北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

§6.6 关于定积分的进一步讨论: Lebesgue 定理

定义6.1（零测集）

设A为实数集，如对$\forall\varepsilon>0$，都$\exists$至多可数的一列开区间$\{I_n, n\in N^*\}$，它是A的一个开覆盖，并且$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\le\varepsilon$，那么称$A$为零测度集，简称零测集.

注：(1) 空集，至多可数集是零测集.

(2) 任何长度不为零的区间都不是零测集.

定理6.1（零测集的性质）

(1) 至多可数个零测集的并集是零测集;

(2) 设A为零测集,若$B \subset A$,那么B也是零测集.

定义6.2（Lebesgue定理）

若函数f在有限区间$[a,b]$上有界,那么f在$[a,b]$上Riemann可积的充要条件是$D(f)$是一零测集.

其中: $D(f) = \{x \in [a,b]:\ f\text{在}x\text{处不连续}\}$

定义6.2 假设函数f在区间I上有界，

用$\omega_f(x,r)$表示f函数在$I_{x,r}=(x-r,x+r)$上的振幅，

设$\omega_f(x)=\lim\limits_{r\to0^+}\omega_f(x,r)$，称为函数$f$**在点$x$处的振幅**.

引理6.1 函数$f(x)$在区间I上连续的充分必要条件$\omega_f(x)=0$

引理6.2 $D(f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$

其中$\forall\delta>0, D_\delta=\{x\in[a,b],\omega_f(x)\geq\delta\}$

引理6.3 假设f定义在区间$[a,b]$上,

如果存在区间序列$(\alpha_i,\beta_i), i=1,2,3,........$使得$D(f)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$,

记$K=[a,b]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$,则对任意$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$x\in K, y\in[a,b]$

且$|x-y|<\delta$时，有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

推论6.1

1)如果f在$[a,b]$可积,并且$1/f$在$[a,b]$有定义,
则$1/f$在$[a,b]$可积;

2)如果f,g在$[a,b]$可积,则fg在$[a,b]$可积;

3)如果f在$[a,b]$可积,则f在任何子区间$[c,d]\subset[a,b]$可积;

证明

因为$D(f)=D\left(\frac{1}{f}\right)$,则$\frac{1}{f}$在$[a,b]$可积.

t4

因为$D(fg)\subset D(f)\cup D(g)$,则$fg$在$[a,b]$可积

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

§6.7 Lesbesgue积分与Riemann积分的关系

定理7.1 若$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积，则$f(x)$在$[a,b]$上Lebesgue可积，且

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx.$$

定理7.2 若$E=\bigcup\limits_{i}^{\infty}E_i,\ E_i\bigcap E_j=\Phi(i\neq j),E,E_i(\mathrm{i}=1,2,\ldots\ldots)$均为可测集，且$m(E)<\infty$，$f(x)$是$E$上的勒贝格有界可积函数，则

$$\int_E f(x)dx=\sum_{1}^{\infty}\int_{E_i} f(x)dx.$$