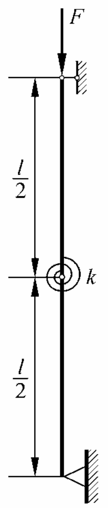
第十章　压杆稳定问题

题号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　页码

(也可通过左侧题号书签直接查找题目与解)

10-1 在分析人体下肢稳定问题时，可简化为图示两端铰支刚杆-蝶形弹簧系统，图中的 k 代表使蝶形弹簧产生单位转角所需之力矩。试求该系统的临界载荷 F_{cr}。



题 10-1 图

解：系统的临界状态（微偏斜状态）如图 10-1 所示。注意到蝶形弹簧产生的转角为 2θ，由上段刚杆的力矩平衡方程

$$k(2\theta) - F \cdot (\theta \frac{l}{2}) = 0$$

得

$$F = \frac{4k}{l}$$

即

$$F_{\rm cr} = \frac{4k}{l}$$

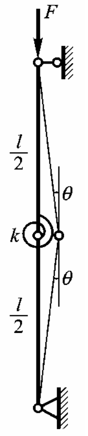
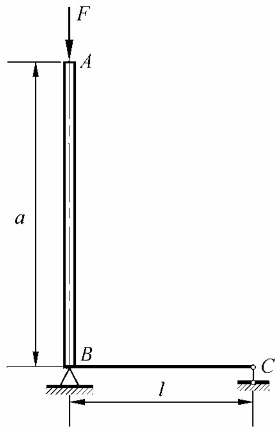


图 10-1

10-3 图示结构，AB 为刚性杆，BC 为弹性梁，在刚性杆顶端承受铅垂载荷 F 作用。试求其临界值。设梁 BC 各截面的弯曲刚度均为 EI 。



题 10-3 图

解：结构的临界状态示如图 10-3。

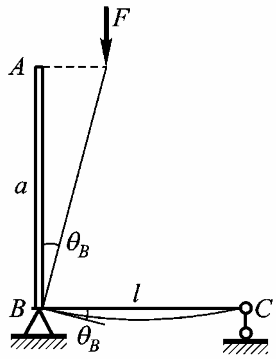


图 10-3

使梁 B 端截面产生转角 θ_B 的力矩应为

$$M_{\mathrm{e}}=\frac{3EI}{l}\theta_B$$

而

$$M_{\mathrm{e}}=F\cdot(\theta_B a)$$

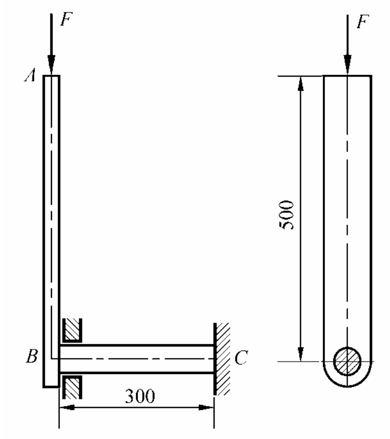
由此得

$$F=\frac{3EI}{al}$$

即

$$F_{\mathrm{cr}}=\frac{3EI}{al}$$

10-4 图示刚性杆 ***AB***，下端与圆截面钢轴 ***BC*** 相连。为使刚性杆在图示铅垂位置保持稳定平衡，试确定轴 ***BC*** 的直径 ***d***。已知 ***F* = 42 kN**，切变模量 ***G* = 79 GPa**。



题 10-4 图

解：刚性杆 AB 在微偏斜（设偏斜角为 φ，见图 10-4）状态下处于平衡，此时加给轴 BC 的扭力矩为

$$M_B=Fa\varphi$$

而

$$\varphi=\frac{Tl}{GI_{\mathrm{p}}}$$

注意到 $T=M_B$，于是得

$$F=\frac{GI_{\mathrm{p}}}{al}$$

即

$$F_{\mathrm{cr}}=\frac{GI_{\mathrm{p}}}{al}=\frac{\pi Gd^4}{32al}$$

由此得（题中给出 ***F*=42kN**）

$$d=\sqrt[4]{\frac{32alF_{\mathrm{cr}}}{\pi G}}=\sqrt[4]{\frac{32\times0.500\times0.300\times42\times10^3}{\pi\times79\times10^9}}\ \mathrm{m}=0.030\ \mathrm{m}=30\ \mathrm{mm}$$

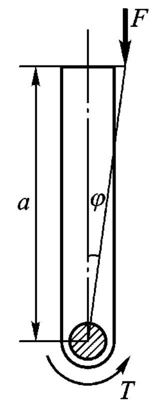
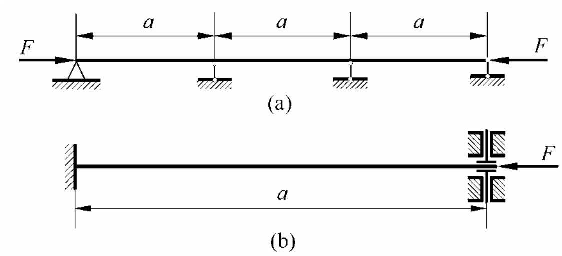


图 10-4

10-7 试确定图示各细长压杆的相当长度与临界载荷。设弯曲刚度 ***EI*** 为常数。



题 10-7 图

(a)解:相当长度为

$$l_{\mathrm{eq}}=a$$

临界载荷为

$$F_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2EI}{(a)^2}=\frac{\pi^2EI}{a^2}$$

(b)解：该细长压杆的微弯状态如图 10-7b 所示。

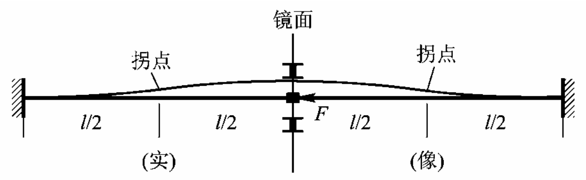


图 10-7b

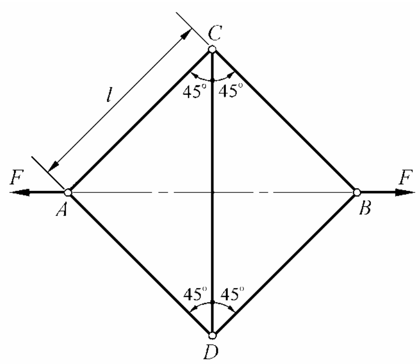
对比两端铰支细长压杆的微弯状态，这里半个正弦波相应的长度为l（看两个拐点之间的长度），即

$$l_{\mathrm{eq}} = l$$

而临界载荷则为

$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

10-8 图示正方形桁架，各杆各截面的弯曲刚度均为 EI，且均为细长杆。试问当载荷 F 为何值时结构中的个别杆件将失稳？如果将载荷 F 的方向改为向内，则使杆件失稳的载荷 F 又为何值？



题 10-8 图

解：1. 当 F 向外时

竖向杆 CD 受压，其余四根杆受拉。

设杆 CD 编号为 5，则有

$$F_{\mathrm{N5}} = F$$

由此得

$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2}l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{2l^2}$$

2. 当 F 向内时

此时杆 5 受拉，其余各杆（编号 1，2，3，4）受压。且

$$F_{\mathrm{N1}} = F_{\mathrm{N2}} = F_{\mathrm{N3}} = F_{\mathrm{N4}} = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

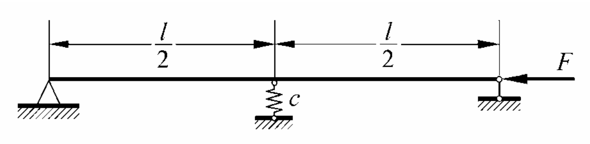
由此得

$$F_{\mathrm{cr}} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi^2 EI}{l^2}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi^2 EI}{l^2}$$

10-10 图示两端铰支细长压杆，弯曲刚度 EI 为常数，压杆中点用弹簧常量为 c 的弹簧支持。试证明压杆的临界载荷满足下述方程：

$$\sin\frac{kl}{2}\left[\sin\frac{kl}{2}-\frac{kl}{2}\left(1-\frac{4k^2EI}{cl}\right)\cos\frac{kl}{2}\right]=0$$

式中，$k=\sqrt{F/(EI)}$。



题 10-10 图

解：该细长压杆的微弯状态如图 10-10 所示。

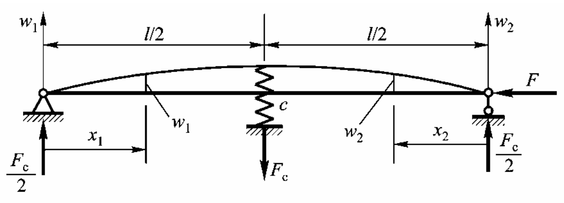


图 10-10

按图中所取坐标，有

$$M(x_1)=\frac{F_c}{2}x_1-Fw_1,\ \ M(x_2)=\frac{F_c}{2}x_2-Fw_2$$

$$w_1''+k^2w_1=\frac{F_c}{2F}k^2x_1,\ \ w_2''+k^2w_2=\frac{F_c}{2F}k^2x_2$$

式中，

$$k^2=\frac{F}{EI}$$

通解为

$$w_1=A_1\sin kx_1+B_1\cos kx_1+\frac{F_c}{2F}x_1$$

$$w_2=A_2\sin kx_2+B_2\cos kx_2+\frac{F_c}{2F}x_2$$

$$\text{当}\ x_1=0,\ \ w_1=0\rightarrow B_1=0$$

$$\text{当}\ x_2=0,\ \ w_2=0\rightarrow B_2=0$$

$$\text{当}\ x_1=x_2=\frac{l}{2},\ \ w_1=w_2=\frac{F_c}{c},\ \ w_1'=-w_2'$$

或写成

$$
\begin{cases}
A_1\sin\dfrac{kl}{2}+\dfrac{F_c l}{4F}=\dfrac{F_c}{c}\\
A_2\sin\dfrac{kl}{2}+\dfrac{F_c l}{4F}=\dfrac{F_c}{c}\\
A_1 k\cos\dfrac{kl}{2}+\dfrac{F_c}{2F}=-A_2 k\cos\dfrac{kl}{2}-\dfrac{F_c}{2F}
\end{cases}
$$

重排后，得

$$
\begin{cases}
(\sin\dfrac{kl}{2})A_1+0+(\dfrac{l}{4F}-\dfrac{1}{c})F_c=0 & (1)\\
0+(\sin\dfrac{kl}{2})A_2+(\dfrac{l}{4F}-\dfrac{1}{c})F_c=0 & (2)\\
(k\cos\dfrac{kl}{2})A_1+(k\cos\dfrac{kl}{2})A_2+\dfrac{1}{F}F_c=0 & (3)
\end{cases}
$$

这里，A_1, A_2和F_c不可全为零，必要求其系数行列式为零，即

$$
\begin{vmatrix}
\sin\dfrac{kl}{2} & 0 & \dfrac{l}{4F}-\dfrac{1}{c}\\
0 & \sin\dfrac{kl}{2} & \dfrac{l}{4F}-\dfrac{1}{c}\\
k\cos\dfrac{kl}{2} & k\cos\dfrac{kl}{2} & \dfrac{1}{F}
\end{vmatrix}=0
$$

展开上列行列式，并注意到$F=EIk^2$，可得

$$
\frac{1}{EIk^2}\sin\frac{kl}{2}[\sin\frac{kl}{2}-k(\frac{l}{2}-\frac{2k^2EI}{c})\cos\frac{kl}{2}]=0
$$

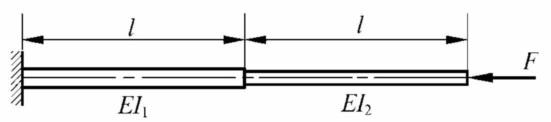
或简化成

$$
\sin\frac{kl}{2}[\sin\frac{kl}{2}-\frac{kl}{2}(1-\frac{4k^2EI}{cl})\cos\frac{kl}{2}]=0
$$

10-11 图示阶梯形细长压杆，左、右两段各截面的弯曲刚度分别为 EI_1 与 EI_2 。试证明压杆的临界载荷满足下述方程：

$$
\tan k_1 l\cdot\tan k_2 l=\frac{k_2}{k_1}
$$

式中：$k_1=\sqrt{F/(EI_1)}$; $k_2=\sqrt{F/(EI_2)}$ 。



题 10-11 图

解：该压杆的微弯状态如图 10-11 所示。

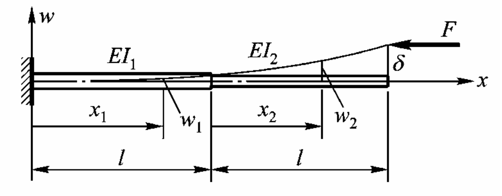


图 10-11

按图中所取坐标，有

$$M(x_1)=F(\delta-w_1),\quad M(x_2)=F(\delta-w_2)$$

进而可得

$$w_1''+k_1^2w_1=k_1^2\delta,\quad w_2''+k_2^2w_2=k_2^2\delta$$

式中，

$$k_1^2=\frac{F}{EI_1},\quad k_2^2=\frac{F}{EI_2}$$

以上二微分方程的通解为

$$\begin{aligned}w_1&=A_1\sin k_1x_1+B_1\cos k_1x_1+\delta\\ w_2&=A_2\sin k_2x_2+B_2\cos k_2x_2+\delta\end{aligned}$$

定未知常数的条件为

$$\begin{aligned}&x_1=0,\quad w_1=0,\quad w_1'=0\\ &\left.\begin{aligned}x_1&=l\\ x_2&=0\end{aligned}\right\},\quad w_1=w_2,\quad w_1'=w_2'\\ &x_2=l,\quad w_2=\delta\end{aligned}$$

由这些条件依次得到

$$B_1+\delta=0\rightarrow B_1=-\delta$$

$$k_1A_1=0\rightarrow A_1=0$$

$$-\delta\cos k_1l+\delta=B_2+\delta\rightarrow B_2=-\delta\cos k_1l \tag{a}$$

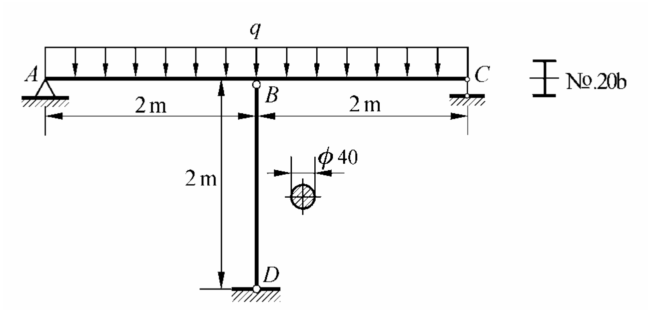
$$-B_1k_1\sin k_1l=A_2k_2\rightarrow A_2=\frac{k_1}{k_2}\delta\sin k_1l \tag{b}$$

$$A_2\sin k_2l+B_2\cos k_2l+\delta=\delta\rightarrow A_2\sin k_2l+B_2\cos k_2l=0 \tag{c}$$

将式(a)和(b)代入式(c)，得到

$$\tan k_1l\cdot\tan k_2l=\frac{k_2}{k_1}$$

10-13 图示结构，由横梁 *AC* 与立柱 *BD* 组成，试问当载荷集度 q =20 N/mm 与 q =26 N/mm 时，截面 *B* 的挠度分别为何值。横梁与立柱均用低碳钢制成，弹性模量 E = 200 GPa，比例极限 σ_p =200 MPa。



题 10-13 图

解：1.求立柱 BD 的临界载荷 F_{cr}

给立柱和梁编号分别为 1 和 2，我们有

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{200\times10^9}{200\times10^6}} = 99.3$$

$$i = \sqrt{\frac{I_1}{A_1}} = \frac{d}{4} = 10\text{mm} = 0.010\text{m}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1\times2.00}{0.010} = 200 > \lambda_p$$

立柱 BD 为大柔度杆，其临界载荷为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{l_1^2} = \frac{\pi^2\times200\times10^9}{2.00^2}\times\frac{\pi\times0.040^4}{64}\text{N} = 6.2013\times10^4\text{N} = 62.013\text{kN}$$

2.计算 q_{cr}

这里的 q_{cr} 系指使立柱刚刚到达 F_{cr} 时的 q 值，立柱 BD 还处在直线平衡状态。B 处的变形协调条件为

$$w_B = \Delta l_1$$

引入物理关系

$$w_B = \frac{5q_{cr}l_2^4}{384EI_2} - \frac{F_{cr}l_2^3}{48EI_2}，\ \Delta l_1 = \frac{F_{cr}l_1}{EA_1}$$

并代入 l_1, l_2, E, F_{cr} 的已知数据及

$$I_2 = 2500\text{cm}^4 = 2.500\times10^{-5}\text{m}^4，\ A_1 = \frac{\pi}{4}0.040^2\text{m}^2 = 1.2566\times10^{-3}\text{m}^2$$

计算可得

$$q_{cr} = 2.555\times10^4\text{N/m} = 25.55\text{N/mm}$$

3.计算 $q = 20\text{N/mm}$ 时的挠度

由于 $q < q_{cr}$，立柱中 $F_N < F_{cr}$，直线平衡状态是稳定的。

由变形协调条件

$$w_B = \Delta l_1$$

得

$$\frac{5ql_2^4}{384EI_2} - \frac{F_N l_2^3}{48EI_2} = \frac{F_N l_1}{EA_1}$$

代入已知数据后，算得

$$F_N = 4.8554\times10^4\,\mathrm{N} = 48.554\mathrm{kN}$$

进而可得截面 B 的挠度为

$$w_B = \Delta l_1 = \frac{F_N l_1}{EA_1} = 3.86\times10^{-4}\,\mathrm{m} = 0.386\mathrm{mm}$$

4.计算 $q = 26\mathrm{N/mm}$ 时的挠度

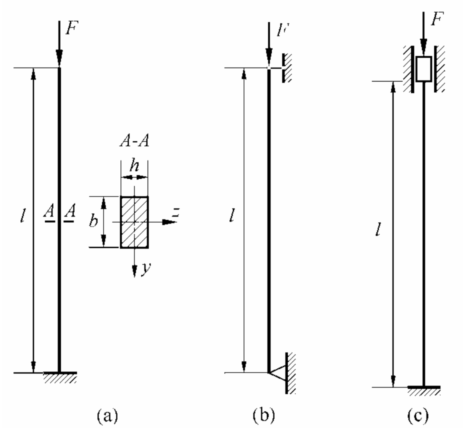
此时 $q > q_{cr}$，立柱处于微弯状态，$F_N = F_{cr}$，截面 B 的挠度由梁变形确定，即

$$\begin{aligned} w_B' &= \frac{5ql_2^4}{384EI_2} - \frac{F_{cr}l_2^3}{48EI_2} \\ &= \frac{5\times2.60\times10^4\times4.00^4\,\mathrm{m}}{384\times200\times10^9\times2.500\times10^{-5}} - \frac{62013\times4.00^3\,\mathrm{m}}{48\times200\times10^9\times2.500\times10^{-5}} \\ &= 7.97\times10^{-4}\,\mathrm{m} = 0.797\mathrm{mm} \end{aligned}$$

10-15 图示矩形截面压杆，有三种支持方式。杆长 l = 300 mm，截面宽度 b =20 mm，高度 h =12 mm，弹性模量 E = 70 GPa，λ_p=50，λ_0=0，中柔度杆的临界应力公式为

$$\sigma_{cr}=382\mathrm{MPa}-(2.18\mathrm{MPa})\lambda$$

试计算它们的临界载荷，并进行比较。



题 10-15 图

(a)解： $$I_{min} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.020\times0.012^3}{12}\,\mathrm{m}^4 = 2.88\times10^{-9}\,\mathrm{m}^4$$

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{h}{\sqrt{12}}=\frac{0.012}{\sqrt{12}}\mathrm{m}=3.464\times10^{-3}\mathrm{m}$$

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{2\times0.300}{3.464\times10^{-3}}=173.2>\lambda_{\mathrm{p}}$$

此杆为大柔度杆，其临界载荷为

$$F_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2EI}{(2l)^2}=\frac{\pi^2\times70\times10^9\times2.88\times10^{-9}}{(2\times0.300)^2}\mathrm{N}=5.53\times10^3\mathrm{N}=5.53\mathrm{kN}$$

(b)解：

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times0.300}{3.464\times10^{-3}}=86.6>\lambda_{\mathrm{p}}$$

此杆为大柔度杆，其临界载荷为

$$F_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2EI}{l^2}=\frac{\pi^2\times70\times10^9\times2.88\times10^{-9}}{0.300^2}\mathrm{N}=2.21\times10^4\mathrm{N}=22.1\mathrm{kN}$$

(c)解：

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{0.5\times0.300}{3.464\times10^{-3}}=43.3$$

$\lambda_0<\lambda<\lambda_{\mathrm{p}}$，为中柔度杆。

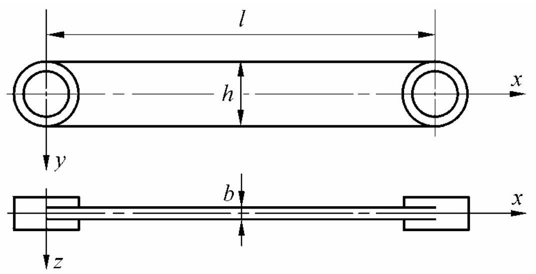
$$\sigma_{\mathrm{cr}}=(382-2.18\lambda)\mathrm{MPa}=(382-2.18\times43.3)\mathrm{MPa}=287.6\mathrm{MPa}$$

于是得

$$F_{\mathrm{cr}}=\sigma_{\mathrm{cr}}A=287.6\times10^6\times(0.020\times0.012)\mathrm{N}=6.90\times10^4\mathrm{N}=69.0\mathrm{kN}$$

10-18

图示压杆，横截面为 $b\times h$ 的矩形，试从稳定性方面考虑，h/b 为何值最佳。当压杆在 x- z 平面内失稳时，可取长度因数 $\mu_y=0.7$。



题 10-18 图

解：由

$$I_y=\frac{hb^3}{12},\quad I_z=\frac{bh^3}{12}$$

和

$$A=bh$$

得

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\frac{b}{\sqrt{12}}，\ i_z=\frac{h}{\sqrt{12}}$$

从稳定性方面考虑，h/b 的最佳值应使

$$\lambda_y=\lambda_z$$

即

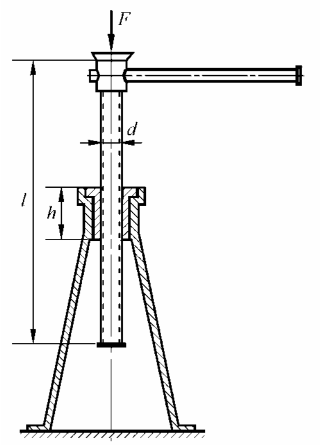
$$\frac{\mu_y l}{i_y}=\frac{\mu_z l}{i_z}，\quad \frac{0.7l\sqrt{12}}{b}=\frac{l\sqrt{12}}{h}$$

由此得

$$\frac{h}{b}=\frac{1}{0.7}=1.429$$

10-19 试检查图示千斤顶丝杠的稳定性。若千斤顶的最大起重量 F =120 kN，丝杠内径 d = 52 mm，丝杠总长 l = 600 mm，衬套高度 h = 100 mm，稳定安全因数 n_{st} = 4，丝杠用 Q235 钢制成，中柔度杆的临界应力公式为

$$\sigma_{cr}=235\text{MPa}-(0.006\,69\ \text{MPa})\lambda^2 \qquad (\lambda<123)$$



题 10-19 图

解：该千斤顶丝杠的

$$l_1=l-h=(0.600-0.100)\text{m}=0.500\text{m}$$

$$A=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi}{4}\times 0.052^2\,\text{m}^2=2.124\times 10^{-3}\,\text{m}^2$$

$$I=\frac{\pi d^4}{64}，\ i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{d}{4}=\frac{0.052}{4}\text{m}=0.013\text{m}$$

$$\lambda=\frac{\mu l_1}{i}=\frac{2\times 0.500}{0.013}=76.9<\lambda_p=123$$

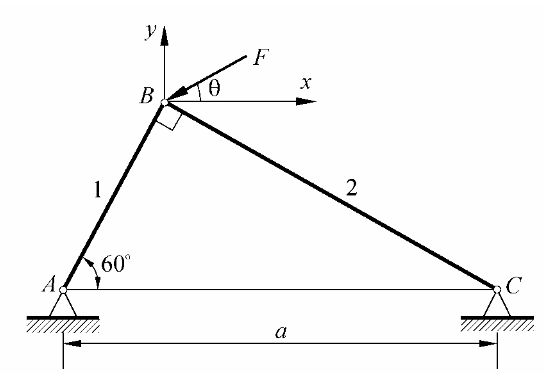
它属于中柔度杆，故有

$$\sigma_{\mathrm{cr}}=235\mathrm{MPa}-(0.00669\mathrm{MPa})\times 76.9^2=195.4\mathrm{MPa}$$

$$[F_{\mathrm{st}}]=\frac{F_{\mathrm{cr}}}{n_{\mathrm{st}}}=\frac{A\sigma_{\mathrm{cr}}}{n_{\mathrm{st}}}=\frac{2.124\times 10^{-3}\times 195.4\times 10^6}{4}\mathrm{N}$$
$$=1.037\times 10^5\mathrm{N}=103.7\mathrm{kN}$$

F 比$[F_{\mathrm{st}}]$大 15.7%，该千斤顶丝杠稳定性不够。

10-20 图示桁架 ABC，由两根材料相同的圆截面杆组成，并在节点 B 承受载荷 F 作用，其方位角θ可在 0°与 90°间变化（即$0^\circ\le\theta\le 90^\circ$）。试求载荷 F 的许用值。已知杆 AB 与杆 BC 的直径分别为 d_1=20 mm 与 d_2=30 mm，支座 A 和 C 间的距离 a = 2 m，材料的屈服应力σ_s = 240 MPa，比例极限σ_p = 196 MPa，弹性模量 E = 200 GPa，按屈服应力规定的安全因数，n_s = 2.0，稳定安全因数 n_{st} = 2.5。



题 10-20 图

解：1.求F_{N1}与F_{N2}的极值和边值

设F_{N1}和F_{N2}均为拉力，由节点 B 的平衡可得

$$F_{\mathrm{N1}}=-\frac{F}{2}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)$$
$$F_{\mathrm{N2}}=-\frac{F}{2}(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)$$

由$\mathrm{d}F_{\mathrm{N1}}/\mathrm{d}\theta=0$求得$F_{\mathrm{N1}}$的极值为

$$F_{\mathrm{N1,max}}=-F\quad\text{（为压力，极值方位角}\theta=60^\circ\text{）}$$

在$0\le\theta\le 90^\circ$范围内，F_{N2}无极值。

两根杆的边值为

$$\theta=0\text{时，}F_{\mathrm{N1}}=-\frac{F}{2}\text{，}F_{\mathrm{N2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}F$$

$$\theta=90^{\circ}\text{时，}F_{\mathrm{N1}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}F\text{，}F_{\mathrm{N2}}=-\frac{F}{2}$$

比较可知，下列四种情况为可能的危险情况：

（1）$\theta=60^{\circ}$ 时，$F_{\mathrm{N1,max}}=-F$ ，杆 1 的稳定问题；

（2）$\theta=90^{\circ}$ 时，$F_{\mathrm{N2}}=-\dfrac{F}{2}$ ，杆 2 的稳定问题；

（3）$\theta=0^{\circ}$ 时，$F_{\mathrm{N2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}F$ ，杆 2 的强度问题；

（4）$\theta=90^{\circ}$ 时，$F_{\mathrm{N1,max}}=-F$ ，杆 1 的强度问题。

2．求 F 的许用值

（1）由杆 1 的 $F_{\mathrm{N1,cr}}$ 求 F_{cr}

$$\lambda=\frac{\mu l_1}{i_1}=\frac{1\times1.000}{\frac{0.020}{4}}=200>\lambda_{\mathrm{p}}=100$$

$$F_{\mathrm{cr}}=F_{\mathrm{N1,cr}}=\frac{\pi^2EI_1}{l_1^2}=\frac{\pi^2\times200\times10^9}{1.000^2}\times(\frac{\pi\times0.020^4}{64})\mathrm{N}=1.550\times10^4\,\mathrm{N}=15.50\mathrm{kN}$$

（2）由杆 2 的 $F_{\mathrm{N2,cr}}$ 求 F_{cr}

$$\lambda=\frac{\mu l_2}{i_2}=\frac{1\times1.732\times4}{0.030}=231>\lambda_{\mathrm{p}}$$

$$F_{\mathrm{N2,cr}}=\frac{\pi^2EI_2}{l_2^2}=\frac{\pi^2\times200\times10^9}{1.732^2}\times(\frac{\pi\times0.030^4}{64})\mathrm{N}=2.62\times10^4\,\mathrm{N}$$

$$F_{\mathrm{cr}}=2F_{\mathrm{N2,cr}}=5.24\times10^4\,\mathrm{N}=52.4\mathrm{kN}$$

比较可知，由稳定条件确定的载荷许用值为

$$[F]=\frac{F_{\mathrm{cr}}}{n_{\mathrm{st}}}=\frac{15.50\mathrm{kN}}{2.5}=6.20\mathrm{kN}\qquad\text{(a)}$$

（3）由杆 2 的强度要求计算 $[F]$

$$\sigma_{2,\max}=\frac{F_{\mathrm{N2}}}{A_2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}F\times4}{\pi d_2^2}\le[\sigma]=\frac{240\mathrm{MPa}}{2}=120\mathrm{MPa}$$

由此得

$$[F] \le \frac{\pi d_2^2[\sigma]}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi \times 0.030^2 \times 120 \times 10^6}{2\sqrt{3}} \mathrm{N} = 9.79 \times 10^4 \mathrm{N} = 97.9\mathrm{kN} \qquad \text{(b)}$$

（4）由杆 1 的强度要求计算 $[F]$

$$\left|\sigma_{1,\max}\right| = \frac{\left|F_{\mathrm{N1,max}}\right|}{A_1} = \frac{4F}{\pi d_1^2} \le [\sigma] = \frac{240}{2}\mathrm{MPa} = 120\mathrm{MPa}$$

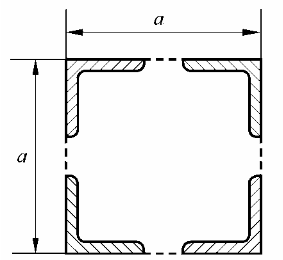
由此得

$$[F] \le \frac{\pi d_1^2[\sigma]}{4} = \frac{\pi \times 0.020^2 \times 120 \times 10^6}{4} \mathrm{N} = 3.77 \times 10^4 \mathrm{N} = 37.7\mathrm{kN} \qquad \text{(c)}$$

（5）结论

比较式(a),(b)和(c)所示结果，最后确定取 $[F] = 6.20\mathrm{kN}$。

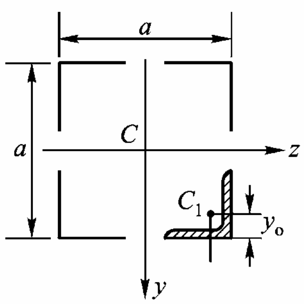
10-21 横截面如图所示之立柱，由四根 80mm×80mm×6mm 的角钢所组成，柱长 l = 6m。立柱两端为铰支，承受轴向压力 F = 450kN 作用。立柱用 Q235 钢制成，许用压应力 [σ]=160MPa，试确定横截面的边宽 a。



题 10-21 图

解：1.查角钢的有关数据

由书中附录 F 表 1 查得（参看图 10-21）



(双对称截面)

图 10-21

$$A_1 = 9.397\mathrm{cm}^2 = 9.397 \times 10^{-4}\mathrm{m}^2$$

$$I_1 = 57.35\mathrm{cm}^4 = 5.735 \times 10^{-7}\mathrm{m}^4$$

$$y_0 = 2.19\mathrm{cm} = 0.0219\mathrm{m}$$

2.计算惯性矩及横截面面积（长度均以 m 为单位）

$$I_z = 4[I_1 + A_1(\frac{a}{2} - y_0)^2] = 4\times[5.735\times10^{-7} + (9.397\times10^{-4})\times(\frac{a}{2} - 0.0219)^2]\text{m}^4$$

$$= [9.397\times10^{-4}a^2 - 8.232\times10^{-5}a + 4.097\times10^{-6}]\text{m}^4 \qquad \text{(a)}$$

$$A = 4A_1 = 4\times9.397\times10^{-4}\text{m}^2 = 3.759\times10^{-3}\text{m}^2$$

3.计算折减系数

$$\varphi = \frac{\sigma}{[\sigma]} = \frac{F}{A[\sigma]} = \frac{450\times10^3}{3.759\times10^{-3}\times160\times10^6} = 0.748$$

4.查λ值

根据φ值及所给材料，由φ–λ图查到$\lambda = 79$。

5．确定边宽a

依据柔度算式$\lambda = \mu l\sqrt{A/I}$，可得

$$I = \frac{A(\mu l)^2}{\lambda^2} = \frac{3.759\times10^{-3}\times(1\times6)^2\text{m}^4}{79^2} = 2.168\times10^{-5}\text{m}^4 \qquad \text{(b)}$$

注意到式(b)与式(a)相等，由此得

$$(9.397\times10^{-4}a^2 - 8.232\times10^{-5}a + 4.097\times10^{-6}) = 2.168\times10^{-5}$$

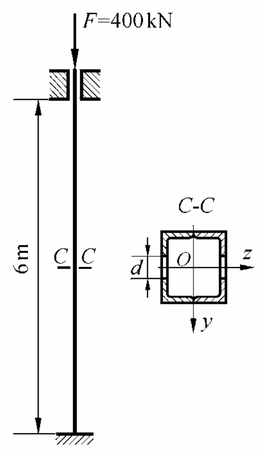
化简后成为

$$(a^2 - 8.76\times10^{-2}a - 1.871\times10^{-2}) = 0$$

$$a = \frac{8.76\times10^{-2} \pm \sqrt{(8.76\times10^{-2})^2 + 4\times1.871\times10^{-2}}}{2}\text{m} = \frac{0.0876\pm0.2873}{2}\text{m}$$

舍去增根，最后取$a = 0.1874\text{m} = 187.4\text{mm}$。

10-23 图示立柱，由两根槽钢焊接而成，在其中点横截面 C 处，开有一直径为 d = 60 mm 的圆孔，立柱用低碳钢 Q275 制成，许用压应力[σ]=180 MPa，轴向压力 F = 400 kN。试选择槽钢型号。



题 10-23 图

解：1．第一次试算

设取$\varphi_1 = 0.5$，得

$$A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{400 \times 10^3\,\mathrm{N}}{0.5 \times (180 \times 10^6\,\mathrm{Pa})} = 4.444 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

单根槽钢的横截面面积为 $A'=2.222\times10^{-3}\mathrm{m}^2$。从书中附录 F 型钢表中查得№16 槽钢横截面的有关数据为

$$A = 25.162\mathrm{cm}^2 = 2.5162 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2, \quad I_z = 935\mathrm{cm}^4 = 9.35 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^4$$

$$I_y = 83.4\mathrm{cm}^4 = 8.34 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^4, \quad b = 65\mathrm{mm} = 6.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$z_0 = 1.75\mathrm{cm} = 1.75 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

由此可得立柱横截面的有关几何量为

$$\begin{aligned}
&A = 2 \times 2.5162 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 = 5.032 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 \\
&I_z = 2 \times 9.35 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^4 = 1.87 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^4 \\
&I_y = 2 \times [8.34 \times 10^{-7} + 2.5162 \times 10^{-3} \times (6.5 - 1.75)^2 \times 10^{-4}]\mathrm{m}^4 \\
&\quad = 1.302 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^4 \\
&I_y < I_z \\
&i_{\min} = \sqrt{\frac{1.302 \times 10^{-5}}{5.032 \times 10^{-3}}}\,\mathrm{m} = 5.087 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

于是有

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0.5 \times 6}{5.087 \times 10^{-2}} = 58.97$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{400 \times 10^3\,\mathrm{N}}{5.032 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2} = 7.95 \times 10^7\,\mathrm{Pa} = 79.5\mathrm{MPa}$$

从$\varphi - \lambda$图中查得$\varphi_1' = 0.822$，由此得

$$[\sigma_{\mathrm{st}}] = \varphi_1'[\sigma] = 0.822 \times (180 \times 10^6\,\mathrm{Pa}) = 148.0\mathrm{MPa}$$

稳定许用应力超过工作应力甚多，故需再算。

2．第二次试算

设取

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(0.5 + 0.822) = 0.661$$

由此可得

$$A \geq \frac{400 \times 10^3\,\mathrm{N}}{0.661 \times (180 \times 10^6\,\mathrm{Pa})} = 3.36 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

单根槽钢的横截面面积为 $A'=1.68\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2$ 。从型钢表中查得№14a 槽钢横截面的有关数据为

$$A=18.516\mathrm{cm}^2=1.8516\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2,\quad I_z=564\mathrm{cm}^4=5.64\times10^{-6}\,\mathrm{m}^4$$

$$I_y=53.2\mathrm{cm}^4=5.32\times10^{-7}\,\mathrm{m}^4,\quad b=58\mathrm{mm}=5.8\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$z_0=1.71\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$

由此可得立柱横截面的有关几何量为

$$A=2\times1.8516\times10^{-3}\mathrm{m}^2=3.7032\times10^{-3}\mathrm{m}^2$$

$$I_y=2\times[5.32\times10^{-7}+1.8516\times10^{-3}\times(5.8-1.71)^2\times10^{-4}]\mathrm{m}^4$$

$$=7.259\times10^{-6}\mathrm{m}^4<I_z$$

$$i_{\min}=\sqrt{\frac{7.259\times10^{-6}}{3.7032\times10^{-3}}}\mathrm{m}=4.427\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$

于是有

$$\lambda=\frac{0.5\times6}{4.427\times10^{-2}}=67.77$$

$$\sigma=\frac{400\times10^3\,\mathrm{N}}{3.7032\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2}=108.0\mathrm{MPa}$$

从 $\varphi-\lambda$ 图中查得 $\varphi_2^{'}=0.782$ ，由此得

$$[\sigma_{\mathrm{st}}]=0.782\times180\mathrm{MPa}=140.8\mathrm{MPa}$$

稳定许用应力超过工作应力仍然较多，还需再算。

3．第三次试算

设取

$$\varphi_3=\frac{1}{2}(0.661+0.782)=0.722$$

由此可得

$$A\geq\frac{400\times10^3\,\mathrm{N}}{0.722\times(180\times10^6\,\mathrm{MPa})}=3.078\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

单根槽钢的横截面面积为 $A'=1.539\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2$ 。从型钢表中查得№12.6 槽钢横截面的有关数据为

A=15.692cm^2=1.5692×10^{-3}m^2, I_z =391cm^4=3.91×10^{-6}m^4

I_y =38.0cm^4=3.80×10^{-7}m^4, b=53mm=5.3×0^{-2}m

z_0 =1.59cm=1.59××10^{-2}m

由此可得立柱横截面的有关几何量为

$$A = 2 \times 1.5692 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 = 3.1384 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

$$I_y = 2 \times [3.80 \times 10^{-7} + 1.5692 \times 10^{-3} \times (5.3 - 1.59)^2 \times 10^{-4}]\mathrm{m}^4$$
$$= 5.080 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^4 < I_z$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{5.080 \times 10^{-6}}{3.1384 \times 10^{-3}}}\mathrm{m} = 4.023 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

于是有

$$\lambda = \frac{0.5 \times 6}{4.023 \times 10^{-2}} = 74.57$$

$$\sigma = \frac{400 \times 10^3\,\mathrm{N}}{3.1384 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2} = 127.5\mathrm{MPa}$$

从 $\varphi - \lambda$ 图中查得 $\varphi_3^{'} = 0.742$，由此得

$$[\sigma_{\mathrm{st}}] = 0.742 \times 180\mathrm{MPa} = 133.6\mathrm{MPa}$$

稳定许用应力略大于工作应力（大 **4.8%**），选用№**12.6** 槽钢能满足稳定性要求。

4．强度校核

查型钢表，得№**12.6** 槽钢的 t=**5.5mm=5.5×10^{-3}m**，由此得

$$\sigma = \frac{F}{A_C} = \frac{400 \times 10^3\,\mathrm{N}}{2 \times (1.5692 \times 10^{-3} - 60 \times 10^{-3} \times 5.5 \times 10^{-3})\mathrm{m}^2} = 161.4\mathrm{MPa} < [\sigma]$$

可见，其强度也符合要求。

5．结论

选用№**12.6** 槽钢。