一、 叙述下面问题（每小题 2 分, 共 10 分）

1） 叙述数列是柯西列(基本列)的定义

对于给定数列$\{x_n\}$若满足，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个$N>0$，对于任意给定的$m,n>N$，都有$|x_m-x_n|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$为柯西列.

2） 叙述函数一致收敛的定义

对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$，当属于$f(x)$的定义域I任意的x_1,x_2，当$|x_1-x_2|<\delta$时有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，则$f(x)$的定义域一致连续.

3） 叙述闭区间套定理

设$I_n=[a_n,b_n]$，并且$I_1\supset I_2\supset\Lambda\supset I_n\Lambda$，如果这一列区间的长度满足$|I_n|=b_n-a_n\to 0(n\to\infty)$，那么交集$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$含有唯一的一点.

（全对得 10 分，对一个 4 分，错一个减 3 分）

二、 证明(10 分)

1) $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

证:由$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$知$\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ （4 分）

2) $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\Lambda+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$, 证明$\{x_n\}$收敛（可用单调有界定理）.

证明：由（1）知$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<0$，所以$\{x_n\}$单调递减（3 分）

再由$x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\Lambda+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}>2(\sqrt{2}-1)+\Lambda+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-2\sqrt{n}$

$=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-2>-2$ 有下界，由单调有界知$\{x_n\}$收敛.　　(4 分)

三、 计算（20 分）

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+1+\ln x}=-\frac{1}{2}$$

（5 分）

2) $\lim\limits_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

设$u(x)=2e^{\frac{x}{1+x}}-2$， $v(x)=\frac{x^2+1}{x}$，

又因为$\lim\limits_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-2\right)\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}2\left(\frac{e^{\frac{x}{1+x}}-1}{\frac{x}{1+x}}\right)\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{x}{1+x}\right)=2$　（5 分）

3）$f(x)=x\sin\sqrt{x}\,(x\to0)$,求无穷小阶；

解： $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=1$，**故为** $\frac{3}{2}$ **阶的无穷小。**　**(5 分)**

4）$y(x)=e^{ax}\sin bx$，求$\frac{d^ny}{dx^n}$

解： $y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx=e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi)$　$(\varphi=\arctan\frac{b}{a})$，

$$y''=\sqrt{a^2+b^2}\cdot[ae^{ax}\sin(bx+\varphi)+be^{ax}\cos(bx+\varphi)]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\sin(bx+n\varphi)\ (\varphi=\arctan\frac{b}{a})$$

（5 分）

5） $y(x)=x^x+\ln(\ln\frac{1}{x})+\arctan(1+5x^2)$，求 $\frac{dy}{dx}$

$(x^x)'=x^x(\ln x+1)$

$(\ln(\ln\frac{1}{x}))'=\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot x\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x\ln x}$

$\arctan(1+5x^2)'=\frac{10x}{1+(1+5x^2)^2}$.　　　　**全对 5 分，每对一个给 2 分**

四、 叙述并证明关于函数极限与数列极限之间关系的海涅定理(10 分)

海涅定理：

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow x\to a$时，$f(x)$的任何子列$\{f(x_n)\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.　　（3 分）

$\Rightarrow$:　　$\Theta\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又$\Theta\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$，

$\Leftarrow$: $\therefore$对上述$\delta>0,\exists N>0$，使当$n>N$时，恒有 $0<|x_n-x_0|<\delta$.

从而有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)=A$.　　（3 分

假设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$不成立，则必$\exists\varepsilon_0>0$，对$\forall n\in\mathrm{N}^*$，

存在满足$0<|x-x_0|<\frac{1}{n}$的，使得$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0>0$.

即找到了一个数列$\{x_n\,|\,x_n\neq x_0\}$　$x_n\to x_0$，但是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$。　　（4 分）

五、 讨论下面问题(10 分)

设 $f(x)=\begin{cases} a+e^{\frac{-1}{x}} & x>0 \\ b & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{e^x-1} & x<0 \end{cases}$，试问

1） a, b 为何值时 f(x)在$(-\infty,+\infty)$内连续;

2） f(x)在$(-\infty,+\infty)$内是否可导.

解：1）、当 $x\neq 0$ 时 f(x)显然连续，再由

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} a+e^{\frac{-1}{x}}=a，\quad \lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{e^x-1}=1，$$

知当 $a=b=1$ 时 f(x)连续。 （5 分）

2）当 $x\neq 0$ 时 f(x)显然可导，

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{1+e^{\frac{-1}{x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}=0$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{\sin x}{e^x-1}-1}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{\cos x-e^x}{(e^x-1)+xe^x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{-\sin x-e^x}{2e^x+xe^x}=-\frac{1}{2}$$

所以当 $x=0$ 时 f(x)不可导，即 f(x)不可导。 （10 分）

六、（20 分）

1）设 $f(0)=0$，$f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，试证函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加;

证明：$g'(x)=(\dfrac{f(x)}{x})'=-\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$，

对 f(x)使用中值定理得 $f(x)=f'(\xi)x,\xi\in(0,x)$，由 $f'(x)$ $[0,+\infty)$ 内单调增加知

$f'(x)x-f(x)=f'(x)x-f'(\xi)x\geq 0$，所以 $g'(x)\geq 0$，

即函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加 （5 分）

2） 若 $x>0$ 证明 $x^2+\ln(1+x)^2>2x$

证：令 $f(x)=x^2+\ln(1+x)^2-2x$，显然 $f(0)=0$，

$$f'(x)=2x+\frac{1}{(1+x)^2}+2(1+x)-2=4x+\frac{1}{(1+x)^2}>0,$$

所以 $f(x)>f(0)>0$，即 $x^2+\ln(1+x)^2>2x$ （5 分）

3) 判断函数凹凸性 $f(x)=x\ln x, x$

解：$f'(x)=\ln x+1$ ，$f''(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x>0$ 时有 $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$ 是凸函数。 （5 分）

4) 求 $y=x\ln x$ 在（0,e]的最大值和最小值

解：$y'=\ln x+1$, 令$y'=0$, 得$x=\frac{1}{e}$.

当$x\in(0,\frac{1}{e})$时, $y'<0$, 当$x\in(\frac{1}{e},e)$时, $y'>0$.

$y(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$, $y(e)=e$.故最大值为e, 最小值为$-\frac{1}{e}$。

（5 分）

七、（10 分）讨论函数 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$一致连续性.

解：对 $\varepsilon_0=0$，取 $s_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, t_n=\dfrac{1}{2n\pi}, |s_n-t_n|=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi(2n\pi+\frac{\pi}{2})}<\dfrac{1}{2n\pi}<\dfrac{1}{2n}$

但$|f(s_n)-f(t_n)|=1\geq\varepsilon_0$，所以 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$不一致连续性.

八、证明下面问题（10 分）

1）设 $f(x)$在(a,b)上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A<0$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$使得 $f(\xi)=0$.

证明：由 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A<0$, 知存在一个 $\delta_1>0$ 使得 $a+\delta_1\in(a,b)$，且 $f(a+\delta_1)<0$

(4 分)

$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B>0$，知存在一个 $\delta_2>0$ 使得 $b-\delta_2\in(a,b)$，且 $f(b-\delta_2)>0$，

(8 分)

则在 f(x) 区间$[a+\delta_1,b-\delta_2]$上两端点异号，由连续函数介值定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

(10 分)

2) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且

$f(a)=f(b)=0$,，求证：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证明：令 $F(x)=e^x f(x)$ 则，

$F(a)=F(b)=0$ 所以 F(x)在 $[a,b]$ 满足中值定理，即

存在 $\xi\in[a,b]$ ，使得 $F'(\xi)=e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$，因为 $e^{\xi}\neq 0$，所以

$f'(\xi)+f(\xi)=0$。

(10 分)

九、附加题(10 分):

假设f(x), g(x), x $\in[a,+\infty)$ 连续, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-Ag(x)\right)=B, A\neq 0$

证明:f(x), g(x), x $\in[a,+\infty)$ 有相同的一致连续性.

证 (i) 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，下证 $g(x)$ 也在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. $\forall\varepsilon>0$, 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-Ag(x)]=B$, 所以 $\exists M>0$, 当 $x>M$ 时, 有 $|f(x)-Ag(x)-B|<\frac{|A|}{3}\varepsilon$. 又因为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 所以 $\exists\eta>0$, 当 $x_1, x_2>a$ 且 $|x_1-x_2|<\eta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{|A|}{3}\varepsilon$. 于是当 $x_1, x_2>M$ 且 $|x_1-x_2|<\eta$ 时, 有

$$|g(x_1)-g(x_2)|=\left|\frac{1}{A}[Ag(x_1)-Ag(x_2)]\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|A|}[|Ag(x_1)+B-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-Ag(x_2)-B|]<\varepsilon.$$

又因为 $g(x)$ 在 $[a, M+1]$ 上连续, 由 Cantor 定理知 $g(x)$ 在 $[a, M+1]$ 上一致连续. 所以 $\exists r>0$, 当 $x_1, x_2\in[a, M+1]$ 且 $|x_1-x_2|<r$ 时, 有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\eta, r, 1\}$, 当 $x_1, x_2>a$ 且 $|x_1-x_2|<\eta$ 时, 有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$. 所以 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

（7 分）

(ii) 若 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续，下证 $f(x)$ 也在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.
注意到

$$\lim_{x \to +\infty}\left[g(x) - \frac{1}{A}f(x)\right] = \lim_{x \to +\infty}\frac{1}{A}[A g(x) - f(x)] = -\frac{B}{A}.$$

由 (i) 的结果 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

（ 10 分）