14.3 反步设计法

首先讨论积分器反步的特例。考虑系统

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi, \tag{14.49}$$

$$\dot{\xi} = u \tag{14.50}$$

我们要设计一个状态反馈控制律，以稳定原点（$\eta = 0$，$\xi = 0$）。假设f和g都已知，系统可看成是两部分的级联，第一部分是系统(14.49)，ξ为输入；第二部分是系统(14.50)。假设方程

(14.49)可通过一个光滑的虚拟状态反馈控制律 $\xi=\varphi(\eta)$，$\varphi(0)=0$稳定，即

$$\dot{\eta}=f(\eta)+g(\eta)\varphi(\eta)$$

的原点是渐近稳定的。进一步假设已知 Lyapunov 函数$V(\eta)$（光滑，正定）满足不等式

$$\frac{\partial V}{\partial \eta}\left[f(\eta)+g(\eta)\varphi(\eta)\right]\le -W(\eta),\forall \eta\in D \quad (14.51)$$

其中$W(\eta)$是正定的。在方程(14.49)的右边同时

加减一项 $g(\eta)\varphi(\eta)$，可得到等价的表达式

$$\dot{\eta} = \left[f(\eta) + g(\eta)\varphi(\eta) \right] + g(\eta)\left[\xi - \varphi(\eta) \right],$$
$$\dot{\xi} = u$$

应用变量代换

$$z = \xi - \varphi(\eta)$$

得到系统

$$\dot{\eta} = \left[f(\eta) + g(\eta)\varphi(\eta) \right] + g(\eta) z,$$
$$\dot{z} = u - \dot{\varphi}$$

由于f，g和φ已知，导数$\dot{\varphi}$可用下式计算：

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left[f(\eta)+g(\eta)\xi\right]$$

取$\upsilon=u-\dot{\varphi}$，系统简化为级联形式

$$\dot{\eta}=\left[f(\eta)+g(\eta)\varphi(\eta)\right]+g(\eta)z$$

$$\dot{z}=\upsilon$$

该式与本节开始提出的系统非常相似，所不同的是现在的系统当z为零时，第一部分具有渐近稳

定的原点，这一特点将用于υ的设计中，以稳定整个系统。用

$$V_c(\eta,\xi)=V(\eta)+\frac{1}{2}z^2$$

作为备选 Lyapunov 函数，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_c&=\frac{\partial V}{\partial \eta}\left[f(\eta)+g(\eta)\varphi(\eta)\right]+\frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta)z+z\upsilon\\&\le -W(\eta)+\frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta)z+z\upsilon\\&=-W(\eta)+z\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta)+\upsilon\right)\end{aligned}$$

选择

$$\upsilon = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - kz\text{，}\quad k > 0$$

得

$$\dot{V}_c \le -W(\eta) - kz^2 < 0$$

该式表明原点（$\eta = 0$，$z = 0$）是渐近稳定的。由 $\varphi(0) = 0$ 可知，原点（$\eta = 0$，$\xi = 0$）也是渐近稳定的，将 υ，z，$\dot{\varphi}$ 代入，可得到原始的状态反馈

控制律为

$$
\begin{aligned}
u &= \dot{\varphi} - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k\left[\xi - \varphi(\eta)\right] \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\left[f(\eta) + g(\eta)\xi\right] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k\left[\xi - \varphi(\eta)\right]
\end{aligned}
$$

(14.52)

如果假设全局成立，且$V(\eta)$是径向无界的，则原点是全局渐近稳定的。下一引理是上述结论的总结。

引理 14.2　考虑系统(14.49) ~ (14.50)，设$\varphi(\eta)$是式(14.49)的稳定状态反馈控制律，$\varphi(0)=0$，对于某个正定函数$W(\eta)$，$V(\eta)$是满足系统(14.51)的Lyapunov函数。则状态反馈控制律(14.52)可稳定系统(14.49) ~ (14.50)的原点，其中$V(\eta)+\left[\xi-\varphi(\eta)\right]^2/2$为系统的Lyapunov函数。此外，如果所有假设都全局成立，且$V(\eta)$径向无界，则原

点是全局渐近稳定的。

例 14.8　考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = u$$

上式具有系统(14.49)～(14.50)的形式，其中 $\eta = x_1$，$\xi = x_2$。首先考虑标量系统

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2$$

把 x_2 看成是输入，设计反馈控制 $\phi\left(x_1\right)$，以稳定原点 $x_1=0$。取

$$\phi\left(x_1\right)=-x_1^2-x_1$$

消去非线性项 x_1^2，得

$$\dot{x}_1=-x_1-x_1^3+(x_2-\phi(x_1))$$

为运用反步法，应用变量代换

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + x_1 + x_1^2$$

系统的形式转换为

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2)$$

取

$$V_c(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}z_2^2$$

作为复合 Lyapunov 函数，得

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= x_1\left(-x_1-x_1^3+z_2\right)+z_2\left[u+\left(1+2x_1\right)\left(-x_1-x_1^3+z_2\right)\right]\\ &=-x_1^2-x_1^4+z_2\left[x_1+\left(1+2x_1\right)\left(-x_1-x_1^3+z_2\right)+u\right]\end{aligned}$$

取

$$u=-x_1-\left(1+2x_1\right)\left(-x_1-x_1^3+z_2\right)-z_2$$

得

$$\dot{V}_c = -x_1^2 - x_1^4 - z_2^2$$

因此，原点是全局渐近稳定的。

由于标量系统很简单，因此上一例直接运用了积分器反步法。对于高阶系统，通过积分器反步的迭代仍可简化设计，如下例所示。

例14.8　三阶系统

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_3,$$
$$\dot{x}_3 = u$$

由上例中的二阶系统以及在输入端附加的积分器组成，仍采用上例中的积分器反步法。

在完成一次反步后，我们知道二阶系统

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$

以 x_3 作为输入时，控制律

$$x_3 = -x_1 - (1+2x_1)(-x_1^2 - x_1^3 + x_2) - (x_2 + x_1 + x_1^2) \stackrel{def}{=} \phi(x_1, x_2)$$

可使系统达到全局稳定，相应的 Lyapunov 函数为

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1 + x_1^2)^2$$

为运用反步法，应用变量代换

$$z_3 = x_3 - \phi(x_1, x_2)$$

可得

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2, \\
\dot{x}_2 &= \phi\left(x_1, x_2\right) + z_3, \\
\dot{z}_3 &= u - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\left(x_1^2 - x_1^3 + x_2\right) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\left(\phi + z_3\right)
\end{aligned}$$

以 $V_c = V + z_3^2/2$ 作为复合 Lyapunov 函数，得

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= \frac{\partial V}{\partial x_1}\left(x_1^2 - x_1^3 + x_2\right) + \frac{\partial V}{\partial x_2}\left(z_3 + \phi\right) \\ &\quad + z_3\left[u - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\left(x_1^2 - x_1^3 + x_2\right) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\left(z_3 + \phi\right)\right] \\ &= -x_1^2 - x_1^4 - \left(x_2 + x_1 + x_1^2\right)^2 \\ &\quad + z_3\left[\frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\left(x_1^2 - x_1^3 + x_2\right) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\left(z_3 + \phi\right) + u\right]\end{aligned}$$

取

$$u=-\frac{\partial V}{\partial x_2}+\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\left(x_1^2-x_1^3+x_2\right)+\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\left(z_3+\phi\right)-z_3$$

得

$$\dot{V}_c=-x_1^2-x_1^4-\left(x_2+x_1+x_1^2\right)^2-z_3^2$$

因此，原点是全局渐近稳定的。

补充算例：应用反步法设计控制律使得非线性系统的原点全局渐近稳定。

（1）$\dot{x}_1 = x_1 x_2, \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3 + x_3, \dot{x}_3 = u$；

（2）$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_1 x_2$；

（3） $\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 + a x_1^3, \dot{x}_2 = x_1 + u; (a < 1)$；

（4）$\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = u$；

习题 19.1：试用反步法设计控制律使得以下非线性系统的原点全局渐近稳定。

(1) $\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2, \dot{x}_2 = x_2^2 + x_3, \dot{x}_3 = x_3^2 + u$；

(2) $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_1 x_2^2$；

(3) $\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 + a x_1^3 \cos(x_1), \dot{x}_2 = x_2 + u; (a < 1)$；

(4) $\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = \cos x_2 + u$；