§3 导数的运算法则

一、求导的四则运算

定理1 如果函数$u(x)$, $v(x)$在区间I可导,则它们的和、差、积、商也可导, 并且

$$(1)\ [u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x);$$

$$(2)\ [u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x)\neq 0).$$

证(1)、(2)略.

证(3) 设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $(v(x)\neq 0)$,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

结论得证

推论

$$(1)\quad [\sum_{i=1}^{n} f_i(x)]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);$$

$$(2)\quad [Cf(x)]' = Cf'(x);$$

$$(3)\quad [\prod_{i=1}^{n} f_i(x)]' = f_1'(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$$

$$+ \cdots + f_1(x) f_2(x) \cdots f_n'(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f_1(x) f_2(x) \cdots f_j'(x) \cdots f_n'(x).$$

例1 求 $y = x^3 - 2x^2 + \sin x$ 的导数 .

解 $y' = 3x^2 - 4x + \cos x.$

例2 求 $y = \sin 2x \cdot \ln x$ 的导数 .

解 $\because y = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$

$$y' = 2\cos x \cdot \cos x \cdot \ln x + 2\sin x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x$$

$$+ 2\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2\cos 2x \ln x + \frac{1}{x}\sin 2x.$$

例3 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x.$

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x.$

例4 求 $y = \sec x$ 的导数.

解 $$y' = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec x \tan x.$$

同理可得 $(\csc x)' = -\csc x \cot x.$

二、反函数的导数

定理2 如果函数 $x=\varphi(y)$在某区间I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$, 那末它的反函数 $y=f(x)$在对应区间I_x内也可导, 且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

即 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

例5 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $\because x=\sin y$ 在 $I_y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，

且 $(\sin y)'=\cos y>0$, $\quad\therefore$ 在 $I_x\in(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得 $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};\qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

例6 求函数 $y=\log_a x$ 的导数.

解 $\because x=a^y$ 在 $I_y\in(-\infty,+\infty)$ 内单调、可导，

且 $(a^y)'=a^y\ln a\neq 0$, $\therefore$ 在 $I_x\in(0,+\infty)$ 内有,

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

三、复合函数的求导法则

定理3 如果函数$u=\varphi(x)$在点 x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导，且其导数为

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).}$$

因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

证 由$y = f(u)$在点u_0可导，$\therefore \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)$

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha \quad (\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha = 0)$

则 $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha \Delta u$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}]$$

$$= f'(u_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

推广 设 $y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(x)$,

则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

根据复合结构图逐层求导

$$y = f(u) \longrightarrow u = \varphi(v) \longrightarrow v = \psi(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \boxed{\frac{du}{dx}} = \frac{dy}{du} \cdot \boxed{\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}}.$$

例7 1) 求函数 $y = \ln \underline{\sin x}$ 的导数.

解 $\because y = \ln u, u = \sin x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

2)求函数$y = x^{\mu}(\mu \neq 1, x > 0)$的导数

$$y' = \left(e^{\mu \ln x}\right) \mu \cdot \frac{1}{x} = \mu x^{\mu-1}$$

例8 求函数 $y=(x^2+1)^{10}$ 的导数 .

解 $$\frac{dy}{dx}=10(x^2+1)^9\cdot(x^2+1)'$$

$$=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9.$$

例9 求函数 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ 的导数 . $(a>0)$

解 $$y'=(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2})'+(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a})'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.$$

例10 幂指数函数求导数

$$f(x)=u(x)^{v(x)},u(x)>0\Rightarrow f(x)=e^{v(x)\ln u(x)}$$

$$f(x)=x+x^{x}+x^{x^{x}}$$

解:

$$f'(x)=\left(x+x^{x}+x^{x^{x}}\right)'=\left(x+e^{x\ln x}+e^{x^{x}\ln x}\right)'=\left(x+e^{x\ln x}+e^{e^{x\ln x}\ln x}\right)'$$

$$=1+x^{x}\left[1+\ln x\right]+x^{x^{x}}\left\{(\ln x)x^{x}(1+\ln x)+\frac{1}{x}x^{x}\right\}$$

四、小结

1. 常数和基本初等函数的导数

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

总结

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 函数求导四则运算

3. 复合函数的求导法则

4. 反函数的求导法则

作业:习题3.3

1 (1,2,7小题), 3(2,4,5小题),7