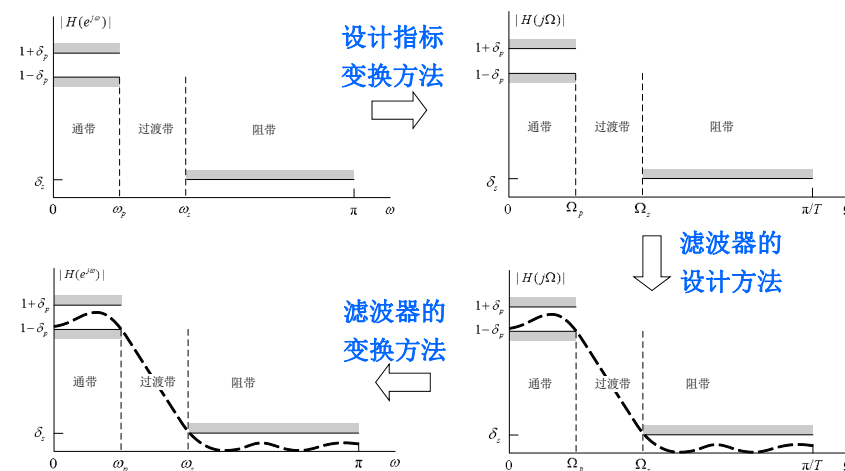


数字信号处理

——第15讲

双线性变换方法

❖ 设计流程—基本内容



2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

2

双线性变换方法

❖ 变换方法的来源

➤ 差分方程逼近微分方程

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} = \sum_{k=1}^N H_{ak}(s)$$

$$x[n] = x_a(nT)$$

$$y[n] = y_a(nT)$$

$$H_{ak}(s) = \frac{A_k}{s - s_k} \quad k = 1, \dots, N$$

$$\frac{dy_a(t)}{dt} \leftarrow \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

$$\frac{dy_a(t)}{dt} - s_k y_a(t) = A_k x_a(t)$$

$$y_a(t) \leftarrow \frac{y[n] + y[n-1]}{2}$$

$$x_a(t) \leftarrow \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$

双线性变换方法

$$\begin{aligned} \frac{y[n] - y[n-1]}{T} - s_k \frac{y[n] + y[n-1]}{2} &= A_k \frac{x[n] + x[n-1]}{2} \\ \frac{1}{T}(1 - z^{-1})Y(z) - s_k \frac{1}{2}(1 + z^{-1})Y(z) &= A_k \frac{1}{2}(1 + z^{-1})X(z) \\ H_k(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{A_k \frac{1}{2}(1 + z^{-1})}{\frac{1}{T}(1 - z^{-1}) - s_k \frac{1}{2}(1 + z^{-1})} = \frac{A_k}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} - s_k} \\ H_k(z) = H_{ak}(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} & \quad s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow s \rightarrow z? \end{aligned}$$

2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

3

2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

4

双线性变换方法

❖ 双线性变换关系

➤ $H_a(s)$ 到 $H(z)$ 变换

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \Rightarrow s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

➤ S平面到Z平面变换

$$s = \sigma + j\Omega \rightarrow z = re^{j\omega}$$

$$z = \left(1 + \frac{T}{2}s\right) / \left(1 - \frac{T}{2}s\right)$$

$$|z|^2 = \frac{(1 + \sigma T/2)^2 + (\Omega T/2)^2}{(1 - \sigma T/2)^2 + (\Omega T/2)^2} \Leftarrow z = \frac{1 + T/2(\sigma + j\Omega)}{1 - T/2(\sigma + j\Omega)}$$

2019/5/8

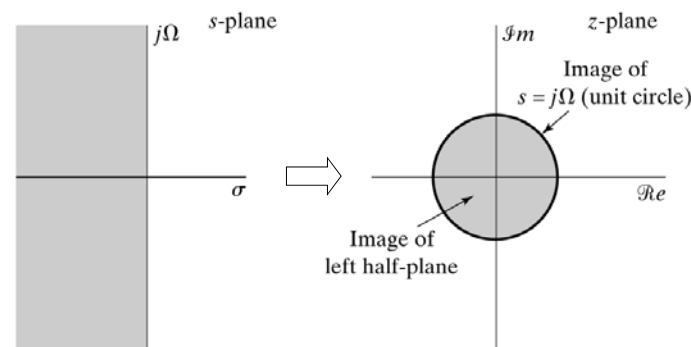
数字信号处理 北京航空航天大学

5

双线性变换方法

➤ S平面-Z平面映射

$$|z|^2 = \frac{(1 + \sigma T/2)^2 + (\Omega T/2)^2}{(1 - \sigma T/2)^2 + (\Omega T/2)^2} \Rightarrow \begin{cases} |z| > 1 & \text{if } \sigma > 0 \\ |z| < 1 & \text{if } \sigma < 0 \\ |z| = 1 & \text{if } \sigma = 0 \end{cases}$$



2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

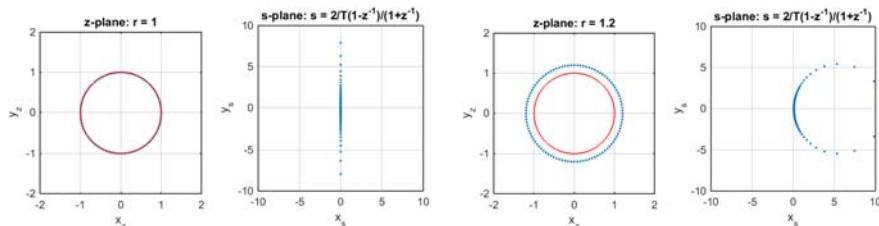
6

双线性变换方法

➤ S平面-Z平面映射图示

$$|z|^2 = \frac{(1 + \sigma T/2)^2 + (\Omega T/2)^2}{(1 - \sigma T/2)^2 + (\Omega T/2)^2}$$

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-(re^{j\omega})^{-1}}{1+(re^{j\omega})^{-1}}$$



2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

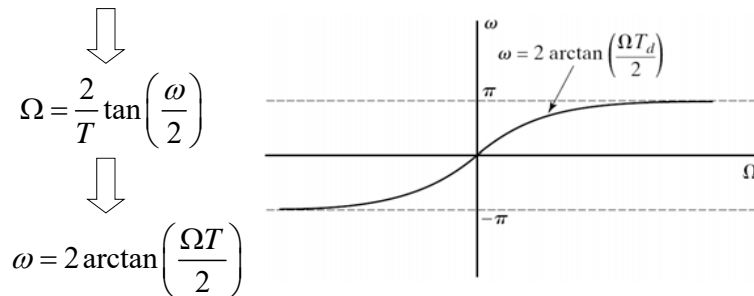
7

双线性变换方法

➤ 模拟与数字频率关系

$$j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}} = \frac{2}{T} \frac{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2})} \Leftarrow s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$= \frac{2}{T} \frac{j \sin(\omega/2)}{\cos(\omega/2)} = j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

8

双线性变换方法

❖ 设计滤波器过程

➤ 数字滤波器技术指标: α_p α_s ω_p ω_s



➤ 非线性的预畸变校正: $\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$



➤ 设计模拟滤波器 $H_a(s)$: $H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$



➤ 将 $H_a(s)$ 转化为 $H(z)$: $H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

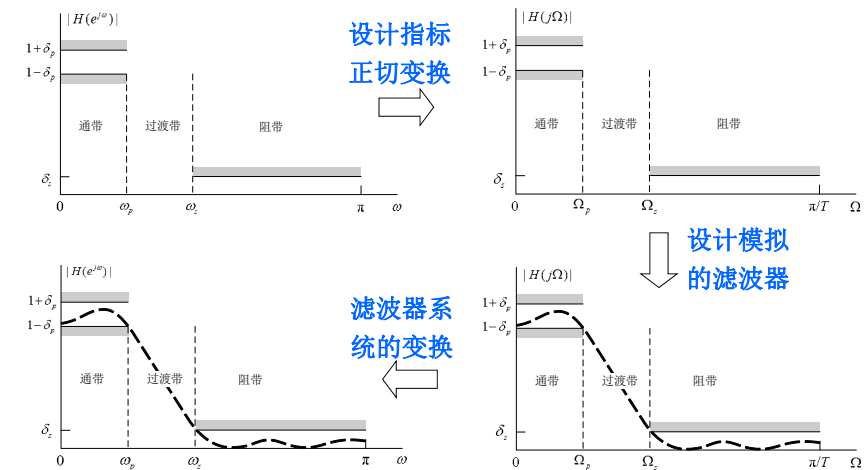
2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

9

双线性变换方法

❖ 设计流程—基本内容

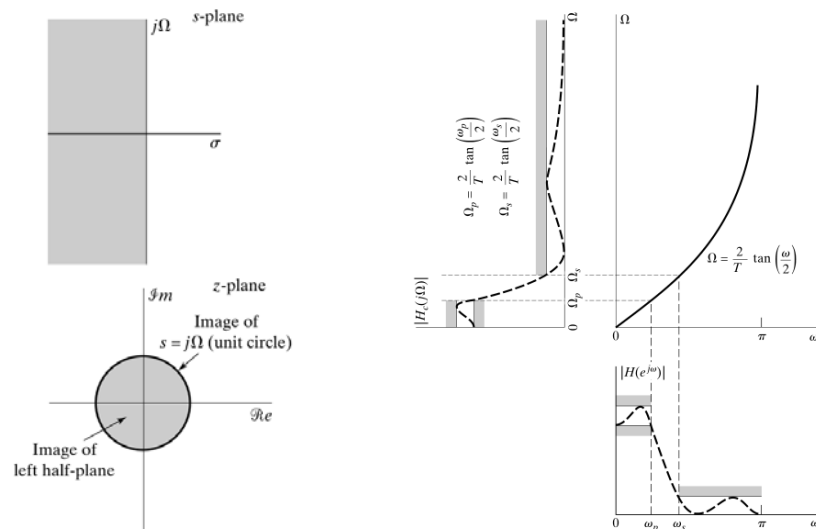


2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

10

双线性变换方法



2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

11

模拟滤波器—类型比较

❖ 数字滤波器设计比较

➤ 比较类型:

巴特沃斯
切比雪夫 I
切比雪夫 II
椭圆

➤ 设计指标:

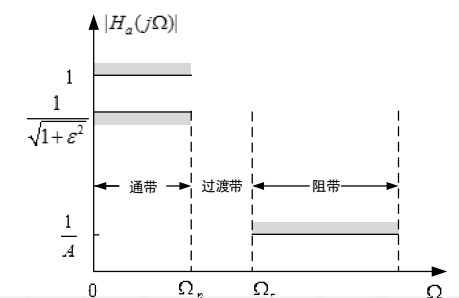
$\omega_p = 0.3\pi$
 $\omega_s = 0.4\pi$
 $\alpha_p = 0.5 \text{ dB}$
 $\alpha_s = 30 \text{ dB}$

α_p α_s ω_p ω_s



$$\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_p/10} - 1} \quad A = 10^{\alpha_s/20}$$

$$\Omega_{p,s} = (2/T) \tan(\omega_{p,s}/2)$$



2019/5/8

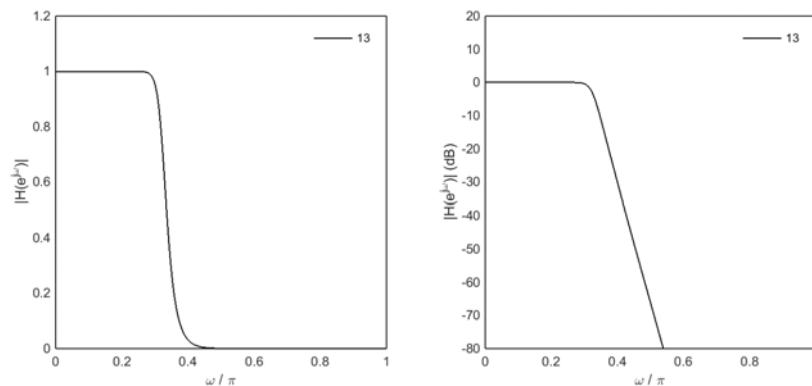
数字信号处理 北京航空航天大学

12

模拟滤波器—类型比较

➤ Butterworth滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^2}$$



2019/5/8

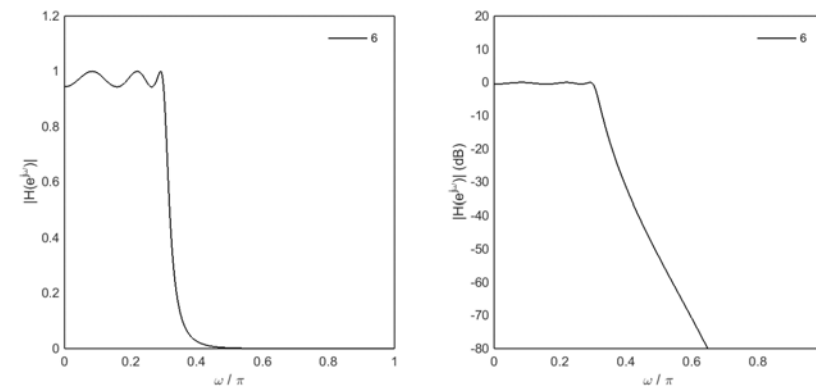
数字信号处理 北京航空航天大学

13

模拟滤波器—类型比较

➤ Chebyshev I 滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$



2019/5/8

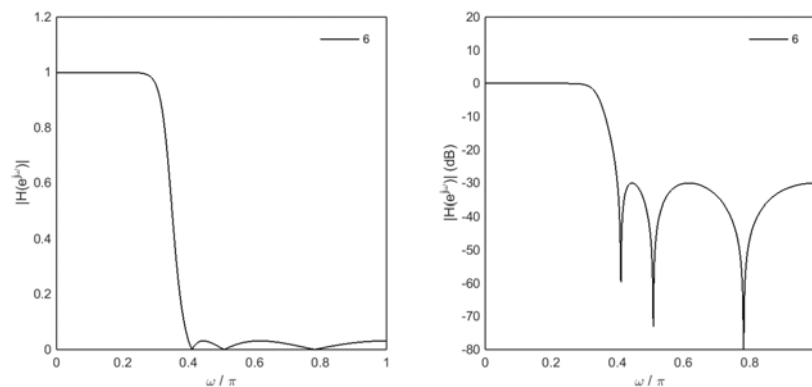
数字信号处理 北京航空航天大学

14

模拟滤波器—类型比较

➤ Chebyshev II 滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (C_N(\Omega_s/\Omega_p)/C_N(\Omega_s/\Omega))^2}$$



2019/5/8

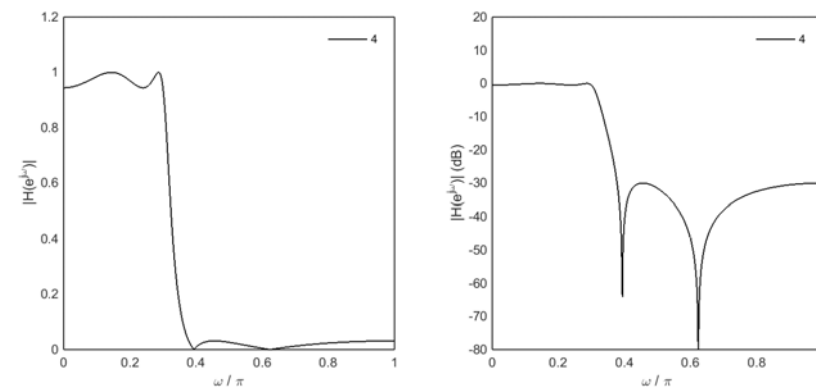
数字信号处理 北京航空航天大学

15

模拟滤波器—类型比较

➤ Elliptic滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_N^2(\Omega, L)}$$

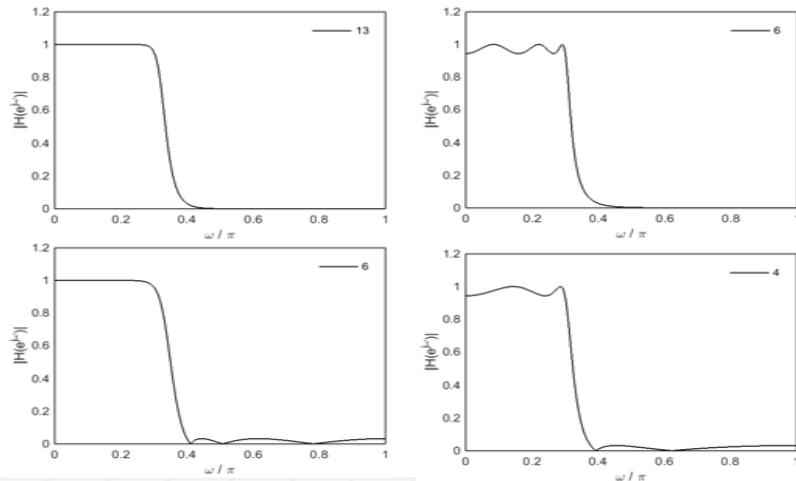


2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

16

❖ 性能差别原因：误差分配方式不同



2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

17

❖ IIR数字设计流程

- 技术指标体系
- 技术指标转换
 - 根据 α_p 、 α_s 求解 ϵ 和 A
- IIR滤波器设计流程

❖ 典型数字滤波器

- Butterworth
- Chebyshev I
- Chebyshev II
- Elliptic

❖ 滤波器转换方法

- 脉冲响应不变法
 - 基本原理、映射关系
- 双线性映射方法
 - 基本原理、映射关系
- 两种转换方法比较
 - 优势、局限、适用范围

2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

18

第15次作业

❖ 补充作业

1、已知模拟滤波器的系统函数为 $H_a(s) = A/(s + \alpha)$ ，分别用脉冲响应不变法和双线性变换方法，将 $H_a(s)$ 转换为数字滤波器系统函数 $H(z)$ 。

2、在Matlab软件仿真环境下，基于巴特沃斯模拟滤波器，用双线性变换法设计如下指标的数字低通滤波器： $\omega_p = 0.3\pi$ 、 $\omega_s = 0.4\pi$ 、 $\alpha_p = 0.4\text{dB}$ 、 $\alpha_s = 40\text{dB}$ ，给出Matlab程序代码，并绘制出幅频响应及其分贝表示形式。

2019/5/8

数字信号处理 北京航空航天大学

19

