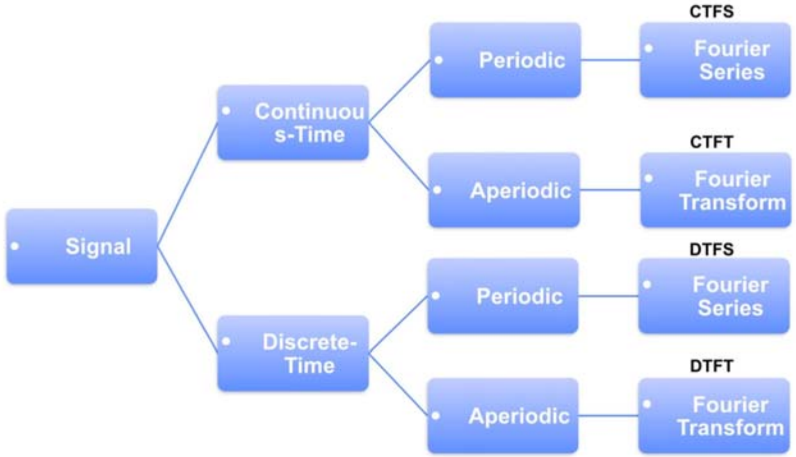
数字信号处理

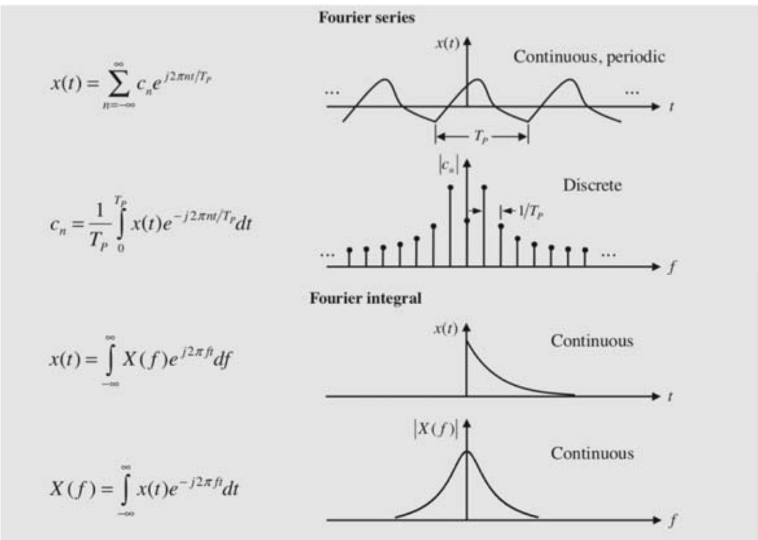
——第5讲

傅里叶变换基本体系

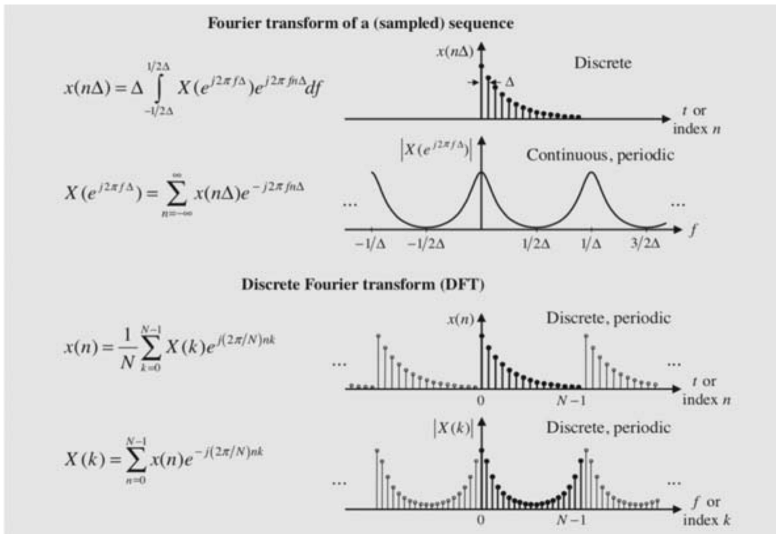
❖ **FT-功率信号，FS-能量信号**



傅里叶变换基本体系

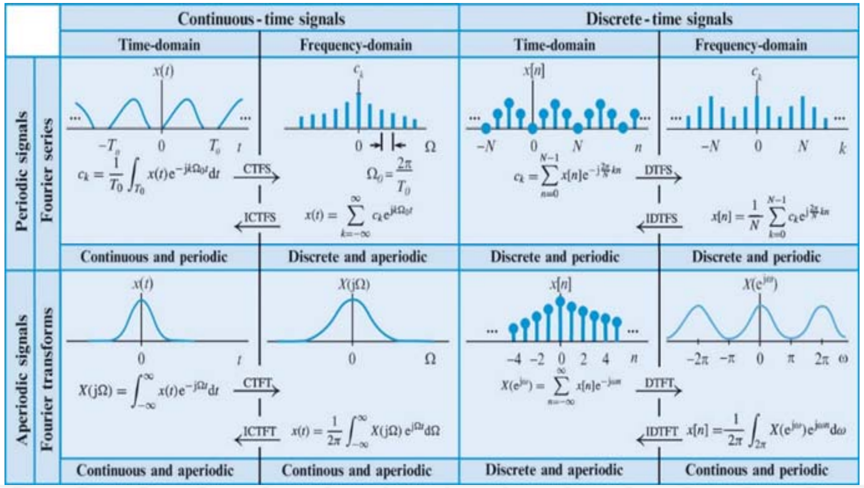


傅里叶变换基本体系



傅里叶变换基本体系

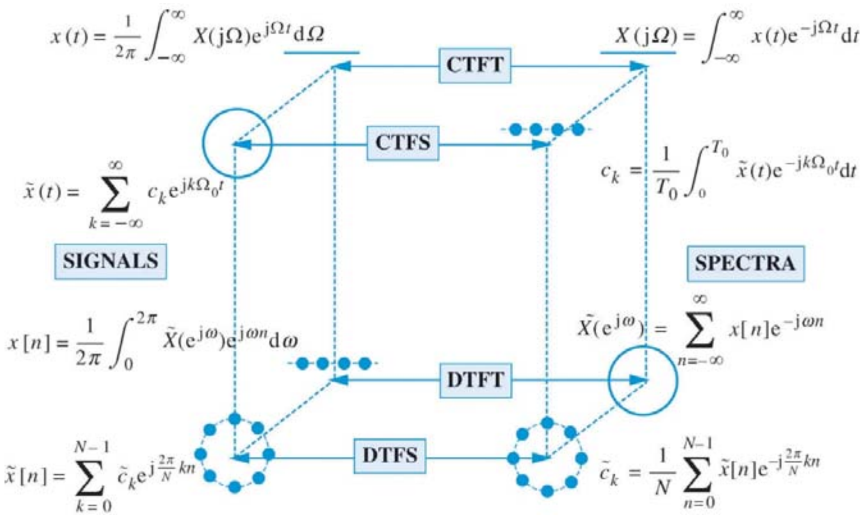
❖ **Summary of Fourier Representation of Signals.**



傅里叶变换基本体系

	Direct transform (spectral analysis)	Inverse transform (signal reconstruction)	Exact computation
DTFS	$\tilde{c}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ finite summation	$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ finite summation	yes
DTFT	$\tilde{X}(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ infinite summation	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{X}(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$ integration	no
CTFS	$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}_c(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$ integration	$\tilde{x}_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$ infinite summation	no
CTFT	$X_c(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)e^{-j\Omega t}dt$ integration	$x_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$ integration	no

傅里叶变换基本体系



离散时间傅里叶变换

❖ **DTFT与IDTFT**

- **DTFT与IDTFT：**
- **DTFT的存在条件：**
- **DTFT的表示方法：**

离散时间傅里叶变换

❖ **DTFT与IDTFT**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Longleftrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

证明：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]e^{-j\omega l}\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega l}e^{j\omega n}d\omega = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]\frac{\sin\pi(n-l)}{\pi(n-l)}$$

$$\frac{\sin\pi(n-l)}{\pi(n-l)} = \begin{cases}1 & n=l\\ 0 & n\neq l\end{cases} \Longrightarrow = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]\delta[n-l] = x[n]$$

离散时间傅里叶变换

❖ 充分条件：序列**x[n]**是绝对可和，或者说序列能量有限，离散时间信号**x[n]**存在的傅立叶变换。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]| < \infty \quad \text{or} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 < \infty \Longrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

证明：

$$|X(e^{j\omega})| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|\cdot|e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]| < \infty$$

离散时间傅里叶变换

❖ 表示方法及对称性：

➢ 幅度与相位：

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

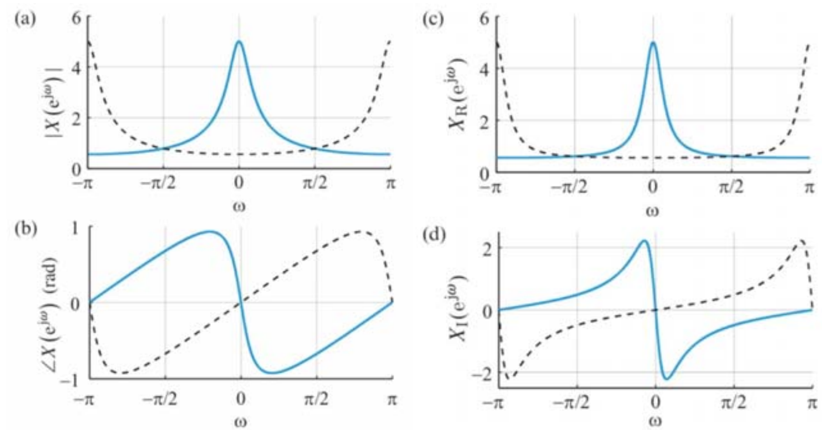
➢ 实部与虚部：

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

➢ 频谱对称性

离散时间傅里叶变换

❖ 表示方法及对称性：$x[n] = a^n u[n] \Longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$



傅里叶变换的主要性质

❖ **DTFT性质**

➢ 自身性质

周期性、对称性、时间移位、频域相移等

➢ 符合运算

线性、时域卷积、频域卷积、**Paserval**定理等

傅里叶变换的主要性质

❖ 周期性

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi M)}) \Leftarrow e^{j\omega} = e^{j(\omega+2\pi M)}$$

$$X(e^{j(\omega+2\pi M)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi M)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}e^{-j2\pi Mn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\cdot 1 = X(e^{j\omega})$$

傅里叶变换的主要性质

❖ **Paserval**定律 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$

证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\right]^*$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{j\omega})\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

$$x^*[n]x[n] = |x[n]|^2$$

$$Y^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) = |Y(e^{j\omega})|^2 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

体现了数字信号在时域和频域的“能量”相等关系，是能量守恒定律在数字信号处理领域的体现。

傅里叶变换的主要性质

❖ 频域卷积

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\right]e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\theta})\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega-\theta)n}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

傅里叶变换的主要性质

❖ 时域卷积

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n-k]x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n-k]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega k}d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n-k]e^{j\omega k}d\omega$$

$$n-k=m,\qquad n-m=k$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]e^{j\omega(n-m)}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]e^{-j\omega m}\right]e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})\right]e^{j\omega n}d\omega$$

傅里叶变换的主要性质

❖ 时域卷积

$$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right]Y(e^{j\omega})$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(e^{j\omega})e^{-j\omega n}x[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]e^{-j\omega k}\right]e^{-j\omega n}x[n]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]y[k]e^{-j\omega(k+n)}$$

$$m=k+n,\qquad k=m-n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n]y[m-n]e^{-j\omega m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[m-n]\right]e^{-j\omega m}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(x[n]*y[n]\right)e^{-j\omega m}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(x[n]*y[n]\right)e^{-j\omega n}$$

第5次作业

❖ 课后作业：

2.2(1) , (2) , (6) ； 2.3(1) , (2) , (4)

❖ 补充作业1：使用**Matlab**计算$x[n]=a^n u[n]$（a分别为**0.85**和**-0.85**）的离散时间傅里叶变换（**DTFT**），并绘制出幅度响应与相位响应、实部响应与虚部响应的图形，并简要讨论其对称性（要求打印）。

❖ 补充作业2：分别从时域和频域两个方面出发，证明离散时间傅里叶变换的**Paserval**定理，并说明该等式包含的物理意义。