北京航空航天大学数学分析(上)期中考试试题

2005 年 11 月 13 日

班级 ______________ 学号 ________________ 姓名 _________________

一	二	三	四	五	六	加选	总分

一、填空题（每小题 4 分, 共 20 分）

1. 设曲线 $y=f(x)$ 在原点与曲线 $y=\sin x$ 相切，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}=$ $\sqrt{2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right)=$ 0

3. 设当 $x\to 0$ 时，α,β 是等价无穷小，（$\alpha\beta>0$），$\lim\limits_{x\to 0}(1-\alpha\beta)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}=$ 1

4. $y=x\sqrt{x+\sqrt{x}}$，则 $y'=$ $\sqrt{x+\sqrt{x}}+x\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{y}+2xy=e$ 确定，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ $-\dfrac{2}{e}$

二、单项选择(每小题 5 分, 共 20 分)

1. 与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 不等价的一个命题是 【 C 】

A. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n\ge N$ 的 $n\in\mathrm{N}^+$，都有 $|a_n-A|<\sqrt{\varepsilon}$；

B. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n>N$ 的 $n\in\mathrm{N}^+$，都有 $|a_n-A|\le\varepsilon^2$；

C. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n>N$ 的 $n\in\mathrm{N}^+$，都有 $|a_n-A|<\sqrt{n}\varepsilon$；

D. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n>N+100$ 的 $n\in\mathrm{N}^+$，都有 $|a_n-A|<100\varepsilon$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则在 $\boldsymbol{x}=0$ 处 【 C 】

A．不连续 B. 连续但不可导

C．连续且可导 D. 导函数连续

3．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\neq 0$。则　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　【 D 】

A． $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为正　　　　　　　　B． $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负

C． $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为负　　　　　　　　D． $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号

4． 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 不一致连续， 则在下列表述中正确的一个是　　　　　　　　【 B 】

A. $\exists\varepsilon_0>0$， $\forall\delta>0$，对 $[a,b]$ 中一切满足 $|x'-x''|<\delta$ 的 x',x''，都有

$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$。

B． $\exists\varepsilon_0>0$，在 $[a,b]$ 中存在 $\lim\limits_{n\to\infty}|s_n-t_n|=0$ 的数列 $\{s_n\},\{t_n\}$，使得

$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$。

C. $\exists\varepsilon_0>0$， $\forall n\in N^+$，对 $[a,b]$ 中一切满足 $|s_n-t_n|<\dfrac{1}{n}$ 的 s_n,t_n，都有

$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$。

D． $\exists\varepsilon_0>0$，对 $[a,b]$ 中一切满足 $\lim\limits_{n\to\infty}|s_n-t_n|=0$ 的数列 $\{s_n\},\{t_n\}$，都有

$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$。

三、计算题（每小题 6 分, 本题共 30 分）

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2/2}=2$$

（2） $y=x^x$， 求 y'

$y'=x^x(\ln x+1)$

（3）设 $x=1+t^2$， $y=\cos t$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin t}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-t\cos t+\sin t}{2t^2}\times\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$$

（4） $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$

$$y^{(50)}=2^{50}x^2\sin\left(2x+\frac{50}{2}\pi\right)+2^{49}\cdot 50\cdot 2x\sin\left(2x+\frac{49}{2}\pi\right)+2^{48}\cdot 50\cdot 49\sin\left(2x+\frac{48}{2}\pi\right)$$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]$

令 $t=\frac{1}{x}$， 原式= $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}-e}{t}=e\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}-1}{t}$

$$=e\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}{t}=e\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=e\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=e\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{e}{2}$$

四、证明题（10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 是无穷大，$\{b_n\}$ 是有界数列．用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$．

证明： （1） $\forall n\in N^+,\exists M>0,|b_n|\le M$

（2） $\forall A=\frac{M}{\varepsilon}>0,\exists N\in N^+,n>N,|a_n|>A=\frac{M}{\varepsilon}$

(3) $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+,n>N,\left|\frac{b_n}{a_n}\right|\le\frac{M}{|a_n|}<\frac{M}{A}=\varepsilon$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$

五、证明题（10 分）

设 $n\ge 2$ 为偶数，$b<0$．求证多项式 $p(x)=x^n+x^{n-1}-x+b$ 至少有两个零点．

证明： （1） $p(0)=b<0$

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty\Rightarrow\exists A>0,p(A)>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)=+\infty\Rightarrow\exists B<0,p(B)>0$

（3） $\because p(B)P(0)<0\Rightarrow\therefore\exists\xi\in(B,0),p(\xi)=0$

$\because p(A)P(0)<0\Rightarrow\therefore\exists\eta\in(0,A),p(\eta)=0$

所以，$p(x)=0$ 至少有两个零点。

六、证明题（10 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导； $f(0)=0$，在 $(0,1)$ 内 $f(x)\neq 0$.

证明：存在 $\xi\in(0,1)$， 使得 $3\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

证明： 令 $F(x)=f^3(x)f(1-x)$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$

由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$， 使得 $F(\xi)=0,$

此即 $3\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

七、加选题（10 分）

设数列 $x_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|$, $n=1,2,\cdots\cdots$

证明：若数列 $\{x_n\}$ 有界，则数列 $\{a_n\}$ 必定收敛.

证明：（1）因为 $\{x_n\}$ 单调增，有界，所以 $\{x_n\}$ 收敛。进而可知 $\{x_n\}$ 是柯西列，即

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+,n>N,\forall p\in N^+,|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$

（2）考虑数列 $\{a_n\}$：

$$
\begin{aligned}
&|a_{n+p}-a_n|=|(a_{n+p}-a_{n+p-1})+(a_{n+p-1}-a_{n+p-2})+\cdots+(a_{n+1}-a_n)|\\
&\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\
&=\quad|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

所以 $\{a_n\}$ 也是柯西列，故收敛。