工科数分习题课十四　广义积分

石岩

shiyan200245@163.com

Dec.28.2012

本节课的内容和要求

1. 理解广义积分的概念, 会计算无穷积分和瑕积分;
2. 理解绝对收敛和条件收敛的概念, 掌握判别广义积分敛散性的方法.

基本概念和主要结论

□ 两类广义积分

1. 无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$

2. 瑕积分(设a是瑕点) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x.$

□ 无穷积分的收敛性判别

• Cauchy收敛准则

令$F(u) = \displaystyle\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} F(u)$极限存在的充要条件是

$$\forall\varepsilon > 0, \exists M > 0, \text{s.t. } |F(u_1) - F(u_2)| < \varepsilon, \text{ for } u_1, u_2 > M.$$

♦ 绝对收敛与条件收敛

$\displaystyle\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x.$ $\longrightarrow$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛.

因此, 可以首先考察函数的绝对收敛性(或, 非负函数无穷积分的收敛性). 收敛但不绝对收敛称为条件收敛.

• 若$f[a, +\infty)$上的非负函数(从而$F(u) = \displaystyle\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$递增), 则积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件是$F(u) = \displaystyle\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 在$[a, +\infty)$上有界.

- 比较判别法(绝对收敛性)

若$|f(x)| \leqslant g(x),\ x \in [a, +\infty)$,

则当$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛时,$\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$必收敛.

◇ 极限形式

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = c,$$

(i) $0 < c < +\infty$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$同敛态;

(ii) $c = 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛;

(iii) $c = +\infty$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散 $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$发散.

◇ 推论

$$\lim_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = \lambda,$$

(i) $p > 1, 0 \leqslant \lambda < +\infty$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛;

(ii) $p \leqslant 1, 0 < \lambda \leqslant +\infty$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$发散.

- Dirichlet判别法

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Leftarrow F(u) = \displaystyle\int_a^{u} f(x)\mathrm{d}x$有界, $g(x)$单调趋于0.

- Abel判别法

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Leftarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, $g(x)$单调有界.

□ 瑕积分的收敛性判别

参考无穷积分有类似结论, 略.

习题

1. (1)判断下列结论是否正确. 若正确, 试证明; 若不正确, 试举反例.

$$设f(x)在[a,+\infty)上连续, \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x收敛, 则 \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

思考

a)如果$f(x)$有界, 结论是否成立?

b)如果$f(x)$单调, 结论是否成立?

c)如果$f(x)$一致连续, 结论是否成立?

$$(2)设积分 \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x收敛,试证明如果 \lim_{x\to+\infty} f(x)=A, 则A=0.$$

2. 讨论下列广义积分的敛散性

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\lambda}\,\mathrm{d}x$, (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}\,\mathrm{d}x$.

3. 判断下列广义积分的敛散性

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^\alpha}\,\mathrm{d}x,\ \alpha > 0;$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x}\,\mathrm{d}x;$

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p(\ln x)^q}\mathrm{d}x;$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{p+2}(\ln t)^{-q}}\mathrm{d}t.$