

第四讲 根轨迹法

4.1 基本要求

1. 正确理解开环零、极点和闭环零、极点以及主导极点、偶极子等概念。
2. 正确理解和熟记根轨迹方程(模方程及相角方程)。熟练运用模方程计算根轨迹上任一点的根轨迹增益和开环增益。
3. 正确理解根轨迹法则，法则的证明只需一般了解，熟练运用根轨迹法则按步骤绘制反馈系统 K 从零变化到正无穷时的闭环根轨迹。
4. 正确理解闭环零极点分布和阶跃响应的定性关系，初步掌握运用根轨迹分析参数对响应的影响。能熟练运用主导极点、偶极子等概念，将系统近似为一、二阶系统给出定量估算。
5. 了解绘制广义根轨迹的思路、要点和方法。

4.2 重点讲解

1. 学习根轨法首先要领会以下的思想：由于考虑了 K 在 $[0, +\infty)$ 的变化，从而使模值方程得以自然满足，于是相角方程就成为决定根轨迹的充分必要条件，从而给解特征方程带来了新的思路和契机。这一处理问题的方法是具有参考价值的，在研究工作中为了解决某一特定问题，常常把这一特定问题放到包含它的一簇问题中去研究，因为解一簇问题可能找到新的解法与契机，从而使特定问题最终得以顺利解决。
2. 根轨迹是闭环极点随开环某一参数变化时(例如开环增益 K 从零变化到正无穷)在复平面上所画出的曲线，对于一个固定的 K 值，闭环传递函数有 n 个极点，分别位于 n 条根轨迹上。
3. 根轨迹上的任一点 s_0 均是闭环传递函数在某一 K(或 K^* 值)时的极点， s_0 点对应的 K^* 值可用模值方程来计算，方法是将这点的坐标值 s_0 代入模值方程，得

$$K_{s_0}^* = \frac{\prod_{i=1}^n |s_0 - p_i|}{\prod_{i=1}^m |s_0 - z_i|}$$

4. 根轨迹增益 K^* 与开环增益 K 的折算

在将开环传递函数写成典型环节的形式时，有

$$G(s) = \frac{K (\tau_1 s + 1) (\tau_2^2 s^2 + 2\xi_2 \tau_2 s + 1) \dots}{s^v (T_1 s + 1) (T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1) \dots}$$

这种形式特点是一次和二次因式的常数项为 1，其中 K 称为开环增益。

但在本章中常常用传递函数的零、极点表达式

$$G(s) = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

这种形式特点是一次因式的 s 项的系数为 1，其中 K^* 称为根轨迹增益。

明确了这两种表达传递函数的式子，K 与 K^* 的关系很容易确定。

例题 4-1

$$G(s) = \frac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+s+25)} = \frac{8 \times 0.1(10s+1)}{25s(s^2+s+1)(0.04s^2+0.04s+1)}$$

$K=0.032$ 为开环增益， $K^*=8$ 称为根轨迹增益。根轨迹增益 K^* 与开环增益 K 的折算关系为

$$\frac{0.1}{25} K^* = K$$

5. 根据法则来绘制根轨迹只是提供一个草图，有时候运用了上述全部法则尚不能决定出根轨迹草图。因此提醒读者绘制根轨迹草图时一定要按法则逐条计算，避免全局出错。

例题 4-2 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

按步骤画出 $K^* = 0 \rightarrow +\infty$ 时, 系统的根轨迹图, 并确定闭环稳定时开环放大倍数的取值范围。

解: 系统有 3 个开环极点 $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -2 \pm j$ 。下面按步骤画出根轨迹。

(1) 系统有 3 条根轨迹, 分别从这 3 个开环极点出发, 终止于无穷远处;

(2) 实轴上 $(-\infty, 0)$ 是根轨迹区域;

(3) 根轨迹的渐近线

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ,$$

$$\sigma_a = \frac{(-2+j) + (-2-j) + 0}{3} = -\frac{4}{3}$$

(4) 根轨迹起始角

$$\theta_{p_2} = 180^\circ - \theta_{p_1 p_2} - \theta_{p_3 p_2} = 180^\circ - 153.4^\circ - 90^\circ = -63.4^\circ$$

$$\theta_{p_3} = 180^\circ - \theta_{p_1 p_3} - \theta_{p_2 p_3} = 180^\circ - 206.6^\circ + 90^\circ = 63.4^\circ$$

(5) 分离点根据公式 (4-10) 有

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2+j} + \frac{1}{d+2-j} = 0,$$

解得

$$d_1 = -\frac{5}{3}, d_2 = -1$$

(6) 轨迹与虚轴交点 闭环系统的特征方程为:

$$s^3 + 4s^2 + 5s + K^* = 0,$$

将 $s = j\omega$ 代入闭环系统的特征方程, 让实部和虚部分别为零, 求得

$$\omega = \pm\sqrt{5}, K = 20$$

系统的根轨迹如图 4-1 所示。从根轨迹图中可以看到, 当 $0 < K < 20$ 时, 系统是稳定的。

注: 在这一例题中, 分离点的计算是非常必要的, 如果少了这一步, 就可能将由复数极点出发的根轨迹画成经由虚轴交点直接走向右平面的曲线。

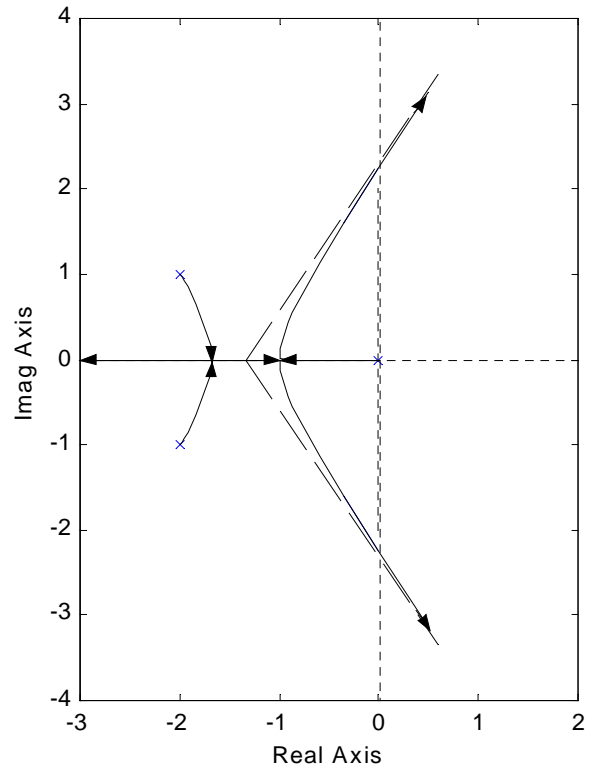


图 4-1 例题 4-2 的根轨迹

6, s 平面纵、横轴坐标的刻度比例应相同, 否则所有角度的图解计算将导致谬误。

这点应当特别引起注意, 因为有些绘图软件具有自动调整纵、横轴坐标的刻度比例的功能, 这一功能在作根轨迹图时不能使用。

7, 为了求出根轨迹的解析表达式, 一般可将 $s = x + jy$ 代入特征方程, 令虚部和实部分别为零, 可得

$$\varphi_1(x, y, K) = 0$$

$$\varphi_2(x, y, K) = 0$$

消去参变量 K , 可得到根轨迹方程 $\varphi(x, y) = 0$ 。虽然这种做法具有普遍性, 但因为函数 φ_1, φ_2 较为复杂, 应用起来十分不便, 这种做法仅对一些简单情况适用, 例如所得的根轨迹方程是二次曲线的情况。

为了求出例题 4-2 根轨迹的解析表达式, 可将 $s = x + jy$ 代入特征方程 $s^3 + 4s^2 + 5s + K^* = 0$, 令虚部和实部分别为零, 可得

$$x^3 - 3xy^2 + 4x^2 - 4y^2 + 5x + K^* = 0$$

$$3x^2 - y^2 + 8x + 5 = 0$$

由上面的第二式直接可得

$$3(x + 4/3)^2 - y^2 = 1/3$$

规范化后可得

$$\frac{(x + 4/3)^2}{(1/3)^2} - \frac{y^2}{(1/\sqrt{3})^2} = 1$$

这是中心在 $(-4/3, 0)$ 的双曲线方程, 中心正是渐近线与实轴交点的坐标, 双曲线的两个顶点坐标为 $(-5/3, 0)$ 和 $(-1, 0)$, 这正是所求出的两个分离点。

8. 一个零点、两个极点的系统

例题 4-3 系统特征方程为

$$\frac{K(s + 4.5)}{s(s + 2.5)} = -1$$

有一个零点和两个极点, 分别为 $z = -4.5, p_1 = 0, p_2 = -2.5$, 代入求分离点的方程中, 可得

$$\frac{1}{d + 4.5} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d + 2.5}$$

通分后得 $d^2 + 9d + 2.5 \times 4.5 = 0$

解出上述方程的解

$$d_1 = -1.5, d_2 = -7.5$$

所求出的 d_1, d_2 均在实轴上的根轨迹区段, 故两个都是分离点。

对于 d_1 点, 有 2 条根轨迹进入 d_1 点, 必有 2 条根轨迹离开 d_1 点, 2 条进入 d_1 点的根轨迹与 2 条离开 d_1 点的根轨迹相间隔, 任一条进入 d_1 点的根轨迹与相邻的离开 d_1 点的根轨迹方向之间的夹角为 $\pi/2$; 由于有两条进入 d_1 点的根轨迹位于实轴上, 故离开 d_1 点的两条根轨迹的方向必然与实轴垂直。同理, 对于 d_2 点, 有 2 条根轨迹进入 d_2 点, 必有 2 条根轨迹离开 d_2 点, 2 条进入 d_2 点的根轨迹与 2 条离开 d_2 点的根轨迹相间隔, 任一条进入 d_2 点的根轨迹与相邻的离开 d_2 点的根轨迹方向之间的夹角为 $\pi/2$; 由于有两条离开 d_2 点的根轨迹位于实轴上, 故进入 d_2 点的两条根轨迹的方向必然与实轴垂直。见图 4-2

为了求出根轨迹的解析表达式, 可将 $s = x + yj$ 代入特征方程, 令虚部和实部分别为零, 可得

$$x^2 + 2.5x - y^2 + Kx + 4.5K = 0$$

$$2xy + 2.5y + Ky = 0$$

由上面的第二式可得 $K = -(2x + 2.5)$, 代入上面的第一式, 可得

$$(x + 4.5)^2 + y^2 = 3^2$$

这是圆心在 $(-4.5, 0)$, 半径为 3 的圆方程

上述例题也可借助几何关系用相角方程来说明: 在圆周上任取一点 A, 考虑 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$, 当 $AB^2 = BC \times BD$ 时, 有

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$$

由三角形相似法则, 可知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 相似, 故 $\angle 4 = \angle 5$, 因而有

$$\angle 3 - \angle 1 - \angle 2 = \angle 3 - (\angle 3 + \angle 4) - \angle 1 = -(\angle 5 + \angle 1) = -180^\circ$$

故图中圆上的任一点均满足相角方程, 是根轨迹上的点。

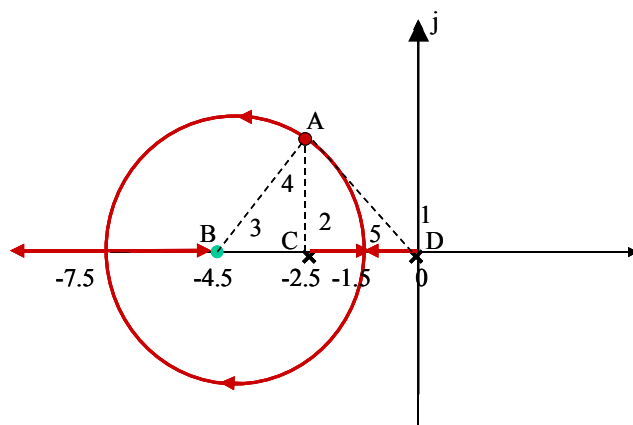


图 4-2 一个零点、两个极点的系统

9. 一个零点、三个极点的系统

例题 4-4 负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^* s}{(s + 3\sqrt{3})(s^2 + 1)}$$

试画出 $K^* > 0$ 时闭环系统的根轨迹图。(要求按步骤做, 图中至少应标明渐近线、分离点、会合点、分离角、会合角及输出角等项。)

解: 开环系统的零点为 $z_1 = 0$, 开环极点为 $p_{1,2} = \pm j\omega$, $p_3 = -3\sqrt{3}$ 。

(1) 系统根轨迹有 3 条

(2) 3 条根轨迹分别起始于 3 个极点, 1 条终止于零点 z_1 , 2 条终止于无穷远处。

(3) 在实轴上的根轨迹区域为 $(-3\sqrt{3}, 0)$

(4) 根轨迹的渐近线

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90^\circ, \quad \sigma_a = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2.6$$

(5) 起始角与终止角

$$p_1 \text{ 处的起始角为: } \theta_{p_1} = 180^\circ + 90^\circ - 90^\circ - 10.9^\circ = 169.1^\circ$$

$$p_2 \text{ 处的起始角为: } \theta_{p_2} = 180^\circ - 90^\circ - (-90^\circ) - (-10.9^\circ) = 190.9^\circ$$

$$z_1 \text{ 处的终止角为: } \varphi_{z_1} = 180^\circ - 90^\circ + 90^\circ + 0^\circ = 180^\circ$$

(6) 分离点

根据求分离点的方程, 得分离点坐标应满足

$$\frac{1}{d + 3\sqrt{3}} + \frac{2d}{d^2 + 1} = \frac{1}{d}$$

即

$$2d^3 + 3\sqrt{3}d^2 - 3\sqrt{3} = 0$$

可解出

$$d_1 = d_2 = -\sqrt{3}, (d_3 = \sqrt{3}/2 \text{ 舍去})$$

闭环系统的特征方程为

$$s^3 + 3\sqrt{3}s^2 + (1 + K^*)s + 3\sqrt{3} = 0$$

当系统的有特征根为 $s_{1,2} = -\sqrt{3}$ 时, 由模值方程得到 $K^* = 8$, 此时系统另外一个特征根也求得为 $-\sqrt{3}$,

即此时 $s_1 = s_2 = s_3 = -\sqrt{3}$ 。这表明三条根轨迹在 $-\sqrt{3}$ 处汇合和分离。

(7)分离角和会合角

对于 $d = -\sqrt{3}$ 处，有 3 条根轨迹进入 d 点，必有 3 条根轨迹离开 d 点，3 条进入 d 点的根轨迹与 3 条离开 d 点的根轨迹相间隔，任一条进入 d 点的根轨迹与相邻的离开 d 点的根轨迹方向之间的夹角为 $\pi/3 = 60^\circ$ ；由于有 1 条进入 d 点的根轨迹位于实轴上，与正实轴夹角为 0° ，故另外进入 d 点的两条根轨迹的方向必然与正实轴夹角为 $\pm 60^\circ$ 。同理，由于有 1 条离开 d 点的根轨迹位于实轴上，与正实轴夹角为 0° ，故另外离开 d 点的两条根轨迹的方向必然与正实轴夹角为 $\pm 120^\circ$ 。进入 d 点离开 d 点的根轨迹成相间隔、均匀分布，见图 4-3。

系统的根轨迹如图 4-3 所示。

注：在这一例题中，起始角、终止角、分离点、分离角、会合角等项的计算是非常必要的，

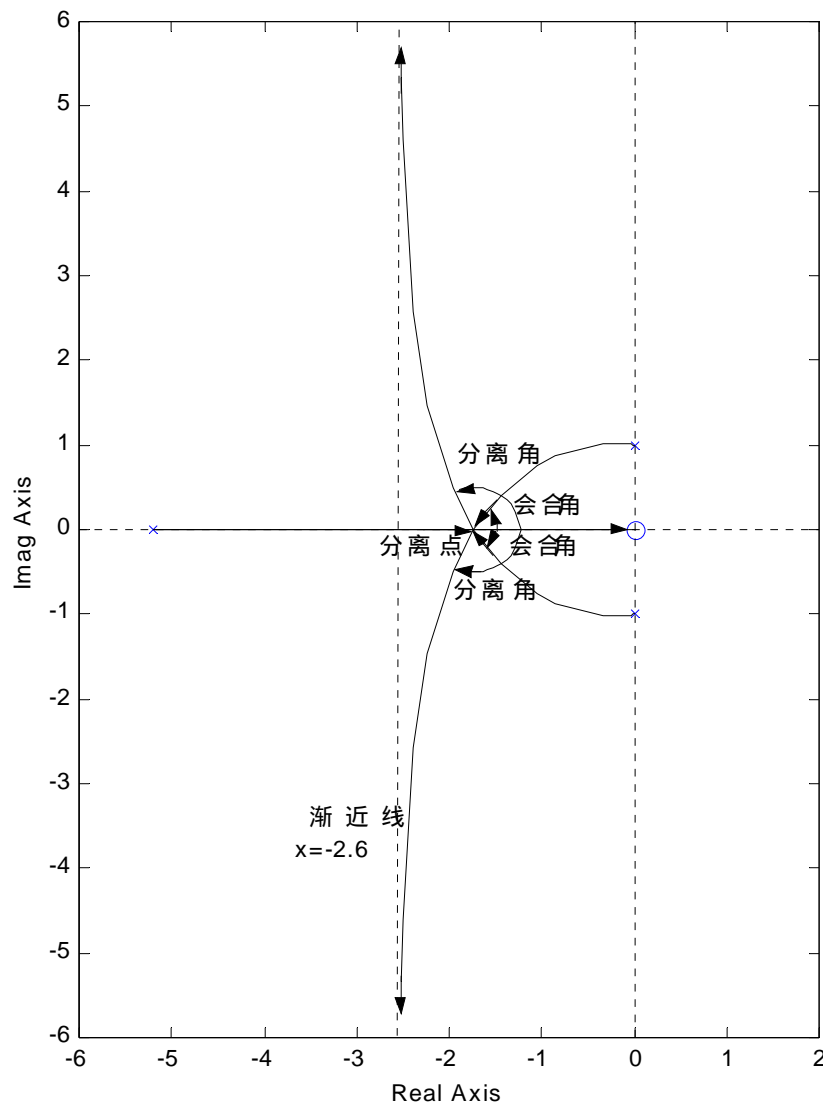


图 4-3 例题 4-4 的根轨迹图

10. 广义根轨迹例题

例题 4-5 两个系统结构如图 4-4(a) 和 4-4(b) 所示。对图 4-4(a) 作出 $k > 0$ 时闭环系统的根轨迹；对图 4-4(b) 作出 $p > 0$ 时闭环系统的根轨迹（即广义根轨迹）；试确定 k 、 p 值，使得两系统的闭环极点相同

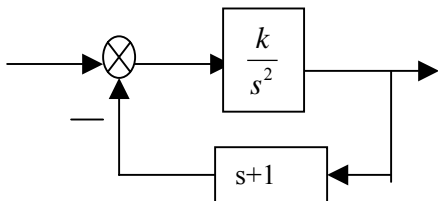


图 4-4 (a) 系统结构图

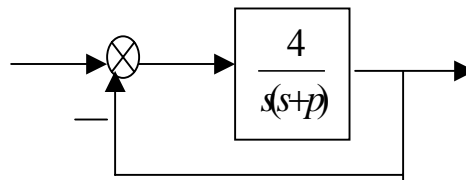


图 4-4 (b) 系统结构图

解 图 4-4(a) 中系统的开环极点为 $p_{1,2} = 0$ ，零点为 $z_1 = -1$ 。

作出图 4-4(a) 系统的根轨迹，如图 4-5(a) 所示，可知它的根轨迹是 2 条从原点(0,0)出发，分别沿着以(-1,0)为圆心，1 为半径的圆的上下圆弧前进，在实轴(-2,0)会合，1 条沿实轴到达(-1,0)，另 1 条到达无穷远处。

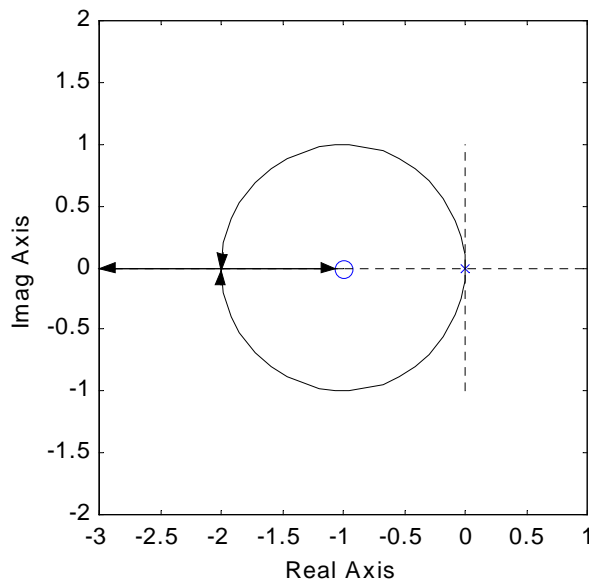


图 4-5 (a) 例题 4-5 的 4-4(a) 系统根轨迹图

图 4-4(b) 所示系统的闭环特征方程为 $s^2 + ps + 4 = 0$ ，它的等效开环传递函数为

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{ps}{s^2 + 4}$$

根据绘制根轨迹法则，作出 $p = 0 \rightarrow \infty$ 变化的广义根轨迹。

这里略去具体绘制根轨迹过程，根轨迹如图 4-5(b)所示。它的根轨迹是 2 条分别从 $(0, \pm 2j)$ 出发，分别沿着以原点 $(0,0)$ 为圆心，2 为半径的圆的部分圆弧前进，在实轴 $(-2,0)$ 处会合，然后 1 条沿实轴到达 $(0,0)$ ，另 1 条沿实轴到达无穷远处。

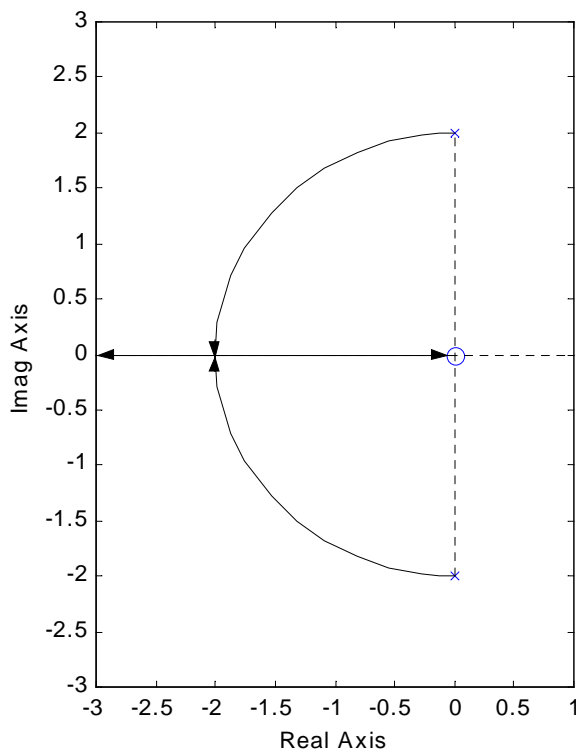


图 4-5 (b) 例题 4-5 的 4-4(b)系统根轨迹图

分析这两个根轨迹图，要使这两个系统的闭环极点相同，它们的根轨迹必须有重合处。显然 $(-2,0)$ 是这两个根轨迹的会合点，因此合理选择 k, p ，可以使的两个系统的闭环极点相同

$$p_1 = p_2 = -2。$$

求 k ，图 4-4(a)系统的闭环特征方程为 $s^2 + k(s+1) = 0$ ，代入 $s = -2$ ，得 $k = 4$ ；

求 p ，图 4-4(b)系统的闭环特征方程为 $s^2 + ps + 4 = 0$ ，代入 $s = -2$ ，得到 $p = 4$ 。

例题 4-6 系统结构图如图 4-6 所示，试作系统 $K^* \geq 0$ 的根轨迹。

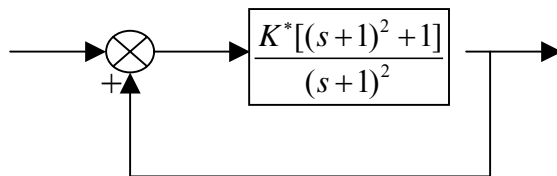


图 4-6 系统结构图

解 根轨迹方程为

$$\frac{K^*[(s+1)^2 + 1]}{(s+1)^2} = 1$$

注意到根轨迹方程中分母的次数和分子的次数相等，在 $K^* = 1$ 时发生退化现象，即闭环两个极点在复平面

的无穷处。首先考虑 K^* 由 0 变化到 1 的情况，这时是零度根轨迹。闭环根由开环极点 $p_{1,2} = -1$ 出发，分别沿着实轴的正、负方向趋向于无穷。

闭环特征方程式为

$$(K^* - 1)s^2 + 2(K^* - 1)s + 2K^* - 1 = 0$$

考虑 $K^* > 1$ 的情况，并令 $K^* - 1 = K_1^*$ ， K^* 从 1 变化到正无穷相当于 K_1^* 从 0 变化到正无穷，再令 $1/K_1^* = K_2^*$ ， K_1^* 从 0 变化到正无穷相当于 K_2^* 从正无穷变化到 0，由闭环特征方程式对 K_2^* 建立等效系统的根轨迹方程如下

$$\frac{K_2^*}{s^2 + 2s + 2} = -1$$

这是常规的 180° 根轨迹方程，当 K_2^* 从零变化到正无穷的根轨迹是始于 $p_{1,2} = -1 \pm j$ 最终趋向于无穷的平行于虚轴的直线，再考虑到 $1/K_1^* = K_2^*$ 和 $K^* - 1 = K_1^*$ ，所以可知 K^* 从 1 变化到正无穷时，根轨迹始于无穷 $(-1 \pm j\infty)$ 沿着平行于虚轴的直线最终趋向于原系统的开环零点 $z_{1,2} = -1 \pm j$ 。

系统 $K^* \geq 0$ 的根轨迹图如图 4-7 所示

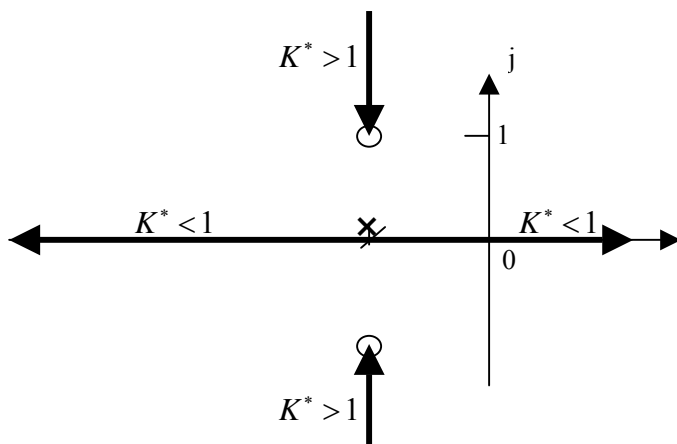


图 4-7 例题 4-6 的根轨迹图

11. 根轨迹是直线的情况

例题 4-7 系统如图 4-8 所示，图中 $T > 0$ ， n 为大于 2 的正整数。试证：

- (1) 闭环系统 ($K > 0$) 的根轨迹是以点 $s = -1/T$ 为中心的 n 条射线。
- (2) 闭环系统临界稳定的条件为 $K = (\sec \frac{\pi}{n})^n$

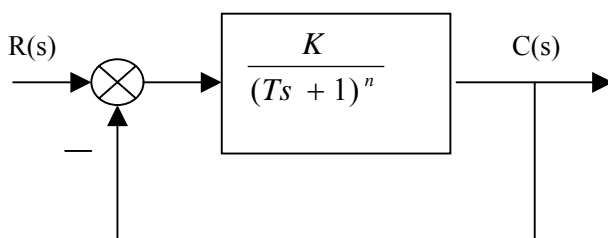


图 4-8 系统结构图

证明：系统的开环传递函数可化为： $G'(s) = \frac{K^*}{(s + 1/T)^n}$ ，其中， $K^* = K/T^n$ 。

(1) $-\frac{1}{T}$ 是系统 n 重开环极点，则系统的所有 n 条根轨迹都从 $(-\frac{1}{T}, 0)$ 出发，并终止于无穷远处。

考察从 $(-\frac{1}{T}, 0)$ 出发，和正实轴夹角为 $\frac{(2k+1)\pi}{n}$ 的射线上的点。以夹角为 $\frac{\pi}{n}$ 的射线为例，它上面的任一点 s 和 $(-\frac{1}{T}, 0)$ 的夹角均为 $\frac{\pi}{n}$ ，则其必有

$$\sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pi$$

满足相角方程。这说明这条射线必然是系统的一条根轨迹曲线。同理可以证明所有从 $(-\frac{1}{T}, 0)$ 出发，和正实轴夹角为 $\frac{(2k+1)\pi}{n}$ 的射线都是系统的根轨迹曲线，而这些曲线共有 n 条，故可知系统的根轨迹曲线是以 $s = -1/T$ 为中心，分别和正实轴夹角为 $\frac{(2k+1)\pi}{n}$ 的射线。系统的根轨迹如图 4-9 所示。

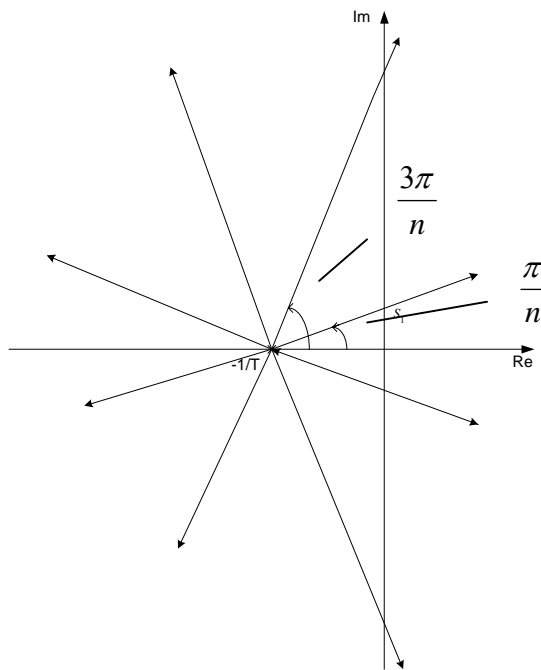


图 4-9 例题 4-7 的根轨迹图

(2) 根据系统的根轨迹曲线可知，当这些以 $s = -1/T$ 为中心的射线穿过虚轴到达右半复平面时，系统不稳定。因此，求临界稳定时 K^* 的取值，就是求根轨迹和虚轴的交点。

考察这些射线和虚轴的所有交点 s ，根据模值方程，有

$$K^* = \prod_{i=1}^n |s - p_i| = \left| s + \frac{1}{T} \right|^n$$

则 K^* 的取值由 $\left|s + \frac{1}{T}\right|$ 来确定。临界稳定时, K^* 是 $K^* = \prod_{i=1}^n |s - p_i| = \left|s + \frac{1}{T}\right|^n$ 中最小值。因为当 K^* 不取最小值时, 必有根轨迹到达右半面而使系统不稳定。显然, 和实轴夹角为 $\frac{\pi}{n}$ 的射线与虚轴的交点 s_1 使 $\left|s + \frac{1}{T}\right|$ 最小, 此时可以得到临界稳定 K^* 的取值。根据三角关系

$$\left|s_1 + \frac{1}{T}\right| = \frac{1}{T} \sec \frac{\pi}{n}$$

此时

$$K^* = \frac{1}{T^n} \left(\sec \frac{\pi}{n}\right)^n,$$

得到

$$K = T^n K^* = \left(\sec \frac{\pi}{n}\right)^n$$

12, 运用根轨迹分析系统动态性能, 直接由闭环零、极点, 利用主导极点、偶极子概念以及一、二阶系统时域分析理论来完成。应当注意有些情况, 例如非单位反馈系统, 闭环零点不一定等于开环零点。

主导极点的主导地位和偶极子的耦合程度将直接影响性能指标的估算精度。为了提高估算精度也可以保留较多的(如三个)闭环极点, 在二阶估算的基础上给以大体上的修正。

13, 本章总线索可用图 4-10 予以总结

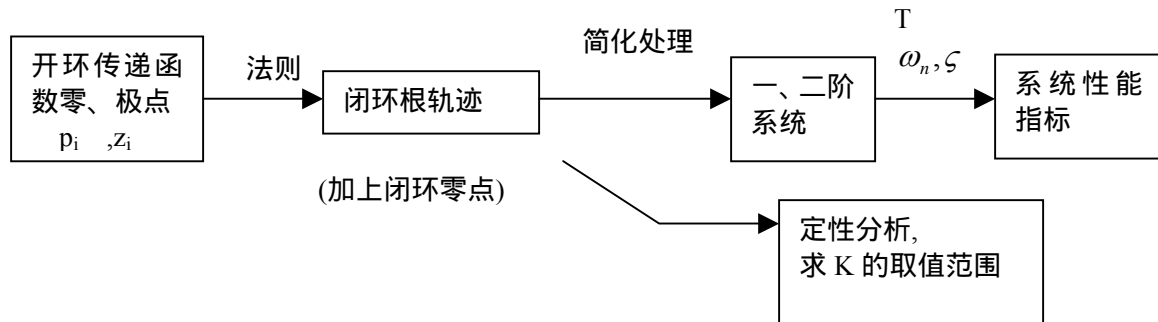


图 4-10 本章总线索

图中“法则”是指绘制根轨迹的基本法则, “简化处理”是指利用主导极点和偶极子的概念, 将高阶系统近似地看成一阶或二阶系统。“定性分析”可以包含阶跃响应的不同形式对 K 取值的要求, 例如阶跃响应单调收敛, 振荡收敛, 最佳阻尼比, 系统稳定等。