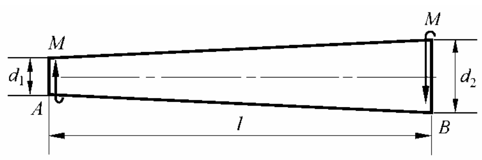
第十二章　能量法（一）

题号　　　　页码

(也可通过左侧的题号书签直接查找题目与解)

12-2

图示变宽度平板，承受轴向载荷 F 作用。试计算板件的总伸长。板件的厚度为 δ，长度为 l，左、右端的截面宽度分别为 b_1 与 b_2，材料的弹性模量为 E。



题 12-2 图

解：由题图可知，

$$A(x)=\delta\left(b_1+\frac{b_2-b_1}{l}x\right)$$

$$\sigma(x)=\frac{F}{\delta\left(b_1+\frac{b_2-b_1}{l}x\right)}$$

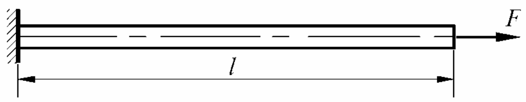
$$V_\varepsilon=\int_0^l\frac{\sigma^2(x)}{2E}A(x)\mathrm{d}x=\frac{F^2}{2E\delta}\int_0^l\frac{1}{b_1+\frac{b_2-b_1}{l}x}\mathrm{d}x=\frac{F^2 l}{2E\delta(b_2-b_1)}\ln\frac{b_2}{b_1}$$

$$W=\frac{1}{2}F\Delta l$$

根据 $W=V_\varepsilon$，得到

$$\Delta l=\frac{Fl}{E\delta(b_2-b_1)}\ln\frac{b_2}{b_1}$$

12-3 图示等截面直杆，承受轴向载荷 F 作用。设杆的横截面面积为 A，材料的应力一应变关系为 $\sigma=c\sqrt{\varepsilon}$，其中 c 为已知常数。试计算外力所作之功。



题 12-3 图

解：根据

$$\sigma=\frac{F}{A}\quad,\qquad\varepsilon=\frac{\varDelta}{l}$$

及

$$\sigma=c\sqrt{\varepsilon}$$

得

$$F=cA\sqrt{\frac{\varDelta}{l}}$$

由图 12-3 可知，

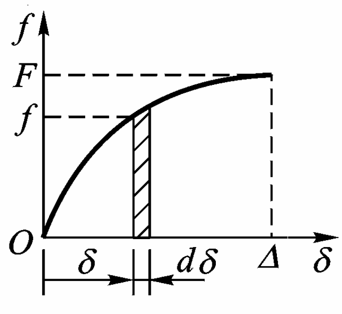


图 12-3

$$\mathrm{d}W = f\mathrm{d}\delta = cA\sqrt{\frac{\delta}{l}}\mathrm{d}\delta$$

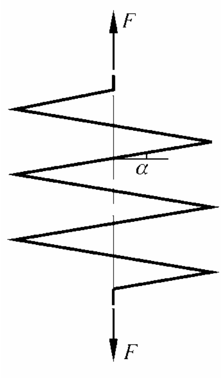
积分得

$$W = \int_0^{\varDelta} cA\sqrt{\frac{\delta}{l}}\mathrm{d}\delta = \frac{2cA}{3\sqrt{l}}\varDelta^{3/2} = \frac{2F^3 l}{3c^2 A^2}$$

12-4 图示圆柱形大螺距弹簧，承受轴向拉力 **F** 作用。试用能量法证明弹簧的轴向变形为

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4}\left(\cos\alpha + \frac{2G\sin^2\alpha}{E\cos\alpha}\right)$$

式中：**D** 为弹簧的平均直径，**d** 为弹簧丝的直径，**n** 为弹簧的圈数，α 为螺旋升角，**E** 为弹性模量，**G** 为切变模量。



题 12-4 图

解：由截面法可得

$$M(s) = \frac{FD}{2}\sin\alpha, \qquad T(s) = \frac{FD}{2}\cos\alpha \tag{a}$$

据能量守恒定律，有

$$W = V_{\varepsilon} \tag{b}$$

其中，

$$W = \frac{F\lambda}{2} \tag{c}$$

而

$$V_{\varepsilon} = \int_0^l \frac{T^2(s)}{2GI_{\mathrm{P}}}\mathrm{d}s + \int_0^l \frac{M^2(s)}{2EI}\mathrm{d}s \tag{d}$$

式中，l 为簧丝总长，其值为

$$l = \frac{\pi Dn}{\cos\alpha} \tag{e}$$

将式（a）代入式（d），完成积分，并注意到式（e），得

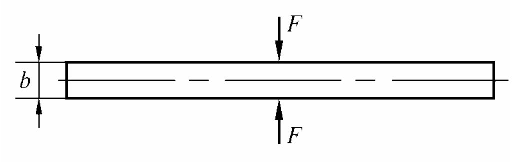
$$V_{\varepsilon}=\frac{F^{2}D^{3}n\pi}{8GI_{\mathrm{p}}}(\cos\alpha+\frac{GI_{\mathrm{p}}\sin^{2}\alpha}{EI\cos\alpha}) \tag{f}$$

最后，将式（c）和（f）代入式（b），化简后，得

$$\lambda=\frac{8FD^{3}n}{Gd^{4}}(\cos\alpha+\frac{2G\sin^{2}\alpha}{E\cos\alpha})$$

12-5 图示等截面直杆，承受一对方向相反、大小均为 F 的横向力作用。设截面宽度为 b、拉压刚度为 EA，材料的泊松比为 μ。试利用功的互等定理，证明杆的轴向变形为

$$\Delta l=\frac{\mu bF}{EA}$$



题 12-5 图

解：设该杆两端承受轴向拉力 F_1 作用，依据功的互等定理，有

$$F_{1}\cdot\Delta l=F\cdot\left(\frac{\mu F_{1}b}{EA}\right)$$

由此得

$$\Delta l=\frac{\mu bF}{EA}$$

12-6 图示纤维增强复合材料，轴 1 沿纤维方向，轴 2 垂直于纤维方向。当正应力 σ_1 单独作用时（图 a），材料沿 1 和 2 方向的正应变分别为

$$\varepsilon_{1}'=\frac{\sigma_{1}}{E_{1}},\qquad \varepsilon_{2}'=-\frac{\mu_{12}\sigma_{1}}{E_{1}}$$

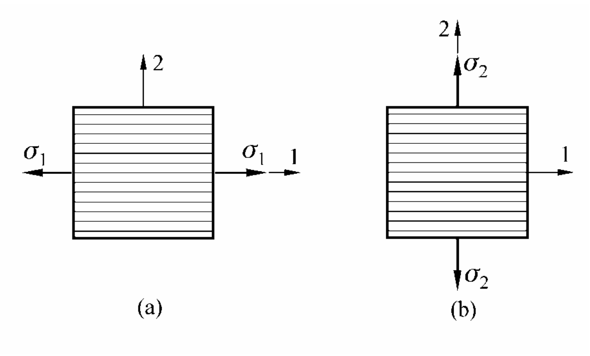
式中，E_1 与 μ_{12} 分别为复合材料的纵向弹性模量与纵向泊松比。当 σ_2 单独作用时（图 b），上述二方向的正应变则分别为

$$\varepsilon_{1}''=-\frac{\mu_{21}\sigma_{2}}{E_{2}},\qquad \varepsilon_{2}''=\frac{\sigma_{2}}{E_{2}}$$

式中，E_2 与 μ_{21} 分别为复合材料的横向弹性模量与横向泊松比。试证明：

$$\frac{\mu_{12}}{E_{1}}=\frac{\mu_{21}}{E_{2}}$$

即上述四个弹性常数中，只有三个是独立的。



题 12-6 图

解：依据功的互等定理，有

$$\sigma_2 \cdot \varepsilon_2' = \sigma_1 \cdot \varepsilon_1''$$

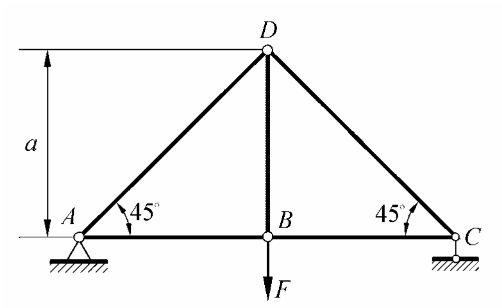
即

$$\sigma_2 \cdot \left(-\frac{\mu_{12}\sigma_1}{E_1}\right) = \sigma_1 \cdot \left(-\frac{\mu_{21}\sigma_2}{E_2}\right)$$

由此得

$$\frac{\mu_{12}}{E_1} = \frac{\mu_{21}}{E_2}$$

12-8 图示桁架，在节点 ***B*** 承受载荷 ***F*** 作用。试用卡氏定理计算该节点的铅垂位移 Δ_B。各杆各截面的拉压刚度均为 ***EA***。



题 12-8 图

解：根据卡氏定理，有

$$\Delta_B = \frac{1}{EA}\sum_{i=1}^{5} F_{\mathrm{N}i} l_i \frac{\partial F_{\mathrm{N}i}}{\partial F}$$

各杆编号示如图 12-8。

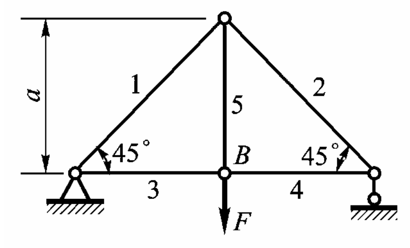


图 12-8

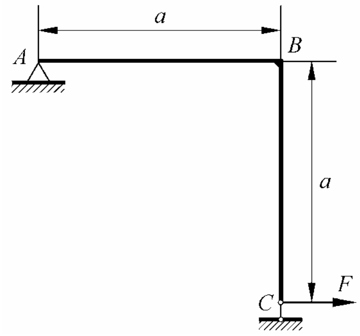
求 Δ_B 的运算过程示如下表：

l	l_i	F_{Ni}	$\dfrac{\partial F_{Ni}}{\partial F}$	$F_{Ni} l_i \dfrac{\partial F_{Ni}}{\partial F}$
1	$\sqrt{2}a$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}F$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}Fa$
2	$\sqrt{2}a$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}F$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}Fa$
3	a	$\dfrac{1}{2}F$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}Fa$
4	a	$\dfrac{1}{2}F$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}Fa$
5	a	F	1	Fa
Σ				$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}Fa$

由此得

$$\Delta_B = \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)}{2}\frac{Fa}{EA} \quad (\downarrow)$$

12-9 图示刚架，承受载荷 F 作用。试用卡氏定理计算截面 C 的转角。设弯曲刚度 EI 为常数。



题 12-9 图

解：在截面 *C* 处假想附加一矩为 M_C **的力偶（见图 12-9），由图可得**

$$M(x_1)=(F+\frac{M_C}{a})x_1 \quad , \quad \frac{\partial M(x_1)}{\partial M_C}=\frac{x_1}{a}$$

$$M(x_2)=Fx_2+M_C \quad , \quad \frac{\partial M(x_2)}{\partial M_C}=1$$

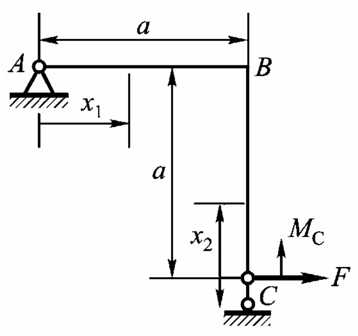
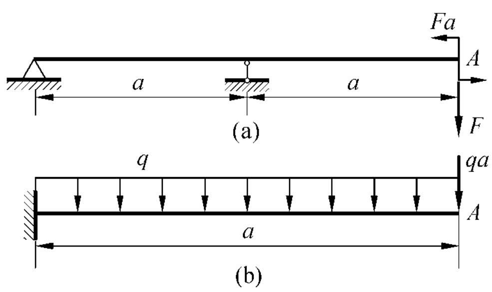


图 12-9

根据卡氏定理，得

$$\theta_C=\frac{1}{EI}[\int_0^a(Fx_1)(\frac{x_1}{a})\mathrm{d}x_1+\int_0^a(Fx_2)(1)\mathrm{d}x_2]=\frac{5Fa^2}{6EI} \quad (\circlearrowleft)$$

12-10 **试用卡氏定理计算图示各梁横截面 *A* 的挠度** Δ_A **与转角** θ_A**。设弯曲刚度 *EI* 为常数。**



题 12-10 图

（a）解：令 $Fa = M_A$，由图 12-10a 易得

$$M(x) = M_A - Fx \text{，} \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial F} = -x \text{，} \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial M_A} = 1$$

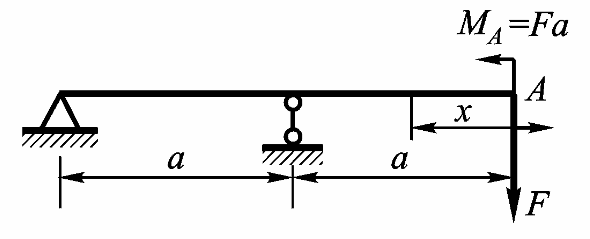


图 12-10(a)

注意到左半段梁上 $M = 0$，于是得

$$\Delta_A = \frac{1}{EI}\int_0^a (Fa - Fx)(-x)\mathrm{d}x = -\frac{Fa^3}{6EI} \quad (\uparrow)$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^a (Fa - Fx)(1)\mathrm{d}x = \frac{Fa^2}{2EI} \quad (\circlearrowleft)$$

（b）解：令 $qa = F$，并在 A 端附加一顺钟向的力偶矩 M_A，自 A 向左取坐标 x，有

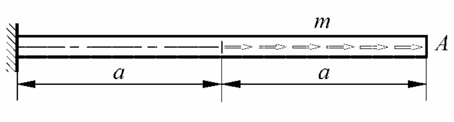
$$M(x) = -M_A - Fx - \frac{1}{2}qx^2 \text{，} \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial F} = -x \text{，} \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial M_A} = -1$$

根据卡氏定理，得

$$\Delta_A = \frac{1}{EI}\int_0^a (-qax - \frac{1}{2}qx^2)(-x)\mathrm{d}x = \frac{11qa^4}{24EI} \quad (\downarrow)$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^a (-qax - \frac{1}{2}qx^2)(-1)\mathrm{d}x = \frac{2qa^3}{3EI} \quad (\circlearrowright)$$

12-12 图示圆截面轴，右半段承受集度为 m 的均布扭力矩作用。试用卡氏第二定理计算杆端截面 A 的扭转角。设扭转刚度 GI_p 为常数。



题 12-12 图

解：在 A 端附加一扭力矩 M_A，自 A 向左取坐标 x_1，自轴中间截面向左取坐标 x_2，于是有

$$T(x_1) = M_A + mx_1 \quad , \quad T(x_2) = M_A + ma$$

及

$$\frac{\partial T(x_1)}{\partial M_A}=\frac{\partial T(x_2)}{\partial M_A}=1$$

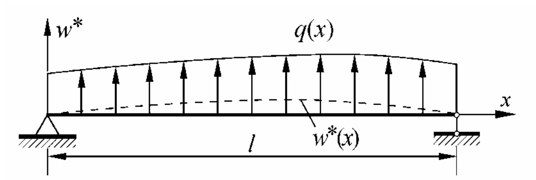
依据卡氏定理，得

$$\varphi_A=\frac{1}{GI_\mathrm{p}}\left[\int_0^a(mx_1)(1)\mathrm{d}x_1+\int_0^a(ma)(1)\mathrm{d}x_2\right]=\frac{3ma^2}{2GI_\mathrm{p}}$$

12-14 图示简支梁，承受集度为 $q(x)$ 的分布载荷作用，现在，使梁发生横向虚位移 $w^*(x)$，该位移满足位移边界条件与变形连续条件，试证明：

$$\int_l w^*(x)q(x)\mathrm{d}x=\int_l M(x)\mathrm{d}\theta^*$$

即证明外载荷 $q(x)$ 在虚位移上所作之总虚功 W_e，等于可能内力 $M(x)$在相应虚变形上所作之总虚功 W_i 。



题 12-14 图

解：应用下列微分关系

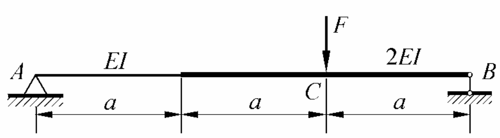
$$q(x)=\frac{\mathrm{d}F_\mathrm{S}}{\mathrm{d}x}\quad,\quad F_\mathrm{S}(x)=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\quad,\quad \theta^*=\frac{\mathrm{d}w^*}{\mathrm{d}x}$$

及分部积分公式，有

$$W_\mathrm{e}=\int_l w^*(x)q(x)\mathrm{d}x=\int_0^l w^*(x)\cdot\frac{\mathrm{d}F_\mathrm{S}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=w^*F_\mathrm{S}\Big|_0^l-\int_0^l F_\mathrm{S}\cdot\frac{\mathrm{d}w^*}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^l\theta^*\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=-\theta^*M\Big|_0^l+\int_0^l M(x)\mathrm{d}\theta^*=\int_l M(x)\mathrm{d}\theta^*=W_\mathrm{i}$$

12-15 图示阶梯形简支梁，承受载荷 F 作用。试用单位载荷法计算横截面 C 的挠度 Δ_C 与横截面 A 的转角 θ_A 。



题 12-15 图

解：设两种单位状态如下：

1．令 $F=1$；

2．在截面 A 处假想加一顺钟向力偶矩 $M_A=1$，坐标示如图 12-15。

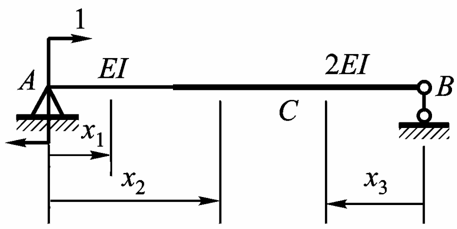


图 12-15

三种弯矩方程为

$$\overline{M}(x_1)=\frac{1}{3}x_1,\quad \widetilde{M}(x_1)=1-\frac{1}{3a}x_1,\quad M(x_1)=\frac{F}{3}x_1$$

$$\overline{M}(x_2)=\frac{1}{3}x_2,\quad \widetilde{M}(x_2)=1-\frac{1}{3a}x_2,\quad M(x_2)=\frac{F}{3}x_2$$

$$\overline{M}(x_3)=\frac{2}{3}x_3,\quad \widetilde{M}(x_3)=\frac{1}{3a}x_3,\quad M(x_3)=\frac{2F}{3}x_3$$

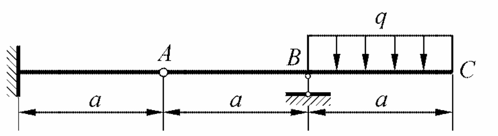
依据单位载荷法，有

$$\varDelta_C=\frac{1}{EI}\int_0^a(\frac{1}{3}x_1)(\frac{F}{3}x_1)\mathrm{d}x_1+\frac{1}{2EI}\int_a^{2a}(\frac{x_2}{3})(\frac{F}{3}x_2)\mathrm{d}x_2+\frac{1}{2EI}\int_0^a(\frac{2}{3}x_3)(\frac{2F}{3}x_3)\mathrm{d}x_3$$
$$=\frac{13Fa^3}{54EI}\quad(\downarrow)$$

及

$$\theta_A=\frac{1}{EI}\int_0^a(1-\frac{x_1}{3a})(\frac{F}{3}x_1)\mathrm{d}x_1+\frac{1}{2EI}\int_a^{2a}(1-\frac{x_2}{3a})(\frac{F}{3}x_2)\mathrm{d}x_2+\frac{1}{2EI}\int_0^a(\frac{x_3}{3a})(\frac{2F}{3}x_3)\mathrm{d}x_3$$
$$=\frac{31Fa^2}{108EI}\quad(\circlearrowright)$$

12-16 图示含梁间铰的组合梁，外伸段承受均布载荷 q 作用。试用单位载荷法计算该铰链两侧横截面间的相对转角 $\overline{\theta}$ 。二梁各截面的弯曲刚度均为 EI。



题 12-16 图

解：求 $\overline{\theta}$ 的单位状态及坐标取法示如图 12-16。

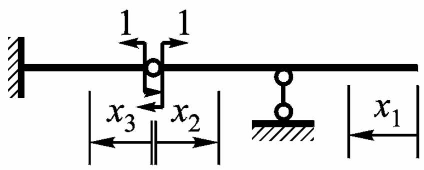


图 12-16

两种弯矩方程为

$$\overline{M}(x_1)=0,\qquad M(x_1)=-\frac{q}{2}x_1^2$$

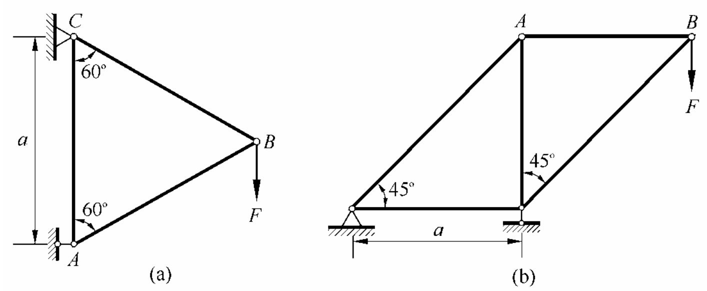
$$\overline{M}(x_2)=1-\frac{x_2}{a},\quad M(x_2)=-\frac{qa}{2}x_2$$

$$\overline{M}(x_3)=1+\frac{x_3}{a},\quad M(x_3)=\frac{qa}{2}x_3$$

由此得到

$$\overline{\theta}=\frac{1}{EI}\int_0^a(1-\frac{x_2}{a})(-\frac{qa}{2}x_2)\mathrm{d}x_2+\frac{1}{EI}\int_0^a(1+\frac{x_3}{a})(\frac{qa}{2}x_3)\mathrm{d}x_3=\frac{qa^3}{3EI}\quad (↺↻)$$

12-17 图示桁架，在节点 ***B*** 处承受载荷 ***F*** 作用。试用单位载荷法计算该节点的水平位移 Δ_B 与杆 ***AB*** 的转角。各杆各截面的拉压刚度均为 ***EA***。



题 12-17 图

(a) 解：求 Δ_B 和 θ_{AB} 的单位状态分别示如图 12-17a（1）和 a（2）。

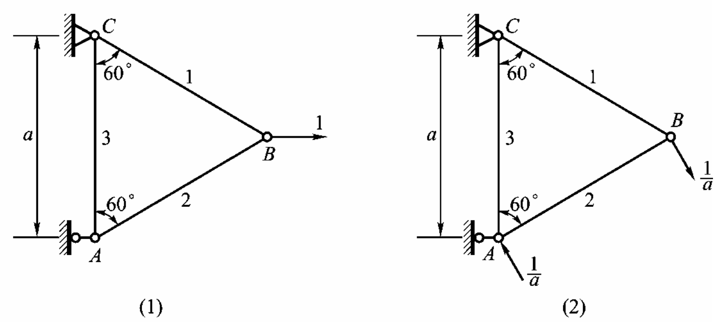


图 12-17a

求 Δ_B 的运算过程列表如下：

i	l_i	$\overline{F}_{Ni}$	F_{Ni}	$\overline{F}_{Ni}F_{Ni}l_i$
1	***a***	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	***F***	$\frac{\sqrt{3}}{3}Fa$
2	***a***	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	−***F***	$-\frac{\sqrt{3}}{3}Fa$

3	***a***	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{F}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{12}Fa$
$\sum$				$-\frac{\sqrt{3}}{12}Fa$

故有

$$\varDelta_B=\sum_{i=1}^{3}\frac{\overline{F}_{Ni}F_{Ni}l_i}{EA}=-\frac{\sqrt{3}Fa}{12EA}\quad(\leftarrow)$$

求θ_{AB}的运算过程列表如下：

i	l_i	$\overline{F}_{Ni}$	F_{Ni}	$\overline{F}_{Ni}F_{Ni}l_i$
1	***a***	$\frac{2}{\sqrt{3}a}$	***F***	$\frac{2\sqrt{3}}{3}F$
2	***a***	$-\frac{1}{\sqrt{3}a}$	**−*F***	$\frac{\sqrt{3}}{3}F$
3	***a***	$-\frac{1}{\sqrt{3}a}$	$\frac{F}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}F$
$\sum$				$\frac{5\sqrt{3}}{6}F$

故有

$$\theta_{AB}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\overline{F}_{Ni}F_{Ni}l_i}{EA}=\frac{5\sqrt{3}F}{6EA}\quad(\circlearrowright)$$

(b) 解：求$\varDelta_B$和θ_{AB}的单位状态分别示如图 12-17b（1）和 b（2）。

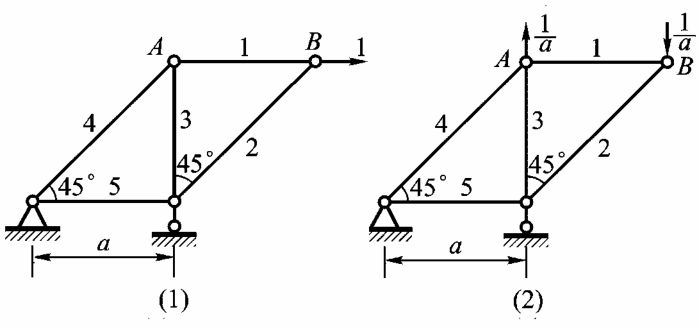


图 12-17b

求$\varDelta_B$的运算过程列表如下：

i	l_i	$\overline{F}_{Ni}$	F_{Ni}	$\overline{F}_{Ni}F_{Ni}l_i$
1	***a***	**1**	***F***	Fa

2	$\sqrt{2}a$	**0**	$-\sqrt{2}F$	**0**
3	***a***	**–1**	$-\boldsymbol{F}$	Fa
4	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}F$	$2\sqrt{2}Fa$
5	***a***	**0**	$-\boldsymbol{F}$	**0**
Σ				$\left(2+2\sqrt{2}\right)Fa$

故有

$$\Delta_B=\sum_{i=1}^{5}\frac{\overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i}{EA}=\frac{(2+2\sqrt{2})Fa}{EA}\quad(\rightarrow)$$

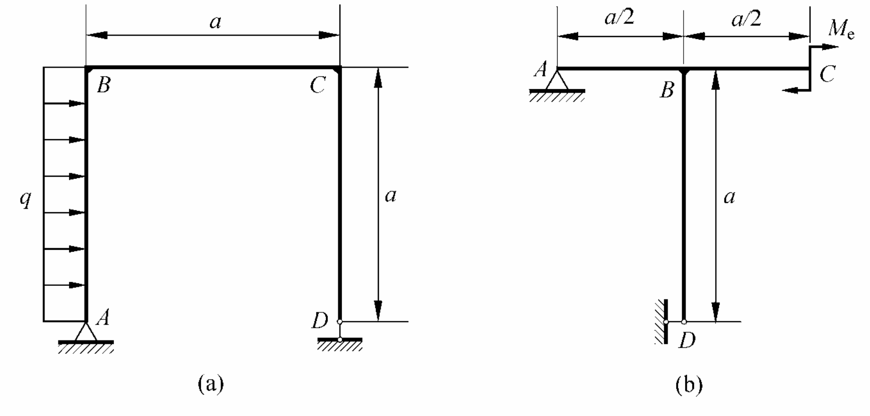
求θ_{AB}的运算过程列表如下：

i	l_i	$\overline{F}_{\mathrm{N}i}$	$F_{\mathrm{N}i}$	$\overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i$
1	***a***	$\dfrac{1}{a}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
2	$\sqrt{2}a$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{a}$	$-\sqrt{2}F$	$2\sqrt{2}F$
3	***a***	**0**	$-\boldsymbol{F}$	**0**
4	$\sqrt{2}a$	$\dfrac{\sqrt{2}}{a}$	$\sqrt{2}F$	$2\sqrt{2}F$
5	***a***	$-\dfrac{1}{a}$	$-\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
Σ				$\left(2+4\sqrt{2}\right)F$

故有

$$\theta_{AB}=\sum_{i=1}^{5}\frac{\overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i}{EA}=\frac{(2+4\sqrt{2})F}{EA}\quad(\circlearrowright)$$

12-18 **图示刚架，弯曲刚度 *EI* 为常数。试用单位载荷法计算截面 *A* 的转角及截面 *D* 的水平或铅垂位移。**



题 12-18 图

(a)解：求θ_A及Δ_D的单位状态分别示如图 **12-18a（1）**和（**2**）。

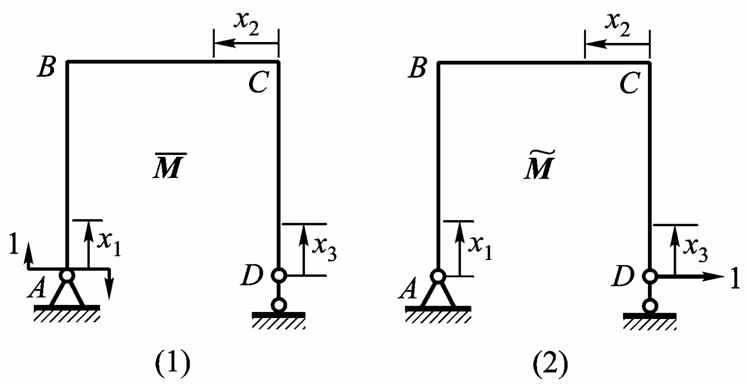


图 12-18a

弯矩方程依次为

$$\overline{M}(x_1)=1,\qquad \widetilde{M}(x_1)=x_1,\qquad M(x_1)=qax_1-\frac{q}{2}x_1^2$$

$$\overline{M}(x_2)=\frac{1}{a}x_2,\qquad \widetilde{M}(x_2)=a,\qquad M(x_2)=\frac{qa}{2}x_2$$

$$\overline{M}(x_3)=0,\qquad \widetilde{M}(x_3)=x_3,\qquad M(x_3)=0$$

依据单位载荷法，有

$$\theta_A=\frac{1}{EI}\left[\int_0^a(1)(qax_1-\frac{q}{2}x_1^2)\mathrm{d}x_1+\int_0^a(\frac{x_2}{a})(\frac{qax_2}{2})\mathrm{d}x_2\right]=\frac{qa^3}{2EI}\quad (\circlearrowright)$$

及

$$\Delta_D=\frac{1}{EI}\left[\int_0^a(x_1)(qax_1-\frac{q}{2}x_1^2)\mathrm{d}x_1+\int_0^a(a)(\frac{qa}{2}x_2)\mathrm{d}x_2\right]=\frac{11qa^4}{24EI}\quad (\rightarrow)$$

(b)解：求θ_A及Δ_D的单位状态如图 **12-18b（1）**和 **b（2）**所示。

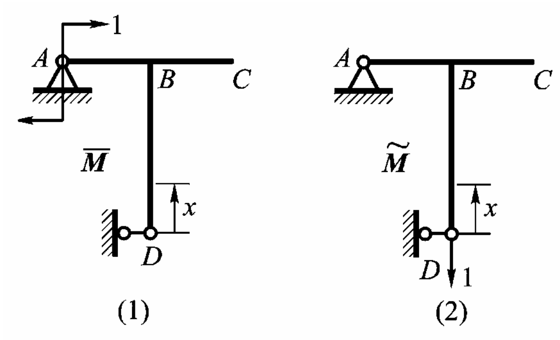


图 12-18b

弯矩方程为

$$\overline{M}(x)=\frac{1}{a}x,\qquad \widetilde{M}(x)=\frac{1}{2}x,\qquad M(x)=\frac{M_e}{a}x$$

注意到 **BC** 段的 $\overline{M}$ 和 $\widetilde{M}$ 均为 **0**，**AB** 段的 **M** 为 **0**，于是得到

$$\theta_A=\frac{1}{EI}\int_0^a(\frac{x}{a})(\frac{M_e}{a}x)\mathrm{d}x=\frac{M_e a}{3EI}\qquad (\circlearrowright)$$

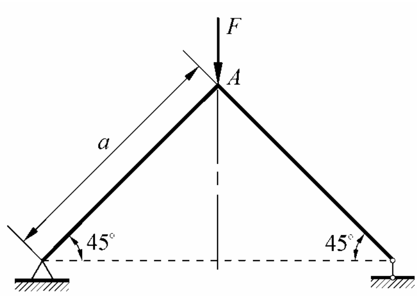
$$\varDelta_D=\frac{1}{EI}\int_0^a(\frac{x}{2})(\frac{M_e}{a}x)\mathrm{d}x=\frac{M_e a^2}{6EI}\qquad (\downarrow)$$

12-21

图示圆截面刚架，横截面的直径为 **d**，且 **a =10d** 。试按下述原则计算节点 **A** 的铅垂位移 $\varDelta_A$，并进行比较。

（1）同时考虑弯矩与轴力的作用；

（2）只考虑弯矩的作用。



题 12-21 图

解：令 **F=1** 即为求 $\varDelta_A$ 的单位状态，坐标 **x** 自下顺轴线向上取。

（1）考虑 **M** 与 F_N 同时作用

$$\overline{M}(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}x,\qquad M(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}Fx$$

$$\overline{F}_{\mathrm{N}}=\frac{\sqrt{2}}{4},\qquad F_{\mathrm{N}}=\frac{\sqrt{2}}{4}F$$

利用对称性，可得

$$\varDelta_A=\frac{2}{EI}\int_0^a(\frac{\sqrt{2}}{4}x)(\frac{\sqrt{2}}{4}Fx)\mathrm{d}x+\frac{2}{EA}(\frac{\sqrt{2}}{4})(\frac{\sqrt{2}}{4}F)a=\frac{Fa^3}{12EI}+\frac{Fa}{4EA}=\frac{16030F}{3\pi Ed}\quad(\downarrow)$$

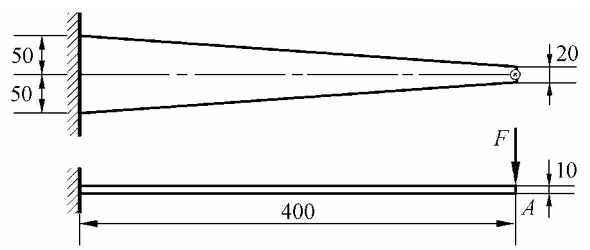
（2）只考虑 M 作用

此时，有

$$\varDelta_A=\frac{Fa^3}{12EI}=\frac{16000F}{3\pi Ed}\quad(\downarrow)$$

比较可知，后者只比前者小 0.2%。

12-23 图示变截面梁，自由端承受集中载荷 F = 1kN 作用，材料的弹性模量 E =200GPa。试用单位载荷法计算截面 A 的挠度。



题 12-23 图

解：令 F=1 即为求 $\varDelta_A$ 的单位状态，自 A 向左取坐标 x，则有

$$\overline{M}(x)=-x,\qquad M(x)=-Fx$$

梁截面之惯性矩为

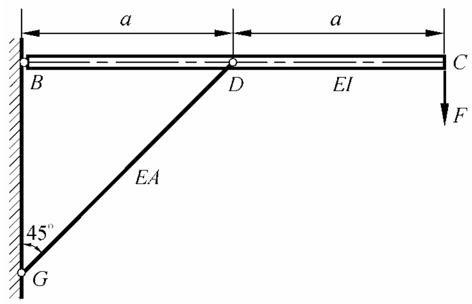
$$I_z(x)=\frac{b(x)h^3}{12}=\frac{0.010^3}{12}\times(0.020+\frac{x}{5})=\frac{1.000\times10^{-7}}{6}\times(0.100+x)$$

由此得

$$\varDelta_A=\int_0^l\frac{\overline{M}(x)M(x)}{EI_z(x)}\mathrm{d}x=\frac{6F}{10^{-7}E}\int_0^{0.400}\frac{x^2}{0.100+x}\mathrm{d}x=\frac{6\times1\times10^3\times0.0560943}{10^{-7}\times200\times10^9}\mathrm{m}$$

$$=0.01683\mathrm{m}=16.83\mathrm{mm}\quad(\downarrow)$$

12-24 图示结构，在截面 C 处承受载荷 F 作用。试用单位载荷法计算该截面的铅垂位移 $\varDelta_C$ 与转角 θ_C。梁 BC 各截面的弯曲刚度均为 EI，杆 DG 各截面的拉压刚度均为 EA。



题 12-24 图

解：令 **F=1** 作为求 Δ_C 的单位状态；求 θ_C 的单位状态如图 12-24 所示，坐标取法亦示于图中。

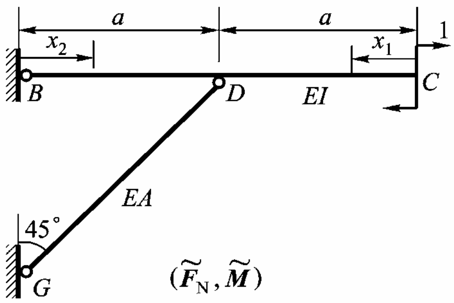


图 12-24

梁的弯矩方程为

$$\overline{M}(x_1) = -x_1, \qquad \widetilde{M}(x_1) = -1, \qquad M(x_1) = -Fx_1$$

$$\overline{M}(x_2) = -x_2, \qquad \widetilde{M}(x_2) = -\frac{x_2}{a}, \qquad M(x_2) = -Fx_2$$

杆的轴力为

$$\overline{F}_{\mathrm{N}} = -2\sqrt{2}, \qquad \widetilde{F}_{\mathrm{N}} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \qquad F_{\mathrm{N}} = -2\sqrt{2}F$$

依据单位载荷法，得

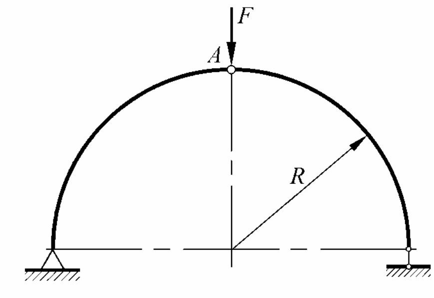
$$\Delta_C = \frac{2}{EI}\int_0^a (-x_1)(-Fx_1)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{EA}(-2\sqrt{2})(-2\sqrt{2}F)(\sqrt{2}a) = \frac{2Fa^3}{3EI} + \frac{8\sqrt{2}Fa}{EA} \quad (\downarrow)$$

及

$$\theta_C = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a (-1)(-Fx_1)\mathrm{d}x_1 + \int_0^a \left(-\frac{x_2}{a}\right)(-Fx_2)\mathrm{d}x_2\right] + \frac{1}{EA}\left(-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)(-2\sqrt{2}F)(\sqrt{2}a)$$

$$= \frac{5Fa^2}{6EI} + \frac{4\sqrt{2}F}{EA} \quad (\circlearrowright)$$

12-26 图示结构，在铰链 **A** 处承受载荷 **F** 作用。试用单位载荷法计算该铰链两侧横截面间的相对转角 $\bar{\theta}$。各曲杆各截面的弯曲刚度均为 **EI**。



题 12-26 图

解：求$\overline{\theta}$的单位状态如图 12-26 所示。

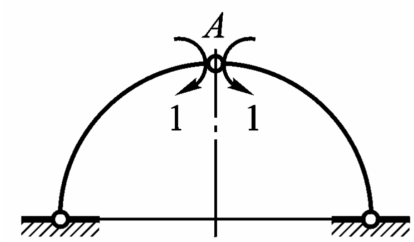


图 12-26

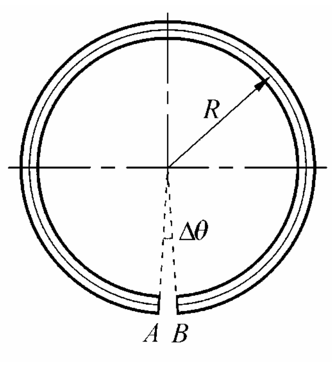
φ自 A 处量起，弯矩方程为

$$\overline{M}(\varphi)=\cos\varphi,\qquad M(\varphi)=\frac{FR}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi-1)$$

注意到左右对称，可得

$$\begin{aligned}\overline{\theta}&=\frac{2}{EI}\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)[\frac{FR}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi-1)]R\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{FR^2}{EI}\int_0^{\pi/2}(\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\varphi-\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{(\pi-2)FR^2}{4EI}\end{aligned}\qquad(↻↺)$$

12-28 图示圆弧形小曲率杆，横截面 **A** 与 **B** 间存在一夹角为$\Delta\theta$的微小缝隙。试问在横截面 **A** 与 **B** 上需加何种外力，才能使该二截面恰好密合。设弯曲刚度 ***EI*** 为常数。



题 12-28 图

解：设在 **A**、**B** 面上需加一对力偶矩 M_e 及一对力 ***F*** 后可使二截面恰好密合，现确定 M_e 及 ***F*** 之值。载荷状态及求$\theta_{A/B}$、$\Delta_{A/B}$的单位状态分别示如图 11-28（a），(b）和（c)。

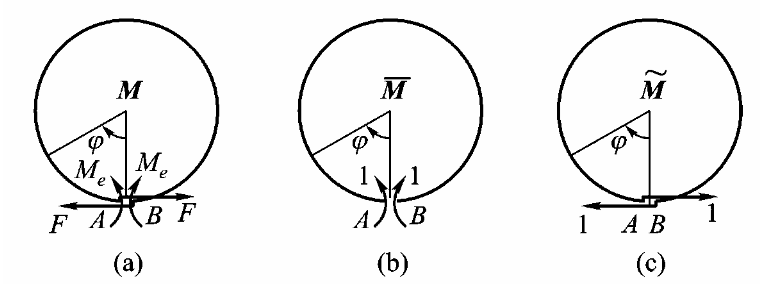


图 12-28

弯矩方程依次为

$$M(\varphi)=M_{\mathrm{e}}+FR(1-\cos\varphi),\qquad \overline{M}(\varphi)=1,\qquad \widetilde{M}(\varphi)=R(1-\cos\varphi)$$

根据单位载荷法，有

$$\theta_{A/B}=\frac{2}{EI}\int_0^{\pi}(1)[M_{\mathrm{e}}+FR(1-\cos\varphi)]R\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi R}{EI}(M_{\mathrm{e}}+FR)$$

$$\varDelta_{A/B}=\frac{2}{EI}\int_0^{\pi}[R(1-\cos\varphi)][M_{\mathrm{e}}+FR(1-\cos\varphi)]R\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi R^2}{EI}(M_{\mathrm{e}}+\frac{3}{2}FR)$$

根据题意要求，应有

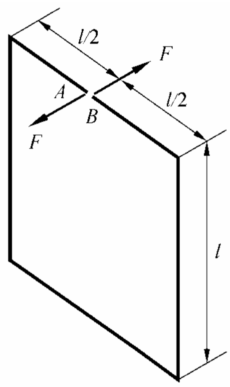
$$\theta_{A/B}=\Delta\theta,\qquad \varDelta_{A/B}=R\cdot\Delta\theta$$

由此得

$$F=0,\qquad M_{\mathrm{e}}=\frac{EI}{2\pi R}\Delta\theta$$

结论：加一对矩为 $M_{\mathrm{e}}=EI\Delta\theta/(2\pi R)$ 的力偶，可使缝隙处该二截面恰好密合。

12-29 图示开口平面刚架，在截面 **A** 与 **B** 处作用一对与刚架平面垂直的集中力 **F**。试用单位载荷法计算该二截面沿载荷作用方向的相对线位移 $\varDelta_{A/B}$。弯曲刚度 EI_y 与 EI_z 以及扭转刚度 GI_t 均为常数，且 $I_y=I_z=I$ 。



题 12-29 图

解：求 $\varDelta_{A/B}$ 的单位状态及路径分段坐标示如图 12-29。

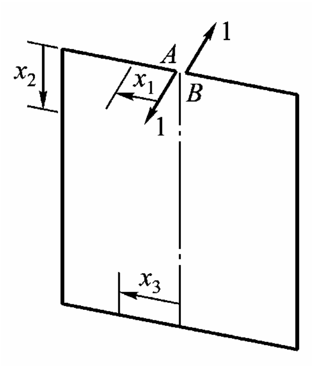


图 12-29

载荷状态及单位状态的弯矩方程依次为

$$M(x_1) = -Fx_1, \qquad \overline{M}(x_1) = -x_1$$

$$M(x_2) = Fx_2, \qquad \overline{M}(x_2) = x_2$$

$$M(x_3) = Fx_3, \qquad \overline{M}(x_3) = x_3$$

两种状态的扭矩方程依次为

$$T(x_2) = -\frac{Fl}{2}, \qquad \overline{T}(x_2) = -\frac{l}{2}$$

$$T(x_3) = -Fl, \qquad \overline{T}(x_3) = -l$$

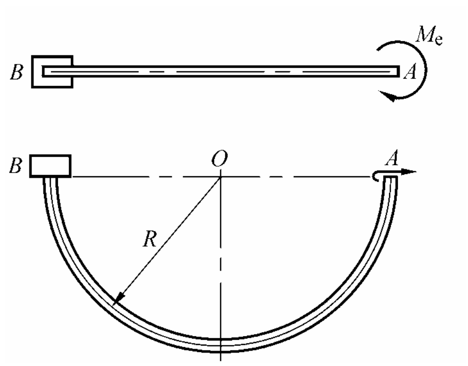
根据单位载荷法，并据 $I_y = I_z = I$，可得

$$\varDelta_{A/B} = 2[\frac{1}{EI}\int_0^{l/2} Fx_1^2 \mathrm{d}x_1 + \frac{1}{EI}\int_0^{l} Fx_2^2 \mathrm{d}x_2 + \frac{1}{GI_\mathrm{t}}\int_0^{l} \frac{Fl^2}{4} \mathrm{d}x_2 + \frac{1}{EI}\int_0^{l/2} Fx_3^2 \mathrm{d}x_3 + \frac{1}{GI_\mathrm{t}}\int_0^{l/2} Fl^2 \mathrm{d}x_3]$$

$$= \frac{5Fl^3}{6EI} + \frac{3Fl^3}{2GI_\mathrm{t}} \quad (\swarrow\nearrow)$$

12-30

图示圆弧形小曲率杆，承受矩为 M_e 的力偶作用。试用单位载荷法计算截面 A 的扭转角 φ_A 与铅垂位移 $\varDelta_A$。弯曲刚度 EI 与扭转刚度 GI_t 均为常数。



题 12-30 图

解：求 φ_A 和 Δ_A 的单位状态俯视图如图 12-30a 和 b 所示。

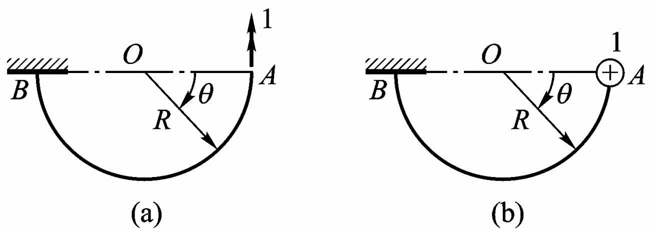


图 12-30

求 φ_A 的弯矩、扭矩方程依次为

$$\overline{M}(\theta)=-\sin\theta,\qquad M(\theta)=-M_{\mathrm{e}}\sin\theta$$

$$\overline{T}(\theta)=\cos\theta,\qquad T(\theta)=M_{\mathrm{e}}\cos\theta$$

由此得

$$\varphi_A=\frac{1}{EI}\int_0^{\pi}M_{\mathrm{e}}\sin^2\theta R\mathrm{d}\theta+\frac{1}{GI_{\mathrm{t}}}\int_0^{\pi}M_{\mathrm{e}}\cos^2\theta R\mathrm{d}\theta=\frac{\pi M_{\mathrm{e}}R}{2EI}+\frac{\pi M_{\mathrm{e}}R}{2GI_{\mathrm{t}}}\quad (\circlearrowright)$$

求 Δ_A 的单位状态的弯矩，扭矩方程依次为

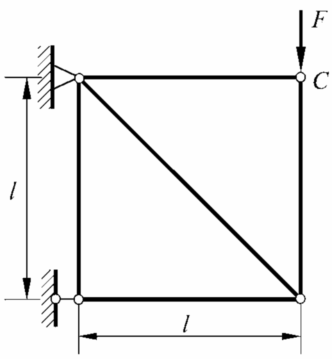
$$\widetilde{M}(\theta)=-R\sin\theta,\qquad \widetilde{T}(\theta)=-R(1-\cos\theta)$$

由此得

$$\Delta_A=\frac{1}{EI}\int_0^{\pi}M_{\mathrm{e}}R\sin^2\theta\, R\mathrm{d}\theta+\frac{1}{GI_{\mathrm{t}}}\int_0^{\pi}M_{\mathrm{e}}R(\cos^2\theta-\cos\theta)R\mathrm{d}\theta=\frac{\pi M_{\mathrm{e}}R^2}{2EI}+\frac{\pi M_{\mathrm{e}}R^2}{2GI_{\mathrm{t}}}\quad (\downarrow)$$

12-31

图示桁架，在节点 *C* 承受载荷 *F* 作用。试用单位载荷法计算该节点的铅垂位移 Δ_y 与水平位移 Δ_x。各杆的材料相同，应力-应变关系呈非线性，拉伸时为 $\sigma=c\sqrt{\varepsilon}$，压缩时亦同，其中 *c* 为已知常数。各杆的横截面面积均为 *A*。



题 12-31 图

解：1．令 F=1 作为求 Δ_y 的单位状态；求 Δ_x 的单位状态及各杆编号示如图 12-31。

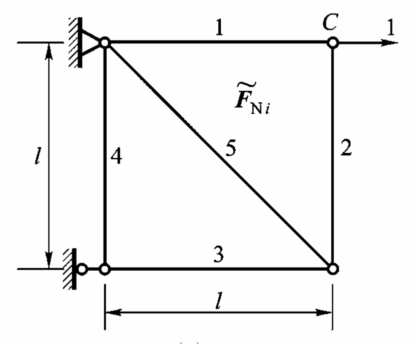


图 12-31

2．内力计算结果及杆长列于下表：

i	$\overline{F}_{Ni}$	$\widetilde{F}_{Ni}$	F_{Ni}	l_i
1	0	1	0	l
2	–1	0	–F	l
3	–1	0	–F	l
4	0	0	0	l
5	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}l$

3．建立 Δl_i 与 F_{Ni} 的关系

根据

$$\sigma = c\sqrt{\varepsilon} \qquad \text{（压缩时为 } \sigma = -c\sqrt{-\varepsilon}\text{）}$$

得

$$\sigma^2 = c^2\varepsilon$$

或写成

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma^2}{c^2} = \frac{F_N^2}{A^2c^2}$$

由此得

$$\Delta l = \frac{F_N^2 l}{A^2c^2}, \qquad \Delta l_i = \pm\frac{F_{Ni}^2 l_i}{A^2c^2} \qquad \text{（拉取“+”号，压取“–”号）}$$

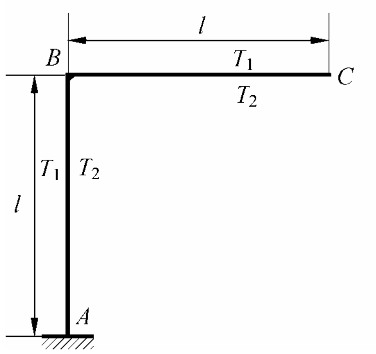
4．求位移

根据单位载荷法及以上内力结果，得

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{5} \overline{F}_{Ni}\Delta l_i = \frac{6F^2 l}{A^2 c^2} \quad (\downarrow)$$

$$\Delta_x = \sum_{i=1}^{5} \widetilde{F}_{Ni}\Delta l_i = 0$$

12-33 图示等截面刚架，杆 ***AB*** 的左侧及杆 ***BC*** 的顶面的温度升高 T_1，另一侧的温度升高 T_2，并沿截面高度线性变化。试用单位载荷法计算截面 ***C*** 的铅垂位移 Δ_y、水平位移 Δ_x 与转角 θ_C。横截面的高度为 ***h***，材料的线膨胀系数为 α_l。



题 12-33 图

解：1．求 $\mathrm{d}\theta$ 和 $\mathrm{d}\delta$

设 $T_2 > T_1$，由题 12-32 之解可知，

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\alpha_l (T_2 - T_1)\mathrm{d}x}{h}, \qquad \mathrm{d}\delta = \frac{\alpha_l (T_2 + T_1)\mathrm{d}x}{2}$$

2．求截面 ***C*** 的位移

求 Δ_y，Δ_x 和 θ_C 的单位状态依次示如图 12-33a,b 和 c。

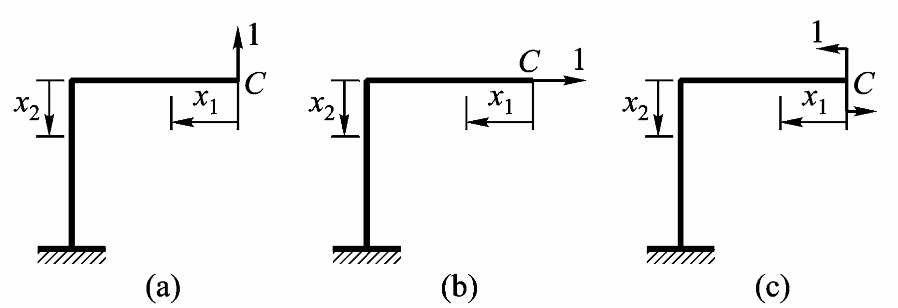


图 12-33

由图 a 可知，

$$\overline{M}(x_1) = x_1, \qquad \overline{M}(x_2) = l, \qquad \overline{F}_{N2} = 1$$

由此得

$$\Delta_y=\int_0^l(x_1)\frac{\alpha_l(T_2-T_1)}{h}\mathrm{d}x_1+\int_0^l(l)\frac{\alpha_l(T_2-T_1)}{h}\mathrm{d}x_2+\int_0^l(1)\frac{\alpha_l(T_2+T_1)}{2}\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{3l^2\alpha_l(T_2-T_1)}{2h}+\frac{l\alpha_l(T_2+T_1)}{2}\quad(\uparrow)$$

由图 b 可知，

$$\overline{F}_{\mathrm{N}}=1,\qquad \overline{M}(x_2)=-x_2$$

由此得

$$\Delta_x=\int_0^l(1)\frac{\alpha_l(T_2+T_1)}{2}\mathrm{d}x_1+\int_0^l(-x_2)\frac{\alpha_l(T_2-T_1)}{h}\mathrm{d}x_2=\frac{l\alpha_l(T_2+T_1)}{2}-\frac{l^2\alpha_l(T_2-T_1)}{2h}\quad(\rightarrow)$$

由图 c 可知，

$$\overline{M}(x_1)=1,\qquad \overline{M}(x_2)=1$$

由此得

$$\theta_C=\int_0^l(1)\frac{\alpha_l(T_2-T_1)}{h}\mathrm{d}x_1+\int_0^l(1)\frac{\alpha_l(T_2-T_1)}{h}\mathrm{d}x_2=\frac{2l\alpha_l(T_2-T_1)}{h}\qquad(\circlearrowleft)$$

若 $T_2<T_1$，各位移均反向。

12-34 题 12-17 所述桁架，设杆 *AB* 的温度升高 ΔT。试计算由此引起的节点 *B* 的铅垂位移。材料的线膨胀系数为 α_l。

（a）解：由图 12-34a 可得

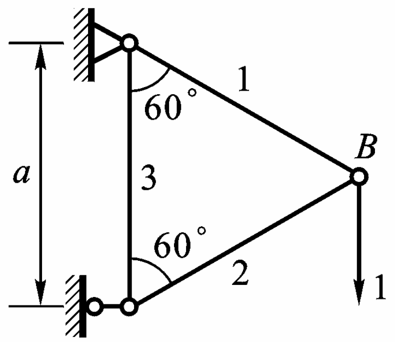


图 12-34a

i	$\overline{F}_{\mathrm{N}i}$	Δl_i	$\overline{F}_{\mathrm{N}i}\Delta l_i$
1	1	0	0
2	–1	$\alpha_l a\Delta T$	$-\alpha_l a\Delta T$
3	$1/2$	0	0

Σ		$-\alpha_l a\Delta T$

于是有

$$\varDelta_B=\sum_{i=1}^{3}\overline{F}_{Ni}\Delta l_i=-\alpha_l a\Delta T\quad(\uparrow)$$

（a） 解：由图 12-34b 可得

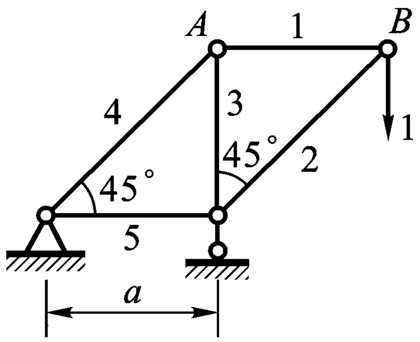


图 12-34b

i	$\overline{F}_{Ni}$	Δl_i	$\overline{F}_{Ni}\Delta l_i$
1	1	$\alpha_l a\Delta T$	$\alpha_l a\Delta T$
2	$-\sqrt{2}$	0	0
3	–1	0	0
4	$\sqrt{2}$	0	0
5	–1	0	0
Σ			$\alpha_l a\Delta T$

于是有

$$\varDelta_B=\sum_{i=1}^{5}\overline{F}_{Ni}\Delta l_i=\alpha_l a\Delta T\quad(\downarrow)$$

12-36 试用图乘法解题 12-15。

解：由图 12-36 可得

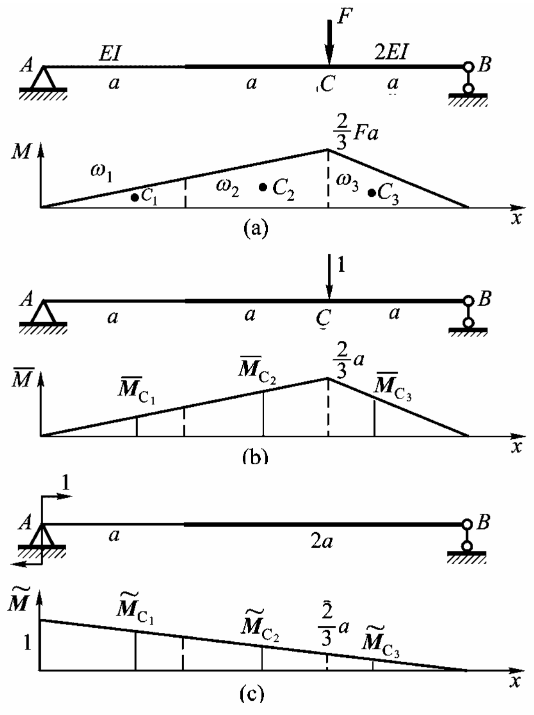


图 12-36

$$\omega_1 = \frac{1}{6}Fa^2, \qquad \overline{M}_{C_1} = \frac{2}{9}a$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}Fa^2, \qquad \overline{M}_{C_2} = \frac{14}{27}a$$

$$\omega_3 = \frac{1}{3}Fa^2, \qquad \overline{M}_{C_3} = \frac{4}{9}a$$

$$\widetilde{M}_{C_1} = \frac{2}{9}, \qquad \widetilde{M}_{C_2} = \frac{13}{27}, \qquad \widetilde{M}_{C_3} = \frac{7}{9}$$

于是得到

$$\Delta_C = \frac{1}{EI}(\frac{Fa^2}{6})(\frac{2}{9}a) + \frac{1}{2EI}(\frac{Fa^2}{2})(\frac{14}{27}a) + \frac{1}{2EI}(\frac{Fa^2}{3})(\frac{4}{9}a) = \frac{13Fa^3}{54EI} \quad (\downarrow)$$

及

$$\theta_A = \frac{1}{EI}(\frac{Fa^2}{6})(\frac{2}{9}) + \frac{1}{2EI}(\frac{Fa^2}{2})(\frac{13}{27}) + \frac{1}{2EI}(\frac{Fa^2}{3})(\frac{7}{9}) = \frac{31Fa^2}{108EI} \quad (\circlearrowright)$$

12-38 试用图乘法解题 12-11。

解：由图 12-38 可得

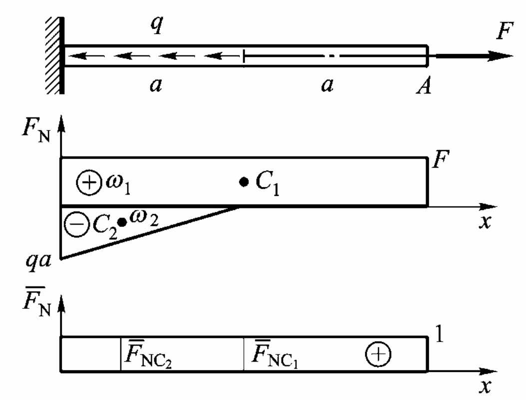


图 12-38

$$\omega_1 = 2Fa, \qquad \overline{F}_{NC_1} = 1$$

$$\omega_2 = -\frac{qa^2}{2}, \qquad \overline{F}_{NC_2} = 1$$

于是有

$$\Delta_A = \frac{1}{EA}[(2Fa)(1) + (-\frac{qa^2}{2})(1)] = \frac{(4F - qa)a}{2EA}$$

12-40 试用图乘法解题 12-22。

解：由图 12-40 可得

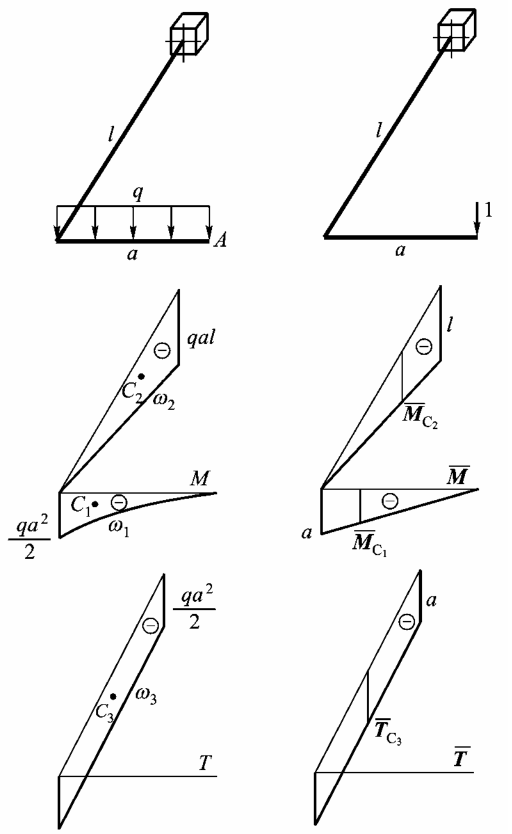


图 12-40

$$\omega_1 = -\frac{qa^3}{6}, \qquad \overline{M}_{C_1} = -\frac{3}{4}a$$

$$\omega_2 = -\frac{qal^2}{2}, \qquad \overline{M}_{C_2} = -\frac{2l}{3}$$

$$\omega_3 = -\frac{qa^2 l}{2}, \qquad \overline{T}_{C_3} = -a$$

于是有

$$\Delta_A = \frac{1}{EI}(-\frac{qa^3}{6})(-\frac{3a}{4}) + \frac{1}{EI}(-\frac{qal^2}{2})(-\frac{2l}{3}) + \frac{1}{GI_t}(-\frac{qa^2 l}{2})(-a)$$

$$= \frac{qa^4}{8EI} + \frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^3 l}{2GI_t} \quad (\downarrow)$$