



Nonlinear Systems 非线性系统

第二讲

本质非线性特性

有限逃逸时间 非稳定线性系统的状态只有当时间趋于无穷时才会达到无穷，而非线性系统的状态可以在有限时间内达到无穷。例如

$$\dot{x} = x^2, x(0) > 0.$$

多孤立平衡点 线性系统可能只有一个孤立平衡点或者有无穷不可数个平衡点。如果孤立平衡点稳定，则系统所有轨线都收敛到该平衡点，而与初始状态无关。非线性系统可以有多个孤立平衡点，其状态可能收敛于几个平衡点中的一个，收敛于哪个平衡点取决于系统的初始状态。

极限环 只有非线性系统才能产生稳定振荡，有些非线性系统可以产生频率和幅度都固定的振荡，而与初始状态无关，这类振荡就是一个稳定极限环，例如 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2$

分频振荡、倍频振荡或殆周期振荡 稳定线性系统输出信号频率与输入信号频率相同。而非线性系统在周期信号激励下，可以产生输入信号的分频或倍频振荡，甚至可以殆周期振荡。

混沌 既不是平衡点，也不是周期振荡或殆周期振荡，这种特性通常称为混沌。

特性的多模式。 统一非线性系统可能显示出两种或多种模式，无激励系统可能有多个极限环；周期激励的系统可能会出现分频、倍频或其它稳态特性；甚至出现激励幅度和频率平滑变化时，也会出现不连续的跳跃性能。

1.2 示例

1.2.1 单摆方程

1. 单摆方程

摆锤沿切线方向的运动方程：
(k 为摩擦系数)

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - kl\dot{\theta}$$

取状态变量: $x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}$

状态方程为:

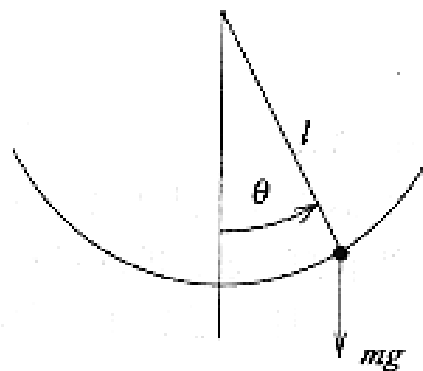
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2\end{aligned}$$


图 1.1 单摆

单摆方程

2. 单摆的平衡点

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 2n\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} (2n+1)\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

解方程得平衡点: $\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots$

非平凡平衡点: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

单摆可以停留在平衡点 $(0, 0)$ 上,

几乎不可能停留在平衡点 $(\pi, 0)$ 上。

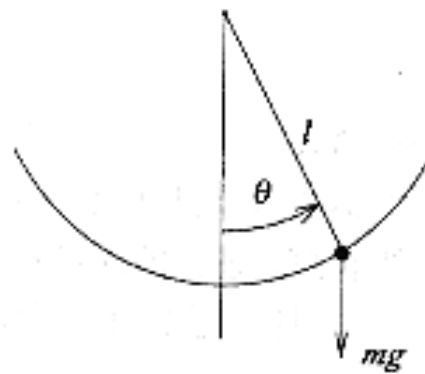


图 1.1 单摆

3 忽略摩擦阻力时单摆方程

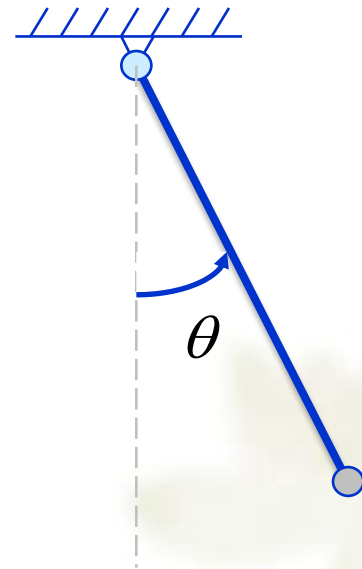
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad k = 0$$

引入状态变量: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 2n\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} (2n+1)\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

系统的平衡点: $\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$



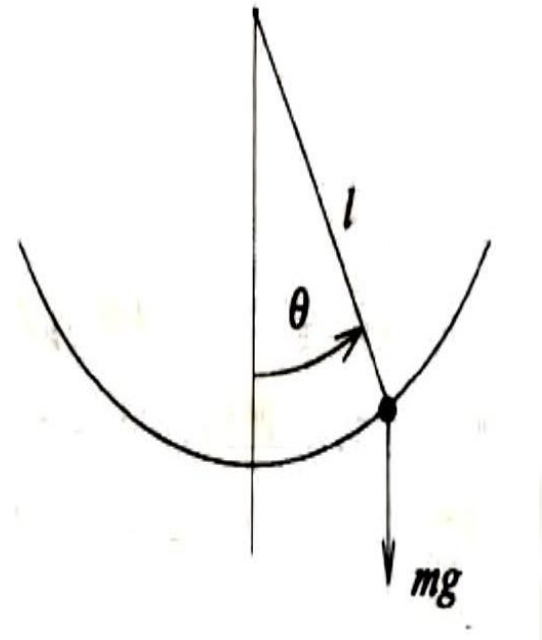
$$k = 0, 1, 2, \dots$$

4 考虑摩擦阻力并利用单摆力矩T时单摆方程

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - kl\dot{\theta} - T/l$$

引入状态变量:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{k}{ml^2} T \end{bmatrix}$$

1.2.2 隧道二极管电路

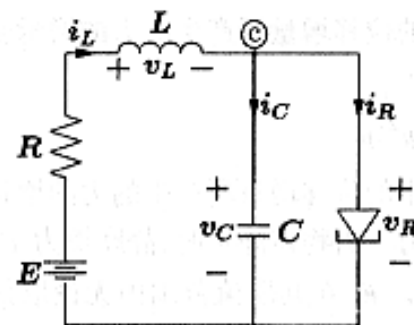
隧道二极管特性为： $i_R = h(v_R)$

通过结点c的电流代数和为零： $i_C + i_R - i_L = 0$

电压定律： $v_C - E + Ri_L + v_L = 0$

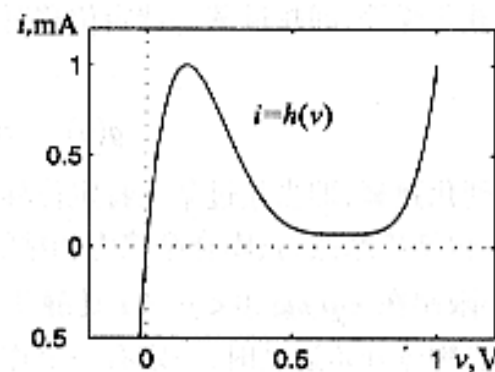
取状态变量： $x_1 = v_C$, $x_2 = i_L$, $u = E$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow i_C = -h(x_1) + x_2 \\
 &\quad v_L = -x_1 - Rx_2 + u \\
 &i_C = C \frac{dv_C}{dt}, v_L = L \frac{di_L}{dt} \\
 &\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{1}{C} [-h(x_1) + x_2] \\
 &\quad \dot{x}_2 = \frac{1}{L} [-x_1 - Rx_2 + u]
 \end{aligned}$$



(a)

图 1.2 (a)隧道二极管;



(b)

(b)隧道二极管 $v_R - i_R$ 特性

隧道二极管电路的平衡点满足：

$$0 = [-h(x_1) + x_2]$$

$$0 = [-x_1 - Rx_2 + u]$$

$h(x_1) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$ 的根为系统的平衡点

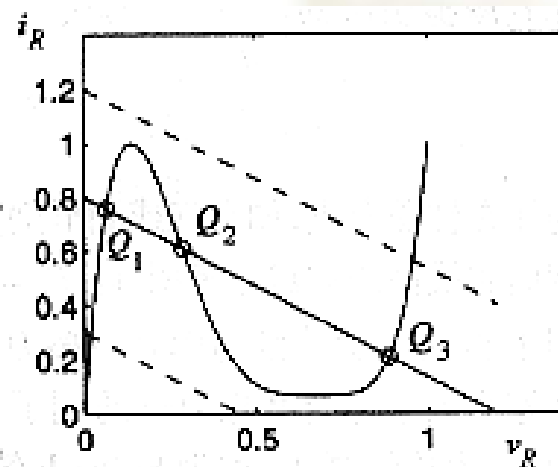


图 1.3 隧道二极管电路的平衡点

1.2.3 质量-弹簧系统

1. 运动方程:

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sp} = F$$

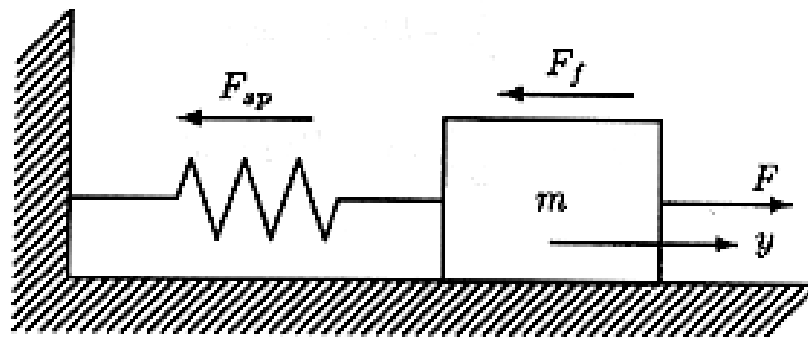


图 1.4 质量 - 弹簧机械系统

F_f 为摩擦阻力 F_{sp} 为弹簧的回复力，只是位移 y 的函数 $g(y)$

假设参考点位于 $g(0)=0$ 处

2. 回复力分析:

位移较小时: $F_{sp} = g(y)$ $g(y) = ky$

弹性系数

位移较大时: $g(y) = k(1 - a^2 y^2)y$, $|ay| < 1$ 软化弹簧

$g(y) = k(1 + a^2 y^2)y$ 硬化弹簧

3. 摩擦阻力分析:

阻力 F_f 包括: 静摩擦力 F_s
库仑摩擦力 F_c
粘滞摩擦力 F_v

a. 静摩擦力:

$$F_s = \pm \mu_s mg, \quad 0 < \mu_s < 1$$

静摩擦系数

b. 库仑摩擦力:

$$F_c = \begin{cases} -\mu_k mg, & \text{当 } v < 0 \\ \mu_k mg, & \text{当 } v > 0 \end{cases} \quad v = \dot{y}$$

c. 粘滞摩擦力:

$$F_v = h(v), \quad h(0) = 0$$

当速度较小时:

$$F_v = cv, \quad v = \dot{y}$$

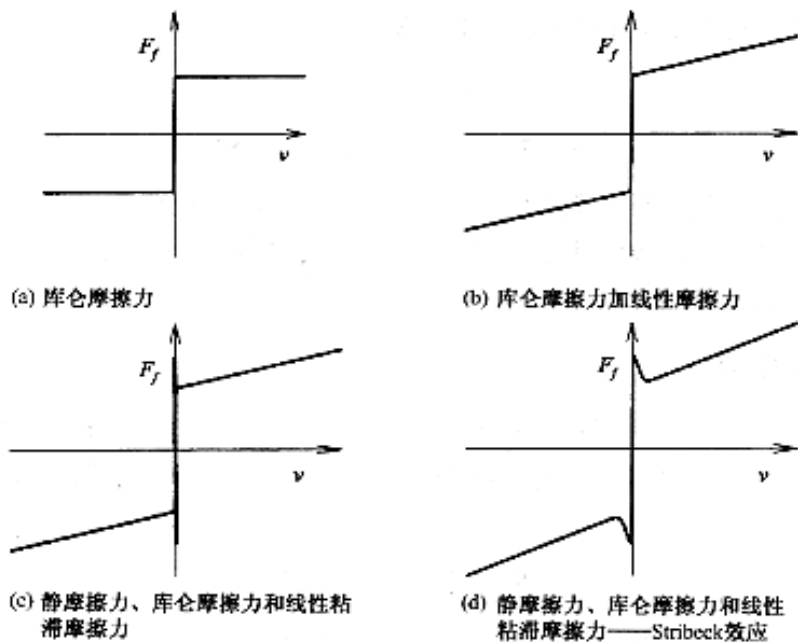


图 1.5 摩擦力模型示例

4. 硬化弹簧的Duffing方程：

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sp} = F \quad \text{-----} \quad \text{运动方程}$$

对于硬化弹簧，考虑线性粘滞摩擦力和一个周期外力 $F=A\cos\omega t$ ，可以得到Duffing方程：

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2 y^3 = A \cos \omega t$$

这是研究具有周期激励的非线性系统的经典例子。

5. 线性弹簧的例子：

对于线性弹簧，考虑静态摩擦力、库仑摩擦力和线性粘滞摩擦力，且当外力 $\mathbf{F}=\mathbf{0}$ 时可得到：

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0$$

其中：

$$\eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg \cdot \text{sign}(\dot{y}), & \text{当 } |\dot{y}| > 0 \\ -ky, & \text{当 } \dot{y} = 0 \text{ 且 } |y| \leq \mu_s mg / k \\ -\mu_s mg \cdot \text{sign}(y), & \text{当 } \dot{y} = 0 \text{ 且 } |y| > \mu_s mg / k \end{cases}$$

取 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$

状态模型为：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}\eta(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}\eta(x_1, x_2)\end{aligned}\quad \eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg \cdot \text{sign}(\dot{y}), & \text{当 } |\dot{y}| > 0 \\ -ky, & \text{当 } \dot{y} = 0 \text{ 且 } |y| \leq \mu_s mg / k \\ -\mu_s mg \cdot \text{sign}(y), & \text{当 } \dot{y} = 0 \text{ 且 } |y| > \mu_s mg / k \end{cases}$$

- 以上模型有一组平衡点
- 以上模型等式右边的函数是状态变量的不连续函数。

当 $x_2 > 0$ 时以上模型简化为线性模型：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \mu_k g\end{aligned}$$

当 $x_2 < 0$ 时以上模型简化为线性模型：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \mu_k g\end{aligned}$$

1.2.4 负阻振荡器

负阻具有特性 $i = h(v)$ 的有源电路

$h(\bullet)$ 满足以下条件:

$$h(0) = 0, \quad h'(0) < 0$$

$$h(v) \rightarrow \infty \quad \text{当 } v \rightarrow \infty, \quad h(v) \rightarrow -\infty \quad \text{当 } v \rightarrow -\infty$$

1. 电流方程:

$$i_C + i_L + i = 0$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}, \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad i = h(v)$$

$$\Rightarrow C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(s) ds + h(v) = 0$$

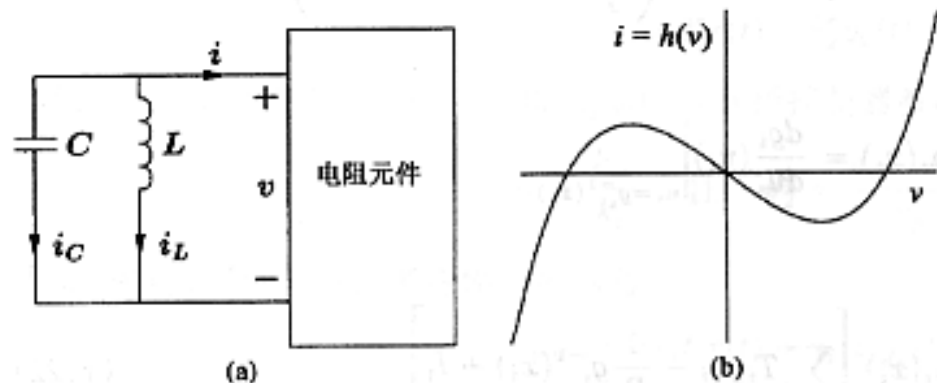


图 1.6 (a)基本振荡电路;(b)典型的驱动点特性

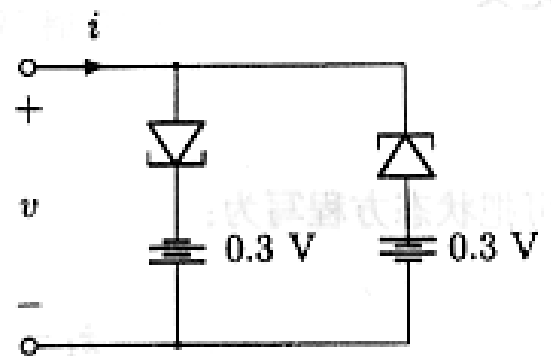


图 1.7 双隧道二极管负阻电路

$$CL \frac{d^2 v}{dt^2} + v + Lh'(v) \frac{dv}{dt} = 0$$

变量代换: $\tau = t / \sqrt{CL}$

$$\frac{dv}{d\tau} = \sqrt{CL} \frac{dv}{dt}, \quad \frac{d^2 v}{d\tau^2} = CL \frac{d^2 v}{dt^2}$$

$$\dot{v} = \frac{dv}{d\tau}$$

→ $\ddot{v} + \varepsilon h'(v) \dot{v} + v = 0, \quad \varepsilon = \sqrt{L/C}$

↑ 特例

$$\ddot{v} + f(v) \dot{v} + g(v) = 0 \quad \text{Lie'nard 方程}$$

当 $h(v) = -v + \frac{1}{3} v^3$ 时 $\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2) \dot{v} + v = 0$ **Van der Pol 方程**

Van der Pol 方程是非线性振荡理论的基本例子。

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0 \quad \text{Van der Pol方程}$$

2. 平衡点:

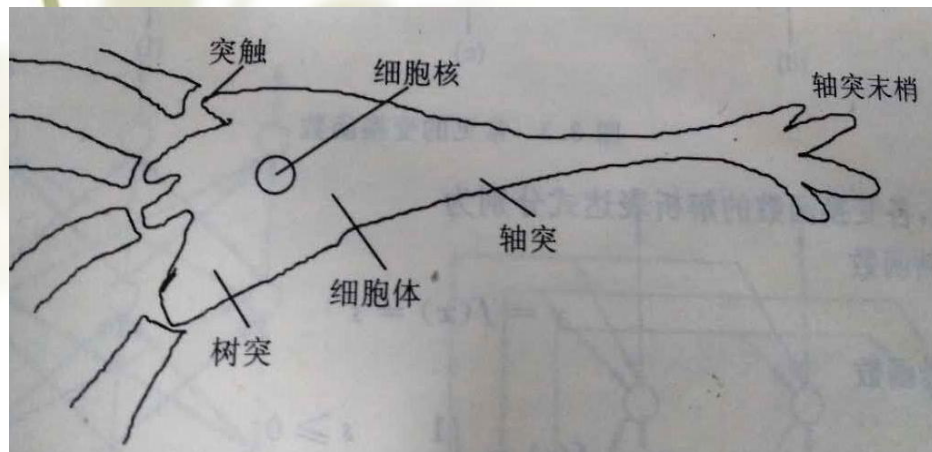
Van der Pol方程有惟一的平衡点: $v = \dot{v} = 0$

3. 状态方程:

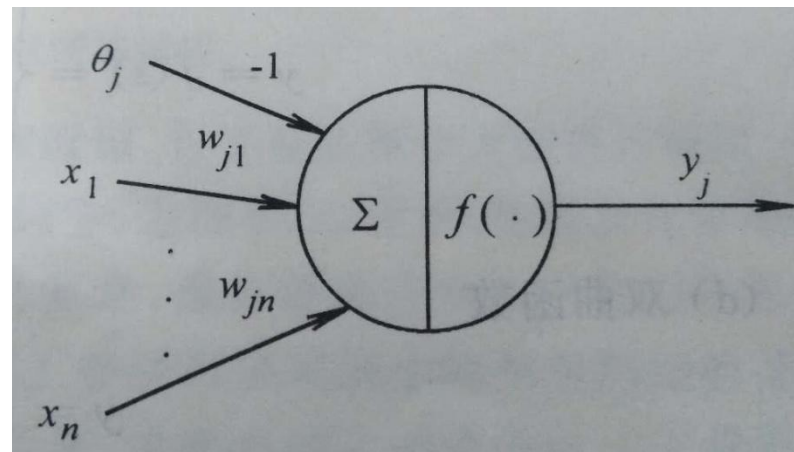
$$\text{取 } x_1 = v, \quad x_2 = \dot{v} \implies \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \varepsilon h'(x_1)x_2 \end{aligned}$$

$$\text{取 } z_1 = i_L, \quad z_2 = v_C \implies \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{L} z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{C} [z_1 + h(z_2)] \end{aligned}$$

例: 1.2.5 人工神经网络



生物神经元模型



人工神经网络

人工神经网络是一个有下列性质有向图：每个节点有一个状态变量；节点之间有一个连接权系数；每个节点有一个阈值；每个节点定义一个变化函数 f 。

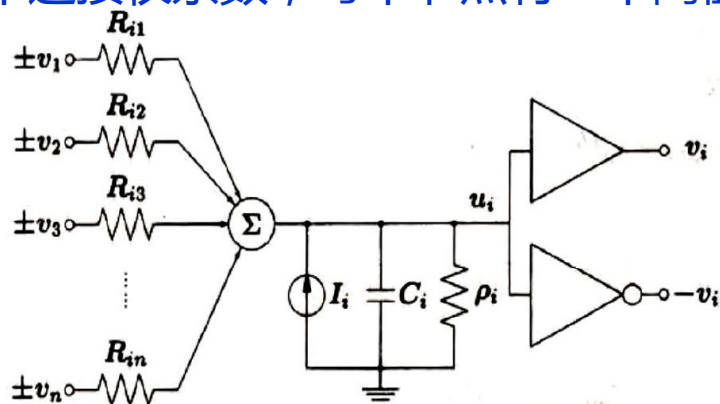
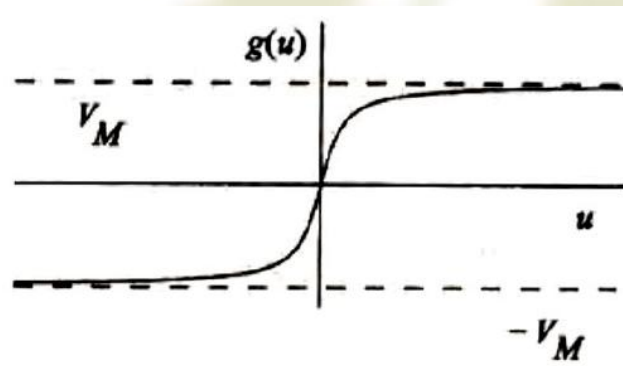


图 1.8 Hopfield 人工神经网络



例: 1.2.5 人工神经网络

$$v_i = g_i(u_i) = \frac{2V_M}{\pi} \arctan\left(\frac{\lambda \pi u_i}{2V_M}\right), \lambda > 0$$

$$g_i(u_i) = V_M \frac{e^{\lambda u_i} - e^{-\lambda u_i}}{e^{\lambda u_i} + e^{-\lambda u_i}} = V_M \tanh(\lambda u_i), \lambda > 0$$

由基尔霍夫定律:

$$C_i \frac{du_i}{dt} = \sum_j \frac{1}{R_{ij}} (\pm v_j - u_i) - \frac{u_i}{\rho_i} + I_i = \sum_j T_{ij} v_j - \frac{1}{R_i} u_i + I_i$$

$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\rho_i} + \sum_j \frac{1}{R_{ij}}, T_{ij} = \pm \frac{1}{R_{ij}}$ 是带符号电导, 符号由第j个放大器的正负输出决定。 I_i 是恒定输入电流。选 $x_i = v_i$ 则

$$\dot{x}_i = \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \dot{u}_i = \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \frac{1}{C_i} \left(\sum_j T_{ij} v_j - \frac{1}{R_i} u_i + I_i \right) \quad \text{定义 } h_i(x_i) = \frac{dg_i}{du_i}(u_i) \Big|_{u_i = g_i^{-1}(x_i)}, \text{ 则}$$

$$\dot{x}_i = \frac{1}{C_i} h_i(x_i) \left(\sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i \right) \quad \text{平衡点为: } \sum_j T_{ij} x_j - \frac{1}{R_i} g_i^{-1}(x_i) + I_i = 0 \quad 19$$

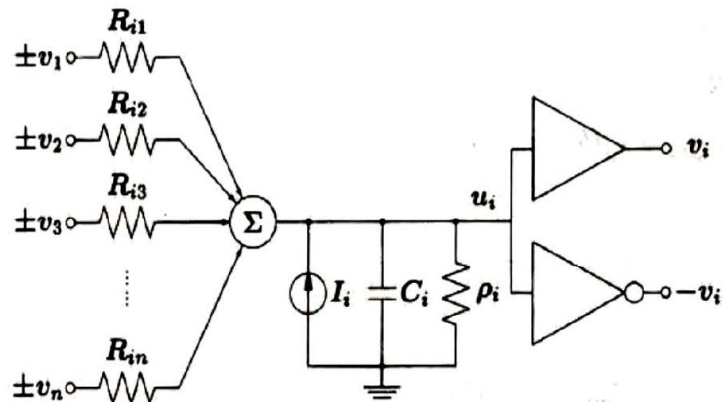
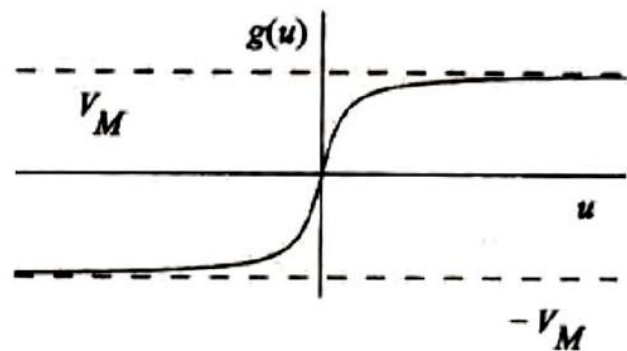


图 1.8 Hopfield 人工神经网络



例1.2.6: 自适应控制

考虑模型: $\dot{y}_p = a_p y_p + k_p u$ 描述的一阶线性系统的设备。假设希望得到一个闭环系统 $\dot{y}_m = a_m y_m + k_m r$, r 是参考输入, 输出渐近模型输出, 可由反馈控制实现: $u(t) = \theta_1^* r(t) + \theta_2^* y_p(t)$

假设设备参数已知且 $k_p \neq 0$, 选择控制器参数如下:

$$\theta_1^* = \frac{k_m}{k_p}, \theta_2^* = \frac{a_m - a_p}{k_p}.$$

当设备参数已知时, 可以考虑输入控制器: $u(t) = \theta_1(t)r(t) + \theta_2(t)y_p(t)$

其中时变增益 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 运用已有数据, 即 $r(\tau)$, $y_m(\tau)$, $y_p(\tau)$ 和 $u(\tau)$

进行在线调节, $\tau < t$ 。

选择自适应准则应基于稳定性考虑, 一个称为梯度算法的参数自适应律为:

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma(y_p - y_m)r$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma(y_p - y_m)y_p$$

例1.2.6: 自适应控制

为了写出满足自适应控制律的闭环系统模型，引入误差：

$$e_o = y_p - y_m, \phi_1 = \theta_1 - \theta_1^*, \phi_2 = \theta_2 - \theta_2^*$$

利用控制器参数，参考模型可以即为： $\dot{y}_m = a_p y_m + k_p (\theta_1^* r + \theta_2^* y_m)$

另一方面，设备输出满足： $\dot{y}_p = a_p y_p + k_p (\theta_1 r + \theta_2 y_p)$

两式相减得到误差方程：

$$\dot{e}_o = \dot{y}_p - \dot{y}_m = (a_p + k_p \theta_2^*) e_o + k_p (\theta_1 - \theta_1^*) r + k_p (\theta_2 - \theta_2^*) y_p$$

这样就可以写出闭环系统模型： $\dot{e}_o = a_m e_o + k_p \phi_1 r(t) + k_p \phi_2 (e_o + y_m(t))$

$$\dot{\phi}_1 = -\gamma e_o r(t) \quad \text{用到了 } \dot{\phi}_i = \dot{\theta}_i$$

$$\dot{\phi}_2 = -\gamma e_o (e_o + y_m(t))$$

如果 k_p 已知，可以得到简单的系统模型：

例1.2.6: 自适应控制

如果 k_p 已知, 可以得到简单的系统模型:

$$\dot{e}_o = a_m e_o + k_p \phi(e_o + y_m(t))$$

$$\dot{\phi} = -\gamma e_o (e_o + y_m(t))$$

如果控制设计的目的是使输出为零, 则取 $r=0$, $y_m=0$ 且闭环系统简化为如下模型:

$$\dot{e}_o = (a_m + k_p \phi) e_o$$

$$\dot{\phi} = -\gamma e_o^2$$

系统的平衡点为代数方程的解:

$$(a_m + k_p \phi) e_o = 0$$

$$-\gamma e_o^2 = 0$$

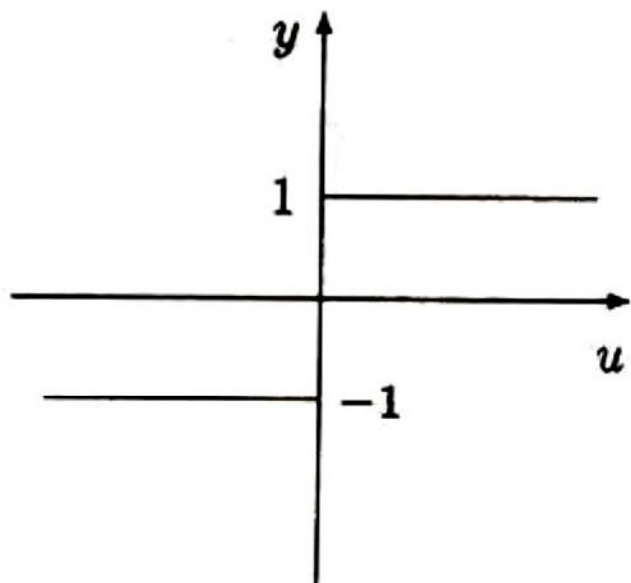
$e_o = 0$ 是系统的一组平衡点, 系统没有孤立平衡点。

这里描述的特殊的自适应控制方法称为直接参考模型自适应控制。

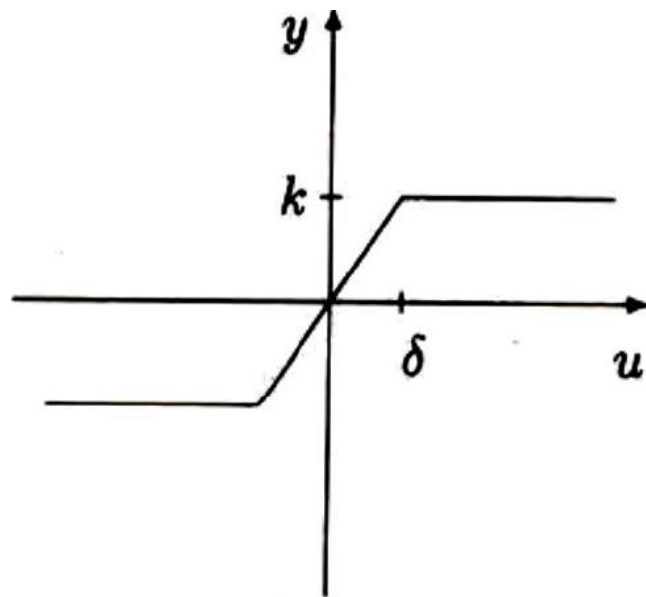
1.2.7 一般非线性问题

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases}$$

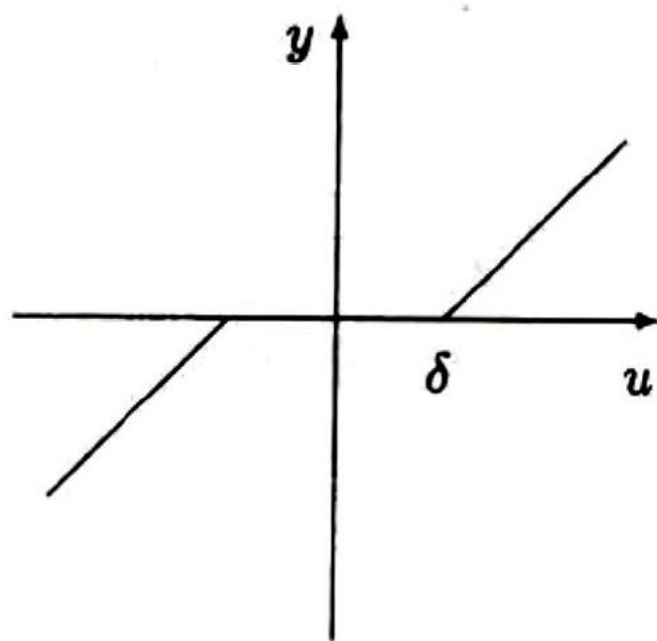
$$\text{sat}(u) = \begin{cases} u, & |u| \leq 1 \\ \text{sgn}(u), & |u| > 1 \end{cases}$$



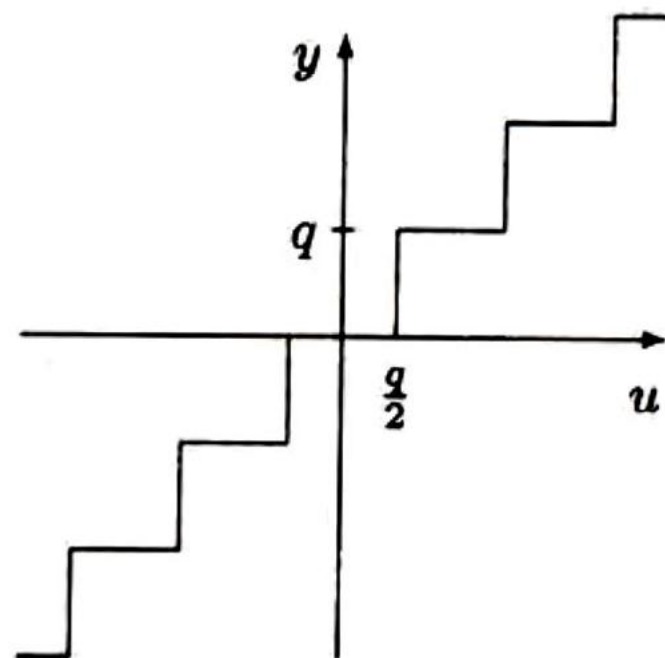
(a) 中继电器



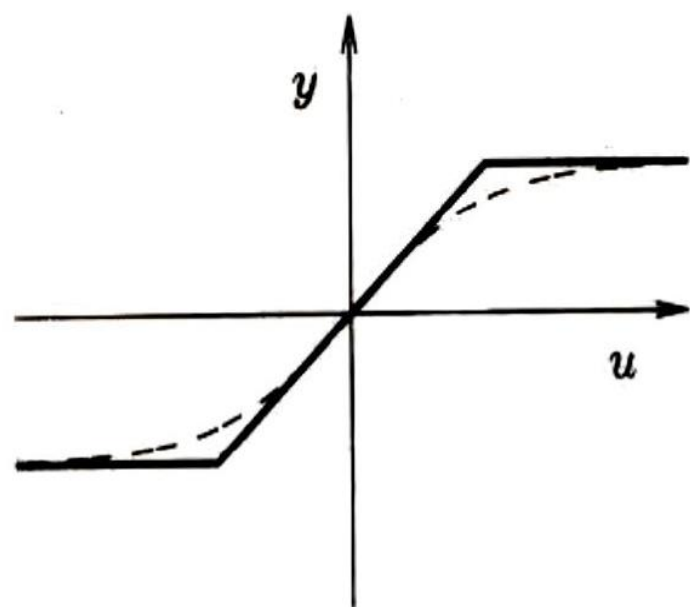
(b) 饱和



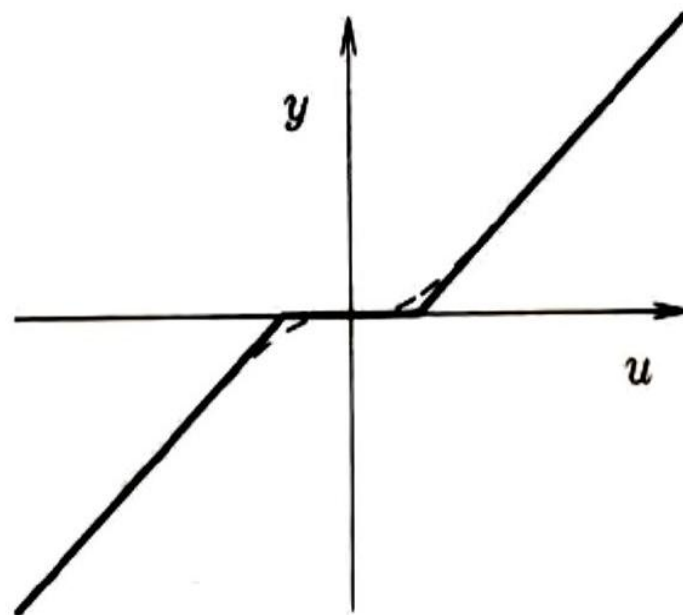
(c) 死区



(d) 量化



(a) 饱和



(b) 死区

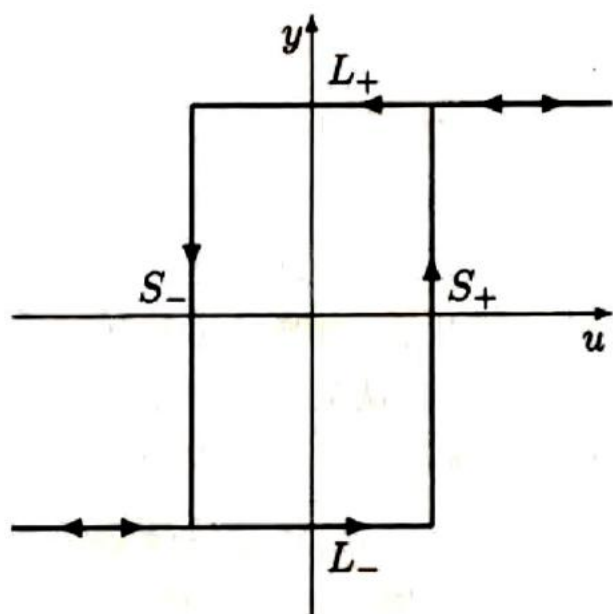


图 1.12 迟滞中继

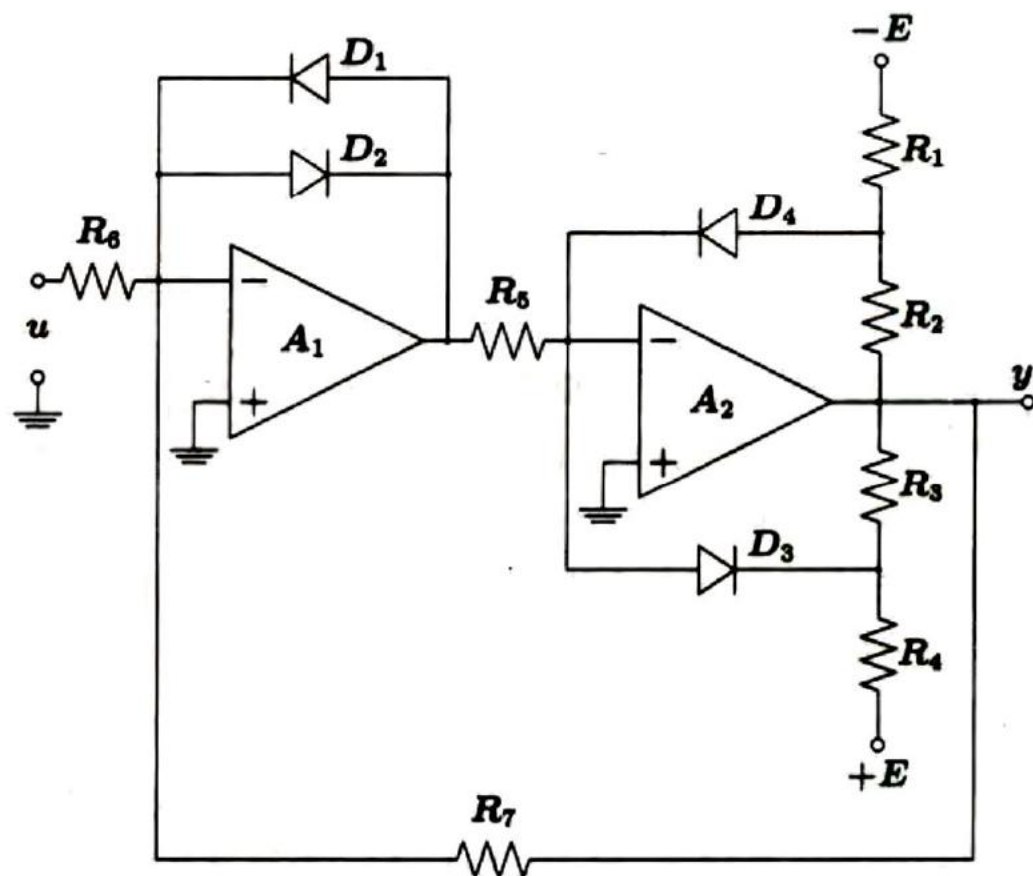


图 1.13 实现图 1.12 迟滞中继的运算放大器电路

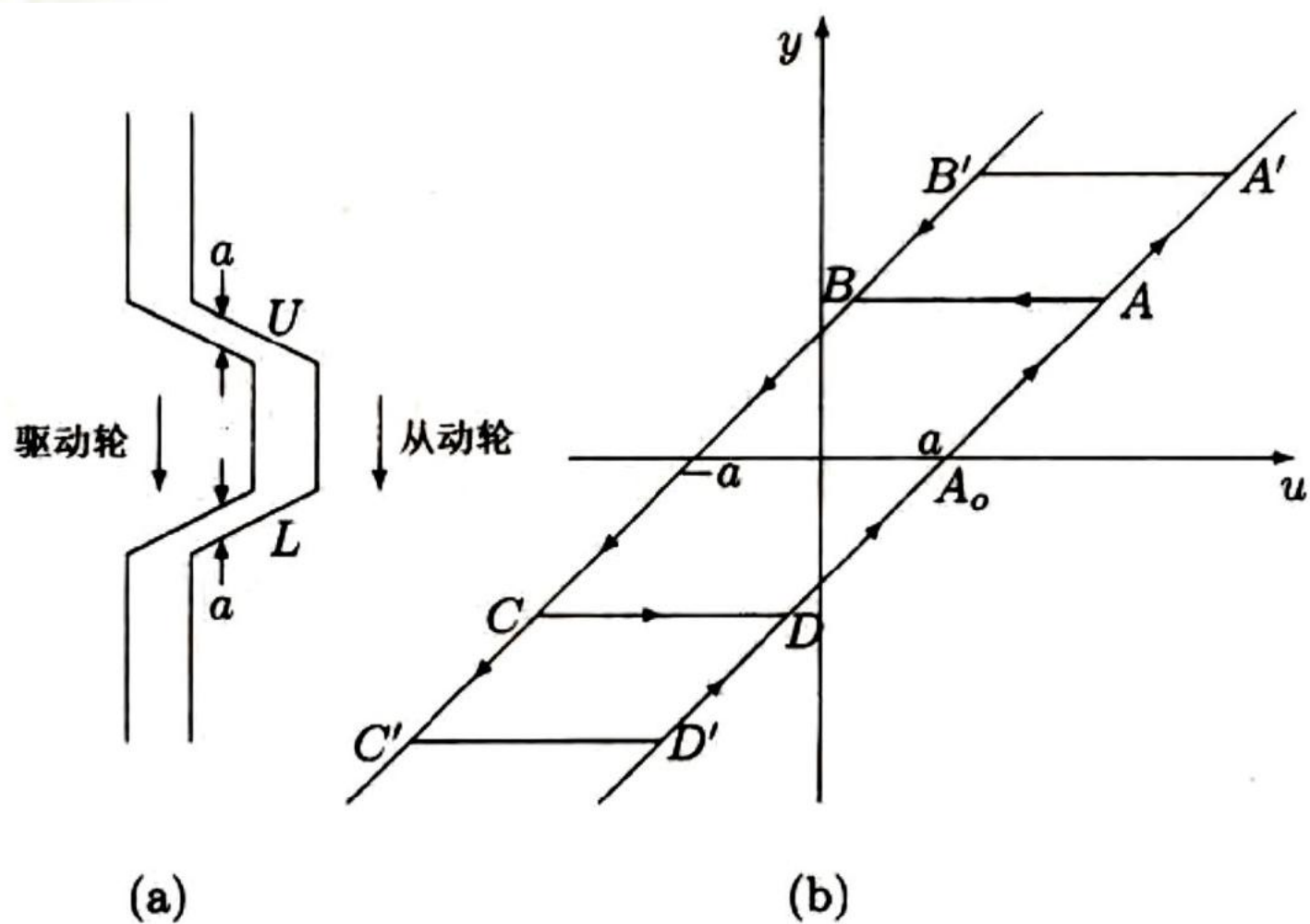


图 1.15 间隙非线性

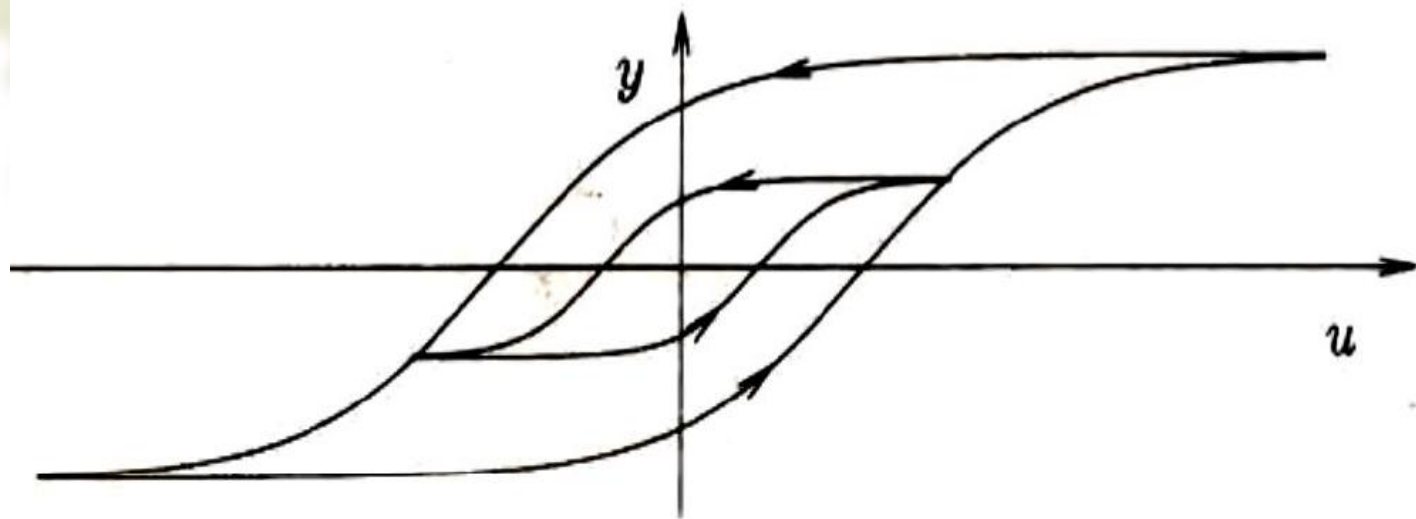


图 1.16 迟滞非线性



作业：习题**1.2**， **1.9**， **1.10**

第2章 二阶系统

二阶自治系统: $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ (2.1)

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (2.2)$$

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ 是方程的解, 初始状态为 $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})$

对于所有 $t \geq 0$, $\mathbf{x}(t)$ 的解在 x_1 - x_2 平面的轨线是一条通过 \mathbf{x}_0 点的曲线, 该曲线称为状态方程始于 \mathbf{x}_0 点的轨线或轨道。

x_1 - x_2 平面称为状态平面或相平面。

从给定的初始点 \mathbf{x}_0 出发，在 \mathbf{x}_0 点沿向量场移动，即可近似地构造从 \mathbf{x}_0 点开始的轨线，这样到达新的一点 \mathbf{x}_a ，然后在 \mathbf{x}_a 点沿向量场继续近似地构造轨线。如果把相邻点选得足够近，就可以得到通过 \mathbf{x}_0 点的合理的近似轨线。

无摩擦单摆系统：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -10\sin x_1$$

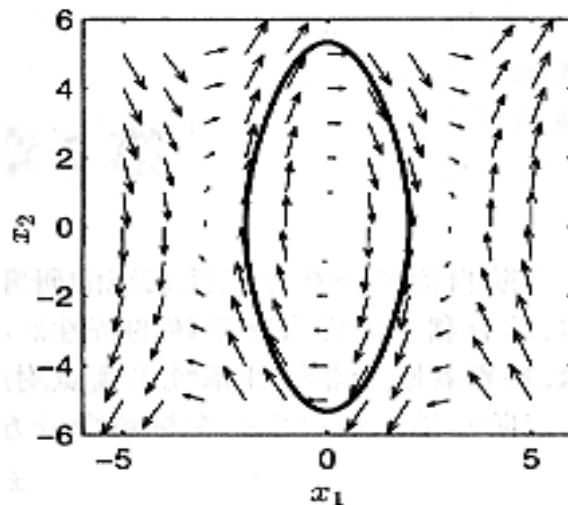


图 2.2 无摩擦力时单摆方程的向量场图

所有轨线或解的曲线称为系统的相图。

2.1 线性系统的特性

线性系统: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

解: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M} \exp(\mathbf{J}_r t) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}_0$

$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} = \mathbf{J}_r$ \mathbf{M} 为实满秩线性变换矩阵

\mathbf{J}_r 为实Jordan型

对于二阶系统, \mathbf{J}_r 只可取为下面三种情况:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$