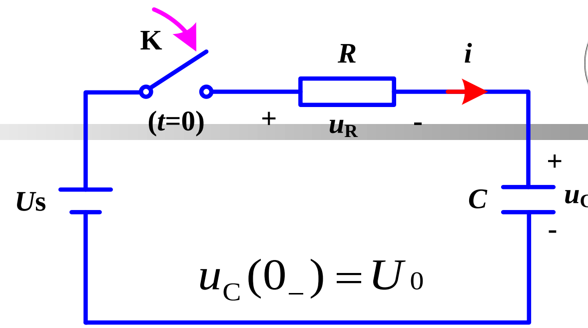
全响应： $u_C(t)=11+A\text{e}^{-0.5t}\ \text{V}$ → $A=-10$

$$u_C(t)=11-10\,\text{e}^{-0.5t}\text{V}$$

$$i_C(t)=\frac{\text{d}u_C}{\text{d}t}=5\text{e}^{-0.5t}\ \text{A}$$

$$u(t)=1\times1+1\times i_C+u_C=12-5\text{e}^{-0.5t}\ \text{V}$$

3. 三要素法分析一阶电路



$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S,\ t\ge 0_+ \\ u_C(0_+)=U_0 \end{cases}$$

非齐次方程特解

齐次方程通解

解的形式为： $u_C(t)=u'_C+u''_C=u'_C+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

当$t=0_+$时， $u(0_+)=u'(0_+)+A$

$A=u(0_+)-u'(0_+)$

$$u_C(t)=u'_C(t)+[u_C(0_+)-u'_C(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$f(t)=f'(t)+[f(0_+)-f'(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f'(t)$ → 微分方程的特解 ← 要素1

$f'(0_+)$ → 特解t=0+时刻的值

$f(0_+)$ → 初始值 ← 要素2

τ → 时间常数 ← 要素3

若激励为直流，特解为稳态响应，且为常量，即为终值。则有

$$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

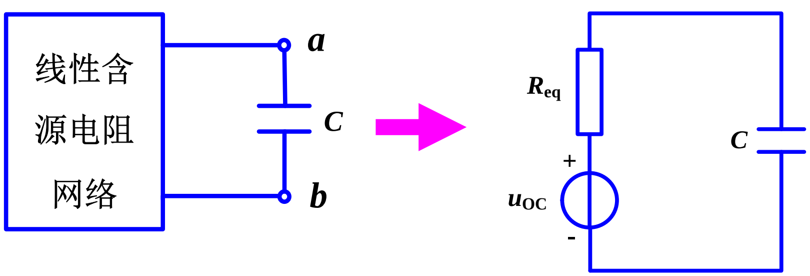
4. 三要素法求解方法

直流激励

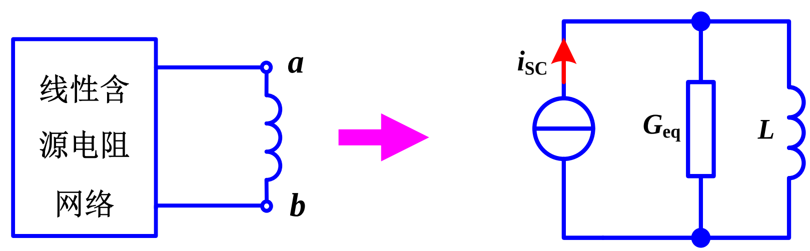
$$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

三要素

- $f(\infty)$ 稳态解 → 用t→∞的稳态电路求解
- $f(0_+)$ 初值 → 换路定理、0_+等效电路求解
- τ 时间常数



$$\tau=R_{\mathrm{eq}}C$$



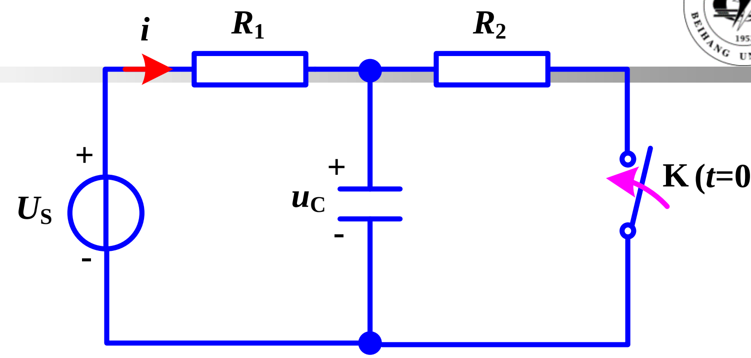
$$\tau=\frac{L}{R_{\mathrm{eq}}}=G_{\mathrm{eq}}L$$

分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题

【例】求$t>0$时，求：

$$u_C(t), u_{C0i}, u_{C0S}, u_C', u_C''$$

$$i(t), i_{0i}, i_{0S}, i', i''$$



解　先求$u_C(t), u_C', u_C''$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_S$$

$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S$$

$$\tau = R_{eq} C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

全响应

$$u_C(t)=u_C(\infty)+\left[u_C(0_+)-u_C(\infty)\right]\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=\frac{R_2U_S}{R_1+R_2}+\left[U_S-\frac{R_2U_S}{R_1+R_2}\right]\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}$$

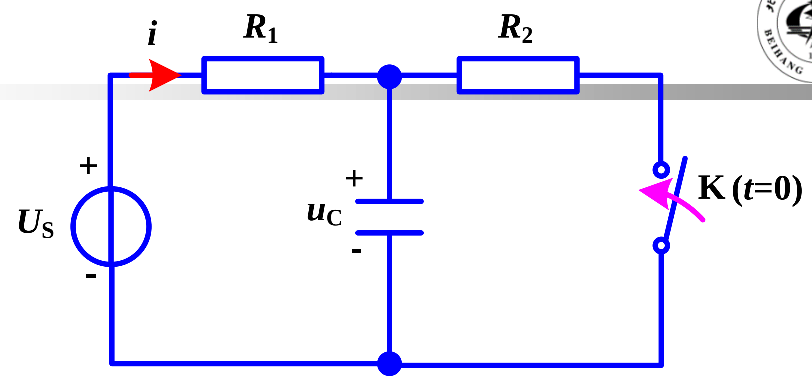
稳态响应

$$u_C{}'=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_S$$

暂态响应

$$u_C{}''=\left(U_S-\frac{R_2U_S}{R_1+R_2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}$$

求$i(t), i', i''$



$$i(\infty)=\frac{U_S}{R_1+R_2}$$

$$i(0_+)=\frac{U_S-u_C(0_+)}{R_1}=\frac{U_S-U_S}{R_1}=0$$

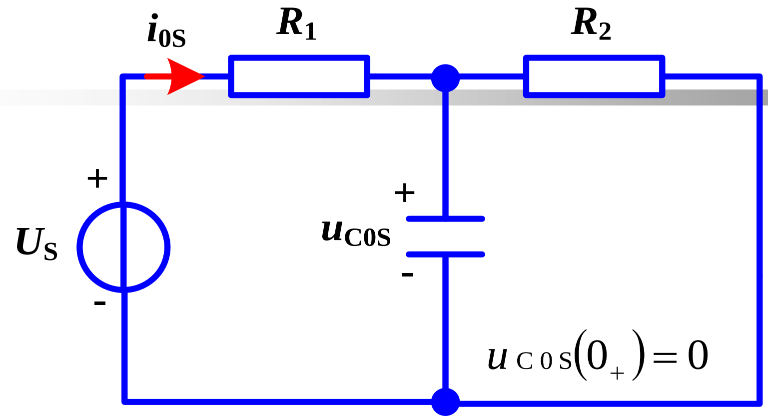
全响应 $$i(t)=\frac{U_S}{R_1+R_2}+\left(0-\frac{U_S}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=\frac{U_S}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

稳态响应 $$i'=\frac{U_S}{R_1+R_2}$$

暂态响应 $$i''=-\frac{U_S}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

求u_{C0S}, i_{0S}



$$u_{C0S}(0_+) = 0$$

$$u_{C0S}(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S$$

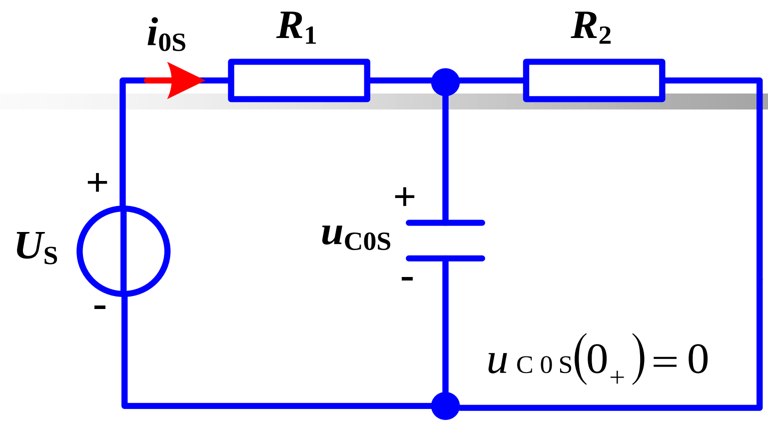
$$u_{C0S}(t) = \frac{R_2 U_S}{R_1 + R_2} + \left(0 - \frac{R_2 U_S}{R_1 + R_2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= \frac{R_2 U_S}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

与零状态响应经典分析方法结论一致

注意：求储能元件的零状态响应，可以直接在全响应中令初始条件为零。

求u_{C0S}, i_{0S}



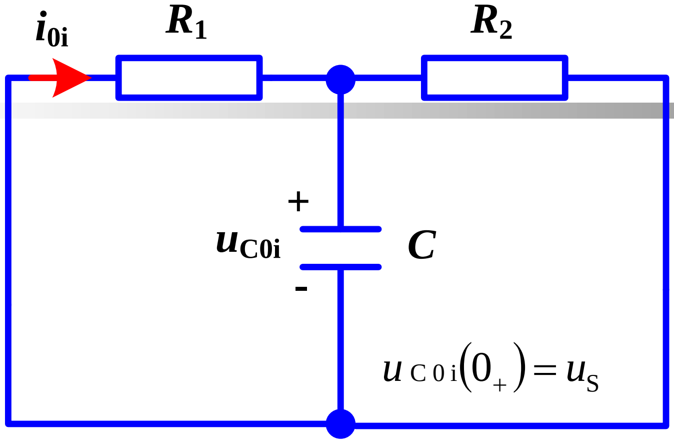
$$i_{0S}(\infty)=\frac{U_S}{R_1+R_2}$$

$$i_{0S}(0_+)=\frac{U_S-U_{C0S}(0_+)}{R_1}=\frac{U_S-0}{R_1}=\frac{U_S}{R_1}$$

$$i_{0S}(t)=\frac{U_S}{R_1+R_2}+\left(\frac{U_S}{R_1}-\frac{U_S}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

注意：零状态是储能元件的初始储能为零的状态，并非该电路所有参量初始条件都为零。

求u_{C0i}, i_{0i}



$$u_{C0i}(0_+) = U_S$$

$$u_{C0i}(\infty) = 0$$

$$u_{C0i}(t) = 0 + (U_S - 0)e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

与零输入响应
经典分析方法
结论一致

$$i_{0i}(0_+) = -\frac{U_S}{R_1}$$

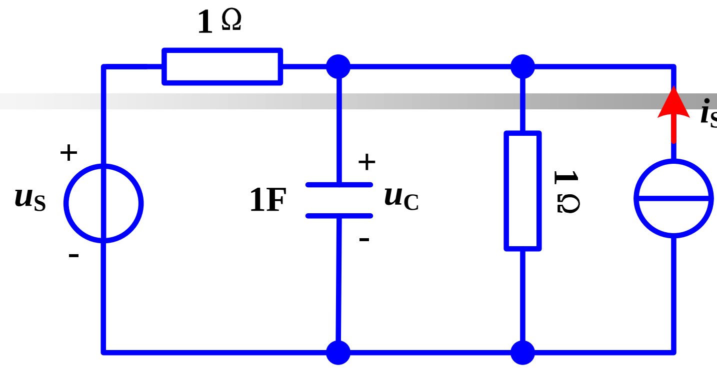
$$i_{0i}(\infty) = 0$$

$$i_{0i}(t) = 0 + \left(-\frac{U_S}{R_1} - 0\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{U_S}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

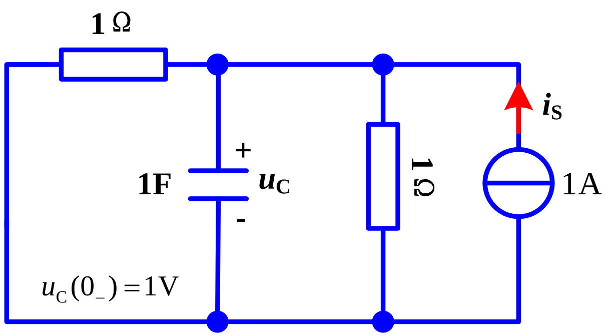
【例】已知$u_C(0_-)=1\text{V}$, $t>0$时，

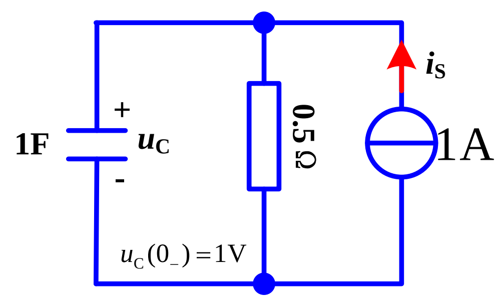
$u_S=2e^{-t}\text{V}, i_S=1\text{A}$,求：

$u_C(t)$, $u_{C0s}(t)$, $u_{C0i}(t)$。



解 只有电流源独立作用时，电容器具有初始电压，



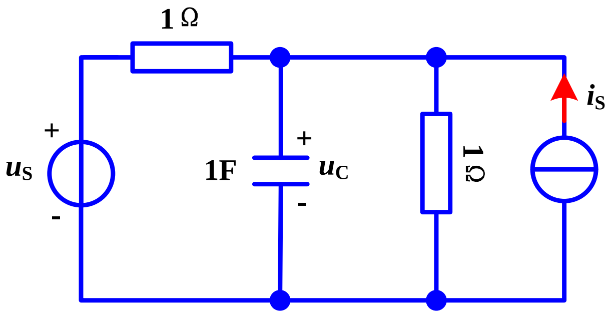


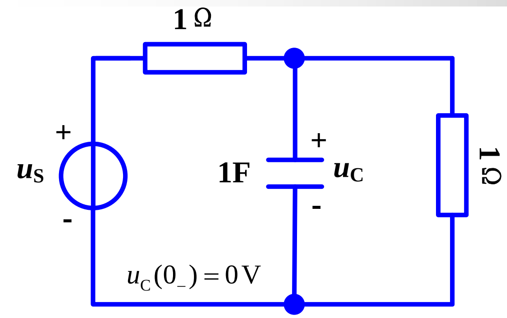
$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=1\text{V}, i_S=1\text{A}$$

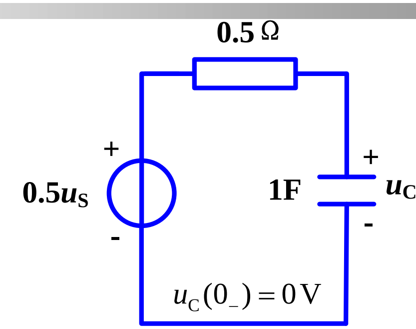
$$u_C(\infty)=0.5\text{V}, \tau=0.5\text{s}$$

$$u_C(t)=0.5+(1-0.5)e^{-2t}=0.5+0.5e^{-2t}(\text{V}), t>0$$

只有电压源独立作用时，电容器初始电压为0，







$$u_S(t)=2\mathrm{e}^{-t},\ u_C(0_+)=0$$

$$u_C+0.5\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-t}$$

$$u_C(t)=u_C'+u_C''=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$$

$$u_C'=A_1\mathrm{e}^{-t}$$

$$u_C'=2\mathrm{e}^{-t}$$

$$u_C(t)=2\mathrm{e}^{-t}+(0-2\mathrm{e}^{0})\mathrm{e}^{-2t}$$
$$=2\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t}\,(\mathrm{V}),\quad t>0$$

$\therefore$ 共同作用下

$$u_C(t)=0.5+2\mathrm{e}^{-t}-1.5\mathrm{e}^{-2t}\,(\mathrm{V}),\ t>0$$

$$\begin{cases} u_{C0S}(t)=0.5+2\mathrm{e}^{-t}-2.5\mathrm{e}^{-2t}\,(\mathrm{V}) \\ u_{C0i}(t)=\mathrm{e}^{-2t}\,(\mathrm{V}) \end{cases}$$

<table>
<tr><td>零输入响应</td><td>无外加激励，仅由储能元件所储存的初始能量</td><td>$\begin{cases} u_S = 0或i_S = 0 \\ u_C(0\_) \neq 0或i_L(0\_) \neq 0 \end{cases}$</td><td>$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$</td></tr>
<tr><td>零状态响应</td><td>零初始储能，仅由施加于电路的激励</td><td>$\begin{cases} u_S \neq 0或i_S \neq 0 \\ u_C(0\_) = 0或i_L(0\_) = 0 \end{cases}$</td><td>$i_L = \frac{U_S}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$
$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">全响应</td><td rowspan="2">由外施激励和初始储能共同作用</td><td colspan="2">$\begin{cases} u_S \neq 0或i_S \neq 0 \\ u_C(0\_) \neq 0或i_L(0\_) \neq 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">非直流激励：$f(t) = f'(t) + [f(0_+) - f'(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$
直流激励：$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$</td></tr>
</table>

多选题

设置

对于直流激励作用下的一阶电路，下列说法正确的有：

A 由零输入响应和零状态响应，可以得到全响应；

B 由初值、终值和时间常数，可以得到全响应；

C 由特解、初值和时间常数，可以得到全响应；

D 由全响应中可分解出零输入响应。

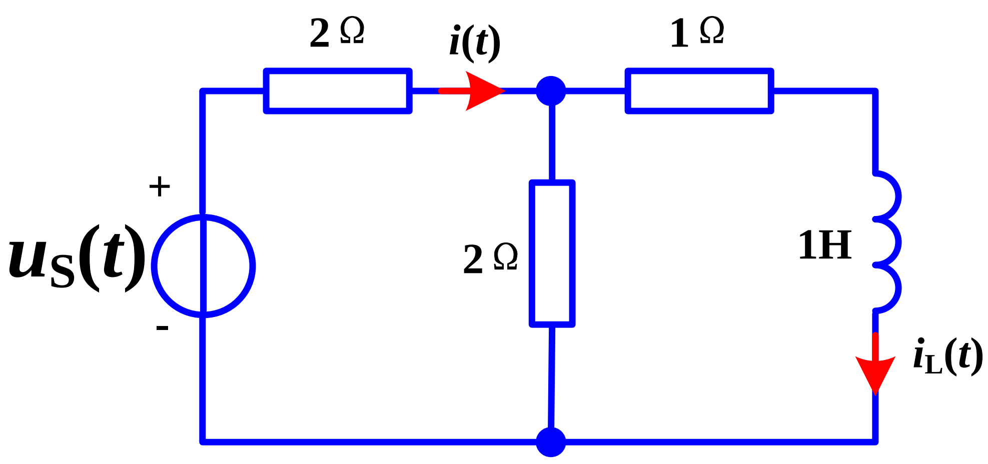
提交

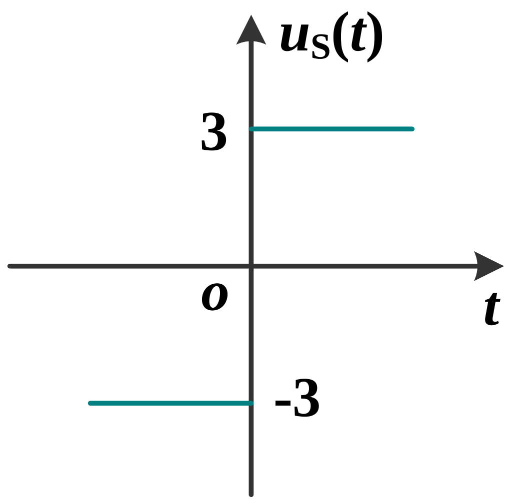
作业

- 7-10【RC电路，零状态】
- 7-14【RL电路，零状态】
- 7-16【RL，全响应】
- 7-19【RC，含受控源，全响应】

- 第七章补充题1及题2

【补充题1】已知t<0时电路已经稳定，求t>0_+时$i_L(t)$、$i_{L0i}(t)$、$i_{L0S}(t)$，$i\ (t)$、$i_{0i}\ (t)$、$i_{0S}\ (t)$，并绘出$i_L(t)$和$i\ (t)$动态曲线。





【补充题2】已知$u_C(0\text{-})=1\text{V}$, $i_S(t)=\begin{cases}0, t<0\\ 1\text{A}, t>0\end{cases}$

求 $i(t), i'(t), i''(t), i_{0i}(t), i_{0S}(t)$