工科数分习题课九　泰勒公式

石岩

shiyan200245@163.com

Nov.23.2012

本节课的内容和要求

1. 熟记微分的概念;

2. 掌握带有Peano余项和Lagrange余项的Taylor公式和Maclaurin公式.

基本概念和主要结论

● 微分

记$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, 如果存在常数$A$使得$\Delta y$能够表示成$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 则称$f$在$x_0$点可微. 其中等式右端的第一项$A\Delta x$称为$f$在$x_0$点的微分, 记作$\mathrm{d}y = A\Delta x$.

■ 定理　可微$\Leftrightarrow$可导.

● Taylor公式

■ 定理　若函数f在点x_0存在至n阶导数, 则有

$$\begin{aligned}f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &+ o((x-x_0)^n). \qquad\qquad \text{(Peano余项)}\end{aligned}$$

■ 定理　若函数f在$[a,b]$上存在至n阶连续导函数, 在(a,b)内存在$(n+1)$阶导函数, 则

$$\begin{aligned}f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad\qquad \text{(Lagrange余项)}\end{aligned}$$

其中 $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $(0<\theta<1)$.

● Maclaurin公式　$x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

其中$R_n(x) = o(x^n)$,　　　　(Peano余项)

或　$R_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, (0<\theta<1)$.　(Lagrange余项)

- 常用函数的Maclaurin公式

(1) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$

$$0 < \theta < 1, x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \dfrac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},$

$$0 < \theta < 1, x \in (-\infty, +\infty).$$

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1}\dfrac{\cos\theta x}{(2m+2)!}x^{2m+2},$

$$0 < \theta < 1, x \in (-\infty, +\infty).$$

(4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$

$$0 < \theta < 1, x > -1.$$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1, x > -1.$$

(6) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},$

$$0 < \theta < 1, |x| < 1.$$

1. 求下列函数在指定点的Taylor公式.

(1) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5, \quad x_0 = 1$, Lagrange型余项;

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \quad x_0 = 0, 4$阶,Lagrange余项;

(3) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}, \quad x_0 = 0, 4$阶,Peano余项.

2. 设$f(x) = x^3 \sin x$, 利用Taylor展式求$f^{(100)}(0)$.

3. 求极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{\sqrt{1+x^2} - \cos x^2}$;

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$.

4. 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$上连续, 在(a,b) 内二阶可导, 证明存在$\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

5. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导, 若f在$(-\infty,+\infty)$上有界, 则存在一点$\xi \in (-\infty,+\infty)$, 使得$f''(\xi) = 0$.

6. 设$x_1 \in (0, \frac{\pi}{2}), x_{n+1} = \sin x_n, n = 1, 2, \ldots.$ 证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$.