# 第四章　级　数

## 一、选择题：

1．设$a_n=\dfrac{(-1)^n+ni}{n+4}\ (n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（　　）

（A）等于$0$　　（B）等于$1$　　（C）等于$i$　　（D）不存在

2．下列级数中，条件收敛的级数为（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+3i}{2}\right)^n$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+4i)^n}{n!}$

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+i}{\sqrt{n+1}}$

3．下列级数中，绝对收敛的级数为（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{i}{n})$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{i}{2^n}]$

（C）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n i^n}{2^n}$

4．若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$在$z=1+2i$处收敛，那么该级数在$z=2$处的敛散性为（　　）

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）不能确定

5．设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n,\sum\limits_{n=0}^{\infty}nc_n z^{n-1}$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{n+1}z^{n+1}$的收敛半径分别为$R_1,R_2,R_3$，则$R_1,R_2,R_3$之间的关系是（　　）

（A）$R_1<R_2<R_3$　　（B）$R_1>R_2>R_3$

（C）$R_1=R_2<R_3$　　（D）$R_1=R_2=R_3$

6．设$0<|q|<1$，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^{n^2}z^n$的收敛半径$R=$（　　）

（A） $|q|$　　（B） $\dfrac{1}{|q|}$　　（C） $0$　　（D） $+\infty$

7．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}(\dfrac{z}{2})^n$ 的收敛半径 $R=$（　　）

（A）　$1$　　（B） $2$　　（C） $\sqrt{2}$　　（D） $+\infty$

8．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$ 在 $|z|<1$ 内的和函数为

（A） $\ln(1+z)$　　（B） $\ln(1-z)$

（D） $\ln\dfrac{1}{1+z}$　　(D) $\ln\dfrac{1}{1-z}$

9．设函数 $\dfrac{e^z}{\cos z}$ 的泰勒展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$，那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径 $R=$（　　）

（A） $+\infty$　　（B） $1$　　（C） $\dfrac{\pi}{2}$　　（D） $\pi$

10．级数 $\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots$ 的收敛域是（　　）

（A） $|z|<1$　　（B） $0<|z|<1$　　（C） $1<|z|<+\infty$　　（D）不存在的

11．函数 $\dfrac{1}{z^2}$ 在 $z=-1$ 处的泰勒展开式为（　　）

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$　　（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$

（C） $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$　　（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$

12．函数$\sin z$，在$z=\dfrac{\pi}{2}$处的泰勒展开式为(　　)

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\dfrac{\pi}{2})^{2n+1}\quad(\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

(B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\dfrac{\pi}{2})^{2n}\quad(\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\dfrac{\pi}{2})^{2n+1}\quad(\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

(D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\dfrac{\pi}{2})^{2n}\quad(\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

13．设$f(z)$在圆环域$H:R_1<|z-z_0|<R_2$内的洛朗展开式为$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，$c$为$H$内绕$z_0$的任一条正向简单闭曲线，那么$\oint_c\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=$(　　)

(A) $2\pi i c_{-1}$　　(B) $2\pi i c_1$　　(C) $2\pi i c_2$　　(D) $2\pi i f'(z_0)$

14．若$c_n=\begin{cases}3^n+(-1)^n, & n=0,1,2,\cdots\\ 4^n, & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$，则双边幂级数$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n$的收敛域为(　　)

(A) $\dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{3}$　　(B) $3<|z|<4$

(C) $\dfrac{1}{4}<|z|<+\infty$　　(D) $\dfrac{1}{3}<|z|<+\infty$

15．设函数$f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)(z+4)}$在以原点为中心的圆环内的洛朗展开式有$m$个，那么$m=$(　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

**二、填空题**

1．若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+i)^n$ 在 $z=i$ 处发散，那么该级数在 $z=2$ 处的收敛性为_______________．________

2．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} [\mathrm{Re}(c_n)] z^n$ 的收敛半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$，那么 $R_1$ 与 $R_2$ 之间的关系是________________________．

3．幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2i)^n z^{2n+1}$ 的收敛半径 $R=$ _______________________

4．设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，$z_0$ 为内的一点，$d$ 为 $z_0$ 到 $D$ 的边界上各点的最短距离，那么当 $|z-z_0|<d$ 时，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 成立，其中 $c_n=$ _____________________．

5．函数 $\arctan z$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为____________________．

6．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 $R$，那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n-1) c_n z^n$ 的收敛半径为______________________．

7．双边幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-\frac{z}{2})^n$ 的收敛域为_____________________．

8．函数 $e^z + e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内洛朗展开式为_________________________．

9．设函数 $\cot z$ 在原点的去心邻域 $0<|z|<R$ 内的洛朗展开式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$，那么该洛朗级数收敛域的外半径 $R=$ ____________________．

10．函数 $\frac{1}{z(z-i)}$ 在 $1<|z-i|<+\infty$ 内的洛朗展开式为______________________．

三、若函数 $\dfrac{1}{1-z-z^2}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则称 $\{a_n\}$ 为菲波那契(Fibonacci)数列，试确定 $a_n$ 满足的递推关系式，并明确给出 $a_n$ 的表达式.

四、试证明

1. $\left|e^z - 1\right| \le e^{|z|} - 1 \le |z| e^{|z|} \quad (|z| < +\infty)$;

2. $(3-e)|z| \le \left|e^z - 1\right| \le (e-1)|z| \quad (|z| < 1)$;

五、设函数 f(z)在圆域 $|z| < R$ 内解析，$S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ 试证

1. $S_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r} f(\xi) \dfrac{\xi^{n+1} - z^{n+1}}{\xi - z} \dfrac{d\xi}{\xi^{n+1}} \quad (|z| < r < R)$.

2. $f(z) - S_n(z) = \dfrac{z^{n+1}}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r} \dfrac{f(\xi)}{\xi^{n+1}(\xi - z)} d\xi \quad (|z| < r < R)$。

六、设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ 的和函数，并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ 之值.

七、设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\ (|z|<R_1),\ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\ (|z|<R_2)$，则对任意的 $r(0<r<R_1)$，在 $|z|<rR_2$ 内 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n z^n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r}f(\xi)g(\frac{z}{\xi})\frac{d\xi}{\xi}$。

八、设在 $|z|<R$ 内解析的函数 $f(z)$ 有泰勒展开式 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$

试证当 $0\le r<R$ 时 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}$.

九、将函数 $\frac{\ln(2-z)}{z(z-1)}$ 在 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数.

十、试证在 $0<|z|<+\infty$ 内下列展开式成立：

$$e^{z+\frac{1}{z}}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z^n+\frac{1}{z^n})\ \text{其中}\ c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2\cos\theta}\cos n\theta d\theta\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

一、1.（C）　2.（C）　3.（D）　4.（A）　5.（D）
6.（D）　7.（B）　8.（A）　9.（C）　10.（B）
11.（D）　12.（B）　13.（B）　14.（A）　15.（C）

二、1. 发散　　2. $R_2 \geq R_1$　　3. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\ (n=0,1,2,\cdots)$或（$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|z-z_0|=r}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ (n=0,1,2,\cdots\ \ 0<r<d)$）

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}\ (|z|<1)$　　6. $\dfrac{R}{2}$　　7. $1<|z-1|<2$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$　　9. $\pi$　　10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{(z-i)^{n+2}}$

三、$a_0=a_1=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\,(n\geq 2)$，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}(n=0,1,2,\cdots).$$

六、$f(z)=\dfrac{z(1+z)}{(1-z)^3}$，6.

九、$\dfrac{\ln(2-z)}{z(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z}\cdot\ln(2-z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{n-k+1}\right)(z-1)^n.$