§3.6 微分中值定理

一、费马引理

1. 极值与极值点

设 $x_0 \in I$,如果存在$U(x_0,\delta) \subset I$,使得对$\forall x \in U(x_0,\delta)$,

总有 $f(x_0) \geq f(x)$, 称$f(x_0)$是f在I上的极大值,

x_0称为极大值点.

类似可定义极小值、极小值点

极值和最值的区别

(1) 极值为局部性质,最值为整体性质

(2) 在I内部,最值必为极值.

2. Fermat引理(费马)

$$\boxed{f\text{在}x_0\text{处可导,且}x_0\text{是极值点} \Rightarrow f'(x_0)=0}$$

证明 设x_0为极大值点

由定义知,$\exists\delta>0$, 当$x\in U(x_0,\delta)$时,有$f(x_0)\geq f(x)$.

当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$,即 $f'_-(x_0)\geq 0$

当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$,即 $f'_+(x_0)\leq 0$

$$\therefore f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=0.$$

定义 若$f'(x_0)=0$,则称x_0为函数$f(x)$的驻点.

二、罗尔(Rolle)中值定理

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上满足:

(i) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) 在开区间 (a, b) 上可导;

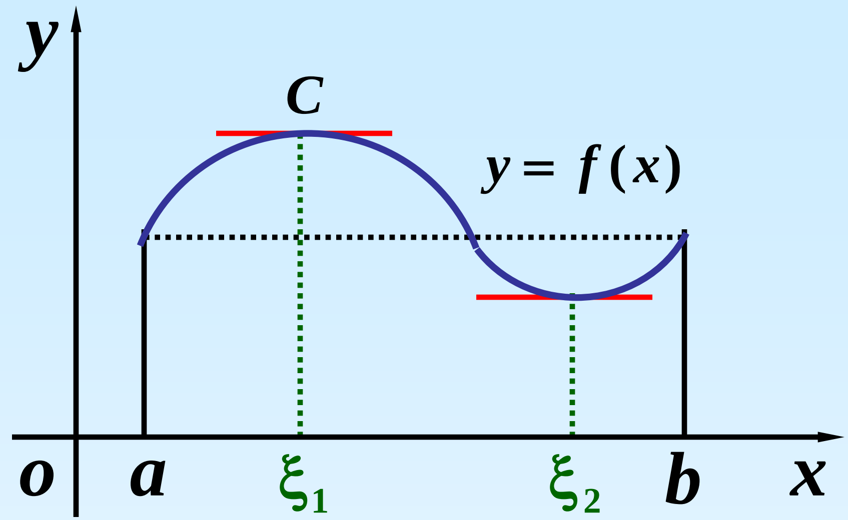
(iii) $f(a) = f(b)$.

那么在开区间(a, b)内必定(至少)存在一点ξ, 使

$$f'(\xi) = 0.$$

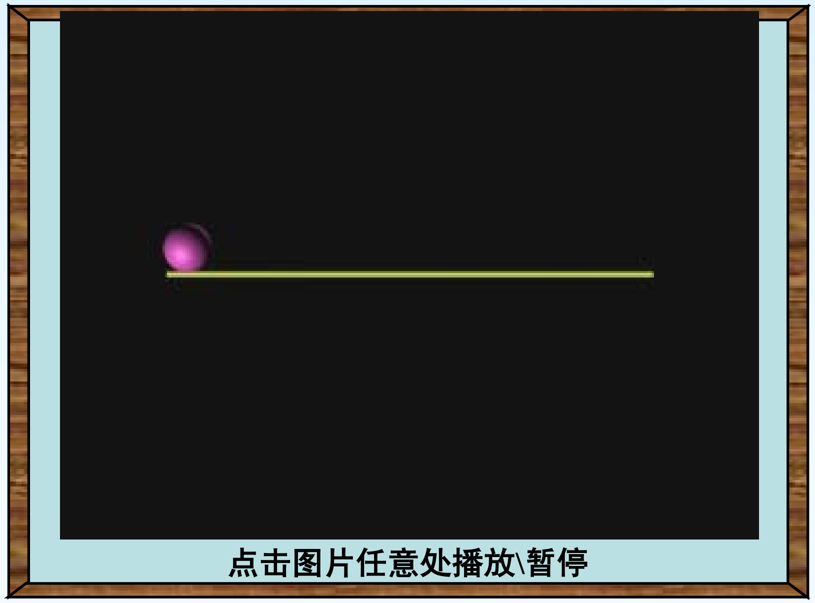
几何解释:

在曲线弧AB上至少有一点C,在该点处的切线是水平的.



物理解释:

变速直线运动在折返点处,瞬时速度等于零.



证明:

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 所以由连续函数的最大、最小值定理, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上能取得最大值 M 和最小值 m .下面分两种情形加以讨论.

情形1 $M = m$. 此时 $f(x)$ 恒为常数, 它的导函数恒等于零, 此时可在 (a, b) 内随意取一点 ξ, 就有

$$f'(\xi) = 0 .$$

情形2　$m < M$. 既然最大、最小值不等, 从而最大值与最小值至少有一个不在端点取到. 不妨设最大值不在端点取到, 故存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) = M.$$

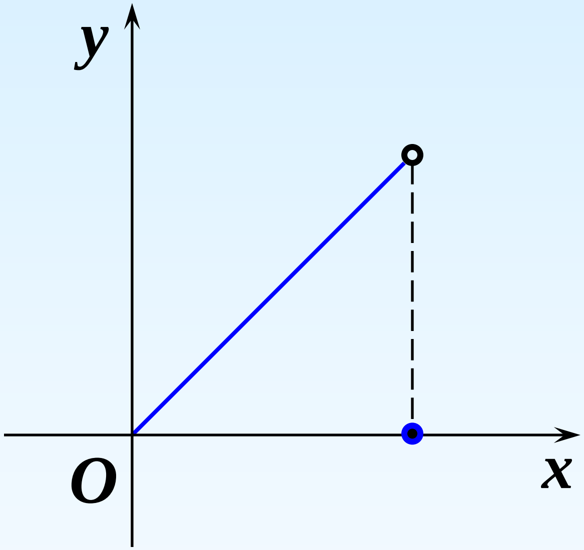
因为在区间内部取到的最大值一定是极大值, 所以由费马定理, 得

$$f'(\xi) = 0.$$

条件分析:

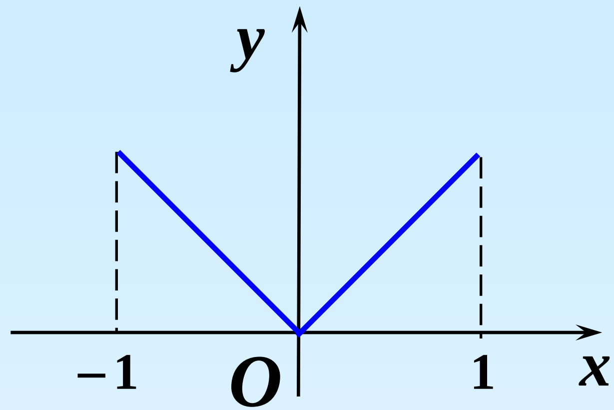
定理中的三个条件都很重要，缺少一个, 结论不一定成立.

(a) 函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

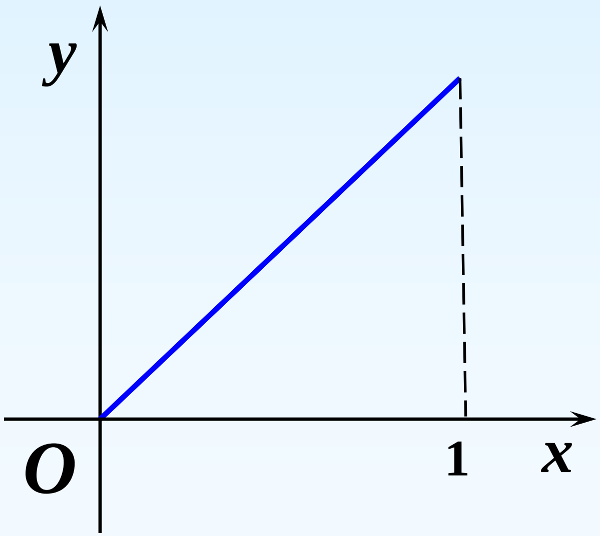


在 [0, 1] 上满足条件 (ii) 和 (iii), 但条件 (i) 不满足, 该函数在 (0, 1) 上的导数恒为1.

(b) $f(x)=|x|, x\in[-1,\ 1]$ 满足条件 (i) 和 (iii), 但条件 (ii) 却遭到破坏 (f 在 $x=0$ 处不可导), 结论也不成立.



(c) $f(x)=x,\ x\in[0,1]$ 满足条件 (i) 和 (ii), 但条件 (iii) 却遭到破坏, 该函数在 (0, 1) 内的导数恒为1.



注 函数 $f(x)=x^2D(x)$

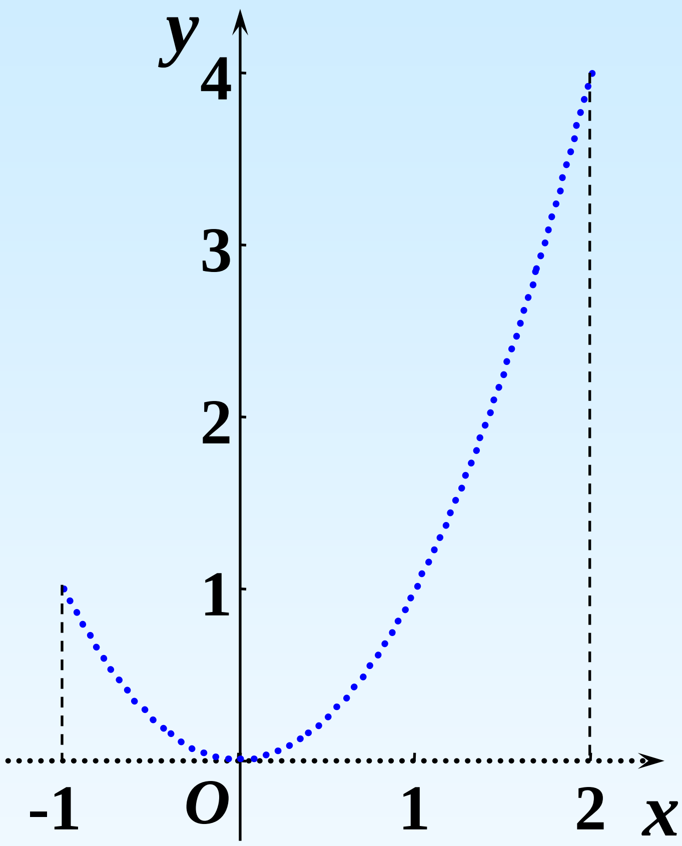
在区间 $[-1,2]$ 上三个

条件都不满足, 却仍有

$f'(0)=0$. 这说明罗尔定

理的三个条件是充分

条件, 而不是必要条件.



例1　设f在$[0,1]$连续，$(0,1)$内可导，且$f(1)=0$.

求证$\exists c\in(0,1)$，使$f'(c)=\dfrac{-f(c)}{c}$

思路：构造辅助函数

将c记为$x \Rightarrow f(x)+xf'(x)=0$

证明　令$F(x)=xf(x)$，

$\because F(0)=F(1)=0, F\in C[0,1]$，在$(0,1)$可导，

$\therefore \exists c\in(0,1)$，使$F'(c)=0$.

$$即f'(c)=-\frac{f(c)}{c}.$$

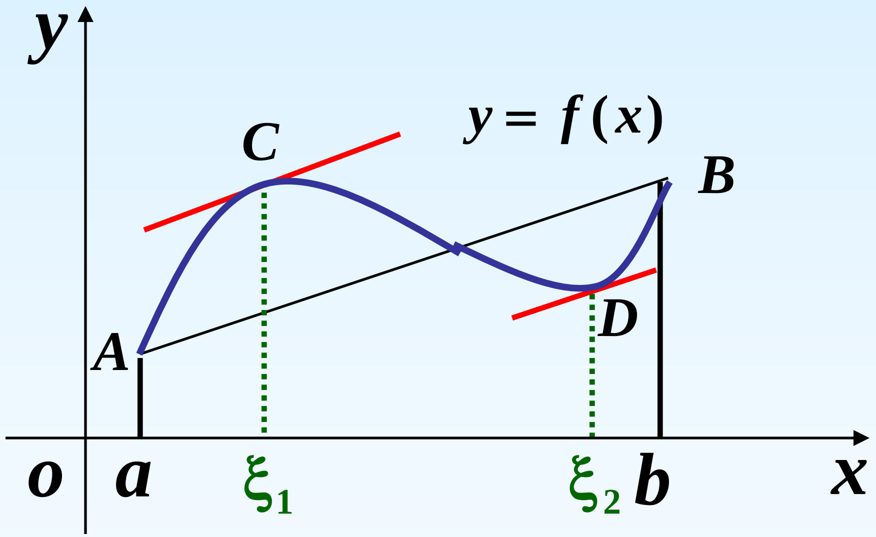
三、拉格朗日(Lagrange)中值定理

设$f\in C[a,b]$,在(a,b)内可导, 则$\exists\xi\in(a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\quad 或\quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

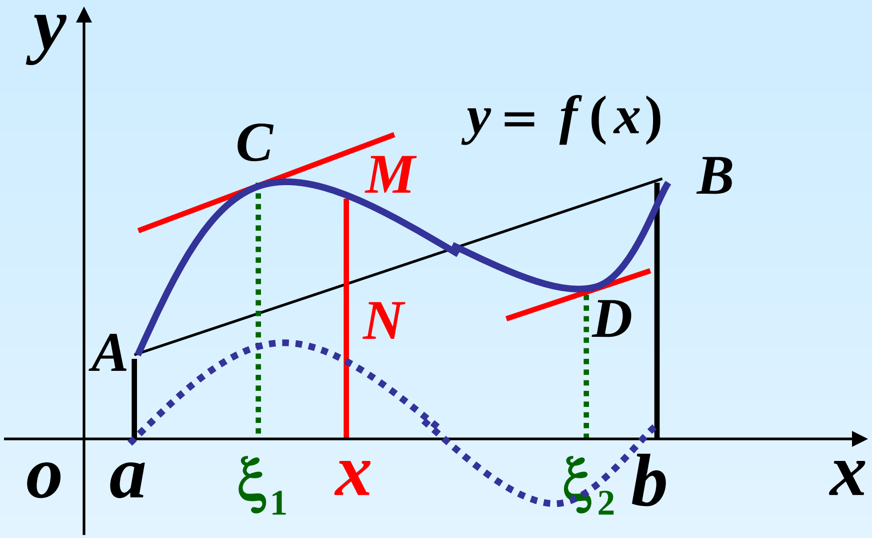
几何解释:

在曲线弧 AB 上至少有一点 C,在该点处的切线平行于弦 AB.



分析:

条件中与罗尔定理相差 $f(a)=f(b)$.



弦AB方程为

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

曲线 $f(x)$ 减去弦 AB,

所得曲线a,b两端点的函数值相等.

证明1:

令$F(x)=f(x)-y$

$$=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

此时 $F(a)=F(b)=0$, $F\in C[a,b]$, 且在(a,b)内可导.

$\therefore \exists\xi\in(a,b)$, 使$F'(\xi)=0$.

即$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明2:

$f'(x)(b-a)-[f(b)-f(a)]$是谁的导数？

令$F(x)=f(x)(b-a)-[f(b)-f(a)]x$

$$\left.\begin{aligned} F(a)&=f(a)b-f(b)a \\ F(b)&=f(a)b-f(b)a \end{aligned}\right\}\text{满足罗尔中值定理}$$

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$,使$F'(\xi)=0$.　即$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论1 $f\in C[a,b]$,在(a,b)内可导,则

f在$[a,b]$上$\equiv c \Leftrightarrow f'(x)=0, x\in(a,b)$.

证明: $\Rightarrow$若 $f(x)\equiv c, x\in[a,b]$,则 $f'(x)=0, x\in(a,b)$.

$\Leftarrow$若 $f'(x)=0, \forall x\in(a,b)$,则对$\forall x_1<x_2, x_1,x_2\in(a,b)$,

使 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$, $\quad\therefore f(x_2)=f(x_1)$.

由x_1, x_2任意性, $f(x)\equiv c$.

推论2 $f-g\equiv c \Leftrightarrow f'-g'=0$

例3 求证: $\arctan b - \arctan a \le b - a, \quad (a < b).$

证 设 $f(x) = \arctan x$.显然 $f(x)$在区间 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理的条件，故有

$$\arctan b - \arctan a = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a) \le b-a, \quad a < \xi < b.$$

注 例3中的不等号可以成为严格的. 事实上, 当 $0 \le a < b$ 和 $a < b \le 0$时, ξ 显然不为零, 严格不等式成立. 当 $a < 0 < b$ 时,

存在 $\xi_1 \in (0, b), \xi_2 \in (a, 0)$, 使得

$$\arctan b - \arctan a$$

$$= \arctan b - \arctan 0 + \arctan 0 - \arctan a$$

$$= \frac{1}{1+\xi_1^2} b + \frac{1}{1+\xi_2^2}(-a) < b - a.$$

例4（证明等式）

求证 $\arctan\frac{1+x}{1-x}=\arctan x+\frac{\pi}{4},\quad x\in(-\infty,1).$

证明：令 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x},\quad g(x)=\arctan x.$

$$f'(x)=\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}\qquad \because f'(x)-g'(x)\equiv 0$$

$$\therefore f(x)-g(x)\equiv c,\ x\in(-\infty,1)$$

$$\therefore f(0)-g(0)=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore f(x)-g(x)\equiv\frac{\pi}{4}$$

例5 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

例6 求证：$\arctan x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证明： $\forall x_1, x_2, x_1 < x_2$，在$[x_1, x_2]$上

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_2 - x_1) \qquad \xi \in (x_1, x_2)$$

由于$0 < \dfrac{1}{1+\xi^2} < 1$ $\quad \therefore \left|\arctan x_2 - \arctan x_1\right| \le \left|x_2 - x_1\right|$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$，当$\left|x_2 - x_1\right| < \delta$时，$\left|\arctan x_2 - \arctan x_1\right| < \varepsilon$

推论

若$\forall x \in (a,b)$，有$|f'(x)| \le M$，则f在(a,b)上一致连续.

四、柯西中值定理

$f,g\in C[a,b]$,在(a,b)内可导且 $g'(x)\neq 0$,

则$\exists\xi\in(a,b)$,使$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证明　首先,由$g'(x)\neq 0$知$g(b)\neq g(a)$,　(反证可知)

令$F(x)=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x)$

满足Rolle定理

$\therefore\exists\xi\in(a,b)$,使$F'(\xi)=0$,　即$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

五、统一证法（选讲）

定理： $f,\lambda \in C[a,b]$, 在(a,b)内可导. $\lambda(a)=1, \lambda(b)=0,$

则$\exists \xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi)=\lambda'(\xi)[f(a)-f(b)]$

证明： 令$\varphi(x)=f(x)-[\lambda(x)f(a)+(1-\lambda(x))f(b)]$

$\varphi(a)=0, \varphi(b)=0$, 满足$Rolle$定理

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$, 使$\varphi'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)=\lambda'(\xi)[f(a)-f(b)]$

取$\lambda(x)=\dfrac{b-x}{b-a},\quad \lambda(a)=1,\lambda(b)=0$

则$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad (Lagrange)$

取$\lambda(x)=\dfrac{g(b)-g(x)}{g(b)-g(a)},\lambda(a)=1,\lambda(b)=0$

$f'(\xi)=g'(\xi)\cdot\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (柯西定理)

探索类问题

研究任意区间上三个中值定理成立的条件

六、小结

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系

$$\text{Rolle 定理} \xleftarrow{f(a)=f(b)} \text{Lagrange 中值定理} \xleftarrow{g(x)=x} \text{Cauchy 中值定理}$$

注意定理成立的条件

作业 习题3.6 1(1), 2, 3, 6, 8 , 10

例1（补） 证明：如 f可导,则 $f(x)$的任意两个相邻零点间至少存在f'的一个零点.

证明： 设$f(x_1)=0, f(x_2)=0, f\in C[x_1,x_2]$,且在$(x_1,x_2)$可导,

由$Rolle$定理，知$\exists \xi\in(x_1,x_2)$使$f'(\xi)=0$.

进而可知：若f有n个零点

f'至少有$n-1$个零点,

f''至少有$n-2$个零点,

……

$f^{(k)}$至少有$n-k$个零点.

例2（补）

$$Q(x)=x^n(1-x)^n, n\in N^*$$

求证$Q^{(n)}(x)$在$(0,1)$内至少有n个相异零点.

证明:

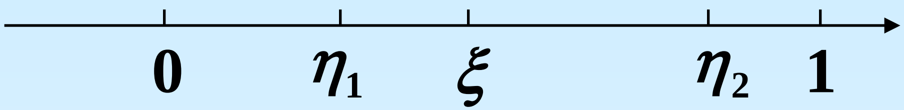
$$Q^{(m)}(x)=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!\,j!}\cdot\frac{n!\,x^{n-i}}{(n-i)!}\cdot\frac{n!}{(n-j)!}(1-x)^{n-j}(-1)^j,\ (m<n)$$

$$\therefore Q^{(m)}(0)=Q^{(m)}(1)=0,\quad m=0,1,2,\cdots,n-1.$$

$$\because Q(0)=Q(1)=0,\ \therefore \exists\xi\in(0,1), Q'(\xi)=0.$$

$$\because Q'(0)=Q'(\xi)=Q'(1)=0,$$

$$\therefore \exists\eta_1\in(0,\xi),\eta_2\in(\xi,1),\ s.t\ \ Q''(\eta_1)=Q''(\eta_2)=0.$$



$$Q''(0)=Q''(\eta_1)=Q''(\eta_2)=Q''(1)=0,\quad \cdots\cdots$$

$Q^{(n-1)}$有$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}<1$, $n+1$个相异零点.

$\therefore Q^{(n)}(x)$至少有n个相异零点.

证毕!

例3（补）（广义罗尔定理）若$f(x)$在$[a,+\infty)$上在连续，

可导，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(a)\Rightarrow \exists\theta\in(a,+\infty), f'(\theta)=0.$

证明：⑴ 若$f(x)\equiv f(a)$ 结论成立

⑵ 若$f(x)\neq f(a), \exists x_0\in[a,+\infty), f(x_0)\neq f(a)$, $f(x_0)>f(a)$

取$\mu=\frac{1}{2}\left(f(a)+f(x_0)\right), f(a)<\mu<f(x_0)$

故由介值定理 $\exists\xi_1\in(a,x_0), f(\xi_1)=\mu$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a) < \mu$ 由极限的性质

$$\exists x_1 > x_0, f(x_1) < \mu, \quad \therefore f(x_1) < \mu < f(x_0),$$

故由介值定理

$$\exists \xi_2, f(\xi_2) = \mu, \xi_2 \in [x_0, +\infty)$$

由**Rolle**定理: $\exists \theta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, +\infty), \quad s.t \quad f'(\theta) = 0.$

结论得证

例4（补）(证明不等式)

求证 $x > 0$时，$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$

证明

变形为 $\dfrac{1}{1+x} < \dfrac{\ln(1+x)}{x} < 1$

考虑 $f(t) = \ln(1+t) \in C[0, x]$, 在$(0, x)$内可导,

$$\therefore \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi}, \quad \xi \in (0, x).$$

由 $\dfrac{1}{1+\xi} < 1, \quad \dfrac{1}{1+\xi} > \dfrac{1}{1+x}$

$$\therefore \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

例5（补）

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证1 分析：结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}.$$

设 $g(x)=x^2$，

则 $f(x),g(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件，

$\therefore$ 在$(0,1)$内至少存在一点ξ，有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证2 令$F(x)=f(x)-x^2[f(1)-f(0)]$，利用罗尔定理.

例4 若$f(x)$在$[a,b]$可导，在(a, b)二阶可导，且

$$f(a)=f(b)=0, f'_{+}(a)f'_{-}(b)>0,$$

证明 （1）$\exists\theta\in(a,b), f(\theta)=0;$

（2）$\exists\eta\in(a,b), f''(\eta)=f(\eta).$

证明 由于$f(a)=f(b)=0, f'_{+}(a)f'_{-}(b)>0$

不妨$f'_{+}(a)>0, f'_{-}(b)>0$

$$f_{+}^{'}(a)=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,\ f_{-}^{'}(b)=\lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0,$$

由极限的保号性得知

$$\exists(a,a+\delta),\ f(x)>f(a)=0,$$

$$\exists(b-\delta,\ b),\ f(x)<f(b)=0$$

由介值定理得到

$$\exists\xi\in[a,b],\ f(\xi)=0.$$

（2）$\exists\eta\in(a,b),f''(\eta)=f(\eta)$

$\Leftarrow f''(x)-f(x)=0$有零点

$\Leftarrow e^{--x}\left(f'(x)-f(x)\right)$ 有两个零点

$\Leftarrow e^{-x}f(x)$ 有三个零点

由于

$$F(x)=e^{--x}\left(f(x)\right),F(a)=F(b)=F(\xi)=0$$

因此得证