分子有理化

2005 年一 2

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right)$ = $\underline{0}$

该题将原式看作分数，分母是 1，则由分子有理化，易得答案。

2007 年一 1

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-1})=$ $\underline{\quad\quad 4 \quad\quad}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\dfrac{8}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{\sqrt{1+\dfrac{7}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=4$

该题将原式看作分数，分母是 1，则由分子有理化，易得答案。

单调有界必有极限定理

2011 年三

三. （10 分）设 $A>0, 0<x_1<\dfrac{1}{A}, x_{n+1}=x_n(2-Ax_n)\ (n=1,2,\cdots)$，证明不等式 $x_n<x_{n+1}<\dfrac{1}{A}$ 对所有正整数 n 成立，并求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明：用数学归纳法，$n=1$ 时，

$x_2=x_1(2-Ax_1)>x_1(2-A\dfrac{1}{A})=x_1$，

$x_2=x_1(2-Ax_1)=\dfrac{1}{A}-A(x_1-\dfrac{1}{A})^2<\dfrac{1}{A}$。

不等式成立，假设 $n=k$ 时，$x_k<x_{k+1}<\dfrac{1}{A}$ 成立，则 $n=k+1$ 时，

$x_{k+2}=x_{k+1}(2-Ax_{k+1})>x_{k+1}(2-A\dfrac{1}{A})=x_{k+1}$，

$x_{k+2}=x_{k+1}(2-Ax_{k+1})=\dfrac{1}{A}-A(x_{k+1}-\dfrac{1}{A})^2<\dfrac{1}{A}$。

不等式也成立。因此 $x_n<x_{n+1}<\dfrac{1}{A}$ 对所有正整数 n 都成立。

由于 x_n 单调上升有上界，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 a 满足方程 $a=a(2-Aa)$，解得 $a=0$，或 $a=\dfrac{1}{A}$，由 $a\geq x_1$ 知 $a=0$ 不成立，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{A}$。

该题通过数学归纳法+单调有界必有极限定理求解。

重要极限法

2005 年一 3

设当$x\to 0$时，α,β是等价无穷小，（$\alpha\beta>0$），$\lim\limits_{x\to 0}(1-\alpha\beta)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$=1

该题利用重要极限“n 趋近于无穷大时，（1+1/n）的 n 次方的极限为 e”，认为 ab 为 1/n,把指数构造出 1/ab，即将原指数 1/（a+b）变为(1/ab)*(ab/a+b),原式即可变为 e^(ab/a+b),指数上下同时除以 ab 即可。

2007 年一 2

2、设数列$x_n=\dfrac{(2n)!}{n^n\cdot n!}$，（$n=1,2,3,\cdots$），则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=$ $\underline{\qquad\dfrac{4}{e}\qquad}$；

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{4}{e}$；

该题按 x(n+1)/xn 将原式代入、化简，之后用重要极限易得。

2007 年一 3

3、$\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{x}{3})^{\frac{\sin 2x}{x^2}}=\underline{\qquad e^{-\frac{2}{3}}\qquad}$；

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{x}{3})^{\frac{\sin 2x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-\dfrac{x}{3})^{\frac{1}{-\frac{x}{3}}(-\frac{2}{3})\frac{\sin 2x}{2x}}=e^{-\frac{2}{3}}$

该题构造出重要极限的变形形式，对指数的处理类似于 2005 年一 3。

2010 年一 1

1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+1\right)}$

$=\dfrac{1}{2}$ ……

该题连用两次等价变换即可。

2013（2）年一 2

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x^2e^x)}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2e^x)}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{\frac{1}{2}x^2}} = e^2$

该题是指数代换+等价代换。

洛比达法则

2005 年三 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2/2}=2$$

该题先运用洛比达定则，再用等效替代求解。

2005 年三 5

（5）$\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]$

令 $t=\frac{1}{x}$， 原式= $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}-e}{t}=e\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}-1}{t}$

$$=e\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}{t}=e\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=e\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=e\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{e}{2}$$

注意该题不可以直接使用重要极限，而是先经过变形将 e 提出，并将剩下的式子变形为较为简单的形式，最后使用洛比达定则。

2007 年一 5

5、$\lim\limits_{x\to+\infty} x(x^{\frac{1}{x}}-1)=$ ___$+\infty$_______；

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}\dfrac{1-\ln x}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}(\ln x-1)=+\infty$$

该题考察的是洛比达定则结合幂指函数求导的运用。

2007 年四 3

（3）求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\sin\dfrac{1}{x}-x)$ 。

解 方法一 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\sin\dfrac{1}{x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x})=0\text{；}$$

该题考察的是洛比达定则结合三角函数变换的运用。

2009 年三 1

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}+\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+1+\ln x}=-\frac{1}{2}$$

该题先通分，然后洛比达定则连用两次即得出答案。

2009 年三 2

2) $\lim\limits_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

设 $u(x)=2e^{\frac{x}{1+x}}-2$，$v(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$，

又因为 $\lim\limits_{x\to0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-2\right)\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}2\left(\dfrac{e^{\frac{x}{1+x}}-1}{\frac{x}{1+x}}\right)\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)\left(\dfrac{x}{1+x}\right)=2$

该题通过对数将原式整理，再对新的指数使用洛比达定则。

2011 年一 3

3） 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to0}e\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}e\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim_{x\to0}e\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}e\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{e}{2}$$

该题是指数转换+洛比达定则。

2012 年一 1

1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}}$，

而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e$.

该题也是指数转换+洛比达定则。

Stolz 定理

2011 年一 1

1) 用 Stolz 定理计算极限 $\lim\limits_{n} \frac{1^{\frac{2}{1}}+2^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{4}{3}}+L+n^{\frac{n+1}{n}}}{n^2}$.

解：使用 Stoltz 定理，

$$\lim_{n} \frac{1^{\frac{2}{1}}+2^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{4}{3}}+L+n^{\frac{n+1}{n}}}{n^2}=\lim_{n} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{2n-1}=\frac{1}{2}$$

总的来说求极限还算是比较简单的题型，纵观这几年的题型，主要是以洛比达法和重要极限的考察。所以只要熟悉重要极限的使用方法，洛必达法则以及一些小的替换技巧，基本上就没问题啦，最后预祝大家在期中考试取得优异的成绩。