

计算机控制系统

第5章 计算机控制系统 离散域设计

北京航空航天大学

xiajie

2020年3月

5.1 z平面设计的性能指标要求

5.1.1 时域性能指标要求

1、稳定性要求

2、稳态特性要求：

- ❖ 主要以系统在一定指令信号及干扰信号作用下**稳态误差**的大小来衡量。
- ❖ 影响稳态误差的主要因素是系统的 **类型及开环放大系数**

3、动态特性要求：

- ❖ 主要以系统**单位阶跃响应**的升起时间、峰值时间、超调量和调节时间来表示。
- ❖ 任意高阶系统动态指标是由系统的零极点分布决定的，并且很难计算。但在很多情况下，高阶系统中都有一对**主导极点**，这时可把高阶系统近似看作二阶系统来研究。

动态指标的求取（二阶系统s平面）

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad 0 < \xi < 1$$

特征根为 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_d = \text{Re}(s) = -\xi\omega_n \\ \omega_d = \text{Im}(s) = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{array} \right.$

单位阶跃响应 $c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \arccos \xi)$

■ 动态指标如下：

❖ 超调量

$$\sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% \quad (1)$$

❖ 上升时间

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\text{Im}(s)} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (2)$$

❖ 峰值时间

$$t_p = \frac{\pi}{\text{Im}(s)} = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3)$$

❖ 调节时间

(5%误差带) $\xi < 0.8$

$$t_s \approx 3.5 / \text{Re}(s) = 3.5 / (\xi\omega_n) \quad (4)$$

Z域极点的理想位置

- z平面等 ξ 线，等Re线和等Im线与连续域参数对应

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\text{Re} \cdot T} e^{j \text{Im} \cdot T} = |z| \angle \omega T$$

- 等 ξ 线——z平面的对数螺线

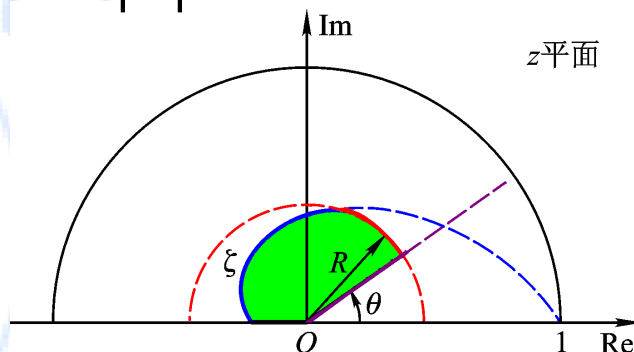
$$R \leq e^{-T \text{Re}(s)}$$

- 等Re线——z平面的同心圆

- 等Im线——z平面通过原点的射线

$$\theta = T \text{Im}(s)$$

- 依据设计指标得出s域的理想极点，可以进一步转换为z域的理想极点，作为设计指标。



例5-1 采样周期 $T=0.5s$ ，系统控制指标：

$$\sigma\% \leq 17\% \quad t_s \leq 2.3s \quad t_r \leq 1.7s$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% < 17\%$$

$$\xi \geq 0.5 \quad \text{--- --}$$

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\text{Im}(s)} \leq 1.7$$

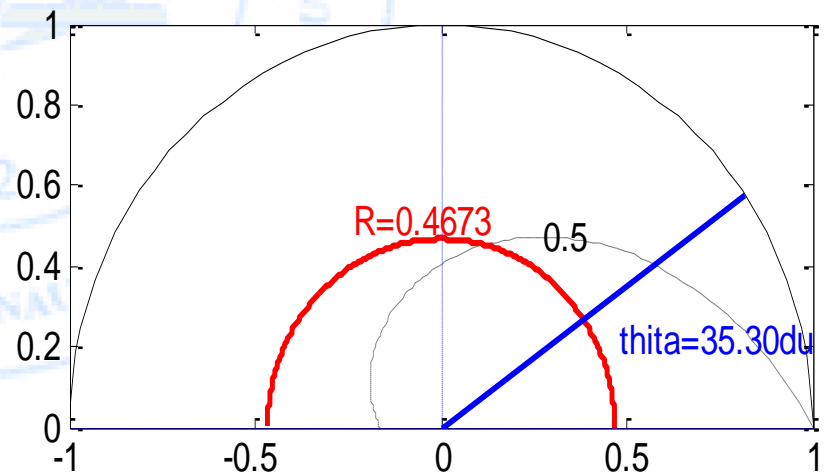
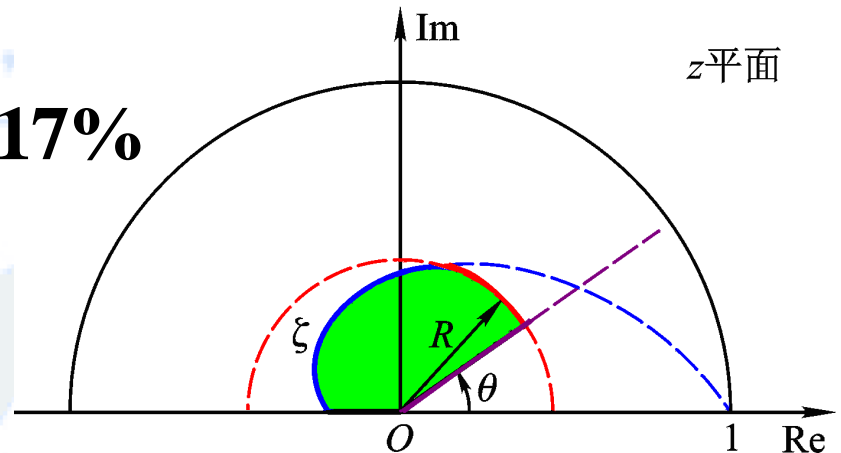
$$\text{Im}(s) \geq 1.232$$

$$\theta \geq T \text{Im}(s) = 35.3^\circ$$

$$t_s \approx 3.5 / \text{Re}(s) \leq 2.3$$

$$\text{Re}(s) \geq 1.52$$

$$R \leq e^{-T \text{Re}(s)} = 0.467 \quad \text{--- --}$$



5.1.2 频域性能指标要求

从开环频率特性分析闭环特性：

1. 低频段：反映系统的稳态特性

低频段斜率——系统类型(0型、I型等)

K的幅值 \uparrow —— 稳态误差 \downarrow

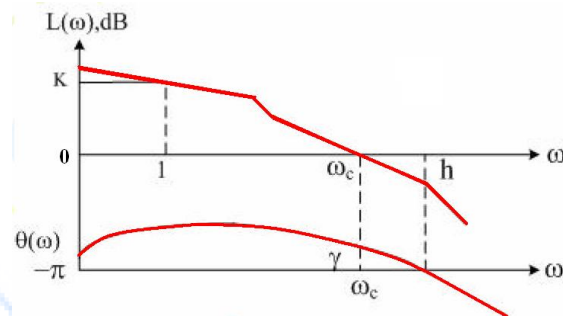
2. 中频段：反映系统动态特性

截止频率 ω_c ——系统带宽, $\omega_c \uparrow$, $t_r, t_p, t_s \downarrow$, 动态响应快

相位稳定裕度 γ 、幅值稳定裕度 h ——稳定裕度高，鲁棒性好

3. 高频段：反映系统抑制高频噪声的能力

高频段幅值衰减快——抑制高频噪声的能力强



鉴于离散系统频率特性 $G(e^{j\omega T})$ 是 ω 的超越函数，因此，频率域设计时，并不直接利用z平面的频率特性，而是将其变换到其他更合适的平面(w, w')上进行，同时相关的性能要求也会发生变化。

5.2 z平面根轨迹

$D(z)$ 为数字控制器

$G(z)$ 为广义被控对象

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right]$$

系统闭环脉冲传函

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

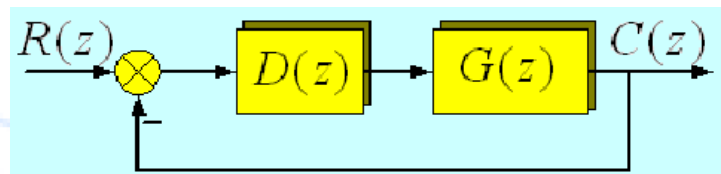


图5-4 离散控制系统
闭环系统特征方程

$$1 + D(z)G(z) = 0$$

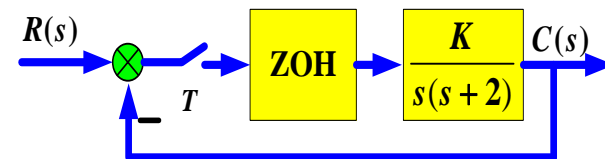
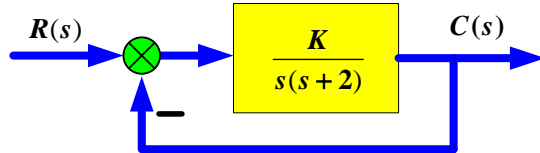
连续系统闭环特征方程

$$1 + D(s)G(s) = 0$$

结论：离散系统与连续系统的闭环特征方程形式完全一样。连续系统中根轨迹的**定义**及**绘制法则**，在z域完全适用。

z平面根轨迹应相对于单位圆来分析
形状不同（z变换的非线性关系）

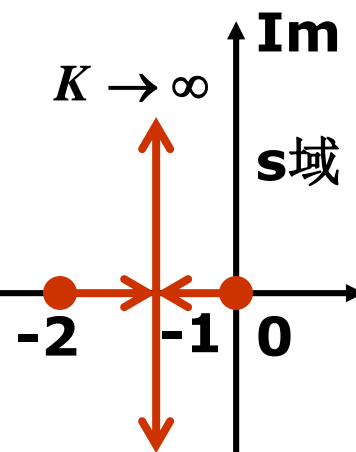
例5-2



连续系统: $G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$ $T=0.1s$

$$s_1 = 0, s_2 = -2$$

- 1) I型系统, 阶跃响应稳态误差为0
- 2) 系统稳定, 无论K多大(最小相位系统)
- 3) $K=1, s^2+2s+1=1 \rightarrow s_1=s_2=-1$ 为分离点
 $K<1$ 时响应过程单调; $K>1$ 时振荡



离散系统: $G(z) = Z \left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{K}{s(s+2)} \right] = \frac{K(1-z^{-1})}{2} Z \left[\frac{2}{s^2(s+2)} \right]$

$$= \bar{K} \frac{z+0.935}{(z-1)(z-0.819)} \quad \bar{K} = 0.0047K$$

零点 $z_1=-0.935$, 极点 $p_1=1$, $p_2=0.819$

- 1) I型系统, 有附加零点(非最小相位)

分离点与汇合点：重根

闭环特征方程：

$$(z-1)(z-0.819) + \bar{K}(z+0.935) = 0$$

设为重极点，令：

$$\Delta(z) = (z-p)^2$$

$$\bar{K} = 0.005 \rightarrow K = 1.07 \text{ 分离点 } p_1 = 0.907$$

$$\bar{K} = 7.379 \rightarrow K = 1570 \text{ 汇合点 } p_2 = -2.779$$

求临界稳定点：

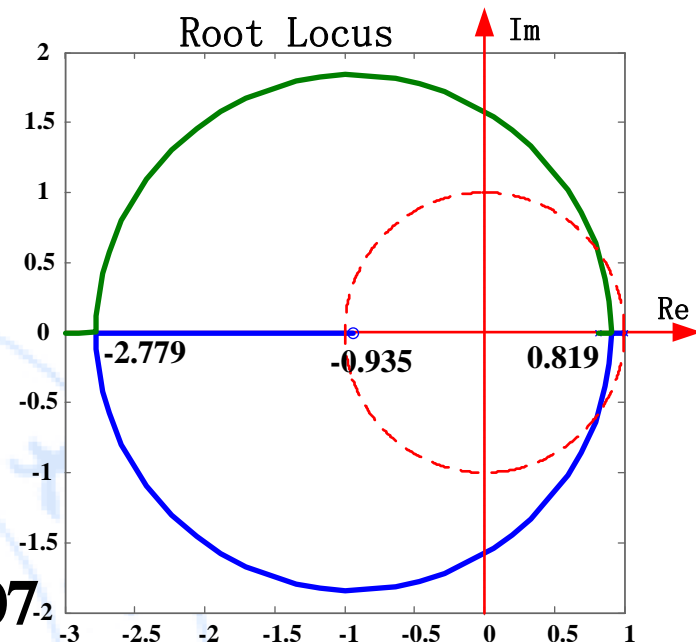
$$\text{令 } |z| = 1$$

则满足

得

$$\bar{K} = G(z) = \bar{K} \frac{z + 0.935}{(z-1)(z-0.819)}$$

零点 $z_1=0.935$ ，极点 $p_1=1$ ， $p_2=0.819$



$$\bar{K} = 0.0047K$$

$$z^2 + 2az + a^2 + b^2$$

稳定

离散系统中根轨迹的绘制法则

开环传递函数

$$D(z)G(z) = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \xrightarrow[\text{根轨迹方程}]{D(z)G(z) = -1} \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} = -1$$

模值
方程

$$K = \frac{\prod_{i=1}^n |z - p_i|}{\prod_{i=1}^m |z - z_i|}$$

相角
方程

$$\sum_{i=1}^m \angle(z - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - p_i) = (2k + 1)\pi$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

z平面根轨迹的特殊性：

- 1) z平面极点的**密集度很高**，在用根轨迹分析系统性能时，要求根轨迹的计算精度较高。
- 2) z平面的**临界放大系数**由根轨迹与单位圆的交点求得。
- 3) 离散系统脉冲传递函数的**附加零点**，影响根轨迹和动态响应。
- 4) z平面根轨迹与采样周期T有关。

5.2.2 z平面根轨迹设计方法

根轨迹法实质上是一种闭环极点的配置技术，即通过反复试凑，设计控制器的结构和参数，使整个闭环系统的主导极点配置在期望的位置上。

1、设计步骤

- 1) 据给定时域指标，在z平面画出期望极点的允许范围
- 2) 设计数字控制器 $D(z)$ 。

(1) 首先求出广义对象脉冲传递函数

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right]$$

(2) 确定控制器 $D(z)$ 的结构形式

常用控制器有一阶相位超前及相位滞后环节：

$$D(z) = K_c \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

若要求数字控制器不影响系统稳态性能，则要求：

$$D(z) \Big|_{z=1} = 1 \longrightarrow K_c = \frac{1 - p_c}{1 - z_c}$$

- 3) 进行数字仿真研究，检验闭环系统的动态响应。
- 4) 在计算机上编程实现 $D(z)$ 算法。

仿真验证的必要性

■ 即便将希望的闭环极点配置在允许域内，仍可能出现系统的动态性能不满足指标要求的情况。

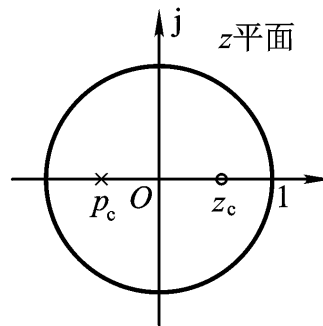
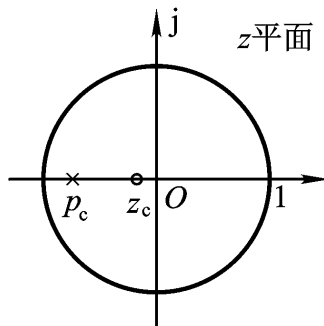
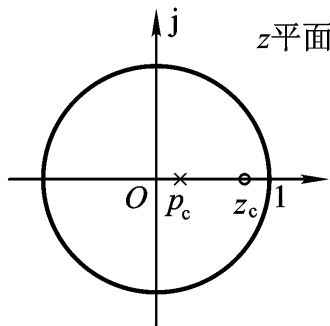
■ 原因

- ❖ 离散系统的脉冲传函的零点数多于对应的连续系统，且系统的性能不仅受极点影响，还受零点影响。
- ❖ 允许域是按照二阶系统的品质指标近似绘制的，实际系统常为高于二阶的系统。高阶系统的响应主要取决于其一对主导极点，非主导极点对系统性能也会有影响。

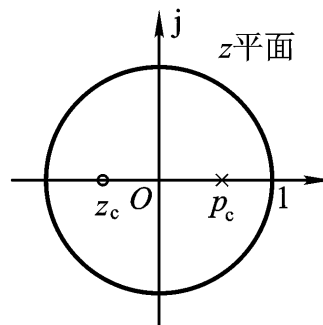
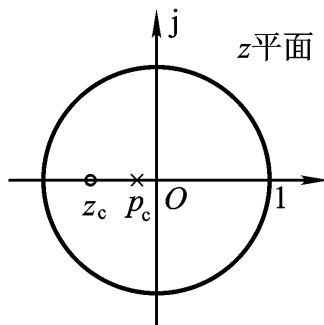
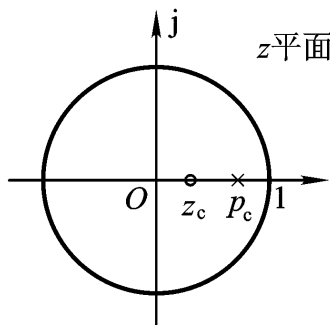
控制器D(z)零极点分布

$$D(z) = K_c \frac{z - z_c}{z - p_c}$$

超前一极点在零点左侧



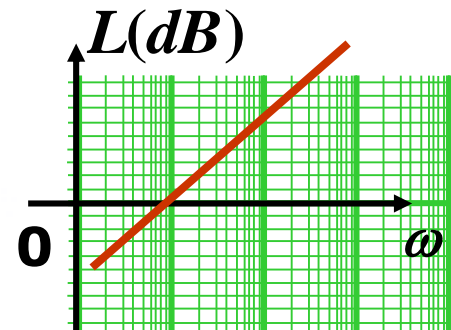
(a) 相位超前控制器



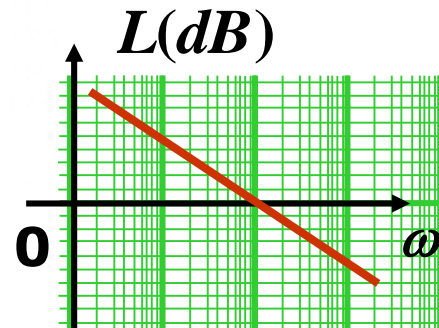
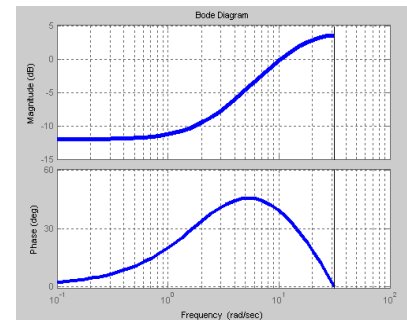
(b) 相位滞后控制器

5-25

滞后一极点在零点右侧



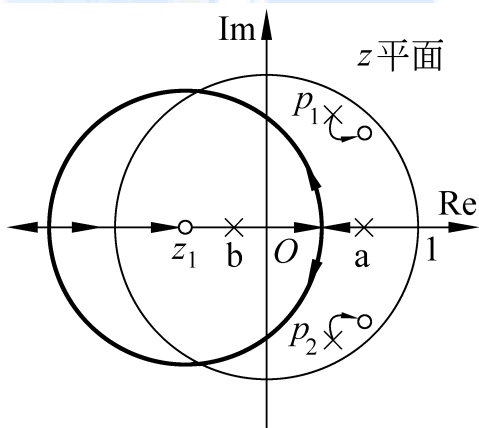
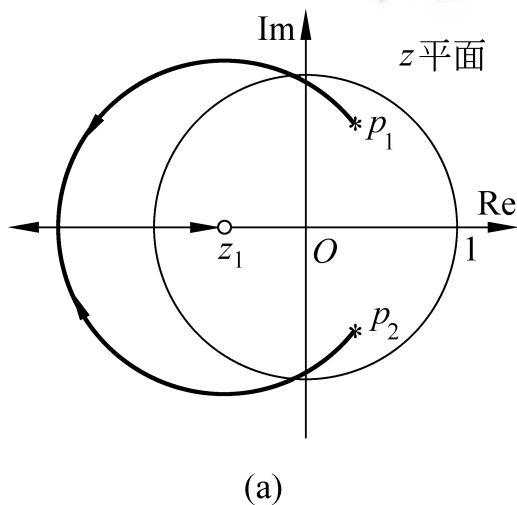
高通滤波器



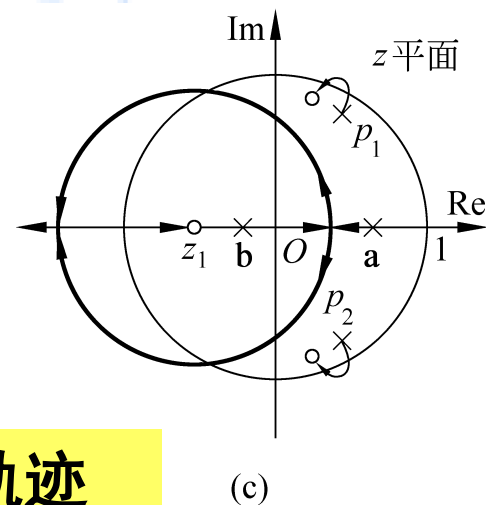
低通滤波器

控制器设计的常用方法—零极点对消法

- 用控制器的零极点对消被控对象不希望的极零点，从而使整个闭环系统具有满意的品质。
- 注意：不要用 $D(z)$ 去对消对象在单位圆外、单位圆上以及接近单位圆的零极点，否则会因为不精确对消而产生可能的不稳定的现象。**
- 原因：有限字长、对象本身特性发生变化。**



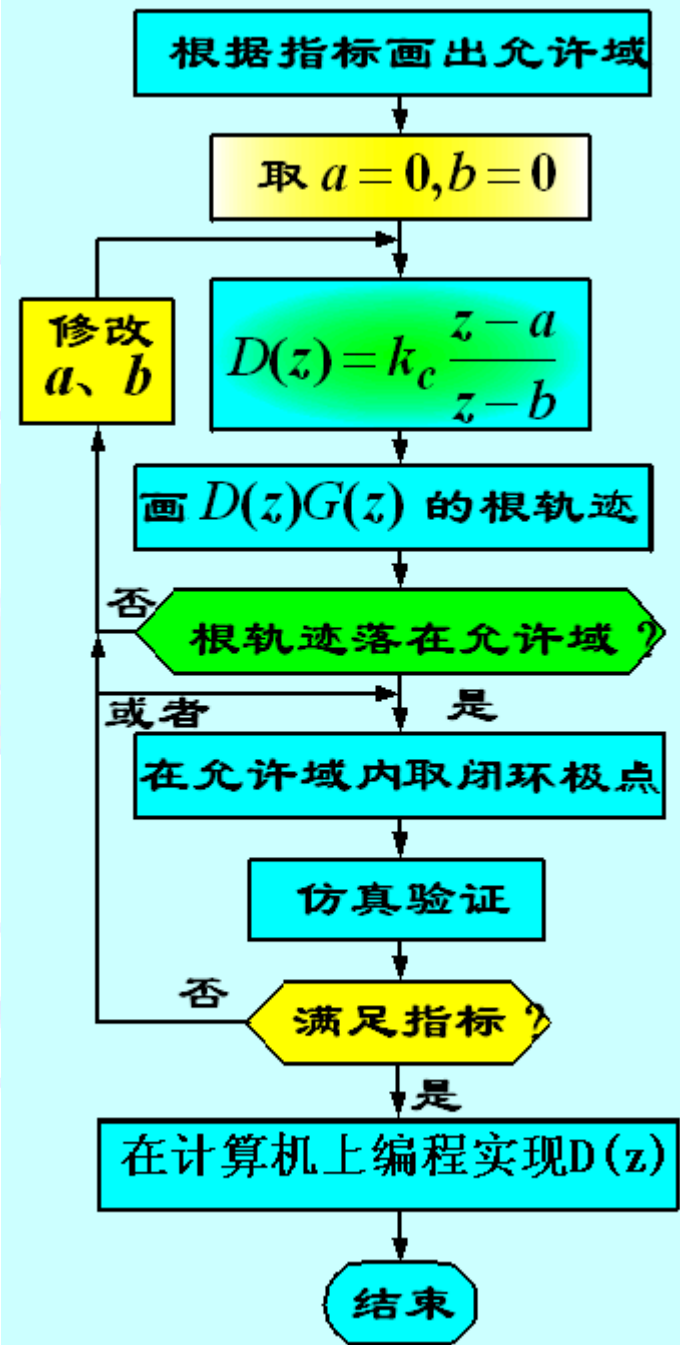
不精确对消的根轨迹



采用一阶控制器的设计流程：

设计方法和设计举例

参见课件



(二) $D(z)$ 结构形式的选择

首先是：**物理可实现性**；即分子阶次 \leq 分母阶次。

最常采用的数字控制器为：

相位超前一阶网络：

$$D(z) = k_c \frac{z - z_{c1}}{z - p_{c1}}, \quad p_{c1} < z_{c1}$$

极点在零点的左侧

相位滞后一阶网络：

$$D(z) = k_c \frac{z - z_{c2}}{z - p_{c2}}, \quad p_{c2} > z_{c2}$$

极点在零点的右侧

根轨迹常采用零极点对消法来设计控制器。

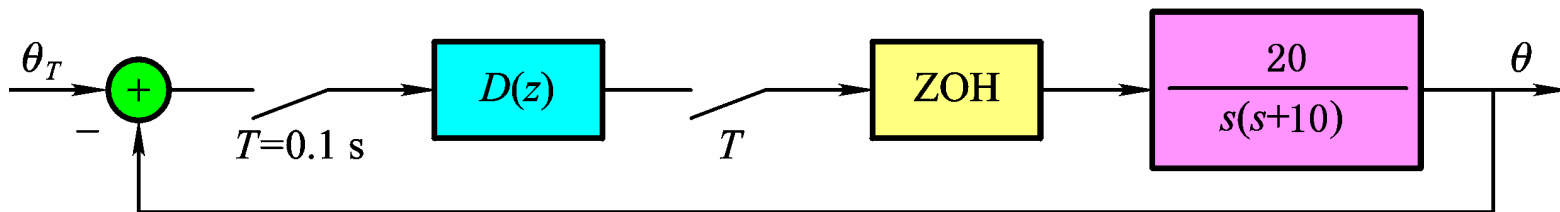
即用控制器的零极点对消被控对象不希望的极零点，从而使整个闭环系统具有满意的品质。

注意：

不要试图用 $D(z)$ 去对消在单位圆上以及接近单位圆的零极点，否则会因为不准确的抵消而产生可能的不稳定的现象。

根轨迹设计例题5.4(P152)

例：太阳光源跟踪系统的离散化根轨迹设计，采样周期 $T = 0.1s$



性能指标要求： $\sigma\% \leq 15\%$ $t_r \leq 0.55s$ $t_s \leq 1s$ $K_v > 5$

(1) 确定理想根轨迹位置

$$\sigma\% = e^{\pi\xi\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% < 15\%$$

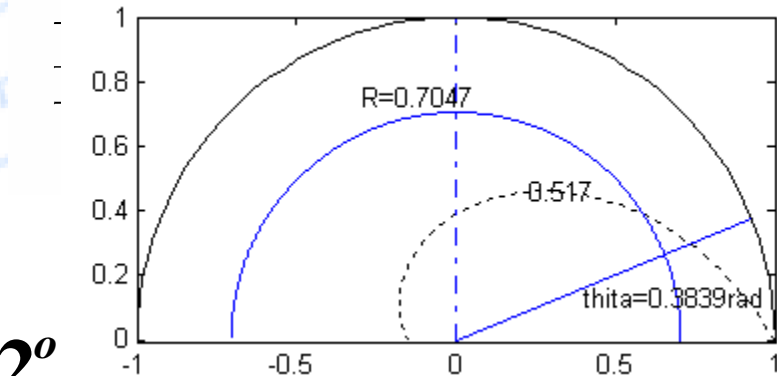
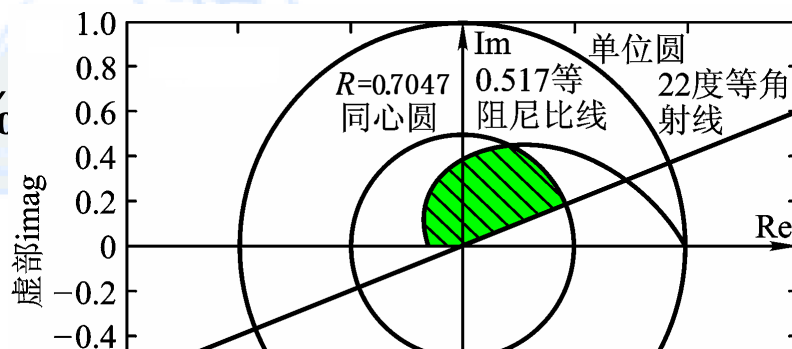
$$\xi > 0.517$$

$$t_s \approx \frac{3.5}{\text{Re}(s)} < 1s$$

z域同心圆半径 $r \leq 0.7047$

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\text{Im}(s)} < 0.55s$$

z域射线 $\theta = T \text{Im}(s) \geq 22^\circ$



(2) 设计数字控制器 $D(z)$

被控对象的脉冲传递函数

Matlab指令

```
num=[20];  
den=[1 10 0];  
[n,d]=c2dm(num,den,0.1,'zoh')
```

根轨迹进入期望极点范围？

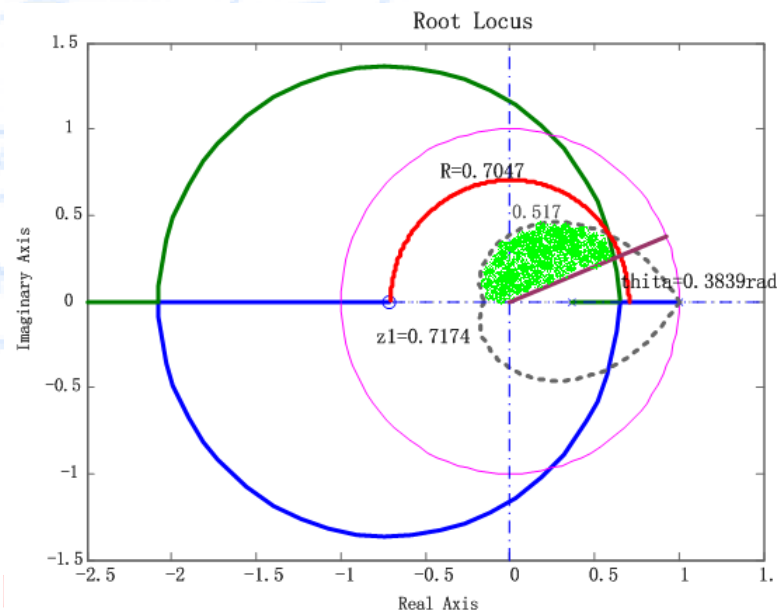
$n=[0 \quad 0.0736 \quad 0.0528]$
 $d=[1.0000 \quad -1.3679 \quad 0.3679]$

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{20}{s(s+10)} \right] = 0.0736 \frac{(z + 0.7174)}{(z - 1)(z - 0.3679)}$$

先可取控制器为纯比例环节

$$D(z) = k_d$$

绘制系统的根轨迹



改进控制器 $D(z)$ 的设计

$$G(z) = 0.0736 \frac{(z + 0.7174)}{(z - 1)(z - 0.3679)}$$

D(z)零点抵消G(z)衰减慢的极点

$$D(z) = \frac{k(z - 0.3679)}{z} \quad \text{得到:}$$

采用零极对消法, 选用

$$D(z)G(z) = 0.0736k \frac{(z + 0.7174)}{z(z - 1)} = K \frac{(z + 0.7174)}{z(z - 1)}$$

利用**Matlab**指令

[K,pole]=rlocfind(num, den)

可在选定极点位置后自动计算得:

希望极点: $0.3485 \pm j0.3096$

根轨迹增益 $K = 0.3030$

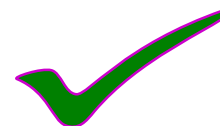
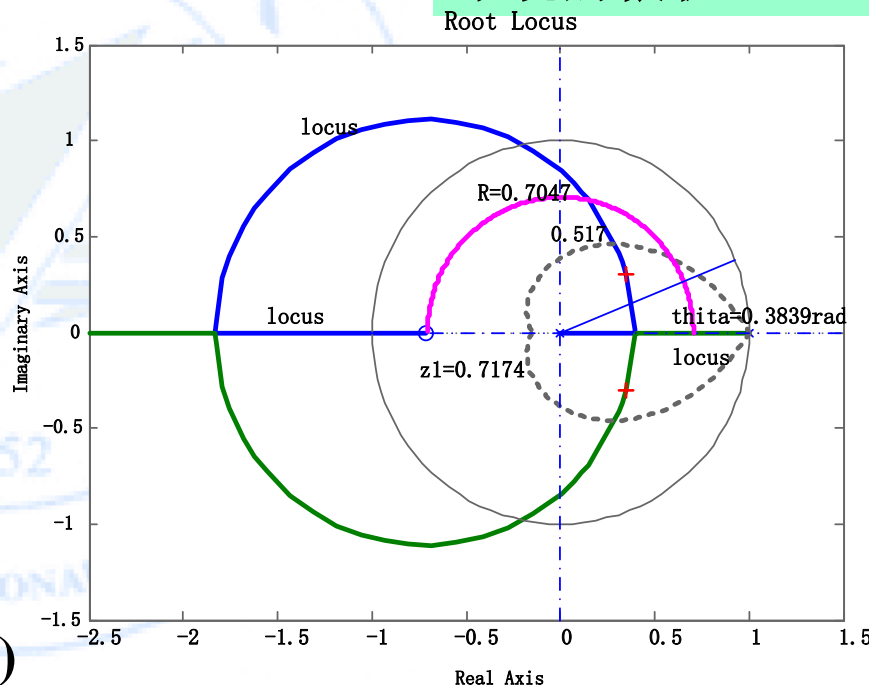
控制器增益 $k_d = K / 0.0736 = 4.2$

控制器传函 $D(z) = \frac{4.2(z - 0.3679)}{z}$

系统静态速度误差系数 $k_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)D(z)G(z)$

$$= \frac{1}{0.1} (z - 1) \frac{0.3030(z + 0.7174)}{(z - 1)z} = 5.2 > 5$$

系统的根轨迹



(3)系统时域仿真



结论：

❖时域动态性能：

$$\sigma\% \leq 15\%$$

$$t_r \leq 0.55s$$

$$t_s \leq 1s$$

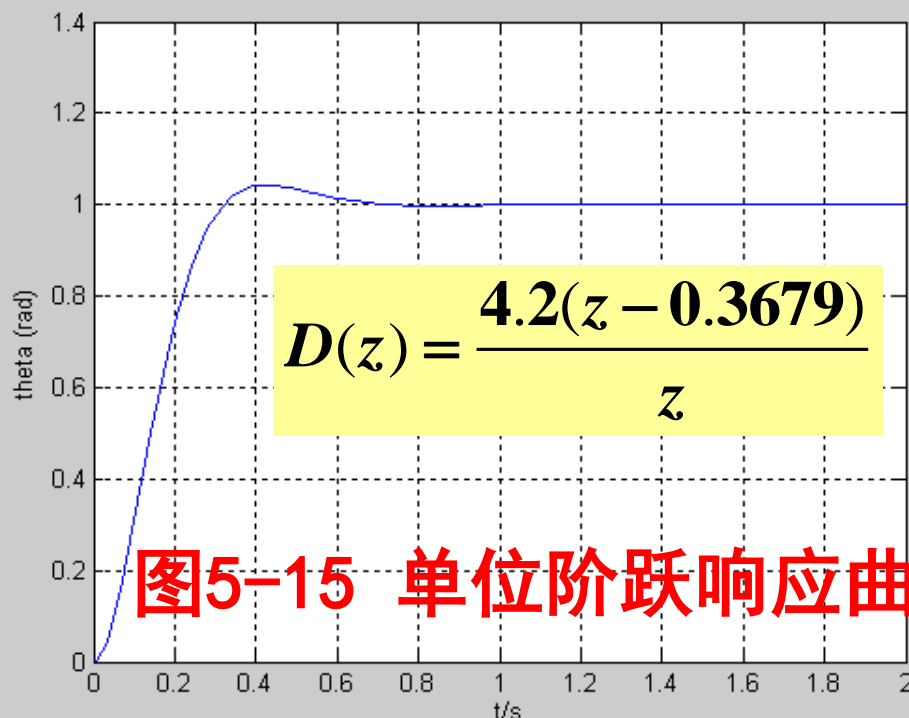
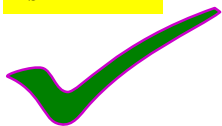
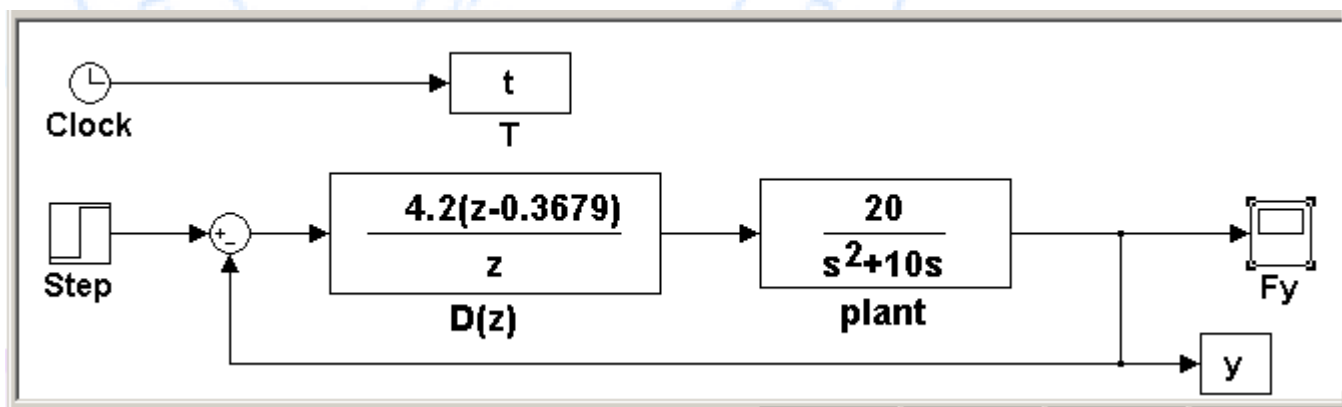


图5-15 单位阶跃响应曲线



5.3 W' 变换及频率域设计

5.3.1 W' 变换及其性质

1. w' 变换定义

$$w' = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \longleftrightarrow z = \frac{1 + \frac{T}{2} w'}{1 - \frac{T}{2} w'}$$

2. W' 变换主要特性

(1) 映射关系

(2) s 域和 w' 域频率对应关系

(3) w' 域传函与 z 传函的关系

(4) s 域和 w' 域传函的关系

(5) w' 变换与突斯汀tustin变换

3. W' 变换的频率特性

2. w' 变换主要特性

(1) 映射关系

$$w' = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2} w'}{1 - \frac{T}{2} w'}$$

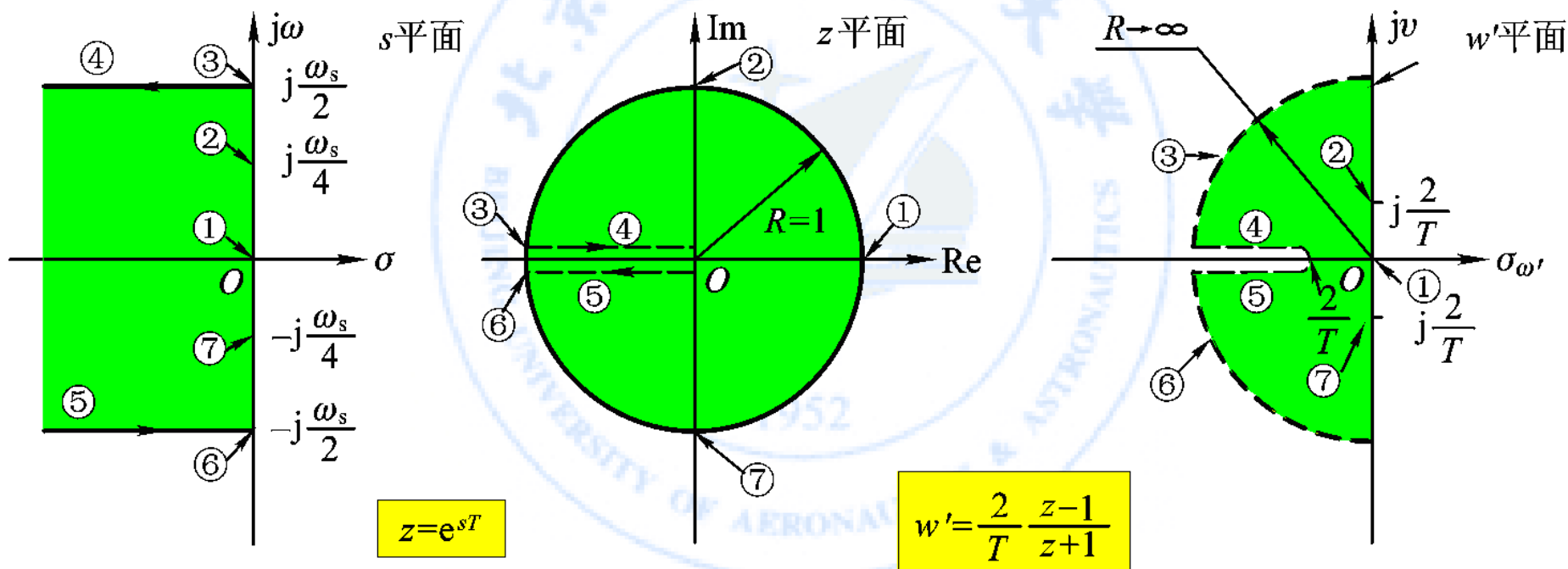


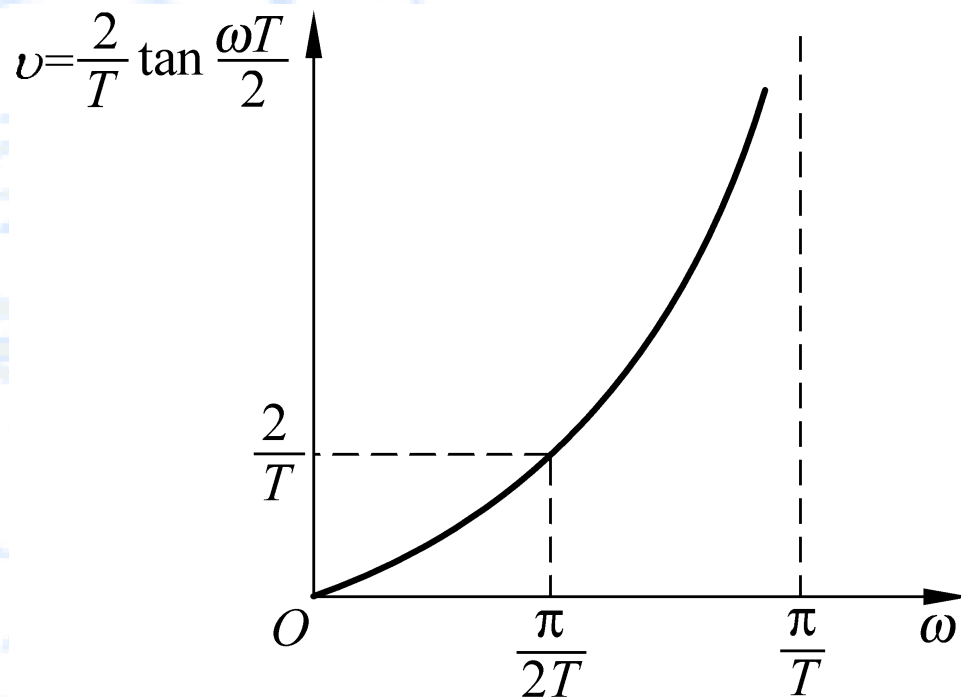
图5-16 s 、 z 、 w' 域之间的映射关系

(2) s域和w' 域频率对应关系

- s域和z域的频率都用 ω 来表示，是系统的真实频率，变换至w'域后得到的频率为虚拟频率，以 ν 表示。

$$w' = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$
$$z = e^{j\omega T} \quad w' = j\nu$$

$$\nu = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$



s域和w'域的频率变换关系

(3) w' 域传函与 z 传函的关系

$$G(z) = \frac{\prod_{i=1}^m (z + a_i)}{(z - 1)^k \prod_{i=1}^n (z + b_i)}$$

$$G(w') = \frac{\prod_{i=1}^m (1 + a_i) \left(1 - \frac{Tw'}{2}\right)^{(k+n-m)}}{\prod_{i=1}^n (1 + b_i) (Tw')^k \prod_{i=1}^n \left[1 + \frac{T(1-b_i)}{2(1+b_i)} w'\right]}$$

分子分母同阶

结论:

❖ 如果 $(n+k) > m$, 则变换后, 分子添加 $(n-m)$ 个新零点

❖ 稳态增益不变。

➢ $z \rightarrow 1$ 时, $w' \rightarrow 0$

❖ 稳定性不变

➢ z 单位圆 $\rightarrow w'$ 左半平面

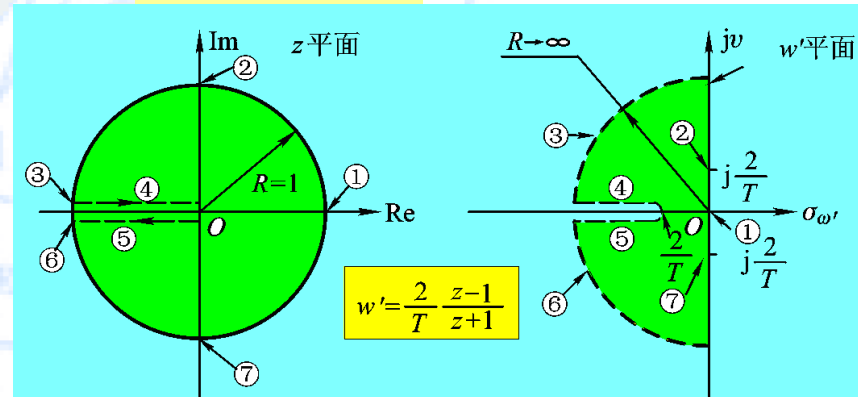
➢ $G(z)$ 稳定 $\rightarrow G(w')$ 稳定

特点:

➢ 串联性——双线性变换, 直接替代。

➢ w' 传函是 w' 的有理分式函数, 故 $G(j\nu)$ 是虚频 ν 的有理分式函数。

$$\left(1 - \frac{T}{2} w'\right) = 0 \rightarrow w' = 2/T$$



一般 $G(w')$ 分子分母是 w' 的同阶函数,

但 当 $G(z)$ 的零点或极点为 $z=-1$ 时,
会出现对应的 w' 项的对消现象。
从而使分子分母不同阶。

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w'}{1 - \frac{T}{2}w'}$$

$$G_1(z) = \frac{z+1}{z+0.5} \longrightarrow G_1(w') = \frac{\left(1 + \frac{T}{2}w'\right) + \left(1 - \frac{T}{2}w'\right)}{\left(1 + \frac{T}{2}w'\right) + 0.5\left(1 - \frac{T}{2}w'\right)} = \frac{4}{3 + \frac{T}{2}w'}$$

分母比分母高阶

$$G_2(z) = \frac{z+0.5}{z+1} \longrightarrow G_2(w') = \frac{\left(1 + \frac{T}{2}w'\right) + 0.5\left(1 - \frac{T}{2}w'\right)}{\left(1 + \frac{T}{2}w'\right) + \left(1 - \frac{T}{2}w'\right)} = \frac{3 + \frac{T}{2}w'}{4}$$

分子比分母高阶

(4) s 域和 w' 域传递函数的关系

■ 当采样周期 $T \rightarrow 0$ 时，复变量 w' 近似等于复变量 s ；

$$\lim_{T \rightarrow 0} w' = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2}{T} \frac{e^{sT} - 1}{e^{sT} + 1} = s$$

■ 传递函数 $G(s)$ 与 $G(w')$ 的相似性；

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

若 $a=5$ ， $T=0.1s$ ，则有

$$G(z) = Z \left[\frac{1-e^{-sT}}{s} G(s) \right] = \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

$$G(s) = \frac{5}{s+5}$$

$$G(z) = \frac{0.3935}{z-0.6065}$$

$$G(w') = G(z) \bigg|_{\substack{z = \frac{1+\frac{T}{2}w'}{1-\frac{T}{2}w'}}} = \frac{2}{T} \frac{1-e^{-aT}}{1+e^{-aT}} \frac{1-\frac{T}{2}w'}{w' + \frac{2}{T} \frac{1-e^{-aT}}{1+e^{-aT}}}$$

$$G(w') = \frac{4.899 \left(1 - \frac{w'}{20} \right)}{w' + 4.899}$$

■ $G(s)$ 与 $G(w')$ 稳态增益不变

因为带zoh的 z 变换与双线性变换都能维持稳态增益的不变。

s域和w'域典型环节对照

$$c = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-aT}}{1 + e^{-aT}} = \frac{2}{T} \frac{e^{aT} - 1}{e^{aT} + 1}$$

$$G(s) \xrightarrow[\text{带zoh的z变换}]{Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right]} G(z) \xrightarrow[\text{双线性变换}]{z = \left(1 - \frac{T}{2} w' \right) / \left(1 + \frac{T}{2} w' \right)} G(w')$$

$G(s)$	$G(z)$	$G(w')$	$\lim_{T \rightarrow 0} G(w')$
$\frac{1}{s}$	$\frac{T}{z-1}$	$\frac{1 - \frac{T}{2} w'}{w'}$	$\frac{1}{w'}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}$	$\frac{1 - \frac{T}{2} w'}{w'^2}$	$\frac{1}{w'^2}$
$\frac{a}{s+a}$	$\frac{1 - e^{aT}}{z - e^{-aT}}$	$\frac{c \left(1 - \frac{T}{2} w' \right)}{w' + c}$	$\frac{a}{w' + a}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(aT + e^{-aT} - 1)z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})}{a(z-1)(z - e^{-aT})}$	$\frac{c \left(1 - \frac{T}{2} w' \right) \left[1 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) w' \right]}{w'(w' + c)}$	$\frac{a}{w'(w' + a)}$

(5) w' 变换与突斯汀tustin变换

应用:

❖ Tustin变换用于 $D(s) \rightarrow D(z)$

❖ W' 变换用于离散域设计

$$G(s) \rightarrow G(z) \rightarrow G(w')$$

映射: 一般 $w' \neq s$

因为 $s \rightarrow z$: 主带对应, 付带重叠, $s \rightarrow w'$ 多对一

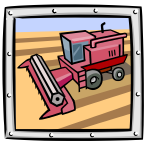
如果 $s \rightarrow z$:

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$z \rightarrow w'$:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2} w'}{1 - \frac{T}{2} w'}$$

则 $s \rightarrow w'$: 一一对应



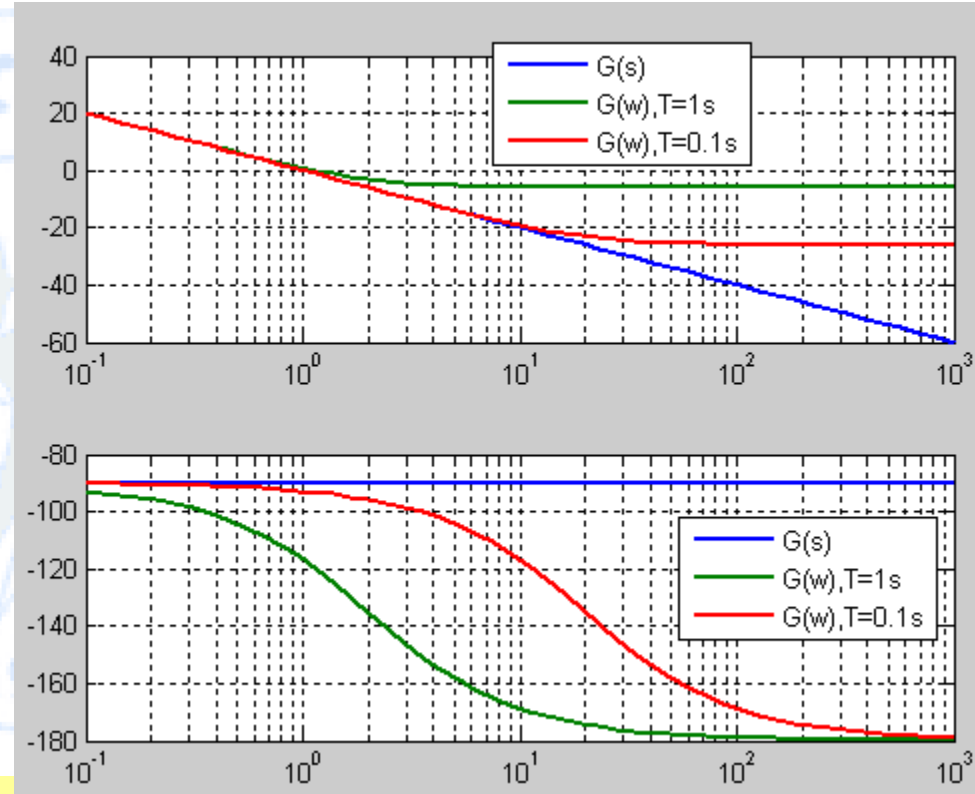
3. W' 的频率特性

$$G(s) = 1/s$$

以 $1/s$ 为例

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{s} \right] = \frac{T}{z - 1}$$

$$G(w') = W'[G(z)] = G(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w'}{1 - \frac{T}{2}w'}} = \frac{1 - \frac{T}{2}w'}{w'}$$

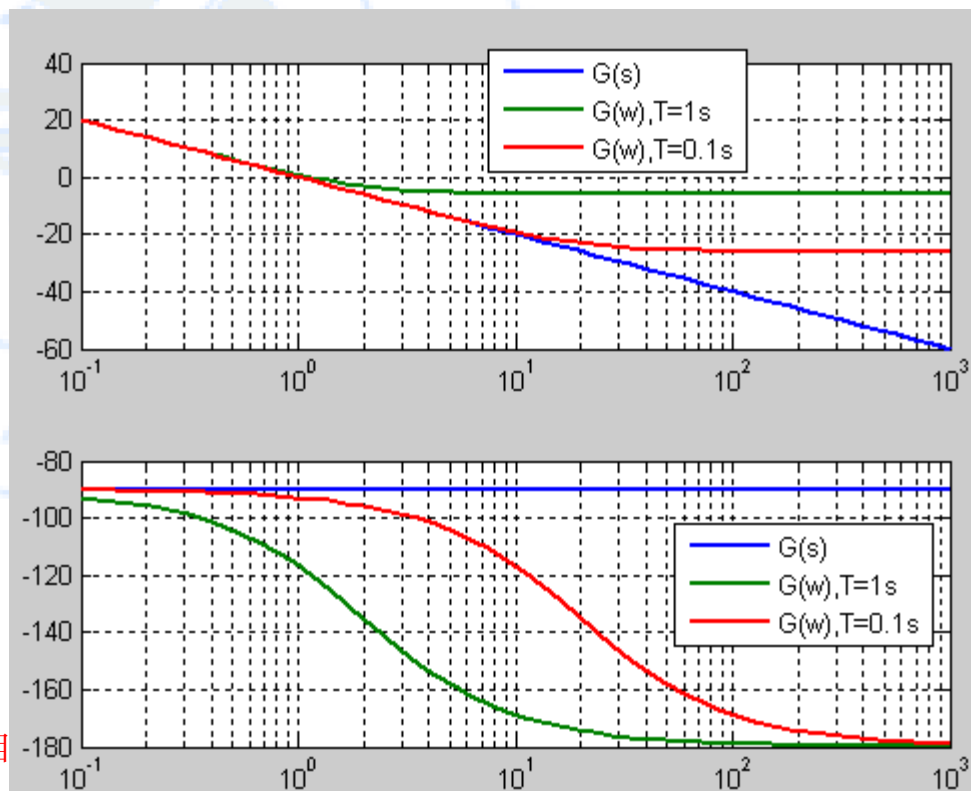
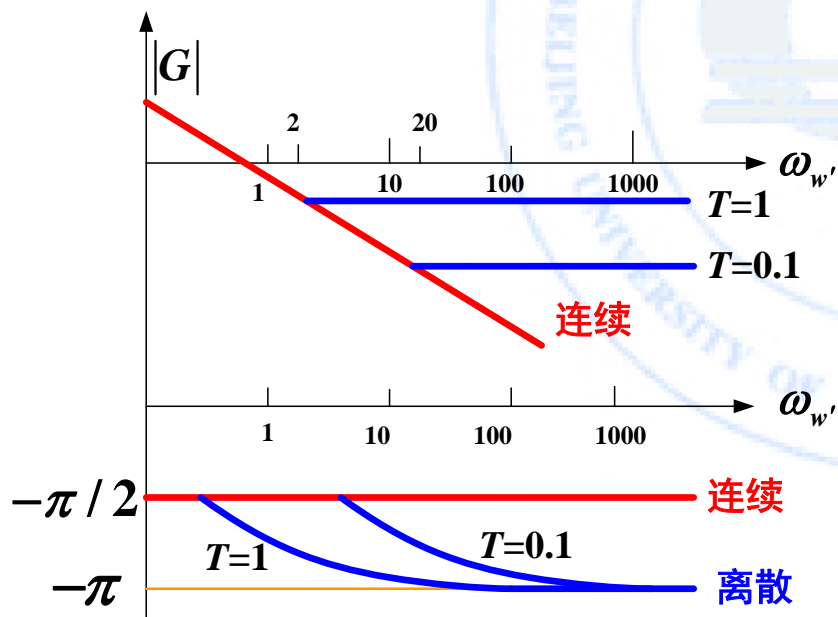


$$T = 1 \quad G(w') = \frac{1 - 0.5w'}{w'}, \quad \text{附加零点 } w' = 2$$

$$T = 0.1 \quad G(w') = \frac{1 - 0.05w'}{w'}, \quad \text{附加零点 } w' = 20$$

3. W' 的频率特性

- 作图方式与 $G(s)$ 相同
- 以 $1/s$ 为例。
- $G(W')$ 与 $G(s)$ 低频段斜率相同（积分环节数相同）
- $|G(W')|$ 高频段平缓（分子分母同阶）
- $T \downarrow$, $G(W') = G(s)$, 在中频段可将 $G(W')$ 代替 $G(s)$



Zoh的影响

■ 当 $G(z)$ 的分母阶数>分子阶数，则变换后

$G(w')$ 分子添加有新的零点，即添加零点 $\left(1 - \frac{T}{2}w'\right)$

新增零点为非最小相位，其对应 $z = \pm\infty$ 处的零点

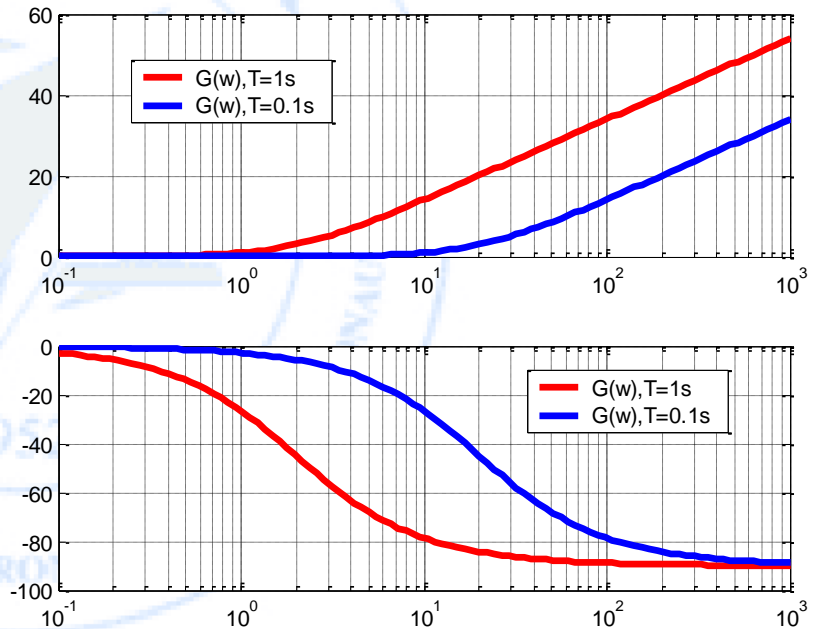
新添零点的对数幅
频相频特性如右图。

它们的转折频率为 $T/2$

幅频与一阶微分环节相同

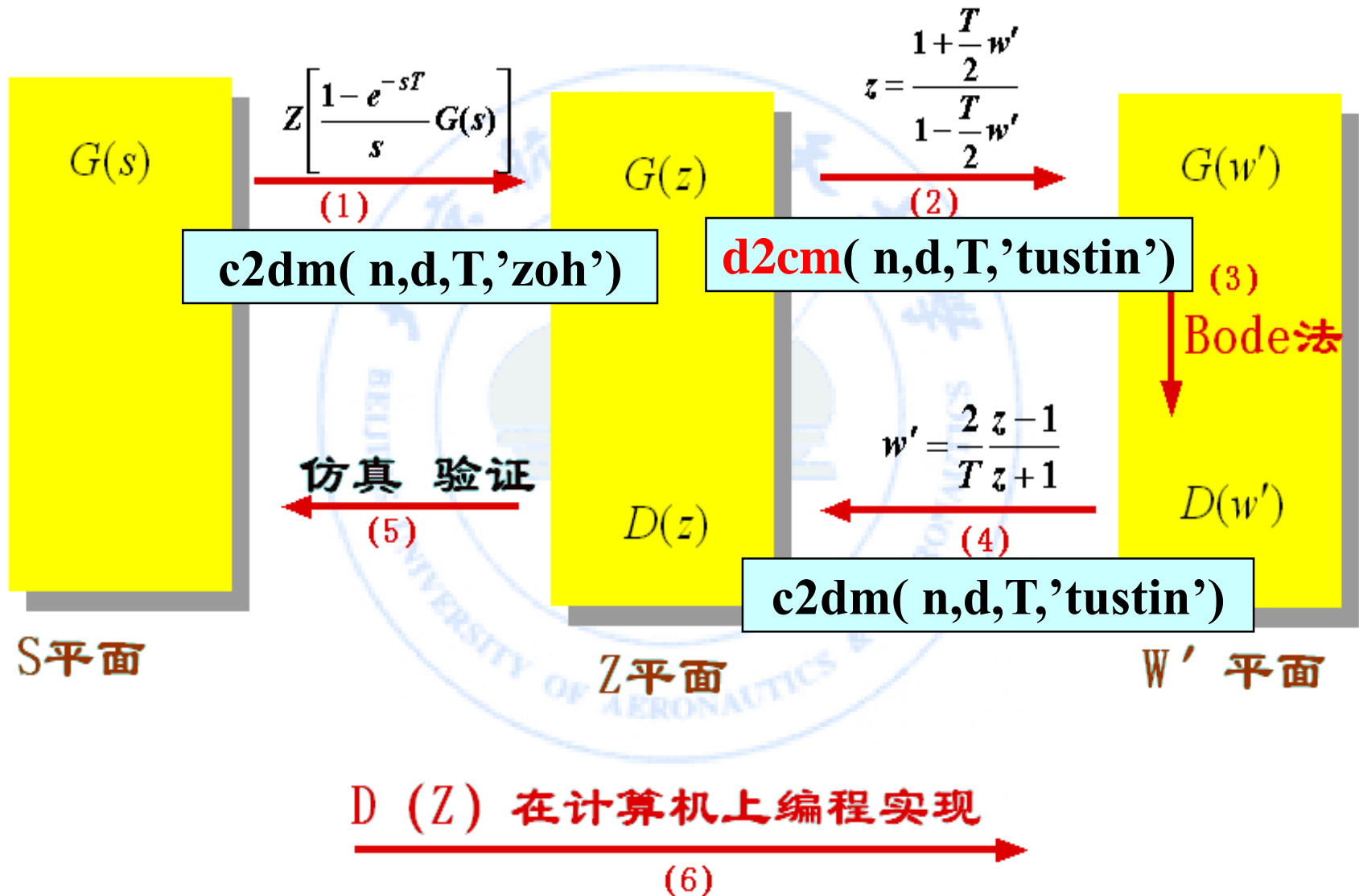
斜率是+20dB/十倍频。

而相位是滞后的。



$\left(1 - \frac{T}{2}w'\right)$ 清楚地反映出广义离散对象中zoh相位滞后的影响。

w'域(平面)设计法步骤



5.3.2 w' 域设计法

1) 给定 $G(s)$ ，求出 z 域的广义对象的脉冲传函 $G(z)$

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right]$$

可用c2dm(n,d,T,'zoh')

2) 将 $G(z)$ 变换到 w' 平面上

3) 在 w' 平面设计 $D(w')$

- 由于 w' 平面和 s 平面的相似性， s 平面上的设计技术，如频率法、根轨迹法等均可应用到 w' 平面。

$$G(w') = G(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w'}{1 - \frac{T}{2}w'}}$$

d2cm(n,d,T,'tustin')

4) 进行 w' 反变换，求得 z 域 $D(z)$

$$D(z) = D(w') \Big|_{w' = \frac{2z-1}{Tz+1}}$$

5) 检验 z 域闭环系统的品质

6) $D(z)$ 在计算机上编程实现。

可用c2dm(n,d,T,'tustin')

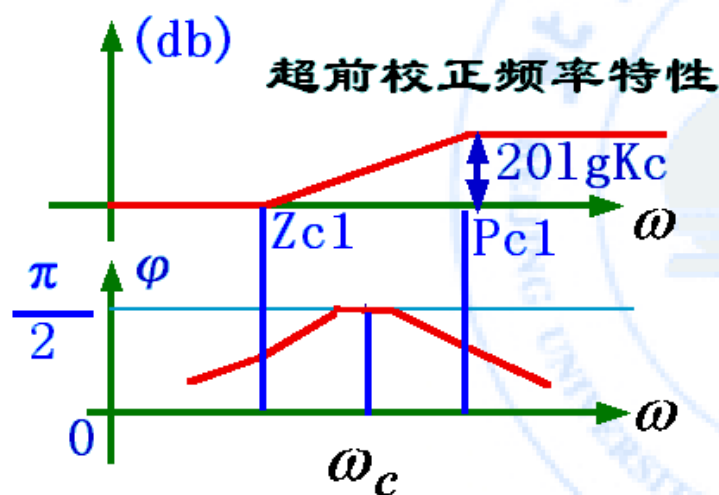
利用连续域bode技术设计时的注意点

1. 由于 w' 域和 s 域的频率扭曲，在性能指标中频率带宽 ω_c 并非是 $G(w')$ 波德图中的带宽。
$$z = e^{j\omega T} \quad w' = jv$$
$$v = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$
2. 设计 $D(w')$ 时必须考虑它所对应的 $D(z)$ 的物理可实现性和稳定性。
3. 设计时所考虑的性能指标一般比要求的稍高，以便在将 $D(w')$ 转回到 z 域实现时，系统仍能满足要求。

S域校正方法及特点

1、超前校正

$$D(s) = k_c \frac{s + z_{c1}}{s + p_{c1}} \quad z_{c1} < p_{c1}$$

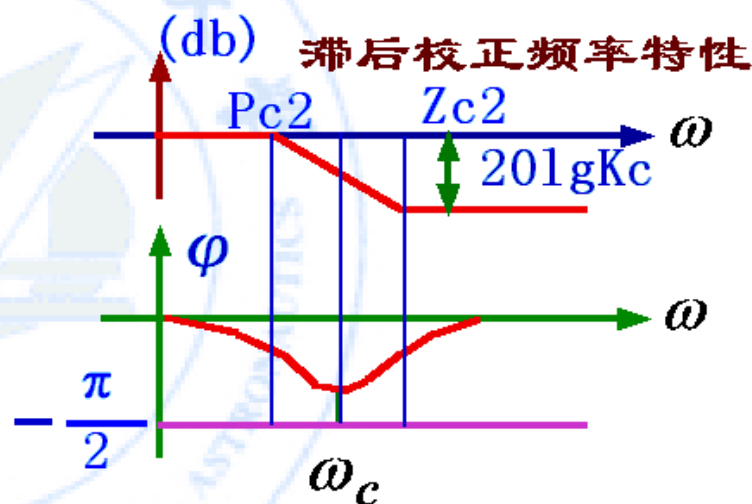


超前校正特点

- 增加带宽
- 改善动态 $\gamma \uparrow, h \uparrow$
- 抗扰能力 \downarrow
- 适用于中频段！

2、滞后校正：

$$D(s) = k_c \frac{s + z_{c2}}{s + p_{c2}} \quad z_{c2} > p_{c2}$$



滞后校正特点

- 动态性 \downarrow
- 系统增益 \uparrow
- 稳态误差 \downarrow
- 适用于低频段！

校正方法及特点

3、超前—滞后校正

$$D(s) = k_c \frac{(s + z_{c1})(s + z_{c2})}{(s + p_{c1})(s + p_{c2})}$$

$$z_{c1} < p_{c1}$$

$$z_{c2} > p_{c2}$$

当设计得较好时，
超前滞后校正可以同时兼有
超前校正和滞后校正的优点。

控制器D(w')的一般形式

■ w'域常用的控制器是一阶或二阶串联校正装置

相位超前一阶网络

$$D(w') = k_c \frac{w' + z_1}{w' + p_1} \quad p_1 > z_1$$

$$D(w') = \frac{1 + \alpha\tau w'}{1 + \tau w'} \quad \alpha < 1$$

相位滞前一阶网络

$$D(w') = k_c \frac{w' + z_2}{w' + p_2} \quad p_2 < z_2$$

$$D(w') = \frac{1 + \rho w'}{1 + \beta\rho w'} \quad \beta < 1$$

超前滞后网络

$$D(w') = k_c \frac{w' + z_1}{w' + p_1} \frac{w' + z_2}{w' + p_2}$$

$$D(w') = \frac{1 + \alpha\tau w'}{1 + \alpha w'} \frac{1 + \rho w'}{1 + \beta\rho w'}$$

$$p_1 > z_1 > p_2 > z_2$$

$$\alpha < 1, \beta < 1$$

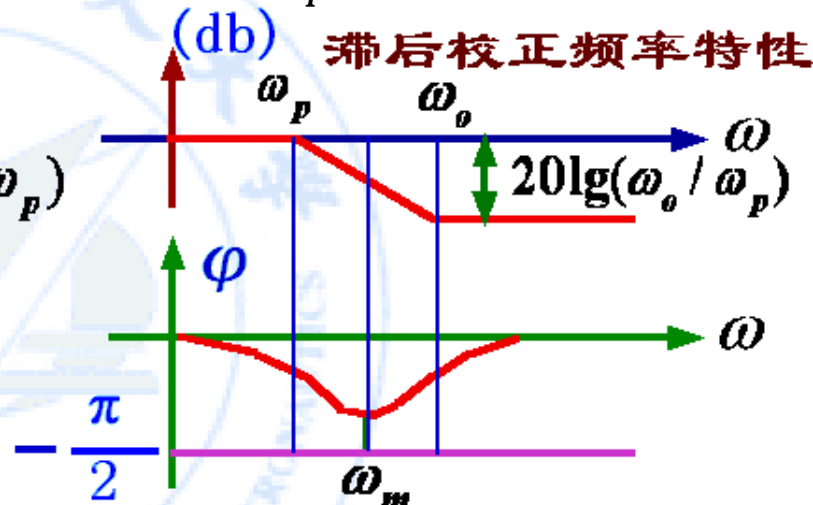
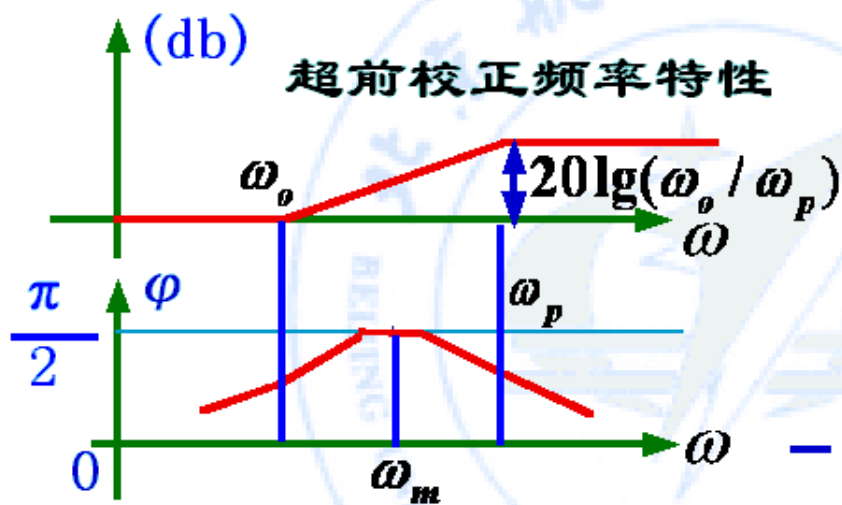
控制器D(w')的一般形式

一阶控制器

$$D(w') = \frac{1 + w' / \omega_o}{1 + w' / \omega_p}$$

ω_o 是w'域的零点

ω_p 是w'域的极点



该控制器的直流增益为1，高频增益为 $20\lg(\omega_o / \omega_p)$

最大相移 $|\varphi_m|$ 处于 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之间，其大小取决于 ω_o / ω_p

出现最大相移 $\varphi_m = \arcsin \frac{\omega_p - \omega_o}{\omega_p + \omega_o}$ 的频率为 $\omega_m = \sqrt{\omega_o \omega_p}$

5.3.3 设计举例——

天线转角计算机伺服控制系统w'域设计

例5-6：系统设计指标(设 $T=0.1s$)

❖ 超调量 $\sigma\% = 10\%$

❖ 相位稳定裕度 $\gamma_m \geq 50^\circ$

幅值稳定裕度 $L_h \geq 6dB$

* 调节时间 $t_s \leq 1s$

* 静态速度误差 $K_v \geq 5$

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s(s+10)} \cdot \frac{20}{s(s+10)} \right] = 0.0736 \frac{(z+0.7174)}{(z-1)(z-0.3679)}$$

```
d=sym('0.0736*(z+0.7174)/((z-1)*(z-0.3679))');
z=sym('(1+0.1*w/2)/(1-0.1*w/2)');
dw=subs(d); xx=simplify(dw);
[nw1,dw1]=numden(xx);
disp('G(w)=nw2/dw2');
nw2=sym2poly(nw1);
dw2=sym2poly(dw1);
Gw=tf(nw2,dw2)
a=dw2(1);
nw0=nw2/a
dw0=dw2/a
```

$$\frac{w'}{w'} = \frac{-0.0076(w')^2 - 0.7720w' + 18.4810}{(w')^2 + 9.2419w'}$$

$$= -0.0076 \frac{(w' + 20)(w' - 121.5428)}{w'(w' + 9.2419)}$$



```
nw0=-.0076 -0.7720 18.4810
dw0=1.000 9.2419 0.0000
```

2) 在w'域设计数字控制器

$$L_h \geq 6\text{dB}$$

$$\gamma_m \geq 50^\circ$$

(1) 系统开环放大系数设计

$$k_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)D(z)G(z)$$

$$D(z) = k = \frac{1}{0.1} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)k \cdot 0.0736 \frac{(z+0.7174)}{(z-1)(z-0.3679)} = 2k \geq 5$$

$$k \geq 2.5$$

(2) 数字控制器D(w')设计

取 $D_1(w') = k = 2.5$

w'平面的开环传递函数 $G_1(w') = D_1(w')G(w') = \frac{-0.0190(w')^2 - 1.930w' + 46.2024}{((w')^2 + 9.2419w')}$

在w'域检查开环稳定裕度要求

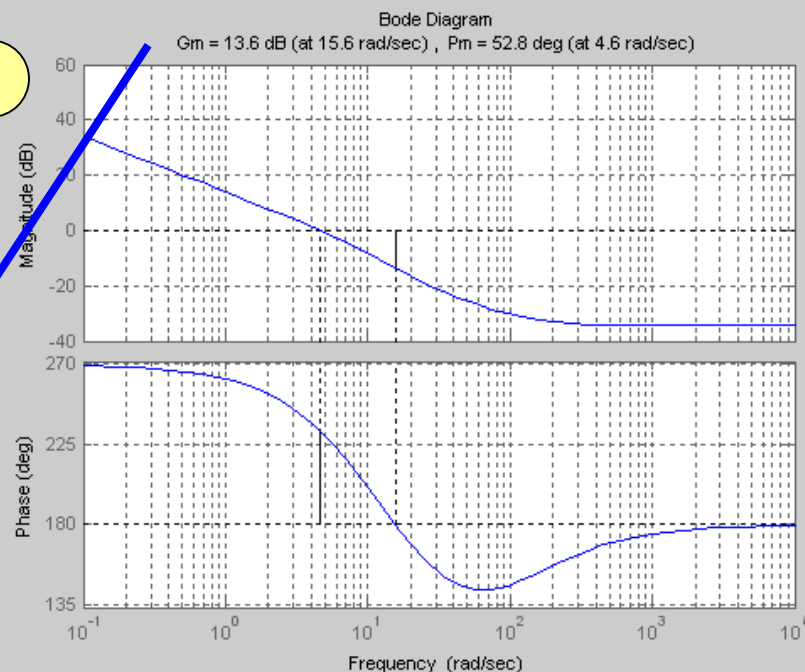
Matlab指令

```
nw1=[-0.019 -1.930 46.2024];  
dw1=[1.0000 9.2419 0];  
margin(nw,dw); grid
```

$$L_h = 13.6\text{dB} (v_h = 15.6\text{rad/s})$$

$$\gamma_m = 52.8\text{deg} (v_c = 4.6\text{rad/s})$$

满足指标要求，但截止频率较低。自动化



(2) 数字控制器D(w')设计

$$\sigma\% = 10\%$$

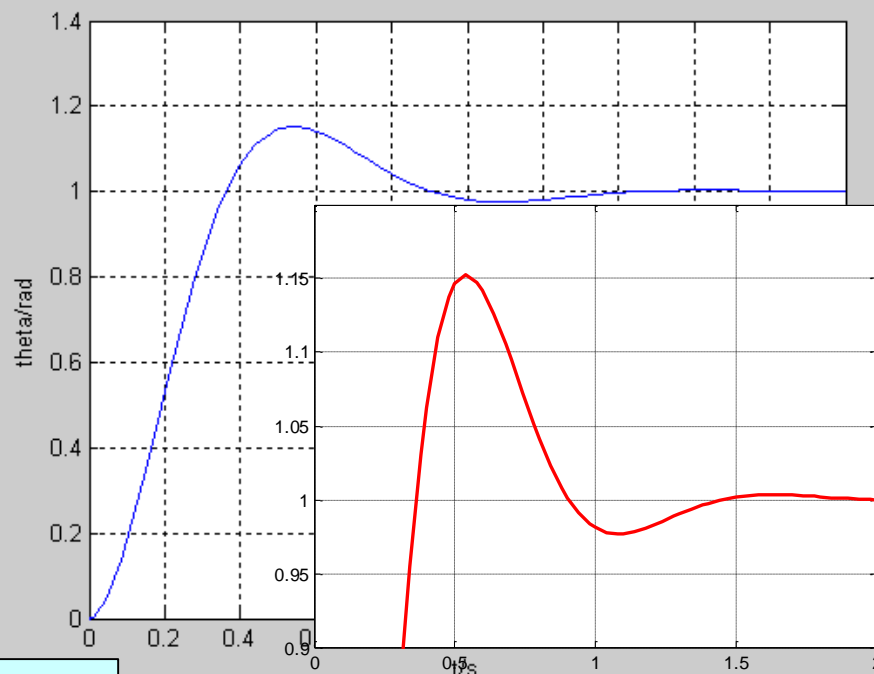
$$t_s \leq 1s$$

时域响应特性检查

Simulink仿真结果

❖ 超调量大于给定要求，
调节时间虽满足要求，
但余量不大。

$$\sigma\% = 15.28\%$$



结论：不满足要求，故需进一步
设计动态控制器，其目的是在保
证稳定裕度的条件下，进一步增
大开环截止频率。

$$D_1(w') = k_d = 2.5$$

闭环单位阶跃响应

(2) 数字控制器D(w')设计

b) 动态控制器设计

- 为提高截止频率，在正向通道引入超前环节。
- 利用连续系统控制理论方法，通过试凑，可确定超前环节的分子及分母的时间常数和增益。通过2-3次修正，最后取

$$D_2(w') = \frac{0.1w' + 1}{0.02w' + 1} = 5 \frac{w' + 10}{w' + 50}$$

$$D_2(w')G_1(w') = \frac{-0.0019(w')^3 - 0.2121(w')^2 + 2.6894w' + 46.2114}{0.02(w')^3 + 1.1848(w')^2 + 9.2419w'}$$

Matlab环节串联指令

```
dn=[0.1,1]; dd=[0.02,1];
nw1=[-0.0190,-1.930,46.2024];
dw1=[1.0, 9.2419, 0];
[nw2,dw2]=series(nw1,dw,1dn,dd)
```

在w'域检查开环稳定裕度要求

$$\gamma_m = 70.6^\circ (\nu_c = 5.05 \text{ rad/s})$$

$$L_h = 14.1 \text{ dB} (\nu_h = 47 \text{ rad/s})$$

满足要求

$$G_1(w') = \frac{-0.0190(w')^2 - 1.930w' + 46.2024}{((w')^2 + 9.2419w')}$$

频率区。

```
nw2=[-0.0190,-1.930,46.2024];
dw2=[1.0, 9.2419, 0];
```

3) z平面的控制器 $D(z)$

$$D_2(w') = \frac{0.1w' + 1}{0.02w' + 1}$$

进行 w' 反变换 $D_2(z) = D_2(w') \Big|_{w' = \frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{2.1429z - 0.7143}{z + 0.4286}$

Matlab指令

```
wdd=[0.02 1];  
wdn=[0.1 1];  
[zdn,zdd]=c2dm(wdn,  
,wdd,0.1,'tustin')
```

**zdn=[2.1429 -0.7143];
zdd=[1.0000 0.4286];**

稳态增益

$$D_2(z) \Big|_{z=1} = \frac{2.1429 - 0.7143}{1 + 0.4286} = 1$$

满足静态设计时要求：**控制器稳态增益不小于2.5!**

$$D(z) = D_1(z)D_2(z) = 2.5 \frac{2.1429z - 0.7143}{1 + 0.4286}$$

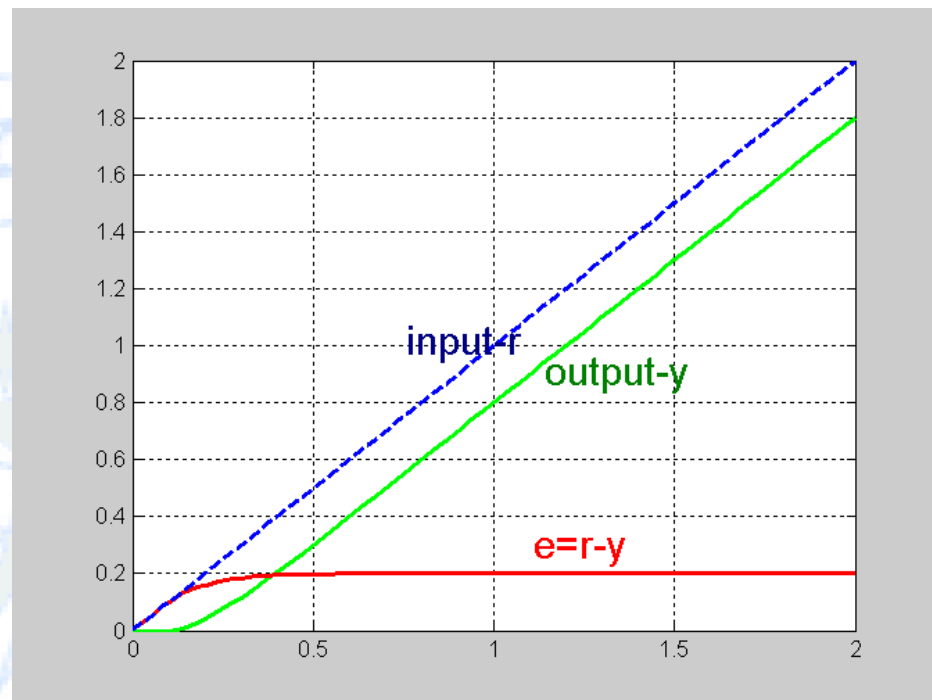
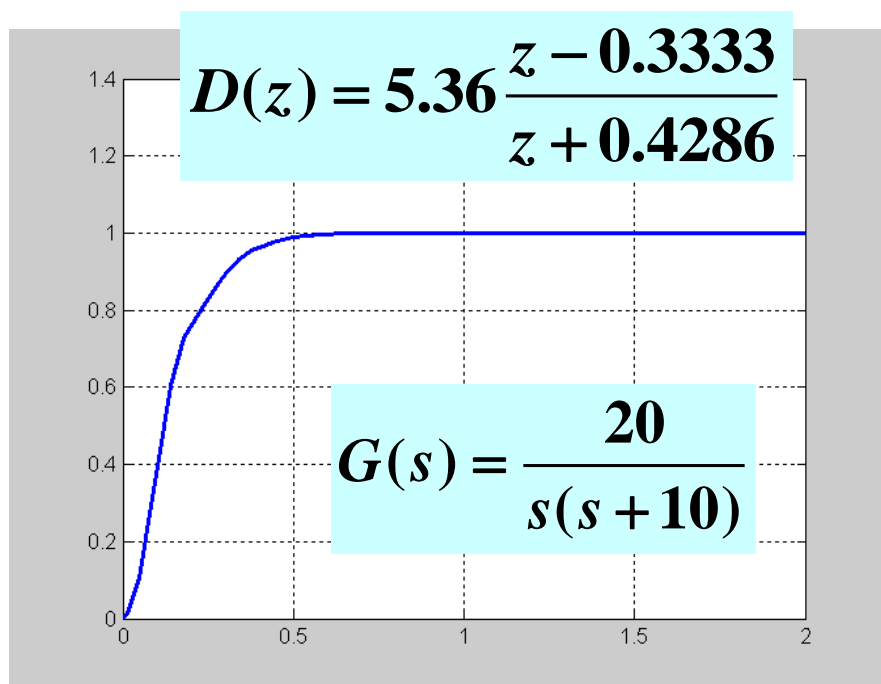
$$D_1(w') = 2.5, D_1(z) = 2.5$$

$$= 5.36 \frac{z - 0.3333}{z + 0.4286}$$

4) 闭环系统仿真

$$\sigma\% = 10\% \quad \gamma_m \geq 50^\circ \quad L_h \geq 6dB$$

$$t_s \leq 1s \quad K_v \geq 5$$



系统单位阶跃响应图

系统无超调,

调节时间小于0.4s。

系统单位斜坡响应图

$$k_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)D(z)G(z) = 5$$

$$\text{稳态误差: } e_{ss} = 1/k_v = 1/5 = 0.2$$

频域性能校验

$$\gamma_m \geq 50^\circ$$

$$L_h \geq 6dB$$

$D(w)=2.5$ 时系统开环稳定裕度

$$\gamma_m = 52.8\text{deg}(\nu_c = 4.6\text{rad} / s)$$

$$L_h = 13.6\text{dB}(\nu_h = 15.6\text{rad} / s)$$

在 w' 域检查开环稳定裕度要求

$$D(w') = 12.5 \frac{w' + 10}{w' + 50}$$

$$\gamma_m = 52.7^\circ(\nu_c = 10.7\text{rad} / s)$$

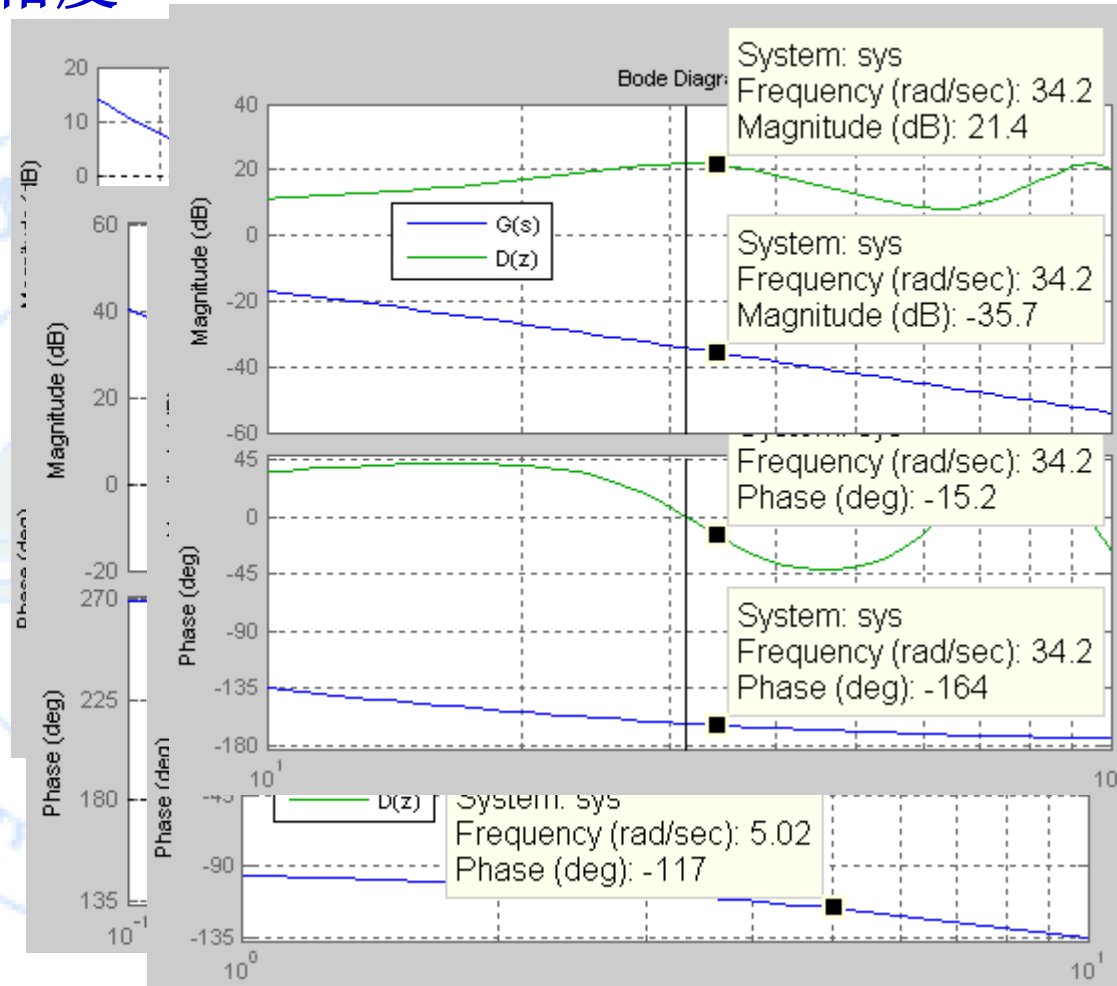
$$L_h = 8.1\text{dB}(\nu_h = 47.1\text{rad} / s)$$

在 s 域检查开环稳定裕度要求

$$D(z) = 5.36 \frac{z - 0.3333}{z + 0.4286}$$

$$\gamma_m = 84^\circ(\omega_c = 5\text{rad} / s)$$

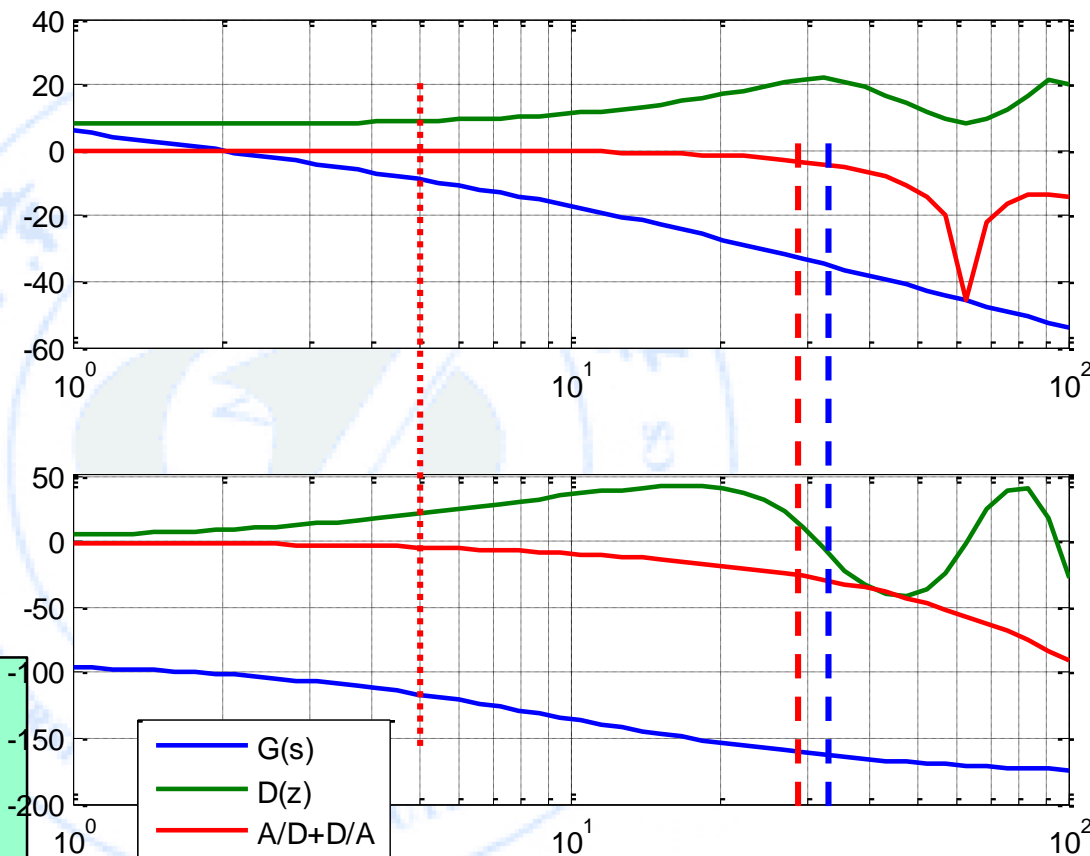
$$L_h = 14.3\text{dB}(\omega_h = 34.2\text{rad} / s)$$



$$\gamma_m = 80.2^\circ(\omega_c = 4.945\text{rad} / s)$$

$$L_h = 15.1327\text{dB}(\omega_h = 29.8\text{rad} / s)$$

仔细检查各个环节的频率特性曲线



不考虑
A/D+D/A影响

$$\gamma_m = 84^\circ (\omega_c = 5 \text{ rad / s})$$

$$L_h = 14.3 \text{ dB} (\omega_h = 34.2 \text{ rad / s})$$

$$\gamma_m = 80.2^\circ (\omega_c = 4.945 \text{ rad / s})$$

$$L_h = 15.1327 \text{ dB} (\omega_h = 29.8 \text{ rad / s})$$

例2

系统设计指标(设 $T=0.1s$)

❖ 截止频率 $\omega_c \geq 3.5 \text{ rad/s}$

❖ 相位稳定裕度 $\gamma_m \geq 45^\circ$

❖ 在最大指令速度 $=180^\circ/\text{s}$ 时, 速度稳态误差 $<1^\circ$

$$G(s) = \frac{180}{s \left(\frac{1}{6}s + 1 \right) \left(\frac{1}{2}s + 1 \right)}$$

解: 1)

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right] = 0.2965 \frac{(z + 0.2179)(z + 3.077)}{(z - 1)(z - 0.8187)(z - 0.5488)}$$

$$2) G(w') = G(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w'}{1 - \frac{T}{2}w'}} = \frac{0.1(w')^3 - 2.4(w')^2 - 90.7w' + 2090.6}{(w')^3 + 7.8202(w')^2 + 11.6164w'}$$

$$= 0.1 \frac{(w' + 31.1452)(w' - 39.2599)(w' - 20)}{w'(w' + 5.8264)(w' + 1.9937)}$$

$$= 180 \frac{\left(1 + \frac{w'}{31.1452} \right) \left(1 - \frac{w'}{39.2599} \right) \left(1 - \frac{w'}{20} \right)}{w' \left(1 + \frac{w'}{5.8264} \right) \left(1 + \frac{w'}{1.9937} \right)}$$

3) 在w'域设计数字控制器

$$G(s) = \frac{180}{s \left(\frac{1}{6}s + 1 \right) \left(\frac{1}{2}s + 1 \right)}$$

(1) 静态指标

在最大指令速度 $R = 180^\circ / s$ 时，速度稳态误差 $< 1^\circ$

$$k_v = R / e_{ss}^* = 180$$

检查w'域未校正系统的静态指标

$$K_v = \lim_{w' \rightarrow 0} w' G(w') = 180$$

可见满足静态指标要求。

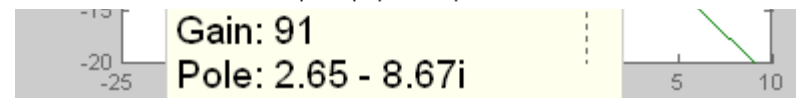
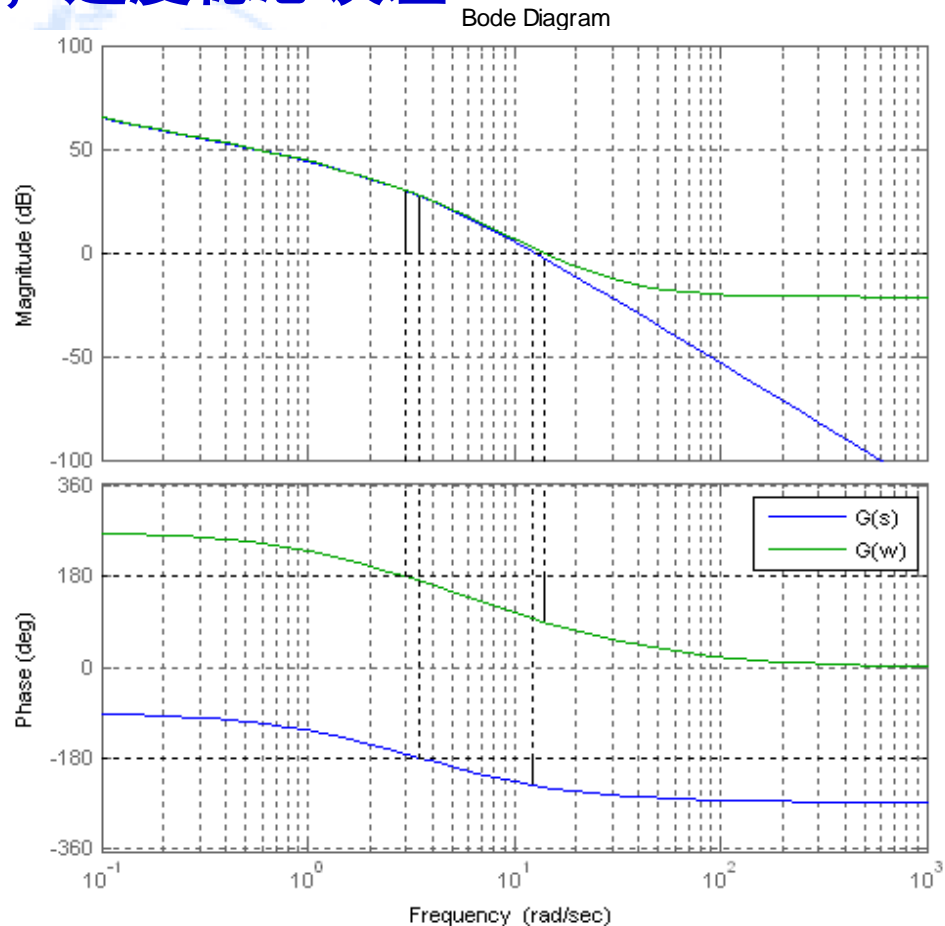
(2) s平面的截止频率 $\omega_c = 3.5 \text{ rad/s}$

w'平面的截止频率

$$\nu_c = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_c T}{2} = \frac{2}{0.1} \tan \frac{3.5 \times 0.1}{2} = 3.54$$

有时为设计简单，可近似认为

$$\nu_c \approx \omega_c$$



(3) 画出未校正系统 $G(w')$ 的波德图

$$\omega_c \geq 3.5 \text{ rad/s}$$

$$\gamma_m \geq 45^\circ$$

该系统需要较大的相位超前校正。

计算未校正系统 $G(w')$

在 $\nu_c \geq 3.5362 \text{ rad/s}$

相角 $\varphi_1(\nu_c) = 169^\circ - 360^\circ = -191^\circ$

幅值 $M_1 = 10^{26.8/20} = 22.0$

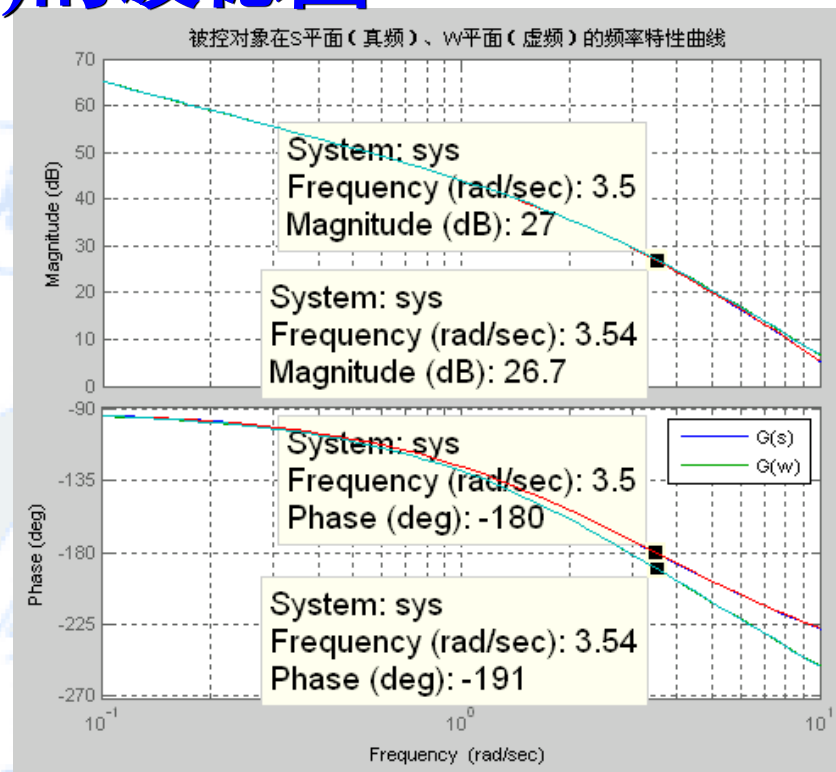
超前校正必须具有的超前相位为

$$\varphi_m(\nu_c) = \gamma - \varphi_1(\omega_c) - 180^\circ = 45^\circ + 191^\circ - 180^\circ = 56^\circ$$

若该控制器还需要滞后校正，则还应考虑滞后校正将在 ν_c

处引起的相位滞后，设为 6° ，则超前相角为

$$\varphi_m(\nu_c) = \gamma - \varphi_1(\omega_c) - 180^\circ + 6^\circ = 62^\circ$$



(4) 设计控制器 $D(w')$

利用最大超前角位于特性曲线的几何中点的性质，根据频域设计方法，可求超前控制器的参数：

$$\alpha = \frac{1 - \sin 62^\circ}{1 + \sin 62^\circ} = 0.0622$$

$$\nu_c \approx 3.5362 \text{ rad} / \text{s} \quad z_1 = \sqrt{\alpha} \cdot \nu_c = 3.5362 \sqrt{0.0622} = 0.8817$$

$$p_1 = z_1 / \alpha = 0.8817 / 0.0622 = 14.1828$$

为保证校正后系统在截止频率处的幅值为1，即

$$M_1 = 22.0 \quad |D(j\nu_c)G(j\nu_c)| = \left| K_c \frac{j\nu_c + z_1}{j\nu_c + p_1} \right| \cdot M_1 = 1$$

求得超前控制器的比例系数为

$$K_c = 0.1823 \longrightarrow D(w') = 0.1823 \frac{w' + 0.8817}{w' + 14.1828}$$

(5) 引进超前控制器后的验算

$$D(w') = 0.1823 \frac{w' + 0.8817}{w' + 14.1828}$$

$$\lim_{w' \rightarrow 0} D(w') = K_c \frac{z_1}{p_1} = 0.1823 \times \frac{0.8817}{14.1828} = 0.0113$$

$$k_v = 180$$

故引进超前校正后的系统的速度误差系数为

$$K_1 = \lim_{w' \rightarrow 0} w' G(w') D(w') = 180 \times 0.0113 = 2.040 < K_v$$

因此还需要在低频段引进滞后校正，以提高稳态精度。

滞后校正的零极点应远离截止频率，以免其相位滞后在截止频率处产生较大的影响。

根据频域设计方法，通常取 $z_2 = v_h / 10 = 0.354$

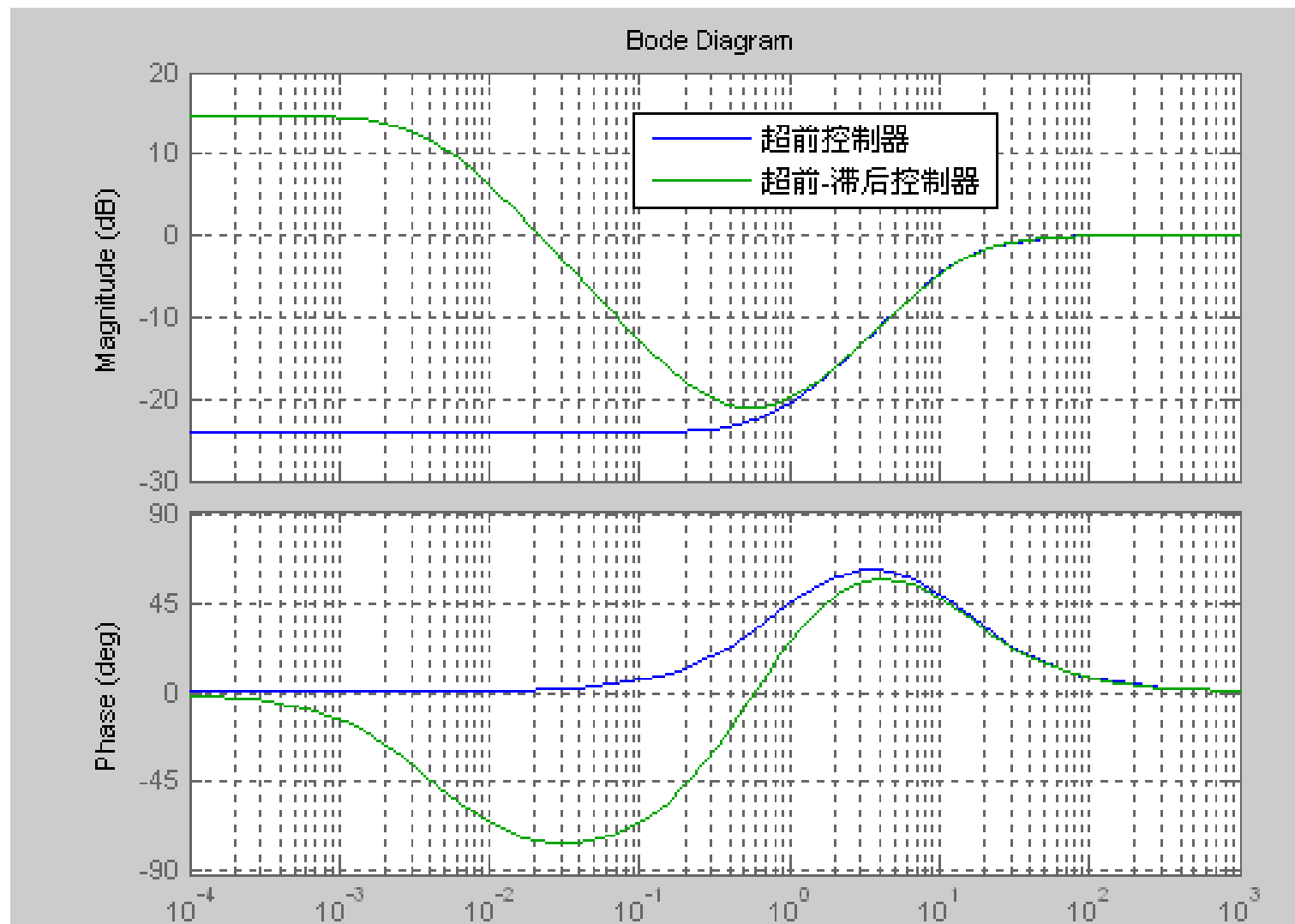
$$\text{则有 } p_2 = K_1 z_2 / K_v = 2.040 \times 0.354 / 180 = 0.0040$$

控制器设计完

$$D(w') = 0.1823 \frac{w' + 0.8817}{w' + 14.1828} \cdot \frac{w' + 0.354}{w' + 0.0040}$$

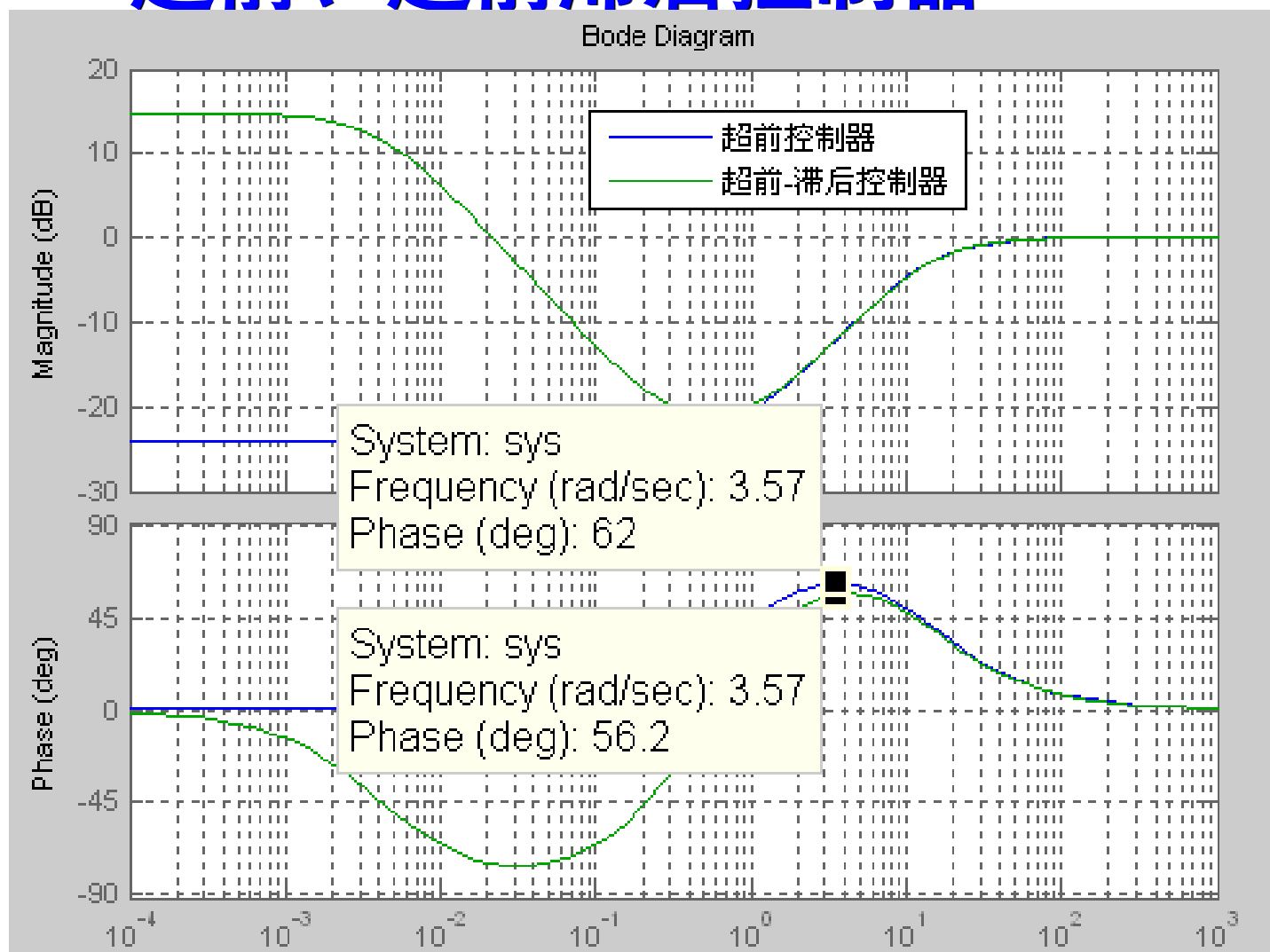
控制器在W平面的频率特性曲线

——超前、超前滞后控制器



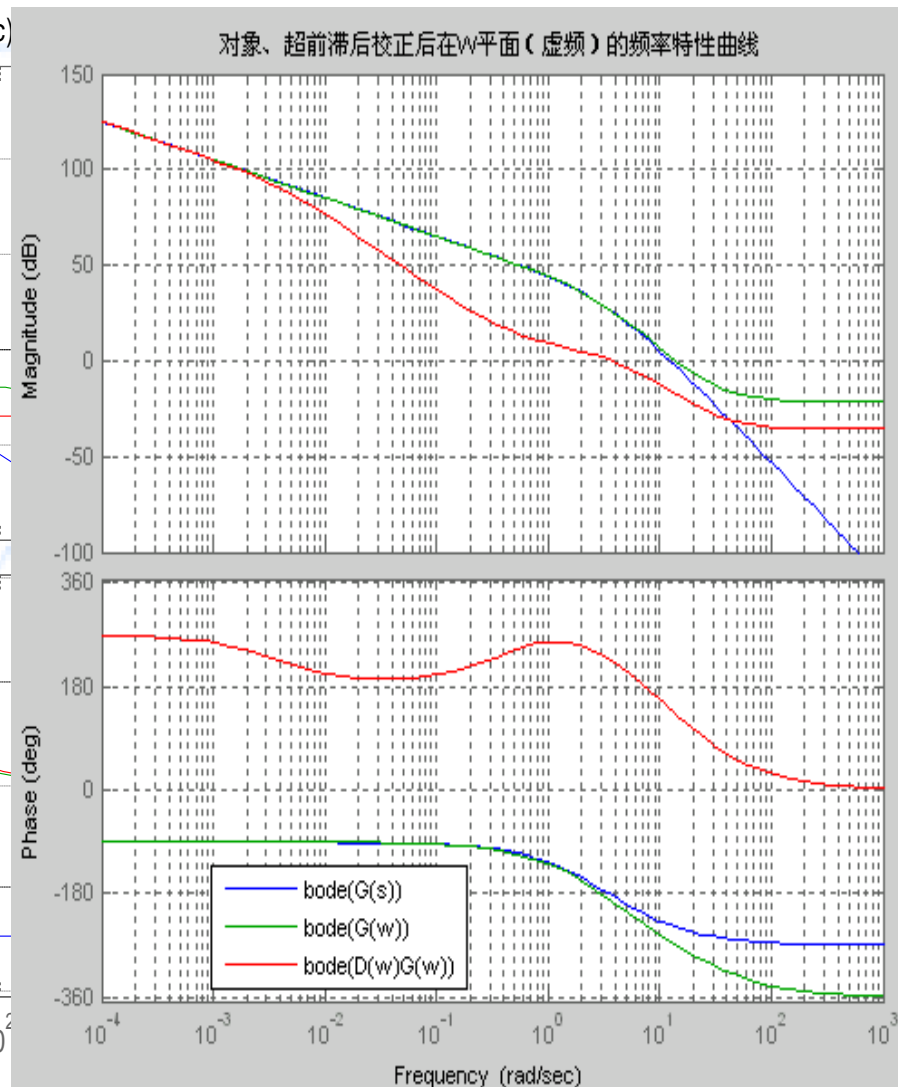
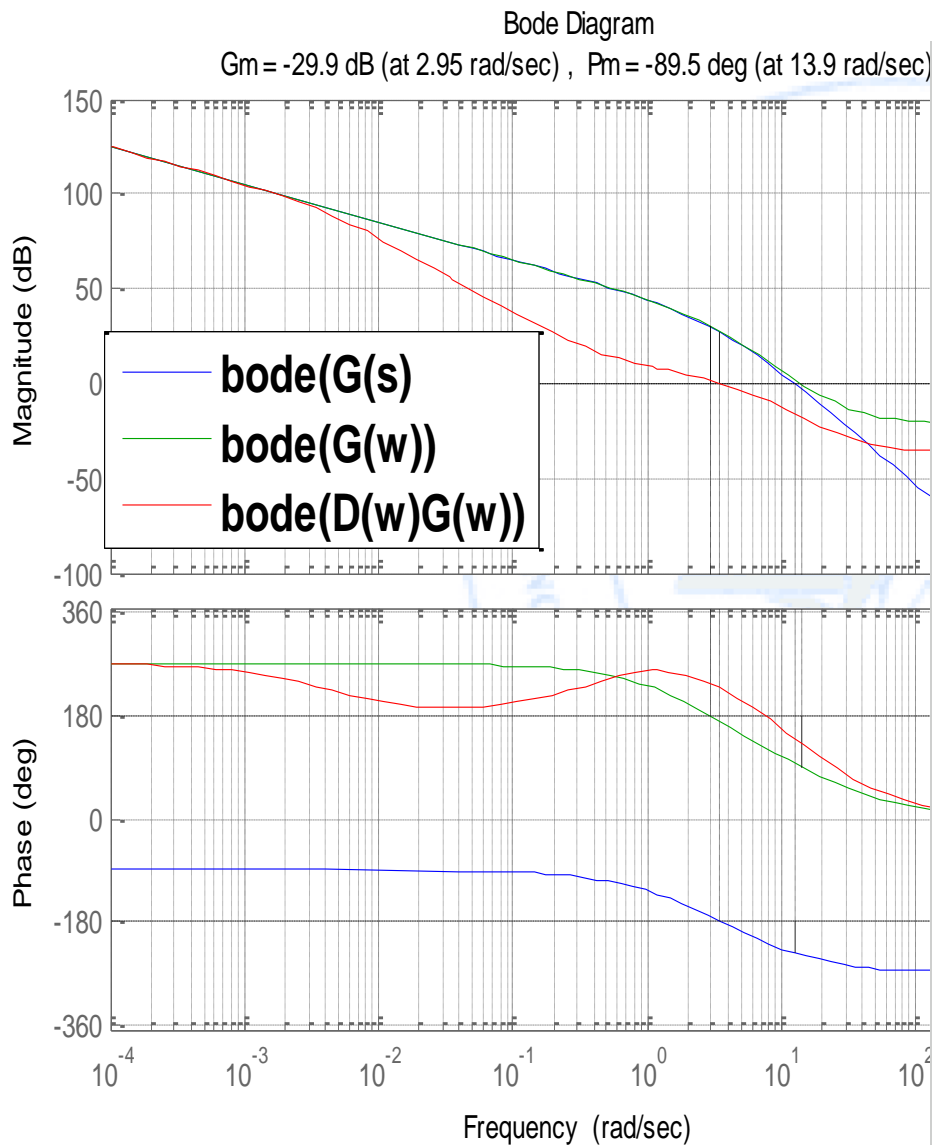
控制器在W平面的频率特性曲线

——超前、超前滞后控制器



由于引进滞后控制器，造成大约6度的相位滞后。

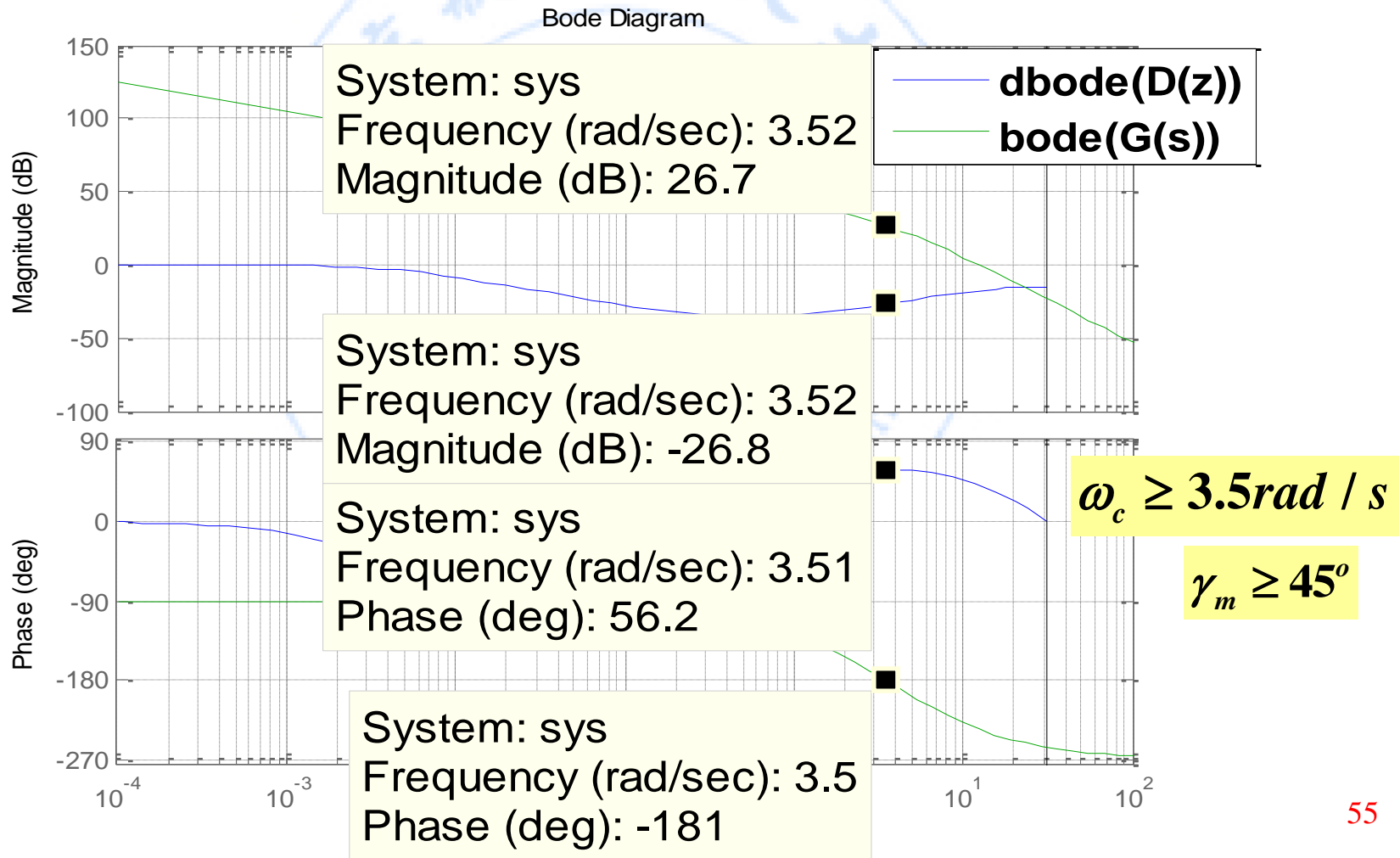
添加控制器后在W平面的频率特性曲线



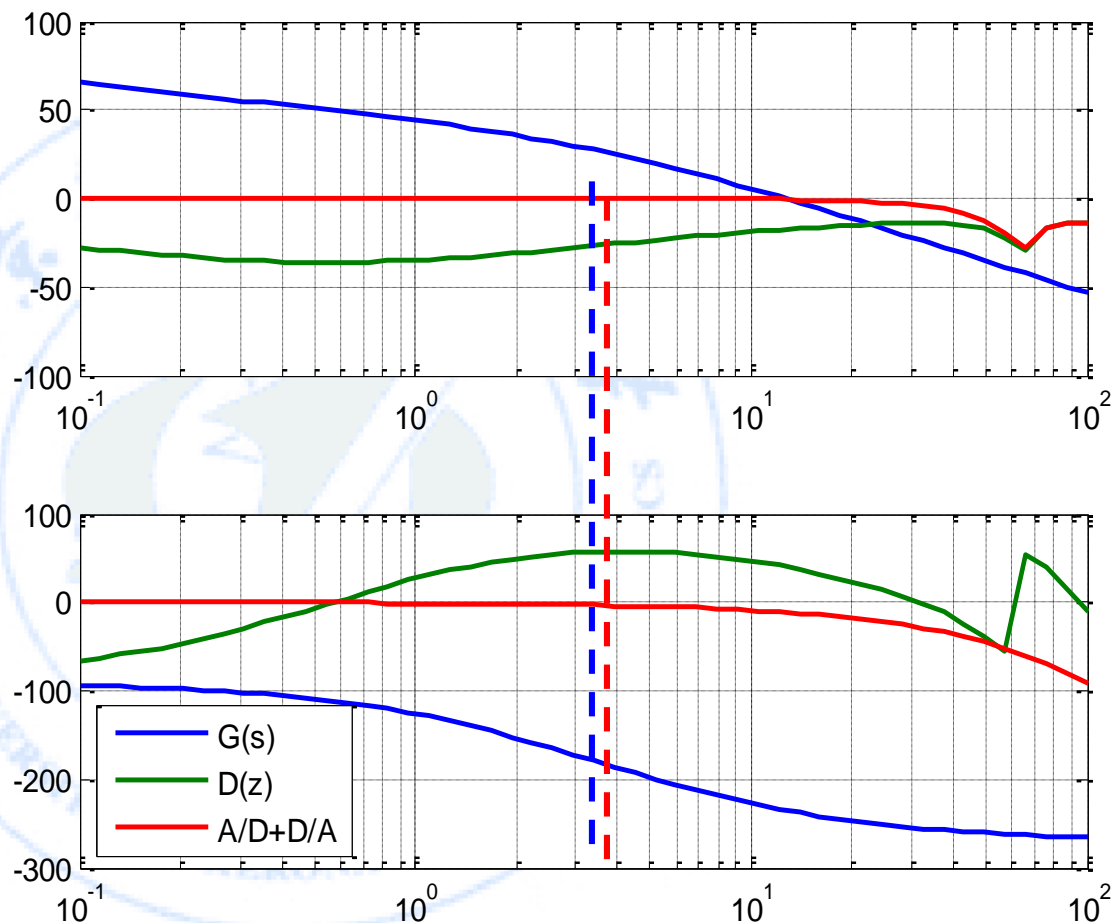
应该回到s平面来检查性能指标

4) 将 $D(w')$ 变换到z平面 $D(w') = 0.1823 \frac{w' + 0.8817}{w' + 14.1828} \cdot \frac{w' + 0.354}{w' + 0.0040}$

$$D(z) = D(w') \Big|_{w' = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.1133z^2 - 0.2131z + 0.1001}{z^2 - 1.1698z + 0.1701}$$



仔细检查各个环节的频率特性曲线



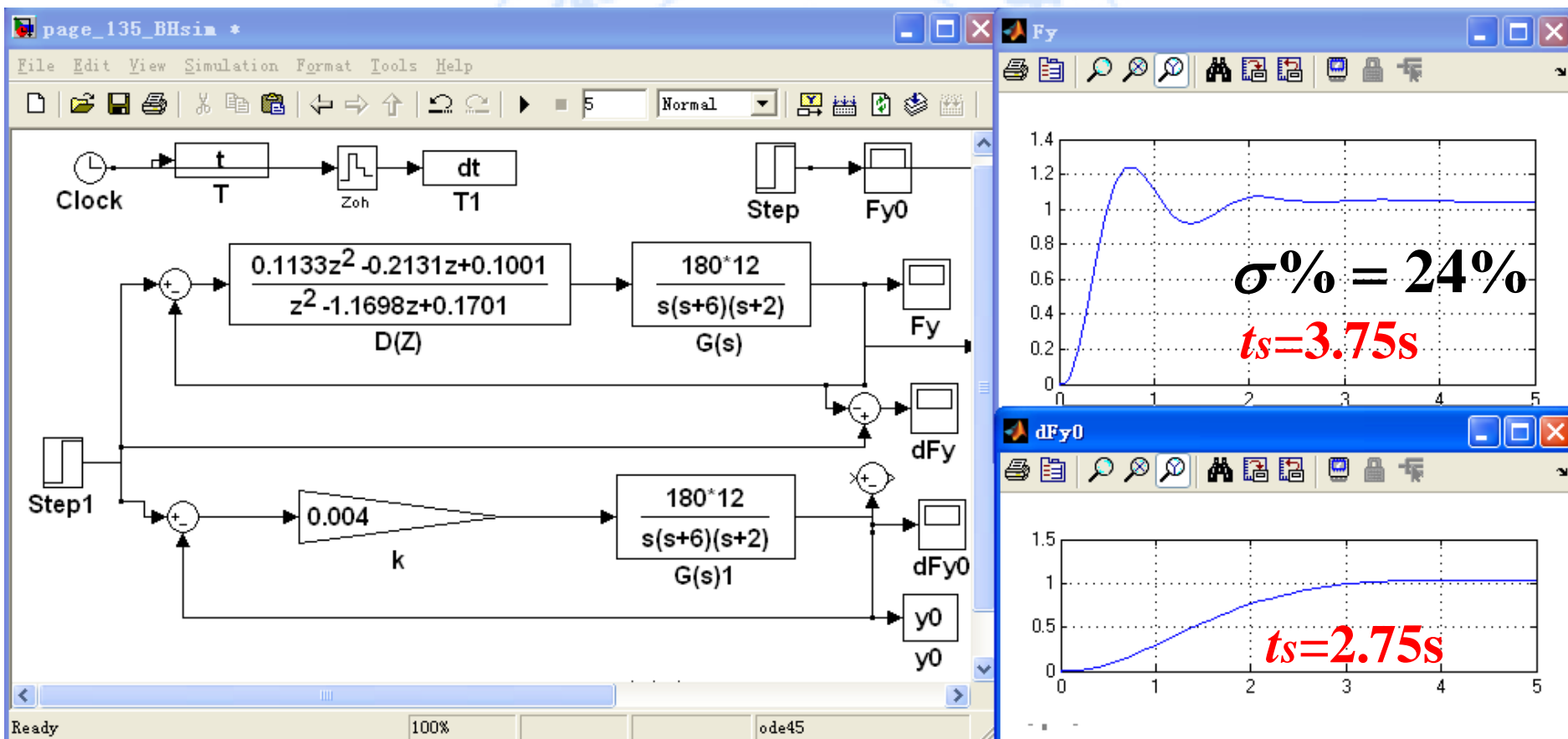
不考虑
A/D+D/A影响

$$\gamma_m = 55.2^\circ (\omega_c = 3.52 \text{ rad / s})$$

$$\gamma_m = 53.6^\circ (\omega_c = 3.56 \text{ rad / s})$$

$$D(z) = D(w') \Big|_{w' = \frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{0.1133z^2 - 0.2131z + 0.1001}{z^2 - 1.1698z + 0.1701}$$

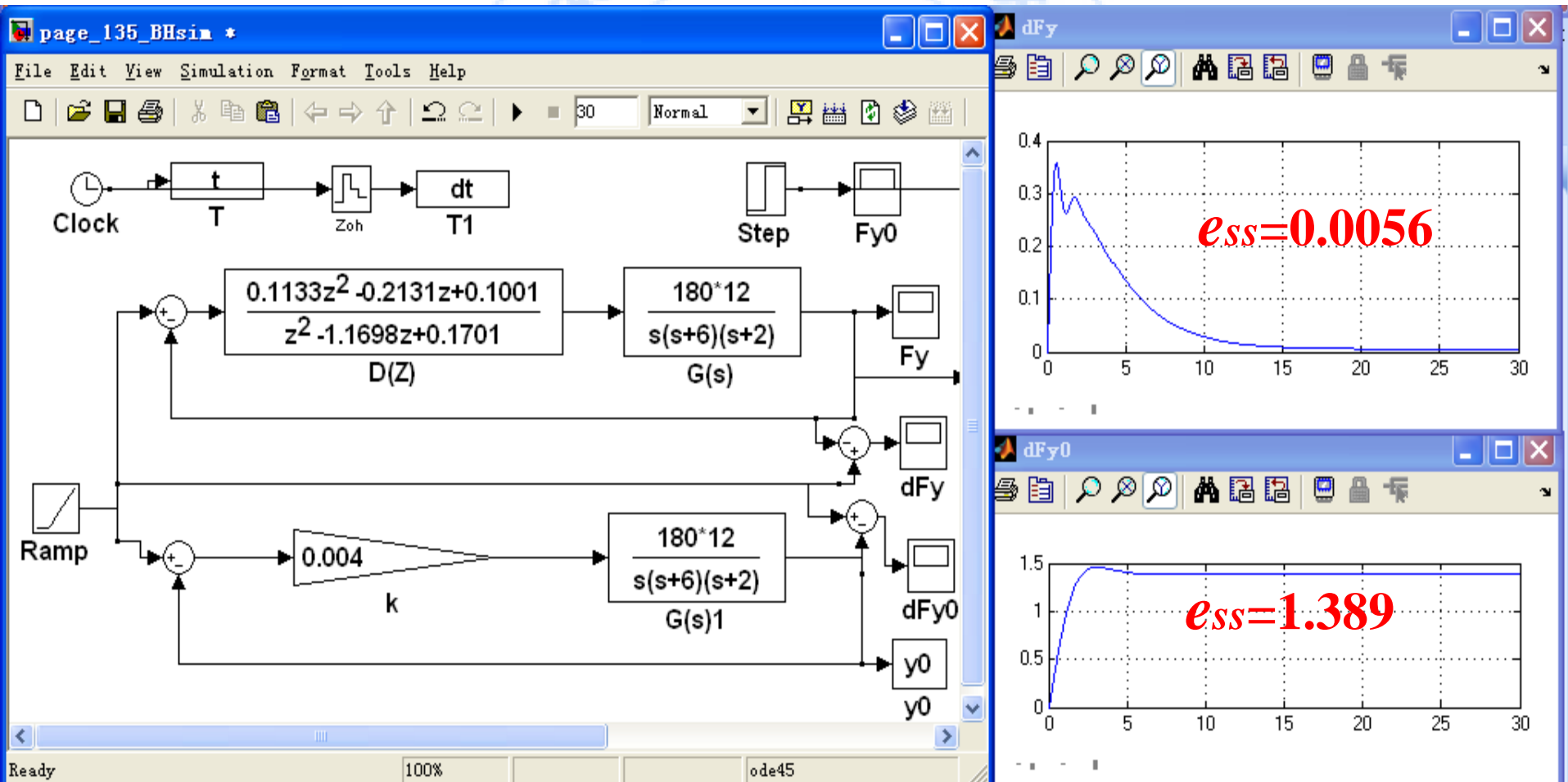
5) 闭环系统仿真，检验其时域性能



检验其静态指标

在最大指令速度 $R = 180^\circ / s$ 时，速度稳态误差 $< 1^\circ$

对应斜坡输入的稳态误差为： $1 / 180 = 0.0056$



第5章小结

离散系统设计方法：

- 1) 离散域设计： $G(s) \rightarrow G(z)$, 离散域设计 $D(z)$
- 2) 离散域根轨迹：特点，根轨迹设计，零极对消
- 3) 离散域频率特性： w' 变换， $T \downarrow$ 时， $w' \rightarrow s$,
频率特性特点：低频段接近，高频段走平
设计方法：与连续域设计方法相同，超前滞后网络
- 4) 都需要检验设计结果：时间响应，频率响应

第5章 内容结束！