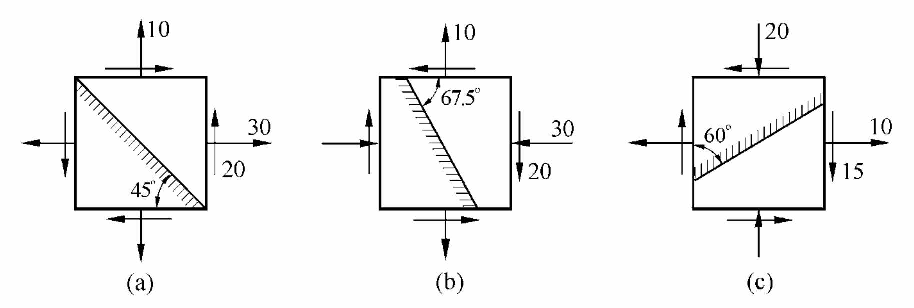
第八章　应力、应变状态分析

题号　　　　　　　　　　　　　　　　　　页码

（也可通过左侧题号书签直接查找题目与解）

8-2 已知应力状态如图所示（应力单位为 MPa），试用解析法计算图中指定截面的正应力与切应力。



题 8-2 图

(a)解：由题图所示应力状态可知，

$$\sigma_x = 30\text{MPa}，\sigma_y = 10\text{MPa}，\tau_x = -20\text{MPa}，\alpha = 45^\circ$$

将上列数据代入平面应力状态斜截面应力公式，得指定斜截面上的正应力和切应力分别为

$$\sigma_\alpha = (\frac{30+10}{2} + 20\sin 90^\circ)\text{MPa} = 40.0\text{MPa}$$

$$\tau_\alpha = (\frac{30-10}{2}\sin 90^\circ)\text{MPa} = 10.0\text{MPa}$$

(b)解：由题图所示应力状态可知，

$$\sigma_x = -30\text{MPa}，\sigma_y = 10\text{MPa}，\tau_x = 20\text{MPa}，\alpha = 22.5^\circ$$

由此可得指定斜截面上的正应力和切应力分别为

$$\sigma_\alpha = (\frac{-30+10}{2} + \frac{-30-10}{2}\cos45^\circ - 20\sin45^\circ)\text{MPa} = -38.3\text{MPa}$$

$$\tau_\alpha = (\frac{-30-10}{2}\sin45^\circ + 20\cos45^\circ)\text{MPa} = 0$$

(c)解：由题图所示应力状态可知，

$$\sigma_x = 10\text{MPa}，\sigma_y = -20\text{MPa}，\tau_x = 15\text{MPa}，\alpha = -60^\circ$$

由此可得指定斜截面上的正应力和切应力分别为

$$\sigma_\alpha = [\frac{10-20}{2} + \frac{10+20}{2}\cos(-120^\circ) - 15\sin(-120^\circ)]\text{MPa} = 0.490\text{MPa}$$

$$\tau_\alpha = [\frac{10+20}{2}\sin(-120^\circ) + 15\cos(-120^\circ)]\text{MPa} = -20.5\text{MPa}$$

8-3 试用图解法（应力圆）解题 8-1。

解：题 8-1 图所示应力状态的应力圆示如图 8-3。

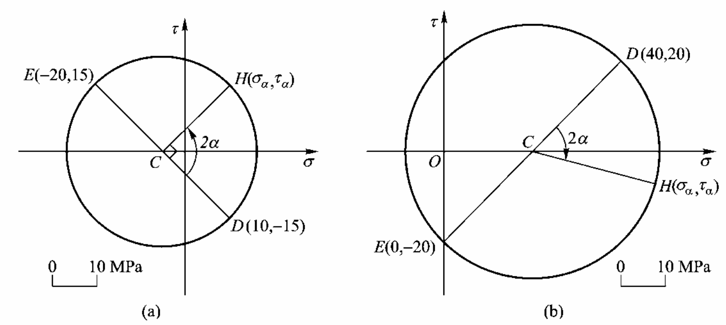


图 8-3

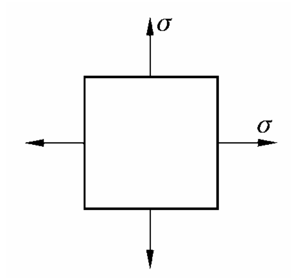
由图 a 可以量得指定截面上的正应力和切应力分别为

$$\sigma_\alpha = \sigma_{45^\circ} = 10.0\text{MPa}，\tau_\alpha = \tau_{45^\circ} = 15.0\text{MPa}$$

由图 b 可以量得指定截面上的正应力和切应力分别为

$$\sigma_\alpha = \sigma_{-30^\circ} = 47.3\text{MPa}，\tau_\alpha = \tau_{-30^\circ} = -7.3\text{MPa}$$

8-6 图示双向拉伸应力状态，应力 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$。试证明任意斜截面上的正应力均等于 σ，而切应力则为零。



题 8-6 图

证明：由题设条件可知，$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$，$\tau_x = 0$。

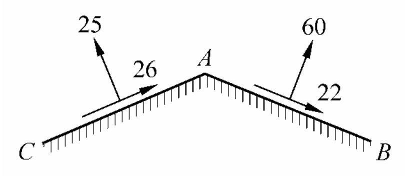
将上述已知数据代入平面应力状态斜截面应力公式，则有

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma + \sigma}{2} + \frac{\sigma - \sigma}{2}\cos 2\alpha - 0 = \sigma$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma - \sigma}{2}\sin 2\alpha + 0 = 0$$

由于式中α为任意值，故原命题得证。

8-7 已知某点 ***A*** 处截面 ***AB*** 与 ***AC*** 的应力如图所示（应力单位为 **MPa**），试用图解法求主应力的大小及所在截面的方位。



题 8-7 图

解：根据题图所给的已知应力，可画出应力圆来，如图 **8-7** 所示。

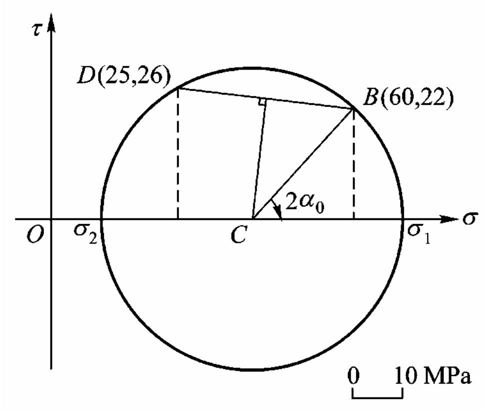


图 8-7

从所画的应力圆上可以量得两个主应力，它们是：

$$\sigma_1 = 69.7\text{MPa}，\sigma_2 = 9.9\text{MPa}$$

由于是平面应力状态，故知

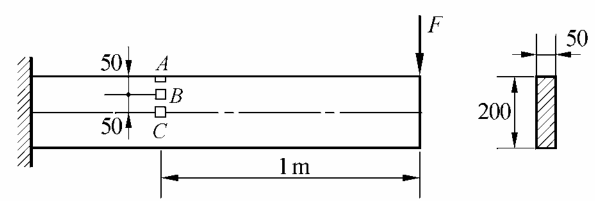
$$\sigma_3 = 0$$

从该应力圆上还可以量得 σ_1 的方位角为

$$\alpha_0 = -23.7^\circ$$

式中负号表示从 AB 面的外法线沿顺时针方向旋转。

8-9 图示悬臂梁，承受载荷 F = 20kN 作用，试绘微体 A，B 与 C 的应力图，并确定主应力的大小及方位。



题 8-9 图

解：由题图可知，指定截面的剪力、弯矩分别为

$$F_s = F = 20\text{kN}, |M| = Fa = 20 \times 1\text{kN} \cdot \text{m} = 20\text{kN} \cdot \text{m}$$

微体 A,B 和 C 的应力图依次示如图 8-9 a,b 和 c。

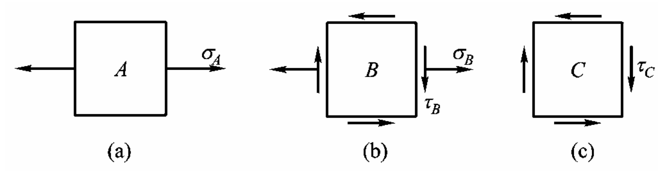


图 8-9

对于应力图 a，其正应力为

$$\sigma_A = \frac{|M|}{W_z} = \frac{6 \times 20 \times 10^3 \text{N}}{0.050 \times 0.200^2 \text{m}^2} = 6.00 \times 10^7 \text{Pa} = 60.0\text{MPa}$$

由此可知，主应力各为

$$\sigma_1 = 60.0\text{MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

σ_1 的方位角为

$$\alpha_0 = 0^\circ$$

对于应力图 b,其正应力和切应力分别为

$$\sigma_B = \frac{|M||y_B|}{I_z} = \frac{12 \times 20 \times 10^3 \times 0.050\text{N}}{0.050 \times 0.200^3 \text{m}^2} = 3.00 \times 10^7 \text{Pa} = 30.0\text{MPa}$$

$$\tau_B = \frac{F_S S_z(\omega)}{I_z b} = \frac{12 \times 20 \times 10^3 \times 0.050 \times 0.050 \times 0.075\text{N}}{0.050 \times 0.200^3 \times 0.050\text{m}^2} = 2.25 \times 10^6 \text{Pa} = 2.25\text{MPa}$$

极值应力为

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{array}\right\}=\frac{\sigma_B}{2}\pm\sqrt{(\frac{\sigma_B}{2})^2+\tau_B^2}=[15.0\pm\sqrt{15.0^2+2.25^2}]\ \text{MPa}=\begin{cases}30.2\\ -0.1678\end{cases}\text{MPa}$$

由此可知，主应力各为

$$\sigma_1=30.2\ \text{MPa}，\sigma_2=0，\sigma_3=-0.1678\ \text{MPa}$$

由

$$\tan\alpha_0=-\frac{\tau_x}{\sigma_x-\sigma_{\min}}=-\frac{2.25}{30.0+0.1678}=-0.07458$$

得σ_1的方位角为

$$\alpha_0=-4.27^\circ$$

对于应力图 c，其切应力为

$$\tau_C=\frac{3F_S}{2A}=\frac{3\times20\times10^3\text{N}}{2\times0.050\times0.200\text{m}^2}=3.00\times10^6\text{Pa}=3.00\text{MPa}$$

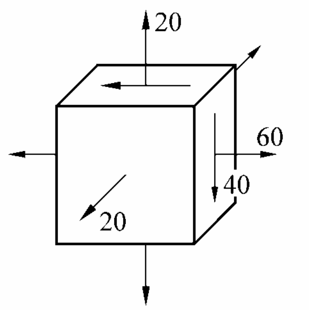
由此得各主应力依次为

$$\sigma_1=3.00\text{MPa}，\sigma_2=0，\sigma_3=-3.00\text{MPa}$$

σ_1的方位角为

$$\alpha_0=-45^\circ$$

8-12 已知应力状态如图所示，试求主应力的大小。



题 8-12 图

解：由题图可知，

$$\sigma_x=60\ \text{MPa}，\sigma_y=20\ \text{MPa}，\tau_x=40\ \text{MPa}，\sigma_z=20\ \text{MPa}$$

由应力作用线均平行于$x-y$平面的三个应力分量可得

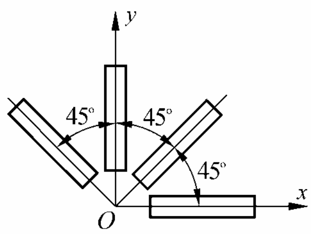
$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

$$=\left[\frac{60+20}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{60-20}{2}\right)^2+40^2}\,\right]\text{ MPa}=\begin{cases}84.7\\ -4.72\end{cases}\text{ MPa}$$

将此二极值应力与σ_z一同排序，得三个主应力依次为

$$\sigma_1=84.7\ \text{MPa}，\ \sigma_2=20.0\ \text{MPa}，\ \sigma_3=-4.72\ \text{MPa}$$

8-15 在构件表面某点 *O* 处，沿 0°，45°，90°与 135°方位粘贴四个应变片，并测得相应正应变依次为$\varepsilon_{0^\circ}=450\times10^{-6}$，$\varepsilon_{45^\circ}=350\times10^{-6}$，$\varepsilon_{90^\circ}=100\times10^{-6}$与$\varepsilon_{135^\circ}=100\times10^{-6}$，试判断上述测试结果是否可靠。



题 8-15 图

解：依据平面应变状态任意方位的正应变公式，有

$$\varepsilon_{0^\circ}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}=\varepsilon_x=450\times10^{-6}\tag{a}$$

$$\varepsilon_{90^\circ}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}=\varepsilon_y=100\times10^{-6}\tag{b}$$

$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\frac{\gamma_{xy}}{2}=350\times10^{-6}\tag{c}$$

将式(a)和(b)代入式(c)，得

$$\gamma_{xy}=(550-700)\times10^{-6}=-150\times10^{-6}\tag{d}$$

将以上所得结果(a),(b)和(d)代入平面应变状态任意方位的正应变公式，计算ε_{135°应有的测量值为

$$\varepsilon_{135^\circ}=\frac{1}{2}(450+100)\times10^{-6}+\frac{1}{2}(450-100)\times10^{-6}\cos270^\circ$$
$$-\frac{1}{2}\times(-150\times10^{-6})\sin270^\circ=200\times10^{-6}$$

ε_{135° 的实际测量值比上述结果小了一半，这说明题中所给测试结果不可靠。

其实，由应变圆可知，无论α为何值

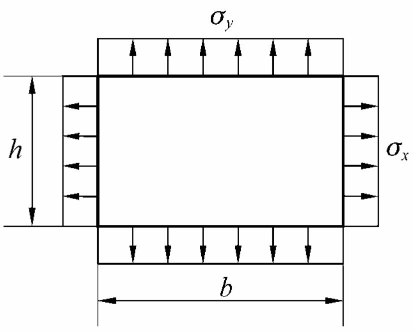
$$\varepsilon_{\alpha}+\varepsilon_{\alpha+90^\circ}=\text{常数}$$

而

$$\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ}\neq\varepsilon_{45^\circ}+\varepsilon_{135^\circ}$$

同样说明题中所给的这组测试结果不可靠。

8-16 图示矩形板，承受正应力σ_x与σ_y作用，试求板厚的改变量$\Delta\delta$与板件的体积改变量ΔV。已知板件厚度δ =**10mm**，宽度 ***b*** **= 800mm**，高度 ***h*** **= 600mm**，正应力σ_x =**80MPa**，$\sigma_y=-40$ **MPa**，材料为铝，弹性模量 ***E*****=70GPa**，泊松比μ **= 0.33**。



题 **8-16** 图

解：此为平面应力状态问题。设板厚度方向的正应变为ε_z，则有

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$$

板厚的改变量为

$$\begin{aligned}\Delta\delta=\varepsilon_z\delta&=-\frac{\mu\delta}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\\&=-\frac{0.33\times0.010}{70\times10^9}\times(80-40)\times10^6\text{m}=-1.886\times10^{-6}\text{m}=-0.001886\text{mm}\end{aligned}$$

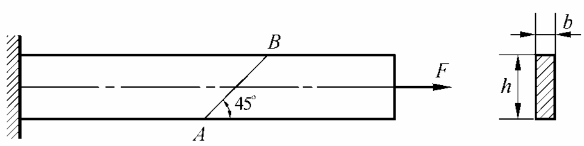
体应变为

$$\theta=\frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

由此可得该板件的体积改变量为

$$\begin{aligned}\Delta V&=\frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)(bh\delta)\\&=\frac{(1-2\times0.33)}{70\times10^9}\times(80-40)\times10^6\times(0.800\times0.600\times0.010)\text{m}^3\\&=9.33\times10^{-7}\text{m}^3=933\text{mm}^3\end{aligned}$$

8-20 图示矩形截面杆，承受轴向载荷 F 作用，试计算线段 AB 的正应变。设截面尺寸 b 和 h 与材料的弹性常数 E 和 μ 均为已知。



题 8-20 图

解：由题图可知，AB 上任一点处有

$$\sigma_x=\frac{F}{bh}，\ \sigma_y=0，\ \tau_x=0$$

故有

$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma_x}{2}=\frac{F}{2bh}，\ \sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma_x}{2}=\frac{F}{2bh}$$

由平面应力状态的广义胡克定律可得

$$\varepsilon_{AB}=\varepsilon_{45^\circ}=\frac{1}{E}(\sigma_{45^\circ}-\mu\sigma_{-45^\circ})=\frac{(1-\mu)F}{2Ebh}$$

8-21 在构件表面某点 O 处，沿 0°,45°与 90°方位，粘贴三个应变片，测得该三方位的正应变分别为 $\varepsilon_{0^\circ}=450\times10^{-6}$，$\varepsilon_{45^\circ}=350\times10^{-6}$ 与 $\varepsilon_{90^\circ}=100\times10^{-6}$，该表面处于平面应力状态，试求该点处的应力 σ_x,σ_y与 τ_x。已知材料的弹性模量 E= 200GPa，泊松比 μ =0.3。

解：依据平面应变状态任意方位的正应变公式，有

$$\varepsilon_{0^\circ}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos0^\circ-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin0^\circ \tag{a}$$

$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos90^\circ-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin90^\circ \tag{b}$$

$$\varepsilon_{90^\circ}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos180^\circ-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin180^\circ \tag{c}$$

联解方程(a)，(b)和(c)，得

$$\varepsilon_x=\varepsilon_{0^\circ}=450\times10^{-6}，\ \varepsilon_y=\varepsilon_{90^\circ}=100\times10^{-6}$$

$$\gamma_{xy}=\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ}-2\varepsilon_{45^\circ}=-150\times10^{-6}$$

根据平面应力状态的广义胡克定律，有

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)$$

$$=\frac{200\times10^9\ \text{Pa}}{1-0.3^2}\times(450\times10^{-6}+0.3\times100\times10^{-6})=1.055\times10^8\ \text{Pa}=105.5\ \text{MPa}$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)$$

$$=\frac{200\times10^9\ \text{Pa}}{1-0.3^2}\times(100\times10^{-6}+0.3\times450\times10^{-6})=5.16\times10^7\ \text{Pa}=51.6\ \text{MPa}$$

根据剪切胡克定律，有

$$\tau_x=G\gamma_{xy}=\frac{E\gamma_{xy}}{2(1+\mu)}=\frac{200\times10^9\ \text{Pa}\times(-150\times10^{-6})}{2\times(1+0.3)}$$

$$=-1.154\times10^7\ \text{Pa}=-11.54\ \text{MPa}$$

8-23 在建立圆轴扭转切应力公式时，曾提出若干假设，试根据该假设说明圆轴横截面与径向纵截面上均无正应力。

解：根据各横截面仍保持平面，其形状、大小均不改变，如同刚性圆片这一假设可得（这里采用圆柱坐标）

$$\varepsilon_\rho=\varepsilon_\varphi=0 \tag{a}$$

其中，足标 ρ 和 φ 分别代表圆轴的径向和环向。

又据横截面间的距离均不改变这一假设可得

$$\varepsilon_x=0 \tag{b}$$

依据圆柱坐标系中的广义胡克定律，有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{E}{1+\mu}[\frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_\rho+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_x)+\varepsilon_\rho]\\\sigma_\varphi&=\frac{E}{1+\mu}[\frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_\varphi+\varepsilon_x+\varepsilon_\rho)+\varepsilon_\varphi]\\\sigma_x&=\frac{E}{1+\mu}[\frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_x+\varepsilon_\rho+\varepsilon_\varphi)+\varepsilon_x]\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

将式(a)和(b)代入式(c)，得到

$$\sigma_\rho=0,\ \sigma_\varphi=0,\ \sigma_x=0$$

这就说明圆轴横截面与径向纵截面（及同心圆柱面）上均无正应力。

8-24 试计算题 8-16 所述板件的体应变、应变能密度与畸变能密度。

解：1.计算体应变 θ

由题 8-16 知，$\sigma_1=\sigma_x=80\ \text{MPa}$，$\sigma_2=\sigma_z=0$，$\sigma_3=\sigma_y=-40\ \text{MPa}$，$E=70\ \text{GPa}$，$\mu=0.33$。由此得体应变为

$$\theta=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$
$$=\frac{1-2\times0.33}{70\times10^9}\times(80+0-40)\times10^6=1.943\times10^{-4}$$

2．计算应变能密度 v_ε

$$v_\varepsilon=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]$$
$$=\frac{1}{2\times70\times10^9}[80^2+0+(-40)^2-2\times0.33\times(0+0-40\times80)]\times10^{12}\ \text{Pa}$$
$$=7.22\times10^4\ (\text{N}\cdot\text{m})/\text{m}^3$$

3．计算畸变能密度 v_d

$$v_d=\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$
$$=\frac{1+0.33}{6\times70\times10^9}[80^2+40^2+(-120)^2]\times10^{12}\ \text{Pa}$$
$$=7.09\times10^4\ (\text{N}\cdot\text{m})/\text{m}^3$$