稳定性及其判别

第七讲

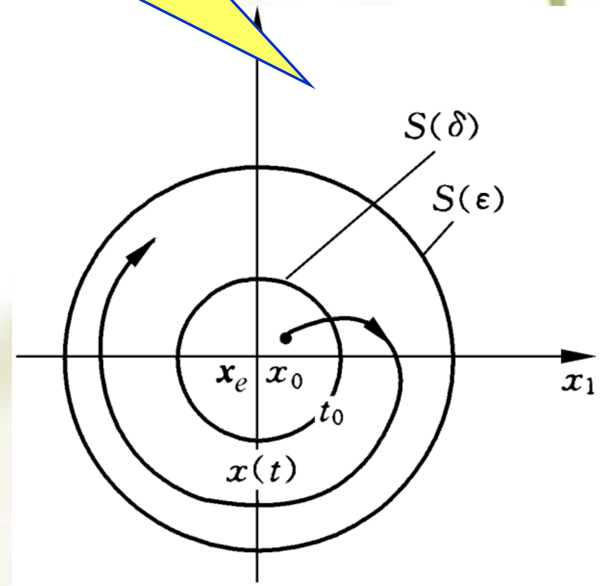
稳定与渐近稳定的几何意义

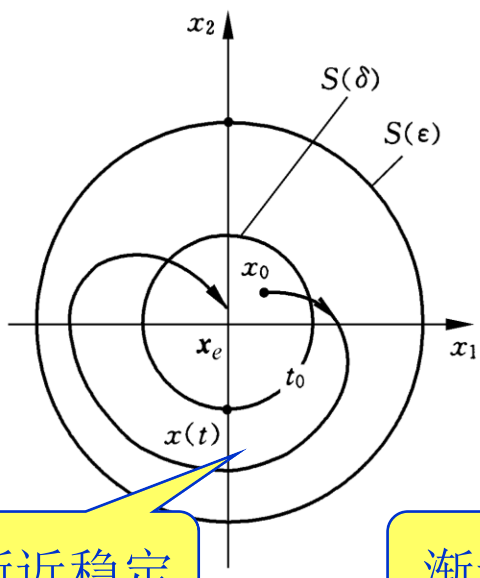
定义 ： 系统(1)的平衡点 $\boldsymbol{x}_e$ 是 (Lyapunov意义)稳定的，如果:

对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $t_0 \in \mathbf{J} = [r, +\infty)$ ，存在 $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ ，使得对所有的 $t \ge t_0$，只要 $\|\boldsymbol{x}_o - \boldsymbol{x}_e\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ ，就有: $\|\boldsymbol{x}(t; x_o, t_o) - \boldsymbol{x}_e\| < \varepsilon$.

如果系统的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ 是稳定的。从平衡状态的某个充分小的领域内出发的状态轨线 $\boldsymbol{x}(t)$，当 $t \to \infty$ 时，收敛于 $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$，则称 $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ 为渐近稳定。

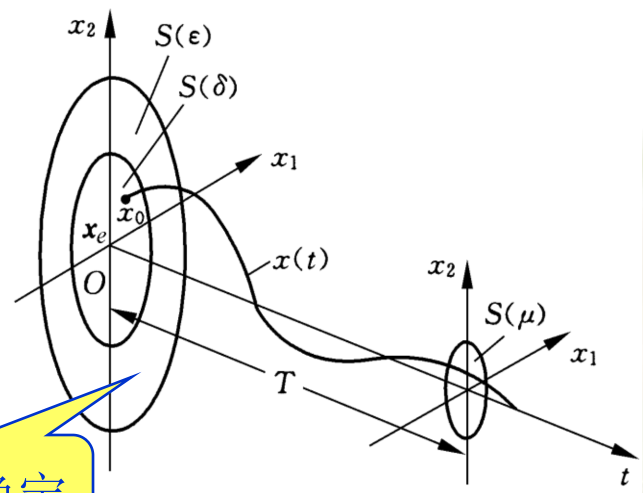
Lyapunov意义下稳定





渐近稳定

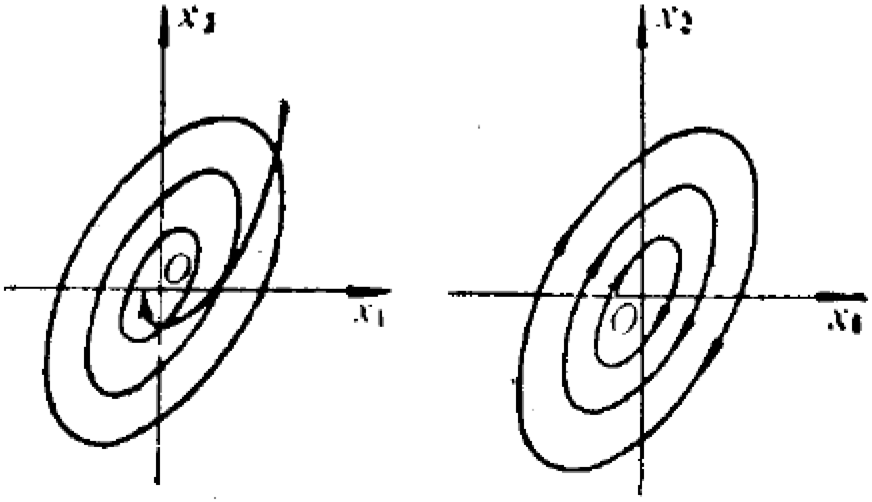
a)



渐近稳定

b)

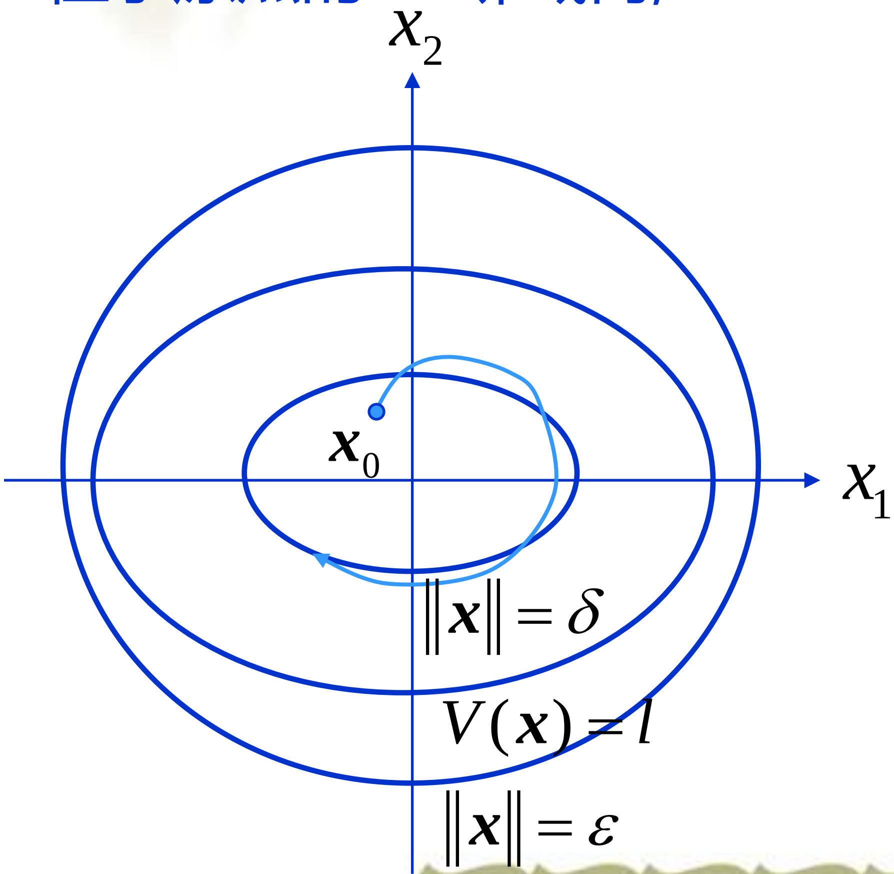
定理4.1 若在原点领域 D 内存在一个连续可微正定（负定）函数V(0)=0且当x在 $D\setminus\{0\}$ 内V(x)>0，它沿系统的解的导数 $\dot{V}\le 0$ 是半负定（半正定）的，则系统原点是稳定的。此外，若 $\dot{V}(x)<0, x\in D\setminus\{0\}$ 是负定的，则系统原点是渐近稳定的。



Lyapunov稳定性定理

定理4-1 若在原点领域 内存在一个正定函数V，它沿系统的解的导数是半负定，则系统原点是稳定的。若它沿系统的解的导数是负定的，则系统原点是渐近稳定的。

(1) 任给$\varepsilon > 0$：存在 $l(\varepsilon) > 0$, 使得满足 $V(\boldsymbol{x}) < l$ 的点位于原点的 ε 邻域内;



(2) 对所得到的$l(\varepsilon)$：存在

$\delta > 0$，使得 $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$的点位于

$V(\boldsymbol{x}) < l$ 内;

(3) 在$\|x\| < \delta$ 内取$\boldsymbol{x}_0$，有:

$$V(\boldsymbol{x}_0) < l$$

(4) 从$\boldsymbol{x}_0$ 出发的解，$\dot{V} \le 0$,

故对所有$t \ge t_0$ ：

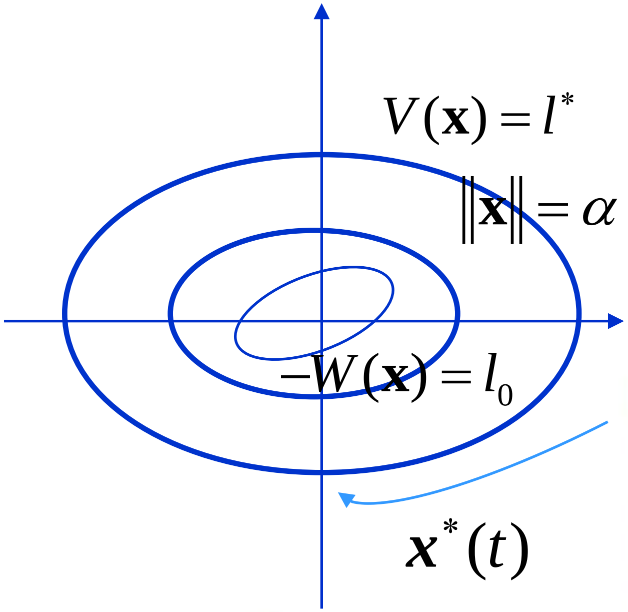
$$V(\boldsymbol{x}(t)) \le V(\boldsymbol{x}_0) < l$$

$$\Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| < \varepsilon$$

定理渐近稳定性部分的证明思路：

(1) 首先原点是稳定的;

(2) 为证明: $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ ，用反证法



设 $\mathbf{x}^*(t)$ 为某一解且: $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}^*(t) \neq \mathbf{0}$

$$\dot{V} < 0 \;\Rightarrow\; V(\mathbf{x}^*(t)) \downarrow$$

单调下降且有下界，所以极限存在: $\lim_{t\to\infty} V(\mathbf{x}^*(t)) = l^* > 0$

由 V 函数正定 $\Rightarrow$ 存在 $\alpha>0$，使得 $\|\mathbf{x}\| = \alpha$ 在 $V(\mathbf{x}) = l^*$ 之内.

设 $\dot{V} = W(\mathbf{x}) < 0$，存在 l_0，使得 $-W(\mathbf{x}) = l_0$ 在 $\|\mathbf{x}\| = \alpha$ 之内.

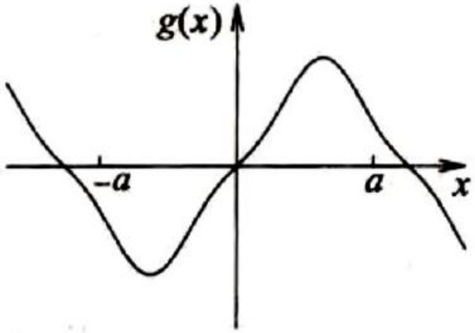
在 $\|\mathbf{x}\| > \alpha$ 上有: $-W(\mathbf{x}) > l_0$ ， $\dot{V} = W(\mathbf{x})$

$$V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}_0) = \int_{t_0}^{t} W(\mathbf{x})dt \le -l_0 \int_{t_0}^{t} dt = -l_0(t - t_0) \to -\infty$$ 矛盾

例子4.2

$\dot{x} = -g(x)$ $g(x)$ 在 $(-a, a)$ 上满足李普希斯条件，并满足

$$g(0) = 0;\ xg(x) > 0,\ \forall x \neq 0,\ x \in (-a, a)$$



$$V(x) = \int_0^x g(y)dy$$

对于域 $\Omega = (-a, a)$，$V(x)$ 是连续可微的，$V(0) = 0$ 且对于 $x \neq 0$

$V(x) > 0$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(-g(x)) = -g^2(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega - \{0\}$$

原点是渐近稳定的。

例4.3-4.4：有摩擦的单摆系统

状态方程: $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -a\sin x_1-bx_2\end{bmatrix}$

如若选Lyapunov函数: $V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_2^2+a(1-\cos x_1)$

沿系统的解:$\dot{V}=0$ 则只能判断系统原点稳定，事实上渐近稳定

取Lyapunov函数: $V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x^TPx+a(1-\cos x_1),P=[p_{ij}]\in R^{2\times 2}$

为了使函数V正定，其沿系统解的导数负定 $p_{11}>0,p_{11}p_{22}-p_{12}^2>0$

$$\dot{V}(x)=a(1-p_{22})x_2\sin x_1-ap_{12}x_1\sin x_1+(p_{11}-p_{12}b)x_1x_2+(p_{12}-p_{22}b)x_2^2$$

取 $p_{22}=1>0,p_{11}=bp_{12}\Rightarrow 0<p_{12}<b$.取 p_{12}=b/2. V的导数

$\dot{V}(x)=-\frac{1}{2}abx_1\sin x_1-\frac{b}{2}x_2^2$,在$D=\{x:|x_1|<\pi\}$上负定，系统原点渐近稳定。

例子4 有阻尼振动线性系统

考虑阻尼振动系统 $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$

引入状态变量 $x_1=x, x_2=\dot{x}$ 可得状态变量方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-x_2\end{cases}$$

取 $v(x)=3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2$ 则 $\dot{v}=-2(x_1^2+x_2^2)$

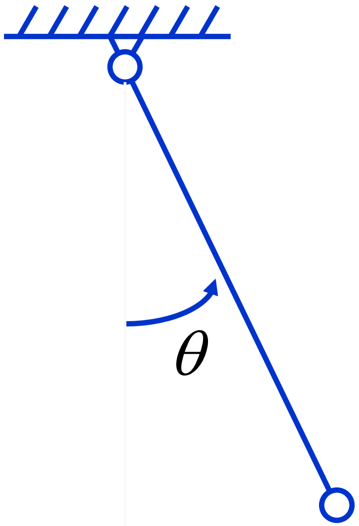
故原点渐近稳定。

若取 $v(x)=\dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ 则 $\dot{v}=-x_2^2$

因此 $v>0,\dot{v}\le 0.$

只能判断原点稳定，而实际上是渐近稳定的。

例5：有摩擦单摆系统



$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + a\sin\theta = 0$$

引入状态变量: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a\sin x_1 - bx_2 \end{bmatrix}$

取: $V(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2}x_2^2 + a(1-\cos x_1)$

沿系统的解: $\dot{V} = -bx_2^2 \le 0$ 原点稳定.

取: $V(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2}x_2^2 + \dfrac{1}{2}\left(bx_1 + x_2\right)^2 + 2a(1-\cos x_1)$

沿系统的解: $\dot{V} = -b\left(ax_1\sin x_1 + x_2^2\right) < 0$ 原点渐近稳定.

原点稳定性定理Lyapunov函数方法

到目前为止，我们还没有找到构造**Lyapunov**函数的一般方法。因为**Lyapunov**第二法给出的结果是系统稳定性的充分条件。因此，对于某个系统来说，找不到合适的**Lyapunov**函数，既不能说系统稳定，也不能说系统不稳定，只能说无法提供有关该系统稳定性的信息（即**inconclusive —**没有得出结论）。

定常非线性系统的稳定性方法

从例4.4可以看出用倒推法，先考虑V的导数，再反过来选择V的参数，保证稳定性条件，这一方法称为**可变梯度法。**

函数$V(x)$视为关于t的复合函数，其对时间的导数

$$\frac{d}{dt}V(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x_1,\cdots,x_n)=[\nabla V(x)]^T f(x)=g^T(x)f(x)$$

要选择$g(x)$作为函数$V(x)$的梯度$g(x)=\nabla V(x)=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T$，当且仅当$\frac{\partial g}{\partial x}$是对称的，即

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}=\frac{\partial g_j}{\partial x_i},\forall i,j=1,\ldots,n.$$

这样先选择$g(x)$使$g^T(x)f(x)$负定，然后由下列积分计算$V(x)$:

$$V(x)=\int_0^x g^T(y)dy=\int_0^x\sum_{i=1}^{n}g_i(y)dy_i$$

该积分是0到x的任意路径，所以取沿轴线积分并保证其正定即可

$$V(x)=\int_0^{x_1}g_1(y_1,0,\ldots,0)dy_1+\int_0^{x_2}g_2(x_1,y_2,\ldots,0)dy_1+\ldots+\int_0^{x_n}g_n(x_1,\ldots,x_{n-1},y_n)dy_n$$

变梯度方法

对于$V(\boldsymbol{x})$，如果存在$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \nabla V(\boldsymbol{x}) = (\partial V / \partial x)^T$，

则$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial V}{\partial x} f(x) = \boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

引理：向量函数 $g(x)$ 是某个函数 $V(x)$ 的梯度的充分必要条件是：

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

变梯度法的步骤：

1） 先给出一个向量函数$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_n(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$，算出其为某个函数的梯度的条件；

2） 看$\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$负定的条件；

3） 算出满足 $\nabla V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的 V，看其正定条件.

如果这三步骤得到的条件同时成立，则 V 就是Lyapunov函数，否则继续试.

例4.5：考虑二阶系统

状态方程: $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -h(x_1) - ax_2 \end{bmatrix}, a > 0, h(0) = 0.$

$h(\ )$为局部Lipchitz的, $y \neq 0, yh(y) > 0, y \in (-b, c), b, c > 0.$

如若选二阶向量函数*g(x)*满足: $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$

$$\dot{V} = g_1(x)x_2 - g_2(x)(h(x_1) + ax_2) < 0, x \neq 0$$

且$V(x) = \int_0^x g^T(y)dy > 0, x \neq 0.$

设: $g(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2 \end{bmatrix}, \alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$待定函数。

为了满足对称性 $\beta(x) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial \beta}{\partial x_2}x_2 = \gamma(x) + \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial \delta}{\partial x_1}x_2$

例4.5（续）

状态方程: $$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -h(x_1) - ax_2 \end{bmatrix}, a > 0, h(0) = 0.$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2 \end{bmatrix}, \alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$$待定函数。

V的导数负定

$$\dot{V}(x) = \alpha(x)x_1x_2 + \beta(x)x_2^2 - a\gamma(x)x_1x_2 - a\delta(x)x_2^2 - \delta(x)x_2h(x_1) - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

取 $\alpha(x)x_1 - a\gamma(x)x_1 - \delta(x)h(x_1) = 0, \delta(x) = \delta, \gamma(x) = \gamma, \beta(x) = \beta$常数

V的导数 $$\dot{V}(x) = -(a\delta - \beta)x_2^2 - \gamma x_1h(x_1)$$

向量函数$g(x)$化简为: $$g(x)=\begin{bmatrix}\alpha\gamma x_1+\delta h(x_1)+\beta x_2\\ \gamma x_1+\delta x_2\end{bmatrix}$$

通过积分得到: $$\begin{aligned}V(x)&=\int_0^{x_1}[a\gamma y_1+\delta h(y_1)]dy_1+\int_0^{x_2}[\gamma x_1+\delta y_2]dy_2\\ &=\frac{1}{2}a\gamma x_1^2+\delta\int_0^{x_1}h(y)dy+\gamma x_1x_2+\frac{1}{2}\delta x_2^2\\ &=\frac{1}{2}x^TPx+\delta\int_0^{x_1}h(y)dy\end{aligned}$$ 其中 $P=\begin{bmatrix}a\gamma & \gamma\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$

选择$\delta>0,0<\gamma<a\delta$，即可保证$V(x)$正定，$\dot V(x)$负定。例如，

取$\gamma=ak\delta,0<k<1$，得到 Lyapunov 函数为

$$V(x)=\frac{\delta}{2}x^T\begin{bmatrix}ka^2 & ka\\ ka & 1\end{bmatrix}x+\delta\int_0^{x_1}h(y)dy$$

该函数在$D=\{x\in R^2:x_1\in(-b,c)\}$上满足定理4.1 条件，原点渐近稳定。

Barbashin-Krasovskii渐近稳定性定理

定理4.2若存在一个连续可微正定函数V(0)=0且当x不在 {0} 上V(x)>0，它沿系统的解的导数 $\dot{V}(x)<0, x\neq 0$ 是负定的，且 $\|x\|\to\infty \Rightarrow V(x)\to\infty$ 径向无界的，则系统原点是全局渐近稳定的。

例4.6: 考虑例4.5中系统, 其中$yh(y)>0$，取

$$V(x)=\frac{\delta}{2}x^T\begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix}x+\delta\int_0^{x_1}h(y)dy$$

其全局正定，且径向无界。由于0<k<1,其导数：

$\dot{V}(x)=-a\delta(1-k)x_2^2-a\delta kx_1h(x_1)s$是负定的，所以原点全局渐近稳定。

评注：如果原点$x=0$ 是系统的一个全局渐近稳定的平衡点，那么它必是系统的唯一平衡点。这是因为如果存在另一个平衡点y，那么始于y 的轨线在$t>0$ 时就会保持在y 处，因而轨线不会趋近于原点，这与是全局渐近稳定的要求相矛盾。

因此，存在多平衡点系统的每个平衡点都不会是全局渐近稳定的，如单摆系统.

全局渐近稳定的必要条件是系统具有唯一平衡点。

Lyapunov不稳定性定理及稳定性扩展结果

Lyapunov原点不稳定性定理

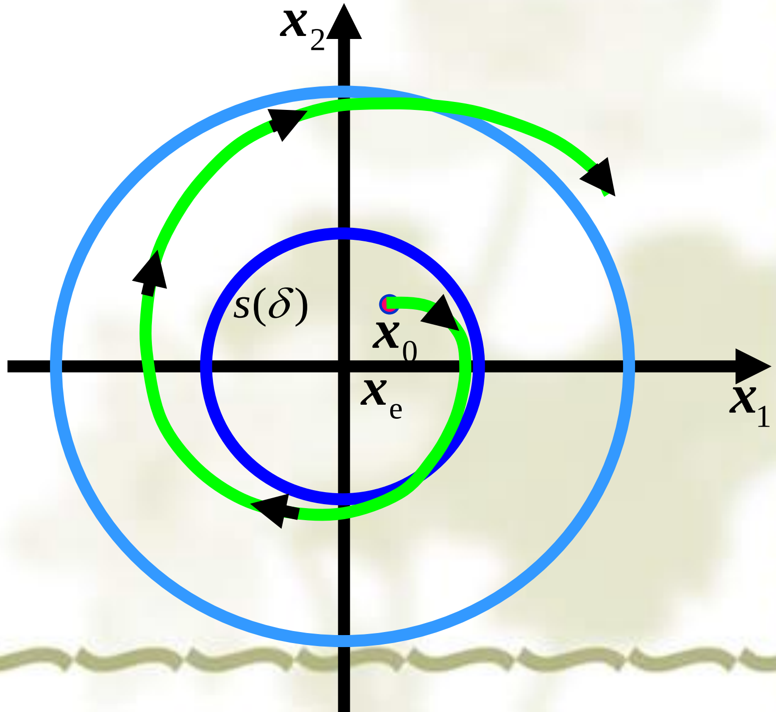
定理4.1* 若在原点领域 Ω 内存在一个函数，它沿系统的解的导数是负定（正定）的，而其本身不是半正定（半负定）的，则系统原点是不稳定的。

注：对$\dot{v}$正定，v正定或半正定，则对任给的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得从δ邻域中出发全部相轨线，均到达ε邻域的边界，此时称原点是完全不稳定的。

定理4.2*若在原点领域 Ω 内存在一个函数**v(x)**，它沿系统的解的导数是

$$\dot{v}(x) = \lambda v(x) + w(x)$$

其中 $\lambda > 0, w(x) \geq 0$，而**v(x)**不是半负定的，则系统原点是不稳定的。



不稳定性

定理4.3 关于不稳定的定理(Chetaev)

对于扰动方程(1)，如果可以找到具有如下性质的函数:

1) 在区域 $\|\boldsymbol{x}\|<H$ 上单值连续，$V(0)=0$;

2) 在原点的任意小邻域内存在 $V>0$ 的连通分支区域，且以$V=0$为界;

3) 在 $V>0$ 的连通分支区域上，$\dot{V}$ 连续，且$\dot{V}>0$.

则原点不稳定.

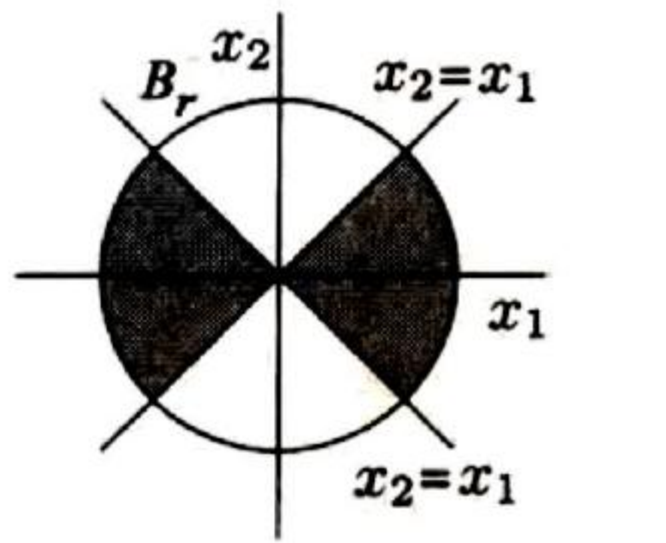


图 4.5 $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)$时的集合 U

作业：P122， 4.3(1),(2)