A

北京航空航天大学

2007－2008 学年第一学期期末

考试统一用答题册（A）

考试课程 高等数学（1）

院系 ____________ 学号 ____________ 姓名 ____

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

2008 年 01 月 24 日

一. 填空（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x} = $ ____ 1 ____.

2. $\int_{-1}^{1}(\sin^5 x+\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x = $ __ $\dfrac{\pi}{2}$ __.

3.曲线 $y=\dfrac{2}{3}(\sqrt{x})^3\ (0\le x\le 1)$ 的弧长为 __ $\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ __.

4.曲线 $r=\sqrt{\cos 2\theta}\ (0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4})$ 与 $\theta=0$ 所围图形的面积为 __ $\dfrac{1}{4}$ __.

5.设向量 $\vec{a}=\{1,2,k\},\vec{b}=\{2k,1,1\}$ 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $k=$ __ $-\dfrac{2}{3}$ __.

二. 单项选择（每小题 4 分，共 20 分）

1.设数列 $\{x_n\}$，则 $\{x_{2n}\}$ 收敛是 $\{x_{2^n}\}$ 收敛的（ B ）.

(A)充分必要条件　　(B)充分非必要条件

(C)必要非充分条件　　(D)既不充分也非必要条件

2.若存在 $\varepsilon>0$，对任意的 $X>0$, 都有 $x_0>X$, 使 $|f(x_0)|<\varepsilon$, 则可断定的是（ D ）.

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ne 0$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ne\infty$

3.若 $f'(x_0)>0$, 则下述结论中错误的是（ D ）.

(A) 存在 $\delta>0$, 使 $f(x_0+\delta)>f(x_0-\delta)$

(B) 存在 $\delta>0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有 $f(x)<f(x_0)$

(C) 存在 $\delta>0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内有 $f(x)>f(x_0)$

(D) 存在 $\delta>0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内单调增加

4.设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\,\mathrm{d}x$，则（ B ）.

(A) $I<1$　　(B) $I>1$　　(C) $I=1$　　(D) $I=0$

5.设 $I_1=\int_0^1\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$，$I_2=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$，则（ A ）.

(A) I_1 收敛 I_2 发散　(B) I_1 发散 I_2 收敛　(C) I_1 与 I_2 都收敛　(D) I_1 与 I_2 都发散

三．求极限（每小题 5 分，共 10 分）

1．$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(1+x-1)^{\frac{1}{1-x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}[(1+x-1)^{\frac{1}{x-1}}]^{\frac{x-1}{1-x}}$

$=e^{-1}$

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\sin x}^{x}\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t}{x\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\xi^2}(x-\sin x)}{x^3}$（$\xi$介于$\sin x$与$x$之间）

$=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2+\xi^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)}{x^3}$

$=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

四．求导数（每小题 5 分，共 10 分）

1．设$\begin{cases} x=3t^2+2t^3 \\ y=t+\ln t \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+6t^2=6t(1+t),\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1+\dfrac{1}{t}=\dfrac{1+t}{t},$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+t}{t}\Big/6t(1+t)=\dfrac{1}{6t^2};$

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{3t^3}\Big/6t(1+t)=\dfrac{1}{18t^4(1+t)}.$

2．已知函数$y=y(x)$由方程$\int_0^{x+y}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$所确定，求$y'(0)$.

解　将方程$\int_0^{x+y}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$两端对$x$求导，得

$$e^{-(x+y)^2}(1+y')=\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t+x\sin(x^2).$$

当$x=0$时，$y=0$.

$\therefore\quad y'(0)=-1.$

五．求积分（每小题 6 分，共 12 分）

1． $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

$$=2\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}\sqrt{x}=2\sqrt{x}\ln(1+x)-2\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$$

而 $\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x \underline{\underline{\ x=t^2\ }} \int\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t^2=2\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2t-2\arctan t+C'$

$\therefore\ \int\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\ln(1+x)-4\sqrt{x}+4\arctan\sqrt{x}+C.$

2． $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$

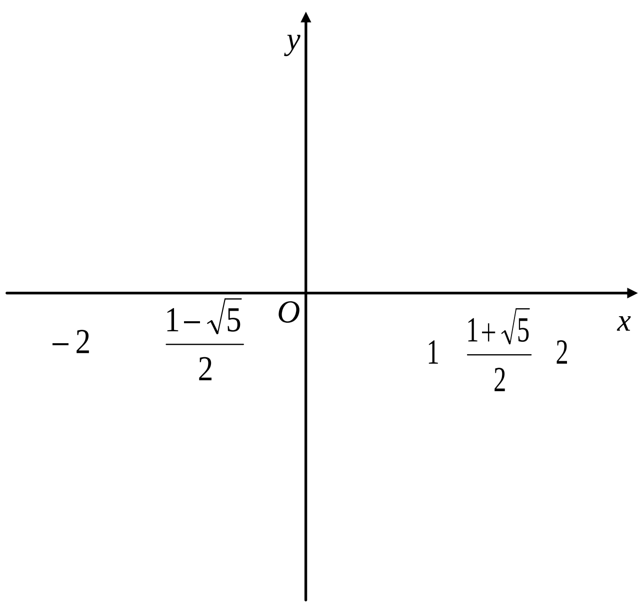
$$\underline{\underline{\ x=\tan t\ }}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\tan t}{(2\tan^2t+1)\sqrt{\tan^2t+1}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2t\mathrm{d}t}{\sec t\ (2\tan^2t+1)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{2\sin^2t+\cos^2t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2t+1}=[\arctan\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

六. (10 分) 设函数 $y=|x^2-3x+2|e^x$，填表并作图.

单增区间	$(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}],[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}],[2,+\infty)$
单减区间	$[\frac{1-\sqrt{5}}{2},1],[\frac{1+\sqrt{5}}{2},2]$
凹 区 间	$(-\infty,-2],[2,+\infty)$
凸区间	$[-2,1],[1,2]$
极大值点	$\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
极小值点	1，2
拐 点	$(-2,12e^{-2}),(2,0)$
渐近线	$y=0$



七.（6 分） 求过直线$\begin{cases} x-z+4=0 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$且与平面$x-4y-8z+12=0$的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$的平面方程.

解　设过直线$\begin{cases} x-z+4=0 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$的平面束方程为

$$x-z+4+\lambda（x+5y+z）=0 \Rightarrow (1+\lambda)x+5\lambda y+(\lambda-1)z+4=0,\text{法向量}\vec{n_1}=\{1+\lambda,5\lambda,\lambda-1\}$$

平面$x-4y-8z+12=0$的法向量$\vec{n_2}=\{1,-4,-8\}$.

由题意，$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{|\vec{n_1}\bullet\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{|3\lambda-1|}{\sqrt{27\lambda^2+2}} \Rightarrow \lambda=0\text{或}\lambda=-\dfrac{4}{3}$,

于是所求平面方程为$x-z+4=0$　或　$x+20y+7z-12=0$.

八.（6 分）求由曲线 $y=e^x$ 与直线 x=0， y=0，x=1 所围成的图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

解　$V=V_1-V_2=e\pi-\pi\int_1^e x^2(y)\mathrm{d}y=e\pi-\pi\int_1^e \ln^2 y\,\mathrm{d}y$

$$=e\pi-\pi\{[y\ln^2 y]_1^e-\int_1^e 2\ln y\,\mathrm{d}y\}=2\pi.$$

另解　$V=2\pi\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x=2\pi.$

九. (6 分) 设 $f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数, $f(0)=f(1)=0$, 且 $\max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}=1$,

证明$\min\limits_{0\le x\le 1}\{f''(x)\}\le -8$.

证　设 $f(x_0)=\max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}=1$, 则$x_0\in(0,1)$ 且 $f'(x_0)=0$.

由泰勒公式知

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x_0)^2,\xi_1\in(0,x_0),$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2,\xi_2\in(x_0,1),$$

于是　$f''(\xi_1)=-\dfrac{2}{x_0^2}$,　$f''(\xi_2)=-\dfrac{2}{(1-x_0)^2}$.

故　$\min\limits_{0\le x\le 1}\{f''(x)\}\le\min\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}=\min\limits_{0<x_0<1}\{-\dfrac{2}{x_0^2},-\dfrac{2}{(1-x_0)^2}\}\le -8.$