第十五章 常微分方程与数值解法初步

数学分析研究的函数能反映客观现实和运动中量与量之间的关系.在大量实际问题中,表达过程和关系规律的函数关系往往不能直接得到,但可以建立起这些变量和它们的导数（或微分）之间的关系式.这种包含了函数及其导数的方程就称为微分方程.实际中的许多变化规律都可以用微分方程进行描述,因此微分方程是描述客观事物的数量关系的一种重要工具,有着广泛的应用.本章主要介绍常微分方程的基本概念和几种常用的常微分方程解析解的解法.在本章的最后我们讨论了常微分方程数值解法和相应的几个基本理论问题.

§1 微分方程与数学建模

数学建模是对实际问题的某些现象和规律进行数学描述.建立数学模型的目的是理解这些现象,并进行分析. 建立数学模型的基本步骤如下图所示

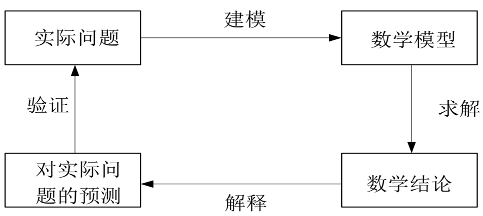


图 1.1 数学建模示意图

对一个问题的数学建模首先要分析清楚问题的自变量和因变量,并且在一定合理假设意义下可以用数学来处理,从而建立一个数学模型.在建立了数学模型以后,给出数学问题求解的答案,最后利用所得到的数学结论来说明问题的现象并且预测未来.数学模型可能不是自然界问题的精确体现,但是一个好的数学模型应该精确到足以对真实世界提供有价值的结论.在这一节将通过几个例子来阐明微分方程与数学建模.

例 1. 人口指数增长模型（马尔萨斯人口模型）

英国人口学家马尔萨斯（Malthus,1766-1834）调查了英国一百多年的人口统计资料,在增长率不变的假设下,建立了著名的人口指数增长模型.

记时刻t的人口为$x(t)$，$x(t)$是一个很大的整数,. 记初始时刻$(t=0)$的人口为x_0,设人口增长率为常数r,即单位时间内$x(t)$的增量等于r乘以$x(t)$. t到$t+\Delta t$时间内人口的增量为

$$x(t+\Delta t)-x(t)=rx(t)\Delta t.$$

设$x(t)$连续、可微，令$\Delta t\to 0$，将等式两边取极限,得到$x(t)$满足的微分方程

$$\frac{dx}{dt}=rx, x(0)=x_0. \qquad (1.1)$$

由方程（1.1）很容易解出（在后面章节我们将详细给出求解方法）

$$x(t)=x_0e^{rt}\quad, \tag{1.2}$$

$r>0$时（1.2）式表示人口将按指数规律随时间无限增长. 因此（1.2）式称为人口指数增长模型,也称为马尔萨斯人口模型.

历史上,人口指数增长模型与19世纪以前欧洲一些地区的人口统计数据可以很好地吻合,迁往加拿大的欧洲移民后代人口也大致符合这个模型. 另外,用它作短期人口预测可以得到较好的结果.

例 2 弹簧振动模型 质量为m悬挂在弹簧末端的物体的运动如下图所示.

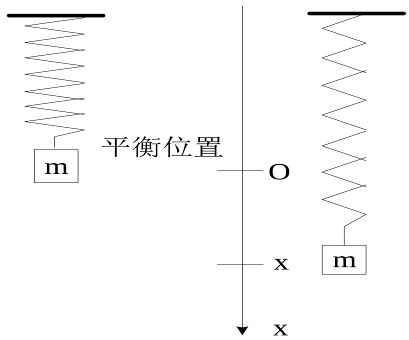


图 1.2 弹簧振动模型

首先建立坐标系如图 1.2 所示.根据胡克定律:当弹簧从原来长度被拉长了x个单位时,弹簧承受的力与x成正比,因此如果忽略外界的阻力(空气产生的阻力和摩擦力),根据牛顿第二定律有

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \tag{1.3}$$

这里k是弹性系数.(1.3)表示x的函数的二阶导数与x成正比,我们知道正弦和余弦函数满足这个性质,在后面的学习内容中,我们将详细讨论这类方程的求解.

例 3 种群增长模型 种群增长模型是基于假设：种群增长率和种群数量成正比，这个假设对理想状态下的细菌种群或动物种群都是合理的（无局限的环境，充足的养分，没有疾病）.定义模型的变量：t代表时间，P代表种群中个体数量，则

$$\frac{dP}{dt}=kP, \tag{1.4}$$

k为比例常数.(1.4)为表示理想条件下的模型.但是由于资源环境的因素,很多种群开始时候增长,当数量增长到一定承载能力K的时候开始下降,因此需要考虑这两个方面的情况的模型.

$$\frac{dP}{dt}=kP\left(1-\frac{P}{K}\right), \tag{1.5}$$

(1.5)中,当P很小时候，$\frac{dP}{dt}\approx kP$,增长率与P成正比,当$P>K$时，$\frac{dP}{dt}=kP\left(1-\frac{P}{K}\right)<0$.

方程(1.5)称为逻辑斯谛(Logistic)微分方程.在后年的章节我们将给出求解方法.

以上我们用物理和人口模型等来说明了如何通过实际问题建立数学模型, 这里建立的数学模型是微分方程, 实际上微分方程在物理、化学、生物、经济、电子技术等诸多领域都有重要的应用.

§2 微分方程的基本概念

首先给出关于微分方程的基本概念.

定义 2.1 表示自变量、未知函数以及未知函数的导数（或微分）关系的式子, 称为微分方程.
在微分方程中, 若自变量只有一个, 则称为常微分方程, 若自变量是二个或二个以上的, 则称为偏微分方程. 本章只讨论常微分方程.

例 1 常微分方程举例，下列方程

1） $y'-\dfrac{1}{x-2}y=0$，　　　　2） $xy^{(3)}+xy^{(2)}+x^3y=3$，

3 ）$(xy)\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{xy+2}z=0$，　　　　4 ） $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$.

都是微分方程. 1 ）和 2 ）为常微分方程， 3 ）和 4 ）为偏微分方程. 在这些方程中 1 ）和 3 ）仅含有函数的一阶导数, 2 ）和 4 ）中含有函数的最高阶导数分别为 3 和 2 , 根据方程中函数导数（偏导数）的最高阶数可以将方程进行分类.

定义 2. 2 微分方程中含未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶.

n 阶常微分方程一般记为

$$F(x,\ \ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)})=0. \tag{2.1}$$

例 1 的四个方程中（1)、（3）是一阶微分方程, （ 2 ）是三阶微分方程， 4 ）是二阶微分方程.

定义 2. 3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续, 且有直到 n 阶的导数, 若将函数 $y=f(x)$ 代入微分方（2. 1）中使之恒成立, 则称 $y=f(x)$ 是方程（2. 1）的解（也称显式解）；若由方程 $\varphi(x,y)=0$ 所确定的隐函数是方程（2. 1）的解, 则称关系式 $\varphi(x,y)=0$ 是方程（2. 1）的隐式解.

例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 都是方程 $y'=-\dfrac{x}{y}$ 在区间 $(-1,1)$ 上的解, 而 $x^2+y^2=1$ 是它的隐式解.

定义 2. 4（通解、特解） 如果微分方程的解中含有任意独立的常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 这样的解叫做微分方程的通解. 确定了通解中任意常数, 就得到了微分方程的特解.

例如对方程：

$$y''+\omega^2 y=0 \quad (\omega>0\text{常数}), \tag{2.2}$$

容易验证, 函数 $y=3\cos\omega x$, $y=4\sin\omega x$ 是其在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的不同的特解, 对任意常数 c_1 和 c_2,

$$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x,$$

就构成了方程(2.2)在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的通解.

定义 2.5 为了确定方程(2.1)的特解而给出的附加条件称为定解条件, 求方程(2.1)的满足定解条件的特解的问题称为定解问题.

方程(2.1)的一种常用的定解条件是初值条件. 例如

对方程（2.2）给的初值条件 $y(0)=3, y'(0)=0$, 则对应的特解是 $y=3\cos\omega x$；而对初值条件 $y(0)=3, y'(0)=4\omega$ 的特解是 $y=4\sin\omega x$.

定义 2.6 微分方程的特解的图形是一条曲线, 称为微分方程的积分曲线, 通解的图形是一族曲线, 称为积分曲线族.

考虑一阶微分方程

$$y'=f(x,y), \tag{2.3}$$

其中 $f(x,y)$ 是平面区域 D 内给定的连续函数.

由定义 2.6 知方程(2.3)的解 $y=\varphi(x)\ (x\in I)$ 的图形是一条光滑曲线, 记作 Γ. 任取一点 $P_0(x_0,y_0)\in\Gamma$. 由于 $y=\varphi(x)$ 满足方程(2.3), 曲线 Γ 在点 P_0 的切线斜率为

$$\varphi'(x_0)=f(x_0,\varphi(x_0))=f(x_0,y_0).$$

这说明曲线 Γ 上任一点处的切线斜率恰好等于方程右边函数 $f(x,y)$ 在该点的函数值.

习题 15.2

1. 求下列各微分方程的阶数

（1）$x(y')^2-2yy'+x=0$；　　（2）$x^2y''-xy'+y=0$

（3）$xy'''+2y''+x^2y=0$；　　（4）$(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$

2. 在下列各题中，验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解

（1）$(x-2y)y'=2x-y, x^2-xy+y^2=C$；

（2）$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0, y=\ln(xy)$

3. 在下列各题中，确定函数关系式中所含的参数，使函数满足所给的初始条件：

（1）$y=(C_1+C_2x)e^{2x}, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$；

（2）$y=C_1\sin(x-C_2), y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=0$；

4. 求下列条件确定的曲线所满足的微分方程

（1） 曲线在点(x,y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方；

（2） 曲线上点$P(x,y)$处得法线与x轴的交点为Q，且线段PQ被y轴平分.

§3 几类特殊形式的一阶微分方程的求解

形如$y'=F(x,\ \ y)$的微分方程, 称为一阶微分方程. 本节讲述一阶微分方程的初等解法, 即把微分方程的求解问题化为积分问题, 因此也称初等积分法. 本节主要介绍几种常见的一阶微分方程的基本类型及其解法：包括变量分离方程, 齐次方程, 一阶线性微分方程,伯努利方程,要求掌握它们的概念及解法,并从中领会用变量代换求解方程的思想. 求解一阶微分方程主要方法是分离变量法. 分离变量法最早是由伯努利(Bernoulli, Jacob（1654—1705)于 16 世纪 90 年代提出的,当时是为了求解莱布尼兹 1691 给惠更斯信中提出的钟摆问题, 伯努利在 1694 年发表的论文中给出了一般的求解方法.

§3.1 变量分离方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y). \tag{3.1}$$

的微分方程称为**变量分离方程**. 这里$f(x)$, $g(y)$分别是关于x, y的连续函数.

当$g(y)\neq 0$时,把(3.1)改写为

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$$

两边积分, 得通解(隐式通解)

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c. \tag{3.2}$$

这里把积分常数c明确写出来, 而把$\int\frac{dy}{g(y)}$, $\int f(x)dx$分别理解为$\frac{1}{g(y)}$和$f(x)$的一个确定的原函

数．在本章，我们总是作这样的理解．

若存在 y_0,使 $g(y_0)=0$,则直接验证可知 $y=y_0$ 也是方程(3.1)的解(称为常数解)．这种解一般会在分离变量时丢失,且可能不含于通解(3.2)中,应注意补上这些可能丢失的解．通常习惯地理解成 $g(y)\neq 0$ 的条件下进行求解.

例 1 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-y\sin x=0$ 的通解.

解 将方程分离变量,得到 $\dfrac{dy}{y}=\sin x dx$,

两边积分，即 $\int \dfrac{dy}{y}=\int \sin x dx$,得

$$\ln|y|=-\cos x+c_1 \text{ 或 } |y|=e^{-\cos x+c_1} \text{ 所以 } y=\pm e^{c_1}e^{-\cos x}.$$

即 $y=c\,e^{-\cos}$ (令 c=± e^{c_1}). 因而方程的通解为 $y=ce^{-\cos x}$ （c 为任意常数）.

例 2 求微分方程 $2xy'=y$ 的通解.

解 将方程分离变量得 $\dfrac{2}{y}dy=\dfrac{1}{x}dx$, 两边积分得 $\int\dfrac{2}{y}dy=\int\dfrac{1}{x}dx$, 解得

$$2\ln|y|=\ln|x|+C_1,$$

所以通解为 $2\ln|y|=\ln|x|+C_1$, 即 $y^2=Cx\left(C=\pm e^{C_1}\right)$.

例 3 解方程

$$\sqrt{1-y^2}=3x^2yy'.$$

解 将方程分离变量 $\dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{dx}{3x^2}$, 两边积分得方程的通解

$$-\sqrt{1-y^2}=-\frac{1}{3x}+c,$$

或

$$\sqrt{1-y^2}-\frac{1}{3x}+c=0.$$

这个解, 就是方程的隐式通解.

§3.2 齐次方程

一些微分方程不是可分离变量的,但通过适当的变量变换,可以得到关于新变量的可变量分离方程,然后用分离变量方法来求解这些方程.

（1） 齐次方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.3}$$

的微分方程称为齐次方程，其中 f 是连续函数.

例如 $y'=\frac{x+y}{x-y}$， $y'=\frac{y}{x}+tg\frac{y}{x}$. 都是齐次型方程.

对于齐次方程若令 $u=\frac{y}{x}$ （这样 u 就是关于 x 的函数)，则 $y=ux$，两边同时对 x 求导数得

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入方程(3.3)得

$$u+x\frac{du}{dx}=f(u),$$

此时转化为关于 u 的方程变为可分离变量，通过分离变量得

$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{1}{x}dx.$$

求解后用 $\frac{y}{x}$ 代替 u，便得到方程(3.3)的 y 关于 x 的解.

例 4 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$$

解 令 $y=ux$，代入方程得

$$x\frac{du}{dx}+u=2\sqrt{u}+u, \tag{3.4}$$

分离变量并积分，得(3.4)的通解为

$$\sqrt{u}=\ln|x|+c.$$

代回原变量得原方程的通解

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln|x|+c.$$

例 5 求方程 $x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y\ (x<0)$ 的通解.

解 将方程的两边同时除以 x，得

$$\frac{dy}{dx}-2\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{y}{x}\quad (x<0).$$

令 $u=\frac{y}{x}$，将 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入以上方程,得 $x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}$.

解得
$$u=[\ln(-x)+c]^2.$$

再代回原来的变量, 得到原方程的解 $y=x[\ln(-x)+c]^2$.

注意：这里 c 为满足 $(\ln(-x)+c>0)$ 的任意常数.

§3.3 可化为齐次方程的方程

考虑如下形式的方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{3.5}$$

其中，a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 都是常数,c_1,c_2 不同时为零,a_1,a_2,b_1,b_2 不同时为零.

对这类方程要化为齐次方程,可做如下变量替换,令

$$x=X+h,\qquad y=Y+k,$$

其中 h,k 是待定的常数. 于是 $dx=dX$, $dy=dY$, 从而方程（3.5）成为

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}{a_2X+b_2Y+a_2h+b_2k+c_2}\right). \tag{3.6}$$

若存在 h,k 使得 $\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\ a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$,则（3.6）就是一个齐次方程.

下面分情况进行讨论.

1) $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$.

若 $a_2\neq 0$,则 $b_2\neq 0$,因为如果 $b_2=0$,由于 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=-a_2b_1=0$,推出 $b_1=0$,与假设 b_1,b_2 不同时为零矛盾,从而有

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\mu\quad (\text{常数}).$$

令 $a_2x+b_2y=u$,得

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2 f(\frac{\mu u+c_1}{u+c_2}),$$

这是变量分离方程.

若 $a_2=0$,则 $a_1\neq 0$,由 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2=0$,推出 $b_2=0$. 从而 $b_1\neq 0$. 令 $a_1x+b_1y=u$,得

$$\frac{du}{dx}=a_1+b_1 f(\frac{u+c_1}{c_2}).$$

亦化为变量分离方程.

2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$. 这时方程组

$$\begin{cases} a_1h+b_1k+c_1=0 \\ a_2h+b_2k+c_2=0 \end{cases}$$

有唯一解，代入方程(3.5),原方程变为

$$\frac{dY}{dX}=f(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}),$$

这是齐次方程. 求出齐次方程的通解后,在通解中以 $x-h$ 代 X，以 $y-k$ 代 Y，便得方程（3.5）的通解.

例 6 求方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$ 的通解.

解 由 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$，解方程组

$$\begin{cases} h-k+1=0 \\ h+k-3=0, \end{cases}$$

得 $h=1, k=2,$ 令 $x=X+1, y=Y+2$，得

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y},$$

则化为齐次方程后可得通解为：

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C.$$

§3.4 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x), \tag{3.7}$$

其中 $p(x),Q(x)$ 是关于 x 的连续函数，当 $Q(x)\equiv 0$ 时，方程(3.7)变为

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0, \tag{3.8}$$

称为一阶线性齐次微分方程. 当 $Q(x)\neq 0$ 时，方程（3.7）称为一阶线性非齐次微分方程，并称方程（3.8）为对应于（3.7）的线性齐次微分方程.

一阶线性齐次微分方程（3.8）是可分离变量的方程，分离变量得

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx,$$

两边积分得

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln c,$$

即线性齐次方程(3.8)的通解

$$y=ce^{-\int P(x)dx}. \tag{3.9}$$

这里 $\int p(x)dx$ 表示 $p(x)$ 的某一个原函数.

下面讨论一阶线性非齐次方程(3.7)的解法. 由于（3.9）不是（3.7）的解，齐次方程和非齐次方程相差一个关于 x 的函数，因此假设（3.7）的解具有形式 $y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$，把它带入方程（3.7）中求出 $c(x)$，则可得到（3.7）的解. 这种方法称为常数变易法.

先求 $y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$ 的一阶导数

$$y'=c'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}-p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

将它们代入方程（3.7）得

$$c'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}-p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=Q(x).$$

$$c'(x)=Q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)dx}.$$

两边积分得

$$c(x)=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c.$$

因此，线性非齐次方程（3.7）的通解为

$$\mathrm{y}=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}}\left[\int \mathrm{Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c}\right]. \tag{3.10}$$

将(3.10)式改写成两项之和

$$y=ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx .$$

则右端第一项是对应的线性齐次方程（3.8）的通解,第二项是线性非齐次方程（3.7）的一个特解 ．即一阶线性非齐次方程的通解等于对应的线性齐次方程的通解与线性非齐次方程的一个特解之和.

例 7 求微分方程 $y'\cos x+y\sin x=1$的通解.

解 将方程化为标准一阶线性方程

$$y'+y\tan x=\sec x,$$

则 $P(x)=\tan x,\ Q(x)=\sec x$，由公式(3.10)得方程通解为

$$\begin{aligned} y&=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c] \\ &=e^{-\int \tan xdx}[\int \sec xe^{\int \tan xdx}dx+c]=e^{ln\cos x}[\int \sec xe^{-ln\cos x}dx+c] \\ &=\cos \mathrm{x}\left(\int \sec^2 \mathrm{xdx}+\mathrm{c}\right)=(\tan x+c)\cos x . \end{aligned}$$

例 8 求方程$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=x^3$的通解.

解 由$P(x)=\dfrac{1}{x},\ Q(x)=x^3$, 并且

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\ln x}=x,\quad e^{-\int P(x)dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x},\ \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5,$$

由公式(3.10)得到得此方程的通解为

$$y=\frac{x^4}{5}+\frac{C}{x}.$$

§3.5 伯努利(Bernoulli)方程

形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n, \tag{3.11}$$

的方程称为伯努利方程,其中P,Q为连续函数,$n\neq 0,\ 1$为常数.

伯努利家族（Bernoulli family,17-18 世纪）在数学和科学的历史上最著名的家族之一是瑞士伯努利家族，从十七世纪末以来它产生十多位数学家和科学家.这个家族的记录开始干雅科布 •伯努利 （Jacob，Bernoulli 1654 一 1705）和约翰 • 伯努利（Johan， Bernoulli，1667 一 1748）兄弟，他们属予最早认识到微积分的惊人力量并将其应用千各种各样问题的一批数学家．**雅科布 • 伯努利** 的主要贡献有：首先使用数学意义下的“积分”一词，给出了直角坐标与极坐标下的曲率半径公式，把悬链线的研究扩展到密度可变的链和

在有心力作用下的链；许多其它高次平面曲线的研究；1695 年提出“伯努利方程: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+Q(x)y^n$”.他还是概率论的早期研究者之一，以他的名字命名的结论有：”伯努利数“，”伯努利分布“，”伯努利大数定律“等.**约翰·伯努利**是一位多产的数学家，是那个时代最伟大的数学家，他大大丰富和推广了了微积分学.他当过罗必达的老师，于 1694 年最先提出“罗必达法则”.他提出了“最速降线问题”并给出了正确解答，引发变分法的研究.他的其他工作包括：与反射折射有关的光学问题，曲线族的正交轨线的确定，用级数求曲线的长和区域面积等.**丹尼尔·伯努利**（Daniel Bernoulli,1700-1782）是约翰·伯努利的儿子，是这个家族中三个重要代表之一.他先是研究医学后来转向数学，先后担任过数学教授、解剖学和植物学教授、物理学教授等.1738 年出版的《流体动力学》，给出“伯努利定理”等流体动力基础理论.他还写过关于潮汐的论文，建立了空气动力学理论，是偏微分方程方面的先驱者.他曾 10 次获得过法国科学院颁发的奖金.

虽然(3.11)不是线性方程,但可以通过变换化为线性方程.实际上方程两边同乘以 y^{-n} ,得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x),$$

或

$$\frac{dy^{1-n}}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x).$$

这是以 y^{1-n} 为未知量的一阶线性方程.

例 9 解方程 $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$.

解 方程两边同乘以 y^{-3},得 $y^{-3}\frac{dy}{dx}+xy^{-2}=x^3$,所以

$$y^{-2}=e^{x^2}(-\int 2x^3e^{-x^2}dx+c)\ =e^{x^2}(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+c)=x^2+1+ce^{-x^2}.$$

因此方程的通解为 $y^2(x^2+1+ce^{x^2})=1$. 此外, $y=0$ 是方程的一个特解.

例 10 求方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$.

解 以 y^2 除方程的两端,得 $y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x$,

即
$$-\frac{d\left(y^{-1}\right)}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x.$$

$y^{-1}=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$, 即 $yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$.

在上述各种类型的微分方程的求解中,总是设法通过变形或适当的变量代换将它们转化为变量分离方程或一阶线性方程(两种基本类型)来求解. 实际上除了上述几种基本类型之外,对于一些其它类型的方程,

经过适当变换也可以方便求解,下面举例说明.

例 11　解方程

$$\cos y\frac{dy}{dx}-\sin y=\cos x\sin^2 y\ .$$

解　原方程等价变为$\dfrac{d\sin y}{dx}-\sin y=\cos x\sin^2 y$.

上式两边同乘以$\sin^{-2}y$,得

$$\sin^{-2}\mathrm{y}\frac{\mathrm{d}\sin\mathrm{y}}{\mathrm{dx}}-\sin^{-1}\mathrm{y}=\cos\mathrm{x}\ ,$$

或

$$\frac{d\sin^{-1}y}{dx}+\sin^{-1}y=-\cos x\ .$$

因此方程转化为以$\sin^{-1}y$为未知量的一阶线性微分方程,所以方程的通解为

$$\sin^{-1}y=e^{-x}(-\int(\cos x)\,e^{x}dx+c)=-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+ce^{-x}\ .$$

例 12 求微分方程　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y^2}$　的通解.

解 这个方程不是未知数y的线性微分方程, 但若把x看作函数, y看作自变量.

可得　　$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2x-y^2}{y}$　　即　　$\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{2}{y}x=-y$.

显然是一个一阶线性微分方程，易得其通解为

$$x=y^2(c-\ln|y|)\ .$$

例 13 求解方程$\dfrac{dy}{dx}=\cos(y-x)$.

解 令$y-x=u$,将方程化为$\dfrac{du}{dx}=\cos u-1$. 分离变量并积分,得

$$\cot\frac{u}{2}=x+c\ .$$

代回原变量得方程的通解

$$\cot\frac{y-x}{2}=x+c\ .$$

例 14 求解方程　$xy'=y(\ln x+\ln y-1)$.

解 原方程可改写为$x\dfrac{dy}{dx}+y=y(\ln x+\ln y)$, 即

$$\frac{d}{dx}(xy) = y\ln(xy).$$

令 $u = xy$，则有：

$$\mathrm{x}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{u}\ln\mathrm{u},\ \int\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{u}\ln\mathrm{u}} = \int\frac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx},\ \ln\ln u = \ln cx.$$

原方程通解为 $xy = e^{cx}$.

在解微分方程时，要灵活应用，注意方程的特点，对不同形式的方程采用不同的思路和方法.

§3.6 全微分方程

设一阶微分方程写成

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{3.12}$$

如果存在一个函数 $u(x,y)$ 满足

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{3.13}$$

则称(3.13)为全微分方程，其解为

$$u(x,y) = c.$$

根据曲线积分与路径无关的条件，(3.12)成立的充分必要条件为：在单连通区域 Ω 内有

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

并且在 Ω 内成立

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy \\ &= \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx \end{aligned} \tag{3.14}$$

这里 $(x_0,y_0)\in\Omega$，$P(x,y),Q(x,y)$ 在 Ω 内一阶偏导数连续.这给出了这类方程的一种求法。

例 15 求微分方程 $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0$ 的通解.

解 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{6x}{y^4} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以此方程为全微分方程，取 $(x_0,y_0) = (0,0)$，得

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x (x^3 - 3xy^2)dx + \int_0^y y^3 dy \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4}. \end{aligned}$$

所以通解为

$$\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=C.$$

如果（3.12）不是全微分方程, 但是存在一个函数 $\mu(x,y)\left(\mu(x,y)\neq 0\right)$ 使得

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$$

为全微分方程, 则称 $\mu(x,y)$ 为积分引子. 下面举例说明.

例 16 求 $2xy\ln ydx+(x^2+y^2\sqrt{1+y^2})dy=0$ 的通解.

解 将方程重新组合以后变为

$$(2xy\ln ydx+x^2dy)+y^2\sqrt{1+y^2}dy=0,$$

因此积分引子为 $\frac{1}{y}$，则原方程为

$$(2x\ln ydx+\frac{x^2}{y}dy)+y\sqrt{1+y^2}dy=0,$$

进一步得

$$(2x\ln ydx+x^2d\ln y)+y\sqrt{1+y^2}dy=0,$$

$$d(x^2\ln y)+\frac{1}{3}d(1+y^2)^{\frac{3}{2}}=0.$$

因此通解为

$$x^2\ln y+\frac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}=C.$$

习题 15. 3

1. 求下列微分方程的通解：

（1）$\sqrt{1-x^2}y'=\sqrt{1-y^2}$；（2）$(e^{x+y}-e^x)\mathrm{d}x+(e^{x+y}+e^y)\mathrm{d}y=0$

（3）$\cos x\sin y\mathrm{d}x+\sin x\cos y\mathrm{d}y=0$（4）$(y+1)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^3=0$

2. 求下列齐次方程的通解：

（1）$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$；（2）$(1+2e^{\frac{y}{x}})\mathrm{d}x+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})\mathrm{d}y=0.$

3. 化下列方程为齐次方程，并求出通解.

（1）$(2x-5y+3)\mathrm{d}x-(2x+4y-6)\mathrm{d}y=0$；（2）$(x-y-1)\mathrm{d}x+(4y+x-1)\mathrm{d}y=0$

（3）$(3y-7x+7)\mathrm{d}x+(7y-3x+3)\mathrm{d}y=0$;（4）$(x+y)\mathrm{d}x+(3x+3y-4)\mathrm{d}y=0$

3. 求下列微分方程的通解

（1）$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$；（2）$y'+y\tan x=\sin 2x$；

（3）$(x-2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+2(x-2)^3$；（4）$(y^2-6x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0.$

4. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程，然后求出通解

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$；（3）$xy'+y=y(\ln x+\ln y)$；

（3）$y'=y^2+2(\sin x-1)y+\sin^2 x-2\sin x-\cos x+1$；（4）$y(xy+1)\mathrm{d}x+x(1+xy+x^2y^2)\mathrm{d}y=0.$

5. 求下列伯努利方程的通解

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^2(\cos x-\sin x)$；（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$.

6. 求解下列方程

(1) $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^2\right)dx=0;$ 2) $\left(x\cos y+\cos x\right)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\sin x+\sin y=0;$

(3) $2ydx-3xy^2-xdy=0;$ (4) $y^2\left(x-3y\right)dx+\left(1-3xy^2\right)dy=0.$

7. 有一盛满了水的圆锥形漏斗，高为 10cm，顶角为60°，漏斗下面有面积为$0.5\mathrm{cm}^2$的孔，求水面高度变化的规律及水流完所需要的时间.

8．小船从河边点 O 处出发驶向对岸（两岸为平行直线）.设船速为 a,船行方向始终与河岸垂直，又设河宽为 h，河中任一点处得水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比（比例系数为 k）.求小船的航行路线.

9．设有一质量为 m 的质点作直线运动.从速度等于零的时刻起，有一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为k_1)的力作用于它，此外还受一与速度成正比(比例系数为k_2)的阻力作用，求质点运动的速度与时间的函数.

§4　二阶线性微分方程

在前面我们已经介绍了一阶线性微分方程的解法, 这节我们介绍二阶线性微分方程的通解结构以及二阶常系数线性微分方程的求解方法.

定义 4. 1 如下形式的方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{4.1}$$

称为二阶线性微分方程, 其中 $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ 是 x 的连续函数.

若 $f(x)\equiv 0$, 方程（4.1）变为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4.2}$$

称为二阶线性齐次微分方程;

若 $f(x) \neq 0$, 称为二阶线性非齐次微分方程, 并称方程（4.2）为对应于线性非齐次方程（4.1）的线性齐次方程. 如果系数 $p(x)$, $q(x)$ 都是常数, 称方程（4.1）、（4.2）为二阶常系数线性微分方程.

§4.1 二阶线性齐次微分方程解的结构

前面介绍了一阶线性微分方程解的结构, 下面研究二阶齐次微分方程解的结构. 为此引入函数线性相关与线性无关的概念.

定义 4.2 设函数组 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 的函数, 如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$, 使得 $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n \equiv 0$ 对 $\forall x \in (a,b)$ 都成立, 则称函数组 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ 在区间 I 线性相关, 否则称函数组 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ 在区间 I 上线性无关.

根据定义 4.2, 两个函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性无关, 则其中任何一个都不是另一个的倍数, 即 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq c$（$c$ 为常数）, 这为我们判断两个函数是否线性相关提供了一种简便方法.

例如 函数 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \dfrac{1}{3}\cos x$, 在任何区间内都是线性相关的; 而函数 $\cos x$ 与 $\sin x$; 函数 t 与 t^2 在任何区间内都是线性无关的.

定理 4.1（通解结构定理） 若 y_1, y_2 是二阶线性齐次方程（4.2）的两个线性无关的特解, 则 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ 是该方程的通解, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

由定理 4.1 可以看出, 对于二阶线性齐次微分方程, 只要求得它的两个线性无关的特解, 就可以求得它的通解.

§4.2 二阶线性非齐次微分方程解的结构

由一阶线性非齐次微分方程的通解, 是对应的齐次方程的通解和它本身一个特解的和. 我们不难得出关于二阶线性非齐次方程的通解结构问题. 首先给出两条性质:

性质 4.1 若 y 是方程(4.2)的解, y^* 是方程(4.1)的解, 则 $y + y^*$ 也是方程(4.1)的解.

性质 4.2 若 y_1, y_2 都是方程(4.1)的解, 则 $y_1 - y_2$ 必然是方程(4.2)的解.

下面给出关于二阶线性非齐次方程解的结构.

定理 4.2 若 y^* 是二阶线性非齐次方程(4.1)的一个特解, $Y=c_1y_1+c_2y_2$ 是方程（4.1）对应的齐次方程(4.2)的通解,则

$$y=Y+y^*,$$

是方程（4.1）的通解.

证明 由 $y'=Y'+y^{*'}$, $y''=Y''+y^{*''}$，所以有

$$y''+p(x)y'+q(x)y=(Y''+y^{*''})+p(x)(Y'+y^{*'})+q(x)(Y+y^*)$$

$$=\left[Y''+p(x)Y'+q(x)Y\right]+\left[y^{*''}+p(x)y^{*'}+q(x)y^*\right]=f(x).$$

说明 $y=Y+y^*$ 是方程（4.1）的解,因为 Y 中含有两个独立的任意常数,所以 $y=Y+y^*$ 中也含有两个独立的任意常数,从而它是方程（4.1）的通解.

定理 4.2 给出了二阶线性非齐次方程的通解结构,因此求二阶线性非齐次方程的一个特解成了求它通解的关键之一. 下面给出二阶线性非齐次方程的叠加原理.

定理 4.３ 若 $y_1(x),y_2(x)$ 分别是二阶线性非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x),$$
$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x),$$

解，则 $y_1(x)+y_2(x)$ 为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的解.

下面给出求(4.1)特解一种方法:常数变易方法.

如果(4.2)的两个线性无关的解为 $y_1(x),y_2(x)$,设(4.1)的特解为

$$y^*=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x), \tag{4.3}$$

这里 $c_1(x),c_2(x)$ 为待定函数.

$$\left(y^*\right)'=c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)+c_1(x)y_1'(x)+c_2(x)y_2'(x),$$

令
$$c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0 \tag{4.4}$$

则

$$\left(y^*\right)'' = c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)+c_1(x)y_1''(x)+c_2(x)y_2''(x) \qquad (4.5)$$

将(4.4),(4.5)代入(4.1)并整理得到

$$\begin{aligned}&c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)\\&+\left(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1\right)c_1(x)+\left(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2\right)c_2(x)=f(x).\end{aligned}$$

因此得到

$$c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=f(x). \qquad (4.6)$$

通过(4.4)和(4.6)得到方程组

$$\begin{cases}c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0,\\c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=f(x).\end{cases}$$

如果

$$w(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y'_1(x) & y'_2(x)\end{vmatrix}\neq 0$$

则有

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(x)\\ f(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}},\ c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}y_1(x) & 0\\ y_1'(x) & f(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}.$$

因此可以进一步积分上式得到(4.1)的特解.

$$c_1(x)=C_1+\int -\frac{y_2 f(x)}{w(x)}dx,\ \ c_1(x)=C_1+\int -\frac{y_2 f(x)}{w(x)}dx.$$

利用常数变易法,可在已知(4.2)的一个解的情况下,求另一个线性无关的解.

设 $y_1(x)$ 为(4.2)的一个解，由两个函数线性无关的条件,可设另一个线性无关的解为 $y_2=u(x)y_1(x)$，将其代入(4.2)得

$$y_1u''+(2y_1'+p(x)y_1)u'+(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)u=0,$$

因此 $y_1u''+(2y_1'+P(x)y_1)u'=0$,令 $v=u'$,则

$$y_1v'+(2y_1'+P(x)y_1)v=0,$$

所以 $v=\dfrac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}$, $u=\int\dfrac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx$.方程(4.2)的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx.$$

例 1　已知 $y_1=e^x, y=x$ 为 $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1$ 对应齐次方程的通解,求此方程通解。

解: 设通解为 $y^*=c_1(x)x+c_2(x)e^x$, 则 $c_1'(x), c_2'(x)$ 满足方程

$$\begin{cases}xc_1'(x)+e^xc_2'(x)=0,\\ c_1'(x)+e^xc_2'(x)=x-1.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}c_1'(x)=-1\\ c_2'(x)=xe^{-x}\end{cases}$，因此 $c_1(x)=-x+C_1$, $c_2(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+C_2$,所以通解为

$$y=C_1x+C_2e^x-x^2-x-1.$$

§4.3 二阶常系数线性齐次微分方程的解法

二阶常系数线性微分方程的一般形式为

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{4.7}$$

其中 p,q 均为常数，$f(x)$ 为连续函数.

当 $f(x)\equiv 0$ 时，得

$$y''+py'+qy=0 \tag{4.8}$$

称为二阶常系数线性齐次微分方程.称(4.8)为对应于(4.7)的齐次方程.

首先,我们讨论(4.4)的求解方法. 根据解的结构定理知道,只要找出方程（4.4）的两个线性无关的特解 y_1 与 y_2, 即可得其通解 $y=c_1y_1+c_2y_2$. 根据函数 $e^{\lambda x}$ 本身具有求任意阶导数都含有 $e^{\lambda x}$ 的特点,我们用 $y=e^{\lambda x}$ 作为(4.4)的解(λ 是待定常数),下面研究 λ 应满足的条件.

将 $y=e^{\lambda x}$，$y'=\lambda e^{\lambda x}$，$y''=\lambda^2e^{\lambda x}$ 代入方程（4.4）得

$$e^{\lambda x}(\lambda^2+p\lambda+q)=0$$

由 $e^{\lambda x}\neq 0$, 知

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{4.9}$$

这说明，只要 λ 是代数方程（4.9）的根,那么 $y=e^{\lambda x}$ 就是微分方程（4.8）的解. 于是微分方程转化为求代数方程. 方程（4.9）称为微分方程（4.8）的特征方程,它的根称之为方程的特征根.

根据方程（4.9）根的情况,我们来讨论微分方程（4.8）解的情况.

1° 特征方程有两个不相等的实根 λ_1 及 λ_2，此时两个特解 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ 与 $y_2 = e^{\lambda_2 x}$，由 $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq$ 常数，知 y_1, y_2 线性无关，根据解的结构定理，因此方程(4.8)的通解为：

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}\text{（}c_1, c_2\text{ 为任意的常数）}.$$

2° 特征方程有两个相等的实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2} = \lambda$，这时只能得到一个特解 $y_1 = e^{\lambda x}$，要找一个与 y_1 线性无关的解 y_2. 设 $\dfrac{y_2}{y_1} = u(x)$，其中 $u(x)$ 为待定函数，则

$$y_2 = u(x) y_1 = u(x) e^{\lambda x},$$

由

$$y'_2 = e^{\lambda x}(u' + \lambda u),\quad y''_2 = e^{\lambda x}(u'' + 2\lambda u' + \lambda^2 u),$$

将 y_2，y'_2，y''_2 代入方程(4.4)得

$$e^{\lambda x}[(u'' + 2\lambda u' + \lambda^2 u) + p(u' + \lambda u) + qu] = 0.$$

对任意的 λ，$e^{\lambda x} \neq 0$

即

$$[u'' + (2\lambda + p)u' + (\lambda^2 + p\lambda + q)u] = 0,$$

因为 λ 是特征方程的重根，故 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，$2\lambda + p = 0$，于是得 $u'' = 0$，显然取 $u = x$ 即可. 从而 $y_2 = xe^{\lambda x}$ 是一个与 $y_1 = e^{\lambda x}$ 线性无关的解. 所以方程(4.8)的通解为

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}\quad\text{（}c_1, c_2\text{ 为任意的常数）}.$$

3° 特征方程有一对共轭复根 $r_1 = \alpha + i\beta$，$r_2 = \alpha - i\beta$，这时方程(4.8)有两个复数形式的解：

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x},\ y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

根据欧拉公式：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

可得

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),\ y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

于是得

$$\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

为方程的实值函数解,且线性无关,因此方程(4.8)的通解为：

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x) \text{（}c_1, c_2\text{为任意的常数）}.$$

将上面结论概括如下表 4．1

表 4.1　二阶常系数线性齐次微分方程解

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的两个根 λ_1,λ_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 $\lambda_1\neq\lambda_2$	$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$
两个相等的实根 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 2 求微分方程 $y''+3y'-10y=0$ 的通解.

解 方程的特征方程为：$r^2+3r-10=0$　解得：$r_1=-5, r_2=2$

方程的通解为

$$y=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}.$$

例 3 求 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2+4\lambda+4=0$,有两个相等实根 $\lambda_1=\lambda_2=-2$.

所以方程的通解为

$$y=e^{-2x}(c_1+c_2x).$$

例 4 求微分方程 $y''+4y'+7y=0$ 的通解.

解　方程的特征方程为 $r^2+4r+7=0$, 解得 $r_{1,2}=-2\pm3i$.

方程的通解为：$y=e^{-2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$.

对于一般的 n 阶常系数线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x),$$

其特征方程为

$$r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0,$$

类似 2 阶齐次方程的讨论,有下面结论.

表 4.2　n 阶常系数线性齐次微分方程解

特征方程的根	微分方程通解中对应的项
单实根 λ_1	$y = C_1 e^{\lambda_1 x}$
一对共轭单根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$
若是 k 重根 r	$(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$
若是 k 重共轭 复根 $\alpha \pm i\beta$	$[(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1}x^{k-1})\cos\beta x$ $+(D_0 + D_1 x + \cdots + D_{k-1}x^{k-1})\sin\beta x]e^{\alpha x}$

例 5　求方程 $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + y' + y = 0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0,$ 因此

$$r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = ($$

得到根为 $r_1 = -1,\ r_2 = r_3 = i,\ r_4 = r_5 = -i,$ 根据表 2 得到通解为.

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x.$$

§4.4　二阶常数线性非齐次微分方程的解法

由二阶非齐次线性方程解的结构知，只要求出其齐次方程(4.8)的通解 Y 和非齐次方程（4.7）的一个特解 y^* 即可.

以下介绍几种简单形式的非齐次项求特解的方法(即待定系数法).

1）　$f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$

其中 $P_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式，常数 λ 是实常数或复常数.

由于多项式函数与指数函数乘积的导数仍为多项式函数与指数函数的积，因此可设特解 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$

其中 $Q(x)$ 是待定的多项式函数. 对 y^* 求导，有

$y^{*'} = e^{\lambda x}[Q'(x) + \lambda Q(x)]$，$y^{*''} = e^{\lambda x}[Q''(x) + 2\lambda Q'(x) + \lambda^2 Q(x)]$

把 $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ 代入方程(4.7)，消去 $e^{\lambda x}$，得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x). \tag{4.10}$$

分三种情况讨论.

（I）当 λ 不是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根时, 即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$, 由于(4.10)的右端是 m 次多项式, 因此 $Q(x)$ 也是 m 次多项式, 所以可设特解： $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$.

其中 $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_{m-1}x+b_m$, $b_i(i=0,1,2\cdots,m)$ 是待定系数, 然后将所设特解代入方程(4.7), 并通过比较两端 x 的同次幂系数即可求出 $b_i(i=0,1,2\cdots,m)$.

（II） 当 λ 是特征方程的单根时, 必有 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 而 $2\lambda+p\neq 0$. 由(4.10)式可见 $Q'(x)$ 必须是 m 次多项式, 从而 $Q(x)$ 是 $m+1$ 次多项式, 且可取常数项为零, 即可设特解为： $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$, 并用与（I）同样的方法确定 m 次多项式 $Q(x)$ 的系数.

（III）当 λ 是特征方程的重根时, 必有: $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 和 $2\lambda+p=0$. 由(4.10)式可见, $Q''(x)$ 必须是 m 次多项式, 从而 $Q(x)$ 是 $m+2$ 次多项式, 且可设 $Q(x)$ 的一次项系数和常数都为零. 即设特解为: $y^*=x^2Q(x)_me^{\lambda x}$, 并用与（I）同样的方法确定 $Q(x)$ 的系数.

综上所述, 如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$, 则可假设方程(4.7)有如下形式的特解:

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x},$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P(x)$ 同次的待定多项式, λ 不是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根 k 取 0, λ 是特征方程单根, k 取 1, λ 是特征方程的重根时 k 取 2.

例 6 求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解.

解 对应齐次线性方程的特征方程 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ 有两个单根 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$. 两个线性无关的特解为 e^{3x},e^{-x}.

由于 $\lambda=0$ 不是特征根,故可设特解为 $\bar{y}=Ax+B$. 将它代入方程,得

$$-2A-3B-3Ax=3x+1.$$

由此定出 $A=-1,B=\frac{1}{3}$. 所以方程的通解为

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-x+\frac{1}{3}.$$

例 7 求微分方程 $y''+6y'+9y=5xe^{-3x}$ 的通解.

解 齐次方程的特征方程为 $r^2+6r+9=0$, 特征根 $r_1=r_2=-3$, 所以齐次方程的通解为

$\widetilde{y}=(c_1+c_2x)e^{-3x}$． 下面求非齐次方程的一个特解.

$\lambda=-3$是特征方程的重根, 故设特解为：

$$y^*=x^2(b_0x+b_1)e^{-3x},$$

将$y^*, y^{*'}, y^{*''}$代入原方程，得 $b_0=\dfrac{5}{6}$, $b_1=0$, 于是, $y^*=\dfrac{5}{6}x^3e^{-3x}$

所以方程的通解为：$y=(c_1+c_2x+\dfrac{5}{6}x^3)e^{-3x}$.

2）$f(x)=e^{\alpha x}(p_m(x)\cos\beta x+q_n(x)\sin\beta x)$或 $f(x)=p_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $p_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$的类型.

其中$p_m(x)$, $q_n(x)$分别是x的m,n次多项式, 常数α,β都为实数.

根据欧拉公式，我们有

$$\begin{aligned}
f(x)&=e^{\alpha x}(p_m(x)\cos\beta x+q_n(x)\sin\beta x)\\
&=e^{\alpha x}\left(p_m(x)\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+q_n(x)\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}\right)\\
&=\left(\frac{p_m(x)}{2}+\frac{q_n(x)}{2i}\right)e^{(\alpha+i\beta)x}+\left(\frac{p_m(x)}{2}-\frac{q_n(x)}{2i}\right)e^{(\alpha-i\beta)x}\\
&=p(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+q(x)e^{(\alpha-i\beta)x},
\end{aligned}$$

这里$p(x)=\dfrac{p_m(x)}{2}+\dfrac{q_n(x)}{2i}$, $\bar{p}(x)=\dfrac{p_m(x)}{2}-\dfrac{q_n(x)}{2i}$是两个共轭函数．设

$$y''+py'+qy=p(x)e^{(\alpha+i\beta)x}, \qquad (4.11)$$

$$y''+py'+qy=\bar{p}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}, \qquad (4.12)$$

(4.11)和(4.12)的解是共轭. 根据1)的讨论其特解分别为

$$y^*=x^kQ_l(x)e^{(\alpha+i\beta)x},,\ y^*=x^k\bar{Q}_l(x)e^{(\alpha-i\beta)x},$$

这里$l=\max\{m,n\}$，$\alpha+i\beta$不是特征方程$r^2+pr+q=0$的根k取0, $\alpha+i\beta$是特征方程根, k取1.

根据方程解的叠加原理,特解为

$$y^*=x^kQ_l(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+x^k\bar{Q}_l(x)e^{(\alpha+i\beta)x},$$

由于上式两边是两个共轭函数相加,因此得到实函数的特解

$$y^*=x^ke^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\right),$$

这里$R_1(x),Q_1(x)$为l次多项式, 并且k按照$\alpha+i\beta$是否特征方程$r^2+pr+q=0$的根分别取0，1，2.

特别对于$f(x)=P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$与$P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$可以直接使用上面的公式求解, 也可以用下面的方

法求解.

由于 $f(x)=P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 与 $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 分别是 $P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ 的实部与虚部, 因此方程

$$y''+py'+qy=P(x)e^{(\alpha+i\beta)x},$$

解的实部与虚部分别是方程

$$y''+py'+qy=P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{4.13}$$

与

$$y''+py'+qy=P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{4.14}$$

的解.

因此 $f(x)=P(x)e^{\lambda x}$ 的解法, 求方程 $y''+py'+qy=P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ 的一个特解 y^*, y^* 的实部 y_1^*（或虚部 y_2^*）是方程(4.13)(或(4.14))的解.

例 8 求微分方程 $y''-y=e^{-x}\cos x$ 的一个特解.

解 特征方程是：$\lambda^2-1=0$, 特征根是 $\lambda_{1,2}=\pm 1$.

方法 1 记非齐次项为 $f(x)=e^{-x}(\cos x+0\sin x)$,

因为 $-1\pm i$ 不是特征根, 所以设特解为： $y^*=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$,

则 $(y^*)'=e^{-x}(-A\sin x+B\cos x)-e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$.

$$(y^*)''=e^{-x}(-A\cos x-B\sin x)-e^{-x}(-A\sin x+B\cos x)$$
$$-e^{-x}(-A\sin x+B\cos x)+e^{-x}(A\cos x+B\sin x).$$

将 y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ 代入原方程得：$(2A-B)\sin x-(A+2B)\cos x=\cos x$

$$\begin{cases}2A-B=0\\ A+2B=-1\end{cases} \qquad \text{得：}\ A=-\frac{1}{5},\quad B=-\frac{2}{5}.$$

所以方程的通解为： $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{5}e^{-x}\cos x-\frac{2}{5}e^{-x}\sin x$ （c_1, c_2 为任意的常数).

方法 2 设非齐次项 $f(x)=e^{(-1+i)x}$ 先求 $y''-y=e^{(-1+i)x}$ 的特解.

因为 $-1+i$ 不是方程的特征根, 所以设特解为: $y^*=De^{(-1+i)x}$.

代入原方程得 $-2Die^{(-1+i)x}-De^{(-1+i)x}=e^{(-1+i)x}$, 得 $D=\frac{2i-1}{5}$, 所以 ,

$$y^* = \frac{2i-1}{5} e^{(-1+i)x} = -\frac{1}{5} e^{-x}(\cos x + 2\sin x) + \frac{2i}{5} e^{-x}(\cos x - \frac{1}{2}\sin x).$$

由于 $-\frac{1}{5}e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$ 是方程 $y'' - y = e^{-x}\cos x$ 的特解, 故原方程的通解为

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{5} e^{-x}\cos x - \frac{2}{5} e^{-x}\sin x \quad （c_1,\ c_2 为任意的常数）.$$

§4.5 二阶线性微分方程的幂级数解法

当微分方程解不能用初等函数表示的时候，经常采用幂级数方法求解, 有如下结论

定理 4.4 对于二阶线性齐次方程(4.2), 如果 $p(x), q(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可以展开幂级数, 则 $(-R, R)$

(4.2)有形如 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ 的解.

例 9 求勒让德方程(Legendre) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ 的解.

解 由于 $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, q(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}$ 在 $(-1,1)$ 可以展开幂级数，因此满足定义 4.4 的条件,我们考虑在勒让德方程在区间 $(-1,1)$ 内的解.设 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 为勒让德方程的解,则有

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2},$$

将上式代入勒让德方程得到

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-1} -$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + n(n+1)a_k\right] x^k = 0,$$

进一步简化

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - (n-k)(n+k+1)a_k\right] x^k = 0,$$

于是有

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)} a_k, k = 0,1,2,\ldots,$$

任取 a_0, a_1,利用上式的递推关系得到解为

$$y(x)=a_0\left(1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\cdots\cdots\cdots\right)$$
$$+a_1\left(1-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{4!}x^5-\cdots\cdots\cdots\right).$$

并且上面两个级数在区间 $(-1,1)$ 收敛.

勒让德（Adrien-Marie ,Legendre，1752～1833）法国数学家.勒让德的主要研究领域是数学分析(尤其是椭圆积分理论)、数论、几何学与天体力学，取得了许多重要成果.勒让德是椭圆积分理论奠基人之一.在《椭圆函数论》中提出了三类基本的椭圆积分，证明了每类椭圆积分可以表示为这三类积分的组合.在关于天文学的研究中，勒让德引进了著名的“勒让德多项式”.他还提出了确定极值函数存在的“勒让德条件”，独立的发现了最小二乘法.

§4.6 欧拉方程的求解

形如

$$x^n y^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x) \tag{4.15}$$

的方程称为欧拉方程.

欧拉方程特点各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同，为此变换

$$x=e^t \quad 或 \quad t=\ln x$$

则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right),$$

…………………………………..

如果用 D 表示 $\frac{d}{dt}$,则上式为

$$xy'=Dy,$$

$$x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=(D^2-D)y=D(D-1)y,$$

$$
\begin{aligned}
x^3 y''' &= \frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} \\
&= (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y,
\end{aligned}
$$

由数学归纳法, 一般有

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$$

因此 (4.15)转化为常系数的微分方程,下面举例说明.

例 9 求 $x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$ 通解.

解: 在为此变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$ 下方程为

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t},$$

即为

$$D^3 y - 2D^2 y - 3Dy = 3e^{2t}, \text{或者} \frac{d^3 y}{dt^3} - 2\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = 3e^{2t}.$$

其特征方程为 $r^3 - 2r^2 - 3r = 0$, 特征根为 $r_1 = 0,\ r_2 = -1,\ r_3 = 3.$ 根据表 4.2,对应齐次方程的通解为.

$$Y = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t} = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3.$$

设特解为 $y^* = be^{2t} = bx^2$, 代入原方程得 $b = -\frac{1}{2}$. 因此通解为

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

习题 15. 4

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的？

（1）$\cos 2x, \sin 2x;$　　（2）$e^{x^2}, xe^{x^2};$

（3）$\sin 2x, \cos x \sin x;$　　（4）$e^x \cos 2x, e^x \sin 2x;$

2. 已知 $y_1(x) = x$ 是齐次线性方程 $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ 的一个解，求非齐次线性方程

   $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$ 的通解.

3. 已知齐次线性方程 $y'' + y = 0$ 的通解为 $Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$，求非齐次线性方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解.

4. 已知齐次线性方程 $x^2 y'' - xy' + y = 0$ 的通解为 $Y(x) = C_1 x + C_2 x \ln|x|$，求非齐次线性方程

$x^2y''-xy'+y=x$ 的通解.

5. 求下列微分方程的通解.

1) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$;　　2) $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$;

3) $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$;　　4) $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$;

5) $y''+y=e^x+\cos x$;　　6) $y''-y=\sin^2 x$

6．一个单位质量的质点在数轴上运动，开始时质点在原点 O 处且速度为 v_o，在运动过程中，它受到一个力的作用，这个力的大小与质点到原点的距离成正比（比例系数 $k_1>0$）而方向与初速度一致.又介质的阻力与速度成正比（比例系数 $k_2>0$）.求反映这质点的运动规律的函数.

7.大炮以仰角 α，初速度 v_o 发射炮弹，若不计空气阻力，求弹道曲线.

8.一链条悬挂在一钉子上，起动时一端离开钉子 $8m$，另一端离开钉子 $12m$，分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间：

（1） 若不计钉子对链条所产生的摩擦力；

（2） 若摩擦力的大小等于 $1m$ 长的链条所受重力的大小；

§5　线性微分方程组的求解

前面我们介绍了一些基本的微分方程的性质及求解方法, 本节将讨论线性微分方程组的基本形式、解的结构及常系数线性微分方程组的求解方法. 首先介绍几个基本概念.

定义 5. 1(一阶微分方程组)形如

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\\ \quad\cdots\quad\cdots\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n).\end{cases}\tag{5.1}$$

的微分方程组,（其中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是关于 x 的未知函数）叫做一阶微分方程组.

若存在一组函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 使得在方程组（5.1）中所有方程在区间 I 上成立,则称为一阶微分方程组(5.1)的一个解. 满足初始条件 $y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},\ \cdots,y_n(x_0)=y_{n0}$, 的解,叫做初值问题的解.

引入 n 维向量函数

$$Y(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, F(x,Y)=\begin{bmatrix} f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ \vdots \\ f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \end{bmatrix}, \frac{dY(x)}{dx}=\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix},$$

则（5.1）可记成向量形式

$$\frac{dY}{dx}=F(x,Y). \tag{5.2}$$

若把初始条件记为 $\mathbf{Y}(x_0)=Y_0$,其中 $Y_0=[y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0}]^T$,则初值问题为:

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dx}=F(x,Y), \\ Y(x_0)=Y_0. \end{cases} \tag{5.3}$$

定义 5. 2(一阶线性微分方程组) 形如

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+\cdots+a_{1n}(x)y_n+f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx}=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+\cdots+a_{2n}(x)y_n+f_2(x), \\ \qquad\qquad \cdots \qquad \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx}=a_{n1}(x)y_1+a_{n12}(x)y_2+\cdots+a_{nn}(x)y_n+f_n(x). \end{cases} \tag{5.4}$$

的一阶微分方程组,叫做一阶线性微分方程组.

令

$$\mathbf{A}(x)=\begin{bmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}, \mathbf{F}(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

则(5.4)的向量形式为

$$\frac{dY}{dx}=A(x)Y+F(x) \tag{5.5}$$

当 $F(x)\equiv 0$ 时, $\dfrac{dY}{dx}=A(x)Y$ 称为一阶线性齐次微分方程组.

在（5.5）式中若 $A(x)$ 的每一个分量都是常数,即 $A(x)=A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,则称

$$\frac{dY}{dx} = AY + F(x), \tag{5.6}$$

为常系数线性非齐次微分方程组. 称

$$\frac{dY}{dx} = AY. \tag{5.7}$$

为常系数线性齐次微分方程组. 下面我们讨论一阶线性微分方程组的通解结构.

本章定义 4.2 中已经给出了两个函数线性无关的定义,很自然的可以将函数间相关性的概念推广到向量函数当中.

定义 5.3 (向量函数的线性相关性) 设 $Y_1(x), Y_2(x), \cdots Y_m(x)$ 是 m 个定义在区间 I 上的 n 维向量函数. 如果存在 m 个不全为零的常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$, 使得

$$C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + \cdots + C_mY_m(x) = 0,$$

恒成立,则称这 m 个向量函数在区间 I 上线性相关；否则它们在区间 I 上线性无关.

我们把 n 个 n 维向量函数 $Y_1(x), Y_2(x), \cdots Y_n(x)$ 作为列形成行列式

$$W(x) = |Y_1(x), \cdots, Y_n(x)| = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

称为该函数组的朗斯基（Wronski）行列式.

定理 5.1 一阶线性齐次微分方程组 $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$ 的解 $Y_1(x), Y_2(x), \cdots Y_n(x)$ 是线性无关的充要条件是它们的朗斯基行列式 $W(x)$ 在区间 I 上任一点 x_0 处不等于零；解 $Y_1(x), Y_2(x), \cdots Y_n(x)$ 是线性相关的充要条件是它们的朗斯基行列式 $W(x)$ 在区间 I 上恒等于零.

该定理给出了判断一阶线性齐次微分方程组 $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$ 的解线性相关或无关的方法,对于线性无关的解,有如下定义：

定义 5.4 一阶线性齐次微分方程组 $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$ 的 n 个线性无关解称为它的基本解组.

下面我们讨论一阶线性齐次微分方程组通解的结构.

一阶线性齐次微分方程组通解的结构由下面定理给出.

定理 5.2 如果 $Y_1(x), Y_2(x), \cdots Y_n(x)$ 是线性齐次微分方程组 $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$ 的基本解组,则其线性组合 $Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + \cdots + C_nY_n(x)$ 是该线性齐次微分方程组的通解.

注： 线性齐次微分方程组 $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$ 的解的全体构成一个 n 维线性空间.

下面定理给出了一阶线性非齐次方程组的通解结构.

定理 5. 4 线性非齐次方程组 $\frac{dY}{dx}=A(x)Y+F(x)$ 的通解等于对应的齐次微分方程组 $\frac{dY}{dx}=A(x)Y$ 的通解与它的一个特解之和. 即

$$\mathrm{Y}(x)=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots+C_nY_n(x)+\tilde{Y}(x),$$

其中 $C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots+C_nY_n(x)$ 为对应的齐次微分方程组的通解, $\tilde{Y}(x)$ 是非齐次方程组的一个特解.

下面讨论常系数线性齐次微分方程组

$$\frac{dY}{dx}=AY+F(x)\quad , \tag{5.8}$$

的求解方法，这里 A 为常数矩阵.

定理 5. 5 如果方程组(5.8)的系数阵 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n$，相应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$Y_1(x)=e^{\lambda_1x}\vec{v}_1,Y_2(x)=e^{\lambda_2x}\vec{v}_2,\cdots Y_n(x)=e^{\lambda_nx}\vec{v}_n,$$

是方程组(5.8)的一个基本解组.

定理 5.6 设 λ_i 为方程组(5.7)的系数阵 A 的 n_i 重特征值,则方程组(5.7)一定存在 n_i 个线性无关的解

$$e^{\lambda_i x}\left(\vec{r}_0+\frac{x}{1!}\vec{r}_1+\frac{x^2}{2!}\vec{r}_2+\ldots+\frac{x^n}{(n_i-1)!}\vec{r}_{n_i-1}\right)$$

其中 $\vec{r}_0$ 满足方程

$$\left(A-\lambda_iE\right)^{n_i}\vec{r}=0 \tag{5.9}$$

的非零解,(5.9)存在 n_i 个线性无关的解，对每一个 $\vec{r}_0$，$\vec{r}_i,i=1,2,\ldots,n_i-1$ 由下列式子确定.

$$\begin{aligned}&\vec{r}_1=\left(A-\lambda_iE\right)\vec{r}_0,\\&\vec{r}_2=\left(A-\lambda_iE\right)\vec{r}_1,\\&\cdots\cdots\cdots\\&\vec{r}_{n_i-1}=\left(A-\lambda_iE\right)\vec{r}_{n_i-2}.\end{aligned}$$

定理 5.7 如果方程组(5.8)的系数阵 A 的互不相同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,相应的重数为 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ $\left(n_1+n_2+\cdots+n_s=n\right)$,则由定理 5.5 和 5.6 的线性无关解的全体构成(5.7)的基本解组.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ y' = -x + 5y - z, \\ z' = x - y + 3z. \end{cases}$$

解 特征方程为

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{即 } \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0.$$

解之得特征根 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$. 这三个特征根所对应的特征向量分别是

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

故方程组的通解是：$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

例 2 求解微分方程

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y - 2z, \\ y' = 8x - 5y - 4z, \\ z' = -4x + 3y + 3z. \end{cases}$$

解：特征方程为

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & -2 \\ 8 & -5-\lambda & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0,$$

即 $\lambda = 1$ 为三重复根.而方程组 $(A - \lambda E)^3 X = 0$ 三个线性无关的解为

$$\vec{r}_0^{\,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_0^{\,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_0^{\,3} = \begin{bmatrix} (\\ \\ ] \end{bmatrix},$$

根据定理 5 . 6 得到

$$\vec{r}_1^{\,1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_1^{\,2} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_1^{\,3} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_2^{\,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2^{\,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2^{\,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此得到三个线性无关的解为

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^x \begin{bmatrix} 1+4t \\ 8t \\ -4t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^x \begin{bmatrix} -3t \\ 1-6t \\ 3t \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^x \begin{bmatrix} -2t \\ -4t \\ 1+2t \end{bmatrix}.$$

在解决了常系数线性齐次方程组的求解之后,我们再来讨论一下求常系数线性非齐次方程组（5.6）通解的求法.我们采用与 4.2 节参数变易求特解而(5.6)的通解就等于它所对应的齐次方程组的通解与它的一个特解之和. 下面举例说明.

例 3 求方程组

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t, \\ y' = 3x + 2y + 8e^t. \end{cases}$$

的通解.

解 对应的齐次方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

设非齐次方程组有如下形式的特解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = c_1(t) \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

将其代入原方程组，得到

$$c_1'(t) \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} + c_2'(t) \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t \\ 8e^t \end{bmatrix}.$$

解得

$$\begin{cases} c_1(t) = \left(-\dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{10}\right)e^{-5t} - e^{-4t} \\ c_2(t) = \left(\dfrac{5}{2}t - \dfrac{5}{2}\right)e^{t} - 2e^{2t} \end{cases}, \text{可求得一特解} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t - \dfrac{13}{5} - 3e^t \\ -3t + \dfrac{12}{5} + e^t \end{bmatrix},$$

最后得到非齐次方程组的通解

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t - \dfrac{13}{5} - 3e^t \\ -3t + \dfrac{12}{5} + e^t \end{bmatrix}.$$

习题 15.5

1. 求下列微分方程组满足所给初始条件的特解

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+3x-y=0, x|_{t=0}=1,\\ \dfrac{dy}{dt}-8x+y=0, y|_{t=0}=4.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2\dfrac{dx}{dt}-4x+\dfrac{dy}{dt}-y=e^t, x|_{t=0}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0, y|_{t=0}=0.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2x-\dfrac{dy}{dt}=10\cos t, x|_{t=0}=2,\\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+2y=4e^{-2t}, y|_{t=0}=0.\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-x+\dfrac{dy}{dt}+3y=e^{-t}-1, x|_{t=0}=\dfrac{48}{49},\\ \dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+y=e^{2t}+t, y|_{t=0}=\dfrac{95}{98}.\end{cases}$

§6. 常微分方程数值解法几个基本问题

求得微分方程的解析形式的解固然重要,但是只有某些特殊类型方程,才可以得到这样的解,而绝大多数变系数方程、非线性方程都难以求得其解析解.例如即使对形式上很简单的黎卡提 (Riccati)方程 $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$,我们也不可能用初等积分法求解。于是对于用微分方程解决实际问题来说,数值解法就是一个十分重要的手段.

下面主要讨论一阶常微分方程的初值问题,其一般形式为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(a)=y_0,\end{cases} \quad a\le x\le b. \tag{6.1}$$

其中函数 $f(x,y)$ 连续,且关于 y 满足李普希兹(Lipschitz)条件,即存在常数 L ,使得

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\le L|y-\bar{y}|,$$

这样,由常微分方程理论知,初值问题(6.1) 存在唯一的连续可微解 $y(x)$.

数值方法的基本思想是：在解的存在区间上取 $n+1$ 个节点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

令 $h_i=x_{i+1}-x_i$,$i=0,1,\cdots,n-1$ 称为由 x_i 到 x_{i+1} 的步长. 这些 h_i 可以不相等,但一般取成相等,这时 $h=\dfrac{b-a}{n}$. 在这些节点上采用离散化方法,（通常用数值积分、微分,泰勒展开等）将上述初值问题化成关于离散变量的相应问题. 把这个相应问题的解 y_n 作为 $y(x_n)$的近似值. 这样求得的 y_n 就是上述初值问题在节点 x_n 上的数值解. 一般说来,不同的离散化导致不同的方法. 下面我们介绍几种简单的方法.

§6.1 显式 Euler 方法

设节点为$a=x_0<x_1\cdots<x_n=b$. 初值问题（6.1）的显式Euler方法为

$$\begin{cases} y_0=a_0, \\ y_{k+1}=y_k+h_k f_k, k=0,1,\cdots,n-1. \end{cases} \tag{6.2}$$

其中$h_k=x_{k+1}-x_k, f_k=f(x_k,y_k)$.

显式Euler方法可以用多种途径导出.

（1）Taylor 展开法

将$y(x_{k+1})$在$x=x_k$点进行Taylor展开,得

$$y(x_{k+1})=y(x_k)+h_k f(x_k,y(x_k))+\frac{y''(\xi_k)}{2!}h_k^2, \xi_k\in[x_k,x_{k+1}],$$

忽略h_k^2这一高阶项，分别用$y_k,y_{k+1},f_k=f(x_k,y_k)$近似$y(x_k)$，$y(x_{k+1})$和$f(x_k,y(x_k))$，得$y_{k+1}=y_k+h_k f_k$. 结合初值条件$y(0)=a_0$即得（6.2）.

（2）向前差分近似微分法

用向前差分$\dfrac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h_k}$近似微分$y'(x_k)$,得

$$\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h_k}\approx f(x_k,y(x_k)),$$

将近似号改作等号,用y_k,y_{k+1},f_k近似$y(x_k)$，$y(x_{k+1})$ $f(x_k,y(x_k))$,即得.

（3）左矩数值积分法

将（6.1）两边从x_k到x_{k+1}积分得

$$y(x_{k+1})-y(x_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y(x))dx,$$

用y_k，y_{k+1}近似$y(x_k)$、$y(x_{k+1})$,数值积分采用左矩公式得

$y_{k+1}-y_k=h_k f(x_k,y_k)$,从而亦得（6.2）.Euler方法有几何意义,如图6.1,

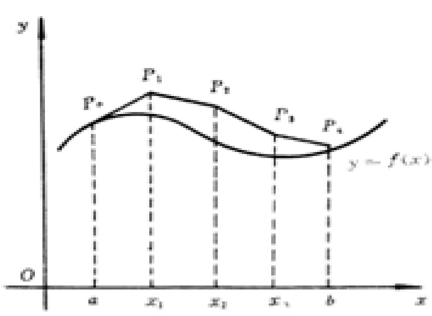


图 6.1 .Euler 方法示意图

显然我们得到一条折线 $\overline{P_0P_1\cdots P_n}$, 它在点 P_k 的右侧具有斜率 f_k , 与（6.1）过 P_k 的解曲线相切. 我们取折线 $\overline{P_0P_1\cdots P_n}$, 作为（6.2）解曲线 $y=y(x)$ 的近似曲线, 所以 Euler 方法又称折线法.

§6.2 隐式 Euler 方法和梯形方法

将 $y(x_k)$ 在 x_{k+1} 展开得

$$y(x_k)=y(x_{k+1})-h_k f(x_{k+1},\ y(x_{k+1}))+\frac{1}{2!}y''(\eta_k)h_k^2,\ x_k\le\eta_k\le x_{k+1},$$

忽略 h^2 对应的高价项, 用 y_k, y_{k+1} 和 $f_{k+1}=f(x_{k+1},y_{k+1})$ 分别近似 $y(x_k)$，$y(x_{k+1})$ 及 $f(x_{k+1},y(x_{k+1}))$, 可得计算公式

$$y_{k+1}=y_k+h_k f(x_{k+1},y_{k+1}), k=0,1,\cdots,n-1 \qquad (6.3)$$

该等式右端也含有 y_{k+1}，因此它是关于 y_{k+1} 的一个函数方程，需要解方程才能得到 y_{k+1} , 因此称其为隐式 Euler 方法. 隐式 Euler 方法也可以利用向后差分近似微分或用右矩型数值求积公式来得到.

如果我们利用梯形求积公式对（6.1）式两边进行积分, 并将近似取为等号可得

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h_k}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})], \qquad (6.4)$$

称之为梯形方法. 梯形方法也是隐式方法, 要通过解方程来得到 y_{k+1} .

根据第二章介绍的压缩不动点定理, 以（6.4）为例，可以建立如下迭代格式

$$y_{k+1}^{(i+1)}=y_k+\frac{h_k}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1}^{(i)})],\quad i=0,1,\cdots, \qquad (6.5)$$

当 $f(x,y)$ 在 D 上满足基本条件，$f(x,y)$ 关于 y 的 Lipschitz 常数为 L 时, 且 Lipschitz 常数满足 $\frac{L}{2}h_k<1$ 时, 方程（6.4）有唯一不动点 y_{k+1} 而且从任意 $y_{k+1}^{(0)}$ 出发, 迭代（6.5）都收敛到 y_{k+1} .

§6.3 预估－校正 Euler 方法

在实际计算中准确求解方程的计算量比较大, 往往取 $y_{k+1}^{(m)}(m\ge1)$ 作为 y_{k+1} 来用. 我们称 $y_{k+1}^{(m)}$ 为 $y_{k+1}^{(0)}$ 的 m 次迭代改进. 最常用的方法之一是用显式 Euler 方法所得的 $\bar{y}_{k+1}$ 为 $y_{k+1}^{(0)}$, 用梯形方法改进一次

$$\begin{cases}\bar{y}_{x+1}=y_k+h_k f(x_k,y_k),\\ y_{k+1}=y_k+\dfrac{h_k}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},\bar{y}_{k+1})],\\ k=0,1,\cdots,n-1.\end{cases} \qquad (6.6)$$

方法（6. 6）称为预估−校正 Euler 方法, 或改进 Euler 方法. 为便于编制程序,式（6.6）常写成

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_q = y_n + hf(x_n + h, y_p), \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_q). \end{cases} \tag{6.7}$$

对于常微分方程的数值解法,我们自然要关心解法的精度,下面给出上述方法的误差分析.

上面的公式都是由近似取等号得来的,如果我们用 $y(x_{n+1})$ 表示这一点的准确值,用 y_{n+1} 表示由公式计算的值,现在来考察两个公式的截断误差： $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$. 这里假定前一步得的结果 $y_n=y(x_n)$是准确的,因此这个误差又称为局部误差.

为了估计误差,首先给出由 Taylor 展开得到的精确值 $y(x_{n+1})$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3).$$

单步法的误差就是用公式近似右端产生的误差. 因此,对显式 Euler 方法有：

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3).$$

对隐式 Euler 方法有：

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3).$$

对梯形法有：

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^3}{12} y'''(x_n) + O(h^4).$$

对预估-校正法有

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3).$$

若一种算法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,则称该算法具有 p 阶精度. 显然 p 越大,方法的精度越高. 上面式子说明,显式 Euler 法和隐式 Euler 法是一阶方法,梯形法和预估-校正法是二阶方法.

例1 用显式 Euler 方法, 梯形方法和预估−校正 Euler 方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1, \quad 0 < x < 1. \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

解 易知方程的准确解为 $y(x)=e^{-x}+x$，取 $h=0.1$，计算结果与准确解比较，列在下表中.

表 6.1 例 1 的计算结果

x_k	Euler 方法		梯形方法		预估-校正方法	
	y_k	$\lvert y_k-y(x_k)\rvert$	y_k	$\lvert y_k-y(x_k)\rvert$	y_k	$\lvert y_k-y(x_k)\rvert$
0.0	1.000000	0.0	1.000000	0.0	1.000000	0.0
0.1	1.000000	4.8×10^{-3}	1.004762	7.5×10^{-5}	1.005000	1.6×10^{-4}
0.2	1.010000	8.7×10^{-3}	1.018594	1.4×10^{-4}	1.019025	2.9×10^{-4}
0.3	1.029000	1.2×10^{-2}	1.040633	1.9×10^{-4}	1.041218	4.0×10^{-4}
0.4	1.056100	1.4×10^{-2}	1.070096	2.2×10^{-4}	1.070800	4.8×10^{-4}
0.5	1.090490	1.6×10^{-2}	1.106278	2.5×10^{-4}	1.107076	5.5×10^{-4}
0.6	1.131441	1.7×10^{-2}	1.148537	2.7×10^{-4}	1.149404	5.9×10^{-4}
0.7	1.178297	1.8×10^{-2}	1.196295	2.9×10^{-4}	1.197210	6.2×10^{-4}
0.8	1.230467	1.9×10^{-2}	1.249019	3.0×10^{-4}	1.249975	6.5×10^{-4}
0.9	1.287420	1.9×10^{-2}	1.306264	3.1×10^{-4}	1.307228	6.6×10^{-4}
1.0	1.348678	1.9×10^{-2}	1.367573	3.1×10^{-4}	1.368514	6.6×10^{-4}

数值例子表明，梯形方法和预估-校正 Euler 方法比显式 Euler 方法有更好的精度，这与理论分析的结果一致. 下面给出常微分方程数值解理论分析的几个基本问题.

§6.4 收敛性与相容性问题

求解初值问题（6.1）的单步法可统一的表示为

$$y_{k+1}=y_k+h\phi(x_k,y_k,y_{k+1},h),\quad (h=x_{k+1}-x_k). \tag{6.8}$$

显然对于不同的方法 $\phi(x_k,y_k,y_{k+1},h)$ 的表达式不同.

记 $e_n=y(x_n)-y_n$ 为 x_n 整体截断误差，收敛性就是讨论当 $x=x_n$ 固定且 $h=\dfrac{x_n-x_0}{n}\to 0$ 时 $e_n\to 0$ 的问题.

定义 6.1 如果单步法(6.8)生成的数值解，对任一固定 $x=a+nh,$ 均有 $\lim\limits_{h\to 0}y_n=y(x_n)$ 则称该方法是收敛的.

定理 6.1 设单步法具有 p 阶精度，$\phi(x,u,v,h)$ 关于变量 u,v 满足 Lipschitz 条件，且初值是准确的，则数值方法（6.8）的整体截断误差为

$$\left|y(x_k)-y_k\right|=O(h^p).$$

该定理表明 $p(\geq 1)$ 阶单步法是收敛的.

将 $\phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h)$ 在 $(x_k, y(x_k), y(x_k), 0)$ 点展开得

$$\phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h)=\phi(x_k, y(k_k), y(x_k), 0)$$

$$+h\left[f(x_k, y(x_k))\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial h}\right]\phi(xk, y(xk), y(xk), 0)+O(h^2),$$

其中 $\tau_{k+1}=h\left[f(x_k, y(x_k))-\phi(x_k, y(x_k), y(x_k), 0\right]+O(h^2))$，所以 $\tau_{k+1}=O(h^{p+1}), p\geq 1$ 的必要条件是

$$\phi(x, y, y, 0)=f(x, y). \tag{6.9}$$

因此可以给出如下定义.

定义 6.2 数值方法(6.8)称为与初值问题（6.1）是相容的,若(6.9)成立.

当(6.8)是相容方法时,固定 $x=a+nh,$ 在

$$\frac{y_{m+1}-y_m}{h}=\phi(x_m, y_m, y_{m+1}, h),$$

两边对 $h\to 0$ 取极限,得

$$y'(x)=\phi(x, y, y, 0)=f(x, y).$$

即差分方程（6.8）趋向微分方程（6.1）.

$p(\geq 1)$ 阶单步法全是相容的. 已讨论过的方法都是相容的方法.

§6.5 稳定性性问题

在实际计算中,会有舍入误差,用 $\bar{y}_k, k=0,\cdots,n,$ 表示实际计算所得的值,用 $y_k, k=0,1,\cdots,n$ 表示无误差理论结果. 为考察误差 $\left|y_k-\bar{y}_k\right|$ 的情况,我们引进稳定性概念：若在某步引入的舍入误差,在以后的传播中被压缩、衰减,就认为值方法（6.8）是数值稳定的；若在传播中被放大,就认为方法（6.8）是数值不稳定的。

讨论数值方法（6.8）的数值稳定性,通常用试验方程 $y'=\lambda y$ 来检验,其中 λ 为复常数. 选择这一试验方程的理由,一是它比较简单,若对它方法已不稳定,对其它方程也就不能保证；另外,一般方程（6.1）可局部线性化为

$$y'(x)=f(x, y)=\left[f(a, a)+f_x(a, a)(x-a)-af_y(a, a)\right]+yf_y(a, a)+O(\left|x-a\right|+\left|y-a\right|).$$

略去高阶项即得这一形式。

对于微分方程 $y' = \lambda y$,若 $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$,则

$$y(x) = e^{\lambda(x-a)} \cdot \alpha, \lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty \quad (a \neq 0);$$

若 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$,则解 $y(x) = ae^{\lambda(x-a)}$ ，当 $x \to \infty$ 时,衰减为 0.

我们称 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ 的试验方程是稳定的.

用数值方法（6.8）解试验方程得到

$$y_{k+1} = E(\lambda h) y_k \tag{6.10}$$

如果方法（6.8）是 p 阶的,则

$$\tau_{k+1} = y(x_{k+1}) - E(\lambda h) y(x_k) = (e^{\lambda h} - E(\lambda h)) y(x_k) = O(h^{p+1}).$$

从而 $e^{\lambda h} - E(\lambda h) = O(h^{p+1})$, $E(\lambda h)$ 是 $e^{\lambda h}$ 的一个逼近.

若在 y_k 计算中有误差 ε ,以后的计算全是准确的,则在 $y_{k+m}(m > 0)$ 中将有误差 $\left[E(\lambda h)\right]^m \varepsilon$. 为此引入下面的定义.

定义 6.3 若在（6.10）中 $\left|E(\lambda h)\right| < 1$, 则称方法（6.8）是绝对稳定的. 在复平面上,变量 $\bar{h} = \lambda h$ 满足 $\left|E(\bar{h})\right| < 1$ 的区域称为（6.8）的绝对稳定区域；绝对稳定区域与实轴的交称为绝对稳定区间.

下面我们分析几种单步法稳定性.

显式 Euler 方法： $E(\bar{h}) = 1 + \bar{h}, \left|E(\bar{h})\right| < 1$ 给出绝对稳定区域定区间为 $(-2, 0)$.

隐式 Euler 方法: $E(\bar{h}) = \dfrac{1}{1-\bar{h}}$. 对任意 $\mathrm{Re}\,\bar{h} < 0$, 有 $E(\bar{h}) < 1$ 隐式 Euler 方法对任意步长 h 是稳定的.

梯形方法: $E(\bar{h}) = \dfrac{2+\bar{h}}{2-\bar{h}}$, 对一切 $h > 0, \left|E(\lambda h)\right| < 1$,方法稳定.

预估－校正 Euler 方法 $E(\bar{h}) = 1 + \bar{h} + \dfrac{1}{2}\bar{h}^2$. 绝对稳定区间是 $(-2, 0)$.

上面的例子表明,隐式方法稳定性比显式方法的稳定性好.

§7*微分方程定性分析初步

求得微分方程的解析形式的解固然重要, 但是只有某些特殊类型方程, 才可以得到这样的解, 而绝大多数变系数方程、非线性方程都难以求得其解析解. 本节我们将直接从微分方程的系数或方程自身的性质来研究其解的主要特征和形态，并对一些实际问题给出定性的分析. 由于篇幅问题，本节里所涉及的定理均不给予证明，请读者查阅常微分方程的相关知识.

§7. 1 稳定性及相位平面

我们都知道稳定性的物理意义是明显的，因为用微分方程描述的物质运动的特解密切依赖于初值，而初值的计算或测量实际上不可避免地出现误差和干扰.若描述这物理运动的微分方程的特解是不稳定的，则初值的微小误差或干扰都会导致严重的后果，因此不稳定的特解将不宜作为设计的依据；反之，稳定的特解才是大家感兴趣的,因此研究解的稳定性成为一个重要的问题.但大多数变系数方程、非线性微分方程是不可能或很难求出其解的具体表达式的，因此必须要求在不具体解出方程的情况下判断方程的解的稳定性.

微分方程定性理论是由法国数学家庞家莱（Poincare,1854-1891）在 19 世纪 80 年代多开创的.俄罗斯数学家李雅普诺夫（Liapunov，1857-1918）在同一时期对微分方程的解的稳定性作了深入的研究，是微分方程定性理论的另一开拓者.此后美国数学家伯克霍夫（Birkhoff,1884-1944）继承和发展了定性理论并提出了动力系统的概念.

下面我们给出微分方程的解的稳定性态的定义.

在微分方程组中，如果 $f(t,x)$ 只和 x 有关，即

$$\frac{dx}{dt}=f(x),$$

其中 $x\in R^n$,则称该微分方程组为自治微分方程组或自治系统。下面我们考虑二维自治微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=F(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=G(x,y),\end{cases} \tag{7.1}$$

其中自变量 t 不是明显出现的. 假设函数 $F(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 在 xy 平面的某个区域 R 上连续可导，则称 xy 平面为位相平面. 根据解的存在唯一性定理，给定 t_0 和 R 上的任意点 (x_0,y_0),则存在方程组(7.1)的唯一解 $x=x(t),y=y(t)$,该解定义在含 t_0 的某个开区间 (a,b) 上的，且满足初始条件

$$x(t_0)=x_0,y(t_0)=y_0.$$

方程 $x=x(t),y=y(t)$ 刻画了相位平面上一条参数解曲线，称任何一条这样的解曲线为方程组(7.1)的一个轨道.使

$$F(x_*,y_*)=0 \text{ 和 } G(x_*,y_*)=0 \tag{7.2}$$

成立的点 (x_*,y_*) 称为方程组(7.1)的一个临界点（或奇点）.

若 (x_*,y_*) 是方程组的临界点，则函数

$$x(t)=x_*,\ \ y(t)=y_* \tag{7.3}$$

满足方程组(7.1)，称这样的函数为方程组(7.1)的平衡解. 由单点(x_*,y_*)构成(7.3)中平衡解的轨道.

若初值(x_0,y_0)不是临界点，则相应的轨道是xy平面的一条曲线，随着自变量t的增加，点$(x(t),y(t))$沿这条曲线变化. 可以证明，任何非单点的轨道是一条没有自交点的非退化的曲线.

下面讨论临界点(x_*,y_*)的稳定性和渐近稳定性.

如果自治系统方程组(7.1)的初值(x_0,y_0)充分地接近临界点(x_*,y_*)，那么对所有的$t>0,$ $(x(t),y(t))$也接近于(x_0,y_0)，则称(x_*,y_*)是稳定的. 用向量符号表示$\vec{x}(t)=(x(t),y(t)),$ 初值点$\vec{x}_0=(x_0,y_0)$与临界点$\overrightarrow{x_*}=(x_*,y_*)$ 之间的距离为

$$\|\vec{x}_0-\overrightarrow{x_*}\|=\sqrt{(x_0-x_*)^2+(y_0-y_*)^2}.$$

若临界点不是稳定的，则称其为不稳定的.

若(x_*,y_*)是临界点，则称平衡解$x(t)=x_*,\ y(t)=y_*$为稳定的或不稳定的依赖于临界点相应的性质. 在应用中平衡解的稳定性是一个关键性的问题.

若临界点(x_*,y_*)是稳定性的，且以充分接近(x_*,y_*)点开始的每条轨道当$t\to+\infty$时，也趋近于(x_*,y_*)，即存在$\delta>0,$ 使$\|\vec{x}-\overrightarrow{x_*}\|<\delta\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}\vec{x}(t)=\vec{x}_*,$ 其中$\vec{x}_0=(x_0,y_0),\ \overrightarrow{x_*}=(x_*,y_*)$ 且$\vec{x}(t)=(x(t),y(t))$是以$\vec{x}_0=(x_0,y_0)$为初值的解，则称临界点(x_*,y_*)是渐近稳定性的. 区域$\{x \mid \|\vec{x}-\overrightarrow{x_*}\|<\delta\}$ 称为$\vec{x}=\overrightarrow{x_*}$的吸引域; 若吸引域是全空间，则称$\vec{x}=\overrightarrow{x_*}$是全局稳定的. 若$x_*=0,\ y_*=0$，则称其为方程组(7.1)的零解. 相应地，也可以讨论其稳定性.

例如，一阶微分方程$\dfrac{dx}{dt}=ax$满足$x(t_0)=x_0$的解为$x=x_0e^{a(t-t_0)}$.

当$a<0$时，该方程的零解$x=0$不仅稳定且是渐近稳定的；当$a>0$时，$x=0$不稳定；

当$a=0$时，满足初始条件$x(t_0)=x_0$的解变为$x=x_0,$它是稳定但不渐进稳定的.

§7.2 线性（非线性）自治系统平衡位置稳定性的判别法

1、根据微分方程得的系数（矩阵）的性质来判断零解的稳定性.

由于任一平衡位置都可以通过平移变换成相应自治系统的零解. 因此，我们只讨论齐次线性自治系统：

$$\frac{dx}{dt}=Ax,\ \ x\in D\subseteq R^n,\ \ t\in(-\infty,+\infty) \tag{7.4}$$

的零解 $x=0$ 的稳定性，其中 A 为一常数矩阵.

定理 7.1　设有齐次线性自治系统

$$\frac{dx}{dt}=Ax,\ \ x\in D\subseteq R^{n},\ \ t\in(-\infty,+\infty), \tag{7.5}$$

其中 A 为一常数矩阵.

（1）　零解 $x=0$（全局）渐近稳定的充要条件是系数矩阵 A 的所有特征根均具有负实部；

（2）　零解 $x=0$ 稳定的充要条件是系数矩阵 A 的所有特征根均具有正实部，而且其中具有零实部的特征根所对应的线性无关的特征向量的个数恰为此特征根的重数；

（3）　零解 $x=0$ 不稳定的充要条件是系数矩阵 A 或者至少存在一个具有正实部的特征根，或者 A 存在具有零实部的重特征根，它所对应的线性无关的特征向量的个数小于此特征根的重数.

例 1 讨论方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-2x_1+x_2-x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1-x_2,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_1+x_2-x_3\end{cases}$$

零解的稳定性.

解 该方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

A 的特征方程为

$$\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+3=0.$$

可以验证 A 的所有特征根均具有负实部，则该系统的零解是渐近稳定的.

例 2 证明微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 0 & -6 & -2\\ -6 & 0 & -3\end{bmatrix}x.$$

的每一个解都是不稳定的.

解 矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

的特征多项式是

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & -6-\lambda & -2 \\ -6 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}=-\lambda^2(\lambda+7).$$

因此，A 的特征根为 $\lambda=-7$ 和 $\lambda=0$. A 的对应于特征值 0 的每一个特征值 v 都必须满足方程

$$Av=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由此得到 $v_1=\dfrac{3}{2}v_2, v_3=-3v_2$, 于是，$A$ 的对应于特征值 0 的每一个特征向量 v 都必须具有下列形式：

$$v=C\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

因为 $\lambda=0$ 是二重特征值，而 A 只有一个对应于特征值 0 的线性无关的特征向量，所以 $\dfrac{dx}{dt}=Ax$ 的每一个解 $x=\varphi(t)$ 都是不稳定的.

下面简单地介绍非线性微分方程组的零解的的稳定性的判别法.

非线性方程组如下：

$$\frac{dx}{dt}=Ax+R(x),\ \ x\in D\subseteq R^n,\ \ t\in(-\infty,+\infty), \tag{7.6}$$

在一定的条件下，非线性微分方程组的零解的的稳定性可以由线性方程组的零解的稳定性来决定的. 这就是所谓的按线性近似决定稳定性的问题. 我们有如下结论：

定理 7.2 若(7.5)的系数矩阵的特征方程没有零根或零实部的根，则方程组(7.6)的零解的稳定性与其线性近似的方程组(7.5)的零解的稳定性态一致. 也就是说(7.5)的系数矩阵的特征方程的根均具有负实部的根时，方程组(7.6)的零解是渐近稳定的，而当(7.5)的系数矩阵的特征方程的根均具有正实部的根时，其零解是不稳定的.

2、 Liapunov 稳定性定理

我们前面给出了平衡解,零解稳定性的概念,并举出一些例子来说明.这些都是通过求出方程组解析解得方法来论述零解是否稳定.本节介绍从方程本身的性质来判断零解稳定性的直接方法—李雅普诺夫（Liapunov）稳定性.这给无法求出其解析解的方定理程提供了一种有效的方法.下面我们介绍一个辅助函数--V 函数的定义，利用这个辅助函数来判定零解的稳定性.

设函数$V(x)$是R^n中原点的某个邻域U中连续可微的函数，且满足$V(0)=0.$

定义 7.1 若除原点外对所有$x\in U,$都有$V(x)>0\ (V(x)<0),$则称$V(x)$为正定函数（负定函数),；函数与若对所有$x\in U,$都有$V(x)\ge 0\ (V(x)\le 0),$则称$V(x)$为半正定函数或常正函数（半负定函数或常负函数），常正函数与常负函数称为常号函数；若在U中原点的任一邻域$V(x)$内既可取正值，也可取负值，则称$V(x)$为变号函数.

例 3 在R^3中，（1）函数$V(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\quad V(x,y,z)=(\sin x^2+2y^2+3z^2)$是正定函数；

（2）$V(x,y,z)=(x-y)^2+z^2,\quad V(x,y,z)=x^2+y^2$都是常正函数.

(3) $V(x,y,z)=x^2-y^2$是R^3中的变号函数.

但在R^2中函数$V(x,y)=x^2+y^2$是正定函数，所以函数是否正定，与定义这个函数的空间维数有关.

设n维自治微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x),\ \ f(0)=0 \tag{7.7}$$

的解为$x(t)=(x(t_1),x(t_2),...,x(t_n))^T$. 为了研究 (7.7)零解的稳定性,考察随时间$t$变化时$V(x(t))$的变化情况. 将$V(x(t))$视为$t$的复合函数.

定义 7.2 设函数$V(x)$是R^n中原点的某个邻域U中连续，并具有一阶连续的偏导数，我们把

$$\frac{dV(x)}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}+...+\frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}\triangleq V'(x) \tag{7.8}$$

称为函数 $V(x)$关于 微分方程(7.7)的全导数.

李雅普诺夫用函数$V(x)$和全导数$\dfrac{dV(x)}{dt}$建立了下面的零解稳定性的判别定理.

定理 7.3 如果存在原点的邻域U和正定（负定）函数$V(x)$，使得$\dfrac{dV(x)}{dt}$是半负定（半正定）的，则方程(7.7)的零解是稳定的；若使$\dfrac{dV(x)}{dt}$是负定（正定）的，则方程(7.7)的零解是渐近稳定的.

例 4 讨论下面微分方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1-x_2.\end{cases} \tag{7.9}$$

取定正定函数$V(x_1,x_2)=3x_1{}^2+2x_1x_2+2x_2{}^2$, 这时

$$\frac{dV(x_1,x_2)}{dt}=-2x_1{}^2-2x_2{}^2,$$

显然$\dfrac{dV(x_1,x_2)}{dt}$是负定函数, 因此由定理 7.3 可知, 方程组(7.9)的零解是渐近稳定的.

注： 若取$V(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2}(x_1{}^2+x_2{}^2)$, 那么所求$\dfrac{dV(x_1,x_2)}{dt}=-x_2{}^2$，显然$\dfrac{dV(x_1,x_2)}{dt}$是半负定的，由定理 7.3 只能得到方程组(7.1.9)的零解是稳定的. 得不到渐近稳定性. 这表明构造适当的$V(x)$函数是很重要的.

定理 7.3 也称为李雅普诺夫第二方法（或李雅普诺夫直接法）.

利用定理 7.4 判断方程组的零解的稳定性避免了求解的复杂过程而具有直接又简明的优点，然而至今还没有统一的方法生成这个李雅普诺夫函数$V(x)$，尽管李雅普诺夫函数$V(x)$的存在性在很多情况下已经解决. 因此对于给定的微分方程（组），如何构造李雅普诺夫用函数$V(x)$，从而判断其稳定性，至今仍然是一个非常吸引人的研究课题.

李雅普诺夫函数$V(x)$的选择非常相似于系统的能量考虑；通常耗散的因素使系统的能量下降. 这种设想是基于物理概念. 对于线性常系数系统，已经解决如何构造李雅普诺夫函数的问题，下面我们介绍这种情况，这有助于进一步理解李雅普诺夫用直接法的.

对于线性常系数系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=Ax,\\ x(t_0)=x_0.\end{cases} \tag{7.10}$$

李雅普诺夫第一方法是分析矩阵 A 的全部特征值 $\lambda_i(i=1,2,...,n)$, 如果 $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0, i=1,2,\ldots,n$, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty}(At)=0$, 即系统是渐近稳定的. 若用李雅普诺夫第二方法，就要要求构造李雅普诺夫函数，对于线性常系数可以考虑选 x 的二次型，即

$$V(x)=x^TPx, \tag{7.11}$$

其中 P 是待定的$n\times n$对称矩阵，为了求P，我们用另一种条件即微商为负定条件

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dx^T}{dt}Px+x^TP\frac{dx}{dt}=x^T(A^TP+PA)x=-x^TQx,$$

其中

$$A^TP+PA=-Q$$

是著名的李雅普诺夫代数方程，任意选择一个正定的Q矩阵，求解得P矩阵，若P矩阵是半正定的，则系统为稳定的；若P矩阵是正定的，则系统为渐近稳定的.

§7.3 应用举例

例 1　两种群共存状态的研究

设有甲乙两个种群，当它们独自在一个自然环境中生存时，数量的演变均遵从 Logistic 规律. 记$x_1(t),x_2(t)$分别是这两个种群的数量，r_1,r_2分别是它们的固有增长率，N_1,N_2分别是它们的最大容量. 于是对于种群甲有

$$\frac{dx_1}{dt}=r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1}),$$

其中因子$(1-\frac{x_1}{N_1})$反映由于甲对有限资源的消耗导致其本身增长的阻滞作用，$\frac{x_1}{N_1}$可以解释为相对N_1而言单位数量的甲消耗的供养甲的食物量（设食物总量为 1）.

当两个种群在同一自然环境中生存时，由于种群乙与种群甲消耗同一有限资源而对种群甲的增长产生影响，我们可以在因子$(1-\frac{x_1}{N_1})$中再减去与种群乙的数量x_2（相对N_2而言）成正比的项，由此得到种群甲的增长方程

$$\frac{dx_1}{dt}=r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}), \tag{7.12}$$

其中σ_1的意义是单位数量乙（相对N_2而言）所需要的有限资源与单位数量甲（相对N_1而言）所需要的有限资源的比值. 类似地，甲的存在也影响可乙的增长，种群乙的增长方程是

$$\frac{dx_2}{dt}=r_2x_2(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}), \tag{7.13}$$

对σ_2可以做相应的解释. 把上述方程(7.12)和(7.13)改写为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(a_1 - b_1x_1 - c_1x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(a_2 - b_2x_2 - c_2x_1), \end{cases} \tag{7.14}$$

其中 $a_i = r_i > 0,\ b_i = \dfrac{r_i}{N_i} > 0,\ c_i = \sigma_i \dfrac{r_i}{N_i}(i=1,2)$. 当 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$ 时方程组(7.1.14)称为竞争模型；当 $c_1 > 0$ 和 $c_2 < 0$（或 $c_1 < 0$ 和 $c_2 > 0$）时方程组(7.1.14)称为食饵-捕食者模型；当 $c_1 < 0$ 和 $c_2 < 0$ 时方程组(7.1.14)称为共存模型.

下面我们考虑平衡状态，即求解代数方程组

$$\begin{cases} x_1(a_1 - b_1x_1 - c_1x_2) = 0 \\ x_2(a_2 - b_2x_2 - c_2x_1) = 0 \end{cases}$$

得到四个平衡点 $P_1(0,0),\ P_2(0,\dfrac{a_2}{b_2}),\ P_3(\dfrac{a_1}{b_1},0)$ 以及（可能存在）P_4（它是两直线

$$a_1 - b_1x_1 - c_1x_2 = 0,\ a_2 - b_2x_2 - c_2x_1 = 0 \tag{7.15}$$

的交点）.

下面我们分析这些平衡点的稳定性以及轨线分布的大致状态. 由于 x_1, x_2 分别表示种群（或密度），方程组(7.14)在相平面的第一象限才有意义. 注意到 x_1 轴和 x_2 轴是方程组(7.14)的轨线（都是奇点），由唯一性定理，第一象限上的轨线不能穿过坐标轴到其他象限. 方程组(7.14)的垂直与水平等倾斜线为 x_1 轴和 x_2 轴以及(7.15)中的两条直线. 在 x_1x_2 平面中，直线 $a_1 - b_1x_1 - c_1x_2 = 0$ 把平面划分为 $x_1' > 0$ 和 $x_1' < 0$ 两个区域，直线 $a_2 - b_2x_2 - c_2x_1 = 0$ 把平面划分为 $x_2' > 0$ 和 $x_2' < 0$ 两个区域（见图 7. 1）.

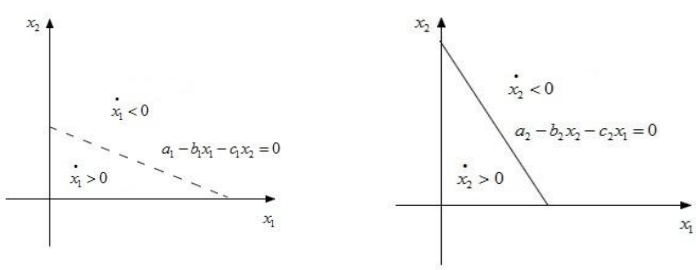
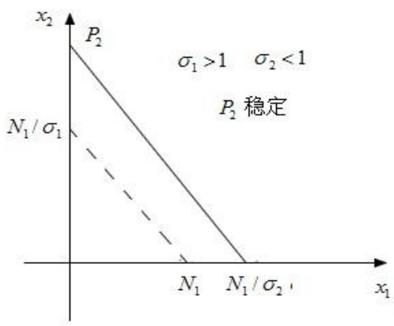
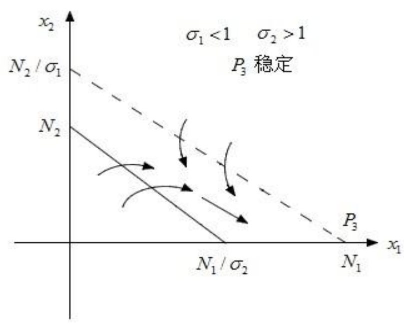


图 7.1

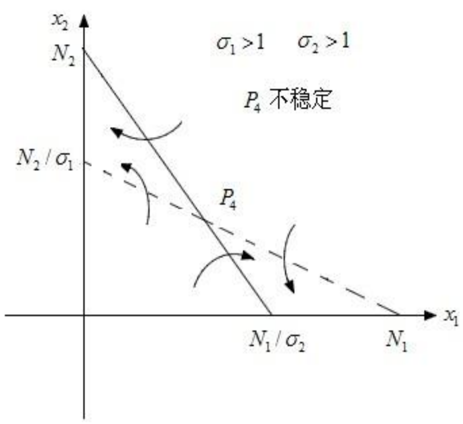
在竞争模型时，(7.1.15)中的两条直线之间的位置关系以及各个小区域内轨线的走向可以由图 7. 2 中的四种情况来说明.



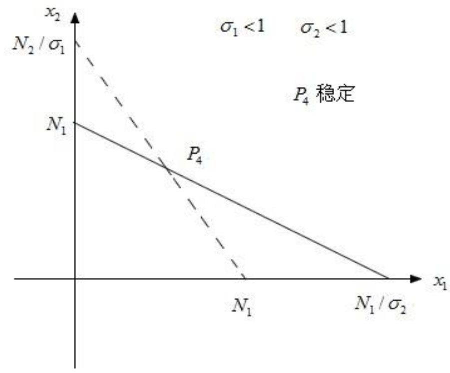
(a)



(b)



(c)



(d)

图 7.2

在每种可能情形中平衡点的稳定性如下：

（1） 当$\sigma_1 < 1,\ \sigma_2 > 1$时，两直线将平面（$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$）划分为 3 个区域；

$$S_1 : x_1^{'} > 0,\ \ x_2^{'} > 0, \tag{7.16}$$

$$S_2 : x_1^{'} > 0,\ \ x_2^{'} < 0, \tag{7.17}$$

$$S_3 : x_1^{'} < 0,\ \ x_2^{'} < 0, \tag{7.18}$$

若轨线从S_1出发，由(7.16)可知随着t的增长轨线向右上方运动，必然进入S_2；若轨线从S_2出发，由(7.17)可知随着t的增长轨线向右下方运动，那么它或者趋向P_3或者进入S_3；但进入S_3是不可能的，这是因为如果轨线在某时刻t_1经直线$a_1 - b_1 x_1 - c_1 x_2 = 0$进入$S_3$，则有

$$\frac{dx_1}{dt}\Big|_{t=t_1} = 0,$$

由(7.12)不难算得：

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}\Big|_{t=t_1}=-\frac{r_1\sigma_1}{N_2}x_1(t_1)x_2{'}(t_1).$$

由(7.17)和(7.18)知 $x_2{'}(t_1)<0,$ 故 $\frac{d^2x_1}{dt^2}\Big|_{t=t_1}>0.$ 这表明 $x_1(t)$ 在 t_1 达到极小值，这与在 S_2 中 $x_1{'}>0$ 矛盾；若轨线从 S_3 出发，由(7.18)可知轨线向左下方运动，那么它或者趋向 P_3，或者进入 S_2. 而根据上述分析，进入 S_2 后最终也将趋向 P_3.综上分析可以画出轨线示意图（图 7.2(b)）.类似上述分析可以得到：

（2） 当 $\sigma_1>1,\ \sigma_2<1$ 时，$P_2(0,\frac{a_2}{b_2})$ 是稳定的（见图 7.2(a)）;

（3） 当 $\sigma_1<1,\ \sigma_2<1$ 时，P_4 是稳定的（见图 7.2(d)）;

（4） 当 $\sigma_1>1,\ \sigma_2>1$ 时，P_4 是不稳定的（鞍点）. 因为轨线的初始位置不同，其走向也不同，最终或趋于 P_3 或趋于 P_2（图 7.2(c)）.

根据 σ_1，σ_2 的含义，下面我们来解释稳定点 P_2，P_3，P_4 在生态学上的意义.

（A）当 $\sigma_1<1,\ \sigma_2>1$ 时，$\sigma_1<1$ 意味着在有限资源的竞争中乙比甲弱，$\sigma_2>1$ 意味甲比乙强. 结果是种群乙最终灭绝，而种群甲将趋向最大容量，即 $x_1(t),x_2(t)$ 趋向平衡点 P_3.

（B）当 $\sigma_1<1,\ \sigma_2<1$ 时，情况与（A）正好相反.

（C）当 $\sigma_1<1,\ \sigma_2>1$ 时，在、争夺有限资源中甲与乙都不占绝对优势，于是最终达到一个双方共存的稳定状态 P_4.

（D）当 $\sigma_1>1,\ \sigma_2>1$ 时，最终将有一个种群灭绝，另外一个种群趋向最大容量. 到底哪个种群灭绝将取决于初始时刻两种种群数量的比值.

例 2 理查森军备竞赛理论

甲乙两国为敌，都为控制对方取得优势而增加自己的军事实力, 对方仇恨越深, 扩军越快; 另外, 对方的现有军力也是刺激扩军的重要因素, 当然, 这里所指的扩军, 未必是军队人数的增加, 在现代战争中, 取胜的关键除了有足够的高素质的官兵之外, 更需要增加现代化的武器装备, 所以这里的军力是指人与物的高质量的组合力量.

本国已有的军事力量对继续扩军有抑制作用，例如受本国人民的反对或受到兵源不足或物力不足的制约，因为已经有了那么庞大的军备，耗用了本国的大量人力物力，再增加军备投入，则会产生上述的阻力.

1939 年，理查森（L.E.Richardson）对军备竞赛建立了如下数学模型：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = kx - \alpha x + g(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = lx - \beta x + h(t). \end{cases}$$

其中 $x(t),\ y(t)$ 分别是甲乙两国的军事力量，$g(t),\ h(t)$ 分别是甲对乙和乙队甲的仇恨程度，$k,\ l,\ \alpha,\ \beta$ 是正常数，再设 $g,\ h$ 是正常数，令

$$\begin{cases} kx - \alpha x + g = 0 \\ lx - \beta x + h = 0 \end{cases}$$

解得奇点为

$$(x_0, y_0) = (\frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}, \frac{\lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl}),\ \alpha\beta \neq kl$$

特征多项式为

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\alpha - \lambda & k \\ l & -\beta - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda + \alpha)\ (\lambda + \beta) - kl.$$

因此特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta - kl)}].$$

（1） 当 $\alpha\beta > kl$ 时, 两个根都是负的, 因此 (x_0, y_0) 是稳定点;

（2） 当 $\alpha\beta < kl$ 时, 两个根是异号实数, 因此 (x_0, y_0) 是鞍点, 不稳定.

对于情形（1），(x_0, y_0) 在第一象限，又是稳定点，即当 $t \to +\infty$ 时，甲国的军事实力趋于 x_0，乙国的军事实力趋于 y_0, 两国不会无限制地扩充军备，两国的军事实力会渐近地稳定在各自的极限值附近，这一时间可以和平共处；这种情形是由于 $\alpha\beta > kl$ 造成的，即各国对扩军的抑制作用（α 与 β）超出两国的扩军总趋势（k 与 l）；

对于情形（2），这时奇点是鞍点，当 $t \to +\infty$ 时，会引起某一国的军事力量无限扩张，形成战争威胁.

历史上，1909 年到 1914 年，德奥匈联盟与法俄联盟军备竞赛，双方的扩军与抑制情形为 $k = l = 0.9, \alpha = \beta = 0.2$ 于是 $\alpha\beta - kl = 0.04 - 0.81 < 0,$ 所以不能稳定地和平共处，两个军事集团之间终于爆发了第一场世界大战.

例 3 航空航天器翻滚控制的研究

载人空间飞行器运行中，有可能发生失控翻滚问题，这是十分严重的飞行事故！它不仅使宇航员受到超重伤害，而且有坠落失事的危险，这时应启动液体喷射系统，利用它产生的反向力矩来消除翻滚.

根据 Euler 动力学方程，飞行器运动的数学模型是

$$\begin{cases} A\dfrac{d\omega_1}{dt}+(C-B)\omega_2\omega_3=M_1, \\ B\dfrac{d\omega_2}{dt}+(A-C)\omega_1\omega_3=M_2, \\ C\dfrac{d\omega_2}{dt}+(B-A)\omega_1\omega_2=M_3. \end{cases}$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 是角速度在三个主轴上的投影分量，A,B,C 是绕三个惯性主轴的惯性矩，$M_1=k_1A\omega_1,M_2=k_2B\omega_2,M_3=k_3C\omega_3$ 分别表示绕三个主轴的控制力矩，用以抵消翻滚，飞行器的正常姿态为 $\omega_1=\omega_2=\omega_3=0.$

A,B,C,k_1,k_2,k_3 均为常数；A,B,C 为正，k_1,k_2,k_3 为负.

取李雅普诺夫函数为

$$V(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2,$$

$V(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ 为正定函数，且

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{\partial V}{\partial\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial\omega_3}\frac{\partial\omega_3}{\partial t}=2A\omega_1[\frac{1}{A}(M_1+(B-C)\omega_2\omega_3)] \\ &+2B\omega_2[\frac{1}{B}(M_2+(C-A)\omega_3\omega_1)]+2C\omega_3[\frac{1}{C}(M_3+(A-B)\omega_1\omega_2)] \\ &=2(k_1A\omega_1^2+k_2B\omega_2^2+k_3C\omega_3^2)\le 2k(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2) \\ &=2kV(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\end{aligned}$$

其中 $k=\max\{k_1,k_2,k_3\}<0,$ 故 $\dfrac{dV}{dt}$ 是负定的，所以姿态 $\omega_1=\omega_2=\omega_3=0$ 是渐近稳定.

§8 探索类问题

1. 讨论下面方程组的数值解法，并分析算法的误差.

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\
\dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \\
\qquad \cdots \quad \cdots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n).
\end{cases}
$$

2. 研究一类高振荡常微分方程数值解法和误差分析.

$$
y'' + g(t)y = 0, \lim_{t \to \infty} g(t) = 0 .
$$

3. 研究一类二阶延迟常微分方程的数值解法,并给出误差分析.

$$
\begin{cases}
y'' = f(y(t), y(t-\tau)), t \ge t_0; \\
y(t) = \phi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], \\
y'(t_0) = y_0.
\end{cases}
$$

4. 本章介绍的分离变量方法在求解偏微分方程中有着广泛应用.在 13 张,我们介绍了拉谱拉斯方程在球坐标系下可以变为

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(u_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} u_{\phi\phi} \\
&= \frac{1}{r}\left(2u_r + r u_{rr}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(u_\theta \cos\theta + u_{\theta\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} u_{\phi\phi}.
\end{aligned}
$$

验证利用 $u(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi), Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ 对原方程两次分离变量得到三个方程

$$
\left.
\begin{aligned}
&(1) \quad \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - l(l+1)R = 0; \\
&(2) \quad \Phi'' + \lambda\Phi = 0; \\
&(3) \quad \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0.
\end{aligned}
\right\} \quad (8.1)
$$

这里$l, \lambda = m^2$为分离变量过程中出现常数

对 7.1)式中的 3)进行变换$\theta = \arccos x, x = \cos\theta$得到

$$
\left(1 - x^2\right)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0 . \tag{8.2}
$$

将上式称为l阶缔合勒让德方程,求其幂级数形式的解.

5. 考虑三维波动方程

$$u_{tt}-a^2\Delta u=u_{tt}-a^2\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2u_r\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_\theta\sin\theta\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi}\\&=\frac{1}{r}\left(2u_r+ru_{rr}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(u_\theta\cos\theta+u_{\theta\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi}\end{aligned}\right\}.\quad(8.3)$$

利用习题 4 的方法求(8.2)分离变量得到的方程,并且求下面 m 阶贝赛尔方程的幂级数形式的解.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left[x^2-m^2\right]y=0.\qquad(8.4)$$

贝塞尔（Friedrich Wilhelm ，Bessel，1784～1846）,德国天文学家，数学家,20 岁时发表了有关彗星轨道测量的论文，1812 年当选为柏林科学院院士.贝塞尔的主要贡献在天文学，发展了实验天文学，以出版《天文学基础》为标志.他在数学研究中提出了常微分方程贝塞尔方程，并由此引进了贝塞尔函数，讨论了该函数的一系列性质及其求值方法，为解决物理学和天文学的有关问题提供了重要工具.在对三角函数系研究的基础上，他导出了著名的贝塞尔不等式，该不等式在逼近论、傅里叶分析和正交多项式理论等方面有很多应用.

6. 通过进一步查阅相关文献, 研究偏微分方程 4)和 5)的级数形式的解法.