

第七章 Fourier 变换

1. 单项选择题

(1) 设 $f(t) = \delta(t - t_0)$, 则 $F[f(t)] = (\quad)$

- (A) 1 (B) 2π (C) $e^{i\omega_0 t}$ (D) $e^{-i\omega_0 t}$

(2) 设 $f(t) = \cos \omega_0 t$, 则 $F[f(t)] = (\quad)$

- (A) $\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ (B) $\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
(C) $\pi i[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ (D) $\pi i[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

(3) 设 $F[f(t)] = F(\omega)$, 则 $F[(t-2)f(t)] = (\quad)$

- (A) $F'(\omega) - 2F(\omega)$ (B) $-F'(\omega) - 2F(\omega)$
(C) $iF'(\omega) - 2F(\omega)$ (D) $-iF'(\omega) - 2F(\omega)$

(4) 设 $F[f(t)] = F(\omega)$, 则 $F[f(1-t)] = (\quad)$

- (A) $F(\omega)e^{-i\omega}$ (B) $F(-\omega)e^{-i\omega}$
(C) $F(\omega)e^{i\omega}$ (D) $F(-\omega)e^{i\omega}$

(5) 设 $f(t) = \delta(2-t) + e^{i\omega_0 t}$, 则 $F[f(t)] = (\quad)$

- (A) $e^{-2\omega i} + 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ (B) $e^{2\omega i} + 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
(C) $e^{-2\omega i} + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$ (D) $e^{2\omega i} + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$

(6) 下列变换中不正确的是 ()

- (A) $F[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$ (B) $F[1] = 2\pi\delta(\omega)$

- (C) $F[2\delta(t)] = 1$ (D) $F[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{i\omega}$

(7) 设 $F[f(t)] = F(\omega)$, 假如当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $g(t) = \int_{-\infty}^t f(t)dt \rightarrow 0$, 则 $F[\int_{-\infty}^{2t} f(t)dt] = (\quad)$

$$(A) \frac{1}{2i\omega} F\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (B) \frac{1}{i\omega} F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$(C) \frac{1}{2i\omega} F(\omega) \quad (D) \frac{1}{i\omega} F(\omega)$$

(8) 设 $f(t) = te^{i\omega_0 t}$, 则 $\mathbf{F}[f(t)] = (\quad)$

$$(A) 2\pi\delta'(\omega - \omega_0) \quad (B) 2\pi\delta'(\omega + \omega_0)$$

$$(C) 2\pi i\delta'(\omega + \omega_0) \quad (D) 2\pi i\delta'(\omega - \omega_0)$$

(9) 函数 $f(t)$ 的振幅频谱 $|F(\omega)|$ 与相位频谱 $\varphi(\omega)$ 具有奇偶性其中 (\quad)

(A) $|F(\omega)|$ 为奇函数, $\varphi(\omega)$ 为偶函数

(B) $|F(\omega)|$ 为偶函数, $\varphi(\omega)$ 为奇函数

(C) $|F(\omega)|$ 与 $\varphi(\omega)$ 均为偶函数

(D) $|F(\omega)|$ 与 $\varphi(\omega)$ 均为奇函数

(10) 设 $\mathbf{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则下列公式中不正确的是 (\quad)

$$(A) \mathbf{F}[f(t) * f(t)] = (F(\omega))^2$$

$$(B) \mathbf{F}[(f(t))^2] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F(\omega)$$

$$(C) \mathbf{F}[f(t)e^{\pm i\omega_0 t}] = F(\omega \pm \omega_0)$$

$$(D) \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

2. 填空题

(1) 设 $a > 0$, $f(t) = \begin{cases} e^{\alpha}, & t < 0 \\ e^{-\alpha}, & t > 0 \end{cases}$, 则函数 $f(t)$ 的 Fourier 为 _____.

(2) 设 $f(t) = \sin^2 t$, 则 $\mathbf{F}[f(t)] =$ _____.

(3) 设 $\mathbf{F}[f(t)] = \frac{3}{1+\omega^2}$, 则 $f(t) =$ _____.

(4) 设 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$, 则 $u(t) * f(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 积分方程 $\int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = \begin{cases} 1, & 0 < \omega \leq 1 \\ 0, & \omega > 1 \end{cases}$ 的解 $f(t) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3 求函数 $f(t) = te^{-t^2}$ 的 *Fourier* 变换, 并推证

$$\int_0^{+\infty} \omega e^{-\frac{1}{4\omega^2}} \sin \omega t d\omega = 2\sqrt{\pi} te^{-t^2}.$$

一、 (1) D (2) A (3) C (4) B (5) A

(6) C (7) B (8) D (9) B (10) C

二、 (1) $f(t) = \frac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega$

(2) $\pi \delta(\omega) - \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + 2) + \delta(\omega - 2)]$

(3) $\frac{3}{2} e^{-|t|}$ (4) $(1 - e^{-t})u(t)$ (5) $\frac{2(1 - \cos t)}{\pi t}$

3. 由钟型脉冲函数的Fourier变换知 $F[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$. 再由微分性质可得

$$F[te^{-t^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \omega e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

注意到 $f(t)$ 为奇函数 $f[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f(t)] e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \omega e^{i\omega t} d\omega$

$$= \frac{1}{4i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{-\frac{\omega^2}{4}} \cdot i \sin \omega t d\omega$$

即 $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{-\frac{\omega^2}{4}} \cdot i \sin \omega t d\omega = 2\sqrt{\pi} f(t) = 2\sqrt{\pi} t e^{-t^2}.$