4.51. $\alpha_1(r)=k_1 r^a$ $\alpha_2(r)=k_2 r^a$. $W(x)\geq k_3\|x\|^a$.

$\beta(r,s)=kr\cdot e^{-rs}$ $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))=k\mu$. $k=(\frac{k_2}{k_1})^{\frac{1}{a}}$, $\gamma=\frac{k_3}{k_2 a}$

∵ 定理4.18条件成立.

∴ $k_1\|x\|^a\leq V\leq k_2\|x\|^a$, $\dot V\leq -k_3\|x\|^a$, $\forall \|x\|\geq\mu>0$.

∴ 在 $V\geq k_2\mu^a$ 时,

$\|x\|\geq\mu$. $\dot V\leq -\frac{k_3}{k_2}V$, $V(t,x(t))\leq e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}V(t_0,x(t_0))$.

∴ $\|x(t)\|\leq(\frac{V(t,x(t))}{k_1})^{\frac{1}{a}}\leq(\frac{1}{k_1}e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}V(t_0,x(t_0)))^{\frac{1}{a}}$

∴ $\|x(t)\|\leq(\frac{1}{k_1}e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)}k_2\|x(t_0)\|^a)^{\frac{1}{a}}$

∴ $\|x(t)\|\leq(\frac{k_2}{k_1})^{\frac{1}{a}}e^{-\frac{k_3}{ak_2}(t-t_0)}\|x(t_0)\|=ke^{-\gamma(t-t_0)}\|x(t_0)\|$

∴ 即满足 $\|x(t)\|\leq\beta(\|x(t_0)\|,t-t_0)$, $\forall t_0\leq t\leq t_0+T$. (4.42).

对于 $t\geq t_0+T$, $\|x(t)\|\leq(\frac{V(t,x(t))}{k_1})^{\frac{1}{a}}\leq(\frac{k_2\mu^a}{k_1})^{\frac{1}{a}}=k\mu$.

∴ 即满足 $\|x(t)\|\leq\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$. $\forall t\geq t_0+T$.

4.54 (1). $\dot x=-(1+u)x^3$.

对于 $u(t)\equiv c>1$, 且 $x(0)=a>0$, $x(t)$ 随 $t\to\infty$ 而 $\to\infty$.

∴ 显然非状态-输入稳定.

---

(2). $\dot x=-(1+u)x^3-x^5$. 令 $V(x)=\frac{1}{2}x^2$.

$\dot V=x\dot x=-x^4+ux^4-x^6$, $x^4\geq0$, $x^6\geq0$. $\forall|x|>\sqrt{u}$.

∴ $\dot V=-x^4$, $\forall x>\sqrt{u}$.

∴ 系统为状态-输入稳定.

(3). $\dot{x} = -x + x^2 u$.

同(1)同理，系统非状态-输入稳定。

(4). $\dot{x} = x - x^3 + u$.

当 ~~≠~~ $u=0$ 时，系统在 $x=0$ 处不稳定，则非状态-输入稳定。

4.55. (1). $\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2$.

$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u$. 令 $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -(x_1^2 + x_2^2) + x_2 u = -\|x\|_2^2 + \|x\|_2 |u|$.

$= -(1-\theta)\|x\|_2^2 - \theta\|x\|_2^2 + \|x\|_2 |u|$

$\therefore \dot{V} \le -(1-\theta)\|x\|_2^2$. $\forall \|x\|_2 \ge \frac{|u|}{\theta}$, $0<\theta<1$.

$\therefore$ 系统 ~~状~~ 输入-状态稳定。

(2). $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$

$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u$. 令 $V(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot{V} = -x_1^4 - x_2^2 + x_2 u = -x_1^4 - (1-\theta)x_2^2 - \theta x_2^2 + x_2 u \le -x_1^4 - (1-\theta)x_2^2$, $|x_2| > \frac{|u|}{\theta}$

当 $|x_2| \le \frac{|u|}{\theta}$，$\dot{V} \le -(1-\theta)x_1^4 - \theta x_1^4 - x_2^2 + \frac{u^2}{\theta} \le -(1-\theta)x_1^4 - x_2^2$，$|x_1| \ge \sqrt{\frac{|u|}{\theta}}$.

$\therefore \dot{V} \le -(1-\theta)[x_1^4 + x_2^2]$. 系统输入-状态稳定。

(3). $\dot{x}_1 = x_2$.

$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 + u$. 令 $V = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_1^4$.

$\dot{V} = -2x_1^4 - 2x_2^2 + 2x_1 u + 4x_2 u \le -2x_1^4 - 2x_2^2 + 2|x_1||u| + 4|x_2||u|$.

$\because 4|x_2||u| = 2|x_2||2u| \le |x_2|^2 + 2|u|^2 \Rightarrow 2|x_1||u| = |x_1||2u| \le |x_1|^4 + (2|u|)^{\frac{4}{3}}$.

$\therefore \dot{V} \le -x_1^4 - x_2^2 + (2|u|)^{\frac{4}{3}} + 4|u|^2$，令 $\phi(r) = (2r)^{\frac{4}{3}} + 4r^2$，为K类函数。

$\therefore \dot{V} \le -x_1^4 - x_2^2 + \phi(|u|)$，根据引理4.3，存在 K_∞ 类函数 α_3.

$\forall \|x\| \ge \alpha_3^{-1}\left(\frac{\phi(|u|)}{\theta}\right)$，$\dot{V} \le -\alpha_3(\|x\|) + \phi(|u|) = -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|) - \theta\alpha_3(\|x\|) + \phi(|u|) \le -(1-\theta)\alpha_3(\|x\|)$

$\therefore$ 系统输入-状态稳定。

4.56. $\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$. $\dot{x}_2 = -x_2^3$.

以 x_2 作为输入时系统显然是输入-状态稳定的，且系统 $\dot{x}_2 = -x_2^3$ 原点显然是全局一致渐近稳定的，且据引理(4-7)，系统的原点是全局渐近稳定的。