理力Ⅱ（6份）

北京航空航天大学

2004－2005 学年第二学期

考试统一用答题册

参考解答 仅仅仅供参考

题号	一	二	三			总分
成绩						

考试课程 理论力学 B

班级＿＿＿＿＿＿＿ 成绩＿＿＿＿＿＿＿

姓名＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿

2005 年 7 月 7 日

注：试题共 3 页，满分 100 分

一、 单项及多项选择题（将正确答案的字母填在空格内；每题 2 分，共 10 分）

D 1、对于具有定常约束的质点系，其动能可以表示成________。

A：$T=T_2+T_1+T_0$；　B：$T=T_1+T_0$；　C：$T=T_2+T_1$；　D：$T=T_2$

其中：T_i 为广义速度的 i 次齐函数 $(i=0,1,2)$。

A 2、确定一个正方体在空间的位置需要________个独立的参数。

A：6；　B：5；　C：4；　D：3

CD 3、二自由度线性振动系统的固有频率与系统的________有关。

A：初始位置；　B：初始速度；　C：广义质量；　D：广义刚度

AB 4、拉格朗日方程的循环积分反映的是质点系的________。

A：某个广义动量守恒；　B：广义能量守恒

C 5、不论刚体作什么运动，刚体上任意两点的速度在两点连线上的投影________。

A：不一定相等；　B：一定不相等；　C：一定相等

二、 填空题（将最简结果填在空格内；每空 5 分，共 60 分）

1、图 1 所示系统的等效弹簧刚度系数 $k^*=$ $\frac{2k_1k_2}{k_2+2k_1}$。

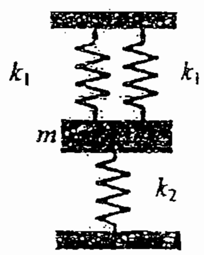
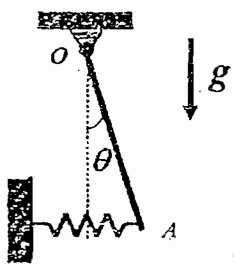


图 1

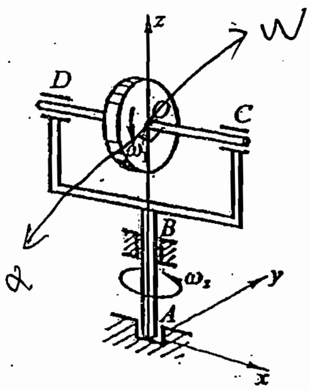


$m\ddot{x}+kx=0$

图 2

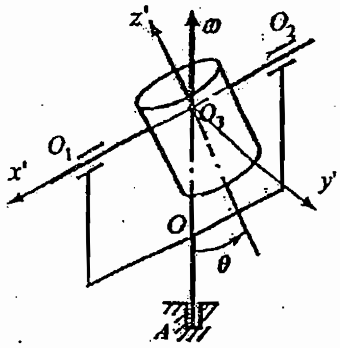
2、如图 2 所示，长为 L 质量为 2m 的均质杆 OA 用光滑柱铰链悬挂在天花板上，下端与刚度系数为 k 的水平弹簧连接，杆铅垂时弹簧为原长。则系统在铅垂位置附近作微幅摆动的固有频率 $\omega_0=$ $\frac{3\theta^2(kl^2+lmg)}{4ml^2}$ X 。 $\sqrt{\frac{3(kl^2+mg)}{2lm}}$

3、如图 3 所示，圆盘以匀角速度 ω_1 绕 CD 轴转动，框架以匀角速度 ω_2 绕铅垂轴转动。则该定点运动圆盘角速度的大小 $\omega=$ $\sqrt{w_1^2+w_2^2}$（方向画在图上），角加速度的大小 $\alpha=$ w_1w_2（方向画在图上）。



W_x

图 3



$W_{y'}=0$

$W_{z'}=0$

图 4

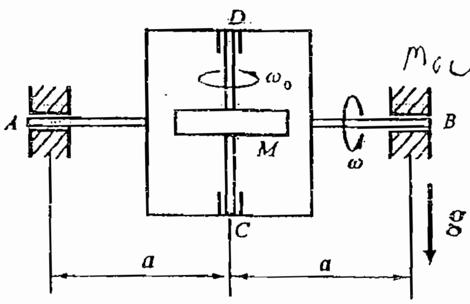
M 相

4、如图 4 所示，圆柱固连在水平轴 O_1O_2 上，并以匀角速度 $\dot{\theta}$ 绕该轴转动，同时框架以匀角速度 ω 绕铅垂轴 AO 转动。其中：x', y', z' 是圆柱上关于 O_3 点的三个互相垂直的惯量主轴，且圆柱对这三根轴的转动惯量分别为 $J_{x'}, J_{y'}, J_{z'}$。则该瞬时圆柱对 O_3 点的动量矩：

$$L_{O_3} = \underline{\quad J_{x'}\dot{\theta} \quad} i' + \underline{\quad J_{y'} \sin\theta\, \omega \quad} j' + \underline{\quad J_{z'} \cos\theta\, \omega \quad} k'$$

5、如图 5 所示，正方形框架以匀角速度 ω 绕水平轴 AB 转动，质量为 m 半径为 R 的均质圆盘 M 以匀角速度 ω_O 绕正方形框架上的 CD 轴转动，且 $\omega_0 >> \omega$，CD 轴到轴承 A、B 的距离皆为 a。若正方形框架和轴 AB 的质量不计，求框架运动到铅垂平面内时，圆盘产生的陀螺力矩的大小 M_g；以及作用在轴承 B 上的约束力的大小 F_B。

$M_g = \underline{\quad \frac{mR^2\omega_0\omega}{2} \quad}$； $F_B = \underline{\quad \frac{mg}{2} + \frac{mR^2\omega_0\omega}{4a} \quad}$



M_G

图 5

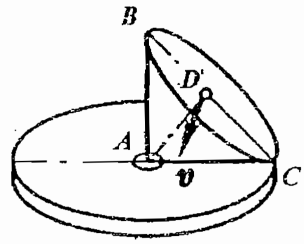


图 6

6、如图 6 所示，具有固定点 A 的圆锥在固定的圆盘上纯滚动，圆锥的顶角为 90^0，母线长为 L，已知圆锥底面中心点 D 作匀速圆周运动，其速度为 v，方向垂直平面 ABC 向外。求圆锥的角速度 ω、角加速度 α 和圆锥底面直径上 C 点的加速度 a_C 的大小。

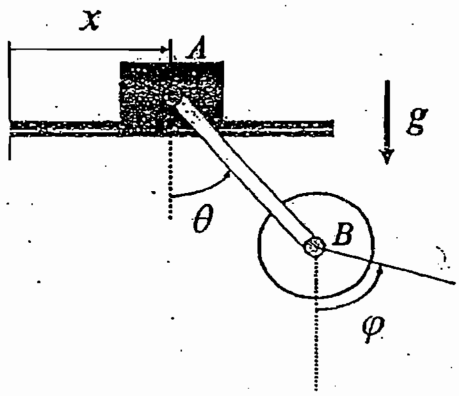
$\omega = \underline{\quad \frac{2V}{L} \quad}$； $\alpha = \underline{\quad \frac{4V^2}{L^2} \quad}$； $a_C = \underline{\quad \frac{4V^2}{L^2} \quad}$

三、 计算题（本题 30 分）

滑块与均质圆盘用不计质量的杆 AB 铰接在铅垂平面内运动，系统的广义坐标如图所示，其中 AB 杆长为 L，圆盘半径为 R，滑块和圆盘的质量均为 m，忽略所有摩擦。

（1）用系统的广义坐标和广义速度给出系统的动能 T 和势能 V（杆在铅垂位置时为势能零点）；

（2）若初始时，杆位于铅垂位置 $\theta_0 = 0$，且角速度为零；滑块的速度为 u，方向水平向右；圆盘的角速度为 ω_0，转向逆时针。试给出系统拉格朗日方程的首次积分并确定积分常数。



$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m(\dot{x} + \dot{\theta}L\cos\theta)^2}{2} + \frac{m(\dot{\theta}L\sin\theta)^2}{2} + \frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{4}$$

$$V = (1-\cos\theta)Lmg$$

$$L = T - V$$

循环 首次积分 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1$ $\cancel{\frac{\partial L}{\partial \theta} = C_2}$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C_3$ $\theta_0 = 0$ $\dot{x} = u$ $\dot{\varphi} = w_0$

$$\begin{cases} m\dot{x} + m(\dot{x} + \dot{\theta}L\cos\theta) = 2mu \\ \cancel{L\cos\theta\, m(\dot{x} + \dot{\theta}L\cos\theta) + m\dot{\theta}L^2\sin^2\theta = uml} \\ \frac{mR^2\dot{\varphi}}{2} = \frac{mR^2 w_0}{2} \end{cases}$$

能量积分 $T + V = E_0$

$$E_0 = mv^2 + \frac{mR^2 w_0^2}{4}$$

05-06

理论力学AII期末考试模拟试题

一、 选择题（将正确答案的字母填在空格内，每小题2分，共10分）

$T=T_2$

1、对于具有定常约束的质点系，其动能 T 最一般的形式可以表示成____AB____的函数。

广义速度＋广义坐标的函数

A：广义速度；　B：广义坐标；　C：时间 t

2、定点运动的圆锥 ABC 在水平固定圆盘上纯滚动，如图 1 所示。若圆锥底面圆心 D 作匀速圆周运动，则该圆锥的角加速度矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系是____BD____。

A：$\boldsymbol{\alpha}$ 平行于 $\boldsymbol{\omega}$；　B：$\boldsymbol{\alpha}$ 垂直于 $\boldsymbol{\omega}$；

C：$\boldsymbol{\alpha}$ 为零矢量；　D：$\boldsymbol{\alpha}$ 为非零矢量

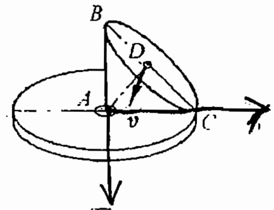


图 1

3、二自由度线性系统的振动周期与____AB____有关。　$T=\sqrt{\frac{m}{k}}$　刚度

A：~~广义质量~~；　B：广义刚度；　C：初始位置；　D：初始速度

4、只应用第二类拉格朗日方程____B____求出非自由质点系的约束力。　没有力之关系

A：一定能；　B：一定不能；　C：不一定能

5、第二类拉格朗日方程可用于研究具有____ABD____质点系的力学问题。

A：完整约束；　B：定常约束；　C：非完整约束；　D：非定常约束

完整约束
定常约束
非定常约束

注：第二类拉格朗日方程为：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\dfrac{\partial T}{\partial q_j}\right)=Q_j \quad (j=1,2,\cdots,k)$，其中 k 为系统的自由度。Q_j 为对应于广义坐标 q_j 的主动力的广义力。

二、 填空题（将最简结果填在空格内，每空5分，共50分）

1、 质量为 m 的质点 M 可在半径为 R 的圆环内运动，圆环以角速度 ω（常矢量）绕 AB 轴作定轴转动，如图 2 所示。θ 为质点的广义坐标，此时质点的动能可以表示成 $T=T_2+T_1+T_0$，其中 $T_i(i=0,1,2)$ 为广义速度的 i 次齐次函数。求：

$T_2=$ $\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$

$T_1=$ 0

$T_0=$ $\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta$

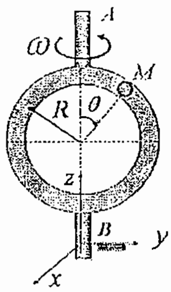


图 2

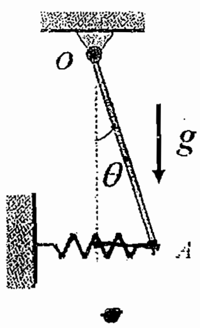


图 3

$(\frac{1}{3}mL^2)\ddot{\theta}+(\frac{1}{2}mgL+kL^2)\theta=0$

$\ddot{\theta}+(\frac{3}{2}\frac{g}{L}+\frac{3k}{m})\theta=0$

$(\frac{1}{3}mL^2)\ddot{\theta}+mg\frac{1}{2}L\sin\theta+kx\cdot L\cos\theta=0$

$(\frac{1}{3}mL^2)\ddot{\theta}+\frac{1}{2}mgL\theta+kL^2\theta=0$

2、长为 L 质量为 m 的均质杆 OA 用光滑柱铰链悬挂在天花板上，下端与刚度系数为 k 的水平弹簧连接，杆铅垂时弹簧为原长，如图 3 所示。求系统在平衡位置附近作微幅摆动的动力学方程。

动力学方程：$\ddot{\theta} + \frac{3(mg+2kL)\theta}{2mL} = 0$。

3、圆盘相对正方形框架 $ABCD$ 以匀角速度 $\sqrt{2}\omega_0$ 绕 BC 轴转动，正方形框架以匀角速度 ω_0 绕 AB 轴转动，如图 4 所示。求该圆盘的绝对角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小和绝对角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 的大小。

$\omega =$ $\sqrt{5}\omega_0$， $\alpha =$ ω_0^2。

$\sqrt{2}\omega_0 \cdot \omega_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \omega_0^2$

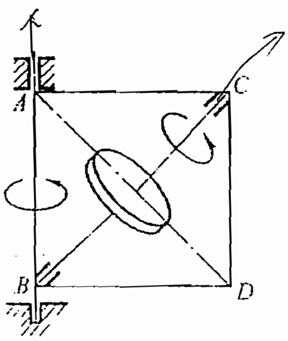


图 4

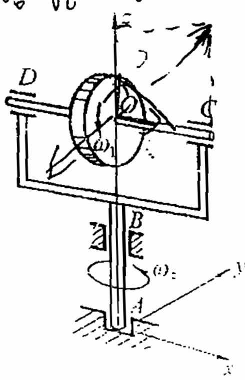


图 5

$\omega' = \sqrt{2}\omega$

$\sqrt{2}\omega \cdot R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} R = \omega R^2$

$\alpha = \omega^2$.

$a_N = \omega^2 h = (\sqrt{2}\omega)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} R = \sqrt{2}\omega^2 R$

$a_R = \alpha \cdot R = \omega^2 R$

4、框架以匀角速度 $\omega_2 = \omega$ 绕铅垂轴 AB 转动；半径为 R 的圆盘以匀角速度 $\omega_1 = \omega$ 绕框架上的 CD 轴转动，如图 5 所示。求：圆盘在图示位置的最高点的速度的大小 v，该点的向轴加速度的大小 a_N 和转动加速度的大小 a_R。

$v =$ ωR； $a_N =$ $\sqrt{2}\omega^2 R$； $a_R =$ $\omega^2 R$

5、如图 6 所示，质量为 m 半径为 R 的均质圆盘可绕其中心水平轴 O 作定轴转动，质量为 m 的滑块 A 可沿铅垂滑道运动，滑块 A 与圆盘通过铰链用长为 R 的无质量杆 AB 连接，忽略所有摩擦，系统在铅垂面内运动。求系统在静平衡位置附近做微幅振动的固有频率 ω_0。

$\omega_0 =$ $2\sqrt{\frac{g}{R}}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{k}_e}{\tilde{m}_e}} = 2\sqrt{\frac{g}{R}}$

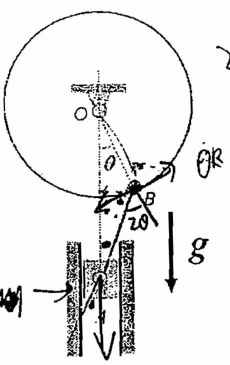


图 6

$2mgR(1-\cos\theta)$

$v_A = 2\dot{\theta}R\sin\theta$

$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$ $\tilde{m}_e = mR^2$ $\tilde{k}_e = 4mgR$

$T = (\frac{1}{2}mR^2)\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(2\dot{\theta}R\sin\theta)^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + 2mR^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2$

$V' = 2mgR\sin\theta\cdot\dot{\theta}$

$V'' = 2mgR[\sin\theta\cdot\ddot{\theta} + \cos\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\theta}] = 2mgR\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\tilde{k}_e\cdot\dot{\theta}^2$

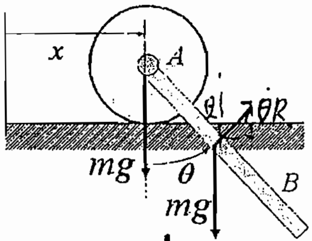
$V = 2mgR(1-\cos\theta)$

$v_A\cdot\cos\theta = \dot{\theta}R\cos(90^\circ-2\theta) = \dot{\theta}R\sin 2\theta = 2\dot{\theta}R\sin\theta\cos\theta$

2

三、　计算题（第 1 小题 25 分，第 2 小题 15 分，本题共 40 分）

1、质量为 m 半径为 R 的均质圆盘在水平地面纯滚动，长为 L 质量为 m 的均质杆 AB 铰接在圆盘中心 A，系统在铅垂平面内运动，系统的广义坐标如图 7 所示。忽略空气阻力与铰链 A 处的摩擦。求：（1）用系统的广义坐标和广义速度给出系统的动能 T 和势能 V（杆在铅垂位置时为~~势~~能零点）；（2）若初始时，杆位于铅垂位置 $\theta_0 = 0$，圆盘中心 A 点的速度为 $\boldsymbol{u}$，杆的角速度为零。试给出系统拉格朗日方程的首次积分并确定积分常数。



要求：给出解题的基本理论和基本步骤。

图7

解 $T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \frac{mR^2}{4} + \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x} + \cos\theta \frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2\right] + \frac{mL^2}{12 \cdot 2}\dot{\theta}^2 = \frac{5m\dot{x}^2}{4} + \frac{1}{2}\cos\theta L\dot{\theta}\dot{x} + \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2$

$V = -mg\cos\theta \frac{L}{2} + mg\frac{L}{2}$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = C_1$　　　　$C_1 = \frac{5mu}{7}$

$T + V = \frac{5}{4}mu^2$

2、已知质量为 m 的定点运动陀螺做规则进动（$\alpha > 0$ 为常量），其质心 C 到球铰链 O 的距离为 L，该陀螺对质量对称轴 z 的转动惯量为 J 且以 ω_2 绕 z 轴高速旋转，z 轴与 z_1 轴的夹角为 α，如图 8 所示，求陀螺的进动角速度 ω_1、铰链 O 的约束力在铅垂方向的分量 F_N 和水平方向的分量 F 的大小。 要求：画出受力图、加速度图；给出解题基本理论和基本步骤。

$M = mgL\sin\alpha = J \cdot w_1 w_2 \sin\alpha$

$w_1 = \frac{mgL}{Jw_2}$

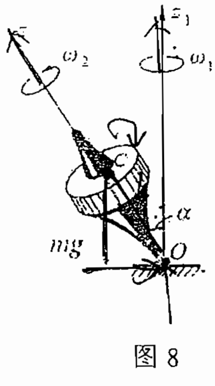


图 8

$F_N = mg$　　$F = m w_1^2 L \sin\alpha$

$\vec{M_g} = J_z \vec{\omega_\varphi} \vec{\omega_\psi}$

$M_g = J \cdot \omega_2 \omega_1 \sin\alpha = mgL \sin\alpha$　　$F_N = mg$.

$\omega_1 = \frac{mgL}{J\omega_2}$.　　$F \cdot L\cos\alpha = mgL\sin\alpha$

$F = mg\tan\alpha$

理论力学 AII 答案

一、 选择题（每题 2 分，共 10 分）

1、AB　　2、BD　　3、AB

4、B

5、ABD

二、填空题（每空 5 分，共 50 分）

1、$T_2 = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 \quad T_1 = 0 \quad T_0 = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 \sin^2\theta$

2、$\ddot{\theta} + \frac{3(mg+2kL)}{2mL}\theta = 0$

3、$\omega = \sqrt{5}\omega_0 \quad \alpha = \omega_0^2$

4、$v = \omega R \quad a_A = \sqrt{2}\omega^2 R \quad a_R = \omega^2 R$

5、$\omega_0 = 2\sqrt{\frac{g}{R}}$

三、 计算题（共 40 分）

1、$T = \frac{5}{4} m\dot{x}^2 + \frac{1}{6} mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mL\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$

$V = \frac{1}{2} mgL(1-\cos\theta)$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2} m\dot{x} + \frac{1}{2} mL\dot{\theta}\cos\theta = \frac{5}{2} mu$

$T + V = \frac{5}{4} mu^2$

2、$\omega_1 = \frac{mgL}{J\omega_2}$,

$F_N = mg$，　$F = m\omega_1^2 L\sin\alpha$.

理力 06~07 第二学期

以人解题过程及答案仅供参考

注：试题共 4 页，满分 100 分

一、 选择题（将正确答案的字母填在空格内，每小题 2 分，共 10 分）

1、对于具有定常约束的质点系，一般情况下其动能 T 可以表示成______________的函数。

A：广义速度　　B：广义坐标　　C：时间 t

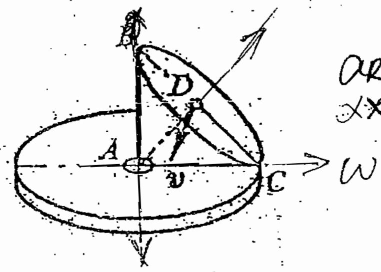
2、绕中心惯量主轴作定轴转动刚体，当其角速度不为零时，该刚体对质心的动量矩矢量____。

A：一定平行于转轴　　B：一定不平行于转轴　　C：不一定平行于转轴

3、定点运动的圆锥 ABC 在水平固定圆盘上纯滚动，如图 1 所示。若圆锥底面中点 D 作匀速圆周运动，AC 为圆锥与圆盘接触的母线。在图示瞬时，该圆锥上 C 点的加速度矢量 a_C 的方向________。

A：平行于 AC　　B：垂直于 ABC 三点确定的平面

C：垂直于 AC 且平行于 AB；　　D：不能确定



$a_R + a_N$

$\alpha \times r$　$\omega\times(\omega\times r)$

0

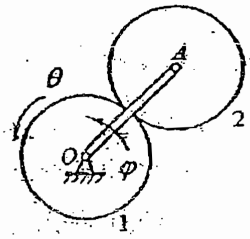


图 1　　$\dot{\theta}$　　图 2

4、两个质量不同的齿轮 1 和 2（视为均质圆盘）相互啮合并用均质杆通过光滑柱铰链连接，在水平面内运动，θ 为齿轮 1 的转角，φ 为 OA 杆的转角，如图 2 所示。该系统拉格朗日方程有_____B____个循环积分（广义动量积分），有________ 个广义能量积分。

$\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q}$

$\frac{\partial(T-V)}{\partial q}$　$\frac{\partial(T-V)}{\partial q}$

A：3　　B：2　　C：1　　D：0

5、单自由度线性系统自由振动的振幅与____AB____________有关。

$T = T_2 - T_1 + T_0$

A：广义质量　　B：广义刚度　　C：初始位置　　D：初始速度

二、　填空题（将最简结果填在空格内，每空 4 分，共 40 分）

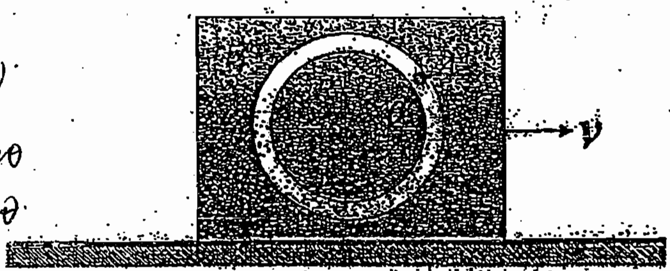
1、滑块在水平地面上沿直线以给定速度 v 移动，其大小 $v=at$，（a 为常数）。质量为 m 的质点 A 可在滑块上的圆槽内运动，圆槽的半径为 R，如图 3 所示。设 θ 为质点 A 的广义坐标，此时质点的动能可以表示成 $T=T_2+T_1+T_0$，其中 $T_i(i=0,1,2)$ 为广义速度的 i 次齐函数。则：

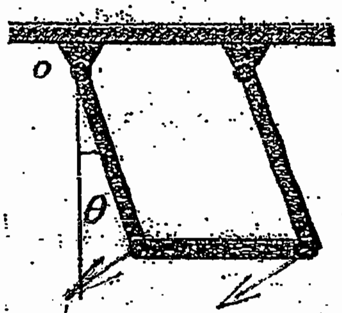
$T_0=$ ________________　　$T_1=$ ________________

$\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)$

$v_x=v+R\dot\theta\sin\theta$

$v_y=-R\dot\theta\cos\theta$





$T=\frac{1}{2}mv^2+mvR\dot\theta\sin\theta+\frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2$

图 3　　图 4

$V=2\times 2mg\times\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$

$+mgL(1-\cos\theta)=3mgL(1-\cos\theta)$

2、各长为 L 质量为 $2m$ 的三根均质杆用光滑柱铰链连接可在铅垂面内摆动，如图 4 所示。则该系统在平衡位置附近作微幅振动的固有频率：

$\frac{1}{2}m(0)\dot q^2$

$\frac{1}{2}V''(0)q^2$

$2\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}2mL^2)\dot\theta^2+\frac{1}{2}2m(L\dot\theta)^2=\frac{5}{3}mL^2\dot\theta^2=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}mL^2\dot\theta^2 \rightarrow m(\theta)$

$\omega=$ $\sqrt{\frac{\frac{10}{3}mL^2}{3mgL}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10L}{g}}$

$V'=3mgL\cos\theta$

$V''(0)=3mg=k$

3、半径为 R 的薄圆盘以大小为 ω_0（常量）的角速度绕 CD 轴转动，CD 轴支撑在框架上，该框架以大小为 $\omega_{AB}=\omega_0$ 的角速度绕 AB 轴转动，如图 5 所示。求图示瞬时，圆盘的角速度大小 ω、角加速度大小 α、圆盘上最右边的一点 M 的速度 v_M、该点的转动加速度的大小 a_R 和向轴加速度的大小 a_N。$\omega_{AB}\times\omega_0$

$\alpha\times r$

$\omega=$ $\sqrt{2}\omega_0$

$\alpha=$ ω_0^2　(⊗)

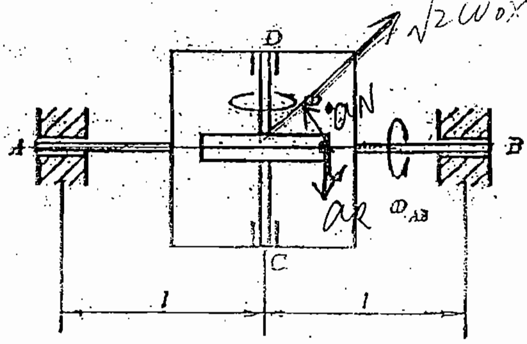
$v_M=$ ωR

$a_R=$ ω_0^2R

$a_N=$ $\sqrt{2}\omega_0^2R$

瞬轴

$\sqrt{2}\omega_0\times\frac{\sqrt{2}}{2}r)\times\sqrt{2}$

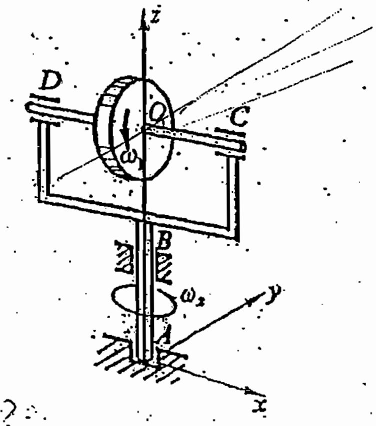


ω^2R　　$2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\omega\times(\omega\times r)$

图 5

4、框架以匀角速度$\omega_z=\omega$绕铅垂轴AB转动，质量为m半径为R的均质圆盘以匀角速度$\omega_1=2\omega$绕框架上的CD轴转动，圆盘盘面垂直于CD轴且质心O在转轴上，如图6所示。求圆盘对O点的动量矩M_O的大小和对z轴动量矩M_z的大小。(圆盘对CD轴的转动惯量为$mR^2/2$，对圆盘上某一直径的转动惯量为$mR^2/4$)



$M_O=$ ______

$M_z=$ $\frac{1}{4}mR^2\omega_z$

对于转轴是否有动量矩？

图6

三、 计算题（第1小题30分，第2小题20分，本题共50分）

1、质量为m半径为R的均质圆盘在光滑的水平地面运动，圆盘中心用柱铰链连接一长为L的细杆AB（不计其质量），其B端连接一个质量为m的小球B（视为质点），系统在铅垂平面内运动，设系统的广义坐标如图7所示，其中：x为圆盘质心的水平坐标，φ为圆盘的转角，θ为AB杆的转角。忽略空气阻力和所有摩擦。求：（1）用系统的广义坐标和广义速度给出系统的动能T和势能V（杆在铅垂位置时为势能零点）；（2）若初始时，AB杆位于铅垂位置$\theta_0=0$，圆盘中心A点的速度为u（水平向右），圆盘的角速度为ω（顺时针），AB杆的角速度为零。试给出系统拉格朗日方程的首次积分（如果存在）并确定积分常数。

要求：给出解题的基本理论和基本步骤。

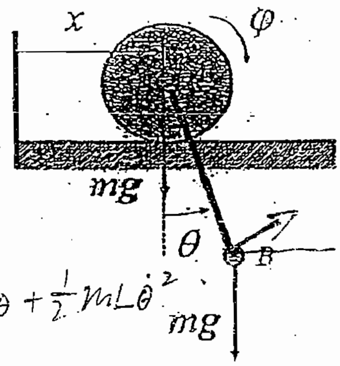


图7

$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}mR^2)\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}+L\dot{\theta}\cos\theta)^2+\frac{1}{2}m(L\dot{\theta}\sin\theta)^2$

$=m\dot{x}^2+\frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2+mL\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta+\frac{1}{2}mL\dot{\theta}^2$

$V=mgL(1-\cos\theta)$

循环积分： 循环坐标 x，φ. $L=T-V$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=C_1$，$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=C_2$

$2m\dot{x}+mL\dot{\theta}\cos\theta=C_1$ $C_1=2mu$

$\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}=C_2$ $C_2=\frac{1}{2}mR^2\omega$

能量积分：

2、质量为 m 半径为 R 的均质圆盘相对正方形框架 $ABCD$ 以匀角速度 ω 绕 BC 轴转动，圆盘盘面垂直于 BC 轴，且其质心在该轴上，正方形框架以匀角速度 Ω 绕铅垂轴 AB 转动，且 $\omega >> \Omega$，设正方形框架的边长为 L，轴承 A 到球铰链 B 的铅垂距离为 h，如图 8 所示。忽略框架质量以及所有摩擦。求：(1) 圆盘质心的加速度的大小 a；(2) 圆盘陀螺力矩的大小 M_g；(3) 轴承 A 约束力的大小 F_A、球铰链 B 水平约束力的大小 F_{B1} 和铅垂约束力的大小 F_{B2}。~~要求：给出解题的基本理论和基本步骤，指明研究对象并画出必要的受力图。~~

$\vec{a}=\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r_c})=\Omega^2 r_c=\frac{1}{2}\Omega^2 L$

$Mg=\frac{1}{2}mR^2\times|\vec{\omega}\times\vec{\Omega}|$

$=\frac{1}{2}mR^2\times\omega\times\Omega\times\sin45^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}mR^2\omega\Omega$

(3) $\vec{M_{b1}}+\vec{Mg}=0$

对框架和圆盘整体

$\vec{F_A}+\vec{F_{B1}}=0$

$M_{b1}=F_A h+mg\frac{L}{2}$

$F_A=\frac{\sqrt{2}}{4}mR^2\omega\Omega-\frac{1}{2}mgL$

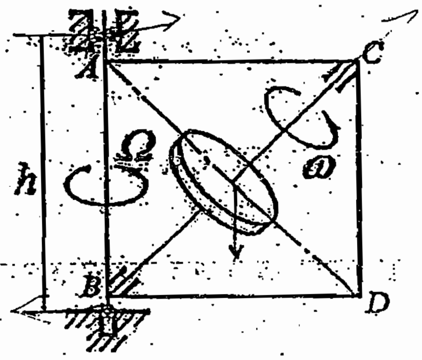


图 8

圆周运动和平面运动相联系化为直角坐标系 $T=\frac{1}{2}(v_x+v_y)^2=\frac{1}{2}(\dot{x}+\dot{y})^2$

以角的大小求法

北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

2008—2009 学年第二学期

考试统一用答题册(A 卷)

题　　号	一	二	三、1	三、2	总分
成　　绩					
阅卷人签字					
校对人签字					

考试课程　理论力学 2

班　　级＿＿＿＿＿＿　学　号＿＿＿＿＿＿

姓　　名＿＿＿＿＿＿　成　绩＿＿＿＿＿＿

2009 年 6 月 18 日

A

注意事项：试卷共 4 页，满分 100 分

一、选择题（每空 2 分，共 10 分）

1、应用动力学普遍方程可以给出____A____和系统运动之间的关系。

A：主动力；　　B：完整约束力；　　C：非完整约束力；

2、第二类拉格朗日方程可用于研究具有____A、C、D____系统的动力学问题。

A：理想约束；　B：非理想约束；　C：定常约束；　D：非定常约束；

3、已知某瞬时定点运动刚体上两点的速度矢量，____C____求出该刚体的角速度矢量。

A：一定能；　　B：一定不能；　　C：不一定能；

4、多自由度线性振动系统的固有频率和振型与系统的____C、D____有关。

A：初始位置；　B：初始速度；　C：广义质量；　D：广义刚度；

5、对于具有非定常约束的质点系，一般情况下其动能 T 可以表示成____A、B、C____的函数。

A：广义速度；　　B：广义坐标；　　C：时间 t；

二、填空题（将正确答案的最简结果填在空格内。第三小题第一问 5 分，其余每空 5 分，共 50 分）

1、如图 1 所示，均质杆 AB 长为 l，质量为 m，用两根相同的弹簧（质量不计）悬挂，杆 AB 水平，两弹簧与铅垂线的夹角均为30°。初始时杆静止，求弹簧 B 被截断后的瞬时，杆 AB 的角加速度 α 的大小____$\frac{3g}{l}$____，质心加速度 a_C 的大小____$\frac{\sqrt{3}}{2}g$____。

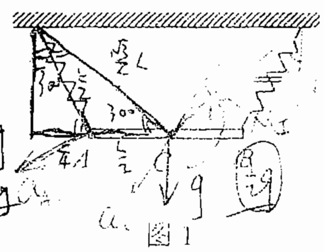


图 1

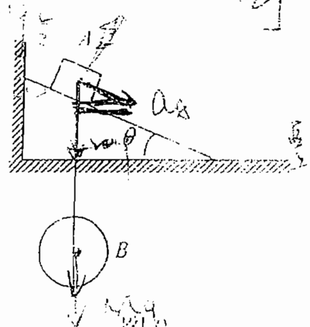


图 2

2、如图 2 所示，滑块 A 与均质圆盘 B 的中心用不可伸长的绳索连接，不计绳索质量和所有摩擦。初始时刻系统无初速度释放，则此时滑块 A 加速度的大小为 a_A 和圆盘中心点的加速度大小 a_B 间的关系为 a_B =____$\sin\theta a_A$____。

3、如图 3 所示，均质圆板质量为 m，半径为 R，可绕过质心 C 的水平轴 x 作定轴转动。已

知板相对于质量对称轴 y' 和 z' 的转动惯量为 $\frac{1}{4}mR^2$，x' 轴和 x 轴的夹角为 θ。图示瞬时圆板的角速度为 ω， y' 轴与铅垂面（xCy 平面）的夹角为 φ。则此时：

该板对质心 C 的动量矩：L_C = $\frac{1}{2}mR^2\omega\cos\theta$ ~~,~~ $\frac{1}{4}mR^2\omega\sin\theta\cos\varphi$, $\frac{1}{4}mR^2\omega\sin\theta\sin\varphi$

该板的动能： T = ~~$\frac{1}{2}mR^2\omega^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta=\frac{1}{2}mR^2\omega^2$~~。 $\frac{1}{8}mR^2\omega^2(1+\cos^2\theta)$

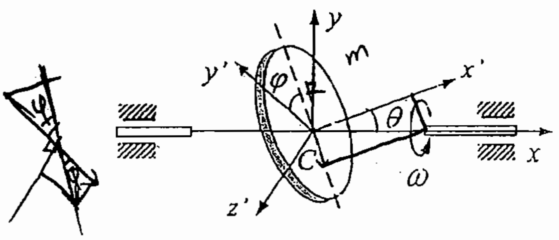


图 3

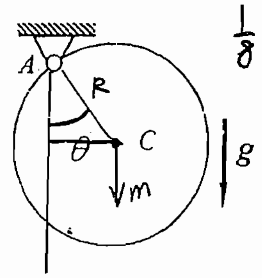


图 4

4、如图 4 所示，均质圆盘 AC 质量为 m，半径为 R，在铅垂面内绕水平轴 A 作定轴转动。不计摩擦，则圆盘在静平衡位置附近作微幅振动的固有频率 $\omega_0=$ $\sqrt{\frac{2g}{3R}}$。

5、如图 5 所示，具有固定顶点 O 的圆锥在水平面上纯滚动。圆锥的顶角 $\angle AOB=90^0$，母线长为 R. 底面中心 C 做匀速圆周运动，速度大小为 $v_C=\omega R$。求：

圆锥上最高点 B 的速度大小： $v_B=$ $2\omega R$；

圆锥的角加速度大小： $\alpha=$ $4\omega^2$；

圆锥上最高点 B 的加速度大小： $a_B=$ $4\sqrt{2}\omega^2 R$。

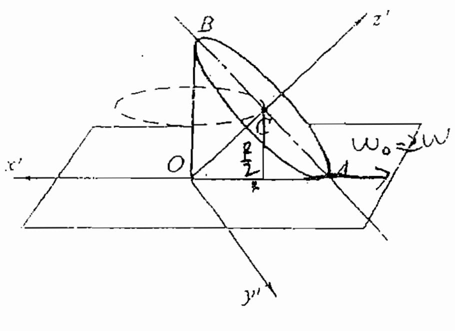


图 5

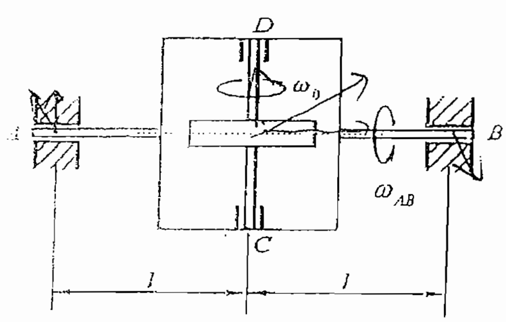


图 6

6、如图 6 所示，质量为 m，半径为 R 的均质薄圆盘以大小为 ω_0(常量)的角速度绕 CD 轴转动，CD 轴支撑在框架上，该框架以大小 ω_{AB}(常量)的角速度绕 AB 轴转动。若且 $\omega_0>>\omega_{AB}$，轴承 A 和 B 间的距离为 $2l$，则轴承 A 处的约束力大小 $F_A=$ $-\frac{1}{4}mR^2\frac{\omega_0\omega_{AB}}{l}+\frac{1}{2}mg$

A

三、 计算题（每小题 20 分，共 40 分）

1、图 7 所示系统位于铅垂面内，质量为 m 半径为 R 的均质圆环 A 在地面上纯滚动，一质量为 m 的质点 B 可沿光滑圆环运动。取圆心 A 的 x 坐标，以及 AB 连线与铅垂线的夹角 θ 为广义坐标。初始时刻：圆心 A 的速度为 u，方向水平向右，$\theta = 60^0$，$\dot{\theta} = 0$。（要求：画出必要的速度图。）

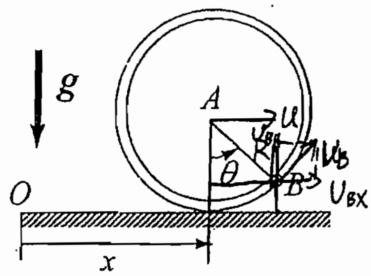


图 7

试用广义坐标和广义速度表示：

(1) 系统的动能 T；

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \times (mR^2) \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + \cos\theta R\dot{\theta})^2 + (\sin\theta \dot{\theta} \right.$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{\theta} R\cos\theta + \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{3}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}\dot{\theta} R\cos\theta$$

(2) 系统的势能 V（设 $\theta = 0$ 时系统势能为零），

$$V = mgR(1-\cos\theta)$$

求：(3) 拉格朗日方程的广义动量积分（如果存在）以及积分常数；

$$L = T - V = \frac{3}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}\dot{\theta} R\cos\theta - 2mgR + mgR\cos\theta$$

不显含 x $\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x} + m\dot{\theta} R\cos\theta = 3mu = $ 常数

(4) 拉格朗日方程的广义能量积分（如果存在）以及积分常数。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} = 3m\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{\theta} R\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} = mR^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}\dot{\theta} R\cos\theta$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta}\right) = 3m\dot{x}^2 + 2mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + mR^2\dot{\theta}^2 = 3mu^2$$

A

2、如图 8 所示，质量均为 m 的均质杆 OA、AB 和 BD 用铰链连接，静止于铅垂面内，水平杆 OA 和 BD 的长度相等，且 O、B 连线及 A、D 连线垂直。求 A 处的绳索被剪断后的瞬时，铰链 A 的加速度和铰链 O、D 处的约束力 F_{ox}，F_{oy}，F_{Dx}，F_{Dy}（水平向右为 x 正向，铅垂向上为 y 轴正向）。（要求：画出必要的受力图和加速度图；给出解题的基本公式或定理，以及简单的求解步骤。）

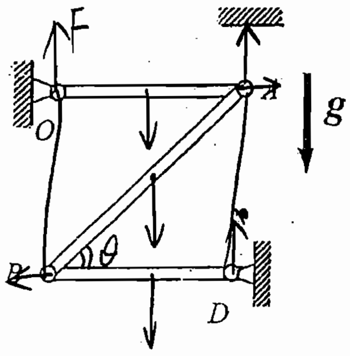


图 8

$3m\cdot\frac{L}{2}=F\cdot L$. $F_A=\frac{3}{2}mg$

$F_{Dx}=F=\frac{m\cdot\frac{L}{2}}{}$

$F_A+F_O+F_D=3m$

$3m\frac{L}{2}=(F_A+F_D-F_D')L$

$3m\frac{L}{2}=(F_O+F_O')L$

$F_O'+F_D'=0$

F

北航中法学院20090618理论力学期末考试答案

一、选择题

A卷：1、A　2、ACD　3、C　4、CD　5、ABC

B卷：1、C　2、ABC　3、A　4、AB　5、ABC

6

二、填空题

1、A卷：$\alpha=\frac{3g}{l}$　$a_C=\frac{\sqrt{3}}{3}g$　B卷：$\alpha=\frac{3g}{l}$　$a_C=\frac{\sqrt{2}}{2}g$

45

2、A卷：$a_B=a_A\sin\theta$　B卷：$a_A=\frac{a_B}{\sin\theta}$

3、A卷：$L_C=\frac{1}{2}mR^2\omega\cos\theta i'-\frac{1}{4}mR^2\omega\sin\theta\cos\varphi j'+\frac{1}{4}mR^2\omega\sin\theta\sin\varphi k'$

$T=\frac{1}{8}mR^2\omega^2(1+\cos^2\theta)$

B卷：$L_C=\frac{1}{2}mr^2\omega\cos\theta i'-\frac{1}{4}mr^2\omega\sin\theta\cos\varphi j'+\frac{1}{4}mr^2\omega\sin\theta\sin\varphi k'$

$T=\frac{1}{8}mr^2\omega^2(1+\cos^2\theta)$

4、A卷：$\omega_0=\sqrt{\frac{2g}{3R}}$　B卷：$\omega_0=\sqrt{\frac{2g}{3r}}$

5、A卷：$v_B=2\omega R$　$\alpha=4\omega^2$　$a_B=4\sqrt{2}\omega^2R$

B卷：$v_B=2\omega r$　$\alpha=4\omega^2$　$a_B=4\sqrt{2}\omega^2 r$

6、A卷：$F_A=\frac{1}{2}m\left(g-\frac{\omega_0\omega_{AB}R^2}{2l}\right)$　B卷：$F_B=\frac{1}{2}m\left(g+\frac{\omega_0\omega_{AB}r^2}{2l}\right)$

2分　3分

三、计算题

共6分　4分

1、$T=\frac{3}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2+mR\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$　$V=mgR(1-\cos\theta)$　57

3分　2分　62

循环积分：$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=3m\dot{x}+mR\dot{\theta}\cos\theta=3mu$

能量积分：$T+V=\frac{1}{2}m(3u^2+gR)$ 2分

3分

2、$\alpha=\frac{6g}{5l}$；　$F_{ox}=F_{Dx}=0$；　$F_{oy}=F_{Dy}=\frac{3}{10}mg$

B

北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

2009－2010 学年第二学期

考试统一用答题册

题号	一	二	三		总分
成绩					
阅卷人签字					
校对人签字					

考试课程 理论力学（B 卷）

班级＿＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿＿

姓名＿＿＿＿＿＿＿＿ 成绩＿＿＿＿＿＿＿＿

2010 年 6 月 28 日

B

注：试题共 4 页，满分 100 分

一、 选择题（在正确答案对应的字母上打√。每小题 3 分，共 15 分）。

1、第二类 Lagrange 方程适用于研究具有下列哪类约束的质点系的动力学问题？

ACD

A：完整约束　　B：非完整约束　　C：定常约束　　D：非定常约束

2、定点运动刚体的自由度可以是________。

ABCD

A：1　$\psi \cdot \varphi \cdot \theta$　　B：2　　C：3　　D：4

3、定点运动的圆锥 ABC（$AC \perp AB$）在水平固定圆盘上纯滚动，如图 1 所示。若圆锥底面中点 D 作匀速圆周运动，则在图示瞬时，圆锥母线 AB 上 B 点加速度矢量 a_B 的方向_____。

D

A：平行于 AB　　B：垂直于 A、B、C 三点所确定的平面

C：平行于 AC　　D：位于 A、B、C 三点所确定的平面内

$\vec{a}=\omega^2 r$

$\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

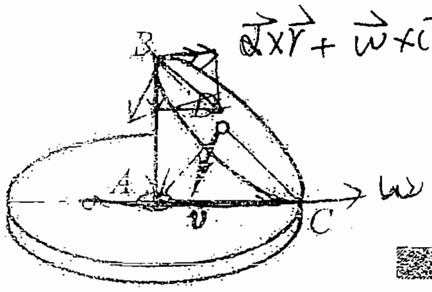


图 1

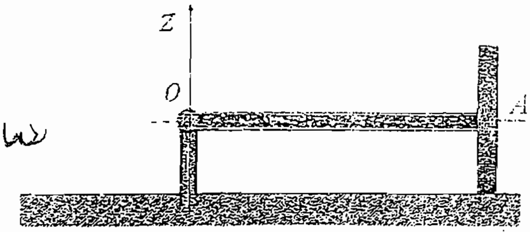


图 2

4、均质圆杆 OA 与均质薄圆盘中心固连，并通过光滑球铰链约束于固定点 O。OA 杆水平且与圆盘面垂直，圆盘放置在水平面上，如图 2 所示。当系统静止时，地面作用于圆盘法向约束力的大小为 F_N；当给系统一个初始扰动，在主动力仅为自身重力的作用下，圆盘中心 A 点作匀速圆周运动，圆盘在地面上纯滚动（不计滚阻力偶），此时地面作用于圆盘的法向约束力的大小为 F_N^*。若比较这两种情况下法向约束力的大小，则下列哪个结论是成立的。

D

A：$F_N = F_N^*$　　B：$F_N < F_N^*$　　C：$F_N > F_N^*$　　D：条件不足无法确定

CD

5、单自由度线性系统无阻尼自由振动的固有频率与系统的____C、D____有关。

A：广义坐标　　B：广义速度　　C：广义质量　　D：广义刚度

$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$　　$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

B

二、　填空题，将计算的最简结果填写在空格里（本题共 60 分，每空 5 分）。

1、滑块 G 用两弹簧连接在倾角为 α 的斜面上并沿斜面直线平移，如图 3 所示。求该系统的等效弹簧刚度系数 k^*。　$k^* =$ $\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

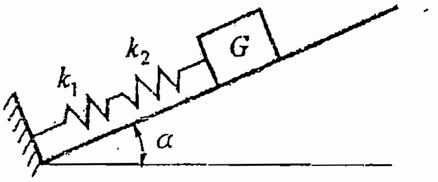
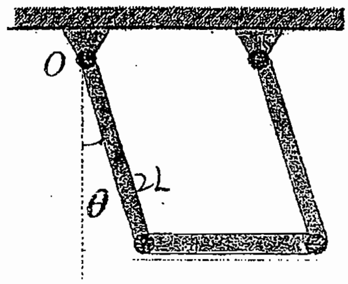


图 3



$T=$ 图 4 $2\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}mL^2)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2$

$V = mg2L(1-\cos\theta)+2\times2mgL(1-\cos\theta$

2、三个相同的均质杆用光滑柱铰链连接，在铅垂面内运动，如图 4 所示。若杆长为 $2L$，重力加速度为 g，求该系统在平衡位置附近作微幅振动的固有频率 ω_0。

$T=\frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2=\frac{5}{6}mL^2\dot{\theta}^2$

$=\frac{10}{3}mL^2$

$V=4mgL(1-\cos\theta)$

$\frac{20}{3}mL^2\ddot{\theta}+4mgL\theta=0$

$\omega_0 =$ $\sqrt{\frac{3g}{5L}}$

3、质量为 m 的质点 C 被约束在半径为 R 的圆环内运动，圆环以匀角速度 ω 绕铅垂轴 z 转动，CO 连线与铅垂线的夹角为 θ（系统的广义坐标），如图 5 所示。该质点受到的是非定常约束，其动能可表示为 $T=T_2+T_1+T_0$，其中 $T_i(i=0,1,2)$ 为广义速度的 i 次齐函数。求该质点的 T_1、T_0。

$T_1 =$ $\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$　　　　$T_0 =$ $\frac{1}{2}m\omega^2$

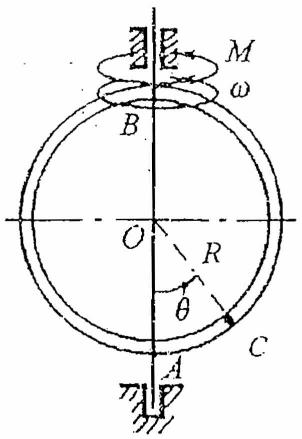


图 5

$R=0.1m$

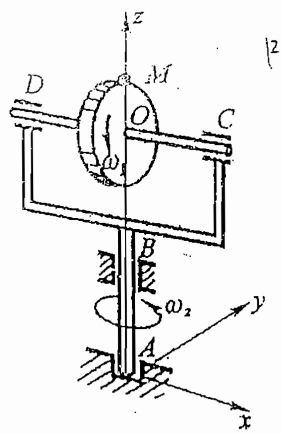


图 6

B

4、半径为 R=0.1m 的圆盘以匀角速度 $\omega_1 = 8\text{rad/s}$ 绕 CD 轴转动，该轴被水平支撑在框架 BCD 上，该框架以匀角速度 $\omega_z = 6\text{rad/s}$ 绕铅垂轴 z 转动，圆盘中心 O 位于 CD 轴与 z 轴的交点，如图 6 所示。求该圆盘角速度的大小 ω，角加速度的大小 α，图示瞬时圆盘最高点 M 的向轴加速度的大小 a_N、转动加速度的大小 a_R 和切向加速度的大小 a_t。

$a_N = \omega^2 r$

$a_R = \alpha \cdot r$

$a_t = \omega^2 R$

$\omega =$ 10rad/s，　$\alpha =$ 100 rad/s²，

$a_N =$ 6.4 rad/s²　$a_R =$ 10 rad/s²　$a_t =$ 6.4 rad/s²

5、棱长为 L 的正方体绕 O 点作定点运动，已知该瞬时正方体顶点 A、B 的速度方向，如图 7 所示，其中 B 点速度的大小为 u。求该瞬时正方体的角速度的大小 ω 和顶点 C 速度的大小 v_C

$\omega =$ $\frac{\sqrt{2}u}{2L}$，　$v_C =$ $\frac{\sqrt{2}}{2}u$

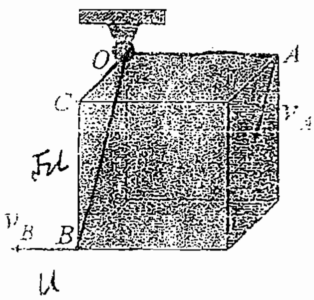


图 7

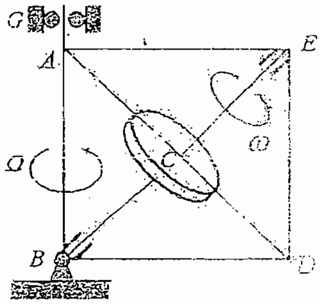


图 8

6、若质量为 m 半径为 R 的均质圆盘绕边长为 L 的正方形框架的对角线 BE 以匀角速度 ω 转动，框架 $ABDE$ 以匀角速度 Ω 绕铅垂轴 AB 转动，且 $\omega >> \Omega$；如图 8 所示。求该圆盘陀螺力矩的大小 M_g。

$M_g =$ $\frac{1}{2}mR^2\omega\Omega\cdot\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{4}mR^2\omega\Omega$

B

三、计算题（本题25分）

质量为 m、半径为 R 的均质圆盘 A 在水平面上纯滚动，质量为 M 的质点 B 用长为 L 的无质量杆通过光滑柱铰链与圆盘中心连接，系统在铅垂面内运动，如图9所示。若以轮心的水平坐标 x 和杆与铅垂线的夹角 θ 为系统的广义坐标，(1) 试用系统的广义速度和广义坐标给出系统动能 T 的表达式，(2) 试用系统的广义坐标给出系统势能 V 的表达式（$\theta=0$ 时为势能零点），(3) 若初始时，系统静止，$\theta=90^0$，试给出该系统 Lagrange 方程的首次积分（循环积分和能量积分），并确定积分常数。

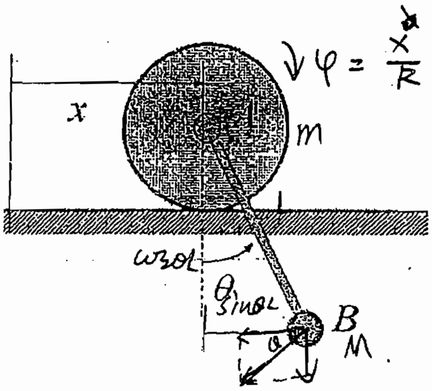


图 9

要求：给出解题的基本步骤和最简答案

解：

1、系统的动能 T

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\times\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}+\cos\theta R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M\sin^2\theta R^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{\dot{x}^2}{R^2} + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + M\dot{x}\dot{\theta}R\cos\theta + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$= \cancel{\frac{5}{4}m\dot{x}^2} + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + MR\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$= \cancel{\frac{5}{4}m\dot{x}^2}\ \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + ML\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{4}(3m+2M)\dot{x}^2$$

2、系统的势能

$\ddot{\theta} = \underline{g}$

$V =$ $MgL(1-\cos\theta)$

3、系统 Lagrange 方程的首次积分

$\cancel{L=T-V}$

循环积分：

$\frac{1}{2}(3m+2M)\dot{x}$

不显含 x 则 $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2}m\dot{x} + mL\cos\theta\cdot\dot{\theta} = 0+0=0$

$p=0$

能量积分：

能量积分守恒 $\cancel{T+V=\frac{5}{4}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2+mL\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}}+M$

$$T+V = \frac{1}{4}(2M+3m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + mL\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} + MgL(1-\cos\theta)$$

$$= MgL$$