

第一章 复数与复变函数

一、 选择题

1. 当 $z = \frac{1+i}{1-i}$ 时, $z^{100} + z^{75} + z^{50}$ 的值等于 ()

- (A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) -1

2. 设复数 z 满足 $\arg(z+2) = \frac{\pi}{3}$, $\arg(z-2) = \frac{5\pi}{6}$, 那么 $z =$ ()

- (A) $-1 + \sqrt{3}i$ (B) $-\sqrt{3} + i$ (C) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

3. 复数 $z = \tan\theta - i$ ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$) 的三角表示式是 ()

- (A) $\sec\theta[\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)]$ (B) $\sec\theta[\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) + i\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)]$
(C) $-\sec\theta[\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) + i\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)]$ (D) $-\sec\theta[\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)]$

4. 若 z 为非零复数, 则 $|z^2 - \bar{z}^2|$ 与 $2z\bar{z}$ 的关系是 ()

- (A) $|z^2 - \bar{z}^2| \geq 2z\bar{z}$ (B) $|z^2 - \bar{z}^2| = 2z\bar{z}$
(C) $|z^2 - \bar{z}^2| \leq 2z\bar{z}$ (D) 不能比较大小

5. 设 x, y 为实数, $z_1 = x + \sqrt{11} + yi, z_2 = x - \sqrt{11} + yi$ 且有 $|z_1| + |z_2| = 12$, 则动点 (x, y) 的轨迹是 ()

- (A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线

6. 一个向量顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 向右平移 3 个单位, 再向下平移 1 个单位后对应的复数为

$1 - \sqrt{3}i$, 则原向量对应的复数是 ()

- (A) 2 (B) $1 + \sqrt{3}i$ (C) $\sqrt{3} - i$ (D) $\sqrt{3} + i$

7. 使得 $z^2 = |z|^2$ 成立的复数 z 是 ()

- (A) 不存在的 (B) 唯一的 (C) 纯虚数 (D) 实数

8. 设 z 为复数, 则方程 $z + |\bar{z}| = 2 + i$ 的解是 ()

- (A) $-\frac{3}{4} + i$ (B) $\frac{3}{4} + i$ (C) $\frac{3}{4} - i$ (D) $-\frac{3}{4} - i$

9. 满足不等式 $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| \leq 2$ 的所有点 z 构成的集合是 ()

- (A) 有界区域 (B) 无界区域 (C) 有界闭区域 (D) 无界闭区域

10. 方程 $|z + 2 - 3i| = \sqrt{2}$ 所代表的曲线是 ()

- (A) 中心为 $2 - 3i$, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周 (B) 中心为 $-2 + 3i$, 半径为 2 的圆周
(C) 中心为 $-2 + 3i$, 半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周 (D) 中心为 $2 - 3i$, 半径为 2 的圆周

11. 下列方程所表示的曲线中, 不是圆周的为 ()

- (A) $\left| \frac{z-1}{z+2} \right| = 2$ (B) $|z+3| - |z-3| = 4$
(C) $\left| \frac{z-a}{1-az} \right| = 1$ ($|a| < 1$) (D) $z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{a} - c = 0$ ($c > 0$)

12. 设 $f(z) = 1 - \bar{z}$, $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - i$, 则 $f(\overline{z_1 - z_2}) =$ ()

- (A) $-4 - 4i$ (B) $4 + 4i$ (C) $4 - 4i$ (D) $-4 + 4i$

13. $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z_0)}{z - z_0}$ ()

- (A) 等于 i (B) 等于 $-i$ (C) 等于 0 (D) 不存在

14. 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件是 ()

- (A) $u(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续 (B) $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续
(C) $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续 (D) $u(x, y) + v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续

15. 设 $z \in C$ 且 $|z| = 1$, 则函数 $f(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z}$ 的最小值为 ()

(A) -3

(B) -2

(C) -1

(D) 1

二、填空题

1. 设 $z = \frac{(1+i)(2-i)(3-i)}{(3+i)(2+i)}$, 则 $|z| =$ _____

2. 设 $z = (2-3i)(-2+i)$, 则 $\arg z =$ _____

3. 设 $|z| = \sqrt{5}, \arg(z-i) = \frac{3\pi}{4}$, 则 $z =$ _____

4. 复数 $\frac{(\cos 5\theta + i \sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta - i \sin 3\theta)^2}$ 的指数表示式为 _____

5. 以方程 $z^6 = 7 - \sqrt{15}i$ 的根的对应点为顶点的多边形的面积为 _____

6. 不等式 $|z-2| + |z+2| < 5$ 所表示的区域是曲线 _____ 的内部

7. 方程 $\left| \frac{2z-1-i}{2-(1-i)z} \right| = 1$ 所表示曲线的直角坐标方程为 _____

8. 方程 $|z+1-2i| = |z-2+i|$ 所表示的曲线是连续点 _____ 和 _____ 的线段的垂直平分线

9. 对于映射 $\omega = \frac{i}{z}$, 圆周 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的像曲线为 _____

10. $\lim_{z \rightarrow 1+i} (1+z^2+2z^4) =$ _____

三、若复数 z 满足 $z\bar{z} + (1-2i)z + (1+2i)\bar{z} + 3 = 0$, 试求 $|z+2|$ 的取值范围.

四、设 $a \geq 0$ ，在复数集 C 中解方程 $z^2 + 2|z| = a$ 。

五、设复数 $z \neq \pm i$ ，试证 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数的充要条件为 $|z| = 1$ 或 $IM(z) = 0$ 。

六、对于映射 $\omega = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ ，求出圆周 $|z| = 4$ 的像。

七、试证 1. $\frac{z_1}{z_2} \geq 0$ ($z_2 \neq 0$) 的充要条件为 $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ；

2. $\frac{z_1}{z_2} \geq 0$ ($z_j \neq 0, k \neq j, k, j = 1, 2, \dots, n$) 的充要条件为

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

八、若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(z) = A \neq 0$ ，则存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时有 $|f(z)| > \frac{1}{2}|A|$ 。

九、设 $z = x + iy$ ，试证 $\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|$.

十、设 $z = x + iy$ ，试讨论下列函数的连续性：

$$1. f(z) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

$$2. f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}.$$

- 一、 1. (B) 2. (A) 3. (D) 4. (C) 5. (B)
 6. (A) 7. (D) 8. (B) 9. (D) 10. (C)
 11. (B) 12. (C) 13. (D) 14. (C) 15. (A)

- 二、 1. $\sqrt{2}$ 2. $\pi - \arctan 8$ 3. $-1 + 2i$ 4. $e^{16\theta i}$ 5. $3\sqrt{3}$

6. $|z-2| + |z+2| = 5$ (或 $\frac{x^2}{(\frac{5}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{3}{2})^2} = 1$) 7. $x^2 + y^2 = 1$

8. $-1 + 2i, 2 - i$ 9. $\operatorname{Re} \psi = \frac{1}{2}$ 10. $-7 + 2i$

三、 $[\sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{5} + \sqrt{2}]$ (或 $\sqrt{5} - \sqrt{2} \leq |z+2| \leq \sqrt{5} + \sqrt{2}$).

四、当 $0 \leq a \leq 1$ 时解为 $\pm(1 \pm \sqrt{1-a})i$ 或 $\pm(\sqrt{1+a}-1)$

当 $1 \leq a \leq +\infty$ 时解为 $\pm(\sqrt{1+a}-1)$.

六、像的参数方程为 $\begin{cases} u = \frac{17}{2} \cos \theta \\ v = \frac{15}{2} \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$. 表示 w 平面上的椭圆 $\frac{u^2}{(\frac{17}{2})^2} + \frac{v^2}{(\frac{15}{2})^2} = 1$.

十、1. $f(z)$ 在复平面除去原点外连续，在原点处不连续；

2. $f(z)$ 在复平面处处连续.