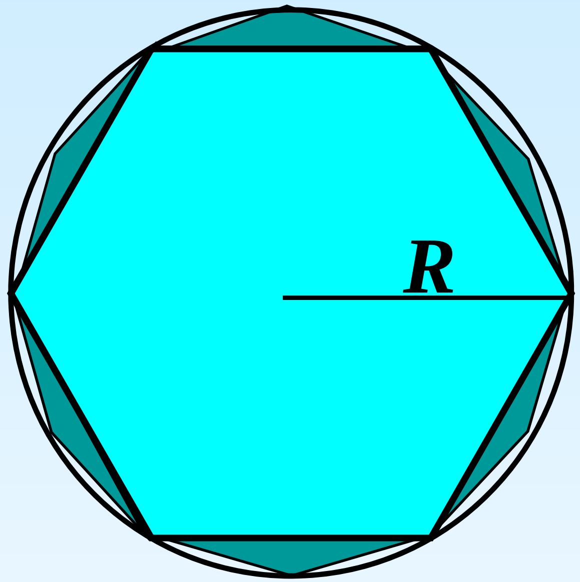
§1.1 数列与数列极限基本定义

一、概念的引入

1、求圆的面积：



正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

…… ……

正$6\times 2^{n-1}$形的面积 A_n

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”——刘徽

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \Longrightarrow S$$

2、截丈问题：

庄子：“一尺之棰，日截其半，万世不竭”

第一天截下的杖长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的杖长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

…… ……

第n天截下的杖长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

二、数列的定义

定义：按自然数 编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为无穷数列,简称数列. 记为 $\{x_n\}$

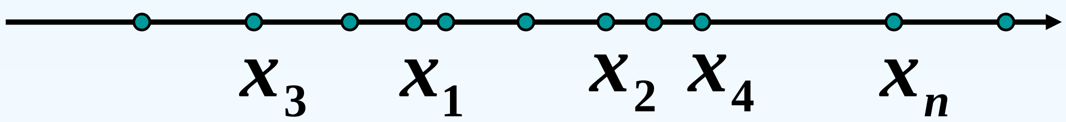
例如 $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$ $\{2^n\}$

$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots;$ $\{\frac{1}{2^n}\}$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots; \qquad \{(-1)^{n-1}\}$$

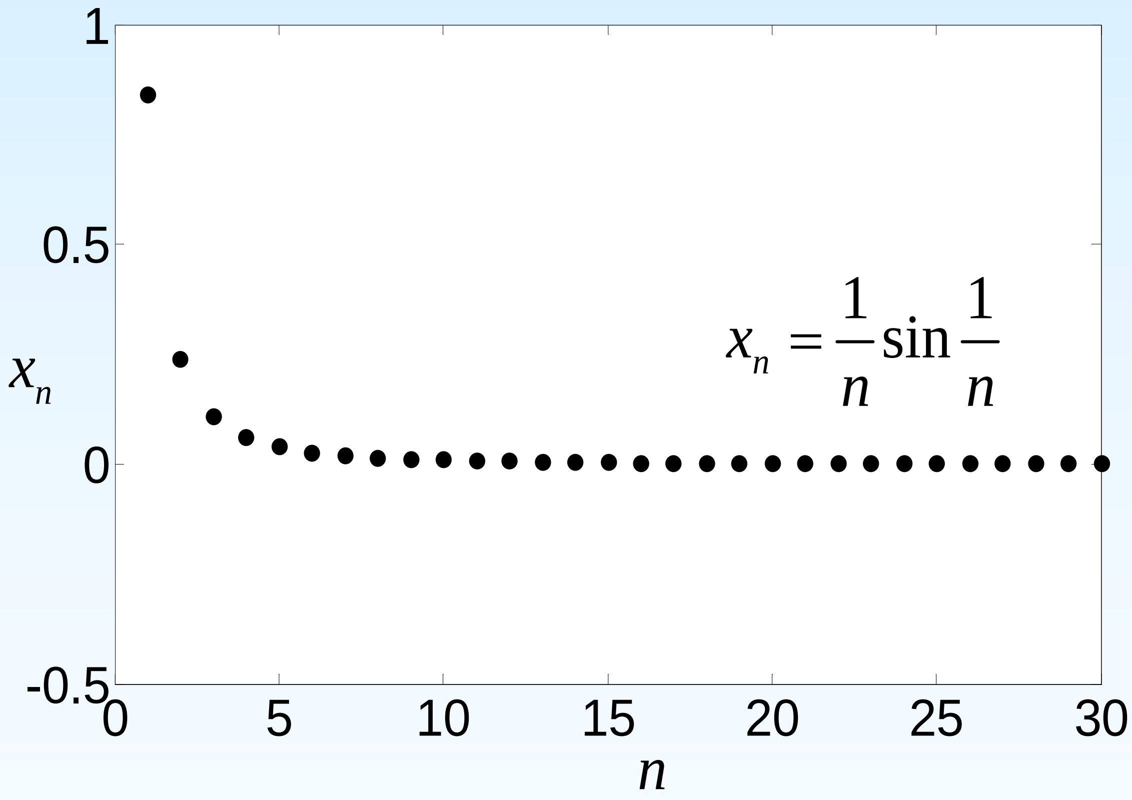
$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots; \qquad \{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$$

注意： 数列对应着数轴上一个点列. 可看作一动点在数轴上依次取 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots.$



三、数列的极限

观察数列 $x_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$ 的变化趋势



由于 $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 当 $n > 2$, 有 $|x_n - 0| < \varepsilon$;

取 $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, 当 $n > 2^2$, 有 $|x_n - 0| < \varepsilon$;

由此可得规律

取 $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, 当 $n > 2^k$, 有 $|x_n - 0| < \varepsilon$;

问题: 如何描述这种变化?

定义1.2（数列极限的定义）给定数列$\{a_n\}$，a 为定数，若数列满足：

对任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $N \in N^*$，对于任意的 $n > N$ ，都有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

则称数列$\{a_n\}$，的极限为 a ，或收敛到 a ，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

注意:

1. $\forall \varepsilon > 0$, 强调任意性,而且是任意小的一面;

2. 不等式$|x_n - a| < \varepsilon$刻划了x_n与a的无限接近;

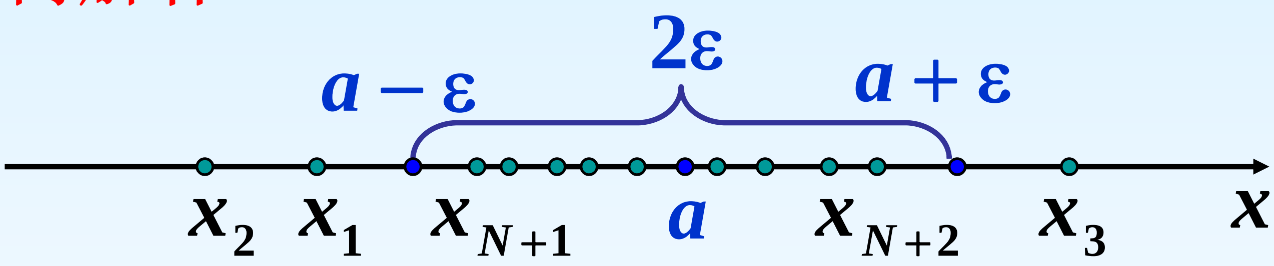
3. N与任意给定的正数 ε有关,只强调存在性.

$\varepsilon - N$定义:

$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0,$当$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon.$

其中　$\forall$:任意的;　$\exists$:存在.

几何解释:



当$n > N$时,所有的点x_n都落在$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内.

只有有限个(至多只有N个)落在其外.

注意：使用定义求极限的过程就是求解不等式.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

验证定义；关键求出 N

方法：解不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$，求出 n

$$\forall\varepsilon>0,\text{为使}\ |a_n-a|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

使 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 即可，$[\ \ ]$ 表示取整 .

证 $\quad |x_n - 1| = \left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$

任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 或 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$,

所以, 取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n > N$ 时,

就有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$

类似可证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+a}{n} = 1,$ a 为任意实数。

例2 设$x_n \equiv C$(C为常数)，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证 任给$\varepsilon > 0$，对于一切自然数n，

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon \text{成立},$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

说明：常数列的极限等于同一常数.

例3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，其中 $|q| < 1$.

证　任给 $\varepsilon > 0$，若 $q = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

若 $0 < |q| < 1$,

$$|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon, \quad n \ln|q| < \ln \varepsilon,$$

$\therefore n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}, (0 < \varepsilon < 1)$ 取 $N = [\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}]$，则当 $n > N$ 时,

就有 $|q^n - 0| < \varepsilon$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

小结：关键寻找N, 不必最小的N.

例4 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=0$

分析：欲使$|a_n-0|=\left|\dfrac{1}{(n+1)^2}\right|=\dfrac{1}{n^2+2n+1}<\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$

只要$n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$, $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]+1$

放大不等式
简化求解

证明：$\forall\varepsilon>0$,

$\exists N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]+1$, 当$n>N$时，有$\left|\dfrac{1}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon$

例5 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

分析: 欲使 $\left|\frac{n}{3^n}-0\right|=\frac{n}{3^n}<\varepsilon$

因为 $(1+1)^n=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>C_n^1=n$

所以 $2^n>n$

$$\frac{n}{3^n}<\frac{2^n}{3^n}=(\frac{2}{3})^n<\varepsilon,\quad n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg(2/3)}\quad(0<\varepsilon<1)$$

证明: $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设$\varepsilon < 1$),

$$\exists N = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg 2/3} \right] + 1,$$

当$n > N$时,有 $\left| \frac{n}{3^n} \right| = \frac{n}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} < \varepsilon$

例6　设$x_n > 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,

求证$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

分析:

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

则,$|x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$,

证　任给$\varepsilon > 0$，　取$\varepsilon_1 = \sqrt{a}\,\varepsilon$，　$\because \lim_{n\to\infty} x_n = a$，

$\therefore \exists N$使得当$n > N$时恒有$|x_n - a| < \varepsilon_1$，

从而有$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

故$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

例7 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0,\quad(\alpha>0)$

分析：设 $\alpha\geq 1,\quad |a_n-0|=\dfrac{1}{n^{\alpha}}\leq\dfrac{1}{n}<\varepsilon,\quad N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$

易得：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,\ 当n>N,|a_n-0|=\frac{1}{n^{\alpha}}\leq\frac{1}{n}<\varepsilon$$

若,$0<\alpha<1$, $\exists m\in N^*$，可使$m\alpha>1$，由上

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,\ 当n>N时，总有\frac{1}{n^{m\alpha}}<\varepsilon^{m}$$

即有 $\dfrac{1}{n^{\alpha}}<\varepsilon$

例8　求证 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

预备知识：几何平均 $\le$ 算术平均，即

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (a_i \ge 0)$$

证明：$$\because n^{\frac{1}{n}} = (1\cdots 1\sqrt{n}\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} \le \frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}$$

$$\therefore \left| n^{\frac{1}{n}} - 1 \right| = n^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{2(\sqrt{n}-1)}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon,\quad n > \frac{4}{\varepsilon^2}$$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right] + 1$，当 $n > N$，有 $\left| n^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \dfrac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$

证明2：设$n^{\frac{1}{n}}=1+h_n$，则有$n=(1+h_n)^n$

$$\therefore n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n{}^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2}h_n{}^2$$

约去n，得 $1>\frac{n-1}{2}h_n{}^2$，$\therefore h_n{}^2<\frac{2}{n-1}$

$$\left|n^{\frac{1}{n}}-1\right|=h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon,\quad n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1,$$

$$N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]+1=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+2$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+2$，$n>N$时，$\left|n^{\frac{1}{n}}-1\right|<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$

四、$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$ 的叙述方法

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^*$，当一切$n > N$时，成立$|a_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon$都成立 $\xrightarrow{\text{否}}$ $\exists \varepsilon_0$不成立　（否定所有找一个）

$\exists N$成立 $\xrightarrow{\text{否}}$ $\forall N$都不成立　（否定一个找所有）

$\exists \varepsilon_0 > 0$，对一切 $N \in N^*$，$\exists n_0 > N$，使$|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$

应记住的结果：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$ （仿例8）—当 $a>1$时和$a<1$时思考

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\\&\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\\&\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0\end{aligned}\right\}\qquad a^n<<n!<<n^n$$

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0 \qquad |q|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0 \quad (\alpha>0)$$

五、 小结

数列：研究其变化规律；

数列极限：　精确定义, 几何意义；

定义证明数列极限：　解不等式；

作业

习题1.1

1．2（2，3，4），　3，　4，

5，6.