Nonlinear Systems 非线性系统

第一讲

教材与参考书目：

非线性系统（第三版）.Hassan K. Khalil, 电子工业出版社，2005.

- 非线性系统的分析与控制，洪奕光 程代展 著，科学出版社，2005.
- 非线性控制系统理论与应用，胡跃明 编著，国防工业出版社 2005.

On this course

- 本课程主要内容：
- □ 非线性系统分析
- □ 非线性系统设计

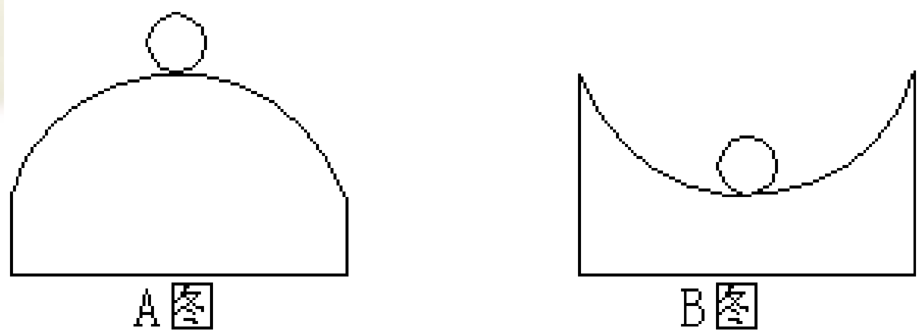
非线性系统分析主要内容:

- （1） 解的存在唯一性；解对参数和初始条件的连续依赖性、解的估计（比较原理）。
- （2）基于Lyapunov 方法分析非线性系统的（局部、区域、全局）稳定性和有界性，包括：稳定、渐近稳定、不稳定、有界和毕竟一致有界，以及输入状态稳定性等。
- （3）局部近似线性化方法。
- （4）中心流形定理。
- （5） 扰动系统的稳定性分析（零扰动、有界扰动、互联扰动等）。

非线性系统设计主要内容：

- （1） 局部近似线性化、增益调整法和积分控制。
- （2） 精确反馈线性化。
- （3） 滑模控制。
- （4） Lyapunov 再设计。
- （5） 反步法（back-stepping）。
- （6） 基于无源性的控制和高增益观测器。

稳定性的定义



稳定性直观定义：当一个实际的系统处于一个平衡的状态时，如果受到外来作用的影响，系统经过一个过渡过程仍然能够回到原来的平衡状态，我们称这个状态就是稳定的，否则称为不稳定。


MANPOWER
PLACE DE LA DEFEN
2004/07/03
Stability Model

稳定性的萌芽思想

- 两千年前，汉朝的淮南王刘安《淮南子•说山训》："下轻上重，其覆必易"；
- 宋朝沈括在《梦溪笔谈》---《忘怀录》中指出："安车车轮不欲高，高则摇"；
- 类似的，1500年前晋书上所述"行人安稳，布帆无恙"；
- 西方"**stable**"源出于拉丁文"**stabilis**"，表示坚持、保持的意思；
- 以上说法与观念表现了对稳定这一概念的最初理解。

稳定性科学概念的发展

18世纪下半叶到19世纪末，发生了一些具有深远影响的事件，从中人们可以看到稳定性理论产生的必然性。

- J. Watt 1765改进了T. Newcomen 发明的蒸气机，引发了工业革命；
- J. L. Lagrange 1780年出版 《分析力学》，科学地讨论了平衡位置的稳定性；
- L. Dirichlet 1846年证明了势能极小的平衡是稳定的；
- C. Hermite 1856年建立了关于多项式对根交错的理论；
- J. C. Maxwell 1868年发表的“论调节器”，讨论了蒸气机自动调速器与时钟机构的运动稳定性；

稳定性科学概念的发展

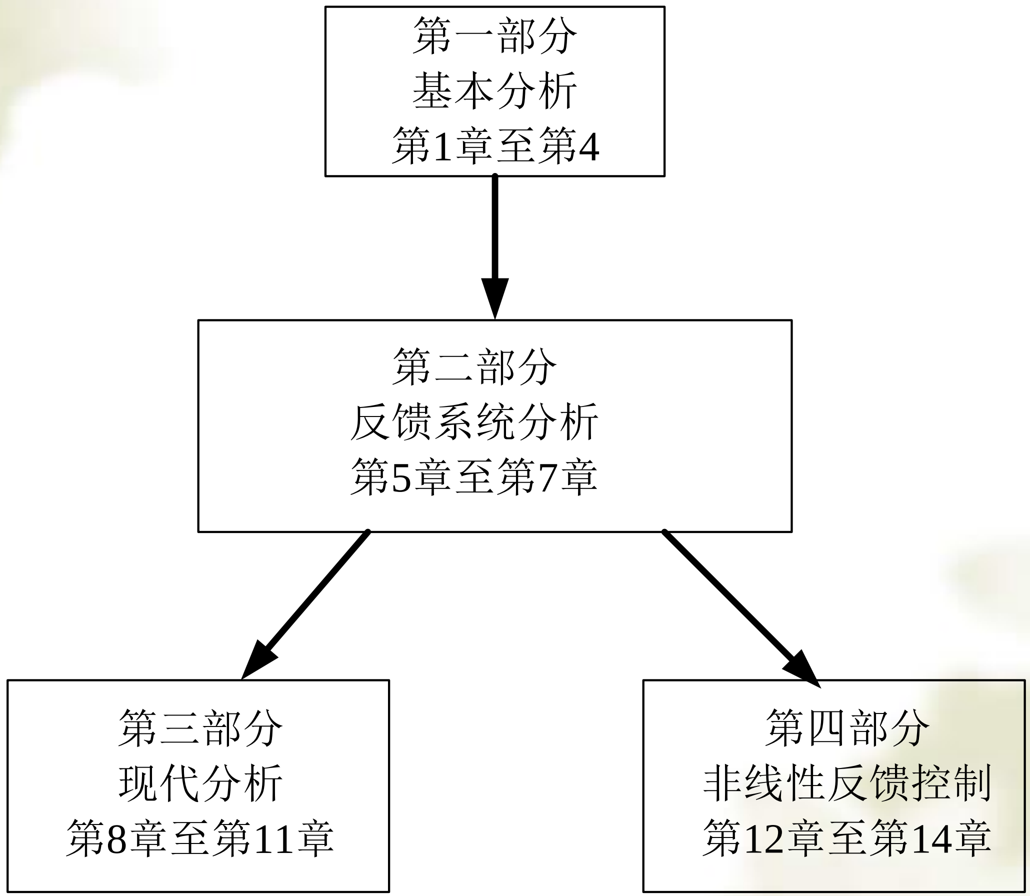
- **A.L. Cauchy** 在**19**世纪给出了关于极限描述的ε—δ，ε—N语言；
- **H. Poincare**在微分方程定义的积分曲线和天体力学方面作出了贡献；
- **G. Peano**，**I. Bendixson**和**G. Darboux**微分方程解对初值及参数连续依赖性的研究。

上述这些重要事件及相关科学的进展促成了19世纪末稳定性理论的形成。

两个主要学派

- **Routh-Hurwitz （1875，1895）**通过判断系统的特征根是否在复平面的左半平面判定系统是否稳定；特征根具有严格负实部.

- **A.M. Lyapunov** 1892年发表著名的博士论文《运动稳定性一般问题》，通过考察系统能量是否衰减来判定稳定性.


第一部分
基本分析
第1章至第4
第二部分
反馈系统分析
第5章至第7章
第三部分
现代分析
第8章至第11章
第四部分
非线性反馈控制
第12章至第14章

第一章 绪论

1.1 非线性模型和非线性现象

1。状态空间模型的几个基本概念

一阶常微分方程组：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_p) \\
\dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_p) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(\underset{\text{时间变量}}{t}, \underbrace{x_1, \cdots, x_n}_{\text{状态变量}}, \underbrace{u_1, \cdots, u_p}_{\text{输入变量}})
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ f_2(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$$

$$\left.\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) & \text{状态方程} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) & \text{输出方程} \end{cases}\right\} \text{状态空间模型}$$

无激励状态方程： $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ 非自治系统 / 时变系统

自治系统 / 时不变系统： $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

如果系统不是自治的，就称为非自治系统或时变系统。

无激励状态方程

- 无激励状态方程一般描述

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,\cdots,x_n,t),\ i=1,2,\cdots,n.$$

$$\dot{x} = f(x,t)$$

- 自治系统或时不变系统一般描述

$$\dot{x} = f(t)$$

自治系统的特点是不随时间原点（初始时刻t_0）的移动而改变，因为时间变量从t变化到$t-a$时，不会改变状态方程的右边。

平衡状态 Equilibrium

考虑系统

$$\dot{x} = f(x,t) \qquad (1)$$

一个系统的轨线有可能只是一个单一的点。如果系统的初值取在这个点上，系统将保持在这个点上，则称该点为**平衡状态**（或**平衡点**）。

由于平衡状态是系统的一个运动，是微分方程的解，所以平衡点应该是满足下列方程的解

$$f(x_e,t) \equiv 0$$

- 自治系统平衡状态及其种类：

$$\dot{x} = f(x) \qquad f(x_e) \equiv 0$$

1. 有限孤立平衡态 $\dot{x} = (x-1)(x-2)(x-3)$

其平衡状态：$x^* = 1, 2, 3$

2. 无限可数平衡态

$$\dot{x} = \sin(x), x^* = \pm k\pi, k = 0, 1, 2, \ldots$$

3. 无限不可数平衡态，连续统

$$\dot{x} = -\mathrm{sat}(x) + 1, x^* = a \geq 1.$$

线性模型

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$y = C(t)x + D(t)u$$

线性（时不变）系统理论：

线性系统分析：解的表达式；解的稳定、渐近稳定、不稳定条件，有界干扰下解的有界性条件，能控、能观测、能稳定、能检测的定义和判据。

线性系统综合方法：状态反馈镇定、（基于状态观测器的）输出反馈镇定、干扰抑制和输出跟踪。

基于叠加原理可以得到线性系统的一整套分析和设计方法；但是对于非线性系统，叠加原理不再成立，需要更复杂的数学理论。一般地在平衡点附近的局部线性化。但是局部线性化方法有以下限制：局部特性、失去本质非线性特性、渐近稳定的非线性系统线性化后可能不渐近稳定、可控非线性系统线性化后可能不可控。例如：$\dot{x} = xu$

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \dot{x}_3 = u_2$$

本质非线性特性

有限逃逸时间 非稳定线性系统的状态只有当时间趋于无穷时才会达到无穷，而非线性系统的状态可以在有限时间内达到无穷。例如

$$\dot{x} = x^2, x(0) > 0.$$

多孤立平衡点线性系统可能只有一个孤立平衡点或者有无穷不可数个平衡点。如果孤立平衡点稳定，则系统所有轨线都收敛到该平衡点，而与初始状态无关。非线性系统可以有多个孤立平衡点，其状态可能收敛于几个平衡点中的一个，收敛于哪个平衡点取决于系统的初始状态。

极限环只有非线性系统才能产生稳定振荡，有些非线性系统可以产生频率和幅度都固定的振荡，而与初始状态无关， 这类振荡就是一个稳定极限环，例如 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2$

分频振荡、倍频振荡或殆周期振荡稳定线性系统输出信号频率与输入信号频率相同。而非线性系统在周期信号激励下，可以产生输入信号的分频或倍频振荡，甚至可以殆周期振荡。

混沌 既不是平衡点，也不是周期振荡或殆周期振荡，这种特性通常称为混沌。

特性的多模式。统一非线性系统可能显示出两种或多种模式，无激励系统可能有多个极限环；周期激励的系统可能会出现分频、倍频或其它稳态特性；甚至出现激励幅度和频率平滑变化时，也会出现不连续的跳跃性能。