北京航空航天大学

2011－2012 学年第一学期期中考试

《 工科数学分析(I) 》

试卷

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2011 年 11 月 25 日

一． 计算下列各题（每道题目 5 分，共 40 分）

1) 用 Stolz 定理计算极限 $\lim\limits_{n} \dfrac{1^{\frac{2}{1}} + 2^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{4}{3}} + \mathrm{L} + n^{\frac{n+1}{n}}}{n^2}$.

解：使用 Stoltz 定理，

$$\lim_{n} \frac{1^{\frac{2}{1}} + 2^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{4}{3}} + \mathrm{L} + n^{\frac{n+1}{n}}}{n^2} = \lim_{n} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

建议评分标准：使用 Stoltz 定理 3 分，求出答案 2 分

2) 设 $f(x) = \left(x^3 + x^2 + 1\right)x^x$ 求 $f'(x)$.

解：$f'(x) = \left(3x^2 + 2x\right)x^x + \left(x^3 + x^2 + 1\right)(\ln x ? x^x \quad x^x)$

建议评分标准：加号前面一部分 2 分，加号后面一部分 3 分。

3） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

解：

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to 0} e \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} e \frac{\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} e \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} e \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{e}{2}$$

建议评分标准：转换指数形式 1 分，使用 L'hostpital 法则 3 分，答案 1 分

4） 求函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\left(x^2 - 4x\right)$ 的拐点.

解：$f''(x) = \dfrac{40}{9} x^{-\frac{1}{3}}(x-1)$，解方程 $f''(x) = 0$ 得 $x = 1$，再注意到 $f''(x)$ 在 $x = 0$ 之外的点都有定义，因此 $f(x)$ 的可能拐点只能是 0 或者 1，当 $x ? (1, \ ? \ )$ 时，$f''(x) > 0$，函数 $f(x)$ 为严格凸，当 x Î $(0,1)$ 时，$f''(x) < 0$，函数 $f(x)$ 为严格凹，当 $x ? (\ ? \ ,0)$ 时，$f''(x) > 0$，函数 $f(x)$ 为严格凸。因此 0 和 1 都是拐点。

建议评分标准：求出二阶导数 2 分，凹凸性判断 3 分。

5） 设$\begin{cases} x = a(\cos t + \sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$ 求$\dfrac{dy}{dx}$.

解：$\dfrac{dy}{dt} = at\sin t$，$\dfrac{dx}{dt} = a(-\sin t + \cos t)$，因此$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t\sin t}{-\sin t + \cos t}$。

建议评分标准：$\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$各 2 分，答案 1 分。

6） 求函数 $f(x)=x\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最值.

解：$f'(x)=\ln x+1$，由方程 $f'(x)=0$ 可解得 $x=e^{-1}$。因此 $x=e^{-1}$ 是 $f(x)$ 的唯一驻点。

易见当 $0<x<e^{-1}$ 时，$f'(x)<0$，因此 $f(x)$ 在 $0<x<e^{-1}$ 时严格单减。在 $x>e^{-1}$ 时，$f'(x)>0$，因此此时 $f(x)$ 严格单增。由此可得 $f(x)$ 在 $x=e^{-1}$ 取得最小值 $-e^{-1}$。又因为如果 $f(x)$ 有最大值，则该最大值点也应为驻点，因此 $f(x)$ 没有最大值。

建议评分标准：求出一阶导数 1 分，求出驻点 1 分，判断最小值点 2 分，最大值点 1

7） 判断函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}$ 间断点的类型.

解：函数在 $x\neq 0$ 时，由初等函数连续性知，均为连续点。

当 $x=0$ 时，$f(x)$ 没有定义，但由 L'hospital 法则，我们有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{n!}{e^{t^2}P_n(t)}=0$$，其中 $P_n(t)$ 为 t 的一个多项式。

因此 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

建议评分标准：连续点的判断 1 分，L'hospital 法则求极限 3 分，$x=0$ 的间断点类型 1 分。

8） 求函数 $\ln(1+x+x^2)$ 在 $x=0$ 处直到四阶的 Taylor 展开（Peano 余项形式）.

由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)$ 知

$$\ln(1+x+x^2)=x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+\frac{1}{3}(x+x^2)^3-\frac{1}{4}(x+x^2)^4+o((x+x^2)^4)。$$

又由$o((x+x^2)^4)=0(x^4)$，当$x\to 0$时。因此

$$\begin{aligned}\ln(1+x+x^2)&=x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+\frac{1}{3}(x+x^2)^3-\frac{1}{4}(x+x^2)^4+o(x^4)\\&=x^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+o(x^4)\end{aligned}。$$

另解：$\ln(1+x+x^2)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)=x^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+o(x^4)$。

建议评分标准： $\ln(1+x)$或者$\ln(1-x)$的泰勒展开式 2 分，剩下的计算 3 分。

二． 证明下面问题（15 分）

1） $\sin x>x-\frac{x^3}{6}\left(x>0\right)$;

证明：构造函数$F(x)=\sin x-(x-\frac{x^3}{6})$，则$F'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$，$F''(x)=-\sin x+x$．当$x>0$时，$F''(x)=-\sin x+x>0$，因此$F'(x)$严格单调递增，因此$F'(x)>F'(0)=0$，因此$F(x)$严格单调递增，因此$F(x)>0$在$x>0$时成立，因此$\sin x>x-\frac{x^3}{6}\left(x>0\right)$。

建议评分标准： 构造函数$F(x)$得 2 分，判断$F'(x)$单调性 3 分，判断$F(x)$单调性 3 分

2） 设函数$y=x^{n-1}\ln x(n\text{为正整数})$，证明$y^{(n)}=\frac{(n-1)!}{x}$.

证明：用数学归纳法，$n=1$时，$y=\ln x$，$y'=\frac{1}{x}$，命题成立。

假设当$n=k$时命题成立，则当$n=k+1$时，$y=x^k\ln x$，$y'=kx^{k-1}\ln x+x^{k-2}$。易得

$y^{(k+1)}=(kx^{k-1}\ln x+x^{k-2})^{(k)}=k(x^{k-1}\ln x)^{(k)}=k\frac{(k-1)!}{x}=\frac{k!}{x}$。

命题对$n=k+1$也成立，所以该命题对所有正整数n都成立。

建议评分标准： $n=1$的证明 2 分，对$n=k+1$时，求出y'得 2 分，归纳过程 3 分。

三． （**10 分**）设$A>0,0<x_1<\frac{1}{A},x_{n+1}=x_n(2-Ax_n)\quad(n=1,2,\cdots)$，证明不等式$x_n<x_{n+1}<\frac{1}{A}$对所有正整数$n$成立，并求出极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明：用数学归纳法，$n=1$时，

$x_2 = x_1(2 - Ax_1) > x_1(2 - A\frac{1}{A}) = x_1$，

$x_2 = x_1(2 - Ax_1) = \frac{1}{A} - A(x_1 - \frac{1}{A})^2 < \frac{1}{A}$。

不等式成立，假设 $n = k$ 时，$x_k < x_{k+1} < \frac{1}{A}$ 成立，则 $n = k+1$ 时，

$x_{k+2} = x_{k+1}(2 - Ax_{k+1}) > x_{k+1}(2 - A\frac{1}{A}) = x_{k+1}$，

$x_{k+2} = x_{k+1}(2 - Ax_{k+1}) = \frac{1}{A} - A(x_{k+1} - \frac{1}{A})^2 < \frac{1}{A}$。

不等式也成立。因此 $x_n < x_{n+1} < \frac{1}{A}$ 对所有正整数 n 都成立。

由于 x_n 单调上升有上界，知 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则 a 满足方程 $a = a(2 - Aa)$，解得 $a = 0$，或 $a = \frac{1}{A}$，由 $a \ge x_1$ 知 $a = 0$ 不成立，因此 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{A}$。

建议评分标准：使用数学归纳法证明不等式 5 分，求极限 5 分。

四． （**10 分**）用 Cauchy 收敛原理证明下面数列收敛

$$x_n = \frac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)} + \frac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)} + \cdots + \frac{\sin nx}{n(n+\sin nx)}.$$

解：对数列 $x_n = \frac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)} + \frac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)} + \cdots + \frac{\sin nx}{n(n+\sin nx)}$ 而言，

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+1+\sin(n+1)x)} + \frac{\sin(n+2)x}{(n+2)(n+2+\sin(n+2)x)} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+\sin(n+p)x)}\right| \\ &\le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} < \frac{1}{n}\end{aligned}$$

任取 $\varepsilon > 0$，取自然数 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$，则对于任意的整数 $n > N$，以及正整数 p，均有 $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{n} \le \varepsilon$ 成立。因此数列 $\{x_n\}$ 收敛。

建议评分标准：不等式放缩 5 分，Cauchy 收敛原理 5 分。

五． （15 分）设 $f(x)$ 在 x_0 处二次可导，且 $f''(x_0) \ne 0$，由 Lagrange 中值定理知存在 $0 < \theta(h) < 1$，使得式子

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(h)h)h$$

成立，计算或者证明下面结论:

1） 写出 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 Taylor 公式；

2） 证明 $\lim_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{2}$.

解：

1） $f'(x_0+h)=f'(x_0)+f''(x_0)h+o(h)$，

$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)$.

2) 由 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒展开式知

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0+\theta(h)h)h = f(x_0)+(f'(x_0)+f''(x_0)\theta(h)h+o(\theta(h)h))h \\ &= f(x_0)+f'(x_0)h+f''(x_0)\theta(h)h^2+o(h^2) \end{aligned} \qquad (1)$$

与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 Taylor 展开式

比较可得 $f''(x_0)\theta(h)h^2=\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)$，即 $\theta(h)=\frac{1}{2}+\frac{1}{f''(x_0)}\frac{o(h^2)}{h^2}$，因此 $\lim_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{2}$。

建议评分标准：Taylor 展式各 3 分，（1）式 3 分，$\theta(h)$ 的表达式 4 分，最后求极限得结论 2 分。

六． （**10 分**）设 $f'(x)$ 在 $(0,a]$ 连续，且极限 $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}f'(x)$ 存在，证明 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上一致连续.

证明：由于函数 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,a]$ 连续，且极限 $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}f'(x)$ 存在，$\sqrt{x}f'(x)$ 可以扩充为 $[0,a]$ 上的连续函数，因此 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,a]$ 上有界，取 $M>0$，使得 $|\sqrt{x}f'(x)|<M$ 对所有 $x\in(0,a]$ 成立。

对于任意的 $x_1\neq x_2\in(0,a]$，由 Cauchy 中值定理，存在 ξ，使得 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}=2\sqrt{\xi}f'(\xi)$ 成立，因此 $|f(x_1)-f(x_2)|<2M|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|$ 总是成立。由于 $\sqrt{x}$ 在 $[0,a]$ 上一致连续，任取 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有 $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\frac{\varepsilon}{2M}$，此时 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，因此 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上一致连续。

建议评分标准：$\sqrt{x}f'(x)$ 的有界性 3 分，Cauchy 中值定理的使用 3 分，一致连续性判断 4 分。

附加题：

七． 下面题目任选其一（10 分）

1） 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $f(x)>0$，令

$$M(x)=\max_{0\le t\le x} f(t), x\in[0,1]$$

证明：函数 $Q(x)=\lim\limits_{n}\left(\dfrac{f(x)}{M(x)}\right)^n$ 连续的充要条件是 $f(x)$ 是单调递增的.

2） 证明开区间套定理

1） 设开区间序列 $I_n=(a_n,b_n), n\in N^*$ 满足

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<b_{n-1}<\cdots<b_2<b_1.$$

2）区间长度 $|I_n|=b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty)$,

则存在唯一 $\xi=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$.

解：1）的证明：先证必要性，易知 $f(x)\le M(x)$ 总是成立，当 $f(x)=M(x)$ 时，$Q(x)=1$，当 $f(x)<M(x)$ 时，$Q(x)=0$。若 $f(x)$ 不是单调上升的，则存在 $x_1<x_2$，使得 $f(x_2)<f(x_1)$ 成立，则 $f(x_2)<M(x_2)$，此时 $Q(x_2)=0$，设 $a=\inf\{x\in[0,1]: Q(x)=0\}$，由 $Q(x)$ 连续性知 $Q(a)=0$。又易知 $Q(0)=1$，因此 $a\ne 0$。由 a 的取法，当 $x<a$ 时，$Q(x)\ne 0$，因此 $Q(x)=1$。因此 $\lim\limits_{x\to a}Q(x)=1$。与 $Q(x)$ 连续矛盾。

再证充分性，若 $f(x)$ 是单调上升的，则 $f(x)=M(x)$ 总是成立，此时 $Q(x)\equiv 1$，因此 $Q(x)$ 连续。

建议评分标准：$Q(x)$ 的性质的讨论 3 分，充分性 3 分，必要性 4 分

2）的证明：由于 a_n 是单调递增的且有上界 b_1，因此 $\lim\limits_{n}a_n$ 存在，由于 b_n 是单调递减的且有下界 a_1，因此 $\lim\limits_{n}b_n$ 存在，又由于 $\lim\limits_{n}b_n-a_n=0$，因此 $\lim\limits_{n}a_n=\lim\limits_{n}b_n$，记 $x=\lim\limits_{n}a_n=\lim\limits_{n}b_n$，由单调有界数列的性质知，任取自然数 n，有 $x\ge a_{n+1}>a_n$ 及 $x\le b_{n+1}<b_n$，因此 $x\in(a_n,b_n)$. 因此 $\xi\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$. 若还存在另一点 $\xi'\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$，则对不等式 $\xi'>a_n$ 两侧取极限知 $\xi'\ge\xi$，类

似地，由$\xi' < b_n$知$\xi' \le \xi$，因此$\xi' = \xi$，由此得ξ的唯一性。

建议评分标准：由单调有界得极限的过程 6 分，ξ满足的性质讨论 2 分，唯一性讨论 2 分。