§1.8　上极限和下极限

一、表述上下极限（直观解释）

1. 若$\{a_n\}$有界$\to$必有收敛子列

将$\{a_n\}$所有收敛子列的极限全体记为集合E

E——$\{a_n\}$极限点集合.

$\inf E$ 称为$\{a_n\}$的下极限

——极限点中最小者，记作：$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

$\sup E$称为$\{a_n\}$的上极限

——极限点中最大者，记作：$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

若$\{a_n\}$无界，则必有子列$\to \pm\infty$，仍用E表示全体子列极限的集合，此集合包括$\pm\infty$

$$\begin{cases} \inf E \overset{\Delta}{=} \liminf a_n & (\text{可能} = -\infty) \\ \sup E \overset{\Delta}{=} \limsup a_n & (\text{可能} = +\infty) \end{cases}$$

2. 显然 ① $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n \le \lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在。

③ 上下极限总是存在的。（包括$\pm\infty$）

二、上下极限的另一种表达方式

1. $$\underline{x_n} = \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} = \inf_{p\geq 0}\{x_{n+p}\},$$

$\{\underline{x_n}\}$称为下数列.

$$\overline{x_n} = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} = \sup_{p\geq 0}\{x_{n+p}\},$$

$\{\overline{x_n}\}$称为上数列.

2. $\{\underline{x_n}\}\uparrow, \{\overline{x_n}\}\downarrow$, 且$\forall n \in N^*$, $\underline{x_n} \leq x_n \leq \overline{x_n}$.

3. 给定数列$\{x_n\}$,

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \underline{x_n}\text{存在} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x_n}\text{存在} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf \text{可记为} \varliminf\limits_{n\to\infty}\text{，表示下极限;} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sup \text{可记为} \varlimsup\limits_{n\to\infty}\text{，表示上极限.} \end{cases}$$

4. 保序性:

给定数列$\{x_n\},\{y_n\}$, 若$\exists N_0$, 使得当$n > N_0$时, $x_n \le y_n$.

则:

$$\underline{x_n} \le \underline{y_n}, \quad \overline{x_n} \le \overline{y_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\inf x_n \le \lim_{n\to\infty}\inf y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup x_n \le \lim_{n\to\infty}\sup y_n.$$

三、应用举例

应用1、

例1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A.$

证明：$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall n > N,\ |x_n - A| < \varepsilon,$

令 $y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, 则

$$|y_n - A| = \frac{|(x_1 - A) + (x_2 - A) + \cdots + (x_n - A)|}{n}$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |x_k - A| + \varepsilon, \qquad \forall n > N$$

两边取上极限，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left|y_n - A\right| \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\left|x_k - A\right| + \varepsilon\right) = \varepsilon.$$

由ε任意性， $\lim_{n\to\infty}\sup\left|y_n - A\right| = 0.$

从而 $\lim_{n\to\infty}\inf\left|y_n - A\right| = \lim_{n\to\infty}\sup\left|y_n - A\right| = 0.$

$\therefore \lim_{n\to\infty} y_n = A.$

例2. $x_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > 0$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = A$

证明: $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 对 $\forall n > N$, 有 $x_n < A + \varepsilon$.

$$y_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \sqrt[n]{x_1 \cdots x_N} (A+\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{x_1 \cdots x_N}{(A+\varepsilon)^N}} (A+\varepsilon), \quad \forall n > N.$$

取上极限 $\limsup\limits_{n\to\infty} y_n \le A + \varepsilon$. $(\sqrt[n]{a} \to 1)$

由 ε 任意性, $\limsup\limits_{n\to\infty} y_n \le A$.

同理，

$$\text{由}x_n > A-\varepsilon\text{可知}, \varliminf_{n\to\infty} y_n \ge A$$

$$\therefore \varliminf_{n\to\infty} y_n = \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} y_n = A.$$

应用2、 Stolz 定理

定理 1 $\frac{\infty}{\infty}$

设$\{b_n\}$严格增$\to +\infty$,若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A.$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$

证明： (1) 设A为有限数

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{当} n > N \text{时，有} A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \varepsilon,$$

故

$$A - \varepsilon < \frac{a_{N+1} - a_N}{b_{N+1} - b_N} < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < \frac{a_{N+2} - a_{N+1}}{b_{N+2} - b_{N+1}} < A + \varepsilon,$$

……

$$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \varepsilon.$$

从而有

$$A-\varepsilon\le\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}=\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_{N+1}-a_N)}{(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_{N+1}-b_N)}$$

$$\le A+\varepsilon$$

$$\therefore\quad A-\varepsilon<\frac{\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_N}{b_n}}{1-\frac{b_N}{b_n}}<A+\varepsilon.$$

取极限夹逼可以吗?

变形得 $(A-\varepsilon)(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}<(A+\varepsilon)(1-\frac{b_N}{b_n})+\frac{a_N}{b_n}$

从而， $A-\varepsilon\le\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_n}{b_n}\le\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_n}{b_n}\le A+\varepsilon.$

由ε任意性，$A \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \le A.$

$$\begin{cases} \varliminf\limits_{n\to\infty}(A-\varepsilon)(1-\dfrac{b_N}{b_n})+\dfrac{a_N}{b_n}=A-\varepsilon \\ \varlimsup\limits_{n\to\infty}(A+\varepsilon)(1-\dfrac{b_N}{b_n})+\dfrac{a_N}{b_n}=A+\varepsilon \end{cases}$$

(2) 设$A=+\infty$,则当n充分大时有 $a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1}>0,$

$\therefore \{a_n\}\uparrow$严格增，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=0.$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0,$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=+\infty.$

(3) 设$A=-\infty$，令$c_n=-a_n$， $\dfrac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\to+\infty.$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=+\infty,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=-\infty.$$

引理 1 $\dfrac{a_1}{b_1} \le \dfrac{a_2}{b_2} \le \cdots \le \dfrac{a_n}{b_n}, b_i > 0$,则

$$\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \le \frac{a_n}{b_n}$$

证明: 由$\dfrac{a_i}{b_i} \le \dfrac{a_n}{b_n} \stackrel{\Delta}{=} \alpha$, 知$a_i \le \alpha b_i$

$$故: \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} \le \frac{\alpha b_1 + \alpha b_2 + \cdots + \alpha b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \alpha = \frac{a_n}{b_n}$$

同理,

$$\frac{a_i}{b_i} \ge \frac{a_1}{b_1} = \beta, a_i \ge \beta b_i, \text{ 有 } \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = \frac{\beta \sum b_i}{\sum b_i} = \beta = \frac{a_1}{b_1}$$

例 1． $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

解: $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad y_n = n,$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = a.$$

例 2． $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\quad k\in N^*$

解： $\because\ n^{k+1}-(n-1)^{k+1}$

$$=n^{k+1}-[n^{k+1}-(k+1)n^k+c_{k+1}^2n^{k+1}-\cdots(-1)^{k+1}]$$

$$=(k+1)n^k-c_{k+1}^2n^{k-1}+\cdots+(-1)^{k+2}$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots+(-1)^{k+2}}=\frac{1}{k+1}.$$

例 3． $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n}\quad (a>1)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n-1)^2}{a^n-a^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{a^{n-1}(a-1)}$$

$$=\frac{1}{a-1}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)-(2n-3)}{a^{n-1}-a^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a^{n-2}(a-1)^2}$$

$$=\frac{1}{(a-1)^2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a^{n-2}}=0$$

例 4． $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n-\ln(n-1)}{1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=0$$

(利用 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$)

例5：计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\dots\dots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)$

解：原式=

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\dots\dots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1^p+2^p+\dots\dots+n^p\right)(p+1)-n^{p+1}}{(p+1)n^p}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-(p+1)(n+1)^p-(n+1)^{p+1}+n^{p+1}}{(p+1)\left((n+1)^p-(n)^p\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p+n^{p+1}-\left(n^{p+1}+(p+1)n^p+\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\dots\dots+1\right)}{(p+1)\left((n+1)^p-(n)^p\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)\left(n^p+pn^{p-1}+\dots+1\right)-\left((p+1)n^p+\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\dots\dots+1\right)}{(p+1)\left(\left(n^p+pn^{p-1}+\dots+1\right)-(n)^p\right)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

例6：设 $\begin{cases} a_1 > 0; \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}, n = 1, 2, 3, \ldots\ldots \end{cases}$

求证： $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$

证明：由已知条件 $\{a_n\}$ 单调增的数列，则

$\{a_n\} \to A, +\infty (n \to \infty)$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 则

$A = A + \dfrac{1}{A} \Rightarrow A = +\infty$ **Stolz定理知道：**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{\sqrt{2n}}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}{}^2 - a_n^2}{2(n+1) - 2n}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1} + a_n}{a_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n + \dfrac{1}{a_n}}{a_n} = 1$$

说明：逆命题不成立：

$$b_n = n, \qquad a_n = \begin{cases} n, & n = 2k \\ n-1, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

$$n = 2k, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k - 2k}{1} = 0,$$

$$n = 2k+1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2(k+1) - 2k}{1} = 2.$$

定理2 $\dfrac{0}{0}$

设$a_n \to 0,\ b_n \to 0,$ 且$b_1 > b_2 > b_3 > \cdots,$

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A,$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = A.$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$

作业

习题 1.8

1；2；3.