

## 2.5 作业习题

1. 在四维线性空间 $R^4$ 中, 给出第I组基:  $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 1, -1, -1), \alpha_3 = (1, -1, 1, -1), \alpha_4 = (1, -1, -1, 1)$ , 第II组基:  $\beta_1 = (1, 1, 0, 1), \beta_2 = (2, 1, 3, 1), \beta_3 = (1, 1, 0, 0), \beta_4 = (0, 1, -1, -1)$ 。求: (1) 从第I组基到第II组基的过渡矩阵; (2)  $\xi = (1, 0, 0, -1)$ 在第II组基下的坐标。

2. 设所有次数小于4的实多项式构成的线性空间 $\mathbf{R}[x]_4$ 的第I组基为 $1, x, x^2, x^3$ , 第II组基为 $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ , 求: (1) 由第I组基到第II组基的过渡矩阵; (2) 多项式 $1+2x+3x^2+4x^3$ 在第II组基下的坐标; (3) 若多项式 $f(x)$ 在第II组基下的坐标为 $(1, 2, 3, 4)$ , 求它在第I组基下的坐标。

3. 在 $R^4$ 中, 求由齐次方程组 
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$
 确定的解空间的基与维数。

4. 给定 $R^4$ 的子空间 $W_1$ 的基 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  和子空间 $W_2$ 的基 $\{\beta_1, \beta_2\}$ , 其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, 2, 1, 0), \\ \alpha_2 = (-1, 1, 1, 1), \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = (2, -1, 0, 1), \\ \beta_2 = (1, -1, 3, 7), \end{cases}$$

(1) 求 $W_1 + W_2$ 的维数并求出一组基。

(2) 求 $W_1 \cap W_2$ 的维数并求出一组基, 并将它扩充为 $W_1 + W_2$ 的一组基。

5. 设 $W_1, W_2$ 分别是数域 $F$ 上的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases}$$

的解空间, 分别求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的维数及其一组基。

6. 设 $V_1$ 与 $V_2$ 分别是数域 $F$ 上齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间. 求证:  $F^n = V_1 \oplus V_2$ .