柯西收敛定理

七、加选题（10 分）

设数列 $x_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|$，$n=1,2,\cdots\cdots$

证明：若数列 $\{x_n\}$ 有界，则数列 $\{a_n\}$ 必定收敛.

证明：(1) 因为 $\{x_n\}$ 单调增，有界，所以 $\{x_n\}$ 收敛。进而可知 $\{x_n\}$ 是柯西列，即

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in N^+, n>N, \forall p\in N^+, |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$$

(2) 考虑数列 $\{a_n\}$：

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n| &= |(a_{n+p}-a_{n+p-1})+(a_{n+p-1}-a_{n+p-2})+\cdots+(a_{n+1}-a_n)| \\ &\le |a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n| \\ &= |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 也是柯西列，故收敛。

单调有界定理

二、 证明(10 分)

1) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$

证:由 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 知 $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$ （4 分）

2) $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\Lambda+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛（可用单调有界定理）.

证明：由（1）知 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<0$，所以 $\{x_n\}$ 单调递减（3 分）

再由 $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\Lambda+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}>2(\sqrt{2}-1)+\Lambda+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-2\sqrt{n}$

$=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-2>-2$ 有下界，由单调有界知 $\{x_n\}$ 收敛. (4 分)

五、（本题满分 16 分）

设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n^{\ 2}})$，$n=1,2,\cdots$ ；

试证明：（1）成立 $x_{n+1}\ge\sqrt[3]{a}$，$n=1,2,\cdots$；（2）$\{x_{n+1}\}$ 是单调递减的；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在；（4）求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 。

证明（1）$x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n^{\ 2}})$ $x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n+x_n+\frac{a}{x_n^{\ 2}})\ge(x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^{\ 2}})^{1/3}=\sqrt[3]{a}$，$n=1,2,\cdots$

（2）因为 $x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_{n+1}+\frac{a}{x_{n+1}^{\ 2}})-x_{n+1}=\frac{1}{3}\frac{a-x_{n+1}^{\ 3}}{x_{n+1}^{\ 2}}\le 0$，

所以 $\{x_{n+1}\}$ 是单调递减的；

（3）由于 $\{x_{n+1}\}$ 是单调递减且有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在；

（4）设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，显然 $A\ge\sqrt[3]{a}$，在 $x_{n+1}=\frac{1}{3}(2x_n+\frac{a}{x_n^{\ 2}})$ 两边，令 $n\to\infty$ 取极限，

得，$A=\frac{1}{3}(2A+\frac{a}{A^2})$，$A^3=a$，$A=\sqrt[3]{a}$ ，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{a}$ 。

三. 证明下面问题（10 分）

假设数列 $\left\{x_n\right\}$ 满足 $\left|x_{n+1}-x_n\right|<\frac{1}{2^n}$，用 Cauchy 收敛定理证明 $\left\{x_n\right\}$ 收敛

证明 **1) (5 分)**

$$\forall p\in N,\left|x_{n+P}-x_n\right|\le\left|x_{n+P}-x_{n+P-1}\right|+\left|x_{n+P-1}-x_{n+P-2}\right|+\ldots\ldots+\left|x_{n+1}-x_n\right|$$

$$\le\frac{1}{2^{n+P-1}}+\frac{1}{2^{n+P-2}}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^{P-1}}+\frac{1}{2^{P-2}}+\ldots\ldots+1\right)=\left(\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{\frac{1}{2}}\right)\le\frac{1}{2^{n-1}}.$$

2) 柯西定理写正确 5 分

$$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\ln\frac{1}{\varepsilon}/\ln 2\right]+1,n>N,\forall p\in N,\left|x_{n+p}-x_n\right|<\varepsilon$$

八 （10 分）附加题（下面两个题目任选其一）

1）假设函数 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n$，证明下面问题

a）对于任意的自然数 n，方程 $f_n(x)=\frac{1}{2}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 中仅有一根

b）设 $x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，满足 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$.

证明：1）5 分

$$f_n(0)=1,f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\text{由介值定理}\exists x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),f_n(x_n)=\frac{1}{2}\quad(3\text{ 分})$$

$$f_n'(x)=-n\sin x(1-\cos x)^{n-1}<0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\quad(2\text{ 分})$$

因此根唯一.

连续函数零点定理

二 证明下面问题（10 分）

假设 $\sigma>0,x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\sigma}{x_n}\right)$，证明数列 $\{x_n\}$ 单调有界，且极限为 $\sqrt{\sigma}$

证明：1）数列单调递减有下界(5 分)

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\sigma}{x_n}\right)\Rightarrow x_{n+1}\geq\sqrt{\sigma},$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\sigma}{x_n}\right)-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{x_n}-x_n\right)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma}}-\sqrt{\sigma}\right)=0$$

2）下面说明极限为 $\sqrt{\sigma}$ (5 分)

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=b\Rightarrow\frac{1}{2}\left(b+\frac{\sigma}{b}\right)=b,b=\sqrt{\sigma}$$

五. **（10 分）** 假设函数 $f\left(x\right)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可导，且 $f(0)+f(1)=0, f(2)=0$

证明: 1)利用介值定理证明存在 $\alpha \in [0,1]$, 使得 $f\left(\alpha\right)=0$；

2) 存在 $\theta \in (0,2)$ 使得 $f(\theta)+f'(\theta)=0$.

证明：(1). 由 $f(0)+f(1)=0$ 可得，要么 $f(0)=f(1)=0$，要么 $f(0)\cdot f(1)<0$，由连续函数介值定理，一定存在 $\alpha \in (0,1)$, 使得 $f\left(\alpha\right)=0$，不管哪种情况都存在 $\alpha \in [0,1]$, 使得 $f\left(\alpha\right)=0$.

(2). 考虑新函数 $F\left(x\right)=e^x f(x)$，则 $F'\left(x\right)=e^x(f(x)+f'(x))$，$F\left(\alpha\right)=F(2)=0$，由罗尔定理知存在 $\theta \in (0,2)$，使得 $F'(\theta)=e^{\theta}(f(\theta)+f'(\theta))=0$，即 $f(\theta)+f'(\theta)=0$.

建议评分标准：两个小题各 5 分

Cauchy 收敛定理

三. **证明下面问题（10 分）**

数列 $\left\{x_n\right\}$ 满足 $x_n = \dfrac{\sin 2x}{2(2+\cos 2x)} + \dfrac{\sin 3x}{3(3+\cos 3x)} + \mathrm{L}\ \dfrac{\sin nx}{n(n+\cos nx)}$,

用 Cauchy 收敛定理证明 $\left\{x_n\right\}$ 收敛。

证明：易知不等式 $\left|\dfrac{\sin nx}{n(n+\cos nx)}\right| \pounds \dfrac{1}{n(n-1)}$ 成立，因此任取自然数 n 及正整数 p，有

$$|a_{n+p}-a_n| \pounds \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+1+\cos(n+1)x)}\right| + \left|\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+\cos(n+p)x)}\right|$$

$$\pounds \frac{1}{n(n+1)} + \mathrm{L}\ \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} < \frac{1}{n}.$$

任取 $e>0$，取 $N=[\frac{1}{e}]$，则当 $n>N$ 时，任取自然数 p，均有 $|a_{n+p}-a_n| < \dfrac{1}{n} < e$.

因此 $\left\{x_n\right\}$ 为 Cauchy 基本列，故收敛。

建议评分标准：不等式放缩 6 分，Cauchy 收敛定理 4 分。

四． （**10 分**）用 Cauchy 收敛原理证明下面数列收敛

$$x_n=\frac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)}+\frac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)}+\cdots+\frac{\sin nx}{n(n+\sin nx)}.$$

解：对数列 $x_n=\dfrac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)}+\dfrac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)}+\cdots+\dfrac{\sin nx}{n(n+\sin nx)}$ 而言，

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+1+\sin(n+1)x)}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)(n+2+\sin(n+2)x)}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+\sin(n+p)x)}\right|\\&\le\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}<\frac{1}{n}\end{aligned}$$

任取 $\varepsilon>0$，取自然数 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则对于任意的整数 $n>N$，以及正整数 p，均有 $|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{n}\le\varepsilon$ 成立。因此数列 $\{x_n\}$ 收敛。

建议评分标准：不等式放缩 5 分，Cauchy 收敛原理 5 分。

三、（**本题 10 分**）

设数列 $b_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|$， $n=1,2,\cdots$ 且 $\{b_n\}$ 有界，证明：数列 $\{a_n\}$ 与

$\{b_n\}$ 都收敛.

证明：（1）因为 $\{b_n\}$ 是递增有界数列，有单调有界定理，数列 $\{b_n\}$ 收敛.

（2）由（1），由数列极限的柯西准则（必要性），$\forall\varepsilon>0$，$\exists N,\forall n>N$，对任何正整数 p，有

$$|b_{n+p}-b_n|<\varepsilon,\text{即}$$

$$|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-2}-a_{n+p-3}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon,$$

于是有

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=|a_{n+p}-a_{n+p-1}+a_{n+p-1}-a_{n+p-2}+\cdots+a_{n+1}-a_n|\\&\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

于是由数列极限的柯西准则（充分性），可知数列 $\{a_n\}$ 也是收敛的。

Stolz 定理

二．（本题 10 分）

（1）证明：$\ln(1+x)<x\ (x>0)$;

（2）设 $x_1>0,\ x_{n+1}=\ln(1+x_n)\ (n=1,2,\ldots)$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；

（3）利用 Stolz 定理证明：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=2.$

证明：（1）设 $f(t)=\ln(1+t)-t,(t>0)$ 则 $f'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1<0,(t>0)$

从而 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上严格单调递减，$f(x)<f(0)=0$，即 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$.

（2）$x_1>0$，则 $x_n>0$，且由（1）的结论，$x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n(n=1,2,\ldots)$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界必有极限 $\{x_n\}$ 收敛，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ 两边取极限得，$A=\ln(1+A)$, 显然 $A=0$.

(3)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 由 STOLZ 定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}-x_n}{x_nx_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}-\ln(1+x_{n-1})}{x_{n-1}\ln(1+x_{n-1})}$$

而 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$,

所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n}=\frac{1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=2.$