Lyapunov 再设计与非线性阻尼

19.1 Lyapunov 再设计

考虑系统

$$\dot{x} = f(t,x) + G(t,x)\left[u + \delta(t,x,u)\right] \qquad (19.1)$$

其中，$x \in R^n$ 是状态，$u \in R^p$ 是控制输入，f, G 和 δ 是 $(t,x,u) \in [0,\infty) \times D \times R^p$ 的函数，其中 $D \subset R^n$ 是包含原点的

定义域。假设 f,G 和 δ 对 t 是分段连续的，对 x 和 u 是局部 Lipschitz 的，函数 f 和 G 明确已知，而函数 δ 是包含各种不确定项的未知函数,这些不确定项是由于模型简化或参数不确定等因素造成的。

系统（19.1）的标称模型取为

$$\dot{x} = f(t,x) + G(t,x)u \tag{19.2}$$

假设已设计出反馈控制律 $u = \psi(t,x)$，使标称闭环系

统

$$\dot{x} = f(t,x) + G(t,x)\psi(t,x) \qquad (19.3)$$

的原点一致渐近稳定，进一步假设式（19.3）的 Lyapunov 函数已知，即有一个连续可微函数 $V(t,x)$，对于所有 $(t,x) \in [0,\infty) \times D$，满足不等式

$$\alpha_1\left(\|x\|\right) \le V(t,x) \le \alpha_2\left(\|x\|\right) \qquad (19.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\left[f(t,x) + G(t,x)\psi(t,x)\right] \le -\alpha_3\left(\|x\|\right) \qquad (19.5)$$

其中α_1,α_2和α_3是κ类函数。

假设当$u=\psi(t,x)+v$时，不确定项δ满足不等式

$$\|\delta(t,x,\psi(t,x)+v)\|\le\rho(t,x)+\kappa_0\|v\|,\ 0\le\kappa_0<1 \quad (19.6)$$

其中$\rho:[0,\infty)\times D\to R$是已知的非负连续函数。

关于不确定项δ，式（19.6）的估计是惟一已知的信息,函数ρ是不确定项的大小,需要强调的是ρ不必很小,只要已知即可，$0\le\kappa_0<1$是限制性条件。

控制器设计目标：在 Lyapunov 函数V 以及式（19.6）中的函数ρ和常数κ_0已知的情况下，设计一个附加的反馈控制v，使总的控制$u=\psi(t,x)+v$能够在存在不确定项$\delta(\cdot)$时稳定系统（19.1）。其中v的设计称为 *Lyapunov 再设计*。

将控制律$u=\psi(t,x)+v$作用于系统（19.1）可得闭环系统为

$$\dot{x} = f(t,x) + G(t,x)\psi(t,x) + G(t,x)\left[v + \delta\left(t,x,\psi(t,x)+v\right)\right] \tag{19.7}$$

系统（19.7）可以看做标称闭环系统（19.2）的扰动系统。计算$V(t,x)$沿式（19.7）轨线的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(f + G\psi) + \frac{\partial V}{\partial x}G(v+\delta) \\ &\le -\alpha_3\left(\|x\|\right) + \frac{\partial V}{\partial x}G(v+\delta)\end{aligned}$$

设 $w^T = \left[\partial V / \partial x\right]G$，上面的不等式可改写为

$$\dot{V} \le -\alpha_3\left(\|x\|\right) + w^T v + w^T \delta$$

式中，右边第一项源于标称闭环系统，右边第二项和第三项分别表示控制 v 和不确定项 δ 对 $\dot{V}$ 的影响。注意到上式右端出现的 δ 恰好与 v 出现在同一处，因而有可能通过选择 v 消除 δ 对 $\dot{V}$ 的（不稳定）影响。现在我们给出两种选择 v 的方法，均可使得 $w^T v + w^T \delta \le 0$ 成立。

以下的推导中需要用到一个线性代数的结论：

$$|a\cdot b|\le \|a\|_p \|b\|_q ，\quad p>0, q>0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 。$$

假设 $\delta\left(t,x,\psi(t,x)+v\right)$ **满足不等式：**

$$\begin{aligned}&\|\delta(t,x,\psi(t,x)+v)\|_2 \le \rho(t,x)+\kappa_0 \|v\|_2 ,\\ &0\le \kappa_0 <1\end{aligned} \qquad (19.8)$$

则有：

$$\begin{aligned} w^T v + w^T \delta &\le w^T v + \|w\|_2 \|\delta\|_2 \\ &\le w^T v + \|w\|_2 \left[\rho(t,x) + \kappa_0 \|v\|_2 \right] \end{aligned}$$

取

$$v = -\eta(t,x) \cdot \frac{w}{\|w\|_2} \tag{19.9}$$

其中η**为非负函数，由此得到**

$$\begin{aligned} w^T v + w^T \delta &\le -\eta \|w\|_2 + \rho \|w\|_2 + \kappa_0 \eta \|w\|_2 \\ &= -\eta(1-\kappa_0)\|w\|_2 + \rho \|w\|_2 \end{aligned}$$

对于所有 $(t,x)\in[0,\infty)\times D$，选择 $\eta(t,x)\geq\rho(t,x)/(1-\kappa_0)$，得

$$w^T v+w^T\delta\leq-\rho\|w\|_2+\rho\|w\|_2=0$$

因此，对于控制律（19.9），$V(t,x)$ 沿闭环系统轨线的导数负定。

另一种方法是假设式 $\delta(t,x,\psi(t,x)+v)$ 的无穷范数满足

$$\left\| \delta(t,x,\psi(t,x)+v) \right\|_{\infty} \le \rho(t,x) + \kappa_0 \left\| v \right\|_{\infty}, \qquad 0 \le \kappa_0 < 1$$

则有

$$\begin{aligned} w^T v + w^T \delta &\le w^T v + \left\| w \right\|_1 \left\| \delta \right\|_{\infty} \\ &\le w^T v + \left\| w \right\|_1 \left[\rho(t,x) + \kappa_0 \left\| v \right\|_{\infty} \right] \end{aligned}$$

选择

$$v = -\eta(t,x)\,\mathrm{sgn}(w) \qquad (19.10)$$

其中对于所有 $(t,x) \in [0,\infty) \times D, \quad \eta(t,x) \ge \rho(t,x)/(1-\kappa_0)$，

$\mathrm{sgn}(w)$ 是 p 维向量，其第 i 个元素为 $\mathrm{sgn}(w_i)$，则

$$
\begin{aligned}
w^T v + w^T \delta &\le -\eta \|w\|_1 + \rho \|w\|_1 + \kappa_0 \eta \|w\|_1 \\
&= -\eta(1-\kappa_0)\|w\|_1 + \rho \|w\|_1 \\
&\le -\rho \|w\|_1 + \rho \|w\|_1 = 0
\end{aligned}
$$

因此 $V(t,x)$ 沿闭环系统轨线的导数是负定的。注意所给出的两种控制律对于单输入系统（$p=1$）是相同的。

依据以上讨论，可以得到以下结论：

定理 19.1 所设计的控制律

$$u=\psi(t,x)+v, v=-\eta(t,x)\cdot\frac{w}{\|w\|_2},$$

可以保证闭环系统渐近稳定。

控制律的连续化：

可以看出，所设计的控制律（19.8）和（19.9）都是状态 x 的不连续函数，这种不连续会引发一些理论及实际中的问题，理论上必须改变控制律以避免被零除，此外由于反馈函数对 x 不是局部 Lipschitz 的，因此还必须更

仔细地检验解的存在性和惟一性。实际情况下，这种不连续的控制器会引起抖动现象，即由于切换器件的非理想性或运算延迟，控制会在切换面上出现快速的波动。为解决此问题，我们用一个连续控制律去逼近不连续控制律，这种逼近的推导过程对上面两种控制律是类似的。因此，我们只给出对第一种控制律的连续逼近，对第二种控制律连续逼近的推导参见习题 14.21 和习题 14.22。

考虑反馈控制律

$$v=\begin{cases}-\eta(t,x)(w/\|w\|_2), & \eta(t,x)\|w\|_2\ge\varepsilon\\ -\eta^2(t,x)(w/\varepsilon), & \eta(t,x)\|w\|_2<\varepsilon\end{cases} \tag{19.11}$$

只要$\eta(t,x)\|w\|_2\ge\varepsilon$，则$V$沿闭环系统轨线的导数就是负定的。因此只需检验$\eta(t,x)\|w\|_2<\varepsilon$时的$\dot{V}$。此时

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &\le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right) + w^T\left[-\eta^2 \cdot \frac{w}{\varepsilon} + \delta\right] = -\alpha_3\left(\|x\|_2\right) - \frac{\eta^2}{\varepsilon}\|w\|_2^{\ 2} + w^T\delta \\
&\le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right) - \frac{\eta^2}{\varepsilon}\|w\|_2^{\ 2} + \|w\|_2\|\delta\|_2 \\
&\le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right) - \frac{\eta^2}{\varepsilon}\|w\|_2^{\ 2} + \|w\|_2\left(\rho + k_0\|v\|_2\right) \\
&= -\alpha_3\left(\|x\|_2\right) - \frac{\eta^2}{\varepsilon}\|w\|_2^{\ 2} + \rho\|w\|_2 + \kappa_0\|w\|_2\|v\|_2 \\
&\le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right) - \frac{\eta^2}{\varepsilon}\|w\|_2^{\ 2} + \rho\|w\|_2 + \frac{\kappa_0\eta^2}{\varepsilon}\|w\|_2^{\ 2} \\
&\le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right) + (1-\kappa_0)\left(-\frac{\eta^2}{\varepsilon}\|w\|_2^{\ 2} + \eta\|w\|_2\right)
\end{aligned}
$$

其中 $-\dfrac{\eta^2}{\varepsilon}\|w\|_2^{\;2}+\eta\|w\|_2$ **一项在** $\eta\|w\|_2=\varepsilon/2$ **处有最大值**

$\varepsilon/4$**，因此只要** $\eta(t,x)\|w\|_2<\varepsilon$**，就有**

$$\dot V\le -\alpha_3(\|x\|_2)+\frac{\varepsilon(1-\kappa_0)}{4}$$

另一方面，当 $\eta(t,x)\|w\|_2\ge\varepsilon$ **时，**$\dot V$ **满足**

$$\dot V\le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right)\le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right)+\frac{\varepsilon(1-\kappa_0)}{4}$$

这样，无论 $\eta(t,x)\|w\|_2$ 为何值，不等式

$$\dot{V} \le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right) + \frac{\varepsilon(1-\kappa_0)}{4}$$

都成立。

由此可以导出：

$$\begin{aligned}\dot{V} &\le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right)/2 - \alpha_3\left(\|x\|_2\right)/2 + \frac{\varepsilon(1-\kappa_0)}{4} \\ &\le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right)/2, \qquad \alpha_3^{-1}\left(\frac{\varepsilon(1-\kappa_0)}{2}\right) \le \|x\|_2 \le r\end{aligned}$$

其中 $r>0$ **且使得** $B_r \subset D$ **，选择** $\varepsilon < 2\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))/(1-\kappa_0)$**，则有**

$$\mu = \alpha_3^{-1}(\varepsilon(1-\kappa_0)/2) < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))\text{，}$$

从而

$$\dot{V} \le -\frac{1}{2}\alpha_3\left(\|x\|_2\right), \qquad \forall \mu \le \|x\|_2 < r$$

运用教材中定理 4.18 可以推出下面的定理，该定理说明闭环系统的解是一致毕竟有界的，其最终边界是ε**的**

κ类函数。

定理 19.2 考虑系统（19.1），设$D \subset R^n$是包含原点的定义域，且$B_r = \{\|x\|_2 \le r\} \subset D$，$\psi(t,x)$是标称系统（19.2）的稳定反馈控制律，其 Lyapunov 函数$V(t,x)$在 2-范数下对于所有$t \ge 0$和$x \in D$满足式（19.3）和式（19.4），该系统还具有κ类函数α_1，α_2和α_3。假设不确定项δ对于所有$t \ge 0$和$x \in D$，在 2-范数下满足式（19.8）。设v由式

（19.11）给出，并选择 $\varepsilon < 2\alpha_3\left(\alpha_2^{-1}\left(\alpha_1(r)\right)\right)/\left(1-\kappa_0\right)$**，则对于任意** $\|x(t_0)\|_2 < \alpha_2^{-1}\left(\alpha_1(r)\right)$**，总存在一个有限时间** t_1**，使闭环系统的解满足**

$$\begin{aligned} &\|x(t)\|_2 \le \beta\left(\|x(t_0)\|_2, t-t_0\right), \forall t_0 \le t < t_1, \\ &\|x(t)\|_2 \le b(\varepsilon), \forall t \ge t_1 \end{aligned} \qquad \textbf{(19.12)}$$

其中，β **为** κl **类函数，**b **为** κ **类函数，其定义为**

$b(\varepsilon) = \alpha_1^{-1}\left(\alpha_2(\mu)\right) = \alpha_1^{-1}\left(\alpha_2\left(\alpha_3^{-1}\left(\varepsilon\left(1-\kappa_0\right)/2\right)\right)\right)$。

如果所有假设都全局成立，且 α_1 属于 κ_∞ 类函数，则式 (19.12)和对任何初态 $x(t_0)$ 都成立。

通常，由(11)给出的连续型 Lyapunov 再设计不能保证原点的渐近稳定，但它能保证解一致毕竟有界。由于最终边界 $b(\varepsilon)$ 是 ε 的 κ 类函数，因此可通过选择足够小的 ε，使 $b(\varepsilon)$ 任意小。在极限情况下，当 $\varepsilon \to 0$ 时，可恢复不连续控制器的性能。注意，从分析角度讲，并不要求 ε 非常

小，分析上对ε的限制只是$\varepsilon < 2\alpha_3\left(\alpha_2^{-1}\left(\alpha_1(r)\right)\right)/\left(1-k_0\right)$，当假设全局成立且$\alpha_i\left(i=1,2,3\right)$是$\kappa_\infty$类函数时，这一要求对于任意$\varepsilon$都满足。当然从实践观点出发，希望$\varepsilon$尽可能小，因为我们想要把系统状态限定在原点附近尽可能小的邻域内。

在分析中寻求尽可能小的ε，可当不确定项δ在原点为零时，得到更明显的结果。假设存在一个球$B_a=\left\{x:\|x\|_2 \le a\right\}, a \le r$，使得对于所有$x \in B_a$，下列不等

式成立：

$$\alpha_3\left(\|x\|_2\right) \geq \phi^2(x) \tag{19.13}$$

$$\eta(t, x) \geq \eta_0 > 0 \tag{19.14}$$

$$\rho(t, x) \leq \rho_1 \phi(x) \tag{19.15}$$

其中，$\phi: R^n \to R$ 是 x 的正定函数。选择 $\varepsilon < b^{-1}(a)$，以保证闭环系统的轨线在有限时间内限定在球 B_a 内。当

$\eta(t,x)\|w\|_2 < \varepsilon$ **时，导数** $\dot{V}$ **满足**

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &\le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right) - \frac{\eta^2\left(1-k_0\right)}{\varepsilon}\|w\|_2^2 + \rho\|w\|_2 \\
&\le -\frac{1}{2}\alpha_3\left(\|x\|_2\right) - \frac{1}{2}\phi^2(x) - \frac{\eta_0^2\left(1-k_0\right)}{\varepsilon}\|w\|_2^2 + \rho_1\phi(x)\|w\|_2 \\
&\le -\frac{1}{2}\alpha_3\left(\|x\|_2\right) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\phi(x)\\ \|w\|_2\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & -\rho_1\\ -\rho_1 & 2\eta_0^2\left(1-k_0\right)/\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi(x)\\ \|w\|_2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

如果 $\varepsilon < 2\eta_0^2(1-k_0)/\rho_1^2$**，该二次型矩阵是正定的。因此，选择** $\varepsilon < 2\eta_0^2(1-k_0)/\rho_1^2$ **，有** $\dot{V} \le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right)/2$ **。又由于当**

$\eta(t,x)\|w\|_2 > \varepsilon$ 时，有 $\dot{V} \le -\alpha_3(\|x\|_2) \le -\alpha_3(\|x\|_2)/2$。故可推出

$$\dot{V} \le -\frac{1}{2}\alpha_3(\|x\|_2)$$

这表明原点是一致渐近稳定的。

由以上分析可以得到以下结论：

定理 19.3 如果条件（19.13）-（19.15）成立，则连续

化控制律（19.11）可以保证闭环系统渐近稳定。

例 19.1 考虑当 $\delta_1 = \pi$ 时的单摆方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= a\sin x_1 - bx_2 + cu\end{aligned}$$

我们想要在开环平衡点 $x = 0$ 处稳定单摆。系统是可反馈线性化的，标称稳定反馈控制可取为

$$\psi(x) = -\left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}}\right)\sin x_1 - \left(\frac{1}{\hat{c}}\right)(k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

其中$\hat{a}$和$\hat{c}$分别是a和c的标称值，且选择k_1和k_2，使

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -(k_2 + b) \end{bmatrix}$$

为 Hurwitz 矩阵。对于$u = \psi(x) + v$，则可以得到闭环系统为：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= a\sin x_1 - bx_2 + cu \\
&= \hat{a}\sin x_1 + \bar{a}\sin x_1 - bx_2 + \hat{c}u + \bar{c}u \\
&= \hat{a}\sin x_1 + \bar{a}\sin x_1 - bx_2 + \hat{c}\left(\psi(x) + v\right) + \bar{c}\left(\psi(x) + v\right) \\
&= \hat{a}\sin x_1 + \bar{a}\sin x_1 - bx_2 + \hat{c}\left(-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}}\right)\sin x_1 - \left(\frac{1}{\hat{c}}\right)\left(k_1x_1 + k_2x_2\right) + v\right) \\
&\quad +\bar{c}\left(\psi(x) + v\right) \\
&= \bar{a}\sin x_1 - k_1x_1 - (k_2 + b)x_2 + \hat{c}v + \bar{c}\left(\psi(x) + v\right) \\
&= -k_1x_1 - (k_2 + b)x_2 + \hat{c}\left(v + \frac{\bar{a}\sin x_1}{\hat{c}} + \frac{\bar{c}\psi(x)}{\hat{c}} + \frac{\bar{c}}{\hat{c}}v\right) \\
&= -k_1x_1 - (k_2 + b)x_2 + \hat{c}\left(v + \delta\right)
\end{aligned}
$$

其中不确定项 δ 由下式给出：

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\bar{a}\sin x_1}{\hat{c}} + \frac{\bar{c}\psi(x)}{\hat{c}} + \frac{\bar{c}}{\hat{c}}v \\
&= \frac{\bar{a}\sin x_1}{\hat{c}} + \frac{\bar{c}\left(-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}}\right)\sin x_1 - \left(\frac{1}{\hat{c}}\right)\left(k_1 x_1 + k_2 x_2\right)\right)}{\hat{c}} + \frac{\bar{c}}{\hat{c}}v \\
&= \frac{1}{\hat{c}}\left(\frac{1}{\hat{c}}\left(\hat{c}\bar{a} - \bar{c}\hat{a}\right)\sin x_1 - \frac{\bar{c}}{\hat{c}}\left(k_1 x_1 + k_2 x_2\right)\right) + \frac{\bar{c}}{\hat{c}}v \\
&= \frac{1}{\hat{c}}\left[\left(\frac{a\hat{c} - \hat{a}c}{\hat{c}}\right)\sin x_1 - \left(\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right)\left(k_1 x_1 + k_2 x_2\right)\right] + \left(\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right)v
\end{aligned}$$

因此

$$\left|\delta\right| \le \rho_1 \left\|x\right\|_2 + \kappa_0 \left|v\right|, \quad \forall x \in R^2, \quad \forall v \in R$$

其中

$$\kappa_0 \geq \left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right|, \rho_1 = \frac{k}{\hat{c}},$$

$$k \geq \left|\frac{a\hat{c}-\hat{a}c}{\hat{c}}\right| + \left|\frac{c-\hat{c}}{\hat{c}}\right|\sqrt{k_1^2+k_2^2}$$

假设$\kappa_0 < 1$，则可选取控制律使得原点全局渐近稳定，

具体推导如下：

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -k_1 x_1 - (k_2+b)x_2 + \hat{c}\left(v+\delta\right)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \bar{A}x + \hat{c}(v+\delta)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -k_1 & -k_2 - b\end{bmatrix}$$

$$P\bar{A} + \bar{A}^T P = -I \Rightarrow P = \begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{bmatrix} > 0\text{，}\quad V = x^T P x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\|x\|_2^2 + 2\hat{c}(v+\delta)\left(p_2 x_1 + p_3 x_2\right)\\ &= -\|x\|_2^2 + w(v+\delta)\end{aligned}$$

其中 $w = 2\hat{c}\left(p_2 x_1 + p_3 x_2\right)$。

选取附加控制输入：

$$v = \begin{cases} -\eta\,\mathrm{sgn}(w), & \eta|w| \ge \varepsilon; \\ -\eta^2 w / \varepsilon, & \eta|w| < \varepsilon \end{cases}$$

其中 $\eta = \eta_0 + \dfrac{\rho_1 \|x\|_2}{1-k_0}$，$\eta_0 > 0$。

当 $\eta|w| \ge \varepsilon$ 时，可以证明 $w(v+\delta) \le 0$，因此 $\dot{V} = -\|x\|_2^2$。

当 $\eta|w| < \varepsilon$ 时且 ε 充分小时，可以证明 $-\dfrac{1}{2}\|x\|_2^2 + w(v+\delta) \le 0$，因此 $\dot{V} = -\dfrac{1}{2}\|x\|_2^2$。

从而对于所有情况有： $\dot{V}=-\frac{1}{2}\|x\|_2^2$**，因此闭环系统全局渐近稳定。相应的控制律为：**

$$u=-\left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}}\right)\sin x_1-\left(\frac{1}{\hat{c}}\right)\left(k_1x_1+k_2x_2\right)+v,$$

$$v=\begin{cases}-\eta\operatorname{sgn}(w), & \eta|w|\geq\varepsilon\\ -\eta^2w/\varepsilon, & \eta|w|<\varepsilon\end{cases},\eta=\eta_0+\frac{\rho_1\|x\|_2}{1-k_0},\eta_0>0$$

例 19.2 再次考虑上例中的单摆方程，这次假设单摆的悬挂点是时变、有界且水平加速度的。为了简化问题，忽略

磨擦$(b=0)$，则状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a\sin x_1 + cu + h(t)\cos x_1\end{aligned}$$

其中$h(t)$是悬挂点的（归一化）水平加速度，对于所有$t\geq 0$，有$|h(t)|\leq H$。标称模型和标称稳定控制律可按上例选取$(b=0)$，不确定项δ满足

$$|\delta| \le \rho_1 \|x\|_2 + \kappa_0 |v| + H/\hat{c}$$

其中 ρ_1 和 κ_0 与上例相同，而 $\rho(x) = \rho_1 \|x\|_2 + H/\hat{c}$，当 $x = 0$ 时不为零。在控制律中 η 的选择必须满足

$$\eta \ge \left(\rho_1 \|x\|_2 + H/\hat{c}\right) / \left(1 - \kappa_0\right)$$

选取：

$$\eta(x) = \eta_0 + \rho_1 \|x\|_2 / (1-\kappa_0), \quad \eta_0 \geq H/\hat{c}(1-\kappa_0)$$

因 $\rho(0) \neq 0$，只能由定理 19.2 得出结论，即闭环系统的解是一致毕竟有界的，其最终边界正比于 $\sqrt{\varepsilon}$。

19.2 非线性阻尼

考虑以下非线性系统

$$\dot{x} = f(t,x) + G(t,x)\left(u + \Gamma(t,x)\delta_0(t,x,u)\right) \qquad (19.16)$$

与前面一样，仍设 f ，G 已知，$\delta_0(t,x,u)$是不确定项，函数$\Gamma(t,x)$已知。假设对所有$(t,x,u)\in[0,\infty)\times R^n\times R^n$，$f$ ，G ，Γ 和 δ_0 对 t 是分段连续的，对 x 和 u 都是局部 Lipschitz 的，同时假设δ_0对所有(t,x,u)是一致有界的。设$\psi(t,x)$是一个标称稳定反馈控制律，使标称闭环系统 $\dot{x}=f(t,x)+G(t,x)\psi(t,x)$的原点全局一致渐近稳定，并且

存在一个已知 Lyapunov 函数$V(t,x)$，具有κ_∞类函数α_1，α_2和α_3对于所有$(t,x)\in[0,\infty)\times R^n$满足式

$$\begin{aligned} &\alpha_1\left(\|x\|\right)\le V(t,x)\le\alpha_2\left(\|x\|\right), \\ &\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\left(f(t,x)+G(t,x)\psi(t,x)\right)\le-\alpha_3\left(\|x\|\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(19.17)}$$

如果$\left\|\delta_0(t,x,u)\right\|$的上界已知，就可以像前面那样设计控制分量$v$，保证全局鲁棒稳定性。本节将证明即使$\delta_0$的上界未知，仍可设计出控制分量$v$，保证闭环系统轨线的

有界性。为此，设$u=\psi(t,x)+v$，V沿闭环系统轨线的导数满足：

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}(f+G\psi)+\frac{\partial V}{\partial x}G(v+\Gamma\delta_0) \\ &\le -\alpha_3(\|x\|)+w^T(v+\Gamma\delta_0)\end{aligned} \tag{19.18}$$

其中$w^T=[\partial V/\partial x]G$。取

$$v=-kw\|\Gamma(t,x)\|_2^2,k>0 \tag{19.19}$$

可得

$$\dot{V} \le -\alpha_3\left(\|x\|\right) - k\|w\|_2^2\|\Gamma\|_2^2 + \|w\|_2\|\Gamma\|_2 k_0$$

其中 k_0 是 $\|\delta_0\|$ 的（未知）上界。式中的

$$-k\|w\|_2^2\|\Gamma\|_2^2 + \|w\|_2\|\Gamma\|_2 k_0$$

一项当 $\|w\|_2\|\Gamma\|_2 = k_0/2k$ 时取最大值 $k_0^2/4k$，因此有

$$\dot{V} \le -\alpha_3\left(\|x\|_2\right) + \frac{k_0^2}{4k} \tag{19.20}$$

由 于 α_3 为 κ_∞ 类 函 数 ， 因 此 $\dot{V}$ 在 某 一 球 外

$\left(\|x\|_2 > r \geq \alpha_3^{-1}\left(\frac{k_0^2}{4k}\right)\right)$总是负的，根据定理 4.18，对任意初始状态 $x(t_0)$，闭环系统的解全局一致毕竟有界，且最终界为$1/k$的κ-类函数，可以通过增大k而使得最终界小于任意给定的正数。

Lyapunov 再设计控制律(19.19)称为非线性阻尼。

例 2.1 考虑标量系统

$$\dot{x} = x^2 + u + x\delta_0(t)$$

其中 $\delta_0(t)$ 是 t 的有界函数，即存在（未知）$k_0 > 0$ 使得 $|\delta_0(t)| \le k_0$。对于标称稳定控制 $\psi(x) = -x^2 - x$，Lyapunov 函数 $V(x) = x^2$ 在 $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = \alpha_3(r) = r^2$ 时，全局满足式 (14.33) 和式 (14.34)。非线性阻尼分量 (14.48) 由 $v = -2kx^3 (k > 0)$ 给出，则无论有界扰动 δ_0 多大，由于存在非线性阻尼项 $-2kx^3$，闭环系统

$$\dot{x} = -x - 2kx^3 + x\delta_0\left(t\right)$$

的解全局毕竟一致有界，最终界为$|x| \le \sqrt{\frac{k_0}{2k}}$。

习题 1. 考虑非线性系统 $\dot{x} = f(x) + g(x)\left(v + \delta(x,v)\right)$，其中 $x \in R^n, f(x) \in R^n, g(x) \in R^{n\times m}, \delta(x,v) \in R^m, v \in R^m$，$\|\delta(x,v)\|_2 \le \rho(x) + k_0\|v\|_2, 0 \le k_0 < 1$，正定函数

$V(x), \alpha_3(x), \phi(x)$满足

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \le -\alpha_3(x), \alpha_3(x) \ge \phi^2(x)$$

此外 $\rho(x) \le \rho_1 \phi(x)$， ρ_1 为正常数。记 $w = \left(\frac{\partial V}{\partial x} g \right)^T$ 。试证明：

当 k 足够大时，线性反馈控制律 $v = -kw$ 可以使得闭环系统的原点渐近稳定。

习题 2. 考虑非线性系统 $\dot{x} = f(x) + g(x)\big(u + \delta(t, x, u)\big)$ 的原点

稳定问题，其中 $x \in R^n, f(x) \in R^n$，$g(x) \in R^{n\times m}$，$\delta(t,x,u) \in R^m$，$u \in R^m$。已知标称系统 $\dot{x} = f(x) + g(x)\psi(x)$ 渐近稳定，且存在正定函数 $V(x)$ 使得 $\frac{\partial V(x)}{\partial x}\left(f(x)+g(x)\psi(x)\right) \le -\alpha_3(x)$，$\alpha_3(x)$ 为正定函数。试证明：如果 $\left\|\psi(x)-\delta(t,x,u)\right\|_2 \le \rho(x) + k_0\left\|u\right\|_2, 0 \le k_0 < 1$，则不采用控制律 $u = \psi(x) + v$，而直接采用

$u = v = -\frac{\eta w}{\|w\|_2}, w^T = \frac{\partial V}{\partial x} g, \eta \ge \frac{\rho(x)}{1-k_0}$ 也可以实现非线性系统

$\dot{x} = f(x) + g(x)\left(u + \delta(t,x,u)\right)$ 原点的稳定。

习题 3：考虑非线性系统 $\dot{x} = u + \delta(t,x)$，其中

$\delta(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$，$(a_0, a_1, a_2)$ 为未知常数。试利用非线性阻尼方法设计连续光滑控制律使得闭环系统的状态有界且毕竟一致有界，并求出最终界的大小。