北京航空航天大学

2014－2015 学年第一学期期中

《 工科数学分析(I) 》

试卷（共6页）

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2014年12月6日

一 、单选题（总 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2})$ 的值为（ B ）。

A. $-\dfrac{3}{2}$；　　B. $\dfrac{3}{2}$；　　C. 0；　　D. 1.

2. 已知函数$f(x)=\begin{cases} x, & x为有理数 \\ 1-x，& x为无理数 \end{cases}$，则函数 $f(x)$ 的连续点是（ D ）。

A. 处处不连续　　B. $x=1$　　C. $x=0$　　D. $x=\dfrac{1}{2}$

3. 设函数$f(x)$满足方程$f''(x)-2f'(x)+f(x)=0$，在x_0处满足$f(x_0)>0, f'(x_0)=0$，则$f(x)$在x_0处（ A ）。

A. 取得极大值；　　B. 取得极小值；
C. 某邻域内单调递增；　　D. 某邻域内单调递减。

4. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有（ A ）

A. $f(0)=0$；　　B. $f'(0)=0$；

C. $f(0)+f'(0)=0$；　　D. $f(0)-f'(0)=0$。

5. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$ 的值为（ C ）

A. 0；　　B. 1；　　C. $\dfrac{1}{2}$；　　D. $\dfrac{1}{3}$.

一 、单选题（B、D、A、 A、 C）

二、计算证明（总 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1. 用“$\varepsilon-N$”定义证明：若$x_n \geq 0(n=1,2,\dots,)$，且$\lim_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$，则$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$。

证明：任取$\varepsilon>0$，由$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，存在自然数$N$，使得$n>N$时，

$$|x_n-a|<\varepsilon^2。$$

则$n>N$时，

$$\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right| \leq \sqrt{|x_n-a|}<\varepsilon^2。$$

因此$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$。

2. 设$x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}, (n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

解：易见$x_1=1, x_2=\sqrt{7}>x_1$，且$x_1<3, x_2<3$，

假设$3>x_n>x_{n-1}$，则$x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}<\sqrt{3+6}=3$，　　------------有界性 2 分

且$x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}>\sqrt{x_{n-1}+6}=x_n$。　　------------单调性 2 分

由数学归纳法知$\{x_n\}$单调上升有上界 3，因此$\{x_n\}$收敛。

设$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则$a$满足方程$a^2=a+6$，又由$a\geq 0$知$a=3$。　　--------------极限值 1 分

因此$\lim_{n\to\infty} x_n = 3$。

3. 求函数$f(x)=x^2\sin x$的n阶导数$f^{(n)}(x)$。

解：由 Leibniz 公式，

$$f^{(n)}(x)=x^2\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+n(n-1)\sin(x+\frac{(n-2)\pi}{2})。$$

4. 已知$\sin y+e^x-xy-1=0$，求$\frac{dy}{dx}|_{x=0}$和$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$。

解：两边都对x求导可得$\cos y\cdot y'+e^x-y-xy'=0$，

因此$y'=\frac{y-e^x}{\cos y-x}$,

注意到$x=0$时，$y=0$，因此$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=-1$。

而$y''=\frac{(y'-e^x)(\cos y-x)-(y-e^x)(-\sin y\cdot y'-1)}{(\cos y-x)^2}$,

因此$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$=-3。

或者注意到$x=0$时，$\mathrm{y}=\mathrm{k}\pi$，带入的相应结果。

三、（本题 10 分）

在区间（0, 1）上证明下列不等式：

（1）$\ln(1+x)<x$；　　　　　（2）$\ln^2(1+x)<\dfrac{x^2}{1+x}$。

证明：（1）记$f(x)=\ln(1+x)-x$，则$f(0)=0$。

$$\text{又由} f'(x)=\frac{1}{(1+x)}-1<0$$

知在（0, 1）上$f(x)$单调递减，因此当$f(x)<0$（$x>0$时），

所以不等式$\ln(1+x)<x$成立。　　　　　　　　　　　　-------3 分

（2）记$F(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，则$F(0)=0$。而

$$F'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x\text{。易见}$$

$F'(0)=0$。而

$$F''(x)=\frac{2\,[\ln(1+x)-x]}{1+x}<0,$$

$F'(x)$在（0, 1）上严格单调递减，可得

$F'(x)<F'(0)=0$。

由此可得$F(x)$在（0, 1）上严格单调递减，因此$F(x)<F(0)$，即得

$$(1+x)\ln^2(1+x)-x^2<0,$$

因此不等式$\ln^2(1+x)<\dfrac{x^2}{1+x}$成立。　　　　　　　　---------------7 分

四、（本题 10 分）

(1) 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 可微，且 $f'(x)$ 在 (a,b) 有界. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。

(2) 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) $(-\infty<a<b<+\infty)$ 上可微且一致连续，试问 $f'(x)$ 在 (a,b) 是否一定有界.（若肯定回答，请证明；若否定回答，请举例说明）

解：（1）设在区间(a,b)上$|f'(x)|\le L$，则任取$\varepsilon>0$，可取$\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)(x_1-x_2)|\le L|x_1-x_2|<L\delta=\varepsilon\text{。}$$

因此 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。　　　　　　　　-----------------6 分

（2）$f'(x)$ 在 (a,b) 上不一定有界，例如在（0，1）上考虑函数

$$f(x)=\sqrt{x},$$

它是一致连续且可微的函数，但 $f'(x)$ 在（0，1）上无界。

----------------4 分

五、（本题 10 分）

设函数 $f(x)$在区间[0,1]上二阶可导，且满足$|f''(x)|\le 1$， $f(x)$在区间(0,1)内取到最大值0。

证明：$|f(0)|+|f(1)|\le \frac{1}{2}$。

证明：设$f(x)$在$x_0\in(0,1)$处取得最大值，则x_0为极大值点，因此$f'(x_0)=0$。在x_0处应用拉格朗日余项的泰勒公式可得：

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2=\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2=\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2,$$

因此$|f(0)|+|f(1)|\le\frac{1}{2}[x_0^2+(1-x_0)^2]$，又由$x_0^2+(1-x_0)^2$的最大值在$x_0=0$ 或 1处取到，因此$|f(0)|+|f(1)|\le\frac{1}{2}$。

六.（本题 15 分）

（1）写出数列$\{a_n\}$是柯西基本列的定义并叙述柯西收敛定理。

（2）证明数列$a_n=\frac{\sin 2^2}{2(2+\sin 2)}+\frac{\sin 3^2}{3(3+\sin 3)}+\cdots+\frac{\sin n^2}{n(n+\sin n)}$收敛。

解：（1）对给定数列 $\{x_n\}$, 如 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathrm{N}^*$, 当m, $n\in\mathrm{N}^*$且 m, $n>N$时，都有

$|x_m-x_n|<\varepsilon$,则称数列 $\{x_n\}$,是基本列。

或$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathrm{N}^*$, 当$n>N$时, 对一切 $p\in\mathrm{N}^*$, 有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

柯西基定理：$\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 是基本列.   -----------------------5 分

（2）任取自然数n，p，有

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{sin n^2}{n(n+sin n)}+\frac{sin(n+1)^2}{(n+1)(n+1+sin(n+1))}+\cdots+\frac{sin(n+p)^2}{(n+p)(n+p+sin(n+p))}\right|\le$$

$$\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{(n+1)n}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p-1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\le\frac{1}{n}。$$

任取$\varepsilon>0$，可取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则当$n>N$时，任取自然数$p$，均有

$$|a_{n+p}-a_n|\le\frac{1}{n}<\varepsilon。$$

因此$\{a_n\}$为柯西基本列，因此$\{a_n\}$收敛。   --------- 10 分

七（本题 15 分）

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且$f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$。证明：

（1） 存在$\xi \in (\frac{1}{2},1)$，使得$f(\xi)=\xi$;

（2） 对于任意实数λ，必存在$\eta \in (0,\xi)$，使得$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$。

证明：（1）令$F(x)=f(x)-x$，则

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0,\ \ F(1)=-1<0,$$

由连续函数的介值性知存在$\xi \in (\frac{1}{2},1)$，使得

$$f(\xi)=\xi。$$ ---------------------6 分

（2）令

$$G(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x),$$

$$则 G(0)=G(\xi)=0,$$

因此存在$\eta \in (0,\xi)$，使得

$$G'(\eta)=0。$$

因此

$$G'(\eta)=e^{-\lambda\eta}\big(f'(\eta)-1-\lambda(f(\eta)-\eta)\big)=0。$$

因此$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$。 ------------------------9 分