工科数分习题课一　数列极限(一)

石岩

shiyan200245@163.com

Sept.21.2012

本节课的内容和要求

1.深入理解极限的定义, 熟练掌握用$\varepsilon-N$语言证明数列极限;

2.熟练掌握极限的四则运算法则和收敛数列的基本性质.

基本概念和主要结论

1.数列极限

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N > 0,$ s.t. $|a_n - a| < \varepsilon$ for $n > N. \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

$a)$ ε的任意性; $b)$ N的相应性.

2.数列收敛的性质

$a)$唯一性　若数列$\{a_n\}$收敛, 则它只有一个极限.

$b)$有界性　若数列$\{a_n\}$收敛, 则$\exists\, M > 0, \text{s.t. } |a_n| \leqslant M, \forall\, n \in \mathbb{N}_+.$

$c)$保号性　若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0,$ 则

$\forall\, a' \in (0, a), \exists\, N > 0, \text{s.t. } a_n > a' \text{ for } n > N.$

$d)$保序性　若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,$ 且$a < b,$ 则

$\exists\, N > 0, \text{s.t. } a_n < b_n \text{ for } n > N.$

$e)$保不等式性　设$\{a_n\}, \{b_n\}$均为收敛数列.

若$\exists N > 0, \text{s.t. } a_n \leqslant b_n \text{ for } n > N,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

$f)$迫敛性　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a.$

对于数列$\{c_n\}$, 若$\exists N > 0, \text{s.t. } a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \text{ for } n > N_0,$

则$\{c_n\}$收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a.$

$g)$四则运算法则

3.数列的子列

■定理　数列收敛的充要条件是它的任何非平凡子列[†] 都收敛.

[†] 数列本身以及去掉有限项后得到的子列成为**平凡子列**, 不是平凡子列的子列成为**非平凡子列**.

4.重要不等式

1. 算术平均-几何平均不等式(AM-GM inequality)

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \quad a_i \geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时,等号成立. 另有,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \quad a_i \geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

左端项成为调和平均(Harmonic Mean).

2. 三角不等式

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|, \quad \forall a,b \in \mathbb{R};$$

$$|a-b| \geqslant \Big||a|-|b|\Big|, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

3. Cauchy不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \quad \forall a_i,b_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,\cdots,n.$$

当且仅当$a_i=kb_i,\ i=1,2,\cdots,n$时,等号成立.

4. Hölder不等式

$$\sum_{i=1}^{n} |a_ib_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall a_i,b_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,\cdots,n,$$
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p,q>1.$$

当且仅当$|b_i|=k|a_i|^{p-1},\ i=1,2,\cdots,n$时,等号成立.

5. Bernoulli不等式

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \forall x>-1, n \in \mathbb{N}.$$

当$x \neq 0, n \geqslant 2$时,不等式严格成立.

习题

1. 用$\varepsilon - N$语言证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!} = 0.$ $(c > 0)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{c^n} = 0.$ $(\alpha > 0, c > 1)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^\alpha} = 0.$ $(\alpha \geqslant 1)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} \neq 0.$

2. 判断下列命题是否正确. 若正确, 试用$\varepsilon - N$语言证明; 若不正确, 给出反例.

(0)若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k.$

(1)设$a_n \geqslant 0$,若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}.$

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$

(3)若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$

3. 证明数列$\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$发散.

4. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right].$$

5. 证明: 若$a_n>0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r<1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

6. 设$\lim_{n\to\infty} a_n = a$,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$;

(2)若$a_n > 0\,(n = 1, 2, \cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

思考

I.(1)成立能否推出$\lim_{n\to\infty} a_n = a$?

II.利用此题结论证明

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(c)若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a(a_n > 0)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

III.利用此题结论求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$;

(3)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

附加题. 求极限

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \lim_{n\to\infty}[(1+n)^\alpha - n^\alpha],\ 0<\alpha<1; \\
&(2) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!}.
\end{aligned}
$$

提示

(1) $0<(1+n)^\alpha - n^\alpha < n^{\alpha-1},\ 0<\alpha<1;$

(2) $1!+2!+\cdots+(n-2)! < (n-1)!,\ n>2.$