Nonlinear Systems 非线性系统

第十二讲

考虑系统

$$\dot{x} = f(t, x, u) \qquad (4.44)$$

f 关于时间t分段连续,且对x和u是局部Lipschitz的函数。

定义4.7 若存在一个$\mathcal{KL}$类函数β 和一个$\mathcal{K}$ 类函数γ, 使得对任意初始状态和有界输入，所有初始时刻 t_0 以后的解都存在，且满足

$$\|x(t)\| \le \beta\left(\|x(t_0)\|, t - t_0\right) + \gamma\left(\sup_{t_0 \le \tau \le t}\|u(\tau)\|\right) \quad (4.47)$$

那么称系统的解是输入-状态稳定的。

定理4.18中条件 $\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\le -W_3(x),\forall\|x\|\ge\mu>0$,结论:

$$\|x(t)\|\le\beta(\|x(t_0)\|,t-t_0),\forall t_0\le t\le t_0+T$$

$$\|x(t)\|\le\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)),\forall t\ge t_0+T$$

↓

$$\|x(t)\|\le\beta\left(\|x(t_0)\|,t-t_0\right)+\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$$

定理4.19：如果存在连续可微函数 $V(t,x)$，满足

$$\alpha_1(\|x\|)\le V(t,x)\le\alpha_2(\|x\|) \qquad (4.48)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\le -W_3(x),\forall\|x\|\ge\rho\left(\|u\|\right)>0 \qquad (4.49)$$

其中α_1,α_2 是$\mathcal{K}\infty$ 类函数，ρ 是$\mathcal{K}\infty$ 类函数，$W_3(x)$ 是连续正定函数。

则 系统是输入-状态稳定的 ，且 $\gamma=\alpha_1^{-1}\circ\alpha_2\circ\rho$ 。

证明：由定理4.18，系统解存在且满足：

$$\|x(t)\|\le\beta\left(\|x(t_0)\|,t-t_0\right)+\gamma\left(\sup_{\tau\ge t_0}\|u(\tau)\|\right),\qquad \forall t\ge t_0$$

引理4.6：如果f对时间t一致，对x和u连续可微，且全局Lipschitz函数，如果无激励系统原点是全局指数稳定的，则有激励系统（4.44）是输入-状态稳定的。

引理要求全局Lipschitz函数f及无激励系统原点全局指数稳定性，能得到输入-状态稳定。容易构造两个条件之一不成立，引理结论失败。

引理4.6：如果f对时间t一致，对x和u连续可微，且全局Lipschitz函数，如果无激励系统原点是全局指数稳定的，则有激励系统（4.44）是输入-状态稳定的。

证明：由无激励系统原点全局指数稳定，由李亚普诺夫逆定理4.1 4，存在V满足逆定理结论，且由f是一致全局Lipschitz函数，所以满足

$$\|f(t,x,u)-f(t,x,0)\|\le L\|u\|$$

V的导数满足：

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x,0)+\frac{\partial V}{\partial x}\left[f(t,x,u)-f(t,x,0)\right]\\&\le -c_3\|x\|^2+c_4\|x\|L\|u\|\\&\le -c_3(1-\theta)\|x\|^2-c_3\theta\|x\|^2+c_4L\|x\|\|u\|\end{aligned}$$

这样得到：

$$\dot{V}\le -c_3(1-\theta)\|x\|^2,\quad \|x\|\ge\frac{c_4L\|u\|}{c_3\theta},0<\theta<1$$

（4.48）中取：$\alpha_1(r)=c_1r^2,\alpha_2(r)=c_2r^2,\rho(r)=(c_4L/c_3\theta)r$，即满足定理4.19.

所以该系统是输入-状态稳定的，其中 $\gamma(r)=\sqrt{c_2/c_1}(c_4L/c_3\theta)r.$

前面全局讨论过的系统 $\dot{x}=-3x+\left(1+2x^2\right)u$ ，u=1时右端函数不满足Lipschitz条件，而系统解是有限时间逃逸的。

系统 $\dot{x}=-\frac{x}{1+x^2}+u \overset{\text{def}}{=} f(x,u)$ 满足 全局Lipschitz条件（因为对x，u偏导数有界）。无激励系统 $\dot{x}=-x/(1+x^2)$ 原点全局渐近稳定的。但不是全局指数稳定的。注意到 $u(t)\equiv 1 \Rightarrow f(x,u)=1-\frac{x}{1+x^2}\geq 1/2$ 因此有 $x(t)\geq x(t_0)+(t-t_0)/2, t\geq t_0.$ 所以系统的解无界，引理结论失败。

在没有全局指数稳定性或不存在全局Lipschitz 函数的情况下，仍可以用定理4.19 说明输入-状态的稳定性。下列三个例题将说明这一过程。

例 4.25 考虑系统

$$\dot{x} = -x^3 + u$$

当u=0 时有全局渐近稳定的原点。取$V = x^2/2$，其沿系统轨线的导数为

$$\dot{V} = -x^4 + xu = -(1-\theta)x^4 - \theta x^4 + xu \le -(1-\theta)x^4, \quad |x| \ge \left(\frac{|u|}{\theta}\right)^{1/3}, 0 < \theta < 1$$

因此，系统是输入-状态稳定的，且有 $\rho(|u|) = (|u|/\theta)^{1/3}$

$$\gamma(r) = (r/\theta)^{1/3}$$

因为$\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2/2 \Rightarrow \alpha_1^{-1}(\alpha_2(r)) = r$ 所以$\gamma(r) = \rho(r)$.

例 4.26 考虑系统

$$\dot{x} = f(x,u) = -x - 2x^3 + (1+x^2)u^2$$

当u=0 时有全局指数渐近稳定的原点。 但由于f 不是全局Lipschitz 函数，所以引理4.6 在此不适用。取$V = x^2/2$

V 沿系统轨线的导数为

$$\dot{V} = -x^2 - 2x^4 + x(1+x^2)u^2 \le -x^4, \qquad \forall |x| \ge u^2$$

$$\rho(|u|) = |u|^2$$

因此，系统是输入-状态稳定的，且有

$$\gamma(r) = r^2.$$

因为$\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2/2 \Rightarrow \alpha_1^{-1}(\alpha_2(r)) = r$ 所以$\gamma(r) = \rho(r).$

例 4.27 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

u=0 时有全局渐近稳定的原点。取 $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}ax_2^4$ 沿系统轨线的导数为

$$\dot{V} = -x_1^2 + x_1x_2^2 - ax_2^4 = -\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2\right)^2 - \left(a - \frac{1}{4}\right)x_2^4$$

取 $a > 1/4$ 因此，系统原点是全局渐近稳定的.现取***u***不为 ***0***，用 $a = 1$ 时的 V 作为定理4.19 的备选函数。

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2^2)^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^4) + x_2^3 u \le -\frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^4) + |x_2|^3|u|$$

$$\dot{V} \le -\frac{1}{2}(1-\theta)(x_1^2 - x_2^4) - \frac{1}{2}\theta(x_1^2 - x_2^4) + |x_2|^3|u|, 0 < \theta < 1$$

如果 $(|x_2| \ge 2|u|/\theta \vee |x_2| \le 2|u|/\theta) \wedge |x_1| \ge \left(2|u|/\theta\right)^2$ 则有 $-\frac{1}{2}\theta(x_1^2 - x_2^4) + |x_2|^3|u| \le 0$

条件可以表示为

$$\max\{|x_1|, |x_2|\} \ge \max\left\{\frac{2|u|}{\theta}, \left(\frac{2|u|}{\theta}\right)^2\right\}$$

利用范数 $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\}$ 定义$\mathcal{K}$ 类函数 ρ 为：

$$\rho(r) = \max\left\{\frac{2r}{\theta},\left(\frac{2r}{\theta}\right)^2\right\}$$

因此，当 $\dot{V} \le -\frac{1}{2}(1-\theta)(x_1^2 - x_2^4), \quad \forall \|x\|_\infty \ge \rho(|u|)$ 时，满足定理4.19。V是正定的且径向无界，所以不等式（4.48）由引理4.3得出。因此系统是输入-状态稳定的。 由 $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4 \le \frac{1}{2}\|x\|_\infty^2 + \frac{1}{4}\|x\|_\infty^4$ 可见

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4 \ge \begin{cases} \frac{1}{2}|x_1|^2 = \frac{1}{2}\|x\|_\infty^2 & |x_2| \le |x_1| \\ \frac{1}{4}|x_2|^4 = \frac{1}{4}\|x\|_\infty^4 & |x_2| \ge |x_1| \end{cases}$$

如果$\mathcal{K}_\infty$ 类函数取为 $\alpha_1(r) = \min\left\{\frac{1}{2}r^2,\frac{1}{4}r^4\right\}, \quad \alpha_2(r) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{4}r^4$ 满足(4.48)，于是

$$\gamma(r) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\rho(r)))$$ 其中 $$\alpha_1^{-1}(s) = \begin{cases} (4s)^{\frac{1}{4}}, & s \le 1 \\ \sqrt{2s}, & s \ge 1 \end{cases}$$

输入-状态稳定性概念对级联系统应用

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2) \qquad (4.51)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_2) \qquad (4.52)$$

假设系统 $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, 0)$ 和(4.52)都在其原点有全局一致渐近稳定平衡点，那么在什么条件下级联系统的原点x=0也具有同样的性质呢？

引理4.7 在上述假设条件下，如果以x_2 作为输入时系统(4.51)是输入-状态稳定的，且系统(4.52)的原点是全局一致渐近稳定的，那么系统(4.51)和系统(4.52)的级联系统的原点也是全局一致渐近稳定的。

证明：设t 0 为初始时刻，方程(4.51)和方程(4.52)的解在全局范围内满足

$$\|x_1(t)\| \le \beta_1\left(\|x_1(s)\|, t-s\right) + \gamma_1\left(\sup_{s\le\tau\le t}\|x_2(\tau)\|\right) \quad (4.53)$$

$$\|x_2(t)\| \le \beta_2\left(\|x_2(s)\|, t-s\right) \quad (5.54)$$

其中 $t \ge s \ge t_0, \beta_1, \beta_2$ 是 $\mathcal{KL}$ 类函数，γ_1 是 $\mathcal{K}$ 类函数。代 $s=(t+t_0)/2$ 到(4.53)得到

$$\|x_1(t)\| \le \beta_1\left(\left\|x_1\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\|, \frac{t-t_0}{2}\right) + \gamma_1\left(\sup_{\frac{t+t_0}{2}\le\tau\le t}\|x_2(\tau)\|\right)$$

为了估计 $x_1((t+t_0)/2)$ 的值，把 $s=t_0$ 代到(4.53)并用 $(t+t_0)/2$ 替换t 得到

$$\left\|x_1\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\| \le \beta_1\left(\|x_1(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2}\right) + \gamma_1\left(\sup_{t_0\le\tau\le\frac{t+t_0}{2}}\|x_2(\tau)\|\right)$$

$$(t+t_0)/2 = t' \Rightarrow t'-t_0 = (t-t_0)/2$$

由(4.54)可得

$$\sup_{t_0\le\tau\le\frac{t+t_0}{2}}\|x_2(\tau)\| \le \beta_2\left(\|x_2(t_0)\|, 0\right) \qquad \sup_{\frac{t+t_0}{2}\le\tau\le t}\|x_2(\tau)\| \le \beta_2\left(\|x_2(t_0)\|, \frac{t+t_0}{2}\right)$$

利用上面的三个式子，并结合

$$\|x_1(t_0)\| \le \|x(t_0)\|, \qquad \|x_2(t_0)\| \le \|x(t_0)\|, \qquad \|x(t)\| \le \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|$$

得到 $\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0)$

其中 $\beta(r,s) = \beta_1\left(\beta_1\left(r,\frac{s}{2}\right) + \gamma_1(\beta_2(r,0)), \frac{s}{2}\right) + \gamma_1\left(\beta_2\left(r,\frac{s}{2}\right)\right) + \beta_2(r,s)$

很容易验证对于所有 $r \ge 0$ ，β 是$\mathcal{KL}$ 类函数。因此，系统（4 .51）和系统（4 .52）的级联系统的原点是全局一致渐近稳定的。

级联系统输入-状态稳定性

结论：考虑如下级联系统系统

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2) \qquad (*1)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_2, u) \qquad (*2)$$

假设f_i 是分段连续函数，对x是局部Lipshitz的。若系统(*2)是输入-状态稳定的，且把系统(*2) 的状态x_2作为输入，系统(*1) 也是输入-状态稳定的，那么整个级联系统也是输入-状态稳定的。

习题 1：判断以下系统是否输入——状态稳定？

(1) $\dot{x}=-x+x^2+u$；(2) $\dot{x}=-x-x^3+x^2u$；

(3) $\dot{x}=x-x^3+u$；　(4) $\dot{x}=-\dfrac{x^3}{1+x^2}+u$；

- 作业 4.54， 4.55 (1)-(3)， 4.56

第八章 现代稳定性分析

中心流形定理 (center manifold theorem)

研究线性化失效时自治系统平衡点的稳定性问题。

吸引区的估计：渐近稳定平衡点吸引区

吸引区边界可能是一个极限环；可能由鞍点的稳定轨线形成；可能是一条由平衡点组成的闭合曲线。

类不变定理

轨线收敛于一个集合；原点的一致渐近稳定性。

介绍分析非线性时变系统稳定性和收敛性方面的重要数学工具:**Barbalat**引理。

Lyapunov 第一近似理论

定常非线性系统: $\dot{x} = \boldsymbol{f}(x), \quad \boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ **(8.1)**

其中: $$\boldsymbol{A} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} \bigg|_{\boldsymbol{x}=\mathbf{0}} \right] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \bigg|_{\boldsymbol{x}=\mathbf{0}} \right] = \left[a_{ij} \right]$$

这样其线性化系统为： $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

定理: 1）如果线性化系统的系数矩阵 *A* 的所有特征值具有负实部，则原非线性系统的原点渐近稳定;

2）如果线性化系统的系数矩阵 *A* 的特征值中具有正实部，则原非线性系统的原点不稳;

3）如果线性化系统的系数矩阵 *A* 的特征值除具有零实部外，其余具有负实部，则原非线性系统原点属临界情况.

中心流形定理

这样其线性化系统为： $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

如何通过分析低阶非线性系统进而确定原点的稳定性，而该低阶非线性系统的阶数恰好是*A*的实部为零的特征值数目。

如果 $\eta(x(0)) = 0 \Rightarrow \eta(x(t)) \equiv 0, \forall t \in [0, t_1) \subset R$ 方程在 $[0, t_1)$ 的解 $x(t)$ 有定义，则称流形 $\{\eta(x) = 0\}$ 是方程(8.1)的**不变流形。**

右端函数连续可微；则

$$\dot{x} = Ax + \left[f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)x \right] = Ax + \tilde{f}(x)$$

其中 $\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(0)\,x$ 且 $\tilde{f}(0) = 0,\quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0) = 0$

假设A有k个实部为零的特征值，$m=n-k$个特征值实部为负，则总可以找到相似变换矩阵T将A转化为分块对角矩阵

$$TAT^{-1}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

其中A_1的所有特征值实部为零， A_2的有特征值实部为 负。

用变量代换 $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}=Tx; y\in R^k; z\in R^m$

将方程（8.1）转换为:

$$\dot{y}=A_1 y+g_1(y,z) \qquad (8.2)$$

$$\dot{z}=A_2 z+g_2(y,z) \qquad (8.3)$$

其中 $g_i(0,0)=0; \dfrac{\partial g_i}{\partial y}(0,0)=0; \dfrac{\partial g_i}{\partial z}(0,0)=0. \qquad (8.4)$

若方程$z=h(y)$ (解的集合)是方程(8.2)和方程(8.3)的不变流形，且h是光滑的，则如果满足

$$h(0)=0;\frac{\partial h}{\partial y}(0)=0$$

就称z为中心流形.

定理8.1 如果g_1和 g_2是二次连续可微的，且满足式(8.4)，A_1的所有特征值实部为零， A_2的所有特征值实部为负，则存在一个常数 $\delta>0$和对于所有 $\|y\|<\delta$ 有定义的连续可微函数 $h(y)$ ，使得$z=h(y)$ 是方程(8.2)和方程(8.3)的中心流形。

证明：见附录 。

如果系统(8.2)～(8.3)的初始状态位于中心流形，即 ***z(0)=h(y(0))***，那么对于所有 $t \geq 0$，解 $(y(t),z(t))$ 将位于该流形内，即 ***z(t)=h(y(t))***，此时中心流形内系统的运动可由 ***k***阶（降阶）微分方程

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, h(y)) \qquad (8.5)$$

描述，这个方程称为**降阶系统**。

如果 $z(0) \neq h(y(0))$ ，则差 $z(t) - h(y(t))$ 表示任意时刻轨线与中心流形的偏差。应用变量代换

$$\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z - h(y) \end{bmatrix}$$

方程(8.2)和方程(8.3)转换为

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, w + h(y)) \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}\dot{w} = {} & A_2[w + h(y)] + g_2(y, w + h(y)) \\ & - \frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y + g_1(y, w + h(y))]\end{aligned} \tag{8.7}$$

在此新坐标下，中心流形为*w*=0.在（不变）流形上的运动特性为 $w(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{w}(t) \equiv 0$

将以上等式代入方程(8.7)，得到*h(y)*应满足的方程:

$$0 = A_2 h(y) + g_2(y, h(y)) - \frac{\partial h}{\partial y}(y)[A_1 y + g_1(y, h(y))] \qquad (8.8)$$

评注: 定理8.1表明一定存在满足偏微分方程（8.8）的函数*h(y)*.

在方程(8.6)的右边加上和减去 $g_1(y,h(y))$，且以方程(8.7)减去方程(8.8)，则在变换了坐标下该方程改写为

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y,h(y)) + N_1(y,w) \qquad (8.9)$$

$$\dot{w} = A_2 w + N_2(y,w) \qquad (8.10)$$

其中

$$N_1(y,w) = g_1(y,w+h(y)) - g_1(y,h(y))$$

$$N_2(y,w) = g_2(y,w+h(y)) - g_2(y,h(y)) - \frac{\partial h}{\partial y}(y)N_1(y,w)$$

容易验证 N_1和N_2 是二次连续可微的，且有：

$$N_i(y,0) = 0; \frac{\partial N_i}{\partial w}(0,0) = 0$$

因而在定义域 $\left\|\begin{matrix} y \\ w \end{matrix}\right\|_2 < \rho$ 内，$\|N_i(y,w)\|_2 \le k_i \|w\|_2, i = 1,2$ 当选择 ρ 足够小时，可使k_1 和k_2 取到任意小。上述不等式与 A_2是Hurwitz阵一同表明，原点的稳定性可由降阶系统(8.5)确定，即如下的简化原理。

定理 8.2 在定理8.1的假设条件下，如果降阶系统(8.5)的原点 $y=0$是渐近稳定的(或不稳定的)，则整个系统(8.2)～(8.3)的原点也是渐近稳定的(或不稳定的)。

证明：从(y, z) 到(y, w) 的坐标变换并不改变原点的稳定性，因此可以通过系统(8.9)～(8.10)分析原点的稳定性。如果降阶系统(8.5)的原点是不稳定的，则根据不变性，系统(8.9)～(8.10)的原点也是不稳定的。这是因为对于降阶系统(8.5)的任意解$y(t)$，都存在对应系统(8.9)～(8.10)的解$(y(t),0)$。

现在假设降阶系统(8.5)的原点是渐近稳定的，由Lyapunov逆定理4.16 可知，存在连续可微的正定函数$V(y)$，满足

$$\frac{\partial V}{\partial y}\left[A_1 y + g_1(y, h(y))\right] \le -\alpha_3(\|y\|_2)$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial y}\right\|_2 \le \alpha_4(\|y\|_2) \le k$$

另一方面，因为*A2* 是*Hurwitz*的，故Lyapunov 方程 $PA_2 + A_2^T P = -I$

有唯一的正定解P。取 $v(y,w) = V(y) + \sqrt{w^T P w}$ 为系统(8.9)～(8.10)的Lyapunov函数

$$\dot{v}(y,w) = \frac{\partial V}{\partial y}\left[A_1 y + g_1(y,h(y)) + N_1(y,w)\right]$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{w^T P w}}\left[w^T(PA_2 + A_2^T P)w + 2w^T P N_2(y,w)\right]$$

$$\le -\alpha_3(\|y\|_2) + kk_1\|w\|_2 - \frac{\|w\|_2}{2\sqrt{\lambda_{\max}(P)}} + \frac{k_2\lambda_{\max}(P)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\|w\|_2$$

$$= -\alpha_3(\|y\|_2) - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}\|w\|_2$$

$$-\left[\frac{1}{4\sqrt{\lambda_{\max}(P)}} - kk_1 - k_2\frac{\lambda_{\max}(P)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\right]\|w\|_2$$

取 *k1 和 k 2*任意小，保证 $\frac{1}{4\sqrt{\lambda_{\max}(P)}} - kk_1 - k_2\frac{\lambda_{\max}(P)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} > 0$

因此 $\dot{v}(y,w) \le -\alpha_3(\|y\|_2) - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}\|w\|_2$

因而整个系统(8.9)～(8.10)的原点（局部）渐近稳定。

扩展定理8.2的证明，可以证明下面两个推论

推论8.1 在定理8.1的假设条件下，如果降阶系统(8.5)的原点 y=0是稳定的，且存在一个连续可微的Lyapunov函数 $V(y)$，在 y=0 的某个邻域内满足

$$\frac{\partial V}{\partial y}[A_1 y + g_1(y, h(y))] \le 0$$

则整个系统(8.2)～(8.3)的原点是稳定的。

推论8.2 在定理8.1的假设条件下，当且仅当整个系统(8.2)～(8.3)的原点渐近稳定时，降阶系统(8.5)的原点是渐近稳定的。

推论8.2 在定理8.1的假设条件下，当且仅当整个系统(8.2)～(8.3)的原点渐近稳定时，降阶系统(8.5)的原点是渐近稳定的。

证明：定理8.2说明该推论的充分性，只需要证明必要性。假设整个系统渐稳，但降阶系统不稳，则在任意接近原点的邻域内，总存在一个在中心流形上的非零初始状态$y(0)\neq 0$，起始于该初始状态的状态y将沿中心流形发散（有限时间内$y(t)>r$），因此整个系统不稳定，矛盾。

在应用定理8.2时，需要求出中心流形$z=h(y)$。函数h为偏微分方程

$$N(h(y)) \stackrel{def}{=} \frac{\partial h}{\partial y}(y)\left[A_1 y + g_1(y,h(y))\right] - A_2 h(y) - g_2(y,h(y)) = 0 \qquad (8.11)$$

的一个解，其边界条件为 $h(0)=0, \dfrac{\partial h}{\partial y}(0)=0$

定理 8.3 如果可以找到一个连续可微的函数 $\phi(y)$，且 $\phi(0)=0$，$[\partial\phi/\partial y](0)=0$，使得对于 $p>1$，有 $N(\phi(y))=O(\|y\|^p)$，则对于足够小的 $\|y\|$，有

$$h(y)-\phi(y)=O(\|y\|^p)$$

且降阶系统可表示为

$$\dot{y}=A_1 y+g_1(y,\phi(y))+O(\|y\|^{p+1})$$

下面通过几个例题介绍中心流形定理的应用。