第四章 Taylor公式

§4.1 函数的微分

一、问题的提出

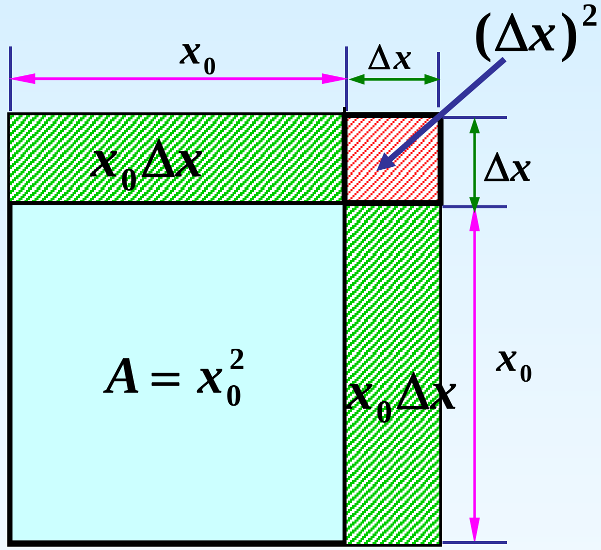
实例: 正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

$\because$ 正方形面积 $A=x^2$,

$\therefore \Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$

$$=\underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1): Δx的线性函数,且为ΔA的主要部分;

(2): Δx的高阶无穷小,当$|\Delta x|$很小时可忽略.

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

再例如，设函数 $y = x^3$ 在点 x_0 处的改变量为 Δx 时，求函数的改变量 Δy.

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3$$

$$= \underbrace{3x_0^2 \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}_{(2)}.$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，(2)是 Δx 的高阶无穷小 $o(\Delta x)$,

$$\therefore \Delta y \approx 3x_0^2 \cdot \Delta x.$$

既容易计算又是较好的近似值

问题: 是否所有函数的改变量都对应有一个线性函数(改变量的主要部分)?它是什么?如何求?

二、微分的定义

定义： 设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义，

x_0及 $x_0+\Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数

$y=f(x)$ 在点 x_0可微， 并且称$A\cdot\Delta x$为函数

$y=f(x)$在点 x_0相应于自变量增量Δx的微分，

记作 $dy\big|_{x=x_0}$ 或 $df(x_0)$, 即 $dy\big|_{x=x_0} = A\cdot\Delta x$.

微分 dy 叫做函数增量 Δy 的线性主部.

（微分的实质）

由定义知:

(1) dy 是自变量的改变量 Δx 的线性函数;

(2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶无穷小;

(3) 当$A \neq 0$时, dy与Δy是等价无穷小;

$$\text{因为} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0).$$

(4) A是与Δx无关的常数, 但与$f(x)$和x_0有关;

(5) 当$|\Delta x|$很小时, $\Delta y \approx dy$ (线性主部).

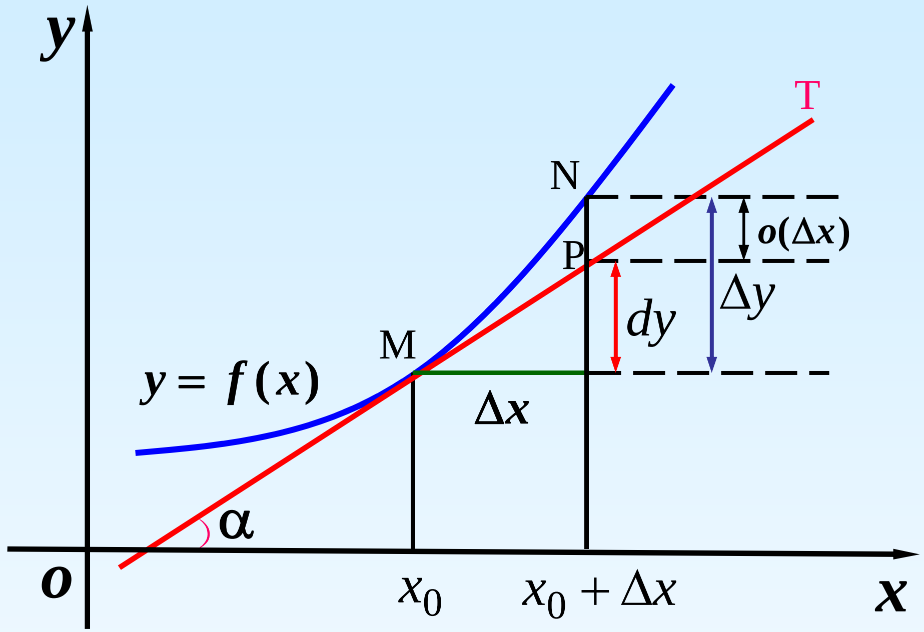
可微的几何意义

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

是曲线的纵坐标分量，

微分dy是切线纵坐标

对应的分量。



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，

切线段MP可近似代替曲线段MN.

三、微分的性质

定理1.1 函数 $f(x)$在点 x可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x处可导，且 $\lambda = f'(x)$.

证明：（1）必要性 $\because f(x)$在x可微,因此存在λ,

使得$\Delta y = \lambda \cdot \Delta x + o(\Delta x)$,

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = \lambda$$

即函数 $f(x)$在点 x可导，且$\lambda = f'(x)$。

证明:（2）充分性

$\because f(x)$在点x可导，我们有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x),\text{ 记 }\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)=\alpha(\Delta x),\quad \text{则有}$$

$$\alpha(\Delta x)\to 0\quad (\Delta x\to 0),$$

$$\therefore\ \Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x=f'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)\text{。}$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$在点 x_0可微，且 $f'(x)=\lambda$.

综上可得：可导$\Leftrightarrow$可微.　　$\lambda=f'(x)$.

由导数的四则运算性质，不难得到

定理1.2 （微分的四则运算性质）

设函数 $f(x)$, $g(x)$在点 x可微,则

(1) $d(f(x)+g(x))=df(x)+dg(x)$;

(2) $d(f(x)g(x))=df(x)g(x)+f(x)dg(x)$;

(3) $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)},(g(x)\neq 0).$

四、一阶微分形式不变性

设函数 $y = f(x)$ 有导数 $f'(x)$,

⑴ 若 x 是自变量时, $\boxed{dy = f'(x)dx}$;

(2) 若 x 是中间变量时, 即另一变量 t 的可微函数 $x = \phi(t)$, 则 $dy = f'(x)\phi'(t)dt$

$$\because \phi'(t)dt = dx, \therefore \boxed{dy = f'(x)dx}$$

结论: 无论 x 是自变量还是中间变量, 函数 $y = f(x)$ 的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

一阶微分形式的不变性

二阶微分及高阶微分

一阶微分： $df(x) = f'(x)dx$ （有形式不变性）

二阶微分： $d^2 f(x) = f''(x)dx^2$ （没有形式不变性）

n 阶微分： $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$

见后面例3

$$d^2 f = d(df) = d[f'(x)dx]$$

$$= f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$$

五、微分的计算

$$d(c)=0 \qquad d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x)=\cos x dx \qquad d(\cos x)=-\sin x dx$$

$$d(\tan x)=\sec^2 x dx \qquad d(\cot x)=-\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x)=\sec x \tan x dx \qquad d(\csc x)=-\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x)=a^x \ln a dx \qquad d(e^x)=e^x dx$$

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

例1　设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求dy.

解　$\because\ y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$, $\therefore dy=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx.$

例2　设 $y=e^{1-3x}\cos x$, 求dy.

解　$dy=\cos x\cdot d(e^{1-3x})+e^{1-3x}\cdot d(\cos x)$

$\because\ (e^{1-3x})'=-3e^{1-3x},\quad (\cos x)'=-\sin x.$

$\therefore\ dy=\cos x\cdot(-3e^{1-3x})dx+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)dx$

$=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx.$

例3 $(1)y=e^{x},(2)y=e^{x},x=t^{2}$,分别求 $d^{2}y$

解（1） $d^{2}y=(e^{x})''dx^{2}=e^{x}dx^{2}$

（2） $d^{2}y=(e^{t^{2}})''dt^{2}=(2e^{t^{2}}+4t^{2}e^{t^{2}})dt^{2}$

对复合函数有$\mathrm{d}x^{2}=(dx)^{2}=(2t\mathrm{d}t)^{2}=4t^{2}dt^{2}$,

$$\therefore \mathrm{d}^{2}y=2e^{t^{2}}\mathrm{d}t^{2}+e^{t^{2}}4t^{2}\mathrm{d}t^{2}=\frac{e^{x}}{2x}\mathrm{d}x^{2}+e^{x}\mathrm{d}x^{2}.$$

注：该例说明高阶微分没有不变性.

dx^{2} 指 $(dx)^{2}$； $d^{2}x$表示x的二阶微分；

近似计算

1、计算函数增量的近似值

$$\Delta y\Big|_{x=x_0} \approx dy\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot\Delta x. \quad （以直代曲）$$

2、计算函数的近似值

1.求$f(x)$在点$x=x_0$附近的近似值;

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x. \quad (|\Delta x|\text{很小时})$$

2.求$f(x)$在点$x=0$附近的近似值；

令 $x_0=0, \Delta x = x.$ $\quad f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x.$

例4 计算$\cos 60^{o}30'$的近似值.

解 设$f(x)=\cos x$, $\therefore f'(x)=-\sin x$, (x为弧度)

$$\because x_0=\frac{\pi}{3},\quad \Delta x=\frac{\pi}{360},$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \cos 60^{o}30'=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360}\right)\approx \cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0.4924.$$

例5 计算下列各数的近似值.

$$(1)\ \sqrt[3]{998.5};\qquad (2)\ e^{-0.03}.$$

解 (1) $\sqrt[3]{998.5}=\sqrt[3]{1000-1.5}$

$$=\sqrt[3]{1000\left(1-\frac{1.5}{1000}\right)}=10\sqrt[3]{1-0.0015}$$

$$\approx 10\left(1-\frac{1}{3}\times 0.0015\right)=9.995.$$

(2) $e^{-0.03}\approx 1-0.03=0.97.$

例6 计算下列各数的近似值.

$$(1)\quad (1+0.01)^{365};\qquad (2)\ (1-0.01)^{365}.$$

解

$$(1)\quad (1+0.001)^{365} \approx 1+0.001*365 = 1.365.$$

$$(2)\quad (1-0.01)^{365} \approx 1\text{-}0.01*365 = \text{-}2.65.$$

积硅步以致千里

常用近似公式 $(|x|$很小时)

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$; (2) $\sin x \approx x$ (x为弧度);

(3) $\tan x \approx x$ (x为弧度); (4) $e^x \approx 1+x$;

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

证明 (1) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$, $f'(x)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}$,

$$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{n}.$$

$$\therefore f(x) \approx f(0)+f'(0)x = 1+\frac{x}{n}.$$

本节小结

微分的概念

微分的几何意义

导数与微分的区别与联系：

微分的性质

微分的计算

本节作业

- 习题4.1
- 1（1）（3）（5）

★ 导数与微分的区别:

1. 函数 $f(x)$ 在点x_0处的导数是一个定数 $f'(x_0)$,而微分 $dy = f'(x_0)(x - x_0)$ 是x的线性函数,它的定义域是R,实际上,它是无穷小.

$$\because \lim_{x \to x_0} dy = \lim_{x \to x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

2. 从几何意义上来看,$f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率,而微分 $dy = f'(x_0)(x - x_0)$是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程在点 x_0 的纵坐标增量.