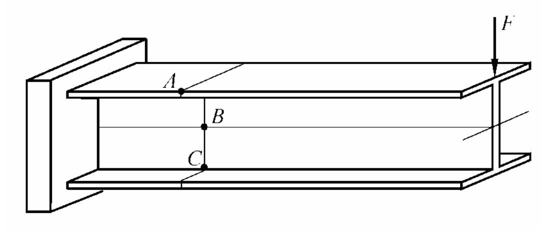
第十六章 应力分析的实验方法

题号 页码

（也可通过左侧题号书签直接查找题目与解）

16-1 图示工字形截面悬臂梁，自由端承受载荷 F 作用，为了测出图示截面 A，B 与 C 三点处的应力，其中 A 点位于翼缘端部，B 点位于中性层，C 点位于腹板与翼缘的交界处。试确定布片与接线方案，并建立相应的计算公式。弹性常数 E 和 μ 均为已知。



题 16-1 图

解：首先画出三点的应力状态图（见图 16-1a）；然后确定布片方案（见图 16-1b）；进而确定接线方案（见图 16-1c）。

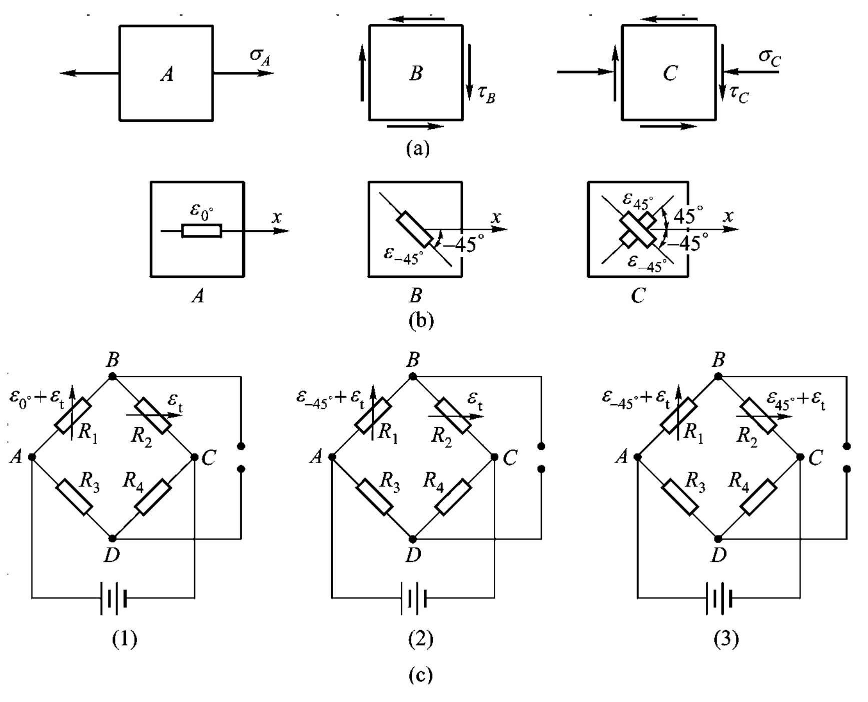


图 16-1

对于 A 点，设图 c(1)所示半桥之测值为 $\bar{\varepsilon}_A$，相应的应力计算公式为

$$\sigma_A = E\bar{\varepsilon}_A$$

对于 B 点，设图 c(2)所示半桥之测值为 $\bar{\varepsilon}_B$，由于

$$\varepsilon_{-45^\circ} = \frac{1}{E}(\tau_B + \mu\tau_B) = \frac{(1+\mu)\tau_B}{E} = \bar{\varepsilon}_B$$

于是，得相应的应力计算公式为

$$\tau_B = \frac{E}{(1+\mu)}\bar{\varepsilon}_B$$

对于 C 点，如图 c(3)中的接线方案，设其半桥的测值为 $\bar{\varepsilon}_{C\tau}$，由于

$$\bar{\varepsilon}_{C\tau} = \varepsilon_{-45^\circ} - \varepsilon_{45^\circ} = [\frac{(1+\mu)}{E}\tau_C - \frac{(1-\mu)}{2E}\sigma_C] - [-\frac{(1+\mu)}{E}\tau_C - \frac{(1-\mu)}{2E}\sigma_C] = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_C$$

于是，得 τ_C 的应力计算公式为

$$\tau_C = \frac{E}{2(1+\mu)}\bar{\varepsilon}_{C\tau}$$

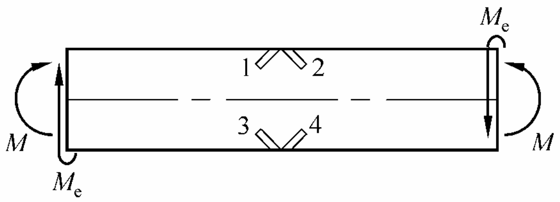
若改变上述接线方案，将 45° 片从第 2 桥臂换至第 4 桥臂，并设此种接线方案的测值为 $\bar{\varepsilon}_{C\sigma}$，则由

$$\bar{\varepsilon}_{C\sigma} = \varepsilon_{-45^\circ} + \varepsilon_{45^\circ} = [\frac{(1+\mu)}{E}\tau_C - \frac{(1-\mu)}{2E}\sigma_C] + [-\frac{(1+\mu)}{E}\tau_C - \frac{(1-\mu)}{2E}\sigma_C] = -\frac{(1-\mu)}{E}\sigma_C$$

可得 σ_C 的应力计算公式为

$$\sigma_C = -\frac{E}{(1-\mu)}\bar{\varepsilon}_{C\sigma}$$

16-2 图示圆截面轴，在载荷 M 和 M_e 作用下处于弯扭组合变形状态。为了测出 M 与 M_e 值，在截面顶部和底部沿 45° 方位共粘贴了四个应变片，试确定接线方案，并建立相应的计算公式。轴的直径 d 以及弹性常数 E 和 μ 均为已知。



题 16-2 图

解：两个待测点的应力状态分别如图 **16-2a** 和 **b** 所示。

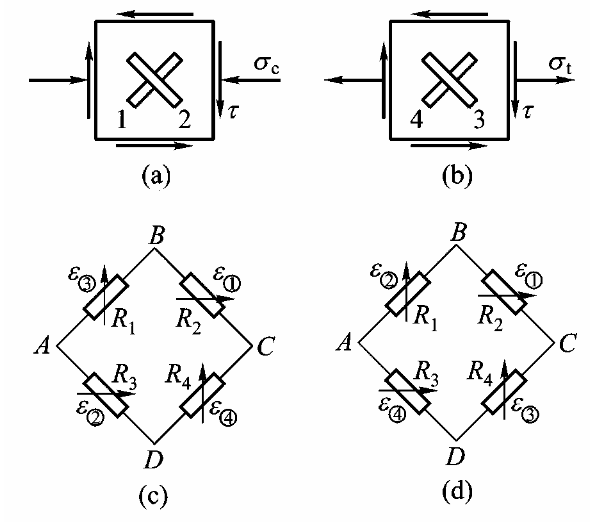


图 16-2

各片应变与应力之间的关系依次为

$$\varepsilon_{\textcircled{1}} = \frac{1}{E}[-(\tau + \frac{\sigma_{\mathrm{c}}}{2}) - \mu(\tau - \frac{\sigma_{\mathrm{c}}}{2})]$$

$$\varepsilon_{\textcircled{2}} = \frac{1}{E}[(\tau - \frac{\sigma_{\mathrm{c}}}{2}) + \mu(\tau + \frac{\sigma_{\mathrm{c}}}{2})]$$

$$\varepsilon_{\textcircled{3}} = \frac{1}{E}[(\frac{\sigma_{\mathrm{t}}}{2} + \tau) - \mu(\frac{\sigma_{\mathrm{t}}}{2} - \tau)]$$

$$\varepsilon_{\textcircled{4}} = \frac{1}{E}[(\frac{\sigma_{\mathrm{t}}}{2} - \tau) - \mu(\frac{\sigma_{\mathrm{t}}}{2} + \tau)]$$

在上述分析的基础上，确定测 M 和 M_{e} 的全桥接线方案依次如图 **16-2c** 和 **d** 所示。

设图 c 所示全桥的测值为 $\bar{\varepsilon}_M$，我们有

$$\bar{\varepsilon}_M = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \varepsilon_{\textcircled{3}} - \varepsilon_{\textcircled{1}} - \varepsilon_{\textcircled{2}} + \varepsilon_{\textcircled{4}} = \frac{2(1-\mu)}{E}\frac{M}{W}$$

由此得到 M 的计算公式为

$$M = \frac{E\pi d^3}{64(1-\mu)}\bar{\varepsilon}_M$$

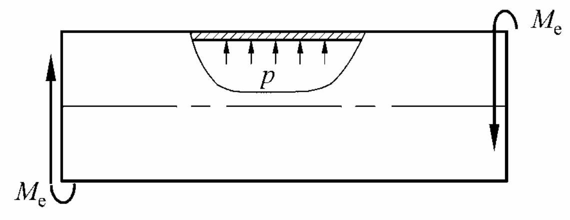
设图 d 所示全桥的测值为 $\bar{\varepsilon}_{M_{\mathrm{e}}}$，我们有

$$\bar{\varepsilon}_{M_{\mathrm{e}}} = \varepsilon_{\textcircled{2}} - \varepsilon_{\textcircled{1}} - \varepsilon_{\textcircled{4}} + \varepsilon_{\textcircled{3}} = \frac{4(1+\mu)}{E}\frac{M_{\mathrm{e}}}{W_{\mathrm{p}}}$$

由此得到 M_{e} 的计算公式为

$$M_{\mathrm{e}} = \frac{E\pi d^3}{64(1+\mu)}\bar{\varepsilon}_{M_{\mathrm{e}}}$$

16-3 图示薄壁圆筒，同时承受内压 p 和扭力矩 M_e 作用。已知筒截面的平均半径为 R_0，壁厚为 δ，材料的弹性模量为 E，泊松比为 μ。试确定用电测法测量 p 和 M_e 值的布片和接线方案，并建立计算公式。



题 16-3 图

解：在远离筒端处任选一点，其应力状态及布片方案示如图 16-3a。

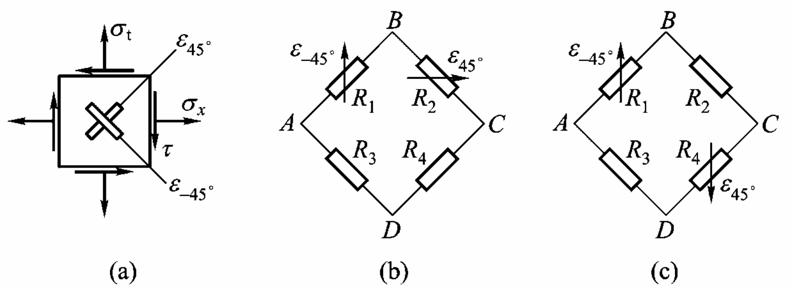


图 16-3

二贴片方向的应变与各应力的关系为

$$\varepsilon_{-45^\circ}=\frac{1}{E}\left[\left(\tau+\frac{\sigma_x}{2}+\frac{\sigma_t}{2}\right)-\mu\left(\frac{\sigma_x}{2}+\frac{\sigma_t}{2}-\tau\right)\right]$$

$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{1}{E}\left[\left(\frac{\sigma_x}{2}+\frac{\sigma_t}{2}-\tau\right)-\mu\left(\tau+\frac{\sigma_x}{2}+\frac{\sigma_t}{2}\right)\right]$$

测 M_e 及 p 的接线方案示如图 16-3b 和 c。

设图 b 所示接线方案的测值为 $\bar{\varepsilon}_{M_e}$，则由

$$\bar{\varepsilon}_{M_e}=\varepsilon_{-45^\circ}-\varepsilon_{45^\circ}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau=\frac{(1+\mu)M_e}{\pi E R_0^2\delta}$$

得到 M_e 的计算公式为

$$M_e=\frac{\pi E R_0^2\delta}{(1+\mu)}\bar{\varepsilon}_{M_e}$$

设图 c 所示接线方案的测值为 $\bar{\varepsilon}_p$，则由

$$\bar{\varepsilon}_p=\varepsilon_{-45^\circ}+\varepsilon_{45^\circ}=\frac{(1-\mu)}{E}(\sigma_x+\sigma_t)=\frac{3(1-\mu)}{E}\sigma_x=\frac{3(1-\mu)(2R_0-\delta)}{4E\delta}p$$

得到 p 的计算公式为

$$p = \frac{4E\delta}{3(1-\mu)(2R_0-\delta)}\bar{\varepsilon}_p$$

或近似为

$$p \approx \frac{2E\delta}{3(1-\mu)R_0}\bar{\varepsilon}_p$$

16-4 用直角应变花测得构件表面某点处的应变为 ε_{0° = **400×10^{-6}**，ε_{45° = **300×10^{-6}**，ε_{90° =**100×10^{-6}**。试确定该点处的主应力大小及方位。材料的弹性模量 E =**200GPa**，泊松比 μ =**0.3**。

解：法 1，解析法

依据平面应变公式，有

$$\begin{cases} \varepsilon_{0^\circ} = \dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 0^\circ-\dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin 0^\circ = 400\times10^{-6} \\ \varepsilon_{45^\circ} = \dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 90^\circ-\dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin 90^\circ = 300\times10^{-6} \\ \varepsilon_{90^\circ} = \dfrac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\dfrac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 180^\circ-\dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin 180^\circ = 100\times10^{-6} \end{cases}$$

联解以上三个方程，得

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0^\circ} = 400\times10^{-6}$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ} = 100\times10^{-6}$$
$$\gamma_{xy} = -100\times10^{-6}$$

进而得

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2} = 408.1\times10^{-6} = \varepsilon_1$$
$$\varepsilon_{\min} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2} = 91.9\times10^{-6} = \varepsilon_2$$

$$\alpha_0 = \arctan\frac{(-\gamma_{xy})}{2(\varepsilon_{\max}-\varepsilon_y)} = 9.22^\circ = 9^\circ 13'$$

及

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2) = \frac{200\times10^9}{(1-0.3^2)}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}(408.1\times10^{-6}+0.3\times91.9\times10^{-6})$$
$$= 9.58\times10^7\,\mathrm{Pa} = 95.8\mathrm{MPa}$$
$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1) = 47.1\mathrm{MPa}$$

法 2，图解法

根据直角应变花所测的三个应变值可画应变圆如图*（见图 **16-4**）。

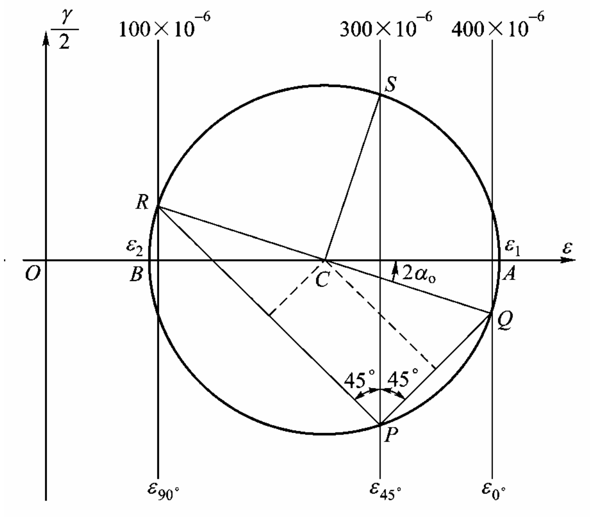


图 16-4

从图中可量得

$$\varepsilon_1 = 408\times10^{-6}，\ \varepsilon_2 = 91.9\times10^{-6}，2\alpha_0 = 18.4^\circ$$

由此算得

$$\sigma_1 = \frac{200\times10^9\,\mathrm{N}}{(1-0.3^2)\mathrm{m}^2}(408\times10^{-6}+0.3\times91.9\times10^{-6}) = 9.57\times10^7\,\mathrm{Pa} = 95.7\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{200\times10^9\,\mathrm{N}}{(1-0.3^2)\mathrm{m}^2}(91.9\times10^{-6}+0.3\times408\times10^{-6}) = 4.71\times10^7\,\mathrm{Pa} = 47.1\mathrm{MPa}$$

$$\alpha_0 = 9.2^\circ = 9^\circ12'$$

两种解法的结果基本一致。

附 作图步骤：

1．画纵轴$(\frac{\gamma}{2})$，并按比例作纵轴的三根平行线（ε_{0°，ε_{45°及ε_{90°）；

2．在ε_{45°的平行线上任选一点P，并作45°斜线交ε_{0°线于Q，交ε_{90°线于R；

3．作PQ线和PR线的中垂线，二者交于C点，过C点画横轴(ε) ；

4．以C点为圆心，以CR为半径画圆，此即所需之应变圆。