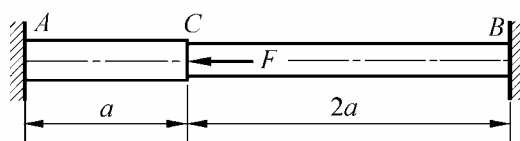


# 第十八章 考虑材料塑性的强度计算

| 题号         | 页码 |
|------------|----|
| 18-2.....  | 1  |
| 18-4.....  | 1  |
| 18-5.....  | 2  |
| 18-8.....  | 3  |
| 18-9.....  | 3  |
| 18-10..... | 5  |
| 18-12..... | 5  |
| 18-13..... | 7  |
| 18-14..... | 8  |
| 18-15..... | 9  |
| 18-16..... | 11 |

( 也可通过左侧题号书签直接查找题目与解 )

**18-2** 图示两端固定杆  $AB$  , 截面  $C$  承受轴向载荷  $F$  作用。试确定极限载荷  $F_u$ 。已知  $AC$  与  $CB$  段的横截面面积分别为  $A_1 = 200 \text{ mm}^2$  ,  $A_2 = 150 \text{ mm}^2$  , 屈服应力  $\sigma_s = 300 \text{ MPa}$ 。



题 18-2 图

解：此为一度静不定杆，只有当截面  $C$  两边的杆段均屈服时才会变成塑性机构。这两段杆的屈服内力依次为

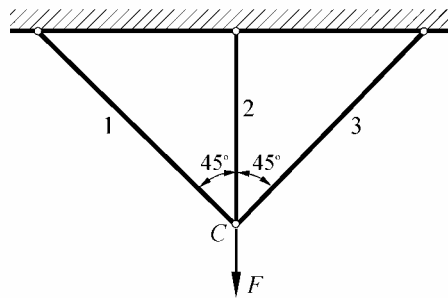
$$F_{N1s} = A_1 \sigma_s = 60 \text{ kN}$$

$$F_{N2s} = A_2 \sigma_s = 45 \text{ kN}$$

当两段杆的内力均达到屈服内力时，截面  $C$  有向左移动的趋势，故  $F_{N1s}$  为压， $F_{N2s}$  为拉，由轴向平衡条件可得该杆的极限载荷为

$$F_u = F_{N1s} + F_{N2s} = 105 \text{ kN}$$

**18-4** 图示桁架，由三根钢杆所组成，在节点  $C$  承受载荷  $F$  作用。试求极限载荷  $F_u$ 。已知三杆的横截面面积均为  $A = 150 \text{ mm}^2$ ，屈服应力  $\sigma_s = 360 \text{ MPa}$ 。



题 18-4 图

解：此为一度静不定桁架结构。不难判断，当载荷  $F$  增加时，杆 2 首先到达屈服。又由于结构及载荷对称，其后的杆 1 与杆 3 必然是同时屈服，故该结构只有当三根杆都屈服时才会变成极限状态。各杆的屈服内力为

$$F_{N1s} = F_{N2s} = F_{N3s} = A\sigma_s = 54\text{kN}$$

进而由节点  $C$  的平衡方程  $\sum F_y = 0$  可得极限载荷为

$$F_u = F_{N2s} + (F_{N1s} + F_{N3s})\cos 45^\circ = 130.4\text{kN}$$

### 18-5 试绘制题 18-4 所述桁架节点 $C$ 的铅垂位移 $f$ 与载荷 $F$ 间的关系曲线。设杆长

$l_1 = l_3 = \sqrt{2}l_2 = 1\text{m}$ ，材料的弹性模量  $E = 210\text{GPa}$ 。

解：1. 求各杆的轴力

解静不定，求得

$$F_{N1} = F_{N3} = \frac{F\cos^2 45^\circ}{1 + 2\cos^3 45^\circ}$$

$$F_{N2} = \frac{F}{1 + 2\cos^3 45^\circ}$$

比较可知， $F_{N2} > F_{N1}$ ，杆 2 将首先屈服。

2. 计算杆 2 屈服时点  $C$  的铅垂位移

杆 2 中的应力到达  $\sigma_s$  时，有

$$F_s = (1 + 2\cos^3 45^\circ)F_{N2s} = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \times 54\text{kN} = 92.2\text{kN}$$

$$f_s = \Delta l_2 = \frac{F_{N2s}l_2}{EA} = \frac{\sigma_s l_2}{E} = \frac{(360 \times 10^6) \times (\frac{1}{\sqrt{2}})\text{m}}{210 \times 10^9} = 1.212 \times 10^{-3}\text{m} = 1.212\text{mm}(\downarrow)$$

3. 计算结构达到极限状态时点  $C$  的铅垂位移

载荷若继续增大，会使杆 1 和 3 也屈服，即整个结构达到极限状态。此时点  $C$  的铅垂位

移为

$$f_u = \sqrt{2}\Delta l_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sigma_s l_1}{E}\right) = \sqrt{2} \times \frac{(360 \times 10^6) \times (1)\text{m}}{210 \times 10^9} = 2.424 \times 10^{-3} \text{m} = 2.424\text{mm}(\downarrow)$$

#### 4. 绘制 $f$ 与 $F$ 的关系曲线

根据以上计算结果及上题所得的  $F_u$  值, 可画出  $f$  与  $F$  的关系曲线, 如图 18-5 所示。

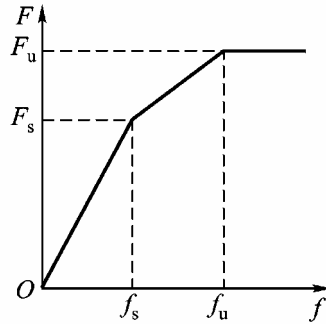
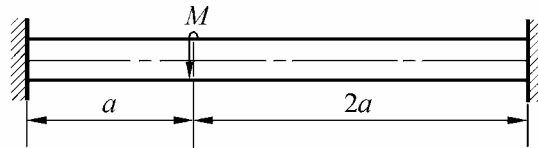


图 18-5

**18-8** 图示两端固定的圆截面轴, 承受扭力矩  $M$  作用, 试求其极限值  $M_u$ 。已知轴径  $d = 40\text{mm}$ , 剪切屈服应力为  $\tau_s = 100\text{MPa}$ 。



题 18-8 图

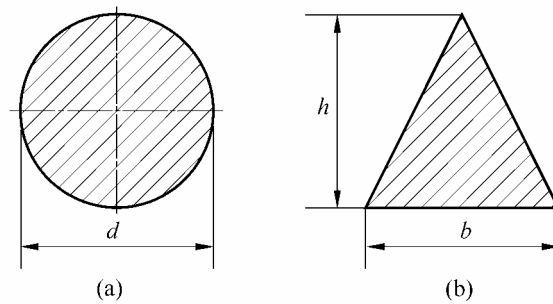
解: 此为一度静不定问题。当扭力矩  $M$  两边的轴段均到达屈服时, 该轴达到极限状态。两段轴的极限扭矩均为

$$T_p = \frac{\pi d^3}{12} \tau_s = \frac{\pi \times 0.040^3}{12} \times 100 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m} = 1676 \text{N} \cdot \text{m}$$

不难判断, 左、右两边的  $T_p$  均与极限扭力矩  $M_u$  反向, 故由平衡方程  $\sum M_x = 0$  得到

$$M_u = 2T_p = 3.35 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m} = 3.35 \text{kN} \cdot \text{m}$$

**18-9** 梁截面如图所示, 弯矩作用在铅垂对称面内。试求极限弯矩  $M_p$ 。已知屈服应力为  $\sigma_s$ 。



题 18-9 图

(a)解：达极限状态时，圆截面的水平对称轴  $z$  仍为中性轴。我们知道，半圆的形心坐标为

$$y_c = \frac{2d}{3\pi}$$

故极限弯矩为

$$M_p = \sigma_s (S_1 + S_2) = 2\sigma_s \left( \frac{\pi d^2}{8} \right) \left( \frac{2d}{3\pi} \right) = \frac{\sigma_s d^3}{6}$$

(b)解：先确定中性轴位置

设中性轴为水平轴线  $z$ ，如图 18-9b 所示，有

$$h_1 : b_1 = h : b \quad (a)$$

$$\frac{1}{2} h_1 b_1 = \frac{1}{4} hb \quad (b)$$

由式(a)与(b)可得

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} h, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} b$$

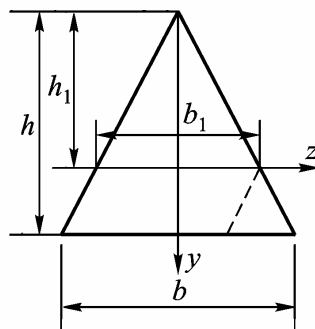


图 18-9b

极限弯矩为

$$M_p = \sigma_s (S_1 + S_2) \quad (c)$$

其中，

$$S_1 = (\frac{1}{2}h_1b_1)(\frac{1}{3}h_1) = \frac{\sqrt{2}}{24}bh^2 \quad (d)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}b_1(h-h_1)^2 + \frac{1}{2}(b-b_1)(h-h_1)\frac{2}{3}(h-h_1) = \frac{1}{24}(8-5\sqrt{2})bh^2 \quad (e)$$

将式(d)与(e)代入式(c)，得

$$M_p = \sigma_s [\frac{\sqrt{2}}{24}bh^2 + \frac{1}{24}(8-5\sqrt{2})bh^2] = \frac{2-\sqrt{2}}{6}\sigma_s bh^2$$

**18-10** 一矩形截面梁，宽为  $b$ ，高为  $h$ ，横截面上的弯矩为  $M$ ，且  $M_s < M < M_p$ 。试求梁的曲率半径  $\rho$ 。拉、压屈服应力均为  $\sigma_s$ 。

解：该梁横截面上正应力分布情况如图 18-10 所示。

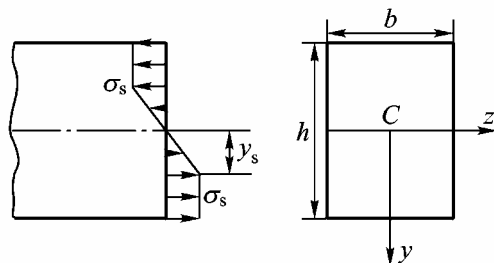


图 18-10

由弯矩  $M$  的构成关系可知，

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sigma_s \cdot (by_s)}{2} (\frac{2}{3}y_s) \times 2 + [\sigma_s (\frac{h}{2} - y_s)b (\frac{h}{2} + y_s) \times \frac{1}{2}] \times 2 \\ &= \frac{2}{3}b\sigma_sy_s^2 + b\sigma_s(\frac{h^2}{4} - y_s^2) = \frac{b\sigma_sh^2}{4} - \frac{b\sigma_sy_s^2}{3} \end{aligned}$$

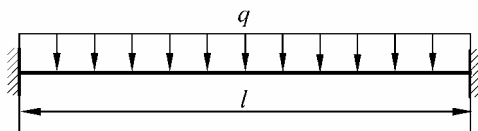
由此得

$$y_s = \sqrt{\frac{3}{b\sigma_s}(\frac{b\sigma_sh^2}{4} - M)}$$

依据关系式  $\varepsilon = y/\rho$ ，得

$$\rho = \frac{y_s}{\varepsilon_s} = \frac{Ey_s}{\sigma_s} = \frac{E}{\sigma_s} \sqrt{3(\frac{h^2}{4} - \frac{M}{b\sigma_s})}$$

**18-12** 图示两端固定梁，承受均布载荷  $q = 50\text{N/mm}$  作用，试根据许用载荷法选择一合适型号的工字钢。已知许用应力  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ，梁的跨度  $l = 4\text{m}$ 。



题 18-12 图

解：1. 确定极限状态

此为三度静不定梁，但在小变形条件下，轴力很小，可以不计，故只存在两个多余未知反力，当该梁出现三个塑性铰时即处于极限状态。由于结构及载荷均对称，故极限状态可能如图 18-12 所示。

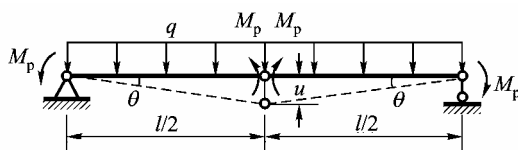


图 18-12

2. 确定极限弯矩与载荷的关系

根据虚功原理，有

$$(q \frac{l}{2}) \cdot \frac{u}{2} \times 2 - (M_p \cdot \theta) \times 4 = 0$$

其中，

$$u = \frac{l}{2} \theta$$

于是得到

$$M_p = \frac{ql^2}{16}$$

3. 选择工字钢型号

依据许用载荷法，应有

$$\frac{ql^2}{16} \leq [M_p] = f[\sigma]W$$

由此得

$$W \geq \frac{ql^2}{16f[\sigma]}$$

对于工字形截面，可取  $f = 1.16$ ，于是

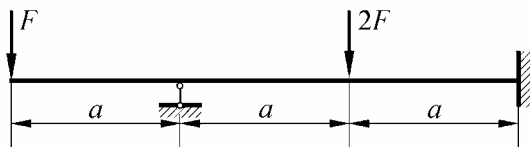
$$W \geq \frac{(50 \times 10^3) \times 4^2}{16 \times 1.16 \times 160 \times 10^6} \text{ m}^3 = 2.69 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

查教材附录 F 之表 4，22a 工字钢的抗弯截面系数为

$$W_x = 309 \text{ cm}^3 = 3.09 \times 10^{-4} \text{ m}^3 > W$$

能满足强度要求，故选择 22a 工字钢。

**18-13** 试分别按许用载荷法与许用应力法分析图示梁的承载能力并进行比较。许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ ，梁截面为 22a 工字钢， $a=1\text{m}$ 。



题 18-13 图

解：1. 按许用载荷法来求

此为一度静不定梁，可能的极限状态有两种，分别示如图 18-13a 和 b。

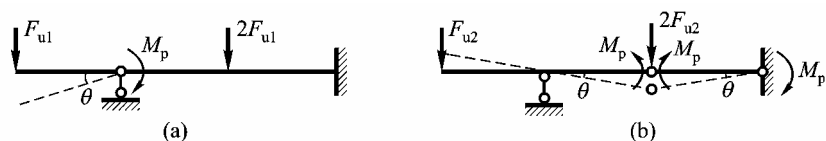


图 18-13

对于图 a，根据虚功原理，有

$$F_{u1}(\theta a) - M_p \theta = 0$$

由此得

$$F_{u1} = \frac{M_p}{a}$$

对于图 b，根据虚功原理，有

$$2F_{u2}(\theta a) - F_{u2}(\theta a) - 3M_p \theta = 0$$

由此得

$$F_{u2} = \frac{3M_p}{a}$$

比较可知，图 a 所示为该梁真实的极限状态，故取

$$F_u = \frac{M_p}{a}$$

依据许用载荷法，该梁的承载能力为

$$F \leq \frac{[M_p]}{a} = \frac{fW[\sigma]}{a} = \frac{1.16 \times 3.09 \times 10^{-4} \times 160 \times 10^6}{1} \text{ N} = 5.74 \times 10^4 \text{ N} = 57.4 \text{ kN} = [F_u]$$

2. 按许用应力法来求

参看图 18-13c，解静不定，得 B 处多余反力为

$$F_y = \frac{19}{8} F$$

由弯矩图可知，

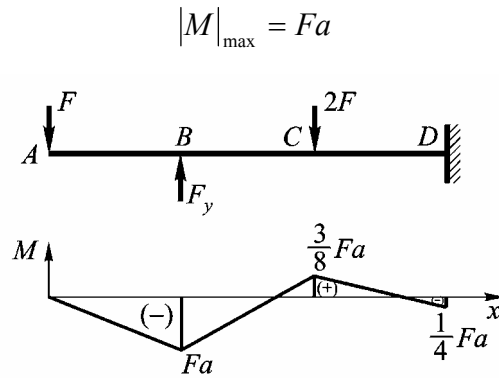


图 18-13c

依据许用应力法，应有

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W} = \frac{Fa}{W} \leq [\sigma]$$

由此得

$$F \leq \frac{W[\sigma]}{a} = \frac{3.09 \times 10^{-4} \times 160 \times 10^6}{1} \text{ N} = 4.94 \times 10^4 \text{ N} = 49.4 \text{ kN} = [F]$$

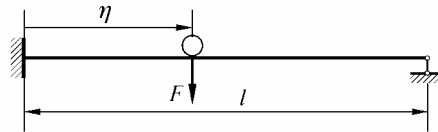
3. 比较

根据上述计算，得

$$\frac{[F_u]}{[F]} = 1.16$$

用许用载荷法所得结果比用许用应力法所得结果大 16%。

**18-14** 在图示梁上作用一沿梁轴移动的载荷  $F$ ，试求极限载荷  $F_u$ 。已知极限弯矩为  $M_p$ 。



题 18-14 图

解：此为一度静不定梁，当出现两个塑性铰时，该梁即处于极限状态。由于弯矩的峰值将发生在左端截面和载荷  $F$  作用截面处，故可能的极限状态应如图 18-14 所示。

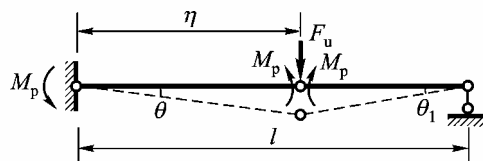


图 18-14

根据虚功原理，有



$$F_u \theta \eta - 2M_p \theta - M_p \theta_1 = 0 \quad (a)$$

由几何关系可知，

$$\theta_1 = \frac{\theta \eta}{l - \eta} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a)，得

$$F_u \theta \eta - 2M_p \theta - M_p \frac{\theta \eta}{l - \eta} = 0$$

即

$$F_u = \left( \frac{2}{\eta} + \frac{1}{l - \eta} \right) M_p \quad (c)$$

进而由

$$\frac{dF_u}{d\eta} = 2\left(-\frac{1}{2}\eta^{-2}\right) + \frac{1}{2}(l - \eta)^{-2} = 0$$

得

$$\frac{2(l - \eta)^2 - \eta^2}{2\eta^2(l - \eta)^2} = 0$$

或

$$\eta^2 - 4l\eta + 2l^2 = 0 \quad (d)$$

求解方程(d)，得

$$\eta = (2 \pm \sqrt{2})l$$

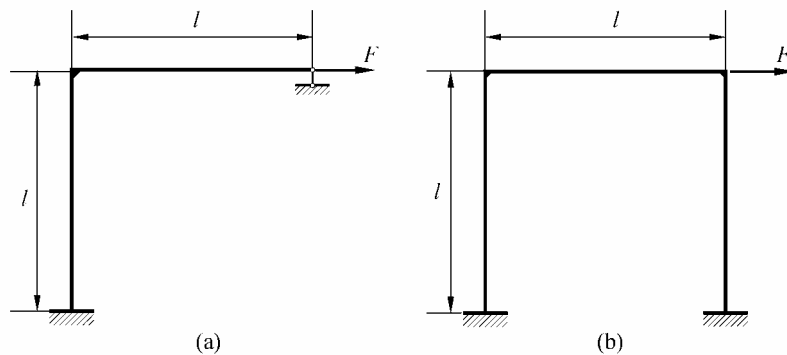
舍去增根，取

$$\eta = (2 - \sqrt{2})l = 0.586l \quad (e)$$

将式(e)代入式(c)，得极限载荷为

$$F_u = \left( \frac{2}{0.586l} + \frac{1}{l - 0.586l} \right) M_p = 5.83 \frac{M_p}{l}$$

**18-15** 试求图示刚架的极限载荷，已知极限弯矩为  $M_{po}$ 。



题 18-15 图

(a) 解：此为一度静不定刚架。其极限状态如图 18-15a 所示。

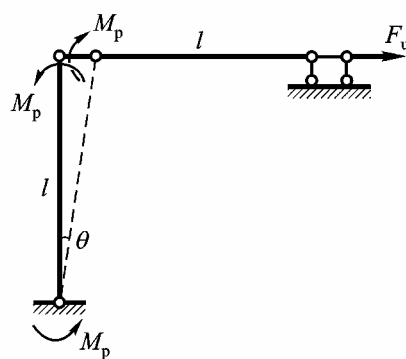


图 18-15a

依据虚功原理，有

$$F_u (\theta l) - (M_p \theta) \times 2 = 0$$

由此得

$$F_u = \frac{2M_p}{l}$$

(b) 解：此为三度静不定刚架。其极限状态如图 18-15b 所示。

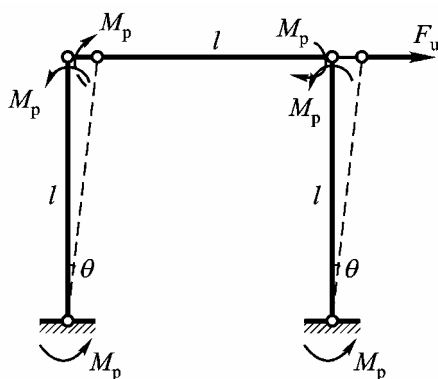


图 18-15b

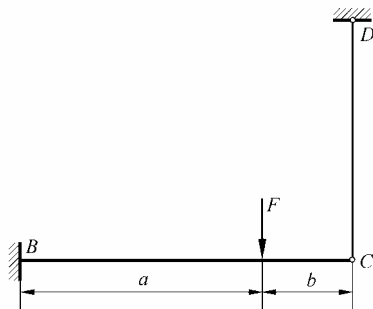
依据虚功原理，有

$$F_u(\theta l) - (M_p \theta) \times 4 = 0$$

由此得

$$F_u = \frac{4M_p}{l}$$

**18-16** 图示结构，由梁  $BC$  与杆  $CD$  组成。试求极限载荷  $F_u$ 。梁用 32b 工字钢制成，杆的横截面面积  $A = 250\text{mm}^2$ ，梁与杆的屈服应力均为  $\sigma_s = 240\text{MPa}$ ， $a = 8\text{m}$ ， $b = 1\text{m}$ 。



题 18-16 图

解：此为一度静不定结构。可能的极限状态有两种，如图 18-16(a)和(b)所示。

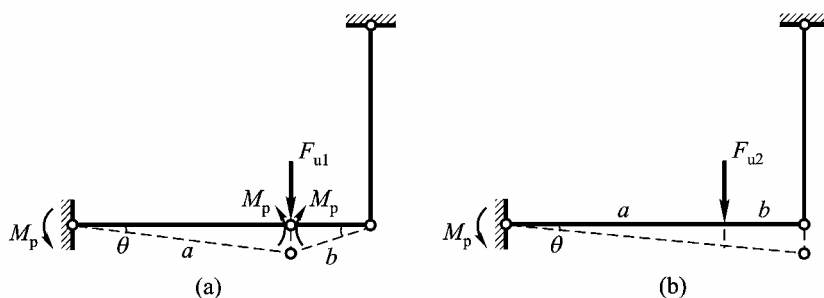


图 18-16

对于图 a，依据虚功原理，有

$$F_{u1}(\theta a) - (M_p \theta) \times 2 - M_p\left(\frac{\theta a}{b}\right) = 0$$

由此得

$$\begin{aligned} F_{u1} &= \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)M_p = \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)(fW\sigma_s) = \left(\frac{2}{8} + \frac{1}{1}\right)(1.16 \times 726 \times 10^{-6} \times 240 \times 10^6)\text{N} \\ &= 2.53 \times 10^5 \text{N} = 253\text{kN} \end{aligned}$$

对于图 b，依据虚功原理，有

$$F_{u2}(\theta a) - M_p \theta - F_{NS} \theta(a + b) = 0$$

由此得

$$F_{u2} = \frac{M_p + F_{NS}(a + b)}{a} = \frac{\sigma_s}{a}[(fW) + A(a + b)]$$

$$F_{u2} = \frac{240 \times 10^6}{8} [(1.16 \times 726 \times 10^{-6}) + 250 \times 10^{-6} \times (8+1)] \text{N} = 9.28 \times 10^4 \text{N} = 92.8 \text{kN}$$

比较以上二结果可知，图 b 所示为该结构真实的极限状态，其极限载荷为

$$F_u = 92.8 \text{kN}$$