一、 **选择题，根据题目要求，在题下选项中选出一个正确答案（本题共 36 分，每小题各 4 分）**

1、设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本，$(n\geq 2)$；

记 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ， $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ 。

在未知方差 σ^2，检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$ 时，选取检验用的统计量是__A______。

A. $T=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$； B. $U=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$；

C. $T=\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ ； D. $T=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1)$ 。

Answer: 作为统计量的一定不会是未知量，C 就是因为 μ 为未知量而不可行的。

又由于方差未知，所以选择 t 分布。

$$\bar{x}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$$\therefore T=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

$$Detailed:T=\frac{\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{(n-1)}s^2}{\sigma^2}\Big/\cancel{(n-1)}}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\div\frac{s}{\sigma}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

2、设 X 为随机变量，且 $EX=1, DX=0.1$，则一定成立的是__B______。

A. $P\{-1<X<1\}\geq 0.9$ ； B. $P\{0<X<2\}\geq 0.9$；

C. $P\{|X+1|\geq 0.1\}\leq 0.9$； D. $P\{|X|\geq 0.1\}\leq 0.1$ 。

Answer:此题考查的是切比雪夫不等式：

$$P(|X-E(X)|\ge\varepsilon)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$
$$\therefore P(|X-1|\ge 1)\le\frac{0.1}{1}=0.1$$
$$\therefore P(|X-1|<1)\ge 1\text{-}0.1=0.9$$
$$P(0<X<2)\ge 0.9$$

3、设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为总体 $X\sim N(1,2^2)$ 的一个样本，$\bar{X}=\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}X_k$，

选取常数 a,b，使得 $Y=a\bar{X}+b\sim N(0,1)$，则选_______。

A. $a=-5,b=5$ ； B. $a=5,b=5$ ；

C. $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$ ； D. $a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$ 。

Answer:
$$\bar{X}\sim N(1,\frac{2^2}{100})$$
$$a\bar{X}\sim N(a,\frac{4a^2}{100})$$
$$a\bar{X}+b\sim N(a+b,\frac{4a^2}{100})$$
$$\therefore a+b=0$$
$$\frac{4a^2}{100}=1$$
$$\begin{cases}a=-5\\b=5\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=5\\b=-5\end{cases}$$

4、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，$(n\ge 2)$；总体均值 $EX=\mu$，

总体方差 $DX=\sigma^2$， 记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ ， $B_2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2$，

下列表述中正确的结论是_______ 。

A. $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$； B. $\frac{n}{\sigma^2}B_2\sim\chi^2(n-1)$ 。

C. B_2 是 σ^2 的无偏估计量； D. $B_2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k{}^2-\bar{X}^2$；

Answer:本题 A 项陷阱在于，题目并未提及：$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 服从正态分布，所以并不可以说

$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，但是可以说 $\bar{X}$ 的均值为 μ,方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$.

B 项与 A 项的毛病是相同的，式子本身没错，可是缺少了前提条件 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 服从正态分布,注意这里 B_2 并不是 s^2. B_2 学名为 2 阶中心矩. C 项里应当是 s^2 为 σ^2 的无偏估计量.

D 项推导过程如下:

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k{}^2-2X_k\overline{X}+\overline{X}^2) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k{}^2-2X_k\overline{X})+\overline{X}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k{}^2-2X_k\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{n})+\overline{X}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k{}^2-\frac{2\sum_{k=1}^{n}X_k\cdot\sum_{k=1}^{n}X_k}{n^2}+\overline{X}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k{}^2-2\cdot(\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{n})^2+\overline{X}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k{}^2-\overline{X}^2
\end{aligned}
$$

5、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，

且当 $x>0$时，$f(x)>0$；当$x\le 0$时，$f(x)=0$；

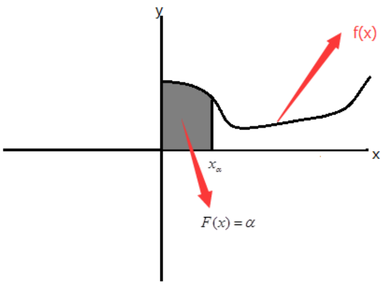
对 $0<\alpha<1$，设 x_α 是方程 $F(x)=\alpha$ 的解，

下列表述中正确的结论是_______。

A. $P\{-x_{\frac{\alpha}{2}}<X\le x_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$；　　B. $P\{x_{\frac{2\alpha}{3}}<X\le x_{1-\frac{\alpha}{3}}\}=1-\alpha$；

C. $P\{|X|\le x_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$；　　D. $P\{|X|\ge x_{1-\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$。

Answer:此题有一处陷阱，与某年原题并不相同，当 $x>0$时，$f(x)>0$；当$x\le 0$时，$f(x)=0$



意味着 F(x)的图像只能是在 0~+∞上的单调递增曲线,依图来看即可得到答案：要注意 f(x)在左侧为 0，所以 $P\{-x_{\frac{\alpha}{2}} < X \le x_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = P\{0 < X \le x_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$。

那么我们根据 f(x)在左侧为 0 的规律去掉选项中的无效区域，即以下新选项：

A、 $P\{-x_{\frac{\alpha}{2}} < X \le x_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = P\{0 < X \le x_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

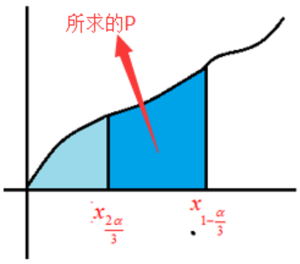
B、 $P\{x_{\frac{2\alpha}{3}} < X \le x_{1-\frac{\alpha}{3}}\}$

C、 $P\{|X| \le x_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = P\{-x_{1-\frac{\alpha}{2}} \le X \le x_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = P\{0 < X \le x_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

D、 $P\{|X| \ge x_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = P\{X \ge x_{1-\frac{\alpha}{2}} \cup X \le -x_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = P\{X \ge x_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

求得去掉无效区域的选项后，我们如何求得题目要求的数据呢？

$P\{x_{\frac{2\alpha}{3}} < X \le x_{1-\frac{\alpha}{3}}\}$ 如果以图像表示则是这样的：



图中浅蓝部分的面积是: $\frac{2}{3}\alpha$,浅蓝+深蓝部分的面积是: $1-\frac{1}{3}\alpha$,所以夹在其中的深蓝部分的面积即为: $1-\alpha$,那么即 $P\{x_{\frac{2\alpha}{3}} < X \le x_{1-\frac{\alpha}{3}}\} = 1-\alpha$

6、设随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，对任意实数 z，

则有 $P\{\max\{X,Y\} > z\} =$ ______。

A. $F(z,z)$ ； B. $P\{X > z\} + P\{Y > z\}$；

C. $1-F(z,z)$ ； D. $P\{X > z, Y > z\}$。

Answer: $P\{\max\{X,Y\} > z\} = 1 - P\{\min\{X,Y\} \le z\} = 1 - F(z,z)$

7、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$， $-\infty < x < +\infty$ ，（常数 $a > 0$），

则 $P\{0<X<\ln\sqrt{3}\}=$_______。

A. $\frac{1}{6}$； B. $\frac{\pi}{6}$； C. $\frac{1}{12}$； D. $\frac{2}{\pi}$ 。

$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} f(x)dx=\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{a}{e^x+e^{-x}}dx$$

$$=\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{ae^x}{e^{2x}+1}dx=\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{a}{e^{2x}+1}d(e^x)$$

$$=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{a}{x^2+1}dx=a\arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{12}$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=1$

$\therefore a=\frac{2}{\pi}$

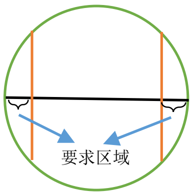
$\therefore P\{0<X<\ln\sqrt{3}\}=\frac{1}{6}$

8、在半径为 a 的圆内，取定一直径，过此直径上任一点作垂直于此直径的弦，（常数 $a>0$），

则弦长小于 $\sqrt{2}a$ 的概率为_______。

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$； B. $\sqrt{2}-1$； C. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$； D. $a(2-\sqrt{2})$。

作图即可。属于几何概型。



9、设随机变量 X,Y 的二阶矩 EX^2,EY^2 存在，

下列不等式中正确的结论是_______ 。

A. $|E(X)|>(EX^2)^{1/2}$ ； B. $(E|X+Y|^2)^{1/2}\ge(EX^2)^{1/2}+(EY^2)^{1/2}$；

C. $|Cov(X,Y)|\ge\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}$ ； D. $|E(XY)|\le(EX^2)^{1/2}\cdot(EY^2)^{1/2}$。

...这个记住结论就好。

D 项推导过程如下:

$E(X+tY)^2=E(X^2+2tXY+t^2Y^2)=E(Y^2)t^2+2E(XY)t+E(X^2)$ (*)

由于 $(X+tY)^2>0$,所以 $E(X+tY)^2>0$,所以(*)式>0.又由于 $E(Y^2)>0$,所以(*)式代表的二次方程必然无解,即有

$\Delta=4E^2(XY)-4E(Y^2)E(X^2)<0$ 即：

$E^2(XY)<E(X^2)E(Y^2)$ ， $|E(XY)|<\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

二、 填空题（本题满分 36 分，每小题 4 分）

1、设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.6, P(B)=0.8, P(B|\overline{A})=0.85$，则 $P(A|\overline{B})=$________。

$P(\overline{B})=1-P(B)=0.2$

$P(\overline{B}|\overline{A})=1-P(B|\overline{A})=0.15$

$\therefore P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{B}|\overline{A})\cdot P(\overline{A})=0.15\times 0.4=0.06$

$P(A\overline{B})=P(\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B})=0.14$

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.14}{0.2}=0.7$$

2、设在试验 E 中事件 A 发生的概率 $P(A)=\varepsilon$ （$0<\varepsilon<1$），

把试验 E 独立地重复做下去，令 B_n =“在前 n 次实验中事件 A 至少发生一次”，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)=$___________。

Answer:一旦涉及到 $\lim\limits_{n\to\infty}P(X)=?$ 的题时，后面的不是 0 就是 1，根据经验判断即可。B_n 不发生的概率会越来越低，直到 0 为止。所以 B_n 趋于 1.

3、设总体 $X\sim N(\mu_0,\sigma^2)$， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的一组样本值， μ_0 已知。

则参数 σ^2 的极大似然估计 $\hat{\sigma}^2=$________________。

Answer:本题中与书上的不同之处在于 μ_0 已知。这意味着在 $\hat{\sigma}^2$ 表达式中不可以使用 $\overline{X}$ 来代替 μ_0

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L=-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\ln L\right)=\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\frac{n}{2(\sigma^2)}=0$$

$$\therefore \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$

4、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自于总体 X 的样本；总体均值 $EX=\mu$，总体方差 $DX=\sigma^2$，

常数 C，使得 $C\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计，则 $C=$_______________ 。

Answer:

$$E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=C\cdot\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}^2-2X_{i+1}X_i+X_i^2)$$

$$=C\cdot\sum_{i=1}^{n-1}[\,E(X_{i+1}-\mu+\mu)^2+E(X_i-\mu+\mu)^2-2E(X_{i+1})E(X_i)\,]$$

$$=C\cdot\{[2(n-1)\cdot\mu^2+\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)^2+E(X_i-\mu)^2]-2(n-1)\cdot\mu^2\}$$

$$=C\cdot 2(n-1)\cdot\sigma^2$$

$$\therefore C=\frac{1}{2(n-1)}$$

5、设随机变量 X_n 的概率密度为 $f_n(x)=\frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}$， $-\infty<x<+\infty$，$(n=1,2,\cdots)$。

则对任意 $\varepsilon>0$， 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n|\geq\varepsilon\}=$_______。

Answer:

可以看到,当 n 越大时, $f_n(x)$ 越小，而 $P\{|X_n|\geq\varepsilon\}$ 在图形中指的是 $f_n(x)$ 函数与 x 轴之间所夹的面积，所以 n 越大时，其值越小，趋于 0

6、设一袋中有 n 个白球和 m 个黑球, 现在从中无放回接连抽取 N 个球,

记 A_i = “第 i 次取时得黑球”， （$1\leq i\leq N\leq n+m$）， 则 $P(A_i)=$__________。

Answer:

本题需要对题目进行理解。这个问题可以参考一下抽签的问题。在我们并不知道前 i 次所取得的球颜色时，我们取得某种球的概率和次数无关。这是抽签公平性的理论保障。所以 $P(A_i)=\frac{m}{n+m}$

7、设总体 $X\sim N(-1,4^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_9$ 为总体 X 的一个样本, $\overline{X}$ 为样本均值,

则 $P\{|\overline{X}|<1\}=$__________ 。 （已知 $\Phi(1.5)=0.9332$）。

Answer:

$$X\sim N(-1,4^2),\overline{X}\sim N(-1,\frac{4^2}{9}),\therefore P\{-1<X<1\}=\Phi(\frac{1-(-1)}{4/3})-\Phi(0)$$

$$=\Phi(1.5)-\Phi(0)=0.9332-0.5000=0.4332$$

8、设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2xy,0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 2x\\ 0,\text{其它}\end{cases}$，

则 Y 的边沿概率密度 $f_Y(y)=$______ 。

Answer:

Y 的边沿密度应当是与 y 有关的，而与 x 并无关系，要把握这一点。所以，为了求导，在题目上是

$f(x,y)=\begin{cases}2xy,0\le x\le 1,0\le y\le 2x\\0,其它\end{cases}$ 的形式，我们需要把它变成下列形式：

$f(x,y)=\begin{cases}2xy,0\le y\le 2,\frac{y}{2}\le x\le 1\\0,其它\end{cases}$,通过对 x 积分求出在 $0\le y\le 2,$ 上 $f_Y(y)$ 的函数表达式，

求 $f_Y(y)$ 过程如下：

当 $0\le y\le 2,\ f_Y(y)=\int_{\frac{y}{2}}^{1}2xy\,dx=x^2y\Big|_{\frac{y}{2}}^{1}=y-\frac{y^3}{4}$；

其余，0；

9、某一射手向一目标射击, 每次击中的概率都是 $p(0<p<1)$, 现连续向目标射击,

直到第一次击中为止, 设子弹的消耗量为 X，则 $EX=$__________。

Answer:

列出分布表，我们可以看到实际上这是一个级数求和的问题

X	1	2	3	…	n
P	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$		$p(1-p)^{n-1}$

$EX=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}kp(1-p)^{k-1}$ 可以看出 EX 实际上可以这么写

$(1-p)$设为x，$EX=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}k(1-x)x^{k-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x)(x^k)'$

$=(1-x)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x^k)'=(1-x)\cdot[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x(1-x^n)}{1-x}]'\quad(0<x<1)$

$=(1-x)\cdot(\frac{x}{1-x})'$

$=(1-x)\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$

$=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{p}$

$\therefore EX=\frac{1}{p}$

三、（满分 8 分）接连不断地掷一颗匀称的骰子, 直到出现小于 5 的点数为止, 以 X 表示最后一次掷出的点数, 以 Y 表示掷骰子的次数。

试求：（1）求二维随机变量 (X,Y) 的分布律；

（2） 求 (X,Y) 关于 X 的边沿分布律； 求 (X,Y) 关于 Y 的边沿分布律。

四、（满分 20 分）（**此题学《概率统计 A》的学生做，学《概率统计 B》的学生不做**）

设随机过程 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，$t\in(-\infty,+\infty)$，其中 $a,\omega(\neq 0)$ 是实常数，Θ 服从区间 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布，

试求：（1）写出 Θ 的概率密度 $f(\theta)$；

（2）$E[X(t)]$；（3）$E[X(t)X(t+\tau)]$；

（4）$\lim\limits_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}X(e,t)dt$；　　（5）$\lim\limits_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}X(e,t)X(e,t+\tau)dt$ 。

[四]、(满分 20 分)(此题学《概率统计 B》的学生做；学《概率统计 A》的学生不做)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本；总体均值 $EX=\mu$，总体方差 $DX=\sigma^2$，

记 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$，$(n=1,2,\cdots)$ 。

试求：（1）EY_n，DY_n；　（2）试证 $\{Y_n\}$ 以概率收敛于 μ；

（3）$E|Y_n-\mu|^2$；　（4）$E|Y_n+\mu|^2$ ；（5）试证 $\lim\limits_{n\to\infty}E|Y_n^2-\mu^2|=0$ 。

一、单项选择题（每小题 4 分，满分 36 分）

1、A ；2、B；　3、A ；4、D；

5、B ；6、C；7、A ；　8、C；　9、D。

二、填空题（每小题 4 分，满分 36 分）

1、$P(A|\overline{B})=0.7$； 2、$\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)=1$ 。 3、$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$ ；

4、$C=\frac{1}{2(n-1)}$； 5、0； 6、$P(A_i)=\frac{A_{n+m-1}^{N-1}A_m^1}{A_{n+m}^N}=\frac{m}{n+m}$。

7、0.4332； 8、$f_Y(y)=\begin{cases}y(1-\frac{y^2}{4}),0\le y\le 2\\ 0,\text{其它}\end{cases}$； 9、$EX=\frac{1}{p}$ 。

三、（满分 8 分）

解 解 (1) 依题意知 X 的可能取值为 1, 2, 3, 4; Y 的可能取值为$1,2,3,\cdots$;

于是(X,Y)的分布律为

$P\{X=i,Y=j\}=(\frac{2}{6})^{j-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}$ ，$i=1,2,3,4$； $j=1,2,\cdots$. ⋯ ⋯⋯4 分

(2) $P\{X=i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$，$i=1,2,3,4$； ⋯ ⋯6 分

$P\{Y=j\}=\sum_{i=1}^{4}P\{X=i,Y=j\}$

$=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}=4\times\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{j-1}=\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{j-1}$，$j=1,2,\cdots$ 。⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ 8 分

四、（满分 20 分）**（此题学《概率统计 A》的学生做，学《概率统计 B》的学生不做）**

解 （1） $f(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi},0<\theta<2\pi\\ 0,\text{其它}\end{cases}$ ；⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯4 分

（2） $E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]=\int_{-\infty}^{+\infty}a\cos(\omega t+\theta)f(\theta)d\theta$

$=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0$ ；⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯8 分

（3） $E[X(t)X(t+\tau)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)\cdot a\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)]$

$$=E[a^2\frac{1}{2}(\cos(\omega t+\omega(t+\tau)+2\Theta)+\cos\omega\tau)]$$

$$=\frac{a^2}{2}[E(\cos(\omega t+\omega(t+\tau)+2\Theta))+E(\cos\omega\tau)]$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau;$$ ……………………………………12 分

（4）时间均值 $\overline{X(t)}=\overline{X(e,t)}=\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}X(e,t)dt$

$$=\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}a\cos(\omega t+\Theta)dt=\lim_{l\to+\infty}\frac{a}{2l}\cdot\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\Theta)|_{-l}^{l}$$

$$=\lim_{l\to+\infty}\frac{a}{2\omega}\frac{\sin(\omega l+\Theta)-\sin(-\omega l+\Theta)}{l}=0,$$ ………………………16 分

（5）时间相关函数

$$\overline{X(t)X(t+\tau)}=\overline{X(e,t)X(e,t+\tau)}=\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}X(e,t)X(e,t+\tau)dt$$

$$=\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}a\cos(\omega t+\Theta)\cdot a\cos[\omega(t+\tau)+\Theta]dt$$

$$=\lim_{l\to+\infty}\frac{a^2}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{\cos\omega\tau+\cos[\omega(2t+\tau)+\Theta]}{2}dt=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau.$$ ……………………………20 分

[四]、（满分 20 分）（此题**学《概率统计 B》**的学生做；学**《概率统计 A》**的学生不做）

解 （1）由条件，可知，

$$EY_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}EX_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu=\mu,$$

$$DY_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}DX_k=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2;$$ ……………………………4 分

（2）对任意 $\varepsilon>0$，由 $0\le P\{|Y_n-\mu|\ge\varepsilon\}\le\frac{E|Y_n-\mu|^2}{\varepsilon^2}=\frac{DY_n}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n}\sigma^2$，

利用（1）的结果，即得 $\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-\mu|\ge\varepsilon\}=0$，

于是$\{Y_n\}$以概率收敛于μ 。……………………………8 分

（3）$E|Y_n-\mu|^2=DY_n=\frac{1}{n}\sigma^2$，……………………………12 分

（4） $E|Y_n+\mu|^2=D(Y_n+\mu)+[E(Y_n+\mu)]^2$

$=DY_n+4\mu^2=\frac{1}{n}\sigma^2+4\mu^2$，……………………………16 分

或者 $EY_n{}^2=DY_n+(EY_n)^2=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2$，

$E|Y_n+\mu|^2=EY_n{}^2+2\mu EY_n+\mu^2=(\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2)+2\mu^2+\mu^2=\frac{1}{n}\sigma^2+4\mu^2$；

（5） $0\le E|Y_n{}^2-\mu^2|=E|(Y_n+\mu)(Y_n-\mu)|$

$\le(E|Y_n+\mu|^2)^{1/2}(E|Y_n-\mu|^2)^{1/2}=(\frac{1}{n}\sigma^2+4\mu^2)^{1/2}(\frac{1}{n}\sigma^2)^{1/2}$，

于是$\lim\limits_{n\to\infty}E|Y_n{}^2-\mu^2|=0$。……………………………20 分