第二章

自动控制系统的数学模型（2）

2-3 传递函数

一、传递函数的定义

定义：一个线性时不变系统的传递函数定义为在零初始条件下，其输出的*Laplace* 变换与输入的*Laplace* 变换的比：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

“零初始条件”有两方面含义：

- 输入作用是在$t=0$之后才加于系统的，因此输入量及其各阶导数，在$t=0^-$时的值为零。

- 指输入信号作用于系统之前系统是静止的，即$t=0^-$时，系统的输出量及各阶导数为零。

考虑LTI系统： $x \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y$

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} y + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y$$

$$= b_0 \frac{d^m}{dt^m} x + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x + \cdots + b_{m-1} \frac{dr}{dt} + b_m x, \quad n \geq m$$

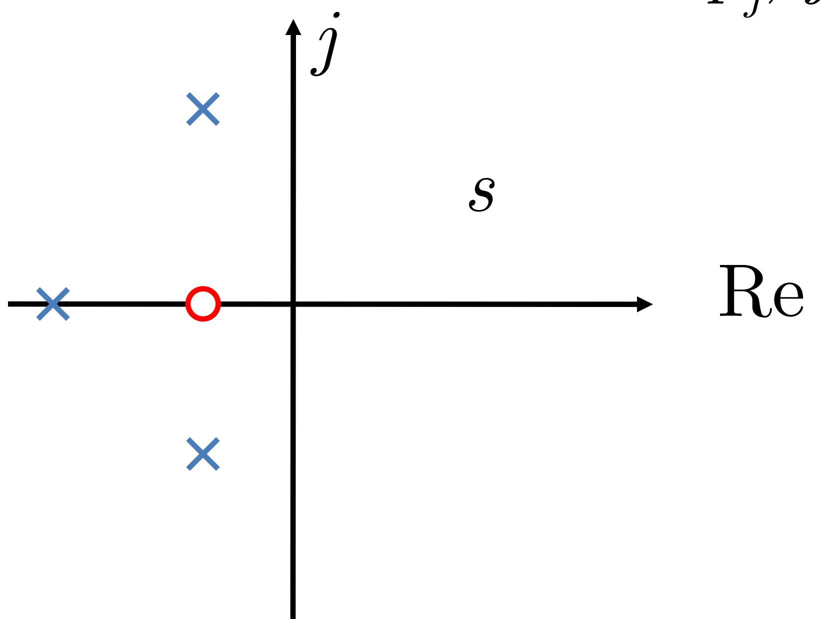
根据定义

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)} := G(s)$$

$$N(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m$$
$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

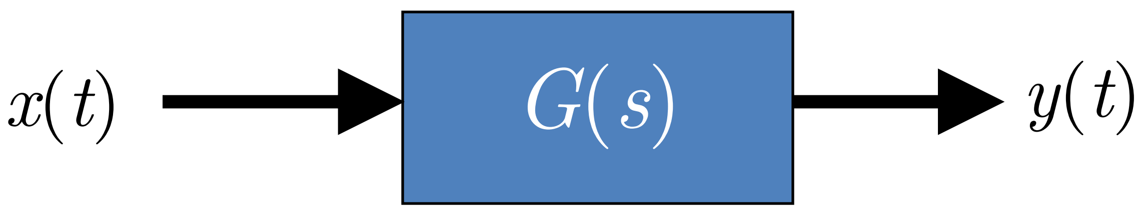
$N(s)$的根称为传递函数的零点，用z_i, i=1,…,m, 表示；

$D(s)$的根称为传递函数的极点，用p_j, j=1,…,n, 表示



二、传递函数的优点：将动态系统的输入和输出关系用简单的代数方程来表示：

$$Y(s)=G(s)X(s)$$

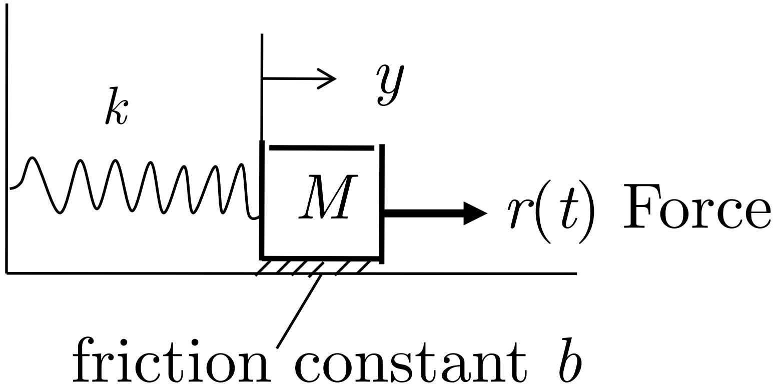


例：给定系统如下：

$$\frac{d^2}{dt^2}y+2\frac{d}{dt}y+3y=u(t)$$

输入为u，输出为y，求其传递函数。

例：弹簧-质量块-阻尼系统：



令$r(t)$为外力，$y(t)$为质量块的位移。求系统的传递函数。

解：系统微分方程为

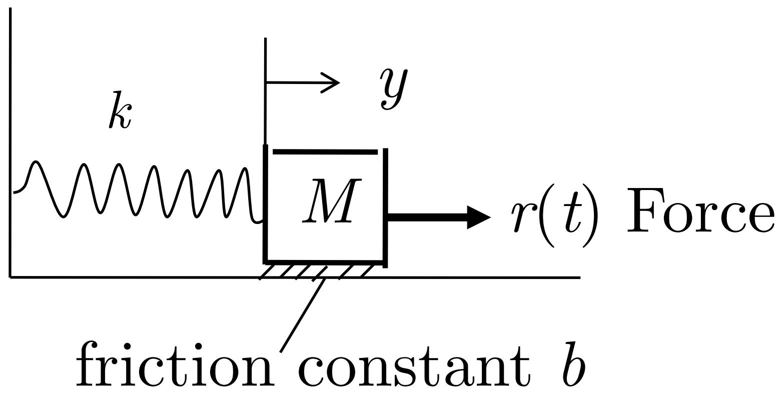
$$M\frac{d^2y(t)}{dt}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=r(t)$$

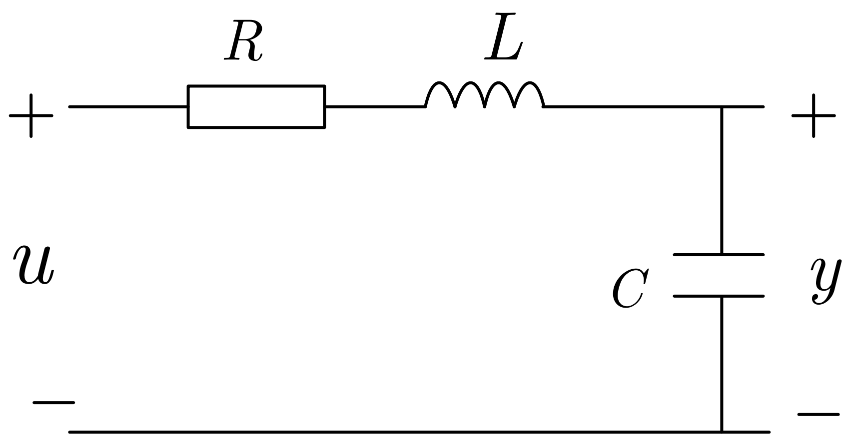
由此可得

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ms^2+bs+k}$$

关于传递函数

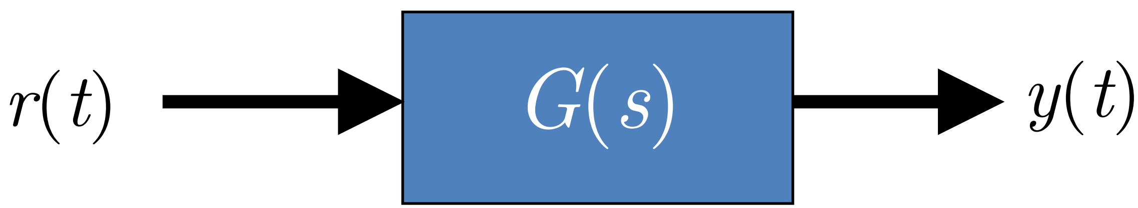
- 仅对 LTI系统适用；
- 只反映系统的输入输出关系；
- 仅取决于系统结构、参数，与输入形式无关；
- 不同的物理系统可以有相同的传递函数；
- 对真实的物理系统，$m \leq n$。


k
y
M
r(t) Force
friction constant b


R
L
+
+
u
C
y
−
−

2-4 系统的脉冲响应函数

一、单位脉冲响应：考虑如下系统：



故

$$Y(s) = G(s)R(s) = G(s)\mathcal{L}(\delta(t))$$
$$= G(s)\cdot 1 = G(s)$$

因此

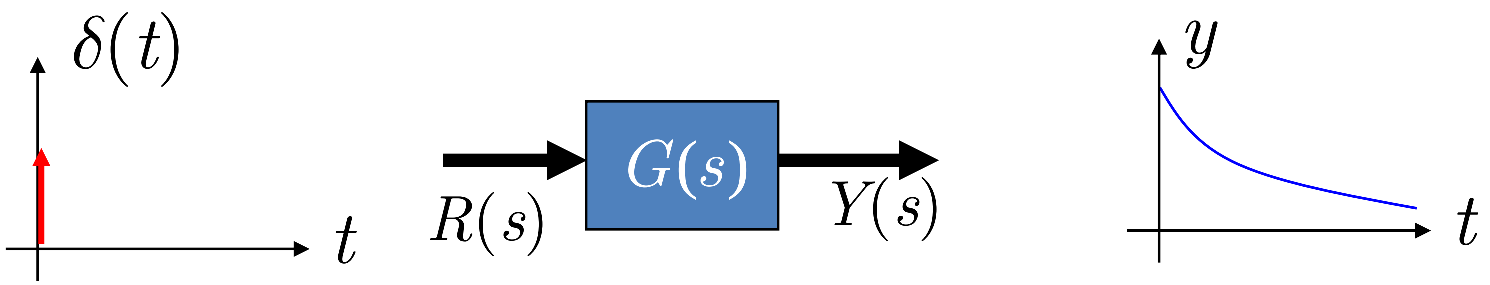
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] := g(t)$$

这里， $g(t)$称为脉冲响应函数。

结论：传递函数的$Laplace$反变换就是系统的单位脉冲响应。

例：给定

$$Y(s) = G(s)R(s)$$

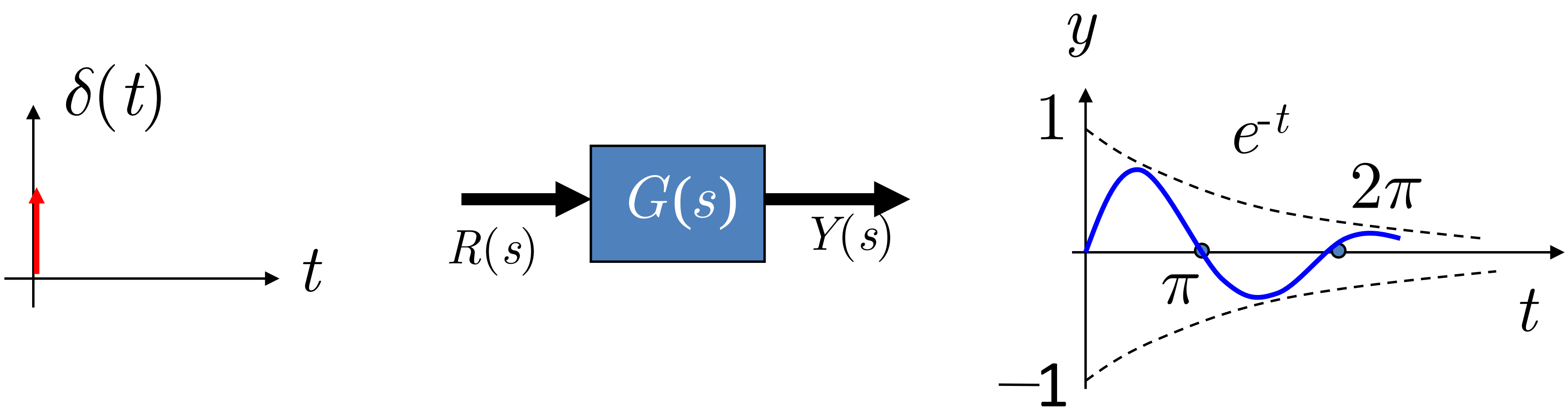


若

$$y(t) = e^{-t}, t \geq 0$$

试确定系统的传递函数。

例：某LTI系统的单位脉冲响应如下图所示：



试确定系统的传递函数。

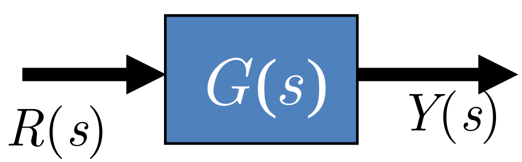
例：令

$$Y(s)=G(s)R(s)=\frac{1}{s^3+3s^2+3s+1}R(s)$$

试确定其脉冲响应函数。

二、卷积

考虑如下系统：



由

$$Y(s)=G(s)R(s)$$

利用卷积定理

$$y(t)=\int_0^t g(\tau)r(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t g(t-\tau)r(\tau)d\tau$$

其中，$g(t)$就是脉冲响应函数：

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

例：给定

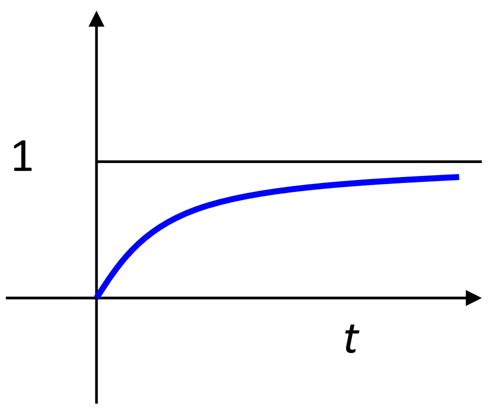
$$Y(s)=G(s)R(s)=\frac{1}{s+1}R(s)$$

若 $R(\mathrm{s})=1/s$，求 $y(t)$。

解：

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)=e^{-t},t\geq 0$$

$$r(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1(t)$$

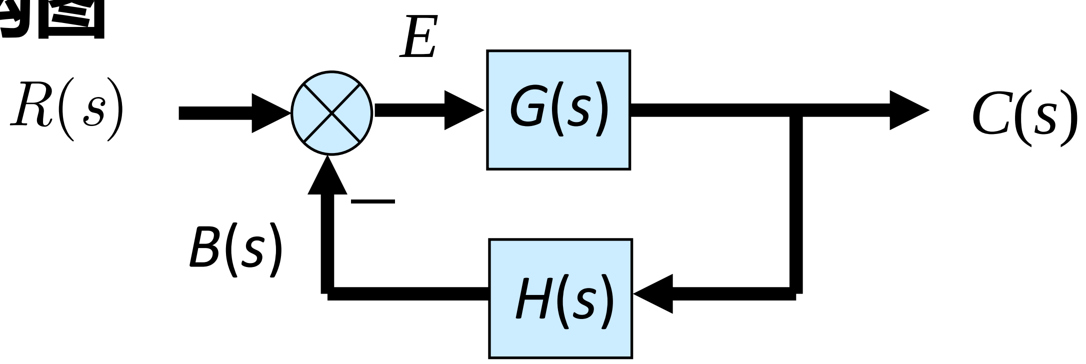


故

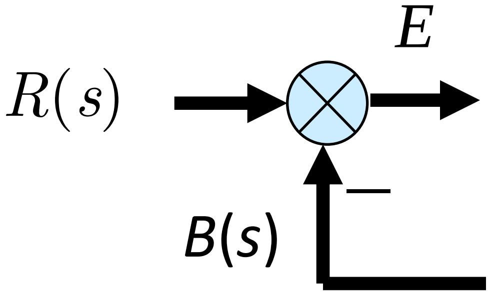
$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)r(\tau)d\tau=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\cdot 1d\tau=1-e^{-t},t\geq 0$$

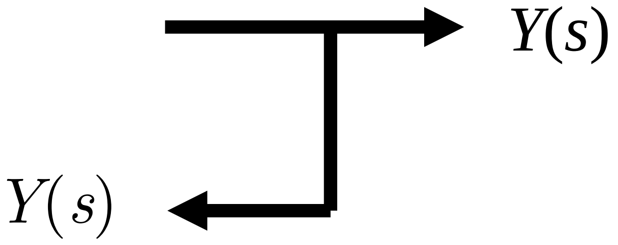
2-5 动态结构图

一、结构图

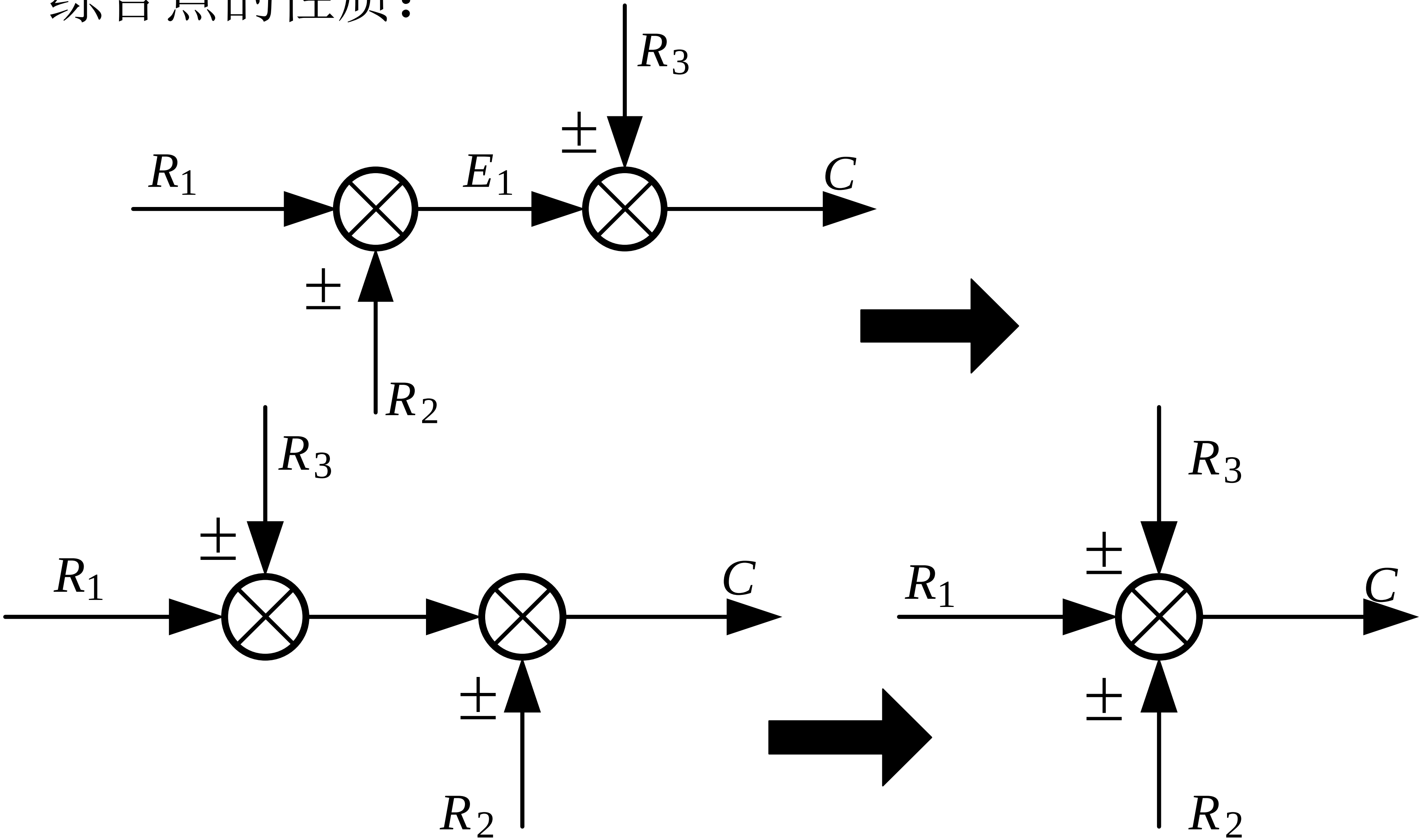


其中，综合点 $E(s)=R(s)-B(s)$ 、引出点如下：





综合点的性质：



例：系统如图所示，其中u_c为输出，u_r为输入。试绘系统结构图。

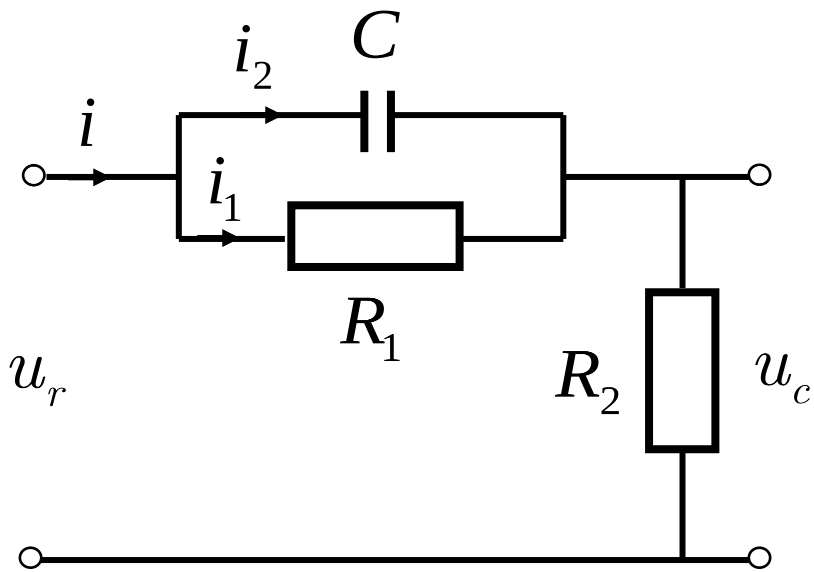
解：

Sept 1： 写各元部件的输入输出关系：

$$R_1 i_1 = (u_r - u_c)$$

$$i_2 = C\frac{du_{R1}}{dt} = CR_1\frac{di_1}{dt}$$

$$u_c = R_2(i_1 + i_2)$$



Sept 2：对以上各式两边进行 *Laplace*变换：

$$R_1 I_1(s) = (U_r(s) - U_c(s))$$

$$I_2(s) = R_1 C s I_1(s)$$

$$U_c(s) = R_2(I_1(s) + I_2(s))$$

Sept 3：整理

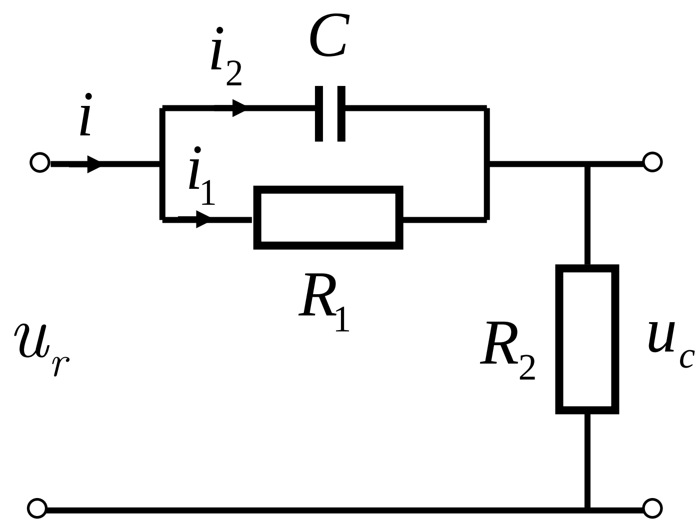
$$I_1(s) = \frac{1}{R_1}[U_r(s) - U_c(s)] \quad (1)$$

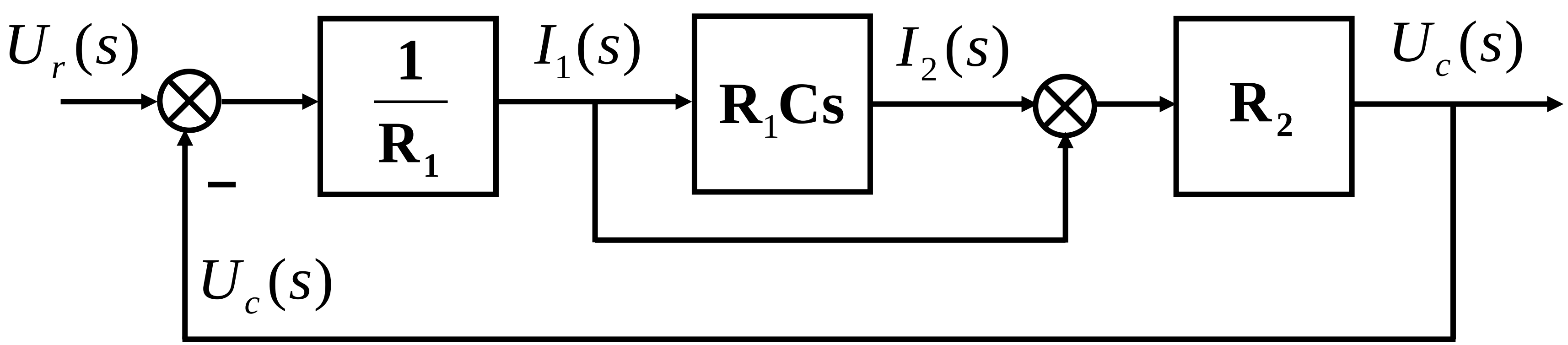
$$I_2(s) = R_1 C s I_1(s) \quad (2)$$

$$U_c(s) = R_2[I_1(s) + I_2(s)] \quad (3)$$

Step 4：根据(1)-(3)，绘制结构图如下：

$$
\begin{cases}
I_1(s) = \dfrac{1}{R_1}[U_r(s) - U_c(s)] & (1) \\
I_2(s) = R_1 Cs I_1(s) & (2) \\
U_c(s) = R_2[I_1(s) + I_2(s)] & (3)
\end{cases}
$$





例：某系统由如下方程描述：

$$x_1 = r - c$$

$$x_2 = \tau \dot{x}_1 + K_1 x_1$$

$$x_3 = K_2 x_2$$

$$x_4 = x_3 - x_5 - K_5 c$$

$$\dot{x}_5 = K_3 x_4$$

$$K_4 x_5 = T\dot{c} + c$$

绘系统结构图，这里，τ、K_i、T 为正常数，输入和输出信号分别为 r 和 c，x_1~x_5 为中间变量。

例：某系统由如下方程描述：

$$x_1 = r - c + n_1$$

$$x_2 = K_1 x_1$$

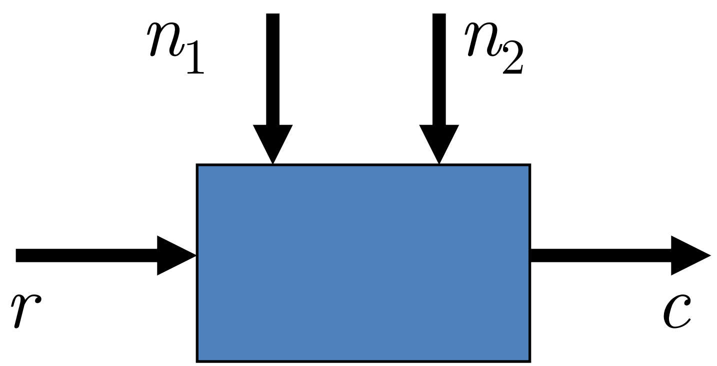
$$x_3 = x_2 - x_5$$

$$T\dot{x}_4 = x_3$$

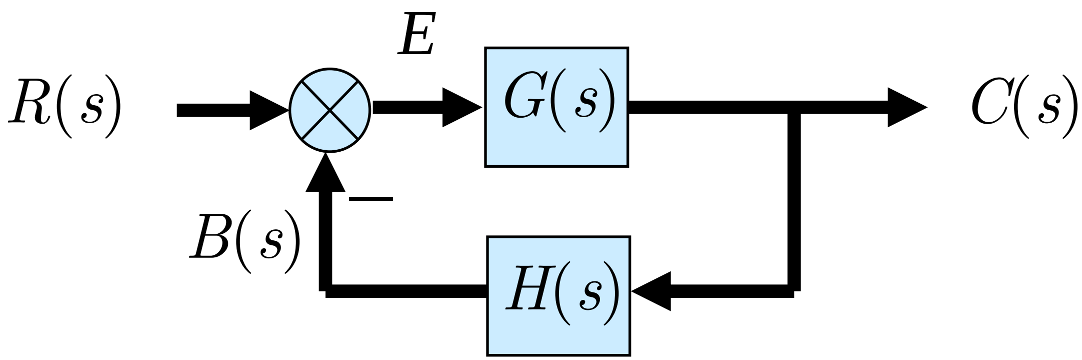
$$x_5 = x_4 - K_2 n_2$$

$$K_0 x_5 = \ddot{c} + \dot{c}$$

K_i、T 为正常数，r 和 c分别为输入和输出，n_1 、n_2 为外干扰，x_1～x_5 为中间变量。



二、开环传递函数和前向传递函数



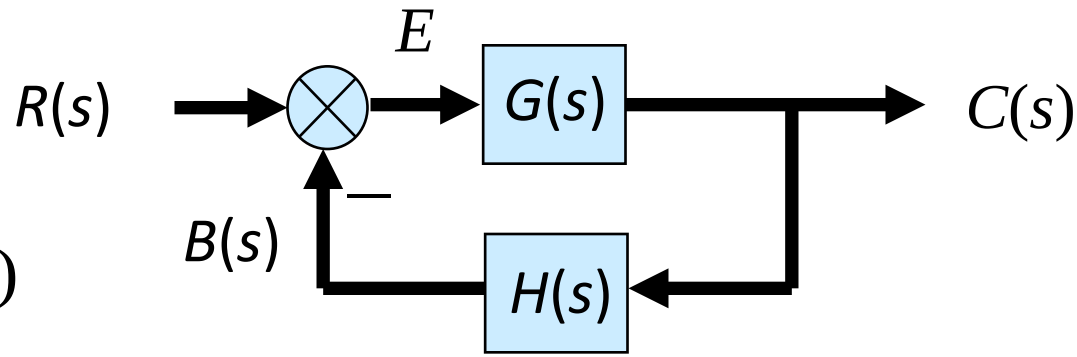
开环传递函数：

$$\frac{B(s)}{E(s)}=G(s)H(s)$$

前向传递函数:

$$\frac{C(s)}{E(s)}=G(s)$$

三、闭环传递函数



$$C(s)=G(s)E(s) \quad (1)$$

$$E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-H(s)C(s) \quad (2)$$

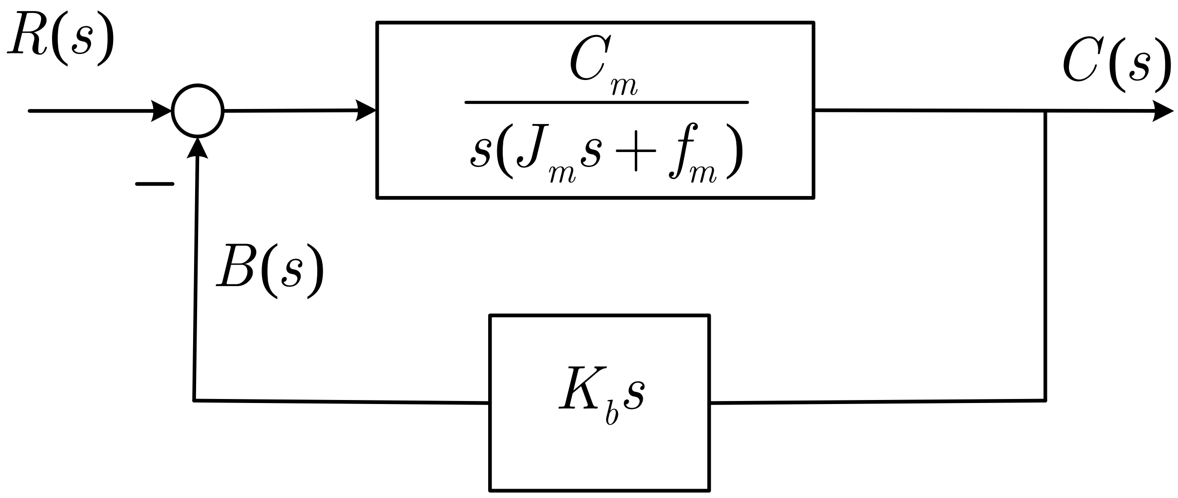
(2)代入 (1)，

$$C(s)=G(s)R(s)-G(s)H(s)C(s) \quad (3)$$

由此得到

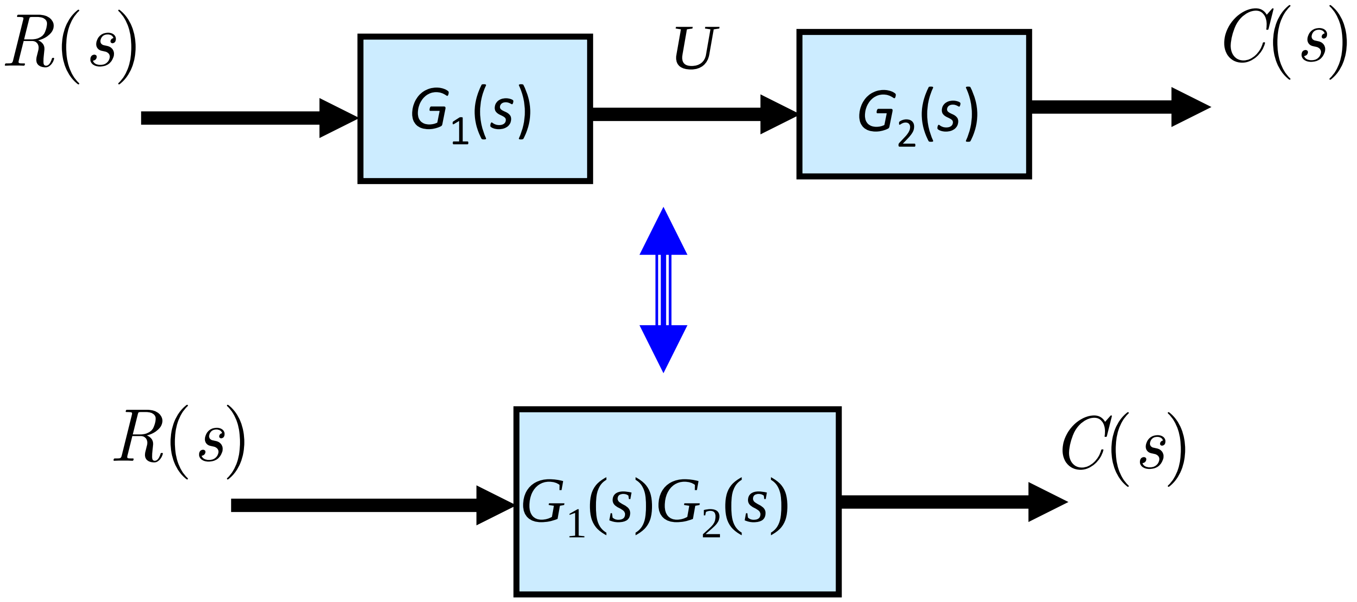
$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

例：系统结构图如下，求闭环传递函数 $C(s)/R(s)$：



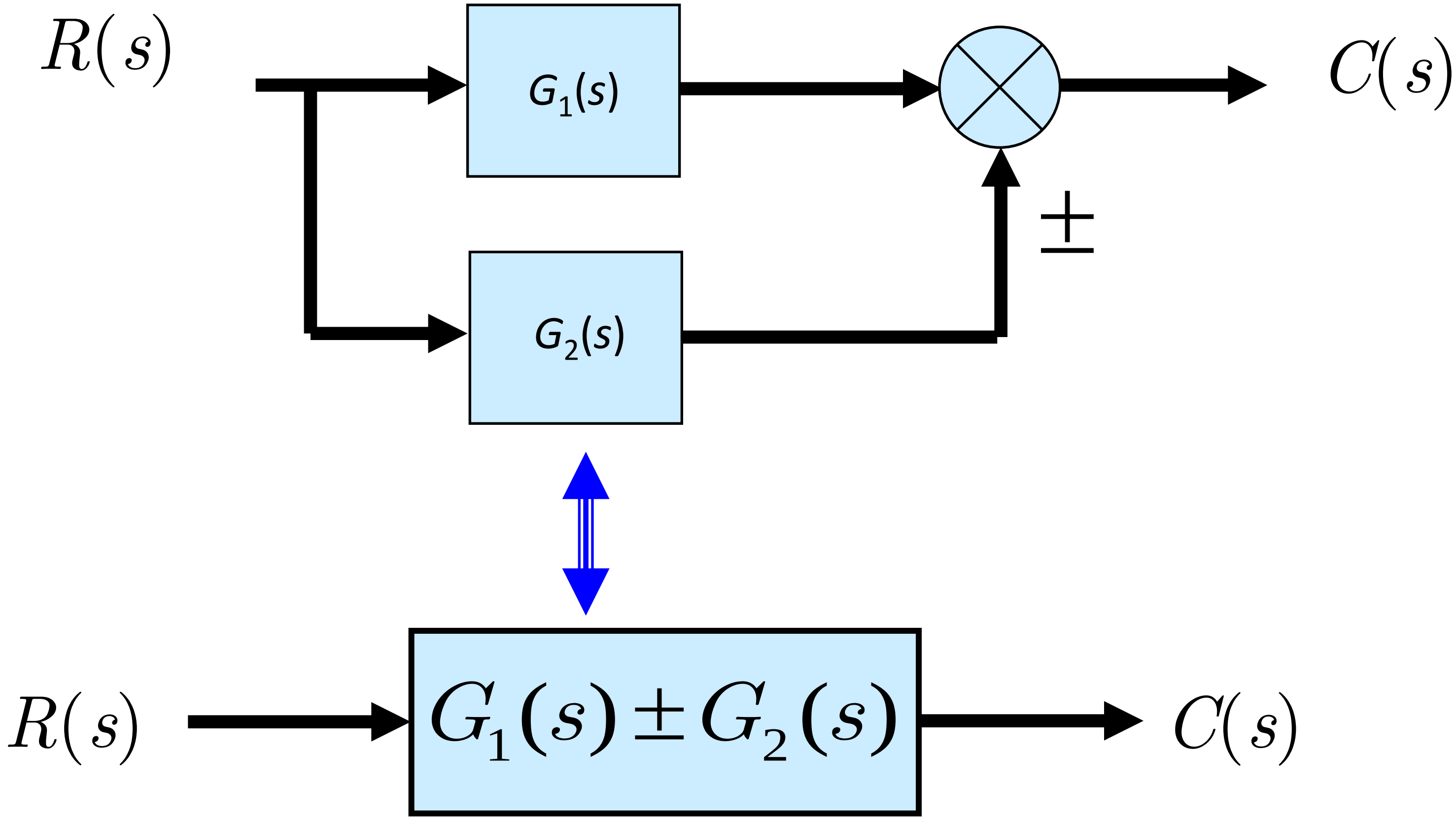
四、等效传递函数

1. 串联等效



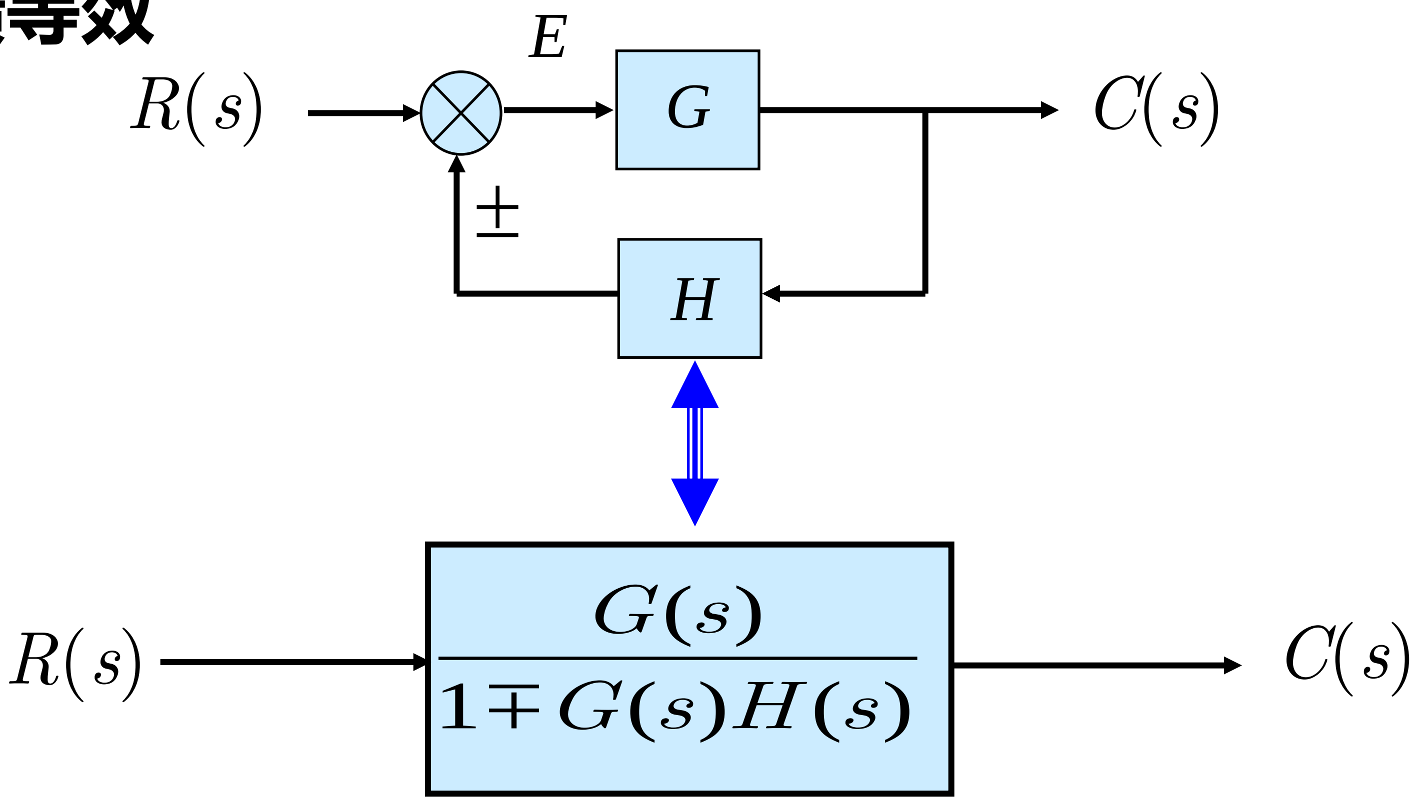
$$C(s) = G_2(s)U(s) = G_2(s)G_1(s)R(s)$$

2. 并联等效



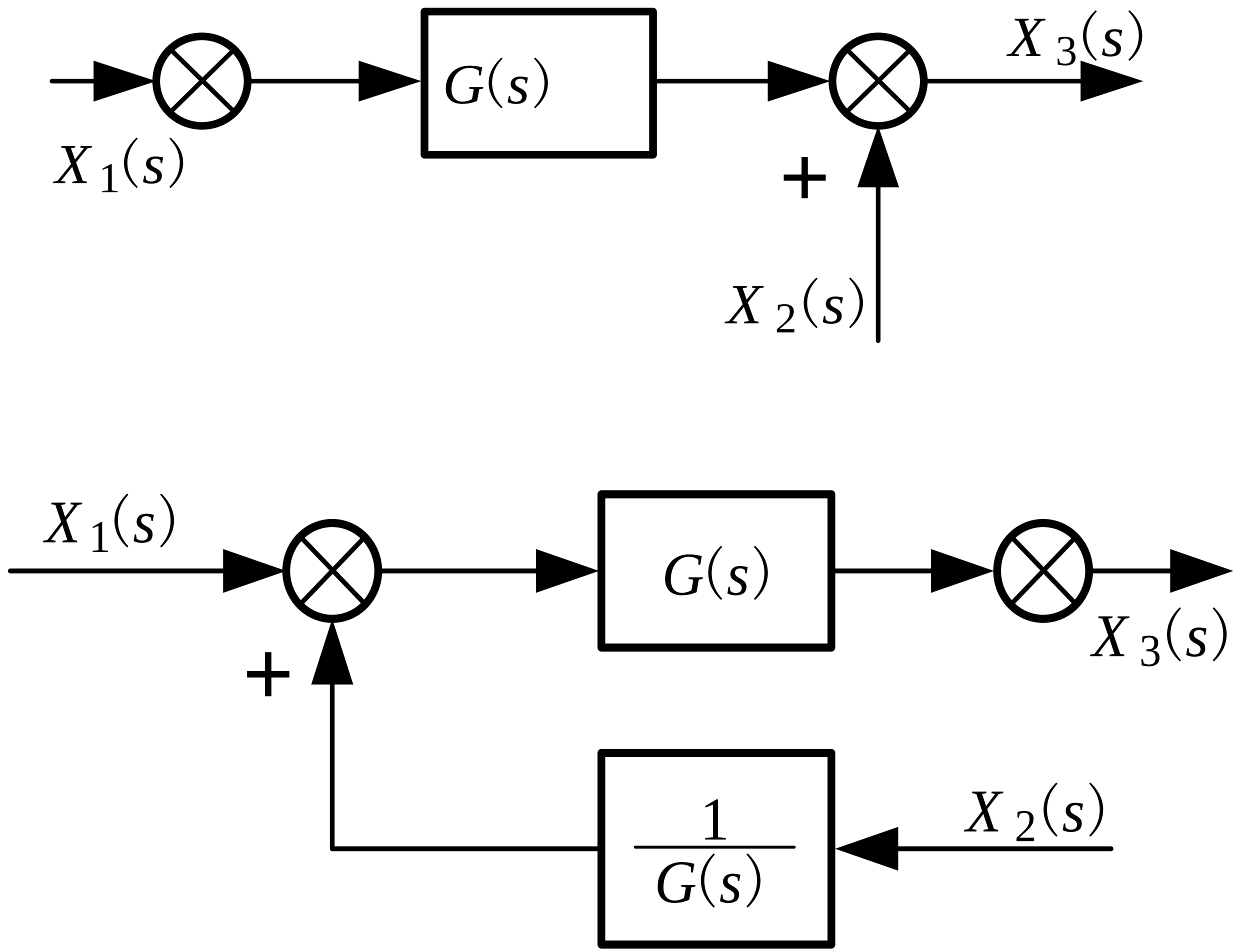
$$C(s)=G_1(s)R(s)\pm G_2(s)R(s)=(G_1(s)\pm G_2(s))R(s)$$

3. 反馈等效

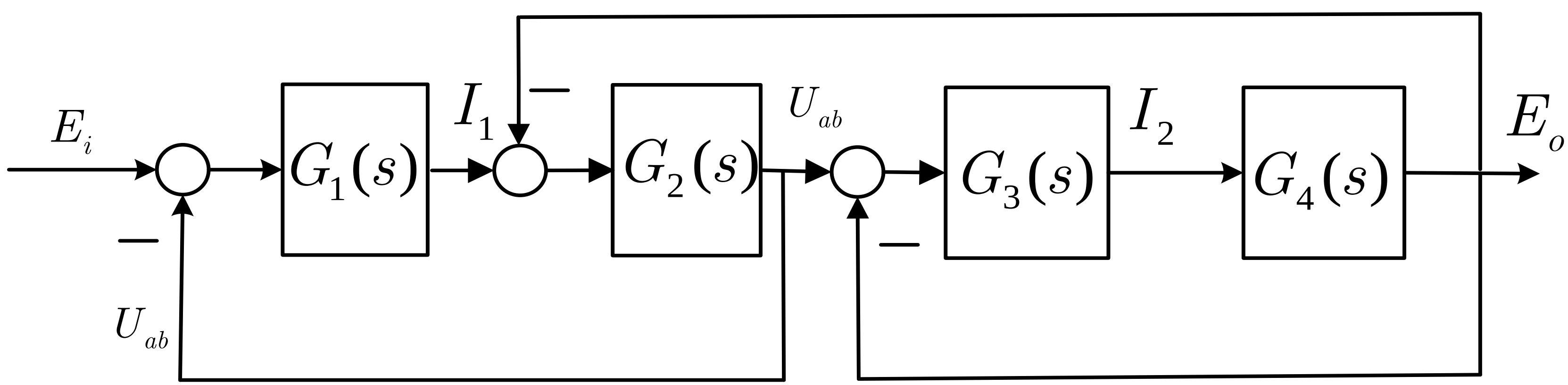


$$C(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} R(s)$$

4. 结构图等效变换：综合点前移:

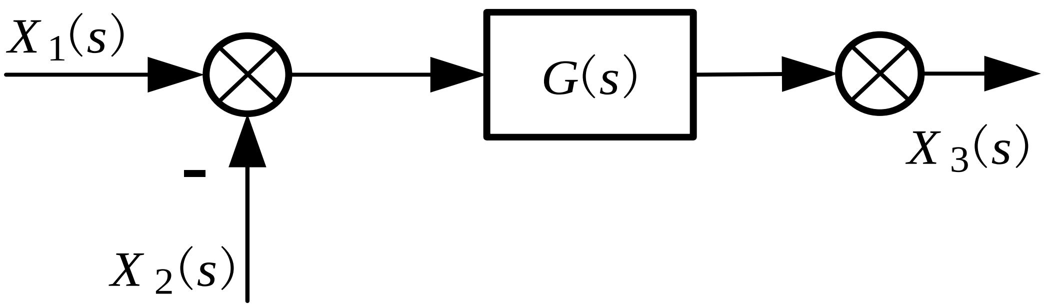


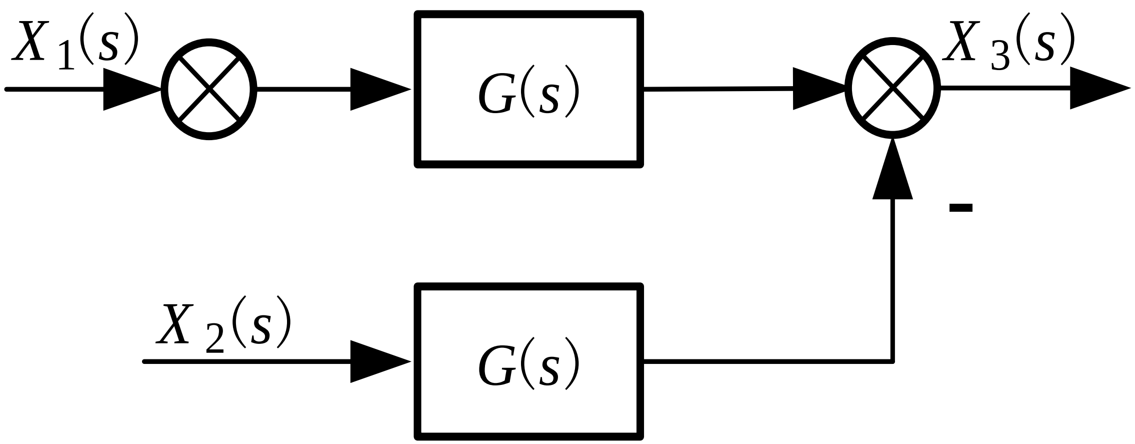
例：化简并求 $E_o(s)/E_i(s)$：



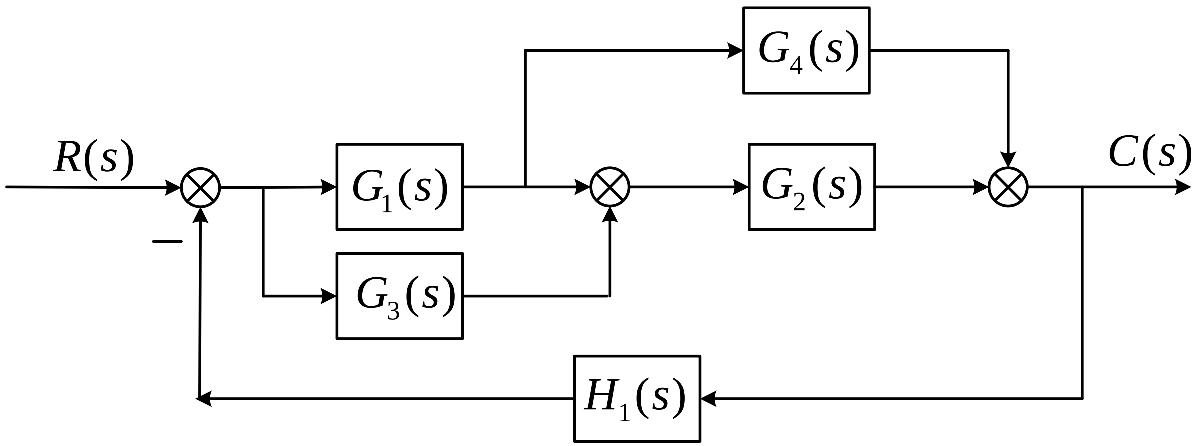
若在两个综合点间有引出点，不要移动。

5. 结构图等效变换：综合点后移:

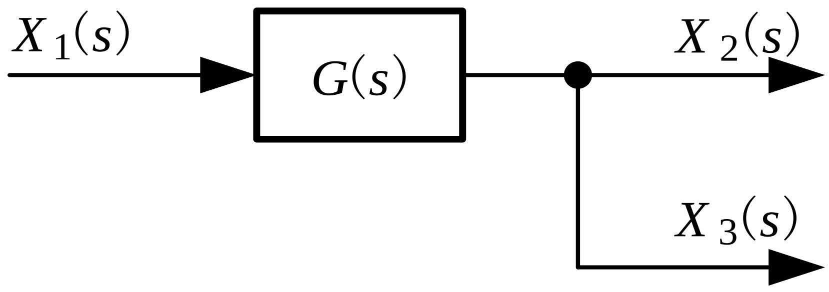


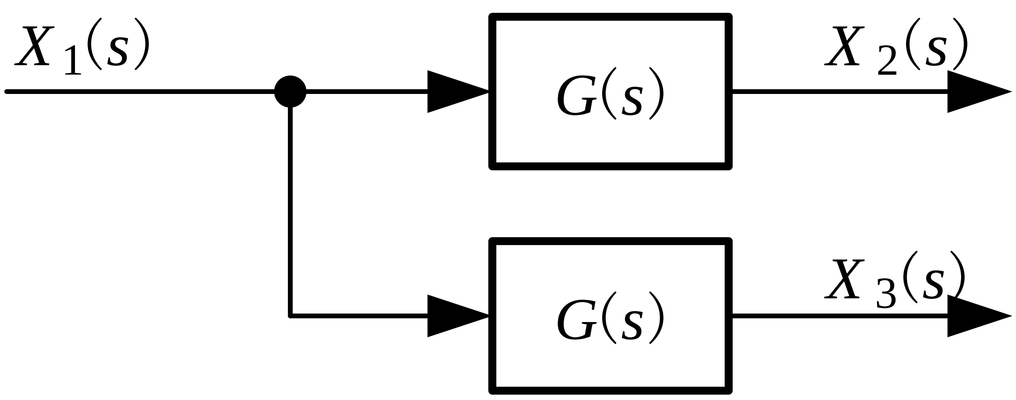


例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。

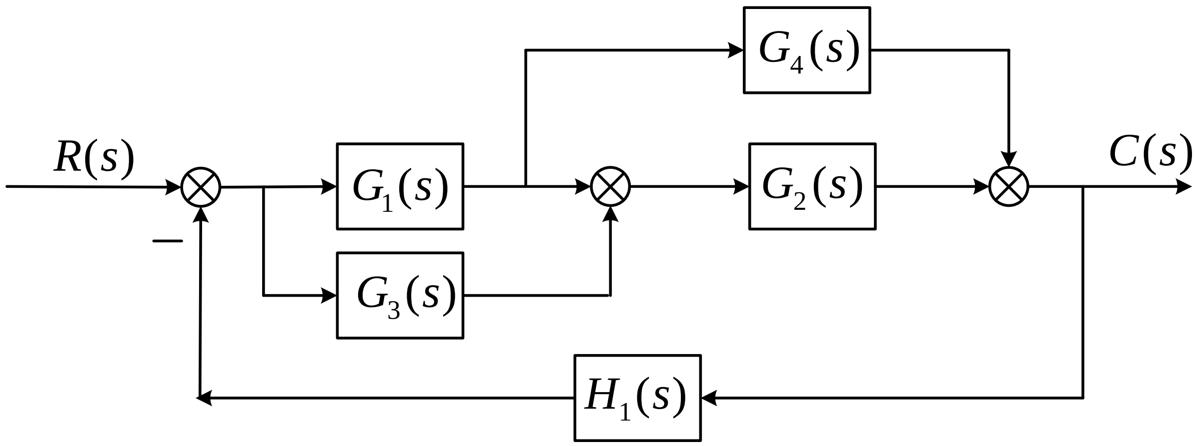


6. 结构图等效变换：引出点前移:



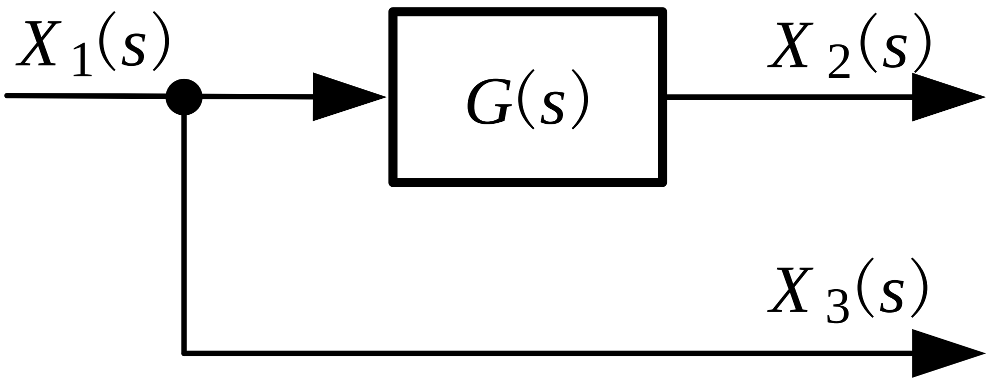


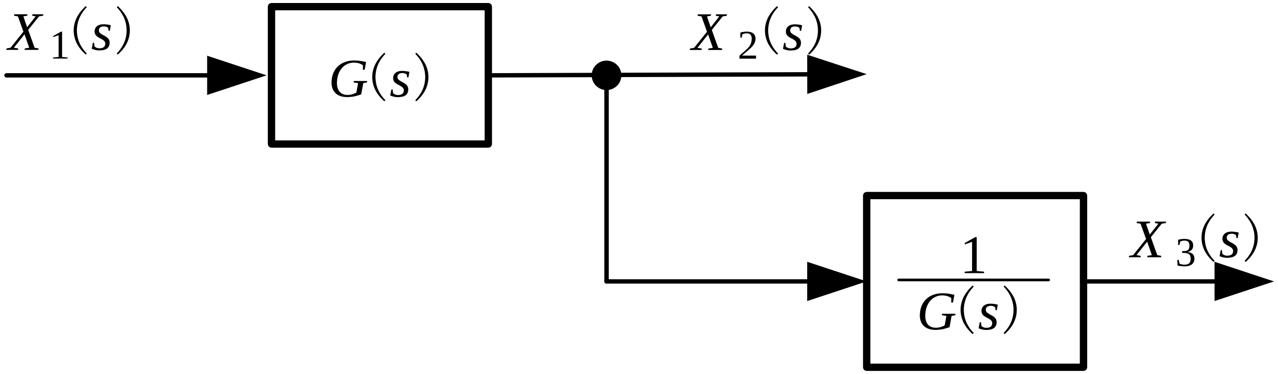
例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。



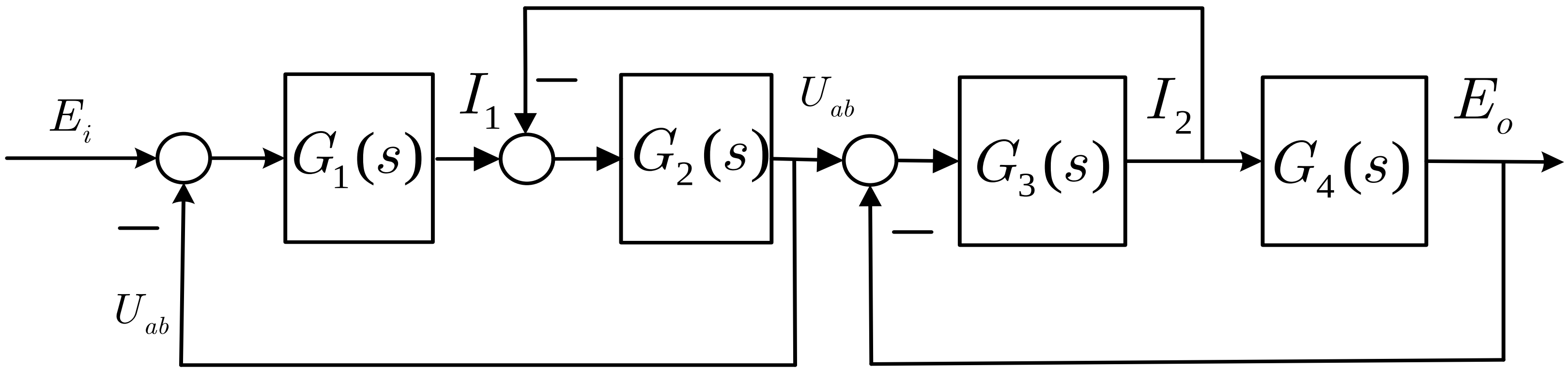
若在两个引出点间有综合点，不要移动。

7. 结构图等效变换：引出点后移:



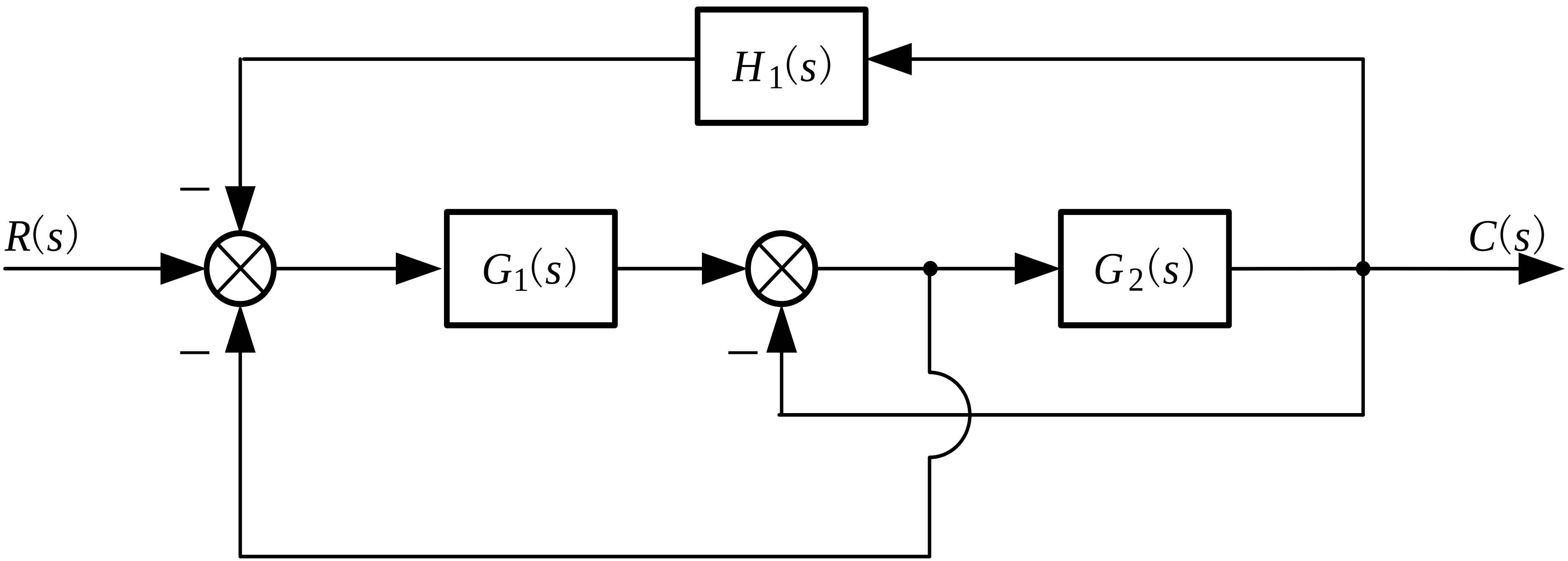


例：化简并求 $E_o(s)/E_i(s)$：



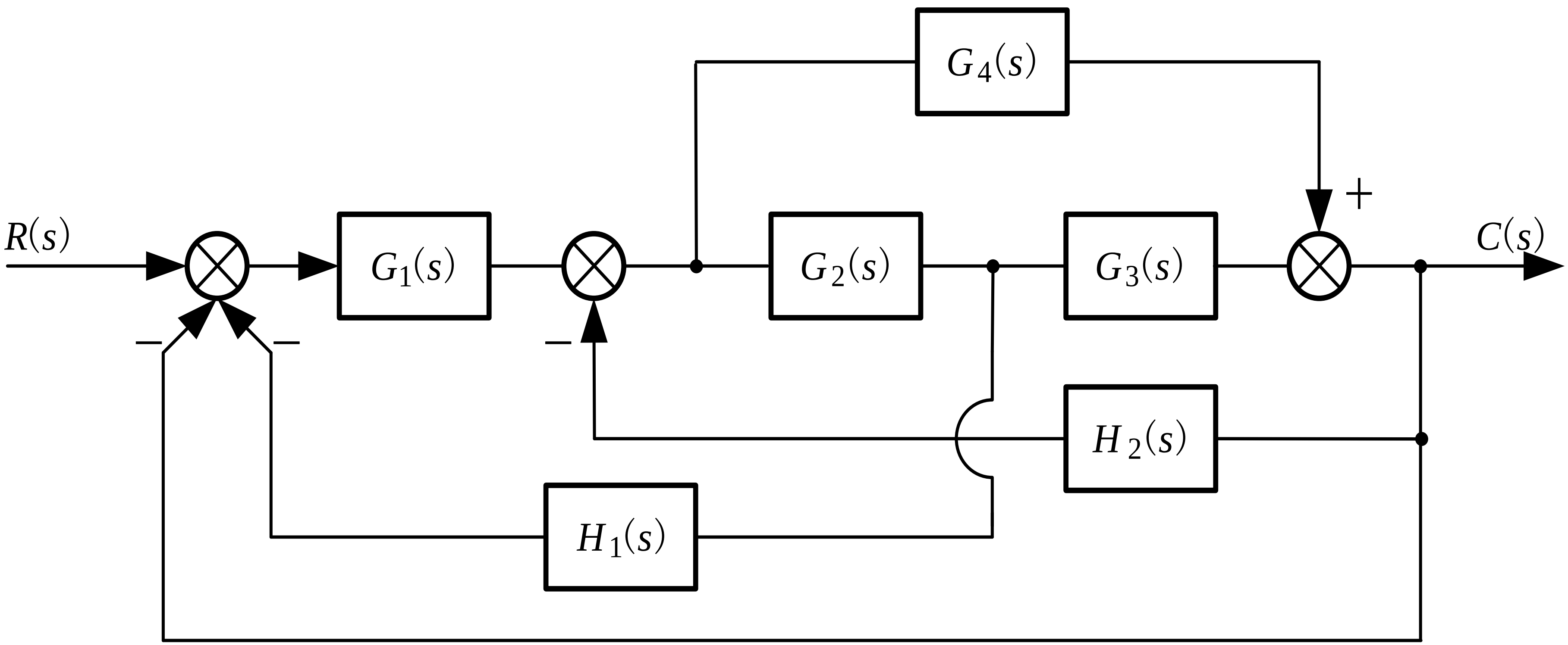
若在两个引出点间有综合点，不要移动。

例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。



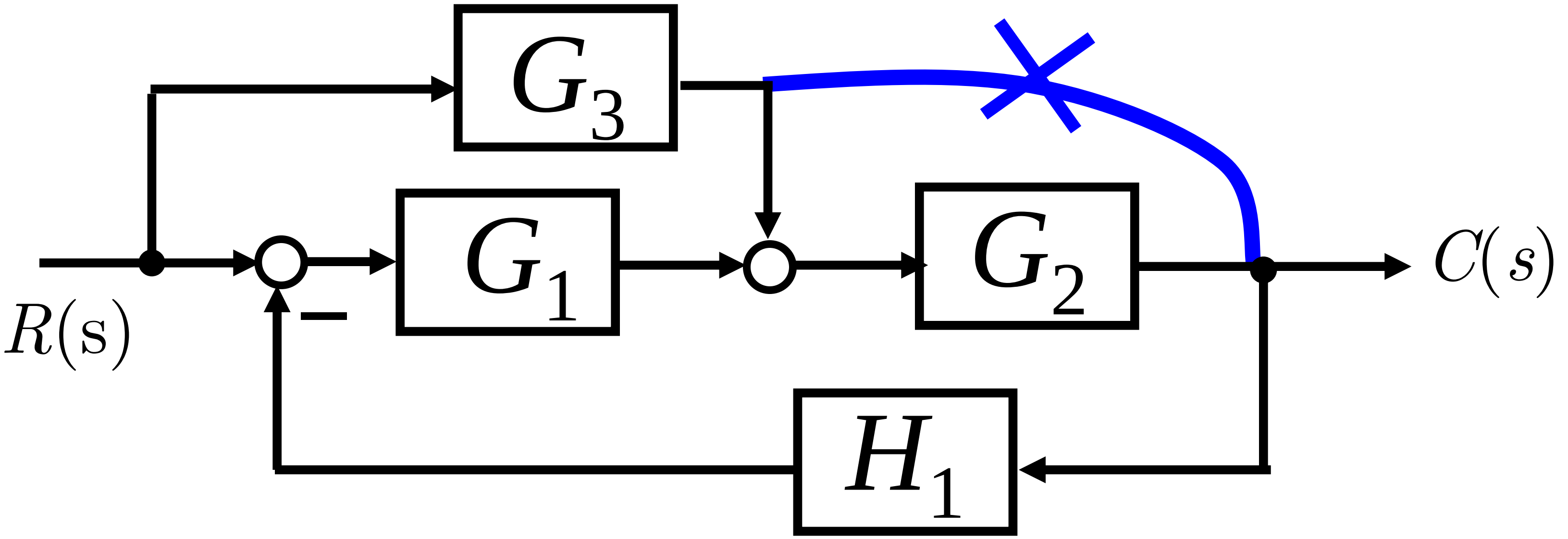
注意：仅在两个综合点（比较点）间进行移动。

例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。

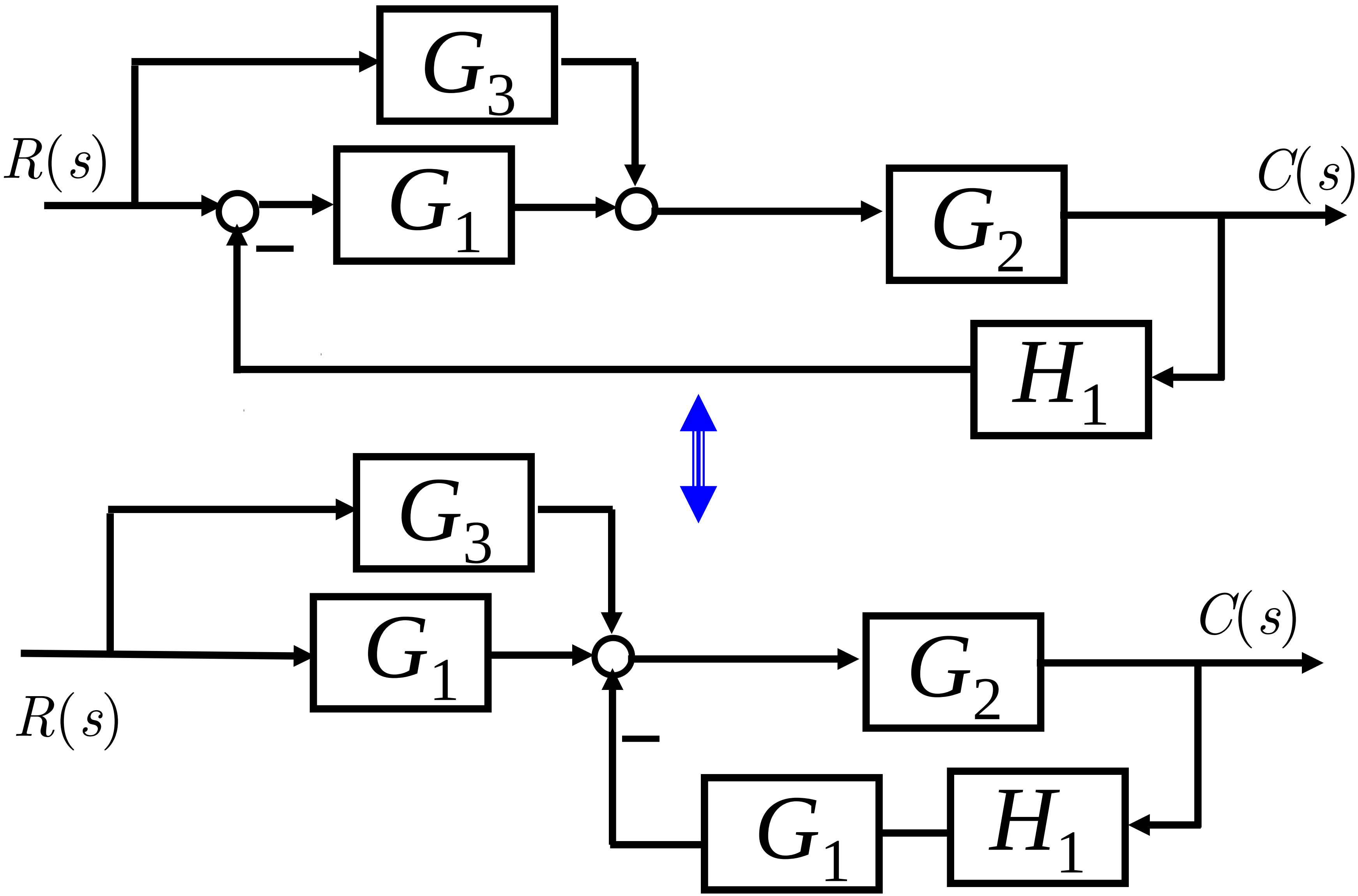


若在两个引出点（综合点）间有综合点（引出点），不要移动。

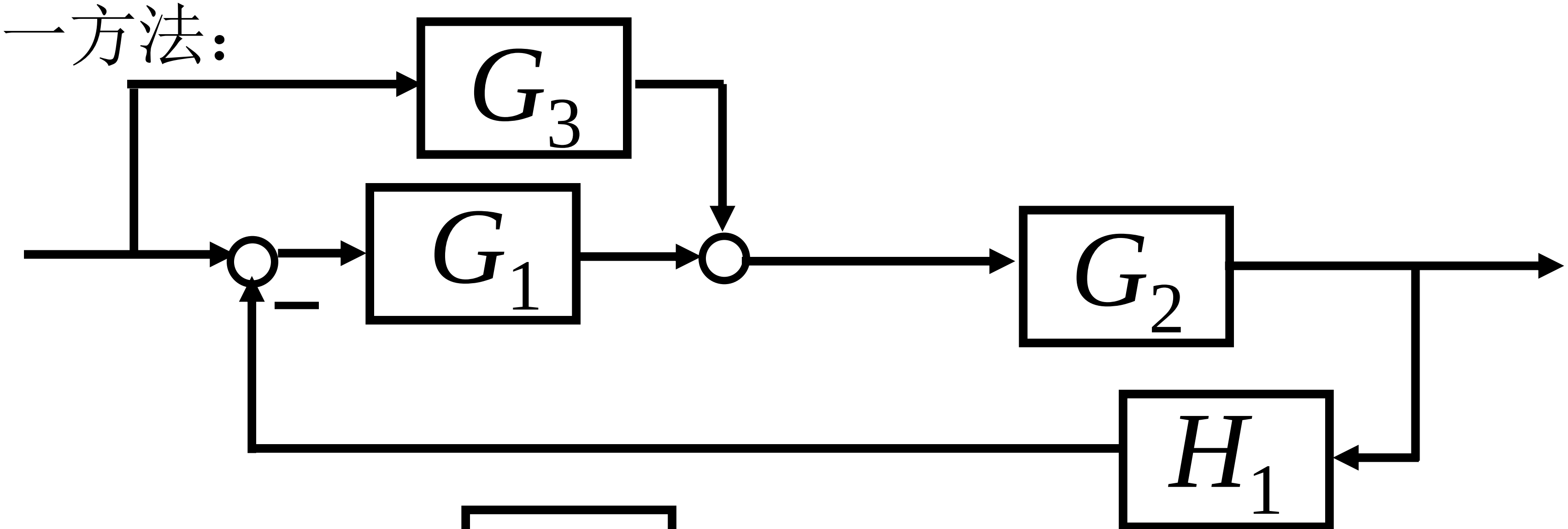
例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。

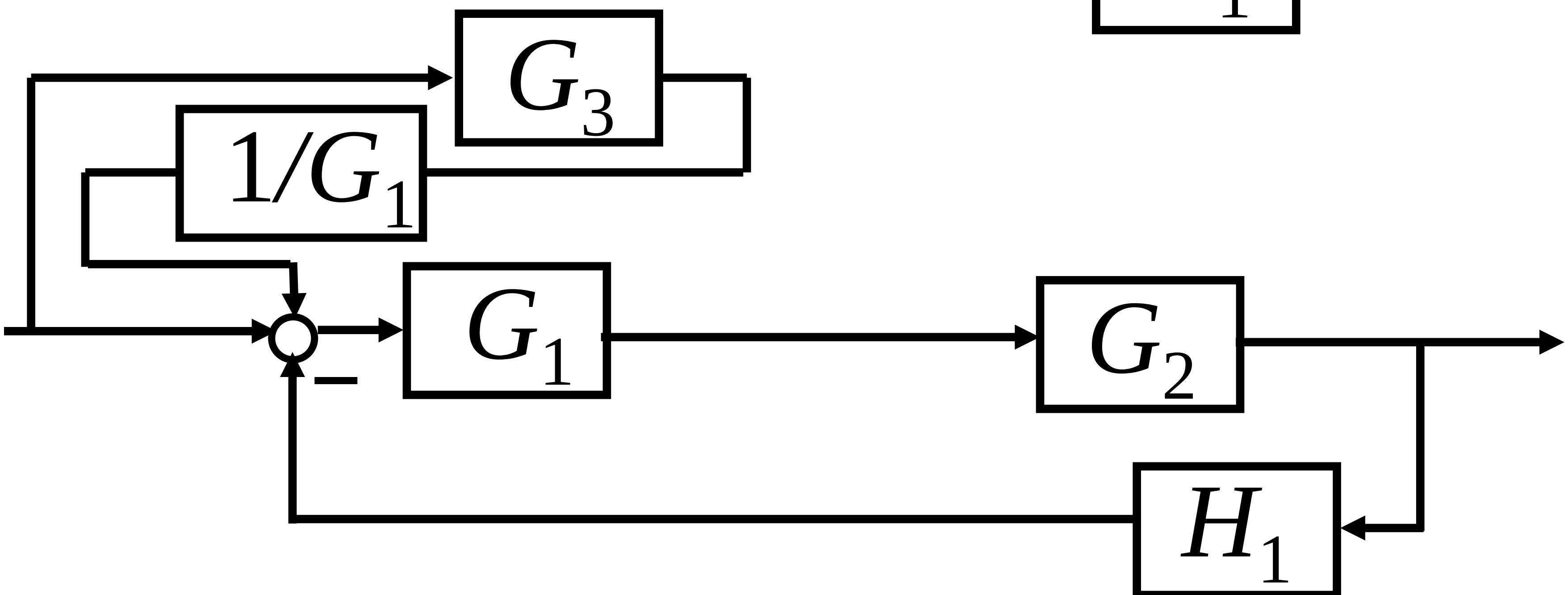


综合点和引出点不能相互移动。

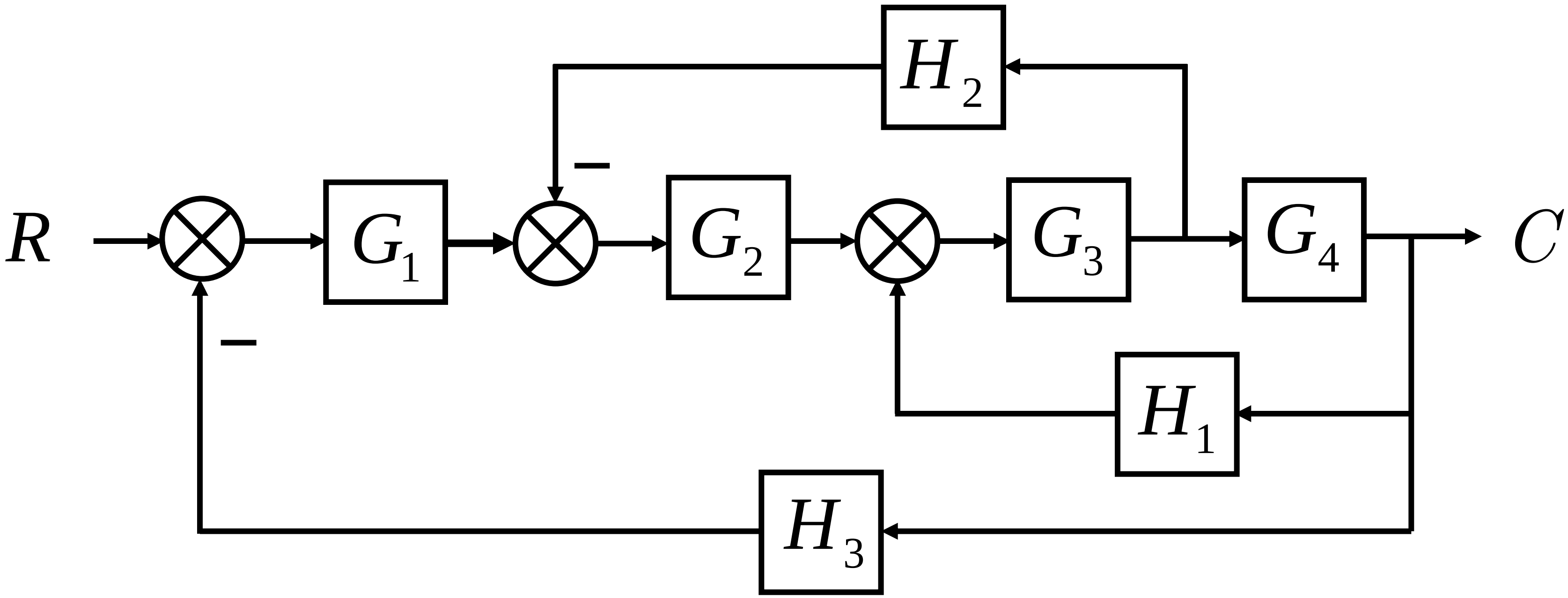

$R(s)$
G_3
G_1
G_2
H_1
$C(s)$
$R(s)$
G_3
G_1
G_2
G_1
H_1
$C(s)$

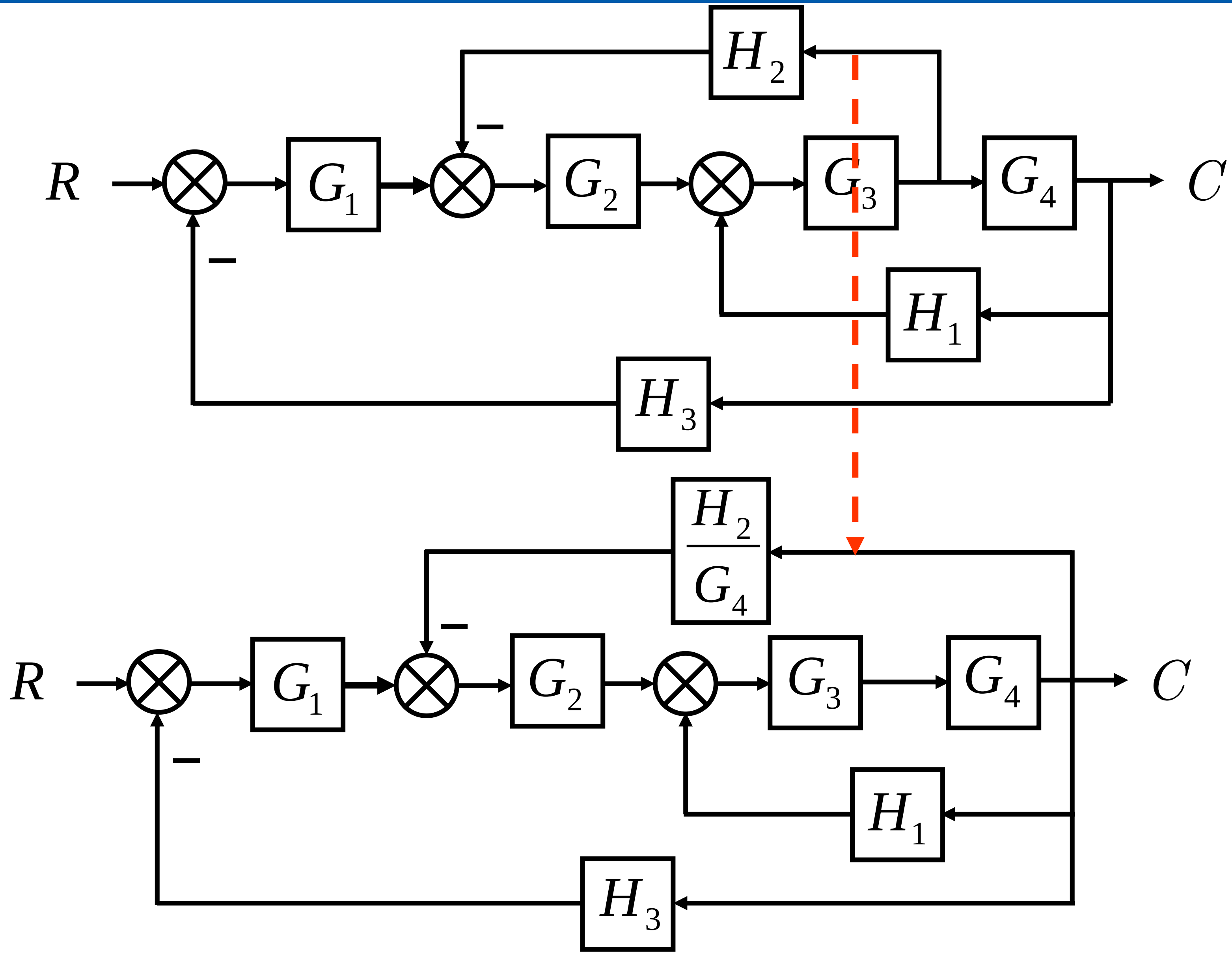
另一方法：

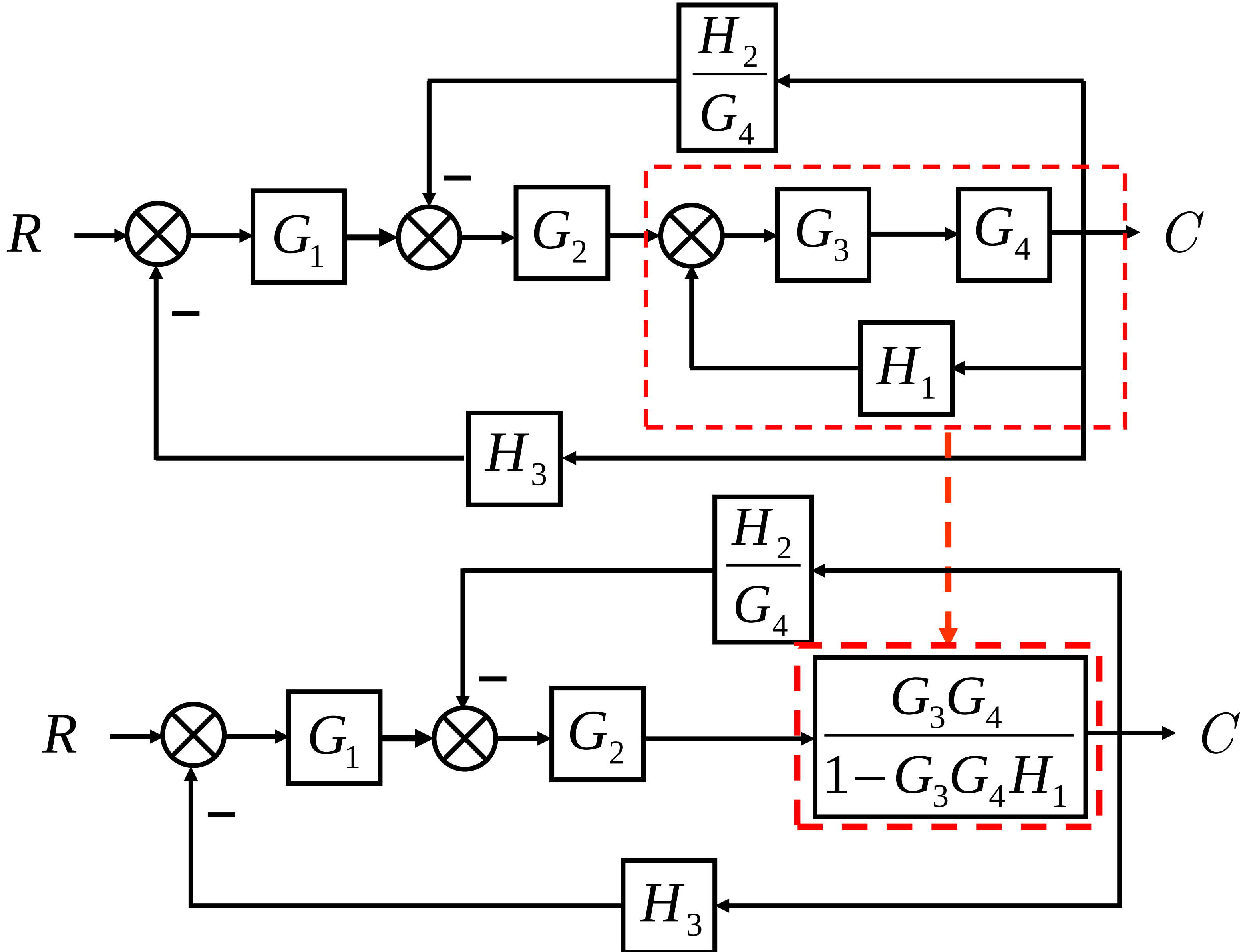


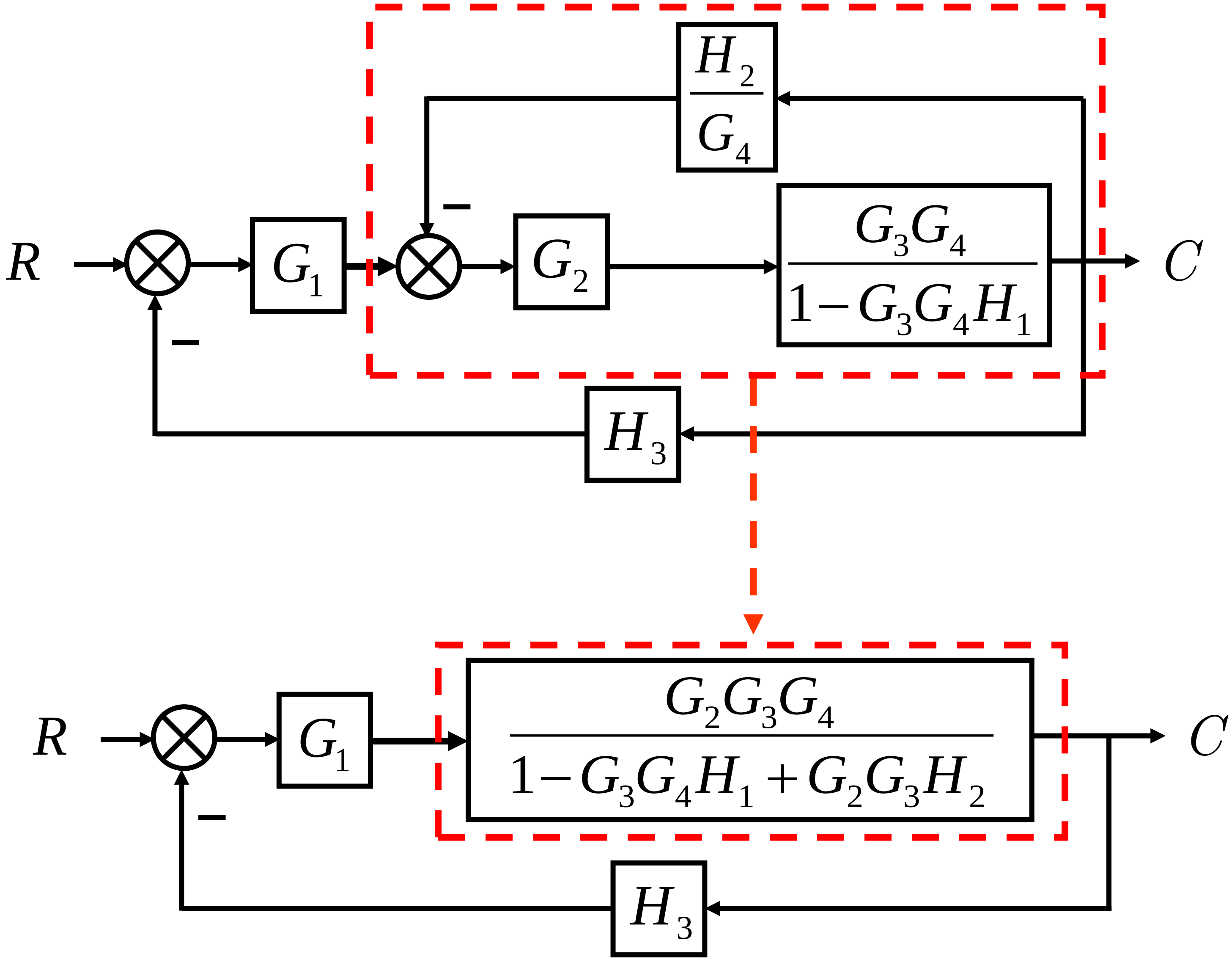


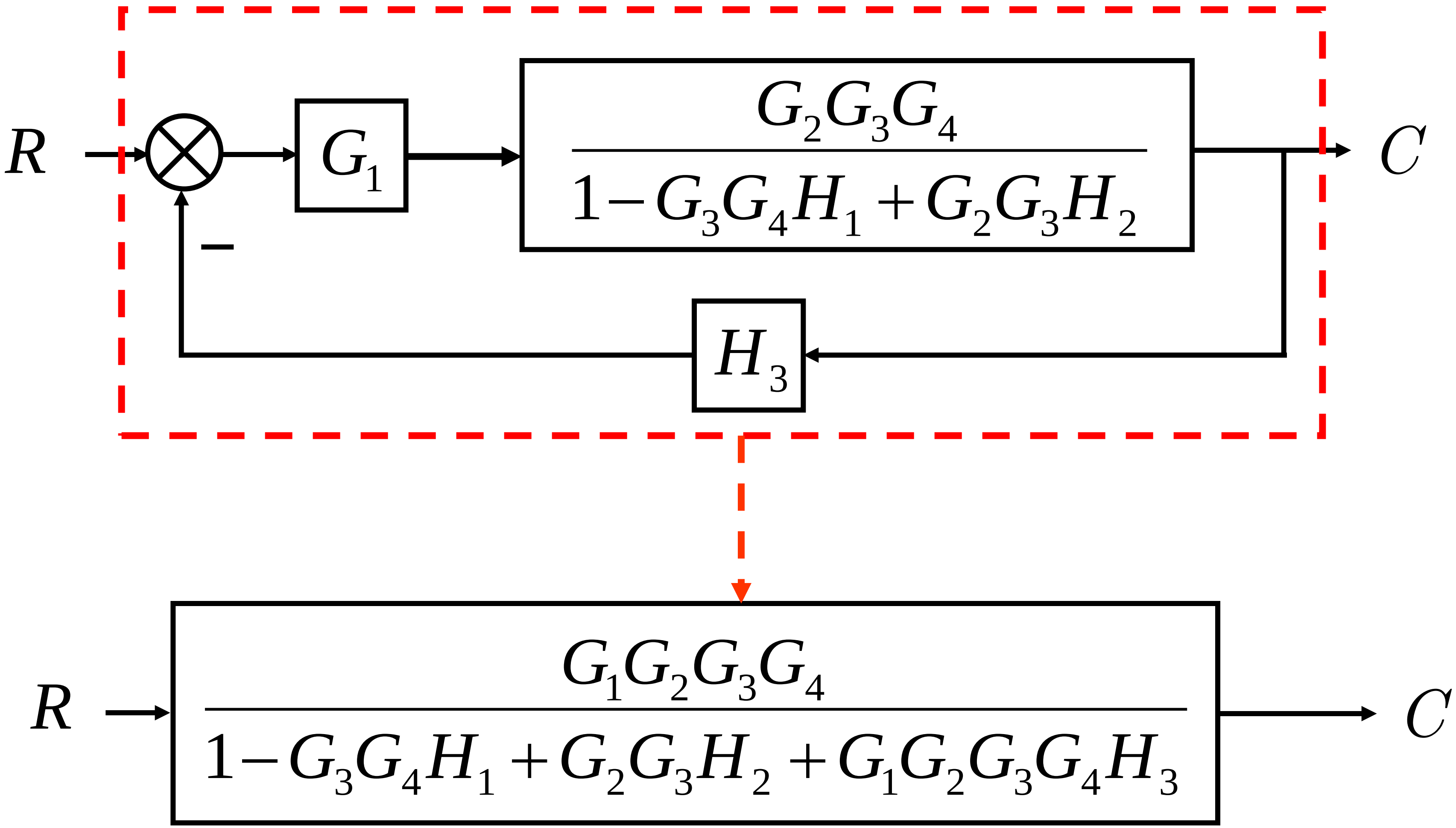
例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。




R
G1
G2
G3
G4
C
H2
H1
H3
−
−
R
G1
G2
G3
G4
C
H2/G4
H1
H3
−
−

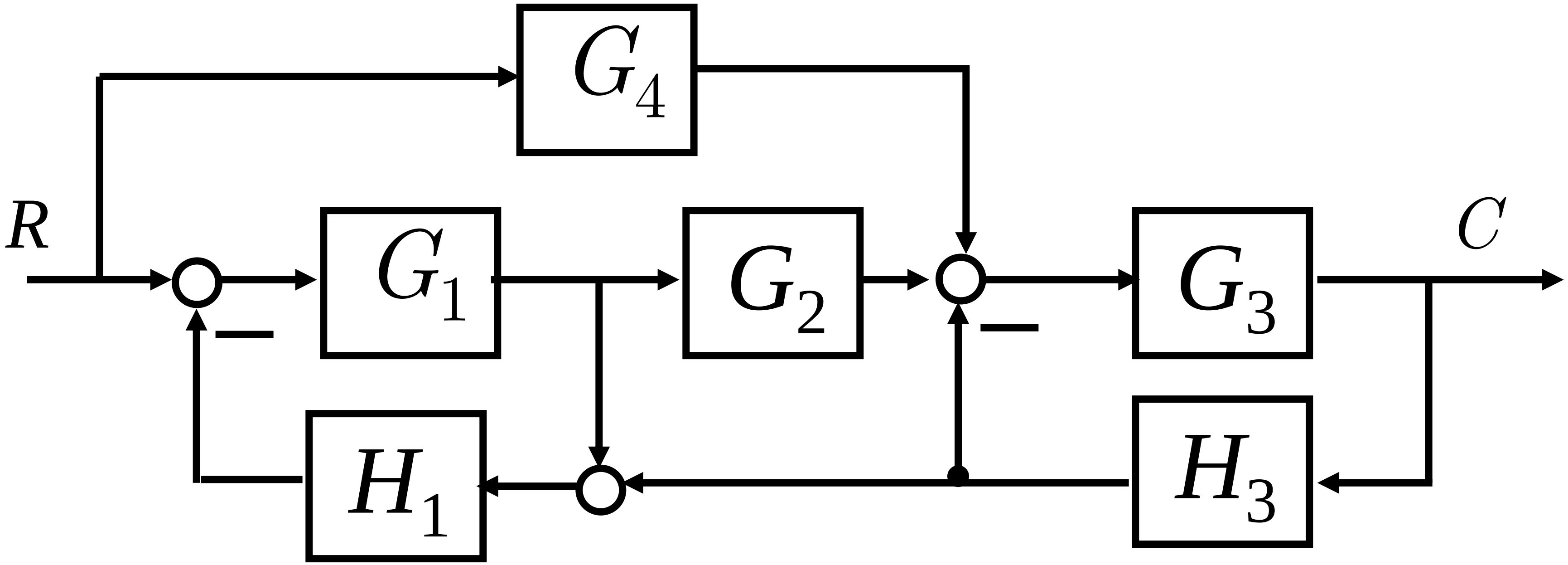

R
G1
G2
G3
G4
C
H2/G4
H1
H3
R
G1
G2
G3G4/(1−G3G4H1)
C
H2/G4
H3

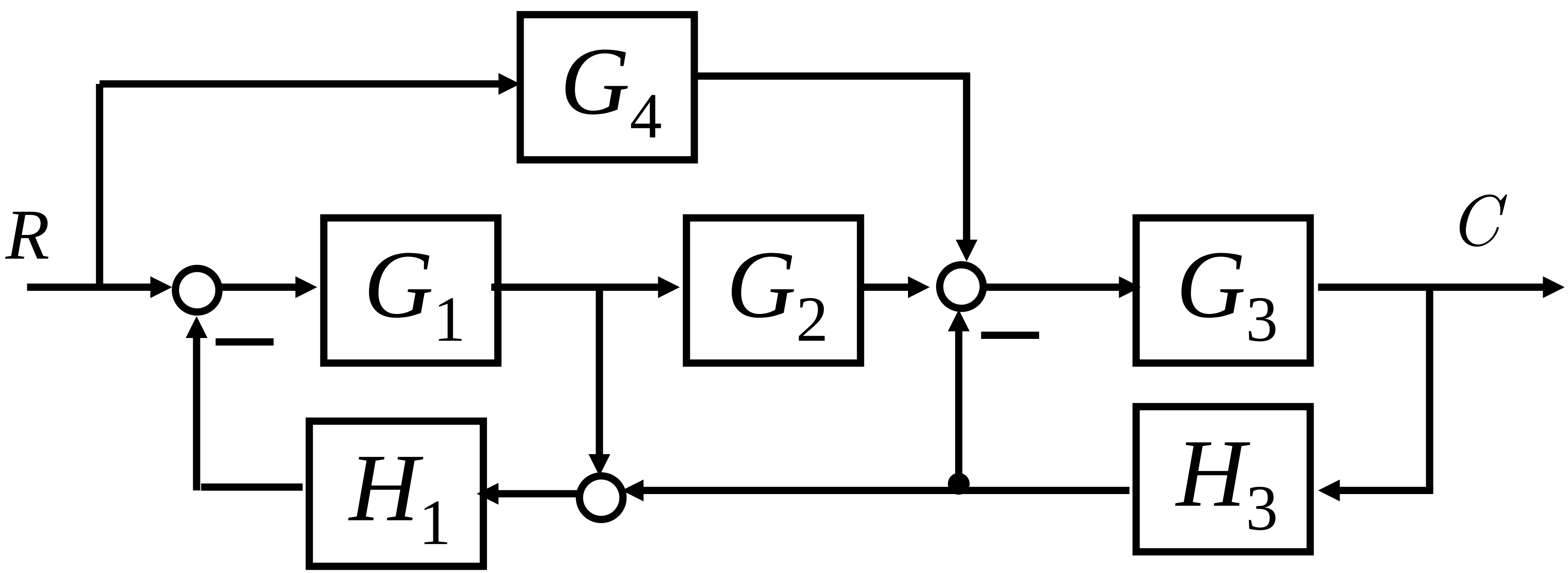

R
G_1
G_2
$\frac{H_2}{G_4}$
$\frac{G_3G_4}{1-G_3G_4H_1}$
C
H_3
R
G_1
$\frac{G_2G_3G_4}{1-G_3G_4H_1+G_2G_3H_2}$
C
H_3

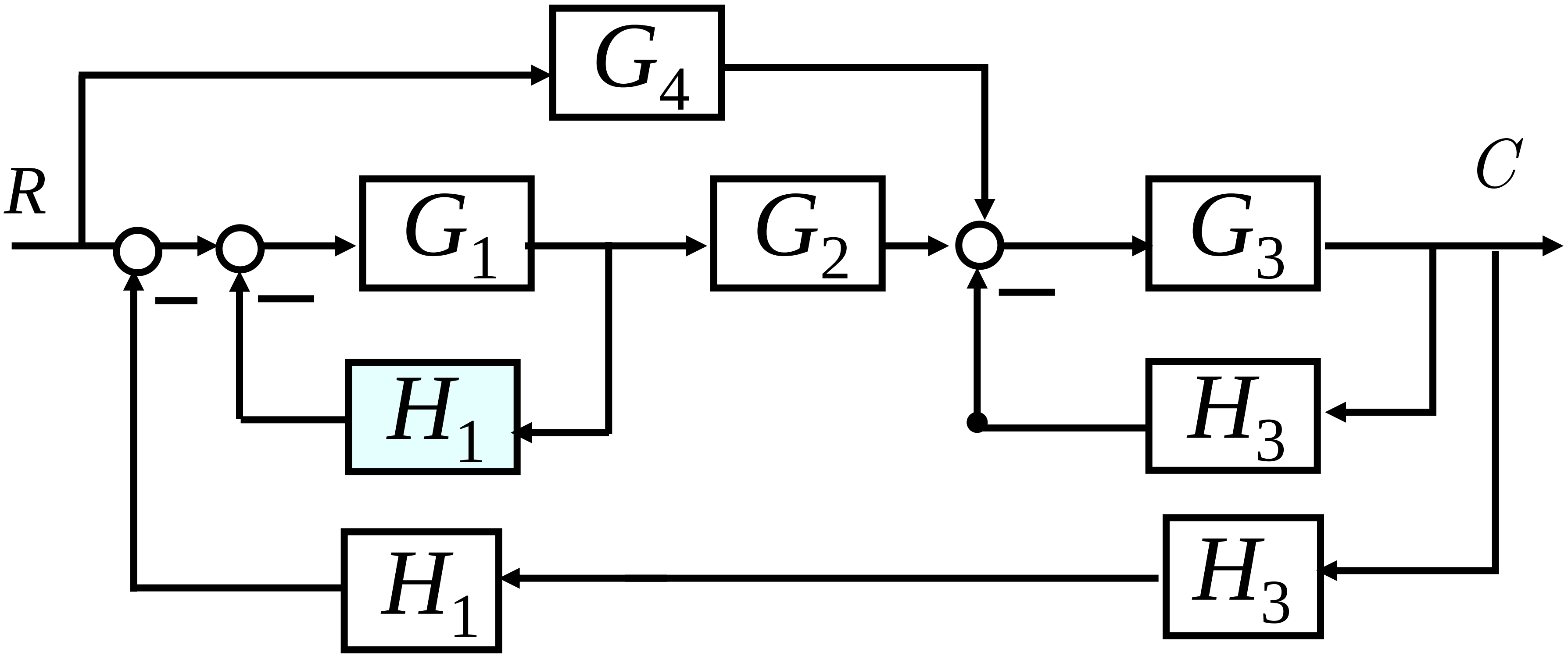

R
G_1
$\dfrac{G_2G_3G_4}{1-G_3G_4H_1+G_2G_3H_2}$
C
−
H_3
R
$\dfrac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_3G_4H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3G_4H_3}$
C

8. 结构图等效变换：重绘结构图：

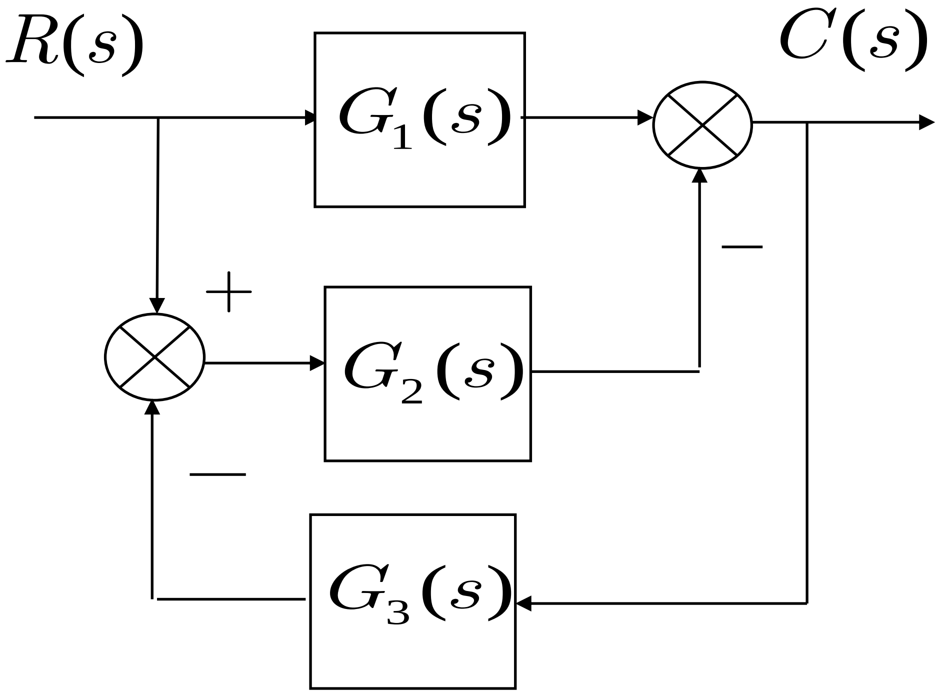
例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。




R
C
G4
G1
G2
G3
H1
H3
−
−


G_4
R
C
G_1
G_2
G_3
H_1
H_3
H_1
H_3

例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。



五、梅森公式

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{N}P_k\Delta_k$$

- Δ=系统特征多项式 $=1-\sum L_i+\sum L_iL_j-\sum L_iL_jL_k+\ldots$;
- L_i=第i个回路传递函数的乘积（含符号）;
- L_iL_j=2个互不接触回路的传递函数的乘积，这里，互不接触是指两个回路不享有相同的元部件。

- $L_iL_jL_k$=3个互不接触回路传函乘积（含符号）；

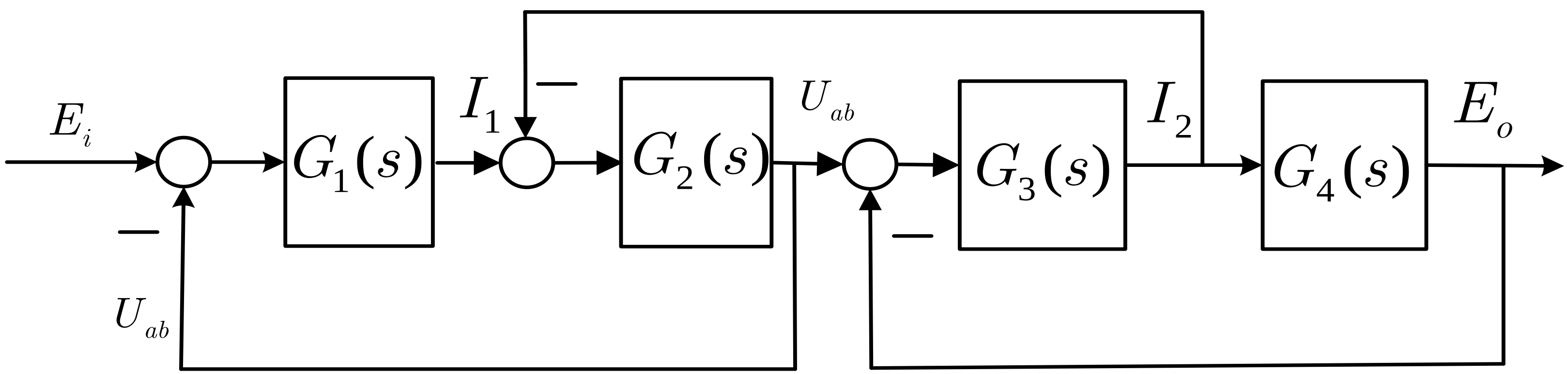
- $L_iL_jL_kL_l\ldots\ldots;$

- N=前向通路(从$R(s)$到$C(s)$且不重复访问同一点）的条数;

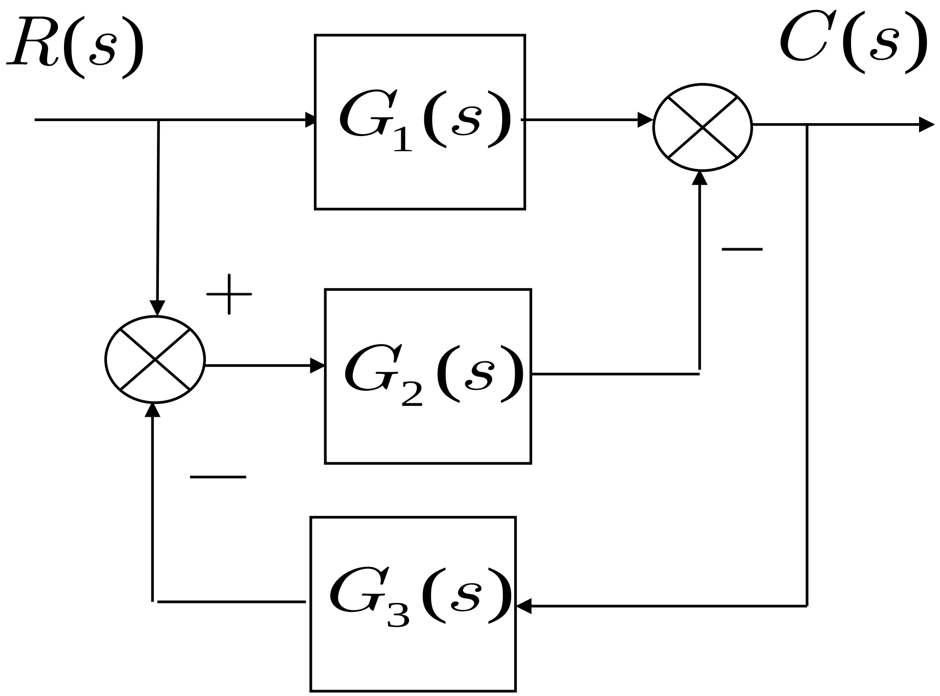
- P_k=第 k条前向通路传递函数的乘积;

- Δ_k=第k条前向通路的余子式，即将Δ中去除与 k 条前向通路相接触的回路后的余项。

例：确定一下系统的特征多项式：

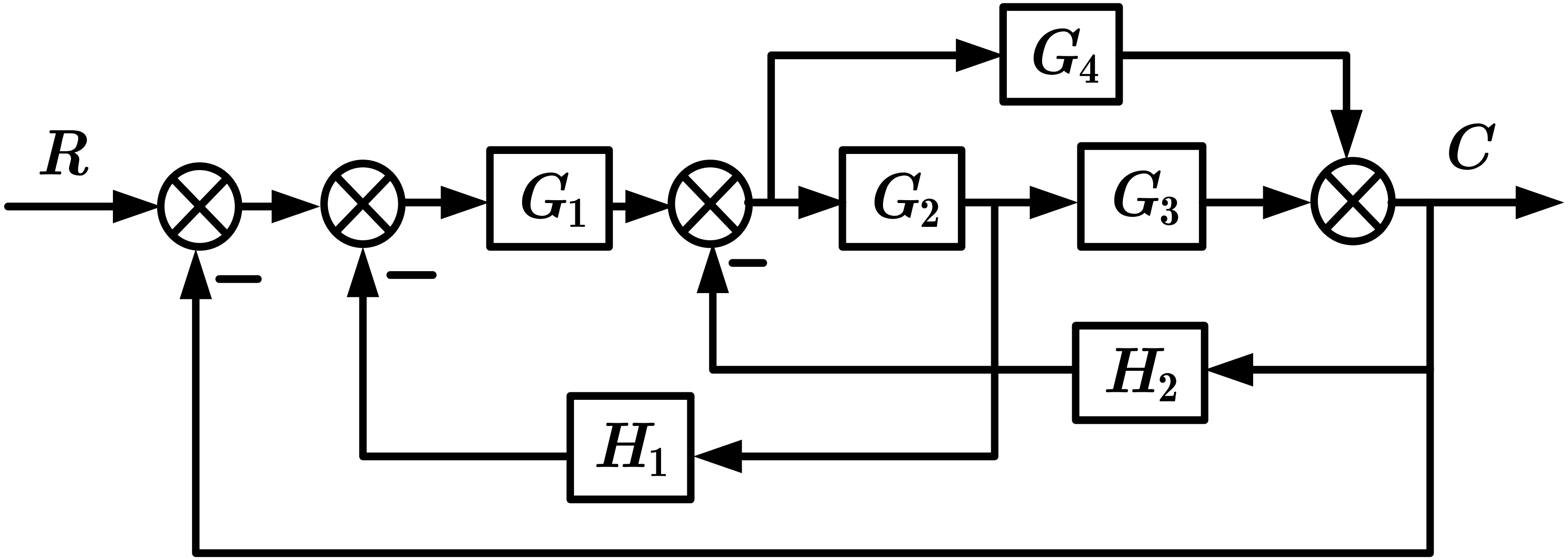


例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。



解：可用两种方法解。

例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。



解：

两条前向通路：

$$\begin{cases} P_1 = G_1 G_2 G_3 \\ P_2 = G_1 G_4 \end{cases}$$

五个单回路：

$$\begin{cases} L_1 = -G_1G_2H_1 \\ L_2 = -G_1G_2G_3 \\ L_3 = -G_2G_3H_2 \\ L_4 = -G_1G_4 \\ L_5 = -G_4H_2 \end{cases}$$

无互不接触回路，故

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$$

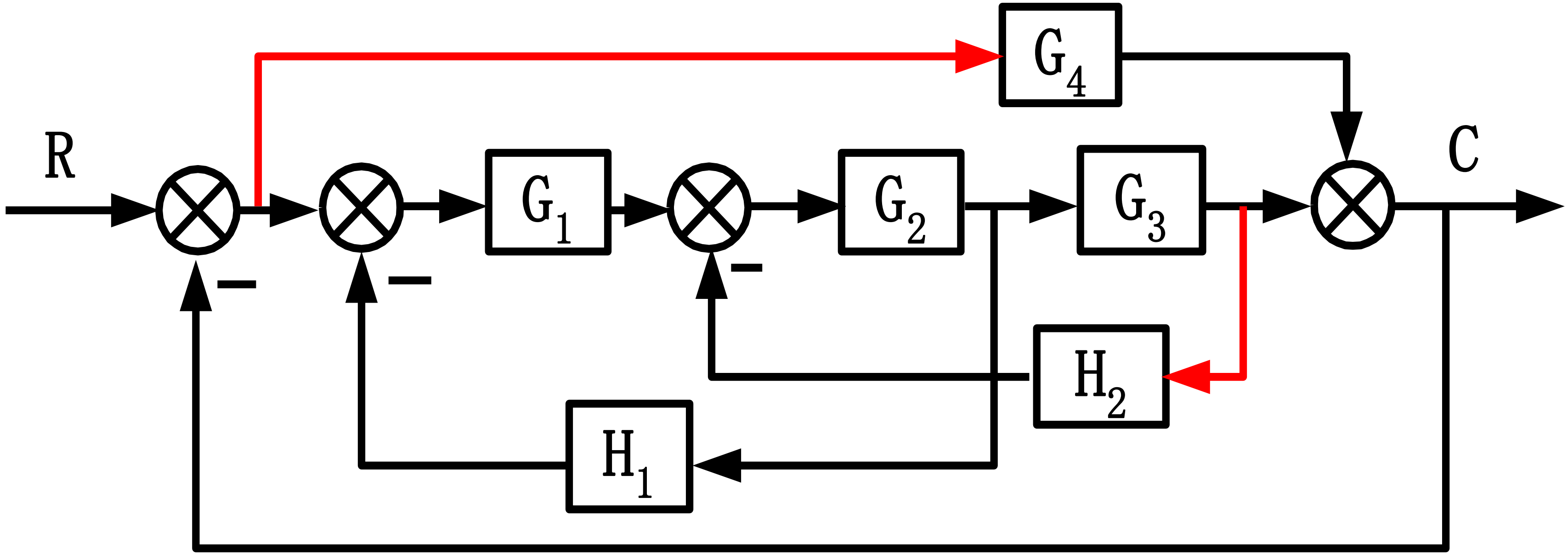
余子式为： $\Delta_1 = 1$ $\Delta_2 = 1$

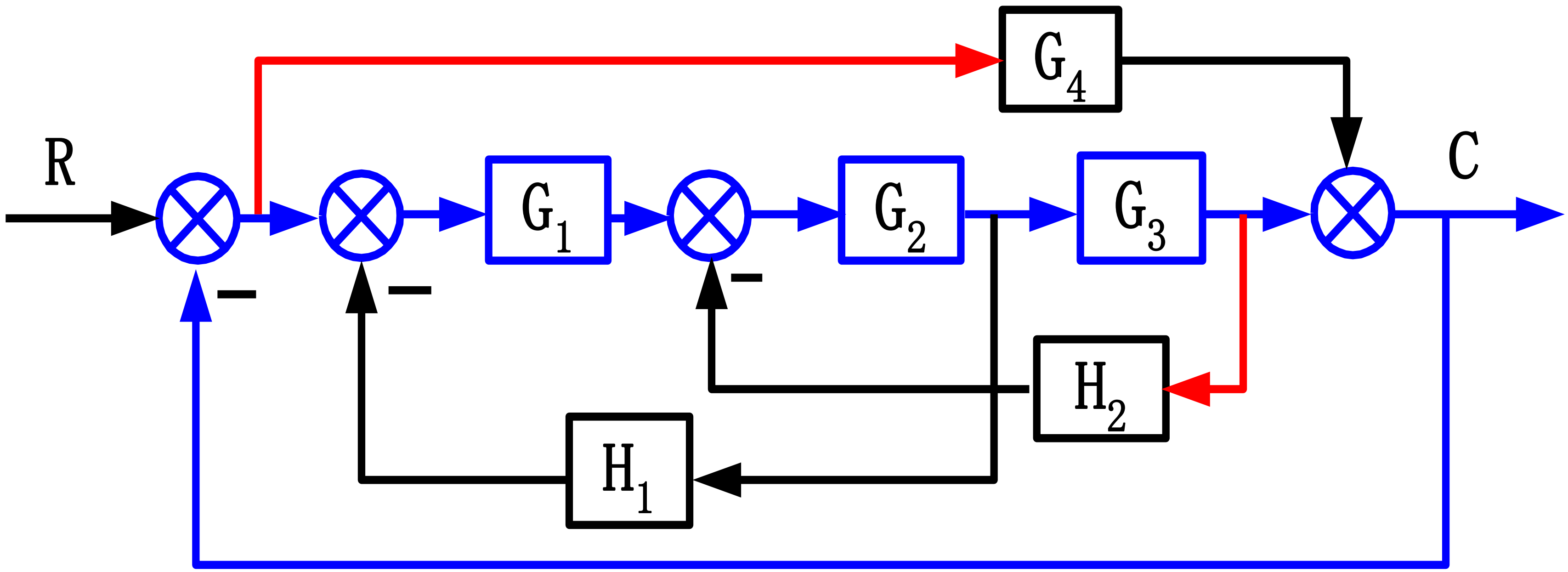
因此，

$$\frac{C}{R} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3 + G_2G_3H_2 + G_1G_4 + G_4H_2}$$

例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。





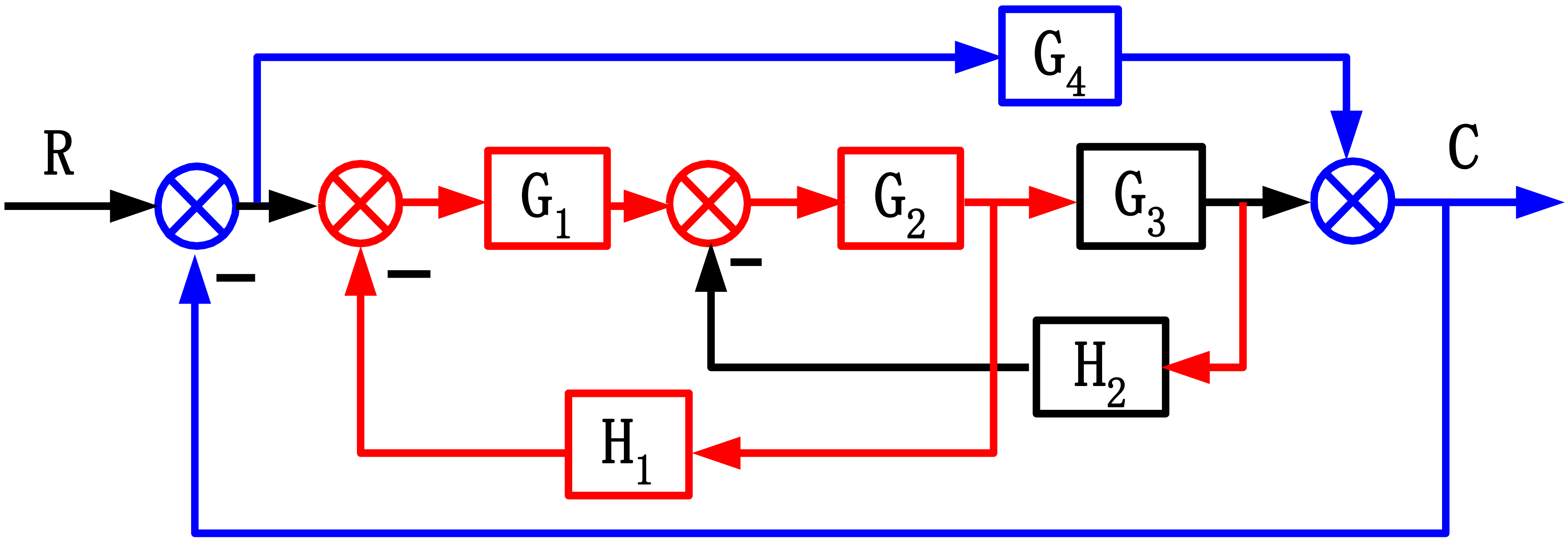
四个单回路：

$$L_1 = -G_1G_2G_3$$

$$L_2 = -G_1G_2H_1$$

$$L_3 = -G_2G_3H_2$$

$$L_4 = -G_4$$

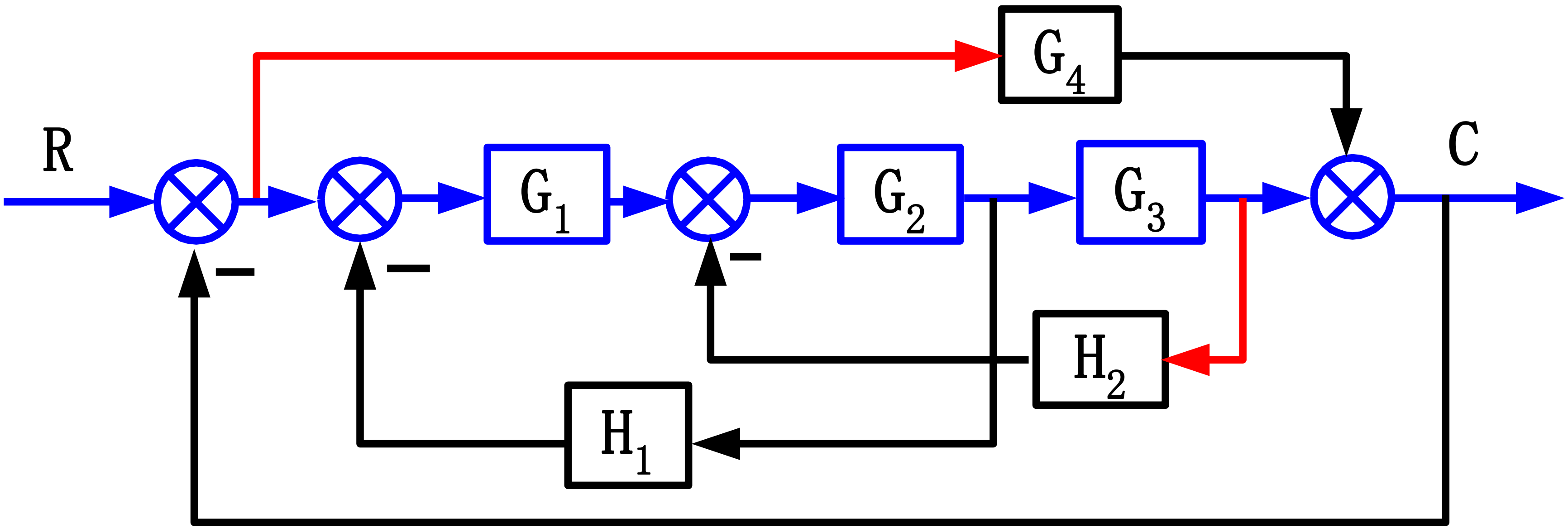


两条互不接触回路：

$$L_2L_4 = (-G_4)(-G_1G_2H_1)$$

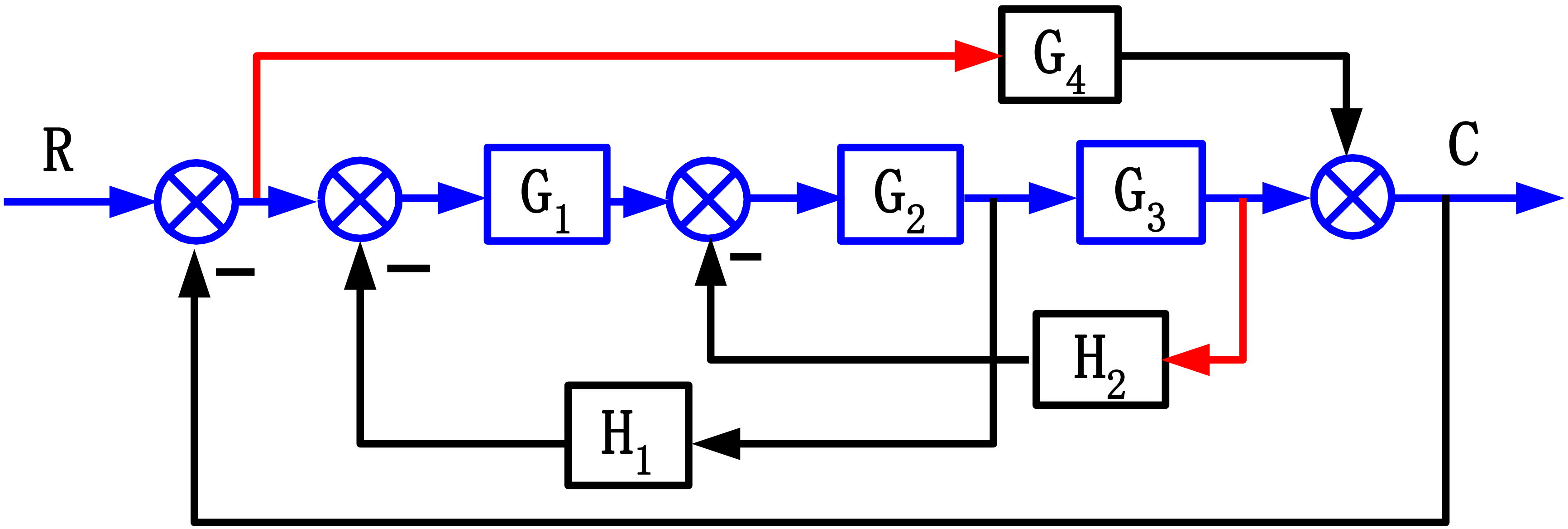
$$L_3L_4 = (-G_4)(-G_2G_3H_2)$$

问题：L_4与L_1是互不接触回路吗？



第1条前向通路及余子式：

$$P_1 = G_1G_2G_3 \qquad \Delta_1 = 1$$



第2条前向通路及余子式：

$$P_2 = G_4$$

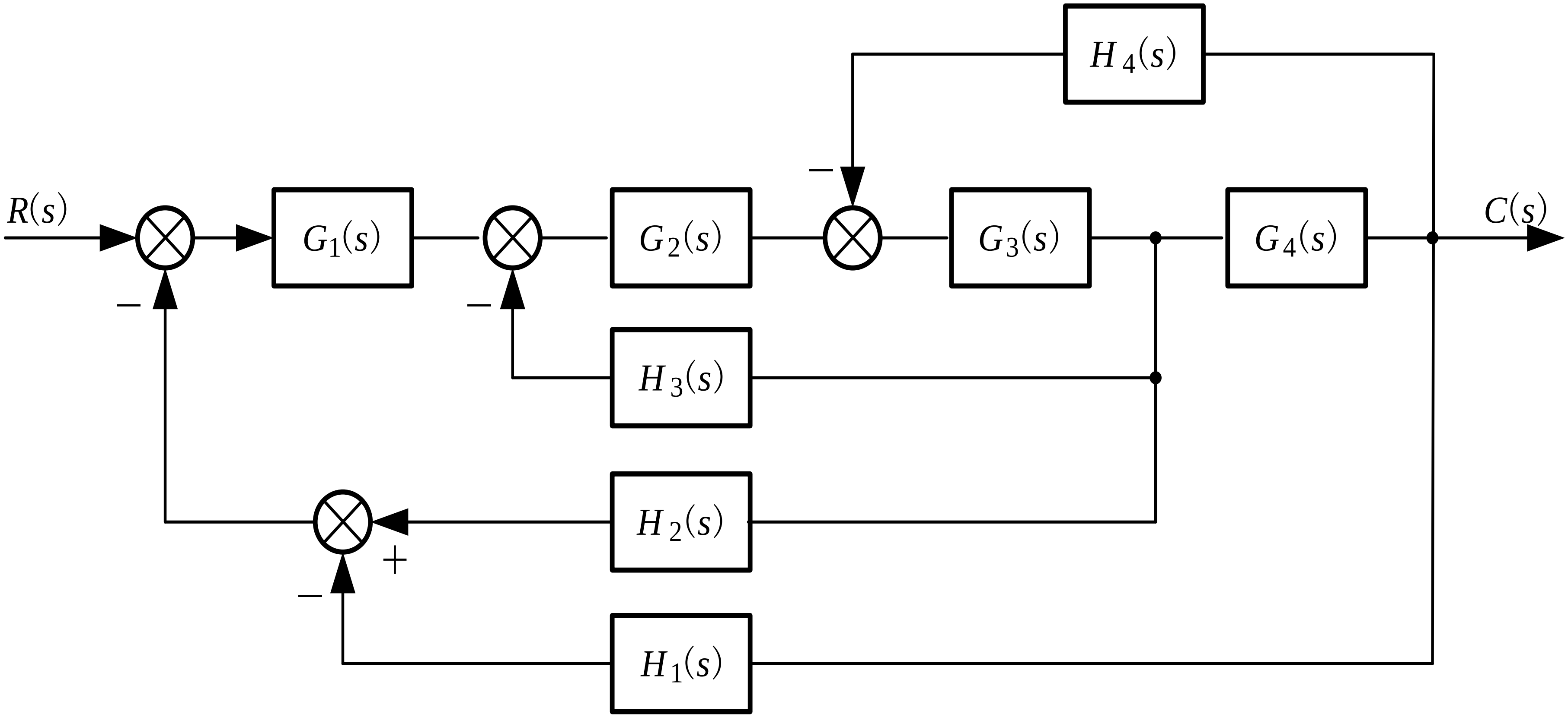
$$\Delta_2 = 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2$$

系统总的传递函数：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{1-L_1-L_2-L_3-L_4+L_2L_4+L_3L_4}$$

问题：能否用化简方法求？

例：系统结构图如下，求$C(s)/R(s)$。



解：利用Mason公式，

只有一条前向通路： $P_1 = G_1G_2G_3G_4$

4个单回路：
$$\begin{cases} L_1 = -G_2G_3H_3 \\ L_2 = -G_1G_2G_3H_2 \\ L_3 = G_1G_2G_3G_4H_1 \\ L_4 = -G_3G_4H_4 \end{cases}$$

无互不接触回路，故

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$$

余子式： $\Delta_1 = 1$

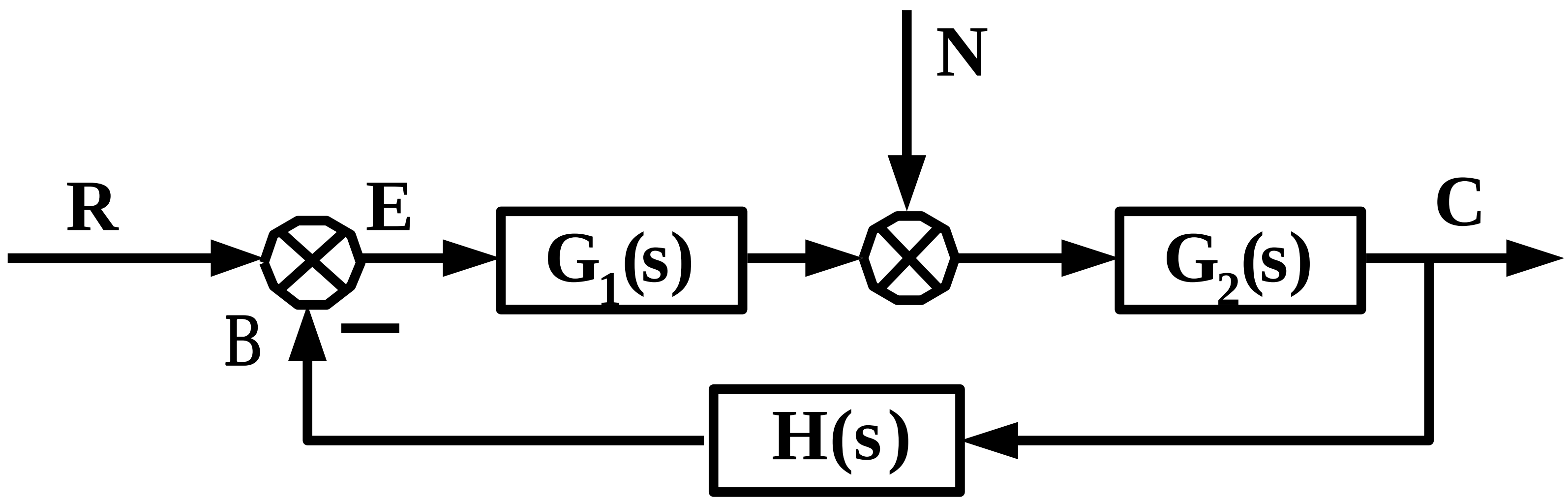
$$\frac{C}{R} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k}{\Delta}$$

因此，

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_2G_3H_3 + G_1G_2G_3H_2 + G_3G_4H_4 - G_1G_2G_3G_4H_1}$$

2-6 典型反馈系统传递函数

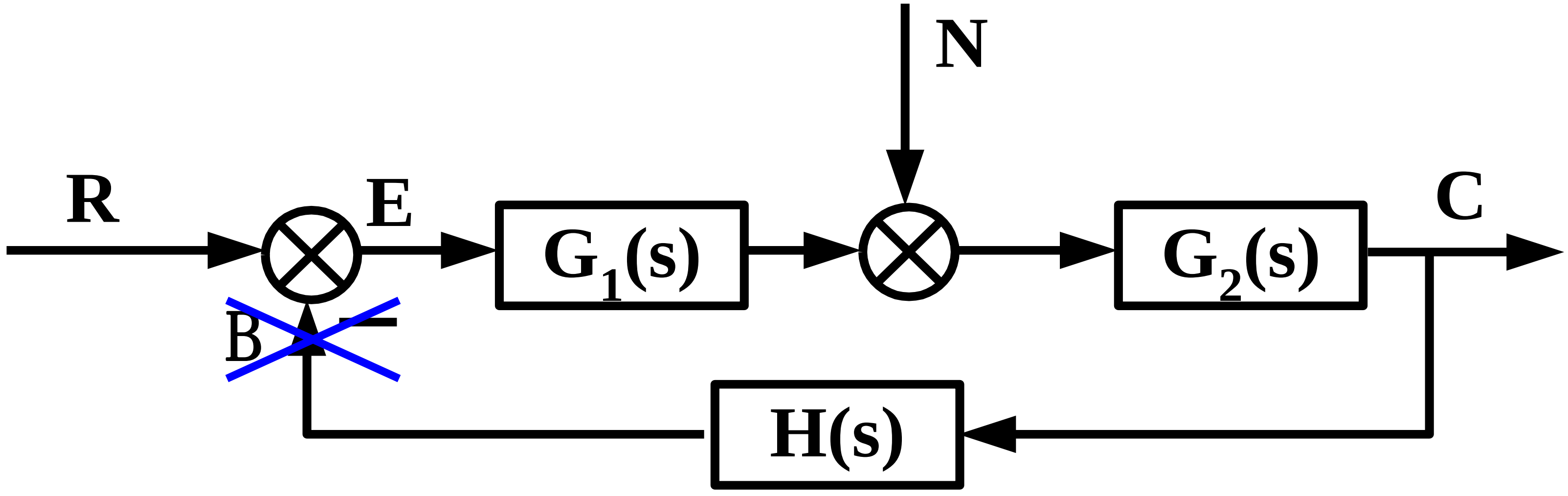
考虑如下典型反馈系统：



一、系统开环传递函数

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)H(s)$$

它是当主反馈回路断开时从$E(s)$到反馈信号$B(s)$之间的传递函数（不计符号）。



二、系统在$r(t)$作用下的闭环传递函数

令$n(t)=0$，闭环传递函数

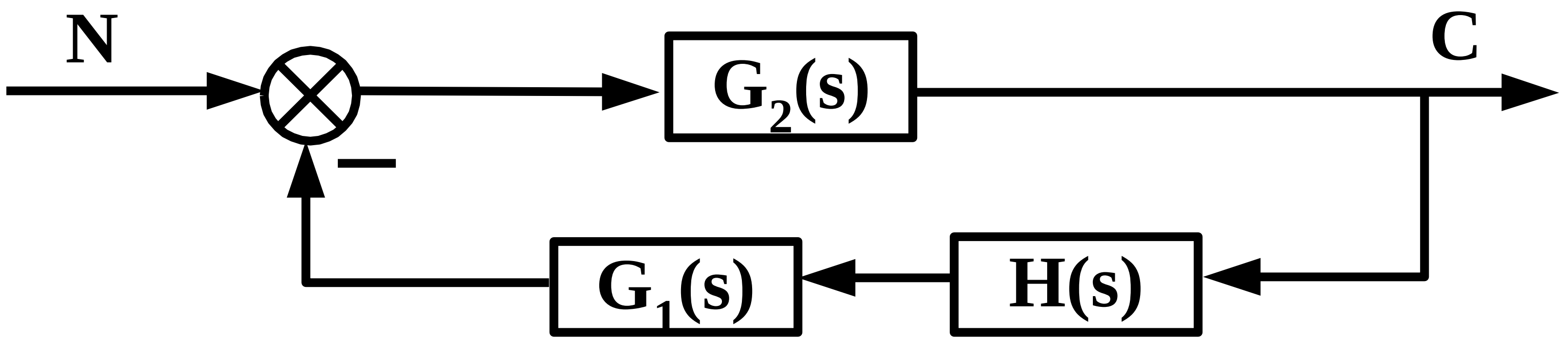
$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

故

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)$$

三、系统在$n(t)$作用下的闭环传递函数

令$r(t)=0$，闭环传递函数



故
$$\Phi_n(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

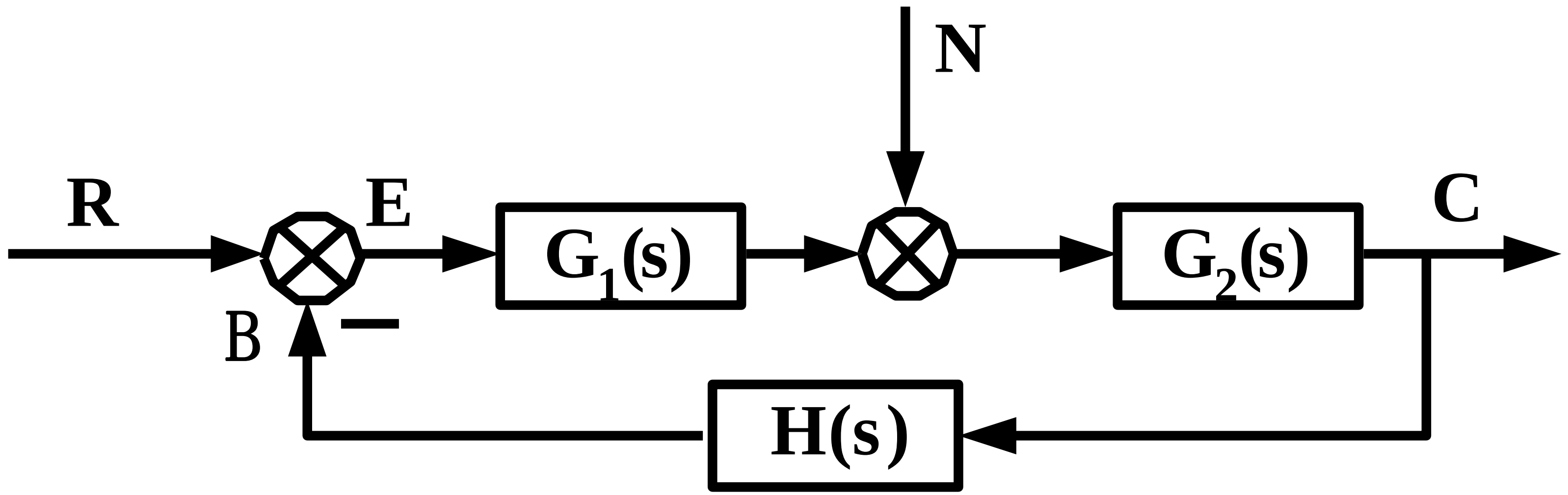
$$C(s)=\Phi_n(s)N(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

四、系统总输出

线性系统满足叠加原理，故系统总输出为：

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \Phi_n(s)N(s) + \Phi(s)R(s) \\
&= \frac{G_1(s)G_2(s)R(s) + G_2(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}
\end{aligned}
$$

五、闭环系统的误差传递函数



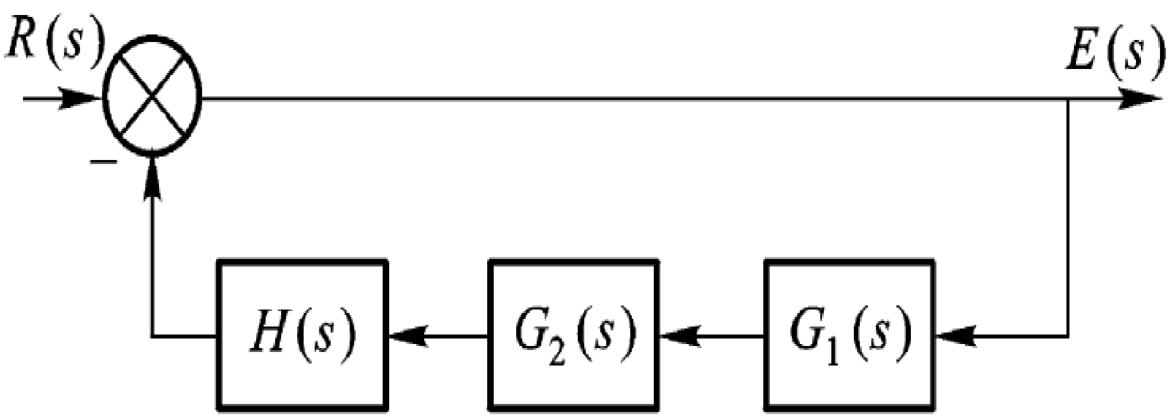
按上图定义的误差为：

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

1. 系统在$r(t)$作用下的误差传递函数

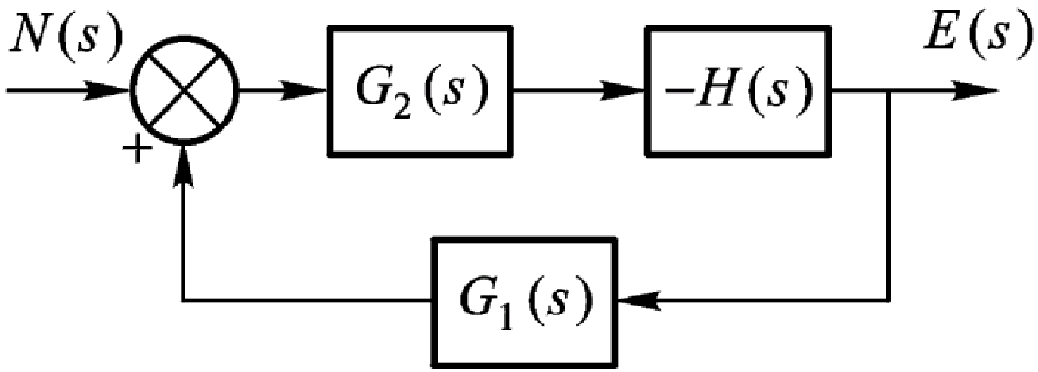
此时令$n(t)=0$，则结构图如下所示



$$\Phi_{er}(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

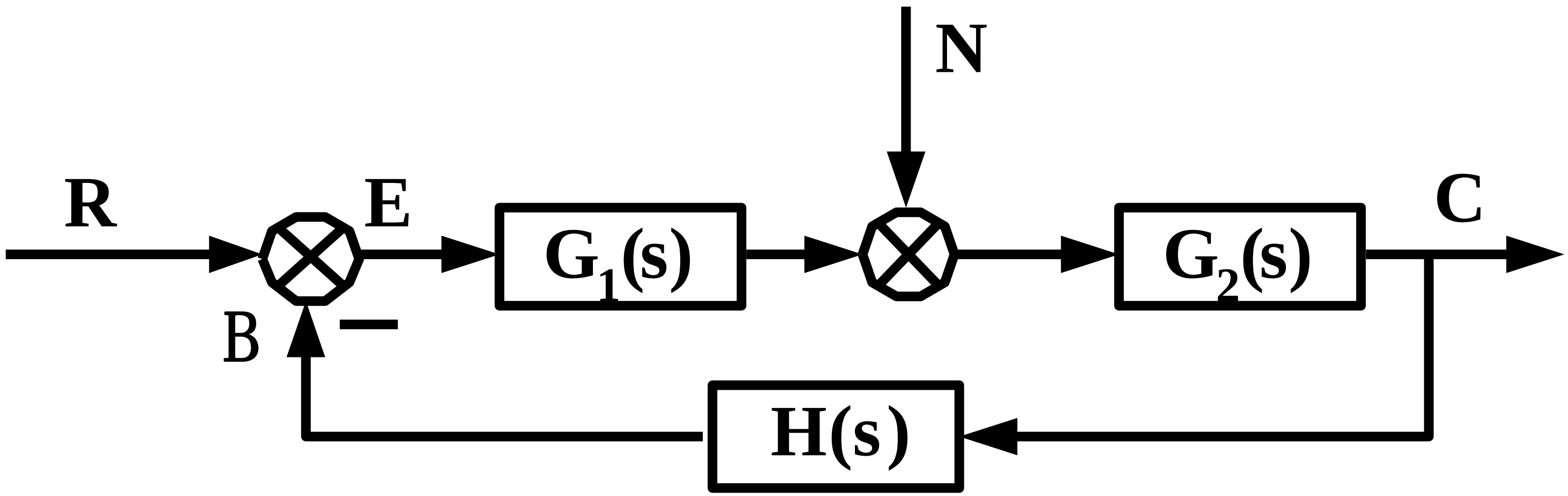
2. 系统在$n(t)$作用下的误差传递函数

此时令$r(t)=0$，则结构图如下所示



$$\Phi_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

3. 系统总误差



$$E(s)=\Phi_{er}(s)R(s)+\Phi_{en}(s)N(s)$$

$$=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)+\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$