第15.4节

常系数齐次线性微分方程

基本思路:

求解常系数线性齐次微分方程

$\big\downarrow$ 转化

求特征方程(代数方程)之根

二阶常系数齐次线性微分方程:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数}) \qquad ①$$

因为 r 为常数时,函数 e^{rx} 和它的导数只差常数因子,

所以令①的解为 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数),代入①得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

$$\longrightarrow r^2 + pr + q = 0 \qquad ②$$

称②为微分方程①的**特征方程**,其根称为**特征根**.

1. 当 $p^2 - 4q > 0$ 时,②有两个相异实根 r_1, r_2,则微分方程有两个线性无关的特解: $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$,

因此方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2. 当 $p^2 - 4q = 0$ 时, 特征方程有两个相等实根 $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$, 则微分方程有一个特解 $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$.

设另一特解 $y_2 = y_1 u(x) = \mathrm{e}^{r_1 x} u(x)$ ($u(x)$ 待定)

代入方程得:

$$\cancel{\mathrm{e}^{r_1 x}}[\,(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + q u\,] = 0$$

$$u'' + (\underline{2r_1 + p})u' + (\underline{r_1^2 + p r_1 + q})u = 0$$

注意 r_1 是特征方程的重根

$$u'' = 0$$

取 $u = x$, 则得 $y_2 = x\,\mathrm{e}^{r_1 x}$, 因此原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{r_1 x}$$

3. 当 $p^2-4q<0$ 时, 特征方程有一对共轭复根

$$r_1=\alpha+\mathrm{i}\,\beta,\quad r_2=\alpha-\mathrm{i}\,\beta$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\,\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x)$$

$$y_2=\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\,\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x-\mathrm{i}\sin\beta x)$$

利用解的叠加原理, 得原方程的线性无关特解:

$$\overline{y_1}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\overline{y_2}=\frac{1}{2\,\mathrm{i}}(y_1-y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

因此原方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

小结:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q\text{为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根 : r_1, r_2

特 征 根	通 解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

以上结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

例1. 求方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^2-2r-3=0$, 特征根: $r_1=-1, r_2=3$,

因此原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$

例2. 求解初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s=0\\ \underline{s\big|_{t=0}=4}, \quad \underline{\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-2}\end{cases}$

解: 特征方程 $r^2+2r+1=0$ 有重根 $r_1=r_2=-1$,

因此原方程的通解为 $s=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}$

利用初始条件得 $C_1=4, \quad C_2=2$

于是所求初值问题的解为 $s=(4+2t)\mathrm{e}^{-t}$

内容小结

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征根: $r_1\,,r_2$

(1) 当 $r_1 \neq r_2$ 时，通解为 $y = C_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{r_2 x}$

(2) 当 $r_1 = r_2$ 时，通解为 $y = (C_1 + C_2\,x)\,\mathrm{e}^{r_1 x}$

(3) 当 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta\,\mathrm{i}$ 时，通解为

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

可推广到高阶常系数线性齐次方程求通解 .

推广：

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ (a_k 均为常数)

特征方程: $r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$

若特征方程含 k 重实根 r, 则其通解中必含对应项

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{rx}$$

若特征方程含 k 重复根 $r = \alpha \pm i\beta$, 则其通解中必含对应项

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos\beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin\beta x]$$

(以上 C_i, D_i 均为任意常数)

思考与练习

求方程 $y'' + a\,y = 0$ 的通解.

答案: $a = 0$: 通解为 $y = C_1 + C_2\,x$

$a > 0$: 通解为 $y = C_1 \cos\sqrt{a}\,x + C_2 \sin\sqrt{a}\,x$

$a < 0$: 通解为 $y = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-a}\,x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-a}\,x}$

备用题 求一个以 $y_1 = \mathrm{e}^x,\ y_2 = 2x\mathrm{e}^x,\ y_3 = \cos 2x,$ $y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的 4 阶常系数线性齐次微分方程,并求其通解.

解: 根据给定的特解知特征方程有根:

$$r_1 = r_2 = 1, \quad r_{3,4} = \pm 2\mathrm{i}$$

因此特征方程为 $(r-1)^2\,(r^2+4) = 0$

即 $$r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = 0$$

故所求方程为 $$y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$$

其通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x + C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x$

常系数非齐次线性微分方程

一、 $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} P_m(x)$ 型

二、 $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$ 型

二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (\,p, q \text{ 为常数}) \qquad ①$$

根据解的结构定理，其通解为

$$y = Y + y^*$$

齐次方程通解　非齐次方程特解

求特解的方法 — **待定系数法**

根据 $f(x)$ 的特殊形式，**给出特解** y^* 的待定形式，

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

一、 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

λ 为实数，$P_m(x)$ 为 m 次多项式.

设特解为 $y^*=\underline{e^{\lambda x}Q(x)}$，其中 $Q(x)$ 为待定多项式，

$$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\underline{\lambda Q(x)}+\underline{Q'(x)}]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\underline{\lambda^2 Q(x)}+\underline{2\lambda Q'(x)}+\underline{Q''(x)}]$$

代入原方程，得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若 λ 不是特征方程的根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$，则取 $Q(x)$ 为 m 次待定系数多项式 $Q_m(x)$，从而得到特解形式为 $y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$.

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

(2) 若λ是特征方程的**单根**, 即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad 2\lambda + p \neq 0,$$

则$Q'(x)$为m次多项式, 故特解形式为 $y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若λ是特征方程的**重根**, 即

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad 2\lambda + p = 0,$$

则$Q''(x)$是m次多项式, 故特解形式为 $y^* = x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

小结 对方程①, 当λ是特征方程的k重根时, 可设

特解 $y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x} \quad (k = 0, 1, 2)$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程.

例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的一个特解.

解: 本题 $\lambda = 0$, 而特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$,

$\lambda = 0$ 不是特征方程的根 .

设所求特解为 $y^* = b_0 x + b_1$, 代入方程 :

$$-3b_0 x - 3b_1 - 2b_0 = 3x + 1$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} -3b_0 = 3 \\ -2b_0 - 3b_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow b_0 = -1,\ b_1 = \frac{1}{3}$$

于是所求特解为 $y^* = -x + \frac{1}{3}$.

例2. 求方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

解: 本题 $\lambda = 2$, 特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 其根为

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3$$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

设非齐次方程特解为 $y^* = x(b_0 x + b_1) e^{2x}$

代入方程得 $-2b_0 x - b_1 + 2b_0 = x$

比较系数, 得 $\begin{cases} -2b_0 = 1 \\ 2b_0 - b_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow b_0 = -\frac{1}{2}, b_1 = -1$

因此特解为 $y^* = x(-\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$.

所求通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{2x}$.

二、 $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

分析思路:

第一步将 $f(x)$ 转化为

$$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

第二步 求出如下两个方程的特解

$$y''+py'+qy=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$$

$$y''+py'+qy=\overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

第三步 利用叠加原理求出原方程的特解

第四步 分析原方程特解的特点

第一步 利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2}+\tilde{P}_n(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2\mathrm{i}}\right]$$

$$=\left[\frac{P_l(x)}{2}+\frac{\tilde{P}_n(x)}{2\mathrm{i}}\right]\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$$

$$+\left[\frac{P_l(x)}{2}-\frac{\tilde{P}_n(x)}{2\mathrm{i}}\right]\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$

令 $m=\max\{n,l\}$,则

$$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P_m(x)}\,\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$

$$=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \qquad ②$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}} \qquad ③$$

设 $\lambda + i\omega$ 是特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$), 则 ② 有特解:

$$y_1^* = x^k Q_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \quad (Q_m(x) \text{为} m \text{次多项式})$$

故 $$(y_1^*)'' + p(y_1^*)' + q\,y_1^* \equiv P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$$

等式两边取共轭 :

$$\overline{y_1^*}'' + p\,\overline{y_1^*}' + q\,\overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

这说明 $\overline{y_1^*}$ 为方程 ③ 的特解 .

第三步 求原方程的特解

原方程 $y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$

$$= P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} + \overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

利用第二步的结果, 根据叠加原理, 原方程有特解 :

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[Q_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \overline{Q_m}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right]$$

$$= x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[Q_m(\cos\omega x + \mathrm{i}\sin\omega x) + \overline{Q_m}(\cos\omega x - \mathrm{i}\sin\omega x)\right]$$

$$= x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m\cos\omega x + \tilde{R}_m\sin\omega x\right]$$

其中 $R_m, \tilde{R}_m$ 均为 m 次多项式 .

第四步 分析 y^*的特点

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m \cos\omega x + \tilde{R}_m \sin\omega x\right]$$

因

$$\overline{y^*} = \overline{y_1^* + \overline{y_1^*}} = \overline{y_1^*} + \overline{\overline{y_1^*}}$$

$$= \overline{y_1^*} + y_1^*$$

$$= y^*$$

所以 y^*本质上为实函数，因此 $R_m, \tilde{R}_m$ 均为 m 次实多项式．

小 结:

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x \right]$$

$(p, q$ 为常数$)$

$\lambda + \mathrm{i}\omega$ 为特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$), 则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m \cos\omega x + \tilde{R}_m \sin\omega x]$$

其中 $m = \max\{n, l\}$

例4. 求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解 .

解: 本题 $\lambda=0,\ \omega=2,\ P_l(x)=x,\ \tilde{P}_n(x)=0,$

特征方程 $r^2+1=0$

$\lambda\pm\mathrm{i}\omega=\pm 2\mathrm{i}$ 不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

比较系数, 得 $\begin{cases}-3a=1\\-3b+4c=0\\-3c=0\\-3d+4a=0\end{cases}$ $\quad\therefore\ a=\frac{-1}{3},\ d=\frac{4}{9}$

$b=c=0$

于是求得一个特解 $y^*=\frac{-1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$.

例5. 求方程 $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2 + 9 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = \pm 3\mathrm{i}$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

$\pm 3\mathrm{i}$ 为特征方程的单根, 因此设非齐次方程特解为

$$y^* = x(a\cos 3x + b\sin 3x)$$

代入方程: $6b\cos 3x - 6a\sin 3x = 18\cos 3x - 30\sin 3x$

比较系数, 得 $a = 5$, $b = 3$,

因此特解为 $y^* = x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$

所求通解为

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$$

内容小结

1. $y'' + p\,y' + q\,y = P_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$

λ 为特征方程的 $k\,(=0,1,2)$ 重根，则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

2. $y'' + p\,y' + q\,y = \mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda \pm \mathrm{i}\,\omega$ 为特征方程的 $k\,(=0,1)$ 重根，则设特解为

$$y^* = x^k\,\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{\,l\,,\,n\,\}$$

思考与练习

1. (填空) 设 $y'' + y = f(x)$

1) 当 $f(x) = x\cos x$ 时可设特解为

$$y^* = x[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x]$$

2) 当 $f(x) = x\cos 2x + e^{2x}$ 时可设特解为

$$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x + k e^{2x}$$

提示: $f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{n, l\}$$

2. 求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{\alpha x}$ 的通解 (其中 α 为实数).

解: 特征方程 $r^2+4r+4=0$, 特征根: $r_1=r_2=-2$

对应齐次方程通解: $Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}$

$\alpha\neq-2$ 时, 令 $y^*=A\mathrm{e}^{\alpha x}$, 代入原方程得 $A=\frac{1}{(\alpha+2)^2}$,

故原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{(\alpha+2)^2}\mathrm{e}^{\alpha x}$

$\alpha=-2$ 时, 令 $y^*=Bx^2\mathrm{e}^{\alpha x}$, 代入原方程得 $B=\frac{1}{2}$,

故原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{\alpha x}$

3. 已知二阶常微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^x$ 有特解 $y=\mathrm{e}^{-x}(1+x\mathrm{e}^{2x})$，求微分方程的通解．

解: 将特解代入方程得恒等式

$$(1-a+b)\mathrm{e}^{-x}+(2+a)\mathrm{e}^x+(1+a+b)x\mathrm{e}^x=c\mathrm{e}^x$$

比较系数得 $\begin{cases}1-a+b=0\\2+a=c\\1+a+b=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}a=0\\b=-1\\c=2\end{cases}$

故原方程为 $y''-y=2\mathrm{e}^x$

$\boxed{y=\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^x}$

对应齐次方程通解: $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$

原方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^x$

作业

P186　1 (3)（4） 4

5 (2) （3） (4)（5）