北京航空航天大学

2013－2014 学年第一学期期中

《 工科数学分析(I) 》

试卷

班号____________ 学号___________ 姓名__________ 成绩__________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2013 年 11 月 27 日

一 （总 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1．用“e- N”定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$

证明：$\forall\varepsilon>0,$ 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1,$ 则 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1}{n\cdot n\cdots n\cdot n}\le\frac{1}{n}<\varepsilon$$

2．计算极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x^2e^x)}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2e^x)}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2e^x}{\frac{1}{2}x^2}}=e^2$

3．设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}.$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t;$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d(2t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=2\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{\frac{1}{1+t^2}}=2(1+t^2).$$

4．求函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x).$

解：$f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{4}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3})=\frac{1}{4}(-1)^nn![\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+3)^{n+1}}]$

5. 利用 Taylor 展开式，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}.$

解：

$$\because \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + (-\frac{x^2}{2}) + \frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8})x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

6. 求函数 $y = x\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 的微分 dy.

解：$\because y' = \sqrt{x+\sqrt{x}} + x\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}),$

$$\therefore dy = (\sqrt{x+\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}})dx$$

7. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x > 0, \\ ax^2, & x \le 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性和可导性.

解：$\because \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} xe^x = 0, \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} ax^2 = 0,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0 = f(0),$ 从而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

$$\because f'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x e^{\Delta x}}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{a\Delta x^2}{\Delta x} = 0,$$

$\therefore f'_+(0) \ne f'_-(0),$ 从而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

8.求证:方程 $x + 3 + \dfrac{1}{2}\cos x = 0$ 有且只有一个实根.

证明：设 $f(x)=x+3+\frac{1}{2}\cos x$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，

且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$

又因为在 $(-\infty,+\infty)$ 上， $f'(x)=1-\frac{1}{2}\sin x>0,$ 即函数 $f(x)$ 严格单调递增,

所以方程 $x+3+\frac{1}{2}\cos x=0$ 有且只有一个实根.

二.（**本题 10 分**）

（1）证明：$\ln(1+x)<x\ (x>0);$

（2）设 $x_1>0,\ x_{n+1}=\ln(1+x_n)\ (n=1,2,\ldots),$ 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$；

（3）利用 Stolz 定理证明：$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=2.$

证明：（1）设 $f(t)=\ln(1+t)-t, (t>0)$ 则 $f'(t)=\frac{1}{1+t}-1<0, (t>0)$

从而 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上严格单调递减，$f(x)<f(0)=0$，即 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$.

（2）$x_1>0$，则 $x_n>0$，且由（1）的结论，$x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n (n=1,2,\ldots),$ 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界必有极限 $\{x_n\}$ 收敛，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，则 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ 两边取极限得，$A=\ln(1+A),$ 显然 $A=0.$

(3)因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$,由 STOLZ 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}-x_n}{x_n x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}-\ln(1+x_{n-1})}{x_{n-1}\ln(1+x_{n-1})}$$

而 $$\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n}=\frac{1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=2.$

三、（**本题 10 分**）

设数列 $b_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|,\quad n=1,2,\cdots$ 且 $\{b_n\}$ 有界，证明：数列 $\{a_n\}$ 与

$\{b_n\}$都收敛.

证明：（1）因为$\{b_n\}$是递增有界数列，有单调有界定理，数列$\{b_n\}$收敛.

（2）由（1），由数列极限的柯西准则（必要性），$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N, \forall n > N,$ 对任何正整数 p，有

$$|b_{n+p} - b_n| < \varepsilon, \text{即}$$

$$\left|a_{n+p} - a_{n+p-1}\right| + \left|a_{n+p-2} - a_{n+p-3}\right| + \cdots + \left|a_{n+1} - a_n\right| < \varepsilon,$$

于是有

$$\begin{aligned}\left|a_{n+p} - a_n\right| &= | a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n | \\ &\le | a_{n+p} - a_{n+p-1} | + | a_{n+p-1} - a_{n+p-2} | + \cdots + | a_{n+1} - a_n | \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

于是由数列极限的柯西准则（充分性），可知数列$\{a_n\}$也是收敛的。

四（本题 10 分）

假设函数 $y = \arctan x,\ x \in (-\infty, +\infty)$，

(1) 讨论函数的凹凸性；（2）证明函数在$(-\infty, +\infty)$上一致连续.

(2) 讨论函数的凹凸性；（2）证明函数在$(-\infty, +\infty)$上一致连续.

证明：（1）因为$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y'' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$,

当$x \ge 0$时，$y'' \le 0,$ 那么函数在$[0, +\infty)$ 上凹；

当$x \le 0$时，$y'' \ge 0,$ 那么函数在$[0, +\infty)$ 上凸。

（2）根据中值定理，$\forall x_1, x_2, x_1 < x_2,$ **在**$[x_1, x_2] \in (-\infty, +\infty)$ **上，**

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_2 - x_1), \quad \exists \xi \in (x_1, x_2)$$

$$\text{由于} 0 < \frac{1}{1+\xi^2} < 1, \quad \therefore \left|\arctan x_2 - \arctan x_1\right| \le \left|x_2 - x_1\right|$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon, \text{当}\left|x_2 - x_1\right| < \delta \text{时}, \left|\arctan x_2 - \arctan x_1\right| < \varepsilon$$

五（本题 10 分）

假设函数 $f(x)$在$[0,1]$上存在二阶导数，且有 $f(0) = f(1),\ \left|f''(x)\right| \le M\ (0 \le x \le 1),$

求证$\left|f'(x)\right| \le \dfrac{M}{2}\ (0 \le x \le 1).$

证明：分析：由于结论涉及任意点x上的导数值，故应在点x处展开 Taylor 公式。又因为已知$f(0)=f(1)$,所以应在$0,\ 1$处取值。因此

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_1)(1-x)^2}{2}\quad x_1\text{介于}0\text{与}x\text{之间；}$$

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi_2)(-x)^2}{2},\quad x_2\text{介于}0\text{与}x\text{之间；}$$

上面两式相减得到，

$$f'(x)=\frac{f''(\xi_2)x^2-f''(\xi_1)(1-x)^2}{2},$$

从而易得$\left|f'(x)\right|\le\dfrac{M}{2}\ \ (0\le x\le 1).$

六（本题 10 分）

设用某种仪器进行测量时,得到n次试验数据$a_1,a_2,\cdots a_n$.问以怎样的数值x表达所要测量的真实值,才能使它与这n个数之差的平方和为最小.

解：设x与n个数之差的平方和为 $S(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$.则

$$S'(x)=2(x-a_1)+2(x-a_2)+\cdots+2(x-a_n),$$

可得到 $x=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$,

这是唯一的驻点，而且是最小值点。

七（本题 10 分）

假设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$二次可导，且$f(0)=f(1)=0$,对$\forall x\in(0,1)$,都有$f''(x)<0$,若$M>0$为$f(x)$在$[0,1]$的最大值，证明：

（1） 对于任意自然数n，存在唯一$x_n\in(0,1)$，满足$f'(x_n)=\dfrac{M}{n}$;

（2） $\lim\limits_{n}x_n$存在，且$f(\lim\limits_{n}x_n)=M$.

证明：1）设 $F(x)=f(x)-\frac{M}{n}x,\ f(x_M)=M$

$$F(1)=-\frac{M}{n}<0, F(x_M)=M\left(1-\frac{x_M}{n}\right)>0$$

因此，$\exists\eta\in(0,1),F(\eta)=0$

$$\begin{cases}F(0)=0\\F(\eta)=0\end{cases}\Rightarrow F'(x_n)=0,x_n\in(0,1)\qquad f'(x_n)=\frac{M}{n}$$

下面证明唯一性：若 $x_n\in(0,1),y_n\in(0,1),f'(x_n)=\frac{M}{n},f'(y_n)=\frac{M}{n}$

$f''(\alpha)=0,\alpha\in(0,1)$

矛盾，因此唯一性得证

2）设 $x_n\in(0,1),x_{n+1}\in(0,1),f'(x_n)=\frac{M}{n},f'(x_{n+1})=\frac{M}{n+1}$

$\Rightarrow f'(x_{n+1})<f'(x_n)$

又 $f''<0,\ x_{n+1}>x_n$

$\{x_n\}$极限存在 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

$\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=f'(a)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{n}=0$(根据海涅定理)

$f(0)=f(1)=0$，因此最大值点只有在$(0,1)$,设$b\in(0,1),f(b)=M,f'(b)=0$

$$\begin{cases}f'(a)=0\\f'(b)=0\end{cases}\Rightarrow f''(\mu)=0,\mu\in(0,1)$$

因此 $a=b$