第二章　解析函数

一、选择题：

1．函数 $f(z)=3|z|^2$ 在点 $z=0$ 处是(　　)

（A）解析的　　（B）可导的

（C）不可导的　　（D）既不解析也不可导

2．函数 $f(z)$ 在点 z 可导是 $f(z)$ 在点 z 解析的(　　)

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既非充分条件也非必要条件

3．下列命题中，正确的是(　　)

（A）设 x, y 为实数，则 $|\cos(x+iy)|\le 1$

（B）若 z_0 是函数 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在点 z_0 不可导

（C）若 u, v 在区域 D 内满足柯西-黎曼方程，则 $f(z)=u+iv$ 在 D 内解析

（D）若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $\overline{if(z)}$ 在 D 内也解析

4．下列函数中，为解析函数的是(　　)

（A）x^2-y^2-2xyi　　（B）x^2+xyi

（C）$2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x)$　　（D）x^3+iy^3

5．函数 $f(z)=z^2\,\mathrm{Im}(z)$ 在 $z=0$ 处的导数(　　)

（A）等于 0　　（B）等于 1　　（C）等于 -1　　（D）不存在

6．若函数 $f(z)=x^2+2xy-y^2+i(y^2+axy-x^2)$ 在复平面内处处解析，那么实常数 $a=$(　　)

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）-2

7．如果 $f'(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内处处为零，且 $f(0)=-1$，那么在 $|z|<1$ 内 $f(z)\equiv$(　　)

（A）0　　（B）1　　（C）-1　　（D）任意常数

8．设函数 $f(z)$ 在区域 D 内有定义，则下列命题中，正确的是

（A）若 $|f(z)|$ 在 D 内是一常数，则 $f(z)$ 在 D 内是一常数

（B）若 $\mathrm{Re}(f(z))$ 在 D 内是一常数，则 $f(z)$ 在 D 内是一常数

（C）若 $f(z)$ 与 $f(\overline{z})$ 在 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内是一常数

（D）若 $\arg f(z)$ 在 D 内是一常数，则 $f(z)$ 在 D 内是一常数

9．设 $f(z)=x^2+iy^2$，则 $f'(1+i)=$（　　）

（A）2　　（B）$2i$　　（C）$1+i$　　（D）$2+2i$

10．i^i 的主值为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）$e^{\frac{\pi}{2}}$　　（D）$e^{-\frac{\pi}{2}}$

11．$e^{\bar{z}}$ 在复平面上（　　）

（A）无可导点　　（B）有可导点，但不解析

（C）有可导点，且在可导点集上解析　　（D）处处解析

12．设 $f(z)=\sin z$，则下列命题中，不正确的是（　　）

（A）$f(z)$ 在复平面上处处解析　　（B）$f(z)$ 以 2π 为周期

（C）$f(z)=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$　　（D）$|f(z)|$ 是无界的

13．设 α 为任意实数，则 1^{α}（　　）

（A）无定义　　（B）等于 1

（C）是复数，其实部等于 1　　（D）是复数，其模等于 1

14．下列数中，为实数的是（　　）

（A）$(1-i)^3$　　（B）$\cos i$　　（C）$\ln i$　　（D）$e^{3-\frac{\pi}{2}i}$

15．设 α 是复数，则（　　）

（A）z^{α} 在复平面上处处解析　　（B）z^{α} 的模为 $|z|^{|\alpha|}$

（C）z^{α} 一般是多值函数　　（D）z^{α} 的辐角为 z 的辐角的 $|\alpha|$ 倍

二、填空题

1．设 $f(0)=1, f'(0)=1+i$，则 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-1}{z}=$ ____________________

2．设 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内是解析的，如果 $u+v$ 是实常数，那么 $f(z)$ 在 D 内是______

3．导函数 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 在区域 D 内解析的充要条件为____________________

4．设 $f(z)=x^3+y^3+ix^2y^2$，则 $f'(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i)=$ ____________________

5．若解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实部 $u=x^2-y^2$，那么 $f(z)=$ ____________________

6．函数 $f(z)=z\,\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Re}(z)$ 仅在点 $z=$ ____________________ 处可导

7．设 $f(z)=\dfrac{1}{5}z^5-(1+i)z$，则方程 $f'(z)=0$ 的所有根为____________________

8．复数 i^i 的模为____________________

9．$\mathrm{Im}\{\ln(3-4i)\}=$ ____________________

10．方程 $1-e^{-z}=0$ 的全部解为____________________

三、设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为 $z=x+iy$ 的解析函数，若记 $w(z,\bar{z})=u(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2i})+iv(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2i})$，则 $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$.

四、试证下列函数在 z 平面上解析，并分别求出其导数

1．$f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$;

2. $f(z)=e^{x}(x\cos y-y\sin y)+ie^{x}(y\cos y+ix\sin y)$;

五、设 $w^{3}-2zw+e^{z}=0$，求 $\dfrac{dw}{dz},\dfrac{d^{2}w}{dz^{2}}$.

六、设 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^{2}(x+iy)}{x^{2}+y^{4}}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ 试证 $f(z)$ 在原点满足柯西-黎曼方程，但却不可导.

七、已知 $u-v=x^{2}-y^{2}$，试确定解析函数 $f(z)=u+iv$.

八、设 $\vec{s}$ 和 $\vec{n}$ 为平面向量，将 $\vec{s}$ 按逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 即得 $\vec{n}$.如果 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，

则有 $\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial v}{\partial n},\dfrac{\partial u}{\partial n}=-\dfrac{\partial v}{\partial s}$（$\dfrac{\partial}{\partial s}$ 与 $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 分别表示沿 $\vec{s},\vec{n}$ 的方向导数）.

九、若函数 $f(z)$ 在上半平面内解析，试证函数 $\overline{f(\overline{z})}$ 在下半平面内解析.

十、解方程 $\sin z+i\cos z=4i$.

一、1.（B） 2.（B） 3.（D） 4.（C） 5.（A）
6.（C） 7.（C） 8.（C） 9.（A） 10.（D）
11.（A） 12.（C） 13.（D） 14.（B） 15.（C）

二、填空题

1. $1+i$　　2. 常数　　3. $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 可微且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

4. $\frac{27}{4}-\frac{27}{8}i$　　5. $x^2-y^2+2xyi+ic$ 或 z^2+ic，c 为实常数　　6. i

7. $\sqrt[8]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}),k=0,1,2,3$　　8. $e^{-2k\pi}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

9. $-\arctan\frac{4}{3}$　　10. $2k\pi i\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

四、1. $f'(z)=-\sin z;$　　2. $f'(z)=(z+1)e^z$.

五、$\frac{dw}{dz}=\frac{2w-e^z}{3w^2-2z}$,

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{-6w(\frac{dw}{dz})^2+4\frac{dw}{dz}-e^z}{3w^2-2z}=\frac{8w+6e^zw-12w^2-3e^zw^2-4e^z+2e^zz}{(3w^2-2z)^2}.$$

七、$f(z)=\frac{1-i}{2}z^2+(1+i)c$ .c 为任意实常数.

十、$z=-2k\pi+i\ln 4\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.