- 集合：基础
- 命题逻辑：知识表示，专家系统
- 一阶谓词逻辑：更一般性的知识表示，专家系统
- 数据库？？？？！！！！

关系数据库

- Access, Oracle, SQLServer, MySQL
- 关系数据库
  - 在一个给定的应用领域中，所有实体及实体之间联系的关系的集合构成一个关系数据库。
- 在关系数据库中，通常用n元关系描述数据间的关系。
  - 例如，学生的各科成绩总和表，学生基本信息表等，都可以用n元关系来表示。

关系数据库举例

- 设有一个学生-课程数据库，包括学生关系Student、课程关系Course和选修关系SC。

学 号 Sno	姓 名 Sname	性 别 Ssex	年 龄 Sage	所在系 Sdept
95001	李勇	男	20	CS
95002	刘晨	女	19	IS
95003	王敏	女	18	MA
95004	张立	男	19	IS

Student

Student={<95001, 李勇， 男， 20， CS>， < 95002, 刘晨， 女， 18， MA >,
<95003, 王敏， 女， 18， MA>， <95004, 男， 19， IS>}

课程号	课程名	先行课	学分
Cno	*Cname*	*Cpno*	*Ccredit*
1	数据库	5	4
2	数学		2
3	信息系统	1	4
4	操作系统	6	3
5	数据结构	7	4
6	数据处理		2
7	*PASCAL*语言	6	4

Course

关系是一个集合，由若干有序n元组组成

学 号	课程号	成 绩
Sno	*Cno*	*Grade*
95001	*1*	*92*
95001	*2*	*85*
95001	*3*	*88*
95002	*2*	*90*
95002	*3*	*80*

SC

关系数据库

- 数据库中记录的插入

  Student’

  ={<95001, 李勇， 男，20，CS>， < 95002, 刘晨，女，18，MA >, <95003, 王敏，女，18，MA>，<95004, 男，19，IS>} ∪{< 95005, 男，21，IS >}

- 数据库中记录的删除
  - Student’’
  - ={<95001, 李勇， 男，20，CS>， < 95002, 刘晨，女，18，MA >, <95003, 王敏，女，18，MA>，<95004, 男，19，IS>} - {< 95002 , 刘晨，女，18，MA >}

- “关系”这一章的许多知识在设计数据库查询、搜索等相关方法时候都用得到

- 问题：
  - 关系如何用数学的方式进行表示：
  - 关系和集合的关系?
  - 关系之间可以运算么?

第四章　关系

郑征
zhengz@buaa.edu.cn
软件与控制研究室

第1讲 二元关系的基本概念

1. 有序对与卡氏积

2. 二元关系

3. 二元关系的基本运算

1. 有序对与卡氏积

有序对与卡氏积

- 有序对(有序二元组)
- 有序三元组, 有序n元组
- 卡氏积
- 卡氏积性质

有序对也是一个集合？那么如何反应其序关系呢？

有序对(ordered pair)

✱有序对:

$$\langle a,b\rangle = \{ \{a\}, \{a,b\} \}$$

其中, a是第一元素, b是第二元素.

✱ <a,b>也记作(a,b)

✱定理1: $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \Leftrightarrow a=c\wedge b=d$

✱推论: $a\neq b \Rightarrow \langle a,b\rangle\neq\langle b,a\rangle$

有序对(引理1，自学)

- 引理1: $\{x, a\}=\{x, b\} \Leftrightarrow a=b$

证明: ($\Leftarrow$) 显然.

($\Rightarrow$) 分两种情况.

(1) $x=a$. $\{x, a\}=\{x, b\} \Rightarrow \{a, a\}=\{a, b\}$

$\Rightarrow \{a\}=\{a,b\} \Rightarrow a=b.$

(2) $x\neq a$. $a\in\{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow a=b.$ #

有序对(定理1，自学)

- 定理1: $<a,b>=<c,d> \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

显然成立，但如何形式化证明

证明: $(\Leftarrow)$ 显然.

$(\Rightarrow)$ 由引理2,

$<a,b>=<c,d> \Leftrightarrow \{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \cup\{\{a\},\{a,b\}\}=\cup\{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \{a,b\}=\{c,d\}$.

又 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \cap\{\{a\},\{a,b\}\}=\cap\{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \{a\}=\{c\} \Leftrightarrow a=c$.

再由引理1, 得$b=d$.   #

有序对(推论，自学)

- 推论: $a \neq b \Rightarrow \langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle$

证明: (反证) $\langle a,b \rangle = \langle b,a \rangle \Leftrightarrow a=b$,

与$a \neq b$矛盾. #

有序三元组(ordered triple)

- 有序三元组:

$$<a,b,c>=<<a,b>,c>$$

- 有序n(≥2)元组:

$$<a_1,a_2,\ldots,a_n>=<<a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}>,a_n>$$

- 定理2: $<a_1,a_2,\ldots,a_n>= <b_1,b_2,\ldots,b_n>$

  $\Leftrightarrow a_i = b_i,\ \ i=1,2,\ldots,n.$ #

卡氏积(Cartesian product)

- 卡氏积:

由有序对组成

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

序：注意其先后次序

- 例: $A=\{\varnothing,a\}$, $B=\{1,2,3\}$.

$A\times B=\{\langle\varnothing,1\rangle,\langle\varnothing,2\rangle,\langle\varnothing,3\rangle,\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle\}$.

$B\times A=\{\langle 1,\varnothing\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 2,\varnothing\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,\varnothing\rangle,\langle 3,a\rangle\}$.

$A\times A=\{\langle\varnothing,\varnothing\rangle, \langle\varnothing,a\rangle, \langle a,\varnothing\rangle, \langle a,a\rangle\}$.

$B\times B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,$
$\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$. #

卡氏积是了两个集合所有有序对的集合

卡氏积的性质

- 非交换: $A\times B \neq B\times A$

  (除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)
- 非结合: $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$

  (除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)
- 分配律: $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$等
- 其他: $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing$等

卡氏积非交换性

- 非交换: $A \times B \neq B \times A$

  (除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)
- 反例: $A=\{1\}$, $B=\{2\}$.

  $A \times B=\{<1,2>\}$,

  $B \times A=\{<2,1>\}$.

卡氏积非结合性

- 非结合: $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$

  (除非 $A=\varnothing \lor B=\varnothing \lor C=\varnothing$)

- 反例: $A=B=C=\{1\}$.

  $(A\times B)\times C=\{<<1,1>,1>\}$,

  $A\times(B\times C)=\{<1,<1,1>>\}$.

卡氏积分配律

- 1. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$
- 2. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$
- 3. $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$
- 4. $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$

卡氏积分配律(证明1)

- $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

回忆：集合的逻辑演算

证明: $\forall \langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle \in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$ 分配律

$\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in A\times B)\vee(\langle x,y\rangle\in A\times C)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$

$\therefore A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$. #

主要特点：使用有序对的定义

n维卡氏积

- n维卡氏积:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \}$$

- $A^n = A \times A \times \ldots \times A$
- $|A_i| = n_i, i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n.$$

- n维卡氏积性质与2维卡氏积类似.

n维卡氏积(性质)

- 非交换: $A\times B\times C\neq B\times C\times A$

  (要求A,B,C均非空,且互不相等)
- 非结合
- 分配律：例如

  $$A\times B\times(C\cup D)=(A\times B\times C)\cup(A\times B\times D)$$
- 其他: 如 $A\times B\times C=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee C=\varnothing$.

2. 二元关系

二元关系

- n元关系
- 二元关系
- A到B的二元关系
- A上的二元关系
- 一些特殊关系

n元关系(n-ary relation)

- n元关系: 是$\boxed{\text{集合,}}$其元素全是有序n元组.
- 例1: F_1={<a,b,c,d>,<1,2,3,4>,

  <物理,化学,生物,数学>},

  F_1是4元关系.
- 例2: F_2={<a,b,c>,<α,β,γ>,

  <大李,小李,老李>}

  F_2是3元关系. #

所以相关的证明方法和第一章中的类似

二元关系(binary relation)

- 2元关系(简称关系): 是集合,其元素全是有序对.
- 例3: $R_1=\{<1,2>,<\alpha,\beta>,<a,b>\}$

  R_1是2元关系.
- 例4: $R_2=\{<1,2>,<3,4>,<$白菜,小猫$>\}$

  R_2是2元关系.
- 例5: $A=\{<a,b>,<1,2,3>,a,\alpha,1\}$

  A不是关系. #

二元关系的记号

- 设F是二元关系, 则

  $<x,y>\in F \Leftrightarrow x与y具有F关系 \Leftrightarrow xFy$

- 对比: xFy   (中缀(infix)记号)

  F(x,y)   (前缀(prefix)记号)

  $<x,y>\in F$ (后缀(suffix)记号)

- 例如: $2<15 \Leftrightarrow <(2,15) \Leftrightarrow <2,15>\in<$.

A到B的二元关系

- A到B的二元关系:　是$A\times B$的任意子集.

$$R\text{是}A\text{到}B\text{的二元关系}$$

$$\Leftrightarrow R\subseteq A\times B \Leftrightarrow R\in P(A\times B)$$

- 若$|A|=m$,$|B|=n$, 则$|A\times B|=mn$, 故

$$|P(A\times B)|=2^{mn}$$

即A到B不同的二元关系共有2^{mn}个

2^{m^2}

A到B的二元关系(举例)

- 例: 设 $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b\}$,

  则A到B的二元关系共有（2^{2*1}）4个:

  $R_1=\emptyset$, $R_2=\{<a_1,b>\}$,

  $R_3=\{<a_2,b>\}$, $R_4=\{<a_1,b>,<a_2,b>\}$.

  B到A的二元关系也有4个:

  $R_5=\emptyset$, $R_6=\{<b,a_1>\}$,

  $R_7=\{<b,a_2>\}$, $R_8=\{<b,a_1>,<b,a_2>\}$. #

A上的二元关系

- A上的二元关系：是A×A的任意子集

  R是A上的二元关系

  $\Leftrightarrow$ R$\subseteq$A×A $\Leftrightarrow$ R$\in$P(A×A)

- 若|A|=m, 则|A×A|=m², 故

  |P(A×A)|= 2^{m^2}

即A上不同的二元关系共有2^{m^2}个

A上的二元关系(例1)

- 例1: 设 $A=\{a_1,a_2\}$,

  则A上的二元关系共有（2^{2*2}） 16个:

  $R_1 = \emptyset$,

  $R_2 = \{<a_1,a_1>\}$,

  $R_3 = \{<a_1,a_2>\}$,

  $R_4 = \{<a_2,a_1>\}$,

  $R_5 = \{<a_2,a_2>\}$,

2^{m^2}

A上的二元关系(例1,续1)

$R_6 = \{ <a_1,a_1>, <a_1,a_2> \},$

$R_7 = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_1> \},$

$R_8 = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_2> \},$

$R_9 = \{ <a_1,a_2>, <a_2,a_1> \},$

$R_{10} = \{ <a_1,a_2>, <a_2,a_2> \},$

$R_{11} = \{ <a_2,a_1>, <a_2,a_2> \},$

A上的二元关系(例1,续2)

$R_{12} = \{ <a_1,a_1>,<a_1,a_2>,<a_2,a_1> \}$

$R_{13} = \{ <a_1,a_1>,<a_1,a_2>, <a_2,a_2> \}$

$R_{14} = \{ <a_1,a_1>, <a_2,a_1>,<a_2,a_2> \}$

$R_{15} = \{ <a_1,a_2>,<a_2,a_1>,<a_2,a_2> \}$

$R_{16} = \{<a_1,a_1>,<a_1,a_2>,<a_2,a_1>,<a_2,a_2>\}$. #

2^{m^2}

A上的二元关系(例2)

- 例2: 设 B={b},

  则B上的二元关系共有（2^{1*1}） 2个:

  $R_1=\varnothing$, $R_2=\{<b,b>\}$.   #

- 例3: 设 C={a,b,c},

  则C上的2元关系共有（2^{3*3}） $2^9=512$ 个! #

2^{m^2}

一些特殊关系

- 空关系
- 恒等关系
- 全域关系
- 整除关系
- 小于等于关系,…
- 包含关系,
- 真包含关系

特殊关系

设A是任意集合, 则可以定义A上的:

- 空关系:

$$\varnothing$$

- 恒等关系:

$$I_A = \{ <x,x> \mid x \in A \}$$

- 全域关系:

$$E_A = A \times A = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \}$$

特殊关系(续)

设$A\subseteq Z$, 则可以定义A上的:

- 整除关系:

x被y整除

$$D_A = \{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x|y \}$$

- 例: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, 则 $D_A=$

$\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,$
$<2,2>,<2,4>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<4,4>,$
$<5,5>,<6,6>\}$. #

特殊关系(续)

设$A \subseteq R$, 则可以定义A上的:

- 小于等于(less than or equal to)关系:

$$LE_A = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq y \}$$

- 小于(less than)关系,

$$L_A = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x < y \}$$

- 大于等于(greater than or equal to)关系
- 大于(great than)关系,…

特殊关系(续)

设A为任意集合, 则可以定义P(A)上的:

- 包含关系:

$$\subseteq_A = \{ \langle x,y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subseteq y \}$$

- 真包含关系:

$$\subset_A = \{ \langle x,y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subset y \}$$

与二元关系有关的概念

- 定义域, 值域, 域
- 逆, 合成(复合)
- 限制, 象
- 单根, 单值

定义域,值域,域

对任意集合R, 可以定义:

似曾相识，函数中也有类似概念

- 定义域(domain) :

$$\mathrm{dom}\ R = \{ x \mid \exists y(xRy) \}$$

- 值域(range):

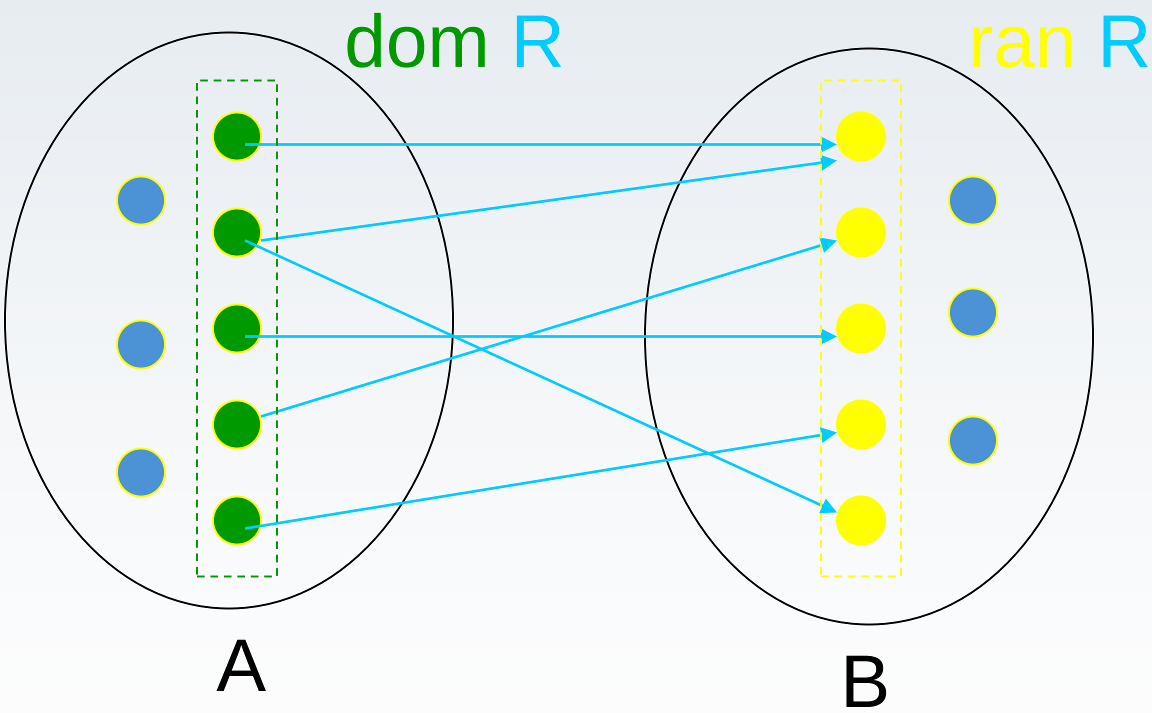
$$\mathrm{ran}\ R = \{ y \mid \exists x(xRy) \}$$

- 域(field):

$$\mathrm{fld}\ R = \mathrm{dom}\ R \cup \mathrm{ran}\ R$$

注意其形式化表示

定义域,值域,域图示



定义域,值域,域(举例)

- 例: $R_1=\{a,b\}$, $R_2=\{a,b,<c,d>,<e,f>\}$,

  $R_3=\{<1,2>,<3,4>,<5,6>\}$.

  当a,b不是有序对时, R_1和R_2不是关系.

但是dom和ran是针对任意的集合定义的，只要其中包含有序对就可以。

dom $R_1=\emptyset$, ran $R_1=\emptyset$, fld $R_1=\emptyset$

dom $R_2=\{c,e\}$, ran $R_2=\{d,f\}$, fld $R_2=\{c,d,e,f\}$

dom $R_3=\{1,3,5\}$, ran $R_3=\{2,4,6\}$,

fld $R_3=\{1,2,3,4,5,6\}$.   #

3. 二元关系的基本运算

逆, 合成(复合)

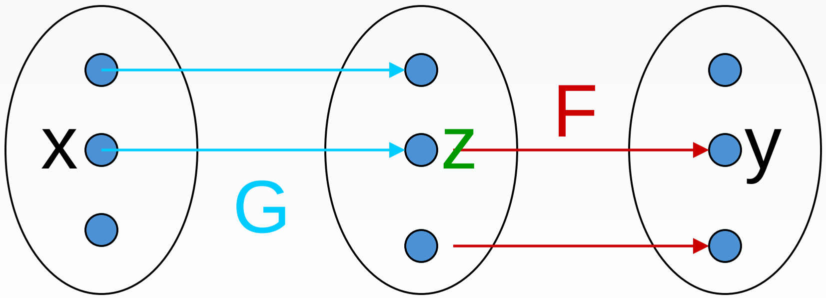
对任意集合F,G，可以定义:

- 逆(inverse) :

$$F^{-1} = \{ \langle x,y \rangle \mid yFx \}$$

- 合成(复合)(composite):

$$F \bigcirc G = \{ \langle x,y \rangle \mid \exists z(xGz \wedge zFy) \}$$



限制,象

对任意集合F,A, 可以定义:

- 限制(restriction): 定义域限制在A中的关系

$$F\upharpoonright A = \{ \langle x,y\rangle \mid xFy \land x\in A \}$$

- 象(image): 定义域限制在A中的关系的值域

$$F[A] = \mathrm{ran}(F\upharpoonright A)$$

$$F[A] = \{ y \mid \exists x(x\in A \land xFy) \}$$

单根,单值

对于任意值域中的元素在定义域中有且仅有一个元素与之构成F中的有序对

对任意集合F, 可以定义:

- 单根(single rooted): F是单根的⇔

  $$\forall y(\ y \in \mathrm{ran}\ F \rightarrow \exists! x(\ x \in \mathrm{dom}\ F \wedge xFy\ )\ )$$

  $$\Leftrightarrow (\forall y \in \mathrm{ran}\ F)(\exists! x \in \mathrm{dom}\ F)(xFy)$$

- 单值(single valued): F是单值的⇔

  $$\forall x(\ x \in \mathrm{dom}\ F \rightarrow \exists! y(\ y \in \mathrm{ran}\ F \wedge xFy\ )\ )$$

  $$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{dom}\ F)(\exists! y \in \mathrm{ran}\ F)(xFy)$$

对于任意定义域中的元素在值域中有且仅有一个元素与之构成F中的有序对

例题2

- 例2: 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,\langle c,d\rangle\}$,

  $R=\{ \langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \}$,

  $F=\{ \langle a,b\rangle, \langle a,\{a\}\rangle, \langle \{a\},\{a,\{a\}\}\rangle \}$,

  $G=\{ \langle b,e\rangle,\langle d,c\rangle \}$.

求: (1) A^{-1}, B^{-1}, R^{-1}.

(2) $B\bigcirc R^{-1}$, $G\bigcirc B$, $G\bigcirc R$, $R\bigcirc G$.

(3) $F\uparrow\{a\}$, $F\uparrow\{\{a\}\}$, $F\uparrow\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\uparrow\{\{a\}\}$.

(4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$, $F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

例题2(解(1))

- 已知: A={a,b,c,d}, B={a,b,<c,d>},

  R={ <a,b>, <c,d> },

求: (1) A^{-1}, B^{-1},R^{-1}.

解: (1) $A^{-1} = \varnothing$,

$B^{-1} = \{<d,c>\}$,

$R^{-1} = \{<b,a>,<d,c>\}$.

例题2(解(3))

- 已知: $F=\{ <a,b>, <a,\{a\}>, <\{a\},\{a,\{a\}\}> \}$,

求: (3) $F\uparrow\{a\}$, $F\uparrow\{\{a\}\}$, $F\uparrow\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\uparrow\{\{a\}\}$.

解: (3) $F\uparrow\{a\} = \{ <a,b>, <a,\{a\}> \}$, 第一个元素为a的F中的有序对

$F\uparrow\{\{a\}\} = \{ <\{a\},\{a,\{a\}\}> \}$,

$F\uparrow\{a,\{a\}\} = F$, 第一个元素为a或者{a}的F中的有序对

$F^{-1}\uparrow\{\{a\}\}=\{ <\{a\},a> \}$.

限制F↑A：定义域限制在集合A中的关系

例题2(解(4))

- 已知: $F=\{ \langle a,b\rangle, \langle a,\{a\}\rangle, \langle \{a\},\{a,\{a\}\}\rangle \}$,

求: (4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$, $F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

解: (4) $F[\{a\}] = \{ b, \{a\} \}$,

$F[\{a,\{a\}\}] = \{ b, \{a\}, \{a,\{a\}\} \}$,

$F^{-1}[\{a\}] = \varnothing$,

$F^{-1}[\{\{a\}\}] = \{ a \}$. #

F中第二个元素为a的有序对的第一个元素的集合

F中第二个元素为{a}的有序对的第一个元素的集合

象F[A]：定义域限制在集合A中的关系的值域

例题3

- 设 $R=\{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in Z \wedge y=|x| \}$,

  $A=\{ 0, 1, 2\}$, $B=\{ 0, -1, -2 \}$

求: (1) $R[A\cap B]$ 和 $R[A]\cap R[B]$;

(2) $R[A]-R[B]$ 和 $R[A-B]$.

解: (1) $R[A\cap B]=R[\{0\}]=\{0\}$,

$R[A]\cap R[B]=\{0,1,2\}\cap\{0,1,2\}=\{0,1,2\}$;

(2) $R[A]-R[B]=\{0,1,2\}-\{0,1,2\}= \varnothing$,

$R[A-B]=R[\{1,2\}]=\{1,2\}$. #

象

$F[A] = \{ y \mid \exists x(x\in A \wedge xFy) \}$ 定义域限制在A中的关系的值域

定理3

- 定理3: 设F,G是任意集合, 则

(1) $\mathrm{dom}(F \cup G) = \mathrm{dom}F \cup \mathrm{dom}G$

(2) $\mathrm{ran}(F \cup G) = \mathrm{ran}F \cup \mathrm{ran}G$

(3) $\mathrm{dom}(F \cap G) \subseteq \mathrm{dom}F \cap \mathrm{dom}G$

(4) $\mathrm{ran}(F \cap G) \subseteq \mathrm{ran}F \cap \mathrm{ran}G$

(5) $\mathrm{dom}F - \mathrm{dom}G \subseteq \mathrm{dom}(F-G)$

(6) $\mathrm{ran}\,F - \mathrm{ran}G \subseteq \mathrm{ran}(F-G)$

定理3(证明(1))

- (1) $dom(F \cup G) = domF \cup domG$

证明: (1) $\forall x$,

$x \in dom(F \cup G) \Leftrightarrow \exists y(\ x(F \cup G)y\ )$

$\Leftrightarrow \exists y(xFy \vee xGy) \Leftrightarrow \exists y(xFy) \vee \exists y(xGy)$

$\Leftrightarrow x \in domF \vee x \in domG$

$\Leftrightarrow x \in domF \cup domG$

$\therefore dom(F \cup G) = domF \cup domG.$

基本证明思路：
1. 任意取其中的一个元素；2. 应用dom或ran的概念转化为关系；3. 应用关系的概念转化为逻辑演算；4. 在使用dom或ran的概念。

定理3(证明(4))

- (4) $\mathrm{ran}(F\cap G) \subseteq \mathrm{ran}F \cap \mathrm{ran}G$

证明: (4) $\forall x$,

$x\in \mathrm{ran}(F\cap G) \Leftrightarrow \exists y(\ y(F\cap G)x\ )$

$\Leftrightarrow \exists y(yFx \wedge yGx) \Rightarrow \exists y(yFx) \wedge \exists y(yGx)$

$\Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}F \wedge x\in \mathrm{ran}G$

$\Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}F \cap \mathrm{ran}G$

$\therefore\ \mathrm{ran}(F \cap G) \subseteq \mathrm{ran}F \cap \mathrm{ran}G.$

定理3(证明(5))

自学

- (5) $\mathrm{dom}F-\mathrm{dom}G \subseteq \mathrm{dom}(F-G)$

证明: (5) $\forall x$,

$x\in \mathrm{dom}F-\mathrm{dom}G \Leftrightarrow x\in \mathrm{dom}F \wedge x\notin \mathrm{dom}G$

$\Leftrightarrow \exists y(xFy)\wedge\neg\exists y(xGy) \Leftrightarrow \exists y(xFy)\wedge\forall y(\neg xGy)$

$\Rightarrow \exists y(\ x(F-G)y\ ) \Leftrightarrow x\in \mathrm{dom}(F-G)$

$\therefore$ $\mathrm{dom}F-\mathrm{dom}G \subseteq \mathrm{dom}(F-G)$. #

定理4（证明自学）

- 定理4: 设F是任意集合, 则

(1) $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$;

(2) $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$;

(3) $(F^{-1})^{-1} \subseteq F$, 当F是关系时, 等号成立.

定理4(证明(1))

- (1) $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$;

证明: (1) $\forall x$,

$$x \in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(xF^{-1}y)$$

$$\Leftrightarrow \exists y(yFx) \Leftrightarrow x \in \mathrm{ran}F$$

$$\therefore \mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F.$$

- (2)可类似证明.

定理4(证明(3))

- (3) $(F^{-1})^{-1} \subseteq F$, 当F是关系时, 等号成立.

证明: (1) 设F是关系, 则 $\forall$<x,y>,

$<x,y> \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow x(F^{-1})^{-1}y \Leftrightarrow yF^{-1}x \Leftrightarrow xFy.$

这时 $(F^{-1})^{-1} = F$.

当F不是关系时,

$(F^{-1})^{-1} \subset F$, 例如, 设 $F=\{<a,b>,a\}$, 则

$F^{-1}=\{<b,a>\}$, $(F^{-1})^{-1} =\{<a,b>\} \subset F$

$\therefore (F^{-1})^{-1} \subseteq F$. #

定理5

- 定理5: 设R_1,R_2,R_3为集合, 则

$$(R_1 \bigcirc R_2) \bigcirc R_3 = R_1 \bigcirc (R_2 \bigcirc R_3)$$

证明: $\forall \langle x,y \rangle$, $\langle x,y \rangle \in (R_1 \bigcirc R_2) \bigcirc R_3$

$\Leftrightarrow \exists z(xR_3z \wedge z(R_1 \bigcirc R_2)y)$

$\Leftrightarrow \exists z(xR_3z \wedge \exists t(zR_2t \wedge tR_1y))$

$\Leftrightarrow \exists z \exists t(xR_3z \wedge (zR_2t \wedge tR_1y))$

$\Leftrightarrow \exists t \exists z(xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y)$

基本方法：
集合的逻辑
演算

定理5(续)

证明(续): $\Leftrightarrow \exists t \exists z(\, xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y\,)$

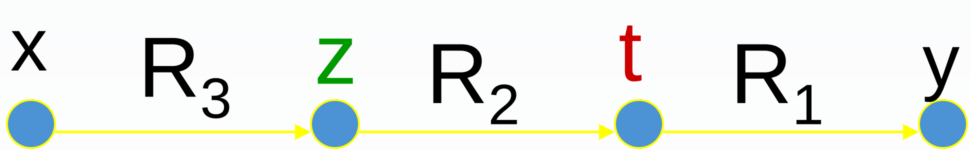
$\Leftrightarrow \exists t(\, \exists z(\, xR_3z \wedge zR_2t) \wedge tR_1y\,)$

$\Leftrightarrow \exists t(\, x(R_2 \circ R_3)t \wedge tR_1y\,)$

$\Leftrightarrow\ xR_1 \circ (R_2 \circ R_3)y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

$\therefore\ (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3).$ #

说明: 定理5说明合成运算具有结合律.



本章总结

- 1\. 有序对与卡氏积:

  $\langle a,b\rangle$, $A\times B$

- 2\. 二元关系:

  $R\subseteq A\times B$, $R\subseteq A\times A$; $\varnothing$, I_A, E_A; xRy

- 3\. 二元关系的基本运算:

  $dom(R)$, $ran(R)$, $fld(R)$;

  $R\uparrow A$, $R[A]$; R^{-1}, $R\bigcirc S$