

补充知识——单位脉冲函数:**δ**函数

1、定义

2、δ函数的采样性质

——若 f(t)为时间连续函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$
一般情况下,有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$

采样性质表明: δ 函数和任意连续有界函数相乘的积分 能筛选出脉冲发生时刻的函数值。

北京航空航天大学自动化学院

3、δ函数的拉氏、傅氏变换

拉氏变换:
$$L[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-s^*0} dt = 1$$

$$L\left[\delta(t-t_0)\right] = e^{-st_0}$$

$$Q \delta(t-t_0)e^{-st} = \delta(t-t_0)e^{-st_0}$$

傅氏变换:
$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega^* 0} dt = 1$$

$$F[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

解释与"信号检测技术"的信号描述区别

- ፠信号检测
 - ※周期信号---
 - (1) 三角幅度频谱+三角相位频谱
 - (2)复数幅度频谱+复数相位频谱
 - ※非周期信号---
 - (3) 密度函数频谱,对应傅氏变换得到的频谱
- 计算机控制系统
 - ※无法预知---傅式函数

频谱:

周期信号的三角 $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(n\omega_1 t + \varphi_k)^{-1}$ 函数傅氏级数:

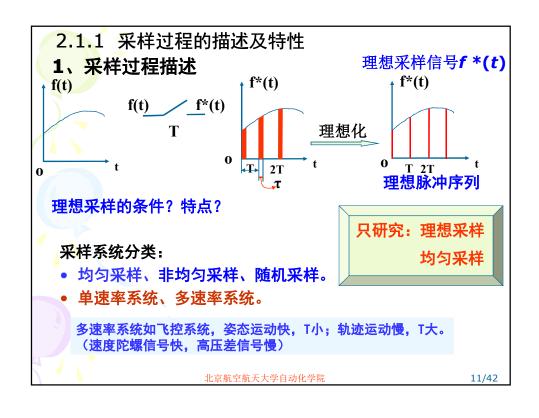
三角幅度频谱

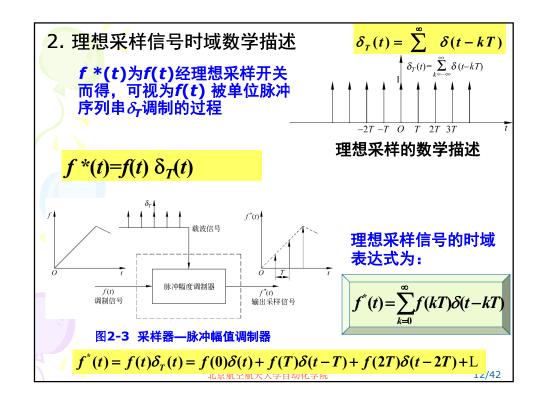
周期信号的指数 形式傅氏级数: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_l t}$

 $f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k e^{jk\omega_1 t} + C_{-k} e^{-jk\omega_1 t} \right]$

• 非周期信号的 傅里叶变换

非周期信号的
傅里叶变换
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$





3、理想采样信号的复域描述

- 1) 理想采样信号的拉氏变换
- (1)已知理想采样信号的时域表示式

$$F*(s)=L[f*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

$$L\left[\delta(t-t_0)\right]=e^{-st_0}$$

$$L\left[\delta(t-t_0)\right] = e^{-st_0}$$

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

(2) 已知连续信号的拉氏变换式F(s)

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s)$$

13/42

2) F*(s)的特性

描述采样信号的复域特性

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s)$$

(1) $F^*(s)$ 是周期函数,其周期值为 $j\omega_s$ 。

$$F^*(s+jm\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} = F^*(s)$$
 $m=\pm 1, \pm 2,$

(2) 假设F(s)在 $s=s_1$ 处有一极点,那么 $F^*(s)$ 必然在 $s=s_1+jm\omega_s$ 处具有极点, $m=\pm 1$, ± 2 ,. . . .



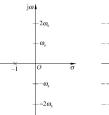


图2-4 F(s)及 F*(s)极点分布图

(3) 采样信号的拉氏变换等于连续信号的拉氏变换的乘积再 离散化,则前者可从离散符号中提取出来,即

$$Y^*(s) = [E^*(s)G(s)]^* = E^*(s)[G(s)]^* = E^*(s)G^*(s)$$

4、理想采样信号的频域特性

1) 理想采样信号的频谱

采样信号的拉氏变换:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s)$$

采样信号的频谱:



$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s)$$

15/42

理想采样信号的频谱求取法

理想采样信号频谱的数学表达式

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) = \mathbb{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f^*(t) \longleftrightarrow F^*(j\omega) = F[f^*(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)e^{-j\omega t}dt$$

求法1:
$$Q \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_k t}$$

其中:
$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \delta(t) [e^{-jk\omega_s t}]_{t=0} dt = \frac{1}{T}$$

$$F^*(j\omega) = F\left[f(t) \bullet \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}\right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left[f(t) \cdot e^{jk\omega_s t}\right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j\omega - jk\omega_s)$$

求法2—直接用博氏变换定义:
$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{jk\alpha_k t}e^{-j\alpha t} dt$$

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s)$$

理想采样信号的频域特性

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s)$$

$$|F^*(j\omega_s)| = \frac{1}{T} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s) \right| \le \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(j\omega + jn\omega_s)|$$

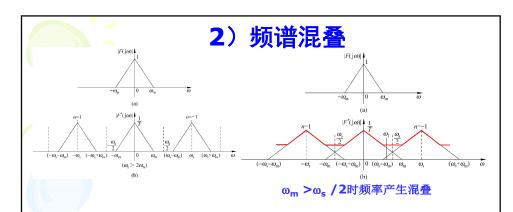
工程近似为:

$$|F^*(j\omega_s)| \approx \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(j\omega + jn\omega_s)|$$

- (1) 当n=0时, $F^*(j\omega)=F(j\omega)/T$,该项称为采样信号的 基本频谱,它正比于原连续信号f(t)的频谱,仅幅值相 差1/T。
- (2) 当n≠0时,派生出以ω_s为周期的高频谐波分量,称为旁带。每隔1 ↑ ω_s,就重复原连续频谱F(jω)/T 1次。

北京航空航天大学自动化学院

17/42



- 理想采样信号频谱产生频率混叠现象的情况:
- (1) 当连续信号的频谱带宽是有限时, ω_m 为信号中的最高频率,若采样频率 ω_s /2< ω_m ,则采样信号频谱的各个周期分量将会互相交叠。

北京航空航天大学自动化学院

2)频谱混叠

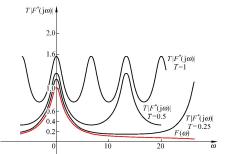
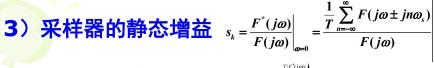


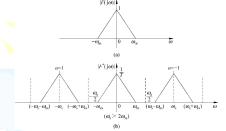
图2-10 f(t)=e-t及其采样信号频谱

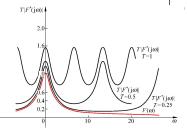
- 理想采样信号频谱产生频率混叠现象的情况:
 - (1) 当连续信号的频谱带宽是有限时, ω_m 为信号中的最高频率,若采样频率 ω_s /2< ω_m ,则采样信号频谱的各个周期分量将会互相交叠。
 - (2) 连续信号的频谱是无限带宽时, 无论怎样提高采样频率,频谱混叠或多或少都将发生。

北京航空航天大学自动化学院

<u>19</u>/42





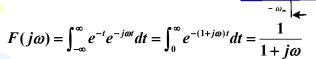


- 若连续信号是有限带宽,且折叠频率 $(\omega_s/2)>\omega_m$,即不产生混叠时, $s_k=1/T$;
- 若采样信号频谱产生混叠时, $s_k > 1/T$ 具体等于多大,将视混叠的严重程度而定。

北京航空航天大学自动化学图

例 画出 $f(t) = e^{-t}$ (t < 0, f(t) = 0) 和它 $A \mid F(y \omega) \mid$ 对应的采样信号的幅频特性。

解: f(t)的傅氏变换



其幅频特性为

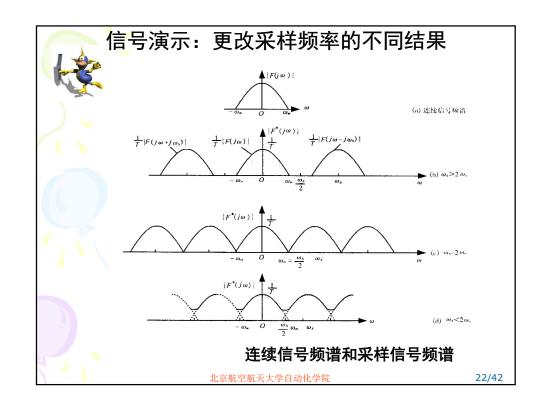
$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

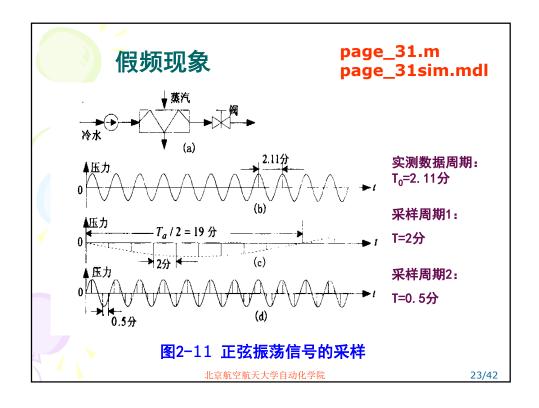
当频率相当高时,幅值已很小。若取幅值衰减至5%时的 频率为该信号的最高有效频率(),,, 即

$$|F(j\omega_m)| = \varepsilon |F(0)|$$
 $\varepsilon = 0.05$

并取采样频率 $\omega_s>2\omega_m$,则此时 $F^*(s)$ 的混叠不会太严重

北京航空航天大学自动化学院





频率混叠现象出现的情况:

- * 当 ^{ω_s < 2ω_m 时,采样信号频谱与原来连续信号的频谱发生很大的区别,以至无法滤出 原连续信号的频谱。}
- *若连续系统的频谱为无限带宽,则无论怎样 提高采样频率,频率混叠都会发生。

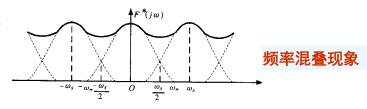
北京航空航天大学自动化学院

2.1.2 采样定理

- 1. 采样定理(香农定理)
 - 若一个连续信号所含频率分量的最高频率为 o_{max} ,如 果采样频率 $\omega_s > 2\omega_{max}$,则可以从采样信号中不失真 地恢复原连续信号。

香农采样定理:
$$\omega_{s} \geq 2\omega_{\max}$$

 $\omega_{\rm s}/2$ 称为折叠频率,又称为乃奎斯特 (Ngquest) 频率。



<u>25</u>/42 北京航空航天大学自动化学院

2. 采样信号失真

(1) 信号的高频分量折叠为低频分量 example_2_2.m

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{8}t\right) \quad x_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot 7}{8}t\right) \quad T=1$$

- (2) 隐匿振荡(Hidden oscillation)
 - *如果连续信号x(t)的频率分量等于采样频率 α 。的整数 倍时,则该频率分量在采样信号中将会消失。

采样间隔之间,x(t) 中存在的振荡称为隐匿振荡。

信号:
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \sin(t) + \sin(3t)$$

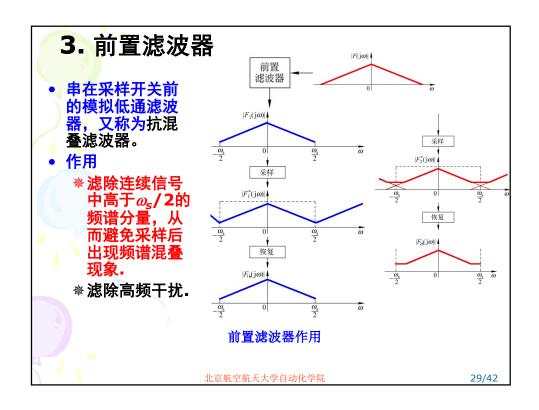
example_2_2_3.m

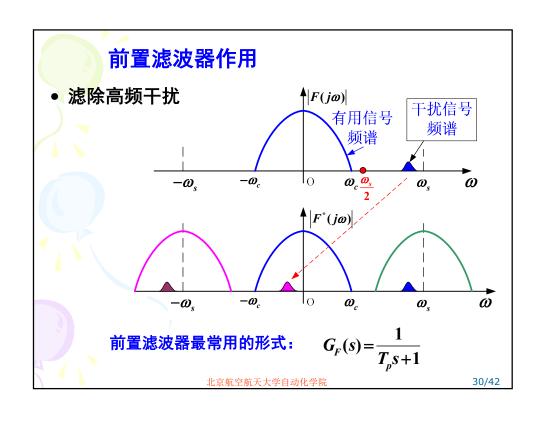
采样频率 ω_s = 3rad/s, T=2 π / ω_s = 2 π /3 。采样序列为 $x(kT) = \sin(2\pi k/3) + \sin(3\times 2\pi k/3) = \sin(2\pi k/3) + \sin(2\pi k/3) = \sin(2\pi k/3)$

频率混叠现象出现的情况:

- *当 $\frac{\omega_s < 2\omega_m}{\epsilon}$ 时,采样信号频谱与原来连续信号的频谱发生很大的区别,以至无法滤出原连续信号的频谱。
- *若连续系统的频谱为无限带宽,则无论怎样 提高采样频率,频率混叠都会发生。

北京航空航天大学自动化学院





2.1.3 信号的恢复与重构

信号恢复:被控对象是连续的 采样信号 → 连续信号 离散信号 → 连续信号

信号恢复过程:

理想恢复过程: 理论结果

非理想恢复过程:利用采样点信号

从时域上:

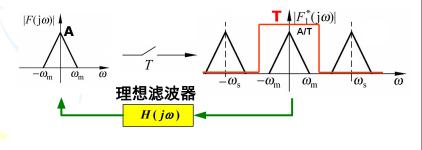
通过离散的采样值求出连续的时间函数

北京航空航天大学自动化学院

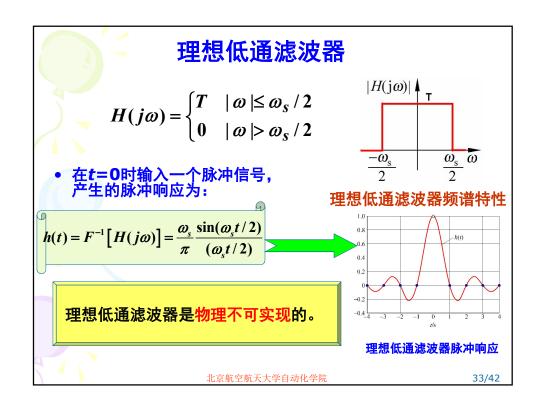
31/42

1. 理想恢复过程

- 信号恢复:
 - ※时域——由离散的采样值求出所对应的连续时间函数
 - *频域——除去采样信号频谱的旁带,保留基频分量。
- 理想不失真的恢复需要具备3个条件:
 - ※原信号有限带宽频谱
 - **※采样必须满足采样定理**
 - ※具有理想低通滤波器,对采样信号进行滤波。



北京航空航天大学自动化学院



2. 非理想恢复过程

物理上可实现的恢复只能以现在时刻及过去时刻的采样值为基础,通过外推插值来实现。

数学上,
$$f_k(t) = f(kT) + f'(kT)(t - KT) + L$$
 其中: $f(kT) = f(t)$, $kT \le t < (k+1)T$
$$f'(kT) = \frac{df(t)}{dt}|_{t=kT} \quad f'(kT) \approx \{f(kT) - f[(k-1)T\}/T\}$$

"零阶外推插值" 或称"零阶保持 器":

 $J_k(t) - J$

 $f_k(t) = f(kT)$, $kT \le t < (k+1)T$

一阶外推插值:

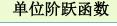
 $f_k(t) = f(kT) + (t - KT) \{ f(kT) - f[(k-1)T] \} / T$ $kT \le t < (k+1)T$

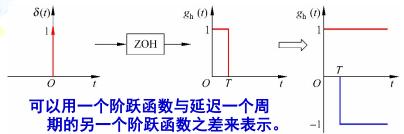
零阶保持器 **ZOH(Zero Order Hold)**

时域方程: $f_k(t) = f(kT)$, $kT \le t < (k+1)T$

数学表达式: $g_h(t) = u_s(t) - u_s(t-T)$

Z0H的脉冲过渡函数





北京航空航天大学自动化学院

ZOH

• 传递函数(拉氏变换式)

$$G_h(s) = L[g_h(t)] = L[u_s(t) - u_s(t - T)] = \frac{1}{s} - e^{-sT} \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

频率特性

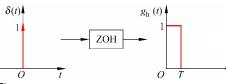
$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{T \times 2j\omega/2} = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{\sin(\omega \pi/\omega_s)}{\omega \pi/\omega_s} e^{-j(\omega/\omega_s)\pi}$$

幅频特性
$$|G_h(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right| = \frac{2\pi}{\omega_s} \left| \frac{\sin(\omega \pi/\omega_s)}{\omega \pi/\omega_s} \right|$$

相频特性
$$\theta_h(\omega) = -\frac{\pi\omega}{\omega_s} + \angle \frac{\sin(\omega\pi/\omega_s)}{\omega\pi/\omega_s}$$

零阶保持器ZOH—



时域方程: $f_k(t) = f(kT)$ $kT \le t < (k+1)T$

脉冲响应函数: $g_h(t) = u_s(t) - u_s(t-T)$

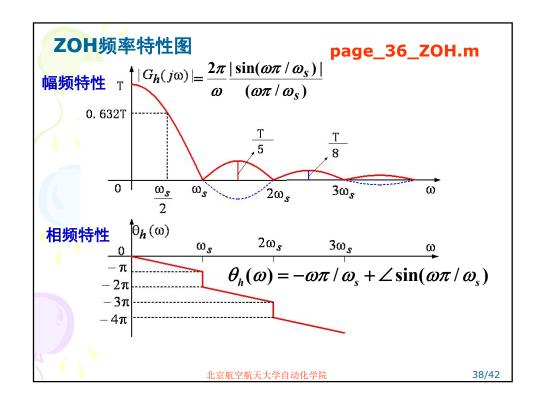
传递函数: $G_h(s) = L[g_h(t)] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$

频率特性: $G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega T/2)} e^{-j\omega T/2}$

幅频特性: $|G_h(j\omega)| = T \frac{|\sin(\omega T/2)|}{(\omega T/2)} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{|\sin(\omega \pi/\omega_s)|}{(\omega \pi/\omega_s)}$

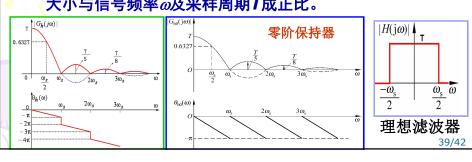
相频特性: $\theta_h(\omega) = -\omega \pi / \omega_s + \angle \sin(\omega \pi / \omega_s)$

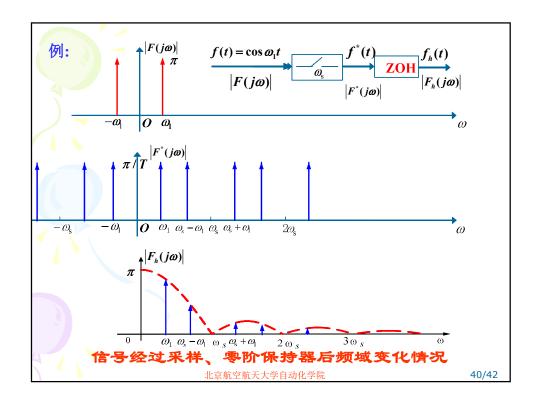
北京航空航天大学自动化学院



ZOH与理想低通滤波器相比

- 理想滤波器截止频率为 $\omega_c = \omega_s/2$,在 $\omega \leq \omega_c$ 时,采样信号 无失真地通过,在 $\omega > \omega_c$ 时锐截止;
- 零阶保持器有无限多个截止频率 $\omega_c = n\omega_s (n=1,2,...)$,在 $0 \sim \omega_s$ 内,幅值随 ω 增加而衰减。
- 零阶保持器允许采样信号的高频分量通过,不过它的幅值 是逐渐衰减的。
- 相频特性:零阶保持器是一个相位滞后环节,相位滞后的 大小与信号频率ω及采样周期T成正比。





信号经过采样、ZOH后变化情况(时域) ZOH特性相当于低通滤波器,除了基频分量通过以外,还有部分高频分量通过。 为降低高频噪声对系统动态特性能够有不良影响,可在保 持器后串联一个低通滤波器——后置滤波器。 图2-16 $f(t)-f_h(t)$ $f_h(t)$ $f^*(t)$ f(t) ZOH 相当于一个延迟了T/2的 $\mathrm{f}(t)$ 叠加上一个高频分量 高频信号的频率与采样频率成正比, 幅值与采样频 率成反比, 可以写成: $f_{h}(t) = f_{1}(t) + N(t),$ $f_1(t)$ 为f(t)时间延迟T/2<u>41</u>/42 北京航空航天大学自动化学院

