北航工科数分
第一学期期末
基础技能梳理

2015-1-5

考试题型

5道选择题，共20分
5道计算题，共30分
5道大题，共50分
~~1道附加题（计入总分）？？？~~

目录

一. 不定积分

二. 定积分

三. 定积分的几何应用

四. 反常积分

五. 常微分方程

一.不定积分

考察形式：一般为2-3个小题。

主要涉及5.1-5.4的内容，多是很巧的方法，需要用到5.5很复杂计算的题目几乎没有。

1.基本类型

$$\frac{b}{x+a}$$

$$\frac{cx+d}{x^2+ax+b}$$

$$\frac{cx+d}{\sqrt{x^2+ax+b}}$$

$$\sqrt{x^2+ax+b}$$

2.两种乘积型

$\ln x$与$1/x$　　$\arcsin x$与$\sqrt{1-x^2}$

$\arctan x$与$\frac{1}{1+x^2}$　　凑微分

两种不同类型的函数乘积分部积分：

指数、三角>幂函数>反三角、对数

两种不同类型的复合通常利用“构造1”法进行分部积分

3.带根号的有理式

主要掌握常用三角代换

根式格格不入时设整体为t

有m次根号、n次根号，设t=mn次根号

4.三角函数

主要考虑以下技巧：

（1）通过三角变换（倍角公式）降次

（2）同除cosx构造关于tanx的式子

（3）同除(cosx)^2

（4）利用三角对称性

（5）分母为一次可以考虑万能公式

（6）凑dsinx、dcosx、dtanx

5.其它技巧

（1）二次分部积分凑原项
（2）倒代换x=1/t

参考例题：

《教》与《巩》大部分习题请熟练掌握

技巧性过高、计算量过于复杂的无需掌握

二. 定积分

考察形式：小题考计算、大题考证明。
本章为期末考试核心内容。约占20-30分。

1.定积分定义与可积性

主要考察通过定积分计算的数列极限。可能考察可积性理论。

参考例题：

《教》P193 定理6.2.5、定理6.2.6的证明；P195例6.2.3的证明

《教》 P201: 1(1) - (3); P231: 5; P235:1 P238: (1) (2) (4)

《巩》P126: 例1 例2

2.定积分的计算

　　一般考察通过换元、分部采用不定积分的方式（Newton-Leibniz公式）进行计算。

　　注意：

（1）换元时同时换上下限

（2）采用对称性、周期性简化计算

（3）利用《巩》P127例4公式简化计算

（4）利用面积简化计算

（5）若计算原函数不存在的定积分，往往用分部积分或中值定理

参考例题：

《教》 P206: 1、2
《巩》P128:例5、例6; P133: 例4 - 例7

3.变上限积分

会求变上限积分的导数，会使用洛必达法则计算变上限积分函数商的极限。

参考例题：

《教》 P201: 2、3、4、6
《巩》P128: 例1 例2 例5 例7 例8

4.定积分的证明（含中值定理）

首先观察所要证明的式子是等式还是不等式。

如果是等式，看其是否有ξ。若有，通常考虑（微分、积分）中值定理或罗尔定理（如《巩》P144例13）；若没有，通常直接证明即可（如《巩》P144例14）或分部积分（如《巩》P140例3（1））。

如果是不等式，改为证恒大于等于0的形式。然后采用变上限法（变b为x，如《巩》P139例2、例8、例9）或恒正积分法（找一个正的式子对其积分，如《巩》P138例1法一）。

参考例题：

《教》 P196: 4; P202: 8; P210: 2、3(1)

《巩》P138: 例1 例2 例3 例5 例8 例9 例10 例13 例14

三. 定积分的几何应用

考察形式：一般为一个小题计算弧长、一个大题考查面积、侧面积、体积。曲率，质心。

显式方程、参数方程、极坐标问题都可能涉及。

可能与求最值等问题联系起来。计算量较大。

参考例题：

《教》 P229: (1) (2); P231: 5; P235:1 P238: (1) (2) (4)

《巩》P151: 例1 例2 例3; P152: 例1; P155: 例3 例6

了解常用极坐标、参数方程曲线的形状

四. 反常积分

考察形式：一般为一个小题计算瑕积分、一个大题判断无穷积分的绝对敛散性。

1.判断无穷积分的（绝对）敛散性

首先观察f(x)是非负函数（只由lnx、x^p构成）还是一般函数（包含sinx、cosx）。

若是非负函数，首先预判f(x)的敛散性（根据等价无穷大）。若收敛，构造幂函数g(x)使商f/g极限为0；若发散，构造幂函数g(x)使商f/g极限为正无穷。

比较判别法、极限判别法

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$$

若是一般函数。通常令$f(x)=\sin x$或$\cos x$，$g(x)=$剩下的部分。

不加绝对值时，算g是否单调趋于0（单调性通过求导，趋于0显然），考虑D判别法。

加绝对值时，通常利用$|\cos x|>|(\cos x)^2|=|(\cos 2x-1)/2|$或$|\sin x|>|(\sin x)^2|=|(1-2\cos 2x)/2|$，一部分利用D判别法知其收敛，一部分不收敛，故整体不收敛。

Dirichlet判别法、Abel判别法

2.计算瑕积分的值

一般采用换元法，把瑕点消去转化为定积分。

必要时，可采用ε语言，把计算瑕积分转化为计算带ε的定积分再对ε求极限。

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx,\ \int_0^1 \ln x dx$$

参考例题：

《教》 P251: (1) - (7); P253: 1; P257:1 2 P238: (1) (2) (4); P261: 1(1) - (4)

瑕积分部分只考非常简单的计算（定积分方法），无需专门复习

五：常微分方程

1. 分离变量
2. 一阶线性微分方程
3.二阶常系数线性常微分方程

可分离变量微分方程

可分离变量方程

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y)$$

$$M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)\;N_2(y)\,dy = 0$$

$\Big\downarrow$ 转化

解分离变量方程 $g(y)\,dy = f(x)\,dx$

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

$$G(y) = F(x) + C$$

注意取ln后的常数C的处理以及增根处理

(I) 形如

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2.5)$$

方程称为齐次方程, 这里$g(u)$是u的连续函数.

求解方法: 1^0 作变量代换(引入新变量)$u=\dfrac{y}{x}$,方程化为

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}, \qquad (\text{这里由于}\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u)$$

2^0 解以上的变量分离方程

3^0 变量还原.

一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

若 $Q(x)\equiv 0$, 称为一阶线性**齐次微分方程**;

若 $Q(x)\not\equiv 0$, 称为一阶线性**非齐次微分方程**.

解齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

故通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

通解 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根 : r_1, r_2

特 征 根	通　　解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数})$$

一、$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

当 λ 是特征方程的 k 重根 时，可设

特解 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x} \quad (k = 0, 1, 2)$

二、$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\widetilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

对非齐次方程

$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\widetilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

$(p, q$ 为常数$)$

$\lambda+\mathrm{i}\omega$为特征方程的 k 重根 ($k=0, 1$), 则可设特解:

$$y^*=x^k\,\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m\cos\omega x+\widetilde{R}_m\sin\omega x]$$

其中 $m=\max\{n, l\}$