2.3-2.4 作业习题

1. R^3中的向量$\alpha_1=(3,1,0),\alpha_2=(6,3,2),\alpha_3=(1,3,5)$ 组成向量组S.
(1) 证明S是R^3的基.
(2) 求向量$\beta=(2,-1,2)$在基S下的坐标.
(3) 求自然基向量$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 在基S下的坐标.

2. 证明向量$\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(0,1,-1,-1),\alpha_3=(0,0,1,-1),\alpha_4=(0,0,0,1)$ 组成R^4的一组基, 并求这组基到自然基的过渡矩阵P.

3. 给定R^4中的向量$\varepsilon_1=(1,0,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1,0)$, $\varepsilon_4=(0,0,0,1)$, $\eta_1=(2,1,-1,1)$, $\eta_2=(0,3,1,0)$, $\eta_3=(5,3,2,1)$, $\eta_4=(6,6,1,3)$, 证明向量组$S=\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\}$ 是R^4的一组基，并求一非零向量$\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, 使其在基S和自然基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 下具有相同的坐标.

4. 求由以下每个小题中的向量生成的子空间的维数,并求出一组基.
(1) $\alpha_1=(6,4,1,-1,-2),\alpha_2=(1,0,2,3,4),\alpha_3=(1,4,-9,-16,22),\alpha_4=(7,1,0,-1,3)$;
(2) $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-1,2,0),\alpha_5=(2,1,5,6)$.

5. 求下列每个齐次线性方程组的一个基础解系,并用它表示出全部解.

(1) $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0 \\ x_1-x_3-2x_4-3x_5=0 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5=0 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0 \\ -x_1+3x_2-5x_3+7x_4-4x_5=0 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4-6x_5=0 \end{cases}$$

6. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解向量. 求a, b的值及方程组的通解.

7. 令$V = \{(a, b) | a, b \in \mathbf{R}\}$，定义加法$(a_1, b_1) \bigoplus (a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1b_2)$；数乘$k \circ (a_1, b_1) = (ka_1, kb_1), k \in \mathbf{R}$. 问：$V$对于规定的加法“$\bigoplus$”和数乘“$\circ$”运算是否构成$\mathbf{R}$上的线性空间？若不能构成线性空间，可否对数乘运算做下修改，使V的某个子集构成一个线性空间？

8. 在数域F上的线性空间V中，$a, b \in F$，$\alpha, \beta, \gamma \in V$，求证：
(1) $\alpha + \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \gamma - \beta$;
(2) $a(\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta$; $(a + b)(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta + b\alpha + b\beta$;
(3) $(a - b)\alpha = a\alpha - b\alpha$; $(a - b)(\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta - b\alpha + b\beta$.

9. (1) 复数域$\mathbf{C}$看成是实数域$\mathbf{R}$上的线性空间时，$\mathbf{C}$的维数是多少，并找出它的一组基；(2) 复数域$\mathbf{C}$看成是复数域$\mathbf{C}$上的线性空间时，$\mathbf{C}$的维数是多少，并找出它的一组基.

10. 设V是数域F 上的n维线性空间，W是V 的一个m维子空间（$m \leq n$），$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$W$的一组基，求证：它必可扩充为$V$的一组基。确切地说，必可找到$V$中$n - m$个元素$\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$，使得元素组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ 构成V的一组基.