

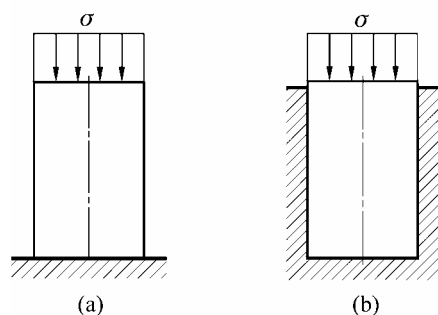
# 第九章 复杂应力状态强度问题

| 题号         | 页码 |
|------------|----|
| 9-4 .....  | 1  |
| 9-5 .....  | 3  |
| 9-8 .....  | 4  |
| 9-9 .....  | 5  |
| 9-10 ..... | 7  |
| 9-14 ..... | 8  |
| 9-16 ..... | 10 |
| 9-17 ..... | 11 |
| 9-18 ..... | 13 |
| 9-19 ..... | 14 |
| 9-22 ..... | 16 |
| 9-23 ..... | 16 |
| 9-24 ..... | 17 |
| 9-25 ..... | 18 |
| 9-26 ..... | 18 |
| 9-27 ..... | 20 |
| 9-28 ..... | 21 |

(也可通过左侧题号书签直接查找题目与解)

**9-4** 试比较图示正方形棱柱体在下列两种情况下的相当应力  $\sigma_{r3}$  ,弹性常数  $E$  和  $\mu$  均为已知。

- (a) 棱柱体轴向受压；
- (b) 棱柱体在刚性方模中轴向受压。



题 9-4 图

(a)解：对于棱柱体轴向受压的情况（见题图 a）, 三个主应力依次为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma$$

由此可得第三强度理论的相当应力为

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma \quad (a)$$

(b)解：对于棱柱体在刚性方模中轴向受压的情况（见图 9-4），可先取受力微体及坐标如图 9-4 所示，然后计算其应力。

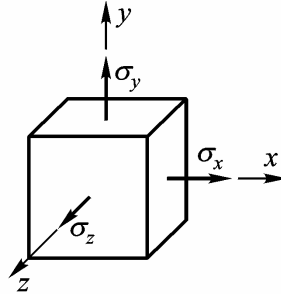


图 9-4

由图 9-4 可得

$$\sigma_y = -\sigma$$

根据刚性方模的约束条件，有

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

即

$$\sigma_x = \mu(\sigma_y + \sigma_z)$$

注意到

$$\sigma_z = \sigma_x$$

故有

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\mu}{1-\mu}\sigma$$

三个主应力依次为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{\mu}{1-\mu}\sigma, \quad \sigma_3 = -\sigma$$

由此可得其相当应力为

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{1-2\mu}{1-\mu}\sigma \quad (b)$$

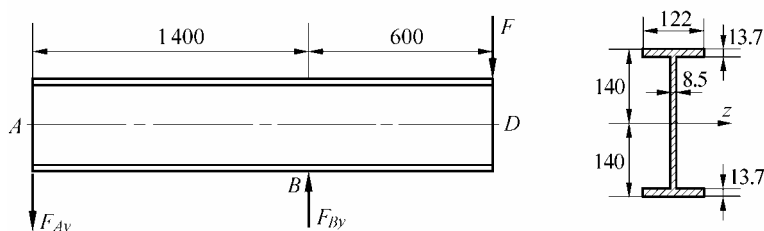
比较：按照第三强度理论，(a)与(b)两种情况相当应力的比值为

$$r = \frac{\sigma_{r3(a)}}{\sigma_{r3(b)}} = \frac{1-\mu}{1-2\mu}$$

$r > 1$ ，这表明加刚性方模后对棱柱体的强度有利。

## 9-5

图示外伸梁，承受载荷  $F = 130 \text{ kN}$  作用，许用应力  $[\sigma] = 170 \text{ MPa}$ 。试校核梁的强度。如危险点处于复杂应力状态，采用第三强度理论校核强度。



题 9-5 图

解：1. 内力分析

由题图可知， $B_+$  截面为危险截面，剪力与弯矩均为最大，其值分别为

$$F_S = F = 130 \text{ kN}, \quad |M| = Fl_2 = 130 \times 10^3 \text{ N} \times 0.600 \text{ m} = 7.80 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. 几何量计算

$$I_z = \left[ \frac{0.122 \times 0.280^3}{12} - \frac{(0.122 - 0.0085) \times (0.280 - 2 \times 0.0137)^3}{12} \right] \text{m}^4 = 7.07 \times 10^{-5} \text{m}^4$$

$$W_z = \frac{7.07 \times 10^{-5}}{0.140} \text{m}^3 = 5.05 \times 10^{-4} \text{m}^3$$

$$S_{z(b)} = 0.122 \times 0.0137 \times (0.140 - \frac{0.0137}{2}) \text{m}^3 = 2.23 \times 10^{-4} \text{m}^3 = 2S_{z(a)}$$

$$S_{z,\max} = [2.23 \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 0.0085 \times (0.140 - 0.0137)^2] \text{m}^3 = 2.90 \times 10^{-4} \text{m}^3$$

式中的足标  $b$ ，系指翼缘与腹板的交界点，足标  $a$  系指上翼缘顶边中点。三个可能的危险点 ( $a$ ， $b$  和  $c$ ) 示如图 9-5。

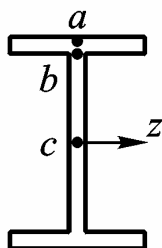


图 9-5

3. 应力计算及强度校核

点  $a$  的正应力和切应力分别为

$$\sigma = \frac{|M|}{W_z} = \frac{7.80 \times 10^4 \text{ N}}{5.05 \times 10^{-4} \text{m}^2} = 1.545 \times 10^8 \text{ Pa} = 154.5 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{F_S S_{z(a)}}{I_z t} = \frac{130 \times 10^3 \times 1.115 \times 10^{-4} \text{ N}}{7.07 \times 10^{-5} \times 0.0137 \text{m}^2} = 1.496 \times 10^7 \text{ Pa} = 14.96 \text{ MPa}$$

该点处于单向与纯剪切组合应力状态，根据第三强度理论，其相当应力为

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{154.5^2 + 4 \times 14.96^2} \text{ MPa} = 157.4 \text{ MPa} < [\sigma]$$

点  $b$  的正应力和切应力分别为

$$\sigma = \frac{|M|y_b}{I_z} = \frac{7.80 \times 10^4 \times (0.140 - 0.0137) \text{ N}}{7.07 \times 10^{-5} \text{ m}^2} = 1.393 \times 10^8 \text{ Pa} = 139.3 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{F_S S_{z(b)}}{I_z \delta} = \frac{130 \times 10^3 \times 2.23 \times 10^{-4} \text{ N}}{7.07 \times 10^{-5} \times 0.0085 \text{ m}^2} = 4.82 \times 10^7 \text{ Pa} = 48.2 \text{ MPa}$$

该点也处于单向与纯剪切组合应力状态，其相当应力为

$$\sigma_{r3} = \sqrt{139.3^2 + 4 \times 48.2^2} \text{ MPa} = 169.4 \text{ MPa} < [\sigma]$$

点  $c$  处于纯剪切应力状态，其切应力为

$$\tau = \frac{F_S S_{z,\max}}{I_z \delta} = \frac{130 \times 10^3 \times 2.90 \times 10^{-4} \text{ N}}{7.07 \times 10^{-5} \times 0.0085 \text{ m}^2} = 6.27 \times 10^7 \text{ Pa} = 62.7 \text{ MPa}$$

其相当应力为

$$\sigma_{r3} = 2\tau = 2 \times 62.7 \text{ MPa} = 125.4 \text{ MPa}$$

结论：该梁满足强度要求。

#### 4. 强度校核

依据第三强度理论，上述三点的相当应力依次为

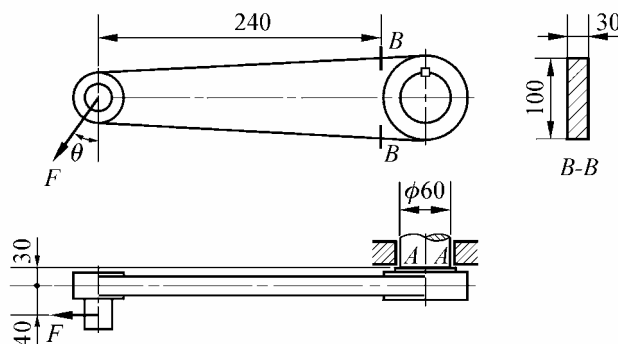
$$\sigma_{r3(a)} = \sigma_1 - \sigma_3 = [155.9 - (-1.44)] \text{ MPa} = 157.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3(b)} = [154.4 - (-15.05)] \text{ MPa} = 169.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3(c)} = 2\tau = 2 \times 62.7 \text{ MPa} = 125.4 \text{ MPa}$$

它们均小于许用应力，故知该梁满足强度要求。

**9-8** 图示曲柄轴，承受载荷  $F = 10 \text{ kN}$  作用。试问当载荷方位角  $\theta$  为何值时，对截面  $A-A$  的强度最为不利，并求相应的相当应力  $\sigma_{r3}$ 。



题 9-8 图

解：1. 分析内力

由于  $A-A$  为圆形截面，其任一直径均为主形心轴，故载荷  $F$  无需分解，可直接用以分析内力。根据平衡关系，截面  $A-A$  上的剪力、弯矩和扭矩值（绝对值）分别为

$$F_S = F = 10 \text{ kN}, M = Fl = 10 \times 10^3 \times 0.070 \text{ N} \cdot \text{m} = 700 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T = Fa \cos \theta$$

由此可见,  $F$  的方位角  $\theta$  对剪力和弯矩值并无影响, 它只改变扭矩的大小, 当  $\theta = 0$  时扭矩取最大值, 对截面  $A-A$  的强度最为不利, 其值为

$$T_{\max} = Fa = 10 \times 10^3 \times 0.240 \text{ N} \cdot \text{m} = 2.40 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

## 2. 计算相当应力

截面  $A-A$  上铅垂直径的上、下点为可能的危险点, 按照第三强度理论, 其相当应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{r3} &= \frac{\sqrt{M^2 + T_{\max}^2}}{W} = \frac{32 \times \sqrt{700^2 + (2.40 \times 10^3)^2}}{\pi \times 0.060^3} \text{ Pa} \\ &= 1.179 \times 10^8 \text{ Pa} = 117.9 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{a})$$

由于是短粗轴, 弯曲剪力产生的切应力应予考虑, 这时截面  $A-A$  上水平直径的左端点, 为又一个可能的危险点, 该点处的正应力为零, 而切应力则为

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1 + \tau_2 = \frac{16T_{\max}}{\pi d^3} + \frac{4 \times 4F_S}{3\pi d^2} \\ &= \left( \frac{16 \times 2.40 \times 10^3}{\pi \times 0.060^3} + \frac{16 \times 10 \times 10^3}{3\pi \times 0.060^2} \right) \text{ Pa} \\ &= (56.6 + 4.72) \times 10^6 \text{ Pa} = 61.3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

其相当应力为

$$\sigma_{r3} = 2\tau = 2 \times 61.3 \text{ MPa} = 122.6 \text{ MPa} \quad (\text{b})$$

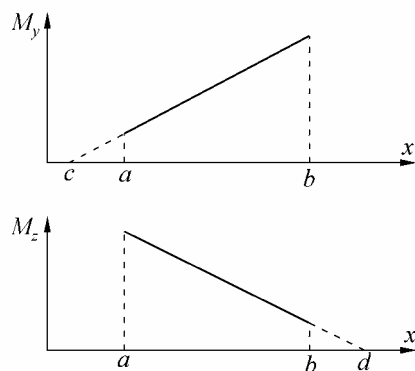
比较式(a)和(b)可知, 该轴真正的危险点是截面  $A-A$  上水平直径的左端点, 其相当应力如式(b)所示。

顺便指出, 本题计算相当应力的另一种方法是先求  $\sigma(\varphi)$  与  $\tau(\varphi)$ , 再求  $\sigma_{r3}(\varphi)$ 。这里的  $\varphi$

从截面  $A-A$  上左边水平半径量起, 以顺时针为正。将  $\sigma_{r3}(\varphi)$  对  $\varphi$  求导, 寻找其极值位置, 找到的极值位置是  $\varphi = 0$ , 由此确定的危险点同上述真正的危险点, 相当应力当然也同式(b)。

## 9-9

图示某段杆的弯矩  $M_y$  与  $M_z$  图, 它们均为直线, 且其延长线分别与  $x$  轴相交于  $c$  和  $d$  点。试证明: 如果  $c$  与  $d$  点不重合, 则该段杆的总弯矩  $\bar{M}$  图必为凹曲线。



题 9-9 图

证明：本题用几何法证明比较简便而直观。

证明要点如下：

1. 将题设  $M_y$  图线和  $M_z$  图线画在图 9-9a 所示的三维坐标系中（图 a 中的直线  $e_1f_1$  和

$e_2f_2$ ）

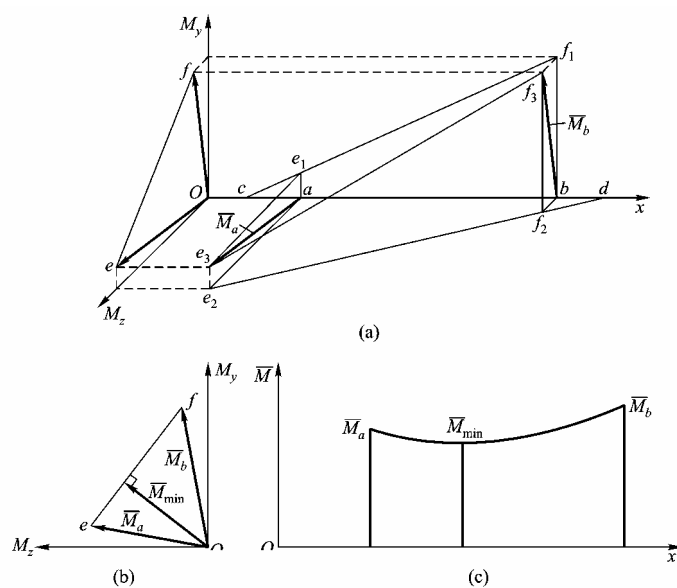


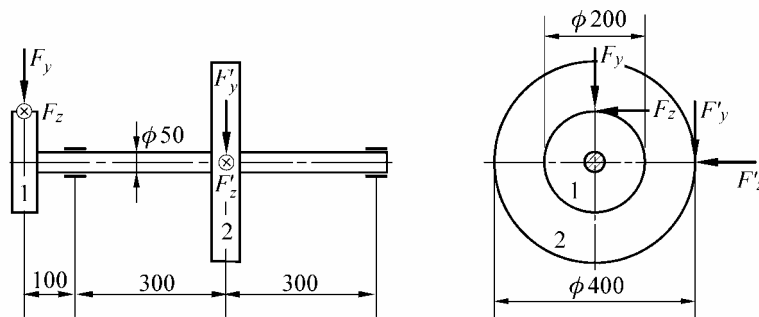
图 9-9

2. 画总弯矩（合成弯矩）矢量  $\bar{M}$  的矢端图  $e_3f_3$ （它为两个坐标平面的两个垂面  $e_1e_3f_3f_1$  与  $e_2e_3f_3f_2$  的交线。）

3. 将矢端图  $e_3f_3$  向坐标平面  $M_yOM_z$  投影，得其投影图线  $ef$ 。 $ef$  直线上任一点与原点  $O$  的连线，即代表某一截面总弯矩的大小（为清楚起见，参看图 b）。

4. 将  $\bar{M}$  由大（ $\bar{M}_a$ ）到小（ $\bar{M}_{\min}$ ）又由小到大（ $\bar{M}_b$ ）连续变化的函数关系画在平面坐标系  $xO\bar{M}$  中，即成图 c 所示之凹曲线。

**9-10** 图示齿轮传动轴，用钢制成。在齿轮 1 上，作用有径向力  $F_y = 3.64\text{kN}$ 、切向力  $F_z = 10\text{kN}$  在齿轮 2 上，作用有切向力  $F'_y = 5\text{kN}$ 、径向力  $F'_z = 1.82\text{kN}$ 。若许用应力  $[\sigma] = 100\text{MPa}$ ，试根据第四强度理论确定轴径。



题 9-10 图

解：将各力向该轴轴线简化，得其受力图如图 9-10a 所示。内力图 ( $M_z$ ,  $M_y$  和  $T$ ) 分别示如图 b, c 和 d。

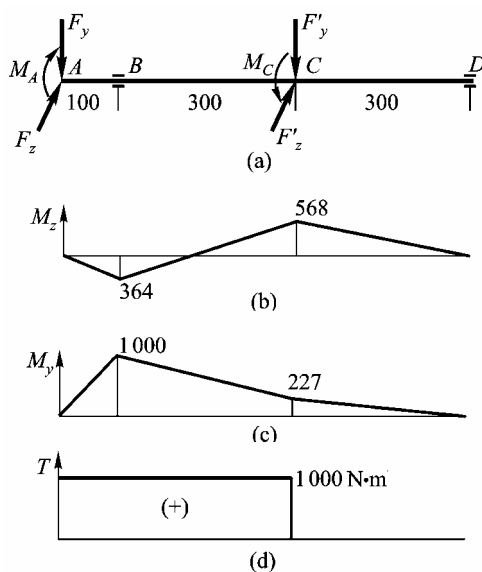


图 9-10

由内力图 and 题 9-9 所证明的结论可知，截面 B 和 C 都可能为危险面。

对于截面 B，总弯矩为

$$\overline{M}_B = \sqrt{1000^2 + 364^2} \text{ N} \cdot \text{m} = 1064 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (\text{a})$$

对于截面 C，总弯矩为

$$\overline{M}_C = \sqrt{227^2 + 568^2} \text{ N} \cdot \text{m} = 612 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (\text{b})$$

比较式(a)和(b)可知，截面 B 最危险。由第四强度理论的强度条件

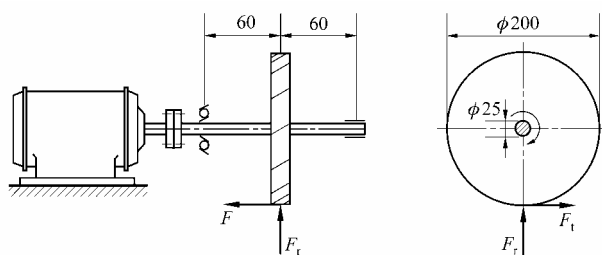
$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{M_B^2 + 0.75T^2}}{W} = \frac{32\sqrt{M_B^2 + 0.75T^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

得该轴的直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M_B^2 + 0.75T^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{1064^2 + 0.75 \times 1000^2}}{\pi \times 100 \times 10^6}} \text{ m}$$

$$= 5.19 \times 10^{-2} \text{ m} = 51.9 \text{ mm}$$

**9-14** 图示圆截面钢轴,由电机带动。在斜齿轮的齿面上,作用有切向力  $F_t = 1.9 \text{ kN}$ 、径向力  $F_r = 740 \text{ N}$  以及平行于轴线的外力  $F = 660 \text{ N}$ 。若许用应力  $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ , 试根据第四强度理论校核轴的强度。



题 9-14 图

解：1. 外力分析

将力  $F$ ,  $F_r$  与  $F_t$  向轴  $AD$  的轴线简化, 得该轴的计算简图如图 9-14a 所示。图中,

$$M_{zC} = FR = 660 \times 0.100 \text{ N} \cdot \text{m} = 66.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_A = M_C = F_t R = 1.9 \times 10^3 \times 0.100 \text{ N} \cdot \text{m} = 190.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$



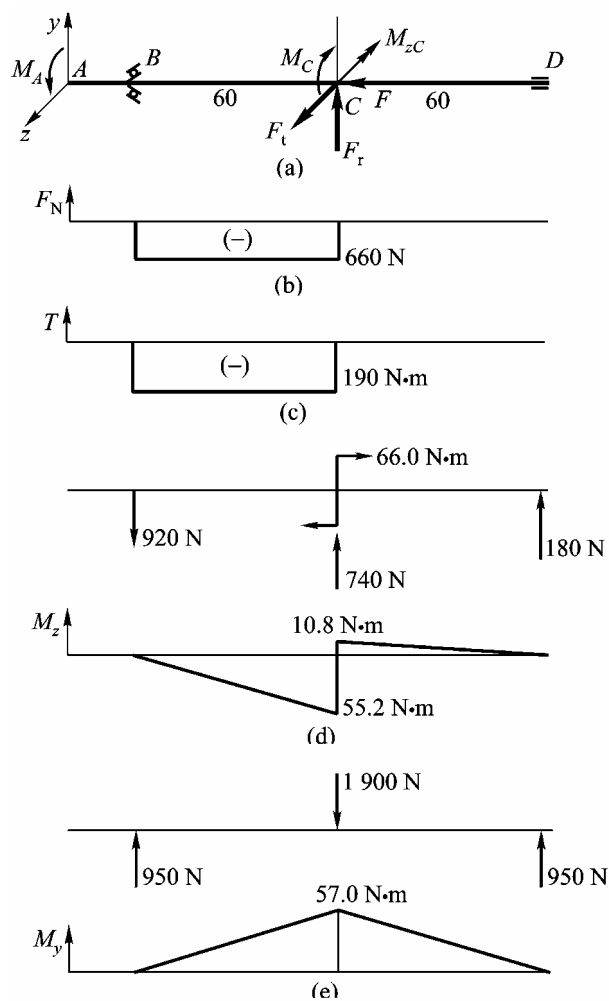


图 9-14

## 2. 内力分析

根据图 a，可画轴力、扭矩及弯矩图分别如图 b，c，d 和 e 所示。

由内力图可知，截面 C 为危险截面，该截面上的轴力、扭矩及总弯矩值依次为

$$|F_N| = F = 660 \text{ N (压)}, |T| = 190.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{57.0^2 + 55.2^2} \text{ N} \cdot \text{m} = 79.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

## 3. 强度校核

危险面上危险点处于单向与纯剪切组合应力状态，其正应力和切应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\bar{M}}{W} + \frac{|F_N|}{A} = \left( \frac{32 \times 79.3}{\pi \times 0.025^3} + \frac{4 \times 660}{\pi \times 0.025^2} \right) \text{ Pa} \\ &= 5.30 \times 10^7 \text{ Pa} = 53.0 \text{ MPa (压)} \end{aligned}$$

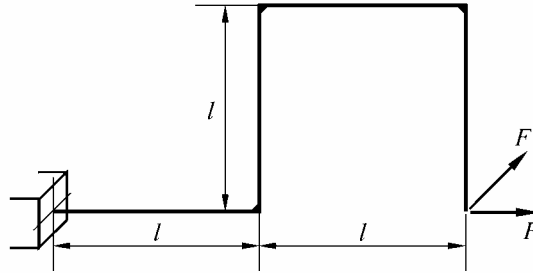
$$\tau = \frac{|T|}{W_p} = \frac{16 \times 190.0 \text{ N}}{\pi \times 0.025^3 \text{ m}^2} = 6.19 \times 10^7 \text{ Pa} = 61.9 \text{ MPa}$$

将其代入第四强度理论的强度条件，有

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{53.0^2 + 3 \times 61.9^2} \text{ MPa} = 119.6 \text{ MPa} < [\sigma]$$

可见，该轴满足强度要求。

**9-16** 图示等截面刚架，承受载荷  $F$  与  $F'$  作用，且  $F' = 2F$ 。试根据第三强度理论确定  $F$  的许用值  $[F]$ 。已知许用应力为  $[\sigma]$ ，截面为正方形，边长为  $a$ ，且  $a = l/10$ 。



题 9-16 图

解：1. 寻找危险面

为了寻找危险面，首先需画出内力图。在图 9-16a 所示坐标下，由  $F$  产生的内力示如图 b 和 c；由  $F'$  产生的内力示如图 d，e 和 f。

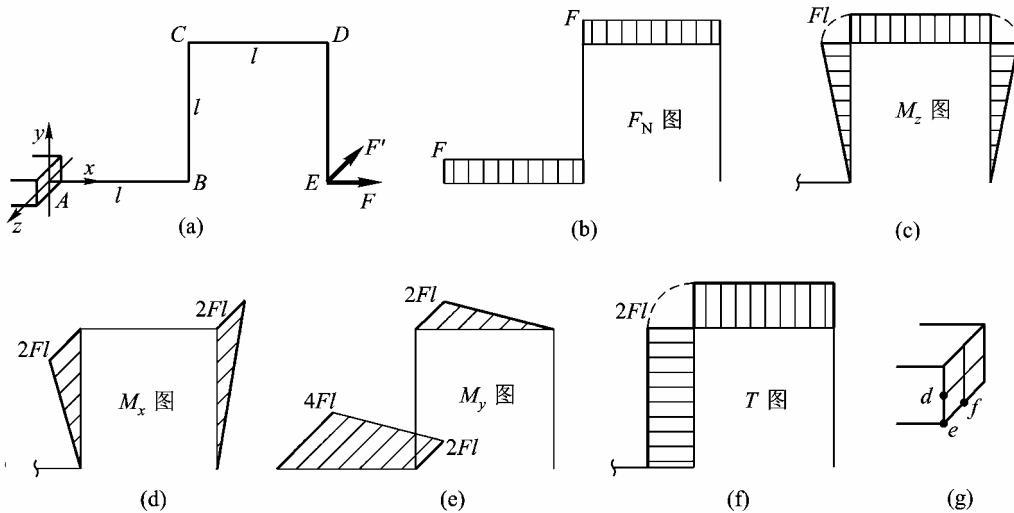


图 9-16

从内力图上不难找到可能的危险面有两个：截面  $A$  和截面  $C_+$ 。

2. 确定  $F$  的许用值

截面  $A$  为弯、拉组合（危险点处于单向应力状态），由强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \times 4Fl}{a^3} + \frac{F}{a^2} = \frac{241F}{a^2} \leq [\sigma]$$

得

$$F \leq \frac{[\sigma]a^2}{241} = 4.15 \times 10^{-3} [\sigma] a^2 = 4.15 \times 10^{-5} [\sigma] l^2 \quad (\text{a})$$

截面  $C_+$  为弯 (有  $M_y, M_z$ ) 拉、扭组合, 可能的危险点为  $d$  和  $e$  (见图 g), 点  $f$  的扭转切应力虽然与点  $d$  的一样大, 但其弯曲正应力只是点  $d$  的一半, 故可将它排除在外。

对于点  $d$ , 正应力和切应力依次为

$$\sigma_d = \frac{6 \times 2Fl}{a^3} + \frac{F}{a^2} = 121 \frac{F}{a^2}$$

$$\tau_d = \frac{T}{\alpha hb^2} = \frac{2Fl}{0.208a^3} = 96.2 \frac{F}{a^2}$$

由第三强度理论的强度条件

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_d^2 + 4\tau_d^2} = \frac{F}{a^2} \sqrt{121^2 + 4 \times 96.2^2} = 227 \frac{F}{a^2} \leq [\sigma]$$

得

$$F \leq 4.41 \times 10^{-3} [\sigma] a^2 = 4.41 \times 10^{-5} [\sigma] l^2 \quad (b)$$

对于点  $e$ , 切应力为零, 由弯、拉组合 (点  $e$  处于单向应力状态) 的强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \times 2Fl}{a^3} + \frac{6 \times Fl}{a^3} + \frac{F}{a^2} = 181 \frac{F}{a^2} \leq [\sigma]$$

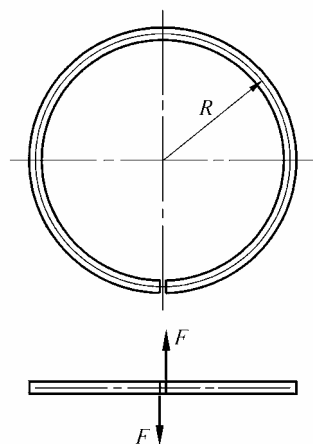
得

$$F \leq 5.52 \times 10^{-3} [\sigma] a^2 = 5.52 \times 10^{-5} [\sigma] l^2 \quad (c)$$

比较式(a), (b)和(c), 最后确定  $F$  的许用值为

$$[F] = 4.15 \times 10^{-5} [\sigma] l^2$$

**9-17** 图示圆截面圆环, 缺口处承受一对相距极近的载荷  $F$  作用。已知圆环轴线的半径为  $R$ , 截面的直径为  $d$ , 材料的许用应力为  $[\sigma]$ , 试根据第三强度理论确定载荷  $F$  的许用值。



题 9-17 图

解: 1. 分析内力

本题为反对称问题, 可取半个圆环来分析。例如取右半圆环, 示如图 9-17。

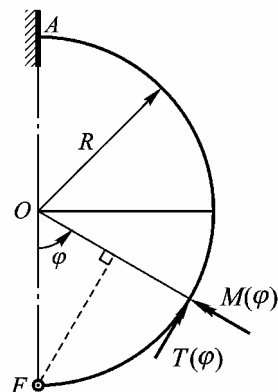


图 9-17

由图可得

$$|M(\varphi)| = FR\sin\varphi, \quad |T(\varphi)| = FR(1 - \cos\varphi)$$

## 2. 求相当应力

根据第三强度理论，截面  $\varphi$  危险点处的相当应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{r3} &= \frac{\sqrt{M^2(\varphi) + T^2(\varphi)}}{W} = \frac{FR\sqrt{\sin^2\varphi + (1 - \cos\varphi)^2}}{W} \\ &= \frac{FR\sqrt{2 - 2\cos\varphi}}{W} \end{aligned} \quad (a)$$

## 3. 求 $\sigma_{r3}$ 的最大值

由

$$\frac{d\sigma_{r3}}{d\varphi} = 0$$

得极值位置为

$$\varphi = 180^\circ \quad (b)$$

进一步分析可知，该极值位置使  $\sigma_{r3}$  取得极大值，即截面  $A$  为危险截面，其危险点的相当应力为

$$\sigma_{r3,\max} = \frac{2FR}{W} = \frac{64FR}{\pi d^3} \quad (c)$$

## 4. 确定 $F$ 的许用值

将式(c)代入强度条件

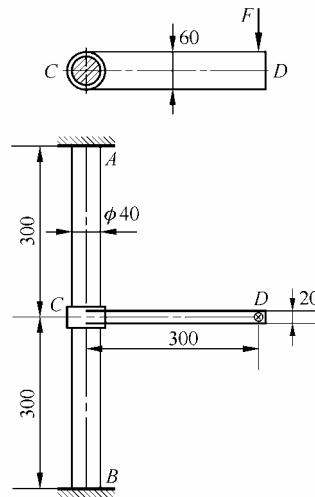
$$\sigma_{r3,\max} \leq [\sigma]$$

得载荷  $F$  的许用值为

$$[F] = \frac{\pi d^3 [\sigma]}{64R} = \frac{d^3 [\sigma]}{20.4R} \approx \frac{d^3 [\sigma]}{20R}$$

**9-18** 图示结构，由轴  $AB$  与梁  $CD$  组成，并在截面  $D$  承受集中载荷  $F$  作用。已知载荷  $F = 1 \text{ kN}$ ，弹性模量  $E = 210 \text{ GPa}$ ，切变模量  $G = 0.4E$ 。试：

- (1) 根据第三强度理论计算轴内危险点处的相当应力；
- (2) 计算截面  $D$  的转角与挠度。



题 9-18 图

解：(1) 计算相当应力

此为六度静不定问题，但有对称性可以利用。

将载荷  $F$  向轴  $AB$  的轴线简化，得力  $F$  和矩为  $M_e$  的力偶，示如图 9-18a。

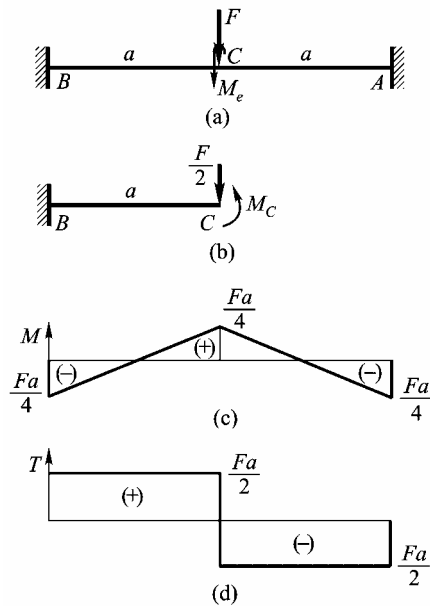


图 9-18

根据叠加原理, 可将  $F$  和  $M_e$  分开考虑。仅考虑  $F$  时, 利用对称性, 可在截面  $C$  处解除多余内约束, 得相当系统如图(b)所示。(图中只画了左边一半)。由变形协调条件

$$\theta_c = 0, \quad \frac{M_c a}{EI} - \frac{\left(\frac{F}{2}\right)a^2}{2EI} = 0$$

得

$$M_c = \frac{Fa}{4}$$

据此, 并利用对称性, 可画出  $M$  图 (见图 c)。

仅考虑  $M_e$  时, 由对称性可知, 两端的支反力偶矩相等, 并等于  $M_e$  的一半, 即

$$M_{Ax} = M_{Bx} = \frac{1}{2} M_e = \frac{1}{2} Fa$$

据此, 并考虑到扭矩的符号规定, 可画  $T$  图如图 d 所示。

由图 c 与 d 容易判断,  $B, A, C_-$  和  $C_+$  四个截面同等危险, 它们的弯矩值和扭矩值 (均指绝对值) 分别相等。按照第三强度理论, 这些面上危险点处的相当应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{r3} &= \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \frac{32Fa\sqrt{1^2 + 2^2}}{4\pi d^3} = \frac{8 \times 1 \times 10^3 \times 0.300 \times \sqrt{5} \text{ N}}{\pi \times 0.040^3 \text{ m}^2} \\ &= 2.67 \times 10^7 \text{ Pa} = 26.7 \text{ MPa} \end{aligned}$$

## (2) 计算转角和挠度

截面  $D$  的转角由轴  $AB$  的扭转变形和梁  $CD$  的弯曲变形两部分提供, 由叠加法可得

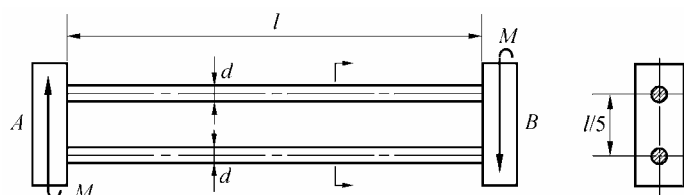
$$\begin{aligned} \theta_D &= \varphi_C + \theta_{D(F)} = \frac{\frac{Fa}{2}a}{GI_p} + \frac{Fa^2}{2EI_1} = \frac{5Fa^2}{4EI_p} + \frac{Fa^2}{2EI_1} \\ &= \frac{1 \times 10^3 \times 0.300^2}{210 \times 10^9} \left( \frac{5 \times 32}{4 \times \pi \times 0.040^4} + \frac{12}{2 \times 0.020 \times 0.060^3} \right) \text{ rad} = 2.73 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

截面  $D$  的挠度由轴  $AB$  的弯曲变形、扭转变形和梁  $CD$  的弯曲变形三部分提供, 由叠加法可得

$$\begin{aligned} w_D &= w_C + \varphi_C a + w_{D(F)} = \frac{Fa^3}{24EI} + \frac{5Fa^3}{4EI_p} + \frac{Fa^3}{3EI_1} \\ &= \frac{1 \times 10^3 \times 0.300^3}{210 \times 10^9} \left( \frac{64}{24 \times \pi \times 0.040^4} + \frac{5 \times 32}{4 \times \pi \times 0.040^4} + \frac{12}{3 \times 0.020 \times 0.060^3} \right) \text{ m} \\ &= 8.0 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.80 \text{ mm} \end{aligned}$$

## 9-19

图示结构, 由两根相同的圆截面杆及刚体  $A$  和  $B$  组成。设在该刚体上作用一对方向相反、其矩均为  $M$  的力偶, 试画杆的内力图, 并根据第三强度理论建立杆的强度条件。杆的长度  $l$ 、直径  $d$ 、材料的弹性模量  $E$ 、切变模量  $G$  以及许用应力  $[\sigma]$  均为已知, 且  $l = 20d$ ,  $G = 0.4E$ 。



题 9-19 图

解：1. 求内力

此为六度静不定问题。利用反对称性，可取相当系统如图 9-19a 所示。

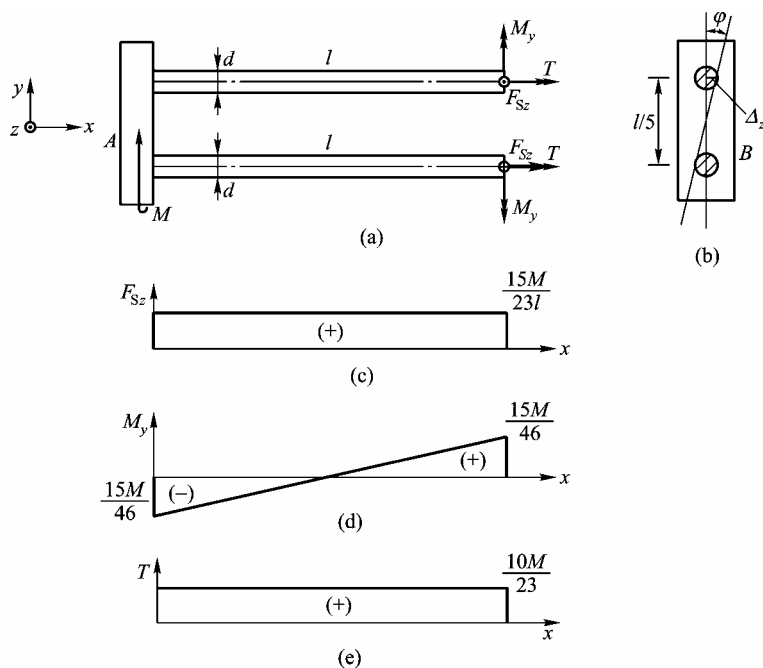


图 9-19

静力学方面（见图 a）

$$\sum M_x = 0, \quad 2T + F_{sz} \left( \frac{l}{5} \right) - M = 0 \quad (a)$$

几何方面（见图 a 和 b）

由于刚体 B 只能绕结构水平中轴线相对于刚体 A 作刚性转动，故有变形协调条件

$$\theta_y = 0 \quad (b)$$

$$\Delta_z = \varphi \left( \frac{l}{10} \right) \quad (c)$$

物理方面

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{Tl}{(0.4E)(2I)} = \frac{1.25Tl}{EI} \quad (d)$$

$$\Delta_z = \frac{F_{sz}l^3}{3EI} - \frac{M_y l^2}{2EI} \quad (e)$$

$$\theta_y = \frac{M_y l}{EI} - \frac{F_{sz} l^2}{2EI} \quad (f)$$

将式(d) ~ (f)代入式(b)和(c), 得补充方程

$$2M_y = F_{Sz}l \quad (g)$$

及

$$8F_{Sz}l - 12M_y = 3T \quad (h)$$

联解方程(g), (h)和(a), 得

$$F_{Sz} = \frac{15M}{23l}, T = \frac{10}{23}M, M_y = \frac{15}{46}M$$

## 2. 画内力图

上杆的内力图示如图 8-19c ~ e。

下杆的  $T$  图与上杆一样, 而  $F_{Sz}$  图及  $M_y$  图与上杆仅差符号, 最大内力值 (绝对值) 与上杆相同, 故可省画其内力图。

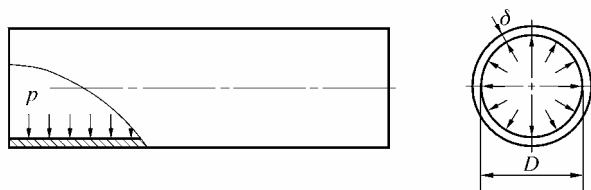
## 3. 建立强度条件

由于  $l = 20d$ , 属于细长杆, 可以不计剪力对强度的影响。危险面在杆的两端, 按照第三强度理论, 杆的强度条件为

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M_y^2 + T^2}}{W} = \frac{M \sqrt{\left(\frac{15}{46}\right)^2 + \left(\frac{10}{23}\right)^2}}{\frac{\pi}{32}d^3} = 5.54 \frac{M}{d^3} \leq [\sigma]$$

## 9-22 图示油管, 内径 $D = 11 \text{ mm}$ , 壁厚 $\delta = 0.5 \text{ mm}$ , 内压 $p = 7.5 \text{ MPa}$ , 许用应力

$[\sigma] = 100 \text{ MPa}$ 。试校核油管的强度。



题 9-22 图

解: 油管工作时, 管壁内任一点的三个主应力依次为

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pD}{2\delta}, \sigma_2 = \sigma_x = 0, \sigma_3 = \sigma_r \approx 0$$

按照第三强度理论, 有

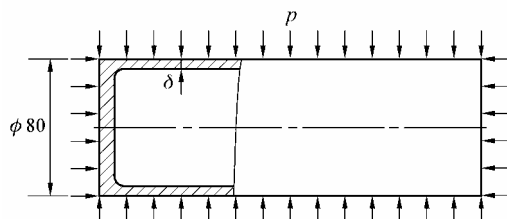
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pD}{2\delta} = \frac{7.5 \times 10^6 \times 0.011 \text{ N}}{2 \times 0.0005 \text{ m}^2} = 8.25 \times 10^7 \text{ Pa} = 82.5 \text{ MPa} < [\sigma]$$

计算结果表明, 该油管满足强度要求。

## 9-23 图示圆柱形容器, 受外压 $p = 15 \text{ MPa}$ 作用。试按第四强度理论确定其壁厚。

材料的许用应力  $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。





题 9-23 图

解：根据第四强度理论，圆柱形薄壁容器的强度应满足

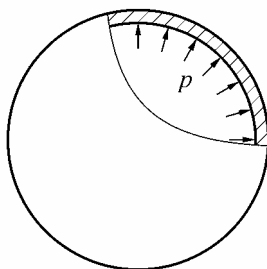
$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{3}pD}{4\delta} \leq [\sigma]$$

由此可得

$$\delta \geq \frac{\sqrt{3}pD}{4[\sigma]} = \frac{\sqrt{3} \times 15 \times 10^6 \times 0.080}{4 \times 160 \times 10^6} \text{ m} = 3.25 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.25 \text{ mm}$$

所得  $\delta < D/20$ ，属于薄壁容器，上述计算有效。

**9-24** 图示圆球形薄壁容器，其内径为  $D$ ，壁厚为  $\delta$ ，承受压强为  $p$  之内压。试证明壁内任一点处的主应力为  $\sigma_1 = \sigma_2 = pD/(4\delta)$ ,  $\delta_3 \approx 0$ 。



题 9-24 图

证明：用截面法取该容器的一半（连同内压）示如图 9-24a。

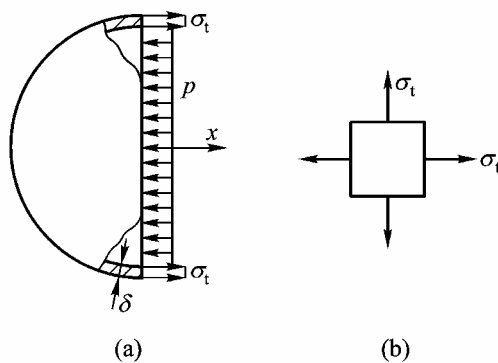


图 9-24

由图 a 所示半球的平衡方程

$$\sum F_x = 0, \pi D \delta \sigma_t - \frac{\pi D^2}{4} p = 0$$

得

$$\sigma_t = \frac{pD}{4\delta}$$

球壁内任一点的应力状态如图 b 所示，由此可得三个主应力依次为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_t = \frac{pD}{4\delta}, \sigma_3 \approx 0$$

**9-25** 图示铸铁构件，中段为一内径  $D=200$  mm、壁厚  $\delta=10$  mm 的圆筒，圆筒内的压力  $p=1$  MPa，两端的轴向压力  $F=300$  kN，材料的泊松比  $\mu=0.25$ ，许用拉应力  $[\sigma_t]=30$  MPa。试校核圆筒部分的强度。



题 9-25 图

解：1. 应力计算

圆筒的  $\delta = D/20$ ，属于薄壁圆筒。故由内压引起的轴向应力和周向应力分别为

$$\sigma_{xp} = \frac{pD}{4\delta} = \frac{1 \times 10^6 \times 0.200}{4 \times 0.010} \text{ Pa} = 5 \times 10^6 \text{ Pa} = 5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{tp} = \frac{pD}{2\delta} = \frac{1 \times 10^6 \times 0.200}{2 \times 0.010} \text{ Pa} = 10 \times 10^6 \text{ Pa} = 10 \text{ MPa}$$

由轴向压力引起的轴向应力为

$$\sigma_{xF} = \frac{F}{\pi D \delta} = \frac{300 \times 10^3 \text{ N}}{\pi \times 0.200 \times 0.010 \text{ m}^2} = 4.77 \times 10^7 \text{ Pa} = 47.7 \text{ MPa (压)}$$

筒壁内任一点的主应力依次为

$$\sigma_1 = 10 \text{ MPa}, \sigma_2 \approx 0, \sigma_3 = (5 - 47.7) \text{ MPa} = -42.7 \text{ MPa}$$

2. 强度校核

由于该铸铁构件的最大压应力超过最大拉应力，且超过较多，故宜采用最大拉应变理论对其进行强度校核，即要求

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

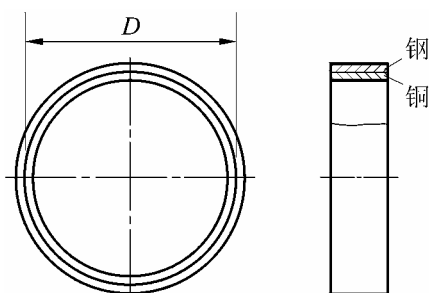
将上述各主应力值代入上式，得

$$\sigma_{r2} = [10 - 0.25 \times (-42.7)] \text{ MPa} = 20.7 \text{ MPa} < [\sigma]$$

可见，该铸铁构件满足强度要求。

**9-26** 图示组合圆环，内、外环分别用铜与钢制成，试问当温度升高  $\Delta T$  时，环的周向正应力为何值。已知铜环与钢环的壁厚分别为  $\delta_1$  与  $\delta_2$ ，交接面的直径为  $D$ ，铜与钢的弹性

模量分别为  $E_1$  与  $E_2$ ，线胀系数分别为  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$ ，且  $\alpha_1 > \alpha_2$



题 9-26 图

提示：由于  $\alpha_1 > \alpha_2$ ，故当温度升高时，环间出现径向压力  $p$ ，外环周向受拉，内环周向受压，但二环仍应紧贴在一起。

解：内、外环的受力情况示如图 9-26a 和 b。

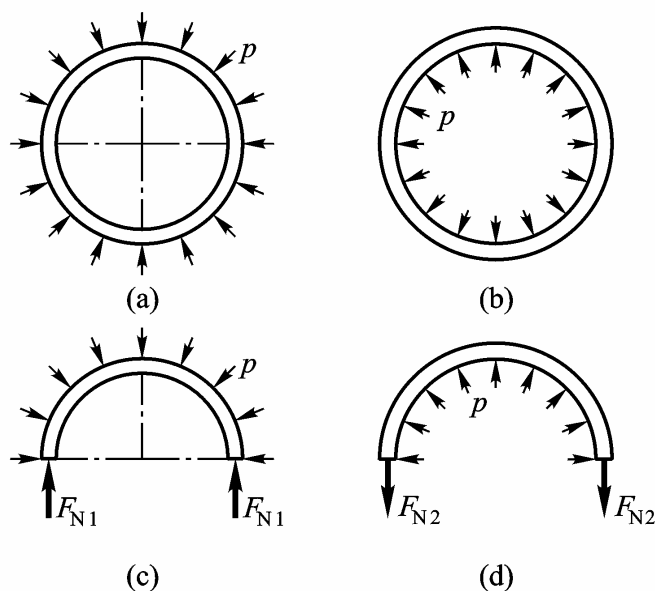


图 9-26

设铜环的轴力（绝对值）为  $F_{N1}$ ，钢环的轴力为  $F_{N2}$ ，由图 c 与 d 所示各半个薄圆环的平衡条件可得

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{pD}{2} \quad (a)$$

变形协调条件为

$$\Delta D_1 = \Delta D_2 \quad (b)$$

物理关系为

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_1 &= \alpha_1 D \Delta T - \frac{F_{N1} D}{E_1 A_1} \\ \Delta D_2 &= \alpha_2 D \Delta T + \frac{F_{N2} D}{E_2 A_2} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

将式(c)代入式(b)，得

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T = \frac{F_{N1}}{E_1 A_1} + \frac{F_{N2}}{E_2 A_2} = \frac{|\sigma_{1t}|}{E_1} + \frac{\sigma_{2t}}{E_2} \quad (d)$$

由式(a)可知，

$$|\sigma_{1t}| A_1 = \sigma_{2t} A_2, \quad \frac{|\sigma_{1t}|}{\sigma_{2t}} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

即

$$|\sigma_{1t}| = \frac{\delta_2}{\delta_1} \sigma_{2t} \quad (e)$$

将方程(e)与方程(d)联立求解，得铜环和钢环内的周向正应力依次为

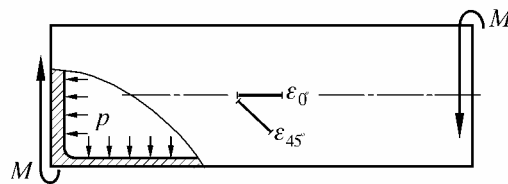
$$|\sigma_{1t}| = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) E_1 E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2} \Delta T \quad (f)$$

$$\sigma_{2t} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) E_1 E_2 \delta_1}{E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2} \Delta T \quad (g)$$

式(f)亦可写成

$$\sigma_{1t} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) E_1 E_2 \delta_2}{E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2} \Delta T \quad (f)'$$

**9-27** 图示薄壁圆筒，同时承受内压  $p$  与扭力偶矩  $M$  作用，由实验测得筒壁沿轴向及与轴线成  $45^\circ$  方位的正应变分别为  $\varepsilon_{0^\circ}$  和  $\varepsilon_{45^\circ}$ 。试求内压  $p$  与扭力偶矩  $M$  之值。筒的内径  $D$ 、壁厚  $\delta$ 、材料的弹性模量  $E$  与泊松比  $\mu$  均为已知。



题 9-27 图

解：圆筒壁内任意一点的应力状态如图 9-27 所示。

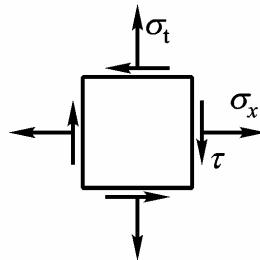


图 9-27

图中所示各应力分量分别为

$$\sigma_x = \frac{pD}{4\delta}, \quad \sigma_t = \frac{pD}{2\delta}, \quad \tau = \frac{2M}{\pi D^2 \delta}$$

由此可得

$$\sigma_{0^\circ} = \sigma_x, \quad \sigma_{90^\circ} = \sigma_t, \quad \sigma_{45^\circ} = \tau + \frac{3pD}{8\delta}, \quad \sigma_{+45^\circ} = \frac{3pD}{8\delta} - \tau$$

根据广义胡克定律，贴片方向的正应变为

$$\varepsilon_{0^\circ} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu\sigma_t] = \frac{(1-2\mu)pD}{4E\delta} \quad (a)$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}[\sigma_{45^\circ} - \mu\sigma_{+45^\circ}] = \frac{1}{E}\left[\frac{2(1+\mu)M}{\pi D^2 \delta} + \frac{(1-\mu)3pD}{8\delta}\right] \quad (b)$$

由式(a)可得圆筒所承受的内压为

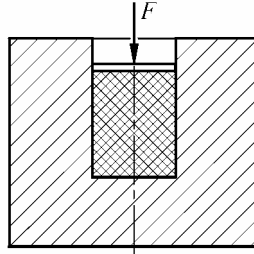
$$p = \frac{4E\delta}{(1-2\mu)D} \varepsilon_{0^\circ} \quad (c)$$

将式(c)代入式(b)，可得扭力偶矩为

$$M = \frac{\pi E D^2 \delta}{4(1+\mu)(1-2\mu)} [2(1-2\mu)\varepsilon_{45^\circ} - 3(1-\mu)\varepsilon_{0^\circ}]$$

## 9-28

如图所示，一直径为  $d$  的橡皮圆柱体，放置在刚性圆筒内，并承受合力为  $F$  的均布压力作用，试求橡皮柱的主应力。设橡皮的弹性模量与泊松比分别为  $E$  与  $\mu$ ，并忽略橡皮与刚筒间的摩擦。



题 9-28 图

解：设橡皮圆柱与刚性筒壁间的相互压力为  $p$ ，则根据径向承压圆柱体的应力理论，圆柱体内任一点处的周向与径向正应力均为

$$\sigma_t = \sigma_r = -p$$

可见，圆柱体内各点处的周向与径向正应变也相同。

由于刚性筒壁的约束作用，圆柱体内任一点处的径向正应变为零，即

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[ -p - \mu \left( -p - \frac{4F}{\pi d^2} \right) \right] = 0$$

由此得

$$p = \frac{\mu}{1-\mu} \frac{4F}{\pi d^2} \quad (\text{压})$$

由此可知，橡皮柱的三个主应力依次为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{4\mu F}{(1-\mu)\pi d^2}, \quad \sigma_3 = -\frac{4F}{\pi d^2}$$