§4　高阶导数

一. 高阶导数的定义

定义1 如果函数$f(x)$的导数$f'(x)$仍可导,即

$$\boxed{(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}}$$

则称$(f'(x))'$为函数$f(x)$的二阶导数, 记为 $f''(x)$.

高阶导数意义

加速度a是路程$f(x)$的二阶导数$a = f''(x)$.

高阶导数的定义

二阶导数记作 $f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

三阶导数记作 $f'''(x),\ y''',\ \frac{d^3y}{dx^3}$.

四阶导数记作 $f^{(4)}(x),\ y^{(4)},\ \frac{d^4y}{dx^4}$.

$f(x)$的n阶导数记为

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n} \text{或} \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数

例1 设 $y = \arctan x$, 求 $f''(0), f'''(0)$.

解 $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad y'' = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$y''' = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$\therefore f''(0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0} = 0;$$

$$f'''(0) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0} = -2.$$

例2 设 $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in R)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' \quad = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' \quad = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

……

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (n \geq 1)$$

若 α 为自然数 n,则

$$y^{(n)} = (x^{n})^{(n)} \quad = n!, \qquad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

二. 莱布尼兹公式

定理1 设函数$f(x)$和$g(x)$具有n阶导数,则

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}}$$

其中$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

证明：归纳法

令$n-k=i, k=j$，公式变为：

$$(fg)^{(n)}=\sum_{i+j=n}\frac{(i+j)!}{i!\,j!}f^{(i)}g^{(j)}$$

(1) 当 n=2 显然成立

(2) 设$(fg)^{(n)}=\sum_{i+j=n}\frac{(i+j)!}{i!\,j!}f^{(i)}g^{(j)}$,成立.

(3)

$$(fg)^{(n+1)}=\left(\sum_{i+j=n}\frac{(i+j)!}{i!\,j!}f^{(i)}g^{(j)}\right)'$$

$$= \sum_{i+j=n} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} \left(f^{(i)} g^{(j)} \right)'$$

$$= \sum_{i+j=n} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} f^{(i+1)} g^{(j)} + \sum_{i+j=n} \frac{(i+j)!}{i!\,j!} f^{(i)} g^{(j+1)}$$

指标变换合并同类项

$l = i + 1$

指标变换合并同类项

$k = j + 1$

$$\sum_{l+j=n+1} \frac{n!}{(l-1)!\,j!} f^{(l)} g^{(j)} \qquad \sum_{i+k=n+1} \frac{n!}{i!(k-1)!} f^{(i)} g^{(k)}$$

$$= \sum_{i+j=n+1} \left(\frac{n!}{(i-1)!\,j!} + \frac{n!}{i!(j-1)!} \right) f^{(i)} g^{(j)} = \sum_{i+j=n+1} \frac{(n+1)!}{i!\,j!} f^{(i)} g^{(j)}$$

三. 高阶导数的计算

1、直接计算，求出前几阶后归纳法证明通式

例3 设 $y=\ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x}$ $\qquad y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$y'''=\dfrac{2!}{(1+x)^3}$ $\qquad y^{(4)}=-\dfrac{3!}{(1+x)^4}$

……

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n\ge 1,\ 0!=1)$$

例4 设 $y=\sin x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x \ =\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2}) \ =\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

2、使用莱布尼兹公式

例5 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

解 设$u = e^{2x}, v = x^2$,则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$

3、间接法: 利用已知的高阶导数

常用高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a>0) \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n} \qquad (\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

例6 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$，求$y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore\ y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos\left(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

思考题目

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_k)^{(n)} = ?$$

$$(f \circ g)^{(n)} = ?$$

能否归纳出一般的结论？并证明

四、小结

高阶导数的定义及物理意义

高阶导数的运算法则(莱布尼兹公式)

高阶导数的求法

作业:习题3.4　1(3小题),2(4),3(1,2,4小题)

5. 隐函数和参数方程的求导

一、隐函数的导数

定义1 若方程$F(x,y)=0$，对$\forall x\in I$，

总存在唯一的 y使得方程成立，则称

该方程确定了一个隐函数.

问题: 隐函数如何求导?

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

例1 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

解 方程两边对 x 求导,

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

解得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x - y}{x + e^y}$, 由原方程知 $x = 0, y = 0$,

$$\therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{e^x - y}{x + e^y}\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}} = 1.$$

二、由参数方程所确定的函数的导数

若参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系，

称此为由参数方程所确定的函数.

例如 $\begin{cases} x=2t, \\ y=t^2, \end{cases} \Longrightarrow t=\dfrac{x}{2}$ 消去参数t

$$\therefore y=t^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4} \qquad \therefore y'=\frac{1}{2}x$$

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$\therefore y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$

再设函数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$都可导, 且$\varphi(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \boxed{\frac{dt}{dx}} = \frac{dy}{dt} \cdot \boxed{\frac{1}{\frac{dx}{dt}}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

若函数$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$二阶可导,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad =\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}\frac{dt}{dx}$$

$$=\boxed{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\boxed{\text{即}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.}$$

例1 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}(-\tan t)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

三、小结

隐函数求导法则：直接对方程两边求导

参数方程求导：实质上是利用复合函数求导法则

作业 习题3.5 1(2小题),2(2小题)