第三章期中考试复习指导

一、　基本要求

要求掌握导数定义，熟练掌握导数和高阶导数的计算，掌握罗尔定理、拉格朗日、柯西中值定理，掌握函数单调、凹凸的判别方法。掌握用罗比塔法则求函数极限。

二、　典型例题

1. 讨论分段函数的导数存在性

1：设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+2Ae^{x} & x<0\\ 9\arctan x+2B(x-1)^{3} & x\geq 0\end{cases}$，求 A，B 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点有一阶导数。

解：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-2B,\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=2A\Rightarrow A=-B$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 导数存在，则

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{9\arctan x+2B(x-1)^{3}}{x}=9+6B$$

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x+2Ae^{x}}{x}=1+2A$$

$$\Rightarrow 9+6B=1+2A$$

解得：A=1，B=-1

2. 计算函数极限

1)　$\lim\limits_{x\to 0}(\cos)^{\frac{1}{x^2}}$

解：$(\cos)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x},\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\cos x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

所以 原式=$e^{\frac{-1}{2}}$

2)　$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

解：

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{x}}=1$$

所以：原式=e

3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

解：

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{x-1}{x}+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+1+\ln x}=-\frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$

解：

$$原式=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{1+x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln(1+x)\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+(1+x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+1+\ln(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

3. 计算导数和高阶导数

1) $f(x)=x\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]$，求 $f'(x)$

解：

$$f'(x)=\left\{x\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]\right\}'$$
$$=\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+x\left\{\frac{\cos(\ln x)}{x}+\frac{\sin(\ln x)}{x}\right\}$$
$$=2\sin(\ln x)$$

2） $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right)$，求 $f'(x)$

解：

$$f'(x)=\left\{\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right)\right\}'$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)}\left\{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\right\}$$
$$=-\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left(1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right)}$$

3） $f(x)=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$，求 $f'(x)$

解：

$$f'(x)=\left(x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}\right)'=\left(e^{x^a\ln x}+e^{a^x\ln x}+e^{x^x\ln a}\right)'$$
$$=\left(x^{x^a}\right)\left(\frac{x^a}{x}+ax^{a-1}\ln x\right)+x^{a^x}\left(a^x\ln a\ln x+\frac{a^x}{x}\right)+a^{x^x}\ln a\left(x^x(\ln x+1)\right)$$

4） $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$，求 $f^{(n)}(x)$

解：

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}$$
$$=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$$

5） $f(x)=e^x\sin x$，求 $f^{(n)}(x)$

解：

$$y' = \left(e^x \sin x\right)' = e^x \sin x - e^x \cos x = \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y'' = \left\{\sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\}' = \sqrt{2}\left\{e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= 2e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right)$$

....

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

6) $y = (\arcsin x)^2$ 证明：

1）$\left(1-x^2\right)y'' - xy' = 2$

2）求 $y^{(n)}(0)$

证明：1）由 $y = (\arcsin x)^2$ 可以得到：

$$y' = 2\arcsin x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \Rightarrow y'\sqrt{1-x^2} = 2\arcsin x$$

$$\Rightarrow \left(y'\right)^2\left(1-x^2\right) = 4(\arcsin x)^2 = 4y$$

两边求导得到：$\left(1-x^2\right)2y'y'' - 2x\left(y'\right)^2 = 4y' \Rightarrow \left(1-x^2\right)y'' - xy' = 2$

2）将 $\left(1-x^2\right)y'' - xy' = 2$ 两边求导，得到：

$$\left(1-x^2\right)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1-x^2\right)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2 y^{(n)} = 0$$

可见：

$$y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0) \quad n \ge 1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y'(0) = 0; \\ y^{(2n+1)} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y^{(2)}(0) = 2 \\ y^{(2n)} = 2\left[(2n-2)!!\right]^2 \end{cases}$$

7) $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\left(\arctan\frac{y}{x}\right)}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：将方程两别分别对 x 求导，得到：

$$\frac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=e^{\left(\arctan\frac{y}{x}\right)}\frac{\dfrac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}(\text{注意}e^{\left(\arctan\frac{y}{x}\right)}\sqrt{x^2+y^2}=1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'=\frac{\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)(x-y)-\left(1-\dfrac{dy}{dx}\right)(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}$$

4. 证明拉格朗日中值定理

5. 罗尔定理和拉格朗日定理证明有关习题

1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间连续，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=f(1)=0$，

$\forall x_0\in(0,1),\exists\varsigma\in(0,1),f'(\varsigma)=f(x_0)$

证明：分析若证明 $\forall x_0\in(0,1),\exists\varsigma\in(0,1),f'(\varsigma)=f(x_0)$ 等价证明 $F(x)=f(x)-xf(x_0)$ 的导数有零点。

因为 $F(0)=0,F(1)=-f(x_0),F(x_0)=(1-x_0)f(x_0)$，

若 $f(x_0)=0$，由罗尔定理可证；

若 $f(x_0)\neq 0$，则 $F(1)F(x_0)<0$，由介值定理 $\exists\eta\in(0,1),F(\eta)=0$，由罗尔定理得证。

2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，在 (a,b) 二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0,f'(a)f'(b)>0$

1) 证明：$\exists\theta\in(a,b),f(\theta)=0$

2) 证明：$\exists\eta\in(a,b),f''(\eta)=f(\eta)$

证明：1）因为 $f(a)=f(b)=0,f'(a)f'(b)>0$，

因为 $f_+'(a)f_-'(b)>0$，不妨假设 $f_+'(a)>0,f_-'(b)>0$，又因为

$$f_+'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,f_-'(b)=\lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$$

由极限的保号性得知，$\exists(a,a+\delta),f(x)\geq f(a)=0,\exists(b,b-\delta),f(x)\leq f(b)=0$，

由介值定理得到 $\exists\xi\in[a,b],f(\xi)=0$

2）若证明

$\exists \eta \in (a,b), f''(\eta) = f(\eta) \Leftrightarrow f''(\eta) - f(\eta)$有零点

$\Leftrightarrow e^{x}\left(f'(x) - f(x)\right)$有两个零点

$\Leftrightarrow e^{-x} f(x)$有三个零点

而$F(x) = e^{x}\left(f(x)\right), F(a) = F(b) = F(\xi) = 0$，因此得证。

3) 证明$\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$

证明：$\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0) \Leftrightarrow (1+x)\ln(1+x) > \arctan x$

因此：

$$F(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$$

$$F'(x) = 1 + \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$$

所以： $F'(x) = 1 + \ln(1+x) - \dfrac{1}{1+x^2} > 1 + x - \dfrac{1}{1+x^2} > 0 (x>0)$

而$F(0) = 0$，所以$F(x) > 0$，得证。

6. 极值问题

1) 设$f(x) = \left|2x^3 - 9x^2 + 2x\right|$求在$\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{2}\right]$上的最大值与最小值

解：

$$f(x) = \left|2x^3 - 9x^2 + 12x\right| = |x|\left(\left|(x-2)(2x-6)\right|\right)$$

$$= \begin{cases} 2x^3 - 9x^2 + 12x & -\dfrac{1}{4} \le x \le 0 \\ -\left(2x^3 - 9x^2 + 12x\right) & 0 \le x \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

而 $f'(x) = \begin{cases} -6(x-1)(x-2) & -\dfrac{1}{4} \le x \le 0 \\ 6(x-1)(x-2) & 0 < x \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$

所以最大值与最小值为：

$$M = \max\left\{f(1), f(2), f(0), f\left(\frac{-1}{4}\right), f\left(\frac{5}{2}\right)\right\} = 5,$$

$$m = \min\left\{f(1), f(2), f(0), f\left(\frac{-1}{4}\right), f\left(\frac{5}{2}\right)\right\} = 0,$$

2) 在抛物线$y^2 = 2px$哪一点的法线被抛物线所截之线段为最短。

解：过抛物线 $y^2=2px$ 任一点 $p\left(x,\sqrt{2px}\right)$ 的法线方程为

L：$Y-\sqrt{2px}=-\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{p}}\left(X-x\right)$，L 与抛物线的交点

$$\left(\sqrt{x}+\frac{p}{\sqrt{x}}\right)\begin{cases}Y-\sqrt{2px}=-\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{p}}\left(X-x\right)\\ Y=\sqrt{2pX}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=\left(\sqrt{x}+\frac{p}{\sqrt{x}}\right)^2\\ Y=-\sqrt{2p}\left(\sqrt{x}+\frac{p}{\sqrt{x}}\right)\end{cases}$$

因此：

$$l\left(x\right)^2=\left(\sqrt{x}+\frac{p}{\sqrt{x}}-x\right)^2+\left(\sqrt{2px}+\sqrt{2p}\left(\sqrt{x}+\frac{p}{\sqrt{x}}\right)\right)^2$$

$$=8px+12p^2+\frac{6p^3}{x}+\frac{2p^4}{x^2} \qquad d^2=$$

$$\left(l\left(x\right)^2\right)'=8p-\frac{6p^3}{x^2}-\frac{2p^4}{x^3}=0\Rightarrow\begin{cases}x=p\\ y=\sqrt{2}p\end{cases}$$

因为为唯一极小值点，所以为最小值点。

3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $I=\left(a,b\right)$ 上连续，且 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to b-}f(x)=+\infty$，则此函数在区间 I 上达到最小值。

证明：$\exists x_0\in\left(a+b\right)/2,M>f\left(x_0\right)$，由于 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to b-}f(x)=+\infty$，所以

$$\exists\delta>0\left(\text{不妨假设}\delta\langle\frac{b-a}{2}\right),\forall x\in\left(a,a+\delta\right)\bigcup\left(b-\delta,b\right),f\left(x\right)>M,$$

而 f 在 $\left[a+\delta,b-\delta\right]$ 连续，所以有最小值 ξ，因此

$$x_0\in\left[a+\delta,b-\delta\right],\forall x\in\left(a,a+\delta\right)\bigcup\left(b-\delta,b\right)$$
$$\Rightarrow f\left(\xi\right)\le f\left(x_0\right)<M<f\left(x\right)$$

得证。

7. 函数的凹凸性

1) 证明不等式：

设 $a_i>0,i=1,2,3,,,,n,\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+......+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2......a_n}\le\frac{a_1+a_2+....a_n}{n}$

证明：1）原问题等价于

$$\frac{1}{n}\ln\left(a_1a_2......a_n\right) \le \ln\left(\frac{a_1+a_2+.....+a_n}{n}\right),$$

$$\frac{1}{n}\ln\left(a_1a_2......a_n\right)^{-1} \le \ln\left(\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}.........+\frac{1}{a_n}}{n}\right)$$

而$\left(\ln x\right)'' = \frac{-1}{x^2} < 0$, 故得证。

2） 判断下面函数的凹凸性

$$y = \sin x, y = a^x$$