第五章 弯曲内力

题号 页码

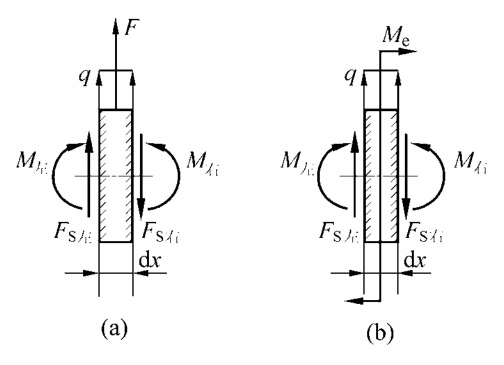
(也可用左侧题号书签直接查找题目与解)

5-3 试证明，在集中力 F 作用处（图 a），梁微段的内力满足下列关系：

$$\left|F_{S右}-F_{S左}\right|=F,\quad M_{右}=M_{左}$$

而在矩为 M_e 的集中力偶作用处（图 b），则恒有

$$F_{S右}=F_{S左},\quad \left|M_{右}-M_{左}\right|=M_e$$



题 5-3 图

证明：根据题图 a，由

$$\sum F_y=0,\quad F_{S左}+F+q\mathrm{d}x-F_{S右}=0$$

保留有限量，略去微量 $q\mathrm{d}x$ 后，得

$$F_{S右}-F_{S左}=F$$

为了更一般地反映 F 作用处剪力的突变情况（把向下的 F 也包括在内），可将上式改写为

$$\left|F_{S右}-F_{S左}\right|=F \tag{a}$$

仍据题图 a，由

$$\sum M_C = 0,\ \ M_{右} - F(\frac{\mathrm{d}x}{2}) + q\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}x}{2}) - F_{S左}\mathrm{d}x - M_{左} = 0$$

保留有限量，略去一阶和二阶微量后，得

$$M_{右} = M_{左} \tag{b}$$

足标 C 系指梁微段右端面的形心，对题图(b)亦同。

根据题图 b，由

$$\sum F_y = 0,\ \ F_{S左} + q\mathrm{d}x - F_{S右} = 0$$

略去微量 $q\mathrm{d}x$ 后，得

$$F_{S右} = F_{S左} \tag{c}$$

仍据题图 b，由

$$\sum M_C = 0,\ \ M_{右} - M_{\mathrm{e}} - q\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}x}{2}) - F_{S左}\mathrm{d}x - M_{左} = 0$$

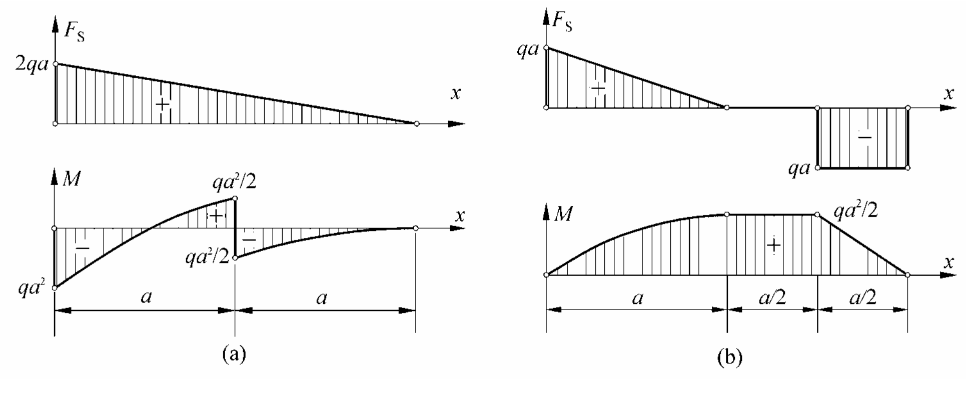
保留有限量，略去一阶和二阶微量后，得

$$M_{右} - M_{左} = M_{\mathrm{e}}$$

为了更一般地反映 M_{e} 作用处弯矩的突变情况（把逆钟向的 M_{e} 也包括在内），可将上式改写为

$$\left|M_{右} - M_{左}\right| = M_{\mathrm{e}} \tag{d}$$

5-5 已知梁的剪力、弯矩图如图所示，试画梁的外力图。



题 5-5 图

解：根据题图中所给的 F_S 图和 M 图，并依据三个微分关系和两个突变关系，可画梁的外力图，示如图 5-5a 和 b。

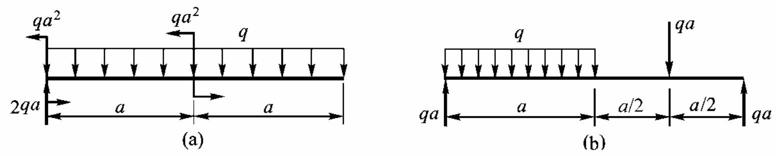
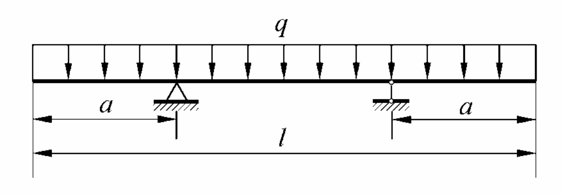


图 5-5

5-7 图示外伸梁，承受均布载荷 q 作用。试问当 a 为何值时梁的最大弯矩值（即$|M|_{max}$）最小。



题 5-7 图

解：1.求支反力

由对称性可知，二支座的支反力相等（见图 5-7a），其值为

$$F_{Cy}=F_{Dy}=\frac{ql}{2}\quad(\uparrow)$$

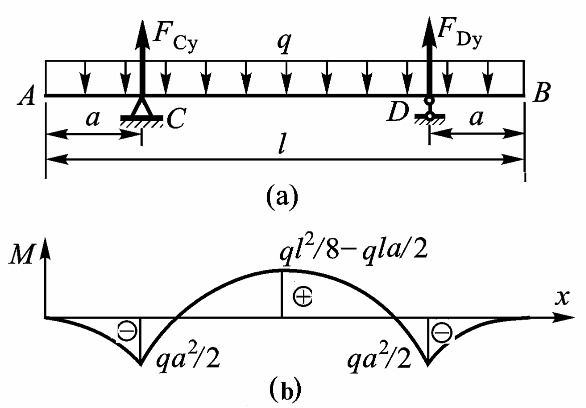


图 5-7

2．画弯矩图

根据各梁段的端值及剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系，画弯矩图如图 b 所示。

3．确定 a 值

由进一步分析可知，只有当梁中点处的弯矩值、C与D处弯矩的绝对值相等时，梁的最大弯矩值才可能最小，由此得

$$\frac{1}{8}ql^2-\frac{1}{2}qla=\frac{1}{2}qa^2$$

解此方程，得

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}l$$

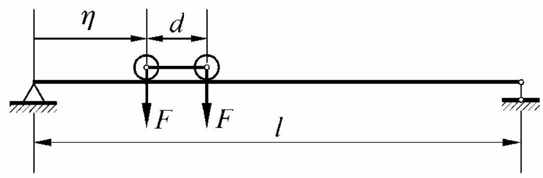
舍去增根，最后确定

$$a = \frac{\sqrt{2}-1}{2} l = 0.207l$$

5-8 图示简支梁，梁上小车可沿梁轴移动，二轮对梁之压力均为 F。试问：

(1) 小车位于何位置时，梁的最大弯矩值最大，并确定该弯矩之值；

(2) 小车位于何位置时，梁的最大剪力值最大，并确定该剪力之值。



题 5-8 图

解：1. 求支反力

由图 5-8a 所示小车位置，可求得两端的支反力，其值分别为

$$F_{Ay} = \frac{F}{l}(2l - 2\eta - d)，F_{By} = \frac{F}{l}(2\eta + d) \qquad [0 < \eta < (l-d)]$$

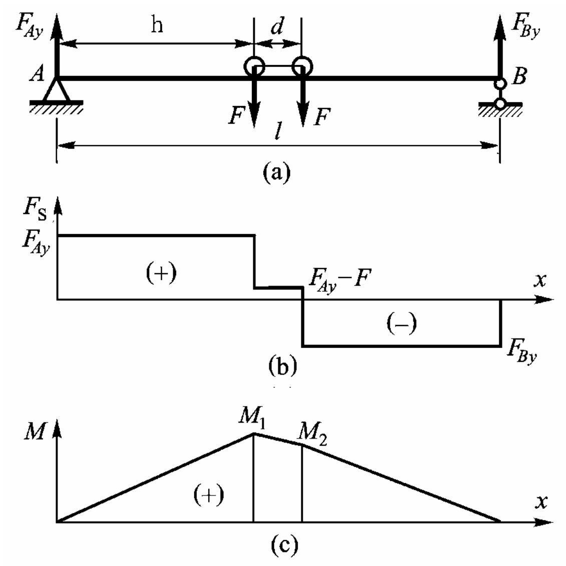


图 5-8

2．画剪力、弯矩图

根据支反力及梁上小车压力，画剪力、弯矩图如图 b 和 c 所示。

3．确定最大弯矩值及小车位置

由 M 图可以看出最大弯矩必在 F 作用处。求左轮处之 M_1，并求其极值，即可得到 M_{max}。

$$M_1(\eta) = F_{Ay}\eta = \frac{F}{l}[(2l-d)\eta - 2\eta^2] \qquad [0 \le \eta \le (l-d)] \qquad (a)$$

由

$$\frac{dM_1(\eta)}{d\eta} = 0$$

得

$$\eta = \frac{2l-d}{4} \tag{b}$$

此即左轮处M_1达最大值的左轮位置。

将式(b)代入式(a)，得弯矩的最大值为

$$M_{\max} = \frac{F}{8l}(2l-d)^2 \tag{c}$$

由对称性可知，当$\eta = (2l-3d)/4$时，右轮处的M_2达到最大，其值同式(c)。

4．确定最大剪力值及小车位置

由剪力图不难判断，最大剪力只可能出现在左段或右段，其剪力方程依次为

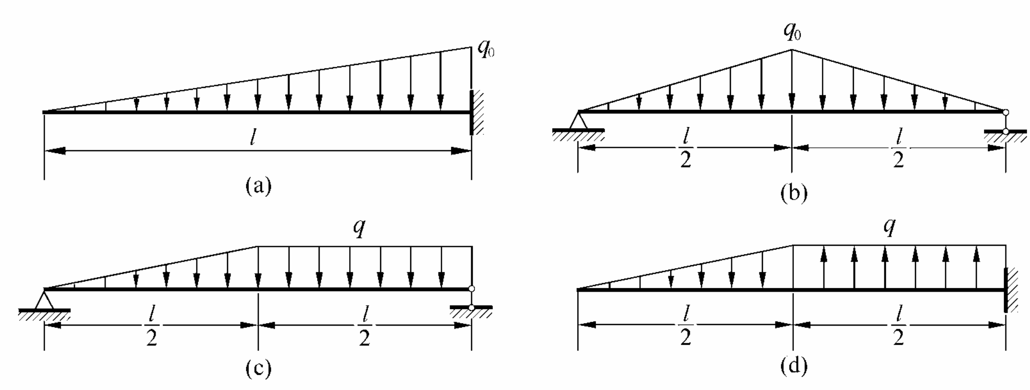
$$F_{S1} = F_{Ay} = \frac{F}{l}(2l-2\eta-d) \qquad [0<\eta<(l-d)]$$

$$|F_{S2}| = F_{By} = \frac{F}{l}(2\eta+d) \qquad [0<\eta<(l-d)]$$

二者都是η的一次函数，容易判断，当$\eta \to 0$或$\eta \to (l-d)$时，即小车无限移近梁的左端或右端时，梁支座内侧截面 A_+ 或 B_- 出现最大剪力，其绝对值为

$$|F_s|_{\max} = \frac{F}{l}(2l-d) \tag{d}$$

5-9 图示各梁，承受分布载荷作用。试建立梁的剪力、弯矩方程，并画剪力、弯矩图。



题 5-9 图

(a)解：1.建立剪力、弯矩方程

设截面x处的载荷集度为$q(x)$，由图 5-9a(1)可知，

$$q(x) = \frac{q_0}{l}x$$

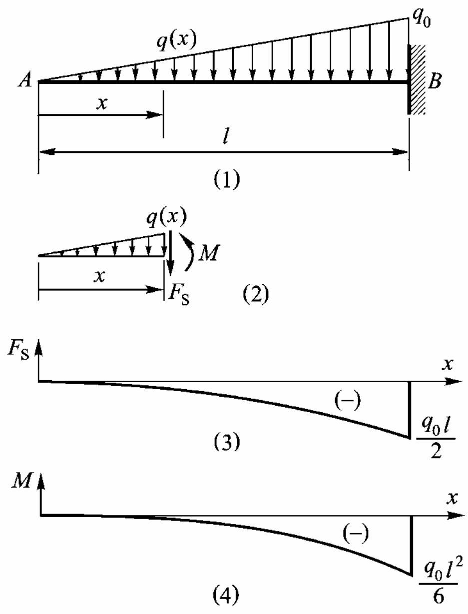


图 5-9a

由图 **5-9a**(2)可得，剪力与弯矩方程分别为

$$F_s = -\frac{q(x)\cdot x}{2} = -\frac{q_0 x^2}{2l} \qquad (0 \le x < l) \qquad \text{(a)}$$

$$M = -[q(x)\cdot\frac{x}{2}]\frac{x}{3} = -\frac{q_0 x^3}{6l} \qquad (0 \le x < l) \qquad \text{(b)}$$

2．画剪力、弯矩图

由式(a)和(b)可知，二者均为简单的幂函数，其函数图依次为二次下凹曲线及三次下凹曲线。

算出 A与B 两端的 F_s与M 值，并考虑到上述曲线形状，即可绘出 F_s与M 图，如图 **5-9a**（3）和（4）所示。

(b)解：1．求支反力

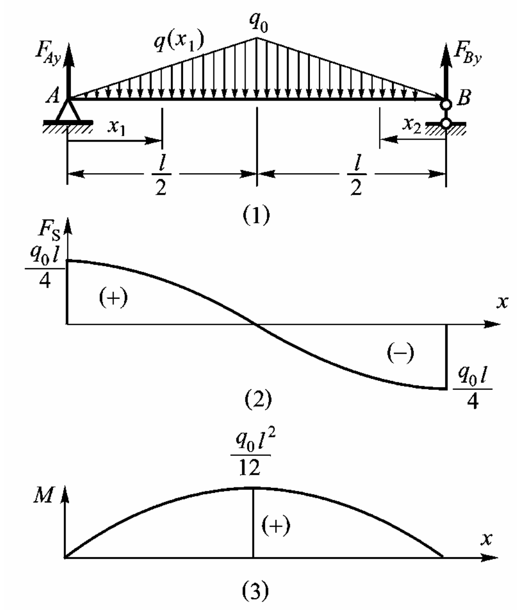


图 5-9b

由梁的对称条件可知，

$$F_{Ay} = F_{By} = \frac{1}{4} q_0 l \quad (\uparrow)$$

2．建立剪力、弯矩方程

设截面 x_1 处的载荷集度为 $q(x_1)$，由图 5-9b(1)可知，

$$q(x_1) = \frac{2q_0}{l} x_1 \qquad (0 \le x_1 \le \frac{l}{2})$$

由此可得，左半段梁的剪力与弯矩方程分别为

$$F_S = F_{Ay} - \frac{q(x_1) \cdot x_1}{2} = \frac{q_0 l}{4} - \frac{q_0 x_1^2}{l} \qquad (0 < x_1 \le \frac{l}{2}) \tag{c}$$

$$M = F_{Ay} x_1 - [q(x_1) \cdot \frac{x_1}{2}] \frac{x_1}{3} = \frac{q_0 l}{4} x_1 - \frac{q_0 x_1^3}{3l} \quad (0 \le x_1 \le \frac{l}{2}) \tag{d}$$

根据问题的对称性（对于 F_S，是反对称的），可写出右半段梁的剪力与弯矩方程如下：

$$F_S = -\frac{q_0 l}{4} + \frac{q_0 x_2^2}{l} \qquad (0 \le x_2 \le \frac{l}{2}) \tag{e}$$

$$M = \frac{q_0 l}{4} x_2 - \frac{q_0 x_2^3}{3l} \quad (0 \le x_2 \le \frac{l}{2}) \tag{f}$$

3．画剪力、弯矩图

依据式(c)和(e)可绘剪力图，如图 5-9b(2)所示；依据式(d)和(f)可绘弯矩图，如图 5-9b(3)所示。

(c)解：1．求支反力

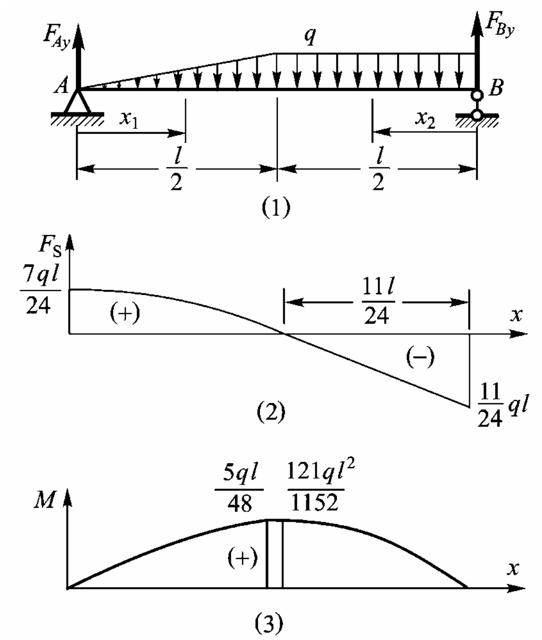


图 5-9c

由 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 可得

$$F_{Ay} = \frac{7ql}{24}\ \ (\uparrow),\ F_{By} = \frac{11ql}{24}\ \ (\uparrow)$$

2．建立剪力、弯矩方程

坐标如图 5-9c(1)所示，由截面法可得剪力、弯矩方程分别为

$$F_{S1} = F_{Ay} - \frac{q(x_1)\cdot x_1}{2} = \frac{7ql}{24} - \frac{qx_1^2}{l} \qquad (0 < x_1 \le \frac{l}{2}) \qquad \text{(e)}$$

$$F_{S2} = -F_{By} + qx_2 = -\frac{11ql}{24} + qx_2 \qquad (0 < x_2 \le \frac{l}{2}) \qquad \text{(f)}$$

$$M_1 = F_{Ay}x_1 - [q(x_1)\cdot\frac{x_1}{2}]\frac{x_1}{3} = \frac{7ql}{24}x_1 - \frac{qx_1^3}{3l} \qquad (0 \le x_1 \le \frac{l}{2}) \qquad \text{(g)}$$

$$M_2 = F_{By}x_2 - \frac{q}{2}x_2^2 = \frac{11ql}{24}x_2 - \frac{q}{2}x_2^2 \qquad (0 \le x_2 \le \frac{l}{2}) \qquad \text{(h)}$$

3．画剪力、弯矩图

依据式(e)与(f)可绘剪力图，如图 5-9c(2)所示；依据式(g)与(h)可绘弯矩图，如图 5-9c(3)所示。注意在 $x_2 = \frac{11l}{24}$ 处有 $F_{S2} = 0$，M_2 有极大值，其值为

$$M_{2\max} = M_{\max} = \frac{121}{1152}ql^2$$

(d)解：1．建立剪力、弯矩方程

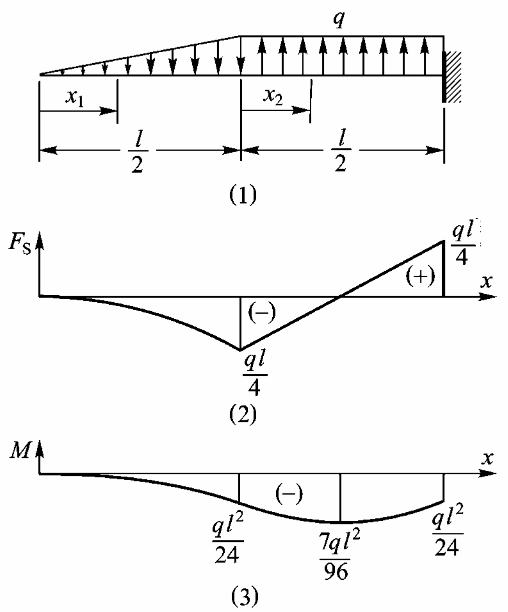


图 5-9d

坐标如图 5-9d(1)所示，由截面法易得剪力、弯矩方程分别为

$$F_{S1} = -\frac{q(x_1)\cdot x_1}{2} = -\frac{qx_1^2}{l} \qquad (0 \le x_1 \le \frac{l}{2}) \qquad \text{(i)}$$

$$F_{S2} = -\frac{ql}{4} + qx_2 \qquad (0 \le x_2 < \frac{l}{2}) \qquad \text{(j)}$$

$$M_1 = -\frac{qx_1^3}{3l} \qquad (0 \le x_1 \le \frac{l}{2}) \qquad \text{(k)}$$

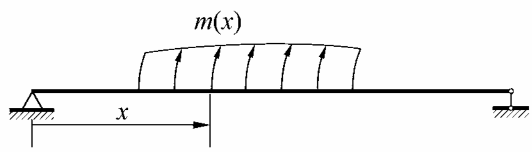
$$M_2 = \frac{q}{2}x_2^2 - \frac{ql}{4}\cdot(\frac{l}{6} + x_2) \qquad (0 \le x_2 < \frac{l}{2}) \qquad \text{(l)}$$

2．画剪力、弯矩图

依据式(i)与(j)可绘剪力图，如图 5-9d(2)所示；依据式(k)与(l)可绘弯矩图，如图 5-9d(3)所示。注意在 $x_2 = l/4$ 处有 $F_{S2} = 0$，此处 M_2 有极值，其绝对值为

$$\left|M_2\right|_{\max} = \frac{7ql^2}{96}$$

5-10 在图示梁上，作用有集度为 ***m*** = ***m*** (***x***)的分布力偶。试建立力偶矩集度、剪力与弯矩间的微分关系。



题 5-10 图

解：在 x 处取 dx 微段，画其受力图，如图 5-10 所示。

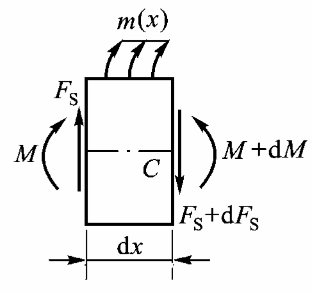


图 5-10

根据图示，由

$$\sum M_C = 0，\ M + \mathrm{d}M - M - F_\mathrm{S}\mathrm{d}x - m(x)\mathrm{d}x = 0$$

得

$$\mathrm{d}M = F_\mathrm{S}\mathrm{d}x + m(x)\mathrm{d}x$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = F_\mathrm{S} + m \qquad \text{(a)}$$

其中 C 系指微段右端截面的形心。

又由

$$\sum F_y = 0，\ F_\mathrm{S} + \mathrm{d}F_\mathrm{S} - F_\mathrm{S} = 0$$

得

$$\mathrm{d}F_\mathrm{S} = 0$$

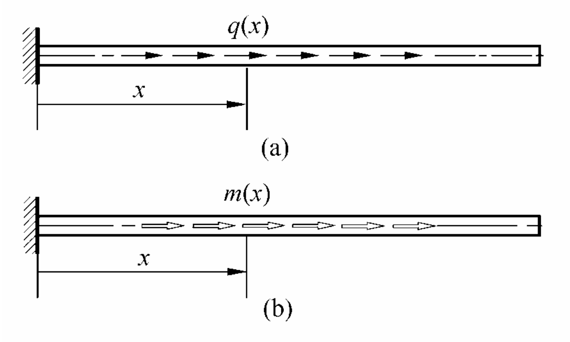
或写成

$$\frac{\mathrm{d}F_\mathrm{S}}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{(b)}$$

式(a)和(b)即为本题要求建立的微分关系。

5-11

对于图示杆件，试建立载荷集度（轴向载荷集度 q 或扭力偶矩集度 m）与相应内力（轴力或扭矩）间的微分关系。



题 5-11 图

解：在 x 处取 $\mathrm{d}x$ 微段，画其受力图，如图 5-11a 和 b 所示。

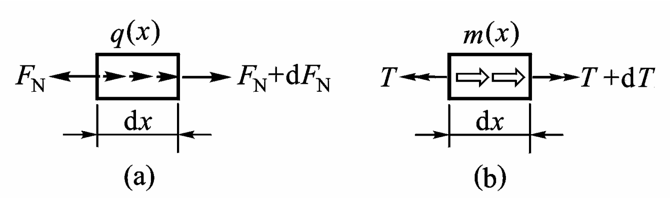


图 5-11

根据图 a，由

$$\sum F_x = 0, \quad F_{\mathrm{N}} + \mathrm{d}F_{\mathrm{N}} + q(x)\mathrm{d}x - F_{\mathrm{N}} = 0$$

得

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{N}} + q(x)\mathrm{d}x = 0$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}x} = -q \qquad \textbf{(a)}$$

根据图 b，由

$$\sum M_x = 0, \quad T + \mathrm{d}T + m(x)\mathrm{d}x - T = 0$$

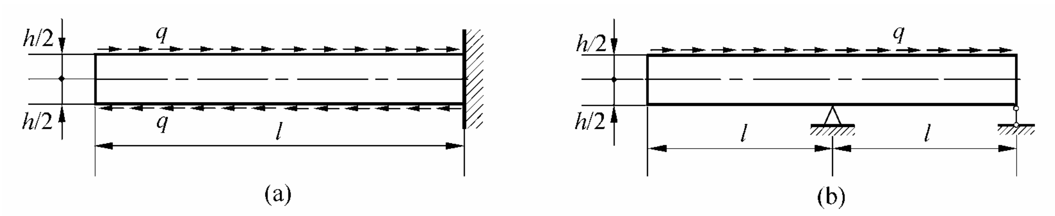
得

$$\mathrm{d}T + m(x)\mathrm{d}x = 0$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -m \qquad \textbf{(b)}$$

5-13 图示杆件，承受平行于杆轴方向的均布载荷 q 作用。试画杆的内力图，并利用相应载荷与内力间的微分关系检查内力图的正确性。



题 5-13 图

(a)解：坐标自左端向右取，内力 $F_{\mathrm{N}} = 0$，$F_{\mathrm{s}} = 0$，故内力图只剩下 M 图了，如图 5-13a 所示。

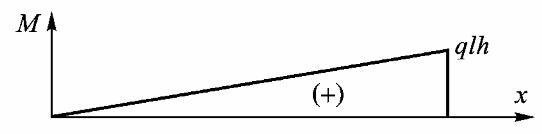


图 5-13a

此种受力情况，相当于梁上承受集度为 $m=qh$ 的分布力偶的情况，利用微分关系（见题 **5-10** 式(a)）。

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=F_{\mathrm{s}}+m$$

可以检查 M 图的正确性。这里，$F_{\mathrm{S}}=0$，$m=qh$ 为正的常值，表明 M 图应为上倾斜直线。图中正是这种斜直线，说明所画 M 图是正确的。

(b)解：坐标自左端向右取，剪力、弯矩图及轴力图依次示于图 **5-13b** 的**(1),(2)**和**(3)**。

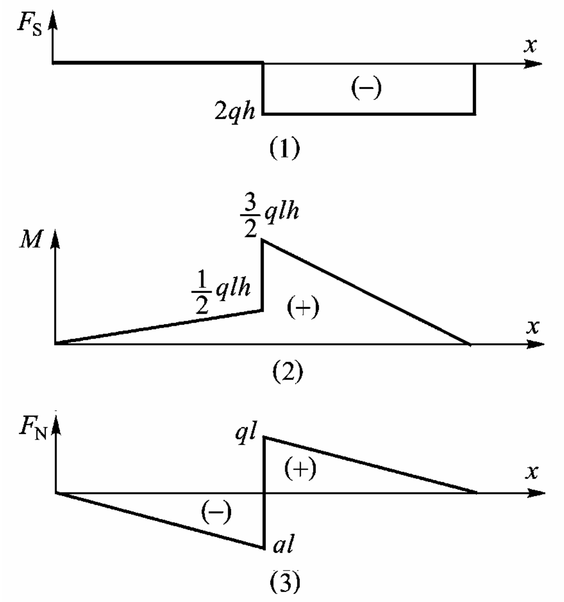


图 **5-13b**

此种受力情况，相当于杆上作用有载荷集度为 q 的均布轴向载荷和集度为 $m=qh/2$ 的均布力偶。

y 方向无分布载荷作用，即 $q_y=0$，利用微分关系

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}x}=q_y=0$$

检查 F_{s} 图，斜率为 0，应为水平直线，这是对的。

利用微分关系

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=F_{\mathrm{s}}+m=\begin{cases}qh/2 & （左半段）\\ -3qh/2 & （右半段）\end{cases}$$

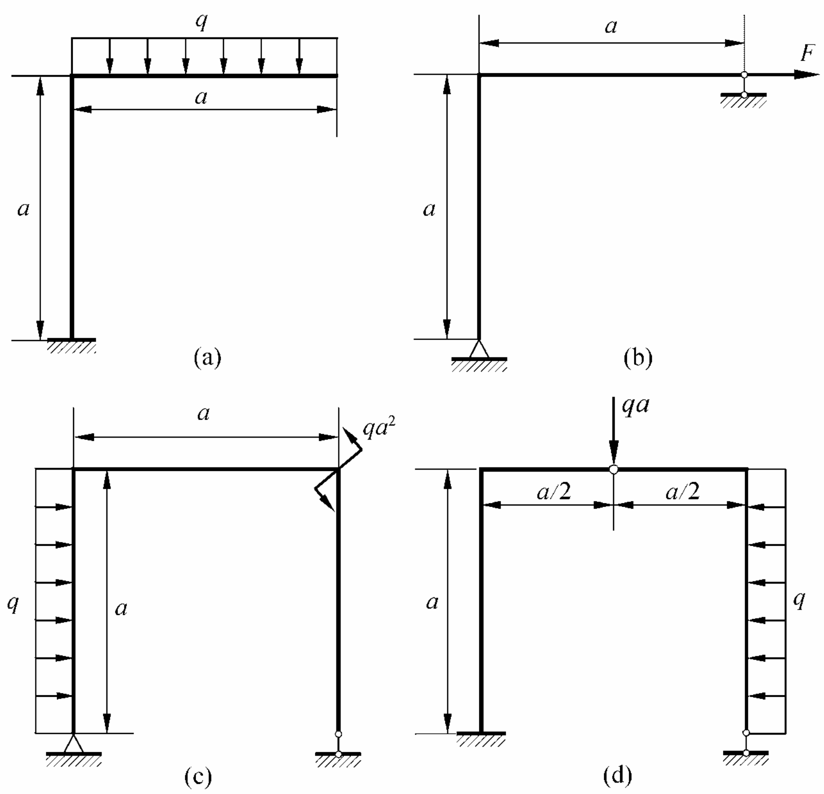
检查 M 图，左半段为正常数，应为上倾斜直线，对的；右半段为负常数，应为下倾斜直线，且斜率是左边的三倍，也是对的。

利用微分关系

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}x}=-q$$

检查 F_N 图，斜率为负常数，应为下倾斜直线，所绘 F_N 图是对的。

5-14 试画图示刚架的内力图。



题 5-14 图

解：内力图示如图 5-14。

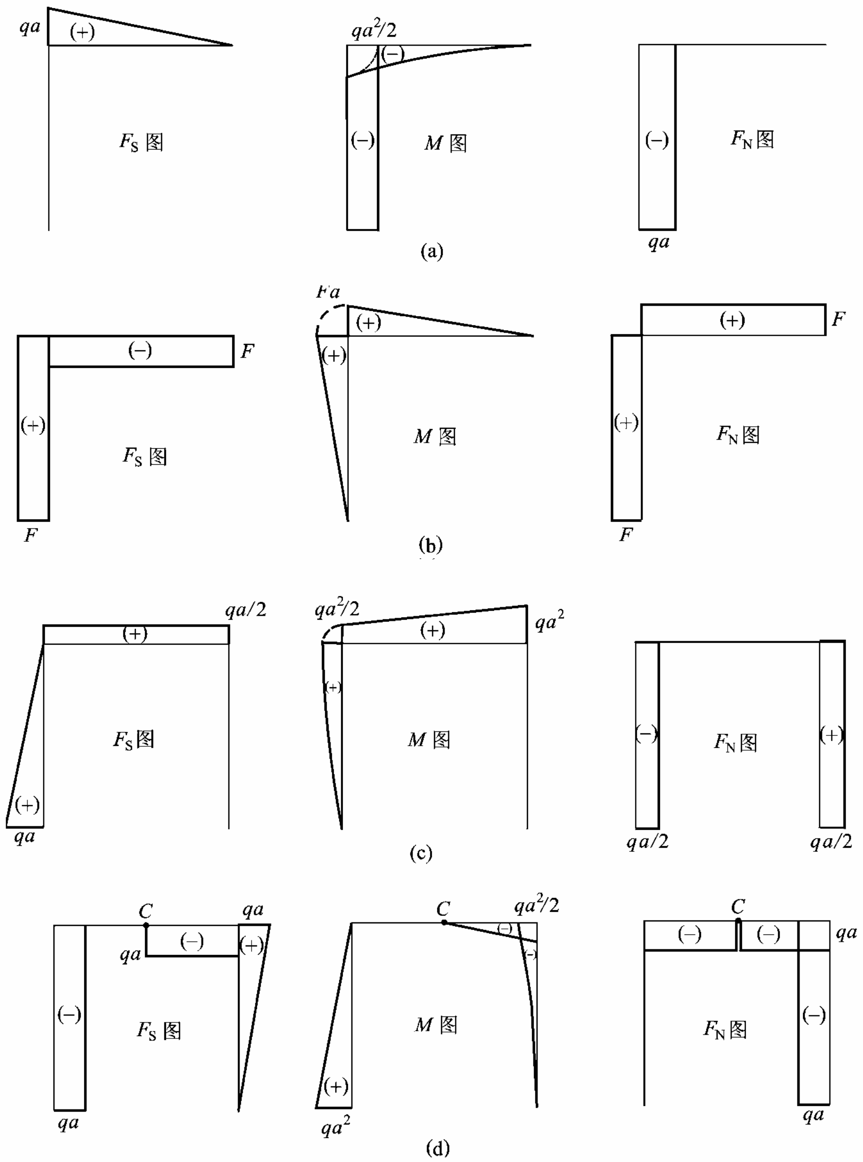
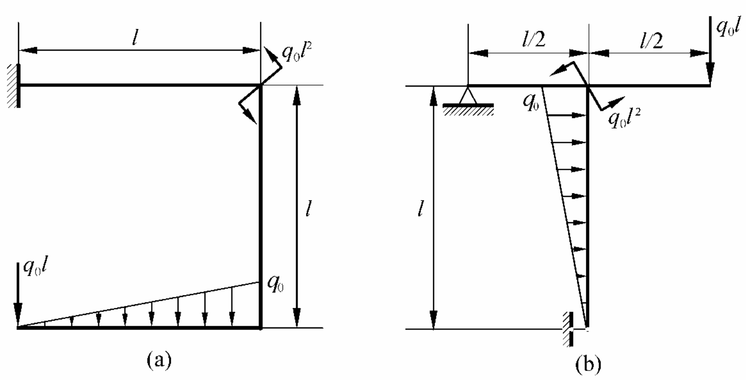


图 5-14

5-15 试画图示刚架的弯矩图。



题 5-15 图

解：刚架的弯矩图示如图 5-15。

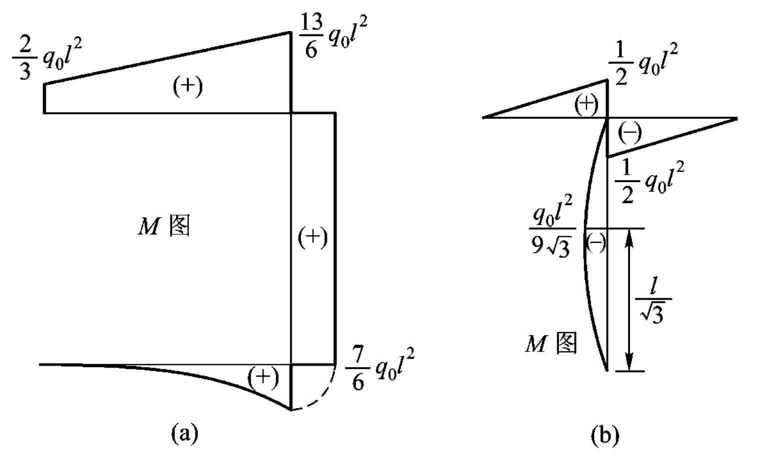


图 5-15