



# 应用离散数学----前言

郑征

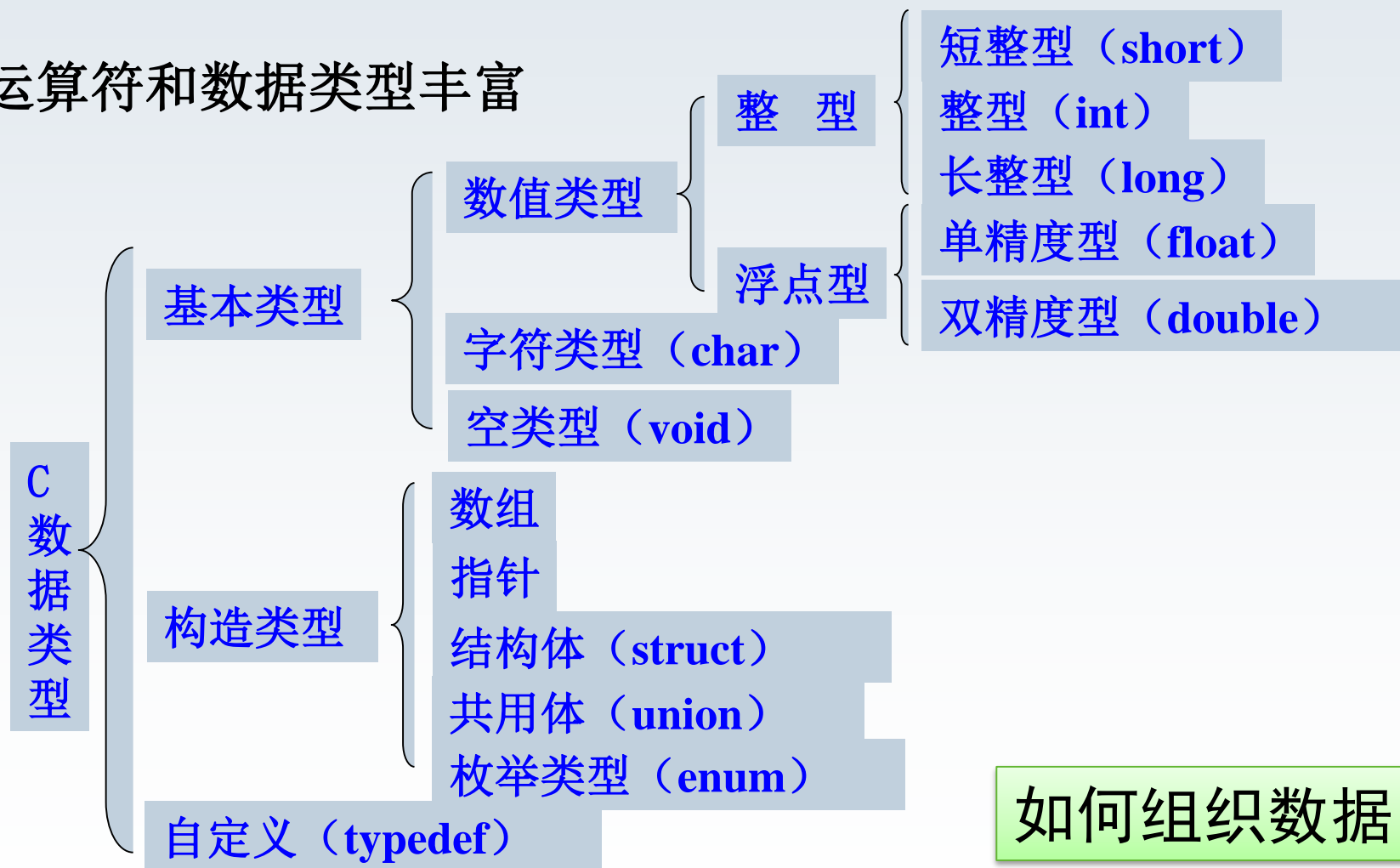
[zhengz@buaa.edu.cn](mailto:zhengz@buaa.edu.cn); 新主楼D635

北京航空航天大学  
可信智能研究室

2018年9月11日星期二

# C语言课程主要内容(1)

## ➤ 运算符和数据类型丰富



如何组织数据

# C语言课程主要内容(2)

- 三种程序结构
  - 顺序
  - 选择
  - 循环
- 函数

如何控制数据

# 问题

- C语言学好了就可以编制软件了么？
- 计算机求解问题的基本模式：

实际问题  $\Rightarrow$  问题计算机化  $\Rightarrow$  **数学建模**  $\Rightarrow$  算法  
 $\Rightarrow$  程序  $\Rightarrow$  测试  $\Rightarrow$  验证

# 先修课程与后续课程

- 先修课程：中学数学，部分高等数学
- 后续课程：数据结构、编译原理、算法分析与设计、人工智能、数据库原理等

# 计算机学科的课程系列

C语言

离散数学

数据结构和算法  
里的数学基础

数据结构

算法

数据库

程序就是用算法处理以一定数据结构存储的数据。

离散数学是数学的理论知识,即计算机可以采用的解题方法,也即算法和数据结构的数学基础。

# 主要内容

一. 自动化专业所面临的挑战

二. 离散数学概述

三. 开设离散数学的必要性

四. 课程主要内容

# 一. 自动化专业所面临的挑战

爱因斯坦：兴趣是最好的老师。

请问：你们认为未来自动化学科的发展方向是什么？  
你们研究生还会选择这个方向么？



# 未来自动化学科的若干关键性应用

新的控制问题包括空间管理、自动高速公路与交通管理以及未来战场的指令与控制。现有理论与工具不足以对付此类控制问题。

航空与运输

信息与网络

此领域的控制可粗略分为网络的控制与通过网络的控制。

机器人

关键应用

智能机器

相对于人类，现有机器人所从事的动作极其简单。新型的机器人的发展有赖于计算、通信与传感技术的集成化。

生物

医学

心血管的反馈控制、肌肉控制与运动、人口动力学与疾病、图像指导下的手术与治疗

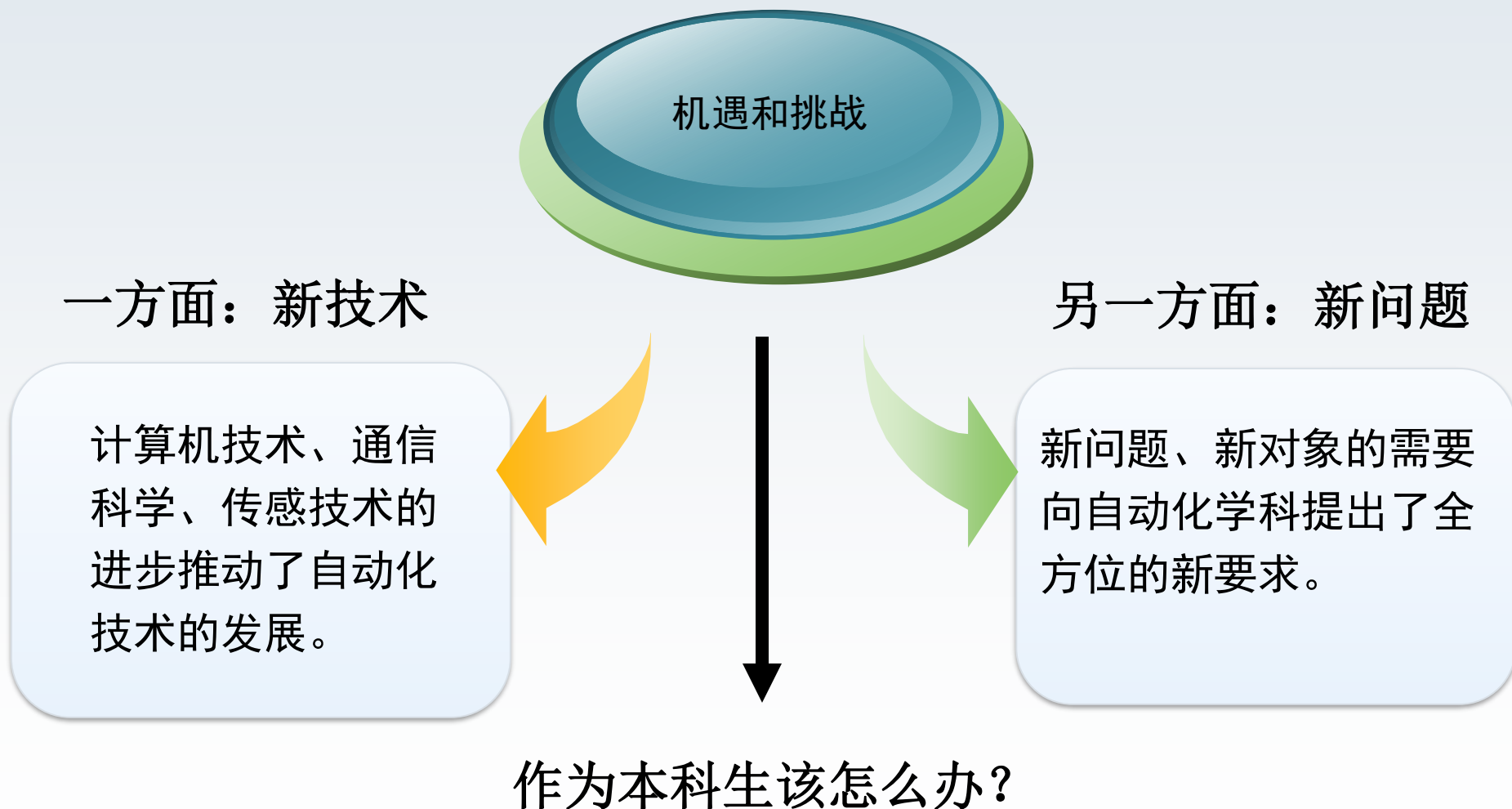
新型机器人包括有轮或有腿的机器，无人驾驶的车辆，及医学器械。

基因校正、荷尔蒙、免疫机制。

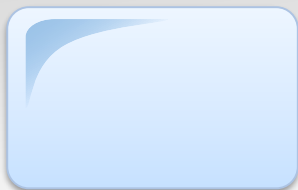
问题更加综合、复杂

需要依赖于新的技术

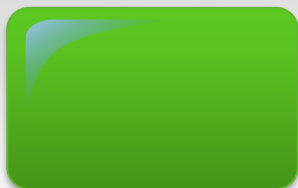
# 自动化专业所面临的挑战



# 自动化专业所面临的挑战



拓宽我们的领域，融合新的技术，交叉其他新兴科学。



在学有余力的前提下，参加实践活动



撰写研究论文

## 二. 开设离散数学课程的必要性

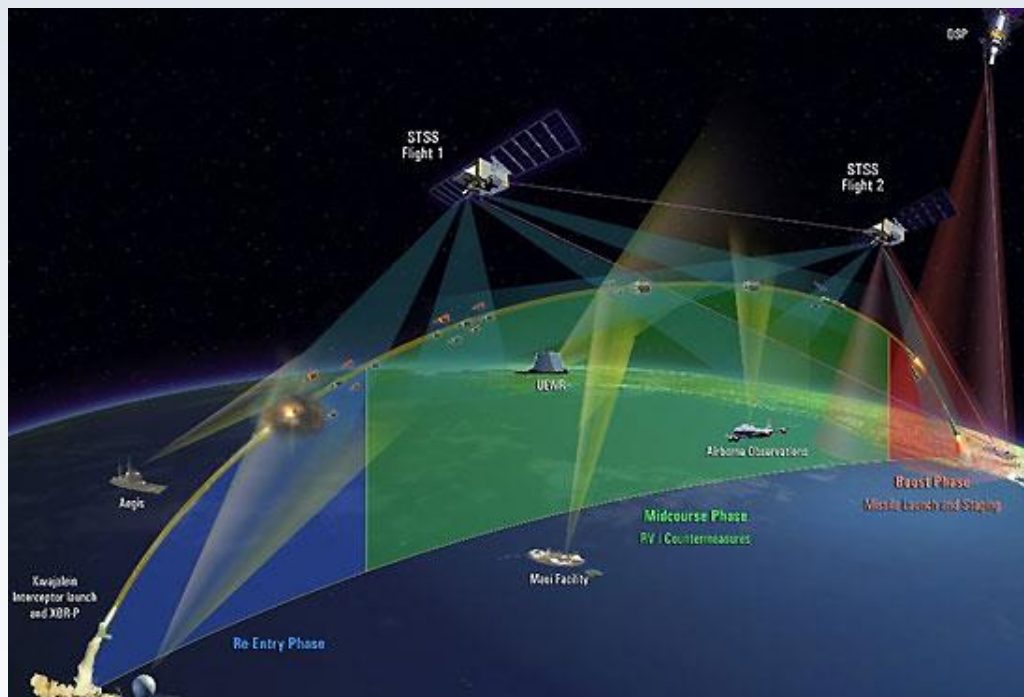
# 必要性



# 1. 专业发展的需要

- 1930s~1950s: 经典控制理论与技术
- 1960s~1970s: 现代控制理论与技术
- 1980s~1990s: 离散事件系统、混杂系统理论与技术,
- 2000s~至今: **Internet**, **天空地一体化**, **多学科融合**, 控制论正处于一个新的发展阶段

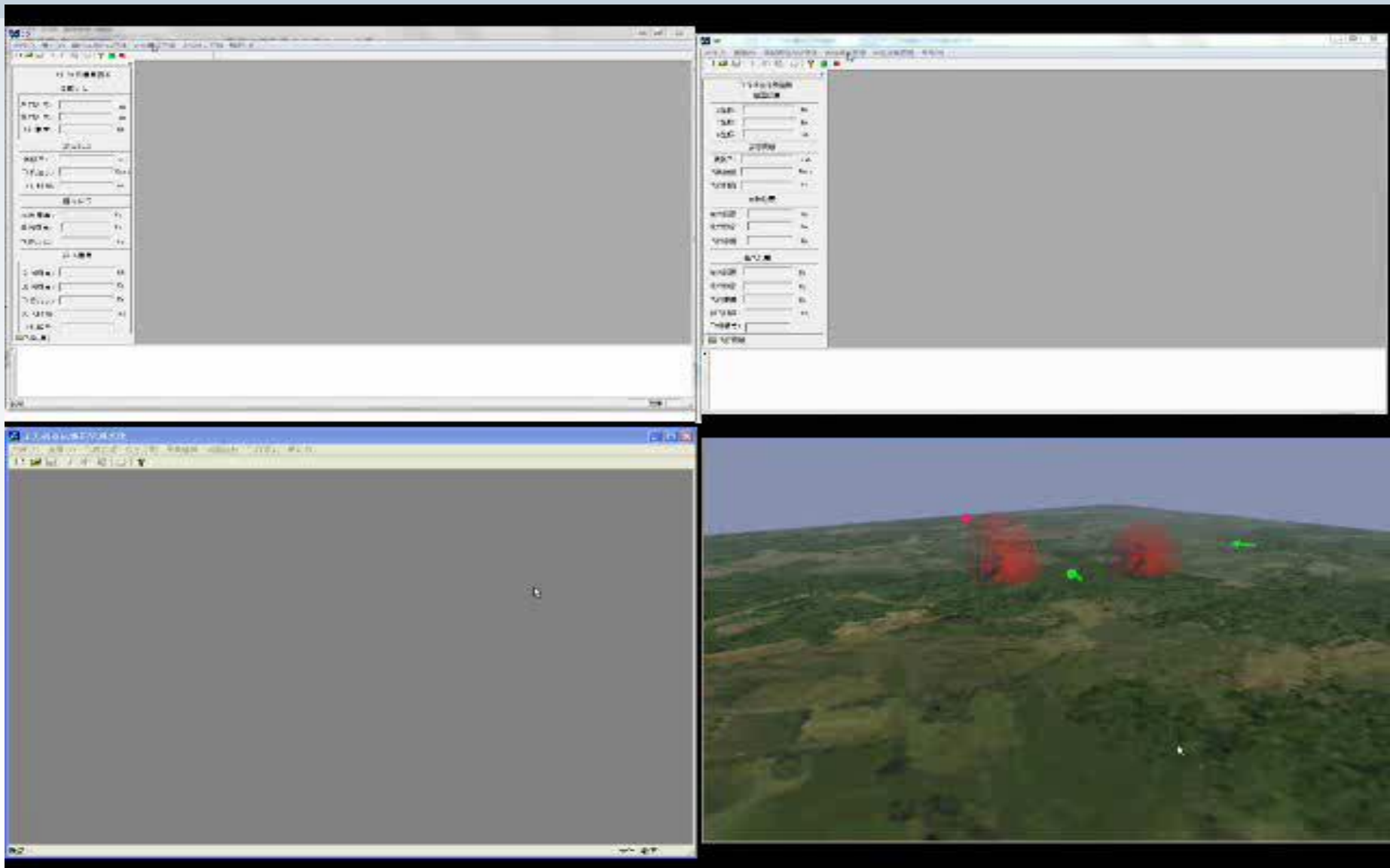
# 1. 专业发展的需要



天空地一体化：美国天基红外系统示意图

北航的目标：建设空天信融合特色的世界一流大学

# 路径规划-在图中搜索一条路径





## 2. 使用计算机的需要

- 离散数学

- 是现代数学的一个重要分支，是计算机科学基础理论的核心课程，是整个计算机学科教学体系中十分重要的环节，因此也有人将其称为“计算机数学”。
- 是许多计算机专业基础课程，如数据结构、操作系统、编译原理、数据库原理和人工智能、形式语言及自动机、数字逻辑的必备基础。
- 对培养学生抽象思维能力和逻辑推理能力有着重要的作用。

## 2. 使用计算机的需要

- 离散数学与计算机

- 计算机系统从本质上说是一种离散性的结构，它的许多性质可以在有限数学系统的框架中来理解，从中选出一些必要而且是基本的主干论题称为离散数学。

## 2. 使用计算机的需要

- 计算机求解问题的基本模式:

实际问题  $\Rightarrow$  **数学建模**  $\Rightarrow$  算法

Matlab(Simulink), Python, VC, C#, Java, Asp, Jsp.....

包含离散特性

采用离散模型，离散化。

提高效率的手段：树，图。。

需要用到离散数学的相关知识

## 2. 使用计算机的需要

- 电传操纵系统：美F16首次完全依赖计算机控制自主着陆（2008年12月11日报道）



## 2. 使用计算机的需要

### – Matlab



## 2. 使用计算机的需要

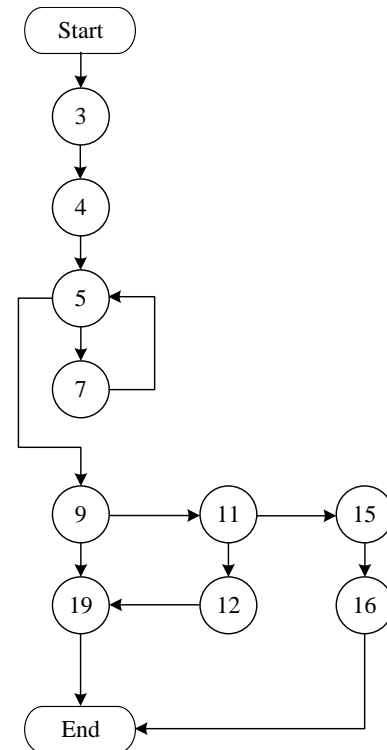
- 计算机已成为先进自动化系统不可缺少的工具和组成部分



# 例子：软件开发—流程

程序例子：

```
1  double power (double x, int n)
2  {
3      int i;
4      int rv = 1;
5      for (i=0;i<abs(n);i++)
6      {
7          rv = rv * x;
8      }
9      if (n<0)
10     {
11         if (x!=0)
12             rv = 1/rv;
13         else
14         {
15             printf ("Error input.\n");
16             return 0;
17         }
18     }
19     return rv;
20 }
```



# 例子：软件调试—数据表

每一列表示每个执行语句的信息（例如）

每一行表示一次的运行

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_{m-1}$	$b_m$	运行结果
$t_1$	1	0	1	...	0	1	正确
$t_2$	0	0	1	...	1	1	正确
$t_3$	1	1	1	...	0	0	正确
...	...	...	...	...	...	...	...
$t_k$	1	0	0	...	0	0	正确
$t_{k+1}$	0	1	1	...	1	0	错误
$t_{k+2}$	1	1	0	...	1	1	错误
...	...	...	...	...	...	...	...
$t_n$	1	1	0	...	0	1	错误

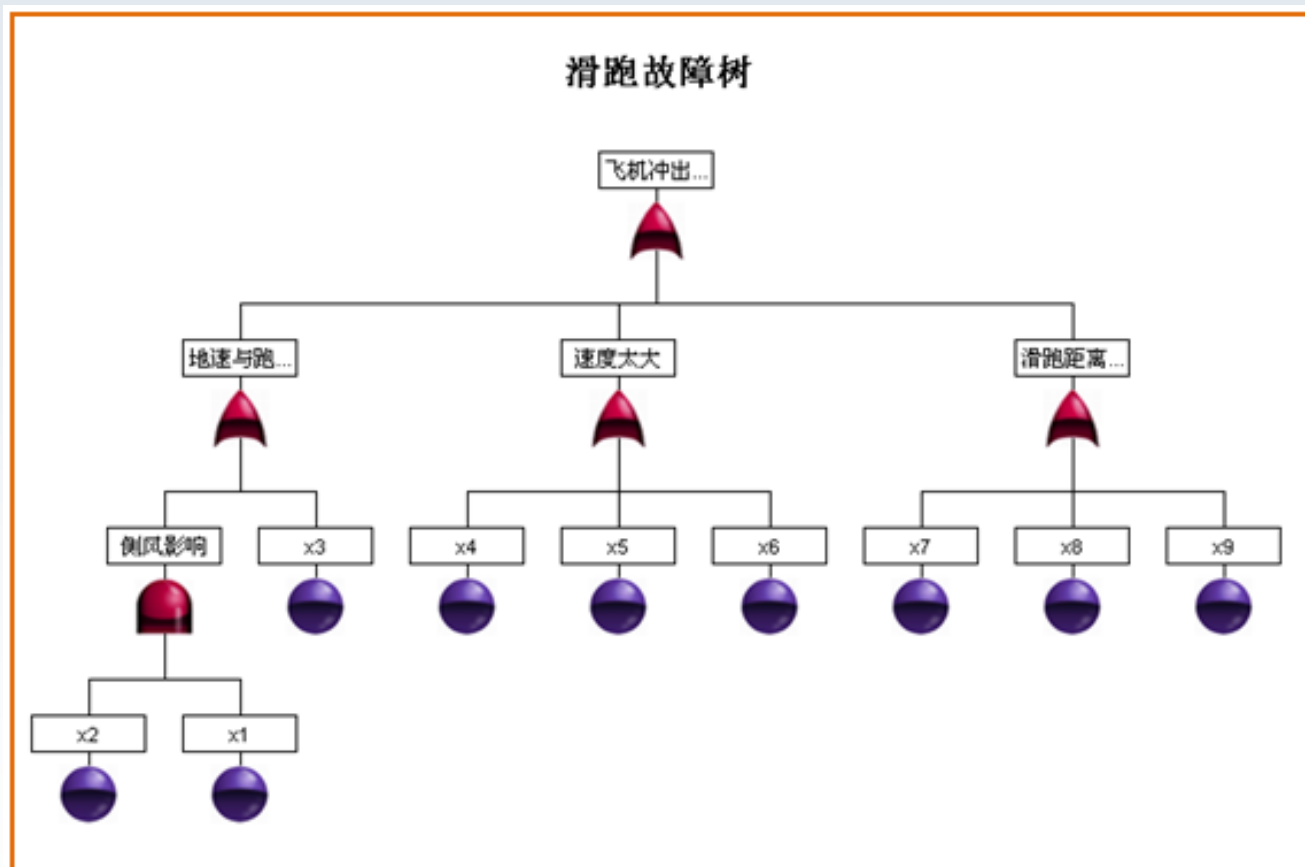
测试覆盖信息

表就是一个二元关系



# 例子：软件可靠性分析—FTA系统

生成FTA报告



为什么可以用树的方式来进行可靠性分析，树的特点是什么？

# 三. 离散数学概述

# 离散数学概述

- 离散数学

- 是研究**离散数量关系和离散结构**数学模型的数学分支的统称；
- 是数学的**几个分支**的总称，研究基于离散空间而不是连续的数学结构。与光滑变化的实数不同，离散数学的研究对象——例如整数、图和数学逻辑中的命题——不是光滑变化的，而是拥有不等、分立的值。。

# 离散数学与连续数学

- 离散数学是一门相对于“连续数学continuous mathematics”而命名的数学分支。
- 连续数学：
  - 学习过数学分析的同学都知道，这门学科以函数为主要研究对象的，那里所讨论的函数是连续变量之间的关系，变量可在一个确定的范围内连续地变化（取值）。（连续数学：微积分，数学分析，复变函数）
- 离散数学：
  - 是讨论离散变量discrete variable 及其关系relation 的数学，一般而言，离散变量取值于一个有限集合或可列元素的集合。

# 连续vs离散



离散的印象：

枯藤老树昏鸦，小桥流水人家，古道西风瘦马，  
夕阳西下，断肠人在天涯。

——《天净沙·秋思》  
元·马致远

连续的印象：

剪不断，理还乱，  
是离愁……恰似一江春  
水向东流。

——南唐·李煜



# 离散数学与连续数学

- 现实世界的许多问题，固然可以用连续数学作为工具，诸如用函数来描述，但大量的实际问题需要离散数学的工具来写照。
  - 例如在计算机系统（包括系统硬件和软件）里，没有一个硬件系统或子系统内的各部件之间均存在一种连续的关系；
  - 对一个软件系统来说也存在类似情况。他们随时间按照一定规律作各种非连续的变化。
  - 因此，必须借助于离散数学这个工具来描述它们。
  - 其它的例子： 图书检索系统、银行账户管理系统、教学管理数据库系统

- 离散数学包括：

- 数理逻辑
- 集合论
- 图，树
- 代数系统（群、环、域、...）
- 组合数学
- 初等数论
- 古典概率论
- 可计算性
- 。 。 。

## 四. 课程主要内容



# 课程主要内容

让机器“正确思考”的数学基础

## 第二篇 数理逻辑

第二章 命题逻辑

第三章 一阶逻辑

## 第四篇 组合数学

第十章 组合技术基础  
(根据课程进度选讲)

离散数学的基础

## 第一篇 集合论

第一章 经典集合论

第四章 关 系

第五章 函 数

## 第三篇 图 论

第六章 图

第七章 树及其应用

- 计算机高效计算的数学基础
- 大部分数据结构的基础

# 课程相关

- 独立主题Presentation(20%+10%)， 程序编制(20%+10%)， 平时成绩（30%）， 期末开卷理论考试（30%-20%）
- 教材：
  - 《离散数学》（第三版）屈婉玲、耿素云、张立昂 编著 清华大学出版社 2008
- 主要参考书：
  - Bernard Kolman, Robert C. Busby and Sharon Cutler Ross, Discrete mathematical Structure, Prentice Hall, 2001;
  - 倪子伟等, 《离散数学》, 科学出版社, 2002年1月;
  - 耿素云, 《集合论与图论》, 北京大学出版社, 1998;
  - 屈婉玲, 《代数结构与组合数学》, 北京大学出版社, 1998。



# 趣味数学

- 土耳其商人和帽子的故事

- 一个土耳其商人，想找一个十分聪明的助手协助他经商。有两个人前来应聘，这个商人为了试一试哪一个聪明些，就把两个人带进一间漆黑的屋子里，他打开点灯后：“这张桌子上有五顶帽子，两顶是红色，三顶是黑色的。现在，我把灯关掉，而且把帽子摆的位置弄乱，然后我们三个人每人摸一顶帽子带在头上，同时商人把剩余的帽子藏起来。打开灯后，两个应试者看到商人头上带着一顶红帽子，过了一会儿一个人就喊道：“我带的是一顶黑帽子。”

# 趣味数学

## • 土耳其商人和帽子的故事

设 $P1$ 表示“猜对的人戴红帽子”； $P2$ 表示“猜对的人戴黑帽子”；

$Q1$ 表示“另一个人戴红帽子”； $Q2$ 表示“另一个人戴黑帽子”； $R1$ 表示“商人戴红帽子”。

现在知道 $R1$ 为真，又知道另一个人没有作出断定，即既不能断定 $Q1$ 为真，也不能断定 $Q2$ 为真。

根据题设条件，可得如下公式：

$R1 \wedge P1 \rightarrow Q2$ ：如果商人和猜对的人戴的都是红帽子，那么另一个戴的就是黑帽子，因为红帽子只有两项。

$R1 \wedge Q1 \rightarrow P2$ ：如果商人和另一个戴的都是红帽子，那么猜对的人戴的就是黑帽子。

$\neg P1 \rightarrow P2$ ：如果猜对的人戴的不是红帽子，那么他戴的就是黑帽子。

$\neg Q1 \rightarrow Q2$ ：如果另一个人戴的不是红帽子，那么他戴的就是黑帽子。

推演步骤如下：

设 $P1$

(1)  $P1$ （根据假设）； (2)  $R1$ （根据题设）

(3)  $R1 \wedge P1$ （合取构成）； (4)  $R1 \wedge P1 \rightarrow Q2$ （根据题设）

(5)  $Q2$ （(3) (4) 分离）。

这就是说，“另一个人戴黑帽子”这个判定是必然可以作出的，但是这与题设条件（即“另一个没有作出判定”）相矛盾，因此， $P1$ 为假，即 $\neg P1$ 为真，故可得：

(6)  $\neg P1$ ； (7)  $\neg P1 \rightarrow P2$ （根据题设）；

(8)  $P2$ （(6) (7) 分离）。

这就是说，“猜对的人戴着黑帽子”是真的，所以猜对的人肯定的说：“我戴的是黑帽子”。

# 趣味数学

- 理发师的头谁来剃

- 在一个小镇上，有一个理发师公开宣布：他给而且只给小镇上所有不给自己理发的人理发，现在要问：这个理发师的头由谁来剃。



# 趣味数学

- 理发师的头谁来剃

如果理发师的头由别人给他理，即理发师自己不给自己理发，那么按规定这位理发师的头应该由自己理。如果理发师的头由他自己理，按规定他只给那些不给自己理发的人理发，那么理发师的头不能由他自己理，即理发师的头应该由别人来理。这就产生了矛盾：理发师的头既不能由别人理，也不能由他自己理，所以这位理发师的规定是一个悖论。

# 趣味数学

## • 聪明的囚徒

古希腊有个国王，对处死囚徒的方法作了两种规定：一种是砍头，一种是绞刑。并且他自恃聪明的做出一种规定：囚徒可以说一句话，并且这句话是马上可以验证其真假。如果囚徒说的是真话，那么处以绞刑，如果囚徒说的是假话，那么处以砍头。许多囚徒或者是因为说了假话而被砍头或者因为说了真话而被处以绞刑。

有一位极其聪明的囚徒，当轮到 he 来选择处死方法时，他说出一句巧妙的话，结果使这个国王按照哪种方法处死他，都违背自己的决定，只得将他放了。

试问：这囚徒说的是句什么话？



# 趣味数学

- 聪明的囚徒

聪明的囚徒所说的话，应使国王无论怎么处置他都带来矛盾，这句话就是“国王决定砍我的头”。如果这和国王规定一致，是说真话，因而按国王决定的处死方法，讲真话应处以绞刑，这样就造成了国王的规定（砍头）同国王决定的处死方法相矛盾。如果这和国王的规定不一致，是说的假话，因而按照国王决定的处死方法，讲假话予以砍头，这样又造成了国王的规定（绞刑）同国王决定的处死方法相矛盾。国王处于进退维谷的处境，只好免于处死，将囚徒放掉。



# 趣味数学

- 考试日程表的安排

- 考虑七天安排七门考试的问题，要使同一教员举行的任何两门考试不要安排在接连的两天内进行。假如每个教员最多举行四次考试，证明安排这样的考试日程表总是可能的。

# 趣味数学

- 考试日程表的安排

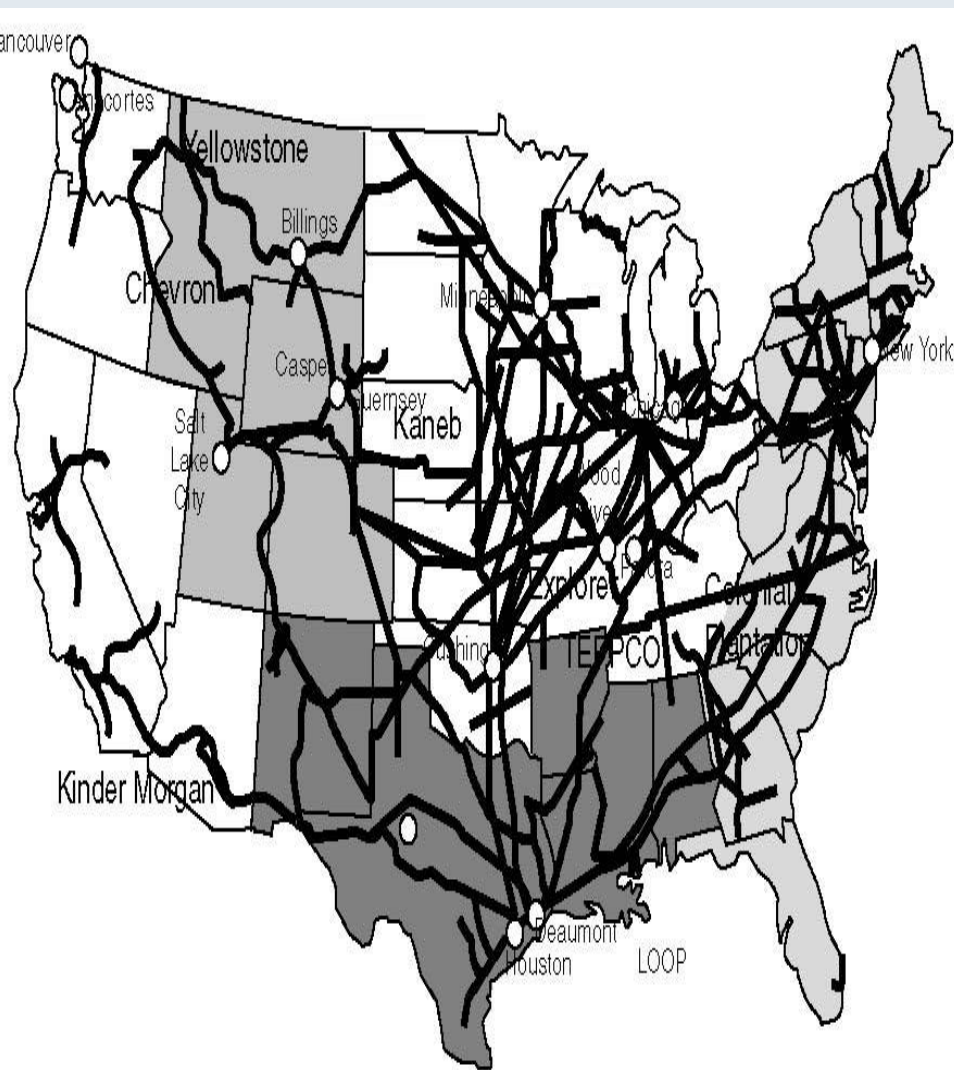
- 如果将七次（或七天）考试作为七个顶点，做一个图 $G$ ，若两个顶点对应的考试是由不同的教员举行的，则这两个顶点连一条边，实际上就是判定图 $G$ 是否有哈密尔顿通路问题。

# 几个启发式问题（一）



- \* **图像识别与处理：**
  - \* 计算机中的图像是如何存储的？
  - \* 如何在系统中对图像进行压缩、通信？

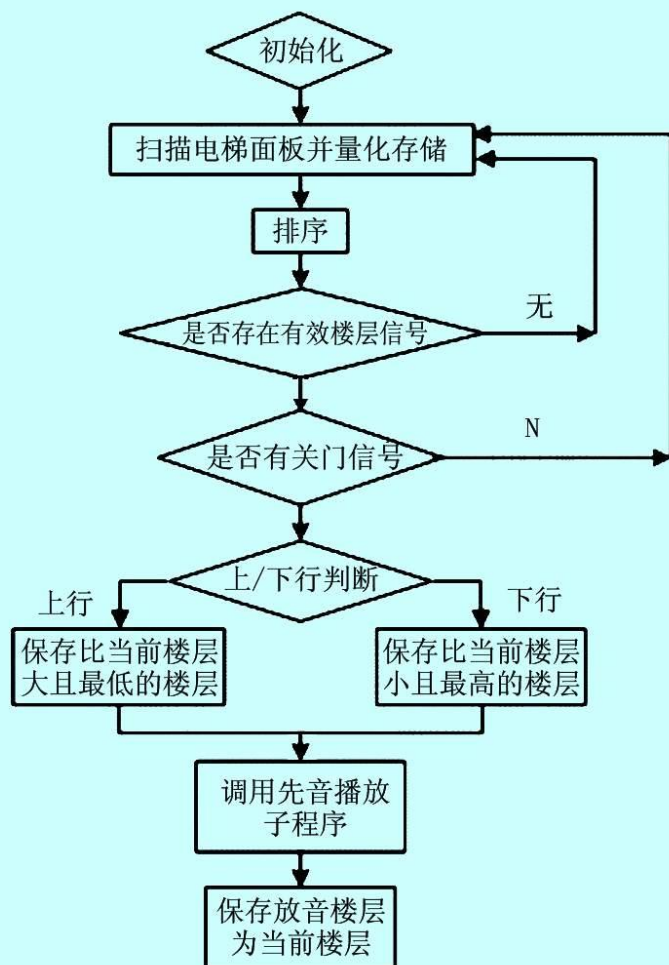
# 几个启发式问题（二）



## • 智能决策：

- 在空袭作战下，石油管道网中的关键节点通常是首先被攻击的目标。因此，如何根据节点的网络分布结构以及其他环境或实际约束找到这些关键节点进行保护，对于反空袭作战至关重要。

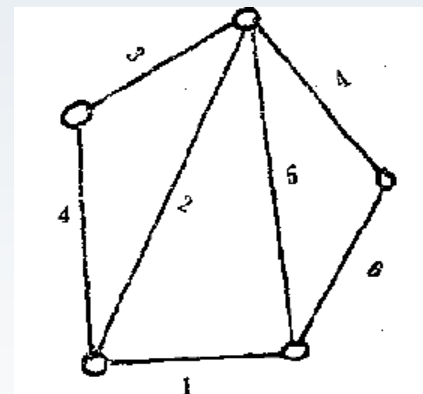
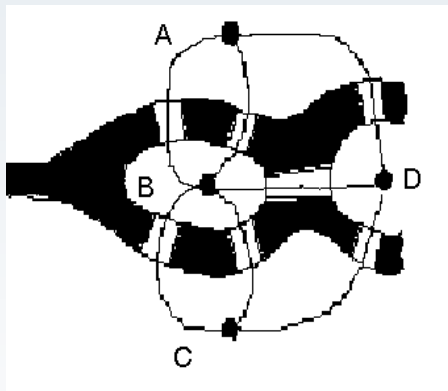
# 几个启发式问题（三）



## \* 软件:

- \* 软件和图的关系?
- \* 软件错误定位
- \* 软件测试
- \* ○ ○ ○

# 几个启发式问题（四）



# 如果在研究生面试时问你？

- 什么是关系
- 什么是树结构？
- 什么是图结构？
- 你真正了解集合么？

# 学习方法

- 总体把握课程内容的结构
- 理解与掌握基本概念及其间的关联
- 了解有关重要结论的含义及其应用
- 完成适量的相关练习





# 谢谢！