# §8.4 瑕积分的收敛判别法

设$f(x)$在区间$(a,b]$上有定义，而在点 $a$的右邻域内无界，但对$\forall \varepsilon \in (0,b-a)$, $f(x)$在$[a+\varepsilon,b]$上可积,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

如$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$存在, 称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$收敛.

当极限不存在时,称瑕积分发散.

如何判断瑕积分的敛散性?

设$a$是$f$的瑕点，作代换$x = a + \frac{1}{y}$，那么

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = -\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a + \frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}dy$$

$$= \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a + \frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}dy$$

瑕积分 $\to$ 无穷积分

约定：积分下限$a$是瑕点，$f, g \in R[a+\varepsilon, b]$

## 定理10.2' (比较审敛法)

设$0 \le f(x) \le g(x)$, ($x > a$且充分靠近$a$), 那么

$1^o$ 若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛

$2^o$ 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散 $\Rightarrow \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散

常用的比较对象:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \ (a>0) \begin{cases} \text{当 } p<1 \text{ 时收敛;} \\ \text{当 } P \ge 1 \text{ 时发散.} \end{cases}$$

## 定理10.3′（比较审敛法的极限形式）

设$f, g \geq 0$，且$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$，则

$1^\circ$ $0 < l < +\infty$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同敛散；

$2^\circ$ $l = 0$，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛$\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；

$3^\circ$ $l = +\infty$，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散$\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

定理10.5′ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Leftrightarrow$ 对$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，

只要$0 < \eta < \delta, 0 < \eta' < \delta$，总有$\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

定理10.6' $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛

绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛. 收敛 $\cancel{\Rightarrow}$ 绝对收敛.

定理10.9' (Dirichlet判别法)

设$f$和$g$满足下面两个条件：

$1^\circ$ $\exists M>0$, 使得对$\forall 0<\eta<b-a$有$\left|\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x\right|<M$;

$2^\circ$ $g$在$(a,b]$上单调, 且$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$,

则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

## 定理11.10' (Abel判别法)

设$f$和$g$满足下面两个条件：

$1^\circ$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛,

$2^\circ$ $g(x)$在$(a,b]$中单调有界,

则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

瑕点为积分上限或者中间值时,有类似的结果.

比较审敛法及其极限形式的例子略去

**例1** 研究 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 的敛散性.

**解** 当$p<1$时, $x=0$是瑕点; 当$q<1$时, $x=1$是瑕点.

故取$a\in(0,1)$, 把积分拆成两部分：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$+\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

当$x\to 0$时, $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1}$,

故当$p>0$时, 第一个积分收敛;

当$x \to 1$时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$，

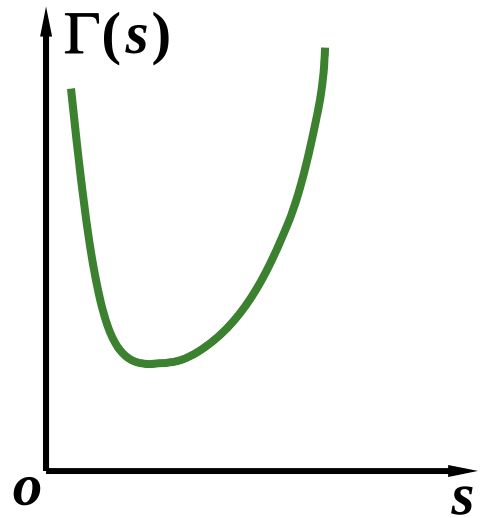
故当$q>0$时，第二个积分收敛；

因此原积分在$p>0, q>0$时收敛.

故积分定义了一个二元函数$B(p,q)$——Beta函数

例2 $\Gamma$－函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx \quad (s>0)$$



**例 3:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)}dx$

解: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{(1-x^2)}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)}dx$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(1-x^2)} = -\frac{1}{2}$, 可见x=1不是瑕点。

而对于$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{(1-x^2)}dx$, $\displaystyle\left|\frac{\ln x}{(1-x^2)}\right| \le 2|\ln x|$(根据$(1-x^2)$在$[0,\frac{1}{2}]$有最大值)

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[x\ln x - x\right]_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 存在

所以 原积分收敛。

例4：$\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1+x)}{x(1+x)} dx$

解：$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\ln x \ln(1+x)}{x(1+x)}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{4}} \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}} = -4 \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x x^{-\frac{1}{4}-1}} = 0$ 收敛

例5：$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos\frac{1}{x}}{x} dx$

解：$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos\frac{1}{x}}{x} dx = \int_0^{1} \frac{\sin x \cos\frac{1}{x}}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x \cos\frac{1}{x}}{x} dx$

收敛

例5：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$

解：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx=\int_0^{1}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$

$\lim\limits_{x\to 0} x^{m-2}\left(\frac{\sin^2 x}{x^m}\right)=1, m-2<1,$ 即 $m<3,$ 积分收敛，

由于 $\left|\frac{\sin^2 x}{x^m}\right|\le\frac{1}{x^m},\ \ m>1$ 积分收敛，

而 $m\le 1, \frac{\sin^2 x}{x^m}=\frac{1-\cos 2x}{x^m},$ 积分发散，

所以，当**1<m<3**时，原积分收敛。

例6: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{(1-x)^2\sqrt{x}}dx$

解: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\ln x}{(1-x)^2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}}=\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{4}}\ln x=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}}=-4\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{-\frac{1}{4}}}=0$ 收敛

例7: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$

解: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}}=\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{4}}\ln\sin x=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{4}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^{\frac{1}{4}+1}\cos x}{\sin x}=1$

收敛

**例8** 设$p>0$, 讨论积分$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx$的敛散性.

**解** 易见$x=0$是瑕点, 作变换$\frac{1}{x}=t$, 得

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}dt$$

$1^o$. 当$p\geq 2$时, 积分发散

$\because$若取$A'=2k\pi$, $A''=2(k+1)\pi$, 那么当$k\to\infty$时,

$$\left|\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} t^{p-2}\sin t\,dt\right|\geq (2k\pi)^{p-2}\int_0^{\pi}\sin t\,dt$$

$$=2(2k\pi)^{p-2}\geq 2,$$

由 $Cauchy$ 收敛原理，当 $p \geq 2$ 时,积分发散.

$2^o$. 当 $0 < p < 1$ 时,积分绝对收敛

$$\because \left|\frac{\sin t}{t^{2-p}}\right| \leq \frac{1}{t^{2-p}} \quad \therefore \text{由比较判别法可知 .}$$

$3^o$. 当 $1 \leq p < 2$ 时,积分条件收敛

$\because$ 当 $1 \leq p < 2$ 时, $t^{p-2}$ 单调地趋于0,

$\therefore$ 由Dirichlet判别法,积分收敛.

而此时, $\int_1^{+\infty} \frac{|\mathrm{sint}|}{\mathrm{t}^{2\text{-}\mathrm{p}}} dt$ 是发散的,所以…

例9：$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x} \sin x dx$　讨论绝对收敛

解：$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x} \sin x dx = \int_0^{1} \frac{\ln x}{x} \sin x dx + \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} \sin x dx$

（1）$\int_0^{1} \frac{\ln x}{x} \sin x dx$　绝对收敛

（2）但，$\exists A, x > A, \left|\frac{\ln x}{x} \sin x\right| \geq \frac{\ln x}{x} \sin^2 x = \frac{\ln x}{2x} - \frac{\ln x}{2x} \cos 2x$

$\int_1^{\infty} \left|\frac{\ln x}{x} \sin x\right| dx$　发散

$\forall A > 0, \left|\int_0^{A} \sin x\right| \leq 2$　$\left\{\frac{\ln x}{x}\right\}$ 单调递减趋于 0

所以原积分条件收敛。

**例10** 设 $\alpha > 0$, 讨论积分

$$I = \int_0^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right]dx$$的敛散性.

**解** 易见 $x = 0$ 是瑕点, 为此, 把积分分成两部分：

$$I = \int_0^{1}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right]dx+\int_1^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right]dx$$

$$= I_1 + I_2$$

现讨论 $I_1$ 的收敛性

显然 $I_1$ 的收敛性和 $I_1' = \int_0^1 \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha} dx$ 的收敛性相同.

因为当 $x \to 0$时, $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)$, (注: $o(x^5)$也可以)

所以 $1 - \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3!}x^2 + O(x^4) = \frac{1}{6}x^2(1 + O(x^2))$.

因而当 $x \to 0$时, $\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha} \sim \left(\frac{1}{6}\right)^{-\alpha} x^{-2\alpha}$.

故当 $\alpha < \frac{1}{2}$时, $I_1'$收敛.

由于 $\frac{\sin x}{x} \le 1$, 故$I_1'$绝对收敛.

再讨论 $I_2$ 的收敛性 $\because |\frac{\sin x}{x}|<1$, 由二项式展开得

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}=1+\alpha\frac{\sin x}{x}+O(\frac{1}{x^2}).$$

所以 $$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1=\alpha\frac{\sin x}{x}+O(\frac{1}{x^2}).$$

因为积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$条件收敛,

$\int_1^{+\infty}O(\frac{1}{x^2})dx$ 绝对收敛,

所以 $I_2$条件收敛. 故 $I$当$0<\alpha<\frac{1}{2}$时条件收敛.

## 无穷积分的*Cauchy*主值

如果极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx$存在,称此极限为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 的*Cauchy*主值. 记为:

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

例如: $\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}dx = 0.$

## 瑕积分的*Cauchy*主值

设$c$是$f$在区间$[a,b]$中的唯一瑕点，定义

$$\mathrm{V.P.}\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right).$$

例如： $\mathrm{V.P.}\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{\varepsilon}^1\frac{1}{x}dx\right)=0.$

# 作业

**习题8.4**

1、 **(1) (3)(5)(7) (9);**

2、 **(1)(5)(6) ;**

3、 **(1)(3)(5)(8);**

4、 **(2)(3);**

5.