

A

---

北京航空航天大学

2014-2015 学年 第二学期期末

《 工科数学分析 (2) 》  
试 卷 (A)

班号\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对入								

2015 年 07 月 10 日

# A

## 一、 选择（每小题 4 分，共 20 分）

1. 向量场  $\vec{F} = (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$  的旋度为 ( A )

- A.  $(-6xy - y, 3y^2 - 1, 3x^2)$ ;      B.  $(-6xy - y, 3y^2 + 1, 3x^2)$ ;  
C.  $(-6xy + y, 3y^2 - 1, -3x^2)$ ;      D.  $(-6xy - y, 3y^2 - 1, 3x^2 + 1)$ .

2. 已知  $f(x, y, z)$  为连续函数，则极限  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^3} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} f(x, y, z) dx dy dz =$  ( B )

- A.  $f(0, 0, 0)$ ;      B.  $\frac{4}{3}f(0, 0, 0)$ ;      C.  $4f(0, 0, 0)$ ;      D.  $\frac{3}{4}f(0, 0, 0)$ .

3. 改变积分次序:  $\int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x, y) dx =$  ( C )

- A.  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$ ;  
B.  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$ ;  
C.  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$ ;  
D.  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_1^{2-x} f(x, y) dy$ .

4. 已知  $I_1 = \iint_D (x+y) dx dy$ ,  $I_2 = \iint_D \ln(x+y) dx dy$ ,  $I_3 = \iint_D [\ln(x+y)]^2 dx dy$

其中  $D$  是三角形闭区域，三顶点各为  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$ , 则大小顺序为 ( A )

- A.  $I_1 > I_2 > I_3$ ;      B.  $I_1 > I_3 > I_2$ ;      C.  $I_2 > I_1 > I_3$ ;      D.  $I_3 > I_2 > I_1$ .

5. 设  $L$  是上半平面 ( $y > 0$ ) 有向分段光滑曲线，如果积分  $\int_L \frac{(x+ay)dx + ydy}{x^2 + y^2}$  与路径无关，则  $a$  的值为 ( B )

- A.  $-1$ ;      B.  $0$ ;      C.  $1$ ;      D.  $2$ .

## 二、计算（每小题 5 分，满分 30 分）

1. 已知椭圆型区域  $D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$  利用广义极坐标变换计算积分

$$I = \iint_D (x^2 + 4y^2) dx dy.$$

解： 做广义坐标变换  $T: \begin{cases} x = 2r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$  -----2 分

则  $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = 2r,$  -----1 分

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + 4y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 4r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cdot 2r dr \text{ -----1 分} \\ &= 8 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr \text{ -----1 分} \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

2. 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} z dS$ , 其中曲面  $\Sigma$  为锥面  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ).

解： 由于  $z_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2},$  -----1 分

投影区域  $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$  -----1 分

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z dS &= \iint_{D_{xy}} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \text{ -----1 分} \\ &= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r) r dr \text{ -----2 分 (二重积分计算共 2 分)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi. \end{aligned}$$

3. 利用对称性计算三重积分  $\iiint_{\Omega} [(xy^3 \cos z - x^3 e^{-z^2}) + 5] dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是上半球面

$x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0)$  和旋转抛物面  $x^2 + y^2 = 3z$  所围成的区域.

解: 由于  $\Omega$  关于  $yo z$  平面对称的, 且  $xy^3 \cos z - x^3 e^{-z^2}$  是关于  $x$  的奇函数, 所以

$$\iiint_{\Omega} (xy^3 \cos z - x^3 e^{-z^2}) dx dy dz = 0, \quad \text{-----2 分}$$

由  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases}$ , 得交线为  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 1 \end{cases}$  -----1 分

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} [(xy^3 \cos z - x^3 e^{-z^2}) + 5] dx dy dz &= 5 \iiint_{\Omega} dx dy dz \\ &= 5 \iint_{x^2+y^2 \leq 3} dx dy \int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \\ &= 5 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} dz \quad \text{-----2 分 (三重积分计算共 3 分)} \\ &= 10\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left( \sqrt{4-r^2} - \frac{r^2}{3} \right) r dr \\ &= \frac{95}{6} \pi. \end{aligned}$$

4. 计算第一型曲面积分  $\iint_{\Sigma} [(2x^2 + y^2) + 3xyz] dS$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 其中  $a > 0$ . (可利用对称性)

解: 由轮换对称性可知,  $\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS$ , -----1 分

所以  $\iint_{\Sigma} (2x^2 + y^2) dS = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = a^2 \iint_{\Sigma} dS = 4\pi a^4$ , -----2 分

又  $\Sigma$  关于  $yo z$  坐标平面对称, 且函数  $3xyz$  关于  $x$  是奇函数,

所以  $\iint_{\Sigma} 3xyz dS = 0$ , -----2 分

于是  $\iint_{\Sigma} [(2x^2 + y^2) + 3xyz] dS = 4\pi a^4$ .

5. 计算第一型曲线积分  $\int_{\Gamma} xyz \, ds$ , 其中  $\Gamma: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

解: 因为  $x'(t) = -\sin t, y'(t) = \cos t, z'(t) = 1$ , -----1 分

所以  $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \sqrt{2} dt$ , -----1 分

于是

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xyz \, ds &= \int_0^{2\pi} t \cos t \sin t \sqrt{2} dt & \text{-----1 分} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} t d(\cos 2t) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \left[ t \cos 2t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos 2t \, dt \right] \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \times 2\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi & \text{-----2 分 (定积分计算共 2 分)} \end{aligned}$$

6. 计算第二型曲面积分  $\iint_{\Sigma} z^2 dydz + dzdx - y^2 dxdy$ , 其中  $\Sigma$  为  $z = x^2 + y^2$  介于平面  $z = 0, z = 4$  之间的部分, 取下侧.

解: 曲面方程  $\Sigma: z = x^2 + y^2, (x, y) \in D_{xy} = \{(x, y) | x + y \leq 4\}$ , -----1 分

于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z^2 dydz + dzdx - y^2 dxdy &= -\iint_{D_{xy}} [(x^2 + y^2)^2 (-z_x) + 1 \cdot (-z_y) - y^2 \cdot 1] dxdy & \text{-----2 分} \\ &= -\iint_{D_{xy}} [-2x(x^2 + y^2)^2 - 2y - y^2] dxdy \end{aligned}$$

由于  $D_{xy}$  关于  $y$  轴,  $x$  轴对称,  $x(x^2 + y^2)^2, y$  分别关于  $x, y$  是奇函数, 所以

$$\iint_{D_{xy}} [2x(x^2 + y^2)^2 + 2y] dxdy = 0, \quad \text{-----1 分}$$

$$\iint_{\Sigma} z^2 dydz + dzdx - y^2 dxdy = \iint_{D_{xy}} y^2 dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r \sin \theta)^2 r \, dr = 4\pi \quad \text{-----1 分}$$

(也可以补面用 Gauss 公式计算)

三(1)、(本题 8 分) 求方程  $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$  的通解.

解: 齐次方程的特征方程为  $r^2 - 2r - 3 = 0$ , -----2 分

解得  $r_1 = 3, r_2 = -1$ . -----1 分

所以齐次方程的通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ , 其中  $C_1, C_2$  是任意常数. -----1 分

又因为  $\lambda = -1$  是特征方程的根, 所以可设非齐次方程的特解为

$$y^* = A x e^{-x}, \quad \text{-----2 分}$$

再求得  $y^{*'} = (A - A x) e^{-x}$   $y^{*''} = (-2A + A x) e^{-x}$

将  $y^*, y^{*'}, y^{*''}$  代入原方程, 得  $-4A = 1$  解得  $A = -\frac{1}{4}$ , -----1 分

于是原方程的通解为  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{4} x e^{-x}$ . -----1 分

三(2)、(本题 10 分) 已知  $I = \int_{\Gamma} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ ,

(1) 证明曲线积分  $I$  与路径无关;

(2) 设曲线  $\Gamma$  为从点  $A(0,0,0)$  到点  $B(1,1,1)$  的有向曲线, 求曲线积分  $I$ .

(1) 证明: 令  $P(x, y, z) = y+z, Q(x, y, z) = z+x, R(x, y, z) = x+y$ , 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} = 1,$$

即满足  $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$

所以曲线积分与路径无关.

(2) 因为曲线积分与路径无关, 沿  $A(x_0, y_0, z_0)$  到  $B(x, y, z)$  的任意曲线的积分都相等, 取折

$$\begin{aligned} I &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz \\ \text{线路径可得} \quad &= \int_{x_0}^x (y_0 + z_0)dx + \int_{y_0}^y (x_0 + x)dy + \int_{z_0}^z (x_0 + y_0)dz \\ &= xy + xz + yz - (x_0 y_0 + x_0 z_0 + y_0 z_0) \end{aligned}$$

取点  $A(0,0,0), B(1,1,1)$ , 则所求积分  $I = 1$ .

建议: (1) 4 分, (2) 折线路径积分转化为定积分 4 分, 结果 2 分.

四、(本题 12 分)(利用 Green 公式)

计算  $\int_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  是上半椭圆:  $\frac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1$  ( $y \geq 0$ ), 方向为逆时针方向.

解: 记  $L$  所围成的闭区域为  $D$ , 令  $P = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q = \frac{-x}{x^2 + y^2}$ ,

$$\text{则当 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 时, 有 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

作  $L$  与  $x$  轴所围区域内部的圆  $l_1: x^2 + y^2 = \varepsilon^2$  ( $\varepsilon > 0$  充分小, 顺时针方向), 以及

$l_2: y = 0$  ( $x: -2 \mapsto -\varepsilon$ ),  $l_3: y = 0$  ( $x: \varepsilon \mapsto 4$ ), 记  $L$  和  $l_1, l_2, l_3$  所围成的区域为  $D$ ,

由 Green 公式得:

$$\oint_{L+l_1+l_2+l_3} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

又由  $l_1: \begin{cases} x = \varepsilon \cos t \\ y = \varepsilon \sin t \end{cases}, t: \pi \mapsto 0$ , 可得

$$\begin{aligned} \int_{l_1} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{l_1} ydx - xdy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\pi}^0 [\varepsilon \sin t \cdot (\varepsilon \cos t)' - \varepsilon \cos t \cdot (\varepsilon \sin t)'] dt \\ &= \pi. \end{aligned}$$

(也可以与  $x$  轴补成封闭曲线再使用一次 Green 公式)

$$\text{而 } \int_{l_2} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_{l_3} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$\text{所以 } \int_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -\int_{l_1} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} - \int_{l_2} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} - \int_{l_3} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -\pi.$$

(建议: 计算  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  2 分, 做辅助曲线挖点 2 分, 应用 Green 公式 2 分, 曲线积分的计算 4 分.)

五、(10 分) (利用 Gauss 公式)

计算  $\iint_{\Sigma} (x-y)dydz + (y-z)dzdx + (z-x)dxdy$ , 其中  $\Sigma$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  介于

$z=0, z=h (h>0)$  之间的部分, 取下侧.

解: 添加平面  $\Sigma_1: z=h (x^2+y^2 \leq h^2)$ , 方向取上侧.

则  $\Sigma, \Sigma_1$  构成闭曲面, 假定它们所围区域为  $\Omega$ , 由 Gauss 公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (x-y)dydz + (y-z)dzdx + (z-x)dxdy \\ &= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (x-y)dydz + (y-z)dzdx + (z-x)dxdy \\ & \quad - \iint_{\Sigma_1} (x-y)dydz + (y-z)dzdx + (z-x)dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} 3 dxdydz - \iint_{\Sigma_1} (h-x)dxdy \\ & \iiint_{\Omega} dxdydz = \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r dr \int_r^h dz = \frac{\pi}{3} h^3 \\ & \text{(也可以“先二后一” } \iiint_{\Omega} dxdydz = \int_0^h dz \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} dxdy = \int_0^h \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3} h^3 \text{)} \end{aligned}$$

$$\text{又由重积分对称性, } \iint_{\Sigma_1} (h-x)dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (h-x)dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} h dxdy = \pi h^3$$

$$\text{所以 } \iint_{\Sigma} (x-y)dydz + (y-z)dzdx + (z-x)dxdy = 3 \cdot \frac{\pi}{3} h^3 - \pi h^3 = 0$$

(建议: 做辅助平面 2 分, 应用 Gauss 公式 2 分, 三重积分及辅助面上积分各 3 分.)



六、(10 分) (利用 Stokes 公式)

计算  $\oint_{\Gamma} (y+x)dx + (z-\sin y)dy + 2xdz$ , 其中  $\Gamma$  为柱面  $x^2 + y^2 = 1$  与平面  $x + y + z = 1$  的交线, 从  $z$  轴正向看  $\Gamma$  为顺时针方向.

解: 设  $\Sigma$  为平面  $x + y + z = 1$  上被曲线  $\Gamma$  所围成的部分, 并取  $\Sigma$  的法向量向下, 则  $\Sigma$

法向量的方向余弦  $\vec{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ,

由 Stokes 公式

$$\oint_{\Gamma} (y+x)dx + (z-\sin y)dy - 2xdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+x & z-\sin y & +2x \end{vmatrix} dS = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS,$$

而  $\Sigma: z = 1 - x - y \ (x^2 + y^2 \leq 1)$

$$\iint_{\Sigma} dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \, dx dy = \sqrt{3} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \sqrt{3}\pi,$$

所以  $\oint_{\Gamma} (y+x)dx + (z-\sin y)dy + 2xdz = 4\pi$ .

注: Stokes 公式同样可以写成如下形式

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+x & z-\sin y & +2x \end{vmatrix} &= - \iint_{\Sigma} dydz + 2dzdx + dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [(-z_x) + 2(-z_y) + 1] \, dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1+2+1) \, dx dy = 4\pi. \end{aligned}$$

(建议: 应用 Stokes 公式转化成曲面积分 6 分, 其余计算 4 分.)

## 七、附加题（本题 10 分）

已知平面区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ ,  $L$  为  $D$  的正向边界, 试证明:

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx;$$

$$(2) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2.$$

证明: 1). 由 Green 公式知

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy,$$

$$\oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) dx dy,$$

又由于  $D$  关于直线  $y = x$  对称, 有  $\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy = \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin y}) dx dy$ , 因此

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx; \quad \text{成立.}$$

2). **方法 (一)** 由于  $e^t + e^{-t} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \geq 2 + t^2$ , 故

$$\begin{aligned} \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx &= \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy \\ &\geq \frac{5}{2} \pi^2 \end{aligned}$$

**方法 (二)** 由于  $e^{\sin y} + e^{-\sin x} \geq 2 + \sin^2 x$ , 故

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx \geq \frac{5}{2} \pi^2.$$

**建议评分标准:** 第一小题 6 分, 用了格林公式 4 分, 对称性部分 2 分, 第二小题 4 分.