数字信号处理

——第4讲

数字信号的分析方法

❖信号分类

- 周期信号与非周期信号
- 功率信号与能量信号
- 上述信号的数学描述（**CT/DT**）

数字信号的分析方法

❖分析方法

- 时域分析（以前章节）
- 频域分析
- 复频域分析（以后章节）

数字信号的分析方法

Baron Jean Baptiste Joseph Fourier，男爵，法国数学家、物理学家，**1768**年**3**月**21**日生于欧塞尔，**1830**年**5**月**16**日卒于巴黎。

1817年当选为法国科学院院士，**1822**任法兰西学院终身秘书和理工科大校务委员会主席。

连续时间信号分析

❖连续时间周期信号

- **CTFS的定义**
- **CTFS与ICTFS**
- **CTFS的含义：合成/分析**

Fourier Synthesis Equation

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$$

Fourier Analysis Equation

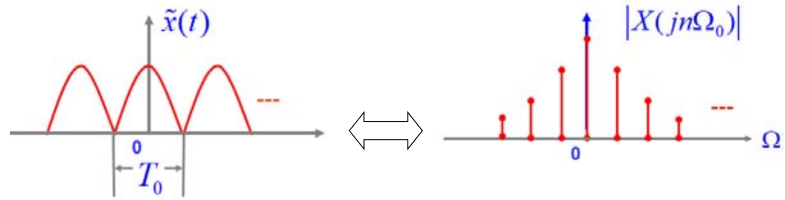
$$\xleftrightarrow{\text{CTFS}} \quad c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt.$$

连续时间傅里叶级数

❖**CTFS公式及实例**

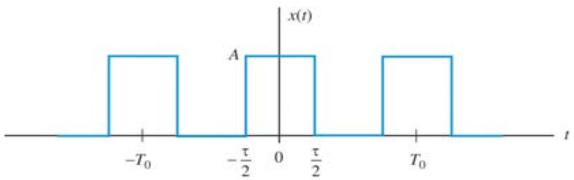
$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)\cdot e^{jk\Omega_0 t} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



连续时间傅里叶级数

❖矩形脉冲实例



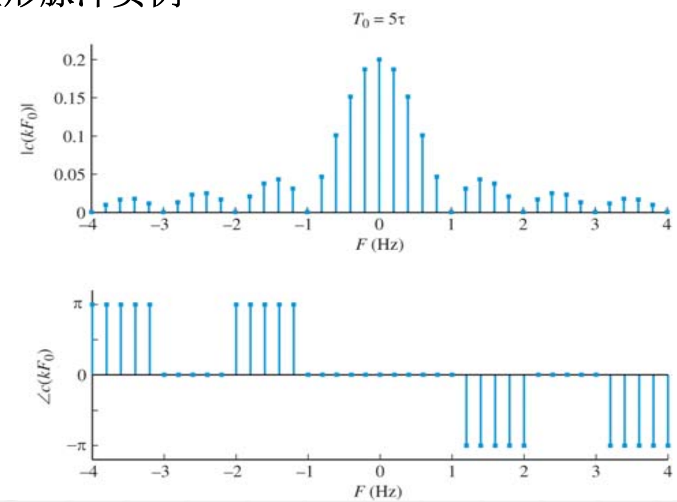
$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi kF_0 t} dt = \frac{A}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\pi kF_0 t}}{-j2\pi kF_0}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{A}{\pi F_0 k T_0}\,\frac{e^{j\pi kF_0\tau} - e^{-j\pi kF_0\tau}}{2j}$$

$$= \frac{A\tau}{T_0}\,\frac{\sin \pi kF_0\tau}{\pi kF_0\tau}. \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

连续时间傅里叶级数

❖矩形脉冲实例



连续时间傅里叶变换

❖ 连续时间非周期信号

- CTFT的定义
- CTFT与ICTFT
- CTFT的含义：合成/分析

Fourier Synthesis Equation　　　Fourier Analysis Equation

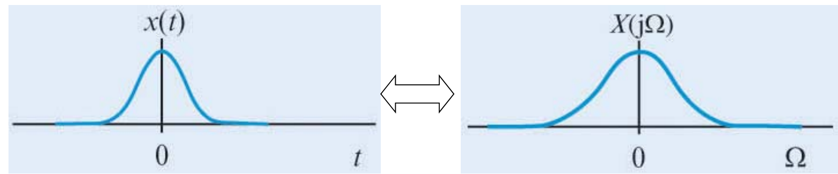
$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}2\pi F)\,e^{\mathrm{j}2\pi Ft}\mathrm{d}F \xleftrightarrow{\text{CTFT}} X(\mathrm{j}2\pi F)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}2\pi Ft}\mathrm{d}t,$$

连续时间傅里叶变换

❖ CTFT公式及实例：

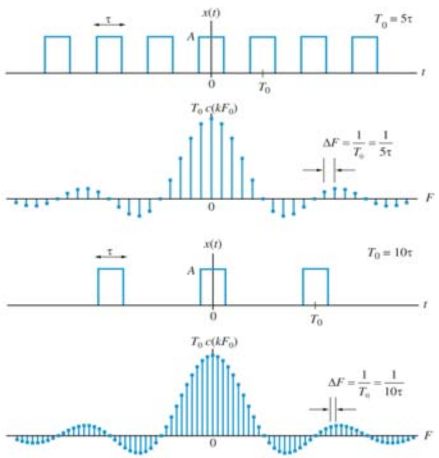
$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}dt$$

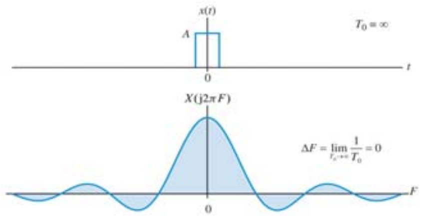
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)\cdot e^{\mathrm{j}\Omega t}d\Omega$$



连续时间傅里叶变换

❖ 从CTFS到CTFT





- If $x(t)$ is T_0-periodic we need $\Omega=k\frac{2\pi}{T_0}$ (harmonics) in $s(t)=e^{\mathrm{j}\Omega t}$
- If $x(t)$ is aperiodic we need all frequencies $\Omega \Rightarrow$

$$T_0c_k=\int_0^{T_0}x(t)e^{-\mathrm{j}k\Omega_0t}dt \quad\Rightarrow\quad X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{\mathrm{j}k\Omega_0t} \quad\Rightarrow\quad x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}X(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{d}\Omega\right]e^{\mathrm{j}\Omega t}$$

离散时间傅里叶级数

❖ 离散时间傅里叶级数

- DTFS的定义
- DTFS的条件
- DTFS与IDTFS

Fourier Synthesis Equation　　　Fourier Analysis Equation

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}c_ke^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \xleftrightarrow{\text{DTFS}} c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}.$$

离散时间傅里叶级数

❖DTFS:

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j\omega_0 kn},\quad \omega_0=\Omega_0 T=\frac{2\pi}{NT}T=\frac{2\pi}{N}$$

证明:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}a_k\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}=\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}}=\frac{1-e^{j2\pi(k-m)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}}=\begin{cases}N & k=m\\0 & k\neq m\end{cases}$$

离散时间傅里叶级数

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}=\begin{cases}a_k N & k=m\\0 & k\neq m\end{cases}\qquad a_k=a_{k+lN}$$

$$\tilde{X}(k)=Na_k=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\qquad -\infty<k<\infty$$

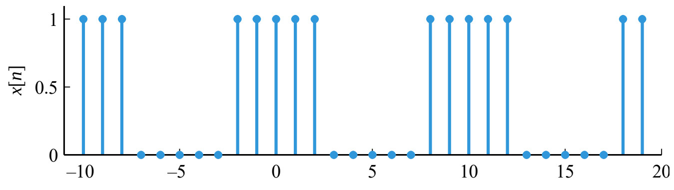
❖DTFS-IDTFS:

$$\tilde{X}(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\qquad -\infty<k<\infty$$

$$\tilde{x}(n)=\mathrm{IDFS}[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\qquad -\infty<n<\infty$$

离散时间傅里叶级数

❖矩形脉冲串实例

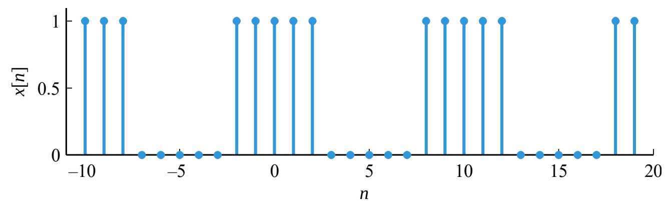


$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-L}^{L}x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kL}\sum_{n=0}^{2L}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

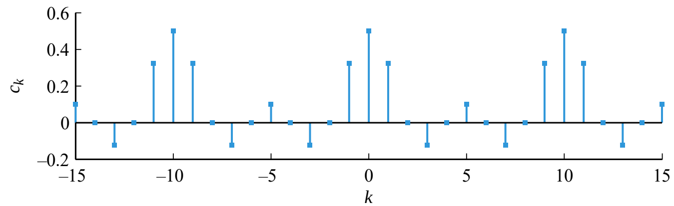
$$=\begin{cases}\dfrac{2L+1}{N}, & k=0,\pm N,\pm 2N,\ldots\\[2ex] \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin\left[\frac{\pi}{N}k(2L+1)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

离散时间傅里叶级数

❖矩形脉冲串实例



(a)



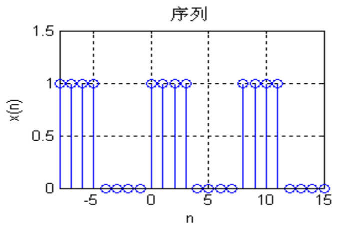
(b)

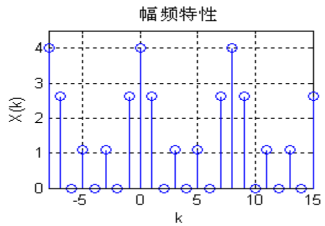
离散时间傅里叶级数

❖ **DTFS实例：将$R_4(n)$进行N=8的周期延拓**

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$$

$$=\frac{1-e^{-j\frac{4\pi}{4}k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}=\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}=\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\left(e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{8}k}\left(e^{j\frac{\pi}{8}k}-e^{-j\frac{\pi}{8}k}\right)}=e^{-j\frac{3\pi}{8}k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}$$





离散时间傅里叶变换

❖ 离散时间傅里叶变换

➢ **DTFT的定义：**

➢ **DTFT的条件**

➢ **DTFT与DTIFT**

Fourier Synthesis Equation **Fourier Analysis Equation**

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}.$$

离散时间傅里叶变换

❖ **DTFT of $R_N[n]$**

$$R_N[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$R(e^{j\omega})=\text{FT}(R_N[n])=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}$$

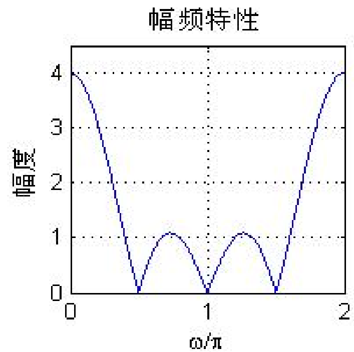
$$=\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2}-e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})}$$

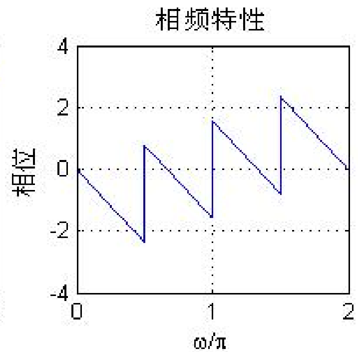
$$=e^{-j\omega(N-1)/2}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

离散时间傅里叶变换

➢ 幅度和相位的对称性

$$R(e^{j\omega})=e^{-j\omega(N-1)/2}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}=|R(e^{j\omega})|e^{-j\arg[R(e^{j\omega})]}$$





第4次作业

❖补充作业：

论述连续时间傅里叶变换（**CTFS**）、连续时间傅里叶变换（**CTFT**）、离散时间傅立叶级数（**DTFS**）、离散时间傅里叶变换（**DTFT**）的适用范围和频谱特点（以不少于**800**字的小报告形式提交）。

注：习惯上将离散时间傅立叶级数（**DTFS**）称为离散傅里叶级数（**DFS**）。