第13章 非正弦周期电流电路和信号的频谱

本章重点

1. 周期函数分解为傅里叶级数

2. 非正弦周期函数的有效值和平均功率

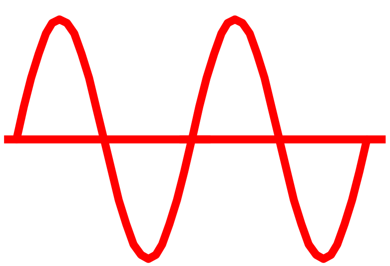
3. 掌握谐波分析法分析非正弦周期电流电路

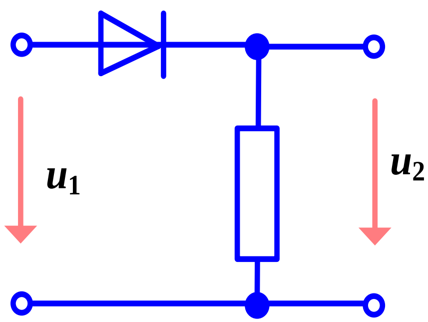
1. 非正弦周期交流信号的特点

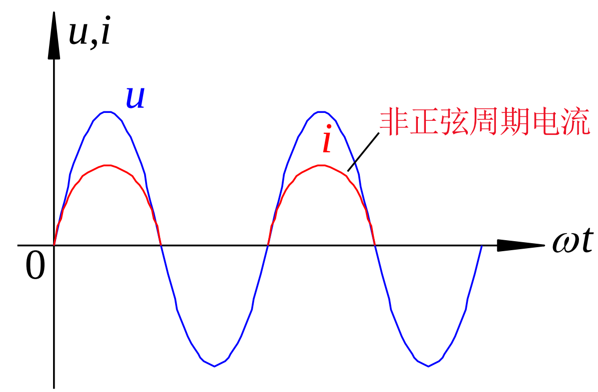
（1）不是正弦波

（2）按周期规律变化　　$f(t)=f(t+kT)$

2. 常见的几种非正弦周期信号

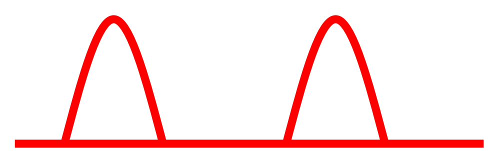






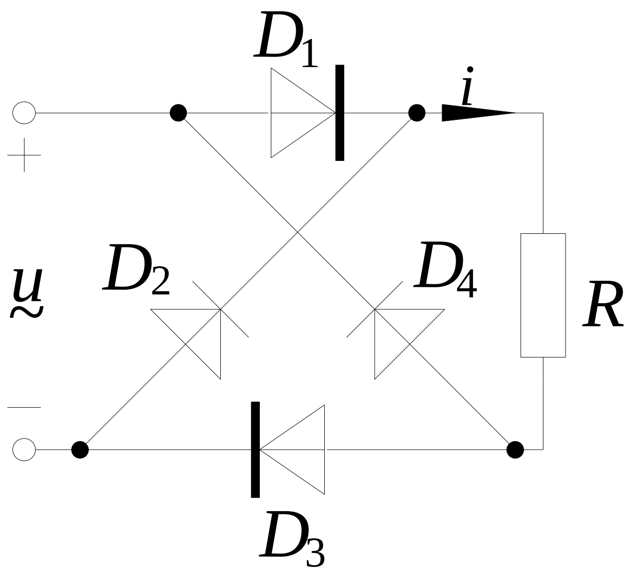
u_1为正半周时，D导通，R中有 i 流过； u_1为负半周时，D截止，R中无电流流过（i=0)

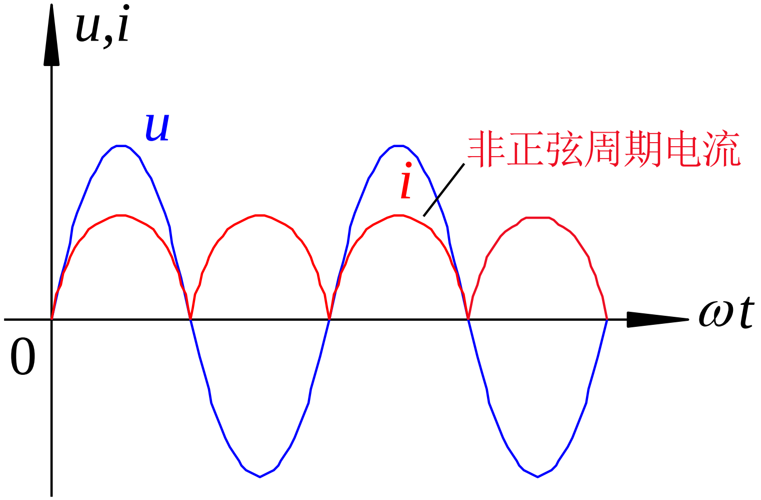
半波整流电路



正半周：D_1、D_3 导通；

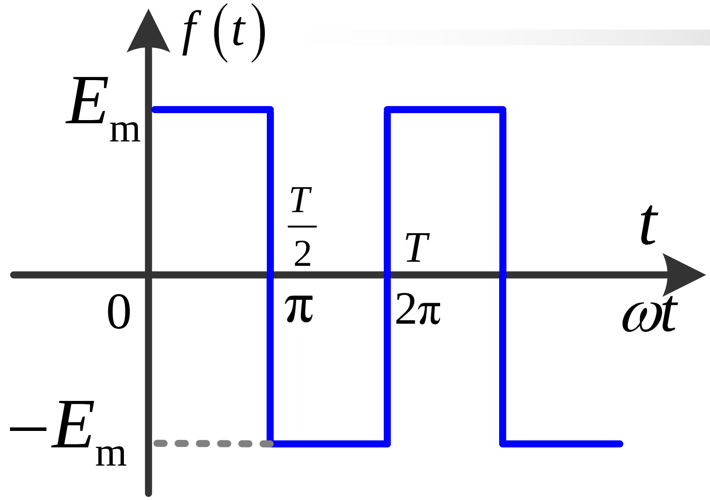
负半周：D_2、D_4 导通



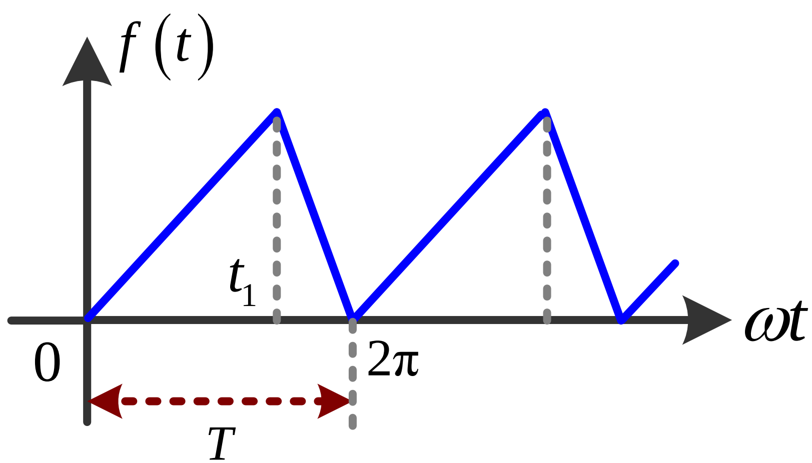


全波整流电路

方波



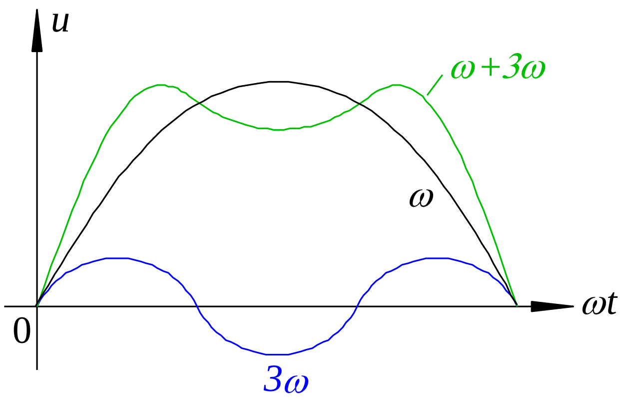
锯齿波

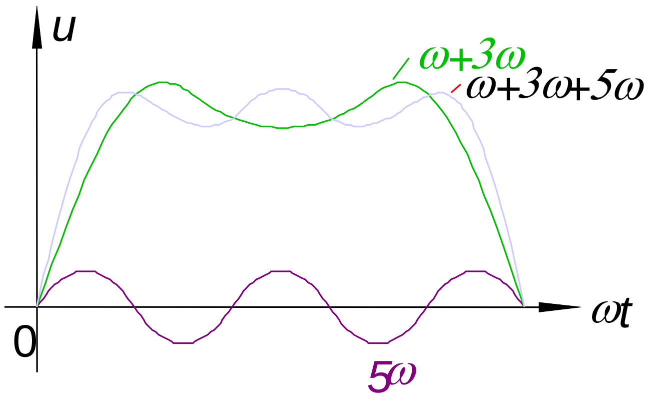


13.2 周期函数分解成傅里叶级数

$$u = \sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\cdots$$

基波项　3次谐波项　5次谐波项





13.2 周期函数分解成傅里叶级数

谐波分解条件： 满足狄里赫利条件

展开成为傅里叶级数

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{km}\cos k\omega_1 t+\sum_{k=1}^{\infty}B_{km}\sin k\omega_1 t$$

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega_1 t)\,\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

$$A_{km}=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(k\omega_1 t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega_1 t)\cos\left(k\omega_1 t\right)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

$$B_{km}=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(k\omega_1 t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega_1 t)\sin\left(k\omega_1 t\right)\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

正弦项和余弦项合并，$f(t)$ 傅里叶级数可以写成：

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\left(-\frac{B_{km}}{A_{km}}\right) \qquad C_{km} = \sqrt{A_{km}^2 + B_{km}^2}$$

A_0 — 直流分量

ω_1 — 基波频率

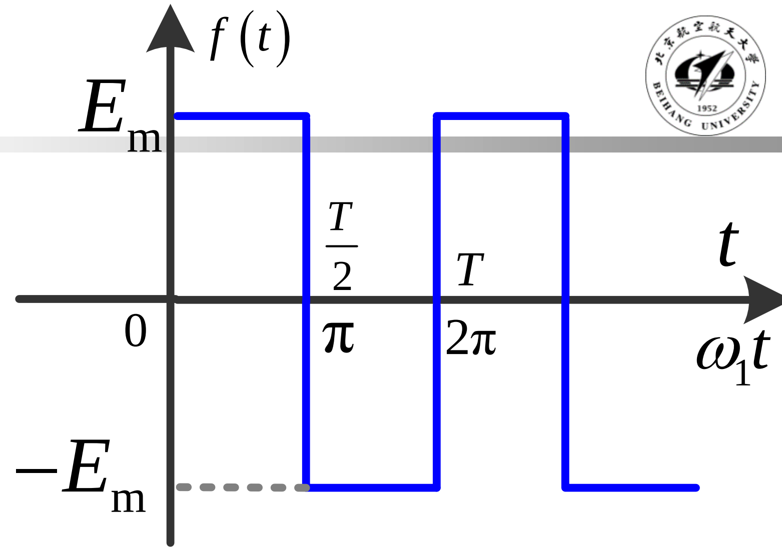
$k\omega_1$ — 谐波频率　$k = 1、3、5\cdots\cdots$ 为奇次谐波

$k = 2、4、6\cdots\cdots$ 为偶次谐波

频谱函数：$Y_{km} = C_{km} e^{j\varphi_k} = A_{km} - jB_{km} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) e^{-jk\omega_1 t}\,\mathrm{d}t$

【例】

将对称方波分解为谐波序列



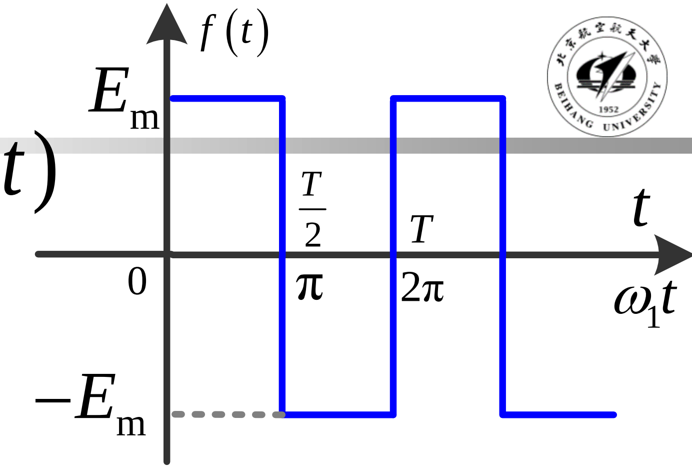
解 该方波可以表示为

$$f(\omega t)=\begin{cases} E_{\mathrm{m}} & 2m\pi<\omega t<(2m+1)\pi \\ -E_{\mathrm{m}} & (2m+1)\pi<\omega t<2(m+1)\pi \end{cases}$$

$\because$ 平均数显然为 0 $\quad \therefore A_0=0$

$$A_{k\mathrm{m}}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega_1 t)\cos\left(k\omega_1 t\right)\mathrm{d}(\omega_1 t)=0$$

$$B_{km} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega_1 t)\sin(k\omega_1 t)\,\mathrm{d}(\omega_1 t)$$

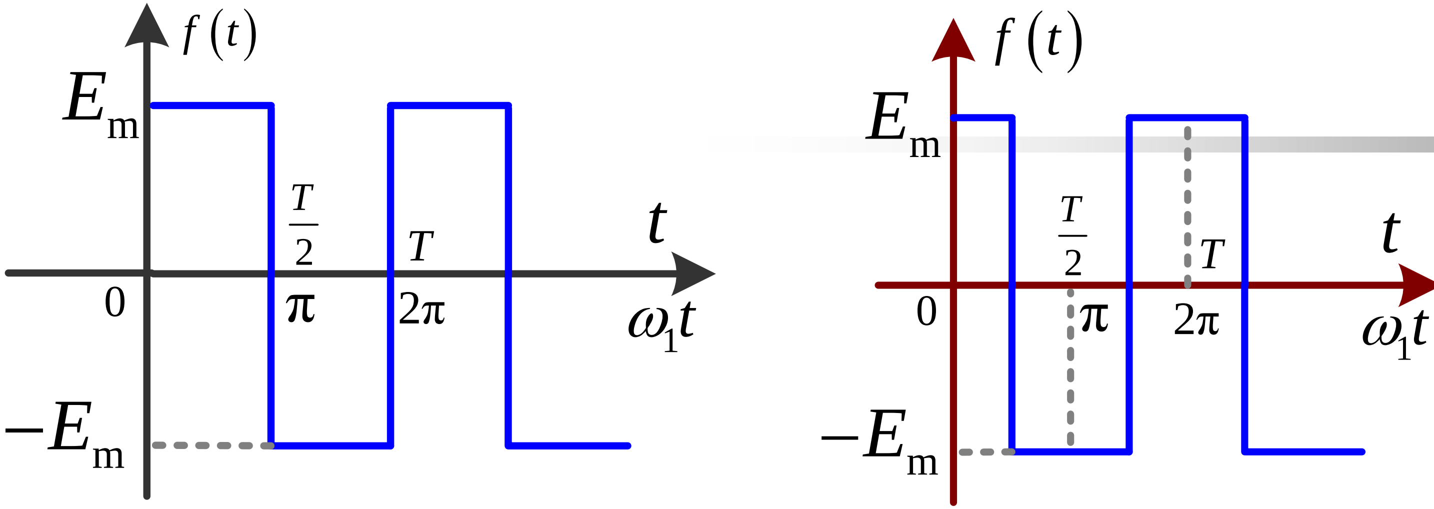


$$= \frac{2E_m}{k\pi}(1-\cos k\pi)$$

$$= \begin{cases} 0 & k=\text{偶数} \\ \dfrac{4E_m}{k\pi} & k=\text{奇数} \end{cases}$$

幅度为 E_m的对称方波的谐波展开式为

$$f(\omega_1 t) = \frac{4E_m}{\pi}\left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \cdots\cdots\right)$$



幅度为 E_m 的对称方波的谐波展开式为

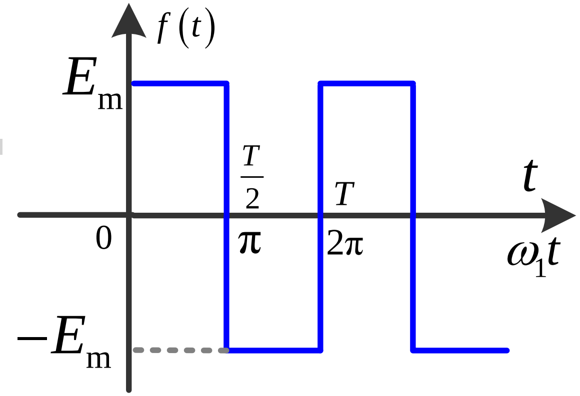
奇函数

$$f(\omega_1 t)=\frac{4E_m}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t+\cdots\cdots\right)$$

当坐标平移 $\pi/2$

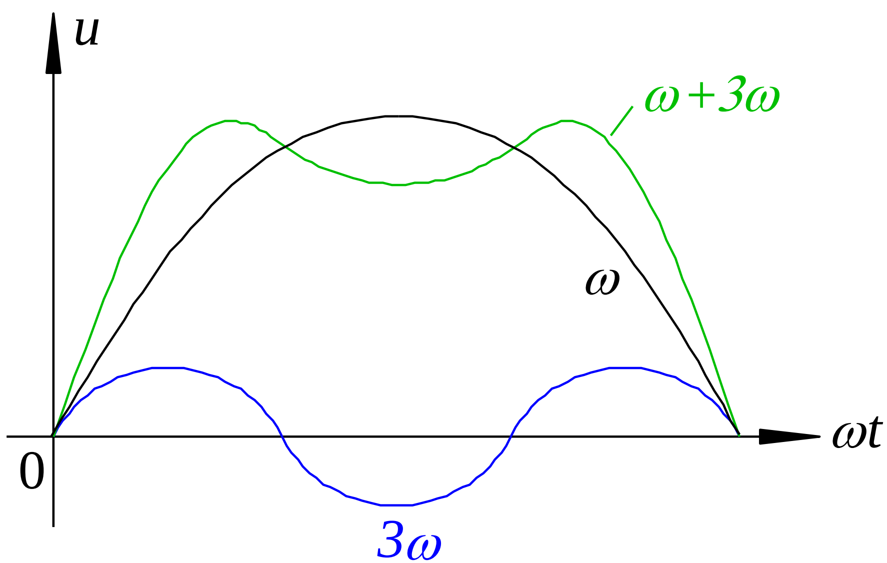
偶函数

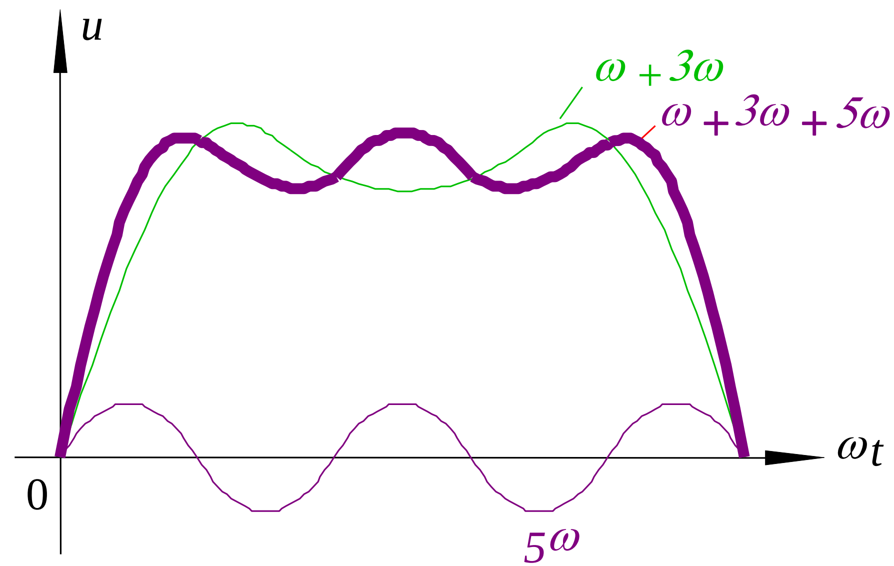
$$f(\omega_1 t)=\frac{4E_m}{\pi}\left(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t+\cdots\cdots\right)$$



$$f(t)=\frac{4E_{\mathrm{m}}}{\pi}(\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t+\cdots)$$

基波项　　3次谐波项　　5次谐波项





波形与系数的特殊关系

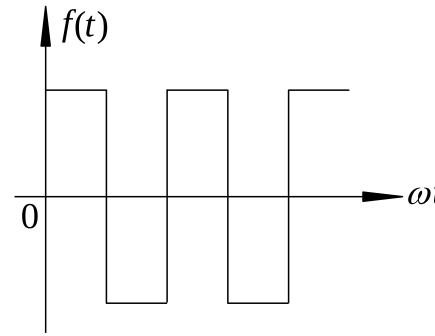
a) 若 $f(\omega t) = -f(-\omega t)$ 奇函数

则 $A_{km} = 0$， $B_{km} \neq 0$

在 (1) 式的展开式中只有正弦项，没有余弦项

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t \quad (1)}$$

例如：对称方波



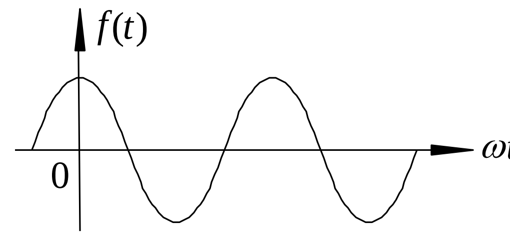
(a)

b) 若 $f(\omega t) = f(-\omega t)$ 偶函数

则 $A_{km} \neq 0$， $B_{km} = 0$

在 (1) 式的展开式中只有余弦项，没有正弦项

例如：



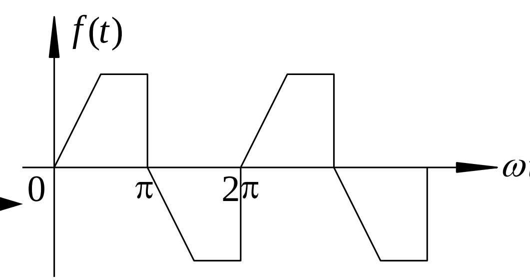
(b)

c) 若 $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ 镜像对称

负半波左移 π 翻过来正好与正半波相合

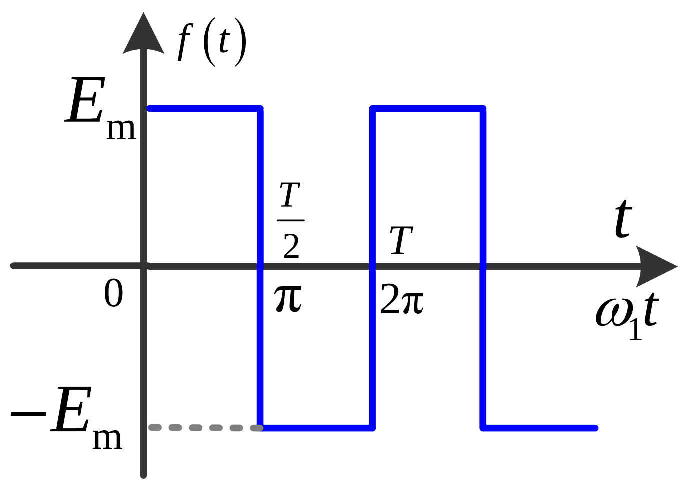
在 (1) 式的展开式中只有奇次谐波，没有偶次谐波

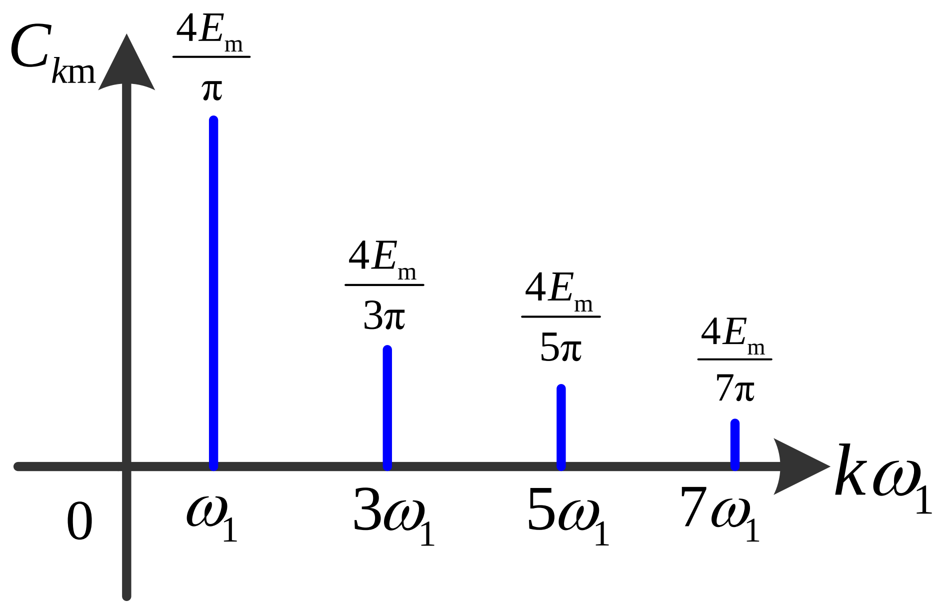
例如：



(c)

$$f(t)=\frac{4E_\mathrm{m}}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t+\cdots\right)$$





矩形波的相频谱？

矩形波的幅频谱

正弦信号的频谱是什么？

多种波形的谐波系数为：

冲激	方波	三角波	抛物线波	正弦波
1 1 1…	$\dfrac{1}{k}$	$\dfrac{1}{k^2}$	$\dfrac{1}{k^3}$	1 0 0…

包含的谐波分量最丰富

方波积分后为三角波

三角波积分后为抛物线波

积分过程是丢失谐波的过程

1、非正弦电流、电压的有效值

有效值 $I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t}$ $\quad i=I_0+\sum_{k=1}^{n} I_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)$

电流的有效值 $I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left[I_0+\sum_{k=1}^{n} I_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)\right]^2\mathrm{d}t}$

直流分量的平方 $\frac{1}{T}\int_0^T I_0^{\,2}\,\mathrm{d}t=I_0^{\,2}$

谐波分量的平方 $\frac{1}{T}\int_0^T I^2{}_{km}\cos^2(k\omega_1 t+\varphi_k)\,\mathrm{d}t=I_k^2$

$(k=1,2,3\cdots)$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0 I_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)\,\mathrm{d}t=0\quad(k=1,2,3\cdots)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)I_{qm}\cos(q\omega_1 t+\varphi_q)\,\mathrm{d}t=0$$

$$(k,q=1,2,3\cdots,k\neq q)$$

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+I_3^2+\cdots}=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}$$

直流分量的平方与各次谐波有效值的平方之和的平方根。

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+U_3^2+\cdots}=\sqrt{U_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2}$$

2、电流的平均值

$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T |i| \mathrm{d}t$$

3、测量仪表与测量参数

磁电系仪表（直流仪表）—— 恒定分量（直流分量）

电磁系仪表 —————— 有效值

全波整流仪表 —————— 平均值

4. 非正弦周期交流电路的平均功率

$$\begin{cases} u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_{uk}) \\ i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_{ik}) \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui \, \mathrm{d}t$$

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k \quad (\varphi_k = \varphi_{uk} - \varphi_{ik})$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$$

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \cdots$$

平均功率＝直流分量的功率＋各次谐波的平均功率

作业

- 13-1 (2)-b 【频谱函数】
- 13-6 【有效值】