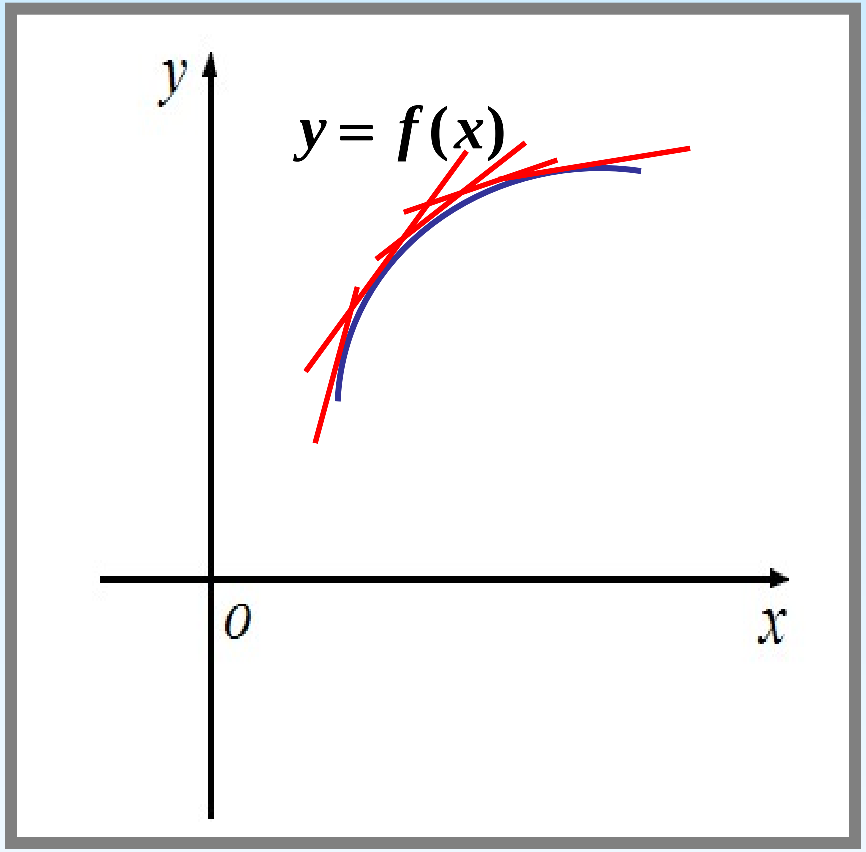
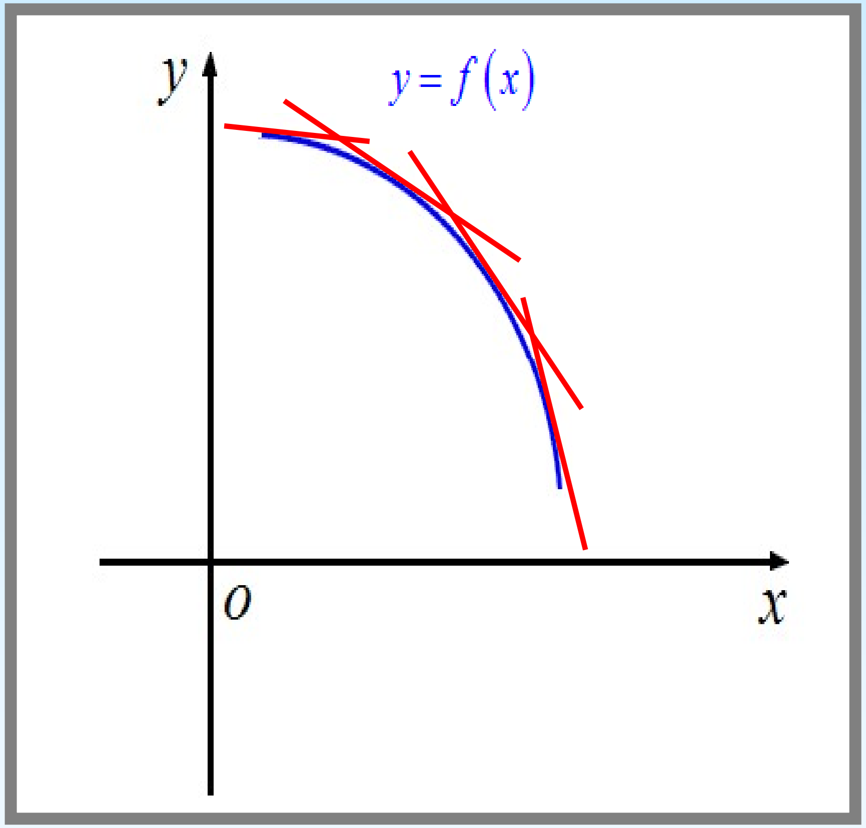
第7节 利用导数研究函数的性质

单调函数特征





提出问题：单调函数特征

一、单调性

1. 单调性

定理1 $f(x)\in C[a,b]$, 在 (a,b)内可导,则

$f(x)$在$[a,b]$上递增(减)$\Leftrightarrow f'(x)\geq 0\ (\leq 0),\ x\in(a,b)$.

证明: $\Rightarrow$ (必要性) 因为$f(x)$在$[a,b]$上递增,

所以，对$\forall x\in(a,b)$,以及使得$x+h\in(a,b)$的h,

若是“>”?

总有：$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$, 所以$f'(x)\geq 0,\ x\in(a,b)$.

$\Leftarrow$ (充分性) 若$f'(x)\geq 0,\ x\in(a,b)$,

则对$\forall x_1,x_2\in[a,b]$且$x_1<x_2$, 由Lagrange中值定理可得,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geq 0,$$

$\therefore f(x)$在$[a,b]$上递增.

2. 严格单调性

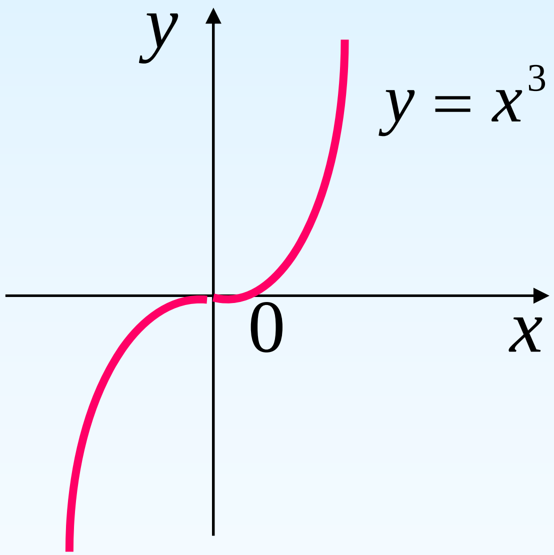
定理1* $f(x)\in C[a,b]$,在(a,b)内可导,若 $f'(x)>0(<0), x\in(a,b)$,

则$f(x)$在$[a,b]$上严格递增(减).

证明: (类似上面$\Leftarrow$) 这里从略

$y=x^3$,在$[-1,1]$上严格递增,

但$f'(x)=3x^2\big|_{x=0}=0.$



定理2 $f(x)\in C[a,b]$，在(a,b)上除有限个点之外，$f'(x)>0(<0)$，则$f(x)$在$[a,b]$上严格单调递增（递减）.

证明： 设$f(x)$在$\{x_i\}$之外，$f'(x)>0(<0)$.

其中$\{x_i\}$，s.t $a\le x_1<x_2<\dots<x_n\le b$.

则由定理1^*得，$f(x)$在

$[a,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_n,b]$ 上严格单调递增（递减），

所以$[a,b]$上严格单调递增（递减）.

结论得证

定理3： $f(x)\in C[a,b]$,在(a,b)内可导,则 $f(x)$在$[a,b]$上严格递增(减),

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1^\circ\ f'(x)\geq 0(\leq 0),\forall x\in(a,b);\\ 2^\circ\ \text{在}(a,b)\text{的任意子开区间内}, f'(x)\text{不恒为零}.\end{cases}$$

注： 2° 可表述为: $\forall(c,d)\subset(a,b),\exists\xi\in(c,d)$,使 $f'(\xi)>0(<0)$.

证明： $\Rightarrow$ (必要性)

设$f(x)$严格递增， 则$f'(x)\geq 0$， $\forall x\in(a,b)$. $\therefore 1^\circ$成立.

若2°不成立， $\exists(c,d)\subset(a,b)$,使 $f'(x)\equiv 0, x\in(c,d)$.

$\therefore f(x)$在(c,d)上恒为常数,与$f(x)$严格递增矛盾, $\Rightarrow 2^\circ$成立.

$\Leftarrow$(充分性)

若1°成立，　则$f(x)$在$[a,b]$上递增.

若有$x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2$,使 $f(x_1) = f(x_2)$,

则 $f(x) \equiv c, \quad x \in (x_1, x_2)$.

$\therefore f'(x) \equiv 0, x \in (x_1, x_2)$,　与2°矛盾.

$\therefore f(x)$在$[a,b]$上严格递增.

结论得证

例1 求$y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$的单调区间.

解:

$$y'=e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}+(x-1)\frac{1}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=\frac{x^2+x}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$$

令$y'=0$,得驻点$x_1=0, x_2=-1.$

x		-1		0	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗

例2. 证明不等式: 已知 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a,b) 内可导,

求证: $f(x) > g(x), x \in [a,b]$.

原理: $$F(x) = f(x) - g(x)$$

(1) $F'(x) > 0 \Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增,

这时，若 $F(a) = 0$, 则结论成立;

(2) $F'(x) < 0 \Rightarrow F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递减,

这时，若 $F(b) = 0$, 则结论成立.

(1) 求证：在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上，$\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1.$

证明： $\sin x<x$显然，只需证：$\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}.$

令$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1-\dfrac{2}{\pi}, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)\in C[0,\dfrac{\pi}{2}].$

而$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)<0,\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right).$

$\therefore\ f(x)$在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上严格递减 .

又因为$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，故当$x<\dfrac{\pi}{2}$时，$f(x)>0\Rightarrow\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}.$

应用举例

(2) 求证$e^x > 1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$对$x>0, n\in N^*$成立. (归纳法)

证明: (i) $e^x > 1+x \quad (n=1)$.

设$\varphi(x)=e^x-x-1$, 可见当$x>0$时, $\varphi'(x)=e^x-1>0$,

$\therefore \varphi(x)$ 在$[0,+\infty)$上严格递增,

故当$x>0$时, $\varphi(x)>\varphi(0)=0$. 即 $e^x>1+x$.

(ii) 设$n=k$时成立, 即 $e^x > 1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}$.

(iii) 考察$n=k+1$时:

$$\varphi(x)=e^x-[1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}]$$

$\varphi'(x)=e^x-[1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}]>0$, $\therefore \varphi(x)$ 在$[0,+\infty)$上严格递增,

$\therefore \varphi(x)>\varphi(0)=0$. 即: $e^x > 1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$成立.

(3) 证明当$x\in(0,1)$时，$e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

证明：令$f(x)=(1-x)e^{2x}-(x+1)$, 有$f(x)\in C[0,1]$. $f(0)=0$,

$$f'(x)=-e^{2x}+(1-x)\cdot 2e^{2x}-1=(1-2x)e^{2x}-1,$$

$$f''(x)=-2e^{2x}+(1-2x)\cdot 2e^{2x}=-4xe^{2x}<0.$$

$\Rightarrow$ $f'(x)$在$[0,1]$上单调递减,

$\Rightarrow$ 当$x\in(0,1)$时,有$f'(x)<f'(0)=0$.

$\Rightarrow$ $f(x)$在$[0,1]$上单调递减,

$\Rightarrow$ 当$x\in(0,1)$时, $f(x)<f(0)=0$, 即$f(x)<0$.

方法 ① 变形, 选辅助函数;

② 可逐次使用;

例3: 证明方程$\frac{\pi}{4}+x+\arctan x=0$有且只有一个实根.

证明: 设$f(x)=\frac{\pi}{4}+x+\arctan x$,

则$f(x)\in C[-1,0]$,且$f(0)=\frac{\pi}{4}$, $f(-1)=-1$,

所以在[-1，0]上，由连续函数的零点存在定理知：

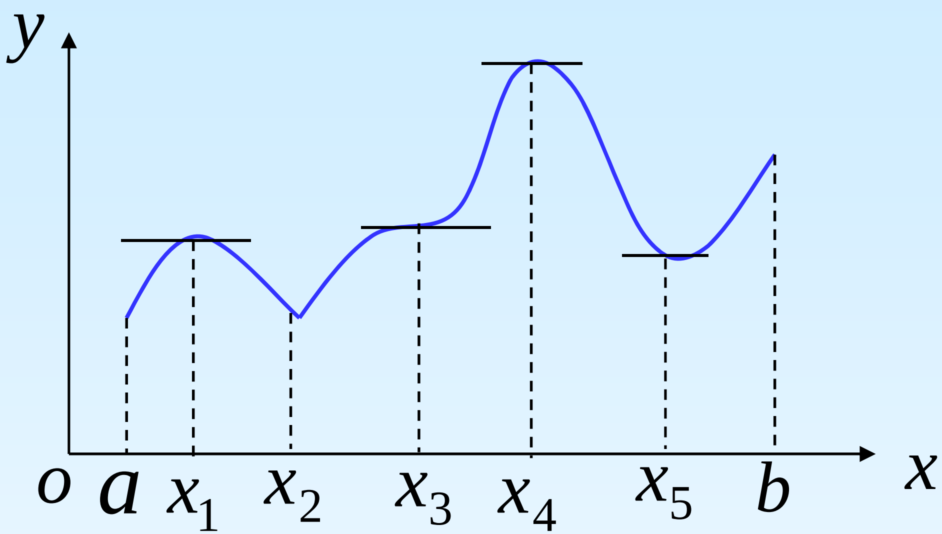
函数$f(x)$在$[-1,0]$上至少有一个零点,

又$f'(x)=1+\frac{1}{1+x^2}>0$, 得$f(x)$在$[-1,0]$上单调增加,

则$f(x)$至多有一个零点,

因此，$f(x)=0$有且只有一个实根。

二、极值



x_1, x_4为极大值点,

x_2, x_5为极小值点, 但x_2为不可导点;

x_3 不是极值点

1. 必要条件

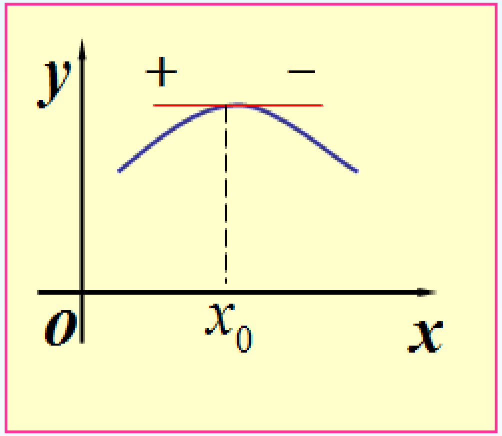
设 $f(x)$在x_0可导,且 x_0为极值点,则 $f'(x_0)=0$.　(费马)

2. 极值点:“增减区间的分界点”

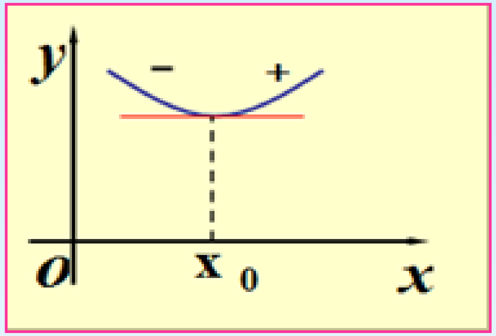
定理1　(极值判定1)

设$f(x)$在x_0 连续，在某邻域 $U^{\circ}(x_0;\delta)$ 上可导,

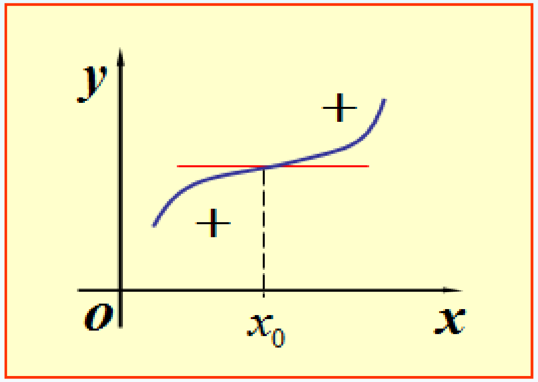
$$(i)\quad 若在\left.\begin{array}{l}(x_0-\delta,x_0)内,\ f'(x)>0\\(x_0,x_0+\delta)内,\ f'(x)<0\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_0)是严格极大值\ ;$$

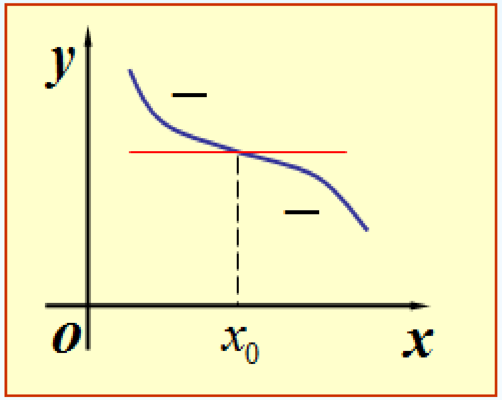


(ii) 若在 $\left.\begin{array}{l}(x_0-\delta, x_0)\text{内}, f'(x)<0 \\ (x_0, x_0+\delta)\text{内}, f'(x)>0\end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)$是严格极小值 .



(iii) 若在x_0两侧 f'不变号, $f(x_0)$不是极值.





例1. 设 $f(x)=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$,求极值.

解: $f'(x)=\frac{1}{3}(6x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}(12x-3x^2)=\frac{4-x}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(6-x)^2}}$

列表:

x		0		4		6	
y'	$-$		$+$		$-$		$-$
y	↘		↗		↘		↘

$\therefore x=0$ 极小点, $f(0)=0;$

$x=4$ 极大点, $f(4)=2\cdot\sqrt[3]{4}.$

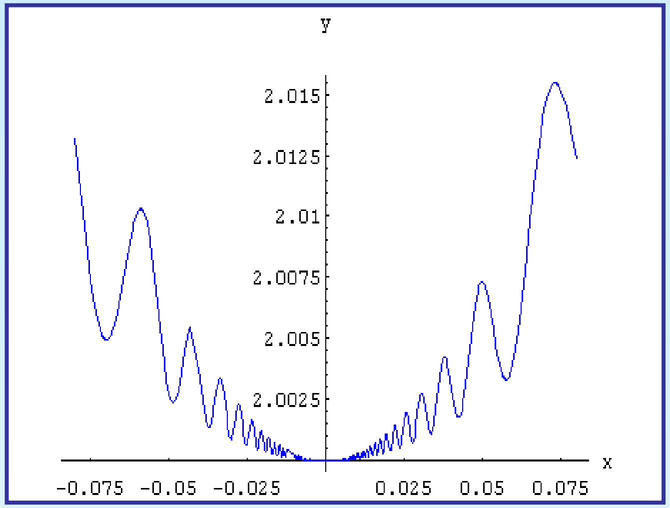
问题: 如果x_0为$f(x)$的极小值点，是否必存在x_0的某邻域，在此邻域内，$f(x)$在x_0的左侧下降，而在x_0的右侧上升?

例 $$f(x)=\begin{cases} 2+x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$

当$x\neq 0$时，$f(x)-f(0)=x^2(2+\sin\frac{1}{x})>0$

于是$x=0$为$f(x)$的极小值点.

函数极值



当$x \neq 0$时，

$$f'(x) = 2x(2 + \sin\frac{1}{x}) - \cos\frac{1}{x}$$

当$x \to 0$时，

$$2x(2 + \sin\frac{1}{x}) \to 0, \quad \cos\frac{1}{x}$$ 在-1和1之间振荡

因而$f(x)$在点$x = 0$的两侧都不单调.

定理2 (极值判定2) $f \in C[a,b]$, x_0是驻点, $f''(x_0)$存在.

(i) 若 $f''(x_0) < 0$, $f(x_0)$是严格极大；

(ii) 若 $f''(x_0) > 0$, $f(x_0)$是严格极小；

(iii) 若 $f''(x_0) = 0$, $f(x_0)$不定.

证明： (i) $\because f'(x_0) = 0$

$$\therefore \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = f''(x_0) < 0$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0, \qquad \begin{array}{l} x - x_0 < 0\text{时}, f'(x) > 0; \\ x - x_0 > 0\text{时}, f'(x) < 0. \end{array}$$

$\therefore f(x_0)$极大.

(*iii*) $f(x)=x^3, f''(0)=0,$ 0非极值点；

$f(x)=x^4, f''(0)=0,$ 0极小值点；

$f(x)=-x^4, f''(0)=0,$ 0极大值点.

(0是驻点)

例2 设$f(x)$满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，

若$\exists x_0\neq 0$，使 $f'(x_0)=0$，x_0是否为极值点？

解：

$$\because x_0 f''(x_0)=1-e^{-x_0},\quad \therefore f''(x_0)=\frac{1-e^{-x_0}}{x_0}.$$

$x_0>0$时，$f''(x_0)>0$，极小

$x_0<0$时，$f''(x_0)>0$，极小

$\therefore x_0$是极小值点.

最值 求 $f(x)$在$[a,b]$上最大最小值

步骤:

1. 求驻点和不可导点;

2. 求区间端点及驻点和不可导点的函数值, 比较大小, 哪个大哪个就是最大值, 哪个小哪个就是最小值;

注意: 如果区间内只有一个极值, 则这个极值就是最值. (最大值或最小值)

例3 求 $f(x)=xe^{x}, x\in(-\infty,+\infty)$的最值.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\therefore$ 无最大值

(2) 令$f'(x)=(x+1)e^{x}=0$, 得驻点 $x=-1$.

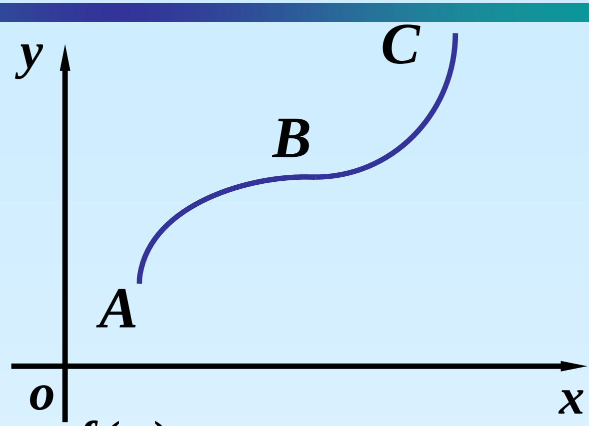
且 $x<-1$时, $f'(x)<0,\downarrow$

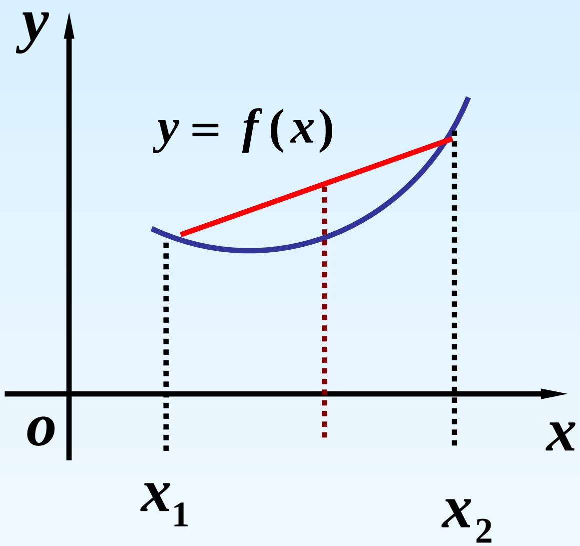
$x>-1$时, $f'(x)>0,\uparrow$

$\therefore$ 当$x=-1$时取最小值, $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$.

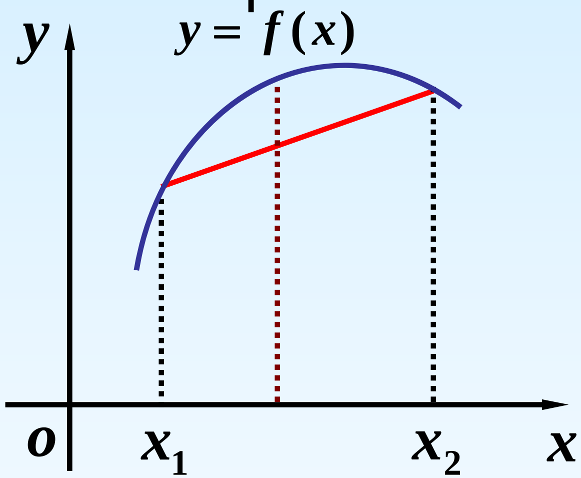
二、凸函数与凹函数

问题: 如何研究曲线的弯曲方向?





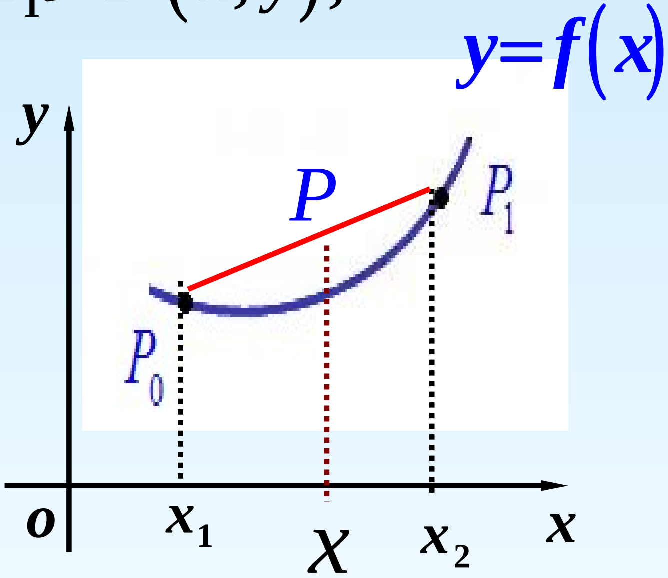
图形上任意弧段位弦的下方



图形上任意弧段弦的上方

如何提出定义？

任取$P_0\left(x_1, f\left(x_1\right)\right), P_1\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$，取$P_0P_1$上$P\left(x, y\right)$，



$$f\left(x_1\right)+\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)\geq f\left(x\right)$$

$$f\left(x\right)\leq\frac{\left(x_2-x\right)}{\left(x_2-x_1\right)}f\left(x_1\right)+\frac{\left(x-x_1\right)}{\left(x_2-x_1\right)}f\left(x_2\right)$$

$$\lambda_1=\frac{\left(x_2-x\right)}{\left(x_2-x_1\right)},\lambda_2=\frac{\left(x-x_1\right)}{\left(x_2-x_1\right)},\lambda_1+\lambda_2=1,x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$$

$$\Rightarrow f\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\right)\leq\lambda_1f\left(x_1\right)+\lambda_2f\left(x_2\right)$$

1. 凸函数与凹函数

曲线 $y=f(x), x\in I$ 上,任意两点的弦位于曲线上方.
下

定义: $y=f(x), x\in I$, 如对 $\forall x_1, x_2\in I, x_1\neq x_2$,

$\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1+\lambda_2=1.$ 凹

$\geq$

都有 $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$, 称 f 在 I 上凸;

如 $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)< \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$, 称 f 在 I 上严格凸.

$>$ 严格凹

等价形式:

$$f((1-t)x_1+t x_2)\leq (1-t)f(x_1)+t f(x_2),\quad t\in(0,1).$$

$\geq$

2. Jensen不等式

定理1 f 在I上凸,则$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in I, \lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0, \sum_1^n \lambda_i = 1,$

都有 $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$

(严格凸 ,且 $x_1, \cdots, x_n$不全相等时 ,取 $<$)

定理2 f 在I上凸,$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in I, \forall \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n > 0$

都有 $f\left(\dfrac{\sum \beta_i x_i}{\sum \beta_i}\right) \le \dfrac{\sum \beta_i f(x_i)}{\sum \beta_i}.$

(严格凸 ,且 $x_1, \cdots, x_n$不全相等时 ,取 $<$)

定理1的证明

易见$n=2$时, $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$成立.

设$n=k$时, 有$f(\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i)\le\sum_{i=1}^{k}\mu_i f(x_i),\sum_{i=1}^{k}\mu_i=1$

当 $n=k+1$ 时, 由$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k+\lambda_{k+1}=1$,

可得 $\dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}=1.$

取$u_i=\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}$,则$\sum_{i=1}^{k}u_i=1, u_i>0,$

凸函数与凹函数

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i\right)=f\left[(1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}u_i x_i+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right]$$

$$\boxed{\le(1-\lambda_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^{k}u_i x_i\right)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})}$$

利用n=2的结论

$$\boxed{\le(1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}u_i f(x_i)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})}$$

利用归纳假设

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x_i).$$

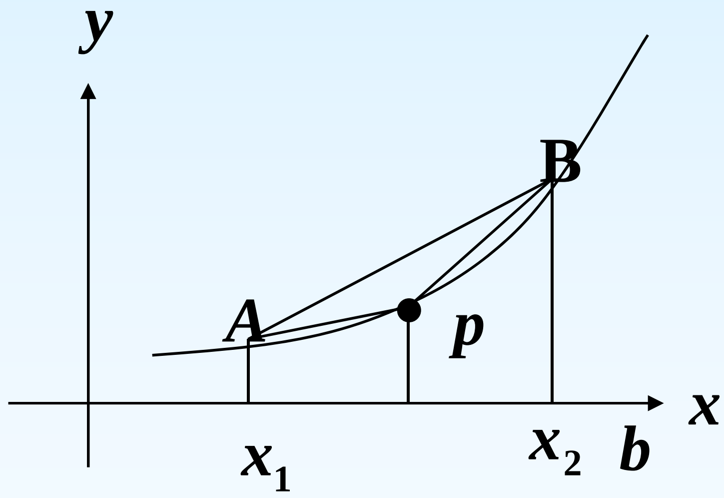
对严格凸类似可证。

2. 判定定理

定理3 (严格凸⇔下面式子中≤改为<)

f 在I上凸 $\Leftrightarrow \forall x_1 < x < x_2 \in I$,

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.}$$



斜率 $k_{Ap} \le k_{AB} \le k_{pB}$

证明： 利用不等式： $b>0,d>0,\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$,则$\frac{a}{b}\le\frac{a+c}{b+d}\le\frac{c}{d}$.

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

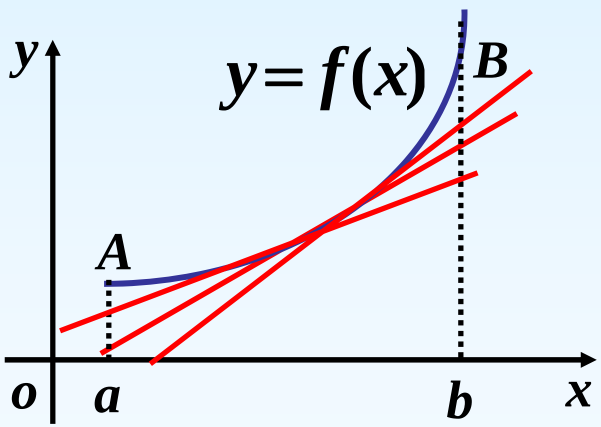
$$\Leftrightarrow\lambda_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1},\lambda_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2,x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$$

$$\lambda_1[f(x)-f(x_1)]\le\lambda_2[f(x_2)-f(x)]$$

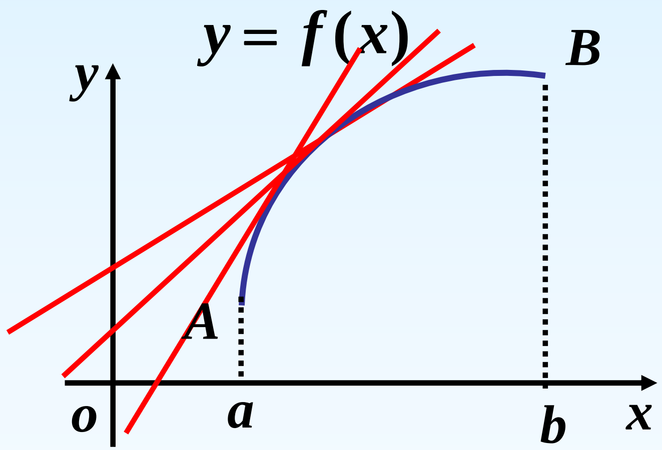
$$\Leftrightarrow f\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\right)\le\lambda_1f\left(x_1\right)+\lambda_2f\left(x_2\right)$$

定理4 $f \in C[a,b]$,(a,b)内可导,则

f在$[a,b]$凸(严格凸) $\Leftrightarrow$ $f'(x)$在(a,b)增(严格增).
凹（严格凹） 减（严格减）



$f'(x)$ 递增



$f'(x)$ 递减

证明： $\Rightarrow$ (必要性) 由 f 凸,

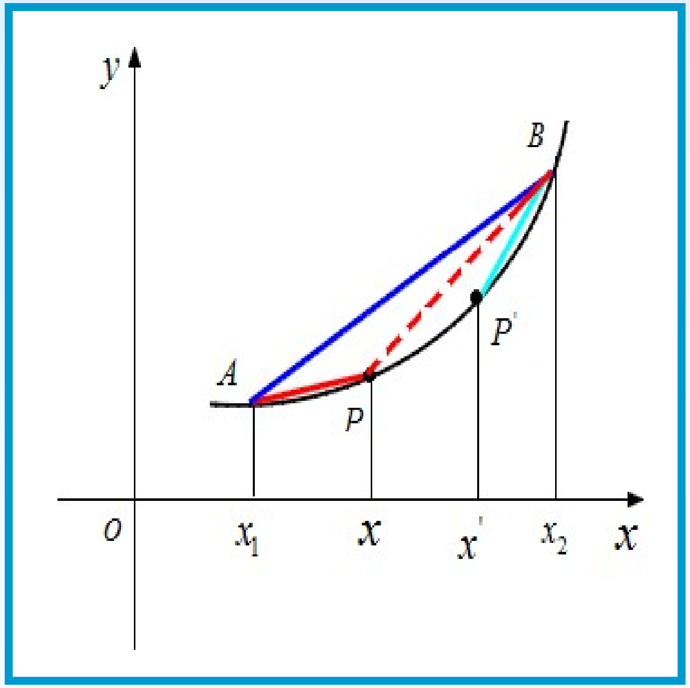
设 $(x_1, x_2) \subset (a,b)$, 对 $\forall x \in x_1 < x < x' < x_2$,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x'}$$

令 $x \to x_1^+, x' \to x_2^-$, 有

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2)$$

所以 $f'(x)$ 在 (a,b) 增函数.



证明：$\Rightarrow$ (必要性) $f(x)$是严格凸函数

证明关键

设 $(x_1, x_2) \subset (a,b)$，对$\forall x \in x_1 < x < x^{\bullet} < x' < x_2$,

若f严凸, $f'(x_1) \le \dfrac{f(x^*) - f(x_1)}{x^* - x_1} < \dfrac{f(x_2) - f(x^*)}{x_2 - x^*} \le f'(x_2)$

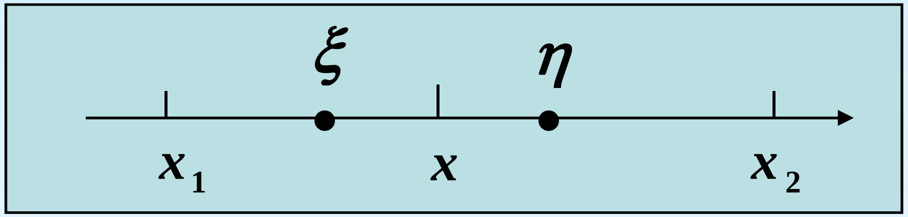
$\therefore f'(x)$在(a,b)严格增.

$\Leftarrow$(充分性)

设 $f'(x)$在(a,b)增函数， $\forall x_1 < x_2, \forall x_1 < x < x_2$,有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi),$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\eta),$$



因为$f'(\xi) \le f'(\eta)$，所以$\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$,

因此f在$[a,b]$凸函数.

结论得证

定理5 设f在$[a,b]$连续,(a,b)二阶可导,则

$$f\text{在}[a,b]\text{凸函数} \Leftrightarrow f''(x)\ge 0, \forall x\in(a,b).$$

$$f\text{在}[a,b]\text{严凸} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x)\ge 0, \forall x\in(a,b); \\ (a,b)\text{的任意开子区间内}, f''\text{不恒为零}. \end{cases}$$

例 设$f(x)=e^x, g(x)=\ln x$,

e^x为凸函数,$\ln x$为凹函数.

4. 应用:(Jensen不等式—不等式机器)

例1. 证明: $(x_1x_2\ldots x_n)^{1/n} \le \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, (x_i>0)$

等号成立 $\Leftrightarrow$ $x_1,\ldots,x_n$相同.

证明: 令$x_i = e^{y_i}$, 原不等式等价于$e^{\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}} \le \dfrac{e^{y_1}+e^{y_2}+\ldots+e^{y_n}}{n}$.

$\therefore$ 令 $f(x)=e^x, f''(x)=e^x>0, \ \therefore f(x)=e^x$严格凸.

取$\lambda_i = \dfrac{1}{n}, i=1,2,\ldots,n.$ 当$y_1,\ldots,y_n$不全相同时,得:

$$e^{\sum\lambda_i y_i} < \sum\lambda_i e^{y_i}$$

仅当$y_1=y_2=\ldots=y_n$,即$x_1=x_2=\ldots=x_n$时等号成立.

例2. 已知 $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$,

求证: $$\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^n} \le \frac{(1+x_1)\ldots(1+x_n)}{(n+x_1+\ldots+x_n)^n}.$$

证明:

$$\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(1+x_1)\ldots(1+x_n)} \le \frac{\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^n}$$

取对数 $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{1+x_i} \le \ln\left(\frac{\frac{1}{n}\sum x_i}{1+\frac{1}{n}\sum x_i}\right)$$

令 $f(x)=\ln\frac{x}{1+x}$,要证 $f(x)$在$(0,+\infty)$上凹

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x(1+x)},$$

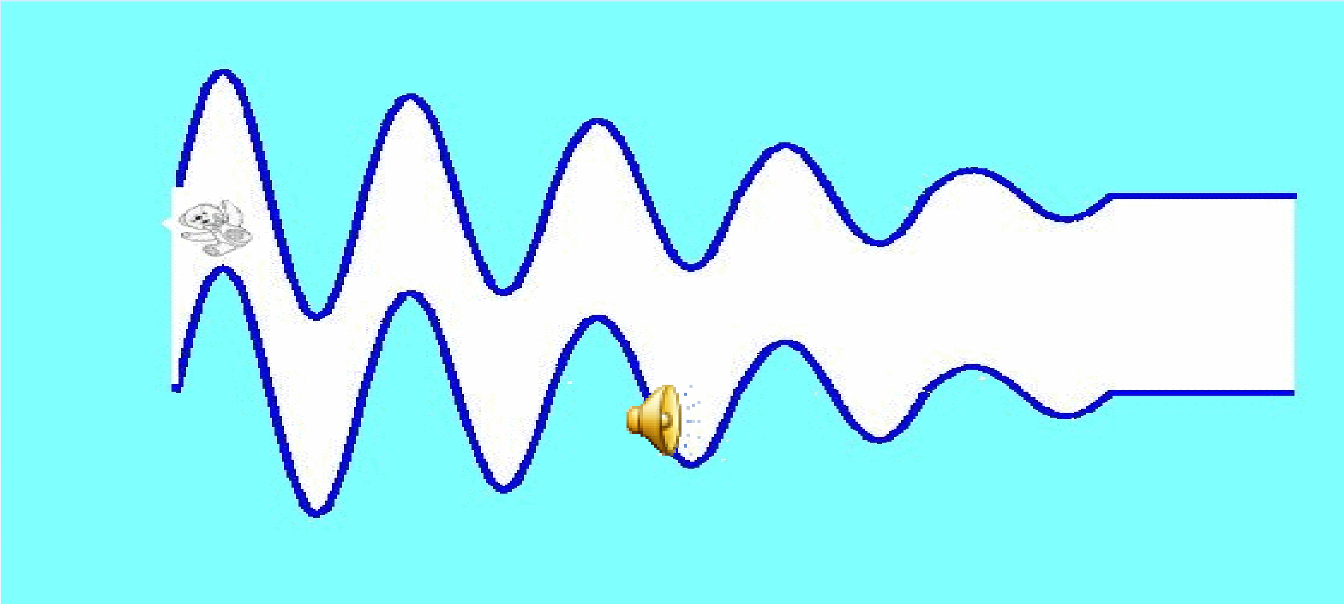
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(1+x)^2}<0,\qquad \therefore f(x)\text{严格凹}.$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)>\frac{1}{n}\sum[f(x_i)]$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{1+x_i}<\ln\left(\frac{\frac{1}{n}\sum x_i}{1+\frac{1}{n}\sum x_i}\right)$$

等号成立当且仅当x_i相等时.

探索类问题I



利用函数的单调和凹凸性质
设计你喜欢的环形滑车道

探索类问题II

通过进一步查阅有关书籍

探讨研究凸凹函数的实际意义

探索类问题III

1. 研究函数的三阶和四阶导数对函数性质的影响
2. 研究复合函数的单调性
3. 研究复合函数的凹凸性

作业 习题3.7
1(1), 2(4), 5(4), 7, 10(1, 4)