数字信号处理

第10讲　离散傅里叶变换

——频域采样及FFT

- 离散傅里叶变换的性质（续）
- 频域采样及频域采样定理
- DFT（FFT）的应用

离散傅里叶变换的性质（续）

■ 循环卷积定理（时域、频域）

（1）循环卷积定义

- 序列 $h(n), x(n)$ 的长度分别为**N**和**M**
- $x(n)$ 与 $h(n)$ 的**L**点循环卷积定义为

$$y_c(n) = h(n) \text{Ⓛ} x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L R_L(n)$$

$$L \ge \max[N, \quad M]$$

离散傅里叶变换的性质（续）

（2）时域循环卷积定理

- 序列 $h(n), x(n)$ 的长度分别为N和M，且：

$$X(k) = DFT[x(n)]_L \quad H(k) = DFT[h(n)]_L$$

- 若： $y_c(n) = h(n) \circledL x(n) \quad L \geq \max[N, \quad M]$

- 则： $Y_c(k) = DFT[y_c(n)]_L = H(k)X(k)$

离散傅里叶变换的性质（续）

- 证明：

$$Y_c(k) = DFT[y_c(n)]_L = \sum_{n=0}^{L-1} y_c(n) W_L^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{L-1} \left\{ [\sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L] R_L(n) \right\} W_L^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} h(m) \sum_{n=0}^{L-1} x((n-m))_L W_L^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} h(m) \boxed{W_L^{km}} \sum_{n=0}^{L-1} x((n-m))_L \boxed{W_L^{k(n-m)}}$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} h(m) W_L^{km} \sum_{j=-m}^{L-1-m} x((j))_L W_L^{kj}$$

离散傅里叶变换的性质（续）

- （续上页）： $Y_c(k) == \sum_{m=0}^{L\text{-}1} h(m) W_L^{km} \sum_{j=-m}^{L\text{-}1-m} x((j))_L W_L^{kj}$

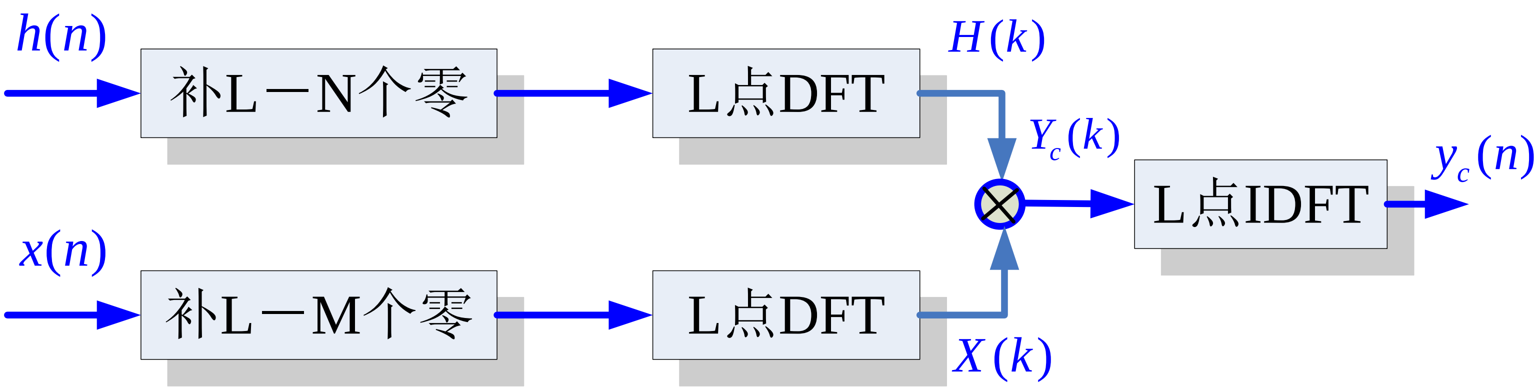
$x((j))_L W_L^{k(j)}$ 以L为周期，取主值区间，则：

$$Y_c(k) = \sum_{m=0}^{L\text{-}1} h(m) W_L^{km} \sum_{j=0}^{L\text{-}1} x((j))_L W_L^{kj}$$

$= H(k)X(k), \quad 0 \le k \le L\text{-}1$ 证毕。

离散傅里叶变换的性质（续）

- **时域循环卷积定理用途**：将时域循环卷积运算转换成频域乘积，可以利用DFT和IDFT求循环卷积



用DFT循环卷积运算的框图

离散傅里叶变换的性质（续）

（3）频域循环卷积定理

- 序列 $h(n),x(n)$ 的长度分别为N和M

$$y_m(n)=h(n)x(n),\quad H(k)=DFT\left[h(n)\right]_L,\quad X(k)=DFT\left[x(n)\right]_L,$$

- 则

$$Y_m(k)=DFT[y_m(n)]_L=\frac{1}{L}H(k)\,\textcircled{L}\,X(k)$$

- 证明：

$$Y_m(k)=DFT\left[y_m(n)\right]=\sum_{n=0}^{L-1}h(n)x(n)W_L^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{L-1}\left[\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1}H(m)W_L^{-mn}\right]x(n)W_L^{kn}$$

离散傅里叶变换的性质（续）

- （续上页）：

$$Y_m(k)=\sum_{n=0}^{L-1}\left[\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1}H(m)W_L^{-mn}\right]x(n)W_L^{kn}$$

$$=\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1}H(m)\sum_{n=0}^{L-1}W_L^{-mn}x(n)W_L^{kn}$$

$$=\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1}H(m)\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_L^{(k-m)n}$$

$$=\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1}H(m)X((k-m))_L R_L(k)$$

$$=\frac{1}{L}H(k) \text{ Ⓛ } X(k)$$

证毕

离散傅里叶变换的性质（续）

■ 巴塞伐尔定理（时域、频域）

- 序列 $x(n)$ 的长度为N，$X(k)=DFT[x(n)]_N$
- 则 $$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

■ 证明提示：

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x^*(n) \qquad \sum_{n=0}^{N-1}|X(k)|^2=\sum_{n=0}^{N-1}X(k)X^*(k)$$

离散傅里叶变换的性质（续）

- 证明

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x^*(n)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\right]x^*(n)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\right]^*$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)X^*(k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

证毕

■ 频域采样与频域采样定理

$$\tilde{X}_N(k) = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \Leftarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{x}_N(n) = IDFS\left[\tilde{X}_N(k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_N(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \begin{cases} 1, & m = n + iN, i\text{为整数} \\ 0, & m\text{为其它值} \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}_N(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+iN)$$

频域采样

- 若原序列x(n)长度为M，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$
- 对 $X(e^{j\omega})$ 在频率区间 $[0,2\pi]$等间隔采样N点得到 $X_N(k)$
- 只有当频域采样点数: $N \geq M$
- 才有 $\tilde{x}_N(n)R_N(n) = IDFS[\tilde{X}(k)]R_N(n) = x(n)$

  或： $x(n) = IDFT\left[X_N(k)\right]_N$

- 即可由频域采样 $X_N(k)$ 不失真地恢复原信号，否则产生时域混叠现象。——频域采样定理

DFT的快速算法—快速傅里叶变换（FFT）

■ FFT

- DFT的特点
- 基2FFT算法原理
- DFT（FFT）的应用举例

DFT的快速算法—快速傅里叶变换（FFT）

■ DFT的特点

- （1）W_N^{nk} 的周期性 $W_N^{m+lN}=e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+lN)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}m}=W_N^m$
- （2）W_N^{nk} 的对称性 $\left(W_N^{N-m}\right)^*=W_N^m$
- （3） [W]与[x(n)]的相乘运算中重复运算，降低DFT的点数

■ 基2FFT算法原理

基2时间抽取(Decimation in time)DIT-FFT算法

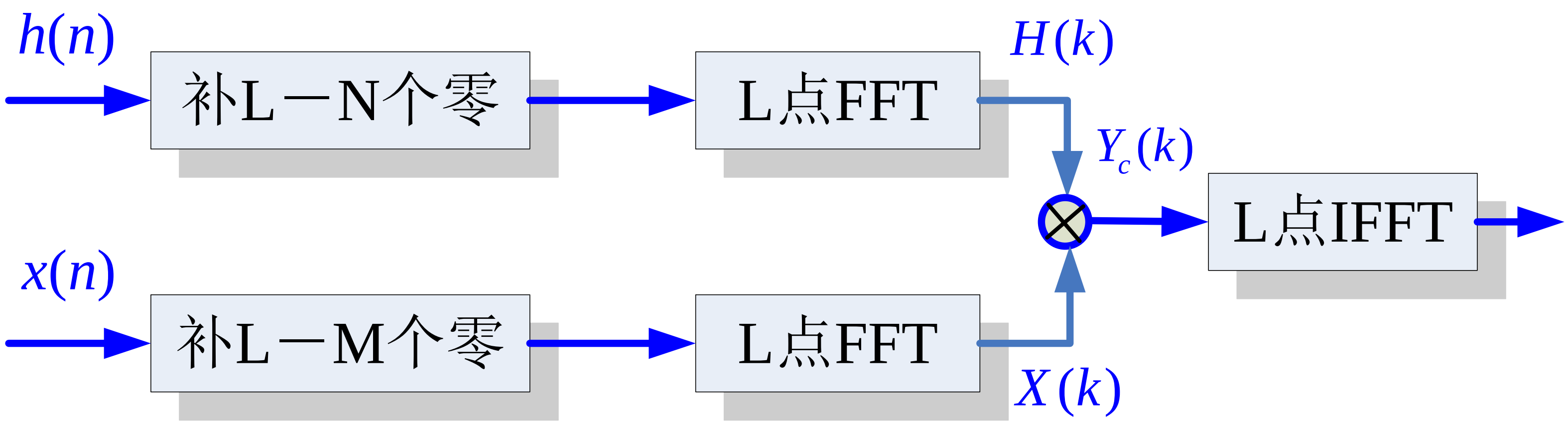
$$x(n) \to \begin{cases} x(2r) \\ x(2r+1) \end{cases} \qquad r = 0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

■ FFT与DFT直接运算的计算量比较

算法（序列长度N）	复数乘法运算次数			复数加法运算次数		
DFT直接	N^2			N（N-1）		
FFT	$(N/2)*M=(N/2)\log_2 N$			$N*M=N*\log_2 N$		
N=8	64	12	5.3倍	56	24	2.33
N=64	4096	192	21.3倍	4032	384	10.5
N=1024	1048576	5120	204.8倍	1047552	10240	102.3

■ DFT（FFT）的应用举例

(1) 利用FFT计算两个有限长序列的线性卷积



$$L \geq N + M - 1$$

(2) 计算有限长h(n)和无限长x(n)序列的线性卷积

➢重叠相加法

$$x(n)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i(n-iM) \quad \Rightarrow \quad x_i(n)=x(n+iM)R_M(n)$$

$$\Downarrow$$

$$y_i(n-iM)=h(n)*x_i(n-iM)$$

$$\Downarrow$$

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{i=0}^{\infty}h(n)*x_i(n-iM)=\sum_{i=0}^{\infty}y_i(n-iM)$$

(3) 对序列进行频谱分析

1. DFT的点数N的确定

– N可依据先验知识和实验进行确定

– 根据要求的频率分辨率（设为为D弧度）确定

$$\frac{2\pi}{N} \le D \quad \Rightarrow \quad \therefore N_{\min} = \left\lceil \frac{2\pi}{D} \right\rceil$$

– 满足基2FFT对点数N的要求，$N = 2^i$ ，i为正整数

2. 计算DFT，注意自变量k所对应的数字频率和模拟频率为：

$$\omega_k = 2\pi k / N \ (\text{rad})，\quad f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} F_s = \frac{kF_s}{N} \ (\text{Hz})$$

第三章小结

- DFT的提出
  - 主值序列提出
  - DFT与IDFT
  - 时域、频域实现了离散化、有限化
- DFT与ZT、DTFT、DFS之间的关系
- DFT的性质
  - 循环卷积（时域、频域循环卷积定理）
  - 利用IDFT计算循环卷积（循环卷积定理的应用）

第三章小结

- 频域采样定理
  - N≥M，不会造成时域混叠
- FFT的引入
  - DFT运算量较大，快速离散傅里叶变换算法FFT是解决方案
  - W因子的周期性、对称性
  - 重复计算及降点DFT
  - IDFT的高速算法

第三章小结

- DFT 的应用
  - 循环卷积与线性卷积之间的关系（L≥N+M-1）
  - 两个有限长序列的线性卷积计算
  - 有限长序列与无限长序列的卷积（重叠相加法）
  - 序列的频谱分析

第10次作业（4月10日）

假定数字序列$x_1(n)$和$x_2(n)$分别是长度N=15和M=25的矩形序列，利用离散傅里叶变换分别计算长度L=25、L=39和L=64的循环卷积。

要求：

1）绘制出数字序列$x_1(n)$和$x_2(n)$的波形；

2）绘制出不同长度的循环卷积的结果；

3）简要地分析上述计算结果。

注意：给出完整的Matlab程序代码，要正确标注绘制图形的坐标，要求提交打印版。