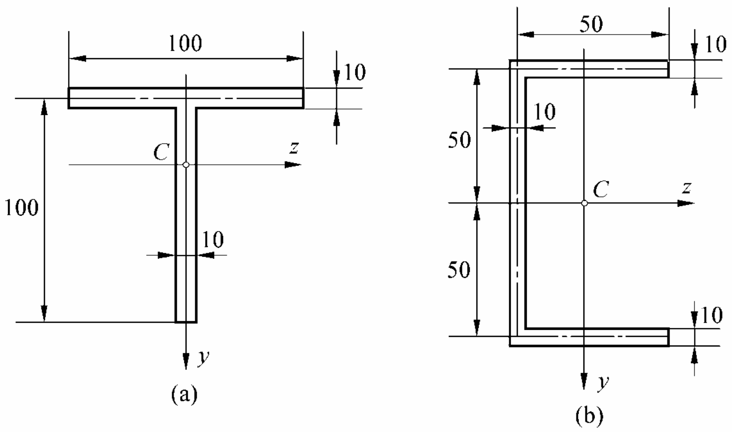
第十一章 非对称弯曲与特殊梁

(也可通过左侧题号书签直接查找题目与解)

11-4 二薄壁梁，其横面分别如图 a 与图 b 所示，剪力 $F_{Sy}=5\ \text{kN}$。试画弯曲切应力分布图，并计算最大弯曲切应力。



题 11-4 图

（a） 解：设形心 C 示如图 11-4a（1），则

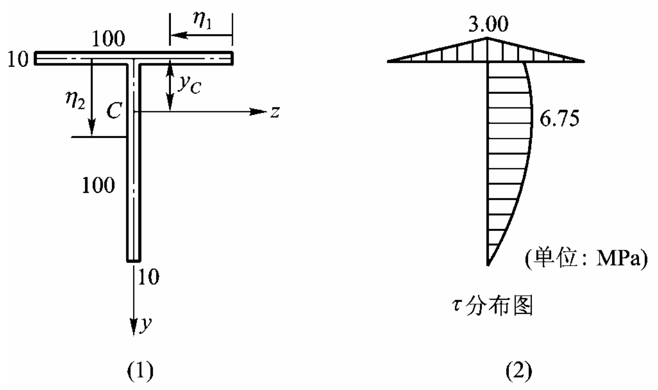


图 11-4a

$$y_C = \frac{0.100\times0.010\times0.050}{0.100\times0.010\times2}\mathrm{m} = 0.025\mathrm{m}$$

$$I_z = (\frac{0.010\times0.100^3}{12} + 0.010\times0.100\times0.025^2 + 0.010\times0.100\times0.025^2)\mathrm{m}^4 = 2.08\times10^{-6}\mathrm{m}^4$$

$$S_z(\eta_1) = (0.010\eta_1)\times0.025 = 2.5\times10^{-4}\eta_1$$

$$S_z(\eta_2) = 0.010\times0.100\times0.025 + (0.010\eta_2)(0.025 - \frac{1}{2}\eta_2)$$

$$= 2.5\times10^{-5} + 2.5\times10^{-4}\eta_2 - 5\times10^{-3}\eta_2^2$$

$$\tau_{1,\max} = \frac{F_{\mathrm{S}y}S_{z,\max}(\eta_1)}{I_z\delta_1} = \frac{5\times10^3\times1.25\times10^{-5}\,\mathrm{N}}{2.08\times10^{-6}\times0.010\mathrm{m}^2} = 3.00\times10^6\,\mathrm{Pa} = 3.00\mathrm{MPa}$$

$$\tau_{2,\max} = \frac{F_{\mathrm{S}y}S_{z,\max}(\eta_2)}{I_z\delta_2} = \frac{5\times10^3\times2.81\times10^{-5}\,\mathrm{N}}{2.08\times10^{-6}\times0.010\mathrm{m}^2} = 6.75\times10^6\,\mathrm{Pa} = 6.75\,\mathrm{MPa}$$

弯曲切应力分布图示如图 11-4a（2），

$$\tau_{\max} = 6.75\mathrm{MPa}$$

（b） 解：坐标示如图 11-4b（1），我们有

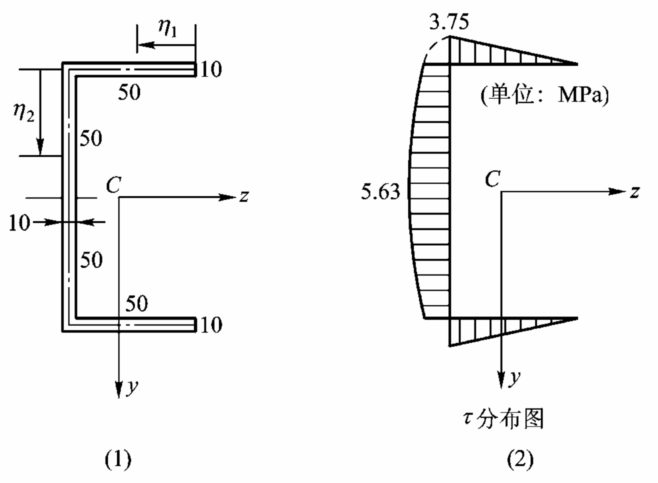


图 11-4b

$$I_z = (\frac{0.010 \times 0.100^3}{12} + 2 \times 0.050 \times 0.010 \times 0.050^2) \text{m}^4 = 3.333 \times 10^{-6} \text{m}^4$$

$$S_z(\eta_1) = 0.010\eta_1 \times 0.050 = 5 \times 10^{-4} \eta_1$$

$$S_{z,\max}(\eta_1) = 2.5 \times 10^{-5} \text{m}^3$$

$$S_z(\eta_2) = 2.5 \times 10^{-5} + (0.010\eta_2)(0.050 - \frac{\eta_2}{2})$$

$$S_{z,\max}(\eta_2) = 3.75 \times 10^{-5} \text{m}^3$$

$$\tau_1 = \frac{F_{Sy} S_{z,\max}(\eta_1)}{I_z \delta} = \frac{5 \times 10^3 \times 2.5 \times 10^{-5} \text{N}}{3.333 \times 10^{-6} \times 0.010 \text{m}^2} = 3.75 \times 10^6 \text{Pa} = 3.75 \text{MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{F_{Sy} S_{z,\max}(\eta_2)}{I_z \delta} = \frac{5 \times 10^3 \times 3.75 \times 10^{-5} \text{N}}{3.333 \times 10^{-6} \times 0.010 \text{m}^2} = 5.63 \times 10^6 \text{Pa} = 5.63 \text{MPa}$$

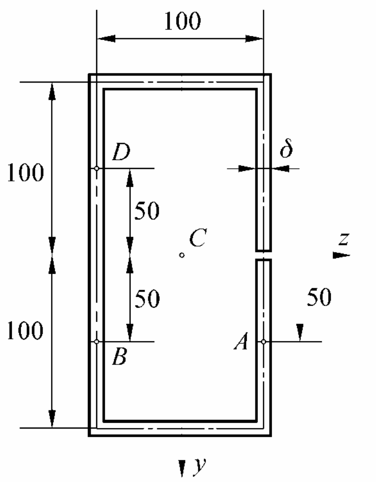
弯曲切应力分布图示如图 10-4b（2）。

$$\tau_{\max} = 5.63 \text{MPa}$$

11-5 **一薄壁梁，其横截面如图所示，剪力 $F_{Sy} = 40$ kN，壁厚 $\delta = 10$ mm。试：**

（1）计算 *A*，*B* 与 *D* 三点处的弯曲切应力；

（2）确定截面的剪心位置。



题 11-5 图

解：（1）算弯曲切应力

坐标示如图 11-5。

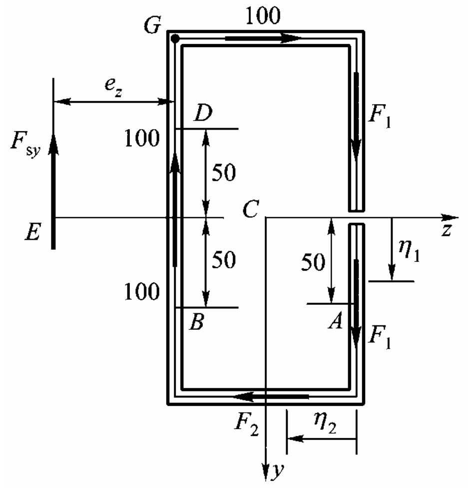


图 11-5

由图可知，

$$I_z=[2\times\frac{0.010\times0.200^3}{12}+2\times0.100\times0.010\times0.100^2+2\times\frac{0.100\times0.010^3}{12}]\,\mathrm{m}^4$$
$$=3.335\times10^{-5}\,\mathrm{m}^4$$

$$S_{z,A}(\omega)=\frac{\delta}{2}y_A^2=\frac{0.010}{2}\times0.050^2\,\mathrm{m}^3=1.25\times10^{-5}\,\mathrm{m}^3$$

$$S_{z,B}(\omega)=(\frac{0.010}{2}\times0.100^2+0.010\times0.100\times0.100+0.010\times0.050\times0.075)\mathrm{m}^3$$

$$=1.875\times10^{-4}\,\mathrm{m}^3$$

据公式

$$\tau(\eta)=\frac{F_S S_z(\omega)}{I_z\delta}$$

得

$$\tau_A=\frac{40\times10^3\times1.25\times10^{-5}\,\mathrm{N}}{3.335\times10^{-5}\times0.010\mathrm{m}^2}=1.499\times10^6\,\mathrm{Pa}=1.499\mathrm{MPa}$$

$$\tau_B=\frac{40\times10^3\times1.875\times10^{-4}\,\mathrm{N}}{3.335\times10^{-5}\times0.010\mathrm{m}^2}=2.25\times10^7\,\mathrm{Pa}=22.5\mathrm{MPa}$$

$$\tau_D=\tau_B=22.5\mathrm{MPa}\qquad\text{（因为上下对称）}$$

（2）确定截面的剪心位置

因为上下对称，所以剪心必在 z 轴上，问题归结为求 e_z。

据合力矩定理，取 G 点为矩心（见图 11-5），有

$$F_{Sy}\cdot e_z=(F_1\times0.100)\times2+F_2\times0.200$$

其中，

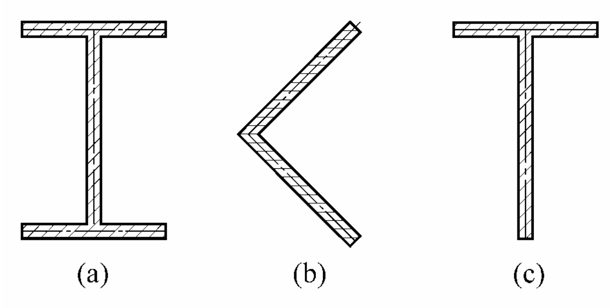
$$F_1=\int_0^{0.100} q_1 \mathrm{d}\eta_1=\frac{F_{\mathrm{S}y}\times 0.005\times 0.100^3}{3I_z}=1.6667\times 10^{-6}\frac{F_{\mathrm{S}y}}{I_z}$$

$$F_2=\int_0^{0.100} q_2 \mathrm{d}\eta_2=\frac{F_{\mathrm{S}y}}{I_z}\left(0.005\times 0.100^3+0.005\times 0.100^3\right)=1.0000\times 10^{-5}\frac{F_{\mathrm{S}y}}{I_z}$$

于是，

$$\begin{aligned} e_z&=\frac{1}{F_{\mathrm{S}y}}\cdot\left[0.100\times 2F_1+0.200F_2\right]\mathrm{m}\\ &=\frac{1}{3.335\times 10^{-5}}\left[0.200\times 1.6667\times 10^{-6}+0.200\times 1.0000\times 10^{-5}\right]\mathrm{m}\\ &=0.070\ \mathrm{m}=70.0\ \mathrm{mm}\qquad (\text{腹板形心左侧}) \end{aligned}$$

11-6 试指出图示截面的剪心位置。



题 11-6 图

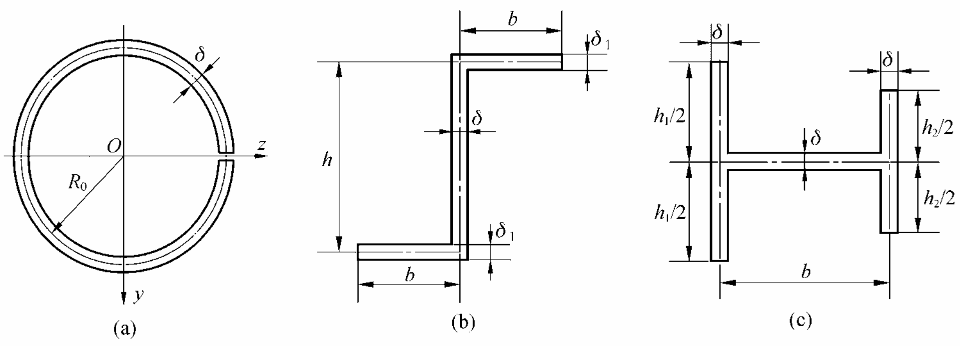
解：

(a) 双对称截面，剪心与形心重合；

(b) 角钢形截面，剪心在二边条中心线相交处；

(c) T 形截面，剪心在翼缘中心线与腹板中心线相交处。

11-7 试确定图示截面的剪心位置。



题 11-7 图

(a) 解：由图 11-7a 可知，

$$\mathrm{d}S_z=(\delta\mathrm{d}s_1)R_0\sin\varphi_1=\delta R_0^2\sin\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1$$

于是，

$$S_z = \int_0^{\varphi} \delta R_0^2 \sin\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_1 = \delta R_0^2 (1-\cos\varphi)$$

又

$$\int_l S_z \rho \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \left[\delta R_0^2 (1-\cos\varphi)\right] R_0^2 \mathrm{d}\varphi = 2\pi\delta R_0^4$$

$$I_z = \pi\delta R_0^3$$

故有

$$e_z = \frac{\int_l S_z \rho \mathrm{d}s}{I_z} = \frac{2\pi\delta R_0^4}{\pi\delta R_0^3} = 2R_0 \quad \text{（在圆心左侧）}$$

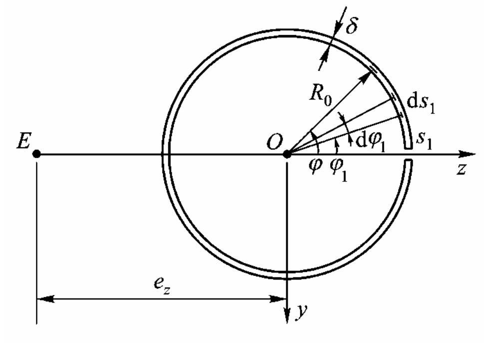


图 11-7(a)

本题设 F_{Sy} 作用于剪心 ***E***，应用合力矩定理可得同样的结论。

（**b**）结论：与腹板形心重合。
提示：本结论可用反证法加以证明。

（**c**）解：设剪力 F_{Sy} 作用于剪心 ***E***（见图 **11-7c**），有

$$F_{Sy1} + F_{Sy2} = F_{Sy}$$

及

$$F_{Sy2} = \frac{\delta h_2^3}{\delta(h_1^3 + h_2^3)} F_{Sy}$$

其中，F_{Sy1} 和 F_{Sy2} 分别为左、右腹板分担的剪力。

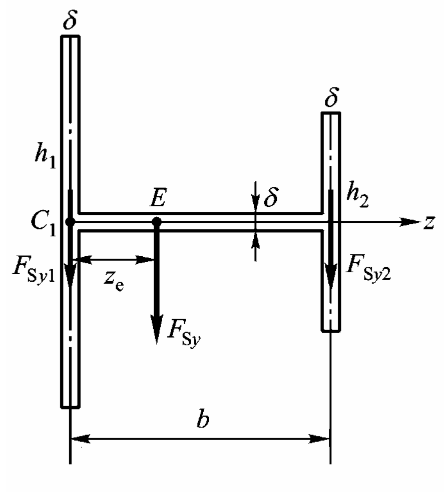


图 11-7(c)

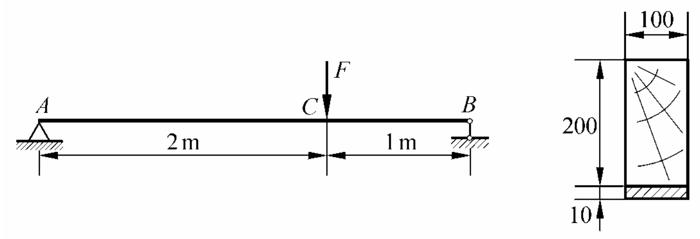
对左腹板形心 C_1 取矩，有

$$F_{Sy}z_e = F_{Sy2}b$$

由此得

$$z_e = \frac{F_{Sy2}}{F_{Sy}}b = \frac{h_2^3}{h_1^3 + h_2^3}b \quad \text{（在左翼缘形心右侧）}$$

11-8 图示用钢板加固的木梁，承受载荷 $F = 10$ kN 作用，钢与木的弹性模量分别为 E_s =200 GPa 与 E_w = 10 GPa。试求钢板与木梁横截面上的最大弯曲正应力以及截面 C 的挠度。



题 11-8 图

解：以钢为基本材料，模量比为

$$n = \frac{E_w}{E_s} = \frac{1}{20}$$

等效截面示如图 11-8，其形心坐标为

$$y_C = [\frac{0.005\times0.200\times0.100 + 0.100\times0.010\times0.205}{0.005\times0.200 + 0.100\times0.010}]\,\text{m} = 0.1525\,\text{m}$$

该截面的惯性矩为

$$\bar{I}_z = [\frac{0.005\times0.200^3}{12} + 0.005\times0.200\times(0.1525-0.100)^2 + \frac{0.100\times0.010^3}{12} + 0.100\times0.010\times(0.205-0.1525)^2]\,\text{m}^4 = 8.85\times10^{-6}\,\text{m}^4$$

由此得

$$\sigma_{\mathrm{s,max}}^{\mathrm{t}}=\frac{M_{\max}\left(0.210-y_C\right)}{\bar{I}_z}=\frac{2\times10\times10^3\times1\times\left(0.210-0.1525\right)\mathrm{N}}{3\times8.85\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2}$$

$$=4.33\times10^7\,\mathrm{Pa}=43.3\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{\mathrm{w,max}}^{\mathrm{c}}=\frac{nM_{\max}y_C}{\bar{I}_z}=\frac{1\times2\times10\times10^3\times1\times0.1525\mathrm{N}}{20\times3\times8.85\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2}$$

$$=5.74\times10^6\,\mathrm{Pa}=5.74\mathrm{MPa}$$

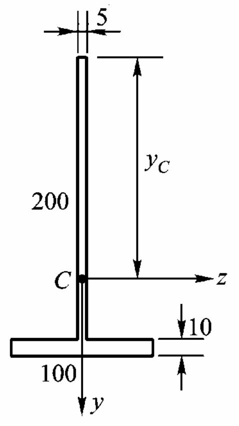


图 11-8

最后，根据公式

$$w=\frac{Fbx}{6lEI}(x^2-l^2+b^2)$$

求挠度 w_C。

这里，

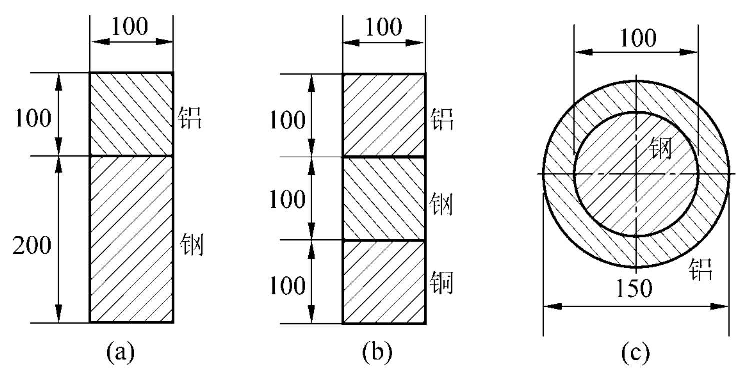
$$x=a=2\mathrm{m},\quad b=1\mathrm{m},\quad l=3\mathrm{m},\quad E=E_{\mathrm{s}},\quad I=\bar{I}_z.$$

即

$$w_C=\frac{Fba}{6lE_{\mathrm{s}}\bar{I}_z}(a^2-l^2+b^2)=\frac{10\times10^3\times1\times2\times(2^2-3^2+1^2)\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^4}{6\times3\times200\times10^9\times8.85\times10^{-6}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^3}$$

$$=-2.51\times10^{-3}\,\mathrm{m}=-2.51\mathrm{mm}\quad(\downarrow)$$

11-9 图示截面复合梁，在其纵向对称面内，承受正弯矩 M = 50 kN·m 作用。试求梁内各组成部分的最大弯曲正应力。已知钢、铝与铜的弹性模量分别为 E_{st} =210 GPa，E_{al} =70 GPa 与 E_{co} = 110GPa。



题 11-9 图

（a）解：以钢为基本材料，模量比为

$$n=\frac{E_{\mathrm{al}}}{E_{\mathrm{st}}}=\frac{1}{3}$$

等效截面示如图 11-9a，其形心坐标为

$$y_C=\frac{(0.100\times0.100\times0.050/3+0.100\times0.200\times0.200)\mathrm{m}^3}{(0.100\times0.100/3+0.100\times0.200)\mathrm{m}^2}=0.1786\mathrm{m}$$

该截面的惯性矩为

$$\begin{aligned}\bar{I}_z=&[\frac{0.100\times0.100^3}{12\times3}+\frac{1}{3}\times0.100^2\times(0.1786-0.050)^2\\&+\frac{0.100\times0.200^3}{12}+0.100\times0.200\times(0.200-0.1786)^2]\,\mathrm{m}^4=1.337\times10^{-4}\,\mathrm{m}^4\end{aligned}$$

由此得

$$\sigma_{\mathrm{al,max}}^{\mathrm{c}}=\frac{nMy_C}{\bar{I}_z}=\frac{50\times10^3\times0.1786\mathrm{N}}{3\times1.337\times10^{-4}\mathrm{m}^2}=2.23\times10^7\,\mathrm{Pa}=22.3\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{\mathrm{st,max}}^{\mathrm{t}}=\frac{M(0.300-y_C)}{\bar{I}_z}=\frac{50\times10^3\times0.1214\mathrm{N}}{1.337\times10^{-4}\mathrm{m}^2}=4.54\times10^7\,\mathrm{Pa}=45.4\,\mathrm{MPa}$$

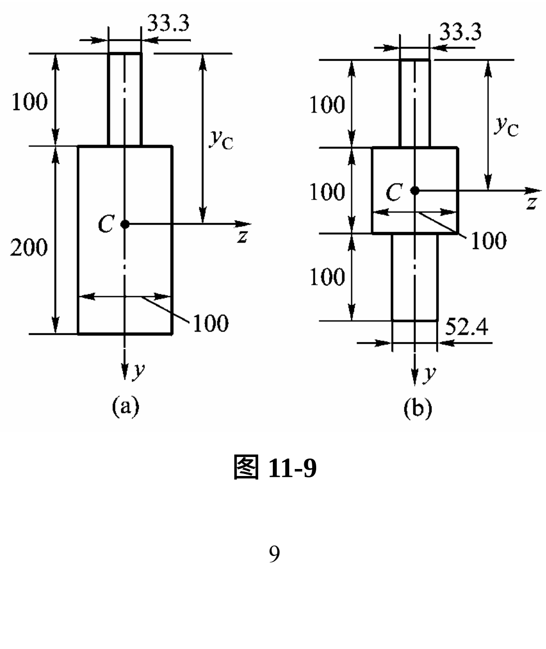


图 11-9

（b）解：以钢为基本材料，模量比分别为

$$n_1 = \frac{E_{\mathrm{al}}}{E_{\mathrm{st}}} = \frac{1}{3}$$

$$n_2 = \frac{E_{\mathrm{co}}}{E_{\mathrm{st}}} = \frac{11}{21}$$

等效截面示如图 11-9b，其形心坐标为

$$y_C = \frac{(0.100\times0.100\times\frac{0.050}{3}+0.100\times0.100\times0.150+0.100\times0.100\times0.250\times\frac{11}{21})\ \mathrm{m}^3}{(0.100\times\frac{0.100}{3}+0.100\times0.100+0.100\times0.100\times\frac{11}{21})\ \mathrm{m}^2}$$

$$=0.1603\mathrm{m}$$

该截面的惯性矩为

$$\bar{I}_z = [\frac{0.100\times0.100^3}{12\times3}+\frac{0.100^2\times(0.1603-0.050)^2}{3}+\frac{0.100\times0.100^3}{12}$$

$$+0.100\times0.100\times(0.1603-0.150)^2+\frac{11\times0.100\times0.100^3}{12\times21}+\frac{11\times0.100^2\times(0.250-0.1603)^2}{21}]\mathrm{m}^4$$

$$=9.92\times10^{-5}\mathrm{m}^4$$

由此得

$$\sigma_{\mathrm{al,max}}^{\mathrm{c}} = \frac{n_1 M y_C}{\bar{I}_z} = \frac{50\times10^3\times0.1603\mathrm{N}}{3\times9.92\times10^{-5}\mathrm{m}^2} = 2.69\times10^7\,\mathrm{Pa} = 26.9\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{\mathrm{st,max}}^{\mathrm{c}} = \frac{M(y_C-0.100)}{\bar{I}_z} = \frac{50\times10^3\times0.0603\mathrm{N}}{9.92\times10^{-5}\mathrm{m}^2} = 3.04\times10^7\,\mathrm{Pa} = 30.4\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{\mathrm{co,max}}^{\mathrm{t}} = \frac{n_2 M(0.300-y_C)}{\bar{I}_z} = \frac{11\times50\times10^3\times0.1397\mathrm{N}}{21\times9.92\times10^{-5}\mathrm{m}^2} = 3.69\times10^7\,\mathrm{Pa} = 36.9\mathrm{MPa}$$

（c）解：根据

$$M = M_{\mathrm{st}} + M_{\mathrm{al}}$$

及

$$\frac{M_{\mathrm{st}}}{E_{\mathrm{st}} I_{\mathrm{st}}} = \frac{M_{\mathrm{al}}}{E_{\mathrm{al}} I_{\mathrm{al}}}$$

得

$$M_{\mathrm{st}} = 0.4248M$$

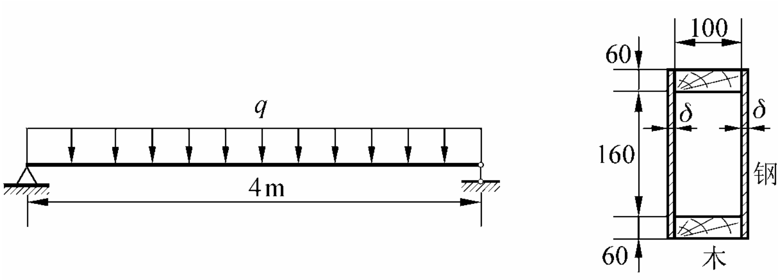
$$M_{\mathrm{al}} = 0.5752M$$

由此得

$$\sigma_{\mathrm{al,max}} = \frac{0.5752 \times 50 \times 10^3 \times 64 \times 0.075}{\pi(0.150^4 - 0.100^4)}\,\mathrm{Pa} = 1.082 \times 10^8\,\mathrm{Pa} = 108.2\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{\mathrm{st,max}} = \frac{0.4248 \times 50 \times 10^3 \times 32}{\pi \times 0.100^3}\,\mathrm{Pa} = 2.16 \times 10^8\,\mathrm{Pa} = 216\,\mathrm{MPa}$$

11-10 **图示简支梁，承受均布载荷作用，该梁由木材与加强钢板组成。已知载荷集度 q = 40 kN/m，钢与木的弹性模量分别为 E_s = 200 GPa 与 E_w = 10 GPa，许用应力分别为[σ_s]=160 MPa 与[σ_w]=10 MPa，试确定钢板厚度。**



题 11-10 图

解：

$$M_{\max} = \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{8} \times 40 \times 10^3 \times 4^2\,\mathrm{N \cdot m} = 8 \times 10^4\,\mathrm{N \cdot m}$$

$$I_s = 2 \times \frac{\delta(0.280)^3}{12}\,\mathrm{m}^4 = 3.659 \times 10^{-3}\delta\,\mathrm{m}^4$$

$$I_w = 2 \times \left(\frac{0.100 \times 0.060^3}{12} + 0.100 \times 0.060 \times 0.110^2\right)\mathrm{m}^4 = 1.488 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$

$$\sigma_s = \frac{M_{\max}E_s y_{\max}}{E_s I_s + E_w I_w} = \frac{8 \times 10^4 \times 200 \times 10^9 \times 0.140}{200 \times 10^9 \times 3.659 \times 10^{-3}\delta + 10 \times 10^9 \times 1.488 \times 10^{-4}}\,\mathrm{Pa} \le 160 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$$

由此得

$$\delta = 0.0171\mathrm{m} = 17.1\mathrm{mm}$$

又

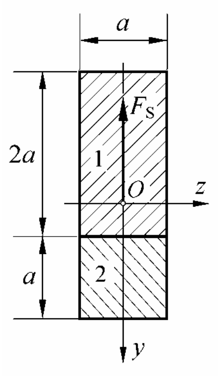
$$\sigma_w = \frac{M_{\max}E_w y_{\max}}{E_s I_s + E_w I_w} = \frac{8 \times 10^4 \times 10 \times 10^9 \times 0.140}{200 \times 10^9 \times 3.659 \times 10^{-3}\delta + 10 \times 10^9 \times 1.488 \times 10^{-4}}\,\mathrm{Pa} \le 10 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$$

由此得

$$\delta = 0.01327\mathrm{m} = 13.27\mathrm{mm}$$

结论：确定钢板厚度 $\delta = 17.1\mathrm{mm}$ 。

11-12 **图示截面复合梁，由弹性模量分别为 E_1 与 E_2 的两种材料制成，且 E_2 =2E_1。试画横截面上的弯曲切应力分布图，并求最大弯曲切应力。**



题 11-12 图

解：1．确定中性轴位置

等效截面如图 11-12 所示，取 z_1 为参考轴，

得到

$$y_C=\frac{2a\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(a+\frac{a}{2}\right)}{a^2+2a\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{3}{4}a$$

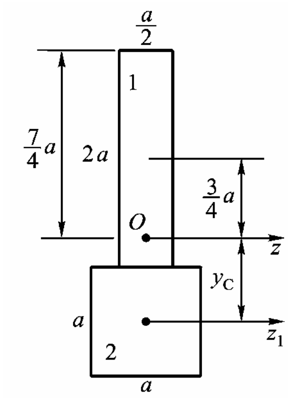


图 11-12

2．计算 $\bar{I}_z$ 与 $S_{z,\max}$

由图示等效截面可得

$$\bar{I}_z=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)(2a)^3}{12}+a^2\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\frac{a^4}{12}+a^2\left(\frac{3a}{4}\right)^2=\frac{37}{24}a^4$$

$$S_{z,\max}=\frac{7a}{4}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{7a}{8}\right)=\frac{49}{64}a^3$$

3．计算等效截面的 $\bar{\tau}_{\max}$

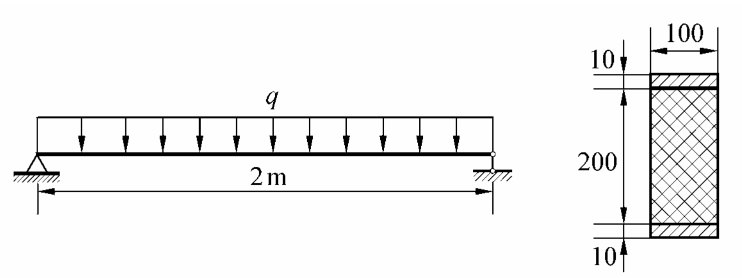
$$\bar{\tau}_{\max}=\frac{F_S S_{z\max}}{\bar{I}_z\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{147F_s}{148a^2}$$

4．求真实的 $\tau_{\max}$

中性轴处实际受剪宽度为 a**，故有**

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}\bar{\tau}_{\max}=\frac{147F_S}{296a^2}=0.497\frac{F_S}{a^2}$$

11-13 **图示夹层简支梁，承受集度为 q =50 kN/m 的均布载荷作用。试求梁内的最大弯曲正应力与最大弯曲切应力。**



题 11-13 图

解：1．求最大弯矩 M 和最大剪力 F_S

$$M=\frac{1}{8}ql^2$$

$$F_S=\frac{1}{2}ql$$

2．计算 $\sigma_{\max}$

参看书中图 11-22，有

$$I_{fz}=\frac{b(h_0^3-h^3)}{12}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{Mh_0}{2I_{fz}}=\frac{3ql^2h_0}{4b(h_0^3-h^3)}=\frac{3\times 50\times 10^3\times 2^2\times 0.220\text{N}\cdot\text{m}^2}{4\times 0.100\times(0.220^3-0.200^3)\text{m}^4}$$

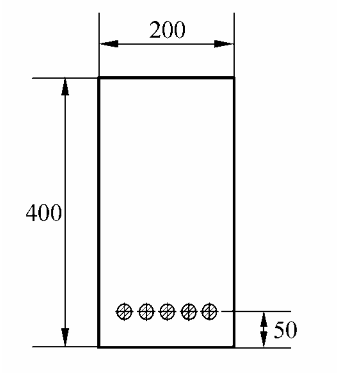
$$=1.246\times 10^8\,\text{Pa}=124.6\text{MPa}$$

3．计算 $\tau_{\max}$

$$\tau_{\max}=\frac{F_S}{bh}=\frac{ql}{2bh}=\frac{50\times 10^3\times 2\text{N}}{2\times 0.100\times 0.200\text{m}^2}=2.50\times 10^6\,\text{Pa}=2.50\text{ MPa}$$

11-14 **一钢筋混凝土梁的横截面如图所示，并承受正弯矩 M = 120 kN·m 作用。试求钢筋横截面上的拉应力以及混凝土受压区的最大压应力。钢筋与混凝土的弹性模量分别为 E_s =200**

GPa 与 E_c =25 GPa，钢筋的直径为 d = 25mm。



题 11-14 图

解：参看书中图 11-24，其中 d 换成 D。

1．计算 n，D 和 A_s

$$n=\frac{E_s}{E_c}=\frac{200\text{GPa}}{25\text{GPa}}=8$$

$$D=(0.400-0.050)\,\text{m}=0.350\,\text{m}$$

$$A_s=\frac{\pi d^2}{4}\times 5=(\frac{\pi\times 0.025^2}{4}\text{m}^2)\times 5=0.002454\text{m}^2$$

2．求 x

由

$$bx^2+2nA_s x-2nA_s D=0$$

即由

$$\left(0.200x^2+16\times 0.002454x-16\times 0.002454\times 0.350\right)\text{m}^3=0$$

得

$$x=0.1818\text{m}$$

3．求 $\bar{I}_z$

$$\bar{I}_z=nA_s(D-x)^2+\frac{bx^3}{3}=[8\times 0.002454\times\left(0.350-0.1818\right)^2+\frac{0.200}{3}\times 0.1818^3]\,\text{m}^4$$

$$=9.561\times 10^{-4}\,\text{m}^4$$

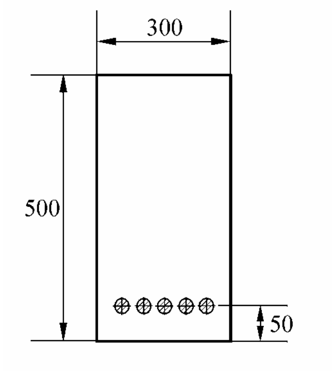
4．求 σ_s 及 $\sigma_{c,\max}$

$$\sigma_s=\frac{nM(D-x)}{\bar{I}_z}=\frac{[8\times 120\times 10^3\times\left(0.350-0.1818\right)]\,\text{N}\cdot\text{m}^2}{9.561\times 10^{-4}\,\text{m}^4}$$

$$=1.689\times10^{8}\,\text{Pa}=168.9\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{c,max}}=\frac{Mx}{\bar{I}_z}=\frac{\left(120\times10^{3}\times0.1818\right)\text{N}\cdot\text{m}^{2}}{9.561\times10^{-4}\,\text{m}^{4}}=2.28\times10^{7}\,\text{Pa}=22.8\text{MPa}$$

11-15 一钢筋混凝土梁的横截面如图所示，并承受正弯矩 M 作用。试求该弯矩的许用值 $[M]$。钢筋与混凝土的弹性模量分别为 E_s =200 GPa 与 E_c =20 GPa，钢筋的许用应力 $[\sigma_s]$=135 MPa，混凝土的许用压应力 $[\sigma_c]$=9 MPa，钢筋的总面积 A_s = 896 mm^2。



题 11-15 图

解：参看书中图 11-24。

1．计算 n 和 d

$$n=\frac{E_s}{E_c}=10$$

$$d=\left(0.500-0.050\right)\text{m}=0.450\text{m}$$

2．求 x

由

$$bx^{2}+2nA_s x-2nA_s d=0$$

即由

$$\left(0.300x^{2}+20\times896\times10^{-6}x-20\times896\times10^{-6}\times0.450\right)\text{m}^{3}=0$$

得

$$x=0.1368\text{m}$$

3．求 $\bar{I}_z$

$$\bar{I}_z=nA_s\left(d-x\right)^{2}+\frac{bx^{3}}{3}=1.135\times10^{-3}\,\text{m}^{4}$$

4．求 $[M]$

由

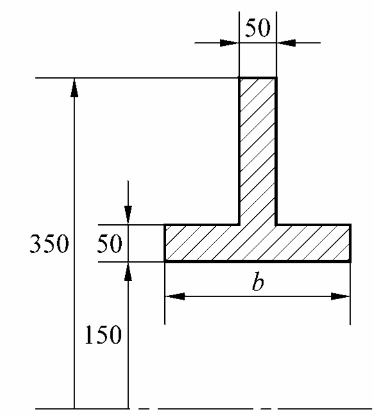
$$[M]_1 = \frac{[\sigma_s]I_z}{n(d-x)} = \frac{(135\times10^6 \times 1.135\times10^{-3})\mathrm{N\cdot m^2}}{10\times0.3132\mathrm{m}} = 4.89\times10^4\,\mathrm{N\cdot m} = 48.9\mathrm{kN\cdot m}$$

$$[M]_2 = \frac{[\sigma_c]I_z}{x} = \frac{(9\times10^6 \times 1.135\times10^{-3})\mathrm{N\cdot m^2}}{0.1368\mathrm{m}} = 7.47\times10^4\,\mathrm{N\cdot m} = 74.7\mathrm{kN\cdot m}$$

得

$$[M] = 48.9\mathrm{kN\cdot m}$$

11-17 一圆环形曲杆的截面如图所示，并处于纯弯状态。试问：如欲使最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力的数值相等，则截面内侧宽度 ***b*** 应取何值。



题 11-17 图

解：设截面内、外侧的曲率半径分别为 ρ_2 和 ρ_1，中性层至内、外侧的距离分别为 y_2 和 y_1，依题意应有

$$\frac{My_1}{\rho_1 S_z} = \frac{My_2}{\rho_2 S_z}$$

即

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{0.350\mathrm{m}}{0.150\mathrm{m}} = \frac{7}{3}$$

由于

$$y_1 + y_2 = 0.200\mathrm{m}$$

故有

$$y_1 = 0.140\mathrm{m}, \qquad y_2 = 0.060\mathrm{m}$$

由此得中性层的曲率半径为

$$r = (0.150 + y_2)\,\mathrm{m} = 0.210\mathrm{m}$$

由于

$$A = (0.050\times0.150 + 0.050b)\mathrm{m}^2 = (0.00750 + 0.050b)\mathrm{m}^2$$

$$\int_A \frac{\mathrm{d}A}{\rho} = \int_{0.150}^{0.200}\frac{b\mathrm{d}\rho}{\rho} + \int_{0.200}^{0.350}\frac{50\mathrm{d}\rho}{\rho} = (0.2877b + 0.02798)\mathrm{m}$$

故

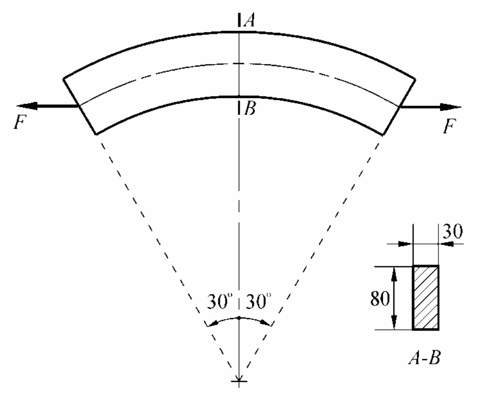
$$r=\frac{A}{\int_A \frac{\mathrm{d}A}{\rho}}=\frac{(0.00750+0.050b)\mathrm{m}^2}{(0.2877b+0.02798)\mathrm{m}}=0.210\mathrm{m}$$

由此得

$$b=0.1559\mathrm{m}=155.9\mathrm{mm}$$

11-19

图示曲杆，轴线的半径 R =750 mm，载荷 F = 30 kN。试计算横截面 AB 上的最大正应力。



题 11-19 图

解：由于

$$\frac{0.750}{0.040}=18.75>10$$

故该曲杆属于小曲率杆。

截面 AB 上的内力有

$$F_{\mathrm{N}}=30\mathrm{kN}$$

$$M=FR(1-\cos30^\circ)=3.014\,\mathrm{kN\cdot m}$$

由此可得

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W}+\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}=\frac{6\times3.014\times10^3\,\mathrm{N\cdot m}}{0.030\times0.080^2\,\mathrm{m}^3}+\frac{30\times10^3\,\mathrm{N}}{0.030\times0.080\mathrm{m}^2}$$

$$=1.067\times10^8\,\mathrm{Pa}=106.7\mathrm{MPa}$$