Nonlinear Systems 非线性系统

第十一讲

- 基于*Lyapunov*函数的非线性控制器设计

Design of nonlinear controllers based-on Lyapunov Functions

问题 1. 移动小车直线跟踪控制

需要设计控制器 $\omega(\cdot)$ 使得系统 $\dot{y}=v\sin\theta,\dot{\theta}=\omega$ 渐近稳定，其中假定 v 为非零常数，不妨令 v=1。

（1） 近似线性化方法

$$\begin{bmatrix}\dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ \theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\omega$$

对方程 $\dot{y}=\sin\theta,\dot{\theta}=\omega$ 在原点线性化得到：

$\dot{y}=\theta,\dot{\theta}=\omega$，该线性化系统能控，可设计线性控制律：

$\omega=-k_1y-k_2\theta(k_1>0,k_2>0)$ 实现对原非线性系统

$\dot{y}=\sin\theta,\dot{\theta}=\omega$ 的局部镇定。

$$\begin{bmatrix}\dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -k_1 & -k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ \theta\end{bmatrix}$$

评注：一般直线 $ax+by+c=0$ 的跟踪问题通过坐标的平移和旋转变换转化为标准直线 $y=0$ 的跟踪问题。

非线性控制器1: $\dot{y}=\sin\theta, \dot{\theta}=\omega$

$$L_1=(1-\cos\theta)+0.5k_1y^2 \Rightarrow$$
$$\dot{L}_1=\omega\sin\theta+k_1y\sin\theta \Rightarrow$$
$$\omega=-k_1y-k_2\sin\theta \Rightarrow$$
$$\dot{L}_1=-k_2(\sin\theta)^2,$$
$$\dot{L}_1\equiv 0 \Leftrightarrow \sin\theta\equiv 0 \Leftrightarrow \theta\equiv 0(-\pi<\theta<\pi) \Rightarrow$$
$$\dot{\theta}\equiv 0 \Rightarrow \omega\equiv 0 \Rightarrow y\equiv 0$$

稳定区为： $\Omega_c=\{(y,\theta):L_1\le c\}\in B_r\in\{(y,\theta):|\theta|<\pi\}$

非线性控制器2: $\dot{y} = \sin\theta, \dot{\theta} = \omega$

$$L_2 = 0.5(k_1 y^2 + \theta^2) \Rightarrow$$

$$\dot{L}_2 = \omega\theta + k_1 y \sin\theta \Rightarrow$$

$$\omega = -k_1 y \frac{\sin\theta}{\theta} - k_2\theta \Rightarrow$$

$$\dot{L}_2 = -k_2\theta^2,$$

$$\dot{L}_2 \equiv 0 \Rightarrow \theta \equiv 0 \Rightarrow \omega \equiv 0$$

稳定区：全局渐近稳定。

问题 2. 移动小车的位置镇定

误差模型推导:

运动模型:

$$\dot{x} = v\cos\theta, \dot{y} = v\sin\theta, \dot{\theta} = \omega$$

期望常值位置(x_d, y_d)。

坐标变换:

$$\begin{aligned} z_1 &= (x - x_d)\cos\theta + (y - y_d)\sin\theta, \\ z_2 &= (x - x_d)\sin\theta - (y - y_d)\cos\theta, \\ z_3 &= \theta \end{aligned}$$

变换后方程:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v\cos^2\theta - (x - x_d)\omega\sin\theta + v\sin^2\theta + (y - y_d)\omega\cos\theta \\ &= v - z_2\omega \\ \dot{z}_2 &= z_1\omega \end{aligned}$$

控制目标：设计控制律v,ω使得$(z_1, z_2, v, \omega) \to 0$。

$$\dot{z}_1 = v - z_2\omega$$
$$\dot{z}_2 = z_1\omega$$

非线性控制器1:

$$L_1 = 0.5(z_1^2 + z_2^2) \Rightarrow$$
$$\dot{L}_1 = z_1 v, v = -z_1 \Rightarrow$$
$$\dot{L}_1 = -z_1^2 \le 0 \Rightarrow z_1 = 0, v = 0 \Rightarrow$$
$$\dot{z}_1 = v - z_2\omega = 0 \Rightarrow z_2\omega = 0,$$
$$\omega = z_2 \Rightarrow z_2 = 0$$

非线性控制器2:

$$L_2 = 0.5(z_1 - z_2)^2 + 0.5 z_2^2,$$
$$\dot{L}_2 = (z_1 - z_2)(v - \omega z_2 - z_1\omega) + z_2 z_1 \omega$$
$$= (z_1 - z_2)(v - \omega z_2 - z_1\omega) + z_2(z_1 - z_2)\omega + z_2^2\omega$$
$$= (z_1 - z_2)(v - z_1\omega) + z_2^2\omega \Rightarrow$$
$$\omega = -z_2^2, v = z_1\omega - (z_1 - z_2),$$
$$\dot{L}_2 = -(z_1 - z_2)^2 - z_2^4 < 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0$$

有界性和毕竟有界性

Boundedness and Ultimate Boundedness

Lyapunov 分析可用于说明状态方程解的有界性，即使在原点处无平衡点。

考虑标量方程

$$\dot{x} = -x + \delta \sin t, x(t_0) = a, a > \delta > 0.$$

$|x(t)| \le a \cdot e^{-(t-t_0)} + \delta - \delta e^{-(t-t_0)} \quad \forall t \ge t_0$

$\delta < b < a$

要想使 $|x(t)| \le b$，只要右端部分小于b即可，等价地

$(a-\delta)e^{-(t-t_0)} + \delta \le b$

$(a-\delta)e^{-(t-t_0)} \le b-\delta$

$e^{-(t-t_0)} \le \frac{b-\delta}{a-\delta}$ 取对数后 $-(t-t_0) \le \ln\frac{b-\delta}{a-\delta}$

$(t-t_0) \ge \ln\frac{a-\delta}{b-\delta}$ 即 $t \ge t_0 + \ln\frac{a-\delta}{b-\delta}$

该方程无平衡点，且其解为

$$x(t) = e^{-(t-t_0)}a + \delta\int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)} \sin\tau d\tau$$

此解的边界为

$$|x(t)| \le e^{-(t-t_0)}a + \delta\int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-(t-t_0)}a + \delta[1 - e^{-(t-t_0)}] \le a, \forall t \ge t_0$$

此解对于所有的时间*t*都有界，且关于初始时刻是一致有界的。 因为没有考虑指数衰减项，随时间的变化将成为解的保守估计。但如果取b满足 $\delta < b < a$ **则**

$$|x(t)| \le b, \forall t \ge t_0 + \ln\left(\frac{a-\delta}{b-\delta}\right)$$

边界b与初始时刻无关，这种情况称为解是一致毕竟有界的，*b* 称为最终边界。

下面可以通过**Lyapunov**分析说明系统的解具有一致有界性和毕竟一致有界性，而无需状态方程的显式解。

$$V(x)=x^2/2 \Rightarrow \dot{V}(x)=x\dot{x}=-x^2+x\delta\sin t\le -x^2+\delta|x|$$
$$=-(1-\theta)x^2-\theta x^2+\delta|x|<0, |x|\ge\frac{\delta}{\theta}(0<\theta<1)$$

因此$|x|\le\frac{\delta}{\theta}$是正不变集，所有始于$\left\{|x|\le\frac{\delta}{\theta}\right\}$内的解在所有未来时刻都保持在其内；另外，$|x|\le c(c>\frac{\delta}{\theta})$也是正不变集，因为在边界$|x|=c$上$x\dot{x}<0$。因此，如果$|x(0)|\le\frac{\delta}{\theta}$，则有$|x(t)|\le\frac{\delta}{\theta}$；如果$|x(0)|>\frac{\delta}{\theta}$，则$|x(t)|$单调递减进入集合$\left\{|x(t)|\le\frac{\delta}{\theta}\right\}$内，并从此不再离开此集合。由此可见，解是全局一致有界和全局一致毕竟有界的，且最终边界为$|x(t)|\le\frac{\delta}{\theta}$。

现在说明如何利用Lyapunov 函数分析一般非线性系统

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (4.32)$$

解的一致有界和毕竟一致有界性。

定义4.6 对系统(4.32)

称系统的解是一致有界的， 如果存在一个与 t_0 无关的常数 $c > 0$，对于每个 $a \in (0, c)$ 存在与 t_0 无关的 $\beta(a) > 0$ 满足

$$\|x(t_0)\| \le a \Rightarrow \|x(t)\| \le \beta, \forall t \ge t_0 \qquad (4.33)$$

如果在(4.33)中对任意大 a 都成立，则称系统的解是全局一致有界的。

称系统的解是一致毕竟有界的， 且最终边界为 b， 如果存在一个与 t_0 无关的常数 b, c ，对于每个 $a \in (0, c)$ 存在 $T(a, b) > 0$ 与 t_0 无关，满足 $\|x(t_0)\| \le a \Rightarrow \|x(t)\| \le b, \forall t \ge t_0 + T \qquad (4.34)$

如果在(4.34)中对任意大 a 都成立，则称系统的解是全局一致毕竟有界的。

评注：对于自治系统，一般不再使用“一致”一词，因为自治系统的解仅与 $t-t_0$ 有关。下面给出一致有界性与毕竟有界性的Lyapunov分析。考虑一个连续可微的正定函数 $V(x)$，假设对于紧集 $\{V(x)\le c\}, c>0$ 并设对于某个正数 $\varepsilon < c$，有 $\Lambda=\{\varepsilon\le V(x)\le c\}$。若 V 沿着系统解的导数为

$$\dot{V}(t,x)\le -W_3(x), \forall x\in\Lambda, \forall t\ge t_0$$

不等式表明，集合 $\Omega_c=\{V(x)\le c\}$ 和 $\Omega_\varepsilon=\{V(x)\le\varepsilon\}$ 都是正不变集，因为在其边界上 V 的导数为负。

如图4.8所示,由于在集合 Λ 内，V 的导数为负，所以始于其内的轨线沿着 V 减小的方向运动，实际上，若 V 满足

$$W_1(x)\le V(t,x)\le W_2(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\le -W_3(x).$$

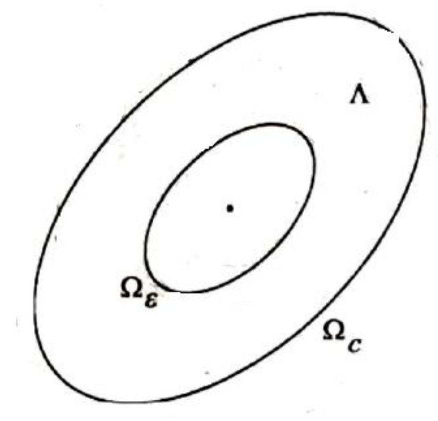

图 4.8 集合 $\Lambda,\Omega_\varepsilon$ 和 Ω_c

因此轨线特性类似原点是一致渐渐稳定的，且满足 $\|x(t)\|\le\beta(\|x(t_0)\|, t-t_0)$

V 在有限时间内将连续递减，直到轨线进入并保持在 Ω_ε 内。证明如下：

设 $k=\min_{x\in\Lambda}W_3(x)>0$ 连续函数在紧集上存在最小值，且由于函数的正定性，所以k>0，于是 $W_3(x)\ge k,\forall x\in\Lambda$ 结合上面的不等式得到：

$$\dot{V}(t,x)\le -k,\forall x\in\Lambda,\forall t\ge t_0$$

$$V(x(t))\le V(x(t_0))-k(t-t_0)\le c-k(t-t_0)$$

上式说明V在时间区间 $[t_0,t_0+(c-\varepsilon)/k]$内减小到 ε。

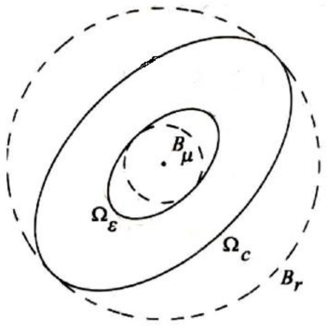

图 4.9 集合 Ω_ε 和 Ω_c(实线)以及 B_μ 和 B_r(虚线)

在许多问题中，利用范数不等式可得到不等式 $\dot{V}\le -W_3$ 。此时可得到

$$\dot{V}(t,x)\le -W_3(x),\forall \mu\le\|x\|\le r,\forall t\ge t_0$$

若$r\gg\mu$，可选$\Lambda=\{\varepsilon\le V(x)\le c\}$ 是非空的，且包含于 $\{\mu\le\|x\|\le r\}$ 内。特别地，$\alpha_1(\|x\|)\le V(x)\le\alpha_2(\|x\|),\alpha_1,\alpha_2$ 是$\mathcal{K}$类函数，由此式左边推得 $V(x)\le c\Rightarrow\alpha_1(\|x\|)\le c\Leftrightarrow\|x\|\le\alpha_1^{-1}(c)$ 因此取 $c=\alpha_1(r)$ 保证$\Omega_c\subset B_r$。类似式右边推得 $\|x\|\le\mu\Rightarrow V(x)\le\alpha_2(\mu)$ 取 $\varepsilon=\alpha_2(\mu)$保证$B_\mu\subset\Omega_\varepsilon$。为了得到$\varepsilon<c$必须有 $\mu<\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ 。集合关系如图4.9.

前面论证了所有始于Ω_c内的轨线都在有限时间内进入 Ω_ε。下面计算最终边界，由 $V(x)\le\varepsilon\Rightarrow\alpha_1(\|x\|)\le\varepsilon\Leftrightarrow\|x\|\le\alpha_1^{-1}(\varepsilon)$和 $\varepsilon=\alpha_2(\mu)$ 可得$x\in\Omega_\varepsilon\Rightarrow\|x\|\le\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$.

评注：对于自治系统，一般不再使用“一致”一词，因为自治系统的解仅与$t - t_0$有关。下面给出一致有界性与毕竟有界性的Lyapunov定理

定理4.18：如果在原点的邻域D内，存在连续可微函数$V(t, x)$，满足

$$\alpha_1(\|x\|) \le V(t,x) \le \alpha_2(\|x\|) \qquad (4.39)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -W_3(x), \forall \|x\| \ge \mu > 0 \qquad (4.40)$$

α_1, α_2 是$\mathcal{K}$类函数，$W_3(x)$是连续正定函数。取 $r > 0$使得$B_r \subset D$，并假设

$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ 那么，存在一个$\mathcal{KL}$类函数β，对满足 $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$

的初始状态，存在T，使得系统的解满足

$$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t_0 \le t \le t_0 + T \qquad (4.42)$$

$$\|x(t)\| \le \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \forall t \ge t_0 + T \qquad (4.43)$$

若$D = R^n$，且 α_1 是 $\mathcal{K}\infty$类函数，则(4.42)和(4.43)对任意初始状态都成立。

例4.24 在1.2.3 节中我们研究了一个具有硬化弹簧、线性粘滞阻尼并施加周期外力的弹簧系统，可用Duffing 方程表示为

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky+ka^2y^3=A\cos\omega t$$

引入状态变量 $x_1=y, x_2=\dot{y}$，取 $a=k=c=m, M=\dfrac{A}{m}$ 得到状态方程

$$\dot{x}=x_2$$

$$\dot{x}_2=-(1+x_1^2)x_1-x_2+M\cos\omega t$$

其中$M>0$，与周期性外力的幅度成比例。当$M=0$时，系统在原点有一个平衡点。例4.6 证明原点是全局渐近稳定的，且取*Lyapunov* 函数为：

$$V(x)=\frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}x+2\int_0^{x_1}(y+y^3)dy=\frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}x+x_1^2+\frac{1}{2}x_1^4$$

$$=\frac{1}{2}x^T\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}x+\frac{1}{2}x_1^4\triangleq x^TPx+\frac{1}{2}x_1^4$$

当$M>0$时，应用定理4.18 以$V(x)$作为备选Lyapunov 函数。函数V是正定的，且径向无界，因此，根据引理4.3，$\mathcal{K}$类函数 α_1,α_2 在全局性范围内都满足式（4.39）。V沿系统轨线的导数为

$$\dot{V}=-x_1^2-x_1^4-x_2^2+(x_1+2x_2)M\cos\omega t\le-\|x\|_2^2-x_1^4+M\sqrt{5}\|x\|_2$$

利用了不等式 $y^T x \le \|x\|_2 \|y\|_2, x = [1 \quad 2], y = [x_1 \quad x_2]^T$，则

$$\dot{V} \le -(1-\theta)\|x\|_2^2 - x_1^4 - \theta\|x\|_2^2 + M\sqrt{5}\|x\|_2, 0 < \theta < 1.$$

因而， $\dot{V} < -(1-\theta)\|x\|_2^2 - x_1^4, \forall \|x\|_2 \ge \dfrac{M\sqrt{5}}{\theta}$

上式说明 $\mu = M\sqrt{5}/\theta$ ，定理中（4.40）全局满足。因而得到：系统的解是全局一致毕竟有界 的。假如还想计算最终边界值，此时必须找出$\mathcal{K}$类函数 α_1, α_2 。

由不等式

$$V(x) \ge x^T P x \ge \lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2$$

$$V(x) \le x^T P x + \frac{1}{2}\|x\|_2^4 \le \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|x\|_2^4$$

可取： $\alpha_1(\gamma) = \lambda_{\min}(P)\gamma^2, \quad \alpha_2(r) = \lambda_{\max}(P)\gamma^2 + \dfrac{1}{2}\gamma^4$

因此，最终边界为

$$b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) = \sqrt{\frac{\alpha_2(\mu)}{\lambda_{\min}(P)}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)\mu^2 + \mu^4/2}{\lambda_{\min}(P)}}.$$

输入-状态稳定性

Input-state stability

考虑有界输入激励下的非线性系统

$$\dot{x} = f(t,x,u) \qquad (4.44)$$

假设在无激励u=0时系统的原点全局一致渐近稳定。在有界激励下，系统的性能如何？对线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

其中A 为Hurwitz 矩阵，可以写出系统的解为 ：

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

利用边界 $\left\|e^{(t-t_0)A}\right\| \le ke^{-\lambda(t-t_0)}$ 对解进行估计，有

$$\|x(t)\| \le ke^{-\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} ke^{-\lambda(t-\tau)}\|B\|\|u(\tau)\|d\tau$$

$$\le ke^{-\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \frac{k\|B\|}{\lambda}\sup_{t_0 \le \tau \le t}\|u(\tau)\|$$

说明了零输入响应按指数衰减到零，零状态响应对有界输入-都有有界状态的输入状态响应的特性，零状态响应的边界与输入边界成比例。 对非线性系统，这个特性如何？

考虑标量非线性系统

$$\dot{x} = -3x + \left(1 + 2x^2\right)u$$

在无激励u=0时系统的原点全局一致渐近稳定。在x_0=2和u=1的激励下，系统的解 $x(t) = (3-e^t)/(3-2e^t)$ 是无界的，甚至有有限逃逸时间。

定义4.7 若存在一个$\mathcal{KL}$类函数β 和一个$\mathcal{K}$ 类函数 γ, 使得对任意初始状态和有界输入，所有初始时刻 t_0 以后的解都存在，且满足

$$\|x(t)\| \le \beta\left(\|x(t_0)\|, t - t_0\right) + \gamma\left(\sup_{t_0 \le \tau \le t} \|u(\tau)\|\right) \quad (4.47)$$

那么称系统的解是输入-状态稳定的。

(4.47)保证了对任意有界输入，状态都有界。且随着时间的增加，状态是毕竟有界的，为$\mathcal{K}$ 类函数$\gamma\left(\sup_{t_0 \le t} \|u(\tau)\|\right)$，且 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \text{ if } \lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.当u=0时，(4.47)成为：$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$ 。这样，输入-状态稳定性就指无激励系统原点是全局一致渐近稳定的。下面给出Lyapunov判断。

定理4.19: 如果连续可微函数$V(t,x)$，满足

$$\alpha_1(\|x\|) \le V(t,x) \le \alpha_2(\|x\|) \qquad (4.48)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -W_3(x), \forall \|x\| \ge \rho\left(\|u\|\right) > 0 \qquad (4.49)$$

其中α_1, α_2 是$\mathcal{K}\infty$ 类函数，ρ 是$\mathcal{K}\infty$ 类函数，$W_3(x)$ 是连续正定函数。

则 系统是输入-状态稳定的 ，且 $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$

证明：由定理4.18，系统解存在且满足：

$$\|x(t)\| \le \beta\left(\|x(t_0)\|, t - t_0\right) + \gamma\left(\sup_{\tau \ge t_0} \|u(\tau)\|\right), \qquad \forall t \ge t_0$$

引理4.6: 如果f对时间t一致，对x和u连续可微，且全局Lipschitz函数，如果无激励系统原点是全局指数稳定的，则有激励系统（4.44）是输入-状态稳定的。

引理要求全局Lipschitz函数f及无激励系统原点全局指数稳定性，能得到输入-状态稳定。容易构造两个条件之一不成立，引理结论失败。

- 作业 P_{128} 4.51