14.6 网络函数的定义及性质

1. 定　义 线性非时变电路,单一激励作用下，网络零状态响应的象函数与激励的象函数之比。

激　励 (Excite) → $e(t)$　　$L\left[e(t)\right]=E(s)$

零状态响应 (Response) → $r(t)$　　$L\left[r(t)\right]=R(s)$

网络函数 →

$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$$

网络函数与激励无关，是系统参数和结构决定的。

2. 网络函数$H(s)$的物理意义

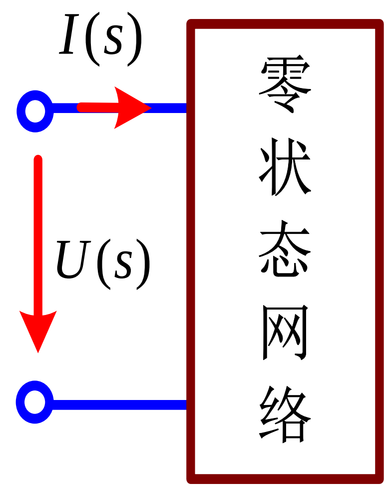
当激励和响应属于同一对端子时，称为驱动点函数。

当激励和响应不属于同一对端子时，称为转移函数。

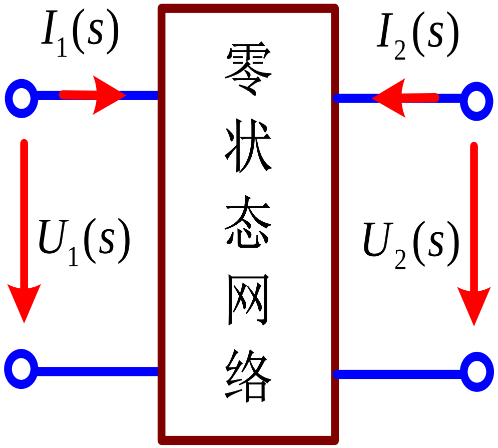
驱动点函数

驱动点阻抗 $$H(s)=\frac{U(s)}{I(s)}$$

驱动点导纳 $$H(s)=\frac{I(s)}{U(s)}$$



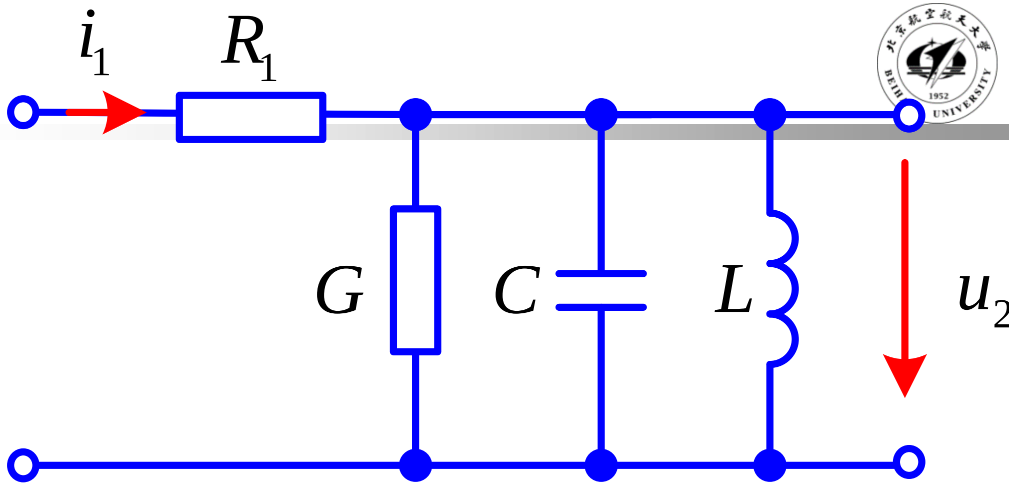
转移函数



- 转移阻抗 $H(s)=\dfrac{U_2(s)}{I_1(s)}$ $H(s)=\dfrac{U_1(s)}{I_2(s)}$
- 转移导纳 $H(s)=\dfrac{I_2(s)}{U_1(s)}$ $H(s)=\dfrac{I_1(s)}{U_2(s)}$
- 转移电压比 $H(s)=\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$ $H(s)=\dfrac{U_1(s)}{U_2(s)}$
- 转移电流比 $H(s)=\dfrac{I_2(s)}{I_1(s)}$ $H(s)=\dfrac{I_1(s)}{I_2(s)}$

【例】

求：转移阻抗 $\dfrac{U_2(s)}{I_1(s)}$ 。



解

$$U_2(s)=\frac{1}{G+sC+\dfrac{1}{sL}}I_1(s)$$

$$H(s)=\frac{1}{G+sC+\dfrac{1}{sL}}=\frac{Ls}{LCs^2+GLs+1}$$

3. 网络函数的性质和应用

$$R(s)=H(s)E(s)$$

$$e(t)=\delta(t) \quad E(s)=L\left[\delta(t)\right]=1$$

$$r(t)=h(t) \quad R(s)=H(s)$$

性 质 $\Rightarrow$ $\boxed{L\left[h(t)\right]=H(s)}$

冲激响应 $\underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftharpoons}}$ 网络函数

应 用 $\begin{cases} \text{任意激励下零状态响应} \begin{cases} \text{零输入响应} \\ \text{电路可能的结构和参数} \end{cases} \\ \text{正弦稳态响应} \end{cases}$

（1）由网络函数求取任意激励的零状态响应

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \qquad E(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$R(s)=H(s)E(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\cdot\frac{P(s)}{Q(s)}$$

若 $D(s)=0$ ，$Q(s)=0$ 的根均无重根

p_i为 $D(s)=0$ 的根　p_j为 $Q(s)=0$ 的根

$$R(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-p_i}+\sum_{j=1}^{m}\frac{B_j}{s-p_j}$$

$$r(t)=L^{-1}[R(s)]=\boxed{\sum_{i=1}^{n}A_i\,\mathrm{e}^{p_i t}}+\boxed{\sum_{j=1}^{m}B_j\,\mathrm{e}^{p_j t}}$$

自由分量　　　　强制分量

暂态分量

（2）由网函数确定正弦稳态响应

$H(s)$ 中令 $s=\mathrm{j}\omega$

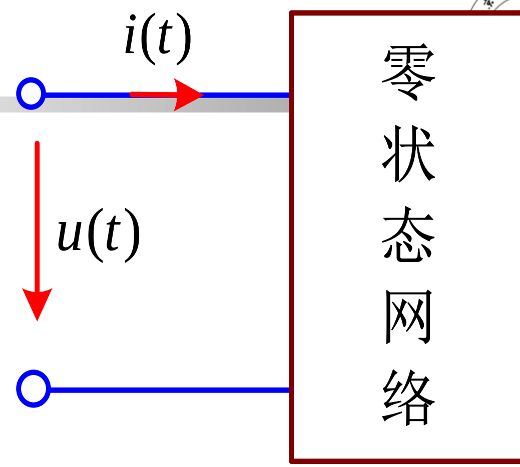
$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{R(\mathrm{j}\omega)}{E(\mathrm{j}\omega)}$$

响应相量

激励相量

【例】 已知：当 $u(t)=\delta(t)$ 时

$$i(t)=\mathrm{e}^{-2t}\cos t$$



1. 当 $u(t)=E\,\mathrm{e}^{-2t}$ 时，求 $i(t)$

2. 求网络可能的结构和参数。

解

$$h(t)=\mathrm{e}^{-2t}\cos t$$

$$H(s)=L\left[h(t)\right]=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$ 驱动点导纳

$$I(s)=R(s)=H(s)U(s)$$

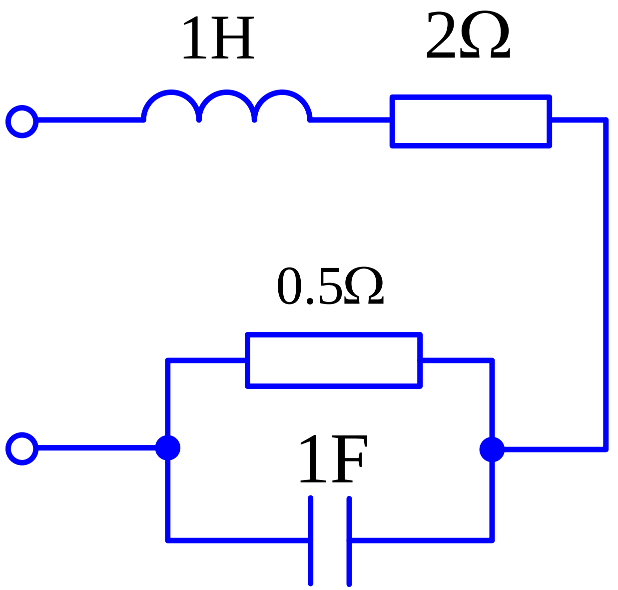
$$=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\cdot\frac{E}{s+2}=\frac{E}{(s+2)^2+1}$$

$$I(s)=\frac{E}{(s+2)^2+1}$$

$$i(t)=L^{-1}\left[I(s)\right]=E\,\mathrm{e}^{-2t}\sin t$$

$$H(s)=\frac{I(s)}{U(s)}=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}$$

$$=\frac{1}{s+2+\dfrac{1}{s+2}}$$



求解线性电路零状态响应的卷积积分法

卷积积分 $t<0,\ f_1(t)=0,\ f_2(t)=0$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\xi)f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

卷积定理 $L\left[f_1(t)\right]=F_1(s)\quad L\left[f_2(t)\right]=F_2(s)$

$$L\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=L\left[\int_0^t f_1(t-\xi)f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]=F_1(s)F_2(s)$$

$$R(s)=H(s)E(s)\qquad r(t)=L^{-1}\left[H(s)E(s)\right]$$

$$r(t)=e(t)*h(t)=\int_0^t e(\xi)h(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

零状态响应=激励与冲激响应的卷乘

卷积积分法：时域分析方法

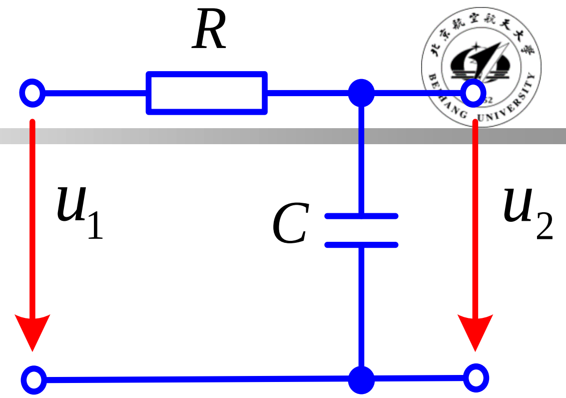
线性电路　零状态响应问题　任意阶数电路

$$\boxed{r(t)=\int_0^t e(\xi)h(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi}\qquad r(t)=\int_0^t e(t-\xi)h(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

一阶电路卷积积分求解

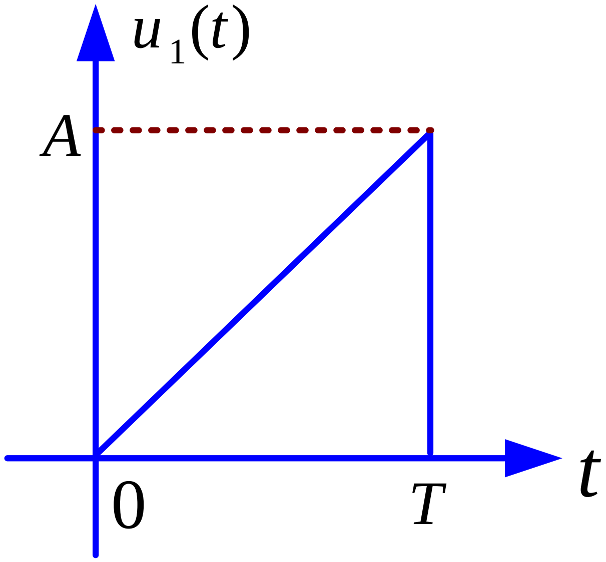
- 分段：按照激励分段
- 定限：按照激励定限
- 变量置换 $\begin{cases} e(t)\rightarrow e(\xi) \\ h(t)\rightarrow h(t-\xi) \end{cases}$

【例】 求：$t>0$时 $u_2(t)$



解

$$u_1(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{T}t & 0<t<T\\ 0 & t>T\end{cases}$$



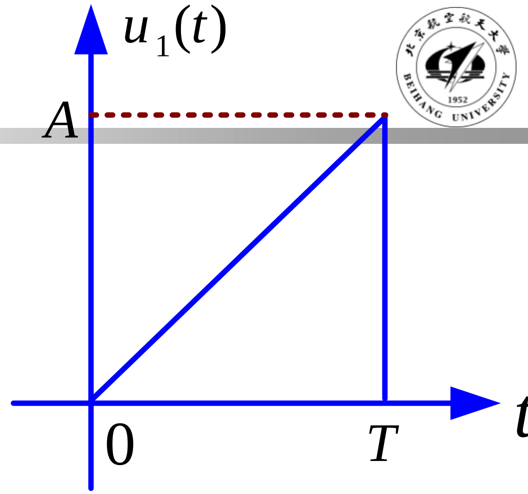
$$s(t)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$h(t)=s'(t)=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$0<t<T \quad u_2(t)=\int_0^t \frac{A}{T}\xi \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t-\xi}{RC}}\,\mathrm{d}\,\xi$$

$$=\frac{A}{T}\left[\xi\,\mathrm{e}^{-\frac{t-\xi}{RC}}-RC\,\mathrm{e}^{-\frac{(t-\xi)}{RC}}\right]\Bigg|_0^t$$

$$=\frac{A}{T}\left[t-RC+RC\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

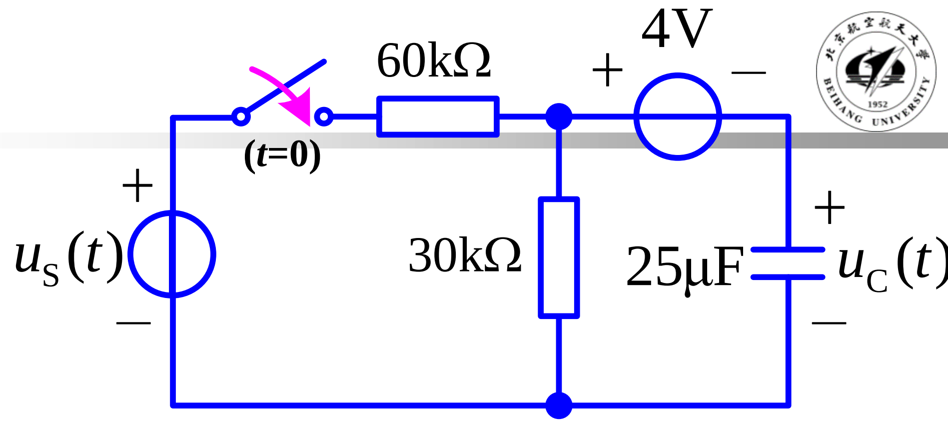


$$t>T \quad u_2(t)=\int_0^T \frac{A}{T}\xi \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t-\xi}{RC}}\,\mathrm{d}\,\xi+\int_T^t 0h(t-\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$$

$$=\frac{A}{T}\left(\xi\,\mathrm{e}^{-\frac{t-\xi}{RC}}-RC\,\mathrm{e}^{-\frac{t-\xi}{RC}}\right)\Bigg|_0^T$$

$$=\frac{A}{T}\left(T\,\mathrm{e}^{-\frac{t-T}{RC}}-RC\,\mathrm{e}^{-\frac{t-T}{RC}}+RC\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

【例】 求：$t>0$时$u_C(t)$



解

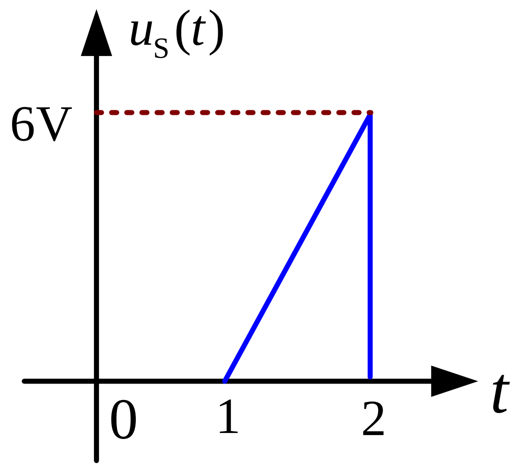
$$u_C(0_-)=-4\text{V}$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=-4\text{V}$$

(1) $u_C(0_+)$ +4V电源共同作用下的部分全响应

$$u_C(0_+)^{(1)}=-4\text{V},u_C(\infty)^{(1)}=-4\text{V}$$

$$u_C(t)^{(1)}=-4\text{V}$$

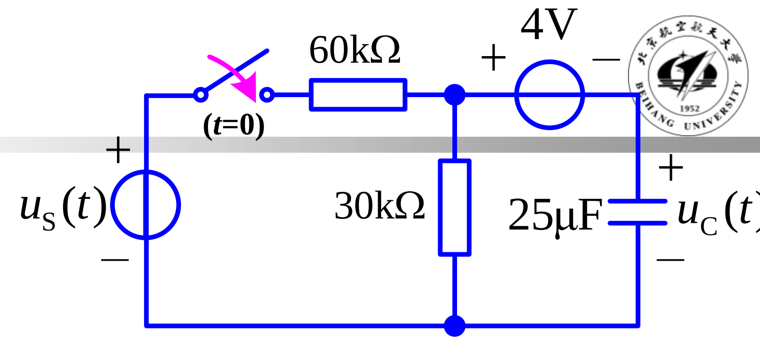


(2) $u_S(t)$的零状态响应 卷积积分法

$u_C(0_-)=0\text{V}$ ，4V电源置零（不作用）

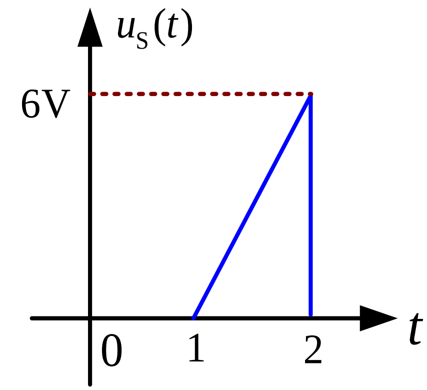
令$u_S(t)=\varepsilon(t)$ 求$s(t)$

$$\tau=\frac{60\times 30}{60+30}\times 10^{3}\times 25\times 10^{-6}=\frac{1}{2}\,\mathrm{s}$$



$$u_C(\infty)=\frac{30}{60+30}\times 1\mathrm{V}=\frac{1}{3}\,\mathrm{V}$$

$$s(t)=\frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)\qquad h(t)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2t}\,\varepsilon(t)$$



$$u_S(t)=\begin{cases}0 & 0<t<1\\ 6t-6 & 1<t<2\\ 0 & t>2\end{cases}$$

$$0<t<1\qquad u_C(t)^{(2)}=0\mathrm{V}$$

$$1<t<2\qquad u_C(t)^{(2)}=\int_1^t 6(\xi-1)\times\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2(t-\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

$$t>2\qquad u_C(t)^{(2)}=\int_1^2 6(\xi-1)\times\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2(t-\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

$$0<t<1 \quad u_C(t)^{(2)}=0\text{V}$$

$$1<t<2$$

$$u_C(t)^{(2)}$$

$$=\int_1^t 6\left(\xi-1\right)\times\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2\left(t-\xi\right)}\,\mathrm{d}\,\xi$$

$$=2\int_1^t\left(\xi-1\right)\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-2\left(t-\xi\right)}$$

$$=\left[2\left(\xi-1\right)\mathrm{e}^{-2\left(t-\xi\right)}-\mathrm{e}^{-2\left(t-\xi\right)}\right]\Big|_1^t$$

$$=2\left(t-1\right)-1+\mathrm{e}^{-2\left(t-1\right)}$$

$$t>2$$

$$u_C(t)^{(2)}$$

$$=\int_1^2 6\left(\xi-1\right)\times\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2\left(t-\xi\right)}\,\mathrm{d}\,\xi$$

$$=\left[2\left(\xi-1\right)\mathrm{e}^{-2\left(t-\xi\right)}-\mathrm{e}^{-2\left(t-\xi\right)}\right]\Big|_1^2$$

$$=\mathrm{e}^{-2\left(t-2\right)}+\mathrm{e}^{-2\left(t-1\right)}$$

$$0<t<1 \qquad u_C(t)^{(2)}=0\text{V}$$

$$1<t<2 \qquad u_C(t)^{(2)}=2(t-1)-1+e^{-2(t-1)}$$

$$t>2 \qquad u_C(t)^{(2)}=e^{-2(t-2)}+e^{-2(t-1)}$$

$$t>0 \qquad u_C(t)^{(1)}=-4\text{V}$$

$$\therefore 0<t<1 \qquad u_C(t)=-4\text{V}$$

$$1<t<2 \qquad u_C(t)=-5+2t+e^{-2(t-1)}$$

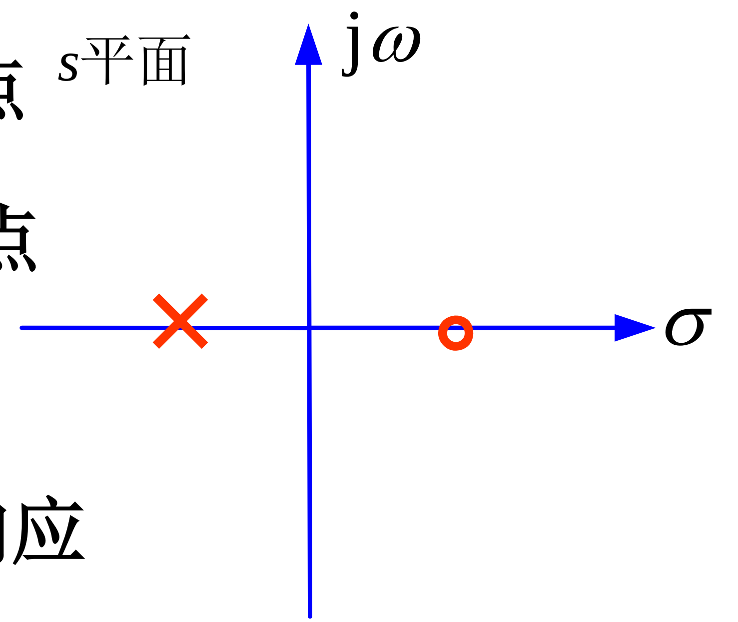
$$t>2 \qquad u_C(t)=-4+e^{-2(t-2)}+e^{-2(t-1)}$$

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=H_0\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

H_0 为常数

$s=z_i$ $\quad H(s)\big|_{s=z_i}=0$ **$H(s)$的零点**

$s=p_i$ $\quad H(s)\big|_{s=p_j}\to\infty$ **$H(s)$的极点**



时域响应

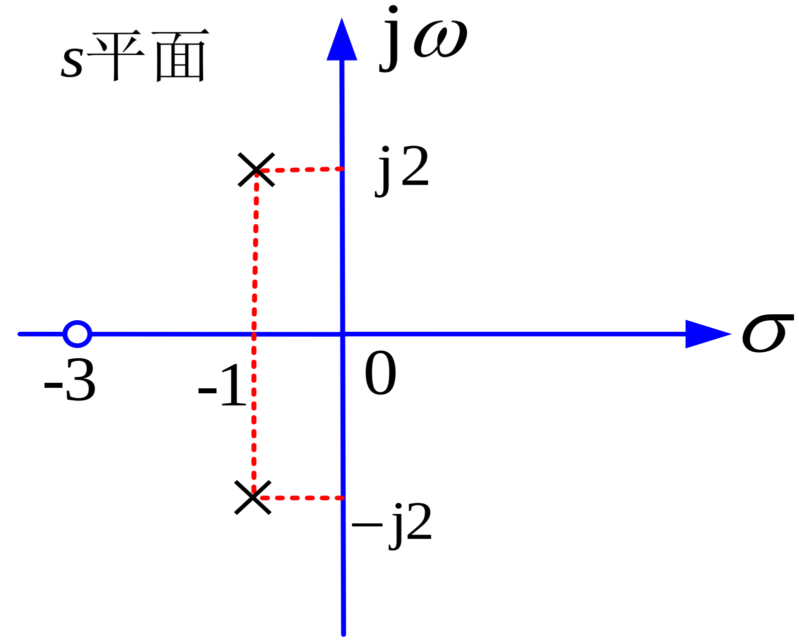
频域响应——正弦稳态响应

极点用“×”表示，零点用“o”表示。

【例】 $H(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s+5}$ 画极零图

解

$$H(s)=\frac{s+3}{(s+1-\mathrm{j}2)(s+1+\mathrm{j}2)}$$



$$z_1=-3$$

$$p_1=-1+\mathrm{j}2 \qquad p_2=-1-\mathrm{j}2$$

14.8 极点、零点与冲激响应

$$h(t)=L^{-1}\left[H(s)\right]=L^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}\right]=\sum_{i=1}^{n}k_i\,\mathrm{e}^{p_i t}$$

时域响应 $R(s)=H(s)E(s)$

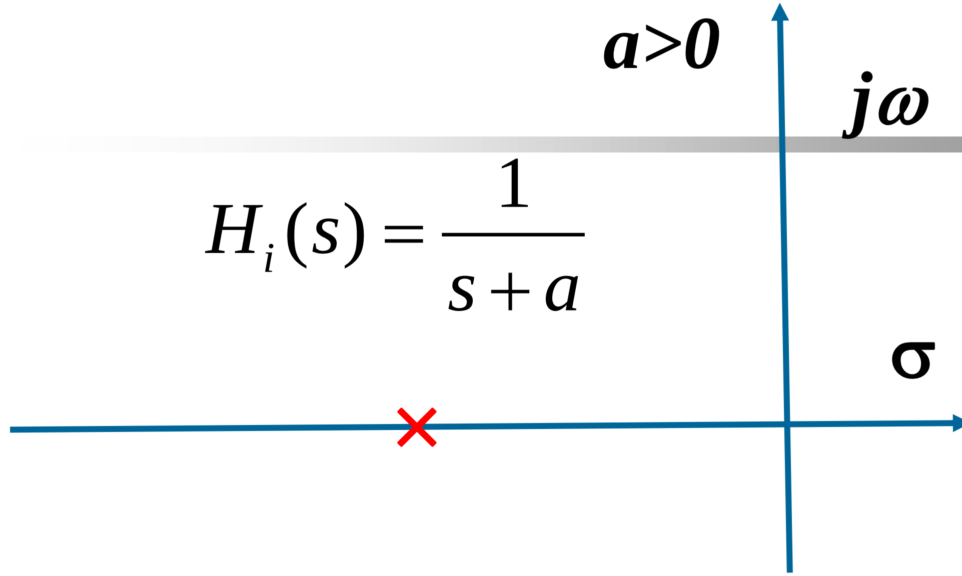
$$=\frac{N(s)}{D(s)}\cdot\frac{P(s)}{Q(s)}$$

单选题

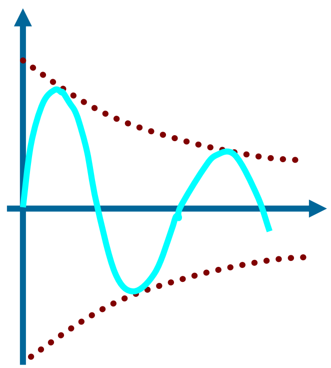
设
置

极点分布如图，该极点对应的时域响应为：

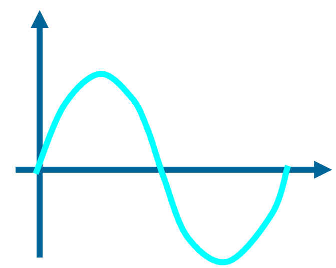
$$H_i(s)=\frac{1}{s+a}$$



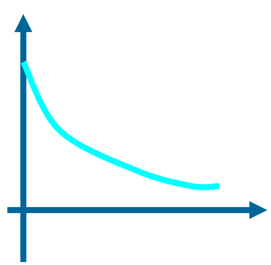
A



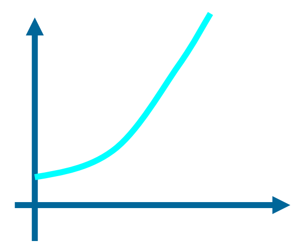
B



C



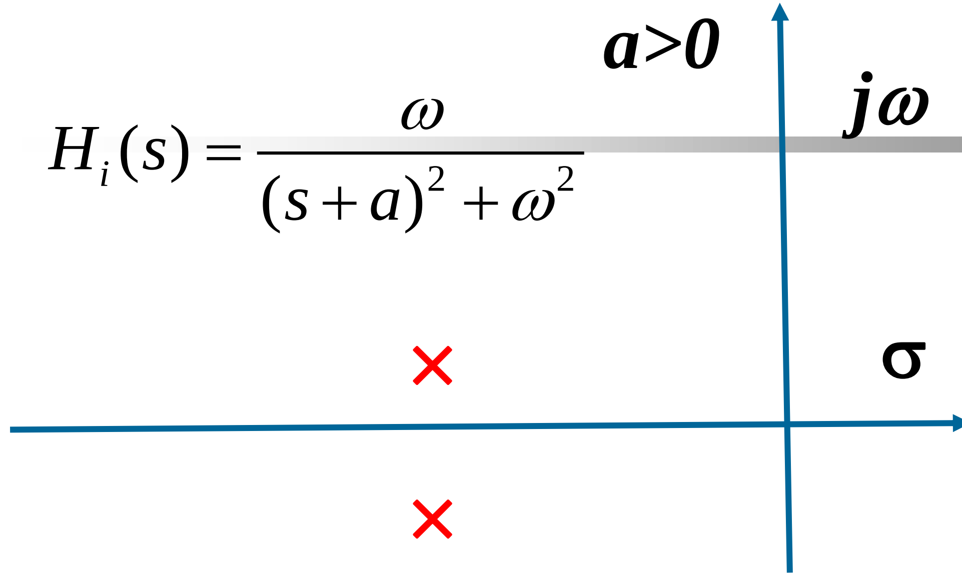
D



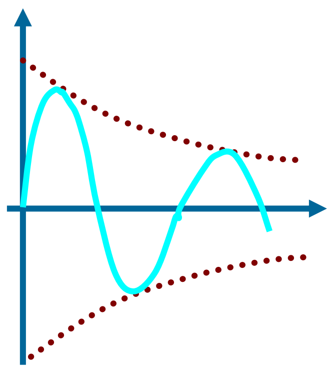
提交

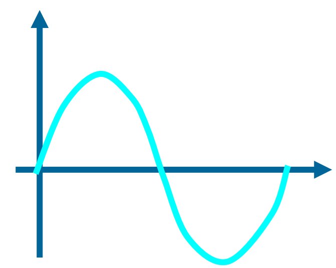
单选题

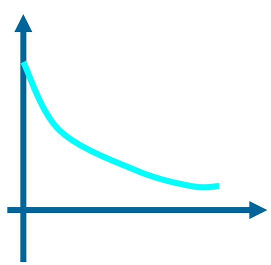
$$H_i(s)=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

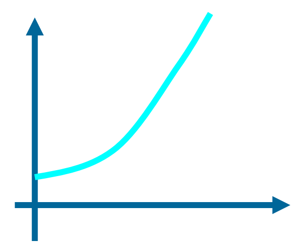


极点分布如图，该极点对应的时域响应为：

A 

B 

C 

D 

提交

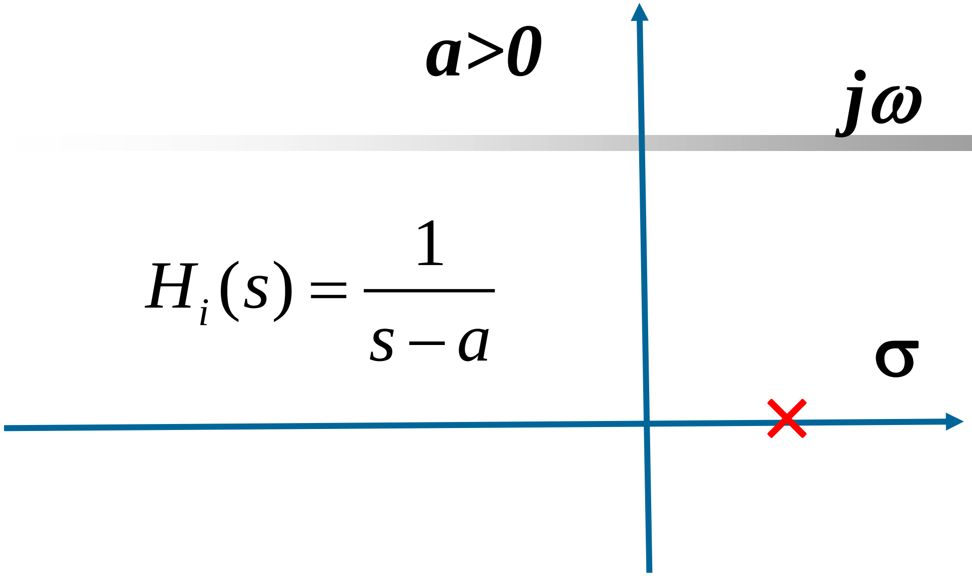
设置

单选题

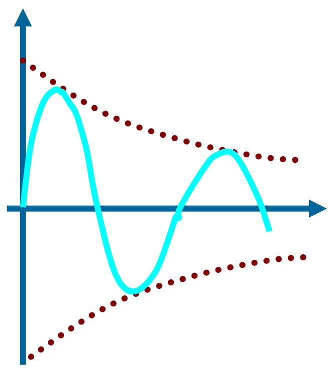
极点分布如图，该极点对应的时域响应为：

$$H_i(s)=\frac{1}{s-a}$$

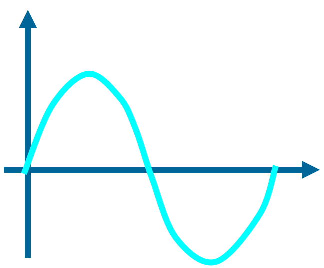
a>0



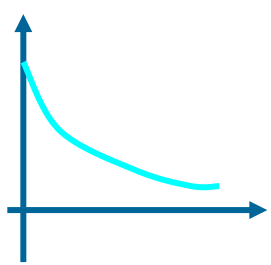
A



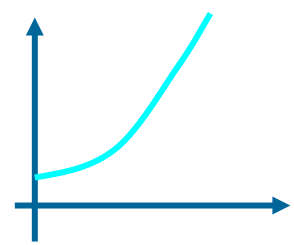
B



C

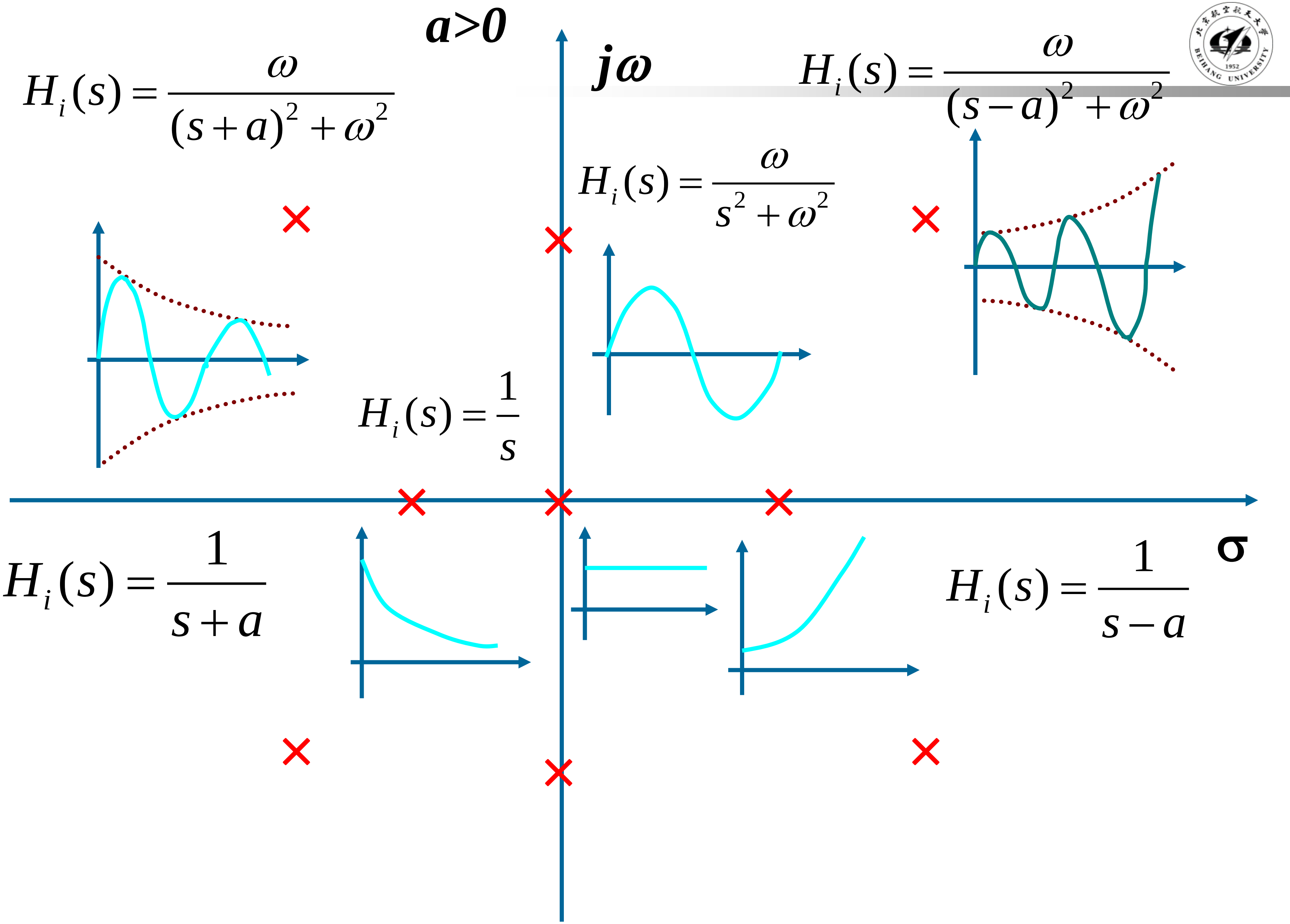


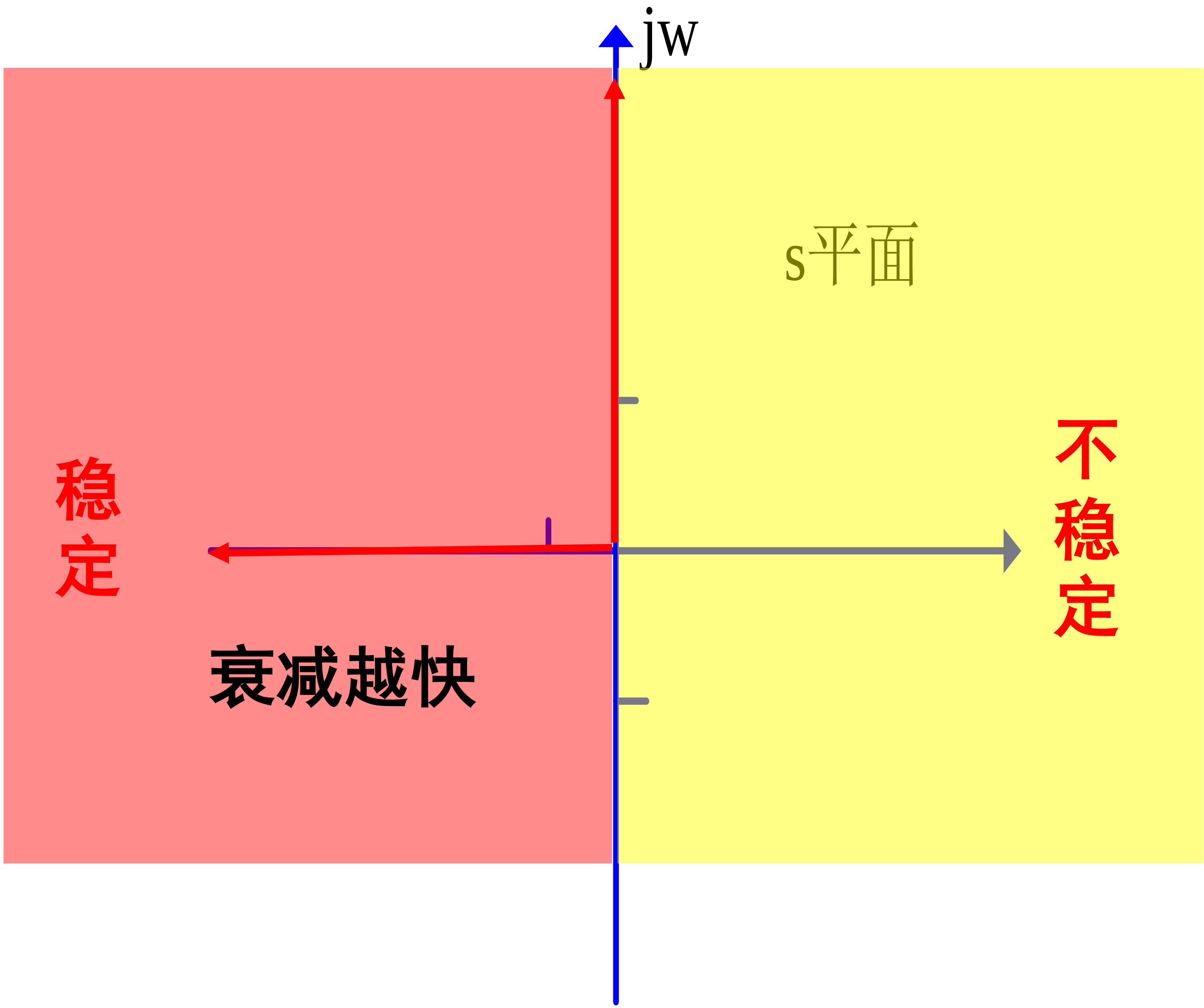
D



设置

提交


a>0
jω
σ
$H_i(s)=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$H_i(s)=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$H_i(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$H_i(s)=\frac{1}{s}$
$H_i(s)=\frac{1}{s+a}$
$H_i(s)=\frac{1}{s-a}$

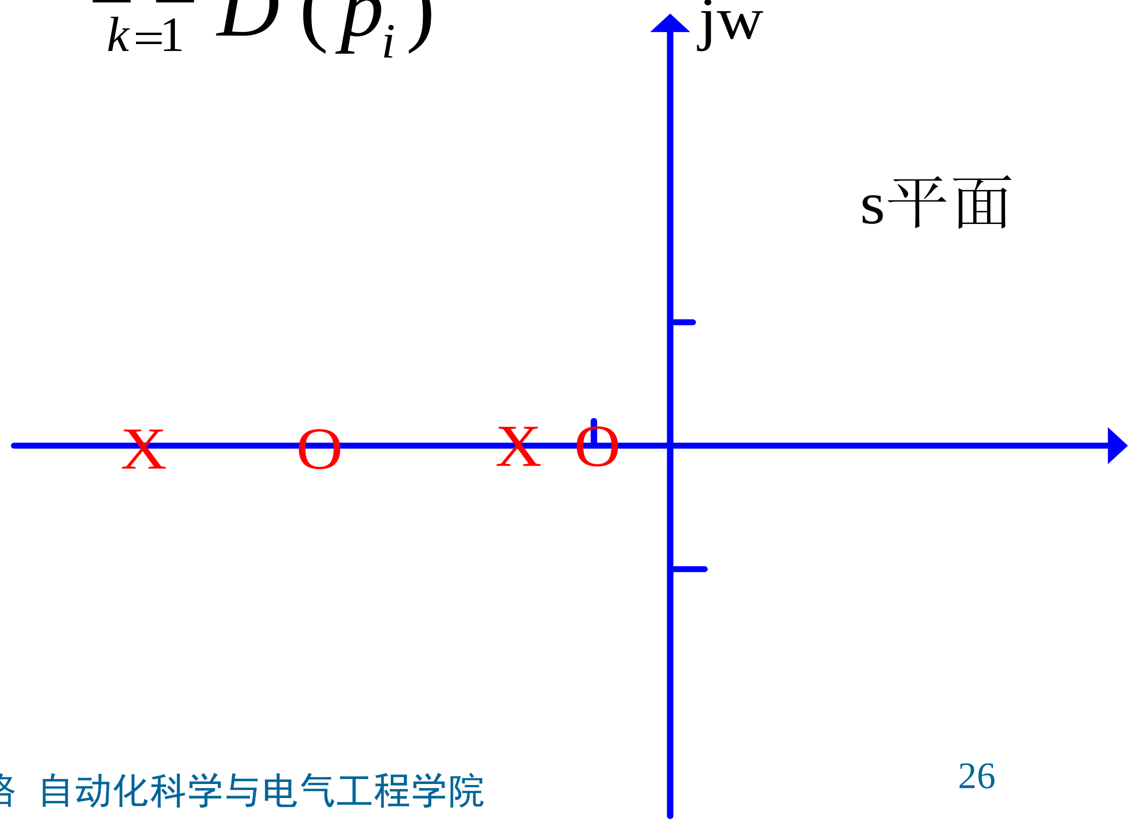

jw
s平面
稳定
不稳定
衰减越快

$$h(t)=L^{-1}\left[H(s)\right]=L^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-p_i}\right]=\sum_{i=1}^{n}k_i\,\mathrm{e}^{p_i t}$$

零点的作用？

$$k_i=(s-p_i)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=p_i}=\prod_{k=1}^{m}\frac{p_i-z_k}{D'(p_i)}$$

决定了K_i的大小



14.9 极点、零点与频率响应

频率响应 正弦稳态网络函数：单一激励下，网络零状态响应，响应相量与激励相量之比。

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\text{响应的相量}}{\text{激励的相量}} \qquad H(s)\to H(\mathrm{j}\omega)$$

$$\Rightarrow \quad H(\mathrm{j}\omega)=\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|\angle\varphi(\omega)$$

$$\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|=\frac{\text{响应的有效值}}{\text{激励的有效值}}$$

幅频特性

幅值比随 ω 变化的关系。

$$\varphi(\omega)=\arg\left[H(\mathrm{j}\omega)\right]$$

相频特性

相角差随 ω 变化的关系。

$$H(s) \to H(\mathrm{j}\omega)$$

$$H(\mathrm{j}\omega) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m} (\mathrm{j}\omega - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (\mathrm{j}\omega - p_j)}$$

$$\left|H(\mathrm{j}\omega)\right| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m} \left|(\mathrm{j}\omega - z_i)\right|}{\prod_{j=1}^{n} \left|(\mathrm{j}\omega - p_j)\right|}$$

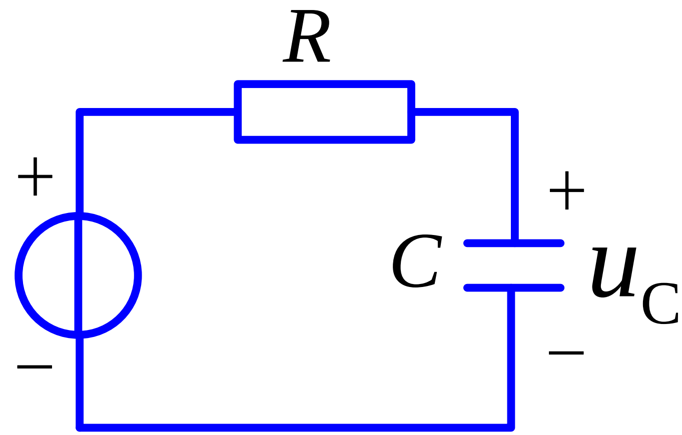
$$\varphi(\omega) = \arg\left[H(\mathrm{j}\omega)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \arg(\mathrm{j}\omega - z_i) - \sum_{j=1}^{n} \arg(\mathrm{j}\omega - p_j)$$

计算频率特性

在s平面上定性描绘频率特性

【例】 定性分析RC串联电路以电压u_C为输出时电路的频率响应。



解

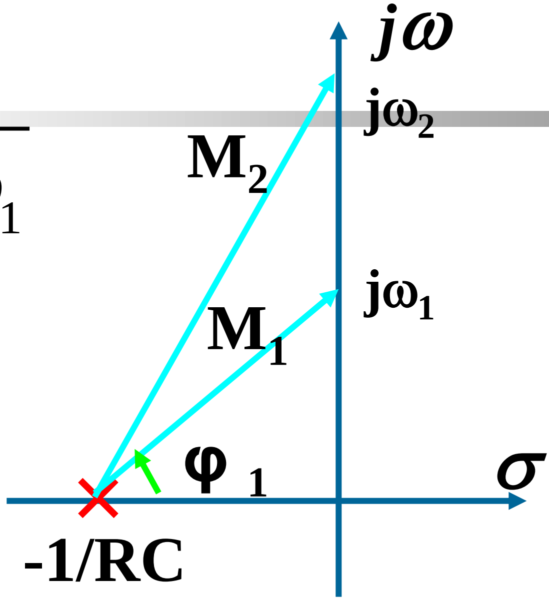
$$H(s)=\frac{U_C(s)}{U_S(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$

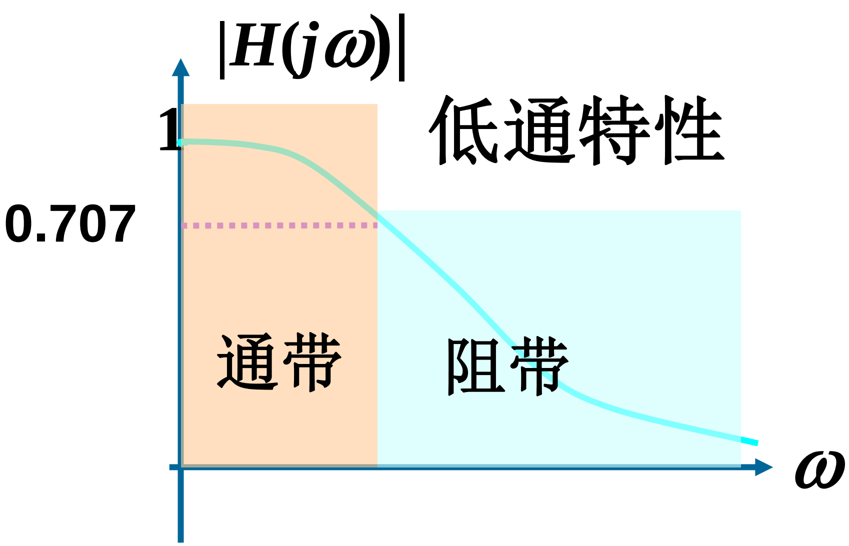
一个极点 $s=\dfrac{-1}{RC}$ $\qquad H_0=\dfrac{1}{RC},\quad s=\mathrm{j}\omega$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{H_0}{\mathrm{j}\omega+1/RC}=\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|\angle\varphi(\omega)$$

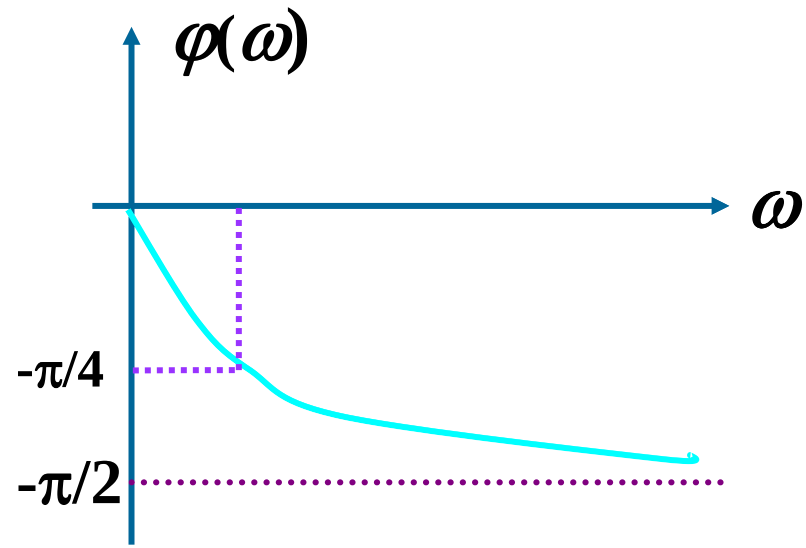
$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{H_0}{\mathrm{j}\omega+1/RC}=\frac{H_0}{\mathrm{j}\omega-p_1}$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{H_0}{M\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}$$



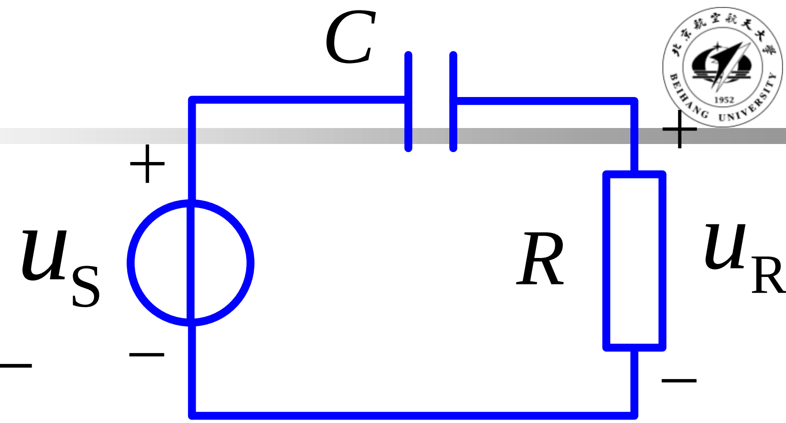


幅频特性



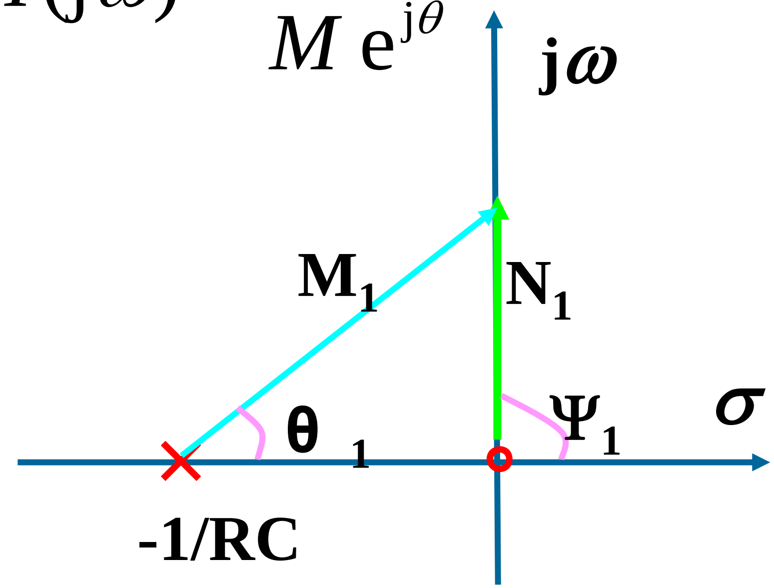
相频特性

若以电压u_R为输出时电路的频率响应为

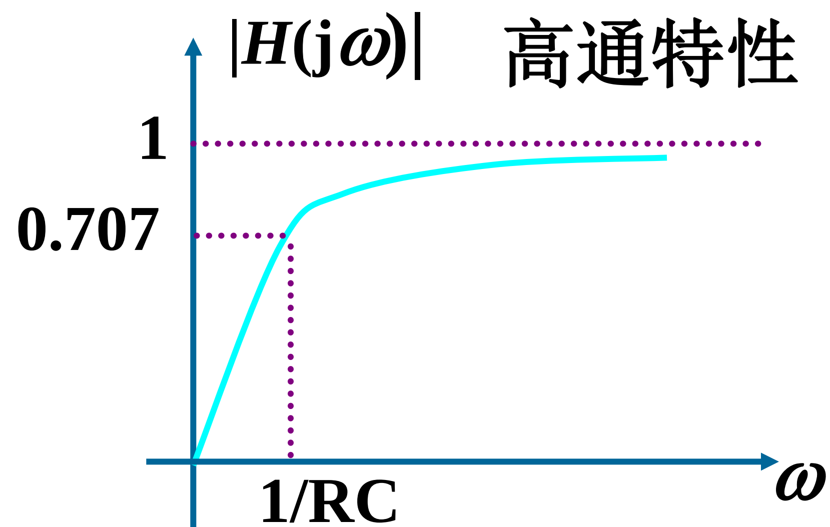


$$H(s)=\frac{U_R(s)}{U_S(s)}=\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$H(j\omega)=\frac{N\,e^{j\psi}}{M\,e^{j\theta}}$$

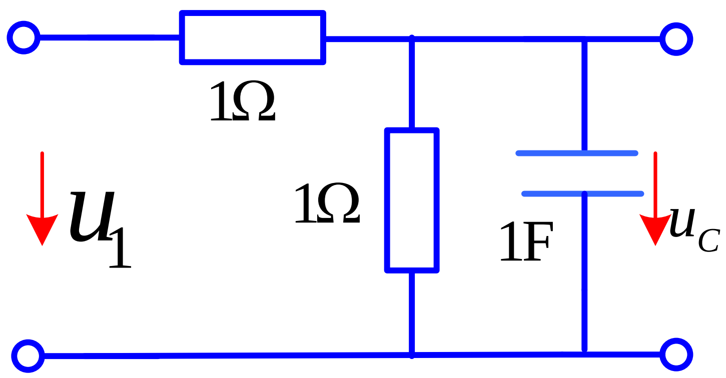


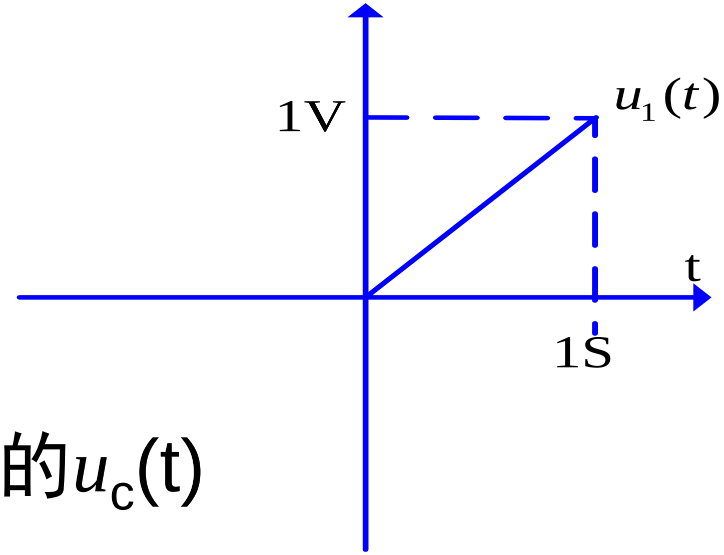
高通特性



作业

- 14-30【零点、极点图】
- 14-37【频率响应，R=1Ω】
- 补充题





- $u_C(0_-)=0$，求t>0时的$u_C(t)$