第六章　共形映射

一、选择题：

1．若函数 $w = z^2 + 2z$ 构成的映射将 z 平面上区域 G 缩小，那么该区域 G 是（　　）

（A）$|z| < \frac{1}{2}$　　（B）$|z+1| < \frac{1}{2}$　　（C）$|z| > \frac{1}{2}$　　（D）$|z+1| > \frac{1}{2}$

2．映射 $w = \frac{3z-i}{z+i}$ 在 $z_0 = 2i$ 处的旋转角为(　　)

（A）0　　（B）$\frac{\pi}{2}$　　（C）π　　（D）$-\frac{\pi}{2}$

3．映射 $w = e^{iz^2}$ 在点 $z_0 = i$ 处的伸缩率为(　　)

（A）1　　（B）2　　（C）e^{-1}　　（D）e

4．在映射 $w = iz + e^{\frac{\pi}{4}i}$ 下，区域 $\mathrm{Im}(z) < 0$ 的像为(　　)

（A）$\mathrm{Re}(w) > \frac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\mathrm{Re}(w) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

（C）$\mathrm{Im}(z) > \frac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\mathrm{Im}(w) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5．下列命题中，正确的是(　　)

（A）$w = z^n$ 在复平面上处处保角（此处 n 为自然数）

（B）映射 $w = z^3 + 4z$ 在 $z = 0$ 处的伸缩率为零

（C）若 $w = f_1(z)$ 与 $w = f_2(z)$ 是同时把单位圆 $|z| < 1$ 映射到上半平面 $\mathrm{Im}(w) > 0$ 的分式线性变换，那么 $f_1(z) = f_2(z)$

（D）函数 $w = \bar{z}$ 构成的映射属于第二类保角映射

6．$1+i$ 关于圆周 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ 的对称点是(　　)

（A）$6+i$　　（B）$4+i$　　（C）$-2+i$　　（D）i

7．函数 $w=\dfrac{z^3-i}{z^3+i}$ 将角形域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 映射为（　　）

(A) $|w|<1$　　（B）$|w|>1$　　（C）$\operatorname{Im}(w)>0$　　（D）$\operatorname{Im}(w)<0$

8．将点 $z=1,i,-1$ 分别映射为点 $w=\infty,-1,0$ 的分式线性变换为（　　）

（A）$w=\dfrac{z+1}{z-1}$　　（B）$w=\dfrac{z+1}{1-z}$

（C）$w=e^{\frac{\pi}{2}i}\dfrac{z+1}{1-z}$　　(D) $w=e^{\frac{\pi}{2}i}\dfrac{z+1}{z-1}$

9．分式线性变换 $w=\dfrac{2z-1}{2-z}$ 把圆周 $|z|=1$ 映射为(　　)

（A）$|w|=1$　　(B) $|w|=2$

（B）$|w-1|=1$　　(D) $|w-1|=2$

10．分式线性变换 $w=\dfrac{z+1}{1-z}$ 将区域: $|z|<1$ 且 $\operatorname{Im}(z)>0$ 映射为(　　)

（A）$-\dfrac{\pi}{2}<\arg w<\pi$　　（B）$-\dfrac{\pi}{2}<\arg w<0$

(C) $\dfrac{\pi}{2}<\arg w<\pi$　　（D）$0<\arg w<\dfrac{\pi}{2}$

11．设 a,b,c,d, 为实数且 $ad-bc<0$，那么分式线性变换 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 把上半平面映射为 w 平面的(　　)

（A）单位圆内部　　（B）单位圆外部

（C）上半平面　　（D）下半平面

12．把上半平面 $\operatorname{Im}(z)>0$ 映射成圆域 $|w|<2$ 且满足 $w(i)=0,w'(i)=1$ 的分式线性变换

$w(z)$ 为（　　）

（A）$2i\dfrac{i-z}{i+z}$　　（B）$2i\dfrac{z-i}{z+i}$　　（C）$2\dfrac{i-z}{i+z}$　　（D）$2\dfrac{z-i}{z+i}$

13. 把单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 且满足 $w(\frac{i}{2})=0, w'(0)>0$ 的分式线性变换 $w(z)$ 为（　　）

（A）$\dfrac{2z-i}{2-iz}$　　（B）$\dfrac{i-2z}{2-iz}$　　（C）$\dfrac{2z-i}{2+iz}$　　（D）$\dfrac{i-2z}{2+iz}$

14. 把带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<\dfrac{\pi}{2}$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的一个映射可写为（　　）

（A）$w=2e^{z}$　　（B）$w=e^{2z}$　　（C）$w=ie^{z}$　　（D）$w=e^{iz}$

15. 函数 $w=\dfrac{e^{z}-1-i}{e^{z}-1+i}$ 将带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<\pi$ 映射为（　　）

（A）$\mathrm{Re}(w)>0$　　（B）$\mathrm{Re}(w)>0$　　（C）$|w|<1$　　（D）$|w|>1$

二、填空题

1. 若函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析且 $f'(z_0)\neq 0$，那么映射 $w=f(z)$ 在 z_0 处具有______________.

2. 将点 $z=2,i,-2$ 分别映射为点 $w=-1,i,1$ 的分式线性变换为____________________.

3. 把单位圆 $|z|<1$ 映射为圆域 $|w-1|<1$ 且满足 $w(0)=1, w'(0)>0$ 的分式线性变换 $w(z)=$

4. 将单位圆 $|z|<1$ 映射为圆域 $|w|<R$ 的分式线性变换的一般形式为__________________.

5. 把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w(z)|<1$ 且满足 $w(1+i)=0, w(1+2i)=\dfrac{1}{3}$ 的分式线性变换的 $w(z)=$__________________.

6．把角形域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ 映射成圆域 $|w|<4$ 的一个映射可写为__________________.

7．映射 $w=e^z$ 将带形域 $0<\mathrm{Im}(z)<\dfrac{3\pi}{4}$ 映射为__________________.

8．映射 $w=z^3$ 将扇形域：$0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 且 $|z|<2$ 映射为______________________.

9．映射 $w=\ln z$ 将上半 z 平面映射为__________________.

10．映射 $w=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$ 将上半单位圆：$|z|<2$ 且 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射为____________________.

三、设 $w_1(z)=\dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}, w_2(z)=\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ 是两个分式线性变换，如果记

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

试证 1． $w_1(z)$ 的逆变换为 $w_1^{-1}(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$；

2． $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 的复合变换为 $w_1[w_2(z)]=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

四、设 z_1 与 z_2 是关于圆周 $\Gamma:|z-a|=R$ 的一对对称点，试证明圆周 Γ 可以写成如下形式

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda \text{ 其中 } \lambda=\frac{R}{|z_2-a|}=\frac{|z_1-a|}{R}.$$

五、求分式线性变换 $w(z)$，使 $|z|=1$ 映射为 $|w|=1$，且使 $z=1,1+i$ 映射为 $w=1,\infty$.

六、求把扩充复平面上具有割痕：$\mathbf{Im}(z)=0$ 且 $-\infty<\mathbf{Re}(z)\le 0$ 的带形域 $-\pi<\mathbf{Im}(z)<\pi$ 映射成带形域 $-\pi<\mathbf{Im}(w)<\pi$ 的一个映射.

七、设 $b>a>0$，试求区域 $D:|z-a|>a$ 且 $|z-b|<b$ 到上半平面 $\mathbf{Im}(w)>0$ 的一个映射 $w(z)$.

八、求把具有割痕：$\mathbf{Im}(w)=0$ 且 $\frac{1}{2}\le \mathbf{Re}(z)<1$ 的单位圆 $|z|<1$ 映射成上半平面的一个映射.

九、求一分式线性变换，它把偏心圆域 $\left\{z:|z|>1 且 |z-1|<\frac{5}{2}\right\}$ 映射为同心圆环域 $1<|w|<R$，并求 R 的值.

十、利用儒可夫斯基函数，求把椭圆 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ 的外部映射成单位圆外部 $|w|>1$ 的一个映射.

一、1.（B） 2.（D） 3.（B） 4.（A） 5.（D）

6.（C） 7.（A） 8.（C） 9.（A） 10.（D）

11.（D） 12.（B） 13.（C） 14.（B） 15.（C）

二、1. 保角性与伸缩率的不变性　　2. $w=\dfrac{z-6i}{3iz-2}$　　3. $1+z$

4. $w=Re^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$（$\theta$ 为实数，$|a|<1$）　　5. $\dfrac{z-1-i}{z-1+i}$

6. $w=4e^{i\varphi}\dfrac{z^4-\lambda}{z^4-\bar{\lambda}}$（$\varphi$ 为实数，$\mathrm{Im}(\lambda)>0$）　　7. 角形域 $0<\arg w<\dfrac{3\pi}{4}$

8. 扇形域 $0<\arg w<\pi$ 且 $|w|<8$　　9. 带形域 $0<\mathrm{Im}(w)<\pi$

10. 下半平面 $\mathrm{Im}(w)<0$

五、$w=\dfrac{(i-1)z+1}{-z+(1+i)}$.　　六、$w=\ln(e^z-1)$.

七、$w=\exp\left\{\dfrac{b\pi i}{b-a}\dfrac{z-2a}{z}\right\}$.　　八、$w=\left(\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{2z-1}{2-z}}}{1-\sqrt{\dfrac{2z-1}{2-z}}}\right)^2$.

九、$w=\dfrac{4z+1}{z+4}e^{i\theta}$（$\theta$ 为实数），$R=2$.

十、$w=\dfrac{1}{9}(z+\sqrt{z^2-9})$.