Nonlinear Control 非线性控制

第八讲

不稳定性

定理4.3 关于不稳定的定理(Chetaev)

对于扰动方程(1)，如果可以找到具有如下性质的函数:

1) 在区域 $\|\boldsymbol{x}\| < H$ 上单值连续，$V(0)=0$;

2) 在原点的任意小邻域内存在 $V>0$ 的连通分支区域，且以 $V=0$ 为界;

3) 在 $V>0$ 的连通分支区域上，$\dot{V}$ 连续，且 $\dot{V}>0$.

则原点不稳定.

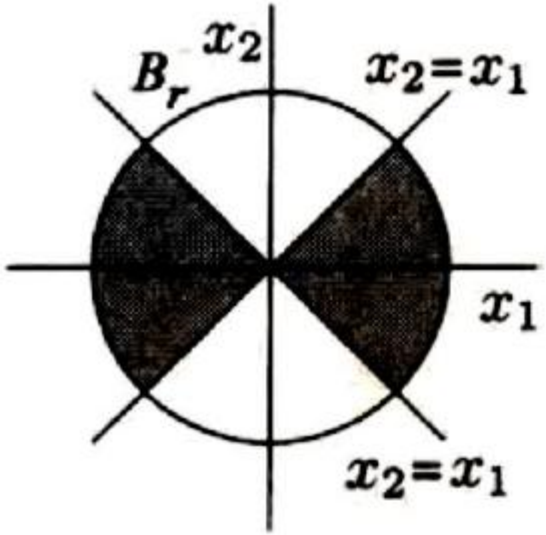


图 4.5　$V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)$时的集合 U

例1:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - 2y^2 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$$

判断原点稳定性.

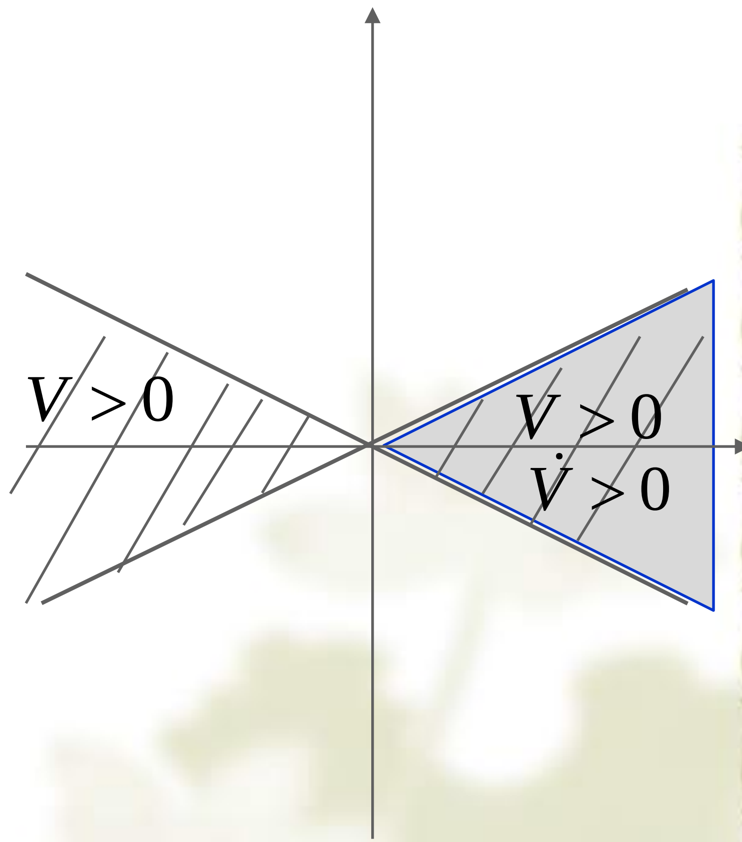
取: $V = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

得:

$$\dot{V} = x(x^2 - 2y^2) = 4xV$$

当 $x > 0$，在 $V > 0$ 的区域有 $\dot{V} > 0$.

满足Chetaev定理条件 $\Rightarrow$ 原点不稳.



例2:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

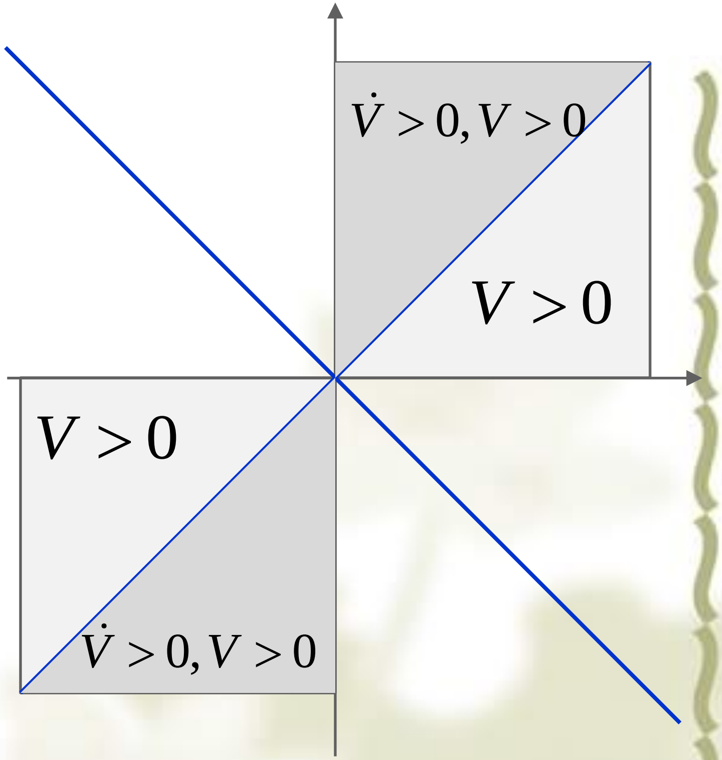
原点稳定(但不渐近稳定).

取: $V = xy$

得: $\dot{V} = y^2 - x^2$

$\dot{V} > 0, V > 0$ 的区域并不以 $V = 0$ 为边界.

Chetaev定理不适用.

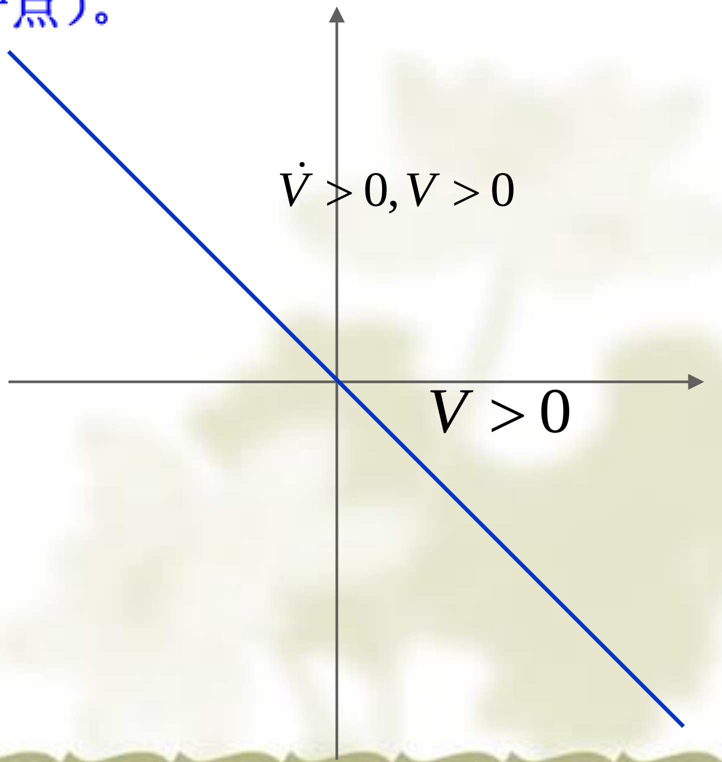


例：考虑系统 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_1$，构造不定函数 $V(x) = x_1 + x_2$，

其在原点任意小邻域内均存在区域 U 使得当 $x \in U$ 时有

$V(x) > 0$。由于 $\dot{V}(x) = x_1 + x_2 = V(x) > 0 (x \in U)$，因此该系统

不稳定（应用 Hurwitz 判据可验证这一点）。

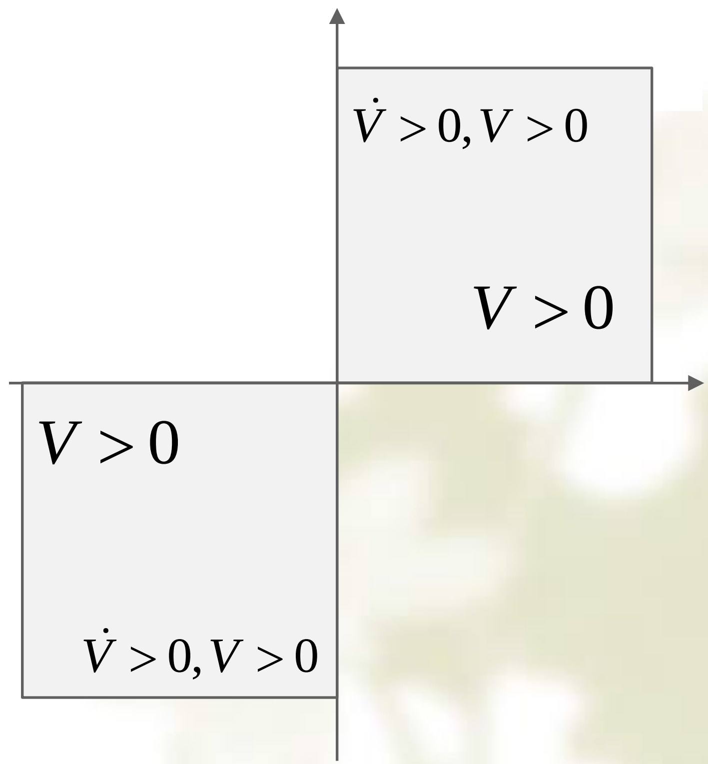


例：考虑系统 $\dot{x}_1=0, \dot{x}_2=\sin x_1$，构造不定函数 $V(x)=x_1x_2$，

由于 $\dot{V}(x)=x_1\sin x_1>0(|x_1|<\pi, x_1x_2>0)$，定义

$U \triangleq \{x:|x_1|<\pi, x_1x_2>0\}$，则在 U 内有 $V(x)>0,\dot{V}(x)>0$，

因此该系统不稳定。



Lyapunov稳定性扩展结果

例子 有阻尼振动线性系统

考虑阻尼振动系统 $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$

引入状态变量 $x_1=x, x_2=\dot{x}$ 可得状态变量方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-x_2\end{cases}$$

取 $v(x)=3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2$ 则 $\dot{v}=-2(x_1^2+x_2^2)$

故原点渐近稳定。

若取 $v(x)=\dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ 则 $\dot{v}=-x_2^2$

因此 $v>0, \dot{v}\le 0.$

只能判断原点稳定，而实际上是渐近稳定的。

4.2不变原理

原点渐近稳定性（ Krasovskii-Barbashin）定理、

Krasovskii–LaSalle不变集原理

正极限点（相轨线/系统）、正极限集（相轨线/系统）、正不变集

渐近稳定平衡点是始于足够接近平衡点的每个解的 正极限集。

稳定极限环是始于足够接近极限环的每个解的正极限集，解趋于极限环。

平衡点吸引区（集合）和极限环是不变集

引理：自治系统任何解的正极限集是该系统的正不变集。有界解的正极限集是非空不变紧集，且当时间趋于无穷时，解趋于正极限集。

定理4.4 若 Ω 是系统的一个正不变紧集。设***V*：D到R** 的连续可微函数，在 Ω 内沿系统的解的导数是半负定的。设**E**是 Ω 内满足 $\dot{V}(x)=0$ 所有点的集合，**M**是**E**内最大不变集。则当时间趋于无穷时，从 Ω 出发的解都趋于**M**。

这是著名的LaSalle不变定理 .

评注：

1. 与Lyapunov 定理不同，定理4.4 不要求函数V (x) 正定。

2. 构造正不变紧集合不必与构造V (x) 相联系。在许多应用中，构造的V (x) 本身就保证了正不变集合存在。

3. 要考虑系统原点的渐近稳定性，就要确定原点是E中的最大不变集。

推论4.1 考虑（4.1）的零平衡点，V：D到R 的连续可微的正定函数，D包含原点且在D内沿系统的解的导数是半负定的。设 $S=\{x\in D\,|\,\dot{V}(x)=0\}$ ，并假设除了平凡零解之外，没有其他解保持在 S内，那么原点是渐近稳定的。

推论4.2 若存在一个连续可微且径向无界的正定函数，它沿系统的解的导数是半负定的， $\dot{V}(x)\le 0$,且除原点外$M=\{x\in R^n\,|\,\dot{V}(x)=0\}$内不再包含其他轨线，则系统原点是全局渐近稳定的。

这两个结论分别称为：Barbashin定理和Krasovskii定理 .

例 4.8 考虑系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -h_1(x_1) - h_2(x_2)
\end{aligned}
$$

其中 $h_1(\cdot)$ 和 $h_2(\cdot)$ 为局部 **Lipschitz** 函数，且满足

$$h_i(0) = 0, yh_i(y) > 0, \forall y \neq 0, y \in (-a, a)$$

考虑系统零平衡点的稳定性，取候选**Lyapunov**函数：

$$V(x) = \int_0^{x_1} h_1(y)dy + \frac{1}{2}x_2^2$$

设 $D = \{x \in R^2 \,|\, -a < x_i < a\}$，则 $V(x)$ 在 D 内正定，且有

$$\dot{V}(x) = h_1(x_1)x_2 + x_2[-h_1(x_1) - h_2(x_2)] = -x_2 h_2(x_2) \leq 0$$

半负定。且V导数等于零，即有$x_2=0$，推得x_2导数为零，从而推得$x_1=0$.

故可以得到 集合$S = \{x \in D \,|\, \dot{V}(x) = 0\}$中只有零点。从而原点渐近稳定。

例子4.9

考虑例4.8 的系统，设a=∞，且满足 $\int_0^y h_1(z)dz \to \infty, |y| \to \infty$，这样
□

Lyapunov 函数 $V(x)=\int_0^{x_1} h_1(y)dy+\frac{1}{2}x_2^2$ 径向无界。

利用上例处理，可以得到系统原点是全局渐近稳定的。

对LaSalle 定理的几点说明：

LaSalle 定理放宽了对*V (x)* 正定的要求，这一特性的应用将通过1.2.5 节中的神经网络应用实例说明。

LaSalle 定理放宽了对函数*V(x)* 导数负定的要求；

LaSalle 定理给出了吸引区的估计值，定理4.4 中的集合 Ω 可以是任意正不变紧集，8.2 节中将利用该特性得到较不保守的吸引区的估计区间。

LaSalle 定理可用于有一个平衡点集的系统中，而不是只有一个孤立平衡点的系统中，这将通过1.2.6 节的一个简单自适应控制的应用实例说明。

例4.10: 自适应控制

考虑模型: $\dot{y} = ay + u$ 和自适应控制律 $u = -ky, \dot{k} = \gamma y^2, \gamma > 0$,

取 $x_1 = y, x_2 = k$, 则闭环系统为: $\dot{x}_1 = -(x_2 - a)x_1, \dot{x}_2 = \gamma x_1^2$

$x_1 = 0$ 是闭环系统的平衡点集。现在要证明轨线趋于平衡点集,

为此考虑候选Lyapunov 函数:

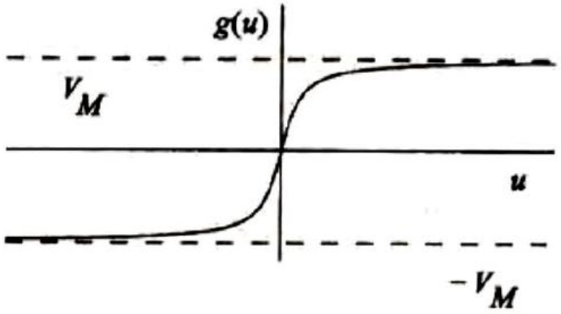
$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2, b > a.$$

V沿系统解轨线的导数为:

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)\dot{x}_2 = -x_1^2(x_2 - a) + x_1^2(x_2 - b) = -x_1^2(b - a)$$

因此，$\dot{V}(x) \le 0$。由于 $V(x)$ 径向无界，所以集合 $\Omega_c = \{x \in R^2 \,|\, V(x) \le c\}$ 是正不变紧集。取 $\Omega = \Omega_c$，定理 **4.4** 中的所有条件都得到满足。相关集合由 $E = \{x \in \Omega_c \,|\, x_1 = 0\}$ 给出。因为直线 $x_1 = 0$ 上的任意一点都是平衡点，所以 E 是不变集。因而，该例中 $M = E$。从定理 **4.4** 中可得，当 $t \to \infty$ 时，始于 Ω_c 内的每条轨线都趋于 E，即 $t \to \infty$ 时 $x_1(t) \to 0$。而且，由于 $V(x)$ 是径向无界的，所以该结论是全局适用的，即结论对于所有初始条件 $x(0)$ 都成立，因为对于任何 $x(0)$ 都可以选择足够大的常数 c，使 $x(0) \in \Omega_c$。

例: 4.11 人工神经网络



$$\dot{x}_i = \frac{1}{C_i} h_i(x_i)\left(\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i\right)$$

状态变量是各放大器的输出电压：取值$(-V_M, V_M)$,函数g为如图的S型函数

$$h_i(x_i) = \left.\frac{dg_i}{du_i}\right|_{u_i = g_i^{-1}(x_i)} > 0, \forall x_i \in (-V_M, V_M), T_{ij} = T_{ji}, R_i > 0, C_i > 0$$

平衡点为是孤立的，由对称性： $\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i$ 的分量是标量函数的梯度。用变梯度函数法，通过积分可以得到其为如下标量函数

$$V(x) = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_j T_{ij} x_i x_j + \sum_i \frac{1}{R_i}\int_0^{x_i} g_i^{-1}(y)dy - \sum_j I_i x_i$$

V是连续可微的，且状态方程可以重写为： $\dot{x}_i = -\frac{1}{C_i} h_i(x_i)\frac{\partial V}{\partial x_i}$

考虑V沿系统轨线的导数： $\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} h_i(x_i)\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 \le 0$

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \dot{x}_i = 0, \forall i$$

例：4.11 人工神经网络（续）

因此仅在平衡点处V的导数为零。为了应用定理4.4，构造如下集合：

$$\Omega(\varepsilon)=\left\{x\in R^n:-(V_M-\varepsilon)\le x_i\le V_M-\varepsilon\right\},\varepsilon>0\text{任意小。}$$

该集合是有界闭集，且在其内有V的导数半负定。下面证明其为正不变集。为方便假设：

$$g_i(u_i)=\frac{2V_M}{\pi}\arctan\left(\frac{\lambda\pi u_i}{2V_M}\right),\lambda>0$$

则系统变为：

$$\dot{x}_i=\frac{1}{C_i}h_i(x_i)\left(\sum_j T_{ij}x_j-\frac{2V_M}{\lambda\pi R_i}\tan\left(\frac{\pi x_i}{2V_M}\right)+I_i\right)$$

此时

$$\left|\tan\left(\frac{\pi x_i}{2V_M}\right)\right|\ge\tan\left(\frac{\pi(V_M-\varepsilon)}{2V_M}\right)\to\infty,\varepsilon\to 0,\text{for}\,|x_i|\ge V_M-\varepsilon$$

由于x_i和I_i有界，可以选择足够小的$\varepsilon>0$，保证

$$x_i\sum_j T_{ij}x_j-\frac{2V_Mx_i}{\lambda\pi R_i}\tan\left(\frac{\pi x_i}{2V_M}\right)+x_iI_i<0,V_M-\varepsilon\le|x_i|\le V_M$$

因此，$\frac{d}{dt}x_i^2=2x_i\dot{x}_i<0,V_M-\varepsilon\le|x_i|\le V_M.$

例: 4.11（续）

因此从$\Omega(\varepsilon)$ 出发的解轨迹在未来所有时刻都保持在它的内部。实际上，从 $(-V_M,V_M)\setminus\Omega(\varepsilon)$出发的所有轨迹将收敛于$\Omega(\varepsilon)$，这表明所有平衡点都在紧集$\Omega(\varepsilon)$内。因此，只可能有有限孤立平衡点。

在$\Omega(\varepsilon)$ 内，E=M为 平衡点集合。由定理4.4可知，当时间趋于无穷时 $\Omega(\varepsilon)$ 内的每条轨线都趋于M。由于M由孤立平衡点组成，可以证明趋于M的轨线一定趋于这些平衡点中的某一个。所以系统不会振荡。

习题1：判断以下系统是否渐近稳定？是否全局渐近稳定？

（1）$\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3$；

（2）$\dot{x}_1 = x_2 - \sin x_1, \dot{x}_2 = -x_1$；

（3）$\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = x_1 - x_2(1 - x_1^2)$；

（4）$\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \dot{x}_3 = -x_2 - x_3^3$，

作业：P_{122}， 4.4，4.13，4.14