第14章 线性电路的复频域分析

（运算法）

本章重点

拉普拉斯变换、拉普拉斯反变换

线性电路的运算电路图

掌握线性电路的复频域分析方法（运算法）

网络函数的极点和零点及其分布与时域响应和频域响应的关系

用卷积积分法求零状态响应

1. 拉普拉斯变换

一种数学积分变换

设 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 时有定义

拉氏变换		拉氏反变换
时域	$\Leftrightarrow$	复频域
$f(t)$	$\Leftrightarrow$	$F(s)$
原函数	$\Leftrightarrow$	象函数
高阶微分方程	$\Leftrightarrow$	复频域的代数方程

$$\begin{cases} F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \end{cases}$$

拉氏变换

拉氏反变换

s为复频率：$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$

c为正有限常数。

$$F(\mathrm{s})=L\left[f(t)\right]$$

$$f(t)=L^{-1}\left[F(\mathrm{s})\right]$$

2. 求象函数与原函数的方法——拉氏变换及反变换

按定义拉氏变换、拉氏反变换

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

查表、数学手册

利用拉氏变化性质，再利用常用函数拉氏变换表

单选题

设置

$A\delta(t)$ 的象函数为：

A A

B $\dfrac{A}{s}$

C $\dfrac{A}{s^2}$

D $\dfrac{A}{s+\alpha}$

提交

单选题

设置

At 的象函数为：

A A

B $\dfrac{A}{s}$

C $\dfrac{A}{s^2}$

D $\dfrac{A}{s+\alpha}$

提交

单选题

设置

$A\varepsilon(t)$ 的象函数为：

A A

B $\dfrac{A}{s}$

C $\dfrac{A}{s^2}$

D $\dfrac{A}{s+\alpha}$

提交

单选题

设置

$Ae^{-\alpha t}$ 的象函数为：

A A

B $\dfrac{A}{s}$

C $\dfrac{A}{s^2}$

D $\dfrac{A}{s+\alpha}$

提交

单选题

设置

$\cos(\omega t)$ 的象函数为：

A $\dfrac{A}{s}$

B $\dfrac{A}{s^2}$

C $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

D $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

提交

单选题

设置

$\sin(\omega t)$ 的象函数为：

A $\dfrac{A}{s}$

B $\dfrac{A}{s^2}$

C $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

D $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

提交

3. 常见函数的拉氏变换

原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
$A\delta(t)$	A	$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$A\varepsilon(t)$	$\dfrac{A}{s}$	$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
At	$\dfrac{A}{s^2}$	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$A\mathrm{e}^{-\alpha t}$	$\dfrac{A}{s+\alpha}$	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

1. 唯一性 $f(t) \leftrightarrow F(S)$

2. 线性性质

若 $L[f_1(t)] = F_1(s),\ L[f_2(t)] = F_2(s)$

$$L\left[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)\right] = A_1 L\left[f_1(t)\right] + A_2 L\left[f_2(t)\right]$$

$$= A_1 F_1(s) + A_2 F(s)$$

3. 微分性质

若: $L\left[f(t)\right] = F(s)$

$$L[f'(t)] = \int_{0-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_{0\_}^{\infty} + \int_{0-}^{\infty} sf(t)e^{-st}dt$$

$$L\left[f'(t)\right] = sF(s) - f(0\_)$$ **时域微分**

4. 时域积分性质

若$L[f(t)] = F(s)$

$$L\left[\int_{0^-}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{F(s)}{s}$$

5. 平移性质

若: $L\left[f(t)\right] = F(s)$

$$L[f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)] = \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-s(t-t_0)}e^{-st_0}dt = \mathrm{e}^{-st_0}F(s)$$

时域平移

$$L[f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = F(s+\alpha)$$

频域平移

6. 初值定理

若 $L[f(t)] = F(s)$，$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$存在

则 $f(0_+) = \lim\limits_{t\to 0_+} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

7. 终值定理

若 $L[f(t)] = F(s)$，$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$存在

则 $f(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

可用初值定理或终值定理判断象函数求解是否正确

14.3 拉普拉斯反变换的部分分式展开

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\ldots a_{m-1}s+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\ldots b_{n-1}s+b_n}$$

其中：$n \geq m$, 系数是实数

第一步：把有理分式化为真分式

- 若***n*=*m***，则 $F(s)=A+\dfrac{N_0(s)}{D(s)}$
- 若***n*>*m***，则是真分式

第二步：求*D*(*s*)=0的根，确定分解单元。

第三步：将真分式展开成部分分式，求各部分分式的系数。

$$\begin{cases} \text{单　根} \\ \text{复　根} \\ \text{重　根} \end{cases}$$

第四步：对每个部分分式和多项式逐项求拉氏反变换 。

(1) $D(s)=0$有n个单根，$p_1 \cdots p_n$

$$F(s)=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}$$

$$f(t)=k_1 \mathrm{e}^{p_1 t}+k_2 \mathrm{e}^{p_2 t}+\cdots k_n \mathrm{e}^{p_n t}$$

待定常数的确定：

方法1 $k_i=F(s)(s-p_i)\Big|_{s=p_i}$ $\quad i=1,2,3\cdots n$

方法2 求极限的方法

$$k_i=\lim_{s\to p_i}\frac{N(s)(s-p_i)}{D(s)}=\lim_{s\to p_i}\frac{N'(s)(s-p_i)+N(s)}{D'(s)}=\frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

(2) $D(s)=0$有共轭复根，$\begin{cases} p_1 = -\alpha + \mathrm{j}\omega \\ p_2 = -\alpha - \mathrm{j}\omega \end{cases}$

方法1

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+\alpha-\mathrm{j}\omega)(s+\alpha+\mathrm{j}\omega)D_1(s)}$$

$$= \frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\omega} + \frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\omega} + \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

待定常数的确定：$K_1 = F(s)(s+\alpha-\mathrm{j}\omega)\Big|_{s=-\alpha+\mathrm{j}\omega}$

$$K_2 = F(s)(s+\alpha+\mathrm{j}\omega)\Big|_{s=-\alpha-\mathrm{j}\omega}$$

一对共轭复根 $K_1 = |K|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ $K_2 = |K|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$

$$f(t)=\left[K_1\,\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{j}\omega)t}+K_2\,\mathrm{e}^{(-\alpha-\mathrm{j}\omega)t}\right]+f_1(t)$$

$$=\left[|K|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\,\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{j}\omega)t}+|K|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\,\mathrm{e}^{(-\alpha-\mathrm{j}\omega)t}\right]+f_1(t)$$

$$=|K|\mathrm{e}^{-\alpha t}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\theta)}]+f_1(t)$$

$$=2|K|\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t+\theta)+f_1(t)$$

方法2：配方法 $L[\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t)]=\dfrac{\omega}{(\mathrm{s}+\alpha)^2+\omega^2}$

$$L[\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t)]=\frac{\mathrm{s}+\alpha}{(\mathrm{s}+\alpha)^2+\omega^2}$$

(3) $D(s)=0$有重根，$F(s)=\dfrac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{(s-p_1)^n}$

$$F(s)=\frac{K_{11}}{s-p_1}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^2}+\cdots+\frac{K_{1n-1}}{(s-p_1)^{n-1}}+\frac{K_{1n}}{(s-p_1)^n}$$

$$K_{1n}=[(s-p_1)^n F(s)]\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1n-1}=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-p_1)^n F(s)]\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1n-2}=[\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(s-p_1)^n F(s)]\Big|_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

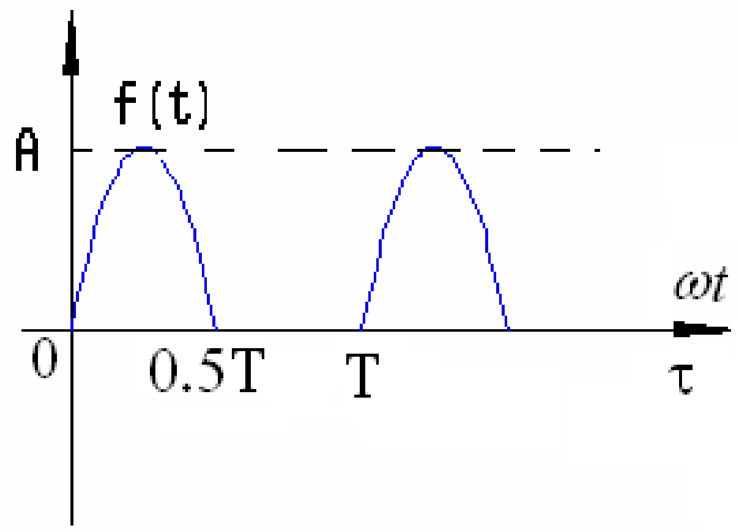
$$K_{11}=\left[\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}s^{n-1}}(s-p_1)^n F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$\therefore f(t)=e^{P_1 t}\left(\frac{K_{1n}}{(n-1)!}t^{n-1}+\frac{K_{1(n-1)}}{(n-2)!}t^{n-2}+\ldots+K_{11}\right)$$

作业

【14 - 1(1)(2)(4)】

【补充题】求图示周期函数 $f(t)$的象函数



【14-3(3)】（求原函数）