第七章 刚体力学

§7-1. 刚体运动学

什么是刚体?

在力的作用下，大小和形状都保持不变的物体称为刚体。

或在力的作用下，组成物体的所有质点之间的距离始终保持不变的物体称为刚体。

刚体是力学中又一个十分有用的理想模型,是一个特殊的质点系,是劲度系数很大的一类实际物体的抽象。

因此，有关质点系的规律都可用于刚体，而且考虑到刚体的特点，规律的表示还可较一般的质点系有所简化。

一. 刚体运动的分类

1. 平动　　平动演示

刚体运动时，若在刚体内所作的任意一条直线都始终保持和自身平行，这种运动就称为刚体的平动。

2. 绕固定轴转动　　绕固定轴转动演示

刚体内各点都绕同一直线作圆周运动，则这种运动叫刚体转动，该直线称为转轴或轴。如果转轴固定不动，简称定轴转动。如果各个时刻有不同的转轴，则称为瞬轴转动。

3. 平面平行运动　平面平行运动演示

刚体中的任意一点始终在平行于某一固定平面的平面内运动，称为刚体的平面平行运动。

4. 绕固定点转动　刚体绕固定点转动

刚体运动时，只有一点固定不动，整个刚体围绕着通过这点的某一瞬时轴线转动，称为刚体绕固定点转动。

5. 一般运动　刚体一般运动演示

刚体的任意运动。可分为：基点的平动+绕基点的定点转动。

二. 刚体运动的自由度

1.自由度 确定对象运动位置的独立变量的个数，简称为对象运动的自由度.

例如：1个自由质点 ——3个自由度 (x,y,z) (r,θ,φ)

N个自由质点 ——3N个自由度

1个平面运动质点 ——2个自由度

1个曲线运动质点 ——1个自由度

- 物体系运动自由度m,决定于其独立的动力学微分方程组的数目.
- 若运动被限制或被约束,其自由度将减少.多一个约束条件,减少一个自由度.

2. 刚体运动的自由度

平动 ——3个自由度

绕固定轴转动 ——1个自由度

平面平行运动 ——3个自由度

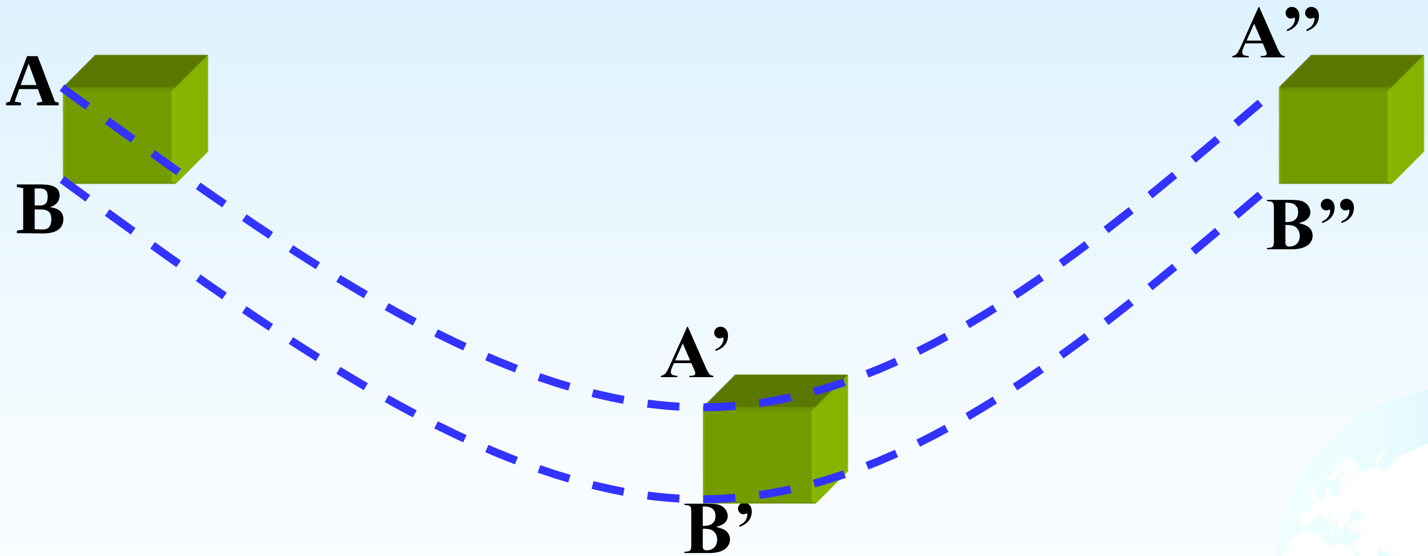
绕固定点转动 ——3个自由度

一般运动 ——6个自由度

三. 刚体的平动

1. 定义

刚体运动时，若在刚体内所作的任意一条直线都始终保持和自身平行，这种运动就称为刚体的平动。



注意：1.刚体上每一点的轨迹不一定是直线。
2.刚体上各点的运动轨迹相同。

2. 刚体平动时的速度与加速度

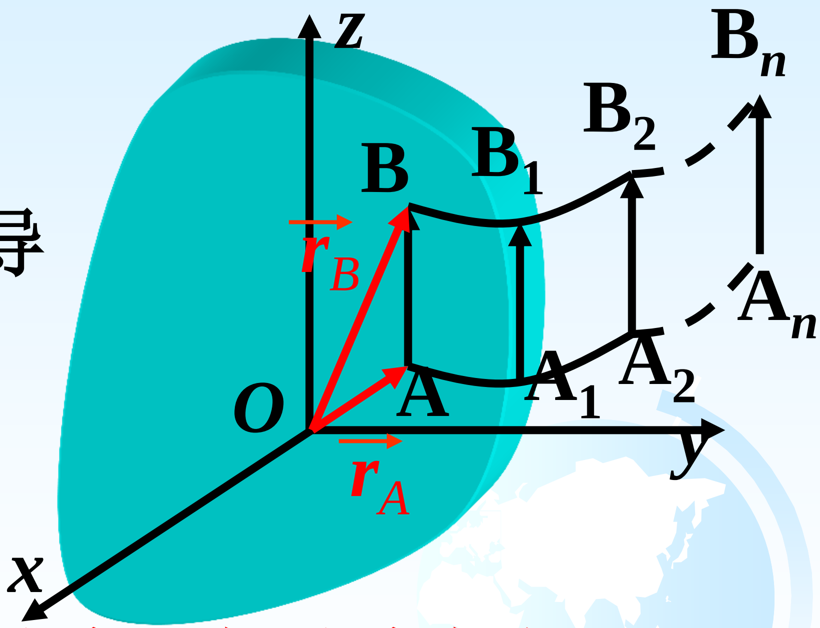
由图所示A、B两点

有 $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$ 求导 $\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \dfrac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}$

$\because \overrightarrow{AB} = \vec{C}$（常矢量）

$\therefore \boxed{\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B}$ 再求导

$\boxed{\dfrac{d\vec{v}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{v}_A}{dt} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B}$

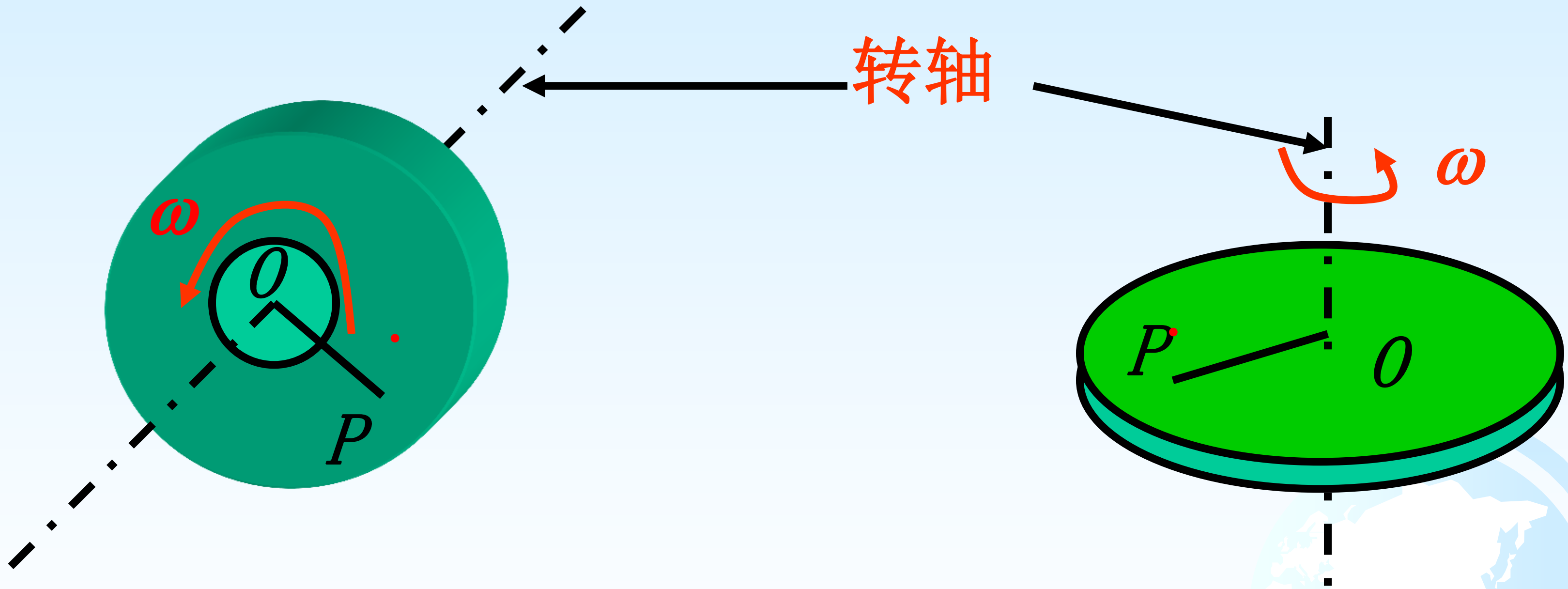


在任意时刻, 平动刚体上各点的速度、加速度都相同。

可以把平动刚体当作质点运动研究. 一般选刚体质心.

四. 刚体绕固定轴转动

1. 定义　刚体内各点都绕同一直线作圆周运动。则这种运动叫刚体绕固定轴转动，简称定轴转动。

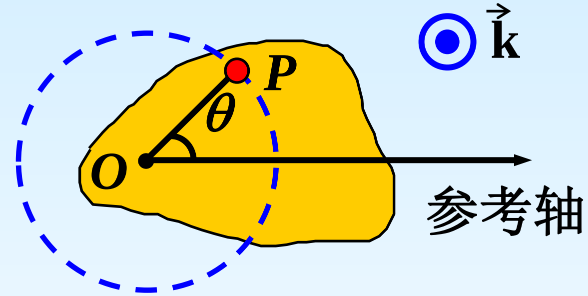


注意：

1. 刚体内各质点的线速度与线加速度一般不同。
2. 刚体内各点的角位移、角速度与角加速度相同。

2. 刚体的角坐标、角速度、角加速度

角坐标：θ— 定轴转动时刚体的位置状态 (标量)



角速度：$\vec{\omega}=\dfrac{d\theta}{dt}\vec{k}=\omega_z\vec{k}$

角加速度：$\vec{\beta}=\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}=\dfrac{d\omega_z}{dt}\vec{k}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k}=\beta_z\vec{k}$

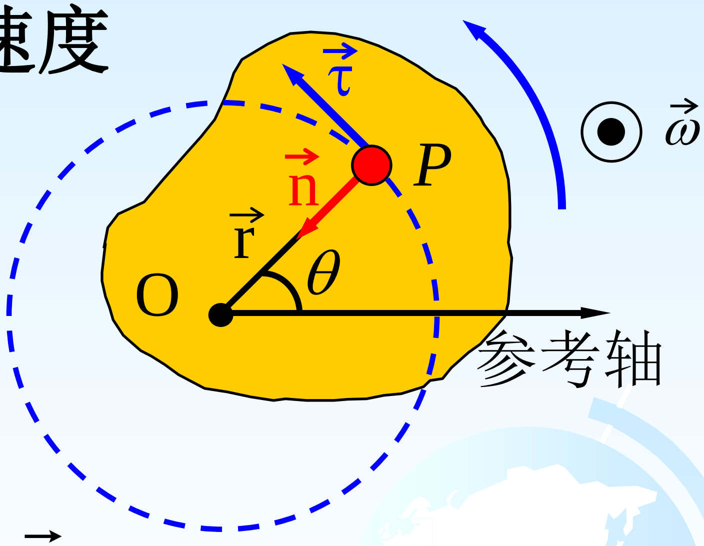
3. θ，ω_z，β_z 之间的关系

微分关系： $\omega_z=\dfrac{d\theta}{dt}$， $\beta_z=\dfrac{d\omega_z}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=\omega_z\dfrac{d\omega_z}{d\theta}$

积分关系： $\omega_z(t)=\omega_z(t_0)+\int_{t_0}^{t}\beta_z dt$

$$\theta(t)=\theta(t_0)+\int_{t_0}^{t}\omega_z dt$$

4. 刚体上任一点的速度、加速度



$\upsilon=\omega r \qquad \upsilon_\tau=\omega_z r$

$$a_\tau=\frac{d\upsilon_\tau}{dt}=r\frac{d\omega_z}{dt}=r\beta_z$$

$$a_n=\omega^2 r$$

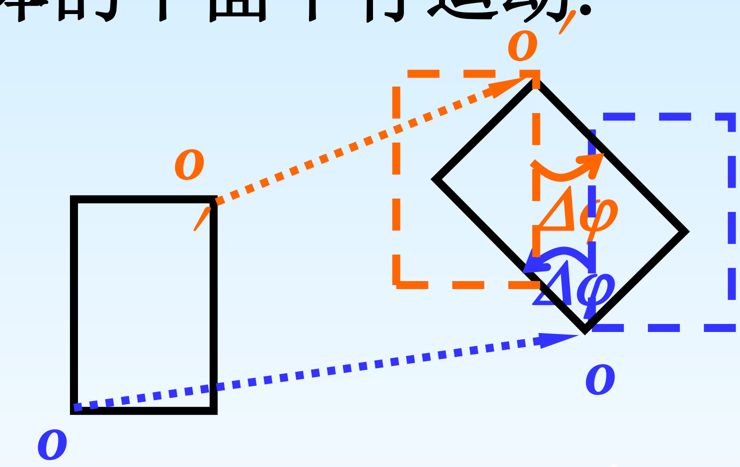
$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r} \qquad \vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

四. 刚体的平面平行运动

1.定义： 刚体中的任意一点始终在平行于某一固定平面的平面内运动, 称为刚体的平面平行运动.

如：直行汽车上的车轮



2.基面、基点、基轴

基面： 选定任意一质点运动的轨道平面为参考平面.

基点： 在基面上选择的一参考点.

基轴： 通过基点并且垂直于基面的直线.

两种分解：基点选取不同，平动可以不同，转动却相同，转动与基点的选取无关。

3.平面平行运动的特点：

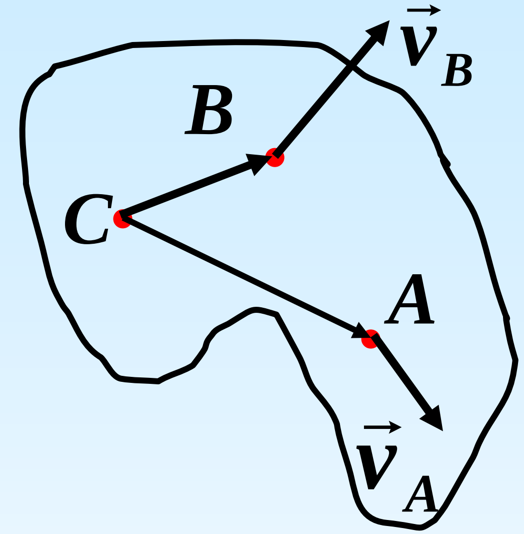
基轴上的各质元的运动状态完全相同.

基点的平动+绕基轴的定轴转动.

4.质元速度表达式： $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ci}$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CA}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CB}$$



5.瞬心：

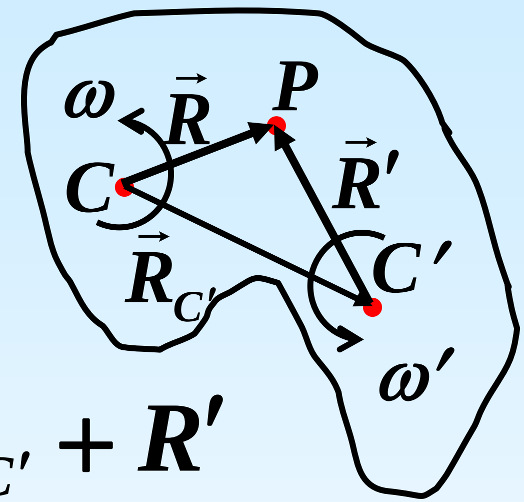
作平面运动的刚体的角速度不为零时，在任一时刻薄片上恒有一点的速度为零，这点为瞬心(转动瞬心).

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ci} = 0$$

注意： 1.瞬心位置可以在刚体之外;一般随时间也在变化.

2.选瞬心为基点，刚体运动学问题可简化.

6.质元角速度与基点选择无关:



选C基点: $$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}$$

选C 基点: $$\vec{v}_P = \vec{v}_{C'} + \vec{\omega}' \times \vec{R}'$$

注意 $$\vec{v}_{C'} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}_{C'} \qquad R = R_{C'} + R'$$

代入 $$\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{v}_{C'} + \vec{\omega}' \times \vec{R}'$$

$$\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (\vec{R} - \vec{R}') + \vec{\omega}' \times \vec{R}'$$

$$\vec{\omega}' \times \vec{R}' - \vec{\omega} \times \vec{R}' = 0 \qquad \vec{\omega}' = \vec{\omega}$$

基面上各点均以同一角速度在旋转.

7.关于瞬心：

刚体作平面平行运动时，基面上必定存在一个特殊点O，其瞬时速度为0，O点称为瞬心。

如果平面平行运动的刚体与约束面的接触点P恰为瞬心，则刚体作纯滚动（无滑动），此时

$$\vec{\mathbf{v}}_P = \vec{\mathbf{v}}_B + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_{BP} = 0$$

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_{BP}$$

纯滚条件

瞬心如何求？

8.标注: 角速度和角加速度是对刚体转动整体描写的物理量，各点都一样。线速度和切向、法向加速度是描写刚体上某点运动的物理量，各点不同。

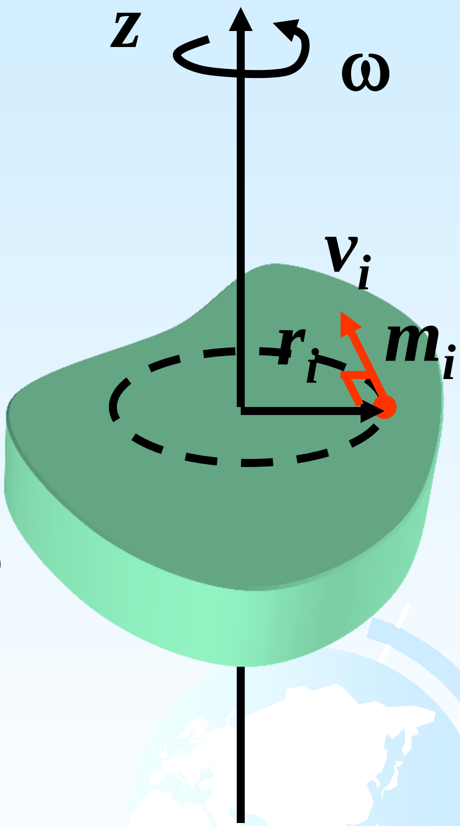
§7-2.定轴转动惯量

一. 刚体对轴的角动量

m_i为刚体中任意一质点

由质点对轴的角动量得 $L_{zi} = r_i m_i v_i$

则刚体对轴的动量矩



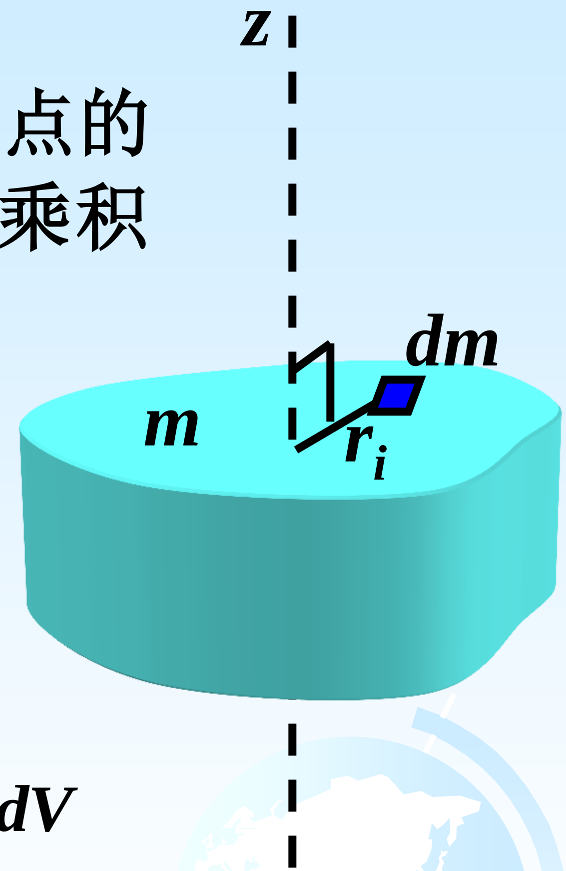
$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i r_i m_i v_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega$$

$$= I_z \omega$$

刚体绕固定轴转动的角动量，等于刚体对该轴的转动惯量与角速度的乘积。

二. 转动惯量的定义

刚体对Z轴的转动惯量，等于刚体上各点的质量与该质点到转轴垂直距离平方的乘积之和。



$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$ 刚体质量分立分布

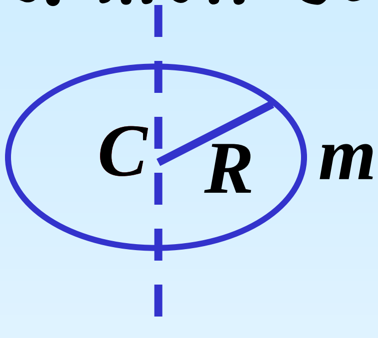
$$I_z = \int_V r^2 dm$$ 刚体质量连续分布

$$I_z = \int r^2 \eta dl \quad I_z = \iint r^2 \sigma ds \quad I_z = \iiint r^2 \rho dV$$

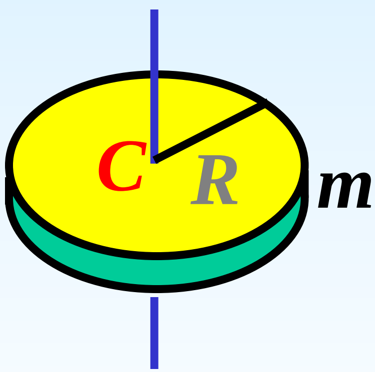
η、σ、ρ分别为刚体质量的线密度、面密度、体密度.

决定*I*大小的三个因素：转轴位置、刚体质量、质量对轴的分布。

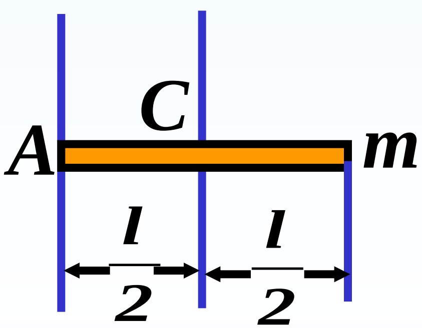
三. 常用的几个I



均匀圆环：$I_c = mR^2$

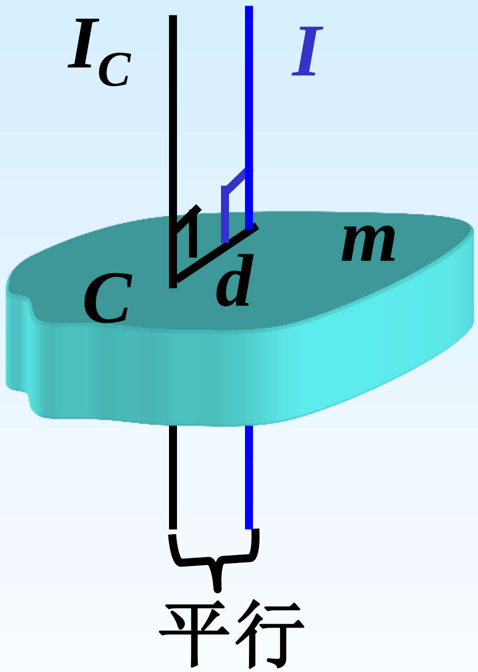


均匀圆盘：$I_c = \dfrac{1}{2}mR^2$



均匀杆：$I_c = \dfrac{1}{12}ml^2$，$I_A = \dfrac{1}{3}ml^2$

四. 计算I的几条规律



1.对同一轴I具有可叠加性

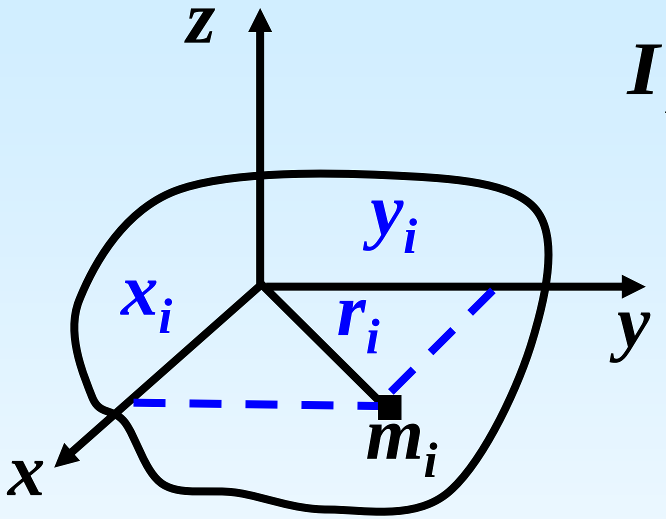
$$I = \sum_i I_i \qquad I_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

2.平行轴定理

$$I = I_c + md^2$$

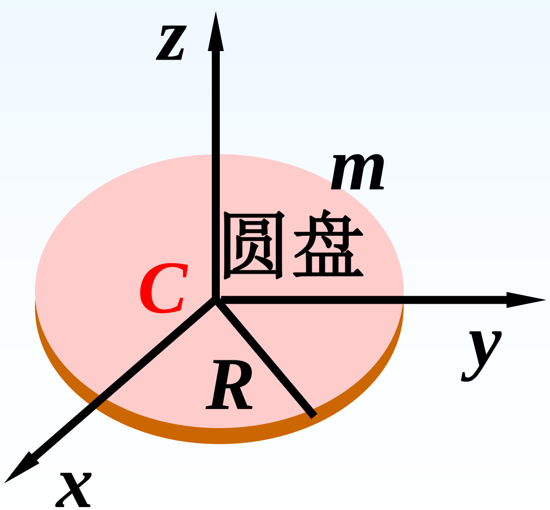
刚体对任意已知轴的转动惯量，等于刚体对通过质心并与该已知轴平行的轴的转动惯量加上刚体的质量与两轴间垂直距离d平方的乘积。

3.对薄平板刚体的正交轴定理



$$I_z=\sum_i m_i r_i^2=\sum_i m_i x_i^2+\sum_i m_i y_i^2$$

即 $\boxed{I_z=I_x+I_y}$



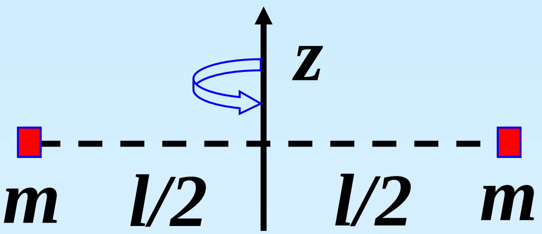
例：已知圆盘 $I_c=\dfrac{1}{2}mR^2$

求对圆盘的一条直径的I_x(或I_y)

由 $\begin{cases} I_z=I_x+I_y \\ I_x=I_y \end{cases}$ 得 $I_x=I_y=\dfrac{1}{4}mR^2$

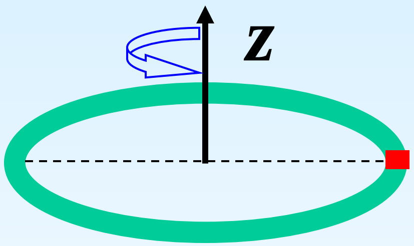
例1: 如图, 已知2质点的m, 求I_z.

解: $I=\sum m_i r_i^2 = 2m(l/2)^2 = ml^2/2$



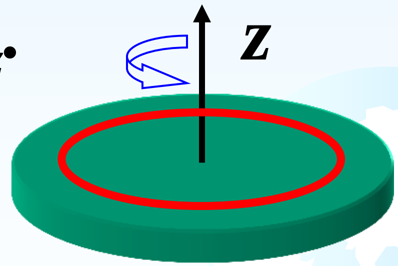
例2：如图, 已知均匀圆环M, R，求I_z.

解: $I=\int_L r^2 dm = R^2\int dm = MR^2$

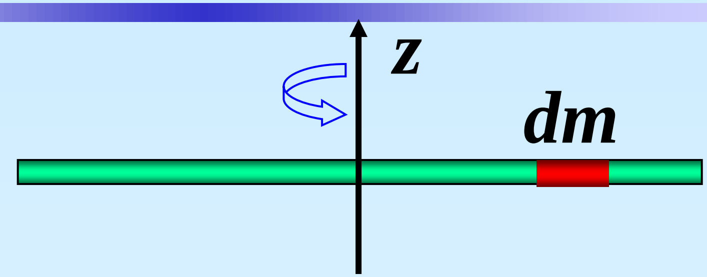


例3：如图, 已知匀质园盘M, R，求I_z.

解: $I=\dfrac{M}{\pi R^2}\int_0^R r^2\, 2\pi r dr = \dfrac{1}{2}MR^2$



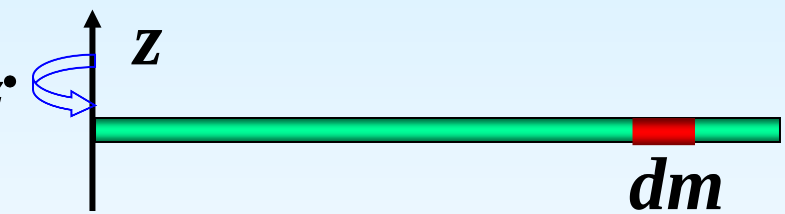
例4: 如图, 已知细棒M, L, 求I_z.



解: $I=\int x^2 dm$

$$=\int_{-L/2}^{L/2} x^2\left(\frac{M}{L}dx\right)=\frac{1}{12}ML^2$$

例5: 如图, 已知细棒M,L, 求I_z.



解: $dm=\frac{M}{L}dx$

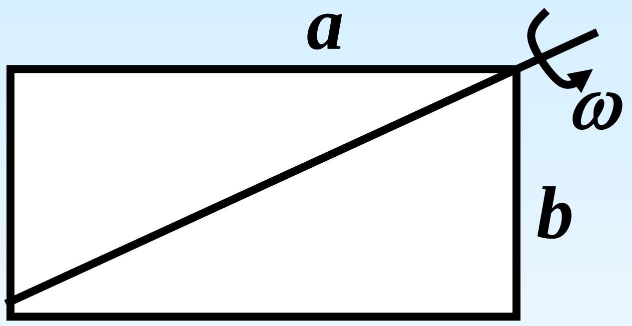
$$I=\int x^2 dm=\frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx=\frac{1}{3}ML^2=\frac{1}{12}ML^2+M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ 推广得平行轴定理: $\boxed{I=I_C+md^2}$

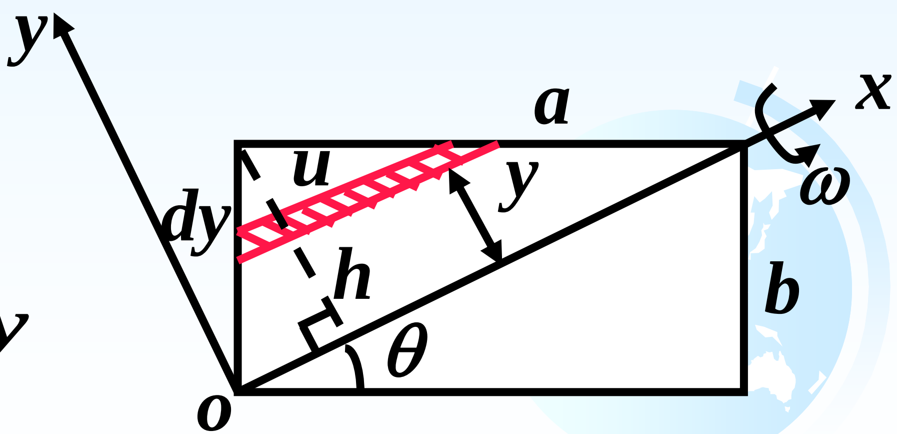
I_C— 对过质心转轴的转动惯量; d —平行轴间距

例6：均匀长方形薄片的边长为a与b，质量为m，求此长方形薄片绕其对角线转动时的转动惯量。

解：取对角线为x轴，在o点和它垂直的直线为y轴，并令t为薄片的厚度，ρ为密度。



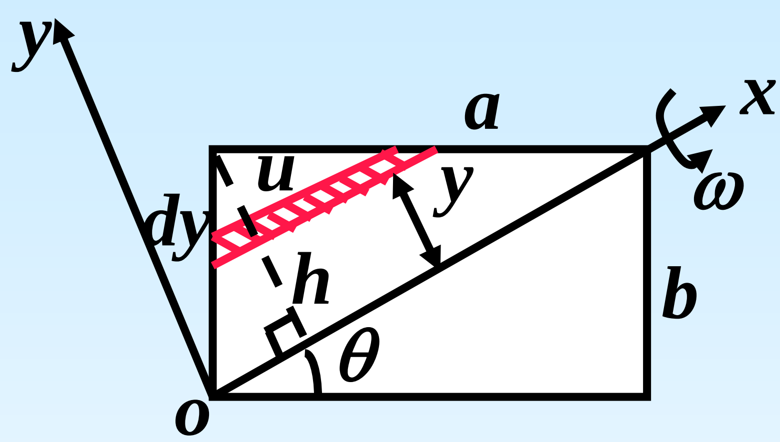
取一长方形窄条，长为u，宽为dy，则薄片绕对角线(x轴)转动的转动惯量I为



$$I=\int y^2 dm=\rho t\int y^2 u dy$$

$$\because u/\sqrt{a^2+b^2}=(a\sin\theta-y)/a\sin\theta$$

$$\therefore u=\frac{(a\sin\theta-y)\sqrt{a^2+b^2}}{a\sin\theta}$$



把u代入转动惯量求解式得

$$I=2\rho t\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a\sin\theta}\int_0^{a\sin\theta}y^2(a\sin\theta-y)dy$$

$$=\frac{1}{6}\rho t\sqrt{a^2+b^2}(a^3\sin^3\theta)$$

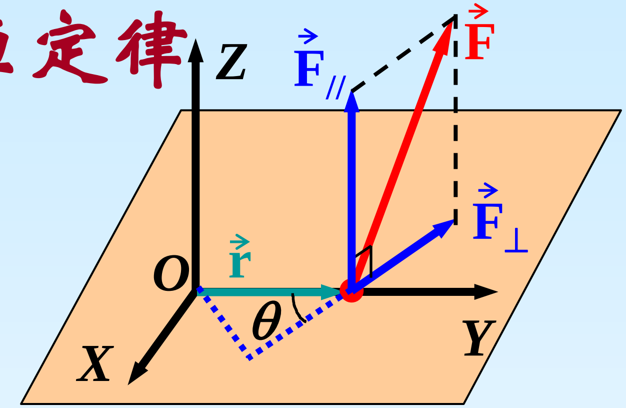
又 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$=\frac{1}{6}\rho t\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a^3b^3}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}\right]$$

$m=\rho abt$

$$=\frac{1}{6}m\left(\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)$$

§ 5-3. 刚体转动定律与角动量守恒定律



一. 力对轴和点的力矩

如图, 力$\vec{F}$对Z轴的力矩$\vec{M}_Z$

大小: $\left|\vec{M}_Z\right| = F_{\perp} r \sin\theta$

方向: 与$\vec{r}$、$\vec{F}_{\perp}$成右旋关系 $\boxed{\vec{M}_Z = \vec{r}\times\vec{F}_{\perp}}$

同理, 力$\vec{F}$对X轴的力矩: $\vec{M}_X = \vec{r}\times\vec{F}_{//}$

一般$\vec{r}$不沿Y轴 $\Rightarrow$ $\vec{r}\times\vec{F}_{//} = \vec{M}_X + \vec{M}_Y$

综上所述, $\vec{F}$ 对O点的力矩为

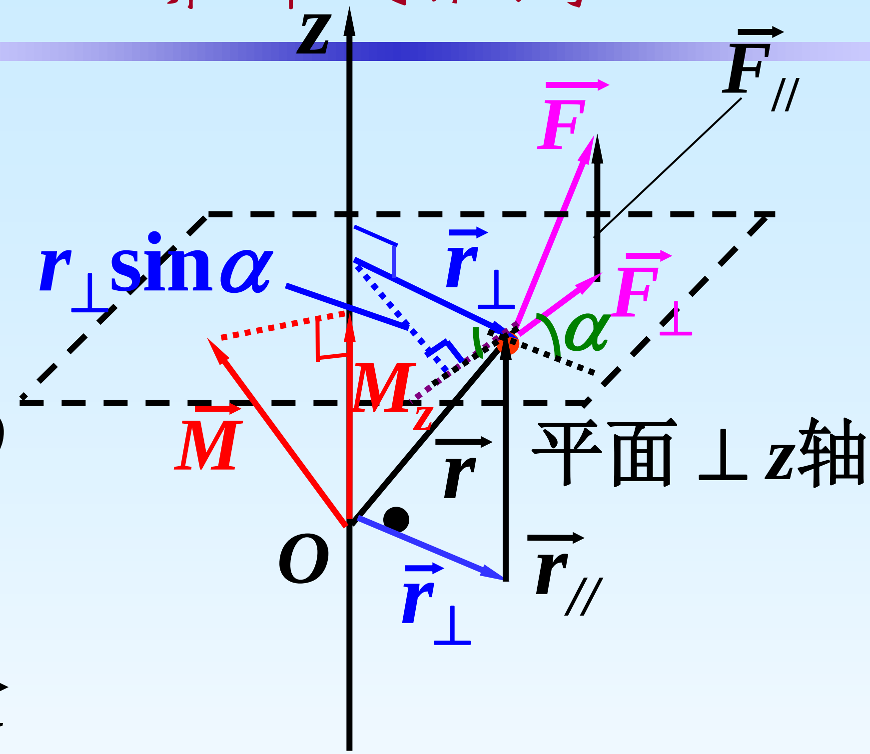
$$\boxed{\vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}_X + \vec{M}_Y + \vec{M}_Z = \vec{M}_O}$$

- 显然, 力通过O点时, 对O点的力矩为零. 力平行或通过某轴时, 对该轴的力矩为零

质点对轴的角动量

1. 力对轴的力矩

把对O点的力矩向过O点的轴（如 z 轴）投影：



$$M_z = \vec{M}\cdot\vec{k} = (\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{k}$$

$$= \left[\ (\vec{r}_\perp + \vec{r}_{//})\times(\vec{F}_\perp + \vec{F}_{//})\ \right]\cdot\vec{k}$$

$$= (\vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp)\cdot\vec{k}$$

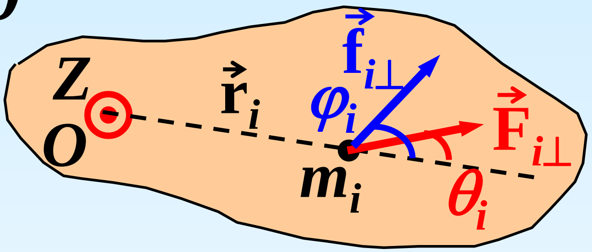
$$= F_\perp r_\perp \sin\alpha$$ ——力对轴的力矩。

二. 转动定律

如图, 设转轴Z 对惯性参照系无加速度.

对m_i： $a_z = 0$。即$F_{合//} = f_{i//} + F_{i//} = 0$

$$F_{i\perp}\sin\theta_i + f_{i\perp}\sin\varphi_i = m_i r_i \beta_z$$



$$(\times r_i)\quad F_{i\perp} r_i \sin\theta_i + f_{i\perp} r_i \sin\varphi_i = m_i r_i^2 \beta_z$$

对i求和 $\sum f_{i\perp} r_i \sin\varphi_i = 0;\quad \sum F_{i\perp} r_i \sin\theta_i = M_{外z}$

(合外力矩)

令 $\sum m_i r_i^2 = I_z$ ←转动惯量

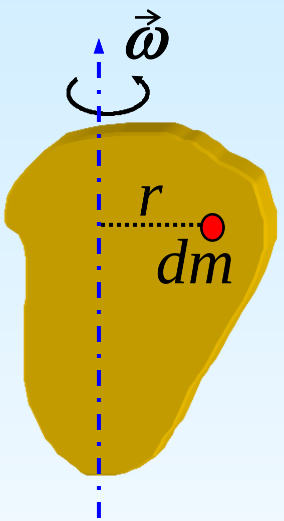
得到转动定律：

$$\boxed{M_{外z} = I_z\beta_z,\ 或:\ \vec{M}_{外z} = I_z\vec{\beta}}$$

刚体绕定轴转动时, 它对该轴的转动惯量与角加速度之积等于刚体所受各外力对该轴力矩的代数和.

三. 角动量定理与角动量守恒定律

1. 刚体对转轴的角动量



$$d\vec{L}=\vec{r}\times dm\vec{v}=dmr^{2}\vec{\omega}$$

各质元绕轴角速度相同

$$\boxed{\vec{L}=\int d\vec{L}=\vec{\omega}\int r^{2}dm=I\vec{\omega}}$$

2. 刚体的角动量定理及角动量守恒定律

$$\boxed{\vec{M}_{外}dt=d\vec{L}=d\left(I\vec{\omega}\right)}$$

若 $\vec{M}_{外}=\vec{0}$, 则$I\vec{\omega}=$常量

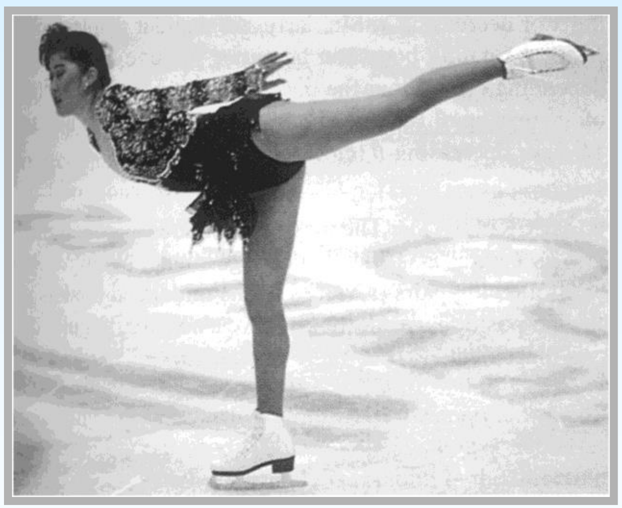
如: 机械陀螺; 冰上舞蹈

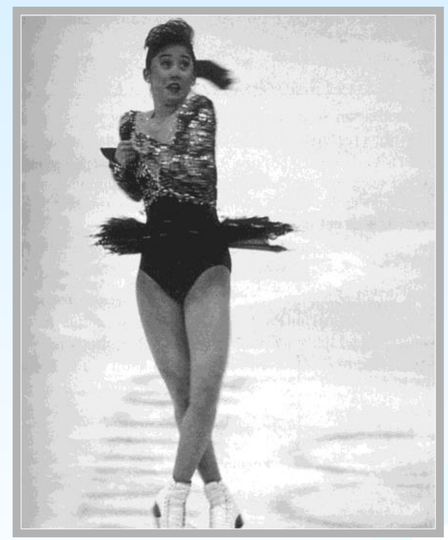
猫演示

3. 进动与章动（自学）

当变形体所受合外力矩为零时,变形体的动量矩也守恒

$$I(t)\omega = \text{常量} \Rightarrow I(t)\nearrow\ \omega\searrow \quad I(t)\searrow\ \omega\nearrow$$



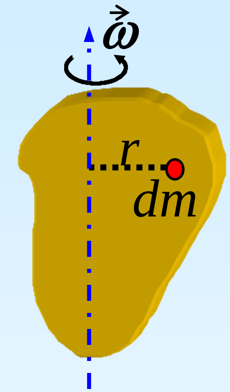


如：花样滑冰　跳水 芭蕾舞等

§5-4. 定轴转动刚体的动能定理

一. 刚体的转动动能

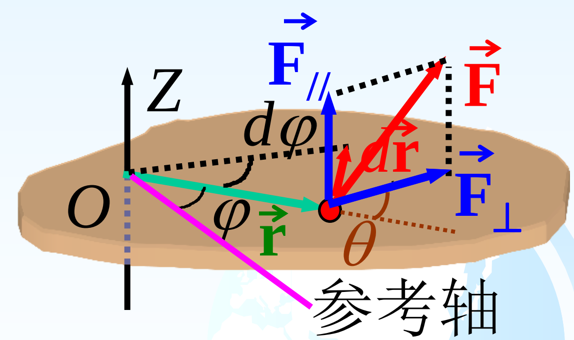
刚体转动动能是刚体各质元动能之和



$$\boxed{E_k = \int \frac{1}{2} dm(\omega r)^2 = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

二. 力矩的功

如图, 对定轴Z, 距轴r处受力$\vec{F}$



力矩的元功:

$$dA_F = F_{\perp} r d\varphi \sin\theta = M_z d\varphi$$

⇒总功 $$\boxed{A_F = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi}$$

- 本质上仍是力所作的功, 只是表示不同.

三. 动能定理

刚体中内力作功之和恒为零. 由质点系动能定理有

$$\sum\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \boldsymbol{M_z d\varphi} \boxed{\boldsymbol{= A_{外}} = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2}$$

即：定轴转动刚体在任一过程中动能的增量等于该过程中所有外力矩对刚体所作功的总和.

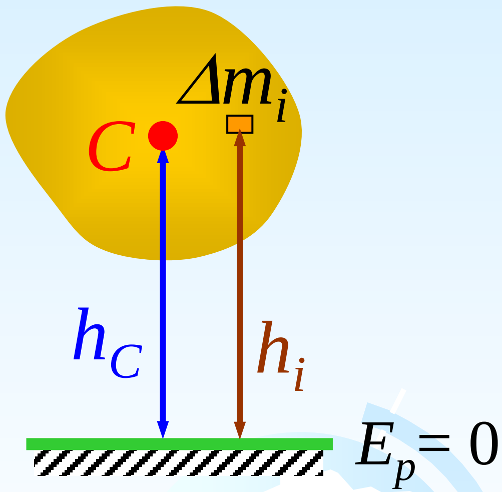
合外力矩所作的功 = 各外力矩作功之和

四. 刚体的重力势能

若刚体受到保守力作用，也可引入势能的概念。

重力场中刚体的重力势能：

如图，一个不太大物体，其中各点的重力加速度相同，它的重力势能可计算如下：

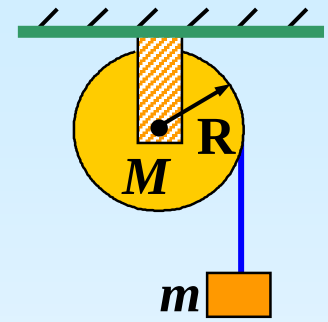


$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i$$

$$= mg \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

$$\boxed{E_p = mgh_C}$$

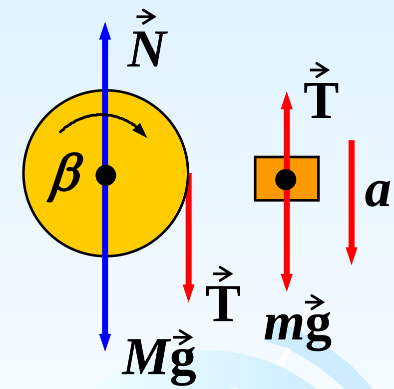
§7-5.应用例题



例： 如图, 水平光滑轴, 轻绳足够长, 绳轮不打滑, 静止开始$m = 2.0\text{kg}$, $M = 6.0\text{kg}$, $R = 0.20\text{m}$.求下落的加速度和最初2秒内转过的圈数.

解： 如图, 有

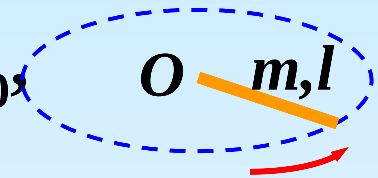
$$\begin{cases} mg - T = ma; \\ TR = \dfrac{1}{2}MR^2\beta; \quad a = R\beta; \end{cases}$$



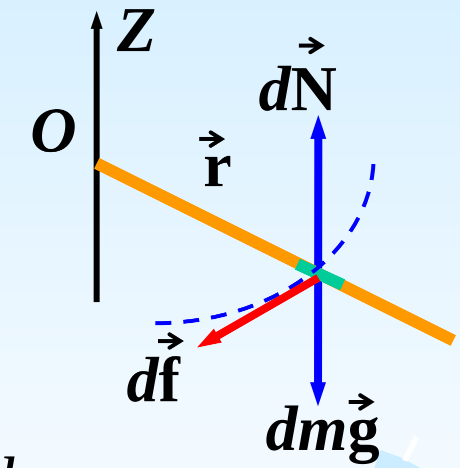
$$\Rightarrow \quad a = \frac{2m}{M+2m}g \quad (M \to 0\text{时}, a \to g)$$

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\beta t^2/2}{2\pi} = \frac{mgt^2}{2\pi R(M+2m)} = \frac{2g}{\pi} \approx 6.24$$

例： 匀质细杆(m,l)在水平面上绕过O点竖直轴转动. $t=0$ 时角速度为ω_0，杆与水平面之间的摩擦系数为μ.



问经过多长时间杆停止转动?



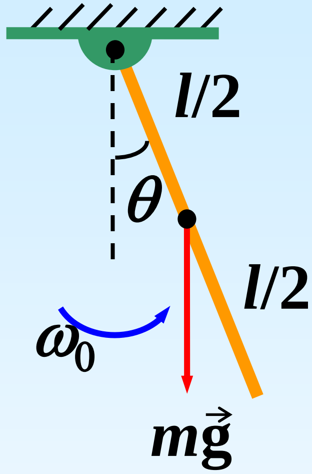
解: 如图, 有 $dm = m\dfrac{dr}{l}$

$$df = \mu dN = \mu dmg = \frac{\mu mg}{l}dr$$

$$\begin{cases} M_z = \int -r df = -\dfrac{\mu mg}{l}\int_0^l r dr = -\dfrac{1}{2}\mu mgl \\ -\dfrac{1}{2}\mu mgl = \dfrac{1}{3}ml^2\beta \\ \omega_0 + \beta t = 0 \end{cases}$$

解得: $t = \dfrac{2\omega_0 l}{3\mu g}$

例： 如图,匀质细杆,光滑轴,已知m, l, ω_0,⊙ .
求1) $\omega(\theta)$, θ_m; 2) 轴对杆的力.



解: (1) $$-mg\frac{l}{2}\sin\theta = I\beta = \frac{1}{3}ml^2\frac{d\omega}{dt}$$

$$-\frac{3g}{2l}\sin\theta = \frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

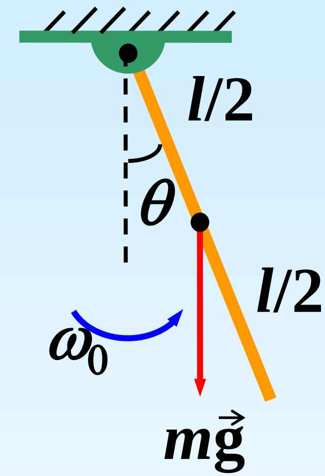
$$\int_0^{\theta} -\frac{3g}{2l}\sin\theta d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega}\omega d\omega$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$$

令$\omega = 0$, 得 $\theta_m = \cos^{-1}\left(1-\frac{\omega_0^2 l}{3g}\right) \Rightarrow \omega_0 > \sqrt{6g/l}$

(2) 角动量守恒给不出转轴受力(外力)的信息

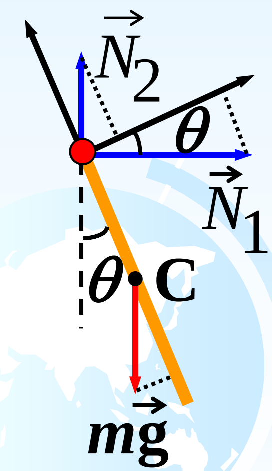
设N_1,N_2如图，对质心C有：



$$N_1\cos\theta + N_2\sin\theta - mg\sin\theta = m\beta\frac{l}{2}$$

$$N_2\cos\theta - N_1\sin\theta - mg\cos\theta = m\omega^2\frac{l}{2}$$

由(1)：

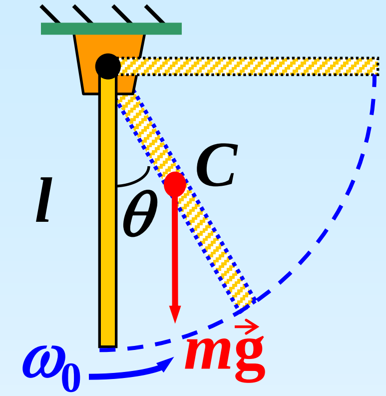


$$\beta = -\frac{3g}{2l}\sin\theta;\quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{3g}{l}(1-\cos\theta)$$

解得:

$$N_1 = mg\sin\theta\left(-\frac{9}{4}\cos\theta + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}m\omega_0^2 l\sin\theta$$

$$N_2 = mg\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\cos^2\theta - \frac{2}{3}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 l\cos\theta$$



例: 如图,已知m,l,ω_0, 略摩擦,求$\omega(\theta)$

解: 刚体、地球系统, 重力势能

$$E_G = \int dmgh_C = mgh_C$$

$$A_G = -\Delta E_G$$

杆用动能定理：$-mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$

或：杆-地球系统用机械能守恒定律:

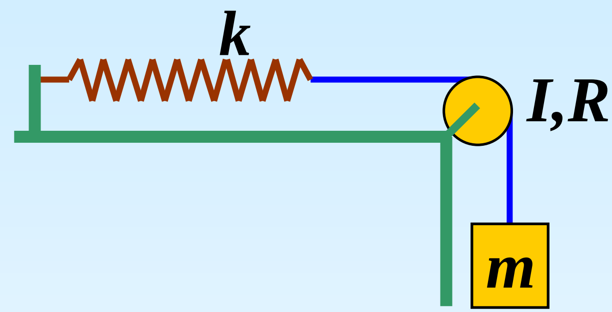
$$\left(\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2\right) + mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(\theta) = \sqrt{\omega_0^2 - mgl(1-\cos\theta)/I}}$$

- 若要求杆恰好能达到水平位置,

由$\omega(\theta=\pi/2)=0$得 $\boxed{\omega_0 = \sqrt{3g/l}}$

例: 如图, 已知k, I, R, m. 轮轴光滑, 绳-轮不打滑; k原长时m静止释放. 求m落下h时的速率.



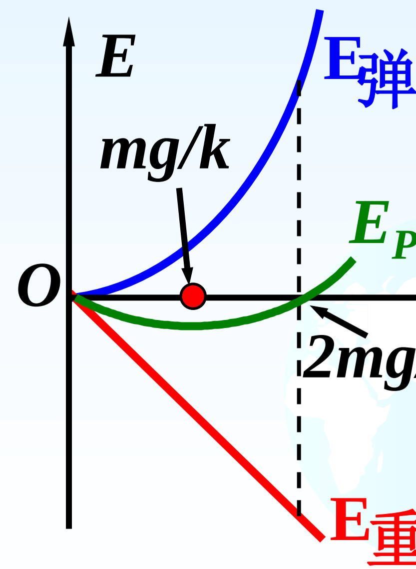
解: k, I, m,地球系统, 机械能守恒

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}kh^2-mgh=0$$

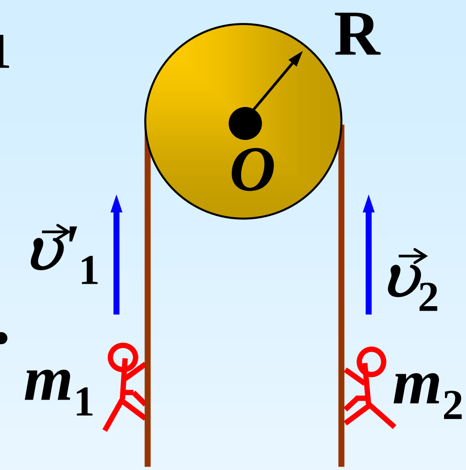
其中 $\upsilon=\omega R$

解得: $\upsilon=\sqrt{\dfrac{2mgh-kh^2}{m+I/R^2}}$

势能曲线如右图



例： 已知,定滑轮M, R, 水平转轴光滑. 初始均静止, 然后m_1以对绳速度υ'_1向上运动, m_2对绳静止.求m_1, m_2对地速度. (绳、轮不打滑)



解： m_1, m_2, M系统对转轴角动量守恒.

设m_2速度为$\vec{v}_2$、滑轮角速度为$\vec{\omega}$

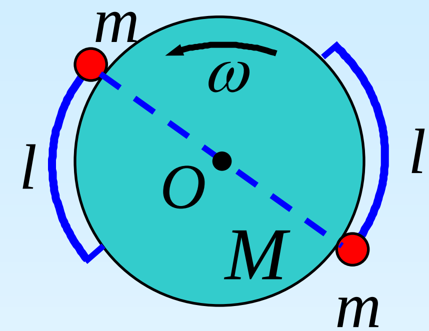
$$-m_1(\upsilon_1' - \upsilon_2)R + m_2\upsilon_2 R + \frac{1}{2}MR^2\omega = 0$$

$$\upsilon_2 = \omega R, \quad m_1 = m_2 = m$$

解得 $$\upsilon_2 = \frac{2m}{4m+M}\upsilon_1'$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_1' - \upsilon_2 = \frac{2m+M}{4m+M}\upsilon_1'$$

例：飞船停转:已知飞船M, R, ω, 在太空飞行, 起初, m靠在飞船边缘与飞船一起旋转. 释放m并当m沿径向拉直时割断绳子. 为使飞船正好停转,绳长应为多少?



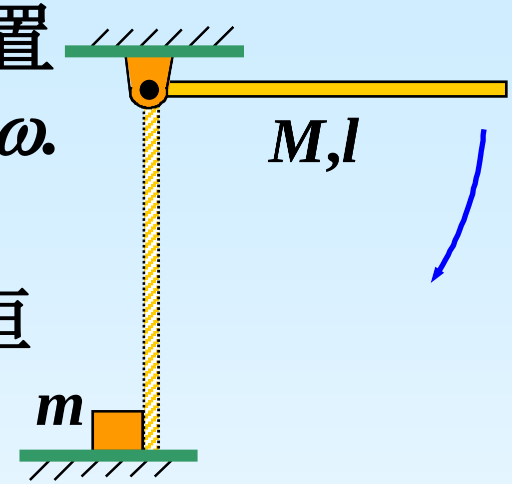
解: 用质心系. m, M系统对O角动量/机械能守恒:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega+2mR^2\omega=2m\upsilon(l+R)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2+2\cdot\frac{1}{2}m\omega^2R^2=2\cdot\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

解得: $l=R\left(\sqrt{1+M/4m}-1\right)$

例: 如图, 已知M, l, 轴光滑, 从水平位置静止放开.求碰后瞬间杆的角速度ω.



解: 设碰前瞬间杆的角速度为ω_0, ⊗;

杆下落时, 杆-地球系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\omega_0^2 - Mg\frac{l}{2} = 0$$

(1)完全非弹性碰撞:

碰撞前后杆的角速度为: ω_0, ⊗, ω, ⊗

碰撞中m, M系统对于转轴角动量守恒:

$$\left(ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2\right)\omega = \frac{1}{3}Ml^2\omega_0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{M}{M+3m}\omega_0 = \boxed{\frac{M}{M+3m}\sqrt{\frac{3g}{l}}}.$$

(2) 完全弹性碰撞: 设 ω, ⊗, υ, ←

碰撞中m, M 系统对于转轴角动量守恒

$$m\upsilon l+\frac{1}{3}Ml^2\omega=\frac{1}{3}Ml^2\omega_0$$

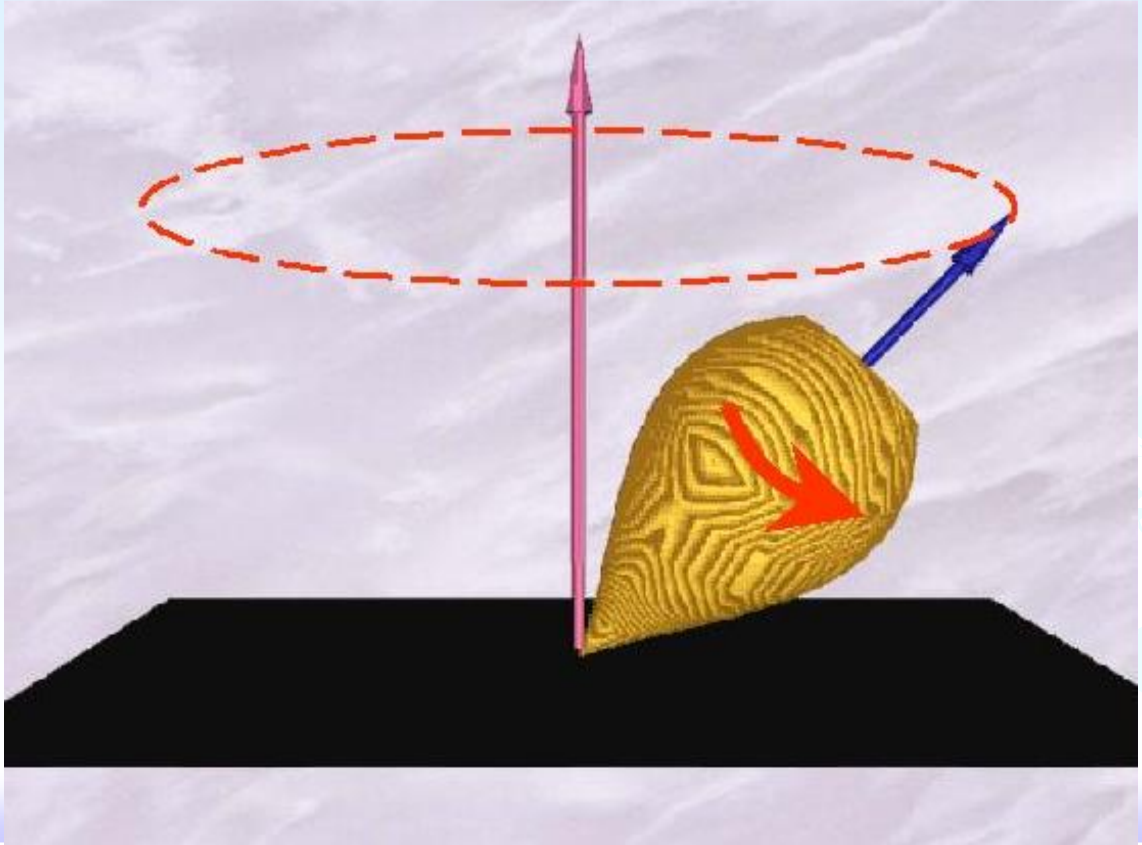
碰撞前后m, M系统动能相等

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\omega_0^2$$

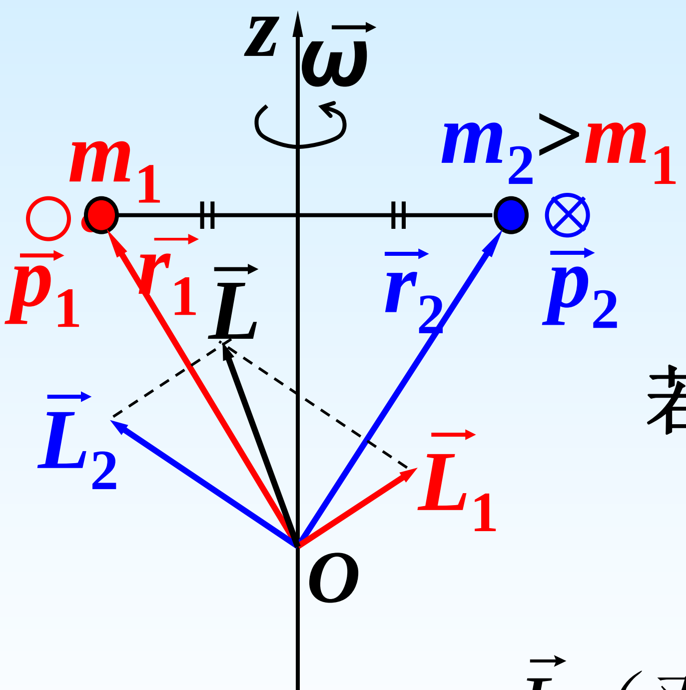
$$\Rightarrow\quad \boxed{\omega=\frac{M-3m}{M+3m}\omega_0}$$ (已舍去不合理解)

旋进 （进动，precession）

旋进： 高速旋转的物体，其自转轴绕另一个轴转动的现象。 如玩具陀螺的运动：



刚体自转的角动量不一定都与自转轴平行。



例如，图示的情形：质量对转轴不对称，则对轴上O点的 $\vec{L}$ 不平行于 $\vec{\omega}$

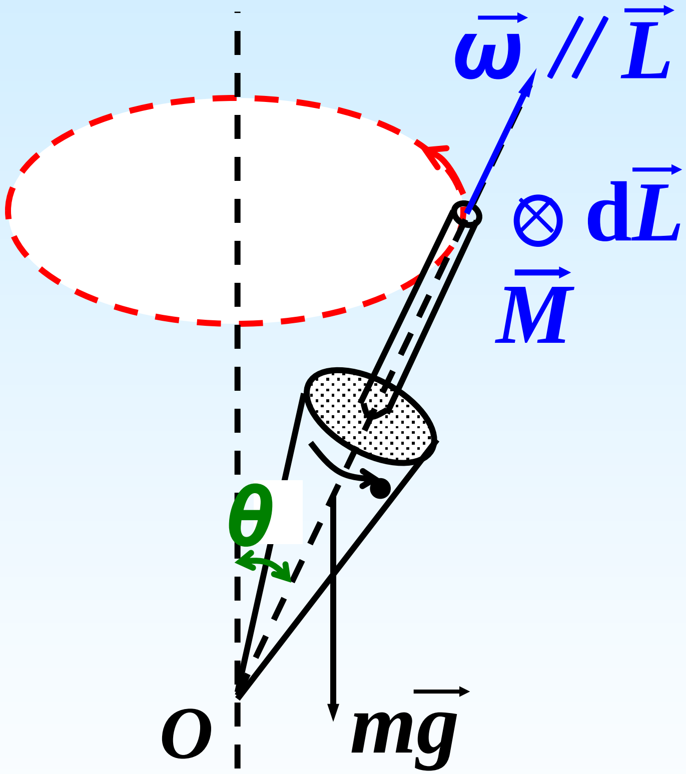
若质量对转轴分布对称（m1=m2）

则： $\vec{L} \,//\, \vec{\omega} \,//$ 轴

$$\vec{L}\text{（对点）} = L_z\vec{k}\text{（对轴）} = I_z\vec{\omega}$$

下面我们就讨论这种质量对转轴分布对称的刚体的旋进问题。

陀螺：质量呈轴对称分布的刚体。



陀螺的旋进：

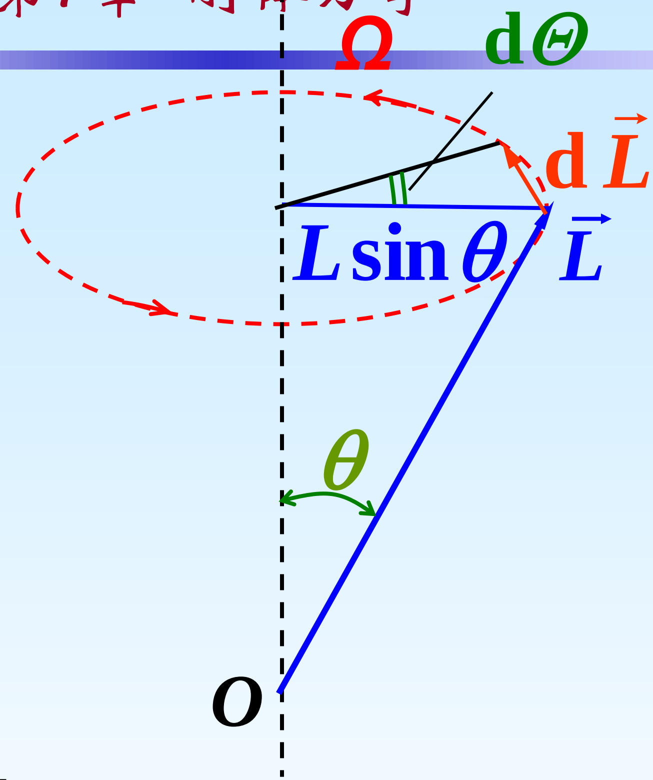
$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \longrightarrow$$

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\,\mathrm{d}t \,//\, \vec{M}$$

$$\vec{M} \perp \vec{L} \longrightarrow \mathrm{d}\vec{L} \perp \vec{L}$$

$\longrightarrow$ $\vec{L}$ 只改变方向而不改变大小，从而产生旋进运动。

旋进角速度： $\Omega = \dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$



$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta$$

$$M = \frac{\left|\mathrm{d}\vec{L}\right|}{\mathrm{d}t} = \frac{L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}$$

$$= L\sin\theta \cdot \Omega$$

$$\boxed{\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{M}{I\omega\sin\theta}} \propto \frac{1}{\omega}, \quad \omega\uparrow \rightarrow \Omega\downarrow$$

旋进方向？

$$\boxed{\text{当}\theta = 90^\circ\text{时，}\Omega = \frac{M}{I\omega}}$$

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

§4-6. 守恒定律与对称性

目的: 探究守恒定律的含义

一. 对称性

1. 对称性与对称性破缺

对称性: 对一个体系(一个"东西", 如物体、运动或规律), 我们可以对其进行操作(做某种事情, 变换), 使体系从一个状态变到另一状态. 若两状态等价(看上去没有区别), 就说体系对于该操作是对称的, 或称该操作是体系的一个对称操作.

对称性破缺: 体系对于某个操作不是对称的, (或: 在某种程度上使某一东西不再具有某种对称性).

2. 对称性的分类

因操作或变换不同, 有不同对称性, 如:

时空对称性: 空间的平移、转动、镜象反射、反演

时间的平移、反演.

内禀对称性: 全同粒子置换、规范变换、正反粒子变换等.具体物体的对称性

按研究对象的性质分类:

- 具体物体的对称性
- 物理规律的对称性:某变换下规律的形式不变

3．对称性与不可观测量

对称性对应着不可观测量, 意味着存在不可分辨性. 对称性越高, 信息量越少.

或：可观测量对应着不对称性.

如：旋转一理想球体, 不可分辨其前后左右,

绕球心的方位角不可观测,

牛顿定律服从伽利略变换

$\Rightarrow$ 绝对静止与绝对运动不可分辨.

不可观测量是绝对速度.

二. 对称性与守恒律

1. 作用量方法

对一个物理系统的每个可能经历状态可以指定一个称为“作用量”的数. 任何物理理论都可通过“作用量方法”表述. 研究越细致, 作用量越复杂.

- 物理系统的对称性 = 作用量在相应变换下的不变性

物理学的重要任务之一:

建构一个统一、自洽的关于物质世界的理论.

⇒ 尝试构造新的作用量.

2. 诺特尔定理

如果一个物理系统存在某种对称性, 必有一个守恒量与之对应. 反之亦然.

3. 由对称性研究探索未知规律

根据对守恒量的了解,(或猜测物质世界应具有那些对称性),通过对称性理论约束作用量的形式,剔除不能满足对称性要求的候选理论.

三. 科学性、时空对称性与守恒定律

1. 科学的可检验性与可重复性

科学的主要特征之一是可重复性和可检验性。要求:

- 不因时而异 ⇒ 时间的均匀性
- 不因地而异 ⇒ 空间的均匀性和各向同性
- 不因人而异 ⇒ 相对论对称性原理(参考系无关)

2. 空间均匀性与动量守恒

空间均匀性 ⇔ 空间平移不变性

以一维两粒子系统为例:

空间平移不变性意味着在变换 $x \to x' = x + \varepsilon$ 下

$$U(x_2 - x_1) = U(x_2' - x_1')$$

粒子1, 2受力 $$f_1 = -\frac{dU}{dx_1};\ f_2 = -\frac{dU}{dx_2}$$

$$f_1 + f_2 = -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} - \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_2} = 0$$

$$f_1 + f_2 = \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = \frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = 0$$

即系统的总动量不随时间改变, 动量守恒!

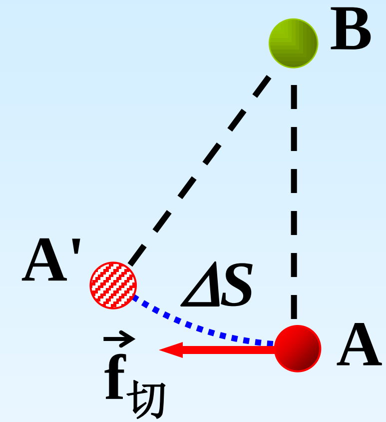
3. 空间各向同性与角动量守恒

空间各向同性 $\leftrightarrow$ 转动不变性

如图：转动变换下, $A \rightarrow A'$, 但二者距离不变, 若各向同性, 势能不变,

即 $\Delta U = -f_{切}\Delta S = 0$

$\Rightarrow f_{切} = 0 \Rightarrow$ 角动量守恒!



4. 时间均匀性与能量守恒

体系的(力学)性质与时间起点无关, 时间均匀性要求在变换下物理理论保持不变。

$\Rightarrow$ 粒子相互作用势不变, 能量守恒