第五章 不定积分

5.1 原函数的定义

定义5.1.1

如果对$\forall x \in I$,都有$\boxed{F'(x) = f(x)}$,那么$F(x)$就称为$f(x)$在区间I内原函数.

(1) 原函数是否唯一？若不唯一它们之间有什么联系？

$$F'(x) = f(x)$$

则对于任意常数 C,

$F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数.

若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，

则 $F(x)-G(x)=C$ （C 为任意常数）

定义5.1.2

在区间I内，函数$f(x)$的全体原函数称为$f(x)$在区间I内的不定积分，记为$\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　任意常数

函数$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线.

显然，求不定积分得到一积分曲线族.

基本积分表

$$(1)\quad \int k\,dx = kx + C \quad (k\text{是常数});$$

$$(2)\quad \int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$$

$$(3)\quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

说明: $x > 0,\ \Rightarrow\ \int \frac{dx}{x} = \ln x + C,$

$$x < 0,\ [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x},$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C,$$

$$(4)\quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(5)\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$(6)\quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C;$$

$$(7)\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$$

(8) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

(9) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

(10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$

(11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$

(12) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$

(13) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$

性质5.1.1

微分运算与求不定积分的运算是互逆的.

由不定积分的定义，可知

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x) \qquad d[\int f(x)dx] = f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \qquad \int dF(x) = F(x) + C$$

结论：　先积后导全消掉，先导后积常数要.

性质5.1.2

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

性质5.1.3

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

（k是常数，$k \neq 0$)

例　求$\int \frac{1}{1+x^2}dx$.

解　$\because \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$.

例3 求积分 $\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx.$

解 $\int(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$$=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=3\arctan x-2\arcsin x+C$$

例4 求积分 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$

解 $$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

有理函数：分解因式

说明：被积函数需要进行恒等变形，

才能使用基本积分表.

例5 求积分 $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx.$

解 $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$$

例 6　已知一曲线$y = f(x)$在点$(x, f(x))$处的切线斜率为$\sec^2 x + \sin x$，且此曲线与y轴的交点为$(0,5)$，求此曲线的方程.

解　$\because \quad \dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sin x,$

$$\therefore \quad y = \int \left(\sec^2 x + \sin x\right) dx$$

$$= \tan x - \cos x + C,$$

$\because \quad y(0) = 5,$ 　　$\therefore \quad C = 6,$

所求曲线方程为 $y = \tan x - \cos x + 6.$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例7 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x\ge 0 \\ 1+x, & x<0 \end{cases}$，求$\int f(x)dx$

解: $x\ge 0$时，$\int f(x)dx=e^{x}+c_1$

$x<0$时，$\int f(x)dx=x+\dfrac{x^2}{2}+c_2$

$\because F$在$x=0$连续，$\therefore \lim\limits_{x\to 0} e^{x}+c_1=\lim\limits_{x\to 0} x+\dfrac{x^2}{2}+c_2$.

$\therefore c_2=c_1+1$, $\therefore F(x)=\begin{cases} e^{x}+c_1, & x\ge 0 \\ x+\dfrac{x^2}{2}+1+c_1, & x<0 \end{cases}$

作业:

习题5.1 (3), (6), (8), (10), (12)

思考题

符号函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否存在原函数？为什么？

思考题解答

不存在.

假设有原函数$F(x)$ $F(x)=\begin{cases} x+C, & x>0 \\ C, & x=0 \\ -x+C, & x<0 \end{cases}$

但$F(x)$在$x=0$处不可微, 故假设错误

所以 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在原函数.

结论 每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数.

5.2 第一类换元公式

定理5.2.1 设 $f(u)$ 具有原函数, $u=\varphi(x)$ 可导,

则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

第一类换元公式（凑微分法）

说明 凑出 $\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$

$$\int f[\boxed{\varphi(x)}]\boxed{\varphi'(x)dx}.$$

但换元形式不同，所得结论不同.

例1 求 $\int \sin 2x dx.$

解（一） $$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C;$$

解（二） $$\int \sin 2x dx = 2\int \sin x \cos x dx$$

$$= 2\int \sin x d(\sin x) = (\sin x)^2 + C;$$

解（三） $$\int \sin 2x dx = 2\int \sin x \cos x dx$$

$$= -2\int \cos x d(\cos x) = -(\cos x)^2 + C.$$

例2 求 $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx.$

解 $\int \frac{x}{(1+x)^3}dx = \int \frac{x+1-1}{(1+x)^3}dx$

加1减1

$$= \int \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\right]dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\right]d(1+x)$$

$$= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C.$$

例3 求 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}dx.$

原式 $= \int \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}}{\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}\right)}dx$

$= \frac{1}{4}\int \sqrt{2x+3}dx - \frac{1}{4}\int \sqrt{2x-1}dx$

$= \frac{1}{8}\int \sqrt{2x+3}d(2x+3) - \frac{1}{8}\int \sqrt{2x-1}d(2x-1)$

$= \frac{1}{12}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3 - \frac{1}{12}\left(\sqrt{2x-1}\right)^3 + C.$

例4 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx.$

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx$

$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$

例5 求 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx.$

解 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx$

$$= \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

说明 当被积函数是三角函数相乘时，拆开奇次项去凑微分.

例6 求 $\int \csc x dx.$

解（1） $\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$

$= -\int \frac{1}{1-\cos^2 x} d(\cos x)$ $\quad u = \cos x$

$= -\int \frac{1}{1-u^2} du = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du$

$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{1+u} \right) du = \frac{1}{2}\left(\ln|u-1| - \ln|1+u| \right) + C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C.$

例6 求 $\int \csc x dx$.

解（2）$\int \csc x dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx$

$$= \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

类似地可推出 $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} d(x+\frac{\pi}{2})$$

$$= \ln|\csc(x+\frac{\pi}{2}) - \cot(x+\frac{\pi}{2})| + C$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

例7 $$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$$

解 $$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$$

$$=\int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C.$$

作业:

习题5.2

(6), (8), (10), (11), (13), (15), (16), (17),

(18), (21), (23)

补例1 求 $$\int \frac{1}{3+2x}dx.$$

解 $$\frac{1}{3+2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+2x}\cdot(3+2x)',$$

$$\int \frac{1}{3+2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{3+2x}\cdot(3+2x)'dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C.$$

一般地 $$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\left[\int f(u)du\right]_{u=ax+b}$$

补例2 求 $$\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx.$$

解 $$\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}dx$$

$$= \frac{1}{3^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}d\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C.$$

补例3 求 $$\int \frac{1}{1+e^x}dx.$$

解 $$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$$

$$= \int \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C.$$

补例4 求 $$\int (1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$$

解 $$\because \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)' = 1-\frac{1}{x^2},$$

$$\therefore \quad \int (1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int e^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x}) = e^{x+\frac{1}{x}}+C.$$

补例5 求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx.$

解
$$\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx$$

$$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{1}{\sin^2 x}d(\sin x)$$

$$= -\cot x + \frac{1}{\sin x} + C.$$

补例6 求 $\int \cos 3x \cos 2x dx$.

解 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$,

$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x),$$

$$\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

补例7 求 $$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx.$$

解 $$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\arcsin\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}$$

$$=\int \frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}d(\arcsin\frac{x}{2})=\ln|\arcsin\frac{x}{2}|+C.$$

5.4 第二类换元法

问题 $\int x^5\sqrt{1-x^2}dx = ?$

解决方法

令 $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt,$

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}dx = \int (\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt$$

$$= \int \sin^5 t\cos^2 t dt = \cdots\cdots$$

（应用“凑微分”即可求出结果）

定理5.4.1

设$x=\psi(t)$是单调的、可导的函数，

并且$\psi'(t)\neq 0$，又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，

则有换元公式

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$$

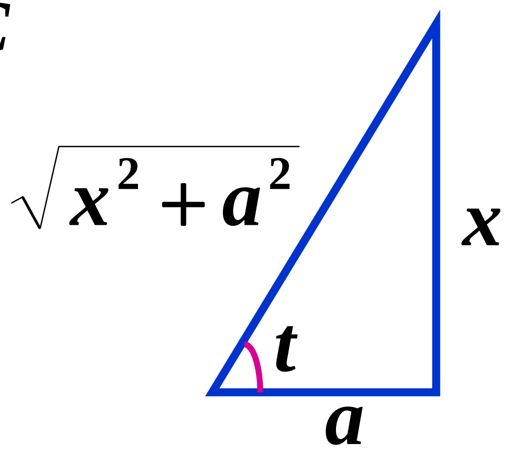
例1 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0).$

解 令 $x = a\tan t \Rightarrow dx = a\sec^2 t dt \quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t dt$$

$$= \int \sec t dt \ = \ln|\sec t + \tan t| + C$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) + C.$$



例2 求 $\int x^3\sqrt{4-x^2}dx.$

解 令 $x = 2\sin t \quad dx = 2\cos t dt \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

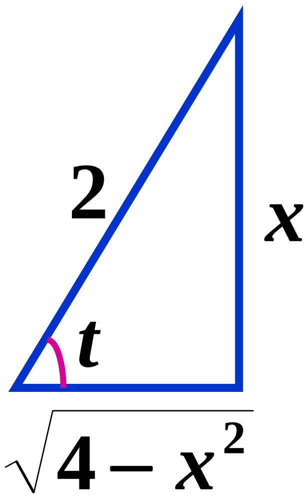
$$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx = \int (2\sin t)^3\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt$$

$$= 32\int \sin^3 t\cos^2 t dt$$

$$= -32\int (\cos^2 t - \cos^4 t)d\cos t$$

$$= -32\left(\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{1}{5}\cos^5 t\right) + C$$

$$= -\frac{4}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^5 + C.$$



例3 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (a>0).$

解 $1.\ x>a$

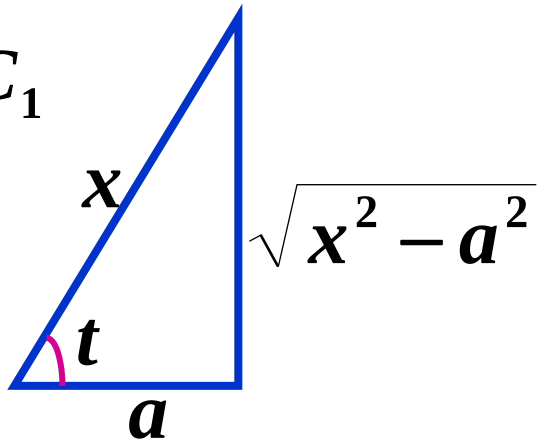
令 $x = a\sec t \quad dx = a\sec t\tan t dt \quad t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}dt$$

$$= \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C_1$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$$



2. $x < -a$

令 $x = -u$ 那么 $u > a$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = -\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du$$

$$= -\ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C_2 = -\ln\left(-x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C_2$$

$$= \ln\left(\frac{-x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a^2}\right) + C_2 = \ln\left(-x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C.$$

故原式 $= \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$

方法(1) 三角代换

三角代换的目的是化掉根式.

一般规律如下：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 可令 $x = a\sin t$;

(2) $\sqrt{a^2 + x^2}$ 可令 $x = a\tan t$;

(3) $\sqrt{x^2 - a^2}$ 可令 $x = a\sec t$.

方法(2)

化掉根式是否一定采用三角代换，需根据被积函数的情况来定.

例4 求 $$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

解 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ $\boxed{\Rightarrow x^2=t^2-1,}$ $\boxed{xdx=tdt,}$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t}tdt=\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C.$$

例5 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

解 令 $t=\sqrt{1+e^x}$ $\boxed{\Rightarrow e^x=t^2-1,}$

$$x=\ln(t^2-1),\quad \boxed{dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int \frac{2}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-x+C.$$

方法(4) 当分母的阶较高时, 可采用**倒代换** $x=\dfrac{1}{t}$.

例6 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx.$ （分母的阶较高）

解 令 $x=\dfrac{1}{t}\Rightarrow dx=-\dfrac{1}{t^2}dt,$

$$\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt^2$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1-(t^2+1)}{\sqrt{1+t^2}}d(t^2+1)$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{u}}-\sqrt{u}\right)du \qquad u=t^2+1$$

$$=\sqrt{u}-\frac{1}{3}\left(\sqrt{u}\right)^3+C$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+C.$$

方法(5)

当被积函数含有两种或两种以上的根式 $\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时，可采用令 $x=t^n$（其中 n 为各根指数的最小公倍数）

例7 求 $$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$$

解 令 $x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt,$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx=\int\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt=\int\frac{6t^2}{1+t^2}dt$$

$$= 6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt$$

$$= 6\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$= 6[t-\arctan t]+C$$

$$= 6[\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}]+C.$$

作业:

习题5.4　（3）（5）（7）（11）（14）（17）