§2.5 连续函数

一、函数连续的定义

1. 定义5.1（连续函数定义）

设$f:(a,b)\to R$,若对 $x_0\in(a,b)$,有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称$f(x)$在x_0处连续.

2."$\varepsilon-\delta$"定义

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当$|x-x_0|<\delta$时,有

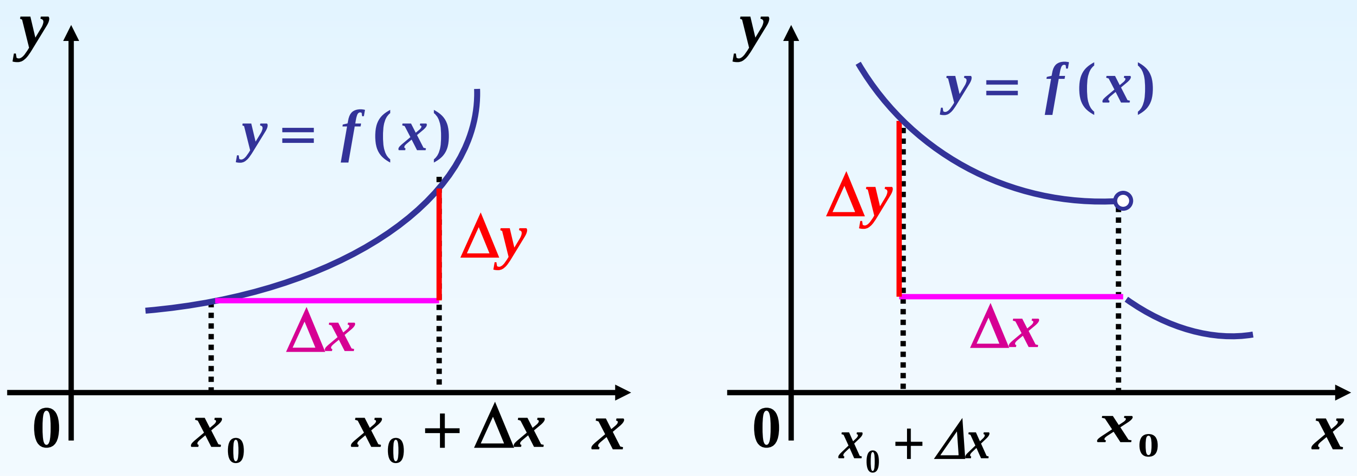
$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

3. 设函数 $f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义, $\forall\ x\in U_\delta(x_0)$,

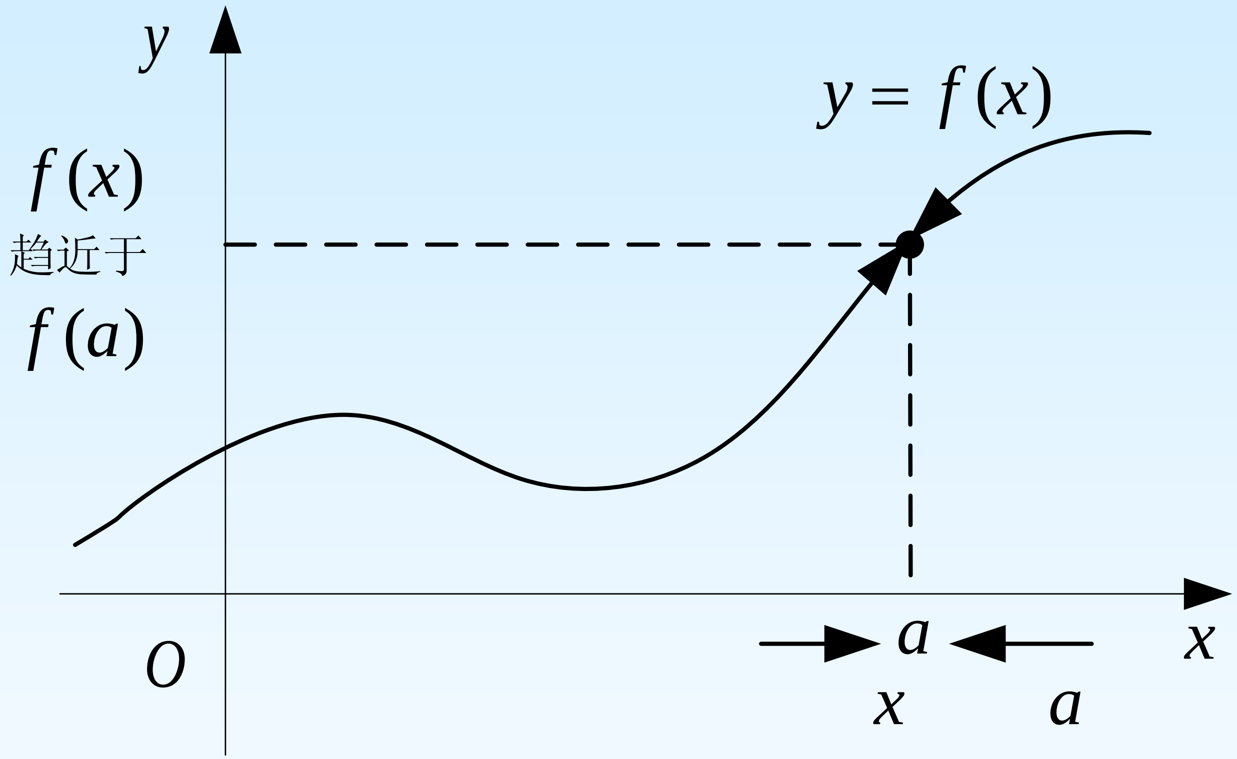
$\Delta x = x - x_0$, 称为自变量在点 x_0的增量.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$,称为函数 $f(x)$相应于Δx的增量.

若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$,称$f(x)$在$x_0$处连续.



4. 几何直观



注：

δ 的选取和点 x_0 及 ε 都有关.

例1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, 常函数处处连续.

例2. $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$

例3. $\forall x_0 \in R, \lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0, \lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0,$

处处连续.

解 $$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}$$

$$\left|\sin x - \sin x_0\right| \le 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \le 2\left|\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, s.t $|x - x_0| < \delta$, 有

$$\left|\sin x - \sin x_0\right| \le \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

同理: $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

定义5.2（函数左右连续定义）

设$f:(a,b)\to R$,若对 $x_0\in(a,b)$,若

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0),$$

则称$f(x)$在点x_0处左连续； 若

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0),$$

则称$f(x)$在点x_0处右连续.

定理5.1 函数 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 即左连续又右连续 .

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0).$$

例4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\ge 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0),$

右连续但不左连续，

故函数 $f(x)$在点 $x=0$处不连续.

例5 当a取何值时,

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\ge 0,\end{cases}$ 在$x=0$处连续.

解 $\because\ f(0)=a,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0-0)=f(0+0)=f(0),\ \Rightarrow a=1,$

故当且仅当 $a=1$时，函数 $f(x)$在$x=0$处连续.

二、连续函数的性质

根据函数极限的性质可以得函数连续的如下性质：

定理5.2 若$f(x)$在x_0连续，则$f(x)$在x_0的某邻域内有界.

定理5.3 若$f(x)$在x_0连续，且$f(x_0)>0(<0)$，则

$\exists\delta$, 当$|x-x_0|<\delta$，有$f(x)>0(<0)$.

定理5.4 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点 x_0处连续，则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0处也连续.

定理5.5 （复合函数）

若函数 g在t_0处连续，f 在点 x_0连续，则

则复合函数 $y = f[g(t)]$在点t_0也连续.

注: 复合函数连续性比极限少了t_0处取值的限制.

定义5.3 如果函数在开区间 I内任意一点都连续，

则称 $f(x)$在开区间I上连续. 对闭区间$I = [a,b]$,

若$f(x)$在(a,b)上连续,且在a,b点分别右、左连续，

则称函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续.

定理2 （反函数） 设$f(x)$是在区间$I=[a,b]$上严格单调递增(递减)的连续函数，则f^{-1}是区间$f(I)$上，严格单调递增(递减)的连续函数．

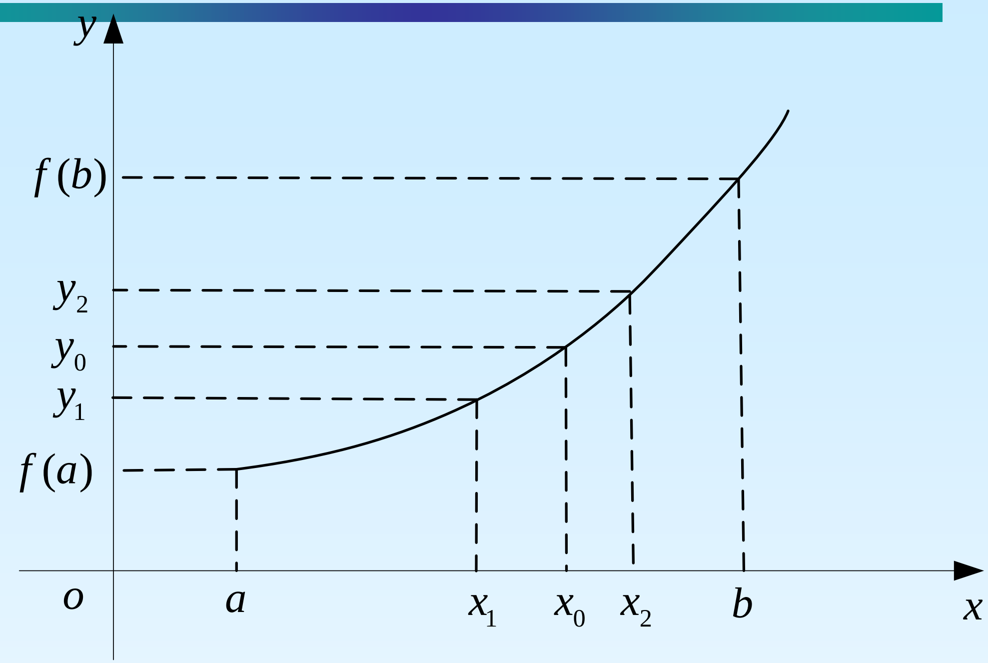
证： 不妨设$f(x)$为$[a,b]$上严格单调递增函数，

则f^{-1}的定义域为$[f(a),f(b)]$.

对$\forall y_0\in[f(a),f(b)]$，设$x_0=f^{-1}(y_0)$.

对$\forall\varepsilon>0,\exists x_1 x_2\in[a,b]$满足

$$x_0-\varepsilon<x_1<x_0<x_2<x_0+\varepsilon.$$



令$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$

由函数的严格单调性:

$$y_1 < y_0 < y_2.$$

令$\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$

则当$|y - y_0| < \delta$,时有$x_1 < x = f^{-1}(y) < x_2$,

故$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$,

所以，f^{-1}在区间$[f(a), f(b)]$上连续.

例6 由连续函数的上述性质，可得如下结论：

(1)由$\sin x, \cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续，

可得 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内连续.

由$y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增加且连续，

故 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

同理可得反三角函数在其定义域内皆连续.

用这些性质可以得到更多函数的连续性，如下：

三、初等函数的连续性

（1） 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

例 7 证明$f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$处处连续

证明: $\forall x_0\in R,\lim\limits_{x\to x_0}a^x=\lim\limits_{x\to x_0}a^{x-x_0+x_0}$

$$=a^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}\cdot\lim_{t\to 0}a^t$$

只需证在$x=0$处连续,即$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1=f(0).$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

（i） 当$a>1$时，此时函数严格递增

由$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$知，$\forall \varepsilon>0, \exists N\in \mathrm{N}^*$，使 $0<a^{\frac{1}{N}}-1<\varepsilon$.

取$\delta=\dfrac{1}{N}$，当$0<x<\delta$时，$0<a^x-1<a^{\frac{1}{N}}-1<\varepsilon$.

$$\therefore \lim_{x\to 0+} a^x = 1.$$

$$\lim_{x\to 0-} a^x \xlongequal{x=-y} \lim_{y\to 0^+} a^{-y} = \lim_{y\to 0+}\frac{1}{a^y} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0+} a^y} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} a^x = f(0).$$

（ii） $a<1$时，

$$\lim_{x\to 0} a^x = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 1 = f(0).$$

（2） 指数函数 $y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1)$

在$(-\infty,+\infty)$内单调且连续;

（3） 对数函数 $y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1)$

在$(0,+\infty)$内单调且连续；

由$y = x^{\mu} = a^{\mu \log_a x}$

（4） 幂函数 $y = x^{\mu}$ 在其定义域内连续；

定理5.7 基本初等函数在定义域内是连续的.

根据初等函数的定义以及连续函数的四则运算及复合函数的性质得：

一切初等函数在其定义域内连续.

四、函数的间断点

函数 $f(x)$在点 x_0处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

上述条件有一个不满足则函数不连续，称该点称为函数的**间断点**。不同条件对应不同类型间断点.

1. 第一类间断点

如果 $f(x)$在点 x_0处左，右极限都存在,若

⑴ $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$,

则称点 x_0为函数 $f(x)$的跳跃间断点 .

⑵ $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$,

则称点 x_0为函数 $f(x)$的可去间断点 .

跳跃间断点和可去间断点统称为第一类间断点

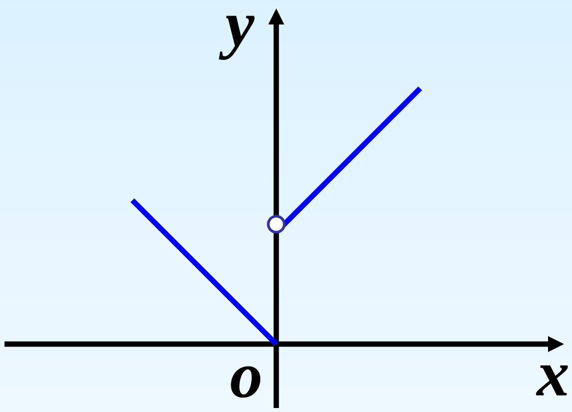
例 8 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.

解

$f(0-0)=0,$

$f(0+0)=1,$

$\because\ f(0-0)\neq f(0+0),$

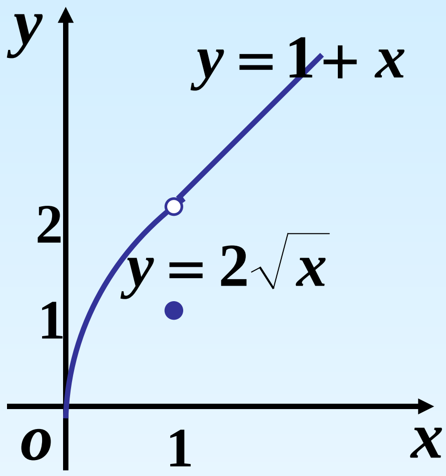


$\therefore\ x=0$为函数的跳跃间断点.

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例 9　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1,\\ 1+x, & x>1.\end{cases}$$

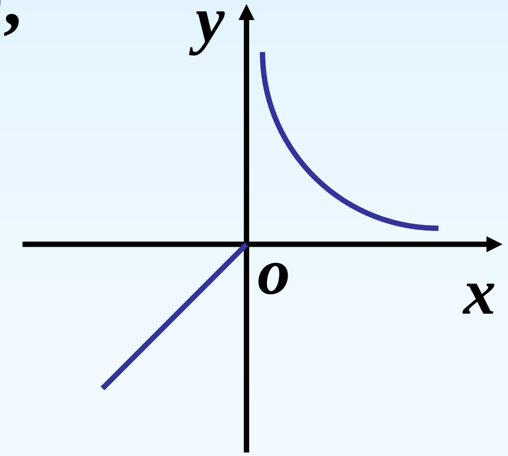


在$x=1$处的不连续性．$x=1$可去间断点．

特点　函数在点x_0处的左、右极限都存在．

2.第二类间断点 如果 $f(x)$在点 x_0处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0为函数 $f(x)$的第二类间断点.

例 10 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.



解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=+\infty,$

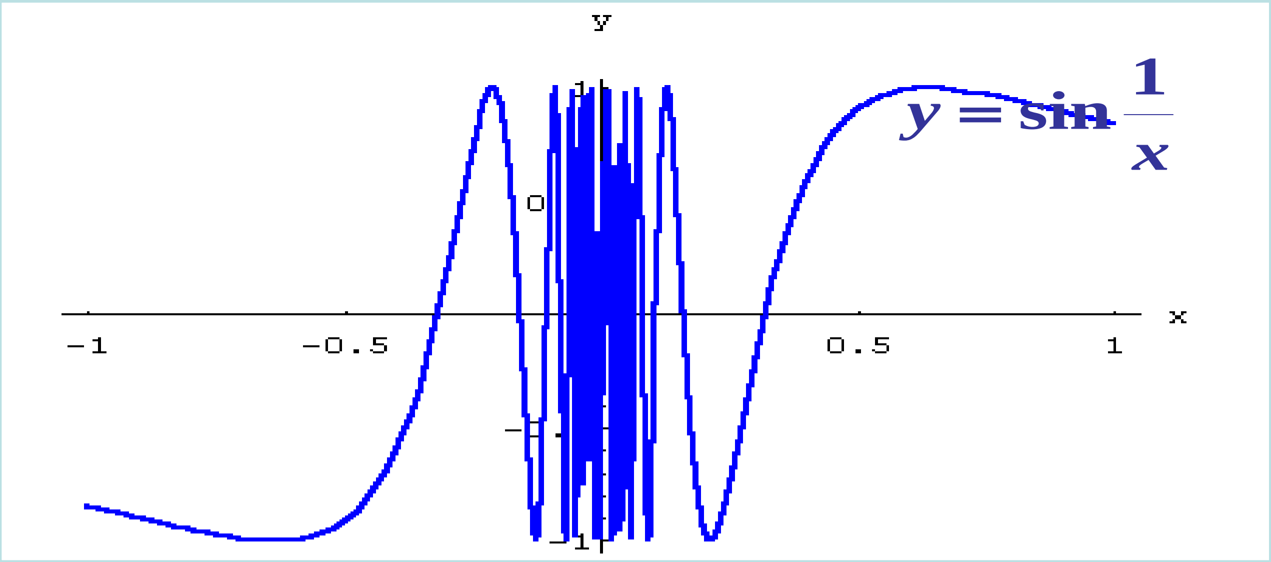
$\therefore x=0$为函数的第二类间断点.

这种情况称为无穷间断点.

例 8 讨论函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore\ x=0$ 为第二类间断点.



这种情况称为振荡间断点.

注意 不要以为函数的间断点只是个别的几个点.

★ 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ 0, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$$

在定义域R内每一点处都间断,且都是第二类间断点.

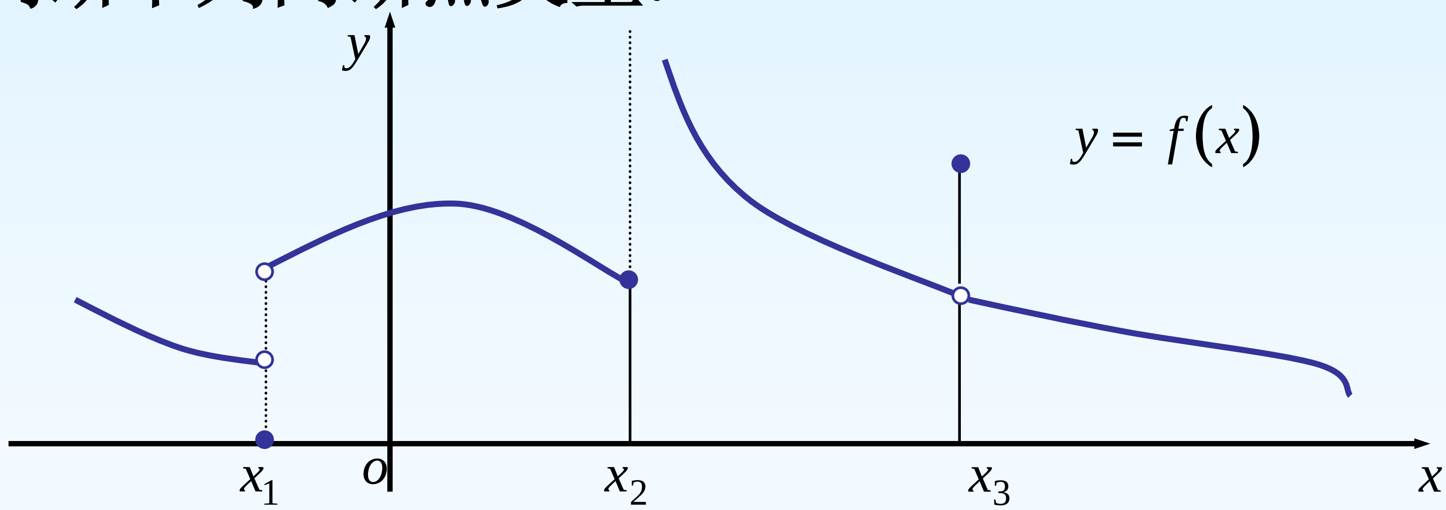
★ $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ -x, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$$

仅在$x=0$处连续，其余各点处处间断.

★ $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ -1, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$

在定义域 **R** 内每一点处都间断，但其绝对值处处连续.

判断下列间断点类型:



例11．*Riemann*函数的连续性

$$R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, q>0, p,q\text{互素},\\ 0, & \text{无理数}.\end{cases}$$

解: $\forall x_0\in R, \lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0,$

$\forall \varepsilon>0,$取$q_0\in N^*$, $s.t\ \dfrac{1}{q_0}<\varepsilon.$ 在(x_0-1, x_0+1)中,

满足$0<q\le q_0$的分数$\dfrac{p}{q}$ 仅有有限多个,

所以存在$\delta > 0$,使得在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$中的有理数

的分母$q > q_0$.　当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

若x为无理数，$R(x) = 0, |R(x)| < \varepsilon,$

若x为有理数,$|R(x)| = \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{q_0} < \varepsilon,$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} R(x) = 0.$$

R(x)在一切有理点都是可去 间断点;

在一切无理点都是连续 点.

例12 设$f(x)$在(a,b)单调，

则$\forall x_0 \in (a,b)$, $f(x_0^+)$, $f(x_0^-)$存在.

证: 不妨设$f(x)$在(a,b)单调递增，

$$\forall x_0 \in (a,b), \forall a < x < x_0, f(x) \le f(x_0),$$

$\therefore$ $f(x)$在(a,x_0)上有界.

$\therefore$ $f(x)$在(a,x_0)上有上确界, $A = \sup\limits_{x\in(a,x_0)} f(x)$.

① $f(x_0)$是上界, $\therefore A \le f(x_0)$.

② $\forall \varepsilon > 0, \exists x = x_0 - \delta \in (a,x_0)$使$f(x_0 - \delta) > A - \varepsilon$.

③ $f\uparrow, \forall x\in(x_0-\delta, x_0)$,有：

$$f(x)\geq f(x_0-\delta)>A-\varepsilon,$$

即：$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$,当 $0<x_0-x<\delta$时,

$$A-\varepsilon<f(x_0-\delta)\leq f(x)\leq A<A+\varepsilon.$$

$$\therefore |f(x)-A|<\varepsilon.$$

即：$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0-)$存在，同理$f(x_0^+)$存在.

对$\forall x_0\in(a,b), f(x_0^+), f(x_0^-)$存在.

五、小结

1、函数连续的定义

2、连续函数的性质

3、初等函数的连续性

4、函数的间断点

作业

习题2.5

1, 2, 3