



# Nonlinear Systems 非线性系统

## 第三讲



## 第2章 二阶系统

二阶自治系统:  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$  (2.1)

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (2.2)$$

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  是方程的解, 初始状态为  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})$

对于所有  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{x}(t)$  的解在  $x_1$ - $x_2$  平面的轨线是一条通过  $\mathbf{x}_0$  点的曲线, 该曲线称为状态方程始于  $\mathbf{x}_0$  点的轨线或轨道。

$x_1$ - $x_2$  平面称为状态平面或相平面。

从给定的初始点 $\mathbf{x}_0$ 出发，在 $\mathbf{x}_0$ 点沿向量场移动，即可近似地构造从 $\mathbf{x}_0$ 点开始的轨线，这样到达新的一点 $\mathbf{x}_a$ ，然后在 $\mathbf{x}_a$ 点沿向量场继续近似地构造轨线。如果把相邻点选得足够近，就可以得到通过 $\mathbf{x}_0$ 点的合理的近似轨线。

无摩擦单摆系统：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -10\sin x_1$$

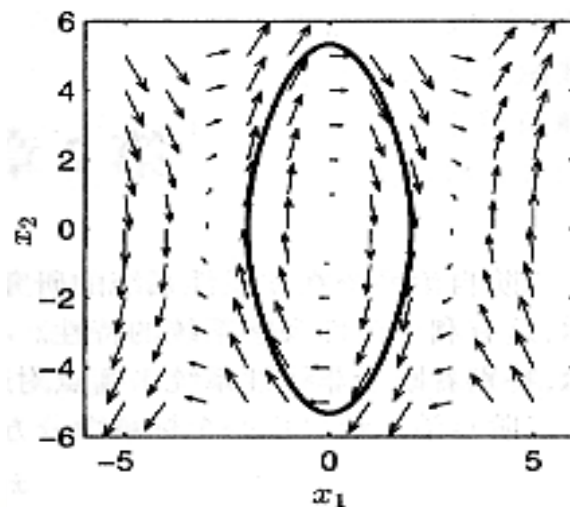


图 2.2 无摩擦力时单摆方程的向量场图

所有轨线或解的曲线称为系统的相图。

## 2.1 线性系统的特性

线性系统:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

解:  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M} \exp(\mathbf{J}_r t) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_0$

$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} = \mathbf{J}_r$        $\mathbf{M}$ 为实满秩线性变换矩阵

$\mathbf{J}_r$ 为实Jordan型

对于二阶系统,  $\mathbf{J}_r$ 只可取为下面三种情况:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

**第一种情况**      **两个特征值都为实数， $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$**

线性坐标变换:       $\mathbf{z} = M^{-1}\mathbf{x}$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = e^{J_r t} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} z_1(t) &= z_{10} e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) &= z_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

$$\implies z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad c = z_{20} / (z_{10})^{\lambda_2/\lambda_1}$$

# 1. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ 时

$$z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$

● 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0, e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$

●  $e^{\lambda_2 t}$  比  $e^{\lambda_1 t}$  较快趋于零, 称  $\lambda_2$  为快特征值,  $\lambda_1$  为慢特征值

对应的特征向量分别称为快特征向量  $V_2$ , 和慢特征向量  $V_1$

● 当  $z_1 > 1$  时,  $z_2$  变化快, 曲线斜率  $> 1$ , 当  $z_1 < 1$  时,  $z_2$  变化慢, 曲线斜率  $< 1$ .

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{[(\lambda_2/\lambda_1)-1]}$$

当  $|z_1| \rightarrow 0$  时, 曲线斜率  $\rightarrow 0$ , 当  $|z_1| \rightarrow \infty$  时, 曲线斜率  $\rightarrow \infty$ .

当轨线趋于原点时与  $z_1$  轴相切, 当轨线趋于  $\infty$  时与  $z_2$  轴平行。

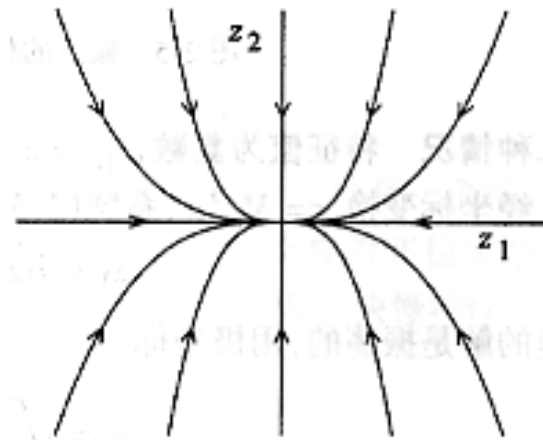
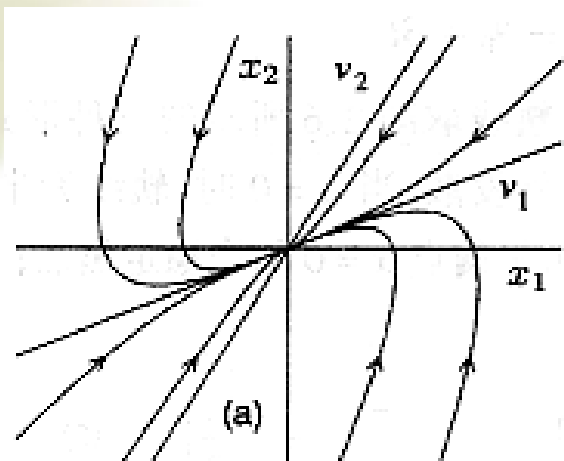


图 2.3 模型坐标中稳定结点的相图



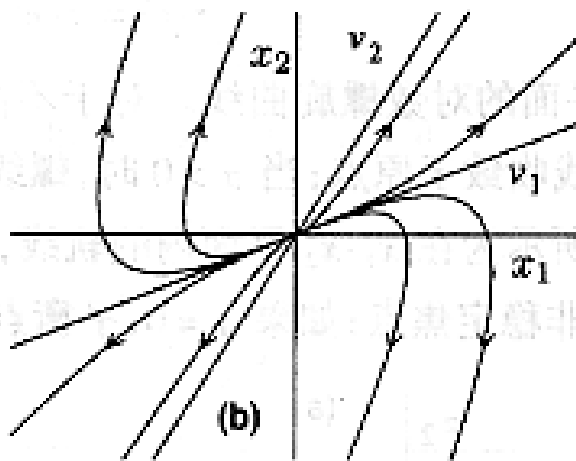
(a) 稳定结点

在 $x_1$ - $x_2$ 平面上，当轨线趋于原点时与慢特征向量 $v_1$ 相切，当轨线趋于 $\infty$ 时与快特征向量 $v_2$ 平行。

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$  称为稳定结点



## 2. $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ 时



(b)非稳定结点

指数项 $e^{\lambda_1 t}$ 与 $e^{\lambda_2 t}$ 随 $t$ 增大按指数规律增加。

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$  称为非稳定结点



### 3. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ 时

- 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty, e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$

称  $\lambda_2$  为稳定特征值,  $\lambda_1$  为非稳定特征值

称  $V_2$  为稳定特征向量,  $V_1$  为非稳定特征向量

- $z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}$   $|z_1|$  越大,  $|z_2|$  越小。

- 当  $|z_1| \rightarrow \infty$  时轨线与  $z_1$  轴相切, 当  $|z_1| \rightarrow 0$  时轨线与  $z_2$  轴相切。

$$\frac{d z_2}{d z_1} = c \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{[(\lambda_2/\lambda_1) - 1]}$$

- 另有四条轨线是沿坐标轴的。其中两条沿 $z_2$ 轴趋于原点，称为**稳定轨线**；另外两条沿 $z_1$ 轴趋于无穷，称为**非稳定轨线**。

$$z_1(t) = z_{10}e^{\lambda_1 t}$$

$$z_2(t) = z_{20}e^{\lambda_2 t}$$

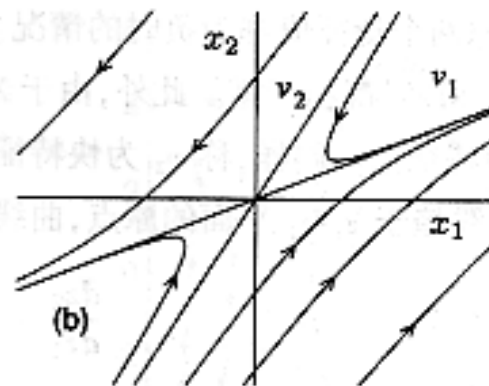
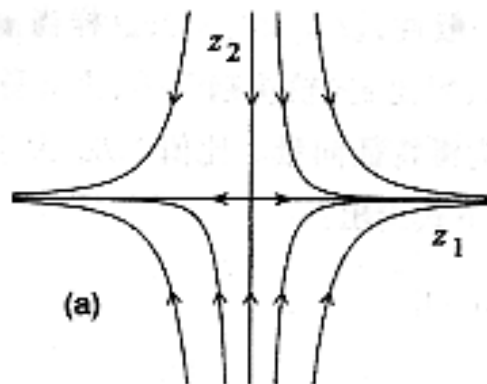


图 2.5 鞍点的相图。(a)在模型坐标中；(b)在原坐标中

在 $x_1$ - $x_2$ 平面上，沿稳定向量 $v_2$ 的是稳定轨线，沿非稳定向量 $v_1$ 的是非稳定轨线。

$x = 0$  称为鞍点

## 第二种情况 特征值为复数, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \alpha z_1 - \beta z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta z_1 + \alpha z_2 \end{aligned}$$

用极坐标表示:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \left( \frac{z_2}{z_1} \right) \end{aligned} \implies \begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \beta \end{aligned}$$

在初始条件  $(r_0, \theta_0)$  下, 得到解:

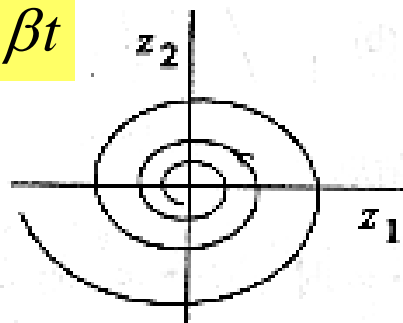
$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) &= \theta_0 + \beta t \end{aligned}$$

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}$$

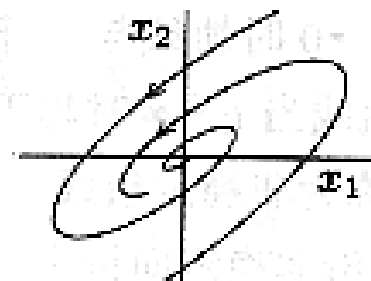
$$\theta(t) = \theta_0 + \beta t$$

1.  $\alpha < 0$ 时

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$  称为稳定焦点



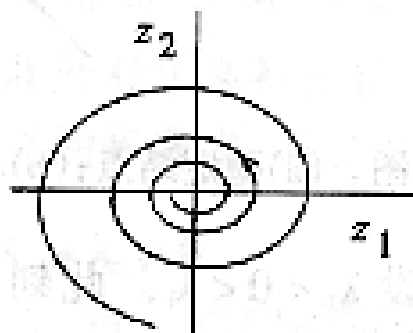
(a)  $\alpha < 0$ ;



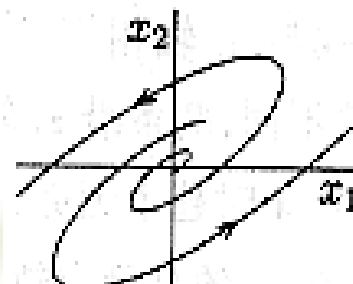
(a) 稳定焦点;

2.  $\alpha > 0$ 时

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$  称为非稳定焦点



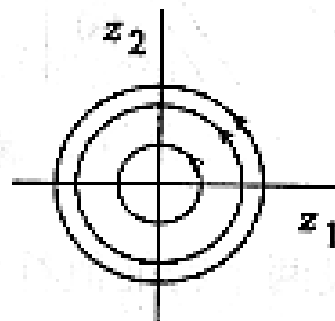
(b)  $\alpha > 0$ ;



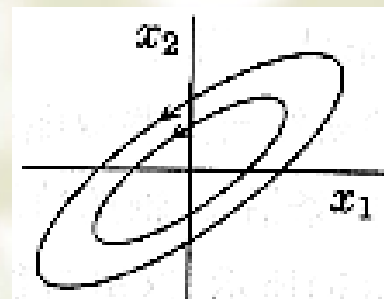
(b) 非稳定焦点;

3.  $\alpha = 0$ 时

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$  称为中心



(c)  $\alpha = 0$



(c) 中心

### 第三种情况      多重非零特征值, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda z_1 + k z_2 \\ \dot{z}_2 = \lambda z_2 \end{cases}$$

在给定初始状态下, 其解为:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = e^{J_r t} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & k t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix}$$

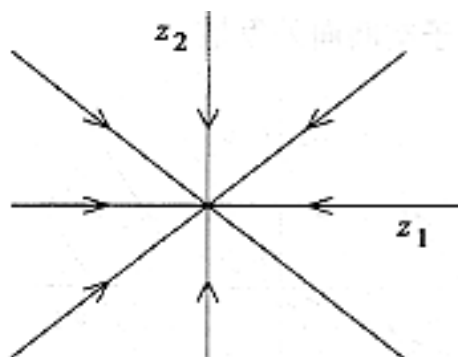
$$\implies \begin{cases} z_1(t) = e^{\lambda t} (z_{10} + k z_{20} t) \\ z_2(t) = e^{\lambda t} z_{20} \end{cases}$$

消去 $t$ 得到轨线方程: 
$$z_1 = z_2 \left[ \frac{z_{10}}{z_{20}} + \frac{k}{\lambda} \ln \left( \frac{z_2}{z_{20}} \right) \right]$$

1.  $k = 0$ 时

$$z_1(t) = e^{\lambda t} (z_{10} + k z_{20} t)$$

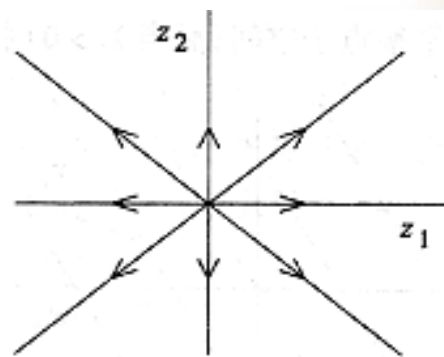
$$z_2(t) = e^{\lambda t} z_{20}$$



(a)  
 $k = 0$  时:  $\lambda < 0$ ;

$$\lambda < 0$$

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$  称为稳定结点

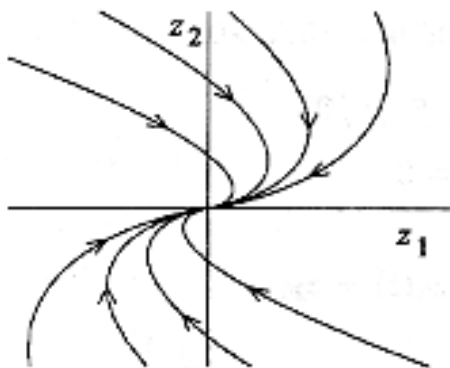


(b)  
 $k = 0$  时:  $\lambda > 0$

$$\lambda > 0$$

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$  称为非稳定结点

## 2. $k=1$ 时

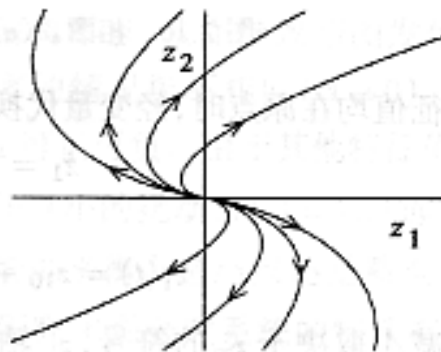


(a)

$k=1$  时  $\lambda < 0$ ;

$$\lambda < 0$$

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$  称为稳定结点



(b)

$k=1$  时  $\lambda > 0$

$$\lambda > 0$$

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$  称为非稳定结点



## 第四种情况 一个特征值为零或两个特征值均为零

当 $\mathbf{A}$ 矩阵有一个特征值为零或两个特征值都为零时，系统有一个平衡点子空间，而不是一个平衡点。

特殊情况：当 $\mathbf{A}$ 矩阵为零矩阵时，状态平面内的每一点都是平衡点。

1.  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ 时

对应的特征向量为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ,

线性变换后得到：

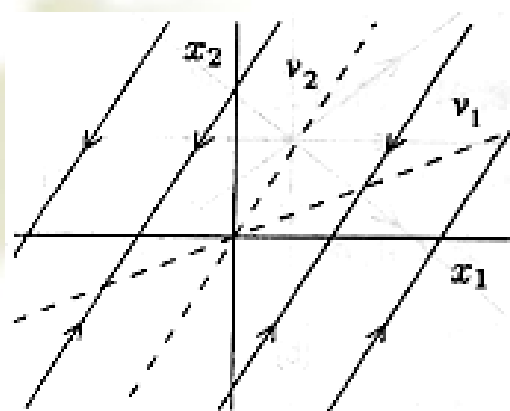
$$\dot{z}_1 = 0$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2$$



$$z_1(t) = z_{10}$$

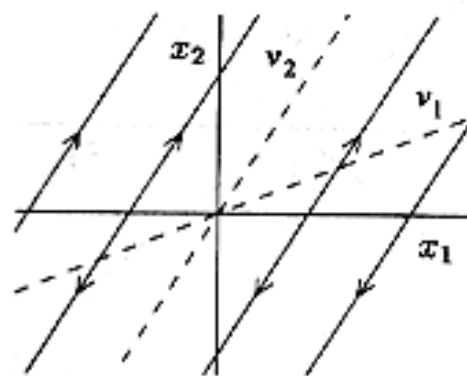
$$z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t}$$



(a)

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0;$

$$\lambda_2 < 0$$



(b)

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

$$\lambda_2 > 0$$

图中 $\mathbf{v}_1$ 向量对应的虚线为平衡点子空间

## 2. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时

线性变换后得到:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= 0\end{aligned}$$



$$z_1(t) = z_{10} + z_{20}t$$

$$z_2(t) = z_{20}$$

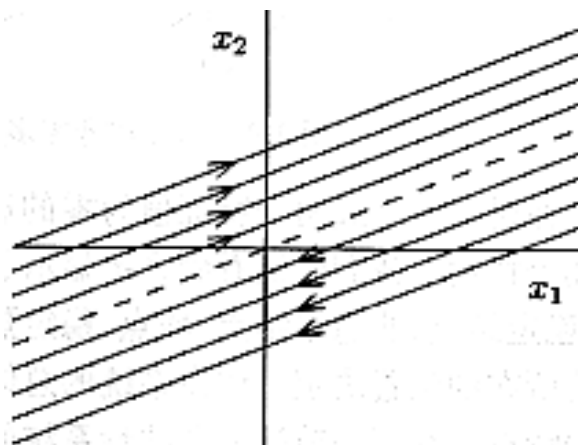


图 2.11  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  时的相图

图中虚线为平衡点子空间

# 二阶系统奇点类型总结

## 线性变换法

任何线性系统通过非奇异线性变换均可变换成Jodan型系统。对于二阶系统

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, J = TAT^{-1}, \text{其中} T \text{为变换矩阵。}$$

非奇异线性变换后系统的特征值不变，其特征方程相同为

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

其Jodan型有以下形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\eta}{\xi}$$

1) 单根情况

积分得到积分曲线族  $\eta = C |\xi|^\mu, \mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

- i. 特征值为一对负实根，原点是稳定结点
- ii. 特征值为一对正实根，原点是不稳定结点
- iii. 特征值为一对符号相反的实根，原点是鞍点，是不稳定的
- iv. 特征值一个为0另一个为负实根，0特征值对应的轴上任何一点都是平衡点，稳定奇直线
- v. 特征值一个为0另一个为正实根，0特征值对应的轴上任何一点都是平衡点，不稳定奇直线
- vi. 特征值为一对实部负的共轭复根，原点是稳定焦点
- vii. 特征值为一对实部正的共轭复根，原点是不稳定焦点
- viii. 特征值为一对共轭虚根，原点为中心

## 二阶系统奇点类型总结（续）

### 线性变换法

#### 2) 重根

只有一个Jodan块时，

- i。特征值为负实数，原点为稳定的退化结点
- ii。特征值为正实数，原点为不稳定的退化结点
- iii。特征值为0，奇直线上的点均为不稳定平衡点

有两个Jodan块  $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi}$  得到积分曲线族一族过原点的直线  $\eta = C\xi$

原点为结点。

- i。特征值为负实数，原点为稳定结点
- ii。特征值为正实数，原点为不稳定结点

# 二阶系统的稳定性结论

- ❖ 1 特征值均为负实部，系统称为稳定的；
- ❖ 2 特征值中至少有一个正实部，系统称为不稳定；
- ❖ 3 零实部特征值为单根，其余特征值均为负实部，系统为临界状态；
- ❖ 4 零实部特征值为重根，系统为不稳定的。

第3条等价于下面两条：

- a. 如果特征根是一对纯虚根：稳定；
- b. 如果特征根是一负根和一零根：稳定；

结点、焦点和鞍点平衡点为结构稳定的。

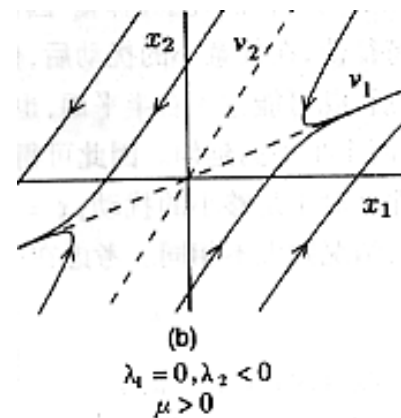
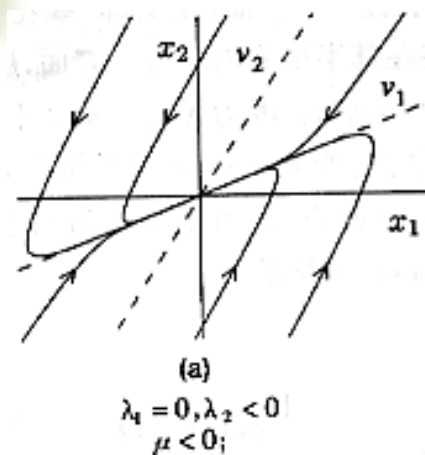
中心平衡点不是结构稳定的。

如果 $A$ 没有实部为零的特征值，那么原点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 就称为 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ 的一个双曲平衡点。

当 $A$ 有多重非零特征值时，无穷小的扰动会产生一对复特征值，因此稳定（或非稳定）结点会继续保持为稳定（或非稳定）结点，或者变为稳定（或非稳定）焦点。



当 $\mathbf{A}$ 有一个零特征值时，零特征值的扰动会得到一个实特征值 $\lambda_1=\mu$ ， $\mu$ 可正可负。则此时被扰动系统有两个不相等的实数特征值，平衡点的类型取决于 $\lambda_2$ 和 $\mu$ 的符号。



当 $\mathbf{A}$ 有两个零特征值时，考虑四种可能的Jordan型扰动，四种情况下被扰动系统的平衡点分别是中心、焦点、结点和鞍点。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -\mu^2 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

中心

焦点

结点

鞍点

## 2.2 多重平衡点

隧道二极管电路：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0.5[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= 0.2[-x_1 - 1.5x_2 + 1.2]\end{aligned}$$

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$$

平衡点： (0.063, 0.758), (0.285, 0.61), (0.884, 0.21)

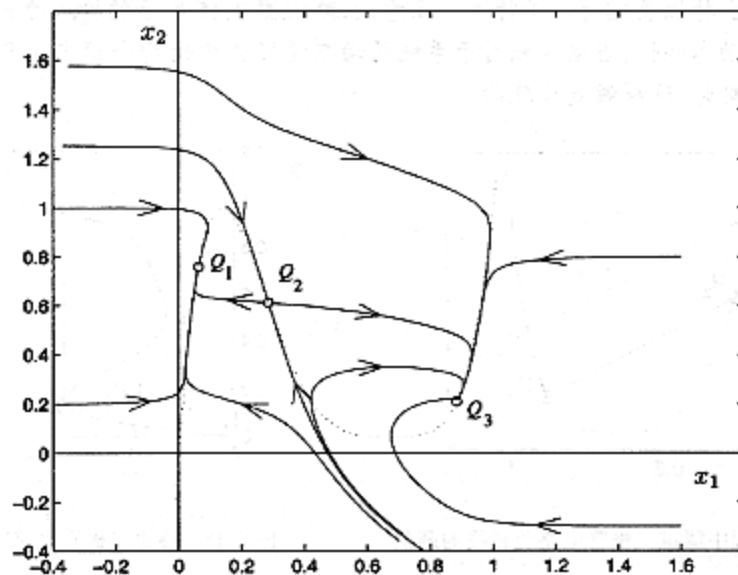


图 2.13 例 2.1 中的隧道二极管电路的相图

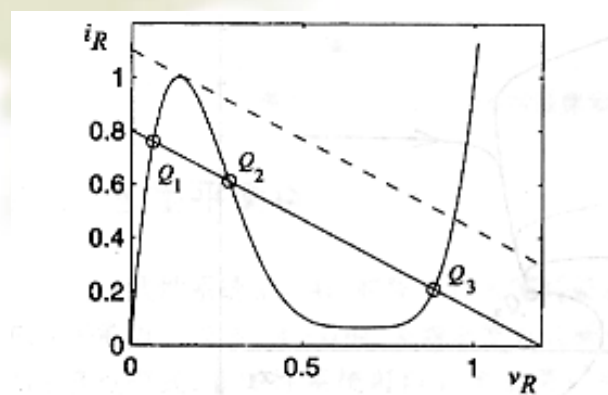


图 2.14 触发过程中隧道二极管电路负载线的调整

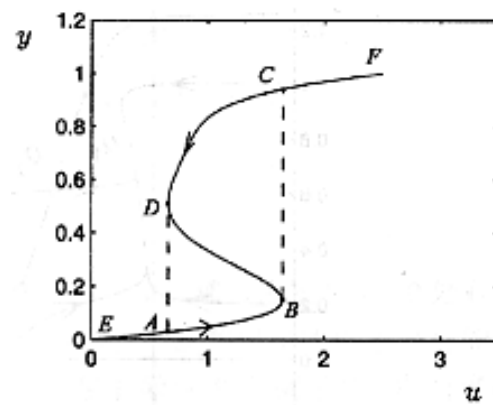


图 2.15 隧道二极管电路的迟滞特性

## 有摩擦力的单摆：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -10\sin x_1 - x_2$$

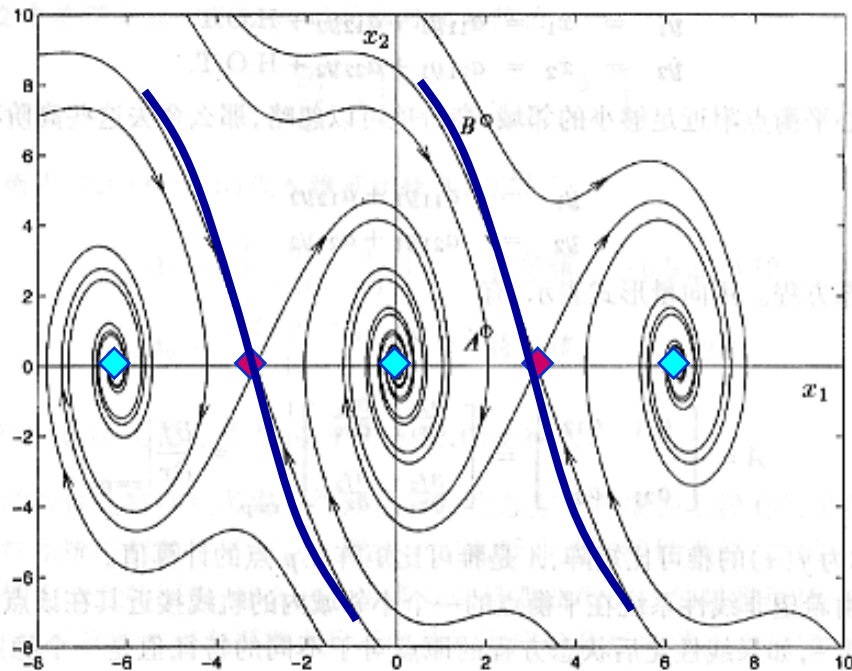


图 2.16 例 2.2 中的单摆方程的相图



作业：习题**2.1**， **2.8**