

# 数字信号处理

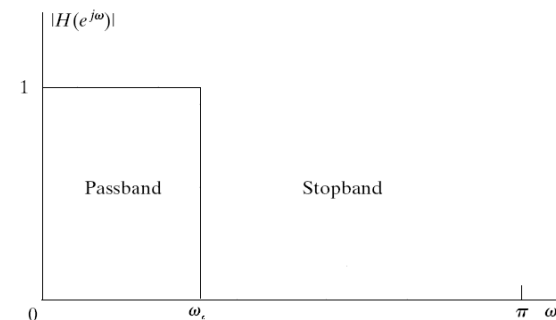
## ——第16讲

### 线性相位滤波器

#### ❖ 理想低通滤波器

##### ➤ 标准定义形式

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \iff H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



2019/5/14

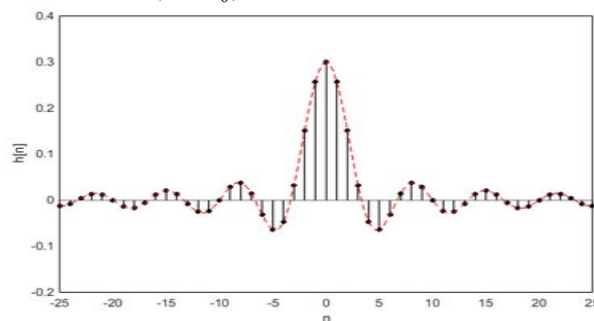
数字信号处理 北京航空航天大学

2

### 线性相位滤波器

#### ➤ 单位脉冲响应

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega n_0} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin(\omega_c(n-n_0))}{\pi(n-n_0)} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(n-n_0)] \end{aligned}$$



2019/5/14

数字信号处理 北京航空航天大学

3

### 线性相位FIR滤波器

#### ❖ 线性相位系统表示

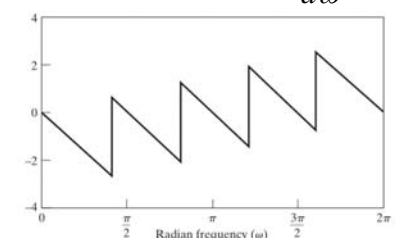
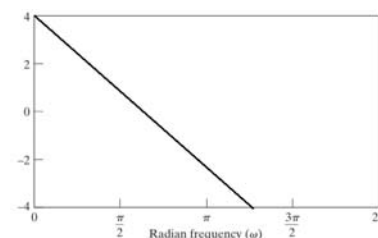
##### ➤ 表示方法

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\omega n} = H_g(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$



$$\theta(\omega) = -\tau\omega$$

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega \implies \tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$



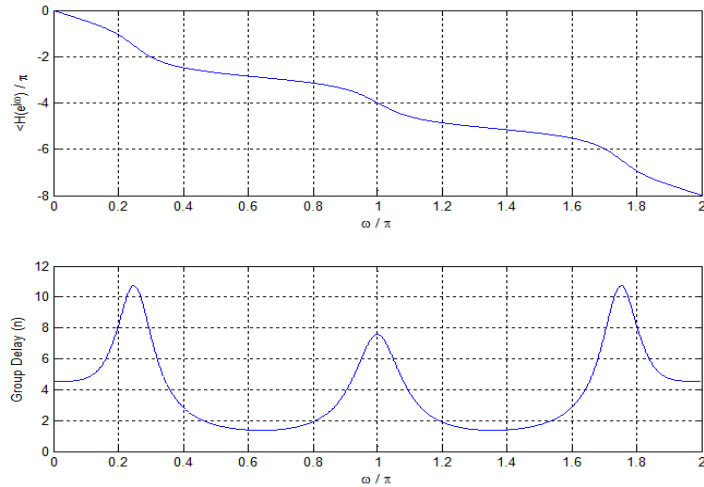
2019/5/14

数字信号处理 北京航空航天大学

4

## 线性相位FIR滤波器

### ➤ 群延时响应实例—4阶陷波滤波器



2019/5/14

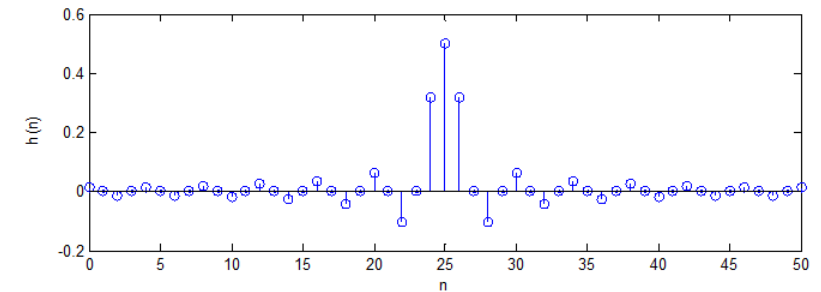
数字信号处理 北京航空航天大学

5

## 线性相位滤波器

### ❖ 线性相位条件

#### ➤ 基本条件: $h[n] = \pm h[N-1-n]$



2019/5/14

数字信号处理 北京航空航天大学

6

## 线性相位滤波器

### ❖ 线性相位证明一

#### ➤ $N$ 为奇数且 $h[n] = h[N-1-n]$ :

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-j\omega n} \quad \Longleftrightarrow \quad M = (N-1)/2 \\
 &= h\left[\frac{N-1}{2}\right]e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} [h[n]e^{-j\omega n} + h[N-1-n]e^{-j\omega(N-1-n)}] \\
 &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ h\left[\frac{N-1}{2}\right] + \sum_{n=0}^{M-1} [h[n]e^{-j\omega(n-\frac{N-1}{2})} + h[n]e^{j\omega(n-\frac{N-1}{2})}] \right\} \\
 &= e^{-j\omega\tau} \left\{ h[n] + \sum_{n=0}^M [2h[n]\cos\omega(n-\tau)] \right\} = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)} \\
 &\Rightarrow \quad \theta(\omega) = -\omega\tau
 \end{aligned}$$

2019/5/14

数字信号处理 北京航空航天大学

7

## 线性相位滤波器

### ❖ 线性相位证明二

#### ➤ $N$ 为偶数且 $h[n] = h[N-1-n]$ :

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-j\omega n} \quad \Longleftrightarrow \quad M = N/2 \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [h[n]e^{-j\omega n} + h[N-1-n]e^{-j\omega(N-1-n)}] \\
 &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [h[n]e^{-j\omega(n-\frac{N-1}{2})} + h[n]e^{j\omega(n-\frac{N-1}{2})}] \right\} \\
 &= e^{-j\omega\tau} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h[n]\cos\omega(n-\tau) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)} \\
 &\Rightarrow \quad \theta(\omega) = -\omega\tau
 \end{aligned}$$

2019/5/14

数字信号处理 北京航空航天大学

8

## ❖ 四类线性相位滤波器

➤ 划分依据

➤ 第一类

➤ 第二类

➤ 第三类

➤ 第四类

## ❖ 零极点分布特点

➤ 基本条件:  $h[n] = \pm h[N-1-n]$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h[N-1-n]z^{-n} \\ &= \pm \sum_{m=0}^{N-1} h[m]z^{-(N-1-m)} \quad \leftarrow m = N-1-n \\ &= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h[m]z^{+m} = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \end{aligned}$$

➤ 极点特点:  $z$ 、 $1/z$ 、 $z^*$ 、 $1/z^*$ 成对出现。

如果 $z$ 是极点, 则 $z^{-1}$ 是极点,

如果 $z$ 是极点, 则 $z^*$ 是极点。

## ❖ 零极点分布特点

➤ 图示表示:

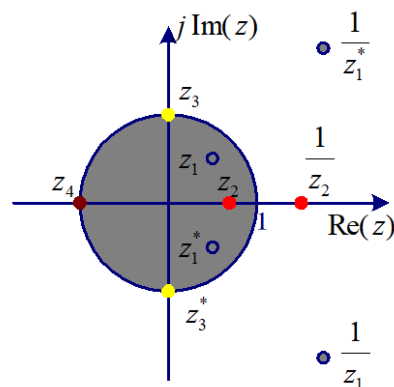
$$h[n] = \pm h[N-1-n]$$



$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$



$$z \quad z^{-1} \quad z^* \quad (z^*)^{-1}$$



## ❖ 设计思想—序列延时与对称截断

➤ 理想线性相位滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin(\omega_c(n-\tau))}{\pi(n-\tau)} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(n-\tau)] \end{aligned}$$

特点: 无限长的、非因果的、关于 $n=\tau$ 呈偶对称。

## 加窗方法设计流程

### 截断思想—对称性

$$h[n] = h_d[n]w[n]$$



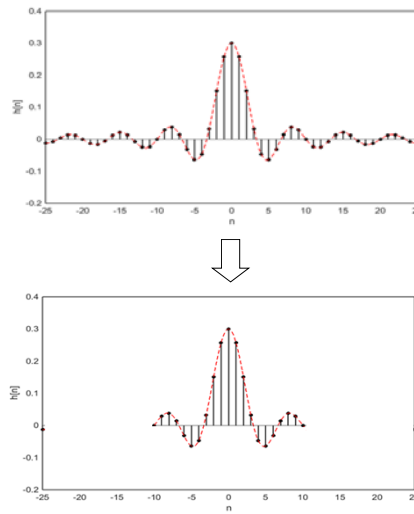
$$h_d[n] = \frac{\sin(\omega_c(n-\tau))}{\pi(n-\tau)}$$



$$h[n] = h[N-1-n]$$



$$\tau = (N-1)/2$$



## 加窗方法设计流程

### 截断方法—矩形窗口

$$w_R(n) = R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



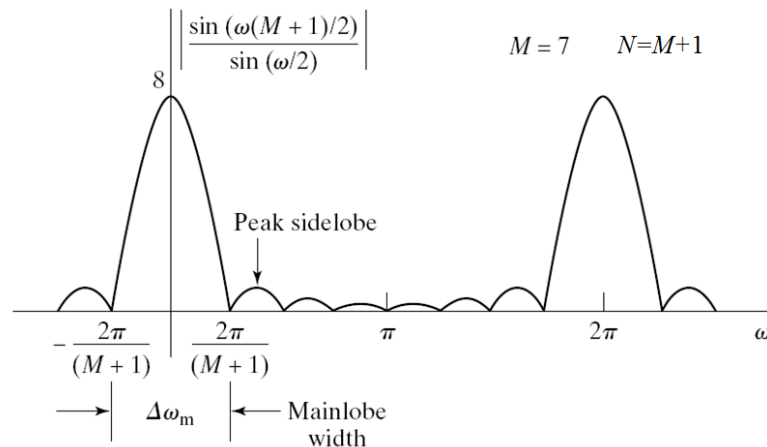
$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} = W_{Rg}(\omega) e^{-j\omega\tau}$$



$$\tau = (N-1)/2$$

## 加窗方法设计流程

### 矩形窗口幅度响应



## 加窗方法设计流程

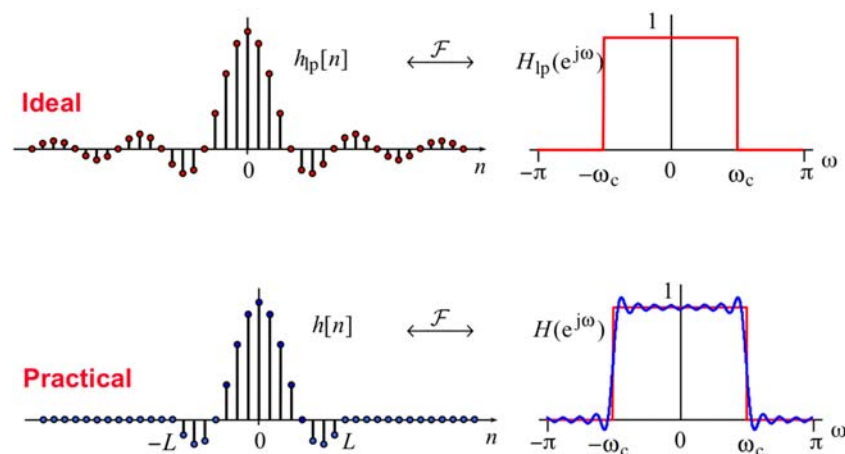
### 加窗分析: $h[n] = h_d[n]w_R[n]$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) e^{-j\theta\tau} W_{Rg}(\omega-\theta) e^{-j(\omega-\theta)\tau} d\theta \\ &= e^{-j\omega\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega-\theta) d\theta \\ &= e^{-j\omega\tau} \frac{1}{2\pi} H_{dg}(\omega) * W_{Rg}(\omega) = H_g(\omega) e^{-j\omega\tau} \end{aligned}$$

加窗结果—产生通带和阻带纹波，保持着严格线性相位

## 加窗方法设计流程

### ❖ 加窗方法图示解释一



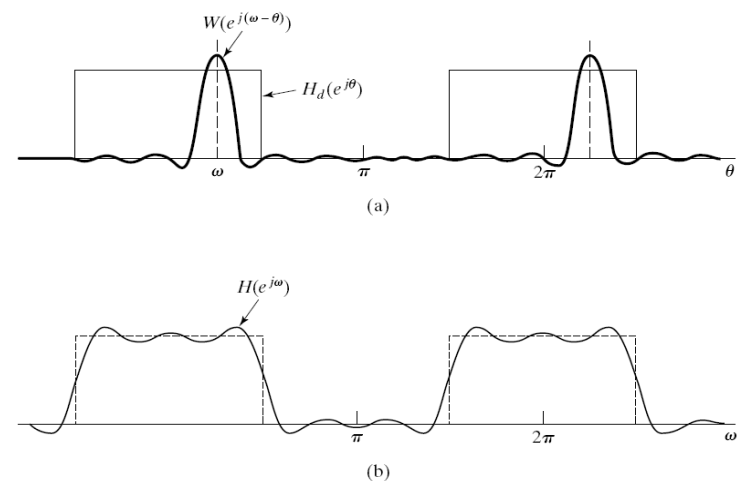
2019/5/14

数字信号处理 北京航空航天大学

17

## 加窗方法设计流程

### ❖ 加窗方法图示解释二



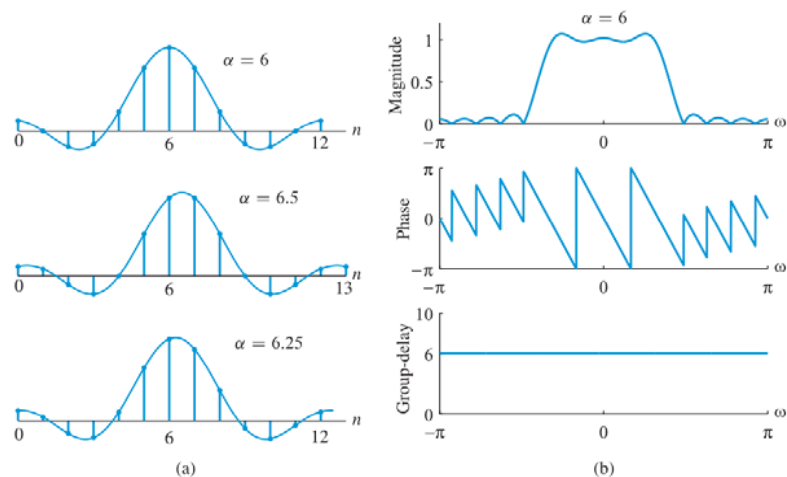
2019/5/14

数字信号处理 北京航空航天大学

18

## 加窗方法设计流程

### ❖ 加窗方法实例一



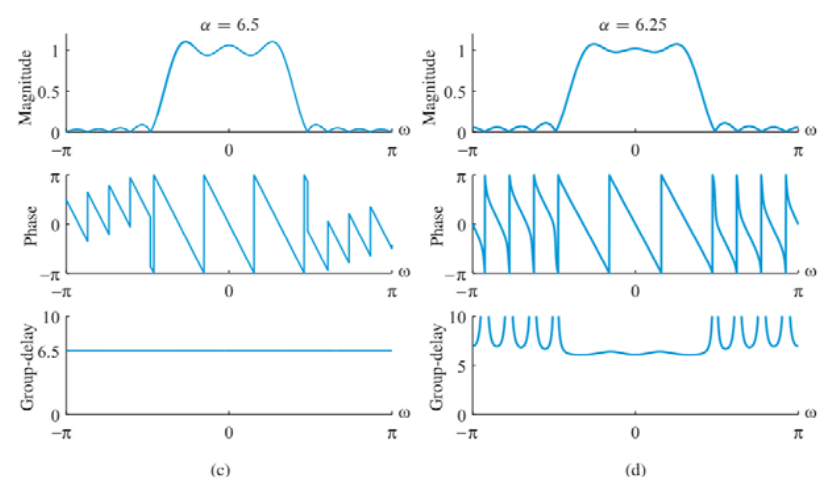
2019/5/14

数字信号处理 北京航空航天大学

19

## 加窗方法设计流程

### ❖ 加窗方法实例二



2019/5/14

数字信号处理 北京航空航天大学

20

## 第16次作业



❖ 书中作业

7.3、7.4、7.5

