作业4.1-4.2 习题

1. 计算： (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{10}$； (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^{11}$.

2. 已知方阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，对多项式$f(x) = x^{100}$，求$f(A)$.

3. 以下矩阵分别代表三维几何空间中的什么变换？分别求它们的19次幂.
(1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 已知A, B都是n阶实矩阵,$A^2 = E, B^2 = E, |A| + |B| = 0$,
试证：$|A + B| = 0$.

5. 设$n \geq 2$, 是否存在一个方阵$A \in F^{n\times n}$, 使得$F^{n\times n}$中所有的方阵都可以写成A的多项式形式$a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m$ (m为正整数，$a_0, a_1, \ldots, a_m \in F$)? 请说明理由.

6. 判断下列所定义的各变换σ是否为线性变换：
1)在线性空间V中,$\forall x \in V, \sigma x = \alpha$,其中$\alpha$为$V$中一固定向量;
2)在$F^{n\times n}$中,$\forall X \in F^{n\times n}, \sigma X = BXC$,其中$B, C$为$F^{n\times n}$中两个固定的矩阵.

7. 设A是一个对角矩阵，它的主对角线上的元素$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$两两不同。证明：凡与$A$相乘可交换的矩阵一定是对角矩阵.

8. 证明：不存在n阶矩阵A, B，使得$AB - BA = E$.

9. 证明：任一个n阶矩阵都可以表示成一个对称阵与一个反对称阵之和.

10. 证明：如果A是n阶对称阵，B是n阶反对称阵，则$AB+BA$是反对称阵.