第三章

时域分析法（2）

3-3 系统稳定性分析

一、有界输入有界输出稳定性

1. 稳定性的概念

定义：一信号$x(t)$ 称为是有界的，是指存在正实数M，使得

$$|x(t)| \leq M, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

定义：一系统称为是有界输入有界输出稳定的(BIBO stable)， 若对任意有界输入，其输出也是有界的。

2. 稳定性判据

定理： 设一个LTI系统的闭环传递函数为$G(s)$的脉冲响应函数为$g(t)$。则该闭环系统稳定的充分必要条件是

$$\int_0^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$$

证明： 参见 Li Qiu and Kemin Zhou, *Introduction to feedback control*, Chapter 3。

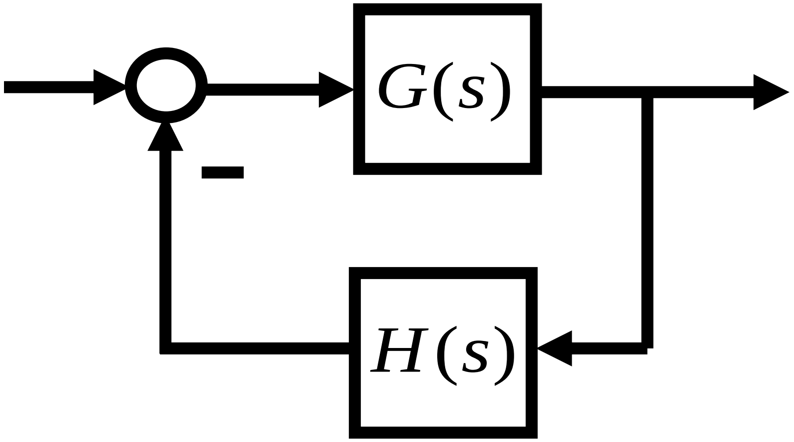
定理：设一个LTI系统的闭环传递函数为$G(s)$。则该闭环系统稳定的充分必要条件是$G(s)$正则且其所有极点均严格位于左半平面($\Leftrightarrow$所有极点具有负实部)（证明参见：Li Qiu and Kemin Zhou, *Introduction to feedback control*, Chapter 3）。

例：讨论如下系统的稳定性及单位阶跃响应：

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)};\quad G(s)=\frac{1}{(s-1)};\quad G(s)=\frac{1}{(s^2+1)}$$

3. 劳斯稳定性判据

考虑如下典型反馈系统：



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

劳斯表的构造：

(1) 记闭环特征多项式如下：

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

这里，假设$a_n>0$，即无零根。

(2) 检查$D(s)$所有系数是否全为正(或负)。若符号不一致，系统不稳定。

(3) 若$D(s)$的所有系数均为正，构造劳斯表如下：

$$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0,\ a_n>0$$

劳斯表：

$$\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
s^0 & g_1=a_n & & & &
\end{array}$$

$$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

劳斯表：

$$
\begin{array}{cccccc}
s^n & \boxed{\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_2 \\ a_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_4 \\ a_5 \end{matrix} & \begin{matrix} a_6 \\ a_7 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} \\
s^{n-1} & & & & & \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
s^0 & g_1=a_n & & & &
\end{array}
$$

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}$$

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

劳斯表：

$$
\begin{array}{cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
s^0 & g_1 = a_n & & & &
\end{array}
$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

劳斯表：

$$\begin{array}{c|cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
s^0 & g_1 = a_n & & & &
\end{array}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

以此类推，直到将所有b_i全部求出。

以前两行为基础，按以上方法，可依次得到 c_i 、d_i 等等：

劳斯表：

$$
\begin{array}{lccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
s^0 & c_{1,n+1} = a_n & & & &
\end{array}
$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$D(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

劳斯表：

$$\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
s^0 & g_1=a_n & & & &
\end{array}$$

$$c_2=\frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1}$$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

劳斯表：

$$\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
s^0 & g_1 = a_n & & & &
\end{array}$$

$$b_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

这一过程持续到劳斯表的第n行：

劳斯表：

$$
\begin{array}{c|c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \cdots \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 = a_n & & & &
\end{array}
$$

劳斯判据

1. 闭环系统稳定当且仅当

   (1) $D(s)$ 的所有系数为正；

   (2) 劳斯表的第一列的所有系数为正。

2. $D(\mathrm{s})$ 正实部根的个数等于劳斯表第一列系数符号改变的次数。

例：考虑 如下闭环多项式

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

确定其稳定性。

例：二阶系统的特征多项式如下：

$$D(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2$$

其劳斯表为

$$\begin{array}{lll} s^2 & a_0 & a_2 \\ s^1 & a_1 & \\ s^0 & a_2 & \end{array}$$

二阶系统只要系数均大于零就稳定。

例：三阶系统的特征多项式如下：

$$D(s)=a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3$$

其劳斯表为

$$\begin{array}{lll} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & c_1 & \end{array}$$

其中，

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} \qquad c_1=\frac{b_1a_3}{b_1}=a_3$$

故三阶系统稳定⇔系数均大于零且

$$a_1a_2-a_0a_3>0$$

例：某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

判断其稳定性。

4. 劳斯表判据的特殊情况

下列情形需要对劳斯判据进行修正。

(1) 第一列某个元素为零，但该行其它元素非零或该行只有此一零元素；

(2) 某行的元素全为零。

情形1：

此时，将零元素用非常小的正数 ε 代替即可。

例：

$$D(s)=s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10$$

s^5	1	2	11
s^4	2	4	10
s^3	$0\approx\varepsilon$	6	
s^2	c_1	10	
s	d_1		
s^0	10		

其中，$\varepsilon\to 0$

$$c_1=\frac{4\varepsilon-12}{\varepsilon}<0$$

$$d_1=\frac{6c_1-10\varepsilon}{c_1}\to 6>0$$

第一列有两次变号，有两个根在右半平面。

例：

$$D(s)=s^3+2s^2+s+2$$

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0\approx\varepsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

问题：系统是否稳定？

此例中，$\varepsilon>0$ 第一列不变号，这表明系统有一对纯虚根。

情形2：某一行元素全为零

例：$D(s)=s^6+s^5-2s^4-3s^3-7s^2-4s-4=0$

$$\begin{array}{lrrrr} s^6 & 1 & -2 & -7 & -4 \\ s^5 & 1 & -3 & -4 & \\ s^4 & 1 & -3 & -4 & \\ s^3 & 0 & 0 & & \end{array}$$

由s^4 行，构造辅助函数：

$$P(s)=s^4-3s^2-4$$

进而，考虑

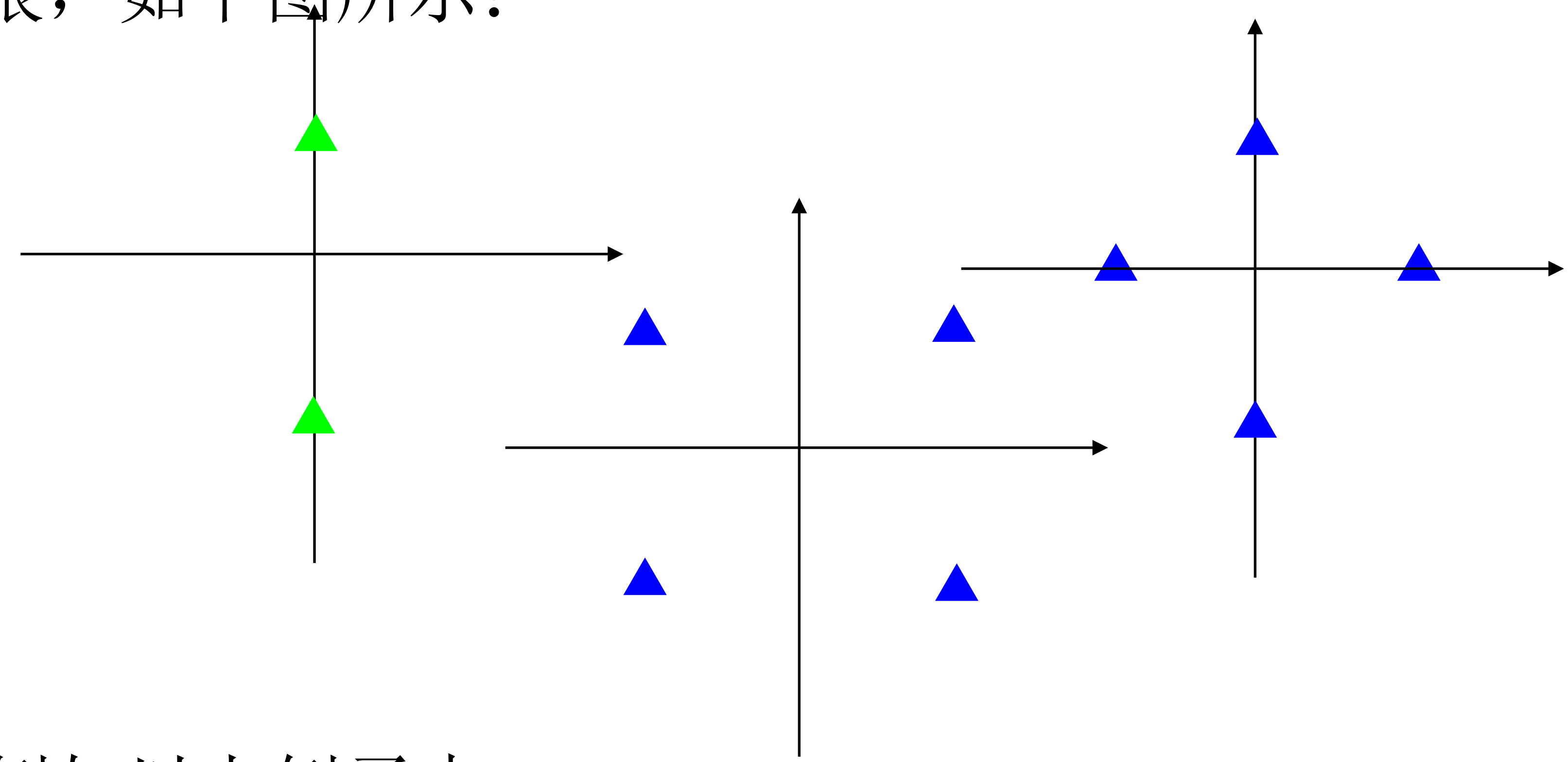
$$dP(s)/ds=4s^3-6s$$

令 s^3 行用 $4s^3-6s$ 代替，则

s^6	1	–2	–7	–4
s^5	1	–3	–4	
s^4	1	–3	–4	
s^3	4	–6		
s^2	–1.5	–4		
s^1	–16.7	0		
s^0	–4			

有一次变号，故有一个根位于右半平面(正实部根)。

一般地，一行元素均为零表明存在关于虚轴对称的根，如下图所示：



例如以上例子中，

$$(s+2)(s-2)(s+j)(s-j)(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3})/4$$

例：考虑如下多项式：

$$D(s)=s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$$

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

由第二行得到辅助多项式：

$$P(s)=2s^4+48s^2-50$$

因此，

$$dP(s)/ds=8s^3+96s$$

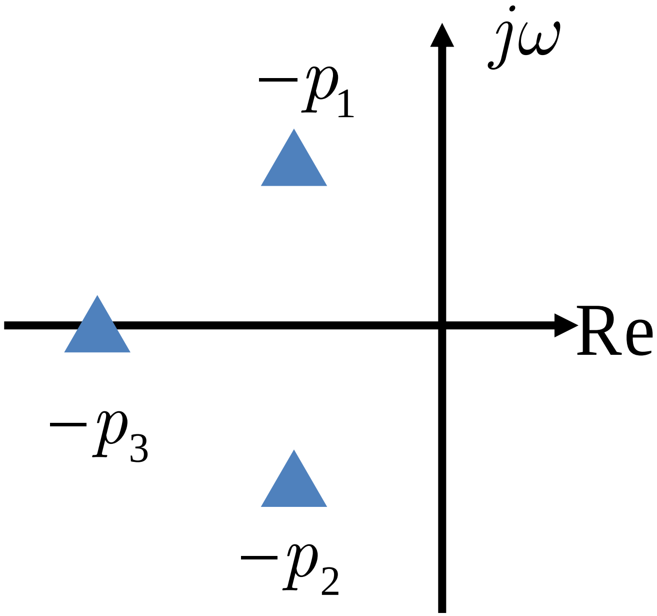
令 s^3 行用 $4s^3+96s$代替，得到

$$
\begin{array}{lccc}
s^5 & 1 & 24 & -25 \\
s^4 & 2 & 48 & -50 \\
s^3 & 8 & 96 & \\
s^2 & 24 & -50 & \\
s & 112.7 & & \\
s^0 & -50 & &
\end{array}
$$

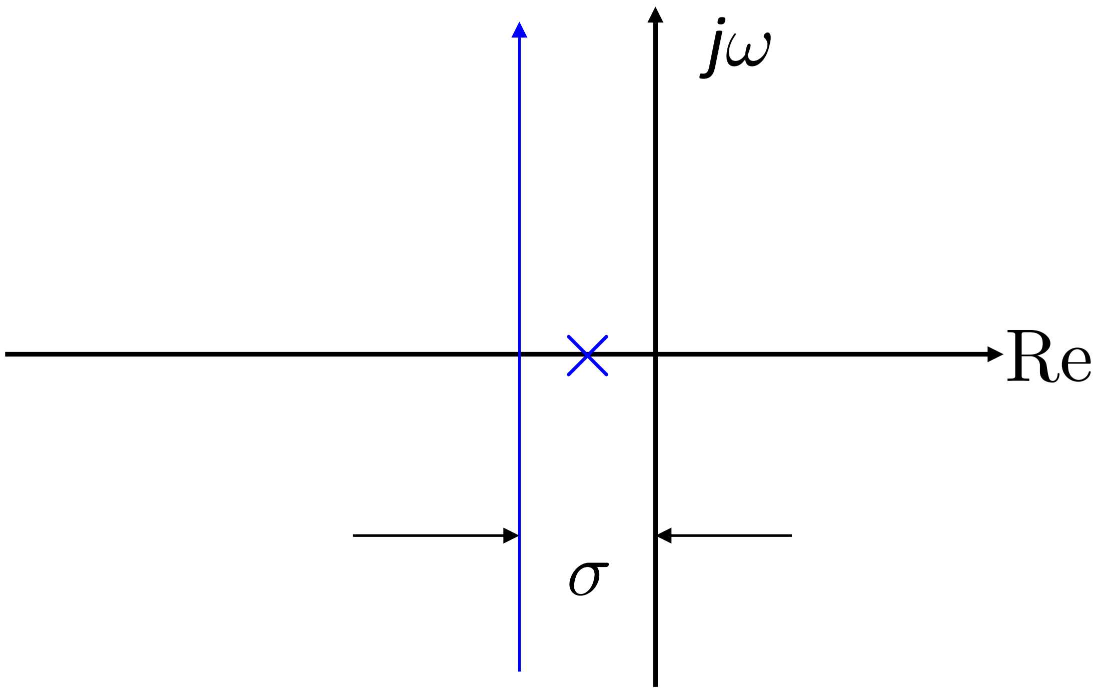
有一个根位于右半平面，两个根在虚轴上。事实上，

$$D(s)=(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)(s+2)$$

二、相对稳定性分析



极点$-p_3$ 相对极点 $-p_1$ 和 $-p_2$ “更稳定”。

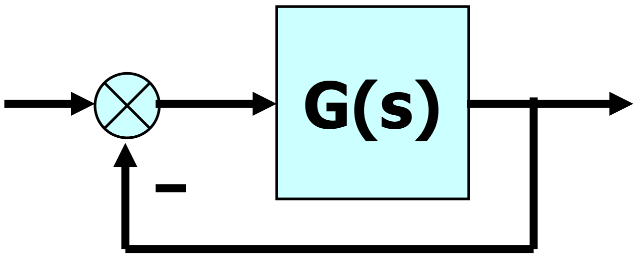


为了检验相对稳定性，可将纵轴左移，如图所示。

$$s = \hat{s} - \sigma \Rightarrow \hat{s} = s + \sigma$$

其中，$\sigma>0$ 意味若要在 $\hat{s}$-平面稳定，对系统参数要有更多的限制。

例：考虑如下单位负反馈系统：



$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}$$

试确定使系统稳定时K的取值范围。

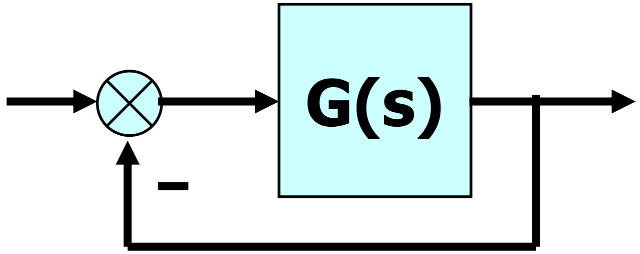
解：闭环特征方程是：

$$0.025s^3+0.35s^2+s+K=0$$

1) $K>0$

2) $0.35-0.025K>0 \quad \Rightarrow \quad K<14$

稳定时 $\quad 0<K<14$



$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}$$

若要求系统所有闭环根均比-1小，K的取值范围是多少？

闭环特征方程：

$$0.025s^3+0.35s^2+s+K=0$$

令 $s=\hat{s}-1$，

$$\hat{s}^3+11\hat{s}^2+15\hat{s}+(40K-27)=0$$

$$a_i>0,\quad K>0.675$$

$$11\times 15-(40K-27)>0$$

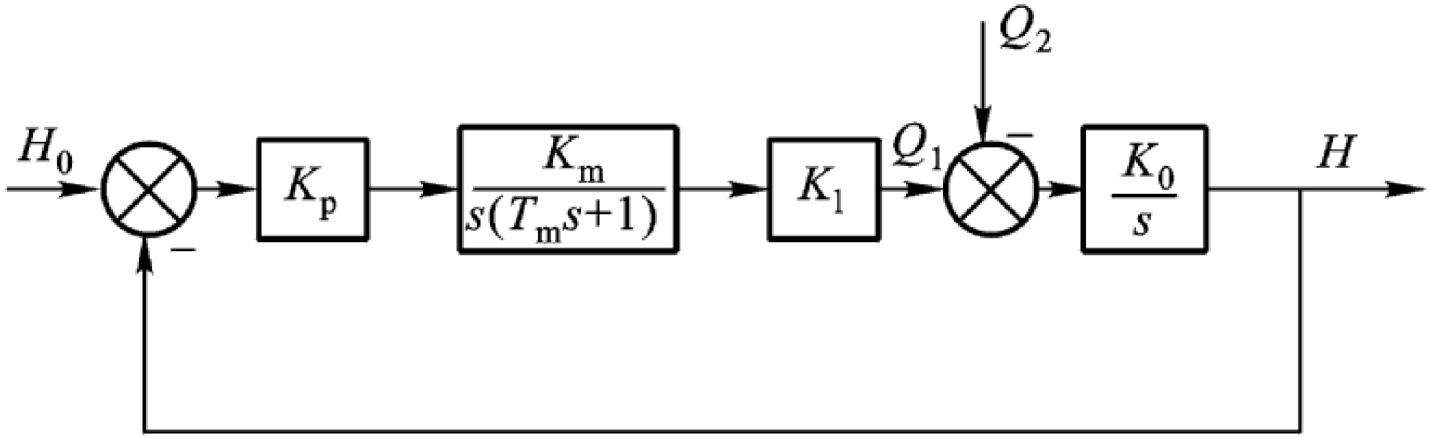
$$K<4.8$$

The range of K is $0.675<K<4.8$

四、结构不稳定及改进措施

某些系统，仅靠调整参数仍无法稳定，称结构不稳定系统。

例：液位控制系统：



该系统的闭环特征方程为：

$$T_m s^3 + s^2 + K_p K_m K_1 K_0 = 0$$

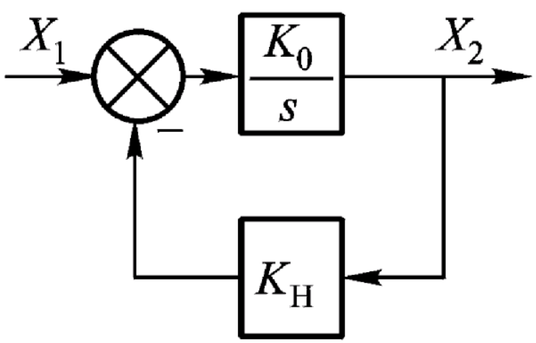
系数缺项，显然不满足系统稳定的必要条件，且无论怎么调整系统参数，都不能使系统稳定。

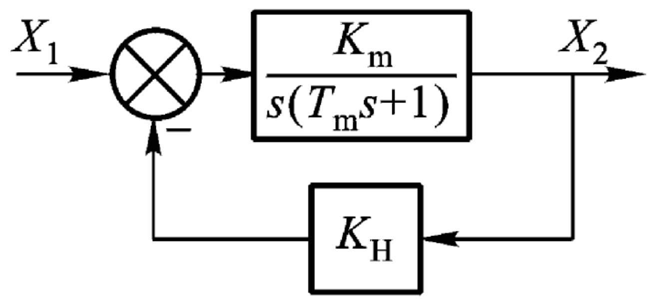
消除结构不稳定的措施有两种：

- 改变积分性质
- 引入比例—微分控制，补上特征方程中的缺项。

1. 改变积分性质

用反馈K_H包围积分环节或者包围电动机的传递函数，破坏其积分性质。



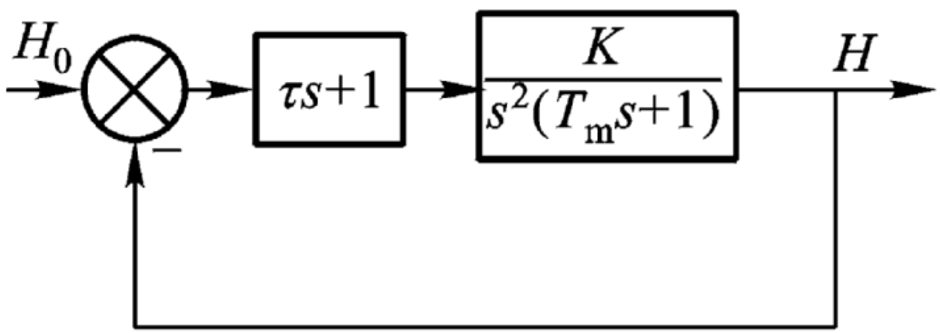


$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)}=\frac{K_0}{s+K_0K_H}$$

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)}=\frac{K_m}{(T_ms+1)s+K_mK_H}$$

2. 引入比例 - 微分控制

在原系统的前向通路中引入比例一微分控制:



$$\frac{H(s)}{H_0(s)}=\frac{K(\tau s+1)}{s^2(T_m s+1)+K(\tau s+1)}$$

其闭环特征方程为：

$$T_m s^3 + s^2 + K\tau s + K = 0$$

由稳定的充分必要条件：

$$\tau > T_m$$

引入比例一微分控制后，补上了特征方程中s的一次项系数。只要适当匹配参数，满足上述条件，系统就可以稳定。