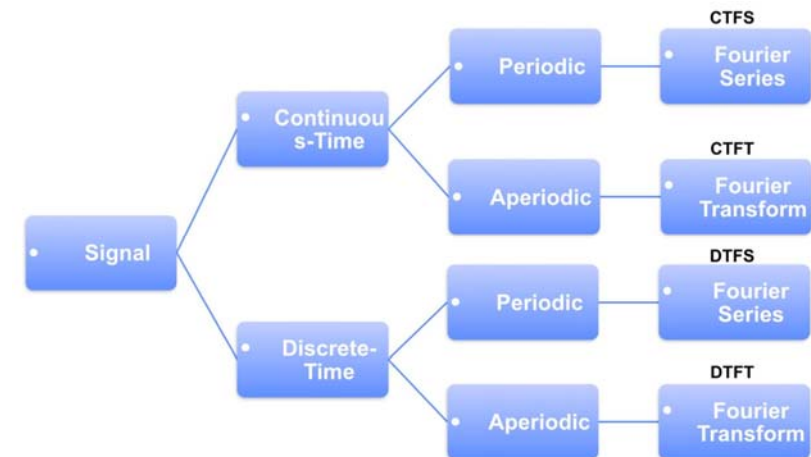


数字信号处理

——第5讲

傅里叶变换基本体系

❖ FT-功率信号，FS-能量信号

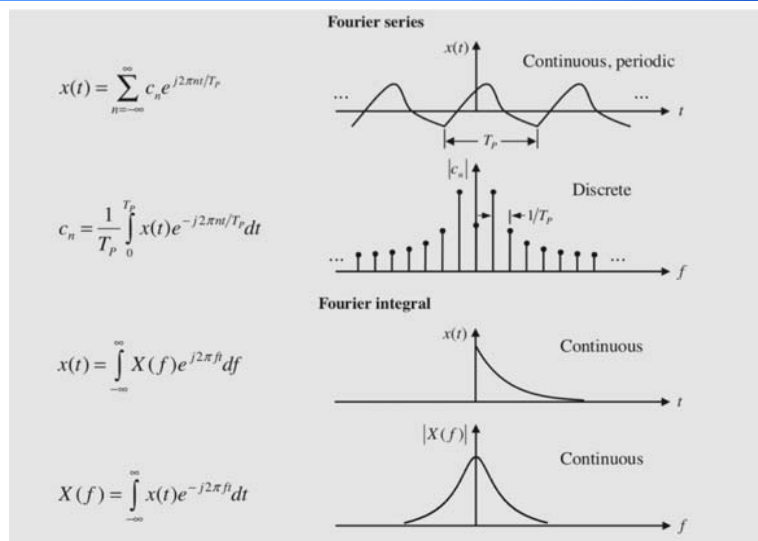


2019/3/19

数字信号处理 北京航空航天大学

2

傅里叶变换基本体系

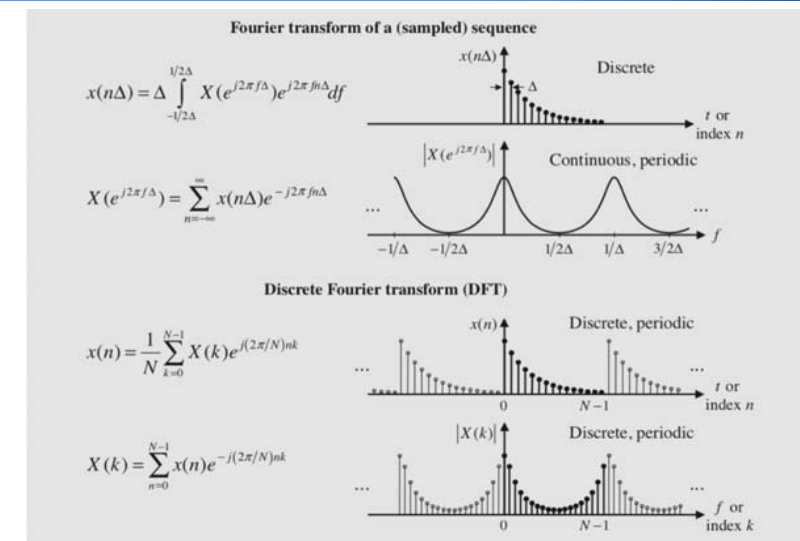


2019/3/19

数字信号处理 北京航空航天大学

3

傅里叶变换基本体系



2019/3/19

数字信号处理 北京航空航天大学

4

❖ Summary of Fourier Representation of Signals.

	Continuous-time signals		Discrete-time signals	
	Time-domain	Frequency-domain	Time-domain	Frequency-domain
Periodic signals	$x(t)$ $c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$ $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	c_k $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$	$x[n]$ $c_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$	c_k $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
Fourier transforms	Continuous and periodic	Discrete and aperiodic	Discrete and periodic	Discrete and periodic
Aperiodic signals	$x(t)$ $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$	$X(j\Omega)$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$	$x[n]$ $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$	$X(e^{j\omega})$ $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$
Fourier transforms	Continuous and aperiodic	Continuous and aperiodic	Discrete and aperiodic	Continuous and periodic

2019/3/19

数字信号处理 北京航空航天大学

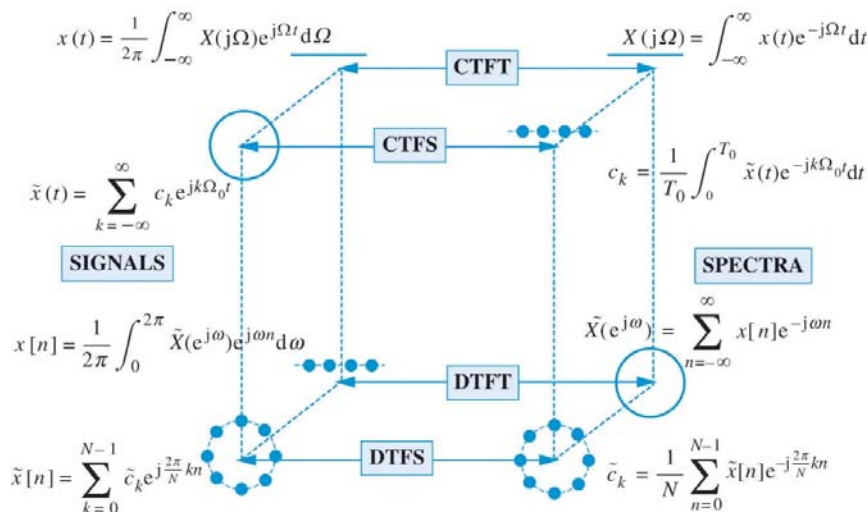
5

	Direct transform (spectral analysis)	Inverse transform (signal reconstruction)	Exact computation
DTFS	$\tilde{c}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ finite summation	$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ finite summation	yes
DTFT	$\tilde{X}(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ infinite summation	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{X}(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ integration	no
CTFS	$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \tilde{x}_c(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$ integration	$\tilde{x}_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$ infinite summation	no
CTFT	$X_c(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\Omega t} dt$ integration	$x_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$ integration	no

2019/3/19

数字信号处理 北京航空航天大学

6



2019/3/19

数字信号处理 北京航空航天大学

7

❖ DTFT与IDTFT

- DTFT与IDTFT:
- DTFT的存在条件:
- DTFT的表示方法:

2019/3/19

数字信号处理 北京航空航天大学

8

❖ DTFT与IDTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \iff x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

证明:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]e^{-j\omega l} \right] e^{j\omega n} d\omega \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega l} e^{j\omega n} d\omega = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \frac{\sin \pi(n-l)}{\pi(n-l)} \\ \frac{\sin \pi(n-l)}{\pi(n-l)} &= \begin{cases} 1 & n=l \\ 0 & n \neq l \end{cases} \implies = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \delta[n-l] = x[n] \end{aligned}$$

❖ 充分条件: 序列 $x[n]$ 是绝对可和, 或者说序列能量有限, 离散时间信号 $x[n]$ 存在的傅立叶变换。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{or} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \implies X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

证明:

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot |e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

❖ 表示方法及对称性:

➤ 幅度与相位:

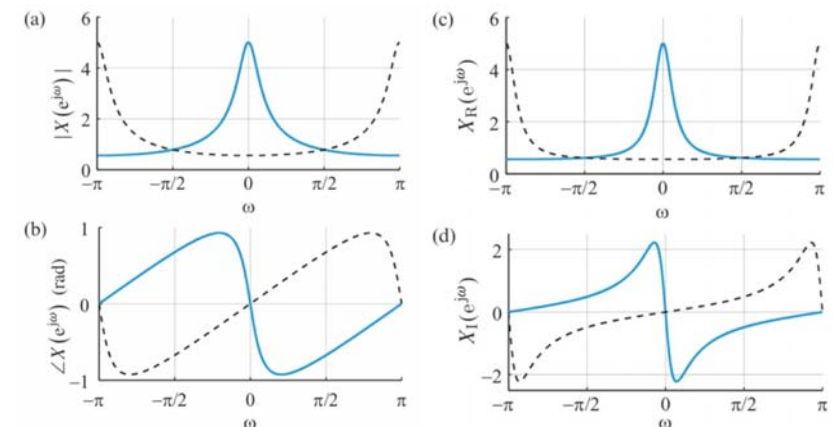
$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]}$$

➤ 实部与虚部:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

➤ 频谱对称性

❖ 表示方法及对称性: $x[n] = a^n u[n] \iff X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$



傅里叶变换的主要性质

❖ DTFT性质

➤ 自身性质

周期性、对称性、时间移位、频域相移等

➤ 符合运算

线性、时域卷积、频域卷积、Parseval定理等

傅里叶变换的主要性质

❖ 周期性

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi M)}) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{j\omega} = e^{j(\omega+2\pi M)}$$

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi M)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi M)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} e^{-j2\pi Mn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \cdot 1 = X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

傅里叶变换的主要性质

❖ Parseval定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

证明:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \right]^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{j\omega}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^*[n]x[n] &= |x[n]|^2 \\ Y^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) &= |Y(e^{j\omega})|^2 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned}$$

体现了数字信号在时域和频域的“能量”相等关系，是能量守恒定律在数字信号处理领域的体现。

傅里叶变换的主要性质

❖ 频域卷积

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\theta})e^{j\theta n} d\theta \right] e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\theta}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega-\theta)n} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \end{aligned}$$

❖ 时域卷积

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n-k]x[k] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n-k] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n-k] e^{j\omega k} d\omega \\ n-k=m, \quad n-m=k \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m] e^{j\omega(n-m)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m] e^{-j\omega m} \right] e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})] e^{j\omega n} d\omega\end{aligned}$$

❖ 时域卷积

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right] Y(e^{j\omega}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] e^{-j\omega k} \right] e^{-j\omega n} x[n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] y[k] e^{-j\omega(k+n)} \\ m=k+n, \quad k=m-n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n] y[m-n] e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[m-n] \right] e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (x[n] * y[n]) e^{-j\omega m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] * y[n]) e^{-j\omega n}\end{aligned}$$

第5次作业

❖ 课后作业:

2.2(1), (2), (6); 2.3(1), (2), (4)

❖ 补充作业1: 使用Matlab计算 $x[n]=a^n u[n]$ (a 分别为0.85和-0.85)的离散时间傅里叶变换(DTFT), 并绘制出幅度响应与相位响应、实部响应与虚部响应的图形, 并简要讨论其对称性(要求打印)。

❖ 补充作业2: 分别从时域和频域两个方面出发, 证明离散时间傅里叶变换的Parseval定理, 并说明该等式包含的物理意义。

