

计算机控制系统

Computer control System

北京航空航天大学 xia jie 2020年2月

自动化学院

1/60

2.2 离散系统的时域描述——差分方程

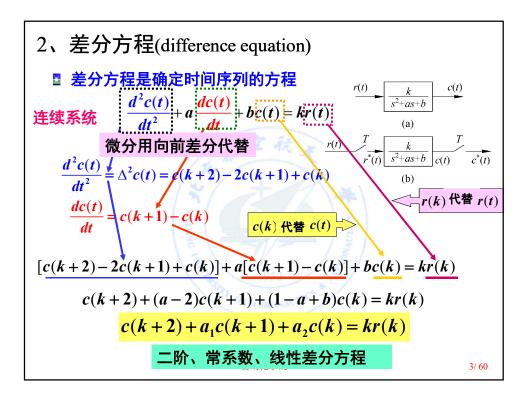
- 1、差分的定义 f(t) f(kT) f(kT) 简写 f(k)
 - 一阶向前差分: $\Delta f(k) = f(k+1) f(k)$
 - 二阶向前差分: $\Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) \Delta f(k)$ = f(k+2) - 2f(k+1) + f(k)

n阶向前差分: $\Delta^n f(k) = \Delta^{n-1} f(k+1) - \Delta^{n-1} f(k)$

- 一阶向后差分: $\nabla f(k) = f(k) f(k-1)$
- 二阶向后差分: $\nabla^2 f(k) = \nabla [\nabla f(k)] = f(k) 2f(k-1) + f(k-2)$

n阶向后差分: $\nabla^n f(k) = \nabla^{n-1} f(k) - \nabla^{n-1} f(k-1)$

自动化学院



二阶常系数线性差分方程

$$c(k+2) + a_1c(k+1) + a_2c(k) = kr(k)$$

- 一般离散系统的差分方程
 - ☑ 两种表示方法

差分方程的向前差分表示:

$$c(k+n) + a_1c(k+n-1) + a_2c(k+n-2) + L \ a_nc(k)$$

$$= b_o r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + L + b_m r(k) \qquad m \le n$$

差分方程的向后差分表示:

3、线性常系数差分方程的迭代求解

差分方程的解 { 通解 是与方程初始状态有关的解。 **特解** 与外部输入有关。

线性齐次差分方程 $y(k) + a_1 y(k-1) + L + a_n y(k-n) = 0$

飞机纵向

特征方程: $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + L a_n = 0$

 $\Delta lpha$ 短周期模态

若 λ_i 为各异实根,则通解:

△ν 长周期模态

 $y(k) = A_1 \lambda_1^k + A_2 \lambda_2^k + L + A_n \lambda_n^k = \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^k$

差分方程收敛的条件: $|\lambda_i| < 1$, i = 1, L, n

 λ_i i = 1, L, n 为解的模态

动态系统的<mark>模态</mark>:由系统特征值决定,模态的特性决定了系统的稳定性和动态特性。

5/60

差分方程求解1——递推法(P39,例2-5)

$$c(k) - 0.5c(k-1) = r(k)$$
 $c(0) = 0$ $r(k) = 1$

$$c(k) = r(k) + 0.5c(k-1)$$

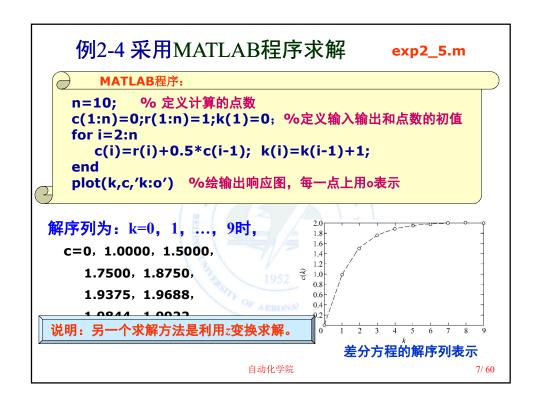
$$k = 1$$
, $c(1) = r(1) + 0.5c(1-1) = 1 + 0.5c(0) = 1$

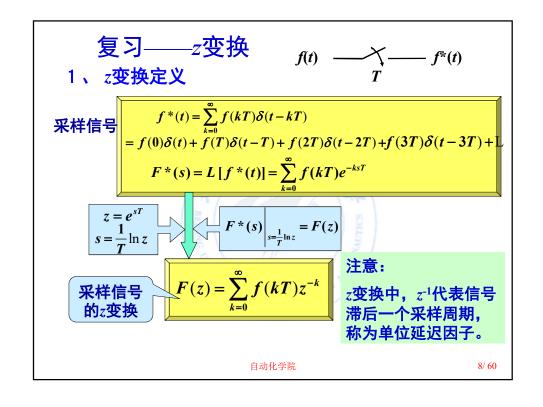
$$k = 2$$
, $c(2) = r(2) + 0.5c(2-1) = 1 + 0.5c(1) = 1 + 0.5 = 1.5$

$$k = 3$$
, $c(3) = r(3) + 0.5c(3-1) = 1 + 0.5c(2) = 1 + 0.5 \times 1.5 = 1.75$

依此类推, 迭代下去就可以求得任意时刻输出c(k)特点: 算法简单, 无闭合形式, 便于编程求解。

自动化学院





采样脉冲序列进行z变换的写法:

 $Z[f^*(t)], Z[f(t)], Z[f(kT)], Z[F(s)]$

- F(z)的表现形式: 在实际应用中,对控制工程中多数信 号,z变换所表示的无穷级数是收敛的 ,并可写成闭合形式。
 - **▼** z的有理分式:

$$F(z) = \frac{K(z^{m} + d_{m-1}z^{m-1} + L + d_{1}z + d_{0})}{z^{n} + c_{n-1}z^{n-1} + L + c_{1}z + c_{0}} \qquad m \le n$$

☑ z¹的有理分式:(在L变换中没有)

$$F(z) = \frac{Kz^{-l}(1 + d_{m-1}z^{-1} + L + d_1z^{-m+1} + d_0z^{-m})}{1 + c_{n-1}z^{-1} + L + c_1z^{-n+1} + c_0z^{-n}} \quad l = n - m$$

■ 零、极点形式:

$$F(z) = \frac{KN(z)}{D(z)} = \frac{K(z-z_1)L(z-z_m)}{(z-p_1)L(z-p_n)} \quad m \le n$$

9/60

$$z$$
变换过程: $f^*(t) \xrightarrow{\text{(L变换)}} F^*(s) \xrightarrow{z=e^{sT}} F(z)$

$$\delta(t-kT) \Rightarrow z^{-k}$$

z变换的特点:

- 1)得到幂级数形式,可以简化研究 ⇔ F(z)是有理多项式
- 2)z-1在时间上延时一个采样周期, 故从时间上看 是延迟的, 称为单位延迟因子。

$$z^{-1} \Leftrightarrow \delta(t-T)$$
 $z^{-2} \Leftrightarrow \delta(t-2T)$

 $F(z) \Leftrightarrow f^*(t)$ 只对应采样点

2、z 反变换

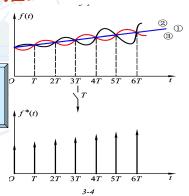
□ 求与z变换相对应的采样序列函数的过程称为z反变换。

$$Z^{-1}[F(z)] = f^*(t) \Rightarrow f(kT)$$

z反变换唯一,且对应的是采样序列值。

$$Z^{-1}[F(z)] \neq f(t)$$

z变换只能反映采样点的信号, 不能反映采样点之间的行为。



自动化学院

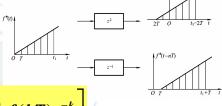
3、z变换的基本定理

- 1) 线性定理 $Z[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(z)+bF_2(z)$
- 2) 实位移定理(时移定理)

(1)右位移(延迟)定理

$$Z[f(t-nT)] = z^{-n}F(z)$$

(2)左位移(超前)定理



 $Z[f(t+nT)] = z^{n} \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right]$

3)复域位移定理

$$Z[e^{mat}f(t)] = F(ze^{\pm aT})$$

自动化学院

3、 z变换的基本定理

4) 初值定理

若存在极限 $\lim_{z\to\infty} F(z)$, 则有: $f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$

证明:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + L$$

当z趋于无穷时,两边取极限, $z \to \infty, z^{-1} \to 0$

上式成立。

5) 终值定理

假定函数 F(z) 全部极点均在z平面的单位圆内

或最多有一个极点在 z=1处,则

$$\lim_{k \to \infty} f(kT) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z) = \lim_{z \to 1} (z - 1) F(z)$$

13/60

4、求z变换及反变换方法

1) z变换方法

(1) 级数求和法(根据定义)

例 求指数函数 $f(t) = e^{-t}$ 的z变换

$$f^{*}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} \delta(t - kT) = \delta(t) + e^{-T} \delta(t - T) + e^{-2T} \delta(t - 2T) + L$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = 1 + e^{-T}z^{-1} + e^{-2T}z^{-2} + L$$

条件:
$$|e^{-T}z^{-1}| < 1$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

自动化学院

(2) F(s) 的z变换

$$F(s)$$
 $\xrightarrow{(L反变换)} f(t)$ $\xrightarrow{(梁样)} f^*(t)$ $\xrightarrow{(z变换)} F(z)$

利用s域中的部分分式展开法
$$F(s) = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2} + L + \frac{C_i}{s-s_i} + L + \frac{C_n}{s-s_n}$$

例 试求
$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$
 的z变换。

M:
$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \longrightarrow f(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] = 1 - e^{-t}$$

$$F(z) = Z[F(s)] = Z[1 - e^{-t}] = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-T}} = \frac{z(1 - e^{-T})}{(z - 1)(z - e^{-T})}$$

另一种由F(s) 求取F(z)的方法是留数计算方法。大纲不要求

自动化学院

15/60

运行结果

0.0833

0.6667

-3.0000 -1.0000

-1.0000

-0.7500 -0.5000

利用MATLAB的符号语言工具箱

已知 $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$,通过部分分式展开法求F(z) 。

F=sym('(s+2)/(s*(s+1)^2*(s+3))');

%传递函数F(s)进行符号定义

[numF,denF]=numden(F); %提取分子分母 pnumF=sym2poly(numF); %将分母转化为一般多项式 pdenF=sym2poly(denF); %将分子转化为一般多项式 [R,P,K]=residue(pnumF,pdenF)%部分分式展开

对应部分分式分解结果为:

$$F(s) = 0.0833 \frac{1}{s+3} - 0.7500 \frac{1}{s+1} - 0.5000 \frac{1}{(s+1)^2} + 0.6667 \frac{1}{s}$$

 $F(z) = 0.0833 \frac{z}{z - e^{-3T}} - 0.7500 \frac{z}{z - e^{-T}} - 0.5000 \frac{Tze^{-T}}{(z - e^{-T})^2} + 0.6667 \frac{z}{z - 1}$

自动化学院

(3) 利用z变换定理求取z变换式

例: 已知
$$f(t) = \sin \omega t$$
的 z 变换
$$F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

试求 $f_1(t) = e^{-at} \sin \omega t$ 的z变换。

解:利用z变换中的复位移定理可以很容易得到

$$Z[e^{-at}\sin\omega t] = \frac{e^{aT}z\sin\omega T}{z^2e^{2aT} - 2ze^{aT}\cos\omega T + 1} = \frac{e^{-aT}z\sin\omega T}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos\omega T + e^{-2aT}}$$

复域位移定理

$$Z[e^{mat}f(t)] = F(ze^{\pm aT})$$

自动化学院

17/60

(4) 查表法

■ 实际应用时可能遇到各种复杂函数,不可能 采用上述方法进行推导计算。实际上,前人 已通过各种方法针对常用函数进行了计算, 求出了相应的F(z)并列出了表格,工程人员应 用时,根据已知函数直接查表即可。具体表 格见附录A。

$$f(t)$$
 部分分式 $f_i(t)$ 查表 $F_i(z)$ 求和 $F(z)$

$$F(s)$$
 部分分式 $F_i(s)$ 查表 $F_i(z)$ 求和 $F(z)$

自动化学院

部分分式展开法——查表法

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + L + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + L + a_{n-1} s + a_n}$$

1. 当A(s)=0无重根时

$$F(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + L + \frac{C_i}{s - s_i} + L + \frac{C_n}{s - s_n} \qquad C_i = (s - s_i) \cdot F(s) \Big|_{s = s_i}$$

2. 当A(s)=0有重根时,设 s_1 为r阶重根

$$F(s) = \frac{C_r}{(s-s_1)^r} + \frac{C_{r-1}}{(s-s_1)^{r-1}} + L + \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_{r+1}}{s-s_1} + L + \frac{C_n}{s-s_1}$$

$$\begin{cases} C_r = (s-s_1)^r F(s) \Big|_{s=s_1} \\ C_{r-1} = \frac{d}{ds} \Big[(s-s_1)^r F(s) \Big]_{s=s_1} \\ C_{r-j} = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} \Big[(s-s_1)^r F(s) \Big]_{s=s_1} \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \Big[(s-s_1)^r F(s) \Big]_{s=s_1}$$

2) z反变换方法 (1)查表法、部分分式法

$$F(z)$$
 部分分式 $\sum F_i(z)$ 查表 $f_i^*(t)$ 求和 $f^*(t)$

$$F(z)$$
分子上往
往有z,为了对
应查表方便。
$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + L + \frac{A_n}{z-z_n}$$
 $F(z)$ 无重根

$$A_i = (z - z_i) \frac{F(z)}{z} \bigg|_{z = z_i} \qquad i = 1, 2, L, n$$

$$F(z) = \frac{A_1 z}{z - z_1} + \frac{A_2 z}{z - z_2} + L + \frac{A_n z}{z - z_n}$$
可以直接查表

查表
$$f(kT) = A_1 z_1^k + A_2 z_2^k + L + A_n z_n^k = \sum_{i=1}^n A_i z_i^k$$

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i z_i^k\right) \delta(t - kT)$$

$$F(z) = \frac{-3z^2 + z}{z^2 - 2z + 1} = \frac{(z - 3z^2)}{(z - 1)^2}$$

MATLAB程序:

Fz=sym('(-3*z^2+z)/(z^2-2*z+1)'); %进行符号定义

[numF,denF]=numden(F); %提取分子分母 pnumF=sym2poly(numF); %将分母转化为一般多项式 pdenF=sym2poly(denF);

[R,P,K]=residue(pnumF,pdenF)% 部分分式展开

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-3}{z-1} + \frac{-2}{(z-1)^2} + \frac{0}{z-0} = -\frac{2}{(z-1)^2} - \frac{3}{z-1}$$

$$F(z) = -\frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{3z}{z-1}$$
查表可得

$$f(k) = -2k - 3u(k)$$

$$F(z) = -\frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{3z}{z-1}$$
 查表可得 $f(k) = -2k - 3u(k)$

真中
$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \ge 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

21/60

2) z反变换方法

(3) 幂级数展开法(长除法)

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + L + f(kT)z^{-k} + L$$

$$f^*(t) = f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t-T) + f(2T)\delta(t-2T) + L + f(kT)\delta(t-kT) + L$$

已知
$$F(z) = \frac{10z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$
 , 求 $f^*(t)$

$$|| -1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}| \frac{10z^{-1} + 15z^{-2} + 17.5z^{-3} + 18.75z^{-4} + \cdots}{10z^{-1}} || F(z) = 10z^{-1} + 15z^{-2} + 17.5z^{-3} + 18.75z^{-4} + \cdots$$

$$\begin{aligned} & \frac{-)10z^{-1} - 15z^{-2} + 5z^{-3}}{15z^{-2} - 5z^{-3}} \\ & \frac{-)15z^{-2} - 22.5z^{-3} + 7.5z^{-4}}{17.5z^{-3} - 7.5z^{-4}} \end{aligned}$$

$$\frac{z - 22.5z + 7.5z}{17.5z^{-3} - 7.5z^{-4}}$$

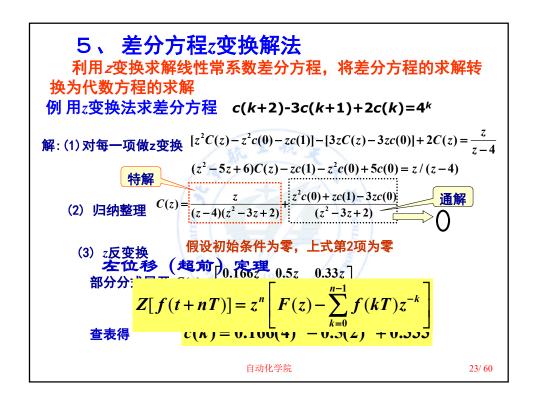
$$\frac{-)17.5z^{-3}-26.25z^{-4}+8.75z^{-5}}{18.75z^{-4}-8.75z^{-5}}$$

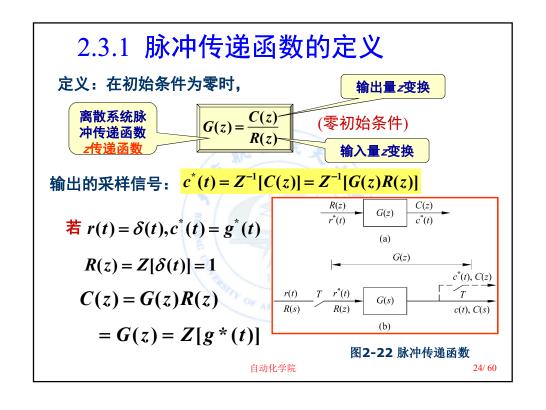
自动化学院

$$f^{*}(t) = 0 + 10\delta(t - T) + 15\delta(t - 2T)$$
$$+17.5\delta(t - 3T) + 18.75\delta(t - 4T) + L$$

对该例, 从相关系数中可以归纳得:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 20(1 - 0.5^k) \delta(t - kT)$$





2.3.2 脉冲传递函数特性

1. G(z)的求取

如何由G(s)求G(z)

(1) 对G(s)做拉氏反变换,求得脉冲响应

$$g(t) = L^{-1}[G(s)]$$

(2) 对 g(t)采样,求得离散系统脉冲的响应

$$g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\delta(t - kT)$$

(3) 对 $g^*(t)$ 做z变换,得系统的脉冲传函

$$G(z) = Z[g*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k}$$

几种表示法: $G(z) = Z[g^*(t)] = Z[g(t)] = Z[G(s)]$

脉冲传递函数完全表征了系统或环节的输入与输出之间的特性, 并且也只由系统或环节本身的结构参数决定,与输入信号无关。

G(z)的物理可实现条件

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + L + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + L + a_n} \quad n \ge m \text{ , } \exists x \in \mathbb{R}.$$

例: 假设
$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = z$$
 $y^*(t)$ $r(t) = \delta(t)$ $Y(z) = zR(z)$

$$r(t) = \delta(t), R(z) = 1$$
 $Y(z) = z, y^*(t) = \delta(t+T)$

 输出信号出现在输入信号之前, 非因果的,物理上不存在。

自动化学院

2.3.2 脉冲传递函数特性

2. 脉冲传递函数的极点与零点

- ❖极点
 - ightharpoonup 当 G(z) 是 G(s)由通过z变换得到时,其极点按z= e^{sT} 关系一 一映射得到。
 - ▶ G(z)的极点位置与G(s)的极点有关
 - ightharpoonup还与T密切相关。T
 ightharpoonup 0时,极点密集映射在z=1附近。

❖零点

- $\triangleright G(z)$ 的零点是T的复杂函数。采样会增加额外的零点。
- ▶若G(s)没有不稳定的零点,且极点数与零点数之差大于2 当采样周期较小时,G(z)总会出现不稳定的零点,变 成非最小相位系统。
- \triangleright 有不稳定零点的连续系统G(s),只要T取得合适,离散后 也可得到没有不稳定零点的G(z)。

自动化学院

27/60

2.3.3 差分方程与脉冲传递函数

$$c(k) + a_1 c(k-1) + a_2 c(k-2) + L + a_n c(k-n)$$

$$= b_0 r(k) + b_1 r(k-1) + L + b_m r(k-m)$$

$$c(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i c(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j r(k-j)$$

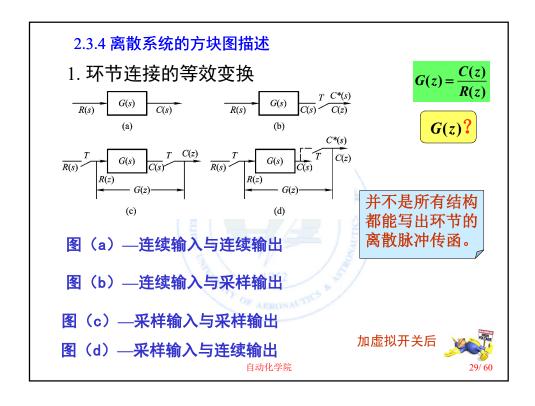
 $C(z) + \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i} C(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^{-j} R(z)$ 零初始条件:

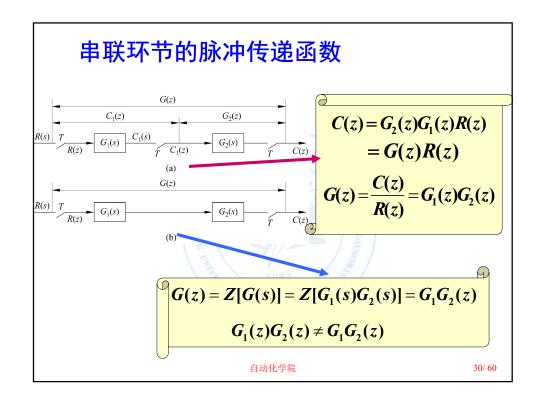
$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_{j} z^{-j}}{1 + \sum_{j=0}^{m} a_{j} z^{-j}}$$

 $G(z) = rac{C(z)}{R(z)} = rac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_{j} z^{-j}}{1 + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{i} z^{-i}}$ $\Delta(z) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i} z^{-i}$ 为该系统的特征多项式



脉冲传递函数





$$G_1(z)G_2(z) \neq G_1G_2(z)$$

[5]:
$$G_1(s) = \frac{1}{s}, G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_1(z)G_2(z) = Z\left[\frac{1}{s}\right] \cdot Z\left[\frac{1}{s+1}\right] = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$Z[G_1(s)G_2(s)] = Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

故有: $G_1(z)G_2(z) \neq G_1G_2(z)$

两者结果不同, 但它们的极点相同, 仅零点不同。

自动化学院

31/60

有Z0H时的开环脉冲传递函数

注意: 若有 $F(z) = Z[F(s)] \neq 1$ 时。

$$Z[e^{-as}F(s)]$$
 $= z^{-a/T}Z[F(s)]$, 当 a 为 T 的整数倍时 $\neq z^{-a/T}Z[F(s)]$, 当 a 不为 T 的整数倍时

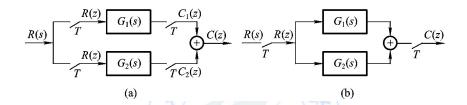
但恒有
$$Z[e^{-as}] = z^{-a/T}$$

$$Z[s] = Z[G_0(s)] = Z[G_0(s)] - Z[e^{-sT}G_0(s)]$$

$$G(z) = Z \left[\frac{G_0(s)}{s} \right] - z^{-1} Z \left[\frac{G_0(s)}{s} \right] = \left[(1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G_0(s)}{s} \right] \right]$$

自动化学院

并联环节的脉冲传递函数



根据z变换的线性叠加定理:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = G_1(z) + G_2(z)$$

$$= Z[G_1(s)] + Z[G_2(s)]$$

自动化学院

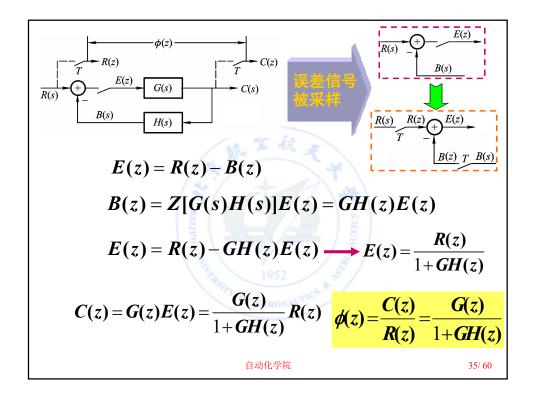
33/60

闭环反馈系统脉冲传递函数

- 1. 独立环节:在计算机控制系统里,两个相邻采样开关之间的环节(不管其中有几个连续环节串联或并联)只称为1个独立环节。
- 2. 若闭环系统输入信号未被采样,则整个闭环系统的脉冲传 递函数将写不出来,只能写出输出信号z变换表达式。
- 3. 若<mark>误差信号被采样,则认为输入、输出信号都有采样信号</mark> , 即

$$e^*(t) = r^*(t) - c^*(t)$$

自动化学院



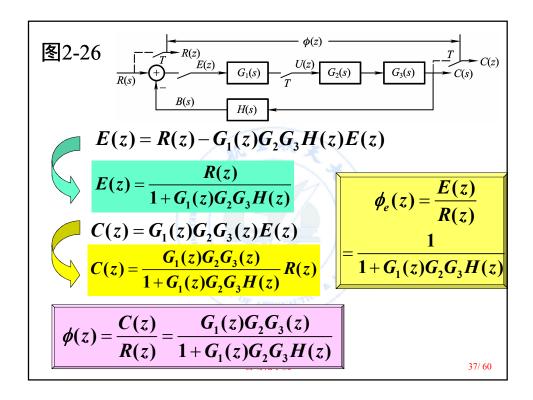
一般有下面规律性的结论(可能会有例外):

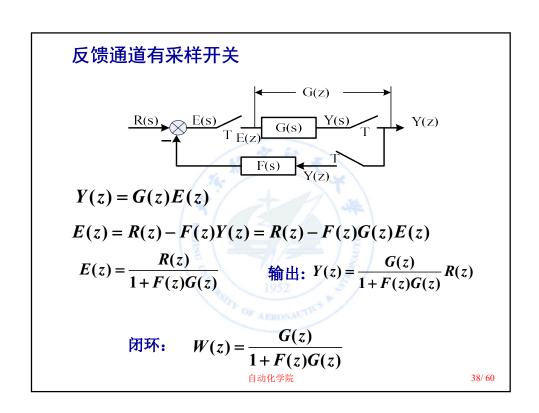
C(z) = 前向通道所有独立环节z变换的乘积 1+闭环回路中所有独立环节z变换的乘积

- (1) 输入R(s)也作为一个连续环节看待。
- (2) 若*R(z)*存在,则<mark>可写出</mark>闭环系统的脉冲传 递函数;否则写不出来,只能写出输出信号 z变换表达式。

关键:求G(z)要抓住在两个开关之间。

自动化学院





2、CCS的闭环脉冲传递函数

- 1)数字部分的脉冲传递函数
- ☑ 控制算法,通常有以下两种形式:
 - **❖差分方程** ___(z变换法)

脉冲传递函数

D(z)

❖连续传递函数*D(s)*

脉冲传递函数D(z)

(第4章的离散法)

自动化学院

39/60

2、CCS的闭环脉冲传递函数

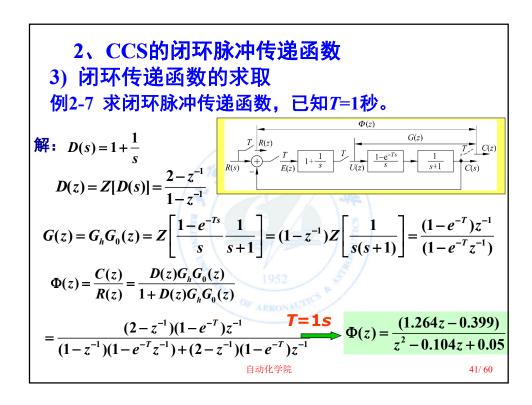
- 2) 连续部分的脉冲传递函数
- □ 计算机输出的控制指令u*(t)是经过零阶保持器加到系统的 被控对象上的, 因此系统的连续部分由零阶保持器和被控 对象组成。

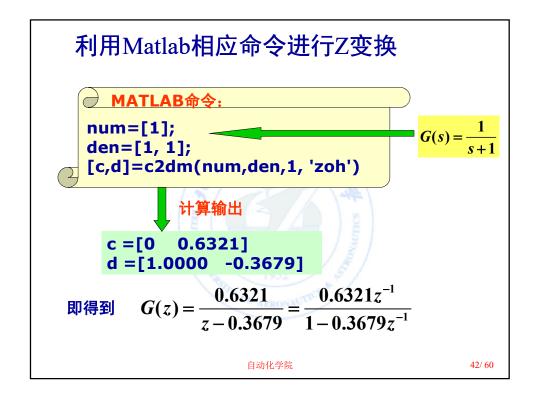
 $G_h(s)G_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}G_0(s)$

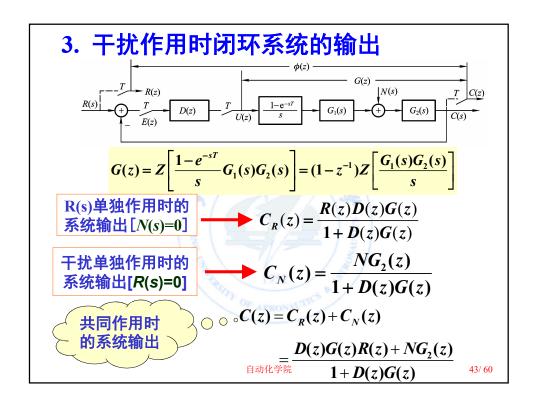
图2-28 连续部分的系统结构

被控对 象传递 $G(z) = \frac{C(z)}{U(z)} = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_0(s) \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{1}{s} G_0(s) \right]$

自动化学院







2.4 离散系统频率特性

在离散系统中,一个系统或环节的频率特性是指,在正弦信号作用下,系统或环节的稳态输出与输入的复数比随输入正弦信号频率变化的特性。

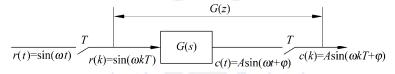


图2-30 离散系统的频率特性

频率特性定义:

连续系统: $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$

离散系统: $G(e^{j\omega T}) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}}$

自动化学院

频率特性定义:

连续系统: $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$ s虚轴



离散系统: $G(e^{j\omega T}) = G(z)|_{z=e^{j\omega T}}$ z单位圆

离散系统频率特性计算:

1. 指数形式: $G(e^{j\omega T}) = |G(e^{j\omega T})| \angle G(e^{j\omega T})$

|G(e^{jøT})| → 幅频特性

∠G(e^{jωT}) ── 相频特性

2. 代数形式: $G(e^{j\omega T}) = U(\omega) + jV(\omega)$

 $U(\omega)$ — 实频特性

 $V(\omega)$ **一** 虚频特性

45/60

2.4.2 离散系统频率特性的计算

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$
 $G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{1}{(s+1)}\right] = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$ 要求绘制

1、数值计算法

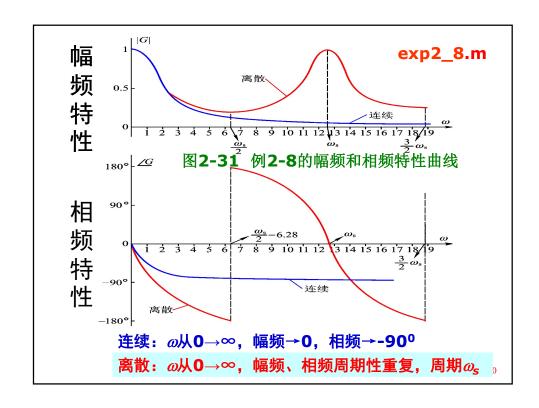
连续系统: $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \angle \arctan \omega$

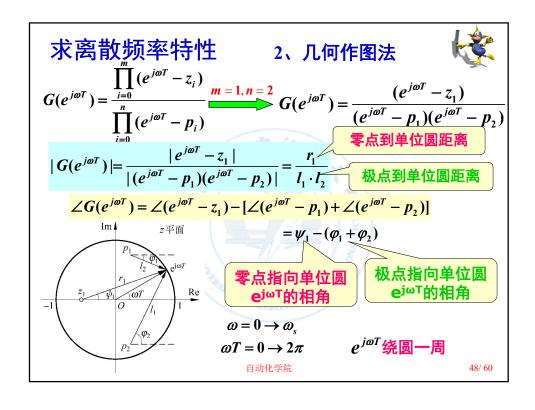
 $G(e^{j\omega T}) = \frac{(1 - e^{-T})}{e^{j\omega T} - e^{-T}} = \frac{0.393}{e^{j\omega T} - 0.606}$ T = 0.5s离散系统:

 $= \frac{0.393}{[\cos(0.5\omega) - 0.606] + j\sin(0.5\omega)}$

 $|G(e^{j\omega T})| = \frac{0.393}{\sqrt{[\cos(0.5\omega) - 0.606]^2 + \sin^2(0.5\omega)}}$ **心的偶函数**

 $\angle G(e^{j\omega T}) = -\arctan\frac{\sin(0.5\omega)}{\cos(0.5\omega) - 0.606}$ **心的奇函数**





2.4.3 离散系统频率特性的特点

1. 特点

(1)周期性:周期为 ω_s

$$G(e^{j\omega T}) = G(e^{j(\omega+\omega_s)T})$$

(2)幅频特性为 ω 的偶对称

$$|G(e^{j\omega T})| = |G(e^{-j\omega T})|$$

(3)相频特性为 ω 的奇对称

$$\angle G(e^{j\omega T}) = -\angle G(e^{-j\omega T})$$

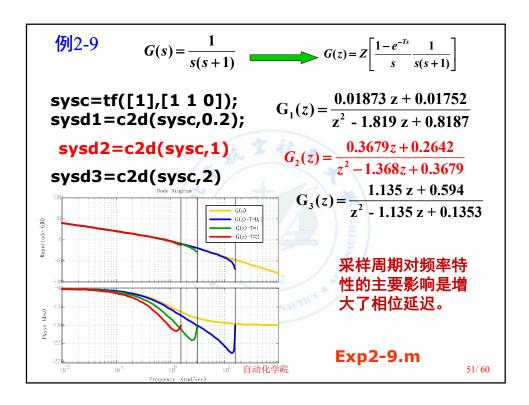
自动化学院

49/60

2. 应注意问题

- (1) 离散环节频率特性不是*a*的有理分式函数,在绘制对数频率特性时,不能像连续系统那样使用渐近对数频率特性。离散系统频率特性不能采用连续系统简易画法。
- (2) 离散环节频率特性形状与连续系统频率特性形状 有较大差别,特别是当采样周期较大以及频率较 高时,由于混叠,使频率特性形状有较大变化, 主要表现有:
 - ❖ 高频时会出现多个峰值;
 - ❖ 可能出现正相位;
 - ❖ 仅在较小的采样周期或低频段与连续系统频率特性相接 近。

自动化学院



频率特性的应用特点

- 离散系统频率特性可以只考虑一个周期
- 一般仅考虑主带0→ω_s/2就可以了(由于有周期性)
- ☑ 采样周期大,产生混叠
- 注意混叠与周期性的区别
 - ≻周期性——z变换引起的,基本频谱不变
 - ▶混叠一一改变基本频谱的形状,体现在主带中

自动化学院

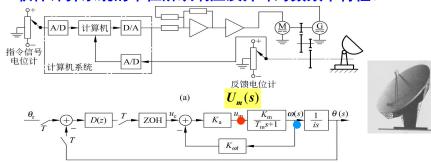
频率特性的应用

- 判稳定性
- 1. 确定开环传递函数的不稳定极点数p
- 2. 画开环频率特性
- 3. 估计稳定裕度 增益稳定裕度、相稳定裕度 是一种鲁棒性指标,表明系统在参数不确定 情况下的稳定范围的大小。 应用更为广泛。
- 如飞控系统,要求 幅值稳定裕度6分贝,相角稳定裕度45度

自动化学院

2.6 应用实例

□ 求天线机控系统的闭环传递、状态方程并利用MATLAB 软件计算系统的单位阶跃响应及开环对数频率特性。



①直流电动机加天线负载的传递函数 •• →•

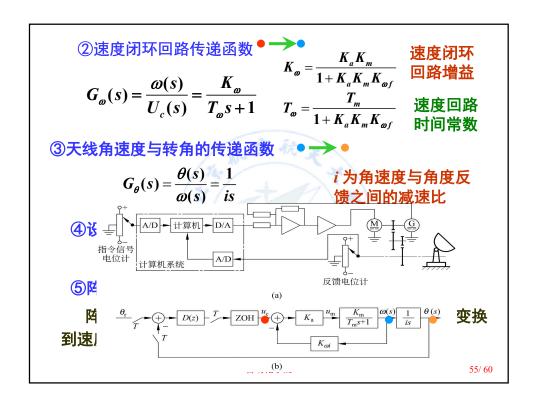
$$G_m(s) = \frac{\omega(s)}{U_m(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1}$$
 $T_m = \frac{R_a J}{C_e C_m}(s)$ 机电时间常数

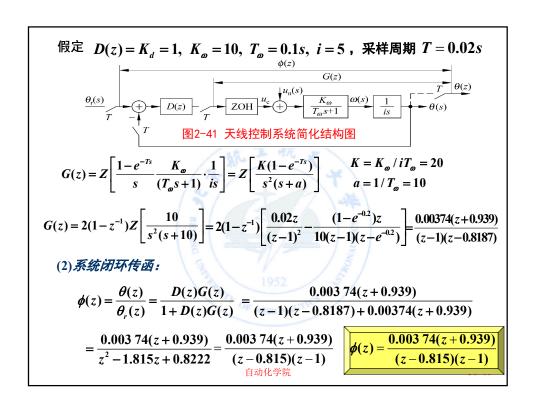
输入电压,输出角速率

 $K_m = 1/C_e(rad/s \cdot v)$ 电机传动系数

自动化学院

54/60





$$G(z) = \frac{0.00374(z+0.939)}{(z-1)(z-0.8187)}$$

$$u(k) = \frac{0.00374}{z-0.8187}$$

$$x_2(k) = \frac{0.00374}{z-0.8187}$$

$$x_2(k+1) = 0.8187x_2(k) + 0.00374u(k)$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k+1) + 0.939x_2(k)$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + 1.7577x_2(k) + 0.00374u(k)$$

$$u(k) = r(k) - x_1(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.7577 \\ 0 & 0.8187 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00374 \\ 0.00374 \end{bmatrix} (r(k) - x_1(k))$$

$$\overrightarrow{NFSS}$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k+1) + 0.939x_2(k)$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k+1) + x_2(k+1) + x_2(k+1)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k+1) + x_2(k+1)$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k+1) + x_2(k+1)$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k+1)$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k+1)$$

$$x_2(k+1) = x_$$

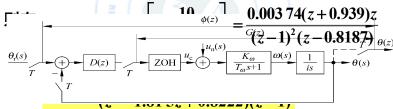


■ 阵风干扰 $u_n(t)$ 引起的天线转角: $u_n(t)$ 没有被采样

$$\theta_n(z) = \frac{U_n G_1(z)}{1 + D(z)G(z)}$$
 $K_{\infty} = 10, T_{\infty} = 0.1s, i = 5$

$$U_nG_1(z) = Z[U_n(s) \cdot G_1(s)] = Z\left[U_n(s) \cdot \frac{K_{\omega}}{(T_{\omega}s + 1)} \cdot \frac{1}{is}\right]$$

假设 $U_n(s) = 1/s$



阵风阻力形成干扰力矩直接作用于电机上,将其等效变换到速度回路输入端,等效为常值干扰电压 $u_n(t)$ =1。

自动化学院

