第三章 一阶逻辑基础

郑征

zhengz@buaa.edu.cn

软件与控制研究室

第1讲 一阶逻辑基础

1. 量词、谓词等的符号化
2. 合式公式、解释、永真式
3. 一阶逻辑等值式
4. 一阶逻辑推理规则

命题逻辑的优缺点

+ 命题逻辑是陈述性的，推理和表示分开
+ 命题逻辑可以采用析取式和否定式来处理不完全信息
+ 命题逻辑具有合成性，
  – 例如$B_{1,1} \wedge P_{1,2}$的含义从 $B_{1,1}$和 $P_{1,2}$得到。
+ 命题逻辑的含义与上下文无关
– 命题逻辑缺乏足够的表达能力

一阶逻辑

- 采用命题逻辑的基础—陈述式、上下文无关和合成语义，并借用自然语言的思想。
- 一阶逻辑假设世界包含
  - 对象：人们、房子、数字…
  - 关系：红色的、比…大…
  - 函数：是…的父亲…
- 例子：1+2=3

命题逻辑vs.一阶逻辑

- 基本区别在于本体论的约定
  - 命题逻辑假设世界中的事实要么成立，要么不成立
  - 一阶逻辑则假设更多，即世界由对象组成，对象之间的某些关系要么成立，要么不成立。

一阶逻辑 vs. 命题逻辑

- 引进一阶逻辑的背景：命题逻辑无法用简明的形式表示复杂环境的知识。
- 一阶逻辑是通过允许在给定论域的个体上的量化而扩展命题逻辑的演绎系统。
- 命题逻辑处理简单的陈述性命题，一阶逻辑补充覆盖了谓词和量化。

- 例如下列句子：
  - “苏格拉底是男人”，“柏拉图是男人”。
  - 在命题逻辑中，它们是两个无关的命题，比如指示为 p 和 q。但是在一阶逻辑中，这两个句子将由同一个性质联系起来：Man(x)，这里的 Man(x) 意味着 x 是个男人。

- ✱在 x = 苏格拉底时我们得到了第一个命题 p，而在 x = 柏拉图时我们得到了第二个命题 q。
- 这种构造在介入了量词的时候允许更加强力的逻辑，比如“对于所有 x...”。例如，“对于所有 x，如果 $Man(x)$ 则...”。

1. 量词、谓词等的符号化

一阶逻辑的字母表

- 个体常项: $a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots$
- 个体变项: $x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots$
- 函数符号: $f, g, h, \ldots, f_1, g_1, h_1, \ldots$
- 谓词符号: $F, G, H, \ldots, F_1, G_1, H_1, \ldots$
- 量词符号: $\exists, \forall$
- 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 括号与逗号: (,), ,

谓词(predicate)

- 谓词：表示性质、关系等；相当于句子中的谓语。
- 用大写英文字母F, G, H,…,后跟括号与变元来表示。例如：

  F(x): x是人。

  G(x, y): x与y是兄弟。
- n元谓词：含有n个变元。例如：

  F(x)是一元谓词， G(x, y)是二元谓词

量词(quantifier)

- 全称(universal)量词: ∀

  “所有的”，“全部的”,…
- 存在(existential)量词: ∃

  “有一些的”，“某些的”,…
- 唯一(unique)存在量词: ∃!

  “恰好存在一个”

量词(举例)

- 设：F(x)：x是自然数。G(x)：x是偶数。

  H(x)：x是奇数。I(x,y)：x=y。

- “有些自然数是偶数”。$\exists x(F(x)\wedge G(x))$
- “既有奇数又有偶数”。$\exists xH(x)\wedge\exists yG(y)$
- “存在既奇又偶的数”。$\exists x(H(x)\wedge G(x))$
- “存在唯一的自然数0”。$\exists!x(F(x)\wedge I(x,0))$

个体常项(constant)

- 表示具体的特定对象
- 用小写英文字母a,b,c,…来表示
- 例如：　　a:王大明，b:王小明,

G(x,y): x与y是兄弟,

“王大明与王小明是兄弟”：G(a,b)

个体变项(variable)

- 表示不确定的泛指对象
- 用小写英文字母x,y,z,…来表示
- 例如： F(x): x是人。G(x): x是数。

“存在着人”： $\exists xF(x)$

“仅有一人”： $\exists !xF(x)$

“万物皆数”： $\forall xG(x)$

合式公式（举例）

- $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x,y)))$
- $F(f(a,a),b)$
- 约定：省略多余括号
  - 最外层
  - 优先级递减：$\exists, \forall$;　$\neg$;　$\wedge, \vee$; $\rightarrow, \leftrightarrow$

命题符号化

- 个体域(scope): 个体词的取值范围, 缺省(default)采用全总个体域.
- 全总个体域: 世界上的万事万物
- 特性谓词: 表示所关注的对象的性质
- 两种使用特性谓词的模式:

$$\forall x(M(x)\rightarrow G(x))$$

$$\exists x(M(x)\wedge G(x))$$

其中M(x)是特性谓词。

命题符号化(举例)

命题的符号化是和个体域相关的

- 例: “有些人是要死的”.
- 解1: 采用全总个体域.

  设: F(x): x是人; G(x):x是要死的.

  原命题符号化成: $\exists x(F(x) \wedge G(x))$
- 解2: 采用全体人作为个体域.

  设: G(x): x是要死的.

  原命题符号化成: $\exists xG(x)$

命题符号化(举例、续)

- 例: “凡人都是要死的”.
- 解1: 采用全总个体域.

  设: $F(x)$: x是人; $G(x)$:x是要死的.

  原命题符号化成: $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$
- 解2: 采用全体人作为个体域.

  设: $G(x)$: x是要死的.

  原命题符号化成: $\forall xG(x)$

命题符号化(举例、续)

- 例: “有的汽车比火车快”。

  解: 设: F(x): x是汽车; G(x): x是火车;

  H(x,y): x比y快

  原命题符号化成:

  $$\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$$

  或: $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge H(x,y))$

命题符号化(举例、续)

- 例: “存在唯一的对象满足性质P”。

  解: 设: P(x): x满足性质P

  原命题符号化成:

  $$\exists !x P(x)$$

  或:

  $$\exists x(\ P(x) \wedge \forall y(\ P(y) \rightarrow x=y\ )\ )$$

2. 合式公式、解释、永真式

合式公式中的变项

- 量词辖域：在$\exists xA$, $\forall xA$中, A是量词的辖域.
  例如：$\underline{\exists}x(\underline{F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y))})$
- 指导变项：紧跟在量词后面的个体变项.例如:
  $\exists\underline{x}(F(x)\wedge\forall\underline{y}(G(y)\rightarrow H(x,y)))$
- 约束出现: 在辖域中与指导变项同名的变项.
  例如: $\exists x(F(\underline{x})\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(\underline{x},y)))$
- 自由出现: 既非指导变项又非约束出现. 例如:
  $\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y))$

合式公式中的变项(举例)

- $H(x',y') \vee \exists \underline{x} F(x) \vee \forall \underline{y}(G(y) \rightarrow H(x'',y))$
- $\underline{x}$ 与 $\underline{y}$ 是指导变项
- x与y是约束出现
- x', x''与 y'是自由出现

换名(rename)规则

- 把某个指导变项和其量词辖域中所有同名的约束出现, 都换成某个新的个体变项符号.
- 例如:
  - $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall y(A(y)\wedge B(y))$
  - $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x) \Leftrightarrow \forall yA(y)\wedge\forall zB(z)$
  - $H(x,y)\vee\exists xF(x)\vee\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y))$

  $\Leftrightarrow H(x,y)\vee\exists zF(z)\vee\forall u(G(u)\rightarrow H(x,u))$

代替(substitute)规则

- 把某个自由变项的所有出现, 都换成某个新的个体变项符号.
- 例如:
  - $A(x)\wedge B(x) \Leftrightarrow A(y)\wedge B(y)$
  - $\forall xA(x)\wedge B(x) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B(y)$
  - $H(x,y)\vee\exists xF(x)\vee\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y))$

  $\Leftrightarrow H(s,t)\vee\exists xF(x)\vee\forall y(G(y)\rightarrow H(s,y))$

闭式(closed form)

- 闭式: 无自由出现的变项
- 一般来说, 闭式表示的是命题, 例如
  - F(a)
  - ∃xF(x)
  - F(x)
  - ∀y(G(y)→H(x,y))

陈述，有确定真假

后两个不是闭式

解释(interpret)

- 对一个合式公式的**解释**包括给出
  - 个体域
  - 谓词
  - 函数
  - 个体常项

的具体含义

解释(举例)

谓词

- F(f(a,a),b)
- 解释1： 个体域是全体自然数; a: 2;

  b: 4; f(x,y)=x+y; F(x,y): x=y

  原公式解释成: “2+2=4”。

函数

- 解释2： 个体域是全体实数; a: 3;

  b: 5; f(x,y)=x-y; F(x,y): x>y

  原公式解释成: “3-3>5”。

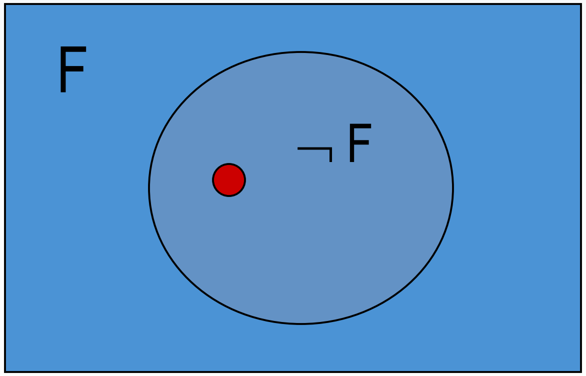
3.　一阶逻辑等值式

一阶逻辑永真式(tautology)

- 永真式:在各种解释下取值均为真(逻辑有效式)
  - 命题逻辑永真式: 在各种赋值下取值均为真(重言式)
- 永假式:在各种解释下取值均为假(矛盾式)
  - 命题逻辑永假式: 在各种赋值下取值均为假(矛盾式)
- 可满足式：非永假式

一阶逻辑等值式(定义)

- 等值： $A \Leftrightarrow B$
  - 读作：A等值于B
  - 含义：A与B在各种解释下取值均相等
- $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$是永真式
- 例如： $\neg\forall x F(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$



一阶逻辑等值式(来源)

- 命题逻辑等值式的代换实例
- 与量词有关的
  - 有限个体域量词消去
  - 量词否定
  - 量词辖域收缩与扩张
  - 量词分配
- 与变项命名有关的
  - 换名规则
  - 代替规则

代换实例

- 在命题逻辑等值式中, 代入一阶逻辑公式所得到的式子, 称为原来公式的代换实例.
- 例1：$A \Leftrightarrow \neg\neg A$,　　令$A=\forall xF(x)$，得到

$$\forall xF(x) \Leftrightarrow \neg\neg\forall xF(x)$$

- 例2：$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$,　　令$A=F(x)$,

　　$B=G(y)$,　得到

$$F(x) \to G(y) \Leftrightarrow \neg F(x) \vee G(y)$$

有限个体域上消去量词

- 设个体域为有限集$D=\{a_1, a_2,\dots, a_n\}$, 则

$$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$

- 例：个体域$D=\{a,b,c\}$, 则 $\exists x \forall y F(x,y)$

$$\Leftrightarrow \exists x\, (F(x,a) \wedge F(x,b) \wedge F(x,c))$$

$$\Leftrightarrow \quad (F(a,a) \wedge F(a,b) \wedge F(a,c)) \vee$$

$$(F(b,a) \wedge F(b,b) \wedge F(b,c)) \vee$$

$$(F(c,a) \wedge F(c,b) \wedge F(c,c))$$

量词否定等值式

- $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$

- $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$

量词辖域收缩与扩张(∀)

- $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$
- $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$
- $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$
- $\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$
- 说明: B中不含x的出现
- 例1: $\forall x(F(x) \vee G(y)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \vee G(y)$
- 例2: $\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y)) \Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \forall y G(y))$

  $\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall y G(y)$

量词分配

- $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

- $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

量词分配(反例)

- $\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ √
- $\forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$

  个体域为全体自然数; A(x): x是偶数

  B(x): x是奇数;　左$\Leftrightarrow$1, 右$\Leftrightarrow$0
- $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ √
- $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

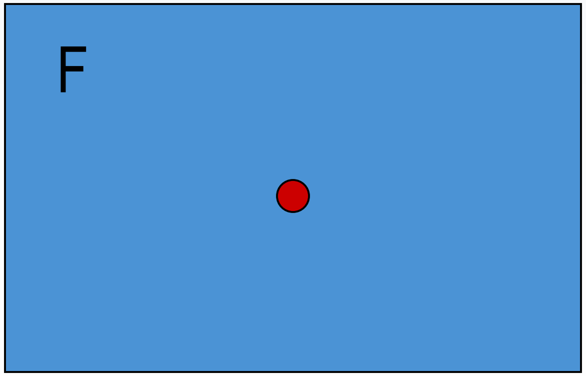
  个体域为全体自然数; A(x): x是偶数

  B(x): x是奇数;　左$\Leftrightarrow$0, 右$\Leftrightarrow$1

4. 一阶逻辑推理规则

一阶逻辑推理定律(定义)

- 推出：　$A \Rightarrow B$
  - 读作：A推出B
  - 含义：A为真时, B也为真
- $A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \rightarrow B$是永真式
- 例如：　$\forall x F(x) \Rightarrow \exists x F(x)$



一阶逻辑推理定律(来源)

- 命题逻辑推理定律的代换实例
- 基本等值式生成的推理定律
- 其他的一阶逻辑推理定律（和量词相关）

$$\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$$

$$\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$$

$$\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$$

$$\vdots$$

一阶逻辑推理定律(举例)

- 命题逻辑推理定律的代换实例

  例如: 假言推理规则:

$$(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$$

代入 A=F(a), B=G(a), 得到

$$(F(a) \to G(a)) \wedge F(a) \Rightarrow G(a)$$

一阶逻辑推理定律(举例、续)

- 基本等值式生成的推理定律

  即由 $A \Leftrightarrow B$ 可得 $A \Rightarrow B$ 和 $B \Rightarrow A$

  例如: 量词分配等值式:

  $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

  可得

  $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

  $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \wedge B(x))$

总结

- 一阶逻辑等值式（6组）
  - 有限个体域量词消去；
  - 量词否定；
  - 量词辖域收缩与扩张；
  - 量词分配；
  - 换名规则；
  - 代替规则
- 一阶逻辑推理定律

两个关键点：谓词和量词