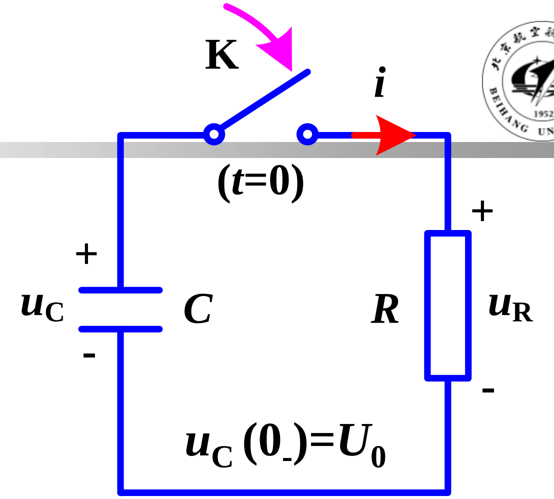
7.2 一阶电路的零输入响应

零输入响应

→

电路在无外加激励的情况下，换路后仅由储能元件所储存的初始能量作用于电路而引起的响应。

1. RC电路的零输入响应



开关K合上前，电容已充过电

$$u_C(0_-)=U_0 \qquad u_C(0_+)=U_0$$

$$\begin{cases} u_C-u_R=0 \\ u_R=Ri \\ i=-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}, u_C(0_+)=U_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C+RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0 \quad t\geq 0_+ \\ u_C(0_+)=U_0 \end{cases}$$

特征方程 $RCp+1=0$

特征根 $p=-\dfrac{1}{RC}$

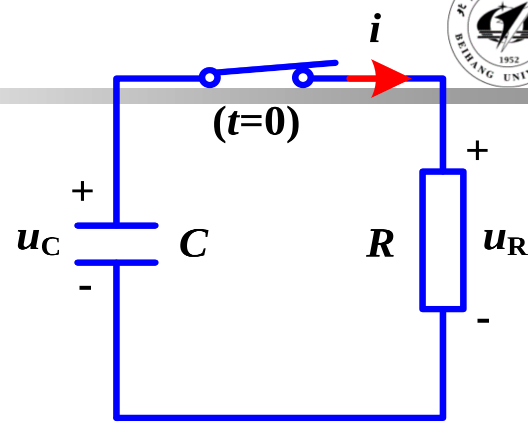
则 $u_C=A\mathrm{e}^{pt}=A\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$

由初始条件定常数A

$$u_C(0)=A\mathrm{e}^0=A=U_0$$

$$u_C=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad t\geq 0$$

$$u_C = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$



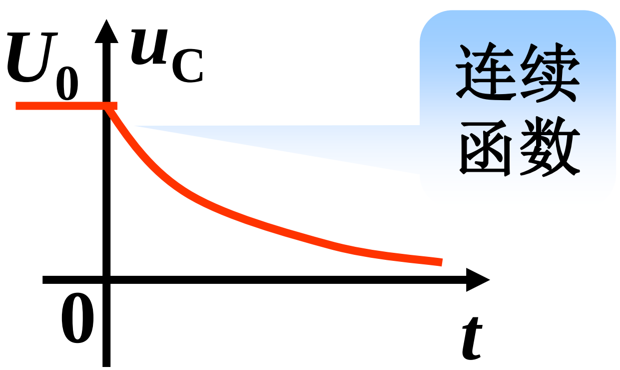
$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$

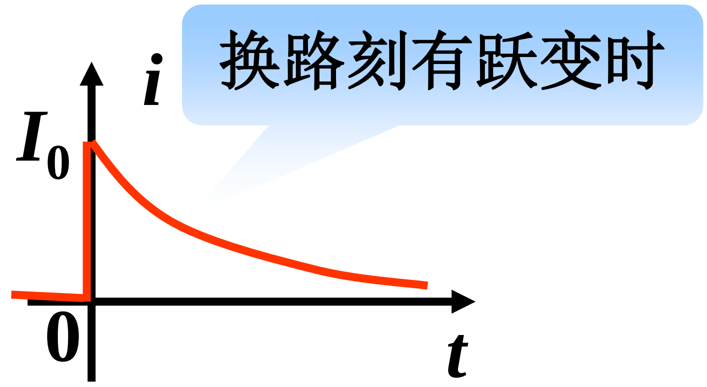
或 $$i = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -CU_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_R(t) = u_C(t) = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$

从以上各式可以得出：

（1）电压、电流是从0_+时刻的初始值随时间按同一指数规律衰减的函数；





（2）响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与*RC*有关；

令 $\tau = RC$，称τ为一阶电路的时间常数

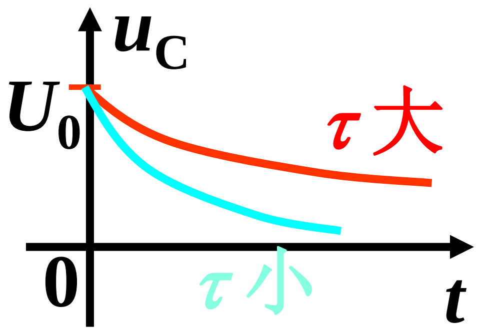
$$[\tau]=[RC]=[欧][法]=[欧]\left[\frac{库}{伏}\right]=[欧]\left[\frac{安秒}{伏}\right]=[秒]$$

$\tau = RC$ $$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

时间常数 τ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大 → 过渡过程时间长

τ小 → 过渡过程时间短



物理含义 → 电压初值一定时：

C 大（R一定） $W=Cu^2/2$ 储能大

放电时间长

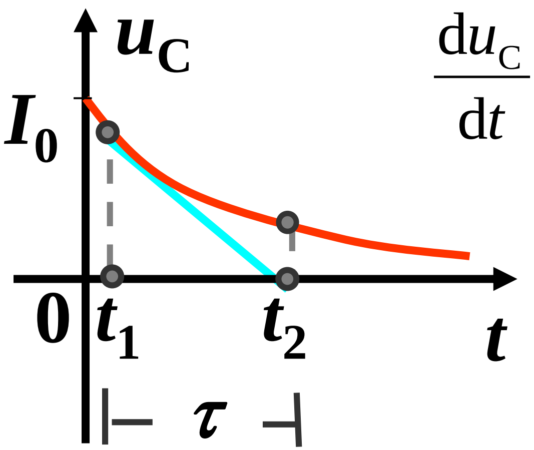
R 大（ C一定） $i=u/R$ 放电电流小

t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
	U_0	$0.368\ U_0$	$0.135\ U_0$	$0.05\ U_0$	$0.007\ U_0$

τ 电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。

工程上认为，经过 3τ—5τ，过渡过程结束。

t_1时刻曲线的斜率等于

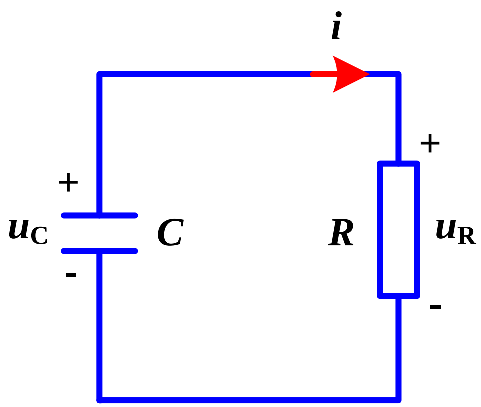


$$\frac{du_C}{dt}\bigg|_{t_1} = -\frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\bigg|_{t_1} = -\frac{1}{\tau} u_C(t_1) = \frac{u_C(t_1) - 0}{t_1 - t_2}$$

$$\tau = t_2 - t_1$$ → 次切距的长度

$$u_C(t_2) = 0.368 u_C(t_1)$$

（3）能量关系 → 电容不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕.



设$u_C(0_+)=U_0$

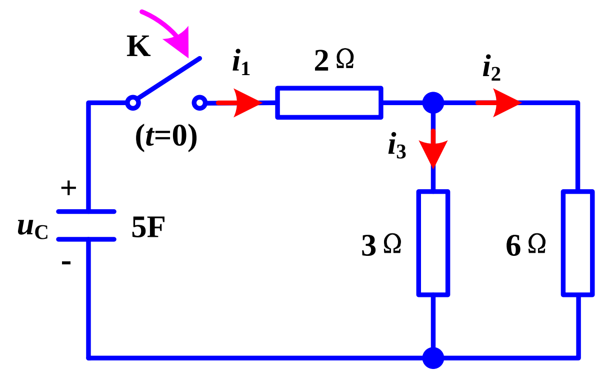
电容放出能量： → $\frac{1}{2}CU_0^2$

电阻吸收（消耗）能量： →

$$W_R=\int_0^\infty i^2R\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty\left(\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2R\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}\mathrm{d}t=\frac{U_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}CU_0^2$$

【例】已知图示电路中的电容原本充有24V电压，求K闭合后，电容电压和各支路电流随时间变化的规律。



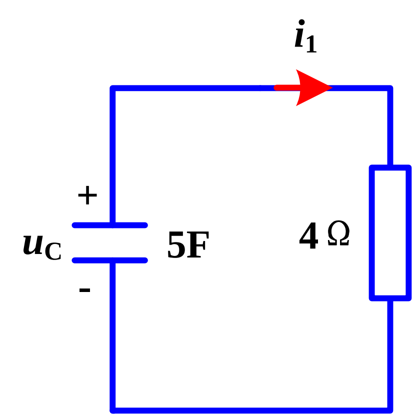
解　这是一个求一阶RC零输入响应问题，有：

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \ge 0$$

代入 $U_0 = 24\,\mathrm{V}, \tau = RC = 5 \times 4 = 20\,\mathrm{s}$

等效电路

$t > 0$

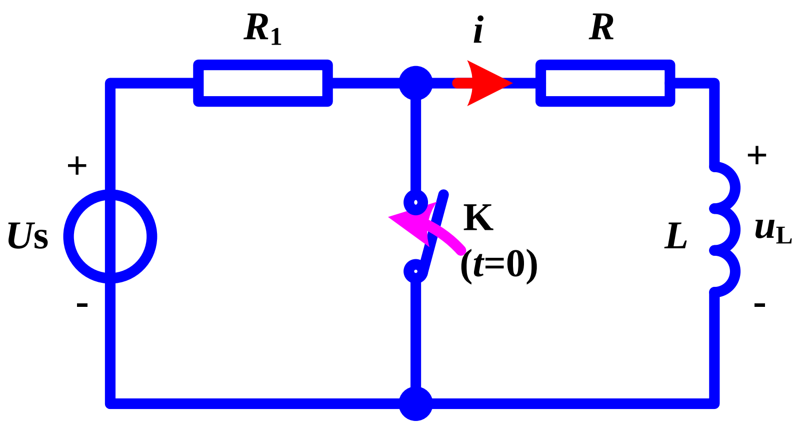


$$\Rightarrow \quad u_C = 24 e^{-\frac{t}{20}}\ \mathrm{V} \qquad t \ge 0$$

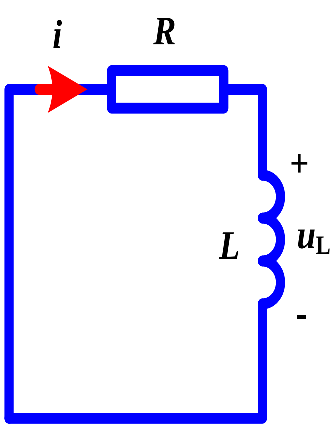
$$i_1 = u_C / 4 = 6 e^{-\frac{t}{20}}\ \mathrm{A}$$

分流得：$i_2 = \dfrac{1}{3} i_1 = 2 e^{-\frac{t}{20}}\mathrm{A} \qquad i_3 = \dfrac{2}{3} i_1 = 4 e^{-\frac{t}{20}}\mathrm{A}$

2. RL电路的零输入响应



$t>0$



$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{U_S}{R_1+R}=I_0$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=0 \quad t\geq 0$$

特征方程 $Lp+R=0$

特征根 $p=-\frac{R}{L}$

$$i(t)=A\mathrm{e}^{pt}$$

代入初始值 $i(0_+)=I_0$

$A=i(0_+)=I_0$

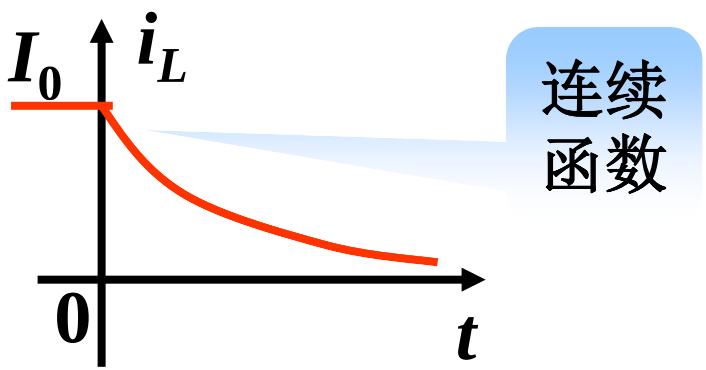
得 $i(t)=I_0\mathrm{e}^{pt}=I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \quad t\geq 0$

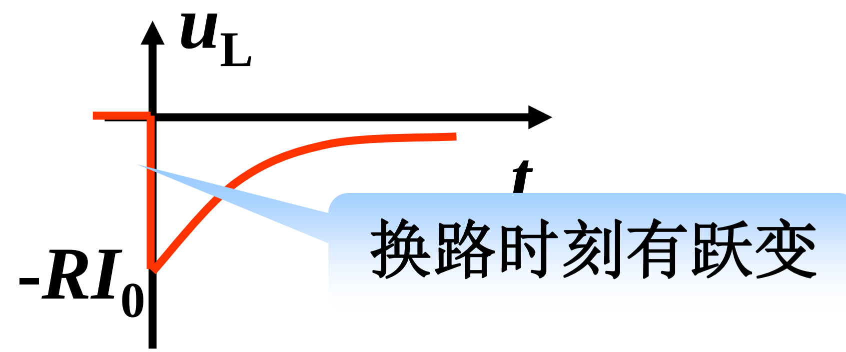
$$i_{\mathrm{L}}(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}} \qquad t \geq 0$$

$$u_{\mathrm{L}}(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -RI_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}}$$

从以上式子可以得出：

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；





（2）响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与*L*/R有关；

令 $\tau = L/R$ ， 称为一阶*RL*电路时间常数

$$[\tau]=[\frac{L}{R}]=[\frac{亨}{欧}]=[\frac{韦}{安\cdot欧}]=[\frac{伏\cdot秒}{安\cdot欧}]=[秒]$$

$$\boldsymbol{\tau = L/R} \qquad p=\frac{-1}{L/R}=\frac{-1}{\tau}$$

时间常数 τ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大 → 过渡过程时间长　　　τ小 → 过渡过程时间短

物理含义 → 电流初值$i(0)$一定：

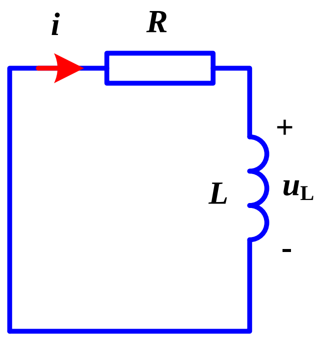
L大　$W=Li^2/2$ 起始能量大

R小　$P=Ri^2$ 放电过程消耗能量小

放电慢

τ大

（3）能量关系 → 电感不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。



设$i_L(0_+)=I_0$

电感放出能量： → $\dfrac{1}{2}LI_0^2$

电阻吸收（消耗）能量： →

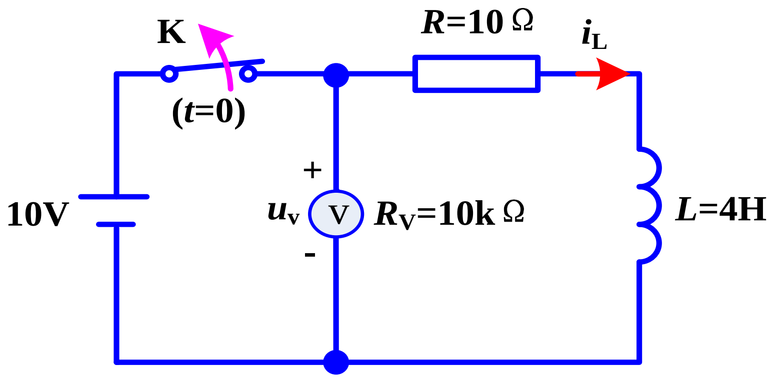
$$W_R=\int_0^\infty i^2R\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty (I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}})^2R\,\mathrm{d}t$$

$$=I_0^2R\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{2t}{L/R}}\,\mathrm{d}t$$

$$=I_0^2R(-\frac{L/R}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}})\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}LI_0^2$$

【例】 t=0时，打开开关K，求$u_V(t)$。电压表量程：50V 。



解

$$\tau = \frac{L}{R+R_V} = \frac{4}{10010} \approx 4\times10^{-4}\ \text{s}$$

$$i_L(0-) = 1\ \text{A}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0-) = 1\ \text{A}$$

$$i_L = e^{-t/\tau} = e^{-2500t} \quad t \geq 0$$

$$u_V(t) = -R_V i_L = -10000\ e^{-2500\,t} \qquad t \geq 0$$

$u_V(0_+)$=－ 10000V 造成电压表损坏

小 结

1. 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应， 都是由初始值衰减为零的指数衰减函数。

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

RC电路 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$

RL电路 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$

2. 一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为零输入线性。

3. 衰减快慢取决于时间常数τ

RC电路 $\tau = RC$ ， RL电路 $\tau = L/R$

R为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

4. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

5. τ 越大, 指数曲线衰减得越慢, 过渡过程经历的时间越长。在工程上, 经过3 τ ～ 5 τ 的时间, 可以认为过渡过程结束, 进入新的稳态。

多选题

设置

关于一阶电路的零输入响应，下列说法正确的有：

A 动态元件的元件参数数值越大，则过渡过程时间一定越长；

B 电路中电阻元件的电阻值越大，则过渡过程时间一定越长

C 动态元件的初值越大，则过渡过程时间一定越长；

D 响应最后都趋近于零。

提交

作业

- 7-5【RL电路，零输入】
- 7-7【RC电路，零输入，有受控源】