

2002 年 01 月 17 日

一. 填空 (每题 4 分, 共 20 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 曲线  $x^2 + xy - y^2 = 1$  上点  $(1, 1)$  处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$

3. 设  $f(x) = (1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)$ , 则  $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

4.  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3 + 1) \cos x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$

5.  $\int (2 + \tan^3 x) \sec^2 x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$

二. 单项选择 (每题 4 分, 共 20 分)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列函数哪一个是其它三个的高阶无穷小量  $\underline{\hspace{2cm}}$

(A)  $x$ ; (B)  $\ln(1+x)$ ; (C)  $\sin x$ ; (D)  $1 - \cos x$ .

2. 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  不存在, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$   $\underline{\hspace{2cm}}$

(A)  $= 0$ ; (B) 存在, 但不能确定其值;  
(C) 不存在; (D) 不能确定其是否存在.

3. 函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在点  $x = 0$   $\underline{\hspace{2cm}}$

(A) 不连续; (B) 连续但不可导; (C) 没定义; (D) 导函数连续.

4. 设函数  $f(x)$  满足条件  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} = A > 0$ , 则  $f(x_0)$  是  $\underline{\hspace{2cm}}$

(A) 极小值; (B) 极大值; (C) 不是极值; (D) 不能确定是否为极值.

5. 下列广义积分中, 发散的为 \_\_\_\_\_

(A)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ ; (B)  $\int_0^1 \frac{dx}{x \tan x}$ ; (C)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{1.2}}$ ; (D)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ .

三. 计算 (每题 6 分, 共 12 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}.$

2. 设  $0 < x_0 < 1$ ,  $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{1+x_n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

四. 计算 (每题 6 分, 共 12 分)

1. 设  $f(x)$  二阶可导,  $F(x) = f(x \sin x)$ . 求  $F''(x)$ .

2. 设  $f(u)$  可导, 且  $f(u) \neq 0$ . 令  $\begin{cases} x = \int_a^{t^2} f(u) du \\ y = \int_a^t f(u) f(u^2) du \end{cases}$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

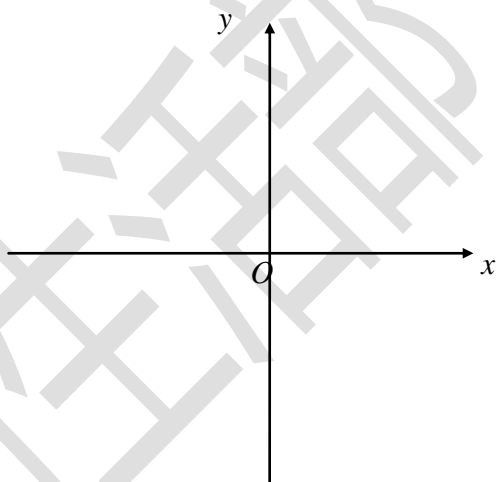
五. 计算 (每题 6 分, 共 12 分)

1.  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2} dx.$

2. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}, & x > 1 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ , 求  $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

六. (本题共 8 分) 设函数  $y = \frac{x^2}{1+x}$ , 填表并作图

单增区间	
单减区间	
凸区间	
凹区间	
极大值	
极小值	
斜渐近线	



七. (本题共 10 分)

求由  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$  所围图形的面积  $A$ , 并求该图形绕  $y$  轴所得旋转体的体积  $V$ .

八. (本题共 6 分)

设  $f(x)$ ,  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $\int_a^b g(x) dx = 0$ . 证明存在  $\xi \in (a, b)$ ,

使得  $f(\xi) \int_a^b g(x) dx = g(\xi)$ .