A

北京航空航天大学

2013-2014 学年第一学期期末

考试统一用答题册

考试课程＿＿一元微积分＿＿

班级＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
阅卷人									

2014 年 01 月 13 日

A

本试卷包括八个大题，共五页（ 2014-01-13）

一．填空题(本题 20 分)

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax)e^x-1}{x}=0$，则 $a=$ ________． 1

2. 设当 $x\to 0$ 时，$3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^3 是等价无穷小，则 $c=$ ________ ___ . 4

3. 螺线 $r=\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$ 与极轴围成的面积 $S=$ ________. $\dfrac{4}{3}\pi^3$

4. 设可导函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\arcsin x\cdot\Delta x+o(\Delta x)$, 且 $y(0)=1$,

则 $y(1)=$ ____________. $\dfrac{\pi}{2}$

5. 函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 在点 $x_0=0$ 处带佩亚诺余项的三阶泰勒公式为____________.

$f(x)=2(x+\dfrac{x^3}{3})+o(x^3)$

二．单项选择题(本题 20 分)

1. 设函数 $y(x)=e^x(e^x-1)(e^x-2)\cdots(e^x-10)$，则 $y'(0)=$（ D ）.

A. $10!$.　　B. $-10!$.　　C. $9!$.　　D. $-9!$.

2．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，则 $f(\sin x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处取得极大值的一个充分条件是（ B ）.

A. $f'(1)<0$.　　B. $f'(1)>0$.　　C. $f''(1)<0$.　　D. $f''(1)>0$.

3. 设 $I_k=\int_0^{k\pi}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，则有（ A ）.

A. $I_1>I_2>0$.　　B. $I_1>0>I_2$.　　C. $I_2>I_1>0$.　　D. $I_2>0>I_1$.

4. 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是(B)

A.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.　　B.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.

C.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛.　　D.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

5. 物体的运动规律为 $s=s(t)$，介质的阻力与速度的平方成正比(比例系数为 k)，则物体从时刻 $t=a$ 运动至 $t=b$ 时，阻力所做的功为（ D ）.

A

A. $\int_a^b k[s(t)]^2\mathrm{d}t.$　　B. $\int_a^b k[s'(t)]^2\mathrm{d}t.$　　C. $\int_a^b k[s(t)]^3\mathrm{d}t.$　　D. $\int_a^b k[s'(t)]^3\mathrm{d}t.$

三．求极限（每小题 5 分，共 10 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos 2x}{e^{x^2}-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2\cos 2x}{x^4}$ --------------------------------**2 分**

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\frac{1}{2}x^4-x^2[1-\frac{1}{2}(2x)^2]+o(x^4)}{x^4}$ ----------------**4 分** $=\dfrac{5}{2}$　　-------------**5 分**

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}}$　$=\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$　--------------------------------**2 分**

$=\arcsin\dfrac{x}{2}\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{6}$ --------------------------------**5 分**

四．求导数（每小题 5 分，共 10 分）

1．设$\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$ ---------------------------**2 分**

$\therefore\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan t$，　$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\sec^2 t}{t\cos t}$，----------------------------------**4 分**

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=1$，　$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{\pi}$. ----------------------------------**5 分**

2．已知函数$y=y(x)$由方程$\int_1^{x+2y}e^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{x}}x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$所确定，求$y'(1)$.

解　将方程$\int_1^{x+2y}e^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{x}}x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$两端对$x$求导，得

$$e^{(x+2y)^2}(1+2y')=\int_1^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t+x\cos x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$　------------------------3 分

当$x=1$时，$y=0$. --------------------------4 分

$\therefore\ y'(1)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos 1}{2e}-1\right)$. --------------------------5 分

A

五．求积分（每小题 *6* 分，共 *12* 分）

1\. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx. = -\int xe^x d\frac{1}{1+x} = -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{d(xe^x)}{1+x}$ -------3 分 $= -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x dx$ ----------5 分

$= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + C.$ ---------------------------6 分

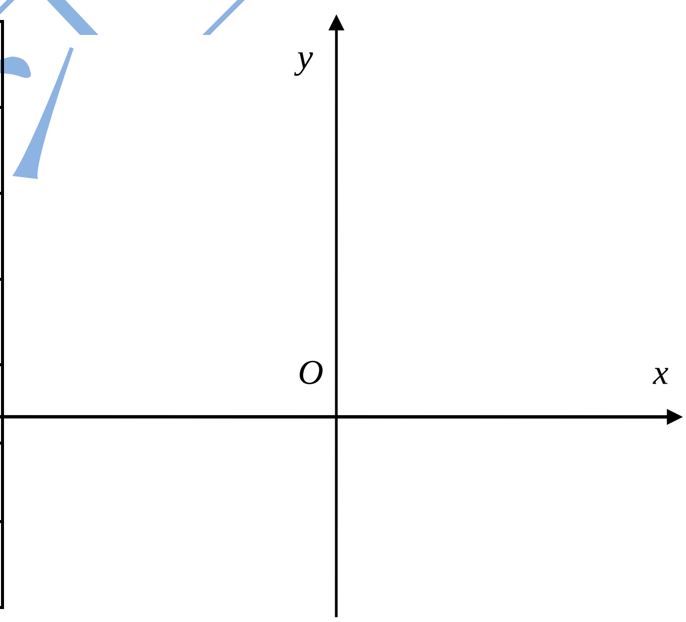
2\. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}.$

$\underline{\underline{x=\sin t}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^4 t dt$ ------2 分 $= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cot^2 t + 1)\, d\cot t$ ---------4 分 $= -\left(\frac{\cot^3 t}{3} + \cot t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}.$ ---------6 分

六. *(14 分)* 设函数 $y = f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}.$

1\. 填表并作图;

单增区间	$(-\infty,-3),(1,+\infty)$
单减区间	$(-3,-1),\quad(-1,1)$
凹区间	$(-1,+\infty)$
凸区间	$(-\infty,-1)$
极大值点	$x=-3$
极小值点	$x=1$
渐近线	$x=-1, y=x-4$



2\. 求曲线 $y=f(x)$对应 $x\in[0,3]$的弧段绕x轴旋转所成旋转体的体积 V.

解 $v = \int_0^3 \pi f^2(x)dx = \int_0^3 \pi\left(\frac{x^2-3x}{x+1}\right)^2 dx$ ------2 分

$= \int_0^3 \pi\left((x-4)^2 + 8 - \frac{40}{x+1} + \frac{16}{(x+1)^2}\right)dx$ --------------4 分

A

$$=\pi\left[\frac{(x-4)^3}{3})+8x-40\ln(1+x)-\frac{16}{1+x}\right]_0^3=(57-80\ln 2)\pi.$$ ------------------------6 分

七．（8 分）判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{\ln n}{n^p})$ $(p>0)$ 的收敛性, 若收敛, 请判断是条件收敛还是绝对收敛, 并说明理由.

解 $\because \frac{\ln n}{n^p}\to 0, \therefore \sin(\frac{\ln n}{n^p})\sim\frac{\ln n}{n^p}\to 0,$ --------------------1 分

当 $p>1, \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p}\cdot n^{\frac{1+p}{2}}=0,$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{\ln n}{n^p})$绝对收敛; -------------------------------------3 分

当 $p\le 1, \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p}\cdot n=\infty,$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{\ln n}{n^p})$ 非绝对收敛; ---------------------4 分

设 $f(x)=\sin(\frac{\ln x}{x^p}),\quad f'(x)=\cos(\frac{\ln x}{x^p})\cdot\frac{x^{p-1}(1-p\ln x)}{x^{2p}}<0\ (x>e^{\frac{1}{p}})$ ----------6 分

所以 $\sin(\frac{\ln n}{n^p})$ 当 $n>[e^{\frac{1}{p}}]$ 单调减少,由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{\ln n}{n^p})$收敛.

----------------8 分

于是原级数当 $p>1$时绝对收敛, $p\le 1$时条件收敛.

八．(6 分) 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导, $f(0)\cdot f(1)>0$, 且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明

1. $f(x)$在$(0,1)$内至少存在两个零点；
2. 在$(0,1)$内至少存在一点ξ, 使 $f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$.

证 1. $f(0)\cdot f(1)>0\Rightarrow f(0)$与$f(1)$同号, 不妨设$f(0)>0,\ f(1)>0$.

若 $f(x)$在$[0,1]$上 $f(x)\ge 0$, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$. 故一定存在 $x_0\in(0,1)$, 满足 $f(x_0)<0$.

-----------------1 分

于是 $f(x)$在$[0,x_0]$与$[x_0,1]$都满足零点存在定理的条件, 所以存在 $x_1\in(0,x_0), x_2\in(x_0,1)$, 满足 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

----------------3 分

2. 令$F(x)=f(x)e^{3\int_0^x f^2(t)dt}$, $F(x)$在区间$[x_1,x_2]$上可导, 且$F(x_1)=F(x_2)=0$,

由罗尔定理知存在$\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$, 有$F'(\xi)=0$.

而$F'(x)=f'(x)e^{3\int_0^x f^2(t)dt}+3f^3(x)e^{3\int_0^x f^2(t)dt}$, 故存在$\xi\in(0,1)$, 有$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$.

-----------------6 分