5.5 特殊函数的不定积分

定义 5.5.1

两个多项式 $P(x), Q(x)$ 的商表示的函数称之为有理函数.

假定分子与分母之间没有公因式

$P(x)$的次数小于$Q(x)$的次数 有理函数是真分式;

否则，有理函数是假分式;

1 真分式有理函数化为部分分式之和的一般规律:

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$ ，

则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

例1 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1) \qquad (1)$$

代入特殊值来确定系数 A,B,C

取 $x=0,\ \Rightarrow A=1$ 取 $x=1, \Rightarrow B=1$

取 $x=2$, 并将 A,B 值代入(1) $\Rightarrow C=-1$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

所以

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \right] dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + C.$$

（2）分母中若有因式 $(x^2+px+q)^k$

$p^2-4q<0$ 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中 M_i, N_i 都是常数 $(i=1,2,\cdots,k)$.

例如 $\dfrac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^2}+\dfrac{M_2x+N_2}{x^2+px+q}$

例2 $$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

整理得 $1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A,$

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

定理5.5.1 真分式有理函数化为部分分式之和

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a}+\cdots$$

$$+\frac{A_1}{(x-b)^l}+\frac{A_2}{(x-b)^{l-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-b}+\cdots$$

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^m}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^n}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

- 部分分式可求积分

讨论积分 $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$,

$$\because\ x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},$$

令 $x+\frac{p}{2}=t$ $\quad q-\frac{p^2}{4}=a^2$, 则 $x^2+px+q=t^2+a^2$,

则 $Mx+N=M(x+\frac{p}{2})+N-\frac{Mp}{2}$

$$=Mt+b$$

令 $b=N-\frac{Mp}{2}$,

5.5 特殊函数的积分

$$\therefore \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}dt + \int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}dt$$

(1) $n=1,$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{b}{a}\arctan\frac{t}{a} + C;$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C;$$

(2) $n>1,$

$$= -\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \boxed{b\int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt.}$$

5.5 特殊函数的积分

$$I_1=\int\frac{1}{(t^2+a^2)}dt=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C$$

$$I_2=\int\frac{1}{(t^2+a^2)^2}dt=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{t}{t^2+a^2}+I_1\right)$$

$$I_3=\int\frac{1}{(t^2+a^2)^3}dt=\frac{1}{4a^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^2}+3I_2\right)$$

结论 有理函数的原函数都是初等函数.

例2 求积分 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx.$

解 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}dx + \int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}dx$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

例3

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x-2)+8}{(x^2-2x+5)^2}dx$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}d(x^2-2x+5) + \int \frac{8}{(x^2-2x+5)^2}dx$$

$$\boxed{I_2 = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^2}dt = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{t}{t^2+a^2} + I_1\right)}$$

2 假分式有理函数:

可以化成一个**多项式**和一个**真分式**之和.

例 $$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

二、三角函数有理式的积分

三角有理式的定义:

三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数,

$$R(\sin x, \cos x)$$

令 $u = \tan \frac{x}{2}$ $x = 2\arctan u$ (万能置换公式)

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

例4 $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx.$

解（一） $u = \tan\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2}du$,

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4} du$$

$$= \frac{1}{8}[-\frac{1}{3u^3} - \frac{3}{u} + 3u + \frac{u^3}{3}] + C$$

$$= -\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3} - \frac{3}{8\tan\frac{x}{2}} + \frac{3}{8}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3 + C.$$

解（二）修改万能置换公式，令 $u=\tan x$

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\qquad dx=\frac{1}{1+u^2}du,$$

$$\int\frac{1}{\sin^4 x}dx=\int\frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4}\cdot\frac{1}{1+u^2}du=\int\frac{1+u^2}{u^4}du$$

$$=-\frac{1}{3u^3}-\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x+C.$$

解（三） 可以不用万能置换公式.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \csc^2 x(1+\cot^2 x)dx$$

$$= \int \csc^2 x dx + \int \cot^2 x \boxed{\csc^2 x dx}$$

$$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.$$

结论 比较以上三种解法,

便知万能置换不一定是最佳方法,

故三角有理式的计算中先考虑其它手段,
不得已才用万能置换.

三、其他可化为有理式函数的积分

例5 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx.$

解 令 $t=e^{\frac{x}{6}} \Rightarrow x=6\ln t,\qquad dx=\dfrac{6}{t}dt,$

$$\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}dx=\int \frac{1}{1+t^3+t^2+t}\cdot\frac{6}{t}dt$$

$$=6\int \frac{1}{t(1+t)(1+t^2)}dt$$

$$=\int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2}\right)dt$$

$$=6\ln t-3\ln(1+t)-\frac{3}{2}\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}-3\int\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=6\ln t-3\ln(1+t)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln(1+e^{\frac{x}{6}})-\frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}})-3\arctan(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

四、简单无理函数的积分

讨论类型 $R(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}).$

解决方法 作代换去掉根号.

例6 $$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

解 $$\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t \Rightarrow \frac{1+x}{x}=t^2,\ x=\frac{1}{t^2-1},\ dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2},$$

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

$$= -\int (t^2-1)t\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt \;= -2\int \frac{t^2dt}{t^2-1}$$

$$= -2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = -2t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\left[x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right] + C.$$

例7 求积分 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}dx$

$$= \int \frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)}}dx$$

令 $t = \sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)}}$ 则 $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$ $dx = \frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt$

$$= -\frac{3}{2}\int dt = -\frac{3}{2}t + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)}} + C$$

作业：

习题5.5

1 偶数项； 2 奇数项； 3 偶数项；