# §2 带Peano余项的Taylor定理

# 一 、微分近似的不足

可微：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ 一阶近似

设$f(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o[(x-x_0)^2]$,

再设$f''(x_0)$存在,则$A$、$B$、$C$=？ 二阶近似？

(1) 令$x\to x_0$, $\boxed{A=f(x_0)}$.

(2) $$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}=B+C(x-x_0)+\frac{o[(x-x_0)^2]}{(x-x_0)}$$

$\Rightarrow \boxed{B=f'(x_0)}$.

## 定理的引出

(3) $$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=C+\frac{o[(x-x_0)^2]}{(x-x_0)^2}$$

$$C=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}f''(x_0).\Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}f''(x_0)}.$$

实际上，如果我们令

$$T_2(f,x_0;x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

则 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_2(f,x_0;x)}{(x-x_0)^2}=0.\quad (L'Hospital)$$

若函数有更高阶导数，是否有更好近似？

**定义2.1** 设函数$f$在点$x_0$有直到$n$阶的导数，令

$$T_n(f,x_0;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为$f$在$x_0$处的$n$阶*Taylor*多项式.

## 二 Taylor定理(Peano余项)

**定理2.1** 设函数$f$在点$x_0$有直到$n$阶的导数，则：

$$\boxed{f(x)=T_n(f,x_0;x)+o[(x-x_0)^n],\quad (x\to x_0)}。$$

**证明：** 采用归纳法：

$n=1$时，即可导与可微的等价性（定理1.1）。

设$n=k$时定理成立，即有：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_k(f,x_0;x)}{(x-x_0)^k}=0.$$

## Taylor定理

下面考虑$n=k+1$时的情形：

$$\because T_{k+1}'(f,x_0;x)=T_k(f',x_0;x)$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{k+1}(f,x_0;x)}{(x-x_0)^{k+1}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_k(f',x_0;x)}{(k+1)(x-x_0)^k}=0$$

对哪个函数使用了归纳假设？

## Taylor定理

**说明:**

(1) Taylor公式所做的事情就是在$x_0$的小邻域内,用Taylor多项式$T_n(x)$逼近$f(x)$;

(2) 记$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$,我们称之为余项。定理即$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$,我们称之为Peano余项。它描述的是$R_n(x)$在$x_0$附近的性质。

(3) 取$x_0=0$时,称为*Maclaurin*(麦克劳林)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$$

## 三、常用展开式

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

证: 由$f^{(n)}(x) = e^x$，$f^{(n)}(0) = 1$，可得。

2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$

$$\ln(1-x) = -[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n}] + o(x^n)$$

## 常用展开式

3. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$

4. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

由$e^{ix} = 1 + ix + \dfrac{(ix)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(ix)^n}{n!} + o(x^n)$，得

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x.}$$

欧拉公式

求函数的Taylor展式：直接法，间接法

例1　求$y=\arctan x$的麦克劳林展开式.

解：　直接法,关键是求出$f^{(n)}(0)$:

(1)　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，　$f'(0)=1.$

(2)　$(1+x^2)f'(x)=1$,两边求$n$阶导数

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+n\cdot 2xf^{(n)}(x)+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2f^{(n-1)}(x)=0$$

# 常用展开式

取$x=0$, $f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0)$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1\end{cases}$$

$$\therefore \arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

5. $$f(x)=(1+x)^{\lambda},(x>-1)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{\lambda}^{k}x^{k}+o(x^{n})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!}x^{k}+o(x^{n})$$

特例 $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}-x^{3}+\cdots+(-1)^{n}x^{n}+o(x^{n})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}x^{k}+o(x^{n})$$

例1　求$y=\arctan x$的麦克劳林展开式.

解:　间接法,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n})$$

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1\end{cases}$$

$$\therefore \arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

例2: $f(x)=\ln\frac{\sin x}{x}$ 将此函数展开到6次

解:

$$f(x)=\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left(\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o\left(x^7\right)}{x}\right)=\ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o\left(x^6\right)\right)\right)$$

$$=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o\left(x^6\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o\left(x^6\right)\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o\left(x^6\right)\right)^3+o\left(x^6\right)$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o\left(x^6\right)$$

## 四、 Peano余项Taylor公式应用

**定理2.2** 设$f$在$x_0$处有$k$阶导数,且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\ f^{(k)}(x_0)\neq 0,\text{�}$$

1) $k$为奇数时,$x_0$不是极值点

2) $k$为偶数时,$x_0$是极值点,且

$f^{(k)}(x_0)>0$时$x_0$为极小值点,

$f^{(k)}(x_0)<0$时$x_0$为极大值点.

## 利用Taylor展式求极限

例3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解： $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left[\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right] = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

## 本节作业

- 习题4.2
- 1，2（1）（3）（5），3，4（2）(3),5(1)

# §3　带Lagrange余项的Taylor定理

## 带Lagrange余项Taylor公式

定理3.1 设 $f(x)$在$[a,b]$上有$n$阶连续导数，在$(a,b)$内有$n+1$阶导数, 则对$\forall x_0, x\in[a,b]$, 有

$$f(x)=T_n(f,x_0;x)+R_n(x),$$

其中 $\boxed{R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$。 **Lagrange余项**

回顾：$T_n(f,x_0;x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$$+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

**证法一：** ① 将$T_n(f,x_0;x)$中$x_0$视为变量$t$,即

令$F(t)=T_n(f,t;x)=f(t)+f'(t)(x-t)$

$$+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$F(x_0)=T_n(f,x_0;x)$, $F(x)=f(x)$,

$F(x)-F(x_0)=R_n(x)$

$$F'(t)=f'(t)+\sum_{k=1}^{n}[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}]$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

② 取$\lambda(t)=(\frac{x-t}{x-x_0})^{n+1}$,由引理知

$$F'(\xi_1)=\lambda'(\xi_1)[F(x_0)-F(x)]$$

又$\lambda'(t)=-(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}$

$$\therefore \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{n!}(x-\xi_1)^n$$

$$= -(n+1)\frac{(x-\xi_1)^n}{(x-x_0)^{n+1}}[T_n(f,x_0;x) - f(x)]$$

$$\therefore f(x) = T_n(f,x_0;x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$$\xi_1 \in (x_0, x)$$

③ 取$\lambda(t)=\dfrac{x-t}{x-x_0}$，$\lambda'(t)=-\dfrac{1}{x-x_0}$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{n!}(x-\xi_2)^n=-\frac{1}{x-x_0}[T_n(f,x_0;x)-f(x)]$$

$$\therefore f(x)=T_n(f,x_0;x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{n!}(x-\xi_2)^n(x-x_0)$$

$$\xi_2\in(x_0,x)$$

Cauchy余项

**证二：** 将$T_n(f,x_0;x)$中的$x$看成自变量，令$h(x)=T_n(f,x_0;x)$。

则有$h^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0)$，$i=0,1,\cdots n$成立。因此

$$R_n^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0)-h^{(i)}(x_0)=0,\quad i=0,1,\cdots n。$$

而$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-h^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$。

令$g_n(x)=(x-x_0)^{n+1}$，则易见

$$g_n^{(i)}(x_0)=0,\quad i=0,1,\cdots n,$$

$$g_n^{(n+1)}(x)=(n+1)!。$$

对$R_n(x)$和$g_n(x)$运用$Cauchy$中值定理，可得

# 带Lagrange余项Taylor公式

$$\frac{R_n(x)}{g_n(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g_n(x)-g_n(x_0)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{g_n'(\xi_1)}$$

$$=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{g_n'(\xi_1)-g_n'(x_0)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{g_n''(\xi_2)}=\cdots\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{g_n^{(n)}(\xi_n)}$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{g_n^{(n)}(\xi_n)-g_n^{(n)}(x_0)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g_n^{(n+1)}(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

因此$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$。

# Lagrange余项的意义

1、可以看成是Lagrange中值定理的推广；

2、Peano余项对误差进行定性的估计，Lagrange余项对误差有了更加准确的定量的描述。

将$Peano$余项（局部，$x_0$邻域内） $\Longrightarrow$ 推广到$(a,b)$区间

有$n$阶导数

有$n+1$阶导数

从局部 $\rightarrow$ 大范围；　从模糊 $\rightarrow$ 精确

## 常用展开式的Lagrange余项

1. $e^x : R_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, 0 < \theta < 1$

2. $\sin x : R_{2n}(x) = (-1)^n \dfrac{\cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}, 0 < \theta < 1$

3. $\cos x : R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{\cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}, 0 < \theta < 1$

4. $\ln(1+x) : R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1} \dfrac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}, 0 < \theta < 1$

5. $(1+x)^{\lambda} : R_n(x) = C_{\lambda}^{n+1} (1+\theta x)^{\lambda-n-1} x^{n+1}, 0 < \theta < 1$

例1 在$[0,\pi]$上,用$T_9(f,0;x)$逼近$\sin x$,并估计误差.

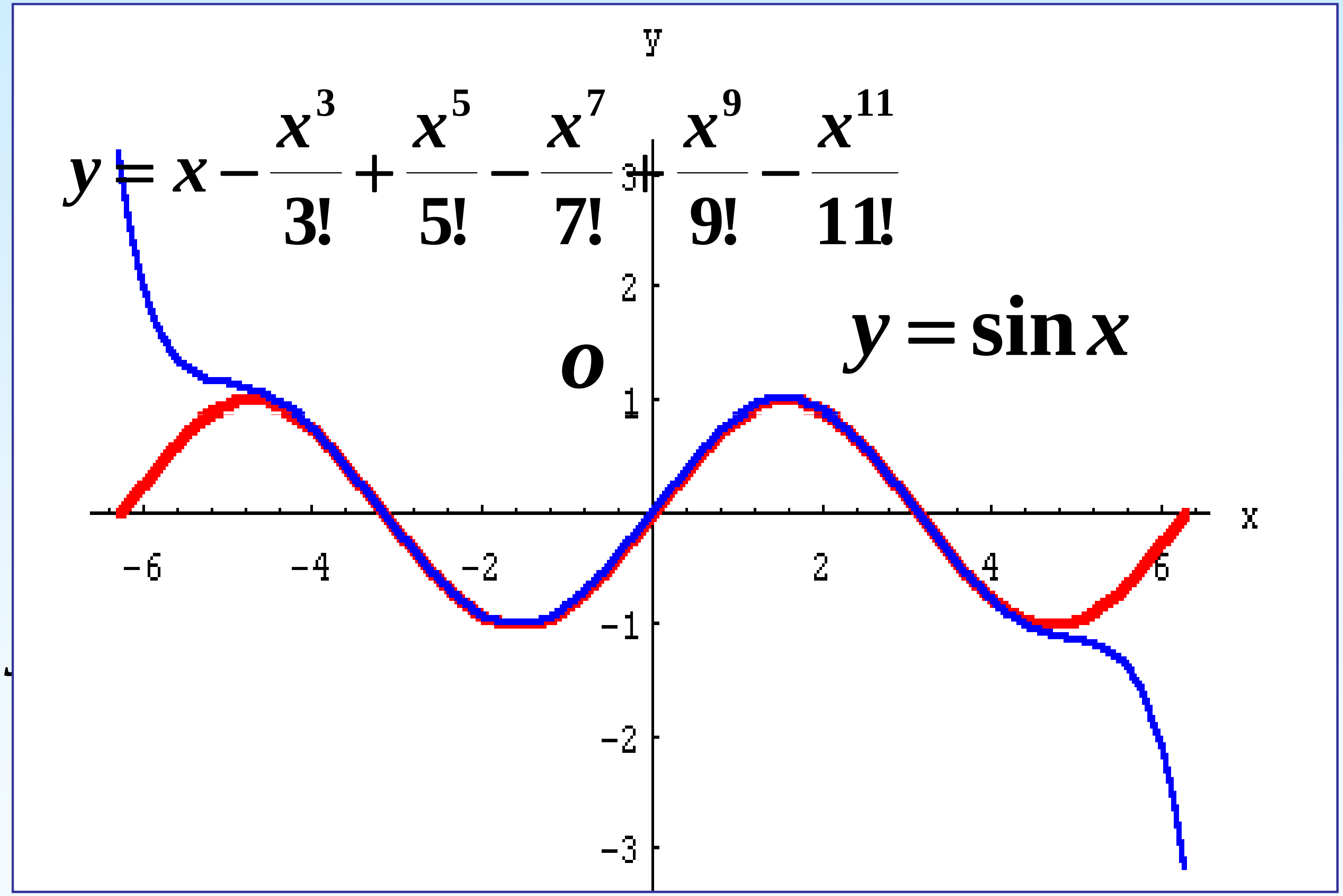
解:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{-\cos\theta x}{11!} x^{11},\ \theta \in (0,1)$$

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{x^{11}}{11!} \le \frac{\pi^{11}}{11!} = 0.0073404$$

① $|x|$越小,误差越小(局部).

② $n$越大,误差越小(全部).


y
$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$
$y = \sin x$
$o$
x
3
2
1
-1
-2
-3
-6
-4
-2
2
4
6

# 用Taylor公式证明问题的技巧

关键 $x, x_0$的选择

① $x_0$可选为端点、中点、驻 点、极值点;

② $x_0$取为$x$，计算$f(x+h)$，$f(x-h)$.

例2 $f$在$[a,b]$二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$,

求证：$\exists c\in(a,b)$，使得

$$\left|f''(c)\right|\ge\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|,$$

即: $$\left|f(b)-f(a)\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\left|f''(c)\right|.$$

证:

在端点$a,b$处用Taylor公式展开然后取$x=\dfrac{a+b}{2}$。

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$$

$$=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$$

取$x=\dfrac{a+b}{2}$，得$f(\dfrac{a+b}{2})=f(a)+\dfrac{f''(c_1)}{2}(\dfrac{b-a}{2})^2$

类似可得$f(\dfrac{a+b}{2})=f(b)+\dfrac{f''(c_2)}{2}(\dfrac{b-a}{2})^2$

两式相减得 $f(b)-f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{8}[f''(c_1)-f''(c_2)]$

$$\therefore \left|f(b)-f(a)\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}[\left|f''(c_1)\right|+\left|f''(c_2)\right|]$$

取$c_1,c_2$中使$\left|f''(c_1)\right|,\left|f''(c_2)\right|$大者为$c$即可。

**例3** 在$(a,b)$内$f''(x)>0$,求证：$\forall x_1,x_2\in(a,b)$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)].$$

**证:** 在$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$处展开,计算$x_1,x_2(x_1<x_2)$处值.

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\frac{x_1-x_2}{2}$$

$$+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2$$

$$f(x_2)=f(\frac{x_1+x_2}{2})+f'(\frac{x_1+x_2}{2})\frac{x_2-x_1}{2}$$

$$+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{x_2-x_1}{2})^2$$

两式相加

$$f(x_1)+f(x_2)$$

$$=2f(\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{(x_1-x_2)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$$

$$>2f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

**例4** $f$在[0,1]内二阶可导，$f(0)=f(1)=0$,

$$\min_{x\in[0,1]} f(x)=-1, \text{求证:} \max_{x\in[0,1]} f''(x)\ge 8$$

**证:** 极小值在(0,1)内取得, $f(c)=-1$最小,

$f'(c)=0$, 在$c$点展开:

$$f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(-c)^2=0,$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2=0,$$

即 $\dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2=1,\ f''(\xi_1)=\dfrac{2}{c^2},$

$$(c\le\frac{1}{2}\text{时})\,f''(\xi_1)\ge 8$$

$$\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2=1,\ f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2},$$

$$(c>\frac{1}{2}\text{时})\,f''(\xi_2)\ge 8$$

$$\therefore \max_{x\in[0,1]} f''(x)\ge 8.(\exists\xi,\ f''(\xi)\ge 8)$$

**例5** $f$在$[0,1]$内二阶可导，且$|f(x)| \le a, |f''(x)| \le b$

求证：$|f'(x)| \le 2a + \dfrac{b}{2}$

**证：** 在$\boldsymbol{x_0 = x}$处展开，计算 **0,1**处值

$$f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2,$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$$

$$f(1)-f(0)$$

$$=f'(x)+\frac{1}{2}(1-x)^2 f''(\xi_2)+\frac{1}{2}x^2 f''(\xi_1)$$

$$|f'(x)|$$

$$\leq |f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}(1-x)^2|f''(\xi_2)|+\frac{1}{2}x^2|f''(\xi_1)|$$

$$\leq 2a+\frac{1}{2}[(1-x)^2+x^2]b$$

$$\leq 2a+\frac{1}{2}[(1-x)+x]b=2a+\frac{b}{2}$$

**例6** $f$在$(-\infty,+\infty)$三阶可导,若$f, f'''$有界,

证明: $f', f''$也有界.

**证:** 在$x_0=x$处展开，分别计算$x+1, x-1$处值.

设$|f(x)|\le M_1, |f'''(x)|\le M_2$.

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}$$

两式相加 $f(x+1)+f(x-1)$

$$=2f(x)+f''(x)+\frac{1}{3!}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$$

$$\therefore |f''(x)|\le 4M_1+\frac{1}{3}M_2 \quad \text{有界}$$

两式相减 $f(x+1)-f(x-1)$

$$=2f'(x)+\frac{1}{3!}[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)]$$

$$\therefore |f'(x)|\le M_1+\frac{1}{3}M_2 \quad \text{有界}$$

## 本节作业

- 习题4.3
- 1，2，3，4