目的

- 分析**正弦电流**电路的**稳态响应**
- 研究正弦电路的**意义**：

（1）正弦电路在电力系统和电子技术领域占有十分重要的地位。原因：

①正弦函数是周期函数，其加、减、求导、积分运算后仍是同频率的正弦函数；

②正弦信号容易产生、传送和使用。

（2）正弦信号是一种基本信号，任何复杂的周期信号可以分解为按正弦规律变化的分量。

本章要点

- 正弦量的三要素
- 正弦量的相量表示
- 电路元件VCR的相量形式
- 电路定理的相量形式

- **重点**：1. 正弦量和相量之间的关系；
  2. 正弦量的相位差和有效值的概念；
  3. R、L、C各元件的电压、电流关系的相量形式
  4. 电路定律的相量形式及元件的电压电流关系的相量形式。
  5. 相量图

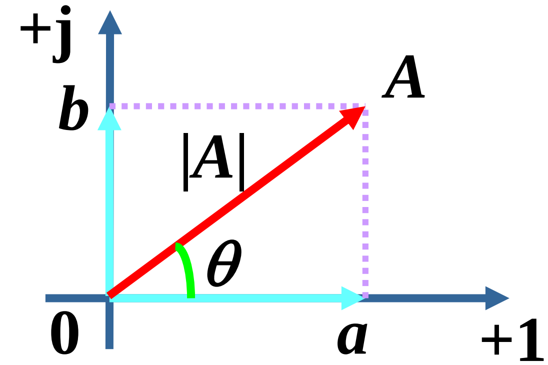
- **难点：**

  1. 正弦量与相量之间的联系和区别；

- 时域函数 ⟷ 特殊的复数

- 2. 元件电压相量和电流相量的关系。

8.1 复数的知识



- **1. 复数的四种表示形式**

代数形式： $A = a + jb$

$\mathrm{Re}[A] = a, \mathrm{I}m[A] = b$

- 三角形式： $A = |A|(\cos\theta + j\sin\theta)$

- 指数形式： $A = |A| e^{j\theta}$

- 极坐标形式： $A = |A| \underline{/\theta}$

单选题

设置

复数的四种表示形式中，最适合复数间加减运算的形式是：

A 代数形式；

B 三角形式；

C 指数形式；

D 极坐标形式；

提交

多选题

设置

复数的四种表示形式中，最适合复数间乘除运算的形式有：

A 代数形式；

B 三角形式；

C 指数形式；

D 极坐标形式；

提交

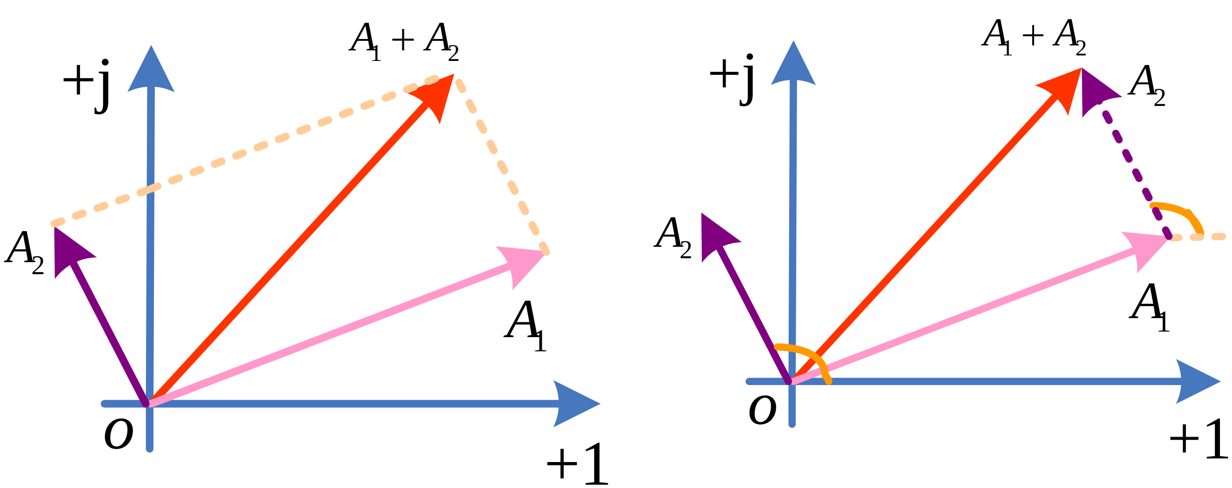
8.1 复数的知识

2. 复数的运算

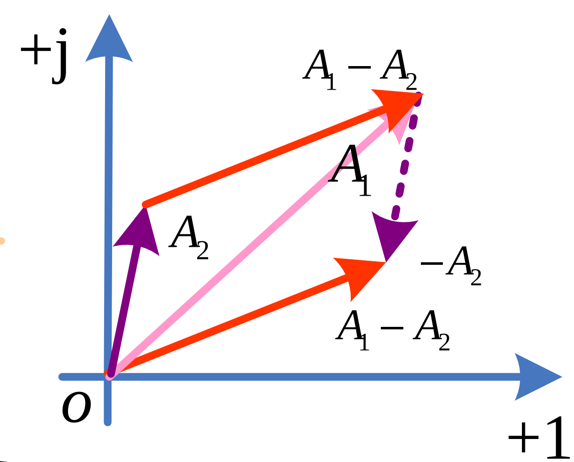
(1) 加减运算——采用代数形式

若 $A_1=a_1+jb_1$，$A_2=a_2+jb_2$

则 $A_1 \pm A_2=(a_1 \pm a_2)+j(b_1 \pm b_2)$



加法运算



减法运算

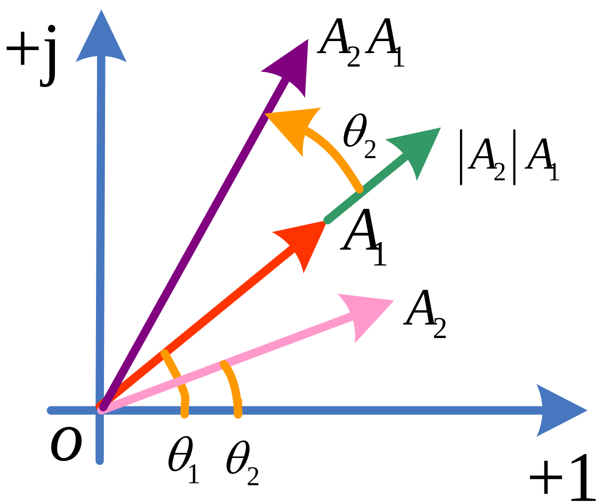
▪ 2. 复数的运算

(2) 乘法运算——采用指数形式或极坐标形式

若 $A_1 = |A_1| \angle\theta_1, A_2 = |A_2| \angle\theta_2$

则： $A_1 \cdot A_2 = |A_1| e^{j\theta_1} \cdot |A_2| e^{j\theta_2} = |A_1||A_2| e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

$$= |A_1||A_2| \angle(\theta_1 + \theta_2)$$



乘法：复数模相乘，辐角相加。

8.1 复数的知识

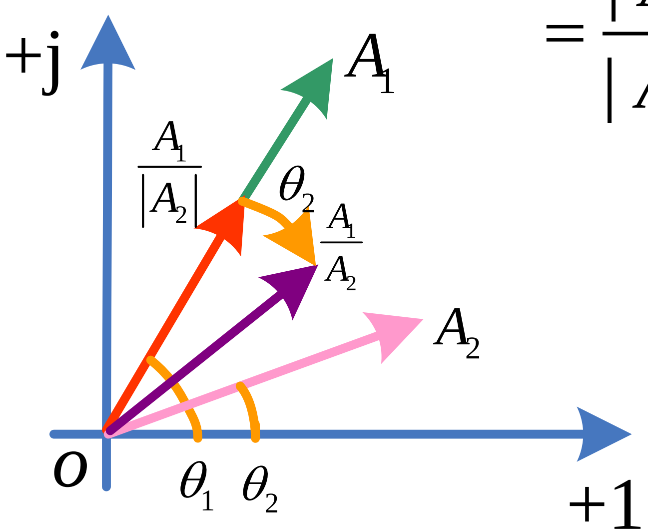
2. 复数的运算

(3) 除法运算——采用指数形式或极坐标形式

若 $A_1 = |A_1| \angle\theta_1, A_2 = |A_2| \angle\theta_2$

则: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{|A_1| \angle\theta_1}{|A_2| \angle\theta_2} = \dfrac{|A_1| e^{j\theta_1}}{|A_2| e^{j\theta 2}} = \dfrac{|A_1|}{|A_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

$$= \frac{|A_1|}{|A_2|} \angle(\theta_1 - \theta_2)$$



除法：复数模相除，辐角相减。

2. 复数的运算

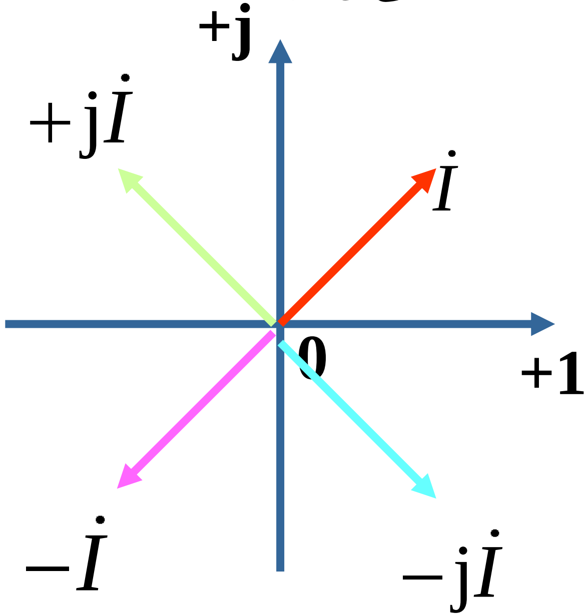
(4) 旋转因子

复数 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta=1\angle\theta$

$A\cdot e^{j\theta}$ 相当于A逆时针旋转一个角度θ，而模不变。

几种不同θ值时的旋转因子

$e^{j\frac{\pi}{2}}=+j$ $e^{j(-\frac{\pi}{2})}=-j$ $e^{\pm j\pi}=-1$



故 +j, –j, -1 都可以看成旋转因子。

2. 复数的运算

（5） 复数的相等

$$A_1=a_1+jb_1$$

$$A_1=|A_1|\mathrm{e}^{j\theta_1}$$

$$A_2=a_2+jb_2$$

$$A_2=|A_2|\mathrm{e}^{j\theta_2}$$

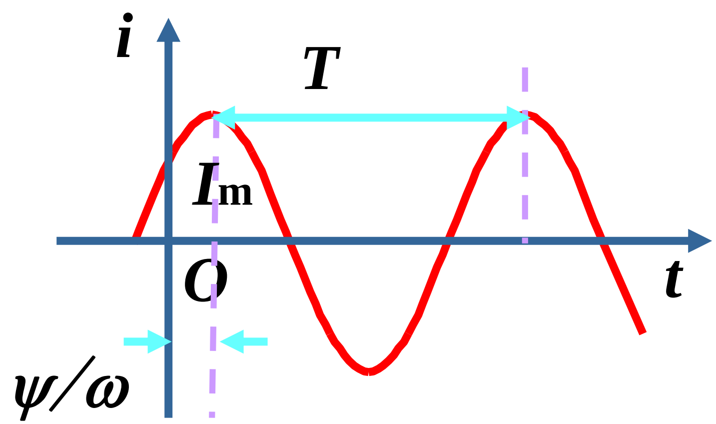
$$A_1=A_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2, b_1=b_2 \\ |A_1|=|A_2|, \theta_1=\theta_2 \end{cases}$$

8.2 正弦量的基本概念

1. 正弦量

- 定义：电路中按**正弦规律**变化的**电压或电流**统称为正弦量。

$$i(t) = \mathrm{I}_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi)$$



8.2 正弦量的基本概念

2. 正弦量的三要素

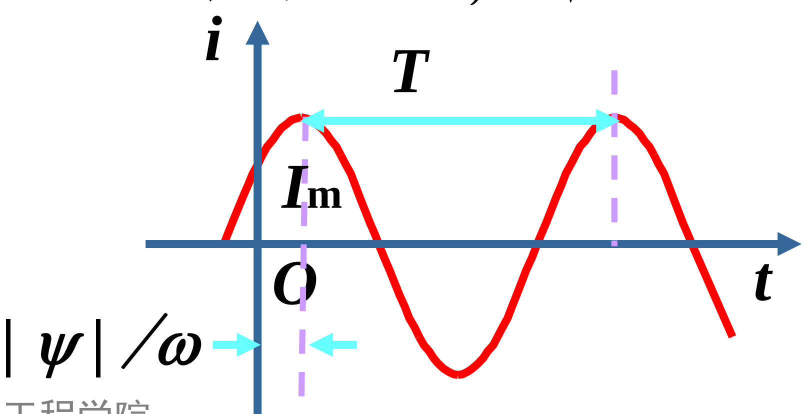
（1）I_m —幅值(振幅、最大值)：反映正弦量变化过程中所能达到的最大幅度。

（2）ω— 角频率（rad/s）：为相位变化的速度，反映正弦量变化快慢。它与周期T和频率f的关系为：

$$\omega=2\pi/T=2\pi f$$

（3）ψ—初相角：反映正弦量的计时起点，常用角度表示。

一般规定：$|\psi|\le\pi$ 。

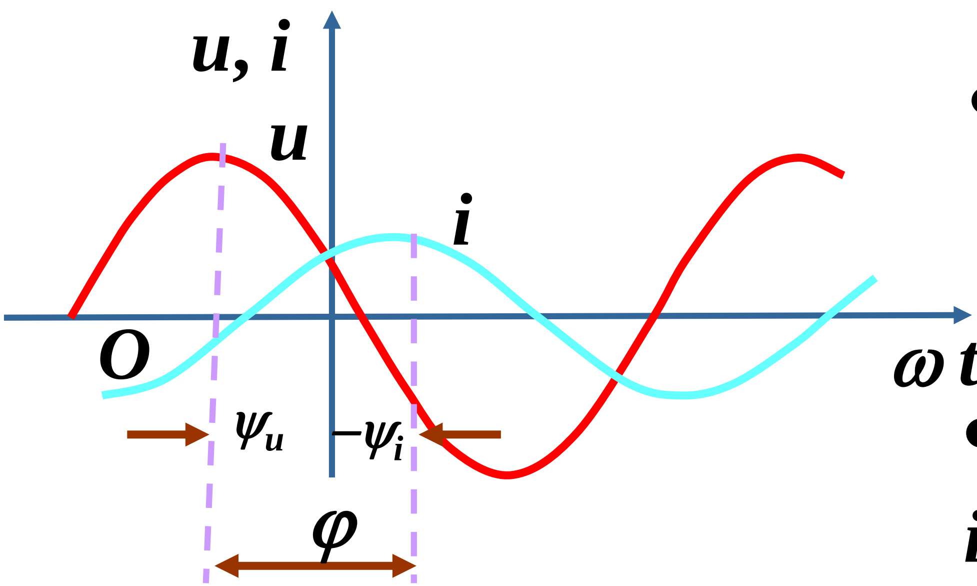


3. 相位差

$$u = U_m \cos(\omega t + \psi_u), \quad i = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

- 相位差：同一频率正弦量之间的相位之差

$$\text{相位差} = \psi_u - \psi_i$$ 等于初相位之差



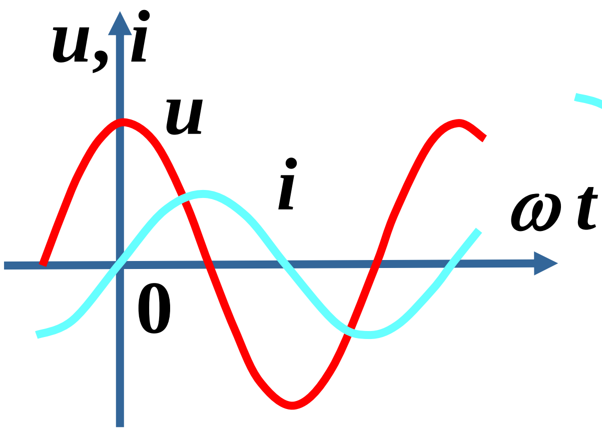
- $\varphi > 0$， u超前i，i 落后u ，u 比i先到达最大值；
- $\varphi < 0$， i 超前 u， u 滞后 i，i 比 u 先到达最大值。

8. 2　正弦量的基本概念

3. 相位差

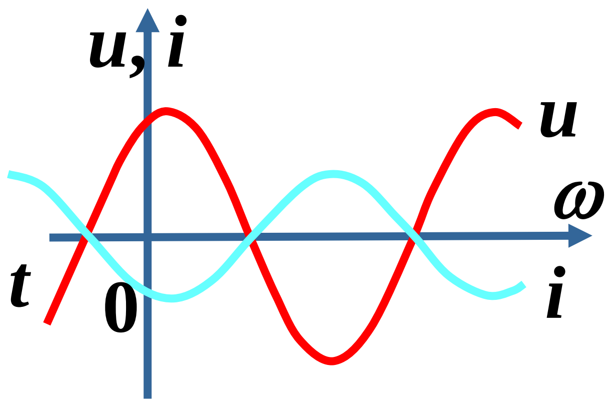
- 特殊相位关系：

$\varphi=\pi/2$：正交
u 领先 i $\pi/2$



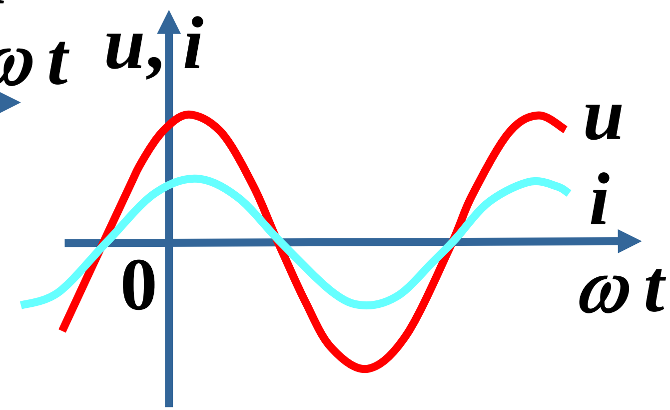
正交

$\varphi=\pm\pi$，反相



反相

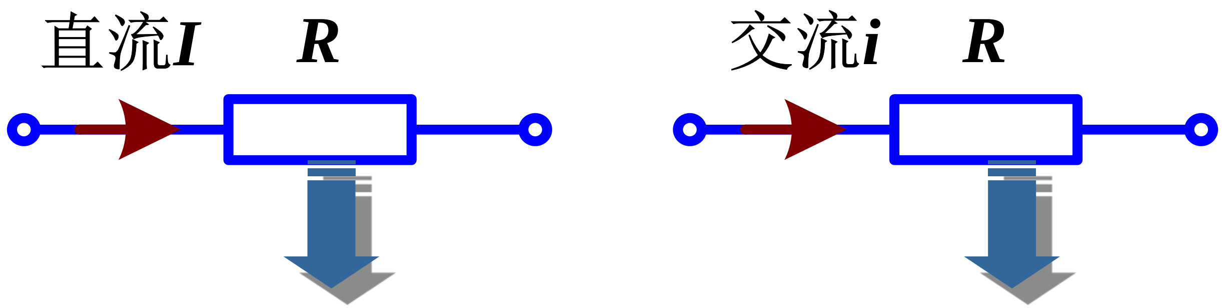
$\varphi=0$，同相



同相

4. 周期性电流、电压的有效值

- 有效值：
  - 正弦量在能量上、热效应方面等效成一个直流量；



$$W = RI^2T \quad = \quad W = \int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t$$

电流有效值

$$\boxed{I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}}$$

有效值也称**均方根值**

8.2 正弦量的基本概念

4. 周期性电流、电压的有效值

$$I=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^T i^2 dt}\qquad U=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^T u^2 dt},$$

设 $\boldsymbol{i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\Psi_{\mathrm{i}})}$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}^2\cos^2(\omega t+\Psi_i)\,\mathrm{dt}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}I_m$$

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_m,\qquad I=\frac{1}{\sqrt{2}}I_m$$

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\Psi_i)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi_i)$$

4. 周期性电流、电压的有效值

交流电压有效值为U=220V，则最大值为U_m≈311V；

注 意：

（1）工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。

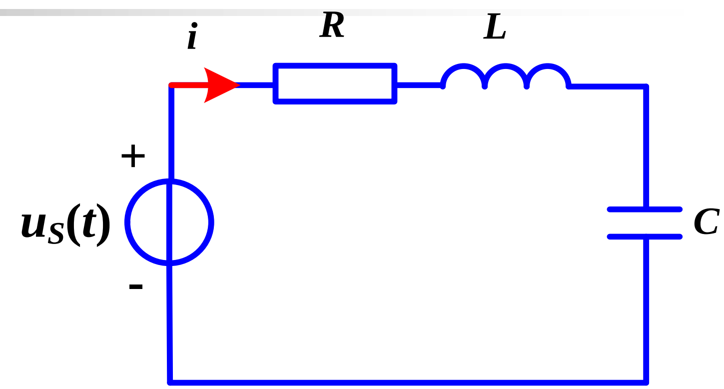
（2）测量中，交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。

（3）区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

$$i,\ I_m,\ I \qquad u,\ U_m,\ U$$

8.3 相量法的基础

1. 问题的提出



电路方程是微分方程：

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S(t)$$

如何简便地表示正弦电路的方程？

两个正弦量的相加：如KCL、KVL方程运算。

$$u_R=\sqrt{2}U_R\cos(\omega t+\psi_R)$$

$$u_L=\sqrt{2}U_L\cos(\omega t+\psi_L)$$

$+$

如何简便地表示正弦量求和、微分等运算？

8.3 相量法的基础

2. 正弦量的相量表示

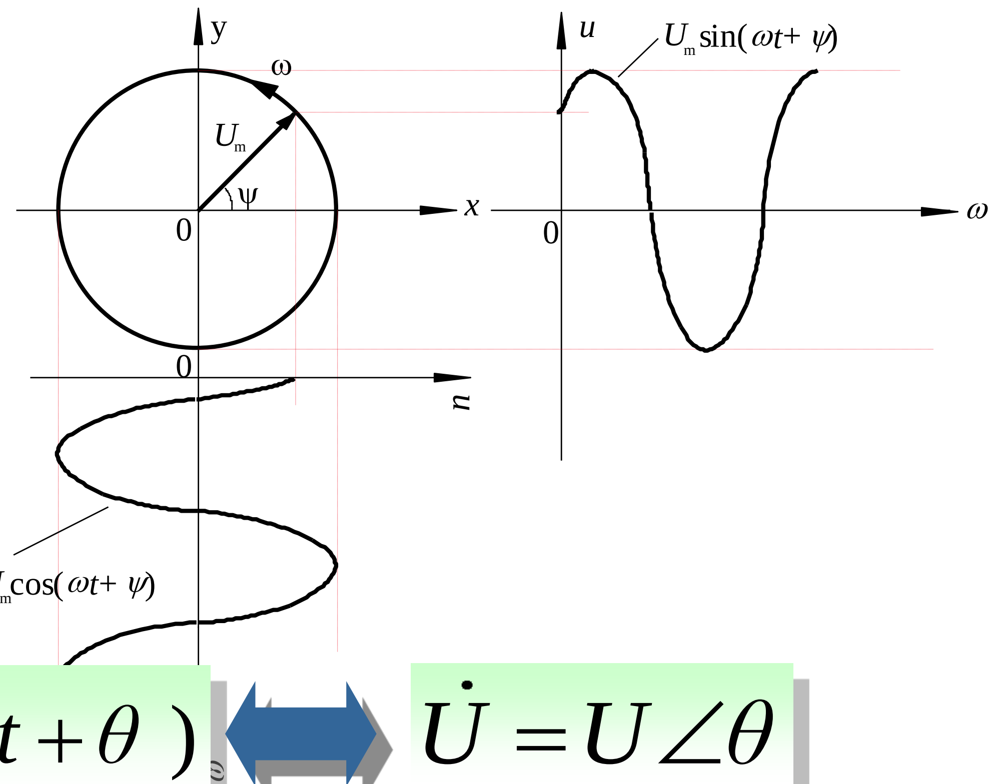
$$U_m e^{j(\omega t+\psi)} = U_m\cos(\omega t+\psi) + jU_m\sin(\omega t+\psi)$$

$$U_m\cos(\omega t+\psi) = \mathrm{Re}[U_m e^{j(\omega t+\psi)}] = \mathrm{Re}[\sqrt{2}Ue^{j\psi}e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{U}e^{j\omega t}]$$

$$\dot{U} = Ue^{j\psi} = U\angle\psi$$

特殊的复数:相量

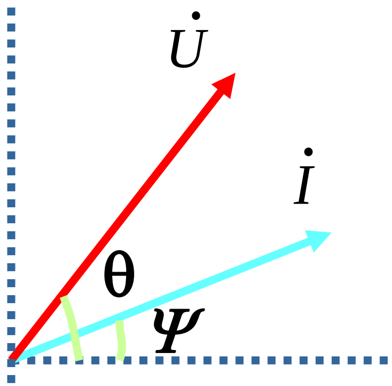
向量? ×



$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta) \Leftrightarrow \dot{U} = U\angle\theta$$

3. 相量图

相量在复平面上表示的图形就是相量图



$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)\rightarrow\dot{I}=I\angle\Psi$$

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta)\rightarrow\dot{U}=U\angle\theta$$

8.3 相量法的基础

【例】 已知 $i=141.4\cos(314t+30^{\circ})\mathrm{A}, u=311.1\cos(314\mathrm{t}-\dfrac{\pi}{4})\mathrm{V}$

试用相量表示*i*、*u*，画出相量图；

若50HZ正弦量其相量为 $\dot{U}_S=100\angle\dfrac{\pi}{3}\mathrm{V}$**，请给出其表达式。**

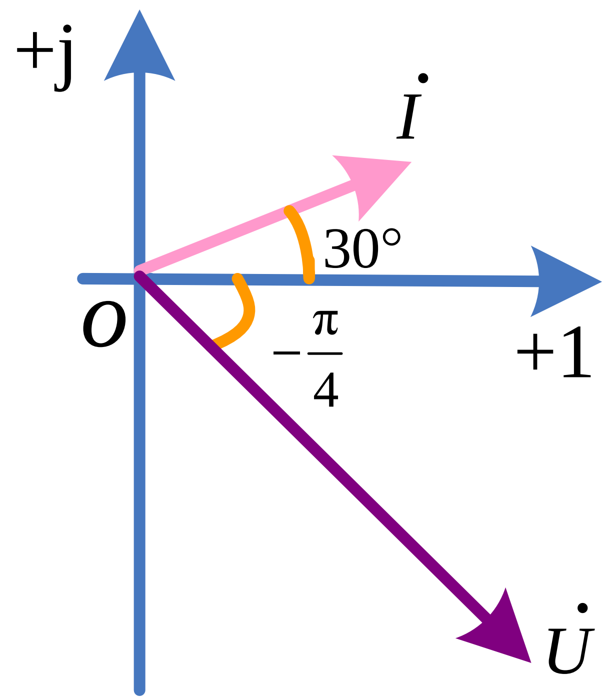
解

$$\dot{I}=\frac{141.4}{\sqrt{2}}\angle 30^{\circ}=100\angle 30^{\circ}\mathrm{A}$$

$$\dot{U}=\frac{311.1}{\sqrt{2}}\angle-\frac{\pi}{4}=220\angle-\frac{\pi}{4}\mathrm{V}$$

$$\dot{U}_S=100\angle\frac{\pi}{3}\mathrm{V} \qquad \omega=2\pi f=314(rad/s)$$

$$\therefore u_S=100\sqrt{2}\cos(314t+\frac{\pi}{3})\mathrm{V}$$



8.3 相量法的基础

4. 相量法的应用

正弦量的运算 ⟶ 正弦量 ⟶ ?相量

正弦量的和 $i = i_1 + i_2 + \cdots$ ⟶ ?相量

正弦量的微分 $\dfrac{di}{dt}$ ⟶ ?相量

正弦量的积分 $\int idt$ ⟶ ?相量

4. 相量法的应用

(1) 同频率正弦量的加减 ⟺ 对应相量的相加减

$$u_1(t)=\sqrt{2}U_1\cos(\omega t+\Psi_1)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}U_2\cos(\omega t+\Psi_2)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})+\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\underbrace{(\dot{U}_1+\dot{U}_2)}_{\dot{U}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

可得其相量关系为：$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$

$$i_1 \pm i_2 = i_3 \iff \dot{I}_1 \pm \dot{I}_2=\dot{I}_3$$

8.3 相量法的基础

4. 相量法的应用

(2) 正弦量的微分，积分运算

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i) \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{I}=I\angle\psi_i$$

微分运算

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\dot{I}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\boxed{\dot{I}\cdot\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

积分运算

$$\int i\mathrm{d}t=\int\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{I}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]\mathrm{d}t$$

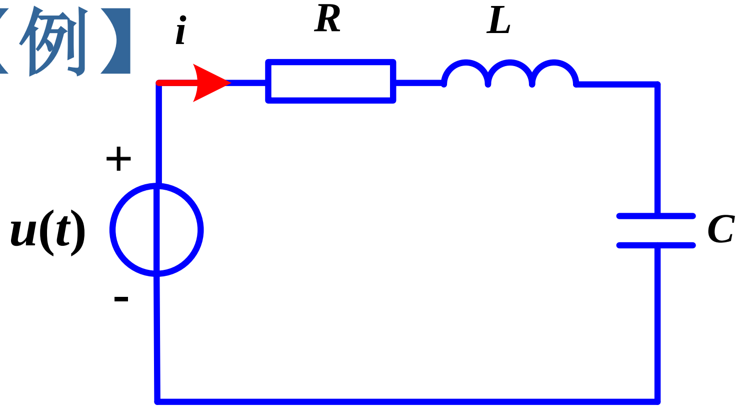
$$=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\frac{\dot{I}}{\boxed{\mathrm{j}\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \underline{\mathrm{j}\omega}\,\dot{I}=\omega I\angle\psi_i\underline{+\frac{\pi}{2}}$$

$$\int i\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\dot{I}}{\underline{\mathrm{j}\omega}}=\frac{I}{\omega}\angle\psi_i\underline{-\frac{\pi}{2}}$$

8.3 相量法的基础

【例】



$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$$

$$u(t)=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t$$

相量形式方程： $\dot{U}=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}+\dfrac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega C}$

相量法的优点：

（1）把微积分方程运算变为代数方程（复数方程）运算；

（2）把时域问题变为频域（复数）问题；

（3）可以把直流电路的分析方法直接用于交流电路。

8.3 相量法的基础

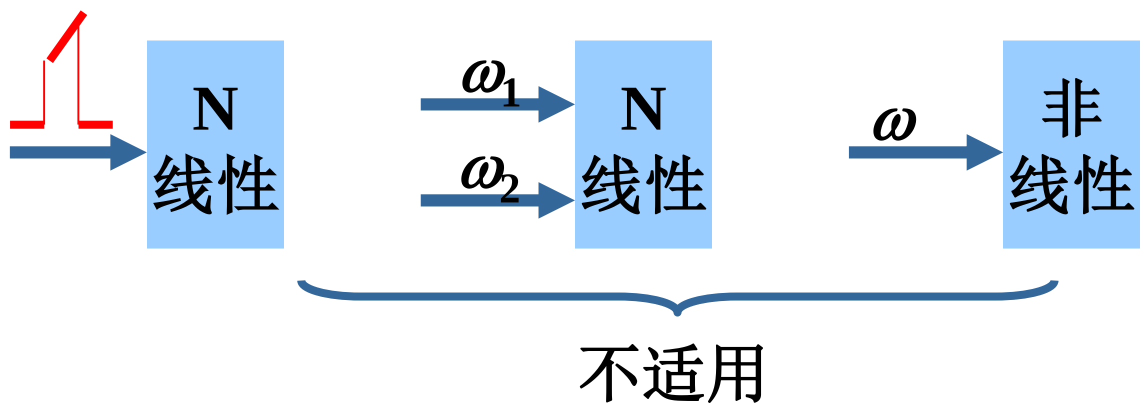
注　　意：

① 正弦量 ⇄ 相　量

时　域 ⇄ 频　域

正弦波形图 ⇄ 相量图

② 相量法只适用于激励为同频正弦量的非时变、线性电路。



③ 相量法用来分析正弦稳态电路。

1. 电路元件方程的相量形式

电阻元件

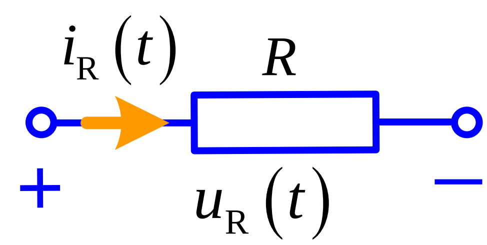
$$i_R = \sqrt{2} I_R \cos(\omega t + \psi_i) = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\, \dot{I}_R\, e^{j\omega t}]$$

$$\dot{I}_R = I_R \angle \psi_i$$

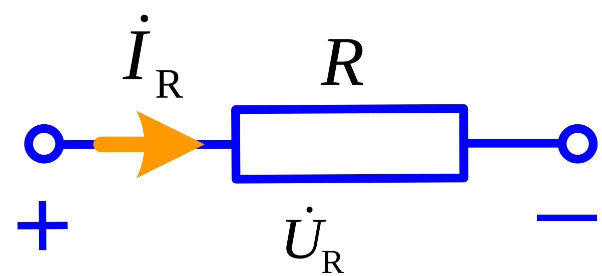
$$u_R = R i_R = R\, \mathrm{Re}[\sqrt{2}\, \dot{I}_R\, e^{j\omega t}]$$

$$= \mathrm{Re}[\sqrt{2} R\, \dot{I}_R\, e^{j\omega t}]$$

$$\therefore \dot{U}_R = R \dot{I}_R$$



电阻

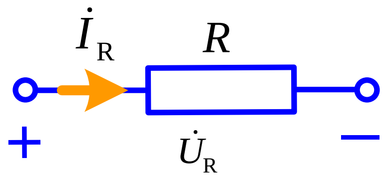


电阻元件的相量模型

$$U_R \angle \psi_u = R I_R \angle \psi_i \qquad U_R = R I_R \qquad \psi_u = \psi_i$$

8.4 电路定律的相量形式

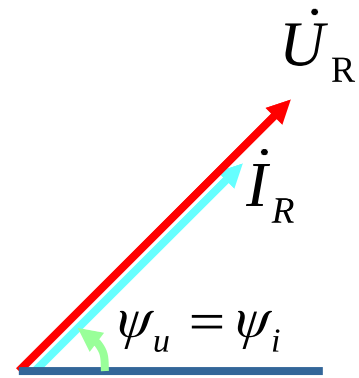
电阻元件



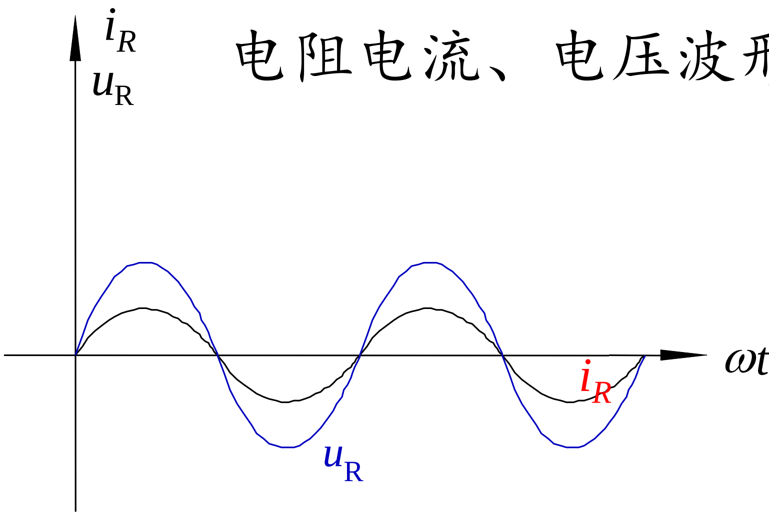
$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$$

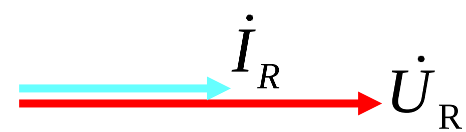
$$U_R\angle\psi_u = RI_R\angle\psi_i$$

相量图



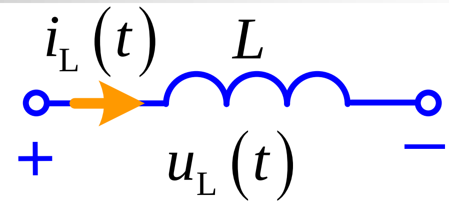
电阻电流、电压波形图





8.4 电路定律的相量形式

电感元件



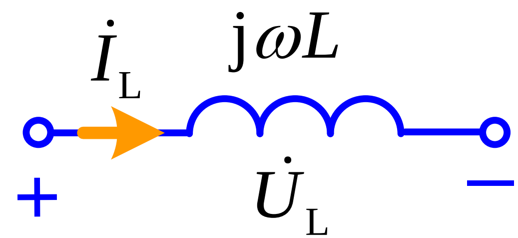
$$i_L = \sqrt{2} I_L \cos(\omega t + \psi_i) = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\, \dot{I}_L\, e^{j\omega t}]$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L\, \mathrm{Re}[\sqrt{2}\, \dot{I}_L\, j\omega e^{j\omega t}]$$

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L$$

$$\therefore\ U_L \angle \psi_u = \omega L I_L \underline{/\psi_i + 90^\circ}$$

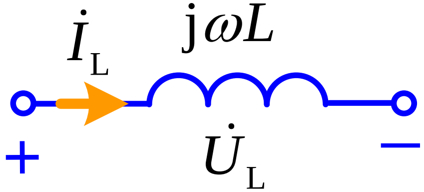
$$U_L = \omega L I_L \qquad \psi_u = \psi_i + 90^\circ$$



电感元件的相量模型

8.4 电路定律的相量形式

电感元件

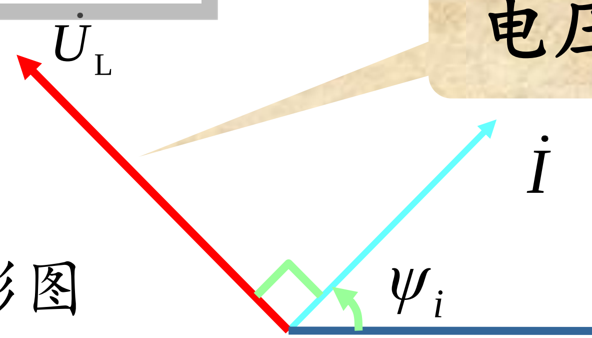


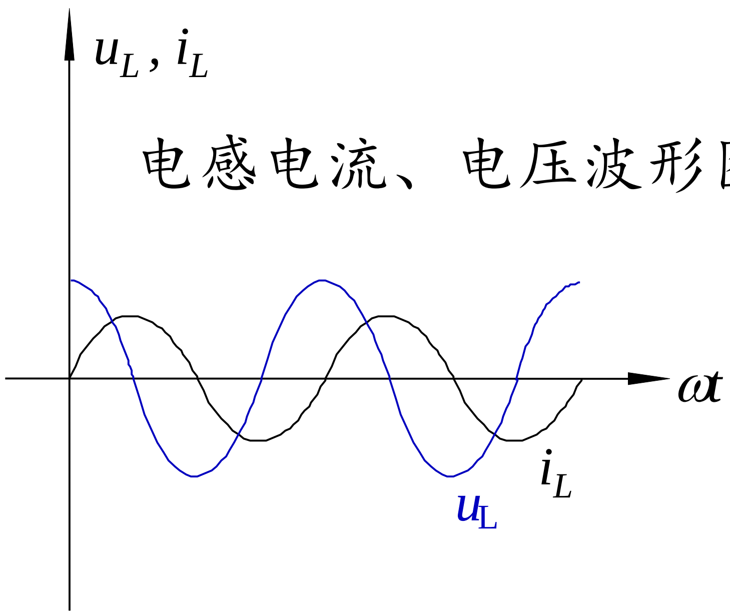
$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}$$

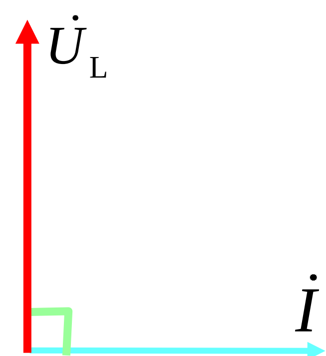
$$U_L \angle \psi_u = \omega L I_L \angle \psi_i + \frac{\pi}{2}$$

相量图

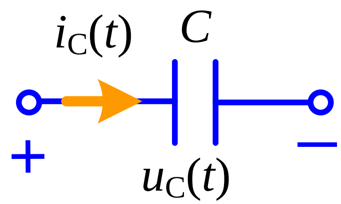
电压超前电流90^0







电容元件

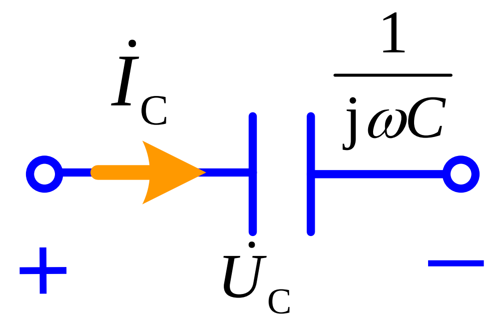


$$u_C = \sqrt{2}U_C\cos(\omega t + \psi_u) = \mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{U}_C e^{j\omega t}]$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = C\,\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{U}_C\, j\omega e^{j\omega t}]$$

$$\therefore \quad \dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_C$$

$$\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\cdot\dot{I}_C$$

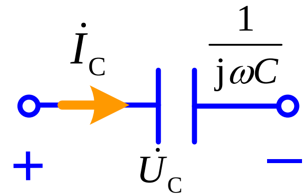


电容元件的相量模型

$$U_C\angle\psi_u = \frac{I_C}{\omega C}\angle\underline{\psi_i - 90^\circ} \qquad U_C = \frac{1}{\omega C}I_C \qquad \psi_u = \psi_i - 90^\circ$$

8.4 电路定律的相量形式

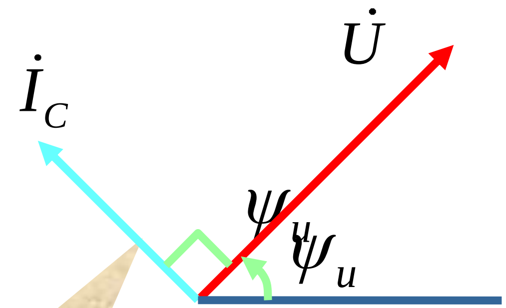
电容元件

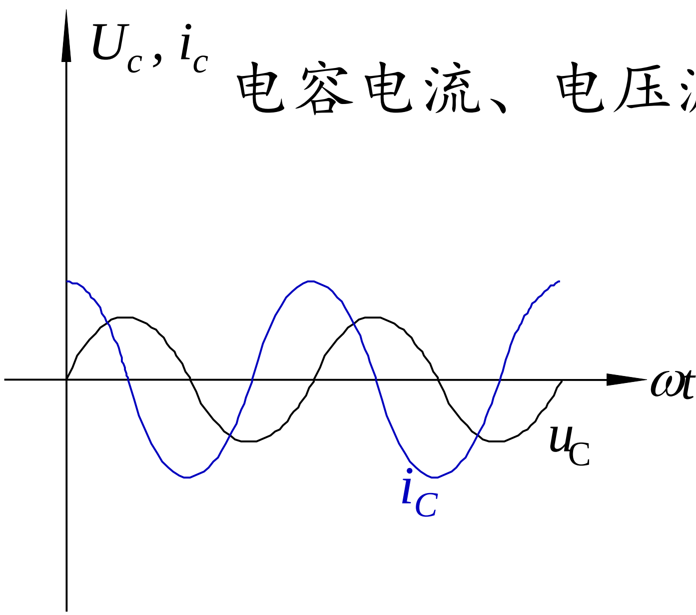


相量图

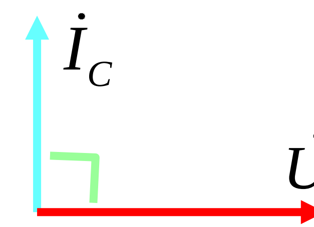
$$\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_C$$

$$U_C\angle\psi_u = \frac{I_C}{\omega C}\angle\psi_i - \frac{\pi}{2}$$





电流超前电压90^0



8.4 电路定律的相量形式

受控源

$VCVS$	$u_2(t) = \mu u_1(t)$
$VCCS$	$i_2(t) = g u_1(t)$
$CCCS$	$i_2(t) = \beta i_1(t)$
$CCVS$	$u_2(t) = \gamma i_1(t)$

正弦稳态下

$VCVS$	$\dot{U}_2 = \mu \dot{U}_1$
$VCCS$	$\dot{I}_2 = g \dot{U}_1$
$CCCS$	$\dot{I}_2 = \beta \dot{I}_1$
$CCVS$	$\dot{U}_2 = \gamma \dot{U}_1$

单选题

设置

正弦电路电路中的某二端元件，其电压比电流相位滞后90度的可能是哪类元件：

A 电阻元件；

B 电感元件；

C 电容元件；

D 受控源元件；

提交

作业

- 8-8 【波形、相量图】

8.4 电路定律的相量形式

2. 电路定律的相量形式

KCL：任何时刻，对任一节点

时域形式：$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = 0$

相量形式：$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_n = 0$

KVL：任何时刻，对任一回路

时域形式：$u_1 + u_2 + \cdots + u_m = 0$

相量形式：$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \cdots + \dot{U}_m = 0$

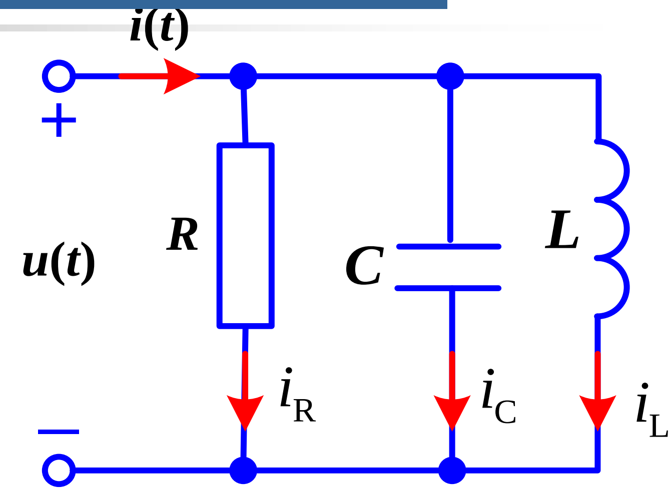
8.4 电路定律的相量形式

【例】 已知

$$R=15\Omega, L=30\text{mH}, C=83.3\mu\text{F}$$

$$u(t)=120\sqrt{2}\sin(1000t+90^{\circ})\text{V}$$

求 $i(t)$



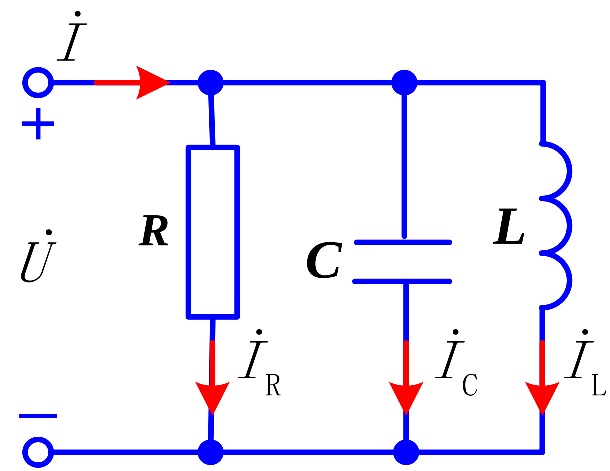
解: 写出已知正弦量对应的相量

$$\dot{U}=120\angle 90^{\circ}\text{V}$$

列写相量形式的KCL方程

$$\dot{I}=\dot{I}_{\text{R}}+\dot{I}_{\text{L}}+\dot{I}_{\text{C}}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R}+\frac{\dot{U}}{\text{j}\omega\text{L}}+\text{j}\omega C\dot{U}$$



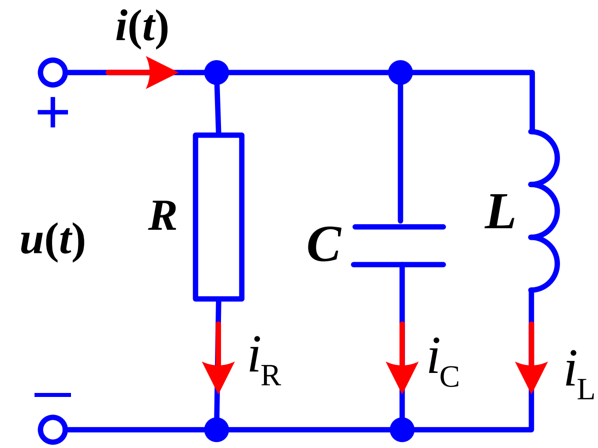
8.4 电路定律的相量形式

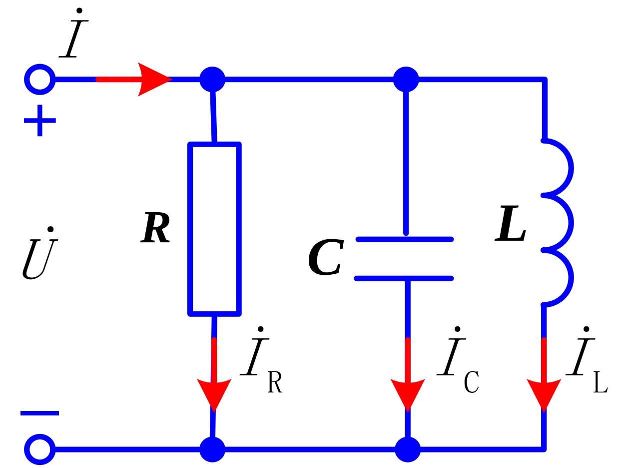
$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R}+\frac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega \mathrm{L}}+\mathrm{j}\omega C\dot{U}$$

$$=8\angle 90^\circ+4\angle 0^\circ+10\angle 180^\circ$$

$$=\mathrm{j}8+4-10$$

$$=10\angle 127^\circ \mathrm{A}$$





写出响应的正弦量

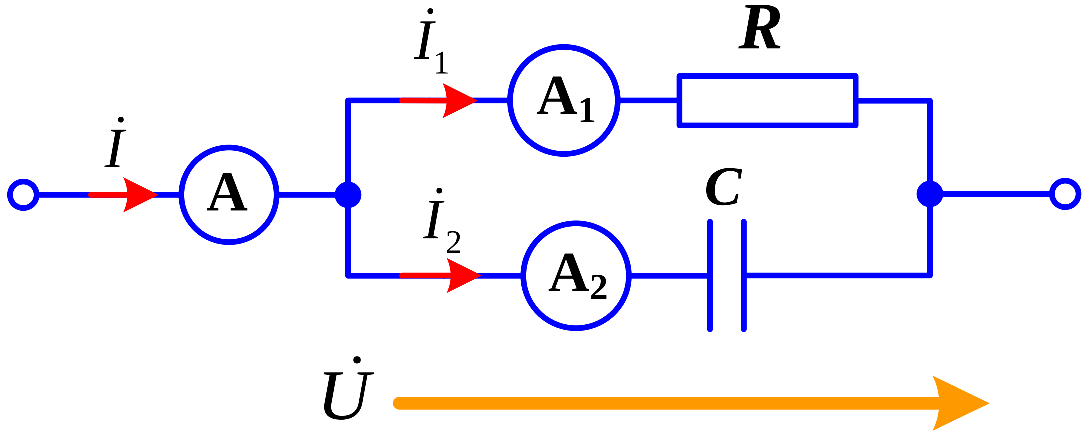
$$i(t)=10\sqrt{2}\sin(1000t+127^\circ)\mathrm{A}$$

8.4 电路定律的相量形式

【例】

已知：电流表的读数为有效值，A1、A2的读数均为10A，

求：A的读数



解　法1：解析法

令 $\dot{U}=U\angle 0^\circ$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2$$

$$=10\angle 0^\circ+10\angle 90^\circ$$

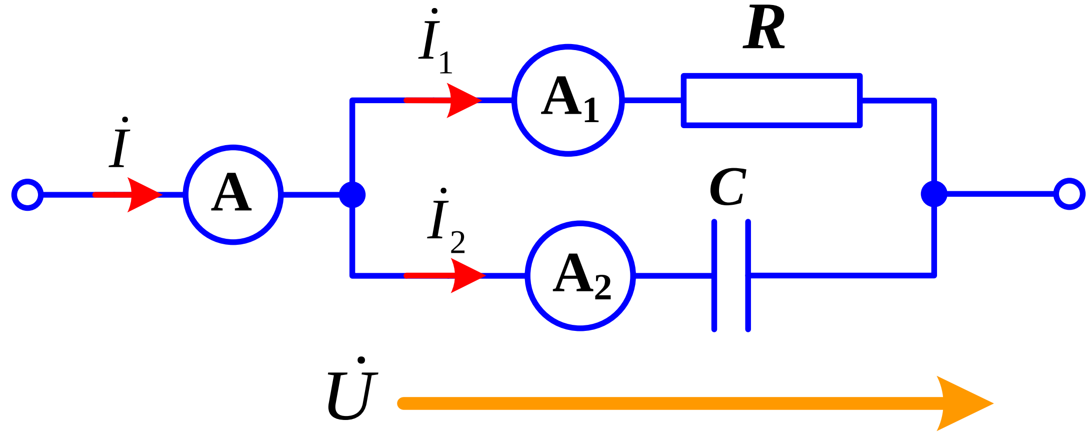
$$=10+j10$$

$$=10\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{A}$$

$$I=10\sqrt{2}\text{A}$$

8.4 电路定律的相量形式

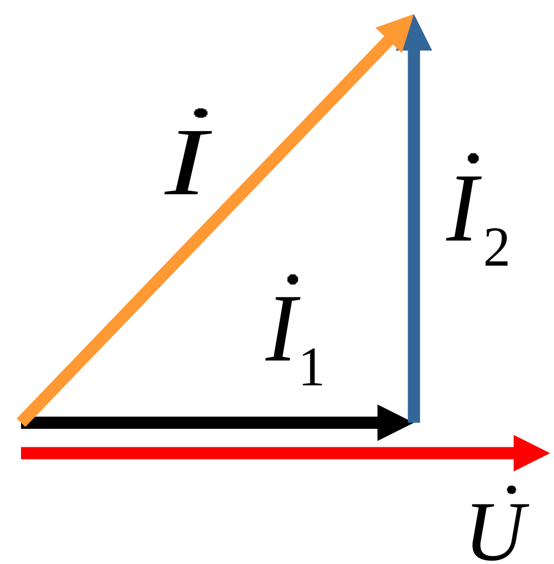
法2：相量图法



$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}$$

$$=\sqrt{10^2+10^2}$$

$$=10\sqrt{2}\mathrm{A}$$



- **重点**：1.　正弦量和相量之间的关系；
  2.　正弦量的相位差和有效值的概念；
  3.　R、L、C各元件的电压、电流关系的相量形式
  4.　电路定律的相量形式及元件的电压电流关系的相量形式。
  5. 相量图

作业

- 8-10【简单串联】
- 8-16【并联】