

## 理论力学 AII 期末考试模拟试题

### 一、 选择题（将正确答案的字母填在空格内，每小题 2 分，共 10 分）

1、对于具有定常约束的质点系，其动能  $T$  最一般的形式可以表示成\_\_\_\_\_的函数。

A: 广义速度;    B: 广义坐标;    C: 时间  $t$

2、定点运动的圆锥 ABC 在水平固定圆盘上纯滚动，如图 1 所示。若圆锥底面圆心 D 作匀速圆周运动，则该圆锥的角加速度矢量  $\alpha$  与角速度矢量  $\omega$  的关系是\_\_\_\_\_。

A:  $\alpha$  平行于  $\omega$ ;    B:  $\alpha$  垂直于  $\omega$ ;

C:  $\alpha$  为零矢量;    D:  $\alpha$  为非零矢量

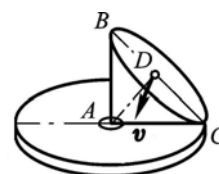


图 1

3、二自由度线性系统的振动周期与\_\_\_\_\_有关。

A: 广义质量;    B: 广义刚度;    C: 初始位置;    D: 初始速度

4、只应用第二类拉格朗日方程\_\_\_\_\_求出非自由质点系的约束力。

A: 一定能;    B: 一定不能;    C: 不一定能

5、第二类拉格朗日方程可用于研究具有\_\_\_\_\_质点系的力学问题。

A: 完整约束;    B: 定常约束;    C: 非完整约束;    D: 非定常约束

注：第二类拉格朗日方程为：
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$
。其中  $k$  为系统的

自由度。 $Q_j$  为对应于广义坐标  $q_j$  的主动力的广义力。

### 二、 填空题（将最简结果填在空格内，每空 5 分，共 50 分）

1、质量为  $m$  的质点  $M$  可在半径为  $R$  的圆环内运动，圆环以角速度  $\omega$ （常矢量）绕  $AB$  轴作定轴转动，如图 2 所示。 $\theta$  为质点的广义坐标，此时质点的动能可以表示成

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \text{ 其中 } T_i (i = 0, 1, 2)$$

为广义速度的  $i$  次齐次函数。求：

$$T_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$T_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$T_0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

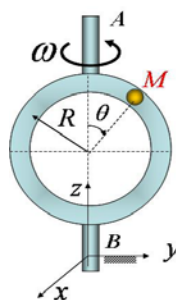


图 2

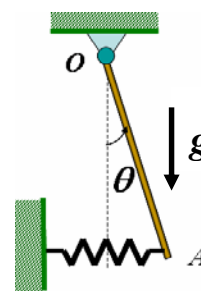


图 3

2、长为  $L$  质量为  $m$  的均质杆  $OA$  用光滑柱铰链悬挂在天花板上，下端与刚度系数为  $k$  的水平弹簧连接，杆铅垂时弹簧为原长，如图 3 所示。求系统在平衡位置附近作微幅摆动的动力学方程。

动力学方程：\_\_\_\_\_。

3、圆盘相对正方形框架  $ABCD$  以匀角速度  $\sqrt{2}\omega_0$  绕  $BC$  轴转动，正方形框架以匀角速度  $\omega_0$  绕  $AB$  轴转动，如图 4 所示。求该圆盘的绝对角速度  $\omega$  的大小和绝对角加速度  $\alpha$  的大小。

$\omega =$  \_\_\_\_\_,  $\alpha =$  \_\_\_\_\_。

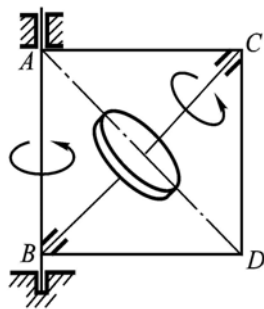


图 4

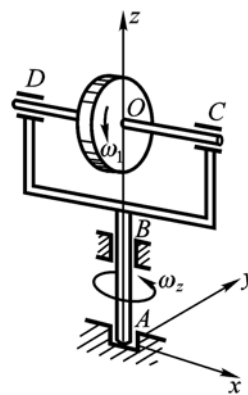


图 5

4、框架以匀角速度  $\omega_z = \omega$  绕铅垂轴  $AB$  转动，半径为  $R$  的圆盘以匀角速度  $\omega_1 = \omega$  绕框架上的  $CD$  轴转动，如图 5 所示。求：圆盘在图示位置的最高点的速度的大小  $v$ ，该点的向轴加速度的大小  $a_N$  和转动加速度的大小  $a_R$ 。

$v =$  \_\_\_\_\_;  $a_N =$  \_\_\_\_\_;  $a_R =$  \_\_\_\_\_

5、如图 6 所示，质量为  $m$  半径为  $R$  的均质圆盘可绕其中心水平轴  $O$  作定轴转动，质量为  $m$  的滑块  $A$  可沿铅垂滑道运动，滑块  $A$  与圆盘通过铰链用长为  $R$  的无质量杆  $AB$  连接，忽略所有摩擦，系统在铅垂面内运动。求系统在静平衡位置附近做微幅振动的固有频率  $\omega_0$ 。

$\omega_0 =$  \_\_\_\_\_

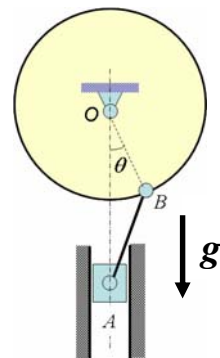


图 6

三、 计算题（第 1 小题 25 分，第 2 小题 15 分，本题共 40 分）

1、质量为  $m$  半径为  $R$  的均质圆盘在水平地面纯滚动，长为  $L$  质量为  $m$  的均质杆  $AB$  铰接在圆盘中心  $A$ ，系统在铅垂平面内运动，系统的广义坐标如图 7 所示。忽略空气阻力与铰链  $A$  处的摩擦。求：（1）用系统的广义坐标和广义速度给出系统的动能  $T$  和势能  $V$ （杆在铅垂位置时为势能零点）；（2）若初始时，杆位于铅垂位置  $\theta_0 = 0$ ，圆盘中心  $A$  点的速度为  $u$ ，杆的角速度为零。试给出系统拉格朗日方程的首次积分并确定积分常数。

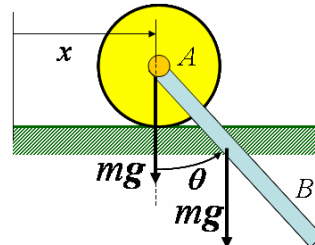


图 7

2、已知质量为  $m$  的定点运动陀螺做规则进动（ $\alpha > 0$  为常量），其质心  $C$  到球铰链  $O$  的距离为  $L$ ，该陀螺对质量对称轴  $z$  的转动惯量为  $J$  且以  $\omega_2$  绕  $z$  轴高速旋转， $z$  轴与  $z_1$  轴的夹角为  $\alpha$ ，如图 8 所示。求陀螺的进动角速度  $\omega_1$ 、铰链  $O$  的约束力在铅垂方向的分量  $F_N$  和水平方向的分量  $F$  的大小。 要求：画出受力图、加速度图；给出解题基本理论和基本步骤。

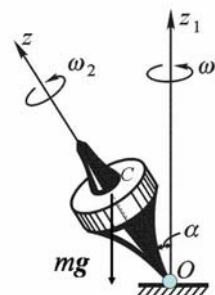


图 8

## 理论力学 AII 答案

### 一、 选择题（每题 2 分，共 10 分）

1、 AB            2、 BD            3、 AB

4、 B

5、 ABD

### 二、 填空题（每空 5 分，共 50 分）

1、  $T_2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$     $T_1 = 0$     $T_0 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta$

2、  $\ddot{\theta} + \frac{3(mg + 2kL)}{2mL}\theta = 0$

3、  $\omega = \sqrt{5}\omega_0$     $\alpha = \omega_0^2$

4、  $v = \omega R$     $a_N = \sqrt{2}\omega^2 R$     $a_R = \omega^2 R$

5、  $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{g}{R}}$

### 三、 计算题（共 40 分）

1、  $T = \frac{5}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$

$$V = \frac{1}{2}mgL(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2}m\dot{x} + \frac{1}{2}mL\dot{\theta}\cos\theta = \frac{5}{2}mu$$

$$T + V = \frac{5}{4}mu^2$$

2、  $\omega_1 = \frac{mgL}{J\omega_2},$

$$F_N = mg, \quad F = m\omega_1^2 L \sin\alpha$$