一． 1. $dy=\dfrac{1}{\cos y-2}dx$　 2. $y=3+21(x-1)$. 　3. $\dfrac{x}{x+1}$　 4. $\alpha<2$. 　5. $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二． ACDAD

三． **1. 解** $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$ ……………(3 分)

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\ln x+1+1}=\dfrac{1}{2}$ ……………(3 分)

或者

$$\lim_{x\to1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\underline{\underline{t=x-1}}\lim_{x\to1}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}=\lim_{x\to1}\frac{t-[t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)]}{t^2}=\frac{1}{2}.$$

2. 解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{(n+k)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(1+\dfrac{k}{n})^2}=\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x)^2}$ ……………(4 分)

$=\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{1+x}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}$ ……………(2 分)

四． 1. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

解 令 $x=\sin t$，则

$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 t\mathrm{d}\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\mathrm{d}t$ ……………(4 分)

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=[\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sin 2t}{4}]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi-2}{8}$ ……………(2 分)

2. 解 $\int\dfrac{xe^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x\,d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}=-\dfrac{x}{1+e^x}+\int\dfrac{dx}{1+e^x}$ ……………(3 分)

$=-\dfrac{x}{1+e^x}+\int\dfrac{(1+e^x-e^x)dx}{1+e^x}$ ……………(2 分)

$=-\dfrac{x}{1+e^x}+x-\ln(1+e^x)+C=\dfrac{xe^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)+C$ ……………(1 分)

五. 解 因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过原点 $(0,0)$，所以 $c=0$. ………… ..(1 分)

而 $A=\int_0^1 (ax^2+bx)\,dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{2}{3}$，于是 $a=2-\frac{3b}{2}$. …………..(3 分)

$V=\pi\int_0^1 (ax^2+bx)^2\,dx=\pi[\frac{a^2}{5}x^5+\frac{ab}{2}x^4+\frac{b^2}{3}x^3]_0^1=\pi[\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}]$ ……..(4 分)

将 $a=2-\frac{3b}{2}$ 代入可得 $V=\pi(\frac{b^2}{30}-\frac{b}{5}+\frac{4}{5})$.

当 $b=3$ 时, V 最小. 于是 $a=-\frac{5}{2}, b=3, c=0, V_{\min}=\frac{\pi}{2}$. …………..(2 分)

六. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; **解**：由 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛. …………（4 分）

2. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p\ln n}\ (p>0)$.

解：当 $p>1$ 时, $|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p\ln n}|<\frac{1}{n^p}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p\ln n}$ 绝对收敛.（3 分）

当 $0<p\le 1$ 时, $|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p\ln n}|=\frac{1}{n^p\ln n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n}$ 发散, 但 $u_n=\frac{1}{n^p\ln n}$ 单调减且 $u_n\to 0$,

所以 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p\ln n}$ 条件收敛. ………..（3 分）

七.

单增区间	$(-1,1)$
单减区间	$(-\infty,-1),(1,+\infty)$
凹区间	$(-2,1),(1,+\infty)$
凸区间	$(-\infty,-2)$
极值	$-\dfrac{1}{4}$
拐点	$(-2,-\dfrac{2}{9})$
渐近线	$x=1, y=0$

八. 证明 (1). 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 根据拉格朗日中值定理知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$，

即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$. …………(3 分)

(2). 由(1)知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$ =0，即 $f(\xi)=0$.

于是 $f(x)$ 在区间 $[a,\xi]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\eta\in(a,\xi)\subset(a,b)$，使得 $f'(\eta)=0$ ……..…(3 分)