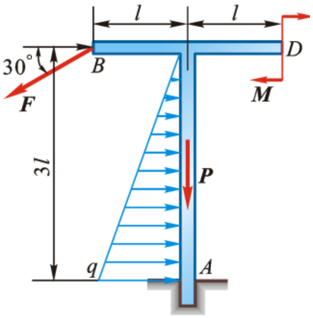
理论力学　期末考试试题~~——A 卷~~

1-1、自重为 P=100kN 的 T 字形钢架 ABD,置于铅垂面内，载荷如图所示。其中转矩 M=20kN.m，拉力 F=400kN,分布力 q=20kN/m,长度 l=1m。试求固定端 A 的约束力。



解：取 *T* 型刚架为受力对象，画受力图.

其中　$F_1=\frac{1}{2}q\times 3l=30\text{kN}$

$\sum F_x=0$　$F_{Ax}+F_1-F\sin 60°=0$

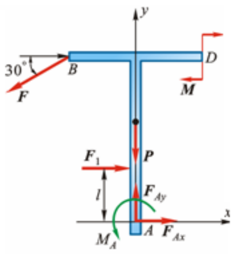
$\sum F_y=0$　$F_{Ay}-P-F\cos 60°=0$

$\sum M_A=0$

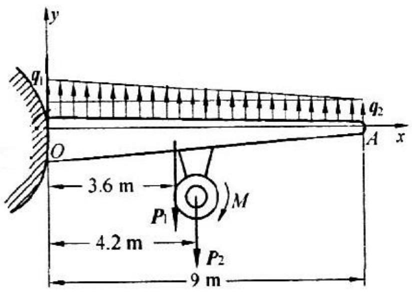
$M_A-M-F_1\cdot l+F\cos 60°\cdot l+F\sin 60°\cdot 3l=0$

$F_{Ax}=316.4\text{kN}$　　$F_{Ay}=300\text{kN}$

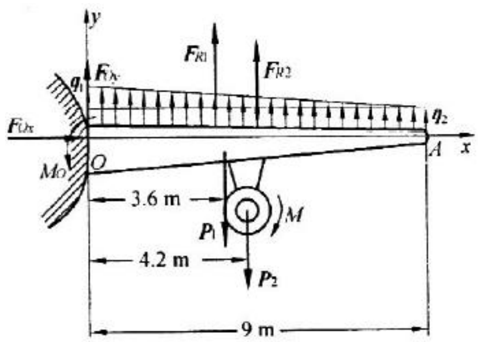
$M_A=-1188\text{kN}\cdot\text{m}$



1-2 如图所示，飞机机翼上安装一台发动机，作用在机翼 OA 上的气动力按梯形分布：q_1=60kN/m，q_2=40kN/m，机翼重 p_1=45kN，发动机重 p_2=20kN，发动机螺旋桨的反作用力偶矩 M=18kN.m。求机翼处于平衡状态时，机翼根部固定端 O 所受的力。



解：



解　研究机翼，把梯形载荷分解为一三角形载荷与一矩形载荷，其合力分别为

$$F_{R1} = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)\cdot 9 = 90 \text{ kN},\quad F_{R2} = 9\cdot q_2 = 360 \text{ kN}$$

分别作用在距离 O 点 3 m 与 4.5 m 处，如图所示，由

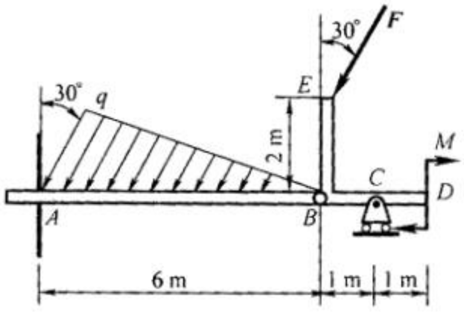
$\Sigma X = 0,\ F_{Ox} = 0$

$\Sigma Y = 0,\ F_{Oy} - P_1 - P_2 + F_{R1} + F_{R2} = 0$

$\Sigma M_O(\boldsymbol{F}) = 0,\ M_O - 3.6P_1 - 4.2P_2 - M + 3F_{R1} + 4.5F_{R2} = 0$

解得　$F_{Ox} = 0,\ F_{Oy} = -385 \text{ kN},\ M_O = -1\,626 \text{ kN}\cdot\text{m}$

1-3 图示构件由直角弯杆 EBD 以及直杆 AB 组成，不计各杆自重，已知 q=10kN/m，F=50kN，M=6kN.m，各尺寸如图。求固定端 A 处及支座 C 的约束力。



解　先研究构架 EBD 如图(b)，由

$\Sigma X = 0,\quad F_{Bx} - F\sin 30^\circ = 0$

$\Sigma Y = 0,\quad F_{By} + F_{NC} - F\cos 30^\circ = 0$

$\Sigma M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad F_{NC}\cdot 1 - M + 2F\sin 30^\circ = 0$

解得　$F_{Bx} = 25 \text{ kN},\ F_{By} = 87.3 \text{ kN},\ F_{NC} = -44 \text{ kN}$

再研究 AB 梁如图(a)，由

$$\Sigma X = 0,\quad -\frac{1}{2}q \cdot 6\sin 30^{\circ} + F_{Ax} - F'_{Bx} = 0$$

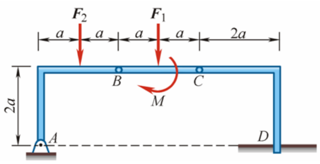
$$\Sigma Y = 0,\quad F_{Ay} - \frac{1}{2}q \cdot 6\cos 30^{\circ} - F'_{By} = 0$$

$$\Sigma M_A(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M_A - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot q\cos 30^{\circ} - 6F'_{By} = 0$$

解得 $F_{Ax} = 40\ \text{kN}$，$F_{Ay} = 113.3\ \text{kN}$，$M_A = 575.8\ \text{kN}\cdot\text{m}$

此题也可先研究 EBD，求得 F_{NC} 之后，再研究整体，求 A 处反力，这样可减少平衡方程数，但计算量并未明显减少。

1-4　已知：如图所示结构，a, M=Fa, $F_1 = F_2 = F$，求：A，D 处约束力.



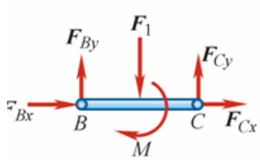
解：

以BC为研究对象，受力如图所示.

$$\sum M_B = 0 \qquad F_{Cy} \cdot 2a - F_1 a - M = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{By} + F_{Cy} - F_1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad F_{Cy} = F \qquad F_{By} = 0$$



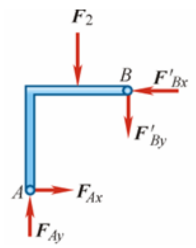
以AB为研究对象，受力如图所示.

$$\sum M_A = 0 \quad F_{Bx}' \cdot 2a - F_{By}' \cdot 2a - F_2 a = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} - F_{Bx}' = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} - F_{By}' - F_2 = 0$$

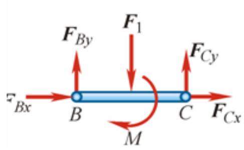
$$\Rightarrow \qquad F_{Bx}' = F_{Ax} = \frac{1}{2}F \qquad F_{Ay} = F$$



再分析BC.

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Cx} + F_{Bx} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad F_{Cx} = -\frac{1}{2}F$$



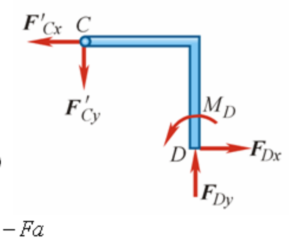
以AB为研究对象，受力如图所示.

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Dx} - F_{Cx}' = 0$$

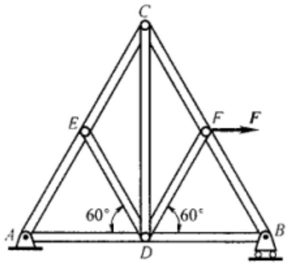
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Dy} - F_{Cy}' = 0$$

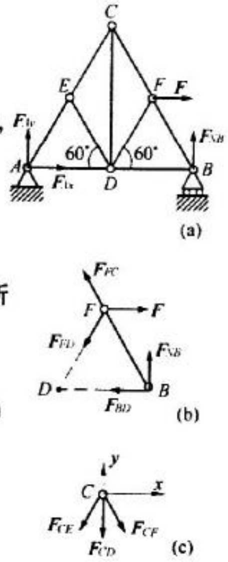
$$\sum M_D = 0 \quad M_D + F_{Cy}' \cdot 2a + F_{Cx}' \cdot 2a = 0$$

$$\Rightarrow \qquad F_{Dx} = -\frac{1}{2}F \qquad F_{Dy} = F \qquad M_D = -Fa$$



1-5、平面桁架受力如图所示。ABC 为等边三角形，且 AD=DB。求杆 CD 的内力。





解 整体受力如图(a)，由 $\Sigma M_A(\boldsymbol{F})=0$，

$$F_{NB}\cdot AB-F\cdot\frac{1}{2}AB\cdot\sin60^\circ=0$$

解得 $$F_{NB}=\frac{\sqrt{3}}{4}F$$

将桁架截开，研究右边部分，如图(b)所示，由

$$\Sigma M_D(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{FC}\cdot DB\cdot\sin60^\circ+F_{NB}\cdot DB-F\cdot DF\cdot\sin60^\circ=0$$

解得 $$F_{FC}=\frac{1}{2}F$$

再研究节点 C，如图(c)，由

$$\Sigma X=0,\quad (F_{CF}-F_{CE})\sin30^\circ=0$$

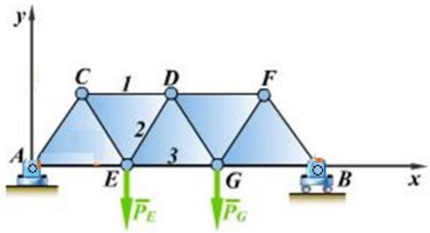
$$\Sigma Y=0,\quad -(F_{CF}+F_{CE})\cos30^\circ-F_{CD}=0$$

解得 $$F_{CD}=-\frac{\sqrt{3}}{2}F=-0.866F(\text{压})$$

本题最简单的解法是，首先断定 DE 杆为零杆，再截取 $\triangle BDF$ 来研究，只由一个方程 $\Sigma M_B(\boldsymbol{F})=0$，即可解出 F_{CD}，读者不妨一试。

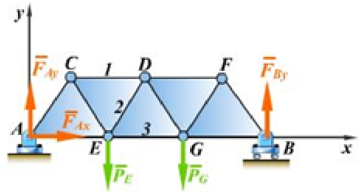
题 3.57 图

1-6、如图所示的平面桁架，A 端采用铰链约束，B 端采用滚动支座约束，各杆件长度为 1m。在节点 E 和 G 上分别作用载荷 F_E =10kN，F_G =7 kN。试计算杆 1、2 和 3 的内力。



解：

取整体，求支座约束力.



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad 2P_E + P_G - 3F_{Ay} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_{By} - P_E - P_G = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Ay} = 9\text{kN} \qquad F_{By} = 8\text{kN}$$

用截面法，取桁架左边部分.

$$\sum M_E = 0 \qquad -F_1 \cdot 1 \cdot \cos 30^0 - F_{Ay} \cdot 1 = 0$$

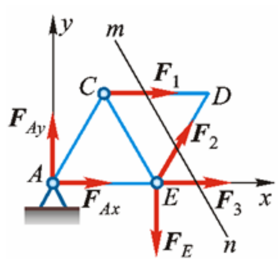
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_2 \cdot \sin 60^0 - P_E = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_1 + F_3 + F_2 \cos 60^0 = 0$$

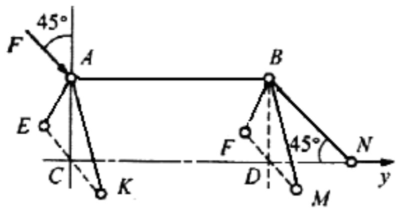
$F_1 = 10.4\text{kN}$ (压)

$F_2 = 1.15\text{kN}$ (拉)

$F_3 = 9.81\text{kN}$ (拉)



2-1 图示空间力系由 6 根桁架构成。在节点 A 上作用力 F，此力在矩形 ABDC 平面内，且与铅直线成 45º 角。ΔEAK=ΔFBM。等腰三角形 EAK，FBM 和 NDB 在顶点 A，B 和 D 处均为直角，又 EC=CK=FD=DM。若 F=10kN，求各杆的内力。



解 节点 A、B 受力分别如图所示。对节点 A，由

$$\Sigma X=0,\quad F_1\sin45^\circ-F_2\sin45^\circ=0$$

$$\Sigma Y=0,\quad F_3+F\sin45^\circ=0$$

$$\Sigma Z=0,\quad -F_1\cos45^\circ-F_2\cos45^\circ-F\cos45^\circ=0$$

解得 $F_1=F_2=-5\ \text{kN}$(压)， $F_3=-7.07\ \text{kN}$(压)

再对节点 B，由

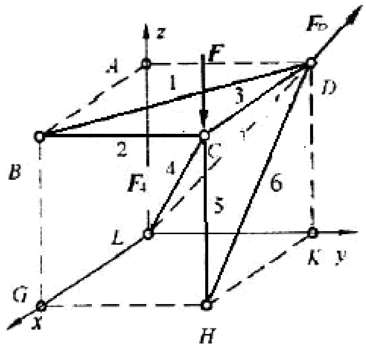
$$\Sigma X=0,\quad F_4\sin45^\circ-F_5\sin45^\circ=0$$

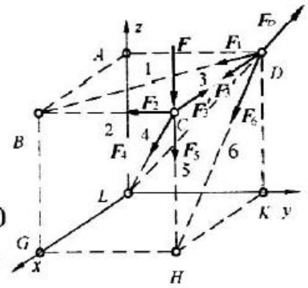
$$\Sigma Y=0,\quad F_6\sin45^\circ-F_3=0$$

$$\Sigma Z=0,\quad -F_4\cos45^\circ-F_5\cos45^\circ-F_6\cos45^\circ=0$$

解得 $F_4=5\ \text{kN}$(拉)，$F_5=5\ \text{kN}$(拉)，$F_6=-10\ \text{kN}$(压)

2-2 杆系由铰链连接，位于正方形的边和对角线上，如图所示。在节点 D 沿对角线 LD 方向作用力 F_D。在节点 C 沿 CH 边铅直向下作用力 F。如铰链 B，L 和 H 是固定的，杆重不计，求各杆的内力。





题 4.30 图

求 各杆的内力。

解 先研究节点 D，由

$\Sigma Y = 0,\ -F_1\cos45^\circ + F_D\cos45^\circ = 0$

$\Sigma Z = 0,\ -F_6\cos45^\circ + F_D\sin45^\circ = 0$

$\Sigma X = 0,\ F_1\sin45^\circ + F_3 + F_6\sin45^\circ = 0$

解得 $F_1 = F_D$(拉)，$F_6 = F_D$(拉)，$F_3 = -\sqrt{2}F_D$(压)

然后研究节点 C，由

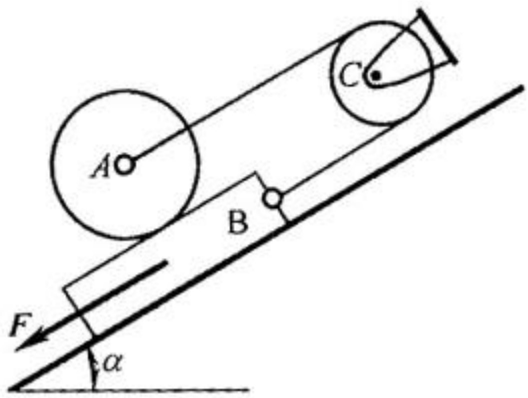
$$\Sigma X = 0,\quad -F_3' - F_4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos45^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0,\quad -F_2 - F_4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin45^\circ = 0$$

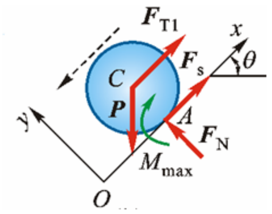
$$\Sigma Z = 0,\quad -F_5 - F - F_4\frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

得 $F_4 = \sqrt{6}F_D$，$F_2 = -\sqrt{2}F_D$，$F_5 = -(F + \sqrt{2}F_D)$

2-3 重为 P_1 ＝980 N，半径为 r =100mm 的滚子 A 与重为 P_2 ＝490 N 的板 B 由通过定滑轮 C 的柔绳相连。已知板与斜面的静滑动摩擦因数 f_s =0.1。滚子 A 与板 B 间的滚阻系数为 δ =0.5mm，斜面倾角 α =30º，柔绳与斜面平行，柔绳与滑轮自重不计，铰链 C 为光滑的。求拉动板 B 且平行于斜面的力 F 的大小。



（1）设圆柱O有向下滚动趋势，取圆柱O



$\Sigma M_A = 0$

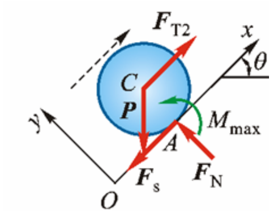
$P\sin\theta \cdot R - F_{T1}\cdot R - M_{max} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad F_N - P\cos\theta = 0$

又 $M_{max} = \delta F_N$

$F_{T1} = P(\sin\theta - \frac{\delta}{R}\cos\theta)$

设圆柱O有向上滚动趋势，取圆柱O



$\Sigma M_A = 0$

$P\sin\theta \cdot R - F_{T2}\cdot R + M_{max} = 0$

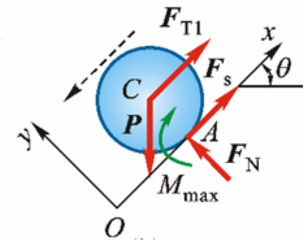
$\Sigma F_y = 0 \quad F_N - P\cos\theta = 0$

又 $M_{max} = \delta F_N$

$$F'_{T\max} = P(\sin\theta + \frac{\delta}{R}\cos\theta) \qquad F_s \le f_s F_{N1} = f_s P\cos\theta$$

系统平衡时 $P(R\sin\theta - \delta\cos\theta) \le M_B \le P(R\sin\theta + \delta\cos\theta)$

（2）设圆柱O有向下滚动趋势.



$\Sigma M_C = 0 \quad F_s \cdot R - M_{max} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad F_N - P\cos\theta = 0$

又 $M_{max} = \delta F_N$

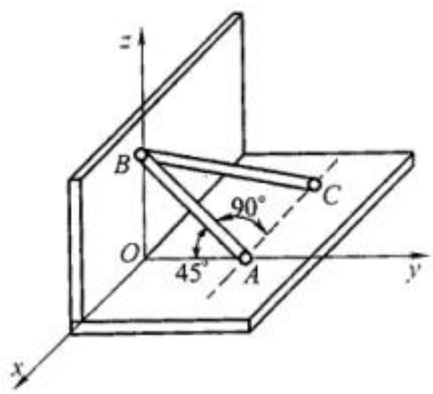
$F_s = \frac{\delta}{R}P\cos\theta$

只滚不滑时，应有 $F_s \le f_s F_N = f_s P\cos\theta$ 则 $f_s \ge \frac{\delta}{R}$

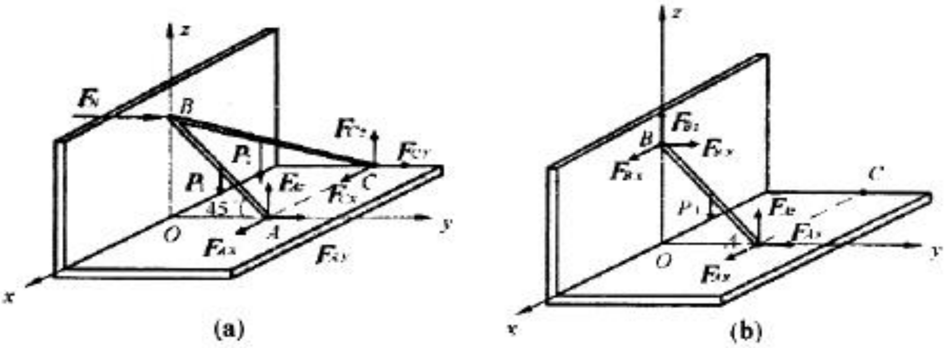
同理，圆柱O有向上滚动趋势时得 $f_s \ge \frac{\delta}{R}$

圆柱匀速纯滚时，$f_s \ge \frac{\delta}{R}$.

2-4 两个均质杆 AB 和 BC 分别重 P_1 和 P_2，其端点 A 和 C 用球铰固定在水平面，另一端 B 由球铰链相连接，靠在光滑的铅直墙上，墙面与 AC 平行，如图所示。如 AB 与水平线的交角为 45º，∠BAC=90º，求 A 和 C 的支座约束力以及墙上点 B 所受的压力。



解 先研究 AB 杆，受力如图(b)，由



题 4.27 图

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad -F_{Ax}\cdot OA=0\qquad 得 F_{Ax}=0$$

再取 AB、CD 两杆为一体来研究，受力如图(a)所示，由

$$\Sigma M_{AC}(\boldsymbol{F})=0,\quad (P_1+P_2)\frac{AB}{2}\cos45^\circ-F_N\cdot AB\sin45^\circ=0$$

$$\Sigma X=0,\quad F_{Ax}+F_{Cx}=0$$

$$\Sigma M_y(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{Cz}\cdot AC-P_2\frac{1}{2}\cdot AC=0$$

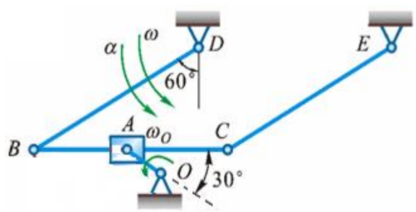
$$\Sigma Z=0,\quad F_{Az}+F_{Cz}-P_1-P_2=0$$

$$\Sigma M_z(\boldsymbol{F})=0,\quad -(F_{Ax}+F_{Cx})\cdot OA-F_{Cy}\cdot AC=0$$

$$\Sigma Y=0,\quad F_{Ay}+F_{Cy}+F_N=0$$

解得
$$F_N=\frac{1}{2}(P_1+P_2),F_{Cx}=0,F_{Cz}=\frac{1}{2}P_2,$$
$$F_{Az}=P_1+\frac{1}{2}P_2,F_{Cy}=0,F_{Ay}=-\frac{1}{2}(P_1+P_2)$$

3-1 已知：如图所示平面机构中，曲柄 $OA=r$，以匀角速度 ω_0 转动。套筒 A 沿 BC 杆滑动。$BC=DE$，且 $BD=CE=l$。求图示位置时，杆 BD 的角速度 ω 和角加速度 α 。



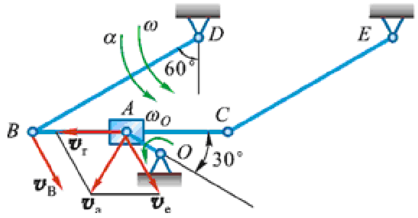
解：

1. 动点：滑块A　　动系：BC杆

绝对运动：圆周运动（O点）

相对运动：直线运动（BC）

牵连运动：平移



2.速度

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

大小　$r\omega_O$　？　？

方向　✓　✓　✓

$$v_r = v_e = v_a = r\omega_O$$

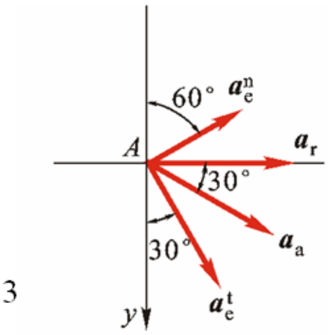
$$\omega_{BD} = \frac{v_e}{BD} = \frac{r\omega_O}{l}$$

3. 加速度

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r$$

大小　$r\omega_O^2$　？　$l\omega_{BD}^2$　？

方向　✓　✓　✓　✓



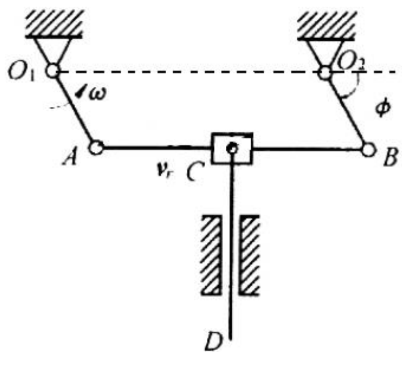
沿y轴投影

$$a_a \sin 30° = a_e^t \cos 30° - a_e^n \sin 3$$

$$a_e^t = \frac{(a_a + a_e^n)\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\sqrt{3}\omega_O^2 r(l+r)}{3l}$$

$$\alpha_{BD} = \frac{a_e^t}{BD} = \frac{\sqrt{3}\omega_O^2 r(l+r)}{3l^2}$$

3-2　图示铰链四边形机构中，$O_1A = O_2B$ =100mm，又 $O_1O_2 = AB$,杆 O_1A 以等角速度 ω =2rad/s 绕轴 O_1 转动。杆 AB 上有一套筒 C,此套筒与杆 CD 相铰接。机构的各部件都在同一铅直面内。求当Φ=60º时杆 CD 的速度和加速度。（15 分）



解　取 CD 杆上的点 C 为动点，AB 杆为动系，对动点作速度分析和加速度分析，如图(a)、(b)所示，图中

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r, \quad \boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_A$$

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r, \quad \boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_A$$

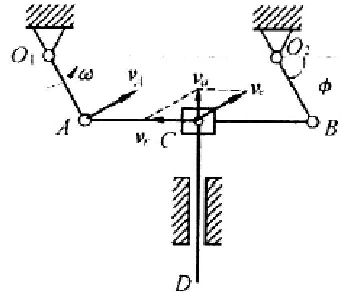
式中 $v_A = O_1A \cdot \omega = 0.2\ \mathrm{m/s}$

$$a_A = O_1A \cdot \omega^2 = 0.4\ \mathrm{m/s^2}$$

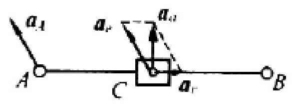
解出杆 CD 的速度、加速度为

$$v_a = v_A\cos\varphi = 0.1\ \mathrm{m/s}$$

$$a_a = a_A\sin\varphi = 0.3464\ \mathrm{m/s^2}$$

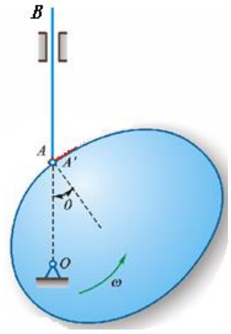


(a)



(b)

4-1 已知：如图所示凸轮机构中，凸轮以匀角速度 ω 绕水平 O 轴转动，带动直杆 AB 沿铅直线上、下运动，且 O，A，B 共线。凸轮上与点 A 接触的点为 A'，图示瞬时凸轮轮缘线上点 A' 的曲率半径为 ρ_A，点 A' 的法线与 OA 夹角为 θ，$OA=l$。求该瞬时 AB 的速度及加速度。**（15 分）**



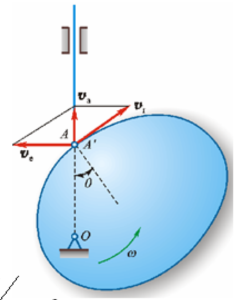
解：

1. 动点（AB杆上A点）　动系：凸轮O

绝对运动：直线运动（AB）

相对运动：曲线运动（凸轮外边缘）

牵连运动：定轴转动（O轴）

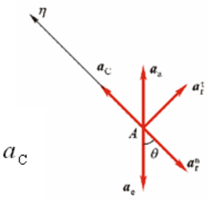


2. 速度　$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

	$\vec{v}_a$	$\vec{v}_e$	$\vec{v}_r$
大小	?	ωl	?
方向	✓	✓	

$$v_a = v_e \tan\theta = \omega l \tan\theta \qquad v_r = v_e / \cos\theta = \omega l / \cos\theta$$

3. 加速度　$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n + \vec{a}_C$

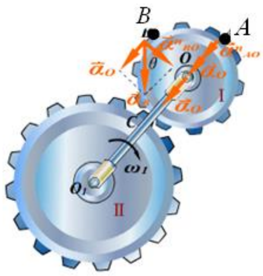


	$\vec{a}_a$	$\vec{a}_e$	$\vec{a}_r^t$	$\vec{a}_r^n$	$\vec{a}_C$
大小	?	$\omega^2 l$	?	v_r^2/ρ_A	$2\omega v_r$
方向	✓	✓	✓	✓	

沿η轴投影　$a_a\cos\theta = -a_e\cos\theta - a_r^n + a_C$

$$a_a = -\omega^2 l\left(1 + \frac{l}{\rho_A\cos^3\theta} - \frac{2}{\cos^2\theta}\right)$$

4-2　已知：如图所示，在外啮合行星齿轮机构中，系杆以匀角速度ω_1绕O_1转动。大齿轮固定，行星轮半径为 r，在大轮上只滚不滑。设 A 和 B 是行星轮缘 上的两点，点 A 在O_1O的延长线上，而点 B 在垂直于O_1O的半径上。求：点 A 和 B 的加速度。



解：

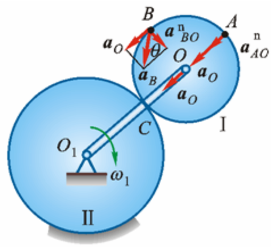
1. 轮 I 作平面运动，瞬心为 C。

$$\omega_2 = \frac{v_O}{r} = \frac{\omega_1 l}{r} \qquad \alpha = \frac{d\omega_2}{dt} = 0$$

2. 选基点为 O

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}^t + \vec{a}_{AO}^n$$

	$\vec{a}_A$	$\vec{a}_O$	$\vec{a}_{AO}^t$	$\vec{a}_{AO}^n$
大小	?	$l\omega_1^2$	0	$r\omega_2^2$
方向	?	√	√	√

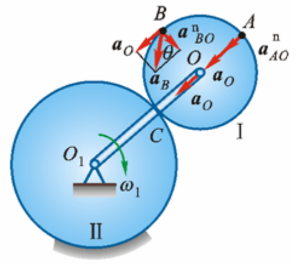


$$a_A = a_O + a_{AO}^n$$
$$= l\omega_1^2 + \frac{l^2}{r}\omega_1^2$$
$$= l\omega_1^2\left(1 + \frac{l}{r}\right)$$

3. $\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}_{BO}^{t} + \vec{a}_{BO}^{n}$

大小 ? $l\omega_1^2$ 0 $r\omega_2^2$

方向 ? √ √ √

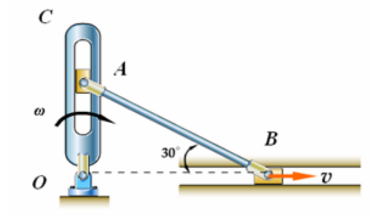


$$a_B = \sqrt{a_O^2 + \left(a_{BO}^n\right)^2}$$

$$= l\omega_1^2\sqrt{1+\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{a_O}{a_{BO}^n} = \arctan\frac{r}{l}$$

4-3 已知：（ 科氏加速度 ）如图所示平面机构，*AB* 长为 *l*，滑块 *A* 可沿摇杆 *OC* 的长槽滑动。摇杆 *OC* 以匀角速度 ω 绕轴 *O* 转动，滑块 *B* 以匀速 $v = l\omega$ 沿水平导轨滑动。图示瞬时 *OC* 铅直，*AB* 与水平线 *OB* 夹角为 30°。求：此瞬时 *AB* 杆的角速度及角加速度。(20 分)



解：速度分析

1. 杆AB作平面运动，基点为B。

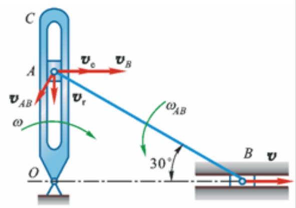
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}$$

2. 动点：滑块 A，动系：OC 杆

$$\vec{v}_A = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}$$

大小 $\omega \cdot OA$? $l\omega$?

方向 √ √ √ √



沿 $\vec{v}_B$ 方向投影 $v_B - v_{AB}\sin 30^\circ = v_e = \frac{l\omega}{2}$

$$v_{AB} = 2\left(v_B - v_e\right) = l\omega \qquad \omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{l} = \omega$$

沿 $\vec{v}_r$ 方向投影

$$v_r = v_{AB}\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}l\omega$$

加速度分析

$$\vec{a}_A=\vec{a}_B+\vec{a}_{AB}^{\mathrm{t}}+\vec{a}_{AB}^{\mathrm{n}}$$

$$\vec{a}_A=\vec{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}+\vec{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}+\vec{a}_{\mathrm{r}}+\ \vec{a}_C=\vec{a}_B+\vec{a}_{AB}^{\mathrm{t}}+\vec{a}_{AB}^{\mathrm{n}}$$

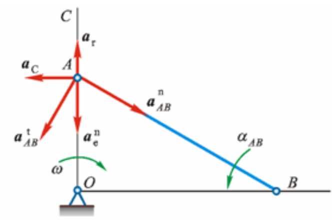
大 小	0	$\frac{l\omega^2}{2}$	?	$2\omega v_{\mathrm{r}}$	0	?	$\omega_{AB}^2 l$
方 向	√	√	√	√	√	√	√

沿$\vec{a}_C$方向投影

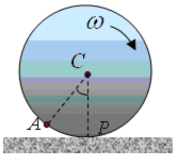
$$a_C=a_{AB}^{\mathrm{t}}\sin30^\circ-a_{AB}^{\mathrm{n}}\cos30^\circ$$

$$a_{AB}^{\mathrm{t}}=3\sqrt{3}l\omega^2$$

$$\alpha_{AB}=\frac{a_{AB}^{\mathrm{t}}}{AB}=3\sqrt{3}\omega^2$$



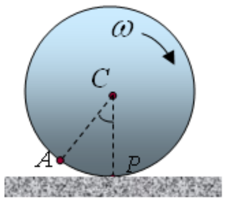
5-1 如图所示均质圆盘，质量为 **m**、半径为 **R**, 沿地面纯滚动，角加速为ω。求圆盘对图中 A,C 和 P 三点的动量矩。



解: 点C为质心 $L_C=J_C\omega=\dfrac{mR^2}{2}\omega$

平行轴定理: $J_P=\dfrac{mR^2}{2}+mR^2$

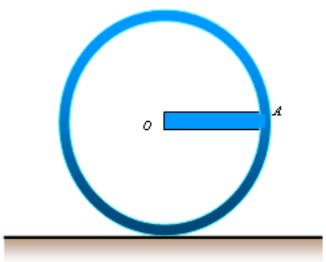
或 点P为瞬心 $L_P=J_P\omega=\dfrac{3mR^2}{2}\omega$



$$L_P=mv_CR+L_C=mR^2\omega+\frac{1}{2}mR^2\omega=\frac{3mR^2}{2}\omega$$

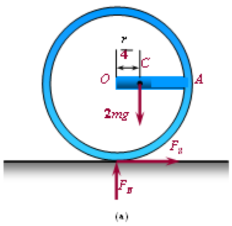
$$L_A=Rmv_C\sin45+L_C=\frac{\sqrt{2}}{2}mR^2\omega+\frac{1}{2}mR^2\omega=\frac{(\sqrt{2}+1)mR^2}{2}\omega$$

5-2（ 动量矩定理 ）已知：如图所示均质圆环半径为 ***r***，质量为 ***m***，其上焊接刚杆 ***OA***，杆长为 ***r***，质量也为 ***m***。用手扶住圆环使其在 ***OA*** 水平位置静止。设圆环与地面间为纯滚动。求：放手瞬时，圆环的角加速度，地面的摩擦力及法向约束力。(15)



解:

整体质心为C，其受力如图所示



建立平面运动微分方程

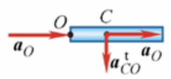
$$2ma_{Cx} = F_s$$

$$2ma_{Cy} = 2mg - F_N$$

$$J_C\alpha = F_N \cdot \frac{r}{4} - Fr$$

其中：$J_C = \frac{mr^2}{12} + m(\frac{r}{4})^2 + mr^2 + m(\frac{r}{4})^2 = \frac{29}{24}mr^2$

由求加速度基点法有



$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{a}_{co}^n + \vec{a}_{co}^t$$

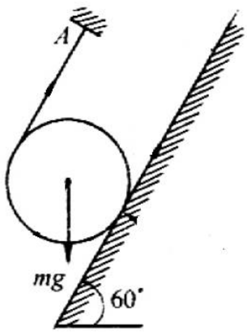
投影到水平和铅直两个方向

$$a_{Cx} = a_O = r\alpha \qquad a_{Cy} = a_{CO}^t = \frac{1}{4}r\alpha$$

$$\alpha = \frac{3}{20}\frac{g}{r} \qquad \text{顺时针}$$

$$F_s = \frac{3}{10}mg \qquad F_N = \frac{77}{40}mg$$

5-3　11-23（ 动量矩定理 ）均质圆柱体的质量为 **m**,半径为 **r**,放在倾角为 **60°** 的斜面上，一细绳绕在圆柱体上，其一端固定在 A 点，此绳和 A 点相连部分与斜面平行，如图所示。如圆柱体与斜面间的东摩擦因数为 f=1/3,求圆柱体的加速度。(15)



解 圆柱受力与运动分析如图，平面运动微分方程为

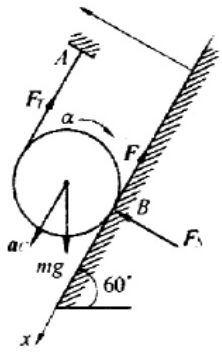
$$ma_C = mg\sin60^\circ - F - F_T$$

$$0 = F_N - mg\cos60^\circ$$

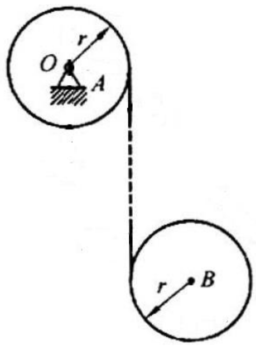
$$\frac{1}{2}mr^2\alpha = (F_T - F)r$$

式中 $F = fF_N$， $a_C = r\alpha$

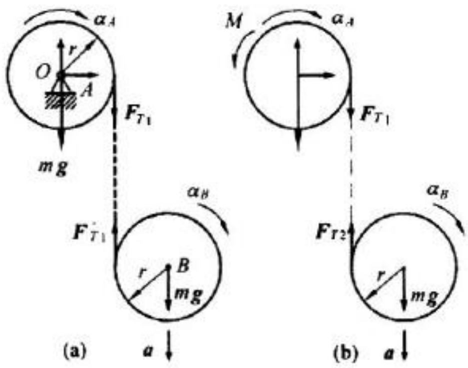
解得 $a_C = 0.355g$



5-4 11-28 （ 动量矩定理 ）均质圆柱体 **A** 和 **B** 的质量均为 **m**,半径均为 **r**, 一细绳缠在绕固定轴 O 转动的圆柱 A 上,绳的另一端绕在圆柱 B 上，直线绳段铅垂，如图所示。不计摩擦。求：（1）圆柱体 B 下落时质心的加速度；（2）若在圆柱体 A 上作用一逆时针转向力偶矩 M,试问在什么条件下圆柱体 B 的质心加速度将向上。—（ 15 分 ）



解：



解 (1)两轮的受力与运动分析分别如图(a)，

对 A 轮，有 $$\frac{1}{2}mr^2\alpha_A = rF_{T1}$$

对 B 轮，有 $$ma = mg - F_{T1}'$$

$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_B = rF_{T1}'$$

以轮与直绳相切点为基点，则轮心 B 的加速度 $a = r\alpha_A + r\alpha_B$

解得 $$a = \frac{4}{5}g$$

(2)再分别对两轮作受力与运动分析如图(b)

对 A 轮，有 $$\frac{1}{2}mr^2\alpha_A = -M + rF_{T2}$$

对 B 轮，有 $$ma_B = mg - F_{T2}'$$

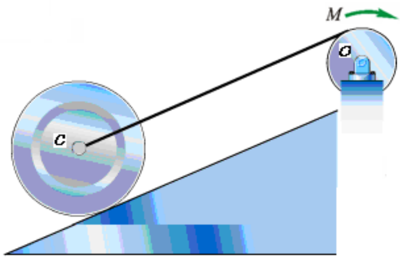
$$\frac{1}{2}mr^2\alpha_B = rF_{T2}'$$

依然有运动学关系 $a_B = r\alpha_A + r\alpha_B$，(但 $\alpha_A \neq \alpha_B$)

令 $a_B < 0$，可解得圆柱体 B 的质心加速度向上的条件：

$$M > 2mgr$$

6-1 已知：轮 **O** 的半径为 **R1** ，质量为 **m1** ,质量分布在轮缘上；均质轮 **C** 的半径为 **R2** ，质量为 **m2** ，与斜面纯滚动，初始静止 。斜面倾角为 θ ,轮 **O** 受到常力偶 **M** 驱动。 求：轮心 **C** 走过路程 **s** 时的速度和加速度。（ 15 分 ）



解： 轮C与轮O共同作为一个质点系

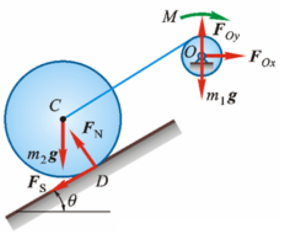
$$W_{12} = M\varphi - m_2 gs\sin\theta \qquad T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(m_1R_1^2)\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_2R_2^2)\omega_2^2 \qquad \omega_1 = \frac{v_C}{R_1}, \omega_2 = \frac{v_C}{R_2}$$

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

$$M\varphi - m_2 gs\sin\theta = \frac{v_C^2}{4}(2m_1 + 3m_2) \qquad (a)$$

$$\varphi = \frac{s}{R_1} \qquad v_C = 2\sqrt{\frac{(M - m_2gR_1\sin\theta)s}{R_1(2m_1 + 3m_2)}}$$

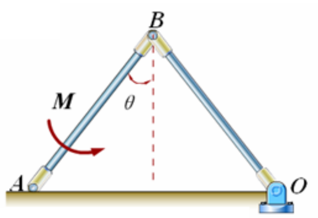


式(a)是函数关系式，两端对t求导，得

$$\frac{1}{2}(2m_1 + 3m_2)v_Ca_C = M\frac{v_C}{R_1} - m_2gv_C\sin\theta$$

$$a_C = \frac{2\ (M - m_2gR_1\sin\theta)}{(2m_1 + 3m_2)R_1}$$

6-2　已知均质杆 $OB=AB=l$，质量均为 m，在铅垂面内运动，**AB** 杆上作用一不变的力偶矩 M，系统初始静止,不计摩擦。求当端点 A 运动到与端点 O 重合时的速度。（ 15 分 ）



解：

$$\sum W = M\theta - 2mg(1-\cos\theta)\frac{l}{2} \qquad T_1 = 0$$

由于A点不离开地面，则∠BAO= ∠BOA， $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

$$\omega_{AB} = \omega_{BO}$$

$$\upsilon_C = \upsilon_B + \upsilon_{BC} = l\omega_{BO} + \frac{1}{2}l\omega_{AB} = \frac{3}{2}l\omega_{AB}$$

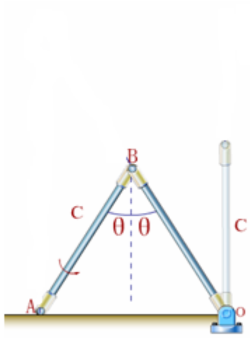
$$\upsilon_A = \upsilon_B + \upsilon_{BA} = l\omega_{BO} + l\omega_{AB} = 2l\omega_{AB}$$

$$T_2 = T_{AB} + T_{OB} = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$+\frac{1}{2}J_C\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}J_0\omega_{OB}^2 = \frac{4}{3}ml^2\omega_{AB}^2$$

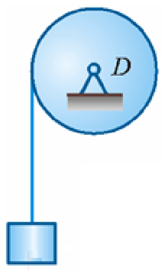
$$\sum W = T_2 - T_1$$

$$\omega_{AB} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3}{m}\left[M\theta - mgl(1-\cos\theta)\right]}$$

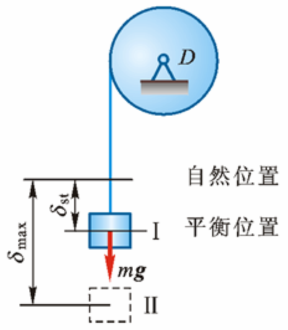


提问： 是否可以利用求导求此瞬时的角加速度？ （θ与ω没有必然联系，角度不是时间的函数。）

6-3　已知：重物 m，以 v 匀速下降，钢索刚度系数为 k。求轮 **D** 突然卡住时，钢索的最大张力.（ 15 分 ）



解： 卡住前



$$\delta_{st}=\frac{mg}{k}$$

$$F=k\delta_{st}=mg=2.45\text{kN}$$

卡住后

取重物平衡位置I为重力和弹性力的零势能点。则在I和II的势能分别为

$$V_1=0$$

$$V_2=\frac{k}{2}\left(\delta_{\max}{}^2-\delta_{st}{}^2\right)-mg\left(\delta_{\max}-\delta_{st}\right)$$

$$T_1=\frac{1}{2}m\upsilon^2,T_2=0$$

由 $T_1+V_1=T_2+V_2$ 有

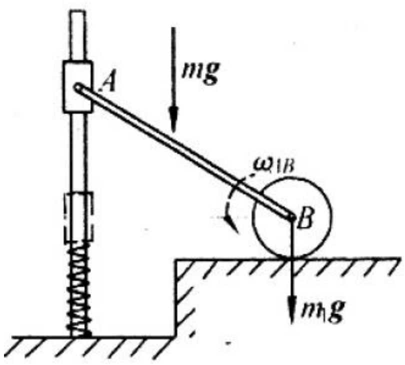
$$\frac{1}{2}mv^2+0=0+\frac{k}{2}\left(\delta_{\max}^2-\delta_{st}{}^2\right)\ -mg\left(\delta_{\max}-\delta_{st}\right)$$

即 $\delta_{\max}{}^2-2\delta_{st}\delta_{\max}+\left(\delta_{st}{}^2-\frac{v^2}{g}\delta_{st}\right)=0$

得 $\delta_{\max}=\delta_{st}\left(1\pm\sqrt{\frac{\upsilon^2}{g\delta_{st}}}\right)$

$$F_{\max}=k\delta_{\max}=k\delta_{st}\left(1+\sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{st}}}\right)=mg\left(1+\frac{v}{g}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

6-4 已知均质杆 AB 的质量 m=4kg,长 l=600mm,均匀圆盘 B 的质量为 6kg,半径为 r=600mm,作纯滚动。弹簧刚度为 k=2N/mm,不计套筒 A 及弹簧的质量。连杆在与水平面成 30º 角时无初速释放。求（1）当 AB 杆达水平位置而接触弹簧时，圆盘与连杆的角速度；（2）弹簧的最大压缩量 $\delta_{\max}$。（ 15 分 ）



解 (1)该系统初始静止，动能为 0；AB 杆达水平位置时，B 点是 AB 杆的速度瞬心，圆盘的角速度 $\omega_B = 0$，设杆的角速度为 ω_{AB}，由动能定理，得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 \omega_{AB}^2 - 0 = mg \cdot \frac{l}{2} \sin 30^\circ$$

解得连杆的角速度 $\omega_{AB} = 4.95\ \mathrm{rad/s}$

(2) AB 杆达水平位置接触弹簧时，系统的动能为 T_1，弹簧达到最大压缩量 $\delta_{\max}$ 的瞬时，系统再次静止，动能 $T_2 = 0$，由

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

得 $$0 - \frac{1}{6} m l^2 \omega_{AB}^2 = -\frac{k}{2} \delta_{\max}{}^2 + mg \frac{\delta_{\max}}{2}$$

解得 $$\delta_{\max} = 87.1\ \mathrm{mm}$$