



第二章 命题逻辑

郑征

zhengz@buaa.edu.cn

软件与控制研究室

北京市水产科学研究所
智能水产养殖专家系统



登录



注册



登录

2003年9月2日 星期二

首页

鲟鱼养殖

鲟鱼病害诊断

罗非鱼养殖

罗非鱼病害诊断

当前位置: 首页 > 现场调查

鲟鱼病害诊断



鱼病诊断

常见鱼病

鱼药知识

病历查寻

登录时间

12:54:20

中午好,
欢迎您使用本系统!

现场调查

诊断编号: 2003090200124

日期: 2003年9月2日

规格: 成鱼

病鱼种类: 西伯利亚鲟

水温: 20 °C

溶氧: 6

PH 值: 7.5

流行病史: 无流行病史

表现: 水体中有敌害昆虫

现场调查结果: 水体中有敌害昆虫

其他诊断提示: 可以进行查看相关图片或查看防治方法

鲤鱼病害诊断



鱼病诊断

常见鱼病

鱼药知识

病历查寻

登录时间

13:19:08

下午好，
欢迎您使用本系统！

诊断结果

诊断编号：2003090200124

日期：2003年9月2日

规格：成鱼

病鱼种类：西伯利亚鲟

水温：20℃

溶氧：8mg/l

PH值：7.5

流行病史：无流行病史

水温合适，注意保持。

溶氧偏低，请提高水体溶氧量。可以是流水、换水、人工曝气等物理方法，也可以是化学增氧、有机絮凝等化学方法，以及调节水色、控制饵料水平、生物密度等生物方法，可以酌情单独或综合采用。另外也要注意防止溶氧变动过剧过繁。

PH值适合，注意经常测量，并保持每天的pH值变化不要超过0.5。

您所选择的症状是：

现场表现：水体中有敌害昆虫

目检症状：1. 腹部瘦小 2. 用手轻压腹部，有黄色粘液从肛门流出 3. 肠道组织内形成微气泡，再汇聚成大气泡 4. 肝较白 5. 口前两侧的两条沟裂内，肉眼就可以看到里面呈线型排列的许多气泡。 6. 整个头部都充血，口的四周红肿，口不能闭合 7. 脑组织坏死、糜烂，难辨结构

目检结果：气泡病

通过本系统诊断，怀疑病症为：

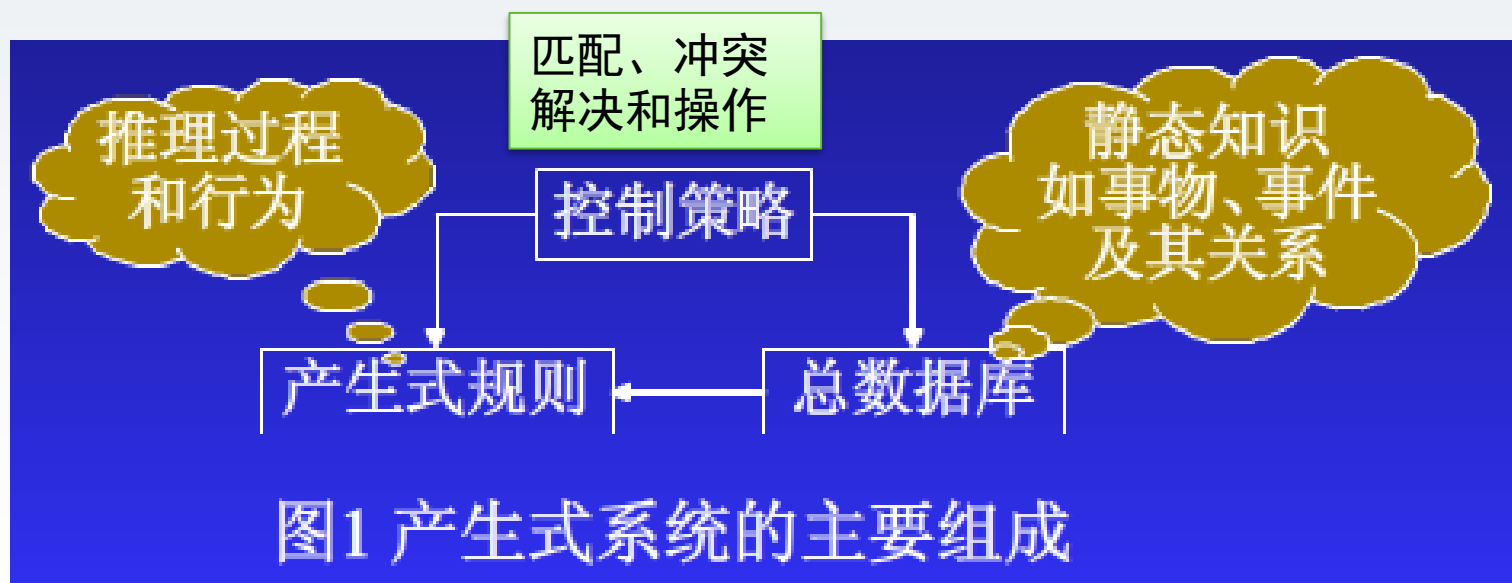
水体中有敌害昆虫 并发 气泡病

引子

- 专家系统（expert systems, ES）是AI应用研究的主要领域，也是近30年来发展最活跃和应用最广泛的领域
 - 自从1965年第一个ES-Dendral在Stanford University问世以来，经过20年的发展，到80年代中期，ES理论和技术日趋成熟，各种ES已遍布各个专业领域，取得很大的成功。
 - ES的定义
 - 一种智能计算机程序，它运用知识和**推理**来解决只有人类专家才能解决的复杂问题。
 - ES是一种在所限制的领域内模拟专家决策能力的计算机系统。

引子

- 产生式系统（PS）是ES的雏形
 - PS是以产生式规则表示知识为基础，是最早的综合运用AI原理与技术的应用系统，是ES的雏形。



引子

- 产生式规则是一个以“如果满足这个条件，就应当采取某操作”形式表示的语句，采用产生式规则的结构。
- 产生式的if部分被称为条件或前项。
 - 它说明应用这条规则必须满足的条件；
 - 例如：if 某种动物是哺乳动物，并且吃肉， then 这种动物被称为食肉动物
 - 在使用该规则之前，总数据库中必须存有“该动物是哺乳动物”和“该动物吃肉”这两个事实。

第二章

- 逻辑

- **逻辑**通常指人们思考问题，从某些已知条件出发推出合理的结论的规律。
- 说某人**逻辑性强**，就是说他善于推理，能够得出正确的结论。
- 说某人说话**不合逻辑**，就是说他推理不正确，得出了错误的结论。

- 那么如何让计算机来进行“逻辑思维呢”

第二章

- 逻辑

- 人工智能、计算智能等中所提到的智能，其中重要的方面就是模拟人的逻辑思维能力。
- 这也是为什么要在离散数学（计算机数学）中讲授数理逻辑的原因。

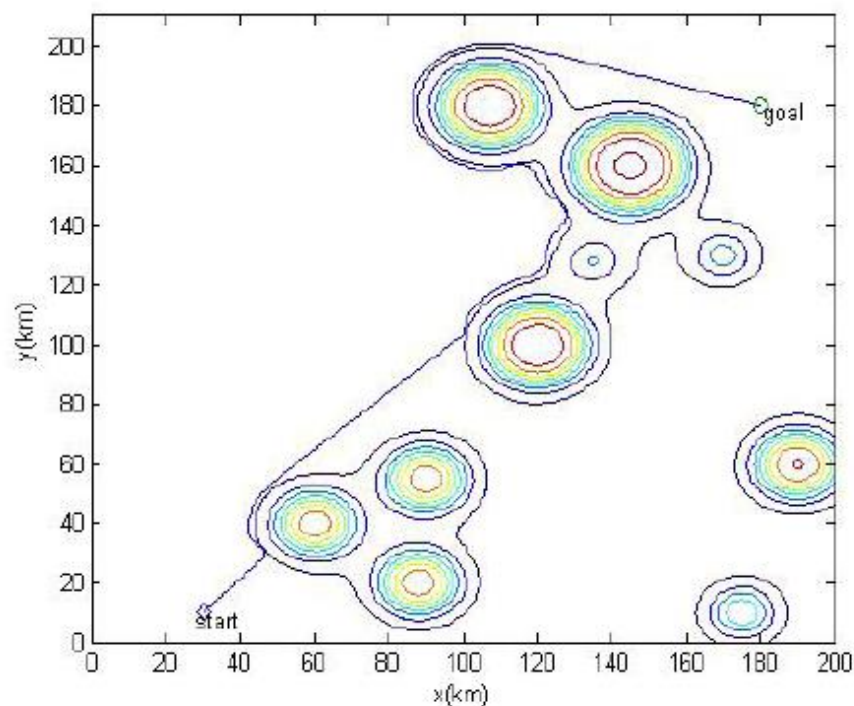
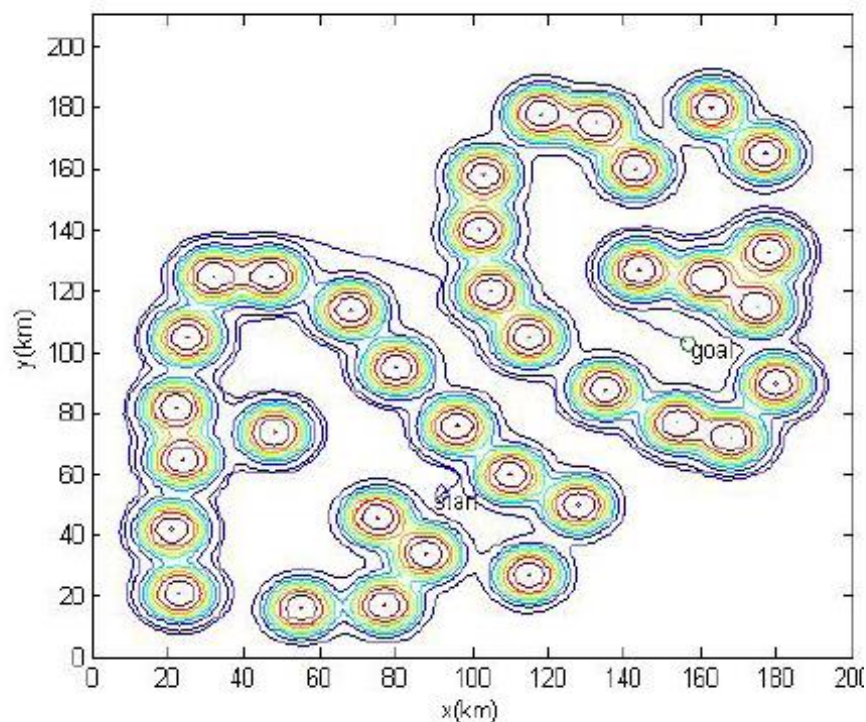
第二章 命题逻辑

- ❖ 数理逻辑是研究推理（即研究人类思维的形式结构和规律）的科学，起源于17世纪，它采用数学符号化的方法，因此也称为符号逻辑。
- ❖ 从广义上讲，数理逻辑包括四论、两演算——即集合论、模型论、递归论、证明论和命题演算、谓词演算，但现在提到数理逻辑，一般是指命题逻辑和一阶逻辑(谓词逻辑)。本课程也只研究这两个逻辑演算。

第二章 命题逻辑

- ❖ 数理逻辑与计算机学、控制论、人工智能的相互渗透推动了其自身的发展，模糊逻辑、概率逻辑、归纳逻辑、时态逻辑等都是目前比较热门的研究领域。
- ❖ 本章和下一章我们只从语义出发，对数理逻辑中的命题逻辑与谓词逻辑等作一简单的、直接的、非形式化的介绍，将不涉及任何公理系统。

无人机路径规划



实际上就是让无人机根据不同的情况进行逻辑判断

全选	全文下载	标题	作者	出处
<input type="checkbox"/>		Lukasiewicz n 值命题逻辑系统中公式的一般真度和形式推演结论的不可靠估计	张家录 吴霞	电子学报-2012年10期
<input type="checkbox"/>		命题逻辑PL表达能力和应用	邱德钧	兰州大学学报: 社会科学版-2012年6期
<input type="checkbox"/>		Lukasiewicz n值命题逻辑中公式的条件随机真度	姜妍 冯飞尧...	计算机工程与应用-2012年33期
<input type="checkbox"/>		关于命题逻辑的联结词“蕴涵”	叶雪梅	福建广播电视大学学报-2000年2期
<input type="checkbox"/>		Lukasiewicz命题逻辑中命题的Borel概率真度理论和极限定理	周红军	软件学报-2012年9期
<input type="checkbox"/>		二值命题逻辑中限制逻辑等价关系及其应用	亓正坤 王廷明...	东北师大学报: 自然科学版-2012年2期
<input type="checkbox"/>		系统L中 $\tau(A \rightarrow X) \geq \alpha$ 型逻辑不等式的解问题	王廷明	计算机工程与应用-2012年16期
<input type="checkbox"/>		二值命题逻辑中基于信息限制的随机真度	亓正坤 丁洁玉...	计算机工程与应用-2012年22期
<input type="checkbox"/>		三值R0命题逻辑系统中理论的条件发散度	李修清 魏海新	桂林航天工业高等专科学校学报-2012年2期
<input type="checkbox"/>		A Hierarchy of Resolution Systems with Restricted Substitution Rules	无	计算机技术与应用: 英文-2012年4期
<input type="checkbox"/>		格值命题逻辑系统中广义文字的正规性 全文快照	何星星 徐扬...	计算机工程与应用-2012年10期
<input type="checkbox"/>		四值非线性格值逻辑中公式的概率真度 全文快照	左卫兵	四川师范大学学报: 自然科学版-2012年1期
<input type="checkbox"/>		几个模糊命题逻辑紧致性的新证明 全文快照	张乐 裴道武	浙江理工大学学报-2012年1期
<input type="checkbox"/>		离散数学逻辑推理证明方法的探讨 全文快照	康鹏	电脑知识与技术: 学术交流-2011年12期
<input type="checkbox"/>		关于命题逻辑中两个问题的思考 全文快照	无	湖北师范学院学报: 自然科学版-2011年4期
<input type="checkbox"/>		启发式方法生成命题逻辑可读证明 全文快照	郭远华	计算机应用研究-2011年12期
<input type="checkbox"/>		语言真值直觉模糊命题逻辑系统的推理规则 全文快照	刘德山 殷明娥...	计算机工程与应用-2011年33期
<input type="checkbox"/>		四值非线性格值逻辑上公式的真度理论 全文快照	左卫兵 王俊芳	计算机工程与应用-2011年30期
<input type="checkbox"/>		三值R0命题逻辑系统的条件真度理论 全文快照	魏海新 李修清	桂林航天工业高等专科学校学报-2011年3期
<input type="checkbox"/>		格值命题逻辑系统 $LP(X)$ 的语义归结方法 全文快照	张家锋 徐扬...	辽宁工程技术大学学报: 自然科学版-2011年4期

第1讲 命题逻辑

- 1. 命题符号化及联结词
- 2. 命题公式及其分类
- 3. 等值演算
- 4. 联结词全功能集
- 5. 析取范式与合取范式
- 6. 推理理论

1. 命题符号化及联结词

第二章 命题逻辑

2.1 命题符号化及联结词

基本概念

只有能确定真假的東西，
计算机才容易理解

- ✓ **命题**：能够判断真假的陈述句。
- ✓ **命题的真值**：命题的判断结果。真值只取两个值：真（1）、假（0）。
- ✓ **真命题**：真值为真的命题。
- ✓ **假命题**：真值为假的命题。

判断命题的两个步骤：

- 1、是否为陈述句；
- 2、是否有确定的、唯一的真值。

注意：感叹句、祈使句、疑问句都不是命题。陈述句中的悖论以及判断结果不惟一确定的也不是命题

第二章 命题逻辑

例2.1 下列句子中那些是命题？

(1) $\sqrt{2}$ 是无理数.

真命题

(2) $2 + 5 = 8$.

假命题

(3) $x + 5 > 3$.

真值不确定

(4) 你有铅笔吗？

疑问句

(5) 这只兔子跑得快真快呀！

感叹句

(6) 请不要讲话！

祈使句

(7) 我正在说谎话.

悖论

(3)~(7)都不是命题

第二章 命题逻辑

命题及其真值的抽象化

在本课程中，用小写英文字母 $p, q, r, \dots p_1, p_2, p_3 \dots$ 等表示命题，用“1”、“0”分别表示真值的真、假。

例2.2:

p : 罗纳尔多曾经是球星。

q : 5是负数。

p_3 : 明天天气晴。

皆为符号化的命题，其真值依次为1、0、1或0。

若令

p : $\sqrt{2}$ 是有理数，则 p 的真值为 0

q : $2 + 5 = 7$ ，则 q 的真值为 1

第二章 命题逻辑

命题的分类

简单/原子命题：由不能再分解为更简单的陈述句的陈述句构成。

如上例中的命题。

复合命题：由简单命题通过联结词联结而成的陈述句。

例2.3

(1) 若三角形等腰，则两底角相等

(2) 若行列式两行成比例，则行列式值为0

第二章 命题逻辑

在命题逻辑的符号化过程中，通常的要求是每一个引进的表示命题的符号都表示一个原子命题。

例如：将下列命题符号化

(1) 杭州不是中国的首都。

(2) 张三虽然学习努力但成绩并不优秀。

解 (1) 令 p ：杭州是中国的首都。

则命题“杭州不是中国的首都”符号化为： $\neg p$

(2) 令 p ：张三学习努力。 q ：张三成绩优秀。

则命题“张三虽然学习努力但成绩并不优秀。”

符号化为： $p \wedge \neg q$ 。

第二章 命题逻辑

由此我们进一步明确指出：

原子命题是用肯定语气表达的具有真假意义的简单陈述句。上述例题中。直接令 p 表示“杭州不是中国的首都”。来做符号化，是不符合要求的。

在上述第2个命题中，如果简单地用一个符号 p 表示“张三虽然学习努力但成绩并不优秀”做符号化就更不符合符号化的要求了。

第二章 命题逻辑

常用联结词

定义2.1 设 p 为命题，复合命题“非 p ”（或“ p 的否定”）称为 p 的否定式，记作 $\neg p$ ，符号 \neg 称为否定联结词。

运算规则：属于单目运算符

p	$\neg p$
1	0
0	1

第二章 命题逻辑

定义2.2 设 p, q 为二命题，复合命题“ p 并且 q ”（或“ p 与 q ”）称为 p 与 q 的合取式，记作 $p \wedge q$ ，符号 \wedge 称为合取联结词。

运算规则：属于双目运算符

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

第二章 命题逻辑

合取运算特点：只有参与运算的两命题全为真时，运算结果才为真，否则为假。自然语言中表示“并且”意思的联结词，如“既...又...”、“不但...而且...”、“虽然...但是...”、“一面...一面...”等都可以符号化为 \wedge 。

注意：不要见到“与”或“和”就使用联结词 \wedge ！

例2.4 下列命题符号化

(1) 北京不仅是中国的首都而且是一个故都

p : 北京是中国的首都。 q : 北京是一个故都。

$p \wedge q$: 北京是中国的首都并且是一个故都。

(2) 牛启飞和林妹妹是好朋友

p : 牛启飞和林妹妹是好朋友

第二章 命题逻辑

定义2.3 设 p, q 为二命题，复合命题“ p 或 q ”称为 p 与 q 的析取式，记作 $p \vee q$ ，符号 \vee 称为析取联结词。

运算规则：属于双目运算符

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例2.5 将下列命题符号化

- (1) 2或4是素数.
- (2) 2或3是素数.
- (3) 4或6是素数.
- (4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.
- (5) 王晓红生于1975年或1976年.

解 令 p : 2是素数, q : 3是素数, r : 4是素数, s : 6是素数

则 (1), (2), (3) 均为相容或.

分别符号化为: $p \vee r$, $p \vee q$, $r \vee s$,

它们的真值分别为 $1, 1, 0$.

第二章 命题逻辑

析取运算特点：只有参与运算的二命题全为假时，运算结果才为假，否则为真。

这里的析取运算只能表示自然语言中的“相容或”的意思，不能表示自然语言里的“排斥或”。例如：

(1) 小王爱打球或爱跑步。

设 p ：小王爱打球。 q ：小王爱跑步。

则上述命题可符号化为： $p \vee q$

(2) 火车8：00或9：00到站。

设 p ：火车8：00到站。 q ：火车9：00到站。

则上述命题就不可简单符号化为： $p \vee q$

而应描述为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 或 $p \nabla q$

(3) 今天晚上我在家看电视或去剧场看戏。

这个命题中的“或”是排斥或，表示二者只居其一，不能同时成立。

令 p : 今天晚上我在家看电视； q : 今天晚上我去剧场看戏

上述命题不能表示为 $p \vee q$ ，因为按“ \vee ”的定义。 p, q 都为真时， $p \vee q$ 也为真，而上题当 p, q 都为真时，命题为假，这是由于一个人不可能既在家，又在剧场里，所以不能用 $p \vee q$ 表示，要用排斥或 (∇) 表示

上述命题可表示为: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 或 $p \nabla q$

p	q	$p \nabla q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- 一个人在家中被刺身亡
- 三个嫌疑犯分别提供了自己不在场的证据：
 - 嫌犯1说他去看电影，有朋友证明；
 - 嫌犯2说他去饭店吃饭，有招待员证明
 - 嫌犯3说他在家看电视，他说出了当时的电视节目

怎样将自然语言描述的规则
用命题逻辑的方式表达出来，并能够
参与逻辑运算，从而实现推理

已经学习了：且，或者

第二章 命题逻辑

定义 2.4 设 p, q 为二命题, 复合命题 “如果 p , 则 q ” 称为 p 与 q 的蕴涵式, 记作 $p \rightarrow q$, 并称 p 为蕴涵式的前件, q 为蕴涵式的后件, 符号 \rightarrow 称为蕴涵联结词。

因为计算机无法直接理解语义上的“内在联系”

与自然语言的不同:

前件与后件可以没有任何内在联系!

运算规则: 属于双目运算符

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p \rightarrow q$ 的逻辑关系：q 为 p 的必要条件

“如果 p，则 q” 的不同表述法很多：

若 p，就 q

只要 p，就 q

p 仅当 q

只有 q 才 p

除非 q，才 p 或 除非 q，否则非 p，

当 p 为假时， $p \rightarrow q$ 为真

常出现的错误：不分充分与必要条件

第二章 命题逻辑

定义2.5 设 p, q 为二命题，复合命题“ p 当且仅当 q ”称为 p 与 q 的等值式，记作 $p \leftrightarrow q$ ，符号 \leftrightarrow 称为等价联结词。

说明： (1) $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系： p 与 q 互为充分必要条件

(2) $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同真或同假

运算规则： 属于双目运算符

P	q	$P \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

第二章 命题逻辑

例2.6 求下列复合命题的真值

(1) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$.

(2) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 3 是偶数.

(3) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 太阳从东方升起.

(4) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 美国位于非洲.

它们的真值分别为 1, 0, 1, 0.

**语言的形式化表述
是专家推理系统的基础**

第二章 命题逻辑

以上5种最基本、最常用、最重要的联结词可以组成一个集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, 成为一个联结词集, 其运算的优先级为: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, 对于同一级者, 先出现者先运算。

例2.8 求命题公式 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$ 真值表.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

- 假设我们可以把我们的所有基本知识都表示为原子命题，构建知识库；
- 那么计算机似乎就可以根据当前的情况基于这个知识库来进行判断了；
- 这其实就是专家系统的基本原理。
- 但其中涉及到几个技术难点：
 - 知识的表示；
 - 带有矛盾和冲突的推理；
 - 。。。

2. 命题公式及其分类

第二章 命题逻辑

2.2 命题公式及其分类

基本概念

- ✓ 简单命题/命题常项/命题常元：真值唯一确定的陈述句。
- ✓ 命题变项/命题变元：真值可以变化的陈述句。

命题常项与命题变项都可以用 p, q, r, \dots 等表示，具体情况由上下文确定。

- ✓ 合式公式/命题公式：将命题变项用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串。

当使用联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 时，合式公式定义如下：

第二章 命题逻辑

定义2.6 合式公式

- (1) 单个命题变项是合式公式，并称为原子命题公式。
- (2) 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式。
- (3) 若 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式。
- (4) 只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串才是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，并简称为公式。

第二章 命题逻辑

$(p \rightarrow q)$, $(r \wedge t) \vee \neg e$, p , (p) 等均为合式公式, 而 $pq \vee t$, $(p \rightarrow w) \wedge q$ 等不是合式公式。

上述归纳定义方式中的符号A, B不同于具体公式里面的p, q, r等符号, 可以用来表示任意的合式公式,属于元语言符号。

❖ 对象语言：用来描述研究对象的语言。

❖ 元语言：用来描述对象语言的语言。

第二章 命题逻辑

定义2.7——公式层次

- (1) 若公式A是单个的命题变项，则称A为0层合式公式。
- (2) 称A是 $n+1$ ($n \geq 0$) 层公式是指下列情况之一：
 - (a) $A = \neg B$, B是n层公式;
 - (b) $A = B \wedge C$, 其中B, C分别为i层和j层公式, 且 $n = \max(i, j)$;
 - (c) $A = B \vee C$, 其中B, C的层次及n同(b);
 - (d) $A = B \rightarrow C$, 其中B, C的层次及n同(b);
 - (e) $A = B \leftrightarrow C$, 其中B, C的层次及n同(b);
- (3) 若公式A的层次为k, 则称A是k层公式。

第二章 命题逻辑

例:公式

p	0层
$\neg p$	1层
$\neg p \rightarrow q$	2层
$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$	3层
$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$	4层

第二章 命题逻辑

定义2.8——公式赋值

设 p_1, p_2, \dots, p_n 是出现在公式 A 中的全部的命题变项，给 p_1, p_2, \dots, p_n 各指定一个真值，称为对 A 的一个赋值或解释。

比如：对公式 $(p \rightarrow q) \wedge r$ 一组赋值为011(意即令 $p=0, q=1, r=1$)可得真值为1，另一组赋值为010可得真值为0；还有000, 001, 111.....

考虑：含有 n 个命题变项的公式共有多少个不同的赋值？

2^n 个赋值.

第二章 命题逻辑

若指定的一组值使A的真值为1，则称这组值为A的成真赋值。(使公式为真的赋值)

如对公式 $(p \rightarrow q) \wedge r$ 赋值011，还有...???

若指定的一组值使A的真值为0，则称这组值为A的成假赋值。(使公式为假的赋值)

如对公式 $(p \rightarrow q) \wedge r$ 赋值010，还有...???

第二章 命题逻辑

真值表

将命题公式A在所有赋值下取值情况列成表称做A的**真值表**。

对公式A构造真值表的具体步骤为：

- (1) 找出公式中所有的全体命题变项 p_1 , p_2 , ... , p_n , 列出 2^n 个赋值。
- (2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次。
- (3) 对应各个赋值计算出各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值。

第二章 命题逻辑

例2.9 (1)求命题公式 $(p \rightarrow q) \wedge r$ 的真值表

p	q	r	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge r$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

第二章 命题逻辑

公式的又一种分类方式

定义2.9 设A为任一命题公式，

- (1) 若A在其各种赋值下的取值均为真，则称A是重言式或永真式。
- (2) 若A在其各种赋值下的取值均为假，则称A是矛盾式或永假式。
- (3) 若A不是矛盾式，则称A为可满足式。

第二章 命题逻辑

真值表的作用：

- (1) 表示出公式的成真或成假赋值。
- (2) 判断公式类型：
 - (a) 若真值表最后一列全为1，则为重言式；
 - (b) 若真值表最后一列全为0，则为矛盾式；
 - (c) 若真值表最后一列至少有一个1，则为可满足式；

3. 等值演算

第二章 命题逻辑

有很多公式具有相同的真值表。如：

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

还有 $\neg p \vee q$ 、 $\neg p \rightarrow \neg q$ 等

第二章 命题逻辑

2.3 等值演算

定义2.10 设 A, B 是两个命题公式，若 A, B 构成的等价式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B 是等值的记作 $A \Leftrightarrow B$ 。即 $A \Leftrightarrow B$ 的充要条件是 $A \leftrightarrow B$ 为重言式

判断两个公式等值的方法1：真值表法。

Note: 符号 \leftrightarrow 称为等价联结词。

例2.10 判断公式 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \wedge q) \rightarrow r$ 是否等价

p	q	r	$p \wedge q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

由真值表可知，两个公式为等值式。

第二章 命题逻辑

等值演算：由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程。

等值演算中使用的一条重要规则：**置换规则**

定理2.1 设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式, $\Phi(B)$ 是用公式 B 置换了 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式,
若 $B \Leftrightarrow A$, 则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$ 。

基本等值式

双重否定律： $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

等幂律： $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律： $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律： $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律： $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

基本等值式 (续)

德 摩根律 : $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

吸收律: $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, \quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

零律: $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

同一律: $A \vee 0 \Leftrightarrow A, \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

排中律: $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

基本等值式(续)

蕴涵等值式: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

假言易位: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

等价否定等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论: $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意:

A, B, C 代表任意的命题公式

牢记这些等值式是继续学习的基础

等值演算与置换规则

等值演算:

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则: 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

$\Phi(A)$ 是含公式A的命题公式

等值演算的基础:

- (1) 等值关系的性质: 自反、对称、传递
- (2) 基本的等值式
- (3) 置换规则

第二章 命题逻辑

等值演算的用途一：证明等值式。

例2.10 验证 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

$$\text{右} \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$$

蕴涵等值式

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

德摩根律

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$$

结合律

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r)$$

蕴涵等值式

$$\Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

蕴涵等值式

$$\text{注: } A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

例2.11 证明: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \neq (p \rightarrow q) \rightarrow r$

用等值演算不能直接证明两个公式不等值,证明两个公式不等值的基本思想是找到一个赋值使一个成真,另一个成假.

方法一 真值表法 (自己证)

方法二 观察赋值法. 容易看出000, 010等是左边的成真赋值, 是右边的成假赋值.

方法三 用等值演算先化简两个公式, 再观察

等值演算的用途二：判断公式类型。

例2.12 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

解 $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q)$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q)$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q)$ (交换律, 结合律)

$\Leftrightarrow p \wedge 0$ (矛盾律)

$\Leftrightarrow 0$ (零律)

由最后一步可知, 该式为矛盾式.

$$(2) (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

解 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \neg p) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad (\text{交换律})$$

$$\Leftrightarrow 1$$

由最后一步可知，该式为重言式。

问：最后一步为什么等值于1？

$$(3) ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$$

$$\text{解 } ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \wedge r \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 1 \wedge r \quad (\text{排中律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge r \quad (\text{同一律})$$

这不是矛盾式，也不是重言式，而是非重言式的可满足式。
如101是它的成真赋值，000是它的成假赋值。

总结：A为矛盾式当且仅当 $A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当 $A \Leftrightarrow 1$

说明：演算步骤不惟一，应尽量使演算短些

4.联结词全功能集

第二章 命题逻辑

2.4 联结词全功能集

定义2.11 设 p, q 是两个命题，复合命题“ p, q 之中恰有一个成立”称为 p 与 q 的**排斥或或异或**，记作 $p \vee q$ ， \vee 称作**排斥或或异或联结词**。 $p \vee q$ 为真当且仅当 p, q 中恰有一个为真。

例：马腾云现在在宿舍或在图书馆里

令 p : 马腾云在宿舍

q : 马腾云在图书馆里

该命题可表示为 $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

第二章 命题逻辑

定义2.12 设 p , q 是两个命题, 复合命题“ p 与 q 的否定”称为 p 与 q 的**与非式**, 记作 $p \uparrow q$ 。“ \uparrow ”称作**与非联结词**。 $p \uparrow q$ 为真当且仅当 p , q 不同时为真。

由定义可知: $p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$ 。

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

第二章 命题逻辑

定义2.13 设 p, q 是两个命题，复合命题“ p 或 q 的否定”称为 p 与 q 的**或非式**，记作 $p \downarrow q$ ， \downarrow 称作**或非联结词**。 $p \downarrow q$ 为真当且仅当 p, q 同时为假。

由定义可知： $p \downarrow q = \neg(p \vee q)$

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

第二章 命题逻辑

定义2.15 在一个联结词的集合中，如果一个联结词可由集合中的其他联结词定义，则称此联结词为**冗余的联结词**，否则称为**独立的联结词**。

前面给出的5个联结词组成的联结词集为
 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ，由于

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

所以 $\rightarrow, \leftrightarrow$ 都是**冗余的**，又 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 中，由于

$$\neg p \vee q \Leftrightarrow \neg \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

所以 \vee 可看成是**冗余的**，但在 $\{\neg, \wedge\}$ 中无冗余的联结词



第二章 命题逻辑

定义2.16 若任一真值函数都可以用仅含某一联结词集中联结词的命题公式表示，则称该联结词集为**全功能集**。若一个联结词集的全功能集中不含**冗余的**联结词，则称它为极小全功能集

例2.13 若已知 $\{\neg, \rightarrow\}$ 是全功能集，证明 $\{\neg, \vee\}$ 也是全功能集

证明 由于 $\{\neg, \rightarrow\}$ 是全功能集，因而任一真值函数均可由仅含 $\{\neg, \rightarrow\}$ 中的联结词的命题公式表示，而对于任意的命题形式 A, B ，有

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

因而任一真值函数均可由含 $\{\neg, \vee\}$ 中的联结词的命题公式表示，所以它是全功能集。

联结词的全功能集实例

$$(1) S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$$

$$(2) S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

$$(3) S_3 = \{\neg, \wedge\}$$

$$(4) S_4 = \{\neg, \vee\}$$

$$(5) S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$$

第二章 命题逻辑

定义2.1.7 在仅含联结词 \neg, \vee, \wedge 的命题公式 A 中, 将 \vee 换成 \wedge , \wedge 换成 \vee , 若 A 中含0或1, 就将0换成1, 1换成0, 所得命题公式称为 A 的**对偶式**, 记作 A^* 。

从定义不难看出, $(A^*)^* = A$

如:公式 $P \vee (\neg Q \wedge F)$ 的对偶公式为 $P \wedge (\neg Q \vee F)$

对偶式(dual): 一个集合关系式, 如果只含有 $\cap, \cup, \sim, \emptyset, E, =, \subseteq$, 那么, 同时把 \cup 与 \cap 互换, 把 \emptyset 与 E 互换, 把 \subseteq 与 \supseteq 互换, 得到的式子称为原式的对偶式。

对偶原理: 对偶式同真假. 或者说, 集合恒等式的对偶式还是恒等式。

第二章 命题逻辑

定理2.3 设A、B为两命题公式，若 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$
其中 A^* ， B^* 分别为A，B的对偶式。

该定理称为对偶原理

由对偶原理可知，若A为重言式，则 A^* 必为矛盾式，反之亦然

给定一个命题公式，判断它是重言式、矛盾式、还是可满足式，这类问题称为**判定问题**。

- 命题公式是千变万化的，这给研究命题演算带来困难。怎么办？
- 如果用计算机来实现命题演算，那么如何存储和表示？
- 如何方便的衡量不同命题公式的等价性？

5.析取范式与合取范式

规范，唯一

第二章 命题逻辑

2.5 析取范式与合取范式

—含 n 个命题变项的公式两种规范表示方法

定义2.18

文字：命题变项及其否定统称为文字。

如： p , $\neg q$

简单析取式：仅有有限个文字组成的析取式。

如： p , $\neg q$, $p \vee q$, $p \vee \neg q \vee r$

简单合取式：仅有有限个文字组成的合取式。

如： p , $\neg q$, $p \wedge q$, $p \wedge \neg q \wedge r$

命题公式是千变万化的，这给研究命题演算带来困难，这里我们研究如何由一个命题公式化归为一个标准形式的问题，这样命题演算的研究问题就归结为对标准形式的研究问题，这种标准形式就叫范式。

析取范式

它是这样一种标准形式，在此式内不出现联结词 \rightarrow 及 \leftrightarrow ，否定符号只出现在命题变元前。它是一个析取式，式中的每个析取项是个合取式，每个合取式中只包含命题变元或命题变元的否定。

例如 $\neg p \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$

此式即具有析取范式之形式

注意：一个公式的析取范式并不唯一，如 $p \vee (r \wedge \neg q)$ ，可以写成 $(p \wedge p) \vee (r \wedge \neg q)$

合取范式

它是这样一种标准形式，在此式内不出现联结词 \rightarrow 及 \leftrightarrow ，否定符号只出现在命题变元前。它是一个合取式，式中的每个合取项是个析取式，每个析取式中只包含命题变元或命题变元的否定。

例如 $\neg p \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee r)$

此式即具有合取范式之形式

注意：一个公式的合取范式并不唯一，

如 $p \wedge (r \vee \neg q)$

可以写成 $(p \vee p) \wedge (r \vee \neg q)$

第二章 命题逻辑

定义2.9

析取范式： 由有限个简单合取式构成的析取式。

如： $p \vee \neg q$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

合取范式： 由有限个简单析取式构成的合取式。

如： $p \wedge \neg q$, $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

范式： 析取范式与合取范式统称为范式。

第二章 命题逻辑

析取范式和合取范式有下列性质：

- (1) 一个析取范式是矛盾式 \Leftrightarrow 它的每个简单合取式都是矛盾式。**
- (2) 一个合取范式是重言式 \Leftrightarrow 它的每个简单析取式都是重言式。**

第二章 命题逻辑

定理2.4 (范式存在定理)

任一个命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式。

求范式的具体步骤：

(1) 消去对 $\{\neg, \wedge, \vee, \}$ 来说冗余的联结词，即 $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ 。利用下列等值式：

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

第二章 命题逻辑

(2) 否定词的消去或内移。（注：因为否定词只能跟在命题变元前）

利用下列等值式：

$$\neg \neg A \rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

(3) 利用分配律：

$$C \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow (C \wedge A) \vee (C \wedge B)$$

$$C \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow (C \vee A) \wedge (C \vee B)$$

- 问题：
 - 如何用程序实现**求范式**？ ？ ？

作业1--范式计算器（满分100分）

- 任意输入一个命题逻辑公式（最多三个命题变项），求得其析取范式或者合取范式。
- 输入：命题逻辑公式；
- 输出：范式。
- 要求：
- 有Windows界面，界面上可以选择不同的联结词；界面上可以输入三个命题变项。

作业1--范式计算器（满分100分）

- 评分：
- 算法和数据结构描述（满分40分）；
- 程序实现（满分60分）。
- 注：如果最多包括四个或以上命题变项，相应加分。

例2.14 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $A = (p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$

解 $(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \quad (\text{消去} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r \quad (\text{结合律})$$

注意：这既是 A 的析取范式（由3个简单合取式组成的析取式），又是 A 的合取范式（由一个简单析取式组成的合取式）

$$(2) B = (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$$

$$\text{解 } (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \rightarrow r \quad (\text{消去第一个} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\text{消去第二个} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \quad (\text{否定号内移——德摩根律})$$

这一步已为析取范式（两个简单合取式构成）

$$\text{继续: } (p \wedge q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad (\vee \text{对} \wedge \text{分配律})$$

这一步得到合取范式（由两个简单析取式构成）

第二章 命题逻辑

(3) 求 $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ 的析取范式。

解: $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg p) \vee ((p \vee q) \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$$

$$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

标准形式，唯一性

第二章 命题逻辑

定义2.20

在含有 n 个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第 i （ $1 \leq i \leq n$ ）个文字出现在左起第 i 位上，称这样的简单合取式（简单析取式）为
极小项（极大项）。

第二章 命题逻辑

说明:

n 个命题变项产生 2^n 个极小项和 2^n 个极大项

2^n 个极小项（极大项）均互不等值

用 m_i 表示第 i 个极小项，其中 i 是该极小项成真赋值的十进制表示. 用 M_i 表示第 i 个极大项，其中 i 是该极大项成假赋值的十进制表示, $m_i(M_i)$ 称为极小项(极大项)的名称.

m_i 与 M_i 的关系: $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \quad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$

由 p, q 两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

由 p, q, r 三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项

公式	成真 赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7

极大项

公式	成假 赋值	名称
$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

极小项与极大项关系

设 m_i 和 M_i 是命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 形成的极小项和极大项, 则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \quad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$

定义2.21

设由 n 个命题变项构成的析（合）取范式中所有的简单合（析）取式都是极小（大）项, 则称该析（合）取范式为主析（合）取范式。

定理 2.5 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式
和主合取范式, 并且是**唯一**的.

用等值演算法求公式的主范式的步骤:

- (1) 先求析取范式 (合取范式)
- (2) 将不是极小项 (极大项) 的简单合取式 (简单析取式) 化成与之等值的若干个极小项的析取 (极大项的合取), 需要利用同一律 (零律)、排中律 (矛盾律)、分配律、幂等律等.
- (3) 极小项 (极大项) 用名称 m_i (M_i) 表示, 并按角标从小到大顺序排序.

- 在实际问题求解时有什么用？？

例2.15 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

- (1) 若赵去, 钱也去;
- (2) 李、周两人中至少有一人去;
- (3) 钱、孙两人中有一人去且仅去一人;
- (4) 孙、李两人同去或同不去;
- (5) 若周去, 则赵、钱也去.

试用主析取范式法分析该公司如何选派他们出国?

解此类问题的步骤为:

- ① 将简单命题符号化
- ② 写出各复合命题
- ③ 写出由②中复合命题组成的合取式
- ④ 求③中所得公式的主析取范式

解 ① 设 p : 派赵去, q : 派钱去, r : 派孙去, s : 派李去, u : 派周去.

② (1) $(p \rightarrow q)$

(2) $(s \vee u)$

(3) $((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

(4) $((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

(5) $(u \rightarrow (p \wedge q))$

③ (1) ~ (5)构成的合取式为

$$A = (p \rightarrow q) \wedge (s \vee u) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \wedge (u \rightarrow (p \wedge q))$$

$$\textcircled{4} \quad A \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$$

结论：由④可知，A的成真赋值为00110与11001，因而派孙、李去（赵、钱、周不去）或派赵、钱、周去（孙、李不去）。

A的演算过程如下：

$$A \Leftrightarrow$$

$$(\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \quad (\text{交换律})$$

$$B_1 = (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \quad (\text{分配律})$$

$$B_2 = (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge u)) \quad (\text{分配律})$$

$$B_1 \wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u)$$

$$\vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge u)$$

$$\text{再令 } B_3 = ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$$

$$\text{得 } A \Leftrightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$$

注意：在以上演算中多次用矛盾律

要求：自己演算一遍

第二章 命题逻辑

例2.17 求 $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ 的主析取范式。

解法1:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

极小项：成真
赋值

所以： $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow m_2 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \Leftrightarrow \Sigma(2,3,5,7)$

第二章 命题逻辑

解法2: $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (析取范式)

$\Leftrightarrow ((p \wedge r) \wedge (q \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r))$
 $\vee ((q \wedge r) \wedge (p \vee \neg p))$

$\Leftrightarrow \dots$

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
 $\vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ (主析取范式)

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$

$\Leftrightarrow \Sigma(2,3,5,7)$

第二章 命题逻辑

例2.18 求 $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ 的主合取范式。

解法1:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

极大项：成假
赋值

所以： $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_4 \wedge M_6 \Leftrightarrow \Sigma(0,1,4,6)$

第二章 命题逻辑

解法2: $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \quad (\text{合取范式})$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \vee (r \wedge \neg r)) \wedge ((\neg p \vee r) \vee (q \wedge \neg q))$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)) \wedge ((\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r))$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \quad (\text{主合取范式})$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_4 \wedge M_6$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(0,1,4,6)$$

第二章 命题逻辑

例2.19 判断命题公式 $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$ 的类型

解: $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$

$$\Leftrightarrow \neg(p \vee (q \wedge r)) \vee (p \vee q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg(q \wedge r)) \vee p \vee q \vee r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee p \vee q \vee r$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \vee p \vee q \vee r$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

成真赋值: 000、001、010、011、100、101、110、111

该命题公式为**重言式**

提示:用真值表判断命题公式的类型是最常用的方法

第二章 命题逻辑

主析取范式的用途（主合取范式类似讨论）：

1、求公式的成真/成假赋值：

若公式A中含有 n 个命题变项，且A的主析取范式含 s 个极小项，则A有 s 个成真赋值，有 2^n-s 个成假赋值。

第二章 命题逻辑

2、判断公式的类型：

设公式A中含有n个命题变项，则：

- (1) A为重言式 \Leftrightarrow A的主析取范式含全部 2^n 个极小项。
- (2) A为矛盾式 \Leftrightarrow A的主析取范式不含任何极小项，即A的主析取范式为0。
- (3) A为可满足式 \Leftrightarrow A的主析取范式至少含一个极小项。

也就是说没有成真赋值

第二章 命题逻辑

3、判断两个命题是否等值：

设公式A、B中共含有n个命题变项，按n个命题变项求出A、B的主析取范式 A' 、 B' 。
若 $A'=B'$ ，则 $A \Leftrightarrow B$ ，否则A、B不等值。

例2.21 判断下列命题公式是否等值

(1) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ 与 $p \rightarrow (q \wedge r)$

(2) $p \rightarrow (q \wedge r)$ 与 $p \vee (q \rightarrow r)$

第二章 命题逻辑

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \wedge r)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

命题公式 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ 与 $p \rightarrow (q \wedge r)$ 等值

第二章 命题逻辑

p	q	r	$q \wedge r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$p \vee (q \rightarrow r)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

命题公式 $p \rightarrow (q \wedge r)$ 与 $p \vee (q \rightarrow r)$ 不等值

第二章 命题逻辑

重申：

$$A \Leftrightarrow B$$

当且仅当

A、B含有相同的真值表或A、B有相同的主析（合）取范式。

6. 推理理论

第二章 命题逻辑

2.6 推理理论

推理是从前提推出结论的思维过程，**前提**是指已知的命题公式，**结论**是从前提出发应用推理规则推出的命题公式，前提可多个，由前提 A_1, A_2, \dots, A_k 推出结论 B 的严格定义如下：

定义2.22 若 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$ 为重言式，则称 A_1, A_2, \dots, A_k 推结论 B 的结论正确， B 是 A_1, A_2, \dots, A_k 的逻辑结论或有效结论，称 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$ 为由前提 A_1, A_2, \dots, A_k 推结论 B 的推理的形式结构。

同用 “ $A \Leftrightarrow B$ ” 表示 “ $A \leftrightarrow B$ ” 是重言式, 类似用

“ $A \Rightarrow B$ ” 表示 “ $A \rightarrow B$ ” 是重言式,
由前提 A_1, A_2, \dots, A_k 推 B 的推理正确
也记 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \Rightarrow B$

对于任一组赋值, 前提和结论的取值有以下四种情况:

- ① $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 为 0, B 为 0。 ✓
- ② $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 为 0, B 为 1。 ✓
- ③ $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 为 1, B 为 0。 ✗
- ④ $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 为 1, B 为 1。 ✓

第二章 命题逻辑

于是，以后推理的形式就写作：

前提： $p, p \rightarrow q$

结论： q

推理的形式结构： $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

即只需证明蕴涵式 $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ 为重言式。

三种方法：

- 1、真值表法；
- 2、等值演算法；
- 3、主析取范式法。

第二章 命题逻辑

例2.23: 判断下列推理是否正确。

1. 今天杨尚树或去网吧或去教室。他没去教室，所以他去网吧了。

设 p : 杨尚树去网吧。 q : 杨尚树去教室。 则，

前提: $p \vee q, \neg q$

结论: p

推理的形式结构: $((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$

第二章 命题逻辑

解法1：真值表法

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$(p \vee q) \wedge \neg q$	$((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1

该命题公式为重言式，说明推理正确，所以杨尚树去网吧

第二章 命题逻辑

解法2：等值演算法：

$$((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)) \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg (p \wedge \neg q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q \vee p$$

$$\Leftrightarrow 1$$

所以，推理正确，即 $((p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow p$

第二章 命题逻辑

例2.24: 判断下列推理是否正确。

2、若a能被4整除，则天下雨。现天下雨。
所以a能被4整除。

设 p : a能被4整除。 q : 天下雨。则，

前提: $p \rightarrow q, q$

结论: p

推理的形式结构: $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$

答案: 此推理不正确。

第二章 命题逻辑

解：真值表法

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

经过长期的研究推理，人们发现一些重要的重言蕴涵式，我们将这些重言蕴涵式称为推理定律。

例2.25: 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号, 则明天是5号. 今天是1号.
所以明天是5号.

解 设 p : 今天是1号, q : 明天是5号.

证明的形式结构为: $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

证明 (用等值演算法)

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\ \Leftrightarrow & \neg p \vee \neg q \vee q \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

得证推理正确

(2) 若今天是1号, 则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设 p : 今天是1号, q : 明天是5号.

证明的形式结构为: $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$

证明 (用主析取范式法)

$$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

结果不含 m_1 , 故01是成假赋值, 所以推理不正确.

推理定律——重言蕴涵式

重要的推理定律

$$(1) A \Rightarrow (A \vee B)$$

$$(2) (A \wedge B) \Rightarrow A$$

$$(3) (A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

$$(4) (A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$(5) (A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$$

$$(6) (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$(7) (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

$$(8) (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

附加律

化简律

假言推理

拒取式

析取三段论

假言三段论

等价三段论

构造性二难

推理定律 (续)

$$(9) (A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \wedge (A \vee \neg A) \Rightarrow B$$

构造性二难 (特殊形式)

$$(10) (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$$

破坏性二难

说明:

A, B, C 为元语言符号

若某推理符合某条推理定律, 则它自然是正确的

$A \Leftrightarrow B$ 产生两条推理定律: $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$

- 本章的一个重点
- 也是专家系统的重要部分

推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$$

推理规则(续)

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A \vee B \quad \neg B}{\therefore A}$$

(10) 构造性二难推理规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad C \rightarrow D \quad A \vee C}{\therefore B \vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad C \rightarrow D \quad \neg B \vee \neg D}{\therefore \neg A \vee \neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{A \quad B}{\therefore A \wedge B}$$

构造证明——直接证明法

例2.27 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，
今天必备课. 我今天下午没备课. 所以，
明天不是星期一和星期三.

解 设 p : 明天是星期一， q : 明天是星期三，
 r : 我有课， s : 我备课

形式结构为

前提: $(p \vee q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s$

结论: $\neg p \wedge \neg q$

直接证明法 (续)

形式结构为

前提: $(p \vee q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s$

结论: $\neg p \wedge \neg q$

证明

① $r \rightarrow s$

前提引入

② $\neg s$

前提引入

③ $\neg r$

①②拒取式

④ $(p \vee q) \rightarrow r$

前提引入

⑤ $\neg(p \vee q)$

③④拒取式

⑥ $\neg p \wedge \neg q$

⑤置换

2.如果今天是星期六，我们就要到西湖或大清谷去玩。如果西湖游人太多，我们就不到西湖去玩。今天是星期六。西湖游人太多。所以我们到大清谷玩。

解：首先将命题符号化：

p: 今天是星期六。

q: 我们到西湖去玩。

r: 我们到大清谷去玩。

s: 西湖游人多。

前提： $p \rightarrow (q \vee r)$, $s \rightarrow \neg q$, p , s

结论： r

证明： ① $s \rightarrow \neg q$

前提引入

② s

前提引入

③ $\neg q$

① ②假言推理 $((A \rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$

④ p

前提引入

⑤ $p \rightarrow (q \vee r)$

前提引入

⑥ $q \vee r$

④⑤假言推理

⑦ r

③⑥析取三段论 $((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$

3. 张三说李四在说慌，李四说王五在说慌，王五说张三、李四都在说慌。问张三、李四、王五3人，到底谁说真话，谁说假话。

解：首先将命题符号化：

p : 张三说真话。 q : 李四说真话。 r : 王五说真话。

由条件可知，推理的前提为：

$$p \rightarrow \neg q, \quad \neg p \rightarrow q, \quad q \rightarrow \neg r, \quad \neg q \rightarrow r$$

$$r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q), \quad \neg r \rightarrow (p \vee q)$$

证明: ① $p \rightarrow \neg q$
 ② $\neg q \rightarrow r$
 ③ $p \rightarrow r$
 ④ $r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
 ⑤ $p \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
 ⑥ $\neg p \vee (\neg p \wedge \neg q)$
 ⑦ $\neg p$
 ⑧ $\neg p \rightarrow q$
 ⑨ q
 ⑩ $q \rightarrow \neg r$
 (11) $\neg r$
 (12) $\neg p \wedge q \wedge \neg r$

前提引入

前提引入

① ②假言三段论

前提引入

③ ④假言三段论

⑤蕴涵等值 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

⑥吸收率 $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

前提引入

⑦ ⑧假言推理

前提引入

⑨ ⑩假言推理

⑦ ⑨ (11)合取引入规则 p_{23}

因此由上述推理可知: 张三说假话, 王五说假话,
 只有李四说真话。

两种特殊的证明方法——1、附加前提证明法

适用于此类蕴涵式的证明

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (*)$$

欲证明(*)式，只需证明

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B$$

即可，因为(*)式

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee (A \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_k) \vee (\neg A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_k \vee \neg A \vee B$$

$$\Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_k \vee \neg A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B$$

$$\text{注: } A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

由附加前提证明法知 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B)$
可归结为证明 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B$
即 $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (\neg s \vee p) \wedge q) \rightarrow (s \rightarrow r)$ 所以 s 变为前提

例2.26：用附加前提证明法证明下面推理

前提： $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $\neg s \vee p$, q

结论： $s \rightarrow r$

证明： ① $\neg s \vee p$

② s

③ p

④ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

⑤ $q \rightarrow r$

⑥ q

⑦ r

前提引入

附加前提引入

① ②析取三段论

$A \vee B, \neg B \Rightarrow A$

前提引入

③④ 假言推理

前提引入

⑤⑥假言推理

第二章 命题逻辑

两种特殊的证明方法——2、归谬法

适用于此类蕴涵式的证明

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B \quad (*)$$

欲证明(*)式，只需将 $\neg B$ 作为前提能推出矛盾来即可。

因为：

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B \\ &\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B) \end{aligned}$$

若 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B)$ 为矛盾式，则

$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$ 为重言式，即

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \Rightarrow B$$

第二章 命题逻辑

例2.27: 构造下面的推理证明

前提: $p \rightarrow \neg q$, $\neg r \vee q$, $r \wedge \neg s$

结论: $\neg p$

证明:	① p	结论否定引入
	② $p \rightarrow \neg q$	前提引入
	③ $\neg q$	① ②假言推理 $((A \rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$
	④ $\neg r \vee q$	前提引入
	⑤ $\neg r$	③ ④析取三段论 $((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$
	⑥ $r \wedge \neg s$	前提引入
	⑦ r	⑥化简规则 $(A \wedge B) \Rightarrow A$
	⑧ $r \wedge \neg r$	⑤ ⑦合取

本章总结

数理逻辑是用数学方法研究逻辑的学科。它的核心内容为命题逻辑和谓词逻辑。本章是命题逻辑的基础知识，主要涉及命题逻辑的基本结构以及自然语言的形式化方法。

本章中通过命题概念引出简单命题，再通过5个常用的命题联结词构成新的复合命题，从而构成命题逻辑的理论基础。

本章总结

由5个常用的命题联结词所定义的运算是数理逻辑中最基本最常用的逻辑运算。本章详细介绍了这5个命题联结词的定义与真值表，并举例说明了它们的使用方法。其中否定词属一元联结词，其它几个均为二元联结词。联结词是由已有命题定义新命题的基本方法，是命题逻辑中最基本的内容之一。

命题逻辑中的许多问题都可以化为计算复合命题的真假值问题，因而真值表方法是命题逻辑中一个极为有力的工具。由命题公式列写真值表以及由真值表列写命题公式，都是学习命题逻辑需要熟练掌握的基本功。

联结词 \wedge 、 \vee 、同构成计算机的与门、或门和非门电路是相对应的。

自然语句的形式化是研究命题逻辑的一个基本出发点和归宿。本章在引入命题联接词后，对自然语句的形式化方法进行了介绍，不论是简单自然语句还是较复杂的自然语句，都需要注意自然语言与命题逻辑符号表示的特点与差别。

习题作业（第一次）

- 教材
 - 《离散数学（第2版）》，屈婉玲等，清华大学出版社
- 作业
 - 1.13, 1.14, 1.15
 - 2.1, 2.5, 2.18, 2.19,
 - 2.22, 2.26, 2.33, 2.36
- 提交时间
 - 下次课堂上 (10.9)