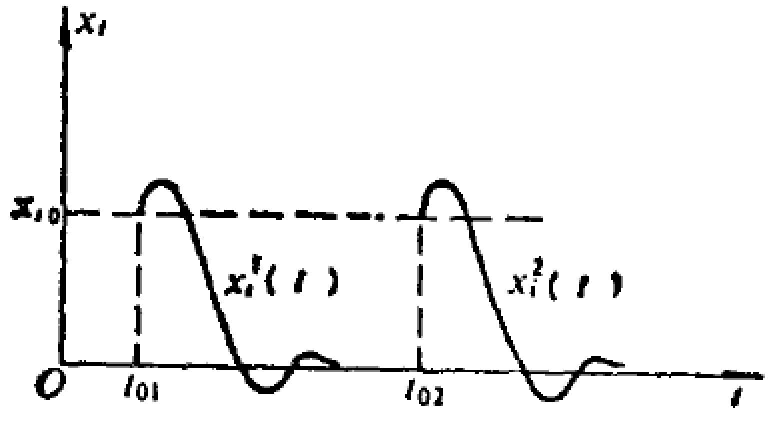
Nonlinear Systems 非线性系统

第十讲

自治系统的特性

$$\dot{x}=f(x),x\in R^n$$

在不同初始时刻从相同的初始状态出发的解分别记为 $x^1(t)$和 $x^2(t)$，则它们有如下关系： $x^1(t-T)=x^2(t),T=t_{02}-t_{01}$



非自治（时变）系统情况怎样？

非自治系统的特征

自治系统：解的性状与初始时间 t_0 无关.

非自治系统：解的性状与初始时间 t_0 有关.

例：一阶系统

$$\dot{x} = (4t\sin t - 2t)x$$

分离变量:

$$\frac{dx}{x} = (4t\sin t - 2t)dt$$

积分:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t}(4t\sin t - 2t)dt$$

$$\Rightarrow \ln\frac{x}{x_0} = \left[4\sin t - 4t\cos t - t^2 - 4\sin t_0 + 4t_0\cos t_0 + t_0^2\right]$$

$$x(t) = x_0\exp\left[4\sin t - 4t\cos t - t^2 - 4\sin t_0 + 4t_0\cos t_0 + t_0^2\right]$$

非自治系统的特性

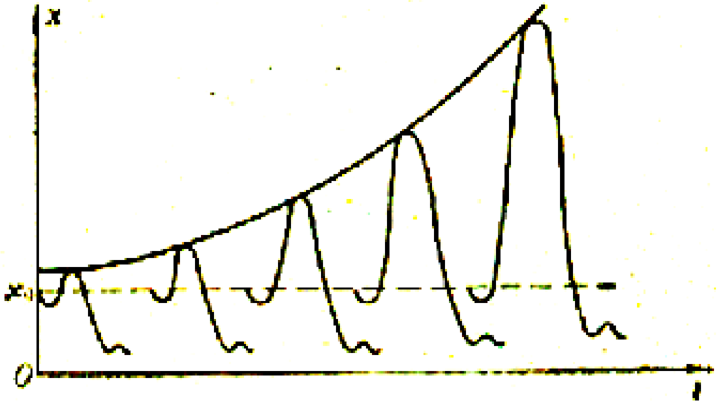
非自治系统特性：与初始时间有关

$$\dot{x} = (4t\sin t - 2t)x$$

其解为 $x(t, x_0, t_0) = x_0 \exp[4\sin t - 4t\cos t - t^2 - 4\sin t_0 + 4t_0\cos t_0 + t_0{}^2]$

当初始时刻为 $t_0 = 2n\pi \ (n = 1, 2, \cdots)$ 则解为

$$\begin{aligned} x(t, x_0, t_0) &= x[(2n+1)\pi, x_0, 2n\pi] = x_0 \exp[4(2n+1)\pi - (2n+1)^2\pi^2 + 4(2n)\pi + (2n\pi)^2] \\ &= x_0 \exp[(4n+1)\pi(4-\pi)] \end{aligned}$$



系统原点是稳定但不存在和初始时刻无关的初始状态界，满足稳定性对初始时刻的一致性，所以系统原点稳定性关于初始时刻是不一致的。

稳定性的定义4.4

系统的一般方程: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ (1)

其中: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$, $t \in \mathbf{J} = [\theta, +\infty)$

稳定: 系统(1)的原点是(Lyapunov意义下)稳定的, 如果:

对任意的$\varepsilon > 0$ 和 $t_0 \in \mathbf{J}$, 存在 $\delta(\varepsilon, t_0)$, 使得对于满足 $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$ 的 $\boldsymbol{x}_0$, 对$t > t_0$ 均有: $\|\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon$.

如果在稳定性定义中, δ 与 t_0 无关, 则称原点一致稳定.

一致稳定: 系统(1)的原点是一致稳定的, 如果:

对任意的$\varepsilon > 0$和 $t_0 \in \mathbf{J}$, 存在 $\delta(\varepsilon)$, 使得对于满足 $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$ 的 $\boldsymbol{x}_0$, 对$t > t_0$ 均有: $\|\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon$.

渐近稳定:

1) 原点稳定;

2) 存在 $r(t_0)$，对任给$\mu>0$，存在 $T(\mu,r,t_0)$，使得当$\|\boldsymbol{x}_0\|<r$，

$t\geq t_0+T(\mu,r,t_0)$时，有: $\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\mu$.

注: 条件 2) 相当于 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|=0$

一致渐近稳定:

1) 原点一致稳定;

2) 存在r，对任给 $\mu>0$，存在 $T(\mu,r)$，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<r$ ，

$t\geq t_0+T(\mu,r)$ 时，有: $\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\mu$ ，即一致吸引。

全局渐近稳定:

1) 原点稳定;

2) 对任给的 r >0 和 $\mu > 0$, 存在 $T(\mu, r, t_0)$, 使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\| \le r$,

$t \ge t_0 + T(\mu, r, t_0)$时, 有: $\|\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)\| < \mu$.

全局一致渐近稳定:

1) 原点一致稳定;

2) 对任给 $\mu > 0$, 存在$T(\mu) > 0$, 使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\| < r$,r为任意

$t \ge t_0 + T(\mu)$ 时, 有: $\|\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)\| < \mu$, 即一致吸引的。

例4.18：讨论下列系统：

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{t+1}$$

解出： $$x(t,t_0,x_0)=\frac{t_0+1}{t+1}x_0$$

由于$\|x(t,t_0,x_0)\|\le\|x_0\|,\forall t\ge t_0$，所以系统原点是稳定的。

$$\lim_{t\to\infty}x(t,t_0,x_0)=\lim_{t\to\infty}\frac{t_0+1}{t+1}x_0=0.$$

系统原点是渐近稳定的。但是由于x(t)关于初始时间并不是一致收敛于原点的。即存在 $T(t_0,\delta,\varepsilon)>0$ 与初始时间有关。因而不是一致吸引的，从而不是一致渐近稳定的。

一般非定常系统Lyapunov函数

研究渐近稳定系统：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{2} e^{4t}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2} e^{-4t}(x_1^2 + x_2^2) + e^{4t}(\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2) = e^{4t}(x_1^2 + x_2^2) > 0$$

研究不稳定系统：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{2} e^{-4t}(x_1^2 + x_2^2) > 0$$

$$\dot{v} = -e^{-4t}(x_1^2 + x_2^2) < 0$$

Lyapunov函数

定义1：称函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 正定，如果：存在 $W(\boldsymbol{x})$ 正定，使得 $V(t,\boldsymbol{x})\geq W(\boldsymbol{x})$，且 $V(t,\boldsymbol{0})=0$. 如果 $V(t,\boldsymbol{x})\geq 0$，则称 $V(t,\boldsymbol{x})$ 半正定.

定义2：称函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 具定常正定界，如果：存在正定函数，$W(\boldsymbol{x})$，使得在原点的邻域内，有：$|V(t,\boldsymbol{x})|\leq W(\boldsymbol{x})$.

定理：函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 正定，当且仅当：$V(t,\boldsymbol{0})=0$，且存在 $\mathcal{K}$ 类函数 $\alpha(\mu)$，使得在原点邻域内，对所有 t 有：$V(t,\boldsymbol{x})\geq\alpha(\|\boldsymbol{x}\|)$

函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 具定常正定界，当且仅当：存在 $\mathcal{K}$ 类函数 $\beta(\mu)$，使得在原点邻域内，对所有 t，有 $|V(t,\boldsymbol{x})|\leq\beta(\|\boldsymbol{x}\|)$.

引理4.5 系统(1)的原点平衡位置稳定性

1. 系统的原点平衡位置是一致稳定的，当且仅当存在一个$\mathcal{K}$类函数 α 和独立于初始时刻的正常数c, 满足

$$\|x(t)\| \le \alpha(\|x(t_0)\|), \forall t \ge t_0 \ge 0, \forall \|x(t_0)\| < c$$

2. 系统原点是一致渐近稳定的，当且仅当存在存在$\mathcal{KL}$ 类函数 β 和独立于初始时刻的正常数c, 满足

$$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t \ge t_0 \ge 0, \forall \|x(t_0)\| < c \qquad (4.20)$$

3. 系统原点是全局一致渐近稳定的当且仅当(4.20)对任意的初始状态都成立。

关于指数渐近稳定

系统的一般方程: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (1)

定义4.5: 系统(1)的原点是局部按指数渐近稳定的，如果:

存在 $c > 0, k > 0$ 和 $\lambda > 0$，使得对任何 $t_0 \in \mathbf{J} = [r, +\infty)$，和满足 $\|\boldsymbol{x}_0\| < c$ 的 $\boldsymbol{x}_0$，在 $t \geq t_0$ 时，有:

$$\|\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)\| < k \|\boldsymbol{x}_0\| \exp[-\lambda(t - t_0)] \qquad (4.21)$$

关于稳定性的定理

定理1：如果在原点的邻域内，存在正定函数$V(t,\boldsymbol{x})$，其沿系统(1)的解的导数 $\dot{V}\le 0$(半负定)，则原点是稳定的.

定理2(4.8)：如果在原点的邻域内，存在正定且具定常正定界 $V(t,\boldsymbol{x})$ 其沿系统(1)的解的导数$\dot{V}\le 0$(半负定), 则原点是一致稳定的.

定理3(4.9)：如果在原点的邻域内，存在正定且具定常正定界$V(t,\boldsymbol{x})$其沿系统(1)的解的导数 $\dot{V}$负定, 则原点渐近稳定，且是一致渐近稳定的.

从稳定到一致稳定所附加的条件是 V 函数具有定常正定界.

正定且具定常正定界 $W_1(x)\le V(t,x)\le W_2(x), W_1(x), W_2(x)$ 是正定函数。

半负定，即 $\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\le 0.$

负定，即 $\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\partial V}{\partial x}f(t,x)\le -W_3(x).$

全局渐近稳定性

径向无界正定函数：称函数$V(t,\boldsymbol{x})$径向无界正定，如果存在正定函数$W(\boldsymbol{x})$，使得，对所有 t，有 $V(t,\boldsymbol{x})\geq W(\boldsymbol{x})$ ，且：$\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} W(\boldsymbol{x})=\infty$.

全局渐近稳定定理：如果存在正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$，$\alpha(\|\boldsymbol{x}\|)$，$\beta(\|\boldsymbol{x}\|)$ ，$\gamma(\|\boldsymbol{x}\|)$ ，使得：

① $\alpha(\|\boldsymbol{x}\|)\leq V(t,\boldsymbol{x})\leq \beta(\|\boldsymbol{x}\|)$ ；

② $\dot{V}(t,\boldsymbol{x})\leq -\gamma(\|\boldsymbol{x}\|)$；

③ $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} \alpha(\|\boldsymbol{x}\|)=\infty$.

则原点全局一致渐近稳定.

定义 ：函数 $\alpha(\mu), \beta(\mu)$ 称为局部同级增势，如果:

存在 $\mu_1 > 0,\ k_2 > k_1 > 0$，使得对 $\mu \in [0, \mu_1]$，有:

$$k_1\alpha(\mu) \le \beta(\mu) \le k_2\alpha(\mu)$$

如果 $\mu_1 = +\infty$，则称为全局同级增势.

局部按指数渐近稳定定理

定理：对系统(1)，x=0 局部按指数渐近稳定，仅需:

1) 在 x=0 的邻域内，存在 $V(t, \mathbf{x})$，及 $\mathcal{K}$ 类函数 $\alpha(\mu)$，

$\beta(\mu)$ 和 $\gamma(\mu)$，且 α, β, γ 具有同级增势，使得:

$\alpha(\|\mathbf{x}\|) \le V(t, \mathbf{x}) \le \beta(\|\mathbf{x}\|)$，并沿解: $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \le -\gamma(\|\mathbf{x}\|)$；

2) 存在 $\sigma > 0$，使得 $\alpha(\mu)$ 与 μ^σ 为同级增势.

定理的证明思路:

由 β (μ) 与 γ (μ) 同级增势 $\Rightarrow$ 存在 $k_1>0$，使沿解轨线：

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}) \le -\gamma(\|\boldsymbol{x}\|) \le -k_1\beta(\|\boldsymbol{x}\|) \le -k_1 V(t,\boldsymbol{x})$$

从而存在 ν >0，使得当$\|\boldsymbol{x}_0\|<\upsilon$ 时，对 $t\ge t_0$ ，有：

$$\alpha(\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|) \le V(t,\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)) \le \underline{V(t_0,\boldsymbol{x}_0)}e^{-k_1(t-t_0)} \le \underline{\beta(\|\boldsymbol{x}_0\|)}e^{-k_1(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \alpha(\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|) \le \beta(\|\boldsymbol{x}_0\|)e^{-k_1(t-t_0)}$$

由 α (μ) , β (μ) 与 μ^σ 同级增势：

$\Rightarrow$ 存在 $l_2>l_1>0$ ，使得当 $\mu\in[0,\mu_1]$：

$$\underline{(l_1\mu)^\sigma \le \alpha(\mu)} \le \underline{\beta(\mu) \le (l_2\mu)^\sigma}$$

$$\underline{(l_1\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|)^\sigma \le \alpha(\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|)} \le \underline{\beta(\|\boldsymbol{x}_0\|)}e^{-k_1(t-t_0)} \le \underline{(l_2\|\boldsymbol{x}_0\|)^\sigma}\, e^{-k_1(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \le \frac{l_2}{l_1}\|\boldsymbol{x}_0\|\exp\left\{-\frac{k_1}{\sigma}(t-t_0)\right\}$$ 局部按指数渐稳。

全局按指数渐近稳定定理

定理4.10：对系统(1)，x=0 全局按指数渐近稳定，仅需:

1) 存在全空间的连续可微函数 $V(t,\mathbf{x})$，满足

使得: $k_1\|\mathbf{x}\|^a \le V(t,\mathbf{x}) \le k_2\|\mathbf{x}\|^a, k_i>0, a>0, i=1,2.$；(4.25)

2) $$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f(t,x) \le -k_3\|x\|^a, k_3>0. \qquad (4.26)$$

函数$V(t,\mathbf{x})$满足定理4.10中的两个条件，当1）存在 $\mathcal{K}$ 类函数 $\alpha(\mu),\beta(\mu),\gamma(\mu)$， α,β,γ 具有同级增势，且 $\lim\limits_{\mu\to\infty}\alpha(\mu)=+\infty$ ，

使得: $\alpha(\|\mathbf{x}\|) \le V(t,\mathbf{x}) \le \beta(\|\mathbf{x}\|)$ ，并沿解: $\dot{V}(t,\mathbf{x}) \le -\gamma(\|\mathbf{x}\|)$；

2) 存在 $\sigma=a>0$，使得 $\alpha(\mu)$ 与 μ^σ 为同级增势.

例4.19 考虑标量系统平衡位置的稳定性

$$\dot{x} = -[1+g(t)]x^3, g(t) \geq 0 \text{ for } \forall t \geq 0.$$

利用备选李雅普诺夫函数 $V(x) = x^2/2$ 可得：

$$\dot{V}(t,x) = -[1+g(t)]x^4 \leq -x^4, \forall x \in R, \forall t \geq 0.$$

这样 $W_1(x) = W_2(x) = V(x), W_3(x) = x^4$ 满足定理4.9的条件，因此原点是全局一致渐近稳定的。

例4.20 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 - g(t)x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

g是连续可微函数，且满足 $0 \le g(t) \le k, \dot{g}(t) \le g(t), \forall t \ge 0$

利用备选李雅普诺夫函数 $V(t,x) = x_1^2 + [1+g(t)]x_2^2$ 易见其满足：

$$x_1^2 + x_2^2 \le V(t,x) \le x_1^2 + (1+k)x_2^2, \forall x \in R^2$$

因而是正定具有定常正定界函数，且径向无界。沿系统轨线的导数为

$$\dot{V}(t,x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - [2+2g(t) - \dot{g}(t)]x_2^2$$

由不等式 $2+2g(t)-\dot{g}(t) \ge 2+2g(t)-g(t) \ge 2$ 得到

$$\dot{V}(t,x) \le -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq -x^T Q x$$

负定这样 $W_1(x), W_2(x), W_3(x)$ 全局满足定理4.9的条件，因此原点是全局一致渐近稳定的。又二次型满足 $\lambda_{\min}(P)x^T x \le x^T P x \le \lambda_{\max}(P)x^T x$ ，对a=2全局满足定理4.10的条件。因此，原点是全局指数稳定的。

例子4.21 线性时变系统的Lyapunov 稳定性

$$\dot{x} = A(t)x$$

假设存在连续可微、一致有界正定对称矩阵P(t)，满足 $0 < c_1 I \le P(t) \le c_2 I, \forall t \ge 0$

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t)$$

其中Q是连续正定对称矩阵，即 $0 < c_3 I \le Q(t), \forall t \ge 0$

取备选 Lyapunov 函数 $V(t,x) = x^T P(t)x, c_1\|x\|_2^2 \le V(t,x) \le c_2\|x\|_2^2$ 则

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= x^T\dot{P}(t)x + x^T P(t)\dot{x} + \dot{x}^T P(t)x \\ &= x^T[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t)]x = -x^T Q(t)x \le -c_3\|x\|_2^2\end{aligned}$$

对a=2, 全局满足定理4.10的条件。因此，原点是全局指数稳定的。

非定常线性系统的稳定性

Stability of Time-Varying Linear Systems

非定常线性系统

系统的动力学方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \qquad (1)$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是时间的连续函数矩阵.

记 $\Psi(t) = [\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)]$ 称为方程的基础解阵.

基础解阵非奇，满足: $\dot{\Psi}(t) = \boldsymbol{A}(t)\Psi(t)$

系统的任一解均可写为: $\boldsymbol{x}(t) = \Psi(t)\boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{k} = [k_1, \ldots, k_n]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$为方程的状态转移阵， $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{x}_0$$

结论：状态转移阵具有以下性质:

(1) 非奇异，即对一切 t，有 $\left|\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\right| \neq 0$

(2) 初值问题 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解可表示成

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0$$

(3) $$\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)$$

(4) $$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0,t)$$

线性系统的稳定性判据

由于线性动态方程的稳定性等价于其对应的齐次方程的零解的稳定性，故这里只讨论齐次方程

$$\dot{x} = \mathrm{A}(t)x$$

对于零解的稳定性问题。由于$\mathbf{A}(t)$不是常量矩阵，因此一般**不能用特征值来讨论系统稳定性**性质，而应该用与系统运动关系密切的状态转移矩阵 $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$ 。

例1 齐次方程如下

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

A的特征值为 -1， -1。

$$\Phi(t,0)=\begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t_0} & \frac{1}{2}(e^{t_0}-e^{-t_0}) \\ 0 & e^{-t_0} \end{bmatrix}^{-1} x(t_0)$$

当$t\to\infty$时，只要 $x_2(0)\neq 0$ ，就有 $\| x(t) \|$ 趋于无穷，故零解不稳定。因此，简单地由特征值来判断将导致错误的结论。

定理 设$\mathbf{A}(t)$是连续（或分段连续）的函数矩阵，则有以下充分必要条件成立：

1) $\dot{x} = \mathbf{A}(t)x$ 稳定$\Leftrightarrow$存在某常数$N(t_0)$，使得对于任意的t_0和$t \geqslant t_0$有

$$\| \Phi(t, t_0) \| \leqslant N(t_0)$$

2) 系统原点一致稳定$\Leftrightarrow$ 1)中的$N(t_0)$与 t_0 无关。

3) 系统原点渐近稳定 $\Leftrightarrow \lim\limits_{t \to \infty} \| \Phi(t, t_0) \| = 0$

4) （定理4.11）系统原点一致渐近稳定$\Leftrightarrow$存在N、C >0，使得对于任意的t_0和$t \geqslant t_0$有

$$\| \Phi(t, t_0) \| \leq N e^{-C(t - t_0)}$$

定理表明：对线性系统

1. Lyapunov稳定等价于状态转移矩阵范数的有界性；
2. 一致稳定等价于状态转移矩阵范数 $\|\ \Phi(t,t_0)\ \|$ 的一致有界性；
3. 渐近稳定等价于状态转移矩阵范数 $\|\ \Phi(t,t_0)\ \|$ 趋向于零；
4. **一致渐近稳定等价于状态转移矩阵按指数规律稳定。**

定理的证明：

1) $dx/dt = \mathbf{A}(t)x(t)$ 稳定 $\Leftrightarrow$ 存在某常数 $N(t_0)$，使得对于任意的 t_0 和 $t \geqslant t_0$ 有

$$\|\ \Phi(t,t_0)\ \| \leqslant N(t_0)$$

充分性。考虑到

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leq \|\Phi(t,t_0)\|\|x(t_0)\|$$

若 $$\|\Phi(t,t_0)\| \leq N(t_0) \forall t \geq t_0$$

则 $$\|x(t,t_0,x_0)\| \leq \|\Phi(t,t_0)\|\|x(t_0)\| \leq N(t_0)\|x(t_0)\|$$

故对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 只要取

$$\delta(t_0,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{N(t_0)}$$

那么，当$\|x(t_0)\|<\delta(t_0,\varepsilon)$时，就有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|\le\|\Phi(t,t_0)\|\|x(t_0)\|$$

$$<N(t_0)\delta=N(t_0)\frac{\varepsilon}{N(t_0)}=\varepsilon$$

必要性。因为零解$x=0$稳定，故对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta(t_0,\varepsilon)>0$，只要$\|x(t_0)\|<\delta$，就有

$$\|\Phi(t,t_0)x_0\|<\varepsilon \qquad t\geq t_0$$

今取

$$x_0 = (0\cdots\cdots 0 \ \underset{j}{\frac{\delta}{2}} \ 0\cdots\cdots)^{\mathrm{T}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

显然， $\| \ x_0 \| \leq \delta \ /2 < \ \delta$，且 $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$的第 j 列是

$$\Phi_j(t, t_0) = \frac{2}{\delta}\Phi(t, t_0)x_0$$

故

$$\|\Phi_j(t_1, t_0)\| = \left\|\frac{2}{\delta}\Phi(t, t_0)x_0\right\| < \frac{2}{\delta}\varepsilon := C(t_0), \quad \forall t \geq t_0$$

有界。依此可证明所有列，从而$\mathbf{\Phi}(t,t_0)$有界。证完。

2) $dx/dt = \mathbf{A}(t)x(t)$ 一致稳定⇔ 1)中的$N(t_0)$与 t_0 无关：

$$\| \ \mathbf{\Phi}(t,t_0) \ \| \leqslant N$$

3) 渐近稳定 $\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\|\Phi(t,t_0)\|=0$

充分性。因 $\Phi(t,t_0)\to 0\ (t\to\infty)$

故存在常数$N(t_0)$，使得

$$\|\Phi(t,t_0)\|\leqslant N(t_0),\quad t\geqslant t_0$$

由本定理命题1），知零解$x=0$稳定。又

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0$$

由$\Phi(t,t_0)\to 0\ (t\to\infty)$ 知

$$x(t)=x(t,t_0,x_0)=\Phi(t,t_0)x_0\to 0\ (t\to\infty)$$

即零解是吸引的。

必要性。因零解$x=0$吸引，则存在$\delta(t_0)$，使得只要$\| x(t_0) \| < \delta(t_0)$，就有

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0 \to 0 \ (t \to \infty)$$

今取

$$x_0 = (0 \cdots\cdots 0 \ \underset{j}{\frac{\delta}{2}} \ 0 \cdots\cdots)^{\mathrm{T}}$$

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 = \Phi_j(t,t_0)\frac{\delta}{2} \to 0 \Leftrightarrow \Phi_j(t,t_0) \to 0$$

($x(t)$与x_0的线性关系表明$\Phi_j(t,t_0) \to 0$和x_0无关,

即线性系统是全局渐近稳定的)

取$j = 1,2,\cdots,n \quad \Rightarrow \Phi(t,t_0) \to 0 \quad (t \to \infty)$

注：该命题表明，对于线性系统，零解的吸引性蕴涵稳定性。

（4）$\dot{x}=\mathbf{A}(t)x$ 一致渐近稳定⇔存在N、C >0，使得对于任意的t_0和$t\geq t_0$有

$$\|\Phi(t,t_0)\|\leq Ne^{-C(t-t_0)}$$

充分性: 若条件成立,则

$$\Rightarrow \|x(t,t_0,x_0)\|\leq\|\Phi(t,t_0)\|\|x(t_0)\|\leq Ne^{-C(t-t_0)}\|x(t_0)\|$$

因此，任给$\varepsilon>0$，对给定的$\delta_0>0$，都存在一与t_0无关

$$T=-\frac{1}{C}\ln\frac{\varepsilon}{N\delta_0},$$

使得只要 $\|x(t_0)\|<\delta_0$， $t-t_0\geq T\Rightarrow t\geq t_0+T$,

$$\|x(t)\|\leq Ne^{-CT}\|x(t_0)\|=Ne^{\ln\frac{\varepsilon}{N\delta_0}}\|x(t_0)\|<N\frac{\varepsilon}{N\delta_0}\delta_0=\varepsilon$$

必要性： 设系统一致渐近稳定，要证明

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le Ne^{-C(t-t_0)}, \forall t \ge t_0$$

由于系统一致稳定，故状态转移矩阵对t_0一致有界

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le k, \forall t \ge t_0 \qquad （s\text{-}1）$$

又根据一致渐近稳定的定义，

$$x(t,t_0,x_0) = \Phi(t,t_0)x_0 \to 0$$

对t_0、x_0一致，故

$$\Phi(t,t_0) \to 0$$

也对t_0一致。这样，存在 $T(\varepsilon)>0$,使得

$$\|\Phi(t_0+T,t_0)\|\le\frac{1}{2}\quad\forall t_0\quad(*)$$

对一切t_0成立。于是

1） $\|\Phi(t,t_0)\|=\|\Phi(t,t_0+T)\Phi(t_0+T,\ t_0)\|$

$$\le\underbrace{\|\Phi(t,t_0+T)\|}_{\le k}\underbrace{\|\Phi(t_0+T,\ t_0)\|}_{\le\frac{1}{2}}\le\frac{k}{2},\forall t\in[t_0+T,t_0+2T]$$

前者用到了$(s-1)$:

$$\|\Phi(t,t_0+T)\| \le k, \forall t \in [t_0+T, t_0+2T]$$

后者用到了(*):

$$\|\Phi(t_0+T,t_0)\| \le \frac{1}{2} \quad \forall t_0$$

2) 进而，注意到对任意的正整数 n，根据(s-1)式，有

$$\|\Phi(t,t_0+nT)\| \le M \le k, \forall t \in [t_0+nT, t_0+(n+1)T] \quad (s-2)$$

则更一般地，可以得到

$$\|\Phi(t_0+nT,t_0)\| \le \Big\|\Phi(\overbrace{t_0+nT}^{t_{0n}+T},\overbrace{t_0+(n-1)T}^{t_{0n}})\Big\| \times$$

$$\times\Big\|\Phi(\overbrace{t_0+(n-1)T}^{t_{0(n-1)}+T},\overbrace{t_0+(n-2)T}^{t_{0(n-1)}})\Big\|\times\cdots\times\Big\|\Phi(\overbrace{t_0+T}^{t_{01}+T},\ \overbrace{t_0}^{t_0:=t_{01}}\ )\Big\| \le \frac{1}{2^n}$$

$$(s-3)$$

这里，累次用到了(*)。

于是对 $\forall t\in[t_0+nT,t_0+(n+1)T]$ ，有

$$\|\Phi(t,t_0)\| = \|\Phi(t,t_0+nT)\Phi(t_0+nT,\ t_0)\|$$

$$\le \|\Phi(t,t_0+nT)\|\|\Phi(t_0+nT,\ t_0)\| \le \frac{k}{2^n}$$

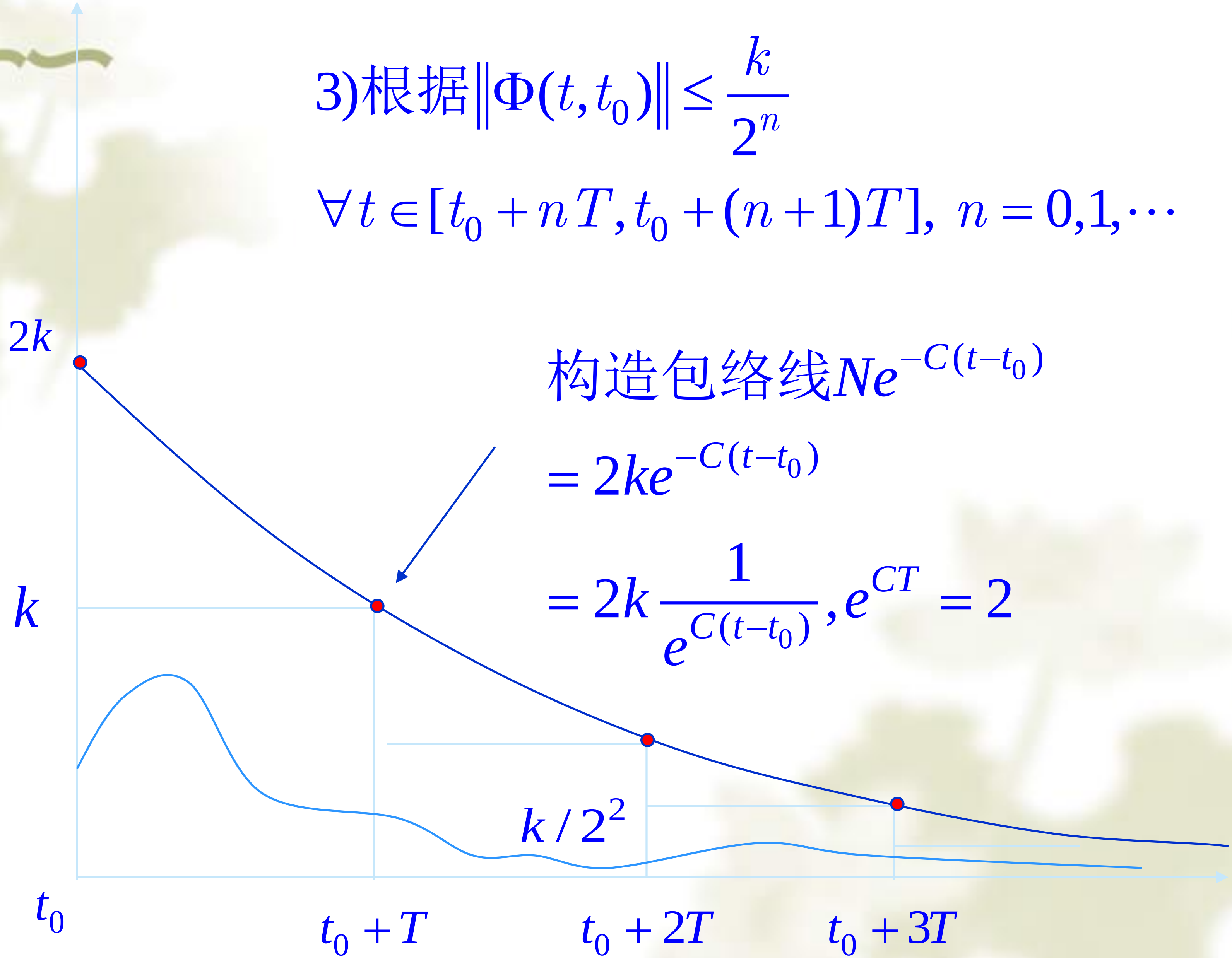
3)根据$\|\Phi(t,t_0)\| \le \dfrac{k}{2^n}$

$\forall t \in [t_0+nT, t_0+(n+1)T],\ n=0,1,\cdots$

构造包络线$Ne^{-C(t-t_0)}$

$= 2ke^{-C(t-t_0)}$

$= 2k\dfrac{1}{e^{C(t-t_0)}}, e^{CT} = 2$



以指数衰减函数为界的$\|\Phi(t,t_0)\|$

通过引入正数 N 及 C:

$$N = 2k, e^{CT} = 2$$

则由上图易见：

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le N e^{-C(t-t_0)}$$

这就证明了系统指数渐近稳定的充要条件。 **证完。**

例：讨论下列系统是否一致稳定、是否渐近稳定、是否一致渐近稳定：

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t+1}$$

解：解出：

$$x(t, t_0, x_0) = \frac{t_0 + 1}{t+1} x_0$$

根据定理，只要直接对其状态转移矩阵进行讨论就可以了：

$$\Phi(t_0, x_0) = \frac{t_0 + 1}{t+1}$$

对线性系统：一致渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 按指数稳定.

定理：线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的零解一致渐近稳定的充分必要条件是系统按指数稳定，即：存在 M >0 及 α >0，使得:

$$\left\| \boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0) \right\| \le M \left\| \boldsymbol{x}_0 \right\| \exp[-\alpha(t-t_0)]$$

定理4.12 原点为线性系统的指数稳定平衡点

$$\dot{x} = A(t)x$$

对连续正定对称矩阵Q(t)，下列方程存在连续可微对称正定解P(t)

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t)$$

则 $V(t,x) = x^T P(t)x$ 是系统的Lyapunov 函数，且满足定理4.10的条件。

定理4.13 原点为非线性系统的一个平衡点

$\dot{x} = f(t,x), f:[0,\infty)\times D \to R^n$连续可微，且$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\Big|_{x=0}$有界，

且在$D = \{x \in R^n \mid \|x\|_2 < r\}$上对$t$一致利普希茨的.

如果原点是线性系统 $\dot{x} = A(t)x$ 的指数稳定平衡点，则非线性系统的平衡点也是指数稳定的。

Lyapunov函数存在性的逆定理

定理4.14 原点为非线性系统的一个平衡点

$\dot{x} = f(t,x),\ f:[0,\infty)\times D \to R^n$连续可微，且其Jacobi矩阵$\dfrac{\partial f}{\partial x}$

在$D=\{x\in R^n \mid \|x\|_2 < r\}$上对$t$ 一致有界。 对正常数：r_0, k, λ：

$r_0 < r/k, D_0 = \{x\in R^n \mid \|x\|_2 < r_0\}$系统的解满足：

$\|x(t)\| \le k\|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall x(t_0)\in D_0, \forall t \ge t_0 \ge 0$

于是，存在连续可微函数$V(t,\boldsymbol{x})$，满足：

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|^2 \le V(t,\boldsymbol{x}) \le c_2\|\boldsymbol{x}\|^2, c_i > 0, i=1,2.$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -c_3\|x\|^2, c_3 > 0.$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \le c_4\|x\|, c_4 > 0$$

从定理4.13看到，非线性系统原点线性化系统是指数稳定的，那么原来非线性系统的原点是指数稳定的。反之怎样？

定理4.15 原点为非线性系统的一个平衡点

$\dot{x} = f(t,x), f:[0,\infty)\times D \to R^n$连续可微，且其Jacobi矩阵$\dfrac{\partial f}{\partial x}$在$D=\{x\in R^n \mid \|x\|_2 < r\}$上对$t$一致有界且Lipschitz。设

$$A(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\bigg|_{x=0}$$

则，线性系统$\dot{x}=A(t)$的原点指数稳定的当且仅当原来非线性系统的原点指数稳定的。

由定理4.15可以直接得到如下推论

推论4.3 原点为非自治非线性系统的一个平衡点

$\dot{x}=f(x), f:$ 在原点领域内连续可微，其Jacobi矩阵 $A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right|_{x=0}$，

则非线性系统的原点指数稳定的当且仅当A是Hurwitz的。

定理4.16 原点为非线性系统的一个平衡点

$\dot{x} = f(t, x),\ f : [0, \infty) \times D \to R^n$连续可微，且其Jacobi矩阵$\dfrac{\partial f}{\partial x}$在$D = \{x \in R^n \mid \|x\|_2 < r\}$上对$t$一致有界。 设$\beta$是$LK$类函数，对正常数：$r_0$：$\beta(r_0, 0) < r_0, D_0 = \{x \in R^n \mid \|x\|_2 < r_0\}$系统的解满足：

$$\|x(t)\| \le \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall x(t_0) \in D_0, \forall t \ge t_0 \ge 0$$

则，存在连续可微函数$V(t, \boldsymbol{x})$，满足：

$$c_1(\|\boldsymbol{x}\|) \le V(t, \boldsymbol{x}) \le c_2(\|\boldsymbol{x}\|),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \le -c_3(\|x\|)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \le c_4(\|x\|)$$

其中c_i是定义在$[0, r_0)$上的K类函数。

- 作业：P126, 4.35,4.37(1)-(2),4.44, 4.45,4.46.