第六章 图

郑征
zhengz@buaa.edu.cn
软件与控制研究室

第六章 图

第2讲 图的连通性

通信网络

- 图论应用的一个重要方面就是通信网络。如电话网络、计算机网络、管理信息系统、医疗数据网络、银行数据网络、开关网络等。
- 这些网络的基本要求是网络中的各个用户能够**快速安全地传递信息**，不产生差错和故障，同时使建造和维护网络所需费用低。

第六章 第2讲 图的连通性

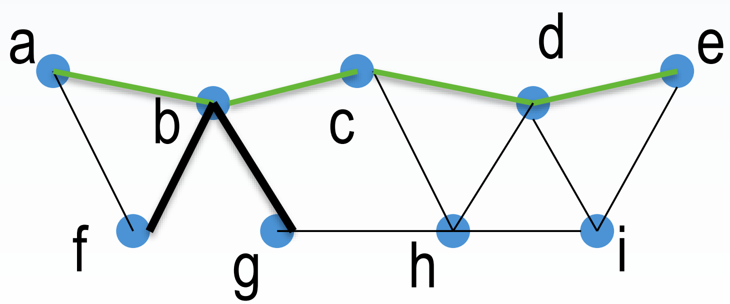
- 1.通路，回路
- 2.连通性，点(边)割集,点连通度κ,边连通度λ
- 3. Whitney定理, 简单连通图κ,λ,δ之间的关系
- 4. 2-连通, 2-边连通的充要条件
- 5. 割点, 桥, 块的充要条件

通路与回路

- 通路，回路
- 简单通路，简单回路
- 初级通路，初级回路
- 初级通路判定定理

通路和回路

- **通路，回路：**给定图G=<V, E>. 设G中顶点和边的交替序列为Γ=$v_0e_1v_1e_2\cdots e_lv_l$. 若Γ满足如下条件：$v_{i-1}$是$e_i$端点（G为有向图时，要求$v_{i-1}$是$e_i$起始点，$v_i$是$e_i$的终点），则称Γ为$v_0$到$v_l$的通路。$v_0$和$v_l$分别称为此通路的起点和终点。Γ中所含边的数目称为Γ的长度。当v_0=v_l时，称通路为回路。



通路和回路

- 简单通路：若Γ中所有边各异；
- 简单回路：类似；
- 初级通路（路径）：若Γ中所有顶点各异，所有边也各异；
- 初级回路（圈）：类似；
- 奇圈，偶圈：圈的长度为奇数或偶数。
- 复杂通路：Γ中有边重复出现；
- 复杂回路：类似

自然顶点也重复

通路和回路

- 回路是通路的特殊情况；
- 初级通路（回路）是简单通路（回路），但反之不真；

(顶点各异且边各异则边各异；反之不然)

- 通路的表示法：
  - 顶点和边的交替序列表示法;
  - 边序列;
  - 在简单图中，可以用顶点序列

通路和回路

- 定理3：在一个n阶图中，若从顶点u到v（u和v不等）存在通路，则从u到v存在长度小于等于n-1的初级通路。
- 证明：最多该通路中有n个顶点，如果n个顶点互不相同（初级通路），则最多为n-1条边。

通路和回路

- 定理4：在一个n阶图中，如果存在v到自身的简单回路，则从v到自身存在长度不超过n的初级回路。
- 证明：类似。边不相同则至少保证一个顶点不同。

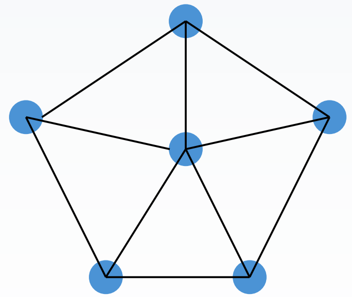
连通性

- 无向图的连通性：在无向图G中，若顶点v1和v2之间存在通路，则称v1与v2是连通的。规定v1与自身是连通的。

只有一个顶点的图

- 连通图：若无向图G是平凡图，或G中任意两顶点都是连通的，则称G是连通图。否则称G为非连通图。

平凡图



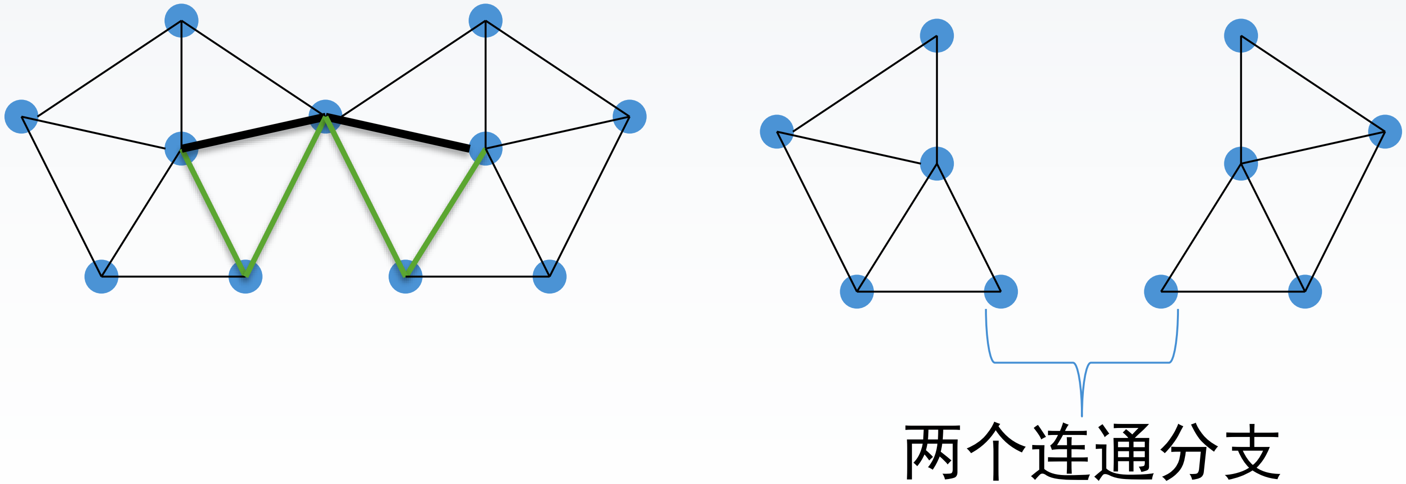
任意两顶点都是连通的

连通分支

- 连通关系：设G=<V, E>为一无向图，设 $R=\{<x, y>| x, y\in V$ 且x与y连通$\}$
  则R是自反的，对称的，并且是传递的，因而R是V上的等价关系。
- 连通分支：设R的不同等价类分别为V_1，…，V_k,称它们的导出子图$G[V_1]$，…，$G[V_k]$为G的连通分支，其连通分支的个数记为p(G)。
- 若p(G)=1，则G是连通图。

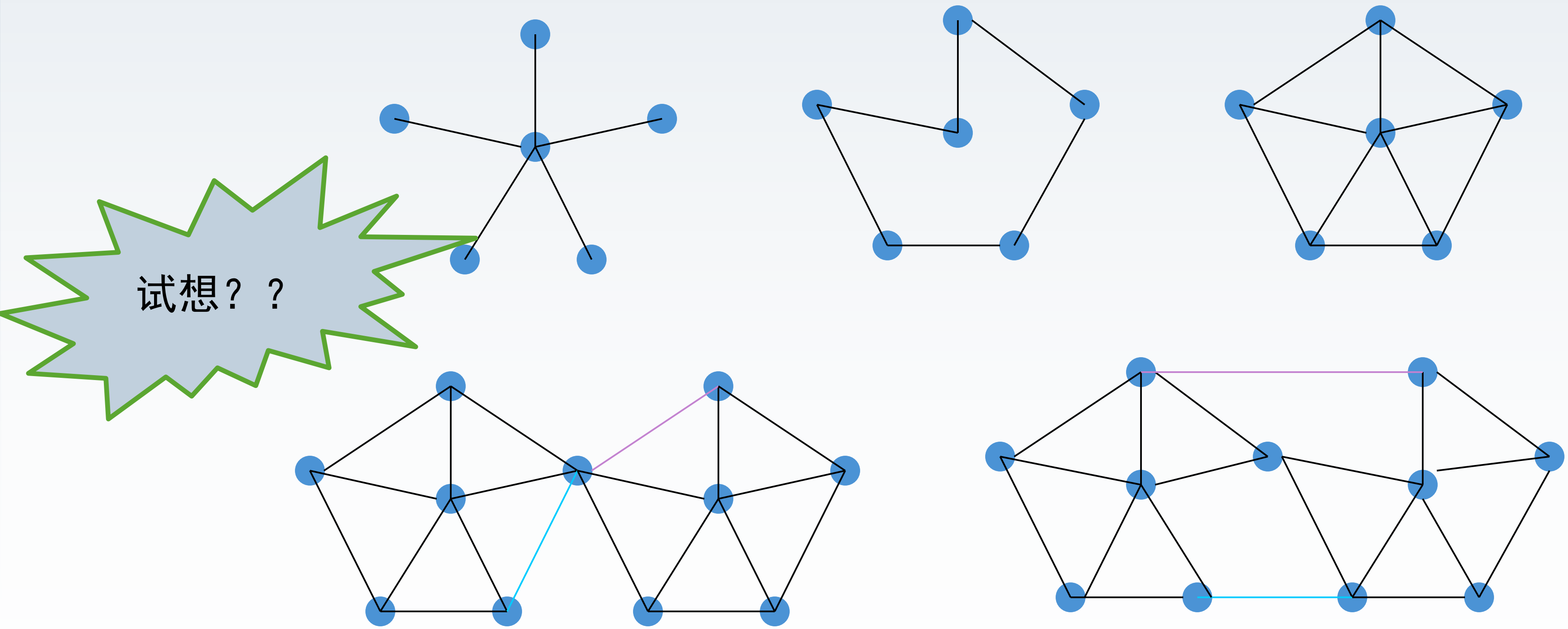
图中点之间的距离

- 短程线：若两点是连通的，则称两点之间的长度最短的通路为两点之间的短程线。
- 距离：短程线的长度称为两点之间的距离，记为d(v1,v2)。



如何定义连通度

- 问题: 如何定量比较无向图连通性的强与弱?



如何定义连通度

- 点连通度: 为了破坏连通性,至少需要删除多少个顶点?
- 边连通度: 为了破坏连通性,至少需要删除多少条边?

连通分支的个数

- 说明: "破坏连通性"指 $p(G-V')>p(G)$, 或 $p(G-E')>p(G)$,即"变得更加不连通"

割集(cutset)

- 点割集(vertex cut)
- 边割集(edge cut)
- 割点(cut vertex)
- 割边(cut edge)(桥)(bridge)

点割集(vertex cutset)

- 点割集: 无向图$G=\langle V,E\rangle$, $\varnothing\neq V'\subset V$, 满足

(1) $p(G-V')>p(G)$;

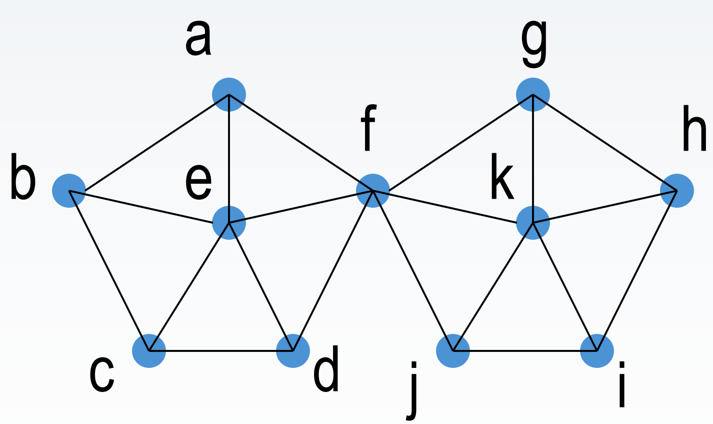
(2) 极小性: $\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$,

则称V'为点割集.

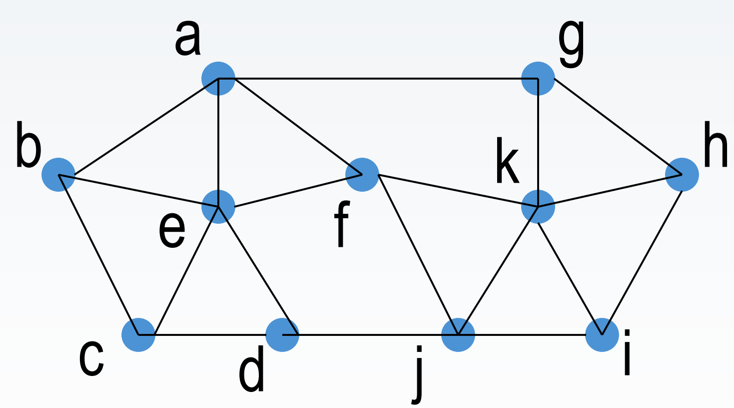
- 说明: “极小性”是为了保证点割集概念的非平凡性

点割集(举例)

- G_1: {f},{a,e,c},{g,k,j},~~{b,e,f,k,h}~~
- G_2: ~~{f}~~,{a,e,c},{g,k,j},{b,e,f,k,h}



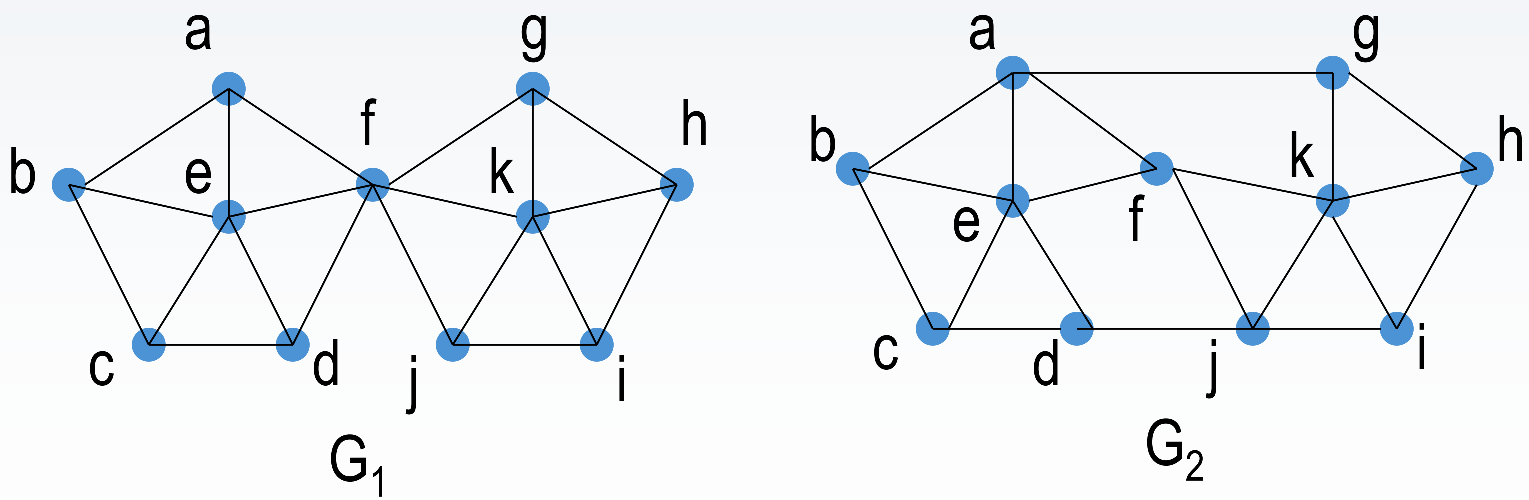
G_1



G_2

割点(cut-point / cut-vertex)

- 割点: v是割点 ⇔ {v}是割集
- 例: G_1中f是割点, G_2中无割点



边割集(edge cutset)

- 边割集: 无向图$G=<V,E>$, $\varnothing \neq E' \subset E$, 满足

  (1) $p(G-E')>p(G)$;

  (2) 极小性: $\forall E'' \subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$,

则称E'为边割集.

- 说明: “极小性”是为了保证边割集概念的非平凡性

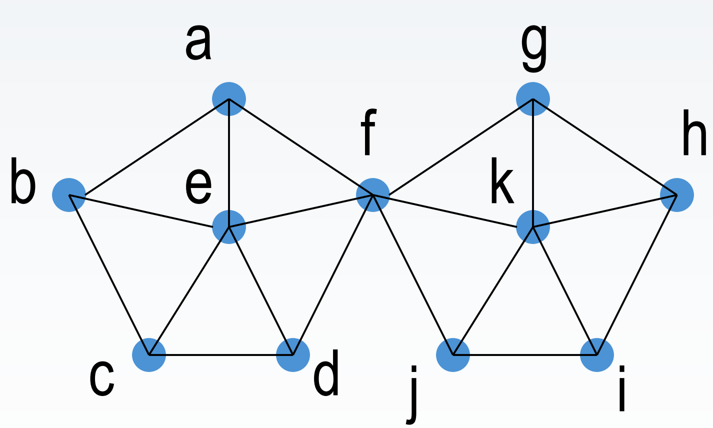
边割集(举例)

- G_1: {(a,f),(e,f),(d,f)}, {(f,g),(f,k),(j,k),(j,i)}

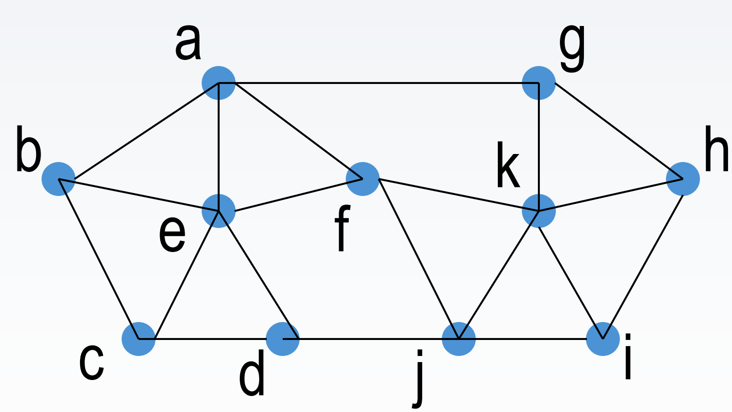
~~{(a,f),(e,f),(d,f),(f,g),(f,k),(f,j)}, {(c,d)}~~

- G_2: {(b,a),(b,e),(b,c)}

注意：极小性



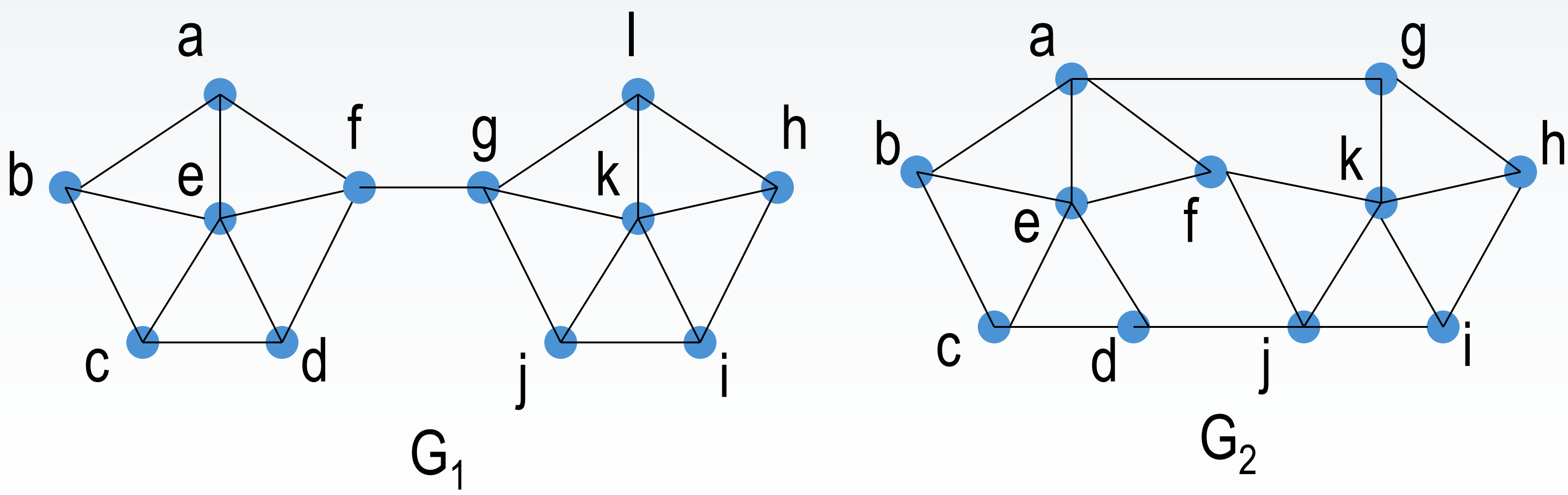
G_1



G_2

割边(cut-edge)(桥)

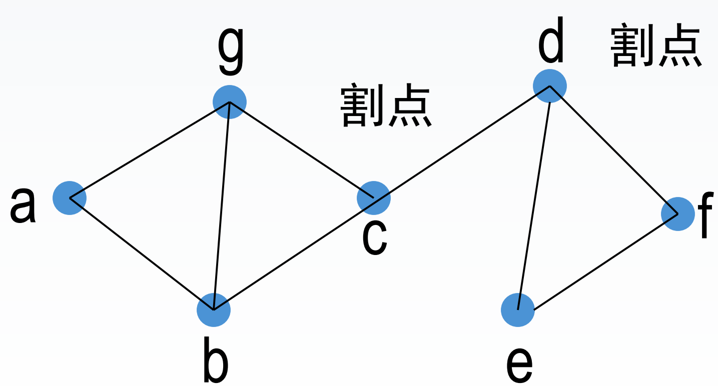
- 割边: (u,v)是割边(桥) ⇔ {(u,v)}是边割集
- 例: G_1中(f,g)是桥, G_2中无桥



扇形割集(fan cutset)

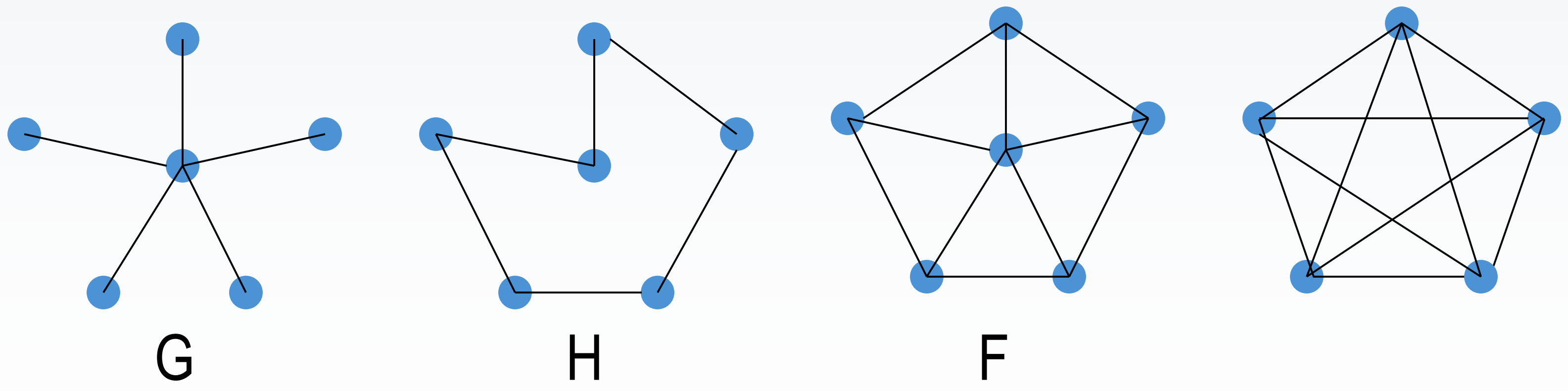
关联集: $I_G(v)$ = { e | e与v关联 }

- $I_G(v)$不一定是边割集(不一定极小)
- $I_G(v)$不是边割集 ⇔ v是割点
- 扇形割集: E'是边割集$\wedge$E'$\subseteq I_G(v)$
- 例: {(a,g),(a,b)},{(g,a),(g,b),(g,c)},{(c,d)}, {(d,e),(d,f)}, ~~{(a,b),(g,b),(g,c)}~~



点连通度(vertex-connectivity)

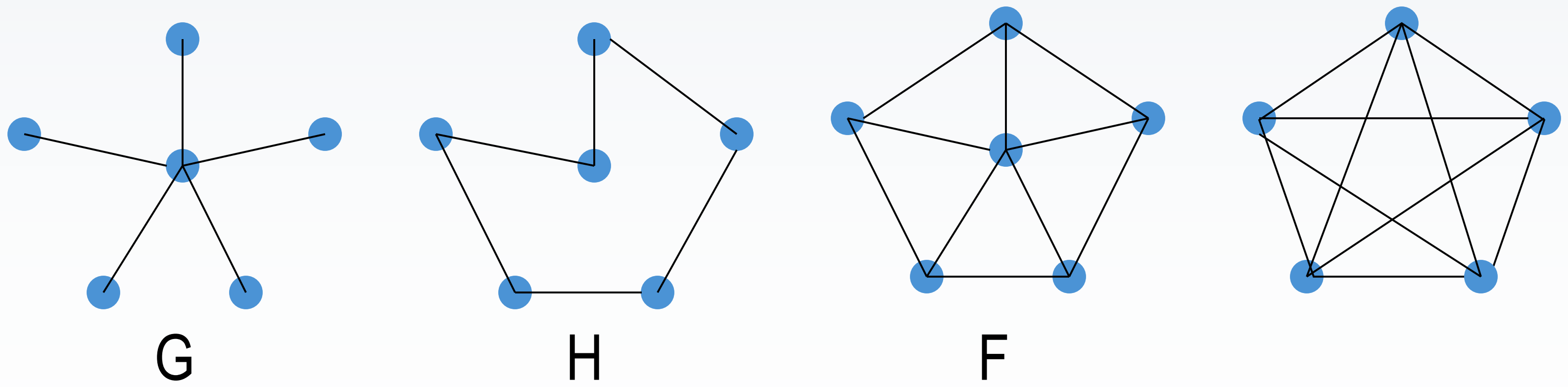
- 点连通度: G是无向连通非完全图,
  $\kappa(G) = \min\{\ |V'|\ |\ V'$是G的点割集 $\}$
- 规定: $\kappa(K_n) = n-1$, G非连通: $\kappa(G)=0$
- 例: $\kappa(G)=1$, $\kappa(H)=2$, $\kappa(F)=3$, $\kappa(K_5)=4$



边连通度(edge-connectivity)

- 边连通度: G是无向连通图,

  $\lambda(G) = \min\{\, |E'| \mid E'\text{是}G\text{的边割集} \,\}$
- 规定: G非连通: $\lambda(G)=0$
- 例: $\lambda(G)=1$, $\lambda(H)=2$, $\lambda(F)=3$, $\lambda(K_5)=4$



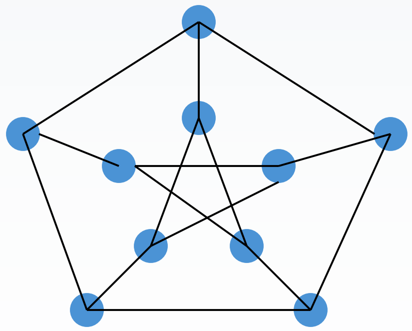
k-连通图, k-边连通图

点连通度

- k-连通图(k-connected): $\kappa(G)\geq k$

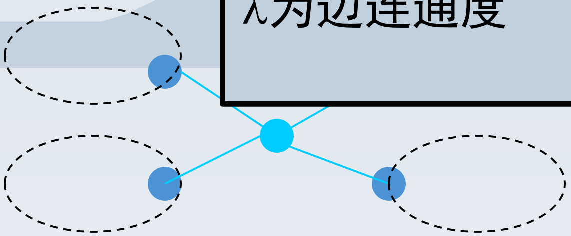
边连通度

- k-边连通图(k-edge-connected): $\lambda(G)\geq k$
- 例: 彼得森图 $\kappa=3$, $\lambda=3$; 它是1-连通图, 2-连通图,3-连通图, 但不是4-连通图; 它是1-边连通图, 2-边连通图,3-边连通图,但不是4-边连通图



Whitney定理

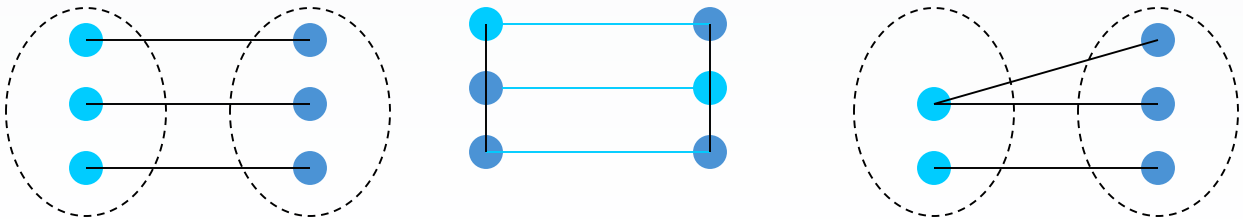
δ为图的最小度。
κ为点连通度
λ为边连通度



- 定理10: $\kappa \le \lambda \le \delta$.
- 证明: 不妨设G是3阶以上连通简单非完全图.

($\lambda \le \delta$) 设$d(v)=\delta$, 则$|I_G(v)|=\delta$, $I_G(v)$中一定有边割集E’, 所以$\lambda \le |E'| \le |I_G(v)|=\delta$.

($\kappa \le \lambda$) 设E’是边割集,$|E'|=\lambda$,从V(E’)中找出点割集V’,使得$|V'| \le \lambda$, 所以$\kappa \le |V'| \le \lambda$.



Whitney定理(续)

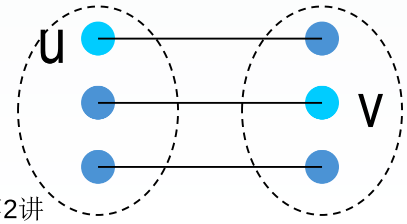
具体的构造策略

- 证明(续): ($\kappa\le\lambda$) 设G-E’的2个连通分支是G_1,G_2. 设$u\in V(G_1),v\in V(G_2)$,使得$(u,v)\notin E(G)$. 如下构造V’’:$\forall e\in E'$, 选择e的异于u,v的一个端点放入V’’. $|V''|\le|E'|$.

  $G-V''\subseteq G-E'=G_1\cup G_2$, u和v在G-V’’中不连通, 所以V’’中含有点割集V’.

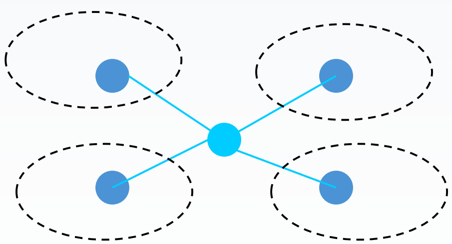
  所以 $\kappa\le|V'|\le|V''|\le|E'|=\lambda$.

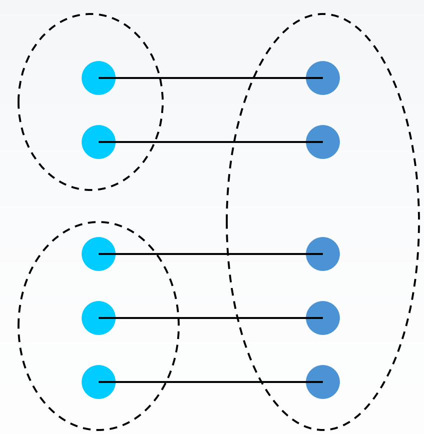
  #



引理1

- 引理1: 设E’是边割集,则p(G-E’)=p(G)+1.
- 证明: 如果p(G-E’)>p(G)+1, 则E’不是边割集, 因为不满足定义中的极小性. #
- 说明: 点割集无此性质。可能>。





引理2

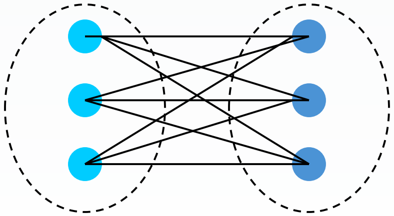
λ为边连通度

- 引理2:设E'是非完全图G的边割集, $\lambda(G)=|E'|$,G-E'的2个连通分支是G_1,G_2,则存在$u\in V(G_1),v\in V(G_2)$,使得$(u,v)\notin E(G)$
- 证明: (反证)否则$\lambda(G)=|E'|$ $=|V(G_1)|\times|V(G_2)|\geq|V(G_1)|+|V(G_2)|-1=n-1$, 与G非完全图相矛盾! #

说明: $a\geq1\wedge b\geq1\Rightarrow(a-1)(b-1)=ab-a-b+1\geq0$

$\Leftrightarrow ab\geq a+b-1$.

任意两点都连通



推论

- 推论: k-连通图一定是k-边连通图. #

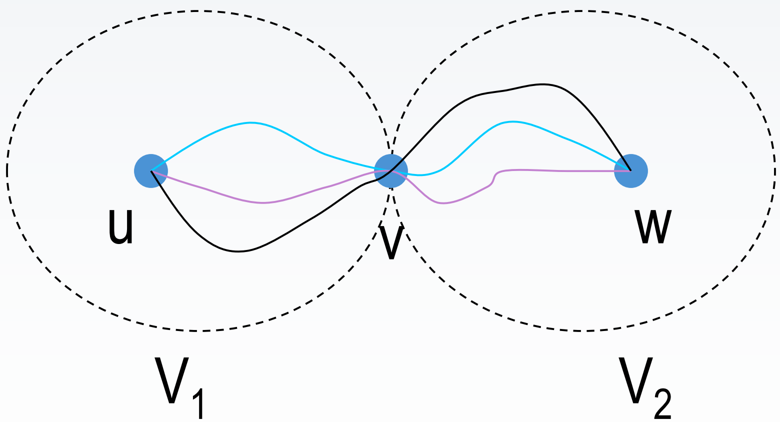
根据Whitney定理和k-连通图、k-边连通图的概念，可证

自学

- 有向图的连通性及其分类
  - 可达;
  - 短程线；距离
  - 连通图，强连通图，弱连通图，单向连通图
  - 连通性判别法

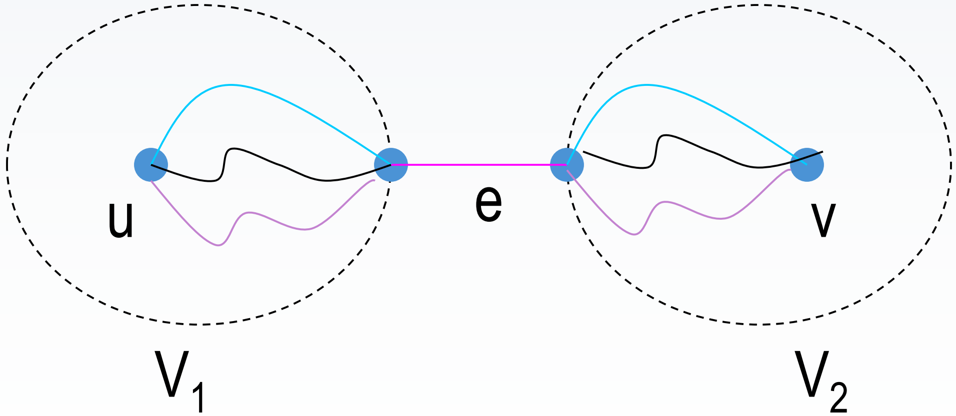
割点的充分必要条件

- 定理11: 无向连通图G中顶点v是割点 ⇔ 可以把V(G)-{v}划分成V_1与V_2,使得从V_1中任意顶点u到V_2中任意顶点w的路径都要经过v. #



桥的充分必要条件

- 定理18:无向连通图G中边e是桥 ⇔ G的任何圈都不经过e. #
- 定理19: 无向连通图G中边e是桥 ⇔ 可以把V(G)划分成V_1与V_2,使得从V_1中任意顶点u到V_2中任意顶点v的路径都要经过e. #



总结

- 点割集,边割集,割点,桥, 块
- 点连通度,边连通度,Whitney定理
- 割点, 桥的充要条件

Hassler Whitney(1907~1989)

- 美国数学家,曾获得Wolf奖
- 主要研究拓扑学. 20世纪30年代发表了十几篇图论论文,定义了“对偶图”概念,推动了四色定理的研究.
- 一生的最后20年致力于数学教育,提倡应当让年轻人用自己的直觉(intuition)来解决问题.

Whitney的看法

- 应当让年轻人用自己的直觉(intuition)来解决问题.
- 什么是直觉?------习惯成自然,熟能生巧
  - 骑自行车: “平衡感”
  - 游泳: “水感”
  - 学外语: “语感”
- 如何取得经验?------自己动手
  - 练习! 不能只听不做.

积累经验