作业1 习题答案

1. 试用初等变换和矩阵消元法解下列线性方程组，并比较求解过程.

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3= & 1, \\ 2x_1+2x_2+5x_3= & 2, \\ 3x_1+5x_2+x_3= & 3; \end{cases}$

解: 初等变换：

$$\to \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3= & 1 \\ -2x_2-x_3= & 0 \\ -x_2-8x_3= & 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3= & 1 \\ -x_2-8x_3= & 0 \\ -2x_2-x_3= & 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3= & 1 \\ -x_2-8x_3= & 0 \\ 15x_3= & 0 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} x_1= & 1 \\ x_2= & 0 \\ x_3= & 0 \end{cases}$$

(2)$\begin{cases} x_2+x_3+x_4= & 1, \\ x_1+x_3+x_4= & 2, \\ x_1+x_2+x_4= & 3, \\ x_1+x_2+x_3= & 4; \end{cases}$

解: 矩阵消元法：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1= & \dfrac{7}{3} \\ x_2= & \dfrac{4}{3} \\ x_3= & \dfrac{1}{3} \\ x_4= & -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

2.用矩阵消元法解下列方程组.

$$（1）\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4= & 1, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5= & -1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5= & 3, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5= & 3, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5= & -1; \end{cases}$$

$$（2）\begin{cases} x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5= & 2, \\ x_1+2x_2-3x_4+2x_5= & 1, \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5= & 7, \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5= & 25; \end{cases}$$

$$（3）\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4= & 4, \\ x_2-x_3+x_4= & -3, \\ x_1+3x_2+x_4= & 1, \\ -7x_2+3x_3+x_4= & -3; \end{cases}$$

解: (1) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 16 & -12 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 24 & -16 & -8 & 16 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} x_1= & 1+x_4 \\ x_2= & \dfrac{-2-x_5}{2} \\ x_3= & 0 \\ x_4= & \dfrac{-2-x_5}{2} \end{cases}$$

解: (2) $\begin{pmatrix}1&-1&-3&1&-3&2\\1&2&0&-3&2&1\\2&-3&4&-5&2&7\\9&-9&6&-16&2&25\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-3&1&-3&2\\0&3&3&-4&5&-1\\0&-1&10&-7&8&3\\0&0&33&-25&29&7\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-1&-3&1&-3&2\\0&-1&10&-7&8&3\\0&0&33&-25&29&8\\0&0&33&-25&29&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-3&1&-3&2\\0&-1&10&-7&8&3\\0&0&33&-25&29&8\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ 无解.

解: (3) $\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&1&1\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&5&-3\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&0&12\\0&0&-4&8&-24\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&0&12\\0&0&0&8&0\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_1=&-8\\x_2=&3\\x_3=&6\\x_4=&0\end{cases}$

3. 在空间直角坐标系中，求下面三个平面$9x-3y+z=20, x+y+z=0, -x+2y+z=-10$的公共点的集合.

解: $\begin{pmatrix}9&-3&1&20\\1&1&1&0\\-1&2&1&-10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&3&2&-10\\0&0&0&-20\end{pmatrix}$ 所以无交点.

4. 讨论当λ取什么值时下面的方程组有解：$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=&1\\x_1+\lambda x_2+x_3=&\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=&\lambda^2\end{cases}$ 当方程组有解时求出解来，并讨论λ取什么值时方程组有唯一解，什么时候有无穷组解。

解: $\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&\lambda\\0&1-\lambda&\lambda-1&\lambda(\lambda-1)\\0&0&2-\lambda-\lambda^2&1-\lambda^2-\lambda^3+\lambda\end{pmatrix}$

当$\lambda=1$时，有无穷多组解；$x_1=1-x_2-x_3$ 当$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq1$时，有唯一解.

5. 不解方程组，判断下面的方程组是否有非零解：

$$(1)\begin{cases} x+y+z= & 0\\ 2x+y+5z= & 0\end{cases}$$

解: 方程组的个数小于未知数个数，方程有无穷解，所以有非零解.

$$(2)\begin{cases} x+y+z= & 0\\ 2x+y+5z= & 0\\ 3x+2y+6z= & 0\end{cases}$$

解: 第三个方程为第一个方程和第二个方程的和，方程组有无穷解，所以有非零解.

6. 若下列方程组无解，求k应该满足的条件。

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3= & 4\\ -x_1+kx_2+x_3= & k^2\\ x_1-x_2+2x_3= & -4\end{cases}$$

解: $\begin{pmatrix}1 & 1 & k & 4\\ -1 & k & 1 & k^2\\ 1 & -1 & 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & k & 4\\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4\\ 0 & -2 & 2-k & -8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & k & 4\\ 0 & -2 & 2-k & -8\\ 0 & 0 & \frac{-k^2+3k+4}{2} & k^2-4k\end{pmatrix}$

$$\to\begin{cases} k^2-4k\neq & 0\\ \dfrac{-k^2+3k+4}{2}= & 0\end{cases}$$

所以$k=-1$.

7. λ为何值时，下列方程组$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3= & 1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3= & 2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3= & -1 \end{cases}$有解、有唯一解、有无穷多组解？并在无穷多解时写出方程组的通解。

解: $\begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda^2 & 2+\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 5-2\lambda & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda^2 & 2+\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 4+\lambda-5\lambda^2 & 0 & 6-6\lambda \end{pmatrix}$

$\lambda=-\frac{4}{5}$时方程组无解；
$\lambda\neq-\frac{4}{5}$且$\lambda\neq 1$时方程组有唯一解；
$\lambda=1$时有无穷多组解$x_1=1, x_2=x_3-1.$

8. 若方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3= & 1 \\ x_2-x_3= & 1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3= & b+3 \\ 3x_1+5x_2+x_3= & 5 \end{cases}$$

有唯一解，求a, b满足的条件。

解: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\neq -1.$

9.已知下面两个方程组同解，求p, q, s, t的值，并求它们的所有解。

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+px_3+x_4= & 0 \\ x_1+9x_2+4x_3+qx_4= & 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+tx_3+x_4= & 0 \\ 5x_1+12x_2+5x_3+sx_4= & 0 \\ x_1-2x_2+(5-2t)x_3+(s-2)x_4= & 0 \end{cases}$

解: 方程组（1）的解：$\begin{cases} x_1= & -\dfrac{8+9p}{11}x_3-\dfrac{2q+9}{11}x_4 \\ x_2= & -\dfrac{4-p}{11}x_3-\dfrac{q-1}{11}x_4 \end{cases}$

(1)的基础解系为$\alpha_1=(8+9p,4-p,-11,0),\alpha_2=(2q+9,q-1,0,-11)$,将$\alpha_1$代入（2）得$p=-1,t=3$,将$\alpha_2$代入（2）得$q=0,s=3$.
（1）（2）同解，通解为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$, k_1,k_2为任意数.