第三章 轴向拉压变形

题号 页码

（也可通过左侧的题号书签直接查找题目与解）

3-2 一外径 D=60mm、内径 d=20mm 的空心圆截面杆，杆长 l = 400mm，两端承受轴向拉力 F = 200kN 作用。若弹性模量 E = 80GPa，泊松比 μ =0.30。试计算该杆外径的改变量 ΔD 及体积改变量 ΔV。

解：1. 计算 ΔD

由于

$$\varepsilon = \frac{F}{EA}, \quad \varepsilon' = \frac{\Delta D}{D} = -\mu\varepsilon = -\frac{\mu F}{EA}$$

故有

$$\Delta D = \varepsilon' D = -\frac{\mu F D}{EA} = -\frac{4\mu F D}{E\pi(D^2 - d^2)} = -\frac{4\times 0.30\times 200\times 10^3\times 0.060}{80\times 10^9\times \pi\times(0.060^2 - 0.020^2)}\,\text{m}$$

$$= -1.79\times 10^{-5}\,\text{m} = -0.0179\text{mm}$$

2. 计算 ΔV

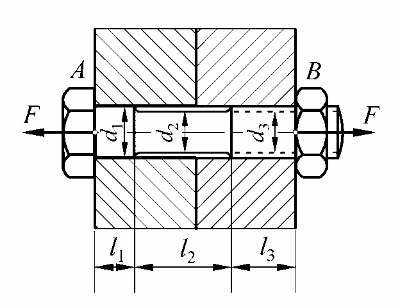
由于变形后该杆的体积为

$$V' = l'A' = (l+\varepsilon l)\frac{\pi}{4}[(D+\varepsilon' D)^2 - (d+\varepsilon' d)^2] = Al(1+\varepsilon)(1+\varepsilon')^2 \approx V(1+\varepsilon+2\varepsilon')$$

故有

$$\Delta V = V' - V = V(\varepsilon + 2\varepsilon') = \frac{Fl}{E}(1-2\mu) = \frac{200\times10^3\times0.400}{80\times10^9}\mathrm{m}^3(1-2\times0.3)$$
$$= 4.00\times10^{-7}\,\mathrm{m}^3 = 400\mathrm{mm}^3$$

3-4 图示螺栓，拧紧时产生 Δl **=0.10mm** 的轴向变形。试求预紧力 F，并校核螺栓的强度。已知：d_1 = 8.0mm，d_2 = 6.8mm，d_3 = 7.0mm；l_1=6.0mm，l_2=29mm，l_3=8mm；E = 210GPa，$[\sigma]$=500MPa。



题 3-4 图

解：1.求预紧力 F

由于各段轴力数值上均等于 F，故有

$$\Delta l = \frac{F}{E}\left(\frac{l_1}{A_1}+\frac{l_2}{A_2}+\frac{l_3}{A_3}\right) = \frac{4F}{\pi E}\left(\frac{l_1}{d_1^2}+\frac{l_2}{d_2^2}+\frac{l_3}{d_3^2}\right)$$

由此得

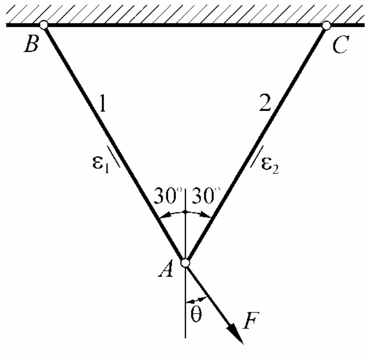
$$F = \frac{\pi E\Delta l}{4\left(\frac{l_1}{d_1^2}+\frac{l_2}{d_2^2}+\frac{l_3}{d_3^2}\right)} = \frac{\pi\times210\times10^9\times0.10\times10^{-3}}{4\times\left(\frac{0.006}{0.008^2}+\frac{0.029}{0.0068^2}+\frac{0.008}{0.007^2}\right)}\mathrm{N} = 1.865\times10^4\,\mathrm{N} = 18.65\mathrm{kN}$$

2.校核螺栓的强度

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A_{\min}} = \frac{4F}{\pi d_2^2} = \frac{4\times18.65\times10^3\,\mathrm{N}}{\pi\times0.0068^2\,\mathrm{m}^2} = 5.14\times10^8\,\mathrm{Pa} = 514\mathrm{MPa}$$

此值虽然超过 $[\sigma]$，但超过的百分数仅为 2.6%，在 5%以内，故仍符合强度要求。

3-5 图示桁架，在节点 A 处承受载荷 F 作用。从试验中测得杆 1 与杆 2 的纵向正应变分别为 ε_1 = 4.0×10^{-4} 与 ε_2 = 2.0×10^{-4}。试确定载荷 F 及其方位角 θ 之值。已知杆 1 与杆 2 的横截面面积 A_1= A_2=200mm^2，弹性模量 E_1= E_2=200GPa。



题 3-5 图

解：1.求各杆轴力

$$F_{N1}=E_1\varepsilon_1A_1=200\times10^9\times4.0\times10^{-4}\times200\times10^{-6}\text{N}=1.6\times10^4\text{N}=16\text{kN}$$

$$F_{N2}=E_2\varepsilon_2A_2=200\times10^9\times2.0\times10^{-4}\times200\times10^{-6}\text{N}=8\times10^3\text{N}=8\text{kN}$$

2.确定 F 及 θ 之值

由节点 A 的平衡方程 $\sum F_x=0$ 和 $\sum F_y=0$ 可得

$$F_{N2}\sin30^\circ+F\sin\theta-F_{N1}\sin30^\circ=0 \qquad \textbf{(a)}$$

$$F_{N1}\cos30^\circ+F_{N2}\cos30^\circ-F\cos\theta=0 \qquad \textbf{(b)}$$

化简后，成为

$$F_{N1}-F_{N2}=2F\sin\theta \qquad \textbf{(c)}$$

及

$$\sqrt{3}(F_{N1}+F_{N2})=2F\cos\theta \qquad \textbf{(d)}$$

联解方程(c)与(d)，得

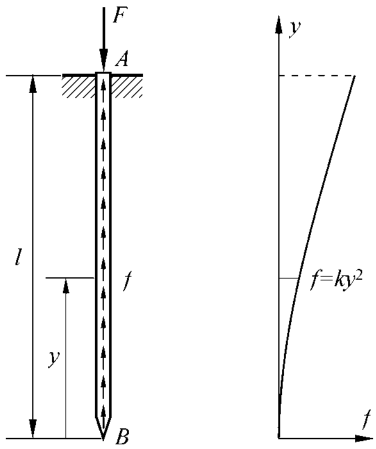
$$\tan\theta=\frac{F_{N1}-F_{N2}}{\sqrt{3}(F_{N1}+F_{N2})}=\frac{(16-8)\times10^3}{\sqrt{3}(16+8)\times10^3}=0.1925$$

由此得

$$\theta=10.89^\circ\approx10.9^\circ$$

$$F=\frac{F_{N1}-F_{N2}}{2\sin\theta}=\frac{(16-8)\times10^3}{2\sin10.89^\circ}\text{N}=2.12\times10^4\text{N}=21.2\text{kN}$$

3-7 **图示为打入土中的混凝土地桩，顶端承受载荷 F，并由作用于地桩的摩擦力所支持。设沿地桩单位长度的摩擦力为 f，且 $f=ky^2$，式中，k 为常数。试求地桩的缩短量 δ。已知地桩的横截面面积为 A，弹性模量为 E，埋入土中的长度为 l。**



题 3-7 图

解：1.求总摩擦力 F_y

$$F_y = \int_l f\mathrm{d}y = \int_0^l ky^2\mathrm{d}y = \frac{kl^3}{3}$$

2.确定 k

根据 $F_y = F$ ，得

$$\frac{kl^3}{3} = F \to k = \frac{3F}{l^3} \qquad \text{(a)}$$

3.求 y 处的轴力 F_N

$$F_\mathrm{N} = \int_0^y f\mathrm{d}y^* = \int_0^y ky^{*2}\mathrm{d}y^* = \frac{ky^3}{3}$$

4.求 δ

y **处 dy 微段的缩短量为**

$$\mathrm{d}\delta = \frac{F_\mathrm{N}\mathrm{d}y}{EA}$$

积分可得

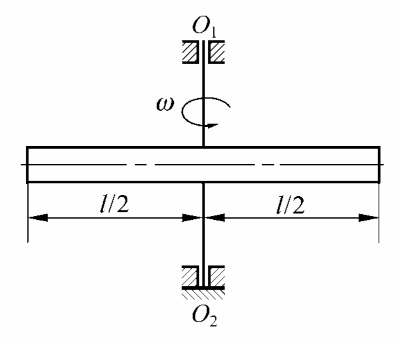
$$\delta = \int_0^l \frac{F_\mathrm{N}\mathrm{d}y}{EA} = \frac{k}{3EA}\int_0^l y^3\mathrm{d}y = \frac{kl^4}{12EA} \qquad \text{(b)}$$

将式(a）代入式(b)，最后得

$$\delta = \frac{Fl}{4EA}$$

3-8 长度为 l = 180mm 的铸铁杆，以角速度 ω 绕 O_1O_2 轴等速旋转。若铸铁密度 ρ =7.54

$\times 10^3$**kg/m**^{3}，许用应力[σ]= **40MPa**，弹性模量 E = **160GPa**，试根据杆的强度确定轴的许用转速，并计算杆的相应伸长。



题 3-8 图

解：1.求轴的许用转速 n

离轴为 x 处的 $\mathrm{d}x$ 微段质量的离心惯性力为

$$\mathrm{d}F = (\mu A \mathrm{d}x)\cdot\omega^2 x$$

x 处杆截面的轴力为

$$F_{\mathrm{N}}(x) = \int_x^{l/2} \rho A\omega^2 x^* \mathrm{d}x^* = \frac{\rho A\omega^2}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \qquad \text{(a)}$$

最大轴力在轴线处（$x = 0$），其值为

$$F_{\mathrm{N,max}} = \frac{\rho A\omega^2 l^2}{8}$$

由强度要求

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\mathrm{N,max}}}{A} = \frac{\rho\omega^2 l^2}{8} \le [\sigma]$$

可得

$$\omega \le \sqrt{\frac{8[\sigma]}{\rho l^2}} = \sqrt{\frac{8\times 40\times 10^6}{7.54\times 10^3\times 0.180^2 \sec^2}} = 1144.5\,1/\mathrm{s}$$

计算中用到 $1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2$。

相应之许用转速为

$$n = \frac{60}{2\pi}\omega = \frac{60\times 1144.5\mathrm{r}}{2\pi\ \ \mathrm{min}} = 10929\ \mathrm{r/min}$$

2.计算杆的总伸长量

由式(a)可得

$$\varepsilon(x) = \frac{F_{\mathrm{N}}(x)}{EA} = \frac{\rho\omega^2}{2E}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$$

从而有

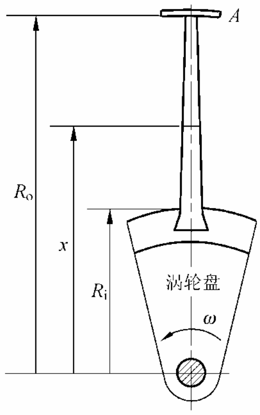
$$\Delta l = 2\int_0^{l/2} \varepsilon(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2} \frac{\rho\omega^2}{2E}[\frac{l^2}{4} - x^2]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\rho\omega^2 l^3}{12E} = \frac{7.54\times10^3\times1144.5^2\times0.180^3}{12\times160\times10^9}\mathrm{m}$$

$$= 3.00\times10^{-5}\,\mathrm{m} = 0.030\mathrm{mm}$$

计算中再次用到$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$。

3-10 图示涡轮叶片，当涡轮等速旋转时承受离心力作用。设叶冠 ***A*** 的重量为 ***W***，涡轮的角速度为ω，叶片材料的弹性模量为 ***E***，密度为ρ，许用应力为[σ]。试按各横截面的正应力均等于许用应力的原则，确定叶片 ***x*** 截面处的横截面面积 ***A***(***x***)，并计算叶片的轴向变形。与叶片的离心力相比，叶片的重量很小，可以忽略不计。



题 3-10 图

解：当各横截面上的正应力均等于许用应力$[\sigma]$时，叶片微段$\mathrm{d}x$的受力情况如图 3-10 所示。由x方向力的平衡方程

$$[\sigma](A+\mathrm{d}A)+(\rho A\mathrm{d}x)\omega^2 x-[\sigma]A=0$$

得

$$\frac{\mathrm{d}A}{A} = -\frac{\rho\omega^2 x\mathrm{d}x}{[\sigma]}$$

等号两边积分，得

$$\ln A = -\frac{\rho\omega^2 x^2}{2[\sigma]} + \ln C$$

或写成

$$A(x)=Ce^{-\frac{\rho\omega^2x^2}{2[\sigma]}} \tag{a}$$

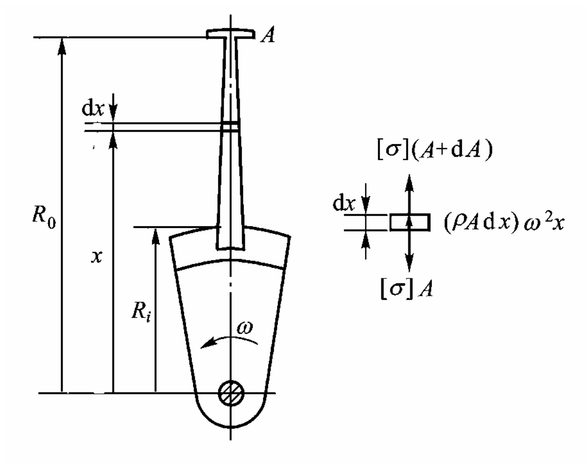


图 3-10

确定 C 的边界条件（坐标 x 以盘心为原点）是：

$$\text{当}\ x=R_0\text{时，}\ A(x)=A(R_0)=\frac{W\omega^2R_0}{g[\sigma]} \tag{b}$$

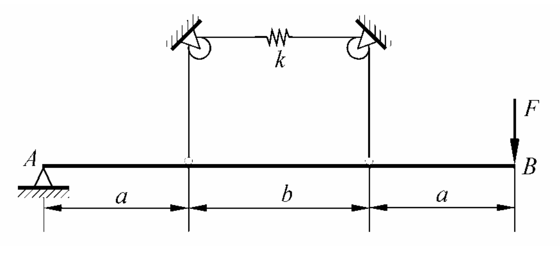
将式(b)代入式(a)，得

$$C=\frac{W\omega^2R_0}{g[\sigma]}e^{\frac{\rho\omega^2R_0^2}{2[\sigma]}} \tag{c}$$

将式(c)代入式(a)，最后得到

$$A(x)=\frac{W\omega^2R_0}{g[\sigma]}e^{\frac{\rho\omega^2(R_0^2-x^2)}{2[\sigma]}}$$

3-11 图示刚性横梁 AB，由钢丝绳并经无摩擦滑轮所支持。设钢丝绳的轴向刚度（即产生单位轴向变形所需之力）为 k，试求当载荷 F 作用时端点 B 的铅垂位移。



题 3-11 图

解：力 F 作用后刚性梁 AB 倾斜如图(见图 3-11)。设钢丝绳中的轴力为 F_N，它的总伸长为 Δl。

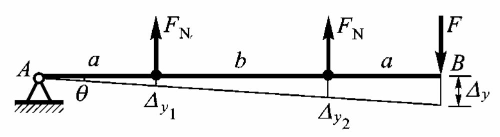


图 3-11

由刚性梁所受各力对点 A 的力矩平衡条件可得

$$F_N a + F_N(a+b) = F(2a+b)$$

$$F_N = F$$

由图示的几何关系易得

$$\varDelta_y = \theta(2a+b)$$

$$\Delta l = \varDelta_{y_1} + \varDelta_{y_2} = \theta a + \theta(a+b) = \theta(2a+b)$$

由此可见，有

$$\varDelta_y = \Delta l \tag{b}$$

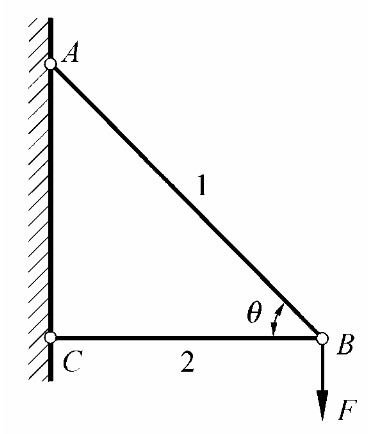
根据 k 的定义，有

$$F_N = k\Delta l = k\varDelta_y$$

即

$$\varDelta_y = \frac{F_N}{k} = \frac{F}{k}$$

3-13 图示桁架 ***ABC***，在节点 ***B*** 承受集中载荷 ***F*** 作用。杆 **1** 与杆 **2** 的弹性模量均为 ***E***，横截面面积分别为 A_1=320mm^2 与 A_2=2 580mm^2。试问在节点 ***B*** 和 ***C*** 的位置保持不变的条件下，为使节点 ***B*** 的铅垂位移最小，θ 应取何值（即确定节点 ***A*** 的最佳位置）。



题 3-13 图

解：1.求各杆轴力

由图 3-13a 得

$$F_{N1}=\frac{F}{\sin\theta},\ F_{N2}=F\text{ctan}\theta$$

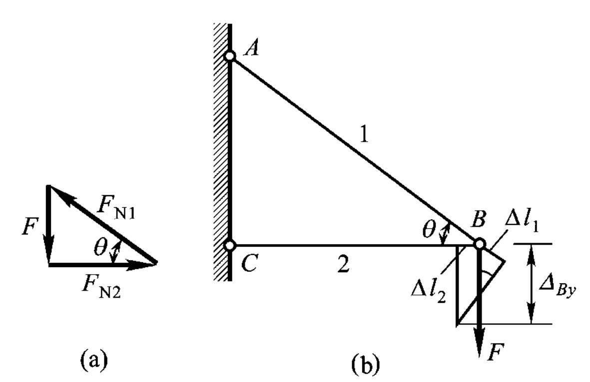


图 3-13

2.求变形和位移

由图 3-13b 得

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{EA_1}=\frac{2Fl_2}{EA_1\sin2\theta},\ \Delta l_2=\frac{F_{N2}l_2}{EA_2}=\frac{Fl_2\text{ctan}\theta}{EA_2}$$

及

$$\varDelta_{By}=\frac{\Delta l_1}{\sin\theta}+\frac{\Delta l_2}{\tan\theta}=\frac{Fl_2}{E}\left(\frac{2}{A_1\sin2\theta\sin\theta}+\frac{\text{ctan}^2\theta}{A_2}\right)$$

3.求θ的最佳值

由 $\mathrm{d}\varDelta_{By}/\mathrm{d}\theta=0$**，得**

$$\frac{-2}{A_1}\frac{(2\cos2\theta\sin\theta+\cos\theta\sin2\theta)}{\sin^2 2\theta\sin^2\theta}-\frac{2\text{ctan}\theta\cdot\csc^2\theta}{A_2}=0$$

或化成

$$\frac{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}{A_1\cos^2\theta}+\frac{2\cos\theta}{A_2}=0$$

再化简为

$$2A_1\cos^3\theta-A_2(1-3\cos^2\theta)=0$$

将 A_1**与**A_2 **的已知数据代入并化简，得**

$$\cos^3\theta+12.09375\cos^2\theta-4.03125=0$$

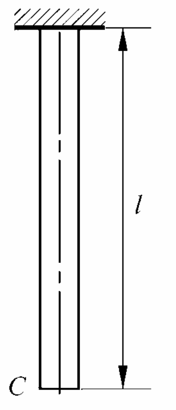
解此三次方程，舍去增根，得

$$\cos\theta=0.564967$$

由此得θ**的最佳值为**

$$\theta=55.6^\circ$$

3-15 图示杆件，长为 l，横截面面积为 A，材料密度为 ρ，应力-应变关系如图 3-14b 所示。试求杆下端截面 C 的位移。



题 3-15 图

解：自杆的下端截面 C 向上取坐标 y，在 y 处的轴力为

$$F_{\mathrm{N}} = \rho g A y$$

根据

$$\sigma = \frac{F_{\mathrm{N}}}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}\varDelta_y}{\mathrm{d}y}$$

及

$$\sigma^n = B\varepsilon$$

可得

$$B(\frac{\mathrm{d}\varDelta_y}{\mathrm{d}y}) = (\frac{\rho g A y}{A})^n$$

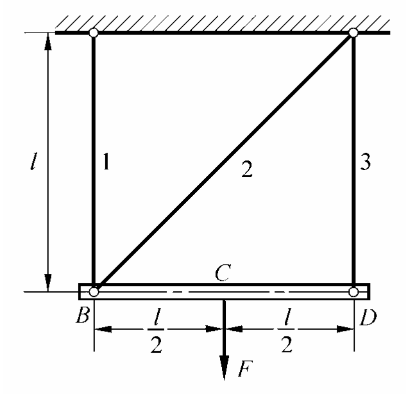
由此得

$$\mathrm{d}\varDelta_y = \frac{(\rho g)^n}{B} y^n \mathrm{d}y$$

等号两边积分，最后得到该杆下端截面 C 的位移为

$$\varDelta_{Cy} = \frac{(\rho g)^n}{B}\int_0^l y^n \mathrm{d}y = \frac{(\rho g)^n l^{n+1}}{(n+1)B} \quad (\downarrow)$$

3-16 图示结构，梁 BD 为刚体，杆 1、杆 2 与杆 3 的横截面面积与材料均相同。在梁的中点 C 承受集中载荷 F 作用。试计算该点的水平与铅垂位移。已知载荷 $F = 20\text{kN}$，各杆的横截面面积均为 $A=100\text{mm}^2$，弹性模量 $E = 200\text{GPa}$，梁长 $l = 1\ 000\text{mm}$。



题 3-16 图

解：1.求各杆轴力

由 $\sum F_x = 0$，得

$$F_{\mathrm{N2}} = 0$$

由 $\sum F_y = 0$，得

$$F_{\mathrm{N1}} = F_{\mathrm{N3}} = \frac{F}{2} = 10\mathrm{kN}$$

2．求各杆变形

$$\Delta l_2 = 0$$

$$\Delta l_1 = \frac{F_{\mathrm{N1}} l}{EA} = \frac{10 \times 10^3 \times 1.000}{200 \times 10^9 \times 100 \times 10^{-6}} \mathrm{m} = 5.0 \times 10^{-4} \mathrm{m} = 0.50\mathrm{mm} = \Delta l_3$$

3．求中点 C 的位移

由图 3-16 易知，

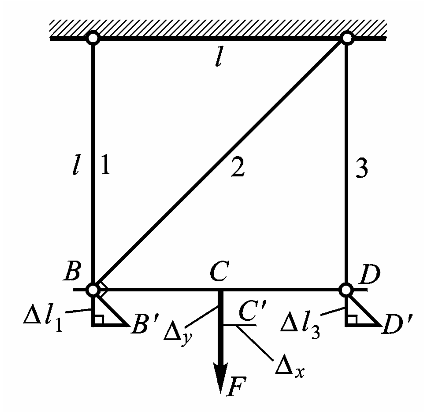
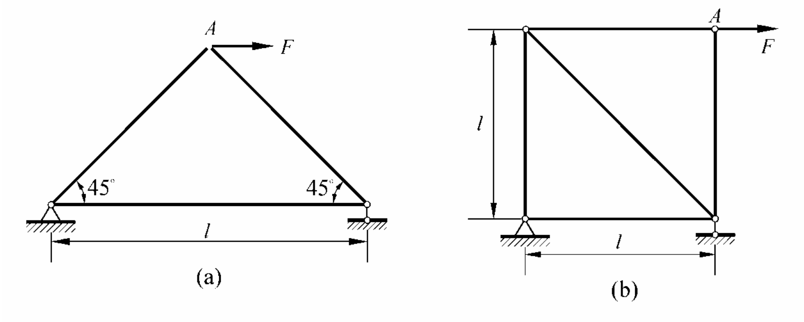


图 3-16

$$\Delta_x = \Delta l_1 = 0.50\mathrm{mm}\ (\rightarrow)，\ \Delta_y = \Delta l_1 = 0.50\mathrm{mm}\ (\downarrow)$$

3-18 如图所示桁架，试用能量法求载荷作用点沿载荷作用方向的位移。设各杆各截

面的拉压刚度均为 ***EA***。



题 3-18 图

(a)解：各杆编号示如图 **3-18a**，各杆轴力依次为

$$F_{\mathrm{N1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}F，F_{\mathrm{N2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}F，F_{\mathrm{N3}}=\frac{1}{2}F$$

该桁架的应变能为

$$V_{\varepsilon}=\sum_{i=1}^{3}\frac{F_{\mathrm{N}i}^{2}l_i}{2EA}=\frac{1}{2EA}(\frac{1}{2}F^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}l\times2+\frac{1}{4}F^2l)=\frac{F^2l}{2EA}(\frac{2\sqrt{2}+1}{4})$$

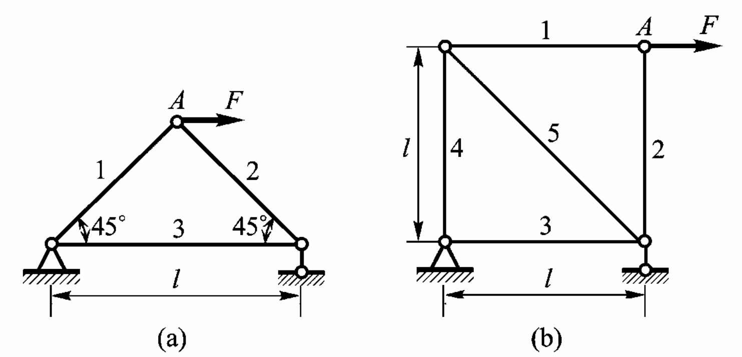


图 3-18

依据

$$W=\frac{1}{2}F\Delta，W=V_{\varepsilon}$$

最后得到

$$\Delta=\frac{2}{F}\cdot\frac{F^2l}{2EA}(\frac{2\sqrt{2}+1}{4})=\frac{(2\sqrt{2}+1)Fl}{4EA}\quad(\rightarrow)$$

(b)解：各杆编号示如图 b

列表计算如下：

i	$F_{\mathrm{N}i}$	l_i	$F_{\mathrm{N}i}^2l_i$
1	F	l	F^2l

2	0	l	0
3	F	l	F^2l
4	F	l	F^2l
5	$-\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}l$	$2\sqrt{2}F^2l$
$\sum$			$(3+2\sqrt{2})F^2l$

于是，

$$V_\varepsilon=\sum_{i=1}^{5}\frac{F_{\mathrm{N}i}^2l_i}{2EA}=\frac{(3+2\sqrt{2})F^2l}{2EA}$$

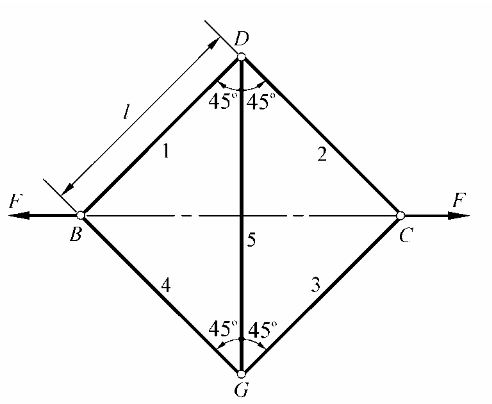
依据

$$W=\frac{1}{2}F\varDelta，\ W=V_\varepsilon$$

可得

$$\varDelta=\frac{(3+2\sqrt{2})Fl}{EA}\quad(\rightarrow)$$

3-19 图示桁架，试用能量法求节点 ***B*** 与 ***C*** 间的相对位移$\varDelta_{B/C}$。设各杆各截面的拉压刚度均为 ***EA***。



题 3-17 图

解：依据题意，列表计算如下：

i	$F_{\mathrm{N}i}$	l_i	$F_{\mathrm{N}i}^2l_i$
1	$\sqrt{2}F/2$	l	$F^2l/2$
2	$\sqrt{2}F/2$	l	$F^2l/2$
3	$\sqrt{2}F/2$	l	$F^2l/2$
4	$\sqrt{2}F/2$	l	$F^2l/2$
5	$-F$	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}F^2l$
$\sum$			$(2+\sqrt{2})F^2l$

由表中结果可得

$$V_\varepsilon = \sum_{i=1}^{5} \frac{F_{Ni}^2 l_i}{2EA} = \frac{(2+\sqrt{2})F^2 l}{2EA}$$

依据

$$W = \frac{1}{2} F\varDelta_{B/C}$$

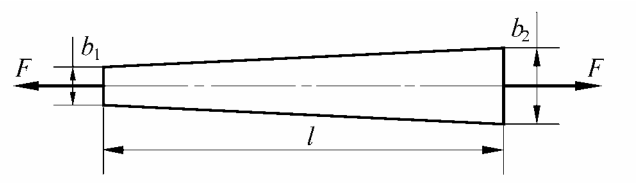
及

$$W = V_\varepsilon$$

得

$$\varDelta_{B/C} = \frac{(2+\sqrt{2})Fl}{EA} \qquad (\leftarrow\rightarrow)$$

3-20 试用能量法解题 3-6。



题 3-6 图

解：1.求$\sigma(x)$

由题 3-6 图可知，若自左向右取坐标x，则有

$$b(x) = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{l} x$$

x截面上有应力

$$\sigma(x) = \frac{F}{\delta b(x)} = \frac{F}{\delta\left(b_1 + \dfrac{b_2 - b_1}{l} x\right)}$$

2．求V_ε

$$v_\varepsilon(x) = \frac{\sigma^2(x)}{2E}$$

$$V_\varepsilon = \int_l v_\varepsilon(x)\delta b(x)\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{1}{2E} \frac{F^2}{\delta\left(b_1 + \dfrac{b_2 - b_1}{l} x\right)} \mathrm{d}x = \frac{F^2 l}{2E\delta(b_2 - b_1)} \ln\left(b_1 + \frac{b_2 - b_1}{l} x\right)\Big|_0^l$$

$$= \frac{F^2 l}{2E\delta\ (b_2 - b_1)} \ln\frac{b_2}{b_1}$$

3．求Δl

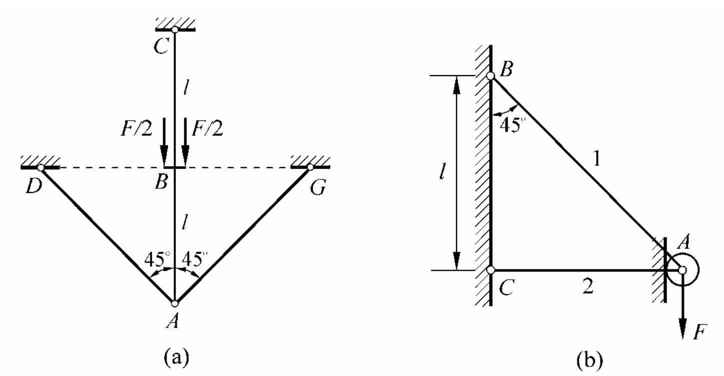
由

$$W=\frac{F\Delta\, l}{2}=V_{\varepsilon}$$

得

$$\Delta\, l=\frac{Fl}{E\delta\,(b_2-b_1)}\ln\frac{b_2}{b_1}$$

3-24 图示桁架，各杆各截面的拉压刚度相同。试计算在载荷 F 作用时各杆的轴力。



题 3-24 图

(a)解：此为一度静不定桁架。

设 $F_{\mathrm{N},AB}$ 以压为正，其余各段轴力以拉力为正。先取杆 AB 为研究对象，由 $\sum F_y=0$，

得

$$F_{\mathrm{N},BC}+F_{\mathrm{N},AB}=F \tag{a}$$

后取节点 A 为研究对象，由 $\sum F_x=0$ 和 $\sum F_y=0$ 依次得到

$$F_{\mathrm{N},AD}=F_{\mathrm{N},AG} \tag{b}$$

及

$$2F_{\mathrm{N},AD}\cos 45^{\circ}=F_{\mathrm{N},AB} \tag{c}$$

在节点 A 处有变形协调关系（节点 A 铅垂向下）

$$\Delta l_{BC}-\Delta l_{AB}=\frac{\Delta l_{AD}}{\cos 45^{\circ}}=\sqrt{2}\Delta l_{AD} \tag{d}$$

物理关系为

$$\Delta l_{BC}=\frac{F_{\mathrm{N},BC}\,l}{EA},\quad \Delta l_{AB}=\frac{F_{\mathrm{N},AB}\,l}{EA},\quad \Delta l_{AD}=\frac{F_{\mathrm{N},AD}\sqrt{2}l}{EA}=\Delta l_{AG} \tag{e}$$

将式(e)代入式(d)，化简后得

$$F_{\mathrm{N},BC}-F_{\mathrm{N},AB}=2F_{\mathrm{N},AD} \tag{d$'$}$$

联解方程(a),(c)和(d)′，得

$$F_{\mathrm{N},BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}F\ （拉），\ F_{\mathrm{N},AB}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}F\ （压），\ F_{N,AD}=F_{\mathrm{N},AG}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}F\ （拉）$$

(b)解：此为一度静不定问题。

考虑小轮 A 的平衡，由 $\sum F_y=0$，得

$$F_{\mathrm{N1}}\sin 45^{\circ}-F=0$$

由此得

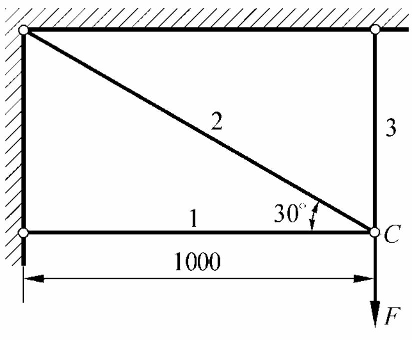
$$F_{\mathrm{N1}}=\sqrt{2}F$$

在 F 作用下，小轮 A 沿刚性墙面向下有一微小位移，在小变形条件下，$\Delta l_2\approx 0$，故有

$$F_{\mathrm{N2}}=0$$

F_{N1} 的水平分量由刚性墙面提供的约束反力来平衡。

3-25 图示桁架，杆 1、杆 2 与杆 3 分别用铸铁、铜和钢制成，许用应力分别为 $[\sigma_1]$=40MPa，$[\sigma_2]$=60MPa，$[\sigma_3]$=120MPa，弹性模量分别为 E_1=160GPa，E_2=100GPa，E_3=200GPa。若载荷 F=160kN，A_1= A_2= 2A_3，试确定各杆的横截面面积。



题 3-25 图

解：此为一度静不定结构。节点 C 处的受力图和变形图分别示如图 3-25a 和 b。

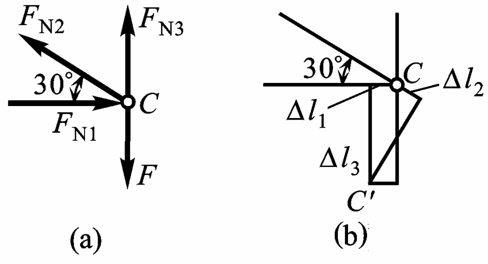


图 3-25

静力学方面

由图 a 可得

$$\sum F_x = 0,\ F_{\text{N1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_{\text{N2}} \tag{a}$$

$$\sum F_y = 0,\ \frac{1}{2} F_{\text{N2}} + F_{\text{N3}} = F \tag{b}$$

几何方面

由图 b 得变形协调方程为

$$\Delta l_1 \text{ctan}30^\circ + \frac{\Delta l_2}{\sin 30^\circ} = \Delta l_3 \tag{c}$$

物理方面

根据胡克定律，有

$$\Delta l_1 = \frac{F_{\text{N1}} l_1}{E_1 A_1} = \frac{F_{\text{N1}} l_1}{2E_1 A_3},\ \Delta l_2 = \frac{F_{\text{N2}} l_2}{E_2 A_2} = \frac{F_{\text{N2}} l_1}{\sqrt{3} E_2 A_3},\ \Delta l_3 = \frac{F_{\text{N3}} l_3}{E_3 A_3} = \frac{F_{\text{N3}} l_1}{\sqrt{3} E_3 A_3} \tag{d}$$

将式(d)代入式(c)，化简后得

$$15F_{\text{N1}} + 32F_{\text{N2}} = 8F_{\text{N3}} \tag{c'}$$

联解方程(a)，(b)和(c’)，并代入数据，得

$F_{\text{N1}} = 22.6\text{kN}$ (压)，$F_{\text{N2}} = 26.1\text{kN}$ （拉），$F_{\text{N3}} = 146.9\text{kN}$ （拉）

根据强度要求，计算各杆横截面面积如下：

$$A_1 \geq \frac{F_{\text{N1}}}{[\sigma_1]} = \frac{22.6\times 10^3}{40\times 10^6}\text{m}^2 = 5.65\times 10^{-4}\text{m}^2 = 565\text{mm}^2$$

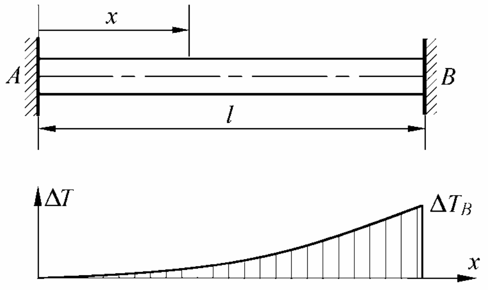
$$A_2 \geq \frac{F_{\text{N2}}}{[\sigma_2]} = \frac{26.1\times 10^3}{60\times 10^6}\text{m}^2 = 4.35\times 10^{-4}\text{m}^2 = 435\text{mm}^2$$

$$A_3 \geq \frac{F_{\text{N3}}}{[\sigma_3]} = \frac{146.9\times 10^3}{120\times 10^6}\text{m}^2 = 1.224\times 10^{-3}\text{m}^2 = 1224\text{mm}^2$$

根据题意要求，最后取

$$A_1 = A_2 = 2A_3 \geq 2450\text{mm}^2$$

3-27 图示两端固定的等截面杆 AB，杆长为 l。在非均匀加热的条件下，距 A 端 x 处的温度增量为 $\Delta T = \Delta T_B x^2 / l^2$，式中的 ΔT_B 为杆件 B 端的温度增量。试求杆件横截面上的应力。材料的弹性模量与线膨胀系数分别为 E 与 α_l。



题 3-27 图

解：1.求温度增高引起的杆件伸长

此为一度静不定问题。假如将 B 端约束解除掉，则在 x 处的杆微段 $\mathrm{d}x$ 就会因温升而有一个微伸长

$$\mathrm{d}(\Delta l_{\mathrm{t}}) = \alpha_l \Delta T \mathrm{d}x = \frac{\alpha_l \Delta T_B x^2}{l^2}\mathrm{d}x$$

全杆伸长为

$$\Delta l_t = \int_0^l \frac{\alpha_l \Delta T_B x^2}{l^2}\mathrm{d}x = \frac{\alpha_l \Delta T_B l}{3}$$

2．求约束反力

设固定端因阻止伸长而产生的约束反力为 F ，杆件因 F 作用而引起的缩短量为

$$\Delta l_F = \frac{F_{\mathrm{N}} l}{EA} = \frac{Fl}{EA}$$

由变形协调条件

$$\Delta l_F = \Delta l_t$$

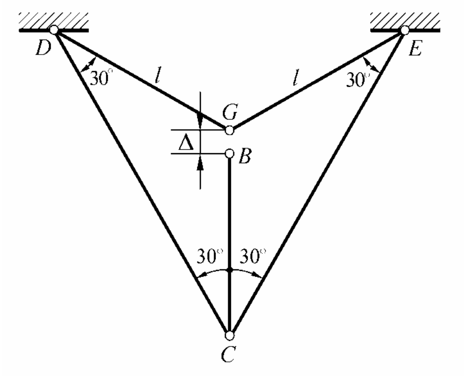
可得

$$F = \frac{EA}{l} \cdot \frac{\alpha_l \Delta T_B l}{3} = \frac{EA\alpha_l \Delta T_B}{3}$$

3．求杆件横截面上的应力

$$\sigma = \frac{F_{\mathrm{N}}}{A} = \frac{F}{A} = \frac{E\alpha_l \Delta T_B}{3}$$

3-28 图示桁架，杆 **BC** 的实际长度比设计尺寸稍短，误差为 Δ。如使杆端 **B** 与节点 **G** 强制地连接在一起，试计算各杆的轴力。设各杆各截面的拉压刚度均为 **EA**。



题 3-28 图

解：此为一度静不定问题。自左向右、自上向下将各杆编号 1~5。由强制装配容易判断，杆 1~3 受拉，杆 4 和 5 受压。装配后节点 G 和 C 的受力图分别示如图 3-28a 和 b。

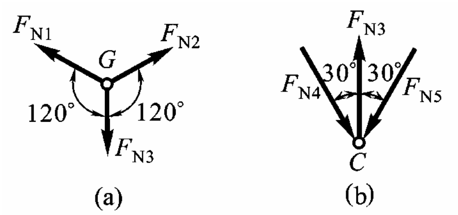


图 3-28

静力学方面

由图 a 可得

$$F_{N1}=F_{N2}=F_{N3} \tag{a}$$

由图 b 可得

$$F_{N4}=F_{N5}，\ F_{N3}=2F_{N4}\cos30^{\circ}=\sqrt{3}F_{N4} \tag{b}$$

几何方面

变形协调关系为(参看原题图)

$$\varDelta=\frac{\Delta l_1}{\cos60^{\circ}}+\frac{\Delta l_4}{\cos30^{\circ}}+\Delta l_3 \tag{c}$$

物理方面

依据胡克定律，有

$$\Delta l_i=\frac{F_{Ni}l_i}{EA} \qquad (i=1\sim5) \tag{d}$$

将式(d)代入式(c)，得

$$\varDelta=\frac{2F_{N1}l}{EA}+\frac{2F_{N4}\sqrt{3}l}{\sqrt{3}EA}+\frac{F_{N3}l}{EA} \tag{e}$$

补充方程(e)、静力学方程(a)与(b)联立求解，最后得

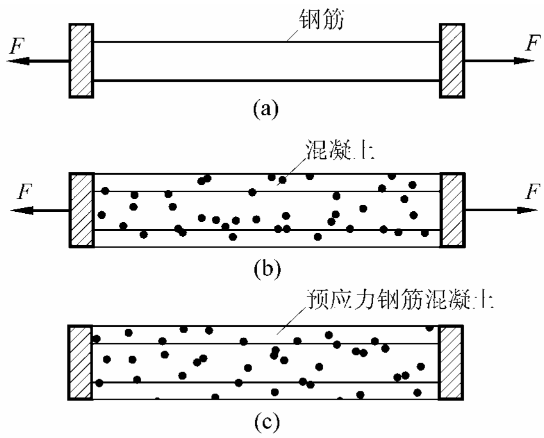
$$F_{\mathrm{N3}}=\frac{(9-2\sqrt{3})EA}{23l}\varDelta,\quad F_{\mathrm{N4}}=\frac{(3\sqrt{3}-2)EA}{23l}\varDelta$$

即

$$F_{\mathrm{N},BC}=F_{\mathrm{N},GD}=F_{\mathrm{N},GE}=\frac{(9-2\sqrt{3})EA}{23l}\varDelta \quad （拉）$$

$$F_{\mathrm{N},CD}=F_{\mathrm{N},CE}=\frac{(3\sqrt{3}-2)EA}{23l}\varDelta \quad （压）$$

3-29 一种制作预应力钢筋混凝土的方式如图所示。首先用千斤顶以拉力 F 拉伸钢筋（图 a），然后浇注混凝土（图 b）。待混凝土凝固后，卸除拉力 F（图 c），这时，混凝土受压，钢筋受拉，形成预应力钢筋混凝土。设拉力 F 使钢筋横截面上产生的初应力 σ_0=820MPa，钢筋与混凝土的弹性模量之比为 8:1，横截面面积之比为 1:30，试求钢筋与混凝土横截面上的预应力。



题 3-29 图

解：此为一度静不定问题。

卸除拉力 F 后，钢筋仍受拉，而混凝土却受压。设它们的应力分别为 σ_s 和 σ_c，由静力平衡条件可得

$$\sigma_c A_c=\sigma_s A_s \tag{a}$$

这里 σ_s 以拉为正，σ_c 以压为正。

变形协调方程为

$$\Delta l_0=\Delta l_s+\Delta l_c \tag{b}$$

式中，Δl_0 代表初加 F 时钢筋的总伸长量，Δl_s 代表卸除 F 后钢筋保留的伸长量，而 Δl_c 则代表卸除 F 后混凝土产生的缩短量，并以缩短为正。

物理关系为

$$\Delta l_0=\frac{\sigma_0}{E_s}l,\ \Delta l_s=\frac{\sigma_s}{E_s}l,\ \Delta l_c=\frac{\sigma_c}{E_c}l \qquad (c)$$

将式(c)代入式(b)，稍作化简，得

$$\sigma_0=\sigma_s+\frac{E_s}{E_c}\sigma_c$$

考虑到式(a)，有

$$\sigma_0=\sigma_s(1+\frac{E_s}{E_c}\cdot\frac{A_s}{A_c})=\frac{19}{15}\sigma_s$$

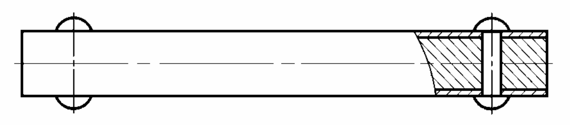
由此得

$$\sigma_s=\frac{15}{19}\sigma_0=\frac{15}{19}\times 820\text{MPa}=647\ \text{MPa}\ （拉）$$

根据式(a)，最后得到

$$\sigma_c=\frac{A_s}{A_c}\sigma_s=\frac{1}{30}\times 647\text{MPa}=21.6\ \text{MPa}\ （压）$$

3-30 图示组合杆，由直径为 30mm 的钢杆套以外径为 50mm、内径为 30mm 的铜管组成，二者由两个直径为 10mm 的铆钉连接在一起。铆接后，温度升高 40℃，试计算铆钉剪切面上的切应力。钢与铜的弹性模量分别为 E_s = 200GPa 与 E_c=100GPa，线膨胀系数分别为 α_{ls}=12.5×10^{-6}℃$^{-1}$ 与 α_{lc}=16×10^{-6}℃$^{-1}$。



题 3-30 图

解：设温度升高 ΔT 时钢杆和铜管自由伸长量分别为 δ_{Ts} 和 δ_{Tc}，由于二者被铆钉连在一起，变形要一致，即

$$\delta_{Ts}+\Delta l_s=\delta_{Tc}-\Delta l_c$$

或写成

$$\Delta l_s+\Delta l_c=\delta_{Tc}-\delta_{Ts}$$

这是本题的变形协调方程。这里，伸长量 Δl_s 和缩短量 Δl_c 均设为正值。

引入物理关系，得

$$\frac{F_{\mathrm{Ns}}l}{E_{\mathrm{s}}A_{\mathrm{s}}}+\frac{F_{\mathrm{Nc}}l}{E_{\mathrm{c}}A_{\mathrm{c}}}=(\alpha_{lc}-\alpha_{ls})l\Delta T$$

将静力平衡条件 $F_{\mathrm{Ns}}=F_{\mathrm{Nc}}=F$ 代入上式，得

$$F=\frac{E_{\mathrm{s}}A_{\mathrm{s}}E_{\mathrm{c}}A_{\mathrm{c}}}{E_{\mathrm{s}}A_{\mathrm{s}}+E_{\mathrm{c}}A_{\mathrm{c}}}(\alpha_{lc}-\alpha_{ls})\Delta T$$

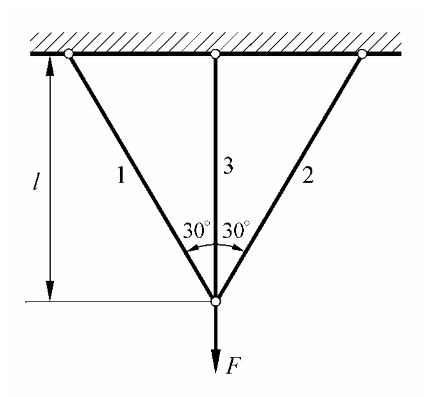
注意到每个铆钉有两个剪切面，故其切应力为

$$\tau=\frac{F_{\mathrm{S}}}{\mathrm{A}}=\frac{F}{2A}=\frac{E_{\mathrm{s}}A_{\mathrm{s}}E_{\mathrm{c}}A_{\mathrm{c}}(\alpha_{lc}-\alpha_{ls})\Delta T}{2A(E_{\mathrm{s}}A_{\mathrm{s}}+E_{\mathrm{c}}A_{\mathrm{c}})}$$

$$=\frac{200\times10^{9}\times0.030^{2}\times100\times10^{9}\times(0.050^{2}-0.030^{2})\times(16-12.5)\times10^{-6}\times40\mathrm{N}}{2\times0.010^{2}\times[200\times10^{9}\times0.030^{2}+100\times10^{9}\times(0.050^{2}-0.030^{2})]\mathrm{m}^{2}}$$

$$=5.93\times10^{7}\mathrm{Pa}=59.3\mathrm{MPa}$$

3-32 图示桁架，三杆的横截面面积、弹性模量与许用应力均相同，并分别为 A，E 与 $[\sigma]$。试确定该桁架的许用载荷 $[F]$。为了提高许用载荷之值，现将杆 3 的设计长度 l 变为 $l+\Delta$。试问当 Δ 为何值时许用载荷最大，其值 $[F]_{\max}$ 为何。



题 3-32 图

解:此为一度静不定问题。

节点 C 处的受力及变形示如图 3-32a 和 b。

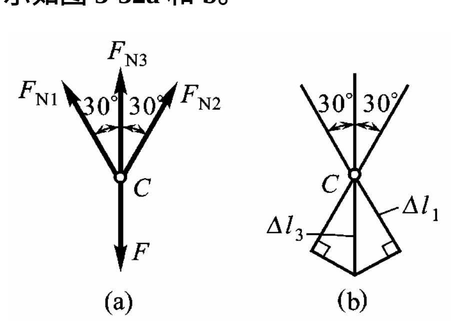


图 3-32

静力学方面

由图 a 可得

$$F_{N1}=F_{N2}，\ 2F_{N1}\cos30^{\circ}+F_{N3}=F \tag{a}$$

几何方面

由图 b 可得

$$\Delta l_1=\Delta l_3\cos30^{\circ} \tag{b}$$

物理方面

依据胡克定律,有

$$\Delta l_i=\frac{F_{Ni}l_i}{EA}\qquad (i=1,2,3) \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，化简后得

$$F_{N3}=\frac{4}{3}F_{N1} \tag{b'}$$

将方程(**b’**)与方程(a)联解，得

$$F_{N1}=F_{N2}=\frac{3}{4+3\sqrt{3}}F，\ F_{N3}=\frac{4}{4+3\sqrt{3}}F>F_{N1}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{N3}}{A}=\frac{4F}{(4+3\sqrt{3})A}\leq[\sigma]$$

由此得

$$F\leq\frac{(4+3\sqrt{3})[\sigma]A}{4},\quad [F]=\frac{(4+3\sqrt{3})[\sigma]A}{4}$$

为了提高$[F]$值，可将杆 3 做长$\varDelta$，参考图 b 给的几何关系，这里有

$$\Delta l_3+\varDelta=\frac{\Delta l_1}{\cos30^{\circ}}$$

式中，Δl_3与Δl_1均为受载后的伸长，依题意，有了$\varDelta$后，应使三根杆同时达到$[\sigma]$，即

$$\frac{[\sigma]}{E}l+\varDelta=\frac{4[\sigma]}{3E}l$$

由此得

$$\varDelta=(\frac{4}{3}-1)\frac{[\sigma]l}{E}=\frac{[\sigma]l}{3E}$$

此时，各杆的强度均充分发挥出来，故有

$$[F]_{\max}=2([\sigma]A\cos30^{\circ})+[\sigma]A=(1+\sqrt{3})[\sigma]A$$