Nonlinear Systems 非线性系统

第十四讲

类不变定理

类不变定理

在自治系统情况下，LaSalle不变定理(定理4.4)说明在E中系统轨线趋向最大的不变集，其中E是使得V函数的导数等于零的集合内所有点的集合。在非自治系统情况下， 时变的V函数导数也是依赖于时间，所以很难确定集合E。

我们将介绍两个具有不变原理特性的定理：第一个定理说明轨线收敛于一个集合，另一个定理则说明原点的一致渐近稳定性。

重点介绍了在分析非线性时变系统稳定性和收敛性方面的重要数学工具: Barbalat引理。

类不变定理

在自治系统情况下，LaSalle不变定理(定理4.4)说明在E中系统轨线趋向最大的不变集，其中E是使得*V*函数的导数等于零的集合内所有点的集合。在非自治系统情况下，所以很难确定集合E。如果能证明

$$\dot{V}(t,x) \le -W(x) \le 0$$

则可以把集合E定义为所有使 *W*(x)=0的点的集合。我们希望当 时间趋于无穷时，系统的轨线趋于集合E。为证明以上结论，需要以下引理（Barbalat引理）。

引理8.2 设 $\phi: R \to R$ 是$[0,\infty)$上的一致连续函数。假设 $\lim_{t\to\infty}\int_0^t \phi(\tau)d\tau$ 存在且有界，则当 $t \to \infty$ 时 $\phi(t) \to 0$ 。

引理8.2 设 $\phi: R \to R$ 是$[0,\infty)$上的一致连续函数。假设 $\lim_{t\to\infty}\int_0^t \phi(\tau)d\tau$ 存在且有界，则当 $t \to \infty$ 时 $\phi(t) \to 0$ 。

证明：反证法，如果上述结论不成立，则存在一个正常数k 1，使得对于每个*T >0*，都可以找到*T* 1 > *T*，满足 $|\phi(T_1)| \geq k_1$ 。因为 $\phi(t)$ 是一致连续的，所以存在正常数k 2，使得对于所有 $t \geq 0$ 和 $0 \leq \tau \leq k_2$ 有 $|\phi(t+\tau)-\phi(t)| < k_1/2$ 。因而

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t)-\varphi(T_1)+\varphi(T_1)| \geq |\varphi(T_1)| - |\varphi(t)-\varphi(T_1)|$$

$$> k_1 - \frac{1}{2}k_1 = \frac{1}{2}k_1, \qquad \forall t \in [T_1, T_1+k_2]$$

因此得到 $$\left|\int_{T_1}^{T_1+k_2}\phi(t)dt\right| = \int_{T_1}^{T_1+k_2}|\phi(t)|dt > \frac{1}{2}k_1k_2$$

这样当*t* 趋于无穷 时， $\int_0^t \phi(\tau)d\tau$ 不能收敛到有限值，与假设矛盾。

定理 8.4 设 $D\subset R^n$ 是包含 $x=0$ 的定义域，假设函数 $f(t,x)$ 在 $[0,\infty)\times D$ 上对 t 是分段连续的，对 t 一致对 x 是局部 **Lipschitz** 的。进一步假设对于所有 $t\ge 0$，$f(t,0)$ 一致有界。设 $V:[0,\infty)\times D\to R$ 是连续可微函数，使得 $\forall t\ge 0, \forall x\in D$，满足

$$W_1(x)\le V(t,x)\le W_2(x)$$

$$\dot{V}(t,x)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\le -W(x)$$

其中，$W_1(x)$ 和 $W_2(x)$ 是 D 上的连续正定函数，$W(x)$ 是 D 上的连续半正定函数。

选择 $r>0$ 使 $B_r\subset D$，并设 $\rho<\min_{\|x\|=r}W_1(x)$，则 $\dot{x}=f(t,x)$ 的所有满足 $x(t_0)\in\{x\in B_r \mid W_2(x)\le\rho\}$ 的解都是有界的，且满足 $W(x(t))\to 0$ 当 $t\to\infty$.

此外，如果所有假设全局成立，且 $W_1(x)$ 是径向无界的，则上述结论对于所有 $x(t_0)\in R^n$ 都成立。

证明：类似定理4.8的证明，由于 $\dot{V}(t,x)\le 0$，则 $\Omega_{t,\rho}=\{x\in B_r\,|V(x,t)\le\rho\}$

$$x(t_0)\in\{x\in B_r|W_2(x)\le\rho\}\Rightarrow x(t)\in\Omega_{t,\rho}\subset\{x\in B_r|W_1(x)\le\rho\},\forall t\ge t_0$$

因此对于所有*t* > t0，有||*x(t)* ||< *r* 。

由于*V (t, x(t))* 单调非增，有下界且为0，所以当t 趋于无穷时，*V* 是收敛的。现在有

$$\int_{t_0}^{t}W(x(\tau))\le-\int_{t_0}^{t}\dot{V}(\tau,x(\tau))d\tau=V(t_0,x(t_0))-V(t,x(t))$$

因此 $\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}W(x(\tau))d\tau=V(t_0,x(t_0))-V(\infty)$ 存在且是有限的。

另外，由于*x(t)* 有界，*f (t, x)* 对*x* 局部对*t* 一致的*Lipschitz*，且

$\dot{x}(t)=f(t,x(t))$ 一致有界。从而*x(t)* 在*t*> *t* 0 上对*t* 一致连续。

因为*W (x)* 在紧集 *B r*上对x 是一致连续的，所以*W (x(t))*在 t> t 0 上对*t*

一致连续。由引理8.2 可得，当t趋于无穷时，有 $W(x(t))\to 0.$

极限$W(x(t)) \to 0$ 表示当 $t \to \infty$ 时，$x(t)$都趋于E，其中

$$E = \{x \in D | W(x) = 0\}$$

所以$x(t)$ 的正极限集是 E 的一个子集。对于自治系统，正极限集是一个不变集；对于非自治系统，正极限集一般不是不变的，但有一些特殊类型的非自治系统，其正极限集有某些不变性质

在自治系统情况下 趋向E中的最大不变集这一事实，允许我们得到推论4.1，即证明除平凡零解之外，集合E不包含系统的完整轨线，从而建立原点的渐近稳定性。对于一般非自治系统，由于集合E一般不是不变集，不能应用推论4.1进一步证明原点的一致渐近稳定性。

定理 8.5 设 $D \subset R^n$ 是包含 $x=0$ 的定义域，并假设对于所有 $t \ge 0$ 和 $x \in D$，$f(t,x)$ 是 t 的分段连续函数，且对于 x 是局部 **Lipschitz** 的。设 $x=0$ 是 $\dot{x}=f(t,x)$ 在 $t=0$ 时刻的一个平衡点。设 $V:[0,\infty)\times D \to R$ 是连续可微的函数，使得对于某个 $\delta>0$，$\forall t \ge 0, \forall x \in D$，满足

$$W_1(x) \le V(t,x) \le W_2(x)$$

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le 0$$

$$V(t+\delta, \phi(t+\delta; t, x)) - V(t,x) \le -\lambda V(t,x), 0<\lambda<1$$ [1]

其中 $W_1(x)$ 和 $W_2(x)$ 是 **D** 上的连续正定函数，$\phi(\tau;t,x)$ 是系统始于 (t,x) 的解，则原点是一致渐近稳定的。如果所有假设全局成立，且 $W_1(x)$ 是径向无界的，则原点是全局一致渐近稳定的。如果 $W_1(x) \ge k_1\|x\|^c, W_2(x) \le k_2\|x\|^c, k_1>0, k_2>0, c>0$ 则原点是指数稳定的。

证明：定理4.8 的证明相似，可以证明

$$x(t_0)\in\{x\in B_r \mid W_2(x)\le\rho\}\Rightarrow x(t)\in\Omega_{t,\rho},\forall t\ge t_0$$

其中 $\rho<\min_{\|x\|=r}W_1(x)$， 因为 $\dot V(t,x)\le 0$ 。现在，对于所有 $t\ge t_0$ 有

$$V(t+\delta,x(t+\delta))\le V(t,x(t))-\lambda V(t,x(t))=(1-\lambda)V(t,x(t))$$

由于***V (t, x(t))*** 单调非增， $V(\tau,x(\tau))\le V(t,x(t)),\forall\tau\in[t,t+\delta]$

对于任意 $t\ge t_0$，设 **N** 是满足 $t\le t_0+N\delta$ 的最小正整数。将区间 $[t_0,t_0+(N-1)\delta]$ 等分为**(N-1)**个长为 δ 的子区间，则有

$$\begin{aligned}V(t,x(t))&\le V(t_0+(N-1)\delta,x(t_0+(N-1)\delta))\\&\le(1-\lambda)V(t_0+(N-2)\delta,x(t_0+(N-2)\delta))\\&\le(1-\lambda)^{(N-1)}V(t_0,x(t_0))\\&\le\frac{1}{(1-\lambda)}(1-\lambda)^{(t-t_0)/\delta}V(t_0,x(t_0))\\&=\frac{1}{(1-\lambda)}e^{-b(t-t_0)}V(t_0,x(t_0))\\&=\sigma(V(t_0,x(t_0)),t-t_0),\forall V(t_0,x(t_0))\in[0,\rho]\end{aligned}$$

$$b=\frac{1}{\delta}\ln\frac{1}{(1-\lambda)},\sigma(r,s)=\frac{r}{(1-\lambda)}e^{-bs}$$

$$V(t,x(t)) \le \sigma(V(t_0,x(t_0)),t-t_0), \forall V(t_0,x(t_0)) \in [0,\rho]$$

$$b=\frac{1}{\delta}\ln\frac{1}{(1-\lambda)}, \sigma(r,s)=\frac{r}{(1-\lambda)}e^{-bs}$$

容易看出， $\sigma(r,s)$ 是一个 ***KL*** 类函数，且 ***V(t,x)***满足

$$V(t,x(t)) \le \sigma(V(t_0,x(t_0)),t-t_0), \forall V(t_0,x(t_0)) \in [0,\rho]$$

后续证明与定理4.9 的证明完全相同，关于所述全局一致渐近稳定性和指数稳定性的证明与定理4.9 和定理4.10 的证明相同。

$$\alpha_1(\|x\|) \le W_1(x) \le V(t,x(t)) \le \sigma(V(t_0,x(t_0)),t-t_0)$$
$$\le \sigma(W_2(x(t_0)),t-t_0), \forall V(t_0,x(t_0)) \in [0,\rho]$$
$$\Rightarrow \quad \|x\| \le \alpha_1^{-1}\sigma(W_2(x(t_0)),t-t_0)$$

例子8.11 线性时变系统 $\dot{x}=A(t)x$

假设存在连续可微、一致有界正定对称矩阵P(t)，满足 $0<c_1 I\le P(t)\le c_2 I,\forall t\ge 0$

$$-\dot{P}(t)=P(t)A(t)+A^T(t)P(t)+C^T(t)C(t)$$

其中*C(t)*是连续矩阵，取备选 Lyapunov 函数

$$V(t,x)=x^T P(t)x, c_1\|x\|_2^2\le V(t,x)\le c_2\|x\|_2^2$$

则 $\dot{V}(t,x)=-x^T C^T(t)C(t)x\le 0$。因此对解 $\phi(\tau;t,x)=\Phi(\tau,t)x(t)$ 有

$$V(t+\delta,\varphi(t+\delta;t,x))-V(t,x)=\int_t^{t+\delta}\dot{V}(\tau,\varphi(\tau;t,x))d\tau$$

$$=-x^T\left(\int_t^{t+\delta}\Phi^T(\tau,t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau\right)x=-x^T W(t,t+\delta)x$$

其中 $W(t,t+\delta)=\int_t^{t+\delta}\Phi^T(\tau,t)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t)d\tau$

假设存在一个正常数*k*<c2，使得 $W(t,t+\delta)\ge kI,\forall t\ge 0$,则有

$$V(t+\delta,\phi(t+\delta;t,x))-V(t,x)\le -k\|x\|_2^2\le -\frac{k}{c_2}V(t,x)$$

当 $W_i(x)=c_i\|x\|_2^2, i=1,2, \lambda=\frac{k}{c_2}<1$ 时，由定理8.5得到原点是全局指数稳定的。

注: $\lambda=\dfrac{k}{c_2}<1$是一个非限制性条件，因为总可取c_2任意大使其成立。

熟悉线性系统理论的读者会发现矩阵 $W(t,t+\delta)$ 是矩阵对(*A*(t),*C*(t))的可观测性Gram矩阵，不等式$W(t,t+\delta)\geq kI$是由(*A*(t),*C*(t))的一致可观测性给出的。通过对本例和例4.21 的比较可知，定理8.5 允许我们用较弱的要求$Q(t)=C^T(t)C(t)$ 且矩阵对(*A*(t),*C*(t))是一致可观测性代替式对矩阵Q(t) 为正定的要求。

例子8.12 考虑系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -g(t)\end{bmatrix}x$

其中$g(t)$是连续可微，满足 $0<k_1\le g(t)\le k_2, \forall t\ge 0$，1．证明原点指数稳定。

2．若 $g(t)=2+e^t$ 无界的，考虑1的结论是否成立？

取备选 Lyapunov 函数 $V(x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2),$

则 $\dot{V}(x)=x_1x_2-x_1x_2-g(t)x_2^2\le -k_1x_2^2$ 。假设

$$A(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -g(t)\end{bmatrix}, \bar{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, C(t)=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{g(t)}\end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(x)=-g(t)x_2^2=-x^TC^T(t)C(t)x\le 0$$

由于 $0<k_1\le g(t)\le k_2$ 易于验证(A(t),C(t))是一致可观测的。

且容易验证 $P=\frac{1}{2}I$ 满足如下方程 $W(t,t+\delta)\ge kI, \forall t\ge 0$

$$-\dot{P}(t)=P(t)A(t)+A^T(t)P(t)+C^T(t)C(t)$$

由定理8.5和例8.11得到：系统的原点是指数稳定的。

2．若 $g(t)=2+e^{t}$ 无界的，系统变为：

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - g(t)x_2 = -x_1 - (2+e^{t})x_2$$

系统有解： $x_1(t) = -(1+e^{-t})k, x_2(t) = e^{-t}k$

当时间t趋于无穷时， $x_1(t) \to -k, x_2(t) \to 0.$

这说明系统的原点不是渐近稳定的，更不是指数稳定的。

作业：8.21，8.22.