预备知识——积分变换（傅氏变换和拉氏变换）

摘自《工程数学——积分变换》人民教育出版社 1978 年

第1节　傅氏变换（Fourier）

一个以 T 为周期的函数 $f_T(t)$，如果在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷（**Dirichlet**）条件（简称狄氏条件，即函数在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上，①连续或只有有限个第一类间断点；②只有有限个极值点），那么，在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上就可以展成傅氏级数，在 $f_T(t)$ 的连续点处，级数和的三角形式为

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t) \tag{1}$$

其中：
$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)dt \tag{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\cdot\cos n\omega t\cdot dt\text{，}\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{4}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\cdot\sin n\omega t\cdot dt\text{，}\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{5}$$

欧拉（**Euler**）公式:

$$\cos\varphi=\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2},\qquad \sin\varphi=\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}=-j\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2}$$

一、傅氏积分定理

若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足下列条件：① $f(t)$ 在任一有限区间上满足狄氏条件；② $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积（即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 收敛），则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \tag{6}$$

成立，而左端的 $f(t)$ 在它的间断点 t 处，应以 $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ 来代替。

二、傅氏变换

若函数 $f(t)$ 满足傅氏积分定理中的条件，则在 $f(t)$ 的连续点处，有（**6**）成立。

$f(t)$ 的傅氏变换　$$G(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{7}$$

傅氏反变换　$$f(t)=F^{-1}[G(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{8}$$

$G(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的象函数， $f(t)$ 称为 $G(\omega)$ 的象原函数。

在广义意义（与工程实际吻合）下的傅氏变换是允许交换积分运算和求极限运算的次序。

三、非正弦周期函数的频谱

在傅氏级数理论中，已经知道，对于以T为周期的非正弦函数$f(t)$，它的第n次谐波（$\omega_n = n\omega = \frac{2n\pi}{T}$）

$$a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (9)$$

的振幅为 $$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (10)$$

非正弦函数$f(t)$可以展开成为以下傅氏级数：

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (1)$$

它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况。所谓频谱图，通常是指频率和振幅A_n的关系图。所以A_n称为$f(t)$的振幅频谱（简称为频谱）。由于$n = 0,1,2,\cdots$所以频谱A_n的图形是不连续的，称之为离散频谱。它清楚表明了一个非正弦周期函数包含了哪些频率分量及各分量所占的比重（如振幅的大小），因此频谱图在工程技术中应用比较广泛。

在频谱分析中，傅氏变换$G(\omega)$ 称为$f(t)$的频谱函数。对一个时间函数做傅氏变换，就是求这个时间函数的频谱。

振幅频谱$|G(\omega)|$是频率ω的偶函数，即 $|G(\omega)| = |G(-\omega)|$

相角频谱$\varphi(\omega) = arctg\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt}$是频率$\omega$的奇函数，即

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$

四、傅氏变换的性质

1、 线性性质

$$F[af_1(t) + bf_2(t)] = aG_1(\omega) + bG_2(\omega) \quad (11)$$

$$F^{-1}[aG_1(\omega) + bG_2(\omega)] = af_1(t) + bf_2(t) \quad (12)$$

2、 位移性质

$$F[f(t \pm t_0)] = e^{\pm j\omega t_0} F[f(t)] \quad (13)$$

$$F^{-1}[G(\omega \mp \omega_0)] = f(t)e^{\pm j\omega t_0} \quad (14)$$

3、 微分性质

$$F[f'(t)] = j\omega F[f(t)]，\quad F[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F[f(t)] \qquad \text{（15）}$$

4、 积分性质

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right] = \frac{1}{j\omega}F[f(t)] \qquad \text{（16）}$$

5、 乘积定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G_1(\omega)}\cdot G_2(\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\omega)\cdot \overline{G_2(\omega)}d\omega \qquad \text{（17）}$$

其中，$\overline{G_i(\omega)}$ 为 $G(\omega)$ 的共轭函数

6、 能量积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \qquad \text{（18）}$$

该等式又称为巴塞瓦（**parseval**）等式。

其中的 $S(\omega) = |G(\omega)|^2$ 称为能量密度函数（或称能量谱密度），它决定函数 $f(t)$ 的能量分布情况。将它对所有频率积分，就得到 $f(t)$ 的总能量 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt$ 。

五、几种典型的傅氏变换简表

狄拉克（**Dirac**）函数，简记为 δ 函数。δ 函数是一个广义的函数，它没有普通意义下的“函数值”，所以他不能用通常意义下的“值对应关系”来定义。工程上通常将它定义为一个函数序列的极限，例如，将 δ 函数定义为

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/\varepsilon, & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时的极限，即 $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)$，对任何 $\varepsilon > 0$，显然有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t)dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}dt = 1$$

所以有 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

δ 函数又称为单位脉冲函数。

δ 函数有一个重要性质：若 $f(t)$ 为连续函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

更一般有 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

证明：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)]dt = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_\varepsilon(t)dt$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon} f(t)\frac{1}{\varepsilon}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(t)dt$$

由于 $f(t)$ 为连续函数，由积分的中值定理，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0} f(\theta\cdot\varepsilon)\text{，其中}\quad 0<\theta<1$$

所以有 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt=f(0)$$

几种典型函数的傅氏变换表

$f(t)$ 函数	$G(\omega)$ 频谱
指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\beta t}, & t\ge 0,\beta>0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\beta+j\omega}$
单位脉冲函数　$f(t)=\delta(t)$	1
$f(t)=\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega+\omega_0)$
余弦 $f(t)=\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
正弦 $f(t)=\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
单位函数 $f(t)=u(t)$	$\dfrac{1}{j\omega}$

1、根据上性质，δ 函数的傅氏变换为

$$G(\omega)=F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t}\,|_{t=0}=1$$

所以，单位脉冲函数 $\delta(t)$ 与常数 **1** 构成了一个傅氏变换对。

$$F[\delta(t)]=1,\qquad F^{-1}[1]=\delta(t)$$

2、当 $f(t)=\delta(t-t_0)$ 时，$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t_0}$

说明 $\delta(t-t_0)$ 和 $e^{-j\omega t_0}$ 构成一个傅氏变换对。

3、若 $\delta(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ 时，由傅氏反变换，可以得到

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega=1$$

所以，**1** 和 $2\pi\delta(\omega)$ 也构成一个傅氏变换对。

3、 $\delta(\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 时，由傅氏反变换，可以得到

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j(\omega-\omega_0)t}e^{j\omega_0 t}d\omega=e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j(\omega-\omega_0)t}d(\omega-\omega_0)=e^{j\omega_0 t}$$

所以， $e^{j\omega_0 t}$ 和 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ 也构成一个傅氏变换对。

4、同样， $e^{-j\omega_0 t}$ 和 $2\pi\delta(\omega+\omega_0)$ 也构成一个傅氏变换对。

5、求余弦函数的频谱：

由欧拉（**Euler**）公式 $\cos\varphi=\dfrac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}$，有

$$G(\omega)=F[\cos\omega_0 t]=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\tfrac{1}{2}[2\pi\delta(\omega+\omega_0)+2\pi\delta(\omega-\omega_0)]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

第2节　拉氏变换（Laplace）

傅氏变换需要满足条件：①狄氏条件；②在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对可积；③可以进行傅氏变换的函数必须在整个数轴上有定义。

单位函数 $u(t)$ 和指数衰减函数 $e^{-\beta t}(\beta>0)$。用前者乘 $\varphi(t)$ 可以使积分区间由 $(-\infty,+\infty)$ 换成 $[0,+\infty)$，用后者乘 $\varphi(t)$ 就可以使其变得绝对可积。由此产生拉氏变换。

一、拉氏变换

对函数 $\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}(\beta>0)$ 取傅氏变换，可得

$$G_\beta(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(\beta+j\omega)t}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

其中　$s=\beta+j\omega$， $f(t)=\varphi(t)u(t)$

若再设　　$F(s)=G_\beta\left(\dfrac{s-\beta}{j}\right)$

则得 $$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

由此式所确定的函数 $F(s)$，实际上是由通过一种新的变换得来的。这种变换我们称为拉普拉斯变换。

定义：若函数 $f(t)$ 当 $t\geq 0$ 时有定义，而且积分 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$（$s$ 是一个复参量）在 s 的某一个域内收敛，则称由此积分所定义的函数为函数 $f(t)$ 的拉氏变换。

$f(t)$ 的拉氏变换

$$\boxed{F(s)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt} \qquad (19)$$

拉氏反变换，即从象函数求它的象原函数。一般公式为

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (20)$$

傅氏变换 $$\boxed{G(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt} \qquad (7)$$

为复变函数的积分，计算一般比较困难。但当 $F(s)$ 满足一定的条件时，可以用留数方法来计算这个反演积分。

定理：若 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是函数 $F(s)$ 的所有起点（适当选取 β，使这些奇点全在 $\mathrm{Re}(s)<\beta$ 的范围内），且当 $s\to\infty$ 时，$F(s)\to 0$，则有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k} F(s)e^{st}$$

二、拉氏变换的性质

1、 线性性质

2、 位移性质

$$L[e^{at}f(t)]=F(s-a) \qquad (\mathrm{Re}(s-a)>0) \qquad (21)$$

3、 微分性质

$$L[f'(t)]=sF(s)-f(0),$$

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \qquad (\mathrm{Re}(s-a)>0) \qquad (22)$$

4、 积分性质

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s) \qquad (23)$$

5、 延迟定理 对于任一实数 τ，有

$$L[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s) \qquad (24)$$

$$L^{-1}[e^{-s\tau}F(s)] = f(t-\tau) \tag{25}$$

6、 初值定理 $$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{26}$$

7、 终值定理 $$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{27}$$