2.1-2.2 作业习题

1. 已知空间直角坐标系中的四点$A(1,1,1),B(1,2,3),C(1,4,9),D(1,8,27)$,判断这四个点是否在同一平面上.

2. 设$\alpha=(3,-2,-1,1),\beta=(-3,1,-2,1)$. 求向量$\gamma=(c_1,c_2,c_3,c_4)$,使$2\alpha+3\gamma=\beta$.

3. 设$\alpha=(2,1,-2),\beta=(-4,2,3),\gamma=(-8,8,5)$.证明:存在数$k$使$2\alpha+k\beta=\gamma$.

4. 设$\alpha_1=(2,2,2),\alpha_2=(-1,3,0),\alpha_3=(2,0,3),\beta=(1,3,0)$. 问:向量$\beta$是否为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合?如果是,求一组组合系数.

5.已知空间直角坐标系中的三点$A(1,1,1),B(1,2,4),C(1,3,9)$,是否能将空间任意一个向量$\vec{OD}$写成$\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC}$的线性组合?以$OA,OB,OC$为棱的平行六面体的体积是否等于0?

6. 判断以下各向量组是否线性相关:

(1) $\alpha_1=(2,1),\alpha_2=(-1,4),\alpha_3=(2,-3)$;

(2) $\alpha_1=(2,1,1),\alpha_2=(1,2,-1),\alpha_3=(-2,3,0)$

7. 证明:如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关,而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$线性相关,则向量$\beta$可以表示成$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的线性组合.

8. 设有三维向量$\alpha_1=\big(1+\lambda,1,1\big),\alpha_2=\big(1,1+\lambda,1\big),\alpha_3=\big(1,1,1+\lambda\big),\beta=\big(0,\lambda,\lambda^2\big)$.问$\lambda$为何值时$\beta$可写成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合,且表达式唯一.

9. 设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示,但不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$线

性表示.证明:

(1) α_r不能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$线性表示;

(2) α_r能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta$线性表示.

10. 设复数域上的向量$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性无关. 对复数$\lambda$的不同值，判断向量组$S = \{\alpha_1 + \lambda\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} + \lambda\alpha_n, \alpha_n + \lambda\alpha_1\}$ 是否线性无关，并求出S的秩.

11. 设$\alpha_1 = (0, 1, 2, 3), \alpha_2 = (1, 2, 3, 4), \alpha_3 = (3, 4, 5, 6), \alpha_4 = (4, 3, 2, 1), \alpha_5 = (6, 5, 4, 3)$; 将$\alpha_1, \alpha_2$扩充成$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_5\}$ 的一个极大线性无关组.

12. 设$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r$, $\cdots$, $\beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{r-1}$. 证明:$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 有相同的秩.