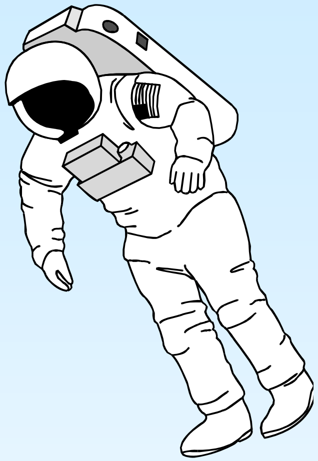
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

第2章 牛顿力学的基本定律



自然和自然规律隐藏在黑暗之中，
上帝说“让牛顿降生吧”，
一切就有了光明；
但是，光明并不久长，魔鬼又出现了，
上帝咆哮说：“让爱因斯坦降生吧”，
就恢复到现在这个样子。

三百年前，牛顿站在巨人的肩膀上，建立了动力学三大定律和万有引力定律。其实，没有后者，就不能充分显示前者的光辉。海王星的发现，把牛顿力学推上荣耀的顶峰。

但是，十九世纪末期, 看来很和谐的经典物理理论, 发生了很大的困难， 使许多物理学家感到困惑不解. 正如开尔文在1900年指出的那样，物理学理论的大厦飞来两朵乌云（下册），它动摇了经典物理理论的基础.

魔鬼的乌云并没有把牛顿力学摧垮，她在更加坚实的基础上确立了自己的使用范围。宇宙时代，给牛顿力学带来了又一个繁花似锦的春天。

德国天文学家开普勒(Johannes Kepler)是丹麦著名天文学家第谷(Tycho Brahe)的学生和继承人，他与意大利的伽利略(Galileo)是同时代的两位巨人。开普勒从理论的高度上对哥白尼学说作了科学论证，使它更加提高了一大步。他所发现的行星运动定律“改变了整个天文学”，为后来牛顿(Isaac Newton)发现万有引力定律奠定了基础。开普勒也被后人赞誉为“天空的立法者”。开普勒根据第谷毕生观测所留下的宝贵资料，孜孜不倦地对行星运动进行深入的研究，提出了行星运动三定律。

伽利略（Galileo Galilei，1564-1642），意大利物理学家、天文学家和哲学家，近代实验科学的先驱者。1590年，伽利略在比萨斜塔上做了“两个铁球同时落地”的著名实验，从此推翻了亚里斯多德“物体下落速度和重量成比例”的学说，纠正了这个持续了1900年之久的错误结论。 1609年，伽利略创制了天文望远镜（后被称为伽利略望远镜），并用来观测天体，他发现了月球表面的凹凸不平，并亲手绘制了第一幅月面图。1610年1月7日，伽利略发现了木星的四颗卫星，为哥白尼学说找到了确凿的证据，标志着哥白尼学说开始走向胜利。借助于望远镜，伽利略还先后发现了土星光环、太阳黑子、太阳的自转、金星和水星的盈亏现象、月球的周日和周月天平动，以及银河是由无数恒星组成等等。这些发现开辟了天文学的新时代。

§2-1.牛顿运动定律

1687年 《自然哲学的数学原理》

一. 牛顿以前的力学

1. 开普勒的行星运动三定律

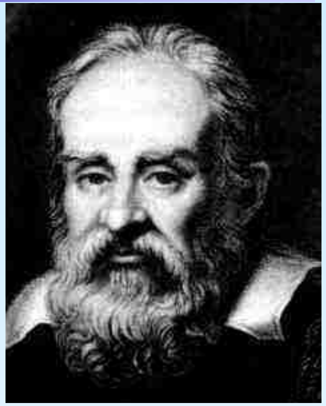
第一定律：(轨道定律) 所有行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动, 太阳位于椭圆的一个焦点上.

第二定律：(面积定律) 每一个行星的矢径(行星中心到太阳的连线)在相等的时间内扫过相等的面积.

第三定律：(周期定律) 行星绕太阳运动的周期T的二次方与该行星的椭圆轨道的半长轴r的三次方成正比.

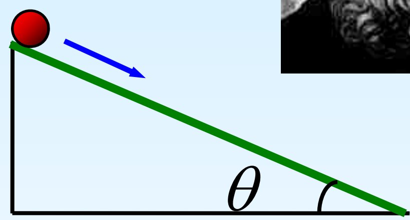
即 $T^2 \propto r^3$

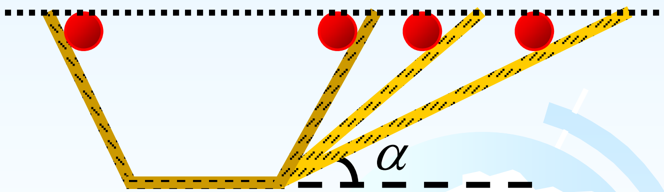
2. 伽利略的实验



观察(如图), 只要斜面足够光滑,

- 即使θ很小,小球也能滚下来;
- 小球滚过距离(由静止开始), 总与$(\Delta t)^2$成正比.
- 小球总试图回到原有高度





$\Rightarrow$ 伽利略最先设想了在理想条件下的理想实验, 得出推论:

光滑水平面，物体一旦有了速度，将永远运动下去。

二. 牛顿运动定律

只适用于作低速运动的宏观物体，并且只在惯性参考系中成立。

1.牛顿第一定律（惯性定律）

每个物体都将保持其静止或匀速直线运动的状态，除非有力加于其上迫使它改变这种状态.

2.牛顿第二定律

某时刻质点的动量对时间的变化率等于该时刻作用在质点上所有力的合力.

3.牛顿第三定律

对每个作用总有一个相反的等效反作用；即两物体彼此的相互作用总是方向相反的.

——牛顿《自然哲学的数学原理》1687

三. 牛顿运动定律的公式表示

1. 牛顿第一定律（惯性定律）

$$\sum \vec{F} = 0, \quad \vec{v} = \text{常矢量}$$

2. 牛顿第二定律

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}}$$

若m为常量$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

3. 牛顿第三定律(作用力与反作用力)

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{F}'}$$

四. 有关运动定律的几个重要概念

1.惯性：物体保持自己原有运动状态不变的性质.

质量是物体惯性的量度，是物体的固有属性。

2.惯性参考系：牛顿第一定律在其中成立的参考系.

3.力的性质：力是改变物体运动状态的原因,而并非维持物体运动状态的原因。

4.力：是物体与物体之间的相互作用.

5.质量(惯性质量)：物体惯性大小的量度.

6.作用力与反作用力：等大、反向、作用于不同物体,始终同一直线.

7.力的单位与量纲

力的单位：牛顿， N　　力的量纲： $[F] = MLT^{-2}$

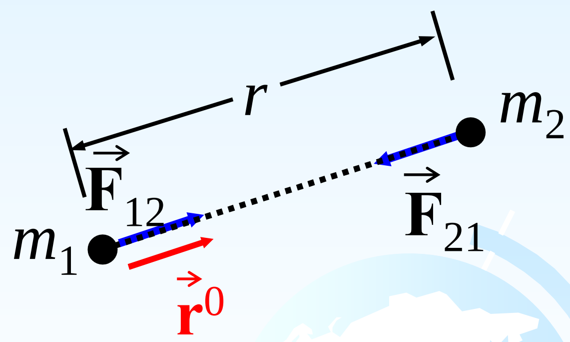
§2-2. 几种常见的力

一. 引力、重力

1. 万有引力 (universal gravitation)

任何物体都相互吸引⇒两**质点**之间存在万有引力是引力相互作用的结果。

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}^{0}$$



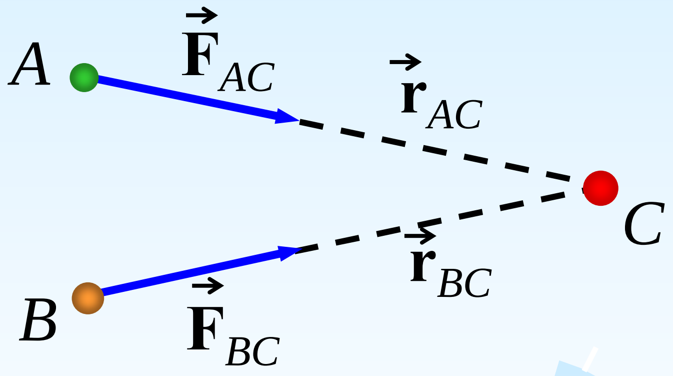
m_1, m_2— 质点的引力质量(gravitational mass)

$G = 6.672\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2\cdot Kg^{-2}}$—万有引力常量 (gr. constant)

2. 引力质量

物体感受外物引力大小的度量

实验表明: 只要$AC=BC$, $\mathbf{F}_{AC}$与$\mathbf{F}_{BC}$的比值不变, 与A、B间距离和C的质量无关。



$\Rightarrow$ 定义质点A, B 的引力质量 m_A, m_B 之比为:

$$\frac{m_A}{m_B}=\frac{F_{AC}}{F_{BC}}$$

迄今为止的实验精度内，任一物体的$m_{引}$与$m_{惯}$之比都等于一普适常数，适当选择单位

$\Rightarrow m_{引}=m_{惯}=m$ (广义相对论基本假设之一)

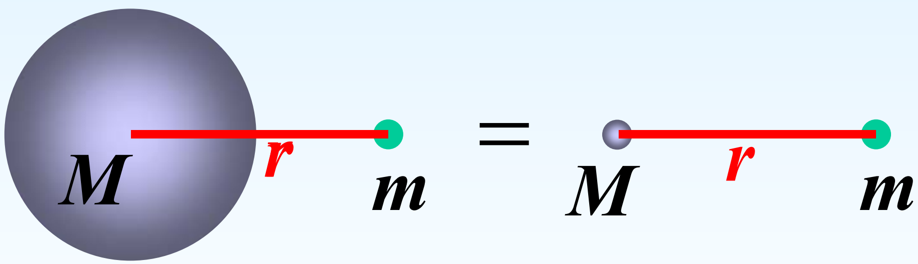
3. 球对称质量分布球体的引力

万有引力定律原则上用于两质点之间。

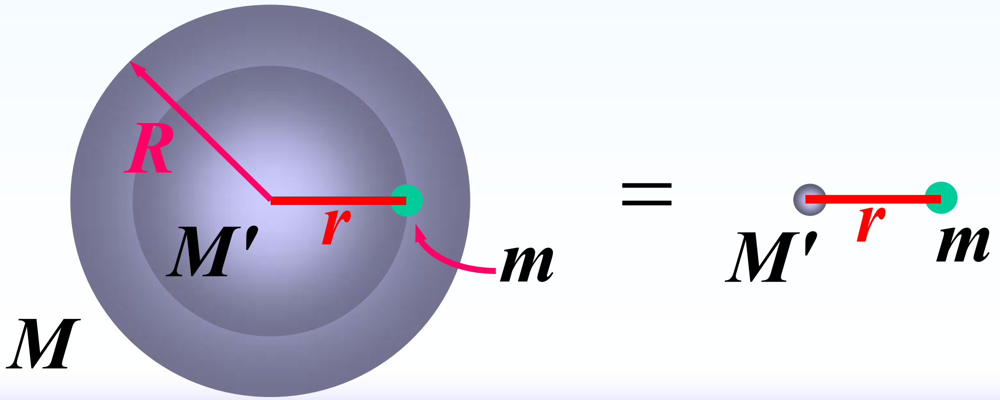
在质量分布有球对称性的球体和一个质点之间也成立：

把球心到质点之间的所有质量集中于球心

以匀质球体为例：



$$F = -G\frac{Mm}{r^2}$$



$$F = -G\frac{M'm}{r^2} = -G\frac{Mm}{R^3}r$$

4. 重力(gravity)

地球作用于地面附近物体的万有引力

$$\boxed{W = G\frac{M_E}{R_E^2}m = mg}$$

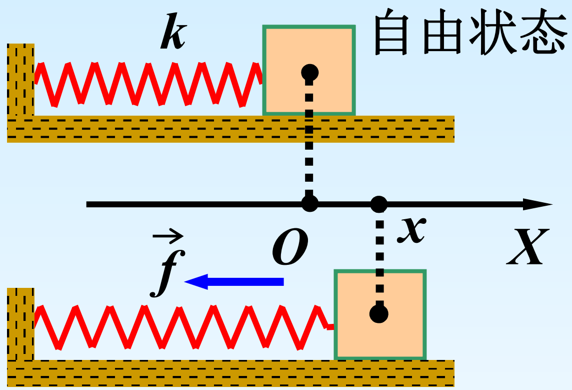
M_E—地球质量；R_E—地球半径；$g \approx 9.8\text{m/s}^2$

地球椭球状＋自转 $\Rightarrow g$ 随纬度不同略有差异

由于地球存在着自转，物体除受重力外，还受到惯性离心力作用，这两个力的合力称为视重，即物体的重量，其方向偏离地心。

二. 弹性力 (elastic force)

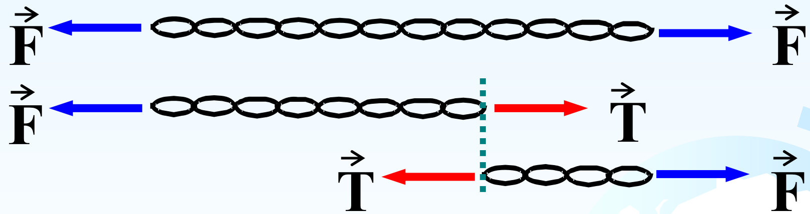
物体变形 ⇒ 企图恢复原状 ⇒相互作用力.



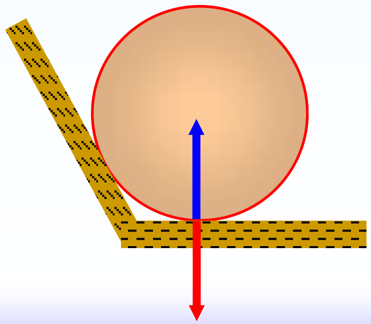
分子/原子内电子间电磁力的宏观结果.

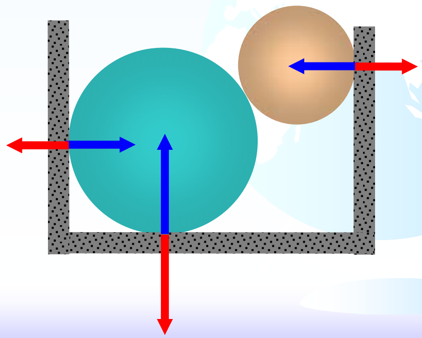
- 虎克定律: $f = -kx$

- 绳中的张力:



- 正压力与支撑力:





弹性力的产生以形变为前提

三. 摩擦力 (frictional force)

分布于有相对运动(趋势)的接触面，源于电磁力

大小:

静摩擦力(static ～～) $f_s \le \mu_0 N$

条件：两接触物体有相对运动的趋势而无相对运动

μ_0—静摩擦系数(coefficient of static friction)

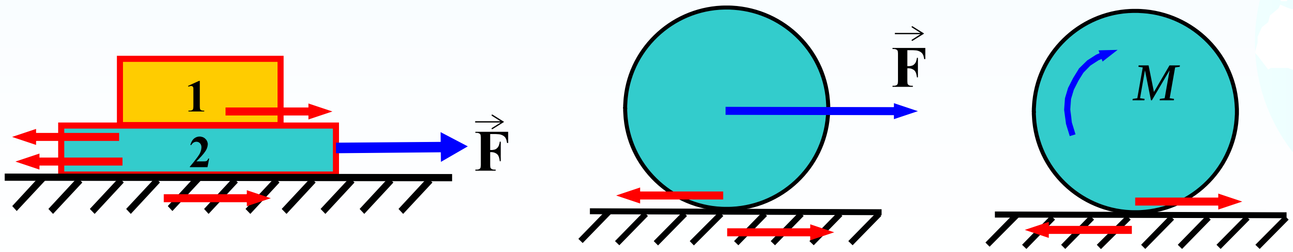
动摩擦力(kinetic ~ ~) $f_k = \mu N$ (滑动/滚动)

条件：两接触物体有相对运动

$a_A \ge a_B$

μ—动摩擦系数 (coefficient of kinetic friction)

方向: 与相对运动(趋势)方向相反



四. 力的分类

四种基本力：万有引力、电磁力、强相互作用（强力）、弱相互作用（弱力）

万有引力、电磁力—长程力　强、弱—短程力(10^{-15} m)

相互作用	强	电磁	弱	引力
相对强度	10^{2}	1	10^{-10}	10^{-38}
范围 (m)	短程: ~10^{-15}	长程	短程: <10^{-17}	长程
作用粒子	胶子	光子	中间玻色子	待发现

经典力学中涉及的力：万有引力、电磁力

§2-3.牛顿定律应用举例

一. 动力学方程及在各坐标系中的表达式

动力学方程 $m\dfrac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}$ 或 $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}$

直角坐标系

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x \\ m\ddot{y}=F_y \\ m\ddot{z}=F_z \end{cases}$$

平面极坐标系

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=F_\theta \end{cases}$$

自然坐标系

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho}=F_n \end{cases}$$

二. 牛顿定律的应用

选对象(隔离物体), 看运动, 查受力, 定坐标, 列方程

1.认定对象, 并对运动情况作出判断(或假设).

2.分析物体受力, 画受力图.

3.选适当坐标系, 列方程.

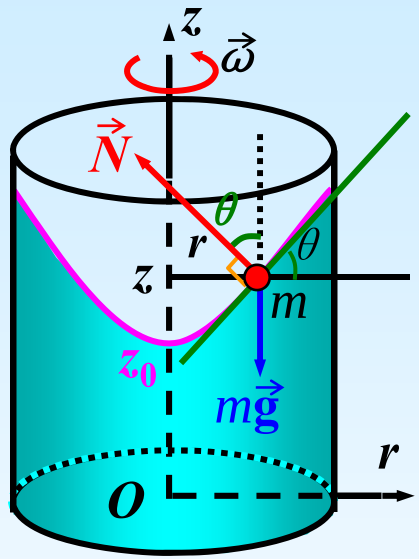
动力学方程分量形式、运动学方程和辅助方程

4.求解方程(先文字, 后代数值!)

5.对结果讨论

例1: 已知: 如图, 桶绕z轴匀速转动, 水对桶静止, 略表面张力

求: 水面形状（z - r关系）

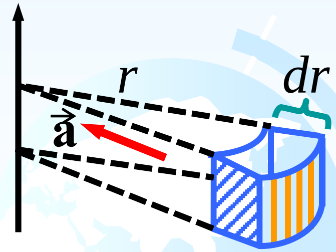


选对象: 表面某体积微元的水m

看运动: m作匀速圆周运动 $\vec{\mathbf{a}} = -\omega^2\vec{\mathbf{r}}$

查受力: 受力$m\vec{\mathbf{g}}$及$\vec{\mathbf{N}}$, $\vec{\mathbf{N}} \perp$ 水面

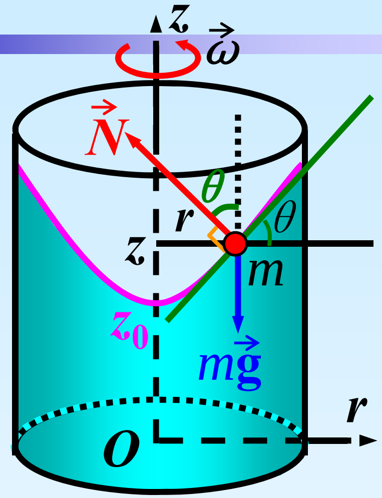
（稳定时m受到的切向合力为零）



列方程:

$$\begin{cases} z\text{向：} N\cos\theta - mg = 0 & (1) \\ r\text{向：} -N\sin\theta = -m\omega^2 r & (2) \end{cases}$$

(2)/(1): $$\frac{\omega^2 r}{g} = \tan\theta = \frac{dz}{dr} \qquad dz = \frac{\omega^2}{g} r\,dr$$



取$r=0$时$z=z_0$，有 $\int_{z_0}^{z} dz=\int_0^r \frac{\omega^2}{g} r\,dr$

$$\Rightarrow \boxed{z(r)=\frac{\omega^2}{2g}r^2+z_0}$$ （旋转抛物面）

若不转时水深h, 桶半径R, 则z_0可求（V不变）：

$$\int_0^R z(r)\cdot 2\pi r\,dr=\pi R^2 h \quad\Rightarrow\quad \boxed{z_0=h-\frac{\omega^2R^2}{4g}}$$

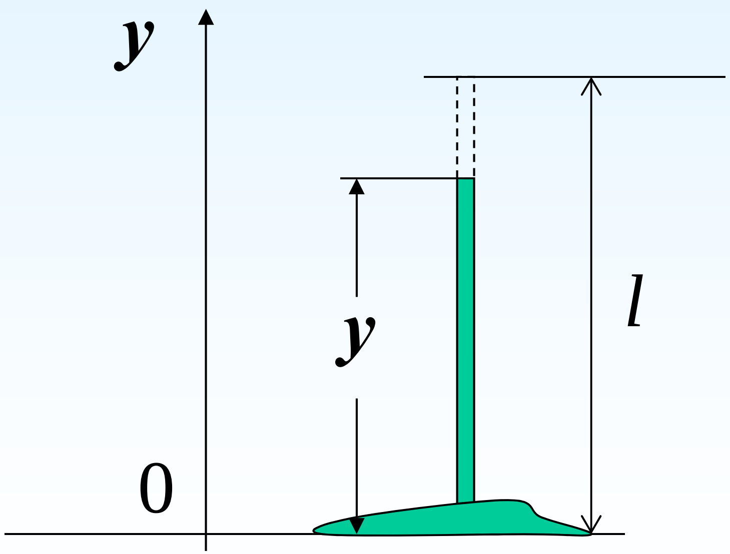
验结果／量纲：$[\frac{\omega^2 r^2}{2g}]=\frac{(1/s^2)\cdot m^2}{m/s^2}=m=[z]$

过渡到特殊值：$\omega=0$ 或 $r=0$时，$z=z_0$

变化趋势：r不变时，$\omega\uparrow \Rightarrow (z-z_0)\uparrow$, 合理？

例2 .一柔软绳长l,线密度ρ,一端着地开始自由下落,求:下落任意时刻,给地面的压力为多少?

解：如图建坐标,选绳为对象,且设t时绳给地面压力为N,此时绳长为y,速度为v。



$$N-\rho gl=\frac{dp}{dt}=\dot{p}$$

$$p=\rho yv\quad\rightarrow\frac{dp}{dt}=\rho\frac{d(yv)}{dt}$$

$$N=\rho gl+\rho\frac{d(yv)}{dt}$$

$$\frac{d(yv)}{dt}=y\frac{dv}{dt}+\frac{dy}{dt}v$$ 又 $$v=\frac{dy}{dt} \qquad -g=\frac{dv}{dt}$$

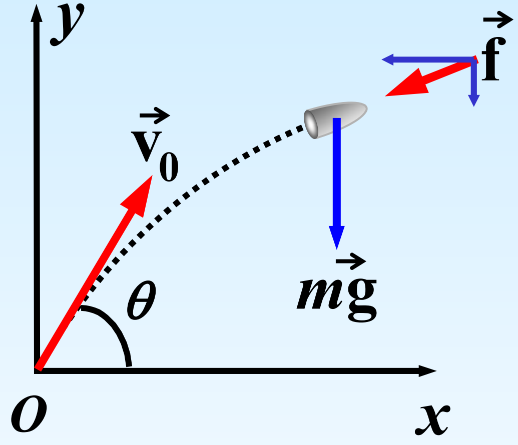
$$v=-gt \qquad y=l-\frac{1}{2}gt^2 \qquad l-y=\frac{v^2}{2g}$$

所以 $$\frac{d(yv)}{dt}=-yg+v^2$$

$$=-yg+2(l-y)g$$

$$N=3\rho g(l-y)$$

例3: 求抛射体在空气中的运动轨迹，
设 $t=0$ 时 $\vec{v}=\vec{v}_0$，阻力 $\vec{f}=-k\vec{v}$



解：如图，取坐标系，有：

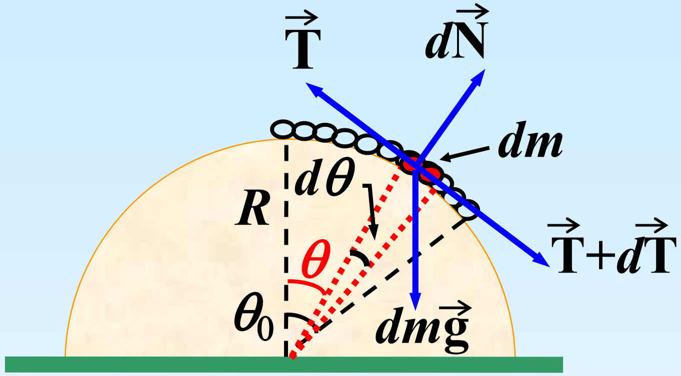
$$\begin{cases} -k\upsilon_x = m\dfrac{d\upsilon_x}{dt} & (1) \\ -mg-k\upsilon_y = m\dfrac{d\upsilon_y}{dt} & (2) \end{cases}$$

(1)+初始条件：$\int_0^t \left(-\dfrac{k}{m}\right)dt = \int_{\upsilon_0\cos\theta}^{\upsilon_x}\dfrac{d\upsilon_x}{\upsilon_x} \Rightarrow \boxed{\upsilon_x = \upsilon_0\cos\theta e^{-kt/m}}$

同理有：$\boxed{\upsilon_y = -\dfrac{mg}{k} + \left(\upsilon_0\sin\theta + \dfrac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}}$ 极限速度？

轨迹：$\boxed{y = \left(\tan\theta + \dfrac{mg}{k\upsilon_0\cos\theta}\right)x + \dfrac{m^2g}{k^2}\ln\left(1-\dfrac{kx}{m\upsilon_0\cos\theta}\right)}$

例4: 链条在固定的光滑柱面上由图示位置开始“静止下滑”. 求此时链条上各点的加速度。



解: 链条不可伸长, 各点$a_n = 0$,

$a \equiv a_\tau$ 大小相同. 质量m

由静止下滑, 各点 $\upsilon_0 = 0, a_0 = 0$

$$\left|\sum \vec{F}_\tau\right| = \int d\vec{T} = \int_m g\sin\theta \ dm$$

$$= \int_0^{\theta_0} mg\sin\theta \frac{d\theta}{\theta_0} = mg(1-\cos\theta_0)/\theta_0 = ma$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1-\cos\theta_0}{\theta_0} g$$

§2-4.力学相对性原理

一. 伽里略变换

*S*和*S'*——两个惯性系； $t = t' = 0$ 时原点重合；

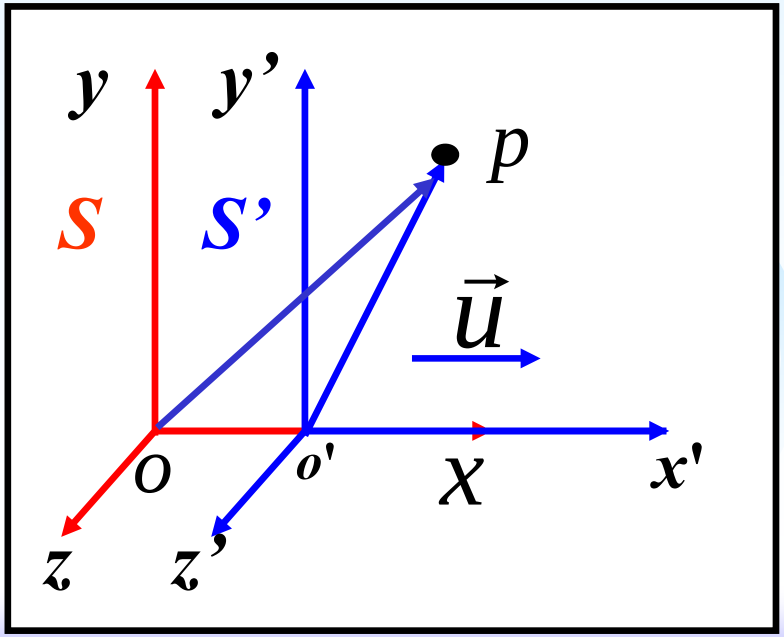
*S'*系相对于*S*系以速度*u*沿$\vec{x}$轴正向

——作匀速直线运动。

分别从 *S* 和 *S'* 系观察同一质点 *P* 的运动。

在S系中记为： (x, y, z, t)

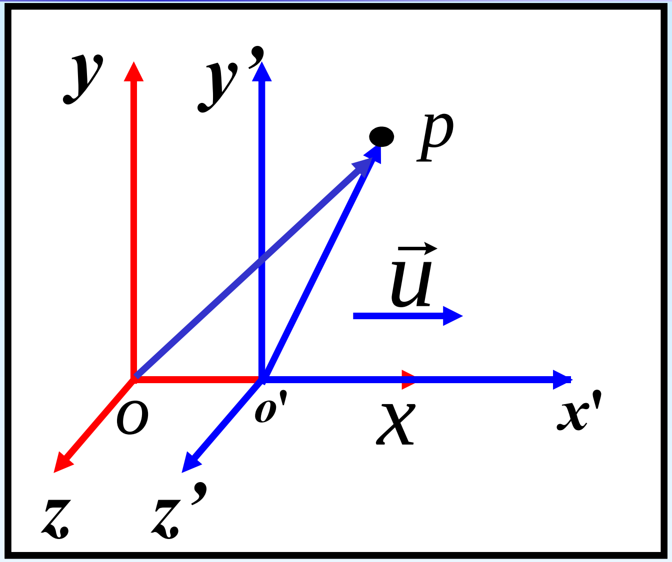
在S'系中记为： (x', y', z', t')



1. 伽利略坐标变换

按经典力学的时空观有：

$$\begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$



2. 伽里略速度变换

S′→S系
$$\begin{cases} v_x = v'_x + u \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$$

S→S′系
$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

矢量式： $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ $\qquad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$

二. 牛顿的绝对时空观(经典力学的绝对时空观)

牛顿《自然哲学之数学原理及其宇宙体系》：

“绝对空间就其本质而言，是与任何外界事物无关的，它从不运动，而且永远不变。”

“绝对的真实的数学时间就其本质而言，是永远均匀平静地流逝着，与任何外界事物无关。”

1. 空间是绝对的：

空间间隔与参照系的运动无关。

即 $$\boxed{\Delta l = \Delta l'}$$

2. 时间是绝对的：

事件经历的时间间隔与惯性参照系的运动无关。

即 $$\boxed{\Delta t = \Delta t'}$$

同时性是绝对的：

在某惯性系同时发生的事件，在其它惯性系中也必然是同时发生的。

三. 力学相对性原理

1. 加速度对伽里略变换不变

$$\because \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} = a'_x$$

$$a_y = a'_y$$

$$a_z = a'_z$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{a} = \vec{a}'}$$

加速度具有伽利略变换的不变性。

2. 牛顿运动定律对伽里略变换不变

在牛顿的经典力学中,物体质量与其运动状态无关,是绝对的(即$m = m'$);

因此物体间的相互作用(力)也与惯性参照系的选择无关。

故如果在S中有：$\vec{f} = m\vec{a}$

则在S'中也必然有：$\vec{f}' = m\vec{a}'$

牛顿运动定律在不同的惯性系中具有完全相同的形式。

即：牛顿运动定律具有伽利略变换的不变性。

3. 力学相对性原理

- 一切力学规律在任何惯性系中都具有完全相同的形式.
- 一切力学规律的数学表示式都具有伽利略变换的不变性.
- 任何惯性系对一切力学规律都是等价的(没有哪个惯性系更为优越)。
- 用任何力学实验方法都无法确定所在惯性系相对于另一惯性系是作匀速直线运动还是静止。
- 用任何力学方法都不可能找到绝对静止的参照系。

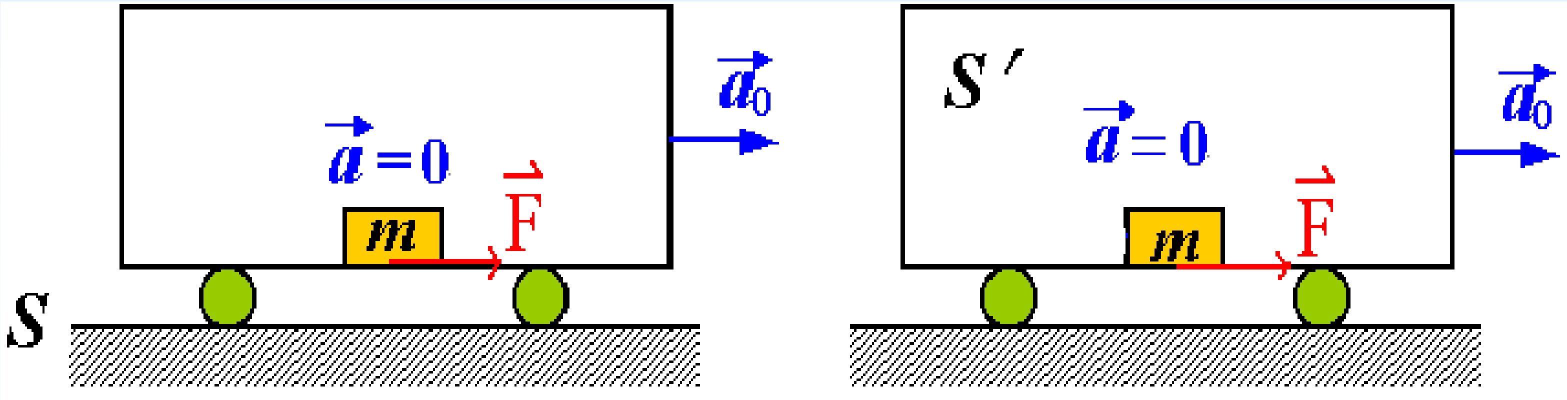
§2-5. 惯性系与非惯性系 惯性力

一. 惯性系与非惯性系

牛顿定律适合的参照系称为惯性系

牛顿定律不适合的参照系称为非惯性系

例如:



在*S*参考系(地面),*m*运动符合牛顿定律

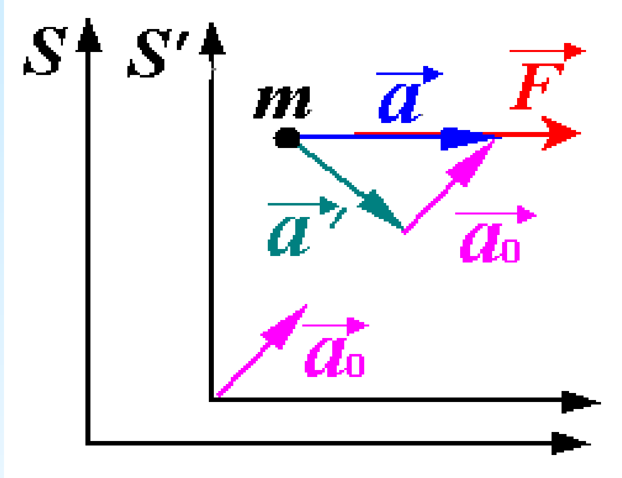
$$\vec{F} = m\vec{a}_0$$

在*S'*参考系(车厢),*m*运动不符合牛顿定律

$$\vec{F}' = F \neq m\vec{a}_0'$$

二. 惯性力

1. 平动非惯性系中的惯性力



设:非惯性系S'相对惯性系S平动,加速度为: $\vec{a}_0$

S: $\vec{F} = m\vec{a}$

S': $\vec{F}' = \vec{F} \quad m' = m \quad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0 \neq \vec{a}$

故 $\vec{F}' \neq m\vec{a}'$ 牛顿第二定律在S'系中不成立

由 $\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = m\vec{a}' + m\vec{a}_0$

得 $\vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a}'$

定义： $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$ 为惯性力(**inertial force**)

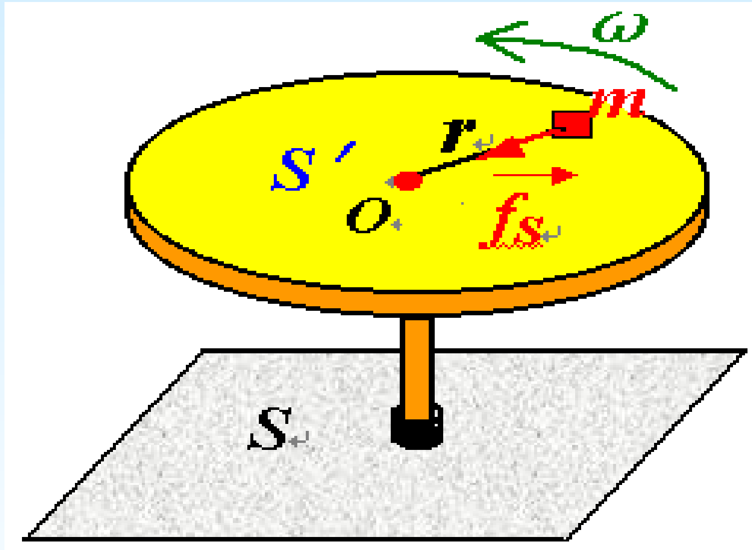
则有 $\boxed{\vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}'}$

上式表明，在非惯性系S'中，只要将通常的合外力$\vec{F}$再加上惯性力$\vec{F}_0$，则牛顿第二定律形式上成立.

惯性力是参考系加速运动引起的附加力，本质上是物体惯性的体现。它不是物体间的相互作用，没有施力物体，因而也就没有反作用力。在非惯性系中用它分析问题通常比较方便。

2. 匀速转动非惯性系中的惯性力

设S'系相对惯性系S 匀速转动



(1) 物体m在S'中静止

S: $\vec{f}_s = m\vec{a}_n = m\omega^2(-\vec{r})$

S': $\vec{a}' = 0$

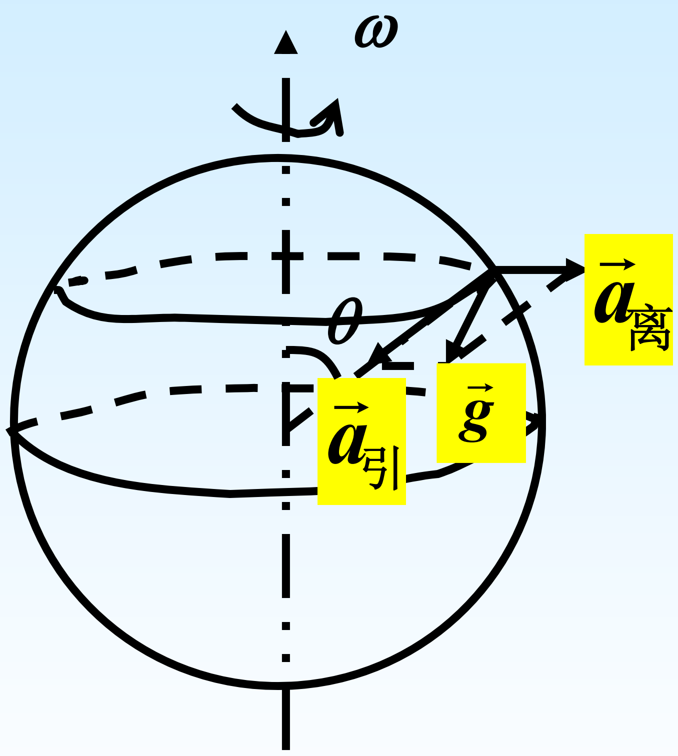
令 $\vec{f}_s + \vec{F}_0 = m\vec{a}' = 0$

则 $\vec{F}_0 = m\omega^2\vec{r}$

$\boxed{\vec{F}_0 = m\omega^2\vec{r}}$ ——惯性离心力

(inertial centrifugal force)

例如：重力加速度



$$g^2 = a_{引}^2 + a_{离}^2 - 2a_{引}a_{离}\sin\theta$$

$$a_{引} >> a_{离}$$

$$g \approx a_{引} - a_{离}\sin\theta$$

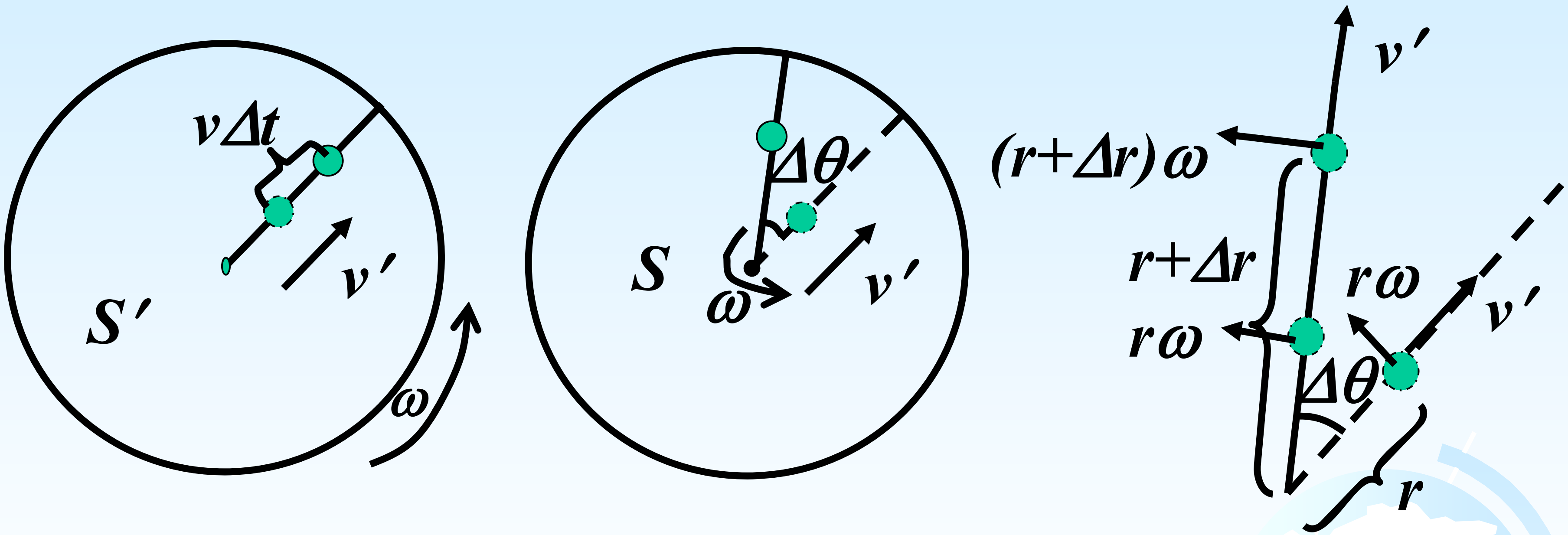
$g_{赤道}$=9.778 m/s^2

$g_{北极}$=9.832 m/s^2

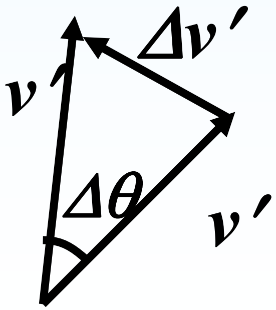
- 在地表面用 g，已考虑惯性离心力在内。

(2) 物体m在S'中运动

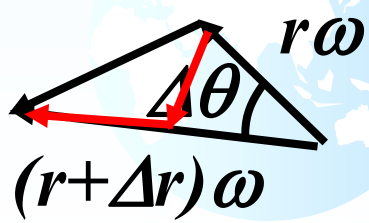
设m在S'中匀速运动，速度为$\vec{v}'$



v'方向变化



转动速度变化



$$a = \frac{\Delta v'}{\Delta t} = v'\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = v'\omega$$ 切向

转动速度大小变化 $a = \frac{\omega \Delta r}{\Delta t} = v'\omega$ 切向

转动速度方向变化 $a = r\omega^2$ 内法向

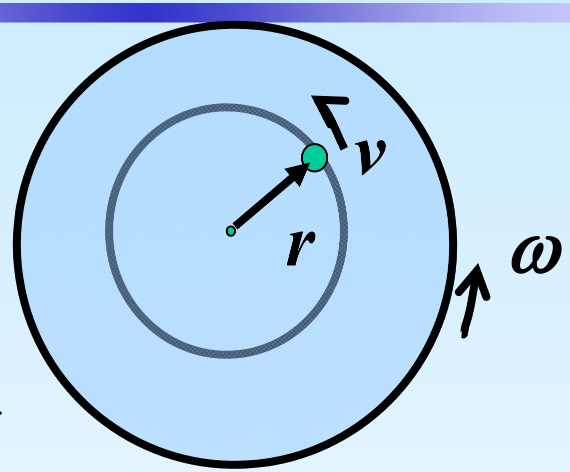
$$\vec{a} = 2v'\omega\vec{\tau} + r\omega^2\vec{n}$$

$2v'\omega$ 科氏加速度　$r\omega^2$ 向心加速度

在 S'系有两个惯性力，　科氏力 $-2mv'\omega$

和离心力 $-mr\omega^2$

桌面匀角速转动，一质点在桌面上的同心圆环凹槽内，作无摩擦匀速运动



在惯性系

$$f = m\frac{(v + r\omega)^2}{r}$$

$$= m\frac{v^2}{r} + 2mv\omega + mr\omega^2$$

在转动参考系

$$f - 2mv\omega - mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r}$$

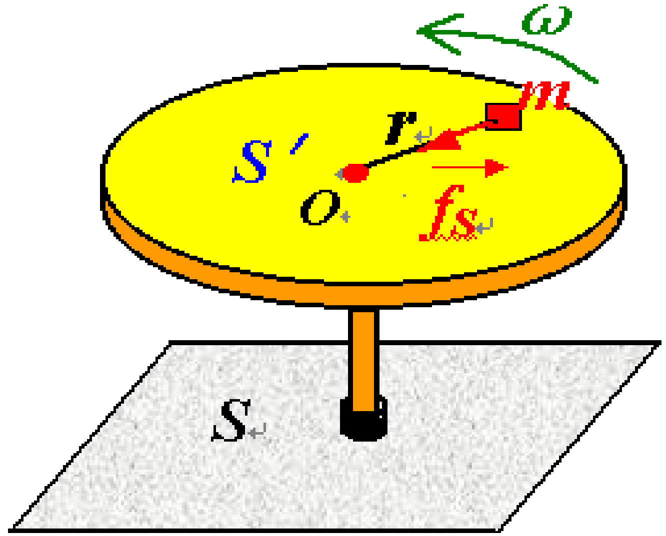
一般地 $\vec{f}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$

一般地

如果m在S'中运动速度为$\vec{v}'$,加速度为$\vec{a}'$

$$S:\quad \vec{f}_s = m\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - \omega^2\vec{r} - 2\vec{\upsilon}'\times\vec{\omega}}$$

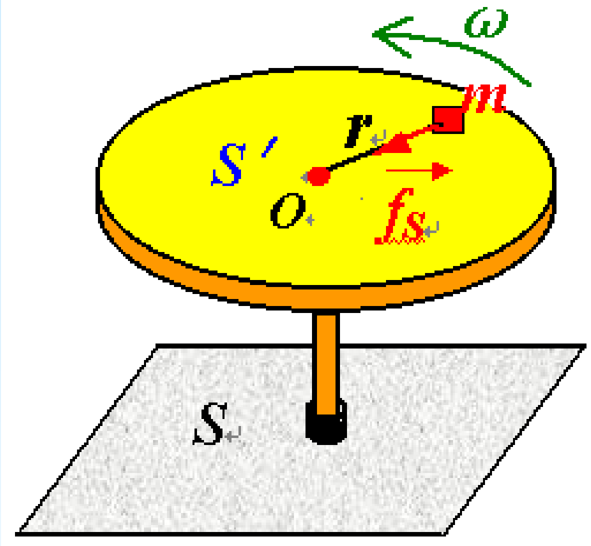


如: $\vec{\omega} = \vec{C}\quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$

$$\vec{a} = \vec{a}' - \omega^2\vec{r} - 2\vec{\upsilon}'\times\vec{\omega}$$

则: $\boxed{\vec{f}_s = m\vec{a}' - m\omega^2\vec{r} - 2m\vec{\upsilon}'\times\vec{\omega}}$

S': $\vec{f}_s + m\omega^2\vec{r} + 2m\vec{v}'\times\vec{\omega} = m\vec{a}'$



令: $\vec{F}_0 = m\omega^2\vec{r}$ —惯性离心力

$\boxed{\vec{F}_c = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}}$ —科里奥利力 (Coriolis force)

则: $\vec{f}_s + \vec{F}_0 + \vec{F}_c = m\vec{a}'$ 牛顿定律形式上成立

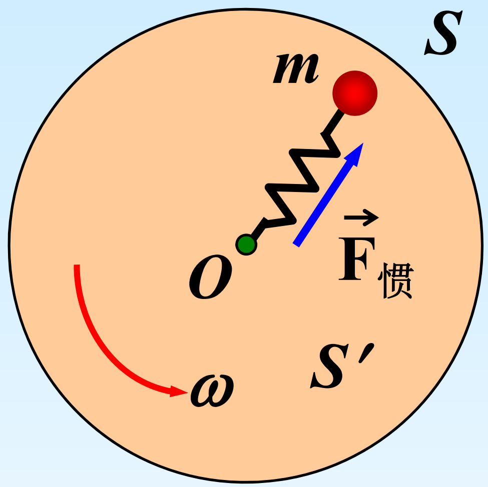
如果物体m在S'中有速度v',则在S'中看,m除受惯性离心力外,还要附加一个与速度v'有关的惯性力,称科里奥利力。

$\vec{F}_{惯}$：如图，小球m相对圆盘静止

S中：小球匀速圆周运动

$\Rightarrow$弹簧拉长 $\Rightarrow$ m受到向心力

$\Rightarrow$ S'中：小球静止，



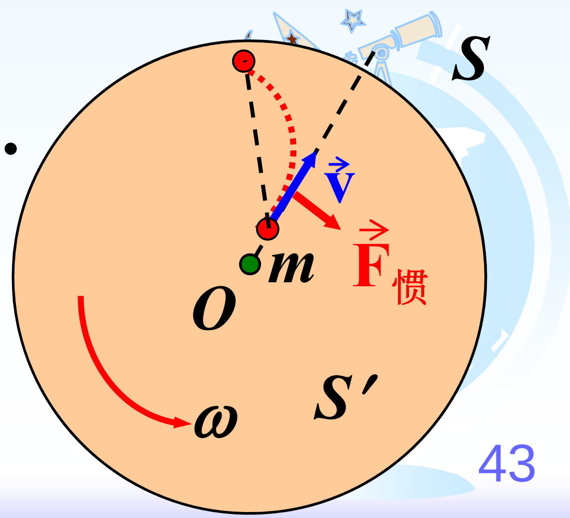
$\Rightarrow$弹簧拉力和一个(虚设)惯性力平衡（惯性离心力）

$$\vec{F}_{惯} = -m\vec{a}_n$$

$\vec{F}_C$ m以速度 $\vec{v}$ 相对圆盘运动，

S'中：m受合力为零$\Leftrightarrow$匀速直线运动.

S中：m沿曲线l运动，

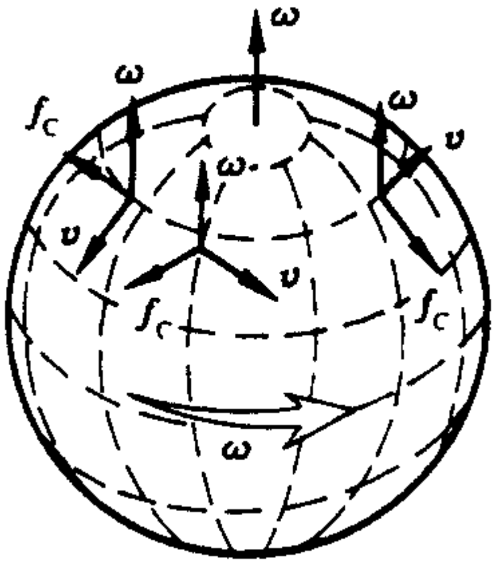


等价于受到了一个与$\vec{v}$垂直且指向右侧的惯性力.

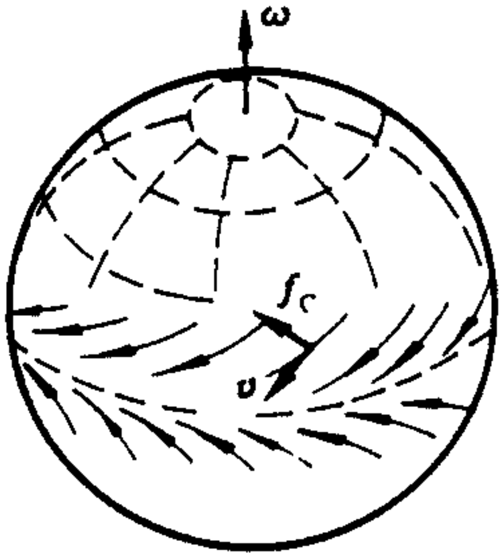
三. 地球上的科里奥利力现象

(北半球+南北向)

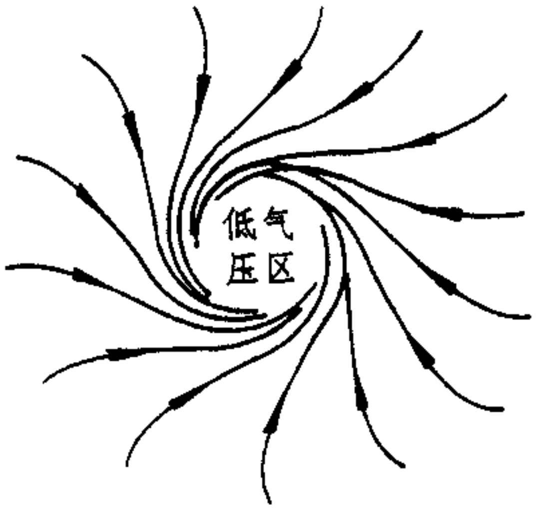
- 河流冲刷右岸较严重，
- 单向行使的铁轨右轨磨损较多，
- 远程炮弹发生横向偏离，
- 信风(北→南)形成气旋,
- 傅科摆的运动等等。



北半球上
的科里奥利力



信风的形成



旋风的形成

1. 速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + \vec{\omega}\times(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \frac{d^*\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$\vec{v}'$ ----- 相对速度；

$\vec{\omega}\times\vec{r}$ -- 牵连速度，（轴向分量）

由于物体转动而使物体相对于固定坐标系的速度。

2. 加速度

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$=\frac{d^*\vec{v}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$=\frac{d^*}{dt}(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r})+\vec{\omega}\times(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\frac{d^*\vec{v}'}{dt}+\frac{d^*\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d^*\vec{r}}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\vec{a}'+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\vec{a}'+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})+2\vec{\omega}\times\vec{v}'$$