北京航空航天大学

2011－2012 学年 第一学期期末考试

《 工科数学分析（Ⅰ） 》

(A 卷)

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题　号	一	二	三	四	五	六	总分
成　绩							
阅卷人							
校对人							

2012 年 01 月 12 日

一、 计算题（每题 6 分，共 60 分）

1、 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$$
$$=\int \frac{(x+1)e^x-e^x}{(x+1)^2}dx=\int \frac{e^x}{x+1}-\frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$
$$=\int \frac{e^x}{x+1}dx-\int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx=\int \frac{e^x}{x+1}dx+\int e^x d\frac{1}{1+x}$$
$$=\int \frac{e^x}{x+1}dx+\frac{e^x}{1+x}-\int \frac{1}{1+x}de^x$$
$$=\frac{e^x}{1+x}+c$$

2 、 $I=\int \frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$

假设 $I_1=\int \frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$， $I_2=\int \frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$ 则

aI_1+bI_2 得到

$$aI_1+bI_2=\int \mathrm{d}x=x+C_1 \text{---------（1）}$$

bI_1-aI_2 得到

$$bI_1-aI_2=\int \frac{b\cos x-a\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=\int \frac{1}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}(a\cos x+b\sin x) \text{------（2）}$$
$$=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2$$

由（1）与（2）解得：

$$I_1=\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+\frac{a}{a^2+b^2}x+C.$$

$$I_2=\frac{a}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+\frac{b}{a^2+b^2}x+C.$$ 分

3、 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解 ：令 $t=\sqrt{x}$, 即 $x=t^2$ $(t\ge 0)$, 则 $dx=2t\ dt$, 故

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t=\int (2-\frac{2}{1+t})\mathrm{d}t$$
$$=2t-2\ln(1+t)+C$$
$$=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

4、 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$

解 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$

5、 $\int_{-1}^{1}(\sin^5 x+\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x$

解
$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

6、 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{2\sin x}^{0}e^{t^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x\tan x}$

解 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{2\sin x}^{0}e^{t^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-e^{4\sin^2 x}\ln(1+2\sin x)2\cos x}{2x}=$ -2.

7、 求摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t);\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$, $a>0$ 的弧长.

解 $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt=\int_0^{2\pi}2a\,|\sin\frac{t}{2}|\,dt=8a.$

8、 判断无穷积分 $\int_1^{+\infty}\{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x}\}dx$ 敛散性.

解 由于$\left|\int_1^A \sin x dx\right| = |\cos A-\cos 1| \le 2,$ 且 $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$,递减趋向于0,----

由 Dirichlet 判别法得, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛. --------

而 $$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\{\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\}dx$$ 发散, ----

所以 $\int_1^{+\infty}\{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{x}\}dx$ 是发散的. ----

9、讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$的敛散性（利用部分和）.

解 $S_n=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})$

$+\cdots+(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$----

$=[(\cancel{\sqrt{3}-\sqrt{2}})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})]+[(\cancel{\sqrt{4}-\sqrt{3}})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$

$+[(\cancel{\sqrt{5}-\sqrt{4}})]-(\cancel{\sqrt{4}-\sqrt{3}})+\cdots+[(\cancel{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}})-(\cancel{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}})]$

$+[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\cancel{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}})]$

$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})$------------------------------------

$=\frac{1}{\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}}-(\sqrt{2}-1)\to-(\sqrt{2}-1) \quad (n\to\infty)$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$收敛，且和为$-(\sqrt{2}-1)$。----

10、讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{x}{n})^n$ $(x>0$ 且 $x\ne e)$的敛散性.

解 因为$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{x}{e}$--------------------

当$0<x<e$时， $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$--------------------------

由 $D'Alembert$ 比值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{x}{n})^n$ 收敛。---------------------------------------

当 $e < x$ 时，$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$，由 $D'Alembert$ 比值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} n!(\frac{x}{n})^n$ 发散。---

二 、（本题 10 分）

设 $f(x) + x\sin x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)\mathrm{d}x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

$$设\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = A, 则\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)\mathrm{d}x \underline{\underline{t=2x}} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}A;$$

$$f(x) + x\sin x = \frac{1}{2}A, 即\ f(x) = -x\sin x + \frac{1}{2}A;$$

$$\therefore A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x\sin x + \frac{1}{2A})\mathrm{d}x = -1 + \frac{1}{4}A;$$

$$\Rightarrow A = \frac{4}{\pi - 4}$$

$$故\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi - 4}.$$ --

三、（本题 10 分）

在曲线 $y = x^2 (x \ge 0)$ 上一点 M 处作切线，使得切线、曲线及 x 轴

围成平面图形 D 的面积为 $\frac{2}{3}$. 求

(1) 切点 M 的坐标 ；
(2) 过切点 M 的切线方程 ；
(3) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所围成的旋 转体的体积 .

解

(1)设切点 $M(x_0, x_0^2)$, 切线方程为 $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$. ----------------------

$$S = \frac{2}{3} = \int_0^{x_0} x^2 dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{x_0}{2}\cdot x_0^2 = \frac{x_0^2}{12} \Rightarrow x_0 = 2, \therefore M(2,4).$$

(2) 过切点 M 的切线方程：$x - y - 4 = 0$. 分

$$(3)\ V_1 = \pi\int_0^{x_0} y^2 dx = \pi\int_0^2 x^4 dx = \frac{32\pi}{5},$$ ---------------------

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot 4^2\pi = \frac{16\pi}{3}, \quad \therefore V = \frac{32\pi}{5} - \frac{16\pi}{3} = \frac{16\pi}{15}$$

四、（本题 10 分）

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}\{5-\arctan n\}$ 是绝对收敛还是条件收敛？

解 （1） 因为 $\sin^2 n=\dfrac{1-\cos 2n}{2}$， 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n},$$ ------------

由莱布尼兹定理可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{2n}$ 收敛，------------------

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\cos 2n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+n\pi)}{n}$ 收敛，---------------

所以 由 Dirichlet 判别法知， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}$ 收敛，---

又 $\{5-\arctan n\}$ 单调有界，---------------------------------

于是由 Abel 判别法知，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}\{5-\arctan n\}$$ 收敛。--------------

（2） 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n}|5-\arctan n|$ 发散。

这是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n},$$ ----------------

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}\{5-\arctan n\}$ 发散， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{2n}\{5-\arctan n\}$ 收敛。-

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}\{5-\arctan n\}$ 是条件收敛。-------------

五、 （本题 10 分）

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且单调增加，

证明：$\int_0^1 2xf(x)dx \ge \int_0^1 f(x)dx$.

证明　设 $F(x)=\int_0^x 2tf(t)dt - x\int_0^x f(t)dt$, ---------

则 $F'(x)=2xf(x)-xf(x)-\int_0^x f(t)dt$ ---------------

$=xf(x)-xf(\xi),\quad 0\le\xi\le x$

由题设知$F'(x)\ge 0$,所以 $F(1)\ge F(0)=0$,即

$\int_0^1 2xf(x)dx \ge \int_0^1 f(x)dx$. ------------

六 附加（10 分）

设$f(x)$定义在$[-1,1]$上，$f''(0)$存在，且令

$$a_n=f(\frac{1}{n})\ (n=1,2,\ldots),$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是：$f(0)=f'(0)=0$.

证明：　必要性 假定$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则$\lim_{n\to\infty}a_n=0$. --------

由于 $f(x)$在$x=0$处的连续性，可知

$$0=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=f(0)$$.--------------------------

下面证明 $f'(0)=0$. 采用反证法。假定 $f'(0)=a\ne 0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=|f'(0)|=a\ne 0,$$

这说明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。矛盾!--------------------------------------

充分性　由带 Peano 余项的 Taylor 公式

$$a_n = f(\frac{1}{n}) = f(0)+f^{'}(0)\frac{1}{n} + \frac{f^{''}(0)}{2!}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$= \frac{f^{''}(0)}{2!}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

可知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛。