2.3 不确定推理概述

2.3.1 不确定性及其类型

- 广义不确定性：（狭义）不确定性、不确切性亦称模糊性）、不完全性、不一致性和时变性等几种类型。

1.（狭义）不确定性

不确定性(uncertainty)就是一个命题(亦即所表示的事件)的真实性不能完全肯定，而只能对其为真的可能性给出某种估计。

例

如果乌云密布并且电闪雷鸣，则很可能要下暴雨。
如果头痛发烧，则大概是患了感冒。

2. 不确切性（模糊性）

不确切性(imprecision)就是一个命题中所出现的某些言词其涵义不够确切，从概念角度讲，也就是其代表的概念的内涵没有硬性的标准或条件，其外延没有硬性的边界，即边界是软的或者说是不明确的。

例

小王是个高个子。

张三和李四是好朋友。

如果向左转，则身体就向左稍倾。

3. **不完全性**
4. **不一致性**
5. **时变性**

- 不确定性产生式规则的表示为

$$A \to (B, C(B|A))$$

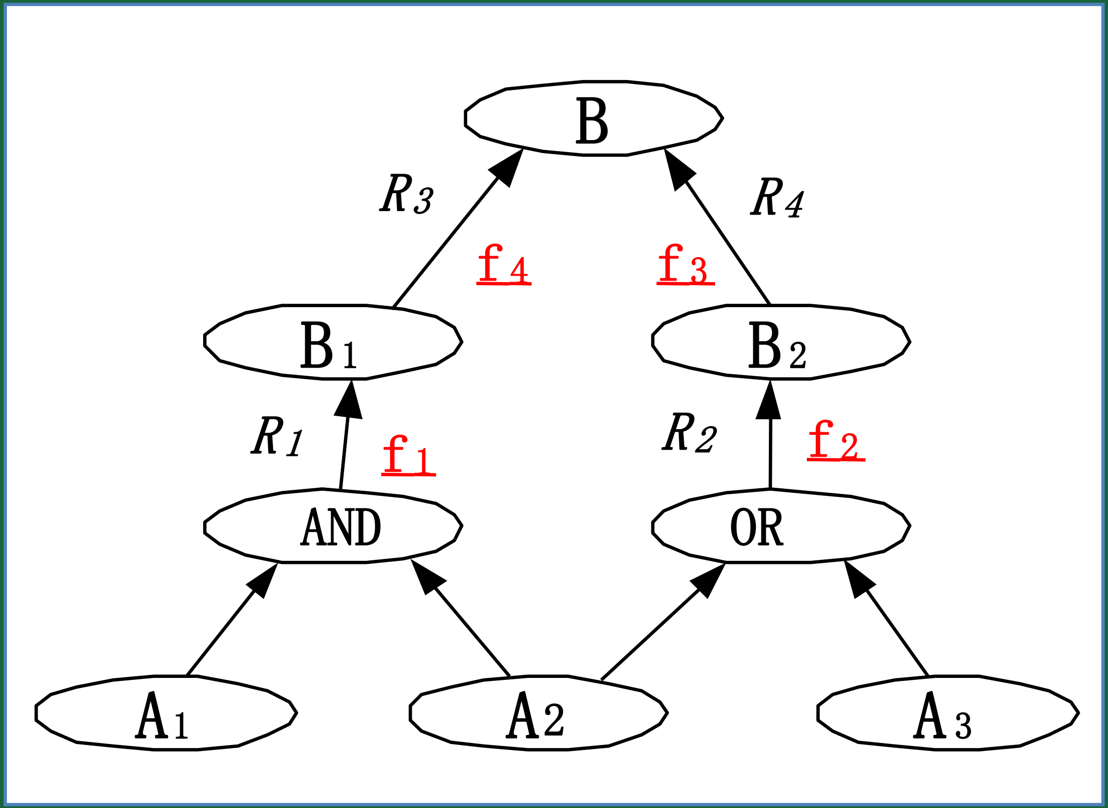
例

如果乌云密布并且电闪雷鸣，则天要下暴雨(0.95)。

如果头痛发烧，则患了感冒(0.8)。

◆ ◆不确定性推理的一般模式

不确定性推理＝符号推演＋信度计算



- 不确定性推理模型
  - 确定性理论（确定因素方法，可信度方法）
  - 主观贝叶斯方法
  - 证据理论
  - 模糊推理
  - 贝叶斯网络

2.4 可信度方法(确定性方法)

由美国斯坦福大学肖特里菲（E.H.Shortlffe）等人于1975年提出，并于1976年首次应用在血液病诊断专家系统MYCIN 中

例如：MYCIN系统中有规则：

如果（1）生物体的染色体呈革兰氏阳性；

（2）生物体的形态是球形；

（3）生物体生长构造是链状。

则：有证据表明这种生物体是链球菌的可能性是0.7。

2.4.1 知识不确定性的表示

1. 规则表示

IF E THEN H （ *CF*（H,E））

可信度 CF（Certainty Factor简记为 CF）的取值范围是[-1，1]，表示E所对应的证据为真时，该前提条件对结论H为真的支持程度

例如： IF 发烧 AND 流鼻涕 THEN 感冒 （ *0.8*）

2 可信度的定义

CF（H，E）= MB（H，E） - MD（H，E）

MB（Measure Belief简记为 MB）信任增长度

$$MB(H,E)=\begin{cases}1 & \mathrm{P(H)=1}\\ \dfrac{\max\{\mathrm{P(H\mid E),P(H)}\}-\mathrm{P(H)}}{1-\mathrm{P(H)}} & \text{否则}\end{cases}$$

MD（Measure Disbelief简记为 MD）不信任增长度

$$MD(H,E)=\begin{cases}1 & \mathrm{P(H)=0}\\ \dfrac{\min\{\mathrm{P(H\mid E),P(H)}\}-\mathrm{P(H)}}{-\mathrm{P(H)}} & \text{否则}\end{cases}$$

MB（H，E）>0时，有P（H | E）>P（H），MD（H，E）=0 由于E所对应的证据的出现增加了H的信任程度

MD（H，E）>0时，有P（H | E）<P（H），MB（H，E）=0。由于E所对应的证据的出现增加了H的不信任程度

CF（H，E）= MB（H，E） - MD（H，E）

$$CF(H,E)=\begin{cases} MB(H,E)=\dfrac{P(H|E)-P(H)}{1-P(H)} & 若\mathrm{P(H|E)>P(H)} \\ 0 & 若\mathrm{P(H|E)=P(H)} \\ -MD(H,E)=\dfrac{P(H)-P(H|E)}{-P(H)} & 若\mathrm{P(H|E)<P(H)} \end{cases}$$

CF(H, E)的特殊值：

CF(H, E) = 1，P（H | E）=1, 前提真，结论必真
CF(H, E) = -1，P（H | E）=0, 前提真，结论必假
CF(H, E) = 0, 前提真假与结论无关

实际应用中CF(H, E)的值由专家确定

2.4.2 前提证据的不确定性表示

$CF(E)$ ：$-1 \leq CF(E) \leq 1$

特殊值：

$CF(E) = 1$， 前提肯定真

$CF(E) = -1$， 前提肯定假

$CF(E) = 0$， 对前提一无所知

$CF(E) > 0$， 表示E以CF(E)程度为真

$CF(E) < 0$， 表示E以CF(E)程度为假

2.4.3 组合前提证据不确定性的计算

E = E1 AND E2 AND… AND En

CF（E）= min{ CF（E1），CF（E2），…，CF（En）}

E = E1 OR E2 OR… OR En，

CF（E）= max{ CF（E1），CF（E2），…，CF（En）}

2.4.4 推理结论的CF值

CF（H）=CF（H，E）* max{ 0, CF（E）}

若CF（E）< 0，即相应证据以某种程度为假，则 CF（H）= 0

当CF（E）=1时，CF（H）=CF（H，E）

2.4.5 重复结论的CF值计算

设有如下知识：

IF E1 THEN H （CF（H， E1 ））

IF E2 THEN H （CF（H， E2 ））

（1）分别对每条知识求出其CF（H）。即

CF1（H）= CF（H，E1）* max{O，CF（E1）}

CF2（H）= CF（H，E2）* max{0，CF（E2）}

（2）用如下公式求E1与E2对H的综合可信度

$$
CF(H)=\begin{cases} CF1(H)+CF2(H)-CF1(H)*CF2(H), & CF1\geq 0, CF2\geq 0 \\ CF1(H)+CF2(H)+CF1(H)*CF2(H), & CF1<0, CF2<0 \\ \dfrac{CF1(H)+CF2(H)}{1-\min\{|CF1(H)|,|CF2(H)|\}}, & CF1, CF2\text{异号} \end{cases}
$$

例 设有如下一组产生式规则和证据事实，试用确定性理论求出由每一个规则推出的结论及其可信度。

规则:

① if At hen B(0.9)

② if B and C then D(0.8)

③ if A and C then D(0.7)

④ if B or D then E(0.6)

事实:

A，CF(A)=0.8;C，CF(C)=0.9

解

由规则①得: $CF(B) = 0.9 \times 0.8 = 0.72$

由规则②得: $CF(D)_1 = 0.8 \times \min\{0.72，0.9) = 0.8 \times 0.72 = 0.576$

由规则③得: $CF(D)_2 = 0.7 \times \min\{0.8，0.9) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$

从而 $CF(D) = CF(D)_1 + CF(D)_2 - CF(D)_1 \times CF(D)_2$

$$= 0.576 + 0.56 - 0.576 \times 0.56 = 0.81344$$

由规则④得:

$$CF(E) = 0.6 \times \max\{0.72，0.81344\} = 0.6 \times 0.81344$$

$$= 0.488064$$

2.5 模糊推理

概率论：事件本身有确切的含义，只是由于发生的条件不充分，在事件出现与否上表现出不确定性

模糊推理：所处理的事物概念本身是模糊的，一个对象是否符合这个概念难以明确地确定。

1965年zadeh发表了第一篇关于fuzzy set的论文

1. 模糊集合

定义1 设 U是一个论域, U到区间 [0, 1] 的一个映射

$$\mu: U \longrightarrow [\,0\,,\,1\,]$$

就确定了 U的一个模糊子集 A。映射μ称为A的隶属函数，记为$\mu_A(u)$。对于任意的$u \in U$,$\mu_A(u) \in [\,0, 1\,]$ 称为u属于模糊子集A的程度, 简称隶属度。

模糊子集实际是普通子集的推广，而普通子集就是模糊子集的特例。

- **模糊集合的记法**

$$A=\left\{\mu_A(u_1)/u_1,\mu_A(u_2)/u_2,\mu_A(u_3)/u_3,\Lambda\ \right\}$$

$$A=\mu_A(u_1)/u_1+\mu_A(u_2)/u_2+\mu_A(u_3)/u_3+\Lambda$$

$$A=\int_{u\in U}\mu_A(u)/u$$

$$A=\left\{(u_1,\mu_A(u_1)),(u_2+\mu_A(u_2)),(\mu_3,u_A(u_3)),\Lambda\ \right\}$$

$$A=\{\mu_A(u_1),\mu_A(u_2),\mu_A(u_3),\Lambda\ ,\mu_A(u_n)\}$$

例 设 $U = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \}$，则

$$S_1 = 0/0 + 0/1 + 0/2 + 0.1/3 + 0.2/4 + 0.3/5 + 0.5/6 + 0.7/7 + 0.9/8 + 1/9 + 1/10$$

$$S_2 = 1/0 + 1/1 + 1/2 + 0.8/3 + 0.7/4 + 0.5/5 + 0.4/6 + 0.2/7 + 0/8 + 0/9 + 0/10$$

就是论域U的两个模糊子集，它们可分别表示U中“大数的集合”和“小数的集合”。

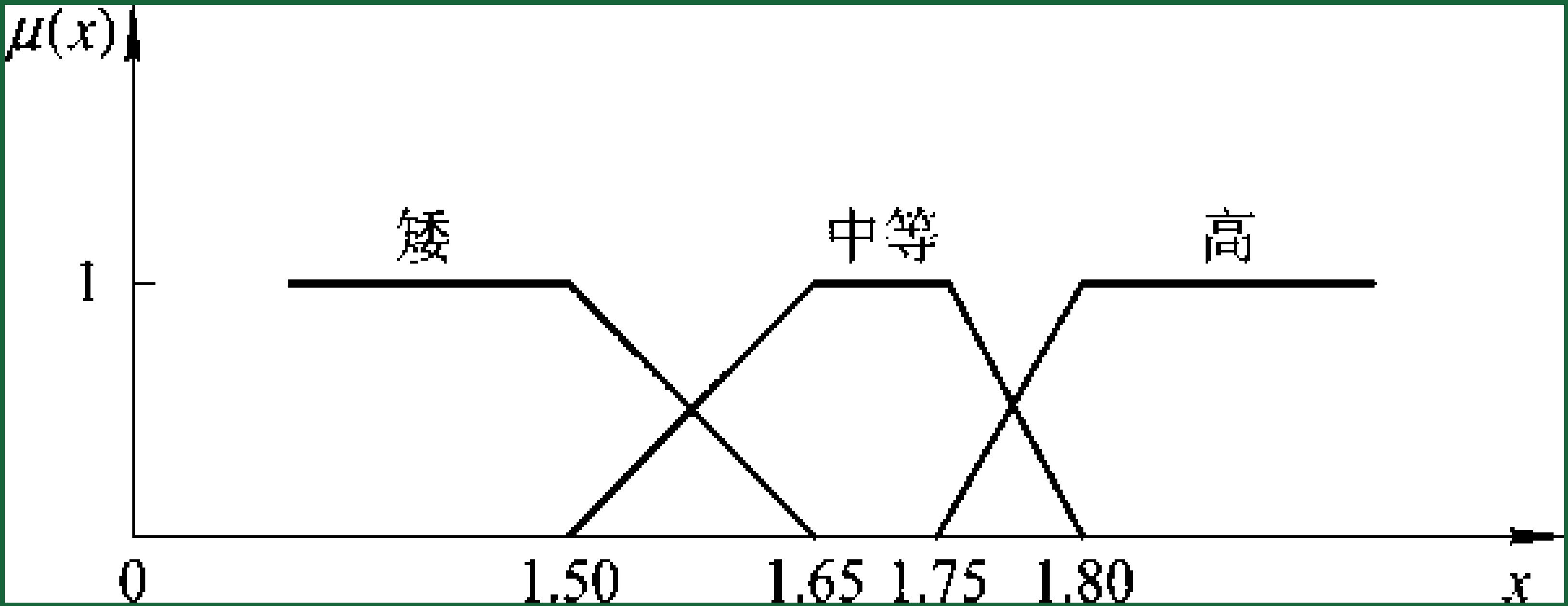
例 通常所说的“高个”、“矮个”、“中等个”就是三个关于身高的语言值。我们用模糊集合为它们建模。

取人类的身高范围 [1.0, 3.0] 为论域U, 在U上定义隶属函数$\mu_{矮}(x)$、$\mu_{中等}(x)$、$\mu_{高}(x)$如下。这三个隶属函数就确定了U上的三个模糊集合,它们也就是相应三个语言值的数学模型。

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & 1.0 \le x \le 1.50 \\ \dfrac{1.65 - x}{0.15} & 1.50 \le x \le 1.65 \\ 0 & 1.65 < x \le 3.0 \end{cases}$$

$$\mu_{中等}(x) = \begin{cases} 0 & 1 \le x \le 1.50 \\ \dfrac{x-1.5}{0.15} & 1.50 \le x \le 1.65 \\ 1 & 1.65 < x \le 1.75 \\ \dfrac{1.8-x}{0.05} & 1.75 \le x \le 3.0 \\ 0 & 1.80 < x \le 3.0 \end{cases}$$

$$\mu_{高}(x) = \begin{cases} 0 & 1.0 \le x \le 1.75 \\ \dfrac{x-1.75}{0.05} & 1.75 \le x \le 1.80 \\ 1 & 1.80 < x \le 3.0 \end{cases}$$



身高论域上的模糊集“矮”、 “中等”、 “高”的隶属函数

2. 模糊关系

定义2　集合U_1，U_2，…，U_n的笛卡尔积集$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$的一个模糊子集，称为$U_1$，$U_2$，…，$U_n$间的一个$n$元模糊关系。特别地，$U_n$的一个模糊子集称为$U$上的一个$n$元模糊关系。

例 设$U = \{1，2，3，4，5\}$，U上的“远大于”这个模糊关系可用模糊子集表示如下:

$$R_{远大于} = 0.1/(1，2) + 0.4/(1，3) + 0.7/(1，4) + 1/(1，5)+0.2/(2，3) + 0.4/(2，4) + 0.7/(2，5) + 0.1/(3，4) + 0.4/(3，5) + 0.1/(4，5)$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & & & & & \\
2 & & & & & \\
3 & & & & & \\
4 & & & & & \\
5 & & & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 0.1 & 0.4 & 0.7 & 1 \\
0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.7 \\
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

表示模糊关系的矩阵一般称为模糊矩阵。

3. 模糊集合的运算

定义3　设A、B是X的模糊子集，A、B的交集$A \cap B$、并集$A \cup B$和补集A'， 分别由下面的隶属函数确定：

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

4.模糊逻辑

设n元谓词

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

表示一个模糊命题。定义这个模糊命题的真值为其中对象$x_1, x_2, \ldots, x_n$对模糊集合P的隶属度, 即

$$T(P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

三种模糊逻辑运算：

$$T(P \wedge Q) = \min(T(P), T(Q))$$

$$T(P \vee Q) = \max(T(P), T(Q))$$

$$T(P) = 1 - T(P)$$

其中P和Q都是模糊命题。

- 由这三种模糊逻辑运算所建立的逻辑系统就是所谓的模糊逻辑。

- 模糊逻辑是传统二值逻辑的一种推广。

5. 模糊推理

模糊推理是基于不确切性知识(模糊规则)的一种推理。

例如

如果x小, 那么 y大。

x较小

---

y?

就是模糊推理所要解决的问题。

(1) 语言变量, 语言值

简单来讲，语言变量就是我们通常所说的属性名，如“年纪”就是一个语言变量。语言值是指语言变量所取的值,如“老”、“中”、“青”就是语言变量年纪的三个语言值。

(2) 用模糊(关系)集合表示模糊规则

例如, 设有规则

如果x is$A$ 那么 y is$B$

其中A、B是两个语言值。那么,按Zadeh的观点，这个规则表示了A、B之间的一种模糊关系R。于是, 有

$$R=\mu_R(u_1,v_1)/(u_1,v_1)+\mu_R(u_1,v_2)/(u_1,v_2)+\Lambda+\mu_R(u_1,v_j)/(u_i,v_j)+\Lambda$$
$$=\oint_{U\times V}\mu_R(u,v)/(u,v)$$

其中U、V分别为模糊集合A、B所属的论域,$\mu_{\mathrm{R}}(u_i,v_j)$ (i, j=1, 2, …)是元素(u_i, v_j) 对于R的隶属度。

$$\mu_R(u_1, v_1) = (u_A(u_i) \wedge \mu_B(v_j)) \vee (1 - u_A(u_i))$$

$(i, j=1, 2, \ldots)$

其中∧、∨分别代表取最小值和取最大值, 即min、max。

例如, 对于规则

如果x小 则 y大

令A、B分别表示“小”和“大”，将它们表示成论域U、V上的模糊集。

设论域

$$U = V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

定义

$$A = 1/1 + 0.8/2 + 0.5/3 + 0/4 + 0/5$$

$$B = 0/1 + 0/2 + 0.5/3 + 0.8/4 + 1/5$$

则

$$\mu_R(1,1) = (\mu_R(1) \wedge \mu_B(1)) \vee (1 - \mu_R(1)) = (1 \wedge 0) \vee (1 - 1) = 0$$

$$\mu_R(1,2) = (\mu_A(1) \wedge \mu_B(2)) \vee (1 - \mu_A(1)) = (1 \wedge 0) \vee (1 - 1) = 0$$

$$\mu_R(1,3) = (\mu_R(1) \wedge \mu_B(3)) \vee (1 - \mu_A(1)) = (1 \wedge 0.5) \vee (1 - 1) = 0.5$$

$$\Lambda \quad \Lambda$$

$$\mu_R(2,3) = (\mu_R(2) \wedge \mu_B(3)) \vee (1 - \mu_A(2)) = (0.8 \wedge 0.5) \vee (1 - 0.8)) = 0.5$$

$$\Lambda \quad \Lambda$$

$$\mu_R(5,5) = (\mu_R(5) \wedge \mu_B(5)) \vee (1 - \mu_A(5)) = (0 \wedge 1) \vee (1 - 0)) = 1$$

从而

$$R = 0/(1,\ 1) + 0/(1,\ 2) + 0.5/(1,\ 3) + \ldots + 0.5/(2,\ 3) + \ldots + 1/(5,\ 5)$$

如果只取隶属度, 且写成矩阵形式, 则

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是, 原自然语言规则就变成了一个数值集合(矩阵), 即

$$A \rightarrow B = R$$

（3）模糊关系合成

Zadeh的模糊关系合成法则

设

$$R_1=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & & s_{1k} \\ s_{21} & s_{22} & & s_{2k} \\ & & & \\ s_{n1} & s_{n2} & & s_{nk} \end{bmatrix}_{n\times k}$$

（4）基于关系合成的模糊推理

推理模式

$$B' = A' \cdot R$$

其中，关系A'是证据事实，R 为规则，B′就是所推的结论。

该推理模式用隶属函数表示，则为

$$\begin{aligned} u_{B'}(y) &= \bigvee_{x\in U}\{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x,y)\} \\ &= \bigvee_{x\in U}\{\mu_{A'}(x) \wedge [(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \vee (1-\mu_A(x))]\} \end{aligned}$$

模糊规则：从条件论域到结论论域的模糊关系