3.8 L’Hospital 法则

一、洛必达法则1 （$\frac{0}{0}$ 型）

设 f, g 在区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 有定义, $g(x) \neq 0$, 满足

(i) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = 0$;

(ii) f, g 在区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a$, (有限或无穷大).

则有 $$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a.$$

证明: 补充定义：$f(x_0)=g(x_0)=0$,

$\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$, f,g在$[x_0,x]$连续.

由$Cauchy$中值定理：$\exists\xi\in(x_0,x)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

而当$x\to x_0^+$时, $\xi\to x_0^+$, 因此

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a.$$

说明: $x\to x_0^-, x\to x_0, x\to\infty, x\to\pm\infty$也成立.

例1. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\overset{\sqrt{x}=y}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{y-\sin y}{y^3}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\cos y}{3y^2}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

注意: ① 各种方法综合使用(提出常用因子, 等价代换, 变量替换)

② 可多次连续使用

例2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^{x}-3x-1}{(e^{x}-1)^{2}e^{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^{x}-3x-1}{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^{x}-3}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}-e^{x}}{2}=\frac{7}{2}$$

二、洛必达法则2（$\frac{\infty}{\infty}$型）

设 f,g在 $(x_0,x_0+\delta)$内满足：

(i) $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$,

(ii) f,g在$(x_0,x_0+\delta)$内可导, 且$g'(x)\neq 0$,

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ (有限或无穷).

则 $$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

说明:

(1) 并未要求: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$

(2) 可推广到 $x\to x_0^-, x\to x_0, x\to\pm\infty, x\to\infty$

(3) 注意 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 要存在或为无穷大!(否则要用其它方法)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$ 不存在,不能用洛必达 !

$$\lim_{x\to\infty}1+\frac{\sin x}{x}=1$$

例3 $x \to +\infty$时, $\ln x \ll x^{\alpha}(\alpha > 0) \ll e^{x} \ll x^{x}$.

(1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = 0$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^{x}}$$ 设$m-1<\alpha\le m$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}}{e^{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{e^{x}\cdot x^{m-\alpha}} = 0.$$

(3) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(1-\ln x)} = 0$$

三、其它不定型 $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$型

关键: 将其它类型未定式化为洛必达法则可解决

的类型 $(\frac{0}{0}), (\frac{\infty}{\infty}).$

1. $0\cdot\infty$ 型

步骤: $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty,$ 或 $0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}.$

例4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^x.$ $(0\cdot\infty)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty.$

2. $\infty-\infty$ 型

步骤: $\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=0.$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

步骤: $\left.\begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{matrix} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{matrix}\right. \Rightarrow 0\cdot\infty.$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x.$ (0^0)

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$. (1^{∞})

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$.

例8 求 $\lim\limits_{x\to0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^{0})

解 因为 $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}$,

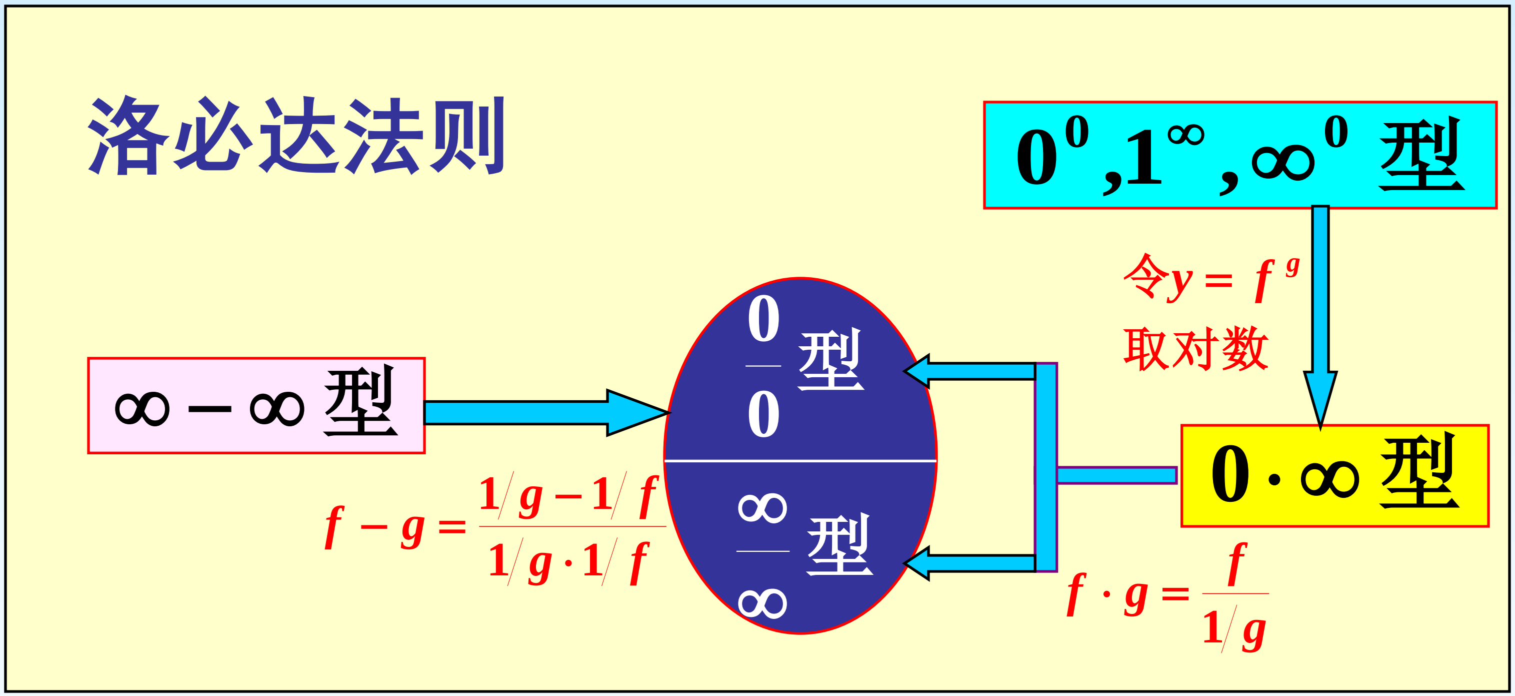
因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\dfrac{1}{\cot x}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}}{\dfrac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1$, $\therefore$ 原式 $= e^{-1}$.

探索问题

L’Hospital 法则逆命题成立条件

五、小结



作业 习题3.8 1(4, 6, 7, 9)