第十五章 杆与杆系分析的计算机方法

题号 页码

（ 也可利用左侧题号书签直接查找题目与解）

15-1 试建立桁架单元在局部坐标系中的刚度矩阵。

解：在线弹性范围内，设在局部坐标系中杆单元的刚度方程为

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{kd} \tag{a}$$

其中，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{f}$ 和 k 分别为杆单元的端点位移矢量（图 15-1a）、端点力矢量（图 15-1b）及杆单元刚度矩阵，$\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 的表达式分别为

$$\boldsymbol{d}=(u_i \;\; v_i \;\; u_j \;\; v_j)^{\mathrm{T}} \tag{b}$$

$$\boldsymbol{f}=(F_{xi} \;\; F_{yi} \;\; F_{xj} \;\; F_{yj})^{\mathrm{T}} \tag{c}$$

由于桁架杆单元为二力杆，故有 $F_{yi}=F_{yj}=0$，式（c）便成为

$$\boldsymbol{f}=(F_{xi} \;\; 0 \;\; F_{xj} \;\; 0)^{\mathrm{T}} \tag{c′}$$

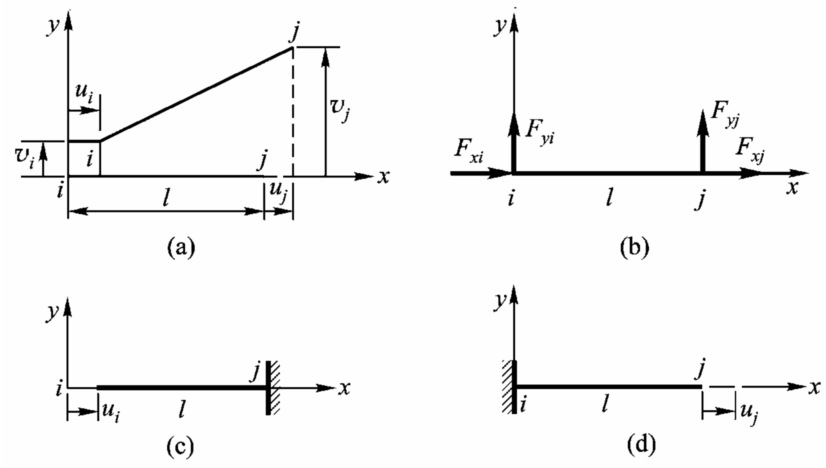


图 15-1

下面推导杆单元刚度矩阵 k。

假设单元的 j 端固定，使 i 端产生位移 u_i（图 15-1c），从而有

$$F'_{xi}=\frac{EA}{l}u_i$$

由平衡条件可得

$$F'_{xj}=-F'_{xi}=-\frac{EA}{l}u_i$$

假设单元的 i 端固定，使 j 端产生位移 u_j（图 15-1d），从而有

$$F''_{xj}=\frac{EA}{l}u_j$$

由平衡条件可得

$$F''_{xi}=-F''_{xj}=-\frac{EA}{l}u_j$$

将以上两组端点力叠加，得

$$\left.\begin{aligned}F_{xi}&=F'_{xi}+F''_{xi}=\frac{EA}{l}u_i-\frac{EA}{l}u_j\\F_{xj}&=F'_{xj}+F''_{xj}=-\frac{EA}{l}u_i+\frac{EA}{l}u_j\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

将式（d）写成矩阵形式并扩大为包括所有节点位移的形式

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}F_{xi}\\0\\F_{xj}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l}&0&-\frac{EA}{l}&0\\0&0&0&0\\-\frac{EA}{l}&0&\frac{EA}{l}&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\end{bmatrix}$$

$$=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\end{bmatrix}\tag{e}$$

对比式（a）与式（e），得到桁架单元在局部坐标系中的刚度矩阵为

$$\boldsymbol{k}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

15-2 试建立桁架单元在整体坐标系中的刚度矩阵。

解：在整体坐标系中，设杆单元的方位角为α（见图 15-2a），那么在局部坐标系中的端点位移与整体坐标系中的端点位移的关系为

$$\left.\begin{aligned}u_i&=\bar{u}_i\cos\alpha+\bar{v}_i\sin\alpha\\v_i&=-\bar{u}_i\sin\alpha+\bar{v}_i\cos\alpha\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

$$\left.\begin{aligned}u_j&=\bar{u}_j\cos\alpha+\bar{v}_j\sin\alpha\\v_j&=-\bar{u}_j\sin\alpha+\bar{v}_j\cos\alpha\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

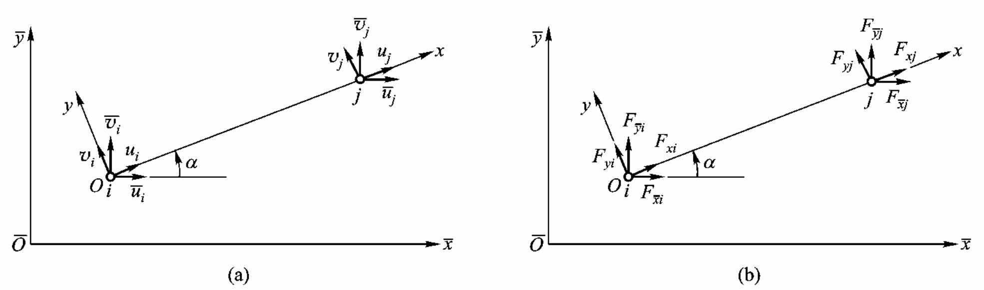


图 15-2

整体坐标系中的端点位移矢量为

$$\bar{\boldsymbol{d}}=(\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j)^{\mathrm{T}} \tag{c}$$

将局部坐标系中的端点位移矢量

$$\boldsymbol{d}=(u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j)^{\mathrm{T}} \tag{d}$$

写成列阵形式，并注意到式（a）和（b），可得

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{e}$$

则两种端点位移矢量之间的关系可简记为

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{d}} \tag{f}$$

其中，$\boldsymbol{T}$ 称为转换矩阵。

由图 14-2b 与图 14-2a 的相似性不难找到，两种端点力矢量之间的关系为

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{f}} \tag{g}$$

其中，

$$f=(F_{xi} \quad F_{yi} \quad F_{xj} \quad F_{yj})^{\mathrm{T}} \qquad \text{(局部)}$$

$$\bar{f}=(F_{\bar{x}i} \quad F_{\bar{y}i} \quad F_{\bar{x}j} \quad F_{\bar{y}j})^{\mathrm{T}} \qquad \text{(整体)}$$

式（g）中的 $\boldsymbol{T}$ 由式（e）给出。

将式（g）和(f)代入式 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{k}\boldsymbol{d}$ 中，有

$$\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{k}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{d}} \tag{h}$$

两边同乘以逆矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 后，得

$$\bar{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{k}\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{d}} \tag{i}$$

注意到本题的逆矩阵与转置矩阵是相等的，即

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{j}$$

式（i）还可改写成

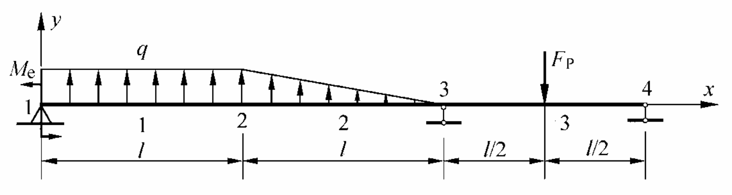
$$\overline{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{T}\overline{\boldsymbol{d}}=\overline{\boldsymbol{k}}\overline{\boldsymbol{d}} \tag{k}$$

这表明，在整体坐标系中，桁架的单元刚度矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{T} \tag{l}$$

其中，$\boldsymbol{T}$ 仍由式（e）给出。

15-3 图示连续梁，同时承受集中载荷 F_{P}、分布载荷 q 与矩为 M_{e} 的集中力偶作用。试写出节点载荷矢量。已知 $F_{\mathrm{P}}=6\ \mathrm{kN}$，$q=4\ \mathrm{N/mm}$，$M_{\mathrm{e}}=4\times10^{6}\ \mathrm{N\cdot mm}$，$l=1\ \mathrm{m}$。



题 15-3 图

解：本题求解可以分三步来完成。

首先，求出图 15-3a 所示简支梁两端的转角 θ_1 和 θ_3。

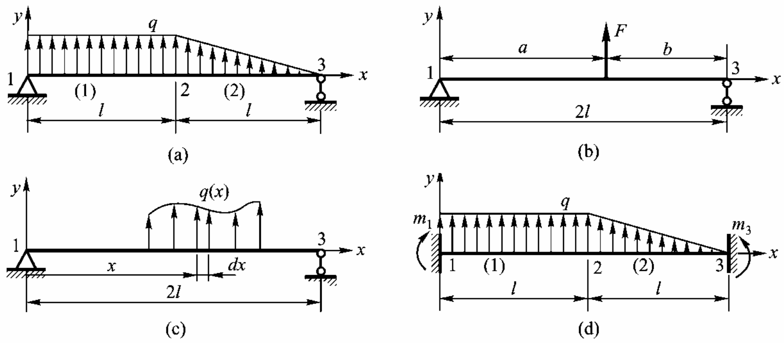


图 15-3

为此，可先求出图 15-3b 所示简支梁两端的转角，它们分别为

$$\theta_1=\frac{Fb(4l^2-b^2)}{12lEI} \tag{a}$$

$$\theta_3=-\frac{Fa(4l^2-a^2)}{12lEI} \tag{b}$$

对于分布载荷情况（见图 15-3c），两端的转角分别为

$$\theta_1=\frac{1}{12lEI}\int_0^{2l}(2l-x)(4lx-x^2)q(x)\mathrm{d}x \tag{c}$$

$$\theta_3 = -\frac{1}{12lEI}\int_0^{2l} x(4l^2 - x^2)q(x)\mathrm{d}x \tag{d}$$

注意到图 **15-3a** 中两段的分布载荷依次为

$$q(x) = \begin{cases} q & (0 < x \le l) \\ \dfrac{q}{l}(2l - x) & (l \le x \le 2l) \end{cases} \tag{e}$$

于是，将式（e）分别代入式（c）和(d)，即可求得该梁两端的转角分别为

$$\theta_1 = \frac{1}{12lEI}\left[\int_0^l (2l-x)(4lx - x^2)q\mathrm{d}x + \int_l^{2l}(2l-x)(4lx-x^2)\frac{q(2l-x)}{l}\mathrm{d}x\right] = \frac{203ql^3}{720EI}(\circlearrowleft) \tag{f}$$

$$\theta_3 = -\frac{1}{12lEI}\left[\int_0^l x(4l^2 - x^2)q\mathrm{d}x + \int_l^{2l} x(4l^2 - x^2)\frac{q(2l-x)}{l}\mathrm{d}x\right] = -\frac{187ql^3}{720EI} \quad (\circlearrowright) \tag{g}$$

其次，求出图 **15-3d** 所示梁两固支端的约束力偶矩。

由变形协调条件

$$\theta_1 = 0$$

$$\theta_3 = 0$$

得

$$\begin{cases} \dfrac{203ql^3}{720EI} - \dfrac{m_1(2l)}{3EI} - \dfrac{m_3(2l)}{6EI} = 0 \\ -\dfrac{187ql^3}{720EI} + \dfrac{m_1(2l)}{6EI} + \dfrac{m_3(2l)}{3EI} = 0 \end{cases}$$

解此联立方程，得到

$$m_1 = \frac{73ql^2}{240}, \quad m_3 = \frac{57ql^2}{240}$$

最后，求题图所示连续梁的节点载荷矢量。

根据上列结果、教材（Ⅱ）表 **15-1** 及书中规定的符号，本题有

$$m_1^{(1)} = -\frac{73ql^2}{240} = -\frac{73\times4\times10^3\times1^2\,\mathrm{N\bullet m}}{240} = -1217\mathrm{N\bullet m}$$

$$m_3^{(2)} = \frac{57ql^2}{240} = \frac{57\times4\times10^3\times1^2\,\mathrm{N\bullet m}}{240} = 950\mathrm{N\bullet m}$$

$$m_3^{(3)} = -m_4^{(3)} = \frac{F_{\mathrm{p}}l}{8} = \frac{6\times10^3\times1\mathrm{N\bullet m}}{8} = 750\mathrm{N\bullet m}$$

于是，得该连续梁的节点载荷矢量为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} M_{\mathrm{e}}-m_1^{(1)} \\ -m_3^{(2)}-m_3^{(3)} \\ -m_4^{(3)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4000+1217 \\ -950-750 \\ 750 \end{bmatrix}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}=\begin{bmatrix} 5217 \\ -1700 \\ 750 \end{bmatrix}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$