

北京航空航天大学

2012—2013 学年 第一学期期末考试

《 工科数学分析 ( I ) 》

(A 卷)

班号\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
成 绩							
阅卷人							
校对入							

2013 年 01 月 17 日

### 一、 计算题（每题 5 分，满分 50 分）

$$1、 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx &= 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{1+x} d\sqrt{x} \\ &= 2 \int \arctan \sqrt{x} d \arctan \sqrt{x} \\ &= (\arctan \sqrt{x})^2 + C \end{aligned}$$

建议：前面过程 4 分，结果 1 分（也可以先做变量代换  $t = \sqrt{x}$ ）

$$2、 \int \frac{x}{x^2 - 4x + 5} dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 4x + 5} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x - 4) + 2}{x^2 - 4x + 5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 4x + 5)}{x^2 - 4x + 5} + 2 \int \frac{d(x - 2)}{(x - 2)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) + 2 \arctan(x - 2) + C \end{aligned}$$

建议：分解成两个积分 3 分，结果 2 分

$$3、 \text{ 设 } f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt, \quad x \in (0, +\infty), \text{ 求 } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_1^x \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(u+1)} dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt - \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \int_1^x \ln t d \ln t = \frac{1}{2} \ln^2 x$$

建议：  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  换元两分，其他 3 分

$$4、 \text{ 利用定积分定义求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{1}{n + \sqrt{2n}} + \frac{1}{n + \sqrt{3n}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n \cdot n}} \right).$$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{n}{n}}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$$

令  $\sqrt{x} = t$ , 即  $x = t^2$ , 则  $dx = 2t dt$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t} 2t dt = \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dx = 2 - 2 \ln(1+t) \Big|_0^1 = 2 - 2 \ln 2$$

所以, 原式  $= 2 - 2 \ln 2$ .

建议: 写出对应的定积分 3 分, 计算 2 分

5、 
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^{2013} + \sin^2 x) \cos x dx$$

$$\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

建议: 对称性 2 分, 其他 3 分

6、 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} \arctan(1+t) dt}{2x(1-\cos x)}$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^3} \arctan(1+t) dt}{2x \cdot \frac{1}{2} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+x^3) \cdot 3x^2}{3x^2} = \frac{\pi}{4}$$

建议: 变上限积分求导 2 分, 其他 3 分

7、求曲线  $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$  上相应于参数  $t$  从 0 到  $\pi$  的一段弧长.

$$\text{弧长} = \int_0^\pi \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2} dt = \int_0^\pi t dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

建议: 弧长公式 2 分, 其他 3 分

8、判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$  的敛散性.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = 4 > 1$$

$$\therefore \text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ 发散.}$$

建议: 第一个等号 2 分, 其他 3 分

9、判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}))$  的敛散性.

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \text{ -----2 分}$$

$$\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} (n \rightarrow \infty) \text{ -----2 分}$$

由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛知,  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}))$  收敛. -----1 分

10、讨论广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$  的敛散性.

$n > 1$  时, 存在正数  $\delta$ , 满足  $n - \delta > 1$ , 由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^n}}{\frac{1}{x^{n-\delta}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\delta} = 0 \text{ 知广义积分收敛. -----3 分}$$

$n < 1$  时, 由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^n}}{\frac{1}{x^n}} = +\infty \text{ 知广义积分发散 -----2 分}$$

二、(本题 10 分)

设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有二阶连续导数,  $f(0) = -f(1)$ , 证明

$$(1) \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x-1) f''(x) dx$$

$$(2) \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$$

证明: (1) 由分部积分

$$\because \int_0^1 x(x-1) f''(x) dx = x(x-1) f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) (2x-1) dx \text{ -----2 分}$$

$$= -(2x-1) f(x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 f(x) dx \text{ -----2 分}$$

$$= 2 \int_0^1 f(x) dx \text{ -----1 分}$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x-1) f''(x) dx.$$

(2) 由 (1) 可得

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |x(x-1)| |f''(x)| dx \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| \int_0^1 x(1-x) dx \text{-----3 分}$$

$$= \frac{1}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| \text{-----2 分}$$

### 三、（本题 15 分）

过点  $(1, 0)$  作抛物线  $y = \sqrt{x-2}$  的切线，该切线与上述曲线及  $x$  轴围成一平面图形 A，求 A 的面积及其绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积。

解：假设切点坐标为  $(x_0, y_0)$ ，则由  $\begin{cases} y_0 = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x_0-1) \\ y_0 = \sqrt{x_0-2} \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases}$  -----3 分

从而切线方程为  $y = \frac{1}{2}(x-1)$  .-----2 分

切线与抛物线及  $x$  轴所围图形 A 的面积为  $S = \int_1^3 \frac{1}{2}(x-1) dx - \int_2^3 \sqrt{x-2} dx = \frac{1}{3}$  -----5 分

A 绕  $x$  轴旋转一周所成旋转体的体积为  $V = \pi \left[ \int_1^3 \left( \frac{x-1}{2} \right)^2 dx - \int_2^3 (\sqrt{x-2})^2 dx \right] = \frac{\pi}{6}$  -----5 分

### 四、（本题 10 分）

设  $f(x)$  是  $[1, +\infty)$  上的单调且连续可微函数， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ，如果  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛，则  $\int_1^{+\infty} xf'(x) dx$  收敛。

证明： $\int_1^{+\infty} xf'(x) dx = xf(x) \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} f(x) dx$  -----2 分

只需要证明在已知条件下  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$  存在。

不妨假设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减，由  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛的 Cauchy 收敛定理

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall A_1, A_2 > A, \left| \int_{A_1}^{A_2} f(t) dt \right| < \varepsilon \text{-----4 分}$$

特别取  $\frac{x}{2} > A$ ，则由函数  $f(x)$  单调递减，且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ，可知对充分大的  $x, f(x) \geq 0$ ，则

$$\frac{x}{2} f(x) < \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt < \varepsilon \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0 \text{-----4 分}$$

得证！

### 五、（本题 15 分）

讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n$  的收敛性, 如果收敛, 要分析是绝对收敛还是条件收敛。

解:  $p \leq 0$  时, 通项  $\frac{\cos n}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n$  当  $n \rightarrow \infty$  时不收敛于 0, 此时发散. -----2 分

$p > 1$  时,  $\left| \frac{\cos n}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n \right| \leq \frac{e}{n^p}$ , 由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛及比较判别法知 -----4 分

原级数绝对收敛.

(也可由  $\left| \frac{\cos n}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n \right| \leq \frac{1}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛,  $(1 + \frac{1}{n})^n$  单调有界,

由 Abel 判别法  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n$  收敛, 从而原级数绝对收敛.)

$0 < p \leq 1$  时, 由 Dirichlet 判别法  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n$  收敛; -----2 分

而  $\left| \frac{\cos n}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n \right| \geq \frac{\cos^2 n}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{1 - \cos 2n}{2n^p} (1 + \frac{1}{n})^n$ , -----2 分

对  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p} (1 + \frac{1}{n})^n$ ,  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n \sim \frac{e}{n^p}$ ,  $0 < p \leq 1$  时发散; -----2 分

对  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n^p} (1 + \frac{1}{n})^n$ , 由 Dirichlet 判别法知其当  $0 < p \leq 1$  时收敛; -----2 分

所以当  $0 < p \leq 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n \right|$  发散.

从而  $0 < p \leq 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p} (1 + \frac{1}{n})^n$  条件收敛. -----1 分

综上, 原级数  $p \leq 0$  时发散,  $p > 1$  时绝对收敛,  $0 < p \leq 1$  时条件收敛.

## 六、附加题 (本题 10 分)

设函数当  $x$  充分大时可展开成  $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots$ , 式中  $\{a_n\}$  为非负

有界数列, 试证级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  收敛当且仅当  $a_0 = a_1 = 0$ .

证明：(1) 首先，若  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  收敛，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ , -----2 分

$$\text{其中 } f(n) = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots$$

又  $\{a_n\}$  有界，则存在  $M > 0$ , 使得  $|a_n| \leq M$ ,

$$\text{从而 } \left| \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots \right| \leq M \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \text{ 所以 } a_0 = 0. \text{-----2 分}$$

若  $a_1 \neq 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\frac{1}{n}} = a_1 \neq 0$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  发散, 矛盾! -----2 分

所以  $a_0 = a_1 = 0$ .

(2) 若  $a_0 = a_1 = 0$ , 则  $n$  充分大时,  $f(n) \leq \frac{2M}{n^2}$ . 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  收敛. -----4 分