第四章 根轨迹法

4-2 绘制根轨迹的基本法则

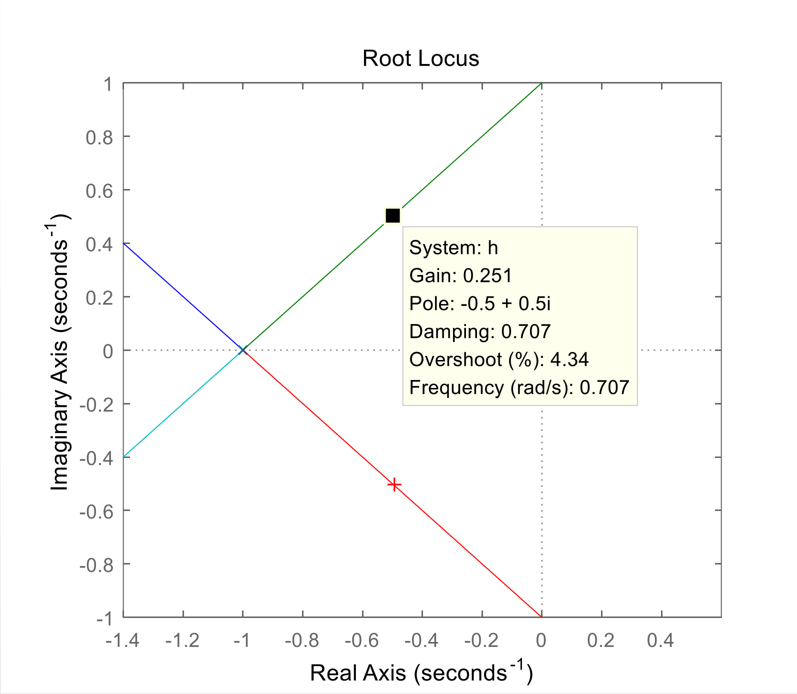
- 法则1：根轨迹的分支数
  - 根轨迹分支数=开环极点数

    =开环特征方程阶数

- 法则2：根轨迹连续且对称于实轴
  - 闭环极点为：实数→在实轴上

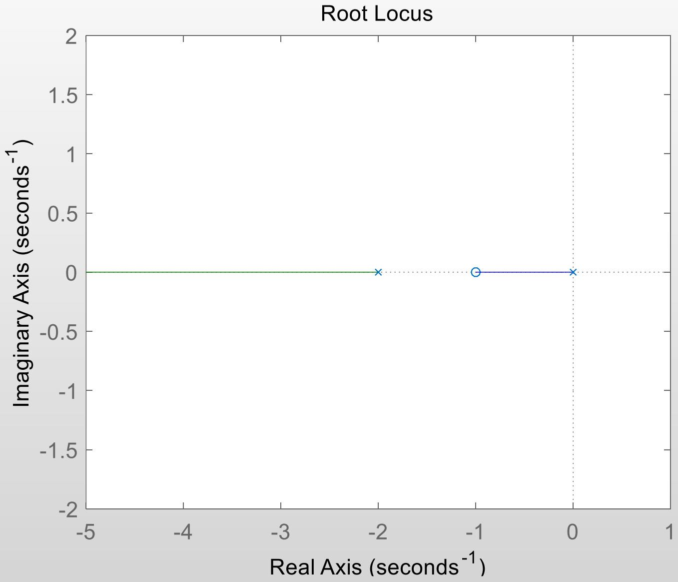
    复数→共轭→对称于实轴

- 例：$GH(s)=\dfrac{K}{(s+1)^4}$



4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 法则3：根轨迹的起点与终点
  - 根轨迹起于开环极点，终于开环零点或无穷远处。
  - 例：　$G(s)=\dfrac{2K(s+1)}{s(s+2)}$



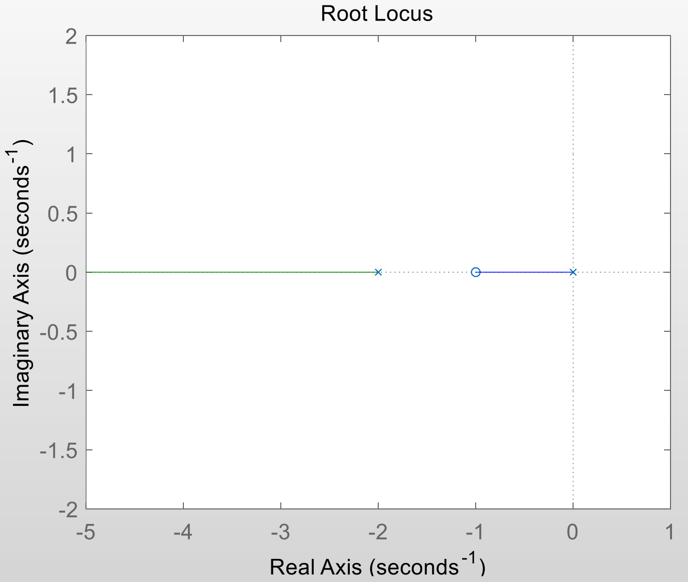
- 证明
  - 由根轨迹方程（模方程）有：

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=\frac{1}{K^*}$$

  - 起点：　$K^*=0 \Rightarrow s-p_j=0 \Rightarrow s=p_j$
  - 终点：　$K^* \to \infty \Rightarrow s-z_i \to 0 \Rightarrow s \to z_i$
  - 若m<n (有n–m个开环零点在无穷远处)，则有n–m条根轨迹趋于无穷远点。

4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 法则4：实轴上的根轨迹
  - 实轴上某一区域，若其右边开环零、极点数目之和为奇数，则该区域必为根轨迹。
  - 例： $G(s)=\dfrac{2K(s+1)}{s(s+2)}$



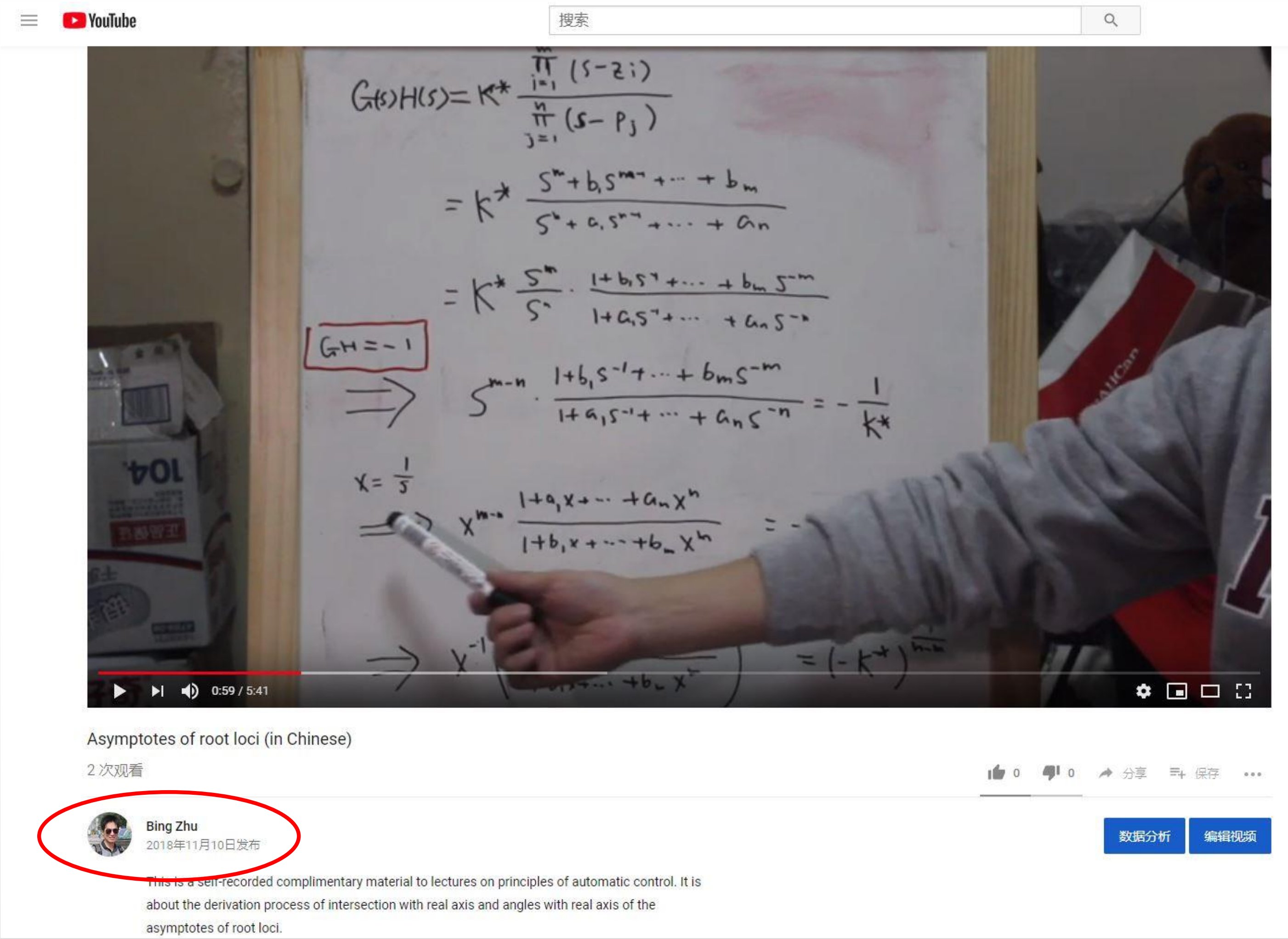
- 证明：由根轨迹方程（相方程）有：

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=180°\times(2k+1)$$

  - 实轴以外的零极点：共轭复根，相角之和为0。
  - 根轨迹上某点s的左侧零极点：相角之和为0。
  - 根轨迹上某点s的右侧零极点：如果有奇数个开环零、极点，则满足相方程。

4-2 绘制根轨迹的基本法则

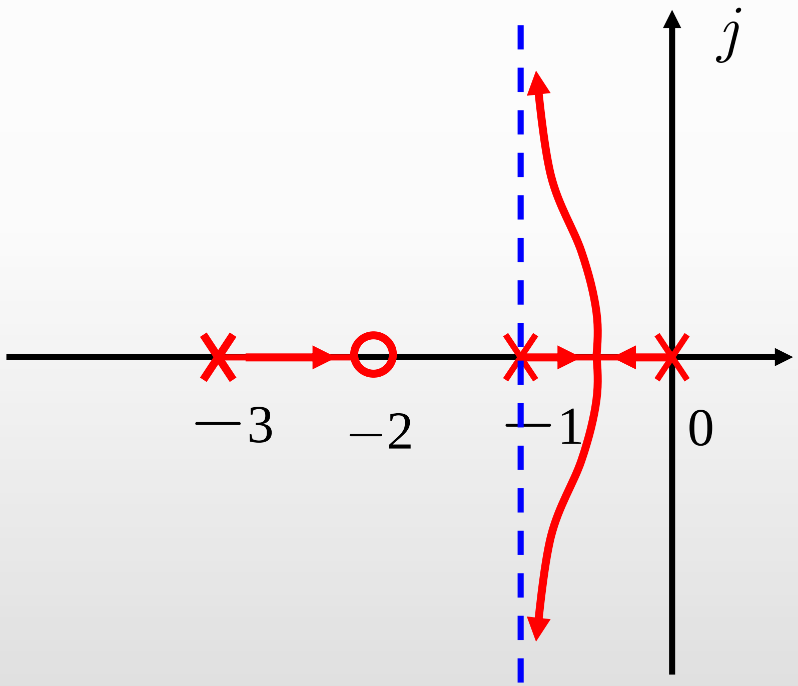
- 法则5：根轨迹的渐近线
  - 渐近线与实轴正方向的夹角 $$\phi_a = \frac{(2k+1)}{n-m}\times 180^\circ, \quad (k=0,\pm 1,\cdots,\pm n-m-1)$$
  - 渐近线与实轴相交点的坐标 $$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = \frac{\sum 开环极点值 - \sum 开环零点值}{有限极点数 - 有限零点数}$$


YouTube
搜索
0:59 / 5:41
Asymptotes of root loci (in Chinese)
2 次观看
0
0
分享
保存
Bing Zhu
2018年11月10日发布
数据分析
编辑视频
This is a self-recorded complimentary material to lectures on principles of automatic control. It is about the derivation process of intersection with real axis and angles with real axis of the asymptotes of root loci.

4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 例：单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$



  - 根据法则4，根轨迹在[-1, 0]、[-3, -2]存在；
  - 根据法则3， 可确定从-3 到-2的根轨迹；
  - 根据法则5，

$$\sigma_a=\frac{(-1-3)-(-2)}{3-1}=-1$$

$$\phi_a=180^\circ\times\frac{2k+1}{3-1}=\begin{cases}90^\circ & (k=0)\\ 270^\circ & (k=1)\end{cases}$$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

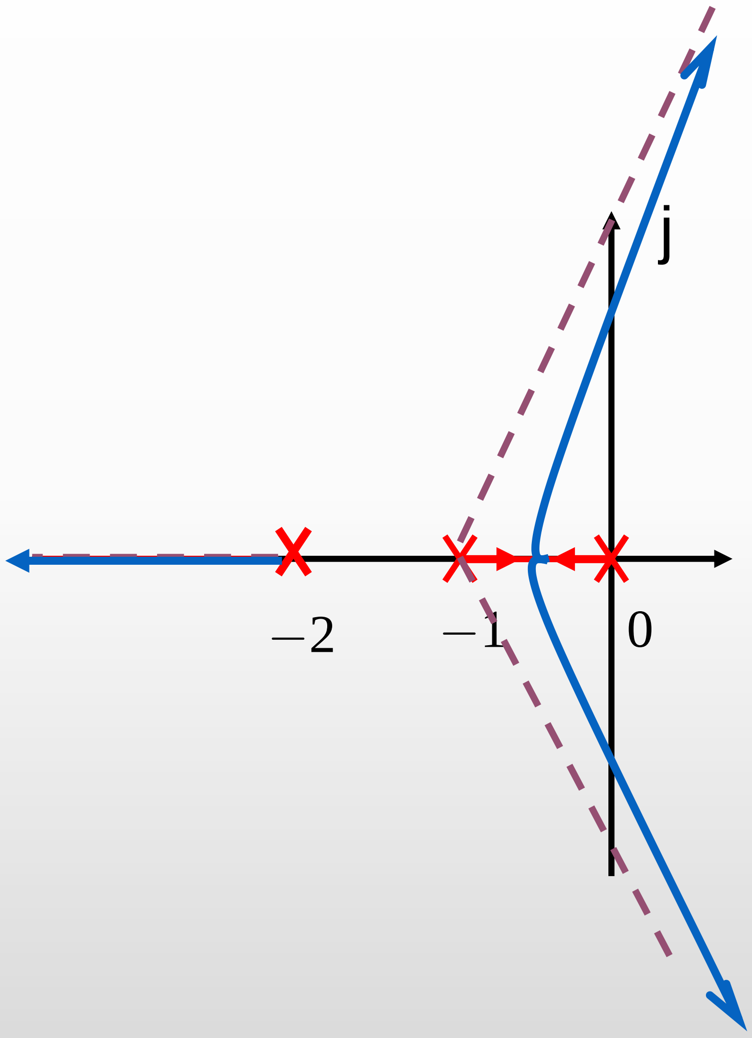
- 例：单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

  - 根据法则4，在[-1, 0]及(-∞, -2]上有根轨迹。
  - 根据法则3，从-2到-∞ 的根轨迹可确定。
  - 根据法则5，

$$\sigma_a=\frac{(-1-2)-0}{3}=-1$$

$$\phi_a=180^0\times\frac{2k+1}{3}=\begin{cases}60^0 & (k=0)\\ 180^0 & (k=1)\\ -60^0 & (k=-1)\end{cases}$$



4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 法则6：根轨迹的分离点（汇合点）
  - 几条（两条或两条以上）根轨迹在s-平面上相遇又分开的点称为分离点或汇合点。

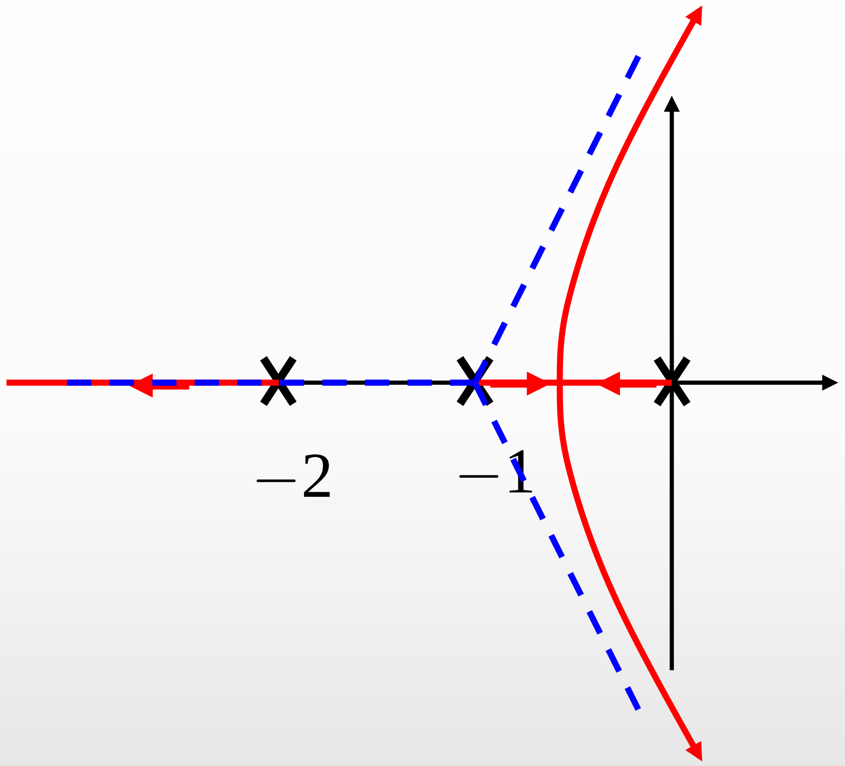
$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}}$$

  - 分离点(汇合点)对应的是闭环重根条件。
  - 以上方程给出的只是必要条件。
  - 分离角为$180°/k$，这里 k为汇合点处闭环极点的个数。
  - 确定分离点附近根轨迹方向可根据法则2、法则4或取试验点用相角方程验证。

4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 例：单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$



- 根据法则4，在[-1, 0]及(-∞, -2]上有根轨迹；
- 根据法则3，从-2到-∞ 的根轨迹可确定；
- 渐近线由法则5得到；
- 根据法则6，

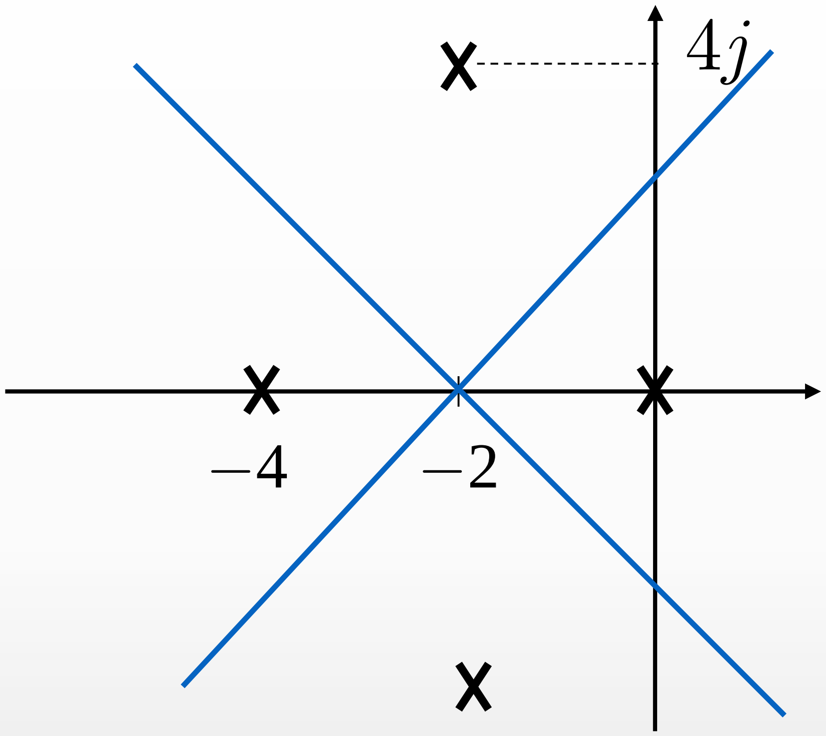
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}=0$$

$$\Rightarrow 3d^2+6d+2=0 \qquad \Rightarrow d_1=-0.42,\quad \cancel{d_2=-1.58}$$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 例：单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$



  - 根据法则4，[-4, 0]有根轨迹；
  - 根据法则5，可得渐近线：

$$\sigma_a=\frac{-4-2+4j-2-4j-0}{4}=-2,\qquad \varphi_a=180^\circ\times\frac{2k+1}{4}=\begin{cases}45^\circ & (k=0)\\135^\circ & (k=1)\\-45^\circ & (k=-1)\\-135^\circ & (k=-2)\end{cases}$$

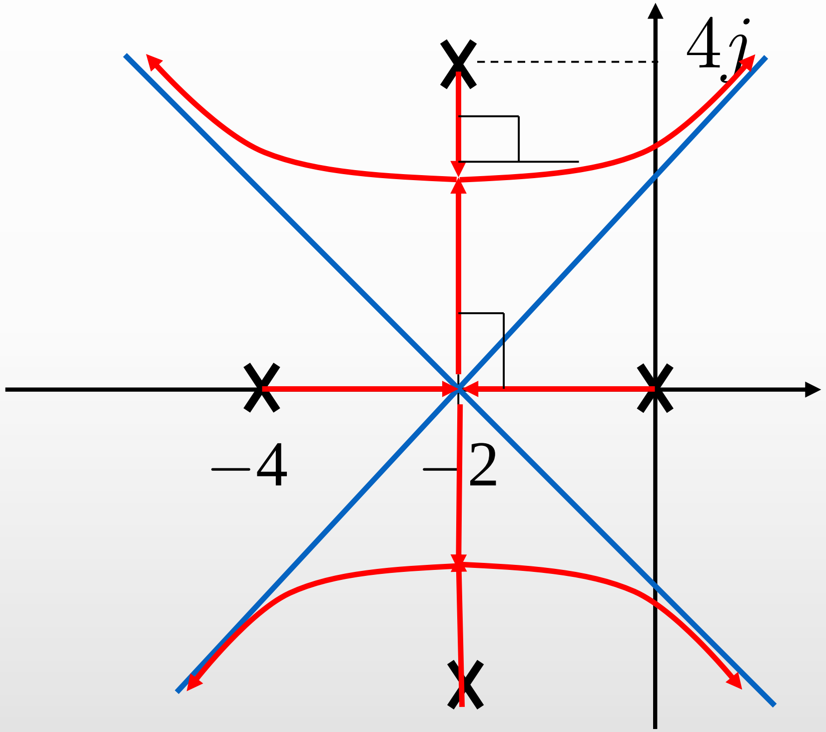
4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 根据法则6，分离点满足

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+4}+\frac{1}{d+2+4j}+\frac{1}{d+2-4j}=0$$

$$\Rightarrow d^3+6d^2+18d+20=0$$

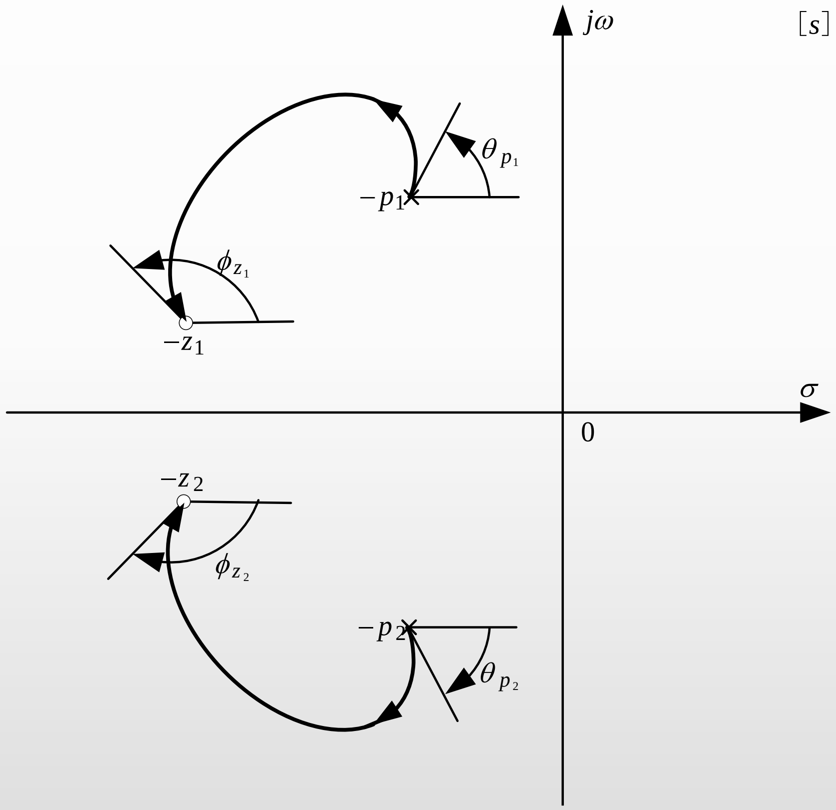
$$\Rightarrow \begin{cases} d_1=-2 \\ d_2=-2+2.45j \\ d_3=-2-2.45j \end{cases}$$



- 分离角为 $\frac{180°}{2}=90°$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 法则7：根轨迹的起始角与终止角
  - 起始角是指起于开环极点处根轨迹的切线与水平正方向的夹角。
  - 终止角是指终止于开环零点的根轨迹在该点处的切线与水平正方向的夹角。



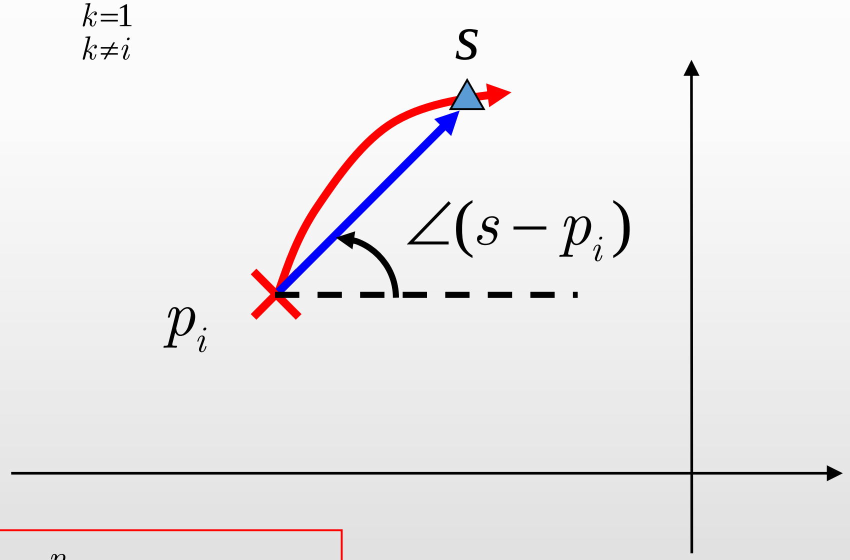
4-2 绘制根轨迹的基本法则

- **起始角**：在极点p_i临近处选择实验点s 。若s 位于根轨迹上，则

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{k=1}^{n}\angle(s-p_k)=(2k+1)\pi \quad \text{即} \quad \sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\angle(s-p_k)-\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi$$

$$\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi+\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\angle(s-p_k)$$

令 $\theta_{p_i}:=\lim\limits_{s\to p_i}\angle(s-p_i)$



则：$$\boxed{\theta_{p_i}=\lim_{s\to -p_i}\angle(s-p_i)=180^\circ\times(2k+1)+\sum_{j=1}^{m}\angle(p_i-z_j)-\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\angle(p_i-p_k)}$$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

例：开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K^*}{s(s^2+2s+2)}=\dfrac{K^*}{s(s+1+j)(s+1-j)}$

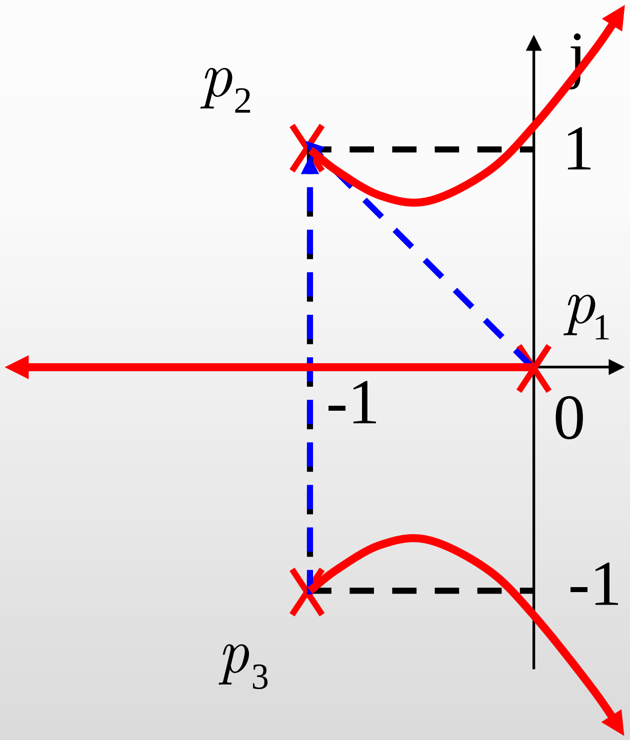
则 $p_1=0,\quad p_2=-1+j,\quad p_3=-1-j$

由法则5，可得渐近线；

由法则6，算得无分离点；利用起始角公式，

$\theta_{p_2}=180°-135°-90°=-45°$

根据法则2， $\theta_{p_3}=45°$

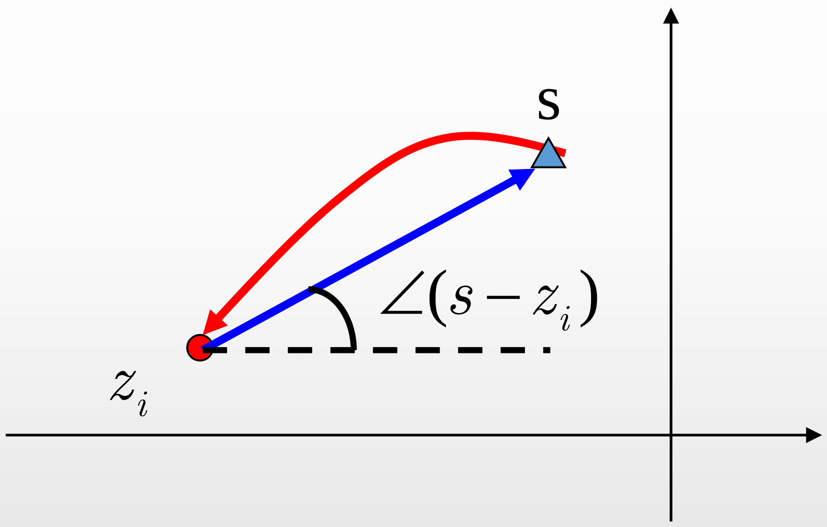


4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 终止角：类似于求起始角，取实验点s如下图：

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)$$

$$=\angle(s-z_i)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=(2k+1)\pi$$



令$s\to z_i$及 $\phi_{z_i}:=\lim\limits_{s\to z_i}\angle(s-z_i)$

则：$$\boxed{\phi_{z_i}=180^\circ\times(2k+1)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\angle(z_i-z_j)+\sum_{k=1}^{n}\angle(z_i-p_k)}$$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

例：开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s^2+4.5s+5.625)}{s(s+1)(s+2)}$

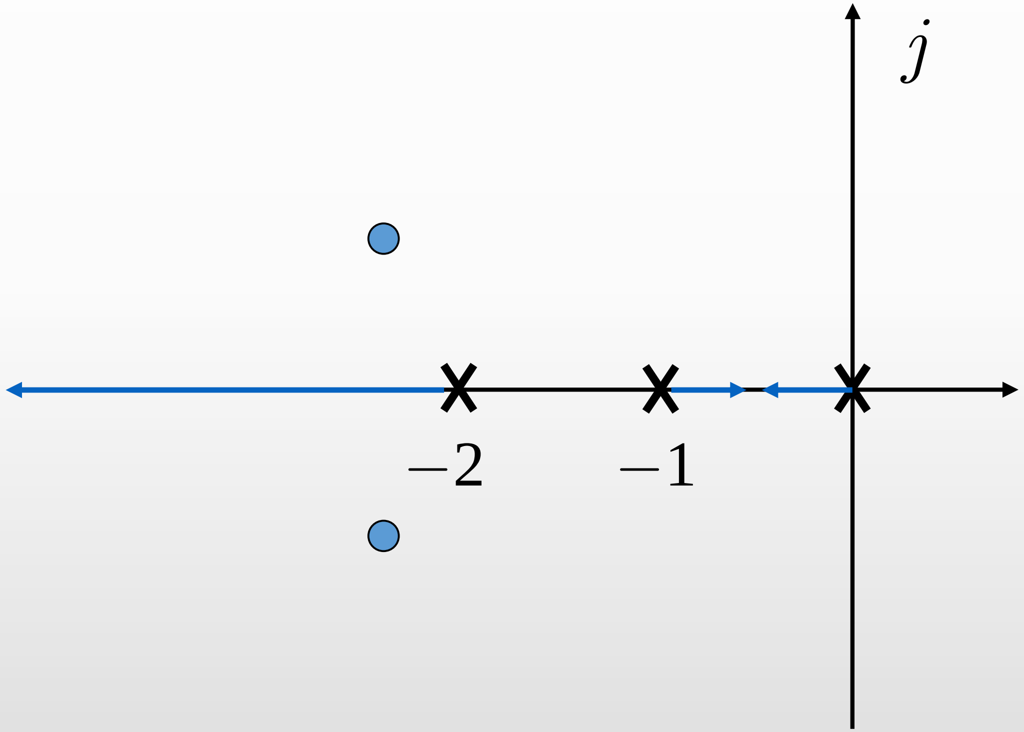
则：$z_1=-2.25+j0.75$，$z_2=-2.25-j0.75$

根据法则4，[-1, 0]、(-∞, -2]上有根轨迹；

根据法则3，从-2到-∞的根轨迹可确定；

根据法则6，

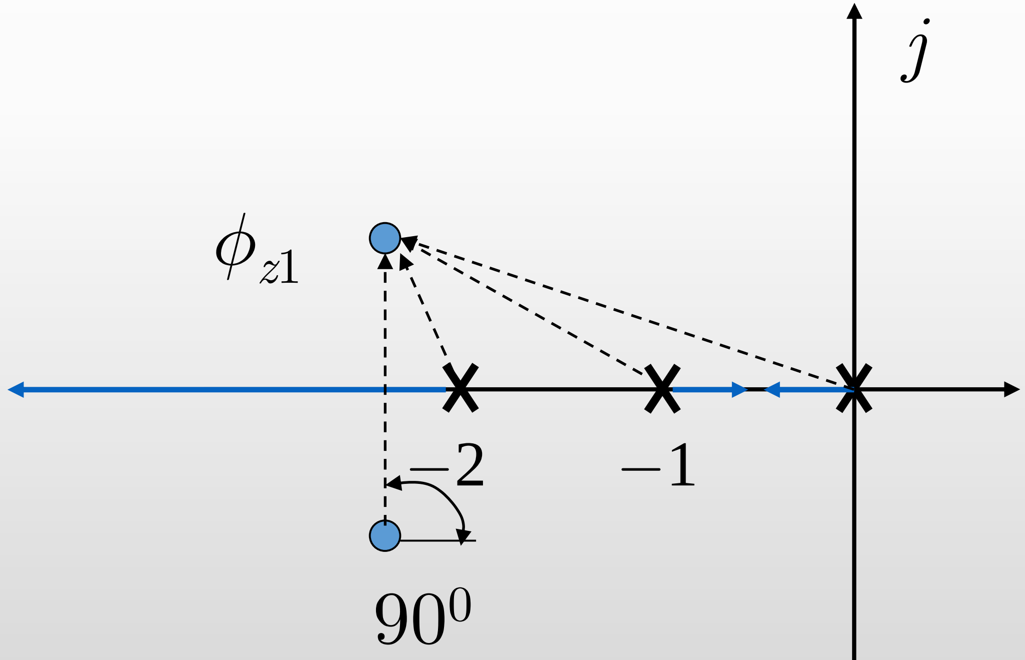
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}=\frac{1}{d+2.25+0.75j}+\frac{1}{d+2.25-0.75j}\Rightarrow d=-0.536$$

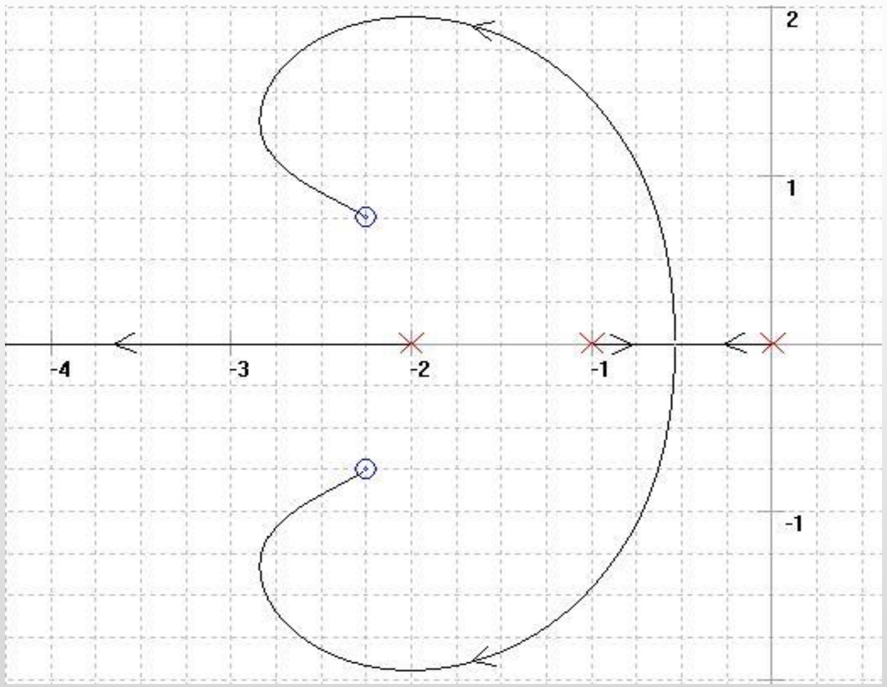


4-2 绘制根轨迹的基本法则

根据法则7，终止角为

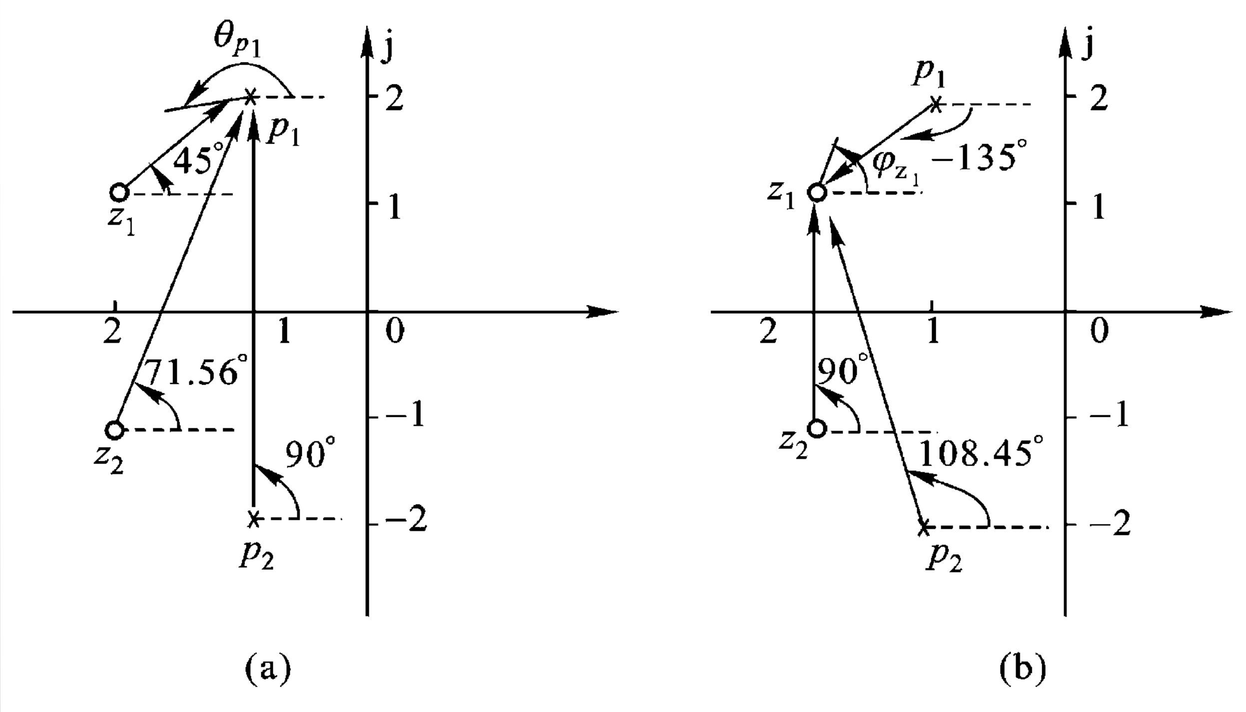
$$\phi_{z_1} = 180° - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \angle(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^{n} \angle(z_i - p_j) = 180° - 90° + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$





4-2 绘制根轨迹的基本法则

例：开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s+2+j)(s+2-j)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$

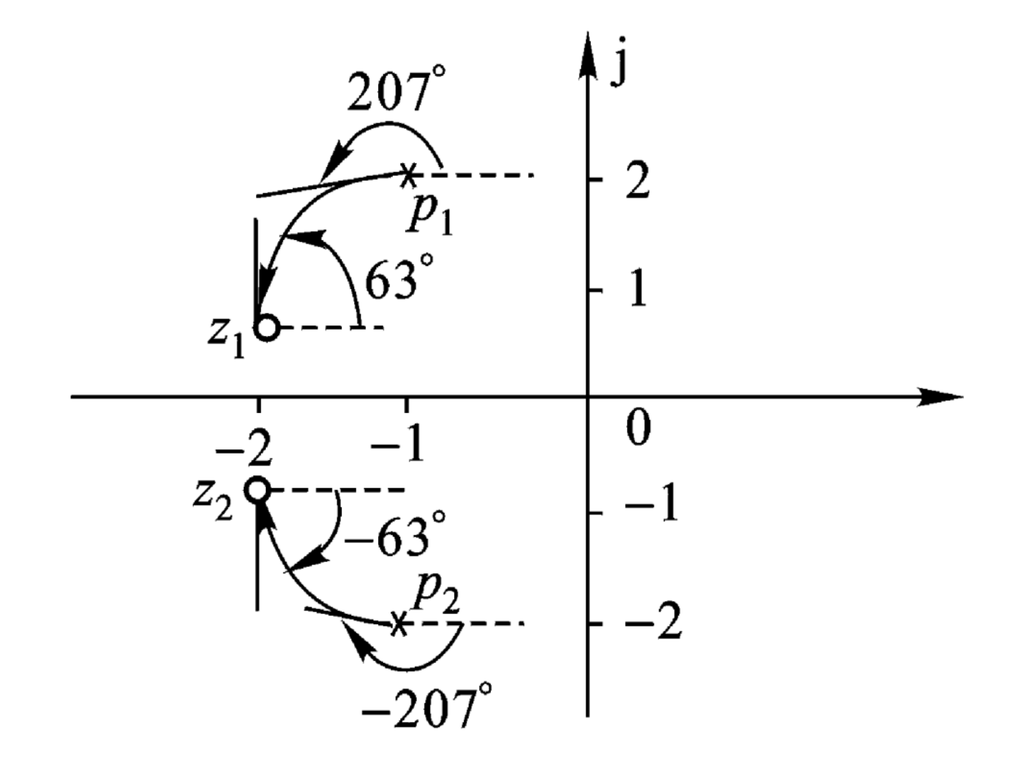


$$\theta_{p_1}=180^\circ+45^\circ+71.5^\circ-90^\circ$$
$$=206.5^\circ$$

$$\phi_{z_1}=180^\circ-90^\circ-135^\circ+108.45^\circ$$
$$=63^\circ$$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

例：开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s+2+j)(s+2-j)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$



$$\theta_{p_1}=180^\circ+45^\circ+71.5^\circ-90^\circ$$
$$=206.5^\circ$$

$$\phi_{z_1}=180^\circ-90^\circ-135^\circ+108.45^\circ$$
$$=63^\circ$$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 法则8：根轨迹与虚轴的交点

  - 如根轨迹与虚轴相交，则交点上的 K^* 值和 ω 值可用劳思判据判定，也可令闭环特征方程中的 $s=j\omega$，然后分别令其实部和虚部为零求得。

$$D(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\Big|_{s=j\omega}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}[K^*N(s)+D(s)]\big|_{s=j\omega}=0\\ \mathrm{Im}[K^*N(s)+D(s)]\big|_{s=j\omega}=0\end{cases}$$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

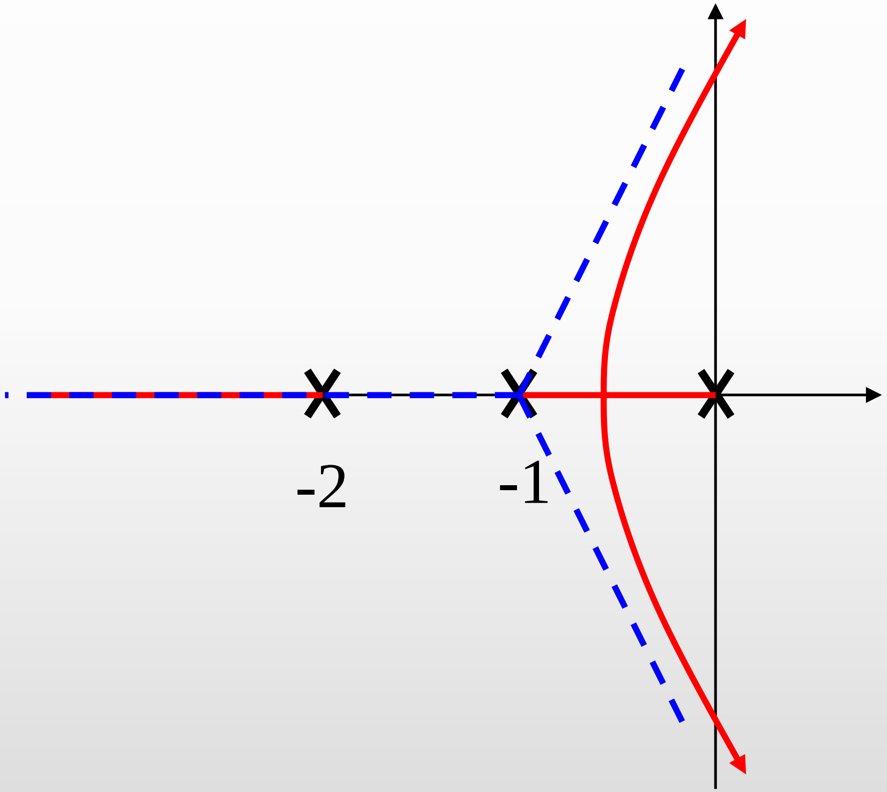
例：开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$

闭环特征方程： $s^3+3s^2+2s+K^*=0$

令**s=jω**，则 $-j\omega^3-3\omega^2+2j\omega+K^*=0$

$$\begin{cases}-\omega^3+2\omega=0\\ -3\omega^2+K^*=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=0, \quad \pm\sqrt{2}\\ K^*=0, \quad 6\end{cases}$$

稳定时***K****的取值范围??



4-2 绘制根轨迹的基本法则

例：开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

根据法则4，[-3, 0]有根轨迹；

根据法则5，可得渐近线：

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\pm45°,\pm135°$$

$$\sigma_a=\frac{0-3-1+j1-1-j1}{4}=-1.25$$

根据法则6，

$$\sum_1^4\frac{1}{d-p_i}=0$$

$$\Rightarrow d_1=-2.3,\cancel{d_{2,3}=-0.92\pm j0.37}$$

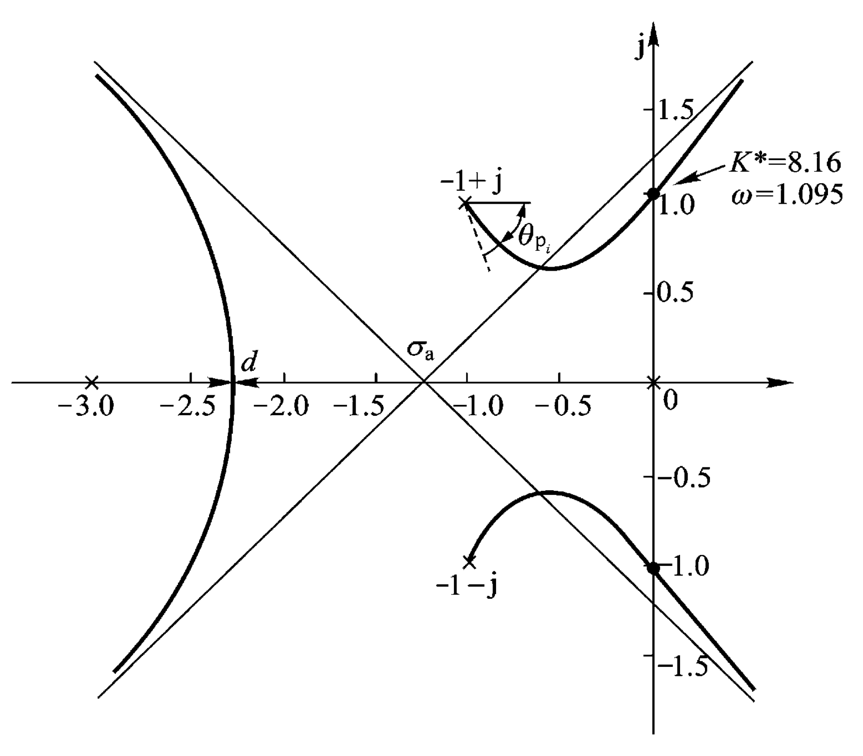
根据法则7，

$$\begin{aligned}\theta_{p_3}&=180°-\theta_{p_1p_3}-\theta_{p_2p_3}-\theta_{p_4p_3}\\&=180°-135°-26.57°-90°\\&=-71.56°\end{aligned}$$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

例：开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$



根据法则8，

$$[s(s+3)(s^2+2s+2)+K^*]\big|_{s=j\omega}=0$$

$$\Rightarrow \omega=\pm 1.095, K^*=8.16$$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 法则9：根之和与根之积
  - 闭环特征根之和，等于闭环特征方程第二项系数a_1。
  - 若$n-m\geq 2$，根之和与开环根轨迹增益K^*无关，即根之和不变。

  - 闭环特征根之积乘等于闭环特征方程的常数项。

令

$$G(s)H(s)=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

则闭环特征多项式

$$\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)+K^*\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)=\prod_{i=1}^{n}(s+s_i)$$

$$=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

4-2 绘制根轨迹的基本法则

例：开环传递函数为

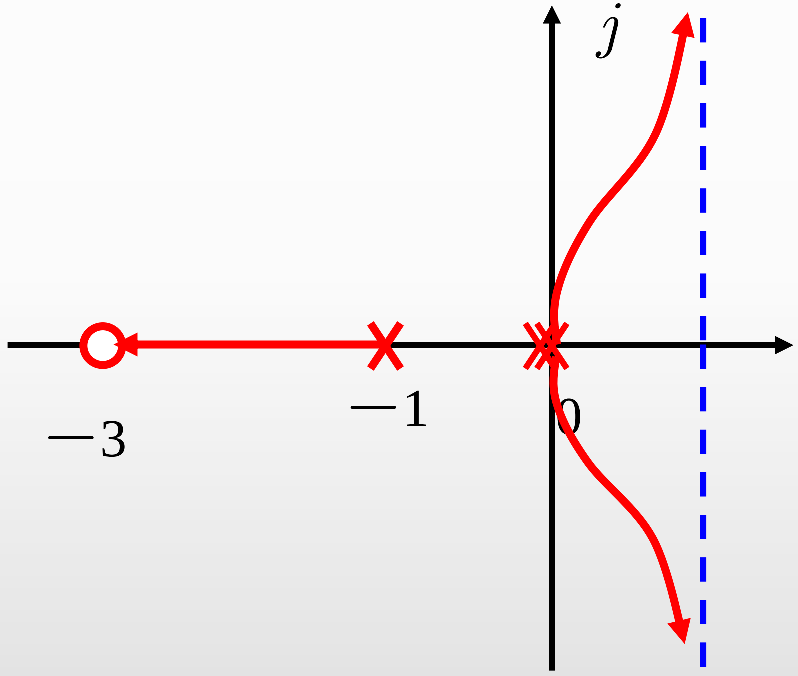
$$G(s)=\frac{K^*(s+3)}{s^2(s+1)}$$

根据法则4，[-3, -1]上有根轨迹。

根据法则5，渐近线：

$$\sigma_a=\frac{-1+3}{2}=1$$

$$\varphi_a=180°\times\frac{2k+1}{2}=\begin{cases}90° & (k=0)\\ -90° & (k=-1)\end{cases}$$



4-2 绘制根轨迹的基本法则

例：开环传递函数为

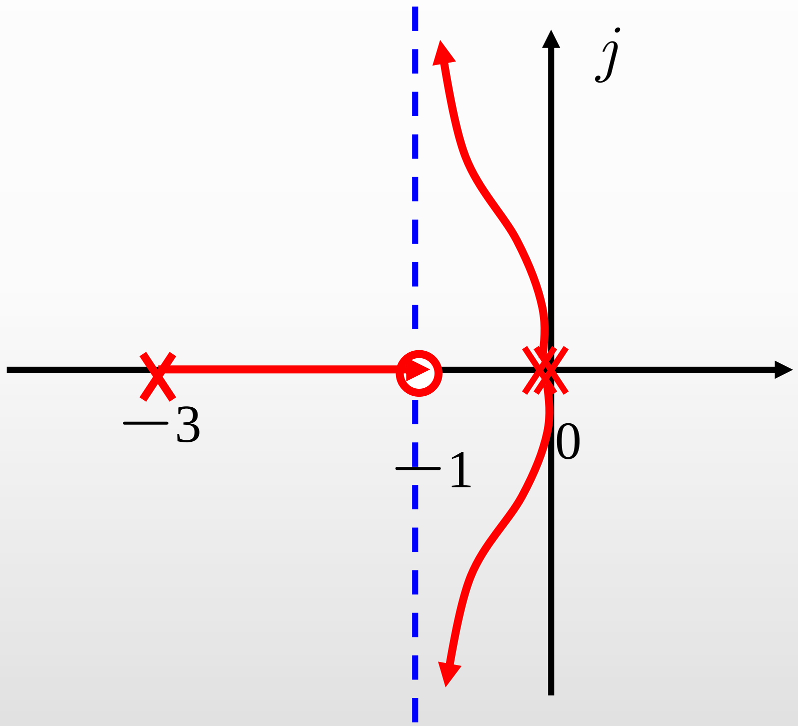
$$G(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+3)}$$

根据法则4，[-3, -1]上有根轨迹。

根据法则5，渐近线：

$$\sigma_a=\frac{-3+1}{2}=-1$$

$$\varphi_a=180^\circ\times\frac{2k+1}{2}=\begin{cases}90^\circ & (k=0)\\ -90^\circ & (k=-1)\end{cases}$$

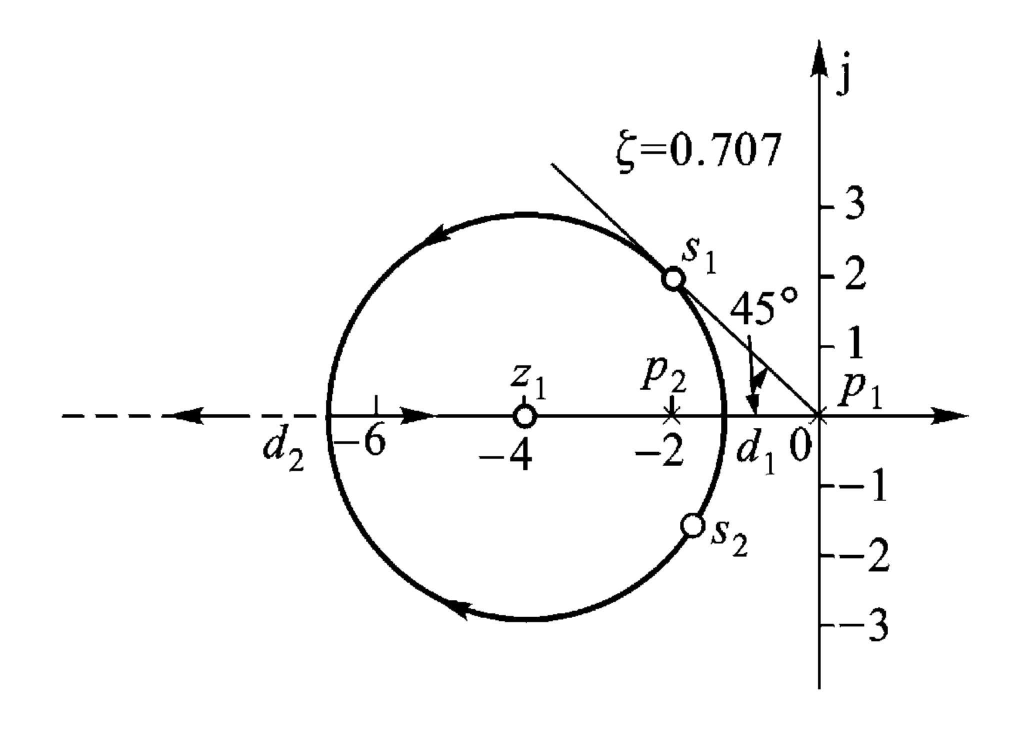


4-2 绘制根轨迹的基本法则

例：开环传递函数为

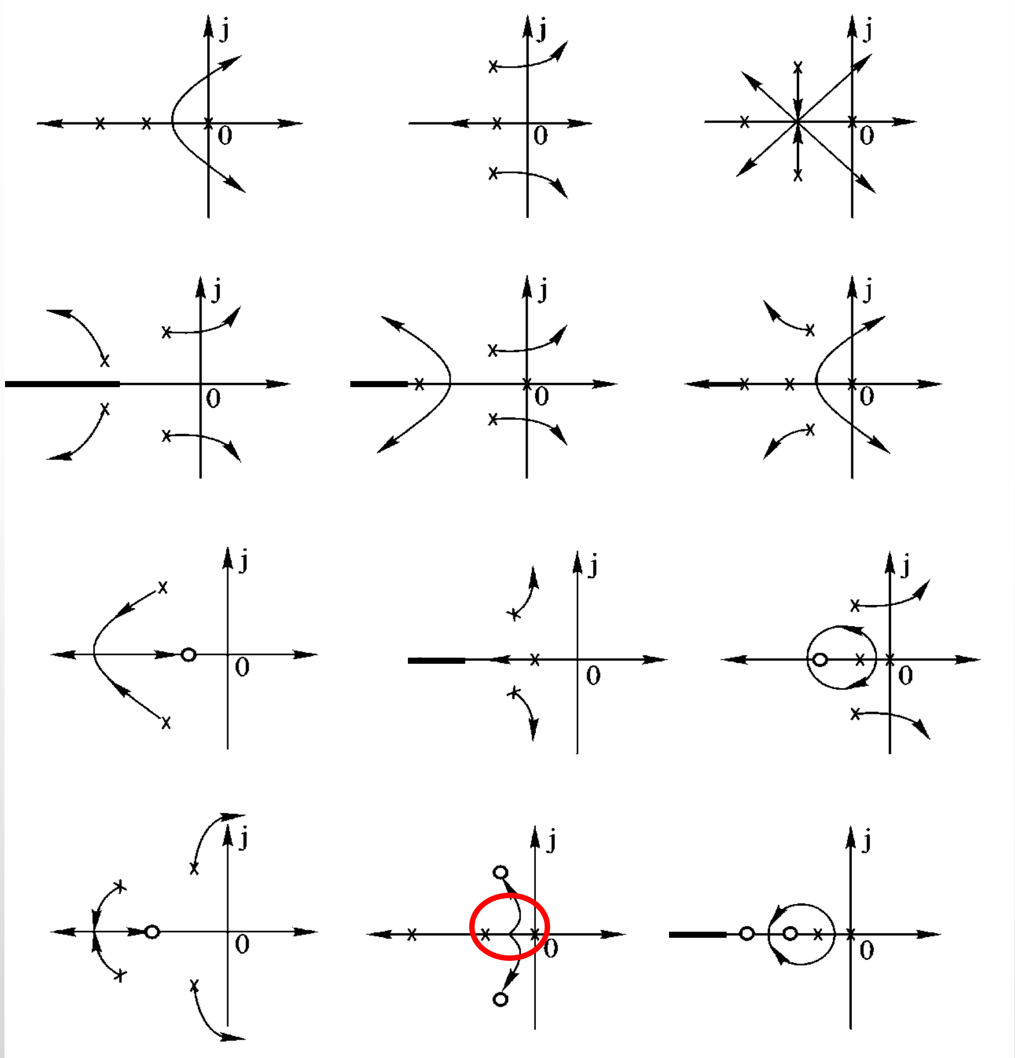
$$G(s)=\frac{K^*(s+4)}{s(s+2)}$$

绘其概略根轨迹。根轨迹满足根之和不变吗?



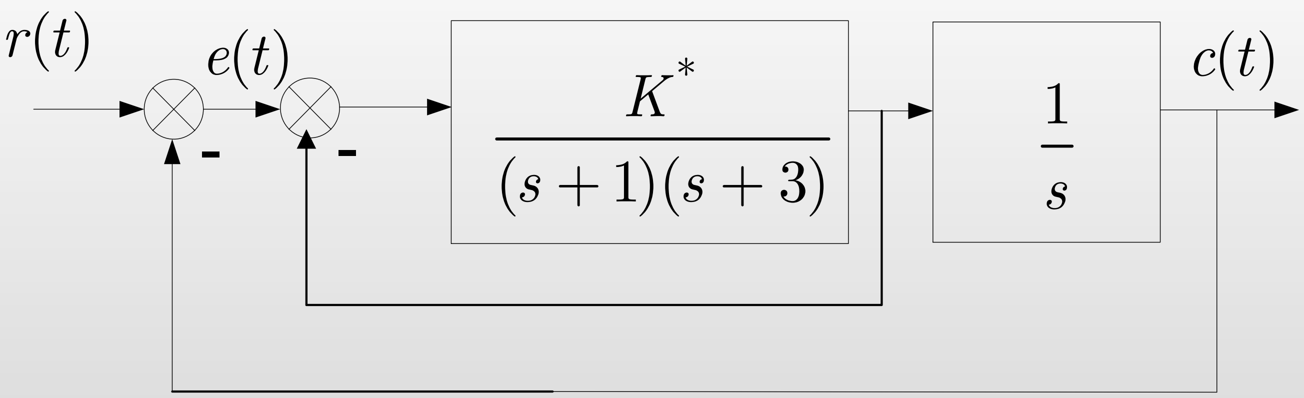
4-2 绘制根轨迹的基本法则

常见闭环系统根轨迹图



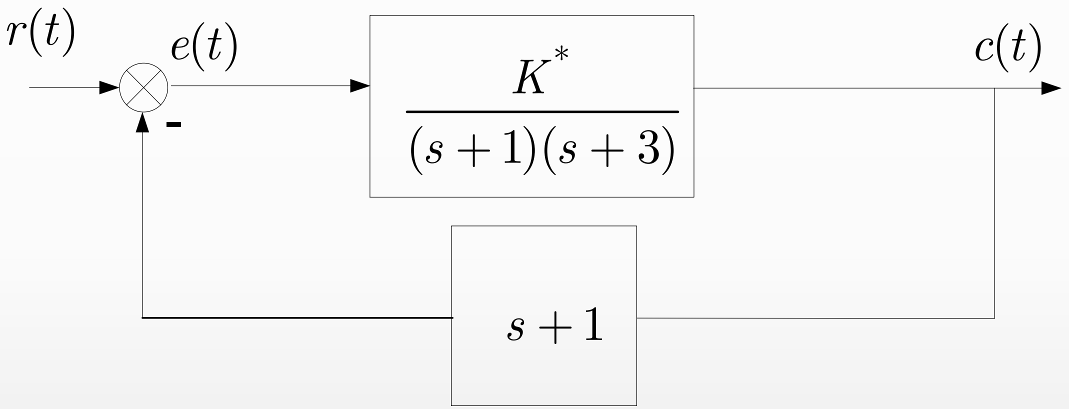
4-2 绘制根轨迹的基本法则

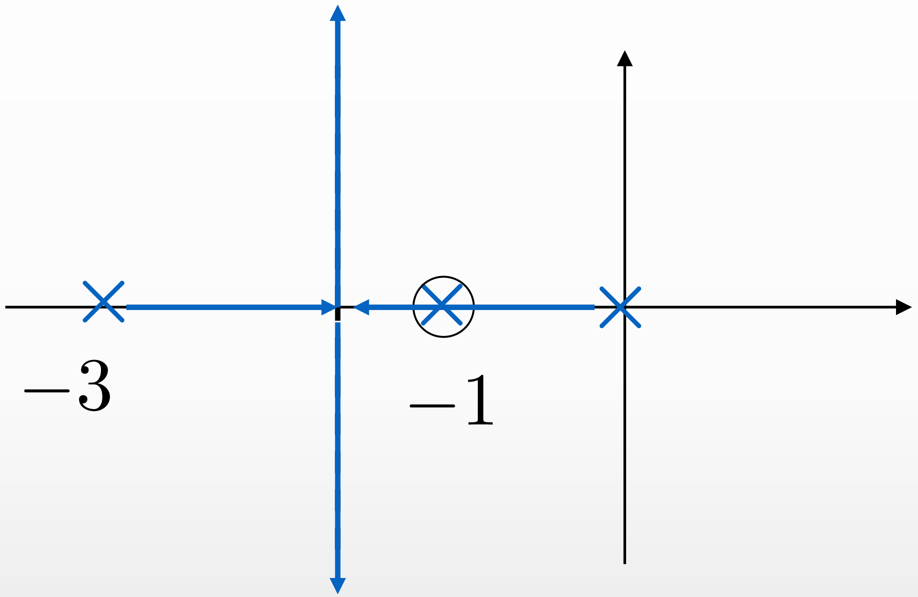
- ***G(s)*的极点与*H(s)*的零点对消问题**
  - 若***G(s)***的极点与***H(s)***的零点相同，将产生零极点对消，使系统的阶数降低。
  - 考虑如下系统：



4-2 绘制根轨迹的基本法则

- 可变换成如下形式：





因此， $$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+1)}{s(s+1)(s+3)}$$

正确的闭环根轨迹： $$\sigma_a=\frac{-1-3+1}{2}=-1.5$$ $$\varphi_a=180^\circ\times\frac{2k+1}{2}=\begin{cases}90^\circ & (k=0)\\ -90^\circ & (k=-1)\end{cases}$$