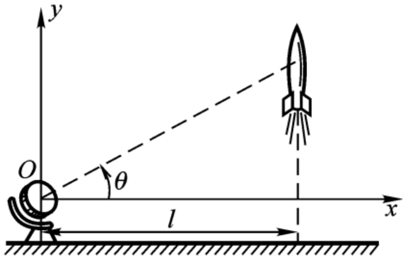
目录

1—3

解：



运动方程：$y = l\tan\theta$，其中$\theta = kt$。

将运动方程对时间求导并将$\theta = 30^0$代入得

$$v = \dot{y} = \frac{l\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{lk}{\cos^2\theta} = \frac{4lk}{3}$$

$$a = \ddot{y} = -\frac{2lk^2\sin\theta}{\cos^3\theta} = \frac{8\sqrt{3}lk^2}{9}$$

回到目录

1—6

证明：质点做曲线运动，

所以质点的加速度为：$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$，

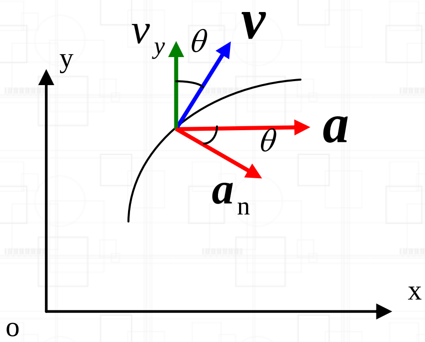
设质点的速度为$\boldsymbol{v}$，由图可知:

$\cos\theta = \frac{v_y}{v} = \frac{a_n}{a}$，所以: $a = \frac{a_n v}{v_y}$

将$v_y = c$，$a_n = \frac{v^2}{\rho}$

代入上式可得 $a = \frac{v^3}{c\rho}$

证毕



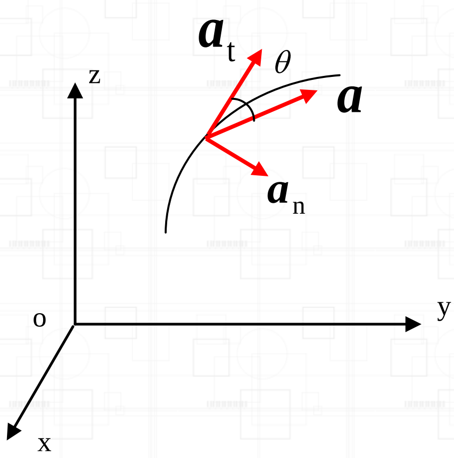
回到目录

1—7

证明：因为$\rho = \frac{v^2}{a_n}$，$a_n = a\sin\theta = \frac{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}\|}{v}$

所以：$\rho = \frac{v^3}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}\|}$

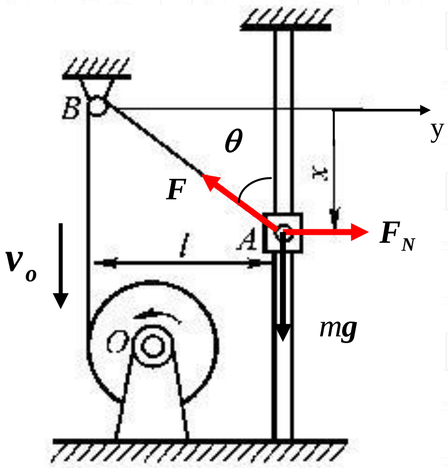
证毕



回到目录

1—10

解：设初始时,绳索 AB 的长度为 L ,时刻 t 时的长度为 s ,则有关系式：



$s=L-v_0t$，并且 $s^2=l^2+x^2$

将上面两式对时间求导得：

$\dot{s}=-v_0$，$2s\dot{s}=2x\dot{x}$

由此解得：$\dot{x}=-\dfrac{sv_0}{x}$ （a）

(a)式可写成：$x\dot{x}=-v_0s$，将该式对时间求导得：

$\ddot{x}x+\dot{x}^2=-\dot{s}v_0=v_0^2$ (b)

将(a)式代入(b)式可得：$a_x=\ddot{x}=\dfrac{v_0^2-\dot{x}^2}{x}=-\dfrac{v_0^2l^2}{x^3}$（负号说明滑块 A 的加速度向上）

取套筒 A 为研究对象，受力如图所示，根据质点矢量形式的运动微分方程有：

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_N+m\boldsymbol{g}$$

将该式在 x,y 轴上投影可得直角坐标形式的运动微分方程：

$$m\ddot{x}=mg-F\cos\theta$$
$$m\ddot{y}=-F\sin\theta+F_N$$

其中：

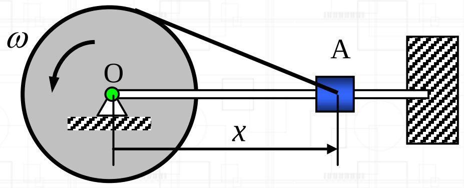
$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}},\sin\theta=\frac{l}{\sqrt{x^2+l^2}}\quad\ddot{x}=-\frac{v_0^2l^2}{x^3},\ddot{y}=0$$

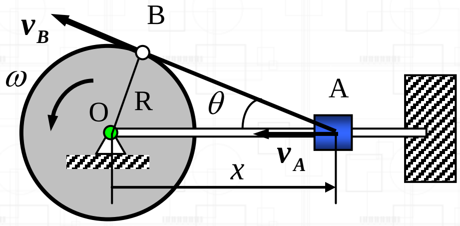
将其代入直角坐标形式的运动微分方程可得：

$$F=m(g+\frac{v_0^2l^2}{x^3})\sqrt{1+(\frac{l}{x})^2}$$

回到目录

1—11





解：设 B 点是绳子 AB 与圆盘的切点，由于绳子相对圆盘无滑动，所以 $v_B = \omega R$，由于绳子始终处于拉直状态，因此绳子上 A、B 两点的速度在 A、B 两点连线上的投影相等，即：

$$v_B = v_A \cos\theta \qquad \text{(a)}$$

因为

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{x^2 - R^2}}{x} \qquad \text{(b)}$$

将上式代入（a）式得到 A 点速度的大小为：

$$v_A = \omega R \frac{x}{\sqrt{x^2 - R^2}} \qquad \text{(c)}$$

由于 $v_A = -\dot{x}$，（c）式可写成：$-\dot{x}\sqrt{x^2 - R^2} = \omega R x$，将该式两边平方可得：

$$\dot{x}^2(x^2 - R^2) = \omega^2 R^2 x^2$$

将上式两边对时间求导可得：

$$2\dot{x}\ddot{x}(x^2 - R^2) - 2x\dot{x}^3 = 2\omega^2 R^2 x\dot{x}$$

将上式消去 $2\dot{x}$ 后，可求得：

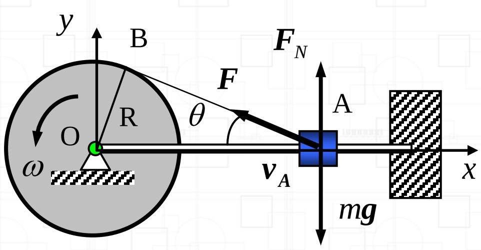
$$\ddot{x} = -\frac{\omega^2 R^4 x}{(x^2 - R^2)^2} \qquad \text{(d)}$$

由上式可知滑块 A 的加速度方向向左，其大小为 $a_A = \dfrac{\omega^2 R^4 x}{(x^2 - R^2)^2}$

取套筒 A 为研究对象，受力如图所示，根据质点矢量形式的运动微分方程有：

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_N + m\boldsymbol{g}$$

将该式在 x, y 轴上投影可得直角坐标形式的运动微分方程：



$$m\ddot{x} = -F\cos\theta$$
$$m\ddot{y} = F\sin\theta + F_N - mg$$

其中：

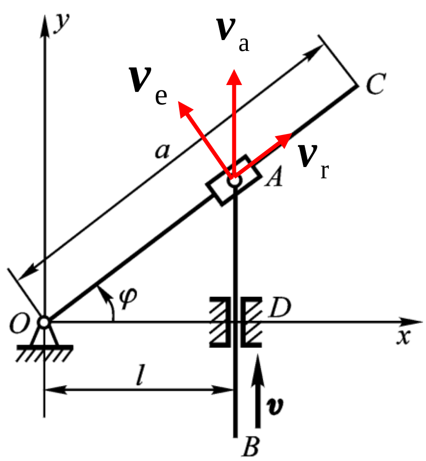
$$\sin\theta = \frac{R}{x},\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{x^2 - R^2}}{x},\qquad \ddot{x} = -\frac{\omega^2 R^4 x}{(x^2 - R^2)^2}, \ddot{y} = 0$$

将其代入直角坐标形式的运动微分方程可得

$$F = \frac{m\omega^2 R^4 x^2}{(x^2 - R^2)^{\frac{5}{2}}},\qquad F_N = mg - \frac{m\omega^2 R^5 x}{(x^2 - R^2)^{\frac{5}{2}}}$$

回到目录

1—13



解：动点：套筒 A；

动系：OC 杆；

定系：机座；

运动分析：

绝对运动：直线运动；

相对运动：直线运动；

牵连运动：定轴转动。

根据速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

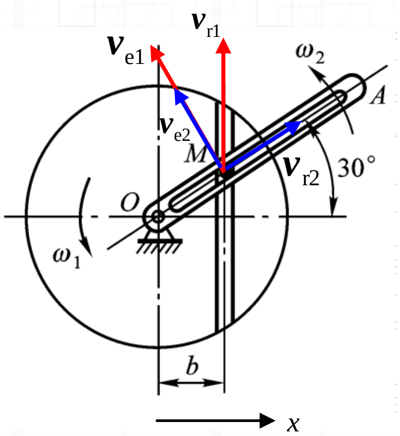
有：$v_a\cos\varphi = v_e$，因为 AB 杆平动，所以 $v_a = v$，

由此可得：$v\cos\varphi = v_e$，OC 杆的角速度为 $\omega = \frac{v_e}{OA}$，$OA = \frac{l}{\cos\varphi}$，所以 $\omega = \frac{v\cos^2\varphi}{l}$

当 $\varphi = 45^0$ 时，OC 杆上 C 点速度的大小为：$v_C = \omega a = \frac{av\cos^2 45^0}{l} = \frac{av}{2l}$

回到目录

1—15



解：动点：销子 M

动系 1：圆盘

动系 2：OA 杆

定系：机座；

运动分析：

绝对运动：曲线运动

相对运动：直线运动

牵连运动：定轴转动

根据速度合成定理有

$$\boldsymbol{v}_{a1} = \boldsymbol{v}_{e1} + \boldsymbol{v}_{r1}\,, \qquad \boldsymbol{v}_{a2} = \boldsymbol{v}_{e2} + \boldsymbol{v}_{r2}$$

由于动点 M 的绝对速度与动系的选取无关，即 $\boldsymbol{v}_{a2} = \boldsymbol{v}_{a1}$，由上两式可得：

$$\boldsymbol{v}_{e1} + \boldsymbol{v}_{r1} = \boldsymbol{v}_{e2} + \boldsymbol{v}_{r2} \qquad \text{(a)}$$

将（a）式在向在 x 轴投影,可得：

$$-v_{e1}\sin 30^0 = -v_{e2}\sin 30^0 + v_{r2}\cos 30^0$$

由此解得：

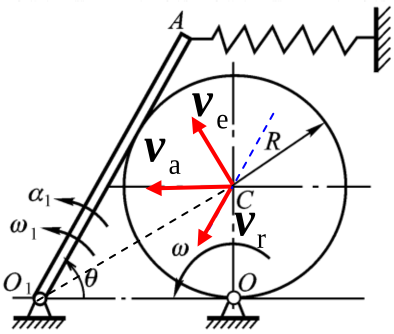
$$v_{r2} = \tan 30^0 (v_{e2} - v_{e1}) = OM\tan 30^0(\omega_2 - \omega_1) = \frac{b\sin 30^0}{\cos^2 30^0}(3-9) = -0.4m/s$$

$$v_{e2} = OM\omega_2 = 0.2\sqrt{3}$$

$$v_M = v_{a2} = \sqrt{v_{e2}^2 + v_{r2}^2} = 0.529m/s$$

回到目录

1—17



解：动点：圆盘上的 C 点；

动系：O_1A 杆；

定系：机座；

运动分析：绝对运动：圆周运动；

相对运动：直线运动（平行于 O_1A 杆）；

牵连运动：定轴转动。

根据速度合成定理有

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r \qquad \text{(a)}$$

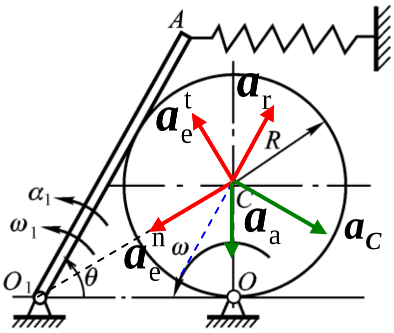
将（a）式在垂直于 O_1A 杆的轴上投影以及在 O_1C 轴上投影得：

$$v_a\cos 30^0 = v_e\cos 30^0\,, \quad v_a\sin 30^0 = v_r\sin 30^0$$

$$v_e = v_a = R\omega\,, \quad v_a = v_r = R\omega\,, \quad \omega_1 = \frac{v_e}{O_1C} = \frac{R\omega}{2R} = 0.5\omega$$

根据加速度合成定理有

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \qquad \text{(b)}$$



将（b）式在垂直于 O_1A 杆的轴上投影得

$$-a_a\sin 30^0 = a_e^t\cos 30^0 + a_e^n\sin 30^0 - a_C$$

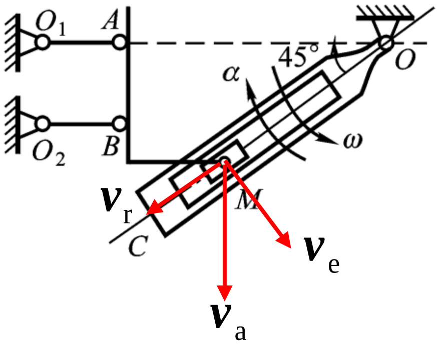
其中：$a_a = R\omega^2$，$a_e^n = 2R\omega_1^2$，$a_C = 2\omega_1 v_r$

由上式解得：$\alpha_1 = \dfrac{a_e^t}{2R} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\omega^2$

回到目录

1—19

解：由于 ABM 弯杆平移，所以有



$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_M,\quad \boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_M$$

取：动点：滑块 M；

动系：OC 摇杆；

定系：机座；

运动分析：

绝对运动：圆周运动；

相对运动：直线运动；

牵连运动：定轴转动。

根据速度合成定理

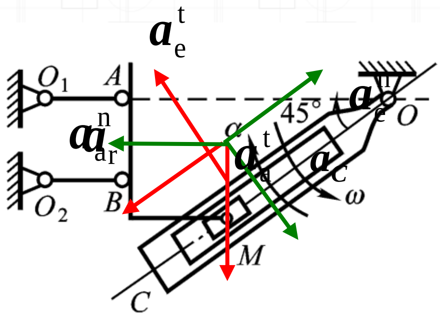
$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

可求得：

$$v_M = v_A = v_a = \sqrt{2}v_e = \sqrt{2}b\omega = 2\sqrt{2}\text{m/s},\quad v_r = v_e = b\omega = 2\text{m/s},$$

$$\omega_1 = \frac{v_A}{O_1A} = \frac{2\sqrt{2}}{1.5} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\text{rad/s}$$

根据加速度合成定理



$$\boldsymbol{a}_a^t + \boldsymbol{a}_a^n = \boldsymbol{a}_e^t + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

将上式沿 a_C 方向投影可得：

$$a_a^t\cos 45^0 - a_a^n\sin 45^0 = -a_e^t + a_C$$

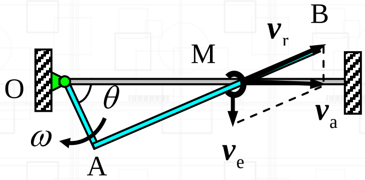
由于 $a_a^n = \omega_1^2 l = \dfrac{16}{3}\text{m/s}^2$，$a_e^t = \alpha b = 1\text{m/s}^2$，$a_C = 2\omega$

$$a_a^t = \frac{16}{3} + 7\sqrt{2} = 15.23\ m/s^2,\qquad \alpha_1 = \frac{a_a^t}{l} = 10.16\ \text{rad/s}^2$$

回到目录

1-20

解：取小环 M 为动点，OAB 杆为动系



运动分析

绝对运动：直线运动；

相对运动：直线运动；

牵连运动：定轴转动。

由运动分析可知点的绝对速度、相对速度和牵连速度的方向如图所示，其中：

$$v_e = OM\omega = \frac{r\omega}{\cos 60^0} = 2r\omega$$

根据速度合成定理：

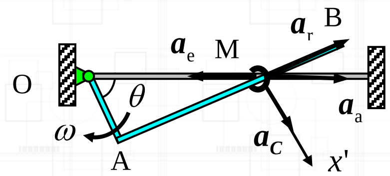
$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

可以得到：

$$v_a = \tan\theta v_e = 2r\omega\tan 60^0 = 2\sqrt{3}r\omega \text{ ，} v_r = \frac{v_e}{\cos 60^0} = 4r\omega$$

加速度如图所示，其中：

$$a_e = OM\omega^2 = \frac{r\omega^2}{\cos 60^0} = 2r\omega^2,$$



$$a_C = 2\omega v_r = 8r\omega^2$$

根据加速度合成定理：

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

将上式在 x' 轴上投影，可得： $a_a\cos\theta = -a_e\cos\theta + a_C$，由此求得： $a_a = 14r\omega^2$

回到目录

1—21

解：求汽车 B 相对汽车 A 的速度是指以汽车 A 为参考系观察汽车 B 的速度。

取：动点：汽车 B；

动系：汽车 A（Ox’y’）；

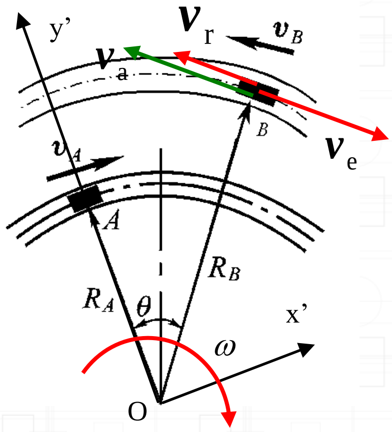
定系：路面。

运动分析

绝对运动：圆周运动；

相对运动：圆周运动；

牵连运动：定轴转动（汽车 A 绕 O 做定轴转动）



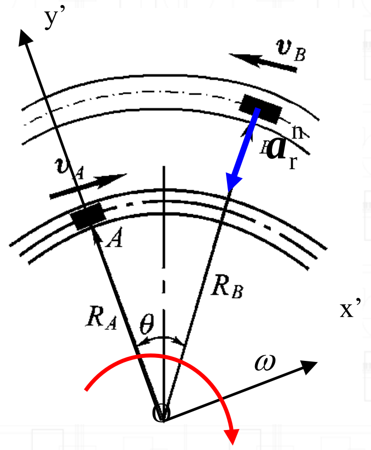
求相对速度，根据速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

将上式沿绝对速度方向投影可得：

$$v_a = -v_e + v_r$$

因此 $$v_r = v_e + v_a$$



其中：$v_a = v_B$，$v_e = \omega R_B$，$\omega = \dfrac{v_A}{R_A}$，

由此可得：$v_r = \dfrac{R_B}{R_A} v_A + v_B = \dfrac{380}{9}\text{m/s}$

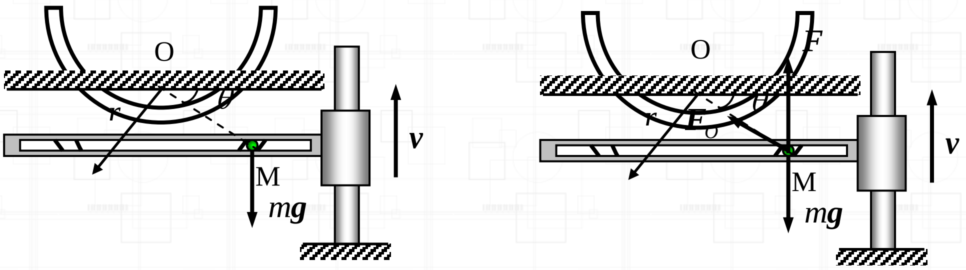
求相对加速度，由于相对运动为圆周运动，相对速度的大小为常值，因此有：

$$a_r = a_r^n = \frac{v_r^2}{R_B} = 1.78\text{m/s}^2$$

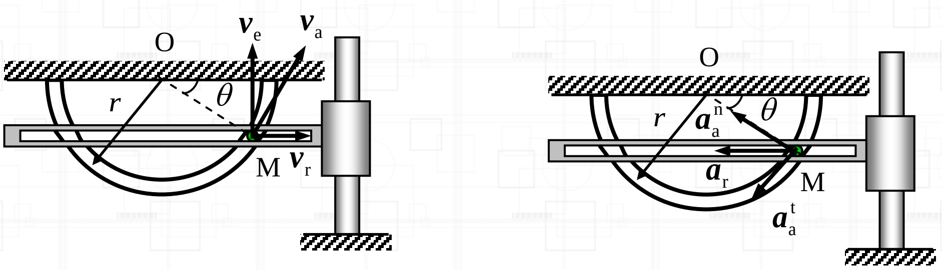
回到目录

1-23

质量为m销钉 M 由水平槽带动，使其在半径为r的固定圆槽内运动。设水平槽以匀速v向上运动，不计摩擦。求图示瞬时，圆槽作用在销钉 M 上的约束力。



解：销钉 M 上作用有水平槽的约束力$\boldsymbol{F}$和圆槽的约束力$\boldsymbol{F}_O$（如图所示）。由于销钉 M 的运动是给定的，所以先求销钉的加速度，在利用质点运动微分方程求约束力。取销钉为动点，水平槽为动系。由运动分析可知销钉的速度图如图所示。



根据速度合成定理有 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$

由此可求出：$v_a = \dfrac{v_e}{\cos\theta} = \dfrac{v}{\cos\theta}$。再根据加速度合成定理有：$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r$

由于绝对运动是圆周运动，牵连运动是匀速直线平移，所以$\boldsymbol{a}_e = 0$，并且上式可写成：

$$\boldsymbol{a}_a^t + \boldsymbol{a}_a^n = \boldsymbol{a}_r$$

因为 $a_a^n=\dfrac{v_a^2}{r}=\dfrac{v^2}{r\cos^2\theta}$，所以根据上式可求出： $a_a^t=a_a^n\tan\theta=\dfrac{v^2\sin\theta}{r\cos^3\theta}$。

根据矢量形式的质点运动微分方程有：

$$m(\boldsymbol{a}_a^t+\boldsymbol{a}_a^n)=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_O+m\boldsymbol{g}$$

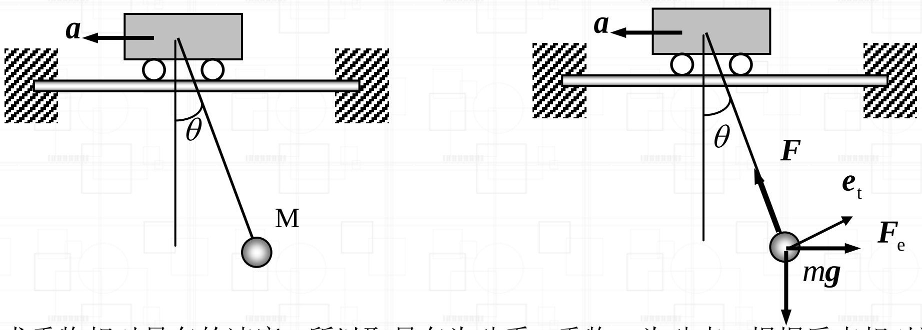
将该式分别在水平轴上投影： $m(a_a^t\sin\theta+a_a^n\cos\theta)=F_O\cos\theta$

由此求出：
$$F_O=\frac{mv^2}{r\cos^4\theta}$$

回到目录

1-24

图示所示吊车下挂一重物 M，绳索长为l，初始时吊车与重物静止。若吊车从静止以均加速度 a 沿水平滑道平移。试求重物 M 相对吊车的速度与摆角 θ 的关系式。



解：由于要求重物相对吊车的速度，所以取吊车为动系，重物 M 为动点。根据质点相对运动微分方程有

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}+m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}_e$$

将上式在切向量方向投影有

$$ma_r^t=ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta+F_e\cos\theta$$

因为 $F_e=ma_e=ma,\ \ddot{\theta}=\dfrac{d\dot{\theta}}{dt}=\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$，所以上式可写成

$$ml\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}=-mg\sin\theta+ma\cos\theta$$

整理上式可得

$$l\dot{\theta}d\dot{\theta}=-g\sin\theta d\theta+a\cos\theta d\theta$$

将上式积分：

$$\frac{l}{2}\dot{\theta}^2=g\cos\theta+a\sin\theta+c$$

其中 c 为积分常数（由初始条件确定），因为相对速度 $v_{\mathrm{r}}=l\dot{\theta}$，上式可写成

$$\frac{v_{\mathrm{r}}^2}{2l}=g\cos\theta+a\sin\theta+c$$

初始时 $\theta=0$，系统静止，$v_{\mathrm{a}}=v_{\mathrm{e}}=0$，根据速度合成定理可知 $v_{\mathrm{r}}=0$，由此确定 $c=-g$。

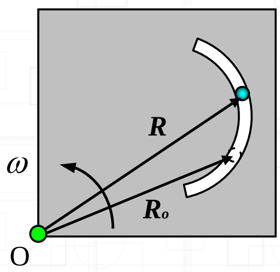
重物相对速度与摆角的关系式为:

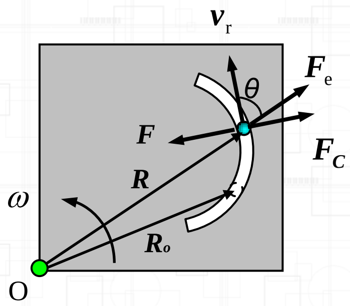
$$v_{\mathrm{r}}^2=2l[g(\cos\theta-1)+a\sin\theta]$$

回到目录

1-26

水平板以匀角速度 ω 绕铅垂轴 O 转动，小球 M 可在板内一光滑槽中运动（如图 7-8），初始时小球相对静止且到转轴 O 的距离为 R_O，求小球到转轴的距离为 $R>R_O$ 时的相对速度。





解：取小球为动点，板为动系，小球在水平面的受力如图所示（铅垂方向的力未画出）。根据质点相对运动微分方程有：

$$m\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}=\sum\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{F}_C$$

将上式在 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 上投影有 $$ma_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=F_{\mathrm{e}}\cos\theta$$

因为 $F_{\mathrm{e}}=mR\omega^2$，$\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}R}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=v_{\mathrm{r}}\cos\theta$，所以上式可写成

$$mv_{\mathrm{r}}\cos\theta\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}R}=mR\omega^2\cos\theta$$

整理该式可得： $$v_{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}R}=R\omega^2$$

将该式积分有： $$\frac{1}{2}v_{\mathrm{r}}^2=\frac{1}{2}\omega^2R^2+c$$

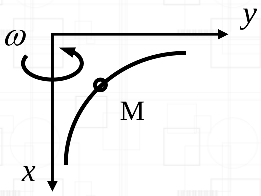
初始时 $R=R_O$，$v_{\mathrm{r}}=0$，由此确定积分常数 $c=-\dfrac{1}{2}\omega^2R_O^2$，因此得到相对速度为

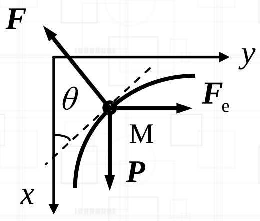
$$v_{\mathrm{r}}=\omega\sqrt{R^2-R_O^2}$$

回到目录

1-27

重为 P 的小环 M 套在弯成 $xy=c^2$ 形状的金属丝上，该金属丝绕铅垂轴 x 以匀角速度 ω 转动，如图所示。试求小环 M 的相对平衡位置以及金属丝作用在小环上的约束力。





解： 取小环为动点，金属丝为动系，根据题意，相对平衡位置为 $a_{\mathrm{r}}=0$，因为金属丝为曲线，所以 $v_{\mathrm{r}}=0$，因此在本题中相对平衡位置就是相对静止位置。小环受力如图所示。其中 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}},\boldsymbol{P}$ 分别为约束力、牵连惯性力和小环的重力。根据质点相对运动微分方程有：

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{P}=0$$

其中：$F_{\mathrm{e}}=\dfrac{P}{g}y\omega^2$，将上式分别在 x,y 轴上投影有

$$\begin{aligned}&P-F\sin\theta=0\\&F_{\mathrm{e}}-F\cos\theta=0\end{aligned}\qquad\text{（a）}$$

以为 $\tan\theta=-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $y=\dfrac{c^2}{x}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{c^2}{x^2}$，因此

$$\tan\theta=\frac{c^2}{x^2}\qquad\text{（b）}$$

由（a）式可得

$$\tan\theta=\frac{P}{F_{\mathrm{e}}}\qquad\text{（c）}$$

将 $F_{\mathrm{e}}=\dfrac{P}{g}y\omega^2$ 和式（b）代入式（c），并利用 $xy=c^2$，可得：

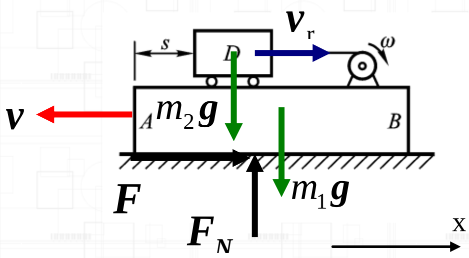
$$x=\left(\frac{c^4\omega^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}, y=\left(\frac{c^2 g}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

再由方程（a）中的第一式可得

$$F=\frac{P}{\sin\theta}=P\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}}=P\sqrt{1+\frac{x^4}{c^4}}=P\sqrt{1+\left(\frac{c\omega^2}{g}\right)^{\frac{4}{3}}}$$

回到目录

2-1



解：当摩擦系数 f 足够大时，平台 AB

相对地面无滑动，此时摩擦力 $F \le fF_N$

取整体为研究对象，受力如图，

系统的动量：$\boldsymbol{p}=m_2\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$

将其在 x 轴上投影可得：$p_x=m_2 v_{\mathrm{r}}=m_2 bt$

根据动量定理有：

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=m_2 b=F\le fF_N=f(m_1+m_2)g$$

即：当摩擦系数 $f\ge\dfrac{m_2 b}{(m_1+m_2)g}$ 时，平台 AB 的加速度为零。

当摩擦系数 $f<\dfrac{m_2 b}{(m_1+m_2)g}$ 时，平台 AB 将向左滑动，此时系统的动量为：

$$\boldsymbol{p}=m_2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}})+m_1\boldsymbol{v}$$

将上式在 x 轴投影有：

$$p_x=m_2(-v+v_{\mathrm{r}})+m_1(-v)=m_2 bt-(m_1+m_2)v$$

根据动量定理有：

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=m_2 b-(m_1+m_2)a=F=fF_N=f(m_1+m_2)g$$

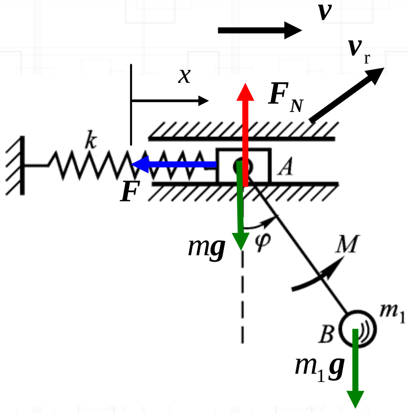
由此解得平台的加速度为：$a=\dfrac{m_2 b}{m_1+m_2}-fg$（方向向左）

回到目录

2-2

取弹簧未变形时滑块 A 的位置为 x 坐标原点，取整体为研究对象，受力如图所示,其中 $\boldsymbol{F}$ 为作用在滑块 A 上的弹簧拉力。系统的动量为：

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + m_1\boldsymbol{v}_1 = m\boldsymbol{v} + m_1(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_\mathrm{r})$$



将上式在 x 轴投影：

$$p_x = m\dot{x} + m_1(\dot{x} + l\omega\cos\varphi)$$

根据动量定理有：

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = (m+m_1)\ddot{x} - m_1 l\omega^2\sin\varphi = -F = -kx$$

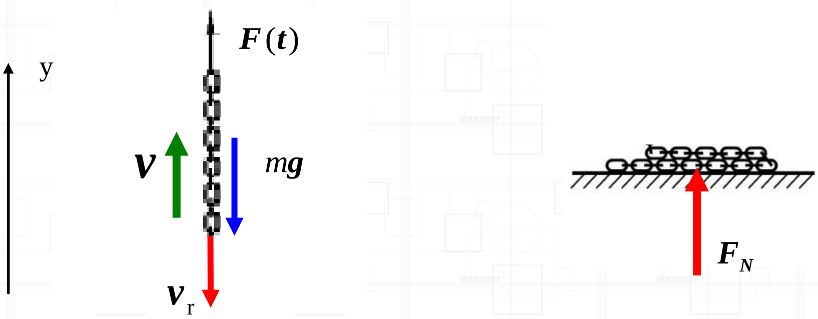
系统的运动微分方程为：

$$(m+m_1)\ddot{x} + kx = m_1 l\omega^2\sin\omega t$$

回到目录

2—4

取提起部分为研究对象，受力如图(a)所示，提起部分的质量为 $m = \rho vt$，提起部分的速度为 $\boldsymbol{v}$，根据点的复合运动可知质点并入的相对速度为 $\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$ 图 a 所示)。



(a) (b)

根据变质量质点动力学方程有：

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(t) + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{v}_\mathrm{r}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(t) + (\rho vt)\boldsymbol{g} + \boldsymbol{v}_\mathrm{r}\rho v$$

将上式在 y 轴上投影有：

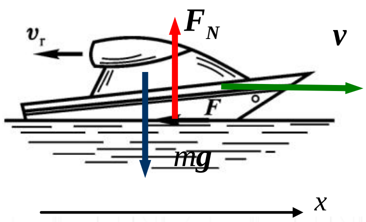
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(t) - (\rho vt)g - v_\mathrm{r}\rho v = F(t) - \rho(vgt + v^2)$$

由于 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$，所以由上式可求得：$F(t) = \rho(vgt + v^2)$。

再取地面上的部分为研究对象，由于地面上的物体没有运动，并起与提起部分没有相互作用力，因此地面的支撑力就是未提起部分自身的重力，即：$F_N = (l - vt)\rho g$

回到目录

2—5



将船视为变质量质点，取其为研究对象，受力如图。根据变质量质点动力学方程有：

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{v}_\mathrm{r}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

船的质量为：$m = m_0 - qt$，水的阻力为 $\boldsymbol{F} = -f\boldsymbol{v}$

将其代入上式可得：

$$(m_0 - qt)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -f\boldsymbol{v} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_N - q\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$$

将上式在 x 轴投影：$(m_0 - qt)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -fv - q(-v_\mathrm{r})$。应用分离变量法可求得

$$\ln(qv_\mathrm{r} - fv) = \frac{f}{q}\ln(m_0 - qt) + c$$

由初始条件确定积分常数：$c = \ln(qv_r) - \dfrac{f}{q}\ln m_0$，并代入上式可得：

$$v = \frac{qv_\mathrm{r}}{f}\left[1 - \left(\frac{m_0 - qt}{m_0}\right)^{\frac{f}{q}}\right]$$

回到目录

2-8

图 a 所示水平方板可绕铅垂轴 z 转动，板对转轴的转动惯量为 J，质量为 m 的质点沿半径为 R 的圆周运动，其相对方板的速度大小为 u（常量）。圆盘中心到转轴的距离为 l。质点在方板上的位置由 φ 确定。初始时，$\varphi = 0$，方板的角速度为零，求方板的角速度与 φ 角的关系。

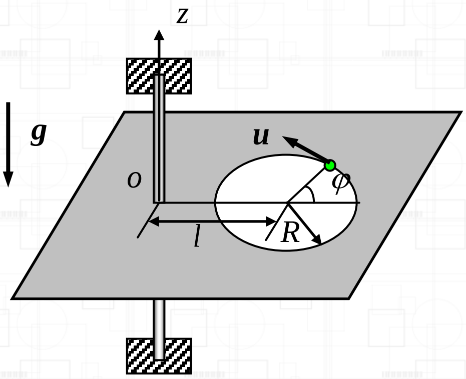


图 a

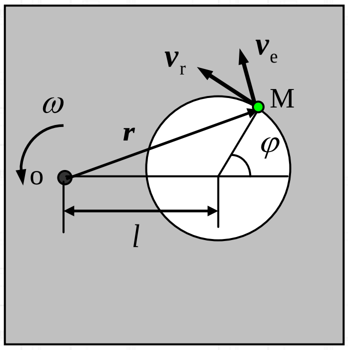


图 b

解：取方板和质点为研究对象，作用在研究对象上的外力对转轴 z 的力矩为零，因此系统对 z 轴的动量矩守恒。下面分别计
算方板和质点对转轴的动量矩。

设方板对转轴的动量矩为L_1，其角速度为ω，于是有

$$L_1 = J\omega$$

设质点 M 对转轴的动量矩为L_2，取方板为动系，质点 M 为动点，其牵连速度和相对速度分

别为$\boldsymbol{v}_e, \boldsymbol{v}_r$。相对速度沿相对轨迹

的切线方向，牵连速度垂直于 OM 连线。质点 M 相对惯性参考系的绝对速度$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$。

它对转轴的动量矩为

$$L_2 = L_2(m\boldsymbol{v}_a) = L_2(m\boldsymbol{v}_e) + L_2(m\boldsymbol{v}_r)$$

其中：

$$L_2(m\boldsymbol{v}_e) = mr^2\omega = m[(l + R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi)^2]\omega$$

$$L_2(m\boldsymbol{v}_r) = m(l + R\cos\varphi)v_r\cos\varphi + mR\sin^2\varphi v_r$$

系统对 z 轴的动量矩为$L_\varphi = L_1 + L_2$。初始时，$\omega = 0, \varphi = 0, v_r = u$，此时系统对 z 轴的动

量矩为

$$L_0 = m(l + R)u$$

当系统运动到图 8-12 位置时，系统对 z 轴的动量矩为

$$\begin{aligned} L_\varphi &= J\omega + m[(l + R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi)^2]\omega + m(l + R\cos\varphi)u\cos\varphi + mR\sin^2\varphi u \\ &= [J + (l^2 + R^2 + 2lR\cos\varphi)m]\omega + (l\cos\varphi + R)mu \end{aligned}$$

由于系统对转轴的动量矩守恒。所以有 $L_\varphi = L_0$，因此可得：

$$m(l+R)u = [J + (l^2 + R^2 + 2lR\cos\varphi)m]\omega + (l\cos\varphi + R)mu$$

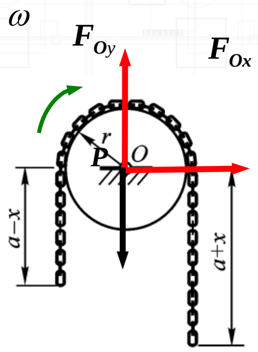
由上式可计算出方板的角速度为

$$\omega = \frac{ml(1-\cos\varphi)u}{J + m(l^2 + R^2 + 2lR\cos\varphi)}$$

回到目录

2—11

取链条和圆盘为研究对象，受力如图（链条重力未画），设圆盘的角速度为 ω，则系统对 O 轴的动量矩为：



$$L_O = J_O\omega + \rho_l(2a + \pi r)r^2\omega$$

根据动量矩定理有：

$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = [J_O + \rho_l(2a+\pi r)r^2]\dot{\omega}$$
$$= \rho_l(a+x)gr - \rho_l(a-x)gr$$

整理上式可得：

$$[J_O + \rho_l(2a+\pi r)r^2]\dot{\omega} = \rho_l(2x)gr$$

由运动学关系可知：$\omega r = \dot{x}$，因此有：$\dot{\omega}r = \ddot{x}$。上式可表示成：

$$[J_O + \rho_l(2a+\pi r)r^2]\ddot{x} = 2\rho_l gr^2 x$$

令 $\lambda^2 = \dfrac{2\rho_l gr^2}{J_O + \rho_l(2a+\pi r)r^2}$，上述微分方程可表示成：$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0$，该方程的通解为：

$$x = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}$$

根据初始条件：$t=0, x=x_0, \dot{x}=0$ 可以确定积分常数 $c_1 = c_2 = \dfrac{x_0}{2}$，于是方程的解为：

$$x = x_0 \mathrm{ch}\lambda t$$

系统的动量在 x 轴上的投影为：

$$p_x = \int_0^\pi \omega r \sin\theta \rho_l r \mathrm{d}\theta = 2\omega\rho_l r^2 = 2\rho_l r\dot{x}$$

系统的动量在 y 轴上的投影为：

$$p_y = \rho_l(a-x)\omega r - \rho_l(a+x)\omega r = -2\rho_l x\omega r = 2\rho_l x\dot{x}$$

根据动量定理：

$$\dot{p}_x = F_{0x}$$
$$\dot{p}_y = F_{0y} - P - \rho_l(2a + \pi r)g$$

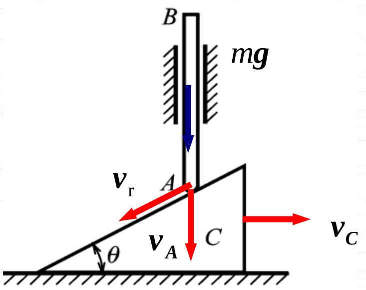
由上式解得：

$$F_{Ox} = 2\rho_l r x_0 \lambda^2 \mathrm{ch}\lambda t$$ ，

$$F_{oy} = P + \rho_l(2a + \pi r)g - 2\rho_l \lambda^2 x_0^2 \mathrm{ch}(2\lambda t)$$

回到目录

2—14　取整体为研究对象，系统的动能为：



$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2$$

其中：v_A, v_C 分别是 AB 杆的速度和楔块 C 的速度。

若 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$ 是 AB 杆上的 A 点相对楔块 C 的速度，则根据

复合运动速度合成定理可知：

$$v_c = v_A \cot\theta \text{ ,}$$

因此系统的动能可表示为：

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m_C \cot^2 \theta v_A^2 = \frac{1}{2}(m + m_C \cot^2 \theta) v_A^2 \text{ ,}$$

系统在运动过程中，AB 杆的重力作功。根据动能定理的微分形式有：

$$\mathrm{d}T = \delta W \text{ ,}$$

系统的动力学方程可表示成：

$$\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(m + m_C \cot^2 \theta) v_A^2\right] = (m + m_C \cot^2 \theta) v_A \mathrm{d}v_A = m g v_A \mathrm{d}t$$

由上式解得：

$$a_A = \frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = \frac{mg}{m + m_C \cot^2 \theta} \text{ , } \quad a_C = a_A \cot\theta$$

回到目录

2—17　质量为m_0的均质物块上有一半径为R的半圆槽,放在光滑的水平面上如图 A 所示。质量为m $(m_0=3m)$光滑小球可在槽内运动，初始时，系统静止，小球在 A 处。求小球运动到 B 处$\varphi=30^0$时相对物块的速度、物块的速度、槽对小球的约束力和地面对物块的约束力。

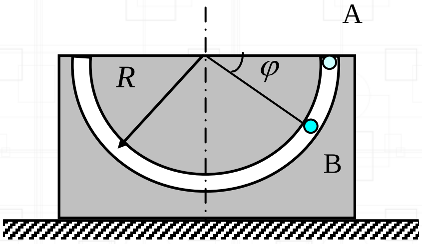


图 A

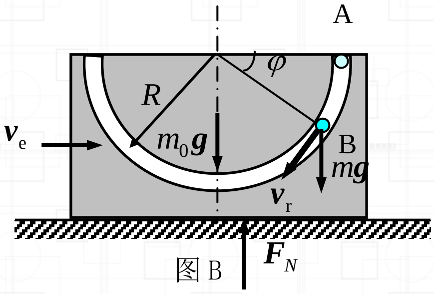


图 B

解：取小球和物块为研究对象，受力如图 B 所示，由于作用在系统上的主动力均为有势力，水平方向无外力，因此系统的机械能守恒，水平动量守恒。设小球为动点，物块为动系，设小球相对物块的速度为$\boldsymbol{v}_r$，物块的速度为$\boldsymbol{v}_e$，则系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_0v_e^2+\frac{1}{2}mv_a^2=\frac{1}{2}m_0v_e^2+\frac{1}{2}m[(v_e-v_r\sin\varphi)^2+(v_r\cos\varphi)^2]$$

设$\varphi=0$为势能零点，则系统的势能为

$$V=-mgR\sin\varphi$$

根据机械能守恒定理和初始条件有$T+V=0$，即

$$\frac{3}{2}mv_e^2+\frac{1}{2}m[(v_e-v_r\sin\varphi)^2+(v_r\cos\varphi)^2]=mgR\sin\varphi \qquad (1)$$

系统水平方向的动量为：

$$p_x=m_0v_e+m(v_e-v_r\sin\varphi) \qquad (2)$$

根据系统水平动量守恒和初始条件由(2)式有

$$3mv_e+m(v_e-v_r\sin\varphi)=0$$

由此求出$v_e=\frac{1}{4}v_r\sin\varphi$，将这个结果代入上面的机械能守恒式(1)中,且$\varphi=30^0$最后求得：

$$v_r=4\sqrt{\frac{gR}{15}},\quad v_e=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gR}{15}}$$

下面求作用在小球上的约束力和地面对物块的约束力。分别以小球和物块为研究对象，受力如图 C，D 所示。设小球的相对物块的加速度为$\boldsymbol{a}_r$，物块的加速度为$\boldsymbol{a}_e$，对于小球有动力学方程

$$m\boldsymbol{a}_a=m(\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r^n+\boldsymbol{a}_r^t)=\boldsymbol{F}+m\boldsymbol{g} \qquad \text{(a)}$$

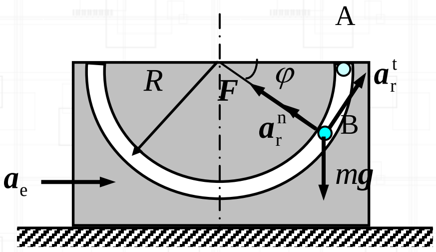


图 C

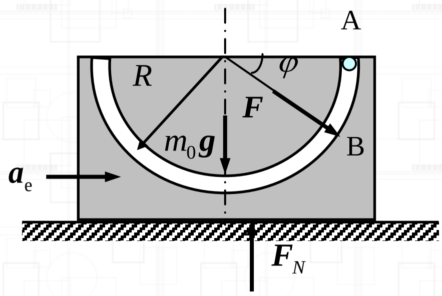


图 D

对于物块，由于它是平移，根据质心运动动力学方程有

$$m_0\boldsymbol{a}_\mathrm{e} = \boldsymbol{F} + m_0\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_N \tag{b}$$

将方程（a）在小球相对运动轨迹的法线方向投影，可得

$$m(a_\mathrm{r}^\mathrm{n} - a_\mathrm{e}\cos\varphi) = F - mg\sin\varphi$$

其中相对加速度为已知量，$a_\mathrm{r}^\mathrm{n} = \dfrac{v_\mathrm{r}^2}{R}$。将方程（b）在水平方向和铅垂方向投影，可得

$$m_0 a_\mathrm{e} = F\cos\varphi$$

$$0 = F_N - m_0 g - F\sin\varphi$$

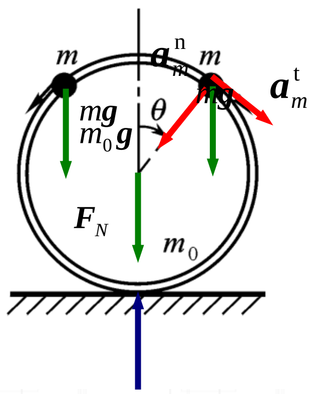
令 $\varphi = 30^0$，联立求解三个投影方程可求出

$$a_\mathrm{e} = \frac{47\sqrt{3}g}{15^2},\quad F = \frac{94}{75}mg,\quad F_N = 3.6267mg$$

2—18　取小球为研究对象，两个小球对称下滑，

设圆环的半径为 R。每个小球应用动能定理有：

$$\frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 = mgR(1-\cos\theta) \tag{a}$$



将上式对时间 t 求导并简化可得：

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta \tag{b}$$

每个小球的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_m^\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_m^\mathrm{n}$$

$$= (R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta)\boldsymbol{i} + (-R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

取圆环与两个小球为研究对象，应用质心运动定理

$$\sum m_i\boldsymbol{a}_{iC} = \sum \boldsymbol{F}_i$$

将上式在 y 轴上投影可得：

$$m_0\times 0-2m(R\ddot{\theta}\sin\theta+R\dot{\theta}^2\cos\theta)=F_N-2mg-m_0 g$$

将(a),(b)两式代入上式化简后得

$$F_N=m_0 g+2mg(3cos^2\theta-2cos\theta)$$

$F_N=0$时对应的θ值就是圆环跳起的临界值，此时上式可表示成

$$3\cos^2\theta-2\cos\theta+\frac{m_0}{2m}=0$$

上述方程的解为：$\cos\theta=(\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{3m_0}{2m}})$

圆环脱离地面时的θ值为$\theta_1=\arccos\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{3m_0}{2m}}\right)$

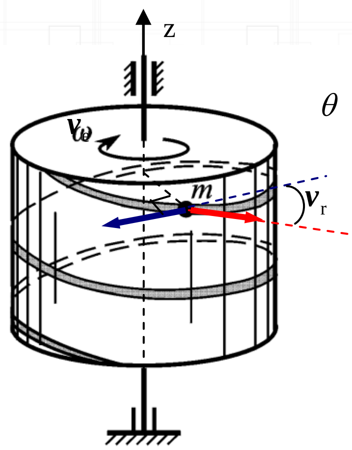
而$\theta_2=\arccos\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{3m_0}{2m}}\right)$也是方程的解，但是$\theta>\theta_1$时圆环已脱离地面，因此

$\theta=\theta_2$不是圆环脱离地面时的值。

回到目录

2—19　取圆柱、细管和小球为研究对象。作用于系统上的外力或平行于铅垂轴或其作用线通过铅垂轴。根据受力分析可知：系统对铅垂轴的动量矩守恒。设小球相对圆柱的速度为$\boldsymbol{v}_r$，牵连速度为$\boldsymbol{v}_e$，由系统对 z 轴的动量矩守恒，有：

$$L_z=-m_0 r^2\omega-mv_e r+mv_r\cos\theta r=0$$



其中：$v_e=r\omega$，则上式可表示成：

$$(m_0+m)r^2\omega=mv_r\cos\theta r$$

由此解得：$\omega=\dfrac{mv_r\cos\theta}{(m_0+m)r}=\dfrac{\mu v_r\cos\theta}{r}$

其中：$\mu=\dfrac{m}{m_0+m}$，$\tan\theta=\dfrac{h}{2\pi r}$

根据动能定理积分式，有：$T_2-T_1=\sum W_{1-2}$

$$T_1=0,\quad T_2=\frac{1}{2}m_0r^2\omega^2+\frac{1}{2}mv_a^2\quad \sum W_{1-2}=mgnh$$

其中：$v_a^2=(v_e-v_r\cos\theta)^2+(v_r\sin\theta)^2$，将其代入动能定理的积分式，可得：

$$m_0r^2\omega^2+m[(r\omega-v_r\cos\theta)^2+(v_r\sin\theta)^2]=2mghn$$

将 $\omega=\dfrac{\mu v_r\cos\theta}{r}$ 代入上式，可求得：$v_r=\sqrt{\dfrac{2ghn}{1-\mu\cos^2\theta}}$

则：$\omega=\dfrac{\mu\cos\theta}{r}\sqrt{\dfrac{2ghn}{1-\mu\cos^2\theta}}$

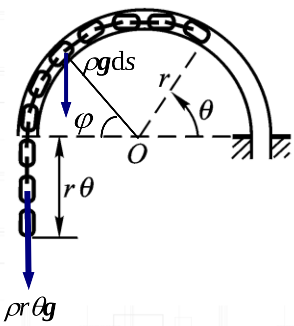
由 $v_a^2=(v_e-v_r\cos\theta)^2+(v_r\sin\theta)^2$

可求得：$v_a=v_r[1-\mu(2-\mu)\cos^2\theta]^{\frac{1}{2}}$

回到目录

2－20　取链条为研究对象，设链条单位长度的质量为 ρ

应用动量矩定理，链条对 O 轴的动量矩为：



$$L_O=\rho\pi r^3\dot{\theta}$$

外力对 O 轴的矩为：

$$M_O=\rho\theta gr^2+\int_0^{\pi r-r\theta}\rho gr\cos\varphi\,\mathrm{d}s$$

$$=\rho\theta gr^2+\int_0^{\pi-\theta}\rho gr\cos\varphi\, r\mathrm{d}\varphi$$

$$=\rho\theta gr^2+\rho gr^2\sin\theta$$

$$\because\quad \dot{L}_O=M_O$$

$$\therefore\quad \rho\pi r^3\ddot{\theta}=\rho\theta gr^2+\rho gr^2\sin\theta$$

因为：$r\ddot{\theta}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{v}{r}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$，所以上式可表示成：

$$\pi r\ddot{\theta}=\theta g+g\sin\theta$$

$$\pi\frac{v}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=\theta g+g\sin\theta$$

$$\pi v\mathrm{d}v=rg(\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

积分上式可得：$\pi\dfrac{1}{2}v^2=rg(\dfrac{1}{2}\theta^2-\cos\theta)+c$

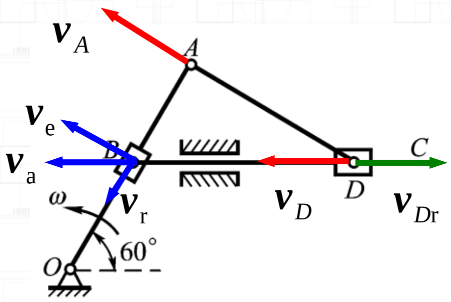
由初始条件确定积分常数 $c=gr$，最后得：$v=[gr(2-2\cos\theta+\theta^2)/\pi]^{\frac{1}{2}}$

回到目录

3—3　取套筒 B 为动点，OA 杆为动系

根据点的复合运动速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$



可得：$v_{\mathrm{a}}\cos 30^{0}=v_{\mathrm{e}}=\omega l$，

$$v_B=v_{BC}=v_{\mathrm{a}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega l$$

研究 AD 杆，应用速度投影定理有：

$$v_A=v_D\cos 30^{0}，\quad v_D=\frac{4\sqrt{3}}{3}\omega l$$

再取套筒 D 为动点，BC 杆为动系，根据点的复合运动速度合成定理

$$\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{v}_{BC}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{Dr}}$$

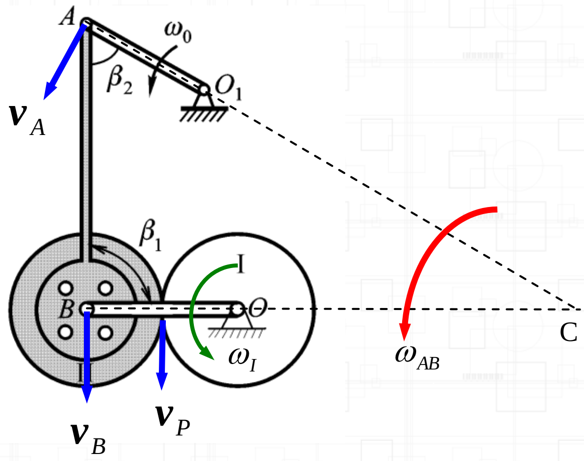
将上式在 x 轴上投影有：$-v_D=-v_{BC}+v_{\mathrm{Dr}}$，$v_{\mathrm{Dr}}=-v_D+v_{BC}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\omega l$

回到目录

3—4　AB 构件（灰色物体）作平面运动，已知 A 点的速度

$$v_A=\omega_0 O_1A=450\mathrm{cm}/s$$

AB 的速度瞬心位于 C，应用速度瞬心法有：



$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AC}=\frac{3}{2}\mathrm{rad/s}$$

$$v_B=\omega_{AB}BC,$$

设 OB 杆的角速度为 ω，则有

$$\omega=\frac{v_B}{OB}=\frac{15}{4}\mathrm{rad/s}$$

设 P 点是 AB 构件上与齿轮 I 的接触点，

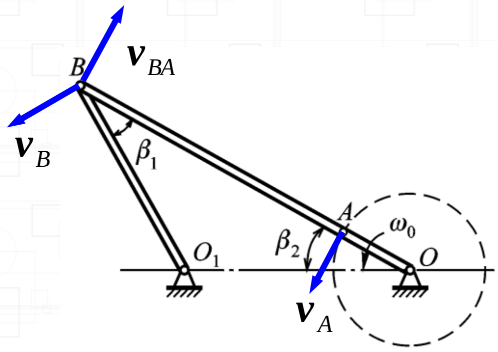
该点的速度：

$$v_P=\omega_{AB}CP$$

齿轮 I 的角速度为：$\omega_I=\dfrac{v_P}{r_1}=6\mathrm{rad/s}$

回到目录

3—6 AB 杆作平面运动，取 A 为基点



根据基点法公式有：

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

将上式在 AB 连线上投影，可得

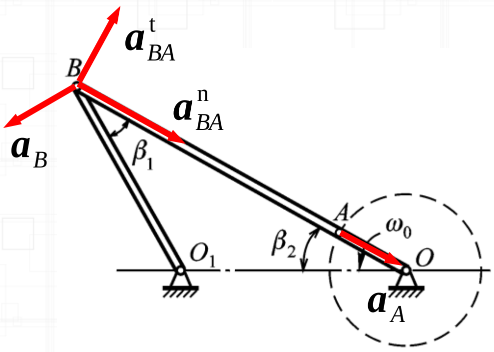
$$v_B = 0, \quad \omega_{O_1B} = 0$$

因此，

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AB} = \frac{1}{4}\omega_0$$

因为 B 点作圆周运动，此时速度为零，

因此只有切向加速度（方向如图）。



根据加速度基点法公式

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

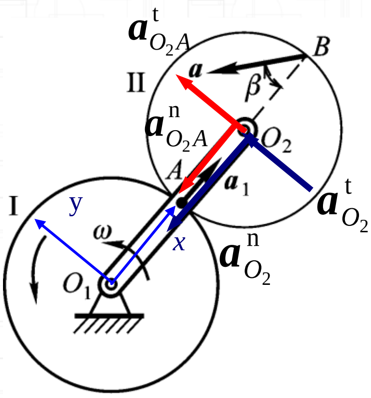
将上式在 AB 连线上投影，可得

$$-a_B\cos 60^0 = a_A + a_{BA}^{n}，\quad a_B = -2.5\omega_0^2 r$$

$$\alpha_{O_1B} = \frac{a_B}{O_1B} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0^2 \text{（瞬时针）}$$

回到目录

3—7 齿轮 II 作平面运动，取 A 为基点有



$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_{BA}^{t} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

将上式在 x 投影有：

$$-a\cos\beta = a_1 - a_{BA}^{n}$$

由此求得：

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{a_{BA}^{n}}{2r_2}} = \sqrt{\frac{a_1 + a\cos\beta}{2r_2}}$$

再将基点法公式在 y 轴上投影有：

$$a\sin\beta = a_{BA}^{t} = \alpha_{II}\, 2r_2,$$

由此求得

$$\alpha_{II} = \frac{a\sin\beta}{2r_2}$$

再研究齿轮 II 上的圆心，取 A 为基点

$$\boldsymbol{a}_{O_2}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{O_2}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{O_2A}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{O_2A}^{\mathrm{n}}$$

将上式在 y 轴上投影有

$$a_{O_2}^{\mathrm{t}}=a_{O_2A}^{\mathrm{t}}=r_2\alpha_{II}=\frac{a\sin\beta}{2},$$

由此解得：

$$\alpha_{O_1O_2}=\frac{a_{O_2}^{\mathrm{t}}}{r_1+r_2}=\frac{a\sin\beta}{2(r_1+r_2)}$$

再将基点法公式在 x 轴上投影有：$-a_{O_2}^{\mathrm{n}}=a_1-a_{O_2A}^{\mathrm{n}}$

由此解得：

$$a_{O_2}^{\mathrm{n}}=\frac{a\cos\beta-a_1}{2},$$

又因为 $a_{O_2}^{\mathrm{n}}=(r_1+r_2)\omega_{O_1O_2}^2$

由此可得：

$$\omega_{O_1O_2}=\pm\sqrt{\frac{a\cos\beta-a_1}{2(r_1+r_2)}}$$

回到目录

3—9　卷筒作平面运动，C 为速度瞬心，其上 D 点的速度为 $\boldsymbol{v}$，卷筒的角速度为：

$$\omega=\frac{v}{DC}=\frac{v}{R-r}$$

角加速度为：

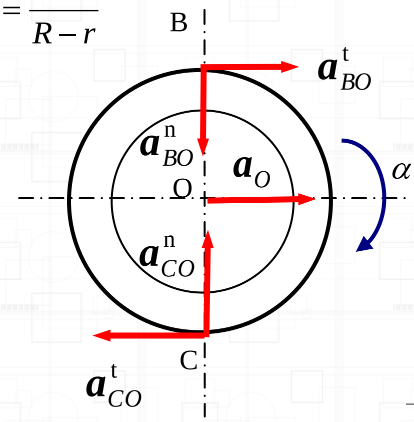
$$\alpha=\dot{\omega}=\frac{\dot{v}}{R-r}=\frac{a}{R-r}$$

卷筒 O 点的速度为：

$$v_O=\omega R=\frac{vR}{R-r}$$

O 点作直线运动，其加速度为：

$$a_O=\dot{v}_O=\frac{\dot{v}R}{R-r}=\frac{aR}{R-r}$$



研究卷筒，取 O 为基点，求 B 点的加速度。

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{a}_{BO}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{B0}^{\mathrm{n}}$$

将其分别在 x,y 轴上投影

$$a_{Bx}=a_O+a_{BO}^{\mathrm{t}}\qquad a_{By}=-a_{BO}^{\mathrm{n}}$$

$$a_B=\sqrt{a_{Bx}^2+a_{By}^2}=\frac{R}{(R-r)^2}\sqrt{4a^2(R-r)^2+v^4}$$

同理，取 O 为基点，求 C 点的加速度。

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{a}_{CO}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{C0}^{\mathrm{n}}$$

将其分别在 x,y 轴上投影

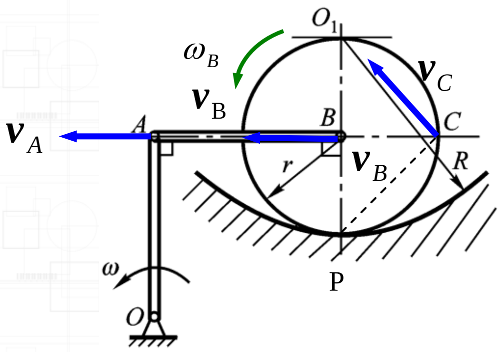
$$a_{Cx}=a_O-a_{CO}^{\mathrm{t}}=0 \quad a_{Cy}=a_{CO}^{\mathrm{n}}$$

$$a_C=a_{Cy}=\frac{Rv^2}{(R-r)^2}$$

回到目录

3—10　图示瞬时，AB 杆瞬时平移，因此有：

$$v_B=v_A=\omega OA=2\mathrm{m/s}$$



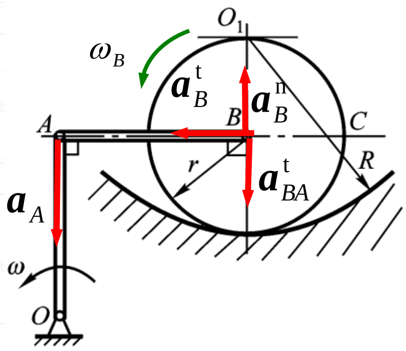
AB 杆的角速度：$\omega_{AB}=0$

圆盘作平面运动，速度瞬心在 P 点，圆盘的的角速度为：

$$\omega_B=\frac{v_B}{r}=4\mathrm{m/s}$$

圆盘上 C 点的速度为：$v_C=\omega_B PC=2\sqrt{2}\mathrm{m/s}$

AB 杆上的 A、B 两点均作圆周运动，取 A 为基点根据基点法公式有



$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_B^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_B^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}$$

将上式在 x 轴上投影可得：$-a_B^{\mathrm{t}}=0$

因此：

$$a_B=a_B^{\mathrm{n}}=\frac{v_B^2}{r}=8\mathrm{m/s}^2$$

由于任意瞬时，圆盘的角速度均为：

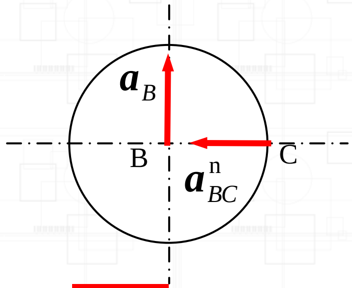
$$\omega_B=\frac{v_B}{r}$$

将其对时间求导有：

$$\dot{\omega}_B=\frac{\dot{v}_B}{r}=\frac{a_B^{\mathrm{t}}}{r},$$

由于 $a_B^{\mathrm{t}}=0$，所以圆盘的角加速度 $\alpha_B=\dot{\omega}_B=0$。

圆盘作平面运动，取 B 为基点，根据基点法公式有：

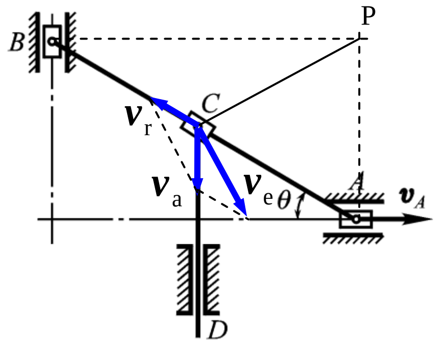


$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_B+\boldsymbol{a}_{CB}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{CB}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{a}_B+\boldsymbol{a}_{CB}^{\mathrm{n}}$$

$$a_C=\sqrt{(a_B^{\mathrm{n}})^2+(a_{CB}^{\mathrm{n}})^2}=8\sqrt{2}\mathrm{m/s^2}$$

回到目录

3—13　滑块 C 的速度及其加速度就是 DC 杆的速度和加速度。AB 杆作平面运动，其速度瞬心为 P，AB 杆的角速度为：



$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=1\mathrm{rad/s}$$

杆上 C 点的速度为：$v_C=\omega_{AB}PC=0.2\mathrm{m/s}$

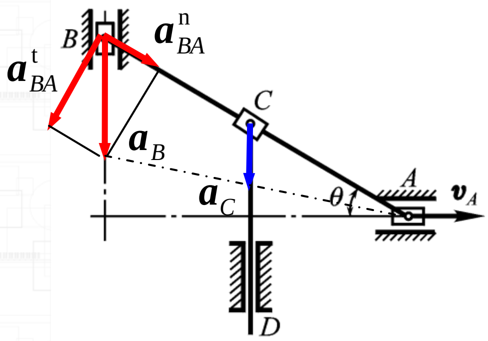
取 AB 杆为动系，套筒 C 为动点，

根据点的复合运动速度合成定理有：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

其中：$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{v}_C$，根据几何关系可求得：

$$v_{\mathrm{a}}=v_{\mathrm{r}}=\frac{\sqrt{3}}{15}\mathrm{m/s}$$



AB 杆作平面运动，其 A 点加速度为零，

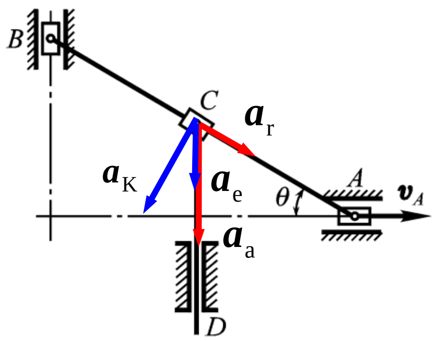
B 点加速度铅垂，由加速度基点法公式可知

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$

由该式可求得

$$a_B=\frac{a_{BA}^{\mathrm{n}}}{\sin 30^0}=0.8\mathrm{m/s^2}$$

由于 A 点的加速度为零，AB 杆上各点加速度的分布如同定轴转动的加速度分布，AB 杆中点的加速度为：



$$a_C=0.5a_B=0.4\mathrm{m/s^2}$$

再取 AB 杆为动系，套筒 C 为动点，

根据复合运动加速度合成定理有：

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{K}}$$

其中：$\boldsymbol{a}_{\mathrm{K}}$ 表示科氏加速度；牵连加速度就是 AB 杆上 C 点的加速度，即：$a_{\mathrm{e}}=0.4\mathrm{m/s^2}$

将上述公式在垂直于 AB 杆的轴上投影有：$a_{\mathrm{a}}\cos 30^0 = a_{\mathrm{e}}\cos 30^0 + a_{\mathrm{K}}$

科氏加速度 $a_{\mathrm{K}} = 2\omega_{AB} v_{\mathrm{r}}$，由上式可求得：

$$a_{\mathrm{a}} = \frac{2}{3}\mathrm{m/s}^2$$

回到目录

3-14： 取圆盘中心 O_1 为动点，半圆盘为动系，动点的绝对运动为直线运动；相对运动为圆周运动；牵连运动为直线平移。

由速度合成定理有：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

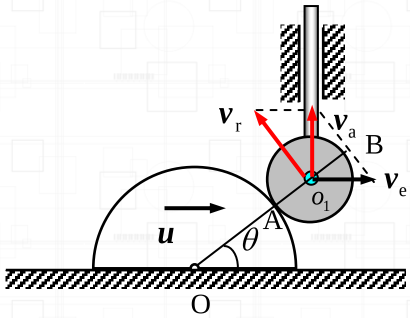


图 A

速度图如图 A 所示。由于动系平移，所以 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{u}$，

根据速度合成定理可求出：

$$v_{O_1} = v_{\mathrm{a}} = \frac{v_{\mathrm{e}}}{\tan\theta} = \sqrt{3}u, \quad v_{\mathrm{r}} = \frac{v_{\mathrm{e}}}{\sin\theta} = 2u$$

由于圆盘 O_1 在半圆盘上纯滚动，圆盘 O_1 相对半圆盘的角速度为：

$$\omega = \frac{v_{\mathrm{r}}}{r} = \frac{2u}{r}$$

由于半圆盘是平移，所以圆盘的角速度就是其相对半圆盘的角速度。

再研究圆盘，取 O_1 为基点根据基点法公式有：

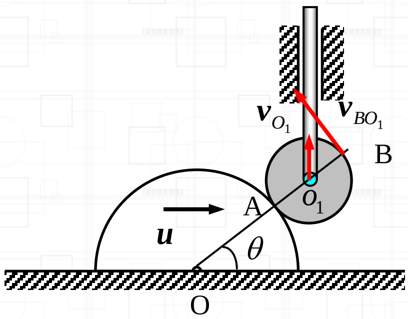


图 B

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_{O_1} + \boldsymbol{v}_{BO_1}$$

$$v_{Bx} = -v_{BO_1}\sin 30^0 = -\omega r\sin 30^0 = -u$$

$$v_{By} = v_{O_1} + v_{BO_1}\cos 30^0 = 2\sqrt{3}u$$

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{13}u$$

为求 B 点的加速度，先求 O_1 点的加速度和圆盘的角加速度。取圆盘中心 O_1 为动点，半圆盘为动系，根据加速度合成定理有

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{t}} \qquad \text{(a)}$$

其加速度图如图 C 所示，$a_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \dfrac{v_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}}}{R+r} = \dfrac{u^2}{r}$，

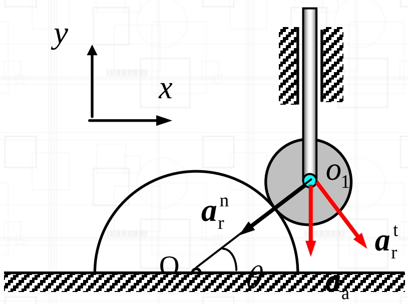


图 C

将公式（a）在 x 和 y 轴上投影可得：

$$x:\quad 0 = a_r^t \sin\theta - a_r^n \cos\theta$$
$$y:\quad -a_a = -a_r^t \cos\theta - a_r^n \sin\theta$$

由此求出：$a_r^t = \dfrac{\sqrt{3}u^2}{r}$，$a_a = a_{O_1} = \dfrac{2u^2}{r}$，圆盘的角加速度为：$\alpha = \dfrac{a_r^t}{r} = \dfrac{\sqrt{3}u^2}{r^2}$

下面求圆盘上 B 点的加速度。取圆盘为研究对象，O_1 为基点，应用基点法公式有：

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{O_1} + \boldsymbol{a}_{BO_1}^t + \boldsymbol{a}_{BO_1}^n \qquad \text{（b）}$$

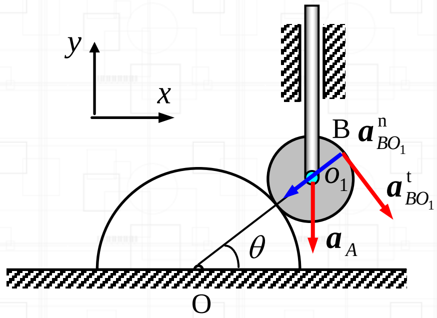


图 D

将（b）式分别在 x, y 轴上投影：

$$a_{Bx} = -a_{BO_1}^n \cos 30^0 + a_{BO_1}^t \sin 30^0$$
$$a_{By} = -a_{O_1} - a_{BO_1}^n \sin 30^0 - a_{BO_1}^t \cos 30^0$$

其中：

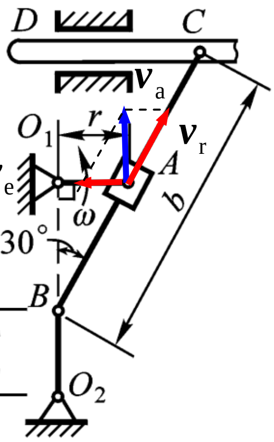
$$a_{BO_1}^n = \omega^2 r = \frac{4u^2}{r},$$

$$a_{BO_1}^t = \alpha r = \frac{\sqrt{3}u^2}{r}$$

由此可得：$a_B = \sqrt{37}\dfrac{u^2}{r}$

回到目录

3—15（b）　取 BC 杆为动系（瞬时平移），
套筒 A 为动点（匀速圆周运动）。



根据速度合成定理有：

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

由上式可解得：

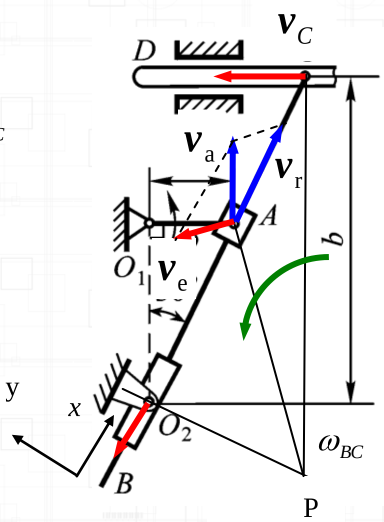
$$v_e = v_a \tan 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega r$$

因为 BC 杆瞬时平移，所以有：

$$v_{CD} = v_e = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega r$$

回到目录

3－15（d） 取 BC 杆为动系（平面运动），
套筒 A 为动点（匀速圆周运动）。



BC 杆作平面运动，其速度瞬心为 P，设其角速度为 ω_{BC}

根据速度合成定理有：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$$

根据几何关系可求出：

$$O_2P = \frac{8}{3}r, CP = \frac{16}{3}r$$

将速度合成定理公式在 x,y 轴上投影::

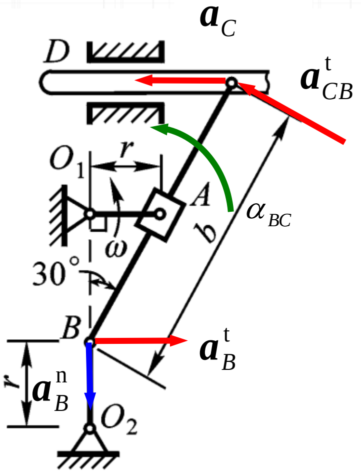
$$v_{\mathrm{ax}} = v_{\mathrm{ex}} + v_{\mathrm{rx}} = v_{\mathrm{r}} - O_2P\omega_{BC}$$
$$v_{\mathrm{ay}} = v_{\mathrm{ey}} + v_{\mathrm{ry}} = v_{\mathrm{ey}} = O_2A\omega_{BC}$$

由此解得:

$$\omega_{BC} = \frac{1}{4}\omega, v_r = (\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})\omega r$$

DC 杆的速度

$$v_C = CP\omega_{BC} = \frac{4}{3}\omega r$$

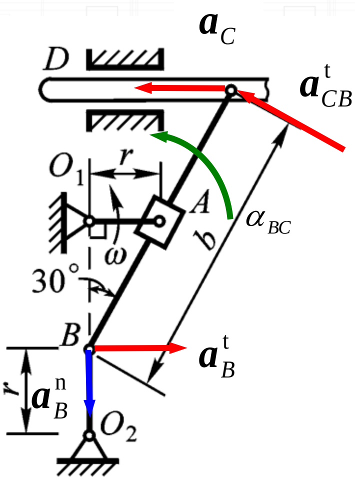


回到目录

3-16(b) BC 杆作平面运动,根据基点法有:

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_{CB}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{CB}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{a}_B^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_B^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{CB}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{CB}^{\mathrm{n}}$$

由于 BC 杆瞬时平移,$\omega_{BC} = 0$,上式可表示成:



$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_B^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_B^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{CB}^{\mathrm{t}}$$

将上式在铅垂轴上投影有:

$$0 = -a_B^{\mathrm{n}} + a_{CB}^{\mathrm{t}} \sin 30^0$$

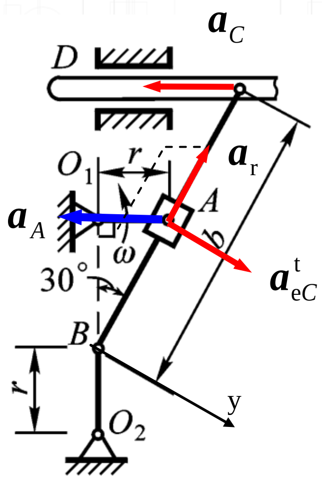
由此解得:

$$\alpha_{BC} = \frac{1}{6}\omega^2$$

再研究套筒 A,取 BC 杆为动系（平面运动），套筒 A 为动点（匀速圆周运动）。

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_K \qquad (a)$$

其中:$\boldsymbol{a}_K$ 为科氏加速度,因为 $\omega_{AB}=0$,所以 $\boldsymbol{a}_K=0$



动点的牵连加速度为: $\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{eC}^n + \boldsymbol{a}_{eC}^t$

由于动系瞬时平移,所以 $\boldsymbol{a}_{eC}^n = 0$, $a_{eC}^t = \alpha_{BC} AC$

牵连加速度为 $\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{eC}^t$, 则(a)式可以表示成

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{eC}^t + \boldsymbol{a}_r$$

将上式在 y 轴上投影:

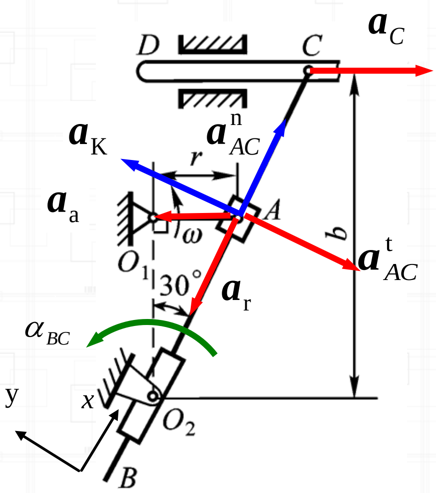
$$-a_A\cos 30^0 = -a_C\cos 30^0 + a_{eC}^t$$

由此求得:

$$a_C = (1+\frac{2\sqrt{3}}{9})\omega^2 r$$

回到目录

3—16(d)　取 BC 杆为动系，套筒 A 为动点，动点 A 的牵连加速度为



$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{AC}^t + \boldsymbol{a}_{AC}^n$$

动点的绝对加速度为

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{AC}^t + \boldsymbol{a}_{AC}^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_K$$

其中 $\boldsymbol{a}_K$ 为动点 A 的科氏加速度

将上式在 y 轴上投影有

$$a_a\cos 30^0 = -a_C\cos 30^0 - a_{AC}^t + a_K$$

上式可写成

$$\omega^2 r\cos 30^0 = -a_C\cos 30^0 - \alpha_{BC}\cdot AC + 2\omega_{BC}\cdot v_r \qquad (a)$$

其中：

$$\omega_{BC} = \frac{1}{4}\omega, v_r = (\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2})\omega r$$

（见 3—15d）α_{BC} 为 BC 杆的角加速度。

再取 BC 杆上的 C 点为动点，套筒 O_2 为动系，由加速度合成定理有

$$\boldsymbol{a}_{aC}=\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}'_e+\boldsymbol{a}'_r+\boldsymbol{a}'_K$$

其中$\boldsymbol{a}'_e=\boldsymbol{a}^t_{CO_2}+\boldsymbol{a}^n_{CO_2}$，上式可表示为

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}^t_{CO_2}+\boldsymbol{a}^n_{CO_2}+\boldsymbol{a}'_r+\boldsymbol{a}'_K$$

将上式在 y 轴投影有：

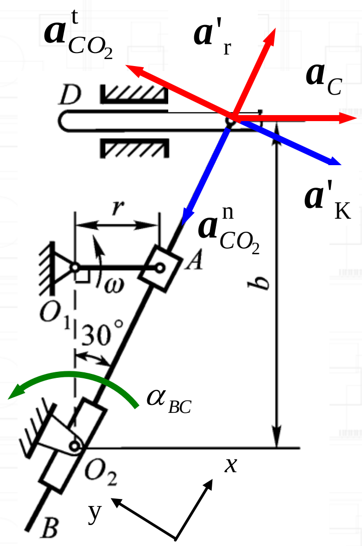
$$-a_C\cos 30^0=a^t_{CO_2}-a'_K$$

该式可表示成：

$$-a_C\cos 30^0=\alpha_{BC}\cdot CO_2-2\omega_{BC}v_C\sin 30^0 \qquad \text{（b）}$$

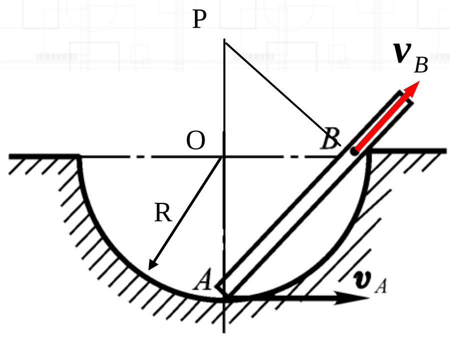
联立求解(a),(b)可得

$$a_C=\frac{4\sqrt{3}}{9}\omega^2 r,\quad \alpha_{BC}=\frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2$$



回到目录

3－17　AB 杆作平面运动，其速度瞬心位于 P，可以证明：任意瞬时，速度瞬心 P 均在以 O 为圆心，R 为半径的圆周上，并且 A、O、P 在同一直径上。由此可得 AB 杆任何时刻的角速度均为



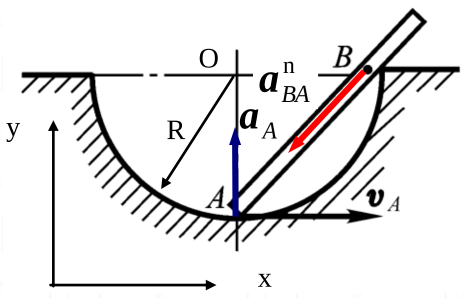
$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=\frac{v_A}{2R}$$

杆上 B 点的速度为：

$$v_B=\omega_{AB}PB=\frac{\sqrt{2}}{2}v_A$$

AB 杆的角加速度为：

$$\alpha_{AB}=\dot{\omega}_{AB}=\frac{\dot{v}_A}{AP}=0$$



取 A 为基点，根据基点法有

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}^n_{BA}+\boldsymbol{a}^t_{BA}=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}^n_{BA}$$

将上式分别在 x,y 轴上投影有

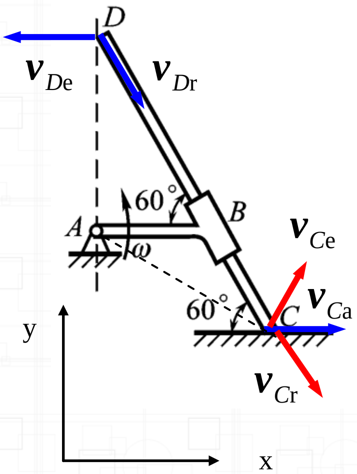
$$a_{Bx}=-a^n_{BA}\cos 45^0=\frac{v_A^2}{4R}$$

$$a_{By}=a_A-a^n_{BA}\sin 45^0=\frac{3v_A^2}{4R}$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \frac{\sqrt{10}v_A^2}{4R}$$

回到目录

3—18　取 DC 杆上的 C 点为动点，构件 AB 为动系



$$\boldsymbol{v}_{Ca} = \boldsymbol{v}_{Ce} + \boldsymbol{v}_{Cr}$$

根据几何关系可求得：$v_{Ce} = v_{Cr} = \sqrt{3}\omega r$

再取 DC 杆上的 D 点为动点，构件 AB 为动系

$$\boldsymbol{v}_{Da} = \boldsymbol{v}_{De} + \boldsymbol{v}_{Dr}$$

由于 BD 杆相对动系平移，因此 $\boldsymbol{v}_{Cr} = \boldsymbol{v}_{Dr}$

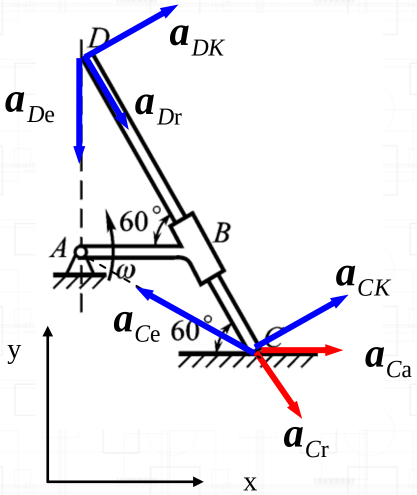
将上式分别在 x,y 轴上投影可得

$$v_{Dax} = -v_{De} + v_{Dr}\sin 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega r$$

$$v_{Day} = -v_{Dr}\cos 30^0 = -\frac{3}{2}\omega r$$

求加速度：研究 C 点有

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_{Ca} = \boldsymbol{a}_{Ce} + \boldsymbol{a}_{Cr} + \boldsymbol{a}_{CK}$$



将上式在 y 轴投影有

$$0 = a_{Ce}\sin 30^0 - a_{Cr}\cos 30^0 + a_{CK}\sin 30^0$$

由此求得 $a_{Cr} = 3\omega^2 r$

再研究 D 点

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_{Da} = \boldsymbol{a}_{De} + \boldsymbol{a}_{Dr} + \boldsymbol{a}_{DK}$$

由于 BD 杆相对动系平移，因此 $\boldsymbol{a}_{Cr} = \boldsymbol{a}_{Dr}$

将上式分别在 x,y 轴上投影有

$$a_{Dax} = a_{Dr}\sin 30^0 + a_{DK}\cos 30^0 = \frac{9}{2}\omega^2 r$$

$$a_{Day} = -a_{De} - a_{Dr}\cos 30^0 + a_{DK}\sin 30^0 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\omega^2 r$$

回到目录

3—21　由于圆盘纯滚动，所以有 $a_C = r\alpha$

根据质心运动定理有：

$$ma_C = F\cos\theta - F_S$$

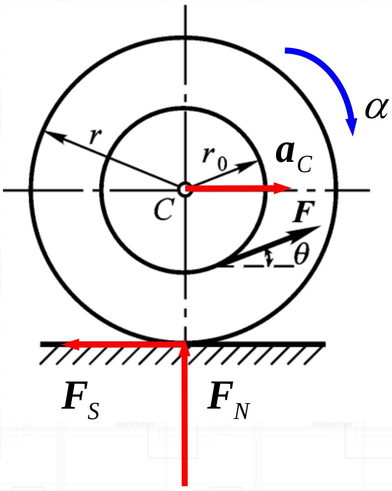
$$0 = F_N + F\sin\theta - mg$$

根据相对质心的动量矩定理有

$$m\rho^2\alpha = F_S r - F r_0$$

求解上式可得：

$$a_C = \frac{Fr(r\cos\theta - r_0)}{m(r^2+\rho^2)}, \quad F_N = mg - F\sin\theta$$



$$F_S = \frac{F(\rho^2\cos\theta + rr_0)}{r^2+\rho^2}$$

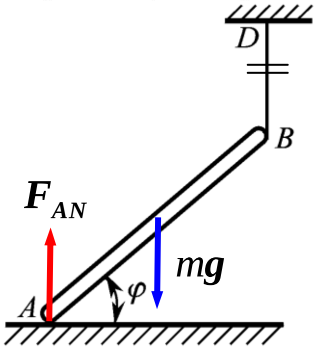
若圆盘无滑动，摩擦力应满足$F_S \le fF_N$，由此可得：

当：$mg > F\sin\theta$时，

$$f \ge \frac{F(\rho^2\cos\theta + rr_0)}{(mg - F\sin\theta)(r^2+\rho^2)} = f_{\min}$$

回到目录

3—22　研究 AB 杆，BD 绳剪断后，其受力如图所示。由于水平方向没有力的作用，根据质心运动定理可知 AB 杆质心 C 的加速度铅垂。



由质心运动定理有：

$$ma_C = mg - F_{AN}$$

根据相对质心的动量矩定理：

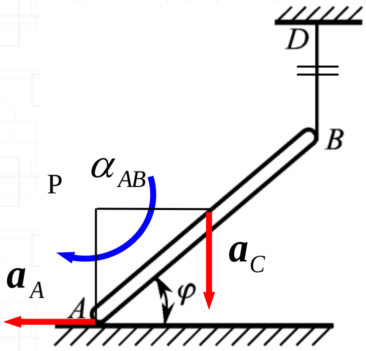
$$\frac{1}{12}ml^2\alpha_{AB} = F_{AN}\frac{l}{2}\cos\varphi$$

刚体 AB 作平面运动，运动初始时，角速度为零。

A 点的加速度水平，AB 杆的加速度瞬心位于 P 点。

有运动关系式

$$a_C = \alpha_{AB}\frac{l}{2}\cos\varphi$$

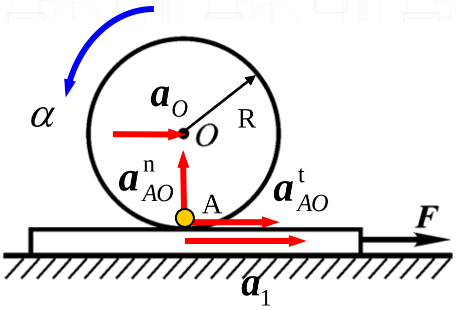


求解以上三式可求得：

$$F_{AN} = \frac{2}{5}mg$$

回到目录

3—25　设板和圆盘中心 O 的加速度分别为



$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_O$，圆盘的角加速度为 α，圆盘上与板的接触点为 A，则 A 点的加速度为

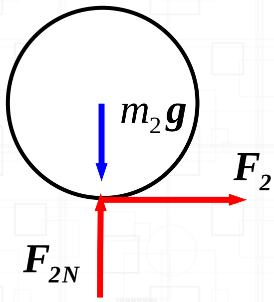
$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{AO}^{t} + \boldsymbol{a}_{AO}^{n}$$

将上式在水平方向投影有

$$a_{Ax} = a_O + a_{AO}^{t} = a_O + \alpha R = a_1 \qquad \text{(a)}$$

取圆盘为研究对象，受力如图，应用质心运动定理有

$$m_2 a_O = F_2 \qquad \text{(b)}$$



应用相对质心动量矩定理有

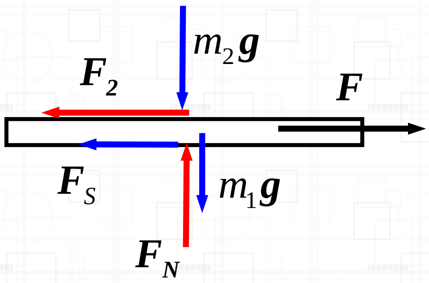
$$\frac{1}{2} m_2 R^2 \alpha = F_2 R \qquad \text{(c)}$$

再取板为研究对象，受力如图，应用质心运动定理有

$$m_1 a_1 = F - F_S - F_2 \qquad \text{(d)}$$

作用在板上的滑动摩擦力为：

$$F_S = fF_N = f(m_1 + m_2)g \qquad \text{(e)}$$



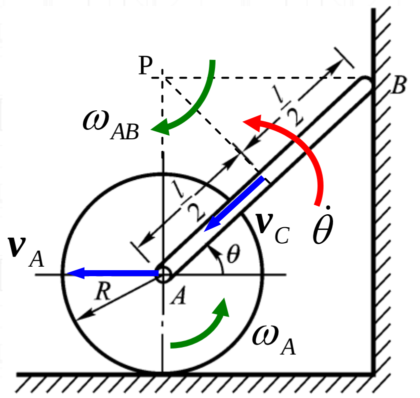
由(a) (b) (c) (d) (e)联立可解得：

$$a_1 = \frac{3F - 3f(m_1 + m_2)g}{3m_1 + m_2}$$

回到目录

3—29

解：由于系统在运动过程中，只有 AB 杆的重力作功，因此应用动能定理，可求出有关的速度和加速度。系统运动到一般位置时，其动能为 AB 杆的动能与圆盘 A 的动能之和：



$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_A^2$$

其中：

$$\omega_{AB} = -\dot{\theta}, \quad v_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta},$$

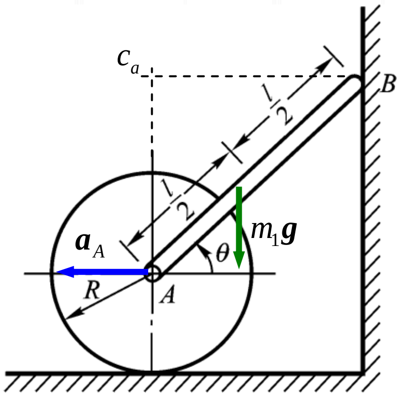
$$v_A = \omega_{AB} l \sin\theta = -l \sin\theta\dot{\theta},$$

$$\omega_A = \frac{v_A}{R} = -\frac{l \sin\theta\dot{\theta}}{R},$$

因此系统的动能可以表示成：

$$T_2=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{l\dot{\theta}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{m_1l^2}{12}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_2(l\sin\theta\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\frac{m_2R^2}{2}\left(\frac{l\sin\theta\dot{\theta}}{R}\right)^2$$

$$=\frac{1}{6}m_1l^2\dot{\theta}^2+\frac{3}{4}m_2l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$



系统从$\theta=45^0$位置运动到任意θ角位置，

AB 杆的重力所作的功为：

$$W_{1\to2}=m_1g\frac{l}{2}(\sin45^0-\sin\theta)$$

根据动能定理的积分形式　$T_2-T_1=W_{1\to2}$

初始时系统静止，所以$T_1=0$，因此有

$$\frac{1}{6}m_1l^2\dot{\theta}^2+\frac{3}{4}m_2l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta=m_1g\frac{l}{2}(\sin45^0-\sin\theta)$$

将上式对时间求导可得：

$$\frac{1}{3}m_1l^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\frac{3}{2}m_2l^2\dot{\theta}\ddot{\theta}\sin^2\theta+\frac{3}{2}m_2l^2\dot{\theta}^3\sin\theta\cos\theta=-m_1g\frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta}$$

将上式中消去$\dot{\theta}$可得：

$$\frac{1}{3}m_1l^2\ddot{\theta}+\frac{3}{2}m_2l^2\ddot{\theta}\sin^2\theta+\frac{3}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta=-m_1g\frac{l}{2}\cos\theta$$

根据初始条件$\dot{\theta}=0,\theta=45^0$，可求得初始瞬时 AB 杆的角加速度 ：

$$\ddot{\theta}=-\frac{3\sqrt{2}m_1g}{(4m_1+9m_2)l}$$

因为$\ddot{\theta}<0$，所以 AB 杆的角加速度为顺时针。初始瞬时 AB 杆的角速度为零，此时 AB 杆的

加速度瞬心在C_a点，由此可求出 AB

杆上 A 点的加速度：

$$a_A=\alpha_{AB}l\sin45^0=-\ddot{\theta}l\cos45^0=\frac{3m_1g}{(4m_1+9m_2)}$$

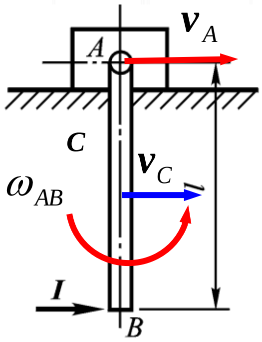
回到目录

3－33　设碰撞后滑块的速度、AB 杆的角速度如图所示

根据冲量矩定理有：

$$m_1v_A+m_2v_C=I \qquad \text{(a)}$$

其中：v_C 为 AB 杆质心的速度，根据平面运动关系有



$$v_C = v_A + \frac{l}{2}\omega_{AB} \qquad \text{(b)}$$

再根据对固定点的冲量矩定理：$L_A = M_A(\boldsymbol{I})$

系统对固定点 A（与铰链 A 重合且相对地面不动的点）的动量矩为滑块对 A 点的动量矩和 AB 杆对 A 点的动量矩，由于滑块的

动量过 A 点，因此滑块对 A 点无动量矩，AB 杆对 A 点的动量矩（也是系统对 A 点的动量矩）为：

$$L_A = m_2 v_C \frac{l}{2} + \frac{1}{12} m_2 l^2 \omega_{AB}$$

将其代入冲量矩定理有：

$$m_2 v_C \frac{l}{2} + \frac{1}{12} m_2 l^2 \omega_{AB} = lI \qquad \text{(c)}$$

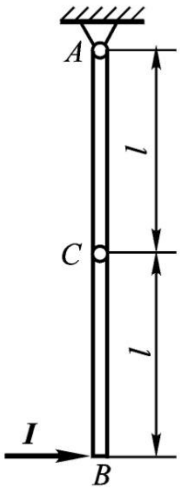
由（a,b,c）三式求解可得：

$$v_A = -\frac{2I}{9m_2}$$

(滑块的真实方向与图示相反)

回到目录

3—34 研究整体，系统对 A 轴的动量矩为：



$$L_A = L_{A(AC)} + L_{A(BC)}$$

其中：AC 杆对 A 轴的动量矩为

$$L_{A(AC)} = \frac{1}{3} m l^2 \omega_{AC}$$

设 C_1 为 BC 杆的质心，BC 杆对 A 轴的动量矩为

$$L_{A(BC)} = m v_{C_1} \frac{3}{2} l + \frac{1}{12} m l^2 \omega_{BC}$$

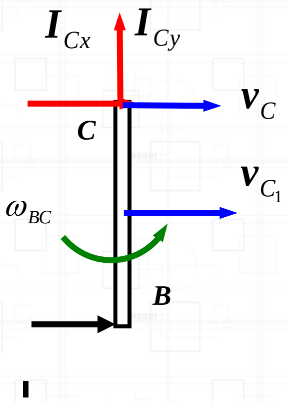
$$v_{C_1} = v_C + v_{C_1 C} = l\omega_{AC} + \frac{l}{2}\omega_{BC}$$

根据冲量矩定理 $L_A = 2l\boldsymbol{I}$ 可得：

$$\frac{11}{6} m l^2 \omega_{AC} + \frac{5}{6} m l^2 \omega_{BC} = 2lI \qquad \text{(a)}$$

再研究 BC 杆，其对与 C 点重合的固定点的动量矩为

$$L_C = mv_{C_1}\frac{l}{2} + \frac{1}{12}ml^2\omega_{BC} = \frac{1}{2}ml^2\omega_{AC} + \frac{1}{3}ml^2\omega_{BC}$$



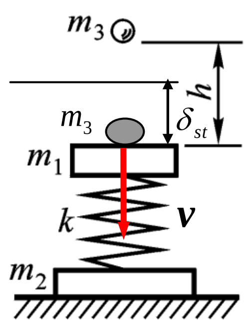
根据冲量矩定理 $L_C = l\boldsymbol{I}$ 有：

$$\frac{1}{2}ml^2\omega_{AC} + \frac{1}{3}ml^2\omega_{BC} = lI \qquad \text{（b）}$$

联立求解（a）,(b) 可得

$$\omega_{AC} = -\frac{6I}{7ml} = -2.5\text{rad/s}^2$$

3－35 碰撞前，弹簧有静变形



$$\delta_{st} = \frac{mg}{k}$$

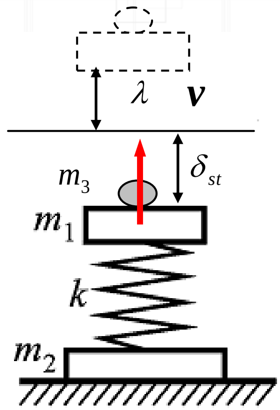
第一阶段：m_3 与 m_1 通过完全塑性碰撞后一起向下运动，不计常规力，碰撞前后动量守恒，因此有：

$$(m_1 + m_3)v = m_3\sqrt{2gh}$$

碰撞结束时两物体向下运动的速度为

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$$

第二阶段：m_3 与 m_1 一起向下运动后再回到碰撞结束时的初始位置，根据机械能守恒可知：此时的速度向上，大小仍然为



$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$$

第三阶段：m_3 与 m_1 一起上升到最高位置，此时弹簧被拉长 λ。根据动能定理 $T_2 - T_1 = \sum W_{1\to 2}$ 有：

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_3)v^2 = -(m_1 + m_3)g(\delta_{st} + \lambda) + \frac{k}{2}\delta_{st}^2 - \frac{k}{2}\lambda^2$$

上式可表示成：

$$\frac{mgh}{2} = 2mg(\frac{mg}{k} + \lambda) - \frac{m^2g^2}{2k} + \frac{k}{2}\lambda^2 = \frac{3m^2g^2}{2k} + 2mg\lambda + \frac{k}{2}\lambda^2$$

若使 m_2 脱离地面，弹簧的拉力必须大于其重力，因此有 $\lambda > \frac{mg}{k}$，将 $\lambda = \frac{mg}{k}$ 代入上式求

得：$h=\dfrac{8mg}{k}$。

若 $\lambda>\dfrac{mg}{k}$，则 $h>\dfrac{8mg}{k}$

注：上述结果是在假设 m_3 与 m_1 始终粘连在一起的条件下得到的，若 m_3 与 m_1 之间没有粘着力，

答案应为 $h>\dfrac{9mg}{k}$，如何求解，请思考。

回到目录

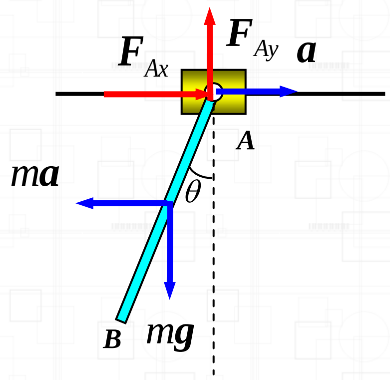
3－36　取 AB 杆为研究对象，初始时，杆上的 A 点与水平杆上的 O 点重合，当 $t=0^-$ 时系统静止，$t=0^+$ AB 杆上 A 点的速度为 v，角速度为 ω，初始时受到冲击力的作用，应用对固定点 O 的冲量矩定理可得

$$L_O=mv_Cl-\frac{1}{12}m(2l)^2\omega=0$$

其中：$v_C=v_A-l\omega=v-l\omega$

由此解得：

$$\omega=\frac{3v}{4l}$$



当 $t>0$ 时，滑块 A 以加速度 $\boldsymbol{a}$ 向右运动，

取 AB 杆为研究对象，应用相对动点 A 的动量矩定理有：

$$\frac{1}{3}m(2l)^2\ddot{\theta}=malcos\theta-mgl\sin\theta$$

将上式积分并简化可得：

$$\frac{2}{3}l\dot{\theta}^2=a\sin\theta+g\cos\theta+C$$

其中 C 是积分常数由初始条件 $\theta=0,\dot{\theta}=\omega$ 确定出

$$C=\frac{3v^2}{8l}-g$$。

上式可表示成

$$\frac{2}{3}l\dot{\theta}^2=a\sin\theta+g\cos\theta+\frac{3v^2}{8l}-g=f(\theta)$$

若 AB 杆可转动整圈，则应有$\dot{\theta}>0$，因此$f(\theta)>0$。若$f(\theta)$的最小值大于零，则 AB 杆就可以完成整圈转动。下面求$f(\theta)$的极值。

$$f(\theta)=a\sin\theta+g\cos\theta+\frac{3v^2}{8l}-g$$

将上式求导令其为零有$f'(\theta)=a\cos\theta-g\sin\theta=0$求得极值点为：

$$\tan\theta^*=\frac{a}{g}$$

当

$$\sin\theta^*=\frac{a}{\sqrt{a^2+g^2}},\cos\theta^*=\frac{g}{\sqrt{a^2+g^2}},$$

函数$f(\theta^*)$取最大值

当

$$\sin\theta^*=-\frac{a}{\sqrt{a^2+g^2}},\cos\theta^*=-\frac{g}{\sqrt{a^2+g^2}},$$

函数$f(\theta^*)$取最小值，若使最小值大于零，则有

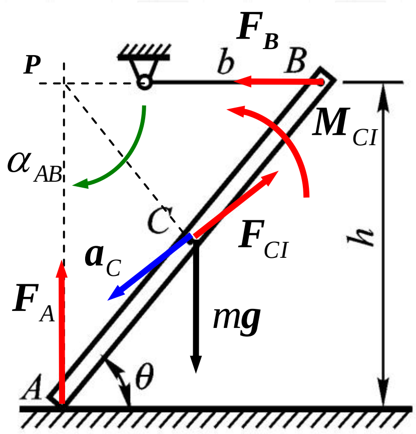
$$\frac{2}{3}l\dot{\theta}^2=-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+g^2}}-\frac{g^2}{\sqrt{a^2+g^2}}+\frac{3v^2}{8l}-g=-\sqrt{a^2+g^2}+\frac{3v^2}{8l}-g>0$$

由此求得：

$$3v^2>8l(g+\sqrt{a^2+g^2})$$

回到目录

4—6　图示瞬时，AB 杆的加速度瞬心位于 P 点，设其角加速度为α_{AB}，则质心加速度为：



$$a_C=\alpha_{AB}CP=\alpha_{AB}\frac{l}{2}$$

$$F_{CI}=ma_C=m\alpha_{AB}\frac{l}{2}$$

$$M_{CI}=\frac{1}{12}ml^2\alpha_{AB}$$

根据动静法有：

$$\sum M_P = 0 \qquad -mg\frac{l}{2}cos\theta + F_{CI}\frac{l}{2} + M_{CI} = 0$$

$$\alpha_{AB} = \frac{3g}{2l}\cos\theta = 3.528\text{rad/s}^2$$

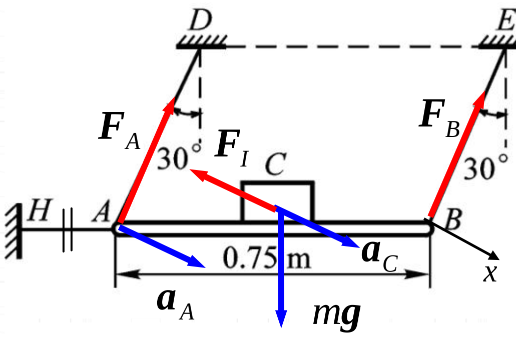
$$\sum F_y = 0 \qquad F_A - mg + F_{CI}\cos\theta = 0 \qquad F_A = mg(1-\frac{3}{4}\cos^2\theta) = 357.7\text{N}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{CI}\sin\theta - F_B = 0 \qquad F_B = \frac{3}{4}mg\sin\theta\cos\theta = 176.4\text{N}$$

回到目录

4—7　（1）取 AB 杆和滑块 C 为研究对象

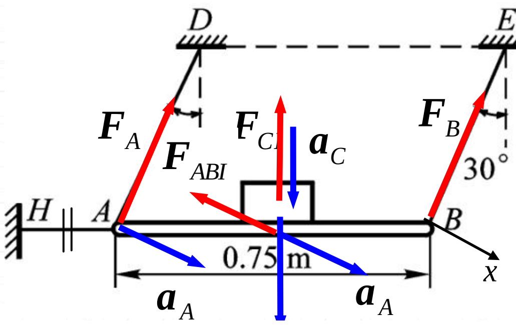
AB 杆平移，质心加速度如图所示 $F_I = ma_C$　根据动静法有：



$$\sum F_x = 0 \qquad mg\sin 30^0 - F_I = 0$$

$$a_C = g\sin 30^0 = 0.5g$$

（2）滑块 C 无水平方向的作用力，其加速度铅垂向下，AB 杆平移，其加速度垂直于 AD，如图所示。两者加速度的关系为



$$a_C = a_A\sin 30^0$$

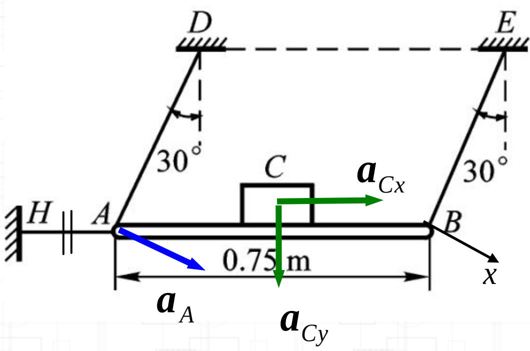
$$F_{CI} = m_C a_C, F_{ABI} = m_{AB}a_A, m = m_{AB} + m_C$$

根据动静法有

$$\sum F_x = 0 \qquad mg\sin 30^0 - F_{ABI} - F_{CI}\sin 30^0 = 0$$

由此求得：$a_A = 1.25g$，　$a_C = 0.625g$

（3）　先研究滑块 C



根据约束可知：$a_{Cy} = a_A\sin 30^0$

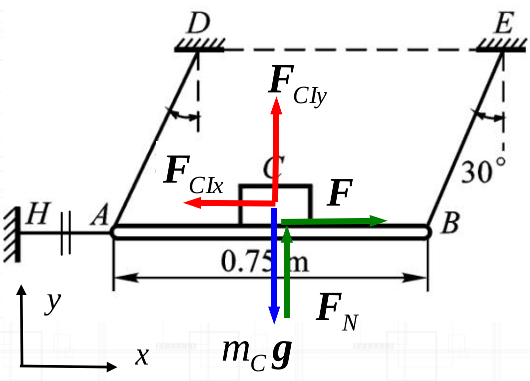
$$F_{CIx} = m_C a_{Cx}, \quad F_{CIy} = m_C a_{Cy}$$

根据动静法有：

$$\sum F_x = 0 \qquad F - F_{CIx} = 0 \qquad F = m_C a_{Cx}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_N + F_{CIy} - m_C g = 0$$

$$F_N = m_C g - m_C a_A\sin 30^0$$



因为：$F = fF_N$，所以有关系式

$$m_C a_{Cx} = f(m_C g - m_C a_A\sin 30^0)$$

即： $a_{Cx}=f(g-a_A\sin 30^0)$

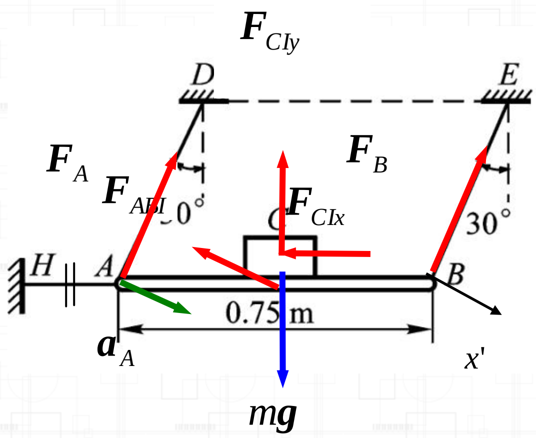
再研究整体，应用动静法有

$$\sum F_{x'}=0$$

$$mg\sin 30^0=F_{ABI}+F_{CIy}\sin 30^0+F_{CIx}\cos 30^0$$

上式可表示成：

$$mg\sin 30^0=m_{AB}a_A+m_C a_A\sin^2 30^0$$
$$+m_C f(g-a_A\sin 30^0)\cos 30^0$$



由上式解得： $a_A=0.6776g=6.64\text{m/s}^2$

$$a_{Cx}=f(g-a_A\sin 30^0)=3.24\text{m/s}^2,$$

$$a_{Cy}=a_A\sin 30^0=3.32\text{m/s}^2,$$

$$a_C=4.64\text{m/s}^2$$

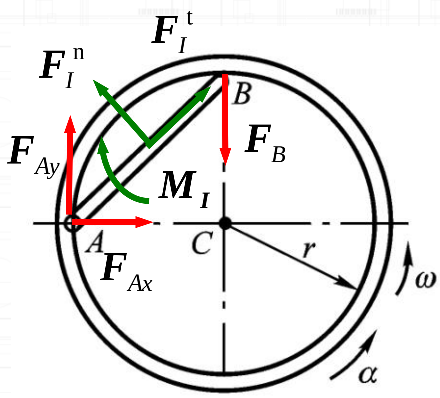
回到目录

4—8 （1）研究 AB 杆，将惯性力向杆的质心简化，

$$F_I^{\mathrm{n}}=m\omega^2\frac{\sqrt{2}}{2}r$$

$$F_I^{\mathrm{t}}=m\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}r$$

$$M_I=\frac{1}{12}m(\sqrt{2}r)^2\alpha$$



根据动静法有：

$$\sum M_A=0 \qquad F_I^{\mathrm{n}}\frac{\sqrt{2}}{2}r-M_I-F_B r=0, \qquad F_B=\frac{1}{6}mr(3\omega^2-\alpha)=14.286\text{N}$$

$$\sum F_x=0 \qquad F_{Ax}-F_I^{\mathrm{n}}\cos 45^0+F_I^{\mathrm{t}}\cos 45^0=0$$

$$F_{Ax}=\frac{1}{2}mr(\omega^2-\alpha)=6.122\text{N}$$

$$\sum F_y=0 \qquad F_{Ay}+F_I^{\mathrm{n}}\sin 45^0+F_I^{\mathrm{t}}\sin 45^0-F_B=0, \qquad F_{Ay}=-16.33\text{N}$$

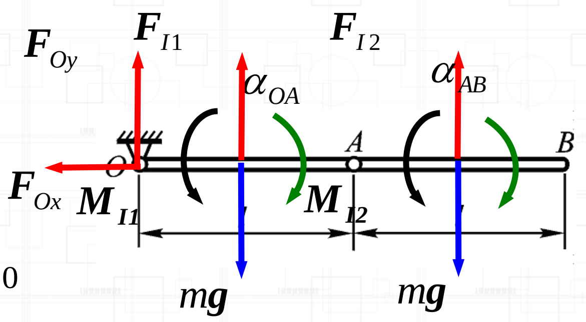
（2）若 $F_B>0$，必有 $3\omega^2>\alpha$，因此当 $\alpha=6\text{rad/s}^2$，$\omega>\sqrt{2}\text{rad/s}$

回到目录

4—9　设 OA 杆和 AB 杆的角加速度分别为 α_{OA},α_{AB}。将各杆的惯性力向各自质心简化。

$$F_{I1}=m\alpha_{OA}\frac{l}{2},\quad F_{I2}=m(\alpha_{AB}\frac{l}{2}+\alpha_{OA}l),$$

$$M_{I1}=\frac{1}{12}ml^2\alpha_{OA},\quad M_{I2}=\frac{1}{12}ml^2\alpha_{AB},$$



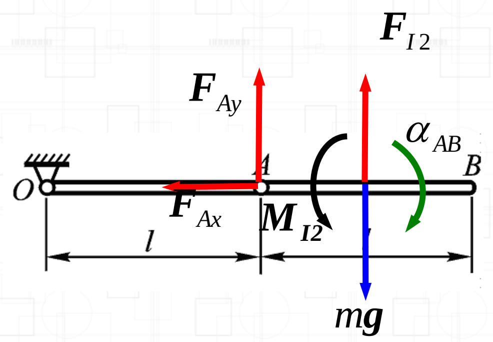
研究整体，根据动静法有：

$$\sum M_O=0,$$

$$F_{I1}\frac{l}{2}+F_{I2}\frac{3l}{2}-mg\frac{l}{2}-mg\frac{3l}{2}+M_{I1}+M_{I2}=0$$

AB 杆，根据动静法有：

$$\sum M_A=0\qquad F_{I2}\frac{l}{2}-mg\frac{l}{2}+M_{I2}=0$$



上述平衡方程可简化为

$$\frac{11}{6}l\alpha_{OA}+\frac{5}{6}l\alpha_{AB}=2g$$

$$\frac{1}{2}l\alpha_{OA}+\frac{1}{3}l\alpha_{AB}=\frac{1}{2}g$$

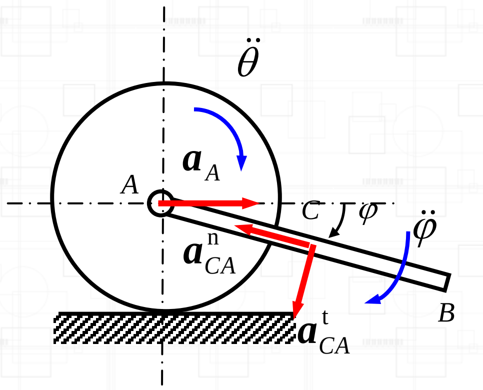
求解该方程组可得：$\alpha_{OA}=\dfrac{9g}{7l}$，$\alpha_{AB}=-\dfrac{3g}{7l}$

回到目录

4—10　取圆盘 A 的角加速度为 $\ddot{\theta}$，AB 杆的角加速度为 $\ddot{\varphi}$。

设 AB 杆的质心为 C，其加速度为

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{CA}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{CA}^{\mathrm{n}}$$



将惯性力分别向各刚体的质心简化。

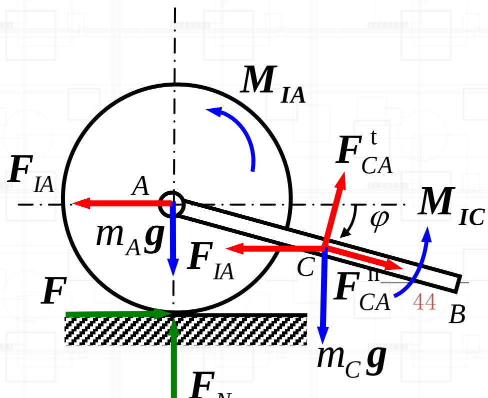
作用于 AB 杆质心 C 的惯性力为：

$$\boldsymbol{F}_{IC}=\boldsymbol{F}_{IA}+\boldsymbol{F}_{CA}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{F}_{CA}^{\mathrm{n}}$$

$$F_{IA}=m_A\ddot{\theta}r,\quad F_{CA}^{\mathrm{t}}=m_C\ddot{\varphi}\frac{l}{2},\quad F_{CA}^{\mathrm{n}}=m_C\dot{\varphi}^2\frac{l}{2}$$

$$M_{IA}=\frac{1}{2}m_Ar^2\ddot{\theta},\quad M_{IC}=\frac{1}{12}m_Cl^2\ddot{\varphi}$$

研究整体，



$$\sum M_P = 0 \qquad \text{（a）}$$

$$F_{IA}r + M_{IA} + F_{IA}(r - \frac{l}{2}\sin\varphi) - F_{CA}^{\mathrm{n}} r\cos\varphi$$

$$+ F_{CA}^{\mathrm{t}}(\frac{l}{2} - r\sin\varphi) + M_{IC} - mg\frac{l}{2}\cos\varphi = 0$$

研究 AB 杆，

P

$$\sum M_A = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$-F_{IA}\frac{l}{2}\sin\varphi + F_{CA}^{\mathrm{t}}\frac{l}{2} + M_{IC} - mg\frac{l}{2}\cos\varphi = 0$$

将(a)一(b)得：

$$F_{IA}r + M_{IA} + F_{IA}r - F_{CA}^{\mathrm{n}} r\cos\varphi - F_{CA}^{\mathrm{t}} r\sin\varphi = 0$$

上式化简为：

$$\frac{5}{2}mr^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mlr\dot{\varphi}^2\cos\varphi - \frac{1}{2}mlr\ddot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

还可写成：

$$5r\ddot{\theta} - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi - l\ddot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

即：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5r\dot{\theta} - l\dot{\varphi}\sin\varphi) = 0$$

将上式积分可得：

$$5r\dot{\theta} - l\dot{\varphi}\sin\varphi = C$$

再根据初始条件：$\varphi = 0, \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$ 确定 $C = 0$，由此可得 $\dot{\theta} = \frac{l}{5r}\dot{\varphi}\sin\varphi$

根据动能定理有：

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{4}m_A r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_{AB}v_C^2 + \frac{1}{24}m_{AB}l^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}mgl\sin\varphi \qquad \text{（C）}$$

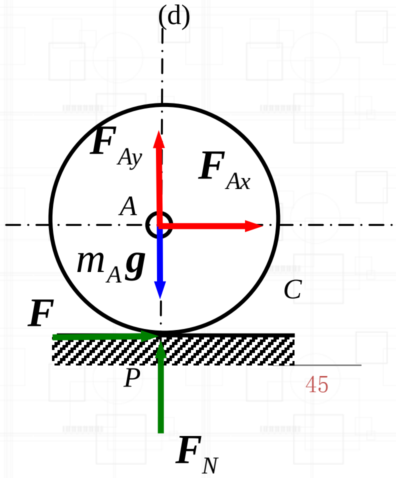
其中：$v_A = r\dot{\theta}$,　$v_C^2 = r^2\dot{\theta}^2 - rl\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{4}l^2\dot{\varphi}^2$

再利用 $\dot{\theta} = \frac{l}{5r}\dot{\varphi}\sin\varphi$（c）式可表示成

$$(\frac{1}{3} - \frac{\sin^2\varphi}{10})l\dot{\varphi}^2 = g\sin\varphi \qquad \text{(d)}$$

当 $\varphi = 90^0$，　$\omega_{AB} = \dot{\varphi}|_{\varphi=90^0} = \sqrt{\frac{30g}{7l}}$, $v_A = \dot{\theta}r = \frac{l}{5}\omega_{AB} = \sqrt{\frac{6gl}{35}}$

再将(d)式求导,然后销去 $\dot{\varphi}$，最后可得



$$\left(\frac{1}{3}-\frac{sin^2\varphi}{10}\right)2l\ddot{\varphi}-\frac{sin\varphi\, cos\varphi}{5}l\dot{\varphi}^2=g\,cos\varphi$$

当 $\varphi=90^0$,可求得 $\alpha_{AB}=\ddot{\varphi}=0$，

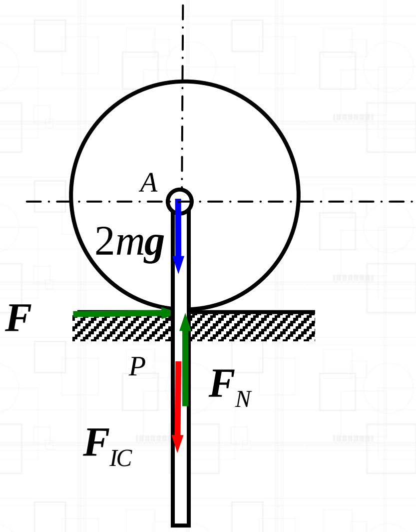
又因为 $\ddot{\theta}=\frac{l}{5r}\ddot{\varphi}\sin\varphi+\frac{l}{5r}\dot{\varphi}^2\cos\varphi$，

当 AB 杆铅垂时，$\alpha_A=\ddot{\theta}=0$。$a_A=\alpha_A r=0$

再取圆盘为研究对象，应用动静法有

$$\sum M_A=0,\quad Fr=0,\qquad F=0$$

再研究整体，利用动静法有



$$\sum F_y=0$$

$$F_N-2mg-F_{IC}=0$$

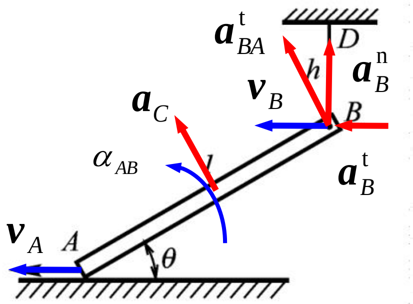
$$F_N=2mg+F_{IC}=2mg+m\frac{l}{2}\omega_{AB}^2=\frac{29}{7}mg$$

回到目录

4—12　此瞬时 AB 杆作瞬时平移，所以

$$v_A=v_B=2.44\text{m/s}$$

因为 AB 杆的角速度为零，且 A 点的加速度为零，取 A 为基点，有



$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^t+\boldsymbol{a}_{BA}^n=\boldsymbol{a}_{BA}^t$$

又因为 B 点作圆周运动，所以

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_B^t+\boldsymbol{a}_B^n=\boldsymbol{a}_{BA}^t$$

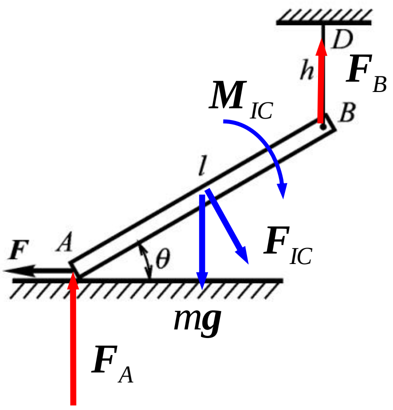
将该式在铅垂轴上投影：

$$a_B^n=a_{BA}^t\cos30^0=\frac{v_B^2}{h}$$

由此解得：

$$\alpha_{AB}=\frac{v_B^2}{hl\cos30^0}=1.8475\text{rad/s}^2$$

AB 杆质心 C 的加速度垂直于 AB 杆，其大小为：



$$a_C=\alpha_{AB}\frac{l}{2}=2.817\text{m/s}^2$$

应用动静法：

$$M_{IC}=\frac{1}{12}ml^2\alpha_{AB}$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{IC}\sin 30^0-F=0$$

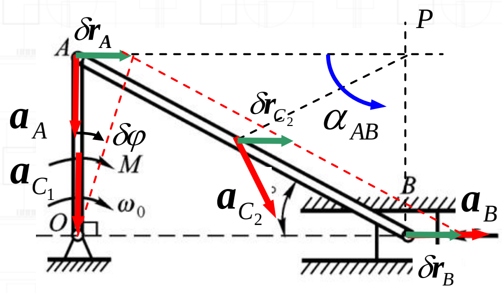
$$F=F_{IC}\sin 30^0=ma_C\sin 30^0=64\text{N}$$

$$\sum M_A=0,\quad F_B l\cos 30^0-M_{IC}-F_{IC}\frac{l}{2}-mg\frac{l}{2}\cos 30^0=0,$$

$$F_B=28402\text{N}$$

回到目录

4—14　图示瞬时，AB 杆瞬时平移，其加速度瞬心位于 P 点。设 OA、AB 杆的质心分别为 C_1, C_2。



各点加速度如图所示，其大小为

$$a_A=r\omega_0^2,\quad \alpha_{AB}=\frac{a_A}{AP}=\frac{r\omega_0^2}{2r\cos 30^0}=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0^2$$

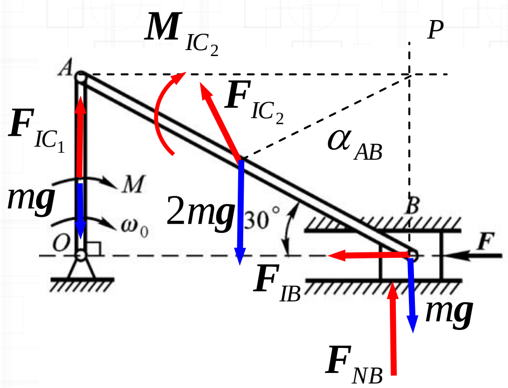
$$a_{C_2}=\alpha_{AB}C_2P=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0^2 r,\quad a_B=\alpha_{AB}BP=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0^2 r$$

有关的惯性力为：

$$F_{IC_2}=2ma_{C_2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}mr\omega_0^2$$

$$F_{IB}=ma_B=\frac{\sqrt{3}}{3}mr\omega_0^2$$

$$M_{IC_2}=\frac{1}{12}2m(2r)^2\alpha_{AB}=\frac{2\sqrt{3}}{9}mr^2\omega_0^2$$



应用动静法和虚位移原理，有

$$M\delta\varphi-F_{IC_2}\sin 30^0\delta r_{C_2}-F_{IB}\delta r_B-F\delta r_B=0$$

因为：$\delta r_B=\delta r_{C_2}=\delta r_A=r\delta\varphi$，上式可表示成

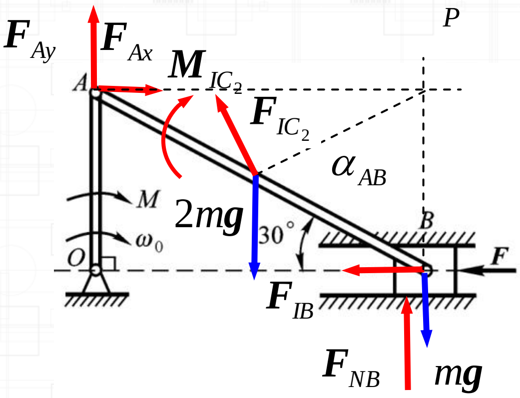
$$M\delta\varphi-F_{IC_2}\sin 30^0 r\delta\varphi-F_{IB}r\delta\varphi-Fr\delta\varphi=(M-F_{IC_2}\sin 30^0 r-F_{IB}r-Fr)\delta\varphi=0$$

因为 $\delta\varphi\neq 0$，所以　$M-F_{IC_2}\sin 30^0 r-F_{IB}r-Fr=0$，

由此解得

$$M=\frac{2\sqrt{3}}{3}m\omega_0^2r^2+Fr$$

研究 AB 杆及滑块 B，



$$\sum M_A=0$$

$$F_{IC_2}r\sin 30^0+F_{NB}2r\cos 30^0-2mgr\cos 30^0$$
$$-F_{IB}r-Fr-mg2r\cos 30^0-M_{IC_2}=0$$

由此解得：

$$F_{NB}=2mg+\frac{\sqrt{3}}{3}F+\frac{2}{9}m\omega_0^2r$$

回到目录

5-2 滑轮组上悬挂有质量为 10kg 的重物 M_1 和质量为 8kg 的重物 M_2，如图所示。忽略滑轮的质量，试求重物 M_2 的加速度 a_2 及绳的拉力。

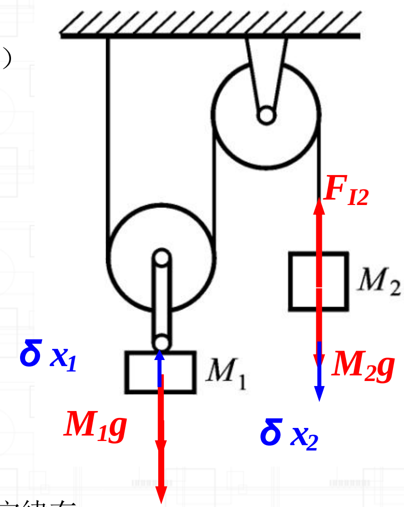
解：

取整个系统为研究对象，不考虑摩擦，该系统具有理想约束。作用在系统上的主动力为重物的重力 M_1g, M_2g 。假设重物 M_2 的加速度 a_2 的方向竖直向下，则重物 M_1 的加速度 a_1 竖直向上，两个重物惯性力 F_{I1}, F_{I2} 为：

$$F_{I1}=M_1a_1 \qquad F_{I2}=M_2a_2 \qquad (1)$$

该系统有一个自由度，假设重物 M_2 有一向下的虚位移 δx_2，则重物 M_1 的虚位移 δx_1 竖直向上。由动力学普遍方程有：

$$\delta W=-M_1g\delta x_1+M_2g\delta x_2-F_{I1}\delta x_1-F_{I2}\delta x_2=0 \qquad (2)$$



根据运动学关系可知：

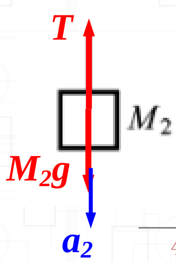
$$\delta x_1=\frac{1}{2}\delta x_2 \qquad a_1=\frac{1}{2}a_2 \qquad (3)$$

将(1)式和(3)式代入(2)式，可得对于任意 $\delta x_2\neq 0$ 有：

$$a_2=\frac{4M_2-2M_1}{4M_2+M_1}g=2.8(m/s^2)$$

方向竖直向下。取重物 M_2 为研究对象，受力如图所示，由牛顿第二定律有：

$$M_2g-T=M_2a_2$$



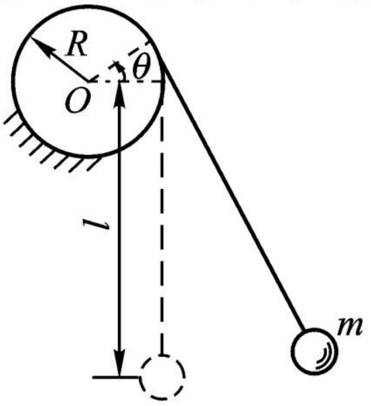
解得绳子的拉力$T=56.1(N)$。

本题也可以用动能定理，动静法，拉格朗日方程求解。

回到目录

5-4 如图所示，质量为 m 的质点悬在一线上，线的另一端绕在一半径为 R 的固定圆柱体上，构成一摆。设在平衡位置时，线的下垂部分长度为 l，且不计线的质量，试求摆的运动微分方程。

解：



该系统为保守系统，有一个自由度，取θ为广义坐标。

系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m[(l+R\theta)\dot{\theta}]^2$$

取$\theta=0$为零势位，则系统的势能为：

$$V=mg[R\sin\theta-(l+R\theta)\cos\theta]$$

拉格朗日函数$L=T-V$，代入拉格朗日方程有：$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$

整理得摆的运动微分方程为：

$$(l+R\theta)\ddot{\theta}+R\dot{\theta}^2+g\sin\theta=0$$

回到目录

5-6 质量为 m 的质点在重力作用下沿旋轮线导轨运动，如图所示。已知旋轮线的方程为$s=4b\sin\varphi$，式中s是以 O 为原点的弧坐标，φ是旋轮线的切线与水平轴的夹角。试求质点的运动规律。

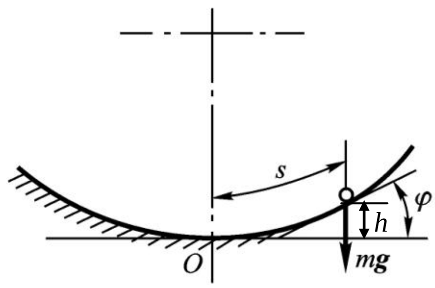
解：

该系统为保守系统有一个自由度，取弧坐标S为广义坐标。系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{S}^2$$

取$S=0$为零势位，系统的势能为：

$$V=mgh$$



由题可知 $\frac{dh}{dS}=\sin\varphi=\frac{S}{4b}$，因此有：

$$h=\int_0^s \frac{s}{4b}ds=\frac{S^2}{8b}$$

则拉格朗日函数：

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{S}^2-\frac{mg}{8b}S^2$$

代入拉格朗日方程： $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{S}})-\frac{\partial L}{\partial S}=0$，整理得摆的运动微分方程为：$\ddot{S}+\frac{g}{4b}S=0$，

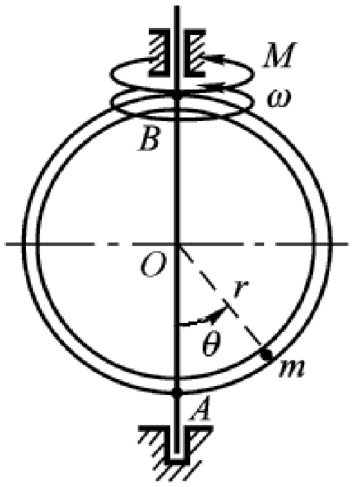
解得质点的运动规律为：$S=A\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}t+\varphi_0)$，其中 A,φ_0 为积分常数。

回到目录

5-13 质量为 m 的质点沿半径为 r 的圆环运动，圆环以匀角速度 ω 绕铅垂直径 AB 转动，如图所示。试建立质点的运动微分方程，并求维持圆环匀角速度转动所必需的转矩 M。

解：

1.求质点的运动微分方程



圆环（质量不计）以匀角速度 ω 绕铅垂轴 AB 转动，该系统有一个自由度，取角度 θ 为广义坐标。系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}m(\omega r\sin\theta)^2$$

取 $\theta=0$ 为零势位，系统的势能为：

$$V=mgr(1-\cos\theta)$$

则拉格朗日函数：

$$L=T-V=\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta)-mgr(1-\cos\theta)$$

代入拉格朗日方程：$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$，整理得质点的运动微分方程为：

$$\ddot{\theta}+(\frac{g}{r}-\omega^2\cos\theta)\sin\theta=0$$

2.求维持圆环作匀速转动的力偶M

如果求力偶M，必须考虑圆环绕铅垂轴 AB 的一般转动。因此解除“圆环绕铅垂轴 AB 匀速ω转动”这一约束，将力偶M

视为主动力。此时系统有两个自由度，取角度θ和圆环绕轴 AB 的转角φ为广义坐标，系统的势能不变，动能表达式中以$\dot{\varphi}$代替ω，则拉格朗日函数为：

$$L=T-V=\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-mgr(1-\cos\theta)$$

力偶M为非有势力，它对应于广义坐标θ和φ的广义力计算如下：

取$\delta\theta\neq 0,\delta\varphi=0$，在这组虚位移下力偶$M$所作的虚功为$[\delta W]_{\delta\theta}=0$，因此力偶$M$对应于广义坐标$\theta$的广义力

$$Q_\theta^M=0;$$

取$\delta\theta=0,\delta\varphi\neq 0$，在这组虚位移下力偶$M$所作的虚功为$[\delta W]_{\delta\varphi}=M\cdot\delta\varphi$，因此力偶$M$对应于广义坐标$\varphi$的广义力$Q_\varphi^M=\frac{[\delta W]_{\delta\varphi}}{\delta\varphi}=M$；

代入拉格朗日方程$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial \theta}=Q_\theta^M=0$，整理可得：

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{r}\sin\theta=0$$

代入拉格朗日方程$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}})-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=Q_\varphi^M=M$，整理可得：

$$mr^2\sin^2\theta\ddot{\varphi}+mr^2\sin 2\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}=M$$

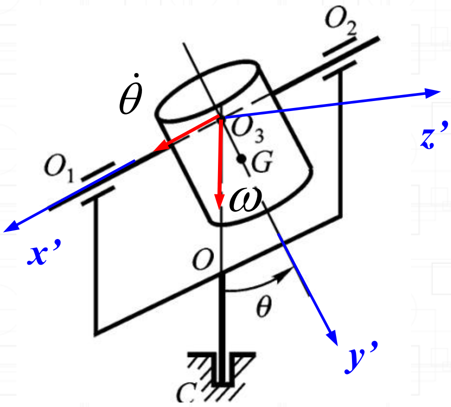
圆环绕铅垂轴 AB 匀速ω转动，即：$\dot{\varphi}=\omega,\ddot{\varphi}=0$，代入上式可得：

$$M = mr^2\omega\dot{\theta}\sin 2\theta$$

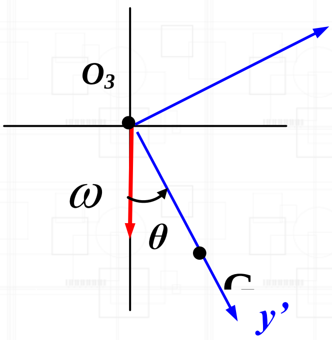
回到目录

5-14 如图所示，质量为 m 的物体可绕水平轴O_1O_2转动，轴O_1O_2又绕铅垂轴OC以匀角速度ω转动。物体的质心 G 在垂直于O_1O_2的直线上，$O_3G=l$。设O_1O_2和O_3G是物体过O_3点的惯量主轴，转动惯量为J_1和J_2，物体对另一过O_3点的惯量主轴的转动惯量为J_3，试求物体的动能表达式并建立物体的运动微分方程。

解：



垂直于 O_1O_2 的平面



以该物体为研究对象，有一个自由度，取O_3G和 OC 的夹角θ为广义坐标。若以框架O_1O_2OC为动系，则物体的相对运动是以角速度$\dot{\theta}$绕轴O_1O_2的定轴转动，牵连运动是以角速度ω绕OC轴的定轴转动，物体的绝对角速度ω_a是$\dot{\boldsymbol{\theta}}$和$\boldsymbol{\omega}$的矢量之和。为了方便起见，以$O_1O_2$为$x'$轴，$O_3G$为$y'$轴，如图建立一个固连在物体上的坐标系，则该刚体的角速度ω_a可表示成：

$$\boldsymbol{\omega}_a = \dot{\theta}\,\boldsymbol{i}' + \omega\cos\theta\,\boldsymbol{j}' - \omega\sin\theta\,\boldsymbol{z}'$$

由于坐标系$O_3x'y'z'$的三个坐标轴为过O_3点的三个惯量主轴，则系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}[J_1\dot{\theta}^2 + J_2(\omega\cos\theta)^2 + J_3(\omega\sin\theta)^2]$$

取$\theta=0$为零势位，系统的势能为：

$$V = mgl(1-\cos\theta)$$

则拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2}[J_1\dot{\theta}^2 + J_2(\omega\cos\theta)^2 + J_3(\omega\sin\theta)^2] - mgl(1-\cos\theta)$$

代入拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 ,$$

整理后，可得物体的运动微分方程为：

$$J_1\ddot{\theta} + \omega^2(J_2 - J_3)\sin\theta\cos\theta = -mgl\sin\theta$$

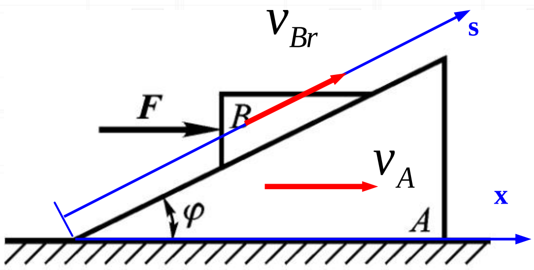
回到目录

5-17 重 P_1 的楔块可沿水平面滑动，重 P_2 的楔块沿楔块 A 的斜边滑动，在楔块 B 上作用一水平力 $\boldsymbol{F}$ ，如图所示。忽略摩擦，角 φ 已知，试求楔块 A 的加速度及楔块 B 的相对加速度。

解：

取楔块 A，B 构成的系统为研究对象，该系统有二个自由度，取楔块 A 水平滑动的位移 x，以及楔块 B 相对于 A 的沿斜面滑动的位移 s 为广义坐标。若以楔块 A 为动系，楔块 A 的速度 v_A，楔块 B 的速度 v_B，以及 B 相对于 A 的相对速度满足如下的矢量关系（方向如图所示）：

$$v_B = v_A + v_{Br}$$



系统的动能为：

$$T = \frac{1}{2}m_A v_A^{\ 2} + \frac{1}{2}m_B v_B^{\ 2}$$

$$= \frac{P_1}{2g}\dot{x}^2 + \frac{P_2}{2g}[(\dot{x} + \dot{s}\cos\varphi)^2 + (\dot{s}\sin\varphi)^2]$$

$$= \frac{1}{2g}(P_1 + P_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{g}P_2\cos\varphi\dot{x}\dot{s} + \frac{1}{2g}P_2\dot{s}^2$$

取过 x 轴的水平为零势面，系统的势能为：

$$V = P_2 s\sin\varphi$$

则拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2g}(P_1 + P_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{g}P_2\cos\varphi\dot{x}\dot{s} + \frac{1}{2g}P_2\dot{s}^2 - P_2 s\sin\varphi$$

将水平力 F 视为非有势力，它对应于广义坐标 x 和 s 的广义力计算如下：

取 $\delta x \neq 0, \delta s = 0$，在这组虚位移下力 F 所作的虚功为 $[\delta W]_{\delta x} = F\delta x$，因此力 F 对应于广义坐标 x 的广义力

$$Q_x^F = F;$$

取 $\delta x = 0, \delta s \neq 0$，在这组虚位移下力 F 所作的虚功为 $[\delta W]_{\delta s} = F\cos\varphi\delta s$，因此力 F 对应于广义坐标 s 的广义力

$$Q_s^F = F\cos\varphi;$$

代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x^F = F$，整理可得：

$$(P_1 + P_2)\ddot{x} + P_2\cos\varphi\ddot{s} = Fg \qquad (1)$$

代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}) - \frac{\partial L}{\partial s} = Q_s^F = F\cos\varphi$，整理可得：

$$P_2\cos\varphi\ddot{x} + P_2\ddot{s} = (F\cos\varphi - P_2\sin\varphi)g \qquad (2)$$

由方程(1)和方程(2)解得：

楔块 A 的加速度：

$$a_A = \ddot{x} = \frac{F\sin\varphi + P_2\cos\varphi}{P_1 + P_2\sin^2\varphi} g\sin\varphi$$，方向水平向右。

楔块 B 的相对加速度：

$$a_{Br} = \ddot{s} = \frac{FP_1\cos\varphi - (P_1 + P_2)P_2\sin\varphi}{P_2(P_1 + P_2\sin^2\varphi)} g$$，方向沿斜面向上。

回到目录

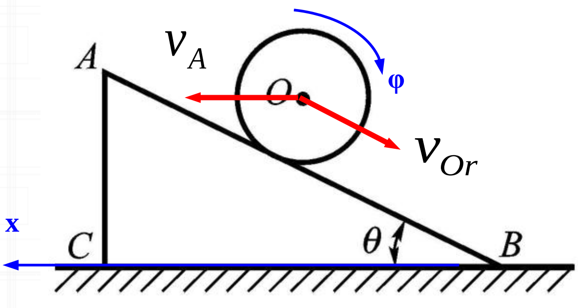
5-18 在光滑水平面上放一质量为 m 的三角形楔块 *ABC*，质量为 m_1，半径为 r 的均质圆柱沿楔块的 *AB* 边滚动而不滑动，如图所示。试求楔块的加速度及圆柱的角加速度。

解：

取楔块 ABC 和圆柱构成的系统为研究对象，该系统为保守系统，有二个自由度，取楔块水平滑动的位移 x，以及圆柱的转角 φ（A 点 φ=0）为广义坐标。若以楔块为动系，楔块的速度 v_A，圆柱轴心 O 的速度 v_o，以及轴心 O 相对于 A 的相对速度满足如下的矢量关系（方向如图所示）：

$$v_O = v_A + v_{Or}$$

圆柱在斜面上作纯滚动有：



$$v_{Or} = \dot{\varphi} r$$

系统的动能为：

$$T = \frac{1}{2} m v_A{}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_O{}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} m_1 r^2)\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 [(\dot{x} - \dot{\varphi} r \cos\theta)^2 + (\dot{\varphi} r \sin\theta)^2] + \frac{1}{4} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{x}^2 - m_1 r \cos\theta \dot{x}\dot{\varphi} + \frac{3}{4} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2$$

取过楔块上 A 点的水平为零势面，系统的势能为：

$$V = -m_1 g \varphi r \sin\theta$$

则拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{x}^2 - m_1 r \cos\theta \dot{x}\dot{\varphi} + \frac{3}{4} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2 + m_1 g \varphi r \sin\theta$$

代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$，整理可得：

$$(m + m_1)\ddot{x} - m_1 r \cos\theta \cdot \ddot{\varphi} = 0 \qquad （1）$$

代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$，整理可得：

$$3r\ddot{\varphi} - 2\ddot{x}\cos\theta = 2g\sin\theta \qquad （2）$$

由方程(1)和方程(2)解得：

楔块的加速度：

$$a = \ddot{x} = \frac{m_1 \sin 2\theta}{3(m + m_1) - 2m_1 \cos^2\theta} g$$，方向水平向左。

圆柱的角加速度：

$$\alpha = \ddot{\varphi} = \frac{2(m + m_1)\sin\theta}{[3(m + m_1) - 2m_1 \cos^2\theta] r} g$$，顺时针方向。

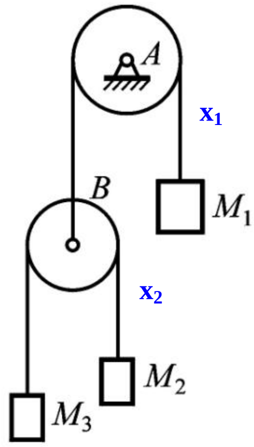
回到目录

5-21 系统由定滑轮 *A* 和动滑轮 *B* 以及三个重物组成，如图所示。重物 M_1, M_2, M_3 的质量分别为 m_1, m_2, m_3，$m_1 < m_2 + m_3, m_2 > m_3$，滑轮的质量忽略不计。若初始时系统静止，

试求欲使 M_1 下降，质量 m_1, m_2 和 m_3 之间的关系。

解：

以三个重物和滑轮构成的系统为研究对象，该系统为保守系统，有二个自由度（如图所示）。设重物 M_1 的坐标为 x_1，重物 M_2 相对于滑轮 B 的轮心的位置为 x_2。系统的动能为：



$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{x}_2^2 + (m_3 - m_2)\dot{x}_1\dot{x}_2$$

取 $x_1 = x_2 = 0$ 时为系统零势能位，则任意位置系统的势能为：

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g(x_2 - x_1) + m_3 g(x_1 + x_2)$$

$$= (-m_1 + m_2 + m_3)g x_1 - (m_2 - m_3)g x_2$$

拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{x}_2^2 + (m_3 - m_2)\dot{x}_1\dot{x}_2$$

$$+ (m_1 - m_2 - m_3)g x_1 + (m_2 - m_3)g x_2$$

代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$，整理可得：

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_1 - (m_2 - m_3)\ddot{x}_2 - (m_1 - m_2 - m_3)g = 0 \qquad (1)$$

代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$，整理可得：

$$(m_2 + m_3)\ddot{x}_2 - (m_2 - m_3)\ddot{x}_1 - (m_2 - m_3)g = 0 \qquad (2)$$

由方程(1)和方程(2)解得重物 M_1 的加速度：

$$a_1 = \ddot{x}_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} g,$$

初始时刻系统静止，若使 M_1 下降则 $a_1 > 0$，即：

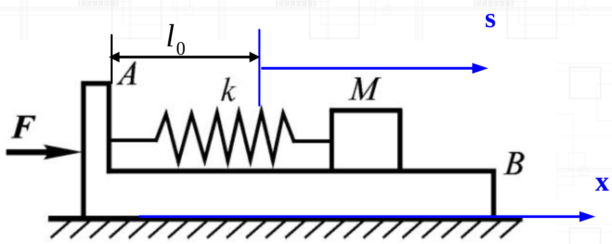
$$m_1 > \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}$$

回到目录

5-22 重 P_1 的平台 AB 置于水平面上，物体 M 重 P_2，弹簧的刚度系数为 k，如图所示。在平台上施加水平力 F，忽略摩擦。如果系统从静止开始运动，此时弹簧物变形，试求平台和物体 M 的加速度。

解：

取整个系统为研究对象，该系统有二个自由度，取平台的水平坐标 x，以及物体 M 相对于平台的坐标 s（弹簧原长为坐标原点）为广义坐标。系统的动能为：



$$T=\frac{P_1}{2g}\dot{x}^2+\frac{P_2}{2g}(\dot{x}+\dot{s})^2$$

$$=\frac{1}{2g}(P_1+P_2)\dot{x}^2+\frac{1}{g}P_2\dot{x}\dot{s}+\frac{1}{2g}P_2\dot{s}^2$$

取弹簧未变形时势能为零，则系统的势能为：

$$V=\frac{1}{2}ks^2$$

则拉格朗日函数：

$$L=T-V=\frac{1}{2g}(P_1+P_2)\dot{x}^2+\frac{1}{g}P_2\dot{x}\dot{s}+\frac{1}{2g}P_2\dot{s}^2-\frac{1}{2}ks^2$$

将水平力 F 视为非有势力，它对应于广义坐标 x 和 s 的广义力计算如下：

取 $\delta x\neq 0,\delta s=0$，在这组虚位移下力 F 所作的虚功为 $[\delta W]_{\delta x}=F\delta x$，因此力 F 对应于广义坐标 x 的广义力 $Q_x^F=F$；

取 $\delta x=0,\delta s\neq 0$，在这组虚位移下力 F 所作的虚功为 $[\delta W]_{\delta s}=0$，因此力 F 对应于广义坐标 s 的广义力 $Q_s^F=0$；

代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})-\frac{\partial L}{\partial x}=Q_x^F=F$，整理可得：

$$(P_1+P_2)\ddot{x}+P_2\ddot{s}=Fg \qquad (1)$$

代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}})-\frac{\partial L}{\partial s}=Q_s^F=0$，整理可得：

$$P_2\ddot{x}+P_2\ddot{s}+kgs=0 \quad (2)$$

由方程(1)可得：

$$\ddot{x}=\frac{Fg}{(P_1+P_2)}-\frac{P_2}{(P_1+P_2)}\ddot{s} \quad (3)$$

代入方程(2)得：

$$P_1P_2\ddot{s}+(P_1+P_2)kgs=-P_2Fg \quad (4)$$

解微分方程（4）得：

$$s=\frac{P_2F}{k(P_1+P_2)}\cos pt-\frac{P_2F}{k(P_1+P_2)},$$

其中：

$$p^2=\frac{(P_1+P_2)kg}{P_1P_2}。$$

求导得：

$$\ddot{s}=\frac{Fg}{P_1}\cos pt$$

代入方程(3)可得：
平台的加速度：

$$a_1=\ddot{x}=\frac{F}{P_1+P_2}g(1+\frac{P_2}{P_1}\cos pt)$$

，方向水平向右。

物体 M 的加速度：

$$a_2=\ddot{x}+\ddot{s}=\frac{F}{P_1+P_2}g(1-\cos pt)$$

，方向水平向右。

回到目录

5-28 图示质量为 m_2 的滑块 B 沿与水平成倾角 α 的光滑斜面下滑，质量为 m_1 的均质细杆 *OD* 借助铰链 O 和螺旋弹簧与滑块 B 相连，杆长为 *l*，弹簧的刚度系数为 k。试求系统的首次积分。

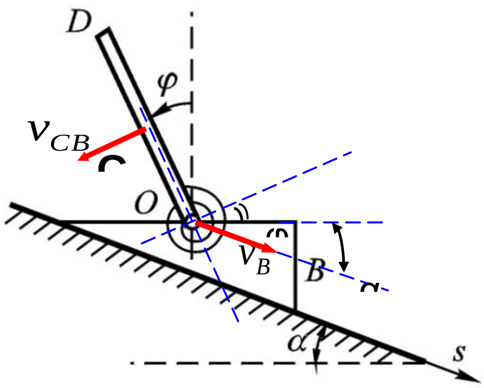
解：

取整个系统为研究对象，该系统有二个自由度，取滑块 B 沿斜面的坐标 s，以及杆 OD 与铅垂方向的夹角 φ 为广义坐标。杆 OD 作平面运动，

有：

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{CB}$$

则系统的动能为：



$$T=\frac{1}{2}m_1v_C^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{12}m_1l^2)\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2v_B^2$$

$$=\frac{1}{2}m_1\{[\dot{s}\sin(\varphi+\alpha)]^2+[\dot{s}\cos(\varphi+\alpha)-\dot{\varphi}\frac{l}{2}]^2\}+\frac{1}{24}m_1l^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{s}^2$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{s}^2-\frac{1}{2}m_1l\dot{\varphi}\dot{s}\cos(\varphi+\alpha)+\frac{1}{6}m_1l^2\dot{\varphi}^2$$

设 $s=0,\varphi=90^0$ 时势能为零，系统的势能为：

$$V=m_1g\frac{l}{2}\cos\varphi-(m_1+m_2)gs\sin\alpha+\frac{1}{2}k\varphi^2$$

拉格朗日函数 $L=T-V$ 中不显含时间 t，存在广义能量积分，即：

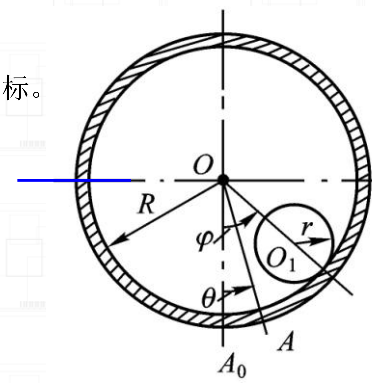
$$T+V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{s}^2-\frac{1}{2}m_1l\dot{\varphi}\dot{s}\cos(\varphi+\alpha)+\frac{1}{6}m_1l^2\dot{\varphi}^2$$

$$+m_1g\frac{l}{2}\cos\varphi-(m_1+m_2)gs\sin\alpha+\frac{1}{2}k\varphi^2=\text{常数}$$

回到目录

5-29 半径为 r 、质量为 m 的圆柱，沿半径为 R 、质量为 m_0 的空心圆柱内表面滚动而不滑动，如图所示。空心圆柱可绕自身的水平轴 O 转动。圆柱对各自轴线的转动惯量为 $\frac{mr^2}{2}$ 和 m_0R^2 。试求系统的首次积分。

解：



以圆柱和圆筒构成的系统为研究对象，该系统有二个自由度，取 θ,φ 为广义坐标。

系统的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m_0R^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mv_{O1}^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\omega^2$$

其中：

$$v_{O1}=(R-r)\dot{\varphi},$$

圆柱相对于圆筒作纯滚动，由圆柱轴心 O_1 以及圆柱上与圆筒相接触的点的速度关系，可得：

$$\omega = \frac{1}{r}[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\theta}]$$

代入动能有：

$$T = \frac{1}{4}(2m_0 + m)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m(R-r)R\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

设 $\varphi = 0$ 为零势位，系统的势能为：

$$V = mg(R-r)(1-\cos\varphi),$$

拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{4}(2m_0 + m)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m(R-r)R\dot{\theta}\dot{\varphi} - mg(R-r)(1-\cos\varphi)$$

拉格朗日函数中不显含广义坐标 θ 和时间 t，存在循环积分和广义能量积分，即：

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = m_0R^2\dot{\theta} - \frac{1}{2}mR[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\theta}] = p_0$$

$$T + V = \frac{1}{2}m_0R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R-r)(1-\cos\varphi) = E_0$$

回到目录