作业4.1-4.2 习题答案

1. 计算： (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{10}$； (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^{11}$.

解: (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以我们可以推知$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

所以我们可以推知$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

2. 已知方阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，对多项式$f(x) = x^{100}$，求$f(A)$.

解: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以可推知$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

3. 以下矩阵分别代表三维几何空间中的什么变换？分别求它们的19次幂.

(1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解: (1)代表绕z轴顺时针旋转α 的变换,易知它的19次幂是绕z 轴顺时针

旋转19α,所以有

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{19} = \begin{pmatrix} \cos 19\alpha & \sin 19\alpha & 0 \\ -\sin 19\alpha & \cos 19\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)令(1)中$\alpha = -\frac{\pi}{2}$即为此矩阵，19次幂相当于绕z轴逆时针旋转$\frac{3\pi}{2}$,所以

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{19} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 已知A, B都是n阶实矩阵,$A^2 = E, B^2 = E, |A| + |B| = 0$,
试证：$|A + B| = 0$.

证: $|A + B| = |AB^2 + A^2B| = |A(B + A)B| = |A||A + B||B|$

如果$|A+B| \neq 0$,则有$|A||B| = 1$,与题设中$|A|+|B| = 0$矛盾,所以$|A+B| = 0$.

5. 设$n \geq 2$, 是否存在一个方阵$A \in F^{n\times n}$, 使得$F^{n\times n}$ 中所有的方阵都可以写成A的多项式形式$a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$ (m 为正整数，$a_0, a_1, \ldots, a_m \in F$)?
请说明理由.

解: 假设A存在,令$B \in F^{n\times n}$.则

$$B = f(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m,$$

易知有$AB = a_0A + a_1A^2 + \cdots + a_mA^{m+1} = BA$, 所以$A$必须与所有矩阵可交换,可得$A$ 为纯量阵(aE), 则B也为纯量阵,这与题设矛盾,所以A不存在.

6. 判断下列所定义的各变换σ是否为线性变换：
1)在线性空间V中,$\forall x \in V, \sigma x = \alpha$,其中$\alpha$为$V$ 中一固定向量;
2)在$F^{n\times n}$中,$\forall X \in F^{n\times n}, \sigma X = BXC$, 其中$B, C$ 为$F^{n\times n}$中两个固定的矩阵.

解: 1)当$\alpha=0$时σ是零变换,显然是线性变换;当$\alpha\neq 0$时由于

$$\sigma(x_1+x_2)=\alpha, \sigma x_1+\sigma x_2=2\alpha,$$

即$\sigma(x_1+x_2)\neq \sigma x_1+\sigma x_2$, σ不是线性变换;
2)σ是线性变换:因为
$\sigma(X_1+X_2)=B(X_1+X_2)C=BX_1C+BX_2C=\sigma X_1+\sigma X_2$
$\sigma(kX)=B(kX)C=k(BXC)=k(\sigma X)$.

7. 设A是一个对角矩阵，它的主对角线上的元素$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$两两不同。证明：凡与$A$相乘可交换的矩阵一定是对角矩阵.

证: 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 两两不同，

设$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ 因为$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$
又$BA=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{22}b_{12} & \cdots & a_{nn}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{nn}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{n1} & a_{22}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$ 因为$a_{ii}b_{ij}=a_{jj}b_{ij}, i\neq j, a_{ii}\neq a_{jj}$
所以$b_{ij}=0$故B为对角矩阵.

8. 证明：不存在n阶矩阵A, B，使得$AB-BA=E$.

证: 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$为任

两个n阶方阵，则AB主对角线上的元素为

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}, \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in}.$$

它们的和为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ij}.$$

同样可得BA的主对角线上的元素和为

$$\sum_{j=1}^{n} b_{1j}a_{j1} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} b_{nj}a_{jn} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ij}.$$

亦即AB与BA的主对角线上的元素的和相等，从而$BA-AB$的主对角线上元素的和为零. 但是，单位方阵E的主对角线上的元素和为$n \neq 0$，因此

$$AB - BA \neq E.$$

9. 证明：任一个n阶矩阵都可以表示成一个对称阵与一个反对称阵之和.

证: 因为n阶方阵A可写为$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$ 而$(\frac{A+A^T}{2})^T = \frac{A^T}{2} + \frac{A}{2} = \frac{A+A^T}{2}$
为对称阵
$(\frac{A-A^T}{2})^T = \frac{A^T}{2} - \frac{A}{2} = -\frac{A-A^T}{2}$ 为反对称阵.

10. 证明：如果A是n阶对称阵，B是n阶反对称阵，则$AB+BA$是反对称阵.

证: 因为$A^T = A, B^T = -B$,所以$(AB+BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^TA^T + A^TB^T = -BA - AB = -(AB+BA)$所以$AB+BA$是反对称阵.