- 关系数据库中，有两个关系表，如何得到新的关系表

第四章　关系

郑征

zhengz@buaa.edu.cn

软件与控制研究室

第2讲 关系表示与关系性质

1. 关系运算性质(续)

2. 关系矩阵，关系图

3. 自反，对称，传递

1. 关系运算性质(续)

关系基本运算的性质(续)

- 定理6~定理9（证明自学）
- 定理6: 设R_1,R_2,R_3是集合,则

(1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$

(2) $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$

(3) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

(4) $(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq (R_1 \circ R_3) \cap (R_2 \circ R_3)$

合成运算的分配律

定理6(证明(1))

- (1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$
- 证明: $\forall <x,y>$,

$<x,y> \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$

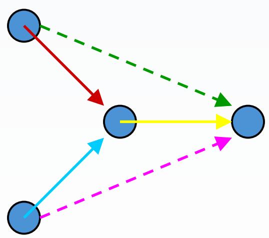
$\Leftrightarrow \exists z(x(R_2 \cup R_3)z \wedge zR_1y) \Leftrightarrow \exists z((xR_2z \vee xR_3z) \wedge zR_1y)$

$\Leftrightarrow \exists z((xR_2z \wedge zR_1y) \vee (xR_3z \wedge zR_1y))$

$\Leftrightarrow \exists z(xR_2z \wedge zR_1y) \vee \exists z(xR_3z \wedge zR_1y)$

$\Leftrightarrow x(R_1 \circ R_2)y \vee x(R_1 \circ R_3)y \Leftrightarrow x((R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3))y$

$\Leftrightarrow <x,y> \in (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$



集合的逻辑演算

$F \circ G = \{ <x,y> \mid \exists z(xGz \wedge zFy) \}$

定理6(证明(3))

- (3) $R_1 \bigcirc (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \bigcirc R_2) \cap (R_1 \bigcirc R_3)$
- 证明: $\forall <x,y>$,

$<x,y> \in R_1 \bigcirc (R_2 \cap R_3)$

$\Leftrightarrow \exists z(x(R_2 \cap R_3)z \wedge zR_1y) \Leftrightarrow \exists z((xR_2z \wedge xR_3z) \wedge zR_1y)$

$\Leftrightarrow \exists z((xR_2z \wedge zR_1y) \wedge (xR_3z \wedge zR_1y))$

$\Rightarrow \exists z(xR_2z \wedge zR_1y) \wedge \exists z(xR_3z \wedge zR_1y)$

$\Leftrightarrow x(R_1 \bigcirc R_2)y \wedge x(R_1 \bigcirc R_3)y \Leftrightarrow x((R_1 \bigcirc R_2) \cap (R_1 \bigcirc R_3))y$

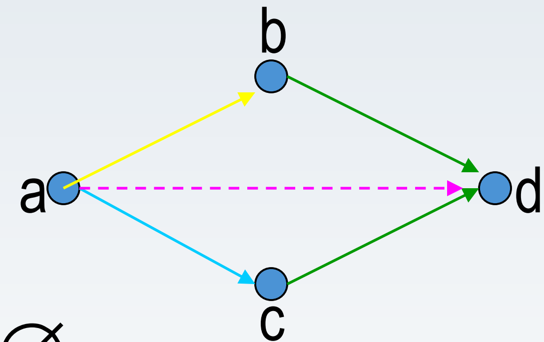
$\Leftrightarrow <x,y> \in (R_1 \bigcirc R_2) \cap (R_1 \bigcirc R_3)$. #

定理6(讨论(3))

- (3) $R_1\circ(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$
- 反例(说明=不成立):

设 $R_1=\{<b,d>,<c,d>\}$,

$R_2=\{<a,b>\}$, $R_3=\{<a,c>\}$.



则$R_1\circ(R_2\cap R_3) = R_1\circ\varnothing = \varnothing$,

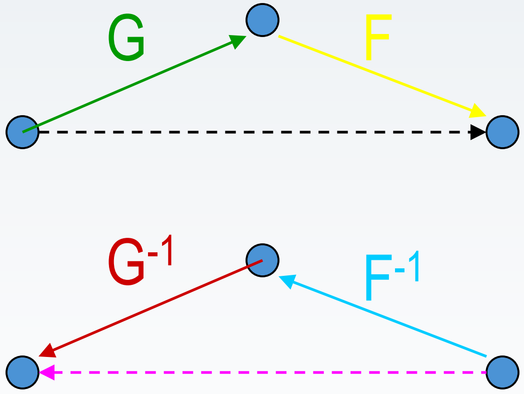
$R_1\circ R_2=\{<a,d>\}$, $R_1\circ R_3=\{<a,d>\}$,

$(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)=\{<a,d>\}$.   #

定理7

- 定理7: 设F,G为二集合, 则

$$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}.$$

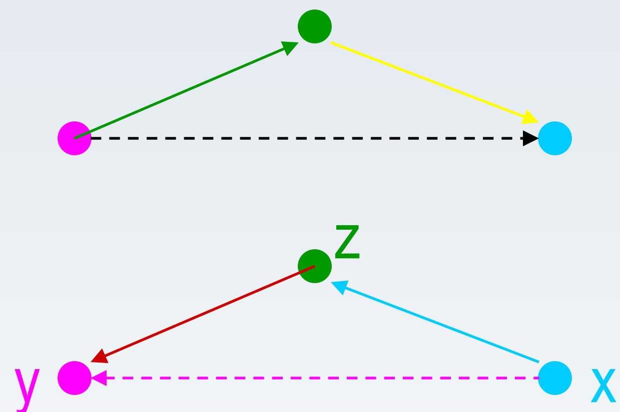


合成运算逆的性质

定理7(证明)

- $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$
- 证明: $\forall \langle x,y \rangle$,

  $\langle x,y \rangle \in (F \circ G)^{-1}$



$\Leftrightarrow \langle y,x \rangle \in (F \circ G)$

$\Leftrightarrow \exists z(yGz \wedge zFx) \Leftrightarrow \exists z(zG^{-1}y \wedge xF^{-1}z)$

$\Leftrightarrow \exists z((xF^{-1}z \wedge zG^{-1}y)$

$\Leftrightarrow \langle x,y \rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}$. #

2. 关系矩阵, 关系图

关系表示法

关系的表示方法:

- 集合

前面使用的方法

- 关系矩阵
- 关系图

关系矩阵(matrix)

- 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则R的关系矩阵 $M(R)=(r_{ij})_{n\times n}$，其中
$$r_{ij}=\begin{cases}1, & x_iRx_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$
- 例如, $A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$, 则

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

#

关系矩阵的性质

- R的集合表达式与R的关系矩阵可以唯一相互确定
- $M(R^{-1}) = (M(R))^T$. (^{T}表示矩阵转置)
- $M(R_1 \bigcirc R_2) = M(R_2) \bullet M(R_1)$. ($\bullet$表示这样的矩阵“乘法”，在该矩阵的“乘法”中加法使用逻辑$\vee$, 乘法使用逻辑$\wedge$.)

逆(inverse) :

$F^{-1} = \{ \langle x,y \rangle \mid yFx \}$

例题4

- 例题4: 设 $A=\{a,b,c\}$,

  $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,

  $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,

用$M(R_1)$, $M(R_2)$确定$M(R_1^{-1})$, $M(R_2^{-1})$, $M(R_1 \bigcirc R_1)$, $M(R_1 \bigcirc R_2)$, $M(R_2 \bigcirc R_1)$, 从而求出它们的集合表达式.

例题4(解)

- R_1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>},
  R_2={<a,b>,<a,c>,<b,c>},
- 解:

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

转置

$$M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

R_1^{-1} = {<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>}

R_2^{-1} = {<b,a>,<c,a>,<c,b>}

例题4(解,续)

- $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,
  $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,
- 解(续):

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$R_1\bigcirc R_1=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>\}.$$

例题4(解,续)

- $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,
  $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,
- 解(续):

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_2\circ R_1)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_2\bigcirc R_1=\{<a,a>,<a,c>\}$.

例题4(解,续)

- $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,
  $R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$,
- 解(续):

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1\circ R_2)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_1\circ R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$. #

关系数据库

- Access, Oracle, SQLServer, MySQL
- 关系数据库
  - 在一个给定的应用领域中，所有实体及实体之间联系的关系的集合构成一个关系数据库。
- 在关系数据库中，通常用n元关系描述数据间的关系。
  - 例如，学生的各科成绩总和表，学生多项简历表等，都可以用n元关系来表示。

关系数据库举例

- 设有一个学生-课程数据库，包括学生关系Student、课程关系Course和选修关系SC。

学 号 Sno	姓 名 Sname	性 别 Ssex	年 龄 Sage	所在系 Sdept
95001	李勇	男	20	CS
95002	刘晨	女	19	IS
95003	王敏	女	18	MA
95004	张立	男	19	IS

Student

Student={<95001, 李勇， 男， 20， CS>， < 95002, 刘晨， 女， 18， MA >,
<95003, 王敏， 女， 18， MA>， <95004, 男， 19， IS>}

课程号	课程名	先行课	学分
Cno	*Cname*	*Cpno*	*Ccredit*
1	数据库	5	4
2	数学		2
3	信息系统	1	4
4	操作系统	6	3
5	数据结构	7	4
6	数据处理		2
7	PASCAL语言	6	4

Course

学 号	课程号	成 绩
Sno	*Cno*	*Grade*
95001	1	92
95001	2	85
95001	3	88
95002	2	90
95002	3	80

SC

关系数据库

- 数据库中记录的插入

  Student’

  ={<95001, 李勇， 男，20，CS>， < 95002, 刘晨，女，18，MA >, <95003, 王敏，女，18，MA>，<95004, 男，19，IS>} ∪{< 95005, 男，21，IS >}

- 数据库中记录的删除
  - Student’’
  - ={<95001, 李勇， 男，20，CS>， < 95002, 刘晨，女，18，MA >, <95003, 王敏，女，18，MA>，<95004, 男，19，IS>} - {< 95002 , 刘晨，女，18，MA >}

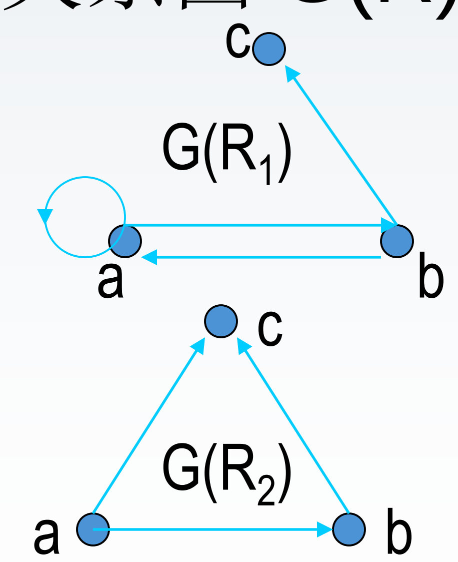
- “关系”这一章的许多知识在设计数据库查询、搜索等相关方法时候都用得到

关系图(graph)

- 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则A中元素以“○”表示(称为顶点), R中元素以“→”表示(称为**有向边**); 若x_iRx_j, 则从顶点x_i向顶点x_j引有向边$\langle x_i,x_j\rangle$, 这样得到的图称为R的关系图 G(R).
- 例如, $A=\{a,b,c\}$,

  $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

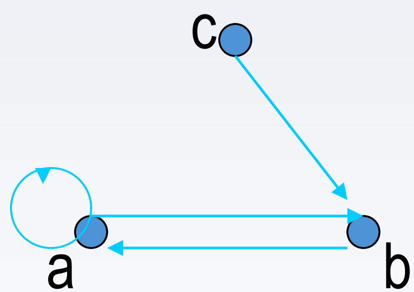
  $R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$, 则



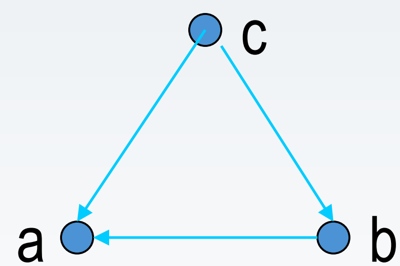
关系图(举例)

$$R_1^{-1} = \{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>\}$$

$$R_2^{-1} = \{<b,a>,<c,a>,<c,b>\}$$



$G(R_1^{-1})$



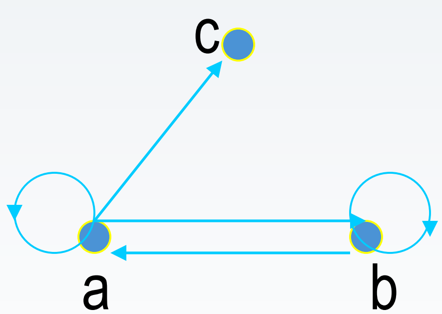
$G(R_2^{-1})$

关系图(举例,续)

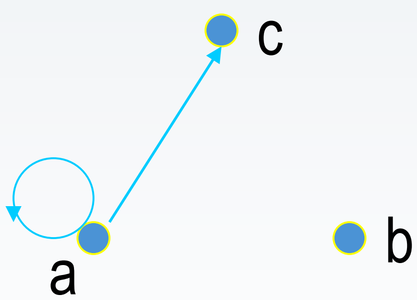
$R_1 \circ R_1 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}.$

$R_1 \circ R_2 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle\}.$

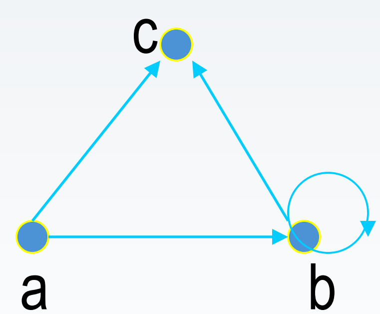
$R_2 \circ R_1 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}.$



$G(R_1 \circ R_1)$



$G(R_1 \circ R_2)$



$G(R_2 \circ R_1)$

关系矩阵,关系图(讨论)

- 当A中元素标定次序后, $R\subseteq A\times A$的关系图G(R)与R的集合表达式可以唯一互相确定
- R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可以唯一互相确定
- 对于$R\subseteq A\times B$, $|A|=n,|B|=m$,关系矩阵M(R)是$n\times m$阶的,关系图G(R)中的边都是从A中元素指向B中元素的.

3. 自反, 对称, 传递

关系性质

- 自反性(reflexivity)
- 反自反性(irreflexivity)
- 对称性(symmetry)
- 反对称性(antisymmetry)
- 传递性(transitivity)

自反性(reflexivity)

- 设$R\subseteq A\times A$, 说R是自反的(reflexive),如果

$$\forall x(\ x\in A \to xRx\ ).$$

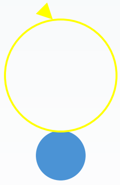
- R是非自反的 $\Leftrightarrow \exists x(\ x\in A \wedge \neg xRx)$
- 定理10: R是自反的

$\Leftrightarrow I_A\subseteq R$（$I_A$:恒等关系）

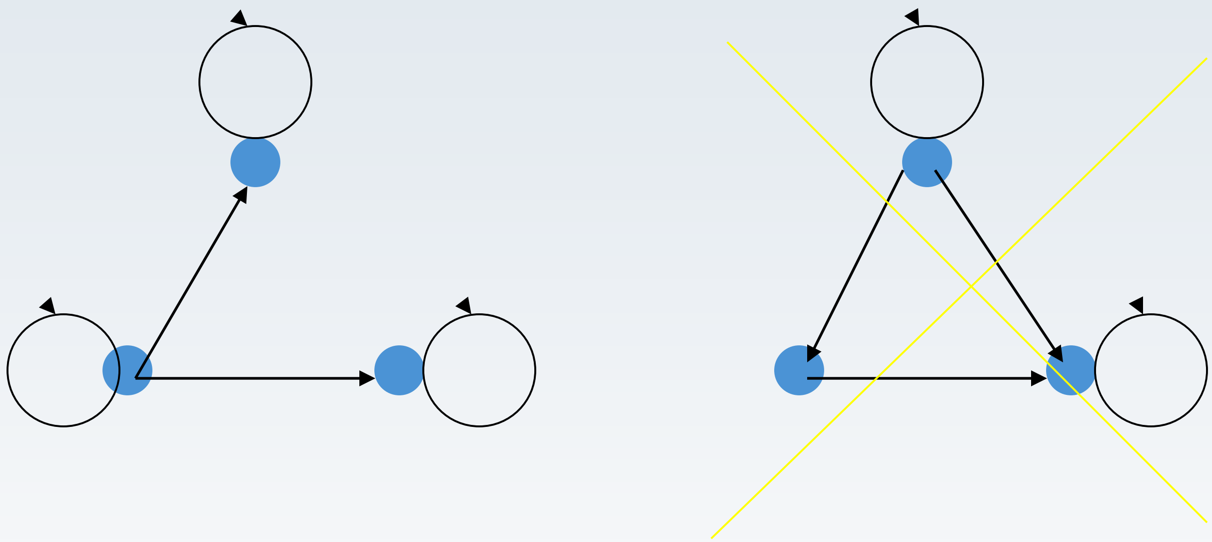
$\Leftrightarrow R^{-1}$是自反的

$\Leftrightarrow$ **M(R)主对角线上的元素全为1**

$\Leftrightarrow$ **G(R)的每个顶点处均有环**. #



自反性(举例)



反自反性(irreflexivity)

- 设$R \subseteq A \times A$, 说R是反自反的(irreflexive), 如果

$$\forall x(x \in A \rightarrow \neg xRx).$$

- R是非反自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge xRx)$
- 定理11: R是反自反的

$\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$

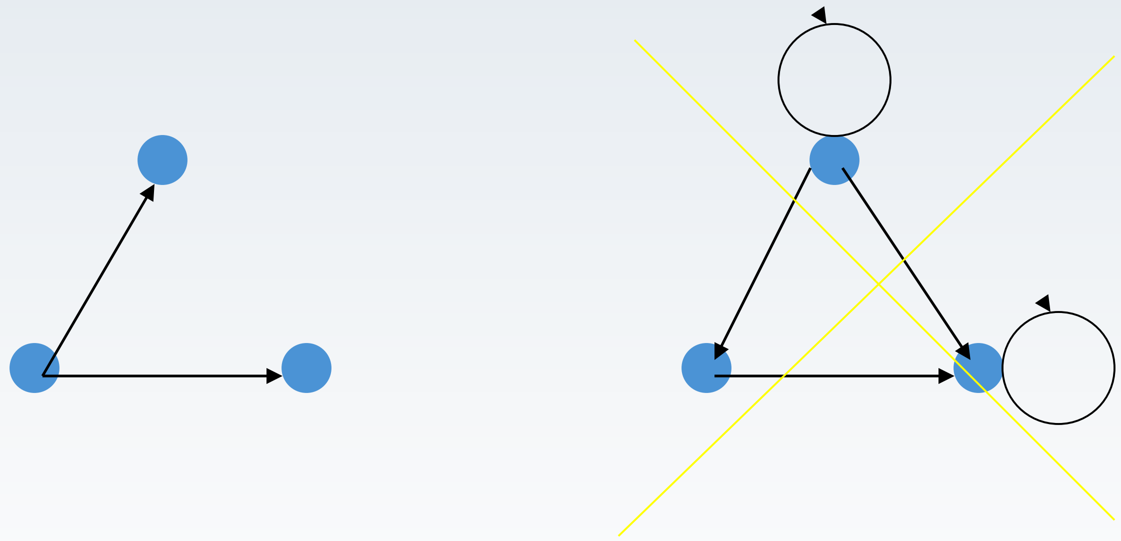
注意“非*”和“反*”的区别

$\Leftrightarrow R^{-1}$是反自反的

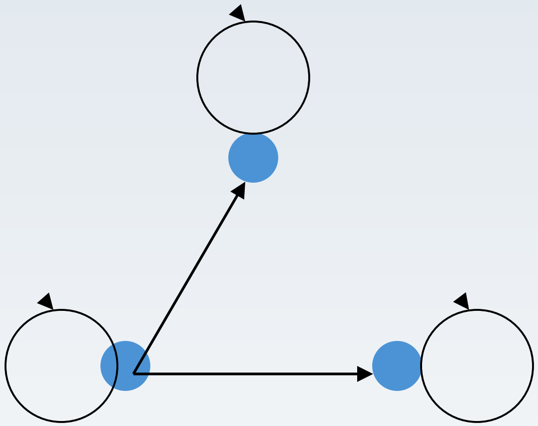
$\Leftrightarrow$ **M(R)主对角线上的元素全为0**

$\Leftrightarrow$ **G(R)的每个顶点处均无环.** #

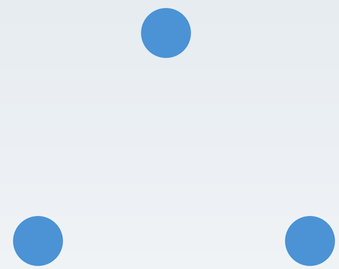
反自反性(举例)



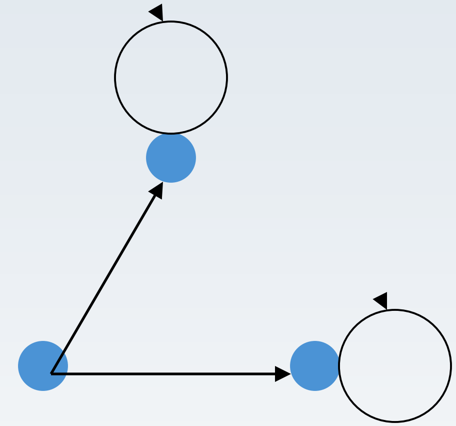
自反,自反性(分类)



自反



反自反



非自反,
非反自反

自反且
反自反？

∅上的空关系

(因为该关系的关系图中根本没有顶点)

对称性(symmetry)

- 设$R\subseteq A\times A$, 说R是对称的(symmetric),如果
  $$\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\rightarrow yRx).$$
- R非对称 $\Leftrightarrow \exists x\exists y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge\neg yRx)$
- 定理12: R是对称的

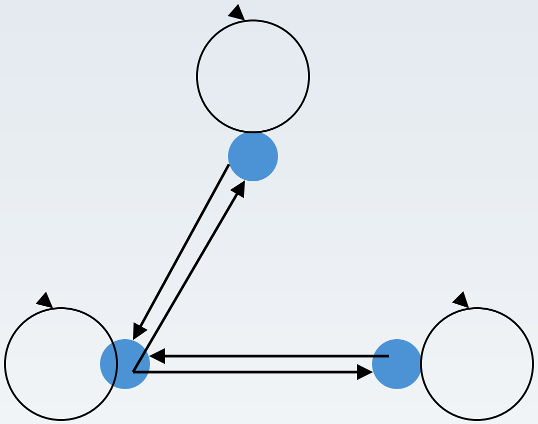
  $\Leftrightarrow R^{-1}=R$

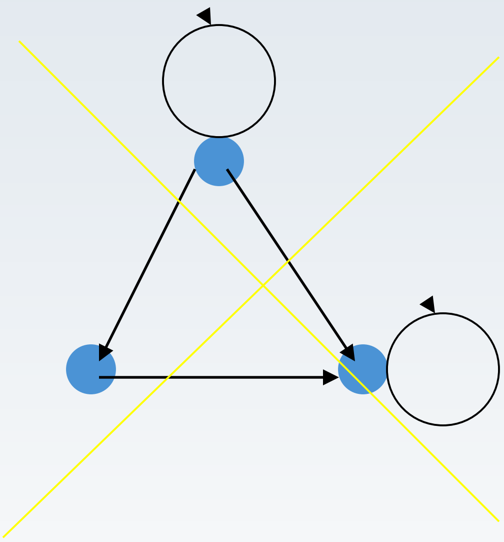
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是对称的

  $\Leftrightarrow$ **M(R)是对称的**

  $\Leftrightarrow$ **G(R)的任何两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的有向边.** #

对称性(举例)





反对称性(antisymmetry)

- 设$R \subseteq A \times A$, 说R是反对称的(antisymmetric),若 $\forall x \forall y(x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx \rightarrow x=y)$.
- R非反对称$\Leftrightarrow \exists x \exists y(x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx \land x \neq y)$
- 定理13: R是反对称的

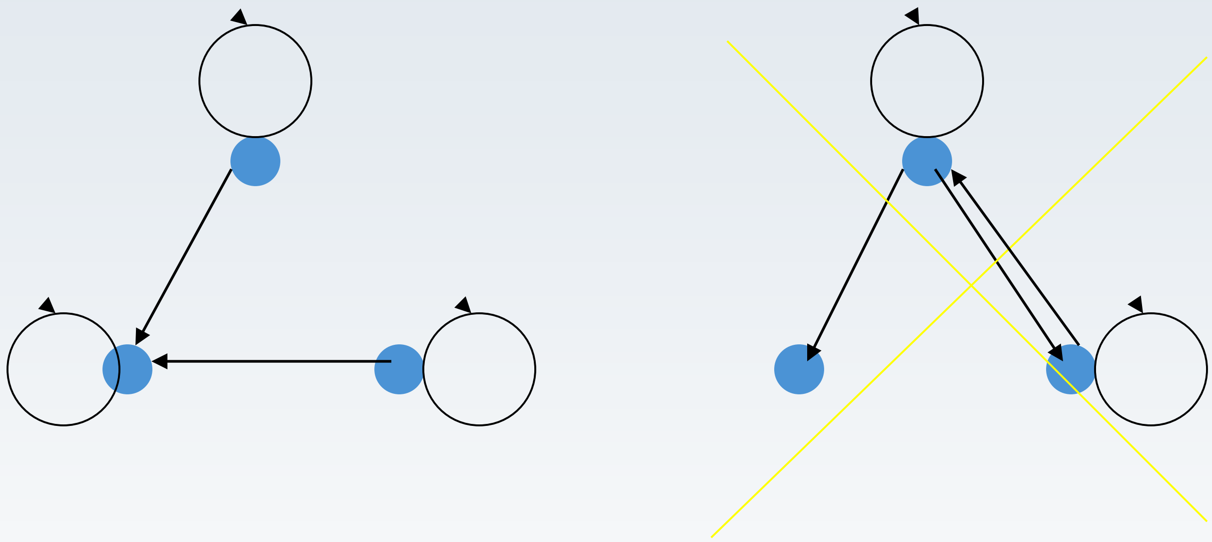
  $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq I_A$

  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反对称的

  $\Leftrightarrow$ 在M(R)中, $\forall i \forall j(i \neq j \land r_{ij}=1 \rightarrow r_{ji}=0)$

  $\Leftrightarrow$ **在G(R)中, $\forall x_i \forall x_j(i \neq j)$, 若有有向边 $\langle x_i,x_j \rangle$, 则必没有$\langle x_j,x_i \rangle$.** #

反对称性(举例)



传递性(transitivity)

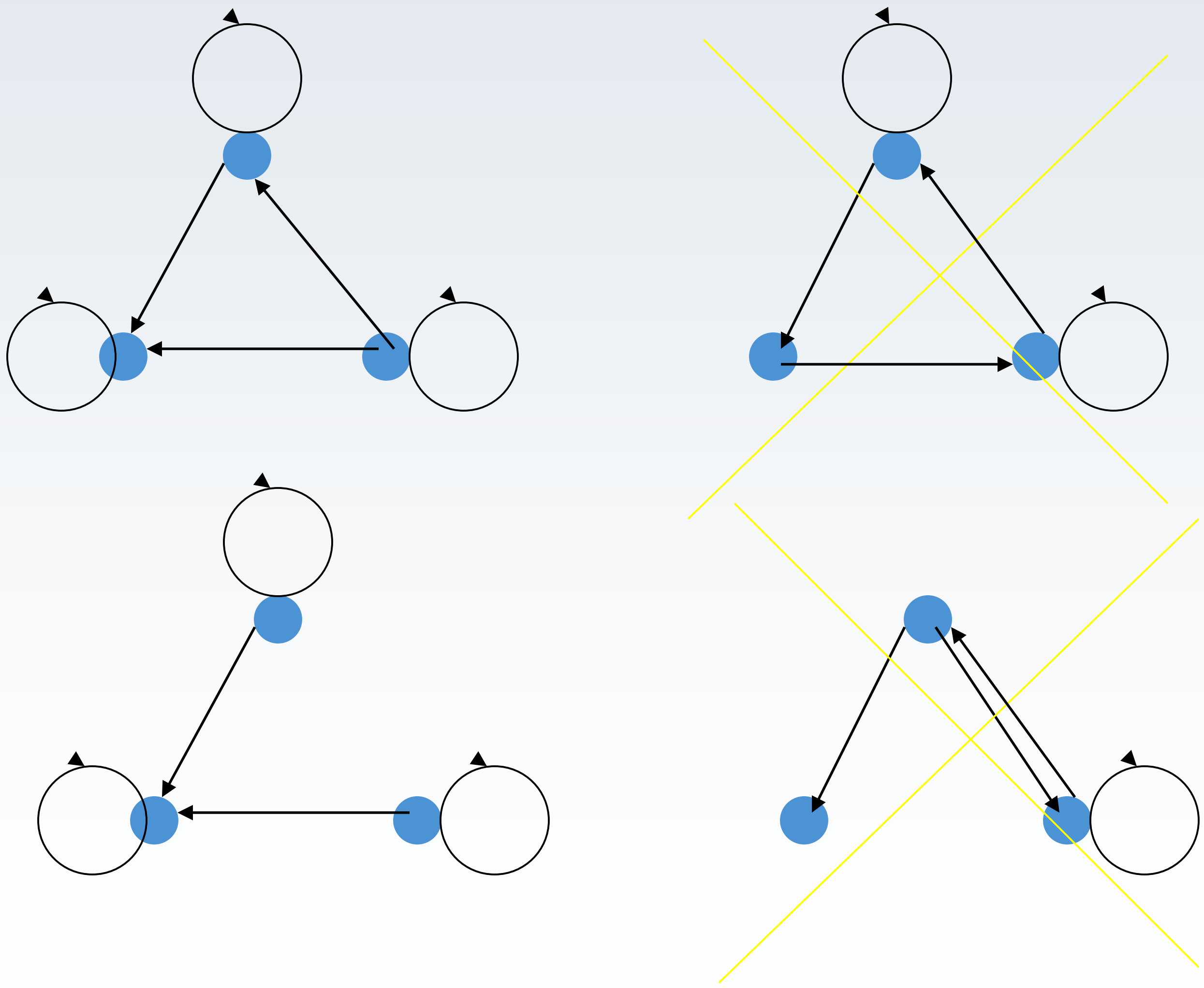
- 设$R \subseteq A \times A$, 说R是传递的(transitive), 如果
  $\forall x \forall y \forall z(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$.
- R非传递$\Leftrightarrow$
  $\exists x \exists y \exists z(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge \neg xRz)$
- 定理14: R是传递的

  $\Leftrightarrow R \bigcirc R \subseteq R \Leftrightarrow R^{-1}$是传递的

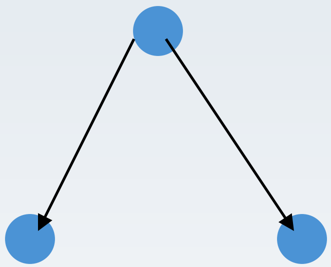
  $\Leftrightarrow$ **在$M(R \bigcirc R)$中, $\forall i \forall j$, 若$r_{ij}'=1$,则$M(R)$中相应的元素$r_{ij}=1$.**

  $\Leftrightarrow$ **在$G(R)$中, $\forall x_i \forall x_j \forall x_k$, 若有有向边$<x_i,x_j>,<x_j,x_k>$, 则必有有向边$<x_i,x_k>$.** #

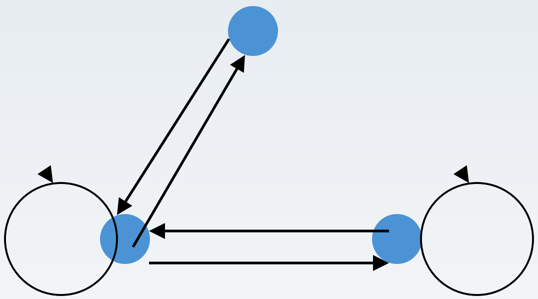
传递性(举例)



传递(分类)



传递



非传递

例5

- 例5: $A=\{a,b,c\}$

给定关系，判断其性质

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$,

$R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_4=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_5=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_6=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,a\rangle\}$,

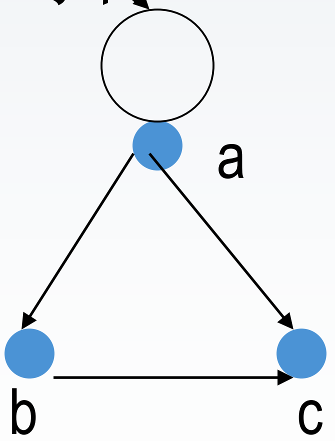
例5(续)

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$

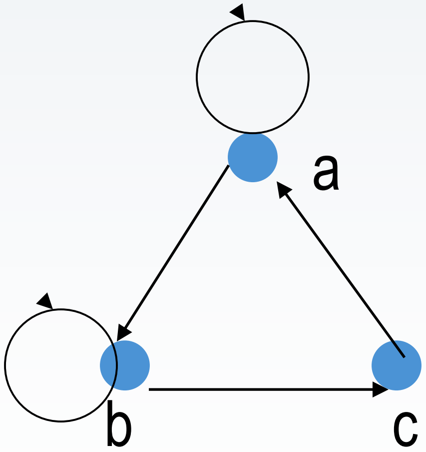
反对称,传递

$R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$

反对称



$G(R_1)$

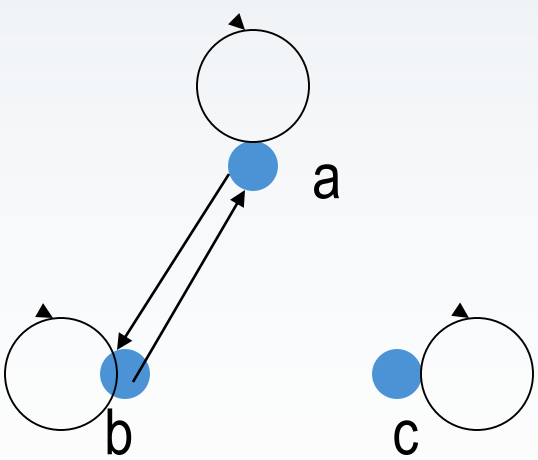


$G(R_2)$

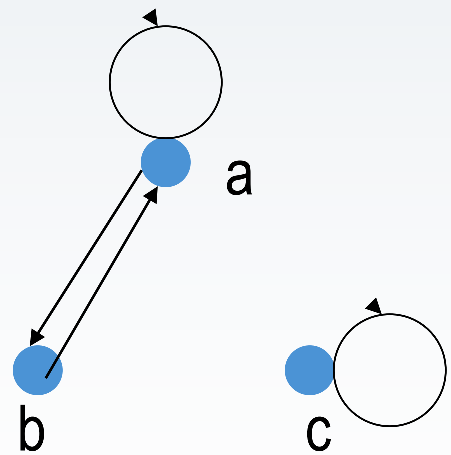
例5(续)

$R_3=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$自反，对称,传递

$R_4=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$对称



G(R_3)

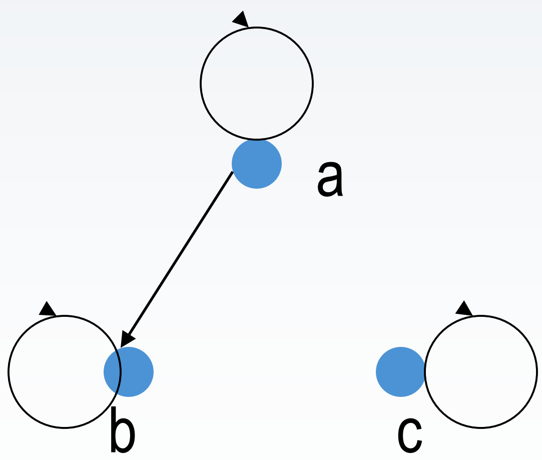


G(R_4)

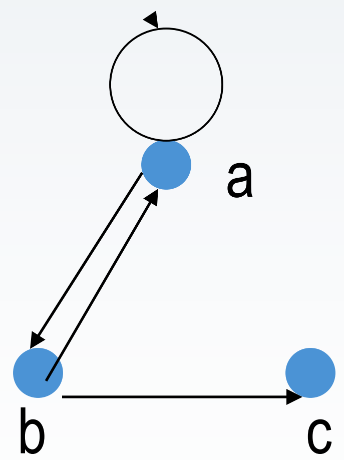
例5(续)

$R_5=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$自反,反对称,传递

$R_6=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,a\rangle\}$.　　#



$G(R_5)$



$G(R_6)$

关系运算是否保持关系性质

- 定理15: 设$R_1,R_2 \subseteq A\times A$都具有某种性质.

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√(4)	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√		
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√(5)
$R_1 \bigcirc R_2$, $R_2 \bigcirc R_1$	√				
R_1-R_2 , R_2-R_1		√	√	√	
$\sim R_1, \sim R_2$			√		

定理15(证明(4))

- (4) R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称.
- 证明: (反证) 若R_1^{-1}非反对称, 则

$$\exists x,y \in A,$$

$$xR_1^{-1}y \wedge yR_1^{-1}x \wedge x \neq y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge xR_1y \wedge x \neq y$$

与R_1反对称矛盾!

$\therefore$ R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称. #

定理15(证明(5))

- (5) R_1,R_2传递 $\Rightarrow R_1\cap R_2$传递.
- 证明:$\forall x,y,z\in A$,

$$x(R_1\cap R_2)y \wedge y(R_1\cap R_2)z$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge xR_2y \wedge yR_1z \wedge yR_2z$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge yR_1z \wedge xR_2y \wedge yR_2z$$

$$\Rightarrow xR_1z \wedge xR_2z \Leftrightarrow x(R_1\cap R_2)z$$

$\therefore$ R_1,R_2传递 $\Rightarrow R_1\cap R_2$传递. #

应用

- 设P={P_1, P_2, …, P_n}是程序库中所有程序的集合，在P中定义二元关系“R”如下：

  “P_i R P_j”当且仅当P_i执行完后才能执行P_j

该关系在非递归程序中满足：

反自反性，反对称性，传递性

该类关系常用来研究形式语言和计算模型，也用于设计编译程序

总结

- 关系运算性质(续)
- 关系矩阵, 关系图
- 自反, 反自反, 对称, 反对称, 传递
  - 定义，性质