一、填空题（每小题 4 分, 共 20 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n-1})=$ ____________；

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}=$ __________________ ；

3、$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}=$ __________________ ；

4、设 $y=x^{\cos x}$， $x>0$， 则 $y'=$ __________________；

5、当 $x\to 0$ 时，αx^{β} 与 $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+2x}$ 是等价无穷小, 则 $\alpha=$______, $\beta=$_____.

二、选择题（每小题 4 分, 共 20 分，只有一个正确答案）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$, 则能使得 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续的最小正整数 n 为 【　　】

（A）1 ；　　（B）2 ；　　（C） 3 ；　　（D）4

2. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，则下列结论**不正确**的是 【　　】

（A）若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上导数存在且有界，则 $f(x)$ 必在 (a,b) 上一致连续；

（B） $f(x)$ 在 (a,b) 上必能取到最大值和最小值；

（C）若有 $x_1,x_2\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)f(x_2)<0$, 则必存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$；

（D）若 $f(a+), f(b-)$ 存在， 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

3. 下列说法中正确的是 【　　】

（A）若 $f(x)$ 在 x_0 取得极值， 则必有 $f'(x_0)=0$；

（B）若可导函数 $f(x)$ 在 (a,b) 单调， 则 $f'(x)$ 在 (a,b) 上不可能为零；

（C）函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导， 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$， 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$；

（D）若对任何介于 $f(a), f(b)$ 之间的数 c, 都存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

4. 关于“有界数列$\{a_n\}$不收敛到a”的**错误**描述是 【　　】

（A）$\exists\varepsilon_0>0$， 对任意大的正整数N，总存在正整数$m_N>N$，使得 $|x_{m_N}-a|\geq 2\varepsilon_0$；

（B）$\exists\varepsilon_0>0$，无论正整数N多么大，总存在正整数$n_N>N$，使得 $|x_{n_N}-a|\geq\dfrac{\varepsilon_0}{2}$；

（C）$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N\in\mathrm{N}^*$，对于所有满足$n>N$的$n\in\mathrm{N}^*$，都有$|x_n-a|\geq\varepsilon_0$；

（D）$\exists\varepsilon_0>0$，存在一个子列$\{x_{n_k}\}$收敛到b，满足$|b-a|\geq\varepsilon_0$.

5．下列命题中正确的是 【　　】

（A）如果数列$\{a_n\}$是一个有界数列，则它有且仅有一个收敛子列；

（B）如果单调数列$\{a_n\}$有一个收敛子列，则该数列必收敛；

（C）设β是数列$\{a_n\}$的上确界，则β是数列$\{a_n\}$的极限；

（D）对数列$\{a_n\}$，若$\forall\varepsilon>0,\exists N$和$p$，对$\forall n>N$，都有$\left|a_n-a_{n+p}\right|<\varepsilon$，则数列收敛.

三、（每题５分，共 10 分）

1、求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-1)(\arctan\dfrac{1}{n-1}-\arctan\dfrac{1}{n+1})$. （提示：利用 Lagrange 中值定理）

解：

2、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}$

解：

四、（10 分） 设$x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$，求数列$x_n$的极限。

解：

五、（10 分） 设 $f(x)$在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证：对于任意正整数 n，必存在

$x_n \in [0,1]$，使 $f(x_n)=f(x_n+\frac{1}{n})$.

证明:

六、（10 分） 证明不等式 $\ln(1+x) \le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}, (x \ge 0)$，当 $x=0$ 时等号成立.

证明：

七、（10 分）（1） 写出函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的严格数学定义；

（2） 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$, 证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内一致连续.

解：

八、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(a)>0,\ f'(a)<0,$ 而当 $x>a$ 时，$f''(x)\le 0,$ 证明在 $(a,+\infty)$ 内，方程 $f(x)=0$ **有且仅有**一个实根.

证明:

一、填空题（每小题 4 分, 共 20 分）

1、$\frac{1}{2}$ ； 2、0 ； 3、 $e^{-\frac{1}{2}}$ ； 4、$x^{\cos x}(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x)$； 5、$\alpha=\frac{1}{3}$， $\beta=1$.

二、选择题(每小题 4 分, 共 20 分)

1．C； 2．B； 3．C； 4. C； 5．B

三、(本题共 10 分)

1、解：由 Lagrange 中值定理，$\dfrac{(\arctan\frac{1}{n-1}-\arctan\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}}=\dfrac{1}{1+\xi^2}$，

其中$\xi\in(\frac{1}{n+1}，\frac{1}{n-1})$. ————————3 分

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-1)(\arctan\frac{1}{n-1}-\arctan\frac{1}{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}2\dfrac{(\arctan\frac{1}{n-1}-\arctan\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}2\dfrac{1}{1+\xi^2}=2$． (因为当$n\to\infty$时$\dfrac{1}{1+\xi^2}\to1$) —————————5 分

说明：如果只是准确的写出了 Lagrange 中值定理，可以给 1 分.

2、求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2 x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$ ————————5 分

四、（10 分）设 $x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$，求数列 x_n 的极限。

解： 首先有 $0<x_1<3$，设 $0<x_k<3$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{3+2x_k}<3$，由数学归纳法可知对任意的 n 有，$0<x_n<3$.　　　　　　　　　　　　　　　——————4 分

由 $x_{n+1}^2-x_n^2=3+2x_n-x_n^2=(3-x_n)(1+x_n)>0$，可知数列是单调递增的，

由单调有界定理直数列极限存在.　　　　　　　　　　　　　　　——————8 分

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在 $x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$，两端取极限得，$a=\sqrt{3+2a}$，解得 $a=3$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.　　　　　　　　　　　　　　　——————10 分

说明：如果没有判断出极限存在，直接就在两边求极限，至多给 1 分.

五、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证：对于任意正整数 n，必存在 $x_n\in[0,1]$，使 $f(x_n)=f(x_n+\frac{1}{n})$.

证明：令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$，　　$x\in[0,1-\frac{1}{n}]$.

则存在 $x_n\in[0,1]$，使 $f(x_n)=f(x_n+\frac{1}{n})$ 等价于证存在 $x\in[0,1-\frac{1}{n}]$，使 $F(x)=0$.

——————4 分

假设不存在这样的 x，则 $F(x)$ 在 $x\in[0,1-\frac{1}{n}]$ 上不变号，不妨设其恒大于零，则

$F(0)>0$，$F(\frac{1}{n})>0,\cdots,F(1)>0$，　　　　　　　　　　　　　　　—————8 分

等价于， $f(0)>f(\frac{1}{n})$，$f(\frac{1}{n})>f(\frac{2}{n}),\cdots,f(\frac{n-1}{n})>f(1)$，由此可得 $f(0)>f(1)$，与 $f(0)=f(1)$ 矛盾，所以必存在 $x_n\in[0,1]$，使 $f(x_n)=f(x_n+\frac{1}{n})$。

——————10 分

六、(10 分) 证明不等式 $\ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, (x \ge 0)$，当 $x = 0$ 时等号成立.

证明：令 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, (x \ge 0)$，显然 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且可导. ——2 分

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 ,$$ ——————5 分

$$= \frac{-(x+x^3)}{1+x} < 0$$ ----------7 分

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递减，而 $f(0) = 0$，

故当 $x > 0$ 时，有 $f(x) < f(0) = 0$。

所以 $\ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, (x \ge 0)$，当 $x = 0$ 时等号成立. ——— 10 分

八、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(a) > 0,\ f'(a) < 0,$ 而当 $x > a$ 时，$f''(x) \le 0,$ 证明在 $(a,+\infty)$ 内，方程 $f(x) = 0$ **有且仅有**一个实根.

证明: 由于当 $x > a$ 时，$f''(x) \le 0,$ 因此 $f'(x)$ 单调减，从而 $f'(x) \le f'(a) < 0$，于是又有 $f(x)$ 严格单调减. 再由 $f(a) > 0$ 知，$f(x)$ 最多只有一个实根. ———— 4 分

下面证明 $f(x) = 0$ 必有一实根.

当 $x > a$ 时，$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \le f'(a)(x-a)$，即

$$f(x) \le f(a) + f'(a)(x-a) ,$$

当 $x \to +\infty$ 时，上式右端趋于 $-\infty$，因此当 x 充分大时，$f(x) < 0$，于是存在 $b > a$，使得 $f(b) < 0$， ————8 分

由介值定理，存在 $\eta (a < \eta < b)$，使得 $f(\eta) = 0$.

综上所述，知 $f(x) = 0$ 在 $(a,+\infty)$ 有而且只有一个实根. ————10 分

七、（10 分）(1)写出函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的严格数学定义；

(2)设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$，证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内一致连续.

解： (1) 如果对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in I,$ 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。 ————3 分

(2) $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$，知 $\exists X>0,$ 当 $x\in[X,+\infty)$ 时有 $|f(x)-x|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，

————5 分

所以 $\exists\delta_1=\dfrac{\varepsilon}{3}$，对 $\forall x_1,x_2\in[X,+\infty)$，当 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时，有

$$\begin{aligned}&|f(x_1)-f(x_2)|=|(f(x_1)-x_1)-(f(x_2)-x_2)-(x_1-x_2)|\\&<|f(x_1)-x_1|-|f(x_2)-x_2|-|x_1-x_2|<\varepsilon\end{aligned}$$

------ 7 分

而区间 $[0,X+1]$ 为有限闭区间，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,X+1]$ 上一致连续。

所以对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_2$，当 $x_1,x_2\in[0,X+1]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta_2$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，

————9 分

综上可知，对上述 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，对任意 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内一致连续。

———— 10 分

法 2：令 $g(x)=f(x)-x$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，证 $g(x)$ 一致连续，（过程略） ——6 分

再由 x 在 $[0,+\infty)$ 内一致连续， —— 8 分

所以 $f(x)=g(x)+x$ 在 $[0,+\infty)$ 内一致连续。 ——10 分