

## 12.2 通过线性化实现稳定

我们利用平衡点稳定问题来说明近似线性化设计方法，首先讨论状态反馈控制，然后讨论输出反馈控制。

对于状态反馈稳定，考虑系统

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (12.1)$$

其中  $f(0,0)=0$ ，函数  $f(x,u)$  在包含原点  $(x=0, u=0)$  的定义域  $D_x \times D_u \subset R^n \times R^p$  内是连续可微的。

控制目标是寻找能够稳定系统的状态反馈控制律

$$u = \gamma(x)。$$

对方程(12.1)在点  $(x = 0, u = 0)$  做线性近似，可得：

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{12.2}$$

其中

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=0, u=0}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{x=0, u=0}$$

假定矩阵对  $(A, B)$  是可控的，或至少是可稳定（能稳定的）的，则可设计一个矩阵  $K$  使  $A - BK$  的特征值具有负实部。

将线性状态反馈控制  $u = -Kx$  作用于原非线性系统

(12.1), 可得到闭环系统为

$$\dot{x} = f(x, -Kx) \quad (12.3)$$

显然, 原点是闭环系统的平衡点。方程(12.3)在原点  $x = 0$  的线性化方程为

$$\dot{x} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, -Kx) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, -Kx)(-K) \right]_{x=0} x = (A - BK)x$$

由于  $A - BK$  是 Hurwitz 阵, 所以满足定理 4.7, 即原点是闭环系统(12.3)的渐近稳定平衡点。实际上由定理 4.13 可知, 原点也是指数稳定的。

作为线性化方法的附带结果, 我们总能找到闭环系

统的 **Lyapunov** 函数。设  $Q$  为任意正定对称矩阵，解关于  $P$  的 **Lyapunov** 方程

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -Q$$

由于  $A - BK$  是 **Hurwitz** 阵，所以 **Lyapunov** 方程有惟一正定解（定理 4.6），二次函数  $V(x) = x^T P x$  是闭环系统原点的某邻域内的 **Lyapunov** 函数，可以用  $V(x)$  估计吸引区。

例 12.2 考虑单摆方程

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b \dot{\theta} + c T$$

其中  $a = g/l > 0$  ,  $b = k/m \geq 0$  ,  $c = 1/ml^2 > 0$  ,  $\theta$  为摆杆与纵轴之间的夹角,  $T$  是作用于单摆的力矩。把力矩作为控制输入, 并假设希望在  $\theta = \delta$  处使单摆稳定。为使摆在  $\theta = \delta$  处保持平衡, 力矩必须有一个稳态分量  $T_{ss}$  , 满足

$$0 = -a \sin \delta + c T_{ss} \Rightarrow T_{ss} = \frac{a \sin \delta}{c}$$

选择状态变量为  $x_1 = \theta - \delta$  ,  $x_2 = \dot{\theta}$  , 控制变量取为

$u = T - T_{ss}$  , 状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu\end{aligned}$$

为方程(12.1)的标准形式，其中  $f(0,0)=0$ 。将系统在原点线性化，可得

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos(x_1 + \delta) & -b \end{bmatrix}_{x_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$

矩阵对  $(A, B)$  是可控的。取  $K = [k_1 \quad k_2]$ ，则闭环矩

阵为  $A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta - ck_1 & -b - ck_2 \end{bmatrix}$ 。容易验证当

$$k_1 > -\frac{a \cos \delta}{c}, \quad k_2 > -\frac{b}{c}$$

时， $A-BK$  是 Hurwitz 阵。最终得到反馈控制力矩为：

$$T = \frac{a \sin \delta}{c} - Kx = \frac{a \sin \delta}{c} - k_1(\theta - \delta) - k_2\dot{\theta}$$

对以上闭环系统可以利用 Lyapunov 法做进一步的分析（如吸引区估计等，见习题 12.1）。

对于输出反馈稳定，考虑系统

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{12.4}$$

$$y = h(x) \tag{12.5}$$

其中  $f(0,0)=0$  ,  $h(0)=0$  ,  $f(x,u)$  和  $h(x)$  在包含原点  $(x=0,u=0)$  的定义域  $D_x \times D_u \subset R^n \times R^p$  内是连续可微的。我们要设计一个能够稳定系统的输出反馈控制律（只利用  $y$  的测量值）。

对方程(12.4)~(12.5)在点  $(x=0,u=0)$  线性化，可得线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{12.6}$$

$$y = Cx \tag{12.7}$$

其中  $A$  和  $B$  按方程(12.2)定义，且



$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x) \right|_{x=0}$$

假设  $(A, B)$  是能稳定的,  $(A, C)$  是能检测的, 设计线性动态输出反馈控制器

$$\dot{z} = Fz + Gy \tag{12.8}$$

$$u = Lz + My \tag{12.9}$$

使得闭环系统 (12.6) - (12.9) 为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BMC & BL \\ GC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \tag{12.10}$$

为渐近稳定。这类设计的一个例子是基于观测器的控制

器：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - C\hat{x}), \quad u = -K\hat{x}$$

对比 (12.8) (12.9) 可知：

$$z = \hat{x}, \quad F = A - BK - HC, \quad G = H, \quad L = -K, \quad M = 0$$

设计  $K$  和  $H$ ，使  $A - BK$  和  $A - HC$  为 **Hurwitz** 矩阵。

当把控制器 (12.8)~(12.9) 用于非线性系统 (12.4)~(12.5) 时，可得闭环系统

$$\dot{x} = f(x, Lz + Mh(x)) \tag{12.11}$$

$$\dot{z} = Fz + Gh(x) \tag{12.12}$$

可以验证原点 ( $x = 0, z = 0$ ) 是闭环系统(12.11)~(12.12)的平衡点，且在原点的线性化可得到式(12.10)的 Hurwitz 矩阵。

综上所述，可再次得出如下结论：原点是闭环系统(12.11)~(12.12)的指数稳定平衡点。闭环系统的 Lyapunov 函数可通过对式(12.10)的 Hurwitz 矩阵求解 Lyapunov 方程获得，并由此可进一步估计吸引区。

例 12.3 重新考虑例 12.2 中的单摆方程，并假设测得角度  $\theta$ ，而角速度  $\dot{\theta}$  未知，输出变量  $y$  可取为

$y = x_1 = \theta - \delta$ ，例 12.2 中的状态反馈控制器可用观测器

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - \hat{x}_1)$$

实现。取  $H = [h_1 \quad h_2]^T$ ，则

$$A - HC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ h_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 & 1 \\ -a \cos \delta - h_2 & -b \end{bmatrix}$$

可以验证如果

$$h_1 + b > 0, h_1 b + h_2 + a \cos \delta > 0$$

$$\Leftrightarrow h_1 > -b, h_2 > -h_1 b - a \cos \delta$$

则  $A - HC$  是 Hurwitz 矩阵。控制力矩为：

$$T = \frac{a \sin \delta}{c} - K\hat{x} \quad \Delta$$

## 12.3 积分控制

例 12.2 讨论了把单摆的摆角  $\theta$  调节为常数  $\delta$  的问题，通过把期望的平衡点平移到原点，使问题简化为一个稳定问题。这种方法在系统参数已知时是有效的，而在有参数扰动时则不可行。控制律

$$T = \frac{a \sin \delta}{c} - k_1(\theta - \delta) - k_2\dot{\theta}$$

包含稳态分量  $T_{ss} = (a/c) \sin \delta$  和反馈分量  $-Kx$ ，前者将  $\theta$  的平衡值  $\theta_{ss}$  指定到期望的角度  $\delta$ ，后者使  $A-BK$  为 Hurwitz 矩阵。当两个分量的计算都依赖于系统参数时，可以把反馈部分设计为对较大范围的参数扰动具有鲁棒性（不等式条件），特别是当已知  $a/c$  的上界，即  $a/c \leq \rho$  时，可以选择  $k_1$  和  $k_2$ ，使其满足

$$k_1 > \rho, k_2 > 0$$

以保证  $A-BK$  为 Hurwitz 矩阵。另一方面， $T_{ss}$  的计算对参数扰动是敏感的。假设分别用  $a$  和  $c$  的标称值  $a_0$  和

$c_0$  计算  $T_{ss}$ ，则闭环系统的平衡点为

$$a \sin \theta_{ss} = c \left[ \frac{a_0}{c_0} \sin \delta - k_1 (\theta_{ss} - \delta) \right]$$

如果  $a_0 = a, c_0 = c$  或者更一般地  $\frac{a}{c} = \frac{a_0}{c_0}$ , 则  $\theta_{ss} = \delta$ ;

如果  $\delta = 0$  或  $\delta = \pi$ （即期望平衡点为单摆的开环平衡点之一）时，可以得到  $T_{ss} = 0, \theta_{ss} = \delta$

在以上两种情况下，只要  $k_1 > \rho, k_2 > 0$ ，用于例 12.2 的方法对于参数扰动是鲁棒的。

对于其他情况，则会存在稳态角度误差。例如，如

果  $\delta = 45^\circ$ ， $c = c_0 / 2$ （质量加倍）， $a = a_0$ ， $k_1 = 3a_0 / c_0$ ，  
则有  $\theta_{ss} \approx 36^\circ$ 。

本节将给出一种积分控制方法，这种方法能保证在参数扰动下实现渐近输出调节，只要参数扰动不破坏闭环系统的稳定性。

积分控制的应用不局限于线性系统，也不局限于运用线性化设计反馈控制器。

本节首先讨论对一般非线性系统的积分控制方法，下一节将说明如何把线性化用于设计反馈控制器。



## 一般非线性系统的积分控制方法简介：

考虑系统

$$\dot{x} = f(x, u, w) \quad (12.13)$$

$$y = h(x, w) \quad (12.14)$$

$$y_m = h_m(x, w) \quad (12.15)$$

其中  $x \in R^n$  是状态变量， $u \in R^p$  是控制输入， $y \in R^p$  是受控输出， $y_m \in R^m$  是测量输出， $w \in R^l$  是由未知恒定参数以及扰动组成的向量，函数  $f$ ， $h$  和  $h_m$  在定义域

$D_x \times D_u \times D_w \subset R^n \times R^p \times R^l$  上对  $(x, u)$  连续可微, 且对  $w$  是连续的。设  $r \in D_r \subset R^p$  是恒定参考, 可事先给定或者在线测得, 设定

$$v = \begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix} \in D_v \triangleq D_r \times D_w$$

**控制器综合设计的目标：** 当存在不确定恒值参数  $w$  的情况下, 设计反馈控制器使得闭环系统稳定到**某个**平衡点、且在该平衡点的输出等于其期望值, 从而实现渐近输出调节, 即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r$$

假设  $y$  可测，即  $y$  是  $y_m$  的子集。假设对于每个  $v \in D_v$ ，存在惟一连续取决于  $v$  的  $(x_{ss}, u_{ss})$ ，满足方程

$$0 = f(x_{ss}, u_{ss}, w) \quad (12.16)$$

$$r = h(x_{ss}, w) \quad (12.17)$$

使得  $x_{ss}$  为期望的孤立平衡点，其中  $u_{ss}$  为稳态控制量，以保持系统在点  $x_{ss}$  平衡。

为引入积分作用，我们对输出调节误差  $e = y - r$  做积分运算

$$\dot{\sigma} = e$$

然后把积分器和状态方程(12.13)一起讨论，即

$$\dot{x} = f(x, u, w) \quad (12.18)$$

$$\dot{\sigma} = h(x, w) - r \quad (12.19)$$

对于多输出系统( $p > 1$ )，积分器方程表示  $p$  个积分器的并联叠加，各积分器对于  $e$  的每个分量进行积分，显然，对于  $e$  积分要求  $y$  和  $r$  都应在线获得。

**现在的控制任务就是：**利用实时测量信息  $(x, e, \sigma)$  或者  $(y, y_m, e, \sigma)$ ，设计一个稳定反馈控制器，使我们讨论

的状态模型(12.18)~(12.19)在任意一个平衡点  $(x_{ss}, \sigma_{ss})$  处稳定。其中不再需要计算稳态控制量  $u_{ss}$ ，因为  $\sigma_{ss}$  会自动产生期望的  $u_{ss}$ 。

图 12.1 给出了积分控制方案的方框图。

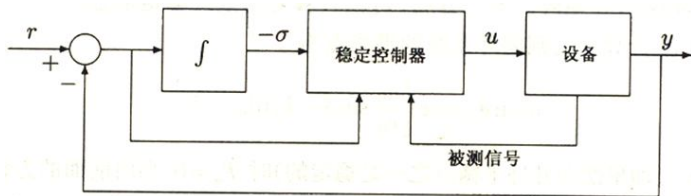


图 12.1 积分控制

积分控制器由两部分组成：积分器和稳定控制器。

因为积分器与方程  $\dot{v} = 0$  的模型完全相同，所以有时也称为内模（**internal model**），它产生外部恒定信号  $v$ 。

稳定控制器的结构取决于被测信号。例如，在状态反馈中，当  $y_m = x$  时，稳定控制器的形式为

$$u = \gamma(x, \sigma, e)$$

其中  $\gamma$  设计为使方程存在惟一解  $\sigma_{ss}$ ，满足方程

$$\gamma(x_{ss}, \sigma_{ss}, 0) = u_{ss}$$

且使闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \gamma(x, \sigma, h(x, w) - r), w) \\ \dot{\sigma} &= h(x, w) - r\end{aligned}$$

有一个渐近稳定平衡点，位于  $(x_{ss}, \sigma_{ss})$ 。在平衡点处有  $y = r$ ，且与  $w$  的值无关，因此，在  $(x_{ss}, \sigma_{ss})$  的吸引区内，对所有初始状态都实现了渐近输出调节。

图 12.1 中的积分控制器对所有不破坏闭环系统稳定性的参数扰动都具有鲁棒性，这一点可直观地解释如下：反馈控制器产生一个渐近稳定平衡点，所有信号在该点都必须是常数，因为积分器  $\dot{\sigma} = e$  的输出指数收敛到为常数  $\sigma_{ss}$ ，故其输入  $e$  一定趋于零。因此，积分器迫使

调节误差在平衡点处为零。参数扰动会改变平衡点，但在平衡时  $e = 0$  的条件不会改变，因此只要被扰动平衡点保持渐近稳定，就能够实现输出调节。

设计稳定控制器并不简单，因为闭环方程取决于未知向量  $w$ 。在下一节会看到通过线性化解决这一难题的简单方法，但它只能实现局部调节，非局部调节可通过第 14 章介绍的非线性设计工具实现，14.1.4 节给出了一个这样的例题。

## 12.4 线性化积分控制

本节首先设计状态反馈积分控制器，然后考虑输出



反馈积分控制器。

我们需要设计控制律  $u = \gamma(x, \sigma, e)$ ，以便在点  $(x_{ss}, \sigma_{ss})$  稳定前面讨论的状态模型(12.18)~(12.19)，其中  $u_{ss} = \gamma(x_{ss}, \sigma_{ss}, 0)$ 。选取  $u = \gamma(x, \sigma, e)$  为其自变量的线性函数可得：

$$u = -K_1 x - K_2 \sigma - K_3 e \quad (12.20)$$

将控制律(12.20)代入式(12.18)和(12.19)，可得到闭环系统

$$\dot{x} = f(x, -K_1 x - K_2 \sigma - K_3 (h(x, w) - r), w) \quad (12.21)$$

$$\dot{\sigma} = h(x, w) - r \quad (12.22)$$

方程(12.21)和方程(12.22)的平衡点  $(\bar{x}, \bar{\sigma})$  满足方程

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u}, w)$$

$$0 = h(\bar{x}, w) - r$$

$$\bar{u} = -K_1 \bar{x} - K_2 \bar{\sigma}$$

通过假设平衡方程(12.16)~(12.17)在我们希望的区域内有惟一解  $(x_{ss}, u_{ss})$ ，由于上式前两个方程和无积分系统平衡点方程相同，因此可以推出  $\bar{x} = x_{ss}$  和  $\bar{u} = u_{ss}$ 。如果  $K_2$  为非奇异的，则可保证方程

$$u_{ss} = -K_1 x_{ss} - K_2 \sigma_{ss}$$

有唯一解  $\sigma_{ss}$ 。

下面的任务是稳定平衡点  $(x_{ss}, \sigma_{ss})$ 。为此在  $(x_{ss}, \sigma_{ss})$

对闭环系统(12.21)~(12.22)线性化，得

$$\dot{\xi}_{\delta} = (A - BK) \xi_{\delta}$$

其中

$$\xi_{\delta} = \begin{bmatrix} x - x_{ss} \\ \sigma - \sigma_{ss} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$K = [K_1 + K_3 C \quad K_2]$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, w) \right|_{x=x_{ss}, u=u_{ss}}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, w) \right|_{x=x_{ss}, u=u_{ss}},$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, w) \right|_{x=x_{ss}}$$

矩阵  $A$ ,  $B$  和  $C$  一般取决于  $v = [r, w]^T$ 。现在假设  $(A, B)$  是可控的（或可稳定的），并且<sup>①</sup>

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p \quad (12.23)$$

---

<sup>①</sup> 秩条件(12.23)表示线性状态模型  $(A, B, C)$  在原点无传输零点。

那么  $(A, B)$  也是可控的 (或可稳定的)<sup>①</sup>。设计与  $w$  无关的  $K$  (可能与  $r$  有关), 使得  $A - BK$  对于所有  $v \in D_v$  都是 Hurwitz 矩阵<sup>②</sup>, 对于任何此类设计, 矩阵  $K_2$  都将是非奇异的<sup>③</sup>。这样,  $(x_{ss}, \sigma_{ss})$  就是闭环系统 (12.21)~(12.22) 的指数稳定平衡点, 并且所有始于吸引区

---

<sup>①</sup> 见习题 12.3。

<sup>②</sup> 这是一个鲁棒稳定问题, 在线性控制方面的文献中都有广泛的研究 (见文献[48]和文献[69])。注意, 如果  $K$  设计为使  $A - BK$  对某些标称参数稳定, 那么由于矩阵的特征值连续地依赖矩阵中的元素, 因此  $A - BK$  在这些标称参数的某个邻域内仍然是 Hurwitz 矩阵。

<sup>③</sup> 如果  $K_2$  是奇异的, 那么  $A - BK$  也是奇异的, 这与  $A - BK$  是 Hurwitz 矩阵相矛盾。

内的解都随  $t$  趋近于无穷而逼近该平衡点。因此，当  $t \rightarrow \infty$  时，  $y(t) - r \rightarrow 0$ 。

注意，在  $(x_{ss}, u_{ss})$  的稳定中可取  $K_3 = 0$ ，或者可以用它作为一个额外的自由度来提高性能。

总之，假设  $(A, B)$  是可稳定的，且满足秩条件 (12.23)，则状态反馈控制可取为

$$\begin{aligned} u &= -K_1 x - K_2 \sigma \\ \dot{\sigma} &= e = y - r \end{aligned}$$

其中  $K = [K_1 \quad K_2]$  设计为使  $A - BK$  是 Hurwitz 矩

阵。

### 例 12.4 考虑单摆方程为

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b \dot{\theta} + cT$$

其中  $a = g/l > 0$ ， $b = k/m \geq 0$ ， $c = 1/ml^2 > 0$ ， $\theta$  是

摆线与纵轴之间的夹角， $T$  是作用于单摆的力矩。

把  $T$  看成控制输入，并假设要把  $\theta$  调节到  $\delta$ 。取

$x_1 = \theta - \delta$ ， $x_2 = \dot{\theta}$ ， $u = T$ ， $y = x_1$ ，则状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \delta) - bx_2 + cu \\ y &= x_1\end{aligned}$$

容易看出期望的平衡点为

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{ss} = \frac{a}{c} \sin \delta$$

$A$ ， $B$  和  $C$  分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

注意到  $c > 0$ ，容易验证  $(A, B)$  是可控的，且满足秩



条件 (12.3) 。取  $K_1 = [k_1 \ k_2]$  ,  $K_2 = k_3$  , 利用 Routh-Hurwitz 准则可验证, 如果

$$b + k_2 c > 0, \quad (b + k_2 c)(a \cos \delta + k_1 c) - k_3 c > 0, \quad k_3 c > 0$$

成立, 则  $A - BK$  是 Hurwitz 矩阵。假设参数  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c > 0$ , 其准确值未知, 但知道  $a/c$  的上界为  $\rho_1$ ,  $1/c$  的上界为  $\rho_2$ , 选择

$$k_2 > 0, \quad k_3 > 0, \quad k_1 > \rho_1 + \frac{k_3}{k_2} \rho_2$$

以保证  $A - BK$  是 Hurwitz 矩阵。反馈控制律为

$$u = -k_1(\theta - \delta) - k_2\dot{\theta} - k_3\sigma$$

$$\dot{\sigma} = \theta - \delta$$

这是经典的 PID 控制器。将这个反馈控制律与例 12.2 中的结果比较，会发现不再需要计算为保持平衡位置所要求的稳态力矩。对于所有满足  $0 < \frac{a}{c} \leq \rho_1, 0 < \frac{1}{c} \leq \rho_2$  的参数扰动，都能实现调节。图 12.2 所示为有积分作用（见例 12.4）和没有积分作用（见例 12.2）的情况下，把单摆调节到  $\delta = \pi/4$  时的仿真结果。在前一种情况下；反馈增益为  $k_1 = 8$ ， $k_2 = 2$ ， $k_3 = 10$  赋予的特征值为  $-15.93$ ， $-2.93$  和

-2.14。在后一种情况下，反馈增益为  $k_1 = 3$ ， $k_2 = 0.7$ ，赋予的特征值为  $-4 \pm j4.59$ 。两种情况下的标称参数都是  $a = c = 10$ ， $b = 1$ 。在扰动情况下， $b$  和  $c$  分别减小到 0.5 和 5，对应于质量的 2 倍。仿真结果表明积分作用可改善稳态响应，其代价是在过渡周期中增加稳定时间和增大力矩。

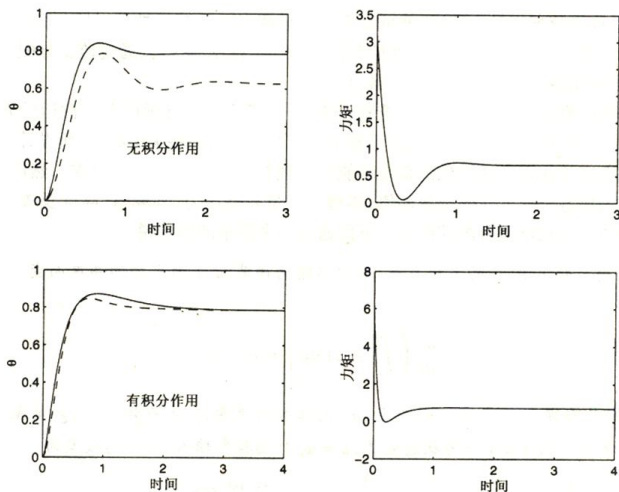


图 12.2 有积分作用（见例 12.4）和无积分作用（见例 12.2）时在额定参数（实线）和扰动参数（虚线）下单摆调节的仿真结果

在更为一般的输出反馈中，积分控制器可取为

$$\dot{\sigma} = e = y - r \quad (12.25)$$

$$\dot{z} = Fz + G_1\sigma + G_2y_m \quad (12.26)$$

$$u = Lz + M_1\sigma + M_2y_m + M_3e \quad (12.27)$$

其中所设计的  $F$  ,  $G_1$  ,  $G_2$  ,  $L$  ,  $M_1$  ,  $M_2$  和  $M_3$  均与  $w$

无关，并使得

$$A_c = \begin{bmatrix} A + BM_2C_m + BM_3C & BM_1 & BL \\ C & 0 & 0 \\ G_2C_m & G_1 & F \end{bmatrix}$$

对于所有  $v \in D_v$  为 **Hurwitz** 矩阵，其中

$C_m = [\partial h_m / \partial x] \Big|_{x=x_{ss}, w=w}$ 。这将保证

$$\begin{bmatrix} M_1 & L \\ G_1 & F \end{bmatrix}$$

是非奇异的，且方程

$$\begin{bmatrix} M_1 & L \\ G_1 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{ss} \\ z_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ss} - M_2 h_m(x_{ss}, w) \\ -G_2 h_m(x_{ss}, w) \end{bmatrix}$$

有惟一解  $(\sigma_{ss}, z_{ss})$ 。这样， $(x_{ss}, \sigma_{ss}, z_{ss})$  就是闭环系统在

$u = u_{ss}$  和  $e = 0$  时的惟一平衡点。可以验证  $A_c$  是闭环系

统在  $(x_{ss}, \sigma_{ss}, z_{ss})$  处的线性化系统矩阵，因此平衡点是指  
数稳定的，所有始于吸引区的解都在  $t$  趋于无穷时逼近  
该平衡点，即当时  $t \rightarrow \infty$ ， $y(t) - r \rightarrow 0$ 。

补充算例：考虑某轮式移动机器人对固定曲率（圆周）  
路径的跟踪模型：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = bu - c \frac{\cos x_2}{1 - cx_1} \\ y = x_1 \end{cases}$$

其中  $x_1$  为机器人距离圆周的最短距离， $x_2$  为机器人姿态

角和圆周上距离机器人最短的点处的切线方向角之差，  
( $b > 0, c$ ) 为常数。试分别在模型参数 ( $b, c$ ) 已知和未知两种情况下，设计控制律将  $y = x_1$  调节到给定值  $r$ 。

解：（1）参数 ( $b, c$ ) 已知的情况。

保证  $y = r$  时的期望平衡点及相应的稳态控制为：

$$x_{1s} = r, x_{2s} = 0, u_s = \frac{c}{b(1-cr)}$$

令  $e_i = x_i - x_{is}$  ( $i = 1, 2$ )，得到线性控制律：

$$u = u_s - k_1 e_1 - k_2 e_2$$



闭环系统：

$$\dot{e}_1 = \sin e_2, \dot{e}_2 = b(u_s - k_1 e_1 - k_2 e_2) - c \frac{\cos e_2}{1 - c(e_1 + r)}$$

闭环系统在原点的线性化：

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -bk_1 e_1 - bk_2 e_2 - \left( \frac{c}{1 - cr} \right)^2 e_1 \\ &= - \left( k_1 b + \left( \frac{c}{1 - cr} \right)^2 \right) e_1 - bk_2 e_2\end{aligned}$$

选择  $k_1 > -\frac{c^2}{(1 - cr)^2 b}$ ,  $k_2 > 0$  或者  $k_1 > 0, k_2 > 0$  以保证特征

多项式  $s^2 + \left( k_1 b + \left( \frac{c}{1 - cr} \right)^2 \right) s + k_2 b$  稳定, 从而实现控制目标。

## (2) 参数未知的情况

附加积分器得到扩展系统:

$$\dot{x}_0 = x_1 - r, \dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = bu - c \frac{\cos x_2}{1 - cx_1}$$

控制律:

$$u = -k_0 x_0 - k_1 (x_1 - r) - k_2 x_2$$

闭环系统：

$$\dot{x}_0 = x_1 - r,$$

$$\dot{x}_1 = \sin x_2,$$

$$\dot{x}_2 = b(-k_0 x_0 - k_1(x_1 - r) - k_2 x_2) - c \frac{\cos x_2}{1 - cx_1}$$

选择  $k_0 \neq 0$ ，则上述系统存在孤立平衡点：

$$x_{1s} = r, x_{2s} = 0, x_{0s} = -\frac{c}{bk_0(1-cr)}$$

令  $e_i = x_i - x_{is}$  ( $i = 0, 1, 2$ )，得到平衡点处的线性化闭环系

统方程：

$$\dot{e}_0 = e_1,$$

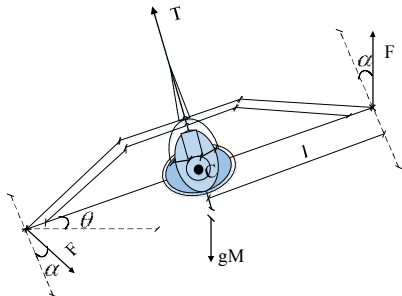
$$\dot{e}_1 = e_2,$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= -b(k_0 e_0 + k_1 e_1 + k_2 e_2) - \left(\frac{c}{1-cr}\right)^2 e_1 \\ &= -bk_0 e_0 - \left(bk_1 + \left(\frac{c}{1-cr}\right)^2\right) e_1 - bk_2 e_2\end{aligned}$$

选择  $(k_0, k_1, k_2)$  使得  $s^3 + bk_2 s^2 + \left(bk_1 + \left(\frac{c}{1-cr}\right)^2\right)s + bk_0$  为

**Hurwitz 多项式...**

**习题 14.1. 考虑如下简化的 VTOL 飞行器运动模型**



$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -au_1 \sin \theta, \\ \ddot{y} &= au_1 \cos \theta - g, \\ \ddot{\theta} &= u_2.\end{aligned}\tag{a}$$

其中  $(u_1, u_2)$  为控制输入， $a > 0, g > 0$  为已知常参数，所有状态  $(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y})$  可以测量。试利用近似线性化方法设计线性状态反馈控制律使得飞行器的状态  $(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y})$  收敛到期望值  $(x_d, y_d, 0, 0, 0)$ 。其中  $(x_d, y_d)$  为已知常数。

习题 14.2：假定只有  $(x, y)$  可以测量，重做习题 14.1，即设计输出反馈控制律（控制律中仅利用  $(x, y)$  的信息）使得飞行器的状态  $(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y})$  收敛到期望值  $(x_d, y_d, 0, 0, 0)$ 。

习题 14.3. 假定习题 14.1 中系统的状态可以测量，参数  $(a, g)$  未知，上下界已知，即  $0 < a_1 \leq a \leq a_2, 0 < g_1 \leq g \leq g_2$ ， $(a_1, a_2, g_1, g_2)$  已知。试设计带积分的状态反馈控制律使得 VTOL 飞行器的状态收敛到期望值  $(x_d, y_d, 0, 0, 0)$ 。

习题 14.4. 试证明  $\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  能控的充分必要条件为  $\{A, B\}$  能控、且  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$  行满秩。

\*线性化积分控制器的另一种推导方法和闭环系统稳定性分析（供参考阅读）：

考虑系统

$$\dot{x} = f(x, u, w), \quad y = h(x, w) \quad (2)$$

希望设计积分控制器，使得当  $w$  为未知常数时将输出渐近调节到给定常数  $r$ ，即  $y(t) - r \rightarrow 0$ 。

解：

(1) 由方程  $f(x_s, u_s, w) = 0, h(x_s, w) = r$  确定平衡



点：  $x = x_s(w, r), u = u_s(w, r)$ 。

对状态方程右端在所求得的平衡点附近进行一阶近似 **Taylor** 展开并注意到  $f(x_s, u_s, w) = 0$ ，可得：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x_s, u_s, w) + A(x - x_s) + B(u - u_s) + h.o.t(x - x_s, u - u_s) \\ &= A(x - x_s) + B(u - u_s) + h.o.t(x - x_s, u - u_s)\end{aligned}$$

其中

$$A = A(w, r) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_s, u_s, w), B = B(w, r) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_s, u_s, w) \quad ,$$

$h.o.t(\cdot)$  为其自变量的高阶项。

令  $e = x - x_s$ ，则

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= Ae + B(u - u_s) + h.o.t \\
 &= Ae + B(-Ke + Ke + u - u_s) + h.o.t \\
 &= Ae - BKe + B(K(x - x_s) + u - u_s) + h.o.t \\
 &= (A - BK)e + B(u + Kx - Kx_s - u_s) + h.o.t \\
 &= (A - BK)e + B(u + Kx + L\sigma) + h.o.t(e, u - u_s)
 \end{aligned}$$

其中  $L$  为非奇异矩阵， $\sigma = -(Kx_s + u_s)/L$ 。记  $\hat{\sigma}$  为  $\sigma$  的

估计值， $\bar{\sigma} = \sigma - \hat{\sigma}$  为估计误差，则可设计控制律为：

$$u = -Kx - L\hat{\sigma}$$

由此得到闭环系统：

$$\dot{e} = (A - BK)e + BL\bar{\sigma} + h.o.t(e, u - u_s)$$

令

$$-\dot{\hat{\sigma}} = \dot{\bar{\sigma}} = h(x, w) - r = h(x_s, w) + Ce + h.o.t(e) - r = Ce + h.o.t(e)$$

，则得到闭环系统为：

$$\dot{e} = (A - BK)e + BL\bar{\sigma} + h.o.t(e, u - u_s),$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = Ce + h.o.t(e)$$

其中  $C = \frac{\partial h}{\partial x}(x_s, w)$ 。

注意到：  $\sigma = -(Kx_s + u_s)/L$ ，因此

$$u - u_s = -Kx - L\hat{\sigma} + L\sigma + Kx_s = L\bar{\sigma} - Ke$$

所以

$$\begin{aligned}\dot{e} &= (A - BK)e + BL\bar{\sigma} + h.o.t(e, L\bar{\sigma} - Ke), \\ \dot{\bar{\sigma}} &= Ce + h.o.t(e)\end{aligned}$$

上式写成向量形式为：

$$\dot{z} = \tilde{A}z + h.o.t(e, L\bar{\sigma} - Ke)$$

其中  $z = \begin{bmatrix} e \\ \bar{\sigma} \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A - BK & BL \\ C & 0 \end{bmatrix}$ 。

选择  $(K, L)$  使得  $\tilde{A}$  为 **Hurwitz** 矩阵（因而  $L$  必为非奇异，否则  $\tilde{A}$  奇异，与其为 **Hurwitz** 矩阵矛盾），就可以保证标称系统  $\dot{z} = \tilde{A}z$  的原点指数稳定，从而扰动系统

$\dot{z} = \tilde{A}z + h.o.t(e, L\bar{\sigma} - Ke)$  的原点局部指数稳定。

由于  $z = \begin{bmatrix} e \\ \bar{\sigma} \end{bmatrix} \rightarrow 0$ ，从而

$$y - r = h(x, w) - r = h(e + x_s, w) - r \rightarrow h(x_s, w) - r = 0$$

，即所设计的控制器可以实现渐近指数输出调节。

引理：存在  $(K, L)$  使得  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A - BK & BL \\ C & 0 \end{bmatrix}$  为 Hurwitz 矩

阵的充分条件是  $\{A, B\}$  能控、且  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$  行满秩，充分必

要条件是  $\{A, B\}$  可镇定、且  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$  行满秩，

注释 1：所得到的动态反馈控制律：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\sigma}} &= -\dot{\bar{\sigma}} = -(h(x, w) - r) = -e, \\ u &= -Kx - L\hat{\sigma}\end{aligned}$$

也可以等价为：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\sigma}} &= -\dot{\bar{\sigma}} = -L(h(x, w) - r) = -Le, \\ u &= -Kx - \hat{\sigma}\end{aligned}$$

可以明显看出，两种控制律下从  $e$  到  $u + Kx$  的传递函数都等于  $L/s$ 。

**注释 2:** 当  $r$  为时变函数时, 由于  $A, B, C$  都是  $r$  的函数, 因而都是时变函数。根据第 9 章关于慢时变系统的有关讨论可知, 只要选择  $(K, L)$  使得  $\tilde{A}$  对  $r$  是一致 Hurwitz 矩阵, 则当  $\|\dot{r}(t)\|$  充分小时, 所设计的控制器可以保证状态有界和毕竟一致有界, 并且: (1) 若  $\|\dot{r}(t)\| \leq \varepsilon$ , 则毕竟一致的界和  $\varepsilon$  成正比; (2) 若  $\dot{r}(t) \rightarrow 0$ , 则  $x(t) \rightarrow 0$ ; (3) 若  $r(t) \rightarrow r_\infty$ , 则  $x(t)$  有极限且该极限范围的界和  $r_\infty$  成正比。