代数---补充公式：设 $A=A_{m\times m}, B=B_{n\times n}$ 是 m 阶 与 n 阶方阵， 则

1. $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ D & B \end{vmatrix} = |A||B|$ ； $\begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & D \end{vmatrix} = (-1)^{m\cdot n}|A||B|$.

特别， $A=A_{n\times n}, B=B_{n\times n}$ 都为 n 阶时， $\begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & D \end{vmatrix} = (-1)^{n}|A||B|$.

2.换位公式：设 $A=A_{m\times n}, B=B_{n\times m}$ 则 $|x\mathbf{I_m}-\mathbf{AB}| = x^{m-n}|x\mathbf{I}_n-\mathbf{BA}|$.

3.设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 则 $Ax = x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$

"根定理" $A=A_{n\times n}$ 的全体特征根是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ ， $f(x)$ 是多项式.

则 $f(A)$ 的全体特征根是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2),\cdots f(\lambda_n)$.

第 1 章 矩阵与行列式复习题

一. 填空题： 补充公式 ： $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1. 设 $A^T=-A$ 为奇数阶矩阵，则 $|A|=$ _0_

2. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc=1$, $A^{-1}=$______；3. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n =$________

4. 设 $X=\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$，已知 A^{1}，C^{-1} 存在，则 $X^{-1}=$__________

5. 设 A 为三阶矩阵, $|A|=1$,则 $|2A^{-1}+3A^*|=$ _________

6. 已知 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $(A^{-1})^*=$________； $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2009} = ?$

二. 选择题：

1. 设 A， B 都是 n 阶方阵，下面结论正确的是（ ）

（A）若 A， B 均可逆，则 $A+B$ 可逆 (B)若 A, B 均可逆，则 AB 可逆

（C）若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆 （D）若 $A+B$ 可逆，则 A, B 均可逆

2. A 是 n 阶矩阵，k 是非零常数，则行列式 $|(kA)^*|$ 等于（ ）

（A） $k|A|^{n-1}$ （B） $|k||A|^{n-1}$ （C） $k^{n(n-1)}|A^*|$ （D） $k^n|A|^{n-1}$

3. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & a_{33}-a_{23} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，设

$P_2P_1A=B$，则初等阵 P_2 =（　　　）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. A，B 都是 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 A 和 B 的秩（　　）

（A）必有一个等于零　（B）都小于 n（C）一个小于 n，一个等于 n　（D）都等于 n

5. A,B 是 3 阶阵，X 满足 $AXA-BXB=BXA-AXB+I$，I 是单位阵，则 X=（　　）

(A) $(A^2-B^2)^{-1}$；　(B) $(A-B)^{-1}(A+B)^{-1}$；　(C) $(A+B)^{-1}(A-B)^{-1}$；　(D)不能确定.

三. 1.把 $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 分解为列向量与行向量的积, 并计算 A^{100} 与 A^n .

2. 求下列矩阵的逆矩阵：

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$；

3. k 取什么值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆，并求其逆.

4. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 的秩 $r(A)=1$，求 k 的值.　($k=1$)

四. 1. 设 $A=\frac{1}{2}(B+I)$，I 为单位矩阵，证明 $A^2=A$ 当且仅当 $B^2=I$.

2. (1)若 A 可逆，则 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$; (2)若 A 是正交阵($AA^T=I$), 则 $(A^*)^T=(A^*)^{-1}$

(3)若 A 是 3 阶正交阵，$|A|=-1$，则 $|A+I|=0,\ |A^2-I|=0$.

3. 设 A 是 n 阶方阵，若 $(A+I)^m=0$，则 A 可逆.

参考答案

一.1. 0 ; 2. $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; 3.$\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$; 4.$\begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$;5. 125；6. $-2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

二. 选择： 1. B; 2. C; 3. B; 4.B; 5. B.

三. 计算：1. $A=-\alpha\alpha^T$, $\alpha=(1,1,1,1)^T$； 先计算 n=2，然后对 n 进行分析.

2. （1）$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 当 $k\neq 0$ 时可逆，$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ -1 & 1/k & 1 \end{pmatrix}$.

四.证明题：1. 必要性：$A^2=A$，$A^2=[\frac{1}{2}(B+I)]^2=A=\frac{1}{2}(B+I)$，

即 $B^2+2B+I=2(B+I)=2B+2I$，所以 $B^2=I$.

充分性： $B^2=I$，有 $A^2=[\frac{1}{2}(B+I)]^2=\frac{1}{2}(B+I)=A$.

3. $(A+I)^m=A^m+C_m^1A^{m-1}+\cdots C_m^{m-1}A+I=0$，故 $A(-A^{m-1}-C_m^1A^{m-2}-\cdots-C_m^{m-1}I)=I$.

行列式补充题

一. 选择题:

1．若一个 $n(n\geq 2)$ 级行列式 D 中元素或为 1 或为-1，则 D 的值 （ ）

A. 1 B.-1 C.奇数 D.偶数

2．已知多项式 f(x)=$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x & a_{24}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x & a_{34}+x \\ a_{41}+x & a_{42}+x & a_{43}+x & a_{44}+x \end{vmatrix}$ 则 f(x)的最高次数是（ ）

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

二. 填空题:

1．排列 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 的逆序数等于 3，排列 $a_5a_4a_3a_2a_1$ 的逆序数等于_____;

2．四阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 展开公式中，含 a_{24} 且带负号的项数为_____;

3．行列式 $D=|a_{ij}|_{n\times n}=c$，现在将每个 a_{ij} 替换为 $(-1)^{i-j}a_{ij}$ ，则替换后行列式 D =_____；

三. 判断题:

1．n 阶行列式 D 中有多于 n^2-n 个元素为零，则 D=0　(　　);

2．D=0,则互换 D 的任意两行或两列, D 的值仍为零.　(　　);

3．$D=|a_{ij}|_{3\times3}, A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式,则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$. (　　);

四.计算 1. $\begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$　2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$;　3. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

五 证明 1. $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$; 2. $\begin{vmatrix} 0 & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_n & & * \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} * & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_n & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n(n-1)/2}a_1\cdots a_n$

3. 证明：$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$;

4. 证明：n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\cos n\theta$.

参考答案

一. 选择题答案：1. D;　2.D;

1．根据行列式展开，总共有 n！项相加，而由题可知每一项为 1 或者-1，而 n!在 $(n\geq2)$ 时为偶数，偶数个奇数相加为偶数，故选 D.

2.第 2,3,4 行分别减去第一行后,则只有第一行含 x,再按第一行展开知 f(x)最高次数为 1. 选 D.

3.由于存在三阶矩阵 $B\neq0$ 使得 AB=0,故方程组 AX=0，有非 0 解，故 A 的行列式为 0，计算可得 $|A|=(\lambda-1)^2$ 故 $\lambda=1$．故选 C.

二. 填空题　1．答案为 7;　2．答案为 3;　3．答案为 c;　详细解答:

1． $a_1a_2a_3a_4a_5$ 中的两两关系有 $C_5^2=10$ 个，3 个是逆序数，7 个是顺序数

那么原来 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 中的逆序组到 $a_5a_4a_3a_2a_1$ 中变成了顺序组，

原来 $a_1a_2a_3a_4a_5$ 中的顺序组到 $a_5a_4a_3a_2a_1$ 中变成了逆序组．故答案为 7.

2． 我们按 a_{24} 展开，得到 $(-1)^{2+4}a_{24}|A_{24}|_{3\times3}$，而 3 阶行列式展开式中有 3 个负数项，

故含 a_{24} 的负数项数目为 3．答案为 3.

3． $D=|a_{ij}|_{n\times n}$ 展开的每一项为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}\,a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$，而替换后为

$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}(-1)^{(1+2+\cdots n)-(i_1+i_2+\cdots i_n)}$．显然 $(1+2+\cdots n)-(i_1+i_2+\cdots i_n)=0$ 故每一项没有改变，所以 D 的值也没有变. 答案为 c.

三. 判断题答案:1. √；2. √；3. √； 简析:

1.由抽屉原理得至少有一行多于 $n^2-n/n=n-1$ 个 0，即必有一行有 n 个 0，故行列式为 0.

2 由行列式性质可知，交换只是改变符号；3．列排 1234 与 1432.; 4．由行列式性质可知;.

四. 1. $\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{r_1+(r_2+\cdots+r_n)}{=} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=(x-a)^{n-1}\left[x+(n-1)a\right]$$

2. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(d-a)(d\text{-}b)(d\text{-}c)(c\text{-}a)(c\text{-}b)(b\text{-}a)$

则 $f(x)=(x^4-(a+b+c+d)x^3+\cdots+abcd)(d-a)(d\text{-}b)(d\text{-}c)(c\text{-}a)(c\text{-}b)(b\text{-}a)$

另一方面 $f(x)$ 展开式中含 x^3 的项是 $-x^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$，两式相比较可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= -\big(-(a+b+c+d)\big)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a) \\ &= (a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a) \end{aligned}.$$

3. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & y \\ y & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & y & x & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & y & x \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & y \end{vmatrix} = x^n + (\mathbf{-1})^{n+1} y^n$

五.1 证：$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & b(a-b) & 0 \\ 2a-2b & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2 & 0 & 0 \\ 2a-2b & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$.

2. 证：把$\begin{vmatrix} 0 & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_n & & * \end{vmatrix}$按第一行展开得:$\begin{vmatrix} 0 & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_n & & * \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} a_1 \begin{vmatrix} 0 & & a_2 \\ & \iddots & \\ a_n & & * \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$,

由此类推得$\begin{vmatrix} 0 & & a_1 \\ & \iddots & \\ a_n & & * \end{vmatrix} = (-1)^{(n+1)+n+\cdots+2} a_1 \cdots a_n = (-1)^{n(n-1)/2} a_1 a_2 \cdots a_n$.

3. 证:$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\cdots+\frac{a_1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdots a_n (1+\frac{1}{a_1}+\cdots\frac{1}{a_n})$$

4. 证：对阶 n 用归纳法, $D_1 = \cos\theta$; $D_2 = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$

假设 $D_{n-1} = \cos(n-1)\theta$, $D_{n-2} = \cos(n-2)\theta$ 对 D_n 按第 n 行展开得

$$D_n = 2\cos\theta \cdot D_{n-1} + 1\cdot(-1)^{n+(n+1)}\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 2\cos\theta & 0 \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cos\theta\cdot\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta = \cos(\theta+(n\text{-}1)\theta) + \cos(\theta\text{-}(n\text{-}1)\theta) - \cos(n\text{-}2)\theta$$

$= \cos n\theta$ 归纳法成立.

第 2 章 向量组自测题

一. 判断题:

1. 如果向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性相关，那么这个向量组一定有两个成正比例（ ）.

2. 若 n 维向量组 $a_1, \cdots, a_n$ 线性相关，则 n 维向量组 $a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}$ 也线性相关（ ）

3. 如果两个向量组的秩相等，那么这两个向量组等价. （ ）

4. V 是实数域上的 n 维向量空间，$a_1, \cdots, a_n$ 是 V 中 n 个线性无关的向量，

则 V 中任一向量可由 $a_1, \cdots, a_n$ 线性表示 （ ）

二. 填空题:

1. 已知向量组 a_1 =（1，2，3，4），a_2 =（2，3, 4，5），a_3 =(3, 4 , 5, 6)，

a_4 =（4，5, 6，7），则该向量组的秩为_______；

2. 一个向量 α 线性相关的充要条件是_______；一个向量 α 线性无关的充要条件是______；两个向量 a_1, a_2 线性相关的充要条件是__________；

3. 设 b =（3, 5, −6），a_1 =（1，0, 1），a_2 =（1 ，1 ，1），a_3 =(0 ，1 ，−1) 则将向量 b 表示成 a_1, a_2, a_3 的线性组合为____________

4. 已知 n 维列向量组 $a_1, \cdots, a_n$ 线性无关, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ，

如果 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_n$ 线性相关，则 $|A|$ =_________

5. 若 V 表示一切 2×2 的实对角矩阵按照矩阵的加法和数乘运算构成的向量空间，则 V 的一组基为____________.

三. 选择题:

1. 向量组 a_1 =（1, 0, 0），a_2 =（0, 1, 0），a_3 =(1, 1 , 1)，a_2 =（1, 1, 0）

的一个极大线性无关组是（ ）

A. a_1, a_2,　　B. a_1, a_2, a_3，　C. a_1, a_2, a_4，　D. a_1, a_2, a_3, a_4

2. 设向量组 a_1, a_2, a_3 与向量组 b_1, b_2 等价，则　(　　　)

A.向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关;　　B.向量组 b_1, b_2 线性无关;　D.向量组 b_1, b_2 线性相关

3. 设某向量组的秩为 r, 则下列对该向量组所下的结论中错误是(　　)

A.任一线性无关的部分组含有 r 个向量;　B.所有含 r+1 个向量的部分组都线性相关

C.所有含 r 个向量的部分组都线性无关　D.所有线性无关的部分组含有向量个数不超过 r

四. 计算题: 1. 设 a_1, a_2 线性无关, a_1+b, a_2+b 线性相关, 用 a_1, a_2 表示向量 b .

2. $a_1=(1,1,2,-4)^T$, $a_2=(2,-3,3,1)^T$, $a_3=(1,1,2,0)^T$, $a_4=(4,-6,6,2)^T$

(1)求该向量组的秩；(2)讨论它的线性相关性；(3)求出它的极大无关组.

3. 已知 R^3 的两个基为: $a_1=(1, 1, 1)^T$,, $a_2=(1, 0, -1)^T$, $a_3=(1, 0, 1)^T$;

$b_1=(1, 2, 1)^T$, $b_2=(2, 3, 4)^T$, $b_2=(3, 4, 3)^T$

求由基 a_1, a_2, a_3 到基 b_1, b_2, b_3 的过渡矩阵 P.

五. 证明题:

1. 设 $b_1=a_1, b_2=a_1+a_2, \cdots, b_r=a_1+a_2+\cdots+a_r$, 且向量组

$a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关. 证明向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 线性无关.

2. 已知秩 $r(a_1, a_2, a_3)=2$, $r(a_1, a_3, a_4)=3$, 证明

(1) a_1 能由 a_2, a_3 线性表示;　　(2) a_4 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

3. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是一组 n 维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是：任一 n 维向量都可由它们线性表示.

4. 设 $V_1=\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n \in R$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$

$V_2=\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \mid x_1, \cdots, x_n \in R$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$

问: V_1, V_2 是不是向量空间？给出证明.

5. 试给出线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有形如 $x=(1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 解 (即要求 $x_1=1$, 而 $x_2, \cdots, x_n$ 不作要求)的一个充要条件，并证明你的结论.

参考答案：一.　1. ×;　2. √;　3. ×;　4. √;

二. 1. 2 ;　2. $\alpha=0$; $\alpha\neq 0$;　存在常数 k 满足 $a_1=ka_2$ 或 $a_2=ka_1$;

3. $b=7a_1-4a_2+9a_3$ ； 4. 0 ； 5. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

三. 1. B; 2. A； 3. A 与 C ；

四. 1. 存在不全为零的数λ_1, λ_2使 $\lambda_1(a_1+b)+\lambda_2(a_2+b)=0$,由此得

$$b=-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}a_1-(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}a_2).$$

2. 令 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\1&-3&1&-6\\2&3&2&6\\-4&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

所以该向量组秩为 3，它是线性相关的，极大无关组分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$.

3. $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.

五. 1. 提示：设$k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_rb_r=0$, 则

$$(k_1+\cdots+k_r)a_1+(k_2+\cdots+k_r)a_2+\cdots+(k_p+\cdots+k_r)a_p+\cdots+k_ra_r=0.$$

2. (1) 由秩$r(a_2,a_3,a_4)=3$, 知 a_2 , a_3 线性无关. 又$r(a_1,a_2,a_3)=2$知a_1, a_2, a_3 线性相关, 故a_1能由a_2, a_3 线性表示;

(2) a_1能由a_2, a_3 线性表示,若a_4 能由a_1,a_2,a_3线性表示，则a_4 能由a_2, a_3线性表示, 从而a_2, a_3, a_4 线性相关, 矛盾.

3. 必要性: 设α 为任一 n 维向量. $a_1,\cdots,a_n$线性无关, 而$a_1,\cdots,a_n,a$,线性相关, 则α 能由$a_1,\cdots,a_n$ 线性表示.

充分性: 任一 n 维向量都可由$a_1,\cdots,a_n$ 线性表示, 故单位向量组$e_1,e_2,...,e_n$能由$a_1,\cdots,a_n$ 线性表示, 于是有秩关系$r(e_1,...,e_n)\le r(a_1,\cdots,a_n)$,

即$r(a_1,\cdots,a_n)$=n, 故$a_1,\cdots,a_n$线性无关.

4. V_1是向量空间，V_2不是向量空间.

5. 记$A_{m\times n}=(a_1,\cdots,a_n)$. 则方程组$A_{m\times n}x=0$有形如

$x=(1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 解的一个充要条件是a_1可由$a_2,\cdots,a_n$ 线性表示.

证：　$x=(1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是 $A_{m\times n}x=0$ 的解当且仅当

$a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=0$ 当且仅当 $a_1=-x_2a_2-\cdots-x_na_n$ 当且仅当 a_1

可由 $a_2,\cdots,a_n$ 线性表示.

第 3 章　线性方程组自测题

一. 选择题：

1．设 A 是 $m\times n$，则 m<n 是齐次线性方程组 $A^TAX=0$ 有非零解的(　　)

A．必要条件　B．充分条件　C．充要条件　D．以上都不对

2．设 A 是 n 阶实矩阵，A^T 为 A 的转置，对于方程组(I) AX = 0 与(II) $A^TAX=0$ 必有(　　)

A.(II)的解是(I)的解, 但(I)的解不是(II)的解.

B(II)的解是(I)的解，(I)的解也是(II)的解. C. (I)解是(II)的解但(II)解不是(I)的解

3．设 α_1，α_2，α_3 是四元齐次线性方程组 AX＝b 的三个解向量，且 $r(A)=3$,

$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，C 为任意数，则方程组 AX＝b 的通解 X＝(　　　)

A．$(1,2,3,4)^T+C(1,1,1,1)^T$；　B．$(1,2,3,4)^T+C(0,1,2,3)^T$

C．$(1,2,3,4)^T+C(2,3,4,5)^T$；　D．$(1,2,3,4)^T+C(3,4,5,6)^T$

4．要使 $\xi_1=(1,0,1)^T$，$\xi_2=(-2,0,1)^T$ 都是方程组 $Ax=0$ 的解，只要系数阵 A 为(　　)

A. $\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&1&-1\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&2&0\end{bmatrix}$

5．设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表成(　　)

A．ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等价向量组　　B．ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等秩的向量组

C．$\xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1+\xi_2+\xi_3$　　D．$\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$

6．齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+kx_3+x_3=0\\2x_1+x_2+x_3=0\\kx_2+3x_3=0\end{cases}$ 只有零解,则 k 应满足(　　)

A．$k\neq 3/5$　　B．$k=3/5$　　C．无解　　D．全体实数

7．设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的 s 个解, 若 $C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_s\alpha_s$ 也是 $Ax=b$ 的解，则 $C_1+\cdots+C_s$ 等于(　　)；　特别 $(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)/s$ 也是 $Ax=b$ 的解

A．0　　B．1　　C．-1　　D．2.

二. 填空题：

1．设方程组$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$的每一个方程都表示一个平面，若系数阵的秩为 3，则三个平面的关系是______;

2．设 A 为 4 阶方阵，秩 r (A)=2，A^*是 A 的伴随矩阵，则 $A^*X=0$ 的解空间维数是_____

3．已知方程组$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$无解，则 a＝______;

4．A、B 都是 n 阶矩阵，且 $A\neq 0$，$AB=0$，则$|B|$＝______;

5. 设$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}$是齐次方程组$\boldsymbol{A}x=0$的基础解系，则向量组：$\boldsymbol{\beta_1}=\boldsymbol{\alpha_1}+t_1\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\beta_2}=\boldsymbol{\alpha_2}+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$

也可作为$\boldsymbol{A}x=0$的基础解系的充要条件是，常数t_1,t_2满足条件________;

6．方程组$x_1+x_2-x_3=0$的基础解系是__________;

7．设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和为 0，且秩为 n-1，则方程组$Ax=0$的通解为_______.

三. 计算题 1．**设**齐次线性方程组$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+bx_4=0, \\ bx_1+ax_2+bx_3+bx_4=0, \\ bx_1+bx_2+ax_3+bx_4=0, \\ bx_1+bx_2+bx_3+ax_4=0, \end{cases}$ $(a\neq 0, b\neq 0.)$

讨论a,b为何值时方程组有非零解？在有非零解时求它的一个基础解系.

2．求线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4=6 \\ x_1+2x_2-4x_3-4x_4=-1 \end{cases}$的通解.

3．当λ取何值时，方程组$\begin{cases} \lambda.x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+\lambda.x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+\lambda.x_3=2 \end{cases}$有唯一解、无解、有无穷多解？在有无穷多解时，求出通解.

4．设有方程组$\begin{cases} a.x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$

1）a,b取何值时，方程组有唯一解； 2）a,b取何值时，方程组无解；

3）a,b取何值时，方程组有无穷多解，并求出通解.

5．当a取何值时方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ x_1+5x_2+10x_3-x_4=5 \\ 3x_1+5x_2+10x_3+7x_4=a \end{cases}$有解？在方程组有解时，用其导出组的基础解表示方程组的通解.

6．已知线性方程组(I)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的基础解系为$(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^T,\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^T$.写出方程组(II)

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1,2n}x_{2n}=0 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\cdots+b_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的通解，并说明理由.

四. 证明题

1．$m\times n$ 矩阵 A 的秩为 m（n>m）；B 是$n\times(n-m)$，秩为 n－m；又知 AB=0，且α是满足条件$A\alpha=0$的列向量. 证明: 存在唯一的 n－m 维向量γ使得$\alpha=B\gamma$.

2．矩阵$A_{m\times n}$，证明：$Ax=b$有解的充要条件是: 若$A^TZ=0$，则$b^TZ=0$.

3．设 A 是$m\times n$矩阵，D是$m\times n$矩阵，$\text{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，B 是$m\times m$，求证：若 B 可逆且 BA 的行向量都是方程组$D$x＝0 的解，则 A 的每个行向量也都是该方程组的解.

4．设 A 是 m×n 阶实矩阵,证明 秩$r(A^TA)=r(A)$.

5．A 是 n 阶矩阵，且$\mathrm{A}\neq 0$. 证明：存在 n 阶非 0 矩阵 B，使 AB＝0 的充要条件是$|A|=0$.

参考答案

一. 选择题：

1. B.因秩$r(A^TA)\le r(A)\le m<n$,其中 n 是A^TA的阶数即方程组$A^TAX=0$的未知数的个数，故方程组$A^TAX=0$有非零解，但不必要，因为当$m\ge n$时，$r(A^TA)\le n\le m$，此时方程组有可能只有零解，也可能有非零解.

2. B 若x是 AX＝0 的解，即$Ax=0$，显然$A^TAx=0$

若x是$A^TAx=0$的解，则$x^TA^TAx=0$，即$(Ax)^T(Ax)=0$。

若 $Ax\neq 0$ 不妨设 $Ax=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T, b_1\neq 0,$ 则 $(Ax)^T(Ax)=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2>0$ 与

$(Ax)^T(Ax)=0$ 矛盾，因而 $Ax=0$，即(I)、(II)同解.

3.C. 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组 AX＝b 的三个解，故 $\alpha_1-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$ 是其导出组 AX＝0 的解，由解的性质可知 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_3)=2\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3)=(2,3,4,5)^T$ 是 AX＝0 的解，又 r (A)=3 故 AX＝0 的基础解系含一个解向量，方程 AX＝b 的通解. $X=(1,2,3,4)^T+C(2,3,4,5)^T$.

4. 答案 D. 因为 D．r(A)=1，所以方程组 Ax＝0 的基础解系含解向量个数为：3- r(A)＝2.故选 D.

5. C. 由于 $k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+k_3(\xi_1+\xi_2+\xi_3)=0$ 得

$k_3\xi_3+\xi_2(k_1+k_2)+\xi_1(k_1+k_2+k_3)=0$. 因为 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 Ax＝0 的基础解系，所以

ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.于是 $k_3=0, k_2+k_3=0, k_1+k_2+k_3=0$，所以 $k_1=k_2=k_3=0$，

则 $\xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 线性无关. 它们也可以是方程组的基础解系，C 是答案.

6．A. $\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & k & 3\end{vmatrix}\neq 0, 3+2k-k-6k\neq 0, k\neq\dfrac{3}{5}$ 时,方程组只有零解.

7．B. 因为 $\boldsymbol{A\alpha_i=b}$， 且 $\boldsymbol{A(C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_s\alpha_s)=b}$，所以

$(C_1+C_2+\cdots+C_s)b=b\Rightarrow C_1+C_2+\cdots+C_s=1.$

二. 填空题:

1．相交于一点. 因 $r(A)=3$，故此方程组有唯一解，三平面交于一点

2．4. $r(A)=2<4-1$，故 $r(A^*)=0$，即 $A^*=0$，则 $A^*X=0$ 的基础解系含 4－0＝4 个解

3．－1. 因增广阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & a+2 & 3\\ 1 & a & -2 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a & 1\\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3\end{pmatrix}$，若 a＝-1，则

$r(\overline{A})=3\neq R(A)=2$，故方程无解.

4. 0. 因 AB＝O，则 B 的列向量组是方程 AX＝0 的解, 故 $r(A)+r(B)\leq n$，又 $A\neq 0$，则 $r(B)<n, |B|=0$.

5. $1-t_1t_2\neq 0$. $\boldsymbol{\beta_1,\beta_2}$ 为 $\boldsymbol{A}x=0$ 的基础解系，即 $\boldsymbol{\beta_1,\beta_2}$ 线性无关，只有当 $\boldsymbol{k_1}=\boldsymbol{k_2}=0$

使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2=0$，即：$\boldsymbol{k_1(\alpha_1}+t_1\boldsymbol{\alpha_2)}+\boldsymbol{k_2(\alpha_2}+t_2\boldsymbol{\alpha_1})=0$ 有：

$\alpha_1(\boldsymbol{k_1}+t_2\boldsymbol{k_2})+\alpha_2(\boldsymbol{k_2}+t_1\boldsymbol{k_1})=0$. α_1,α_2 线性无关，所以 $\begin{bmatrix}1 & t_2\\ t_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，因 此

得 $1-t_1t_2\neq 0$.

6. $\xi_1=(-1,1,0)^T,\xi_2=(1,0,1)^T$.

7. $k(1\quad 1\quad \cdots\quad 1)^T$. $r(A)=n-1$，则 $Ax=0$ 的基础解系只有一个向量. 设 $Ax=0$ 的第 i 个方程为 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=0$，又矩阵 A 的各行元素之和为 0，即 $a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=0$，所以 $(1,1,\cdots 1)^T$ 为它的一个解向量，得 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,\ 1,\cdots 1)^T$.

三. 计算题: 1. $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}=(a-b)^3(a+2b)$，当 $a=b$ 或 $a=-3b$ 时方程组有非零解.

当 $a=b$ 时：方程组变为 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$，基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

当 $a=-3b$ 时：方程组变为 $\begin{cases} x_1=x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=x_4 \end{cases}$， 基础解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. 解: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_1=-2x_3-2x_4 \\ x_2=3x_3+3x_4 \end{cases}$ 的基础解为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\end{pmatrix}$,

$\begin{cases} x_1=-2x_3-2x_4+3 \\ x_2=3x_3+3x_4-2 \end{cases}$ 的一个特解是 $\eta_0=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$

原方程的通解为 $\eta=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2\quad k_1,k_2$ 是任意常数.

3. 解: $|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

（1）当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时, $|A|\neq 0$，则知，方程组有唯一解.

（2）当 $\lambda=-2$ 时，$\overline{A}=(A\,|\,b)=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

秩 A= 2, 秩$(\overline{A})=3$，故无解.

（3）当$\lambda=1$时，$\overline{A}=(A|b)=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&1&1&2\\1&1&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

秩 r (A)=r$(\overline{A})$=1<3, 有无穷多解，通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

4.系数阵A与$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{vmatrix}=b(1-a)$.（1）当$a\neq1$且$b\neq0$时，方程组有唯一解；

（2）当$b=0$时，方程组为$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1\qquad+x_3=3\\x_1\qquad+x_3=4\end{cases}$ 方程组无解；当$a=1$时，

增广阵$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&b&0&1\\0&2b-1&0&0\end{pmatrix}$ $\therefore$ 当$a=1$, 且$b\neq 1/2$ 时方程组无解

（3）当$a=1$，$b=1/2$时，方程组有无穷多解。

$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，一般解$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$

5．先对增广矩阵进行初等行变换

$$\overline{A}=(A|b)=\begin{bmatrix}1&1&2&3&\cdots&1\\1&3&6&1&\cdots&3\\1&5&10&-1&\cdots&5\\3&5&10&7&\cdots&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&\cdots&1\\0&2&4&-2&\cdots&2\\0&4&8&-4&\cdots&4\\0&2&4&-2&\cdots&a-3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&\cdots&1\\0&2&4&-2&\cdots&2\\0&0&0&0&\cdots&a-5\\0&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&4&\cdots&0\\0&1&2&-1&\cdots&1\\0&0&0&0&\cdots&a-5\\0&0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

可知当$a=5$时, 方程有解，特解$\gamma_0=(0,1,0,0),^T$ 导出组的基础解系为:

$\eta_1=(0,-2,1,0)^T=(-4,1,0,1)^T$, 原方程组的全部解为$X=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2,k_1,k_2$为任意常数.

6．方程组(I)与(II)均有 2n 个未知数;由已知条件(I)的一个基解系含有 n 个解向量,从而其系数阵的秩 r(A)=2n-n=n.将方程组(I)与(II)分别改写为矩阵形式:Ax=0 与 Bx=0.由于 B 的行向量组是一个基础解系,故线性无关,所以秩 r(B)=n. 因此方程组(II)的一个基础解系含 n 个解向量.

由已知条件,B 的每一行的转置向量都是(I)的解,即 $AB^T=0$.从而知$(AB^T)^T=0$,即 $BA^T=0$.因此 A 的每一行的转置向量都是(II)的解.但 r (A)=n,所以 A 的行向量线性无关,因此 A^T 的全体列向量组恰好构成(II)的一个基础解系,所以通解迎刃而解.

四. 证明题 1. 证明：秩 r(A)=m，所以方程组 AX＝0 的基础解系所含解向量的个数为 n-r(A)=n-m.

设 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_{n-m})_{n\times(n-m)}$ 为 $n\times(n-m)$ 矩阵，$\boldsymbol{r(B)=n-m}$. 其中 β_i 为 B 的列向量

因为 AB＝0，所以 $(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_{n-m})=0$，即 B 的列都是 Ax＝0 的解，又 r (B)=n-m,

所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$ 为 Ax＝0 的基础解系.

所以满足 $A\alpha=0$ 的任意向量都是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$ 的唯一线性组合，即存在唯一

的一数组 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-m}$，使 $\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_{n-m}\beta_{n-m}$，

令 $\boldsymbol{B=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}\right)}$，则 $\alpha=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m})\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_{n-m}\end{pmatrix}=B\gamma$.

2．证明：充分性： 假设 Ax＝b 的系数矩阵为 A,

增广矩阵为 $\overline{A}=(A\,|\,b)$. 考察：I. $A^Tx=0$， II.$\begin{cases}A^Tx=0\\b^Tx=0\end{cases}$， 因为 $A^TZ=0$ 则 $b^TZ=0$，

所以(I)和(II)是同解方程组，$r(A^T)=r\begin{pmatrix}A^T\\b^T\end{pmatrix}$. 即 $r(A)=r(\overline{A})$，所以 Ax＝b 有解.

必要性：考察 (1) $Ay=b$ ； (2) $A^Tx=0$ ； (3) $b^Tx=0$.

即要证明：若(1)有解，则(2)的解必为(3)的解.

假设 y 为(1)的解，则 Ay＝b. 取转置，得 $y^TA^T=b^T$. 有设 x 为(2)的解，即 $A^Tx=0$. 则

$b^Tx=y^TA^Tx=y^T0=0$， 所以 x 为 (3)的解.

3．证明：设 $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mm}\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}$ 其中 $\alpha_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 为 A 的行向量

$$BA=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}\alpha_1+b_{12}\alpha_2+\cdots b_{1m}\alpha_m\\b_{21}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots b_{2m}\alpha_m\\\vdots\\b_{m1}\alpha_1+b_{m2}\alpha_2+\cdots b_{mm}\alpha_m\end{bmatrix}$$

因为 BA 的行向量都是方程组 D x＝0 的解，所以 $D(BA)^T=0$；

因为 B 可逆，所以 $DA^T=0$，即 A 的每个行向量为 D x＝0 的解.

4.证.：作齐次方程组 $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 其中 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$. 显然 $AX=0$ 的解必是 $A^TAX=0$ 的解. 反之, 若 X_0 是 $A^TAX=0$ 的解, 则有

$A^TAX_0=0$， 从而 $X_0^TA^TAX_0=0$，即 $(AX_0)^T(AX_0)=0$.

设 $AX_0=(a_1,a_2,\ldots,a_m)^T$, 则上式变成 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2=0$.

由于 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 都是实数，所以 $a_1=a_2=\cdots=a_m=0$ 即 $AX_0=0$.

因此 X_0 也是 $AX=0$ 的解. 于是 $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 同解.

由于同解线性方程组的基础解系中含有相同个数的解向量, 所以结论成立.

5．证明：必要性(反证法). 设 $|A|\neq 0$，则 A^{-1} 存在. 当 AB＝0 时，

两边右乘 A^{-1} 得 B＝0，与存在一个非零矩阵 B，使 AB＝0 矛盾. 所以 $|A|=0$.

充分性：设 $|A|=0$，则方程组 Ax＝0 有非零解 $x=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$. 构造矩阵

$$B=\begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$ 则 $B\neq 0$， 且 AB＝0.

第 4 章 特征值相似矩阵自测题

一．填空题：

1．设 n 阶矩阵 A 的元素全为1，则 A 的 n 个特征值是______________；

2. A^* 为 n 阶阵 A 的伴随阵, $|A|=5$，则 $B=AA^*$ 的特征值是______, 特征向量是______

3. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 A 的特征值为 2 和 1(二重)，则 B 的特征值为______

4．三阶方阵 A 的特征值为 $1,-1,2$， 则 $B=2A^3-3A^2$ 的特征值为________；

5．设 n 阶方阵 A 的特征值为 $1,2,\cdots,n$，则 $|2A+I|=$______________；

6．设可逆方阵 A 与 B 相似，则有 A^{-1} 与 B^{-1} ____________（相似，不相似）；

7．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，则 x = _____， y = _____.

二．选择题：

1．零为矩阵 A 的特征值是 A 为不可逆的（　　　）

(A) 充分条件　(B) 必要条件　(C)充要条件　(D) 非充分、非必要条件

2．设 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 A 一个特征值，则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值等于（　）

(A) $4/3$　(B) $3/4$　(C) $1/2$　(D) $1/4$

3.与 n 阶单位矩阵 I 相似的矩阵是（　　　）

(A)数量阵 $kI(k\neq 0)$　(B)对角阵 D（对角元不为 1）　(C)单位矩阵 I　(D)可逆阵 A

4．设方阵 $A\backsim B$ 相似，则（　　　）

(A) A,B 的特征矩阵相同　(B) A,B 的特征多项式相同

(C) A,B 相似于同一个对角阵　(D) 存在正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT=B$

5．3 阶阵 A 有特征值 $1,-2,4$，则下列矩阵中满秩矩阵是（　　），I 是单位阵

(A) $I-A$　(B) $A+2I$　(C) $2I-A$　(D) $A-4I$

6.设 λ_0 是方阵 A 的特征值，且方程组 $(\lambda_0 I-A)x=0$ 的基础解系为 η_1,η_2，则 A 的属于 λ_0 的全部特征向量是（　　　）

(A)；(B)；(C) $c_1\eta_1+c_2\eta_2$（c_1,c_2 为任意常数）；(D) $c_1\eta_1+c_2\eta_2$（c_1,c_2 为不全为零任意常数）

三．计算题：1. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

2．已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}-1&&\\&2&\\&&b\end{bmatrix}$ 相似，求 a，$b=$？

3． 3 阶实对称阵的特征值为 6, 3, 3，特征值 6 对应的特征向量为 $p_1=(1,1,1)^T$，求 A.

四．证明题:1. 设 A, B 都是 n 阶方阵，且 $|A| \neq 0$，证明 AB 与 BA 相似.

2. 如果 A 满足 $A^2 = A$, 则称 A 是幂等矩阵. 试证幂等阵的特征值只能是 0 或 1.

3. 设 α_1, α_2 分别是矩阵 A 的属于特征值 λ_1, λ_2 的特征向量，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，试证：$\alpha_1 + \alpha_2$ 不再是 A 的特征向量.

参考答案

一．填空题：1.答案：特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. 因为

$$\left|\lambda I - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \cdots & -1 \\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-n)^n \lambda^n$$

故 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

2. 答案：因为 $AA^* = A^*A = |A| I$，所以对于任意 n 维向量 α，有 $AA^*\alpha = |A| I\alpha = |A|\alpha$. 所以 $|A| = 5$ 是 $B = AA^*$ 的特征值，任意 n 维向量 α 为对应的特征向量.

3. 答: A, A^T 有相同的特征值. 所以 $B = A^T$ 和 A 有相同的特征值. B 的特征值为 2, 1, 1

4. $B = 2A^3 - 3A^2$ 的特征值为: $2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 = -1,\ 2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 = -5,\ 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 = 4$.

5．答案：$|2A + I| = \prod_{i=1}^{n}(2i+1)$, 因为 A 的特征值为 $1, 2, \cdots, n \Rightarrow 2A + I$ 的特征值为 $2i+1\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，故 $|2A + I| = \prod_{i=1}^{n}(2i+1)$

6. 答：相似. 因为由相似 $A \backsim B$ 定义，且 A 可逆，就得相似 $A^{-1} \backsim B^{-1}$，结论得证.

7. 答: x=0，$y = -1$. 因为 A, B 相似，所以 $|A| = -2 = |B| = -2y$. 所以 $y = -1$.

由于相似矩阵的迹相等: $tr(A) = 2 + x = tr(B) = 2 + y - 1 = 2$. 于是 $x = 0$.

二．选择题:

1. 答案(C)分析:设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 A 所有特征值则 $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. 所以 0 为 A 的特征值 $\Leftrightarrow$ A 可逆.

2.(B)分析：由 $\lambda=2$ 是 A 的一个特征值，则 $\frac{1}{3}A^2$ 的一个特征值为 $\frac{1}{3}\times2\times2=\frac{4}{3}$，得出 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$

对应的特征值为 $3/4$.

3.(C) 令 $P=I$ 为单位阵，则 $P^{-1}=I$,. 所以 $P^{-1}IP=I$, (C)是答案.

4.答案(B).分析: $A\backsim B$ 必有可逆阵 P， 使 $P^{-1}AP=B.$所以有相同的特征多项式如下：

$$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|=|P^{-1}||(\lambda I-A)||P|=|\lambda I-A|.$$

5.(C) 分析: 满秩矩阵即非奇异阵，因 $\left|2I-A\right|\neq0$（2不是特征值)，故 $2I-A$ 为满秩阵.

6.(D) 分析：因为齐次线性方程组 $(\lambda_0I-A)x=0$ 的基础解系为 η_1,η_2，所以方程组的全部解为 $C_1\eta_1+C_2\eta_2$ （C_1,C_2 为任意常数). 但特征向量不能为零，则 A 的属于 λ_0 的全部特征向量是 $C_1\eta_1+C_2\eta_2$ （C_1,C_2 为不全为零任意常数). (D)为答案.

三. 计算题:

1.解：先解特征方程 $\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=0$，得 $\left(\lambda-1\right)^2\left(\lambda-10\right)=0$

特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=10$. 当 $\lambda=1$ 时，对特征矩阵作行变换

$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

基础解系为 $\alpha_1=(-2,\ \ 1,\ \ 0)^T$，$\alpha_1=(2,\ \ 0,\ \ 1)^T$

当 $\lambda=10$ 时，也可得基础解系 $\alpha_3=(1,\ \ 2,\ \ -2)^T$.

对应于 $\lambda=1$ 的全部特征向量是 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$，其中 c_1,c_2 是不全为零的常数；对应于 $\lambda=10$ 的全部特征向量是 $c_3\alpha_3$，其中 c_3 是任意非零常数

2. $\because A\sim B$ 相似 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=b$ 由特征值性质得 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-2+a+1\\ |A-\lambda_1 I|=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a-b=2\\ a=0\end{cases}\therefore\begin{cases}a=0\\ b=-2\end{cases}$.

3．解：先求与特征值 3 对应的两个正交特征向量. 因不同特征值对应的特征向量是相互正交的，则对应于特征值 3 的特征向量满足 ${p_1}^T x=0$，即 $x_1+x_2+x_3=0$，得两个无关的特征向量：

$$\mathrm{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};\ 令 P=(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,\mathrm{p}_3),\ T=\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}，则有 AP=PT，$$

故有
$$A=PTP^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$$

四．证明题:

1．证明：因为 $|A|\neq 0$，故 A^{-1} 存在。又 $BA=A^{-1}ABA$，这说明 AB 相似于 BA.

2．证明：设 $A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha},(\vec{\alpha}\neq\vec{0})$, 两边同时左乘 A，得

$$A\vec{\alpha}=\lambda A\vec{\alpha}\Rightarrow A\vec{\alpha}=\lambda\lambda\vec{\alpha}\Rightarrow\lambda\vec{\alpha}=\lambda^2\vec{\alpha}.\quad 可得 (\lambda-\lambda^2)\vec{\alpha}=\vec{0}.$$

因为 $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, 所以有 $\lambda-\lambda^2=0$, 得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

3．证明：反证法：若 $\alpha_1+\alpha_2$ 是 A 的特征向量，则由定义可得存在 λ，使得

$$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

由于 α_1,α_2 分别是矩阵 A 的属于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，则

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，即　$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\cdots\cdots(2)$

结合（1）, (2) 可得　$\lambda(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，即

$$(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2=0$$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 α_1,α_2 线性无关，则对于上式有 $\lambda-\lambda_1=0,\lambda-\lambda_2=0$

这与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾. 所以假设不成立，即 $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

特征值与正交矩阵补充题

1. 设 n 阶方阵 A 有 n 个特征值 0，1，…，n-1，且阵 B 与 A 相似，求 $|\mathrm{B}+I|$ 的值.

解 B 与 A 相似，B 与 A 有相同特征值 0，1，2，…，n-1，令 $f(x)=x+1$，则 $f(B)=B+I$

有特征值 $f(0)=1, f(1)=2,\cdots, f(n-1)=n$ 于是 $|B+I|=|f(B)|=n!$.

2. 设 n 阶方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，属于 λ_i 的特征向量为 α_i，试求

（1）$P^{-1}AP$ 的特征值与相应的特征向量；（2）$(P^{-1}AP)^T$ 的特征值.

解（1）因为 A 与 $P^{-1}AP$ 相似，它们有相同的特征值，所以 $P^{-1}AP$ 的全部特征值也是

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 因 $\mathrm{A}x_i=\lambda_i\alpha_i$，两端左乘 P^{-1}，得到 $P^{-1}A\alpha_i=\lambda_i P^{-1}\alpha_i$

即 $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}(P^{-1}\alpha_i)=\lambda_i(P^{-1}\alpha_i)$，所以 $P^{-1}\alpha_i$ 是 $P^{-1}AP$ 的属于 λ_i 的特征向量.

3. 设 n 阶矩阵 A 有 n 个两两正交的特征向量，证明 A 是对称矩阵.

证 设 A 的 n 个两两正交的特征向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 对应特征值为 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$，令 $\eta_i=\dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$

$(i=1,2,\dots,n)$，则 $\eta_1,\dots,\eta_n$ 是 n 个正交单位特向量，于是 $P=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$ 为正交阵.

从而有 $P^{-1}=P^T$，且 $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\Lambda$

即 $A=PAP^{-1}=P\Lambda P^T$. 所以 $A^T=(P\Lambda P^T)^T=P\Lambda P^T=A$，$A$ 是对称矩阵.

4. 设 A 为实称阵，B 为实反对称阵，且 $AB=BA, A-B$ 是可逆的，则 $(A+B)(A-B)^{-1}$ 是

正交阵.**证明：**因 $AB=BA$，所以 $(A+B)(A-B)=(A-B)(A+B)$ 于是

$$[(A+B)(A-B)^{-1}][(A+B)(A-B)^{-1}]^T=(A+B)(A-B)^{-1}[(A-B)^{-1}]^T(A+B)^T$$

$$\begin{aligned}&=(A+B)[(A-B)^T(A-B)]^{-1}(A-B)=(A+B)[(A+B)(A-B)]^{-1}(A-B)\\&=(A+B)[(A-B)(A+B)]^{-1}(A-B)=(A+B)(A+B)^{-1}(A-B)^{-1}(A-B)=I\end{aligned}$$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&a\\1&a&a\end{pmatrix}$ 的秩为 2，当 A 的特征值之和最小时，求正交阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解 对矩阵 A 实行初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&a\\1&a&a\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1;r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&a-1\\0&a-1&a-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&a-1\\0&a-3&0\end{pmatrix}$$ 因 $r(A)=2$ 故

$a=1$，或 $a=3$.由 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$，要使 A 特征值之和最小，取 $a=1$，于是

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，特征多项式为 $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$

故特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$． 当 $\lambda_1=0$ 时，解方程 $Ax=0$

得特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=1$ 时，解方程 $(A-I)x=0$，由 $A-I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=4$ 时，解方程 $(A-4I)x=0$，由 $A-4I=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$

得特征向量 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,于是得正交矩阵:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}，且有 P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}.$$

6. 已知 n 阶阵 A 的全部特征值及与之对应 n 个线性无关特征向量，怎样反求矩阵 A？

答 利用对角化方法. 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ (对角阵)，则 $A=P\Lambda P^{-1}$

设 A 的全部特征值为 λ_1，λ_2,...，λ_n，n 个线性无关的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，则 A 可对角化，

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$，求出逆阵 P^{-1}，则有 $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ 于是求得

方阵 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$. (注意，若 P 还是正交阵则得到 A 为实对称阵)

7. 对于实对成矩阵 A，如何求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵？

答 若 A 为 n 阶实对称阵，则一定有正交阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵. 可按以下步骤求正交阵 P.

（1）求出方阵 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_n$，重根数分别为 $k_1, k_2, ..., k_s$

（2）对每一个 λ_i (重数为 k)，求出齐次方程组 $(A-\lambda_i I)x = 0$

的基础解系 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{ik_i}$ $(i = 1,2,...,n)$， 再正交单位化（若 $k_i = 1$ 则只须单位化）

得正交单位特征向量组： $p_1, p_2, ..., p_n$

（3）令 $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ (正交矩阵), 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

第 5 章　二次型自测题

一．填空题：1．矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 8 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 对应的二 次 型为 $f(x_1, x_2, x_3) =$ __________ ；

2．将 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 2x_3x_4$ 化为标准形______________；

3．已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$，经正交变换 $x = Py$ 可化成标准形 $f = 6{y_1}^2$，则 $a =$________

4．若二次型 $f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是_________

5．如果 A 是正定矩阵，那么 A^{-1} ______（是，不是）正定矩阵

6．二次型 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$ _______（是，否）正定.

二．选择题：1．二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ 的标准形是（　　）

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$；　(B) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$；　(C) $y_1^2 + y_2^2$；　(D) $y_1^2 - y_2^2$

2．二 次 型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 的 秩 等 于（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

3. n 阶实对称阵 A 为正定的充分必要条件是（　　）

(A) 所有 k 阶子式为正 $(k = 1, \ldots, n)$； (B) A 的所有特征值非负；(C) A^{-1} 为正定矩阵；

4．设 A, B 是 n 阶正定矩阵，则（　　）是正定矩阵

(A) A^*+B^* ；(B) A^*-B^* ；(C) A^*B^* ；(D) $k_1A^*+k_2B^*$

5．已知二次型 $f=5x_1{}^2+5x_2{}^2+cx_3{}^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，则 c 的值为（ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

6. 实二次型 $f=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2$ 是（ ）

(A)正定二次型；（B）半正定二次型；（C）半负定二次型；（D)不定二次型.

三．计算题:1. 用“许米特”方法，将矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ 的列向量正交单位化(规范化).

2.用非退化(可逆)线性替换, 化下面二次型为标准形，并利用矩阵验算所得结果：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2.$$

3. t 取什么值时，二次型 $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的：

四．证明题:1. 证明：下列矩阵合同，其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix}\lambda_{i_1}&&&\\&\lambda_{i_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_{i_n}\end{pmatrix}$$

2. 如果 A,B 都是 n 阶正定矩阵，证明：$A+B$ 也是正定矩阵.

3. (1) 设 A 是实对称矩阵，证明：当实数 t 充分大后，$tI+A$ 是正定矩阵.

(2) 设 A,B 为同阶实对称阵，B 是正定阵，则当实数 t 充分大时，$tB+A$ 是正定阵.

参考答案

一．填空：1．应填为 $\mathbf{16x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3}$；

2. 作可逆线性替换 $\begin{cases}x_1= y_1-y_2,\\x_2= y_1+y_2,\\x_3= y_3-y_4,\\x_4= y_3+y_4.\end{cases}$ 得 $f=2y_1^2-2y_2^2-2y_3^2+2y_4^2.$

3. 变换前后二次型所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$

由 A 与 B 相似，A, B 有相同特征值.于是 $a+a+a=6+0+0$，得 $a=2$．答：填 2.

4. 分析：f 是正定的充要条件是对应的矩阵的各阶顺序主子式大于零，因此由

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{vmatrix} > 0$$，解得 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$．　答案：　应填 $\underline{-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}}$；

5．分析：A 是正定，故 $X^T AX$ 为正定二次型，作可逆替换 $X = A^{-1}Y$，又 A^{-1} 也是对称阵，故 $Y^T A^{-1} Y = Y^T (A^{-1})^T AA^{-1} Y = X^T AX > 0$，从而 $Y^T A^{-1'} Y$ 为正定二次型，即 A^{-1} 为正定阵.

6．分析：记二次型矩阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{1}{2}, & i \neq j \end{cases}$

即 $$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ & & 1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

由于 A 的任意 k 阶顺序主子式所对应的矩阵 A_k 与 A 为同类型的对称矩阵，且

$$|A_k| = (\tfrac{1}{2})^k (k+1) > 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$，故二次型为正定二次型.

二．选择题：1.（A）二次型可化为：$f = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + {x_3}^2$，做以下代换

令 $y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_2 + x_3, y_3 = x_3$，则 $f = {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2$，答案选（A）.

2.（D）分析：由于二次型对应矩阵的行列式不为零，则是满秩的，因此秩为 3.； 3（C）.

4 (A) 因 A,B 均为 n 阶正定矩阵, 则 A^*, B^* 均为正定阵, 所以 $A^* + B^*$ 为正定阵. 答案(A).

5．(C) 分析 $f = X^T AX$,，若要求秩为 2，则必须 $|A| = 0$，而 $|A| = 4\times(-18 + 6c)$ 所以 $c = 3$.

6.（B）分析 $f = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$ 代换可得 $f = {y_1}^2 + {y_2}^2$, 负惯性指数为零，为半正定.

三．计算题:1.解：设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

（1）设 $\beta_1 = \alpha_1$ 用正交化公式得：（2） $\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{\langle \beta_1, \alpha_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 = \left[\dfrac{1}{3}, \ -\dfrac{2}{3}, \ \dfrac{1}{3}\right]^T$

（3） $\beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{\langle \beta_1, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 - \dfrac{\langle \beta_2, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 = \left[\dfrac{1}{2}, 0, \ -\dfrac{1}{2}\right]^T$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化得:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$，得正交阵 $$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

2. 配方法得：$f=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+(x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2)=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2$

则原二次型的标准形为 $f=y_1^2+y_2^2$，其中令 $y_1=x_1+x_2,\ y_2=x_2+2x_3,\ y_3=x_3$.

且非退化(可逆)线性替换为 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3\\x_2=y_2-2y_3\\x_3=y_3\end{cases}$ 相应的替换阵 $P=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$

且有 $P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

3．解： 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$，若 A 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=1>0，\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}>0，\ \Delta_3=|A|=\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}>0$$

时原二次型为正定，由此得 $\begin{cases}1-t^2>0\\-5t^2-4t>0\end{cases}$，解不等式可得 $-\dfrac{4}{5}<t<0$.

四.证明题:1．证明： 题中两个矩阵分别设为 A,B，与它们相应的二次型分别为

$$f_A=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2;\ \ f_B=\lambda_{i_1}y_1^2+\lambda_{i_2}y_2^2+\cdots+\lambda_{i_n}y_n^2$$

作可逆线性替换 $y_t=x_{i_t}$ $(t=1,2,\cdots,n)$ 则 f_B 可化成 f_A，故 A 与 B 合同.

2． 证明： 因为 A,B 为正定矩阵，所以 X^TAX,X^TBX 为正定二次型，且

$$X^TAX>0，\quad X^TBX>0\Rightarrow X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX>0$$

于是 $X^T(A+B)X$ 必为正定二次型，从而 $A+B$ 为正定矩阵.

3 证：t 充分大时，$tI+A$ 的特征值;$t+\lambda_1,t+\lambda_2,\cdots,t+\lambda_n$ 必为正，从而 $tI+A$ 是正定

总习题

一. 判断题（正确的在括号内打“ √”，错误的在括号内打“ X ” ）:

1.行列式 $D=0$ 的充要条件是 D 中至少有一行的元素可用行列式性质化为 0. ( )

2.设 $m\times n$ 矩阵 A,B 等价，则 A，B 的列向量组等价. ( )

3．设 A，B 均为非零 n 阶矩阵，且 AB=0，则秩 r(A)，r(B)都小于 n. ( )

4.当 $m<n$ 时, n 元方程组 $A_{m\times n}x=\vec{b}$ 有无穷多解. （ ）

5.若方阵 A,B 相似，则 A,B 有相同的特征值和特征向量. （ ）

6.若 A,B 均为 n 阶正定矩阵，则 AB 也是正定矩阵. （ ）.

二. 选择题（每小题只有一个正确答案）:

1．A 为列向量，则 $|AA^T|=$ ： (A) 1 ；(B) -1； (C) 0 ；(D) 2

2．设 A 为 n 阶对称阵，B 为 n 阶反对称阵，则下列矩阵中为反对称矩阵的是（ ）

(A) $AB+BA$ (B) $AB-BA$ (C) $(AB)^2$ (D) BAB

3．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则对于任意常数 k，必有（ ）

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$k\beta_1+\beta_2$ 线性相关. (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$k\beta_1+\beta_2$ 线性无关.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1+k\beta_2$ 线性相关. (D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1+k\beta_2$ 线性无关.

4．$\{\alpha_1=(0,0,-1,1)^T,\alpha_2=(1,1,-1,\mathbf{0})^T,\alpha_3=(-5,\mathbf{-5},5,\mathbf{0})^T\}'$ 的一个最大无关组为（ ）

(A) α_1，α_2 或 α_1，α_3 (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (C) α_1，α_2 (D) α_2，α_3

5．设 A 为 4×5 矩阵，且 A 的行向量组线性无关，则 （ ）

(A) A 的列向量组线性无关. (B)方程组 $Ax=b$ 增广矩阵的行向量组线性无关

(C)增广阵的任意 4 个列向量线性无关；(D)方程组 $Ax=b$ 有唯一解.

6. 设 A 为 3 阶阵, I 为单位阵，$|A+2|=|A+3|=|A-4|=0$，A^*为伴随阵，A^*的特征值为( )

(A) 2，3，-4 (B) -2，-3，4 (C) 12，8，-6 (D) -12，-8，6

7．设 A 为 n 阶正定矩阵, 若矩阵 B 与 A 相似，则 B 必为 ( )

(A) 实对称矩阵 (B) 正定矩阵 (C) 可逆矩阵 (D) 正交矩阵

8．下列说法正确的是 ( )

(A)方程组 $Ax=b$ $(b\neq 0)$ 的所有解向量关于向量的加法以及实数与向量的乘法构成线性空间.

(B)所有 n 阶实可逆矩阵关于矩阵的加法以及实数与矩阵的乘法构成线性空间.

(C)欧氏空间中从标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵.

三. 填空题:

1．设 $A=\begin{pmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1}\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$，$a_i\neq a_j(i\neq j,\ i, j=1, \ldots, n)$，则非齐次方程组 $Ax=b$ 的解是 $x=$ ________

2．设 A 为 5 阶方阵，秩 $r(A)=3$，则 $r(A^*)=$________________.

3．设 A 为 n 阶方阵，$|A|\neq 0$，将 A 的第 i 行与第 j 行互换得到矩阵 B，则 $AB^{-1}=$________.

4．设α, β, γ是 3 维列向量，已知 3 阶行列式$|4\gamma-\alpha, \beta-2\gamma, \alpha|=40$，则行列式 $|\alpha, \beta, \gamma|=$_____.

5．设 4 元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 3，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是它的 3 个解向量，其中

$\alpha_1=(2,0,0,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2+\alpha_3=(2,0,0,4)^{\mathrm{T}}$，则方程组的通解为 ________ .

6．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & a\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$可以相似对角化，则 $a=$______________.

7．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2tx_1x_2+2x_1x_3$正定，则 t 满足___________.

8．从 R^2 的基底$\alpha_1=(1, 0)'$，$\alpha_2=(1, -1)'$到基底$\beta_1=(1, 1)'$，$\beta_2=(1, 2)'$的过渡矩阵为__________.

四. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^*是 A 的伴随阵，求 X.

五. 对线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$

（1）λ取何值时，方程组无解？ （2）λ取何值时，方程组有唯一解？

（3）λ取何值时，方程组有无穷多解？用向量形式写出其通解.

六.设向量$\alpha_1, \ldots, \alpha_m(m>1)$线性无关，且$\beta=\alpha_1+\ldots+\alpha_m$，则向量$\beta-\alpha_1, \beta-\alpha_2, \ldots, \beta-\alpha_m$线性无关.

一. 判断题:（参考答案）

1.（ √ ）2.（ × ）3.（ √ ）4.（ × ）5.（ × ）6.（ × ）.

二.选择题 1.（C） 2.（A） 3.（B） 4.（A） 5.（B）6.（D） 7.（C） 8.（C）.

三.填空题: 1． $(0,\ 1,\ 0,\cdots,0)^T$ ；2． 0； 3． $P(i, j)$；

4． -10； 5． $k\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\\3\end{pmatrix}$； 6． 0； 7． $t\in(-1,1)$ ；8． $\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}$.

四. 解：令 I 为单位阵，由 $A^*X=A^{-1}+2X$，两端左乘 A，得 $|A|\,I\,X=I+2AX$，

于是得 $(|A|I-2A)X=I$.

又 $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 2\\0 & -2 & 0\end{vmatrix}=4$

所以 $X=(4I-2A)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\2 & 2 & -2\\-2 & 2 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$，

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1\\0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\quad \text{故 } X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

五. 解：设系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\1 & \lambda & 1\\1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，则 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\1 & \lambda & 1\\1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

(1) 当 $|A|\neq 0$，即 $\lambda\neq 1,-2$ 时，方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda=-2$ 时，$\widetilde{A}=(A\,|\,b)=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -5\\1 & -2 & 1 & -2\\1 & 1 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\0 & -3 & 3 & -9\\0 & 0 & 0 & -9\end{pmatrix}$

得秩 $r(A)=2$，$r(\widetilde{A})=3$，即 $\lambda=-2$ 时方程组无解.

(3) 当 $\lambda=1$ 时，$\widetilde{A}=(A\,|\,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\1 & 1 & 1 & -2\\1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得 $r(A)=r(\widetilde{A})=1<3$，方程组有无穷多解. 等价方程组为 $x_1+x_2+x_3=-2$

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

六.证明：设 $k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)+\ldots+k_m(\beta-\alpha_m)=0$，将 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$ 代入得

$(k_2+k_3+\ldots+k_m)\alpha_1+(k_1+k_3+\ldots+k_m)\alpha_2+\ldots+(k_1+k_2+\ldots+k_{m-1})\alpha_m=0$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m>1)$线性无关，得 $\begin{cases} k_2+k_3+\cdots+k_m=0 \\ k_1+k_3+\cdots+k_m=0 \\ \cdots \\ k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}=0 \end{cases}$

此方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)(-1)^{-2} \neq 0 \qquad (m>1)$$

所以方程组只有零解 $k_1=k_2=\ldots=k_m=0$ 于是 $\beta-\alpha_1, \beta-\alpha_2, \ldots, \beta-\alpha_m$ 线性无关.

试卷 1 及答案

一. 选择题:

1. 设 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=d\neq 0$，则 $\begin{vmatrix} a_3 & 2b_3-a_3 & 3c_3-2b_3 \\ a_2 & 2b_2-a_2 & 3c_2-2b_2 \\ a_1 & 2b_1-a_1 & 3c_1-2b_1 \end{vmatrix}=$ ________ .

（A） 6d; （B） -6d; （C） 0; （D） 12d.

2. 设方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ bcx+cay+abz=0 \end{cases}$ 存在非零解，则系数 a，b，c 之间的关系是________ .

（A） $a=b=c$；（B） $a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=a$；（C） a,b,c 互异；（D） $a\neq b$ 或 $b\neq c$ 或 $c\neq a$.

3．设 A 为三阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，k 为大于 1 的常数，则 $(k^{-1}A)^*=$________.

（A） $k^{-1}A^*$； （B） $k^{-3}A^*$； （C） k^3A^*； （D） $k^{-2}A^*$.

4．若向量组 $(a+1,2,-6)$，$(1,a,-3),(1,\ 1,\ a-4)$ 线性无关，则 a 的取值为_______.

（A） 0; （B） 不为 0; （C） 1; （D） 不等于 1.

5. 若 n 维基本单位向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$可由 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，则向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的秩 __________.

(A) 小于 n; (B) 大于 n; (C)等于 n; (D)很难说

6．设 A 为$m\times n$（$m>n$）矩阵，则当 R(A)= ________时，方程组$AX=0$只有零解.

(A) 0; (B) 1; (C) m; (D) n.

7. 设 A 为三阶阵，且 A，B 相似,A 的特征值为 2，3，4，则矩阵$(3B)^{-1}$的特征值为___.

(A) 3/2，1，3/4; (B) 6，9，12; (C)1/6，1/9，1/12; (D) 2/3，1，4/3.

8．设两个n阶矩阵A与B有相同的特征多项式，则____________ .

(A) A与B相似 ; (B) A与B合同; (C) A与B等价; (D) 以上三条都不成立.

9. 设A是 3 阶方阵，将A的第一列与第二列交换得B，再把B的第 2 列加到第 3 列得C，

则满足$AQ=C$的可逆阵Q为_______________.

(A) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$; (C) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

二.填空:

1. 已知方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-a_1\\x_2+x_3=a_2\\x_3+x_4=-a_3\\x_1+x_4=a_4\end{cases}$ 有解，则常数a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件_________ .

2．已知$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$为 3 阶非零矩阵，且$AB=0$，则 $t=$___________.

3．已知方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$无解，则$a=$_____________.

4．设A为 3 阶实对称阵，其特征值为 1，2，3. 特征值 1，2 对应的特征向量分别为（1，1，1）和（0，1，-1)，则与特征值 3 对应的一个特征向量为_______________.

5．3 阶阵A的特征值为-1，1，2，设矩阵$B=A^2-2A+I$，则 $|B|=$____________

6. $f=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+6x_2x_3+9x_3^2$的正、负惯性指数与符号差分别为____________

7．设 A 为 4×3 矩阵，且 $r(A)=2,\ B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 AB 的秩 $r(AB)=$________

8．设 A 为 2 阶方阵，B 为 3 阶阵，且 $|A|=\dfrac{1}{|B|}=\dfrac{1}{2}$，则 $\begin{vmatrix}0&-B\\2A^{-1}&0\end{vmatrix}=$ $\underline{\quad -16\quad}$.

三．已知 $f=ax_1^2+ax_2^2+6x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$（$a>0$）通过正交变换化为

标准形 $7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换.

**四. 设 n 元非齐次方程组 $Ax=b,(b\neq0)$ 的系数矩阵 A 的秩为 $r(r<n)$.

证明：若方程组有解，则它有 $n-r+1$ 个线性无关的解.(记住结论!)

五. 在实向量空间 R^4 中，设非空子集 $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$.

(1)证明：V 构成 R^4 的线性子空间；(2)求出 V 的维数和一组基底.

参考答案

一. 1.（B）；2.（B）；3.(D)；4.(D)；5.(C)；6.(D)；7.(C)；8.(D)；9. (A)；

二. 1. $\sum_1^4 a_i=0$；2. t=-3；3. $a=-1$；4. $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$；5. 0；. 2,0,2； 7. 2； 8.-16.

三. f 的实对称阵为 $A=\begin{pmatrix}a&4&-2\\4&a&2\\-2&2&6\end{pmatrix}$，$A$ 的特征值 $\lambda_1=7,\lambda_2=-2$，其中 λ_1 是 2 重根.

由于 $\mathrm{tr}A=2a+6=7+7-2$，得 $a=3$．$\lambda_1=7$ 时，解方程 $(7-A)X=0$，得基础解

$$\alpha_1=(1,\ \ 1,\ \ 0)^T,\quad \alpha_2=(1,\ \ 0,\ \ -2)^T.\ \ .$$

把 α_1,α_2 正交化：令 $\beta_1=\alpha_1=(1,\ \ 1,\ \ 0)^T$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\left(\frac{1}{2},\ \ -\frac{1}{2},\ \ -2\right)^T.$$

再单位化，即得对应于特征值 $\lambda_1=7$ 的二个单位正交特征向量：

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt2},\ \ \frac{1}{\sqrt2},\ \ 0\right)^T,\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\left(\frac{1}{\sqrt{18}},\ \ -\frac{1}{\sqrt{18}},\ \ -\frac{4}{\sqrt{18}}\right)^T.$$

当 $\lambda_2=-2$ 时，解方程组 $(-2-A)X=0$，得基础解系 $\alpha_3=(2,\ \ -2,\ \ 1)^T$，

将其单位化得 $\gamma_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\left(\frac{2}{3},\quad -\frac{2}{3},\quad \frac{1}{3}\right)^T$ 令

$Q=(\gamma_1,\quad\gamma_2,\quad\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 则 Q 为正交阵，正交变换为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$.

四. 由于方程有解，秩 $r(A)=r$，则导出组 $Ax=0$ 的基本解系中含有 $n-r$ 个解向量，

不妨设为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$. 再设 X_0 是方程组 $Ax=b$ $(b\neq 0)$ 的一个特解，

则 $X_0+\alpha_1,X_0+\alpha_2,\cdots,X_0+\alpha_{n-r}$ 都是方程组 $Ax=b$ 的解向量.

下面证明 X_0，$X_0+\alpha_1,X_0+\alpha_2,\cdots,X_0+\alpha_{n-r}$ 线性无关. 设

$$k_0X_0+k_1(X_0+\alpha_1)+k_2(X_0+\alpha_2)+\cdots k_{n-r}(X_0+\alpha_{n-r})=0$$

则 $$(k_0+k_1+\cdots k_{n-r})X_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_{n-r}\alpha_{n-r}=0. \qquad (1)$$

用 A 左乘上式，注意 $AX_0=b\neq 0$ 得 $(k_0+k_1+\cdots k_{n-r})=0$ 与 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_{n-r}\alpha_{n-r}=0$.

又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 线性无关，得 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$. 代入(1)式，得 $k_0=0$.

因此 X_0，$X_0+\alpha_1,X_0+\alpha_2,\cdots,X_0+\alpha_{n-r}$ 线性无关.

试卷 2 及答案

一.选择题:1. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times m}, m>n$ 则必有 ( )

A. $|AB|=0$, B. $|AB|\neq 0$, C. $|BA|=0$, D. $|BA|\neq 0$.

2. 设 A 为 $m\times n$（$m>n$）矩阵, 则 rank(A) = ( )时，方程组 $AX=0$ 只有零解

A. n， B. 1， C. m， D. 0

3. 设 A^* 是 n 阶方阵 A 的伴随阵，则必有 ( )

A. $|A^*|=|A|$, B. $|A^*|=0$， C. $|A^*A|=|A|^n$， D. $A^*=|A|A^{-1}$

二. 判断题:1. 若 $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$(零矩阵) 且 $\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$, 则 AB $\neq$O.

2. 把复数域 C 看作 C 上的线性空间，则变换 $\varphi(\xi)=\overline{\xi}$(共轭) $,\forall\xi\in C$ 是线性变换

3．若 A, B 均为 n 阶正定阵，则 A B 也是正定阵.

4．若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示

5．若方阵 A 满足 $AA^T= I$ (单位阵)，则 A 为正交阵

6．设 n 阶可逆阵 A 的特征值为 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n，则 $(\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n)\neq 0$

7．方阵 A 相似对角阵当且仅当它的极小多项式无重根.

8. 若 n 元方程组 $A_{m\times n}\mathbf{x}= b$ 有唯一解，则 $A_{m\times n}\mathbf{x}=0$ 只有零解.

9. A 为实数矩阵，则 $\mathbf{rank}(A^TA) = \mathbf{rank}\,(A)$; 10. 若 A 为实矩阵且 $A^TA=0$,则 $A=0$

三.填空题:1．若 n 阶方阵 A 的行列式 $|A| =k$ ， 则行列式 $|kA|$ = ___________

2．若 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A-2\mathbf{I} = O$ ，$\mathbf{I}$ 是单位阵，则 $A^{-1}=$_____________

3. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$ 的基础解系为______________________

4．在 R^2 中两组基{ e_1 =（1， 0），e_2 =（0， 1 ）}到{ f_1 =（1，2），f_2 =（3，4）}

的过度矩阵是________________；5. $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}(b>0)$ 的特征值为________

6. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2)$,若$|A|=1$，则$|B|$ =（ ）

7. 设 2 阶方阵 A 的元素全为 1， 则 A^{10} =（ ）A

8. 若非零 3 阶阵 A 满足 $A^2-A = O$， 则 A 必相似于__________ .

9.若 2 阶阵 $\mathbf{A}\neq O$ 且 $A^2 = O$，则 A 的极小式与 Jordan 型分别为__________.

四. (1) **求解下列矩阵方程**: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2)设 A, B 都是可逆的， $D=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$ 求 D^{-1}.

(3)设 n 阶阵 A 的各行元素之和均为零，且 A 的秩为 n-1，求方程组 AX=0 的通解

(4)在欧氏空间 $\mathbf{R^4}$ 中子空间 $W=\left\{x\in R^4 \,\middle|\, \begin{matrix} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0 \end{matrix}\right\}$，写出正交补 $W^{\perp}$ 的基与维数.

五. 设 4 阶方阵 A 的元素全为 1，(1) 求 A 的特征多项式与极小多项式 (2) 求 A 的 Jordan 标准型；(3) 判定 $A+\mathbf{I}$ 是否为正定阵(说明理由)

六. (1)设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，求正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵 (写出对角阵)；

(2)用正交变换 x = Qy 把二次型 $f=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$ 化为标准型.

七. (1) 设 A 是线性空间 V 上的线性变换，若 $A^2\xi\neq 0$，$A^3\xi=0$，则 $\xi, A\xi, A^2\xi$ 线性无关.

(2) 证明任一方阵 A 可写成一个对称阵与一个反对称阵的和.

八. (1)设 A 为 n 阶实对称阵， 证明：存在方阵 B 使得 $A=B^3$.

(2)设 **n** 阶可逆实方阵 A 的特征值为 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n.

证明： A^TA 为正定阵，且 $|\mathbf{A^TA+I}| \geq 1+(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^2$.

参考答案

一. 1.A 2.A 3.C　　二. 1—3.为错 ； 4—10 正确

三.1. $k^n|A|=k^{n+1}$; 2. $\frac{1}{2}(A-3I)$； 3. $\xi=(1,1,1)^T$ 或 $\xi=k(1,1,1)^T$，$(k\neq 0)$；

4. $P=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$; 5. $\pm bi$ 或 $\pm b\sqrt{-1}$； 6. 1； 7. $2^9=512$;

8. 对角阵, 或 $\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$.

9. λ^2，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

四.(1)解：可用增广阵与行变换法

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&1&1\\-1&1&1&0&1\\2&-1&1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变}}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&1&1\\0&1&2&1&2\\0&0&1&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变}}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&1\\0&1&0&5&2\\0&0&1&-2&0\end{array}\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\\-2&0\end{pmatrix}$$

(2)解：可用“分块型初等行变换”求逆

增广阵为 $\left(\begin{array}{cc|cc}A&0&I&0\\C&B&0&I\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变}}\left(\begin{array}{cc|cc}I&0&A^{-1}&0\\B^{-1}C&I&0&B^{-1}\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变}}\left(\begin{array}{cc|cc}I&0&A^{-1}&0\\0&I&-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{array}\right)$

$$\Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}$$

(3)解：由条件知 $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$，从而 $\xi=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ 是 Ax=0 的一个非零解，

又解空间维数为 n-(n-1)=1，得基础解为 ξ，通解为 $x=k\xi$， 或 $x=k(1,\ \cdots,\ 1)^T$.

(4)解：由条件 $\forall x\in W$， $x\perp(1,1,1,1)^T$， $x\perp(1,1,-1,-1)^T\Rightarrow(1,1,1,1)^T\in W^{\perp},(1,1,-1,-1)^T\in W^{\perp}$

又 $\dim W+\dim W^{\perp}=4$，且知 dim$W$=2，从而 $\dim W^T=2$，

可得 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$， $\alpha_2=(1,1,-1,-1)^T$ 构成 $W^{\perp}$ 的基

五.(1)解： $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，计算知特征多项式为 $|\lambda I-A|=(\lambda-4)\lambda^3$

由于 A 是对称必可对角化，从而 A 的极小多项式(无重根)为 $(\lambda-4)\lambda$.

(2)解：A 可对角化，它的 Jordan 形为对角阵: $J=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(3)解：因为 A 的全体特征根为 4，0，0，0，则 A+I 的全体特征根为:

4+1，0+1，0+1，0+1 全为正数，且 A+I 为对称阵 $\Rightarrow$ A+I 为正定阵.

六. (1)解： $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&\lambda-4&\lambda-4\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$,特征根为 1，1，4.

$\lambda=1$ 时，解方程组(A-I)x=0，解得通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

所以方程组(A-I)x=0 的基解为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，对它们正交化得，

$\beta_1=\xi_1$， $\beta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\xi_1)}{|\xi_1|^2}\xi_1=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$，再单位化得，

$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$.显然$\lambda=4$对应特征向量$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$单位化$\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

得正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，且有$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

(2)解：由于$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则可用正交变换 x=Qy，

其中$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，得标准形$f={y_1}^2+{y_2}^2+4{y_3}^2$. 可知 $f=4$ 代表椭球面.

七.(a) 解：设$k\xi+k_1A\xi+k_2A^2\xi=0\cdots\cdots(1)$

则$A^2(k\xi+k_1A\xi+k_2A^2\xi)=0\Rightarrow kA^2\xi=0$且 k=0，将 k=0 代入(1)式，有

$$k_1A\xi+k_2A^2\xi=0\cdots\cdots\ (2)$$

则$A(k_1A\xi+k_2A^2\xi)=0\Rightarrow k_1A^2\xi=0$且$k_1=0$，将$k_1=0$代入(2)式$\Rightarrow k_2=0$

即 $k=k_1=k_2=0$，ξ, $A\xi$, $A^2\xi$线性无关

(b)证： 可写$A=\dfrac{A+A^T}{2}+\dfrac{A-A^T}{2}$，且知$\dfrac{A+A^T}{2}$为对称，$\dfrac{A-A^T}{2}$为反对称，

故 A 可写成一个对称阵与反对称阵的和.

八.(1)证：设 A 的特征根为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则有正交阵 P，使得，$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$，

令 $B=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{3}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{3}}\end{pmatrix}P^{-1}$ 则 $B=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{3}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{3}}\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{\frac{1}{3}} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{\frac{1}{3}}\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$

计算可知 $B^3=A$，而且 B 为对称阵.

(2) 因 $A^TA=A^TI_nA$ 并且 A 可逆，可知 A^TA 合同于单位阵 I_n，因 I_n 正定，故 A^TA 也正定.

先证一个引理：若 B 正定，则 $|B+I|\ge 1+|B|$.

可设 B 的特征值为 $t_1>0$, $t_2>0$，……，$t_n>0$，则 B+I 的特征值为

t_1+1, t_2+1, ……，$t_n+1 \Rightarrow |B+I|=(t_1+1)(t_2+1)\cdots(t_n+1)\ge 1+t_1t_2\cdots t_n=1+|B|$.

由引理及 A^TA 正定 $\Rightarrow |A^TA+1|\ge 1+|A^TA|=1+|A|^2=1+(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^2$

试卷 3 及答案

（说明：A^T 表示 A 的转置，$\|x\|$ 表示向量 x 的长度， r(A) 表示 A 的秩数）

一. 选择题:

1. 设 A 为 n 阶正交阵，x 是 n 元列向量，则错误说法为 (　　)

(a) $A^TA=I$， (b) $\|Ax\|=\|x\|$， (c) $A^T=A^{-1}$， (d) $A^{\mathrm{T}}=A^*$

2. 设同阶方阵 A 与 B 的特征多项式相同，则错误结论为 (　　)

(a) $|A|=|B|$， (b) A 与 B 有相同的特征值， (c) 迹 $tr(A)=tr(B)$， (d) A 与 B 相似

二. 判断题(见答案)； 三. 填空(见答案).

四. 计算 1. (1)设 I 是 n 阶单位阵，求逆阵 $\begin{pmatrix} I & -I \\ I & I\end{pmatrix}^{-1}$. (2)计算 $(\alpha\alpha^T)^{2009}=\mathbf{2^{2008}}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 1)^T$；**2.** 在欧氏空间 V 中，若 $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2$，求内积 (α,β).

3. 已知 4 阶阵 A 的初等因子为 $(\lambda-2)$, $(\lambda-1)$, $(\lambda-2)^2$，求 A 的 Jordan 标准形与极小多项式.

五. 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{pmatrix}$. (1)求行列式 $|A|$，并求 λ 值使得秩 **r(A) ＜ 3 .**

(2) 求 λ 值，使得方程组 $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解空间 W 的维数 dimW=2，并求 W 的一组基；

(3) 在标准内积空间 R_3 中，写出上述空间 W 的正交补 $W^{\perp}$ 的基.

六.（1）设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，求正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵 (写出对角阵)；

（2）用正交变换 x = Qy 把二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$ 化为标准型. (指出 $f(x_1, x_2, x_3) = 4$ 在 R^3 中代表的图形).

七. 设 $\varepsilon = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ 是 $\mathbf{R}^4$ (标准内积)中单位列向量（$\varepsilon^T\varepsilon = 1$），设 $\mathrm{A} = \mathrm{I} - 2\varepsilon\varepsilon^T$

（1）计算：$\mathrm{A}\varepsilon$ 与 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ (并说明 A 是对称的正交矩阵)

（2）把 $\mathbf{A}: R^4 \to R^4$ 作为线性变换，验证 A 保内积：(Ax , A y) = (x , y) , $\forall$ x , y $\in R^4$.

八. 1. 设欧氏空间中向量{$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$}线性无关，{$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$}线性相关，$\beta$ 是非零向量.

证明: β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示 ；且非零向量 β 不能与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 同时正交.

2．**A** 是 *n* 阶实矩阵 ，证明: (1) $\mathbf{r}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}) = \mathbf{r}(\mathrm{A})$ 且 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ 是半正定阵；

(2) 令 $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$, 则 $|\mathbf{B}^2 + \mathbf{B} + \mathbf{I}| \geq \mathbf{1}$ （并说明 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$ 时等号成立）.

(3) 设 $A, A - I$ 均为 n 阶正定阵, I 为单位阵. 则 $\mathrm{I} - A^{-1}$ 为正定阵.

参考答案

一. 选择题 1．D 2．D

二. 判断题 1. 设非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 互相正交，则它们必定线性无关 (T √)

2．设 n 阶阵 *A* 的特征值为 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n，则 $|A| = (-1)^n \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$ **(F ×)**

3．若 B = PA， P 是可逆阵， 则 秩 r **(A)** = r **(B)** (T)

4．设 3 阶阵 *A* 的伴随阵为 A^*， k 为实数，则 $(\mathrm{k} \cdot A)^* = \mathrm{k}^2 \cdot A^*$ (T)

5． 若 $A \neq 0$，且 *AB*=*AC*，则 *B*=*C* (F)

6．若 *A* 的极小多项式无重根，则 *A* 在复数域上可对角化 **(T)**

7. 找不到 2 阶实方阵 A 使得 $A^2+I=0$ (F)

8. **若** $A_{m\times n}$ 的行数与列数不等，则 $A_{m\times n}$ 的行秩与列秩也不等 **(F)**

9．R^n 中两组基之间的过度矩阵一定是可逆矩阵 (T)

10．若 n 元方程组 $A_{m\times n}\mathbf{x}=0$ 只有零解, 则 $A_{m\times n}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 必有唯一解（ ╳）

三.**填空**：1 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ x_1+3x_2-4x_3=0 \end{cases}$ 的基础解为 $x=(1,1,1)^T$,或x=k$(1,1,1)^T$, $k\neq 0$

2. 设 A 是 n 阶方阵且$|3A|=1$, 则 $|5A|=$ $5^n/3^n$

3. 若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，则 A 必相似于 ___对角阵___

4．设 $f(\lambda)$ 是方阵 A 的特征多项式，则 $f(A)=$___0 阵___

5. 设 3 阶阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $g(A)=A^2+I$ 的特征值为 $\lambda_1^2+1,\ \lambda_2^2+1,\ \lambda_3^2+1$

6. 若方阵 A 正定，则 A 的特征值全为___正数，或大于 0___

7. n 阶方阵 A 的秩 r**(A)** ＜ n 的充要条件是 |A| = ___0___

8. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的极小多项式与 Jordan 标准形分别为: 极小多项式 $g(\lambda)=\lambda^2+1$;

Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$.

9.设 4 阶方阵 A 的第一行元素全为 $\frac{1}{2}$，且有特征向量$(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$，则 A 有一个特征值为___2___

四．计算: 1. 解：(1) 用分块阵的初等行变换得

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I & -I & I & 0 \\ I & I & 0 & I \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} I & -I & I & 0 \\ 0 & 2I & -I & I \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \\ 0 & I & -\frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \end{array}\right) \Rightarrow \therefore \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \\ -\frac{1}{2}I & \frac{1}{2}I \end{pmatrix}.$$

2.解：$\|\alpha-\beta\|^2=(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-2(\alpha,\beta)$

$$\|\alpha+\beta\|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+2(\alpha,\beta)$$

由条件$\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$ 知：（α,β）$=0$.

3. 解: (1) AJordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$；(2)极小式为 $g(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

五. 解：

(1) $|A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2&\lambda-2\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$

可知 $\lambda=2$，或 $\lambda=-1$ 时， 秩 $r(A)<3$.

(2)由(1)可知 $\lambda=-1$ 时 $r(A)=1$ 此时方程组 $AX=0$ 的解空间维数为 2

由方程 $x_1+x_2+x_3=0$ 通解 $x=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，W 的基可取为 $\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(3) $\because W=\{x=(x_1,x_2,x_3)^T\,|x_1+x_2+x_3=0\}$ 可知 W 是 R^3 中过原点的平面 $x_1+x_2+x_3=0$，

它的法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)^T$，可知 $W^{\perp}$ 的基为 $(1,1,1)^T$

或任取 $x\in W^{\perp}$，则 $x\perp\beta_1, x_2\perp\beta_2$ $\therefore -x_1+x_2=0,-x_1+x_3=0$

可知 $x=k(1,\ 1,\ 1)^T$， $W^{\perp}$ 的基为 $(1,1,1)^T$.

六.解(1) $|\lambda I\text{-}A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&1\\1&\lambda-3&1\\1&1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&\lambda-1&\lambda-1\\1&\lambda-3&1\\1&1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda-3&1\\1&1&\lambda-3\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-4&0\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)^2$ 则特征值为 1，4，4（二重）

$\lambda=1$ 时解方程组 $(I-A)X=0$ 得通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 对应特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=4$（二重根）对应得特征向量 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$ 与 α_1 正交，由正定条件可知

$1\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3=0$ 对应 2 个正交的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

把$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化得正交阵 $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$(不唯一)，得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

(2)二次型 f 对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，由(1)知，令正交变换 $x=Qy$，则 f 可化为：

$f=1\cdot y_1^2+4\cdot y_2^2+4\cdot y_3^2$ ， 可知 $f=4$ 在 R^3 中代表(旋转)椭球面.

七.解：（1）计算得 $A\varepsilon=-\varepsilon$. 又可知 $A^T=A\Rightarrow A$ 为对称阵，且 $A^TA=AA=(I-2\varepsilon\varepsilon^T)^2=I$

故 A 是对称的正交矩阵.

（2） $Ax=x-2\varepsilon\varepsilon^Tx$，可知（Ax，A y）$=(Ax)^T(Ay)=x^TA^TAy=x^TIy=(x,y)$.

八. 解：1. 证明：设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+k\beta=0,k_1\cdots k_s,k$ 不全为 0

若 k=0 则 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 且 $k_1\cdots k_s,k$ 不全为 0，这与 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性无关矛盾

$\therefore k\neq 0\Rightarrow \beta=\frac{-k_1}{k}\alpha_1+\frac{-k_2}{k}\alpha_2+\cdots+\frac{-k_s}{k}\alpha_s$，即 β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性表示

可设 $\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_s\alpha_s$ 若不然由内积 $(\alpha_1,\beta)=(\alpha_2,\beta)=\cdots=(\alpha_s,\beta)=0$

$(\beta,\beta)=(l_1\alpha_1+\cdots+l_s\alpha_s,\beta)=l_1\cdot 0+\cdots+l_s\cdot 0\Rightarrow\beta=0$ 与 $\beta\neq 0$ 矛盾.

2. 证明：(1) 只需证齐次线性方程组 Ax=0 与 $A^TAx=0$ 同解：

显然 Ax=0 的解必为 $A^TAx=0$ 的解，设 x_0 是 $A^TAx=0$ 的解，则 ${x_0}^TA^TAx_0=0$

即 $$(Ax_0)^TAx_0=0$$

因为 Ax_0 为 n 维实向量，所以 $Ax_0=0$，即得 $A^TAx=0$ 的解必为 Ax=0 的解

综上： Ax=0 与 $A^TAx=0$ 同解$\Rightarrow$ 秩 $\mathbf{r}(A^TA)=\mathbf{r}(A)$

显然 A^TA 是对称阵，下证二次型 $f=X^T(A^TA)X$ 是半正定：任取 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T\neq 0$，

设 $AX=b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则 $X\neq 0$ 时有 $f=(AX)^T(AX)=b^Tb=b_1^2+\cdots+b_n^2\geq 0$

从而 f 为半正定二次型， A^TA 为半正定阵.

(2)再证$\left|B^2+B+I\right|\ge 1$：$\because$ B 是半正定的，设 B 的全体特征值为$\lambda_1\ge 0,\cdots,\lambda_n\ge 0$

则B^2+B+I的全体特征值为：$(\lambda_1^2+\lambda_1+1),(\lambda_2^2+\lambda_2+1),\cdots,(\lambda_n^2+\lambda_n+1)$，所以

$$|B^2+B+I|=(\lambda_1^2+\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n^2+\lambda_n+1)\ge(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)$$
$$\ge(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)+1\ge 1$$

且若 $\mathbf{B^2}=\mathbf{0}$，则 $\lambda_1{}^2=0,\cdots,\lambda_n{}^2=0\Rightarrow\lambda_1=0,\cdots,\lambda_n=0$，(必有 B = 0) 所以

$$|B^2+B+I|=|B+I|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)=1$$

(3) 设 $A,\ A-I$ 均为 n 阶正定阵，I 为单位阵. 证明 $I-A^{-1}$ 为正定阵.

证明： 方法一. 由 $A-I$ 正定，设 A 的特征值为 $\lambda_i\,(i=1,2,\ldots,n)$，则 λ_i-1 是

$A-I$ 的特征值，并且 $\lambda_i-1>0$，于是 $\lambda_i>1\ (i=1,2,\ldots,n)$

而 $1/\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是 A^{-1} 的特征值，所以 $1/\lambda_i<1\ \ (i=1,2,\cdots,n)$

而正数$1-1/\lambda_i>0\ \ (i=1,2,\cdots,n)$是 $I-A^{-1}$ 的全体特征值， 所以 $I-A^{-1}$ 为正定矩阵.

一. 选择题　　　　　　　　　**（2009 工科高等代数）**

1.若 3 阶阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的行列式$|A|$=1，则行列式$|2\alpha_1,\alpha_2+\alpha_1,\alpha_1+\alpha_3|$=(c)

(a) 1； (b) 0； (c) 2 ； (d) -2

2.设 $A=A_{4\times3}$, $B=B_{3\times4}$ 则必有 (d)

(a)$|AB|=|A||B|$； (b) $|BA|\ne 0$； (c) $|BA|=|AB|$； (d) $|AB|=0$

3.设 $A=A_{m\times m},B=B_{n\times n}$分别是 m 阶与 n 阶方阵，则行列式 $\begin{vmatrix}0 & A\\ B & C\end{vmatrix}=$（ d ）

(a) $|A||B|$； (b) -$|AB|$； (c)0； (d) $(-1)^{m\cdot n}|A||B|$

5.$\{\alpha_1=(0,1,\ 1)^T,\alpha_2=(1,\ 1,-1)^T,\alpha_3=(3,\ \mathbf{3},\ \mathbf{-3})^T\}$的一个最大无关组为（ c ）

(a) α_2 (b) α_1，α_2， α_3 (c) α_1，α_2或α_1，α_3; (d) α_2，α_3

6.若 A 是 n 阶正交阵， x 是 R^n 中的列向量，则模长 $|Ax|=$ （ d ）

(a) $|A|$ (b) 正数 (c) 非零 (d) 模长 $|x|$

7.设 A 为$\mathbf{m}\times\mathbf{n}$（$\mathbf{m}>\mathbf{n}$）矩阵，则 rank(A)=(c)时，方程组$AX=0$只有零解.

(a) $n-1$; (b) 1; (c) $\mathbf{n}$; (d) m.

8. A 为实的 $m\times n$ 矩阵,下列说法不正确的是 (d)

(a)秩 $r(A^TA)=r(A)$; (b) A^TA 为对称; (c) A^TA 为半正定; (d) $r(A^T)\neq r(A)$

9.设 3 阶方阵 A 的特征值为 2，3，1，则行列式 $|A|=$ (d)

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d)6

10. n 阶实对称阵 A 为正定的充分必要条件是（ c ）

(a) $|A|$ 为正； (b)所有特征值非负； (c) A^{-1} 为正定阵； (d) 秩(A)＝n

11.设 A^* 是 n 阶方阵 A 的伴随阵，且 A 可逆，则错误说法为 (c)

(a) A^*A 为对角阵； (b) $A^*=|A|A^{-1}$； (c) $A^*A=A^{\mathbf{n}}$； (d) $|A^*A|=|A|^{\mathbf{n}}$

12.设 A 为 n 阶正交阵，下列说法正确的是(d)

(a) $|A|=1$; (b) $|A|=-1$; (c) $A^{T}=A^*$; (d) $A^T=A^{-1}$

13.设两个 n 阶矩阵 A 与 B 有相同的特征多项式，则错误结论为（ c ）.

(a) 迹 tr (A) = tr (B) ; (b) $|A|=|B|$; (c) A,B 相似; (d) A,B 有相同特征值.

14.实二次型 $f=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2$ 是 （ a ）

(a) 半正定二次型； (b) 半负定； (c) 正定二次型； (d)不定二次型

15.将 3 阶阵 A 的第 1 列加到第 3 列得 B，则满足 $AQ=B$ 的可逆阵 Q 为（ a ）

(a) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

二. 判断题(正确的在括号内打“√”，错误的在括号内打“Ｘ”)：

1. n 阶方阵 A 的行列式$|A|$=0 $\Leftrightarrow$ rank(A)< n $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 有非零解 (√)

2.当 $m<n$ 时, n 元齐次方程组 $A_{m\times n}x=0$ 有无穷多个解.（ √ ）

3. 若 A,B 均为 n 阶对称阵，则 AB 也是对称阵.(Ｘ)

4.若方阵 A,B 相似，则 A,B 有相同的特征向量.(Ｘ)

5.实对称阵 A 必相似于对角阵，它的若当 Jordan 形也是对角阵（ √ ）

6. A^*是 n 阶阵 A 的伴随阵， I 为 n 阶单位阵，则 $A^*A=|A|I$ ， $|A^*A|=|A|^n$ (√)

7.若 5 个已知向量可由 4 个未知向量线性表示, 则 5 个已知向量必线性相关(√)

8.若方阵 A 的极小多项式或零化式没有重根, 则 A 相似于对角阵(√)

9.设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$， $B=(b_{ij})_{s\times n}$，则有: 秩 $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$.(√)

10.实对称阵 A 为正定的充分必要条件是 A 的所有特征值为正数（ √）

11.空间 $\mathbf{R}^3$ 中从基 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 到基 (g_1,g_2,g_3) 的过渡矩阵 P 满足以下公式：

$$(g_1,g_2,g_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P,\ (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(g_1,g_2,g_3)P^{-1} \quad (√)$$

12. $\mathbf{R}^3$ 上线性变换 φ 在给定基 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 下的矩阵 A 满足以下公式:

$$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A \qquad (√)$$

13.设 $P^{-1}AP$ 有定义，则 $(P^{-1}AP)^{10}=P^{-1}A^{10}P$.(√)

14.设 3 阶阵 A 的各行元素和为 0，且秩为 2，则 $Ax=0$ 有基本解 $(1,1,1)^T$ (√)

15.若齐次方程组 $A_{m\times n}\mathbf{x}=0$ 只有零解, 则 $A_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 恰有一个解.(X)

三. 填空 1.设 $f(\lambda)$ 是方阵 A 的特征多项式，则 $f(A)=0$

3.若 $A=A_{3\times 3}$ 的特征根是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ，则 A 的迹 $\mathbf{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

4.设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$， $ad-bc=1$，则 $A^{-1}=$ ________;

5.设 3 阶阵 A 特征根是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, $f(x)$ 是多项式, 则 $f(A)$ 特征根是 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),f(\lambda_3)$

6.设 A 为 3 阶阵且 A,B 相似,A 的特征值为 2，3，4，则 B^{-1} 特征值为 $2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}$

7.设 I 是单位矩阵， $M=\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix}$ ， 则 $M^{-1}=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & -\mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}$

8.若 α_1,α_2 是 $\mathbf{Ax=b}\ne\vec{0}$ 的解, $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 也是它的解，则 $k_1+k_2=$ 1

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 则 $A^2=$ 0 ； A 的极小多项式 $m(x)=$ x^2.

四. 1.设 A 为 3 阶阵，I 为单位阵，$|A+I|=|A+3I|=|A-I|=0$，求伴随阵 A^*的特征值

解：由条件知 A 特征值为 -1，-3，1. 且 |A|=(-1) × (-3) × (1)=3. A^{-1}特征值为 $(-1)^{-1}$，$(-3)^{-1}$，1，用公式 $A^*=|A|A^{-1}$ 可得 A^* 的特征值为 3×(-1)= −3，3×$(-3)^{-1}$= −1，3×1=3.

2.设 $A=\alpha\alpha^T$，$\alpha=(1,\ -1)^T$.求 A^{2009}. 提示：利用 $\alpha^T\alpha=(1,-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=2$ 可得结论.

3.设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 4 元非齐次方程组 AX＝b 的三个解向量，且秩 $r(\mathbf{A})=3$，

$\alpha_1=(2,0,0,3)^T,\alpha_2+\alpha_3=(2,0,0,4)^T$ 求方程组 AX＝b 的通解.

解 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组 AX＝b 的三个解，故 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 是 AX＝0 的解，可知

$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_3)=2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=(2,0,0,2)^T$ 是 AX＝0 的解，又 $r(\mathbf{A})=3$

故 AX＝0 的基本解系含 4-3=1 个向量 $\Rightarrow$ AX＝0 通解是 $\mathbf{X}=c(2,0,0,2)^T,c\in\mathbf{R}$

或 $X=c(1,0,0,1)^T\Rightarrow$ AX＝b 的通解为 $X=c(2,0,0,2)^T+(2,0,0,3)^T$，

或 $X=c(1,0,0,1)^T+(2,0,0,3)^T$.

4.已知 $f=ax_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}+ax_3^{\ 2}-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ ($a>0$)通过正交变换 x = Qy 化为标准形 $y_1^{\ 2}+4y_2^{\ 2}+4y_3^{\ 2}$，求参数 a 与二次型 f 的矩阵 A（不用求出正交阵 Q）.

解：可知 A 的特征值为 1，4，4 $\Rightarrow$ 迹 tr(A)= $a+a+a$=1+4+4=9

$$\Rightarrow\quad a=3\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$$

五. 1. 设 n 阶阵 A 的元素全为 1，求 A 的特征多项式, 并写一个与 A 相似的简单矩阵 D.

解 $|\lambda I-A|=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$，对称阵 A 必相似于对角阵 $D=\begin{pmatrix}n&&\\&0&\\&&\ddots 0\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 利用初等变换计算 A^{-1}，并且求伴随阵 A^*；写出 A 的 Jordan 型.

解 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}$.

设 A 的若当形为 J, 则 $A\sim J=\begin{bmatrix}1 & * & 0 & 0\\ & 1 & * & 0\\ & & 1 & *\\ & & & 1\end{bmatrix}$(相似)，其中* 是 0 或 1.

可知 $A-1I\sim J-I=\begin{bmatrix}0 & * & 0 & 0\\ & 0 & * & 0\\ & & 0 & *\\ & & & 0\end{bmatrix}$（相似）$\Rightarrow r(A-I)=r(J-I)$（秩相同）

因为 $r(A-I)=3$ 则 $r(J-I)=3$，可知 3 个 * 全为 1

$\Rightarrow A\backsim$若当形，A 的 Jordan 型为：$J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3.设 $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$，求正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵 (写出对角阵).

解 $|\lambda\text{I-A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-4 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-6 & \lambda-6 & \lambda-6\\ -1 & \lambda-4 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-3)^2$ 得特征值 6，3，3

$\lambda=6$ 时解方程组 $(\text{I}-\text{A})\text{X}=0$ 得特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=3$（二重根）对应得特征向量 $\text{x}=(\text{x}_1,\text{x}_2,\text{x}_3)^{\text{T}}$ 与 α_1 正交

由正交条件可知 $1\cdot\text{x}_1+1\cdot\text{x}_2+1\cdot\text{x}_3=0$ 对应 2 个正交的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化得正交阵 $\text{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{-1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{-1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$（不唯一）且 $\text{Q}^{-1}\text{AQ}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

六. 证明题 (共 9 分)设分块三角阵 $M=\begin{pmatrix}A & S\\ 0 & B\end{pmatrix}$，其中 A,B 是 n 阶可逆阵.

(1)用初等变换求 M^{-1}; (2)如果 M 是正交阵，则 A,B 都是正交阵，且 $S=0$

(3)若 A 是 n 阶正交阵，证明:　行列式 $|A|=+1$ 或 $|A|=-1$.

解(1) 用初等行变换得

$$(M\,|\,\mathbf{I})=\left(\begin{array}{cc|cc} A & S & I & 0 \\ 0 & B & 0 & I \end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变}}\left(\begin{array}{cc|cc} A & S & I & 0 \\ 0 & I & 0 & B^{-1} \end{array}\right)\xrightarrow{r_1-(s)r_2}\left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & I & -SB^{-1} \\ 0 & I & 0 & B^{-1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行变}}\left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1} \\ 0 & I & 0 & B^{-1} \end{array}\right)\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1} \\ & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

(2) M 是正交矩阵 $\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1} \\ & B^{-1} \end{pmatrix}=M^T=\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ S^T & B^T \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1}=A^T$，$B^{-1}=B^{\mathbf{T}}, S^{\mathbf{T}}=0.$　即 A, B 都是正交矩阵，且 $S=0$.

(3)若 A 是 n 阶正交阵，则行列式 $|AA^T|=|I|=1\Rightarrow |A|^2==1\Rightarrow |A|=+1$ 或 $|A|=-1$

七. (5 分) 设 $\mathbf{R}^3$ 上线性变换 φ 在已知基{α, β, γ}下满足

$$\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha,\ \varphi(\beta+\gamma)=2\beta,\ \varphi(\beta-\gamma)=2\gamma.$$

(1)求出 φ 在基{α, β, γ}下的矩阵 A，使 $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha,\beta,\gamma)A.$

(2)求 $\xi=\alpha+2\beta+\gamma$ 的像 $\varphi(\xi)$ 在已知基下的坐标.

解(1) $\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+\varphi(\gamma)=\alpha$，$\varphi(\beta)+\varphi(\gamma)=2\beta$，$\varphi(\beta)-\varphi(\gamma)=2\gamma$

可得 $\varphi(\alpha)=\alpha-2\beta$，$\varphi(\beta)=\beta+\gamma$，$\varphi(\gamma)=\beta-\gamma$.

$\varphi(\alpha)$，$\varphi(\beta)$，$\varphi(\gamma)$ 在已知基下坐标为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ 为 φ 的矩阵.

(2) $\varphi(\xi)=\varphi(\alpha+2\beta+\gamma)=\varphi(\alpha+\beta+\gamma)+\varphi(\beta)=\alpha+\beta+\gamma\Rightarrow$　$\varphi(\xi)$ 在已知基{α, β, γ}下的坐标为（1，1，1）^{T}

补充题 1　利用特征值与秩方法写出下列矩阵的 Jordan 形，并写出极小多项式

$A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&2&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}_{4\times4}$.

(1)解：设 A 的若当形为 J, 则 $A\sim J=\begin{bmatrix}2&*&0&0\\&2&*&0\\&&2&*\\&&&2\end{bmatrix}$(相似)，其中* 为 0 或 1.

可知 $A-2I\sim J-2I=\begin{bmatrix}0&*&0&0\\&0&*&0\\&&0&*\\&&&0\end{bmatrix}$（相似）$\Rightarrow r(A-2I)=r(J-2I)$（秩相同）

计算知：$r(A-2I)=3$，则 $r(J-2I)=3$

可知 3 个 * 全为 1　$\Rightarrow A\backsim J=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\&2&1&0\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$（$A$ 的若当形）.

(2) $B=\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}$ 的极小式为 $b(x)=(x-2)^2$，它的若当形为 $J_1=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$

又可知 C 有 2 个不同特征值 1，2, 它 必相似于对角形. C 的极小式为 $\mathrm{c}(x)=(x-1)(x-2)$,若当形为 $C\backsim\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$（$C$ 的若当形）.

(3)可知 D 的极小式(取 $b(x),c(x)$ 的最小公倍式)为 $q(x)=(x-2)^2(x-1)$

可得 D 的若当形为 $J=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix}&&\\&(1)&\\&&(2)\end{pmatrix}$.

补充题 2 用“行变换法”求解矩阵方程 $AX=B$其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$.

若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$. 用增广阵做行变换:

$$(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1,\cdots]{r_2-2r_1,\cdots}\begin{pmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

补充题 3 证明若 A 是 n 阶正交阵，$x\in\mathrm{R}^n$ 是列向量，则 $||Ax||^2=||x||^2$.

证: 若 A 为 n 阶正交阵，$x\in R^n$, 由内积与长度平方公式得

$$|Ax|^2=(Ax)^T(Ax)=x^TA^TAx=x^TIx=x^Tx=|x|^2 .$$

补充题 4 若 $m\times n$ 实矩阵 A 满足 $A^TA=0$，则 $A=0$

证法 1： 由秩公式 $r(A^TA)=r(A)$ 与 $A^TA=0$，可得秩 $r(A)=0\Rightarrow A=0$.

证法 2：设 $A=(a_{ij})$ 为实数 $m\times n$ 矩阵,由于 $A^TA=0$，观察 A^TA 的对角元即可.

补充题 5 若 $(A-I)(B-I)=I$ 则 $AB=BA.$ 证：?

补充题 6 若 $A=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$ 的伴随阵 A^* 的秩为 1，则 $a=-1/2$.

解：因 $r(A^*)=1\Leftrightarrow r(A)=n-1$，得 $r(A)=3-1=2\Rightarrow a=-1/2$.

补充题 7 若 A,B 都是 n 阶正交阵，则 AB 也是正交阵，且行列式 $|AB|=1$ 或 -1.

补充题 8 已知 $A+B=AB$，计算 $(A-I)(B-I)$，并证明 $AB=BA$. **证:**?

补充题 9 若 A,B 都是 n 阶正交阵, 且 $|AB|=-1$ 则 $A+B$ 不可逆, 即 $|A+B|=0.$

证：由正交阵定义 $A^TA=AA^T=I,\ B^TB=BB^T=I.$ 可得

$|A+B|=|AB^TB+AA^TB|=|A(B+A)^TB|=|A||B||B+A|=-|A+B|$，故 $|A+B|=0.$

(同理可证**结论**：若 A 是 3 阶正交阵, 且 $|A|=1$ 则 $|A-I|=0$?)

思考题：(1) A 为 2 阶实对称阵，特征值为 1，2， $X=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 使得 $AX=X$，求正交阵 Q 与对角阵 D 使得 $A=QDQ^T$，求 $A=$? .

(2)设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 R^3 的基， $A=A_{3\times3}$ 满足：$A\varepsilon_1=\varepsilon_2,A\varepsilon_2=\varepsilon_3,A\varepsilon_3=2\varepsilon_2-\varepsilon_3.$

求矩阵 B 使得 $A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\mathbf{B}$， B = ?

补充题：验证下题并求其行列式（并推广到 n 阶矩阵）:

$$\begin{pmatrix}(a_0+b_0)^2&(a_0+b_1)^2&(a_0+b_2)^2\\(a_1+b_0)^2&(a_1+b_1)^2&(a_1+b_2)^2\\(a_2+b_0)^2&(a_2+b_1)^2&(a_2+b_2)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2a_0&a_0^2\\1&2a_1&a_1^2\\1&2a_2&a_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0^2&b_1^2&b_2^2\\b_0&b_1&b_2\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5&1&1\\1&5&1\\1&1&5\end{pmatrix}$, (1) 把 A 分解为列与行的积，并计算 $\mathbf{A}^{2010}$； (2)求 A 的全体特征根；(3)写一个多项式 f(x)使得 B=f(A)，由 A 的特征根直接写出 B 的特征根

2. 设 β 是非齐方程 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\ (\mathbf{b}\neq\vec{0})$ 的一个解，设 α_1,α_2 是齐次方程 $\mathbf{Ax}=0$ 的一个基础解系，若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\beta=0$，求 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\beta$ 与 k_1, k_2, k_3.

3 用简单观察法求 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&3\\1&1&2&3\\1&1&1&2\end{vmatrix}$ 中第一行代数余子式之和 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$ ？

4.设方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$

判定 a, b 取何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷多解(求通解)

5.设 A 为 n 阶阵，则有 $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0, & r(A)\le n-2\end{cases}$

6.秩公式：$rank(A^TA)=rank(AA^T)=rank(A)$，（$A=A_{m\times n}$ 为实矩阵）

7.设 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 是 R^4 中列向量；矩阵 $A=(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$，已知：

$$A=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)\xrightarrow{\text{经过行变换后}}B=\begin{pmatrix}1&0&0&1&3\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(1)求向量组$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$的一个极大无关组，并用它表示向量 v_5

(2) 求 $x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4+x_5v_5=0$ 的基础解与通解

(3)求 $x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4=v_5$ 的通解与 $y_1v_1+y_2v_2+y_3v_4+y_4v_5=v_3$ 的通解

8. (1)若 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 都是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\ \ (\mathbf{b}\neq\vec{0})$ 的解，验证 $\dfrac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_k}{k}$ 也是它的解

(2)设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 4 元非齐次方程组 AX＝b 的三个解向量，且秩 $r(\mathbf{A})=3$，

$\alpha_1+\alpha_2=(8,4,4,4)^T,\alpha_1+\alpha_3=(6,2,2,2)^T$,求方程组 AX＝b 的通解.

9.设 n 元方程组 $Ax=b\ (b\neq0)$，秩 $r(A)=r\ (r<n)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的基本解,

证明 $Ax=b$ 最多有 $n-r+1$ 个线性无关的解.