第15章

微分方程

已知 $y' = f(x)$, 求 y —— **积分问题**

$\Big\downarrow$ 推广

已知含 y 及其若干阶导数的方程 , 求 y

—— **微分方程问题**

第一节

微分方程的基本概念

引例
- 几何问题
- 物理问题

微分方程的基本概念

微分方程的基本概念

含未知函数及其导数的方程叫做**微分方程**.

分类 $\begin{cases} \text{常微分方程 (本章内容)} \\ \text{偏微分方程} \end{cases}$

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的**阶**.

一般地, n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

或 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ (n 阶显式微分方程)

微分方程的**解** — 使方程成为恒等式的函数.

通解 — 解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.

特解 — 不含任意常数的解, 其图形称为**积分曲线.**

定解条件 — 确定通解中任意常数的条件.

n 阶方程的**初始条件(或初值条件)**:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

例1 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \\ y\big|_{x=1}=2 \end{cases}$ 例2 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4 \\ s\big|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=20 \end{cases}$

通解: $y=x^2+C$ $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$

特解: $y=x^2+1$ $s=-0.2t^2+20t$

例1. 验证函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ (C_1, C_2为常数)

是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$ 的通解, 并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0} = A, \ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0$$ 的特解 .

解: $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -C_1 k^2\cos kt \ - C_2 k^2 \sin kt$

$$= -k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) = -k^2 x$$

这说明 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 是方程的解 .

C_1, C_2 是两个独立的任意常数, 故它是方程的通解.

利用初始条件易得: $C_1 = A, C_2 = 0$, 故所求特解为

$$x = A\cos kt$$

例2. 已知曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴交点为 Q 且线段 PQ 被 y 轴平分，求所满足的微分方程 .

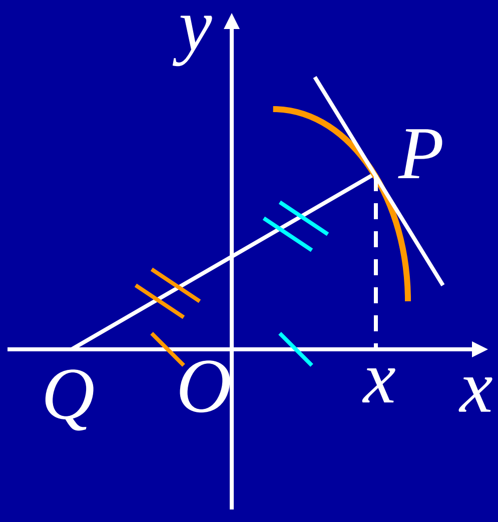
解: 如图所示，点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

令 $Y = 0$，得 Q 点的横坐标

$$X = x + yy'$$

$\therefore \quad x + yy' = -x$，即 $yy' + 2x = 0$



第二节 可分离变量微分方程

可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x)\, f_2(y)$$

$$M_1(x)M_2(y)\,\mathrm{d}x + N_1(x)\,N_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\Big\downarrow \text{转化}$$

解分离变量方程 $g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$

分离变量方程的解法:

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x \qquad ①$$

设 $y=\varphi(x)$ 是方程①的解, 则有恒等式

$$g(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \equiv f(x)\,\mathrm{d}x$$

两边积分, 得 $\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$

设左右两端的原函数分别为 $G(y), F(x)$, 则有

$$G(y) = F(x) + C \qquad ②$$

当$G(y)$与$F(x)$ 可微且 $G'(y)=g(y)\neq 0$ 时, 说明由②确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 是①的解. 同样, 当 $F'(x)=f(x)\neq 0$ 时, 由②确定的隐函数 $x=\psi(y)$ 也是①的解.

称②为方程①的隐式通解, 或通积分.

例1. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解: 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

说明: 在求解过程中每一步不一定是同解变形, 因此可能增、减解.

两边积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

或

$$\ln|y|=x^3+\ln|C|$$

即 $y=\pm\mathrm{e}^{x^3+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^3}$

令 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$

$y=C\mathrm{e}^{x^3}$ (C 为任意常数)

(此式含分离变量时丢失的解 $y=0$)

目录 上页 下页 返回 结束

例2. 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0 \\ \underline{y(0) = 1} \end{cases}$

解： 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1} = C$ （ C 为任意常数 ）

由初始条件得 $C = 1$，故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1} = 1$$

例3. 求下述微分方程的通解:

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

解: 令 $u = x - y + 1$, 则

$$u' = 1 - y'$$

故有 $1 - u' = \sin^2 u$

即 $\sec^2 u \, \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

解得 $\tan u = x + C$

所求通解: $\tan(x - y + 1) = x + C$ （ C 为任意常数）

练习: 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x+y}$ 的通解.

解法 1 分离变量 $\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

积分 $-\mathrm{e}^{-y}=\mathrm{e}^{x}+C$

即 $(\mathrm{e}^{x}+C)\mathrm{e}^{y}+1=0 \quad (C<0)$

解法 2 令 $u=x+y$, 则 $u'=1+y'$

故有 $u'=1+\mathrm{e}^{u}$

积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{e}^{u}}=x+C$

$$\int\frac{(1+\mathrm{e}^{u})-\mathrm{e}^{u}}{1+\mathrm{e}^{u}}\,\mathrm{d}u$$

$$u-\ln(1+\mathrm{e}^{u})=x+C$$

所求通解: $\ln(1+\mathrm{e}^{x+y})=y-C$ (C 为任意常数)

目录 上页 下页 返回 结束

内容小结

1. 微分方程的概念

微分方程; 阶; 定解条件; 解; 通解; 特解

说明: 通解不一定是方程的全部解.

例如, 方程 $(x+y)\,y'=0$ 有解

$$y=-x \text{ 及 } y=C$$

后者是通解, 但不包含前一个解.

2. 可分离变量方程的求解方法:

分离变量后积分; 根据定解条件定常数.

3. 解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出事物的共性及可贯穿于全过程的规律列方程.

常用的方法:

1) 根据几何关系列方程

2) 根据物理规律列方程

3) 根据微量分析平衡关系列方程

(2) 利用反映事物个性的特殊状态确定定解条件.

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.

思考与练习

求下列方程的通解：

(1) $(x+xy^2)\mathrm{d}x-(x^2y+y)\mathrm{d}y=0$

(2) $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$

提示: (1) 分离变量 $\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(2) 方程变形为 $y'=-2\cos x\sin y$

$$\Longrightarrow \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|=-2\sin x+C$$

第四节 一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

*二、伯努利方程

一、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

若 $Q(x)\equiv 0$, 称为**齐次方程**;

若 $Q(x)\not\equiv 0$, 称为**非齐次方程**.

1. 解齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$

故通解为 $y=C\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2. 解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用**常数变易法**: 作变换 $y(x)=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$, 则

$$u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cancel{-P(x)u\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}\cancel{+P(x)u\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

两端积分得 $$u=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

故原方程的通解 $$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

即 $$y=\underbrace{C\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例1. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$.

解: 先解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{2\mathrm{d}x}{x+1}$

积分得 $\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|C|$, 即 $y=C(x+1)^2$

用**常数变易法**求特解. 令 $y=u(x)\cdot(x+1)^2$, 则

$$y'=u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)$$

代入非齐次方程得 $u'=(x+1)^{1/2}$

解得 $$u=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$$

故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$

目录 上页 下页 返回 结束

例3. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{xy}}+\left[\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}\right]\mathrm{d}y=0$ 的通解 .

解: 注意 x, y 同号, 不妨设 $x, y>0$, 此时 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}\sqrt{x}$,

故方程可变形为 $2\dfrac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}y}-\dfrac{\sqrt{x}}{y}=-\dfrac{2}{\sqrt{y}}$

这是以 $\sqrt{x}$ 为因变量 y 为自变量的一阶线性方程

由一阶线性方程**通解公式**, 得

$$\sqrt{x}=\underline{e^{\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}}\left[\int\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\underline{e^{-\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}}\right)\mathrm{d}y+\ln C\right]\qquad(C>0)$$

$$=\sqrt{y}\left[-\int\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y+\ln C\right]=\sqrt{y}\ln\frac{C}{y}$$

所求通解为 $\quad y e^{\sqrt{x/y}}=C\ \ (C>0)$

*二、伯努利 (Bernoulli)方程

雅各布第一·伯努利

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

解法: 以 y^n 除方程两边, 得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)\,z=(1-n)Q(x) \quad \text{(线性方程)}$$

求出此方程通解后, 换回原变量即得伯努利方程的通解.

二、可化为变量分离方程类型

（I）齐次方程 （Homogeneous equation ）

(II) 形如 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 的方程，

其中 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 为任意常数.

(I) 形如

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2.5)$$

方程称为齐次方程，这里 $g(u)$ 是 u 的连续函数.

求解方法: 1^0 作变量代换(引入新变量) $u = \frac{y}{x}$，方程化为

$$\frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x}, \qquad \left(这里由于\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u\right)$$

2^0 解以上的变量分离方程

3^0 变量还原.

例4　求解方程

$$x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y \qquad (x<0)$$

解:　方程变形为 $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x} \qquad (x<0)$

这是齐次方程，　令 $u=\frac{y}{x}$，代入得

$$x\frac{du}{dx}+u=2\sqrt{u}+u \quad \text{即} \quad x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}$$

将变量分离后得 $\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{dx}{x}$

两边积分得: $\sqrt{u} = \ln(-x) + c$

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$$

即 $u = (\ln(-x) + c)^2, \quad \ln(-x) + c > 0, c$为任意常数

代入原来变量,得原方程的通解为

$$y = \begin{cases} x[\ln(-x) + c]^2, & \ln(-x) + c > 0 \\ 0, & \ln(-x) + c \le 0 \end{cases},$$

例6 求下面初值问题的解

$$(y+\sqrt{x^2+y^2})dx = xdy, \quad y(1)=0$$

解: 方程变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

这是齐次方程, 令 $u=\frac{y}{x}$, 代入方程得

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2}$$

将变量分离后得 $$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}}$$

两边积分得: $\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\ln|x|+\ln|c|$

整理后得 $\quad u+\sqrt{1+u^2}=cx$

变量还原得 $\quad \frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}=cx$

最后由初始条件 $y(1)=0$, 可定 $c=1$.

故初值问题的解为 $\quad y=\frac{1}{2}(x^2-1)$

(II) 形如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2},$$ 这里 a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 为常数.

的方程可经过变量变换化为变量分离方程.

分三种情况讨论

1 $c_1=c_2=0$ 的情形

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

为齐次方程,由(I)可化为变量分离方程.

2 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$的情形

设 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k,$ 则方程可改写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} = \frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} = f(a_2 x + b_2 y)$$

令 $u = a_2 x + b_2 y,$ 则方程化为

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2 \frac{dy}{dx} = a_2 + b_2 f(u)$$

这就是变量分离方程

3 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$且$c_1$与$c_2$不同时为零的情形

则$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$,

代表xy平面两条相交的直线,解以上方程组得交点 $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

作变量代换(坐标变换) $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$,

则方程化为 $$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$$

为 (1)的情形,可化为变量分离方程求解.

解的步骤:

1^0 解方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$, 得解 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

2^0 作变换 $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$, 方程化为

$$\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g\left(\frac{Y}{X}\right)$$

3^0 再经变换 $u=\frac{Y}{X}$, 将以上方程化为变量分离方程

4^0 求解　5^0 变量还原

例7 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-1}{x-y+3}$ 的通解.

解: 解方程组 $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 得$x=-1, y=2$,

令$X=x+1, Y=y-2$ 代入方程得

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+Y}{X-Y}=\frac{1+\frac{Y}{X}}{1-\frac{Y}{X}}$$

令$u=\dfrac{Y}{X}$, 得 $\quad X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{1+u^2}{1-u}$

将变量分离后得 $\dfrac{(1-u)du}{1+u^2}=\dfrac{dX}{X}$

两边积分得: $\arctan u-\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|X|+c$

变量还原并整理后得原方程的通解为

$$\arctan\frac{y-2}{x+1}=\ln\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+c.$$

注:上述解题方法和步骤适用于更一般的方程类型.

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)\Rightarrow\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=g\left(\frac{Y}{X}\right)$$

此外,诸如 $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)\Rightarrow u=ax+by+c$

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0\quad\Rightarrow u=xy$$

$$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy)\quad\Rightarrow u=xy$$

$$\frac{dy}{dx}=xf\left(\frac{y}{x^2}\right)\quad\Rightarrow u=\frac{y}{x^2}$$

以及

$$M(x,y)(xdx+ydy)+N(x,y)(xdy-ydx)=0$$

(其中 M,N 为 x,y 的齐次函数，次数可以不相同)等一些类型的方程，均可适当变量变换化为变量分离方程 .

例8　求微分方程

$$(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$$

的通解.

解: 令$u=xy$，则$du=xdy+ydx$

代入方程并整理得

$$u(1+u)dx+(1-u)(xdu-udx)=0$$

即 $$2u^2dx+x(1-u)du=0$$

分离变量后得 $$\frac{u-1}{u^2}du=\frac{2dx}{x}$$

两边积分得 $$\frac{1}{u}+\ln|u|=\ln x^2+c$$

变量还原得通解为 $$\frac{1}{xy}-\ln\left|\frac{x}{y}\right|=c.$$

例4. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为 $$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

内容小结

1. 一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

方法1　先解齐次方程，再用常数变易法.

方法2　用通解公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathbf{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathbf{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

2. 伯努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}$　$(n\neq 0,1)$

令 $u=y^{1-n}$, 化为线性方程求解.

3. 注意用变量代换将方程化为已知类型的方程

例如, 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+y}$

法1. 取 y 作自变量: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x+y$ 线性方程

法2. 作变换 $u=x+y$, 则 $y=u-x$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$

代入原方程得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=\dfrac{1}{u}$,

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u+1}{u}$ 可分离变量方程

思考与练习

判别下列方程类型:

提示:

(1) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \longrightarrow \frac{y-1}{y}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 可分离变量方程

(2) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\ln y-\ln x) \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ 齐次方程

(3) $(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y=0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2x}y=-\frac{x^2}{2}$ 线性方程

(4) $2y\,\mathrm{d}x+(y^3-x)\mathrm{d}y=0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{2y}x=-\frac{y^2}{2}$ 线性方程

(5) $(y\ln x-2)y\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\frac{\ln x}{x}y^2$ 伯努利方程

补充题

1. 求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

令 $u=x-t$

提示: $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$ 线性方程

利用公式可求出

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-\mathrm{e}^{-x})$$

2. 设有微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

试求此方程满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 的连续解.

解: 1) 先解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 2, & 0 \le x \le 1 \\ y\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

利用通解公式, 得

$$y = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x} \left(\int 2\,\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_1 \right)$$

$$= \mathrm{e}^{-x} (2\mathrm{e}^{x} + C_1) = 2 + C_1 \mathrm{e}^{-x}$$

利用 $y\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = -2$

故有 $y = 2 - 2\mathrm{e}^{-x} \quad (0 \le x \le 1)$

2) 再解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 0\,, & x > 1 \\ y\big|_{x=1} = y(1) = 2 - 2\mathrm{e}^{-1} \end{cases}$

此齐次线性方程的通解为 $y = C_2\,\mathrm{e}^{-x} \quad (x \ge 1)$

利用衔接条件得 $C_2 = 2(\mathrm{e} - 1)$

因此有 $y = 2(\mathrm{e} - 1)\,\mathrm{e}^{-x} \quad (x \ge 1)$

3) 原问题的解为

$$y = \begin{cases} 2(1 - \mathrm{e}^{-x}), & 0 \le x \le 1 \\ 2(\mathrm{e} - 1)\,\mathrm{e}^{-x}, & x \ge 1 \end{cases}$$

$y = 2 - 2\mathrm{e}^{-x} \quad (0 \le x \le 1)$

作业

P 174　1 (1) , (4) ; 2 (1) ;3 (1)(4)

5(3)　6 (2)　7(3)