

数字信号处理

——第19讲

差分方程与系统函数

❖ 相互关系

➤ 系统描述

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{T\{\cdot\}} \xrightarrow{y[n]}$$

$$\iff H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \iff y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

➤ 共性单元:

加法、数乘、求和。

2019/5/28

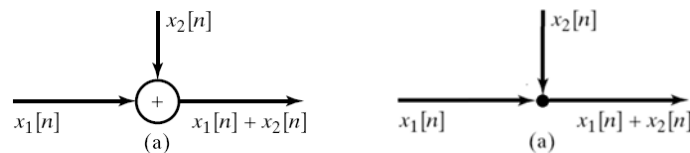
数字信号处理 北京航空航天大学

2

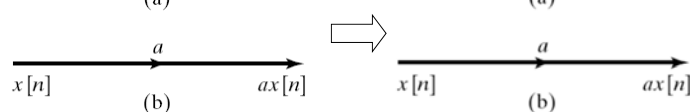
FIR系统基本结构

❖ 构造系统基本单元

➤ 加法



➤ 数乘



➤ 延时



FIR系统基本结构

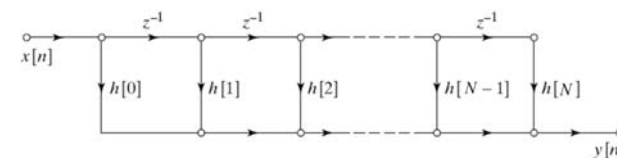
❖ FIR系统直接结构

➤ FIR系统函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} \iff y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n} \implies h[n] = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

➤ FIR直接结构



2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

3

2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

4

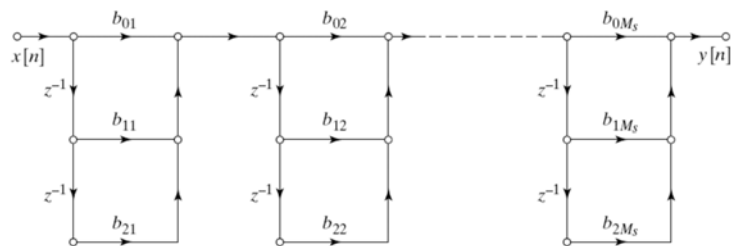
FIR系统基本结构

❖ FIR系统级联结构

➤ FIR系统函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} \iff H(z) = \prod_{k=1}^{[N/2]} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$

➤ FIR级联结构



2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

5

FIR系统基本结构

❖ FIR线性相位结构

➤ FIR线性相位

$$h[n] = \pm h[N-1-n]$$

➤ N为奇数:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n][z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}] + h\left[\frac{N-1}{2}\right]z^{-\frac{N-1}{2}}$$

➤ N为偶数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} h[n][z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)}]$$

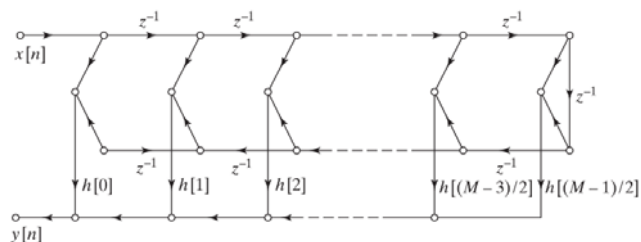
2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

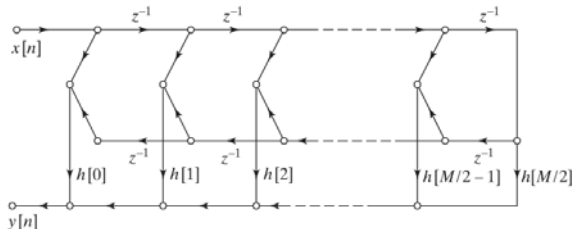
6

FIR系统基本结构

➤ N为偶数



➤ N为奇数



2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

7

IIR系统基本结构

❖ IIR系统函数

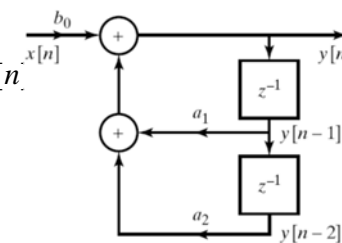
➤ 系统描述

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \iff y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

➤ IIR实例

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$



2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

8

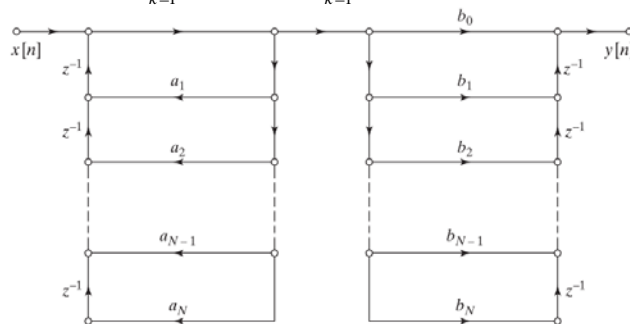
IIR系统基本结构

❖ IIR系统直接I型

➤ 系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \cdot \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

➤ 系统结构



2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

9

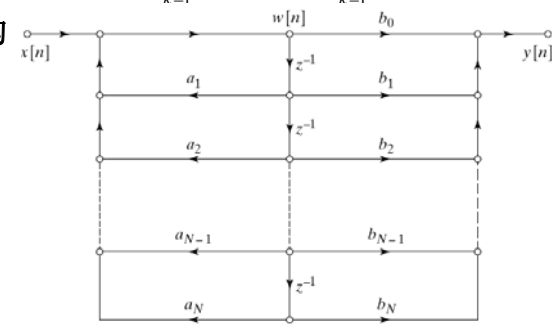
IIR系统基本结构

❖ IIR系统直接II型

➤ 系统函数

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \cdot \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

➤ 系统结构



2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

10

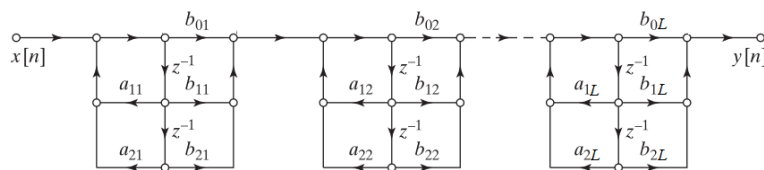
IIR系统基本结构

❖ IIR级联结构

➤ 系统函数

$$H(z) = \prod_{i=1}^L \frac{1 + b_{1,i}z^{-1} + b_{2,i}z^{-2}}{1 - a_{1,i}z^{-1} - a_{2,i}z^{-2}} = \prod_{i=1}^L H_i(z)$$

➤ 系统结构



2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

11

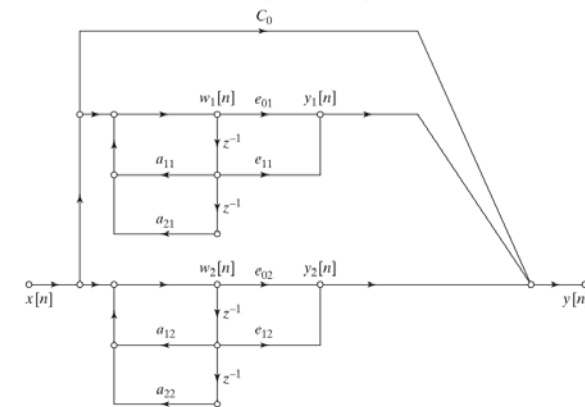
IIR系统基本结构

❖ IIR并联结构

➤ 系统函数

$$H(z) = C_0 + \sum_{k=1}^L \frac{e_{k0} + e_{k1}z^{-1}}{1 - a_{k1}z^{-1} - a_{k2}z^{-2}}$$

➤ 系统结构



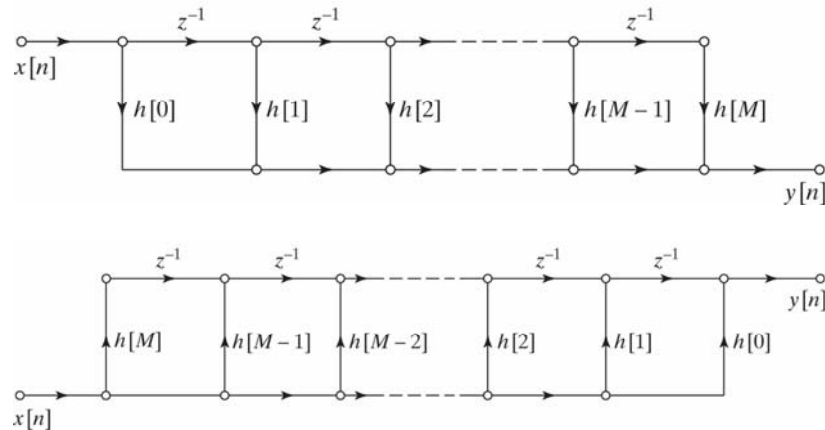
2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

12

离散系统的其它结构

❖ FIR的转置结构



2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

13

系统结构实例

❖ 系统结构及知识综合实例

➤ 差分方程

$$y[n] = \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] + x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

➤ 系统函数

$$Y(z) - \frac{3}{4}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{8}Y(z)z^{-2} = X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

14

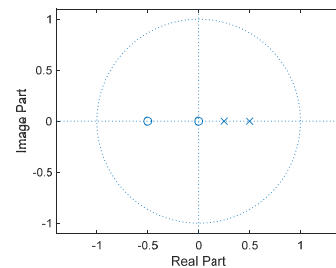
系统结构实例

➤ 因果稳定性:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

零点: $z = 0, z = -1/2$;

极点: $z = 1/2, z = 1/4$ 。



$|z| > 1/2$: 因果、稳定

$1/4 < |z| < 1/2$: 非因果、非稳定

$|z| < 1/4$: 非因果、非稳定

2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

15

系统结构实例

➤ 单位脉冲响应

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$A_1 = H(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = 4 \quad A_2 = H(z)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = -3$$

$$H(z) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Rightarrow h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

2019/5/28

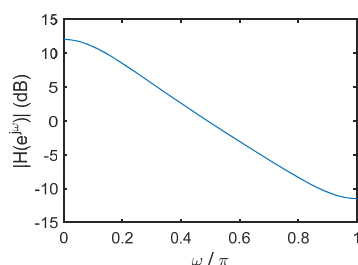
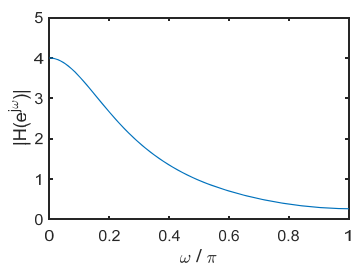
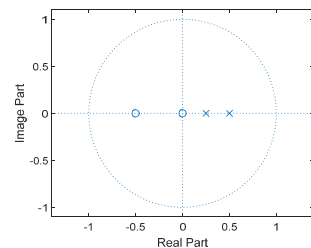
数字信号处理 北京航空航天大学

16

系统结构实例

➤ 幅度响应:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$



2019/5/28

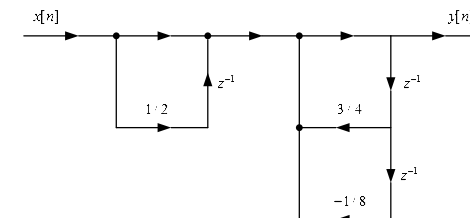
数字信号处理 北京航空航天大学

17

系统结构实例

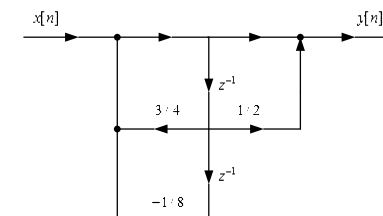
➤ 直接I型

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$



➤ 直接II型

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$



2019/5/28

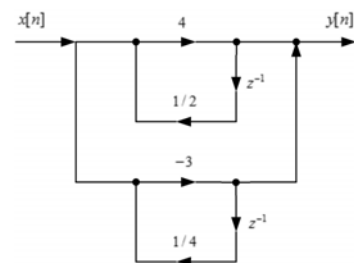
数字信号处理 北京航空航天大学

18

系统结构实例

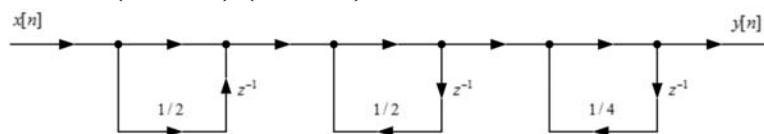
➤ 并联结构

$$H(z) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$



➤ 级联结构

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$



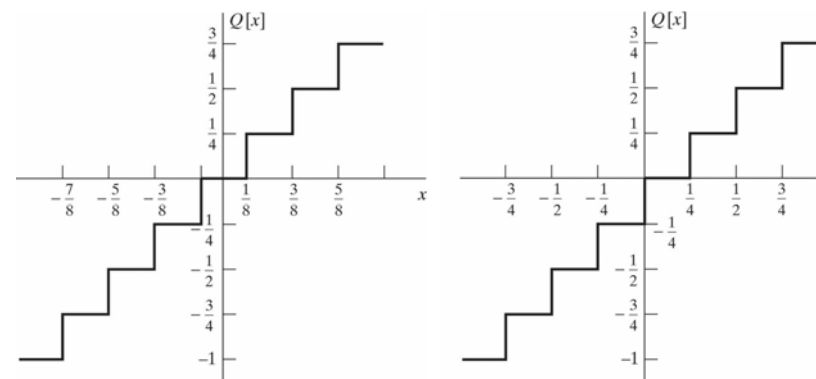
2019/5/28

数字信号处理 北京航空航天大学

19

离散系统的量化效应

❖ 两种不同的量化效应



2019/5/28

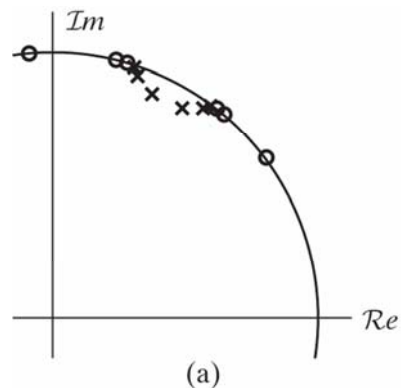
数字信号处理 北京航空航天大学

20

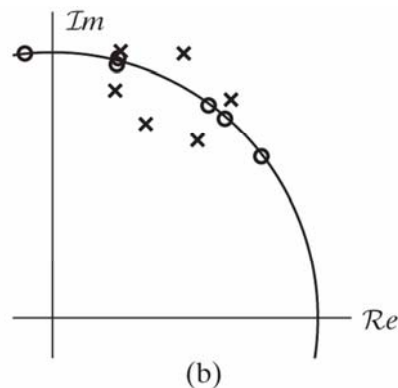
离散系统的量化效应

❖ 量化效应的影响实例

无量化误差:



存在量化误差:



系统结构内容总结

❖ 相互关系—系统四性

- 差分方程
- 系统函数
- 频率响应
- 线性卷积
- 单位脉冲响应

❖ 结构元素

- 加法单元
- 数乘单元
- 延时单元

❖ FIR系统

- 直接型结构
- 级联型结构
- 线性相位结构

❖ IIR系统

- 直接I型
- 直接II型
- 级联型
- 并联型

第19次作业

❖ P249-251

8.5

8.8(d)、(e)、(f)、(g)

8.13(1)

