一、　选择题(每题 3 分，共 33 分)

1. 一个向量逆时针旋转$\frac{\pi}{3}$，向右平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位后对应的复数为 2，则原向量对应的复数是（ A ）

(A) $1-\sqrt{3}i$　　(B) $1+\sqrt{3}i$　　(C) $\sqrt{3}-i$　　(D) $\sqrt{3}+i$

2. $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}$（ D ）

(A) 等于 1　　(B) 等于 -1　　(C) 等于 $-i$　　(D) 不存在

3. 下列函数中，在整个复平面上均为解析函数的是（ B ）

(A) xy^2+ix^2y　　(B) $x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

(C) $x^2-y^2-x+(2xy-y^2)i$　　(D) x^2-y^2-2xyi

4. 设 C 是从 0 到 πi 的直线段，则积分 $\int_C z\cos z^2\mathrm{d}z=$（ B ）

(A) $\frac{1}{2}\sin\pi^2$　　(B) $-\frac{1}{2}\sin\pi^2$　　(C) $-\frac{1}{2}\cos\pi^2$　　(D) $\frac{1}{2}\cos\pi^2$

5. 设 C 为曲线 C_1：左半平面中以原点为中心的负向单位半圆以及曲线 C_2：从 i 到 $-i$ 的直线段所组成的复合曲线，则 $\int_C |z|\,\mathrm{d}z=$（ A ）

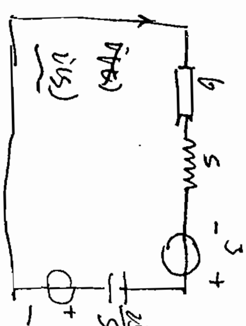
(A) i　　(B) $-i$　　(C) 0　　(D) 1

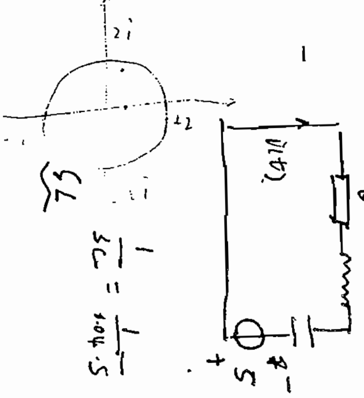
6. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$，则 $\oint_C \frac{e^{\frac{1}{3-z}}\cos\frac{1}{z-3}}{(2-z)}\mathrm{d}z=$（ B ）

(A) $2\pi ie\cos 1$　　(B) 0　　(C) $6\pi ie\cos 1$　　(D) $-2\pi ie\cos 1$

7. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 收敛半径为 2，那么该级数在 $z=1+\sqrt{3}i$ 处的敛散

位于收敛圆的圆周上.





$z=0$ 可去 极点 本性

$1+\frac{}{3!}$

$\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

nz^{n-1}

$=\frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$

$-\frac{1}{6}$ -1

$=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z\,3!}+\frac{z}{5!}$

$\frac{\cos z\cdot z-\sin z}{z^2}$

z^{2}

$\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{10}}$

$\frac{\sin z}{z^4}$ 本1

$(10z)'=1$

$\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2\left(\frac{\sin z}{z}\right)}{dz^2}$

$2\pi i\cdot C_{-1}$

$z^{10}=1$

$\frac{1}{z^2-1}$ $\quad z^{10}=1,\ z=-1$

$2\quad i$

1

$C^{-1}=-1$. $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$

$z^n=1$. $\quad z^{-n}\quad z$

$C_{-1}=-1$. $f(t)=\sin t$. $\quad \tau=$

$\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z+1)(z-1)}\,dz$

$F[f(t-\tau)u(t-\tau)]=e^{-s\tau}\cdot F(s)$

$\oint_{|z|}\frac{1}{z-1}dz-\oint_{|z|=2}\frac{1}{z+1}dz$

$\sin(t-\frac{1}{3})u(t-\frac{1}{3})\quad e^{-\frac{\pi}{3}s}F(s)$

$\tau=\frac{\pi}{3}$

$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z-1},1\right)-2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z+1},-1\right)$

$=2\pi i\cdot\frac{1}{1}-2\pi i\frac{1}{1}$

性为（ A D

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）不能确定

8．设 $v(x,y)$ 在区域 D 内为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数，则下列函数中为 D 内解析函数的是（ B ）

v是u

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

（A）$v(x,y)+iu(x,y)$　　（B）$v(x,y)-iu(x,y)$

（C）$u(x,y)-iv(x,y)$　　（D）$\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}$

$g(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ m n

9．设 $z=0$ 为函数 $\frac{1-e^{z^2}}{z^4\sin z}$ 的 m 级极点，那么 $m=$（ A ）

2级零点 5

若 $z=z_0$ 是 $P(z)$ 的 m 级零点，是 $Q(z)$ 的 n 级零点，

若 $m\le n$ 则是 $g(z)$ 的 n−m 级零点

若 m>n 则称 $z=z_0$ 为 $g(z)$ 的可去奇点

（A）5　（B）4　（C）3　（D）2

$z^4\sin z$

$=4z^3\sin z+z^4\cos z$

$=12z^2\sin z+4z^3\cos z+4z^3\cos z-z^4\sin z$

$=24z\sin z+12z^2\cos z$

$=24\sin z+24z\cos z$

10．设 $\mathrm{F}[f(t)]=F(\omega)$，假如当 $t\to+\infty$ 时，$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\to 0$，则 $\mathrm{F}[\int_{-\infty}^{2t} f(t)\mathrm{d}t]=$（ A ）

$h(t)$

令 $h(t)=\int_{-\infty}^{2t} f(t)dt$

对 $h(t)$ 求导 记为 $f(2t)$

$F[h'(t)]=F[2f(2t)]=F(\frac{\omega}{2})$

‖

$i\omega F[h(t)]$

$F[(\int_{-\infty}^{2t} f(t)dt)']$

$=F[2f(2t)\cancel{dt}]$

$=2F(\omega)$

(A) $\frac{1}{2i\omega}F(\frac{\omega}{2})$　　(B) $\frac{1}{i\omega}F(\frac{\omega}{2})$

(C) $\frac{1}{2i\omega}F(\omega)$　　(D) $\frac{1}{i\omega}F(\omega)$

11．设 $f(t)=\sin(t-\frac{\pi}{3})$，则 $\mathrm{L}[f(t)]=$（ A ）.

(A) $\frac{1-\sqrt{3}s}{2(1+s^2)}$　　(B) $\frac{s-\sqrt{3}}{2(1+s^2)}$

(C) $\frac{1}{1+s^2}e^{-\frac{\pi}{3}s}$　　(D) $\frac{s}{1+s^2}e^{-\frac{\pi}{3}s}$

$\frac{1}{2}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t$

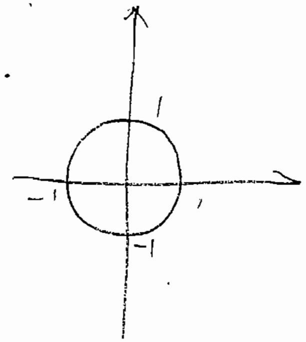
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{s}{s^2+1}$

$\frac{1-\sqrt{3}s}{2(1+s^2)}$

$3e^{-3t}\cos 4t-\frac{1}{4}e^{-3t}\sin 4t$

$\frac{s}{s^2+16}$

$\frac{s\cdot s}{(s+3)^2+16}-\frac{1}{(s+3)^2+16}$



$re^{i\theta}$

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\,d\zeta = \frac{2\pi i}{n!} f$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

$f(z$ $\quad \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$

$$\int_C \frac{\frac{1}{(z+1)(z+2)}}{z^3} = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(0)$$

$$-\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2}$$

$z+1(-z+2)$

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\,d\zeta = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(\zeta)$$

$= \pi i$

$$+\frac{2(z+1)}{(z+1)^3} - \frac{2(z+2)}{(z+2)^3}$$

$$\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$\cancel{z+1}$ $\quad \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-2}$

$\frac{1}{4}$ $\quad = 2 - \frac{2}{8} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$\pi i(-\sin\zeta)'$

$$\frac{\pi i}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}\right)$$

$= \pi i(-\cos\zeta)$

$$\frac{2}{(z-2)^3} - \frac{2}{(z+1)^3} = \frac{\pi i}{3}\left(-\frac{2}{8} - 2\right) \quad -\frac{9}{4} \times \frac{\pi i}{3}$$

$-\pi i$ $\quad \pi i \sin z = \pi i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{2\pi i}{1} \cdot \left(-\frac{2}{z+1}\right)\Big|_{z=}$ $\quad e^z = 1+$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$1-z$ $\quad \frac{1}{1-z} = \sum z^n$

$\pi i\cos z \quad -\pi i \sin z$

$= 2\pi i \cdot -2$

$1+$

$\frac{1}{n!} z^n$

$2\pi i$

$z^2 + \frac{z^2}{2} +$

$$= \frac{9}{5z} + \frac{2}{5z} + 5z + 5z$$

$5z\frac{5}{8}$ $\quad 5z\frac{4}{2} + 2$

12 $\quad 2z + \frac{2}{2z} + 2z$

$z + z$

$= \frac{2}{1} + \frac{2}{1}$

$$\frac{\frac{5}{2} + 2i\sin\theta}{5+4\cos\theta} - \frac{\frac{3}{2}}{5+4\cos\theta}$$

$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{10+8\cos\theta}$

$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{10+8\cos\theta}$

$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos\theta}$

$Z = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta + 2}$$

$$\frac{2+\cos\theta - i\sin\theta}{5+4\cos\theta}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t_1}\cos t_1\, e^{i\omega t_1}\,dt_1$$

1. 设$|z|=\sqrt{5}, \arg(z-i)=\frac{3\pi}{4}$，则$z=$ $-1+2i$. $(-1+2i)$ $x+y=1$

2. 设$f(z)=\frac{1}{4}z^4+8z$，则方程$f'(z)=0$的所有根为 $2e^{\frac{2k\pi+\pi}{3}i}$. $(k=0,1,2)$ $z^3=-8$

$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

3. $f(z)=2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x)$，则$f'(1+i)=$ 2 .

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}i=[2y+(-2x+2)i]|_{1+i}=2$

$-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$

$=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

4. 解析函数$f(z)=u+iv$的实部$u=x^2-y^2$，则$f(z)=$ z^2+C .

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+i2y=2z$ $f(z)=z^2+C$

5. 复数$(1+i)^i$的主值为 $e^{i(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i)}$.

$z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i$

$(1+i)^i=e^{i\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{i(\ln\sqrt{2}+(2k\pi+\frac{\pi}{4})i)}$ $|_{k=0}$

6. 设$f(z)=\oint_{|\xi|=1}\frac{e^{\xi}}{(\xi-z)^5}d\xi$，其中$|z|\neq1$，则$f'(\frac{\pi}{4}i)=$ $\frac{\pi i}{12}(1+i)$

高阶导数公式

$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$

$\oint_{|\xi|=1}\frac{e^{\xi}}{(\xi-z)^5}d\xi=\frac{2\pi i}{4!}(e^{\xi})^{(4)}=\frac{2\pi i}{24}e^{\frac{\pi}{4}i}$

$f'''(2)=$ 0 .

7. 设函数$\frac{z^2+z}{\sin z}$的泰勒展开式为$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\frac{\pi}{2})^n$，那么幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\frac{\pi}{2})^n$的收敛半径$R=$ $\pi/2$.

8. 函数$\frac{\cos z}{1-z}$在$z=0$处的泰勒展开式为 $1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^3\cdots$

柯西乘积

(至少写到含z^3的项).

$1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^3$

9. $z=\infty$是函数$\frac{3+2z+z^3}{z^2}$的 一级极点 .

$\frac{3}{z^2}+\frac{2}{z}+z=$

10. 在有限复平面函数$f(z)=\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}$的孤立奇点为 $z_k=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$z=0$，$z_k=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$ $k=0,\pm1,$

在其孤立奇点处的留数为 $\frac{(-1)^k}{(k\pi+\frac{\pi}{2})^2}$.

法1：$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ (条件：z_0是$Q(z)$的一级零点，不是$P(z)$的零点)

法2：用求导的方法直接求，利用倒数公式(之间转换)

$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

则 $\mathcal{L}\left[\int_0^{3t} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s} F\left(\frac{s}{3}\right)$

$F[f(1-2t)] = \frac{1}{2} F\left(-\frac{w}{2}\right)$

$\cancel{\frac{1}{2}tF\left(-\frac{w}{2}\right)}\; F[t f(1-2t)] = iw F(s)$

$\frac{1}{2} iw F\left(-\frac{w}{2}\right) \quad F\left(-\frac{w}{2}\right)$

$F[t f(t)] = i \cdot \frac{1}{2} F'\left(-\frac{w}{2}\right)$

$F[(t-2) f(t)] = i F'(w) - 2F(w)$

$F[t f(1-2t)] =$

$F[t f(1-2t)]$

$F[t f(t)] = i F'(w)$

$\mathcal{F}[f(-t)] = \cancel{\mathcal{F}[f(t)]}$

$F(-w)$.

$\mathcal{F}[t g(t)] = \frac{1}{(-i)} g'(t)$.

$F[f(1-2t)] = \frac{1}{2} F\left(-\frac{w}{2}\right)$.

$F[t f(1-2t)] = \cancel{\frac{1}{2} \cdot i w F\left(-\frac{w}{2}\right)}\; \frac{i}{2} \frac{dF\left(-\frac{w}{2}\right)}{dw} = -\frac{i}{4} F'\left(-\frac{w}{2}\right)$

$F[(at+b) f(at+b)]$

$\frac{dF\left(-\frac{w}{2}\right)}{dw} = F'\left(-\frac{w}{2}\right) \times -\frac{1}{2}$

$= \frac{dF\left(-\frac{w}{2}\right)}{d\left(-\frac{w}{2}\right)}$

$\frac{2i}{i-1} = \frac{2i(i+1)}{-2} = -(-1+i) = 1-i$

$(i-1)(i+1) = -1$

$1+i \quad = 1-i$

$(1-i)^3 = (-2i)^3 = -8 i^3 = -8 \cdot (-1) i$

$(-i)^2 = i^2 = -1$

$(-i)^{2} = 1$

$\frac{-2i}{2}$

$(1-i)^2 = 1 - 2i - 1$

$a^b = e^{a \operatorname{Ln} b}$

$\ln|z|$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z$

$= e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2} + i \cdot \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i \ln\sqrt{2}} \times e^{-\frac{\pi}{4}}$

$= 2^i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\left(e^{\ln 2}\right)^i =$

$e^{(1+i)\ln i \frac{\pi}{2} i}$

$(e^a)^b$

$\underbrace{U_x = 3x^2 - 3y^2 = V_y}$

$-3x^2 y$

$f'(z) = U_x + iV_x = U_x - iU_y$

$= 3x^2 - 3y^2 - i(-6xy)$

$= 3x^2 - 3y^2 + 6xy\, i$

$= 3(x^2 + 2xyi - y^2)$

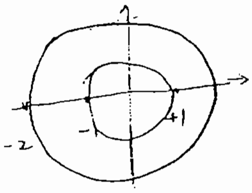
$f(z) = z^3$

11.已知 $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s(s+1)}$，则 $L^{-1}[F(s)]=$ $\underline{[1-e^{-(t-2)}]u(t-2)}$

12. 设 $a>0, f(t)=\begin{cases} e^{at}, t<0 \\ e^{-at}, t\geq 0 \end{cases}$，则函数 $f(t)$ 的 $Fourier$ 变换为 $\underline{\dfrac{2a}{a^2+w^2}}$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-iw)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+iw)t}dt = \frac{1}{a-iw}e^{(a-iw)t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{a+iw}e^{-(a+iw)t}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{a-iw}+\frac{1}{a+iw} = \frac{2a}{a^2+w^2}$

三、（9 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z^2-1)}$ 在适当的圆环域内展开成含 z 的幂的洛朗级数.



$|z|<1$　　$1<|z|<2$　　$2<|z|<+\infty$

四、（8 分）、计算函数 $f(t)=e^{-|t|}\cos t$ 的 Fourier 变换，并证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t.$$

$\frac{2(w^2+2)}{w^2+4}$

$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\cos t\, e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-iwt}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-iwt}dt$

$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(1+i-iw)t}dt + \cdots = \frac{2(w^2+2)}{w^2+4}$

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(w^2+2)}{w^2+4}e^{iwt}dw = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{2(w^2+2)}{w^2+4}\cos wt\,dw$ ，连[illegible]

间断点 $\left(\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}\right)$

$u = x^2 - y^2$. $v = 2xy - y^2$

$u_x = 2x$ $v_y = 2x - 2y$

$P = UI\cos\varphi_{Z_2}$ $x^2 + y^2$

UI^* φ_Z

$u = 2xy$. $v = y^2 - x^2 + 2y$

$u_x = 2y$. $u_y = 2y$

$u_y = 2x$ $v_x = -2x + 2$

$u = x^3 - 3xy^2$ $v = 3x^2y - y^3$

$u_x = 3x^2 - 3y^2$ $v_y = 3x^2 - 3y^2$

$u_y = -3x \times 2y = -6xy$. $v_x = 3y \cdot 2x = 6xy$

$\dot{I}_1 \cdot R_1 - 0.5 U_C = \dot{I}_2 R_2$

$I_S = I_1 + I_2$

$U \cdot I^*$

$\int_1^{\frac{1}{2}} e^{\pi i t} \cdot i\,dt$ $e^{i\pi t}$

$= i \cdot \int_1^{\frac{1}{2}} (\cos\pi t + i\sin\pi t)\,dt$

$= \frac{i}{\pi}\left[\sin\pi t - i\cos\pi t\right]_1^{\frac{1}{2}}\,dt$

$= \frac{i}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\pi - i(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi)\right]$

$= \frac{i}{\pi}\left[1 - 0 - i(0+1)\right] = \frac{i}{\pi}(1-i) = \frac{i+1}{\pi}$

$\dot{I}$ U_C $\dot{I}_C$ $\dot{U}_C$

$z\cot z = z \cdot \frac{\cos z}{\sin z}$

$= z \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n}$

$0.$ $\sin z$ ∞.

$f'(z) = u_x + i v_x$

$= 2x - 1 + i(2y) + \ldots$

$= 1 + i \cdot 2 = 1 - 1 \cdot 2i$

$u_x = v_y = 2y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

u_{xx} u_{xy} v_{xy} $u_{xy}(-v_x)$

$(1 - \cos z)' = (\sin z)' = \cos z$