1、证明$0<e-(1+\frac{1}{n})^n<\frac{3}{n},(n=1,2,\cdots)$。当指数 n 是什么样的数值时，表达式$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$与数 e 之差小于 0.001？

证明： 显然$0<(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

即$0<e-(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^n$

而$(1+\frac{1}{n})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^n=(1+\frac{1}{n})^n[(1+\frac{1}{n})-1]=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n<\frac{3}{n}$

因而$0<e-(1+\frac{1}{n})^n<\frac{3}{n}$

其次，要$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<0.001$，只要$\frac{3}{n}\le 0.001$，即只要$n\ge 3000$，

所以，当指数 n 是代表任一不小于 3000 的正整数，表达式$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$与数 e 之差就小于 0.001。

2、证明不等式：

$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，其中 n 为任意正整数。

证明：（1）因为$1<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，两边取对数，得$0<n\ln(1+\frac{1}{n})<1$，故，$\ln(1+\frac{1}{\mathrm{n}})<\frac{1}{\mathrm{n}}$；又因为$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，两边取对数得，$1<(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})$，故$\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{1}{n+1}$，故$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$。

3、证明：若 $x_n>0(n=1,2\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$。

证明： 令$y_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}(n=1,2\cdots)$，则$y_n>0$，由假定$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在，设为 a，则$\lim\limits_{n\to\infty}(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=a$，于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}[(y_1y_2\cdots y_n)^{\frac{1}{n-1}}]^{\frac{n-1}{n}}=1\cdot a=a=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

4、证明若 p 为正整数，则 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1})=\frac{1}{2}$

证明： 令 $x_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}$， $y_n=(p+1)n^p$， 则 $y_{n+1}>y_n$，

$y_n\to+\infty$ 且有 $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(p+1)(n+1)^p+[n^{p+1}-(n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p-n^p]}=\frac{\frac{p(p+1)}{2}n^{p+1}+\cdots}{p(p+1)n^{p+1}+\cdots}$

当 $n\to\infty$ 时， $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\to\frac{1}{2}$， 所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1})=\frac{1}{2}$

5、求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})$

解： 因为 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n(1)$， $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}=C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}(2)$

其中 C 为欧拉常数， $\varepsilon_n\to 0,\varepsilon_{2n}\to 0$（$n\to\infty$）

（2）式减（1）式得 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\ln 2n-\ln n+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n\to\ln 2(n\to\infty)$

所以 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n})=\ln 2$

6、求下面函数的存在域： $y=\lg[\cos(\lg x)]$

解： 当 $\cos(\lg x)>0$ 时，y 值确定。解之，得 $(2k-\frac{1}{2})\pi<\lg x<(2k+\frac{1}{2})\pi$，

从而， 存在域为满足 $10^{(2k-\frac{1}{2})\pi}<x<10^{(2k+\frac{1}{2})\pi}(k=1,2\cdots)$ 的数x的集合

7、设 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$， 式中 $a_i(i=0,1,2\cdots)$ 为实数， 证明：

$\lim_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty$。

证明： 不妨设 $a_0\neq 0$， 则 $|p(x)|\geq|a_0|\cdot|x^n|\cdot\left|1-(\frac{|a_1|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^n})\right|$，

由于 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|^i}=0(i=0,1,2,\cdots)$， 故存在 $E_1>0$， 使当 $|x|>E_1$ 时恒有

$\left|1-(\frac{|a_1|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^n})\right|>\frac{1}{2}$， 从而 $|p(x)|>\frac{1}{2}|a_0|\cdot|x|^n$

任给 M>0, 设 $E_2=\sqrt[n]{\dfrac{2M}{|a_0|}}$，取 $E=\max\{E_1,E_2\}$，则当 $|x|>E$ 时恒有 $|p(x)|>M$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty$。

8、求 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$

解： $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2-x-1)}{(x^4-x^3+x^2-x-1)}=\dfrac{1}{3}$

另解： 设 $t=x+1(t\to0)$，则 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^2-2t+1}{t^4-5t^3+10t^2+10t+3}=\dfrac{1}{3}$

9、求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

10、求 $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

解：

$$\lim_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$$

$$=\lim_{x\to7}\left[\frac{(\sqrt[6]{(x+2)^3}-\sqrt[6]{(x+20)^2})(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt[4]{x+9}+4)}{(\sqrt[4]{x+9}-2)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt[4]{x+9}+4)}\right]\cdot$$

$$\left[\frac{\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}}}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}\right]$$

$$=\lim_{x\to7}\frac{[(x+2)^3-(x+20)^2](\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$=\lim_{x\to7}\frac{(x-7)(x^2+12x+56)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$==\lim_{x\to7}\frac{(x^2+12x+56)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$=\frac{189\cdot4\cdot8}{3^5+3^4\cdot3+3^3\cdot3^2+3^2\cdot3^3+3\cdot3^4+3^5}$$

$$=\frac{6048}{1458}=4\frac{4}{27}$$

11、求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}$

解： $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x\cos a}=\dfrac{1}{\cos^2 a},(a\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

12、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

解： 因为 $1-\cos x\cos 2x\cos 3x$

$$
\begin{aligned}
&=1-\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)\cos 2x\\
&=1-\frac{1}{2}\cos 4x\cos 2x-\frac{1}{2}\cos^2 2x\\
&=1-\frac{1}{4}(\cos 6x+\cos 2x)-\frac{1}{4}(1+\cos 4x)\\
&=\frac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x)
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

所以 $=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}[(\dfrac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}})^2+(\dfrac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}})^2+(\dfrac{\sin 3x}{\sin\frac{x}{2}})^2]$

$=\dfrac{1}{4}(4+16+36)=14$

13、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$

解： 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\to\dfrac{3}{2}$ 及 $\dfrac{x^3}{1-x}=\dfrac{x^2}{\frac{1}{x}-1}\to-\infty$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=0$

14、求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

解： $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\tan x-1)^{\frac{1}{\tan x-1}\cdot\frac{-2\tan x}{\tan x+1}}=e^{-1}$

15、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}})^{-\frac{n}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}})^{\frac{1}{\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}}\cdot(\frac{\tan^2\frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}})^2\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)}=e^{-\frac{x^2}{2}}$

16、求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{10\ln x+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})}=\frac{1}{5}$

17、求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$

解： $\frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\cdot\frac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\cdot\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}$

而当 $x\to a$ 时，

$$\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}=\frac{x\ln x-x\ln a}{x-a}+\ln a=\frac{x}{a}\cdot\frac{\ln(1+\frac{x-a}{a})}{\frac{x-a}{a}}+\ln a\to 1+\ln a=\ln ea$$

又因为 $\frac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\to 1$，（$x\to a$），

所以 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\ln ea$

18、求（1） $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$；（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

解：（1） $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{\ln(1+3^x)}{3^x}\cdot\frac{2^x}{\ln(1+2^x)}\cdot(\frac{2}{3})^{-x}]=1\cdot1\cdot0=0$

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln2+\ln(1+2^{-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln3+\frac{1}{x}\cdot\ln(1+3^{-x})}{\ln2+\frac{1}{x}\cdot\ln(1+2^{-x})}=\frac{\ln3}{\ln2}$

19、求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

解：

$$\lim_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = \lim_{x\to+\infty} x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}(\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})=1$$

20、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$

解： 因为 $\sin x = 2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$

所以，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{x\to\infty}(\frac{\sin x}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}})=\lim_{x\to\infty}(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x})=\frac{\sin x}{x}(x\neq 0)$$

当 x=0 时，原式显然为 1.