第八章 拉普拉斯变换

一、 选择题

(1)设$f(t)=\delta(t-t_0)$,则$\mathcal{L}[f(t)]=$(　　　)

$(A)\,1$　　$(B)\,e^{t_0 s}$　　$(C)\,e^{-t_0 s}$　　$(D)\,2\pi$

(2) $\mathcal{L}[\cos(t-\frac{\pi}{4})]=$(　　　)

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{s+1}{s^2+1}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{s-1}{s^2+1}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{s+1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{4}s}$　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{s-1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{4}s}$

(3) $\mathcal{L}[\int_0^t e^{-3t}\sin t\,\mathrm{d}t]=$(　　　)

(A) $\frac{1}{s}\frac{1}{(s-3)^2+1}$　(B) $\frac{1}{s}\frac{1}{(s+3)^2+1}$

(C) $-\frac{1}{s}\frac{1}{(s+3)^2+1}$　(D) $-\frac{1}{s}\frac{1}{(s-3)^2+1}$

(4) $\mathcal{L}[t\int_0^t e^{-3t}\sin t\,\mathrm{d}t]=$(　　　)

(A) $-\frac{1}{s^2}\frac{3s^2+12s+10}{(s-3)^2+1}$　(B) $\frac{1}{s^2}\frac{3s^2+12s+10}{(s-3)^2+1}$

(C) $-\frac{1}{s^2}\frac{3s^2+12s+10}{(s+3)^2+1}$　(D) $\frac{1}{s^2}\frac{3s^2+12s+10}{(s+3)^2+1}$

(5) 函数$\frac{s^2}{(s+1)^2+1}$的拉普拉斯逆变换为(　　　)

(A) $\delta(t)-2e^{-t}\cos t$　(B) $\delta(t)-2\cos t-2\sin t$

(C) $\delta(t)-2e^{-t}\sin t$　(D) $\frac{i-1}{2}e^{it}$

(6) 函数 $\dfrac{s}{s+1}e^{-s}$ 的拉普拉斯逆变换为（　　　　）

（A）$\delta(t-1)-e^{-t}$　　　　（B）$\delta(t-1)u(t-1)-e^{-t}$

（C）$e^{-(t-1)}u(t-1)$　　　　（D）$\delta(t-1)u(t-1)-e^{-(t-1)}u(t-1)$

(7)积分 $\int_0^{+\infty} te^{-2t}\cos t dt$ 的值为（　　　　）

（A）0　　(B) $\dfrac{3}{25}$　　(C) $-\dfrac{3}{25}$　　(D) $\dfrac{4}{25}$

(8) 积分 $\int_0^{+\infty}[\int_0^{\tau} e^{-\tau}\cos\tau d\tau]e^{t}dt$ 的值为（　　　　）

（A）0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) 不存在

(9) $t<a$ 时 $u(t-a)*f(t)$ 的值为（　　　　）

（A）0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) 不存在

二、 填空题

（1）设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s),\ a>0$, 则 $\mathscr{L}[e^{-\frac{t}{a}}f(\frac{t}{a})]=$ ____________________

（2）$\mathscr{L}[t^2u(1-e^{-t})]=$ ____________________

（3）$\mathscr{L}[e^{-(t+\alpha)}\cos\beta t]=$ ____________________

（4）$\mathscr{L}[\sin(t-2)u(t-2)]=$ ____________________

（5）$\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{e^{-5s+1}}{s}]=$ ____________________

（6）$\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s^3(s-a)}]=$ ____________________

（7）$\mathcal{L}^{-1}[\ln\dfrac{s^2+1}{s(s+1)}]=$ ________________

（8）$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}dt=$ ________________

（9）$\delta(t-a)*f(t)=$ ________________

三、 计算下列函数的拉普拉斯变换.

（1） $f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t<0\\ -1, & 2\le t<4\\ 0, & t>4\end{cases}$ （2） $f(t)=\sin 2t-3\cos 2t-8e^{-2t}+2$

（3） $f(t)=t\cos at$ （4） $f(t)=\sin t\cdot u(t-2)$ （5） $\int_0^t\dfrac{e^t-\cos 2t}{t}dt$

四、 计算下列函数的拉普拉斯逆变换。

（1） $\dfrac{s+1}{s^2+4s+4}$ （2） $\dfrac{1}{s^3+3s^2+2s}$ （3） $\dfrac{s+3}{s^2+4s+7}$

（4）$\dfrac{s+2}{s^3(s-1)^2}$　　（5）$\dfrac{s^2}{(s+2)^2+4}$　　（6）$\dfrac{2s^2e^{-s}-(s+1)e^{-2s}}{s^3}$

五、计算下列积分。

（1）$\int_0^{+\infty} t^2e^{-2t}\cos at\,dt$　　（2）$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 t}{t^2}dt$　　(3) $\int_0^{+\infty}\sin(t-2)u(t-2)e^{-t}dt$

（4）$\int_0^{+\infty}\sin(t-2)e^{t}dt$　　(5) $\int_0^{+\infty}[\int_0^{\tau}\dfrac{e^{\tau}-\cos 2\tau}{\tau}d\tau]e^{-2t}dt$

六、利用拉普拉斯变换求解下列微分方程或方程组。

1. $f''-5f'+6f=0,\quad f(0)=1, f'(0)=2$

2. $f''-3f'+2f=\begin{cases}0, & 0\le t<3\\ 1, & 3\le t\le 6,\\ 0, & t>6\end{cases}\qquad f(0)=0,\ f'(0)=0$

3. $f''+2f'+f=\sin t, t\geq 0,\ f(0)=1,\ f'(0)=0.$

4. $ty''+2(t-1)y'+(t-2)y=0,\quad y(0)=0$

5. $\begin{cases} x''-x-2y'=e^{t} \\ x'-y''-2y=t^{2} \end{cases},\quad x(0)=-\frac{3}{2}, x'(0)=\frac{1}{2}, y(0)=1, y'(0)=-\frac{1}{2}$

6. $\begin{cases} x''+2x'+\int_0^t y(\tau)d\tau=0 \\ 4x''-x'+y=e^{-t} \end{cases},\quad x(0)=0, x'(0)=-1$

答案：一、(1)C　(2) A　(3) B　(4) D　(5) A　(6) D　(7) B　(8) A　(9)A

二、1。$aF(as+1)$　2。$\dfrac{2}{s^3}$　3。$\dfrac{(s+1)e^{-\alpha}}{(s+1)^2+\beta^2}$　4。$\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}$　5. $eu(t-5)$

6. $\dfrac{1}{a^3}(e^{at}-\dfrac{a^2t^2}{2}-at-1)$　7. $\dfrac{1}{t}(1+e^{-t}-2\cos t)$　8. $\dfrac{\pi}{2}$　9. $\begin{cases}0, & t<a\\ f(t-a), & t\geq a\end{cases}$

三、(1) $\mathcal{L}\ [f(t)]=\int_0^2 3e^{-st}\,\mathrm{d}t-\int_2^4 e^{-st}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{s}(e^{-4s}-4e^{-2s}+3)$

(2) $\mathcal{L}\ [[f(t)]=\dfrac{2}{s^2+4}-3\dfrac{s}{s^2+4}-8\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{2}{s}$

(3) $\mathcal{L}\ [f(t)]=-[\dfrac{s}{s^2+a^2}]'=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

(4) $\mathcal{L}\ [f(t)]=\int_0^{+\infty}\sin t u(t-2)e^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_2^{+\infty}\sin t\cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{-\cos t-s\sin t}{s^2+1}e^{-st}\Big|_2^{+\infty}=\frac{\cos 2+s\sin 2}{s^2+1}e^{-2s}.$$

(5) $\mathcal{L}\ [\int_0^t\dfrac{e^t-\cos 2t}{t}\mathrm{d}t]=\dfrac{1}{s}\mathcal{L}\ [\dfrac{e^t-\cos 2t}{t}]=\dfrac{1}{s}\int_s^{\infty}\mathcal{L}\ [e^t-\cos 2t]\mathrm{d}s$

$$=\frac{1}{s}\int_s^{+\infty}(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+4})\mathrm{d}s=\frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s-1}。$$

四、(1) $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s+1}{s^2+4s+4}]=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{(s+2)}-\dfrac{1}{(s+2)^2}]=e^{-2t}-te^{-2t}$

(2) 因为

$\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{s^3+3s^2+2s}]=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{s(s+2)(s+1)}]=\mathrm{Res}[\dfrac{1}{s(s+2)(s+1)}e^{st},s=0]+$

$$\mathrm{Res}[\frac{1}{s(s+2)(s+1)}e^{st},s=-1]+\mathrm{Res}[\frac{1}{s(s+2)(s+1)}e^{st},s=-2]=\frac{1}{2}[1-2e^{-t}+e^{-2t}]$$

（3）$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+3}{s^2+4s+7}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{(s+2)^2+3}]+\mathcal{L}^{-1}[\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{(s+2)^2+3}]$

$$=e^{-2t}(\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)$$

（4）$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+2}{s^3(s-1)^2}]=\mathrm{Res}[\frac{s+2}{s^3(s-1)^2}e^{st},s=0]+\mathrm{Res}[\frac{s+2}{s^3(s-1)^2}e^{st},s=1]$

$$=t^2+5t+8+(3t-8)e^t$$

（5）$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s^2}{(s+2)^2+4}]=\mathcal{L}^{-1}[1-\frac{4(s+2)}{(s+2)^2+4}]=\delta(t)-4e^{-2t}\cos 2t$

（6）$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2s^2e^{-s}-(s+1)e^{-2s}}{s^3}]=2\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-s}}{s}]-\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s^2}]-\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s^3}]$

$$=2u(t-1)-(t-2)u(t-2)-\frac{1}{2}(t-2)^2u(t-2)$$

五、（1）因为$\mathcal{L}[t\cos at]=-(\frac{s}{s^2+a^2})'=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$，

所以 $\int_0^{+\infty}te^{-2t}\cos at\,\mathrm{d}t=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\Big|_{s=2}=\frac{4-a^2}{(4+a^2)^2}$

（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}\sin^2 t(\frac{1}{t})'\mathrm{d}t=-\frac{\sin^2 t}{t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t=\int_s^{\infty}\frac{2}{s^2+4}\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2}$.

(3) 因为$\mathcal{L}[\sin(t-2)u(t-2)]=e^{-2s}\frac{1}{s^2+1}$，所以

$$\int_0^{+\infty}\sin(t-2)u(t-2)e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^{-2}.$$

（4）因为$\mathcal{L}\ [\sin(t-2)]=\dfrac{\cos 2-s\sin 2}{s^2+1}$，所以$\int_0^{+\infty}\sin(t-2)e^t\,\mathrm{d}t=\dfrac{\cos 2+\sin 2}{2}$。

(5) 因为

$$\mathcal{L}\ [\int_0^{\tau}\frac{e^{\tau}-\cos 2\tau}{\tau}d\tau]=\frac{1}{s}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+4}\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s-1}$$

$$\int_0^{+\infty}[\int_0^{\tau}\frac{e^{\tau}-\cos 2\tau}{\tau}d\tau]e^{-2t}dt=\frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s-1}\bigg|_{s=2}=\frac{3}{2}\ln\sqrt{2}.$$

六、(1) $f(t)=e^{2t}$　（2） $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le 3\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{2t-6}-e^{t-3}, & 3\le t\le 6\\ \dfrac{1}{2}e^{2t-6}-\dfrac{1}{2}e^{2t-12}+e^{t-6}-e^{t-3}, & t\ge 6\end{cases}$

(3) 假设$\mathcal{L}\ [f(t)]=F(s)$,对方程两边同时进行拉普拉斯变换，有

$$(s^2+2s+1)F(s)-s-2=\frac{1}{s^2+1}$$

整理得

$$F(s)=\frac{s+2}{s^2+2s+1}+\frac{1}{(s^2+2s+1)(s^2+1)}$$

将上式右端的第一项写为

$$\frac{s+2}{s^2+2s+1}=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+2}]=e^{-t}\quad \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}]=\mathrm{Res}[\frac{1}{(s+1)^2}e^{st},s=-1]=te^{-t},$$

可得$\dfrac{s+2}{s^2+2s+1}$的拉普拉斯逆变换为

$$f_1(t)=e^{-t}+te^{-t}$$

将上式右端的第二项写为

$$\frac{1}{(s^2+2s+1)(s^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$$

其拉普拉斯逆变换为

$$f_2(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{2}\cos t.$$

因此，原方程的解为

$$f(t)=\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}te^{-t}-\frac{1}{2}\cos t.$$

（4）假设$\mathcal{L}\,[y(t)]=Y(s)$，对方程两边同时进行拉普拉斯变换，有

$$-[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]'-2[sY(s)-y(0)]'-2[sY(s)-y(0)]-Y'(s)-2Y(s)=0$$

所以

$$Y'(s)+\frac{4}{s+1}Y(s)=\frac{3y(0)}{(s+1)^2}$$

则

$$Y(s)=\frac{y(0)}{s+1}+\frac{c}{(s+1)^4}$$

求拉普拉斯逆变换得

$$y(t)=y(0)e^{-t}+ct^3e^{-t}$$

又 $y(0)=0$，所以 $y(t)=ct^3e^{-t}$.

（5）假设$\mathcal{L}\,[x(t)]=X(s)$，$\mathcal{L}\,[y(t)]=Y(s)$，对方程两边同时进行拉普拉斯变换，有

$$\begin{cases} s^2X(s)-sx(0)-x'(0)-X(s)-2[sY(s)-y(0)]=\dfrac{1}{s-1} \\ sX(s)-x(0)-[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]-2Y(s)=\dfrac{2}{s^3} \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} X(s) = -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{s^2} \\ Y(s) = -\dfrac{1}{2(s-1)} - \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{3}{2s} \end{cases}$$

进行拉普拉斯逆变换，有

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{3}{2}e^t + 2t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}e^t - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

（6）．假设L $[x(t)] = X(s)$，L $[y(t)] = Y(s)$, 对方程两边同时进行拉普拉斯变换，有

$$\begin{cases} s^2X(s) + 1 + 2sX(s) + \dfrac{1}{s}Y(s) = 0 \\ 4s^2X(s) + 4 - sX(s) + Y(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (s^3 + 2s^2)X(s) + Y(s) = -s \\ (4s^2 - s)X(s) + Y(s) = \dfrac{1}{s+1} - 4 \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{3}{s} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{13}{4}\cdot\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-1)^2} \\ Y(s) = -\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-1)^2} - \dfrac{31}{4}\cdot\dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

求拉普拉斯逆变换得

$$\begin{cases} x(t) = 3 + \dfrac{1}{4}e^{-t} - \dfrac{13}{4}e^t + \dfrac{5}{2}te^t \\ y(t) = -\dfrac{1}{4}e^{-t} - \dfrac{15}{2}te^t - \dfrac{31}{4}e^t \end{cases}$$