北京航空航天大学

2011－2012 学年第二学期期末考试

《 工科数学分析(II) 》

试卷

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成 绩									
阅卷人									
校对人									

2012 年 6 月 18 日

一． **计算题。（35）**

1. 计算向量场 $\vec{A}=(x-z)\vec{i}+(x^3+yz)\vec{j}-3xy^2\vec{k}$ 的旋度.

解:

$$rot\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-z & x^3+yz & -3xy^2 \end{vmatrix}=(-6xy-y)\vec{i}+(-1+3y^2)\vec{j}+3x^2\vec{k}$$

建议评分标准：如答案对，给 5 分，如果答案不对，旋度计算公式 2 分，三个分量各 1 分.

2. 通过改变积分次序计算累次积分 $\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} e^{x^2}dx+\int_1^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{1} e^{x^2}dx$.

解:

$$\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} e^{x^2}dx+\int_1^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{1} e^{x^2}dx=\int_0^1 dx\int_x^{2x} e^{x^2}dy=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}(e-1)$$

建议评分标准：改变积分次序 3 分，结果 2 分

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sin(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, 且 y\ge 0\}$.

解：取广义极坐标变换 $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$，则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$. 在广义极坐标系下，积分区域 D 为

$\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi\}$，因此

原式=$\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 abr\sin r^2 dr=\frac{\pi}{2}ab(1-\cos 1)$

建议评分标准：广义极坐标变换 2 分，雅各比行列式 1 分，积分区域 1 分，结果 1 分.

4. 求极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\cos(x-y+z)e^{x^2+y^2+z^2+3xyz}dxdydz$.

解：由积分中值定理，存在 (ξ,η,ς)， $\xi^2+\eta^2+\varsigma^2\le r^2$，使得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\cos(x-y+z)e^{x^2+y^2+z^2+3xyz}dxdydz=\frac{4}{3}\pi r^3\cos(\xi-\eta+\varsigma)e^{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2+3\xi\eta\varsigma}$$

因此，原式= $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{4}{3}\pi\cos(\xi-\eta+\varsigma)e^{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2+3\xi\eta\varsigma}=\dfrac{4}{3}\pi$.

建议评分标准：积分中值定理 3 分，结果 2 分.

5. 利用对称性计算三重积分 $\iiint\limits_V(z^2+x\cos(xy))dxdydz$，其中

$V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 2, z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}$.

解：由于积分区域 V 关于 yoz 平面对称， $x\cos(xy)$ 为关于 x 的奇函数，因此

$\iiint\limits_V x\cos(xy)dxdydz=0$. 下面计算 $\iiint\limits_V z^2dxdydz$，采用球极坐标系 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$，则此时

$\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=r^2\sin\varphi$，被积区域 V 为 $\{(r,\varphi,\theta)\,|\,0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le\sqrt{2}\}$，因此

原式= $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\cos^2\varphi r^2\sin\varphi dr=\dfrac{4\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

建议评分标准：对称性 2 分，计算过程 2 分，结果 1 分.

6. 利用对称性计算第一型曲面积分 $\iint\limits_\Sigma\dfrac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$， Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

解：由于 Σ 关于 xoy 平面对称， $\dfrac{yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为 z 的奇函数，因此 $\iint\limits_\Sigma\dfrac{yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=0$，又

由于 Σ 关于 xoz 平面对称， $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为 y 的奇函数，因此 $\iint\limits_\Sigma\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=0$，因此

$\iint\limits_\Sigma\dfrac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=0$. （建议评分标准：过程及答案正确 5 分）

7. 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz$ ，Σ 为 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1$ 围成区域边界的外侧.

解法一：Σ 是一个封闭曲面，设 Σ 所围区域为 V ，则由 Gauss 公式知 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz = \iiint\limits_{V} ydxdydz = 0$. 其中只需注意到 V 是关于 xoz 平面对称的，被积函数 y 是关于变量 y 的奇函数.

建议评分标准：高斯公式 3 分，计算及结果 2 分.

解法二：设 $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1\}$，指向下侧，$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \mid z = 1, x^2 + y^2 \le 1\}$，

指向上侧， $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$，则由对称性

$\iint\limits_{\Sigma_1} xydydz = \iint\limits_{D_{xy}} -xy(2x)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} -2x^2 ydxdy = 0$. 而 $\iint\limits_{\Sigma_2} xydydz = 0$，因此 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz = 0$.

建议评分标准：第一块曲面积分 3 分，第二块 2 分.

二. （15）计算下面问题

1）利用格林公式计算椭圆盘 $x^2 + 2xy + 2y^2 \le \varepsilon^2$ （ $\varepsilon > 0$ ）的面积；

2）计算第二型曲线积分 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + 2xy + 2y^2}$，其中 L 为包围原点的一条光滑封闭曲线，方向为逆时针.

解：1）. $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2$ ，由此我们可以给出椭圆 $L: x^2 + 2xy + 2y^2 = \varepsilon^2$ 的一个参数方程 $x + y = \varepsilon\cos\theta, y = \varepsilon\sin\theta$ ，即 $\begin{cases} x = \varepsilon\cos\theta - \varepsilon\sin\theta, \\ y = \varepsilon\sin\theta \end{cases}$ $0 \le \theta \le 2\pi$，因此椭圆盘 $x^2 + 2xy + 2y^2 \le \varepsilon^2$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(\varepsilon\cos\theta - \varepsilon\sin\theta)(\varepsilon\cos\theta) - \varepsilon\sin\theta(-\varepsilon\sin\theta - \varepsilon\cos\theta)]d\theta = \pi\varepsilon^2.$$

2). 记 $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + 2xy + 2y^2}$， $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + 2xy + 2y^2}$，容易验证

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y^2 - x^2}{(x^2 + 2xy + 2y^2)^2} (x^2 + y^2 \ne 0\text{时})$. 为使用 Green 公式，做辅助曲线 $L_\varepsilon: x^2 + 2xy + 2y^2 = \varepsilon^2$，其中 ε 充分小使得 L_ε 位于 L 所包围的区域内部， L_ε 取定向为逆时针. 设 L 包围区域为 V ， L_ε 包围区域为 V_ε，由 Green 公式易知

$$\oint_{L-L_\varepsilon} Pdx-Qdy=\iint_{V\backslash V_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

因此 $\oint_{L} Pdx-Qdy=\oint_{L_\varepsilon} Pdx-Qdy=\oint_{L_\varepsilon}\frac{xdy-ydx}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{V_\varepsilon}2dxdy=2\pi$，

其中倒数第一个等式使用了 1)的结论.

建议评分标准：第 1 小题 6 分，第二小题 9 分，其中两个偏导数 3 分，辅助曲线 3 分，答案 3 分.

三． （10）利用高斯公式计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z+2y)dzdx+zdxdy$，其中 Σ 为 $z=x^2+y^2\left(0\le z\le 1\right)$（$z\ge 0$），指向上侧.

解：作辅助曲面 $\Sigma^{'}=\{(x,y,z)\,|\,z=1,x^2+y^2\le 1\}$，指向上侧，则 Σ 与 $\Sigma^{'}$ 构成一个封闭曲面，记它们所围区域为 V．则由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\Sigma^{'}-\Sigma}(z+2y)dzdx+zdxdy=\iiint\limits_{V}3dxdydz=3\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}dxdy=3\pi\int_0^1 zdz=\frac{3\pi}{2}.$$

而 $\iint\limits_{\Sigma^{'}}(z+2y)dzdx+zdxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}1dxdy=\pi$，因此 $\iint\limits_{\Sigma}(z+2y)dzdx+zdxdy=\pi-\frac{3\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$.

建议评分标准：做辅助曲面 3 分，高斯公式 3 分，剩余两个计算各 2 分.

四． （10）计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}[2yf(x,y,z)+x]dydz+[-2xf(x,y,z)+y]dzdx+2zdxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为曲面 $x^2+y^2+z=1$ 在第一卦限的部分，指向上侧.

解：Σ 投影到 xoy 平面为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$．$\Sigma$ 的表达式为 $z=1-x^2-y^2$，$(x,y)\in D_{xy}$．因此

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}[2yf(x,y,z)+x]dydz+[-2xf(x,y,z)+y]dzdx+2zdxdy\\&=\iint\limits_{D_{xy}}[(2yf(x,y,z)+x)(2x)+(-2xf(x,y,z)+y)(2y)+2-2x^2-2y^2]dxdy\\&=\iint\limits_{D_{xy}}2dxdy\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

建议评分标准：投影到 xoy 平面 4 分，公式正确 4 分，最后的计算 2 分

五．（15）利用斯托克斯公式计算 $\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 C 为曲面

$x^2+y^2+z^2=2bx$（$z\geq 0, b>0$）与 $x^2+y^2=2ax$（$b>a>0$）的交线，若从 z 轴正向看去，C 为逆时针方向.

解：设 C 在球面 $x^2+y^2+z^2=2bx$ 上所围的区域为 Γ，Γ 取上侧．Γ 的表达式为：$z=\sqrt{b^2-(x-b)^2-y^2}$，$(x,y)\in D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 2ax\}$．由 Stokes 公式知

$$\oint_C (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Gamma (2y-2z)dydz+(2z-2x)dzdx+(2x-2y)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}[(2y-2z)(-z_x)+(2z-2x)(-z_y)+(2x-2y)]dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}[(2y-2z)(\frac{x-b}{z})+(2z-2x)(\frac{y}{z})+(2x-2y)]dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}[\frac{2yb}{z}+2b]dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}2b\,dxdy$$

$$=2\pi a^2 b$$

建议评分标准：斯托克斯公式 7 分，剩余计算 8 分.

六．（15）设函数 $f(x),g(x)$ 具有 2 阶连续导数, 并且积分

$$\oint_C (y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x))\mathrm{d}x+2(yg(x)+f(x))\mathrm{d}y=0$$

对平面上任一条封闭曲线 C 成立. 求 $f(x),g(x)$.

解：由积分与路径无关的等价条件知：$\frac{\partial}{\partial x}[2(yg(x)+f(x))]=\frac{\partial}{\partial y}[y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x)]$，因此 $f(x),g(x)$ 应满足 $2yg'(x)+2f'(x)=2yf(x)+2e^x+2g(x)$，因此 $g'(x)=f(x)$，$f'(x)=e^x+g(x)$ 成立，由 $f'(x)=g''(x)$ 得 $g''(x)=e^x+g(x)$，解微分方程得

$g(x)=\frac{1}{2}xe^x+C_1e^x+C_2e^{-x}$，$f(x)=g'(x)=\frac{1}{2}xe^x+\frac{1}{2}e^x+C_1e^x-C_2e^{-x}$.

建议评分标准：积分与路径无关 7 分，得到两个常微分方程 3 分，求解 5 分.

七． （10）附加题（以下二题任选其一）：

1．已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$，$L$ 为 D 的正向边界，$f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，证明：

（1）$\oint_L xe^{f(y)}dy-ye^{-f(x)}dx=\oint_L xe^{-f(y)}dy-ye^{f(x)}dx;$

（2）$\oint_L xe^{f(y)}dy-ye^{-f(x)}dx\ge 2$.

证明：1). 由 Green 公式知

$$\oint_L xe^{f(y)}dy-ye^{-f(x)}dx=\iint_D (e^{f(y)}+e^{-f(x)})dxdy,$$

$$\oint_L xe^{-f(y)}dy-ye^{f(x)}dx=\iint_D (e^{-f(y)}+e^{f(x)})dxdy,$$

又由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，有 $\iint_D (e^{f(y)}+e^{-f(x)})dxdy=\iint_D (e^{f(x)}+e^{-f(y)})dxdy$，因此

$\oint_L xe^{f(y)}dy-ye^{-f(x)}dx=\oint_L xe^{-f(y)}dy-ye^{f(x)}dx$ 成立.

2）. 由 1）的结论

$$\begin{aligned}\oint_L xe^{f(y)}dy-ye^{-f(x)}dx&=\frac{1}{2}\left(\iint_D (e^{f(y)}+e^{-f(x)})dxdy+\iint_D (e^{f(x)}+e^{-f(y)})dxdy\right)\\&=\frac{1}{2}\iint_D (e^{f(y)}+e^{-f(y)}+e^{f(x)}+e^{-f(x)})dxdy\\&\ge\frac{1}{2}\iint_D 4dxdy=2\end{aligned}$$

建议评分标准：第一小题 6 分，用了格林公式 4 分，对称性部分 2 分，第二小题 4 分.

2．设 $f(x,y)$ 是 R^2 上的连续可微函数，且对圆 $x^2+y^2=1$ 上的任一点均有 $f(x,y)=0$，求极限 $\lim\limits_{r\to 0+}\iint\limits_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy$.

解法一：我们采用极坐标变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，设 $z=f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$，则易知 $\frac{\partial z}{\partial\rho}=\frac{xf_x+yf_y}{\rho}$. 因此

$$\lim_{r\to 0+}\iint_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{r\to 0+}\int_0^{2\pi}d\theta\int_r^1\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\rho d\rho$$

$$=\lim_{r\to 0+}\int_0^{2\pi}d\theta\int_r^1\frac{\partial z}{\partial\rho}d\rho=\lim_{r\to 0+}\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)-f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$$

$$=\lim_{r\to 0+}\int_0^{2\pi}-f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta=\lim_{r\to 0+}-2\pi f(r\cos\theta_0,r\sin\theta_0)=-2\pi f(0,0).$$

解法二：记 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$，方向为逆时针，L_r 为圆周 $x^2+y^2=r^2$，方向为顺时针. 则由 Green 公式，$\oint_{L+L_r}\frac{x}{x^2+y^2}f(x,y)dy-\frac{y}{x^2+y^2}f(x,y)dx=\iint_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy$，

又由于在 L 上均有 $f(x,y)=0$，因此 $\oint_L\frac{x}{x^2+y^2}f(x,y)dy-\frac{y}{x^2+y^2}f(x,y)dx=0$，因此

$$\iint_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\oint_{L_r}\frac{x}{x^2+y^2}f(x,y)dy-\frac{y}{x^2+y^2}f(x,y)dx=-\oint_{L_r}f(x,y)ds=-2\pi f(x_0,y_0)$$

其中 $(x_0,y_0)\in L_r$.

因此 $\lim_{r\to 0+}\iint_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{r\to 0+}-2\pi f(x_0,y_0)=-2\pi f(0,0).$

建议评分标准：使用格林公式 4 分（对应计算了 f 对 r 的偏导数），将积分式化为 Lr 上的积分 4 分，答案 2 分.