# 人工智能—
# 第二章 推理技术

# 2.1 谓词公式与子句集

## 2.1.1 一阶谓词公式

### 1. 必要定义

命题：一个陈述句称为一个断言，凡有真假意义的断言称为命题。

谓词：带有参数的命题叫谓词。

谓词的一般表达式：P(x1,x2,……,xn). P是谓词，xi是个体。

个体可以是常量、变量或函数

个体常量：$a, b, c$

个体变量：$x, y, z$

函数符号：$f, g, h$

谓词符号：$P, Q, R$

## 必要定义(续)

连接词：$\neg(\sim)$：“非”或者“否定”；

$\vee$：“析取”；

$\wedge$：“合取”；

$\rightarrow(\Rightarrow)$：称为“条件”或“蕴含”；

$\leftrightarrow(\Leftrightarrow)$：“双条件”

量词： $\forall x$全称量词；

$\exists x$存在量词

## 必要定义(续)

### 谓词公式

单个谓词公式P($x1,x2,\ldots\ldots,xn$)叫做谓词演算的原子公式，或原子谓词公式。

(1) 单个原子谓词公式是谓词公式；

(2) 若A是谓词公式，则$\neg$A也是谓词公式；

(3) 若A、B都是谓词公式，则A$\vee$B，A$\wedge$B，A$\rightarrow$B，A$\leftrightarrow$B也都是谓词公式；

(4) 若A是谓词公式，$x$是任一个个体变元，则$(\forall x)$A和$(\exists x)$A也都是谓词公式。

## 2. 谓词演算公式

**谓词公式的等价式**

设P与Q两个谓词公式，D是它们共同的个体域，若对D上的任意解释，P与Q都有相同的真值，则称P与Q在D上是等价的。

如果D是**任意非空个体域**，则称P与Q是等价的，记作P<==>Q。

## 常用的等价式

（1）双重否定律 $\neg\neg P \Longleftrightarrow P$

（2）交换律 $P\vee Q \Longleftrightarrow Q\vee P$，

$P\wedge Q \Longleftrightarrow Q\wedge P$

（3）结合律 $(P\vee Q)\vee R \Longleftrightarrow P\vee(Q\vee R)$，

$(P\wedge Q)\wedge R \Longleftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$

（4）分配律 $P\vee(Q\wedge R) \Longleftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

$P\wedge(Q\vee R) \Longleftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

（5）狄·摩根定律 $\neg(P\vee Q) \Longleftrightarrow \neg P\wedge\neg Q$；

$\neg(P\wedge Q) \Longleftrightarrow \neg P\vee\neg Q$

（6）吸收律 $P\vee(P\wedge Q) \Longleftrightarrow P$，

$P\wedge(P\vee Q) \Longleftrightarrow P$

（7）补余律　$P \vee \neg P \Longleftrightarrow T$；

$P \wedge \neg P \Longleftrightarrow F$

（8）连接词化归律　$P \rightarrow Q \Longleftrightarrow \neg P \vee Q$；

$P \longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

$P \longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge \neg P)$

（9）量词转换律　$\neg(\exists x) P(x) \Longleftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))$，

$\neg(\forall x) P(x) \Longleftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$

（1O）量词分配律　$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Longleftrightarrow (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x)$

$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Longleftrightarrow (\exists x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$

（11）消去量词等价式：设个体域为有穷集合（a1, a2, …an）

$(\forall x) P(x) \Longleftrightarrow P(a1) \wedge P(a2) \wedge \ldots \wedge P(an)$

$(\exists x) P(x) \Longleftrightarrow P(a1) \vee P(a2) \vee \ldots \vee P(an)$

## 谓词公式的永真蕴涵

对谓词公式P和Q，如果P→Q永真，则称P永真蕴含Q，且称Q为P的逻辑结论，P为Q的前提，记作P=>Q

## 常用的推理规则（永真蕴含式）

（1）化简式 $P\wedge Q \Rightarrow P$，

$P\wedge Q \Rightarrow Q$

（2）附加式 $P \Rightarrow P\vee Q$，

$Q \Rightarrow P\vee Q$

（3）析取三段论 $\neg P$，$P\vee Q \Rightarrow Q$

（4）假言推理 $P$，$P\rightarrow Q \Rightarrow Q$

（5）拒取式 $\neg Q$，$P\rightarrow Q \Rightarrow \neg P$

（6）假言三段论 $P\rightarrow Q$，$Q\rightarrow R \Rightarrow P\rightarrow R$

（7）二难推理 $P\vee Q$，$P\rightarrow R$，$Q\rightarrow R \Rightarrow R$

（8）全称固化 $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$；

y是个体域中的任一个体.

（9）存在固化 $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(y)$；

y是个体域中某一个可以使P（y）为真的个体。

## 反证法

P=>Q，当且仅当 $P\wedge\neg Q\Leftrightarrow F$。

即：Q为P的逻辑结论，当且仅当$P\wedge\neg Q$是不可满足的。

**定理4.1** Q为P1，P2，…, Pn 的逻辑结论，当且仅当

$(P_1\wedge P_2\wedge\ldots\wedge P_n)\wedge\neg Q$ 是不可满足的。

## 谓词逻辑中的形式演绎推理

**前提：**

(1) 凡是大学生都会说英语

(2) 小王是大学生

**试问**：小王会说英语吗？

**解**：令C(x)：x是大学生；S(x): x会说英语；a：小王

$\forall x\,(C(x) \rightarrow S(x))$

$C(a)$

形式推理：$S(a)$

# 3 置换与合一

目的

例如：全称化推理：$(\forall x) P(x) \Rightarrow P(y)$, y是个体域中的任意个体；

假言推理：$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$

由W1(A) 和 $(\forall x)(W1(x) \rightarrow W2(x))$ 推出W2(A)。

寻找项对变元的置换，使谓词一致

## 置换

在一个谓词公式中用置换项去置换变量。

**定义**：置换是形如{t1/x1, t2/x2, …, tn /xn}的有限集合。

其中， x1, x2, …, xn是互不相同的变量，

t1, t2, …, tn是不同于xi的项（常量、变量、函数）；

ti/xi表示用ti置换xi，并且要求ti与xi不能相同，

而且xi不能循环地出现在另一个ti中。

## 置换

{a/x，c/y，f(b)/z}

{g(y)/x，f(x)/y}　　{g(a)/x，f(x)/y}

表达式P (x, f (y), B)的置换

s1={z/x, w/y}　　P(z,f(w),B);

s2={g(z)/x, A/y}　　P(g(z),f(A),B)

## 置换

置换可以结合：

$(Ls1)s2=L(s1s2)$, 用s1和s2相继作用于L与用s1s2作用于L相同；

不可交换：$s1 \cdot s2 \neq s2 \cdot s1$

## 合一

寻找相对变量的置换，使两个谓词公式一致

**定义：** 设有公式集F＝{F1，F2，…，Fn}，若存在一个置换θ，可使F1θ＝F2θ＝…＝Fnθ，则称θ是F的一个合一。
同时称F1，F2，… ，Fn是可合一的。

例：设有公式集F＝{P (x, y, f(y)), P (a, g(x), z)}

λ＝{a/x, g(a)/y, f(g(a))/z}是它的一个合一

**一般说来，一个公式集的合一不唯一。**

## 最一般合一

设g是公式集E的一个合一，如果对E的任一个合一s都存在一个置换s'，可使s=g·s' g是一个最一般合一者(Most General Unifier.简记mgu)

**例2** ：F＝{P(x, f(y), B), P(x, f(B), B)}作置换s={A/x, B/y}, 得到{P(A, f(B), B)};

作置换g＝{B/y}, 得到{P(x, f(B), B)}

s=g• {A/x }＝{A/x, B/y}，g是最一般合一