5. 隐函数和参数方程的求导

一、隐函数的导数

定义1 若方程$F(x,y)=0$，对$\forall x\in I$，总存在唯一的 y使得方程成立，则称该方程确定了一个隐函数.

问题: 隐函数如何求导?

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

例1 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$所确定的隐函数 y的导数 $\frac{dy}{dx}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对x求导,

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x + e^y}$, 由原方程知 $x = 0, y = 0$,

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

二、由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定 y 与 x 间的函数关系，称此为由参数方程所确定的函数.

例如 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases} \Longrightarrow t = \dfrac{x}{2}$ 消去参数 t

$$\therefore y = t^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} \qquad \therefore y' = \frac{1}{2}x$$

参数方程求导数

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$\therefore\ y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$

再设函数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$都可导, 且$\varphi(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \boxed{\frac{dt}{dx}} = \frac{dy}{dt} \cdot \boxed{\frac{1}{\frac{dx}{dt}}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

若函数$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$二阶可导,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}\frac{dt}{dx}$$

$$= \boxed{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$

例1 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

解
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}(-\tan t)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

三、小结

隐函数求导法则：直接对方程两边求导

参数方程求导：实质上是利用复合函数求导法则

作业 习题3.5 1(2小题),2(2小题)