第五章　留　数

一、选择题：

1．函数 $\dfrac{\cot \pi z}{2z-3}$ 在 $|z-i|=2$ 内的奇点个数为（　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

2．设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 $z=a$ 为本性奇点与 m 级极点，则 $z=a$ 为函数 $f(z)g(z)$ 的(　)

（A）可去奇点　　（B）本性奇点

（C）m 级极点　　（D）小于 m 级的极点

3．设 $z=0$ 为函数 $\dfrac{1-e^{x^2}}{z^4\sin z}$ 的 m 级极点，那么 $m=$ (　)

（A）5　　（B）4　　(C)3　　（D）2

4． $z=1$ 是函数 $(z-1)\sin\dfrac{1}{z-1}$ 的(　)

(A)可去奇点　　（B）一级极点

（C）　一级零点　　（D）本性奇点

5． $z=\infty$ 是函数 $\dfrac{3+2z+z^3}{z^2}$ 的(　)

(A)可去奇点　　（B）一级极点

（C）　二级极点　　（D）本性奇点

6．设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 $|z|<R$ 内解析，k 为正整数，那么 $\mathrm{Res}[\dfrac{f(z)}{z^k},0]=$ (　)

（A） a_k　　（B） $k!a_k$　　（C） a_{k-1}　　（D） $(k-1)!a_{k-1}$

7．设 $z=a$ 为解析函数 $f(z)$ 的 m 级零点，那么 $\mathrm{Res}[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a]=$ (　)

(A) m　　（B） $-m$　　（C）　$m-1$　　（D） $-(m-1)$

8．在下列函数中，$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$ 的是（　）

(A) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$　　(B) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}-\dfrac{1}{z}$

(C) $f(z)=\dfrac{\sin z+\cos z}{z}$　　(D) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$

9．下列命题中，正确的是(　　　)

(A)　设 $f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 点解析，m 为自然数，则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点.

(B)　如果无穷远点 ∞ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点，那么 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0$

(C)　若 $z=0$ 为偶函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，则 $\operatorname{Res}[f(z),0]=0$

(D)　若 $\oint_c f(z)dz=0$，则 $f(z)$ 在 c 内无奇点

10.　$\operatorname{Res}[z^3\cos\dfrac{2i}{z},\infty]=$（　　）

(A) $-\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{2}{3}i$　　(D) $-\dfrac{2}{3}i$

11．$\operatorname{Res}[z^2e^{\frac{1}{z-i}},i]=$（　　）

(A) $-\dfrac{1}{6}+i$　　(B) $-\dfrac{5}{6}+i$　　(C) $\dfrac{1}{6}+i$　　(D) $\dfrac{5}{6}+i$

12．下列命题中，不正确的是(　　　)

(A) 若 $z_0(\neq\infty)$ 是 $f(z)$ 的可去奇点或解析点，则 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=0$

(B) 若 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 z_0 解析，z_0 为 $Q(z)$ 的一级零点，则 $\operatorname{Res}[\dfrac{P(z)}{Q(z)},z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

(C) 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点，$n\geq m$ 为自然数，则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{d^n}{dz^n}[(z-z_0)^{n+1}f(z)]$$

（D）如果无穷远点 ∞ 为 $f(z)$ 的一级极点，则 $z=0$ 为 $f(\frac{1}{z})$ 的一级极点，并且 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\lim\limits_{z\to 0} zf(\frac{1}{z})$

13．设 $n>1$ 为正整数，则 $\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{z^n-1}dz=$（　　）

（A）0　　（B）$2\pi i$　　（C）$\frac{2\pi i}{n}$　　（D）$2n\pi i$

14．积分 $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{z^9}{z^{10}-1}dz=$（　　）

（A）0　　（B）$2\pi i$　　（C）10　　（D）$\frac{\pi i}{5}$

15．积分 $\oint\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{1}{z}dz=$（　　）

（A）0　　（B）$-\frac{1}{6}$　　（C）$-\frac{\pi i}{3}$　　（D）$-\pi i$

二、填空题

1．设 $z=0$ 为函数 $z^3-\sin z^3$ 的 m 级零点，那么 $m=$________.

2．函数 $f(z)=\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ 在其孤立奇点 $z_k=\dfrac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots)$ 处的留数 $\mathrm{Res}[f(z),z_k]=$________________.

3．设函数 $f(z)=\exp\{z^2+\frac{1}{z^2}\}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$______________

4．设 $z=a$ 为函数 $f(z)$ 的 m 级极点，那么 $\mathrm{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)},a]=$ ________.

5．双曲正切函数 $\tanh z$ 在其孤立奇点处的留数为________.

6．设 $f(z)=\frac{2z}{1+z^2}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=$ ________.

7．设 $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^5}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$ ________.

8．积分 $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}}dz=$ ________.

9．积分 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{\sin z}dz=$ ________.

10．积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx=$ ________.

三、计算积分 $\oint_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{z\sin z}{(e^z-1-z)^2}dz$.

四、利用留数计算积分 $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}\quad(a>0)$

五、利用留数计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$

六、利用留数计算下列积分：

1. $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin x\cos 2x}{x^2+1}dx$　　　2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x-1)}{x^2+1}dx$

七、设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，m 为正整数，试证 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点的充要条件是 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=b$，其中 $b\neq 0$ 为有限数.

八、设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，试证：若 $f(z)$ 是奇函数，则 $\mathrm{Res}[f(z),a]=\mathrm{Res}[f(z),-a]$；若 $f(z)$ 是偶函数，则 $\mathrm{Res}[f(z),a]=-\mathrm{Res}[f(z),-a]$.

九、设 $f(z)$ 以 a 为简单极点，且在 a 处的留数为 A，证明 $\lim\limits_{z\to a}\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{1}{|A|}$.

十、若函数 $\Phi(z)$ 在 $|z|\leq 1$ 上解析，当 z 为实数时，$\Phi(z)$ 取实数而且 $\Phi(0)=0$，$f(x,y)$ 表示 $\Phi(x+iy)$ 的虚部，试证明 $\int_{0}^{2\pi}\frac{t\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\pi\Phi(t)$，且 $(-1<t<1)$

一、1.（D） 2.（B） 3.（C） 4.（D） 5.（B）
6.（C） 7.（A） 8.（D） 9.（C） 10.（A）
11.（B） 12.（D） 13.（A） 14.（B） 15.（C）

二、1. 9 2. $\dfrac{(-1)^k}{(k\pi+\frac{\pi}{2})^2}$ 3. 0 4. $-m$ 5. 1

6. -2 7. $-\dfrac{1}{24}$ 8. $\dfrac{\pi i}{12}$ 9. $2\pi i$ 10. $\dfrac{\pi i}{e}$

三、$-\dfrac{16}{3}\pi i$.

四、$\dfrac{\pi}{a\sqrt{a^2+1}}$.

五、$\dfrac{5}{12}\pi$.

六、1. $\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{e-e^3}{e^4}\right)$ 2. $\dfrac{\pi\cos 1}{e}$.