- 答疑时间：

  8日上午 08：30 — 11：30

  8日下午 14：00 — 17：00

- 答疑地点：J4-105

理论力学复习课

- 静力学(几何静力学和分析静力学）
- 运动学（点的运动学、刚体的运动学）
- 动力学（质点动力学、质点系动力学、

  动静法）

一、 静力学

- 静力学的基本概念与方法
- 平衡方程
- 虚位移原理
- 例题、思考题

一、静力学的基本概念与基本原理和定理

•力系(force system): 作用在物体上的一组力 $\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n\}$

•等效力系(equivalent force system):

对同一刚体产生相同作用效果的力系.

$$\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n\}\Leftrightarrow\{\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m\}$$

•合力(resultant force) : 与某力系等效的力

$$\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n\}\Leftrightarrow\{\boldsymbol{F}_R\}$$

•平衡力系(force system in equilibrium):

对刚体不产生任何作用效果的力系

$\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n\}\Leftrightarrow\{\boldsymbol{0}\}$ 平衡力系也称为零力系

二力平衡原理

作用于刚体上的二力为平衡力系的充分必要条件是此二力等值、反向、共线。

三力平衡定理

作用于刚体上的三个力若为平衡力系，则这三个力的作用线共面且汇交于一点或平行。

力系平衡原理： 设空间任意力系 $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{M}_O\}$

其平衡的充分必要条件是 $\boldsymbol{F}_R = 0, \boldsymbol{M}_O = 0$

力系简化结果的判断： 根据主矢和主矩的几何关系判断其结果

二、空间任意力系简化及其平衡条件

空间任意力系简化 $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{M}_O\}$

$\boldsymbol{F}_R = 0, \boldsymbol{M}_O = 0$ $\longleftrightarrow$ 平衡

空间任意力系的平衡条件:

$$\boldsymbol{F}_R = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{M}_O = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum M_{Ox}(\boldsymbol{F}) = 0 \\ \sum M_{Oy}(\boldsymbol{F}) = 0 \\ \sum M_{Oz}(\boldsymbol{F}) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0 \\ \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0, \\ \sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0 \end{cases}$$

注：正交条件是充分的，不是必要的。

注：

其它力系的平衡条件均是空间任意力系平衡条件的特殊情况。

三、考虑摩擦时刚体的平衡问题

1、静滑动摩擦 $0 \le F \le F_{\max}$ $F_{\max} = f_s \bullet F_{\mathrm{N}}$

其中：f_s静滑动摩擦因数 **(coefficient of static friction)**

不滑动的条件（摩擦角） $\varphi \le \varphi_{\max}$ $\tan \varphi_{\max} = f_s$

2、动滑动摩擦 $F = f \bullet F_{\mathrm{N}}$

其中：f 动滑动摩擦因数 **(coefficient of kinetic friction)**

3、滚动摩阻力偶 $\boldsymbol{M_f}$ $0 \le M_f \le M_{f\max}$ $M_{f\max} = \delta F_{\mathrm{N}}$

δ 滚动摩阻系数（**mm**）（**coefficient of rolling resistance**）

四、刚体系与结构的平衡

•静 定 问 题 (statically determinate problem):

未知量的数目＝ 独立平衡方程的数目

•静不定问题(statically indeterminate problem):

未知量的数目＞ 独立平衡方程的数目

研究刚体系平衡的方法：刚体系平衡←→每个刚体平衡

研究桁架平衡的方法：节点法和截面法（所有杆件均为二力杆）

刚体系平衡问题求解的基本步骤：

1、取整体为研究对象，求解部分未知力

2、取分离体为研究对象，求另一部分未知力

- 力系简化的最简结果和独立平衡方程的个数问题
  - 根据力系的特点或主矢和主矩的几何性质进行判断
- 单个刚体平衡问题
  - 充分利用二力平衡原理（二力杆）、三力平衡定理、力偶、零力杆的性质确定约束力的方向
  - 选取适当的投影方程和取矩方程避免求解联立方程
- 考虑摩擦的平衡问题
  - 充分利用摩擦角、全反力的概念和三力平衡定理或建立平衡方程（摩擦力取临界状态）进行求解
- 要求：

能够确定各种力系的简化结果和独立平衡方程的个数

熟练求解刚体系（包括桁架）的平衡问题（包含考虑摩擦情况）

题1: 空间平行力系简化的最简结果可能是:

A:平衡力系、B:力偶、C:合力、D:力螺旋

题2: 一对平行不共线的力简化的最简结果可能是:

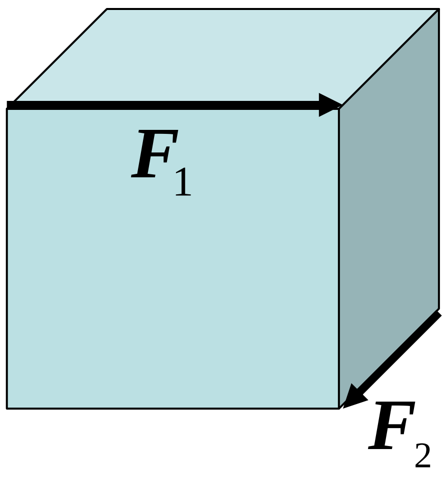
A:平衡力系、B:力偶、C:合力、D:力螺旋

题3: 两个平面汇交力系构成的平面力系简化的最简结果可能是:A:平衡力系、B:力偶、C:合力、D:力螺旋

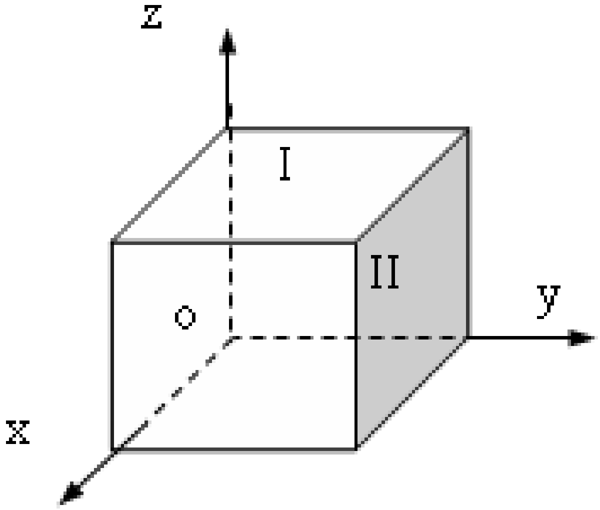
题4: 图中的两个力构成的力系简化的最简结果可能是:

A:平衡力系、B:力偶、

C:合力、 D:力螺旋



?题5： 如图所示，长方体的I面（上面）和II面（右面）上各作用有一平面汇交力系，则该力系简化的最简结果可能是：___。

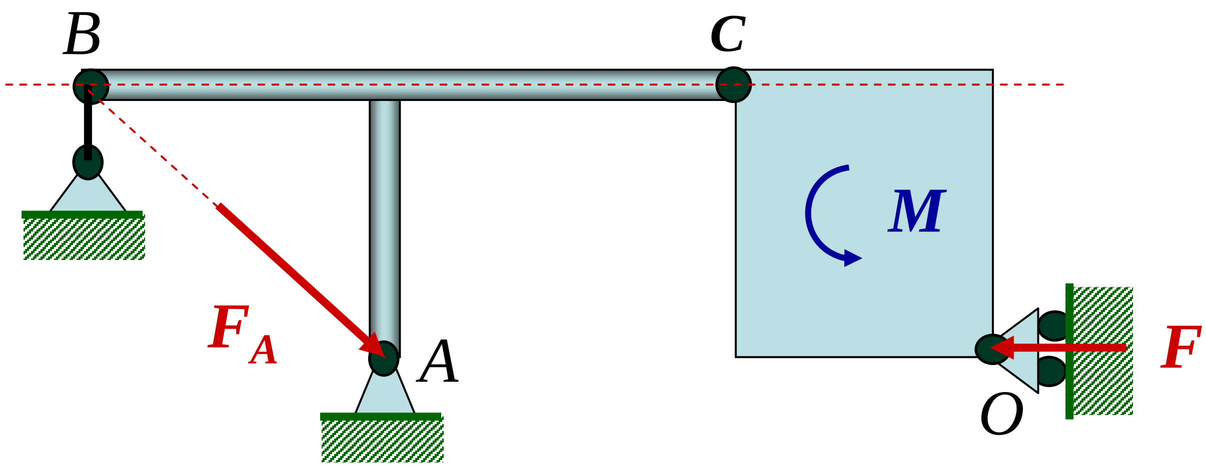


A：平衡力系
B：合力
C：力偶
D：力螺旋

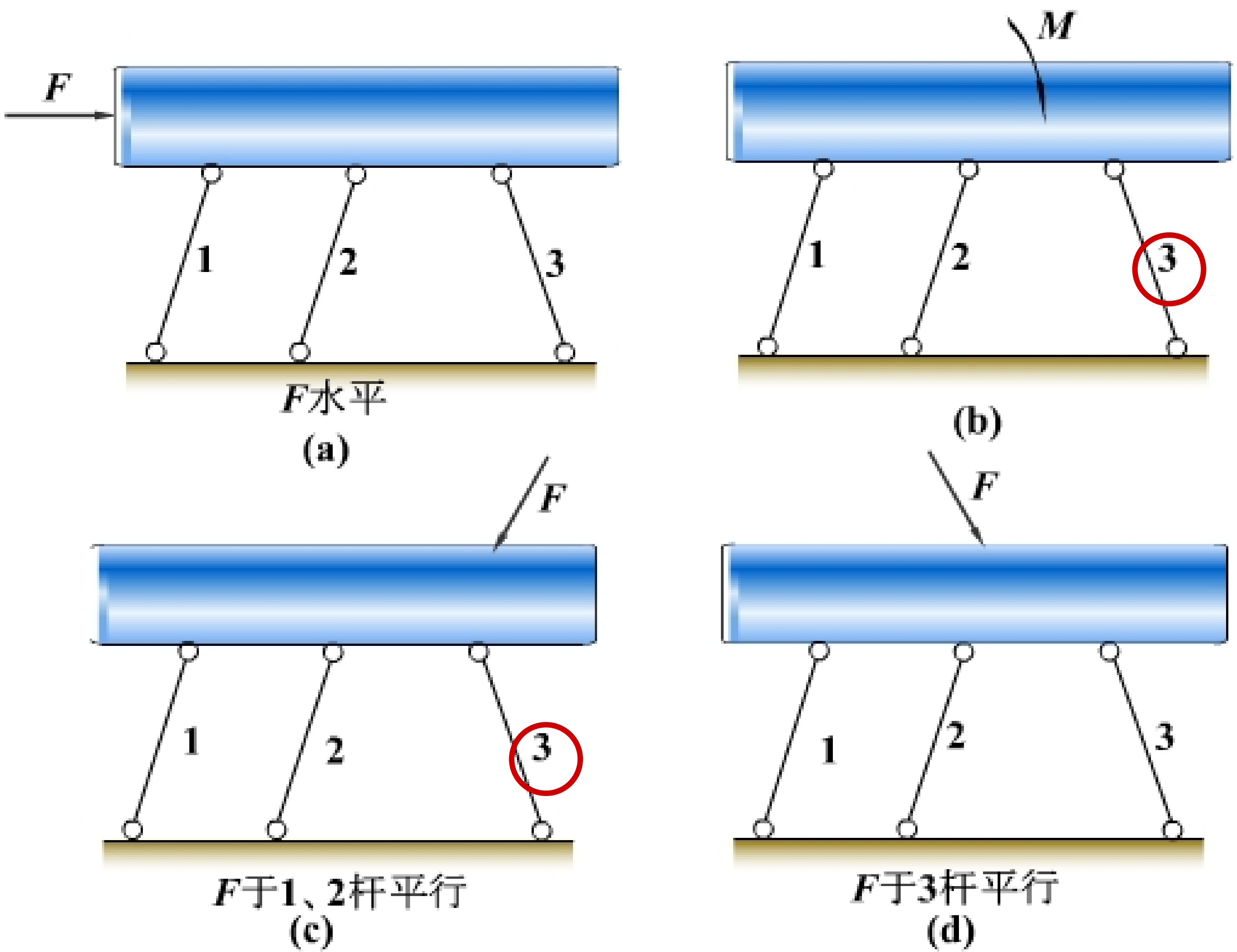
?题6： 两个空间汇交力系构成的力系最多有____独立的平衡方程。

A：3个； B：4个； C：5个； D：6个

题7：平面结构如图所示，不计构件自重，若在板上作用有一力偶M，试确定铰链A处的约束力。

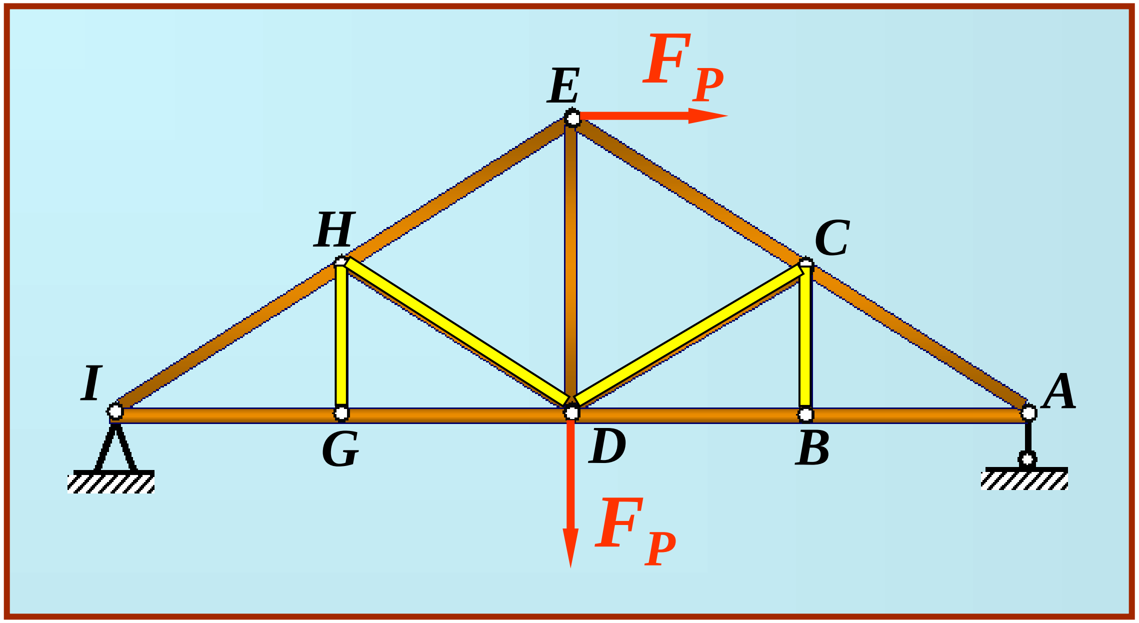


题8：确定图示结构中的零力杆。设杆1与杆2平行



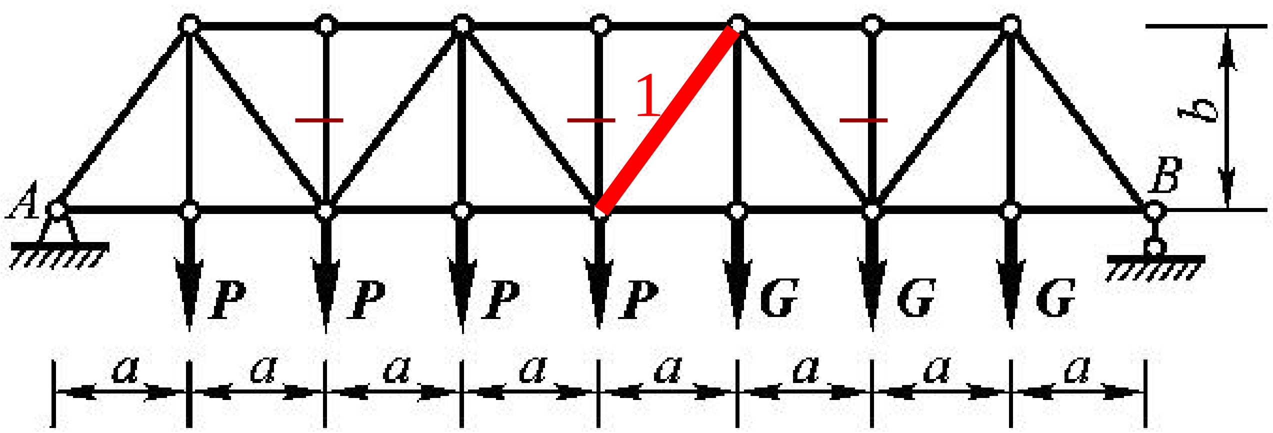
*F*平行于杆**1**和杆**2**　　*F*平行于杆**3**

题9： 试确定图示桁架中的零力杆。



节点法的特点:1、研究对象为节点（汇交力系）

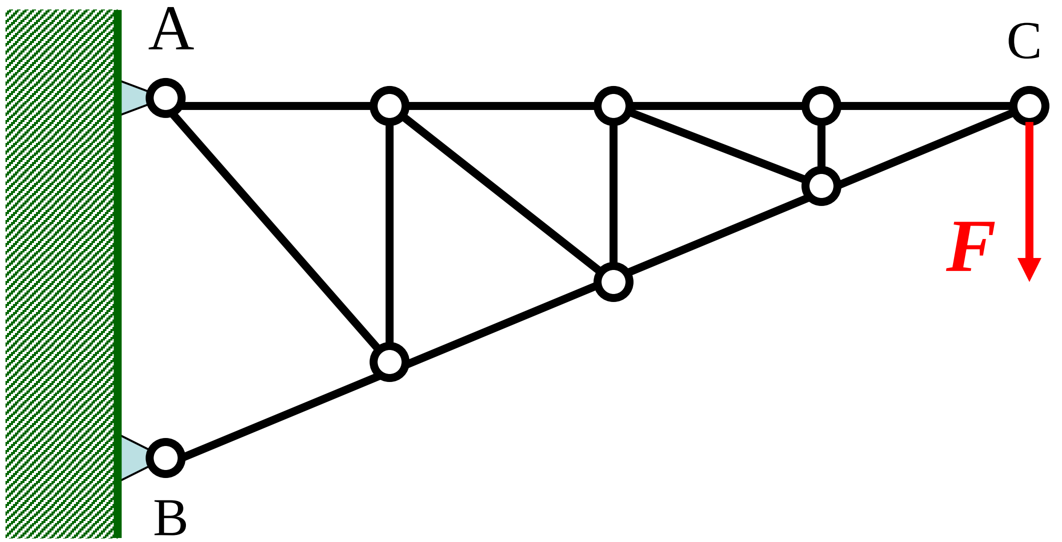
2、每个节点可以建立两个独立的平衡方程



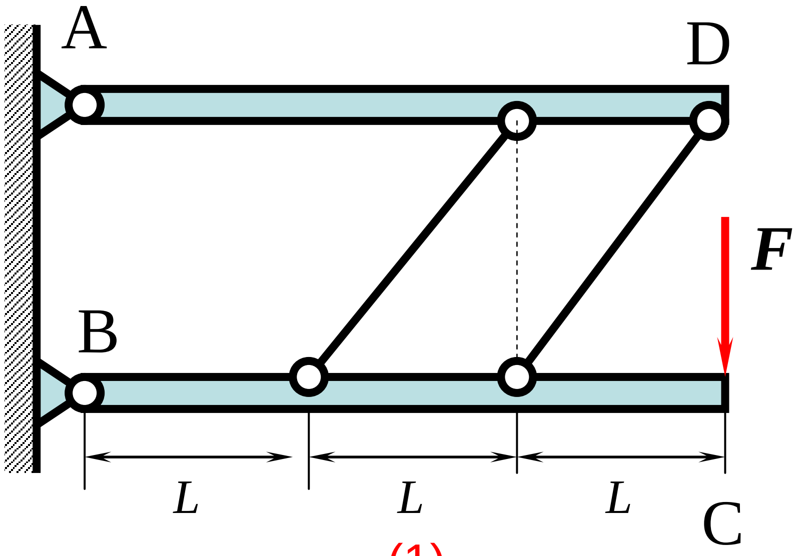
问题1: 在图示桁架中，哪些杆件为零力杆?

问题2: 在图示桁架中，杆1的内力如何求?

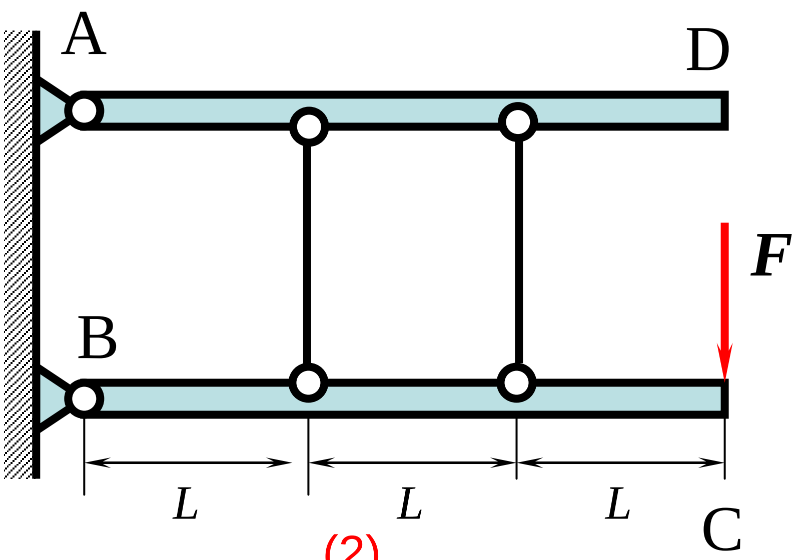
思考题：试确定图示桁架中的零力杆。



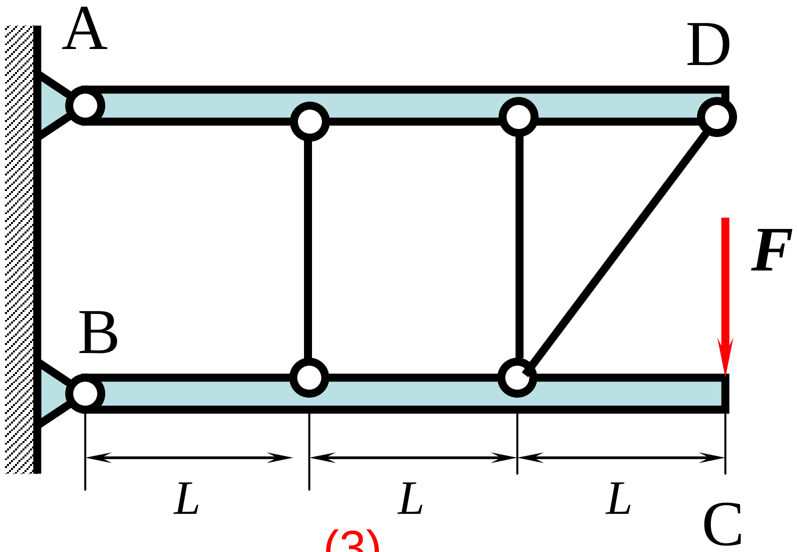
题10： 确定图示系统是否为静定结构。



(1)

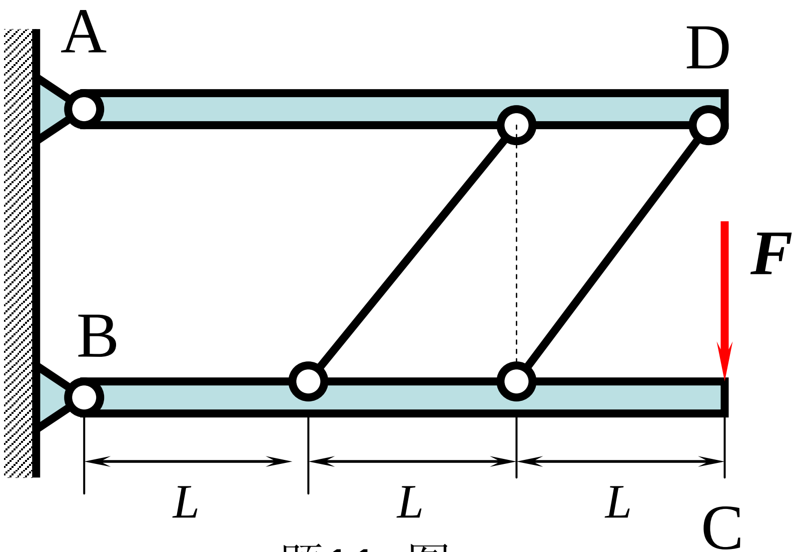


(2)

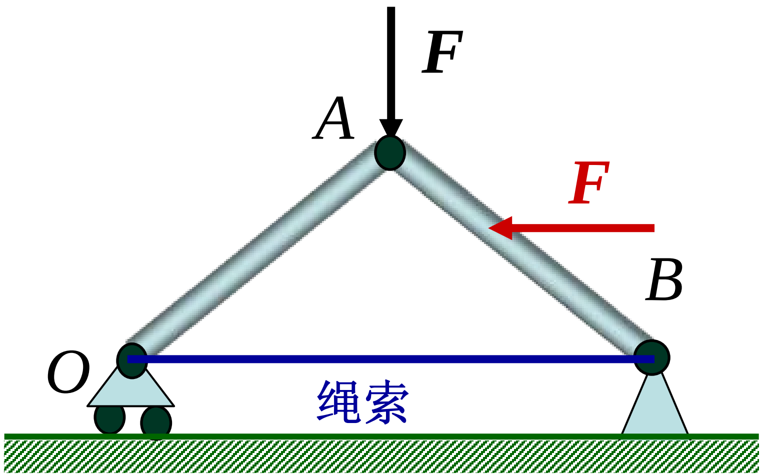


(3)

题11a：求图示系统中B处的约束力和两个二力杆的内力。



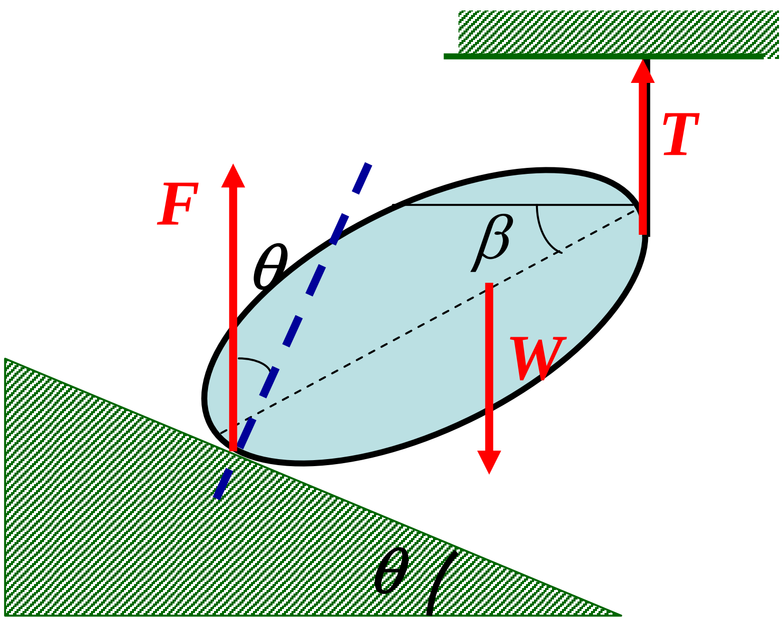
题11a图



题11b图

题11b：求图示系统中AB杆两端的约束力。

题12：长轴为 a，短轴为 b ，重为W的非均质椭圆盘，一端铅垂吊起，另一端放在倾角为 θ 的固定斜面上，圆盘长轴与水平线的夹角为 β ，若圆盘处于平衡，圆盘与斜面的静滑动摩擦因数最小值应为多大？



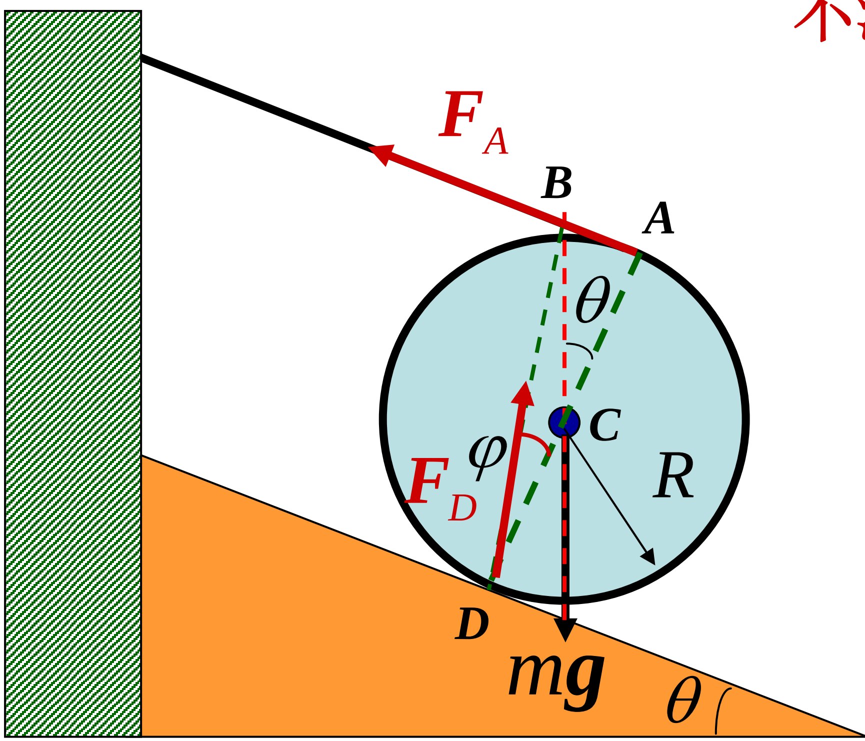
解：研究椭圆盘，受力分析

不滑动的条件 $\theta \le \varphi_m$

$$\tan\theta \le \tan\varphi_m = f$$

$$f_{\min} = \tan\theta$$

题13：均质圆盘放在倾角为 θ 的固定斜面上，其上用平行于斜面的绳吊起。若使圆盘平衡，求圆盘与斜面间的摩擦系数最小值。



不滑动的条件：$\varphi \le \varphi_{\max}$

$$AB = R\tan\theta$$

$$AB = 2R\tan\varphi$$

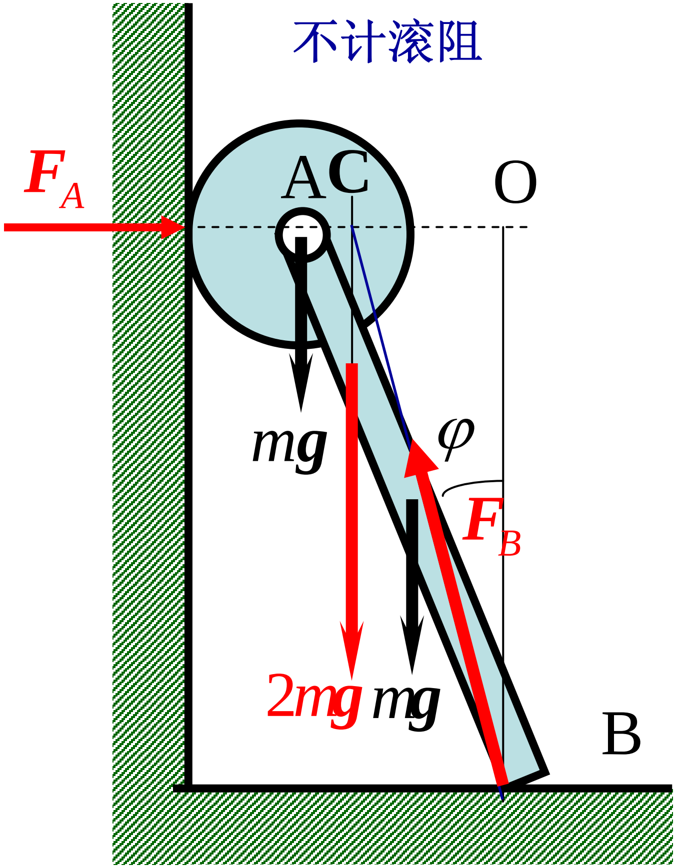
$$\tan\theta = 2\tan\varphi$$

$$\tan\varphi \le \tan\varphi_{\max} = f$$

$$\tan\theta = 2\tan\varphi \le 2f$$

$$f_{\min} = 0.5\tan\theta$$

题14: 均质杆AB和均质圆盘铰接，如图所示，杆和圆盘的质量相同，杆与铅垂线的夹角为 θ，圆盘与墙壁的摩擦系数为f. 若系统处于平衡，求杆与地面的静滑动摩擦系数的最小值。



解：不滑动的条件：

$$\tan\varphi \le \tan\varphi_m = f$$

$$\tan\varphi = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{3L}{4}\sin\theta}{L\cos\theta} = \frac{3\sin\theta}{4\cos\theta}$$

$$\boxed{f \ge \frac{3}{4}\tan\theta = f_{\min}}$$

五、虚位移原理

•元功：$\delta W = \boldsymbol{F} \bullet \mathbf{v}dt = \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r}$

等效力系作功定理：若作用于刚体上的力系等效

即：$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n\} = \{\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_m\} = \{\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{M}_o\}$

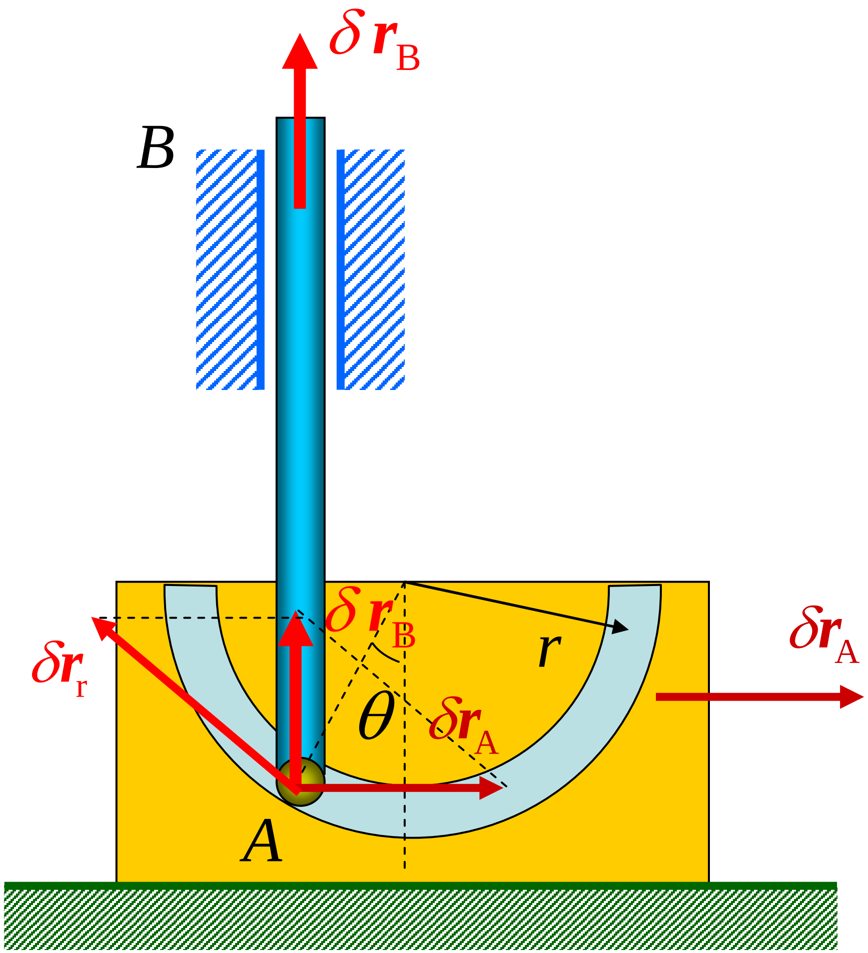
则 $\sum_{i=1}^{n} W(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{j=1}^{m} W(\boldsymbol{P}_j) = W(\boldsymbol{F}_R) + W(\boldsymbol{M}_O)$

•虚位移：在给定瞬时，质点或质点系为约束容许的任何微小位移。$\delta \boldsymbol{r}$

• 理想约束：质点系中所有约束力在任何虚位移上所作虚功之和为零的约束。

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{Ni} \bullet \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

基本概念和基本原理：各种约束的基本概念，广义坐标、广义力、自由度、势能、虚位移原理等。



题15： 试建立图示瞬时滑块*A*和杆B的虚位移关系。

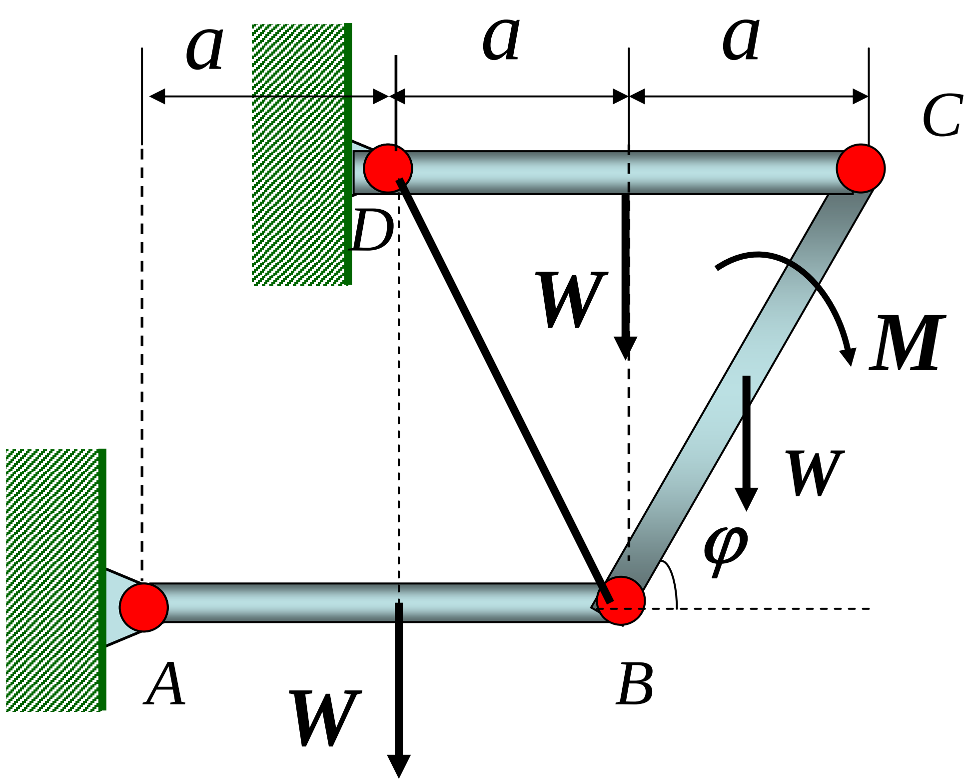
解： 给滑块*A*一个虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_A$

杆*B*产生一个虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_B$

上述两个虚位移的关系为：

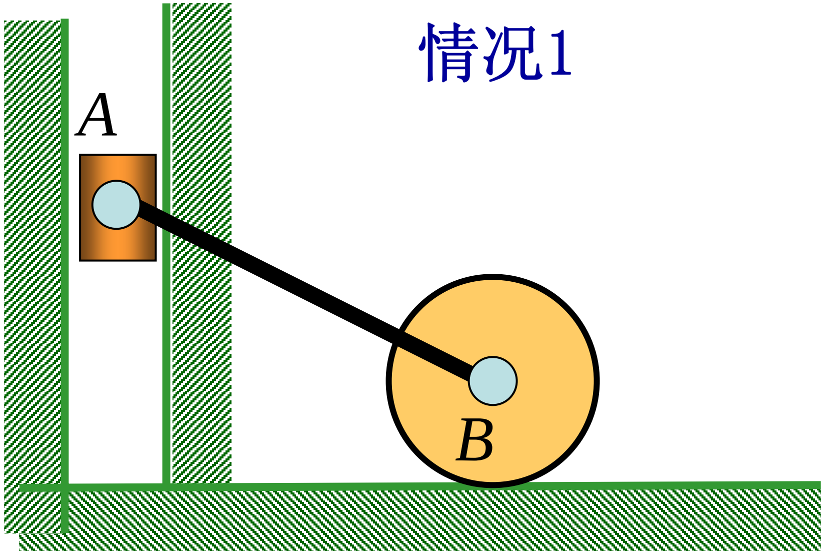
$$\tan\theta\delta r_A = \delta r_B$$

题16: 系统在图示位置平衡，求绳索BD的拉力。

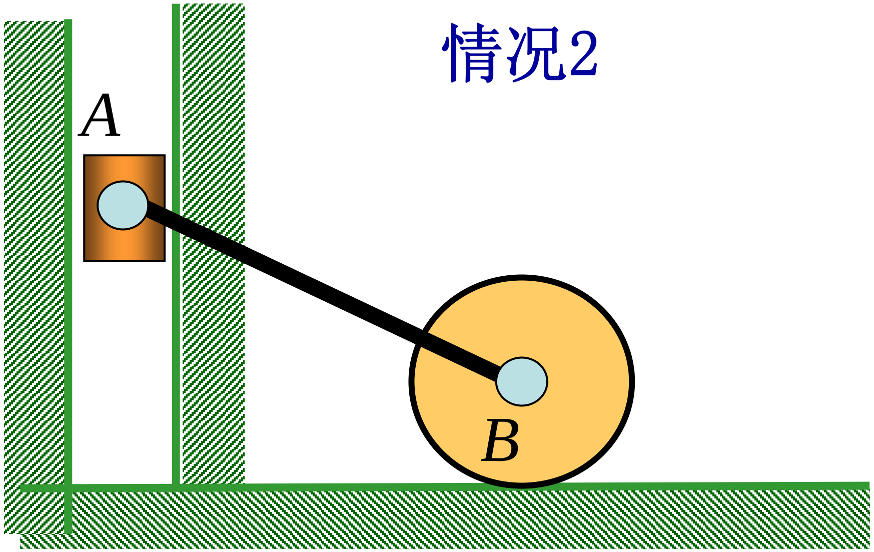


题17： 已知杆*AB*上的*A*点可沿铅垂滑到运动，圆盘在地面上滚动。确定系统的自由度的个数。

情况1



情况2



圆盘纯滚动

- 点的运动学
  - 运动方程、速度、加速度
  - 矢量法、直角坐标法、自然坐标法
- 点的复合运动
  - 绝对运动、相对运动、牵连运动
  - 绝对速度、相对速度、牵连速度
  - 绝对加速度、相对加速度、牵连加速度、科氏加速度
- 刚体的平面运动
  - 刚体的平面运动、点的速度和加速度、刚体的角速度和角加速度的分析与计算

一、点的运动学

$$v = \dot{s}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} \\ v_y &= \dot{y} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned}\right\}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \dot{s}\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$$ 反映速度大小的变化

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$ 反映速度方向的变化

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} \\ a_y &= \ddot{y} \\ a_z &= \ddot{z} \end{aligned}\right\}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$$

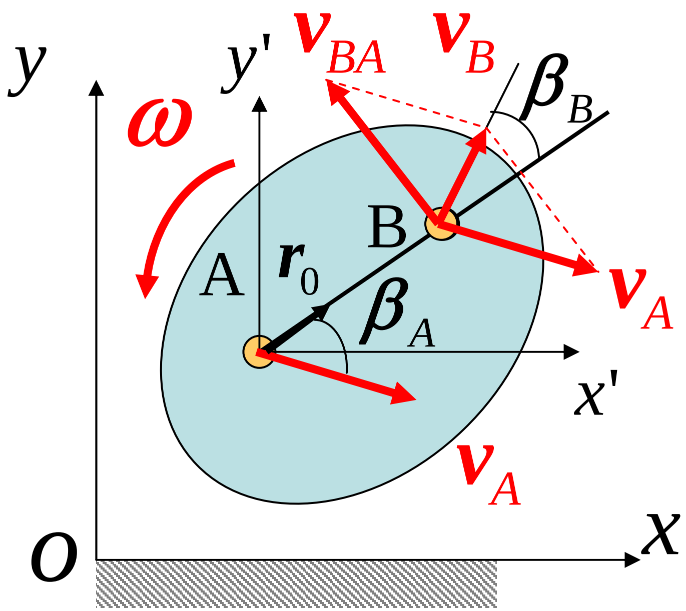
应用复合运动求解运动学问题的关键是动点与动系的选取。

二、刚体的平面运动

Ax'y'为平移动系，B为动点

1、基点法

$$\boxed{\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}}$$

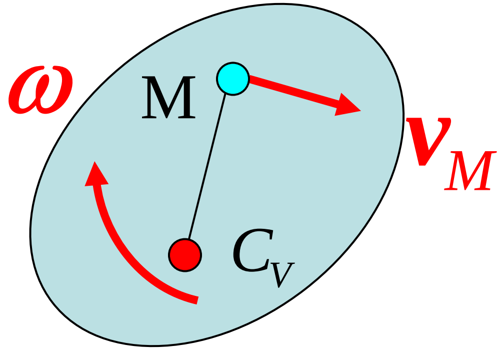


2、速度投影法

$$\boxed{\left[\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}\right]_{AB} = \left[\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}\right]_{AB}}$$

3、速度瞬心法

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_{MC_V}, \quad v_M = \overline{MC_V}\,\omega$$

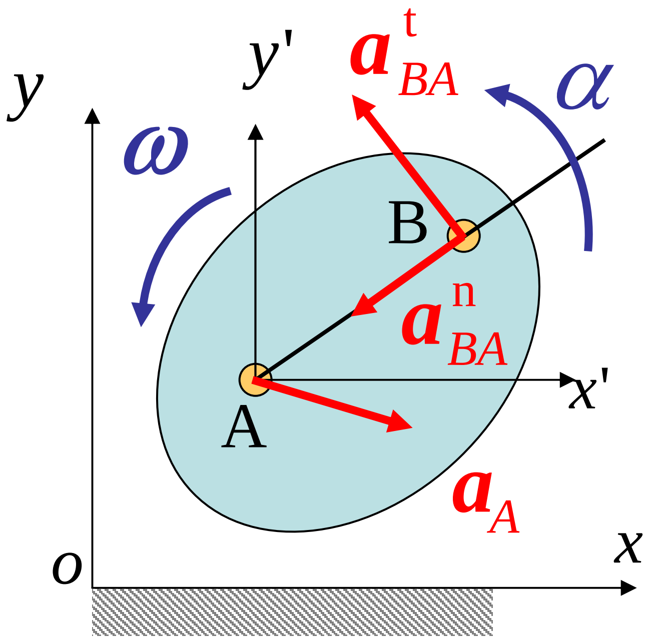


4、平面图形上各点的加速度

$$\boxed{\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}}$$

$$a_{BA}^{\mathrm{t}}=AB\bullet\alpha$$

$$a_{BA}^{\mathrm{n}}=AB\bullet\omega^2$$



•加速度瞬心：在某瞬时，**平面图形上加速度为零的点。**

当平面图形的角速度与角加速度不同时为零时，必存在唯一的一点，在该瞬时其加速度为零。

要求：能熟练求解刚体平面运动和点的复合运动的综合性问题。

求解运动学问题的基本思路

- 运动分析
  - 分析点的运动特点
    - 轨迹（直线、曲线）、加速度（切向、法向、科氏加速度）
  - 分析刚体运动的特点
    - 平移、瞬时平移、定轴转动、平面一般运动、纯滚动
    - 点的速度分布和加速度分布、角速度和角加速度
- 研究同一刚体上两点的速度或加速度问题
  - 用刚体平面运动方法（基点法、投影法、瞬心法）
- 研究刚体系中不同刚体上两点的运动学问题
  - 当刚体间均用铰链连接时，用刚体平面运动的方法
  - 当刚体间有非铰链连接时，用复合运动法和平面运动法

例题1：点在运动过程中其速度和加速度始终垂直，该点可能作：

A：圆周运动；B：平面曲线运动；C：空间曲线运动

例题2：点在运动过程中其加速度为常矢量，该点可能作：

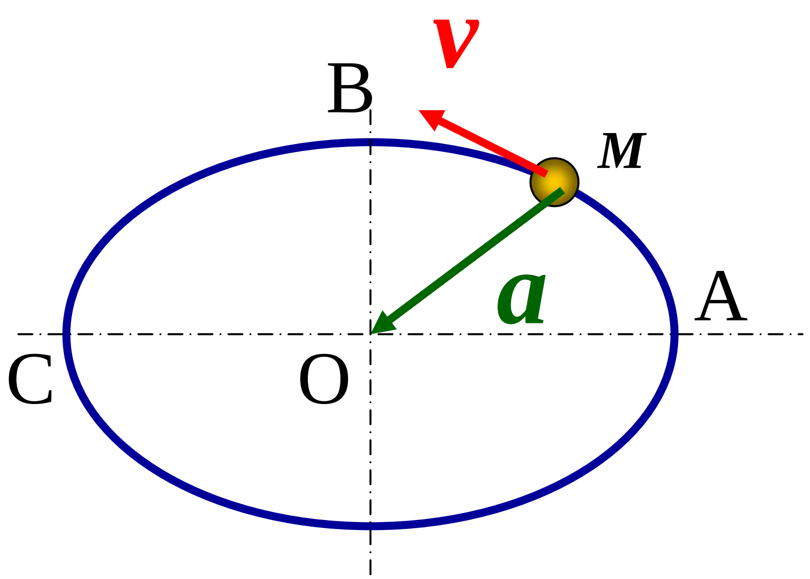
A：直线运动；B：平面曲线运动；C：空间曲线运动

例题3：点在运动过程中，其加速度始终指向某一固定点，该点可能作：A：直线运动；B：平面曲线运动；C：空间曲线运动

例题4：动点沿曲线 $y = \sin x$ 匀速率运动，该动点运动到下列哪些点时，其加速度为零。

A：(0，0)；　B:(π /2，1)；　C:(π，0)；　D:(3 π /2, -1)

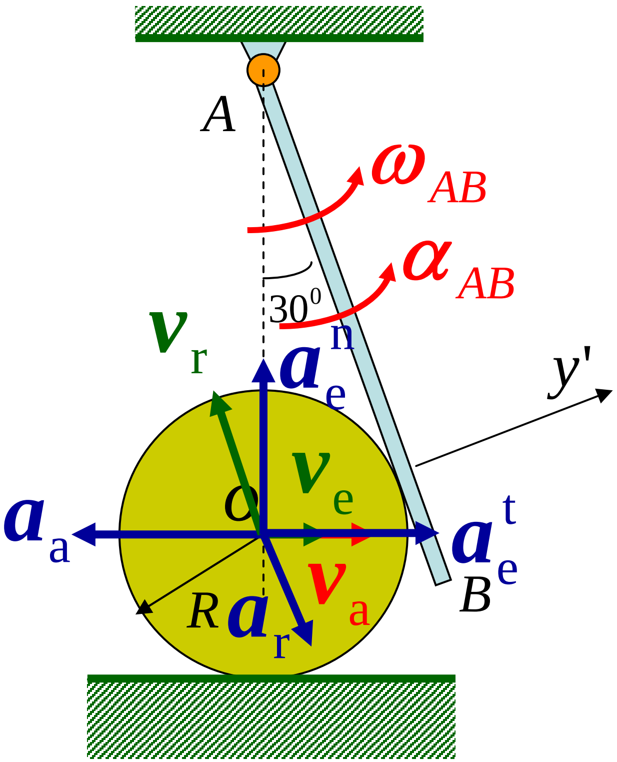
例题5:动点M沿椭圆轨道运动, 其加速度始终指向O点，定性分析动点M运动的特点。



1. 第一象限：(*A*)
2. 第二象限：(   )
3. 第三象限：(*A*)
4. 第四象限：(   )

A：速度的模增加；　　B：速度的模减小

例题6： 已知图示瞬时圆盘中心O的速度和加速度，求此瞬时AB杆的角速度和角加速度。



动点：圆盘中心O　　动系：AB杆

运动分析：

绝对运动：直线运动

相对运动：直线运动

牵连运动：定轴转动

速度分析　$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

$$\because \boldsymbol{v}_r = 0, \quad \therefore \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e$$

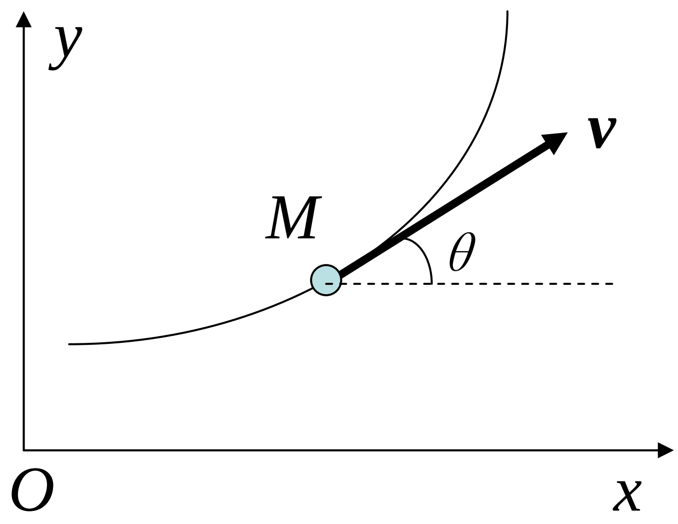
$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{v_e}{OA} = \frac{v_a}{2R}}$$

加速度分析　$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$

$$y': -a_a \cos 30^0 = a_e^t \cos 30^0 + a_e^n \sin 30^0$$

$$\Downarrow \quad a_e^t \quad \Rightarrow \quad \alpha_{AB} = \frac{a_e^t}{OA}$$

例题7： 点M做平面曲线运动，已知该点速度的大小 $v=at$ $(a>0)$，速度的方向与 x 轴的夹角 $\theta=0.5bt^2(b>0)$，求任意时刻动点M的加速度在坐标轴上的投影以及轨迹的曲率半径。



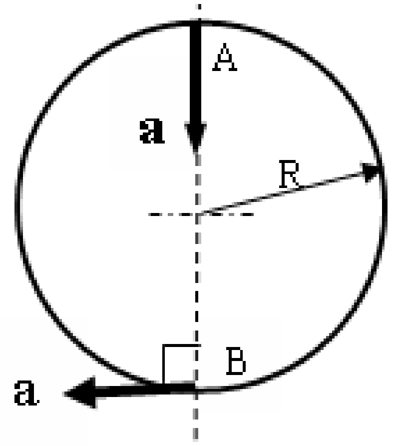
求解该问题有几种方法？

$$\boldsymbol{v}=\dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a}=\ddot{s}\boldsymbol{e}_t+\dot{s}\dot{\boldsymbol{e}}_t=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n$$

$$\boxed{\rho=\frac{v^2}{a_n}} \qquad \boxed{k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}}$$

例题8： 半径为 R 的圆盘做平面运动，已知某瞬时圆盘边缘上两点A、B的加速度a（大小、方向如图所示），试判断下列结论哪些是正确的：



A：这种运动不存在；

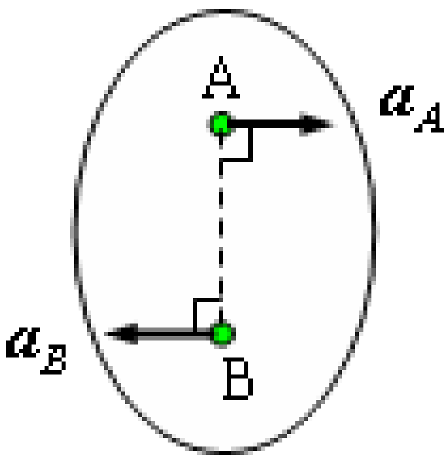
B：能求出圆盘的角速度（大小和方向）

C：能求出圆盘上任一点的加速度；

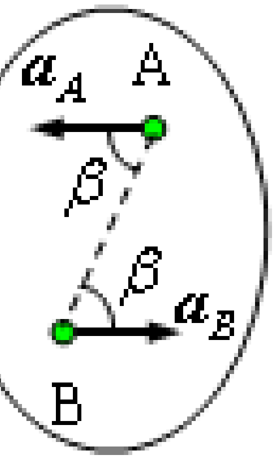
D：能求出圆盘的角加速度（大小和方向）

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}$$

例题9： 面图形上A、B两点的瞬时加速度分布如图所示，试判断哪种运动是可能的，哪种运动是不可能的。



（a） $\boldsymbol{a}_A = -\boldsymbol{a}_B$

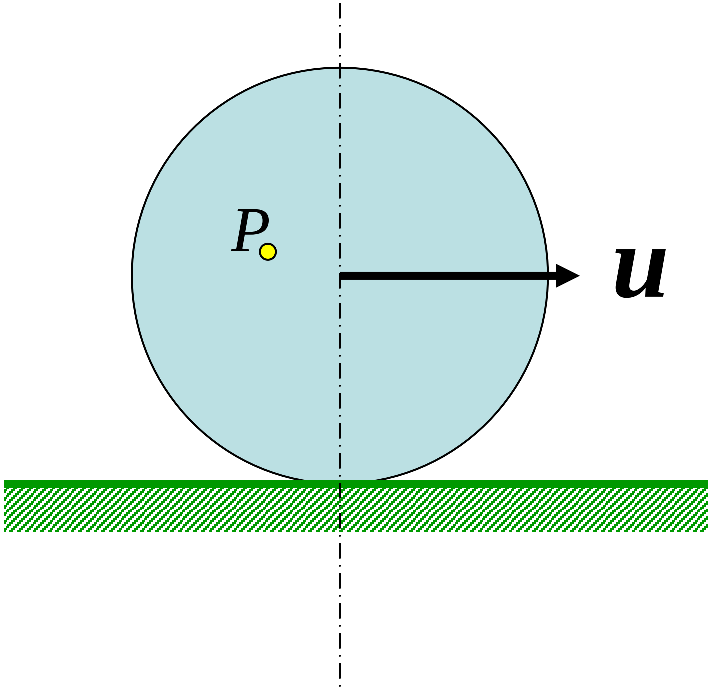


(b) $\boldsymbol{a}_A // \boldsymbol{a}_B, 0 < |\beta| < \frac{\pi}{2}, a_A > 0, a_B > 0$

根据上述思考题， 还能提出什么问题，总结出什么规律？

问题： 能否确定刚体的角速度和角加速度的转向？……

题4： 设 P 点为左半圆盘上的任意一点，若 v_P 为该点的速率，如果圆盘匀角速在地面上纯滚动，则下列结论哪个成立？



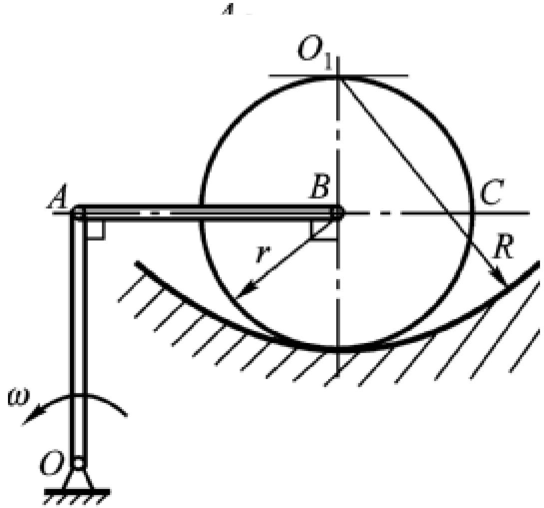
$$A: \quad \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} < 0$$

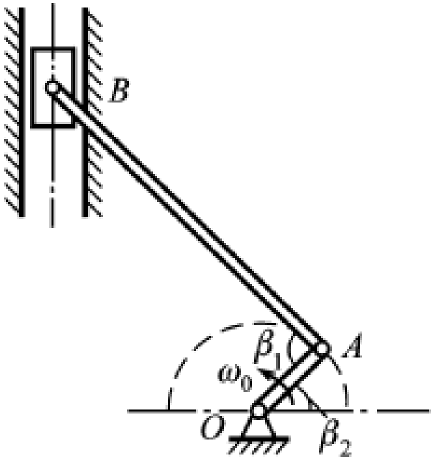
$$B: \quad \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} = 0$$

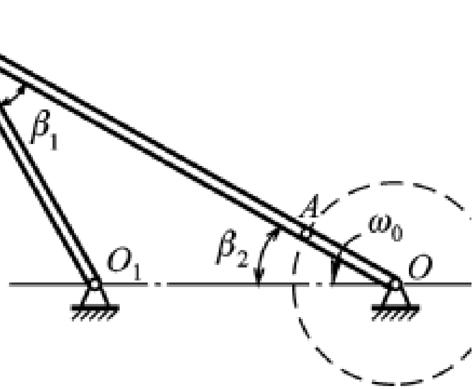
$$C: \quad \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} > 0$$

D: 不能确定

当刚体间均由铰链连接时，
用刚体平面运动的方法研究其运动学问题。







题5： 若曲柄**OA**的角速度为常量，试定性分析图示瞬时***AB***杆角加速度的转向。

动力学

一、质点动力学

- 惯 性 系 $m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$
- 非惯性系 $m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} = \sum \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$

基本方法

- 运动分析与受力分析、建立矢量方程
- 选定坐标系（直角坐标系、自然轴系）
- 将矢量方程在选定坐标轴上投影
- 求解投影方程

二、质点系的动力学普遍定理

1、动量定理 $$\boldsymbol{p}=\sum m_i\boldsymbol{v}_i=m\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}=\sum \overline{m}_i\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} \Leftrightarrow m\boldsymbol{a}_C=\sum \overline{m}_i\boldsymbol{a}_{Ci}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}} \qquad \boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\sum \boldsymbol{I}_i$$

2、动量矩定理 $$\boldsymbol{L}_o=\sum \boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{r}_{OC}\times m\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{L}_C^{\mathrm{r}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})+\boldsymbol{r}_{AC}\times(-m\boldsymbol{a}_A)$$

当A点是惯性参考系中的固定点 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

当A点与系统质心C重合时 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

3、动能定理

计算多刚体系统平面运动动能的一般公式：

$$T=\sum T_i=\sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{Ci}^2+\frac{1}{2}J_{Ci}\omega_i^2\right)$$

动能定理的积分形式：

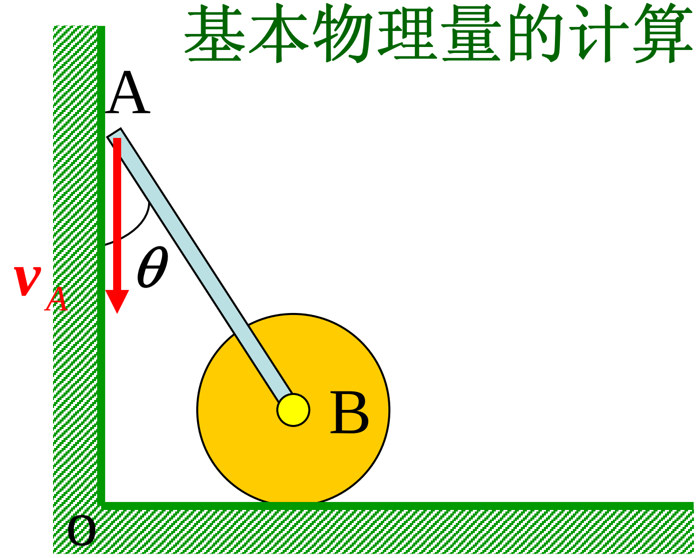
$$T_2-T_1=\sum W_{1\to 2}$$

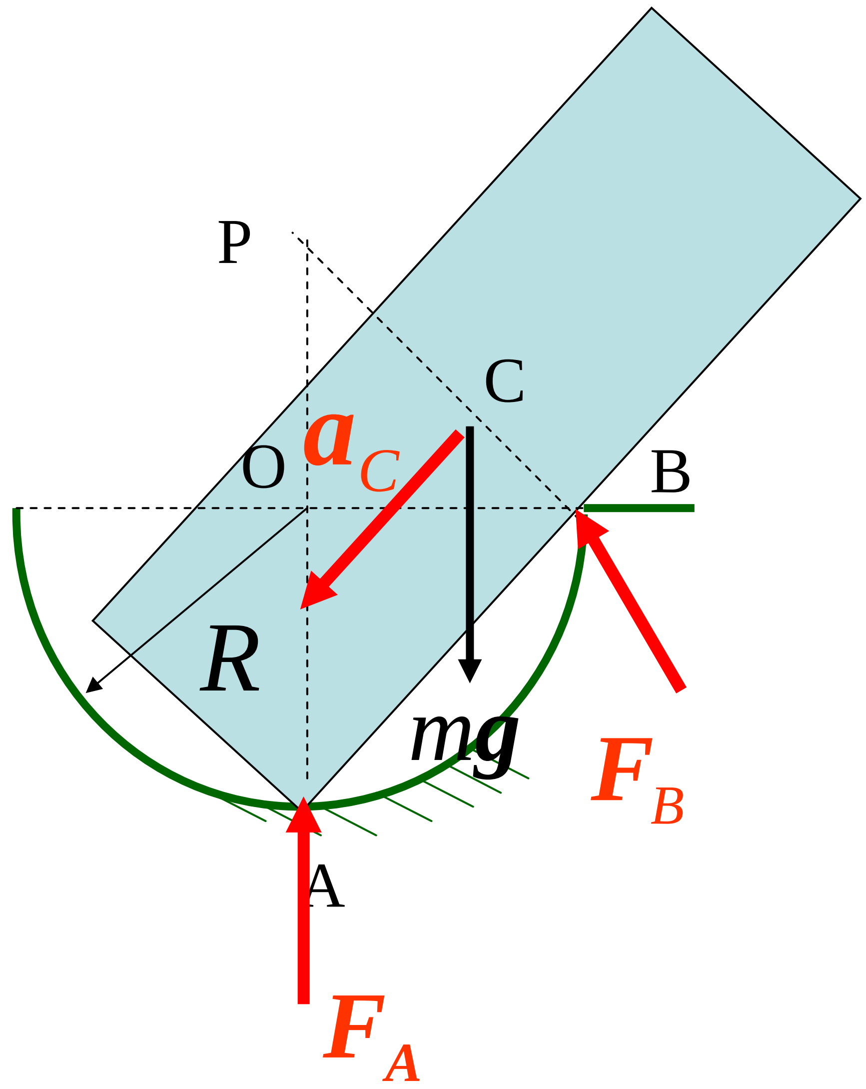
动能定理的微分形式：

$$\mathrm{d}T=\sum\delta W=\sum \boldsymbol{F}_i\bullet\boldsymbol{v}_i\mathrm{d}t$$

题1： 已知AB杆上A点作匀速直线运动，圆盘在地面上纯滚动。杆的长度为L，圆盘的半径为R，各物体的质量均为m。求图示瞬时系统的动量、动能、对固定点O和动点B（圆盘中心）的动量矩。

基本物理量的计算

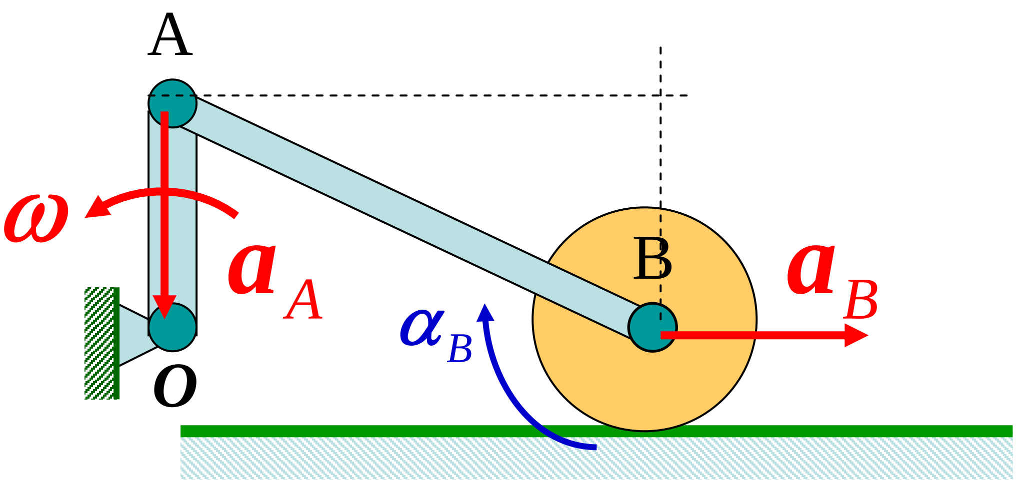




题2： 板由无初速开始运动，确定初瞬时作用在板上力系的主矢方向。

$$m\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)} = \boldsymbol{F}_R$$

题3： 已知*OA*杆绕*O*轴匀角速度转动，均质圆盘在水平地面上纯滚动，确定图示瞬时（*OA*铅垂），地面作用在圆盘上的摩擦力方向。

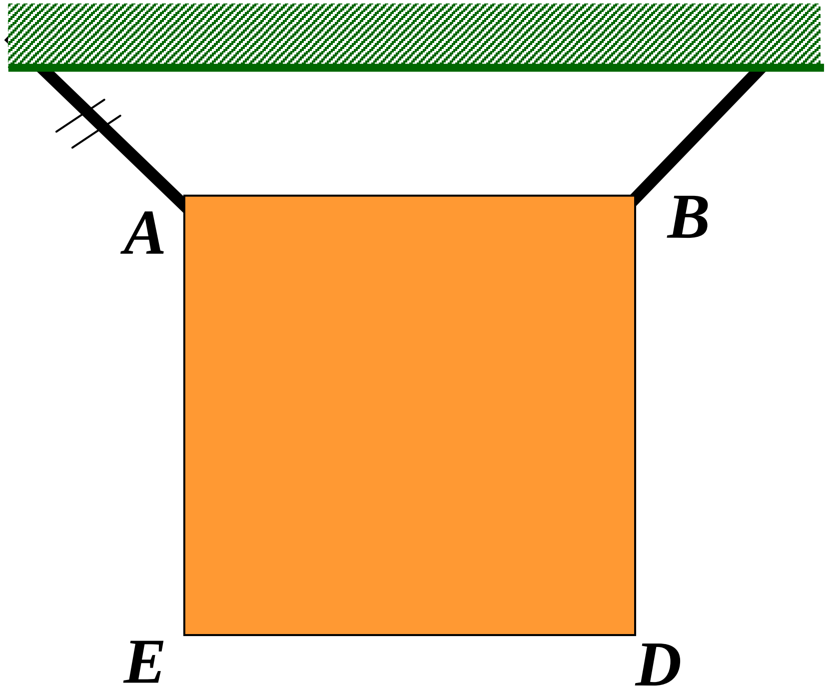


A: 摩擦力向左

B: 摩擦力向右

C: 摩擦力大小为零

题4： 正方形均质板被铅垂吊起，绳与水平线的夹角均为 45^0 ，当绳*A*被剪断后的瞬时，试比较该板四个顶角***A***、***B***、***D***、***E***和质心***C***加速度的大小并确定其方向。



A: $a_A > a_B > a_C > a_D > a_E$

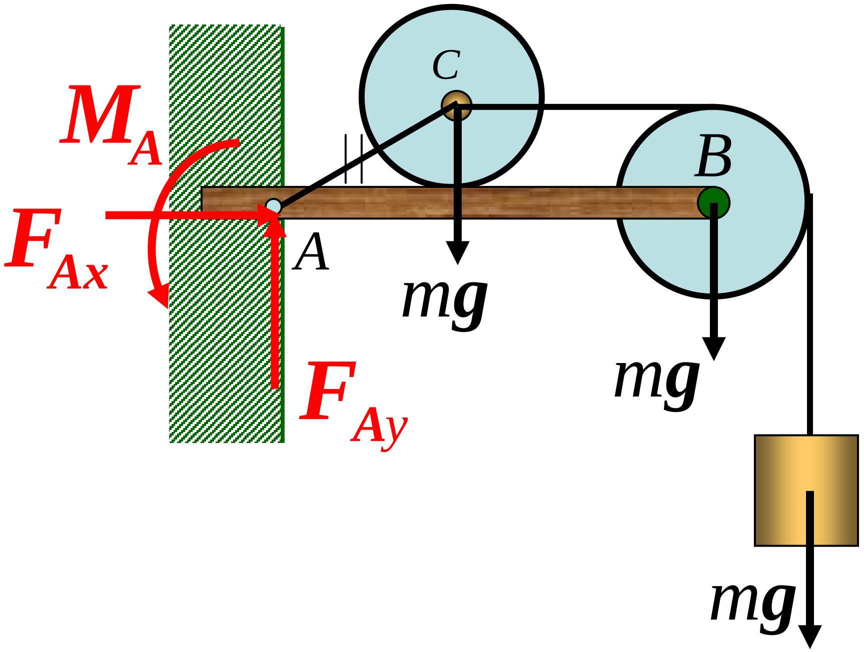
B: $a_A < a_B < a_C < a_D < a_E$

C: $a_A = a_B = a_C = a_D = a_E$

D: $a_E > a_A = a_D = a_C > a_B$

E: $a_E > a_A = a_D > a_C > a_B$

题5: 均质圆盘C和B用绳索连接如图所示。在细绳AC被剪断后的瞬时，AB杆A端约束力水平分量与铅垂分量和约束力偶的大小与绳AC剪断前的相比，如何变化。



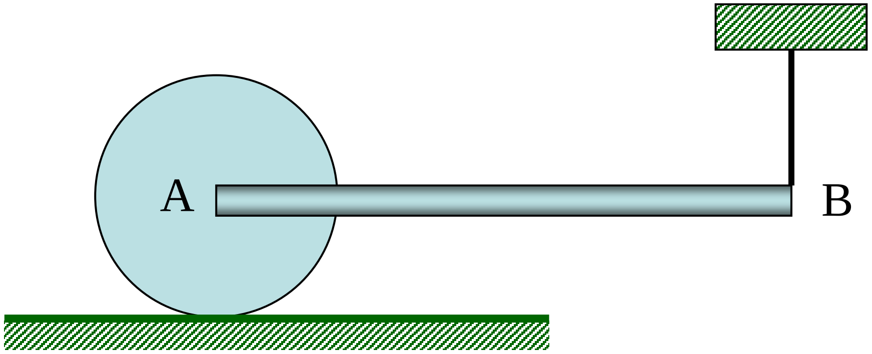
F_{Ax} A

M_A B

F_{Ay} B

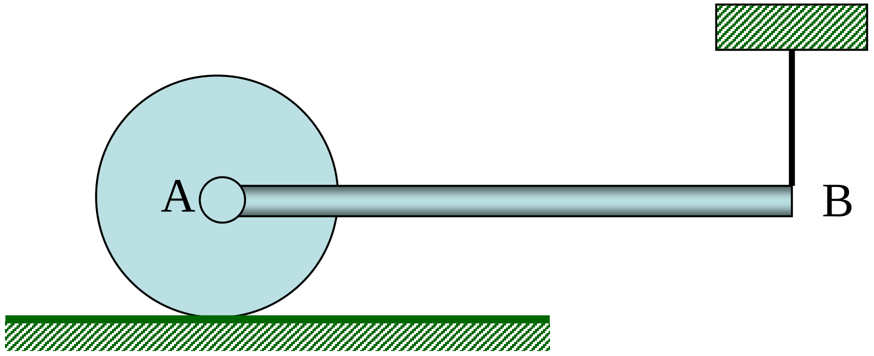
A: 增加　B: 减小　C: 不变　D: 不能确定

思考题： 质量为m半径为R的均质圆盘与质量为m长为 4R 的均质杆AB固连,，放在粗糙的水平面上，杆的 B 端用绳索吊起时杆处于水平。确定当绳索被剪断后的瞬时，作用在系统上的力系的主矢方向。



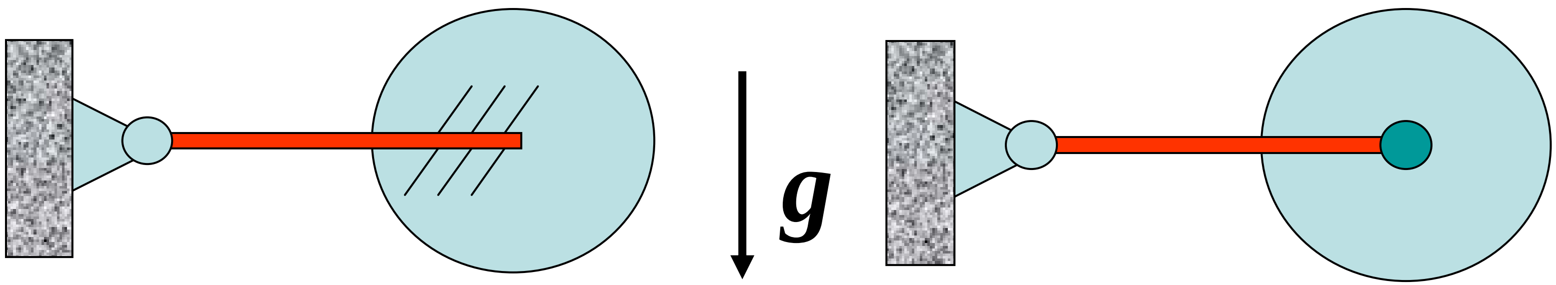
思考题： 能否确定摩擦力的方向？

思考题： 若 A 处用光滑铰链连接，外力主矢的方向如何确定。



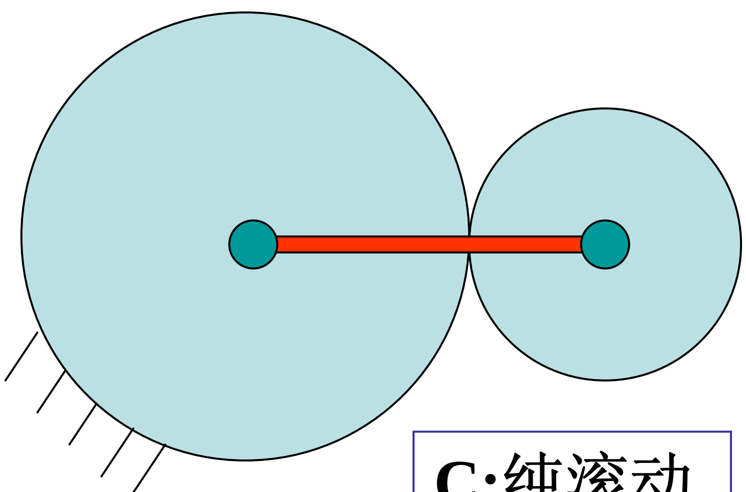
答案： B最大， C最小 （提示：从转动动能来考虑）

思考题： 系统由无初速开始运动，杆运动到铅垂位置时，哪种情况杆的角速度最大？哪种情况杆的角速度最小？



A:盘与杆固连

B:盘与杆光滑铰接

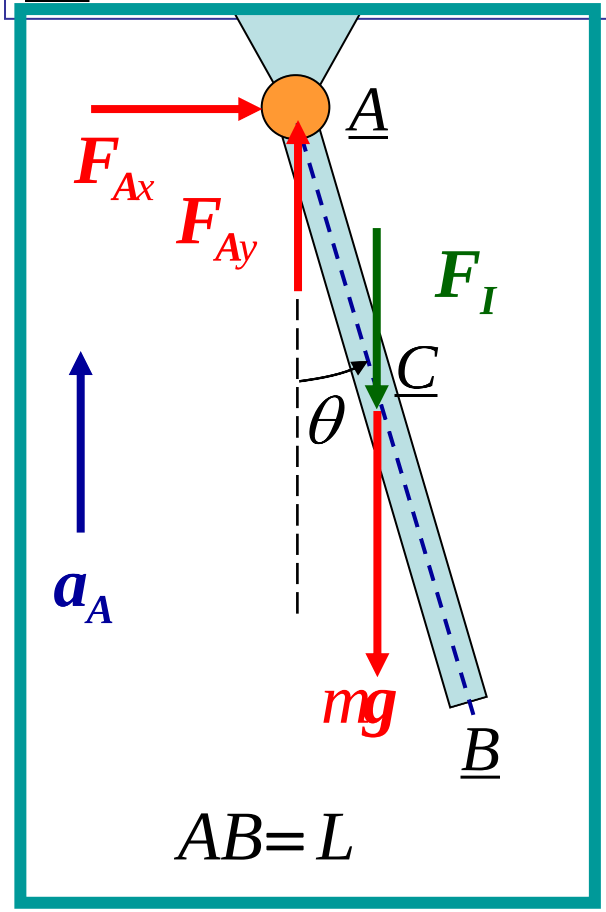


C:纯滚动

思考题： 建立图A系统的运动微分方程。

思考题： 若图C系统中的杆转过θ时，求杆的角速度、角加速度和小圆盘所受的摩擦力。

题6：均质杆*AB*悬挂在加速上升的框架上，求杆的运动微分方程



解：取杆为研究对象，受力分析与运动分析

$$\frac{\mathrm{d}L_A^{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} M_A(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) + [\boldsymbol{r}_{AC} \times (-m\boldsymbol{a}_A)]_z$$

杆相对*A*轴的动量矩 $$L_A^{\mathrm{r}} = \frac{1}{3} mL^2 \dot{\theta}$$

外力对*A*轴之矩 $$M_A = -\frac{1}{2} mgL\sin\theta$$

惯性力对*A*轴之矩 $$M_A^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{2} ma_A L\sin\theta$$

$$\boxed{L\ddot{\theta} + \frac{3}{2}(g + a_A)\sin\theta = 0}$$

4、碰撞的基本概念：

恢复系数、正碰撞、斜碰撞、对心碰撞、偏心碰撞、完全弹性碰撞、完全塑性碰撞、非完全弹性碰撞、打击中心。

5、碰撞基本定理

简化条件：忽略常规力；忽略碰撞过程中的位移。

1、冲量定理

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_i^{(*)}$$

$$m\boldsymbol{v}_{C2} - m\boldsymbol{v}_{C1} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_i^{(*)}$$

2、冲量矩定理

$$\boldsymbol{L}_{O2} - \boldsymbol{L}_{O1} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{I}_i^{(*)})$$

$$\boldsymbol{L}_{C2} - \boldsymbol{L}_{C1} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{I}_i^{(*)})$$

三、动静法 质点系运动的每一瞬时有：

$$\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}1},\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}1},\cdots,\boldsymbol{F}_n,\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}n},\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}n}\}=\{0\}$$

应用静力学写平衡方程的方法求解质点系的动力学问题，这种方法称为动静法。

刚体惯性力系的简化

平面运动刚体惯性力系向质心C的简化

$$\{\boldsymbol{F}_{1\mathrm{I}},\cdots,\boldsymbol{F}_{i\mathrm{I}},\cdots,\boldsymbol{F}_{n\mathrm{I}}\}=\{\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}},\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}c}\}$$

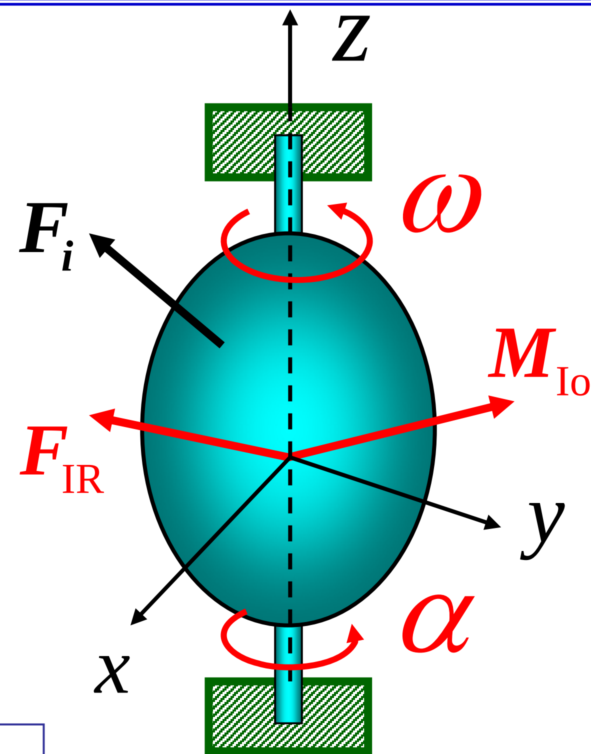
简化条件：

刚体的质量对称面平行于运动平面

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{IR}}=-m\boldsymbol{a}_c$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{IC}}=-J_C\boldsymbol{\alpha}$$

基本概念： 惯性积、惯量主轴、中心惯量主轴、动平衡、静平衡



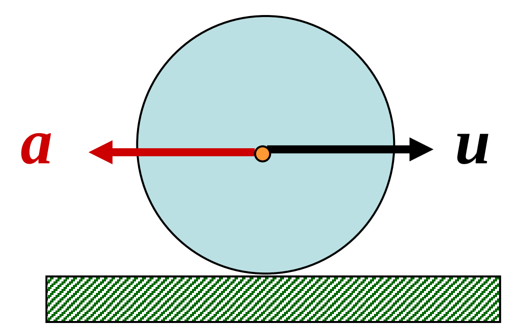
附加动反力为零的充分必要条件:

$$\left.\begin{aligned} x_c = y_c = 0 \\ J_{xz} = J_{yz} = 0 \end{aligned}\right\}$$

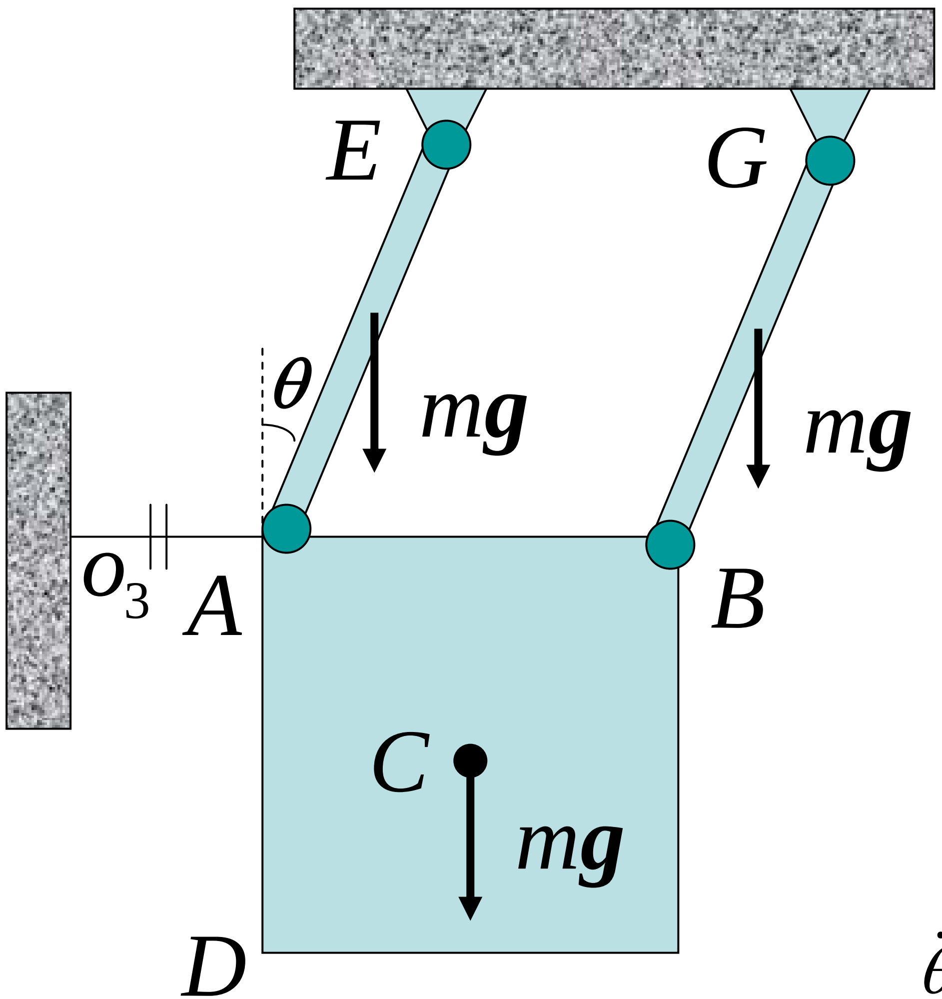
质心在转轴上

转轴为惯量主轴

题9： 质量为**m**半径为**R**的均质圆盘在地面上纯滚动，其轮心的速度为***u***、加速度为***a***。将惯性力向圆盘的速度瞬心简化。给出简化结果的主矢和主矩，方向画在图上。



题7： 已知： $m, L, \theta, AE \parallel BG$ 求切断绳后瞬时：



1：杆的角加速度

2：板质心加速度

3：铰链B的约束力

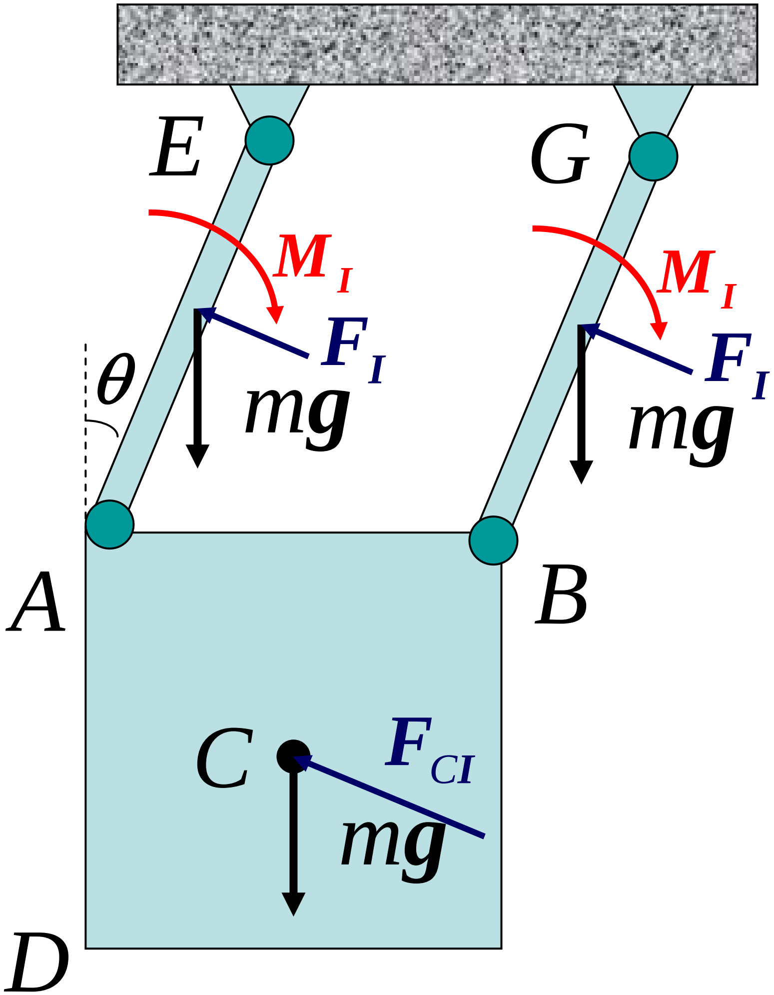
$$\mathrm{d}T = \sum \delta W$$

$$T = \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 = \frac{5}{6}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$\sum \delta W = -2mg\sin\theta L\dot{\theta}\mathrm{d}t$$

$$\frac{5}{3}mL^2\dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta} = -2mgL\sin\theta\dot{\theta}\mathrm{d}t$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{6g}{5L}\sin\theta \quad a_C = L|\ddot{\theta}|$$

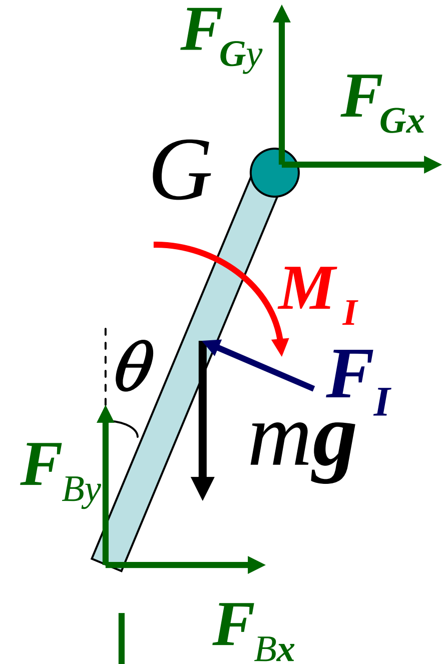


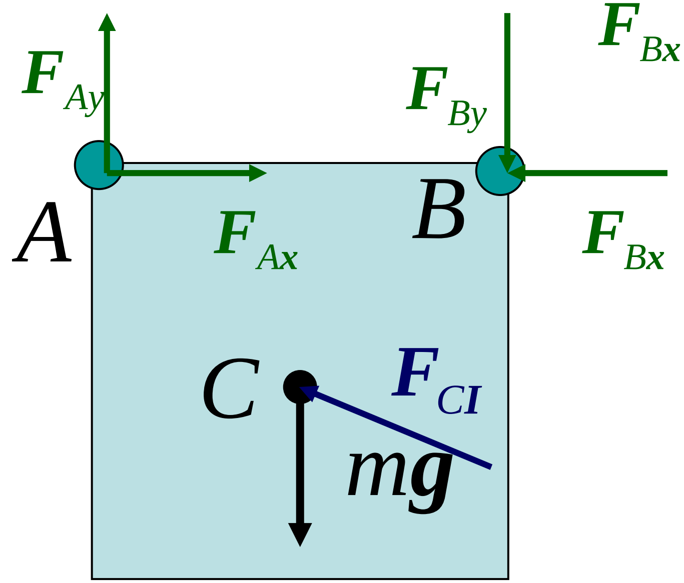
研究BG杆：

$$\sum M_G = 0$$

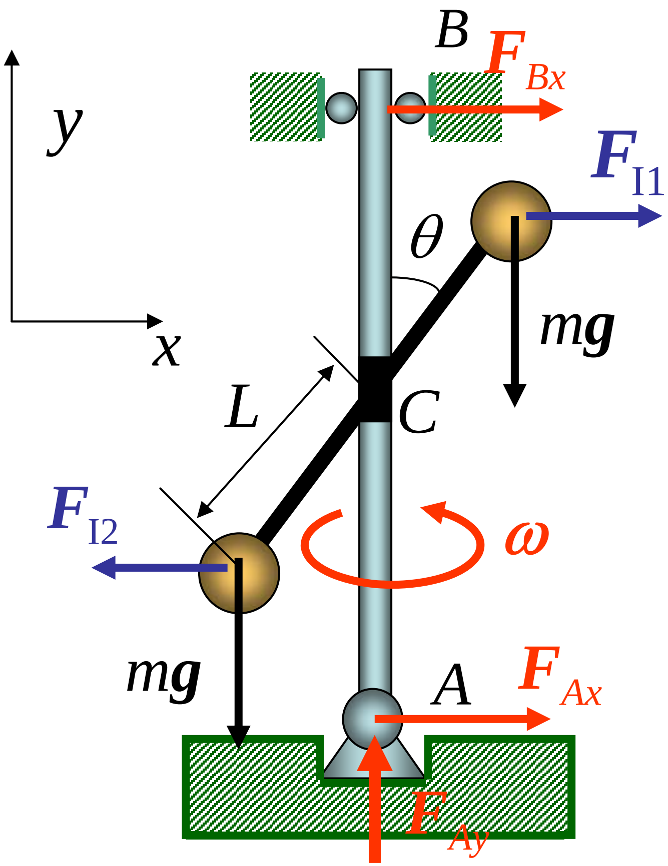
研究方板：

$$\sum M_A = 0$$





例8：已知：$AB=h, AC=h/2, \omega, \theta, L, m$，求**A**、**B**的约束力。



解：研究整体,受力分析与运动分析

$$F_{I1}=F_{I2}=ma=mL\omega^2\sin\theta$$

$$\sum M_A=0$$

$$-F_{Bx}h-F_{I1}(0.5h+L\cos\theta)-mgL\sin\theta$$
$$+F_{I2}(0.5h-L\cos\theta)+mgL\sin\theta=0$$

$$\sum F_x=0$$

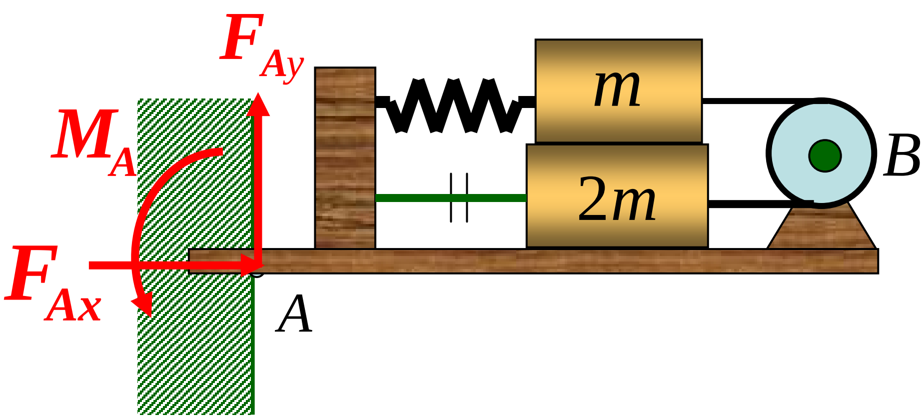
$$F_{Bx}+F_{Ax}+F_{I1}-F_{I2}=0$$

$$\sum F_y=0 \quad F_{Ay}-2mg=0$$

$$F_{Ax}=-F_{Bx}=\frac{mL\omega^2\sin 2\theta}{h}$$

附加动反力：由于运动引起的约束力

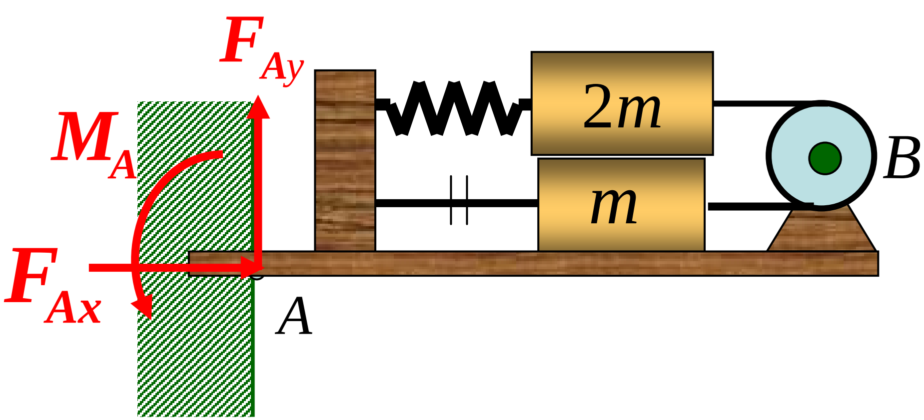
题9： 系统如图。绳索未被剪断时弹簧有变形且均质滑块处于平衡，滑轮半径为**R**质量为**m**，不计所有摩擦。试定性分析：当绳被剪断后的瞬时梁**A**端约束力与绳被剪断前的相比，如何变化？设被剪断的绳索距梁的距离为**R**。



A： 增加 F_{Ax} M_A

B： 减小

C： 不变 F_{Ay}



A： 增加 M_A

B： 减小 F_{Ax}

C： 不变 F_{Ay}

要求：

1、质点系各种基本物理量的计算

2、动力学普遍定理的综合应用

3、刚体惯性力系的简化

4、动平衡/静平衡的概念

5、应用动静法求解动力学问题

本学期的结束语

- 几点体会
  - 在大学打好基础（理论、实验）最重要。
  - 在大学学了什么不重要，重要的是怎样学，所学的知识要能够综合应用。
  - 吸取前人的智慧、经验和教训，少走弯路。
  - 把克服困难的过程当做提高能力的过程来完成。
- 几点希望
  - 把学习的过程当作探究问题的过程来完成，不要被动的认可知识和结论，要善于思考和推敲。
  - 在探索的过程中学习、在学习的过程中实践、在实践的基础上创新。

祝同学们取得优异的成绩