数学分析(上)期终考试试题

班级 _____ 学号 ________ 姓名 _____ 日期：2005.1.17

一	二	三	四	五	六	总分

一、填空题（每小题4分，共20分）

1． 设 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$，且 $f''(t) \neq 0$，则 $\dfrac{dy}{dx} =$ ________

2． 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin^2 x, & x < 0 \\ \ln(1+x), & x \geq 0 \end{cases}$，则 $f'(x) =$ ________

3． $\int \arctan x\, dx$ = ________________

4． $\int_1^e x^4 \ln x\, dx$ = ____________

5． 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n + b^n}{n^2} x^n$ ($a > 0,\ b > 0$)的收敛半径 $R =$ ________

二、单项选择（每小题4分，共20分）

1．与 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 不等价的一个命题是 【 】

A. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n > N$ 的 $n \in \mathrm{N}^+$，都有 $|a_n - A| < \sqrt{\varepsilon}$；

B. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n > N$ 的 $n \in \mathrm{N}^+$，都有 $|a_n - A| < \sqrt{n}\varepsilon$；

C. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n > N$ 的 $n \in \mathrm{N}^+$，都有 $|a_n - A| < \varepsilon^2$；

D. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n > N$ 的 $n \in \mathrm{N}^+$，都有 $|a_n - A| < 100\varepsilon$.

2．设 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 的某个邻域中有连续导数，并且 $\lim_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{(x-1)^3} = 2$. 则 【 】

A. $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

B． $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

C． $(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

D． $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值；$(1,f(1))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

3. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续偶函数, $F(x)=\int_0^x (x-2t)^2 f(t)dt$, 则 $F(x)$ 是【 】

A． 偶函数 ； B. 既是奇函数也是偶函数；

C. 非奇非偶函数； D. 奇函数 .

4．设 $u_n=\sin[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}]$ ，则级数 【 】

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$ 都收敛 B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$ 都发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$ 发散 D. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$ 收敛

5．设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+3)^n$ 在点 $x=1$ 处条件收敛，则该幂级数在点 $x=-8$ 【 】

A．绝对收敛； B． 条件收敛；

C． 发散 ； D．不能确定.

三、计算题（每小题8分，共24分）

1． 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点（2，1，0）处的切平面与法线方程。

2． 计算定积分 $I=\int_0^1 dy\int_y^1 x^2\sin\frac{y}{x}dx$

3． 过点 $(4,0)$ 作曲线 $y=\sqrt{(x-1)(3-x)}$ 的切线，求这条切线与 x 轴和 $y=\sqrt{(x-1)(3-x)}$ 所围城的面积，以及此图形绕 x 轴旋转一周的体积。

四、级数判敛（12分）

1．判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$ 得敛散性.

2．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 是否收敛。 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

五、证明题（8分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导， $M=\max|f''(x)|$，又设 $f(\frac{a+b}{2})=0$.

(1) 写出 $f(x)$ 在点 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 带有拉格朗日余项的泰勒公式；

(2) 求证 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\frac{M(b-a)^3}{24}$.

六、证明题（8分）

设 $f(x)>0$, 求证:

$$\int_0^1\ln f(x+t)dt=\int_0^x\ln\frac{f(t+1)}{f(t)}dt+\int_0^1\ln f(t)dt$$

七、证明题（8分）

证明函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{nx^n}$ 在 $(1,+\infty)$ 连续。

八、证明： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)3^n}=\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x\arctan x dx=\frac{2\pi\sqrt{3}-9}{18}$

九、设 $a_n=\int_{n-1}^{n+1}\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{n}\right|dx$ ， $S_n=\sum_{k=2}^{n}a_k$ ， 证明：

（1） $S_n=\ln 2+\ln\frac{n}{n+1}$，

（2） $\lim_{n\to\infty}n(S_n-\ln 2)=-1$

十、设正项数列 $\{a_n\}$ 单调下降，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$ 收敛。

十一、证明（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 上一致收敛，

（2） $\int_{\pi/6}^{\pi/2}f(x)dx=\ln\frac{3}{2}$，其中 $f(x)$ 为（1）中级数的和函数。