工科数分习题课三　数列极限(三)

石岩

shiyan200245@163.com

Oct.12.2012

本节课的内容和要求

1.熟悉上、下确界的定义, 上、下极限的定义;

2.学会使用Stolz定理计算或证明相关题目;

3.理解实数完备性理论中的六大定理, 对实数完备性有一定认识.

基本概念和主要结论

1.上、下确界

$$\eta=\sup S \quad\Leftrightarrow\quad (\mathrm{i})\forall\, x\in S, x\leqslant\eta; (\mathrm{ii})\forall\,\alpha<\eta,\exists\, x_0\in S, \text{s.t. } x_0>\alpha.$$

$$\xi=\inf S \quad\Leftrightarrow\quad (\mathrm{i})\forall\, x\in S, x\geqslant\xi; (\mathrm{ii})\forall\,\beta>\xi,\exists\, x_0\in S, \text{s.t. } x_0<\beta.$$

Note:

1)若S存在上(下)确界, 则是唯一的. 若S存在上、下确界, 则有$\inf S\leqslant \sup S$;

2)S的确界可能属于S, 也可能不属于S;

3)$\eta=\sup S\in S\Leftrightarrow \eta=\max S$;

4)$A\subset B$, 则 $\sup A\leqslant\sup B, \inf A\geqslant\inf B$;

5)$S=A\bigcup B$, 则$\sup S=\max\{\sup A,\sup B\};\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

确界原理

非空集合若有上界, 则有上确界; 若有下界, 则有下确界.

2.上、下极限

设有界数列$\{x_n\}$

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geqslant n}\{x_m\}\right)\\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geqslant n}\{x_m\}\right)\end{aligned}$$

等价定义　有界数列的最大聚点为上极限; 最小聚点为下极限.

数列(点列)的聚点　若数a的任一邻域内含有数列$\{x_n\}$的无限多个项, 则称a为$\{x_n\}$的一个聚点.

Note:

1)数列(点列)的聚点与数集(点集)的聚点有所区别. 点列(数列)的聚点也称为极限点.

2)有界数列(点列)至少有一个聚点, 且存在最大聚点和最小聚点.

3)数列(点列)的聚点实际上就是其收敛子列的极限.

3.实数完备性的基本定理

1.确界原理

非空集合若有上界, 则有上确界; 若有下界, 则有下确界.

2.单调有界定理

3.闭区间套定理

若$\{[a_n, b_n]\}$是一个闭区间套, 则存在唯一实数 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.

4.有限覆盖定理

设H为闭区间$[a, b]$的一个开覆盖, 则从H中可选出有限个开区间来覆盖$[a, b]$.

5.聚点定理

实轴上任一有界无限点集至少有一个聚点.

(推论)列紧性定理　有界数列必有收敛子列.

6.Cauchy收敛准则

4.Stolz定理

$$
\begin{aligned}
&1) \quad b_{n+1} > b_n; \\
&2) \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty; \\
&3) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A. \\
&\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.
\end{aligned}
$$

5.重要极限结论

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0, \quad \alpha > 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \quad |q| < 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_m}, & k = m, \\ 0, & k > m; \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a, \quad a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = a (b_n > 0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = a;$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}) = d \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = d;$$

习题

1. 求$\{\sqrt[n]{n}\ |n=1,2,\ldots\}$的上、下确界.

2. 设正数列$\{x_n\}$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$, 则$\{x_n\}$必能取到最小值.

3. 求上、下极限

$$
\begin{aligned}
&(1)\qquad \{1+(-1)^n\};\\
&(2)\qquad \left\{(-1)^n\frac{n}{2n+1}\right\};\\
&(3)\qquad \{2n+1\};\\
&(4)\qquad \left\{\frac{2n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{4}\right\}.
\end{aligned}
$$

4.求极限

$$(1)\qquad 已知\lim_{n\to\infty}[(1+n)^{\alpha}-n^{\alpha}]=A,\ 0<\alpha<1;求A;$$

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{p=1}^{n}p!}{n!}.$$

5.设$0<q\leqslant 1, 0<x_1<\dfrac{1}{q},\ x_{n+1}=x_n(1-qx_n),$

$$求证\lim_{n\to\infty}nx_n=\frac{1}{q}.$$

6. 设$H=\left\{\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)\middle| n=1,2,\cdots\right\}$. 问

(1)H能否覆盖$(0,1)$?

(2)能否从H中选出有限个开区间覆盖

$$\text{(i)}\left(0,\frac{1}{2}\right),\qquad \text{(ii)}\left(\frac{1}{100},1\right).$$

附加题　设$\{a_n\}$为有界数列,记

$$\bar{a}_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots\},\ \underline{a}_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\cdots\}.$$

证明:

1)对任何正整数 n, $\bar{a}_n\geqslant\underline{a}_n$;

2)$\{\bar{a}_n\}$为递减有界数列,$\{\underline{a}_n\}$为递增有界数列,且对任何正整数 n,m, $\bar{a}_n\geqslant\underline{a}_m$;

3)设 $\bar{a}$ 和 $\underline{a}$ 分别是$\{\bar{a}_n\}$和$\{\underline{a}_n\}$的极限,则$\bar{a}\geqslant\underline{a}$;

4)$\{a_n\}$收敛的充要条件是$\bar{a}=\underline{a}$.