

第 13 章 反馈线性化

考虑这样一类非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

$$y = h(x)$$

是否存在一个状态反馈控制

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

及变量代换

$$z = T(x)$$

把非线性系统转换为等效的线性系统。13.1 节通过几个简

单例子引入全状态线性化（full-state linearization）和输入—输出线性化两个概念，并给出其表示方法。

所谓全状态线性化是指把状态方程完全线性化，输入—输出线性化则是把输入—输出映射线性化，而状态方程只是部分线性化。

13.2 节将研究输入—输出线性化，介绍相对阶、零动态和最小相位系统。

13.3 节将给出一类可反馈线性化的非线性系统的特征。

有关可反馈（或可部分反馈）线性化系统的状态反馈

控制在 13.4 节讨论，其中涉及到稳定性和跟踪问题。

13.1 引言

为了引入反馈线性化的概念，首先讨论稳定单摆方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu$$

的原点问题。通过观察上面的系统状态方程，可以选择

$$u = \frac{a}{c} \sin(x_1 + \delta) - \sin \delta + \frac{v}{c}$$

以消去非线性项 $a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta]$ ，从而得到线性系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + v$$

这样非线性系统的稳定性问题就简化为一个可控线性系统的稳定性问题，我们可以设计一个稳定的线性状态反馈控制

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2$$

使闭环系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -k_1x_1 - (k_2 + b)x_2$$

的特征值在左半开平面，则整个状态反馈控制律为

$$u = \left(\frac{a}{c} \right) [\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - \frac{1}{c} (k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

消去非线性项的方法普遍适用吗？显然不能希望每个非线性系统都能消去非线性项，但一定存在具有某种结构特性的系统，允许消去非线性项。

考虑如下结构的非线性状态方程：

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (13.1)$$

其中， A 为 $n \times n$ 矩阵， B 为 $n \times p$ 矩阵，矩阵对 (A, B) 是可控矩阵，函数 $\alpha: R^n \rightarrow R^p$ 和 $\gamma: R^n \rightarrow R^{p \times p}$ 定义在包含原点的定义域 $D \subset R^n$ 上，且矩阵 $\gamma(x)$ 对于每个 $x \in D$ 都是非奇

异矩阵。

对于系统 (13.1)，可以通过状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (13.2)$$

将其线性化，其中 $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ ，得到线性状态方程：

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (13.3)$$

为了实现稳定，可设计 $v = -Kx$ ，使得 $A - BK$ 为 **Hurwitz** 矩阵。整个非线性稳定状态反馈控制为

$$u = \alpha(x) - \beta(x)Kx \quad (13.4)$$

假设非线性状态方程不具有形如式(13.1)的结构，是否意味着就不能通过反馈对系统线性化呢？回答是否定的。

回顾前面的内容，系统的状态模型并不是惟一的，它取决于状态变量的选择，即使所选择的一种状态变量不能使系统状态方程具有形如式(13.1)的结构，还可以选择其他状态变量。例如，对于系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u\end{aligned}$$

不能简单选取 u 消去非线性项 $a \sin x_2$ 。但是，如果先通过变换

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= a \sin x_2 = \dot{x}_1\end{aligned}$$

改变状态变量，则 z_1 和 z_2 满足

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= a \cos x_2 (-x_1^2 + u)\end{aligned}$$

非线性项可以通过控制

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v$$

消去，当 $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$ 时，上式有明确定义。要求出新坐标系 (z_1, z_2) 中的状态方程，可通过逆变换，即用 (z_1, z_2) 表示 (x_1, x_2)

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \sin^{-1} \left(\frac{z_2}{a} \right)\end{aligned}$$

上式当 $-a < z_2 < a$ 时有定义。变换后的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= a \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{z_2}{a}\right)\right)(-z_1^2 + u)\end{aligned}$$

当用变量代换 $z = T(x)$ 将状态方程从 x 坐标系变换到 z 坐标系时，映射 T 必须是可逆的，即必须存在逆映射 $T^{-1}(\cdot)$ ，使得对于所有 $z \in T(D)$ ，有 $x = T^{-1}(z)$ ，这里 D 是 T 的定义域。此外，由于 z 和 x 的导数应该是连续的，因此要求 $T(\cdot)$ 和 $T^{-1}(\cdot)$ 必须连续可微。

具有连续可微逆映射的连续可微映射称为微分同胚。
如果雅可比矩阵 $[\partial T / \partial x]$ 在点 $x_0 \in D$ 是非奇异矩阵，则根

据反函数定理^①，存在一个 x_0 的邻域 N ，使得限定在 N 内的 T 是 N 上的微分同胚。如果映射 T 是 R^n 上的微分同胚，且 $T(R^n) = R^n$ ，则称 T 为全局微分同胚映射^②。

至此我们可以给出可反馈线性化系统的定义。

定义 13.1 考虑非线性系统（仿射，Affine）

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (13.5)$$

其中 $f: D \rightarrow R^n$ 和 $G: D \rightarrow R^{n \times p}$ 在定义域 $D \subset R^n$ 上足够光

^① 参见文献[10]的定理 7.5。

^② 当且仅当对所有 $x \in R^n$ ， $[\partial T / \partial x]$ 是非奇异矩阵，且 T 是正则的，即当 $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|T(x)\| = \infty$ 时， T 是全局微分同胚映射（证明参见文献[165]或文献[212]）。

滑^①。如果存在一个微分同胚映射 $T: D \rightarrow R^n$ ，使得 $D_x = T(D)$ 包含原点，且可以通过变量代换 $z = T(x)$ 将系统 (13.5) 转化为下形式：

$$\dot{z} = Az + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (13.6)$$

其中， (A, B) 是可控的，且对于所有 $x \in D$ ， $\gamma(x)$ 为非奇异矩阵，则称系统 (13.5) 是可反馈线性化的（或可输入/状态线性化）。

当我们要关注某些输出变量时，例如在跟踪控制问题中，则可用状态方程和输出方程描述状态模型。状态方程

^① 所谓“足够光滑”是指后面出现的所有偏导数都有定义且是连续的。

的线性化，不一定导致输出方程的线性化。例如，如果系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u\end{aligned}$$

的输出为 $y = x_2$ ，则变量代换和状态反馈控制为

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = a \sin x_2, \quad u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v$$

可得

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \\ y &= \sin^{-1}\left(\frac{z_2}{a}\right)\end{aligned}$$

虽然状态方程是线性的，但由于输出方程是非线性的，因此求解关于 y 的跟踪控制问题仍然比较复杂。观察 x 坐标系中的状态方程和输出方程可以发现，如果状态反馈控制采用 $u = x_1^2 + v$ ，就能够将 u 到 y 的输入-输出映射线性化，此时线性模型为

$$\dot{x}_2 = v$$

$$y = x_2$$

现在就可用线性控制理论求解这个跟踪控制问题了。

上述讨论表明，有时对输入-输出映射进行线性化更有意义，即使以保留一部分状态方程的非线性为代价。这种

情况称系统为可输入—输出线性化的。

注意应用输入-输出线性化，线性化的输入-输出映射并不能说明系统的全部动态特性。在前面例子中，整个系统表示为

$$\dot{x}_1 = a \sin x_2$$

$$\dot{x}_2 = v$$

$$y = x_2$$

注意，状态变量 x_1 和输出 y 没有联系，换句话说就是线性化反馈控制使得 x_1 由 y 是不可观测的。在设计跟踪控制时，应该保证变量 x_1 具有良好性能，即在某种意义上是稳定或有界的。一个仅采用线性输入-输出映射的简单控制

设计，可能会导致信号 $x_1(t)$ 不断增长。例如，假设设计一个线性控制器，使输出 y 稳定在常数值 r 上，则 $x_1(t) = x_1(0) + t a \sin r$ ，当 $\sin r \neq 0$ 时， $x_1(t)$ 会变得无界，这类内部稳定问题可以用零动态概念解释。

13.2 输入-输出线性化

考虑单输入—单输出系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (13.7)$$

$$y = h(x) \quad (13.8)$$

其中 f ， g 和 h 在定义域 $D \subset R^n$ 上足够光滑。映射

$f: D \rightarrow R^n$ 和 $g: D \rightarrow R^n$ 称为 D 上的向量场。导数 \dot{y} 为

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \triangleq L_f h(x) + L_g h(x)u$$

其中

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x), L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x)$$

称为 h 关于 f 或沿 f 的 **Lie** 导数, 这种表示方法类似于 h 沿系统 $\dot{x} = f(x)$ 轨迹的导数。当重复计算关于同一向量场或一新向量场的导数时, 这种新表示法较为方便。例如, 要用到以下表示:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g(x),$$

$$L_f^2 h(x) = L_f L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} f(x),$$

$$L_f^k h(x) = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x),$$

$$L_f^0 h(x) = h(x)$$

如果的 $L_g h(x) = 0$ ，则 $\dot{y} = L_f h(x)$ ，与 u 无关。继续计算 y 的二阶导数，记为 $y^{(2)}$ ，得

$$y^{(2)} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u$$

同样，如果 $L_g L_f h(x) = 0$ ，则 $y^{(2)} = L_f^2 h(x)$ ，且与 u 无关。重

复这一过程可看出，如果 $h(x)$ 满足

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$$

则 u 不会出现在 $y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}$ 的方程中，但出现在 $y^{(\rho)}$ 的方程中，带一个非零系数，即

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u$$

上述方程清楚地表明系统是可输入-输出线性化的，因为由状态反馈控制

$$u = \frac{-L_f^\rho h(x) + v}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}$$

把输入-输出映射简化为

$$y^{(\rho)} = v$$

这是一个 ρ 积分器链。这时，整数 ρ 称为系统的相对阶，下面是其定义。

定义 13.2 如果对于所有 $x \in D_0$ ，有

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, i = 1, 2, \dots, \rho - 1; L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \quad (13.9)$$

则称非线性系统 (13.7) ~ (13.8) 在区域 $x \in D_0$ 上具有相对阶 ρ ， $1 \leq \rho \leq n$ 。

例 13.1 考虑受控 Van der Pol 方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u, \quad \varepsilon > 0$$

其输出为 $y = x_1$ 。计算输出导数，得

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

因此，系统在 \mathbb{R}^2 上的相对阶为 2。当输出 $y = x_2$ 时，有

$\dot{y} = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$ ，系统在 \mathbb{R}^2 上的相对阶为 1。当输出为

$y = x_1 + x_2^2$ ，则 $\dot{y} = x_2 + 2x_2[-x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u]$ ，系统在

$D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$ 上的相对阶为 1。

例 13.2 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + u$$

$$y = x_1$$

计算 y 的导数，得

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_1 = y$$

因而，对于所有 $n \geq 1$ ， $y^{(n)} = y = x_1$ 。在这种情况下，系统不具有符合上述定义的相对阶，因为输出 $y(t) = x_1(t) = e^t x_1(0)$ 与输入 u 无关。

例 13.3 一个场控直流电动机，若忽略轴阻尼，其模型为

状态方程（见习题 1.17）:

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + k - cx_1x_3$$

$$\dot{x}_3 = \theta x_1x_2$$

其中， x_1 、 x_2 和 x_3 分别是场励磁电流、电枢电流和角速度， a 、 b 、 c 、 k 和 θ 是正常数。对于速度控制，选择输出为 $y = x_3$ ，则输出导数为

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = \theta x_1x_2$$

$$\ddot{y} = \theta x_1\dot{x}_2 + \theta \dot{x}_1x_2 = (\cdot) + \theta x_2u$$

这里 (\cdot) 中的各项为 x 的函数。系统在区域

$D_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \neq 0\}$ 上的相对阶为 2。

例 13.4 考虑一个线性系统，其传递函数为

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

其中 $m < n$ 且 $b_m \neq 0$ 。系统的状态模型可取为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{1 \times n}$$

该线性状态模型是系统 (13.7) - (13.8) 的特例，其中 $f(x) = Ax$ ， $g = B$ ， $h(x) = Cx$ 。为检验系统的相对阶，计算输出的导数。其一阶导数为

$$\dot{y} = CAx + CBu$$

如果 $m = n - 1$ ，则 $CB = b_{n-1} \neq 0$ ，系统的相对阶为 1；否则

$CB=0$ ，继续计算二阶导数 $y^{(2)}$ 。注意， CA 是一个行向量，由 C 的元素右移一次得到，而 CA^2 由 C 的元素右移两次得到，依次类推，可知

$$CA^{i-1}B=0, i=1,2,\cdots,n-m-1, CA^{n-m-1}B=b_m \neq 0$$

这样， u 首次出现在 $y^{(n-m)}$ 的方程中，即

$$y^{(n-m)} = CA^{n-m}x + CA^{n-m-1}Bu$$

系统的相对阶是 $n-m$ ，即 $H(s)$ 的分母多项式与分子多项式的次数之差^①。

^① 非线性系统中“相对阶”一词与线性控制理论中的相对阶（定义为 $n-m$ ）是一致的。

仿射非线性系统的标准型、零动态和最小相位系统：

如果一个仿射非线性系统 $\dot{x} = f(x) + g(x)u, y = h(x)$ 具有相对阶 ρ ，则有前面的讨论可知输出 $y = h(x)$ 的前 $(\rho-1)$ 阶导数均与输入 u 无关，由此可构造下列坐标变换：

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ \text{---} \\ h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \text{---} \\ \psi(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \text{---} \\ \xi \end{bmatrix}$$

其中选择 ϕ_1 到 $\phi_{n-\rho}$ ，使 $T(x)$ 为定义域 $D_0 \subset D$ 上的微分同胚映射，且

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0, 1 \leq i \leq n - \rho, \forall x \in D_0 \quad (13.15)$$

即：将 ϕ_i 分别作为输出时其相对阶至少大于 1 或者没有相对阶。

下一定理说明 $\phi_1 - \phi_{n-\rho}$ 存在，至少局部存在。

定理 13.1 考虑系统 (13.7) ~ (13.8)，假设其在 D 内的相对阶为 $\rho \leq n$ 。如果 $\rho = n$ ，则对于每个 $x_0 \in D$ ， x_0 的邻域 N 存在，使得 N 上的映射

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

是 N 上的微分同胚映射。如果 $\rho < n$ ，则对于每个 $x_0 \in D$ ，存在 x_0 的一个邻域 N 和光滑函数 $\phi_1(x), \dots, \phi_{n-\rho}(x)$ ，使得对于所有 $x \in N$ ，式 (13.15) 成立，且限定在 N 上的映射 $T(x)$ 是 N 上的微分同胚映射。

证明：见附录 C.21。

条件 (13.15) 保证当计算

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)u]$$

时消去 u 项。容易验证，变量代换式 (13.14) 将系统 (13.7) ~ (13.8) 变换为

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (13.16)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (13.17)$$

$$y = C_c \xi \quad (13.18)$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^\rho$ ， $\eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}$ ， (A_c, B_c, C_c) 是 ρ 个积分器链的标准

形表达式，且

$$f_0(\eta, \xi) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(z)} \quad (13.19)$$

$$\gamma(x) = L_g L_f^{\rho-1} h(x), \alpha(x) = -\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \quad (13.20)$$

在方程（13.17）中保留了原坐标系下的 α 和 γ ，这些函数由式（13.20）唯一确定，是 f, g 和 h 的函数，与 ϕ 的选取无关。在新坐标中通过设定

$$\alpha_0(\eta, \xi) = \alpha(T^{-1}(z)), \quad \gamma_0(\eta, \xi) = \gamma(T^{-1}(z))$$

求出，当然此式取决于 ϕ 的选取。在这种情况下，方程

（13.17）可重写为

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma_0(\eta, \xi)[u - \alpha_0(\eta, \xi)]$$

如果 x^* 是方程 (13.7) 的开环平衡点，则由

$$\eta^* = \phi(x^*), \xi^* = [h(x^*) \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

定义的 (η^*, ξ^*) 是方程 (13.16) 和方程 (13.17) 的一个平衡点。如果 y 在 $x = x^*$ 为零，即 $h(x^*) = 0$ ，则可以通过选择 $\phi(x)$ 使得 $\phi(x^*) = 0$ ，把 x^* 变换到原点 ($\eta = 0, \xi = 0$)；如果 y 在 $x = x^*$ 非零，即 $h(x^*) \neq 0$ ，则可以重新定义一个输出 $\bar{y} = \bar{h}(x) \triangleq h(x) - h(x^*)$ ，新输出和原输出仅相差一个常数，其相对阶保持不变，仍然为 ρ ，但其在平衡点处的值为零。总之，通过适当处理，可以使得变换后系统的平衡点为原点。

方程 (13.16) ~ (13.18) 称为标准形 (normal form)。

这种形式把系统分解为外部 ξ 和内部 η 两部分。通过状态反馈控制

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

使外部 ξ 线性化，式中 $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ ，而该控制使内部 η 为不可观测的。内部动态特性由方程 (13.16) 描述，在方程中令 $\xi = 0$ ，可得

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) \quad (13.21)$$

该方程称为零动态方程。如果方程 (13.21) 在所讨论的定义域内有一个渐近稳定平衡点，则系统被称为最小相位系

统。具体讲，如果选择 $T(x)$ 使原点 $(\eta=0, \xi=0)$ 是方程 (13.16) 至方程 (13.18) 的一个平衡点，则当零动态系统 (13.21) 的原点渐近稳定时，系统为最小相位系统。

知道零动态系统可在原坐标系表达非常有用，这样不必求出正则形就可以判断系统是否最小相位。 注意

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow \xi(t) \equiv 0 \Rightarrow u(t) \equiv \alpha(x(t))$$

如果输出恒等于零，则状态方程的解一定属于集合

$$Z^* = \{x \in D_0 \mid h(x) = L_f h(x) = \cdots = L_f^{p-1} h(x) = 0\}$$

且输入一定为

$$u = u^*(x) \triangleq \alpha(x) \big|_{x \in Z^*}$$

系统的受限运动描述为

$$f^*(x) \triangleq [f(x) + g(x)\alpha(x)]_{x \in Z^*}$$

在 $\rho = n$ 的特殊情况下，标准形 (13.16) ~ (13.18) 简化为

$$\dot{z} = A_c z + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (13.22)$$

$$y = C_c z \quad (13.23)$$

其中 $z = \xi = [h(x) \ \cdots \ L_f^{n-1} h(x)]^T$ ，且变量 η 不存在。此时系统不具有零动态，默认为是最小相位系统。

例 13.5 考虑受控 Van der Pol 方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

$$y = x_2$$

从例 13.1 已知系统在 \mathbb{R}^2 的相对阶为 1。取 $\xi = y$ ， $\eta = x_1$ ，可看出系统已表示为标准形。零动态由 $\dot{x}_1 = 0$ 给出，它不具有渐近稳定平衡点，因此系统不是最小相位的。

例 13.6 系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} u$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_3 + u$$

$$y = x_2$$

在原点有一个开环平衡点。输出的导数为

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_3$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u$$

因此系统在 \mathbb{R}^3 上的相对阶为 2。在式 (13.20) 中应用

$L_g L_f h(x) = 1$ 和 $L_f^2 h(x) = x_1 x_3$ ，得

$$\gamma = 1, \alpha(x) = -x_1 x_3$$

为了描述零动态，把 x 限制为

$$Z^* = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 = 0\}$$

并取 $u = u^*(x) = 0$ ，由此可得

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

表明该系统是最小相位的。为了把它变成标准形，选择一个函数 $\phi(x)$ ，使得

$$\phi(0) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) = 0$$

和

$$T(x) = [\phi(x) \quad x_2 \quad x_3]^T$$

在包含原点的某定义域上是微分同胚映射。偏微分方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \cdot \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0$$

通过变量分离解出（如何求解？）

$$\phi(x) = -x_1 + x_3 + \tan^{-1} x_3$$

上式满足条件 $\phi(0) = 0$ 。映射 $T(x)$ 是全局微分同胚映射，这是因为对于任意 $z \in \mathbb{R}^3$ ，方程 $T(x) = z$ 有唯一解。这样标准形

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= (-\eta + \xi_2 + \tan^{-1} \xi_2) \left(1 + \frac{2 + \xi_2^2}{1 + \xi_2^2} \xi_2 \right) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= (-\eta + \xi_2 + \tan^{-1} \xi_2) \xi_2 + u \\ y &= \xi_1\end{aligned}$$

就是全局定义的。

补充算例 1. 考虑非线性控制系统 $\dot{x}_1 = \sin x_2, \dot{x}_2 = u$ ，试讨论当输出为以下三种情况下系统的零动态和正则形：

- (1) $y = x_1$ ；(2) $y = x_1 + x_2$ ；(3) $y = x_1 - x_2$

补充算例 2: 考虑非线性控制系统 $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_1 x_2$ 。

- (1) 当输出为 $y_1 = x_1 + x_3, y_2 = x_2 + x_3$ 时，求出系统的正则形，并判断该系统是否为最小相位系统。
- (2) 当输出为 $y_1 = x_1 + x_3, y_2 = x_2 - x_3^2$ 时，求出系统的正则形，并判断该系统是否为最小相位系统？

习题 15.1：考虑以下非线性控制系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin x_2 - u, \dot{x}_2 = u, \\ y &= x_1\end{aligned}$$

- (1) 判断该系统是否为最小相位系统；
- (2) 求出该系统的正则形（标准型）。

习题 15.2：考虑以下非线性控制系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = -\sin x_3 + (1 + \cos x_2)u, \\ y &= x_1\end{aligned}$$

- (3) 判断该系统是否为最小相位系统；
- (4) 求出该系统的正则形（标准型）。