一．简答题 （每题 **5** 分，共 **50** 分）

1. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$。

$$=\int (x)^{'} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int x\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)^{'}dx$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+c$$

2. 求 $\int x^5\left(2-5x^3\right)^{\frac{2}{3}}dx$。

令 $t=\left(2-5x^3\right)\Rightarrow x^3=\dfrac{2-t}{5}\Rightarrow dx^3=-\dfrac{1}{5}dt$

$$\int x^5\left(2-5x^3\right)^{\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{3}\int x^3\left(2-5x^3\right)^{\frac{2}{3}}dx^3$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{2-t}{5}\right)\cdot t^{\frac{2}{3}}\left(\frac{-1}{5}\right)dt=-\frac{1}{75}\int t^{\frac{2}{3}}\left(2-t\right)dt=-\frac{2}{125}t^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{200}t^{\frac{8}{3}}+c$$

$$=-\frac{6+25x^3}{1000}\left(2-5x^3\right)^{\frac{5}{3}}+c$$

3. 求 $\int \dfrac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx$。

$$I=\int\frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^4 x}d\sin x\overset{\sin x=u}{=}\int\frac{1-2u^2+u^4}{u^4}du=\int(u^{-4}-2u^{-2}+1)du$$

$$=-\frac{1}{3}u^{-3}+2u^{-1}+u+C=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{2}{\sin x}+\sin x+C$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$。

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

5. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(x^2+\tan^{2011}x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x^2dx=\dfrac{\pi^3}{96}$

6. 设$F\left(x\right)=\int\limits_{\cos x}^{\sin x}\ln\left(t+1\right)dt$,求$F^{'}\left(x\right)$。

$$F^{'}\left(x\right)=\ln\left(\sin x+1\right)\cos x+\ln\left(\cos x+1\right)\sin x$$

7. 求曲线$y=\int_0^x\sqrt{\sin t}dt,\ x\in(0,\pi)$的弧长。

s = $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$ =4

8. 研究正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n!\right)^2}{2^{n^2}}$的敛散性。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(\left(n+1\right)!\right)^2}{2^{\left(n+1\right)^2}}}{\frac{\left(n!\right)^2}{2^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)^2}{2^{2n+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+1\right)^2}{2^{2x+1}}=0<1$$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n!\right)^2}{2^{n^2}}$收敛

9. 研究正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$的敛散性。

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}}\le\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$收敛

10. 利用 Tayor 展式研究正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$的敛散性。

$$n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1=n\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)-1$$
$$=n\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1$$
$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2+\frac{n}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=-\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}+\frac{n}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$收敛

二 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(tx)dt = f(x)+x\sin x, f(0)=0$，且有一阶导数，求 $f'(x)$（$x\neq 0$）。（10 分）

$$y=tx$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy = f(x)+x\sin x$$

$$\int_0^x f(y)dy = xf(x)+x^2\sin x$$

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x \quad （x\neq 0）$$

$$f'(x)=-2\sin x - x\cos x$$

三 设 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\le x\le 1, y\ge 0$ 时，又与 $x$ 轴，$x=1$ 所围成的面积 $\frac{1}{3}$，试确定 $a,b,c$ 使此图形绕 $x$ 轴旋转而成的立体体积最小，并求出此体积大小。（15 分）

$$S=\int_0^1\left(ax^2+bx\right)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow 2a+3b=2$$

$$V=\int_0^1\pi\left(ax^2+bx\right)^2dx=\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right)\pi=\left(\frac{4}{27}+\frac{1}{27}a+\frac{2}{135}a^2\right)\pi$$

$$\frac{dV}{da}=\left(\frac{1}{27}+\frac{4}{135}a\right)\pi=0\Rightarrow a=-\frac{5}{4},\text{而}\frac{d^2V}{da^2}=\frac{4}{135}>0$$

因此在 $a=-\frac{5}{4}$，V 最小，$b=\frac{3}{2}$。

四 研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n}(1+\frac{1}{n})^n$的绝对收敛或条件收敛性。（10 分）

由 Leibniz 判别法, 可知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n}$收敛,

而$(1+\frac{1}{n})^n\to e$是单调有界的,

所以由 Abel 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n}(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛.

再考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n$,

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{3n}(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}}=\dfrac{e}{3}$, 所以由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 发散.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 条件收敛.

五 设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$，（1）求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$的值；（2）证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}\quad(\lambda>0)$收敛。（15 分）

解: (1) $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\, d\left(\tan x\right)=\frac{1}{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=1$$

(2) $a_n<a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$, $\frac{a_n}{n^{\lambda}}<\frac{1}{n^{\lambda}\left(n+1\right)}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}\quad(\lambda>0)$ 收敛

六 附加题（10 分）

证明:

1) $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx=\frac{1}{2^n(n+1)}$，　$n$ 为自然数；

2) 设 $f(x)$ 在[0, 1]上连续, 且满足 $\int_0^1 x^n f(x)dx=1$， $\int_0^1 x^k f(x)dx=0 \quad k=0,1,\dots,n-1$, 则有 $\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f(x)\right|\ge 2^n(n+1)$ 。

证明:

(1) $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)^n dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n dx$

$$=-\int_{\frac{1}{2}}^0 t^n dt+\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt=2\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt=\frac{1}{2^n(n+1)}$$

(2) 由已知条件可知 $\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)dx=1$

由积分中值定理, $\exists\xi\in[0,1]$, 使得

$$1=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)dx\right|\le\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\left|f(x)\right|dx1=\left|f(\xi)\right|\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx$$

再由(1)得 $1\le\left|f(\xi)\right|\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx=\frac{\left|f(\xi)\right|}{2^n(n+1)}$

则 $\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f(x)\right|\ge\left|f(\xi)\right|\ge 2^n(n+1)$