“吸引区估计”习题

习题 1：证明系统 $\dot{x}_1 = x_2 + x_2^2, \dot{x}_2 = -x_1 - x_2$ 的原点渐近稳定，并估计其吸引区。

解答：原系统在原点线性化为：$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - x_2$，该线性化系统渐稳，因此原系统渐稳。线性化系统的 Lyapunov 函数为 $V = 1.5x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$，沿原系统方程求导得到：

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = -x_1^2 - x_2^2 + x_2^2(3x_1 + x_2)$$

$$\le -x_1^2 - x_2^2 + \sqrt{10}\|x\|^3 < 0, \|x\| < \frac{1}{\sqrt{10}} = r$$

所以 $V \le c < \lambda_{\min}(P)r^2 = 0.69/10 = 0.069$ 为吸引区的一个估计。

习题 2：证明系统 $\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - \sin x_2$ 的原点渐近稳定，并估计其吸引区。

解答：原系统在原点近似线性化：$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - x_2$，

该系统渐稳，所以原系统渐稳。线性化系统的 Lyapunov 函数为 $V=1.5x_1^2+x_2^2+x_1x_2$，沿原系统方程求导得到：

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= -x_1^2-x_2^2+3x_1(\sin x_2-x_2)-2x_2(\sin x_2-x_2)+x_2(\sin x_2-x_2)-x_1(\sin x_2-x_2)\\
&= -x_1^2-x_2^2+(3x_1x_2-2x_2^2+x_2^2-x_1x_2)g(x_2)\\
&= -x_1^2-x_2^2(1+g(x_2))+2x_1x_2g(x_2)\\
&= -[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1 & -g\\ -g & 1+g\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其中 $g(x_2)=\dfrac{\sin x_2-x_2}{x_2}=\dfrac{\sin x_2}{x_2}-1$。

可以看出：当 $1+g-g^2>0$ 时 $\dot{V}<0$。由 $1+g-g^2>0$ 可以得到 $(g-1/2)^2-1/4-1<0$，即

$1/2-\frac{\sqrt{5}}{2}<g<1/2+\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow 3/2-\frac{\sqrt{5}}{2}<\frac{\sin x_2}{x_2}<3/2+\frac{\sqrt{5}}{2}$，由此解出$\left|x_2\right|<r$，进一步按照书中公式计算$C$，则吸引区的一个估计为$\Omega_C=\left\{x:V\le C\right\}$。

“巴巴拉特引理”习题

习题 1：证明控制律$v=-z_1,\omega=-z_3+z_2\cos(t)$可以保证闭环系统$\dot{z}_1=v-z_2\omega,\dot{z}_2=z_1\omega,\dot{z}_3=\omega$的原点全局一致渐近稳定。(提示：首先证明非负函数$L=0.5(z_1^2+z_2^2)$沿闭环系

统方程的导数半负定)。

解答：沿闭环系统对L求导可得：$\dot{L}=-z_1^2\leq 0$，因此L有界、有极限$L(\infty)$，$(z_1,z_2)\in L_\infty$。由z_3的方程$\dot{z}_3=-z_3+z_2\cos(t)$和$z_2\in L_\infty$知$z_3\in L_\infty$有界。由于所有状态有界，因此状态控制输入及其各阶导数均有界。对$\dot{L}$应用巴巴拉特引理可得$\dot{L}\to 0\Rightarrow z_1\to 0$. 对$\dot{z}_1$应用巴巴拉特引理可得：$z_2\omega\to 0$。对$\frac{d}{dt}(z_2\omega)$应用巴巴拉特引理得到

$z_2\dot{\omega} \to 0 \Rightarrow z_2(-\omega + z_2 \cos t) \to 0 \Rightarrow z_2^2 \cos(t) \to 0$。因为 z_2 有极限， $\cos t$ 不趋于零，因此 $z_2 \to 0$。由 $\dot{z}_3 = -z_3 + z_2 \cos(t)$， $z_2 \to 0$ 知 $z_3 \to 0$。综上所述，所有状态均趋于零。证毕。

习题 2：证明控制律 $\omega = -z_3 - z_1 z_2, v = -z_1 + z_2\omega + z_2 \cos(t)$ 可以保证闭环系统：$\dot{z}_1 = v - z_2\omega, \dot{z}_2 = z_1\omega, \dot{z}_3 = \omega$ 的原点全局一致渐近稳定。(提示：首先证明非负函数 $L = 0.5(z_2^2 + z_3^2)$

沿闭环系统方程的导数半负定)。

解答：类似上题，请同学们自己证明。

“控制综述”课前小测验

1. 考虑非线性系统$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2, \dot{x}_2 = -x_2$，试证明：

（1）系统原点局部渐近稳定；

（2）系统原点全局渐近稳定（注意李雅普诺夫函数的构造）。

解答：近似线性化系统$\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -x_2$渐近稳定，因此原系统渐稳。为证明全局渐稳，构造 Lyapunov 函数

$V=0.5x_1^2+0.25ax_2^4\,(a>0)$，显然$V$全局正定且径向无界。

沿 方 程 求 导 得

$\dot{V}=-x_1^2+x_1x_2^2-ax_2^4=-[x_1,x_2^2]\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2^2\end{bmatrix}$，选取

$a>0.25$，则$\dot{V}$全局负定，又因V全局正定且径向无界，所以系统全局渐近稳定。

2. 考虑非线性系统$\dot{x}=-x+ax^2-x^3$，其中a 为常数。试证明：

（1） 系统原点局部渐近稳定；

（2） 当$|a|<2$时，系统原点全局渐近稳定。（注意利用多项式性质）。

解答：（1）由于线性化系统$\dot{x}=-x$在原点渐稳，因此原系统原点渐稳。

（2）由于

$$\frac{d}{dt}\left(0.5x^2\right)=x\dot{x}=-x^2(1-ax+x^2)=-x^2\left((x-a/2)^2+1-1/4a^2\right)$$

，因此$|a|<2\Rightarrow 1-1/4a^2>0\Rightarrow x\dot{x}<0$，系统全局渐稳。

“控制综述”习题

习题 1．（1）证明控制律$u=-kx(k>1)$ 可以保证非线性系统$\dot{x}=\frac{u}{1+x^2}+x$局部（渐近）稳定、区域（渐近）稳定和半全局（渐近）稳定，但不能保证系统全局（渐近）稳定；（2）试设计非线性控制律使得系统$\dot{x}=\frac{u}{1+x^2}+x$全局渐近稳定。

解答：闭环系统为

$$\dot{x}=-\frac{kx}{1+x^2}+x=-x\left(\frac{k}{1+x^2}-1\right)=-\left(\frac{k-1-x^2}{1+x^2}\right)x\text{。}$$

闭环系统线性化得到：$\dot{x}=-(k-1)x$。因$k>1$，线性化系统渐稳，所以原系统渐稳。

吸引区计算：

$$\frac{d}{dt}(0.5x^2)=x\dot{x}=-\left(\frac{k-1-x^2}{1+x^2}\right)x^2<0,|x|<\sqrt{k-1},$$

吸引区为$|x|<\sqrt{k-1}$，因此系统区域稳定。

增大k可以使得吸引区包含状态空间的任意紧集，因此系统半全局稳定。

对于任意给定的$k>1$，存在初始状态$x(0)>\sqrt{k-1}$不

在吸引区内，因此系统不是全局渐稳。

设计控制律 $u=-2x(1+x^2)$，得到闭环系统 $\dot{x}=-x$，该控制律使得系统全局渐稳。

“局部线性化”控制课前小测验

1．利用中心流形定理证明研究系统原点的稳定性：

（1） $\dot{x}=xy+y^2, \dot{y}=-y-x^2$；

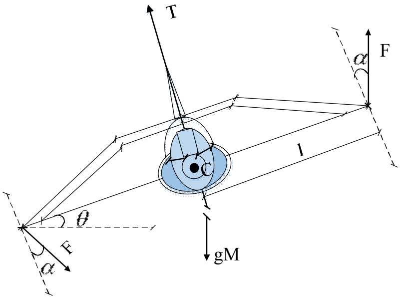
（2） $\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=-x_1-x_2+x_3^2, \dot{x}_3=-x_1x_3+x_2$（注意预变

换）

解答：课堂已经讲过，略。

“局部线性化”习题

习题 1. 考虑如下 VTOL 直升机运动模型



$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -u_1\sin\theta + \varepsilon u_2\cos\theta,\\ \ddot{y} &= u_1\cos\theta + \varepsilon u_2\sin\theta - g,\\ \ddot{\theta} &= u_2.\end{aligned} \tag{a}$$

其中（u_1, u_2） 为控制输入，$(\varepsilon, g > 0)$ 为已知常参数。试利用近似线性化方法设计线性状态反馈控制律使得系统的状态 $(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ 稳定在参考值 $(x_r, y_r, 0, 0, 0, 0)$，其中 (x_r, y_r) 为已知常数。

解答：设状态变量为

$x_1 = x - x_r, x_2 = \dot{x}, x_3 = y - y_r, x_4 = \dot{y}, x_5 = \theta, x_6 = \dot{\theta}$，

则可得到状态方程为：

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -u_1\sin x_5 + \varepsilon u_2\cos x_5,\\ &\dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = u_1\cos x_5 + \varepsilon u_2\sin x_5 - g,\\ &\dot{x}_5 = x_6, \dot{x}_6 = u_2\end{aligned}$$

以上方程的平衡点为原点，在平衡点出的控制输入为 $u_s = g$。令 $v = u - g$，则可得到系统在原点的线性化方程为：

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -gx_5 + \varepsilon u_2,$$
$$\dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = v,$$
$$\dot{x}_5 = x_6, \dot{x}_6 = u_2$$

设计控制律 $v = -k_1 x_3 - k_2 x_4 (k_1 > 0, k_2 > 0), u_1 = g + v$，则可以保证子系统 I: $\dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = v$ 渐稳。对于另外一个子系统 II

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -gx_5 + \varepsilon u_2,$$
$$\dot{x}_5 = x_6, \dot{x}_6 = u_2$$

做状态变换 $\overline{x_1} = x_1 - \varepsilon x_5$，$\overline{x_2} = x_2 - \varepsilon x_6$，则变换后的子系统方程为:

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \dot{\bar{x}}_2 = -gx_5, \dot{x}_5 = x_6, \dot{x}_6 = u_2 .$$

令

$$\bar{x}_5 = k_3\bar{x}_1 + k_4\bar{x}_2 - gx_5 = k_3x_1 + k_4x_2 - (g + k_3\varepsilon)x_5 - k_4\varepsilon x_6 ,$$

则

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}_2 &= -gx_5 = -k_3\bar{x}_1 - k_4x_2 + \bar{x}_5, \\
\dot{\bar{x}}_5 &= k_3\bar{x}_2 + k_4(-gx_5) - gx_6 \\
&= k_3x_2 - k_4gx_5 - (g + k_3\varepsilon)x_6 \triangleq \bar{x}_6, \\
\dot{\bar{x}}_6 &= k_3(-gx_5) + k_4(-gx_6) - gu_2
\end{aligned}$$

选取控制律：$u_2 = \dfrac{1}{g}(-k_3gx_5 - k_4gx_6 + k_5\bar{x}_5 + k_6\bar{x}_6)$，其中 $k_5 > 0, k_6 > 0$ 。由此得到子系统 II 的闭环系统为：

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2,$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = -k_3\bar{x}_1 - k_4 x_2 + \bar{x}_5,$$

$$\dot{\bar{x}}_5 = \bar{x}_6,$$

$$\dot{\bar{x}}_6 = -k_5\bar{x}_5 - k_6\bar{x}_6。$$

其 系 统 矩 阵 为 ： $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_3 & -k_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_5 & -k_6 \end{bmatrix}$ ， 由 于

$k_i > 0(i = 1, 2, 3, 4)$，因此系统矩阵的特征值均具有负实部，

因子子系统 II 渐稳，$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_5, \bar{x}_6)$ 趋于零。由状态变换

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_5 \\ \bar{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\varepsilon \\ k_3 & k_4 & -g-k_3\varepsilon & -k_4\varepsilon \\ 0 & k_3 & -k_4 g & -g-k_3\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$，因 $g \neq 0$，

所以该变换矩阵非奇异，因此(x_1, x_2, x_5, x_6)趋于零。

习题 2：假定只有(x, y) 可以测量，重做习题 1，即设计输出反馈控制律（控制律中仅利用(x, y)的信息）使得 VTOL 飞行器稳定到期望状态。（线性化后利用线性系统的状态观测器

理论）。

解答：首先判断子系统 I、II 是否能观测，对于子系统 I, 输出为 x_3，对于子系统 II, 输出为 x_1。结果表明两个子系统均为能观测，然后分别设计全维或者状态观测器，观测器 H 矩阵的参数可以用极点配置或者类似上题的方法设计，最后将上题中所设计的控制律中的状态用其相应的观测值代替，即可得到动态输出反馈控制律。

习题三．试证明$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right]$能控的充分必要条件为$\{A, B\}$能控、且$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$行满秩。（应用能控性的特征值判据）

解答：课堂已讲思路，略。

习题 4．考虑摆杆系统模型

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a\sin(x_1+\delta)-bx_2+cu \\ y &= x_1\end{aligned}$$

其中：期望摆角δ 已知，模型参数（a,b,c) 未知，其上下界

（a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2) 已知，即（a,b,c) 满足不等式：

$$0<a_1\le a\le a_2, 0\le b_1\le b\le b_2, 0<c_1\le c\le c_2$$

试设计动态输出反馈控制律使得 $y = x_1 \to 0$ 。

解 答 ： 同 时 加 入 积 分 动 态 $\dot{x}_3 = x_1$ 和 （ 降 维 ） 观 测 器

$\dot{x}_4 = fx_4 + gx_1 + hx_3$ 。结合原系统方程得到扩展系统：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -a\sin(x_1 + \delta) - bx_2 + cu \\
\dot{x}_3 &= x_1, \\
\dot{x}_4 &= fx_4 + gx_1 + hx_3
\end{aligned}
$$

设计反馈控制律 $u = -k_1x_1 - k_3x_3 - k_4x_4$ ，得到闭环系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -a\sin(x_1+\delta) - bx_2 - c(k_1x_1 + k_3x_3 + k_4x_4) \\
\dot{x}_3 &= x_1, \\
\dot{x}_4 &= fx_4 + gx_1 + hx_3
\end{aligned}
$$

如果能够选取控制参数 (k_1, k_3, k_4, f, g, h) 使得该系统有平衡点且在该平衡点渐近稳定，则有 $x_1 \to 0$。

平衡点应满足的方程为：

$$
\begin{aligned}
& x_{1s} = 0, x_{2s} = 0, \\
& -a\sin\delta - ck_3 x_{3s} - ck_4 x_{4s} = 0, \\
& f x_{4s} + h x_{3s} = 0
\end{aligned}
$$

因此只要矩阵 $\begin{bmatrix} -ck_3 & -ck_4 \\ h & f \end{bmatrix}$ 非奇异，即：只要 $k_3 f - k_4 h \neq 0$，系统存在平衡点 (x_{3s}, x_{4s})。令 $e_i = x_i - x_{is}(i = 1,2,3,4)$，则可得到非线性系统在平衡点附近的线性化方程为： $\dot{e} = Ae$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a\cos\delta-ck_1 & -b & -ck_3 & -ck_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & h & f \end{bmatrix}$$

其　　特　　征　　多　　项　　式　　为　　：

$$h(s)=s^4+(-f+b)s^3+(a\cos\delta+ck_1-bf)\,\mathrm{s}^2+ \\ (ck_3-ck_1f-a(\cos\delta)f+k_4cg)s-ck_3f+ck_4h$$

可以看出，当模型参数(a,b,c)已知时，可以通过选择控制参数(k_1,k_3,k_4,f,g,h)任意配置极点的位置。对于参数未知、

参数界已知的情况，只要选择 (k_1, k_3, k_4, f, g, h) 使得 $h(s)$ 为 Hurwitz 多项式即可。注意 $h(s)$ 为 Hurwitz 多项式自动保证了 A 非奇异，从而 $\begin{bmatrix} -ck_3 & -ck_4 \\ h & f \end{bmatrix}$ 非奇异，即系统一定存在平衡点。

最终得到的带积分的动态输出反馈控制律为：

$$\dot{x}_3 = x_1,$$
$$\dot{x}_4 = fx_4 + gx_1 + hx_3,$$
$$u = -k_1x_1 - k_3x_3 - k_4x_4$$

输入-输出反馈线性化课前小测验

一、分析以下非线性系统的原点是否稳定、是否渐近稳定、是否全局渐近稳定。

1、$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_2^2, \dot{x}_2 = x_2 - x_1$；

2、 $\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = -5x_1$；

3、 $\dot{x}_1 = -\sin x_2, \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3$；

4、 $\dot{x}_1 = x_2 - \dfrac{x_1}{1+x_1^2}, \dot{x}_2 = -x_1$。

解答：1、不稳定；2、稳定但非渐稳；3、渐稳但非全局渐稳；4、全局渐稳。

“输入-输出反馈线性”化习题

1．考虑以下非线性控制系统

$$\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = -\sin x_3 + (1 + \cos x_3)u,$$
$$y = x_1$$

（1） 试将该系统输入—输出反馈线性化，并求出相应的正则形（标准型）；

（2） 该系统是否为最小相位的？(要求熟练掌握)

解答：可以不求正则形（标准型）。其它部分很简单，自己完成。

2．考虑以下非线性控制系统

$$\dot{x}_1 = \sin x_2 + x_3 \cos x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = -cu - dx_3, y = x_1 + Lx_2$$

其中（c, d）为大于零的常数。试分别在 $L < 0, L = 0, L > 0$ 三种情况下将系统输入-输出反馈线性化，并讨论三种情况下系统的零动态。

解答：对于 $L = 0$，

$$y = x_1,$$
$$\dot{y} = \sin x_2 + x_3 \cos x_2,$$
$$\ddot{y} = (\cos x_2)u + (-cu - dx_3)\cos x_2 - x_3(\sin x_2)u$$

此题难度较大，可以先不做。

全状态反馈线性化课前小测验

1．证明系统 $\dot{x}_1 = a(t)x_2, \dot{x}_2 = -a(t)x_1 - x_2$ 全局一致渐近稳定、全局一致指数稳定，其中 $(a(t), \dot{a}(t))$ 有界且 $\lim_{t\to\infty} a(t) \neq 0$.

解答：利用正定函数 $V = 0.5(x_1^2 + x_2^2)$，略。

全状态反馈线性化习题

1．考虑以下非线性系统

（1） $\dot{x}_1 = -\sin x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = -\sin x_3 + (1+\cos x_3)u$ ；

（2） $\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = \sin x_2 + u$ ；

（3） $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = \sin x_1 + (1+\cos x_2)u$ 。

判断以上系统是否可以输入-状态反馈线性化?如果可以输入状态反馈线性化，求出相应的状态和输入变换使得系统在新

的状态和输入下表示为线性系统。

解答：（1）利用判据，$[g, ad_f g]$非对合，不可输入-状态反馈线性化。

(2) 可以输入-状态反馈线性化，相对阶为 3 的输出为：$y = x_1 - x_2$。……

（3）可以输入-状态反馈线性化，相对阶为 3 的输出 $h(x_2, x_3)$ 需要满足偏微分方程：$\dfrac{\partial h}{\partial x_2} + \dfrac{\partial h}{\partial x_3}(1 + \cos x_2) = 0$，可以求出

其解为：$h = x_3 - x_2 - \sin x_2$。……

反馈线性化控制习题

1．考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = -\sin x_3 + (1+\cos x_3)u,$$
$$y = x_1$$

试利用输入-输出反馈线性化方法设计控制律使得该系统的原点渐近稳定。

解答：课堂已讲，系统为最小相位系统，只需要设计控

制律使得输出趋于零即可保证所有状态趋于零。

2．考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = -\sin x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = \sin x_3 + (1+\cos x_3)u$$

试利用输入-输出反馈线性化方法设计控制律使得该系统的原点渐近稳定。

解答：计算较麻烦，暂略。

3．考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = \sin x_2 + (1+\cos x_2)u$$

试利用全状态反馈线性化方法设计控制律使得该系统的原点渐近稳定。

解答：该系统可以输入-状态反馈线性化，相对阶为 2 的输出满足 $\frac{\partial h}{\partial x_1}+(1+\cos x_2)\frac{\partial h}{\partial x_2}=0$，其解为：

$$y=h=x_1-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x_2}{2}\right)，\cdots\cdots.$$

滑模控制习题

1．考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = a\sin x_1 + b + cu$$

其中 (a,b,c) 为未知常参数满足 $a_1 \le a \le a_2$， $b_1 \le b \le b_2$，

$0 < c_1 \le c \le c_2$，参数的界 $(a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2)$ 已知。

（1） 设计不连续滑模控制器系统的状态趋于零；

（2） （暂不做）设计连续滑模控制使得系统的状态有界，并估计出状态界的大小；

（3） （暂不做）设计连续积分滑模控制使得系统的状态趋

于零。

解答：课堂上讲。

习题 2：考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = u_1 + d_1, \dot{x}_2 = u_2 + d_2, \dot{x}_3 = x_1 x_2$$

其中$|d_1| \le D_1, |d_2| \le D_2$，$(d_1, d_2)$未知，$(D_1, D_2)$已知。试设计不连续滑模控制器使得状态$(x_1, x_2, x_3)$趋于零。

解答：课堂上讲。

反步控制习题

1. 试用反步法设计控制律使得以下非线性系统的原点全局渐近稳定。

（1）$\dot{x}_1 = x_1^2+x_2, \dot{x}_2 = x_2^2 + x_3, \dot{x}_3 = x_3^2 + u$；

（2）$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_1 x_2^2$；

（3）$\dot{x}_1 = x_1^2 x_2 + a x_1^3 \cos(x_1), \dot{x}_2 = x_2 + u; (|a| < 1)$；

（4）$\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = \cos x_2 + u$。

解答：课堂上讲。