第四章 扭 转

题号 页码

（也可通过左侧的题号书签直接查找题目与解）

4-5 一受扭薄壁圆管，外径 $D = 42\text{mm}$，内径 $d = 40\text{mm}$，扭力偶矩 $M = 500\text{N}\cdot\text{m}$，切变模量 G=75GPa。试计算圆管横截面与纵截面上的扭转切应力，并计算管表面纵线的倾斜角。

解：该薄壁圆管的平均半径和壁厚依次为

$$R_0 = \frac{1}{2}(\frac{D}{2}+\frac{d}{2}) = 20.5\text{mm}，\quad \delta = \frac{D}{2}-\frac{d}{2} = 1\text{mm}$$

于是，该圆管横截面上的扭转切应力为

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2\delta} = \frac{500\text{N}}{2\pi\times 0.0205^2\times 0.001\text{m}^2} = 1.894\times 10^8\,\text{Pa} = 189.4\text{MPa}$$

依据切应力互等定理，纵截面上的扭转切应力为

$$\tau' = \tau = 189.4\text{MPa}$$

该圆管表面纵线的倾斜角为

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{189.4\times 10^6}{75\times 10^9}\text{rad} = 2.53\times 10^{-3}\,\text{rad}$$

4-7 试建立薄壁圆管的扭转切应力公式，即式（4-8），并证明当 $R_0/\delta \geq 10$ 时，该公式的最大误差不超过 4.53%。

解：设薄壁圆管的平均半径和壁厚分别为 R_0 和 δ。微剪力 τdA 对截面圆心（矩心）的微力矩为 $R_0 \tau dA$，由静力学关系知，该截面的扭矩为

$$T = \int_A R_0 \tau \mathrm{d}A \tag{a}$$

由于中心对称，τ 沿圆周方向大小不变；又由于管壁很薄，τ 沿壁厚方向也可近似地认为是均匀分布的。于是，式(a)可以写成

$$T = R_0 \tau A \tag{b}$$

对于薄壁圆管，其横截面面积为

$$A \approx 2\pi R_0 \delta \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，得薄壁圆管的扭转切应力公式为

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2 \delta}$$

设 $R_0 / \delta = \beta$，按上述公式计算的扭转切应力为

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2 \delta} = \frac{T}{2\pi \beta^2 \delta^3} \tag{d}$$

按照一般空心圆轴考虑，轴的内、外直径依次为

$$d = 2R_0 - \delta, \quad D = 2R_0 + \delta$$

横截面的极惯性矩为

$$I_{\mathrm{p}} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32}[(2R_0+\delta)^4 - (2R_0-\delta)^4] = \frac{\pi R_0 \delta}{2}(4R_0^2 + \delta^2)$$

由此可得

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_{\mathrm{p}}}(R_0 + \frac{\delta}{2}) = \frac{T}{\pi R_0 \delta (4R_0^2 + \delta^2)}(2R_0 + \delta) = \frac{T(2\beta+1)}{\pi \beta \delta^3 (4\beta^2+1)} \tag{e}$$

将式(d)与式(e)作比较，即

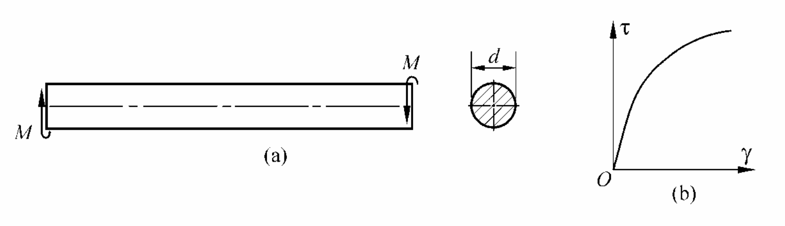
$$\frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{T}{2\pi\beta^2\delta^3} \cdot \frac{\pi\beta\delta^3(4\beta^2+1)}{T(2\beta+1)} = \frac{4\beta^2+1}{2\beta(2\beta+1)}$$

当 $\beta = \dfrac{R_0}{\delta} = 10$ 时，

$$\frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{4\times 10^2 + 1}{2\times 10 \times (2\times 10 + 1)} = 0.9548$$

可见，当 $R_0/\delta \geq 10$ 时，按薄壁圆管的扭转切应力公式计算 τ 的最大误差不超过 **4.53%**。

4-8 图 **a** 所示受扭圆截面轴，材料的 $\tau-\gamma$ 曲线如图 **b** 所示，并可用 $\tau = C\gamma^{1/m}$ 表示，式中的 C 与 m 为由试验测定的已知常数。试建立扭转切应力公式，并画横截面上的切应力分布图。



题 4-8 图

解：所研究的轴是圆截面轴，平面假设仍然成立。据此，从几何方面可以得到

$$\gamma_\rho = \rho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{a}$$

根据题设，轴横截面上距圆心为 ρ 处的切应力为

$$\tau_\rho = C(\rho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x})^{1/m} \tag{b}$$

由静力学可知，

$$\int_A \rho\tau_\rho \mathrm{d}A = C(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x})^{1/m} \int_A \rho^{(m+1)/m} \mathrm{d}A = T \tag{c}$$

取径向宽度为 $\mathrm{d}\rho$ 的环形微面积作为 $\mathrm{d}A$，即

$$\mathrm{d}A = 2\pi\rho\mathrm{d}\rho \tag{d}$$

将式(d)代入式(c)，得

$$2\pi C(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x})^{1/m} \int_0^{d/2} \rho^{(2m+1)/m} \mathrm{d}\rho = T$$

由此得

$$(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x})^{1/m} = \frac{(3\mathrm{m}+1)T}{2\pi C\mathrm{m}(\frac{d}{2})^{(3m+1)/m}} \tag{e}$$

将式(e)代入式(b)，并注意到 $T=M$，最后得扭转切应力公式为

$$\tau_\rho = \frac{M\rho^{1/m}}{\frac{2\pi m}{3m+1}(\frac{d}{2})^{(3m+1)/m}}$$

横截面上的切应力的径向分布图示如图 **4-8**。

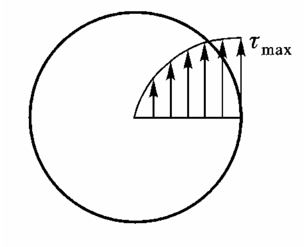
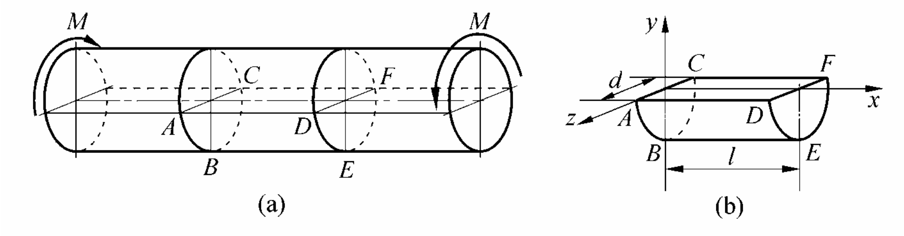


图 4-8

4-9 在图 a 所示受扭圆截面轴内，用横截面 ***ABC*** 和 ***DEF*** 与径向纵截面 ***ADFC*** 切出单元体 ***ABCDEF***（图 b）。试绘各截面上的应力分布图，并说明该单元体是如何平衡的。



题 4-9 图

解：单元体 ***ABCDEF*** 各截面上的应力分布图如图 4-9a 所示。

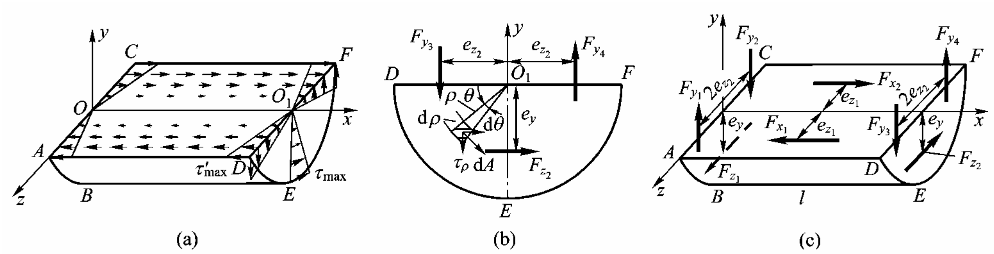


图 4-9

根据图 a，不难算出截面 AOO_1D 上分布内力的合力为

$$F_{x_1}=\frac{1}{2}\tau'_{\max}(\frac{d}{2}l)=\frac{4Tl}{\pi d^2}$$

同理，得截面 $OCFO_1$ 上分布内力的合力为

$$F_{x_2}=\frac{4Tl}{\pi d^2}$$

方向示如图 c。

设 F_{x_1} 与 F_{x_2} 作用线到 x 轴线的距离为 e_{z_1}，容易求出

$$e_{z_1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{d}{2}=\frac{d}{3}$$

根据图 b，可算出单元体右端面上水平分布内力的合力为

$$F_{z_2}=\int_0^{\pi}\int_0^{d/2}\frac{T\rho}{I_{\mathrm{p}}}\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{8T}{3\pi d}$$

同理，左端面上的合力为

$$F_{z_1}=\frac{8T}{3\pi d}$$

方向亦示如图 c。

设 F_{z_2} 作用线到水平直径 DF 的距离为 e_y （见图 b），由

$$F_{z_2}e_y=\frac{T}{I_{\mathrm{p}}}\int_0^{\pi}\cos^2(\frac{\pi}{2}-\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{d/2}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{T}{4}$$

得

$$e_y=\frac{T}{4}\cdot\frac{3\pi d}{8T}=\frac{3\pi d}{32}\approx 0.295d$$

同理，F_{z_1} 作用线到水平直径 AC 的距离也同此值。

根据图 b，还可算出半个右端面 DO_1E 上竖向分布内力的合力为

$$F_{y_3}=\int_0^{\pi/2}\int_0^{d/2}\frac{T\rho}{I_{\mathrm{p}}}\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\frac{4T}{3\pi d}$$

设 F_{y_3} 作用线到竖向半径 O_1E 的距离为 e_{z_2} （见图 b），由

$$F_{y3}e_{z2}=\frac{T}{I_{\mathrm{p}}}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{d/2}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{T}{8}$$

得

$$e_{z_2}=\frac{T}{8}\cdot\frac{3\pi d}{4T}=\frac{3\pi d}{32}\approx 0.295d$$

同理，可算出另半个右端面 O_1FE 以及左端面 AOB、OCB 上的竖向分布内力的合力为

$$F_{y_4}=F_{y_1}=F_{y_2}=\frac{4T}{3\pi d}$$

方向均示如图 c。它们的作用线到所在面竖向半径的距离均为 e_{z_2} 。

由图 c 可以看得很清楚，该单元体在四对力的作用下处于平衡状态，这四对力构成四个力偶，显然，这是一个空间力偶系的平衡问题。

$$\sum M_x=0，F_{y_4}\cdot(2e_{z_2})+F_{z_2}\cdot e_y-F_{y_1}\cdot(2\mathrm{e}_{z_2})-F_{z_1}\cdot e_y=\frac{T}{2}-\frac{T}{2}=0$$

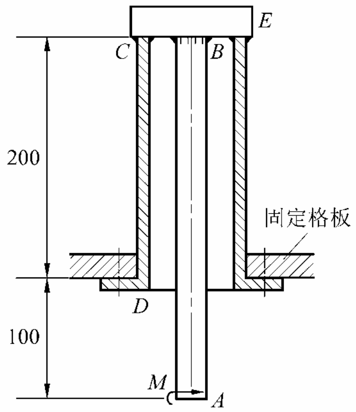
$$\sum M_y=0,\ F_{z_2}\cdot l-F_{x_1}\cdot(2e_{z_1})=\frac{8Tl}{3\pi d}-\frac{8Tl}{3\pi d}=0$$

$$\sum M_z=0,\ F_{y_4}\cdot l-F_{y_3}\cdot l=\frac{4Tl}{3\pi d}-\frac{4Tl}{3\pi d}=0$$

既然是力偶系，力的平衡方程（共三个）自然满足，这是不言而喻的。

上述讨论中，所有的T在数值上均等于M。

4-11 如图所示，圆轴 ***AB*** 与套管 ***CD*** 用刚性突缘 ***E*** 焊接成一体，并在截面 ***A*** 承受扭力偶矩 ***M*** 作用。圆轴的直径 ***d*** = **56mm**，许用切应力[τ_1]=**80MPa**，套管的外径 ***D*** = **80mm**，壁厚δ = **6mm**，许用切应力[τ_2]= **40MPa**。试求扭力偶矩 ***M*** 的许用值。



题 4-11 图

解：由题图知，圆轴与套管的扭矩均等于 ***M***。

1.由圆轴AB求M的许用值M_1

$$\tau_{\max 1}=\frac{M_1}{W_{p1}}=\frac{16M_1}{\pi d^3}\le[\tau_1]$$

由此得

$$M_1\le\frac{\pi d^3[\tau_1]}{16}=\frac{\pi\times0.056^3\times80\times10^6}{16}\mathrm{N\cdot m}=2.76\times10^3\mathrm{N\cdot m}=2.76\mathrm{kN\cdot m}$$

2．由套管CD求M的许用值M_2

$$R_0=\frac{D-\delta}{2}=\frac{80-6}{2}\mathrm{mm}=37\mathrm{mm},\ \delta=6\mathrm{mm}>R_0/10$$

此管不是薄壁圆管。

$$\alpha=\frac{80-6\times2}{80}=\frac{68}{80}=0.85$$

$$\tau_{\max 2}=\frac{M_2}{W_{p2}}=\frac{16M_2}{\pi\ D^3(1-\alpha^4)}\le[\tau_2]$$

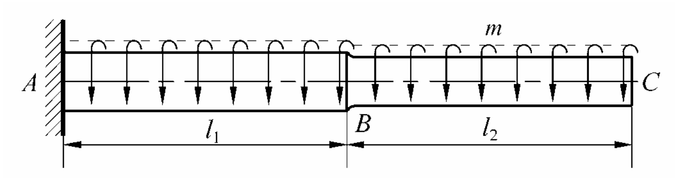
由此得

$$M_2 \le \frac{\pi D^3(1-\alpha^4)[\tau_2]}{16} = \frac{\pi \times 0.080^3 \times (1-0.85^4) \times 40 \times 10^6}{16} \mathrm{N \cdot m}$$

$$= 1.922 \times 10^3 \mathrm{N \cdot m} = 1.922 \mathrm{kN \cdot m}$$

结论：扭力偶矩的许用值为 $[M] = 1.922\mathrm{kN \cdot m}$。

4-13 图示阶梯形轴，由 ***AB*** 与 ***BC*** 两段等截面圆轴组成，并承受集度为 ***m*** 的均匀分布的扭力偶矩作用。为使轴的重量最轻，试确定 ***AB*** 与 ***BC*** 段的长度 l_1 与 l_2 以及直径 d_1 与 d_2。已知轴总长为 l，许用切应力为[τ]。



题 4-13 图

解：1.求 d_1

在截面 A 处有最大扭矩，其值为

$$T_{\max 1} = ml$$

由该截面的扭转强度条件

$$\tau_{\max 1} = \frac{T_{\max 1}}{W_{\mathrm{p}1}} = \frac{16ml}{\pi d_1^3} \le [\tau]$$

得

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16ml}{\pi[\tau]}} \tag{a}$$

2．求 $d_2(l_2)$

BC 段上的最大扭矩在截面 B 处，其值为

$$T_{\max 2} = ml_2$$

由截面 B 的扭转强度条件可得

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16\mathrm{m}l_2}{\pi[\tau]}}$$

3．求 $V(l_2)$

该轴的总体积为

$$V=\frac{\pi}{4}d_1^2(l-l_2)+\frac{\pi}{4}d_2^2 l_2$$

$$=\frac{\pi}{4}[(\frac{16ml}{\pi[\tau]})^{2/3}(l-l_2)+(\frac{16ml_2}{\pi[\tau]})^{2/3}l_2]$$

4．求l_2

根据极值条件

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_2}=0$$

得

$$-(\frac{16ml}{\pi[\tau]})^{2/3}+(\frac{16\mathrm{m}}{\pi[\tau]})^{2/3}\times\frac{5}{3}l_2^{2/3}=0$$

即

$$l_2=(\frac{3}{5})^{3/2}l\approx 0.465l \tag{b}$$

5.求l_1和d_2

$$l_1=l-l_2=[1-(\frac{3}{5})^{3/2}]l\approx 0.535l \tag{c}$$

$$d_2=(\frac{16\mathrm{m}}{\pi[\tau]})^{1/3}\cdot l_2^{1/3}=(\frac{3}{5})^{1/2}\sqrt[3]{\frac{16ml}{\pi[\tau]}}\approx 0.775d_1 \tag{d}$$

该轴取式(a)~(d)所给尺寸，可使轴的体积最小，重量自然也最轻。

4-14 一密圈螺旋弹簧，承受轴向载荷 F = 1kN 作用。设弹簧的平均直径 D = 40mm，弹簧丝的直径 d = 7mm，许用切应力[τ]= 480MPa，试校核弹簧的强度。

解：由于

$$m=\frac{D}{d}=\frac{40}{7}=5.71<10$$

故需考虑曲率的影响，此时，

$$\tau_{\max}=\frac{8FD(4m+2)}{\pi d^3(4m-3)}=\frac{8\times 1.00\times 10^3\times 0.040\times(4\times 5.71+2)\mathrm{N}}{\pi\times 0.007^3\times(4\times 5.71-3)\mathrm{m}^2}$$

$$=3.72\times 10^8\,\mathrm{Pa}=372\mathrm{MPa}$$

结论：$\tau_{\max}<[\tau]$，该弹簧满足强度要求。

4-19 一薄壁圆管，两端承受扭力偶矩 M 作用。设管的平均半径为 R_0，壁厚为δ，管长为 l，切变模量为 G，试证明薄壁圆管的扭转角为

$$\varphi=\frac{Ml}{2G\pi R_0^3\delta}$$

证明：解此证明题的思路是$\tau\to\gamma\to\varphi$。

薄壁圆管的扭转切应力为

$$\tau=\frac{T}{W_p}=\frac{M}{2\pi R_0^2\delta}$$

从而有

$$\gamma=\frac{\tau}{G}=\frac{M}{2G\pi R_0^2\delta}$$

注意到切应变γ代表了圆管母线AB的倾斜角，示如图 **4-19**。右端点B绕所在截面圆心转过弧段 ***BB'***，在小变形条件下，其值

$$s=\gamma\, l=\frac{Ml}{2G\pi R_0^2\delta}$$

弧段 ***BB'***所对应的圆心角，正是圆管右端面相对于左端面的扭转角，即

$$\phi=\frac{s}{R_0}=\frac{Ml}{2G\pi R_0^3\delta}$$

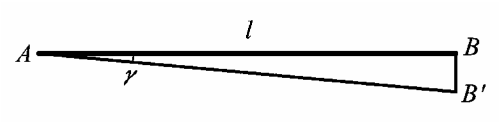
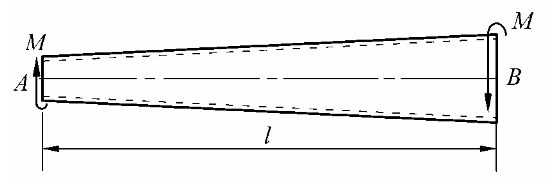


图 **4-19**

4-20 图示圆锥形薄壁轴 ***AB***，两端承受扭力偶矩 ***M*** 作用。设壁厚为δ，横截面 ***A*** 与 ***B*** 的平均直径分别为 d_A 与 d_B，轴长为 ***l***，切变模量为 ***G***。试证明截面 ***A*** 和 ***B*** 间的扭转角为

$$\varphi_{A/B}=\frac{2Ml}{\pi G\delta}\frac{(d_A+d_B)}{d_A^2d_B^2}$$



题 **4-20** 图

证明：自左端A向右取坐标x，轴在x处的平均半径为

$$R_0(x)=\frac{1}{2}(d_A+\frac{d_B-d_A}{l}x)=\frac{1}{2}(d_A+cx)$$

式中，

$$c=\frac{d_B-d_A}{l}$$

轴在 x 处的极惯性矩为

$$I_{\mathrm{p}}=2\pi R_0^3\delta=2\pi\delta[\frac{1}{2}(d_A+cx)]^3=\frac{\pi\delta}{4}(d_A+cx)^3$$

依据

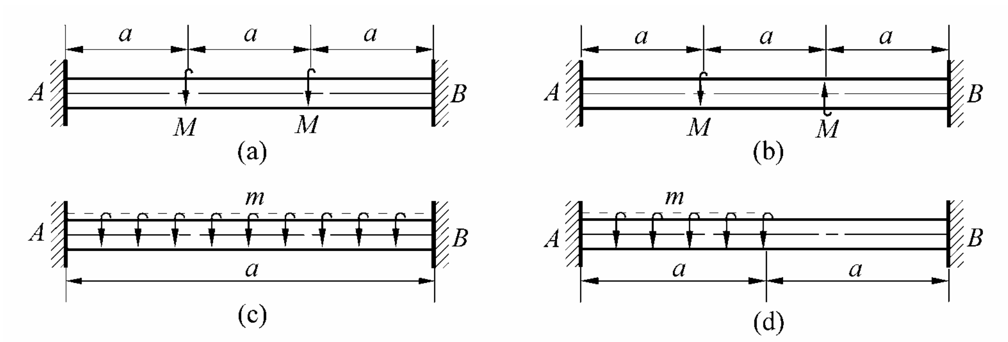
$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T(x)}{GI_{\mathrm{p}}}=\frac{4M}{G\pi\delta\,(d_A+cx)^3}$$

得截面 A 和 B 间的扭转角为

$$\varphi_{A/B}=\frac{4M}{\pi G\delta}\int_0^l\frac{\mathrm{d}(d_A+cx)}{\mathrm{c}(d_A+cx)^3}=\frac{-2M}{\pi G\delta\,\mathrm{c}}(d_A+cx)^{-2}\mid_0^l$$

$$=\frac{-2Ml}{\pi G\delta\,(d_B-d_A)}(\frac{1}{d_B^2}-\frac{1}{d_A^2})=\frac{2Ml(d_A+d_B)}{\pi G\delta\,\mathrm{d}_A^2\,d_B^2}$$

4-21 图示两端固定的圆截面轴，承受扭力偶矩作用。试求支反力偶矩。设扭转刚度为已知常数。



题 4-21 图

(a)解：此为静不定轴，但有对称条件可以利用。

设 A 与 B 端的支反力偶矩分别为 M_A和M_B，它们的转向与扭力偶矩 M 相反。由于左右对称，故知

$$M_A=M_B$$

由 $\sum M_x=0$ 可得

$$M_A+M_B=2M_A=2M$$

即

$$M_A = M_B = M$$

(b)解：此为静不定轴，可解除右端约束，代之以支反力偶矩M_B，示如图 **4-21b**。

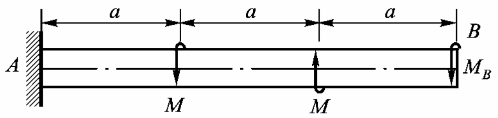


图 4-21b

变形协调条件为

$$\varphi_B = 0 \tag{a}$$

利用叠加法求φ_B，得到

$$\varphi_B = \frac{Ma}{GI_p} - \frac{M(2a)}{GI_p} + \frac{M_B(3a)}{GI_p} \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，可得

$$M_B = \frac{1}{3}M$$

进而求得

$$M_A = \frac{1}{3}M \quad \text{（转向与 } M_B \text{ 相反）}$$

(c)解：此为静不定轴，与(a)类似，利用左右对称条件，容易得到

$$M_A = M_B = \frac{ma}{2}$$

M_A、M_B的转向与m相反。

(d)解：此为静不定轴，可解除右端约束，代之以支反力偶矩M_B，从变形趋势不难判断，

M_B的转向与m相反。

变形协调条件为

$$\varphi_B = 0 \tag{c}$$

利用叠加法求φ_B，得到（x从左端向右取）

$$\varphi_B = \varphi_{B,m} + \varphi_{B,M_B} = \int_0^a \frac{m(a-x)}{GI_\mathrm{p}}\mathrm{d}x - \frac{M_B(2a)}{GI_\mathrm{p}} = \frac{ma^2}{2GI_\mathrm{p}} - \frac{2M_B a}{GI_\mathrm{p}} \tag{d}$$

将式**(d)**代入式**(c)**，可得

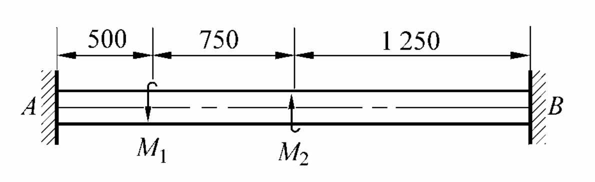
$$M_B = \frac{ma}{4}$$

进而求得

$$M_A = ma - M_B = \frac{3ma}{4}$$

M_A 的转向亦与 m 相反。

4-22 试确定图示轴的直径。已知扭力偶矩 M_1=400N·m，M_2=600N·m，许用切应力[τ]=40MPa，单位长度的许用扭转角[θ]=0.25(°) / m，切变模量 G = 80GPa。



题 4-22 图

解：1.求 M_B，画扭矩图

此为静不定轴，设 B 端支反力偶矩为 M_B，该轴的相当系统示如图 4-22a。

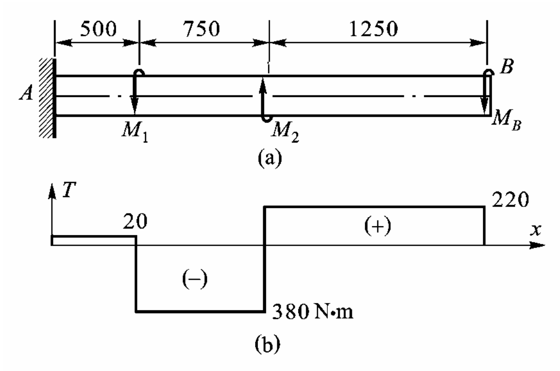


图 4-22

用叠加法求 φ_B，

$$\varphi_B = \frac{1}{GI_p}[400 \times 0.500 - 600 \times 1.250 + M_B \times 2.500]$$

将其代入变形协调条件 $\varphi_B = 0$，得

$$M_B = \frac{(600 \times 1.250 - 400 \times 0.500)\mathrm{N \cdot m^2}}{2.500\mathrm{m}} = 220\mathrm{N \cdot m}$$

该轴的扭矩图示如图 4-22b。

2.由圆轴扭转的强度条件求 d

由扭矩图易见，

$$|T|_{\max} = 380\text{N}\cdot\text{m}$$

将其代入扭转强度条件，

$$\tau_{\max} = \frac{|T|_{\max}}{W_{\text{p}}} = \frac{16|T|_{\max}}{\pi d^3} \le [\tau]$$

由此得

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16|T|_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16\times 380\text{m}^3}{\pi\times 40\times 10^6}} = 0.0364\text{m} = 36.4\text{mm}$$

3.由圆轴扭转的刚度条件求 *d*

将最大扭矩值代入

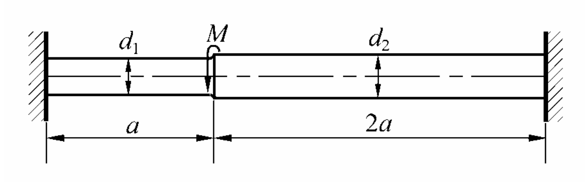
$$\frac{|T|_{\max}}{GI_{\text{p}}} = \frac{32|T|_{\max}}{G\pi d^4} \le [\theta]$$

得

$$d \ge \sqrt[4]{\frac{32|T|_{\max}}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32\times 380\times 180\text{m}^4}{\pi\times 80\times 10^9\times 0.25\pi}} = 0.0577\text{m} = 57.7\text{mm}$$

结论：最后确定该轴的直径 $d \ge 57.7\text{mm}$。

4-23 图示两端固定阶梯形圆轴，承受扭力偶矩 ***M*** 作用。为使轴的重量最轻，试确定轴径 d_1 与 d_2，已知许用切应力为$[\tau]$。



题 4-23 图

解：解法 1

1.几何方面

此为静不定轴，本题从几何分析入手比较方便。解题思路为：

$$\varphi \to \gamma \to \tau \to d_2/d_1 \to T \to d_2$$

在 M 作用下，M 所在截面 C 只有一个扭转角，故知变形协调条件为

$$\varphi_{AC} = |\varphi_{BC}| = \varphi_C \qquad \text{(a)}$$

这里足标中的 ***A*** 和 ***B*** 系指轴的左端面和右端面。

2．物理方面

依据剪切胡克定律，有

$$\gamma_{1\max} = \frac{\tau_{1\max}}{G}，\quad \gamma_{2\max} = \frac{\tau_{2\max}}{G} \qquad \text{(b)}$$

要使轴最轻，只有使$\tau_{1\max}=\tau_{2\max}=[\tau]$才能实现（等强度观点），由式(b)可得

$$\gamma_{1\max}=\gamma_{2\max} \tag{c}$$

注意到

$$\gamma_{1\max}=\frac{\varphi_C(d_1/2)}{a}，\ \gamma_{2\max}=\frac{\varphi_C(d_2/2)}{2a} \tag{d}$$

将式(d)代入式(c)，得到

$$\frac{d_2}{d_1}=2 \tag{e}$$

3．静力学方面

从M 作用截面处取一轴段，由该轴段的力矩平衡条件，可得

$$T_1+\left|T_2\right|=M \tag{f}$$

又从等强度要求可知，

$$T_1=W_{\mathrm{p}_1}[\tau]，\ \left|T_2\right|=W_{\mathrm{p}_2}[\tau]$$

由此可得

$$\frac{\left|T_2\right|}{T_1}=\frac{W_{\mathrm{p}_2}}{W_{\mathrm{p}_1}}=(\frac{d_2}{d_1})^3=8 \tag{g}$$

联解方程(g)与(f)，得

$$\left|T_2\right|=8T_1=\frac{8}{9}M$$

进而由

$$\left|T_2\right|=\frac{\pi d_2^3}{16}[\tau]=\frac{8}{9}M$$

得到轴的直径为

$$d_2=\sqrt[3]{\frac{16\times 8M}{9\pi[\tau]}}=2\sqrt[3]{\frac{16M}{9\pi[\tau]}}=2d_1$$

解法 2

1．静力学方面

设该轴左、右端的支反力偶矩分别为 $\boldsymbol{M_A}$ 和 $\boldsymbol{M_B}$，并设它们均与 $\boldsymbol{M}$ 反向。由$\sum M_x=0$得

$$M_A+M_B-M=0$$

或以扭矩表示为

$$T_1+|T_2|-M=0 \tag{a}$$

2．几何方面

设 M 所在截面为 C，可写出变形协调条件为

$$\varphi_{AC}+\varphi_{CD}=0$$

或写成

$$\varphi_{AC}=\left|\varphi_{CB}\right| \tag{b}$$

3.物理方面

$$\varphi_{AC}=\frac{T_1 a}{GI_{\mathrm{p}1}},\qquad \left|\varphi_{CB}\right|=\frac{\left|T_2\right|\cdot 2a}{GI_{\mathrm{p}2}} \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，得

$$\frac{T_1}{\left|T_2\right|}=\frac{2I_{\mathrm{p}_1}}{I_{\mathrm{p}_2}}=\frac{2d_1^4}{d_2^4} \tag{d}$$

为使该轴最轻，引入等强度条件

$$\tau_{1\max}=\tau_{2\max}=[\tau]$$

即

$$\frac{T_1}{W_{\mathrm{p}_1}}=\frac{\left|T_2\right|}{W_{\mathrm{p}_2}}=[\tau] \tag{e}$$

由此得

$$\frac{T_1}{|\,T_2\,|}=\frac{W_{\mathrm{p}_1}}{W_{\mathrm{p}_2}}=\frac{d_1^3}{d_2^3} \tag{f}$$

比较式(d)和(f)，得

$$d_2=2d_1 \tag{g}$$

将方程(a)与补充方程(f)联解，并注意到式(g)，有

$$\left|T_2\right|=8T_1=\frac{8}{9}M$$

进而由式(e)得到

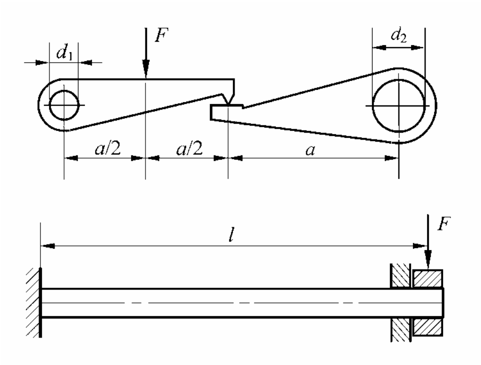
$$\left|T_2\right|=\frac{[\tau]\pi d_2^3}{16}=\frac{8}{9}M$$

由此可得

$$d_2=2\sqrt[3]{\frac{16M}{9\pi[\tau]}}=2d_1$$

4-24 图示二平行圆轴，通过刚性摇臂承受载荷 F 作用。试求轴端的扭转角。已知

载荷 F=750N，轴 1 和轴 2 的直径分别为 d_1=12mm 和 d_2=15mm，轴长均为 l=500mm，摇臂长度 a =300mm，切变模量 G = 80GPa。



题 4-24 图

解：这是静不定问题。

变形协调条件为

$$\varDelta_1 = \varDelta_2 \text{ 或 } |\varphi_1| = \varphi_2 \tag{a}$$

这里，$\varDelta_1$和$\varDelta_2$分别为刚性摇臂 1 和 2 在接触点处的竖向位移。

设二摇臂的接触力为 F_2，则轴 1 和 2 承受的扭矩分别为

$$|T_1| = F(\frac{a}{2}) - F_2 a，\ T_2 = F_2 a \tag{b}$$

物理关系为

$$|\varphi_1| = \frac{|T_1| l}{G I_{p1}}，\ \varphi_2 = \frac{T_2 l}{G I_{p2}} \tag{c}$$

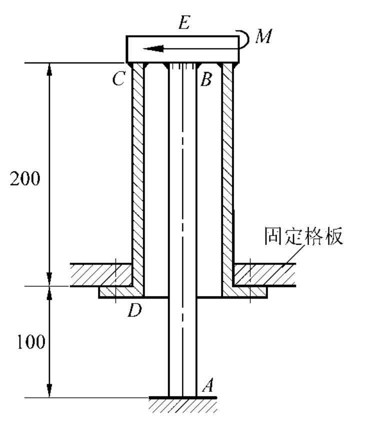
将式(c)代入式(a)，并注意到式(b)，可得

$$F_2 = \frac{d_2^4 F}{2(d_1^4 + d_2^4)}$$

由此得

$$\varphi_2 = \frac{T_2 l}{G I_{p2}} = \frac{16 F a l}{\pi G (d_1^4 + d_2^4)} = \frac{16 \times 750 \times 0.300 \times 0.500 \text{m}}{\pi \times 80 \times 10^9 \times (0.012^4 + 0.015^4) \text{m}}$$
$$= 0.1004\ \text{rad} = 5.75^\circ = |\varphi_1|$$

4-26 如图所示，圆轴 AB 与套管 CD 借刚性突缘 E 焊接成一体，并在突缘 E 承受扭力偶矩 M 作用。圆轴的直径 d=38mm，许用切应力[τ_1]=80MPa，切变模量 G_1=80GPa；套管的外径 D = 76mm，壁厚 δ = 6mm，许用切应力[τ_2]= 40MPa，切变模量 G_2 = 40GPa。试求扭力偶矩 M 的许用值。



题 4-26 图

解：1.解静不定，求 T_1 与 T_2

此为静不定问题。静力学关系和变形协调关系分别为

$$T_1 + T_2 = M \tag{a}$$

和

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{b}$$

物理关系为

$$\varphi_1 = \frac{T_1 l_1}{G_1 I_{\mathrm{p}_1}}，\ \varphi_2 = \frac{T_2 l_2}{G_2 I_{\mathrm{p}_2}} \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，并注意到

$$\alpha = \frac{76-12}{76} = 0.8421，\ I_{\mathrm{p2}} = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)，\ I_{\mathrm{p1}} = \frac{\pi d^4}{32}$$

可得

$$T_1 = \frac{G_1 I_{\mathrm{p1}} l_2}{G_2 I_{\mathrm{p2}} l_1} T_2 = \frac{2d^4}{D^4(1-\alpha^4)} \cdot \frac{2}{3} T_2 = \frac{4\times 38^4}{3\times 76^4(1-0.8421^4)} T_2 = 0.1676 T_2 \tag{d}$$

将方程(a)与(d)联解，得

$$T_2 = 0.856M，\ T_1 = 0.144M$$

2．由圆轴的强度条件定 M 的许用值

$$\tau_{1\max} = \frac{T_1}{W_{\mathrm{p1}}} = \frac{16\times 0.144M}{\pi d^3} \le [\tau_1]$$

由此得

$$M \le \frac{\pi d^3 [\tau_1]}{16\times 0.144} = \frac{\pi \times 0.038^3 \times 80\times 10^6}{16\times 0.144}\mathrm{N\cdot m} = 5.99\times 10^3\,\mathrm{N\cdot m} = 5.99\mathrm{kN\cdot m}$$

3.由套管的强度条件定 M 的许用值

$$\tau_{2\max}=\frac{T_2}{W_{p2}}=\frac{16\times0.856M}{\pi D^3(1-\alpha^4)}\le[\tau_2]$$

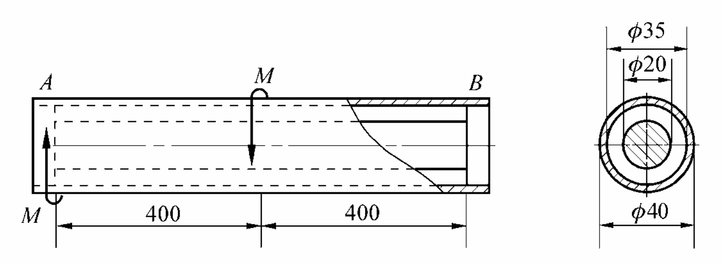
由此得

$$M\le\frac{\pi D^3(1-\alpha^4)[\tau_2]}{16\times0.856}=\frac{\pi\times0.076^3\times(1-0.8421^4)\times40\times10^6}{16\times0.856}\text{N}\cdot\text{m}$$

$$=2.00\times10^3\text{N}\cdot\text{m}=2.00\text{kN}\cdot\text{m}$$

结论：扭力偶矩的许用值为$[M]=2.00\text{kN}\cdot\text{m}$。

4-27 图示组合轴，由圆截面钢轴与铜圆管并借两端刚性平板连接成一体。该轴承受扭力偶矩 **M=100N·m** 作用，试校核其强度。设钢与铜的许用切应力分别为$[\tau_s]$**=80MPa** 与$[\tau_c]$**=20MPa**，切变模量分别为 **G_s=80GPa** 与 **G_c=40GPa**。



题 4-27 图

解：1.解静不定，求T_s和T_{c1}

此为静不定问题。为看清楚起见，可将钢轴与铜管拆开，二者的受力图分别示如图 **4-27a** 和 b。

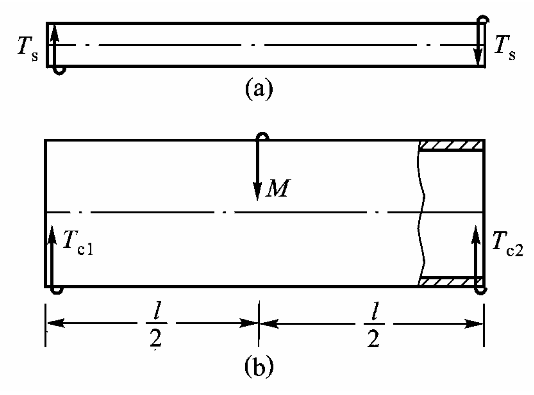


图 4-27

静力学方面

$$T_s+T_{c1}=M,\quad |T_{c2}|=T_s \tag{a}$$

几何方面

$$\varphi_s=\varphi_c=\varphi_{c1}=\varphi_{c2} \tag{b}$$

物理方面

$$\varphi_{s}=\frac{\mathrm{T}_{s} l}{G_{s} I_{ps}}，\quad \varphi_{c}=\frac{(T_{c1}-|T_{c2}|)}{\mathrm{G}_{c} I_{p_c}}(\frac{l}{2}) \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，并注意到式(a)中的第二式及$G_{s}/G_{c}=2$，得

$$(1+\frac{I_{pc}}{I_{ps}})T_{s}=T_{c1} \tag{d}$$

将

$$\alpha=\frac{35}{40}=0.875，\ I_{ps}=\frac{\pi\times0.020^{4}}{32}\mathrm{m}^{4}=1.571\times10^{-8}\mathrm{m}^{4}$$

$$I_{pc}=\frac{\pi\times0.040^{4}}{32}\times(1-0.875^{4})\mathrm{m}^{4}=1.040\times10^{-7}\mathrm{m}^{4}$$

代入式(d)，得

$$7.62T_{s}=T_{c1} \tag{e}$$

再将式(e)代入式(a)中的第一式，得到

$$T_{s}=0.116M=11.6\mathrm{N\cdot m}，\ T_{c1}=0.884M=88.4\mathrm{N\cdot m}$$

2．校核强度

对于钢轴，

$$\tau_{s,\max}=\frac{T_{s}}{W_{ps}}=\frac{16\times11.6\mathrm{N}}{\pi\times0.020^{3}\mathrm{m}^{2}}=7.38\times10^{6}\mathrm{Pa}=7.38\mathrm{MPa}<[\tau_{s}]$$

对于铜管，

$$\tau_{c,\max}=\frac{T_{c1}}{W_{pc}}=\frac{16\times88.4\mathrm{N}}{\pi\times0.040^{3}(1-0.875^{4})\mathrm{m}^{2}}=1.700\times10^{7}\mathrm{Pa}=17.00\mathrm{MPa}<[\tau_{c}]$$

结论：二者均满足扭转强度要求。

4-28 将截面尺寸分别为ϕ**100mm×90mm** 与ϕ**90mm×80mm** 的两钢管相套合，并在内管两端施加扭力偶矩 M_0**=2kN·m** 后，将其两端与外管相焊接。试问在去掉扭力偶矩 M_0 后，内、外管横截面上的最大扭转切应力。

解：1.解静不定，求 T_i 与 T_e

此为静不定问题。内管两端施加M_{0}后，产生的扭转角为

$$\varphi_{0}=\frac{M_{0} l}{G I_{p_i}} \tag{a}$$

去掉M_{0}后，有静力学关系

$$T_{i}=T_{e} \tag{b}$$

几何关系为

$$\varphi_i + \varphi_e = \varphi_0 \tag{c}$$

物理关系为

$$\varphi_i = \frac{T_i l}{G I_{\mathrm{p}_i}},\quad \varphi_e = \frac{T_e l}{G I_{\mathrm{p}_e}} \tag{d}$$

将式(d)和式(a)代入式(c)，得

$$\frac{T_i l}{G I_{\mathrm{p}_i}} + \frac{T_e l}{G I_{\mathrm{p}_e}} = \frac{M_0 l}{G I_{p_i}}$$

或写成

$$\frac{T_e}{I_{\mathrm{p}_e}} = \frac{M_0 - T_i}{I_{\mathrm{p}_i}}$$

由此得

$$T_e = \frac{I_{\mathrm{p}_e}}{I_{\mathrm{p}_i}}(M_0 - T_i) = 1.395(M_0 - T_i) \tag{e}$$

将方程(e)与(b)联解，得

$$T_i = T_e = 0.5825 M_0 = 1.165\mathrm{kN \cdot m}$$

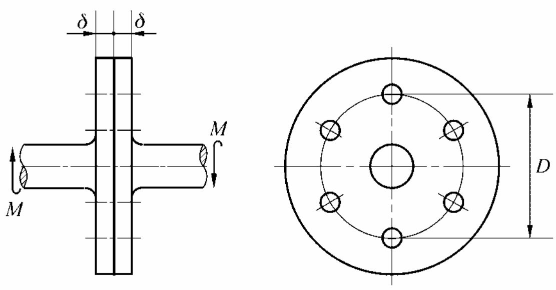
2.计算最大扭转切应力

内、外管横截面上的最大扭转切应力分别为

$$\tau_{i,\max} = \frac{T_i}{W_{\mathrm{p}i}} = \frac{16 \times 1165\mathrm{N}}{\pi \times 0.090^3[1-(8/9)^4]\mathrm{m}^2} = 2.17 \times 10^7\mathrm{Pa} = 21.7\mathrm{MPa}$$

$$\tau_{e,\max} = \frac{T_e}{W_{\mathrm{p}e}} = \frac{16 \times 1165\mathrm{N}}{\pi \times 0.100^3 \times (1-0.9^4)\mathrm{m}^2} = 1.725 \times 10^7\mathrm{Pa} = 17.25\mathrm{MPa}$$

4-29 图示二轴，用突缘与螺栓相连接，各螺栓的材料、直径相同，并均匀地排列在直径为 D = 100mm 的圆周上，突缘的厚度为 δ =10mm，轴所承受的扭力偶矩为 M = 5.0kN·m，螺栓的许用切应力[τ]=100MPa，许用挤压应力[σ_{bs}]=300MPa。试确定螺栓的直径 d。



题 4-29 图

解：1.求每个螺栓所受的剪力

由

$$\sum M_x = 0, \quad 6F_s(\frac{D}{2}) = M$$

得

$$F_s = \frac{M}{3D}$$

2.由螺栓的剪切强度条件求 d

$$\frac{F_s}{A} = \frac{4M}{3\pi Dd^2} \leq [\tau]$$

由此得

$$d \geq \sqrt{\frac{4M}{3\pi D[\tau]}} = \sqrt{\frac{4 \times 5.0 \times 10^3 \mathrm{m}^2}{3\pi \times 0.100 \times 100 \times 10^6}} = 1.457 \times 10^{-2} \mathrm{m} = 14.57\mathrm{mm}$$

3.由螺栓的挤压强度条件求 d

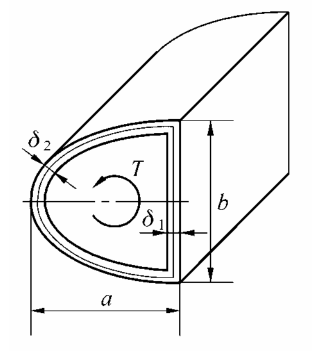
$$\sigma_{bs} = \frac{F_b}{\delta d} = \frac{M}{3D\delta \mathrm{d}} \leq [\sigma_{bs}]$$

由此得

$$d \geq \frac{M}{3D\delta[\sigma_{bs}]} = \frac{5.0 \times 10^3 \mathrm{m}}{3 \times 0.100 \times 0.010 \times 300 \times 10^6} = 5.56 \times 10^{-3} \mathrm{m} = 5.56\mathrm{mm}$$

结论：最后确定螺栓的直径 $d \geq 14.57\mathrm{mm}$。

4-33 **图示半椭圆形闭口薄壁杆，*a*=200mm，*b*=160mm，δ_1=3mm，δ_2= 4mm，T=6kN·m。试求最大扭转切应力。**



题 4-33 图

解：该薄壁杆截面中心线所围面积为

$$\varOmega = \pi(a - \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_2}{2})(\frac{b - \delta_2}{4})$$

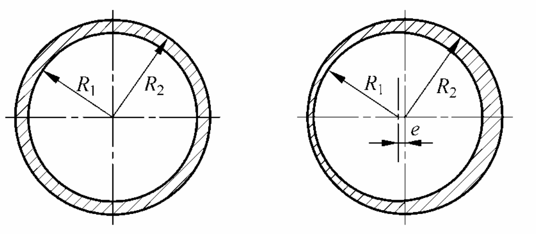
$$= \pi(0.200 - 0.0015 - 0.002)(\frac{0.160 - 0.004}{4})\mathrm{m}^2$$

$$= 2.41 \times 10^{-2} \mathrm{m}^2$$

由此得最大扭转切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\Omega\delta_{\min}} = \frac{6\times10^3\,\mathrm{N}}{2\times2.41\times10^{-2}\times0.003\mathrm{m}^2} = 4.15\times10^7\,\mathrm{Pa} = 41.5\mathrm{MPa}$$

4-34 图 a 所示等厚度薄壁圆管，内、外壁的半径分别为 R_1 与 R_2，即壁厚 $\delta = R_2 - R_1$。因加工原因，圆管内壁轴线与外壁轴线间存在偏差 e（图 b）。若图 a 和 b 所示圆管的许用扭力偶矩分别为$[T_0]$与$[T]$，试建立二者间的关系式，并计算当偏差$e=\delta/10$与$e=\delta/2$时，许用扭力偶矩的降低量（用$[T_0]$的百分比表示）。



题 4-34 图

解：对于等厚度薄壁圆管，平均半径和壁厚分别为

$$R_0 = \frac{R_1+R_2}{2},\quad \delta = R_2 - R_1$$

根据扭转强度条件

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2\delta} \le [\tau]$$

得

$$T \le 2\pi(\frac{R_1+R_2}{2})^2(R_2-R_1)[\tau]$$

由此得

$$[T_0] = \frac{\pi}{2}(R_1+R_2)^2(R_2-R_1)[\tau] \tag{a}$$

对于有加工偏差e的变厚度薄壁圆管，平均半径同上，但最小壁厚成为

$$\delta_{\min} = R_2 - R_1 - e$$

根据扭转强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\pi R_0^2\delta_{\min}} \le [\tau]$$

得

$$T \le 2\pi(\frac{R_1+R_2}{2})^2(R_2-R_1-e)[\tau]$$

由此得

$$[T] = \frac{\pi}{2}(R_1+R_2)^2(R_2-R_1-e)[\tau] \tag{b}$$

比较式(b)和式(a)，不难找到二者的关系，其关系式为

$$[T]=[T_0]\frac{(R_2-R_1)-e}{(R_2-R_1)}=[T_0](1-\frac{e}{\delta})$$

当偏差 $e=\delta/10$ 和 $e=\delta/2$ 时，$[T]$ 与 $[T_0]$ 的比值依次为

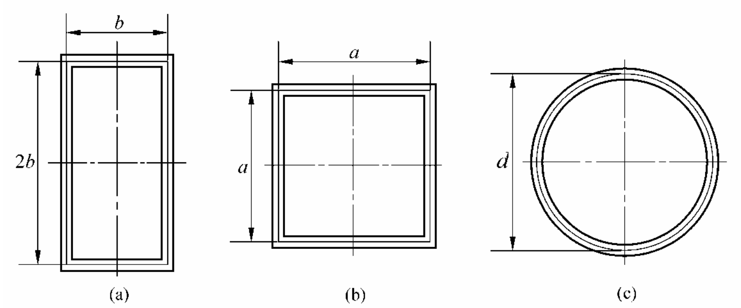
$$\frac{[T]}{[T_0]}=(1-\frac{1}{10})=\frac{90}{100}$$

和

$$\frac{[T]}{[T_0]}=(1-\frac{1}{2})=\frac{50}{100}$$

即许用扭力偶矩的降低率依次为 10%和 50%。

4-35 图示三种截面形状的闭口薄壁杆，若截面中心线的长度、壁厚、杆长、材料以及所受扭矩均相同，试计算最大扭转切应力之比和扭转角之比。



题 4-35 图

解：由于三者中心线的长度相同，故有

$$2\times(2b+b)=4a=\pi d$$

由此得

$$b=\frac{\pi d}{6},\quad a=\frac{\pi d}{4}$$

据此可求得长方形、正方形及圆形薄壁截面的 Ω，其值依次为

$$\Omega_1=2b^2=\frac{\pi^2d^2}{18}$$

$$\Omega_2=a^2=\frac{\pi^2d^2}{16}$$

$$\Omega_3=\frac{\pi d^2}{4}$$

依据

$$\tau_{\max}=\frac{T}{2\Omega\delta_{\min}}$$

可得三种截面薄壁杆的最大扭转切应力之比为

$$\tau_{矩\max} : \tau_{方\max} : \tau_{圆\max} = 1.432 : 1.273 : 1$$

依据

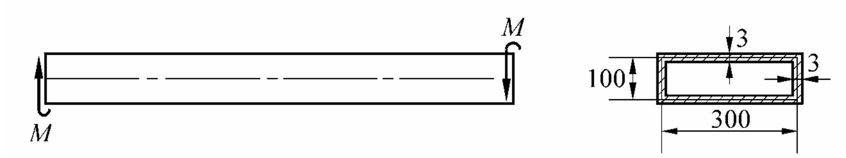
$$\varphi = \frac{Tl}{4G\Omega^2} \oint \frac{\mathrm{d}s}{\delta}$$

可得三种截面薄壁杆的扭转角之比为

$$\varphi_{矩} : \varphi_{方} : \varphi_{圆} = 2.05 : 1.621 : 1$$

结果表明：在题设条件下，圆形截面薄壁杆的扭转强度及扭转刚度均最佳，正方形截面薄壁杆的次之，长方形截面薄壁杆的最差。一般说来，在制造闭口薄壁杆时，应尽可能加大其中心线所围的面积 Ω，这样对强度和刚度均有利。

4-36 图示闭口薄壁杆，承受扭力偶矩 M 作用，试计算扭力偶矩的许用值。已知许用切应力 $[\tau]$=60MPa，单位长度的许用扭转角 $[\theta]$=0.5(°) / m，切变模量 G = 80GPa。若在杆上沿杆件母线开一槽，则许用扭力偶矩将减少至何值。



题 4-36 图

解：1.计算闭口薄壁杆扭力偶矩的许用值

由扭转强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\Omega\delta_{\min}} \le [\tau]$$

得

$$T \le 2\Omega\delta_{\min}[\tau] = 2 \times 0.100 \times 0.300 \times 0.003 \times 60 \times 10^6 \,\mathrm{N \cdot m}$$

$$= 1.080 \times 10^4 \,\mathrm{N \cdot m} = 10.80 \mathrm{kN \cdot m}$$

由扭转刚度条件

$$\theta = \frac{T}{4G\Omega^2} \oint \frac{\mathrm{d}s}{\delta} \le [\theta]$$

得

$$T \le \frac{4G\Omega^2[\theta]}{\oint \frac{\mathrm{d}s}{\delta}} = \frac{4 \times 80 \times 10^9 \times (0.100 \times 0.300)^2 \times 8.727 \times 10^{-3}}{\frac{2 \times (0.300 + 0.100)}{0.003}} \mathrm{N \cdot m}$$

$$= 9.43 \times 10^3 \,\mathrm{N \cdot m} = 9.43 \mathrm{kN \cdot m}$$

其中用到

$$[\theta]=\frac{0.5\times\pi}{180}\mathrm{rad/m}=8.727\times10^{-3}\mathrm{rad/m}$$

比较可知，

$$[M]=9.43\mathrm{kN\cdot m}$$

2.计算开口薄壁杆扭力偶矩的许用值

由扭转强度条件

$$\tau_{\max}=\frac{3T\delta_{\max}}{\sum_{i=1}^{n}h_i\delta_i^3}\leq[\tau]$$

得

$$T\leq\frac{[\tau]\sum_{i=1}^{n}h_i\delta_i^3}{3\delta_{\max}}=\frac{60\times10^6\times[2\times(0.300+0.100)\times0.003^3]}{3\times0.003}\mathrm{N\cdot m}=144.0\mathrm{N\cdot m}$$

由扭转刚度条件

$$\theta=\frac{3T}{G\sum_{i=1}^{n}h_i\delta_i^3}\leq[\theta]$$

得

$$T\leq\frac{[\theta]G\sum_{i=1}^{n}h_i\delta_i^3}{3}$$

$$=\frac{8.727\times10^{-3}\times80\times10^9\times[2\times(0.300+0.100)\times0.003^3]}{3}\mathrm{N\cdot m}=5.03\mathrm{N\cdot m}$$

比较可知，

$$[M]_{开}=5.03\mathrm{N\cdot m}$$