北京航空航天大学

2012－2013 学年 第二学期期中

《 工科数学分析（2） 》

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2013 年 05 月 06 日

1.　**求解下面问题（每小题 5 分，满分 50 分）**

1)　求 $f(x,\ y,\ z)=x^3yz$ 在 $\boldsymbol{A(5,1,2)}$ 点沿 $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ 方向的方向导数，这里点 $\boldsymbol{A(5,1,2)}$、$\boldsymbol{B(9,4,14)}$。

解：由条件得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2yz,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^3z,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=x^3y$　　-------------1 分

$$\overrightarrow{AB}=\{4,3,12\}\Rightarrow \overrightarrow{AB^0}=\{\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{12}{13}\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$　　--------------2 分

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{4}{13},\ \cos\beta=\frac{3}{13},\ \cos\gamma=\frac{12}{13}$$

从而 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right]_{A(5,1,2)}=\dfrac{2550}{13}$　　--------------2 分

2)　**(a)** 将函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 上展开为 Fourier 级数。

(b) 利用展开式，求莱布尼兹级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和。

解：(a) 把 $(-\pi,\ \pi)$ 上的函数 f 延拓为整个数轴上的以 2π 为周期的函数，记延拓后的函数为 $\tilde{f}$，那么 $\tilde{f}$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的周期为 2π 的奇函数，且在 $(-\pi,\ \pi)$ 内连续可微。因此按 Fourier 系数的定义，又因为 f 是奇函数，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0, n=1,2.......;$$　　--------------1 分

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxd$$

$$=\frac{2}{\pi}(-\frac{1}{n}\cos nx)|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}(-\cos nx+1)=\begin{cases}\frac{4}{\pi n}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}$$

--------------2 分

所以 $\tilde{f}(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x;$

根据收敛定理，得

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x=\frac{1}{2}(\tilde{f}(x+0)+\tilde{f}(x+0)),$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上，

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 0, & x=-\pi,0,\pi\\ 1, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

--------------1 分

在上式中，令 $x=\frac{\pi}{2}$，则得 $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$. -------------1 分

3) 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x\sin y}}$。

解： $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x\sin y}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}\frac{xy}{x\sin y}}=e.$

4) 判断 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y^2}{x^2+y^2}$ 是否存在。

解： 由于 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y=0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=0\neq\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x=0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=1,$

————————————4 分

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y^2}{x^2+y^2}$ 不存在。 ———————————— 1 分

5) 已知集合 $D=\{(x,y)|xy=0\}$，求 D'。

解： $D'=D$

6） 求曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=9, \\ z^2=3x^2+y^2, \end{cases}$ 在 $(1,-1,2)$ 点处的切线方程与法平面方程。

解：记 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9,\quad G(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2$ -------------1 分

曲线在点 $(1,-1,2)$ 的切向量为

$$\vec{\tau}=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right)_{P_0}=\left(\begin{vmatrix} 6y & 2z \\ 2y & -2z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2z & 4x \\ -2z & 6x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4x & 6y \\ 6x & 2y \end{vmatrix}\right)_{P_0}$$

$$=(-16yz,20xz,-28xy)_{P_0}=(32,40,28)$$ -------------2 分

所以曲线在 $(1,-1,2)$ 处的切线方程为： $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$ - ------------1 分

曲线在 $(1,-1,2)$ 处的法平面方程为： $32(x-1)+40(y+1)+28(z-2)=0$,

即 $8x+10y+7z-12=0.$ -------------1 分

7） 设 $z=f(xy,\dfrac{y}{x},x)$, $f(u,v,w)$ 有连续的二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1-\dfrac{y}{x^2}f_2+f_3,$ -----------------------2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\left(yf_{11}-\frac{y}{x^2}f_{12}+f_{13}\right)+\frac{2y}{x^3}f_2-\frac{y}{x^2}\left(yf_{21}-\frac{y}{x^2}f_{22}+f_{23}\right)+\left(yf_{31}-\frac{y}{x^2}f_{32}+f_{33}\right)$$ ----1 分

$$=y^2f_{11}+\frac{y^2}{x^2}f_{22}+f_{33}-2\frac{y^2}{x^2}f_{12}+2yf_{13}-\frac{2y}{x^2}f_{23}+\frac{2y}{x^3}f_2$$ ---------2 分

8） 设 $\begin{cases} xu^2+v=y^3 \\ 2yu-zv^3=4x, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 。

解法一 ： 对 $xu^2+v=y^3$， $2yu-zv^3=4x$ 两边对 x 求导，得

$$u^2+2xu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$2y\frac{\partial u}{\partial x}-3zv^2\frac{\partial v}{\partial x}=x$$ ---------------------**3 分**

解得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-3zv^2u^2}{6zv^2u+2y}.$$ ---------------------2 分

9） 求函数 $f(x,y)=\sin(x+y)$ 在点 $(0,0)$ 处 Taylor 公式（展到三阶为止）。

解： $f(x,y)=\sin(x+y)=(x+y)-\dfrac{(x+y)^3}{3!}+o(r^2)$ 或

$$f(x,y)=\sin(x+y)=(x+y)-\frac{(x+y)^3}{3!}+\frac{\cos[\theta(x+y)](x+y)}{3!}$$

10）求函数的极值点 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$。

解：先求稳定点

由 $\begin{cases} f_x(x,y)=2x-y-2=0 \\ f_y(x,y)=-x+2y+1=0 \end{cases}$，解得 $x=1,\ y=0$， ---------2 分

所以

$$H_f=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5 \quad 正定$$ ------------2 分

所以函数有极小值为 -1. ------------1 分

2. （本题满分 10 分） 设 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$,

（1）验证 $y''+y'+y=e^x$;

（2）求 $y(x)$.

解：（1）由于 $y'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$, $y''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$

所以 $y''+y'+y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$. ----------------2 分

（2） 因为 $y''+y'+y=0$ 的特征方程为

$$r^2+r+1=$$

解得特征方程的特征根是 $r=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. ------------ ------------3 分(或 4 分)

这样 $r=1$ 不是特征根，所以齐次方程的通解是

$$y=e^{-x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$ ---------------------2 分

另原方程的特解是 $y^{*}=A$ 带入原方程 解得 $A=e^{x}$ ， ------------1 分

于是原方程的通解为 $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+e^{x}$ -----------1 分

又因为 $y(0)=1,\ y^{'}(0)=0,$ 所以 $y(x)=\frac{2}{3}e^{\frac{-x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^{x}.$--------------1 分

(若只写到通解也可以)

3. （本题满分 10 分）

讨论函数 $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq 0\\ 0, & (x,y)=0\end{cases}$ 在原点(0, 0)处的连续性、可偏导性和可微性.

解：答案 在点$(0,0)$处连续且偏导数存在，但在此点不可微分。

（1）原点(0, 0)处的连续性

当$(x,y)\neq(0,0)$时， $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0,$ --------2 分

又因为 $f(0,0)=0,$ 所以 $f(x,y)$在原点(0, 0)处的连续。

（2）计算 $f(x,y)$在原点(0, 0)处的偏导数

(a) 当$(x,y)\neq(0,0)$时， 按照通常的方法求偏导数得

$$f_x(x,y)=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y(x,y)=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$ --------2 分

(b) 当$(x,y)=(0,0)$时， 按照定义求偏导数得

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0$$ -------2 分

（c）由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$ 不存在

因此两偏导数在(0, 0)处不连续。 ----------1 分

（3） $f(x,y)$ 在原点(0, 0)处的可微分性

考察极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ y}{(x^2+y^2)} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

不存在。 -----------3 分

所以 $f(x,y)$ 在原点(0, 0)处的不可微。

4. （本题满分 10 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n}x^n$ 的收敛区间和其和函数.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}(\frac{x}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{n})(\frac{x}{2})^n$ ------------2 分

设 $y=\frac{x}{2}$， 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n}x^n = = \sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{n})y^n$..............(*)

对（*）式， 记 $S_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}ny^n$， $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}$

求得其收敛半径为

$$R_1 = R_2 = 1,$$

所以收敛区间 $(-1,1)$. 于是所求收敛区间 $(-2,2)$. ---------2 分

又 $S_1(y)=y\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}$， 记 $\overline{S_1}(y)=\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}$

$$\int_0^x \overline{S_1}(x)dx = \int_0^y \sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}dy = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y ny^{n-1}dy = \sum_{n=1}^{\infty}y^n = \frac{y}{1-y}$$

因此 $\overline{S_1}(y)=\dfrac{1}{(1-y)^2}$， $\therefore S_1(y)=\dfrac{y}{(1-y)^2}$， -------2 分

又因为

$$S_2^{'}(y)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n})^{'}=\frac{1}{1-y},$$ ---------------1 分

求得

$$S_2(y)=\int_0^y \frac{1}{1-y}\,dx=-\ln(1-y).$$ -----------1 分

所以

$$S(y)=\frac{y}{(1-y)^2}-\ln(1-y),\ y\in(-$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n}x^n=\frac{2x}{(2-x)^2}-\ln(2-x)+\ln 2,\qquad x\in(-2,2).$$ ------------2 分

5. (本题满分 10 分) 在球面上 $x^2+y^2+z^2=5R^2$ $(x>0,y>0,z>0$上，求函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$的最大值，并利用所得结果证明不等式

$$abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5\ (a>0,b>0,c>0).$$

解：作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5R^2).$$

并令

$$\begin{cases} L_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0, \\ L_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0, \\ L_z=\dfrac{1}{z}+2\lambda z=0, \\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-5R^2=0 \end{cases}$$ **---------4 分**

由前三式得到 $x^2=y^2=\dfrac{z^2}{3}$,

代入第四个式子解得稳定点 $(x,y,z)=(R,R,\sqrt{3}R).$ **-----------1 分**

由于 xyz^3 在球面上 $x^2+y^2+z^2=5R^2$ $(x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$ 上必有最大值，且最大值必在 $x>0,y>0,z>0$ 取得，因此 $f=xyz^3$ 在 $x^2+y^2+z^2=5R^2$ 上也有最大值，而 $(R,R,\sqrt{3}R)$ 又是唯一的稳定点，从而 $(R,R,\sqrt{3}R)$ 就是最大值点，于是所求的最大值为

$$f(R,R,\sqrt{3}R)=\ln(3\sqrt{3}R^5)$$ -------------3 分

最后由 $\ln x+\ln y+3\ln z\leq\ln(3\sqrt{3}R^5)$ 得到

$$xyz^3\leq 3\sqrt{3}R^5.$$

于是

$$x^2y^2z^6\leq 27R^{10}$$

令 $x^2=a,y^2=b,z^2=c,$ 并且应用条件 $x^2+y^2+z^2=5R^2$ 即得

$$abc^3\leq 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5\ (a>0,b>0,c>0).$$ -----------2 分

6. 讨论函数的连续性与可微性(本题满分 10 分)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x\ln n},\ x\in(1,+\infty)$$

解： 令 $u(x)=\dfrac{1}{n^x\ln n},$ 则 $u'(x)=-\dfrac{1}{n^x},$ ------1 分

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x\ln n}$ 在 $(1,+\infty)$ 上收敛。 -------2 分

$\forall[a,b]\subset(1,+\infty),\ a>1,\ \forall x\in[a,b],$ 有

$$|u'(x)|=\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{n^a},$$ -------2 分

当 $a>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^a}$ 收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}u'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。------3 分

由 $[a,b]$ 的任意性，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续。 --------2 分

7. 附加题（本题满分 10 分）

设 $f:R^n \to R$， f 在 R^n 上连续，并且 $\lim\limits_{r\to\infty} f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 存在，其中

$r=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2}}$，则 f 在 R^n 上一致连续。

证明：（1） 假设 $\lim\limits_{r\to\infty} f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=A,$ 由柯西定理

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M>0,\ \forall\|X_1\|>M,\ \|X_2\|>M$$

$|f(X_1)-f(X_2)|<\varepsilon$ ---------------- （1） -----------2 分

（2） $f(X)$ 在 $\|X\|\le M$ （有界闭集）连续，则一致连续

$\exists\delta_1(\varepsilon)>0,\forall X_1,X_2\in\overline{B(o,M)}$ 且 $\|X_1-X_2\|<\delta_1$

有 $|f(X_1)-f(X_2)|<\varepsilon$ ---------------(2) -----------2 分

(3) $f(X)$ 在 $M-1\le\|X\|\le M+1$ 上一致连续，

$\exists\delta_2(\varepsilon)>0,\forall X_1,X_2\in\overline{B(o,M+1)}\backslash B(o,M-1)$ 且 $\|X_1-X_2\|<\delta_2$

有 $|f(X_1)-f(X_2)|<\varepsilon$ ---------------(3) ----------2 分

综上讨论，当 $\delta=\min\{2,\delta_1,\delta_2\},$ 有

（a） 当 X_1，$X_2\in B^C(o,M)$ 时，由（1）$|f(X_1)-f(X_2)|<\varepsilon$

（b） 当 X_1，$X_2\in\overline{B(o,M)}$ 时，由（2），当 $\|X_1-X_2\|<\delta<\delta_1,$

$$|f(X_1)-f(X_2)|<\varepsilon$$

（c）当 $X_1\in\overline{B(o,M)}$， $X_2\in B^C(o,M)$ 时，当 $\|X_1-X_2\|<\delta<\delta_2,$

$$|f(X_1)-f(X_2)|<\varepsilon$$

得证。 -----------4 分