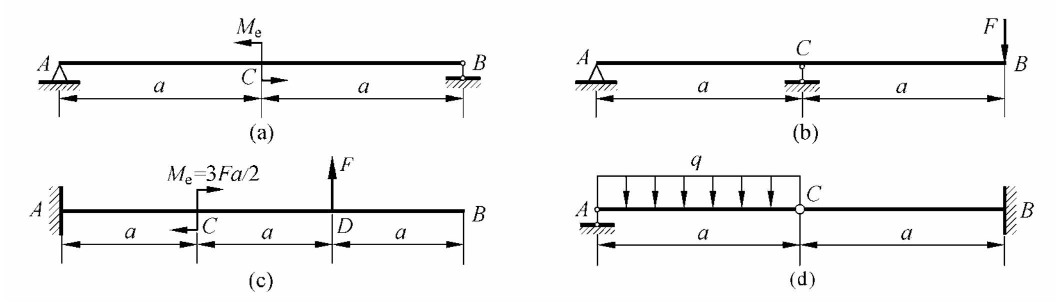
第七章　弯曲变形

（也可通过左侧题号书签直接查找题目与解）

7-2 图示各梁，弯曲刚度 EI 均为常数。试根据梁的弯矩图与约束条件画出挠曲轴的大致形状。



题 7-2 图

解：各梁的弯矩图及挠曲轴的大致形状示如图 7-2。

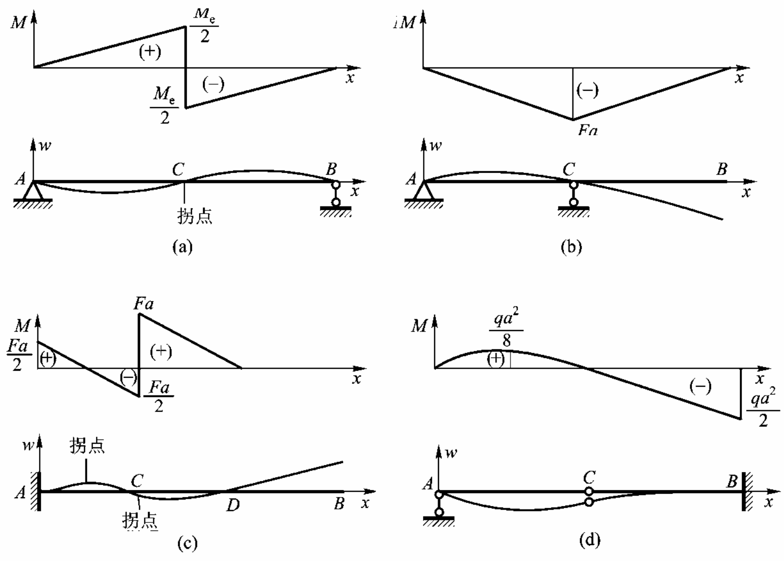
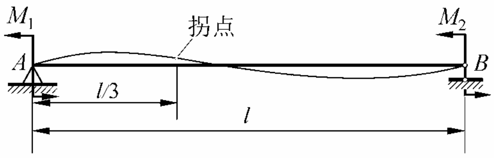


图 7-2

7-4 图示简支梁，左、右端各作用一个力偶矩分别为 M_1 与 M_2 的力偶。如欲使挠曲轴的拐点位于离左端 $l/3$ 处，则力偶矩 M_1 与 M_2 应保持何种关系。



题 7-4 图

解：解法 1，常规解法

1．建立弯矩方程

左端 A 的支反力为

$$F_{Ay} = \frac{M_1 + M_2}{l} \quad (\uparrow)$$

自左端向右取坐标 x，弯矩方程为

$$M(x) = \frac{M_1 + M_2}{l}x - M_1$$

2．建立挠曲轴近似微分方程

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = M(x) = \frac{M_1 + M_2}{l}x - M_1$$

依题意，在 $x = l/3$ 处有拐点，即 $w'' = 0$，于是，

$$(\frac{M_1 + M_2}{l})\frac{l}{3} - M_1 = 0$$

由此得

$$M_2 = 2M_1$$

解法 2，简便解法

分析本题的弯矩图:左端为$-M_1$，右端为$+M_2$，将这两个端值点连线，即得到M图，示如图 7-4。$M(x)=0$的点为拐点，依题意，此点应在$x=l/3$处，由几何上的比例关系

$$M_2 : M_1 = \frac{2l}{3} : \frac{l}{3}$$

直接得到

$$M_2 = 2M_1$$

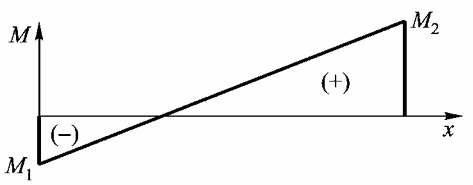
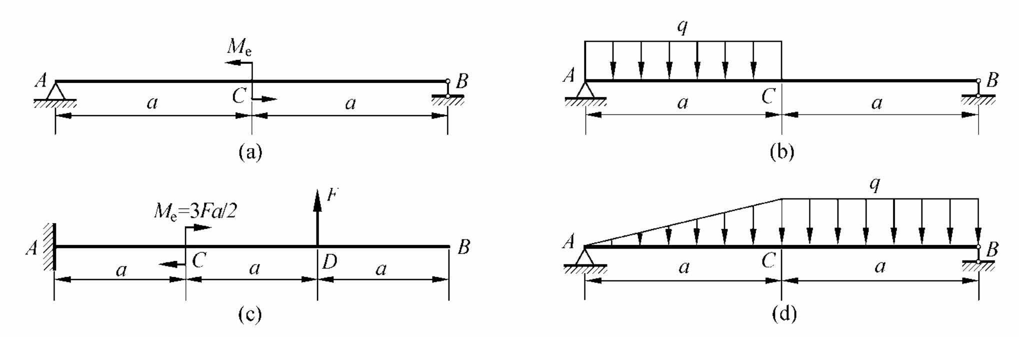


图 7-4

7-6 图示各梁，弯曲刚度 ***EI*** 均为常数。试用奇异函数法计算截面 ***B*** 的转角与截面 ***C*** 的挠度。



题 7-6 图

(a)解：1.求支反力

由梁的平衡方程$\sum M_B = 0$和$\sum F_y = 0$可得

$$F_{Ay} = \frac{M_e}{2a}\ (\uparrow),\quad F_{By} = \frac{M_e}{2a}\ (\downarrow)$$

2．建立挠曲轴近似微分方程并积分

自A向右取坐标x，由题图可见，弯矩的通用方程为

$$M = \frac{M_{\mathrm{e}}}{2a}x - M_{\mathrm{e}} < x-a >^{0}$$

挠曲轴的通用近似微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M_{\mathrm{e}}}{2a}x-M_{\mathrm{e}}<x-a>^0$$

将其相继积分两次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{M_{\mathrm{e}}}{4a}x^2-M_{\mathrm{e}}<x-a>+C \tag{a}$$

$$EIw=\frac{M_{\mathrm{e}}}{12a}x^3-\frac{M_{\mathrm{e}}}{2}<x-a>^2+Cx+D \tag{b}$$

3．确定积分常数

该梁的位移边界条件为：

在 $x=0$ 处， $w=0$ (c)

在 $x=2a$ 处， $w=0$ (d)

将条件(c)代入式(b)，得

$$D=0$$

将条件(d)代入式(b)，得

$$C=-\frac{M_{\mathrm{e}}a}{12}$$

4．建立挠曲轴方程

将所得 C 与 D 值代入式(b)，得挠曲轴的通用方程为

$$w=\frac{1}{EI}[\frac{M_{\mathrm{e}}}{12a}x^3-\frac{M_{\mathrm{e}}}{2}<x-a>^2-\frac{M_{\mathrm{e}}a}{12}x]$$

由此得 AC 段与 CB 段的挠曲轴方程分别为

$$w_1=\frac{1}{EI}(\frac{M_{\mathrm{e}}}{12a}x^3-\frac{M_{\mathrm{e}}a}{12}x)$$

和

$$w_2=\frac{1}{EI}[\frac{M_{\mathrm{e}}}{12a}x^3-\frac{M_{\mathrm{e}}}{2}(x-a)^2-\frac{M_{\mathrm{e}}a}{12}x]$$

5．计算 w_C 和 θ_B

将 $x=a$ 代入上述 w_1 或 w_2 的表达式中，得截面 C 的挠度为

$$w_C=0$$

将以上所得 C 值和 $x=2a$ 代入式(a)，得截面 B 的转角为

$$\theta_B=\frac{1}{EI}(\frac{4M_{\mathrm{e}}a^2}{4a}-M_{\mathrm{e}}a-\frac{M_{\mathrm{e}}a}{12})=-\frac{M_{\mathrm{e}}a}{12EI}\quad (\circlearrowleft)$$

(b)解：1.求支反力

由梁的平衡方程$\sum M_B=0$和$\sum F_y=0$可得

$$F_{Ay}=\frac{3}{4}qa \quad (\uparrow),\qquad F_{By}=\frac{1}{4}qa \quad (\uparrow)$$

2．建立挠曲轴近似微分方程并积分

自A向右取坐标x，由题图可见，弯矩的通用方程为

$$M=\frac{3qa}{4}x-\frac{q}{2}x^2+\frac{q}{2}<x-a>^2$$

挠曲轴的通用近似微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3qa}{4}x-\frac{q}{2}x^2+\frac{q}{2}<x-a>^2$$

将其相继积分两次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{3qa}{8}x^2-\frac{q}{6}x^3+\frac{q}{6}<x-a>^3+C \tag{a}$$

$$EIw=\frac{qa}{8}x^3-\frac{q}{24}x^4+\frac{q}{24}<x-a>^4+Cx+D \tag{b}$$

3．确定积分常数

该梁的位移边界条件为：

$$\text{在}x=0\text{处，}w=0 \tag{c}$$

$$\text{在}x=2a\text{处，}w=0 \tag{d}$$

将条件(c)与(d)分别代入式(b)，得

$$D=0,\ C=-\frac{3qa^3}{16}$$

4．建立挠曲轴方程

将所得C与D值代入式(b),得挠曲轴的通用方程为

$$w=\frac{1}{EI}[\frac{qa}{8}x^3-\frac{q}{24}x^4+\frac{q}{24}<x-a>^4-\frac{3qa^3}{16}x]$$

由此得AC段与CB段的挠曲轴方程分别为

$$w_1=\frac{1}{EI}(\frac{qa}{8}x^3-\frac{q}{24}x^4-\frac{3qa^3}{16}x)$$

和

$$w_2=\frac{1}{EI}[\frac{qa}{8}x^3-\frac{q}{24}x^4+\frac{q}{24}(x-a)^4-\frac{3qa^3}{16}x]$$

5．计算w_C和θ_B

将 $x=a$ 代入上述 w_1 或 w_2 的表达式中，得截面 C 的挠度为

$$w_C=-\frac{5qa^4}{48EI}\quad(\downarrow)$$

将以上所得 C 值和 $x=2a$ 代入式（a），得截面 B 的转角为

$$\theta_B=\frac{1}{EI}[\frac{3qa}{8}(2a)^2-\frac{q}{6}(2a)^3+\frac{q}{6}(2a-a)^3-\frac{3qa^3}{16}]=\frac{7qa^3}{48EI}\quad(\circlearrowleft)$$

(c)解：1.求支反力

由梁的平衡方程 $\sum F_y=0$ 和 $\sum M_A=0$ 可得

$$F_{Ay}=F\quad(\downarrow),\qquad M_A=\frac{1}{2}Fa\quad(\circlearrowright)$$

2．建立挠曲轴近似微分方程并积分

自 A 向右取坐标 x，由题图可见，弯矩的通用方程为

$$M=\frac{Fa}{2}-Fx+\frac{3Fa}{2}<x-a>^0+F<x-2a>$$

挠曲轴的通用近似微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=\frac{Fa}{2}-Fx+\frac{3Fa}{2}<x-a>^0+F<x-2a>$$

将其相继积分两次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{Fa}{2}x-\frac{F}{2}x^2+\frac{3Fa}{2}<x-a>+\frac{F}{2}<x-2a>^2+C \tag{a}$$

$$EIw=\frac{Fa}{4}x^2-\frac{F}{6}x^3+\frac{3Fa}{4}<x-a>^2+\frac{F}{6}<x-2a>^3+Cx+D \tag{b}$$

3．确定积分常数

该梁的位移边界条件为：

$$\text{在}x=0\text{处，}w=0 \tag{c}$$

$$\text{在}x=0\text{处，}\theta=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0 \tag{d}$$

将条件(c)与(d)分别代入式(b)和(a)，得

$$D=0,\ \ C=0$$

4．建立挠曲轴方程

将所得 ***C*** 与 ***D*** 值代入式(b)，得挠曲轴的通用方程为

$$w=\frac{1}{EI}[\frac{Fa}{4}x^2-\frac{F}{6}x^3+\frac{3Fa}{4}<x-a>^2+\frac{F}{6}<x-2a>^3]$$

由此得 AC 段、CD 段和 DB 段的挠曲轴方程依次为

$$w_1 = \frac{1}{EI}(\frac{Fa}{4}x^2 - \frac{F}{6}x^3)$$
$$w_2 = \frac{1}{EI}[\frac{Fa}{4}x^2 - \frac{F}{6}x^3 + \frac{3Fa}{4}(x-a)^2]$$
$$w_3 = \frac{1}{EI}[\frac{Fa}{4}x^2 - \frac{F}{6}x^3 + \frac{3Fa}{4}(x-a)^2 + \frac{F}{6}(x-2a)^3]$$

5．计算 w_C 和 θ_B

将 $x=a$ 代入上述 w_1 或 w_2 的表达式中，得截面 C 的挠度为

$$w_C = \frac{Fa^3}{12EI} \quad (\uparrow)$$

将以上所得 C 值和 $x=3a$ 代入式(a)，得截面 B 的转角为

$$\theta_B = \frac{1}{EI}[\frac{Fa}{2}(3a) - \frac{F}{2}(3a)^2 + \frac{3Fa}{2}(2a) + \frac{F}{2}(a)^2] = \frac{Fa^2}{2EI} \quad (\circlearrowleft)$$

(d)解：**1.求支反力**

由梁的平衡方程 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 可得

$$F_{Ay} = \frac{7}{12}qa\ (\uparrow),\ F_{By} = \frac{11}{12}qa\ (\uparrow)$$

2．建立挠曲轴近似微分方程并积分

自 A 向右取坐标 x，由题图可见，弯矩的通用方程为

$$M = \frac{7qa}{12}x - \frac{q}{6a}x^3 + \frac{q}{6a} < x-a >^3$$

挠曲轴的通用近似微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{7qa}{12}x - \frac{q}{6a}x^3 + \frac{q}{6a} < x-a >^3$$

将其相继积分两次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{7qa}{24}x^2 - \frac{q}{24a}x^4 + \frac{q}{24a} < x-a >^4 + C \tag{a}$$

$$EIw = \frac{7qa}{72}x^3 - \frac{q}{120a}x^5 + \frac{q}{120a} < x-a >^5 + Cx + D \tag{b}$$

3．确定积分常数

该梁的位移边界条件为：

在 $x=0$ 处， $w=0$ (c)

在 $x=2a$ 处， $w=0$ (d)

将条件(c)代入式(b)，得

$$D = 0$$

将条件(d)代入式(b)，得

$$C=-\frac{187}{720}qa^3$$

4．建立挠曲轴方程

将所得 ***C*** 与 ***D*** 值代入式(b)，得挠曲轴的通用方程为

$$w=\frac{1}{EI}[\frac{7qa}{72}x^3-\frac{q}{120a}x^5+\frac{q}{120a}<x-a>^5-\frac{187qa^3}{720}x]$$

由此得 AC 段与 CB 段的挠曲轴方程分别为

$$w_1=\frac{1}{EI}(\frac{7qa}{72}x^3-\frac{q}{120a}x^5-\frac{187qa^3}{720}x)$$

和

$$w_2=\frac{1}{EI}[\frac{7qa}{72}x^3-\frac{q}{120a}x^5+\frac{q}{120a}(x-a)^5-\frac{187qa^3}{720}x]$$

5．计算 w_C 和 θ_B

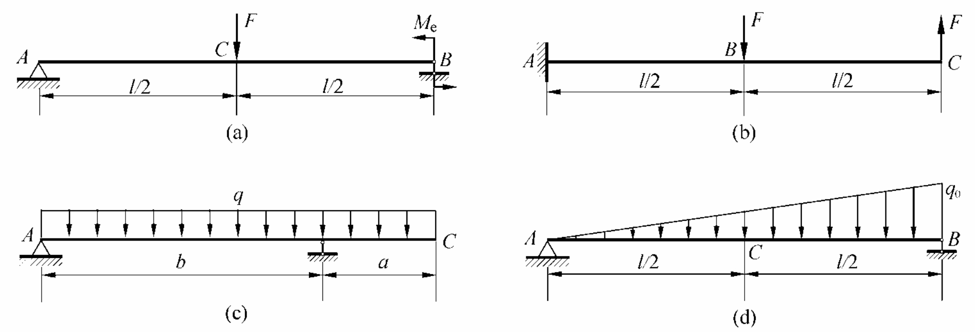
将 $x=a$ 代入上述 w_1或w_2 的表达式中，得截面 C 的挠度为

$$w_C=-\frac{41qa^4}{240EI}\quad(\downarrow)$$

将以上所得 C 值和 $x=2a$ 代入式(a)，得截面 B 的转角为

$$\theta_B=\frac{qa^3}{EI}[\frac{7\times4}{24}-\frac{16}{24}+\frac{1}{24}-\frac{187}{720}]=\frac{203qa^3}{720EI}\quad(\circlearrowleft)$$

7-8 图示各梁，弯曲刚度 ***EI*** 均为常数。试用叠加法计算截面 ***B*** 的转角与截面 ***C*** 的挠度。



题 7-8 图

(a)解：由 F 产生的位移为

$$\theta_{B1}=\frac{Fl^2}{16EI}\quad(\circlearrowleft),\quad w_{C1}=\frac{Fl^3}{48EI}\quad(\downarrow)$$

由M_{e}产生的位移为

$$\theta_{B2}=\frac{M_{\mathrm{e}}l}{3EI}\ (\circlearrowleft),\ w_{C2}=\frac{M_{\mathrm{e}}l^2}{16EI}\ (\downarrow)$$

应用叠加法，得截面B的转角及截面C的挠度分别为

$$\theta_B=\theta_{B1}+\theta_{B2}=\frac{Fl^2}{16EI}+\frac{M_{\mathrm{e}}l}{3EI}\quad(\circlearrowleft)$$

$$w_C=w_{C1}+w_{C2}=\frac{Fl^3}{48EI}+\frac{M_{\mathrm{e}}l^2}{16EI}\quad(\downarrow)$$

(b)解：AB梁段及BC梁段的受力情况示如图 **7-8b**(1)和(2)。

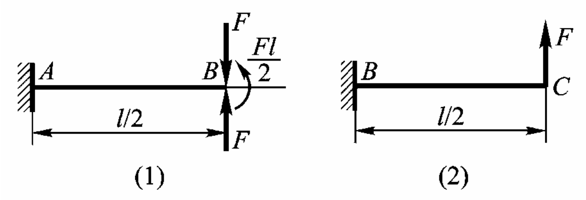


图 7-8b

由图(1)可得截面B的转角为

$$\theta_B=\frac{1}{EI}(\frac{Fl}{2})(\frac{l}{2})=\frac{Fl^2}{4EI}\quad(\circlearrowleft)$$

由图(1)和图(2)，应用叠加法得截面C的挠度为

$$w_C=w_B+\theta_B(\frac{l}{2})+w_{C3}=\frac{Fl^3}{16EI}+\frac{Fl^3}{8EI}+\frac{Fl^3}{24EI}=\frac{11Fl^3}{48EI}\quad(\uparrow)$$

(c)解：AB梁段及BC梁段的受力情况示如图 **7-8c**(1)和(2)。

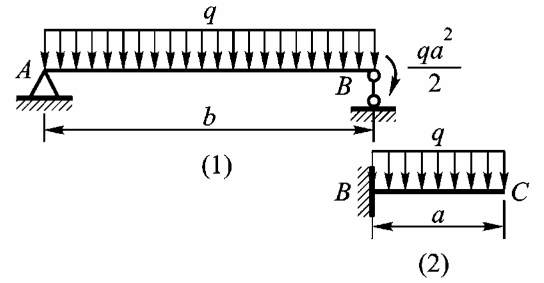


图 7-8c

由图(1)可得截面B的转角为

$$\theta_B=\frac{qb^3}{24EI}-\frac{b}{3EI}(\frac{qa^2}{2})=\frac{qb}{24EI}(b^2-4a^2)$$

由图(1)和图(2)，应用叠加法得截面C的挠度为

$$w_C=\theta_B\cdot a+w_{C2}=\frac{qab}{24EI}(b^2-4a^2)-\frac{qa^4}{8EI}=\frac{qa}{24EI}(b^3-4a^2\mathrm{b}-3a^3)$$

(d)解：求θ_B时可以书中附录 E 的 7 号梁为基础，以 x 代替 a，以 $q(x)\mathrm{d}x$ 代替 F，写出 B 端截面的微转角

$$\mathrm{d}\theta_B = \frac{x(l^2 - x^2)q(x)}{6lEI}\mathrm{d}x \tag{a}$$

式中，$q(x)$为截面 x 处的载荷集度，其值为

$$q(x) = \frac{q_0}{l}x \tag{b}$$

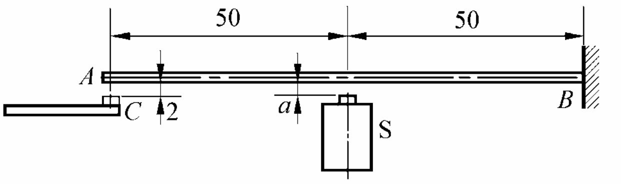
将式(b)代入式(a)后两边积分，即得截面 B 的转角为

$$\theta_B = \int_0^l \frac{q_0 x^2(l^2 - x^2)}{6l^2 EI}\mathrm{d}x = \frac{q_0 l^3}{45EI} \quad (\circlearrowleft)$$

求 w_C 可以教材附录 E 中 8 号梁为基础，所求截面 C 的挠度为表中所列 δ 的一半，即

$$w_C = \frac{1}{2}\delta = -\frac{5q_0 l^4}{768EI} \quad (\downarrow)$$

7-9 图示电磁开关，由铜片 AB 与电磁铁 S 组成。为使端点 A 与触点 C 接触，试求电磁铁 S 所需吸力的最小值 F 以及间距 a 的尺寸。铜片横截面的惯性矩 $I_z = 0.18\times10^{-12}\mathrm{m}^4$，弹性模量 $E = 101\mathrm{GPa}$。



题 7-9 图

解：铜片 AB 的受力及变形情况示如图 7-9。

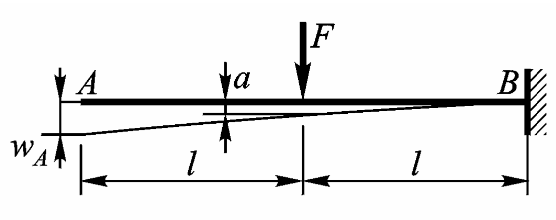


图 7-9

由图可得

$$w_A = \frac{Fl^3}{3EI} + (\frac{Fl^2}{2EI})l = \frac{5Fl^3}{6EI}$$

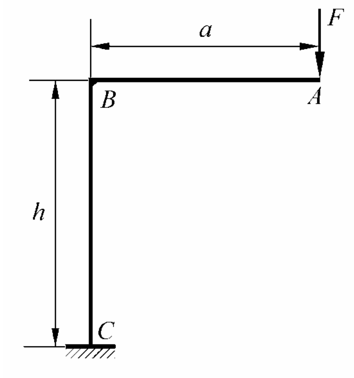
由此可求得电磁铁的最小吸力，其值为

$$F = \frac{6EIw_A}{5l^3} = \frac{6\times101\times10^9\times0.18\times10^{-12}\times0.002}{5\times0.050^3}\mathrm{N} = 0.349\mathrm{N}$$

间距的尺寸为

$$a=\frac{Fl^3}{3EI}=\frac{0.349\times0.050^3\,\text{m}}{3\times101\times10^9\times0.18\times10^{-12}}=8.0\times10^{-4}\,\text{m}=0.80\text{mm}$$

7-12 试计算图示刚架截面 A 的水平和铅垂位移。设弯曲刚度 EI 为常数。



题 7-12 图

解：用叠加法来求 Δ_x 和 Δ_y。

杆段 BC 在力矩 Fa 作用下产生水平位移 Δ_B 和转角 θ_B，其值分别为

$$\Delta_B=\frac{(Fa)h^2}{2EI}=\frac{Fah^2}{2EI}\quad(\rightarrow)$$

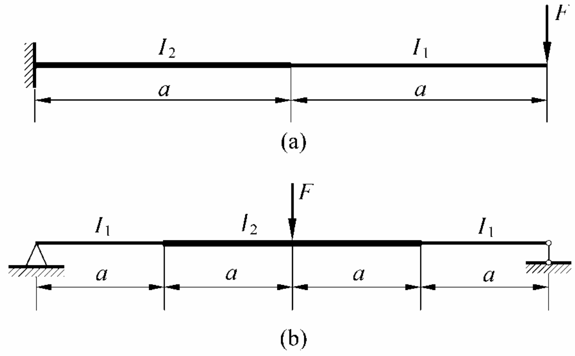
$$\theta_B=\frac{(Fa)h}{EI}=\frac{Fah}{EI}\quad(\circlearrowright)$$

由此不难求得截面 A 的两个位移分量，其值分别为

$$\Delta_x=\Delta_B=\frac{Fah^2}{2EI}\quad(\rightarrow)$$

$$\Delta_y=\frac{Fa^3}{3EI}+\theta_B a=\frac{Fa^2}{3EI}(a+3h)\quad(\downarrow)$$

7-14 试用叠加法计算图示各阶梯形梁的最大挠度。设惯性矩 $I_2=2I_1$。



题 7-14 图

(a)解：容易判断，最大挠度发生在截面C处（见下图）。

如图 **7-14a(1)**所示，梁段AB在F和Fa作用下，有

$$\theta_B=\frac{Fa^2}{2EI_2}+\frac{Fa\cdot a}{EI_2}=\frac{3Fa^2}{2EI_2}=\frac{3Fa^2}{4EI_1}\quad(\circlearrowright)$$

和

$$\varDelta_B=\frac{Fa^3}{3EI_2}+\frac{Fa\cdot a^2}{2EI_2}=\frac{5Fa^3}{6EI_2}=\frac{5Fa^3}{12EI_1}\quad(\downarrow)$$

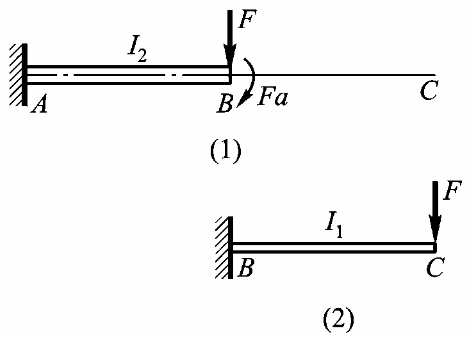


图 7-14a

由图(2)可得

$$\varDelta_C'=\frac{Fa^3}{3EI_1}\quad(\downarrow)$$

最后，应用叠加法求得最大挠度为

$$\varDelta=\varDelta_C=\varDelta_B+\theta_B\cdot a+\varDelta_C'$$

$$=\frac{5Fa^3}{12EI_1}+\frac{3Fa^2}{4EI_1}\cdot a+\frac{Fa^3}{3EI_1}=\frac{3Fa^3}{2EI_1}\quad(\downarrow)\qquad\textbf{(a)}$$

(b)解：不难判断，最大挠度发生在中间截面G处。

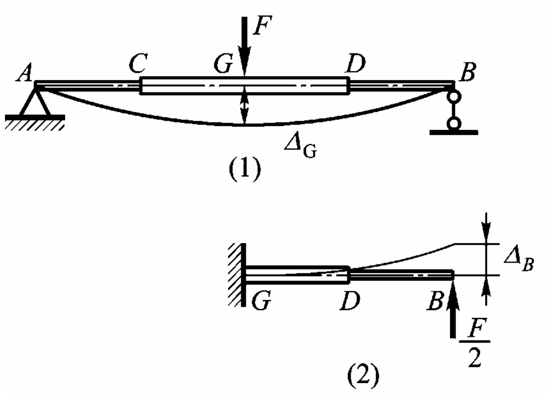
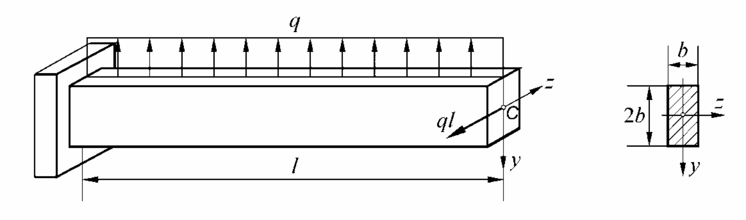


图 7-14b

如图 **7-14b(1)**所示，由于左右对称，截面 G 的转角必然为零。由此可将图(1)求 Δ_G 的问题转化为图(2)所示悬臂梁求挠度 Δ_B 的问题，并可利用本题(a)中所得的结果，只需将式(a)中的 F 更换为 $F/2$ 即可。最后求得的最大挠度为

$$\Delta = \Delta_G = \Delta_{\mathrm{B}} = \frac{3a^3}{2EI_1}(\frac{F}{2}) = \frac{3Fa^3}{4EI_1} \quad (\downarrow) \qquad \textbf{(b)}$$

7-15 图示悬臂梁，承受均布载荷 q 与集中载荷 ql 作用。试计算梁端的挠度及其方向，材料的弹性模量为 E。



题 7-15 图

提示：分解成为两个互垂对称弯曲问题，分别计算端点挠度，并求其矢量和。

解：1.求 Δ_y

$$\Delta_y = \frac{ql^4}{8EI_z} = \frac{12ql^4}{8Eb(2b)^3} = \frac{3ql^4}{16Eb^4} \quad (\uparrow)$$

2．求 Δ_z

$$\Delta_z = \frac{(ql)l^3}{3EI_y} = \frac{12ql^4}{3E(2b)b^3} = \frac{2ql^4}{Eb^4} \quad (\leftarrow)$$

3．求总挠度Δ

梁端的总挠度为

$$\varDelta=\sqrt{\varDelta_y^2+\varDelta_z^2}=\frac{ql^4}{Eb^4}\sqrt{(\frac{3}{16})^2+2^2}=\frac{2.01ql^4}{Eb^4}$$

其方向示如图 7-15，由图可知，

$$\tan\theta=\frac{\varDelta_y}{\varDelta_z}=\frac{3}{32}$$

$$\theta=5.36^{\circ}$$

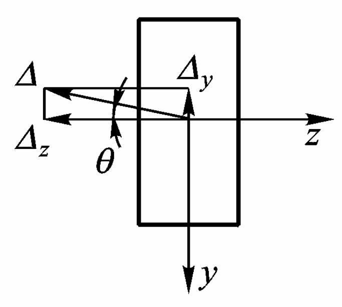
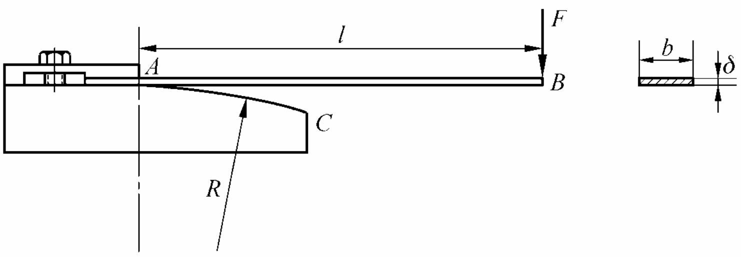


图 7-15

7-16 如图所示，梁左端 **A** 固定在具有圆弧形表面的刚性平台上，自由端 **B** 承受载荷 **F** 作用。试计算截面 **B** 的挠度及梁内的最大弯曲正应力。平台圆弧表面 **AC** 的曲率半径 **R**、梁的尺寸 **l**，**b** 与 δ 以及材料的弹性模量 **E** 均为已知。



题 7-16 图

解：1. 计算截面 B 的挠度

设在 F 作用下梁段 AD 与圆弧形表面贴合，并设 DB 段的长度为 x，由图 7-16a 可得

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}=\frac{Fx}{EI}$$

由此得

$$x=\frac{EI}{FR} \tag{a}$$

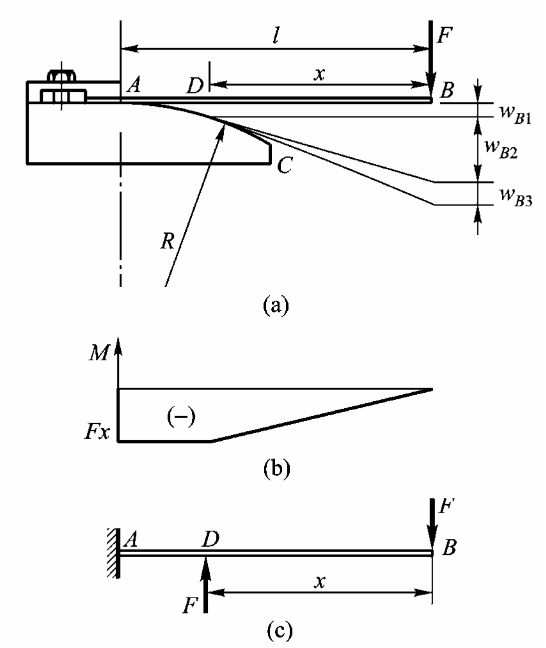


图 7-16

由于贴合段梁的曲率为常值，可推知此段的弯矩也是常值。据此可画出梁的弯矩图，示如图 b。根据梁的约束条件及图 b，可进一步推知其受力情况，示如图 c。

由图 c 可得截面 B 的挠度为

$$w_B = -\frac{Fx(l-x)^2}{2EI} - \frac{Fx(l-x)}{EI}x - \frac{Fx^3}{3EI} \tag{b}$$

再将式(a)代入式(b)，化简后得到

$$w_B = -\frac{l^2}{2R} + \frac{(EI)^2}{6F^2R^3} \quad (\downarrow) \tag{c}$$

作为一种特殊情况，当 F 较小，以致使

$$\frac{Fl}{EI} \le \frac{1}{R}$$

此时，又回到一般悬臂梁的结果，将 $x = l$ 代入式(b)，得到

$$w_B = -\frac{Fl^3}{3EI} \quad (\downarrow) \tag{c$'$}$$

应当指出，以上结果均由挠曲轴的近似微分方程得到，因而只有当 $R >> \delta$ 时才是正确的。

2．计算梁内的最大弯曲正应力

由于梁内的最大弯矩（绝对值）必须满足

$$\frac{M_{\max}}{EI} \le \frac{1}{R}$$

即

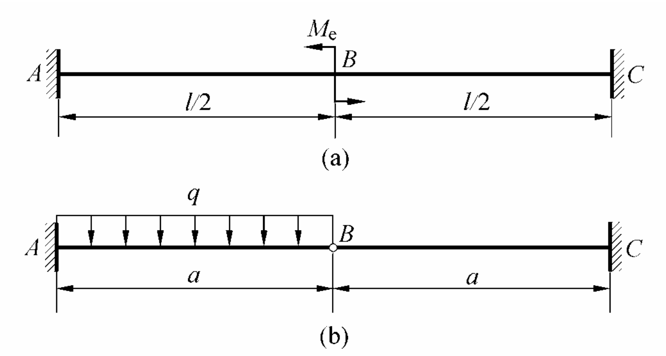
$$M_{\max} \le \frac{EI}{R} \tag{d}$$

由此得到梁内的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{I}\frac{\delta}{2}\le\frac{E\delta}{2R} \tag{e}$$

当式(d)取等号时，式(e)也取等号。

7-18 试求图示各梁的支反力。设弯曲刚度 EI 为常数。



题 7-18 图

(a)解：此为三度静不定问题，但有反对称条件可以利用。

此题以解除多余内约束较为方便。可在 M_e 作用的反对称面 B 处假想将梁切开，M_e 左、右面各分一半，另有反对称内力 F_{SB} 存在，示如图 7-18a。

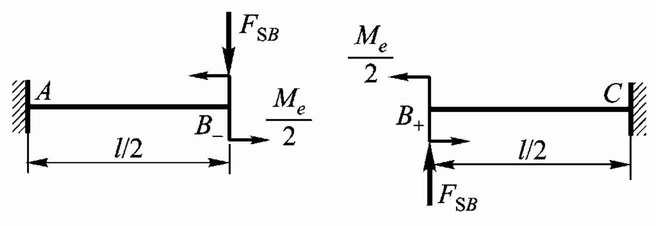


图 7-18a

变形协调条件为

$$w_{B_-}=w_{B_+}=0 \tag{a}$$

截面 B 的挠度之所以为零，这是由反对称条件决定的。

取左半梁段 AB 写物理关系

$$w_{B_-}=\frac{1}{2EI}\left(\frac{M_e}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2-\frac{F_{SB}}{3EI}\left(\frac{l}{2}\right)^3 \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，得

$$F_{SB}=\frac{3M_e}{2l} \tag{c}$$

方向如图所示。

据此可求得支反力为

$$F_{Ay}=\frac{3M_e}{2l}\quad(\uparrow),\quad F_{Cy}=\frac{3M_e}{2l}\quad(\downarrow)$$

$$M_A=\frac{M_e}{4}\quad(\circlearrowleft),\quad M_C=\frac{M_e}{4}\quad(\circlearrowleft)$$

(b)解：此为两度静不定问题。可在梁间铰 B 处解除多余约束，得该静不定结构的相当系统如图 7-18b 所示。

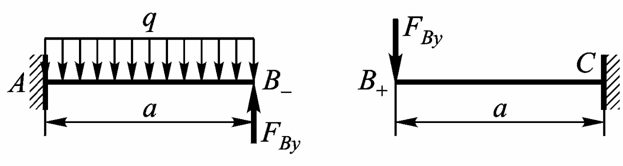


图 7-18b

变形协调条件为

$$w_{B-}=w_{B+} \tag{d}$$

物理关系为

$$w_{B-}=\frac{qa^4}{8EI}-\frac{F_{By}a^3}{3EI},\quad w_{B+}=\frac{F_{By}a^3}{3EI} \tag{e}$$

将式(e)代入式(d)，得

$$F_{By}=\frac{3qa}{16} \tag{f}$$

由相当系统的平衡条件最后求得支反力为

$$F_{Ay}=\frac{13qa}{16}\quad(\uparrow),\qquad F_{Cy}=\frac{3qa}{16}\quad(\uparrow)$$

$$M_A=\frac{5qa^2}{16}\quad(\circlearrowleft),\qquad M_C=\frac{3qa^2}{16}\quad(\circlearrowright)$$

7-20 题 7-19 所示传动轴，由于加工误差，轴承 C 处的位置偏离轴线 $\delta=0.25\text{mm}$，试计算安装后轴内的最大弯曲正应力。已知轴的弹性模量 $E=200\text{GPa}$。

解：此为一度静不定问题。

该静不定梁（即传动轴）的相当系统示如图 7-20。变形协调条件为

$$w_C=\delta \tag{a}$$

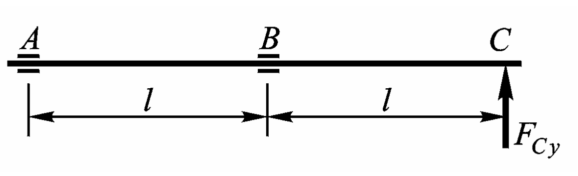


图 7-20

在多余支反力 F_{Cy} 作用下，图中截面 C 的挠度（物理条件）为

$$w_C = \frac{2F_{Cy}l^3}{3EI} \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，得

$$\frac{2F_{Cy}l^3}{3EI} = \delta$$

由此可得

$$F_{Cy} = \frac{3EI\delta}{2l^3} \tag{c}$$

由图可知，梁内的最大弯矩发生在截面 B，其值为

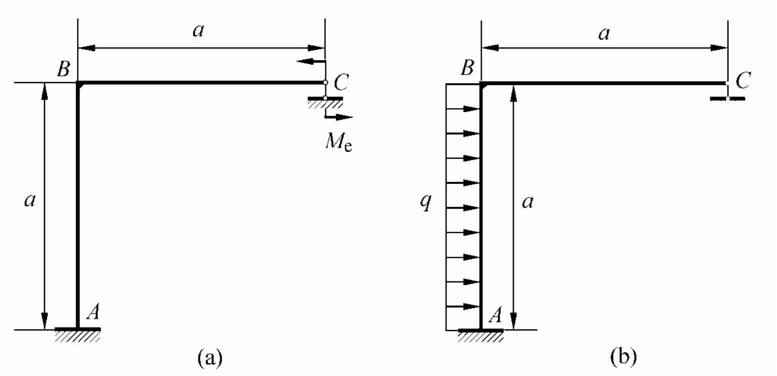
$$M_{\max} = F_{Cy}l = \frac{3EI\delta}{2l^2}$$

由此可得梁内的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{3E\delta}{2l^2}\left(\frac{I}{W_z}\right) = \frac{3E\delta \mathrm{d}}{4l^2}$$

$$= \frac{3\times 200\times 10^9 \times 0.00025\times 0.050\mathrm{N}}{4\times 0.200^2\mathrm{m}^2} = 4.69\times 10^7\mathrm{Pa} = 46.9\mathrm{MPa}$$

7-22 图示刚架，弯曲刚度 ***EI*** 为常数，试画刚架的弯矩图。



题 7-22 图

解：图 a 与 b 所示结构均为一度静不定问题。解除 C 端的多余约束，代之以多余约束反力 F_{Cy}，由变形协调条件

$$\Delta_{Cy} = 0$$

解得此二刚架的多余约束反力依次为

$$F_{Cy} = \frac{9M_e}{8a} \quad (\downarrow), \qquad F_{Cy} = \frac{1}{8}qa \quad (\uparrow)$$

此二刚架的弯矩图分别如图 7-22a 和 b 所示。

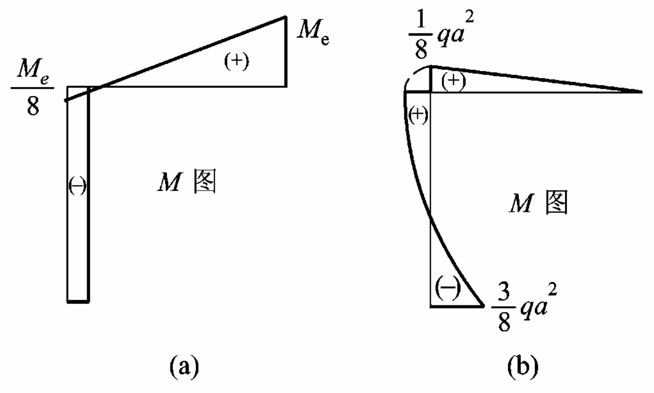
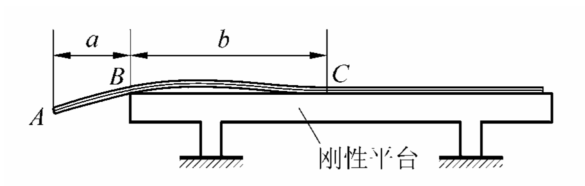


图 7-22

7-24 图示匀质梁，放置在水平的刚性平台上，若伸出台外部分 ***AB*** 的长度为 ***a***，试计算台内梁上拱部分 ***BC*** 的长度 ***b***。设弯曲刚度 ***EI*** 为常数，梁单位长度的重量为 ***q***。



题 7-24 图

解：由于此梁在截面 C 以右的部分曲率处处为零，因此截面 C 处的曲率、转角及弯矩也都为零，即

$$\theta_C = 0,\quad M_C = 0$$

假想此梁从截面 C 处切开，并取梁段 AC 为研究对象，可将其画成图 7-24 所示的外伸梁。

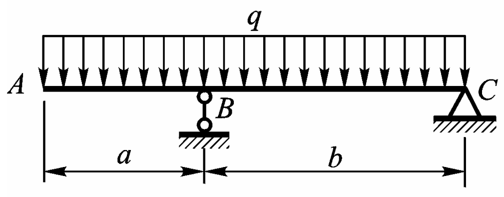


图 7-24

由以上分析可知，在均布载荷 q（梁自重）作用下，有

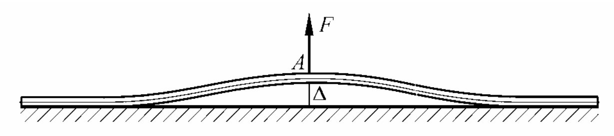
$$\theta_C = \frac{qb^3}{24EI} - \frac{qa^2 \cdot b}{2 \times 6EI} = 0$$

由此得到

$$b = \sqrt{2}a$$

顺便指出，这种解法是初等的，未考虑剪切变形的影响，致使分离面 C 处出现集中力形式的支承反力。

7-25 图示匀质梁，放置在水平刚性平台上。若在横截面 ***A*** 作用一铅垂向上的载荷 ***F***，试建立该截面的挠度 Δ 与载荷 ***F*** 的关系。设弯曲刚度 ***EI*** 为常数，梁单位长度的重量为 ***q***。



题 7-25 图

解：可从该匀质梁的上拱部分提取力学模型，如图 7-25 所示。

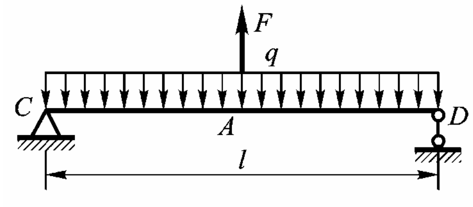


图 7-25

与上题相同的理由，这里有简支梁两端截面的转角和弯矩均为零。

由图可知，截面 A 的挠度为

$$\varDelta=\frac{Fl^3}{48EI}-\frac{5ql^4}{384EI} \tag{a}$$

该梁左端截面的转角为

$$\theta_C=\frac{Fl^2}{16EI}-\frac{ql^3}{24EI} \tag{b}$$

由于

$$\theta_C=0$$

故有

$$F=\frac{2}{3}ql$$

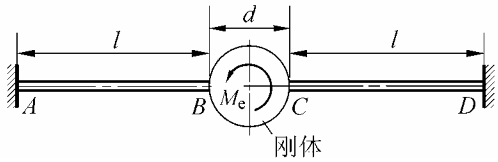
或写成

$$l=\frac{3F}{2q} \tag{c}$$

将式(c)代入式(a)，得到

$$\varDelta=\frac{F}{48EI}\left(\frac{3F}{2q}\right)^3-\frac{5q}{384EI}\left(\frac{3F}{2q}\right)^4=\frac{9F^4}{2048EIq^3}$$

7-26 图示梁 ***AB*** 与 ***CD***，***B*** 端、***C*** 端与刚性圆柱体相连，其上作用一矩为 M_e 的集中力偶。试画梁的剪力、弯矩图。设二梁各截面的弯曲刚度均为 ***EI***，长度均为 ***l***，圆柱体的直径为 ***d***，且 ***d*** = ***l***/2。



题 7-26 图

解：此为三度静 不定结构，有反对称条件可以利用。

该结构相当系统的一部分示如图 7-26a。

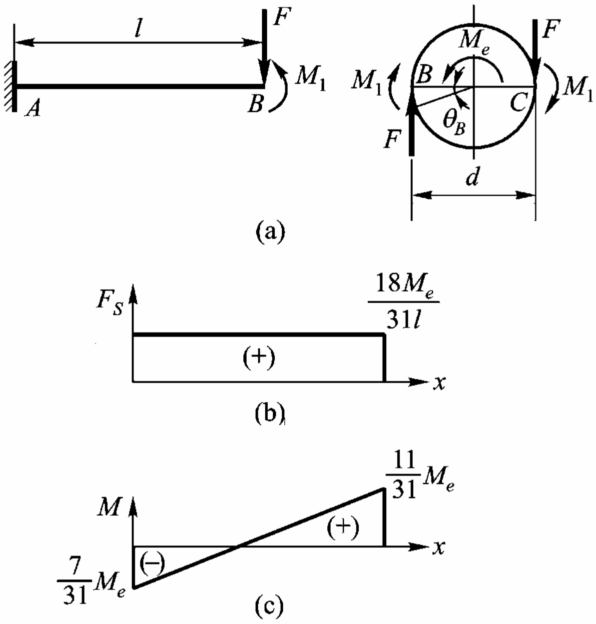


图 7-26

静力学方面，由刚性圆柱体的力矩平衡可得

$$2M_1 + Fd = M_{\mathrm{e}} \tag{a}$$

几何方面，考虑梁 AB，其截面 B 的挠度与转角之间应满足协调关系(请读者自己画出结构变形图以帮助理解)

$$w_B = \theta_B(\frac{d}{2}) \tag{b}$$

物理方面，有

$$w_B = \frac{Fl^3}{3EI} - \frac{M_1 l^2}{2EI}，\quad \theta_B = \frac{M_1 l}{EI} - \frac{Fl^2}{2EI} \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，得补充方程

$$\frac{Fl^3}{3EI} - \frac{M_1 l^2}{2EI} = \frac{d}{2}(\frac{M_1 l}{EI} - \frac{Fl^2}{2EI})$$

注意到 $d = l/2$，由上式得

$$M_1 = \frac{11}{18}Fl \tag{d}$$

将式(d)与式(a)联解，得

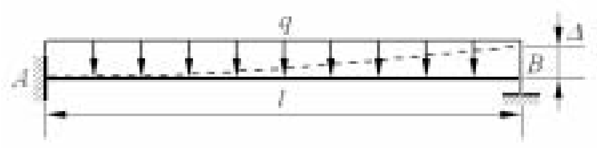
$$F=\frac{18M_{\mathrm{e}}}{31l}，\ M_1=\frac{11}{31}M_{\mathrm{e}}$$

求出 F 和 M_1 后就可以画梁 AB 的剪力、弯矩图了，示如图 b 和 c。梁 CD 的剪力图与图 b 左右对称，其弯矩图与图 c 反对称，这里未画出。

7-27 图示静不定梁 ***AB***，承受集度为 ***q*** 的均布载荷作用。已知抗弯截面系数为 ***W***，许用应力为[σ]。

(1) 试求载荷的许用值[***q***]；

(2) 为提高梁的承载能力，可将支座 ***B*** 提高少许，试求提高量 $\varDelta$的最佳值及载荷 ***q*** 的相应许用值[***q***′]。



题 7-27 图

解：(1) 求 $\varDelta=0$ 时的 $[q]$

此为一度静不定问题。解除 B 端的多余约束，代之以多余反力 F_{By}，将截面 B 的挠度

$$w_B=\frac{F_{By}l^3}{3EI}-\frac{ql^4}{8EI} \tag{a}$$

代入变形协调条件

$$w_B=0$$

可得

$$F_{By}=\frac{3ql}{8} \tag{b}$$

自 B 端向左取坐标 x，弯矩方程为

$$M(x)=F_{By}x-\frac{q}{2}x^2 \tag{c}$$

由条件

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=0$$

得 $M(x)$ 取得极值的位置为

$$x_0=\frac{F_{By}}{q} \tag{d}$$

将式(d)代入式(c)，得极值弯矩为

$$M(x_0)=\frac{F_{By}^2}{2q}=\frac{9ql^2}{128}\approx 0.0703ql^2$$

该梁固定端 A 截面的弯矩为

$$M(l)=F_{By}l-\frac{q}{2}l^2=-\frac{ql^2}{8}$$

二者比较（请读者自己画出 $\boldsymbol{M}$ 图以帮助理解），知危险截面在 A 端，其最大弯矩（绝对值）为

$$|M|_{\max}=|M(l)|=\frac{ql^2}{8}$$

由弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max}=\frac{|M|_{\max}}{W_z}=\frac{ql^2}{8W_z}\leq[\sigma]$$

得

$$[q]=\frac{8W_z[\sigma]}{l^2} \tag{e}$$

(2) 求 $\varDelta$ 的最佳值及相应的 $[q']$

$\varDelta$ 不为零时，变形协调条件成为

$$w_B=\varDelta$$

将式(a)代入后，得

$$F_{By}=\frac{3EI\varDelta}{l^3}+\frac{3ql}{8} \tag{b$'$}$$

式(c)与(d)在此仍然有效。正的极值弯矩和固定端负弯矩依次为

$$M(x_0)=\frac{F_{By}^2}{2q}，\ M(l)=F_{By}l-\frac{1}{2}ql^2$$

依据等强度观点，当 $M(x_0)$ 与 $M(l)$ 的绝对值相等时，对梁的强度最有利，即

$$\frac{F_{By}^2}{2q}=\frac{1}{2}ql^2-F_{By}l$$

或写成

$$F_{By}^2+2qlF_{By}-q^2l^2=0$$

解此方程，舍去增根后，得

$$F_{By}=(\sqrt{2}-1)ql \tag{f}$$

将式(f)代入式(a)，得到最佳提高量，其值为

$$\varDelta = w_B = \frac{(8\sqrt{2}-11)ql^4}{24EI} \tag{g}$$

有此$\varDelta$后，梁内的最大弯矩为

$$M_{\max} = M(x_0) = (\frac{3}{2}-\sqrt{2})ql^2$$

由弯曲正应力强度条件

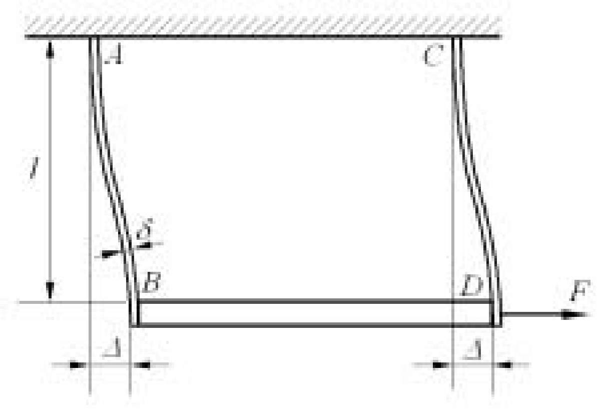
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

得载荷q的许用值为

$$[q'] = \frac{W_z[\sigma]}{(\frac{3}{2}-\sqrt{2})l^2} = 11.66\frac{W_z[\sigma]}{l^2} \tag{h}$$

比较式(h)与式(e)，支座B提高式(g)所示的$\varDelta$后，梁的承载能力可提高 45.7%。

7-28 图示结构，***AB*** 与 ***DC*** 为铜片，其厚度δ、宽度 ***b***、长度 ***l*** 及弹性模量 ***E*** 均为已知，***BD*** 杆的刚度很大，可视为刚体。试建立水平位移 $\varDelta$与载荷 ***F*** 间的关系。轴力对铜片变形的影响忽略不计。



题 7-28 图

解：此为三度静不定结构。

由于BD杆可视为刚体，且AB与CD二铜片具有相同的材料性质、几何尺寸和约束条件，如题图所示，其变形具有反对称性。与此种变形图对应的受力图也是反对称的，示如图 7-28。

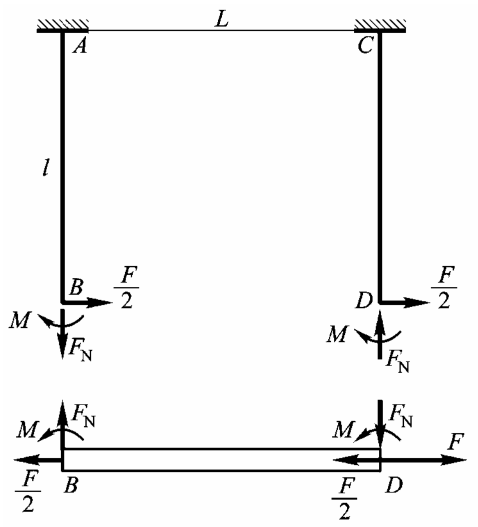


图 7-28

由 BD 杆的力矩平衡条件可得（设 BD 杆长为 L）

$$F_N L = 2M$$

不计轴力对铜片变形的影响，以铜片 AB 为例，其变形协调条件为

$$\theta_B = 0, \quad \varDelta_B = \varDelta$$

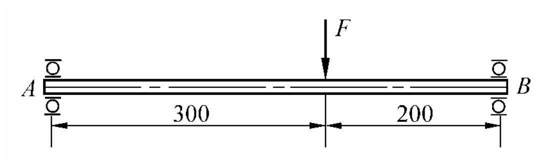
将物理关系引入，得

$$\frac{Fl^2}{2\times 2EI} - \frac{Ml}{EI} = 0$$
$$\frac{Fl^3}{2\times 3EI} - \frac{Ml^2}{2EI} = \varDelta$$

由此得到水平位移 $\varDelta$ 与载荷 F 间的关系为

$$\varDelta = \frac{Fl^3}{24EI} = \frac{Fl^3}{2Eb\delta^3}$$

7-29 图示圆截面轴，两端用轴承支持。承受载荷 $F = 10\text{kN}$ 作用。若轴承处的许用转角$[\theta] = 0.05$ rad，材料的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$，试根据刚度要求确定轴径 d。



题 7-29 图

解：由题图可知，最大转角必在 B 端（因为 F 距此端较近），其值为（可查教材的附录 E）

$$\theta_{\max} = \theta_B = \frac{Fa(l^2 - a^2)}{6lEI}$$

依题设，这里 $l = 500\text{mm}$，$a = 300\text{mm}$。

由刚度要求

$$\theta_{\max} \leq [\theta]$$

可得

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \geq \frac{Fa(l^2 - a^2)}{6lE[\theta]}$$

由此得到该轴的直径为

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{64Fa(l^2 - a^2)}{6\pi lE[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{64 \times 10 \times 10^3 \times 0.300 \times (0.500^2 - 0.300^2)}{6\pi \times 0.500 \times 200 \times 10^9 \times 0.05}}\ \mathrm{m}$$
$$= 0.0239\mathrm{m} = 23.9\mathrm{mm}$$