§8.3 无穷积分的Dirichlet和Abel收敛判别法

定理3.1（Cauchy收敛原理）

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \text{对}\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a,$$

$$\text{只要}A', A'' > A_0, \text{总有} \quad \left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

证明： $\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} F(A)\text{存在},$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{对}\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a, \quad \text{只要}A', A'' > A_0, \text{总有}$$

$$\left|F(A'') - F(A')\right| < \varepsilon,$$

$$\Leftrightarrow \quad \cdots\cdots \quad \left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

推论3.1（绝对收敛）

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \text{ 收敛} \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}$$

证明： $\because \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛,

对$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a$, 只要$A', A'' > A_0$, 总有

$$\int_{A'}^{A''} |f(x)|dx < \varepsilon,$$

$$\therefore \left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| \le \int_{A'}^{A''} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

如$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$收敛, 称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$是绝对收敛.

如$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛, 但$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$发散,

称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$是条件收敛.

绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛

收敛 $\not\Rightarrow$ 绝对收敛 .

Riemann积分相反

即：若f在$[a,b]$上黎曼可积, 则$|f|$也在$[a,b]$上黎曼可积.

反例: $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ ——条件收敛 见例3

例 1 设 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 连续可微, $x\to+\infty$时，$f(x)$递减趋于0,

证明$\int_1^{\infty} f(x)dx$收敛的充分必要条件是$\int_1^{\infty} xf'(x)dx$收敛.

证明：若 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 收敛,

$$\forall\varepsilon>0,\exists A'>0,A>A',\varepsilon>\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(x)dx\ge\int_{\frac{A}{2}}^{A} f(A)dx=\frac{A}{2}f(A)$$

$$\Rightarrow\lim_{A\to\infty}\frac{A}{2}f(A)=0$$

。

$$\text{而}\int_{A_1}^{A_2} xf'(x)dx=A_2 f(A_2)-A_1 f(A_1)-\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx$$

$$A_1,A_2>A'\text{有}\left|A_2 f(A_2)\right|<\varepsilon,\left|A_1 f(A_1)\right|<\varepsilon,\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\left|\int_{A_1}^{A_2} xf'(x)dx\right|<3\varepsilon$$

另一方面若 $\int_1^{\infty} xf^{'}(x)dx$ 收敛，则

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = xf(x)\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} xf^{'}(x)dx$$

因此问题归结为证明 $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ 存在.

$$\forall\varepsilon>0,\exists A^{\bullet}>0, A>A^{'}, A^{'}>A^{'}, \left|\int_A^{A^{'}} xf^{'}(x)dx\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\left|A\int_A^{A^{'}} f^{'}(x)dx\right| = \left|Af(A)-Af(A')\right| \le \left|\int_A^{A'} xf'(x)dx\right|<\varepsilon$$

上式中令 $A^{'}\to+\infty, \left|Af(A)\right|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ 存在，得证.

例2 判别广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$ $(a, b$ 都是常数$a > 0)$ 的收敛性.

解: $\because \left|e^{-ax}\sin bx\right| \le e^{-ax}$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ 收敛.

$\therefore \int_0^{+\infty}\left|e^{-ax}\sin bx\right|dx$ 收敛.

所以所给广义积分收敛.

第二积分中值定理

① 若$f(x)\in R[a,b]$，且$g(x)$是$[a,b]$上非负递减函数，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx;$$

② 若$f(x)\in R[a,b]$，且$g(x)$是$[a,b]$上非负递增函数，则$\exists\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)dx.$$

第三积分中值定理

设$f(x)\in R[a,b]$，且$g(x)$是$[a,b]$上的单调函数，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

考虑$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛性.

$f(x)$和$g(x)$应满足什么条件?

分析:

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)dx + g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)dx$$

$$\xi \in [A', A'']$$

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right|$$

$$\le |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)dx\right|$$

$$< \varepsilon$$

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx? \qquad g(x)?$$

判断$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$的敛散性

定理3.2(Dirichlet判别法)

设$f(x)$和$g(x)$满足下面两个条件：

1° $F(A)=\int_a^A f(x)dx$在$(a,+\infty)$上有界;

2° $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

证明： 由第三积分中值定理有:

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)dx + g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)dx,$$

其中$\xi\in[A',A'']$.

所以有$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right|$

由1°，$\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| = |F(\xi)-F(A')| \le 2M,$

$$\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| = |F(A'')-F(\xi)| \le 2M,$$

由$2^\circ, \forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a, \forall A', A'' > A_0$，总有

$$|g(A')| < \varepsilon, |g(A'')| < \varepsilon.$$

因此当$A', A'' > A_0$时，$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le 4M\varepsilon,$

由*Cauchy*收敛原理知，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

例3 证明$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$是条件收敛.

证明： (1)由于$\left|\int_1^A \sin x dx\right| = |\cos A - \cos 1| \le 2$, 满足$1^\circ$

又$g(x)=\frac{1}{x}$,递减趋向于0,满足2°, 所以$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛.

(2) 由于$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$,

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$收敛, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$发散,

所以$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$发散.

综上$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$是条件收敛.

定理3.3(Abel判别法)

设$f(x)$和$g(x)$满足下面两个条件：

1° $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,

2° $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界,

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明： 由1°, $\forall \varepsilon>0, \exists A_0$, 当$A', A''>A_0$时, 总有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

由2°, $|g(x)|\le M$,

$$\therefore \left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right|,$$

$$\le M\cdot\varepsilon + M\varepsilon = 2M\varepsilon,\ \text{其中}\ \xi\in[A', A''],$$

由$Cauchy$收敛原理知，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例4 讨论积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx\ (p>0)$的敛散性.

解: (1) 当$p>1$时，由于

$$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\right|\le\frac{\pi}{2x^p},$$

由比较判别法知，原积分收敛;

(2) 当$0<p\le 1$时，由于

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}$收敛，$\arctan x$在[1, +∞)上单调有界,

由$Abel$判别法知，原积分收敛;

为什么?

但当$0<p\le 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}|\sin x|dx$发散,

所以此时条件收敛 .

作业

习题8.3

1，2，3，4