反馈控制综述习题解答

习题 13.1.

（1）证明控制律 $u = -kx(k > 1)$ 可以保证非线性系统 $\dot{x} = \dfrac{u}{1+x^2} + x$ 局部（渐近）稳定、区域（渐近）稳定和半全局（渐近）稳定，但不能保证系统全局（渐近）稳定。

（2）试设计非线性控制律使得闭环系统 $\dot{x} = \dfrac{u}{1+x^2} + x$ 的原点全局渐近稳定。

解答：闭环系统为:

$$\dot{x} = -\frac{kx}{1+x^2} + x = -x\left(\frac{k}{1+x^2} - 1\right) = -\left(\frac{k-1-x^2}{1+x^2}\right)x \text{ 。}$$

对闭环系统在原点近似线性化得到：$\dot{x} = -(k-1)x$ 。因 $k>1$，因此近似线性化系统渐近稳定, 从而原非线性系统渐近稳定。

吸引区计算：

$$\frac{d}{dt}(0.5x^2) = x\dot{x} = -\left(\frac{k-1-x^2}{1+x^2}\right)x^2 < 0, |x| < \sqrt{k-1},$$

吸引区为$|x| < \sqrt{k-1}$，系统区域稳定。

增大k可以使得吸引区包含状态空间的任意紧集，系统半全局稳定。

对于任意给定的$k>1$，存在初始状态$x(0)>\sqrt{k-1}$不在吸引区内，因此系统不是全局渐稳的。

设计控制律$u=-2x(1+x^2)$，得到闭环系统$\dot{x}=-x$，该控制律使得系统全局渐稳。

习题 13.2：考虑线性系统 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u$，$y = x_1$，假定输出 $y = x_1$ 可以测量，x_2 不可测量。设计如下动态输出反馈控制律：$u = -k_1 x_1 - k_2 z, \dot{z} = -k_3 z - k_4 x_1$。

（1） 写出以 (x_1, x_2, z) 为状态的闭环系统的状态方程；

（2） 给出闭环系统原点渐近稳定时控制器参数 (k_1, k_2, k_3, k_4) 应该满足的条件。

解答：

（1）闭环系统状态方程为：

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 z, \dot{z} = -k_3 z - k_4 x_1$$

（2）将闭环系统写成向量矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_1 & -k_2 \\ -k_4 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix}$$

系统矩阵的特征多项式为:

$$
\begin{aligned}
\det(sI-A) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+k_1 & k_2 \\ k_4 & 0 & s+k_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= s(s+k_1)(s+k_3)+k_4(-k_2) \\
&= s^3+(k_1+k_3)s^2+k_1k_3s-k_2k_4
\end{aligned}
$$

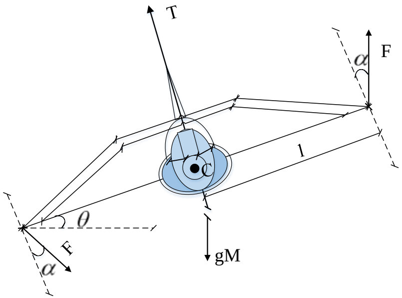
由此得到系统渐近稳定的一个条件为:

$$k_1>0, k_2>0, k_3>0, k_4<0, (k_1+k_3)k_1k_3+k_2k_4>0$$

具体可以选取: $k_1=k_2=k_3=1, k_4=-1.$

近似线性化控制习题解答

习题 14.1. 考虑如下简化的 VTOL 飞行器运动模型



$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -au_1 \sin\theta, \\
\ddot{y} &= au_1 \cos\theta - g, \\
\dot{\theta} &= u_2.
\end{aligned}
\tag{a}
$$

其中（u_1,u_2） 为控制输入， $a>0, g>0$ 为已知常参数，所有状态 $(x,\dot{x},y,\dot{y},\theta)$ 可以测量。试利用近似线性化方法设计线性状态反馈控制律使得飞行器的状态 $(x,y,\theta,\dot{x},\dot{y})$ 收敛到期望值 $(x_d,y_d,0,0,0)$ 。

解答：

令 $x_1=x-x_d, x_2=\dot{x}, x_3=y-y_d, x_4=\dot{y}, x_5=\theta$，则可得到系统状态方程为：

$$\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=-au_1\sin x_5, \dot{x}_3=x_4, \dot{x}_4=au_1\cos x_5-g, \dot{x}_5=u_2$$

期望平衡点为原点，在原点处的稳态控制量为：

$u_{1s}=g/a, u_{2s}=0$。设 $v_1=u_1-u_{1s}$，则可得到在原点的近

似线性化系统为：

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -au_{1s}x_5 = -gx_5, \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = av_1, \dot{x}_5 = u_2$$

上述系统已经解耦为两个子系统。

子系统(x_1, x_2, x_5)

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -gx_5, \dot{x}_5 = u_2$$

能控, 因而可以设计线性稳定控制律：

$$u_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_5x_5$$

同样子系统(x_3, x_4)

$$\dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = av_1$$

能控，因而可以设计线性稳定控制律:

$$v_1 = -k_3 x_3 - k_4 x_4$$

最终可得到结论：控制律

$$u_1 = g / a - k_3 x_3 - k_4 x_4, u_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_5 x_5$$

可以保证飞行器的状态$(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y})$渐近稳定到期望值$(x_d, y_d, 0, 0, 0)$。

习题 14.2：假定只有(x, y) 可以测量，重做习题 14.1，即设计输出反馈控制律（控制律中仅利用(x, y)的信息）使得飞行器的状态$(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y})$收敛到期望值$(x_d, y_d, 0, 0, 0)$。

解答：近似线性化系统（同上题）为：

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = g x_5, \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = a v_1, \dot{x}_5 = u_2$$

系统的输出为： $y_1 = x_1, y_2 = x_3$ 。

可以证明子系统：

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -g x_5, \dot{x}_5 = u_2, y_1 = x_1$$

能控能观测，因而可以设计基于状态观测器的控制律如下：

$$u_2 = -k_1 \hat{x}_1 - k_2 \hat{x}_2 - k_5 \hat{x}_5$$

相应的状态观测器为：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + h_1(x_1 - \hat{x}_1),\\ \dot{\hat{x}}_2 &= -g\hat{x}_5 + h_2(x_1 - \hat{x}_1),\\ \dot{\hat{x}}_5 &= u_2 + h_3(x_1 - \hat{x}_1)\end{aligned}$$

其中(h_1, h_2, h_3)的选择应使得观测误差系统：

$$\begin{bmatrix}\dot{e}_1\\ \dot{e}_2\\ \dot{e}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-h_1 & 1 & 0\\ -h_2 & 0 & -g\\ -h_3 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{bmatrix}$$

渐近稳定，其中$e_i = x_i - \hat{x}_i (i = 1, 2, 5)$。

同样可以证明子系统：

$$\dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = av_1, y_2 = x_3$$

能控能观测，因而可以设计基于状态观测器的动态输出反馈控制律如下：

$$\begin{aligned} u_1 &= g / a - k_3\hat{x}_3 - k_4\hat{x}_4, \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_4 + h_3(x_3 - \hat{x}_3), \\ \dot{\hat{x}}_4 &= av_1 + h_4(x_3 - \hat{x}_3) \end{aligned}$$

其中(h_3, h_4)的选择应使得观测误差系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_3 & 1 \\ -h_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

渐近稳定，其中$e_i = x_i - \hat{x}_i (i = 3, 4)$ 。

习题 14.3. 假定习题 14.1 中系统的状态可以测量，参数 (a,g) 未知，上下界已知，即 $0<a_1\le a\le a_2, 0<g_1\le g\le g_2$，$(a_1,a_2,g_1,g_2)$ 已知。试设计带积分的状态反馈控制律使得 VTOL 飞行器的状态收敛到期望值 $(x_d,y_d,0,0,0)$。

解答：系统的状态方程为：

$$\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=-au_1\sin x_5, \dot{x}_3=x_4, \dot{x}_4=au_1\cos x_5-g, \dot{x}_5=u_2$$

加入积分方程得到

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -au_1 \sin x_5, \dot{x}_5 = u_2$$
$$\dot{x}_0 = x_3, \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = au_1 \cos x_5 - g$$

对扩展系统设计线性反馈控制律：

$$u_1 = -k_3 x_3 - k_4 x_4 - k_0 x_0,$$
$$u_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_5 x_5$$

得到闭环系统为：

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -a\left(-k_3 x_3 - k_4 x_4 - k_0 x_0\right)\sin x_5,$$
$$\dot{x}_5 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_5 x_5$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= x_3, \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= a\left(-k_3 x_3 - k_4 x_4 - k_0 x_0\right)\cos x_5 - g
\end{aligned}
$$

闭环系统具有平衡点：

$$(x_{1s}, x_{2s}.x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{0s}) = \left(0, 0, 0, 0, 0, -g/(ak_0)\right)$$

在该平衡点近似线性化可得：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= ak_0 x_{0s} x_5 = -g x_5, \\
\dot{x}_5 &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_5 x_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_0 &= x_3, \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= a\left(-k_3 x_3 - k_4 x_4 - k_0 e_0\right)
\end{aligned}
$$

其中$e_0 = x_0 - x_{0s}$。选择(k_1, k_2, k_5)和(k_3, k_4, k_0)，使得以上两个子系统对于所有满足$0 < a_1 \le a \le a_2, 0 < g_1 \le g \le g_2$的不确定定常参数均渐近稳定，即可完成设计目标。最终的控制器形式为：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= x_3, \\
u_1 &= -k_3 x_3 - k_4 x_4 - k_0 x_0, \\
u_2 &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_5 x_5
\end{aligned}
$$

习题 14.4. 试证明 $\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right]$ **能控的充分必要条件为** $\{\mathrm{A,B}\}$ **能控、且** $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ **行满秩。**

解答： 1）充分性, 需要证明:

$\{\mathrm{A,B}\}$ 能控，且$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$行满秩$\Rightarrow\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix},\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right]$能控。

根据 PBH 判据知：$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix},\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right]$能控当且仅当对于任意实数$\lambda$，矩阵$\begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 & B \\ -C & \lambda I & 0 \end{bmatrix}$行满秩。由于$(A,B)$能控，因此对于任意$\lambda$，矩阵$[\lambda I - A, B]$行满秩。若$\lambda \neq 0$，则矩阵$\begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 & B \\ -C & \lambda I & 0 \end{bmatrix}$行满秩；若$\lambda = 0$，则

$\begin{bmatrix} \lambda I-A & 0 & B \\ -C & \lambda I & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -A & 0 & B \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix}$，由题目条件$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$行满秩知，$\begin{bmatrix} -A & 0 & B \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix}$行满秩。因此对于任意$\lambda$，矩阵$\begin{bmatrix} \lambda I-A & 0 & B \\ -C & \lambda I & 0 \end{bmatrix}$行满秩，即$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix},\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right]$能控。

必要性：需要证明

$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix},\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right]$能控$\Rightarrow \{\mathrm{A,B}\}$能控、且$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$行满秩.

因$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right]$能控, 因此矩阵$\begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 & B \\ -C & \lambda I & 0 \end{bmatrix}$对于任意$\lambda$行满秩，从而$[\lambda I - A, B]$对任意$\lambda$行满秩，即$(A, B)$能控。取$\lambda = 0$知, $\begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 & B \\ -C & \lambda I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & 0 & B \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix}$行满秩，即$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$行满秩。

输入-输出反馈线性化习题解答

习题 15.1：考虑以下非线性控制系统

$$\dot{x}_1 = \sin x_2 - u, \dot{x}_2 = u,$$
$$y = x_1$$

（1） 试将该系统输入—输出反馈线性化，并判断该系统是否为最小相位？

（2） 求出该系统的正则形（标准型）；

解答：

（1） $\dot{x}_1 = \sin x_2 - u \Rightarrow u = \sin x_2 + v \Rightarrow \dot{x}_1 = v$

由于

$$y = x_1 \equiv 0, \dot{y} = \sin x_2 - u \equiv 0 \Rightarrow u = \sin x_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \sin x_2$$，

受限系统 $\dot{x}_2 = \sin x_2$ 原点不稳定，因此原非线性系统为非最小相位系统。

（2）选择坐标变换 $\xi = x_1, \eta = x_1 + x_2$ 可得

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \sin x_2 = \sin(\eta - \xi),\\ \dot{\xi} &= \sin x_2 - u = \sin(\eta - \xi) - u\end{aligned}$$

上式即为系统的正则型（标准型）。

习题 15. 2：考虑以下非线性控制系统

$$\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = -\sin x_3 + (1+\cos x_2)u,$$
$$y = x_1$$

（1） **试将该系统输入—输出反馈线性化，并判断该系统是否为最小相位？**

（2） **求出该系统的正则形（标准型）；**

解答：

（1） **输入输出反馈线性化：**

$$\dot{y}=\sin x_2,\ddot{y}=u\cos x_2 \Rightarrow u=v/\cos x_2 \Rightarrow \ddot{y}=v$$

$$\xi_1=y=x_1,\xi_2=\dot{y}=\sin x_2 \Rightarrow \dot{\xi}_1=\xi_2,\dot{\xi}_2=v$$

判断系统是否最小相位：

$$\begin{aligned}&y=x_1\equiv 0,\dot{y}=\sin x_2\equiv 0,\ddot{y}=u\cos x_2\equiv 0\Rightarrow\\&x_2\equiv 0,u\equiv 0\Rightarrow \dot{x}_3=-\sin x_3\end{aligned}$$

受限系统 $\dot{x}_3=-\sin x_3$ **的原点渐近稳定，因此原系统为最小相位系统。**

（2） 标准形

$$\xi_1 = y = x_1, \xi_2 = \dot{y} = \sin x_2, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \times (1) + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \times (1 + \cos x_2) = 0$$

选取 $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 1 + \cos x_2, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = -1$, 则以上偏微分方程成立，因此 $\phi = x_2 + \sin x_2 - x_3$。

构造坐标变换

$$\xi_1 = x_1, \xi_2 = \sin x_2, \eta = \phi(x_2, x_3) = x_2 + \sin x_2 - x_3$$

在新坐标下的方程为：

$$
\begin{aligned}
\dot{\eta} &= (1+\cos x_2)u - (-\sin x_3 + (1+\cos x_2)u) \\
&= \sin x_3 = \sin\left(-\eta + \sin^{-1}(\xi_2) + \xi_2\right) \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= u\cos x_2 = u\cos\left(\sin^{-1}(\xi_2)\right)
\end{aligned}
$$

因此系统的标准型为：

$$
\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \sin\left(-\eta + \sin^{-1}(\xi_2) + \xi_2\right), \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= u\cos\left(\sin^{-1}(\xi_2)\right)
\end{aligned}
$$

输入-状态线性化习题解答

习题 16.1：考虑以下非线性系统

（1）$\dot{x}_1 = -\sin x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = -\sin x_3 + (1+\cos x_3)u$

（2）$\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = \sin x_2 + u$

（3）$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = \sin x_1 + (1+\cos x_2)u$

判断以上系统是否可以输入-状态反馈线性化?如果可以，求出相应的状态和输入变换使得系统在新的状态和输入下表示为线性系统。

解答：

（1） 系统方程

$$\dot{x}_1 = -\sin x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = -\sin x_3 + (1 + \cos x_3)u$$

向量场计算：

$$f = \begin{bmatrix} -\sin x_2 \\ 0 \\ -\sin x_3 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 + \cos x_3 \end{bmatrix},$$

$$ad_f g = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin x_2 \\ 0 \\ -\sin x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\cos x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+\cos x_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\cos x_2 \\ 0 \\ \sin^2 x_3 + \cos x_3 + \cos^2 x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos x_2 \\ 0 \\ 1+\cos x_3 \end{bmatrix}$$

$$ad_f^2 g = \left[f, ad_f g \right] = \frac{\partial ad_f g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} ad_f g$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & \sin x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin x_2 \\ 0 \\ -\sin x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\cos x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos x_2 \\ 0 \\ 1+\cos x_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\sin x_3)^2 + \cos x_3 + (\cos x_3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+\cos x_3 \end{bmatrix}$$

$$[g, ad_f g] = \begin{bmatrix} 0 & \sin x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1+\cos x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos x_2 \\ 0 \\ 1+\cos x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin x_2 \\ 0 \\ -\sin x_3(1+\cos x_3) + \sin x_3(1+\cos x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

容易验证，矩阵

$$\left[g, ad_f g, ad_f^2 g \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\cos x_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1+\cos x_3 & 1+\cos x_3 & 1+\cos x_3 \end{bmatrix}$$

在原点处的秩为 3，由函数的连续性可知，在原点的一个小邻域内该矩阵的秩也为 3，因此输入-状态反馈线性化第一个条件成立。

计算矩阵：

$$\left[g, ad_f g, \left[g, ad_f g\right]\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\cos x_2 & \sin x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1+\cos x_3 & 1+\cos x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

容易验证，该矩阵在原点处的秩为 2，在原点的任意小邻域内（除原点外）的秩为 3，因此在原点的任意小邻域内（包含原点）该矩阵的秩不恒等于 2（为 2 或者 3），所以分布 $span\left\{g, ad_f g\right\}$ 在原点的任意小邻域内不是对合分布，输入-状态反馈线性化的第二个条件不成立。

结论：系统在原点的邻域内不可输入-状态反馈线性化。

（2）可以输入-状态反馈线性化，相对阶为 3 的输出为：

$y = x_1 - x_3$。构造状态变换：

$$\xi_1 = y = x_1 - x_3, \xi_2 = \dot{y} = -\sin x_2, \xi_3 = \ddot{y} = -x_3 \cos x_2 ,$$

新坐标下的状态方程为：

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\
\dot{\xi}_3 &= -(\sin x_2 + u)\cos x_2 - x_3^2 \sin x_2
\end{aligned}$$

构造输入反馈变换：

$$u = -\sin x_2 - \frac{v - x_3^2 \sin x_2}{\cos x_2}$$

得到以下线性系统：

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = \xi_3, \dot{\xi}_3 = v$$

（3） 可以输入-状态反馈线性化，相对阶为 3 的输出

$h(x_2, x_3)$ 需要满足偏微分方程：$\dfrac{\partial h}{\partial x_2} + \dfrac{\partial h}{\partial x_3}(1 + \cos x_2) = 0$，

令 $\dfrac{\partial h}{\partial x_3} = 1,\quad \dfrac{\partial h}{\partial x_2} = -(1 + \cos x_2)$，则以上偏微分方程成立，

由此可以求出：$h = x_3 - x_2 - \sin x_2$。

构造状态变换：

$$\xi_1 = h = x_3 - x_2 - \sin x_2,$$
$$\xi_2 = \dot{h} = \sin x_1 + (1 + \cos x_2)u - u - u\cos x_2 = \sin x_1,$$
$$\xi_3 = \ddot{h} = x_2 \cos x_1$$

新坐标下的状态方程为：

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,$$
$$\dot{\xi}_2 = \xi_3,$$
$$\dot{\xi}_3 = \frac{d}{dt}\left(x_2 \cos x_1\right) = u\cos x_1 - x_2^2 \sin x_1$$

构造输入反馈变换$u=\dfrac{x_2^2\sin x_1+v}{\cos x_1}$**，得到线性系统：**

$$\dot{\xi}_1=\xi_2,\dot{\xi}_2=\xi_3,\dot{\xi}_3=v$$

反馈线性化控制习题解答

习题 17.1：考虑非线性系统

$$\dot{x}_1=\sin x_2,\dot{x}_2=u,\dot{x}_3=-\sin x_3+(1+\cos x_3)u,$$
$$y=x_1$$

试利用输入-输出反馈线性化方法设计控制律使得该系统的

原点渐近稳定。

解答：由于

$$y = x_1 \equiv 0, \dot{y} = \sin x_2 \equiv 0, \ddot{y} = u\cos x_2 \equiv 0$$
$$\Rightarrow u \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_3 = -\sin x_3$$

受限系统 $\dot{x}_3 = -\sin x_3$ 的原点渐近稳定，因此原系统为最小相位系统。

由于

$$\xi_1 = y = x_1, \xi_2 = \dot{y} = \sin x_2 \Rightarrow \dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = u\cos x_2,$$

因此可设计以下输入–输出反馈线性化控制律：

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{\cos x_2}(-k_1\xi_1 - k_2\xi_2) \\
&= \frac{1}{\cos(\sin^{-1}\xi_2)}(-k_1\xi_1 - k_2\xi_2)(k_1 > 0, k_2 > 0)
\end{aligned}
$$

该控制律可以保证闭环系统：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= -\sin x_3 + (1+\cos x_3)u \\
&= -\sin x_3 + (1+\cos x_3)\frac{1}{\cos(\sin^{-1}\xi_2)}(-k_1\xi_1 - k_2\xi_2), \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= -k_1\xi_1 - k_2\xi_2
\end{aligned}
$$

的原点渐近稳定。

习题 17.2：考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = \sin x_2 + (1+\cos x_2)u$$

试利用全状态反馈线性化方法设计控制律使得该系统的原点渐近稳定。

解答：该系统可以输入-状态反馈线性化，相对阶为 2 的输出满足 $\frac{\partial h}{\partial x_1} + (1+\cos x_2)\frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$ **，令**

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}=1,\quad \frac{\partial h}{\partial x_2}=\frac{-1}{1+\cos x_2}=-\frac{-1}{2\left(\cos\left(x_2/2\right)\right)^2}$$

则偏微分方程 $\dfrac{\partial h}{\partial x_1}+(1+\cos x_2)\dfrac{\partial h}{\partial x_2}=0$ 成立，其解为：

$$y=h=x_1-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x_2}{2}\right).$$

令

$$\xi_1 = y = x_1 - \frac{1}{2}\tan\left(\frac{x_2}{2}\right),$$

$$\xi_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 - 0.5/\cos^2\left(\frac{x_2}{2}\right)\dot{x}_2$$

$$= u - \frac{1}{1+\cos x_2}\left(\sin x_2 + (1+\cos x_2)u\right)$$

$$= -\frac{\sin x_2}{1+\cos x_2}$$

则可得到

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= -\frac{\cos x_2(1+\cos x_2)+\sin^2 x_2}{(1+\cos x_2)^2}\dot{x}_2 \\
&= -\frac{1+\cos x_2}{(1+\cos x_2)^2}\left(\sin x_2+(1+\cos x_2)u\right) \\
&= -\frac{\sin x_2}{1+\cos x_2}-u
\end{aligned}$$

构造输入–状态反馈线性化控制为：

$$u=\frac{\sin x_2}{1+\cos x_2}-k_1\xi_1-k_2\xi_2,(k_1>0,k_2>0)$$

闭环系统为：

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = -k_1\xi_1 - k_2\xi_2$$

该闭环系统原点渐近稳定，因此原系统原点渐近稳定。

滑模控制习题解答

习题 18.1：考虑非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a\sin x_1 + b + u \end{aligned}$$

其中(a,b)为未知常参数满足$a_1 \le a \le a_2$，$b_1 \le b \le b_2$，参数的界(a_1,a_2,b_1,b_2) 已知。试设计滑模控制器使得系统状态(x_1,x_2)趋于零。

解：设计滑模面$s = x_2 + kx_1 = 0(k>0)$，在滑模面上的动态$\dot{x}_1 = -kx_1$渐近稳定。

由$\dot{s} = a\sin x_1 + b + u + kx_2$，可设计滑模控制律：

$$u = -kx_2 - \frac{a_1 + a_2}{2}\sin x_1 - \frac{b_1 + b_2}{2}$$
$$-\left((a_2 - a_1)\left|\sin x_1\right| + (b_2 - b_1) + \varepsilon\right) sign(s) \quad (\varepsilon > 0)$$

$$\dot{s} = -\frac{a_1 + a_2 - 2a}{2}\sin x_1$$
$$-\frac{b_1 + b_2 - 2b}{2} - \left((a_2 - a_1)\left|\sin x_1\right| + (b_2 - b_1) + \varepsilon\right) sign(s)$$

由于

$$s\dot{s} = s\left(-\frac{a_1 + a_2 - 2a}{2}\sin x_1 - \frac{b_1 + b_2 - 2b}{2}\right)$$
$$-\left((a_2 - a_1)\left|\sin x_1\right| + (b_2 - b_1) + \varepsilon\right)\left|s\right|$$
$$\leq -\varepsilon\left|s\right|$$

因此 s 有限时间趋于零，整个系统渐近稳定。另外由于系统 $\dot{x}_1 = x_2 = -kx_1 + s$ 输入-状态稳定，因此整个系统全局渐近稳定。

习题 18.2：考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = u_1 + d_1(x), \dot{x}_2 = u_2 + d_2(x), \dot{x}_3 = x_1 x_2^2$$

其中 $|d_1(x)| \le D_1(x), |d_2(x)| \le D_2(x)$，$(d_1(x), d_2(x))$ 未知，$(D_1(x), D_2(x))$ 已知。试设计滑模控制器使得状态 (x_1, x_2, x_3) 趋于零。

解答：设计滑动面 $s_1 = x_1 + x_3 = 0, s_2 = x_2 + x_3 = 0$，系统在滑动面上的运动 $\dot{x}_3 = -x_3^3$ 渐近稳定。

由于 $\dot{s}_1 = u_1 + d_1 + x_1 x_2^2, \dot{s}_2 = u_2 + d_2 + x_1 x_2^2$，因此可以设计

滑模控制律

$$u_1 = -x_1x_2^2 - (D_1 + \varepsilon_1)sign(s_1), \varepsilon_1 > 0,$$
$$u_2 = -x_1x_2^2 - (D_2 + \varepsilon_2)sign(s_2), \varepsilon_2 > 0,$$

该控制律保证 $s_1\dot{s}_1 \le -\varepsilon_1 \left|s_1\right|, s_2\dot{s}_2 \le -\varepsilon_2 \left|s_2\right|$，因此 (s_1, s_2) 有限时间趋于零，整个系统渐近稳定。

另外，由于

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= x_1x_2^2 = (-x_3 + s_1)(-x_3 + s_2)^2 \\
&= -x_3^3 - x_3(-2x_3s_2 + s_2^2) + s_1(-x_3 + s_2)^2 \\
&= -x_3^3 + (2s_2 + s_1)x_3^2 + (-s_2^2 - 2s_1s_2)x_3 + s_1s_2^2 \\
&= -\frac{1}{4}x_3^3 - \left(\frac{1}{4}x_3^3 - (2s_2 + s_1)x_3^2\right) - \left(\frac{1}{4}x_3^3 - (-s_2^2 - 2s_1s_2)x_3\right) - \left(\frac{1}{4}x_3^3 - s_1s_2^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_3\dot{x}_3 &= x_3\left(-\frac{1}{4}x_3^3-\left(\frac{1}{4}x_3^3-(2s_2+s_1)x_3^2\right)-\left(\frac{1}{4}x_3^3-(-s_2^2-2s_1s_2)x_3\right)-\left(\frac{1}{4}x_3^3-s_1s_2^2\right)\right)\\
&= -\frac{1}{4}x_3^4-\left(\frac{1}{4}x_3^4-(2s_2+s_1)x_3^3\right)-\left(\frac{1}{4}x_3^4-(-s_2^2-2s_1s_2)x_3^2\right)-\left(\frac{1}{4}x_3^4-s_1s_2^2x_3\right)\\
&\le -\frac{1}{4}x_3^4-\left(\frac{1}{4}x_3^4-\sqrt{5}\|s\|_2|x_3|^3\right)-\left(\frac{1}{4}x_3^4-\sqrt{5}\|s\|_2^2|x_3|^2\right)-\left(\frac{1}{4}x_3^4-0.5\|s\|_2^3|x_3|\right)\\
&\le -\frac{1}{4}x_3^4<0,\left(|x_3|\ge\max\left\{4\sqrt{5}\|s\|_2,2\times 5^{1/4}\|s\|_2,2^{1/3}\|s\|_2\right\}=\|s\|_2\max\left\{4\sqrt{5},2\times 5^{1/4},2^{1/3}\right\}\right)
\end{aligned}
$$

其中$\|s\|_2=\sqrt{s_1^2+s_2^2}$。因此$x_3$子系统输入-状态稳定（当把$(s_1,s_2)$作为输入时），所以整个系统全局渐近稳定。

习题 18.3：考虑非线性系统

$$\dot{x}_1=u_1+d_1(x),\dot{x}_2=u_2+d_2(x),\dot{x}_3=x_1x_2+x_3^2$$

其中$|d_1(x)| \le D_1(x), |d_2(x)| \le D_2(x)$，$(d_1(x), d_2(x))$未知，$(D_1(x), D_2(x))$已知。试设计滑模控制器使得状态$(x_1, x_2, x_3)$趋于零。

解答：设计滑动面$s_1 = x_1 + x_3 = 0, s_2 = x_2 - x_3 - x_3^2 = 0$，系统在滑动面上的动态$\dot{x}_3 = -x_3^3$渐近稳定。

由于

$$
\begin{aligned}
\dot{s}_1 &= u_1 + d_1(x) + x_1 x_2 + x_3^2, \\
\dot{s}_2 &= u_2 + d_2(x) - (1 + 2x_3)\left(x_1 x_2 + x_3^2\right)
\end{aligned}
$$

设计滑模控制律：

$$u_1 = -\left(x_1x_2 + x_3^2\right) - \left(D_1 + \varepsilon_1\right)sign(s_1), \varepsilon_1 > 0$$

$$u_2 = (1+2x_3)\left(x_1x_2 + x_3^2\right) - \left(D_2 + \varepsilon_2\right)sign(s_2), \varepsilon_2 > 0$$

该控制律可以保证 $\dot{s}_1 s_1 \le -\varepsilon_1 \left|s_1\right|, \dot{s}_2 s_2 \le -\varepsilon_2 \left|s_2\right|$，因此

(s_1, s_2) 有限时间内趋于零，整个系统的原点渐近稳定。

此外，由于系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= x_1x_2 + x_3^2 = (-x_3 + s_1)(x_3 + x_3^2 + s_2) + x_3^2 \\ &= -x_3^3 - x_3 s_2 + s_1(x_3 + x_3^2 + s_2)\end{aligned}$$

输入–状态稳定（将 (s_1, s_2) 作为输入时），因此系统的原点全

局渐近稳定，所以$(x_1, x_2, x_3) \to (0,0,0)$。

Lyapunov 再设计与非线性阻尼习题解答

习题 1. 考虑非线性系统$\dot{x} = f(x) + g(x)\big(v + \delta(x,v)\big)$，其中

$x \in R^n, f(x) \in R^n, g(x) \in R^{n\times m}, \delta(x,v) \in R^m, v \in R^m$，

$\left\|\delta(x,v)\right\|_2 \le \rho(x) + k_0 \left\|v\right\|_2$，正定函数$V(x), \alpha_3(x), \phi(x)$满足

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \le -\alpha_3(x), \alpha_3(x) \ge \phi^2(x)$$

此外 $\rho(x) \le \rho_1 \phi(x)$，$\rho_1$ 为正常数。记 $w = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x} g \right)^T$。试证明：当 k 足够大时，线性反馈控制律 $v = -kw$ 可以使得闭环系统的原点渐近稳定。

解答：

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x}\left(f + g(v+\delta)\right) \\
&\le -\alpha_3(x) + w^T(v+\delta) \\
&\le -\tfrac{1}{2}\alpha_3(x) - \tfrac{1}{2}\alpha_3(x) + w^T(-kw+\delta) \\
&\le -\tfrac{1}{2}\alpha_3(x) - \tfrac{1}{2}\phi^2(x) - k\left\|w\right\|_2^2 + \left\|w\right\|_2 \left\|\delta\right\|_2 \\
&\le -\tfrac{1}{2}\alpha_3(x) - \tfrac{1}{2}\phi^2(x) - k\left\|w\right\|_2^2 + \left\|w\right\|_2 \left(\rho(x) + k_0\left\|v\right\|_2\right) \\
&\le -\tfrac{1}{2}\alpha_3(x) - \tfrac{1}{2}\phi^2(x) - k\left\|w\right\|_2^2 + \left\|w\right\|_2 \left(\rho_1\phi(x) + k_0 k\left\|w\right\|_2\right) \\
&\le -\tfrac{1}{2}\alpha_3(x) - \begin{bmatrix} \phi \\ \left\|w\right\|_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2}\rho_1 \\ -\tfrac{1}{2}\rho_1 & k(1-k_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \left\|w\right\|_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

选取 k 使得 $1/2k(1-k_0)>1/4\rho_1^2$，即 $k>\dfrac{\rho_1^2}{2(1-k_0)}$，则可保证 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\rho_1 \\ -\frac{1}{2}\rho_1 & k(1-k_0) \end{bmatrix}$ 为正定矩阵，因此 $\dot{V}<0$，闭环系统渐近稳定。

习题 2. 考虑非线性系统 $\dot{x}=f(x)+g(x)\big(u+\delta(t,x,u)\big)$ 的原点稳定问题，其中 $x\in R^n, f(x)\in R^n$，$g(x)\in R^{n\times m}$，$\delta(t,x,u)\in R^m$，$u\in R^m$。已知标称系统

$\dot{x} = f(x) + g(x)\psi(x)$ 渐近稳定，且存在正定函数 $V(x)$ 使得

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}\big(f(x) + g(x)\psi(x)\big) \le -\alpha_3(x)$$，$\alpha_3(x)$ 为正定函数。

试证明：如果 $\left\|\psi(x) - \delta(t,x,u)\right\|_2 \le \rho(x) + k_0\left\|u\right\|_2, 0 \le k_0 < 1$，则不采用控制律 $u = \psi(x) + v$，而直接采用 $u = v$ 也可以实现非线性系统 $\dot{x} = f(x) + g(x)\big(u + \delta(t,x,u)\big)$ 原点的稳定。

解答：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x)+g(x)\big(u+\delta(t,x,u)\big)\\ &= f(x)+g(x)\Big(u+\psi(x)+\big(\delta(t,x,u)-\psi(x)\big)\Big)\\ &= f(x)+g(x)\psi(x)+g(x)\big(u+\bar{\delta}\big)\end{aligned}$$

其中 $\bar{\delta}(t,x,u)=\delta(t,x,u)-\psi(x)$。

由于 $\left\|\bar{\delta}(t,x,u)\right\| \le \rho(x)+k_0\left\|u\right\|_2, 0\le k_0<1$，以上问题完全等价于标准的 Lyapunov 再设计问题。

习题 3：考虑非线性系统 $\dot{x}=u+\delta(t,x)$，其中

$\delta(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，$(a_0,a_1,a_2)$为未知正常数。试利用非线性阻尼方法设计连续光滑控制律使得闭环系统的状态有界且毕竟一致有界，并求出最终界的大小。

解答：取$u=-x+v$ ，令$V=0.5x^2$，则有：

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= x(u+\delta)=x(-x+v+\delta)\\
&=-x^2+x(v+\delta)\\
&\le -x^2+x\left(v+\begin{bmatrix}1, & x, & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

取附加控制 $v=-k\left\|\left[1,x,x^2\right]\right\|_2^2 x, k>0$ **，则**

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &\le -x^2 + x\left(v+\left[1,\quad x,\quad x^2\right]\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}\right)\\
&= -x^2 + x\left(-k\left\|\left[1,x,x^2\right]\right\|_2^2 x+\left[1,\quad x,\quad x^2\right]\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}\right)\\
&\le -x^2 - k\left\|\left[1,x,x^2\right]\right\|_2^2 x^2+\left\|\left[1,x,x^2\right]\right\|_2 |x|\left\|\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}\right\|_2\\
&\le -x^2 - k\left\|\left[1,x,x^2\right]\right\|_2^2 x^2+\left\|\left[1,x,x^2\right]\right\|_2 |x| k_0 \qquad \left(\text{其中}\left\|\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}\right\|_2 \le k_0\right)\\
&\le -x^2 + k_0^2/(4k) < 0, |x| > k_0/\left(2\sqrt{k}\right)
\end{aligned}
$$

因此系统的解有界且毕竟一致有界，最终界为$k_0/\left(2\sqrt{k}\right)$。

反步设计习题：

习题 19. 1：试用反步法设计控制律使得以下非线性系统的原点全局渐近稳定。

(1) $\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2, \dot{x}_2 = x_2^2 + x_3, \dot{x}_3 = x_3^2 + u$；

(2) $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_1 x_2^2$；

(3) $\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 + a x_1^3 \cos(x_1), \dot{x}_2 = x_2 + u; \left(|a| \le 1\right)$；

(4) $\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = \cos x_2 + u$；

解答（1）

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 \\
&= -x_1 + \left(x_2 + x_1^2 + x_1\right) \\
&\triangleq -x_1 + z_2, (z_2 = x_2 + x_1^2 + x_1) \\
\dot{z}_2 &= x_2^2 + x_3 + 2x_1(x_1^2 + x_2) + x_1^2 + x_2 \\
&= -z_2 - x_1 + \left(x_3 + x_2^2 + 2x_1(x_1^2 + x_2) + x_1^2 + x_2 + x_1 + z_2\right) \\
&\triangleq -x_1 - z_2 + z_3, (z_3 = x_3 + x_2^2 + 2x_1(x_1^2 + x_2) + x_1^2 + x_2 + x_1 + z_2) \\
\dot{z}_3 &= x_3^2 + u + \frac{d}{dt}\left(x_2^2 + 2x_1(x_1^2 + x_2) + x_1^2 + x_2 + x_1 + z_2\right) \\
&= -z_3 - z_2 + \left(u + \frac{d}{dt}\left(x_2^2 + 2x_1(x_1^2 + x_2) + x_1^2 + x_2 + x_1 + z_2\right) + z_3 + z_2\right)
\end{aligned}
$$

选取控制：

$$u=-\left(\frac{d}{dt}\left(x_2^2+2x_1(x_1^2+x_2)+x_1^2+x_2+x_1+z_2\right)+z_3+z_2\right)$$

得到闭环系统：

$$\dot{x}_1=-x_1+z_2,\dot{z}_2=-x_1-z_2+z_3,\dot{z}_3=-z_3-z_2$$

由于$V=0.5(x_1^2+z_2^2+z_3^2)\Rightarrow\dot{V}=-x_1^2-z_1^2-z_2^2<0$，因此以上系统全局渐近稳定。此外，坐标变换$(x_1,x_2,x_3)\Leftrightarrow(x_1,z_2,z_3)$为全局微分同胚，因此原非线性系统全局渐近稳定。

（2）

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= x_1 x_2^2 \\
&= (-x_3 + x_1 + x_3)(x_3 + x_2 - x_3)^2 \\
&= (-x_3 + z_1)(x_3 + z_2)^2 = -x_3^3 - x_3(2x_3 z_2 + z_2^2) + z_1(x_3 + z_2)^2 \\
&= -x_3^3 - z_2 x_3(2x_3 + z_2) + z_1(x_3 + z_2)^2
\end{aligned}
$$

$(z_1 = x_1 + x_3, z_2 = x_2 - x_3)$

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= u_1 + \dot{x}_3 \\
&= -z_1 - x_3(x_3 + z_2)^2 + \left(u_1 + \dot{x}_3 + z_1 + x_3(x_3 + z_2)^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_2 &= u_2 - \dot{x}_3 \\
&= -z_2 + x_3^2(2x_3 + z_2) + \left(u_2 - \dot{x}_3 + z_2 - x_3^2(2x_3 + z_2)\right)
\end{aligned}
$$

设计控制律:

$$u_1 = -\left(\dot{x}_3 + z_1 + x_3(x_3 + z_2)^2\right),$$
$$u_2 = -\left(-\dot{x}_3 + z_2 - x_3^2(2x_3 + z_2)\right)$$

得到闭环系统:

$$\dot{x}_3 = -x_3^3 - z_2 x_3(2x_3 + z_2) + z_1(x_3 + z_2)^2$$
$$\dot{z}_1 = -z_1 - (x_3 + z_2)^2,$$
$$\dot{z}_2 = -z_2 + x_3(2x_3 + z_2)$$

构造$V = 0.5(x_3^2 + z_1^2 + z_2^2)$，求导得到:

$$\dot{V} = -x_3^4 - z_1^2 - z_2^2 < 0$$

因此闭环系统全局渐近稳定。

（3）

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1^2 x_2 + a x_1^3 \cos(x_1) \\
&= x_1^2 x_2 + x_1^3 - \left(1 - a\cos(x_1)\right) x_1^3 \\
&= x_1^2 (x_2 + x_1) - \left(1 - a\cos(x_1)\right) x_1^3 \\
&= x_1^2 (-x_1 + x_2 + 2x_1) - \left(1 - a\cos(x_1)\right) x_1^3 \\
&= x_1^2 (-x_1 + z_2) - \left(1 - a\cos(x_1)\right) x_1^3 \\
&= -x_1^3 + x_1^2 z_2 - \left(1 - a\cos(x_1)\right) x_1^3, (z_2 = x_2 + 2x_1),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= x_2 + u + 2\dot{x}_1 \\ &= u + x_2 + 2\left(x_1^2 x_2 + a x_1^3 \cos(x_1)\right) \\ &= -z_2 - x_1^3 + \left(u + x_2 + 2x_1^2 x_2 + 2a x_1^3 \cos x_1 + z_2 + x_1^3\right)\end{aligned}$$

设计控制律：

$$u = -x_2 - 2x_1^2 x_2 - \left(2\left|x_1^3 \cos x_1\right|\right) sign(z_2) - z_2 - x_1^3$$

得到闭环系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_1^2 z_2 - \left(1 - a\cos(x_1)\right) x_1^3, \\ \dot{z}_2 &= -z_2 - x_1^3 + \left(2a x_1^3 \cos x_1 - 2\left|x_1^3 \cos x_1\right| sign(z_2)\right)\end{aligned}$$

考虑备选 Lyapunov 函数 $V = 0.5(x_1^2 + z_2^2)$，其沿闭环系

统方程的导数为：

$$\dot{V} = -x_1^4 - (1 - a\cos x_1)x_1^4 - z_2^2 + 2ax_1^3(\cos x_1)z_2 - 2\left|x_1^3(\cos x_1)\right| \quad |z_2|$$
$$\leq -x_1^4 - z_2^2 < 0$$

因此闭环系统全局渐近稳定。

（4）

$$\dot{x}_1 = \sin x_2 = \sin\varphi + \left(\sin x_2 - \sin\varphi\right), z_2 = x_2 - \varphi$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= u + \cos x_2 - \dot{\varphi} \\ &= -z_2 - \frac{\sin x_2 - \sin\varphi}{z_2} x_1 + \\ &\left(u + \cos x_2 - \dot{\varphi} + z_2 + \frac{\sin x_2 - \sin\varphi}{z_2} x_1\right)\end{aligned}$$

其中当 $z_2 = 0$ 时，定义 $\dfrac{\sin x_2 - \sin\varphi}{z_2} = \cos\varphi$ 。

选取控制律：

$$\varphi = -\frac{x_1}{1+x_1^2},$$

$$u = -\cos x_2 + \dot{\varphi} - z_2 - \frac{\sin x_2 - \sin\varphi}{z_2} x_1$$

得到闭环系统：

$$\dot{x}_1 = \sin\left(-\frac{x_1}{1+x_1^2}\right) + \left(\sin x_2 - \sin\varphi\right),$$

$$\dot{z}_2 = -z_2 - \frac{\sin x_2 - \sin\varphi}{z_2} x_1$$

考虑备选 Lyapunov 函数$V = 0.5(x_1^2 + z_2^2)$，其沿闭环系统

方程的导数为：

$$\dot{V} = x_1 \sin\left(-\frac{x_1}{1+x_1^2}\right) - z_2^2 = -x_1 \sin\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}\right) - z_2^2 < 0$$

因此系统全局渐近稳定。

基于 Lyapunov 函数的移动机器人非线性控制器设计

习题：

习题 1：考虑某卫星的简化运动方程

$$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_1 x_2$$

试基于 Lyapunov 稳定性理论构造至少两种控制律，使得以上系统的原点全局渐近稳定，并编写 MATLAB 程序进行仿真验证。

解答：

第一种控制律

构造全局正定、径向无界函数 $L_1 = 0.5\left[\left(x_1 - \alpha_1(x_3)\right)^2 + x_2^2 + x_3^2\right]$，其中 $\alpha_1(b)$ 为连续可

微函数，满足$\alpha_1(0)=0, b\alpha_1(b)\neq 0(b\neq 0)$　。沿系统方程求导得到：

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= \left(x_1-\alpha_1(x_3)\right)\left(u_1-\dot{\alpha}_1\right)+x_2u_2+x_3x_1x_2 \\ &= \left(x_1-\alpha_1(x_3)\right)\left(u_1-\dot{\alpha}_1\right)+x_2\left(u_2+x_3x_1\right)\end{aligned}$$

设计控制律：

$$u_1=\dot{\alpha}_1-\left(x_1-\alpha_1(x_3)\right), u_2=-x_1x_3-x_2$$

则有$\dot{L}_1=-\left(x_1-\alpha_1(x_3)\right)^2-x_2^2\leq 0$。由于

$$
\begin{aligned}
&\dot{L}_1 \equiv 0 \Leftrightarrow x_1 - \alpha_1(x_3) \equiv 0, x_2 \equiv 0 \\
&\Rightarrow x_1 - \alpha_1(x_3) \equiv 0, x_2 \equiv 0, \dot{x}_2 \equiv u_2 = -x_2 - x_1 x_3 \equiv 0 \\
&\Rightarrow x_1 - \alpha_1(x_3) \equiv 0, x_2 \equiv 0, x_1 x_3 \equiv 0 \\
&\Rightarrow x_1 - \alpha_1(x_3) \equiv 0, x_2 \equiv 0, x_3 \alpha_1(x_3) \equiv 0 \\
&\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \equiv (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

因此$\dot{L}_1 \equiv 0$的集合中仅包含原点，再考虑到L_1全局正定且径向无界，所以闭环系统的原点全局渐近稳定。

第二种控制律

构 造 全 局 正 定 、 径 向 无 界 函 数

$L_2=0.5\left[x_1^2+\left(x_2-\alpha_2(x_3)\right)^2+x_3^2\right]$，其中 $\alpha_2(b)$ 为连续可微函数，满足 $\alpha_2(0)=0, b\alpha_2(b)\neq 0(b\neq 0)$ 。沿系统方程求导得到：

$$\begin{aligned}\dot{L}_2&=x_1u_1+\left(x_2-\alpha_2(x_3)\right)\left(u_2-\dot{\alpha}_2\right)+x_3x_1x_2\\&=\left(x_2-\alpha_2(x_3)\right)\left(u_2-\dot{\alpha}_2\right)+x_1\left(u_1+x_3x_2\right)\end{aligned}$$

设计控制律：

$$u_1=-x_2x_3-x_1, u_2=\dot{\alpha}_2-\left(x_2-\alpha_2(x_3)\right)$$

则有 $\dot{L}_2=-\left(x_2-\alpha_2(x_3)\right)^2-x_1^2\le 0$。由于

$$
\begin{aligned}
&\dot{L}_2\equiv 0\Leftrightarrow x_2-\alpha_2(x_3)\equiv 0, x_1\equiv 0\\
&\Rightarrow x_2-\alpha_2(x_3)\equiv 0, x_1\equiv 0, \dot{x}_1\equiv u_1=-x_1-x_2x_3\equiv 0\\
&\Rightarrow x_2-\alpha_2(x_3)\equiv 0, x_1\equiv 0, x_2x_3\equiv 0\\
&\Rightarrow x_2-\alpha_2(x_3)\equiv 0, x_1\equiv 0, x_3\alpha_2(x_3)\equiv 0\\
&\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)\equiv(0,0,0)
\end{aligned}
$$

因此 $\dot{L}_2\equiv 0$ 的集合中仅包含原点，再考虑到 L_2 全局正定且径向无界，所以闭环系统的原点全局渐近稳定。

习题 2：考虑水面船舶模型

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u\cos\psi - v\sin\psi, \\
\dot{y} &= u\sin\psi + v\cos\psi, \\
\dot{\psi} &= r, \\
\dot{v} &= -cur - dv
\end{aligned}$$

其中(x, y, ψ)为船舶的位置和姿态，(u, v, r)为船体的纵向速度、横漂速度和沿竖直轴的旋转角速度。给定$u = u_0$为非零常数，(c, d)为大于零的常数。试设计控制律 r 使得船舶收敛到直线

$b_1x+b_2y+c=0(b_1^2+b_2^2>0)$ 上且沿该直线以非零定常速度 u_0 运动。

解答：令 $z=b_1x+b_2y+c$**，求导可得：**

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= b_1\left(u\cos\psi - v\sin\psi\right)+b_2\left(u\sin\psi+v\cos\psi\right)\\
&=\sqrt{b_1^2+b_2^2}\left[\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\left(u\cos\psi-v\sin\psi\right)+\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\left(u\sin\psi+v\cos\psi\right)\right]\\
&=\sqrt{b_1^2+b_2^2}\left[-\sin\alpha\left(u\cos\psi-v\sin\psi\right)+\cos\alpha\left(u\sin\psi+v\cos\psi\right)\right]\\
&=\sqrt{b_1^2+b_2^2}\left(v\cos\left(\psi-\alpha\right)+u\sin\left(\psi-\alpha\right)\right)
\end{aligned}
$$

其中$\sin\alpha = -\dfrac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}, \cos\alpha = \dfrac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$ 。

定义$\bar{z} = z/\sqrt{b_1^2+b_2^2}, \bar{\psi} = \psi - \alpha$，则有

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{z}} &= u\sin\bar{\psi} + v\cos\bar{\psi}, \\
\dot{\bar{\psi}} &= r, \\
\dot{v} &= -cur - dv
\end{aligned}$$

因此任意直线$b_1 x + b_2 y + c = 0$的跟踪控制问题转换为以上系统原点的稳定问题，该问题完全等价于标准直线$y = 0$的跟踪控制问题。

习题 3. 考虑非线性系统 $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = x_1 u_2$，试通过构造适当的 Lyapunov 函数设计控制律，使得闭环系统的原点全局渐近稳定。

解答：

构造 Lyapunov 函数 $L = 0.5(x_1^2 + x_2^2)$，求导得到：

$$\dot{L} = x_1 u_1 + x_2 x_1 u_2 = x_1(u_1 + x_2 u_2)$$

设计控制律 $u_1 = -x_2 u_2 - x_1$，其中 u_2 的控制律待定，则有 $\dot{L} = -x_1^2 \le 0$，因此系统原点全局稳定。此外

$$\dot{L} \equiv 0 \Leftrightarrow x_1 \equiv 0 \Rightarrow x_1 \equiv 0, \dot{x}_1 = u_1 = -x_2 u_2 - x_1 \equiv 0$$
$$\Rightarrow x_1 \equiv 0, x_2 u_2 \equiv 0 \Rightarrow \text{取} u_2 = x_2 \Rightarrow x_1 \equiv 0, x_2^2 \equiv 0$$
$$\Rightarrow (x_1, x_2) \equiv (0,0)$$

即 $\dot{L} \equiv 0$ 的集合中仅包含原点。由于 L 全局正定、径向无界，且 $\dot{L} \equiv 0$ 的集合中仅包含原点，因此所设计的控制律 $u_1 = -x_2 u_2 - x_1 = -x_2^2 - x_1, u_2 = x_2$ 可以保证闭环系统的原

点全局渐近稳定