第三章

时域分析法

引言

一旦建立其描述系统的数学模型，可用各种方法对系统进行分析和设计。本章研究系统的时域分析法。

3-1 时域分析法基础

一. 时域分析法特点

- 由系统微分方程，通过拉氏变换直接求出系统的时间响应；
- 由响应的表达式及时间响应曲线分析系统性能，找出系统结构、参数与这些性能之间的关系；
- 是一种直接方法，准确且可提供系统时间响应的全部信息。

二、 典型的初始状态、典型外作用

$$r(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow c(t)$$

1. 典型初始状态

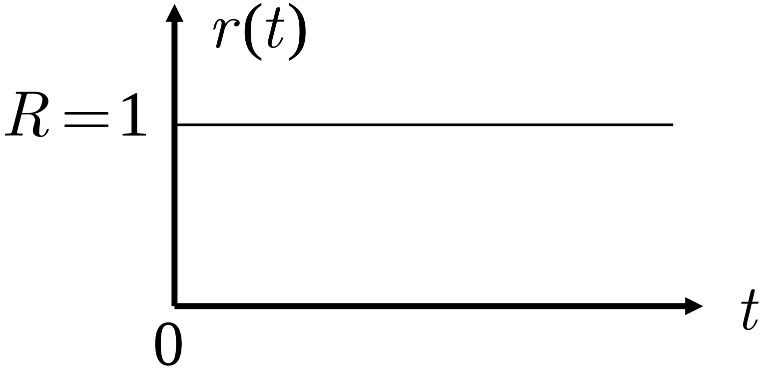
在 $t=0^-$ 时，系统处于静止状态，即

$$c(0^-) = \left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = \left.\frac{d^2c(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} = \cdots = 0$$

2. 典型外作用

(1)单位阶跃函数$1(t)$

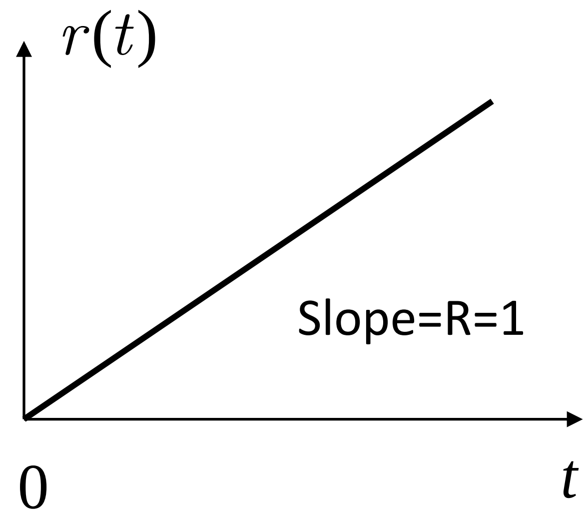
$$r(t)=1(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



其拉氏变换为： $\mathcal{L}[r(t)]=\dfrac{1}{s}$

(2)单位斜坡函数$t\cdot 1(t)$

$$r(t)=t\cdot 1(t)=\begin{cases} t, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

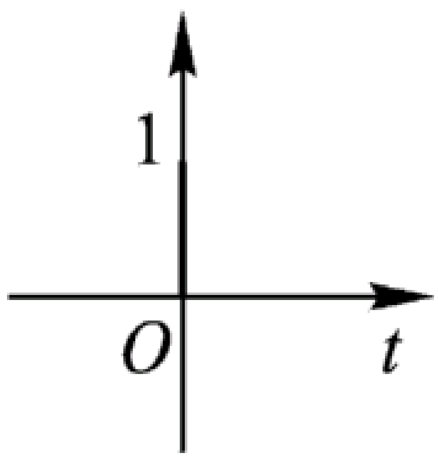


其拉氏变换为： $\mathcal{L}[r(t)]=\dfrac{1}{s^2}$

(3)单位脉冲函数$\delta(t)$

$$\delta(t)=\begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t\neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$$

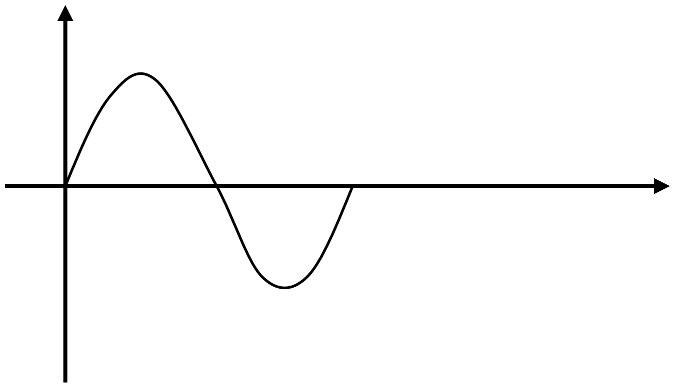


(4)正弦函数

$$r(t) = A\sin\omega t \cdot 1(t) = \begin{cases} A\sin\omega t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

其拉氏变换为：

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$



三、 典型时间响应

任何稳定系统的动态响应均可分为两部分：$t \to \infty$时趋于零的分量，称为瞬态响应$c_{tr}(t)$；$t \to \infty$不趋于零的分量，称为稳态响应$c_{ss}(t)$：

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

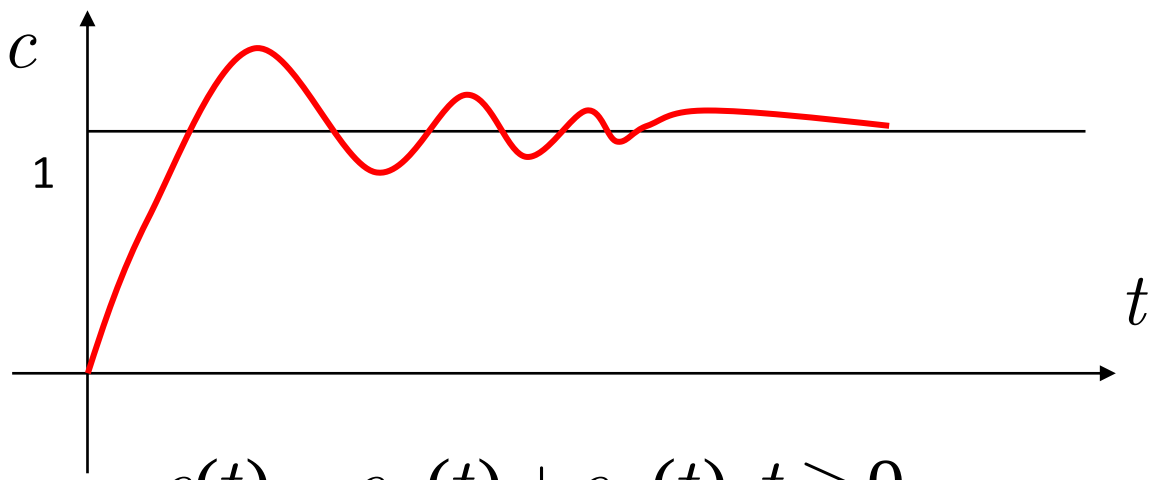
例：给定系统：

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} R(s)$$

令 $r(t)=1(t)$。则其单位阶跃响应为：

$$C(s)=\frac{1}{s^2+s+1}\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+1}$$

$$c(t)=\underbrace{1}_{c_{ss}(t)}\underbrace{-e^{-t/2}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)}_{c_{tr}(t)},\quad t\geq 0$$

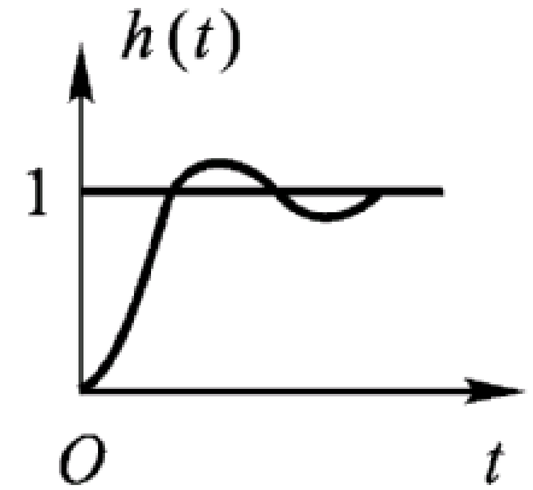


$$c(t)=c_{tr}(t)+c_{ss}(t),t\geq 0$$

1. 位阶跃响应

$$H(s) = \Phi(s)\frac{1}{s}$$

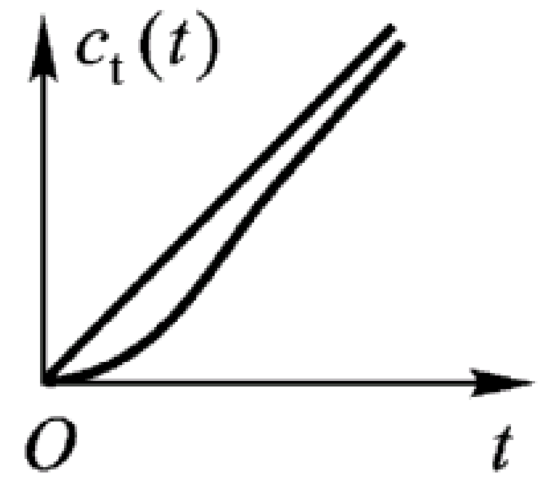
$$h(t) = L^{-1}\left[H(s)\right]$$



2. 单位斜坡响应

$$C_t(s) = \Phi(s)\frac{1}{s^2}$$

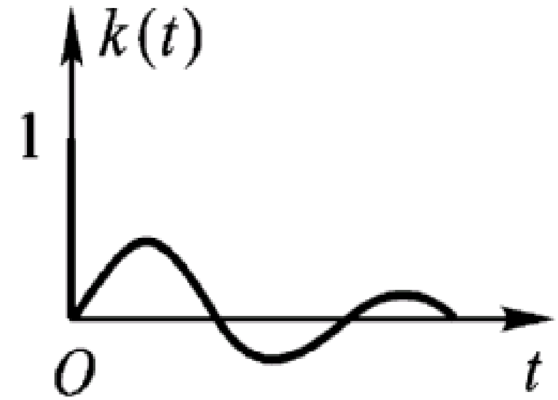
$$c_t(t) = L^{-1}\left[C_t(s)\right]$$



3. 单位脉冲响应

$$K(s)=\Phi(s)\cdot 1$$

$$k(t)=L^{-1}\left[K(s)\right]=L^{-1}\left[\Phi(s)\right]$$



例：给定系统：

$$C(s)=\frac{1}{s^2+s+1}R(s)$$

令 $r(t)=\delta(t)$。则其单位脉冲响应为：

$$C(s)=\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

4. 三种响应之间的关系

$$H(s) = \Phi(s) \cdot \frac{1}{s} = K(s) \cdot \frac{1}{s}$$

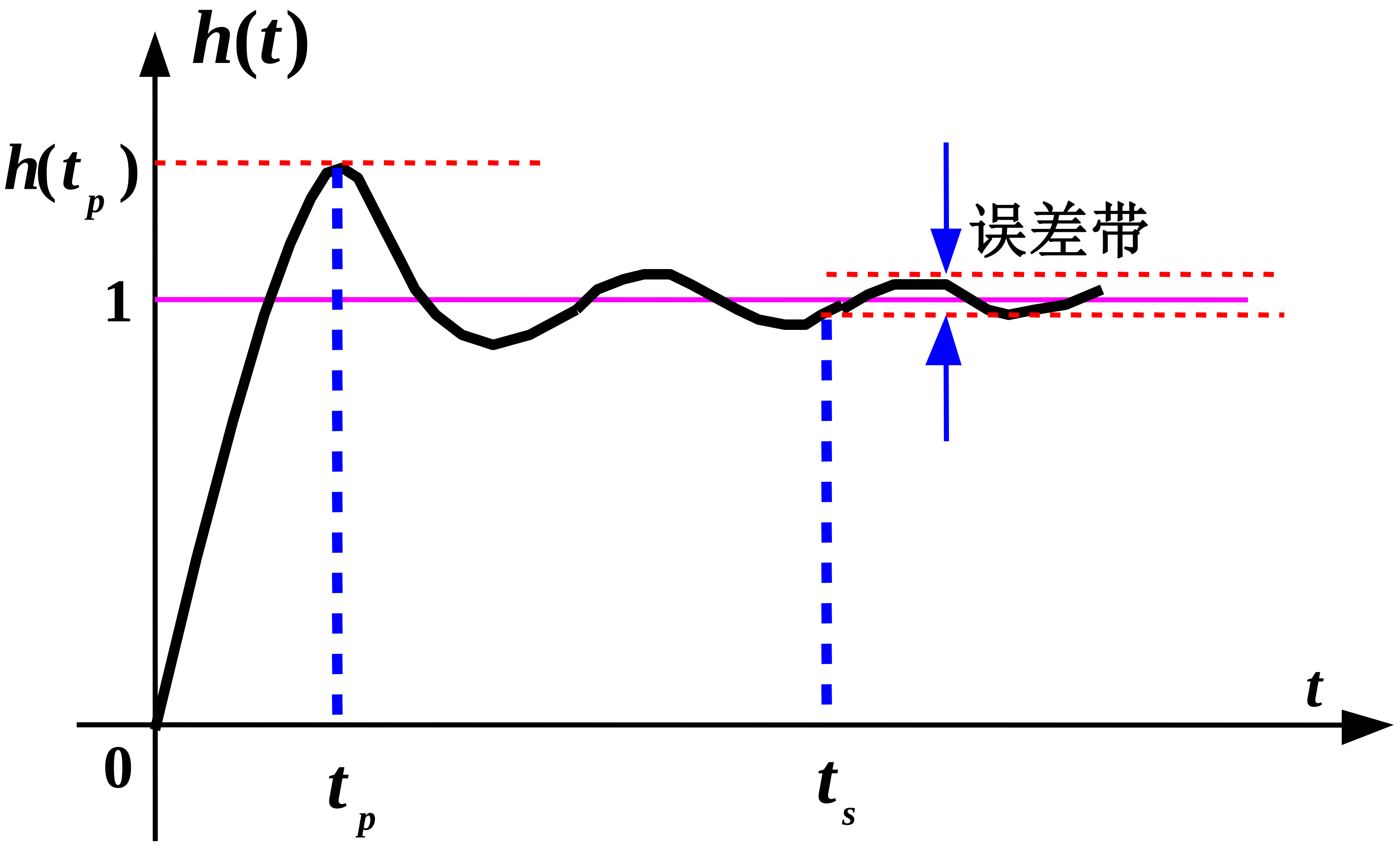
$$C_t(s) = \Phi(s) \cdot \frac{1}{s^2} = K(s) \cdot \frac{1}{s^2} = H(s) \cdot \frac{1}{s}$$

相应的时域表达式为

$$h(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau$$

$$c_t(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$

四、阶跃响应的性能指标



1. 峰值时间t_p：指$h(t)$曲线中超过其稳态值而达到第一个峰值所需的时间。

2. 超调量$\sigma\%$：指$h(t)$中峰值与稳态值之比：

$$\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\%$$

3. 调节时间t_s：指响应曲线中，$h(t)$进入稳态值附近$\pm 5\% h(\infty)$或$\pm 2\% h(\infty)$误差带，而不再超出的最小时间。

4. 稳态误差e_{ss}：指响应的稳态值与期望值之差：

$$e_{ss} := \lim_{t\to\infty}(r(t) - c(t)) = \lim_{t\to\infty}(1 - h(t))$$

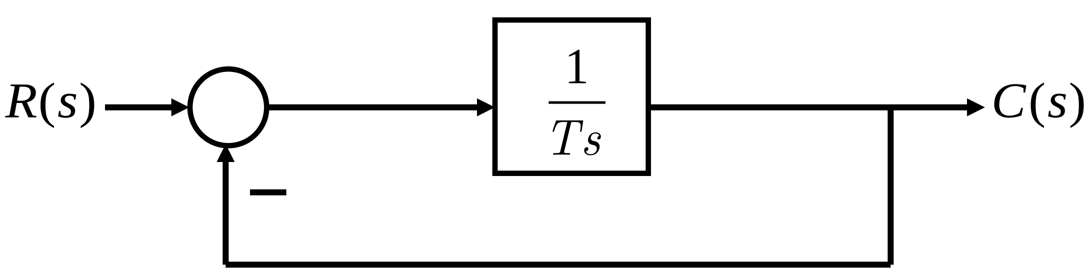
3-2 一、二阶系统分析与计算

一、一阶系统的数学模型及单位阶跃响应

1. 数学模型

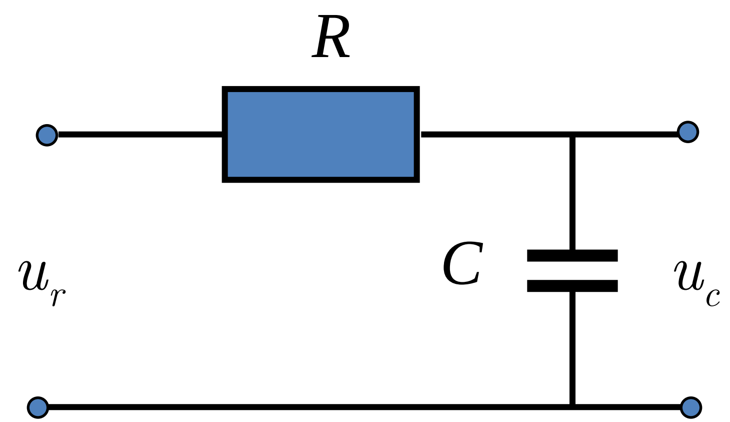
$$T\frac{dc}{dt}+c(t)=r(t)$$

其中，T 为时间常数。许多物理系统均可用一阶系统来描述其动态过程。



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

例：考虑如下RC电路：



$$RC\frac{du_c}{dt}+u_c=u_i$$

取*Laplace* 变换后

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{RCs+1}=\frac{1}{Ts+1}$$

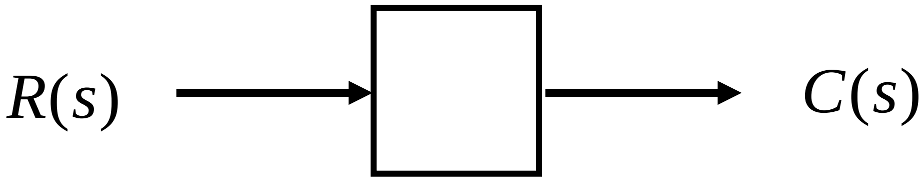
这里时间常数$T=RC$。

例：导弹线性运动可用一阶系统描述：

$$m\frac{dv}{dt}=f(t)-kv$$

其中 $f(t)$ 是推力，v 为速度，kv 表示空气阻力，正比于速度，m为质量。取$Laplace$变换后

2. 单位阶跃响应



输入信号：

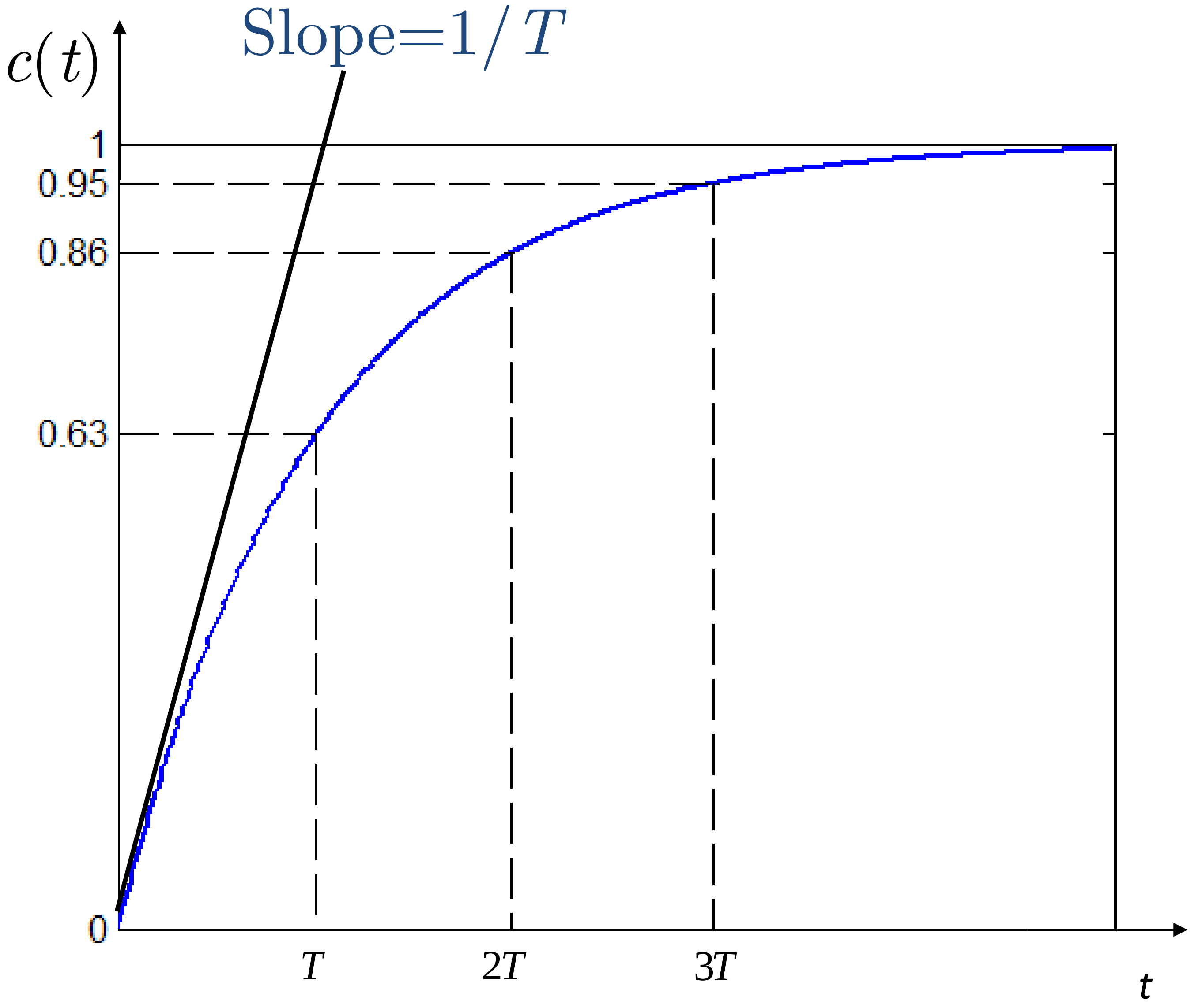
$$R(s)=\frac{1}{s}$$

故

$$C(s)=\frac{1}{s(Ts+1)}=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/T}$$

时间响应：

$$c(t)=1-e^{-t/T},t\geq 0$$



$$c(T) = 0.632$$

$$c(2T) = 0.865$$

$$c(3T) = 0.950$$

$$t_s = 3T$$

$$\sigma\% = 0$$

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

3. 性能指标

(1)平稳性$\sigma\%$：非周期、无振荡， $\sigma\% = 0$

(2) 快速性t_s：

$$t_s = 3T\text{时}，\ c(t) = 0.95 \quad [\text{对应}5\%\text{误差带}]$$

(3) 准确性 e_{ss}：

$$e_{ss} = 1 - c(\infty) = 0$$

4. 单位斜坡响应

输入信号： $r(t)=t\cdot 1(t)$

故 $R(s)=\dfrac{1}{s^2}$

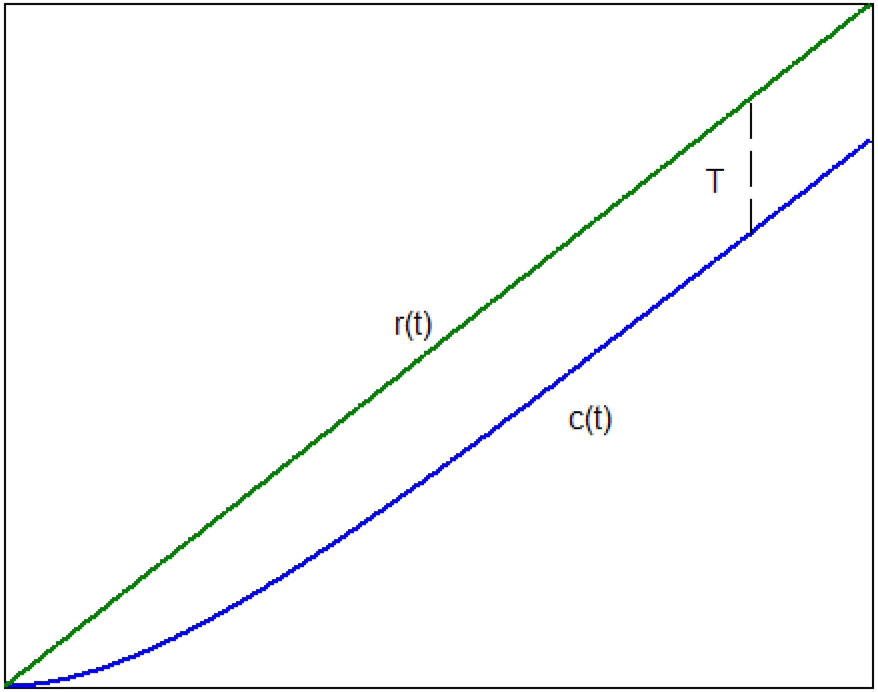
$$C(s)=\frac{1}{s^2(Ts+1)}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T}{s+1/T}$$

时间响应为

$$c(t)=t-T+Te^{-\frac{t}{T}},t\geq 0$$

$$e(t)=r(t)-c(t)=T(1-e^{-\frac{t}{T}}),t\geq 0$$

$$\Rightarrow e(\infty)=T$$



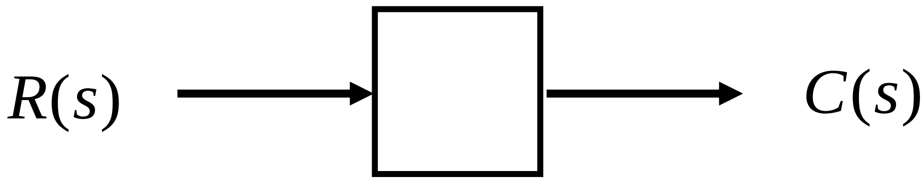
对一阶系统，对单位阶跃和单位斜坡输入，稳态误差是不同的：

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}[r(t)-c(t)] = \lim_{t\to\infty} e^{-t/T} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}[r(t)-c(t)]$$

$$= \lim_{t\to\infty} T(1-e^{-\frac{t}{T}}) = T$$

5. 单位脉冲响应



输入为单位脉冲：$R(s)=1$

故

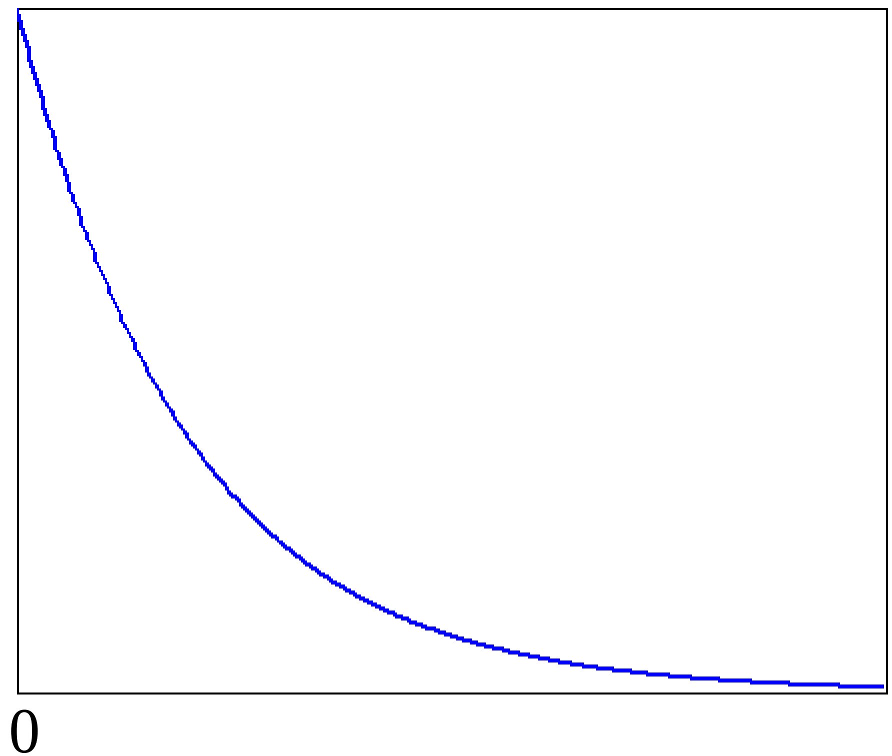
$$C(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

取$Laplace$反变换，

$$c(t)=\frac{1}{T}e^{-t/T},t\geq 0$$

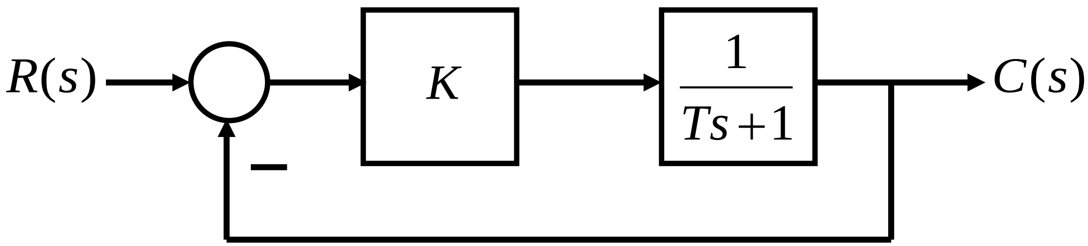
单位脉冲响应：

$$c(t)=\frac{1}{T}e^{-t/T}$$



为什么在 $t=0^+$ 有一个跳跃？

例：求如下闭环系统的单位阶跃响应：

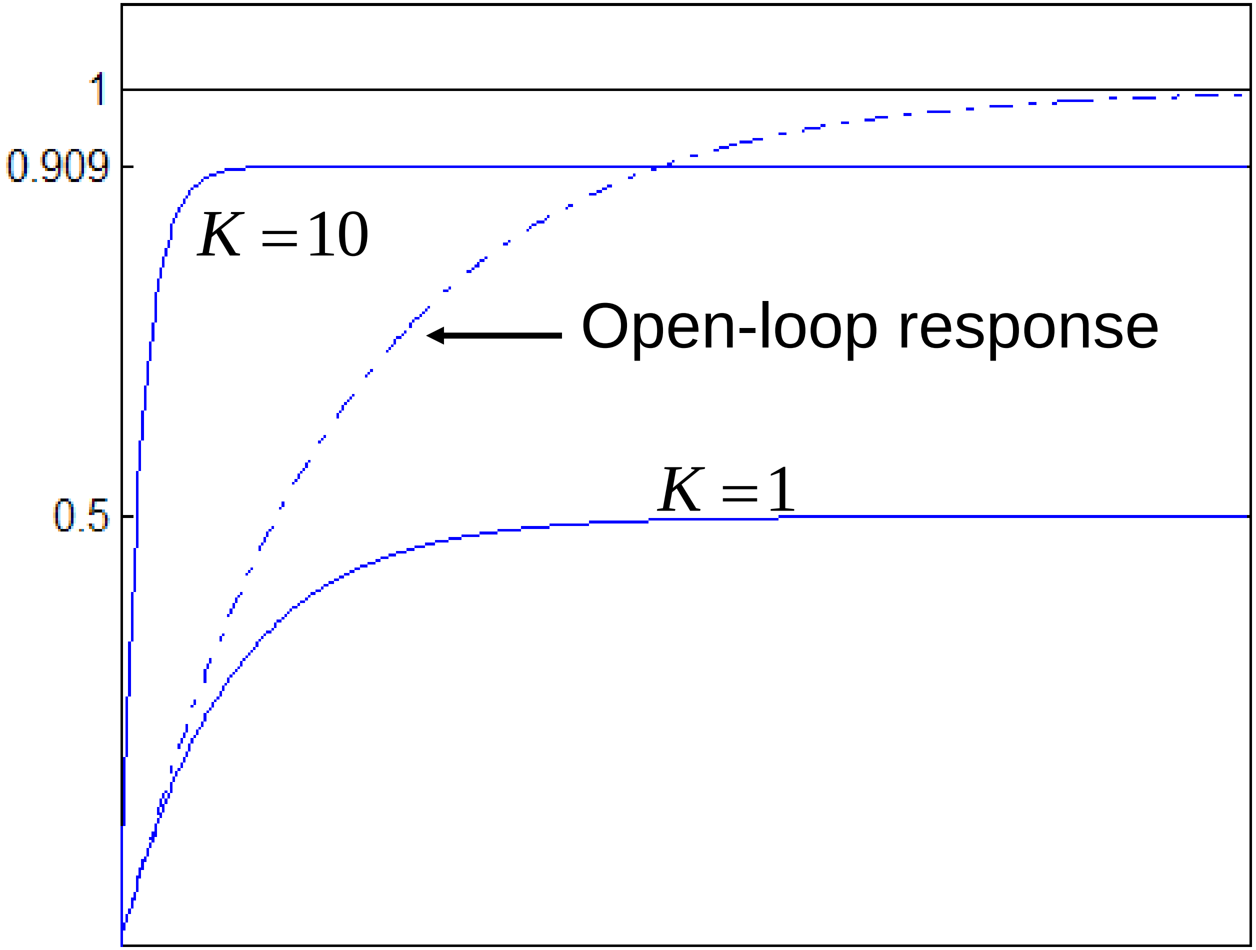


解：

$$C(s)=\frac{K}{s(Ts+1+K)}\qquad=\frac{\bar{K}}{\bar{T}s+1}\frac{1}{s}\qquad=\bar{K}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{\bar{T}}}\right)$$

其中

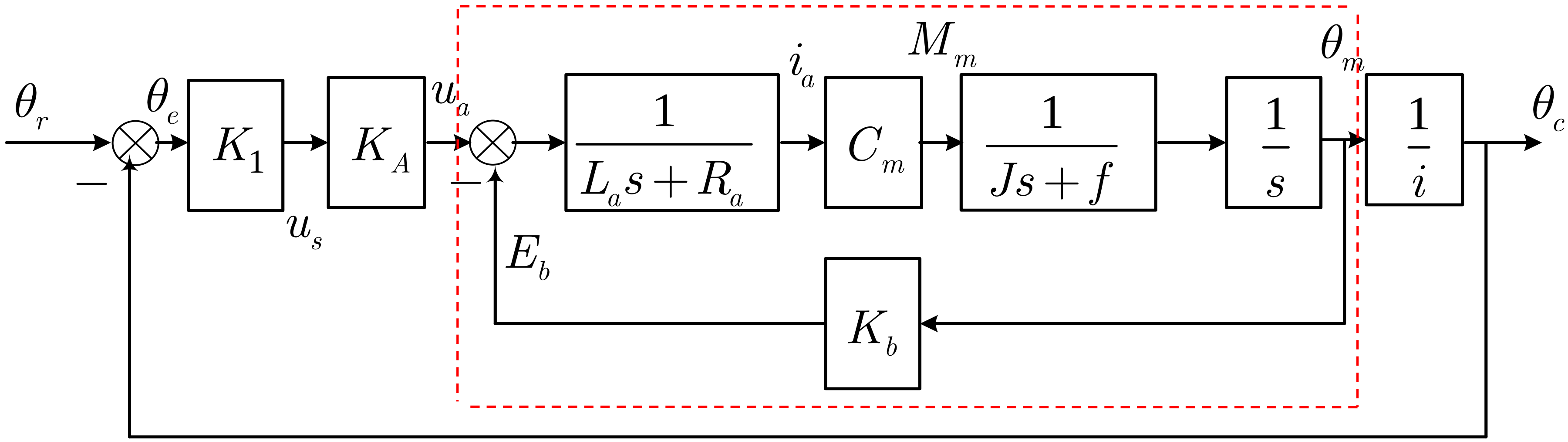
$$\bar{K}=\frac{K}{1+K},\qquad \bar{T}=\frac{T}{1+K}$$


1
0.909
0.5
K = 10
Open-loop response
K = 1

二、二阶系统的数学模型及单位阶跃响应

1. 数学模型

许多物理系统均可用二阶微分方程描述其动态过程。例如如下伺服系统：



该闭环系统的数学模型可简化成如下二阶系统：

$$\frac{\Theta_c(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{K}{T_m s^2 + s + K}$$

$$K = \frac{K_1 K_A C_m}{i R_a} \frac{1}{F}$$

$$F = f + C_m K_b / R_a$$

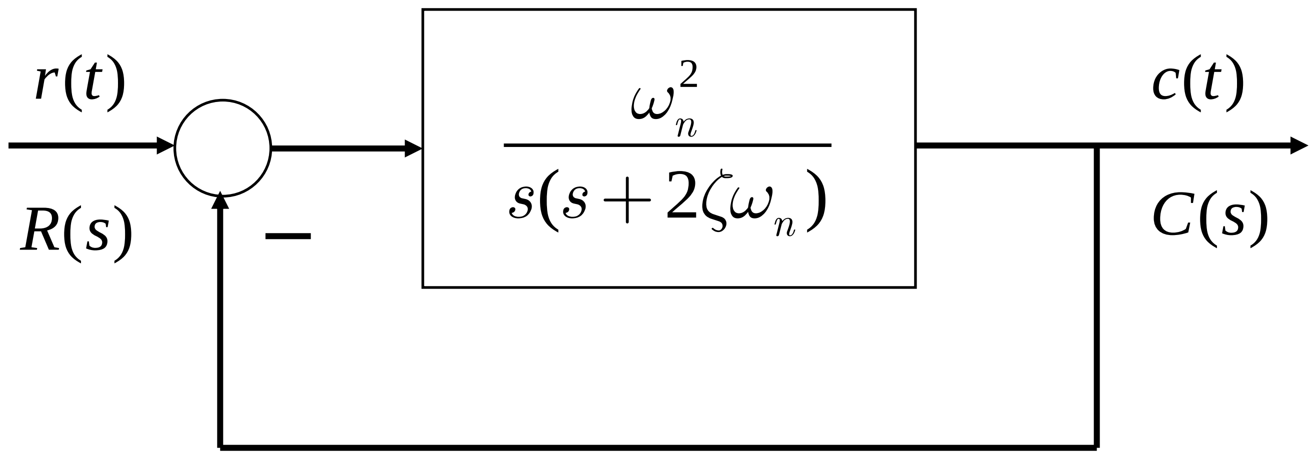
$$T_m = J / F$$

K 称为开环增益，T_m 称为机电时间常数。

(1) 标准二阶系统的数学模型

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

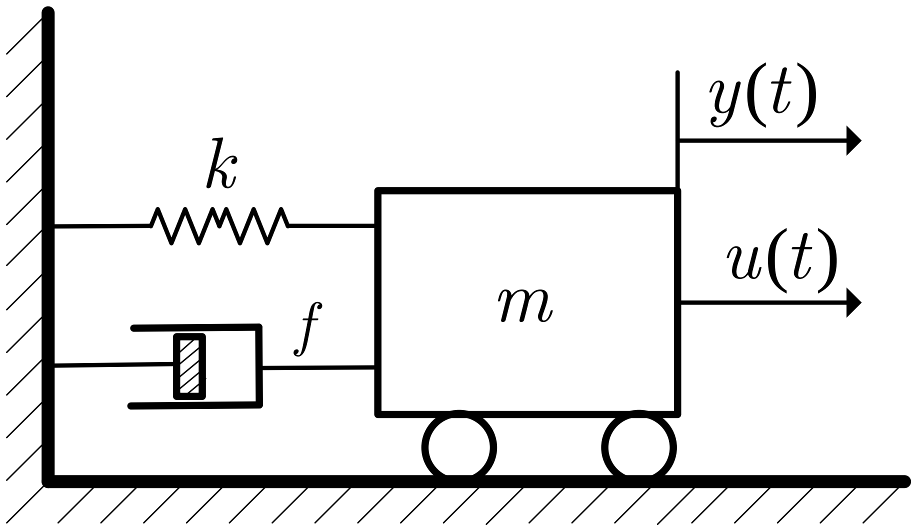
其中 ω_n 为无阻尼自然角频率(弧度/秒)，ζ 为阻尼比。



闭环系统特征多项式：

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$$

例：弹簧-质量块-阻尼器系统：二阶系统



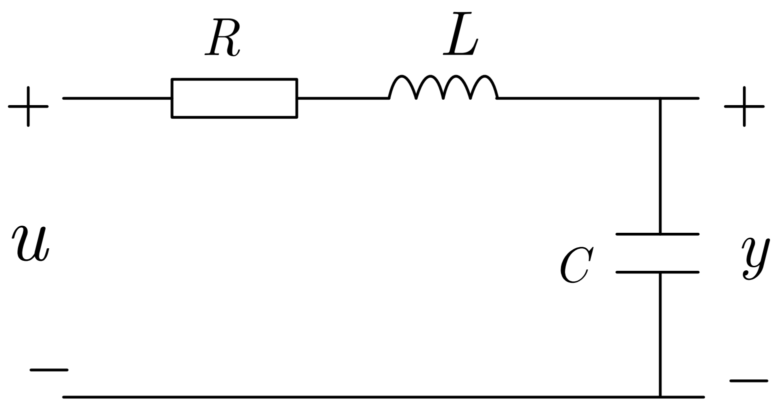
k : Spring constant

f : Damping coefficient

$$m\ddot{y} + f\dot{y} + ky = u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k} = \frac{1}{k}\left(\frac{k/m}{s^2 + (f/m)s + k/m}\right)$$

例：RLC电路



$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}=\frac{1/LC}{s^2+(R/L)s+1/LC}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{1}{LC}},\quad 2\zeta\omega_n=\frac{R}{L}=2\left(R\sqrt{\frac{C}{L}}\right)\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

(2) 二阶系统特征根在复平面上的位置

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

解方程求得特征根：

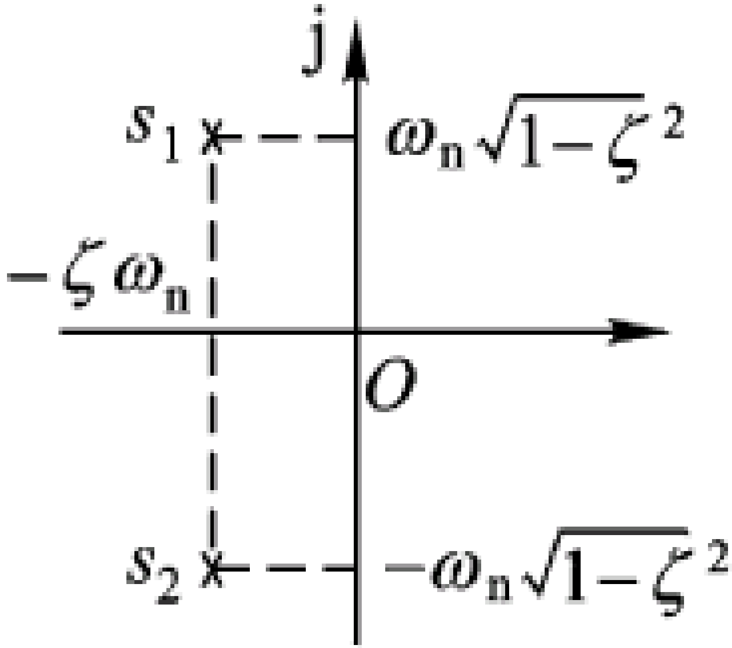
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

s_1、s_2在复平面上的位置完全取决于ζ、ω_n两个参数。

1) 欠阻尼：$0<\zeta<1$：

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

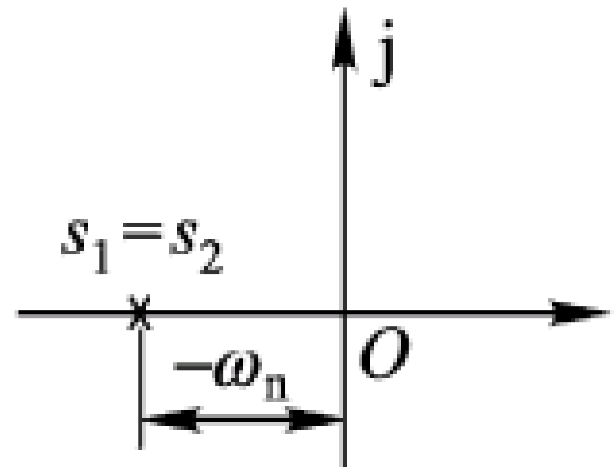
此时s_1,s_2为一对共轭复根，且位于复平面的左半部。



2) 临界阻尼：$\zeta=1$：

$$s_{1,2}=-\omega_n$$

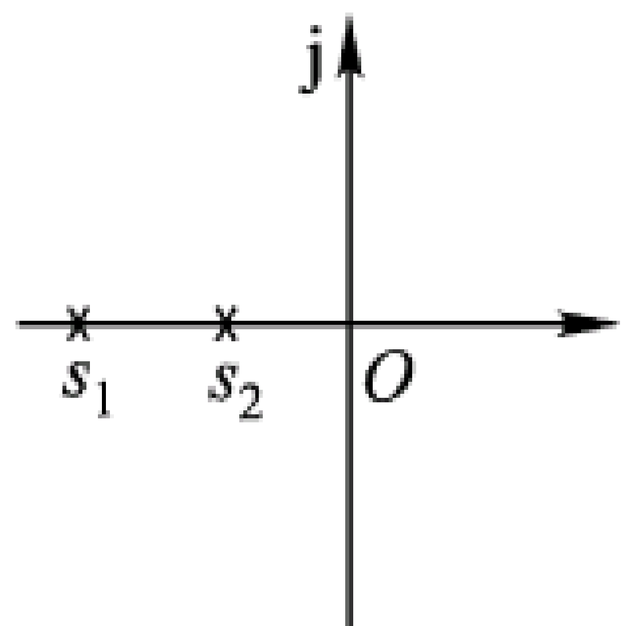
此时s_1,s_2为一对相等的负实根。



3) 过阻尼：$\zeta>1$：

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

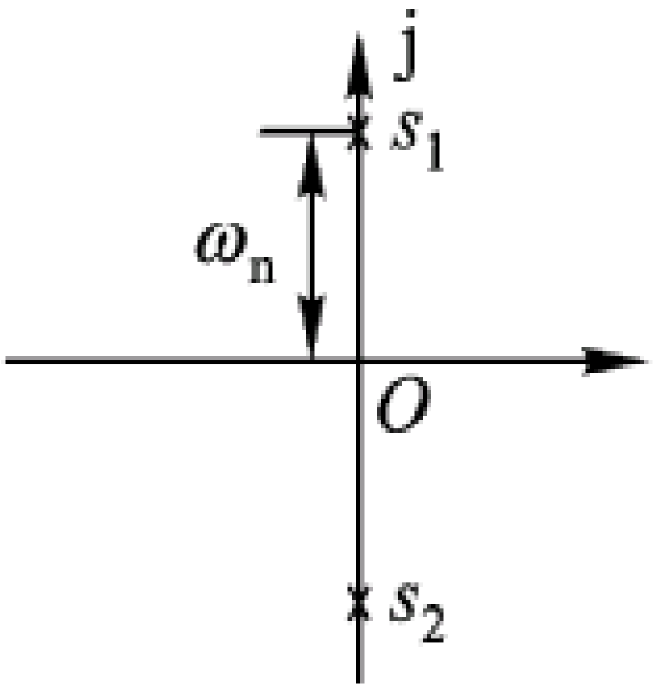
此时s_1,s_2为两个不相等的负实根。



4) 无阻尼：$\zeta=0$：

$$s_{1,2}=\pm j\omega_n$$

此时s_1,s_2为两个共轭虚根。



2. 二阶系统的单位阶跃响应

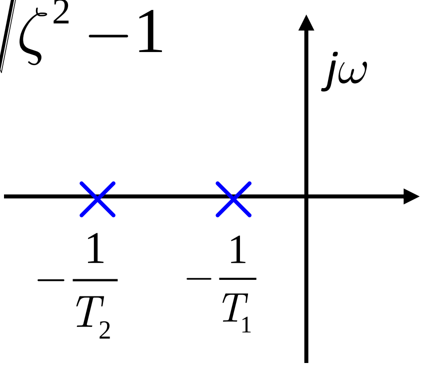
(1) 过阻尼(ζ >1) 单位阶跃响应:

记

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=(s+s_1)(s+s_2)=\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)$$

这里

$$\begin{cases} T_1=\dfrac{1}{\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\Rightarrow\dfrac{1}{T_1}=\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \\ T_2=\dfrac{1}{\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\Rightarrow\dfrac{1}{T_2}=\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \end{cases}$$



故

$$T_1>T_2,\ \omega_n^2=\frac{1}{T_1T_2}$$

因此，

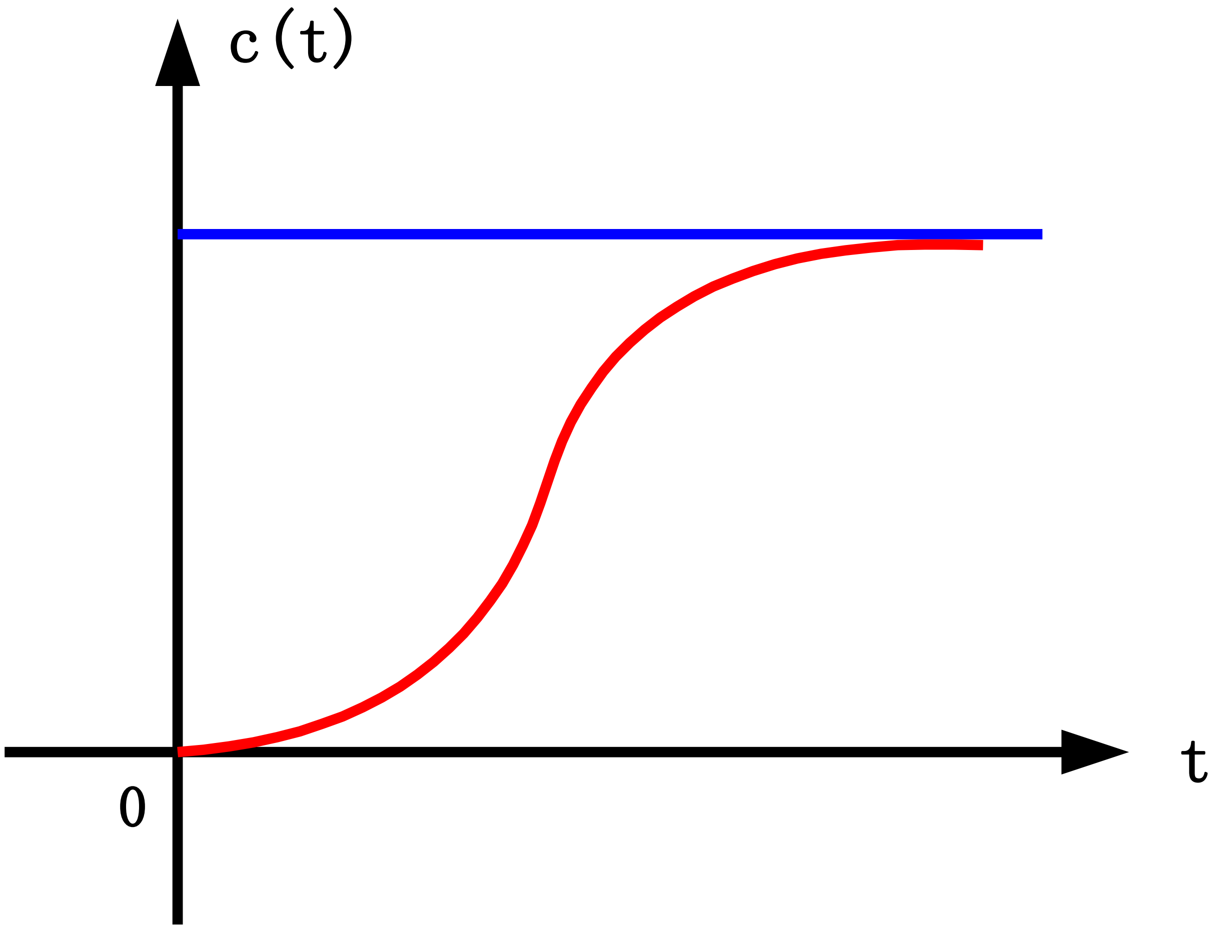
$$C(s)=\frac{\frac{1}{T_1T_2}}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}\frac{1}{s}=\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{1}{\frac{T_2}{T_1}-1}\times\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)}+\frac{1}{\frac{T_1}{T_2}-1}\times\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}$$

单位阶跃响应：

$$c(t)=1+\frac{1}{\frac{T_2}{T_1}-1}e^{-\frac{1}{T_1}t}+\frac{1}{\frac{T_1}{T_2}-1}e^{-\frac{1}{T_2}t},t\geq 0$$

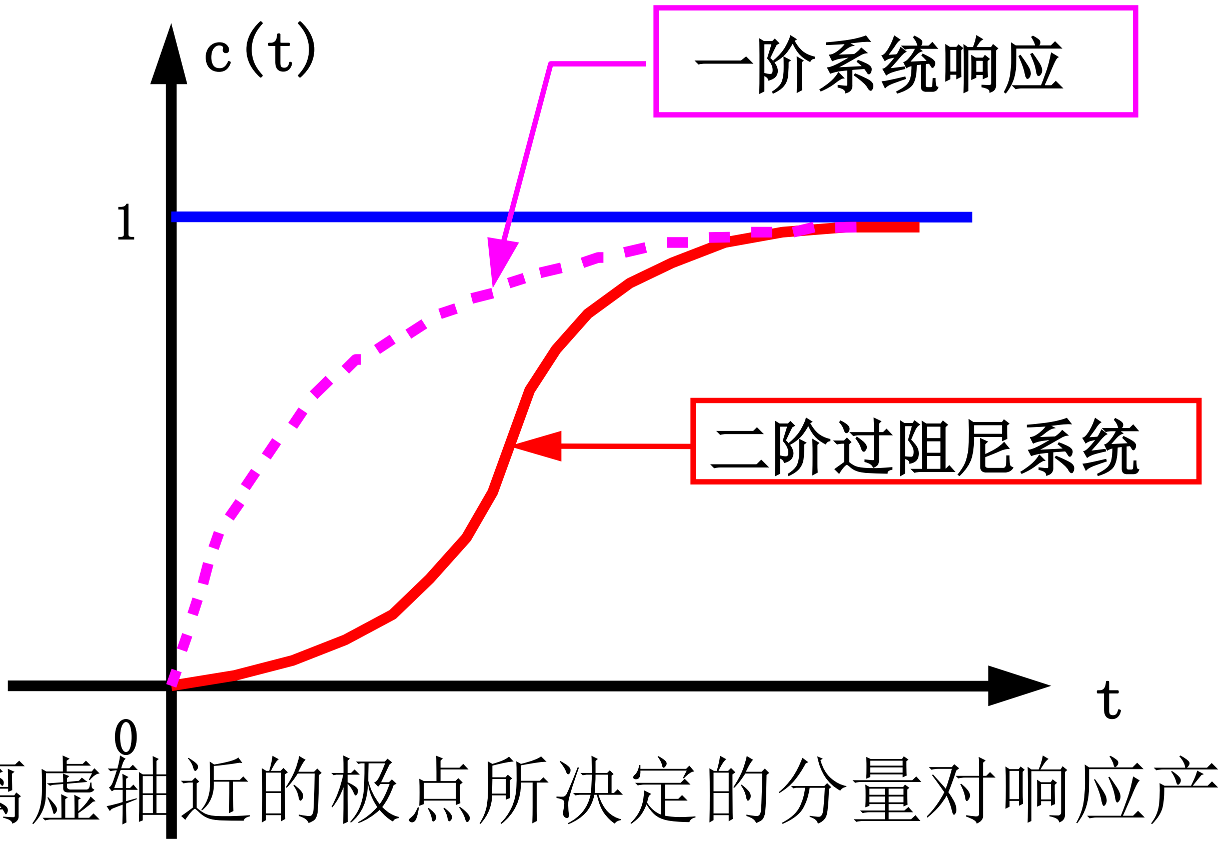
过阻尼系统单位阶跃响应曲线：



- **过阻尼系统分析**

1) 衰减项的幂指数的绝对值一个大，一个小。绝对值大的离虚轴远，衰减速度快，绝对值小的离虚轴近，衰减速度慢；
2) 衰减项前的系数一个大，一个小；
3) 二阶过阻尼系统的动态响应呈非周期性，无振荡和超调，但不同于一阶系统；

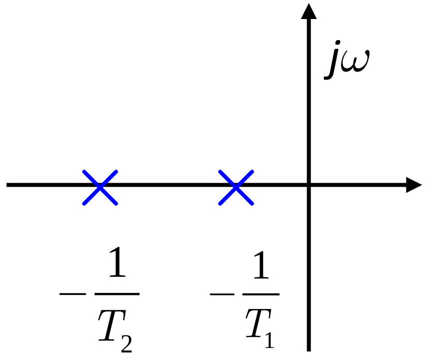
过阻尼系统单位阶跃响应与一阶系统比较



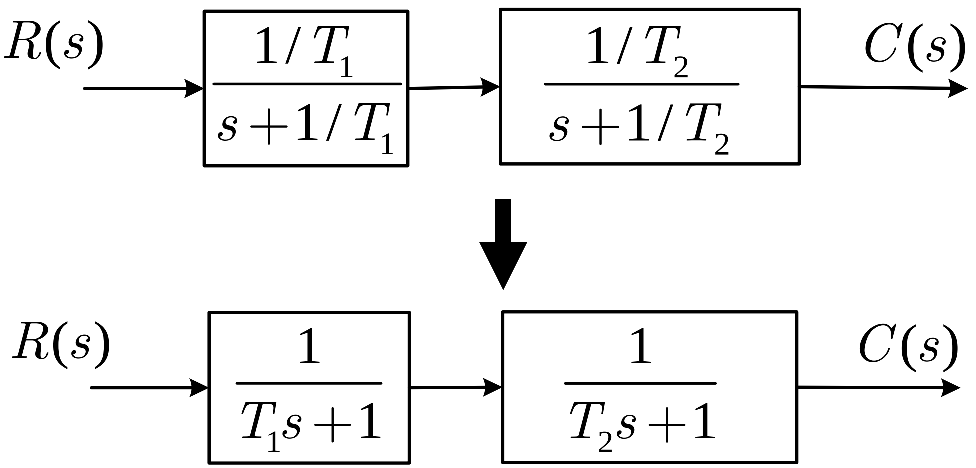
4) 离虚轴近的极点所决定的分量对响应产生的影响大，离虚轴远的极点所决定的分量对响应产生的影响小，有时甚至可以忽略不计。

由

$$C(s)=\frac{\dfrac{1}{T_1T_2}}{\left(s+\dfrac{1}{T_1}\right)\left(s+\dfrac{1}{T_2}\right)}R(s)$$



过阻尼二阶系统可表示为两个一阶系统的串联：

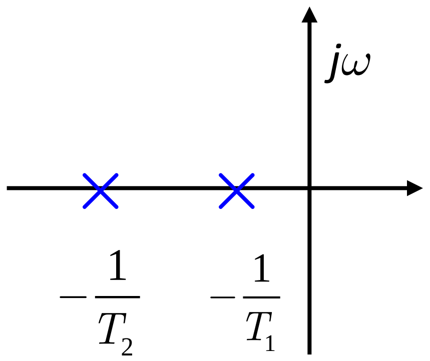


若$-1/T_1$离虚轴很近而$-1/T_2$离虚轴很远($1/T_1 << 1/T_2$), 可忽略$-1/T_2$，将原系统近似为一阶系统：

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{T_1 s+1}} \longrightarrow C(s)$$

例：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{10}{(s+1)(s+10)}\approx\frac{1}{(s+1)}$$



事实上，

$$c(t)=1-\frac{10}{9}e^{-t}+\frac{1}{9}e^{-10t},\quad t\geq 0$$

与

$$c(t)=1-e^{-t},\quad t\geq 0$$

相差不大。

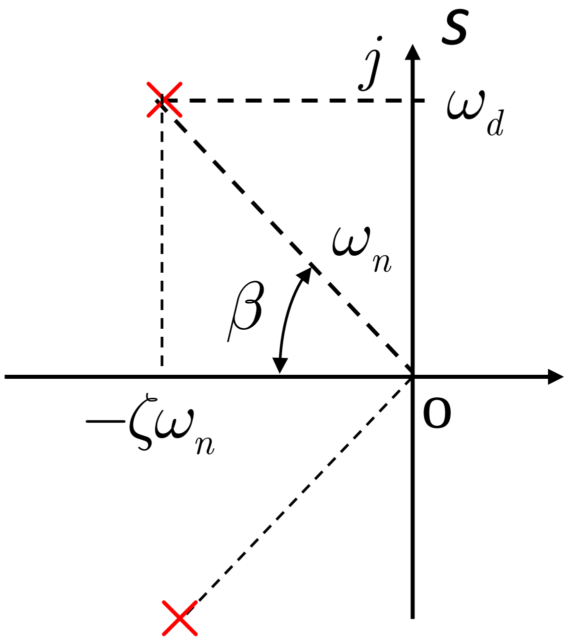
(2) 欠阻尼 (0<ζ<1)单位阶跃响应：

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$$

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_d$$

其中，

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

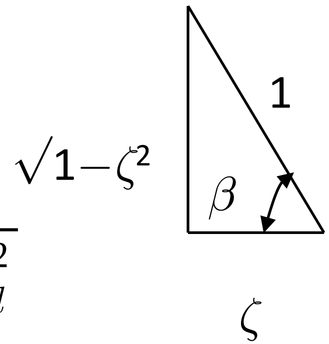


ω_d 称为阻尼振荡角频率且

$$\omega_d<\omega_n$$

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

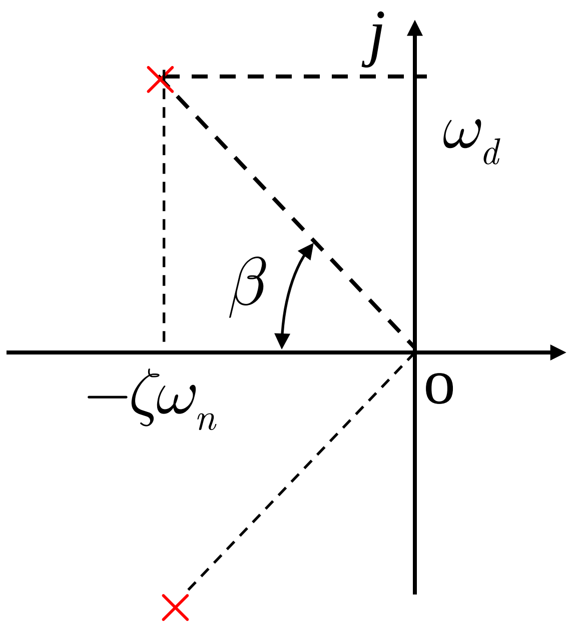


因此，

$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t-e^{-\zeta\omega_n t}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t$$

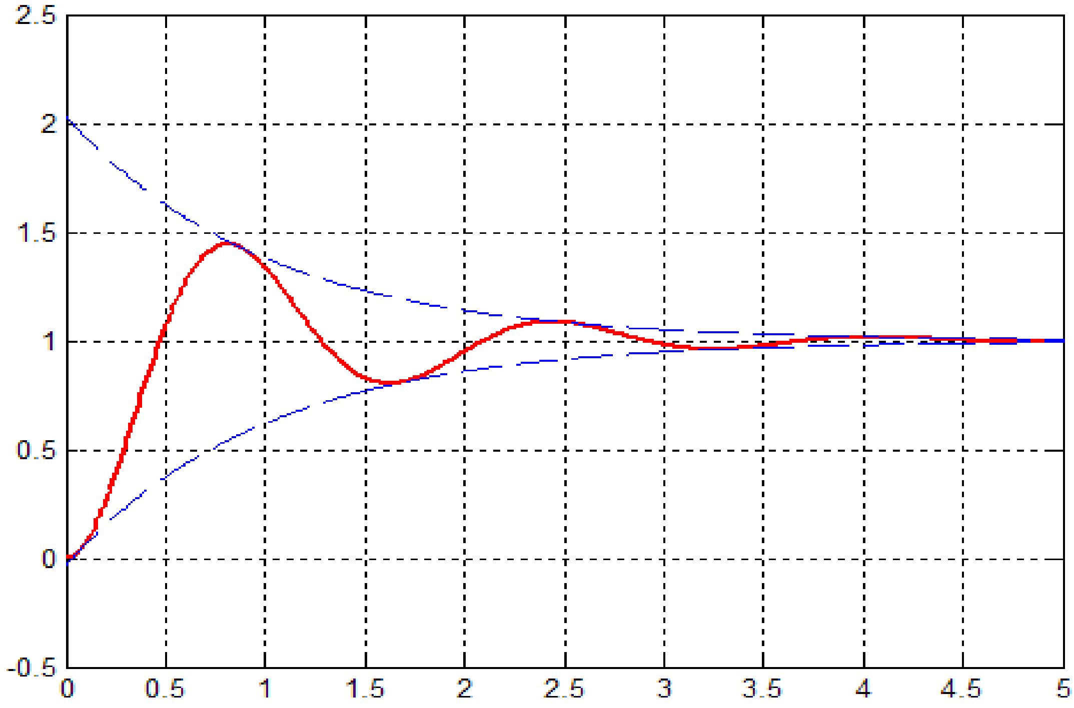
$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t+\zeta\sin\omega_d t\right]$$

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t+\beta\right), t\geq 0$$



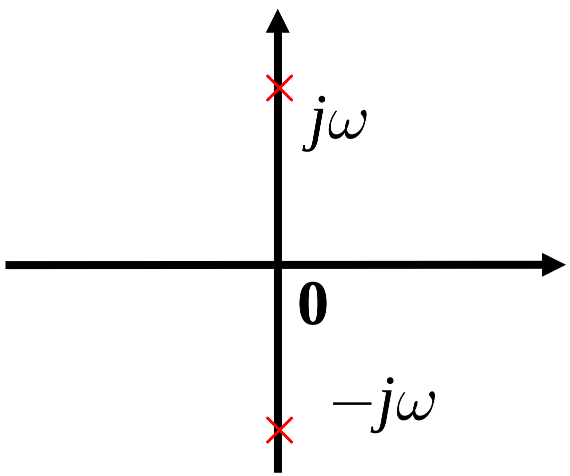
这里， $\cos\beta=\zeta$ or $\mathrm{tg}\beta=\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta$。

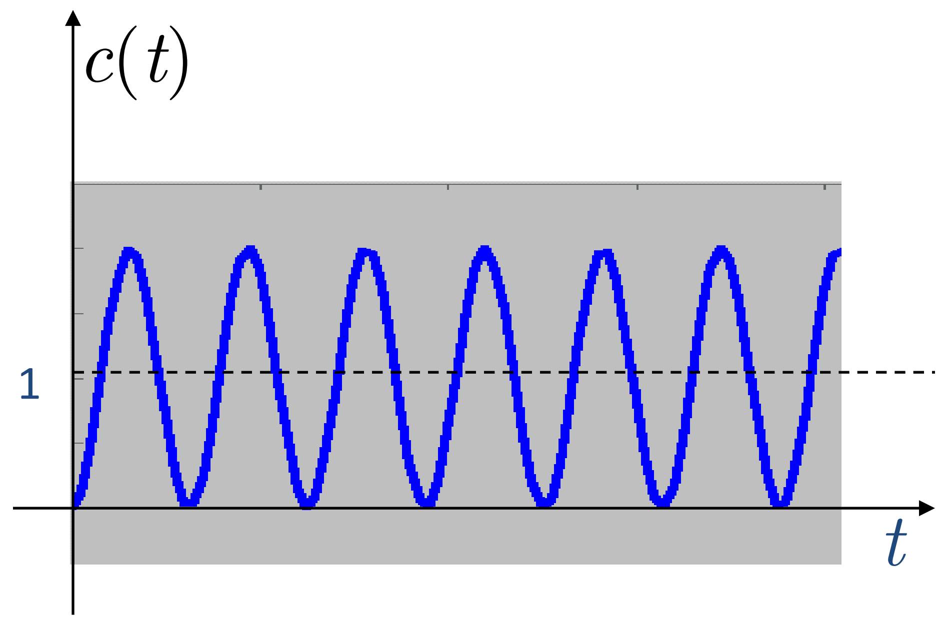
$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t+\beta\right),t\geq 0$$



(3) 无阻尼(ζ=0)单位阶跃响应：

$$c(t)=1-\cos\omega_n t,\quad t\geq 0$$





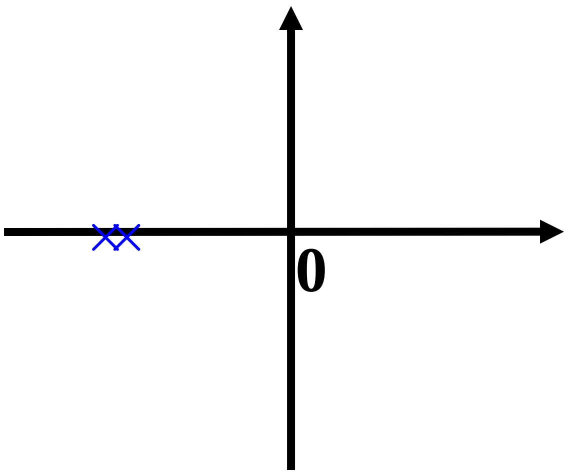
这是为何称 ω_n 为无阻尼振荡角频率，事实上无法观测到，能观测到的是阻尼振荡角频率。

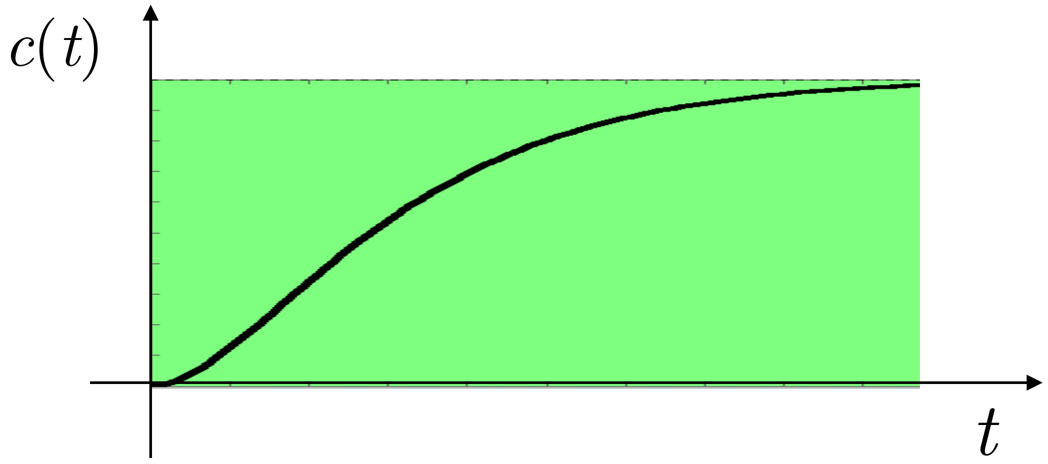
(4) 临界阻尼($\zeta=1$)单位阶跃响应：

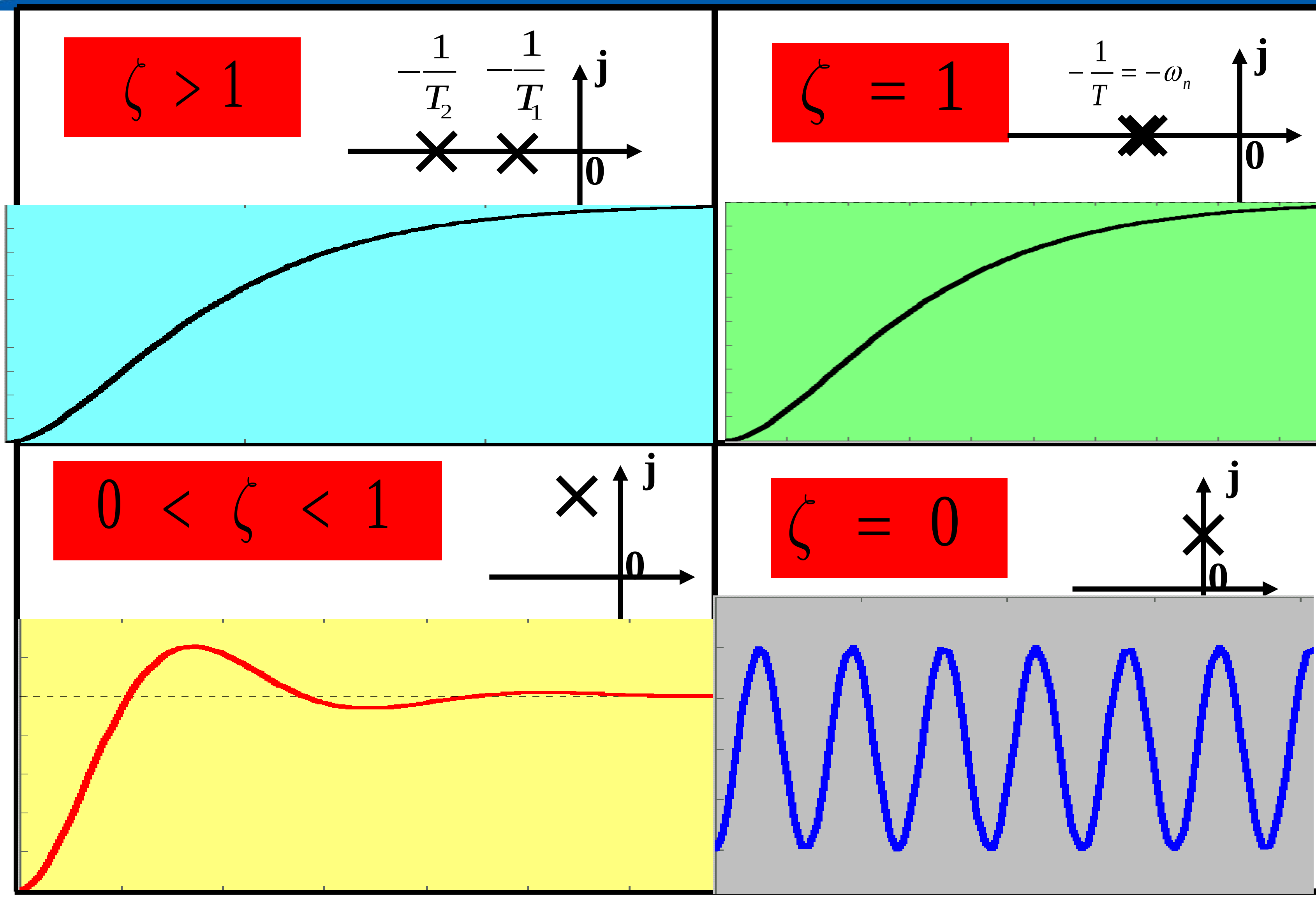
$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_n}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

取$Laplace$反变换，

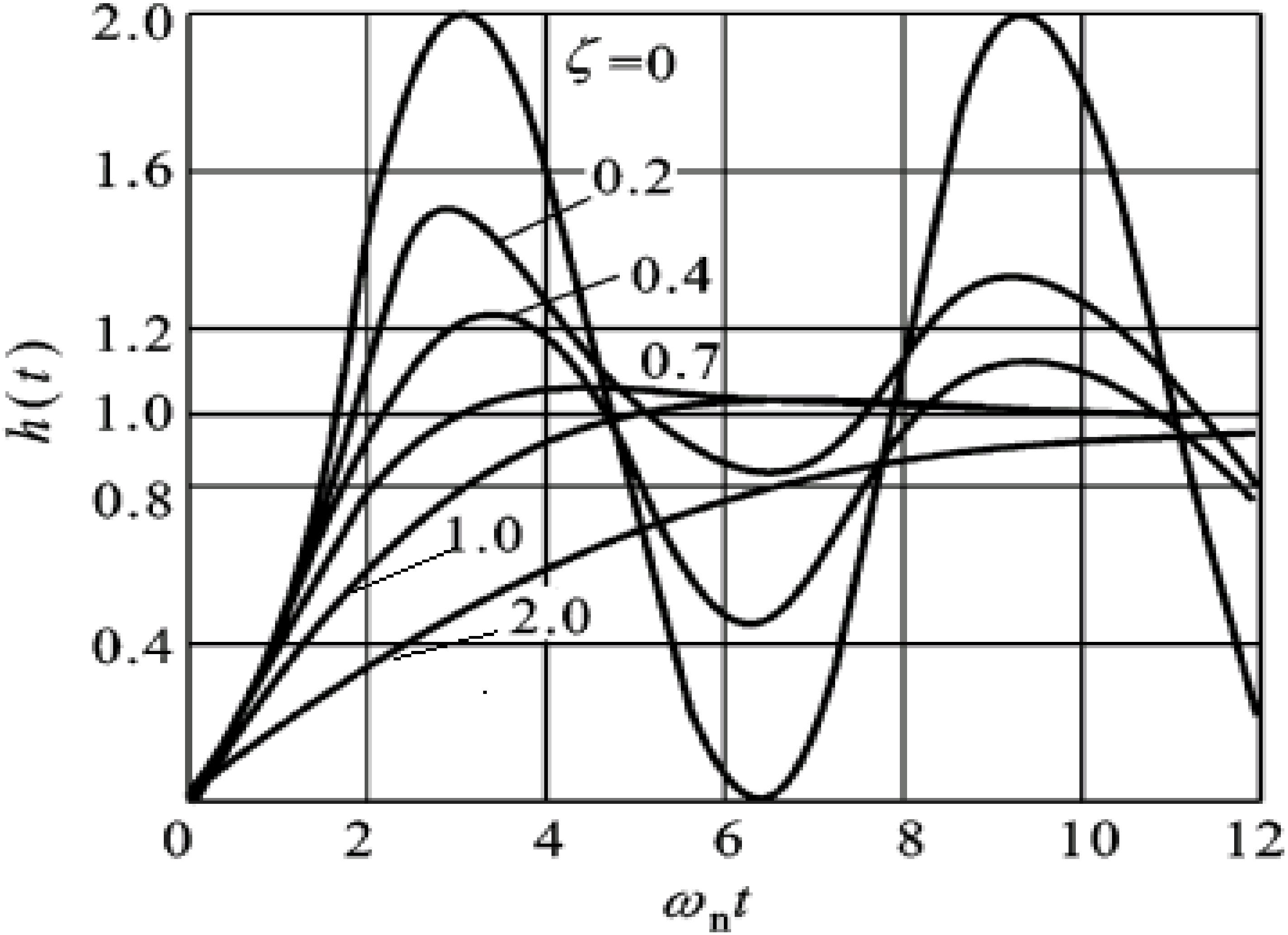
$$c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t),\quad t\geq 0$$






$\zeta > 1$
$-\frac{1}{T_2}$ $-\frac{1}{T_1}$
j
0
$\zeta = 1$
$-\frac{1}{T} = -\omega_n$
j
0
$0 < \zeta < 1$
j
0
$\zeta = 0$
j
0

3. 二阶欠阻尼系统性能的定性分析

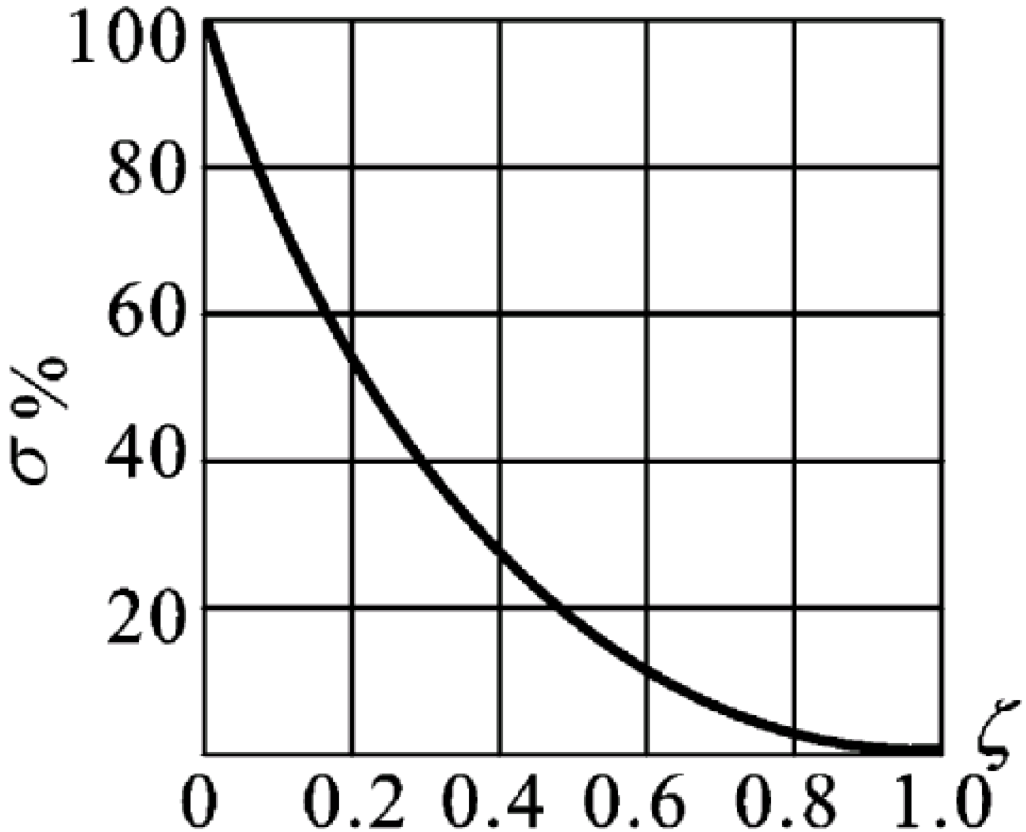


- **平稳性：**

(1) $\zeta\uparrow\rightarrow\omega_d\downarrow$，响振荡倾向越弱，$\sigma\%\downarrow$ (平稳性越好)。反之，$\zeta\downarrow\rightarrow\omega_d\uparrow$(振荡越严重)，平稳性越差。

(2) $\zeta=0$时，为零阻尼响应，具有频率为ω_n的不衰减（等幅）振荡。

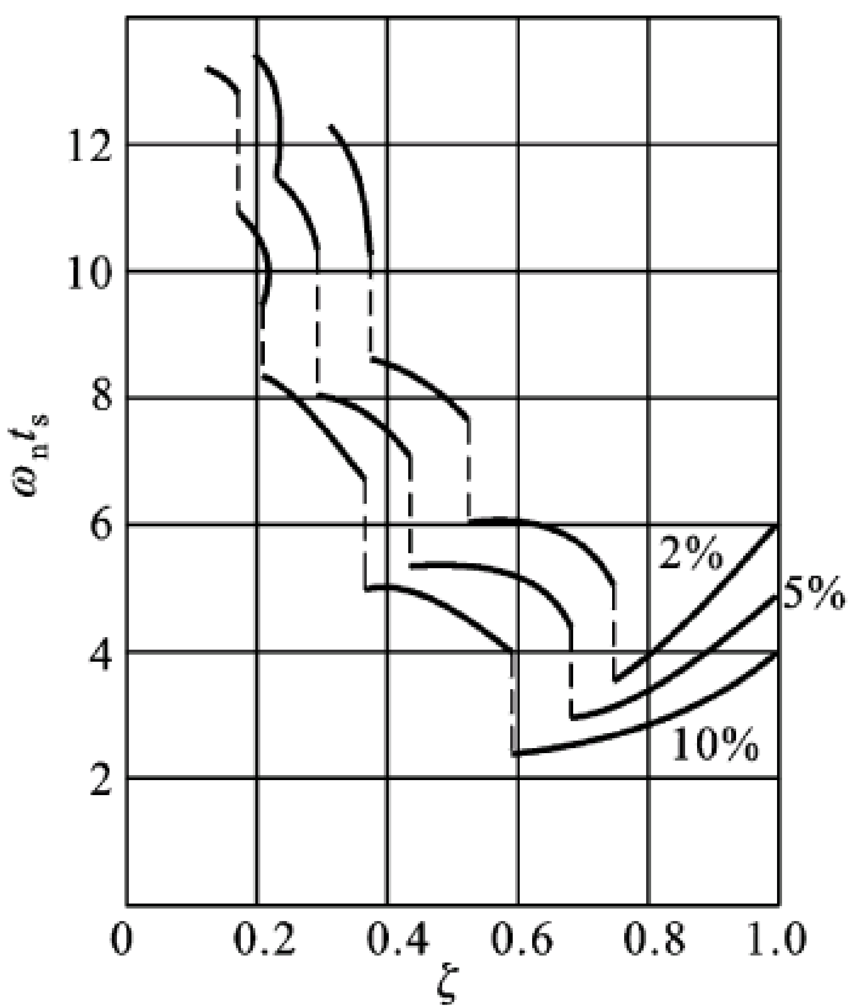
(3) 阻尼比和超调量的关系曲线如下图所示。



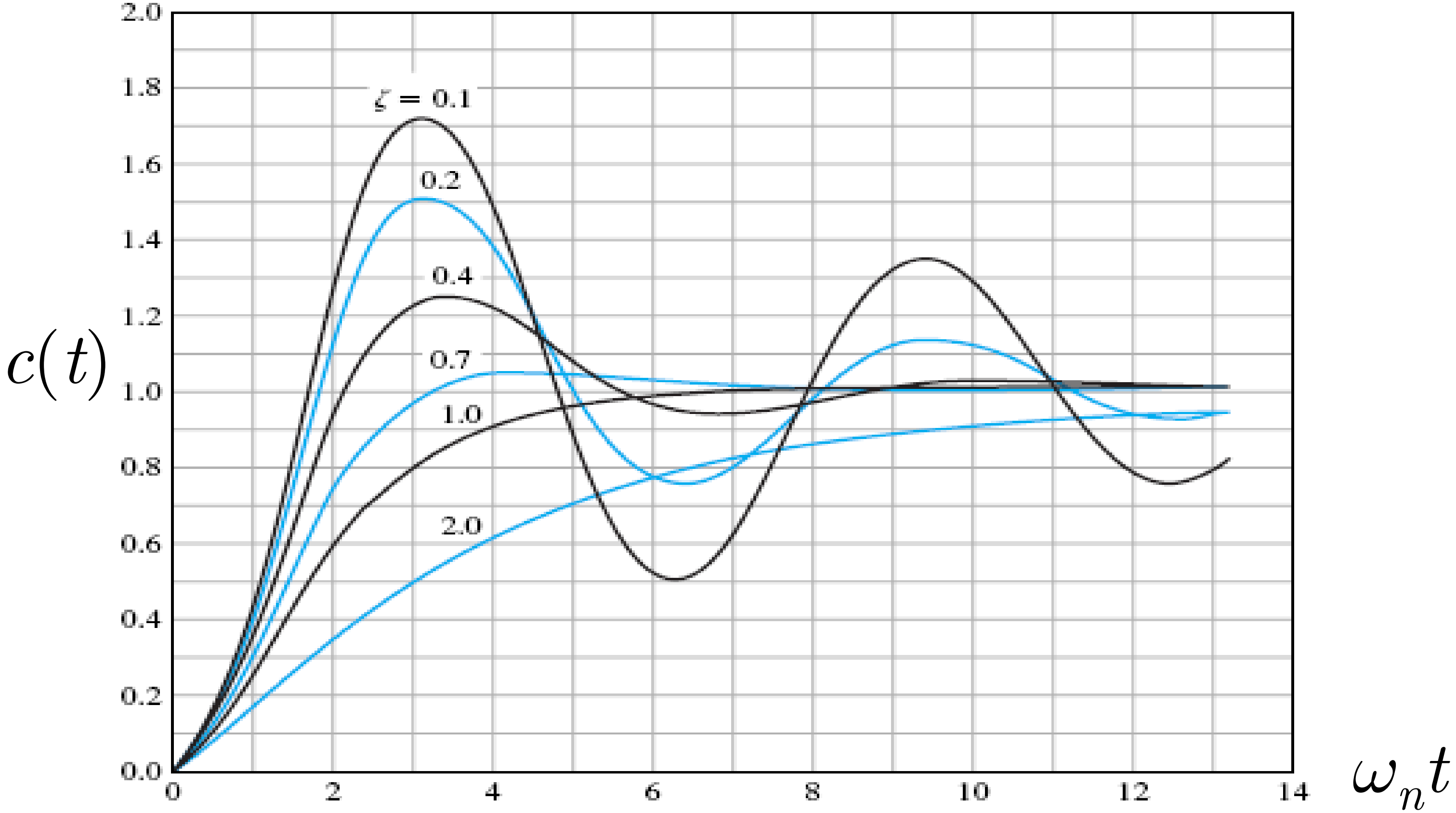
(4) 在 ζ 一定的情况下， $\omega_n\uparrow \rightarrow \omega_d\uparrow$，响应平稳性也越差。

总之，对于二阶欠阻尼系统而言， ζ大、 ω_n小系统响应的平稳性好。

- **快速性:**



(1) 从图中看出，对于5%误差带，当 ζ=0.707时，调节时间最短，即快速性最好。同时，其超调量<5%，平稳性也较好，故称 ζ=0.707为最佳阻尼比。



(2)在所有$\zeta \geq 1$ 无振荡和超调的响应中， $\zeta=1$ 时的响应最快。

(3) $\zeta>1$ 时的响应缓慢。

- **稳态精度:**

$$h(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta),\forall t\geq 0$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}(1-h(t))=0$$

因此，上述欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应稳态误差为零。

4. 欠阻尼系统的性能指标:

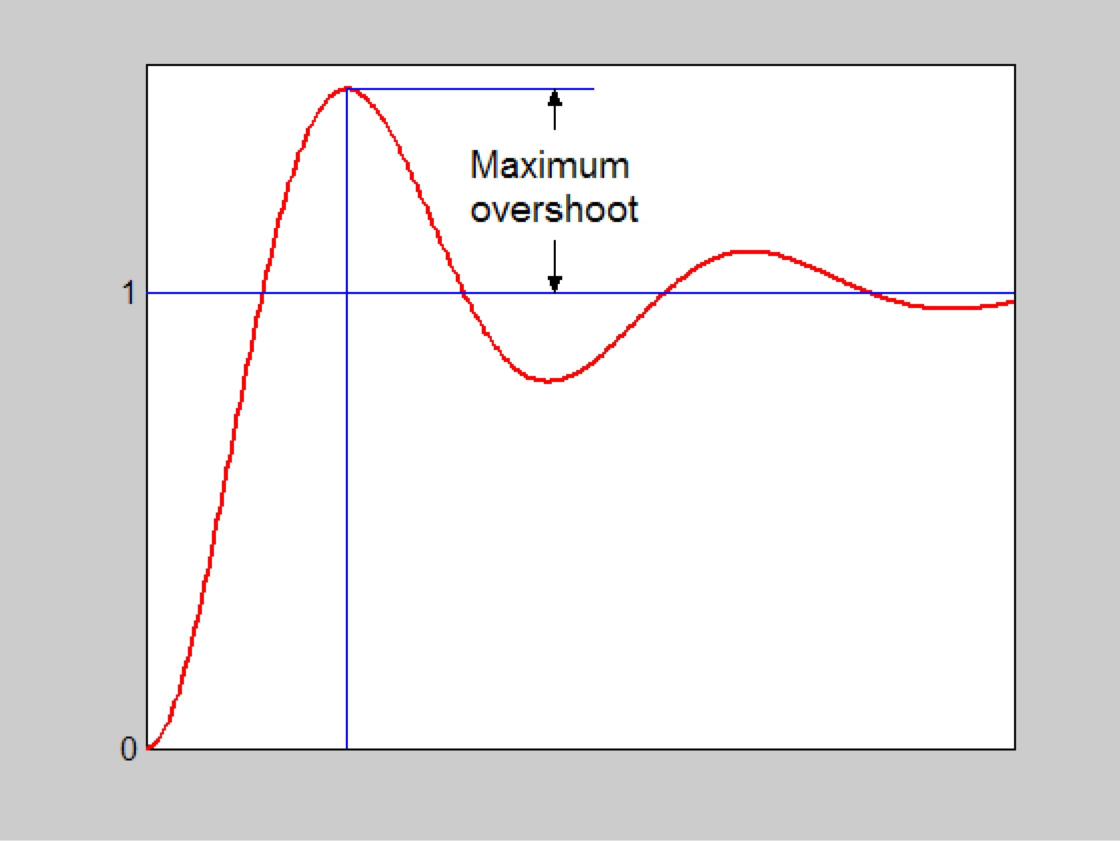
(1) 峰值时间t_p:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \beta\right)$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t = 0 \Rightarrow \omega_d t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(2) 超调量(0<ζ<1):



$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}} \Rightarrow$$

$$c(t_p) = 1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

故

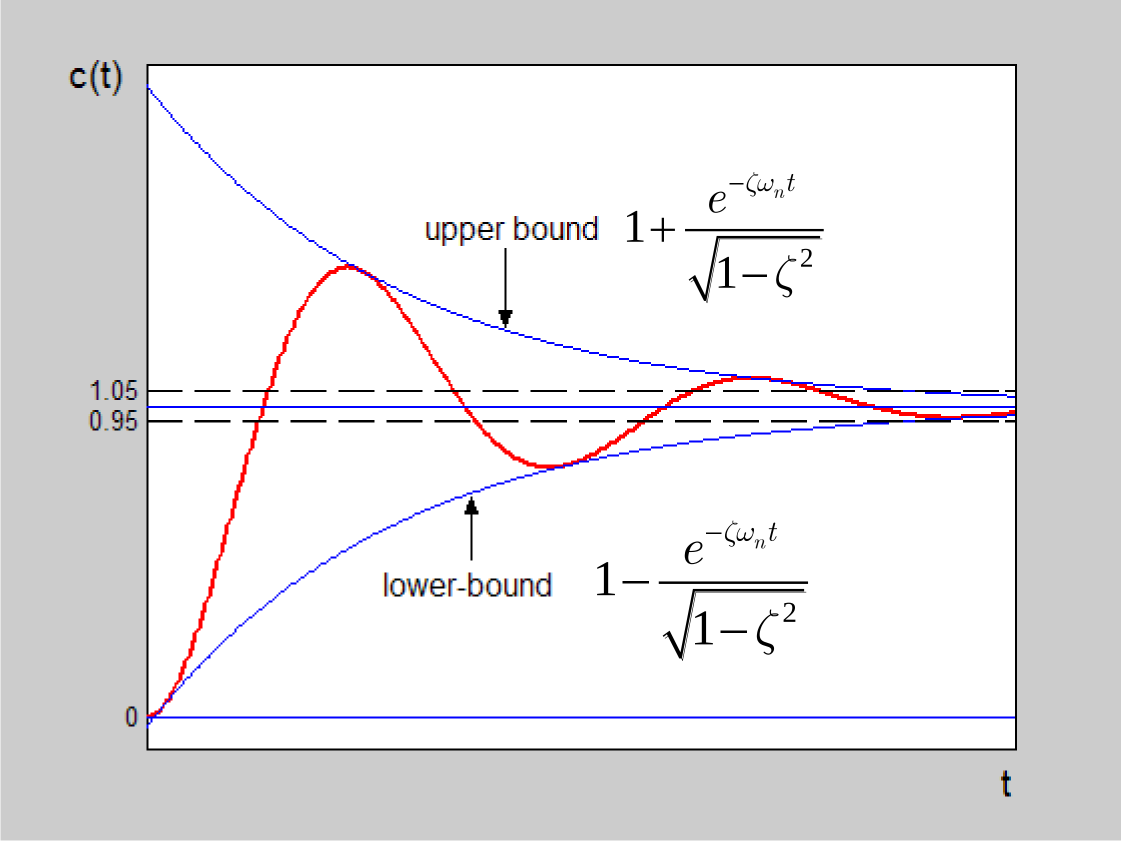
$$\sigma\% = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

(3) 调节时间t_s ($0<\zeta<1$):

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

$$1\pm\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\text{envelope curves}$$



其时间常数：$1/\zeta\omega_n$。

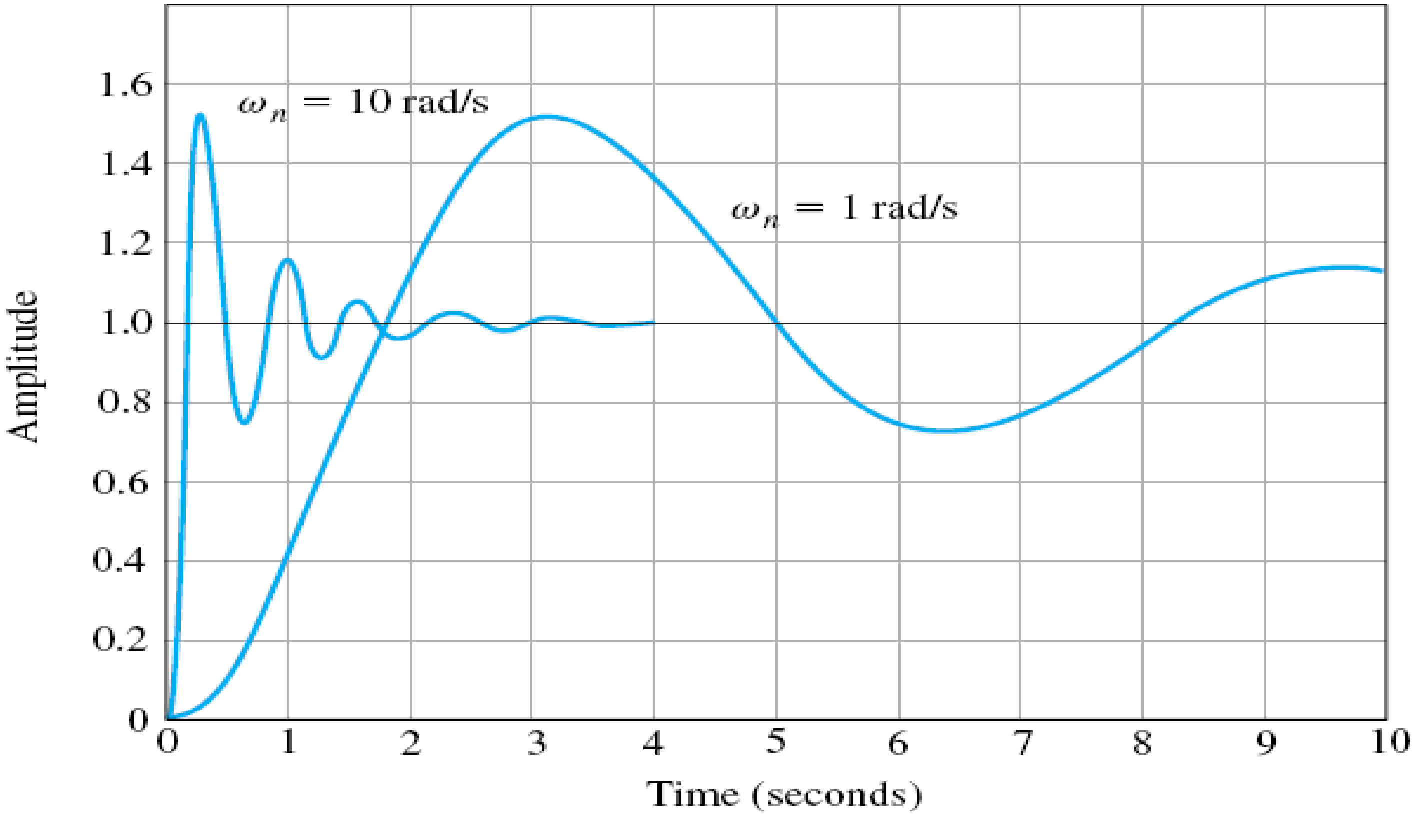
故

$t_s\approx 4T=4/\zeta\omega_n$, (2% criterion)

$t_s\approx 3T=3/\zeta\omega_n$, (5% criterion)

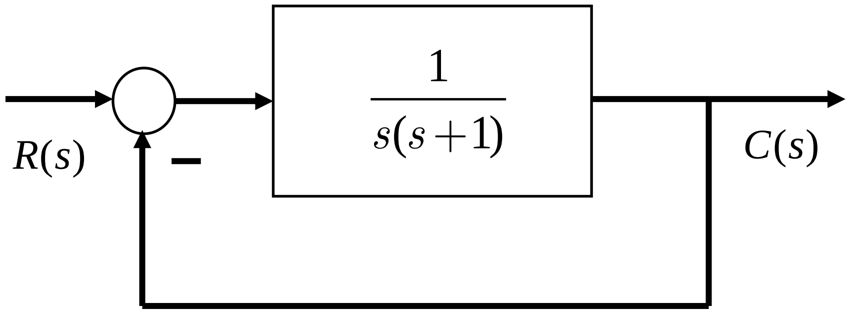
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

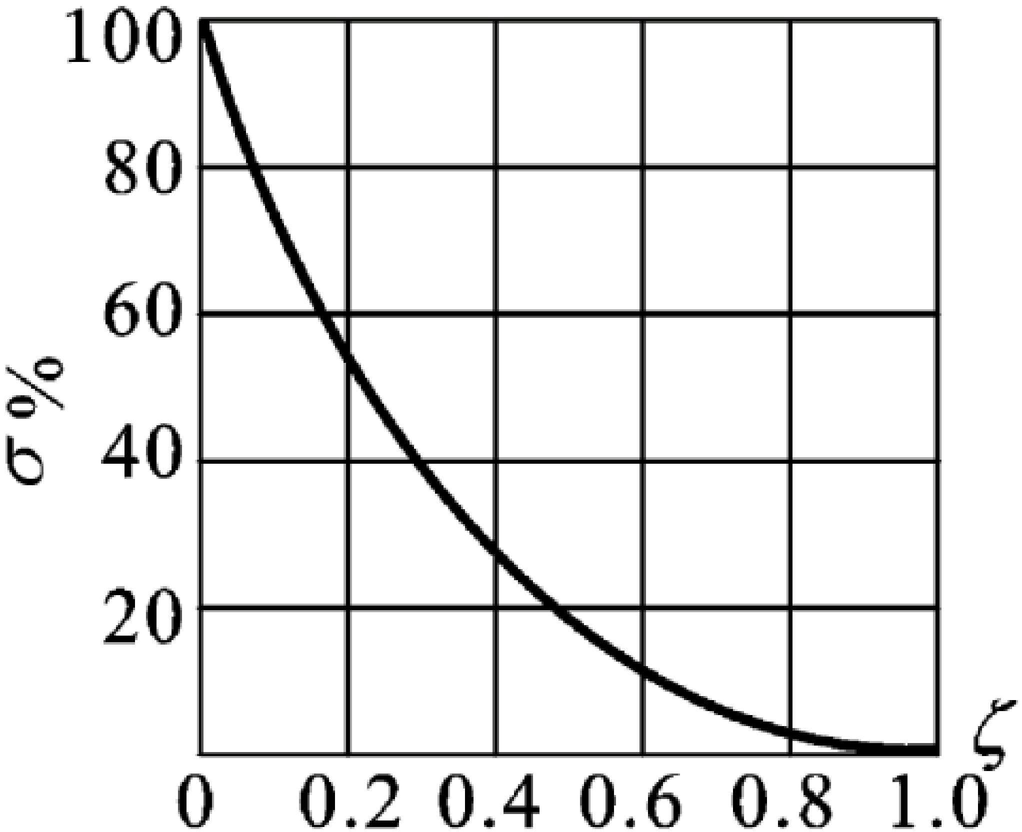
例：二阶系统 $\zeta=0.2$， 当$\omega_n=1$ 和 $\omega_n=10$, 时的响应曲线如下图所示：



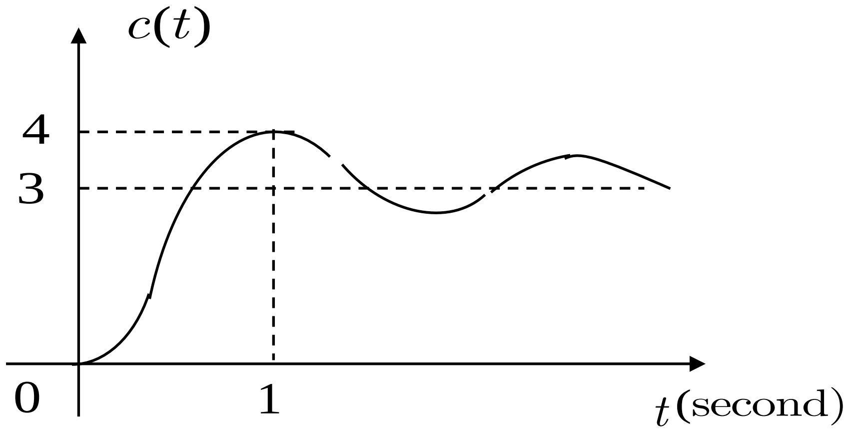
例：

求t_s及$\sigma\%$





例：某二阶系统的单位阶跃响应如下图所示，其中，$\lim_{t\to\infty}c(t)=3$。试求其传递函数。



解：系统传递函数如下：

$$\Phi(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

这里，$K=3$，且由图，$t_p=1\mathrm{s}$及 $\sigma\%=(1/3)100\%=33.3\%$。 利用公式

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$$

及

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

得到

$$\zeta = 0.33$$

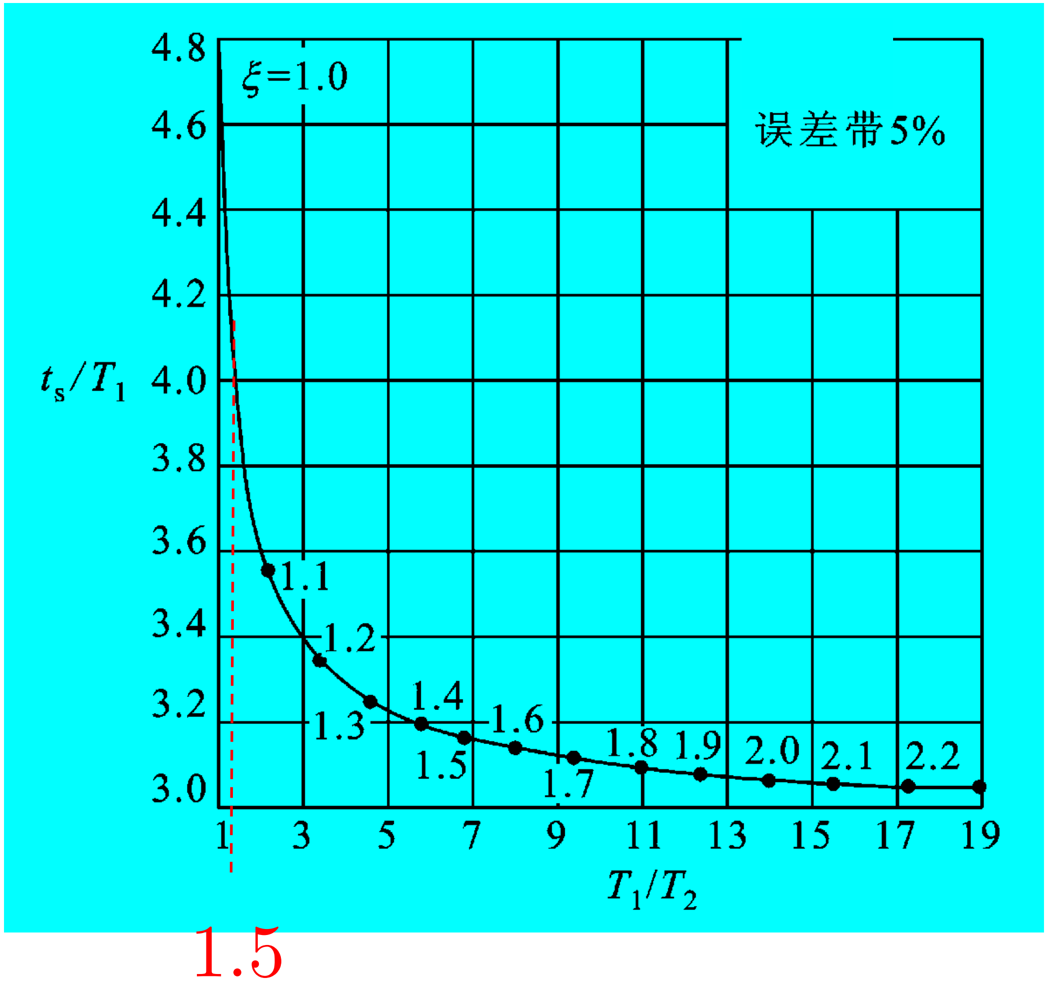
$$\omega_n = 3.33\,\mathbf{rad/s}$$

5. $\zeta \geq 1$ 时系统的性能指标:

$$C(s)=\frac{\dfrac{1}{T_1T_2}}{\left(s+\dfrac{1}{T_1}\right)\left(s+\dfrac{1}{T_2}\right)}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

无超调、无稳态误差。
t_s可通过查表法得到。



例如：

1) $T_1 = T_2 \Leftrightarrow \zeta = 1$

$$t_s = 4.75T_1$$

2) $T_1 / T_2 = 1.5 \Rightarrow \zeta = 1.02$

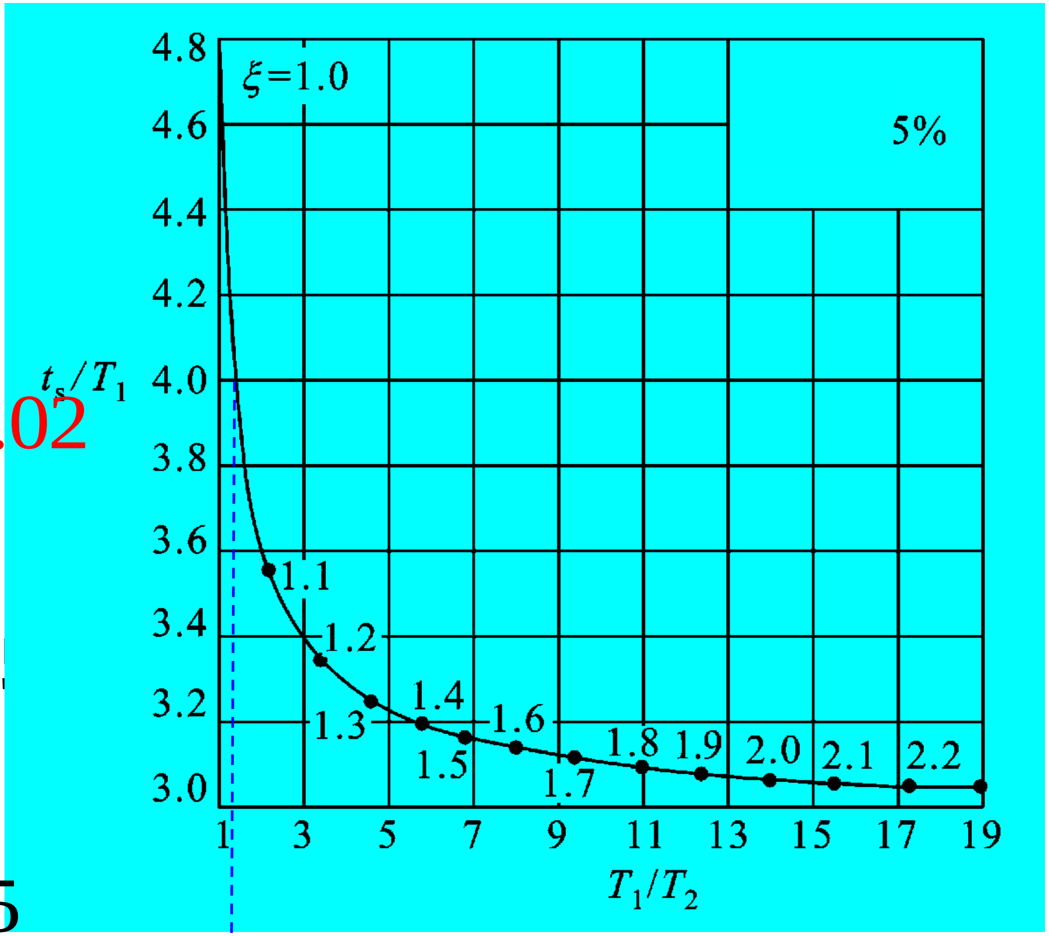
$$t_s = 4T_1$$

3) $T_1 / T_2 = 4 \Rightarrow \zeta = 1.25$

$$t_s \approx 3.3T_1$$

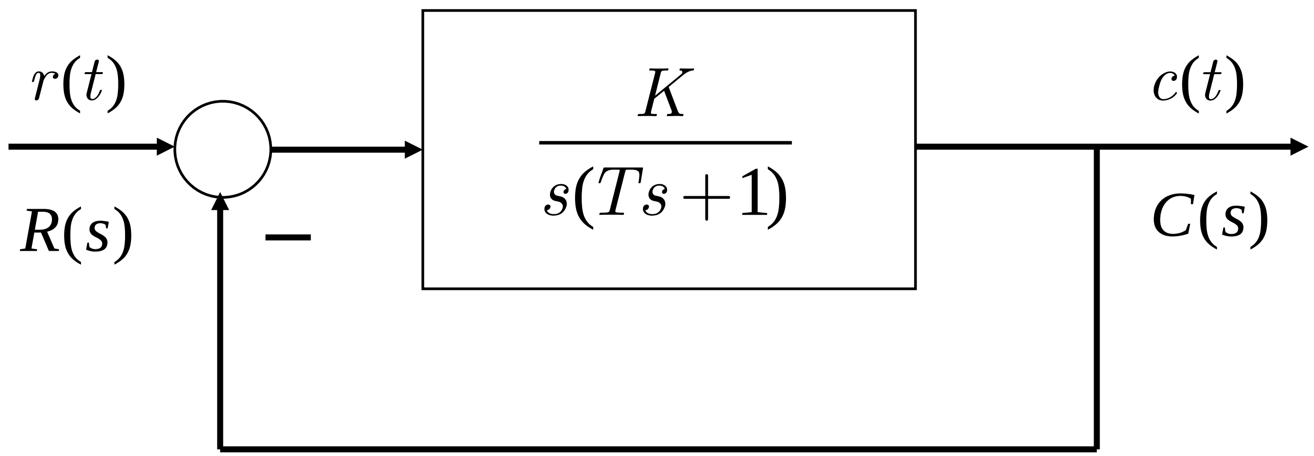
4) $T_1 / T_2 > 4 \Rightarrow \zeta > 1.25$

$$t_s \approx 3T_1$$



1.5

例：考虑如下系统：



其中， T=0.1s ， K为开环增益。试确定 K，使得无超调且 t_s=1s。

解：据题意，$\zeta \geq 1$。因此，闭环特征多项式

$$d(s)=s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}=\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)=s^2+\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)s+\frac{1}{T_1T_2}=0$$

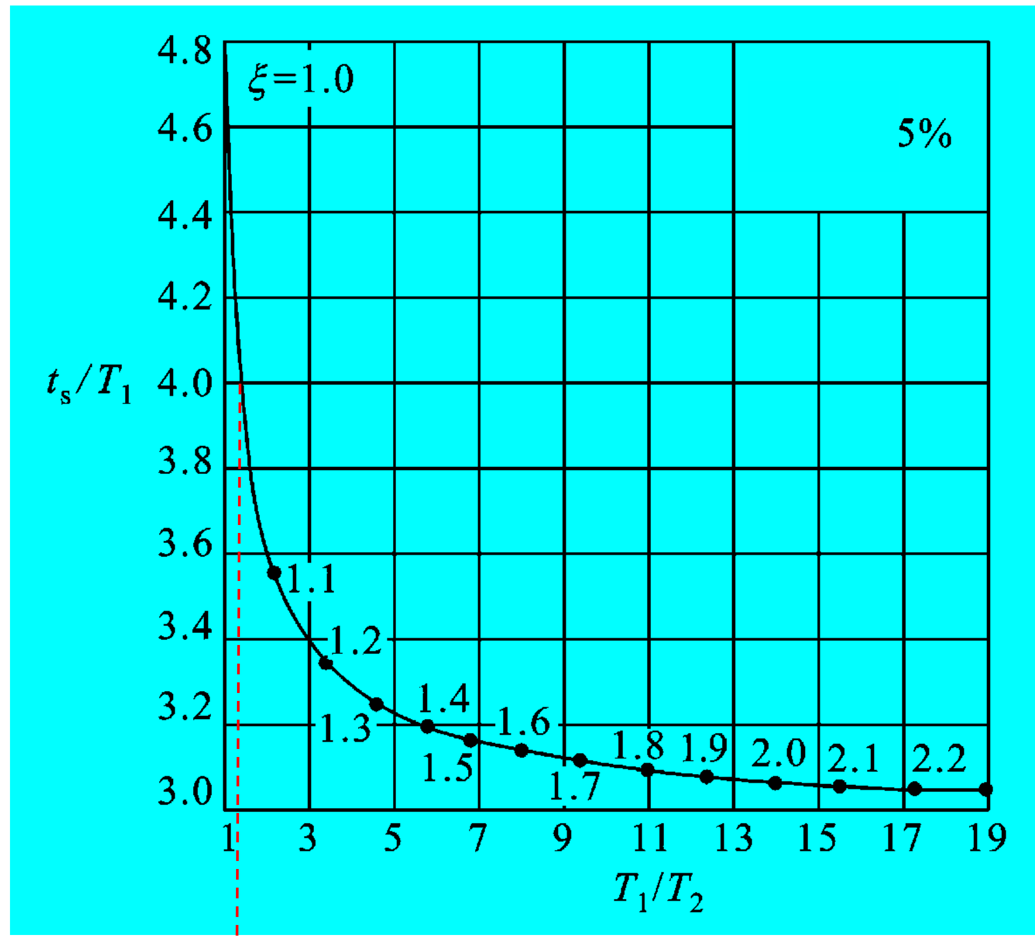
比较系数:

$$\begin{cases} \dfrac{K}{T} = \dfrac{1}{T_1 T_2} \\ \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{T_1} + \dfrac{1}{T_2} \end{cases}$$

查表,

$$\frac{T_1}{T_2} = 1.5$$

$$\frac{t_s}{T_1} = 4$$



1.5

此时，$\zeta=1.02$，非常接近1，故响应较快。因 $t_s=1\text{s}$，

$$T_1 = \frac{1}{4} t_s = 0.25\,\text{s}$$

因此，

$$\frac{T_1}{T_2} = 1.5 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{1.5} = \frac{0.25}{1.5} = \frac{1}{6}\,\text{s}$$

为确定K，注意到

$$\begin{cases} \dfrac{K}{T} = \dfrac{1}{T_1 T_2} \\[2ex] \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{T_1} + \dfrac{1}{T_2} \end{cases}$$

故

$$K=\left.\frac{T}{T_1T_2}\right|_{T=0.1}=\frac{0.1}{0.25\times0.167}=2.4s^{-1}$$

最后，需要检验

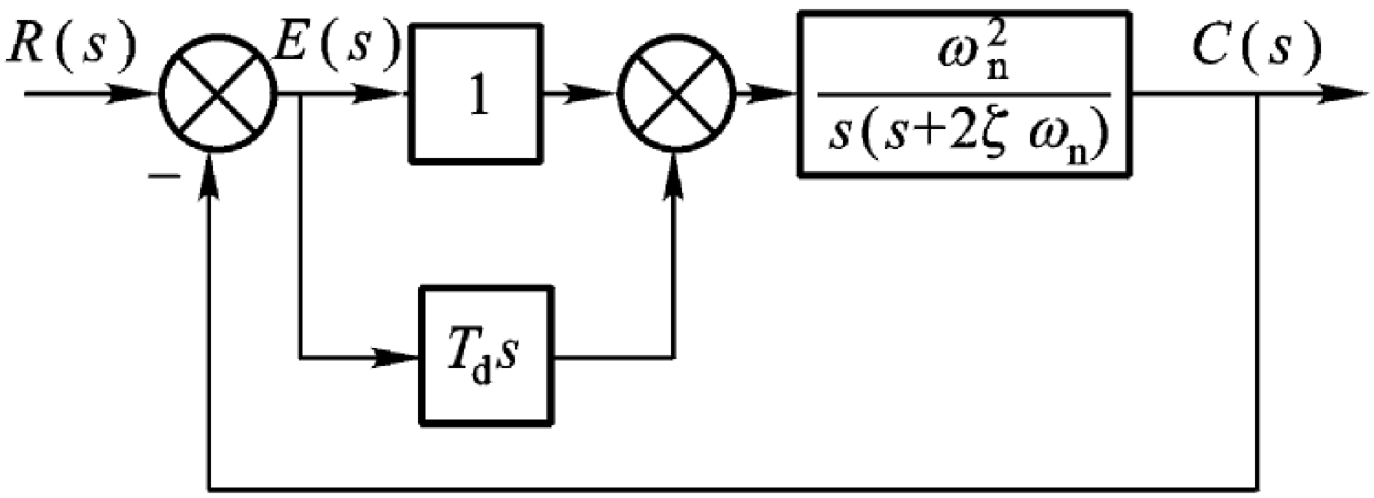
$$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.1}=10$$

是否满足。否则，K 要重新设计。但在本例中，

$$\frac{1}{T_1}=4,\quad \frac{1}{T_2}=6$$

三、改善二阶系统响应的措施

1. 误差信号的比例 - 微分控制



系统开环传函为:

$$G(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=\frac{\omega_n^2(1+T_d s)}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

闭环传函为:

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2(1+T_d s)}{s^2+(2\zeta\omega_n+T_d\omega_n^2)s+\omega_n^2}$$

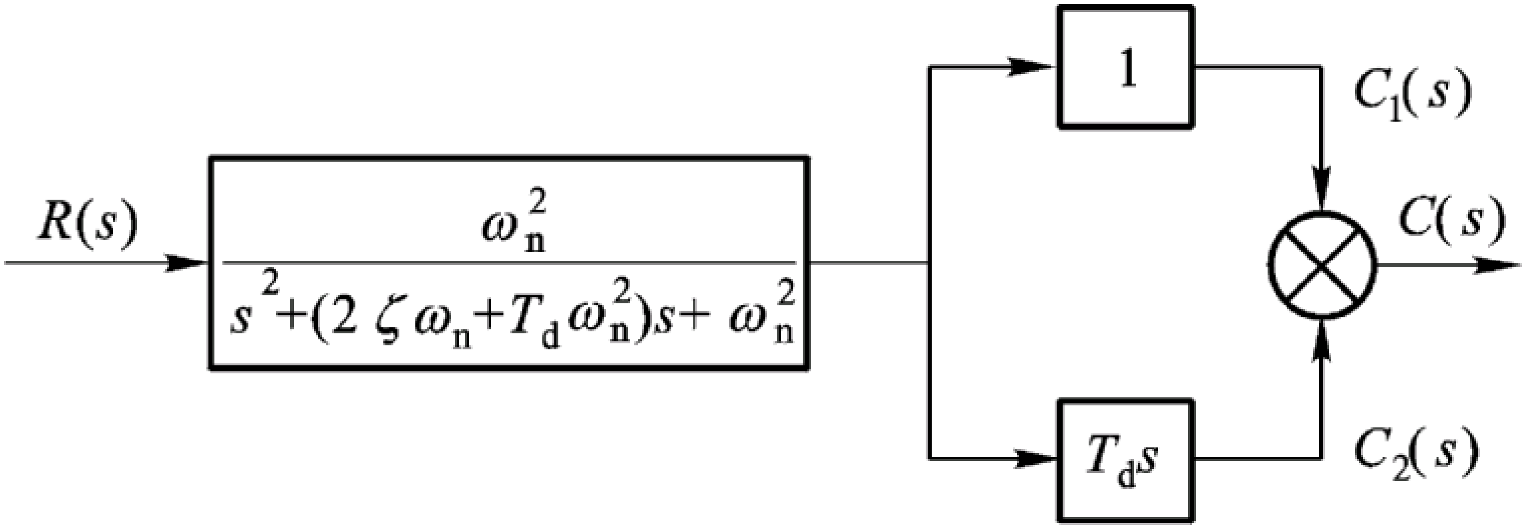
等效阻尼比:

$$\zeta_d=\zeta+\frac{1}{2}T_d\omega_n$$

引入比例－微分控制使系统的等效阻尼比增加，从而抑制了振荡，使超调减弱，可改善系统的平稳性。

微分作用之所以能改善动态性能，因为它产生一种早期控制（或称为超前控制），能在实际超调量出来之前，就产生一个修正作用。

前面图的相应的等效结构

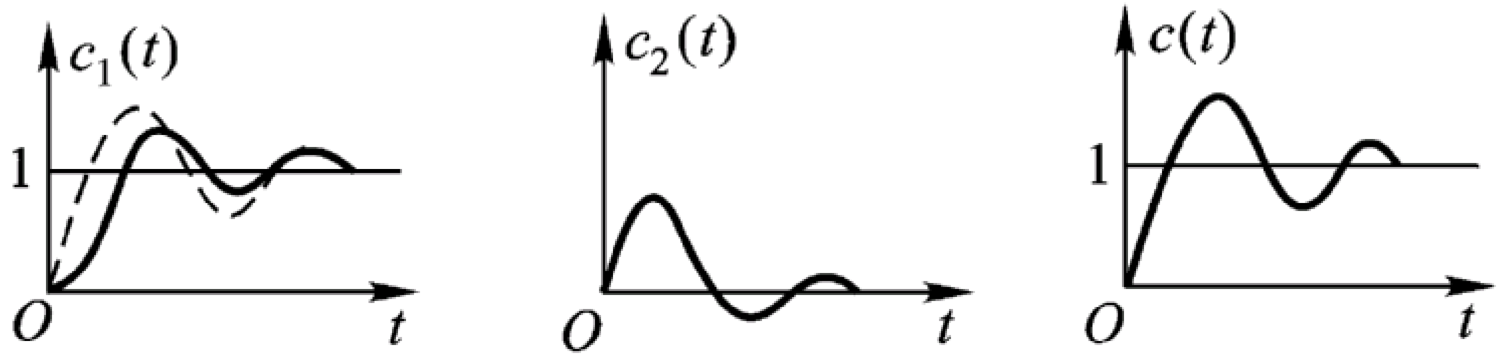


由此知道：

$$c(t)=c_1(t)+c_2(t)$$

问题：$c_2(t)$怎么求？

$c_1(t)$和$c_2(t)$及$c(t)$的大致形状如下：

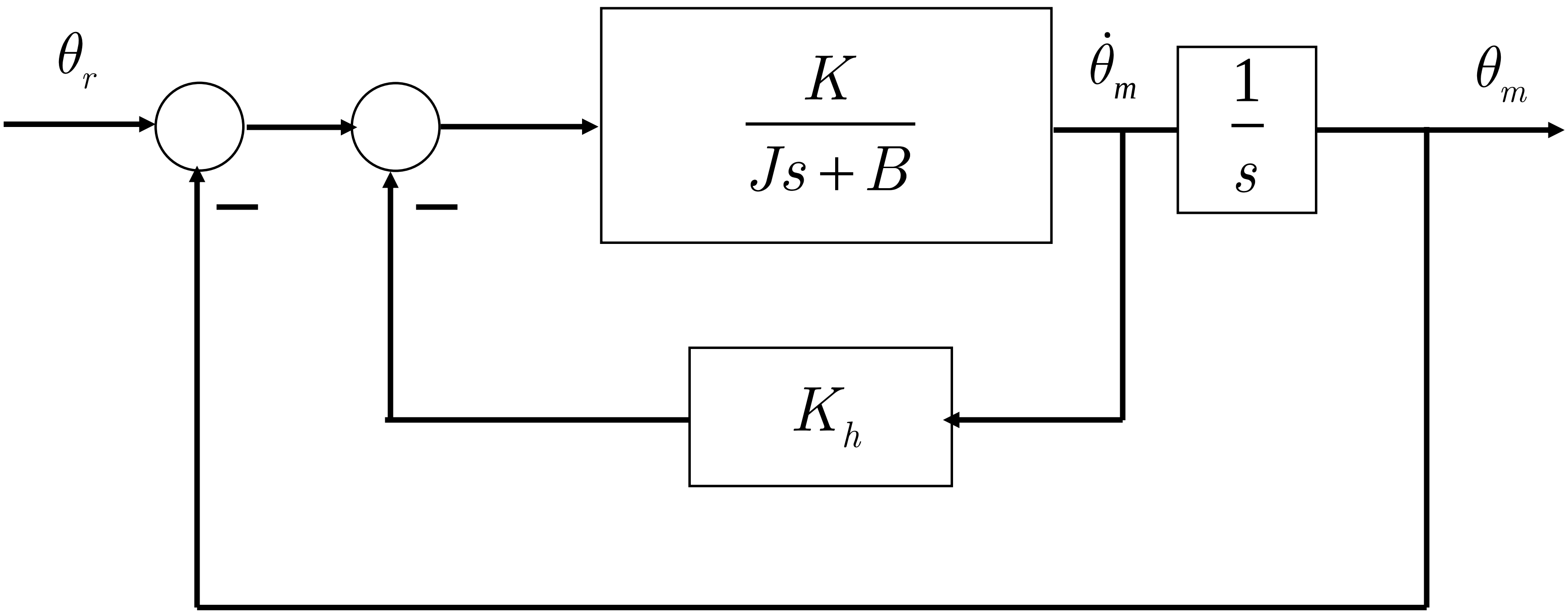


(a) (b) (c)

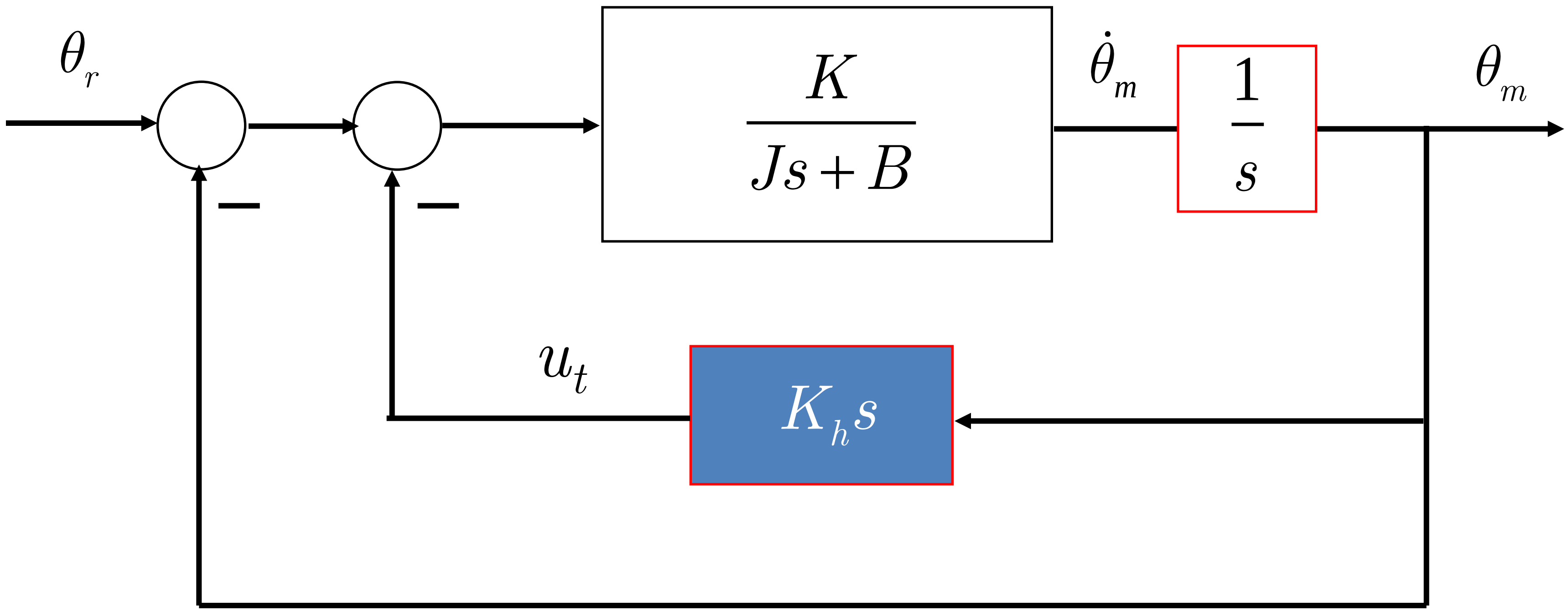
一方面，增加T_d项，增大了等效阻尼比ζ_d，使$c_1(t)$曲线比较平稳。另一方面，它又使 $c_1(t)$加上了它的微分信号$c_2(t)$，加速了$c(t)$的响应速度，但也同时削弱了等效阻尼比ζ_d的平稳作用。

2. 测速反馈

测速反馈可改善 系统品质：



数学上等价于：



无测速反馈时(K_h=0):

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_r(s)}=\frac{K/J}{s^2+(B/J)s+K/J}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

这里,

$$\omega_n=\sqrt{K/J},\quad \zeta=\frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

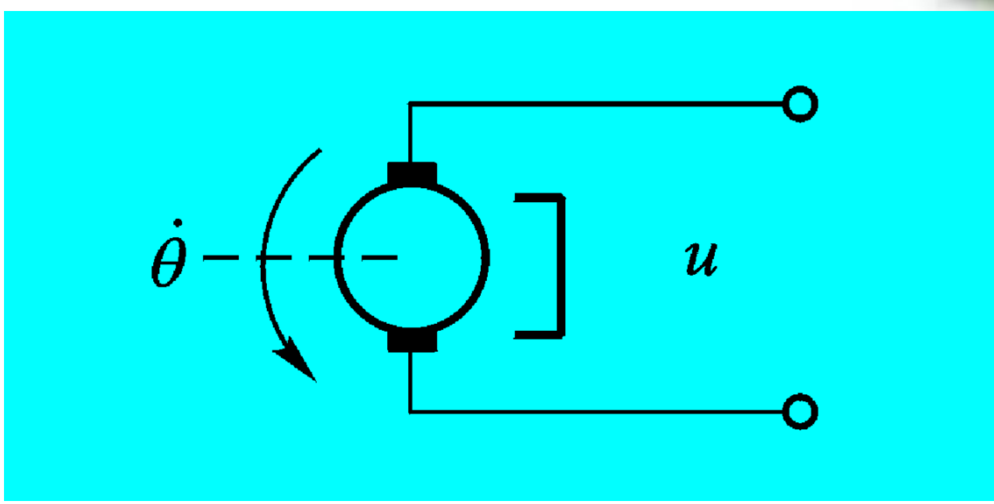
有测速反馈时,

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_r(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2(\zeta+K_h\omega_n/2)\omega_n s+\omega_n^2}$$

阻尼比变为

$$\zeta_t=\zeta+\frac{1}{2}K_h\omega_n$$

测速发电机：将速度信号转换为模拟电压信号，是重要的传感器。



Mathematical model:

$$u(t) = K_h \dot{\theta}(t)$$

3. 比例－微分控制和速度反馈控制比较

(1)比例一微分控制的线路结构比较简单，成本低，而速度反馈控制部件则较昂贵。

(2) 从抗干扰来看，前者抗干扰能力较后者差。

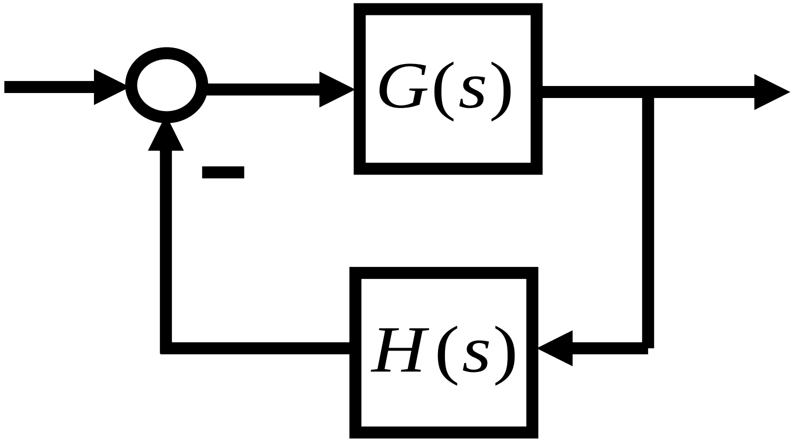
(3) 两者均能改善系统的平稳性。在相同的阻尼比和自然频率下，采用速度反馈不足之处是其会使系统的开环增益下降，但却能使内回路中被包围部件的非线性特性、参数漂移等不利影响大大削弱。

开环增益：开环增益是指将开环传递函数写为标准形式后，对应的开环传递函数增益。

四、高阶系统的时域分析

高阶系统的时间响应可以分解为一系列一阶和二阶系统响应之和。

1. 基本假设



闭环传递函数：

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{b_0\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s+p_k)},m\le n$$

假设1: $m\le n$。

物理系统均满足该假设。若一系统满足假设1，称该系统为正则的；若$m<n$，称该系统为严格正则的。

假设2: 所有闭环根均位于左半s-平面。

假设3: 所有闭环根为单根。

2. 高阶系统的单位阶跃响应

$$C(s)=\frac{b_0\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s+p_k)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{a}{s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s+p_k}$$

这里，a 和 a_k 为关于 $s=0$ 、 $s=-p_k$ 的留数：

$$a = \lim_{s\to 0} \frac{b_0 \prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s+p_k)} = \frac{b_0 \prod_{i=1}^{m}(z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(p_k)} = \Phi(0)$$

$$a_k = \lim_{s\to -p_k} \frac{b_0 \prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(s+p_i)} \frac{1}{s} = \frac{b_0 \prod_{i=1}^{m}(-p_k+z_i)}{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(-p_k+p_i)} \frac{1}{-p_k}$$

考虑 $C(s)$包含实根和共轭复根的一般情形：

$$C(s)=\frac{a}{s}+\sum_{j=1}^{q}\frac{a_j}{s+p_j}+\sum_{k=1}^{r}\frac{\beta_k(s+\zeta_k\omega_k)+c_k\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2+2\zeta_k\omega_k s+\omega_k^2}$$

这里， $n=q+2r$。

例：考虑如下系统的单位阶跃响应：

$$C(s)=\frac{5s^3+13s^2+14s+4}{(s+1)(s^2+2s+2)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{2}{s}+\frac{2}{s+1}+\frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

$$c(t)=2+2e^{-t}+e^{-t}(\cos t+\sin t),\forall t\geq 0$$

3. 偶极子

(1) 在左半平面一对非常接近的零点和极点称为偶极子，可忽略；

(2) 若一个闭环极点远离虚轴，相应的过渡过程很快，故该极点亦可忽略。

例：某系统传递函数

$$\Phi(s)=\frac{(s+1.01)}{(s+1)(s+2)}=\frac{0.01}{(s+1)}+\frac{1-0.01}{(s+2)}$$

进行 *Laplace*反变换

$$c(t)=0.01e^{-t}+(1-0.01)e^{-2t}\approx e^{-2t},\quad t\geq 0$$

其中$0.01e^{-t}$ 影响很小，可忽略： $\Phi(s)\approx 1/(s+2)$.

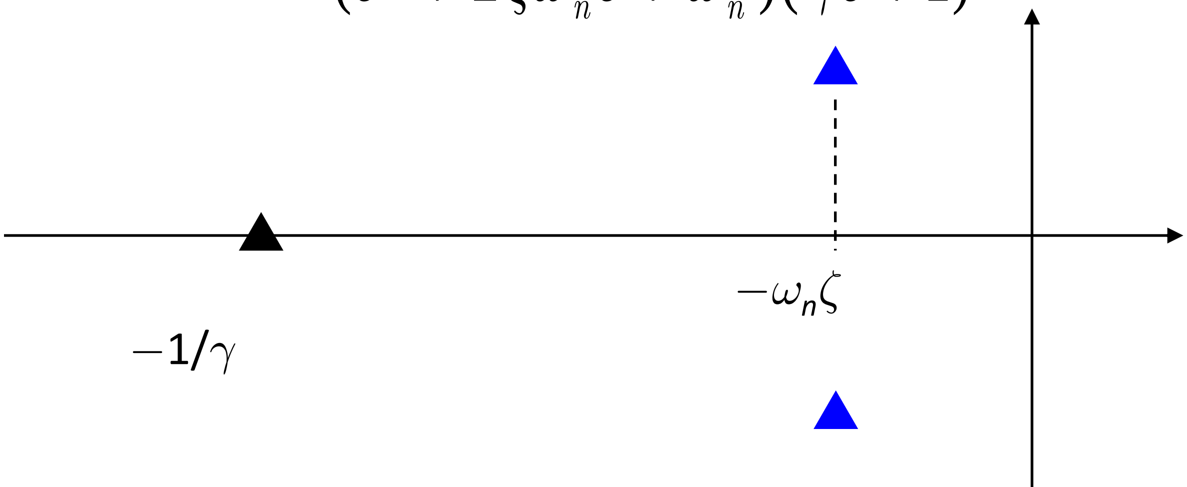
例：某系统传递函数如下：

$$\Phi(s)=\frac{1/5}{(s+1)(\frac{1}{5}s+1)}\approx\frac{1/5}{(s+1)}$$

4. 主导极点

例：考虑如下三阶闭环系统：

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(\gamma s+1)}$$



若实部满足$1/\gamma\geq 5\omega_n\zeta$ ($1/\gamma\geq 4\omega_n\zeta$)，则该三阶系统可近似为二阶系统：

$$\Phi(s) \approx \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

这两个极点称为主导极点。

一般地，若实部之比大于4且附近无零点，则离虚轴近的那些极点将主导系统的响应，称为主导极点。例如：