空间解析几何习题答案

习题1 向量及其线性运算

1. 求平行于向量$a=(6,7,-6)$的单位向量.

解: 直接将向量单位化即可，求得向量$\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)$.

2. 把$\triangle ABC$的BC边五等分，设分点依次为D_1,D_2,D_3,D_4,再把各点与点A连接.试以$\overrightarrow{AB}=c!\overrightarrow{BC}=a$表示向量$\overrightarrow{D_1A},\overrightarrow{D_2A},\overrightarrow{D_3A},\overrightarrow{D_4A}$.

解: $\overrightarrow{D_1A}=-c-\frac{1}{5}a$;
$\overrightarrow{D_2A}=-c-\frac{2}{5}a$;
$\overrightarrow{D_3A}=-c-\frac{3}{5}a$;
$\overrightarrow{D_4A}=-c-\frac{4}{5}a$.

3. 已知两点$M_1(0,1,2)$和$M_2(1,-1,0)$.试用坐标表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及$-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解: $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-2,-2)$;
$-2\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,4,4)$.

4. 在直角坐标系中指出下列各点所在的卦限：$A(1,-2,3),B(2,3,-4),C(2,-3,-4)$.

解: A在第四卦限，B在第五卦限，C在地八卦限.

5. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有何特征？指出点$A(0,4,3)B(3,4,0)$的位置.

解: 在坐标面上的点的坐标有一个为0，在坐标轴上的点的坐标只有一个不为0.点A在yOz平面上，点B在xOy平面上.

6. 求点$P(a,b,c)$关于(1)各坐标面；(2)坐标原点的对称点的坐标.

解: 关于xOy平面，$(a,b,-c)$;于xOz平面，$(a,-b,c)$;于yOz平面，$(-a,b,c)$;关

于原点，$(-a,-b,-c)$.

7. 自点$P(a,b,c)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.求点P到各坐标轴的距离.

解: xOy平面，垂足$(a,b,0)$;xOz平面，垂足$(a,0,c)$;yOz平面，垂足$(0,b,c)$;x轴，垂足$(a,0,0)$，距离$\sqrt{b^2+c^2}$,y 轴，垂足$(0,y,0)$，距离$\sqrt{a^2+c^2}$,z轴，垂足$(0,0,c)$，距离$\sqrt{a^2+b^2}$.

8. 一边长为a的立方体放置在xOy面上，其底部的中心在坐标原点，底面的顶点在x轴和y轴上，求它各顶点的坐标.

解: 各顶点坐标为$(\frac{\sqrt{2}a}{2},0,0),(-\frac{\sqrt{2}a}{2},0,0),(0,\frac{\sqrt{2}a}{2},0),(0,-\frac{\sqrt{2}a}{2},0),(\frac{\sqrt{2}a}{2},0,a),(-\frac{\sqrt{2}a}{2},0,a),(0,\frac{\sqrt{2}a}{2},a),(0,-\frac{\sqrt{2}a}{2},a)$.

9. 证明三点$A(4,1,9),B(10,-1,6),C(2,4,3)$是等腰直角三角形的顶点.

证: 可以求得$|AB|=7,|AC|=7,|BC|=\sqrt{98}$,所以我们有$|AB|=|AC|$,且$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$,所以得证.

10. 设两点$M_1(4,\sqrt{2},1)$和$M_2(3,0,2)$,计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解: 模等于2，与x轴，y轴，z轴的方向余弦分别为$-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}$,方向角分别为$\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{3}$.

11. 设向量的方向余弦分别满足(1)$\cos\alpha=0$;(2)$\cos\beta=1$;(3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$,问这些向量与坐标轴与坐标面的关系如何？

解: (1)与x轴垂直；(2)与y轴平行；(3)与xOy坐标面垂直.

12. 设向量r的模是4,它与轴u的夹角是60°,求r在轴u上的投影.

解: $r_u=4cos60^\circ=2$

13.一向量的终点在点$B(2,-1,7)$,它在x轴、y轴和z轴上的投影一次为$4,-4$和7.求这向量的起点A的坐标与$\overrightarrow{AB}$的坐标.

解: 易知$\overrightarrow{AB}=(4,-4,7)$,所以可知$A(-2,3,0)$.

14.设M是线段AB的中点，证明对任意一点O,有中点公式

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

.

证:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

.

15. 利用向量的数乘与中点公式证明：平行四边形的对角线互相平分.

证: 设平行四边形$OAPB$,同14题，设M是线段AB的中点，则我们有$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{\overrightarrow{OP}}{2}$, 即点$M$在$OP$上，所以$OP$平分$AB$；同理可证$AB$平分$OP$，所以得证.

习题2 向量的内积外积与混合积

1. 设$a=3i-j-2k, b=i+2j-k$求(1)$a\cdot b, a\times 2b$与$(a\times b)\cdot b$;(2) $a\times b$与b的夹角.

解: $a\cdot b=3;\quad a\times 2b=10i+2j+14k;\quad (a\times b)\cdot b=0.$
可知$a\times b$与b的夹角的余弦为0,所以夹角大小为$\frac{\pi}{2}$.

2. 设a,b,c为单位向量，且满足$a+b+c=0$,求$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$.

解: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)=3+2(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)=0$，

所以我们有$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{3}{2}$.

3. 设$A(1,-1,2), B(3,3,1), C(3,1,3)$，求与$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$同时垂直的单位向量.

解: $\overrightarrow{AB} = (2,4,-1), \overrightarrow{BC} = (0,-2,2)$,
求$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$并单位化即可.$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (6,-4,-4)$
所求单位向量为$\pm(\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}})$.

4. (1)求$a = (3,5,-2)$在向量$b = (2,2,1)$上的投影；(2)求a, b的夹角余弦.

解: (1)由公式可得投影长为$a_b = \frac{a \cdot b}{|b|} = 2$;
(2)由公式可得夹角余弦为$\frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{2\sqrt{41}}{41}$.

5. 设$a = (3,5,-2), b = (2,1,4)$,求数$\lambda$与$t$的关系，使得$\lambda a + tb$与$z$轴垂直.

解: $\lambda a + tb = (3\lambda + 2t, 5\lambda + t, -2\lambda + 4t)$,因为$\lambda a + tb \perp z$,所以有$\lambda a + tb \cdot z = 0$,求出$\lambda = 2t$.

6. 已知a, b, c互相垂直，且$|a| = 1, |b| = 2, |c| = 3$,求$s = a + b + c$的长度.

解: $s = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

7. 设$a = 2i - 3j + k, b = i - j + 3k$和$c = i - 2j$,计算$(a+b) \times b$和$(a \times b) \cdot c$.

解: $(a + b) \times b = -8i - 5j + k$;
$(a \times b) \cdot c = 2$

8. 已知$\overrightarrow{OA} = i + 3k, \overrightarrow{OB} = j + 3k$,求三角形$\triangle\ OAB$的面积.

解: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{\sqrt{19}}{2}$

9. 已知向量$a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3),c=(c_1,c_2,c_3)$.
(1)利用混合积的几何意义证明三向量a,b,c共面的充要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2)利用行列式性质证明$(a\times b)\cdot c=(b\times c)\cdot a=(c\times a)\cdot b$.

证: (1)三向量混合积的几何意义是以这三个向量为棱的平行六面体的体积.所以若三向量混合积为0,该六面体体积为0，则三条棱共面，即三向量共面.若三向量共面，则易知该六面体体积为0，期混合积为0.

(2)因为行列式进行偶数次行置换的话大小不变，所以我们可以得知$(a\times b)\cdot c,(b\times c)\cdot a,(c\times a)\cdot b$的行列式大小一致，因而有$(a\times b)\cdot c=(b\times c)\cdot a=(c\times a)\cdot b$.

10. 证明:$|a\times b|^2+(a\cdot b)^2=|a|^2|b|^2$与$|a\cdot b|\le|a||b|$.

证: $|a\times b|^2+(a\cdot b)^2=|a|^2|b|^2(\sin\theta)^2+|a|^2|b|^2(\cos\theta)^2=|a|^2|b|^2$,其中$\theta$是$a,b$的夹角.

$|a\cdot b|=|a||b|\cos\theta\le|a||b|$

11. 用向量证明不等式$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\ge|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$,其中$a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3$为任意实数，并指出等号成立的条件.

证: 令$a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3)$,然后根据10题的结论，很容易得到$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\ge|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$.

习题3 曲面及其方程

1. 一动点与两定点$(2,3,1)$和$(4,5,6)$等距离，求这动点的轨迹方程.

解: 易知为一平面.

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2}$$

所以得到$4x+4y+10z=63$.

2. 方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$表示什么曲面？

解: 方程可以化为

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$$

可知方程表示球心为$(1,-2,-1)$,半径为$\sqrt{6}$的球面.

3. 将xOy坐标面上双曲线$4x^2-9y^2=36$分别绕x轴及y轴旋转，求所生成的旋转曲面方程.

解: 双曲线绕x轴旋转所生成的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2+z^2}{4}=1$$

双曲线绕y轴旋转所生成的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2+z^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

4.指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

$$(1)x=1; \quad (2)x^2+y^2=4; \quad (3)x^2-y^2=1.$$

解: (1)在平面解析几何中表示一条直线，在空间解析几何中表示一个平面；

(2)在平面解析几何中表示圆心为原点，半径为2的圆，在空间解析几何中表示一个圆柱面；

(3)在平面解析几何中表示一条双曲线，在空间解析几何中表示一个双曲柱面.

5. 说明下列旋转曲面是怎样形成的：

$$(1)x^2-y^2-z^2=1;\quad (2)x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1;\quad (3)(z-a)^2=x^2+y^2.$$

解: (1)把xOz面上的双曲线$x^2-z^2=1$绕x轴旋转.
(2)把xOz面上的双曲线$x^2-\frac{y^2}{4}=1$绕y轴旋转.
(3)把xOz面上的双曲线$(z-a)^2=x^2$绕z轴旋转.

6. 指出下列旋转面的母线和旋转轴：

$$(1)z=2(x^2+y^2);\quad (2)z^2=3(x^2+y^2).$$

解: (1)母线:$2x^2=z$;旋转轴:z轴;
(2)母线:$z^2=3x^2$;旋转轴:z轴.

7.画出下列方程所表示的曲面:

$$(1)4x^2+y^2-z^2=4;\quad (2)x^2-y^2-4z^2=4.$$

解: 补充.

习题4 空间曲线及其方程

1. 画出下列曲线（在第一卦限内）的图形，并且求曲线(3)的参数方程.

$$(1)\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=2\end{array}\right.\quad (2)\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=a^2\\ x^2+z^2=a^2\end{array}\right.\quad (3)\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=1\\ 2x+3z=6\end{array}\right.$$

解: (3)

$$\left\{\begin{array}{l}x=\sin t\\ y=\cos t\\ z=2-\frac{2}{3}\sin t\end{array}\right.$$

2. 分别求母线平行于x轴及y轴而且通过曲线$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$的柱面方程.

解: (1)母线平行于x轴即在方程组中消去x.得到$3y^2-z^2=16$.
(2)母线平行于y轴即在方程组中消去y.得到$3x^2+2z^2=16$.

3. 求球面$x^2+y^2+z^2=9$与平面$x+z=1$的交线在xOy面上的投影的方程.

解: 首先求出过交线且母线平行于z轴的柱面方程为$2(x-0.5)^2+y^2=8.5$.所以在xOy面上的投影方程为

$$\begin{cases} 2(x-0.5)^2+y^2=8.5 \\ z=0 \end{cases}$$

4.求旋转抛物面$z=x^2+y^2,(0\le z\le 4)$在三坐标面上的投影.

解: 在xOy平面上的投影为$\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ z=0 \end{cases}$.
在xOz平面上的投影为$\begin{cases} z\ge x^2 \\ 0\le z\le 4 \\ y=0 \end{cases}$.
在yOz平面上的投影为$\begin{cases} z\ge y^2 \\ 0\le z\le 4 \\ x=0 \end{cases}$.

5. 求三平面$x+3y+z=1,2x-y-z=0,-x+2y+2z=3$的交点.

解: 解方程组即可，求得焦点为$(1,-1,3)$.

习题5 平面及其方程

1. 求过点$(3,0,-1)$且与平面$3x-7y+5z-12=0$平行的平面方程.

解: 设方程为$3x-7y+5z+c=0$，将点$(3,0,-1)$代入求出$c=-4$，所以所求平面方程为$3x-7y+5z-4=0$.

2. 求过点$M_0(2,9,-6)$且与连接坐标原点及点M_0的线段OM_0垂直的平面方程.

解: 线段OM_0表示的向量为$(2,9,-6)$，所以所求平面方程为$2x+9y-6z+c=0$，将点$(2,9,-6)$代入求出$c=-121$，所以所求平面方程为$2x+9y-6z-121=0$.

3. 求过$(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$和$(1,-1,2)$三点的平面方程.

解: 直接设所求平面方程为$x+by+cz+d=0$，将三点坐标代入求出平面方程为$x-3y-2z=0$.

4. 求平面$2x-2y+z+5$与各坐标面的夹角的余弦.

解: 可知平面的法线向量为$(2,-2,1)$，单位化后为$(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.各坐标面的法线向量为$(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$.所以可以求得平面与$xOy$坐标面的夹角的余弦为$\frac{1}{3}$，与$xOz$坐标面的夹角的余弦为$\frac{2}{3}$,与$yOz$坐标面的夹角的余弦为$\frac{2}{3}$.

5. 一平面过点$(1,0,-1)$且平行于向量$a=(2,1,1)$和$b=(1,-1,0)$,求这平面的方程.

解: 首先求出平面的法线向量为$(1,1,-3)$,所以得到平面方程为$x+y-3z+d=0$，将点代入得平面方程为$x+y-3z-4=0$.

6.求点$(1,2,1)$到平面$x+2y+2z-10=0$的距离.

解: 直接代入点到平面距离公式求得距离为1.

习题6 空间直线及其方程

1. 求过点$(1,2,1)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$都平行的直线方程.

解: 首先可知两平面的法线向量分别为$(1,0,-4)$和$(2,-1,-5)$.求出直线方向向量为$(4,3,1)$,所以直线方程为$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{1}$.

2.求过点$(4,-1,3)$且平行于直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$的直线方程.

解: 易知所求直线方程为$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}$.

3. 用对称式方程及参数方程表示直线$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$.

解: 首先可以得出两个平面的法线向量为$(1,-1,1)$和$(2,1,1)$,可以算出直线的方向向量为$(2,-1,-3)$,且知直线过点$(1,1,1)$.所以可知对称式方程为$\frac{x-1}{2}=-\frac{y-1}{1}=-\frac{z-1}{3}$.所以可得参数方程表示$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+1 \\ z=-3t+1 \end{cases}$.

4.求过点$(2,0,-3)$且与直线$\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$垂直的平面方程.

解: 首先可知两个平面的法线向量为$(1,-2,4)$和$(3,5,-2)$.求得直线方向向量即所求平面的法线向量为$(16,-14,-11)$.所以可知所求平面方程为$16x-14y-11z-65=0$.

5.证明直线$\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$与直线$\begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$平行.

证: 首先求得第一条直线的方向向量为$(3,1,5)$，然后求得第二条直线的方向向量为$(3,1,5)$，所以两条直线平行.

6. 求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

解: 可知直线过点$(4,-3,0)$,所以在平面内有向量$(1,-4,2)$，因而可以求出平面的法线向量为$(8,-9,-22)$.所以可求得平面方程为$8x-9y-22z-59=$

0.

7. 求直线$\left\{\begin{array}{l} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right.$ 与平面$x-y-z+1=0$的夹角.

解: 求得直线方向向量为$(1,2,-1)$,平面法线向量为$(1,-1,-1)$,两向量垂直，所以直线与平面平行，夹角为0.

8. 设M_0是直线L外一点，M是直线L上任意一点，且直线的方向向量为s，试证：点M_0到直线L的距离为$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}$.

解: 首先可知$|\overrightarrow{M_0M}\times s| = |\overrightarrow{M_0M}|\times|s|\times\sin < \widehat{\overrightarrow{M_0M}, s} >$,同时可知点$M_0$到直线$L$的距离为$|\overrightarrow{M_0M}|\times\sin < \widehat{\overrightarrow{M_0M}, s} >$.所以有$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}$.得证.

9. 求点$P(3,-1,2)$到直线$\left\{\begin{array}{l} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{array}\right.$ 的距离.

解: 求得直线方向向量为$(0,1,-1)$,且过点$(1,-1,1)$,根据第8题的结论得到距离$d=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

10. 求直线$\left\{\begin{array}{l} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{array}\right.$ 在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程.

解: 过直线的平面束方程为$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0$,其中与$4x-y+z=1$垂直的$\lambda$需要满足$4(2+3\lambda)-(-4-\lambda)+(1-2\lambda)=0$.解得$\lambda=-\frac{13}{11}$.所以有投影直线方程为$\left\{\begin{array}{l} 4x-y+z=1 \\ 17x+31y-37z-117=0 \end{array}\right.$