# 第三章　复变函数的积分

## 一、选择题：

1．设 $c$ 为从原点沿 $y^2=x$ 至 $1+i$ 的弧段，则 $\int_c (x+iy^2)dz=$（　）

（A）$\frac{1}{6}-\frac{5}{6}i$　（B）$-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}i$　（C）$-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}i$　（D）$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}i$

2．设 $c$ 为不经过点 $1$ 与 $-1$ 的正向简单闭曲线，则 $\oint_c \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}dz$ 为（　）

（A）$\frac{\pi i}{2}$　（B）$-\frac{\pi i}{2}$　（C）$0$　（D）(A)(B)(C)都有可能

3．设 $c_1:|z|=1$ 为负向，$c_2:|z|=3$ 正向，则 $\oint_{c=c_1+c_2} \frac{\sin z}{z^2}dz=$（　）

（A）$-2\pi i$　（B）$0$　（C）$2\pi i$　（D）$4\pi i$

4．设 $c$ 为正向圆周 $|z|=2$，则 $\oint_c \frac{\cos z}{(1-z)^2}dz=$（　）

（A）$-\sin 1$　（B）$\sin 1$　（C）$-2\pi i\sin 1$　（D）$2\pi i\sin 1$

5．设 $c$ 为正向圆周 $|z|=\frac{1}{2}$，则 $\oint_c \frac{z^3\cos\frac{1}{z-2}}{(1-z)^2}dz=$（　）

（A）$2\pi i(3\cos 1-\sin 1)$　（B）$0$　（C）$6\pi i\cos 1$　（D）$-2\pi i\sin 1$

6．设 $f(z)=\oint_{|\xi|=4} \frac{e^{\xi}}{\xi-z}d\xi$，其中 $|z|\neq 4$，则 $f'(\pi i)=$（　）

（A）$-2\pi i$　（B）$-1$　（C）$2\pi i$　（D）$1$

7．设 $f(z)$ 在单连通域 $B$ 内处处解析且不为零，$c$ 为 $B$ 内任何一条简单闭曲线，则积分

$\oint_c \frac{f''(z)+2f'(z)+f(z)}{f(z)}dz$（　）

（A）于 $2\pi i$　（B）等于 $-2\pi i$　（C）等于 $0$　（D）不能确定

8．设 $c$ 是从 $0$ 到 $1+\frac{\pi}{2}i$ 的直线段，则积分 $\int_c ze^z dz=$（　　）

(A) $1-\frac{\pi e}{2}$　　(B) $-1-\frac{\pi e}{2}$　　(C) $1+\frac{\pi e}{2}i$　　(D) $1-\frac{\pi e}{2}i$

9．设 $c$ 为正向圆周 $x^2+y^2-2x=0$，则 $\oint_c \frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{z^2-1}dz=$（　　）

（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$　　（B）$\sqrt{2}\pi i$　　（C）$0$　　（D）$-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$

10．设 $c$ 为正向圆周 $|z-i|=1, a\neq i$，则 $\oint_c \frac{z\cos z}{(a-i)^2}dz=$（　　）

（A）$2\pi ie$　　（B）$\frac{2\pi i}{e}$　　（C）$0$　　（D）$i\cos i$

11．设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，$c$ 为 $D$ 内任一条正向简单闭曲线，它的内部全属于 $D$．如果 $f(z)$ 在 $c$ 上的值为 2，那么对 $c$ 内任一点 $z_0$，$f(z_0)$（　　）

（A）等于 0　　（B）等于 1　　（C）等于 2　　（D）不能确定

12．下列命题中，不正确的是（　　）

（A）积分 $\oint_{|z-a|=r}\frac{1}{z-a}dz$ 的值与半径 $r(r>0)$ 的大小无关

（B）$\left|\oint_c (x^2+iy^2)dz\right|\leq 2$，其中 $c$ 为连接 $-i$ 到 $i$ 的线段

（C）若在区域 $D$ 内有 $f'(z)=g(z)$，则在 $D$ 内 $g'(z)$ 存在且解析

（D）若 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $c:|z|=r(0<r<1)$ 的积分等于零，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处解析

13．设 $c$ 为任意实常数，那么由调和函数 $u = x^2 - y^2$ 确定的解析函数 $f(z) = u + iv$ 是（　　）

(A) $iz^2 + c$　　(B) $iz^2 + ic$　　(C) $z^2 + c$　　(D) $z^2 + ic$

14．下列命题中，正确的是（　　）

（A）设 $v_1, v_2$ 在区域 $D$ 内均为 $u$ 的共轭调和函数，则必有 $v_1 = v_2$

（B）解析函数的实部是虚部的共轭调和函数

（C）若 $f(z) = u + iv$ 在区域 $D$ 内解析，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 为 $D$ 内的调和函数

（D）以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数

15．设 $v(x, y)$ 在区域 $D$ 内为 $u(x, y)$ 的共轭调和函数，则下列函数中为 $D$ 内解析函数的是（　　）

（A）$v(x, y) + iu(x, y)$　　（B）$v(x, y) - iu(x, y)$

（C）$u(x, y) - iv(x, y)$　　（D）$\dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

## 二、填空题

1．设 $c$ 为沿原点 $z = 0$ 到点 $z = 1 + i$ 的直线段，则 $\int_c 2\bar{z}dz =$ ____________

2．设 $c$ 为正向圆周 $|z - 4| = 1$，则 $\int_c \dfrac{z^2 - 3z + 2}{(z-4)^2}dz =$ ____________

3．设 $f(z) = \oint\limits_{|\xi|=2} \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}\xi)}{\xi - z}d\xi$，其中 $|z| \neq 2$，则 $f'(3) =$ ____________

4．设 $c$ 为正向圆周 $|z| = 3$，则 $\oint_c \dfrac{z + \bar{z}}{|z|}dz =$ ____________

5．设 $c$ 为负向圆周 $|z| = 4$，则 $\oint_c \dfrac{e^z}{(z - \pi i)^5}dz =$ ____________

6．解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的________________

7．设 $f(z)$ 在单连通域 $B$ 内连续，且对于 $B$ 内任何一条简单闭曲线 $c$ 都有 $\oint_c f(z)dz = 0$，那么 $f(z)$ 在 $B$ 内____________________

8．调和函数 $\varphi(x,y) = xy$ 的共轭调和函数为____________________

9．若函数 $u(x,y) = x^3 + axy^2$ 为某一解析函数的虚部，则常数 $a =$________________

10．设 $u(x,y)$ 的共轭调和函数为 $v(x,y)$，那么 $v(x,y)$ 的共轭调和函数为____________

三、计算积分

1. $\oint_{|z|=R} \frac{6z}{(z^2-1)(z+2)} dz$,其中 $R>0, R \neq 1$ 且 $R \neq 2$；

2. $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^4 + 2z^2 + 2}$ .

四、设 $f(z)$ 在单连通域 $B$ 内解析，且满足 $|1 - f(z)| < 1 \quad (x \in B)$.试证

1．在 $B$ 内处处有 $f(z) \neq 0$；

2．对于 $B$ 内任意一条闭曲线 $c$，都有 $\oint_c \frac{f''(z)}{f(z)} dz = 0$

五、设 $f(z)$ 在圆域 $|z-a| < R$ 内解析，若 $\max_{|z-a|=r} |f(z)| = M(r) \quad (0 < r < R)$，

则 $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M(r)}{r^n} \quad (n = 1,2,\cdots)$.

六、求积分 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}dz$，从而证明 $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$.

七、设 $f(z)$ 在复平面上处处解析且有界，对于任意给定的两个复数 $a,b$，试求极限

$\lim\limits_{R\to+\infty}\oint\limits_{|z|=R}\dfrac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$ 并由此推证 $f(a)=f(b)$（刘维尔 Liouville 定理）.

八、设 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析，且 $f(0)=1,\ f'(0)=2$，试计算积分 $\oint\limits_{|z|=1}(z+1)^2\dfrac{f(z)}{z^2}dz$

并由此得出 $\int_0^{2\pi}\cos^2\dfrac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta$ 之值.

九、设 $f(z)=u+iv$ 是 $z$ 的解析函数，证明

$$\frac{\partial^2\ln(1+|f(z)|^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ln(1+|f(z)|^2)}{\partial y^2}=\frac{4|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}.$$

十、若 $u=u(x^2+y^2)$，试求解析函数 $f(z)=u+iv$.

一、1.（D） 2.（D） 3.（B） 4.（C） 5.（B）

6.（A） 7.（C） 8.（A） 9.（A） 10.（C）

11.（C） 12.（D） 13.（D） 14.（C） 15.（B）

二、1. 2 2. $10\pi i$ 3. 0 4. $6\pi i$ 5. $\dfrac{\pi i}{12}$ 6. 平均值

7. 解析 8. $\dfrac{1}{2}(y^2-x^2)+C$ 9. $-3$ 10. $-u(x,y)$

三、1. 当$0<R<1$时，$0$； 当$1<R<2$时，$8\pi i$； 当$2<R<+\infty$时，$0$.

2. $0$.

六、$2\pi i$.

七、$0$.

八、$\displaystyle\oint_{|z|=1}(z+1)^2\frac{f(z)}{z^2}dz=8\pi i,\ \int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta=2\pi$.

十、$f(z)=2c_1\ln z+c_2+ic_3$（$c_1,c_2,c_3$为任意实常数）.