2.1.2 子句与子句集

1. 定义

文字：原子谓词公式及其否定统称为文字。

子句：任何文字的析取式称为子句。

空子句：不包含任何文字的子句称为空子句。
记为□或NIL

子句集：由子句和空子句所构成的集合称为子句集。

例如：$(\forall x)((\forall y)P(x,y)\rightarrow\neg(\forall y)(Q(x,y)\rightarrow R(x,y)))$

2. 子句集的求取

例如：$(\forall x)((\forall y)P(x,y) \rightarrow \neg(\forall y)(Q(x,y) \rightarrow R(x,y)))$

求取步骤：

(1) 消去蕴含和双条件符号（→和←→）

连接词化归律 $P \rightarrow Q \Longleftrightarrow \neg P \vee Q$；

$P \leftrightarrow Q \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge \neg P)$

（2）减少否定符号的辖域（即把否定符号移到紧靠谓词的位置上）

双重否定律 $\neg\neg P \Longleftrightarrow P$

狄·摩根定律 $\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$；

$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

量词转换律 $\neg(\exists x)P \Longleftrightarrow (\forall x)(\neg P)$，

$\neg(\forall x)P \Longleftrightarrow (\exists x)(\neg P)$

（3）对变量标准化

使不同量词约束的变元有不同的名字

（4）消去存在量词

a. 存在量词不出现在全称量词的辖域内　　新的个体常量替换

b.若存在量词位于一个或多个全称量词的辖域内，例如

$$(\forall x1)(\forall x2)\ldots\ldots(\forall xn)(\exists y)P(x1,x2,\ldots\ldots,xn,y)$$

改写成全称量词的函数　$y=f(x1,x2,\ldots\ldots,xn)$

(5) 化为前束形（量词左移）

使得每个全称量词的辖域都是整个公式。

（6）化为合取范式（Skolem标准形）

合取范式：子句的合取。

结合律，分配律

（P∧Q）∧R<==>P ∧（Q∧R）

P∨（Q∧R）<==>（P∨Q）∧（P∨R）

Skolem标准形　　(∀x1)(∀ x2)…(∀ xn) M

（7）消去全称量词

（8）消去合取词

（9）更换变量名称

使任意两个子句中不出现相同的变元名

例 $(\forall x)((\forall y)P(x,y)\rightarrow\neg(\forall y)(Q(x,y)\rightarrow R(x,y)))$

第一步，消去→号，得：

$$(\forall x)(\neg(\forall y)P(x,y)\vee\neg(\forall y)(\neg Q(x,y)\vee R(x,y)))$$

第二步，¬紧靠量词，得：

$$(\forall x)((\exists y)\neg P(x,y)\vee(\exists y)(Q(x,y)\wedge\neg R(x,y)))$$

第三步，变元换名，得

$$(\forall x)((\exists y)\neg P(x,y)\vee(\exists z)(Q(x,z)\wedge\neg R(x,z)))$$

第四步，消去存在量词，得

$(\forall x)(\neg P(x, f(x)) \vee (Q(x, g(x)) \wedge \neg R(x, g(x))))$

第五步， 化为前束形（量词左移），得

$(\forall x)(\neg P(x, f(x)) \vee (Q(x, g(x)) \wedge \neg R(x, g(x))))$

第六步， 化为合取范式，得

$(\forall x)\ (\ (\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))\ ) \wedge (\ \neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x))\ )\ )$

第七步，消去全称量词，得

$$(\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x)))$$

第八步， 消去合取词，得

$$\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x)) ; \neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x))$$

第九步， 变元更名，得

$$\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x)) ;$$
$$\neg P(y, f(y)) \vee \neg R(y, g(y))$$

3. 子句集的应用

当原谓词公式为永假（即不可满足）时，

其标准子句集则一定是永假的。反之亦然

F与S不等价，但在不可满足的意义上两者是等价的

定理：设有谓词公式F，其标准子句集为S，

F为不可满足的充要条件是S为不可满足的。

2.2 归结原理
（Resolution Principle）

2.2.1 归结原理

解决的问题：定理的自动证明；问题的自动求解。

1. 基本思想

首先，否定欲证明的结论，并加入子句集，得到扩充的子句集S’。

然后，设法检验子句集S’是否含有空子句，

若含有空子句，则表明S’是不可满足的；

若不含有空子句，则继续使用归结法，

直至导出空子句或不能继续归结为止

定义：若P是原子谓词公式，则称P与¬P为互补文字。

2．命题逻辑中的归结原理

归结式的定义

定义：设C1和C2是子句集中的任意两个子句，如果C1中的文字L1与C2中的文字L2互补，那么可从C1和C2中分别消去L1和L2，并将C1 和C2中余下的部分按析取关系构成一个新的子句C12。则称这一过程为消解（归结），称C12为C1和C2的消解（归结）式，称C1和C2为C12的亲本子句。

例如：

$C1=P \vee Q \vee R$，$C2= \neg P \vee S$ $C12 = Q \vee R \vee S$

$C1=\neg P \vee Q$，$C2=\neg Q \vee R$，$C3=P$ $C123=R$

归结式的性质

定理：归结式 C12 是其亲本子句 C1 和 C2 的逻辑结论。

推论1：设C1和C2是子句集S中的两个子句，C12是C1和C2的归结式，若用C12代替C1和C2后得到新的子句集S1，则由S1的不可满足性可以推出原子句集S的不可满足性。

即：S1的不可满足性⇒S的不可满足性

推论2：设C1和C2是子句集S中的两个子句，C12是 C1和 C2的归结式，若把C12加入S中得到新的子句集S2，则S与S2的不可满足性是等价的。

即：S2的不可满足性⇔S的不可满足性

3. 谓词逻辑的归结

方法和命题逻辑一样。

有函数，要考虑置换和合一

设 $C1 = L1 \vee \alpha$ 和 $C2 = \neg L2 \vee \beta$ 是两个没有相同变元的子句，L1和L2分别是C1、C2中的文字，如果L1和¬L2存在最一般合一σ，那么归结C1和C2推导出一个新子句 $(\alpha \vee \beta)\sigma$，$(\alpha \vee \beta)\sigma$ 称为C1和C2的归结式。

$$C12 = (C1\sigma - \{L1\sigma\}) \cup (C2\sigma - \{L2\sigma\})$$

例：设 C1=P（a）∨R（x），C2=¬P（y）∨Q（b），求 C12。

C12=R(x)vQ（b）

例 设已知：

(1)能阅读者是识字的；

(2)海豚不识字；

(3)有些海豚是很聪明的。

试证明：有些聪明者并不能阅读。

证 首先，定义如下谓词：

$R(x)$：x能阅读。

$L(x)$：x识字。

$I(x)$：x是聪明的。

$D(x)$：x是海豚。

然后把上述各语句翻译为谓词公式：

(1) $\forall x(R(x)\rightarrow L(x))$

(2) $\forall x(D(x)\rightarrow \neg L(x))$ 已知条件

(3) $\exists x(D(x)\wedge I(x))$

(4) $\exists x(I(x)\wedge \neg R(x))$ 需证结论

求题设与结论否定的子句集，得

(1) $\neg R(x) \vee L(x)$

(2) $\neg D(y) \vee \neg L(y)$

(3) $D(a)$

(4) $I(a)$

(5) $\neg I(z) \vee R(z)$

归结得

(6) R(a)　　　(5)，(4)，{a/z}

(7) L(a)　　　(6)，(1)，{a/x}

(8) ¬D(a)　　(7), (2),　{a/y}

(9) □　　　　(8), (3)

应用归结原理求取问题答案

1. 把已知条件用谓词公式表示，并化为相应的子句集S；
2. 把目标的否定用谓词公式表示，并化为子句集；
3. 构造目标否定子句的重言式, 并代替原子句
4. 将3得到的子句集加入前提子句集中
5. 对新子句集G应用归结原理求出反演树：
6. 用根子句作为回答语句，答案就在此根子句中。

如果一个子句中包含有互补的文字对，则称该子句为永真（重言）式

归结过程的控制策略

归结的一般过程

1) 从初始子句集S0出发, 对S0中的全部子句作所有可能消解, 得到第一级消解式S1.

2) 用S0中的全部子句和S1中的子句作出所有可能消解, 得到第二级消解式S2.

3) 用S0和S1中的全部子句和S2中的子句作出所有可能消解, 得到第三级消解式S3.

如此继续，直到出现空子句为止。

控制策略

要解决的问题： 归结方法的知识爆炸

控制策略的目的：归结点尽量少

控制策略的原则：

避免多余的、不必要的归结式出现。

给出控制策略，以使仅对选择合适的子句间方可做归结。

（1） 删除策略

（2） 支持集策略

（3） 单文字子句策略

（4）输入归结策略

（5） 线性归结策略