作业2.3-2.4 习题答案

1. R^3中的向量$\alpha_1=(3,1,0),\alpha_2=(6,3,2),\alpha_3=(1,3,5)$ 组成向量组S.
(1) 证明S是R^3的基.
(2) 求向量$\beta=(2,-1,2)$在基S下的坐标.
(3) 求自然基向量$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 在基S下的坐标.

解: (1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ S的秩为3,所以为基

(2)设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$ 则有

$$\begin{cases} 3x_1+6x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+3x_3=-1 \\ 2x_2+5x_3=2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -76 \\ 0 & 1 & 0 & 41 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{pmatrix}$$

坐标$(-76,41,-16)$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 28 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -15 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

所以$\varepsilon_1:(-9,5,-2);\varepsilon_2:(28,-15,6);\varepsilon_3:(-15,8,-3);$

2. 证明向量$\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(0,1,-1,-1),\alpha_3=(0,0,1,-1),\alpha_4=(0,0,0,1)$ 组成R^4的一组基, 并求这组基到自然基的过渡矩阵P.

解: 是R^4的一组基显然.因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所以过渡矩阵$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. 给定R^4中的向量$\varepsilon_1=(1,0,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1,0)$, $\varepsilon_4=(0,0,0,1)$, $\eta_1=(2,1,-1,1)$, $\eta_2=(0,3,1,0)$, $\eta_3=(5,3,2,1)$, $\eta_4=(6,6,1,3)$, 证明向量组$S=\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\}$ 是R^4的一组基，并求一非零向

量$\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, 使其在基S和自然基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 下具有相同的坐标.

解: 容易验证向量组$S=\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\}$组成的矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$秩为4.所以$S=\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\}$ 是R^4的一组基
设$\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4=x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3+x_4\eta_4$
有$x_1(\eta_1-\varepsilon_1)+x_2(\eta_2-\varepsilon_2)+x_3(\eta_3-\varepsilon_3)+x_4(\eta_4-\varepsilon_4)=0$
因为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 所以$\xi=(t,t,t,-t), t\neq 0$.

4. 求由以下每个小题中的向量生成的子空间的维数,并求出一组基.
(1) $\alpha_1=(6,4,1,-1,-2), \alpha_2=(1,0,2,3,4), \alpha_3=(1,4,-9,-16,22), \alpha_4=(7,1,0,-1,3)$;
(2) $\alpha_1=(1,-1,2,4), \alpha_2=(0,3,1,2), \alpha_3=(3,0,7,14), \alpha_4=(1,-1,2,0), \alpha_5=(2,1,5,6)$.

$$\textbf{解: } (1)(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & 16 & -1 \\ -2 & 4 & 22 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & 128 & -63 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以$dim(V)=4, (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 即为一组基.

$$(2)(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以$dim(V)=3, (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$即为一组基;或者$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5), (\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)$ 都可以.

5. 求下列每个齐次线性方程组的一个基础解系,并用它表示出全部解.

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0 \\ x_1-x_3-2x_4-3x_5=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5=0 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0 \\ -x_1+3x_2-5x_3+7x_4-4x_5=0 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4-6x_5=0 \end{cases}$

解: (1)由题知$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
基础解系:$\alpha_1=(1,-2,1,0,0),\alpha_2=(2,-3,0,1,0),\alpha_3=(3,-4,0,0,1)$
通解:$x=k\alpha_1+p\alpha_2+q\alpha_3$.

(2)由题知$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
基础解系:$\alpha_1=(-1,-1,1,1,0),\alpha_2=(2,2,0,0,1)$,通解:$x=k\alpha_1+p\alpha_2$.

6. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解. 求a,b的值及方程组的通解.

解: 增广矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & 1+a \end{pmatrix}$由题假设原线性方程组有三个线性无关解,故系数矩阵的秩为2,所以$a=2,b=-3$,进而得到导出组的基础解系为:$\alpha_1=(-2,1,1,0),\alpha_2=(4,-5,0,1)$, 非齐次方程组的一个特解为$\alpha_0=(2,-3,0,0)$,故方程的通解为:$x=\alpha_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.

7. 令$V=\{(a,b)|a,b\in\mathbf{R}\}$，定义加法$(a_1,b_1)\bigoplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1b_2)$；数乘$k\circ(a_1,b_1)=(ka_1,kb_1),k\in\mathbf{R}$. 问：$V$对于规定的加法"$\bigoplus$"和数乘"$\circ$"运算是否构成$\mathbf{R}$上的线性空间？若不能构成线性空间，可否对数乘运算做下修改，使V的某个子集构成一个线性空间？

证: V是全体实二元数组的集合，易知它对加法和数乘是封闭的. 下面验证是否满足八条运算性质:
(1)$(a_1,b_1)\bigoplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1b_2)=(a_2+a_1,b_1b_2)=(a_2,b_2)\bigoplus(a_1,b_1)$
(2)$[(a_1,b_1)\bigoplus(a_2,b_2)]\bigoplus(a_3,b_3)=(a_1+a_2,b_1b_2)\bigoplus(a_3,b_3)$
$=(a_1+a_2+a_3,b_1b_2b_3)=(a_1,b_1)\bigoplus[(a_2,b_2)\bigoplus(a_3,b_3)]$
(3)容易验证存在零元$(0,1)$
(4)对任意$a,b\in R$，只有当$b\neq 0$，才存在负元素$(-a,b^{-1})$使$(a,b)\bigoplus(-a,b^{-1})=(0,1)$, 所以对于规定的加法$\bigoplus$ 不满足这条运算性质.
(5)$1\circ(a_1,b_1)=(a_1,b_1)$
(6)$\lambda\circ[\mu\circ(a_1,b_1)]=\lambda\circ(\mu a_1,\mu b_1)=(\lambda\mu a_1,\lambda\mu b_1)=(\lambda\mu)\circ(a_1,b_1)$
(7)$(\lambda+\mu)\circ(a_1,b_1)=((\lambda+\mu)a_1,(\lambda+\mu)b_1)$
$[\lambda\circ(a_1,b_1)]\bigoplus[\mu\circ(a_1,b_1)]=(\lambda a_1,\lambda b_1)\bigoplus(\mu a_1,\mu b_1)=(\lambda a_1+\mu a_1,\lambda\mu b_1^2)$ 此式与上式不相等,故对于规定的数乘不满足这条性质。因此V对于规定的加法"$\bigoplus$"和数乘"$\circ$"运算不能构成$\mathbf{R}$上的线性空间.

可修改数乘运算为$k\circ(a_1,b_1)=(ka_1,b_1),k\in\mathbf{R}$, 此数乘满足相应的四条运算性质，因此$V-\{(a,0)|a\in\mathbf{R}\}$对原加法运算和修改后的数乘运算构成$\mathbf{R}$上的线性空间.

8. 在数域F上的线性空间V中，$a,b\in F$，$\alpha,\beta,\gamma\in V$，求证:
(1) $\alpha+\beta=\gamma\Leftrightarrow\alpha=\gamma-\beta$;
(2) $a(\alpha-\beta)=a\alpha-a\beta$; $(a+b)(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta+b\alpha+b\beta$;
(3) $(a-b)\alpha=a\alpha-b\alpha$; $(a-b)(\alpha-\beta)=a\alpha-a\beta-b\alpha+b\beta$.

证: (1)$\alpha+\beta=\gamma\Leftrightarrow\alpha+\beta+(-\beta)=\gamma+(-\beta)$
$\Leftrightarrow\alpha+0=\gamma-\beta\Leftrightarrow\alpha=\gamma-\beta$
(2)$a(\alpha-\beta)=a(\alpha+(-\beta))=a\alpha+a(-\beta)=a\alpha-a\beta$;
$(a+b)(\alpha+\beta)=(a+b)\alpha+(a+b)\beta=a\alpha+a\beta+b\alpha+b\beta$
(3)$(a-b)\alpha=a\alpha+(-b)\alpha=a\alpha-b\alpha$;
$(a-b)(\alpha-\beta)=a(\alpha-\beta)-b(\alpha-\beta)=a\alpha-a\beta-b\alpha+b\beta$.

9. (1) 复数域$\mathbf{C}$看成是实数域$\mathbf{R}$上的线性空间时，$\mathbf{C}$的维数是多少，并

找出它的一组基；(2)复数域$\mathbf{C}$看成是复数域$\mathbf{C}$上的线性空间时，$\mathbf{C}$的维数是多少，并找出它的一组基.

证: (1)$\mathbf{C}$的维数是2,一组基为$i, 1$
(2)$\mathbf{C}$的维数为1,一组基为1

10. 设V是数域F上的n维线性空间，W是V 的一个m维子空间（$m \leq n$），$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$W$的一组基，求证：它必可扩充为$V$的一组基。确切地说，必可找到$V$中$n-m$个元素$\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$，使得元素组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$构成$V$的一组基.

证: 对维数差$n-m$做归纳法,当$n-m=0$,定理显然成立,现在假定$n-m=k$时定理成立,我们考虑$n-m=k+1$的情形.
既然$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$还不是$V$ 的基,它又是线性无关的,那么在V中必定有一个向量α_{m+1}不能被$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出,把α_{m+1}添加进去,则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$必定是线性无关的,所以子空间$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$是$m+1$维的,因为$n-(m+1)=n-m-1=k$,有归纳法假设,$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$的基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$可以扩充为整个空间的基.

补 设$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是某一非齐次线性方程组的解,证明:$\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2+\cdots+\mu_t\eta_t$ 也是该非齐次线性方程组的解的充要条件是$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_t=1$.

证: 设非齐次线性方程组为$AX=\beta$,其中A为系数矩阵,$\beta \neq 0$为方程组的常数项所构成的列向量.
若$u_1+u_2+\cdots+u_t=1$,则由于$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$是$AX=\beta$的解,故
$A(u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t)=u_1(A\eta_1)+u_2(A\eta_2)+\cdots+u_t(A\eta_t)$
$=u_1\beta+u_2\beta+\cdots+u_t\beta=(u_1+u_2+\cdots+u_t)\beta=\beta, \qquad (1)$
即$u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t$也是$AX=\beta$的解.
反之,如果$u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t$也是$AX=\beta$的解,则以上的式(1)成立,从而有

$$(u_1+u_2+\cdots+u_t-1)\beta=0.$$

但因β是非齐次线性方程组的常数项构成的列向量,故$\beta \neq 0$.从而$u_1+u_2+\cdots+u_t-1=0$,因此$u_1+u_2+\cdots+u_t=1$