A

北京航空航天大学

2015－2016 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

任课教师__________ 考场__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成 绩									
阅卷人									
校对人									

2016 年 06 月 24 日

A

一、 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $f(x,y,z)$ 为 R^3 上连续函数，Σ_r 表示球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$，则极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{\pi r^2}\oiint_{\Sigma_r} f(x,y,z)dS=$（ C ）

A. $f(0,0,0)$； B. $\frac{4}{3}f(0,0,0)$； C. $4f(0,0,0)$； D. $\frac{3}{4}f(0,0,0)$.

2. 改变积分次序：$\int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx$ =（ B ）

A. $\int_1^2 dx\int_x^{x^2} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_x^4 f(x,y)dy$；

B. $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy$；

C. $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy$；

D. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy$.

3. 设$D=\{(x,y)|r\le |x|+|y|\le 1\}$（其中$0<\mathrm{r}<1$），记$I=\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy$，则$I$的值（ B ）

A. 大于 0； B. 小于 0； C. 等于 0； D. 与r有关，无法判断符号.

4. 设L是平面上的有向分段光滑曲线，如果积分$\int_L (x^4+4xy^a)dx+(6x^{a-1}y^2-5y^4)dy$与路径无关，则$a$的值为（ D ）

A. -1； B. 0； C. 1； D. 3.

5. 设函数 f 在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有连续的二阶偏导数，则积分 $\iint_I \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy=$（ A ）

A. $f(b,d)+f(a,c)-f(a,d)-f(b,c)$； B. $f(b,d)+f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)$；

C. $f(b,d)-f(a,c)+f(a,d)-f(b,c)$； D. $f(a,d)+f(b,c)-f(b,d)-f(a,c)$.

二、计算题（每小题 6 分，满分 30 分）

1. 使用极坐标换元计算二重积分$I=\iint_D \ sin(x^2+y^2)dxdy$，其中区域$D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\}$.

解： $I=\iint_D \ sin(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}r\sin r^2\,dr=\pi(\cos1-\cos2)$

2. 计算三重积分$I=\iiint_V \ (x^2\sqrt{x^2+y^2}+x^{2016}\sin(xy))dxdydz$, 其中区域$V$ 是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围的有界闭区域. （提示：使用对称性简化运算）

解： 由于V关于xoz平面对称，$x^{2016}\sin(xy)$关于变量y为奇函数。因此

$$\iiint\limits_V x^{2016}\sin(xy)\,dxdydz=0。$$

因此

$$I=\iiint\limits_V x^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^1 r^4\cos^2\theta\,dz$$

$$=\pi\int_0^1(r^4-r^5)dr=\frac{\pi}{30}$$

3. 计算第一型曲线积分$I=\int_{\Gamma} zds$，其中$\Gamma: x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\ (0\le t\le 1)$为圆锥螺线的一段.

解：
$$I=\int_0^1 t\sqrt{(-tsint+cost)^2+(tcost+sint)^2+1}dt$$
$$=\int_0^1 t\sqrt{2+t^2}dt=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$$

4. 计算第二型曲线积分$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$，其中$\Gamma$为曲线：$x=t, y=t^2, z=t^3, t\in[0,1]$，方向是参数$t$增加的方向.

解： $I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz=\int_0^1(t^3+2t^2+3t^4)dt=\frac{91}{60}$.

5. 计算第一型曲面积分$I=\iint_S (z+y\cos(xy))dS$，其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被柱面$x^2+y^2=ax$所截下来的上半部分（$a>0$）．（提示：使用对称性简化计算）

解：由于曲面S关于xoz平面对称，$y\cos(xy)$是对变量y的奇函数，因此

$$\iint_S y\cos(xy)dS=0.$$

因此$I=\iint_S zdS=\iint_D z\sqrt{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2}dxdy=\iint_D adxdy=\frac{\pi}{4}a^3$．其中区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le ax\}, z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

三、（本题 10 分）计算第二型曲面积分$\iint_\Sigma (y^2f(x,y,z)+x)dydz-xyf(x,y,z)dzdx+2dxdy$，其中$f(x,y,z)$为连续函数，$\Sigma$为曲面$x^2+y^2+z=1$在第一卦限的部分，指向上侧.

解：原式$=\iint_D \left[(y^2f(x,y,z)+x)(2x)+\big(-xyf(x,y,z)\big)(2y)+2\right]dxdy$

$$=\iint_D (2x^2+2)dxdy=\frac{5}{8}\pi.$$

其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

四、(本题 10 分) 验证 $(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y})dx+(\ln x-\frac{x^2}{y^2})dy,(x>0,y>0)$ 为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，求出函数 $u(x,y)$，并计算积分 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y})dx+(\ln x-\frac{x^2}{y^2})dy.$

解：令 $P(x,y)=\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}$，$Q(x,y)=\ln x-\frac{x^2}{y^2}$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{2x}{y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$ $(x>0,y>0)$，

所以 $(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y})dx+(\ln x-\frac{x^2}{y^2})dy$ 为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.我们有取定第一象限内一点A(1,1)，记点(x,y)为B，且由积分与路径无关，选择折线路径，则

$$\mathrm{u(x,y)}=\int_{\mathrm{AB}}\left(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\right)dx+\left(\ln x-\frac{x^2}{y^2}\right)dy$$

$$=\int_1^x\left(\frac{1}{s}+2s\right)ds+\int_1^y(\ln x-\frac{x^2}{t^2})dy=\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{y}}+y\ln x-1.$$

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)}\left(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\right)dx+\left(\ln x-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=u(2,3)=3ln2+\frac{1}{3}.$$

五、(本题 10 分) 利用 Green 公式计算 $\int_L\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$，其中 $\boldsymbol{L}$ 为单位圆 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向.

解令 $P=\frac{x-y}{x^2+4y^2}$，$Q=\frac{x+4y}{x^2+4y^2}$，则当 $x^2+y^2\neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4y^2-x^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

作 $\boldsymbol{L}$ 所围区域内部的椭圆 L_1: $x^2+4y^2=\varepsilon^2$（$\boldsymbol{\varepsilon>0}$ 充分小，顺时针方向），记 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{L_1}$ 所围成的复连通区域为 $\boldsymbol{D}$, 由 Green 公式得:

$$\oint_{L+L_1}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0,$$

又因为

$$\int_{L_1}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}(x-y)dx+(x+4y)dy$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{x^2+4y^2\le\varepsilon^2}[\frac{\partial(x+4y)}{\partial x}-\frac{\partial(x-y)}{\partial y}]dxdy$$

$$=-\frac{2}{\varepsilon^2}\iint\limits_{x^2+4y^2\le\varepsilon^2}dxdy=-\pi,$$

所以

$$\oint_L\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=-\oint_{L_1}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\pi.$$

六 、(**本题 10 分**)利用 Gauss 公式计算 $\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中$\sum$是抛物面$z=x^2+y^2$介于$z=0,z=R(R>0)$之间的部分，取下侧.

解： 添加平面$\Sigma_1: \mathrm{z}=\mathrm{R}\ (\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\le \mathrm{R})$，方向取上侧.

则$\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Sigma_1}$ 构成闭曲面，假定它们所围区域为$\boldsymbol{\Omega}$，由 Gauss 公式得

$$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2-z)dydz+(z^2-x)dzdx+(x^2-y)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}0dxdydz-\iint\limits_{x^2+y^2\le R}(x^2-y)dxdy$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R}}(r^2\cos^2\theta-r\sin\theta)\cdot rdr$$

$$=-\frac{\pi}{4}R^2.$$

七、（本题 10 分） 用 Stokes 公式计算$\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(x-y)dz$，其中$\Gamma$是从$(a,0,0)$经$(0,a,0)$和$(0,0,a)$回到$(a,0,0)$的三角形边界$(a>0)$.

解：（方法一）设Σ为平面$x+y+z=a$被Γ所围成的部分，法向量朝上，则Σ的法向量为$\vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$，由 Stokes 公式可得

$$\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(x-y)dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & 0 & x-y\end{vmatrix}dS=\frac{-4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}dS$$

$$=\frac{-4}{\sqrt{3}}S(\Sigma)=\frac{-4}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2=-2a^2.$$

（方法二）

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & 0 & x-y\end{vmatrix}=-\iint_{\Sigma}dydz+2dzdx+dxdy=-\iint_{D_{xy}}[(-z_x)+2(-z_y)+1]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-4\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\cdot\frac{a^2}{2}=-2a^2,$$

其中投影区域D_{xy}为x,y坐标轴与直线$x+y=a$所围成的三角形闭区域，也可以往不同坐标平面投影$\iint_{\Sigma}dydz=\sigma(D_{xy})=\frac{a^2}{2}$，其他几项类似。

八、附加题（本题 10 分）设$P(x,y)$和$Q(x,y)$在全平面上有连续偏导数，而且对任意点(x_0,y_0)为中心，以任意正数r为半径的上半圆$C: x=x_0+rcos\theta, y=y_0+rsin\theta\ (0\le\theta\le\pi)$恒有

$$\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

求证：$P(x,y)\equiv 0,\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0.$ （提示：做辅助曲线然后使用格林公式）

解：任给平面上一点(x_0,y_0)，设C为以r为半径的上半圆$x=x_0+rcos\theta, y=y_0+rsin\theta$，记点$(x_0-r,y_0)$为A, 点$(x_0+r,y_0)$为B，做辅助曲线 AB，与 C 合起来成为一个封闭曲线，取该封闭曲线的逆时针方向。则

$$\int_{C+AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)dx=P(\xi,y_0)\cdot 2r,$$

其中$\xi\in[x_0-r,x_0+r]$. 又由格林公式

$$\int_{C+AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_M\cdot\frac{\pi r^2}{2},$$

其中区域 D 是$C+AB$围成的半圆盘，M是D内一点。

比较两式可得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_M\cdot\frac{\pi r}{2}=P(\xi,y_0).$$

在上式中令$r\to 0$, 则$P(x_0,y_0)=0$. 由(x_0,y_0)的任意性知$P(x,y)\equiv 0$. 将$P(x,y)\equiv 0$代入上式可知$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_M=0$，即$\frac{\partial Q}{\partial x}(M)=0$，再令$r\to 0$，则$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)=0$，因此$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0$。