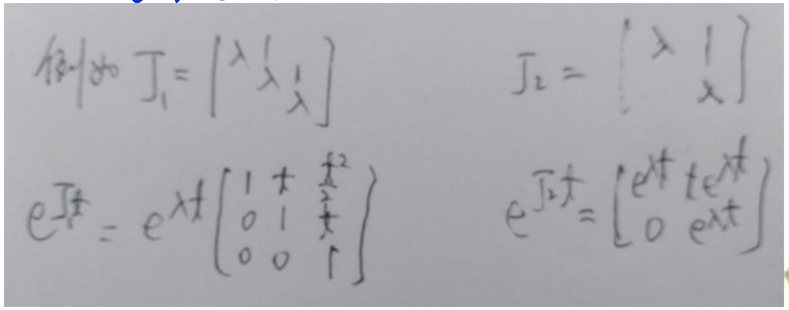
Nonlinear Systems 非线性系统

第九讲

线性系统和线性化

Linear Systems and Linearization

线性系统的Lyapunov函数



研究线性系统 $\dot{x}=Ax$

其解为 $x(t)=e^{At}x(0)$

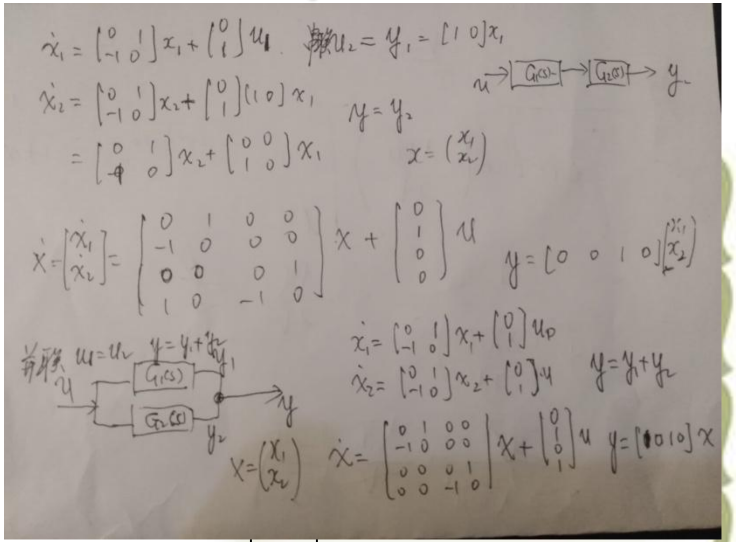
对矩阵A总存在非奇异矩阵*P* 把*A*变换为若当型：

$$PAP^{-1}=J=\text{block diag}[J_1,J_1,\ldots,J_r]$$ 其中 $$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ 0 & \lambda_i & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

因此，$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}$.设λ_i是代数重数为q_i的特征值，且其几何重数也为q_i，即满足$q_i=n-\text{rank}(A-\lambda_iI)$,则$\lambda_i$对应的若当块阶数为1，即有$q_i$个若当块。

定理4.5 系统原点（全局）渐近稳定当且仅当系数矩阵A的特征根都具有严格负实部；系统原点稳定当且仅当系数矩阵A的特征根都实部不大于零，且实部为零特征值的代数重数等于几何重数。

注：系统原点稳定要求A的特征根实部都不大于零，且实部为零特征值的代数重数等于几何重数，即满足 $q_i = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_i I)$ 。



例4.12.考虑如下系统

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i, y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_i, i = 1,2$$

两个相同系统的串联系统和并联系统分别为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u =: A_s X + Bu, y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_1, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u =: A_p X + \bar{B}u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

注：系统Ap, As有相同的纯虚特征根 $\pm j, j=\sqrt{-1}$，代数重数为2，容易验证满足 $2=q_i=n-\mathrm{rank}(A_p-jI)=n-2$, 而 $2=q_i\neq n-\mathrm{rank}(A_s-jI)=n-3=1$。这样由定理4.5，并联系统原点是稳定的，而串联系统是不稳定的。

满足所有特征根都具有严格负实部的矩阵A，称为是Hurwitz 矩阵或渐近稳定矩阵。线性时不变系统原点渐近稳定当且仅当系数矩阵A是Hurwitz的。

线性系统原点渐近稳定性可以用Lyapunov函数方法去研究。

线性系统的Lyapunov函数

研究线性系统 $\dot{x} = Ax$

取二次型v函数 $v(x) = x^T Px, P > 0$

v函数沿系统解的导数

$$\dot{v}(x) = \frac{d}{dt}(x^T Px) = x^T (A^T P + PA)x =: -x^T Qx$$

如果 $Q > 0$ 则由Lyapunov定理4.1得到，系统原点渐近稳定，也等价于A的特征根实部都严格小于零。

问题：定理4.1关于线性时不变系统的结果的逆命题是否成立？

线性系统的Lyapunov函数

研究线性系统 $\dot{x} = Ax$

取二次型v函数 $v(x) = x^T P x, P > 0$

v函数沿系统解的导数

$$\dot{v}(x) = \frac{d}{dt}(x^T P x) = x^T (A^T P + PA) x =: -x^T Q x$$

记为 $\dot{v}(x) = -x^T Q x$ 则得到如下的Lyapunov方程

$$A^T P + PA = -Q$$

Lyapunov方程解的存在性?

Lyapunov方程的可解性

定理：若 A 的特征根为 $\lambda_i\ (i=1,2,\ldots,\mathrm{n})$，任给一个对称矩阵 Q，Lyapunov方程 $A^T P + PA = -Q$ 有唯一对称阵解 P 的充分必要条件是：$\lambda_i + \lambda_j \neq 0,\ \ i, j = 1,2,\ldots,\mathrm{n}.$

为证明简单，先引入矩阵的**Kronecker**乘积的定义。

$$A \in R^{m\times n}, B \in R^{k\times l}, \otimes : R^{m\times n} \times R^{k\times l} \to R^{mk\times nl}$$

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

不难得到 $(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD).$

利用矩阵的Kronecker乘积定义一个拉长映射。

$$X=\begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_m^T \end{bmatrix}\in R^{m\times n}, x_i\in R^n, \sigma: R^{m\times n}\to R^{nm}$$ 定义为 $$\sigma(X)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

引理：$A\in R^{m\times n}, X\in R^{n\times k}, B\in R^{k\times l}$，则$\sigma(AXB)=(A\otimes B^T)\sigma(X)$.

由此引理，Lyapunov方程可以转化为一普通线性方程组，记

$$v=\sigma(P), w=\sigma(Q)$$

则连续系统Lyapunov方程 $A^TP+PA=-Q$ 等价于

$$(A^T\otimes I+I\otimes A^T)v=-w.$$

设$M^{-1}A^TM=J$，则 $(M^{-1}\otimes M^{-1})(A^T\otimes I+I\otimes A^T)(M\otimes M)=(J\otimes I+I\otimes J)$.

矩阵$(A^T\otimes I+I\otimes A^T)$ 的特征值满足

$$\mu_{ij}=\lambda_i+\lambda_j, i,j=1,\cdots,n, \lambda_i\in\Lambda(A)=\Lambda(A^T).$$

Lyapunov方程的可解性定理的证明

定理12：若 A 的特征根为 $\lambda_i\ (i=1,2,\ldots,n)$，任给一个对称矩阵 Q，Lyapunov方程 $A^T P + PA = -Q$ 有唯一对称阵解 P 的充分必要条件是： $\lambda_i + \lambda_j \neq 0,\ \ i, j = 1,2,\ldots,n$

证明：条件 $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ 成立当且仅当矩阵 $A^T \otimes I + I \otimes A^T$ 非奇异。

Lyapunov方程有唯一解当且仅当下列方程组有唯一解

$$(A^T \otimes I + I \otimes A^T)v = -w.$$

现Q是对称矩阵，则有

$$A^T P + PA = -Q = -Q^T = A^T P^T + P^T A$$

于是 $A^{\mathrm{T}}(P-P^{\mathrm{T}})+(P-P^{\mathrm{T}})A=0$ 由条件 $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$

知P 是对称阵。

Lyapunov方程解的解析形式

必要性结论：若系统渐近稳定，对给定对称矩阵Q，$A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$

有对称矩阵解 $P=\int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$ 且若Q正定，则P也正定，唯一。

证明： $\frac{d}{dt}\left[e^{A^T t} Q e^{At}\right] = A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q A e^{At}$ 两边积分，得

$$e^{A^T t} Q e^{At} \big|_0^{\infty} = A^T \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt + \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt A$$

由系统渐近稳定知 $\lim_{t\to\infty} e^{At}=0.$ 因而 $A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$

正定性容易得到。 $z^T Q z=\int_0^{\infty} (e^{A^T t} z)^T Q (e^{At} z) dt$

唯一性，假设不唯一，要证明其相等。

P阵的唯一性：

$$A^T(P_1-P_2)+(P_1-P_2)A=0$$

因此， $e^{\mathbf{A}^T t}[A^T(P_1-P_2)+(P_1-P_2)A]e^{\mathbf{A}t}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}[e^{A^T t}(P_1-P_2)e^{At}]=0$$

$$\Rightarrow e^{A^T t}(P_1-P_2)e^{At}=C \quad \forall t$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{A^T t}(P_1-P_2)e^{At}=0,(\because e^{A0}=I)$$

所以， $P_1-P_2=0.$

例4-13 考虑二维系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^T P+PA=-Q}$$

求系统渐近稳定时参数应满足的条件。

令Q=**I**，由Lyapunov方程可得

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}}_{A_1}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\\ p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

上述方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A}_1$的行列式非零，有唯一解：

若det $\boldsymbol{A}_1 \neq 0$，方程组就有唯一解，并可求得P为

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

由$\boldsymbol{P}$ 是正定，因此得到$\boldsymbol{A}$的所有特征值均有负实部。

MATLAB 语句：$P = lyap(A',Q)$

引理：若 $W \geq 0$，则集合 $M = \{x \mid x^{\mathrm{T}} W x = 0\}$ 上除原点外无 $\dot{x} = Ax$ 解的整轨线的充分必要条件是：

$$\text{秩}\ \left[W, A^{\mathrm{T}}W, \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{2} W, \ldots, \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{n-1} W \right] = n$$

结果：若系统渐近稳定，对给定半正定矩阵W, 则Lyapunov方程

$$A^{\mathrm{T}}V + VA = -W$$

有唯一正定解V 的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\left[W, A^{T}W, \cdots, \left(A^{T}\right)^{n-1} W \right] = n$$

评注：

（1） Lyapunov 函数可用于检验矩阵*A* 是否为Hurwitz 矩阵，并可以作为另一种计算*A* 的特征值的方法。但通过解Lyapunov 方程计算*A* 的特征值时，在计算上并没有优势。此外，特征值为线性系统响应提供了更直接的信息。

（2）Lyapunov 方程的意义并不在于检验线性系统的稳定性，而在于对任何线性系统， 当*A* 是Hurwitz 矩阵时，它提供了一种求Lyapunov 函数的方法。

（3）当方程右边的*Ax* 受到扰动时，无论是以*A* 为系数的线性扰动还是非线性扰动，仅仅知道存在Lyapunov 函数，就允许我们大致给出系统的一些定性结论。随着对Lyapunov 法的进一步研究，这一优势将愈加明显。

Lyapunov 第一近似理论

定常非线性系统: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

由均值定理： $f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x, z_i \in (0, x)$

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right]x$$

因此: $f(x) = Ax + g(x)$

其中: $\boldsymbol{A} = \left[\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\mathbf{0}}\right] = \left[\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\mathbf{0}}\right], g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right]x$

满足: $\|g_i(x)\| \le \left\|\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)\right\| \|x\|$

根据 $\partial f / \partial x$ 的连续性可知， $\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$

Lyapunov 第一近似理论

这样其线性化系统为： $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

其中:
$$\boldsymbol{A} = \left[\left. \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} \right] = \left[\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}} \right] = \left[a_{ij} \right]$$

定理：1）如果线性化系统的系数矩阵 *A* 的所有特征值具有负实部，则原非线性系统的原点渐近稳定;

2）如果线性化系统的系数矩阵 *A* 的特征值中具有正实部，则原非线性系统的原点不稳;

3）如果线性化系统的系数矩阵 *A* 的特征值除具有零实部外，其余具有负实部，则原非线性系统原点属临界情况.

证明：为证明第一条：由线性化系统原点渐近稳定，由定理4.6对负定二次型

$w=-\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 存在唯一正定二次型v，使得 $\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=w$

取此正定二次型v为非线性系统候选Lyapunov函数，则

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+g_i(x_1,\cdots,x_n)\right]=w+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}g_i(x_1,\cdots,x_n)$$

在原点附近，v正定，w负定，故非线性系统原点为渐近稳定的。

证明第二条：由线性化系统至少有一个特征值有正实部，由定理4.2*，对*Q*=*I*

存在一对称矩阵*P*和正数a，使得

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=av+w,v=x^TPx,w=x^TQx=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

且*V*不是半负定的。取此二次型v为非线性系统候选Lyapunov函数，则

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+g_i(x_1,\cdots,x_n)\right]=av+w+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}g_i(x_1,\cdots,x_n)$$

在原点附近，w正定，v不是半负定的，故非线性系统原点为不稳定的。

例4.15 单摆平衡位置的稳定性

单摆方程 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a\sin x_1 - bx_2 \end{cases}$

考虑系统平衡点 $(0,0),(\pi,0)$ 的稳定性，系统的Jacobi矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a\sin x_1 & -b \end{bmatrix}$$

在两个平衡点处系数矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos x_1 & -b \end{bmatrix}_{x=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos x_1 & -b \end{bmatrix}_{x=(\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

它们的特征值分别为： $-\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}, \quad -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}$

对所有的$a,b>0$，A的特征值实部都小于零，所以原点渐近稳定。忽略摩擦后线性化系统有零实部特征值，原非线性系统原点不能由此判断，可以借助Lyapunov函数判断。

对所有的$a>0,b\geq 0$ ，系统系数矩阵有实部大于零特征值，所以原点不稳定。因而，原非线性系统原点不稳定，也可以借助Lyapunov函数判断。

4.4 比较函数

考虑非自治系统 $\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0$

定义4.2($\mathcal{K}$ 类函数、 $\mathcal{K}\infty$类函数)

函数 $\alpha(\mu): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 称为$\mathcal{K}$ 类函数，如果:

(1) $\alpha(\mu) \ge 0$ ，且 $\alpha(0) = 0$ ；

(2) 对 $\mu_2 > \mu_1 \ge 0$ ，有: $\alpha(\mu_2) > \alpha(\mu_1)$ (严格单增).

(3) $\lim_{\mu\to\infty} \alpha(\mu) = \infty$ 成立 、 $\mathcal{K}\infty$ 类函数

定义4.3($\mathcal{KL}$ 类函数)

函数 $\beta(r,s): [0,a) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称为 $\mathcal{KL}$ 类函数，如果:

(1) 对任意的s，$\beta(r,s)$ 是关于r的$\mathcal{K}$ 类函数;

(2) 对 $s_2 > s_1 \ge 0$ ，有: $\beta(r,s_1) > \beta(r,s_2)$ (递减的). 且 $\lim_{s\to 0} \beta(r,s) = 0.$

例子

$1.\alpha(r)=\arctan(r)\Rightarrow\alpha(0)=0,\alpha'(r)=1/(1+r^2)>0$ 严格递增的, 为$\mathcal{K}$ 类函数，又因为

$\lim_{r\to\infty}\alpha(r)=\pi/2<\infty$ 不属于$\mathcal{K}\infty$ 类函数

$2.\alpha(r)=r^c,c>0\Rightarrow\alpha'(r)=cr^{c-1}>0$ 且 $\lim_{r\to\infty}\alpha(r)=\infty$ 属于$\mathcal{K}\infty$ 类函数

3. $\alpha(r)=\min\{r,r^2\}\Rightarrow\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)=\infty$ 严格递增的, 为$\mathcal{K}\infty$ 类函数。

4. $\beta(r,s)=r/(ksr+1)\Rightarrow\dfrac{\partial\beta}{\partial r}=\dfrac{1}{(ksr+1)^2}>0,\dfrac{\partial\beta}{\partial s}=\dfrac{-kr^2}{(ksr+1)^2}<0$

对任意的k，函数关于r严格递增，关于s递减，且 $\lim\limits_{s\to\infty}\beta(r,s)=0$

所以, 函数为$\mathcal{KL}$ 类函数。

5. $\beta(r,s)=r^c e^{-s},c>0$ 为$\mathcal{KL}$ 类函数。

引理 4.2　设α_1和α_2是$[0,a)$上的$\mathcal{K}$类函数，α_3和α_4是$\mathcal{K}\infty$类函数，β是$\mathcal{KL}$类函数，α_i^{-1}表示α_i的反函数，则

- α_1^{-1}在$[0,\alpha_1(a))$上有定义，且属于$\mathcal{K}$类函数。
- α_3^{-1}在$[0,\infty)$上有定义，且属于$\mathcal{K}\infty$类函数。
- $\alpha_1 \circ \alpha_2$属于$\mathcal{K}$类函数。
- $\alpha_3 \circ \alpha_4$属于$\mathcal{K}\infty$类函数。
- $\sigma(r,s)=\alpha_1(\beta(\alpha_2(r),s))$属于$\mathcal{KL}$类函数。

引理 4.3　设$V:D\to R$是定义域为$D\subset R^n$且包含原点的连正定函数，并设对于某个$r>0$有$B_r\subset D$，则对于所有的$x\in B_r$，存在定义在$[0,r]$上的$\mathcal{K}$类函数α_1 α_2，满足

$$\alpha_1(\|x\|)\le V(x)\le\alpha_2(\|x\|)$$

如果$D=R^n$且$V(x)$是径向无界的，则存在$\mathcal{K}\infty$类函数α_1和α_2在$[0,\infty)$上有定义，使得上式对于任意$x\in R^n$都成立。

引理 4.4　考虑标量自治可微方程$\dot{y}=-\alpha(y)$，$y(t_0)=y_0$

其中α是在$[0,a)$上的局部 Lipschitz 的$\mathcal{K}$类函数。对于所有的$0\le y_0<a$，当$t\ge t_0$时方程有惟一解$y(t)$，且$y(t)=\sigma(y_0,t-t_0)$

其中，σ是定义在$[0,a)\times[0,\infty)$上的$\mathcal{KL}$类函数。

例子

$\dot{y}=-ky, k>0, i.e., \alpha(y)=ky$ 其解为

$$y(t)=y_0\exp[-k(t-t_0)]\Rightarrow\sigma(r,s)=r\exp(-ks)$$

$\sigma(r,s)=r\exp(-ks)$ 属于$\mathcal{KL}$类函数。

$\dot{y}=-ky^2, k>0$ 其解为 $y(t)=\dfrac{y_0}{ky_0(t-t_0)+1}\Rightarrow\sigma(r,s)=\dfrac{r}{krs+1}$

$\sigma(r,s)=\dfrac{r}{krs+1}$ 属于$\mathcal{KL}$类函数。

$$\sigma(r,s)=r/(ksr+1)\Rightarrow\frac{\partial\sigma}{\partial r}=\frac{1}{(ksr+1)^2}>0, \frac{\partial\sigma}{\partial s}=\frac{-kr^2}{(ksr+1)^2}<0$$

对任意的k，函数关于r严格递增，关于s递减，且 $\lim\limits_{s\to\infty}\sigma(r,s)=0$

所以, 函数为$\mathcal{KL}$ 类函数。

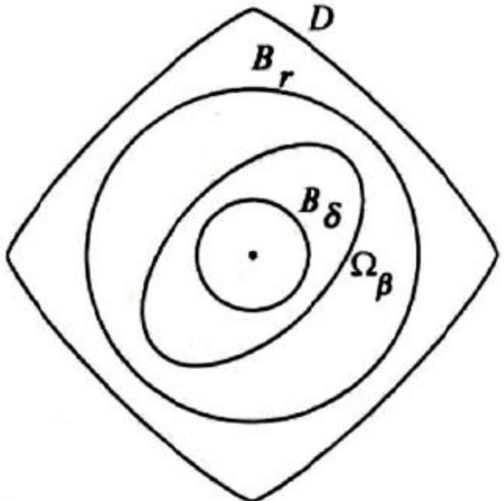
$\mathcal{K}$类函数和$\mathcal{KL}$ 类函数应用与Lyapunov分析中，选择 $\delta > 0, \beta > 0$ ，满足

$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$ 利用引理4.3，正定函数V(x)满足

$$\alpha_1(\|x\|) \le V(x) \le \alpha_2(\|x\|)$$

由于 $V(x) \le \beta \Rightarrow \alpha_1(\|x\|) \le \alpha_1(r) \Leftrightarrow \|x\| \le r$

$$\|x\| \le \delta \Rightarrow V(x) \le \alpha_2(\delta) \le \beta$$



可选择 $\beta \le \alpha_1(r), \delta \le \alpha_2^{-1}(\beta)$

$$\Omega_\beta = \{x \mid V(x) \le \beta\}$$

还希望说明V的导数负定时，解析x(t)趋于零。由引理4.3，存在$\mathcal{K}$类函数 α_3 满足

$$\dot{V}(x) \le -\alpha_3(\|x\|) \Rightarrow \dot{V}(x) \le -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V))$$

由比较原理，V以下列标量微分方程的解为其上界

$$\dot{y} = -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(y)), y(0) = V(x(0))$$

引理4.2表明： $\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$ 是$\mathcal{K}$类函数，再用引理4.4，标量方程的解 $y(t)=\beta(y(0),t),\beta$ 为$\mathcal{KL}$类函数。因此V(x)满足$V(x(t)) \le \beta(V(x(0)),t)$

说明了当时间趋于无穷时，V(x(t))趋于零。事实上，可以直接给出x的估计值

$$\alpha_1(\|x(t)\|) \le V(x(t)) \le V(x(0)) \le \alpha_2(\|x(0)\|)$$

因此有 $\|x(t)\| \le \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(0)\|))$ ，其中 $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2$ 是$\mathcal{K}$类函数。

类似地， $V(x(t)) \le \beta(V(x(0)),t)$ 可以表示为

$$\alpha_1(\|x(t)\|) \le V(x(t)) \le \beta(V(x(0)),t) \le \beta(\alpha_2(\|x(0)\|),t)$$

因此，有 $\|x(t)\| \le \alpha_1^{-1}(\beta(\alpha_2(\|x(0)\|),t))$

其中 $\alpha_1^{-1}(\beta(\alpha_2(r),t))$ 是$\mathcal{KL}$类函数。

作业: 4.22