工科数分习题课十二　定积分

石岩

shiyan200245@163.com

Dec.14.2012

本节课的内容和要求

1.理解定积分产生的背景, 概念和几何意义;

2.熟练掌握定积分的基本性质和积分中值定理;

3.熟练运用Newton-Leibniz公式, 分部积分法, 换元积分法以及其他综合方法求定积分;

4.理解变上限积分, 掌握微积分学基本定理;

5.了解可积性判断的条件.

基本概念和主要结论

一、定积分的定义

i)分割

设闭区间$[a,b]$内有$n-1$个点,依次为$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,它们把$[a,b]$分成$n$个小区间$\Delta_i=[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n$,长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.这些分点或这些闭子区间构成$[a,b]$的一个分割,记为

$$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\text{ or }\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}.$$

并记$\|T\|=\max_{1\leq i\leq n}\Delta x_i$,称为分割$T$的模.

ii)黎曼和

设f是定义在$[a,b]$上的一个函数,对于$[a,b]$的一个分割$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$,任取点$\xi_i\in\Delta_i,i=1,2,\cdots,n$,作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

称此和式为函数f在$[a,b]$上的一个积分和,也成黎曼和.

iii)黎曼积分

设f是定义在$[a,b]$上的一个函数,J是一个确定实数.

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\text{ 使得 }\forall\,T,\forall\,\{\xi_i\},\text{只要}\|T\|<\delta,\text{就有}\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon.$$

称f在$[a,b]$上可积,J为f的不定积分或黎曼积分,记

$$J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\left(:=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right)$$

定积分的思想:分割→近似求和→取极限.

二、定积分的性质

1.线性

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

2.积分区间可加性

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3.积分不等式性

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

特别有,

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.$$

4.若f可积, 则$|f|$可积,且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

注意逆命题不一定成立.

5.若f, g可积, 则$f \cdot g$可积. 注意一般情况下

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

6.积分中值定理

I. 若f在$[a,b]$上连续,则至少存在一点$\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

推论 (积分第一中值定理)　若f,g都在$[a,b]$上连续,且$g(x)$在$[a,b]$上不变号,则至少存在一点$\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

三、定积分的计算

Newton-Leibniz formula

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

成立条件: i)f存在原函数F; ii)f可积.

思考: f可积是否等价于f存在原函数?

分部积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

换元积分法

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta g(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, a \le \varphi(t) \le b.$$

四、变上限积分　设f在$[a,b]$上可积,定义

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x \in [a,b].$$

定理　f可积 $\Rightarrow$ F连续.

微积分学基本定理(原函数存在定理)　f连续 $\Rightarrow$ F可导, 且

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

求导公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x).$$

五、可积性理论 *

1.可积必要条件　f可积$\Rightarrow f$ 有界.　(f无界$\Rightarrow f$ 不可积.)

2.可积充要条件

i)f在$[a,b]$上可积$\Leftrightarrow\ \forall\,\varepsilon>0,\exists\,T,$ s.t. (上和 $-$ 下和) $<\varepsilon$.

ii)f在$[a,b]$上可积$\Leftrightarrow$上积分$=$下积分 †.

†) 关于上和、下和, 上积分、下积分的定义参见教材.

3.可积充分条件

i)连续有界函数可积.

ii)有有限个间断点的有界函数可积.

iii)单调有界函数可积.

六、其他常用结论

I.f在$[a,b]$上连续,且$f\geqslant 0$.若

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0,$$

则$f\equiv 0$.

II.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^a (f(x)+f(-x))\mathrm{d}x.\\ f\text{奇函数:}\quad & \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0;\\ f\text{偶函数:}\quad & \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

习题

1.利用定积分求极限

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right);$$

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right);$$

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x;$$

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x.$$

$$(5)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\ (p>0).$$

2.设f在$[0,+\infty)$上可积, 且$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=l.$$

3.设f在$[a,b]$上二阶可导, 且$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0, M=\sum_{x\in[a,b]}|f''(x)|$. 证明

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{M(b-a)^3}{24}.$$

4.设$f(x)$满足积分方程

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

求$f(x)$.

5.设f为$(-\infty,+\infty)$上以p为周期的连续周期函数.证明

$$(1)\int_a^{a+p} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\, a\in\mathbb{R};$$

$$(2)\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t.$$