北京航空航天大学

2015－2016 学年 第二学期期中

《 工科数学分析（2） 》

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2016 年 05 月 8 日

一、　　选择题 DCDBC

二、（每题 6 分，满分 30 分）

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解　设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}x^n$ ，则知 $s(x)$ 在（-2,2）上绝对收敛，利用逐项求积得

$$\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}x^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}x^{n-1}=x^2s_1(x),-2<x<2.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}x^{n-1}=s_1(x),-1<x<1.$ 再次逐项求积得

$$\int_0^x s_1(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\frac{-\frac{x}{2}}{1-(-\frac{x}{2})}=-\frac{x}{2+x},-2<x<2.$$

所以 $s_1(x)=\left(-\frac{x}{2+x}\right)'=-\frac{2}{(2+x)^2},-2<x<2.$

所以 $s(x)=\left(x^2s_1(x)\right)'=\left(-\frac{2x^2}{(2+x)^2}\right)'=-\frac{2x}{(2+x)^3},-2<x<2.$

2.　设 $z=F\left(x+z,x+y\right)$，求方程所确定的隐函数的偏导数 z_x，z_{xy}.

解　因为 $z_x=F_1(1+z_x)+F_2$，所以　$z_x=\frac{F_1+F_2}{1-F_1}$

所以 $z_{xy}=\frac{(F_{11}z_y+F_{12}+F_{21}z_y+F_{22})(1-F_1)+(F_1+F_2)(F_{11}z_y+F_{12})}{(1-F_1)^2}$ 整理得

$$z_{xy}=\frac{(F_{11}z_y+F_{21}+F_2F_{11}-F_1F_{21})z_y+(F_{12}+F_{22}+F_2F_{12}-F_1F_{21})}{(1-F_1)^2}$$

3.　求函数 $u=\frac{1}{2}x^2y^2z^2$ 在点 $M\ (1,1,1)$，沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数与梯度。

解　　　　$grad(u)=(u_x,u_y,u_z)=(xy^2z^2,x^2yz^2,x^2y^2z)$，

所以函数$u=\frac{1}{2}x^2y^2z^2$在点$M\ (1,1,1)$的梯度为（1,1,1）。

所以函数$u=\frac{1}{2}x^2y^2z^2$在点$M\ (1,1,1)$沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,1,1)}=(1,1,1)\bullet(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$

4. 求椭球面$2x^2+3y^2+z^2=9$与平面$3x^2+y^2-z^2=0$的交线在点$(1,-1,2)$点处的切线与法平面方程。

解： 记$F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9,\quad G(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2$ ----1 分

曲线在点$P_0(1,-1,2)$的切向量为

$$\vec{\tau}=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\right)_{P_0}=\left(\begin{vmatrix}6y & 2z\\ 2y & -2z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2z & 4x\\ -2z & 6x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4x & 6y\\ 6x & 2y\end{vmatrix}\right)_{P_0}$$

$$=(-16yz,20xz,-28xy)_{P_0}=(32,40,28)$$ -------------3 分

所以曲线在$P_0(1,-1,2)$的切线方程为：$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$-------------1 分

曲线在$P_0(1,-1,2)$处的法平面方程为：$8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0,$

即$8x+10y+7z-12=0.$ -------------1 分

另解： 将y,z看做 x 的隐函数，则在$P_0(1,-1,2)$点处的切向量为$\vec{\tau}=\left(1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_{P_0}$，其中

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$利用隐函数组求导的方法计算即可（方程组两边关于$x$求导）

---------------------（切向量 4 分，方程各 1 分，共 6 分）.

5. 设$f(x)$是以2π为周期的函数，且

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,2\pi];\\ 2\pi, & x=0.\end{cases}$$

写出它的 Fourier 级数.

解： 将函数延拓成的$(-\infty,+\infty)$上周期为2π的函数，延拓后函数的不连续点为

$2n\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，Fourier 系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=2\pi$$ -------------1 分

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{2\pi}=0$$ --------------2 分

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nxdx=-\frac{2}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

----2 分

由收敛定理， $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx=\begin{cases}f(x),x\in(0,2\pi)\\ \pi,\ x=0,2\pi\end{cases}$$ ------------1 分

三、（本题 10 分）

讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 的连续性、可微性以及偏导函数的连续性.

解：

1) 设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 $f(x,y)=f(r,\theta)=r(\cos^3\theta-\sin^3\theta)$

这时 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于对任何 θ 都有 $r\to 0.$

显然 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{r\to 0}f(r,\theta)=0=f(0,0)$ ----------2 分

从而函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

2) 由偏导数的定义

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1.$$

即函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点两个偏导数存在，且分别为 1 和-1. ------------2 分（每个偏导 1 分）

3) 记 $z=f(x,y)$，则 $\Delta z-dz=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot\Delta x-f_y(0,0)\cdot\Delta y$

$$\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\frac{\dfrac{\Delta x^3-\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^2}-\Delta x+\Delta y}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y(\Delta x-\Delta y)}{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

设$\Delta \boldsymbol{y}=\boldsymbol{k}\Delta \boldsymbol{x}$，则$\dfrac{\Delta \boldsymbol{x}\cdot\Delta \boldsymbol{y}(\Delta \boldsymbol{x}-\Delta \boldsymbol{y})}{(\Delta \boldsymbol{x}^2+\Delta \boldsymbol{y}^2)\sqrt{\Delta \boldsymbol{x}^2+\Delta \boldsymbol{y}^2}}=\dfrac{\boldsymbol{k}(1-\boldsymbol{k})}{(\boldsymbol{k}^2+1)^{\frac{3}{2}}}$随$\boldsymbol{k}$不同而不同，故极限不存在。

所以函数$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微. ------------4 分

4）$f_x(x,y)=\dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, f_y(x,y)=-\dfrac{y^4+3x^2y^2+2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

设$y=kx$,则

$$f_x(x,y)=\frac{1+3k^2+2k^3}{(1+k^2)^2}, f_y(x,y)=-\frac{k^4+3k^2+2k}{(1+k^2)^2}$$

易知$f_x(x,y), f_y(x,y)$在（0,0）点都不连续 ------------2 分

四、（本题 10 分）

设级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 5n}{n^p+\alpha}\arctan 5n$，其中$\alpha>0,\ p>0$，试证明

（1） 当$p>1$时，级数绝对收敛；（2）当$0<p\le 1$时，级数条件收敛；

解：1）当$p>1$时，因为$\left|(-1)^n\dfrac{\sin^2 5n}{n^p+\alpha}\arctan 5n\right|\le\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{n^p+\alpha}\le\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{n^p}$，

而$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^p}$收敛，由比较级数判别法，故原级数绝对收敛。 ------------2 分

2）当$0<p\le 1$时，

$$\left|(-1)^n\frac{\sin^2 5n}{n^p+\alpha}\arctan 5n\right|=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^p+\alpha}\arctan 5n-\frac{\cos 10n}{n^p+\alpha}\arctan 5n\right]$$

根据 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法知$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 10n}{n^p+\alpha}\arctan 5n$是收敛的。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p+\alpha}\arctan 5n}{\frac{1}{n^p}}=\frac{\pi}{2}$$，由比较判别法的极限形式，知

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p+\alpha}\arctan 5n$ 是发散的，故原级数不绝对收敛。 ------------4 分

又

$$(-1)^n\frac{\sin^2 5n}{n^p+\alpha}\arctan 5n=\frac{1}{2}\left[(-1)^n\frac{1}{n^p+\alpha}\arctan 5n-(-1)^n\frac{\cos 10n}{n^p+\alpha}\arctan 5n\right]$$

同前知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 10n}{n^p+\alpha}\arctan 5n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(10+\pi)n}{n^p+\alpha}\arctan 5n$ 收敛。

根据 Leibniz 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p+\alpha}$ 收敛，

由 Abel 判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p+\alpha}\arctan 5n$ 收敛

故原级数条件收敛。 ------------------------------4 分

五、（本题 10 分）

设 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(n=1,2,...)$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛．求证 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明： 因 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,$ 当 $n>N$ 时，对 $\forall p>0$ 都有 $|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$ ------------------------------2 分

因为 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以让上式两边 $x\to a+$ 得

$|u_{n+1}(a)+u_{n+2}(a)+\cdots+u_{n+p}(a)|\le\varepsilon$ ------------------------------1 分

从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$收敛，同理$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$收敛。 ------------------------------2 分

所以$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上逐点收敛，记和函数为$S(x)$，即$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$。 --------1 分

由前面的证明和柯西收敛原理知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于和函数$S(x)$。--------2 分

因为$u_n(x)$在$[a,b]$上连续，所以和函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上连续，从而一致连续。

---2 分

六、（本题 10 分）

证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}]$在区间$[0,1]$上不一致收敛，但其和函数在$[0,1]$上连续。

证明： 设$u_n(x)=nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}$，则

$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\sum_{k=1}^{n}[kxe^{-kx}-(k-1)xe^{-(k-1)x}]=nxe^{-nx}$。

当$x\in(0,1]$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}nxe^{-nx}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{e^{nx}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{tx}{e^{tx}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{tx}}=0$

当$x=0$时，因为$S_n(x)\equiv 0,$所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$

故当$x\in[0,1]$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0\overset{\Delta}{=}S(x)$，即原函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[0,1]$的和函数为$S(x)\equiv 0$，它显然是$[0,1]$上的连续函数。

但$S_n(x)=nxe^{-nx}$对任给的n，都可以取$x_n=\frac{1}{n}$，则$S_n(x_n)=n\frac{1}{n}e^{-n\cdot\frac{1}{n}}=e^{-1}$，$\beta_n=\sup|S_n(x_n)-S(x)|\geq\sup S_n(x_n)=e^{-1},$从而$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\geq e^{-1}>0,$故原级数在$[0,1]$上不一致收敛。

七、（本题 10 分）

(1) 试求函数 $f(x,y,z)=x^a y^b z^c$ 在 $x+y+z=1$ 下的最大值，其中 a,b,c 为任意正实数;

(2) 从（1）的结果证明对六个正数有不等式

$$(\frac{u}{a})^a(\frac{v}{b})^b(\frac{w}{c})^c \le (\frac{u+v+w}{a+b+c})^{a+b+c}.$$

解： 构造 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=a\ln x+b\ln y+c\ln z+\lambda(x+y+z-1)$ ---2 分

解方程组 $\begin{cases} L_x(x,y,z,\lambda)=\dfrac{a}{x}+\lambda=0 \\ L_y(x,y,z,\lambda)=\dfrac{b}{y}+\lambda=0 \\ L_z(x,y,z,\lambda)=\dfrac{c}{z}+\lambda=0 \\ L_\lambda(x,y,z,\lambda)=x+y+z\text{-}1=0 \end{cases}$ ， ------------2 分

得唯一驻点 $x_0=\dfrac{a}{a+b+c}, y_0=\dfrac{b}{a+b+c}, z_0=\dfrac{c}{a+b+c}$. ----1 分

原函数 $f(x,y,z)=x^a y^b z^c$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的值为 $\left(\dfrac{a}{a+b+c}\right)^a\left(\dfrac{b}{a+b+c}\right)^b\left(\dfrac{c}{a+b+c}\right)^c$。现在考虑其在定义域 $x+y+z=1$， $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 上的取值情况，易知其在三个边界：$\{x+y=1,z=0\},\{x+z=1,y=0\},\{z+y=1,x=0\}$ 上取值恒为零，故知函数 $f(x,y,z)=x^a y^b z^c$ 在 $x+y+z=1$ 下的最大值就是

$$f(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^a\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^b\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^c$$ -----------2 分

取 $x=u, y=v, z=w$, 则 $u^a v^b w^c$ 在 $u+v+w=1$ 下的最大值就是上值，即

$$u^a v^b w^c \le \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^a\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^b\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^c$$

两边同除以 $a^a b^b c^c$ 得

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c \le \left(\frac{1}{a+b+c}\right)^a\left(\frac{1}{a+b+c}\right)^b\left(\frac{1}{a+b+c}\right)^c$$ -----------2 分

$$=\left(\frac{1}{a+b+c}\right)^{a+b+c}=\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$$

在 $u=x_0, v=y_0, w=x_0$ 时等号成立。 -----------1 分