基本概念及定理类证明

前四章从数列到函数都在讨论极限问题。我们在应用以及熟练计算之前首先要对每一个定义和定理有清晰的认识。基本概念：描述数列极限的“ε-N”语言、描述函数极限的“ε-δ”语言、导数、高阶导数、邻域、基本列、开区间族、上下确界、左右极限、左右导数、无穷大阶、无穷小阶、零点、函数连续以及一致连续等一定要烂熟于心。

其次是定理和性质，数列收敛的唯一性、有界性、保号性、保序性、夹逼性质以及四则运算性质对函数同样成立。重要定理包括第一章六大等价定理：单调有界定理、闭区间套定理、Cauchy 收敛定理、确界存在定理、有限覆盖定理、上极限下极限相关定理以及计算特殊极限的 Stolz 定理；第二章 Heine 定理、Cantor 定理、连续函数最大值最小值存在定理、连续函数零点定理、连续函数介值定理以及广义介值定理；第三章罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理以及洛必达法则；第四章 Taylor 定理。

下面是对 2005~2013 年期中考试题中有关例题的分析。

一、直接考察定义的文字及符号叙述形式：

1. 与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 不等价的一个命题是 【 C 】

A. $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n\geq N$ 的 $n\in \mathrm{N}^+$，都有 $|a_n-A|<\sqrt{\varepsilon}$；

B. $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n>N$ 的 $n\in \mathrm{N}^+$，都有 $|a_n-A|\leq \varepsilon^2$；

C. $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n>N$ 的 $n\in \mathrm{N}^+$，都有 $|a_n-A|<\sqrt{n}\varepsilon$；

D. $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathrm{N}^+$，对于所有满足 $n>N+100$ 的 $n\in \mathrm{N}^+$，都有 $|a_n-A|<100\varepsilon$.

2005 年二 1　考察数列极限的定义，显然ε前可以有常数或其本身进行幂运算但ε前不能有类似于 n 的变量。

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\neq 0$。则　　【 D 】

A. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为正　　B. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负

C. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为负　　D. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号

考察零点存在定理

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 不一致连续， 则在下列表述中正确的一个是　　【 B 】

A. $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，对 $[a,b]$ 中一切满足 $|x'-x''|<\delta$ 的 x',x''，都有

$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$。

B. $\exists\varepsilon_0>0$，在 $[a,b]$ 中存在 $\lim\limits_{n\to\infty}|s_n-t_n|=0$ 的数列 $\{s_n\},\{t_n\}$，使得

$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$。

C. $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall n\in N^+$，对 $[a,b]$ 中一切满足 $|s_n-t_n|<\dfrac{1}{n}$ 的 s_n,t_n，都有

$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$。

D. $\exists\varepsilon_0>0$，对 $[a,b]$ 中一切满足 $\lim\limits_{n\to\infty}|s_n-t_n|=0$ 的数列 $\{s_n\},\{t_n\}$，都有

$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$。

考察不一致连续定义，具体见书 83 页

1、设数列$\{x_n\}$，与$\{x_n\}$不是基列不等价的一个命题是 【 D 】

（A）$\exists\varepsilon_0>0$， 对任意大的正整数N，总存在正整数$m_N,n_N>N$，使得

$$|x_{m_N}-x_{n_N}|\ge 2\varepsilon_0;$$

（B）$\exists\varepsilon_0>0$，无论正整数N多么大，总存在正整数$n_N>N$和正整数p_N，使得

$$|x_{n_N+p_N}-x_{n_N}|\ge 3\varepsilon_0;$$

（C）$\exists\varepsilon_0>0$， 存在两个子列$\{x_{n_k}\}$和$\{x_{m_k}\}$，满足$|x_{n_k}-x_{m_k}|\ge\varepsilon_0$，$k=1,2,\cdots$；

（D）$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N\in\mathrm{N}^*$，对于所有满足$m,n>N$的$m,n\in\mathrm{N}^*$，都有$|x_m-x_n|\ge\varepsilon_0$。

考察非基本列的定义，具体见书25页

3. 设$f(x)$在(a,b)上可导，且$f'(x)\neq 0$，$\forall x\in(a,b)$。则下列结论正确的是 【 A 】

（A）$f'(x)$在(a,b)上恒为正或恒为负，且$f(x)$在(a,b)上严格单调；

（B）$f(x)$在(a,b)上恒为正或恒为负 ；（C）$f(x)$在(a,b)上有最小值和最大值；

（D）$f(x)$在(a,b)上连续，且$f'(x)$在(a,b)上连续。

4. 设$f(x)$在$x_0\in(a,b)$处可导，且$f'(x_0)>0$，则在下列结论正确的一个是 【 B 】

（A）$f(x)$在x_0处达到极小值； （B）$f(x)$在x_0处达不到极值。

（C）$f(x)$在x_0的某个邻域内严格单调递增；（D）$f(x)$在x_0处达到极大值；

考察导数定义，书98、99页

一、 叙述下面问题（每小题 2 分，共 10 分）

1） 叙述数列是柯西列(基本列)的定义

对于给定数列$\{x_n\}$若满足，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个$N>0$，对于任意给定的$m,n>N$，都有$|x_m-x_n|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$为柯西列.

2） 叙述函数一致收敛的定义

对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$，当属于$f(x)$的定义域I任意的x_1,x_2，当$|x_1-x_2|<\delta$时有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，则$f(x)$的定义域一致连续.

3） 叙述闭区间套定理

设$I_n=[a_n,b_n]$，并且$I_1\supset I_2\supset\Lambda\supset I_n\Lambda$，如果这一列区间的长度满足$|I_n|=b_n-a_n\to0(n\to\infty)$，那么交集$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$含有唯一的一点.

（全对得 10 分，对一个 4 分，错一个减 3 分）

七、（10 分） (1) 写出函数$f(x)$在区间I上一致连续的严格数学定义；

09 年第一大题、13 年第七大题 1 直接要求叙述定义和定理，所以大家一定要准确记忆。

二、考察定理的运用及书上习题的推广

八、 证明下面问题(10 分)

1) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A<0, \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\mathrm{B}>0$，证明存在 $\xi\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 使得 $f(\xi)=0$.

证明：由 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A<0$, 知存在一个 $\delta_1>0$ 使得 $a+\delta_1\in(a,b)$，且 $f(a+\delta_1)<0$ (4 分)

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\mathrm{B}>0$，知存在一个 $\delta_2>0$ 使得 $b-\delta_2\in(a,b)$，且 $f(b-\delta_2)>0$，(8 分)

则在 f(x) 区间 $[a+\delta_1, b-\delta_2]$ 上两端点异号，由连续函数介值定理知存在 $\xi\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 使得 $f(\xi)=0$.

考察连续函数零点存在定理和介值存在定理的应用，书 88、89 页

七. (10 分）证明下面问题

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)>0$，且 $f(x)$ 在 $(-¥ ,+¥)$ 上一致连续，求证 $f(x)^{\frac{1}{2}}$ 在 $(-¥ ,+¥)$ 上一致连续.

证明：任取 $\varepsilon>0$，由 $f(x)$ 一致连续知：存在 $\delta>0$，使得当 $|x_1-x_2|<d$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<e^2$，下面分情况证明 $|f(x_1)^{\frac{1}{2}}-f(x_2)^{\frac{1}{2}}|<e$.

如果 $f(x_1)<e^2, f(x_2)<e^2$，则 $|f(x_1)^{\frac{1}{2}}-f(x_2)^{\frac{1}{2}}|<e$.

如果 $f(x_1), f(x_2)$ 中有一个大于等于 e^2，不妨设 $f(x_1)^3\ e^2$，则

$$|f(x_1)^{\frac{1}{2}}-f(x_2)^{\frac{1}{2}}|=\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|f(x_1)^{\frac{1}{2}}+f(x_2)^{\frac{1}{2}}|}<\frac{e^2}{e}=e.$$

因此 $f(x)^{\frac{1}{2}}$ 一致连续.

建议评分标准：一致连续定义 4 分，两种情况讨论各 3 分

假设 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上. 如果对 (a,b) 内任何收敛的点列 $\{x_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在，则 f 在 (a,b) 上一致连续.

证明: 1) 写出不一致连续定义 3 分

如果 f 在 (a,b) 上不一致连续，则

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists s_n, t_n \in (a,b), |s_n - t_n| \le \frac{1}{n}, |f(s_n) - f(t_n)| \ge \varepsilon_0$$

2) 写出下面 3 分(有界数列必存在收敛子列)

$\{s_n, t_n\} \in (a,b)$, 则存在 $\{s_{n_k}, t_{n_k}\} \in (a,b), \lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k} = \alpha$

3) 下面结论 4 分

构造 $\{s_{n_1}, t_{n_1}, \ldots\ldots s_{n_k}, t_{n_k}, \ldots\ldots\} = \{z_n\}$ 数列收敛且极限为 α, (2 分)

则有已知条件 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ 存在，因此 $\lim\limits_{k\to\infty} f(s_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(t_{n_k})$ (2 分)

与 1)矛盾.

对函数一致连续、不一致连续定义的运用 书 82、83 页

7） 判断函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}$ 间断点的类型.

解：函数在 $x \neq 0$ 时，由初等函数连续性知，均为连续点。

当 $x = 0$ 时，$f(x)$ 没有定义，但由 L'hospital 法则，我们有

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{n!}{e^{t^2} P_n(t)} = 0$$，其中 $P_n(t)$ 为 t 的一个多项式。

因此 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

建议评分标准： 连续点的判断 1 分，L'hospital 法则求极限 3 分，$x = 0$ 的间断点类型 1 分。

考察间断点定义和洛必达法则运用

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$，则在 $x = 0$ 处 【 C 】

A. 不连续　　B. 连续但不可导

C. 连续且可导　　D. 导函数连续

05 年

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则既正确又最好的结果是 【 C 】

（A）f 在 $[0,1]$ 上不一致连续；　　（B） f 在 $x=0$ 处连续可导；

（C） $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，$x=0$ 是 $f'(x)$ 的第二类间断点；

（D）f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，且 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导。

07 年

8) 已知 $f(x)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \quad x=0. \end{cases}$ m 为正整数.

求: m 满足什么条件，函数在 $x=0$ 连续，

m 满足什么条件，函数在 $x=0$ 可导.

解: $m\geq 1$，函数在 $x=0$ 连续 (2 分)

$m\geq 2$，函数在 $x=0$ 可导数 (3 分)

10 年

这三道题都考察连续及导数存在的条件。具体可见习题 3.3 第 6、7 题