Nonlinear Systems 非线性系统

第五讲

第3章　非线性系统基本性质

运动微分方程—解的性质

需解决如下两个问题：

1. 初值问题 $\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$，的解是否存在？

2. 若初值问题 $\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$，的解存在，是否唯一？

解的存在性与唯一性

考虑系统解的存在唯一性： $\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0$ （3.1）

方程满足初始状态 x_0 的解 $x(t)$ 是否存在和若存在是否唯一？

方程$\dot{x} = x^{1/3}, x(0) = 0$除了平凡的零解$x = 0$，还有一个非平凡的解

当$x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$。说明方程解是不唯一的。

存在唯一性定理

定理3.1 考虑初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

其中$f(x,t)$对x连续对t分段连续，且对x满足Lipschitz条件：

即存在$L>0$，使对所有$x, y \in \mathrm{B}$常成立

$$\| f(x,t) - f(y,t) \| \le L \| x - y \|$$

$$\forall x, y \in \mathrm{B} =: \{ x \mid \| x - x_0 \| \le r \}, t \in [t_0, t_1]$$

则存在$\delta > 0$在域B上的解在t_0的领域$[t_0,\ t_0+\delta]$内存在且唯一。

存在唯一性定理

考虑初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\| f(x,t) - f(y,t) \| \le L \| x - y \|$$

在定义域*D*（连通开集），若其内的每个点都有一个领域D_0，使得***f***对于D_0内各点都具有相同Lipschitz常数L_0，满足上述Lipschitz条件，则称函数***f***是**局部Lipschitz的**。

若对于*W*内所有点具有相同Lipschitz常数*L*，则称***f***在***W***内是**Lipschitz的**。

存在唯一性定理

当$f(x,t)$为标量函数时，其对x满足Lipschitz条件可以写成：

$$\frac{|f(x,t)-f(y,t)|}{|x-y|}\le L,$$ 表明连接$f(x,t)$任意两点的一条直线斜率的绝对值不大于L。

方程$\dot{x}=x^{1/3}, x(0)=0$中$f(x)=x^{1/3}$在$x=0$点不是Lipschitz的。

当$x\to 0$时，$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}\to\infty.$

引理3.1设$f(t,x):[a,b]\times R^m$在某一定义域D内连续，假设$\partial f/\partial x$存在且连续。若对一个凸子集$W\subset D$，存在常数$L\ge 0$，使得在$[a,b]\times W$：

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right\|\le L,$$ 则对所有的$t\in[a,b], x\in W, y\in W$有：

$$\|f(x,t)-f(y,t)\|\le L\|x-y\|$$

函数的Lipschitz特性

由引理3.1可知，函数连续不一定满足Lipschitz性。显然，如果函数f(x)在域W上是Lipschitz的，那么它在W上就是一致连续的。但是与连续可微函数哪个性质更强呢？

引理3.2如果在某一定义域$D \subset R^n$内，$f(t,x), \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$在$[a,b] \times D$内连续，则$f$在$[a,b] \times D$上对于$x$是局部Lipschitz的.

由于$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$在$[a,b] \times D$内连续，所以在$[a,b] \times$ W内有界，故对$x, y \in W$有：$\| f(t,x) - f(t,y) \| \le L \| x - y \|$，其中$W$为$D$的任意紧凸子集。

引理3.3如果$f(t,x), \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$在$[a,b] \times R^n$上连续，则$f$在$[a,b] \times R^n$上对$x$是全局Lipschitz的当且仅当$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$在$[a,b] \times R^n$上一致有界。

$f(t,x)$是全局Lipschitz，即对所有的$t \in [a,b], x, y \in R^n$有：

$\| f(t,x) - f(t,y) \| \le L \| x - y \|$。

解全局存在唯一性定理

定理3.2 考虑初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

其中$f(x,t)$对x连续对t分段连续, 且对x满足Lipschitz条件:

$$\| f(x,t) - f(y,t) \| \le L \| x - y \|$$

$$\forall x, y \in R^n, t \in [t_0, t_1]$$

则方程$\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$在$[t_0, t_1]$内有唯一解。

例子3. 3：考虑方程$\dot{x} = -x^2, x(0) = -1$对所有$x \in R, f(x) = -x^2$是局部Lipschitz的。因此，它在R的任何紧子集上都是Lipschitz的。

在[0,1）上存在唯一解

$x(t) = \dfrac{1}{t-1}$. 当$t \to 1$时，$x(t)$不在属于任何紧子集。

例子3. 4：考虑系统$\dot{x} = A(t)x + g(t) = f(t, x)$,

$|f(t,x) - f(t,y)| \le \| A(t)(x-y) \| \le \| A(t) \| \| (x-y) \| \le a \| (x-y) \|$。

满足定理3.2条件，在任何有限闭区间内有唯一解，因此，

不可能有有限逃逸时间。

定理**3.3**对$t \ge t_0$,在定义域D内$f(x,t)$对x连续对t分段连续, 且对x满足局部Lipschitz条件，设W是D的一个紧子集，$x_0 \in W$,并设系统$\dot{x} = f(x,t)$，$x(t_0) = x_0$的每个解都在W内，则对所有$t \ge t_0$,

系统有唯一解。

解的延拓定理

定理：如果方程(1)右侧函数$f(t,x)$在有界区域$I\times W$中连续，且在$I\times W$内 $f(t,x)$ 关于x满足局部Lipschitz条件，那么方程(1)通过$I\times W$内任一点(x_0,t_0)的解$x=x(t)$可以延拓，直到点$(t,x(t))$任意接近$I\times W$的边界.

以向t增大的一方来说，如果$x=x(t)$只延拓到区间$t_0\le t<T$上，则当$t\to T$ 时，$(t,x(t))$趋于区域$I\times W$的边界.

解对初值的连续依赖性定理

引理　如果函数 $f(t,x)$于某域W内连续，且关于 x 满足 Lipschitz条件（常数为L），则对方程 $\dot{x}=f(t,x)$ 的任意两个解 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ ，在它们的公共存在区间内成立着不等式 $|\varphi(t)-\psi(t)|\le|\varphi(t_0)-\psi(t_0)|e^{L|t-t_0|}$. 其中 t_0 为所考虑区域内的某一值。

解对初值的连续依赖性与封闭性定理

定理3.4 如果函数 $f(t,x)$ 于某连通开域W内分段连续，且关于x满足Lipschitz条件(常数为L)，则方程$\dot{y}=f(t,y), y(t_0)=y_0$的解$y(t)$及方程$\dot{z}=f(t,z)+g(t,z), z(t_0)=z_0$的解$z(t)$，对于所有的$t\in[t_0,t_1]$，有$y(t),z(t)\in W$。假设对于$\mu>0$，有

$$\|g(t,z)\|\le\mu, \forall(t,x)\in[t_0,t_1]\times W$$

那么，$$\|y(t)-z(t)\|\le\|y_0-z_0\|e^{L(t-t_0)}+\frac{\mu}{L}\left(e^{L(t-t_0)}-1\right).$$

解对初值与参数的连续依赖性与可微性定理

定理3.5 如果函数 $f(t,x,\lambda)$ 于 $[t_0,t_1]\times D\times\{\|\lambda-\lambda_0\|\le c\}$ 连续可微，且对 x 是Lipschitz的，设方程 $\dot{y}=f(t,y,\lambda_0),y(t_0,\lambda_0)=y_0$ 的解 $y(t,\lambda_0)$ 对所有 $t\in[t_0,t_1]$ 有定义且属于 D ，那么对于任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ ，如果 $\|y_0-z_0\|<\delta,\|\lambda-\lambda_0\|<\delta$ 则 $\dot{z}=f(t,z,\lambda_0),z(t_0,\lambda)=z_0$ 有定义在 $t\in[t_0,t_1]$ 上的唯一解 $z(t,\lambda)$ 满足 $\|y(t,\lambda_0)-z(t,\lambda)\|<\varepsilon,\quad\forall t\in[t_0,t_1]$. 且解 $z(t,\lambda)$ 对 $\{\|\lambda-\lambda_0\|\le c\}$ 中的 λ 是可微的。

比较引理

定理3. 4（比较引理）考虑标量方程$\dot{u} = f(t,u), u_0 = u(t_0)$. 对所有$t \geq 0$和所有$u \in J \subset R$, $f(t,u)$对t连续可微，且对u是局部Lipschitz的。设$[t_0, T)$（T可以是无限的）是解$u(t)$存在的最大区间，并且假设对于所有的$t \in [t_0, T)$，有$u(t) \in J$.设$v(t)$是连续函数，其上右导数$D^+ v(t)$对所有$t \in [t_0, T)$，有$v(t) \in J$满足微分不等式

$$D^+ v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u_0$$

那么对所有$t \in [t_0, T)$，有$v(t) \leq u(t)$.

其中$D^+ v(t) = \lim\limits_{h \to 0^+} = \dfrac{v(t+h) - v(t)}{h}$

例3.8 比较原理应用

考虑标量系统： $\dot{x} = f(x) = -(1+x^2)x, x(0) = a$

因为f 是局部Lipchitz的，对某一$t_1>0$，在$[0, t_1)$上有唯一解。 设

$v(t) = x^2(t)$，则$\dot{v} = 2x(t)\dot{x}(t) = -2x^2(t) - 2x^4(t) \le -2x^2(t)$

其满足微分不等式： $\dot{v} \le -2x^2(t) = -2v(t), v(0) = a^2.$

考虑微分方程： $\dot{u} = -2u(t), u(0) = a^2 \quad \Rightarrow u(t) = a^2 e^{-2t}.$

由比较引理得到，原来方程解x对于所有t>0都有定义，且满足：

$$|x(t)| = \sqrt{v(t)} \le |a| e^{-t}, \quad \forall t \ge 0.$$

例3.9 比较原理应用

考虑标量系统：$\dot{x} = f(t,x) = -(1+x^2)x + e^t, x(0) = a$

因为f 是对x局部Lipchitz的，对某一$t_1>0$, 在$[0, t_1)$上有唯一解。 设

$$v(t) = x^2(t), 则\dot{v} = 2x(t)\dot{x}(t) = -2x^2(t) - 2x^4(t) + 2x(t)e^t \le -2v(t) + 2\sqrt{v(t)}e^t$$

对此微分不等式应用比较原理不易求解，为此考虑：$v(t) = |x(t)|$

$$\dot{v} = \frac{d}{dt}\sqrt{x^2(t)} = \frac{x(t)\dot{x}(t)}{|x(t)|} = -|x(t)|\left(1 + x^2(t)\right) + \frac{x(t)}{|x(t)|}e^t, \text{for } x(t) \ne 0.$$

满足微分不等式： $\dot{v} \le -v(t) + e^t.$

当 $x(t) = 0$ 时，有：

$$\frac{|v(t+h)-v(t)|}{h}=\frac{\|x(t+h)|-|x(t)\|}{h}=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(\tau,x(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\left|f(t,0)+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(f(\tau,x(\tau))-f(t,x(t))\right)\,\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\leq|f(t,0)|+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|f(\tau,x(\tau))-f(t,x(t))\|\,\mathrm{d}\tau$$

由于$f(t,x)$是t的连续函数，对任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$使得对$|\tau-t|<\delta$,有$|f(\tau,x(\tau))-f(t,x(t))|<\varepsilon$.因此，对于所有$h<\delta$,有

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(f(\tau,x(\tau))-f(t,x(t))\right)\,\mathrm{d}\tau<\varepsilon\Rightarrow\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(f(\tau,x(\tau))-f(t,x(t))\right)\mathrm{d}\tau=0$$

当 $x(t)=0$ **时，有：**$D^+v(t)\leq|f(t,0)|=e^t$. **因此对应于方程，**

$$\dot{u}(t)=-u(t)+e^t,u(0)=|a|.$$

由比较原理可得， $v(t)\leq u(t)=e^{-t}|a|+\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right),\forall t\in[0,t_1).$

作业：3.1 （1）（3）（5）（7），3.3，3.6，3.14(b)(c)