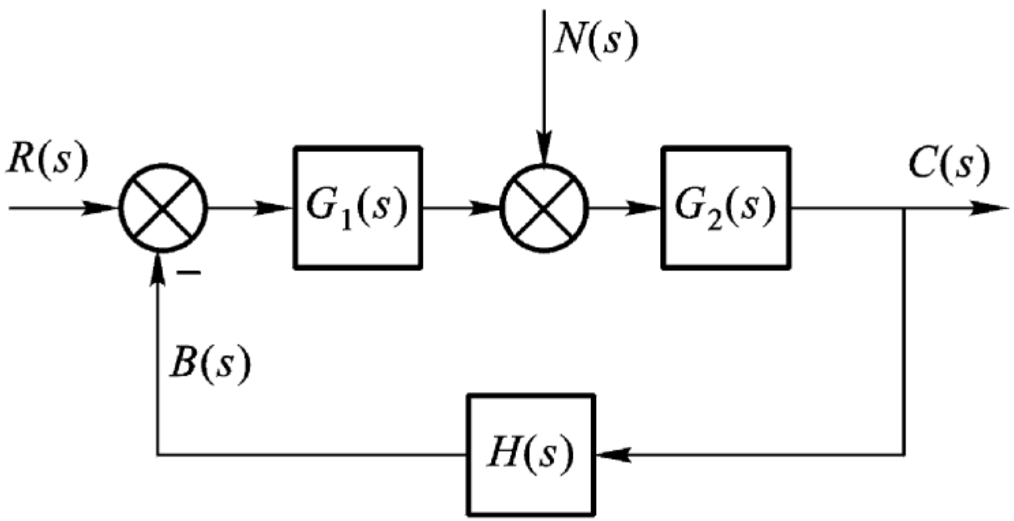
第三章

时域分析法（3）

3-4 稳态误差分析计算

一、误差与稳态误差

1. 误差的两种定义



误差：

(1) $e(t)=r(t)-c(t)$

(2) $e(t)=r(t)-b(t)$

2. 稳态误差

定义：稳定系统误差的终值称为稳态误差。当时间$t\to\infty$时，$e(t)$极限存在，则稳态误差为

$$e_{ss} := \lim_{t\to\infty} e(t)$$

3. 中值定理应用的条件

定理：设 $e(t)$ 的$Laplace$ 变换为$E(s)$且 $\lim_{t\to\infty}e(t)$ 及 $\lim_{s\to 0}sE(s)$ 存在。则

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

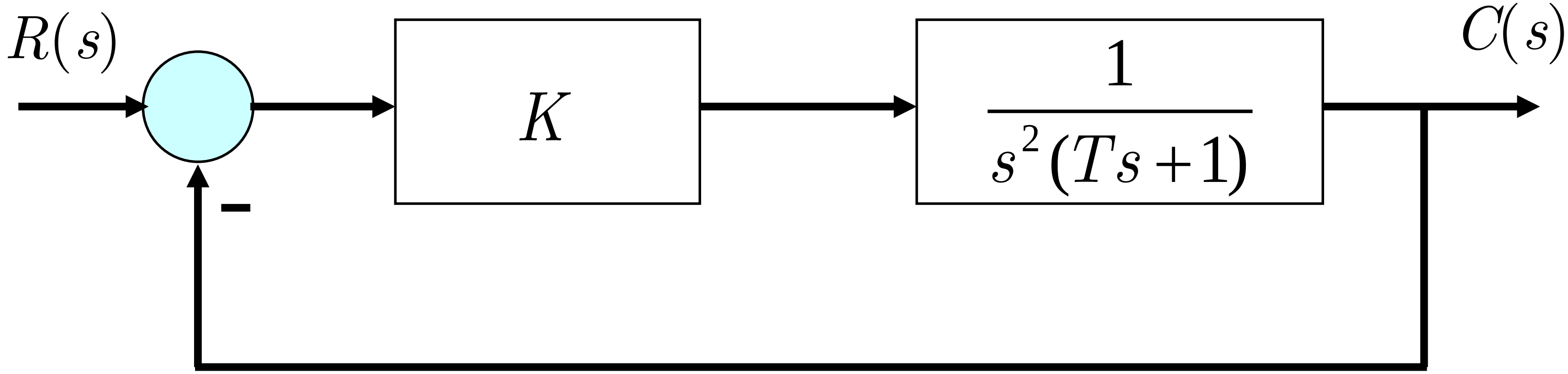
二、稳态误差的计算

一般地，$sE(s)$是s的有理分式函数，故当且仅当$sE(s)$的极点均在左半面就可保证

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)$$

存在，即$sE(s)$的极点均在左半面的条件中，蕴涵了闭环系统稳定的条件。

例：考虑如下系统：



令 $r(t)=1(t)$。求稳态误差e_{ss}。

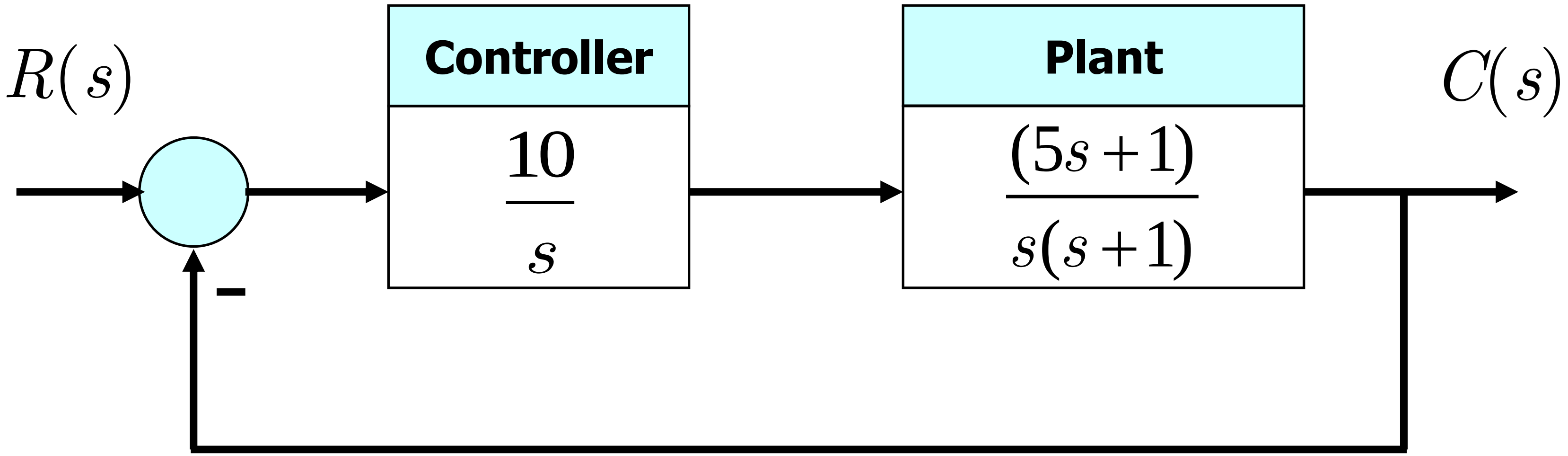
解：

$$sE(s)=s(R(s)-B(s))=s\frac{1}{1+G(s)H(s)}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{1+G(s)H(s)}=\frac{s^2(Ts+1)}{Ts^3+s^2+K}$$

关于 s 的系数为零，系统的稳态误差不存在。

例：考虑如下系统：



令$r(t)=\sin(\omega t)$。求稳态误差 e_{ss}。

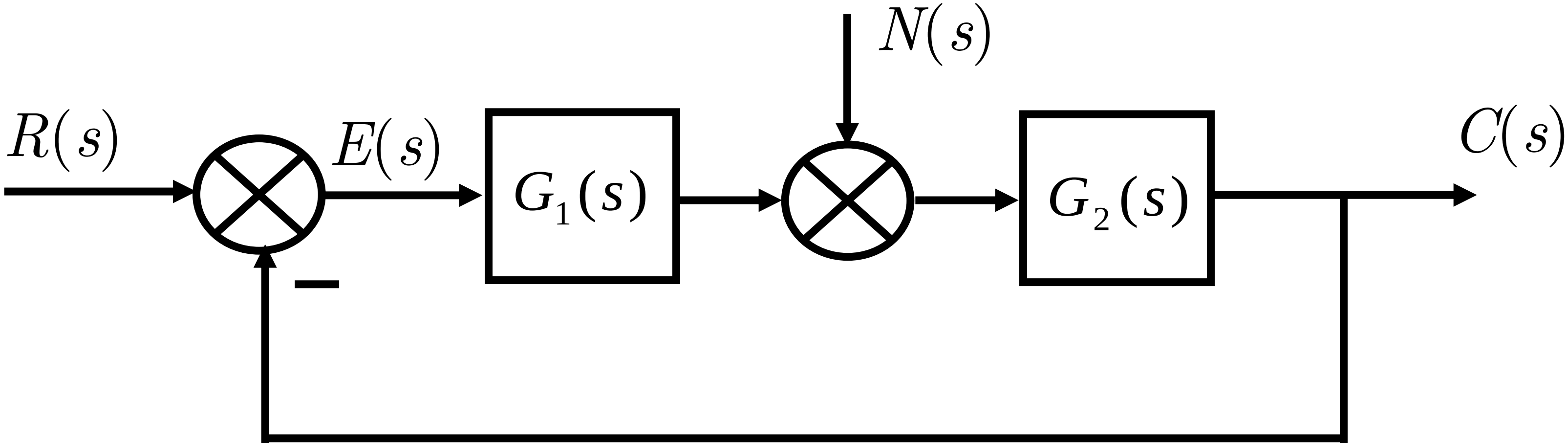
解：因

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$$

$$sE(s)=s[R(s)-B(s)]=\frac{s}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

由于$sE(s)$中有两个极点位于虚轴，与终值定理应用的条件不符。

例：求$R(s)$和$N(s)$作用下的稳态误差：



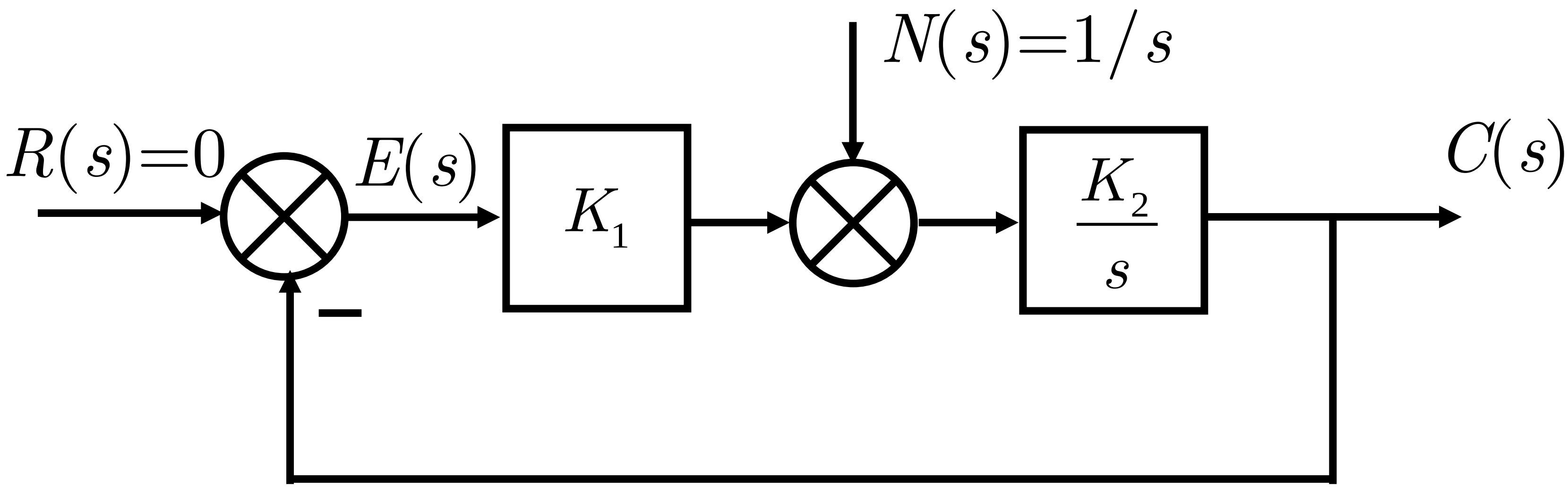
根据叠加原理：

$$E(s) = E_r + E_n = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)}R(s) - \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}N(s)$$

若$R(s)=0$，

$$E_n(s) = -\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}N(s)$$

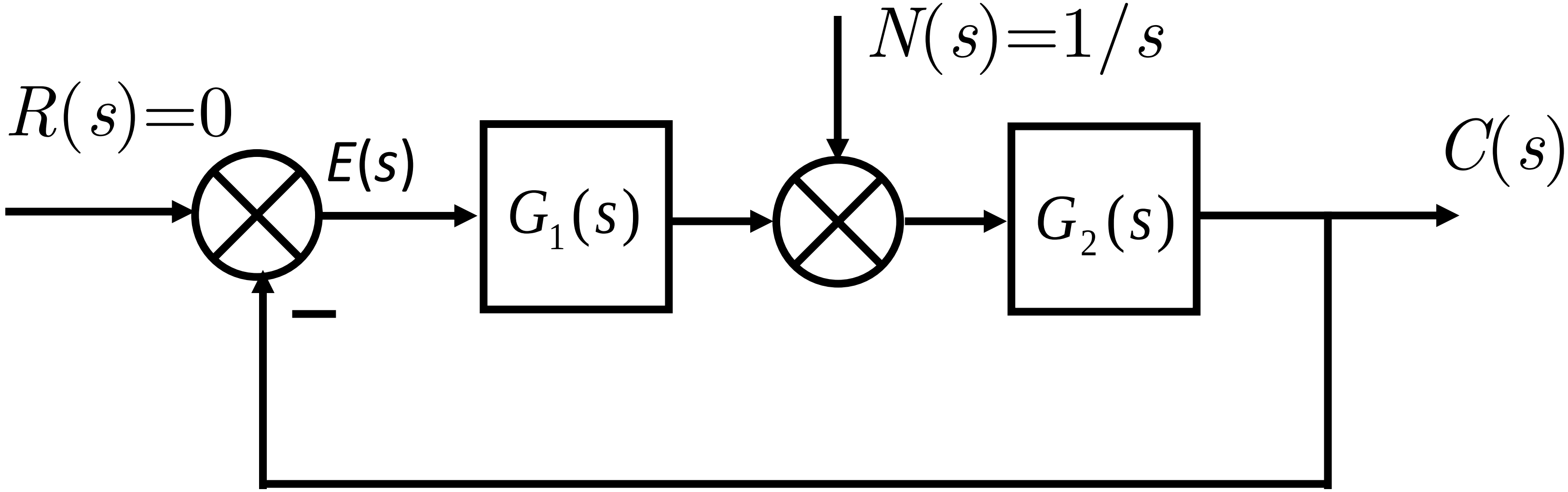
例：求$N(s)$作用下的稳态误差：



其中，$K_1>0$, $K_2>0$。则由于$sE(s)$的根在左半面，故

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=-\lim_{s\to 0}\frac{sK_2}{s+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s}=-\frac{1}{K_1}$$

注意：对$sE(s)$的验证是必不可少的，例如：

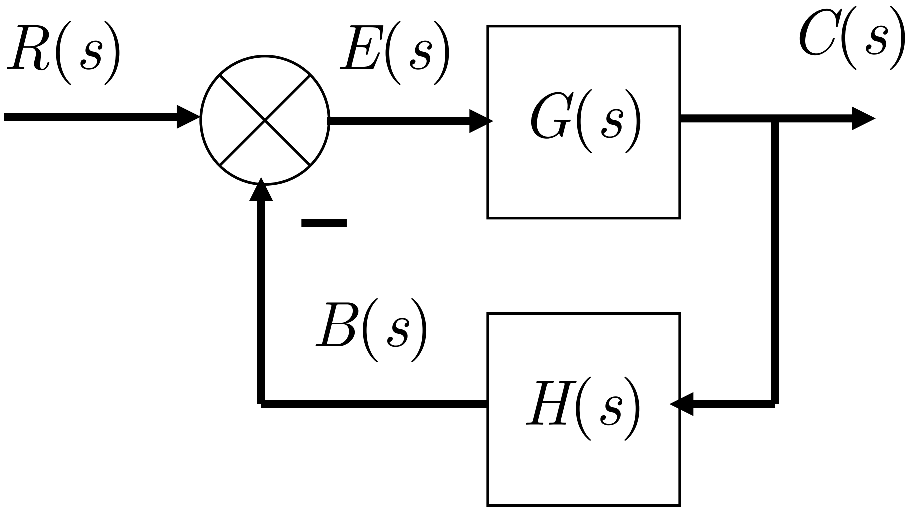


$$G_1(s)=\frac{K_1}{s} \qquad G_2(s)=\frac{K_2}{s} \qquad K_1>0, K_2>0$$

$$sE(s)=-s\frac{sK_2}{s^2+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s}$$

由于$sE(s)$有根在虚轴，e_{ssn}不存在。

三、系统类型



令 $E(s)=R(s)-B(s)$

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

令

$$G(s)H(s)=\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)}=\frac{KN_0(s)}{s^N D_0(s)}$$

则

$$N=\begin{cases}0, & \text{Type 0 system}\\ 1, & \text{Type 1 system}\\ 2, & \text{Type 2 system}\end{cases}$$

1. 静态位置误差系数K_p $(r=1(t))$

令

$$r(t)=1(t)$$

则

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{KN_0(s)}{s^N D_0(s)}}$$

这里，

$$N_0(0)=1,\quad D_0(0)=1$$

静态位置误差系数 K_p 定义为：

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{KN_0(s)}{s^N D_0(s)} = \begin{cases} K, & \text{type} = 0 \\ \infty, & \text{type} \geq 1 \end{cases}$$

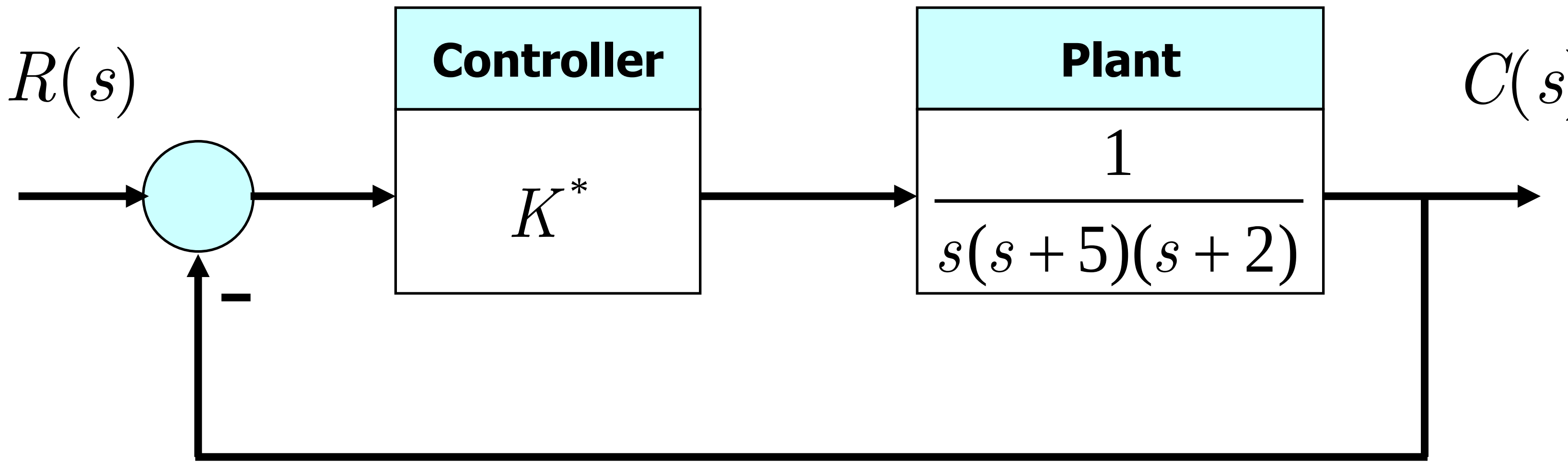
因此，

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{1+K_p}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1+K}, & \text{if } N = 0, \\ 0, & \text{if } N \geq 1 \end{cases}$$

例：考虑如下控制系统：

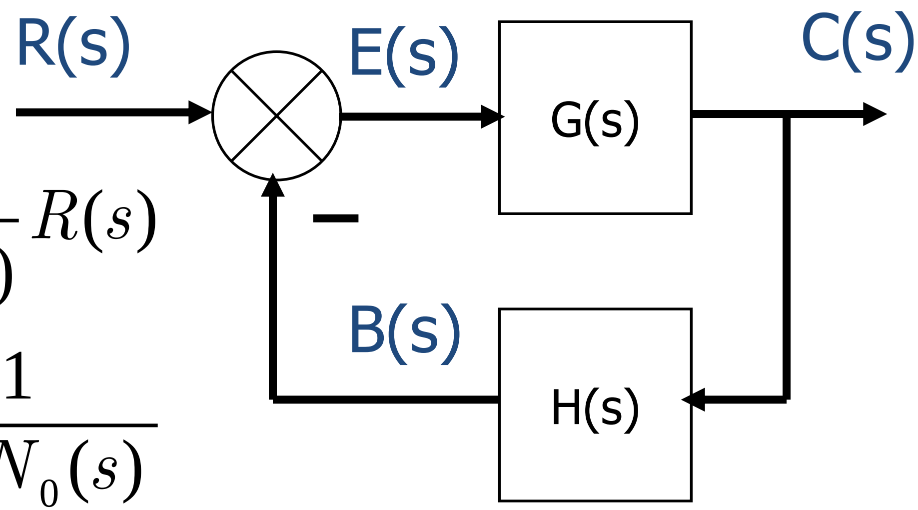


这里，$0<K^*<10$。令$r(t)=1(t)$。求e_{ss}。

解：首先，检验 $sE(s)$的根是否在左半面。进而，计算 e_{ss}。

2. 静态速度误差系数 K_v $(r=t1(t))$

令 $r(t)=t\cdot 1(t) \Rightarrow R(s)=\dfrac{1}{s^2}$



则

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s\dfrac{KN_0(s)}{s^N D_0(s)}}$$

这里，

$$N_0(0)=1 \qquad D_0(0)=1$$

定义速度误差系数

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)H(s) = \begin{cases} 0, & \text{Type 0 systems} \\ K, & \text{Type 1 systems} \\ \infty, & \text{Type 2 or higher systems} \end{cases}$$

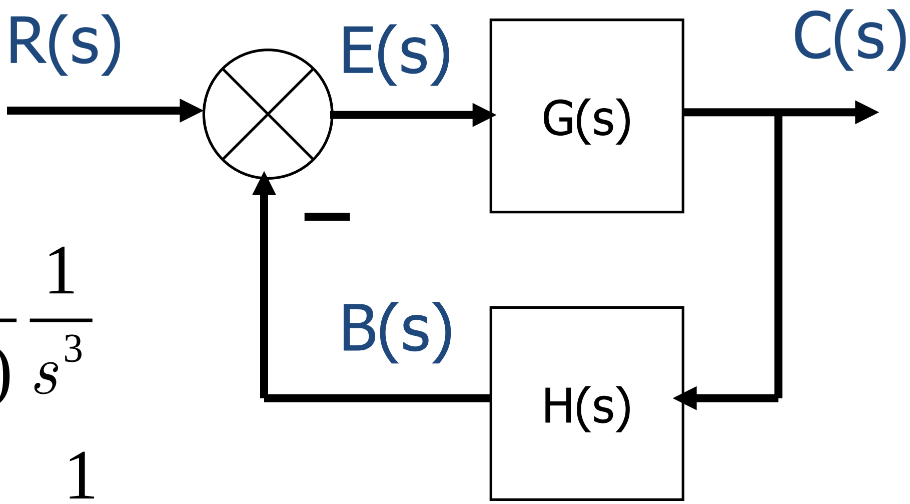
则

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_v} = \begin{cases} \infty, & \text{Type 0 systems} \\ \dfrac{1}{K}, & \text{Type 1 systems} \\ 0, & \text{Type 2 or higher systems} \end{cases}$$

3. 静态加速度误差系数 K_a $(r=t^2/2)$

令

$$r(t)=\frac{t^2}{2} \Rightarrow R(s)=\frac{1}{s^3}$$



则

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}\frac{1}{s^3}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2\dfrac{KN_0(s)}{s^N D_0(s)}}$$

则

$$N_0(0)=1 \qquad D_0(0)=1$$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

定义加速度误差系数

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s) = \begin{cases} 0, & \text{Type 0 and 1 systems} \\ K, & \text{Type 2 system} \\ \infty, & \text{Type 3 or higher systems} \end{cases}$$

则

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)H(s)_v} = \frac{1}{K_a} = \begin{cases} \infty, & \text{Type 0 and 1 systems} \\ \dfrac{1}{K}, & \text{Type 2 systems} \\ 0, & \text{Type 3 or higher systems} \end{cases}$$

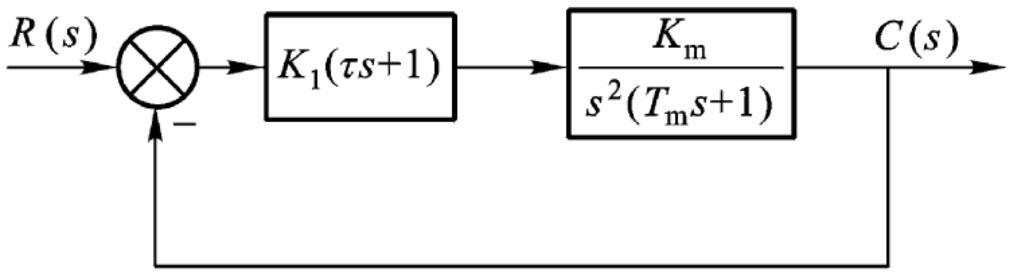
The steady state error in terms of Gain K

$G(s)H(s)$积分环节的个数	输入		
	$A\cdot 1(t)$	$A\cdot t1(t)$	$A\cdot t^2/2$
Type 0	$e_{ss}=\frac{A}{1+K}$	∞	∞
Type 1	$e_{ss}=0$	$e_{ss}=\frac{A}{K}$	∞
Type 2	$e_{ss}=0$	$e_{ss}=0$	$e_{ss}=\frac{A}{K}$

例：系统结构如下图：若输入信号为

$$r(t)=1+t+\frac{1}{2}t^2,\quad \forall t\geq 0$$

试求系统的稳态误差。



解：首先判别稳定性。系统的闭环特征方程为

$$s^2(T_m s+1)+K_1K_m(\tau s+1)=0 \Rightarrow T_m s^3+s^2+K_1K_m\tau s+K_1K_m=0$$

稳定条件：（1）T_m，K_1，K_m，τ均应大于零；

（2）$\tau > T_m$

根据系统结构与稳态误差之间的关系，直接求e_{ss}。

从结构图看出，该系统为单位反馈且属II型系统:

当输入$r(t)=1(t)$时，$e_{ss1}=0$;

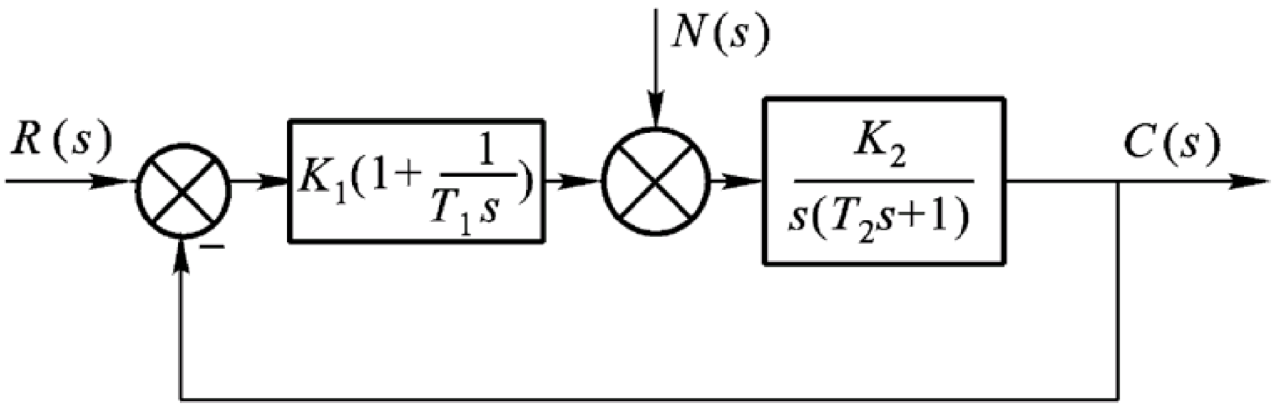
当输入$r(t)=t$时，$e_{ss2}=0$;

当输入$r(t)=\frac{1}{2}t^2$时，$e_{ss3}=\frac{a_0}{K}=\frac{1}{K_1K_m}$

系统稳态误差$e_{ss}=e_{ss1}+e_{ss2}+e_{ss3}=\frac{1}{K_1K_m}$

三、干扰作用下的稳态误差

例：系统结构图如下，已知干扰$n(t)=1(t)$,试求干扰作用下的稳态误差e_{ssn}。



解：首先判断稳定性。系统开环传函为

$$G(s)=\frac{K_1K_2(T_1s+1)}{s^2T_1(T_2s+1)}$$

所以闭环特征方程为

$$T_2 s^3 + s^2 + K_1 K_2 s + K_1 K_2 / T_1 = 0$$

稳定条件：

（1） T_1, T_2, K_1, K_2均应大于零。

（2） $T_1 > T_2$

其次求稳态误差。从图中可以看出，误差信号到干扰作用点之前的传递函数中含有一个积分环节，故系统在阶跃干扰作用下的稳态误差 e_{ssn}为零。

事实上，

$$\Phi_{EN}(s)=\frac{-K_2 s}{s^2(T_2 s+1)+(K_1 K_2/T_1)(1+T_1 s)}$$

当$N(s)=1/s$ 时，

$$e_{ssn}=\lim_{s\to 0} s\Phi_{EN}(s)N(s)=0$$