第 2 章 计算机控制系统的数学描述

教学大纲

计算机控制系统中的数字部件特性及影响；多种信号形式、特性及混迭；采样信号的物理恢复过程；前、后置滤波器的作用；采样系统研究的简化。差分方程及其收敛条件；Z 变换及其特性；Z 变换与差分方程的关系与相互变换；脉冲传递函数及其应用；计算机控制系统的状态空间描述；频率域描述。突出离散系统的形成、特性等基本概念。突出离散系统描述的基本概念、离散系统与连续系统的相同与不同之处。

学习重点

1、本章学习要求与重点

本是学习 CCS 课程的基础。

本章将首先分析 CCS 中重要的“采样变换”与“信号恢复--零阶保持器”的数学描写方法及其特性；将 CCS 简化为离散时间系统，介绍离散时间系统的差分方程、脉冲传递函数及系统动态结构图、离散系统频率特性和状态空间四种描述方法及其特性。

学习本章应注意掌握下述重点内容：

（1）要深入了解和掌握采样过程的各种数学描述方法及其特性。

① 要清楚地了解和掌握下述名词述语的基本概念

理想采样；采样周期 T；采样频率 f；采样角频率 ω_s；均匀采样；单采样速率与多采样速率；乃奎斯特频率 ω_N；频谱混迭；频率折叠；隐匿振荡等。

② 记住理想采样开关及理想采样信号的数学描述方法及其特性

. 理想采样开关数学描写： $\delta_T=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$

. 理想采样信号的时域数学描述： $f^*(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)$

. 理想采样信号的拉氏变换数学描述：

$$F^*(s)=L[f^*(t)]=\int_0^{\infty} f^*(\tau)e^{-s\tau}d\tau=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \quad 、F^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s+jn\omega_s)$$

．理想采样信号的频谱数学描述：$F^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega+jn\omega_s)$

要注意了解理想采样信号 $f^*(t)$的频谱 $F^*(j\omega)$与连续函数 $f(t)$频谱 $F(j\omega)$的关系，能熟练地依连续函数 $f(t)$频谱 $F(j\omega)$画出理想采样信号 $f^*(t)$的频谱 $F^*(j\omega)$的形状，并对结果进行分析。

③ 牢记和理解采样定理的含义及应用

．记住采样定理，并清楚采样定理只是说明了采样信号不失真的条件；

．了解如果不满足采样定理，采样信号会产生失真现象，通常，信号的高频分量会折叠为低频分量；在某些情况下会产生隐匿振荡现象等。

．了解前置滤波器（又称为抗混叠滤波器）的概念及作用。

（2）掌握采样信号的恢复装置---零阶保持器的数学描述及特性

① 了解采样信号理想恢复条件及物理不可实现原因；

② 熟记零阶保持器的数学描述:

．时域方程： $f_k(t)=f(kT) \quad ,kT\le t<(k+1)T$

．脉冲过渡函数：$g_h(t)=u_s(t)-u_s(t-T)$

．传递函数： $G_h(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}$

．频率特性：$G_h(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}=\frac{2\pi}{\omega_s}\frac{\sin(\omega\pi/\omega_s)}{\omega\pi/\omega_s}e^{-j(\omega/\omega_s)\pi}$

③ 深刻了解零阶保持器时域及频率特性的特点，特别牢记，它是个低通滤波器，将会产生相位滞后，它的时间响应呈阶梯特性且有 T/2 的时间滞后。

④ 了解后置滤波器的概念及作用。

（3）离散系统最基本的描述方法是差分方程。了解向前及向后差分的定义及相应的线性差分方程的表示方法。会使用 z 变换方法及迭代法求解线性差分方程。

（4）离散系统 z 域描述的脉冲传递函数是离散系统最基本的描述方法。要注意了解和掌握以下几方面问题：

① z 脉冲传递函数的定义，清楚何时才能写出脉冲传递函数。

② 熟悉求取脉冲传递函数的方法以及常用的表示方式，特别要熟悉使用 z^{-1} 多项式之比的脉冲传递函数表示方法。

③ 了解脉冲传递函数零极点的一些特性：极点可按 $z=e^{sT}$ 的关系映射得到，但零点没有相互映射关系，且采样会增加额外的零点。

④ 掌握脉冲传递函数与差分方程相互转换方法。

（4）离散系统也可用方块图描述。方块图等效变换的具体作法与连续系统稍有差别，应特别予以注意。

① 等效变换的基础是环节的变换。有的结构将不能写出脉冲传递函数。输入信号 R(s) 也作为一个连续环节看待。若 R(z) 存在，则可以写出系统的 z 脉冲传递函数，否则只能写出输出量的 z 变换。

② 在求取 CCS 闭环传递函数时,要注意将 ZOH 传函与连续部分的传函组合起来进行 z 变换求得 *G(z)*。

（5）离散系统频域描述虽然定义方法与连续系统频率特性类似，但其有许多特点值得注意：

① 离散系统频率特性按式 $G(e^{j\omega T})=G(z)|_{z=e^{j\omega T}}$ 计算，相当于考察脉冲传递函数 $G(z)$ 当 z 沿单位圆变化时（ $z=e^{j\omega T}$ ）的特性。

② 离散系统频率特性常常用指数形式表示 $G(e^{j\omega T})=|G(e^{j\omega T})|\angle G(e^{j\omega T})$ 其中，$|G(e^{j\omega T})|$ 称为幅频特性，$\angle G(e^{j\omega T})$ 称为相频特性。

③ 应特别注意，离散系统频率特性 $G(e^{j\omega T})$ 是 ω 的周期函数，其周期为 ω_s，即 $G(e^{j\omega T})=G(e^{j(\omega+\omega_s)T})$。

④ 在使用离散系统频率特性时，应注意：

离散环节频率特性 $G(e^{j\omega T})$ 不是ω的有理分式函数。

离散环节频率特性形状与连续系统有较大差别，当采样周期较大以及频率较高时，由于混叠，使频率特性形状有较大变化。

（6）离散系统状态空间描述

状态方程是采用现代控制理论设计时采用的基本数学描述方法。在学习状态

空间描述时应注意如下问题：

① 注意掌握离散系统状空间描述的具体形式以及各变量、矩阵的含义和维度关系。

② 了解各种建立状态空间模型方法以及求解方法。

③ 掌握计算机控制系统状态空间模型的建立方法。包括：含有 zoh 时连续被控过程离散状态方程的形式，对 $F(T)$，$G(T)$ 求解。

（7）本章应通过最后实例进一步巩固对几种数学模型的认识及应用。

2、重点与难点问题说明

（1）关于闭环脉冲传递函数的推导

在推导闭环传递函数时，要注意在何处有采样开关，并且一个传递函数不能有两种不同的输入端，即不能认为它即有连续信号输入端又有采样信号输入端。例如图 2-1(a)所示结构是不对的。

此外，在综合点也只能是相同信号的综合，不能连续信号与离散信号综合，如图 2-5(b)所示。如果必须综合，就必须将连续信号进行采样或将采样信号经过保持器变为连续信号。

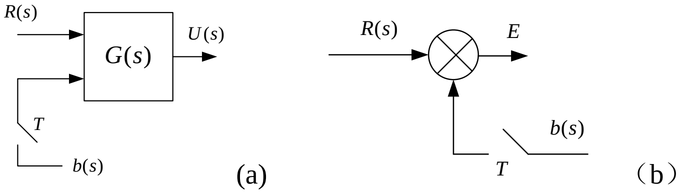

图 2-1　不正确的结构

（2）关于脉冲传递函数一点说明

若已知连续传递函数，脉冲传递函数可以通过 z 变换求得。现在若问如采样周期 T 趋于零时，脉冲传递函数是否趋于原连续传递函数？

分析表明，当 T 趋于零时脉冲传递函数并趋于原连续传递函数。

这是因为脉冲传递函数 $G(z)$ 的推导是依据采样信号的基础，采样周期 T=0，采样系统已无意义，所以

$$G(s) \neq \lim_{T \to 0} G(z)\big|_{z=e^{Ts}}$$

但当连续被控对象传递函数与零阶保持器串联后进行 z 变换，所得脉冲传递

函数在 T 趋于零时将恢复为原连续被控对象传递函数。

例如已知连续传递函数为$G(s)=\frac{a}{s+a}$，其脉冲传递函数为

$$G(z)=Z[G(s)]=a\frac{z}{z-e^{-aT}}=a\frac{e^{sT}}{e^{sT}-e^{-aT}}$$

当 T 很小时，$e^{sT}\approx 1+sT$，$\mathrm{e}^{\text{-aT}}\approx 1-aT$，所以，

$$G(z)=Z[G(s)]=a\frac{e^{sT}}{e^{sT}-e^{-aT}}=a\frac{1+sT}{1+sT-1+aT}=a\frac{1+sT}{T(s+a)}$$

显然当 T 趋于零时，$G(z)$ 并不趋于原$G(s)$。

但当连续被控对象传递函数与零阶保持器串联后进行 z 变换，所得脉冲传递函数在 T 趋于零时将恢复为原连续被控对象传递函数。如上述环节

$$G(z)=Z[\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)]=\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}=\frac{1-1+aT}{1+sT-1+aT}=\frac{aT}{T(s+a)}=\frac{a}{(s+a)}$$