第三章　导数

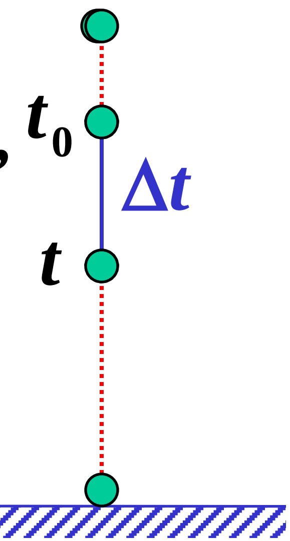
一、 导数的概念

3.1.1 两个例子 1.瞬时速度问题

设变速直线运动的路程函数为 $s(t)$，

求 t_0 时刻的瞬时速度，

取一邻近于 t_0 的时刻 t，运动时间 $\Delta t = t - t_0$，



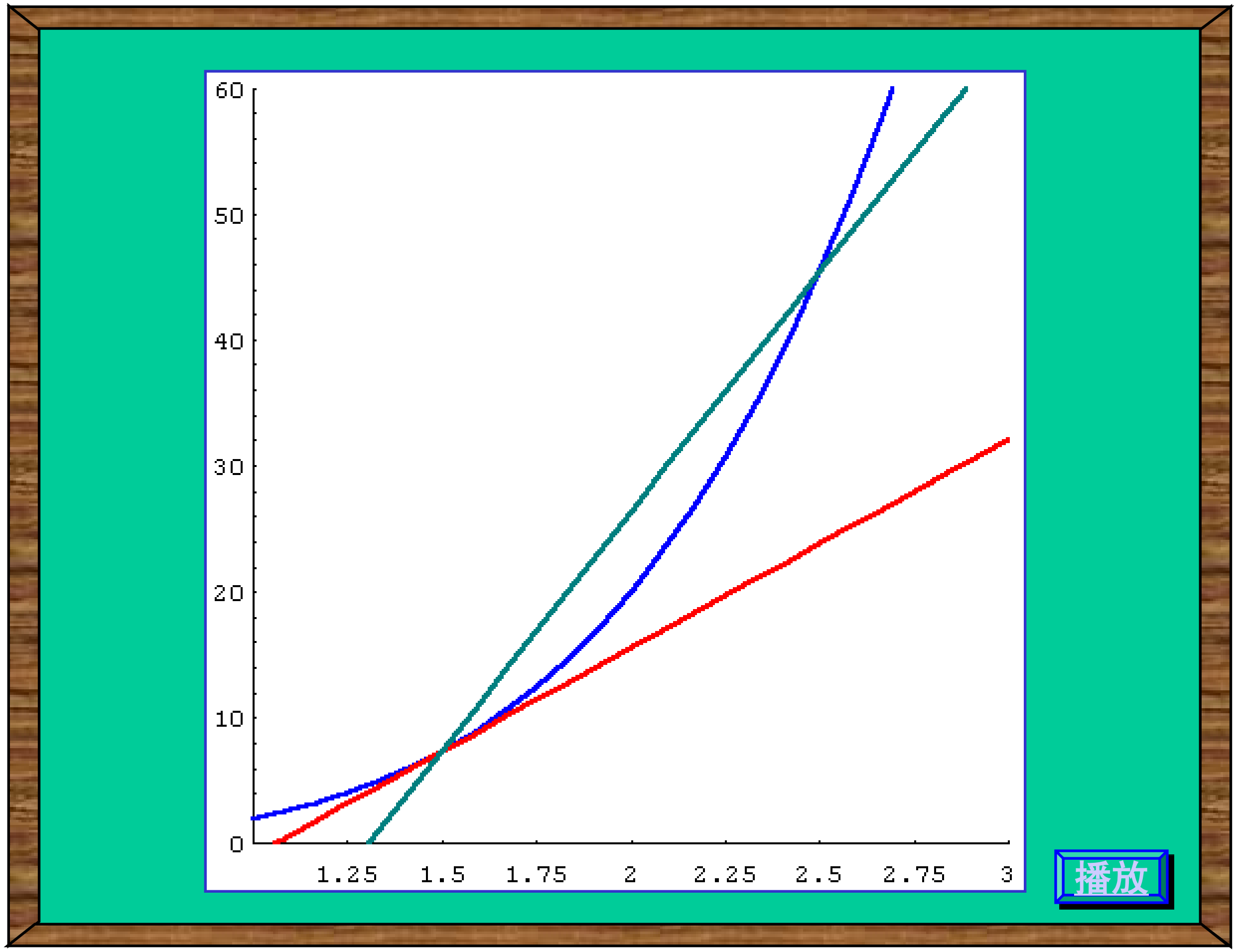
平均速度 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

当 $t \to t_0$ 时， 取极限得

瞬时速度 $v = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

记 $t = t_0 + \Delta t$， $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$

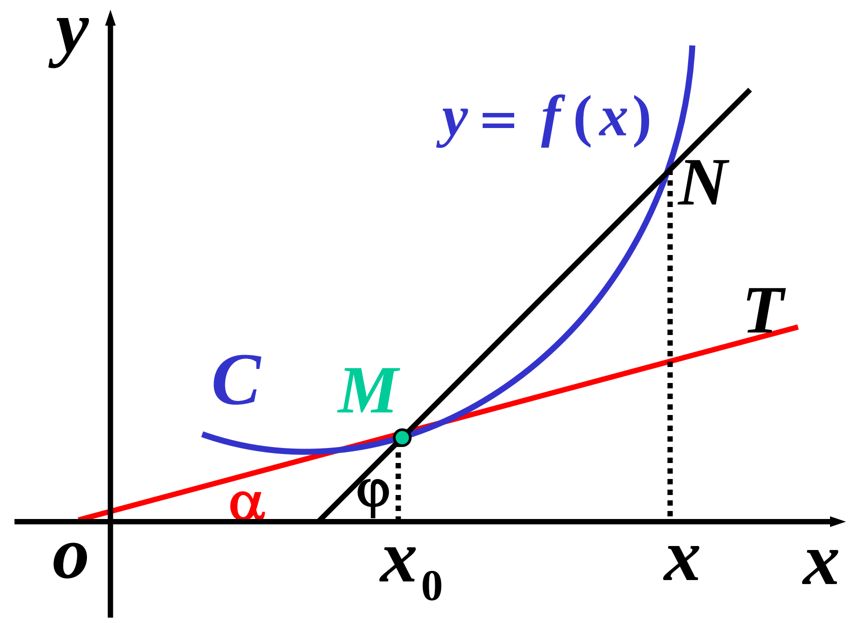
2.切线问题　割线的极限位置——切线位置



设 $M(x_0, y_0), N(x, y)$

割线MN的斜率为

$$\tan\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$



$$N \xrightarrow{\text{沿曲线}C} M, x \to x_0,$$

切线MT的斜率为 $k = \tan\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

记$x = x_0 + \Delta x$, 则$k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

3.1.2 导数的定义

定义 设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某个邻域内有定义, 如果极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在, 则称函数$y=f(x)$在点 x_0处可导, 并称这个极限为函数 $y=f(x)$在点 x_0处的导数, 记为$y'(x_0)$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \text{或} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}, \; f'(x_0)$$

即 $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

也可写成

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

其它形式 $$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

关于导数的说明：

1. 如果函数 $y = f(x)$在开区间 I 内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$在开区间 I 内可导.

2. 对于任一 $x \in I$,都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数 $f(x)$ 的导函数.

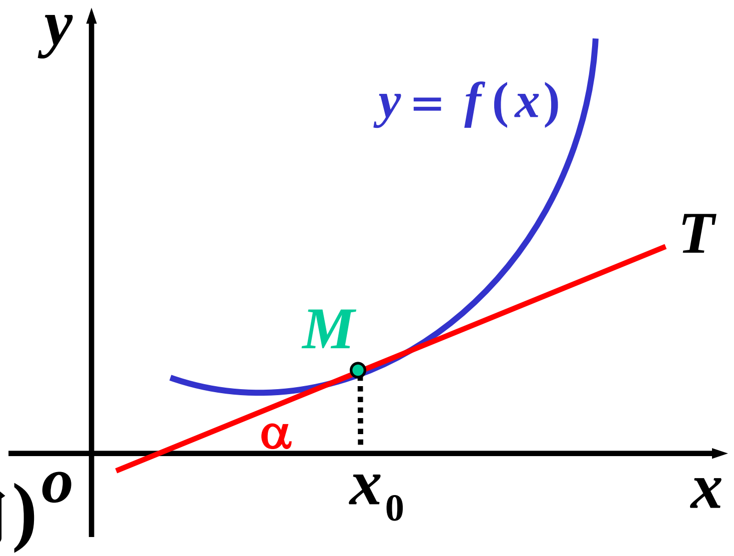
记作 $y', f'(x), \frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$.

导数的几何意义与物理意义

1.几何意义

$f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$ 在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$

2.物理意义 非均匀变化量的瞬时变化率.

变速直线运动: 路程对时间的导数为物体的瞬时速度.

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

交流电路: 电量对时间的导数为电流强度.

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}.$$

变化率的计算在自然科学和工程中,
甚至在社会科学中都是非常重要的.

由定义求导数

步骤: (1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例1 求函数 $f(x) = C$ (C为常数)的导数.

解 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{C - C}{h} = 0.$

即 $(C)' = 0.$

例2 求函数 $y = x^n$ (n为正整数)的导数.

解 $$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}] = nx^{n-1}$$

即 $$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

更一般地 $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$. $(\mu \in R)$

例如, $$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(x^{-1})' = (-1) x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

例3 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即 $$(\sin x)'=\cos x.$$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例4 求函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 $y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

即 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e.$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$

例5 求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\ln a.$$

即 $(a^x)'=a^x\ln a.$ $(e^x)'=e^x.$

例6 求函数 $f(x)=\arctan x$ 的□ 数.

解 $$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\arctan\frac{h}{1+(x+h)x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h}{1+(x+h)x}=\frac{1}{1+x^2}.$$

二、单侧导数

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

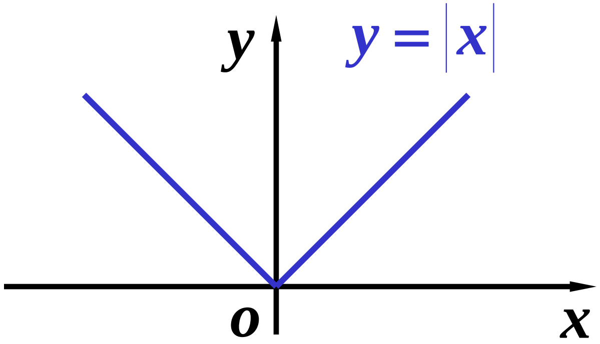
2.右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

说明： 1.函数 $f(x)$在点 x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数 $f'_-(x_0)$和右导数 $f'_+(x_0)$都存在且相等.

2.如果 $f(x)$在开区间(a,b)内可导，且 $f'_+(a)$及 $f'_-(b)$都存在，就说 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

例7 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.



解 $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h},$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

$$f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

$\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

三、 可导与连续的关系

定理1 凡可导函数都是连续函数.

证 设函数 $f(x)$在点 x_0可导,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$$

$$\alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0) \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x] = 0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$在点 x_0连续 .

注意: 1. 该定理的逆定理不成立.

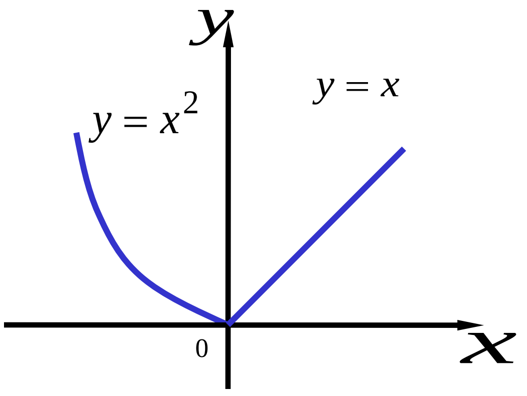
2. 若函数在某点不连续，则函数在该点不可导.

连续函数不存在导数举例

1. 函数 $f(x)$连续，若 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的角点，函数在角点不可导.

例如,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases},$$



在 $x = 0$处不可导， $x = 0$为 $f(x)$的角点.

2. 设函数 $f(x)$在点 x_0连续，但

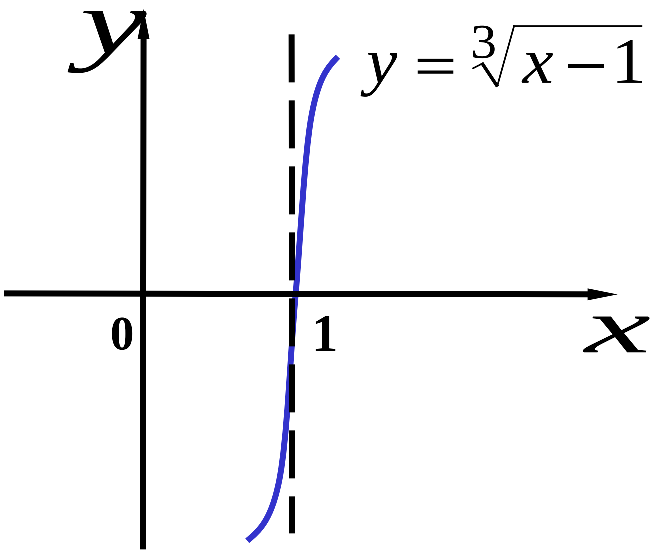
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

称函数 $f(x)$在点 x_0有无穷导数.(不可导)

例如,

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1},$$

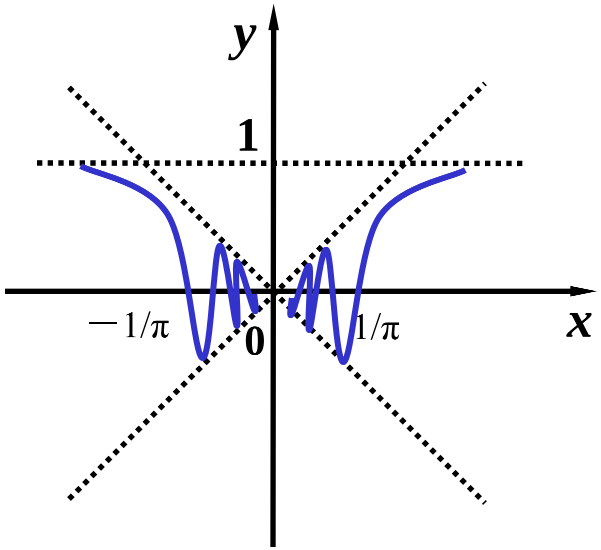
在 $x = 1$处不可导.



3. 函数 $f(x)$在连续点的左右导数都不存在(指摆动不定)，则x_0点不可导.

例如,

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$



在$x=0$处不可导.

例9 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^2} & x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，

确定 a,b 的值。

解 由$f(x)$在$x=1$可导，应有 $f'_{+}(1)=f'_{-}(1)$，

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left(a+\frac{a+b-1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{2}{1+x^2}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{(x-1)(1+x^2)}=-1$$

$\therefore a=-1, a+b=1.$ $\quad\therefore a=-1, b=2$

四、小结

1. 导数的定义

2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a$

3. 函数可导一定连续，但连续不一定可导

4. 求导数最基本的方法: 由定义求导数

作业:习题3.2: 1,2,3,4,7,8