§4 实数的完备性:

Cauchy收敛定理

一、柯西基本列

定义5. 1 对给定数列$\{x_n\}$, 如$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}^*$,

s.t 当$m,n\in\mathbf{N}^*$且 $m,n>N$时，都有

$|x_m-x_n|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$为基本列.

或叙述为

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}^*$, 当$n>N$时, 对一切 $p\in\mathbf{N}^*$,有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.$$

例1. 求证 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ 是基本列.

证明： 由 $0 < a_{n+p} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

所以对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$,

则对 $\forall n > N, \forall p \in \mathrm{N}^*$，即有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

例2. 证明当$\alpha \le 1$时，

$$a_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$,不是基本列.

证明：$$\because a_{n+p} - a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^\alpha}$$

$$\ge \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \ge \frac{p}{n+p}$$

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$,对$\forall N \in \mathrm{N}^*, \exists n_0 > N, p_0 = n_0$,

使$\left|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}\right| > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$. 所以不是基本列

二、列紧性定理

定理5.1 任意有界数列中必可造出收敛子列.

证明： （二分法：） 设$\{x_n\}$满足$a \le x_n \le b$

将区间$[a,b]$二等分,

选包含$\{x_n\}$的无穷多项子区间为$[a_1,b_1]$,

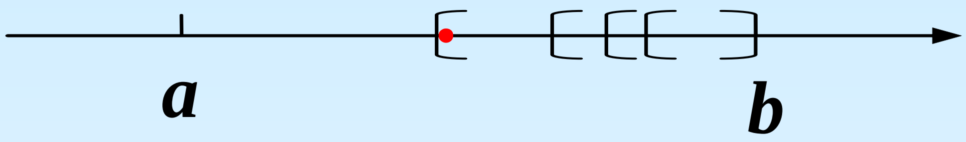
$$|b_1 - a_1| = \frac{b-a}{2}, \text{ 取 } x_{n_1} \in [a_1, b_1]$$

继续等分$[a_1,b_1]$,

记包含$\{x_n\}$的无穷多项的子区间为$[a_2,b_2]$

则 $\left|b_2 - a_2\right| = \dfrac{b-a}{4}$, 取 $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$.

……



$[a_{k-1}, b_{k-1}]$二等分, 记包含$\{x_n\}$的无穷多项子区间为$[a_k, b_k]$

$$\left|b_k - a_k\right| = \frac{b-a}{2^k} \to 0,\ 取\ x_{n_k} \in [a_k, b_k].$$

$\{[a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots\}$构成闭区间套，且$x_{n_k} \in [a_k, b_k]$

由闭区间套定理和夹逼定理:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} b_k = c.$$

三、柯西收敛准则

定理5. 2 : $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$是基本列.

证明： $\Rightarrow$(必要性)　设$\{a_n\}$收敛于a, 则对

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathrm{N}^*,\ n > N, \text{有} \left|a_n - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

当$m,n > N$时,

$$\left|a_m - a_n\right| = \left|a_m - a + a - a_n\right|$$

$$\le \left|a_m - a\right| + \left|a_n - a\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\therefore \{a_n\}$是基本列.

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

$\Leftarrow$（充分性） 设$\{a_n\}$是基本列,

（1）先证$\{a_n\}$有界

取$\varepsilon_0=1, \exists N\in \mathbf{N}^*, n>N$时,

$$|a_n-a_{N+1}|<\varepsilon_0=1,$$

$$|a_n|\le|a_n-a_{N+1}+a_{N+1}|$$

$$\le|a_n-a_{N+1}|+|a_{N+1}|<1+|a_{N+1}|$$

取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,1+|a_{N+1}|\}$,

则对$\forall n$,有$|a_n|\le M$.

(2) 由列紧性定理知,$\{a_n\}$存在收敛子列$\{a_{i_n}\}$.

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = a$, 则$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathrm{N}^*$, 当$i_n > N_1$时,

$$|a_{i_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

由$\{a_n\}$是基本列,$\exists N \in \mathrm{N}^*, m, n > N$时,

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

取一个$i_k > \max\{N_1, N\}$, 则

$$|a_n - a| = |a_n - a_{i_k} + a_{i_k} - a| \le |a_n - a_{i_k}| + |a_{i_k} - a| < \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

注：Cauchy收敛准则是判断数列收敛的重要方法

由例1：$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$收敛.

由例2：$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$当$\alpha \le 1$发散.

例3：若数列满足下面情况，判断是否收敛

$$(1)\text{对}\forall n, p\text{有}\,|a_{n+p} - a_n| \le \frac{p}{n}.$$

$$(2)\text{对}\forall n, p\text{有}\,|a_{n+p} - a_n| \le \frac{p}{n^2}.$$

解：(1) 不一定，例如例2中

$$\text{当}\alpha=1\text{时},a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha},\text{发散}.$$

$$(2)\ |a_{n+p}-a_n|\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$$

$$\le\frac{1}{(n+p-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$\le\frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\le\frac{1}{(n-1)}$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,\forall n>N,\forall p,\ |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

(2)结论成立，证明如下

$$|a_{n+p}-a_n|\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|$$

$$+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$$

$$\le\frac{1}{(n+p-1)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$\le\frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$$

$$\le\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{(n+p-1)}<\frac{1}{n-1}$$

因此$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$,当$n > N$时,

对$\forall p \in N^*$，有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

四、确界的定义

定义6.1: 设 E是非空有下界集合， 若$\exists\alpha$满足

（1） $\forall x\in E, x\geq\alpha$

（2） $\forall\varepsilon>0, \exists y_\varepsilon\in E$，使$y_\varepsilon<\alpha+\varepsilon$

称α为E的下确界，记为 $\inf E$

定义6. 2：设 E 是非空有上界集合， 若 $\exists\beta$ 满足

（1） $\forall x \in E, x \le \beta$

（2） $\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in E$，使 $y_\varepsilon > \beta - \varepsilon$

称 β 为 E 的上确界，记为 $\sup E$

五、确界原理

定理1: 非空有上界的数集必有上确界;

非空有下界的数集必有下确界.

证明: 设γ是E的一个上界,

任取$x \in E$, 将$[x,\gamma]$记为$[a_1,b_1]$.

将$[a_1,b_1]$二等分,

$$\begin{cases} \text{右边区间有}E\text{中点,取为}[a_2,b_2]; \\ \text{右边区间没有}E\text{中点,取左区间为}[a_2,b_2]. \end{cases}$$

重复进行,得闭区间套$I_n=[a_n,b_n],n\in\mathbf{N}^*$,

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots,\ |I_n|=\frac{\gamma-x}{2^{n-1}}\to 0.$$

此区间套特点:

每个$[a_n,b_n]$中必含有E中点,b_n右边无E中点.

由区间套定理,

$$\exists|\beta\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n,\ 其中\beta=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

下证 $\beta = \sup E$

Ⅰ. $\forall x \in E$, 必有 $x < b_n$, $\therefore x \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta.$

上界

Ⅱ. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*,$

使 $a_N > \beta - \varepsilon,$ 根据区间特点,

在 $[a_N, b_N]$ 中必有 E 中点 x_N,

使得 $x_N \ge a_N > \beta - \varepsilon.$ 所以 $\beta = \sup E.$

例4. 确界原理 $\Rightarrow$ 单调有界原理

证明： 设$\{a_n\}$单调增, 有上界,

则$\{a_n\}$有上确界$\sup a_n = a$, 且$a_n \le a$,

且$\forall \varepsilon > 0, \exists a_N$, 使$a_N > a - \varepsilon$,

$$n > N\text{时}, \begin{cases} a_n \ge a_N > a - \varepsilon \\ a_n \le a \end{cases} \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_n\}.$$

六、覆盖

(1) 给定集合A, 若有一族开区间$\{I_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$,

使$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, 称这一族开区间覆盖了$A$.

或称开区间族$\{I_\lambda\}$是A的一个开覆盖.

(2) $\{I_\lambda\}$是A的覆盖 $\Leftrightarrow \forall x \in A$, 总有一个开

区间 $I_{\lambda_0} \in \{I_\lambda\}$, 使$x \in I_{\lambda_0}$.

如: $(0,\frac{2}{3}),(\frac{1}{2},\frac{3}{4}),(\frac{2}{3},\frac{4}{5}),\cdots,(\frac{n-1}{n},\frac{n+1}{n+2})$ 覆盖了$(0,1)$,

覆盖了$[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

定理1.7.1 (*Heine* — *Borel*定理)

若有限闭区间$[a,b]$被一族开区间$\{I_\lambda\}$覆盖，

则必可从中选出有限个开区间来覆盖$[a,b]$.

证明：反证法

设$[a,b]$不能被$\{I_\lambda\}$中有限个开区间覆盖，

将$[a,b]$二等分，必有一个区间$[a_1,b_1]$不能

被有限覆盖.

$[a_1,b_1]$二等分,必有一个闭区间$[a_2,b_2]$不能被有限覆盖.

如此下去,得到闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$, 且其中每一个区间都不能被有 限覆盖.

由闭区间套定理,知 $\exists|\eta\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,

且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\eta$.

$\because\eta\in[a,b]$,

$\therefore$ 在$\{I_\lambda\}$中至少有一个(α,β)盖住η, $\alpha<\eta<\beta$.

由极限性质，$\exists N$，如 $n > N$，必有

$$\alpha < a_n < \eta < b_n < \beta,$$

$[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$ 矛盾！

注意： 区间的有限性、闭性不可少！

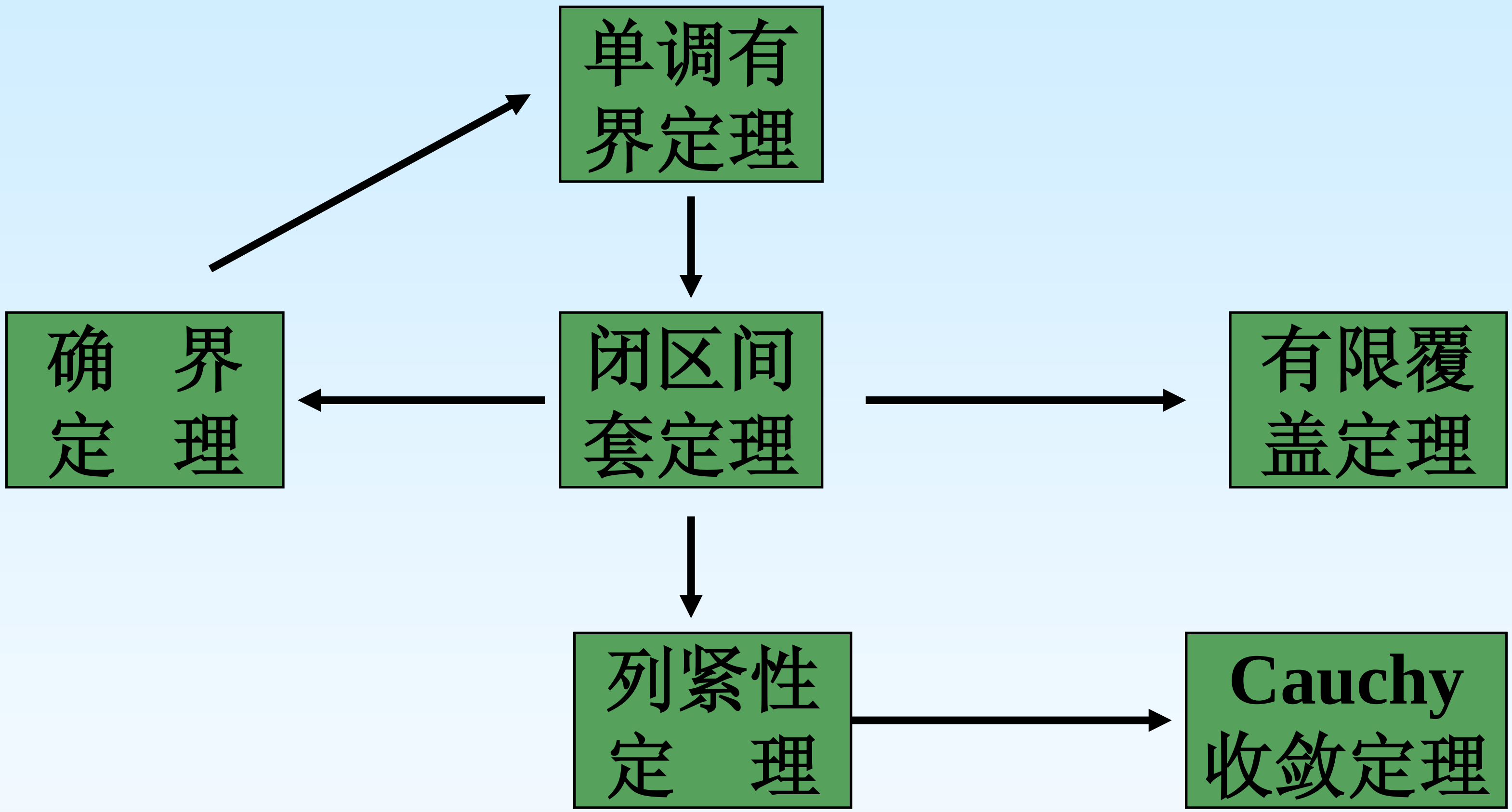
$\{(0, n)\}, n = 1, 2, \cdots$ 是 $(1, +\infty)$ 的开覆盖，

无有限覆盖.

$\{(\frac{1}{n}, 1)\}, n = 2, 3, \cdots$ 是 $(0, 1)$ 的开覆盖，

无有限覆盖.

七、实数系统六定理等价性



八、小结

1、柯西基本列

2、列紧性定理

3、柯西基本定理

4、确界原理

5、有限覆盖定理

6、实数系定理等价性

习题1.5

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

习题1.6

2, 3,