北京航空航天大学

2012 - 2013 学年第一学期期中

《 工科数学分析(I) 》

试卷

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成 绩									
阅卷人									
校对人									

2012 年 11 月 28 日

一 计算下面各题（满分 40 分，每个题目 5 分）

1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}}$，

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1$，

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e$.

建议评分标准：转化成指数 2 分，洛比塔法则 3 分

2) 在 $x\to0^+$ 时，求下列无穷小的阶

$$\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{x}}}-2\right).$$

解： 当 $x\to0^+$ 时，$\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{x}}}-2\to0$，因此 $\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{x}}}-2\right)$ 与 $\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{x}}}-2$ 为等价的无穷小量。而

$$\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{x}}}-2$$

$$=\frac{\sqrt{4+\sqrt{x}}-2}{\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{x}}}+2}=\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{x}}}+2\right)\left(\sqrt{4+\sqrt{x}}+2\right)}.$$

因此 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{x}}}-2}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{16}$，因此 $\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{x}}}-2\right)$ 为在 $x\to0^+$ 时的 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小量.

建议评分标准：去掉 sin 的步骤 2 分, 剩下 3 分

3) 假设 $f = x^{x^a} + a^{x^x}$ 求 $f'(x)$.

解：$x^{x^a} = e^{x^a \ln x}$，因此 $(x^{x^a})' = (e^{x^a \ln x})' = x^{x^a}(x^{a-1} + ax^{a-1}\ln x)$，

$x^x = e^{x \ln x}$，因此 $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$，

因此 $(a^{x^x}) = \ln a \cdot a^{x^x}(x^x)' \cdot \ln a \cdot a^{x^x} \cdot x^x(1 \quad \ln x)$.因此

原式$= x^{x^a}(x^{a-1} + ax^{a-1}\ln x) + \ln a \cdot a^{x^x} \cdot x^x(1 + \ln x)$

建议评分标准：两部分各 2 分，最终答案 1 分

4) 假设 $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$ $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \cos t + e^t \sin t} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$.

建议评分标准：分子分母各 2 分，答案 1 分

5) 假设 $f(x) = (x^2 + 2x + 3)\sin 2x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解：由 Leibniz 公式，

$$f^{(n)}(x)$$

$$= (x^2 + 2x + 3) \cdot 2^n \sin(2x + \frac{n\pi}{2}) + (2x + 2) \cdot 2^{n-1} \sin(2x \quad \frac{(n-1)\pi}{2})$$

$$+ n(n \cdot 1) 2^{n-2} \sin(2x \quad \frac{(n-2)\pi}{2})$$

建议评分标准：能看出是用 Leibniz 法则 2 分，剩余计算 3 分

6) 求 $f(x) = \cos x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 的 n 阶 Taylor 展开,并写出 peano 余项.

解：

$$\cos x = -\sin(x-\frac{\pi}{2})$$

$$= -(x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3-\cdots+(-1)^n(x-\frac{\pi}{2})^{2n-1}+o((x-\frac{\pi}{2})^{2n})$$

建议评分标准：5 分

7) 假设函数 $f(x)=x\ln x$（$x>0$), 判断函数的凹凸性.

解：$x>0$ 时，$f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$, 因此 $f(x)$ 为凸函数.

建议评分标准：二阶导数 3 分，凹凸性判断 2 分

8) 求函数 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值

解:在 $x\neq 0$ 时 $f'(x)=2x^{\frac{2}{3}}+(2x-5)\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)$, 在 $x=0$ 时 $f(x)$ 不可导. 由 $f'(x)=0$ 求得 $f(x)$ 的驻点为 $x=1$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值 $f(0)=0$，在 $x=1$ 处取极小值 $f(1)=-3$.

建议评分标准：导数 1 分，判断单调性 3 分，极值判断 1 分

二 证明下面问题（10 分）

假设 $\sigma>0, x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{\sigma}{x_n^2}\right)$ 证明数列 $\{x_n\}$ 单调有界，且极限为 $\sqrt[3]{\sigma}$.

证明：当 $n>0$ 时，$x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{\sigma}{x_n^2}\right)\geq\dfrac{1}{3}(x_n+x_n+\dfrac{\sigma}{x_n^2})^3\ \sqrt[3]{\sigma}$, 因此从第二项开始 $\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt[3]{\sigma}$. 下证 $\{x_n\}$ 为单调下降的，当 $n>1$ 时，由 $x_n>\sqrt[3]{\sigma}$，

$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{s}{x_n^{2}}\right) \le \frac{1}{3}(2x_n + x_n) = x_n$，$\{x_n\}$为单调下降，因此$\{x_n\}$有极限，设$\lim_{n} x_n = a$，则$a = \frac{1}{3}(2a + \frac{s}{a})$，解得$a = \sqrt[3]{s}$.

建议评分标准：有界性 3 分，单调性 4 分，计算极限 3 分

三. **证明下面问题（10 分）**

数列$\{x_n\}$满足$x_n = \frac{\sin 2x}{2(2+\cos 2x)} + \frac{\sin 3x}{3(3+\cos 3x)} + \cdots \frac{\sin nx}{n(n+\cos nx)}$,

用 Cauchy 收敛定理证明$\{x_n\}$收敛。

证明：易知不等式$|\frac{\sin nx}{n(n+\cos nx)}| \le \frac{1}{n(n-1)}$成立，因此任取自然数$n$及正整数

p，有

$$|a_{n+p} - a_n| \le |\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+1+\cos(n+1)x)}| + |\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+\cos(n+p)x)}|$$

$$\le \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} < \frac{1}{n}.$$

任取$\varepsilon > 0$，取$N = [\frac{1}{\varepsilon}]$，则当$n > N$时，任取自然数$p$，均有$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$

因此$\{x_n\}$为 Cauchy 基本列，故收敛。

建议评分标准：不等式放缩 6 分，Cauchy 收敛定理 4 分。

四. 证明下面问题 (10 分).

(1) 利用拉格朗日中值定理证明 $|\arctan x_1 - \arctan x_2| \le |x_1 - x_2|$;

(2) $\lim_{x\to+\infty}(\arctan\sqrt{x+k} - \arctan\sqrt{x}) = 0$,其中$k \in \mathrm{Z}$；

(3) 设常数$a_1, a_2, \cdots a_n$满足$a_1 + a_2 + \cdots a_n = 0$，求证$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \arctan\sqrt{x+k} = 0$.

证明：（1）. 由拉格朗日中值定理知存在ξ在x_1与x_2，使得

$$\arctan x_1 - \arctan x_2 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_1 - x_2),$$

因此$|\arctan x_1-\arctan x_2|\le|x_1-x_2|$;

（2）. $|\arctan\sqrt{x+k}-\arctan\sqrt{x}|\le|\sqrt{x+k}-\sqrt{x}|=\frac{k}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}|}$，而

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{k}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}|}=0$，因此$\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan\sqrt{x+k}-\arctan\sqrt{x})=0;$

（3）. $\sum_{k=1}^{n}a_k\arctan\sqrt{x+k}=\sum_{k=1}^{n}a_k(\arctan\sqrt{x+k}-\arctan\sqrt{x})$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k\arctan\sqrt{x+k}=\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k(\arctan\sqrt{x+k}-\arctan\sqrt{x})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k\lim_{x\to+\infty}(\arctan\sqrt{x+k}-\arctan\sqrt{x})=0.$$

建议评分标准：第（1）小题 3 分，第（2）小题 4 分，第（3）小题 3 分

五．（10 分）假设函数$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$上可导，且$f(0)+f(1)=0, f(2)=0$

证明: 1)利用介值定理证明存在$\alpha\in[0,1]$,使得$f(\alpha)=0$；

2) 存在$\theta\in(0,2)$使得$f(\theta)+f'(\theta)=0$.

证明：(1). 由$f(0)+f(1)=0$可得，要么$f(0)=f(1)=0$，要么$f(0)\cdot f(1)<0$，由连续函数介值定理，一定存在$\alpha\in(0,1)$,使得$f(\alpha)=0$，不管哪种情况都存在$\alpha\in[0,1]$,使得$f(\alpha)=0$.

(2). 考虑新函数$F(x)=e^x f(x)$，则$F'(x)=e^x(f(x)+f'(x))$，$F(\alpha)=F(2)=0$，由罗尔定理知存在$\theta\in(0,2)$，使得$F'(\theta)=e^{\theta}(f(\theta)+f'(\theta))=0$，即$f(\theta)+f'(\theta)=0$.

建议评分标准：两个小题各 5 分

六．(10 分) 假设函数$f(x)$在$[0,1]$存在二阶导数,$|f''(x)|$£ M，$f(x)$在$(0,1)$内取得最大值，求证$|f'(0)|+|f'(1)|\le M$.

证明：设$f(x)$在a点取到最大值，则$f'(a)=0$，在a点对$f'(x)$进行泰勒展开得：

$f'(0)=f'(a)+f'(\theta_1)(0-a)=f''(\theta_1)(-a)$；

$f'(1)=f'(a)+f'(\theta_2)(1-a)=f''(\theta_1)(1-a)$.

因此$|f'(0)|+|f'(1)|=|f''(\theta_1)|a+|f''(\theta_1)|(1-a)\le M(a+1-a)=M$.

建议评分标准：得到最大值导数为 0 得 2 分，两个泰勒公式各 3 分，不等式放缩 2 分

七. (10 分）证明下面问题

已知函数$f(x)$满足$f(x)>0$，且$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，求证$f(x)^{\frac{1}{2}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证明：任取$\varepsilon>0$，由$f(x)$一致连续知：存在$\delta>0$，使得当$|x_1-x_2|<\delta$时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon^2$，下面分情况证明$|f(x_1)^{\frac{1}{2}}-f(x_2)^{\frac{1}{2}}|<\varepsilon$.

如果$f(x_1)<\varepsilon^2, f(x_2)<\varepsilon^2$，则$|f(x_1)^{\frac{1}{2}}-f(x_2)^{\frac{1}{2}}|<\varepsilon$.

如果$f(x_1), f(x_2)$中有一个大于等于ε^2，不妨设$f(x_1)\ge\varepsilon^2$，则

$$|f(x_1)^{\frac{1}{2}}-f(x_2)^{\frac{1}{2}}|=\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|f(x_1)^{\frac{1}{2}}+f(x_2)^{\frac{1}{2}}|}<\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}=\varepsilon\cdot$$

因此$f(x)^{\frac{1}{2}}$一致连续.

建议评分标准：一致连续定义 4 分，两种情况讨论各 3 分

八. （10 分）附加题 (下面任选一题, 只能选作一题)

1) 设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的可导函数，且在$x=0$的某个邻域内成立$f(e^x)-2f(e^{-x})=9x+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$是当$x\to0$时比$x$高阶的无穷小量。求曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程。

解：记$F(x)=f(e^x)-2f(e^{-x})$，则由$F(x)=9x+\alpha(x)$知$F(0)=0$，$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{9x+\alpha(x)}{x}=9$. 又由$F(x)=f(e^x)-2f(e^{-x})$知$F(0)=f(1)-2f(1)=-f(1)$. 因此$f(1)=0$，$F'(0)=f'(1)+2f'(1)$，因此$f'(1)=3$，$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=3(x-1)$.

建议评分标准：$f(1)$的计算 2 分，$f'(1)$的计算 4 分，切线公式 4 分。

2）用有限覆盖定理证明若函数 $f\left(x\right)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并且对任何一点 $x\in[a,b], f\left(x\right)>0$，则一定存在 $c>0,$ 当 $x\in[a,b], f\left(x\right)>c$。

证明：任取 $x\in[a,b]$，存在 $\delta_x>0$，使得 $|y-x|<\delta_x$ 时，$|f(y)-f(x)|<\frac{f(x)}{2}$，此时有 $f(y)>\frac{f(x)}{2}$。易知 $\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$ 构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖，由有限覆盖定理，存在有限个数 $x_1,x_2,\cdots x_n$，使得 $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})$，取 $c=\min\{\frac{f(x_1)}{2},\frac{f(x_2)}{2},\cdots\frac{f(x_n)}{2}\}$，则有任取 $x\in[a,b], f\left(x\right)>c$.

建议评分标准：δ_x 的取法 3 分，构造开覆盖 4 分，c 的取法 3 分.