第二章 期中考试复习指导

一、 要求：求函数极限、连续的定义，要求会证明海涅定理和康托定理，会求无穷小的阶，正确叙述函数一致连续和不一致连续的定义，掌握闭区间连续函数的性质。

二、 典型例题

1. 计算下面极限

1) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\right)$

解：

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}\right)=\lim_{x\to 4}2\left(\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}\right)=\frac{4}{3}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

解：由于：$a^k-b^k=(a-b)\left(a^{k-1}+a^{k-2}b+........+b^{k-1}\right)$，$k=mn$

设 $a=(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}},b=(1+\beta x)^{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^n-(1+\beta x)^m}{x\left((1+\alpha x)^{\frac{nm-1}{m}}+...........+(1+\beta x)^{\frac{nm-1}{n}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^n-(1+\beta x)^m}{x\left((1+\alpha x)^{\frac{nm-1}{m}}+...........+(1+\beta x)^{\frac{nm-1}{n}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(n\alpha-m\beta)x+\left(C_n^2\alpha^2x^2+........+C_m^2\beta^2x^2+.........\right)}{x\left((1+\alpha x)^{\frac{nm-1}{m}}+...........+(1+\beta x)^{\frac{nm-1}{n}}\right)}$$

$$=\frac{n\alpha-m\beta}{mn}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{x^3}\dfrac{x^2}{(\sin x)^2}x=0$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2\sin^2\frac{x^2}{2}}}{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{\sin^2\frac{x^2}{2}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}$

$=e^3$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}=\dfrac{1}{4}$

7)

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

解：设$u(x)=2e^{\frac{x}{1+x}}-2,v(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-2\right)\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}2\left(\dfrac{e^{\frac{x}{1+x}}-1}{\frac{x}{1+x}}\right)\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)\left(\dfrac{x}{1+x}\right)=2$

2. 对定理证明的要求（必须会证明下面两个定理）

1) （Heine 定理）函数 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=A$ 收敛的充分必要条件：

$\forall\left\{x_n\right\}\to x_0,x_n\neq x_0,n=1,2,3,\ldots\ldots\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=A$

2) 有限闭区间上连续函数是一致连续

3. 求无穷小阶的计算

1) $f(x)=\sin(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}-\sqrt{2})\quad\left(x\to 0+\right)$

解：因为

$$f(x)=\sin(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}-\sqrt{2})=\sin\frac{(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}-\sqrt{2})(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{2})}{(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{2})}$$

$$=\sin\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{2})}=\sin\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)}{(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{2})\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)}$$

$$=\sin\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{2})\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)}$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{2})\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)}}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{2})\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)}}{\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{2})\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)}}\{(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{2})\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)\}^{-1}$$

$$=1/4\sqrt{2}$$

所以为$\frac{1}{2}$阶的无穷小。

2) $f(x)=x\sin\sqrt{x}\left(x\to0\right)$

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=1$，故为$\frac{3}{2}$阶的无穷小。

3) $f(x)=\frac{1}{\sin\pi x}\left(x\to1\right)$

解：$\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{\sin\pi x}}{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\sin\pi\left(y+1\right)}=-\pi$，故为 **1** 阶无穷小。

4) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\quad\left(x\to0\right)$

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{8}}}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+1}}=1\quad\left(x\to0\right)$

故无穷小阶$\frac{1}{8}$

5) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}\left(x\to 0\right)$

解：

$$\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}\right)\left(\left(1-2x\right)^{\frac{5}{2}}+\left(1-2x\right)^{\frac{4}{2}}+.........+\left(1-3x\right)^{\frac{5}{3}}\right)}{\left(1-2x\right)^{\frac{5}{2}}+\left(1-2x\right)^{\frac{4}{2}}+.........+\left(1-3x\right)^{\frac{5}{3}}}$$

$$=\frac{3x^2-8x^3}{\left(1-2x\right)^{\frac{5}{2}}+\left(1-2x\right)^{\frac{4}{2}}+.........+\left(1-3x\right)^{\frac{5}{3}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x^2}=\frac{1}{3}$$

故无穷小阶2

4. 讨论函数连续性

1) 讨论函数的连续性：$f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$

解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}x & x<0;\\ 0 & x=0;\\ x^2 & x>0;\end{cases}$ f 在 R 上连续。

2) 讨论函数的连续性 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$

3) 设函数 $f(x)$ 在 R 上不恒等于零的连续函数，且 $f(x+y)=f(x)f(y),\forall x,y\in R$

证明：$f(x)=a^x,a=f(1)$ 。

证明：由已知条件：$f\left(x\right)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$，可见 $f\left(x\right)\geq 0,x\in R$；

又 $f\left(m\right)=f\left(m-1\right)f\left(1\right)=\left[f\left(1\right)\right]^m$，设

$\frac{m}{n}=k,m=nk\Rightarrow f\left(m\right)=\left(f\left(1\right)\right)^m=f\left(nk\right)=\left[f\left(k\right)\right]^n\Rightarrow f\left(k\right)=\left(f\left(1\right)\right)^k$，

而 $f\left(0\right)=f\left(x\right)f\left(-x\right)\Rightarrow f\left(-\frac{m}{n}\right)=f\left(0\right)\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^{-1}$，

又因为 $f(x)$ 在 R 上不恒等于零的连续函数，

所以存在 $x_0, f\left(x_0\right) \neq 0, f\left(x_0\right)=f\left(x_0\right) f\left(0\right) \Rightarrow f\left(0\right)=1$

所以，对于任意的有理数 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\left(f\left(1\right)\right)^{\frac{p}{q}}$。

对于任意的无理数 $\forall x \in R, \exists \dfrac{p_k}{q_k} \rightarrow x \Rightarrow f\left(\dfrac{p_k}{q_k}\right)=\left(f\left(1\right)\right)^{\frac{p_k}{q_k}}$，由函数的连续性知道

$f\left(x\right)=\left[f\left(1\right)\right]^x$，得证。

5. 讨论函数的一致连续

1) 设 $I=\left(0,+\infty\right)$，$I_1=\left[\sigma,+\infty\right), \sigma>0$ 证明下面问题

证明 $\dfrac{1}{x}$ 在区间 $I=\left(0,+\infty\right)$ 不一致连续，在区间 $I_1=\left[\sigma,+\infty\right), \sigma>0$ 一致连续

证明:1）取 $\varepsilon_0=1, s_n=\dfrac{1}{n}, t_n=\dfrac{1}{n+1}, \left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right|<\dfrac{1}{n}$ 有 $\left|\dfrac{1}{s_n}-\dfrac{1}{t_n}\right|=1,$ 得证。

2）$\forall x_1, x_2 \in I_1 \because \quad \left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|=\left|\dfrac{x_1-x_2}{x_1 x_2}\right| \leq \dfrac{\left|x_1-x_2\right|}{\sigma^2}$

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists \delta=\sigma^2 \varepsilon, \forall x_1, x_2 \in I_1,$ 满足 $\left|x_1-x_2\right|<\delta$ 有 $\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|<\varepsilon$ 得证

2) 函数 $f(x)=\sin x^2$ 在数域 R 上连续有界，但在 R 上不一致连续。

证明: 取 $\varepsilon_0=1, s_n=\sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}, t_n=\sqrt{\dfrac{(n+1)\pi}{2}}$

$$\left|s_n-t_n\right|=\left|\sqrt{\frac{n\pi}{2}}-\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}\right|=\left|\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}+\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}}\right|<\frac{\pi}{\sqrt{n}}$$

$\left|\sin s_n{}^2-\sin t_n{}^2\right|=1$ 得证。

3) 函数 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 连续并有界，但是在此区间上不一致连续。

证明：取

$$s_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},t_n=\frac{1}{2n\pi}\Rightarrow 0<t_n-s_n=\frac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}<\frac{1}{2n\pi}<\frac{1}{n}$$

$$\left|f\left(t_n\right)-f\left(s_n\right)\right|=\left|\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=1$$

故不一致连续。

4)

假设$\mathrm{g}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\in[\mathrm{a}, +\infty)$一致连续, $\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\in[\mathrm{a}, +\infty)$连续, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$,

证明: $\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\in[\mathrm{a}, +\infty)$一致连续.

5．闭区间上连续函数的性质

1)　设函数$f(x)$在区间$[0,2a]$连续，且$f(0)=f(2a)$，证明存在一点

$\beta\in[0,2a]\quad f(\beta)=f(\beta+a)$

证明：构造函数$F(x)=f(x+a)-f(x),0\le x\le a$，

$F(a)=f(2a)-f(a);F(0)=f(a)-f(0)=f(a)-f(2a)$；

因此若$f(2a)-f(a)=0$，$\beta=a$即可证明；

若$f(2a)-f(a)\neq 0$，则$F(a)F(0)<0$，由介值定理可以证明。

2)　设函数$f(x)$在闭区间$I=[a,b]$上连续，$x_1,x_2........x_n\in[a,b]$,另有一组正数

$\lambda_1,\lambda_2,........\lambda_n$满足$\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n=1$，则一定存在一点

$\eta\in[a,b]\quad f(\eta)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots\cdots+\lambda_n f(x_n)$