

# 第一讲 拉普拉斯变换及其应用

## 1.1 基本要求

- 1.熟悉拉氏变换的基本法则
- 2.熟练掌握典型函数的拉氏变换式。
- 3.掌握用拉氏变换求解微分方程初值问题的思路。
- 4.熟练掌握求有理分式函数拉氏反变换的方法

## 1.2. 重点讲解

1, 对于学习本课程而言,广义积分式(拉氏变换的定义)的收敛性以及复变量主值积分式(反变换定义式)的计算,与正确地熟练地运用拉氏变换的基本法则相比不是主要的,因为在工程计算中可以用查表的方式来完成拉氏变换和拉氏反变换的计算。而拉氏变换的基本法则的运用则直接关系到是否真正掌握这种变换的工具。

2, 拉氏变换的线性性质源自定积分的线性性质,这说明作为一种变换关系,拉氏变换是线性变换。应当指出线性关系并非所有变换都具有的性质,例如以十为底的对数可以看成正半数轴到数轴的变换关系,但关系式  $\lg(a+b) \neq \lg a + \lg b$  说明取对数的运算显然不满足线性关系。

3, 为了保证拉氏变换的一一对应关系,总假定拉氏变换的定义式中的原函数  $f(t)$  在  $t < 0$  时为零。即原函数应写成  $f(t) \cdot 1(t)$ , 根据单位阶跃函数  $1(t)$  的定义,这里  $f(t) \cdot 1(t)$  为

$$f(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

下面给出  $f(t)$ 、 $f(t) \cdot 1(t)$ 、 $f(t) \cdot 1(t-t_0)$ 、 $f(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)$ 、 $f(t-t_0)$  的函数关系,以说明通常所说“将  $f(t)$  延迟  $t_0$ ”的正确表示。显然应当是图 1-1 中的(d), 不是(c)或(e)

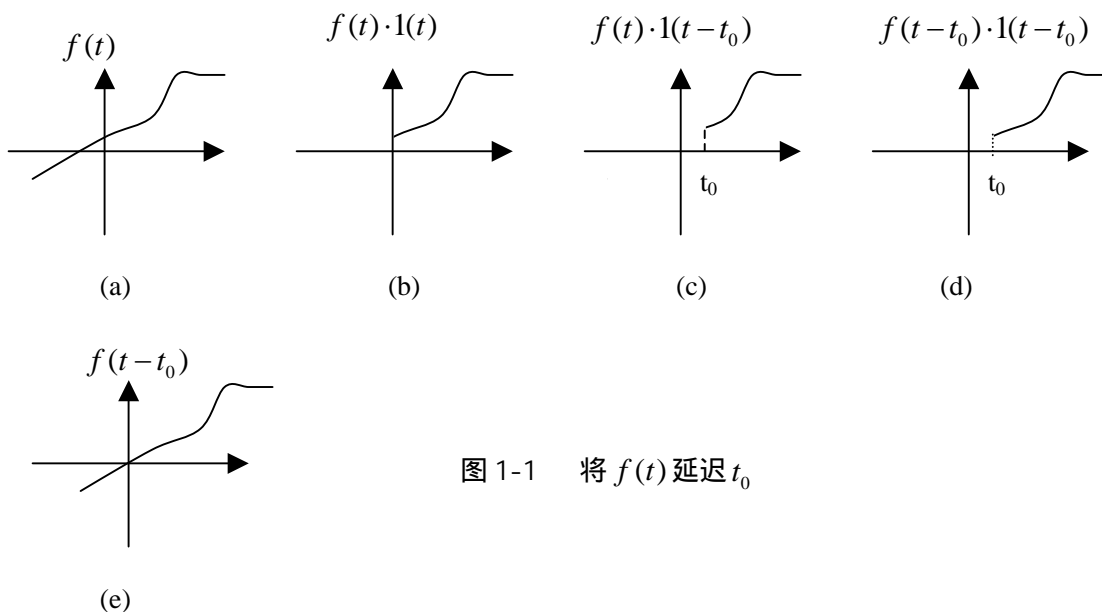


图 1-1 将  $f(t)$  延迟  $t_0$

基于上述认识，就能正确表达图形和用延迟定理求出某些图形的拉氏变换式。

### 例题 1-2

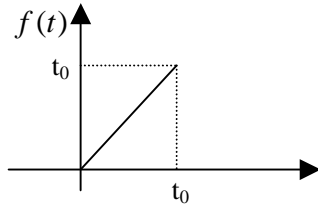


图 1-2 波形图

求图 1-2 中的波形的拉氏变换。

解 图 1-2 中的波形可以看成  $t \cdot 1(t)$ 、 $(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)$ 、 $t_0 \cdot 1(t-t_0)$  这三个信号的代数和，读者可画出这三个信号的波形图以验证下式的正确性。

$$f(t) = t \cdot 1(t) - (t-t_0) \cdot 1(t-t_0) - t_0 \cdot 1(t-t_0)$$

运用拉氏变换的线性性质和延迟定理，可得

$$L[f(t)] = L[t \cdot 1(t) - (t-t_0) \cdot 1(t-t_0) - t_0 \cdot 1(t-t_0)] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-t_0 s} - \frac{t_0}{s} e^{-t_0 s}$$

### 4. 拉氏变换式的积分下限问题

拉氏变换的定义的积分下限为零，在工程实践中，应该有  $0^+$  (零的右极限) 和  $0^-$  (零的左极限) 之分。对于在  $t=0$  处连续或只有第一类间断点的函数， $0^+$  型和  $0^-$  型的拉氏变换结果是相同的。但是对于在  $t=0$  处有无界跳跃的函数，两种拉氏变换的结果不一致。可这用单位脉冲函数  $\delta(t)$  说明之。

$$\int_{0^+}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 0 \qquad \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

为了反映在  $t=0$  处有单位脉冲函数  $\delta(t)$  的作用，应当积分下限取  $0^-$  更为合理，因为取  $0^+$  未能包含  $t=0$  时刻，而  $0^-$  型的拉氏变换包含了  $t=0$  时刻。今后不加声明均认为是取  $0^-$  型的拉氏变换。

采用  $0^-$  型的拉氏变换另一方便之处，是考虑到在工程实际问题中，常常把开始研究系统的时刻规定为零时刻，而外作用也是在零时刻加于系统。 $0^-$  时刻表示外作用尚未加于系统，这时系统所处的状态是易于知道的，因此  $0^-$  时刻的初始条件也比较容易确定。若采用  $0^+$  型的拉氏变换，则相当于外作用已加于系统，要确定  $0^+$  时系统的状态是很繁琐的，因而  $0^+$  时的初始条件也不易确定。

### 5. 有理分式函数的拉氏反变换

在进行有理分式的部分分解时可能会有一对共轭复数根所对应的部分分式，其形式如下

$$\frac{c}{s+\alpha} + \frac{\bar{c}}{s+\bar{\alpha}}$$

其中  $\bar{c}, \bar{\alpha}$  表示  $c, \alpha$  的共轭，若  $c = |c|e^{j\theta}$ ， $\alpha = x + jy$ ， $s_{1,2} = -\alpha = -x \mp jy$ ，则有

$$L^{-1}\left[\frac{c}{s+\alpha} + \frac{\bar{c}}{s+\bar{\alpha}}\right] = L^{-1}\left[\frac{c}{s+\alpha}\right] + L^{-1}\left[\frac{\bar{c}}{s+\bar{\alpha}}\right] =$$

$$|c|e^{-xt} \cdot e^{-yjt} \cdot e^{j\theta} + |c|e^{-xt} \cdot e^{yjt} e^{-j\theta} = 2|c|e^{-xt} \frac{e^{(\theta-yt)j} + e^{-(\theta-yt)j}}{2} = 2|c|e^{-xt} \cos(yt - \theta)$$

$$L^{-1}\left[\frac{c}{s+\alpha} + \frac{\bar{c}}{s+\bar{\alpha}}\right] = 2|c|e^{-xt} \cos(yt - \theta) \quad t > 0 \quad (1-1)$$

#### 例题 1-3

$$F(s) = \frac{2s^2 - 5s + 1}{s(s^2 + 1)}$$

将进行部分分式分解，可得

$$F(s) = \frac{2s^2 - 5s + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+j} + \frac{c_3}{s-j}$$

其中

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 0.5 - 2.5j = 2.55e^{-j78.7^\circ}$$

$$c_3 = 0.5 + 2.5j = 2.55je^{j78.7^\circ}$$

由式(1-1)直接可得( $x=0, y=1, |c|=2.55, \theta=-78.7^\circ$ )

$$L^{-1}[F(s)] = 1 + 5.10 \cos(t + 78.7^\circ) \quad t > 0$$

另一方法也可得相同结果

$$F(s) = \frac{2s^2 - 5s + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{s^2 - 5s + s^2 + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{s-5}{s^2+1} + \frac{1}{s} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{5}{s^2+1} + \frac{1}{s}$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} - \frac{5}{s^2+1} + \frac{1}{s}\right] = \cos t - 5 \sin t + 1 = 1 + 5.10 \cos(t + 78.7^\circ) \quad t > 0$$

### 6. 用拉氏变换求解微分方程初值问题

为了说明用拉氏变换求解微分方程初值问题的思路，首先研究解方程  $x^3 = 5$  的算术根问题。这一问题利用对数是很容易解决的。做法如下

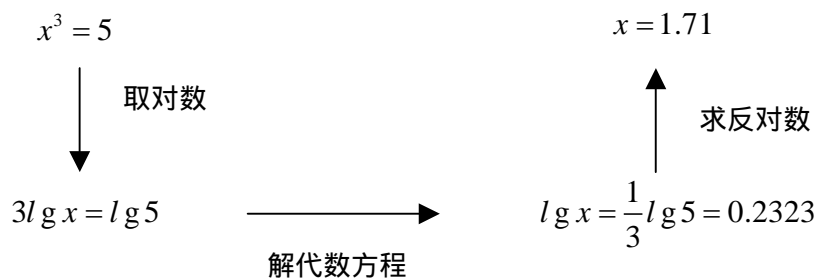


图 1-3 用对数运算求算术根

由于使用了对数，在真数域中开三次方的运算转换为在对数域中的除法运算。

用拉氏变换求微分方程初值问题的解同上述思路类似：

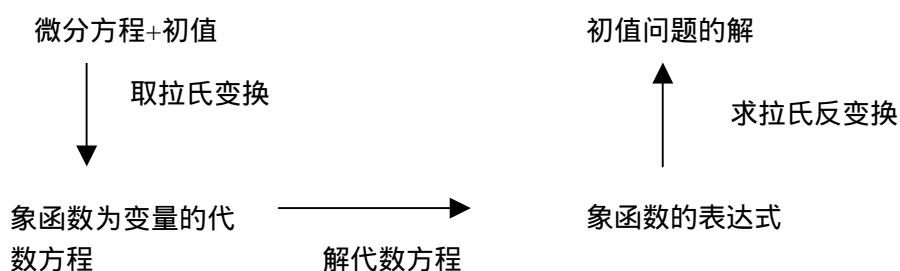


图 1-4 用拉氏变换求微分方程初值问题的解

由于使用了拉氏变换，在时间域中求原函数(微分方程初值问题的解)转换为在复数域中求象函数(代数方程的解)，从而方便了运算。

在图 1-4 中，如果象函数是有理分式函数，就可以通过部分分式分解和查表的方法求出微分方程初值问题的解。

经典的微分方程初值问题解法通常包含以下步骤：(1)求齐次方程的通解，(2)利用拉格郎日常数变易法求非齐次方程的特解，(3)将微分方程初值问题的解表示成通解加特解的形式，(4)利用给定的初值确定形式解中的任意常数，从而得到微分方程初值问题的解。与经典的解微分方程初值问题的方法比较。拉氏变换法比较直接，可以直接得到初值问题的解，特别是没有确定任意常数这一步骤，确定任意常数实际上是解线性方程组，当方程阶次较高时，这一步骤是很繁琐的。

**例题 1-4** 微分方程如下：

$$\ddot{c}(t) + 2\dot{c}(t) + c(t) = r(t)$$

$r(t) = 1(t)$ ， $c(0) = \dot{c}(0) = 0$ ，求  $c(t)$ 。

解：对方程左边进行拉氏变换，并代入初值，得到

$$L[\ddot{c}(t) + 2\dot{c}(t) + c(t)] = L[\ddot{c}(t)] + 2L[\dot{c}(t)] + L[c(t)] = \quad (\text{根据拉氏变换线性性质})$$

$$s^2 C(s) - sc(0) - \dot{c}(0) + 2[sC(s) - c(0)] + C(s) = \quad (\text{根据拉氏变换微分法则})$$

$$s^2 C(s) + 2sC(s) + C(s) \quad (\text{代入 } c(0) = \dot{c}(0) = 0)$$

对方程右边进行拉氏变换，得到

$$L[r(t)] = \frac{1}{s}$$

令左、右两边相等，得到以象函数  $C(s)$  为变量的代数方程

$$s^2 C(s) + 2sC(s) + C(s) = \frac{1}{s}$$

解出象函数

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

将  $C(s)$  进行部分分式分解，设

$$C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_3}{s}$$

其中  $c_2$ 、 $c_1$  及  $c_3$  为待定系数，且

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 \frac{1}{s(s+1)^2} = -1$$

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[ (s+1)^2 \frac{1}{s(s+1)^2} \right] = -1$$

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s(s+1)^2} = 1$$

$$C(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s}$$

进行拉氏反变换(查表)，求出  $c(t)$

$$c(t) = -te^{-t} - e^{-t} + 1(t) = 1(t) - (1+t)e^{-t} \quad t > 0$$

7, 在本课程中引入拉氏变换不只是为了了解微分方程, 更重要的是通过它建立常参量线性系统一种输入/输出描述的数学模型。