2019-2020 非线性控制课程期末复习题参考解答

1. 考虑非线性系统 $\dot{x}_1=\dfrac{x_2}{1+x_1^2},\dot{x}_2=d_1+d_2(1-\cos x_2)+u$ 的原点镇定问题。

（1）当 (d_1,d_2) 为已知常数时，设计线性反馈控制律使得闭环系统的原点渐近稳定；

（2）当 (d_1,d_2) 为未知常数时，设计线性化积分控制律使得 (x_1,x_2) 趋于零。

（3）当 (d_1,d_2) 为已知常数时，设计控制律使得闭环系统的原点全局渐近稳定；

解答：

（1）系统在原点近似线性化为 $\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=d_1+u$，设计线性控制律 $u=-d_1-k_1x_1-k_2x_2,(k_1>0,k_2>0)$，可得线性化闭环系统为 $\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-k_1x_1-k_2x_2$，该系统渐近稳定，因此原非线性系统渐近稳定。

（2）附加积分器得到扩展系统 $\dot{x}_0=x_1,\dot{x}_1=\dfrac{x_2}{1+x_1^2},\dot{x}_2=d_1+d_2(1-\cos x_2)+u$，对此扩展系统设计线性控制律 $u=-k_0x_0-k_1x_1-k_2x_2$，可得闭环系统为 $\dot{x}_0=x_1,\dot{x}_1=\dfrac{x_2}{1+x_1^2},\dot{x}_2=d_1+d_2(1-\cos x_2)-k_0x_0-k_1x_1-k_2x_2$，该系统具有平衡点 $x_{1s}=0,x_{2s}=0,x_{0s}=d_1/k_0$，系统在该平衡点的近似线性化为 $\dot{\bar{x}}_0=x_1,\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-k_0\bar{x}_0-k_1x_1-k_2x_2$，其中 $\bar{x}_0=x_0-x_{0s}$。选择 (k_0,k_1,k_2) 满足 $k_0>0,k_1>0,k_2>k_0/k_1$ 使得 $h(s)=s^3+k_2s^2+k_1s+k_0$ 为 Hurwitz 多项式，则闭环系统的近似线性化在原点渐近稳定，因此原非线性闭环系统在平衡点 $\left(x_{1s}=0,x_{2s}=0,x_{0s}=d_1/k_0\right)$ 渐近稳定，因此 $(x_1,x_2)\to(0,0)$。

2. 考虑以下非线性系统

a） $\dot{x}_1=x_1\sin x_2,\dot{x}_2=u,y=x_1^2+x_2$； b） $\dot{x}_1=u,\dot{x}_2=\sin(x_1)+u\cos(x_1)$

（1）判断系统 a）原点的零动态是否渐近稳定？若渐近稳定，利用输入—输出反馈线性化方法设计控制律使得闭环系统的原点渐近稳定；

（2）判断系统 b）是否可以输入-状态反馈线性化？若可以，利用输入-状态反馈线性化方法设计控制律使得闭环系统的原点渐近稳定；

（3）通过构造 Lyapunov 函数设计控制律使得系统 a）$\dot{x}_1 = x_1 \sin x_2, \dot{x}_2 = u$ 的原点全局渐近稳定。

解答：

（1）系统方程为 $\dot{x}_1 = x_1 \sin x_2, \dot{x}_2 = u, y = x_1^2 + x_2$。由于 $y = x_1^2 + x_2, \dot{y} = 2x_1 x_1 \sin x_2 + u$，因此系统的相对阶为 1、且限制在输出恒等于零的集合上的降阶系统为 $\dot{x}_1 = x_1 \sin x_2 = x_1 \sin\left(-x_1^2\right)$，该降阶系统在原点的线性化 $\dot{x}_1 = -x_1^3$ 渐近稳定，因此原系统为最小相位系统。设计控制律 $u = -2x_1^2 \sin x_2 - ky, (k > 0)$，则有 $\dot{y} = -ky$，因此闭环系统渐近稳定。

（2）系统方程为 $\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = \sin(x_1) + u\cos(x_1)$，该系统为二阶仿射非线性系统，输入-状态反馈线性化的对合条件（第二个条件）一定成立。由于

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin x_1 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos x_1 \end{bmatrix}, ad_f g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sin x_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \sin x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos x_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \cos x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos x_1 \end{bmatrix},$$

$$\det\left[g, ad_f g\right] = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos x_1 & -\cos x_1 \end{bmatrix} = -\cos x_1 \neq 0(\text{在原点邻域内})，$$

因此该系统可以输入-状态反馈线性化。由 $\frac{\partial h}{\partial x} g = \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial x_2}\cos x_1 = 0$，可以解出相对阶为 2 的输出为 $h = x_2 - \sin x_1$，取状态变换 $\xi_1 = h = x_2 - \sin x_1, \xi_2 = \dot{h} = \sin x_1$，则可得到变换后的方程为 $\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = (\cos x_1)u = \left(\sqrt{1-\xi_2^2}\right)u$，设计控制律 $u = \frac{-k_1\xi_1 - k_2\xi_2}{\sqrt{1-\xi_2^2}}, (k_1 > 0, k_2 > 0)$，则可以保证闭环系统渐近稳定。

（3）针对系统 $\dot{x}_1 = x_1 \sin x_2, \dot{x}_2 = u$ 构造全局正定径向无界函数 $V = 0.5(x_1^2 + x_2^2)$，求导得到 $\dot{V} = x_1^2 \sin x_2 + x_2 u = x_2(u + x_1^2 f(x_2))$，其中 $f(x_2) = \sin x_2 / x_2, \text{if } x_2 \neq 0;$ $f(x_2) = 1, \text{if } x_2 = 0$。设计控制律 $u = -x_1^2 f(x_2) - x_2$，则有 $\dot{V} = -x_2^2 \le 0$。由于 $\dot{V} \equiv 0 \Rightarrow x_2 \equiv 0 \Rightarrow (x_2, \dot{x}_2) = (x_2, -x_1^2) \equiv (0,0) \Rightarrow (x_1, x_2) \equiv (0,0)$，因此由不变原理知系统的原点全局渐近稳定。

3. 考虑非线性系统 $\dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2, \dot{x}_2 = d_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_2^2 + u$，其中 $|d_1| \le D_1, |d_2| \le D_2, |d_3| \le D_3$，$(d_1, d_2, d_3)$ 未知，(D_1, D_2, D_3) 已知。

（1）利用滑模控制方法设计控制律使得闭环系统的原点全局渐近稳定。

（2）利用 Lyapunov 再设计方法构造控制律使得闭环系统的原点全局渐近稳定。

（3）如果 (d_1, d_2, d_3) 未知，(D_1, D_2, D_3) 存在但未知，利用非线性阻尼方法设计控制律使得闭环系统状态全局毕竟一致有界，并给出最终界的一个估计。

解答：（1）设计滑动面 $s = x_2 + \sin x_1 + x_1 = 0$，系统限制在该滑动面上的运动 $\dot{x} = -x_1$ 渐近稳定。由 $\dot{s} = d_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_2^2 + u + (\cos x_1 + 1)\dot{x}_1$，可设计滑模控制律 $u = (1 + \cos x_1)\dot{x}_1 - \left(D_1 + D_2 x_1^2 + D_3 x_2^2 + \varepsilon\right), (\varepsilon > 0)$，该控制律可以保证 $s\dot{s} \le -\varepsilon |s|$，因此系统在有限时间内到达滑动面并沿滑动面趋向原点，即闭环系统渐近稳定。为了说明闭环系统全局渐近稳定，将系统的第一个分量方程改写为 $\dot{x}_1 = -x_1 + s$，由于 s 全局有界且有限时间趋于零、且系统 $\dot{x}_1 = -x_1 + s$ 输入-状态稳定，因此系统原点全局渐近稳定。

（2）令 $s = x_2 + \sin x_1 + x_1$，则系统方程可以重写为 $\dot{x}_1 = -x_1 + s, \dot{s} = d_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_2^2 + u + (\cos x_1 + 1)\dot{x}_1$，设计控制律 $u = \psi(x) + v = -(1 + \cos x_1)\dot{x}_1 - x_1 - s + v$，则可得到闭环系统为

$\dot{x}_1 = -x_1 + s, \dot{s} = -s - x_1 + (v + d_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_2^2)$ 。考虑全局正定径向无界函数 $L = 0.5(x_1^2 + s^2)$，求导得到：$\dot{L} = -x_1^2 - s^2 + s(v + d_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_2^2)$，设计附加控制输入 $v = -\left(D_1 + D_2 x_1^2 + D_3 x_2^2\right) sign(s)$，该附加控制可以保证 $s(v + d_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_2^2) \le 0$，因此 $\dot{L} \le -x_1^2 - s^2 < 0$，系统原点全局渐近稳定。完整的控制律为：

$$u = -(1 + \cos x_1)\dot{x}_1 - x_1 - s - \left(D_1 + D_2 x_1^2 + D_3 x_2^2\right) sign(s)$$

4. 考虑非线性系统 $\dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2, \dot{x}_2 = d_1(t,x) + d_2(t,x)x_1^2 + d_3(t,x)x_2^2 + u$，其中 $\left(d_1(t,x), d_2(t,x), d_3(t,x)\right)$ 为未知有界函数且其绝对值不大于正常数 d_0。试利用非线性阻尼方法设计控制律使得闭环系统的状态全局毕竟一致有界，并给出最终界的一个估计。

解答：令 $s = x_2 + \sin x_1 + x_1$，则系统方程可以重写为 $\dot{x}_1 = -x_1 + s, \dot{s} = d_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_2^2 + u + (\cos x_1 + 1)\dot{x}_1$，设计控制律 $u = \psi(x) + v = -(1 + \cos x_1)\dot{x}_1 - x_1 - s + v$，则可得到闭环系统为 $\dot{x}_1 = -x_1 + s, \dot{s} = -s - x_1 + (v + d_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_2^2)$，考虑全局正定径向无界函数 $L = 0.5(x_1^2 + s^2)$，求导得到：$\dot{L} = -x_1^2 - s^2 + s(v + d_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_2^2)$，利用非线性阻尼方法设计附加控制输入为 $v = -ks - kx_1^4 s - kx_2^4 s, (k > 0)$，代入 $\dot{L}$ 的表达式可得

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= -x_1^2 - s^2 + s(-ks - kx_1^4 s - kx_2^4 s + d_1 + d_2 x_1^2 + d_3 x_2^2) \\
&= -x_1^2 - s^2 + s\left(\left(d_1 - ks\right) + \left(d_2 x_1^2 - kx_1^4 s\right) + \left(d_3 x_2^2 - kx_2^4 s\right)\right) \\
&= -x_1^2 - s^2 + \left(\left(d_1 s - ks^2\right) + \left(d_2 x_1^2 s - kx_1^4 s^2\right) + \left(d_3 x_2^2 s - kx_2^4 s^2\right)\right) \\
&\le -x_1^2 - s^2 + \left(\left(d_0 |s| - ks^2\right) + \left(d_0 x_1^2 |s| - kx_1^4 s^2\right) + \left(d_3 x_2^2 |s| - kx_2^4 s^2\right)\right) \\
&\le -x_1^2 - s^2 + \frac{3d_0^2}{4k} \\
&< 0, \left\| \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \right\|_2 > \frac{d_0 \sqrt{3}}{2\sqrt{k}}
\end{aligned}$$

因此系统的解全局毕竟一致有界，且$\left\|\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}\right\|_2$的最终界为$\frac{d_0\sqrt{3}}{2\sqrt{k}}$，因此$|x_1|,|s|$的最终界为 $\frac{d_0\sqrt{3}}{2\sqrt{k}}$。由$s = x_2 + \sin x_1 + x_1$知，$|x_2| = |s - x_1 - \sin x_1| \le |s| + |x_1| + |\sin x_1| \le |s| + 2|x_1|$，因此$|x_2|$的最终界为$\frac{3\sqrt{3}d_0}{2\sqrt{k}}$。

5. 利用反步法设计控制律使得以下非线性系统的原点全局渐近稳定。

（1） $\dot{x}_1 = x_1 \sin x_1 - x_1 x_2, \dot{x}_2 = x_1^2 + u$；　（2）$\dot{x}_1 = 2x_1 \sin x_2 - x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = u - x_3^2$

（3） $\dot{x}_1 = x_1(x_3 + x_4), \dot{x}_2 = x_2(x_3 - x_4), \dot{x}_3 = u_1, \dot{x}_4 = u_2$。

解答：（1）

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 \sin x_1 - x_1 x_2 \\
&= x_1\left(\sin x_1 - x_2\right) \\
&= x_1\left(-x_1^2 + \sin x_1 - x_2 + x_1^2\right) \\
&= x_1\left(-x_1^2 + z_2\right) \\
&= -x_1^3 + x_1 z_2, (z_2 = \sin x_1 - x_2 + x_1^2) \\
\dot{z}_2 &= (\cos x_1 + 2x_1)\dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\
&= (\cos x_1 + 2x_1)\dot{x}_1 - x_1^2 - u \\
&= -z_2 - x_1^2 + \left((\cos x_1 + 2x_1)\dot{x}_1 - u + z_2\right) \\
&= -z_2 - x_1^2 \\
u &= (\cos x_1 + 2x_1)\dot{x}_1 - u + z_2, \\
V &= 0.5(x_1^2 + z_2^2) \Rightarrow \dot{V} = -x_1^4 - z_2^2 < 0
\end{aligned}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 2x_1\sin x_2 - x_2 \\
&= 2x_1(\sin x_2 - 1) + 2x_1 - x_2 \\
&= -x_1 - 2x_1(1-\sin x_2) - x_2 + 3x_1 \\
&= -x_1 - 2x_1(1-\sin x_2) - z_2, z_2 = x_2 - 3x_1, \\
\dot{z}_2 &= x_3 - 3\dot{x}_1 \\
&= -z_2 + x_1 + x_3 - 3\dot{x}_1 + z_2 - x_1 \\
&= -z_2 + x_1 + z_3, z_3 = x_3 - 3\dot{x}_1 + z_2 - x_1, \\
\dot{z}_3 &= u - x_3^2 - 3\ddot{x}_1 + \dot{z}_2 - \dot{x}_1 \\
&= -z_3 - z_2 + \left(u - x_3^2 - 2\ddot{x}_1 + \dot{z}_2 - \dot{x}_1 + z_3 + z_2\right) \\
u &= -\left(-x_3^2 - 3\ddot{x}_1 + \dot{z}_2 - \dot{x}_1 + z_3 + z_2\right) \Rightarrow \\
\dot{z}_3 &= -z_3 - z_2, \\
V &= 0.5(x_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \Rightarrow \dot{V} = -\left(x_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right)
\end{aligned}
$$

6．试设计控制律使得轮式移动机器人 $\dot{x} = v\cos\theta, \dot{y} = v\sin\theta, \dot{\theta} = r$ 实现对圆周路径 $x^2 + y^2 = 1$ 的渐近跟踪。其中给定 $v = 1$。

解答：

记 $z = x^2 + y^2 - 1$，求导得到

$$
\dot{z} = 2x\cos\theta + 2y\sin\theta = 2\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\theta + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\theta\right),
$$

令 $\sin\alpha = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\alpha = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则有：

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= 2\sqrt{x^2+y^2}\left(-\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta\right) = 2\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\theta-\alpha\right) \\
&= 2\sqrt{z+1}\sin\bar{\theta}, \\
\dot{\bar{\theta}} &= r - \dot{\alpha}
\end{aligned}
$$

其中 $\bar{\theta} = \theta - \alpha$，$\dot{\alpha}$ 的表达式推导如下：

$y\sin\alpha + x\cos\alpha = 0$ 求导得 $\sin\theta\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha + \left(y\cos\alpha - x\sin\alpha\right)\dot{\alpha} = 0$

$$
\Rightarrow \cos\bar{\theta} + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dot{\alpha} = 0 \Rightarrow \dot{\alpha} = -\frac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{z+1}}
$$

因此 $\dot{z}=2\sqrt{z+1}\sin\bar{\theta},\dot{\bar{\theta}}=r+\dfrac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{z+1}}$，对此系统构造全局正定径向无界函数

$L=0.5(z^2+\bar{\theta}^2)$，求导得

$$\dot{L}=2z\sqrt{z+1}\sin\bar{\theta}+\bar{\theta}\left(r+\frac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{z+1}}\right)=\bar{\theta}\left(r+\frac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{z+1}}+2z\sqrt{z+1}f(\bar{\theta})\right)$$

其中 $f\left(\bar{\theta}\right)=\sin\bar{\theta}/\bar{\theta},(\bar{\theta}\neq 0);\ f\left(\bar{\theta}\right)=1,(\bar{\theta}=0)$。设计控制律

$r=-\bar{\theta}-\dfrac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{z+1}}-2z\sqrt{z+1}f(\bar{\theta})$，则有：$\dot{L}=-\bar{\theta}^2\leq 0$。在包含原点的区域 $z>-1$ 内有：

$\dot{L}\equiv 0\Rightarrow\bar{\theta}\equiv 0\Rightarrow\left(\bar{\theta},\dot{\bar{\theta}}\right)\equiv(0,0)\Leftrightarrow\bar{\theta}\equiv 0,z\equiv 0$，应用不变原理知，闭环系统

$\dot{z}=2\sqrt{z+1}\sin\bar{\theta},\dot{\bar{\theta}}=r+\dfrac{\cos\bar{\theta}}{\sqrt{z+1}}=-\bar{\theta}-zf(\bar{\theta})$ 的原点局部渐近稳定（局部而非全局渐近稳定的原因在于：控制过程中需要满足 $z+1>0\Leftrightarrow z>-1$，否则在 $z\rightarrow 0$ 的过程中轨迹将经过 $z=-1$，此时 α 角无定义且控制输入 r 无界 ）。

7. 考虑非线性系统 $\dot{e}_1=v+e_2r-v_d(t)\cos e_3,\dot{e}_2=-e_1r+v_d\sin e_3,\dot{e}_3=r-r_d(t)$，其中时变函数 $\left(v_d(t),r_d(t)\right)$ 及其各阶导数一致有界、且 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\left(v_d(t)\right)^2+\left(r_d(t)\right)^2\right)\neq 0$。试设计反馈控制律 $v=\alpha\left(\cdot\right),r=\beta\left(\cdot\right)$ 使得 $\lim\limits_{t\to\infty}(e_1,e_2-e_{2d},e_3)=(0,0,0)$。其中 e_{2d} 为给定的常数。

解答：令 $\bar{e}_2=e_2-e_{2d}$，则 $\dot{e}_1=v+(\bar{e}_2+e_{2d})r-v_d(t)\cos e_3,\dot{\bar{e}}_2=-e_1r+v_d\sin e_3,\dot{e}_3=r-r_d(t)$，构造全局正定径向无界函数 $L=0.5(e_1^2+\bar{e}_2^2+e_3^3)$，求导得到：

$$\begin{aligned}\dot{L}&=e_1\left(v+(\bar{e}_2+e_{2d})r-v_d(t)\cos e_3\right)+e_2\left(-e_1r+v_d\sin e_3\right)+e_3\left(r-r_d(t)\right)\\&=e_1\left(v+e_{2d}r-v_d(t)\cos e_3\right)+e_2\left(v_d\sin e_3\right)+e_3\left(r-r_d(t)\right)\\&=e_1\left(v+e_{2d}r-v_d(t)\cos e_3\right)+e_3\left(e_2v_df(e_3)+r-r_d\right)\end{aligned}$$

其中 $f(e_3)=\dfrac{\sin e_3}{e_3},(e_3\neq 0),f(e_3)=1,(e_3=0)$。设计控制律：

$$v=-e_1-e_{2d}r+v_d(t)\cos e_3,r=r_d-e_2v_df(e_3)-e_3$$

则有 $\dot{L}=-e_1^2-e_3^2\le 0$，因此 L 有界有极限，$(e_1,\bar{e}_2,e_3)$ 有界，$(\dot{e}_1,\dot{e}_2,\dot{e}_3)$ 有界，$\ddot{L}$ 有界，对 $\dot{L}$ 应用巴巴拉特引理可得 $(e_1,e_3)\to(0,0)$。因 $(\ddot{e}_1,\ddot{e}_3)$ 有界，对 $(\dot{e}_1,\dot{e}_3)$ 应用巴巴拉特引理可得

$\bar{e}_2\left(r_d-e_2v_d\right)\to 0,\bar{e}_2v_d\to 0\Rightarrow\bar{e}_2r_d\to 0,\bar{e}_2v_d\to 0\Rightarrow\bar{e}_2^2\left(v_d^2+r_d^2\right)\to 0\Rightarrow\bar{e}_2\to 0$。因此 $(e_1,\bar{e}_2,e_3)\to(0,0,0)$，系统原点全局渐近稳定。

8．考虑非线性系统 $\dot{x}=-x+ax^3-bx^5$，其中 (a,b) 均为正常数。试证明：1）该系统的原点渐近稳定；2）当 b 充分大时，该系统的原点全局渐近稳定。

解答：系统在原点的近似线性化为 $\dot{x}=-x$，因此原点渐近稳定。考虑正定径向无界函数 $V=0.5x^2$，求导得：

$$\begin{aligned}\dot{V}&=x\left(-x+ax^3-bx^5\right)=-x^2\left(1-ax^2+bx^4\right)\\&=-x^2b\left(x^4-\frac{a}{b}x^2+\frac{1}{b}\right)=-bx^2\left(\left(x-\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a^2}{4b^2}+\frac{1}{b}\right)。\\&\le -bx^2\left(-\frac{a^2}{4b^2}+\frac{1}{b}\right)=-bx^2\left(\frac{-a^2+4b}{4b^2}\right)<0,b>\frac{1}{4}a^2\end{aligned}$$

因此当 $b>\frac{1}{4}a^2$ 时，系统原点全局渐近稳定。

9. 考虑非线性系统：$\dot{x}_1=x_2u_1,\dot{x}_2=x_3u_1,\dot{x}_3=u_2$。试设计状态反馈控制律 $u_1=\alpha(\cdot)$，$u_2=\beta(\cdot)$ 使得闭环系统的原点全局渐近稳定。其中要求 $\alpha(\cdot),\beta(\cdot)$ 为其自变量的连续可微函数，且 $\alpha(0)=0,\beta(0)=0$。

解答：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 u_1, \\
\dot{x}_2 &= x_3 u_1 = (-x_1 + x_3 + x_1) u_1 \\
&= \left(-x_1 + z_3\right) u_1, (z_3 = x_3 + x_1) \\
&= -x_1 u_1 + z_3 u_1 \\
\dot{z}_3 &= u_2 + x_2 u_1 = -z_3 - x_2 u_1 + \left(u_2 + 2 x_2 u_1 + z_3\right)
\end{aligned}
$$

设计第二个输入的控制律为 $u_2 = -2x_2 u_1 - z_3$，则有：$\dot{x}_1 = x_2 u_1, \dot{x}_2 = -x_1 u_1 + z_3 u_1, \dot{z}_3 = -z_3 - x_2 u_1$。构造全局正定径向无界函数 $V = 0.5\left(x_1^2 + x_2^2 + z_3^2\right)$，求导得 $\dot{V} = -z_3^2 \le 0$，因此 V 有界有极限。令 $\dot{V} \equiv 0$，则有 $\dot{V} \equiv 0 \Rightarrow z_3 \equiv 0 \Rightarrow \dot{z}_3 = -z_3 - x_2 u_1 \equiv 0 \Rightarrow x_2 u_1 \equiv 0$。设计第一个输入的控制律为 $u_1 = x_1^2 + x_2^2$，则 $x_2 u_1 \equiv 0 \Rightarrow x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \equiv 0$。因 (V, z_3) 有极限，因此 $x_1^2 + x_2^2$ 有极限，即在不变集内 $x_1^2 + x_2^2$ 为常数，因此 $x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \equiv 0 \Rightarrow x_2 \equiv 0 \ or \left(x_1^2 + x_2^2\right) \equiv 0$。若 $\left(x_1^2 + x_2^2\right) \equiv 0$，则 $(x_1, x_2, z_3) \equiv (0,0,0)$；若 $x_2 \equiv 0$，则 $\dot{x}_2 \equiv 0 \Rightarrow x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) \equiv 0 \Rightarrow x_1^3 \equiv 0 \Rightarrow x_1 \equiv 0 \Rightarrow (x_1, x_2, z_3) \equiv (0,0,0)$。因此无论何种情况在 $\dot{V} \equiv 0$ 的集合内仅包含原点，所以闭环系统全局渐近稳定，所设计的控制律为：$u_1 = x_1^2 + x_2^2, u_2 = -2x_2 u_1 - z_3 = -2x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - z_3$。