北京航空航天大学

2015－2016 学年第一学期期中

《 工科数学分析(I) 》

试卷（共6页）

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2015 年 12 月 5 日

一 、单选题（总 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim_{n\to\infty}[\sqrt{n^2+1}-(n+1)]$ 的值为（A）。

A. -1；　　B. $\frac{3}{2}$；　　C. 0；　　D. 1.

2. 已知函数在$x\to 0$时$f(x)$收敛，　$g(x)$发散，则$x\to 0$时，（B）。

A. $f(x)+g(x)$一定收敛；　　B. $f(x)+g(x)$一定发散；

C. $f(x)\cdot g(x)$一定收敛；　　D. $f(x)\cdot g(x)$一定发散。

3. 设函数$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则在$x=0$处（C）。

A. 不连续；　　B. 连续但不可导；

C. 可导但$f'(x)$在x $=0$处不连续；　　D. 可导且$f'(x)$在$x=0$处连续。

4. 设$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$，则$x=1$是$f(x)$的（C）。

A. 连续点；　　B. 可去间断点；

C. 跳跃间断点；　　D. 第二类间断点。

5. 设$f(x)=|2x^3-9x^2+12x|$，则$f(x)$在闭区间$[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$上的最大值与最小值分别为（A）。

A. 5，　0；　　B. 5，　4；　　C. 5，$\frac{115}{32}$；　　D. 4，$\frac{115}{32}$.

二、计算证明（总 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

1. 利用 Cauchy 收敛定理证明：对任何的实数α，数列

$$x_n=\frac{\sin 2\alpha}{2(\cos 2\alpha+2)}+\frac{\sin 3\alpha}{3(\cos 3\alpha+3)}+\cdots\frac{\sin n\alpha}{n(\cos n\alpha+n)}$$

收敛.

证明：易见

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{sin(n+1)\alpha}{(n+1)(cos(n+1)\alpha+n+1)}+\cdots+\frac{sin(n+p)\alpha}{(n+p)(cos(n+p)\alpha+n+p)}\right|$$

$$\leq\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p-1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

因此任取$\varepsilon>0$，存在$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，使得当$n>N$时，任取正整数$p$，都有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

因此x_n为 Caucy 基本列，因此x_n收敛。

2. 求函数$y=\arctan e^{x^2}$的微分.

解：由复合函数求导法则易得

$$y'=2xe^{x^2}\cdot\frac{1}{1+e^{2x^2}}=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{2x^2}}$$

因此

$$dy=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{2x^2}}dx.$$

3. 求函数$f(x)=e^x\sin x$ 的n阶导数$f^{(n)}(x)$.

解一：由 Leibniz 公式可得

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^x\sin(x+\frac{k\pi}{2}).$$

解二：易见

$$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$f''(x)=\sqrt{2}e^x\left(\sin(x+\frac{\pi}{4})+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right),$$

一般地，

$$f^{(n)}(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$

4. 设参数方程$\begin{cases}x=a(\mathrm{cos}t+t\mathrm{sin}t)\\y=a(\mathrm{sin}t-t\mathrm{cos}t)\end{cases}$ $(a>0)$

求$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\tan t)=\frac{d}{dt}(\tan t)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\sec^2 t}{at\cos t}=a^{-1}t^{-1}\sec^3 t.$$

5. 利用 L’ Hostpital 法则计算$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$

解：

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2-2\cos 2x)}{12x^2}=\frac{1}{3}.$$

6. 使用 Lagrange 余项 Taylor 公式证明：当$x>0$时，不等式$0<x-\ln(1+x)<\frac{x^2}{2}$成立.

证明：由 Lagrange 余项 Taylor 公式可得：

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2(1+\theta x)^2}x^2,$$

其中$\theta\in(0,1)$。因此

$$x-\ln(1+x)=\frac{1}{2(1+\theta x)^2}x^2\in\left(0,\frac{x^2}{2}\right).$$

因此$0<x-\ln(1+x)<\frac{x^2}{2}$。

三、（本题 10 分）

设$0 < c < 1$，$a_1 = \frac{c}{2}$，$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$，证明：$\{a_n\}$收敛，并求其极限.

证明：易见$a_n > 0$且

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2} = \frac{(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})}{2}.$$

因此$a_{n+1} - a_n$与$a_n - a_{n-1}$同号。又由$a_2 > a_1$知a_n单调递增。又由$0 < c < 1$知$a_1 = \frac{c}{2} < c < \sqrt{c}$，若$a_n < \sqrt{c}$，则$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} < c < \sqrt{c}$. 由数学归纳法可知$a_n < \sqrt{c}$对一切正整数$n$成立。因此$a_n$是一个单调递增有上界的数列，由单调有界定理知$\{a_n\}$收敛收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则对$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$两边取极限可得

$$a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2}.$$

又由$a < 1$可得$a = 1 - \sqrt{1-c}$.

四、（本题 10 分）

给定实数$0 < \mu < 1$，

（1） 使用 Lagrange 中值定理证明函数$f(x) = x^\mu$在区间 $[1, +\infty)$上一致连续.

（2） 证明函数$f(x) = x^\mu$在区间$[0, +\infty)$上一致连续.

证明：（1）任取$x_1, x_2 \in [1, +\infty)$，存在$\xi \in (x_1, x_2)$，使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \mu\xi^{\mu-1}|x_1 - x_2| < \mu|x_1 - x_2|,$$

因此任取$\varepsilon > 0$，存在$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{\mu}$，当$x_1, x_2 \in [1, +\infty)$且$|x_1 - x_2| < \delta_2$时，总有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \mu|x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

因此$(x) = x^\mu$区间在$[1, +\infty)$上一致连续。

（2）由于函数$f(x) = x^\mu$区间在$[0,2]$上连续，因此一致连续，因此任取$\varepsilon > 0$，存在$\delta_0 > 0$，使得当$x_1, x_2 \in [0,2]$且$|x_1 - x_2| < \delta_0$时，总有$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 取$\delta = \min\{1, \delta_0, \delta_1\}$，则当$|x_1 - x_2| < \delta$时，由于$|x_1 - x_2| < 1$易知要么$x_1, x_2 \in [0,2]$，要么$x_1, x_2 \in [1, +\infty)$，两种情况下均有$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 因此$f(x) = x^\mu$在区间$[0, +\infty)$上一致连续.

五、（本题 10 分）

讨论函数$f(x)=e^{-x^2}(1+x^2)$的单调性与凹凸性.

解：函数在$(-\infty,+\infty)$上具有一阶导数和二阶导数：

$$f'(x)=-2x^3e^{-x^2},f''(x)=(-6x^2+4x^4)e^{-x^2}.$$

易见在区间$(-\infty,0)$上$f'(x)>0$，函数严格单调递增，在区间$(0,+\infty)$上$f'(x)<0$，函数严格单调递减。在区间$(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}})$上$f''(x)>0$，函数严格凸，在区间$(-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})$上$f''(x)<0$，函数严格凹，在区间$(\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty)$上$f''(x)>0$，函数严格凸。

六、（本题 10 分）

利用等价代换及 Taylor 展开式，求极限$\lim\limits_{x\to 0}[e^x\cos(x+x^2)-x]^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

解：先计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x\cos(x+x^2)-x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos(x+x^2)-x-1}{x^3}.$$

由 Taylor 公式可得：

$$e^x\cos(x+x^2)-x-1=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{(x+x^2)^2}{2}+o(x^3)\right)-x-1$$

$$=-\frac{4}{3}x^3+o(x^3).$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x\cos(x+x^2)-x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=-\frac{4}{3}.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}[e^x\cos(x+x^2)-x]^{\frac{1}{\sin^3 x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(e^x\cos(x+x^2)-x)}{\sin^3 x}}=e^{-\frac{4}{3}}.$$

七、（本题 10 分）

设函数$f(x), g(x)$在区间(a,b)上可导，记

$$F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x), \qquad x\in(a,b).$$

假设在(a,b)上恒有$F(x)>0$，证明在方程$f(x)=0$的位于区间(a,b)上的两个不同实根之间一定有$g(x)=0$的实根.

证明：设c，$d\in(a,b)$是$f(x)=0$的两个不同实根，若在(c,d)上没有$g(x)=0$的实根，则函数$G(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$在(c,d)上连续且可导。又由$F(c)=f(c)g'(c)-f'(c)g(c)>0$知$g(c)\neq 0$，同理$g(d)\neq 0$，因此$G(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$可在$[c,d]$定义且连续。由$f(c)=f(d)=0$知$G(c)=G(d)=0$，因此存在$\xi\in(c,d)$使得$G'(\xi)=\frac{F(\xi)}{(g(\xi))^2}=0$，与$F(\xi)>0$矛盾.