理力 06~07 学年第二学期

此人解题过程及答案仅供参考

注：试题共 4 页，满分 100 分

一、 选择题（将正确答案的字母填在空格内，每小题 2 分，共 10 分）

1、对于具有定常约束的质点系，一般情况下其动能 T 可以表示成__________的函数。

A：广义速度　　B：广义坐标　　C：时间 t

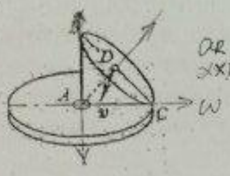
2、绕中心惯量主轴作定轴转动刚体，当其角速度不为零时，该刚体对质心的动量矩矢量____。

A：一定平行于转轴　　B：一定不平行于转轴　　C：不一定平行于转轴

3、定点运动的圆锥 ABC 在水平固定圆盘上纯滚动，如图 1 所示。若圆锥底面中点 D 作匀速圆周运动，AC 为圆锥与圆盘接触的瓦线，在图示瞬时，该圆锥上 C 点的加速度矢量 a_C 的方向______。

A：平行于 AC　　B：垂直于 ABC 三点确定的平面

C：垂直于 AC 且平行于 AB；　　D：不能确定

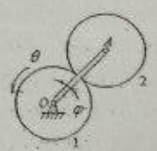


$a_R + a_N$

$\alpha \times r$ 　$\omega\times(\omega\times r)$

0

图 1



$\dot{\theta}$

图 2

4、两个质量不同的齿轮 1 和 2（视为均质圆盘）相互啮合并用均质杆通过光滑柱铰链连接，在水平面内运动，θ 为齿轮 1 的转角，φ 为 OA 杆的转角，如图 2 所示。该系统拉格朗日方程有__B__个循环积分（广义动量积分），有______个广义能量积分。

$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q}$

$\frac{\partial(T-V)}{\partial q}$　$\frac{\partial(T-V)}{\partial q}$

$T = T_2 - T_1 + T_0$

A：3　　B：2　　C：1　　D：0

5、单自由度线性系统自由振动的振幅与__AB______有关。

A：广义质量　　B：广义刚度　　C：初始位置　　D：初始速度

二、 填空题（将最简结果填在空格内，每空 4 分，共 40 分）

1、滑块在水平地面上沿直线以给定速度 v 移动，其大小 $v=at$，（a 为常数），质量为 m 的质点 A 可在滑块上的圆槽内运动，圆槽的半径为 R，如图 3 所示。设 θ 为质点 A 的广义坐标，此时质点的动能可以表示成 $T=T_2+T_1+T_0$，其中 $T_i(i=0,1,2)$ 为广义速度的 i 次齐函数。则：

$T_0=$ ________ $T_1=$ ________

$\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)$

$v_x=v+R\dot\theta\sin\theta$

$v_y=-R\dot\theta\cos\theta$

$T=\frac{1}{2}mv^2+mvR\dot\theta\sin\theta+\frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2$

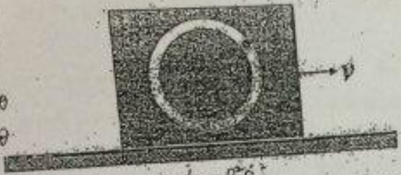
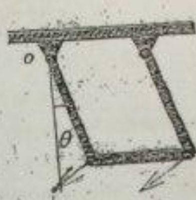


图 3



$V=2\times 2mg\times\frac{L}{2}(1-\cos\theta)+mgL(1-\cos\theta)=3mgL(1-\cos\theta)$

2、各长为 L 质量为 $2m$ 的三根均质杆用光滑柱铰链连接可在铅垂面内摆动，如图 4 所示。则该系统在平衡位置附近作微幅振动的固有频率：

$\omega=$ $\sqrt{\frac{\frac{10}{3}mL^2}{3mgL}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10L}{g}}$

$\frac{1}{2}m(0)\dot q^2$

$\frac{1}{2}V''(0)q^2$

$2\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}2mL^2)\dot\theta^2+\frac{1}{2}2m(L\dot\theta)^2=\frac{5}{3}mL^2\dot\theta^2=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}mL^2\dot\theta^2$ → $m(\theta)$

$V=3mgL\cos\theta$

$V''(0)=3mgL=k$

3、半径为 R 的薄圆盘以大小为 ω_0（常量）的角速度绕 CD 轴转动，CD 轴支撑在框架上，该框架以大小为 $\omega_{AB}=\omega_0$ 的角速度绕 AB 轴转动，如图 5 所示。求图示瞬时，圆盘的角速度大小 ω、角加速度大小 α、圆盘上最右边的一点 M 的速度 v_M、该点的转动加速度的大小 a_R 和向轴加速度的大小 a_N：

$\omega_{AB}\times\omega_0$

$\vec\alpha\times\vec r$

$\omega=$ $\sqrt{2}\omega_0$

$\alpha=$ ω_0^2 (⊗)

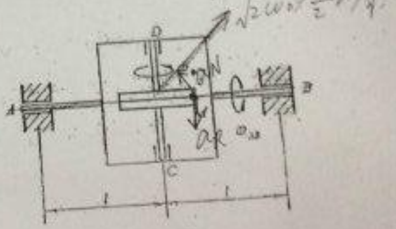
$v_M=$ ωR

$a_R=$ ω_0^2R

$a_N=$ $\sqrt{2}\omega_0^2R$

瞬转轴

$\sqrt{2}\omega_0\times\frac{\sqrt{2}}{2}r$



ω^2R $2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\omega\times(\omega\times r)$

图 5

4、框架以匀角速度 $\omega_1 = \omega$ 绕铅垂轴 AB 转动，质量为 m 半径为 R 的均质圆盘以匀角速度 $\omega_2 = 2\omega$ 绕框架上的 CD 轴转动，圆盘盘面垂直于 CD 轴且质心 O 在转轴上，如图 6 所示。求圆盘对 O 点的动量矩 M_O 的大小和对 z 轴动量矩 M_z 的大小。（圆盘对 CD 轴的转动惯量为 $mR^2/2$，对圆盘上某一直径的转动惯量为 $mR^2/4$）

对于轴是否有动量矩？

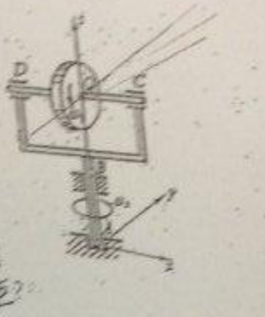


图 6

$M_O =$ ______

$M_z = \frac{1}{4} mR^2 \omega_2$

三、　计算题（第 1 小题 30 分，第 2 小题 20 分，本题共 50 分）

1、质量为 m 半径为 R 的均质圆盘在光滑的水平地面运动，圆盘中心用柱铰链连接一长为 L 的细杆 AB（不计其质量），其 B 端连接一个质量为 m 的小球 B（视为质点），系统在铅垂平面内运动，设系统的广义坐标如图 7 所示，其中：x 为圆盘质心的水平坐标，φ 为圆盘的转角，θ 为 AB 杆的转角，忽略空气阻力和所有摩擦。求：（1）用系统的广义坐标和广义速度给出系统的动能 T 和势能 V（杆在铅垂位置时为势能零点）；（2）若初始时，AB 杆位于铅垂位置 $\theta_0 = 0$，圆盘中心 A 点的速度为 u（水平向右），圆盘的角速度为 ω（顺时针），AB 杆的角速度为零，试给出系统拉格朗日方程的首次积分（如果存在）并确定积分常数。

要求：给出解题的基本理论和基本步骤。

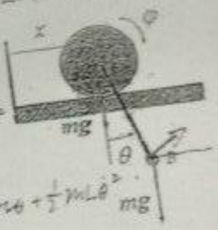


图 7

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} mR^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2} m(L\dot{\theta}\sin\theta)^2$$

$$= mx^2 + \frac{1}{4} mR^2\dot{\varphi}^2 + mL\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{2} mL\dot{\theta}^2$$

$$V = mgL(1-\cos\theta)$$

循环积分：循环坐标：x，φ　$L = T - V$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C_2$$

$$2m\dot{x} + mL\dot{\theta}\cos\theta = C_1 \qquad C_1 = 2mu$$

$$\frac{1}{2} mR^2\dot{\varphi} = C_2 \qquad C_2 = \frac{1}{2} mR^2\omega$$

能量积分：

2、质量为 m 半径为 R 的均质圆盘相对正方形框架 $ABCD$ 以匀角速度 ω 绕 BC 轴转动，圆盘盘面垂直于 BC 轴，且其质心在该轴上。正方形框架以匀角速度 Ω 绕铅垂轴 AB 转动，且 $\omega >> \Omega$。设正方形框架的边长为 L，轴承 A 到球铰链 B 的铅垂距离为 h，如图 8 所示。忽略框架质量以及所有摩擦。求：(1) 圆盘质心的加速度的大小 a；(2) 圆盘陀螺力矩的大小 M_g；(3) 轴承 A 约束力的大小 F_A、球铰链 B 水平约束力的大小 F_{Bx} 和铅垂约束力的大小 F_{Bz}。要求：给出解题的基本理论和基本步骤，指明研究对象并画出必要的受力图。

$$\vec{a} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_c) = \Omega^2 r_c = \frac{1}{2}\Omega^2 L$$

$$M_g = \frac{1}{2} m R^2 \times |\vec{\omega} \times \vec{\Omega}|$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \times \omega \times \Omega \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} m R^2 \omega \Omega$$

(3) $\vec{M}_{H} + \vec{M}_g = 0$

对框架和圆盘整体

$$\vec{F}_A + \vec{F}_{Bx} = 0$$

$$M_H = F_A h + mg \frac{L}{2}$$

$$F_A = \frac{\sqrt{2}}{4} m R^2 \omega \Omega - \frac{1}{2} mgL$$

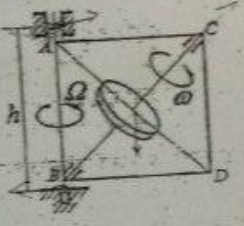


图 8