§1.4单调有界定理及其应用

收敛 $\Longrightarrow$ 有界 √

有界 $\Longrightarrow$ 收敛 ×

有界 $\Longleftrightarrow$ 收敛 ?

一、 单调有界定理

定义4. 1（单调数列定义）若数列$\{a_n\}$满足：

$$a_n \le a_{n+1}(a_n \ge a_{n+1}), n = 1,2,3,\cdots$$

则称$\{a_n\}$是单调递增（递减）数 列.

若数列$\{a_n\}$满足：

$$a_n < a_{n+1}(a_n > a_{n+1}), n = 1,2,3,\cdots$$

则称 $\{a_n\}$ 是严格单调递增（递减）数列.

观察下面单调递增的有界数列

定理4.1　单调有界数列必有极限.

证明　不妨设$\{a_n\}$递增,有上界,

将各项a_n用十进制数表示:

$$a_1 = A_1.p_1p_2p_3\cdots,\qquad A_i \in Z,$$
$$a_2 = A_2.q_1q_2q_3\cdots,\qquad p_i,q_i,r_i \in \{0,1,2,\cdots,9\},$$
$$a_3 = A_3.r_1r_2r_3\cdots,\qquad i = 1,2,3,\cdots$$
$$\cdots\cdots.$$

考察$\{A_i\}$,由于$\{a_n\}$有界、递增，可知$\{A_n\}$在某一行N_0达到最大值A,并不随行的增加而改变.

再考察第二列 $p_1,q_1,r_1,\cdots$, 设x_1是在第N_0行后本列出现的最大的数,设出现在第N_1行,易见$N_1 \geq N_0$.

对第三列,第四列,第五列,$\cdots$ 得到数 $x_2, x_3, x_4, \cdots$

和相应的正整数$N_1 \le N_2 \le N_3 \le \cdots$.

过程一直进行下去会得数$a = A.x_1x_2x_3x_4\cdots$.

下证$a = A.x_1x_2x_3x_4\cdots$就是数列$\{a_n\}$的极限.

对$\forall\varepsilon > 0$,取$m \in N^*, s.t. 10^{-m} < \varepsilon$,那么对所有的$n > N_m$,
a_n的整数部分和前m位上的数码与a是一样的. 因此:

$$|a_n - a| \le 10^{-m} < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A.x_1x_2x_3\cdots$.

推论4.1

(1)若单调数列的一个子列收敛,则这个数列收敛;

(2)若单调数列的一个子列趋向去穷 ,则此数列发散

(3)一个单调数列要么极限存在,要么趋向无穷;

(4)单调数列收敛的充分必要条件是数列有界

(1)若单调数列的一个子列收敛，则这个数列收敛；

证明：不妨设a_n单增，且有$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K, \forall k > K, \text{有} \left| a_{n_k} - a \right| < \varepsilon$$

取$N = n_{K+1}$，对$\forall n > N$，由单调性知，$\exists n_k$

$$a_{n_{K+1}} < a_n < a_{n_k}$$

即$-\varepsilon < a_{n_{K+1}} - a < a_n - a < a_{n_k} - a < \varepsilon$

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

例1　证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证　显然 $x_{n+1}>x_n$, $\therefore \{x_n\}$是单调递增的；

又 $\because x_1=\sqrt{3}<3$, 假定 $x_k<3$, $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$,

$\therefore \{x_n\}$是有界的； $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$\because x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$, $\quad x_{n+1}^2=3+x_n$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$,

$A^2=3+A$, 　解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

例2　求数列$\left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}$的极限，$a$为任意给定的实数.

解：令$x_n=\dfrac{|a|^n}{n!}$，$n\in N^*$.

则当$n\ge|a|$时，$x_{n+1}=x_n\dfrac{|a|}{n+1}\le x_n$.

因此$\{x_n\}$是从某一项开始递减的数列，且有下界0.

所以极限$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

在$x_{n+1}=x_n\dfrac{|a|}{n+1}$两边令$n\to\infty$，得到$x=x\cdot 0=0$.

所以$\{x_n\}$为无穷小，从而$\left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}$也是无穷小.

例3 (1)设$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\ n\in N^*$,求证$\{a_n\}$发散.

证明: 易见$\{a_n\}$严格递增,若有无界子列,则发散.

下证之: 对$k\in N^*$,有

$$a_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2}}_{k\text{个}}=1+\frac{k}{2},\ (k=0,1,\cdots)$$

可见$\{a_n\}$无界,进而得$\{a_n\}$发散.

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例4 设$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$, $n \in N^*, \alpha > 1$, 求证$\{a_n\}$收敛

$\{a_n\}$严格递增, 只须证有收敛子列，由于

$$a_{2^k-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \cdots + \frac{1}{15^\alpha}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^k - 1)^\alpha}\right)$$

$$\le 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha}$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}+\frac{1}{(2^{k-1})^{\alpha-1}}$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}<\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

表明$\{a_n\}$的子列$\{a_{2^n-1}\}$是有上界的，而由$\{a_n\}$递增，可知$\{a_{n_k}\}$也有上界. 从而……

例5 研究下面两数列的极限

$$(1)s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad (2)x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

解：s_n显然单调递增，且

$$s_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^k C_n^k = \left(\frac{1}{n}\right)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$(1)\quad e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq s.$$

$$(2)\ \frac{x_{n+1}}{x_n}=(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+1})^n(1+\frac{1}{n})^{-n}$$

$$=(1+\frac{1}{n+1})(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^n=(1+\frac{1}{n+1})\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$$

由 $(1+x)^n\geq 1+nx$伯努利不等式，上式

$$\geq\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1$$ 所以x_n递增.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$，且 $e \le s.$

(3) 对$\forall n \ge m,$

$$e_n \ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})$$

固定m,令$n\to\infty$，得

$$e \ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}=s_m$$

再令 $m\to\infty$ 得 $e \ge s$，$\therefore e = s$

(4) 总结：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e;$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

$e\approx 2.7182818$ ——自然对数之底.

例6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})^{n^2+5}$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})^{n^2+5}$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})^5\cdot\left[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})^{\frac{n^2}{2}}\right]^2=e^2.$$

例7 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n))$存在.

证明: 令$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)$,

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n+1})$$

$$>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=0,$$ 单调

由不等式 $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

左得：$n\ln(1+\frac{1}{n})<1$,即$\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

右得:$1<(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})$,即$\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{1}{n+1}$

即 $$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

$$\ln(1+n) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})$$

$$> \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$

所以 $$a_n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$ 有界

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(1+n)\right)\text{存在}.$$

记为γ, 称为欧拉常数.

$$\gamma = 0.5772156649$$

欧拉常数是有理数还是无理数还是个开放问题

二、 闭区间套定理

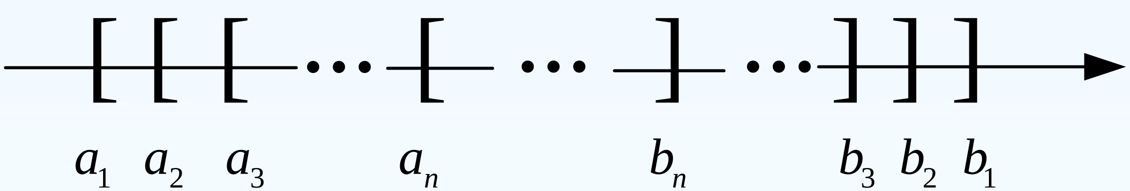
定理4.2 设$I_n=[a_n,b_n],n\in N^*$,为一列闭区间,满足

（1） $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots$

(2)区间长度$|I_n|=b_n-a_n\to 0\,(n\to\infty)$,

则存在唯一一点ξ满足$\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$

即 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$



由区间的包含关系可知，左端点组成的

数列$\{a_n\}$递增，右端点组成的数列$\{b_n\}$递减.

并且$\{a_n\}$有上界b_1，$\{b_n\}$有下界a_1.

由单调有界定理知下面两个极限存在：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

由于$a_n \le b_n \ (n \in \mathrm{N}^*)$,

由极限的不等式性质 $a \le b$.

因此有不等式 $a_n \le a \le b \le b_n \ (n \in \mathrm{N}^*)$.

由此式可得：

$$0 \le b - a \le b_n - a_n = |I_n|$$

由 $|I_n| \to 0 \ (n \to \infty)$ 可知, $a = b$.

此时 $a_n \le a \le b_n$ 对 $n \in \mathrm{N}^*$ 成立, 即 $a \in I_n (n \in \mathrm{N}^*)$.

由此得到： $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.　 a 的唯一性易知.

注意: "闭"不可去.

例如 设区间$I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), n = 1,2,3,\cdots$

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots,$$

$$|I_n| = \frac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty),$$ 但是交集 $$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \Phi$$

例 8 $x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2},$

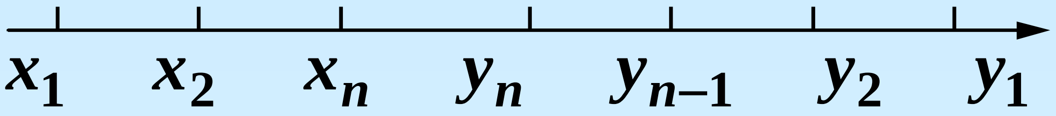
$x_1=a>0, y_1=b>0$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

证明: (1) 首先：$x_{n+1}\le y_{n+1}$

(2) $x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n y_n}-x_n\ge\sqrt{x_n^2}-x_n=0,\{x_n\}\uparrow$

$$y_{n+1}-y_n=\frac{x_n+y_n}{2}-y_n\le\frac{2y_n}{2}-y_n=0,\{y_n\}\downarrow$$



(3) $y_{n+1} - x_{n+1} \le y_{n+1} - x_n$

$$= \frac{y_n - x_n}{2} = \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2^2} = \cdots = \frac{y_1 - x_1}{2^n}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1} - x_{n+1}) = 0,$ 即构成闭区间套

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

士∞

三、小结

(1)若单调数列的一个子列收敛，则这个数列收敛

(2) 若单调数列的一个子列趋向于无穷，
则此数列趋向无穷

(3)单调数列要么极限存在要么趋向到无穷

(4) 单调数列收敛的充分必要条件是有界

(5) 闭区间套定理

作业

习题1.4

1， 2， 4， 5，6， 7， 8

补充例题

例 1 $k \in N^*$,求证 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = e^k$.

证明:

(1) $a_n = (1+\frac{k}{n})^n, n = mk$时， $a_{mk} = (1+\frac{1}{m})^{mk}$

$$\lim_{m\to\infty} a_{mk} = \left[\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m\right]^k = e^k \quad 有子列 \to e^k$$

(2) $$a_n = 1\cdot(1+\frac{k}{n})\cdots(1+\frac{k}{n}) \le \left[\frac{1+n(1+\frac{k}{n})}{n+1}\right]^{n+1}$$

$$= (1+\frac{k}{n+1})^{n+1} = a_{n+1}$$

$\{a_n\}$是单增. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty} a_{mk} = e^k$

——单调数列有子列收敛则收敛，

有子列发散则发散。

例2 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{k}{n})^n=e^{-k}$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n-k}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\dfrac{n}{n-k})^n}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{k}{n-k})^n}$

令$a_n=(1+\dfrac{k}{n-k})^n$ 取子列$m=n-k$

$a_m=(1+\dfrac{k}{m})^{m+k}$ $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}(1+\dfrac{k}{m})^{m+k}$

$$=\lim_{m\to\infty}(1+\frac{k}{m})^k\cdot\lim_{m\to\infty}(1+\frac{k}{m})^m=e^k$$

$\therefore$ 原式$=e^{-k}$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n=\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}}\right]^k=\left[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}}\right]^k=e^k,$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{k}{n})^n=\lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{k}{n})^{-\frac{n}{k}}\right]^{-k}=\left[\lim_{n\to\infty}(1-\frac{k}{n})^{-\frac{n}{k}}\right]^{-k}=e^{-k}.$$

推广：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\Theta})^{\Theta}=e,\quad \Theta\to\infty \text{视为整体}$$

凑 搭积木

例 3

(1) $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})^{n^2+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})^5\cdot\left[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n^2})^{n^2/2}\right]^2=e^2$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+2n}{3+2n})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{2n})^n}{(1+\frac{3}{2n})^n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n\cdot\frac{1}{2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n})^{\frac{2n}{3}\cdot\frac{3}{2}}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}=e^{-1}$$

解法2:

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{2n+3})^{n}$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{2n+3})^{-\frac{2n+3}{2}}\right]^{(-\frac{2n}{2n+3})} = e^{-1}$$