4.22. $PA+A^TP=-C^TC$

①. 假设 $P=P^T>0$，令 $V(x)=x^TPx$.

$\dot V(x)=-x^TC^TCx\le 0$，$\dot V(x)=0$

$\therefore Cx(t)=0$

$\therefore C\cdot e^{At}x_0=0$，$x_0=0$

$\because (A,C)$ 对是可观测的. 运用 LaSalle 定理.

$\therefore$ 得证 A 是赫尔维茨的

②. 假设 A 是赫尔维茨的，令 $P=\int_0^\infty e^{A^Tt}\cdot C^T\cdot C\cdot e^{At}\,dt$.

假设存在 $x\ne 0$ 使 $x^TPx=0$.

$\therefore \int_0^\infty x^Te^{A^Tt}\cdot C^TC\cdot e^{At}x\,dt=0$

$\therefore C\cdot e^{At}x\equiv 0$，$x=0$. 矛盾. 则 P 正定

$\therefore PA+A^TP=-C^TC$，~~有 $x=0$ 唯~~ 有唯一解.

---

4.35. ①. 若 $r_1\ge r_2$，则 $r_1+r_2\le 2r_1$

$\therefore \alpha(r_1+r_2)\le\alpha(2r_1)\le\alpha(2r_1)+\alpha(2r_2)$

②. 若 $r_1\le r_2$，则 $r_1+r_2\le 2r_2$

$\therefore$ 同理，$\alpha(r_1+r_2)\le\alpha(2r_1)+\alpha(2r_2)$

$\therefore$ 综上，$\alpha(r_1+r_2)\le\alpha(2r_1)+\alpha(2r_2)$.

---

4.37. (1). $\dot x=\begin{bmatrix}-1 & \alpha(t)\\ \alpha(t) & -2\end{bmatrix}x$. $|\alpha(t)|\le 1$.

令 $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$.

$\dot V=\dot x_1x_1+\dot x_2x_2=-x_1^2+\alpha(t)x_1x_2+\alpha(t)x_1x_2-2x_2^2$

$\because |\alpha(t)|\le 1$

$\therefore \dot V\le -x_1^2-2x_2^2+2|x_1||x_2|=-\begin{bmatrix}|x_1|\\|x_2|\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|x_1|\\|x_2|\end{bmatrix}\le -0.382(x_1^2+x_2^2)$

$\therefore$ 原点是指数稳定的.

(2). $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & \alpha(t)\\ -\alpha(t) & -2\end{bmatrix}x$. 令 $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$

$$\dot{V}(x)=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2=-x_1^2+\alpha(t)x_1x_2-\alpha(t)x_1x_2-2x_2^2=-x_1^2-2x_2^2$$

∴ 显然为原点指数稳定.

---

4.44 $\dot{x}_1=-x_1+x_2+(x_1^2+x_2^2)\sin t$

$\dot{x}_2=-x_1-x_2+(x_1^2+x_2^2)\cos t$. 令 $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$

$$\dot{V}(x)=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2=-x_1^2+x_1x_2+x_1(x_1^2+x_2^2)\sin t-x_1x_2-x_2^2+x_2(x_1^2+x_2^2)\cos t.$$

$$=-x_1^2-x_2^2+(x_1^2+x_2^2)(x_1\sin t+x_2\cos t).$$ 令 $x_1^2+x_2^2=\|x\|_2^2$.

$$\dot{V}(x)\le-\|x\|_2^2+\|x\|_2^3\cdot\sqrt{(\sin t)^2+(\cos t)^2}=\|x\|_2^3-\|x\|_2^2$$

∴ $\dot{V}(x)\le-(1-r)\|x\|_2^2$, 对于 $r<1$. $\|x\|_2\le r$.

∴ 原点是指数稳定的.

∵ $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=\frac{1}{2}\|x\|_2^2$, 则吸引区为 $\|x\|_2\le r$, $r<1$.

---

4.45. $\dot{x}_1=h(t)x_2-g(t)x_1^3$.

$\dot{x}_2=-h(t)x_1-g(t)x_2^3$. , $g(t)\ge k>0$.

(a). 令 $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$,

$$\dot{V}(x)=x_1\cdot[h(t)x_2-g(t)x_1^3]+x_2[-h(t)x_1-g(t)x_2^3]$$

$$=-g(t)x_1^4-g(t)x_2^4=-g(t)(x_1^4+x_2^4)\le-k(x_1^4+x_2^4).$$

∴ 平衡点 $x=0$ 是一致渐近稳定的

(b). $A(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)=\begin{bmatrix}0 & h(t)\\ -h(t) & 0\end{bmatrix}$. 令 $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$

$\dot{V}(x)=x_1h(t)x_2-x_2h(t)x_1=0$

∴ 起始位置为 $V(x)$ 平面的系统始终位于平面. 则线性系统在原点不指稳.

∴ 非线性系统在 $x=0$ 不指数稳定

(c). 对于(a)中描述, 当 $\|x\|\to\infty$ 时. $V(x)\to\infty$, 是径向无界的.

∴ $x=0$ 是全局稳定的

(d). 显然不是.

4.46.

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2(1 - x_2^2 - x_1^2)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} -1+3x_1^2+x_2^2 & -1+2x_1x_2 \\ 1+2x_1x_2 & -1+x_1^2+3x_2^2 \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j$$

∴ 是赫尔维茨的. 原点是指数稳定的.

∴ 原点是渐近稳定的.

---

课上练习:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & e^t \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x.$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + e^t x_2.$$

$$\dot{x}_2 = -x_2.$$

$$\frac{dx_2}{x_2} = -1\,dt, \quad x_2 = C_2 \cdot e^{-(t-t_0)}.$$

$$\therefore \dot{x}_1 = -x_1 + C_2 e^{t_0} \quad . \; C_2 = x_{20}.$$

$$x_1(t) = C_1 e^{-(t-t_0)} + e^{-(t-t_0)} \int e^{(t-t_0)} e^{t_0} C_2\,dt.$$

$$= C_1 e^{-(t-t_0)} + C_2 e^{-(t-t_0)} (e^t - e^{t_0})$$

$$\therefore \Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & e^{t_0} - e^{-t+2t_0} \\ 0 & e^{-(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \|\Phi(t, t_0)\| = \max\left\{ e^{-(t-t_0)} + 0,\; e^{t_0} - e^{2t_0} \cdot e^{-t} + e^{t_0} \cdot e^{-t} \right\}$$

$$\le e^{t_0}$$

∴ 系统原点渐近稳定.