13.4 状态反馈控制

13.4.1 稳定性

考虑一个部分可反馈线性化系统

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \tag{13.37}$$

$$\dot{\xi} = A\xi + B\gamma(x)\left[u - \alpha(x)\right] \tag{13.38}$$

其中

$$z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}$$

$T(x)$ 是定义域 $D \subset R^n$ 上的微分同胚映射，$D_z = T(D)$ 包含

原点，(A,B)是可控的，$\gamma(x)$对于所有的$x\in D$是非奇异的，$f_0(0,0)=0$，且$f_0(\eta,\xi)$，$\alpha(x)$和$\gamma(x)$连续可微。

方程（**13.37**）～（**13.38**）正是可输入-输出线性化系统的标准形（**13.16**）～（**13.18**）。我们不只局限于讨论单输入系统或(A,B)为可控标准形的情况，而是继续讨论一般系统（**13.37**）～（**13.38**），且其结论将用于标准形（**13.37**）～（**13.38**）或可反馈线性化系统的特例。

我们的目标是设计一个状态反馈控制律，以稳定原点$z=0$。

通过引入状态反馈控制

$$u=\alpha(x)+\beta(x)v$$

其中$\beta(x)=\gamma^{-1}(x)$，系统（**13.37**）～（**13.38**）可以简化为“三角”系统

$$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi) \tag{13.39}$$

$$\dot{\xi}=A\xi+Bv \tag{13.40}$$

再通过线性反馈控制 $v=-K\xi$ 很容易使得方程（**13.40**）稳定，其中K设计为使$(A-BK)$是 **Hurwitz** 矩阵，则整个闭环系统

$$\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi) \tag{13.41}$$

$$\dot{\xi}=(A-BK)\xi \tag{13.42}$$

的原点的渐近稳定性可由系统$\dot{\eta}=f_0(\eta,0)$的原点的渐近稳定得出，下一引理将说明这一点。

引理 13.1 如果$\dot{\eta}=f_0(\eta,0)$的原点是渐近稳定的，则系统（**13.41**）～（**13.42**）的原点也是渐近稳定的。

◇

证明： 由（逆 **Lyapnuov**）定理 **4.16** 可知，存在一个连续可微的 **Lyapnuov** 函数$V_1(\eta)$，在$\eta=0$的某邻域内满足

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta} f_0(\eta,0) \le -\alpha_3(\|\eta\|)$$

这里 α_3 是 κ 类函数，设 $P = P^T$ > 0 是 Lyapnuov 方程 $P(A-BK)+(A-BK)^T P = -I$ 的解，且用 $V(\eta,\xi) = V_1(\eta) + k\sqrt{\xi^T P\xi}$，$k>0$，作为系统（13.41）～（13.42）的备选 Lyapnuov 函数[①]**。$\dot{V}$ 的导数为**

$$\dot{V} = \frac{\partial V_1}{\partial \eta} f_0(\eta,\xi) + \frac{k}{2\sqrt{\xi^T P\xi}} \xi^T [P(A-BK)+(A-BK)^T P]\xi$$

[①] 函数 $V(\eta,\xi)$ 除了在波形 $\xi=0$ 上外，在原点附近处处连续可微。在原点附近 $V(\eta,\xi)$ 和 $\dot{V}(\eta,\xi)$ 都有定义且连续。容易看出，定理 4.1 仍然有效。

$$= \frac{\partial V_1}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) + \frac{\partial V_1}{\partial \eta} [f_0(\eta, \xi) - f_0(\eta, 0)] - \frac{k\xi^T \xi}{2\sqrt{\xi^T P \xi}}$$

在原点的任何有界邻域内，利用 V_1 和 f_0 的连续可微性可得

$$\dot{V} \le -\alpha_3(\|\eta\|) + k_1 \|\xi\| - kk_2 \|\xi\|$$

这里 k_1 和 k_2 为正常数。选择 $k > k_1 / k_2$，即保证 $\dot{V}$ 是负定的，因而原点是渐近稳定的。 □

上述讨论说明可输入-输出线性化的最小相位系统可由状态反馈控制

$$u = \alpha(x) - \beta(x)KT_2(x) \qquad (13.43)$$

稳定。控制方程（13.43）与$T_1(x)$无关，因此，也与满足偏微分方程（13.15）的函数ϕ无关。

引理 13.1 的证明过程对有界集合有效，因此不能将其扩展用以证明全局渐近稳定性，但当把ξ作为输入时，通过要求系统$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$是输入-状态稳定的，就可以证明全局渐近稳定性。

引理 13.2 如果$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$是输入-状态稳定的，则系统（13.41）～（13.42）的原点是全局渐近稳定的。

◇

证明：应用引理 4.7。

□

系统 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi)$ 的输入-状态稳定性，不能由 $\dot{\eta}=f_0(\eta,0)$ 的原点的全局渐近稳定性，甚至指数渐近稳定性推出，如在 4.10 节中所见。因此，已知一个可输入-输出线性化的系统是全局最小相位系统，并不能保证控制方程（13.43）能使系统全局稳定。只有 $\dot{\eta}=f_0(\eta,0)$ 的原点全局指数稳定，且 $f_0(\eta,0)$ 对 (η,ξ) 全局 Lipschitz 时，系统才是全局稳定的，因为在这种情况下引理 4.6 可保证系

统 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi)$ 是输入-状态稳定的，否则必须通过进一步分析确定输入-状态稳定性。全局 **Lipschitz** 条件有时也称线性增长条件（**linear growth conditions**）。下面的两个例子将说明在确定输入-状态稳定时，若没有线性增长条件可能产生的一些困难。

例 13.16 考虑二阶系统

$$\dot{\eta}=-\eta+\eta^2\xi$$
$$\dot{\xi}=v$$

当 $\dot{\eta}=-\eta$ 的原点全局指数稳定时，系统 $\dot{\eta}=-\eta+\eta^2\xi$ 不

是输入—状态稳定的。因为如果$\xi(t)\equiv 1$和$\eta(0)\geq 2$，则$\dot{\eta}(t)\geq 2$，η变为无界的。另一方面，由引理 **13.1** 可知，线性控制器$v=-k\xi$，$k>0$，使得整个系统的原点渐近稳定。实际上，原点还是指数稳定的，但是该线性控制不能使原点全局渐近稳定。取$V=\eta\xi$，并注意到

$$\dot{V}=\eta\dot{\xi}+\dot{\eta}\xi=-k\eta\xi-\eta\xi+\eta^2\xi^2=-(1+k)V+V^2$$

可看出集合$\{\eta\xi<1+k\}$是正不变集，因为在集合内部有$\dot{V}=-V(1+k-V)<0$。在集合的边界$\eta\xi=1+k$上的轨线是由$\eta(t)=e^{kt}\eta(0)$和$\xi(t)=e^{-kt}\xi(0)$给出，因此$\eta(t)\xi(t)\equiv 1+k$，所以集合的边界$\eta\xi=1+k$也是不变集。

在不变集$\{\eta\xi<1+k\}$内，

$$\frac{d}{dt}(0.5\eta^2)=\eta\dot{\eta}=\eta(-\eta+\eta V)\leq\eta\left(-\eta+\eta(1+k)\right)=k\eta^2,$$

$$\frac{d}{dt}(0.5\xi^2)=\xi\dot{\xi}=-k\xi^2<0$$

因此ξ趋于零，η在有限时间内有界。经过有限时间T，对于所有$t\geq T$，有$V(t)\leq 1/2$，则对于所有$t\geq T$，有$\dot{\eta}\eta\leq-(1/2)\eta^2$，这说明当$t$趋近于无穷时，整个系统的轨线趋于原点。因此，集合$\{\eta\xi<1+k\}$是精确的吸引区。另外，以上分析不仅说明原点不是全局渐近稳定的，同时还说明吸引区会随k的增加而扩大。实际上，选择足

够大的 k，可能包含 R^2 内的任何紧集，因此线性反馈控制 $v=-k\xi$ 可以保证闭环系统半全局稳定。

如果 $\dot{\eta}=f_0(\eta,0)$ 的原点是全局渐近稳定的，有人可能会想到，设计一个线性反馈控制器 $v=-k\xi$，将 $A-BK$ 的特征值分配到复平面左边尽可能远的地方，使得 $\dot{\xi}=(A-BK)\xi$ 的解尽快衰减到零，这样就可以使三角系统（**13.39**）～（**13.40**）实现全局稳定，或至少半全局稳定。进而 $\dot{\xi}=f_0(\eta,\xi)$ 的解会快速逼近 $\dot{\eta}=f_0(\eta,0)$ 的解，该解具有良好特性，因为其原点是全局渐近稳定的。这种方法在例 **13.16** 中实现了系统的半全局稳定。但例 **13.17** 说明这

种方法并不奏效[①]。

例 13.17 考虑三阶系统

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}(1+\xi_2)\eta^3$$
$$\dot{\xi}_1 = \xi_2$$
$$\dot{\xi}_2 = v$$

线性反馈控制

$$v = -k^2\xi_1 - 2k\xi_2 \overset{def}{=} -K\xi$$

将

① 此方法有效地特例参见习题 13.20.

$$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -2k \end{pmatrix}$$

的特征值分配在 $-k$ 和 $-k$。指数矩阵

$$e^{(A-BK)t} = \begin{pmatrix} (1+kt)e^{-kt} & te^{-kt} \\ -k^2te^{-kt} & (1-kt)e^{-kt} \end{pmatrix}$$

表明当 $k \to \infty$ 时，解 $\xi(t)$ 快速衰减到零。但要注意，指数矩阵中元素 $(2,1)$ 的系数是 k 的二次函数。该元素的绝对值在 $t = 1/k$ 达到最大值 k/e，因此该项虽然可以通过选择较大的 k 值而快速衰减到零。其瞬态特性呈现出 k

阶峰值，这种现象称为峰化现象[①]。峰值和非线性增长的相互作用会使系统不稳定。具体讲，对于初始状态 $\eta(0)=\eta_0$， $\xi_1(0)=1$ 和 $\xi_2(0)=0$，有 $\xi_2(t)=-k^2te^{-kt}$ 和

$$\dot{\eta}=-\frac{1}{2}(1-k^2te^{-kt})\eta^3$$

如果 $k>e$,则在峰值期间，η^3 的系数为正，引起 $|\eta(t)|$ 增加，最终 η^3 的系数变为负，但这不会立即发生，因为系统可能具有有限的逃逸时间。实际解析解

① 有关峰值现象的更多内容，参见文献[188]。高增益观测器峰化现象的说明参见 14.5 节。

$$\eta^2(t) = \frac{\eta_0^{\ 2}}{1+\eta_0^{\ 2}[t+(1+kt)e^{-kt}-1]} = \frac{\eta_0^2}{(1-\eta_0^2)+\eta_0^{\ 2}[t+(1+kt)e^{-kt}]}$$

表明，如果 $\eta_0^{\ 2} > 1$，系统具有有限的逃逸时间。

△

事实上可以通过构造 **Lyapunov** 函数得到全局渐近稳定控制律。为此考虑备选 **Lyapunov** 函数

$$V = \eta^2 + 0.5(\xi_1^2 + \xi_2^2)$$

其沿方程

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}(1+\xi_2)\eta^3, \dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = v$$

求导得到：

$$\dot{V}=-(1+\xi_2)\eta^4+\xi_1\xi_2+\xi_2 v=-\eta^4+\xi_2(-\eta^4+\xi_1+v)$$

设计控制律

$$v=\eta^4-\xi_1-\xi_2$$

可得

$$\dot{V}=-\eta^4-\xi_2^2\leq 0$$

因 $\dot{V}\equiv 0\Rightarrow\eta\equiv 0,\xi_2\equiv 0\Rightarrow\dot{\xi}_2=v\equiv 0\Rightarrow\xi_1\equiv 0$**，由不变原理可知，控制律** $v=\eta^4-\xi_1-\xi_2$ **可以保证系统** $\dot{\eta}=-\frac{1}{2}(1+\xi_2)\eta^3,\dot{\xi}_1=\xi_2,\dot{\xi}_2=v$ **的原点全局渐近稳定。**

反馈线性化的基本原理是消去系统的非线性项，问题是消去非线性项一定是明智之举吗？从性能上看，非线性项有“好”与“坏”之分，决定是否用反馈消去非线性项取决于实际问题。下面通过这一对例子说明这一点。

例 13.19 考虑标量系统

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u$$

其中 **a** 和 **b** 是正常数。反馈线性化稳定反馈控制取为

$$u = -(k+a)x + bx^3, k > 0$$

这样得到闭环系统 $\dot{x} = -kx$ 。该反馈控制消去了非线

性项 $-bx^3$，但这一项提供的是非线性阻尼。实际上，如果没有反馈控制，当 u 有界时，非线性阻尼能保证解的有界性，无论原点是否稳定，所以不应该消去该项。如果运用简单的线性控制

$$u=-(k+a)x, k>0$$

可得到闭环系统

$$\dot{x}=-kx-bx^3$$

其原点是全局指数稳定的，且其轨线比 $\dot{x}=-kx$ 的轨线更快地趋近于原点，并且可以证明，对于所有满足 $|d(x)|\le a_1x+a_2x^2$ 的扰动，当 $k>0$ 足够大时，扰动系统

$\dot{x} = -kx - bx^3 + d(x)$ 仍然是全局渐近稳定的。此外线性控制更简单且容易实现。 △

例 13.20 考虑二阶系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -h(x_1) + u$$

其中 $h(0) = 0$，对于所有 $x_1 \neq 0$，$x_1 h(x_1) > 0$。显然系统是可反馈线性化的，且线性化稳定反馈控制可取为

$$u = h(x_1) - (k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

其中选择 k_1 和 k_2，使闭环特征值位于左半复平面的理

想位置。另一方面，如果反馈控制取为

$$u = -\delta(x_2)$$

式中δ是局部 **Lipschitz** 函数，满足$\delta(0)=0$，当$y \neq 0$时，$y\delta(y) > 0$，则可证明闭环系统渐近稳定的。为此构造备选 **Lyapunov** 函数为：

$$V = \int_0^{x_1} h(z)dz + (1/2)x_2^2$$

显然函数$V(x)$正定，其沿闭环系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -h(x_1) - \delta(x_2)$$

的导数为

$$\dot{V} = -x_2\delta(x_2) \le 0$$

由于

$$\dot{V} \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow h(x_1(t)) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

故可由不变原理得出原点渐近稳定的结论。

与线性化反馈控制$u = h(x_1) - (k_1x_1 + k_2x_2)$相比，控制$u = -\delta(x_2)$有两个优点：

（1） 它不需要非线性函数$h(x_1)$的模型，因此对$h(x_1)$的建模误差是鲁棒的；

（2）灵活选择函数$\delta(x_2)$可使控制满足其它约束。

例如，取 $u=-k\ sat(x_2)$ 可满足任何形如 $|u|\le k$ 的约束。

但是控制 $u=-\delta(x_2)$ 的缺陷是：不能任意设置 $x(t)$ 的衰减速度。在以上控制律作用下，闭环系统在原点的近似线性化系统矩阵的特征多项式为：

$$s^2+\sigma^{'}(0)s+h^{'}(0)=0$$

上述方程两个根中的任何一个都不能移到 $\mathrm{Re}[s]=-\sqrt{h^{'}(0)}$ 的左边。

上面两个例子说明在有些情况下非线性项是有益的，

将其消除可能是不明智的。

对反馈控制设计而言，本章建立的反馈线性化理论都为刻画一类非线性系统提供了有力的工具。这类系统的结构对于消去或不消去非线性的反馈控制设计都是开放的。非线性系统的相对阶和零状态概念使我们关注线性和非线性系统的一般输入-输出结构，这些概念还为把一些成功用于线性系统的反馈设计程序，如高增益反馈，扩展到非线性系统起到了关键作用。

13.4.2 跟踪

考虑一个单输入-单输出、可输入-输出线性化的系统，以标准形（**13.16**）～（**13.18**）的形式为

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$$
$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)]$$
$$y = C_c \xi$$

不失一般性，假设 $f_0(0,0) = 0$。我们希望设计一个状态反馈控制律，使输出 y 渐近跟踪参考信号 $r(t)$。当系统的相对阶为 $\rho = n$ 时，系统没有非平凡零动态，此时变量 η 及其方程略去，但其他部分保持不变。假设

● $r(t)$ 及其直到 ρ 阶导数 $r^{(\rho)}(t)$ 对于所有 $t \geq 0$ 有界，第

ρ 阶导数 $r^{(\rho)}(t)$ 是 t 的分段连续函数；

●信号 $r,\cdots,r^{(\rho)}$ 可在线获得。

参考信号 $r(t)$ 及其导数可以是某个指定的时间的函数，或者是有某个输入信号 $w(t)$ 驱动的参考模型的输出。对后者可通过适当选择参考模型满足对 r 的假设。例如，一个相对阶为 **2** 的系统，其参考模型可能是二阶线性时不变系统，由传递函数

$$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

表示，其中ζ和ω_n为正常数，对于给定的输入信号$w(t)$，应该适当选择这两个常数，以形成参考信号$r(t)$。信号$r(t)$可由状态模型

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2 \\
\dot{y}_2 &= -\omega_n^2 y_1 - 2\zeta\omega_n y_2 + \omega_n^2 w \\
r &= y_1
\end{aligned}
$$

在线产生。因此$r(t)$，$\dot{r}(t)$和$\ddot{r}(t)$都可在线获得。如果$w(t)$是t的分段连续有界函数，则$r(t)$，$\dot{r}(t)$和$\ddot{r}(t)$满足所需要的假设条件。

设

$$\Re = \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r^{(\rho-1)} \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} \xi_1 - r \\ \vdots \\ \xi_\rho - r^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \xi - \Re$$

通过变量代换 $e = \xi - \Re$，可得

$$\dot{\eta} = f(\eta, e + \Re)$$
$$\dot{e} = A_c e + B_c \{\gamma(x)[u - \alpha(x)] - r^{(\rho)}\}$$

状态反馈控制

$$u = \alpha(x) + \beta(x)[v + r^{(\rho)}]$$

把标准型简化为级联系统

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, e + \Re)$$
$$\dot{e} = A_c e + B_c v$$

其中$\beta(x)=1/\gamma(x)$。设计任何使第二个方程稳定的控制律v，并对于所有$t\geq 0$保持η有界，即可满足控制目标。若$v=-Ke$，其中A_c-B_cK是 **Hurwitz** 矩阵，则完整的状态反馈控制为[1]

$$u=\alpha(x)+\beta(x)\{-K[T_2(x)-\Re]+r^{(\rho)}\} \qquad \textbf{(13.47)}$$

闭环系统为

$$\dot{\eta}=f_0(\eta,e+\Re) \qquad \textbf{(13.48)}$$

$$\dot{e}=(A_c-B_cK)e \qquad \textbf{(13.49)}$$

---

[1] 见 13.2 节，T_2包含同胚映射$T(x)$最后ρ个分量，其中$T(x)$将系统转化为标准形。

对于最小相位系统，$\dot{\eta}=f_0(\eta,0)$ 的原点是渐近稳定的。由（逆 **Lyapunov** 函数）定理 **4.16** 和定理 **4.18** 可知，对于足够小的 $e(0)$，$\eta(0)$ 和 $\Re(t)$，状态 $\eta(t)$ 对于所有 $t\geq 0$ 有界。这样，状态反馈控制（**13.47**）就解决了局部跟踪问题。为了使该控制扩展到全局跟踪，我们要面对在全局稳定性中遇到的同样的问题，这里 $\Re(t)$ 是 t 的任意有界函数。确保全局跟踪的充分条件是系统 $\dot{\eta}=f_0(\eta,\xi)$ 为输入-状态稳定的。

例 13.21　考虑单摆方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a\sin x_1 - bx_2 + cu$$
$$y = x_1$$

该系统在 R^2 上的相对阶为 **2**，并且已表示为标准形。它没有非平凡的零状态，所有默认是最小相位系统。我们希望输出 y 跟踪参考信号 $r(t)$，导数 $\dot{r}(t)$ 和 $\ddot{r}(t)$ 有界。取

$$e_1 = x_1 - r, e_2 = x_2 - \dot{r}$$

得到

$$\dot{e}_1 = e_2$$
$$\dot{e}_2 = -a\sin x_1 - bx_2 + cu - \ddot{r}$$

状态反馈控制（**13.47**）为

$$u = \frac{1}{c}[a\sin x_1 + bx_2 + \ddot{r} - k_1e_1 - k_2e_2]$$

其中，设计 $K = [k_1, k_2]$ 把 $A_c - B_cK$ 的特征根分配在左半开复平面的理想位置。因为所有假设全局成立，所以该控制实现了全局跟踪。图 **13.2** 给出当 $a = c = 10$，$b = 1$，$k_1 = 400$ 和 $k_2 = 20$ 时，系统对某个参考信号的响应。图中实线为标称系统的参考信号和输出信号，二者完全相同，对于所有 t 都实现了跟踪，而不仅仅是渐近跟踪，因为 $x(0) = \Re(0)$。如果 $x(0) \neq \Re(0)$，则是渐近跟踪，如图中虚

线所示。图中点线表示 b 和 c 被扰动为 $b=0.5$，$c=5$，即二倍于摆锤质量时系统的响应。△

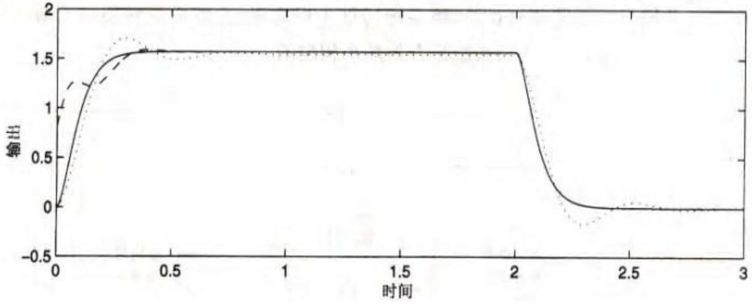

图 13.2　例 13.21 的跟踪控制仿真

习题 17.1：

考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = -\sin x_3 + (1+\cos x_3)u,$$
$$y = x_1$$

试利用输入-输出反馈线性化方法设计控制律使得该系统的原点渐近稳定。

习题 17.2：考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = \sin x_2 + (1+\cos x_2)u$$

试利用全状态反馈线性化方法设计控制律使得该系统的原点渐近稳定。