B

注：试题共 4 页，满分 100 分

一、　选择题（在正确答案对应的字母上打 √，每小题 3 分，共 15 分）。

1、第二类 Lagrange 方程适用于研究具有下列哪类约束的质点系的动力学问题？

ACD　　A：完整约束　　B：非完整约束　　C：定常约束　　D：非定常约束

2、定点运动刚体的自由度可以是________________。

ABCD　　A：1　ψ、φ、θ　　B：2　　C：3　　D：4

3、定点运动的圆锥 ABC（$AC \perp AB$）在水平固定圆盘上纯滚动，如图 1 所示。若圆锥底面中点 D 作匀速圆周运动，则在图示瞬时，圆锥母线 AB 上 B 点加速度矢量 a_B 的方向_____。

D

A：平行于 AB　　B：垂直于 A、B、C 三点所确定的平面

C：平行于 AC　　D：位于 A、B、C 三点所确定的平面内

$\vec{a}=\omega^2 r$

$\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

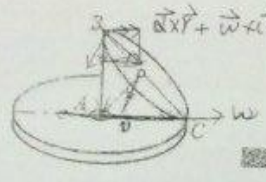


图 1

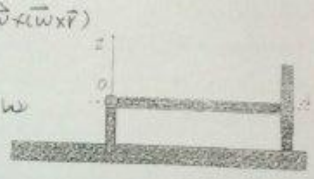


图 2

4、均质圆杆 OA 与均质薄圆盘中心固连，并通过光滑球铰链约束于固定点 O。OA 杆水平且与圆盘面垂直，圆盘放置在水平面上，如图 2 所示。当系统静止时，地面作用于圆盘法向约束力的大小为 F_N。当给系统一个初始扰动，在主动力仅为自身重力的作用下，圆盘中心 A 点作匀速圆周运动，圆盘在地面上纯滚动（不计滚阻力偶），此时地面作用于圆盘的法向约束力的大小为 F_N^*。若比较这两种情况下法向约束力的大小，则下列哪个结论是成立的。

D

A：$F_N = F_N^*$　　B：$F_N < F_N^*$　　C：$F_N > F_N^*$　　D：条件不足无法确定

CD　5、单自由度线性系统无阻尼自由振动的固有频率与系统的____C、D____有关。

A：广义坐标　　B：广义速度　　C：广义质量　　D：广义刚度。

$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$　　$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

B

二、 填空题，将计算的最简结果填写在空格里（本题共 60 分，每空 5 分）。

1、滑块 G 用两弹簧连接在倾角为 α 的斜面上并沿斜面直线平移，如图 3 所示，求该系统的等效弹簧刚度系数 k^*。 $k^* =$ $\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

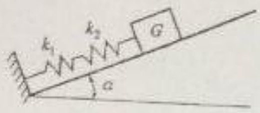


图 3

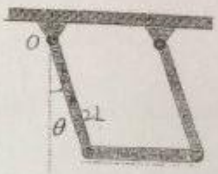


图 4

$T = 2\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}mL^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2$

$V = mg2L(1-\cos\theta) + 2\times\frac{1}{2}mgL(1-\cos\theta)$

2、三个相同的均质杆用光滑柱铰链连接，在铅垂面内运动，如图 4 所示。若杆长为 $2L$，重力加速度为 g，求该系统在平衡位置附近作微幅振动的固有频率 ω_0。 $T = \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(2\dot{\theta})^2 = \frac{5}{6}mL^2\dot{\theta}$ $= \frac{10}{3}mL^2$

$\omega_0 =$ $\sqrt{\dfrac{3g}{4L}}$

$V = 4mgL(1-\cos\theta)$

$\frac{20}{3}mL^2\ddot{\theta} + 4mgL\theta = 0$

3. 质量为 m 的质点 C 被约束在半径为 R 的圆环内运动，圆环以匀角速度 ω 绕铅垂轴 z 转动，CO 连线与铅垂线的夹角为 θ（系统的广义坐标），如图 5 所示。该质点受到的是非定常约束，其动能可表示为 $T = T_0 + T_1 + T_2$，其中 $T_i(i=0,1,2)$ 为广义速度的 i 次齐函数。求该质点的 T_1、T_2。

$T_1 =$ $\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$

$T_2 =$ $\frac{1}{2}mv^2$

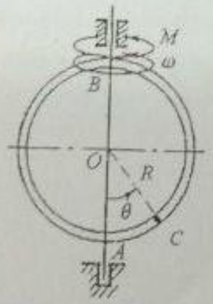
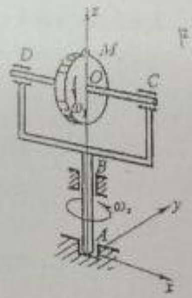


图 5



$R=0.1m$

图 6

B

4. 半径为 $R=0.1m$ 的圆盘以匀角速度 $\omega_1=8rad/s$ 绕 CD 轴转动，该轴被水平支撑在框架 BCD 上。该框架以匀角速度 $\omega_2=6rad/s$ 绕铅垂轴 z 转动。圆盘中心 O 位于 CD 轴与 z 轴的交点，如图 6 所示。求该圆盘角速度的大小 ω，角加速度的大小 α，图示瞬时圆盘最高点 M 的向轴加速度的大小 a_N，转动加速度的大小 a_R 和切向加速度的大小 a_t。

$a_N=\omega^2 r$

$a_R=\alpha\cdot r$ $\omega=$ 10 rad/s $\alpha=$ 100 rad/s²

$a_t=\omega^2 R$ $a_N=$ 6.4 rad/s² $a_R=$ 10 rad/s² $a_t=$ 6.4 rad/s²

5. 棱长为 L 的正方体绕 O 点作定点运动，已知该瞬时正方体顶点 A、B 的速度方向，如图 7 所示，其中 B 点速度的大小为 u，求该瞬时正方体的角速度的大小 ω 和顶点 C 速度的大小 v_C。

$\omega=\frac{\sqrt{3}u}{2L}$ $v_C=\frac{\sqrt{2}}{2}u$

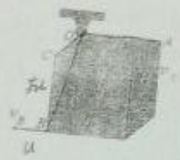


图 7

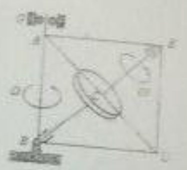
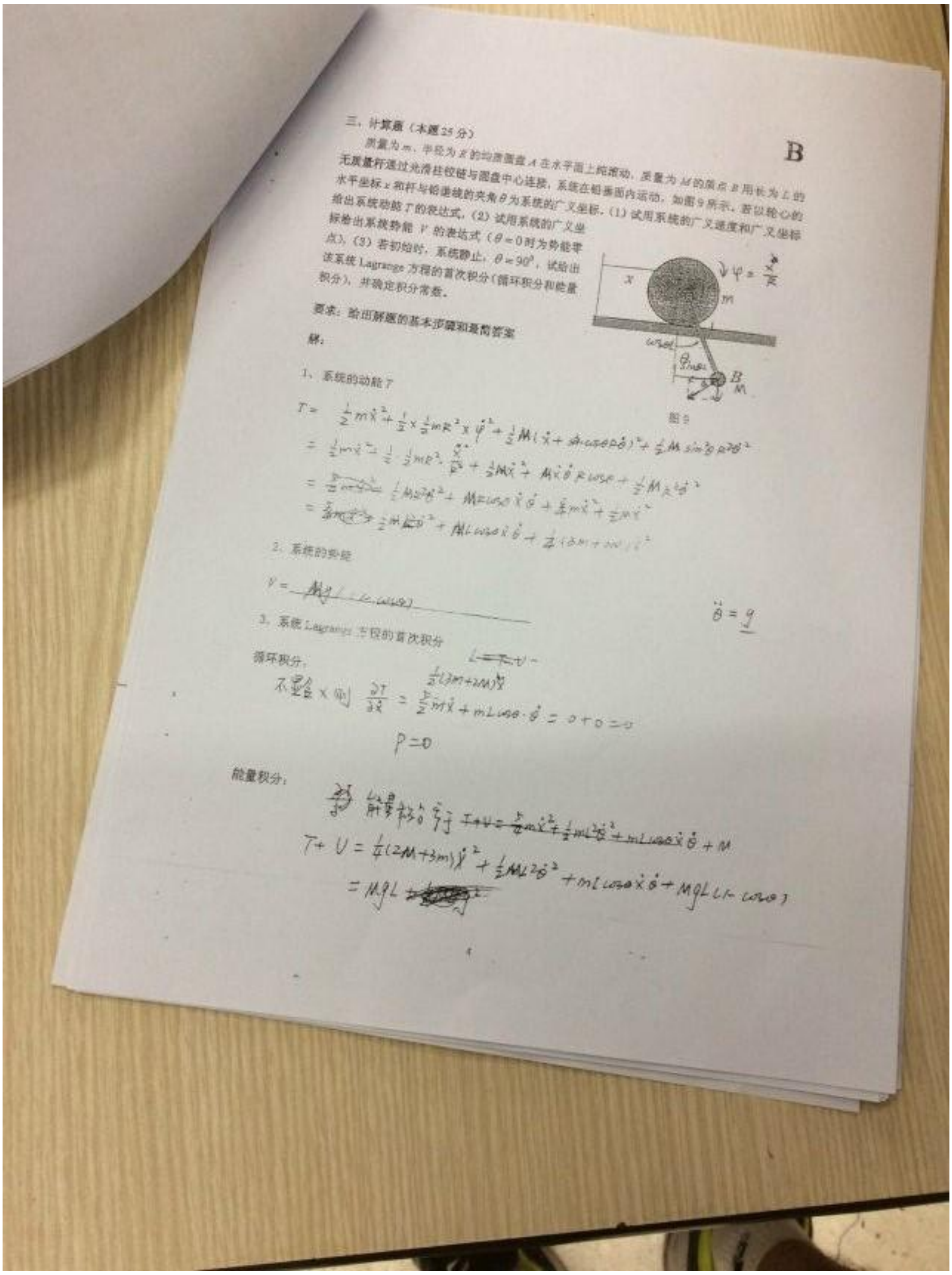


图 8

6. 若质量为 m 半径为 R 的匀质圆盘绕边长为 L 的正方形框架的对角线 BE 以匀角速度 ω 转动，框架 $ABDE$ 以匀角速度 Ω 绕铅垂轴 AB 转动，且 $\omega>>\Omega$，如图 8 所示，求该圆盘陀螺力矩的大小 M_g。

$M_g=\frac{1}{2}mR^2\omega\Omega\cdot\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}mR^2\omega\Omega$



三、计算题（本题25分）

B

质量为 m、半径为 R 的均质圆盘 A 在水平面上纯滚动，质量为 M 的质点 B 用长为 L 的无质量杆通过光滑柱铰链与圆盘中心连接，系统在铅垂面内运动，如图9所示。若以轮心的水平坐标 x 和杆与铅垂线的夹角 θ 为系统的广义坐标，(1) 试用系统的广义速度和广义坐标给出系统动能 T 的表达式，(2) 试用系统的广义坐标给出系统势能 V 的表达式（$\theta=0$ 时为势能零点），(3) 若初始时，系统静止，$\theta=90^0$，试给出该系统 Lagrange 方程的首次积分（循环积分和能量积分），并确定积分常数。

图9

要求：给出解题的基本步骤和最简答案

解：

1、系统的动能 T

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\times\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}M(\dot{x}+\ldots)^2+\frac{1}{2}M\sin^2\theta\ldots$$

$$=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{\dot{x}^2}{R^2}+\frac{1}{2}M\dot{x}^2+M\dot{x}\dot{\theta}R\cos\theta+\frac{1}{2}M\ldots$$

$$=\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2+ML\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta}+\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$=\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2+ML\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta}+\frac{1}{4}(3m+2M)\dot{x}^2$$

2、系统的势能

$V=MgL(1-\cos\theta)$

$\ddot{\theta}=g$

3、系统 Lagrange 方程的首次积分

循环积分：

$\frac{1}{2}(3m+2M)\dot{x}$

不显含 x 则 $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{3}{2}m\dot{x}+mL\cos\theta\cdot\dot{\theta}=0+0=0$

$p=0$

能量积分：

能量积分守恒

$$T+U=\frac{1}{4}(2M+3m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2+mL\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta}+MgL(1-\cos\theta)$$

$$=MgL$$