# 数学分析(下)期中考试试题

班级 ______ 学号 ________ 姓名 _______ 日期：2005.4.28

| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 加选 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**一、填空题（每小题5分，共20分）**

1．求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=$ ______

2．设 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其以2$\pi$为周期的Fourier级数在点 $x=\pi$ 处收敛于______________

3．$y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 ______________

4．设 $f(x)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则此函数在 $(1,1,1)$ 的梯度为 __________________________

**二、单项选择（每小题5分，共20分）**

1．对二元函数 $f(x,y)$ 的如下四个命题：

1) $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 连续

2) $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数连续

3) $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 可微

4) $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数存在

则下列逻辑推理关系正确的是：　　　　【　　】

A．$3)\Rightarrow 2)\Rightarrow 1)$　　B．$2)\Rightarrow 3)\Rightarrow 1)$

C．$3)\Rightarrow 4)\Rightarrow 1)$　　D．$3)\Rightarrow 1)\Rightarrow 4)$

2．设线性无关的函数 $y_i(x)$，$i=1,2,3$ 都是微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解，则方程的通解为　　【　　】

A．$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+c_3y_3(x)$　　B．$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+(y_2(x)-y_3(x))$

C．$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+(1-c_1-c_2)y_3(x)$　　D．$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_3(x)$

3. 已知反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$ 收敛，则 $m$ 的取值范围是 【　　】

A. $1\le m\le 2$　　B. $2<m\le 3$

C. $0<m<2$　　D. $1<m<3$

4. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y),\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在但是不相等，则 【　　】

A. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 一定不存在　　B. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 一定存在

C. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在性无法判断　　D. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=0$

## 三、计算题（本题30分）

(1) 将函数 $f(x)=x+2$ 在 $[2,6]$ 上展为正弦级数.

(2) 求下列常微分方程的通解： $y''+3y'+2y=3e^{-x}$

(3) 设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 $f(u,v),g(t)$ 有连续二阶导数或偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

## 四、问题分析（15分）

设函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
讨论此函数在原点的连续性、偏导数的存在性、可微性。

## 五、证明题（15分）

设 $E\subset R^n, f:E\to R$， $f$ 在E上一致连续，证明：

若 $\{P_k\}\subset R^n$ 是柯西序列，则 $\{f(P_k)\}\subset f(E)$ 也是一个柯西序列。

## 六、加选题（10分）

设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，函数序列 $\{\phi_k(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且

$c\le\phi_k(x)\le d,k=1,2,3,\ldots.$，试证：$\{F_k(x)\}=\{f(x,\phi_k(x))\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。