A

北京航空航天大学

2014-2015 学年第一学期期末

考试统一用答题册

考试课程______一元微积分______

班级__________ 学号__________ 姓名__________

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
阅卷人									

2015 年 01 月 21 日

一．填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\tan\dfrac{a}{n})^n=e^2$, 则$a=$__________.

2. 函数 $f(x)=\sqrt{1+2x}$ 带拉格朗日余项的二阶麦克劳林公式为

______________________________, ξ 介于x与0之间.

3.已知 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(3x)\mathrm{d}x\right)=$____________________.

4. $\int_{-1}^{1}(2x+|x|)e^{-|x|}\mathrm{d}x=$____________________.

5. 欲使不等式 $\int_1^x\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立，则 x 的取值范围是______________________.

二．单项选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1. 设 $f(x)$在 $x=0$ 的邻域内有定义且 $f(0)=0$, 则下列选项中与 $f'(0)$ 存在等价的是(　　　).

(A) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h^2}$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^3}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\ln(1+h^2))}{h^2}$ 存在.

2.若存在 $\varepsilon>0$，对任意的 $X>0$, 都有 $x_0>X$, 使 $|f(x_0)|<\varepsilon$, 则可断定的是（　　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.　　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq0$.

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$.　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\infty$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续可导，且 $f(0)=f(2)=1$. 如果 $|f'(x)|\le1, \forall x\in[0,2]$,

则 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ 能取值为(　　　).

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\[2mm] \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & e\le x<+\infty\end{cases}$，若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则(　　　).

(A) $\alpha<-2$.　　(B) $-2<\alpha<0$.　　(C) $0<\alpha<2$.　　(D) $\alpha>2$.

5. 已知线状细棒 $y=x(-1\le x\le1)$ 上任意点处的线密度取值为该点到 y 轴的距离，

则它的质量为(　　　).

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) $\sqrt{2}$.　　(D) 2.

三．求极限（每小题 5 分，共 10 分）

1． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

2． $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

四．求导数（每小题 6 分，共 12 分）

1． 设 $y=x(1+\sin x)^{\cos x}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$.

2． 设 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\int_0^{t^2}\dfrac{\sin u}{u}\mathrm{d}u \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

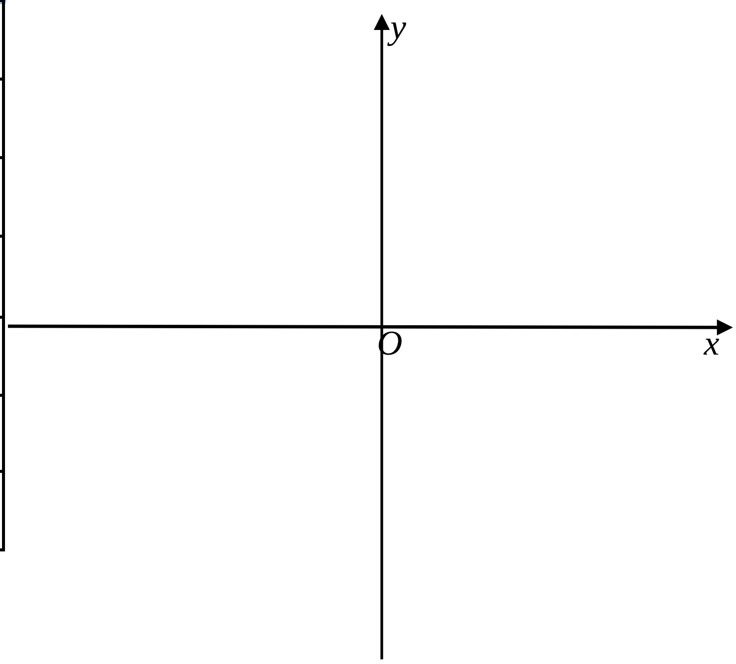
五．求积分(每小题 6 分，共 12 分)

1. $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x.$

2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x\mathrm{d}x}{(1+x)^2}.$

六. (10 分) 设函数 $f(x)=\frac{(x-1)^2}{2(x+1)}$，填表并作图.

单增区间	
单减区间	
凹区间	
凸区间	
极大值点	
极小值点	
渐近线	



七. (10 分) 设曲线 $l_1: y=1-x^2\ (0\le x\le 1)$，$x$ 轴与 y 轴所围图形被曲线 l_2： $y=ax^2\ (a>0)$ 分成面积相等的两个部分. 求

(1) a 的值.

(2) 曲线 l_1, l_2 与 y 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

八. (6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上具有二阶导数 $f(1)>0, f'(1)<0,$ 且当 $x>1$ 时, $f''(x)<0.$

证明：函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上存在唯一的零点