

轮式移动机器人的非线性控制

1 地面移动机器人概况

1.1 发展历史

1.2 分类

- 轮式移动机器人（单轮，两轮，三轮，四轮，多轮等）
- 足式移动机器人（单足，双足，四足，六足等）
- 轮足混合型移动机器人
- 履带式移动机器人

1.3 图片和视频



东芝轮式服务机器人



NEC PAPER-O 玩具机器人



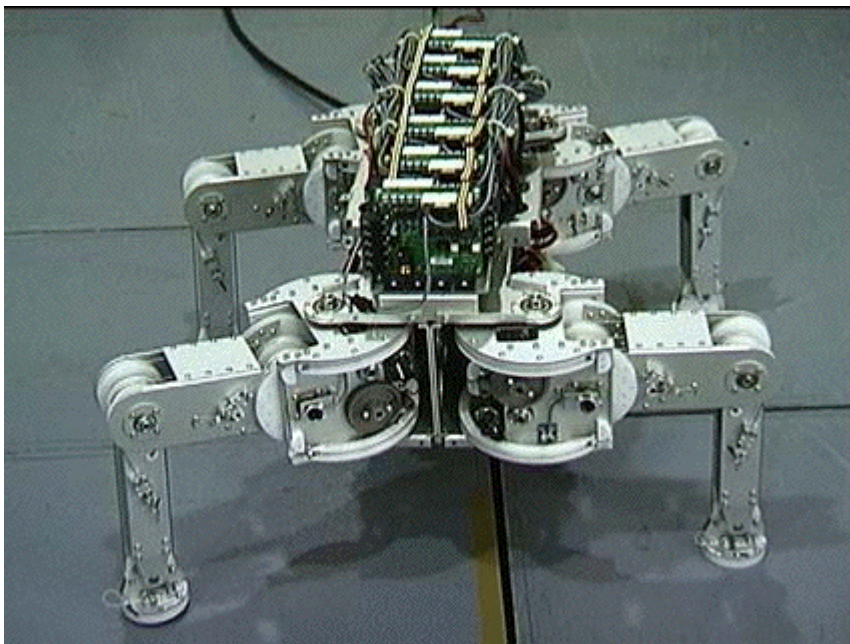
拖车移动机器人



踢足球机器人



履带式无人作战车



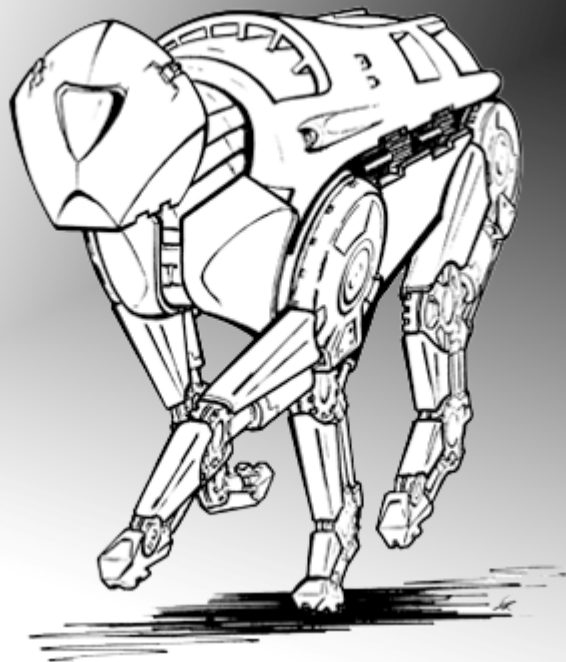
日本东京工业大学的 Titan 系列四足机器人



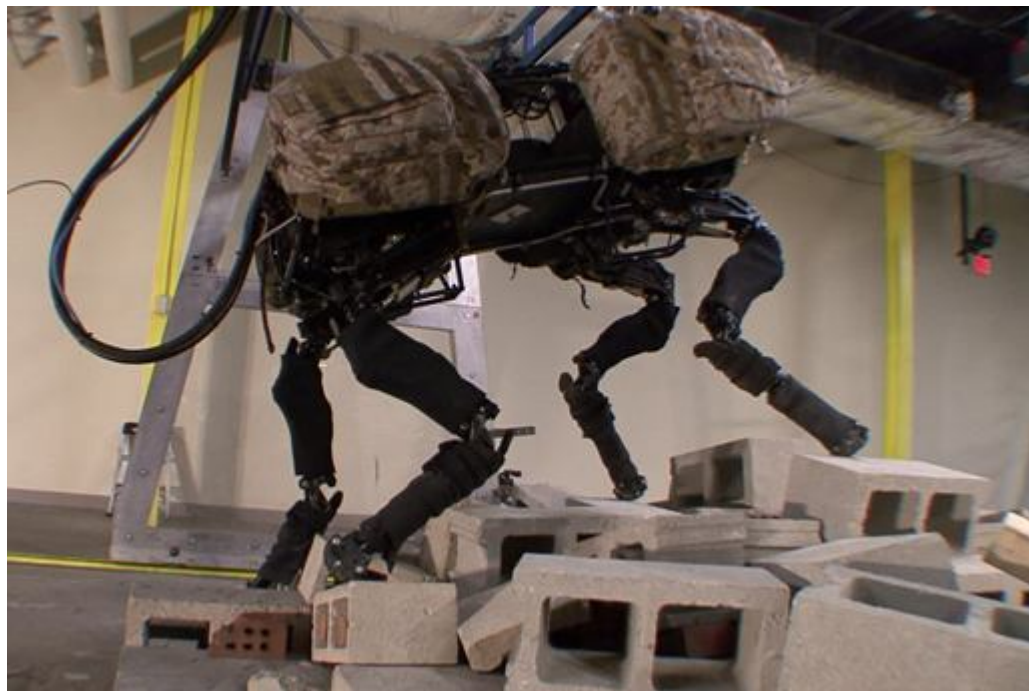
日本电气通信大学四足移动机器人 Tekken



美国 Dynamics 公司研制的 BigDog 四足机器人
- The Most Advanced Rough-Terrain Robot on Earth

















卡尔斯鲁厄大学研制的六足行走机器人L A U R O N - 2



德国杜伊斯堡大学研制的仿竹节虫六足机器人T a r r y I



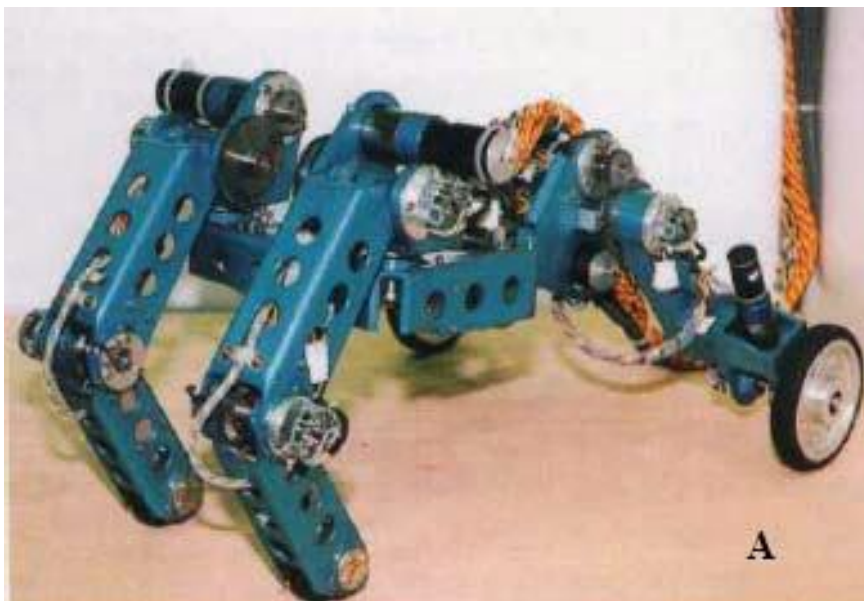
北京航空航天大学研制的六足万向轮式机器人



瑞典联邦工学院研制的太阳能足轮混合移动机器人



芬兰赫尔辛基大学的足轮混合可变运动方式机器人 H y b t o r



日本研发的 Walk' n Roll 足轮混合移动机器人

2. 轮式移动机器人的基本结构、运动方程及控制问题

2.1 轮式机器人的基本结构和运动方程

移动机器人的形式千差万别，我们仅讨论在水平面上移动的刚性结构的轮式移动机器人，以试验室最常见轮式机器人为例，如图 2.1 所示：

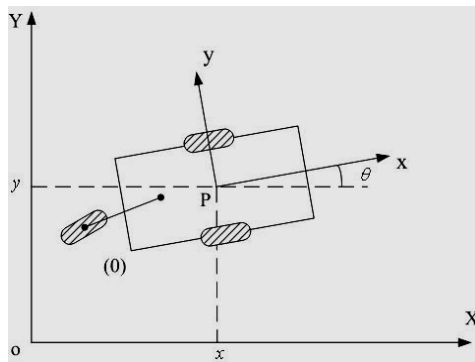


图 2.1 轮式移动机器人示意图

机器人的姿态只与车身两侧独立驱动的左右轮决定，尾轮仅起支撑作用，不予考虑。移动机器人的位姿可如下的方法描述，首先建立惯性系 XOY，P 点是机器人轮轴中心点，坐标系 xPy 与机器人固联。 x, y 是 P 点在惯性系中的坐标， θ 是系 xPy 关于系 XOY 的转角。

定义机器人的位姿向量 $q = (x, y, \theta)^T$ ，并记 (v, ω) 为车身的运动速度和角速度。若不考虑车轮的侧滑、变形等因素，则可得到小车不同坐标系下的运动方程：

- 惯性直角坐标系下的运动方程：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta, \\ \dot{y} &= v \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}\tag{2.1}$$

- 车体坐标系下的运动方程

状态变换：

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

其中 (z_1, z_2, z_3) 表示机器人的位姿在固连于车体坐标系中的表示。

对(2.2)求导并利用(2.1)可得到：

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v + \omega z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\omega z_1, \\ \dot{z}_3 &= \omega \end{aligned} \quad (2.3)$$

- 极坐标系下的运动方程

状态变换：

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = a \tan 2(y, x) \Rightarrow \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= v \cos(\theta - \alpha), \\ \dot{\alpha} &= \frac{v}{\rho} \sin(\theta - \alpha) \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

从 (2.1) 可以看出小车方程满足如下约束：

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (2.6)$$

该约束方程 $A(q)\dot{q} = 0$ 无法用积分变换化为状态 $q = (x, y, \theta)^T$ 的几何约束形式 $C(q) = 0$ ，称为不可积或者非完整约束，反之则称为可积或者完整约束，例如 $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ 就是（可积）完整约束，其积分为 $x^2 + y^2 = c$ 。

一般地，如果 n -维系统具有形如 $A(q)\dot{q} = 0$ 的约束，且无法转化为

$C(q)=0$ 形式的约束方程时，称其为**非完整系统**，反之则称为**完整系统**。

虽然图 (2.1) 所示的移动机器人的运动方程 (2.2) 非常简单，但其所满足的非完整约束方程却反映了一般轮式移动机器人的本质特性。

2.2 轮式移动机器人的控制问题

轮式移动机器人最基本的控制问题有如下四种：

1. 状态镇定 (State stabilization)

(1) 位置镇定 (Position stabilization)：设计控制器

$v(\cdot), \omega(\cdot)$ 使得移动机器人的位置和控制输入 (x, y, v, ω) (渐近) 趋于零。

(2) 全状态镇定 (Full state stabilization)：设计控制器

$v(\cdot), \omega(\cdot)$ 使得机器人的位置、姿态和控制输入 $(x, y, \theta, v, \omega)$

(渐近) 趋于零。

2. **路径跟踪 (Path following-PF):** 给定 $v(t)$, 设计控制器 $\omega(\cdot)$ 使得移动机器人收敛到给定的几何曲线 $f(x, y) = 0$ 上, 并以速度 $v(t)$ 沿该几何曲线运动 (即运动方向沿曲线切线方向)。

- 直线路径跟踪 (曲率为零)
- 圆周路径跟踪 (曲率为非零常数)
- 一般几何路径跟踪 (曲率为时变)

3. **轨迹跟踪 (Trajectory tracking-TF):** 给定时间轨迹 $((x_d(t), y_d(t)))$, 或者给定另一个沿此给定时间轨迹运动的参考轮式机器人

$$\dot{x}_d = v_d \cos \theta_d, \dot{y} = v_d \sin \theta_d, \dot{\theta}_d = \omega_d$$

设计控制律 $v(\cdot), \omega(\cdot)$ 使得 $(x - x_d(t), y - y_d(t), \theta - \theta_d(t)) \rightarrow 0$ 。

控制器分析和设计的几个预备引理：

引理 1. 若 $V(t) \geq 0$ 连续可微，且 $\dot{V} \leq 0$ ，则 $V(t)$ 不增， $V(t) \leq V(0)$ 有界，且极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \triangleq V(\infty)$ 存在有界。

引理 2. 若 $f(t)$ 一致连续，且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$ 存在有界，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ 。

引理 3. 若 $f(t)$ 有极限，且 $\ddot{f}(t)$ 有界，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$ 。

引理 4. 考虑线性扰动系统 $\dot{x} = (A_1 + A_2(t))x + D(t)$ ，如果 A_1 为 Hurwitz

阵，且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|A_2(t)\| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|D(t)\| = 0$ ，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

3 轮式移动机器人的位置镇定

3.1 惯性直角坐标系位置镇定控制律

惯性直角坐标系模型:

$$\dot{x} = v \cos \theta, \dot{y} = v \sin \theta, \dot{\theta} = \omega \quad (3.1)$$

选取非负函数:

$$V = 0.5(x^2 + y^2)$$

V 沿 (3.1) 求导:

$$\dot{V} = v(x \cos \theta + y \sin \theta)$$

选取控制律:

$$v = -k_1(x \cos \theta + y \sin \theta)(k_1 > 0)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -k_1(x \cos \theta + y \sin \theta)^2 \leq 0$$

由引理 1, $V < \infty \Rightarrow |x| < \infty, |y| < \infty, V(t) \rightarrow V(\infty)$ 。

由 $\ddot{V} < \infty$ 和引理 3, $\dot{V} \rightarrow 0 \Rightarrow x \cos \theta + y \sin \theta \rightarrow 0, v \rightarrow 0$ 。

由 $\frac{d^2}{dt^2}(x \cos \theta + y \sin \theta) \in L_\infty$ 和引理 3:

$$\frac{d}{dt}(x \cos \theta + y \sin \theta) \rightarrow 0 \Rightarrow (-x \sin \theta + y \cos \theta)\omega \rightarrow 0$$

选取控制律:

$$\omega = -k_2(-x \sin \theta + y \cos \theta)$$

$$\Rightarrow -k_2(-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 \rightarrow 0 \Rightarrow -x \sin \theta + y \cos \theta \rightarrow 0。$$

综合得到:

$$\begin{aligned} x \cos \theta + y \sin \theta &\rightarrow 0, \quad -x \sin \theta + y \cos \theta \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\rightarrow 0 \Rightarrow (x, y) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

因此控制律

$$\begin{aligned} v &= -k_1(x \cos \theta + y \sin \theta)(k_1 > 0), \\ \omega &= -k_2(-x \sin \theta + y \cos \theta)(k_2 > 0) \end{aligned} \tag{3.2}$$

可以实现全局位置镇定。

评注：如果控制受限，则可将控制律修改为：

$$\begin{aligned} v &= -k_1 \text{sat}(x \cos \theta + y \sin \theta), \\ \omega &= -k_2 \text{sat}(-x \sin \theta + y \cos \theta) \end{aligned} \tag{3.3}$$

选取 (k_1, k_2) 为足够小的正数，可以满足限幅要求。

3.2 车体直角坐标系位置镇定控制律

车体坐标系模型:

$$\dot{z}_1 = v + \omega z_2, \dot{z}_2 = -\omega z_1, \dot{z}_3 = \omega \quad (3.4)$$

选取非负函数:

$$V = 0.5(z_1^2 + z_2^2)$$

沿(3.4)对 V 求导得: $\dot{V} = v z_1$ 。选取控制律: $v = -k_1 z_1$, 则 $\dot{V} = -k_1 z_1^2 \leq 0$,

从而 $V < \infty, V \rightarrow V(\infty) \Rightarrow |z_1| < \infty, |z_2| < \infty$ 。

由于 $\dot{V} < \infty$, 则 $\dot{V} \rightarrow 0 \Rightarrow z_1 \rightarrow 0, v \rightarrow 0$; 由于 $\dot{z}_1 \in L_\infty$, 则

$\dot{z}_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \omega z_2 \rightarrow 0$ 。

选取控制律： $\omega = -k_2 z_2$ ，则 $-k_2 z_2^2 \rightarrow 0 \Rightarrow z_2 \rightarrow 0$ 。

综合得到：

$$z_1 \rightarrow 0, z_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow 0 \Rightarrow (x, y) \rightarrow 0。$$

因此控制律

$$v = -k_1 z_1, \omega = -k_2 z_2 \quad (3.5)$$

可以实现全局位置镇定。

评注： 如果控制受限，则可将控制律修改为：

$$v = -k_1 \text{sat}(z_1), \omega = -k_2 \text{sat}(z_2) \quad (3.6)$$

选取 (k_1, k_2) 为足够小的正数，可以满足限幅要求。

3.3 极坐标模型位置镇定控制器

极坐标模型:

$$\dot{\rho} = v \cos(\theta - \alpha), \dot{\theta} = \omega, \dot{\alpha} = \frac{v}{\rho} \sin(\theta - \alpha) \quad (3.7)$$

记 $\beta = \theta - \alpha$, 则

$$\dot{\rho} = v \cos \beta, \dot{\beta} = \omega - \frac{v}{\rho} \sin \beta$$

考虑非负函数 $V = 0.5(\rho^2 + \beta^2)$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \rho v \cos \beta + \beta \left(\omega - \frac{v}{\rho} \sin \beta \right) \\ &= \rho v + \rho v (\cos \beta - 1) + \beta \left(\omega - \frac{v}{\rho} \sin \beta \right) \end{aligned}$$

控制律 1:

$$\begin{aligned}v &= -k_1 \rho \cos \beta, \\ \omega &= \frac{v}{\rho} \sin \beta - k_2 \beta \\ &= -k_1 \sin \beta \cos \beta - k_2 \beta \\ \Rightarrow \dot{V} &= -k_1 \rho^2 (\cos \beta)^2 - k_2 \beta^2 \leq 0\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\Rightarrow V < \infty, V \rightarrow V(\infty), (\rho, \beta) \in L_\infty \Rightarrow \ddot{V} \in L_\infty \Rightarrow \dot{V} \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0 \quad .$$

(渐近收敛)。

控制律 2:

$$\begin{aligned}
v &= -k_1 \rho, \\
\omega &= \frac{v}{\rho} \sin \beta - \frac{v(\cos \beta - 1)}{\beta} - k_2 \beta \\
&= -k_1 \sin \beta - \frac{v(\cos \beta - 1)}{\beta} - k_2 \beta
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$\Rightarrow \dot{V} = -k_1 \rho^2 - k_2 \beta^2 \Rightarrow V$ 指数收敛到零 $\Rightarrow (\rho, \beta)$ 指数收敛到零。

4. 轮式移动机器人的全状态镇定

为了简化控制器的分析和设计，利用车体坐标系模型：

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= v + \omega z_2, \\
\dot{z}_2 &= -\omega z_1, \\
\dot{z}_3 &= \omega
\end{aligned} \tag{4.1}$$

非线性系统 (4.1) 的线性化不可控，可以证明也不存在连续光滑的

时不变静态状态反馈 $v(z), \omega(z)$ 稳定该系统，但可以使用开环、非光滑、时变或者动态控制律实现镇定。

4.1 开环镇定

观察方程 (4.1) 可知，当 ω 为非零常数时，(4.1) 的前两个方程所组成的子系统为一线性能控系统，利用该特点容易得到以下开环控制方案：

Step 1. 若 $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ ，则转向 Step 4；若 $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$ ，转向 Step 2；若 $z_1^2 + z_2^2 = 0$ ，转向 Step 3；

Step 2. 令 ω 为非零常数，设计有限时间控制器 v 使得 (z_1, z_2) 在有限时间内趋于零；

Step 3. 取 $v = 0, \omega = -k \operatorname{sgn}(z_3)$, 由于 $\frac{d}{dt}(z_1^2 + z_2^2) = z_1 v = 0$, 因此 (z_1, z_2)

保持为零, z_3 在有限时间内趋于零;

Step 4. 停止, 即 $v = \omega = 0$ 。

评注. 以上开环控制方案最多经过一次切换可以将机器人的位姿在有限时间内控制到零, 缺点是控制量不连续, 鲁棒性差。为了得到连续光滑的开环控制, 可以将 v, ω 设计成为连续光滑的参数化时间函数, 然后根据初始和期望状态确定参数。

4.2 非连续指数镇定

若 $z_3(0) \neq 0$, 则对系统

$$\dot{z}_1 = v + \omega z_2, \dot{z}_2 = -\omega z_1, \dot{z}_3 = \omega$$

可首先设计第二个控制量的控制律：

$$\omega = -k_1 z_3 (k_1 > 0) \quad (4.2)$$

该控制律可以保证 $z_3(t) = z_3(0)e^{-k_1 t}$ 指数趋于零，且 $z_3(t)$ 在有限时间内

不过零，因此可以定义坐标变换 $\bar{z}_2 = \frac{z_2}{z_3}$ ，变换后状态 (z_1, \bar{z}_2) 的方程为：

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v - k_1 z_3 z_2 = v - k_1 z_3^2 \bar{z}_2, \\ \dot{\bar{z}}_2 &= \frac{k_1 z_1 z_3^2 + k_1 z_3 z_2}{z_3^2} = k_1 z_1 + k_1 \bar{z}_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

系统 (4.3) 是一个线性时变系统，其时变项的系数 z_3^2 指数趋于零，定常部分为线性能控，根据引理 4，只要对定常部分设计控制律即可，例如以下线性控制器：

$$v = -k_2 z_2 - k_3 \bar{z}_2 \quad (4.4)$$

可以保证 z_1, \bar{z}_2 指数收敛到零, 其中选择 (k_2, k_3) 使得 $\begin{bmatrix} -k_2 & -k_3 \\ k_1 & k_1 \end{bmatrix}$ 为 Hurwitz 矩阵。

也可以直接将时变项抵消掉, 即取控制律

$$v = -k_2 z_2 - k_3 \bar{z}_2 + k_1 z_3^2 \bar{z}_2 \quad (4.5)$$

可以将 (4.3) 变成稳定的线性定常系统。

考虑到 $z_3(t) = z_3(0)e^{-k_1 t}$ 以及状态变换关系 $z_2 = z_1 \bar{z}_2$, 因此系统的所有状态均指数趋于零。

对于 $z_3(0) = 0$ 的情况, 可以预先设计控制 ω (例如可以令 ω 为非零常数) 将 z_3 在有限时间内驱动到非零位置, 然后再利用控制律 (4.2) (4.4)

(或 (4.2) (4.5)) 将系统的状态指数驱动到零。

评注. 以上控制律的优点是简单、状态以指数速度收敛,但在 $z_3(0) = 0$ 的情况下需要切换, 并且不能保证闭环系统的渐近稳定, 鲁棒性较差。

4.2 光滑时变指数镇定

对系统

$$\dot{z}_1 = v + \omega z_2, \dot{z}_2 = -\omega z_1, \dot{z}_3 = \omega$$

将控制律 (4.2) 修改为:

$$\begin{aligned} \omega &= -k_1 z_3 + \alpha(t), \\ (k_1 > 0, \alpha(t) &= \alpha_0 e^{-\lambda t}, \alpha_0 \neq 0, \lambda > 0) \end{aligned} \tag{4.6}$$

则 $\dot{z}_3 = -k_1 z_3 + \alpha(t)$, 根据引理 4 知 $z_3(t) \rightarrow 0, \omega(t) \rightarrow 0$ 。

令 $\varpi = \frac{\omega}{\alpha}$ ，则

$$\begin{aligned}\dot{\varpi} &= \frac{(-k_1\omega - \lambda\alpha)\alpha + \lambda\alpha\omega}{\alpha^2} \\ &= -k_1\varpi - \lambda + \lambda\varpi \\ &= -\lambda - (k_1 - \lambda)\varpi\end{aligned}$$

选择 $k_1 > \lambda$ ，则 ϖ 指数收敛到其平衡值 $\varpi_s \triangleq -\frac{\lambda}{k_1 - \lambda}$ ，即 $\varpi - \varpi_s$ 指数

趋于零。

考虑坐标变换 $\bar{z}_2 = \frac{z_2}{\alpha(t)}$ ，变换后状态 (z_1, \bar{z}_2) 的方程为：

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= v + \omega z_2 \\
&= v + \omega \alpha \bar{z}_2, \\
\dot{\bar{z}}_2 &= \frac{-\omega z_1 \alpha + \lambda \alpha z_2}{\alpha^2} \\
&= -\varpi z_1 + \lambda \bar{z}_2 \\
&= -\varpi_s z_1 + \lambda \bar{z}_2 - (\varpi - \varpi_s) z_1
\end{aligned}$$

上式可以重写为：

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \end{bmatrix} = (A + A_2(t)) \begin{bmatrix} z_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} + b v \quad (4.7)$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\varpi_s & \lambda \end{bmatrix}$, $A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega \alpha \\ -(\varpi - \varpi_s) & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

选取控制律

$$v = -K \begin{bmatrix} z_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} = -k_2 z_1 - k_2 \bar{z}_2 \quad (4.8)$$

则 (4.7) 式变为:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \end{bmatrix} = (A_1 + A_2(t)) \begin{bmatrix} z_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

其中 $A_1 = A - bK$, 且选择 K 使得 $A_1 = A - bK$ 为 Hurwitz 矩阵。

$(\omega, \alpha, \varpi - \varpi_s) \rightarrow (0, 0, 0) \Rightarrow A_2(t) \rightarrow 0$, 根据引理 4 可知 $z_1 \rightarrow 0, \bar{z}_2 \rightarrow 0$,

从而 $(z_1, z_2, z_3) = (z_1, \bar{z}_2 \alpha, z_3) \rightarrow (0, 0, 0)$ 。

评注： 以上控制律光滑时变、收敛速度快、且不需要切换，但仍不能保证闭环系统渐近稳定。

4.3 光滑时变渐近镇定

对系统 (4.1)

$$\dot{z}_1 = v + \omega z_2, \dot{z}_2 = -\omega z_1, \dot{z}_3 = \omega$$

以下简单的时变光滑控制：

$$\begin{aligned} v &= -k_1 z_1, \\ \omega &= -k_2 z_3 + z_2 \sin t \end{aligned} \tag{4.10}$$

可以保证系统 (4.1) 全局一致渐近稳定。

证明：

考虑 $V = 0.5(z_1^2 + z_2^2)$ ，沿方程 (4.1) 求导得到 $\dot{V} = -k_1 z_1^2 \leq 0$ ，因此 (z_1, z_2) 有界。由 z_3 的方程知 z_3 也有界，相应的有 v, ω 有界。进一步容易证明 $z_i (i=1,2,3), v, \omega$ 的各阶导数均有界，因此 V 及其各阶导数有界。由引理 3 知 \dot{V} 趋于零，因此 z_1 趋于零，导致 $\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + \omega z_2 \rightarrow 0$ ，从而 $\omega z_2 \rightarrow 0$ 。

由于 (V, z_1) 有极限, 因此 z_2 有极限, 所以 $\omega z_2(\infty) \rightarrow 0$ 。若 $z_2(\infty) = 0$, 则由 z_3 的方程知 $z_3 \rightarrow 0$; 若 $\omega \rightarrow 0$, 则 $\dot{\omega} = -k_2 \omega - \omega z_1 \sin(t) + z_2 \cos(t) \rightarrow 0$, 导致 $z_2 \cos(t) \rightarrow 0 \Rightarrow z_2(\infty) \cos(t) \rightarrow 0$, 因此 $z_2(\infty) = 0 \Rightarrow z_3 \rightarrow 0$ 。

评注. 以上控制律光滑时变, 且可以保证闭环系统全局一致渐近, 但收敛速度较慢 ($t^{1/2}$)。

5 轮式移动机器人的几何路径跟踪控制

5.1 路径跟踪误差方程推导

- 直线路径跟踪误差方程

期望的几何路径可以描述为:

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0 \quad (5.1)$$

令 $z = c_1x + c_2y + c_3$, 则 $\dot{z} = v(c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta)$, 又令 $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \neq 0$, 则得到:

$$\dot{z} = vc \left(\frac{c_1}{c} \cos \theta + \frac{c_2}{c} \sin \theta \right)$$

记 $\cos \alpha = \frac{c_2}{c}$, $-\sin \alpha = \frac{c_1}{c}$, 于是上式可重写为:

$$\dot{z} = vc(\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) = vc \sin(\theta - \alpha)$$

记 $\bar{\theta} = \theta - \alpha$, 则 $\dot{\bar{\theta}} = \omega$, 最终误差方程为:

$$\dot{z} = vc \sin \bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}} = \omega \quad (5.2)$$

● . 圆周路径跟踪误差方程

期望圆周路径

$$z(x, y) = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} - R = 0 \quad (5.3)$$

其中 (x_c, y_c) 为圆心位置坐标, R 为圆半径。

对 z 求导得:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{\bar{x}v\cos\theta + \bar{y}v\sin\theta}{z + R} = v\left(\frac{\bar{x}}{z + R}\cos\theta + \frac{\bar{y}}{z + R}\sin\theta\right) \\ &= v(-\sin\alpha\cos\theta + \sin\theta\cos\alpha) = v\sin(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

其中 $\bar{x} = x - x_c, \bar{y} = y - y_c, \sin\alpha = -\frac{\bar{x}}{z + R}, \cos\alpha = \frac{\bar{y}}{z + R}$ 。

对恒等式 $\bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha = 0$ 求导得到:

$$\dot{\alpha} = \frac{v \cos(\theta - \alpha)}{\bar{y} \cos \alpha - \bar{x} \sin \alpha} = \frac{v \cos(\theta - \alpha)}{z + R} \quad (5.4)$$

令 $\bar{\theta} = \theta - \alpha$ ，则得到最终跟踪误差方程：

$$\dot{z} = v \sin \bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}} = \omega - \frac{v \cos \bar{\theta}}{z + R} \triangleq u \quad (5.5)$$

● 任意路径跟踪误差方程

期望几何路径：

$$z = z(x, y) = 0 \quad (5.6)$$

求导得：

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= z_x v \cos \theta + z_y v \sin \theta \\
&= v \sqrt{z_x^2 + z_y^2} \left(\frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} \cos \theta + \frac{z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} \sin \theta \right) \\
&= v \Delta \cos(\theta - \alpha)
\end{aligned}$$

其中 $\Delta \triangleq \sqrt{z_x^2 + z_y^2}$, $\cos \alpha = \frac{z_x}{\Delta}$, $\sin \alpha = -\frac{z_y}{\Delta}$ 。

对恒等式 $z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha = 0$ 求导得到:

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{z}_x \cos \alpha + \dot{z}_y \sin \alpha}{z_x \sin \alpha - z_y \cos \alpha} \quad (5.7)$$

令 $\bar{\theta} = \theta - \alpha$ ，则得到最终跟踪误差方程:

$$\dot{z} = \Delta v \sin \bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}} = \omega - \frac{\dot{z}_x \cos \alpha + \dot{z}_y \sin \alpha}{z_x \sin \alpha - z_y \cos \alpha} \triangleq u \quad (5.8)$$

基于误差方程(5.8)，移动机器人的路径跟踪控制问题转化为：给定 $v(t)$ ，设计控制律 u 使得状态 $(z, \bar{\theta})$ 渐近趋于零。

5.2 路径跟踪控制律设计

(1) 线性化控制律

线性化误差方程：

$$\dot{z} = \Delta v \bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}} = u \quad (5.9)$$

控制律：

$$u = \Delta v(-k_1 z - k_2 \bar{\theta}) \quad (5.10)$$

闭环系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} = \Delta v \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \Delta v A \begin{bmatrix} z \\ \bar{\theta} \end{bmatrix}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$ 。

由于 $\Delta > 0$ ，因此当 $v > 0$ 时选择 (k_1, k_2) 使得 A 为 Hurwitz 阵，当 $v < 0$ 时选择 (k_1, k_2) 使得 $-A$ 为 Hurwitz 阵即可。

评注：控制律比较简单，只能实现局部渐近跟踪，且要求前进速度 $v(t)$ 不变号。

(2) 非线性控制律 1

考虑 Lyapunov 函数 $V = 0.5(k_1 z^2 + (1 - \cos \bar{\theta}))$ ，则

$\dot{V} = k_1 z v \Delta \sin \bar{\theta} + u \sin \bar{\theta}$, 设计控制律:

$$u = -k_1 v \Delta z - k_2 \sin \bar{\theta} \quad (5.11)$$

其中 $k_1 > 0, k_2 > 0$ 。

代入控制律得到:

$$\dot{V} = -k_2 (\sin \bar{\theta})^2 \leq 0$$

$$\ddot{V} \in L_\infty \Rightarrow \dot{V} \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \bar{\theta} \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{\theta} \rightarrow 0 ;$$

$$\ddot{\bar{\theta}} \in L_\infty \Rightarrow \dot{\bar{\theta}} \rightarrow 0 \Rightarrow v \Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow z \rightarrow 0 ;$$

(其中假定 $(v, \dot{v}) \in L_\infty, \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \neq 0$)。

评注: 控制律较线性化方法复杂, 不要求 $v(t)$ 定号, 闭环系统区域渐近稳定, 容易估计稳定区。

(3) 非线性控制律 2

考虑 Lyapunov 函数 $V = 0.5(k_1 z^2 + \bar{\theta}^2)$, 则

$$\dot{V} = k_1 z v \Delta \sin \bar{\theta} + \bar{\theta} u$$

控制律:

$$u = -k_1 v z \Delta \frac{\sin \bar{\theta}}{\bar{\theta}} - k_2 \bar{\theta} \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -k_2 \bar{\theta}^2 \leq 0 \quad . \quad \dot{V} \in L_\infty \Rightarrow \dot{V} \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{\theta} \rightarrow 0 \quad ,$$

$$\ddot{\bar{\theta}} \in L_\infty \Rightarrow \dot{\bar{\theta}} \rightarrow 0 \Rightarrow v z \rightarrow 0 \Rightarrow z \rightarrow 0 \quad (\quad \text{其} \quad \text{中} \quad \text{假} \quad \text{定}$$

$$(v, \dot{v}) \in L_\infty, \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \neq 0) .$$

评注：控制律较前两个方法复杂，不要求 $v(t)$ 定号，闭环系统全局渐近稳定。

6. 轮式移动机器人的轨迹跟踪控制

为了解决轨迹跟踪问题，首先需要定义轨迹跟踪误差，轨迹跟踪误差一般定义为真实移动机器人相对于虚拟移动机器人的状态误差。

轨迹跟踪问题的一般处理方法是假设有一个虚拟的目标移动机器人沿着所要求的轨迹运动，跟踪控制器设计的目标为使得真实移动机器人与虚拟移动机器人二者的误差趋于零，即使得移动机器人跟踪到指定的轨迹。

真实移动机器人的运动学模型为：

$$\dot{q} = B(q)v \quad (6.1)$$

其中

$$q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}; \quad B(q) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

虚拟移动机器人的运动方程为：

$$\dot{q}_r = B(q_r)v_r \quad (6.3)$$

其中

$$q_r = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{pmatrix}, B(q_r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_r) & 0 \\ \sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_r = \begin{pmatrix} v_{1r} \\ v_{2r} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

其中一种跟踪误差的定义为：

$$e \triangleq \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = R(\theta)(q - q_r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (q - q_r) \quad (6.5)$$

在这一定义下误差系统的动态方程为：

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 e_2 - v_{1r} \cos e_3 \\ -v_2 e_1 + v_{1r} \sin e_3 \\ v_2 - v_{2r} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

另外一种跟踪误差的定义为：

$$e \triangleq \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = R(\theta_r)(q - q_r) = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r & 0 \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (q - q_r) \quad (6.7)$$

相应的误差动态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2r}e_2 - v_{1r} + v_1 \cos e_3 \\ -v_{2r}e_1 + v_1 \sin e_3 \\ v_2 - v_{2r} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

以下依据误差动态模型 (6.6) 设计轨迹跟踪控制器。

控制器设计的基本思路是利用合适的 Lyapunov 函数，并选取控制律使其导数负定或半负定。

一种最简单的 Lyapunov 函数为：

$$V = 0.5(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (6.9)$$

沿方程 (6.6) 求导得到：

$$\dot{V} = e_1(v_1 + v_2e_2 - v_{1r} \cos e_3) + e_2(-v_{2r}e_1 + v_{1r} \sin e_3) + e_3(v_2 - v_{2r}) \quad (6.10)$$

选取控制律

$$\begin{aligned} v_1 &= -k_1 e_1 + v_{1r} \cos e_3 \\ v_2 &= v_{2r} - v_{1r} \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 - k_2 e_3 \end{aligned} \quad (6.11)$$

可以得到

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_3^2 \quad (6.12)$$

假定 (v_{1r}, v_{2r}) 及其各阶导数均有界, 且 v_{1r}, v_{2r} 至少有一个不趋于零, 则可利用引理证明闭环系统的稳定性。

稳定性分析:

由于 $\dot{V} \leq 0$, 因此 e_1, e_2, e_3 均有界, 进一步容易证明 e_1, e_2, e_3 的导数均有界, 因此可以导出 \ddot{V} 有界, 从而 e_1, e_3 均趋于零, 反复引用引理 2-3 可以证明 \dot{e}_1, \dot{e}_3 趋于零, 将其表达式代入可以得到 $v_{1r} e_2 \rightarrow 0, v_{2r} e_2 \rightarrow 0$ 。由于

(V, e_1, e_3) 有极限, 所以 e_2 有极限, 因此 $v_{1r}e_2(\infty) \rightarrow 0, v_{2r}e_2(\infty) \rightarrow 0$ 。如果 $e_2(\infty) \neq 0$, 则必有 $v_{1r} \rightarrow 0, \text{or}, v_{2r} \rightarrow 0$, 矛盾, 因此必有 $e_2(\infty) = 0$ 。

7. 轮式移动机器人的通用控制器设计

基本思路是通过对期望轨迹进行设定, 并利用轨迹跟踪控制器实现位置镇定、全状态镇定和路径跟踪。

考虑轨迹跟踪误差模型:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 e_2 - v_{1r} \cos e_3 \\ -v_2 e_1 + v_{1r} \sin e_3 \\ v_2 - v_{2r} \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

令 $u_1 = v_1 - v_{1r}, u_2 = v_2 - v_{2r}$, 则可以将 (7.1) 重写为:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_2 e_2 + v_{1r}(1 - \cos e_3) \\ -v_2 e_1 + v_{1r} \sin e_3 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

考虑正定函数：

$$V = 0.5(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$$

沿 (7.2) 求导得到：

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1 (u_1 + v_2 e_2 + v_{1r}(1 - \cos e_3)) + e_2 (-v_2 e_1 + v_{1r} \sin e_3) + e_3 u_2 \\ &= e_1 u_1 + e_3 \left(u_2 - v_{1r} e_1 \frac{1 - \cos e_3}{e_3} - v_{1r} e_2 \frac{\sin e_3}{e_3} \right) \end{aligned}$$

设计控制律：

$$\begin{aligned} u_1 &\triangleq v_1 - v_{1r} = -k_1 e_1, \\ u_2 &\triangleq v_2 - v_{2r} = -k_2 e_3 - v_{1r} e_1 \frac{1 - \cos e_3}{e_3} - v_{1r} e_2 \frac{\sin e_3}{e_3} \end{aligned} \quad (7.3)$$

控制律代入得到：

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_3^2 \leq 0$$

因此 $V < \infty, (e_1, e_2, e_3) \in L_\infty \Rightarrow \ddot{V} \in L_\infty \Rightarrow \dot{V} \rightarrow 0 \Rightarrow (e_1, e_3) \rightarrow 0$ 。

由于 (V, e_2) 有极限， \ddot{e}_3 有界，因此

$$\dot{e}_3 \rightarrow 0 \Rightarrow v_1 e_2 \rightarrow 0, v_{1r} e_2 \rightarrow 0 \Rightarrow v_1 e_2(\infty) \rightarrow 0, v_{1r} e_2(\infty) \rightarrow 0,$$

同样由 \ddot{e}_1 有界可证：

$$\dot{e}_1 \rightarrow 0 \Rightarrow v_2 e_2(\infty) \rightarrow 0, v_{2r} e_2(\infty) \rightarrow 0。$$

● 位置镇定

假定虚拟机器人在原点旋转，且旋转速度为 e_2 的函数，即

$$v_{1r} = 0, v_{2r} = f(e_2)(f(0) = 0, f(a) \neq 0, a \neq 0)$$

则有 $e_1 \rightarrow 0, e_3 \rightarrow 0$, $e_2(\infty)f(e_2(\infty)) = 0 \Rightarrow e_2(\infty) = 0$ 。因此由 (7.3)

得到位置镇定控制器为:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{1r} + u_1 = -k_1 e_1, \\ v_2 &= v_{2r} + u_2 = f(e_2) - k_2 e_3 - \frac{1 - \cos e_3}{e_3} v_{1r} e_1 - \frac{\sin e_3}{e_3} v_{1r} e_2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

● 全状态镇定

假定虚拟移动机器人的初始位置为原点, 即 $x_r(0) = y_r(0) = 0$, 并取:

$$\begin{aligned} v_{1r} &= 0, \\ v_{2r} &= -k_{1r} \theta_r + k_{2r} e_2 \sin(t) \end{aligned} \quad (7.5)$$

则可知虚拟机器人的状态将一直满足 $x_r = y_r = 0$, 因此虚拟机器人将在原点旋转, 相应控制律为:

$$\begin{aligned}
v_1 &= v_{1r} + u_1 = -k_1 e_1, \\
v_2 &= v_{2r} + u_2 \\
&= -k_{1r} \theta_r + k_{2r} e_2 \sin(t) - k_2 e_3 - \frac{1 - \cos e_3}{e_3} v_{1r} e_1 - \frac{\sin e_3}{e_3} v_{1r} e_2
\end{aligned} \tag{7.6}$$

可以证明 e_1, e_3 趋于零, 以及 $e_2(\infty)v_{2r} \rightarrow 0$ 。

若 $e_2(\infty) \neq 0$, 则 $v_{2r} \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{v}_{2r} = -k_{1r} v_{2r} + k_{2r} e_2 \cos(t) + k_{2r} \dot{e}_2 \sin t \rightarrow 0$

$\Rightarrow e_2(\infty) \cos t \rightarrow 0 \Rightarrow e_2(\infty) = 0$ 矛盾, 因此必有 $e_2(\infty) = 0 \Rightarrow \theta_r \rightarrow 0$ 。

已经证明 $(e_1, e_2, e_3) \rightarrow 0, \theta_r \rightarrow 0, x_r = y_r = 0$, 因此 $(x, y, \theta) \rightarrow 0$ 。

评注: 也可以取 $y_r(0) = \theta_r(0) = 0, v_{1r} = -k_{1r} x_r + k_{2r} e_2 \sin(t), v_{2r} = 0$, 即

虚拟参考机器人在 x 轴上振荡。

● 路径跟踪

直接将 (7.3) 重写为:

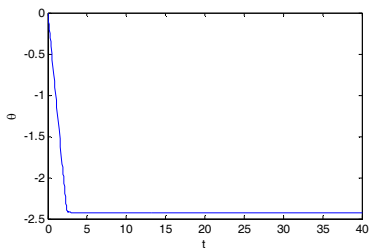
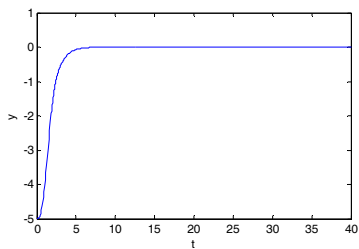
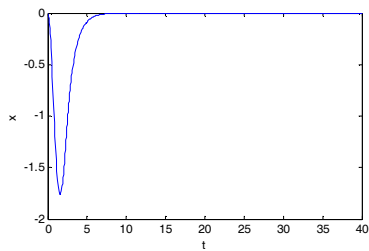
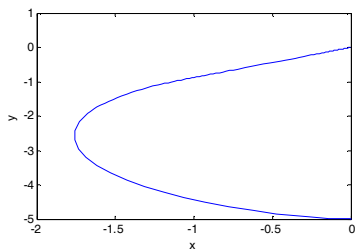
$$\begin{aligned}v_{1r} &= v_1 - u_1 = v_1 + k_1 e_1, \\v_2 &= v_{2r} + u_2 = v_{2r} - k_2 e_3 - \frac{1 - \cos e_3}{e_3} v_{1r} e_1 - \frac{\sin e_3}{e_3} v_{1r} e_2\end{aligned}\quad (7.7)$$

评注: 路径跟踪控制律 (7.7) 可以实现对任意几何路径的全局渐近跟踪。

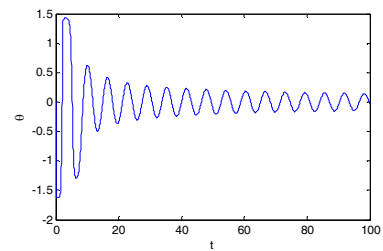
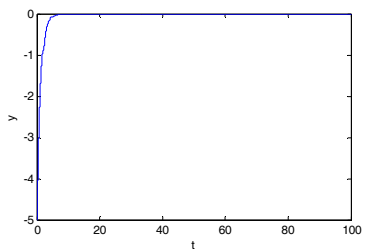
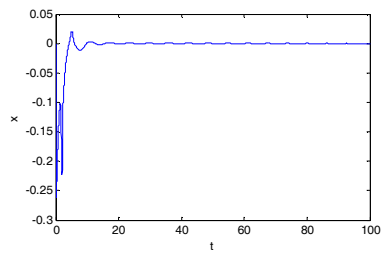
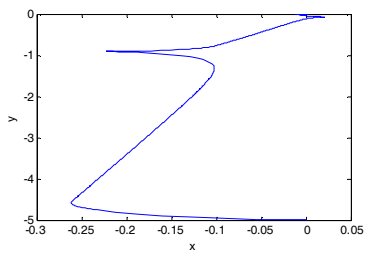
● 轨迹跟踪

可将 (7.3) 重写为:

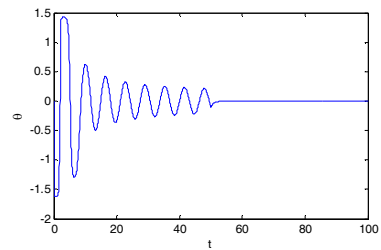
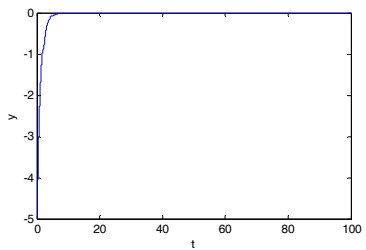
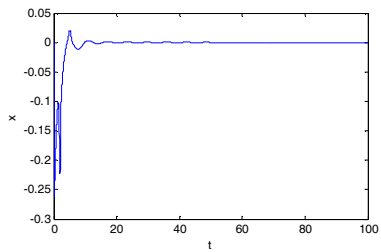
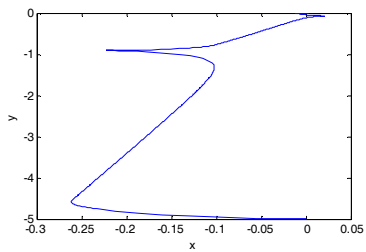
$$\begin{aligned}v_1 &= v_{1r} + u_1 = v_{1r} - k_1 e_1, \\v_2 &= v_{2r} + u_2 = v_{2r} - k_2 e_3 - \frac{1 - \cos e_3}{e_3} v_{1r} e_1 - \frac{\sin e_3}{e_3} v_{1r} e_2\end{aligned}\quad (7.8)$$



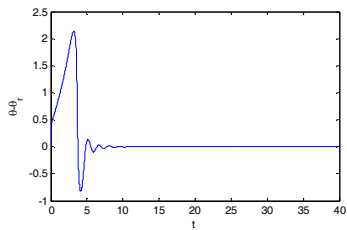
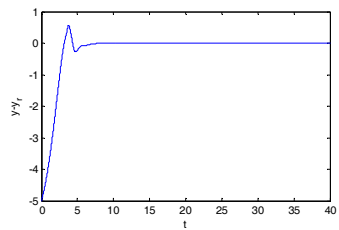
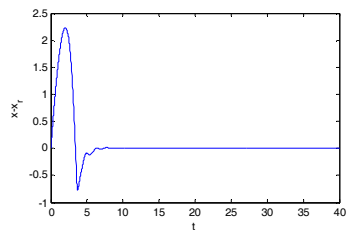
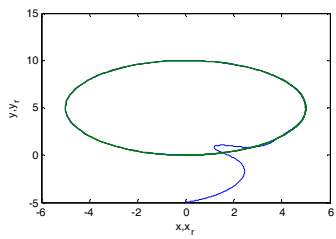
位置镇定仿真



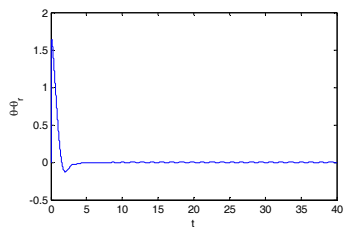
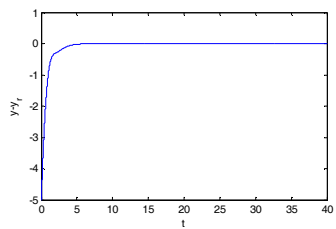
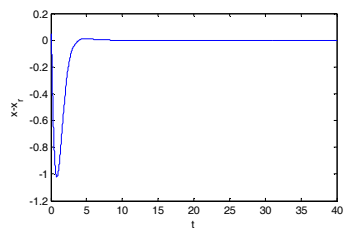
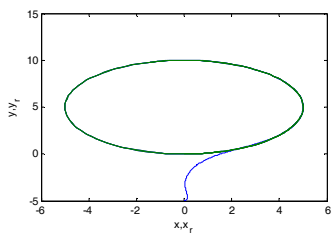
全状态镇定仿真 1



全状态镇定仿真 2



路径跟踪仿真



轨迹跟踪仿真