第五章 函数

郑征

zhengz@buaa.edu.cn

软件与控制研究室

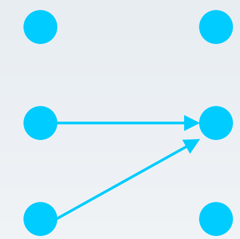
第1讲 函数

1. 函数，偏函数，全函数，真偏函数
2. 单射，满射，双射，计数问题
3. 象，原象
4. 常数函数，恒等函数，特征函数…
5. 合成(复合)，反函数，单边逆
6. 构造双射(有穷集，无穷集)

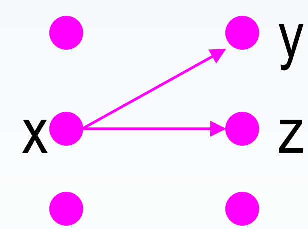
函数(function),映射(mapping)

- 单值的二元关系称为函数或映射
- 单值: $\forall x \in \mathrm{dom}F$, $\forall y,z \in \mathrm{ran}F$,

  $$xFy \wedge xFz \rightarrow y=z$$
- $F(x)=y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \Leftrightarrow xFy$
- $\varnothing$是空函数
- 常用F,G,H,...,f,g,h,...表示函数.



单值

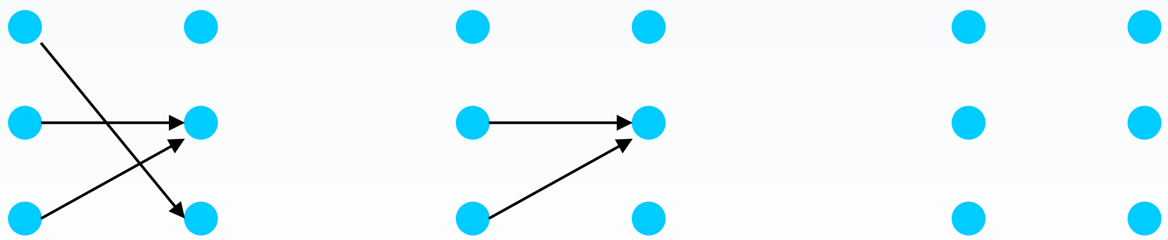


非单值

偏函数(partial function)

- 偏函数: $\mathrm{dom}F \subseteq A$
- A到B的偏函数: $\mathrm{dom}F \subseteq A \wedge \mathrm{ran}F \subseteq B$
- 偏函数记作 $F:A \to B$, 称A为F的前域,
- A到B的全体偏函数记为A⇸B

$$A⇸B = \{\, F \mid F:A \to B \,\}$$



例1

- 例1: 设 $A=\{a, b\}$, $B=\{1, 2\}$, 求$A \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} B$.
- 解: $|A|=2,|B|=2,|A\times B|=4,|P(A\times B)|=2^4=16$.

$f_0=\varnothing$, $f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$,

$f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

$f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$,$f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

$A \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} B = \{f_0 ,f_1 ,f_2 ,f_3 ,f_4 ,f_5,f_6 ,f_7 ,f_8\}$.   #

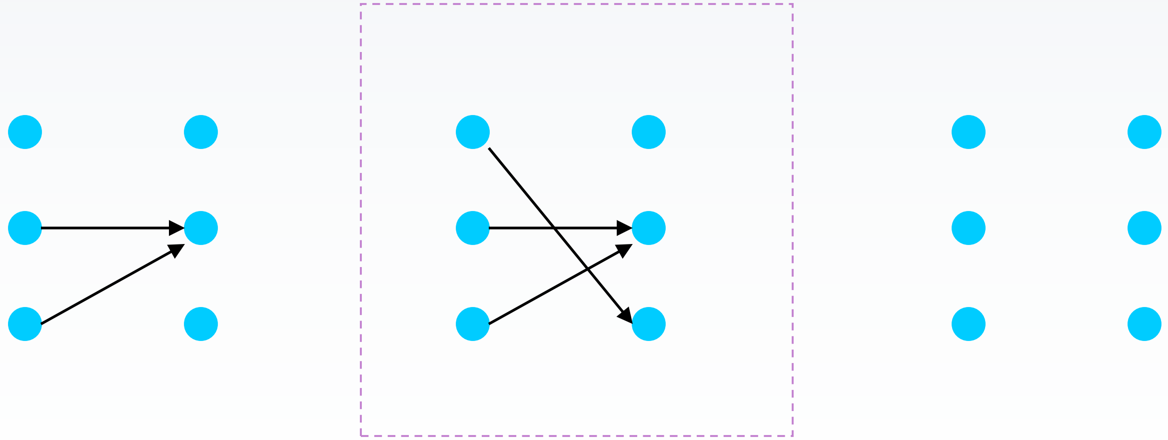
- 非函数: $\{<a,1>,<a,2>\}$, $\{<b,1>,<b,2>\}$,

  $\{<a,1>,<a,2>,<b,1>\}$,…

全函数(total function)

- 全函数: domF=A
- 全函数记作 F:A→B
- A到B的全体全函数记为B^A

$$B^A = \{\, F \mid F{:}A\to B \,\}$$



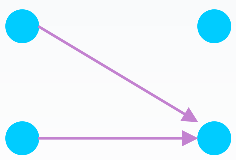
全函数性质

- 设 $F:A\to B$,
- 单射(injection): F是单根的
- 满射(surjection): ranF=B
- 双射(bijection): F既是单射又是满射, 亦称为一一对应(one-to-one mapping).

单根(single rooted): F是单根的$\Leftrightarrow$

$\forall y(\, y\in \mathrm{ran}\, F \to \exists! x(\, x\in \mathrm{dom}\, F \land xFy\,)\,)$

$\Leftrightarrow (\forall y\in \mathrm{ran}\, F)(\exists! x\in \mathrm{dom}\, F)(xFy)$



非满射

例2

- 例2: 设$A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$,

  $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$,

  $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,

  求$A_1 \rightarrow B_1$,$A_2 \rightarrow B_2$,$A_3 \rightarrow B_3$中的单射,满射,双射.

例2(解(1))

- 例2: (1) $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$,
- 解: (1) $A_1 \to B_1$中无满射,无双射,单射6个:

$f_1=\{<a,1>,<b,2>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,3>\}$,

$f_3=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_4=\{<a,2>,<b,3>\}$,

$f_5=\{<a,3>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,3>,<b,2>\}$.

B1中元素的个数多，所以不可能有满射，因为这样会使得A1中一个元素对应B1中的多个元素。

C_3^2

例2(解(2))

- 例2: (2) $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$,
- 解: (2) $A_2 \to B_2$中无单射,无双射,满射6个:

  $f_1=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>\}$,

  $f_2=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}$,

  $f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,1>\}$,

  $f_4=\{<a,1>,<b,2>,<c,2>\}$,

  $f_5=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$,

  $f_6=\{<a,2>,<b,2>,<c,1>\}$.

A2中元素的个数多，所以不可能有单射。注意此时的前提是domF=A2。

例2(解(3))

- 例2: (3) $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,
- 解: (3) $A_2 \to B_2$中双射6个:

  $f_1=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}$,

  $f_2=\{<a,1>,<b,3>,<c,2>\}$,

  $f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,3>\}$,

  $f_4=\{<a,2>,<b,3>,<c,1>\}$,

  $f_5=\{<a,3>,<b,1>,<c,2>\}$,

  $f_6=\{<a,3>,<b,2>,<c,1>\}$. #

问题

- 是否能预先计算单射、双射或满射的个数？

计数(counting)问题

- 设|A|=n, |B|=m, 问A→B中有多少单射,满射,双射?
- n<m时, A→B中无满射,双射, 单射个数为

  m(m-1)…(m-n+1)
- n=m时, A→B中双射个数为 n!
- n>m时, A→B中无单射,双射, 满射个数为

？？？

例3

- A,B是非空有穷集,讨论下列函数的性质

1. $f:A\to B$, $g:A\to A\times B$, $\forall a\in A$,

   $g(a)=\langle a, f(a)\rangle$

2. $f:A\times B\to A$, $\forall\langle a, b\rangle\in A\times B$,

   $f(\langle a, b\rangle)=a$

3. $f:A\times B\to B\times A$, $\forall\langle a,b\rangle\in A\times B$,

   $f(\langle a, b\rangle)=\langle b, a\rangle$

例3(解)

因为可能同时存在
<<a, b1>,a>和<<a,b2>,a>

元素数量为|A|*|B|

1. f:A→B,g:A→$\boxed{A\times B}$, ∀a∈A, g(a)=<a, f(a)>
   – 当|B|>1时,g是单射,非满射,非双射
   – 当|B|=1时,g是单射,满射,双射
2. f:A×B→A, ∀<a, b>∈A×B, f(<a, b>)=a
   – 当|B|>1时,f非单射,是满射,非双射
   – 当|B|=1时,f是单射,满射,双射
3. f:A×B→B×A,∀<a, b>∈A×B, f(<a, b>)=<b,a>
   – f是单射,满射,双射

象(image), 原象(preimage)

象(image):

$$F[A] = ran(F\upharpoonright A)$$

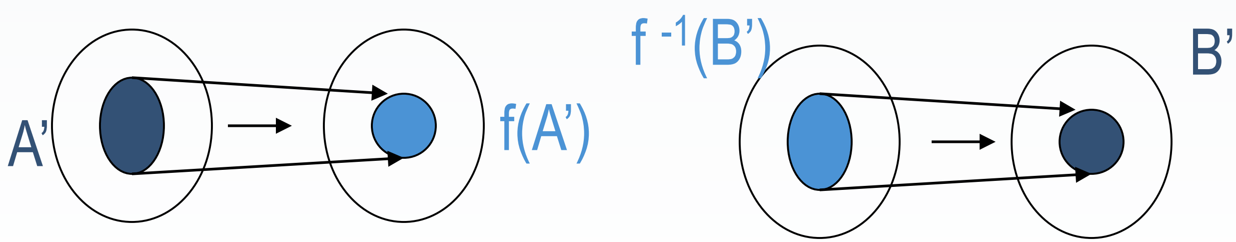
$$F[A] = \{\, y \mid \exists x(x \in A \wedge xFy) \,\}$$

- 设 $f:A\rightarrow B,\ A'\subseteq A,\ B'\subseteq B$
- A'的象是

$$f(A') = \{y|\exists x(x\in A'\wedge f(x)=y)\} \subseteq B$$

- $f(A) = ranf$
- B'的原象是

$$f^{-1}(B') = \{x|\exists y(y\in B'\wedge f(x)=y)\} \subseteq A$$



象,原象(举例)

- 例: $f:N\to N$, $f(x)=2x$.

  $A'=N_{偶}=\{0,2,4,6,\ldots\}=\{2k|k\in N\}$,

  $f(A')=\{0,4,8,12,\ldots\}=\{4k|k\in N\}$

  $B'=\{2+4k|k\in N\}=\{2,6,10,14,\ldots\}$,

  $f^{-1}(B')=\{1+2k|k\in N\} =\{1,3,5,7,\ldots\}=N_{奇}$

#

特殊函数

- 常数函数: $f:A\to B$, $\exists b\in B$, $\forall x\in A$, $f(x)=b$
- 恒等函数: $I_A:A\to A$, $I_A(x)=x$
- 特征函数: $\chi_A:E\to\{0,1\}$, $\chi_A(x)=1\Leftrightarrow x\in A$
- 单调函数: $f:A\to B$,$<A,\leq_A>$,$<B,\leq_B>$偏序集
  - 单调增: $\forall x,y\in A$, $x\leq_A y \Rightarrow f(x)\leq_B f(y)$
  - 单调减: $\forall x,y\in A$, $x\leq_A y \Rightarrow f(y)\leq_B f(x)$,
  - 严格单调: 把$\leq$换成$<$
- 自然映射: $f:A\to A/R$, $f(x)=[x]_R$, R为A上等价关系

函数运算

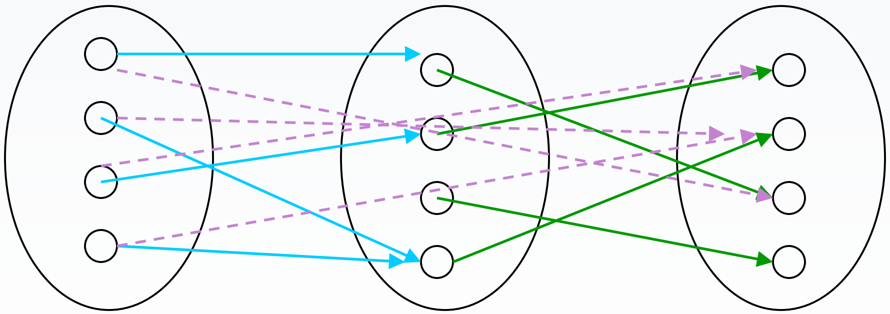
- 合成(复合): 性质, 左(右)单位元, 单调性
- 反函数: 存在条件(双射才有反函数)
- 单边逆: 左逆, 右逆, 存在条件

函数合成(composite)

- 定理3: 设 g:A→B, f:B→C, 则

  $f\bigcirc g$: A→C, $f\bigcirc g(x)=f(g(x))$.

- 证明思路:
  - $f\bigcirc g$是函数(即$f\bigcirc g$单值)
  - dom $f\bigcirc g$ = A
  - ran $f\bigcirc g \subseteq C$, $f\bigcirc g(x)=f(g(x))$



定理3(证明)

- 证明: (1) f○g是函数,即f○g是单值的.

证明自学

$\forall x \in dom(f \bigcirc g)$, 若$\exists z_1, z_2 \in ran(f \bigcirc g)$,则

$x(f \bigcirc g)z_1 \wedge x(f \bigcirc g)z_2$

$\Leftrightarrow \exists y_1(y_1 \in B \wedge xgy_1 \wedge y_1fz_1) \wedge \exists y_2(y_2 \in B \wedge xgy_2 \wedge y_2fz_2)$

$\Leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2(y_1 \in B \wedge y_2 \in B \wedge xgy_1 \wedge xgy_2 \wedge y_1fz_1 \wedge y_2fz_2)$

$\Rightarrow \exists y(y \in B \wedge y_1 = y_2 = y \wedge y_1fz_1 \wedge y_2fz_2)$

$\Rightarrow z_1 = z_2$

定理3(证明)

- 证明: (2) $dom(f \bigcirc g) = A$.

  显然$dom(f \bigcirc g) \subseteq A$, 下证$A \subseteq dom(f \bigcirc g)$,

$\forall x,\ x \in A$

$\Rightarrow\ \exists! y(y \in B \wedge xgy)$

$\Rightarrow\ \exists! y \exists! z(y \in B \wedge z \in C \wedge xgy \wedge yfz)$

$\Rightarrow\ \exists! z(z \in C \wedge x(f \bigcirc g)z)$

$\Rightarrow\ x \in dom(f \bigcirc g)$.

定理3(证明)

- 证明: (3) $f○g(x)=f(g(x))$.

由(1)(2)知$ran(f○g)\subseteq C$,

$\forall x, x\in A$

$\Rightarrow \exists!z(z\in C\wedge z=f○g(x))$

$\Leftrightarrow \exists!z\exists!y(z\in C\wedge y\in B\wedge y=g(x)\wedge z=f(y))$

$\Leftrightarrow \exists!z(z\in C\wedge z=f(g(x)))$

所以对任意$x\in A$, 有,$f○g(x)=f(g(x))$. #

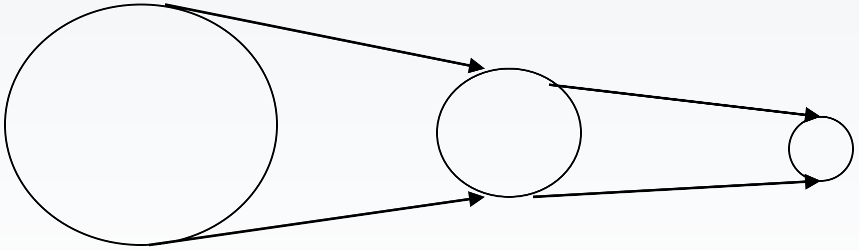
定理4

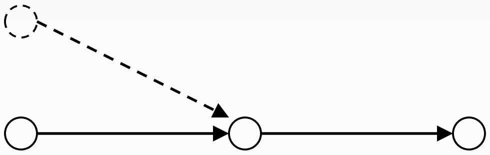
- 定理4: 设 g:A→B, f:B→C, f○g:A→C,则

(1) f,g均为满射, 则 f○g也是满射.

(2) f,g均为单射, 则 f○g也是单射.

(3) f,g均为双射, 则 f○g也是双射. #





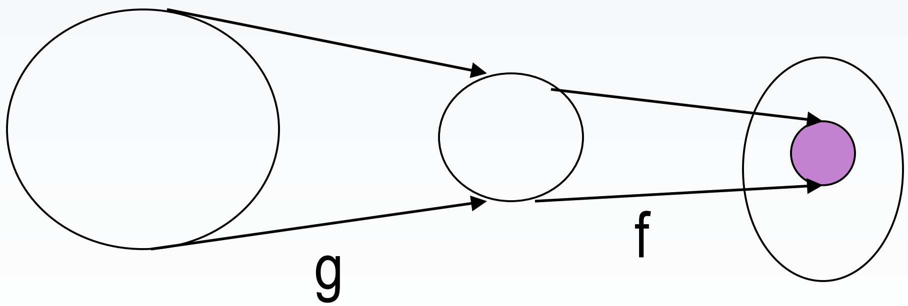
定理5

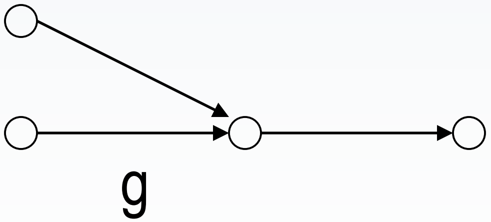
- 定理5: 设 $f:A \to B$, $g:B \to C$, 则

  (1) 若f○g为满射, 则?.

  (2) 若f○g为单射, 则?.

  (3) 若f○g为双射, 则?.



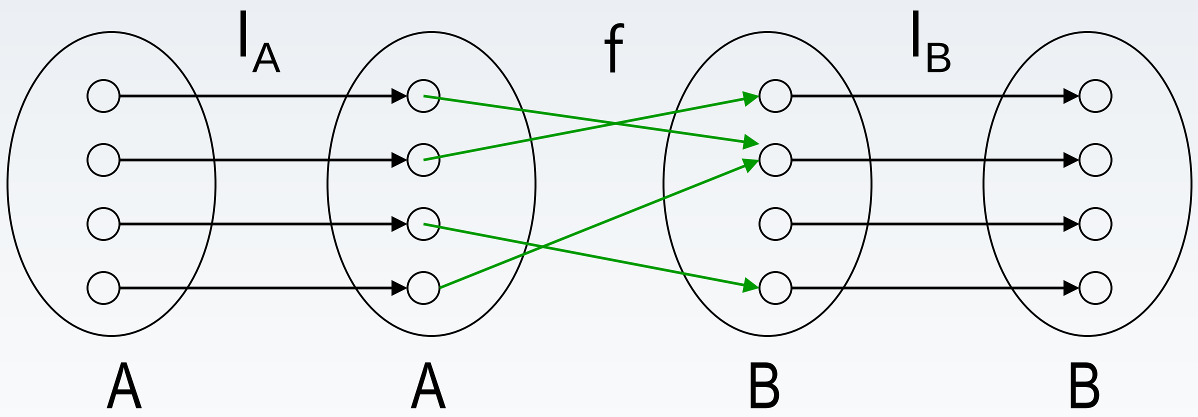


自己思考

定理6

恒等函数

- 定理6: 设 f:A→B, 则 $f=f\circ I_B=I_A\circ f$. #



定理7(单调性)

- 定理7: 设 $f:R\to R$, $g:R\to R$, 且f,g按$\le$是单调增的，则$f\circ g$也是单调增的.
- 证明: $x\le y \Rightarrow g(x)\le g(y) \Rightarrow f(g(x))\le f(g(y))$. #

反函数(inverse function)

- 定理8: 设 f:A→B, 且为双射,则

  $f^{-1}:B\to A$, 且也为双射. #

- 反函数: 若f:A→B为双射, 则$f^{-1}:B\to A$称为f的反函数.

- 定理9：设f: A→B是双射的，则

  $$f^{-1}of=I_B, fof^{-1}=I_A$$

总结

- 概念: 函数,偏函数,全函数,真偏函数
- 性质: 单射, 满射, 双射, 计数问题
- 术语: 象, 原象
- 特殊函数: 常数,恒等,特征,单调,自然映射
- 运算: 合成(复合), 反函数