第二章　解析函数

一、1. (B)　2. (B)　3. (D)　4. (C)　5. (A)
6. (C)　7. (C)　8. (C)　9. (A)　10. (D)
11. (A)　12. (C)　13. (D)　14. (B)　15. (C)

二、填空题

1. $1+i$　　2. 常数　　3. $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$可微且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

4. $\frac{27}{4}-\frac{27}{8}i$　　5. $x^2-y^2+2xyi+ic$ 或 z^2+ic，c 为实常数　　6. i

7. $\sqrt[8]{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}),k=0,1,2,3$　　8. $e^{-2k\pi}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

9. $-\arctan\frac{4}{3}$　　10. $2k\pi i\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

四、1. $f'(z)=-\sin z$;　　2. $f'(z)=(z+1)e^z$.

五、$\frac{dw}{dz}=\frac{2w-e^z}{3w^2-2z}$,

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{-6w(\frac{dw}{dz})^2+4\frac{dw}{dz}-e^z}{3w^2-2z}=\frac{8w+6e^zw-12w^2-3e^zw^2-4e^z+2e^zz}{(3w^2-2z)^2}.$$

七、$f(z)=\frac{1-i}{2}z^2+(1+i)c$ .c 为任意实常数.

十、$z=-2k\pi+i\ln4\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

第三章　复变函数的积分

一、1. (D)　2. (D)　3. (B)　4. (C)　5. (B)
6. (A)　7. (C)　8. (A)　9. (A)　10. (C)
11. (C)　12. (D)　13. (D)　14. (C)　15. (B)

二、1. 2　2. $10\pi i$　3. 0　4. $6\pi i$　5. $\frac{\pi i}{12}$　6. 平均值

7. 解析　8. $\frac{1}{2}(y^2-x^2)+C$　9. -3　10. $-u(x,y)$

三、1. 当$0<R<1$时，0； 当$1<R<2$时，$8\pi i$； 当$2<R<+\infty$时，0.
2. 0.

六、$2\pi i$.

七、0.

八、$\oint\limits_{|z|=1}(z+1)^2\frac{f(z)}{z^2}dz=8\pi i$, $\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta=2\pi$.

十、$f(z)=2c_1\ln z+c_2+ic_3$（c_1,c_2,c_3为任意实常数）.

第四章　级　数

一、1. (C)　2. (C)　3. (D)　4. (A)　5. (D)
6. (D)　7. (B)　8. (A)　9. (C)　10. (B)
11. (D)　12. (B)　13. (B)　14. (A)　15. (C)

二、1. 发散　　2. $R_2 \geq R_1$　　3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\ (n=0,1,2,\cdots)$ 或（$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\ (n=0,1,2,\cdots\quad 0<r<d)$）

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}\ (|z|<1)$　　6. $\frac{R}{2}$　　7. $1<|z-1|<2$

8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$　　9. π　　10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{(z-i)^{n+2}}$

三、$a_0=a_1=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geq 2)$,

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}\}\ (n=0,1,2,\cdots).$$

六、$f(z)=\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$，6.

九、$\frac{\ln(2-z)}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z}\cdot\ln(2-z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{n-k+1})(z-1)^n.$

第二章　解析函数

一、选择题：

1. 函数 $f(z)=3|z|^2$ 在点 $z=0$ 处是（ A ）

（A）解析的　　（B）可导的
（C）不可导的　　（D）既不解析也不可导

2. 函数 $f(z)$ 在点 z 可导是 $f(z)$ 在点 z 解析的（ B ）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件
（C）充分必要条件　　（D）既非充分条件也非必要条件

3. 下列命题中，正确的是（ D ）

（A）设 x, y 为实数，则 $|\cos(x+iy)|\le 1$

（B）若 z_0 是函数 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在点 z_0 不可导

（C）若 u, v 在区域 D 内满足柯西-黎曼方程，则 $f(z)=u+iv$ 在 D 内解析

u.v.可微

（D）若 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则 $\overline{if(z)}$ 在 D 内也解析 ✓

4. 下列函数中，为解析函数的是（ C ）

（A）x^2-y^2-2xyi　　（B）x^2+xyi

（C）$2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x)$ ✓　　（D）x^3+iy^3

5. 函数 $f(z)=z^2\,\mathrm{Im}(z)$ 在 ~~z=0~~ $z=0$ 处的导数（ A ）

（A）等于 0　　（B）等于 1　　（C）等于 -1　　（D）不存在

6. 若函数 $f(z)=x^2+2xy-y^2+i(y^2+axy-x^2)$ 在复平面内处处解析，那么实常数 $a=$（ C ）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）-2

7. 如果 $f'(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内处处为零，且 $f(0)=-1$，那么在 $|z|<1$ 内 $f(z)\equiv$（ C ）

（A）0　　（B）1　　（C）-1　　（D）任意常数

8. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内有定义，则下列命题中，正确的是　C

(A) 若$|f(z)|$在D内是一常数，则$f(z)$在D内是一常数

(B) 若$\mathrm{Re}(f(z))$在D内是一常数，则$f(z)$在D内是一常数

(C) 若$f(z)$与$f(\overline{z})$在D内解析，则$f(z)$在D内是一常数

(D) 若$\arg f(z)$在D内是一常数，则$f(z)$在D内是一常数

9. 设$f(z)=x^2+iy^2$，则$f'(1+i)=$(D)

(A) 2　　(B) $2i$　　(C) $1+i$　　(D) $2+2i$

10. i^i的主值为(D)

(A) 0　　(B) 1　　(C) $e^{\frac{\pi}{2}}$　　(D) $e^{-\frac{\pi}{2}}$

11. $e^{\bar{z}}$在复平面上(A)

(A) 无可导点　　(B) 有可导点，但不解析

(C) 有可导点，且在可导点集上解析　　(D) 处处解析

12. 设$f(z)=\sin z$，则下列命题中，不正确的是(C)

(A) $f(z)$在复平面上处处解析　　(B) $f(z)$以2π为周期

(C) $f(z)=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$　　(D) $|f(z)|$是无界的

13. 设α为任意实数，则1^α(D)

(A) 无定义　　(B) 等于1

(C) 是复数，其实部等于1　　(D) 是复数，其模等于1

14. 下列数中，为实数的是(B)

(A) $(1-i)^3$　　(B) $\cos i$　　(C) $\ln i$　　(D) $e^{3-\frac{\pi}{2}i}$

15. 设α是复数，则(C)

(A) z^α在复平面上处处解析　　(B) z^α的模为$|z|^{|\alpha|}$

(C) z^α一般是多值函数　　(D) z^α的辐角为z的辐角的$|\alpha|$倍

二、填空题

1. 设 $f(0)=1, f'(0)=1+i$，则 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-1}{z}=$ $1+i$

2. 设 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内是解析的，如果 $u+v$ 是实常数，那么 $f(z)$ 在 D 内是 常数

3. 导函数 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 在区域 D 内解析的充要条件为 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 可微 且有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

4. 设 $f(z)=x^3+y^3+ix^2y^2$，则 $f'(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i)=$ $\frac{27}{4}-\frac{27}{4}i$

5. 若解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实部 $u=x^2-y^2$，那么 $f(z)=$ z^2+C

6. 函数 $f(z)=z\,\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Re}(z)$ 仅在点 $z=$ $-i$ 处可导

7. 设 $f(z)=\dfrac{1}{5}z^5-(1+i)z$，则方程 $f'(z)=0$ 的所有根为 $\sqrt[8]{2}\left[\cos(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})\right]$ $k=0,1,\ldots$

8. 复数 i^i 的模为 $e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

9. $\mathrm{Im}\{\ln(3-4i)\}=$ $-\arctan\frac{4}{3}$
主值

10. 方程 $1-e^{-z}=0$ 的全部解为 $z=-2k\pi i \quad (k\in Z)$

三、设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为 $z=x+iy$ 的解析函数，若记 $w(z,\bar{z})=u(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2i})+iv(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2i})$，则 $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$.

$\frac{\partial w}{\partial \bar z}=\frac{\partial u}{\partial \bar z}+i\frac{\partial v}{\partial \bar z}=\frac{\partial u}{\partial(\frac{z+\bar z}{2})}\cdot\frac{\partial(\frac{z+\bar z}{2})}{\partial \bar z}+i\frac{\partial v}{\partial(\frac{z-\bar z}{2i})}\cdot\frac{\partial(\frac{z-\bar z}{2i})}{\partial(\bar z)}$

$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}-i\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{1}{2i}$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right]=0$

四、试证下列函数在 z 平面上解析，并分别求出其导数

1. $f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$; $=\cos z$ $\quad = -\sin z$
初等函数

2. $f(z)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y)$; $=(ze^z)$, $\quad = (z+1)e^z$.

五、设 $w^3-2zw+e^z=0$，求 $\dfrac{dw}{dz},\dfrac{d^2w}{dz^2}$.

两边同时对 z 求导: $\frac{dw}{dz}=\frac{2w-e^z}{3w^2-2z}$.

再对 $\frac{dw}{dz}$ 求导: $\frac{d^2w}{dz^2}=$

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z} = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ $x=y^2$ $=\frac{1}{2}$. $x=y$ $=0$. 不同值，不可导.

六、设 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ 试证 $f(z)$ 在原点满足柯西-黎曼方程，但却不可导.

七、已知 $u-v=x^2-y^2$，试确定解析函数 $f(z)=u+iv$.

八、设 $\vec{s}$ 和 $\vec{n}$ 为平面向量，将 $\vec{s}$ 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 即得 $\vec{n}$.如果 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，

则有 $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n},\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}$（$\frac{\partial}{\partial s}$ 与 $\frac{\partial}{\partial n}$ 分别表示沿 $\vec{s},\vec{n}$ 的方向导数）. ?

九、若函数 $f(z)$ 在上半平面内解析，试证函数 $\overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面内解析.

十、解方程 $\sin z+i\cos z=4i$.

七. $u-v=x^2-y^2$. 两边同时对 x, 对 y 求偏导.

有: $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=2x\\ \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=-2y\end{cases}$ 而 $f(z)$ 是解析的: $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=(x-y)$. $\frac{\partial u}{\partial x}=(x+y)$

则有: $u=yx-\frac{1}{2}y^2+g(x)=\frac{1}{2}x^2+yx+g(y)$ $\Rightarrow$ $u=\cancel{\frac{1}{2}(x-y)^2}\ \frac{1}{2}x^2+yx-\frac{1}{2}y^2$.

$\frac{\partial v}{\partial x}=-(x-y)$ $\frac{\partial v}{\partial y}=(x+y)$ $\Rightarrow$ $v=\frac{1}{2}y^2+xy-\frac{1}{2}x^2$.

八.

九. $f(z)=u+iv.=u(x,y)+iv(x,y)$. 在上半平面内解析: $y>0$. $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$.

u, v 可微.

而 $\overline{f(\bar{z})}=u-iv=u(x,-y)+iv(x,-y)$. $-y<0$

$=u+(-v)\cdot i$

$\therefore$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial(-v)}{\partial(-y)}$.

答案

$\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial x}}$ $\frac{\partial u}{\partial(-y)}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}$

$\therefore$ $\overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面内解析

十. $\sin z+i\cos z=\cos(\frac{\pi}{2}-z)+i\sin(\frac{\pi}{2}-z)=4i=e^{(\frac{\pi}{2}-z)i}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}i-zi=\mathrm{Ln}4i=2\ln 2+\frac{\pi}{2}i+2k\pi i$ $\therefore z=\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi}{2}i\ 2\ln 2+2k\pi i=\ 2k\pi+i\ln 4$

第三章　复变函数的积分

一、选择题：

1. 设c为从原点沿$y^2=x$至$1+i$的弧段，则$\int_c (x+iy^2)dz=$（ D ）

代入

（A）$\frac{1}{6}-\frac{5}{6}i$　（B）$-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}i$　（C）$-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}i$　（D）$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}i$

2. 设c为不经过点1与-1的正向简单闭曲线，则$\oint_c \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}dz$为（ D ）

（A）$\frac{\pi i}{2}$　（B）$-\frac{\pi i}{2}$　（C）0　（D）（A）（B）（C）都有可能

3. 设$c_1:|z|=1$为负向，$c_2:|z|=3$正向，则$\oint_{c=c_1+c_2} \frac{\sin z}{z^2}dz=$（ B ）　闭路变形定理

（A）$-2\pi i$　（B）0　（C）$2\pi i$　（D）$4\pi i$

4. 设c为正向圆周$|z|=2$，则$\oint_c \frac{\cos z}{(1-z)^2}dz=$（ C ）

（A）$-\sin 1$　（B）$\sin 1$　（C）$-2\pi i\sin 1$　（D）$2\pi i\sin 1$

5. 设c为正向圆周$|z|=\frac{1}{2}$，则$\oint_c \frac{z^3\cos\frac{1}{z-2}}{(1-z)^2}dz=$（ B ）

（A）$2\pi i(3\cos 1-\sin 1)$　（B）0　（C）$6\pi i\cos 1$　（D）$-2\pi i\sin 1$

6. 设$f(z)=\oint_{|\xi|=4}\frac{e^\xi}{\xi-z}d\xi$，其中$|z|\neq 4$，则$f'(\pi i)=$（ A ）

（A）$-2\pi i$　（B）-1　（C）$2\pi i$　（D）1

7. 设$f(z)$在单连通域B内处处解析且不为零，c为B内任何一条简单闭曲线，则积分

$\oint_c \frac{f''(z)+2f'(z)+f(z)}{f(z)}dz$（ C ）

（A）等于$2\pi i$　（B）等于$-2\pi i$　（C）等于0　（D）不能确定

8. 设c是从0到$1+\frac{\pi}{2}i$的直线段，则积分$\int_c ze^z dz=$（ A ）

（A）$1-\frac{\pi e}{2}$　　（B）$-1-\frac{\pi e}{2}$　　（C）$1+\frac{\pi e}{2}i$　　（D）$1-\frac{\pi e}{2}i$

9. 设c为正向圆周$x^2+y^2-2x=0$，则$\oint_c \frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{z^2-1}dz=$（ A ）

（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$　　（B）$\sqrt{2}\pi i$　　（C）0　　（D）$-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$

10. 设c为正向圆周$|z-i|=1, a\neq i$，则$\oint_c \frac{z\cos z}{(a-i)^2}dz=$（ C ）

（A）$2\pi ie$　　（B）$\frac{2\pi i}{e}$　　（C）0　　（D）$i\cos i$

11. 设$f(z)$在区域D内解析，c为D内任一条正向简单闭曲线，它的内部全属于D．如果$f(z)$在c上的值为2，那么对c内任一点z_0，$f(z_0)$（ C ）　　?

（A）等于0　　（B）等于1　　（C）等于2　　（D）不能确定

12. 下列命题中，不正确的是（ D ）

（A）积分$\oint_{|z-a|=r}\frac{1}{z-a}dz$的值与半径$r(r>0)$的大小无关 ✓

（B）$\left|\oint_c (x^2+iy^2)dz\right|\leq 2$，其中$c$为连接$-i$到$i$的线段 ✓

（C）若在区域D内有$f'(z)=g(z)$，则在D内$g'(z)$存在且解析 ✓

处处可导 → 解析

（D）若$f(z)$在$0<|z|<1$内解析，且沿任何圆周$c:|z|=r(0<r<1)$的积分等于零，则$f(z)$在$z=0$处解析

13．设 c 为任意实常数，那么由调和函数 $u=x^2-y^2$ 确定的解析函数 $f(z)=u+iv$ 是（ C D ）

无常数项

(A) iz^2+c　　(B) iz^2+ic　　(C) z^2+c　　(D) z^2+ic

14．下列命题中，正确的是（ B ）C

（A）设 v_1, v_2 在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数，则必有 $v_1=v_2$ × 差一常数

（B）解析函数的实部是虚部的共轭调和函数 × （虚部是实部的共轭调和

（C）若 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 为 D 内的调和函数 ×

（D）以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数 ×

15．设 $v(x,y)$ 在区域 D 内为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数，则下列函数中为 D 内解析函数的是（ B ）

（A）$v(x,y)+iu(x,y)$　　（B）$v(x,y)-iu(x,y)$ ✓

（C）$u(x,y)-iv(x,y)$　　（D）$\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

二、填空题

1．设 c 为沿原点 $z=0$ 到点 $z=1+i$ 的直线段，则 $\int_c 2\bar{z}dz=$ ~~2+2i~~

2．设 c 为正向圆周 $|z-4|=1$，则 $\int_c \dfrac{z^2-3z+2}{(z-4)^2}dz=$ $10\pi i$

3．设 $f(z)=\oint\limits_{|\xi|=2}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}\xi)}{\xi-z}d\xi$，其中 $|z|\neq 2$，则 $f'(3)=$ ~~12π~~ ~~$\frac{\pi}{2}\pi i$~~ ~~Z~~ $|z|>2$)

4．设 c 为正向圆周 $|z|=3$，则 $\oint_c \dfrac{z+\bar{z}}{|z|}dz=$ ~~0~~ $6\pi i$

$z+\bar{z}$ 不解析

$z=3e^{i\theta}$

$\int_0^{2\pi}=\oint_c \frac{z}{3}dz+\oint_c \frac{\bar{z}}{3}dz$

5．设 c 为负向圆周 $|z|=4$，则 $\oint_c \dfrac{e^z}{(z-\pi i)^5}dz=$ $\frac{\pi i}{12}$

$\oint_c \frac{\bar{z}}{3}dz$

$=3i\int_0^{2\pi}d\theta=6\pi i$

6. 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的 平均值

7. 设 $f(z)$ 在单连通域 B 内连续，且对于 B 内任何一条简单闭曲线 c 都有 $\oint_c f(z)dz = 0$，那么 $f(z)$ 在 B 内 解析 （Morera定理）.

8. 调和函数 $\varphi(x,y) = xy$ 的共轭调和函数为 ~~$\psi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)+C$~~ $\frac{1}{2}(y^2-x^2)+C$.

9. 若函数 $u(x,y) = x^3 + axy^2$ 为某一解析函数的虚部，则常数 $a =$ -3

柯西方程: 调和函数.

10. 设 $u(x,y)$ 的共轭调和函数为 $v(x,y)$，那么 $v(x,y)$ 的共轭调和函数为 $-u(x,y)$

三、计算积分

1. $\oint_{|z|=R} \frac{6z}{(z^2-1)(z+2)} dz$，其中 $R>0, R\neq 1$ 且 $R \neq 2$；

1. $R<1$. $\oint f(z)dz = 0$
2. $1<R<2$ $8\pi i$
3. $R>2$ 0.

2. $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^4+2z^2+2}$. 0.

四、设 $f(z)$ 在单连通域 B 内解析，且满足 $|1-f(z)|<1$ $(z \in B)$.试证

1．在 B 内处处有 $f(z) \neq 0$；

Liouville 定理: $f(z)=C$. 而 $C=0$ $1<1$ 矛盾 $\therefore C\neq 0$.

2．对于 B 内任意一条闭曲线 c，都有 $\oint_c \frac{f''(z)}{f(z)} dz = 0$

$f''(z)=0$ $f(z)\neq 0$ $\therefore \int_c \frac{f''(z)}{f(z)} dz = 0$

五、设 $f(z)$ 在圆域 $|z-a|<R$ 内解析，若 $\max_{|z-a|=r} |f(z)| = M(r)$ $(0<r<R)$，

则 $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n}$ $(n=1,2,\cdots)$.

$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$

$\therefore |f^n(a)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| < \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M(r)}{r^n}$

六、求积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$，从而证明 $\int_0^\pi e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta = \pi$.

$z = re^{i\theta}$. 已证

七、设 $f(z)$ 在复平面上处处解析且有界，对于任意给定的两个复数 a,b，试求极限

$\lim_{R\to+\infty} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$ 并由此推证 $f(a)=f(b)$（刘维尔 Liouville 定理）. $\to 0$

$\frac{f(z)}{b-a}\left[\oint \frac{1}{z-a} - \oint \frac{1}{(z-b)}\right] = 0$.

$2\pi i$ $\quad$ $2\pi i$

$\left|\oint \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz\right| \leq \oint \frac{M}{R^2} dz \to 0$ $\quad f(a)=f(b)$

$\therefore \oint \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{b-a}[f(a)-f(b)] = 0$

八、设 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，试计算积分 $\oint_{|z|=1}(z+1)^2\frac{f(z)}{z^2}dz$
$8\pi i$

并由此得出 $\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta$ 之值. ?

九、设 $f(z)=u+iv$ 是 z 的解析函数，证明

$$\frac{\partial^2\ln(1+|f(z)|^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ln(1+|f(z)|^2)}{\partial y^2}=\frac{4|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}.$$

十、若 $u=u(x^2+y^2)$，试求解析函数 $f(z)=u+iv$.

八、 $\oint_{|z|=1}(z+1)^2\cdot\frac{f(z)}{z^2}\cdot dz = 2\pi i\cdot\left[(z+1)^2f(z)\right]' = 2\pi i\cdot\left[2(z+1)f(z)+(z+1)^2f'(z)\right]\Big|_{z=0}$
$= 8\pi i$

答案

第四章　级　数

一、选择题：

1．设 $a_n = \dfrac{(-1)^n + ni}{n+4}\ (n = 1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$（ C ）

（A）等于0　　（B）等于1　　（C）等于 i　　（D）不存在

2．下列级数中，条件收敛的级数为（ C ）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+3i}{2}\right)^n$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+4i)^n}{n!}$

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n + i}{\sqrt{n+1}}$

3．下列级数中，绝对收敛的级数为（ D ）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{i}{n}\right)$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{i}{2^n}\right]$　　an . bn 同时绝对收敛

（C）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n i^n}{2^n}$

4．若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = 1+2i$ 处收敛，那么该级数在 $z = 2$ 处的敛散性为（ A ）

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）不能确定

5．设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{n+1} z^{n+1}$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2, R_3，则 R_1, R_2, R_3 之间的关系是（ D ）

（A）$R_1 < R_2 < R_3$　　（B）$R_1 > R_2 > R_3$

（C）$R_1 = R_2 < R_3$　　（D）$R_1 = R_2 = R_3$

6．设 $0 < |q| < 1$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n$ 的收敛半径 $R =$（ D ）

(A) $|q|$　　(B) $\dfrac{1}{|q|}$　　(C) 0　　(D) $+\infty$

7. 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}(\dfrac{z}{2})^n$ 的收敛半径$R=$(C)

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $+\infty$

8. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$ 在$|z|<1$内的和函数为 (A)

(A) $\ln(1+z)$　　(B) $\ln(1-z)$

(D) $\ln\dfrac{1}{1+z}$　　(D) $\ln\dfrac{1}{1-z}$

9. 设函数$\dfrac{e^z}{\cos z}$的泰勒展开式为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$，那么幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径$R=$(? C)

(A) $+\infty$　　(B) 1　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) π

10. 级数$\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots$的收敛域是(B)

(A) $|z|<1$　　(B) $0<|z|<1$　　(C) $1<|z|<+\infty$　　(D) 不存在的

11. 函数$\dfrac{1}{z^2}$在$z=-1$处的泰勒展开式为(D)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$

(C) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}\quad(|z+1|<1)$

✓

12．函数 $\sin z$，在 $z=\frac{\pi}{2}$ 处的泰勒展开式为（ B ）

（A）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n+1}\quad (\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

（B）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n}\quad (\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

（C）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n+1}\quad (\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

（D）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\frac{\pi}{2})^{2n}\quad (\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<+\infty)$

13．设 $f(z)$ 在圆环域 $H: R_1<|z-z_0|<R_2$ 内的洛朗展开式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，$c$ 为 H 内绕 z_0 的任一条正向简单闭曲线，那么 $\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=$（ B ）

(A) $2\pi ic_{-1}$　　（B）$2\pi ic_1$　　（C）$2\pi ic_2$　　（D）$2\pi if'(z_0)$

14．若 $c_n=\begin{cases}3^n+(-1)^n, & n=0,1,2,\cdots\\ 4^n, & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$，则双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛域为（ A. ）

（A）$\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$　　（B）$3<|z|<4$

（C）$\frac{1}{4}<|z|<+\infty$　　（D）$\frac{1}{3}<|z|<+\infty$

15．设函数 $f(z)=\frac{1}{z(z+1)(z+4)}$ 在以原点为中心的圆环内的洛朗展开式有 m 个，那么 $m=$（ A. ）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

二、填空题

1．若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+i)^n$ 在 $z=i$ 处发散，那么该级数在 $z=2$ 处的收敛性为____发散____．

2．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} [\mathrm{Re}(c_n)] z^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，那么 R_1 与 R_2 之间的关系是____$R_2 \geq R_1$____．

3．幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2i)^n z^{2n+1}$ 的收敛半径 $R=$____$\sqrt{2}/2$____．

4．设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为内的一点，d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离，那么当 $|z-z_0|<d$ 时，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 成立，其中 $c_n=$____$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$____．

5．函数 $\arctan z$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为____$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$____．

6．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R，那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n-1) c_n z^n$ 的收敛半径为____$R/2$____．

7．双边幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-\frac{z}{2})^n$ 的收敛域为____$1<|z-2|<2$____．

8．函数 $e^z + e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内洛朗展开式为____$\cancel{1+\sum_{n=-\infty}}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n$____．

9．设函数 $\cot z$ 在原点的去心邻域 $0<|z|<R$ 内的洛朗展开式为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$，那么该洛朗级数收敛域的外半径 $R=$____π____．

10．函数 $\frac{1}{z(z-i)}$ 在 $1<|z-i|<+\infty$ 内的洛朗展开式为____$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot i^n}{(z-i)^{n+2}}$____．

三、若函数 $\frac{1}{1-z-z^2}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则称 $\{a_n\}$ 为菲波那契(Fibonacci)数列，试确定 a_n 满足的递推关系式，并明确给出 a_n 的表达式.

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \left[\frac{1}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right] \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]$$

求导 $\Rightarrow a_0 = a_1 = 1$
$a_2 = 2 \quad a_3 = 3 \quad a_4 = 5 \cdots$

$\sqrt{5}$ ∞ $-$ $1+\sqrt{5}$ $n+1$ $1-\sqrt{5}$ $n+1$]

四、试证明

1. $\left|e^{z}-1\right| \le e^{|z|}-1 \le |z|e^{|z|} \quad (|z|<+\infty)$;

$|e^z-1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right| \le e^{|z|}-1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}$

$|z| \cdot e^{z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n-1)!}$

$+|z|$

$> \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}$

2. $(3-e)|z| \le \left|e^{z}-1\right| \le (e-1)|z| \quad (|z|<1)$;

五、设函数 $f(z)$ 在圆域 $|z|<R$ 内解析，$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$ 试证

1. $S_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r} f(\xi)\frac{\xi^{n+1}-z^{n+1}}{\xi-z}\frac{d\xi}{\xi^{n+1}} \quad (|z|<r<R)$.

2. $f(z)-S_n(z)=\frac{z^{n+1}}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}(\xi-z)}d\xi \quad (|z|<r<R)$。

六、设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ 的和函数，并计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 之值. $z=1/2$

$\frac{z(z+1)}{(1-z)^3}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6$

七、设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \ (|z|<R_1)$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n \ (|z|<R_2)$，则对任意的 $r(0<r<R_1)$，在 $|z|<rR_2$ 内 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n z^n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=r} f(\xi)g(\frac{z}{\xi})\frac{d\xi}{\xi}$。

八、设在 $|z|<R$ 内解析的函数 $f(z)$ 有泰勒展开式 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$

试证当 $0\le r<R$ 时 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}$.

九、将函数 $\frac{\ln(2-z)}{z(z-1)}$ 在 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数.

十、试证在 $0<|z|<+\infty$ 内下列展开式成立：

$e^{z+\frac{1}{z}}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z^n+\frac{1}{z^n})$ 其中 $c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2\cos\theta}\cos n\theta d\theta \quad (n=0,1,2,\cdots)$.

答案

第五章　留　数

一、选择题：

1. 函数$\dfrac{\cot \pi z}{2z-3}$在$|z-i|=2$内的奇点个数为（ D ）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

2. 设函数$f(z)$与$g(z)$分别以$z=a$为本性奇点与m级极点，则$z=a$为函数$f(z)g(z)$的（ B ）

（A）可去奇点　　（B）本性奇点
（C）m级极点　　（D）小于m级的极点

3. 设$z=0$为函数$\dfrac{1-e^{x^2}}{z^4 \sin z}$的$m$级极点，那么$m=$（ C ）

（A）5　　（B）4　　（C）3　　（D）2

4. $z=1$是函数$(z-1)\sin\dfrac{1}{z-1}$的（ D ）

（A）可去奇点　　（B）一级极点
（C）一级零点　　（D）本性奇点

5. $z=\infty$是函数$\dfrac{3+2z+z^3}{z^2}$的（ B ）

（A）可去奇点　　（B）一级极点
（C）二级极点　　（D）本性奇点

6. 设$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$在$|z|<R$内解析，$k$为正整数，那么$\mathrm{Res}[\dfrac{f(z)}{z^k},0]=$（ C ）

（A）a_k　　（B）$k!a_k$　　（C）a_{k-1}　　（D）$(k-1)!a_{k-1}$

7. 设$z=a$为解析函数$f(z)$的m级零点，那么$\mathrm{Res}[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a]=$（ A ）

（A）m　　（B）$-m$　　（C）$m-1$　　（D）$-(m-1)$

$(z-a)^m\varphi(z)$

$\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{m}{z-a}+\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$

$\therefore \mathrm{Res}[\dfrac{f'(z)}{f(z)}]=m$

8. 在下列函数中，$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$的是（ D ）

(A) $f(z)=\dfrac{e^{z}-1}{z^{2}}$ $=1$　　　　(B) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}-\dfrac{1}{z}$ 0 ✗

(C) $f(z)=\dfrac{\sin z+\cos z}{z}$ $=\cos 1$　　　　(D) $f(z)=\dfrac{1}{e^{z}-1}-\dfrac{1}{z}$ ✓

9．下列命题中，正确的是(B)

(A) 设 $f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 点解析，m 为自然数，则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点.

(B) 如果无穷远点 ∞ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，那么 $\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=0$ ✓

(C) 若 $z=0$ 为偶函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，则 $\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=0$

(D) 若 $\oint_c f(z)dz=0$，则 $f(z)$ 在 c 内无奇点

10． $\mathrm{Re}\,s[z^{3}\cos\dfrac{2i}{z},\infty]=$ (A)

(A) $-\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{2}{3}i$　　(D) $-\dfrac{2}{3}i$

11． $\mathrm{Re}\,s[z^{2}e^{\frac{1}{z-i}},i]=$ (B)

(A) $-\dfrac{1}{6}+i$　　(B) $-\dfrac{5}{6}+i$　　(C) $\dfrac{1}{6}+i$　　(D) $\dfrac{5}{6}+i$

12．下列命题中，不正确的是(D)

(A) 若 $z_0(\neq\infty)$ 是 $f(z)$ 的可去奇点或解析点，则 $\mathrm{Re}\,s[f(z),z_0]=0$ ✓

(B) 若 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 z_0 解析，z_0 为 $Q(z)$ 的一级零点，则 $\mathrm{Re}\,s[\dfrac{P(z)}{Q(z)},z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ ✓

(C) 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，$n\geq m$ 为自然数，则

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),z_0]=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{d^{n}}{dz^{n}}[(z-z_0)^{n+1}f(z)]$$

（D）如果无穷远点 ∞ 为 $f(z)$ 的一级极点，则 $z=0$ 为 $f(\frac{1}{z})$ 的一级极点，并且 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\lim\limits_{z\to 0} zf(\frac{1}{z})$

应为 $Res[f(z),\infty] = Res[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$

13．设 $n>1$ 为正整数，则 $\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{z^n-1}dz=$（ A ） 0 $n=2$ 代入

(A) 0　　(B) $2\pi i$　　(C) $\frac{2\pi i}{n}$　　(D) $2n\pi i$

14．积分 $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{z^9}{z^{10}-1}dz=$（ ~~A~~ B

(A) 0　　(B) $2\pi i$　　(C) 10　　(D) $\frac{\pi i}{5}$

15．积分 $\oint\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{z}dz=$（ ~~B~~ C

$2\pi i$!

(A) 0　　(B) $-\frac{1}{6}$　　(C) $-\frac{\pi i}{3}$　　(D) $-\pi i$

二、填空题

1．设 $z=0$ 为函数 $z^3-\sin z^3$ 的 m 级零点，那么 $m=$ ___9___.

2．函数 $f(z)=\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ 在其孤立奇点 $z_k=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$ 处的留数 $\mathrm{Res}[f(z),z_k]=$ ___$\frac{(-1)^k}{(k\pi+\frac{\pi}{2})^2}$___.

z_k 一级极点.

$m=z-$

$Res[f(z)]=\frac{z-\frac{1}{k\pi+\pi/2}}{\cos\frac{1}{z}}$ $(z\to z$

$=\lim\limits_{m\to 0}\frac{m}{\cos(\frac{1}{m+\frac{1}{k\pi+\pi/2}}}$

3．设函数 $f(z)=\exp\{z^2+\frac{1}{z^2}\}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$ ___0___

$\cos'(\frac{1}{m+\frac{1}{k\pi+\pi/2}})$

$=-\sin(k\pi+\frac{\pi}{2})\cdot -\frac{1}{(m+\frac{1}{k\pi+\pi/2})^2}$

$m=0 \Rightarrow =(-1)^k\cdot(k\pi+\frac{\pi}{2})^2$.

4. 设$z=a$为函数$f(z)$的m级极点，那么$\mathrm{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)},a]=$ ___$-m$、___ (对数留数)

5. 双曲正切函数$\tanh z$在其孤立奇点处的留数为___1___.

$z=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\frac{(e^z-e^{-z})}{(e^z+e^{-z})}\ (z-\frac{\pi}{2}+k$

6. 设$f(z)=\frac{2z}{1+z^2}$，则$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=$___$-2$___.

$\frac{2(-1)^k\cdot m\cdot e^m}{(-1)^k\ e^{m}-1}\ (m\to$

$=1.$

7. 设$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^5}$，则$\mathrm{Res}[f(z),0]=$___$-1/24$___.

8. 积分$\oint_{|z|=1} z^3e^{\frac{1}{z}}dz=$___$\pi i/12$___.

9. 积分$\oint_{|z|=1}\frac{1}{\sin z}dz=$___$2\pi i$___.

10. 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx=$___$\frac{\pi i}{e}$___ ($\mathrm{Im}\,z>0$)

三、计算积分$\oint_{|z|=\frac{1}{4}}\frac{z\sin z}{(e^z-1-z)^2}dz$.

$z=0$是二级极点

$\oint f(z)dz)=\lim_{z\to0}\left(\frac{z^3\sin z}{(e^z-1-z)^2}\right)'\cdot 2\pi i$

$=\lim_{z\to0}\frac{3z^2+\sin z+z^3\cos z-2z^3\sin}{(e^z-1-z)^4}$

$=\lim_{z\to0}8\cdot\frac{4[e^z-1-z)-2\sin z}{z^3}$

$=-\cancel{8\pi}\quad-16\pi i/3$

四、利用留数计算积分$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}\quad(a>0)$

五、利用留数计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$

六、利用留数计算下列积分：

1. $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x\cos 2x}{x^2+1}dx$　　2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x-1)}{x^2+1}dx$

七、设a为$f(z)$的孤立奇点，m为正整数，试证a为$f(z)$的m级极点的充要条件是$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=b$，其中$b\neq0$为有限数.

八、设a为$f(z)$的孤立奇点，试证：若$f(z)$是奇函数，则$\mathrm{Res}[f(z),a]=\mathrm{Res}[f(z),-a]$；

若 $f(z)$ 是偶函数，则 $\mathrm{Re}s[f(z),a]=-\mathrm{Re}s[f(z),-a]$.

九、设 $f(z)$ 以 a 为简单极点，且在 a 处的留数为 A，证明 $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\dfrac{1}{|A|}$.

十、若函数 $\Phi(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，当 z 为实数时，$\Phi(z)$ 取实数而且 $\Phi(0)=0$，$f(x,y)$ 表示 $\Phi(x+iy)$ 的虚部，试证明 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{t\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\pi\Phi(t)$

$(-1<t<1)$

第五章　留　数

一、1.（D）　2.（B）　3.（C）　4.（D）　5.（B）
6.（C）　7.（A）　8.（D）　9.（C）　10.（A）
11.（B）　12.（D）　13.（A）　14.（B）　15.（C）

二、1. 9　2. $\dfrac{(-1)^k}{(k\pi+\frac{\pi}{2})^2}$　3. 0　4. $-m$　5. 1

6. -2　7. $-\dfrac{1}{24}$　8. $\dfrac{\pi i}{12}$　9. $2\pi i$　10. $\dfrac{\pi i}{e}$

三、$-\dfrac{16}{3}\pi i$.

四、$\dfrac{\pi}{a\sqrt{a^2+1}}$.

五、$\dfrac{5}{12}\pi$.

六、1. $\dfrac{\pi}{4}(\dfrac{e-e^3}{e^4})$　2. $\dfrac{\pi\cos 1}{e}$.