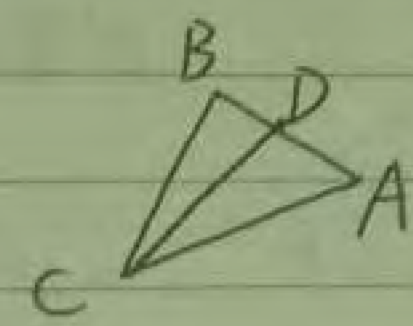
1. 解: A(3, 2, -1) B(5, -4, 7) NO. DATE.

C(-1, 1, 2)



$\overrightarrow{AB} = (2, -6, 8)$

设AB的中点为D

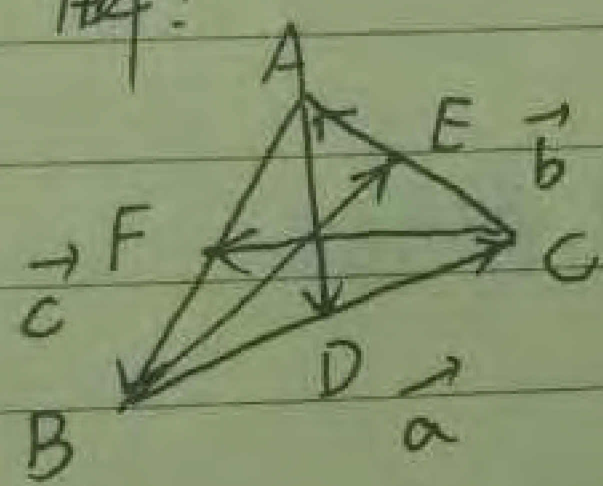
$\overrightarrow{AD} = (1, -3, 4)$

又 ∵ $\overrightarrow{CA} = (4, 1, -3)$

∴ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = (5, -2, 1)$

∴ 中线长度为 $\sqrt{30}$

2. 解:



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$= -\vec{b} + (-\frac{1}{2}\vec{a})$

$= -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$

$= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}$

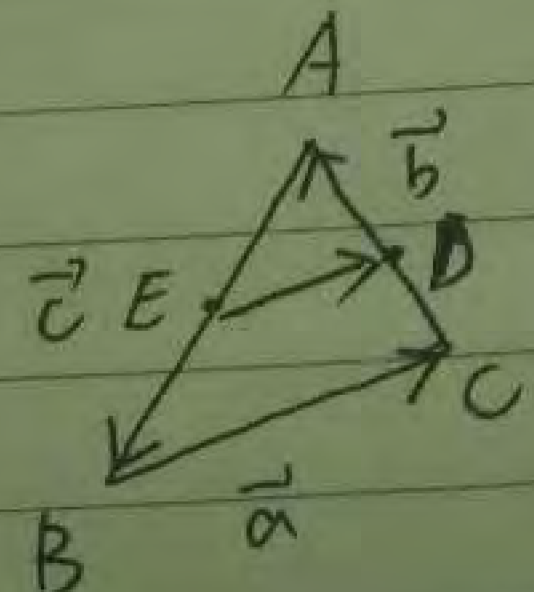
$= -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$= -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

3.



证明: △ABC中三边 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ 设AC的中点为D, AB的中点为E

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

∵ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

∴ $\vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$

∴ $\overrightarrow{ED} = -\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{a}$

∴ 得证

5. 解：$(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$ NO. DATE.

$\therefore (\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$

$7|a|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15|\vec{b}|^2=0 \cdots (1)$

$\because (\vec{a}-4\vec{b})$ 与 $(7\vec{a}-2\vec{b})$ 垂直

$\therefore (\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$

$7|\vec{a}|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8|\vec{b}|^2=0 \cdots (2)$

(1)-(2) 得：$46\vec{a}\cdot\vec{b}-23|\vec{b}|^2=0$

$\therefore |\vec{b}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b} \cdots\cdots (3)$

再将(3)代入(1)得到：$|\vec{a}|^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}\cdots(4)$

$\therefore |\vec{a}|=|\vec{b}|$

$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}=\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=60°$

4. $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a})^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b})^2=3+2\times\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{6}+1$

$=7$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a})^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b})^2$

$=3-2\times\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{6}+1=1$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=1$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a})^2-(\vec{b})^2=3-1=2$

$\cos\theta=\frac{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\times|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{2}{\sqrt{7}\times 1}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\theta=\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$

6、设 $\vec{r}=(x,y,z)$

由 $\vec{r}\perp\vec{a}$ $\quad 2x-3y+z=0$

$\vec{r}\perp\vec{b}$ $\quad x-2y+3z=0$

$(\vec{r})_c=14=\frac{\vec{r}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}$ $\quad 2x+y+2z=42$.

联立三式，解得 $\begin{cases} x=14 \\ y=10 \\ z=2. \end{cases}$

则 $\vec{r}=(14,10,2)$.

7. 由 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=0=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$=3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}$

9. ~~解~~ $|a|^2+|b|^2=|c|^2$，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 构成 $Rt\Delta$.

$\vec{a},\vec{b}$ 为直角边，$\vec{c}$ 为斜边.

$|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$

$=|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times(-\vec{a}-\vec{b})+(-\vec{a}-\vec{b})\times\vec{a}|$

$=|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}|=3|\vec{a}\times\vec{b}|$

$=3|a||b|\sin C=3\cdot3\cdot4\cdot1=36.$

10. 设限平面上任一点 $P(x,y,z)$

$\vec{AP}=(x-3,y,z)$ $\quad \vec{AB}=(-3,0,1)$.

则平面法向量 $\vec{n_1}=\vec{AP}\times\vec{AB}=(y,-x-3z+3,3y)$.

而平面 xOy 法向量 $\vec{n_2}=(0,0,1)$.

由 $\frac{1}{2}=|\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle|=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\frac{|3y|}{\sqrt{y^2+(-x-3z+3)^2+(3y)^2}}$

得 $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$.

8. 由 $\vec{a},\vec{b}$，$\vec{c}=\vec{b}-\lambda\vec{a}$ 得

$\vec{c}=(4-2\lambda,-1-\lambda,10-2\lambda)$

由 $\vec{a}\perp\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

即 $2(4-2\lambda)+(-1-\lambda)+2(10-2\lambda)=0$

得 $\lambda=3$.

直线过点 $(-1, 0, 4)$.

∴设直线为 $\frac{x+1}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z-4}{c}$.

而平面 $3x-4y+z-10=0$ 的法向量为 $[3,-4,1]$

则直线垂直于此法向量

则 $3a-4b+c=0$ ①.

又∵此直线与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交

则 $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$ ②

联立①② 得 $a=16$, $b=19$, $c=28$

∴直线 $\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{\cancel{60}\,28}$

11题

12. $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 绕（z轴）

设母线上任一点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，因为旋转轴经过原点 $(0,0,0)$

因此过该点纬圆为

$$\begin{cases} z=z_1 & ① \\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2 & ② \end{cases}$$

又因 M_1 在母线上 所以有 $\frac{x_1-1}{0}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1}{1}$ ③

联立①②③ 消去，x_1, y_1, z_1，得到所求旋转面方程为

$$x^2+y^2-z^2-1=0$$

12

13. 求点 (2,1,1)到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离

解: $$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|2+1-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$$

$$=\sqrt{3}$$

14. 由于所求平面过直线 l，因此可设所求平面的方程是

$$a(x+5y+z)+b(x-z+4)=0$$ （其中 a、b 为常数且不全为 0）

即 $(a+b)x+5ay+(a-b)z+4b=0$

由题意得已知平面的一个法向量 $(1,-4,-8)$ 与上述平面的一个法向量 $(a+b,5a,a-b)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

即 $$\frac{|(a+b)-4\times5a-8(a-b)|}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}\sqrt{(a+b)^2+(5a)^2+(a-b)^2}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

化简得 $$\frac{(-27a+9b)^2}{27a^2+2b^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 9a^2+12ab=0 \Rightarrow 3a(3a+4b)=0$$

因此 $a=0$ 或 $a=-\frac{4}{3}b$

所以所求平面方程是 $x-z+4=0$ 或 $-4(x+5y+z)+3(x-z+4)=0$

即 $x-z+4=0$ 或 $x+20y+7z-12=0$

15. 证明：

1) 唯一性：

设另有一组实数 x', y', z' 使得 $OP = x'OA + y'OB + z'OC$

则有 $xOA + yOB + zOC = x'OA + y'OB + c'OC$

$\therefore (x-x')OA + (y-y')OB + (z-z')OC = 0$

$\because OA, OB, OC$ 不共面

$\therefore x-x' = y-y' = c-c' = 0$ 即 $x = x', y = y', c = c'$

故实数 x, y, z 是唯一的

2) 若 $x+y+z=1$ 则 PABC 四点共面

假设 $OP = xOA + yOB + zOC$ 且 $x+y+z=1$ 且 PABC 不共面

即以 $z = 1-x-y$ 则 $OP = xOA + yOB + OC - xOC - yOC$

$OP = OC + xCA + yCB$ （$CP = xCA + yCB$）

点 P 位于平面 ABC 内 与假设中的条件矛盾. 故原命题成立.

16. $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 C = 0$ 　λ_i 不全为0.

a, b, c 共面.

证：$\lambda_1 a = -\lambda_2 b - \lambda_3 C$

假设 $\lambda_1 \neq 0$

$\therefore \vec{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{b} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{c}$

17. $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ 　$\vec{b} = (2, -3, -4)$, $\vec{c} = (-3, 12, 6)$

证：$\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$

由共面定理得，∃不全为0的数使得 $\vec{a}, \vec{b}$ 可由 $\vec{c}$ 表示.

18. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 5$. 　$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 　互相垂直.

1). $\vec{s}$：长度平方与长度.

$9 + 16 + 25 = 50$.

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

2). $\cos\langle\vec{s}, \vec{c}\rangle = \frac{\vec{s}\cdot\vec{c}}{|\vec{s}|\,|\vec{c}|} = \frac{(a+b+c)\cdot c}{\sqrt{50}\cdot 5} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

~~夹角为~~.

19. 1). 证: A 设D是BC中点.

重心G是中线上的三等分点, $AG=2GD$

$GB+GC=2GD$

A $\therefore AG=GB+GC$ 即 A $GA+GB+GC=0$

设坐标原点为O.

即 $GA=OA-OG$, $GB=OB-OG$, $GC=OC-OG$

即 $3OG=OA+OB+OC$.

即得: $OG=\frac{1}{3}(OA+OB+OC)$

2). 重心坐标:

设 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$

$G:\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

20. 1). 证: 设 $\overrightarrow{OA}=x$, $\overrightarrow{OB}=y$, $\overrightarrow{OC}=z$,

则 $\overrightarrow{BA}=x-y$, $\overrightarrow{BC}=z-y$, $\overrightarrow{AC}=z-x$. 由已知条件得:

$y\cdot(z-x)=0$, $z\cdot(x-y)=0$. 即得 $x\cdot(z-y)=0$. 即 $OA\perp BC$.

2).

20. 2). 设$\triangle ABC$的两条高BE、CF相交于点O，

第三条高AD交高BD于Q.

交高CF于点P

即证P，Q，O三点重合.

$\because BE\perp AC$，$CF\perp AB$，

$\therefore \angle AEB=\angle AFC=90^\circ$.

$\angle BAE=\angle CAF$.

$\therefore \triangle ABE\sim\triangle ACF$.

即 $AB\cdot AF=AC\cdot AE$.

同理可证： $AC\cdot AE=AD\cdot AQ$.

$AB\cdot AF=AD\cdot AP$.

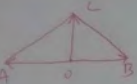
$\because AB\cdot AF=AC\cdot AE=AD\cdot AQ=AD\cdot AP$.

$\therefore AD\cdot AQ=AD\cdot AP$. $\therefore AQ=AP$.

$\because$点Q、P都在线段AD上.

$\therefore$点Q、P重合. 得证.

2)



(1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = r$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$= |\overrightarrow{OC}|^2 - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= r^2 - r^2 \cdot \cos\langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} \rangle - r^2 \cdot \cos\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \rangle + r^2 \cdot \cos\langle \pi \rangle$$

$$= 0.$$

(2)

$$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$= 2r^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + 2r^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= 4r^2 = |\overrightarrow{AB}|^2.$$

$= (a, b, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$

$= 4r^2 = |\overline{AB}|^2$

22. $\overline{AB} = (-a, b, 0)$ $\overline{AC} = (-a, 0, c)$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (bc, ac, ab)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$$

23. $$a \cdot \left[b - \frac{(a \cdot b) \cdot a}{a^2}\right] = a \cdot b - \frac{(a \cdot b) \cdot a^2}{a^2} = a \cdot b - a \cdot b = 0.$$

$$\left[b - \frac{(a \cdot b) \cdot a}{a^2}\right] \cdot \left[b - \frac{(a \cdot b) \cdot a}{a^2}\right] = b \cdot b - \frac{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)}{a^2} - \frac{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)}{a^2} + \frac{(a \cdot b)^2 \cdot a^2}{a^4}$$

$$= b^2 - \frac{(a \cdot b)^2}{a^2}.$$

24 $\because d = xa + yb + zc$, 又 a、b、c 互相垂直.

$\therefore a \cdot d = x \cdot a^2$, $b \cdot d = y \cdot b^2$, $c \cdot d = z \cdot c^2$.

$\therefore x = \dfrac{d \cdot a}{a^2}$, $y = \dfrac{d \cdot b}{b^2}$, $z = \dfrac{d \cdot c}{c^2}$.

25 $\overline{AB} = (6, 0, 6)$ $\overline{AC} = (4, 3, 0)$, $\overline{AD} = (2, -1, 3)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \, \overline{AB} \times \overline{AC} \cdot \overline{AD} \, \right|.$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \right| = 1.$$