A

北京航空航天大学

2012-2013 学年第一学期期末

考试统一用答题册

考试课程 高等数学（上）

班级________ 学号________ 姓名________

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
阅卷人									

2013 年 01 月 17 日

A

一．填空题（本题 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(1-\cos\frac{1}{x}) =$ ________．　$1/2$

2. 设函数 $y=\int_1^{x^2} e^{-u^2}du$，则 $y'(1)=$ ________．　$2e^{-1}$

3. 设连续函数 $v=v(t)$ 是做直线运动的某物体在时刻 t 的速度，则该物体在时间段 $[T_1,T_2]$ 内走过的距离为________．　$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，且 $f'(1)=\sqrt{3}, f'(0)=0$，则 $\int_0^1 f'(x)f''(x)dx=$ ________．　$3/2$

5．级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$ 的和为________．　$e^{-1/2}$

二．单项选择题（本题 20 分）

1. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f'(0)=f''(0)=0$，且 $f'''(0)=1$，则（　B　）.

A. $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值.　　B. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 的左边凸右边凹.

C. $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.　　D. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 的左边凹右边凸.

2．设连续函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调增加，记 $a=\int_0^1 f(x)dx$，$b=\int_1^2 f(x)dx$，$c=\int_0^2 f(x)dx$，则下面选项中不正确的是（　D　）.

A. $2a<c$.　　B. $2b>c$.　　C. $a<b$.　　D. $a<c$.

3. 已知反常积分 $\int_1^2 \frac{x\ln x}{(x-1)^\alpha}dx$ 收敛，则下面选项中 α 能取的值是（A　）.

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

4. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{n}}{n^\alpha}$ 绝对收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3-\alpha}}$ 收敛，则 α 的取值范围是（ B　）

A. $(1,2)$.　　B. $(1,3)$.　　C. $(\frac{3}{2},2)$.　　D. $(\frac{3}{2},3)$.

5. 长和宽均为 a 且高为 b 的长方体形的水箱装满水（密度为 γ）时，一个侧壁上所受的水压力为（　C　）.

A. $\int_0^a \gamma gbxdx$.　　B. $\int_0^a \gamma gbx^2dx$.　　C. $\int_0^b \gamma gaxdx$.　　D. $\int_0^b \gamma gax^2dx$.

三．（本题 12 分）计算

1．$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\sqrt{2}-2\sin x}}$．

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} [(1+(\tan x-1))^{\frac{1}{\tan x-1}}]^{\frac{\tan x-1}{\sqrt{2}-2\sin x}}$ 【$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} e^{\frac{\ln\tan x}{\sqrt{2}-2\sin x}}$】---------2 分

$= e^{\lim\limits_{x\to\pi/4} \frac{\sec^2 x}{-2\cos x}}$ ------------------------------4 分

$= e^{-\sqrt{2}}$ -------------------------------6 分

2．设$\begin{cases} x = 1+t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$ 求$\frac{d^2y}{dx^2}$．

$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{2t}$ -----------------------------3 分

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{t\cos t - \sin t}{2t^2 2t} = -\frac{t\cos t - \sin t}{4t^3}$ ----------------------------6 分

四．（本题 12 分）求积分

1． $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$．

$= \int \arctan\sqrt{x}\, d\, 2\sqrt{x}$

$= 2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \int \frac{1}{1+x}dx$ ------------------------------4 分

$= 2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \ln(1+x) + C$ ------------------------------6 分

2． $\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}\,(x+1)dx$．

$= 2\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$ ------------------------------2 分

$(x = \sin t)$

$= 2\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx$ ------------------------------4 分

$= 2\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$ ------------------------------6 分

A

五．（本题 10 分） 设 D 是由曲线 $y=|\ln x|$，直线 $x=e$ 以及正 x 轴和正 y 轴所围成的无界平面区域.

（1）求 D 的面积.

（2）求由 D 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

（1）$A=\int_0^e|\ln x|dx \ \ =\int_0^1-\ln xdx+\int_1^e\ln xdx$ ---------2 分

$=-x\ln x\Big|_0^1+\int_0^1 1dx+x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e 1dx$ --------------------4 分

$=2$ ----------------------------5 分

（2）$V=2\pi\int_0^e x|\ln x|dx=2\pi\int_0^1-x\ln xdx+2\pi\int_1^e x\ln xdx$ --------2 分

$=-\pi x^2\ln x\Big|_0^1+\pi\int_0^1 xdx+\pi x^2\ln x\Big|_1^e-\pi\int_1^e xdx$ ---------------------4 分

$=\pi(1+\frac{e^2}{2})$ ----------------------------5 分

六．（本题 10 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{n}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

收敛域为 $(-1,1)$ ----------------------------2 分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n})'$$ -------------4 分

$$=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n})'=x(\frac{x^2}{1-x^2})'=\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$$ ----------------6 分

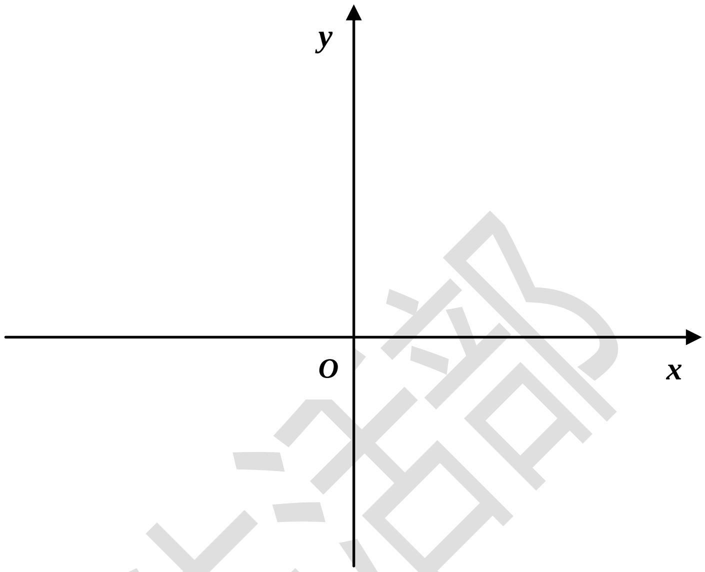
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n}}{n})'dx$$

$$=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}2x^{2n-1})dx$$ -------------8 分

$$=\int_0^x\frac{2x}{1-x^2}dx=-\ln(1-x^2)$$ -------------------10 分

七．（本题 10 分） 设函数 $y = x\arctan x$,填写下表并画出函数的图像草图.

y'	$\arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}$
y''	$\dfrac{2}{(1+x^2)^2}$
增区间	$[0,+\infty)$
减区间	$(-\infty,0]$
凸区间	无
凹区间	$(-\infty,+\infty)$
极值点	$x=0$
渐近线	$y=\pm\dfrac{\pi}{2}x-1$



八．（本题 6 分） 设二阶可导函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内满足 $f(x)>x^2$，且 $f(0)=0$.

（1）证明 $f'(0)=0$；（2）证明 $f''(0)\neq 0$.

（1）因为 $f(x)>x^2$，所以

当 $x>0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>x$，得 $f'(0)\geq 0$；当 $x<0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}<x$，得 $f'(0)\leq 0$，

从而有 $f'(0)=0$。 -----------------3 分

由泰勒公式有

$$f(x)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)。$$

若 $f''(0)=0$，则 $f(x)=o(x^2)$，由题设有 $o(x^2)>x^2$，矛盾！

故 $f''(0)\neq 0$。 -----------------6 分