工科数分习题课七　微分中值定理

石岩

shiyan200245@163.com

Nov.9.2012

本节课的内容和要求

1.熟练运用微分中值定理解决函数问题.

基本概念和主要结论

1.Fermat**定理**　f在x_0可导且取得极值, 则$f'(x_0)=0$. 即, 极值点必为驻点(stationary point).

2.Rolle**中值定理**

f满足 (i)$[a,b]$上连续; (ii)(a,b)上可导; (iii)$f(a)=f(b)$,

则$\exists\ \xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=0$.

3.Lagrange**中值定理**

f满足 (i)$[a,b]$上连续; (ii)(a,b)上可导,

则$\exists\ \xi\in(a,b)$, s.t.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

4.Cauchy**中值定理**

f,g满足 (i)$[a,b]$上连续; (ii)(a,b)上可导; (iii)$f'(x),g'(x)$不同时为零; (iv)$g(a)\neq g(b)$.

则$\exists\ \xi\in(a,b)$, s.t.

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

推广　若f,g满足上述条件(i),(ii), 亦有

$$f'(\xi)[g(b)-g(a)]=g'(\xi)[f(b)-f(a)],\ \xi\in(a,b).$$

5.Darboux**定理***　若函数f在$[a,b]$上可导, 且$f'_+(a)\neq f'_-(b)$, k为介于$f'_+(a),f'_-(b)$之间任一实数, 则至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=k.$$

习题

1. 设f在点x_0的某邻域$U(x_0)$内连续,在$U^o(x_0)$内可导,且极限$\lim_{x\to x_0} f'(x)$存在,则f在点x_0可导,且

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

思考

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0),$$

$$f'_-(x_0) = f'(x_0-0).$$

是否恒成立?

2. 思考

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ \quad 0, & x=0, \end{cases}$$

在$[0,x]$上应用Lagrange中值定理,有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi),\ \xi\in(0,x),$$

即

$$x\sin\frac{1}{x}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi}.$$

当$x\to 0^+$时, $\xi\to 0^+$, 所以,

$$\lim_{\xi\to 0^+}\cos\frac{1}{\xi}=0.$$

即

$$\lim_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{x}=0.$$

有何问题?

3.设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导.证明存在一点$\xi \in (a,b)$,使得

$$2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi).$$

提示: 构造

$h(x) = [f(x)-f(a)][g(b)-g(a)] - [g(x)-g(a)][f(b)-f(a)].$

4.设f为$[a,b]$上二阶可导函数,$f(a) = f(b) = 0$,且存在$c \in (a,b)$使得$f(c) > 0$.证明:至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得$f''(\xi) < 0$.