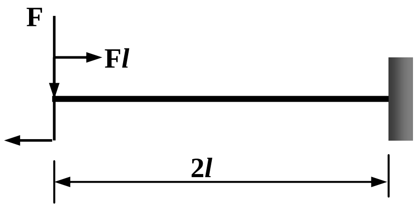
试卷一参考答案

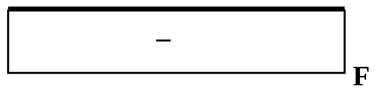
材料力学 A (I) 期末考试卷(A 卷)（参考答案）

1. 悬臂梁长 2l，自由端作用向下集中力 F 和力偶 Fl。试画梁的剪力弯矩图，并画出梁变形时挠曲轴的大致形状。(12 分)

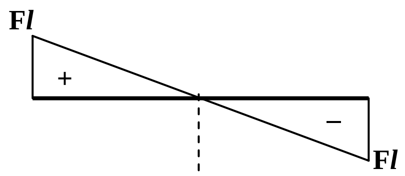


答案：

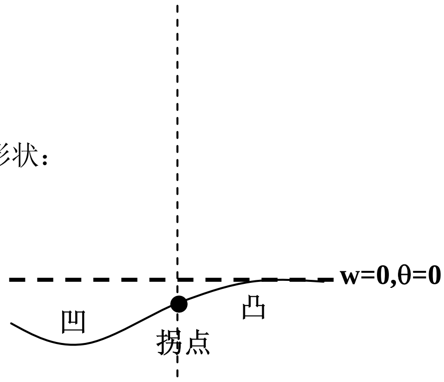
F_s 图：



M 图：



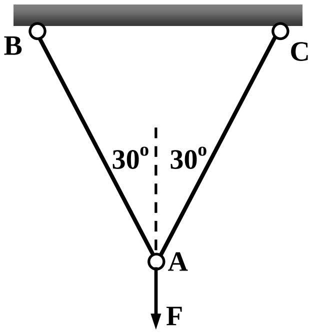
挠曲轴大致形状：



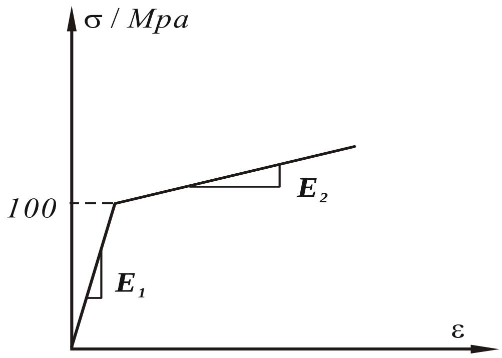
2. 图 a 所示简单杆系的两杆长 $l=1m$，横截面积 $A=100mm^2$，材料的应力应变关系如图 b 所示，$E_1=100GPa$，$E_2=10GPa$，试求两杆的应力和 A 点的铅垂位移。 (15 分)

(1) 铅垂载荷 $F=10\sqrt{3}KN$；

(2) 铅垂载荷 $F=11\sqrt{3}KN$



图(a)



图(b)

解：（1）当 $F=10\sqrt{3}KN$ 时，$F_{N,AB}=F_{N,AC}=F/(2\cos 30^0)=10KN$

$$\sigma_{AB}=\sigma_{AC}=4F/(\pi d^2)=100MPa$$

$$\Delta l_{AB}=\Delta l_{AC}=Fl/(EA)=1mm$$

$$f_A=\Delta l_{AB}/\cos 30^0=1.15mm$$

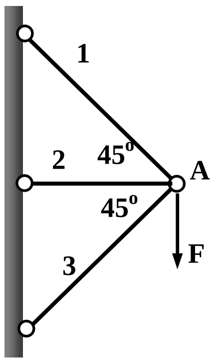
（2）当 $F=11\sqrt{3}KN$ 时，$F_{N,AB}=F_{N,AC}=F/(2\cos 30^0)=11KN$

$$\sigma_{AB}=\sigma_{AC}=4F/(\pi d^2)=110MPa$$

$$\Delta l_{AB}=\Delta l_{AC}=\frac{100}{100\times 10^3}\times 1\times 10^3+\frac{10}{10\times 10^3}\times 1\times 10^3=2mm$$

$$f_A=\Delta l_{AB}/\cos 30^0=2.31mm$$

3. 图示三杆桁架，杆 2 水平，A 点承受铅垂载荷 F，求各杆内力。 (15 分)
   (1) 三杆拉压刚度均为 EA；
   (2) 杆 1 为刚性杆，杆 2 与杆 3 拉压刚度为 EA；



解：（1）根据反对称性，可得：

$$F_{N2}=0$$

$$F_{N1}=-F_{N3}=\frac{\sqrt{2}}{2}F$$

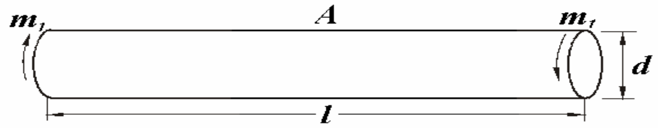
（2）

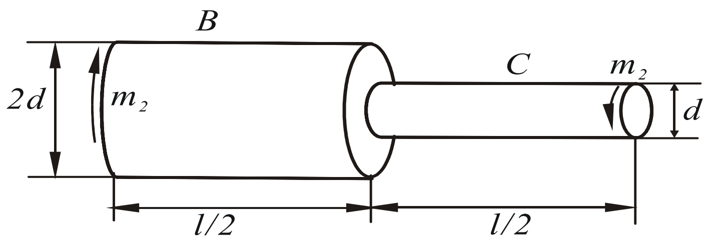
$$\Delta l_2=\Delta l_3\times\cos 45^0$$
$$\Delta l_2=F_2 l_2/EA$$
$$\Delta l_3=F_3 l_3/EA$$
$$F_1\times\sin 45^0+F_3\times\sin 45^0=F$$
$$F_1\times\cos 45^0=F_3\times\cos 45^0+F_2$$

解得：

$$F_2=F_3=(\sqrt{2}-1)F$$
$$F_1=F$$

4. 如图所示等截面轴和阶梯轴的参数为：长 $l=1m$，直径 $d=20mm$，两轴的两端截面相对扭转角均为 $\varphi=0.1rad$，材料剪切模量 $G=80GPa$，试求两轴在两端的外力偶 $m1$ 和 $m2$。 (13 分)





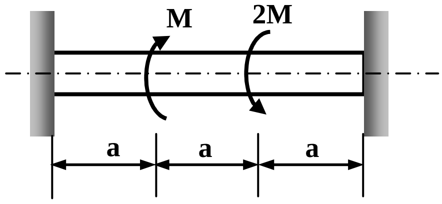
解：等截面圆轴：

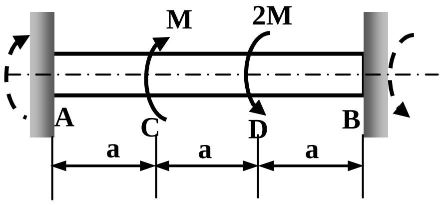
$$\varphi=\frac{m_1 l}{GI_P}=0.1 \qquad \Rightarrow \qquad m_1=1.257\times10^5 N\cdot mm$$

阶梯轴：

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\frac{m_2 l/2}{GI_{P1}}+\frac{m_2 l/2}{GI_{P2}}=0.1 \qquad \Rightarrow \qquad m_2=2.365\times10^5 N\cdot mm$$

5. 求图示轴的最大扭转切应力。已知轴的直径为 d，外扭力距分别为 M 和 2M，轴的变形在线弹性变形范围内。(15 分)





$$M_A + M = 2M + M_B$$

解：$\varphi_{AC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DB} = 0$

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_P}$$

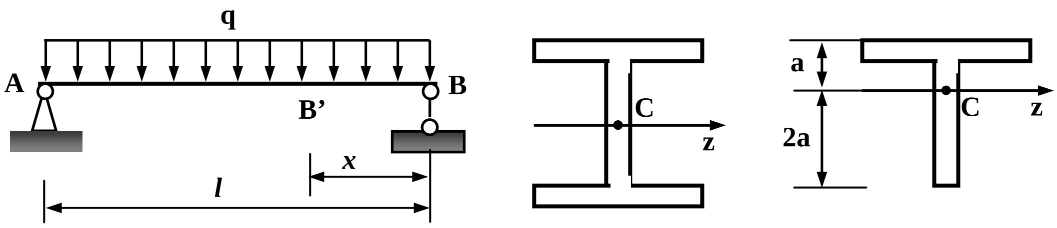
解得：$M_A = 0, M_B = -M$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_P} = \frac{M}{W_P} = \frac{16M}{\pi d^3}$$

6. 图所示铸铁梁长 l，$[\sigma_c] = 4[\sigma_t]$，其中 $[\sigma_t]$ 和 $[\sigma_c]$ 分别为拉、压许用应力。支座 B 可移动，则当支座 B 向内移动多少时，梁的许用载荷 q 为最大。(15 分)

(1) 梁横截面为对称的工字形；

(2) 梁横截面为 T 形，c 为截面形心；



(1) (2)

解：$R_B = \dfrac{ql^2}{2(l-x)}, R_A = \dfrac{ql(l-2x)}{2(l-x)}$

$$M_{-,\max} = \frac{qx^2}{2},$$

$$M_{+,\max} = M_{F_s=0} = \frac{ql(l-2x)}{2(l-x)} \times \frac{l(l-2x)}{2(l-x)} - \frac{q}{2} \times \left(\frac{l(l-2x)}{2(l-x)}\right)^2 = \frac{q}{2} \times \left(\frac{l(l-2x)}{2(l-x)}\right)^2$$

（1）梁横截面为对称的工字形：

当 $M_{-,\max} = M_{+,\max}$ 时，[q]最大

$$\frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}\left(\frac{l(l-2x)}{2(l-x)}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$$

（2）梁横截面为 T 字形：

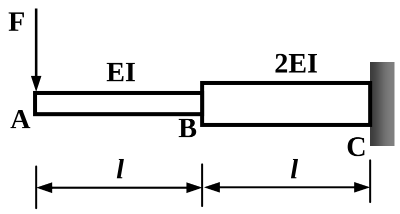
在 $M_{-,\max}$ 处：　　$\sigma_{+,\max}=\dfrac{M_{-,\max}\times a}{I_z},\sigma_{-,\max}=\dfrac{M_{-,\max}\times 2a}{I_z}$

在 $M_{-,\max}$ 处：　　$\sigma_{+,\max}=\dfrac{M_{+,\max}\times 2a}{I_z},\sigma_{-,\max}=\dfrac{M_{+,\max}\times a}{I_z}$

由于，$[\sigma_c]=4[\sigma_t]$，故当 $\dfrac{M_{-,\max}\times a}{I_z}=\dfrac{M_{+,\max}\times 2a}{I_z}$ 时，[q]最大

解得：$x=0.34l\,,x=0.66l$(舍去)

7. 试求图示阶梯悬臂梁自由端 A 的挠度。　　(15 分)



解：刚化 BC：

$$w_{A1}=\frac{Fl^3}{3EI}$$

刚化 AB：

$$w_B=\frac{Fl^3}{6EI}+\frac{Fl^3}{4EI}$$

$$\theta_B=\frac{Fl^2}{4EI}+\frac{Fl^2}{2EI}$$

综合得：

$$w_A=w_{A1}+w_B+l_{BC}\times\theta_B=\frac{3Fl^3}{2EI}$$

试卷二参考答案

2004—2005 年度第二学期材料力学期末考试试卷（答案）

一、单选题或多选题（每题 5 分，部分选对 3 分，出现选错 0 分）

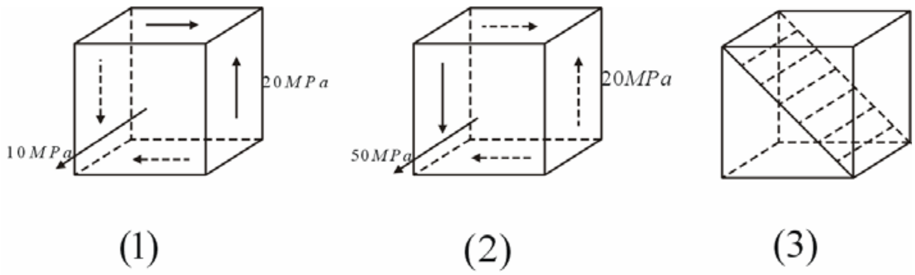
1、下述说法正确的是（A、D）。

A．图（1）所示单元体最大正应力作用面是图（3）阴影面

B．图（1）所示单元体最大正应力作用面不是图（3）阴影面

C．图（2）所示单元体最大正应力作用面是图（3）阴影面

D．图（2）所示单元体最大正应力作用面不是图（3）阴影面



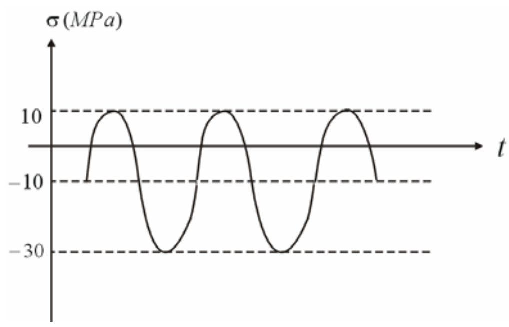
2、恒幅循环应力变化如图，则（A、C）。

A．循环特征为－3

B．循环特征为 3

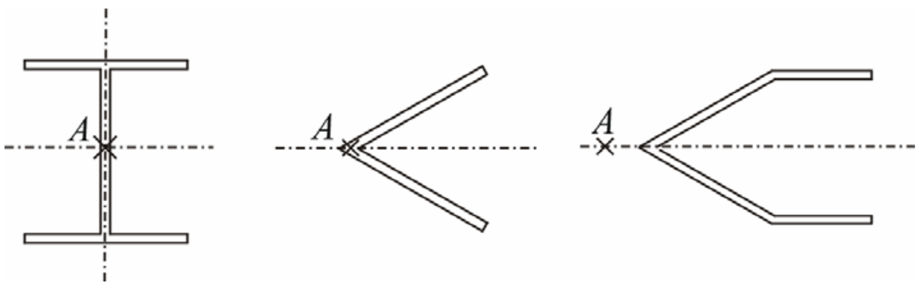
C．应力幅为 20MPa

D．应力幅为 40MPa



二、填空题（5 分）

试标出下述截面图形剪心的大致位置



三、计算题

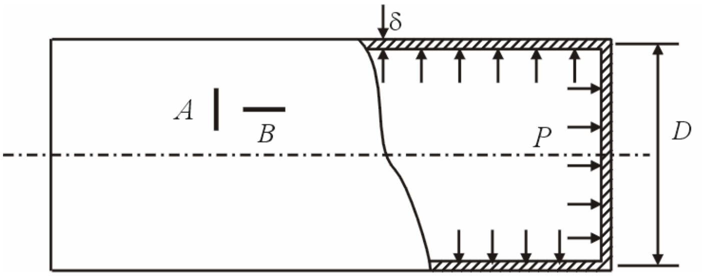
1、如图，薄壁圆筒内径 $D = 500\ mm$ 壁厚 $\delta = 10mm$，材料弹性模量 $E = 200GPa$，泊松比 $\mu = 0.25$。为测量内压 P，沿周向贴应变片 A，沿轴向贴应变片 B。

（1）从测量精度考虑，由应变片 A 的测量方案还是由应变片 B 的测量方案较佳？

（2）已测得应变片 B 的应变 $\varepsilon_B = 120 \times 10^{-6}$， ε_A 等于多少（不计实验误差）？

（3）计算轴向应力 σ_x 与周向应力 σ_t 。

（4）计算薄壁圆筒的内压 P。



解：（1）圆筒的轴向应力 σ_x 和周向应力 σ_t 的公式分别为：

$$\sigma_x = \frac{PD}{4\delta} \quad , \quad \sigma_t = \frac{PD}{2\delta} \qquad \text{(a)}$$

轴向与周向为应力主方向，同时也应为应变主方向，且周向应变大于轴向应变，从测量精度考虑，由应变片 A 测量的方案较佳。

（2）由广义胡克定律

$$\sigma_x = \frac{E(\varepsilon_B + \mu\varepsilon_A)}{1-\mu^2} \quad , \quad \sigma_t = \frac{E(\varepsilon_A + \mu\varepsilon_B)}{1-\mu^2} \qquad \text{(b)}$$

由式（a）

$$\sigma_t = 2\sigma_x$$

故

$$\frac{E(\varepsilon_A + \mu\varepsilon_B)}{1-\mu^2} = \frac{2E(\varepsilon_B + \mu\varepsilon_A)}{1-\mu^2}$$

$$\varepsilon_A = \frac{2-\mu}{1-2\mu}\varepsilon_B = 420\times10^{-6}$$

（3）由式（b）

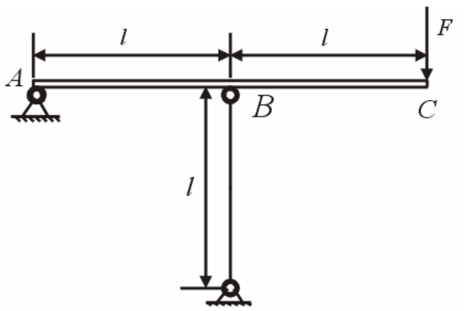
$$\sigma_x = 48\ MPa \quad , \quad \sigma_t = 96\ MPa$$

（4）由式（a）

$$P = \frac{4\delta\sigma_x}{D} = \frac{4\times10\times48}{500} = 3.84\ MPa$$

2、图示低碳钢梁柱结构，$l = 1m$，$E = 200GPa$，强度杆许用应力$[\sigma] = 120MPa$，梁的截面为宽 $b = 50mm$，高 $h = 80mm$ 的矩形，柱的截面为 $d = 20mm$ 的圆形，稳定安全系数 $n_{st} = 3$，对中柔度杆 $\sigma_{cr} = a - b\lambda$，$a = 304MPa$，$b = 1.12MPa$，

$\lambda_0 = 61$，$\lambda_p = 101$，只考虑在结构自身平面内失稳，试确定结构的许用载荷。



解：（1）梁 ABC 的强度，最大弯矩发生在梁的中点 B

$$M_{\max} = Fl$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{6Fl}{bh^2} \le [\sigma]$$

故 $$[F]_1 = \frac{bh^2[\sigma]}{6l} = \frac{50\times 80^2 \times 120}{6\times 1000} = 6400N = 6.4kN$$

（2）研究压杆 BD 的稳定性

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{4\mu l}{d} = \frac{4\times 1\times 1000}{20} = 200 > \lambda_p$$

所以 BD 为大柔度杆。

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} = \frac{\pi^3 Ed^2}{4\lambda^2} = \frac{\pi^3 \times 2\times 10^5 \times 20^2}{4\times 200^2} = 15503N = 15.503kN$$

BD 杆许用临界压力

$$[F]_{cr} = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = \frac{15.503}{3} = 5.168kN$$

由梁的平衡，载荷 F 对应 BD 压杆稳定性的许用值

$$[F]_2 = \frac{1}{2}[F]_{cr} = 2.584kN$$

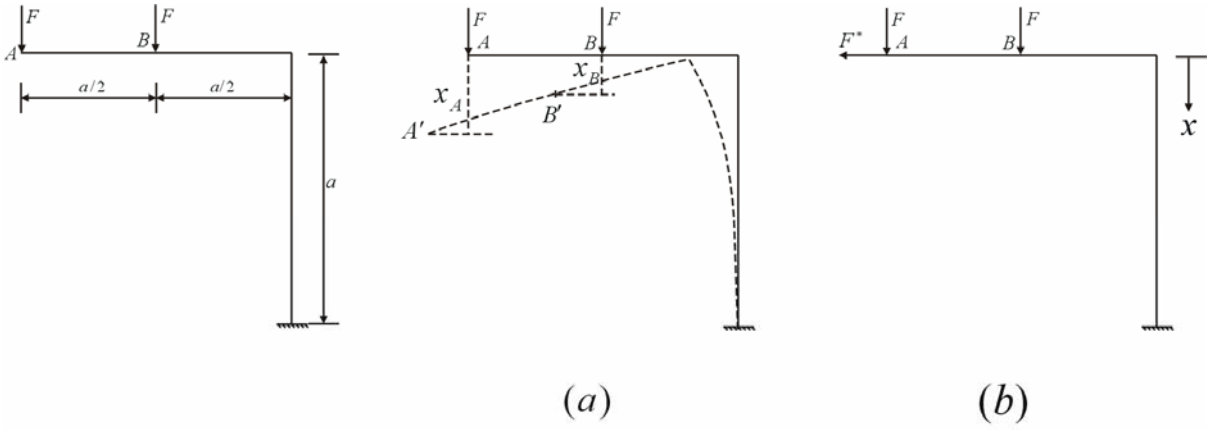
故结构的许用载荷

$$[F] = \min\{[F]_1，[F]_2\} = [F]_2 = 2.584\,kN$$

3、图示等截面线弹性刚架弯曲刚度 EI。

（1）试解释 $\dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}$ 的几何意义，其中 V_ε 为刚架的应变能；

（2）用卡氏第二定理求 A 点的水平位移（忽略轴力 引起的变形）。



解：（1）如图（a）所示，$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F} = x_A + x_B$，等于 A 点和 B 点的铅垂位移之和。

（2）如图（b），在 A 点附加一水平力 F^*，则横杆的应变能 $V^{(1)}(F)$ 与 F^* 无关，竖杆的应变能为 $V_\varepsilon^{(2)}$，弯矩 $M(x) = \frac{3}{2}Fa + F^* x$

$$\Delta_A = \left.\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F^*}\right|_{F^*=0} = \left.\frac{\partial V_\varepsilon^{(2)}}{\partial F^*}\right|_{F^*=0}$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^a M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial F^*}dx\Big|_{F^*=0}$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^a (\frac{3}{2}Fa + F^* x)x\,dx\Big|_{F^*=0}$$

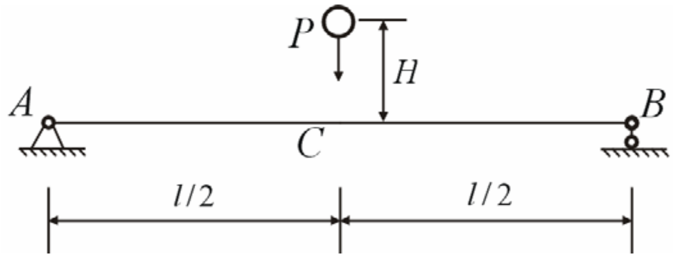
$$= \frac{1}{EI}\int_0^a \frac{3}{2}Fax\,dx$$

$$= \frac{3Fa^3}{4EI}(\leftarrow)$$

4、如图，重量为 P 的物体自高度 H 自由下落到长 l 的简支梁中点 C，梁的弯曲刚度为 EI，抗弯截面模量 W，且设 $EIH/(pl^3)=15/4$。

（1）试求梁中点 C 的最大挠度 w_d 和最大动应力 σ_d

（2）如果梁的长度增加一倍成为 $2l$，其余条件不变，则最大动挠度和最大动应力分别增加（或减小）百分之几？



解：（1）简支梁 AB 中点 C 作用大小为 P 的静载时，C 点静挠度与最大静应力分别为：

$$\Delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI} \ , \quad \sigma_{st} = \frac{Pl}{4W}$$

动载系数

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{96EIH}{Pl^3}} = 20$$

故最大动挠度和最大动应力分别为：

$$\Delta_d = K_d \Delta_{st} = \frac{5Pl^3}{12EI} \ , \quad \sigma_d = K_d \sigma_{st} = \frac{5Pl}{W}$$

（2）当梁的长度增加一倍时，

$$\Delta_{st}' = \frac{P(2l)^3}{48EI} = \frac{Pl^3}{6EI} \ , \ \sigma_{st}' = \frac{P(2l)}{4W} = \frac{Pl}{2W}$$

动载系数

$$K_d' = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}'}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{12EIH}{Pl^3}} = 1 + \sqrt{46} = 7.782$$

$$\Delta_d' = K_d' \Delta_{st}' = \frac{1.297Pl^3}{EI}$$

$$\sigma_d' = K_d' \sigma_{st}' = \frac{3.891Pl}{W}$$

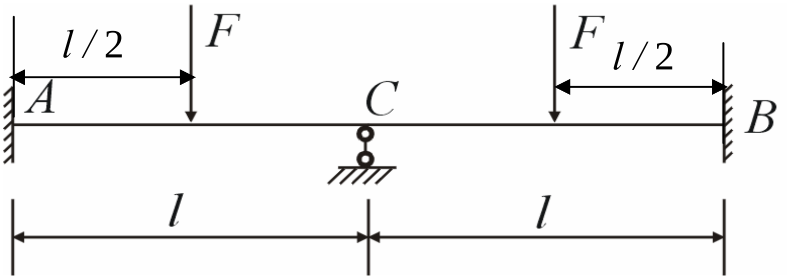
故梁的最大动挠度增加

$$\frac{\Delta_d' - \Delta_d}{\Delta_d} = 211\%$$

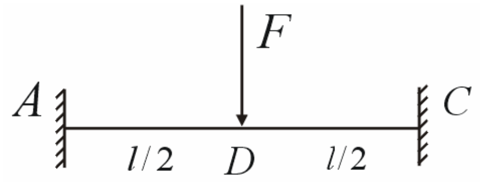
梁的最大动应力减小

$$\frac{\sigma_d - \sigma_d'}{\sigma_d} = 22.2\%$$

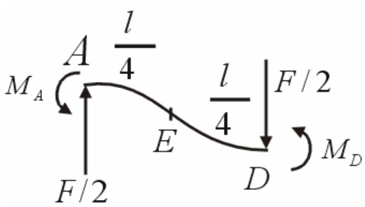
5、图示两端固支梁弯曲刚度 EI，试求 A 端约束反力。



解：由 ACB 对称性，得 C 点：$\theta_c = 0$，$\Delta_c = 0$；由 C 点铰支，得 $w_c = 0$。故 C 点可看作固支点



由 ADC 对称性，得 D 点：$\theta_D = 0$，$\Delta_D = 0$

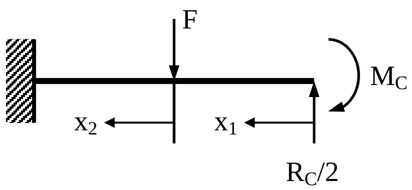


由 AED 反对称，得 $F_{Ay} = \dfrac{F}{2}(\uparrow)$

$M_E = 0$，

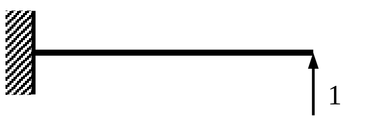
$M_A = \dfrac{F}{2} \times \dfrac{l}{4} = \dfrac{Fl}{8}$

解法二：



$$M(x_1) = R_C x_1 / 2 - M_C$$
$$M(x_2) = R_C(l/2 + x_2)/2 - M_C - Fx_2$$

$$\bar{M}(x_1) = x_1 \qquad M(x_2) = (l/2 + x_2)$$



$$\bar{M}(x_1) = -1 \qquad M(x_2) = -1$$

$$\theta_C = 0 \qquad f_C = 0$$
$$R_C = F \qquad M_C = Fl/8$$
$$R_A = F/2 \qquad M_A = Fl/8$$