北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

2006-2007 学年第一学期

考试统一用答题册

题　号	一	二	三	四	五	六	加选题	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

考试课程 工科数学分析（上）

班级 ____________ **成绩** ________________

姓名 ____________ **学号** ________________

2007 年 1 月 19 日

数学分析(上)期终考试试题

一、单项选择（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 【 C 】

   A． $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续　　　　*B*． $f(x)$ 在[-1，1]上可积

   C． $f(x)$ 在[-1，1]上有连续原函数　　　　*D*． $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数连续

2． 下列命题中**不**正确的是 【 D 】

   A. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内的某个原函数是常数，则 $f(x)$ 在该区间内恒为零。

   B. 若 $f(x)$ 的某个原函数为零，则 $f(x)$ 的所有原函数必为常数。

   C. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)$ 必为连续函数。

   D. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内不是连续函数，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 一定没有原函数。

3. 设曲线 C 由参数方程 $x=a\cos^2 t,\ y=a\sin^2 t\quad (a>0,0\le t\le\dfrac{\pi}{4})$ 给出，则该曲线的弧长为 【 B 】

   A． a　　　*B.* $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$　　　*C.* $\dfrac{3}{2}\pi a$　　　*D.* π

4．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 【 D 】

   A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛　　　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 也收敛

   C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 也收敛　　　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 也收敛

5．设 $\alpha>0$ 为任意常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$ 【 C 】

   A. 发散　　　　*B.* 条件收敛

   C. 绝对收敛　　　　*D.* 收敛性与 α 有关

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-3(\sqrt[3]{1+x^2}-1)}{x^4} = -\dfrac{1}{6}$ ；

2. 反常积分 $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \arctan\sqrt{e^2-1}$，或 $\dfrac{\pi}{2}-\arcsin e^{-1}$，或者 $\arccos e^{-1}$；

3. 如果 $\int f(x)\,e^{\frac{1}{x}}\,dx=-e^{\frac{1}{x}}+C$，则 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$；

4. $\dfrac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2-x^2}dt = 1-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$；

5. 函数 $f(x)=2^x$ 在 $x=0$ 处的带 Peano 余项的 n 阶泰勒公式为

$$2^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{\ln^k 2}{k!}x^k+o(x^n)=1+\frac{\ln 2}{1!}x+\frac{\ln^2 2}{2!}x^2+\cdots+\frac{\ln^n 2}{n!}x^n+o(x^n)$$ 。

三、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1. $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

解 $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x\cdot\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})dx$ ………… 3 分

$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ …………………………………… 4 分

$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$ ……………………………………… 5 分

2. $\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

解 $I=\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\dfrac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$ …………………………………1 分

$=4\int_0^1\dfrac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+0=4\int_0^1\dfrac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx=4\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})dx$ ..4 分

$=4[1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx]=4[1-\dfrac{\pi}{4}]=4-\pi$,…………………………………5 分

3. $\int\dfrac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx$

解　$I=\int\frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^4 x}d\sin x \overset{\sin x=u}{=} \int\frac{1-2u^2+u^4}{u^4}du$ ··············. . 2 分

$=\int(u^{-4}-2u^{-2}+1)du=-\frac{1}{3}u^{-3}+2u^{-1}+u+C$ ·······················. 4 分

$=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{2}{\sin x}+\sin x+C$　；··5 分

4. 设D是由曲线 $y=\sqrt{a^2+x^2}$ $(a>0)$ 与三条直线 $x=0, x=a, y=0$ 所围成的曲边梯形，求D绕 y 轴旋转一周所生成的旋转体的体积。

解　$V=V_1+V_2=\int_0^a \pi a^2 dy+\int_a^{\sqrt{2}a}\pi[a^2-(y^2-a^2)]dy$ ·······················. 3 分

$=\pi a^3+2\pi a^2(\sqrt{2}a-a)-\int_a^{\sqrt{2}a}\pi y^2 dy$

$=\pi a^3+2\pi a^3(\sqrt{2}-1)-\frac{\pi}{3}y^3|_a^{\sqrt{2}a}$

$=(2\sqrt{2}-1)\pi a^3-\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi a^3=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi a^3$　························5 分

四、判断下列级数的敛散性（每小题 5 分，共 20 分）

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$

解　设$a_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$，显然$a_n>0$

由于$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\frac{(n!)^2}{n^n}=(1+\frac{1}{n})^n\frac{1}{n+1}\to 0$（$n\to\infty$），……3 分

即有$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$；　　于是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$收敛；………………5 分

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

解 设$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$，显然$a_n>0$，所以是正项级数；

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$，………3 分

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$收敛；…………………5 分

或者由$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{3!}\frac{1}{n^{3/2}}+o(\frac{1}{n^{3/2}})\sim\frac{1}{6}\frac{1}{n^{3/2}}$，…………………………3 分

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$收敛；……………………………..5 分

3、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n!)}{n(n+1)}$

解设$a_n=\frac{\cos(n!)}{n(n+1)}$，因为$|a_n|\le\frac{1}{n(n+1)}$，……………..2 分

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，…………………..4 分

故原级数绝对收敛。…………………………………………….5 分

4、 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3n)}{n}$

解设$a_n=\cos 3n, b_n=\frac{1}{n}$，由于$|\sum_{n=1}^{N}a_n|\le\frac{1}{|\sin\frac{3}{2}|}$，…………………2 分

$\{b_n\}$单调递减趋于 0，……………………………………………………...3 分

由狄利克雷判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3n)}{n}$收敛 。………………………….5 分

五、证明题（本题 10 分）

设$f(x)$在$[a,b]$上可导，$f'(x)$在$[a,b]$上可积，$f(a)=0$。 证明：

（1）$\forall x\in[a,b],\quad |f(x)|\le\int_a^x|f'(t)|dt$

（2）$2\int_a^b|f(x)|^2dx\le(b-a)^2\int_a^b|f'(x)|^2dx$

证明 （1）由 N-L 公式，得

$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt=\int_a^x f'(t)dt$，…………………………………. 2 分

$f'(x)$在$[a,b]$上可积,$|f'(x)|$亦在$[a,b]$上可积,且有………………4 分

$|f(x)|=|\int_a^x f'(t)dt|\le\int_a^x|f'(t)|dt$；…………………………………. 5 分

（2）$|f(x)|^2 \le [\int_a^x |f'(t)|dt]^2 = [\int_a^x 1\cdot |f'(t)|dt]^2$

$$\le (\int_a^x 1^2 \cdot dt)\ (\int_a^x |f'(t)|^2\ dt)$$

$$= (x-a)\int_a^x |f'(t)|^2\ dt \le (x-a)\int_a^b |f'(t)|^2\ dt，\cdots\cdots\cdots..8\text{ 分}$$

两边积分，得

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \le \int_a^b (x-a)dx \cdot \int_a^b |f'(x)|^2 dx = \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\int_a^b |f'(x)|^2 dx，\cdots$$

故得成立 $2\int_a^b |f(x)|^2\ dx \le (b-a)^2 \int_a^b |f'(x)|^2\ dx$ 。…………………. 10 分

六、证明题（本题 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，求证级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

证明由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，知 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，……………………………………2 分

由条件 $f''(0)$ 存在，记 $a=f''(0)$，

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=\frac{a}{2}x^2+o(x^2)$，……………………… **4 分**

$|f(\frac{1}{n})|=\frac{|a|}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{|a|}{2}\frac{1}{n^2}$，…………………………………………………6 分

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a|}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛,于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(\frac{1}{n})|$ 收敛，……………………………………………….8 分

即级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。……………………………………………………………….10 分

或考虑由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，知 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，……………………………………

由条件 $f''(0)$ 存在，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x^2}=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}\right|=\frac{|f''(0)|}{2};$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.,　　于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(\frac{1}{n})|$ 收敛，……………………………………

即级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

七、加选题（本题 10 分）

1. 设 n 为正整数，证明：$\int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx=\frac{1}{2^n(n+1)}$

2. 利用上题的结果证明：若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=1,\quad \int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0,\ k=0,1,2,\cdots,n-1,$$

则 $\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|\ge 2^n(n+1)$

证明 1 $\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n\, dx=\int_0^{\frac{1}{2}} |x-\frac{1}{2}|^n\, dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 |x-\frac{1}{2}|^n\, dx$……………..2 分

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-x)^n dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})^n dx\ =-\frac{1}{n+1}(\frac{1}{2}-x)^{n+1}\Big|_0^{1/2}+\frac{1}{n+1}(x-\frac{1}{2})^{n+1}\Big|_{1/2}^1$$

$$=\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n(n+1)}$$ …………………………5 分

或者 $\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n\, dx \overset{x-\frac{1}{2}=t}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t|^n\, dt=2\int_0^{\frac{1}{2}} |t|^n\, dt=2\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt=\frac{2}{n+1}t^{n+1}\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{2^n(n+1)}$；

2 由题设条件，得 $\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)dx=1$，…………………………………7 分

设 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|$，

$$1=\left|\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)dx\right|\le\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n |f(x)|\,dx\le\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n\, Mdx$$

$=M\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n\, dx=M\frac{1}{2^n(n+1)}$， 于是 $M\ge 2^n(n+1)$………..10 分

或者 $\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n |f(x)|\,dx=|f(\xi)|\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n\, dx$，

$|f(\xi)|\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n\, dx\ge 1$，所以 $|f(\xi)|\ge 2^n(n+1)$，故 $\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|\ge 2^n(n+1)$；

或者用反证法，假若 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|<2^n(n+1)$，由 $\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)dx=1$，

$$1=\left|\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)dx\right|\le\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n |f(x)|\,dx\le\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n\, Mdx$$

$=M\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n\, dx=M\frac{1}{2^n(n+1)}<1$，这是矛盾的，所以要证的结论成立。