《工科数学分析 I》期末考试复习提纲

1．不定积分：原函数与不定积分的概念与基本性质，第一、二类换元积分法，分部积分法，有理函数的积分，万能变换……

例1． 求下列积分：

（1）$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$ （2）$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx$ （3）$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

（4）$\int \sin(\ln x)dx$ （5）$\int \cos ax\cos bx dx$ （6）$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

(7) $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$ (8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$ (9) $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$

(10) $\int (2^x+3^x)^2 dx$ （11）$\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$ （12）$\int x\arctan x dx$

（13）$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$ （14）$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$ （15）$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(16) $\int \frac{\boldsymbol{x}e^{\arctan x}}{(1+\boldsymbol{x}^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{dx}$, (17) $\int e^x\sin x dx$

(18) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$ (19) $\int \frac{x+1}{1+x+x^2}dx$

例2． 求 $I_1=\int \frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx$ 及 $I_2=\int \frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx.$

例3． 已知 $f'(\cos^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，$0<x<\frac{\pi}{2}$，试求 $f(x)$.

例4． 设 $f(x)+\sin x=\int \sin x f'(x)dx$，求 $f(x)$.

例5． 设 $f(x)=2|x|$，则 $\int f(x)dx=$

2．定积分：定积分的基本概念与基本性质，微积分基本定理，变限积分求导公式，定积分的计算，积分中值定理……

例 1．利用定积分定义求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\sin(\frac{k\pi}{n})$ （2）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

例 2．设 $f(x)=x^2-\int_1^2 x\,f(t)\,\mathrm{d}t+1$，求 $f(x)$.

例 3. 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，且单调增加，证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx \ge \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

例 4．求下列函数的导数：

（1） $f(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$ （2） $\int_{2\sin x}^{0} e^{t^2}\ln(1+t)dt$

例 5．求极限（1） $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{x\tan^2 x}$ （2） $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$

例 6，求下列定积分：

（1） $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ （2） $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

（3） $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$ （4） $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan xdx$

（5） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ 及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$ （6） $\int_{-1}^{1}(3\sin^{2011}x+2\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x$

（7） $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$（提示：使用公式 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$）

例 7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，递增，证明：$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

3．定积分的应用：定积分的几何应用：求平面图形的面积，旋转体的侧面积、体积，求已知截面面积的立体体积，求弧长……

例 1．求由抛物线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 所围图形面积.

例 2．求二曲线 $r=\sin\theta$ 与 $r=\sqrt{3}\cos\theta$ 所围公共部分面积.

例 3．求由曲线 $x^2+(y-a)^2=r^2$ 绕 x 轴旋转而得的曲面的面积.

例 4．在曲线 $y=\sqrt{x}(x\ge 0)$ 上一点 M 作切线，使得切线、曲线以及 x 轴所围的平面图形 D 的面积为 $\frac{1}{3}$，求

（1） 切点 M 的坐标；

（2） 过切点 M 的切线方程；

（3） 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所围成的旋转体的体积.

例6. 求圆的渐伸线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 的长度.

4．数项级数：数项级数的概念与基本性质，数项级数的 Cauchy 收敛原理，正项级数的比较判别法，Cauchy 根值判别法，比值判别法，交错级数的 Lebnizi 判别法，一般项级数的 Dirichlet、Abel 判别法，绝对收敛与条件收敛……

例 1．讨论下列级数的敛散性并求出级数和：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ （2） $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$

例 2．设数列 $\{na_n\}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 都收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

例 3．若数列 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 都收敛.

例 4．判断下列级数的收敛性：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}}$ （2） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^2}$

（3） $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1$ （4） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

（5） $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b})$ （6） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

（7） $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-4}{3n+1})^n$

例 5．判断下列级数的敛散性，如果收敛，是否绝对收敛：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n(n+1)}$ （2） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

例 6．判断下列级数的敛散性，如果收敛，是否绝对收敛：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ （2） $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{\frac{1}{n}}$

例 7．判断下列级数的敛散性，如果收敛，是否绝对收敛：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ （2） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} + \frac{\sin^2 nx}{n}$

（3） $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n(5-\arctan n)$ （4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$

5．广义积分：无穷积分与瑕积分收敛的定义，广义积分的基本性质，非负函数广义积分的比较判别法，广义积分收敛的 Cauchy 收敛准则，Dirichlet 判别法，Abel 判别法，绝对收敛与条件收敛……

例 1．判断下列广义积分的收敛性并求出积分值：

（1） $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ （2） $\int_0^1 \ln x dx$

（3） $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}$

例 2．判断下列广义积分的收敛性：

（1） $\int_1^{+\infty}\frac{(\ln x)^p}{1+x^2}dx$ （2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$

（3） $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}dx(p>0,q>0)$ （4） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$

例 3．判断下列广义积分的敛散性，如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛：

（1） $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ （2） $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x}dx$

（3） $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx(p>0)$ （4） $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\sin x dx$

例 4．设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续，$f(x)>0$，$\lim\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$，证明：当 $\lambda>1$ 时，$\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

例 5．设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续可微，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 单调递减趋于 0，则 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是 $\int_1^{+\infty}xf'(x)dx$ 收敛.