作业4.3-4.4 习题

1. 在线性空间$R^{2\times 2}$ 中定义线性变换T_1, T_2, T_3如下:

$$T_1X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X, \quad T_2X = X\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad T_3X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

求T_1, T_2, T_3在基

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵.

2. 设数域F上三维线性空间V上的线性变换$\mathscr{A}$ 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(1) 求$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$ 下的矩阵.
(2) 求$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1, k\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵,其中$k \in F$且$k \neq 0$.
(3) 求$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵.

3. 给定R^3的两组基:

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 1), \varepsilon_2 = (2, 1, 0), \varepsilon_3 = (1, 1, 1)$$

$$\eta_1 = (1, 2, -1), \eta_2 = (2, 2, -1), \eta_3 = (2, -1, -1)$$

定义线性变换$\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}\varepsilon_i = \eta_i, i = 1, 2, 3.$$

(1)写出由基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵.
(2)求$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵.
(3)求$\mathscr{A}$在基η_1, η_2, η_3 下的矩阵.

4. 在线性空间$F[x]_n$中,设变换T为

$$Tf(x) = f(x+1) - f(x).$$

求T 在基

$$\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_i = \frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}, i = 1, 2, \cdots, n-1$$

下的矩阵.

5. $[O; \varepsilon_1, \varepsilon_2]$ 是平面上一直角坐标系,T将平面上的向量变换为其在第一和第三象限分角线上的投影向量,S将平面上的向量变换为其在ε_2上的投影向量,分别求线性变换T, S, TS 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵.

6. 求矩阵的秩:

(1)$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(2)n阶方阵$\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，其中$a$为常数，$n > 1$.

7. 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}, n \geq 2$$

求$\det(AA^T)$ 与$\det(A^TA)$.

8. 设A是4×3阶矩阵，$R(A) = 2$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求$R(AB)$.

9. 设方阵A满足$A^2-3A+2E=O$，证明：$R(A-E)+R(A-2E)=n$.

10. 设A为n阶方阵，证明：

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1 \end{cases}$$