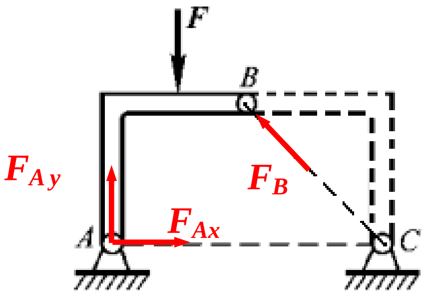
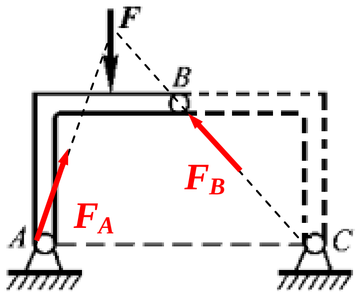
静力学 (MADE BY 水水)

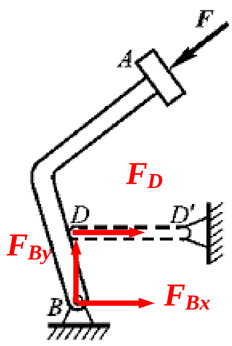
1-3 试画出图示各结构中构件 AB 的受力图



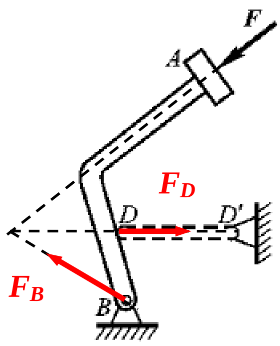
(a)



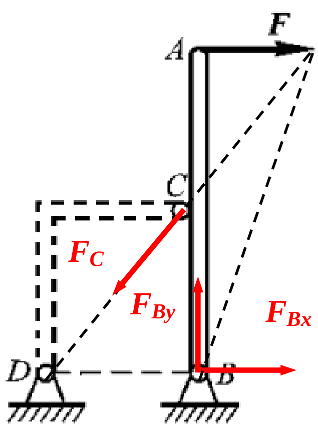
(a)



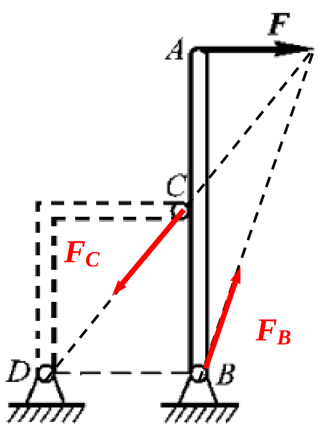
(b)



(b)

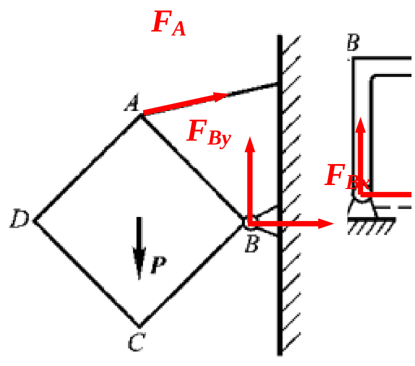


(c)

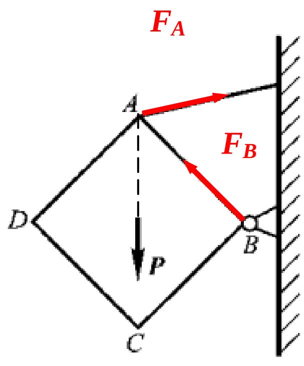


(c)

1-4 试画出两结构中构件 ABCD 的受力图

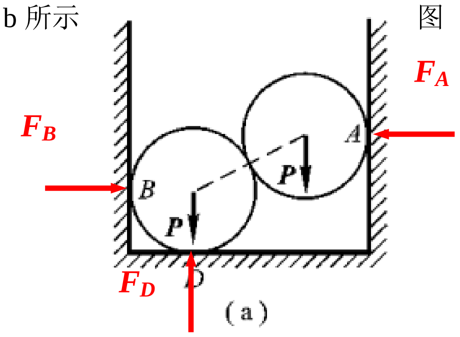


(b)



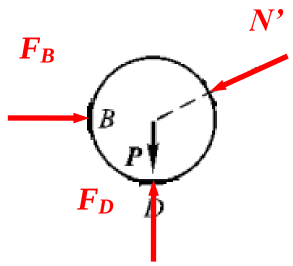
(b)

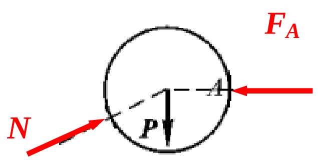
1-5 试画出图 a 和 b 所示 图

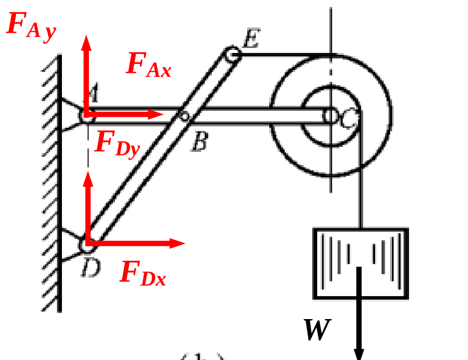


(a)

1-5a

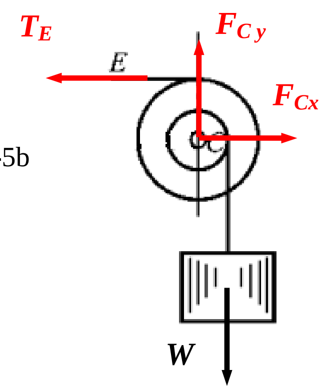


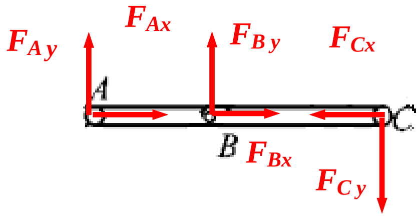


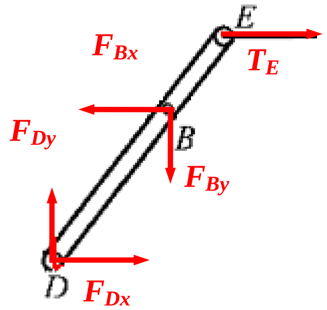


(b)

1-5b





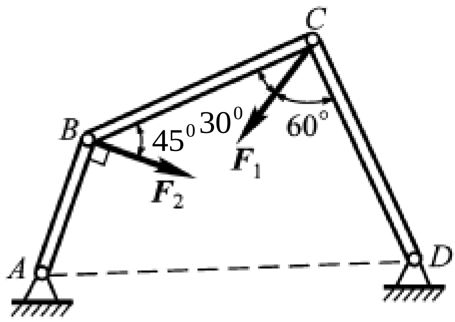


1-8 在四连杆机构的 ABCD 的铰链 B 和 C 上分别作用有力 F_1 和 F_2，机构在图示位置平衡。试求二力 F_1 和 F_2 之间的关系。

解：杆 AB，BC，CD 为二力杆，受力方向分别沿着各杆端点连线的方向。

解法 1(解析法)

假设各杆受压，分别选取销钉 B 和 C 为研究对象，受力如图所示：



由共点力系平衡方程，对 B 点有：

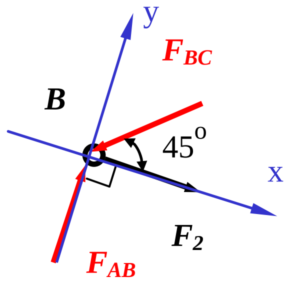
$$\sum F_x = 0 \qquad F_2 - F_{BC}\cos 45^0 = 0$$

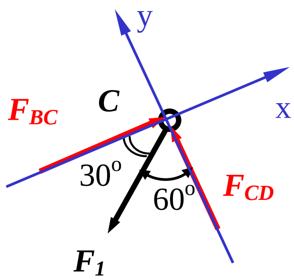
对 C 点有：

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{BC} - F_1\cos 30^0 = 0$$

解以上二个方程可得：

$$F_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3}F_2 = 1.63F_2$$



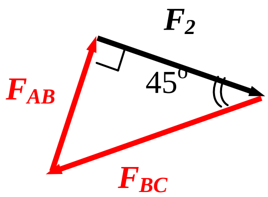


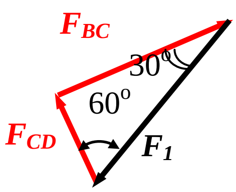
解法 2(几何法)

分别选取销钉 B 和 C 为研究对象，根据汇交力系平衡条件，作用在 B 和 C 点上的力构成封闭的力多边形，如图所示。

对 B 点由几何关系可知：

$$F_2 = F_{BC}\cos 45^0$$





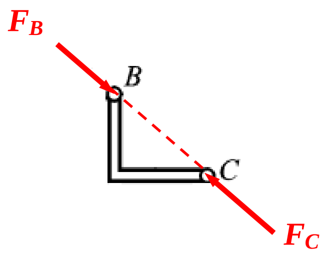
对 C 点由几何关系可知：

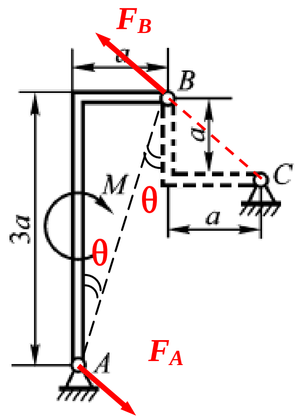
$$F_{BC} = F_1\cos 30^0$$

解以上两式可得：$F_1 = 1.63F_2$

2-3 在图示结构中，二曲杆重不计，曲杆 AB 上作用有主动力偶 M。试求 A 和 C 点处的约束力。

解：BC 为二力杆(受力如图所示)，故曲杆 AB 在 B 点处受到约束力的方向沿 BC 两点连线的方向。曲杆 AB 受到主动力偶 M 的作用，A 点和 B 点处的约束力必须构成一个力偶才能使曲杆 AB 保持平衡。AB 受力如图所示，由力偶系作用下刚体的平衡方程有(设力偶逆时针为正)：





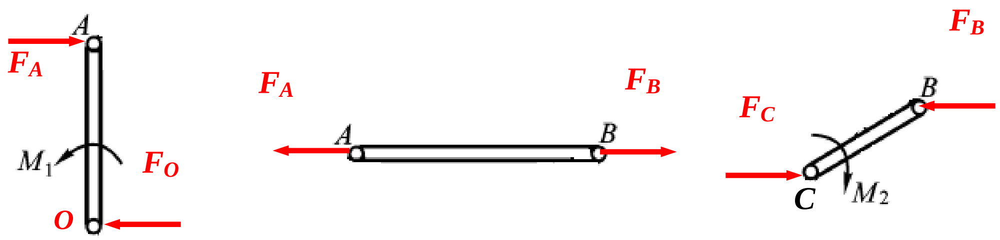
$\sum M=0$ $\qquad F_A\cdot\sqrt{10}a\cdot\sin(\theta+45^0)-M=0$

$$F_A=0.354\frac{M}{a}$$

其中：$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$。对 BC 杆有：

$F_C=F_B=F_A=0.354\dfrac{M}{a}$ 。A，C 两点约束力的方向如图所示。

2-4 四连杆机构在图示位置平衡，已知 OA=60cm,BC=40cm,作用在 BC 上力偶的力偶矩 M_2=1N·m。试求作用在 OA 上力偶的力偶矩大小 M_1 和 AB 所受的力 $\boldsymbol{F}_{AB}$。各杆重量不计。



解：

机构中 AB 杆为二力杆，点 A,B 出的约束力方向即可确定。由力偶系作用下刚体的平衡条件，点 O,C 处的约束力方向也可确定，各杆的受力如图所示。对 BC 杆有：

$\sum M=0$ $\qquad F_B\cdot\overline{BC}\cdot\sin 30^0-M_2=0$

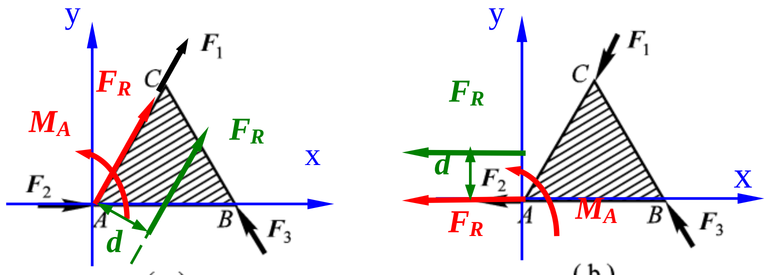
对 AB 杆有：$F_B=F_A$

对 OA 杆有：

$\sum M=0$ $\qquad M_1-F_A\cdot\overline{OA}=0$

求解以上三式可得：$M_1=3N\cdot m$， $F_{AB}=F_O=F_C=5N$，方向如图所示。

2-6 等边三角形板 ABC,边长为 a，今沿其边作用大小均为 F 的力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$，方向如图 a,b 所示。试分别求其最简简化结果。



(a) (b)

解：2-6a

坐标如图所示，各力可表示为:

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{2}F\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}F\vec{j}, \qquad \vec{F}_2 = F\vec{i}, \qquad \vec{F}_3 = -\frac{1}{2}F\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}F\vec{j}$$

先将力系向 A 点简化得（红色的）:

$$\vec{F}_R = F\vec{i} + \sqrt{3}F\vec{j}, \qquad \vec{M}_A = \frac{\sqrt{3}}{2}Fa\vec{k}$$

方向如左图所示。由于 $\vec{F}_R \perp \vec{M}_A$，可进一步简化为一个不过 A 点的力(绿色的)，主矢不变，其作用线距 A 点的距离 $d = \frac{\sqrt{3}}{4}a$，位置如左图所示。

2-6b

同理如右图所示，可将该力系简化为一个不过 A 点的力（绿色的），主矢为：$\vec{F}_R = -2F\vec{i}$

其作用线距 A 点的距离 $d = \frac{\sqrt{3}}{4}a$，位置如右图所示。

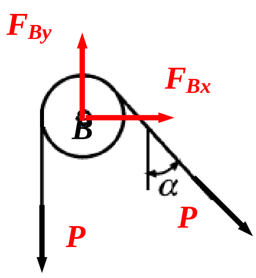
简化中心的选取不同，是否影响最后的简化结果？

2-13 图示梁 AB 一端砌入墙内，在自由端装有滑轮，用以匀速吊起重物 D。设重物重为 P, AB 长为 l，斜绳与铅垂方向成 α 角。试求固定端的约束力。

法 1

解：

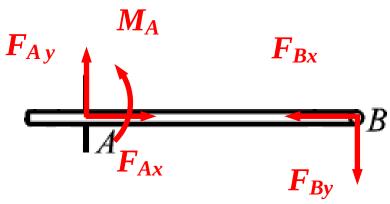
整个结构处于平衡状态。选择滑轮为研究对象，受力如图，列平衡方程（坐标一般以水平向右为 x 轴正向，竖直向上为 y 轴正向，力偶以逆时针为正）:



$$\sum F_x = 0 \qquad P\sin\alpha + F_{Bx} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{By} - P - P\cos\alpha = 0$$

选梁 AB 为研究对象，受力如图，列平衡方程:

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} - F_{Bx} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} - F_{By} = 0$$
$$\sum M_A = 0 \qquad M_A - F_{By} \cdot l = 0$$



求解以上五个方程，可得五个未知量 $F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bx}, F_{By}, M_A$ 分别为：

$F_{Ax} = F_{Bx} = -P\sin\alpha$ （与图示方向相反）

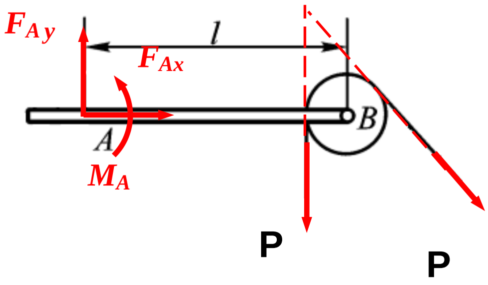
$F_{Ay} = F_{By} = P(1+\cos\alpha)$ （与图示方向相同）

$M_A = P(1+\cos\alpha)l$ （逆时针方向）

法 2

解：

设滑轮半径为 R。选择梁和滑轮为研究对象，受力如图，列平衡方



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + P\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} - P - P\cos\alpha = 0$$
$$\sum M_A = 0 \qquad M_A - P(l-R) - P\cos\alpha(l-R) - P\sin\alpha\frac{R}{\tan\frac{\alpha}{2}} = 0$$

求解以上三个方程，可得 F_{Ax}, F_{Ay}, M_A 分别为：

$F_{Ax} = -P\sin\alpha$ （与图示方向相反）

$F_{Ay} = P(1+\cos\alpha)$ （与图示方向相同）

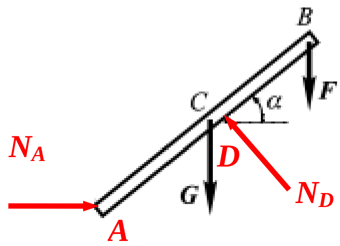
$M_A = P(1+\cos\alpha)l$ （逆时针方向）

2-18 均质杆 AB 重 G，长 l，放在宽度为 a 的光滑槽内，杆的 B 端作用着铅垂向下的力 ***F***，如图所示。试求杆平衡时对水平面的倾角 α 。

解：

选 AB 杆为研究对象，受力如图所示，列平衡方程：

$$\sum M_A = 0 \qquad N_D \cdot \frac{a}{\cos\alpha} - G\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha - F\cdot l\cos\alpha = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad N_D\cos\alpha - G - F = 0$$



求解以上两个方程即可求得两个未知量 N_D, α，其中：

$$\alpha = \arccos[\frac{2(F+G)a}{(2F+G)l}]^{\frac{1}{3}}$$

未知量不一定是力。

2-27 如图所示，已知杆 *AB* 长为 *l*，重为 *P*，*A* 端用一球铰固定于地面上，*B* 端用绳索 *CB* 拉住正好靠在光滑的墙上。图中平面 *AOB* 与 *Oyz* 夹角为α，绳与轴 *Ox* 的平行线夹角为θ，已知$a=0.7m, c=0.4m, \tan\alpha=\dfrac{3}{4}, \theta=45^o, P=200N$。试求绳子的拉力及墙的约束力。

解：

选杆 AB 为研究对象，受力如下图所示。列平衡方程：

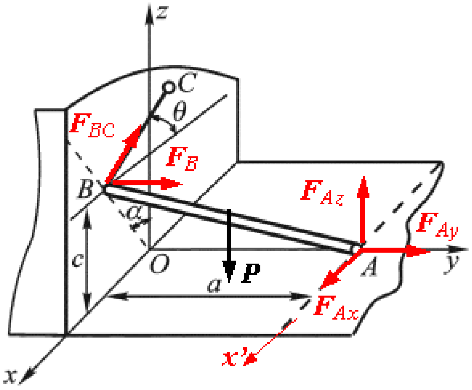
$$\sum M_y=0 \qquad P\cdot\frac{1}{2}c\tan\alpha-F_{BC}\cos\theta\cdot c-F_{BC}\sin\theta\cdot c\tan\alpha=0$$

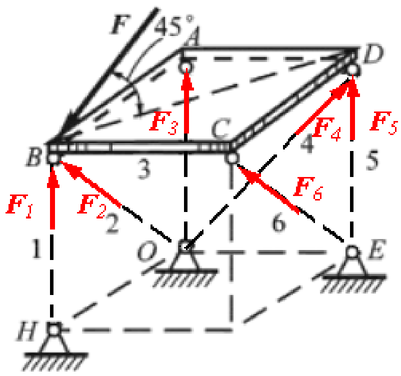
$$F_{BC}=60.6N$$

$$\sum M_{x'}=0 \qquad P\cdot\frac{1}{2}a-F_B\cdot c-F_{BC}\sin\theta\cdot a=0 \qquad F_B=100N$$

由$\sum F_y=0$和$\sum F_z=0$可求出F_{Ay}, F_{Az}。平衡方程$\sum M_x=0$可用来校核。

思考题：对该刚体独立的平衡方程数目是几个？





2-29 图示正方形平板由六根不计重量的杆支撑，连接处皆为铰链。已知力 **F** 作用在平面 *BDEH* 内，并与对角线 *BD* 成 45° 角，*OA*=*AD*。试求各支撑杆所受的力。

解：

杆 1，2，3，4，5，6 均为二力杆，受力方向沿两端点连线方向，假设各杆均受压。选板 ABCD 为研究对象，受力如图所示，该力系为空间任意力系。采用六矩式平衡方程：

$$\sum M_{DE}=0 \qquad F_2\cdot\cos45^0=0 \qquad F_2=0$$

$\sum M_{AO}=0 \qquad -F_6\cos 45^0\cdot a-F\cos 45^0\cos 45^0\cdot a=0 \qquad F_6=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}F$ （受拉）

$\sum M_{BH}=0 \qquad -F_4\cos 45^0\cdot a-F_6\cos 45^0\cdot a=0 \qquad F_4=\dfrac{\sqrt{2}}{2}F$ （受压）

$\sum M_{AD}=0 \qquad F_1\cdot a+F_6\cos 45^0\cdot a-F\sin 45^0\cdot a=0 \qquad F_1=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}F$ （受压）

$\sum M_{CD}=0 \qquad F_1\cdot a+F_3\cdot a-F\sin 45^0\cdot a=0 \qquad F_3=-\dfrac{1}{2}F$ （受拉）

$\sum M_{BC}=0 \qquad F_3\cdot a+F_5\cdot a-F_4\cos 45^0\cdot a=0 \qquad F_5=0$

本题也可以采用空间任意力系标准式平衡方程，但求解代数方程组非常麻烦。类似本题的情况采用六矩式方程比较方便，适当的选择六根轴**保证一个方程求解一个未知量，避免求解联立方程**。

2-31 如图所示，欲转动一置于 **V** 形槽中的棒料，需作用一力偶，力偶矩 $M=1500N\cdot cm$ 。已知棒料重 $P=400N$ ，直径 $D=25cm$ 。试求棒料与 **V** 形槽之间的静摩擦因数 f_s 。

解：

取棒料为研究对象，受力如图所示。

列平衡方程：

$$\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum M_O=0\end{cases} \qquad \begin{cases}F_1+p\cos 45^0-N_2=0\\ F_2-p\sin 45^0+N_1=0\\ (F_1+F_2)\cdot\dfrac{D}{2}-M=0\end{cases}$$

补充方程：

$$\begin{cases}F_1=f_sN_1\\ F_2=f_sN_2\end{cases}$$

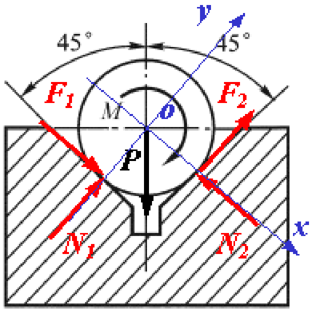
五个方程，五个未知量 F_1,N_1,F_2,N_2， f_s，可得方程：

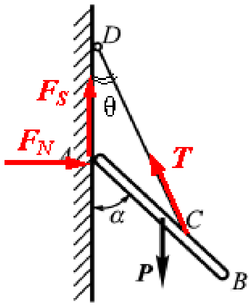
$$2M\cdot f_S^2-\sqrt{2}p\cdot D\cdot f_S+2M=0$$

解得 $f_{S1}=0.223, f_{S2}=4.491$。当 $f_{S2}=4.491$ 时有：

$$N_1=\frac{p(1-f_{S2})}{\sqrt{2}(1+f_{S2}^2)}<0$$

即棒料左侧脱离 V 型槽，与题意不符，故摩擦系数 $f_S=0.223$ 。





2-33 均质杆 AB 长 40cm，其中 A 端靠在粗糙的铅直墙上，并用绳子 CD 保持平衡，如图所示。设 $BC=15cm, AD=25cm$，平衡时 α 角的最小值为 45^o。试求均质杆与墙之间的静摩擦因数 f_s。

解：

当 $\alpha=45^0$ 时，取杆 AB 为研究对象，受力如图所示。

列平衡方程：

$$\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum M_A=0\end{cases}\qquad \begin{cases}F_N-T\sin\theta=0\\ F_S+T\cos\theta-p=0\\ T\cos\theta\cdot\overline{ACC}\sin\alpha-T\sin\theta\cdot\overline{AC}\cos\alpha-p\cdot\dfrac{\overline{AB}}{2}\sin\alpha=0\end{cases}$$

附加方程：$F_S=f_S F_N$

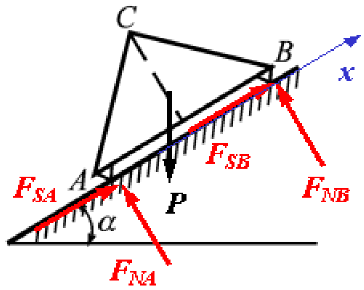
四个方程，四个未知量 F_N, F_S, T，f_s，可求得 $f_s=0.646$。

2-35 在粗糙的斜面上放着一个均质棱柱体，A，B 为支点，如图所示。若 $AB=BC=AC$，A 和 B 于斜面间的静摩擦因数分别为 f_{s1} 和 f_{s2}，试求物体平衡时斜面与水平面所形成的最大倾角 α。

解：选棱柱体为研究对象，受力如图所示。假设棱柱边长为 a，重为 P，列平衡方程

$$\begin{cases}\sum M_A=0\\ \sum M_B=0\\ \sum F_x=0\end{cases}\qquad \begin{cases}F_{NB}\cdot a-P\cos\alpha\cdot\dfrac{a}{2}+P\sin\alpha\dfrac{a}{2\sqrt{3}}=0\\ -F_{NA}\cdot a+P\cos\alpha\cdot\dfrac{a}{2}+P\sin\alpha\dfrac{a}{2\sqrt{3}}=0\\ F_A+F_B-P\sin\alpha=0\end{cases}$$

如果棱柱不滑动，则满足补充方程$\begin{cases} F_A = f_{s1}F_{NA} \\ F_B = f_{s2}F_{NB} \end{cases}$时处于极限平衡状态。



解以上五个方程，可求解五个未知量$F_A, F_{NA}, F_B, F_{NB}, \alpha$，其中：

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}(f_{s1} + f_{s2})}{f_{s2} - f_{s1} + 2\sqrt{3}} \qquad (1)$$

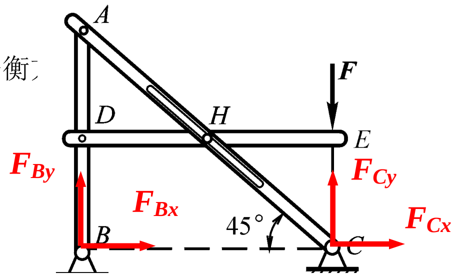
当物体不翻倒时$F_{NB} \geq 0$，则：

$$\alpha \leq 60^0 \qquad (2)$$

即斜面倾角必须同时满足(1)式和(2)式，棱柱才能保持平衡。

3-10 AB,AC 和 DE 三杆连接如图所示。杆 DE 上有一插销 H 套在杆 AC 的导槽内。试求在水平杆 DE 的一端有一铅垂力 $\boldsymbol{F}$ 作用时，杆 AB 所受的力。设 $AD=DB, DH=HE, BC=DE$，杆重不计。

解：



假设杆 AB，DE 长为 2a。取整体为研究对象，受力如右图所示，列平衡

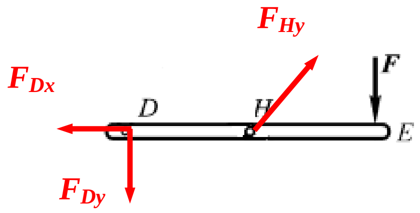
$$\sum M_C=0 \qquad F_{By}\cdot 2a=0$$

$$F_{By}=0$$

取杆 DE 为研究对象，受力如图所示，列平衡方程：

$$\sum M_H=0 \qquad F_{Dy}\cdot a-F\cdot a=0 \qquad F_{Dy}=F$$

$$\sum M_B=0 \qquad F_{Dx}\cdot a-F\cdot 2a=0 \qquad F_{Dx}=2F$$



取杆 AB 为研究对象，受力如图所示，列平衡方程：

$$\sum F_y=0 \qquad F_{Ay}+F_{Dy}+F_{By}=0$$

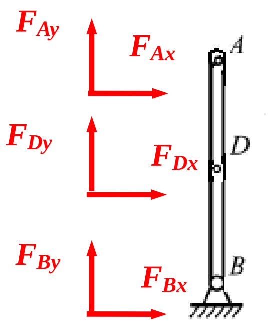
$$F_{Ay}=-F \text{（与假设方向相反）}$$

$$\sum M_A=0 \qquad F_{Dx}\cdot a+F_{Bx}\cdot 2a=0$$

$$F_{Bx}=-F \text{（与假设方向相反）}$$

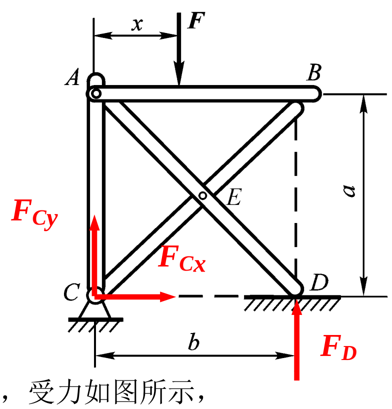
$$\sum M_B=0 \qquad -F_{Ax}\cdot 2a-F_{Dx}\cdot a=0$$

$$F_{Ax}=-F \text{（与假设方向相反）}$$



3-12 AB, AC, AD 和 BC 四杆连接如图所示。在水平杆 AB 上作用有铅垂向下的力 $\boldsymbol{F}$。接触面和各铰链均为光滑的，杆重不计，试求证不论力 $\boldsymbol{F}$ 的位置如何，杆 AC 总是受到大小等于 F 的压力。

解：



取整体为研究对象，受力如图所示，列平衡方程：

$$\sum M_C=0 \qquad F_D\cdot b-F\cdot x=0$$

$$F_D=\frac{x}{b}F$$

取杆 AB 为研究对象，受力如图所示，列平衡方程：

$$\sum M_A=0 \qquad F_B\cdot b-F\cdot x=0$$

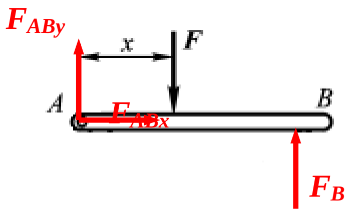
$$F_B=\frac{x}{b}F$$

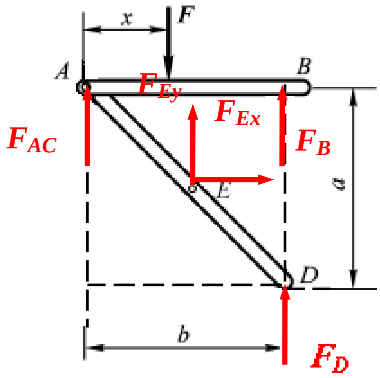
杆 AB 为二力杆，假设其受压。取杆 AB 和 AD 构成的组合体为研究对象，受力如图所示，列平衡方程：

$$\sum M_E=0 \qquad (F_B+F_D)\cdot\frac{b}{2}+F\cdot(\frac{b}{2}-x)-F_{AC}\cdot\frac{b}{2}=0$$

解得 $F_{AC}=F$，命题得证。

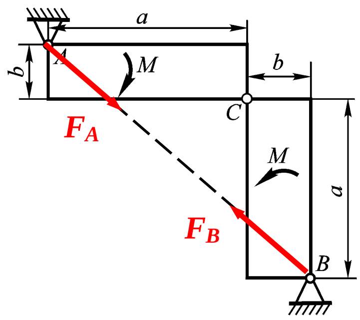
注意：销钉 A 和 C 联接三个物体。





3-14 两块相同的长方板由铰链 *C* 彼此相连接，且由铰链 *A* 及 *B* 固定，如图所示，在每一平板内都作用一力偶矩为 M 的力偶。如 $a>b$，忽略板重，试求铰链支座 *A* 及 *B* 的约束力。

解：

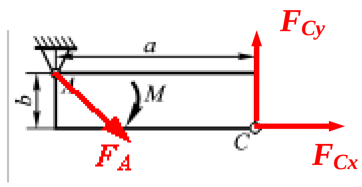


取整体为研究对象，由于平衡条件可知该力系对任一点之矩为零，因此有：

$$\sum M_A=0 \qquad M_A(F_B)-M+M=0$$

即 F_B 必过 A 点，同理可得 F_A 必过 B 点。也就是 F_A 和 F_B 是大小相等，方向相反且共线的一对力，如图所示。

取板 AC 为研究对象，受力如图所示，列平衡方程：



$$\sum M_C=0$$

$$F_A\sin 45^0\cdot a-F_A\cos 45^0\cdot b-M=0$$

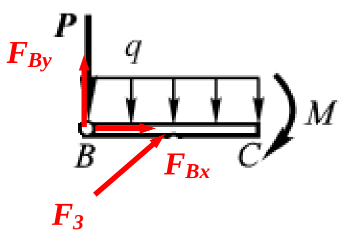
解得：

$$F_A=\frac{\sqrt{2}M}{a-b}\ (\text{方向如图所示})$$

3-20 如图所示结构由横梁 *AB*, *BC* 和三根支承杆组成，载荷及尺寸如图所示。试求 *A* 处的约束力及杆 1，2，3 所受的力。

解：

支撑杆 1，2，3 为二力杆，假设各杆均受压。选梁 BC 为研究对象，受力如图所示。其中均布载荷可以向梁的中点简化为一个集中力，大小为 2qa，作用在 BC 杆中点。列平衡方程：

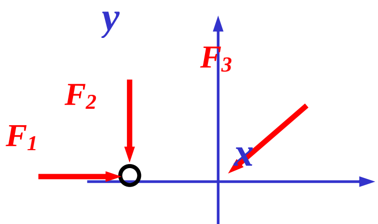


$$\sum M_B=0 \quad F_3\sin 45^0\cdot a-2qa\cdot a-M=0$$

$$F_3=\sqrt{2}\left(\frac{M}{a}+2qa\right)\ (\text{受压})$$

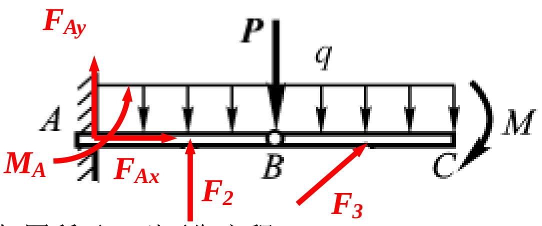
选支撑杆销钉 D 为研究对象，受力如右图所示。列平衡方程：

$$\sum F_x=0 \qquad F_1-F_3\cos 45^0=0$$



$$F_1 = \frac{M}{a} + 2qa \text{ (受压)}$$

$\sum F_y = 0 \qquad -F_2 - F_3 \sin 45^0 = 0 \qquad F_2 = -(\frac{M}{a} + 2qa) \text{ (受拉)}$



选梁 AB 和 BC 为研究对象，受力如图所示。列平衡方程：

$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_3 \cos 45^0 = 0 \qquad F_{Ax} = -(\frac{M}{a} + 2qa)$ (与假设方向相反)

$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_2 + F_3 \sin 45^0 - P - 4qa = 0 \qquad F_{Ay} = P + 4qa$

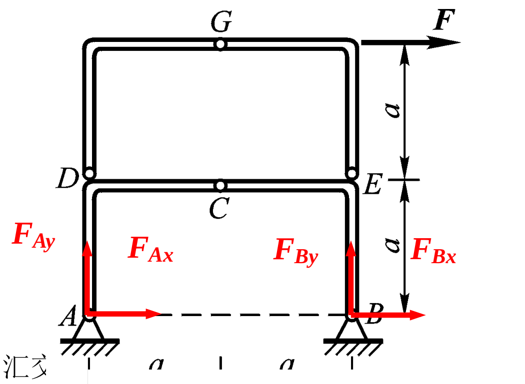
$\sum M_A = 0 \quad M_A + F_2 \cdot a - P \cdot 2a - 4qa \cdot 2a + F_3 \sin 45^0 \cdot 3a - M = 0$

$$M_A = 4qa^2 + 2Pa - M \text{ (逆时针)}$$

3-21 二层三铰拱由 AB, BC, DG 和 EG 四部分组成，彼此间用铰链连接，所受载荷如图所示。试求支座 A, B 的约束力。

解：

选整体为研究对象，受力如右图所示。列平衡方程：



$\sum M_A = 0 \quad F_{By} \cdot 2a - F \cdot 2a = 0 \quad F_{By} = F$

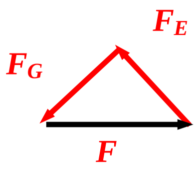
$\sum M_B = 0 \quad -F_{Ay} \cdot 2a - F \cdot 2a = 0 \quad F_{Ay} = -F$

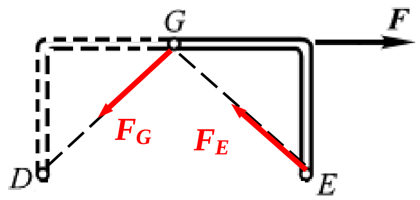
$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_{Bx} + F = 0 \qquad (1)$

由题可知杆 DG 为二力杆，选 GE 为研究对象，作用于其上的力汇交

受力如图所示，画出力的三角形，由几何关系可得：

$$F_E = \frac{\sqrt{2}}{2} F \text{。}$$

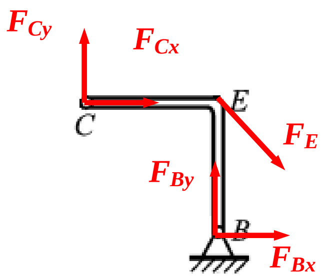




取 CEB 为研究对象，受力如图所示。列平衡方程：

$$\sum M_C = 0$$

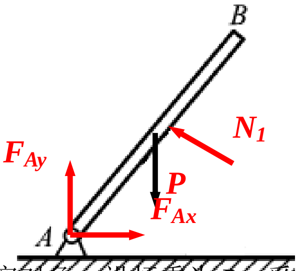
$F_{Bx} \cdot a + F_{By} \cdot a - F_E \sin 45^0 \cdot a = 0 \qquad F_{Bx} = -\frac{F}{2}$

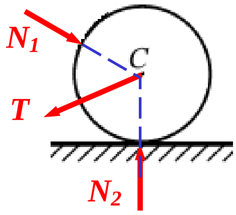


代入公式(1)可得：

$$F_{Ax} = -\frac{F}{2}$$

3-24 均质杆 AB 可绕水平轴 A 转动，并搁在半径为 r 的光滑圆柱上，圆柱放在光滑的水平面上，用不可伸长的绳子 AC 拉在销钉 A 上，杆重 16N，$AB=3r, AC=2r$。试求绳的拉力和杆 AB 对销钉 A 的作用力。





解：

取杆 AB 为研究对象，设杆重为 P，受力如图所示。列平衡方程：

$$\sum M_A=0 \qquad N_1\cdot\sqrt{3}r-P\cdot\frac{3r}{2}\cos 60^0=0 \qquad N_1=6.93(N)$$

$$\sum F_x=0 \qquad F_{Ax}-N_1\sin 60^0=0 \qquad F_{Ax}=6(N)$$

$$\sum F_y=0 \qquad F_{Ay}+N_1\cos 60^0-P=0 \qquad F_{Ay}=12.5(N)$$

取圆柱 C 为研究对象，受力如图所示。列平衡方程：

$$\sum F_x=0 \qquad N_1\cos 30^0-T\cos 30^0=0 \qquad T=6.93(N)$$

注意：由于绳子也拴在销钉上，因此以整体为研究对象求得的 A 处的约束力不是杆 AB 对销钉的作用力。

3-27 均质杆 AB 和 BC 完全相同，A 和 B 为铰链连接，C 端靠在粗糙的墙上，如图所示。设静摩擦因数 $f_s=0.353$。试求平衡时 θ 角的范围。

解：

取整体为研究对象，设杆长为 L，重为 P，受力如图所示。列平衡方程：

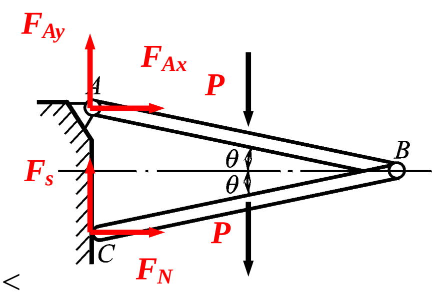
$$\sum M_A=0 \qquad F_N\cdot 2L\sin\theta-2P\cdot\frac{L}{2}\cos\theta=0 \qquad F_N=\frac{P}{2\tan\theta}$$

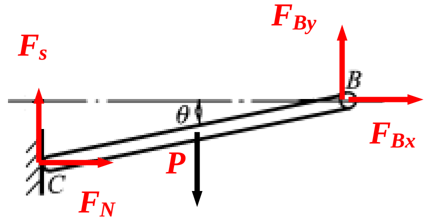
(1)

取杆 BC 为研究对象，受力如图所示。列平衡方程：

$$\sum M_B=0 \qquad F_N\cdot L\sin\theta+P\cdot\frac{L}{2}\cos\theta-F_s\cdot L\cos\theta=0 \qquad F_s=P$$

(2)





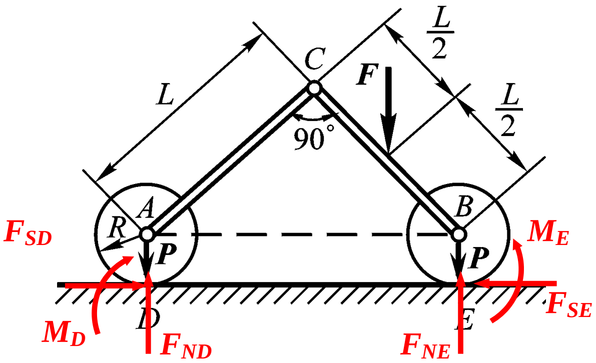
补充方程：$F_s\le$

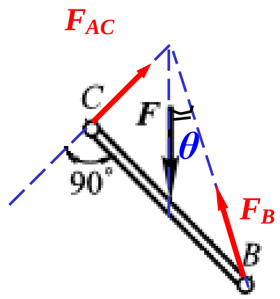
将(1)式和(2)式代入有：$\tan\theta\le\frac{f_s}{2}$，即 $\theta\le 10^0$。

3-30 如图所示机构中，已知两轮半径量 $R=10cm$，各重 $P=9N$，杆 AC 和 BC 重量不计。轮与地面间的静摩擦因数 $f_s=0.2$，滚动摩擦系数 $\delta=0.1cm$。今在 BC 杆中点加一垂直力 $\boldsymbol{F}$。试求：平衡时 F 的最大值 $F_{\max}$；
当 $F=F_{\max}$ 时，两轮在 D 和 E 点所受到的滑动摩擦力和滚动摩擦力偶矩。
解：
取整体为研究对象，受力如图所示，列平衡方程：

$$\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\end{cases}\qquad \begin{cases}F_{SD}-F_{SE}=0\\ F_{ND}+F_{NE}-F-2P=0\end{cases}$$

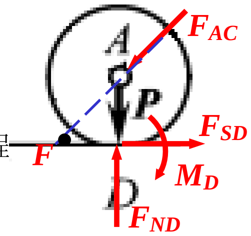
由题可知，杆 AC 为二力杆。作用在杆 BC 上的力有主动力 F，以及 B 和 C 处的约束力 F_B 和 F_{AC}，由三力平衡汇交，可确定约束力 F_B 和 F_{AC} 的方向如图所示，其中：$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$，杆 AC 受压。





取轮 A 为研究对象，受力如图所示，设 F_{AC} 的作用线与水平面交于 F 点，列平衡方程

$$\sum M_A=0\qquad F_{SD}\cdot R-M_D=0$$
$$\sum M_F=0\qquad (F_{ND}-P)\cdot R-M_D=0$$



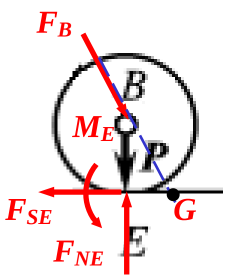
取轮 B 为研究对象，受力如图所示，设 F_B 的作用线与水平面交于 G 点，列平衡方程

$$\sum M_B=0\qquad M_E-F_{SE}\cdot R=0$$
$$\sum M_G=0\qquad M_E+(P-F_{NE})\cdot R\tan\theta=0$$

解以上六个方程，可得：

$$F_{ND}=P+\frac{1}{4}F,\qquad F_{NE}=P+\frac{3}{4}F,$$

$$F_{SD}=F_{SE}=\frac{1}{4}F,\qquad M_D=M_E=\frac{1}{4}FR$$



若结构保持平衡，则必须同时满足：

$$M_D\le\delta F_{ND},\quad M_E\le\delta F_{NE},\quad F_{SD}\le f_sF_{ND},\quad F_{SE}\le f_sF_{NE}$$

即：

$$F\le\min\{\frac{4\delta}{R-\delta}P,\frac{4\delta}{R-3\delta}P,\frac{4f_sP}{1-f_s},\frac{4f_sP}{1-3f_s}\}=\frac{4\delta}{R-\delta}P,$$

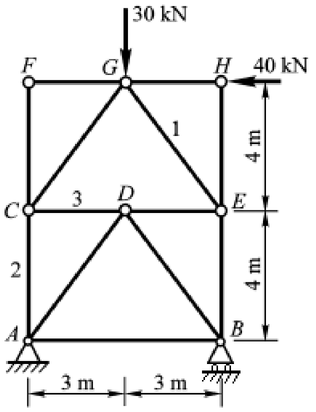
因此平衡时 F 的最大值 $F_{\max}=0.36$，此时：

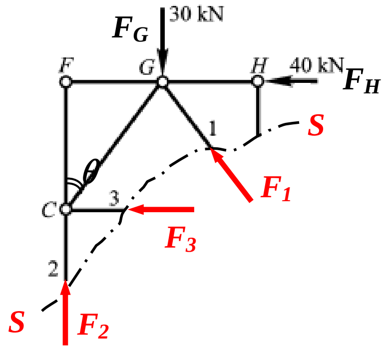
$$F_{SD}=F_{SE}=0.091(N),\qquad M_D=M_E=0.91(N\cdot cm)$$

3-35 试用简捷的方法计算图中所示桁架 1，2，3 杆的内力。

解：

由图可见杆桁架结构中杆 CF，FG，EH 为零力杆。用剖面 SS 将该结构分为两部分，取上面部分为研究对象，受力如图所示，列平衡方程：





$\sum M_C = 0$ $\quad$ $3 = 0$

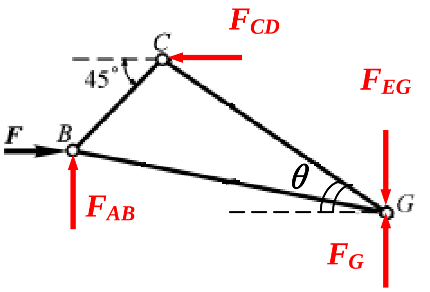
$\sum F_x = 0$ $\qquad -F_1 \sin\theta - F_3 - F_H = 0$ $\qquad F_3 = -31.3$ (受拉)

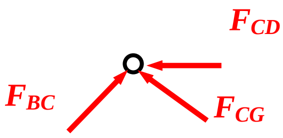
$\sum F_y = 0$ $\qquad F_2 + F_1 \cos\theta - F_G = 0$ $\qquad F_2 = 41.67$ (受压)

3-38 如图所示桁架中，*ABCDEG* 为正八角形的一半，AD, AE, GC, GB 各杆相交但不连接。试求杆 *BC* 的内力。

解：假设各杆均受压。取三角形 BCG 为研究对象，受力如图所示。列平衡方程：

$\sum F_x = 0$ $\qquad F - F_{CD} = 0$ $\qquad F_{CD} = F$ (受压)





取节点（ 方程：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{BC} \cos 45^0 - F_{CD} - F_{CG} \cos\theta = 0 \\ F_{BC} \sin 45^0 + F_{CG} \sin\theta = 0 \end{cases}$$

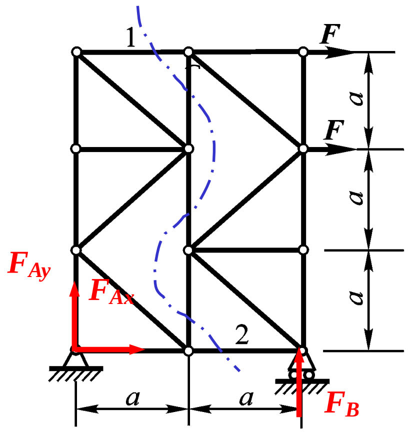
其中：$\tan\theta = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$，解以上两个方程可得：$F_{BC} = 0.586F$ (受压)

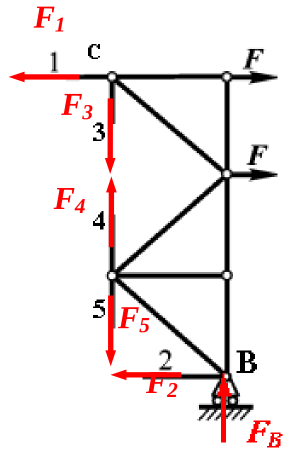
3-40 试求图中所示桁架中杆 1 和 2 的内力。

解：

取整体为研究对象，受力如图所示。列平衡方程：

$$\sum M_A = 0 \qquad F_B \cdot 2a - F \cdot 2a - F \cdot 3a = 0 \qquad F_B = 2.5F$$





用截面 S-S 立，取右边部分为研究对象，受力如图所示。列平衡方程：

$$\sum M_C = 0 \qquad F_B \cdot a + F \cdot a - F_2 \cdot 3a = 0 \qquad F_2 = \frac{7}{6}F\ (\text{受拉})$$

$$\sum F_X = 0 \qquad 2F - F_1 - F_2 = 0 \qquad F_1 = \frac{5}{6}F\ (\text{受拉})$$

4-1 力铅垂地作用于杆 *AO* 上, $AO = 6BO, CO_1 = 5DO_1$。在图示位置上杠杆水平，杆 *DC* 与 *DE* 垂直。试求物体 M 所受的挤压力 F_M 的大小。
解：

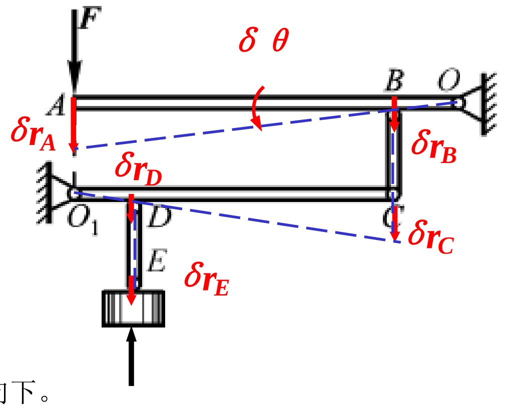
1. 选定由杆 OA，O₁C，DE 组成的系统为研究对象，该系统具有理想约束。作用在系统上的主动力为 F, F_M 。

2. 该系统的位置可通过杆 OA 与水平方向的夹角 θ 完全确定，有一个自由度。选参数 θ 为广义坐标。

3. 在图示位置，不破坏约束的前提下，假定杆 OA 有一个微小的转角 $\delta\theta$ ，相应的各点的虚位移如下：

$$\delta r_A = \overline{OA} \cdot \delta\theta, \quad \delta r_B = \overline{OB} \cdot \delta\theta, \quad \delta r_C = \overline{O_1C} \cdot \delta\theta$$

$$\delta r_D = \overline{O_1D} \cdot \delta\theta, \quad \delta r_B = \delta r_C, \quad \delta r_D = \delta r_E$$



代入可得： $\delta r_A = 30\delta r_E$

4. 由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i) = 0$ 有：

$$F \cdot \delta r_A - F_M \cdot \delta r_E = (30F - F_M) \cdot \delta r_E = 0$$

对任意 $\delta r_E \neq 0$ 有： $F_M = 30F$ ，物体所受的挤压力的方向竖直向下。

4-4 如图所示长为 *l* 的均质杆 *AB*，其 *A* 端连有套筒，又可沿铅垂杆滑动。忽略摩擦及套筒重量，试求图示两种情况平衡时的角度 θ 。
解：4a
1. 选杆 AB 为研究对象，该系统具有理想约束。设杆重为 P, 作用在杆上的主动力为重力。
2. 该系统的位置可通过杆 AB 与 z 轴的夹角 θ 完全确定，有一个自由度。选参数 θ 为广义坐标。
由几何关系可知：

$$h = \frac{a}{\tan\theta}$$

杆的质心坐标可表示为：

$$z_C = \frac{a}{\tan\theta} - \frac{l}{2} \cdot \cos\theta$$

3. 在平衡位置，不破坏约束的前提下，假定杆 AB 逆时针旋转一个微小的角度 $\delta\theta$ ，则质心 C 的虚位移：

$$\delta z_C = -\frac{a}{\sin^2\theta}\delta\theta + \frac{l}{2}\sin\theta \cdot \delta\theta$$

4. 由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i) = 0$ 有：

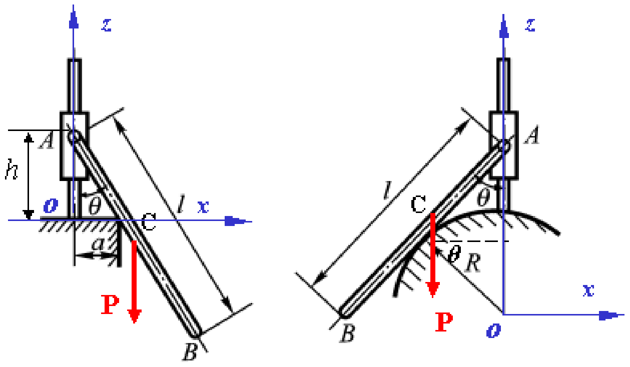
$$-P\cdot\delta z_C=-P\cdot(-\frac{a}{\sin^2\theta}+\frac{l}{2}\sin\theta)\delta\theta=0$$

对任意 $\delta\theta\neq 0$ 有：

$$-\frac{a}{\sin^2\theta}+\frac{l}{2}\sin\theta=0$$

即杆 AB 平衡时：

$$\theta=\arcsin(\frac{2a}{l})^{\frac{1}{3}}$$ 。



(a) (b)

解：4b

1. 选杆 AB 为研究对象，该系统具有理想约束。设杆重为 P, 作用在杆上的主动力为重力。

2. 该系统的位置可通过杆 AB 与 z 轴的夹角 θ 完全确定，有一个自由度。选参数 θ 为广义坐标。

由几何关系可知：

$$z_A=\frac{R}{\sin\theta}$$

杆的质心坐标可表示为：

$$z_C=\frac{R}{\sin\theta}-\frac{l}{2}\cdot\cos\theta$$

3. 在平衡位置，不破坏约束的前提下，假定杆 AB 顺时针旋转一个微小的角度 $\delta\theta$ ，则质心 C 的虚位移：

$$\delta z_C=-\frac{R}{\sin^2\theta}\cos\theta\cdot\delta\theta+\frac{l}{2}\sin\theta\cdot\delta\theta$$

4. 由虚位移原理 $\sum\delta W(F_i)=0$ 有：

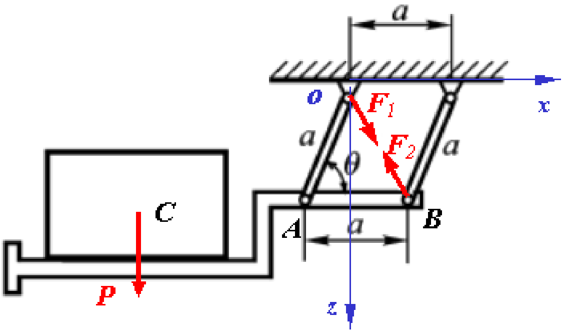
$$-P\cdot\delta z_C=-P\cdot(-\frac{R}{\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{l}{2}\sin\theta)\delta\theta=0$$

对任意 $\delta\theta\neq 0$ 有：

$$-\frac{R}{\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{l}{2}\sin\theta=0$$

即平衡时 θ 角满足：$2R\cos\theta-l\sin^3\theta=0$ 。

4-5 被抬起的简化台式打字机如图所示。打字机和搁板重 P，弹簧原长为 $\frac{a}{2}$，试求系统在 θ 角保持平衡时的弹簧刚度系数值。



解：

1. 选整个系统为研究对象，此系统包含弹簧。设弹簧力 F_1, F_2，且 $F_1 = F_2$，将弹簧力视为主动力。此时作用在系统上的主动力有 F_1, F_2，以及重力 P 。

2. 该系统只有一个自由度，选定 θ 为广义坐标。由几何关系可知：

$$z_A = z_B = a \cdot \sin\theta$$

3. 在平衡位置，不破坏约束的前提下，假定有一个微小的虚位移 $\delta\theta$，则质心的虚位移为：

$$\delta z_C = \delta z_A = \delta z_B = a\cos\theta \cdot \delta\theta$$

弹簧的长度 $l = 2a\sin\frac{\theta}{2}$，在微小虚位移 $\delta\theta$ 下：

$$\delta l = a\cos\frac{\theta}{2} \cdot \delta\theta$$

4. 由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i) = 0$ 有：

$$P \cdot \delta z_C - F_2 \cdot \delta l = (Pa \cdot \cos\theta - F_2 a \cdot \cos\frac{\theta}{2})\delta\theta = 0$$

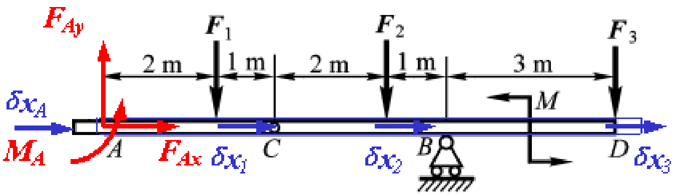
其中 $F_2 = k(2a\sin\frac{\theta}{2} - \frac{a}{2})$，代入上式整理可得：

$$[2P\cos\theta - ka(2\sin\theta - \cos\frac{\theta}{2})]\frac{a}{2}\delta\theta = 0$$

由于 $a \neq 0$，对任意 $\delta\theta \neq 0$ 可得平衡时弹簧刚度系数为：

$$k = \frac{2P\cos\theta}{a(2\sin\theta - \cos\frac{\theta}{2})}$$

4-6 复合梁 *AD* 的一端砌入墙内，*B* 点为活动铰链支座，*C* 点为铰链，作用于梁上的力 $F_1 = 5kN, F_2 = 4kN, F_3 = 3kN$，以及力偶矩为 $M = 2kN \cdot m$ 的力偶，如图所示。试求固定端 *A* 处的约束力。



解：

解除 A 端的约束，代之以 F_{Ax}, F_{Ay}, M_A，并将其视为主动力，此外系统还受到主动力 F_1, F_2, F_3, M 的作用。系统有三个自由度，选定 A 点的位移 x_A, y_A 和梁 AC 的转角 φ 为广义坐标。

1．在不破坏约束的前提下给定一组虚位移 $\delta x_A \neq 0, \delta y_A = 0, \delta\varphi = 0$，如图所示。由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i) = 0$ 有：

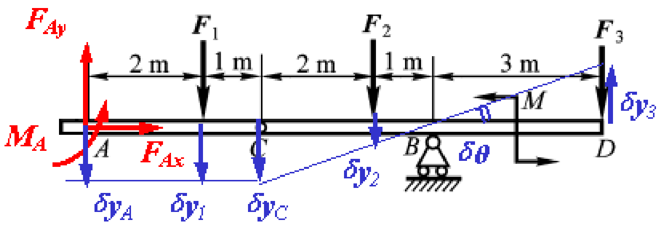
$$F_{Ax} \cdot \delta x_A = 0$$

对任意 $\delta x_A \neq 0$ 可得： $F_{Ax} = 0$

2．在不破坏约束的前提下给定一组虚位移 $\delta x_A = 0, \delta y_A \neq 0, \delta\varphi = 0$，如下图所示。由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i) = 0$ 有：

$$-F_{Ay} \cdot \delta y_A + F_1 \cdot \delta y_1 + F_2 \cdot \delta y_2 - F_3 \cdot \delta y_3 + M \cdot \delta\theta = 0$$

(1)



由几何关系可得各点的虚位移如下：

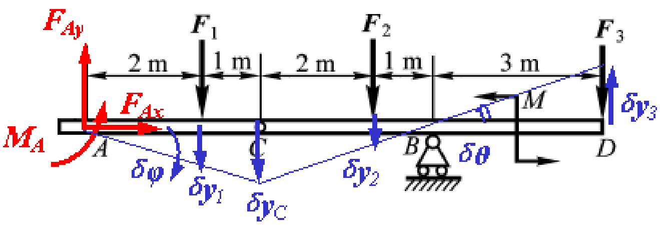
$$\delta y_1 = \delta y_C = \delta y_3 = \delta y_A \qquad \delta y_2 = \frac{1}{3}\delta y_C = \frac{1}{3}\delta y_A$$

$$\delta\theta = \frac{1}{3}\delta y_C = \frac{1}{3}\delta y_A$$

代入(1)式：

$$(-F_{Ay} + F_1 + \frac{1}{3}F_2 - F_3 + \frac{1}{3}M) \cdot \delta y_A = 0$$

对任意 $\delta x_A \neq 0$ 可得： $F_{Ay} = 4(kN)$，方向如图所示。



3．在不破坏约束的前提下给定一组虚位移 $\delta x_A = 0, \delta y_A = 0, \delta\varphi \neq 0$，如上图所示。

由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i)=0$ 有：

$$-M_A\cdot\delta\varphi+F_1\cdot\delta y_1+F_2\cdot\delta y_2-F_3\cdot\delta y_3+M\cdot\delta\theta=0 \qquad (2)$$

有几何关系可得各点的虚位移如下：

$$\delta y_1=2\delta\varphi \qquad \delta y_3=\delta y_C=3\delta\varphi$$
$$\delta\theta=\delta\varphi \qquad \delta y_2=\delta\theta=\delta\varphi$$

代入(2)式：

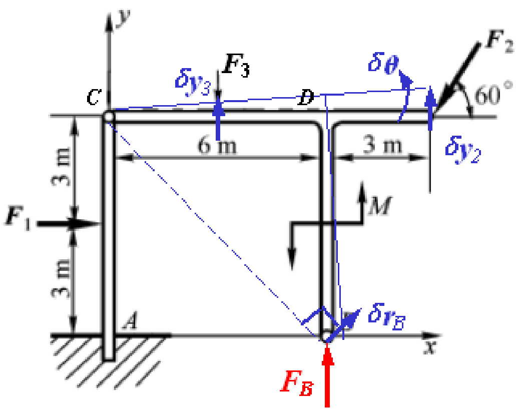
$$(-M_A+2F_1+F_2-3F_3+M)\cdot\delta\varphi=0$$

对任意 $\delta\varphi\neq 0$ 可得： $M_A=7(kN\cdot m)$，逆时针方向。

4-7 图示结构上的载荷如下：$q=2kN\cdot m$；力 $F_1=4kN$；力 $F_2=12kN$，其方向与水平成 60^o 角；以及力偶，其力偶矩为 $M=18kN\cdot m$。试求支座处的约束力。

解：

将均布载荷简化为作用在 CD 中点的集中载荷 F_3，大小为 $6q$ 。



1.求支座 B 处的约束力

解除 B 点处的约束，代之以力 F_B，并将其视为主动力，系统还受到主动力 F_1,F_2,F_3,M 的作用，如图所示。在不破坏约束的前提下，杆 AC 不动，梁 CDB 只能绕 C 点转动。系统有一个自由度，选转角 θ 为广义坐标。给定虚位移 $\delta\theta$，由虚位移原理 $\sum\delta W(F_i)=0$ 有：

$$F_B\cdot\delta r_B\cos 45^0+M\cdot\delta\theta+F_2\cdot\delta y_2\cos 150^0-F_3\cdot\delta y_3=0$$

(1)

各点的虚位移如下：

$$\delta r_B=6\sqrt{2}\cdot\delta\theta \qquad \delta y_2=9\cdot\delta\theta \qquad \delta y_3=3\cdot\delta\theta$$

代入(1)式整理可得：

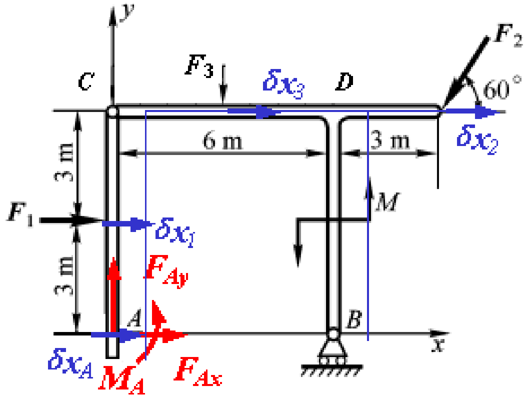
$$(6F_B+M-\frac{9\sqrt{3}}{2}F_2-3F_3)\cdot\delta\theta=0$$

对任意 $\delta\theta\neq 0$ 可得： $F_B=18.6(kN)$，方向如图所示。

2.求固定端 A 处的约束力

解除 A 端的约束，代之以 F_{Ax},F_{Ay},M_A，并将其视为主动力，系统还受到主动力 F_1,F_2,F_3,M 的作用。系统有三个自由度，选定 A 点的位移 x_A,y_A 和梁 AC 的转角 θ 为广

义坐标。



2a. 求 F_{Ax}

在不破坏约束的前提下给定一组虚位移 $\delta x_A \neq 0, \delta y_A = 0, \delta\theta = 0$，此时整个结构平移，如上图所示。由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i) = 0$ 有：

$$F_{Ax} \cdot \delta x_A + F_1 \cdot \delta x_1 + F_2 \cdot \delta x_2 \cos 120^0 = 0 \tag{2}$$

各点的虚位移如下：

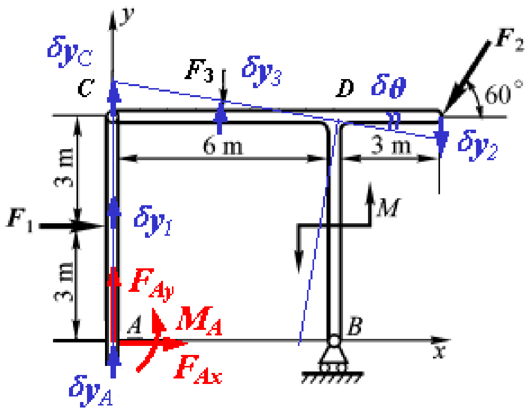
$$\delta x_1 = \delta x_2 = \delta x_A$$

代入(2)式整理可得：

$$(F_{Ax} + F_1 - 0.5F_2) \cdot \delta x_A = 0$$

对任意 $\delta x_A \neq 0$ 可得：$F_{Ax} = 2(kN)$，方向如图所示。

2b. 求 F_{Ay}



在不破坏约束的前提下给定一组虚位移 $\delta x_A = 0, \delta y_A \neq 0, \delta\theta = 0$，此时梁 AC 向上平移，梁 CDB 绕 D 点转动，如上图所示。由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i) = 0$ 有：

$$F_{Ay} \cdot \delta y_A - F_3 \cdot \delta y_3 + F_2 \cdot \delta y_2 \cos 30^0 - M \cdot \delta\theta = 0 \tag{3}$$

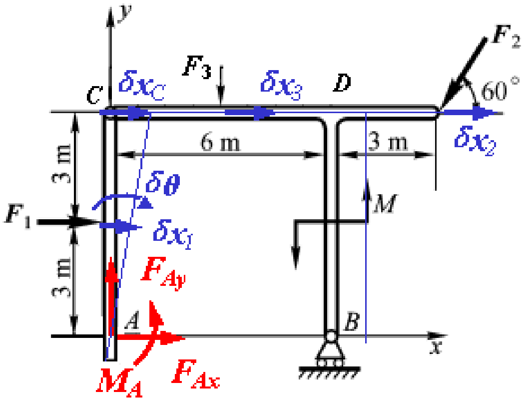
各点的虚位移如下：

$$\delta y_2 = \delta y_3 = \frac{1}{2}\delta y_C = \frac{1}{2}\delta y_A \qquad \delta\theta = \frac{1}{3}\delta y_2 = \frac{1}{6}\delta y_A$$

代入(3)式整理可得：

$$(F_{Ay}-\frac{1}{2}F_3+\frac{\sqrt{3}}{4}F_2-\frac{1}{6}M)\cdot\delta y_A=0$$

对任意 $\delta y_A \neq 0$ 可得： $F_{Ay}=3.8(kN)$，方向如图所示。



2c. 求 M_A

在不破坏约束的前提下给定一组虚位移 $\delta x_A=0, \delta y_A=0, \delta\theta\neq 0$，此时梁 AC 绕 A 点转动，梁 CDB 平移，如上图所示。由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i)=0$ 有：

$$-M_A\cdot\delta\theta+F_1\cdot\delta x_1+F_2\cdot\delta x_2\cos 120^0=0 \tag{4}$$

各点的虚位移如下：

$$\delta x_1=3\delta\theta \qquad \delta x_2=\delta x_C=6\delta\theta$$

代入(4)式整理可得：

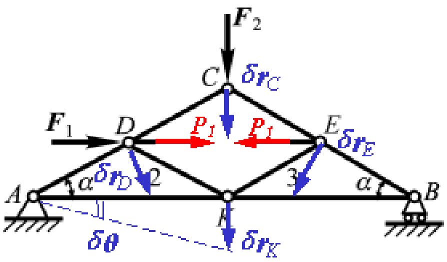
$$(-M_A+3F_1-3F_2)\cdot\delta\theta=0$$

对任意 $\delta\theta\neq 0$ 可得：$M_A=-24(kN\cdot m)$，顺时针方向。

4-8 设桁架有水平力 F_1 及铅垂力 F_2 作用其上，且 $AD=DC=CE=BE=DK=KE$，$\alpha=30^o$。试求杆 1，2 和 3 所受的力。

解：

假设各杆受拉，杆长均为 a。



1．求杆 1 受力

去掉杆 1，代之以力 P_1，系统有一个自由度，选 AK 与水平方向的夹角 θ 为广义坐标，如上图所示。在不破坏约束的条件下给定一组虚位移，此时三角形 ADK 形状不变，绕 A 点转动，因此有 $\delta r_D\perp\overline{AD}, \delta r_K\perp\overline{AK}$，且：

$$\delta r_D=a\cdot\delta\theta, \delta r_K=\sqrt{3}a\cdot\delta\theta$$

滑动支座 B 处只允许水平方向的位移，而杆 BK 上 K 点虚位移沿铅垂方向，故 B 点不动。

三角形 BEK 绕 B 点旋转 $\delta r_E \perp \overline{BE}$，且：

$$\delta r_E = \delta r_D = a \cdot \delta\theta$$

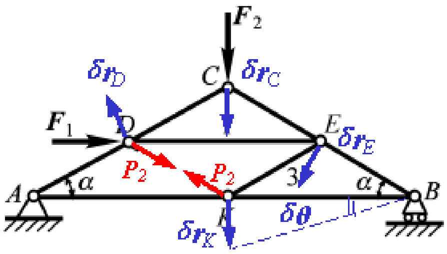
对刚性杆 CD 和杆 CE，由于 $\delta r_D \perp \overline{CD}, \delta r_E \perp \overline{CE}$，因此 $\delta r_C = 0$。由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i) = 0$ 有：

$$(F_1 + P_1) \cdot \delta r_D \cos 60^0 + P_1 \cdot \delta r_E \cos 60^0 = 0$$

代入各点的虚位移整理可得：

$$(F_1 + 2P_1) \cdot a\delta\theta = 0$$

对任意 $\delta\theta \neq 0$ 可得：$P_1 = -\dfrac{F_1}{2}$ （受压）。



2．求杆 2 受力

去掉杆 2，代之以力 P_2，系统有一个自由度，选 BK 与水平方向的夹角 θ 为广义坐标，如上图所示。在不破坏约束的条件下给定一组虚位移，杆 AK 绕 A 点转动，因此有 $\delta r_K \perp \overline{AK}$，且：

$$\delta r_K = \sqrt{3}a \cdot \delta\theta$$

同理可知 B 点不动，三角形 BEK 绕 B 点旋转 $\delta r_E \perp \overline{BE}$，且：

$$\delta r_E = a \cdot \delta\theta \qquad \delta r_E = \delta r_D = a \cdot \delta\theta$$

杆 AD 绕 A 点转动 $\delta r_D \perp \overline{AD}$，由刚性杆 DE 上点 E 的虚位移可确定 D 点位移方向如图所示，且：

$$\delta r_D = \delta r_E = a \cdot \delta\theta$$

同理可知 $\delta r_C = 0$。由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i) = 0$ 有：

$$F_1 \cdot \delta r_D \cos 120^0 + P_2 \cdot \delta r_D \cos 150^0 + P_2 \cdot \delta r_K \cos 120^0 = 0$$

代入各点的虚位移整理可得：

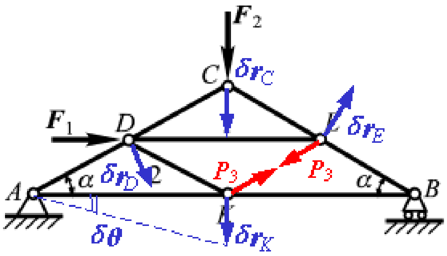
$$(F_1 + 2\sqrt{3}P_2) \cdot a\delta\theta = 0$$

对任意 $\delta\theta \neq 0$ 可得：$P_2 = -\dfrac{\sqrt{3}F_1}{6}$ （受压）。

3．求杆 3 受力

去掉杆 3，代之以力 P_3，系统有一个自由度，选 AK 与水平方向的夹角 θ 为广义坐标，如上图所示。在不破坏约束的条件下给定一组虚位移，三角形 ADK 绕 A 点转动，$\delta r_D \perp \overline{AD}, \delta r_K \perp \overline{AK}$，且：

$$\delta r_D = a \cdot \delta\theta, \delta r_K = \sqrt{3}a \cdot \delta\theta$$



同理可知 B 点不动，$\delta r_E \perp \overline{BE}$，且：

$$\delta r_E = \delta r_D = a\cdot\delta\theta \qquad \delta r_C = 0$$

由虚位移原理 $\sum \delta W(F_i) = 0$ 有：

$$F_1\cdot\delta r_D\cos 60^0 + P_3\cdot\delta r_E\cos 150^0 + P_3\cdot\delta r_K\cos 120^0 = 0$$

代入各点的虚位移整理可得：

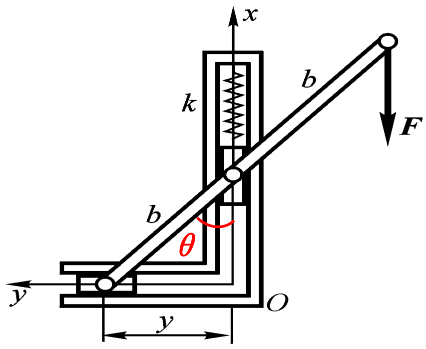
$$(F_1 - 2\sqrt{3}P_3)\cdot a\delta\theta = 0$$

对任意 $\delta\theta \neq 0$ 可得：$P_3 = \dfrac{\sqrt{3}F_1}{6}$ （受拉）。

4-12 杆长 2b，重量不计，其一端作用铅垂常力 $\boldsymbol{F}$，另一端在水平滑道上运动，中点连接弹簧，如图所示。弹簧刚度系数为 k，当 $y=0$ 时为原长。不计滑块的重量和摩擦，试求平衡位置 y，讨论此平衡位置的稳定性。

解：

F 大小和方向不变，常力也是有势力。取杆和弹簧构成的系统为研究对象。该系统为保守系统，有一个自由度，选 θ 为广义坐标，如图所示。取 $\theta=0$ 为零势能位置，则系统在任意位置的势能为：



$$\begin{aligned} V &= V_{弹} + V_F \\ &= \frac{1}{2}k(b - b\cos\theta)^2 - F(2b - 2b\cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}kb^2(1-\cos\theta)^2 - 2Fb(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

由平衡条件 $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$ 可得：

$$b[kb(1-\cos\theta) - 2F]\sin\theta = 0$$

有：$\sin\theta = 0$ 和 $kb(1-\cos\theta) - 2F = 0$

即：$\theta = 0$ 和 $\cos\theta = 1 - \dfrac{2F}{kb}$

也就是：$y = 0$ 和 $y = \dfrac{2}{k}\sqrt{F(kb-F)}$ 两个平衡位置。

为判断平衡的稳定性，取势能 V 的二阶导数：

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = (kb - 2F)b\cos\theta - kb^2\cos 2\theta$$

当 $\theta = 0$ 时，

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=-2Fb<0$$，即 $y=0$ 时是不稳定平衡。

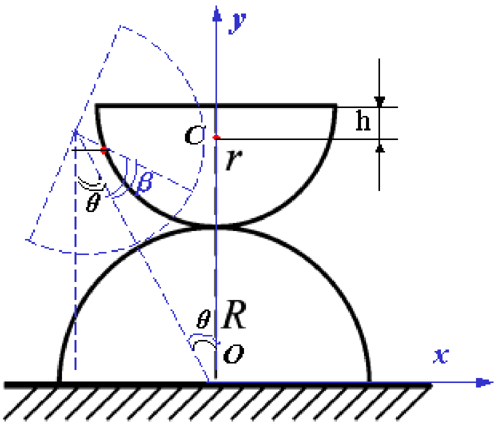
当 $\cos\theta=1-\dfrac{2F}{kb}$ 时，

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=\frac{4}{k}F(kb-F)$$

由上式可知：

1. 当 $\cos\theta=1-\dfrac{2F}{kb}$ 且 $kb>F$ 时，$\dfrac{d^2V}{d\theta^2}>0$ 即 $y=\dfrac{2}{k}\sqrt{F(kb-F)}$ 是稳定平衡位置；
2. 当 $\cos\theta=1-\dfrac{2F}{kb}$ 且 $kb\le F$ 时，$\dfrac{d^2V}{d\theta^2}\le 0$ 即 $y=\dfrac{2}{k}\sqrt{F(kb-F)}$ 是不稳定平衡位置。

4-15 半径为 r 的半圆住在另一半径为 R 的半圆柱上保持平衡，如图所示。试讨论对无滑动的滚动扰动的稳定性。



解：

取半径为 r 的半圆柱为研究对象，圆心为 C。半圆柱作纯滚动，有一个自由度，取两个半圆心连线与 y 轴夹角 θ 为广义坐标。作用在半圆柱上的主动力为重力，系统为保守系统，如图所示，其中 $h=\dfrac{4r}{3\pi}$。由于半圆柱作纯滚动，有：

$$\beta r=\theta R \qquad (1)$$

取坐标原点为零势能位置，则半圆柱在任意位置的势能为：

$$V=mgz_C=mg[(R+r)\cos\theta-\frac{4r}{3\pi}\cos(\beta+\theta)]$$

代入（1）式有：

$$V=mg[(R+r)\cos\theta-\frac{4r}{3\pi}\cos(\frac{R+r}{r}\theta)]$$

$$\frac{dV}{d\theta}=mg(R+r)[\frac{4}{3\pi}\sin(\frac{R+r}{r}\theta)-\sin\theta]$$

由平衡条件 $\dfrac{dV}{d\theta}=0$ 可得 $\theta=0$ 为平衡位置。势能 V 的二阶导数：

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=mg(R+r)[\frac{4(R+r)}{3\pi r}\cos(\frac{R+r}{r}\theta)-\cos\theta]$$

由上式可得当 $R>(\frac{3}{4}\pi-1)r$，$\theta=0$ 是稳定的。