第二讲 系统的数学模型

2．1．基本要求

1.了解建立系统微分方程的一般方法，能对简单的机械网络和电路能列写出动态方程式。
2.掌握传递函数的概念及性质。
3.掌握典型环节的传递函数形式。
4.掌握由系统微分方程组建立动态结构图的方法。
5.掌握用动态结构图等效变换求传递函数和梅逊公式求传递函数的方法。
6.掌握系统的开环传递函数、闭环传递函数，对参考输入和对干扰的系统闭环传递函数及误差传递函数的概念。

2．2 重点讲解

1，本章是建立常参量线性系统描述系统输入、输出关系的的两种数学模型：系统微分方程式和传递函数，前者是时域描述，后者则是复数域的描述。建立系统的数学模型是一件非常复杂的工作，它涉及对系统中每个部件的深入了解和专门的知识，这些都不是本课程可以解决的问题。它要靠专业课学习和长期的工作实践的积累。这里只是介绍建立模型的一种思路和原则步骤。

本课程只要求能对简单的机械网络和电路能列写出动态方程式。

2，电网络的动态方程

例题 2-1 电路如图 2-1 所示，$u_r(t)$ 为输入量，$u_c(t)$ 为输出量，试列写该电网络的动态方程并求传递函数 $U_c(s)/U_r(s)$。

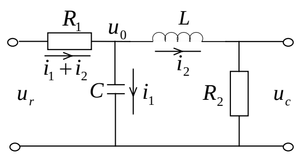

图 2-1 电路图

解：根据电路基本定律，得电网络的动态方程

$$u_r = R_1(i_1+i_2) + L\frac{di_2}{dt} + u_c$$

i_1、i_2 为中间变量，且 $i_1 = C\dfrac{d}{dt}(L\dfrac{di_2}{dt}+u_c)$，　$i_2=\dfrac{u_c}{R_2}$，在动态方程中消掉中间变量，得

$$\frac{R_1LC}{R_2}\frac{du_c{}^2}{dt^2} + (\frac{L}{R_2}+R_1C)\frac{du_c}{dt} + (1+\frac{R_1}{R_2})u_c = u_r$$

在零初始条件下进行拉氏变换，可得

$$\frac{R_1LC}{R_2}s^2U_c(s) + (\frac{L}{R_2}+R_1C)sU_c(s) + (1+\frac{R_1}{R_2})U_c(s) = U_r(s)$$

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{R_2}{R_1LCs^2 + (L+R_1R_2C)s + (R_1+R_2)}$$

说明：求传递函数$U_c(s)/U_r(s)$时可用复阻抗的概念，将L变成Ls，将C变成$1/Cs$，再利用电路基本定律直接得到：

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{\dfrac{\dfrac{1}{Cs}(Ls+R_2)}{\dfrac{1}{Cs}+Ls+R_2}}{R_1+\dfrac{\dfrac{1}{Cs}(Ls+R_2)}{\dfrac{1}{Cs}+Ls+R_2}}\cdot\frac{R_2}{Ls+R_2}=\frac{R_2}{R_1LCs^2+(L+R_1R_2C)s+(R_1+R_2)}$$

本题若要求画电网络的动态结构图，也可用复阻抗的概念很快画出：

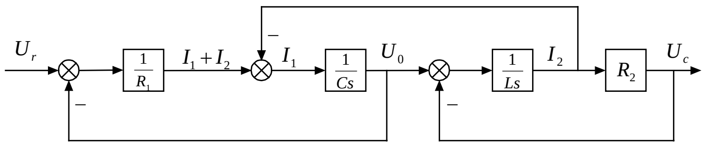

图 2-2　例题 2-1 的动态结构图

3,常参量线性系统的重要性质：

$$a_0\frac{d^nc(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dc(t)}{dt}+a_nc(t)=b_0\frac{d^mr(t)}{dt^m}+\cdots+b_{m-1}\frac{dr(t)}{dt}+b_mr(t) \tag{2-1}$$

用式(2-1)描述的系统具有以下本质性特征

(1) 齐次性：若$c(t)$是系统在$r(t)$作用下的输出，对于任意的实数α，则$\alpha r(t)$作用下的输出为$\alpha c(t)$。

(2) 可加性：若$c_1(t)$是系统在$r_1(t)$作用下的输出，$c_2(t)$是系统在$r_2(t)$作用下的输出，则$r_1(t)+r_2(t)$作用下的输出为$c_1(t)+c_2(t)$。

(1),(2) 又可表示为叠加原理的形式：若$c_1(t)$是系统在$r_1(t)$作用下的输出，$c_2(t)$是系统在$r_2(t)$作用下的输出，对于任意的实数α,β，则$\alpha r_1(t)+\beta r_2(t)$作用下的输出为$\alpha c_1(t)+\beta c_2(t)$。

叠加原理成立是一个系统为线性系统的充分必要条件。

(3) 时不变性：若$c(t)$是系统在$r(t)$作用下的输出，对于任意的实数t_0，则$r(t-t_0)$作用下的输出为$c(t-t_0)$。

时不变性表明系统的性质与(研究系统的)时间起点无关，因此总可假定(研究系统的)开始时刻为零时刻。

此外,式(2-1)不是偏微分方程,表明系统中的过程只与时间有关而和空间的位置无关,式(2-1)不是差分方程,表明系统中的过程连续地依赖于时间,不是只和时间的某些离散时刻有关。

本章所研究的系统模型是集中参数、连续时间、线性、时不变、单输入、单输出、确定性的系统模型，这里任何一个形容词的放宽,都会导致不同的控制理论领域。因此现在所学习的自动控制原理是控制理论中最基础的也是最重要的部分。

4, 本章引入了传递函数这一基本概念，概念的引入过程、所介绍的主要内容以及这些内容间的关系可以用图 2-3 的示意图表示。

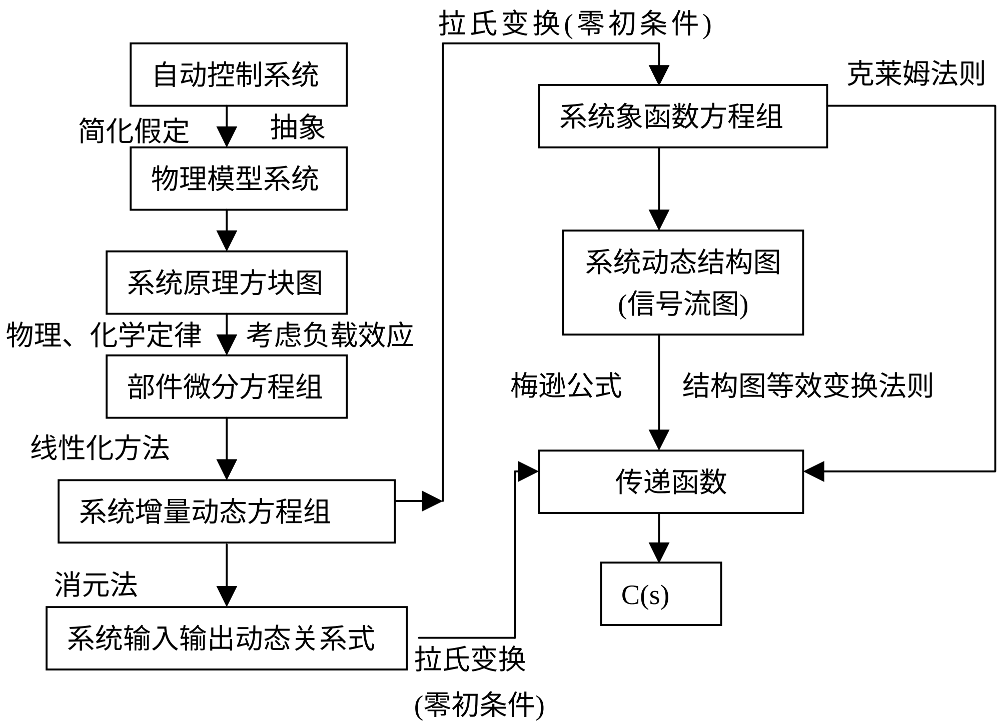

图 2-3 本章主要内容示意图

5,(2-1)式的传递函数是变量 s 的有理分式函数，其分子和分母都是 s 的实系数多项式，因为一个实系数的多项式在实数域中的最简因式是一次因式或二次因式；除了在教材 P.33-34 中列出的分解式外，还有取“负号”的环节，它们对应的因式的根在复平面的右半部，如一阶不稳定环节等。

一阶不稳定环节： $G(s)=\dfrac{1}{Ts-1}$ （$T>0$）

一阶不稳定微分环节： $G(s)=\tau s-1$ （$\tau>0$）

二阶不稳定环节：$G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$ （$-1<\zeta<0$，$T>0$）

此外,在本书中还会遇见因为纯时间延迟带来的延迟环节,其传递函数为 $e^{-\tau s}$。($\tau>0$)

6，关于动态结构图和结构图等效变换

结构图不完全表明物理结构。同一部件或系统的结构图具有多样性，但总的传递函数具有惟一性。

结构图中信号传递的单向性，它反映了原因和结果的关系。输入是引起输出的原因，输出是输入引起的结果。，例如电动机,电枢的电压 $u_a(s)$ 是输入量，电机的转角 $\theta(s)$ 是电动机的输出量，表达这一关系的是图 2-4(a) ，不可以反过反过来画成图 2-4(b) ，因为它违背了物理过程。

(a) (b)

图 2-4 信号传递的单向性

在进行结构变换时要保持输入输出动态关系不变(传递函数不变)，注意分清反馈通道和并联通道，不要简单交换综合点和引出点，各回路若有公共部分时，应当化开，使每个回路均有自己的环节，即化交叉回路为不交叉回路。

7，关于梅逊公式

因为一个线性方程组在用克莱毋姆法则求解时，解的分母行列式是系数矩阵的行列式。因此同一反馈系统，对任一外作用和任一输出变量间的总传递函数的特征式必相同，体现在梅逊公式中就是主特征式Δ相同。求不同的外作用和不同输出变量间的总传递函数时，区别在于是正向通道不同，因而表现出来只是分子不同。

正确使用梅逊公式，在计算Δ时最重要的是不要遗漏回路，在计算分子时不要遗漏正向通道和正确理解与其对应的余子式 Δ_k 。

例题 2-2 系统的结构图如图 2-5(a)所示：试求系统的传递函数 C(s)/R(s)。

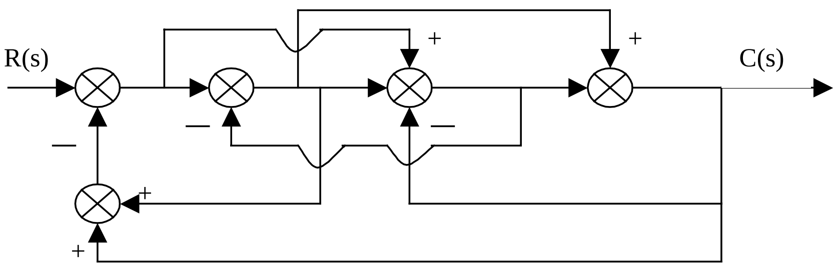

图 2-5(a) 系统的结构图

除了比较明显的回路、正向通道之外，容易被遗漏的回路与正向通路分别表示在图 2-5 (b) 、(c) 、(d) 中。

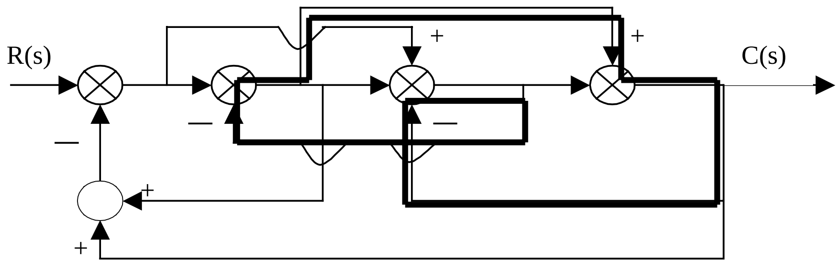

图 2-5(b) 易被遗漏的回路 1

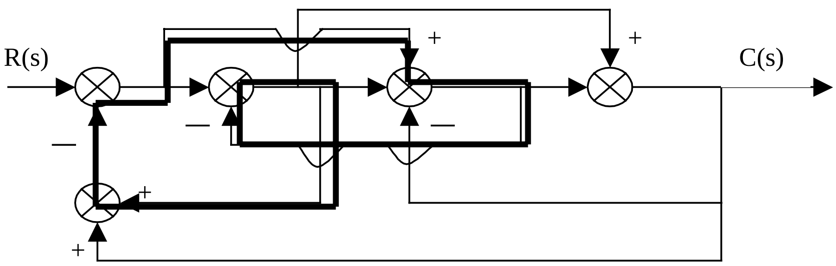

图 2-5(c) 易被遗漏的回路 2

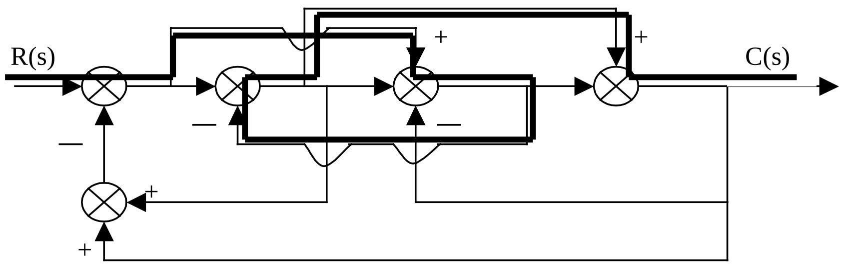

图 2-5(b) 易被遗漏的正向通道

除了在图 2-5 (b) 、(c) 、(d) 中表示出的部分外，其余均是明显的回路与正向通路了，读者不难可继续完成这一例题。(注：本题有四条正向通道，九个回路，一对互不接触的回路。C/R=4/5=0.4)

从这一例题可以看到前述“ 不要遗漏 ” 的重要性，因为遗漏可能会造成全局性的错误。

8, 提倡“ 解方程、结构变换和梅逊公式 ” 灵活地综合运用的方法

为了有效地减少回路与正向通道的数目，可以将能直接用简单结构变换法则合并和简化的部分进行合并和简化；将那些交叉比较严重的部分列写出线性方程求解，保留与前面、后面部分连接需要用的变量，消去不必要的变量；当结构图化简到比较简单即容易看出回路与正向通道时，使用梅逊公式求解。总之解方程、结构变换和梅逊公式三者要灵活地综合运用。例如对例题 2-2 的结构图作简单变换后调整为图 2-6。

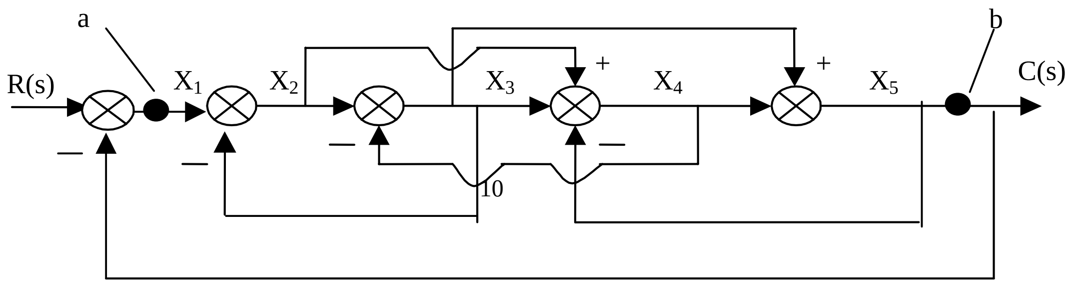

图 2-6 结构图调整后的例题 2-2

解法一：先考虑点 a,b 之间的部分，前向通道四条，回路五个，互不接触的回路一对，用梅逊公式可求出 a,b 之间的增益为 2/3，再运用反馈法则可得 C/R=2/5。
解法二：写出了 a,b 之间各量的方程式如下

$$x_2 = x_1 - x_3, x_3 = x_2 - x_4, x_5 = x_3 + x_4, x_4 = x_2 + x_3 - x_5,$$

可解出 $x_5 = (2/3)x_1$,与前面解法结果一致。

9,传递函数与单位脉冲响应函数

传递函数的反拉氏变换式记为

$$\mathrm{L}^{-1}[\mathrm{G(s)}] = \mathrm{k(t)}$$

其物理意义是 t=0 时刻单位脉冲响应函数 $\delta(t)$ 作用于系统的输出响应，严格的说，应当表示为 $k(t)\cdot 1(t)$。这表明在外作用未加于系统时(t<0)，输出端是不会有响应的。这一关系又称为因果性。有时也称为物理实现性，因为任何实际物理系统都具有这种因果关系。

若是任一时刻 $t=\tau$ 的脉冲 $\delta(t-\tau)$ 作用于系统，其响应是 $k(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)$。系统在输入 r(t) 作用下的输出

$$c(t) = \int_0^t k(t-\tau)\cdot r(\tau)d\tau$$

这一式子也可用拉氏变换的卷积定理得出。

10, 传递函数的局限性与后几章的关系

由传递函数定义可知，它是线性定常系统输入量与输出量之间动态关系的一种描述。它不能表明各中间变量的情况，也不能反映系统非零初始状态的特性；在有些情况下不能完全地描述系统的动态性质，参看第九章，但却反映了系统中最重要的部分。

传递函数概念与后几章的关系可用图 2-7 来表示。

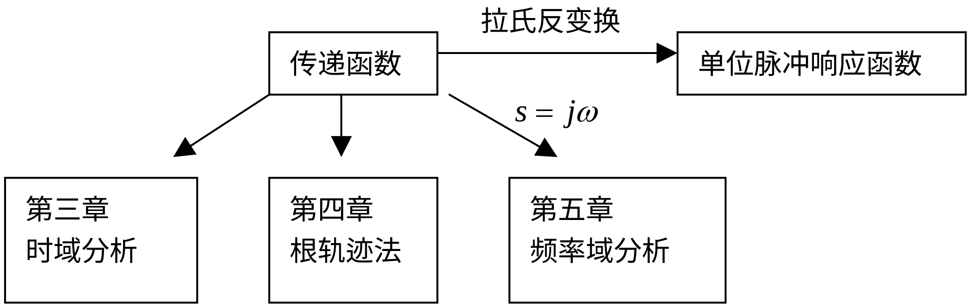

图 2-7 传递函数与后几章的关系