第三讲 时域分析法

3.1. 基本要求

(1) 熟练掌握一、二阶系统的数学模型和阶跃响应的特点。熟练计算性能指标和结构参数，特别是一阶系统和典型欠阻尼二阶系统性能指标的计算方法。

(2) 了解一阶系统的脉冲响应和斜坡响应的特点。

(3) 正确理解系统稳定性的概念，能熟练运用稳定性判据判定系统的稳定性并进行有关的参数计算、分析。

(4) 正确理解稳态误差的概念，明确终值定理的应用条件。

(5) 熟练掌握计算稳态误差的方法。

(6) 掌握系统的型次和静态误差系数的概念。

3.2 重点讲解

1, 本章首先研究一、二阶系统，虽然是因为它们最简单，研究它们没有什么数学上的困难，通过它的研究便于由浅入深地建立动态过程、性能指标等时域分析的概念，还因为实际系统中存在这样的系统或部件，更重要的是在近似意义下，高阶系统可以当成一、二阶模型来研究。因此一、二阶系统的研究成为时域分析的基础。

2, 在一、二阶系统研究中引入了标准形式和标准化参数，研究的结论都是针对标准形式的。所以运用已有结果的前提是善于把给定系统转化为标准形式。

例如系统的方程为

$$a_2\ddot{c}(t)+a_1\dot{c}(t)+a_0c(t)=b_0r(t) \qquad a_2\neq 0$$

系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0/a_2}{s^2+(a_1/a_2)s+(a_0/a_2)}=\frac{(b_0/a_0)(a_0/a_2)}{s^2+(a_1/a_2)s+(a_0/a_2)}$$

若 $a_0/a_2>0$,可令 $\omega_n^2=\dfrac{a_0}{a_2}$，$2\varsigma\omega_n=\dfrac{a_1}{a_2}$ ，$K\omega_n^2=\dfrac{b_0}{a_0}\cdot\dfrac{a_0}{a_2}$，由此可得系统的参数 a_i,b_0 与标准参数 ω_n,ς 的关系为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}，\ \varsigma=\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}} \ ，\ K=\frac{b_0}{a_0}$$

当 $a_0=b_0$ 时,$K=1$,就是式(3-7)的标准形式，当 $a_0\neq b_0$ 时,$K\neq 1$ 在求 $\sigma\%,t_s$ 等相对指标时仍可用标准形式的结果，但求动态过程的绝对指标例如稳态值，最大值均要考虑 K 值的影响。

例题 3-1 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{22}{(s+1)(s+3)}$$

若系统输入为 r (t)=1(t)，求出系统输出的最大值 c_{Max} 和稳态值 c_s、超调量 $\sigma\%$、调节时间 t_s。

解 闭环系统的传递函数为

$$\phi(s)=\frac{22}{(s+1)(s+3)+22}=\frac{(22/25)25}{s^2+4s+25}$$

由 $\omega_n^2=25$, $2\varsigma\omega_n=4$ 可知 $\omega_n=5$, $\varsigma=0.4$。由式(3-13),式(3-14)可计算出

$$\sigma\%=25.4\%,\quad t_s=1.5(秒)$$

计算稳态值必须要考虑因子(22/25)=0.88 的作用，故最大值和稳态值分别为

$$c_{Max}=0.88\cdot(1+0.254)=1.104,\quad c_s=\frac{22}{25}\cdot 1=0.88$$

3,一、二阶系统几种类型问题

(1)已知系统的结构和参数，计算性能指标。

(2)给定性能指标和系统结构，求系统的参数的取值，

(3)已知输入和输出曲线图，求系统的结构(传递函数) 或参数。

例题 3-2 系统的结构图如图 3-1 所示，要求阶跃响应的指标为 $\sigma\%$=15%，$t_p=0.8$ 秒，试选取参数 K_1, K_t 的值。

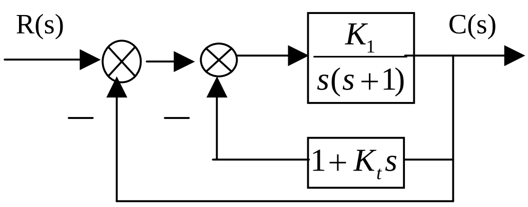

图 3-1　例题 3-2 图

解　闭环系统的传递函数

$$\phi(s)=\frac{K_1}{s(s+1)+K(1+K_ts)}=\frac{K_1}{s^2+(1+K_1K_t)s+K_1}$$

找出标准参数 ω_n, ς

$$\omega_n^2=K_1 \qquad \omega_n=\sqrt{K_1}$$

$$2\varsigma\omega_n=1+K_1K_t \qquad \varsigma=\frac{1+K_1K_t}{2\sqrt{K_1}}$$

由教材式(3-32)可得 $e^{-\pi\varsigma/\sqrt{1-\varsigma^2}}=0.15$,解出 $\varsigma=0.52$。

由教材 (3-31)可得 $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}}=0.8$，将 $\varsigma=0.52$ 代入后可求出 $\omega_n=4.6$。

$$K_1 = 4.6^2 = 21.2$$

$$\frac{1+K_1K_t}{2\sqrt{K_1}} = 0.52 \qquad K_t = 0.82$$

例题 3-3 系统的结构图如图 3-2(a)所示，其中 K_1, K_2 均为正数。如果测得系统的阶跃响应曲线分别如图 3-2(b) 、(c) 、(d) 、(e)所示。判断每种响应所对应的系统两个反馈的极性(0 表示断路)，并阐明理由。

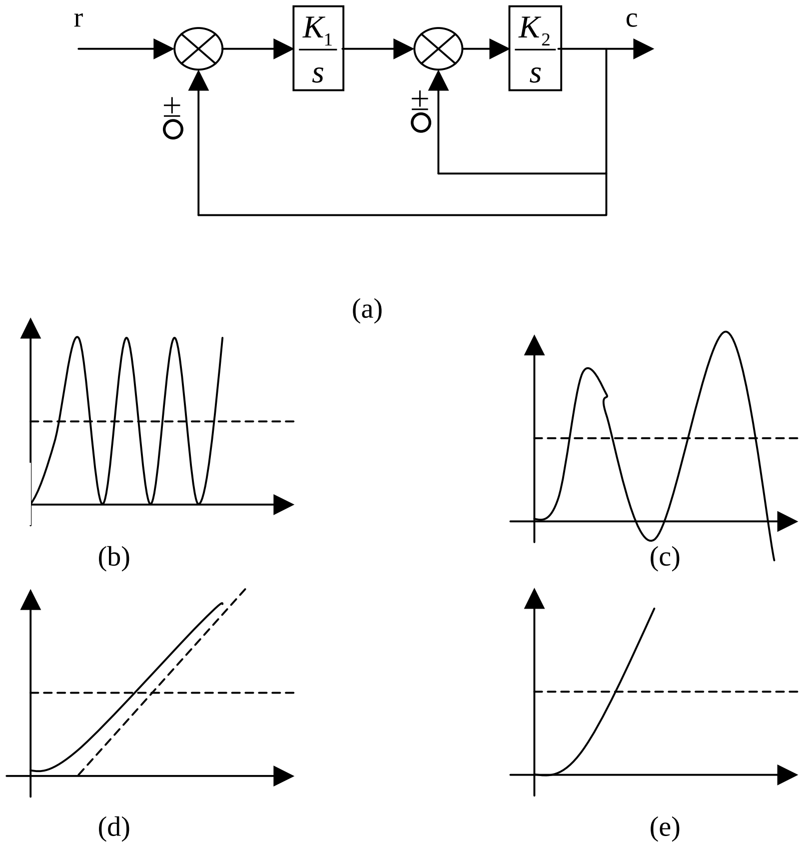

图 3-2　例题 3-3 图

解　本题属已知输入和输出曲线图，求系统的反馈的连接形式。关键点是了解所给曲线对应的特征根的类型和不同反馈连接对闭环特征根的影响。

(b) 输出曲线是等幅振荡形式，说明闭环特征根是一对纯虚根；系统所处的状态：内回路断开，外回路是负反馈。(c) 输出曲线是振荡发散形式，说明闭环特征根是一对具有正实部的共轭复数根；系统所处的状态：内回路为正反馈，外回路是负反馈。(d) 输出曲线经过一段过渡过程后趋于直线，说明闭环特征根为一零根、一负实根；系统所处的状态：内回路是负反馈，外回路断开。(e) 输出曲线以抛物线形式发散，说明闭环特征根为二个零根，系统所处的状态：内回路和外回路均断开。

4, 稳定性是系统正常工作的必要条件；一个用式(2-1) 描述的常参量线性系统，稳定充要条件是特征方程的根都位于复平面的左半部。对一个反馈系统而言，就是闭环传递函数的全部极点都位于复平面的左半部。闭环传递函数的极点就是闭环特征方程的根。因此，判别闭环

系统是否稳定，就需要首先求出闭环传递函数的分母多项式即闭环特征方程，再依照劳思判据、古尔维茨判据等来判别。

对一个反馈系统，不能简单地由开环系统是否稳定来判断闭环系统的稳定性；也不能简单地由反馈的极性(正反馈或负反馈)来判断闭环系统的稳定性；稳定性的判别需严格按稳定性判据进行。

5,闭环系统稳定性的问题类型

(1) 已知系统的结构和参数，计算闭环特征方程，依照判据来判别稳定性。

(2) 按照闭环系统稳定性的要求，决定系统参数的取值范围，主要是解联立不等式。

(3) 按照闭环系统稳定性的要求，调整系统的结构，并选择系统的参数，使系统稳定。

例题 3-3 系统的结构图如图 3-3(a)所示，图中 K, β 均为正数。试决定闭环系统稳定时系统参数 K, β 的取值范围，并在 K, β 参数平面上画出使闭环系统稳定的区域。

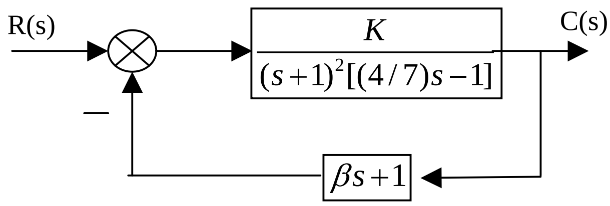

图 3-3(a)例题 3-3 系统的结构图

解　求出闭环系统的特征式为

$$\frac{4}{7}s^3+\frac{1}{7}s^2+(\beta K-\frac{10}{7})s+K-1=0$$

由闭环特征式各项系数大于零，可得 $K>1,\ \beta K>10/7$，由 $D_2=a_1a_2-a_0a_3>0$ 可得

$$\frac{1}{7}(\beta K-\frac{10}{7})-\frac{4}{7}(K-1)>0$$

上式成立的条件为　$\beta K-10/7-4K+4>0$，即 $(\beta-4)K+18/7>0$ 综合有关 K, β 的三个不等式，可知在 K, β 参数平面上画影线的区域内闭环系统稳定,参看图 3-3(b) 。

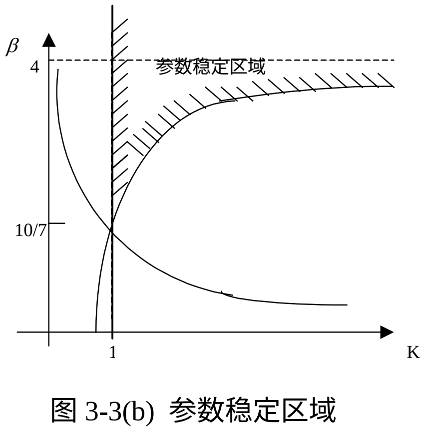

图 3-3(b) 参数稳定区域

例题 3-4 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{0.025s^3+0.35s^2+s}$$

(1)确定使系统稳定的 K 值范围；

(2)要使系统闭环极点的实部不大于 -1，试确定 K 的取值范围。

解：(1) 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K}{0.025s^3+0.35s^2+s+K}$$

闭环特征方程为 $0.025s^3+0.35s^2+s+K=0$

列出劳斯表如下

s^3	0.025	1
s^2	0.35	K
s^1	$1-0.025K/0.35$	0
s^0	K	

要使系统稳定，表中第一列所有元素必须全大于 0，因此

$$1-0.025K/0.35>0,\quad K>0$$

所以使系统稳定的 K 值范围为 $0<K<14$。

(2)将 $s=s_1-1$ 代入系统的特征方程，得

$$0.025(s_1-1)^3+0.35(s_1-1)^2+(s_1-1)+K=0$$

即

$$s_1{}^3+11s_1{}^2+15s_1+(40K-27)=0$$

为使该特征方程的根均在 s_1 平面之左，由稳定的充分必要条件

① $a_i>0$，则 $40K-27>0$，得 $K>0.675$

② $D_2=a_1a_2-a_0a_3>0$，即 $11\times15-(40K-27)>0$，得 $K<4.8$

所以 K 的取值范围为 $0.675<K<4.8$。

注：本题在解第一小题时，使用了劳斯判据。劳斯判据在使用中有两处容易出错，一是劳斯表上前两行系数的排列和古尔维茨行列式系数的排列混淆；二是计算 c_{13} 的分子时(或 c_{ij} ，参考表(3-1)与通常二阶行列式计算混同。

6,结构不稳定系统

一个系统，如果无论如何调整参数均不能稳定，则称为结构不稳定系统。对结构不稳定系统，只有首先改变结构，然后才可能调整参数使之稳定。参看例题 3-5

结构不稳定系统在系统闭环特征方程上反映出来的是有缺项(系数为零)或者有固定的不随参数变化的负系数项，例如闭环特征式为

$$s^3+11s^2+(40K-27)=0\quad\text{(缺少一次项)}$$

$$s^3-11s^2+15s+(40K-27)=0$$ (二次项为负，不受参数 K 的影响)

对一个单位负反馈系统，造成这种现象的原因可能是开环传递函数中包含有较多数目的不稳定环节和积分环节，而且开环传递函数分子的次数较低；

7, 终值定理使用条件、内模原理和系统稳定性

回忆拉氏变换的终值定理：若极限 $\lim_{t\to\infty} f(t), \lim_{s\to 0} sF(s)$ 存在，则有

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

在计算系统误差的终值(稳态误差)时，遇到的误差的象函数 $E(s)$ 一般是 s 的有理分式函数，这时当且仅当 $sE(s)$ 的极点均在左半面，就可保证 $\lim_{t\to\infty} e(t), \lim_{s\to 0} sE(s)$ 存在，式(1-8)就成立。事实上，当 $sE(s)$ 的极点均在左半面时，说明 $E(s)$ 的分母多项式至多有一个零根，其它均是左半面的根，利用 $E(s)$ 部分分式分解式易于说明 $\lim_{t\to\infty} e(t), \lim_{s\to 0} sE(s)$ 均存在。反之，若 $sE(s)$ 的极点有正实部或零实部的根时，$E(s)$ 部分分式分解式中必有如下分解式之一存在

$$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}, \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}, \frac{1}{s^2}$$

这里 $\alpha\ge 0, \omega>0$，上式分解式的拉氏反变换为：$e^{\alpha t}\cos\omega t, e^{\alpha t}\sin\omega t, t$。它们在 t 趋向无穷的极限均不存在。无法运用终值定理。

进而分析 $sE(s)$ 的极点均在左半面的条件，以对控制作用的误差为例，有

$$E(s)=\Phi_{er}(s)R(s)=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)$$

若记 $$G_1(s)G_2(s)H(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_2^2 s^2+2\zeta\tau_2 s+1)\cdots}{s^{\upsilon}(T_1 s+1)\cdots(T_2^2 s^2+2\zeta T_2 s+1)\cdots}$$

则 $$E(s)=\frac{s^{\upsilon}(T_1 s+1)\cdots(T_2^2 s^2+2\zeta T_2 s+1)\cdots\cdots}{s^{\upsilon}(T_1 s+1)\cdots(T_2^2 s^2+2\zeta T_2 s+1)\cdots+K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_2^2 s^2+2\zeta\tau_2 s+1)\cdots}R(s)$$

上面分式中的分母

$$s^{\upsilon}(T_1 s+1)\cdots(T_2^2 s^2+2\zeta T_2 s+1)\cdots+K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_2^2 s^2+2\zeta\tau_2 s+1)\cdots$$

就是闭环特征式，将输入表示成

$$R(s)=\frac{M_r(s)}{D_r(s)}$$

式中多项式 $D_r(s)$ 的零点或在虚轴上或在右半面。(请读者考虑为什么不考察左半部的零点)

$$sE(s)=\frac{s^{\upsilon+1}\left(T_1 s+1\right)\cdots\left(T_2^2 s^2+2\zeta T_2 s+1\right)\cdots\cdots}{s^{\upsilon}\left(T_1 s+1\right)\cdots\left(T_2^2 s^2+2\zeta T_2 s+1\right)\cdots+K\left(\tau_1 s+1\right)\cdots\left(\tau_2^2 s^2+2\zeta\tau_2 s+1\right)\cdots}\cdot\frac{M_r(s)}{D_r(s)}$$

若要 $sE(s)$ 的极点全在左半面应满足两个条件：

(1) 闭环特征式的根全在左平面，即系统稳定；

(2) 要求多项式 $s^{\upsilon+1}\left(T_1 s+1\right)\cdots\left(T_2^2 s^2+2\zeta T_2 s+1\right)\cdots\cdots$ 包含有 $D_r(s)$ 的所有因式。

在上述两个条件满足时，有两种情况：

(1) $s^{\upsilon+1}\left(T_1 s+1\right)\cdots\left(T_2^2 s^2+2\zeta T_2 s+1\right)\cdots\cdots$ 与 $D_r(s)$ 的所有因式相约后仍有因子 s，这时表明 $G_1(s)G_2(s)H(s)$ 的分母包含有 $D_r(s)$ 的所有因式(又称满足内模原理)，则有

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=0$$

系统在 $R(s)=\dfrac{M_r(s)}{D_r(s)}$ 作用下无稳态误差。

(2) $s^{\upsilon+1}\left(T_1 s+1\right)\cdots\left(T_2^2 s^2+2\zeta T_2 s+1\right)\cdots\cdots$ 与 $D_r(s)$ 的所有因式相约后没有因子 s，则有

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\text{常数}$$

系统在 $R(s)=\dfrac{M_r(s)}{D_r(s)}$ 作用下有常值的稳态误差。

例题 3-5 系统的结构图如图 3-4 所示，其中 T, K_2 均为正数。若控制输入 r(t)=t, 干扰 n(t)=1(t), 试设计简单的 $G_c(s)$，使得系统在 r(t) 和 n(t)同时作用下无稳态误差。

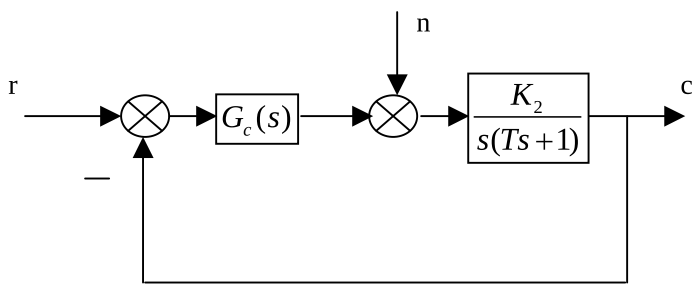

图 3-4　系统的结构图

解 (1)考虑控制输入 r(t)=t，令 n(t)=0。控制输入 r(t)=t 的拉氏变换为 $\dfrac{1}{s^2}$ 为了不引起稳态误差，$G_c(s)$ 应有一个积分环节即满足内模原理。若 $G_c(s)$ 取 $\dfrac{K_1}{s}$，这时闭环特征式为

$$Ts^3+s^2+K_1K_2=0$$

闭环特征式缺少一次项，系统结构不稳定，原因是分子次数是零次，必须改变结构，可取 $G_c(s)=\dfrac{K_1(\tau s+1)}{s}$，这时闭环特征式为

$$Ts^3+s^2+K_1K_2(\tau s+1)=0$$

由闭环特征式各项系数大于零，可得 $K_2>0,\ \tau>0$，由 $D_2=a_1a_2-a_0a_3>0$ 可得 $\tau>T$，因此只要取 $G_c(s)=\dfrac{K_1(\tau s+1)}{s}$,且 $K_2>0,\ \tau>T$。就可保证控制输入 r(t)=t 作用下无稳态误差。

(2)考虑干扰输入 n(t)=1(t)，令 r(t)=0。应当注意的是：干扰引起的全部系统输出 $c_n(t)$ 均是误差，由梅逊公式容易求出

$$E_n(s)=-C_n(s)=\frac{-K_2s}{Ts^3+s^2+K_1K_2(\tau s+1)}\cdot\frac{1}{s}$$

$sE_n(s)$ 的极点全在左半面，故有

$$\lim_{t\to\infty}e_n(t)=\lim_{s\to 0}sE_n(s)=0$$

即只要取 $G_c(s)=\dfrac{K_1(\tau s+1)}{s}$,且 $K_2>0,\ \tau>T$。就可保证系统在 r(t) 和 n(t)同时作用下无稳态误差。

注：在干扰作用点之前的传递函数 $G_c(s)$ 的极点中包含了干扰的极点。

8, 本章知识点及联系

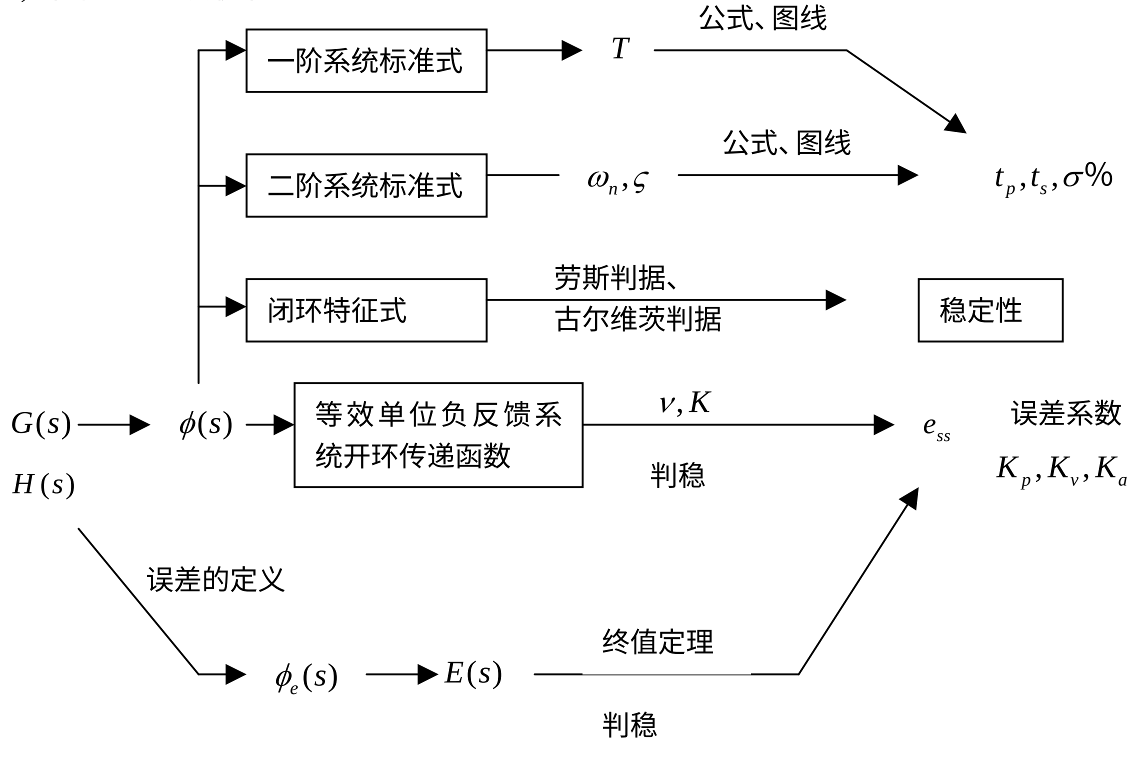

图 3-13　本章知识点及联系