北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

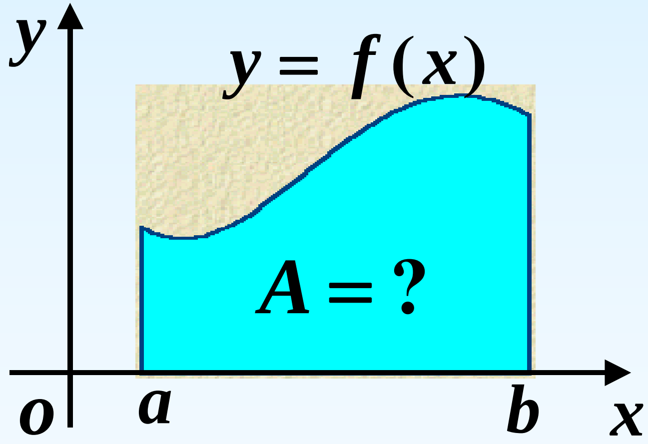
第六章 函数的Riemann积分与Lebesgue积分初步

§1 定积分的基本概念

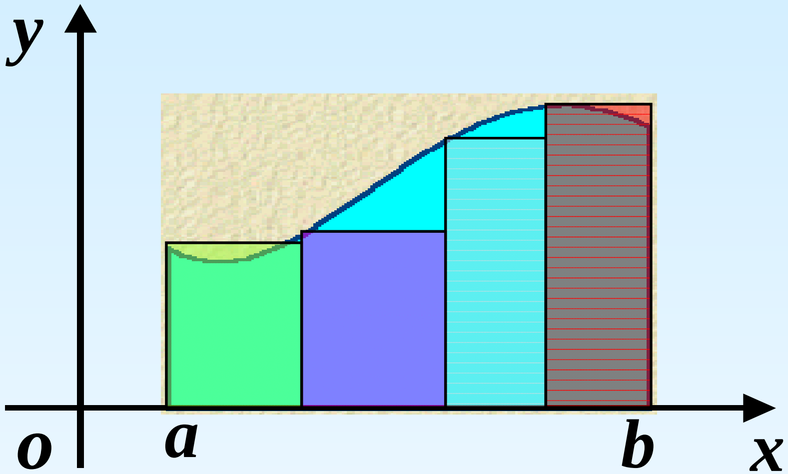
一、问题的提出

实例1 （求曲边梯形的面积）

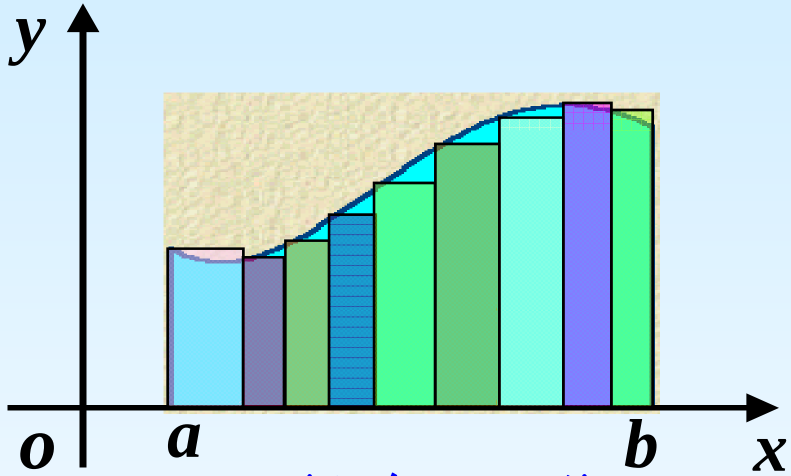
曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$、x轴与两条直线$x = a$、$x = b$所围成.



用矩形面积近似取代曲边梯形面积



（四个小矩形）



（九个小矩形）

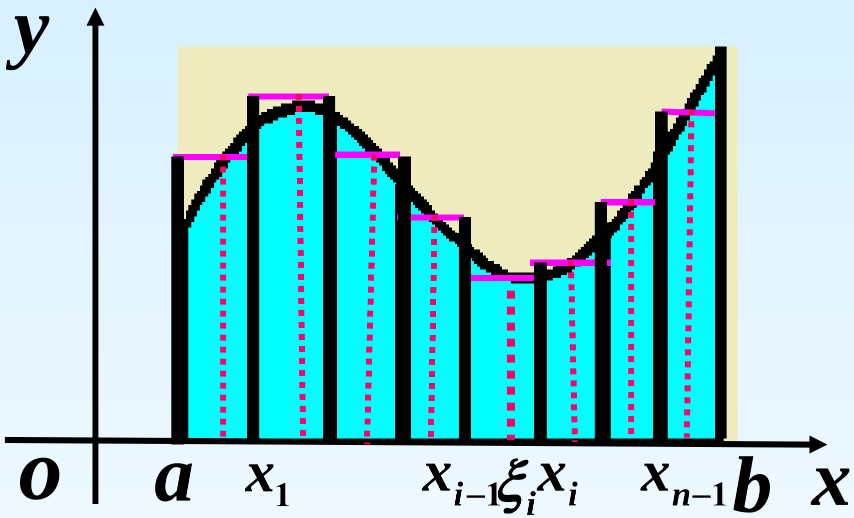
可以看出，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

曲边梯形如图所示, 在区间$[a,b]$内插入若干个分点，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,

把区间$[a,b]$分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$,

长度为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i,



以$[x_{i-1}, x_i]$为底，$f(\xi_i)$为高的小矩形面积为

$$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积的近似值为

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当分割无限加细　,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\} \to 0$时,

曲边梯形面积为 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程

思路：把整段时间分割成若干小段，每小段上速度看作不变，求出各小段的路程再相加，便得到路程的近似值，最后通过对时间的无限细分过程求得路程的精确值.

（1）分割 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \qquad \Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$$

部分路程值

某时刻的速度

（2）求和 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（3）取极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

二、定积分的定义

定义1.1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义在$[a,b]$中任意插入若干个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

把区间$[a,b]$分成n个小区间， 各小区间的长度依次为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$(i=1,2,\cdots)$， 在各小区间上任取一点ξ_i（$\xi_i\in\Delta x_i$）， 作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots)$

并作和

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

记$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对$[a,b]$

怎样的分法，也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点ξ_i怎样的取法，只要当$\lambda\to 0$时，和S总趋于确定的极限I，我们称这个极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的Riemann积分或定积分，记为

积分上限

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

(Riemann和)
积分和

$[a,b]$ 积分区间

注意:

（1）积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

（2）定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的.

(3) 规定：若$a>b, \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

(4) 极限过程$\lambda \to 0$和$n \to \infty$的区别.

(5) 积分和的极限和函数的极限的区别.

三、几何意义

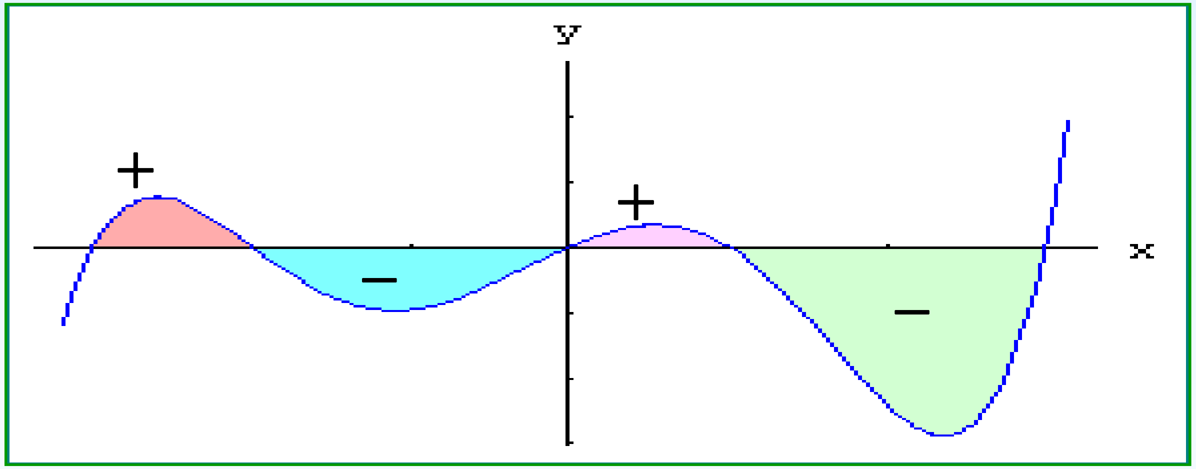
$$f(x) > 0,\quad \int_a^b f(x)dx = A$$ 曲边梯形的面积

$$f(x) < 0,\quad \int_a^b f(x)dx = -A$$ 曲边梯形的面积的负值

几何意义：

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和.

在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号.



四、简单性质

性质1.1 假设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上可积，则

1)（积分的保序性）

如果$\forall x\in[a,b], f(x)\ge g(x)$,则$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$;

特别的,如果$\forall x\in[a,b], f(x)\ge 0$,则$\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

2)（积分的线性性质）

对于任意实数α,β,有

$$\int_a^b (\alpha f(x)\pm\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx.$$

特别的,$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

性质1.2

设$f(x)$在$[a,b]$上连续， 则存在$\theta \in [a,b]$,

使得$\int_a^b f(x)dx = f(\theta)(b-a).$

不计算定积分比较积分大小

例 1 比较积分值$\int_{-2}^{0} e^x dx$和$\int_{-2}^{0} x dx$的大小.

解 令 $f(x) = e^x - x, \quad x \in [-2, 0]$

$\because \ f(x) > 0, \quad \therefore \int_{-2}^{0} (e^x - x) dx > 0,$

$\therefore \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx$

例2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \quad (n>0).$

解 $\because 0 \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n, \quad x\in[0,1], n>0$

积分中值定理

$$\therefore 0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx = \theta^n, \ \theta\in(0,1).$$

又因为 $\theta\in(0,1)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta^n = 0.$

于是由夹逼定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0.$$

五、可积定理

详见第二节

定理1 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

定理2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

六、求简单函数积分

例3 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx.$

解 将$[0,1]$ n等分，分点为 $x_i = \frac{i}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

取 $\xi_i = x_i$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),\qquad \lambda\to 0\Rightarrow n\to\infty$$

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\,2}\Delta x_i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

七、小结

1．定积分的实质：特殊和式的极限.

2．定积分的思想和方法：

分割 ⟶ 化整为零

⇓ 　　　　　⇓ 求近似以直（不变）代曲（变）

求和 ⟶ 积零为整

⇓ 　　　　　⇓ 取极限

取极限 ⟶ 精确值——定积分

作业 习题6.1　2(2)(3)\3(1)(3)\4(1) \5

思考题 将和式极限表示成定积分.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

思考题解答

原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\underbrace{\boxed{\frac{i\pi}{n}}}_{\xi_i}\right)\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx.$$

补例1 利用定义计算定积分 $\int_1^2 \frac{1}{x}dx.$

解 在[1,2]中插入分点 $q, q^2, \cdots, q^{n-1}$,

典型小区间为$[q^{i-1}, q^i]$, （$i = 1,2,\cdots,n$）

小区间的长度$\Delta x_i = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q-1)$,

取$\xi_i = q^{i-1}$, （$i = 1,2,\cdots,n$）

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}} q^{i-1}(q-1)$$

补例1

$$=\sum_{i=1}^{n}(q-1)\ =n(q-1)\quad 取 q^{n}=2\ \ 即 q=2^{\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = n(2^{\frac{1}{n}}-1),$$

$$\because \lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\ln 2,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\ln 2,$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx\ =\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i\ =\lim_{n\to\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\ln 2.$$

补例 2 设函数 $f(x)$在区间[0,1]上连续，且取正值.

试证 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}.$$

证明 利用对数的性质得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

$$= e^{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)}$$

补例2

极限运算与对数运算换序得

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

指数可理解为：$\ln f(x)$在$[0,1]$区间上的一个积分和.

分割是将$[0,1]$ n等分

分点为$x_i = \dfrac{i}{n}$，（$i = 1,2,\cdots,n$）

补例2

因为 $f(x)$在区间[0,1]上连续，且 $f(x)>0$

所以$\ln f(x)$在[0,1]上有意义且可积，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 \ln f(x)dx$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$

$$=e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}.$$

补例3 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$, (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

解（1）

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n}$$

因此 $\int_0^1\ln(1+x)dx=[(1+x)\ln(1+x)-x]\Big|_0^1=2\ln2-1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=e^{2\ln2-1}$$

补例3

$$(2)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\dots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

§2 可积的条件

定理2.1（可积的必要条件）

若函数f在$[a,b]$上可积，则f在$[a,b]$上有界.

证明 设$\int_a^b f(x)dx = I$,

则对$\varepsilon = 1$,必存在一分割π,使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1,$$ 其中$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$任选,

易见 $$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < |I| + 1,$$

$$|f(\xi_1)\Delta x_1| < |I| + 1 + |\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i|,$$

$$|f(\xi_1)| < \frac{1}{\Delta x_1}(|I| + 1 + |\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i|).$$

固定 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 2,3,\ldots,n,$ ξ_1在$[x_0, x_1]$上任取，

易见$f(x)$在$[x_0, x_1]$上有界, 其他类似.

注：可积必有界，有界未必可积.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}. \end{cases}$$

定义2.1（达布(Darboux)上和达布下和）

设$f(x)$在$[a,b]$上有界,取$[a,b]$的分割

$$\pi: x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

定义和式：$\bar{S}(\pi, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$, $\underline{S}(\pi, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

这里M_i, m_i分别为$f(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的上确界和下确界.

它们分别称函数$f(x)$相应于分割π的达布上和和下和.

推论2.1

对于任意分割$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$,有

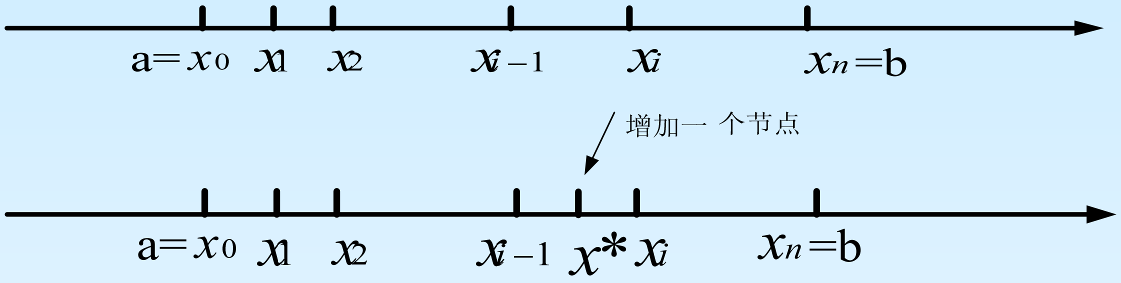
$$m(b-a) \le \underline{S}(\pi, f) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \bar{S}(\pi, f) \le M(b-a).$$

定理2. 2 设$f(x)$在$[a,b]$上有界，设有两个分割π,π'，其中π'是在π基础上多加了k个新分点的加密分割，则

$$\left.\begin{aligned}\bar{S}(\pi,f)\ge\bar{S}(\pi',f)\ge\bar{S}(\pi,f)-k\omega\|\pi\|,\\ \underline{S}(\pi,f)\le\underline{S}(\pi',f)\le\underline{S}(\pi,f)+k\omega\|\pi\|.\end{aligned}\right\}$$

这里$\omega=M-m$，M,m分别是f在$[a,b]$上的上、下确界.

证明 我们仅证明加密分割只增加了一个节点的情况,其余类似.



$$\pi: x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b,$$

$$\pi': x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x^* < x_i < \ldots < x_n = b.$$

在$[x_{i-1},x_i]$中，用$m_i\Delta x_i$代替$(x^*-x_{i-1})\inf(f[x_{i-1},x^*])+(x_i-x^*)\inf(f[x^*,x_i])$

可见$\underline{S}(\pi,f)\le\underline{S}(\pi',f)$

而$\underline{S}(\pi',f)-\underline{S}(\pi,f)\le M_i\Delta x_i-m_i\Delta x_i\le\omega\|\pi\|$

推论2.2

设$f(x)$在$[a,b]$上有界. 对于任意两个分割π,π',有

$$m(b-a)\le \underline{S}(\pi',f)\le \overline{S}(\pi,f)\le M(b-a)$$

证明

t1

将分割π'中的节点插入π得到新的分割π^*,

根据定理2.2,有

$$\overline{S}(\pi,f)\ge \overline{S}(\pi^*,f)\ge \underline{S}(\pi^*,f),\ \underline{S}(\pi',f)\le \underline{S}(\pi^*,f)\le \overline{S}(\pi^*,f).$$

再根据推论2.1,结论得证.

定义2.2 设$f(x)$在$[a,b]$上有界,定义

$$\overline{I}=\inf\left\{\overline{S}(\pi,f)\,\middle|\,\forall\pi\text{为}[a,b]\text{上一个分割}\right\}$$

$$\underline{I}=\sup\left\{\underline{S}(\pi,f)\,\middle|\,\forall\pi\text{为}[a,b]\text{上一个分割}\right\}$$

并称$\overline{I}$为$f(x)$在$[a,b]$上的**上积分**,$\underline{I}$称$f(x)$在$[a,b]$上的**下积分**.

定理2.3（Darboux定理）

对于$f(x)$在$[a,b]$的有界函数,有

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\overline{S}(\pi,f)=\overline{I},\ \lim_{\|\pi\|\to 0}\underline{S}(\pi,f)=\underline{I}.$$

定理2.4 设$f(x)$在$[a,b]$上有界，下列命题等价

1) $f(x)$在$[a,b]$可积;

2) $\bar{I}=\underline{I}$;

3)对于$[a,b]$上的任何一个分割π, $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})=0$;

4)$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $[a,b]$上存在分割π,当$\|\pi\|<\delta$,有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})<\varepsilon \text{成立.}$$

这里$\omega_i=M_i-m_i$为$f(x)$在区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅.

推论2.2（绝对可积）

若f在$[a,b]$上可积，那么$|f|$也在$[a,b]$上可积，

并且$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

推论2.3（积分区间可加性）

t2

若f在$[a,b]$上可积，

$\forall c \in (a,b)$，f在$[c,b]$与$[a,c]$上可积.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\quad \forall c \in (a,b)$$

定理2.5

设$f(x)$在$[a,b]$上有界,且是单调函数,则$f(x)$在$[a,b]$可积.

证明 不妨假设函数$f(x)$在$[a,b]$单调递增.

t3

对于$[a,b]$的任意分割,有$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b.$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \le (f(b) - f(a))\|\pi\|$$

因此$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$,当$\|\pi\| < \delta$,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1}) \le (f(b) - f(a))\|\pi\| < \varepsilon$$

定理2.6 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$可积.

证明 由于$f(x)$在$[a,b]$上连续,则一致连续,

所以$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in [a,b], |x_1 - x_2| < \delta$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

对于$[a,b]$任意分割$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$,

t4

当$\|\pi\| < \delta$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} |(f(s_i) - f(t_i))(x_i - x_{i-1})|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon, s_i,\ t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

定理2.7 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且非负,在$[a,b]$上不恒为零,

则有$\int_a^b f(x)dx > 0.$

证明

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续且非负,且在$[a,b]$上不恒为零, t5

故存在一点$x_0 \in [a,b]$, $f(x_0) > 0$,

由函数连续的定义,我们有

取$\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$,$\exists \delta > 0$,$|x - x_0| < \delta$,有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,即$f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$,

因此 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx > \dfrac{f(x_0)}{2} 2\delta > 0$,

推论1 $f \in C[a,b], f(x) \geq 0,$ 且 $\int_a^b f(x)dx = 0,$

则 $f(x) \equiv 0, x \in [a,b]$

推论2 $f, g \in C[a,b], f(x) \geq g(x),$ 且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

则 $f = g.$

例1 设 $f \in C[a,b]$，且 $\int_a^b x f(x)dx = 0, \int_a^b f(x)dx = 0$

求证： f在$[a,b]$至少2个零点

证 若 $f \equiv 0$，结论成立

若不然，设 f 有唯一零点 x_0，$f(x_0) = 0$

(x_0两侧 $f(x)$异号，否则与$\int_a^b f(x)dx = 0$矛盾)

令$g(x) = (x - x_0) f(x)$，在$[a,b]$上不变号(不妨设$g \geq 0$)

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (x - x_0) f(x)dx$$

$$= \int_a^b xf(x)dx - x_0 \int_a^b f(x)dx = 0$$

但由定理2.7，$\int_a^b g(x)dx > 0$，矛盾！命题得证！

例2

例2：假设f(x)在［a, b］有界，且有有限个间断点，则f(x)在［a,b］可积。

证明： 若$\left|f(x)\right| \le M, x \in [a,b]$， $x = b$是 间断点

$$\pi: x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i + \omega_n \Delta x_n \le \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i + 2M\Delta x_n$$

取$\Delta x_n = \dfrac{\varepsilon}{4M}$

由于在区间$\left[a,\ b - \dfrac{\varepsilon}{4M}\right]$上，$f(x)$连续,

例4

$$\exists\delta_1>0,\pi:x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}=b-\frac{1}{4M},\|\pi\|<\delta_1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$$

可见 $\delta=\min\left\{\delta_1,\frac{1}{4M}\right\}$

$$\|\pi\|<\delta\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

例3

例3：设$f(x)$在$[a,b]$上有界，

$f(x)$在$[a,b]$上有间断点$\{a_n\} \in [a,b]$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$，

则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

证明：设 $|f(x)| \le M, x \in [a,b]$ 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, n > N, |a_n - c| < \varepsilon$$

考虑区间

$$[a,b] = [a, c-\varepsilon] \bigcup [c-\varepsilon, c+\varepsilon] \bigcup [c+\varepsilon, b]$$

$$[c-\varepsilon, c+\varepsilon], \omega\Delta x = 2\omega\varepsilon \le 4M\varepsilon$$

例3：

而在 $[a,c-\varepsilon],[c+\varepsilon,b]$ 上,

$f(x)$ 只有有限个间断点，故可积.

$$\exists\delta_1>0,\pi_1:x_0=a<x_1<x_2<....<x_n=c-\varepsilon,\|\pi_1\|<\delta_1\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\exists\delta_1>0,\pi_2:x_0=c-\varepsilon<y_1<y_2<....<y_n=b,\|\pi_2\|<\delta_2\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta y_i<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2,\frac{1}{12M}\right\}$$

$$\|\pi\|<\delta,\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

结论得证

定理2.8

函数f在上可积的充分必要条件是

任意$\varepsilon > 0, \eta > 0$,总存在分割$T$,

使得属于T的所有小区间中,

对于振幅$\omega_{k'} \geq \varepsilon$的对应的分割区间长度总和$\sum_{k'} \Delta x_{k'} < \eta$.

作业:习题6.2: 2\4\10

黎曼德国（１８２６--１８６６年）

尽管牛顿和莱布尼兹发现了微积分，并且给出了定积分的论述，但目前教科书中有关定积分的现代化定义是由黎曼给出的

１８５４年黎曼提出了一种新的几何学。爱因斯坦掌握了黎曼几何和张量分析之后，才打开了广义相对论的大门。

勒贝格法国（1875—1941）

按照勒贝格意义下的积分，可积函数类大大地扩张了；积分区域可以是比闭连通域复杂得多（R或Rn）的子集；收敛性的困难大大地减少。

《勒贝格全集》（5卷）

五、Lebesgue定理

1. 零测集

设A为实数集，如对$\forall \varepsilon > 0$，都$\exists$至多可数的一列开区间$\{I_n, n \in N^*\}$，它是A的一个开覆盖，并且$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \le \varepsilon$，那么称$A$为零测度集.

空集，至多可数集是零测集 .

任何长度不为零的区间都不是零测集.

2. 零测集性质

(1) 至多可数个零测集的并集是零测集;

(2) 设A为零测集,若$B \subset A$,那么B也是零测集.

3. *Lebesgue*定理

若函数f在有限区间$[a,b]$上有界,那么f在$[a,b]$上Riemann可积的充要条件是$D(f)$是一零测集.

其中: $D(f) = \{x \in [a,b] : f在x处不连续\}$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

4. 推论

(1) 若f在$[a,b]$上只有至多可数的间断 点，那么f在$[a,b]$上*Riemann*可积.

(2) 若f在$[a,b]$上可积，那么$|f|$也在$[a,b]$上可积，并且$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

$$\because D(|f|) \subset D(f)$$

$|f|$的可积性不能保证 f的可积性

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & x\text{为有理数} \\ -1, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

(3) 若f在$[a,b]$上可积,$\frac{1}{f}$在$[a,b]$上有定义

并且有界,那么$\frac{1}{f}$在$[a,b]$上可积.

$$\because D(f) = D(\frac{1}{f})$$

(4) 若f与g在$[a,b]$上可积,那么对任何实数

λ,μ,函数$\lambda f+\mu g$在$[a,b]$上可积; fg在

$[a,b]$上也可积.

$$D(\lambda f+\mu g)\subset D(f)\cup D(g),\ D(fg)\subset D(f)\cup D(g).$$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

(5) 若f在$[a,b]$上可积, 那么对任何$[c,d]\subset[a,b]$, f在$[c,d]$上可积.

$$\because D(f:[c,d])\subset D(f:[a,b])$$

(6) 若$c\in(a,b)$, 那么当f在$[a,c]$与$[c,b]$上都可积时, f在$[a,b]$上也可积.

$$\because D(f:[a,c])\cup D(f:[c,b])=D(f:[a,b])$$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

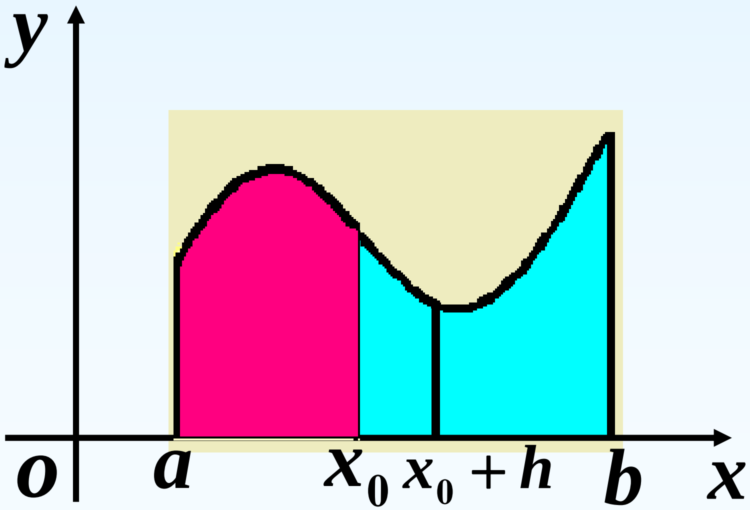
§3 微积分的基本定理

一、变上限积分函数

1. 设 $f \in R[a,b], \forall x \in [a,b]$, 定义 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$,

积分上限函数

2. 定理1 若 $f \in R[a,b]$, 则 $F(x) \in C[a,b]$



证明: $\forall x_0, x_0+h \in [a,b]$

$$F(x_0+h)-F(x_0)$$

$$=\int_a^{x_0+h} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

$\because$ f在$[a,b]$有界, $|f(t)| \le M$

$$\therefore \quad \left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt\right| \le M|h|,$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0} F(x_0+h)-F(x_0)=0$$

由x_0任意性, $F(x)\in C[a,b]$.

积分上限函数的可导性质

定理 2 如果$f(t)$在$[a,b]$上连续，则积分上限函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上具有导数，且它的导数是$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad (a\le x\le b)$

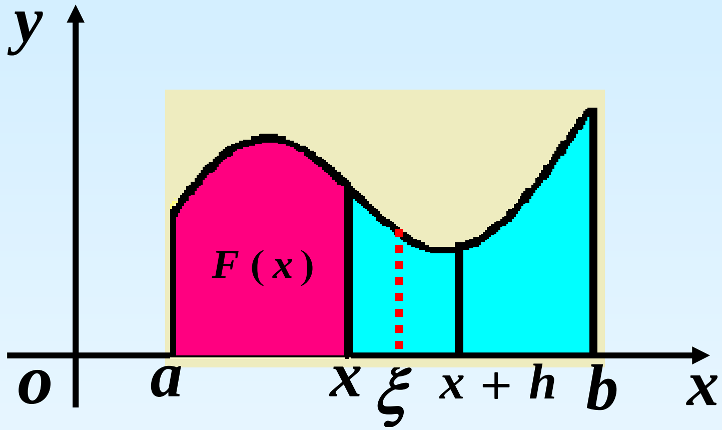
证 $F(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)dt$

$$\Delta F=F(x+h)-F(x)$$

$$=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_x^{x+h} f(t)dt,$$



由积分中值定理得

$$\Delta F = f(\xi)h, \quad \xi\in[x,x+h],$$

$$\frac{\Delta F}{h}=f(\xi), \quad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta F}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)$$

$$h\to 0, \xi\to x \quad \therefore \quad F'(x)=f(x).$$

补充 如果 $f(t)$ 连续，$a(x)$，$b(x)$ 可导，

则 $F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ 的导数 $F'(x)$ 为

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

证 $F(x)=\left(\int_{a(x)}^{0}+\int_{0}^{b(x)}\right)f(t)dt$

$$=\int_{0}^{b(x)} f(t)dt-\int_{0}^{a(x)} f(t)dt,$$

$$F'(x)=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.

分析：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，应用洛必达法则.

解 $\dfrac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt = -\dfrac{d}{dx}\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}dt,$

$$= -e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)' = \sin x\cdot e^{-\cos^2 x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

例 2 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且 $f(x)>0$.

证明函数$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

证 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = xf(x)$, $\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$,

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$F'(x)=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2},$$

$\boxed{\text{由于} f(x)>0,\quad (x>0)}$ $\boxed{\therefore \int_0^x f(t)dt>0,}$

$\because (x-t)f(t)\geq 0$且不恒为0,

$$\boxed{\therefore \int_0^x (x-t)f(t)dt>0,}$$

$\therefore F'(x)>0 \quad (x>0).$

故$F(x)$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

例 3 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(x)<1$.证明

$$2x-\int_0^x f(t)dt=1\text{在}[0,1]\text{上只有一个解.}$$

证 令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$,

因为 $f(x)<1$, $\therefore F'(x)=2-f(x)>0$,

$F(x)$在$[0,1]$上为单调增加函数. $F(0)=-1<0$,

$$F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1[1-f(t)]dt>0,$$

所以$F(x)=0$即原方程在$[0,1]$上只有一个解.

定理3（原函数存在定理）

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的.

（2）初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

二、牛顿—莱布尼茨公式

定理 4（微积分基本公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

证 因为 已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

又因为 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数，

$$\therefore F(x) - \Phi(x) = C \qquad x \in [a,b]$$

令 $x = a \Rightarrow \quad F(a) - \Phi(a) = C,$

$\because \; \Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \;\Rightarrow\; F(a) = C,$

$\because \; F(x) - \int_a^x f(t)dt = C,$

$\therefore \; \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$

令 $x = b \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

牛顿—莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

微积分基本公式表明：

一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量.

求定积分问题转化为求原函数的问题.

注意 当$a > b$时，$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$仍成立.

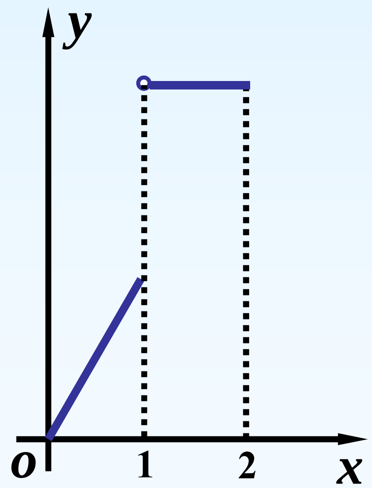
北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

例4 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)dx$.

解 原式 $=\left[2\sin x-\cos x-x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3-\dfrac{\pi}{2}$.

例5 设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x)dx$.

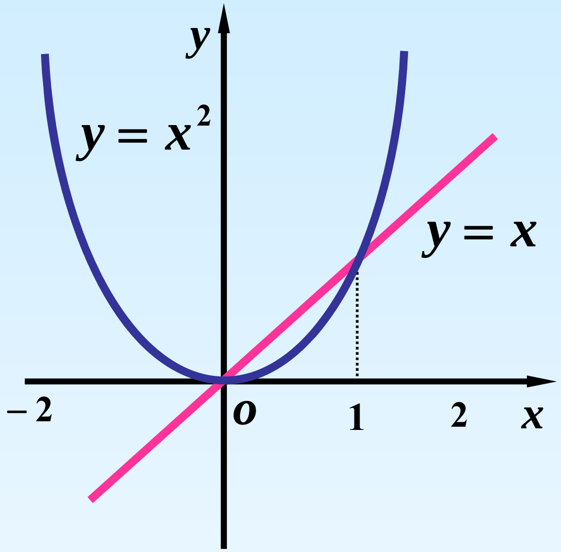
解 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$



在$[1,2]$上规定当$x=1$时，$f(x)=5$,

原式 $=\int_0^1 2x\,dx+\int_1^2 5\,dx=6$.

例6　求$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx$.



解　由图形可知

$$f(x)=\max\{x,x^2\}$$

$$=\begin{cases} x^2 & -2\le x\le 0 \\ x & 0\le x\le 1 \\ x^2 & 1\le x\le 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{原式}=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}x^2dx=\frac{11}{2}.$$

例7 求$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx.$

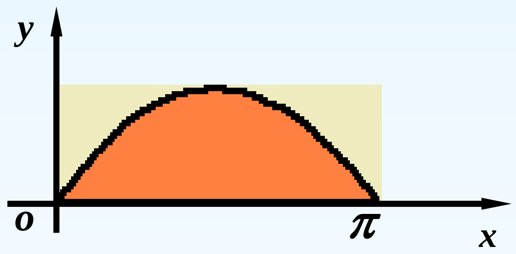
解 当$x<0$时，$\frac{1}{x}$的一个原函数是$\ln|x|$,

$$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=[\ln|x|]_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2.$$

例 8 计算曲线$y=\sin x$在$[0,\pi]$上与 x 轴所围成的平面图形的面积.

解 面积 $A=\int_0^{\pi}\sin x dx$

$$=[-\cos x]_0^{\pi}=2.$$



例9 证明若 $f \in C[a,b]$,

则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

证明： 因为 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$,

$(F(x)$是$f(x)$的一个原函数，$F'(x) = f(x))$

$\therefore \quad F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$,

即 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

三 小结

1.积分上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

2.积分上限函数的导数 $F'(x)=f(x)$

3.微积分基本公式 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

牛顿—莱布尼茨公式沟通了微分学与积分学之间的关系.

作业 习题6.3 1(2)(3)\2(1)(3)\4\6\7\8

思考题

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^x f(t)dt$与$\int_x^b f(u)du$是 x 的函数还是 t 与 u 的函数？它们的导数存在吗？如存在等于什么？

思考题解答

$\int_a^x f(t)dt$与$\int_x^b f(u)du$都是x的函数

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(u)du = -f(x)$$

定理4（Newton-Leibniz公式）

另一种叙述

假设$f(x)$在$[a,b]$可积,且在$[a,b]$存在原函数$F(x)$.

则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b$$

注 (1)求定积分问题转化为求原函数的增量.

(2)当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$仍成立.

证明 对于$[a,b]$区间等分的分割：

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n = b, x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n},$$

有$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

将上式两边$n \to \infty$,由定积分的定义得到

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$