1、证明若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\mathrm{S}$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_1+2a_2+\cdots+na_n)}{n}=0$,

证明:令 $s_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$,则$\lim\limits_{i\to\infty}s_i=S$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+2a_2+\cdots+na_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n+(a_2+\cdots+(n-1)a_n)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n+(s_n-s_1)+(s_n-s_2)+\cdots+(s_n-s_{n-1})}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ns_n-(s_1+s_2+\cdots+s_{n-1})}{n}=\lim_{n\to\infty}\{s_n-\frac{(s_1+\cdots+s_{n-1})}{n}\}=0$$

2、 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

$$\because\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$ 由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1.$$

3、

证明当$\alpha\le 1$时,

$a_n=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$,不是基本列.

证明:$\because a_{n+p}-a_n=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}$

$$\ge\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\ge\frac{p}{n+p}$$

$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,对$\forall N\in\mathrm{N}^*$,$\exists n_0>N$, $p_0=n_0$,

使$\left|a_{n_0+p_0}-a_{n_0}\right|>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$.

所以不是基本列

4、 证明数列$x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在

证明：显然 $x_{n+1}>x_n$，$\therefore\{x_n\}$是单调递增的；

又$\because x_1=\sqrt{3}<3$, 假定 $x_k<3$, $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$

$\therefore\{x_n\}$是有界的；

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

$\because x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$，$x_{n+1}^2=3+x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$,

解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，$A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$（舍去）

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

5、 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n}\quad(a>1)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n-1)^2}{a^n-a^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{a^{n-1}(a-1)}$$

$$=\frac{1}{a-1}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)-(2n-3)}{a^{n-1}-a^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a^{n-2}(a-1)^2}$$

$$=\frac{1}{(a-1)^2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a^{n-2}}=0$$

6、 假设$f:R\to R$, 满足方程$f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in R$

证明对一切有理数成立:$f(x)=xf(1)$.

证明:由于

$f(0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$

$f(0)=f(x+-x)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(x)=-f(-x)$

因此f是奇函数

又$f(n)=f((n-1)+1)=f(n-1)+f(1)=f(n-2+1)+f(1)$

$=f(n-2)+2f(1)=\ldots\ldots=nf(1)$

假设$x=\dfrac{n}{m},mx=n$, 有 $f(mx)=mf(x)$

所以有$f(x)=\dfrac{1}{m}f(n)=\dfrac{n}{m}f(1)\Rightarrow f\left(\dfrac{n}{m}\right)=\dfrac{n}{m}f(1)$

又由于f是奇数函数, 因此$f\left(-\dfrac{n}{m}\right)=-\dfrac{n}{m}f(1)$

7、证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

证　函数在点 $x=1$ 处没有定义.

$\because \left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|x-1\right|$　　任给 $\varepsilon>0,$

要使 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$　只要取 $\delta=\varepsilon,$

当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$