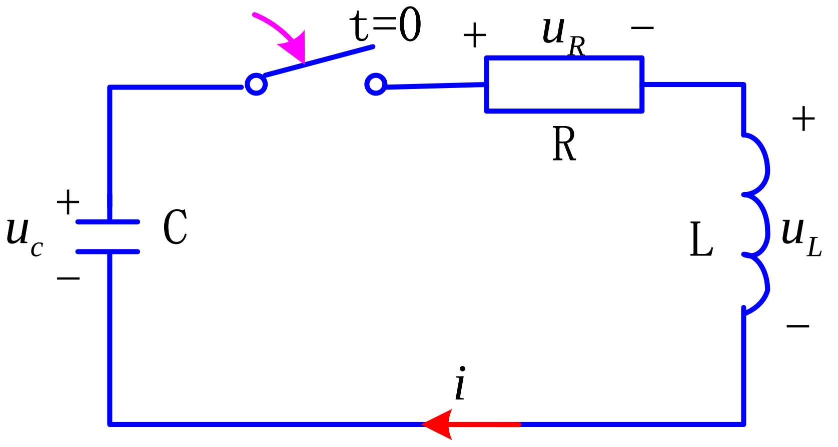
7.5 二阶电路的零输入响应

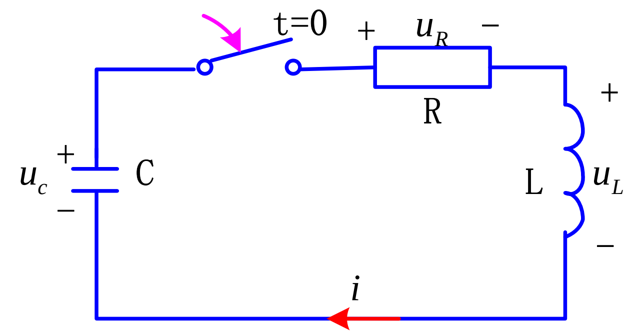
零输入响应

二阶电路在**无外加激励**的情况下，换路后仅由电容、电感储能元件所储存的初始能量作用于电路而引起的响应。

分析方法:经典法



$$Ri + u_{\mathrm{L}} = u_{\mathrm{C}}, \quad i = -C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}, \quad u_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



$$u_C(0-) = U_0$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + u_{\mathrm{C}} = 0$$

求解二阶微分方程

（1）求初值

由换路定理：

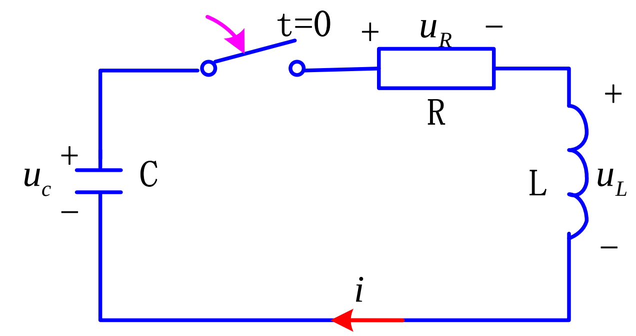
$$u_C(0+) = u_C(0-) = U_0$$

$$i(0+) = i(0-) = 0$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0+} = -\frac{1}{C}i(0+) = 0$$

7.5 二阶电路的零输入响应

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$



$$u_C(0-)=U_0$$

求解二阶微分方程

（2）求微分方程解

特征方程： $LCp^2+RCp+1=0$

特征根： $$p_{1,2}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}}$$

$$u_C(t)=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}$$

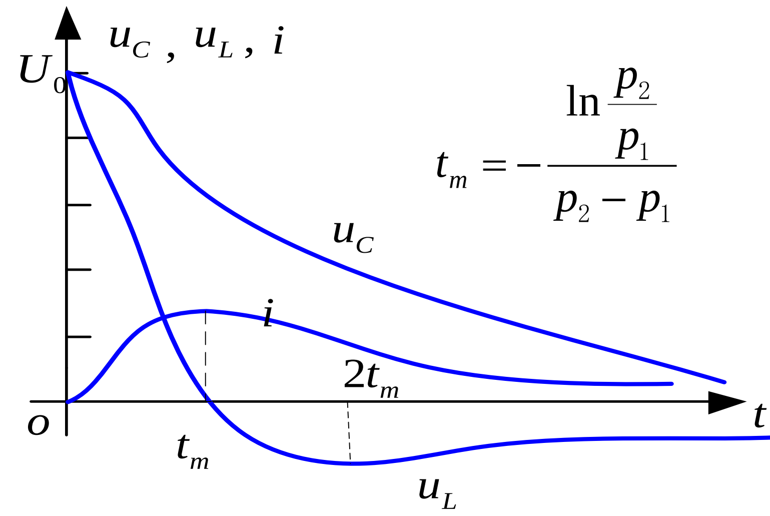
代入初始值 $u_C(0+)$ 和 $\frac{du_C}{dt}(0+)$ 确定系数 A_1 和 A_2

$$\begin{cases} u_C(0+)=A_1+A_2 \\ \frac{du_C}{dt}(0+)=A_1p_1+A_2p_2 \end{cases}$$

⬅ 系数 A_1 和 A_2 方程不一定是实数

情况一：$R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

p_1和p_2为两个不相等实数



$$u_C(t) = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_2\, e^{p_1 t} - p_1\, e^{p_2 t})$$

$$i(t) = -C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0 C p_1 p_2}{p_2 - p_1}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = -\frac{U_0}{L(p_2 - p_1)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{(p_2 - p_1)}(p_1\, e^{p_1 t} - p_2\, e^{p_2 t})$$

$t = t_m$时, $u_L = 0$，i取得极值（最大值），u_C取得拐点

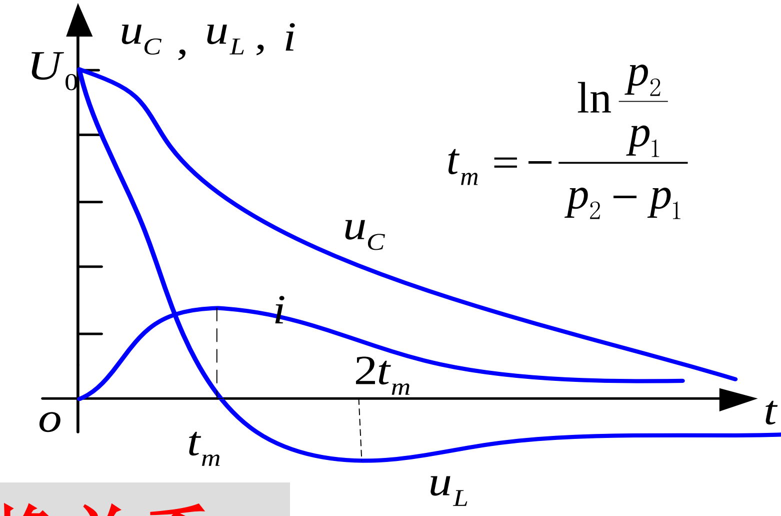
过阻尼情况，非振荡放电过程

情况一： $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$u_C(t) = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_2\,\mathrm{e}^{p_1 t} - p_1\,\mathrm{e}^{p_2 t})$$

$$i(t) = -\frac{U_0}{L(p_2 - p_1)}(\mathrm{e}^{p_1 t} - \mathrm{e}^{p_2 t})$$

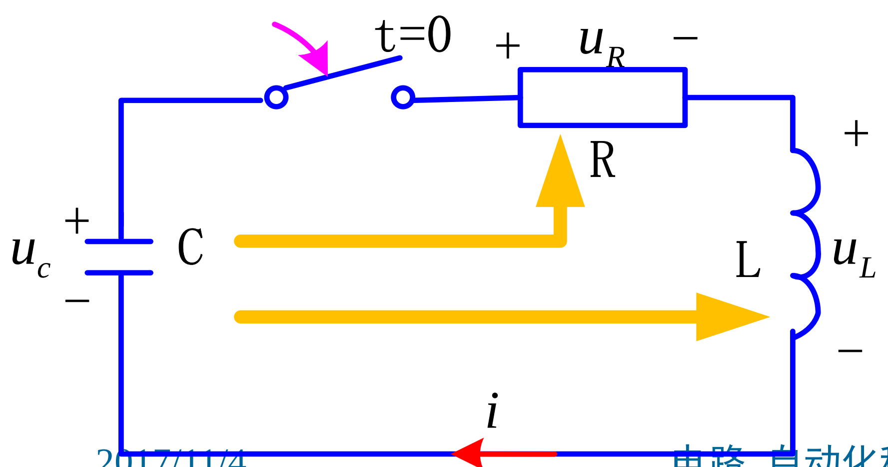
$$u_L(t) = -\frac{U_0}{(p_2 - p_1)}(p_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} - p_2\,\mathrm{e}^{p_2 t})$$

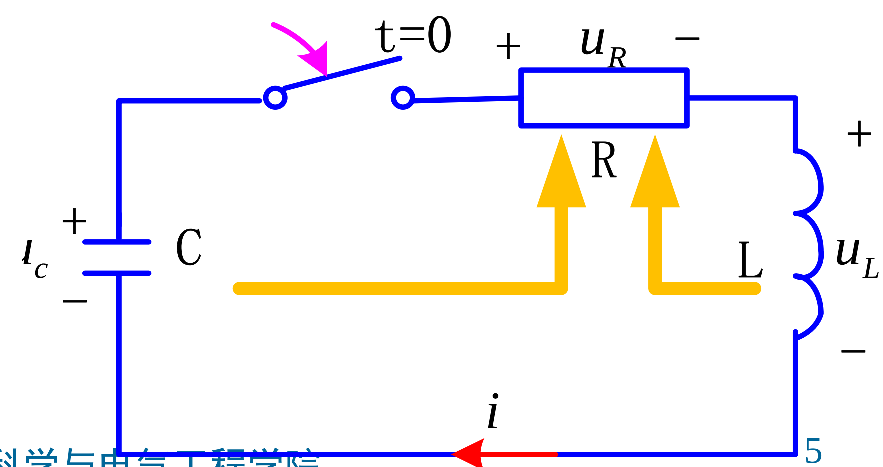


能量转换关系

$0 < t < t_m, i > 0, \quad u_L > 0$

$t > t_m, i > 0, \quad u_L < 0$





情况二：

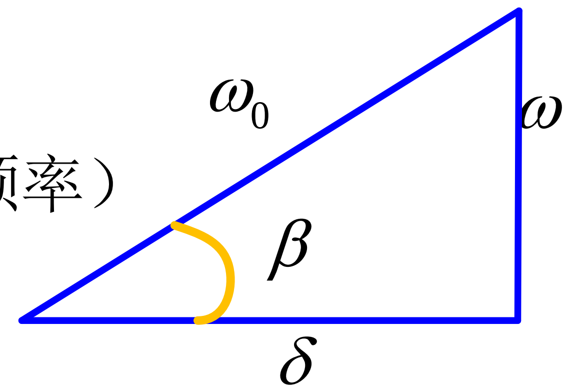
$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

p_1和p_2为共轭复数

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$$

$$\delta = \frac{R}{2L}\text{(衰减系数)}, \omega = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \delta^2}\text{（振荡角频率）}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}\text{（谐振角频率）}$$



$$u_C(t) = A_1 \mathrm{e}^{p_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{p_2 t}$$

A_1和A_2也为共轭复数

$$u_C(t) = e^{-\delta t}(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)$$

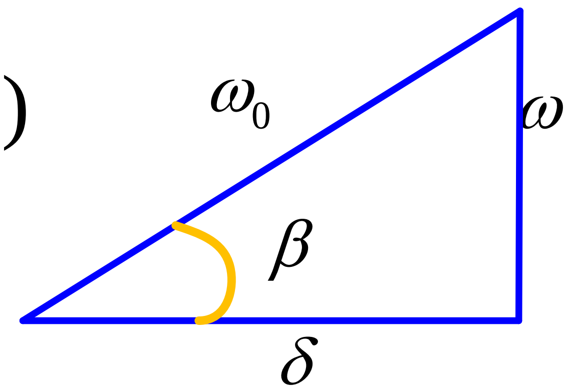
A_1和A_2为实数

$$\begin{cases} u_C(0+) = A_1 = U_0 \\ \dfrac{du_C}{dt}(0+) = -A_1\delta + A_2\omega = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = U_0 \\ A_2 = \dfrac{A_1\delta}{\omega} \end{cases}$$

7.5 二阶电路的零输入响应

情况二： $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$u_C(t) = e^{-\delta t}(U_0 \cos\omega t + \frac{U_0\delta}{\omega}\sin\omega t)$$



$$u_C(t) = \frac{\omega_0}{\omega}U_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$$

$$i(t) = -C\frac{du_C}{dt} = -C\frac{\omega}{\omega_0}U_0[-\delta\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t+\beta) + \omega\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t+\beta)]$$

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{U_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega t}$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{\omega}(-\delta\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\omega t + \omega\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos\omega t)$$

$$u_L(t) = -\frac{\omega_0}{\omega}U_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t - \beta)$$

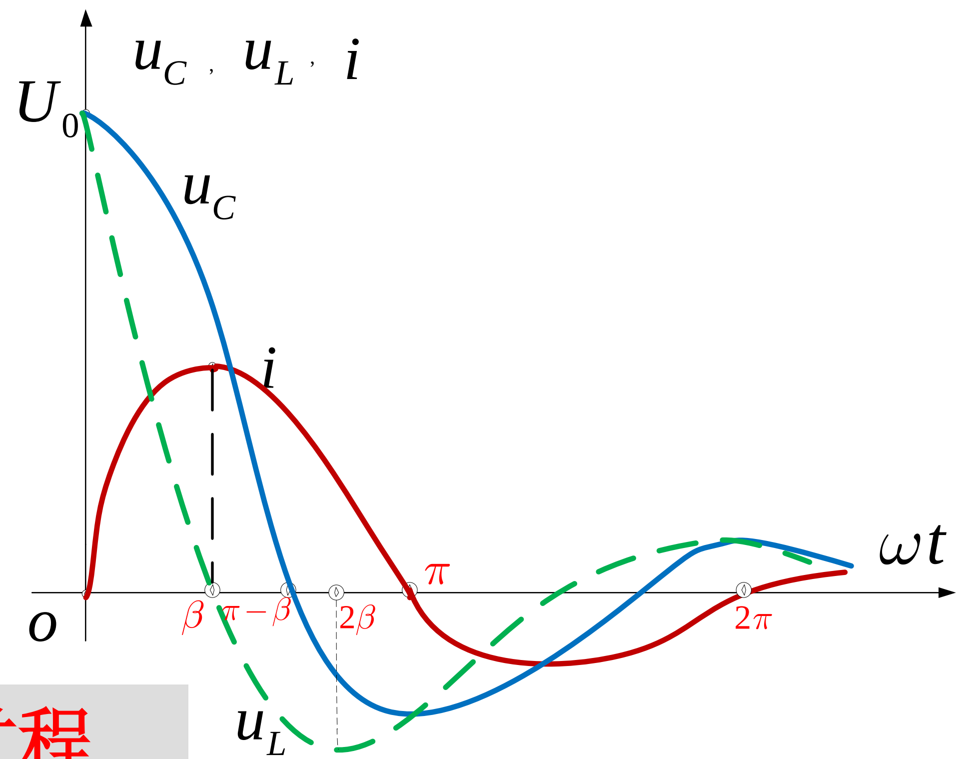
7.5 二阶电路的零输入响应

情况二： $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$u_C(t) = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$i(t) = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

$$u_L(t) = -\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \beta)$$



欠阻尼情况，振荡放电过程

$\omega t = k\pi - \beta, k = 0,1,2,\ldots, u_C = 0$

$\omega t = k\pi, k = 0,1,2,\ldots, i = 0$， u_C取得极值点

$\omega t = k\pi + \beta, k = 0,1,2,\ldots, u_L = 0$， i取得极值点， u_C取得拐点

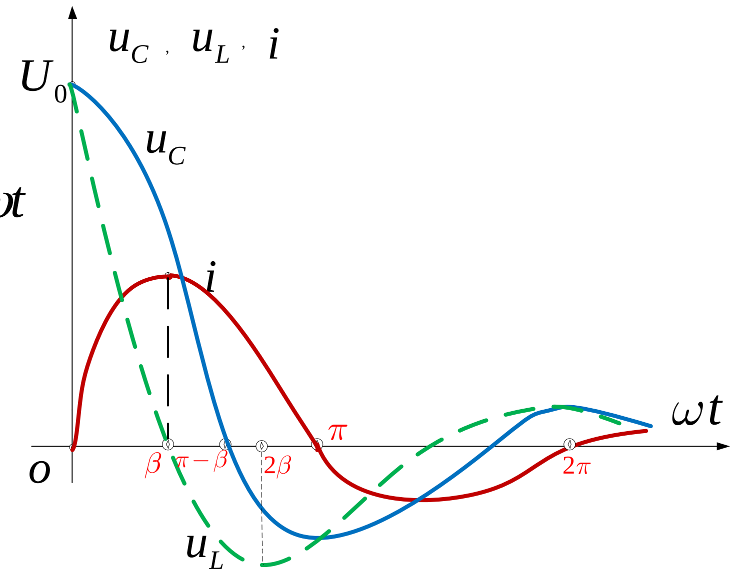
$\omega t = k\pi + 2\beta, k = 0,1,2,\ldots, u_L$取得极值点

情况二：

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$u_C(t) = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \qquad i(t) = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

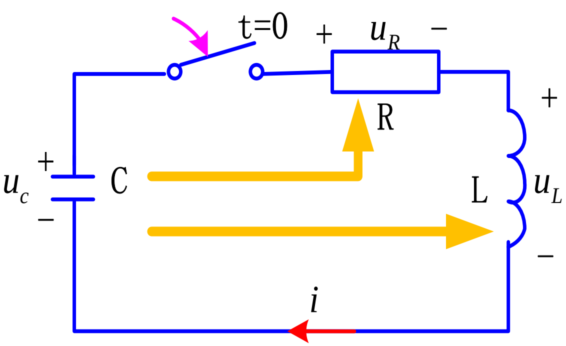
$$u_L(t) = -\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \beta)$$



能量转换关系

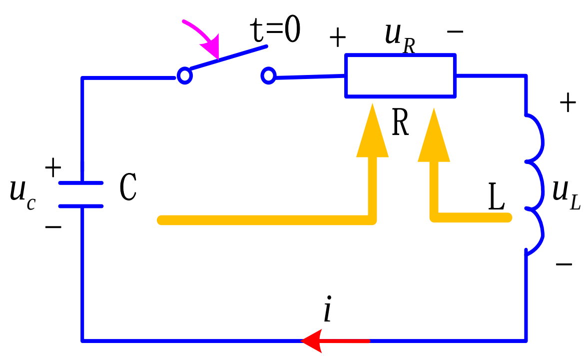
$0 < \omega t < \beta$

$u_C > 0, i > 0, \quad u_L > 0$



$\beta < \omega t < \pi - \beta$

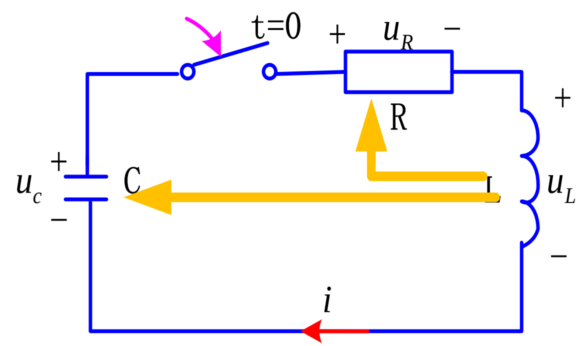
$u_C > 0, i > 0, \quad u_L < 0$



$\pi - \beta < \omega t < \pi$

$u_C < 0, i > 0, \quad u_L < 0$

……



7.5 二阶电路的零输入响应

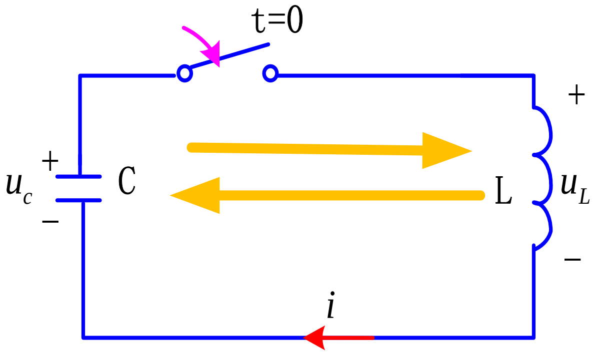
特殊情况：

$$R=0,\delta=-\frac{R}{2L}=0,\qquad \beta=arctg(\frac{\omega}{\delta})=\frac{\pi}{2}$$

$$u_C(t)=U_0\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

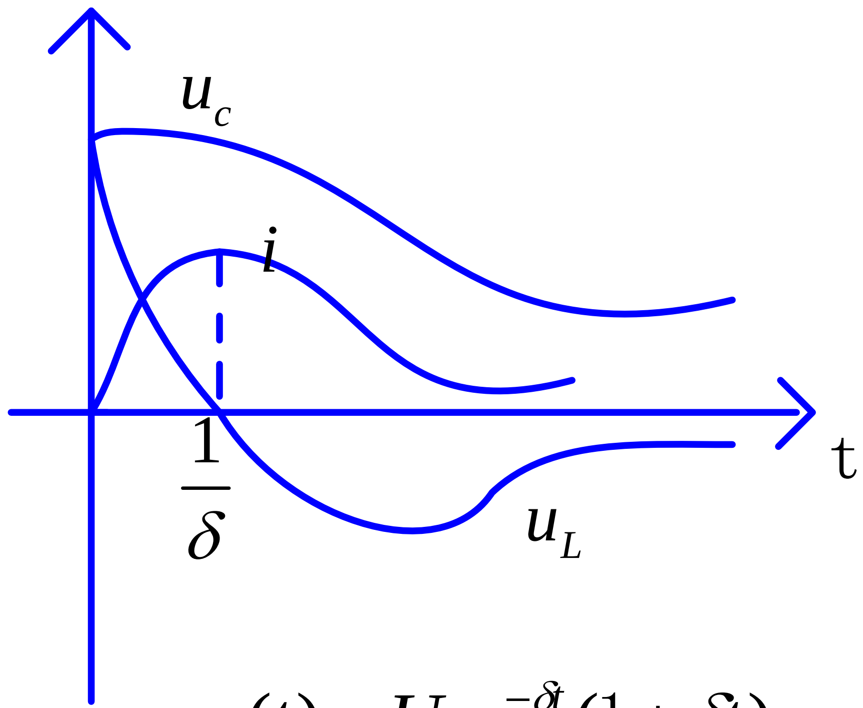
$$i(t)=\frac{U_0}{\omega L}\sin\omega t$$

$$u_L(t)=-U_0\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})=U_0\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$$



零阻尼情况，等幅振荡过程

情况三：$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$



p_1和p_2为相等实根

$$p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} = -\delta$$

$$u_C(t) = e^{-\delta t}(A_1 + A_2 t)$$

A_1和A_2为实数

$$\begin{cases} u_C(0+) = A_1 = U_0 \\ \dfrac{du_C}{dt}(0+) = -A_1\delta + A_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = U_0 \\ A_2 = \delta U_0 \end{cases}$$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\delta t}(1 + \delta t)$$

$$i(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}$$

$$u_L(t) = U_0 e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

临界阻尼情况，非振荡放电过程

7.5 二阶电路的零输入响应

结论： P_1和P_2为特征方程特征根

$R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$P_1 \neq P_2$两个不等实根

$$u_{0i}(t) = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$$

过阻尼情况,非振荡放电（衰减）

$R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$P_1 = P_2^* = -\delta + j\omega$共轭复根

$$u_{0i}(t) = e^{-\delta t}(A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t)$$

欠阻尼情况，振荡放电（衰减）

$R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$P_1 = P_2 = P$相等实根

$$u_{0i}(t) = e^{Pt}(A_1 + A_2 t)$$

临界阻尼情况，非振荡放电（衰减）

$R = 0$

$P_1 = P_2^* = j\omega$

$$u_{0i}(t) = A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t$$

零阻尼情况，等幅振荡（非衰减）

A_1、A2是实数

多选题

设置

对于二阶电路的零输入响应，下列说法正确的有：

A 所有电路变量，最后一定衰减为零；

B 在过渡过程中，电容、电感有可能在吸收功率；

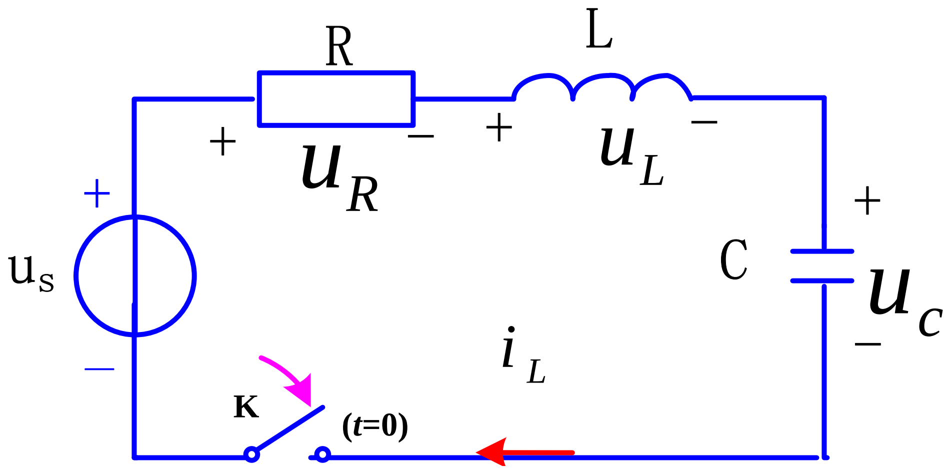
C 在过渡过程中，电阻元件一直在吸收功率；

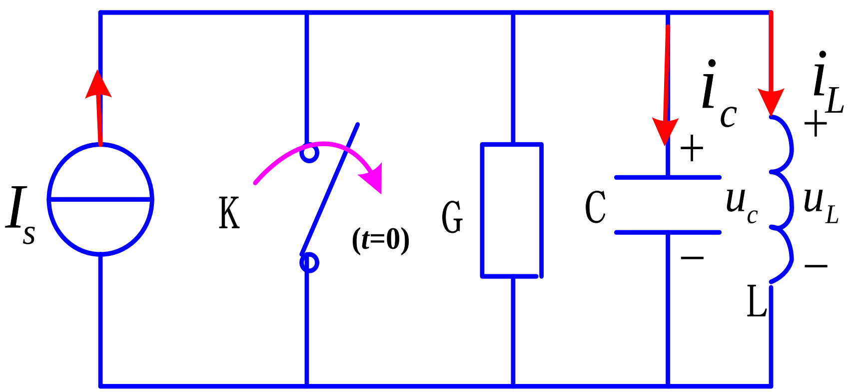
D 电路中如果电阻不为零，电路所有变量最后一定衰减为零；

提交

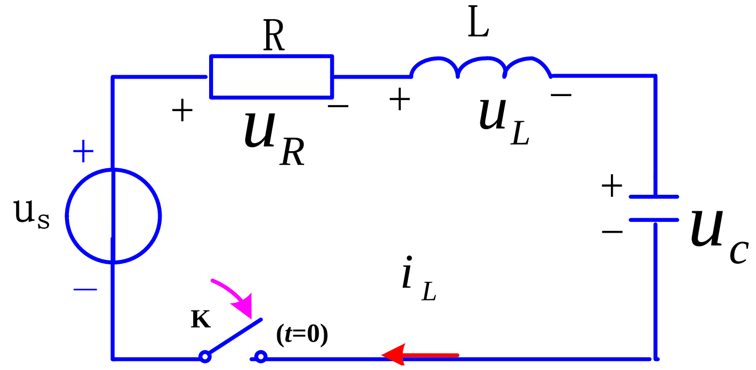
零状态响应

二阶电路在**零初始储能**的条件下，在$t>0$时仅由施加于电路的激励所引起的响应。





零状态响应



$$u_C(0_-)=0, i_L(0_-)=0$$

$$u_R+u_C+u_L=U_S$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S$$ 非齐次线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0+)=\frac{1}{C}i_L(0+)=0, u_C(0+)=0$$

解的形式为： $u_C=u_C'+u_C''$

非齐次方程特解　　齐次方程通解

u'_{C} → 特解（强制分量，稳态分量）

$$LC\frac{d^2u_{\mathrm{C}}}{dt^2}+RC\frac{du_{\mathrm{C}}}{dt}+u_{\mathrm{C}}=U_{\mathrm{S}}$$ 的特解 → $u'_{\mathrm{C}}=U_{\mathrm{S}}$

与输入激励的变化规律有关，为电路的稳态解。

u''_{C} → 通解（自由分量，暂态分量）

$$LC\frac{d^2u_{\mathrm{C}}}{dt^2}+RC\frac{du_{\mathrm{C}}}{dt}+u_{\mathrm{C}}=0$$ 的解 → $u''_C(t)=A_1\,\mathrm{e}^{p_1t}+A_2\,\mathrm{e}^{p_2t}$

变化规律由电路参数和结构决定。

全解 $u_{\mathrm{C}}(t)=u'_{\mathrm{C}}+u''_{\mathrm{C}}=U_{\mathrm{S}}+A_1\,\mathrm{e}^{p_1t}+A_2\,\mathrm{e}^{p_2t}$

由初始条件 $\boldsymbol{u_C(0_+)=0}$ 、$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0+)=0$ 定常数 $\boldsymbol{A_1}$、$\boldsymbol{A_2}$

$$U_S+A_1+A_2=0$$

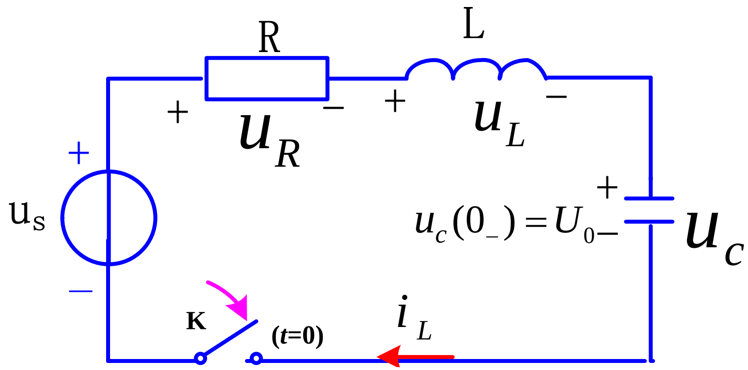
$$A_1p_1+A_2p_2=0$$

$$u_{\mathrm{C}}=U_{\mathrm{S}}+A_1\,\mathrm{e}^{p_1t}+A_2\,\mathrm{e}^{p_2t}\quad(t\geq 0)$$

全响应

由外施激励和初始储能共同作用引起的响应。

电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。



$$u_C = u'_C + u''_C = u'_C + \underline{A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}} \quad (t \geq 0)$$

强制分量

（稳态响应）

非齐次方程的特解

自由分量

暂态响应

齐次方程的通解

全响应= 强制分量 + 自由分量

全响应= 零输入响应+ 零状态响应

*列写二阶电路方程

*根据特征方程的特征根判断相应的四种情况

$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$P_1 \neq P_2$两个不等实根,过阻尼情况

$u(t) = u'(t) + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$

A_1、A2 是实数

$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$P_1 = P_2^* = -\delta + j\omega$ 共轭复根,欠阻尼情况

$u(t) = u'(t) + e^{-\delta t}(A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t)$

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$P_1 = P_2 = P$相等实根,临界阻尼情况

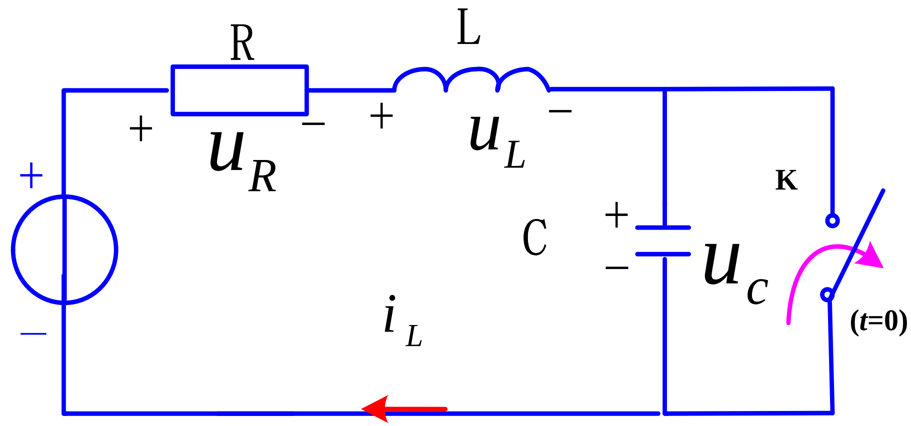
$u(t) = u'(t) + e^{Pt}(A_1 + A_2 t)$

$R = 0$

$P_1 = P_2^* = j\omega$,零阻尼情况

$u(t) = u'(t) + A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t$

【例】已知u_S=100V，R=10Ω, L=0.5mH, C=2μF,开关K打开前电路处于稳态。求t>0时$u_C(t)$。



$$u_C(0_-)=0, i_L(0_-)=\frac{100}{10}=10\text{A}$$

$$u_R+u_C+u_L=u_S$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=u_S$$

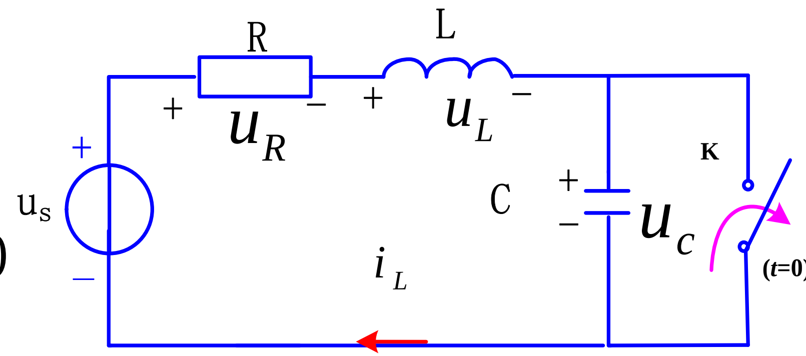
$$10^{-9}\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\times10^{-5}\frac{du_C}{dt}+u_C=u_S$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0+)=\frac{1}{C}i_L(0+)=5\times10^6, u_C(0+)=0$$

7.6 二阶电路的零状态响应和全响应

$$10^{-9}\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\times10^{-5}\frac{du_C}{dt}+u_C=u_S$$

$$\frac{du_C}{dt}(0+)=\frac{1}{C}i_L(0+)=5\times10^6,\ u_C(0+)=0$$



特征方程： $10^{-9}p^2+2\times10^{-5}p+1=0$

$$p_1=-10^4+\mathrm{j}3\times10^4,\quad p_2=-10^4-\mathrm{j}3\times10^4$$

$$u_C(t)=u_C'(t)+u_C''(t)=100+e^{-10^4t}(A_1\cos 3\times10^4t+A_2\sin 3\times10^4t)$$

$$100+A_1=0,\qquad -10^4A_1+3\times10^4A_2=5\times10^6$$

$$u_C(t)=100+e^{-10^4t}(-100\cos 3\times10^4t+200\sin 3\times10^4t)$$

$$=100+167e^{-10^4t}\sin(3\times10^4t-36.9^\circ)(\mathrm{V})$$

单选题

设置

二阶电路，电阻可调，电阻由小变大后，其过渡过程响应的变化为：

A 可能由过阻尼情况变成临界阻尼情况；

B 可能由过阻尼情况变成零阻尼情况；

C 可能由过阻尼情况变成欠阻尼情况；

D 可能由欠阻尼情况变成过阻尼情况。

提交

作业

- 7-23