第十三章　能量法（二）

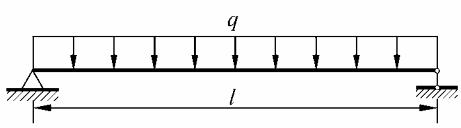
题号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　页码

(也可通过左侧题号书签直接查找题目与解)

13-2　图示圆截面简支梁，直径为 d，承受均布载荷 q 作用，弹性模量 E 与切变模量 G 之比为 8:3。

（1）若同时考虑弯矩与剪力的作用，试计算梁的最大挠度与最大转角；

（2）当 l/d =10 与 l/d =5 时，试计算剪切变形在总变形（最大挠度与最大转角）中所占百分比。



题 13-2 图

解：（1）计算梁的最大挠度的单位状态如图 13-2a 所示。

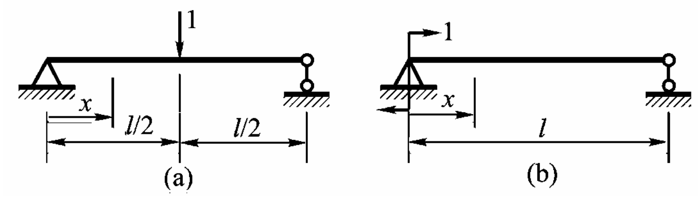


图 13-2

$$\overline{M}(x)=\frac{1}{2}x,\qquad M(x)=\frac{ql}{2}x-\frac{q}{2}x^2$$

$$\overline{F}_S(x)=\frac{1}{2},\qquad F_S(x)=\frac{ql}{2}-qx$$

最大挠度为

$$\Delta_{\max}=\frac{2}{EI}\int_0^{l/2}(\frac{x}{2})(\frac{ql}{2}x-\frac{q}{2}x^2)\mathrm{d}x+\frac{10\times 2}{9GA}\int_0^{l/2}(\frac{1}{2})(\frac{ql}{2}-qx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5ql^2}{\pi Ed^2}(\frac{l^2}{6d^2}+\frac{8}{27})\quad(\downarrow)$$

计算梁的最大转角的单位状态如图 13-2b 所示。

$$\overline{M}(x)=1-\frac{x}{l},\qquad \overline{F}_S(x)=-\frac{1}{l}$$

最大转角为

$$\theta_{\max}=\frac{1}{EI}\int_0^l(1-\frac{x}{l})(\frac{ql}{2}x-\frac{q}{2}x^2)\mathrm{d}x+\frac{10}{9GA}\int_0^l(-\frac{1}{l})(\frac{ql}{2}-qx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{ql^3}{24EI}=\frac{8ql^3}{3\pi Ed^4}$$

（2） 由以上结果可知，剪力引起的挠度为

$$\varDelta_s=\frac{40ql^2}{27\pi Ed^2}$$

占总挠度的比例为

$$\delta=\frac{\varDelta_s}{\varDelta_{\max}}=\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{\frac{l^2}{6d^2}+\frac{8}{27}}$$

当 $l/d=10$ 时，$\delta=1.75\%$

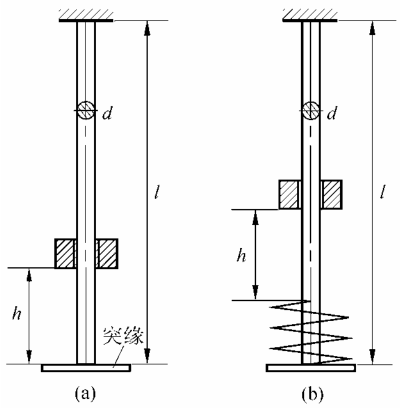
当 $l/d=5$ 时，$\delta=6.64\%$

由此可见，对于细长梁，剪力对位移的影响比弯矩小得多，通常可以忽略不计。

13-3 图示圆截面钢杆，直径 d =20mm，杆长 l =2m，弹性模量 E =210GPa，一重量为 P = 500N 的冲击物，沿杆轴自高度 h =100mm 处自由下落。试在下列两种情况下计算杆内横截面上的最大正应力。杆与突缘的质量以及突缘与冲击物的变形均忽略不计。

（1）冲击物直接落在杆的突缘上（图 a）；

（2）突缘上放有弹簧，其弹簧常量 k =200 N/mm（图 b）。



题 13-3 图

解：（1）以 P 作为静载荷置于突缘上，有静位移

$$\varDelta_{\mathrm{st}}=\frac{Pl}{EA}=\frac{500\times 2.00}{210\times 10^{9}}\left(\frac{4}{\pi\times 0.020^{2}}\right)\mathrm{m}=1.516\times 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

最大冲击载荷为

$$F_{\mathrm{d}}=P\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\varDelta_{\mathrm{st}}}}\right)$$

于是，杆内横截面上最大正应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{\mathrm{d}}}{A}=\frac{P}{A}\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\varDelta_{\mathrm{st}}}}\right)=\frac{500\mathrm{N}}{\pi\times 10^{-4}\mathrm{m}^{2}}\left(1+\sqrt{1+\frac{2\times 0.100}{1.516\times 10^{-5}}}\right)$$

$$=1.844\times 10^{8}\,\mathrm{Pa}=184.4\mathrm{MPa}$$

（2）被冲击面（弹簧顶面）的静位移为

$$\varDelta_{\mathrm{st}}=\frac{Pl}{EI}+\frac{P}{k}=1.516\times 10^{-5}\,\mathrm{m}+\frac{500}{200\times 10^{3}}\mathrm{m}=2.52\times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

最大冲击载荷为

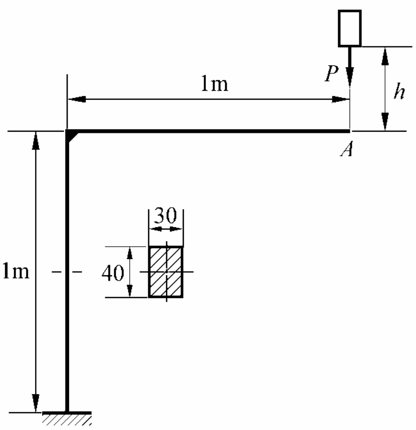
$$F_{\mathrm{d}}=P\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\varDelta_{\mathrm{st}}}}\right)$$

于是，杆内横截面上最大的正应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{\mathrm{d}}}{A}=\frac{500\mathrm{N}}{\pi\times 10^{-4}\mathrm{m}^{2}}\left(1+\sqrt{1+\frac{2\times 0.100}{2.52\times 10^{-3}}}\right)=1.586\times 10^{7}\,\mathrm{Pa}=15.86\mathrm{MPa}$$

13-5

图示等截面刚架，一重量为 P =300 N 的物体，自高度 h = 50 mm 处自由下落。试计算截面 A 的最大铅垂位移与刚架内的最大正应力。材料的弹性模量 E = 200 GPa，刚架的质量与冲击物的变形均忽略不计。



题 13-5 图

解：采用单位载荷法计算截面 A 的铅垂静位移，其载荷状态（以 P 作为静载荷）和单位状态（令 P=1)的弯矩方程依次为

$$M(x_1) = -Px_1, \qquad M(x_2) = -Pl$$
$$\overline{M}(x_1) = -x_1, \qquad \overline{M}(x_2) = -l$$

式中，长度 **l=1m**，坐标 x_1 自 ***A*** 向左取，x_2 自上向下取。

截面 ***A*** 的铅垂静位移为

$$\Delta_{\mathrm{st}} = \int_0^l \frac{\overline{M}(x_1)M(x_1)}{EI}\mathrm{d}x_1 + \int_0^l \frac{\overline{M}(x_2)M(x_2)}{EI}\mathrm{d}x_2 = \frac{4Pl^3}{3EI}$$

$$= \frac{4\times300\times1.00^3}{3\times200\times10^9\times\left(\dfrac{0.040\times0.030^3}{12}\right)}\mathrm{m} = 2.22\times10^{-2}\mathrm{m}$$

截面 ***A*** 的最大冲击位移为

$$\Delta_{\max} = \Delta_{\mathrm{d}} = \left(2.22\times10^{-2}\mathrm{m}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2\times0.050}{2.22\times10^{-2}}}\right) = 7.44\times10^{-2}\mathrm{m} = 74.4\mathrm{mm}$$

而

$$F_{\mathrm{d}} = (300\mathrm{N})\left(1+\sqrt{1+\frac{2\times0.050}{2.22\times10^{-2}}}\right) = 1.004\times10^3\mathrm{N}$$

$$M_{\max} = \left(1.004\times10^3\mathrm{N}\right)(1.00\mathrm{m}) = 1.004\times10^3\mathrm{N\cdot m}$$

在冲击载荷 F_{d} 作用下，刚架内的最大正应力为

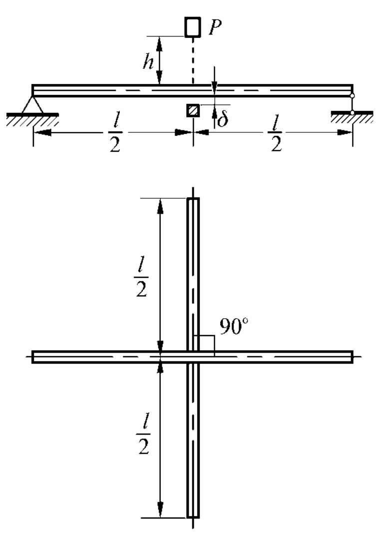
$$\sigma_{\max} = \frac{1.004\times10^3\mathrm{N}}{\left(\dfrac{0.040\times0.030^2}{6}\right)\mathrm{m}^2} + \frac{1.004\times10^3\mathrm{N}}{(0.040\times0.030)\mathrm{m}^2} = 1.682\times10^8\mathrm{Pa} = 168.2\mathrm{MPa}$$

13-7 图示两根正方形截面简支梁，一重量为 ***P*** **=600N** 的物体，自高度 ***h*** **=20 mm** 处自由下落。试在下列两种情况下计算梁内的最大弯曲正应力：

（1）二梁间无间隙；

（2）二梁间的间隙 δ **=2 mm**。

已知二梁的跨度 ***l*** **=1m**，横截面的边宽 ***a*** **= 30 mm**，弹性模量 ***E*** **=200 GPa**。梁的质量与冲击物的变形均忽略不计。



题 13-7 图

解：(1) $\delta = 0$ **时**

据

$$\varDelta = \frac{Fl^3}{48EI}$$

得刚度系数

$$k = \frac{F}{\varDelta} = \frac{48EI}{l^3} = \frac{48 \times 200 \times 10^9 \times \dfrac{0.030^4}{12}}{1.00^3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 6.48 \times 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

由此可得

$$F_{\mathrm{d}} = P\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4hk}{P}}\right) = (600\mathrm{N})\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 \times 0.020 \times 6.48 \times 10^5}{600}}\right)$$

$$= 6.209 \times 10^3\,\mathrm{N}$$

及

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{F_{\mathrm{d}} l}{8 \cdot \dfrac{a^3}{6}} = \frac{6 \times 6.209 \times 10^3 \times 1.00}{8 \times 0.030^3}\,\mathrm{Pa}$$

$$= 1.725 \times 10^8\,\mathrm{Pa} = 172.5\mathrm{MPa}$$

(2) $\delta = 2\mathrm{mm}$ **时**

据

$$V_{\varepsilon} = \frac{k}{2}\varDelta^2$$

得

$$V_{\varepsilon} = \frac{1}{2}k\varDelta_{\mathrm{d}}^2 + \frac{1}{2}k(\varDelta_{\mathrm{d}} - \delta)^2$$

而

$$E_{\mathrm{p}}=\left(h+\Delta_{\mathrm{d}}\right)P$$

由

$$E_{\mathrm{p}}=V_{\varepsilon}$$

得

$$\Delta_{\mathrm{d}}^{2}-\left(\frac{P}{k}+\delta\right)\Delta_{\mathrm{d}}+\left(\frac{\delta^{2}}{2}-\frac{Ph}{k}\right)=0$$

解得二根，其中有用根为

$$\Delta_{\mathrm{d}}=\frac{\left(P+k\delta\right)+\sqrt{\left(P+k\delta\right)^{2}+4k\left(Ph-\frac{k}{2}\delta^{2}\right)}}{2k}=5.78\times10^{-3}\mathrm{m}$$

由此得最大冲击载荷为

$$F_{\mathrm{d}}=k\Delta_{\mathrm{d}}+k\left(\Delta_{\mathrm{d}}-\delta\right)=P+\sqrt{\left(P+k\delta\right)^{2}+4k\left(Ph-\frac{k}{2}\delta^{2}\right)}$$

设上梁分担的冲击载荷为 F_{d1}，则有

$$F_{\mathrm{d1}}=k\Delta_{\mathrm{d}}=\left(6.48\times10^{5}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)\times\left(5.78\times10^{-3}\mathrm{m}\right)=3.747\times10^{3}\mathrm{N}$$

最大弯曲正应力在上梁中间截面处，其值为

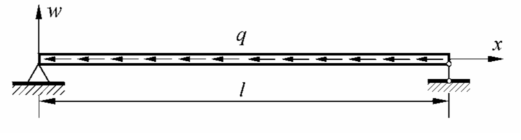
$$\begin{aligned}\sigma_{\max}&=\frac{M_{1\max}}{W}=\frac{6F_{\mathrm{d1}}l}{4a^{3}}=\frac{6\times3.747\times10^{3}\times1.00\mathrm{N}}{4\times0.030^{3}\mathrm{m}^{2}}\\&=2.08\times10^{8}\mathrm{Pa}=208\mathrm{MPa}\end{aligned}$$

13-8 图示两端铰支细长压杆，承受均布载荷 q 作用。试利用能量法确定载荷 q 的临界值。

设压杆微弯平衡时的挠曲轴方程为

$$w=f\sin\frac{\pi x}{l}$$

式中，f 为压杆中点的挠度即最大挠度。



题 13-8 图

解：由题设可知，

$$w=f\sin\frac{\pi x}{l},\qquad w'=\frac{\pi f}{l}\cos\frac{\pi x}{l}$$

据此可得

$$\lambda(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (w')^2 \mathrm{d}x^* = \frac{1}{2}\int_0^x (\frac{\pi f}{l})^2 \cos^2\frac{\pi x^*}{l}\mathrm{d}x^* = \frac{\pi f^2}{8l}\left(\frac{2\pi x}{l}+\sin\frac{2\pi x}{l}\right)$$

q_{cr} 所作之功为

$$\Delta W = \int_0^l \lambda(x) q_{\mathrm{cr}} \mathrm{d}x = \frac{\pi f^2 q_{\mathrm{cr}}}{8l}\int_0^l \left(\frac{2\pi x}{l}+\sin\frac{2\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2 f^2 q_{\mathrm{cr}}}{8}$$

又据

$$w'' = -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin\frac{\pi x}{l}$$

得压杆所增应变能为

$$\Delta V_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^l EI(w'')^2 \mathrm{d}x = \frac{EI\pi^4 f^2}{2l^4}\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{EI\pi^4 f^2}{4l^3}$$

将以上结果代入

$$\Delta W = \Delta V_\varepsilon$$

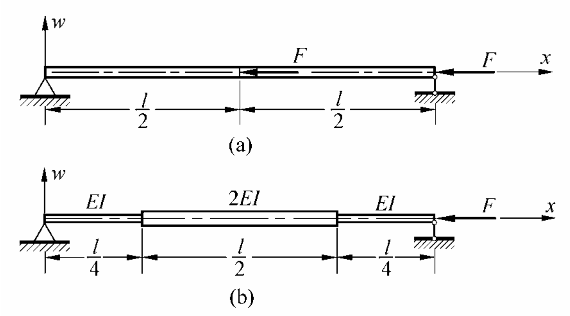
最后得到 q 的临界值为

$$q_{\mathrm{cr}} = \frac{2\pi^2 EI}{l^3}$$

13-9 试利用能量法确定图示细长压杆的临界载荷 F_{cr}。设压杆微弯平衡时的挠曲轴方程为

$$w = f \sin\frac{\pi x}{l}$$

式中，f 为压杆中点的挠度即最大挠度。



题 13-9 图

（a）解：根据题设

$$w = f \sin\frac{\pi x}{l}$$

有

$$w' = f\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l}, \qquad w'' = -f\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}$$

由此可得

$$\lambda\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{l/2}(w')^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^2 f^2}{2l^2}\int_0^{l/2}\cos^2\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2 f^2}{8l}$$

$$\lambda(l) = \frac{1}{2}\int_0^{l}(w')^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^2 f^2}{4l}$$

于是

$$\Delta W = F\left[\lambda\left(\frac{l}{2}\right) + \lambda(l)\right] = \frac{3\pi^2 f^2 F}{8l}$$

又

$$\Delta V_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^{l}EI(w'')^2\mathrm{d}x = \frac{EI\pi^4 f^2}{2l^4}\int_0^{l}\sin^2\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{EI\pi^4 f^2}{4l^3}$$

将以上结果代入

$$\Delta W = \Delta V_\varepsilon$$

最后得到 F 的临界值为

$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{8l}{3\pi^2 f^2}\cdot\frac{EI\pi^4 f^2}{4l^3} = \frac{2\pi^2 EI}{3l^2}$$

（b）解：根据题设

$$w = f\sin\frac{\pi x}{l}$$

有

$$w' = f\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l}, \qquad w'' = -f\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}$$

由此可得

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^{l}(w')^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^2 f^2}{2l^2}\int_0^{l}\cos^2\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2 f^2}{4l}$$

于是

$$\Delta W = F\lambda = \frac{\pi^2 f^2}{4l}F$$

又

$$\Delta V_\varepsilon = \frac{1\times 2}{2}\left[\int_0^{l/4} EI\left(w''\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{l/4}^{l/2} 2EI\left(w''\right)^2 \mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{EIf^2\pi^4}{l^4}\int_0^{l/4}\sin^2\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x + \frac{2EIf^2\pi^4}{l^4}\int_{l/4}^{l/2}\sin^2\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(3\pi+2)EI\pi^3 f^2}{8l^3}$$

将以上结果代入

$$\Delta W = \Delta V_\varepsilon$$

最后得到 F 的临界值为

$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{(3\pi+2)}{2\pi}\frac{\pi^2 EI}{l^2} = 1.82\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

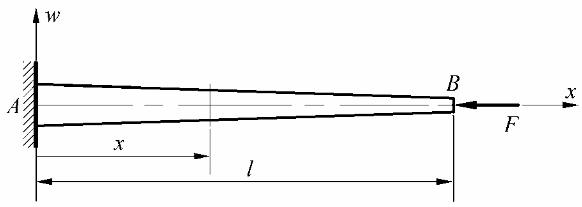
13-10 图示变截面细长压杆，横截面 A 的惯性矩为 I_0, x 截面的惯性矩为

$$I = I_0\left(1-\frac{x}{2l}\right)$$

设压杆微弯平衡时的挠曲轴方程为

$$w = f\frac{x^2}{l^2}$$

式中，f 为压杆自由端的挠度。试利用能量法确定压杆的临界载荷 F_{cr}。



题 13-10 图

解：根据题设

$$w = f\frac{x^2}{l^2}$$

有

$$w' = \frac{2f}{l^2}x, \qquad w'' = \frac{2f}{l^2}$$

由此可得

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l (w')^2\mathrm{d}x = \frac{2f^2}{l^4}\int_0^l x^2\mathrm{d}x = \frac{2f^2}{3l}$$

于是

$$\Delta W = F\lambda = \frac{2f^2F}{3l}$$

又

$$\Delta V_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^l EI(w'')^2\,\mathrm{d}x = \frac{2f^2}{l^4}\int_0^l EI_o\left(1-\frac{x}{2l}\right)\mathrm{d}x = \frac{3f^2EI_o}{2l^3}$$

将以上结果代入

$$\Delta W = \Delta V_\varepsilon$$

最后得到 F 的临界值为

$$F_{cr} = \frac{9EI_o}{4l^2}$$

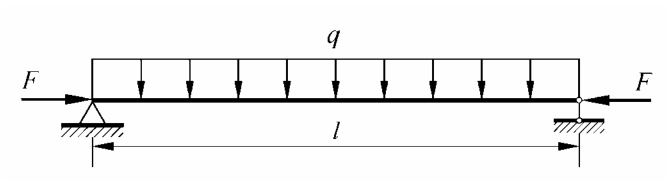
13-11 图示两端铰支细长梁柱，同时承受均布横向载荷 q 与轴向力 F 作用。试证明梁的最大弯矩为

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Fw_0}{1-\alpha}$$

式中，w_0 代表载荷 q 单独作用时梁中点的挠度。设梁柱的挠曲轴方程为

$$w = f\sin\frac{\pi x}{l}$$

式中，f 代表梁柱中点的挠度即最大挠度。



题 13-11 图

解：根据题设

$$w = f\sin\frac{\pi x}{l}$$

有

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial f}\delta f = \left(\sin\frac{\pi x}{l}\right)\delta f$$

当 w 和 λ 均有无限小增量 δw 和 $\delta\lambda$ 时，V_ε 也必有无限小增量 δV_ε，并满足下式

$$\delta V_\varepsilon = \int_0^l (q\mathrm{d}x)\cdot\delta w + F\delta\lambda \tag{a}$$

其中，

$$\int_0^l (q\mathrm{d}x)\cdot\delta w=\int_0^l q\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x\cdot\delta f=\frac{2ql}{\pi}\delta f \tag{b}$$

由于

$$\lambda=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\pi^2}{l^2}f^2\cos^2\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4l}f^2$$

故有

$$\delta\lambda=\frac{\partial\lambda}{\partial f}\delta f=\frac{\pi^2}{2l}f\delta f \tag{c}$$

又由于

$$V_\varepsilon=\frac{EI}{2}\int_0^l\frac{\pi^4}{l^4}f^2\sin^2\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{\pi^4 EI}{4l^3}f^2$$

故有

$$\delta V_\varepsilon=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial f}\delta f=\frac{\pi^4 EI}{2l^3}f\delta f \tag{d}$$

将式（**b**）~（**d**）代入式（**a**），得

$$\frac{\pi^4 EI}{2l^3}f\delta f=\frac{2ql}{\pi}\delta f+F\left(\frac{\pi^2}{2l}f\delta f\right)$$

由此得

$$f=\frac{2ql}{\frac{\pi^3}{2l}\left(\frac{\pi^2 EI}{l^2}-F\right)}=\frac{4ql^2}{\pi^3F_{\mathrm{cr}}(1-\alpha)}=\frac{4ql^4}{\pi^5EI(1-\alpha)}$$

$$\approx\frac{5ql^4}{384EI}\cdot\frac{1}{(1-\alpha)}=\frac{w_0}{1-\alpha}$$

式中，

$$\alpha=\frac{F}{F_{\mathrm{cr}}},\qquad F_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2EI}{l^2},\qquad w_0=\frac{5ql^4}{384EI}$$

该梁柱的最大弯矩发生在其中间截面处，其值为

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}+Ff=\frac{ql^2}{8}+\frac{Fw_o}{1-\alpha}$$