一、　填空题　（每小题 4 分，共 20 分）

1. $f(x)=x\ln(1+x^2)+e^{x^2}$ 在 $x=0$ 处的带 Peano 余项的 5 阶 Maclaurin 展式是

$\underline{f(x)=1+x^2+x^3+\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^5}{2}+o(x^5)}$.

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(x^2+\tan^{2007}x)dx=\underline{\dfrac{\pi^3}{96}}$.

3. 如果椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t, (a<b)$ 的周长等于正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的一段弧长，请给出满足条件的一组数 a,b. $a=\underline{\ 1\ }, b=\underline{\sqrt{2}}$.

4. $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=\underline{2\pi}$.

5. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f(x)>0$，且满足 $(x^2+1)f(x)=4\int_0^x tf(t)dt+3$. 则 $f(x)=\underline{3(x^2+1)}$.

二、　选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 下列说法**不正确**的是……………………………………………………………[D]

（A） 如 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积;

（B） 如 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界;

（C） 如 f 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有可数个间断点, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积;

（D） 如 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 至多有可数个间断点.

2. 下列广义积分**收敛**的是……………………………………………………………[A]

（A） $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$； （B） $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$； （C） $\int_0^1\dfrac{dx}{x^{1.6}}$； （D） $\int_1^2\dfrac{dx}{x(\ln x)^2}$

3. 设 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为**偶函数**的是……………………………………[D]

（A） $\int_0^x f(t^2)dt$； （B） $\int_0^x (f(t))^2dt$； （C） $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$； （D） $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$.

4. 下列说法**正确**的是 ……………………………………………………………[D]

（A） 给定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，如果对于充分大的 n，都有 $\sqrt[n]{a_n}<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

（B） 设 $a_n\le b_n, n=1,2,3,\cdots$, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

（C） 给定正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，如果$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

（D） 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$也收敛。

5. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+a_n}{2}$ 的敛散性是 ··························[B]

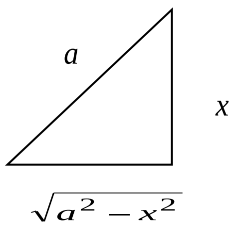
(A) 发散； (B) 绝对收敛； (C) 条件收敛； (D) 不能判定.

三、 计算下列积分（每小题 5 分，共 15 分）

1. $\int\frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

解： 令 $x=a\sin t$， $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$ ··················1 分

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{a\cos t\mathrm{d}t}{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t}=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{a^2}\cot t+C$$ ······3 分



回代时，引入辅助三角形，如图所示，可得 $\cot t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

故 原式$=-\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$. ················5 分

2. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$

解： 令 $u=\ln(1+x)$, $v'=(2-x)^{-2}$

故 $$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int_0^1\ln(1+x)d(\frac{1}{2-x})$$ ··················2 分

$$=\frac{1}{2-x}\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1(\frac{1}{2-x}\frac{1}{1+x})dx$$ ················4 分

$$=\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x})dx=\frac{1}{3}\ln 2.$$ ················5 分

3. $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

解： $$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\lim_{a\to1-}\int_0^a\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$ ··················3 分

$$=\lim_{a\to1-}(\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_0^a=\lim_{a\to1-}(\arcsin\sqrt{a})^2=\frac{\pi^2}{4}.$$ ··················5 分

注意：要指出瑕点 $x=1$，（ $x=0$ 不是瑕点 ），如果直接利用牛莱公式，扣 1 分

四、 求下列极限（每小题 5 分，共 10 分）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+i}}$

解：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+i}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$$ ……………2 分

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=2\sqrt{1+x}\Big|_0^1=2(\sqrt{2}-1).$$ ………………5 分

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$

解： 当 x 充分大时，利用 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的带有佩亚诺型余项 $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 的麦克劳林公式

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),$$

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),$$ ………2 分

所以有 $$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right),$$ ………4 分

这样，就可求得

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}+o(1)\right)=-\frac{1}{4}.$$ ………5 分

或 利用洛比塔法则进行求解.

五、 判别下列级数的敛散性？（每小题 5 分，共 10 分）

（如是收敛的一般项级数，需明确是绝对收敛还是条件收敛）

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n})$ （比较判别法）

解： 因为 $\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$，且 $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$， ………2 分

所以 $0<a_n=\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$， ………3 分

故 $a_n\sim\frac{1}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n})$ 收敛. ………5 分

或：利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^2}}=\dots\dots=\dfrac{1}{2}$，得出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n})$ 收敛.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{n})^n$

解： 由 Leibniz 判别法, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛,

而 $(1+\dfrac{1}{n})^n\to e$ 是单调有界的,

所以由 Abel 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 收敛. ………2 分

再考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{n})^n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{n})^n$，

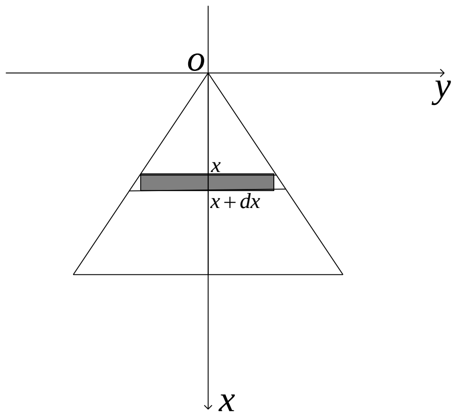
因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}}=e$，所以由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 发散. ………4 分

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 条件收敛. ………5 分

六、 （本题满分 7 分）

一底为8, 高为 6 的等腰三角形薄片，铅直地沉没于水中，顶在上，底在下且与水面平行，设顶点恰恰位于水面上，试求它每面所受的压力. （设水的**密度**为 ρ）

解： 建立如图所示的坐标系



可用小矩形面积 $\dfrac{4}{3}xdx$ 近似代替小梯形面积，

可得压力元素

$$dF=\rho gx\cdot\frac{4}{3}xdx=\frac{4}{3}\rho gx^2dx$$ ………5 分

所以

$$F=\int_0^6\frac{4}{3}\rho gx^2dx=\frac{4}{3}\rho g\int_0^6x^2dx$$

$$=\frac{4}{3}\rho g\times72=96\rho g.$$ ………7 分

七、　（本题满分 8 分）

设函数 f 在任一有限区间上可积，　且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$.　证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=a$.

证：（注意：本题绝对不可以用洛比塔法则,否则零分处理.）

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ ，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists X_0, s.t.$ 当 $x>X_0$ 时, $|f(x)-a|<\varepsilon.$ ………2 分

所以 $$|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-a|=|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t)-a)dt|$$
$$=|\frac{1}{x}\int_0^{X_0}(f(t)-a)dt+\frac{1}{x}\int_{X_0}^x (f(t)-a)dt|$$
$$\le|\frac{1}{x}\int_0^{X_0}(f(t)-a)dt|+|\frac{1}{x}\int_{X_0}^x (f(t)-a)dt|$$ ………4 分

根据 f 在 $[0,X_0]$ 上可积，知 $f(t)-a$ 在 $[0,X_0]$ 上可积，所以存在 $M>0$,

使得对 $\forall t\in[0,X_0]$, $|f(t)-a|\le M$. ………6 分

于是: $$|\frac{1}{x}\int_0^{X_0}(f(t)-a)dt|+|\frac{1}{x}\int_{X_0}^x (f(t)-a)dt|\le\frac{MX_0}{x}+\frac{(x-X_0)}{x}\varepsilon\to 0$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=a$. ………8 分

八、　（本题满分 10 分）

用 Dirichlet 判别法判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{\sin nx}{n}$,　$x\in(0,\pi)$ 的敛散性?

（只需证明是收敛或者发散即可）

解：令 $a_n=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$,　$b_n=\sin nx.$ ………2 分

由于 $$a_n-a_{n+1}=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1})$$

$$=\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1})$$

$$>\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1})>0$$

所以 $\{a_n\}$ 单调递减. ………4 分

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=0.$ ………6 分

而 $|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k|=|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}, x\in(0,\pi).$ ………9 分

即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 的部分和有界.

于是, 由 Dirichlet 判别法可知级数收敛. ………10 分

九、 加选题（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数， 证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

证： 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$， ………2 分

则 $F'(x)=f(x)$， $F''(x)=f'(x)$， $F'''(x)=f''(x)$.

将 $F(x)$ 在 $x_0=\frac{1}{2}(a+b)$ 展开为二阶泰勒展式，得

$$F(b)=F(x_0)+F'(x_0)(b-x_0)+\frac{F''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2+\frac{F'''(\xi_1)}{3!}(b-x_0)^3$$

$$(x_0<\xi_1<b),$$

$$F(a)=F(x_0)+F'(x_0)(a-x_0)+\frac{F''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2+\frac{F'''(\xi_2)}{3!}(a-x_0)^3$$

$$(a<\xi_2<x_0),$$ ………5 分

将上面两式相减， 由于 $b-x_0=\frac{1}{2}(b-a)=-(a-x_0)$， 故

$$F(b)-F(a)=F'(x_0)(b-a)+\frac{1}{48}(b-a)^3[F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)].$$ ………7 分

因为 $f''(x)$ 连续， 由介值定理知，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$， 使得

$$F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)=f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=2f''(\xi),$$

$$F'(x_0)=f(x_0)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$ ………9 分

所以 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$ ………10 分