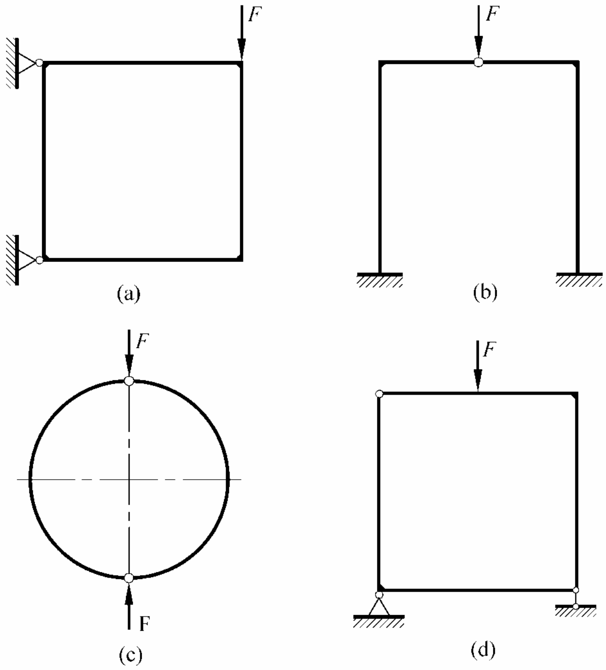
# 第十四章　静不定问题分析



（ 也可通过左侧题号书签直接查找题目与解）

**14-1** 试判断图示各结构的静不定度。




题 14-1 图

解：(a) 在平面受力时，一个封闭框有三个多余约束，此问题又多一个外约束，故为四度静不定。

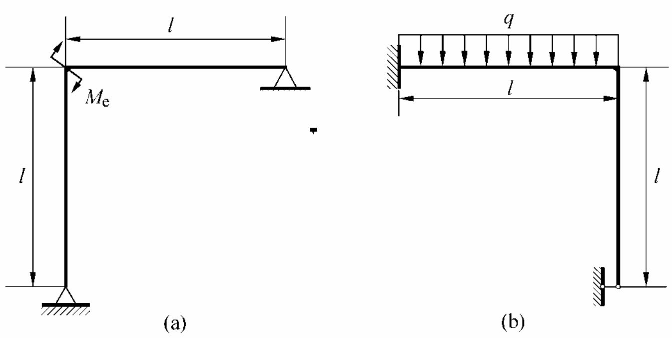
(b) 若无中间铰，两边的刚架分开，二者均为静定刚架。安此中间铰，使相连处在 $x$、$y$ 两个方向的相对位移均受到约束，故为二度静不定。

另一种分析方法是搭结构法，以左边的静定刚架为基础，搭上右边的刚架需要加三个约束，中间铰已提供了两个，右下端只需再加一个约束就可以了，可现在加了三个约束（固定端），故为二度静不定。

(c) 在平面受力时，一个圆环有三个多余约束，安一个中间铰，减少一个约束，现安有两个中间铰，故为一度静不定。

(d) 在平面受力时，一个封闭框有三个多余约束，此框在左上角和右下角各有一个中间铰，减去两个约束，故为一度静不定。

## 14-2 图示各刚架，弯曲刚度 $EI$ 均为常数。试求支反力，并画弯矩图。




题 14-2 图

(a) 解：法 1，常规解法

此为一度静不定问题。

如图 14-2a(1)所示，解除 $B$ 处水平约束，代以多余反力 $F_{Bx}$ 。

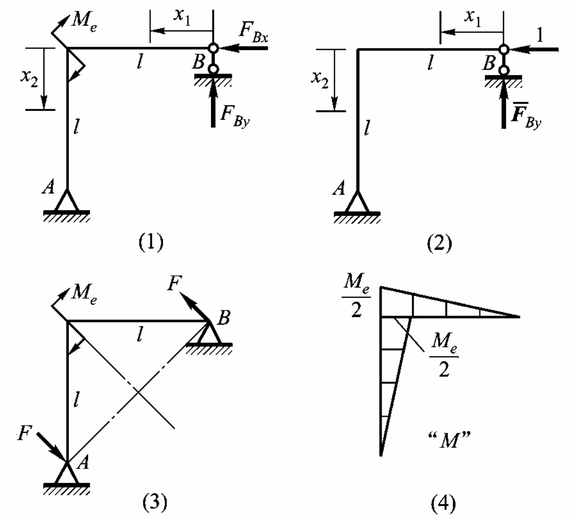



**图 14-2a**

由 $\sum M_A = 0$，得

$$F_{By} = \frac{M_e}{l} - F_{Bx}$$

据图（1）与图（2），列弯矩方程如下：

$$M(x_1) = \left(\frac{M_e}{l} - F_{Bx}\right)x_1, \qquad M(x_2) = F_{Bx}x_2 - F_{Bx}l$$

$$\overline{M}(x_1) = -x_1, \qquad \overline{M}(x_2) = x_2 - l$$

将其代入

$$\Delta_{Bx} = \frac{1}{EI}\int_0^l \overline{M}(x_1)M(x_1)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{EI}\int_0^l \overline{M}(x_2)M(x_2)\mathrm{d}x_2$$

并利用协调条件 $\Delta_{Bx} = 0$，可得

$$F_{Bx} = \frac{M_e}{2l} \quad (\leftarrow)$$

依据平衡条件，进而可得

$$F_{By} = \frac{M_e}{2l}\ (\uparrow),\ F_{Ax} = \frac{M_e}{2l}\ (\rightarrow),\ F_{Ay} = \frac{M_e}{2l}\ (\downarrow),$$

法 2，利用反对称性求解

见图（3），可直接得到合支反力 $F$，

$$F=\frac{M_{\mathrm{e}}}{\sqrt{2}l}$$

将其分解，所得结果与法 1 完全相同。

弯矩图如图（4）所示。

（b）解：此为一度静不定问题。

载荷状态及单位状态如图 14-2b 所示。

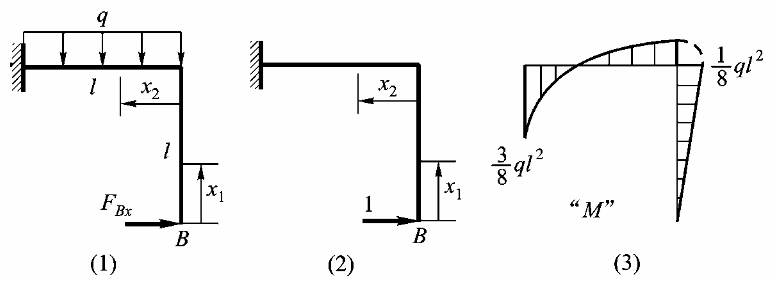



图 14-2b

弯矩方程为

$$M(x_1)=F_{Bx}x_1,\qquad M(x_2)=F_{Bx}l-\frac{q}{2}x_2^2$$

$$\overline{M}(x_1)=x_1,\qquad \overline{M}(x_2)=l$$

将其代入

$$\varDelta_{Bx}=\frac{1}{EI}\int_0^l\overline{M}(x_1)M(x_1)\mathrm{d}x_1+\frac{1}{EI}\int_0^l\overline{M}(x_2)M(x_2)\mathrm{d}x_2$$

积分后，得

$$\varDelta_{Bx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{4}{3}F_{Bx}l^3-\frac{ql^4}{6}\right)$$

代入协调条件

$$\varDelta_{Bx}=0$$

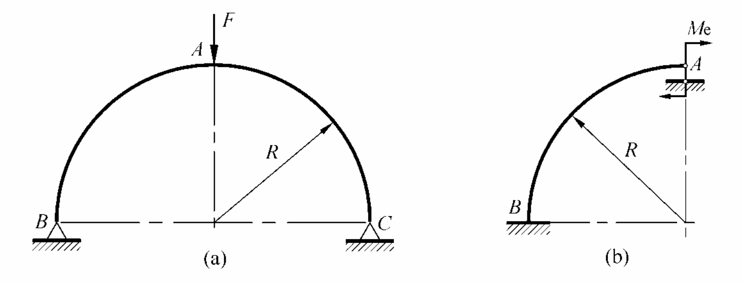
得

$$F_{Bx}=\frac{ql}{8}$$

弯矩图如图（3）所示。

**14-3** 图示圆弧形小曲率杆，弯曲刚度 $EI$ 为常数。试求支反力。对于题(b)，并计算截面

$A$ 的水平位移。




**题 14-3 图**

（a）解：此为一度静不定问题。

由对称性可得

$$F_{By}=F_{Cy}=\frac{F}{2}\ （\uparrow）$$

又由于对称性（$\theta_A=0$），求 $\varDelta_{Cx}$ 的载荷状态及单位状态可示如图 14-3a。

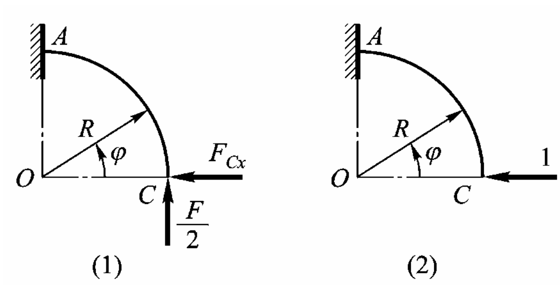



**图 14-3a**

弯矩方程为

$$M(\varphi)=F_{Cx}R\sin\varphi-\frac{F}{2}R(1-\cos\varphi)$$

$$\overline{M}(\varphi)=R\sin\varphi$$

将其代入

$$\varDelta_{Cx}=\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overline{M}(\varphi)M(\varphi)R\mathrm{d}\varphi$$

积分后，得

$$\varDelta_{Cx}=\frac{R^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4}F_{Cx}-\frac{F}{4}\right)$$

代入协调条件

$$\varDelta_{Cx}=0$$

得

$$F_{Cx} = \frac{F}{\pi} \quad (\leftarrow)$$

进而求得

$$F_{Bx} = \frac{F}{\pi} \quad (\rightarrow)$$

（**b**）**解：此为一度静不定问题。**

求 $\Delta_{Ay}$ 的载荷状态及单位状态可示如图 **14-3b**。

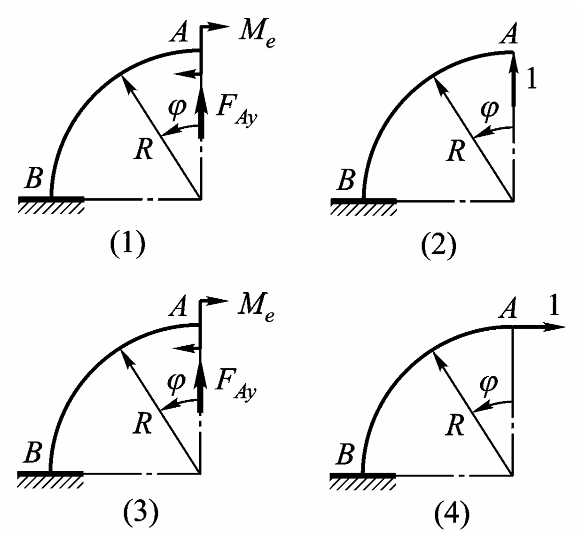



**图 14-3b**

弯矩方程为

$$M(\varphi) = M_{\mathrm{e}} - F_{Ay} R \sin\varphi$$

$$\overline{M}(\varphi) = -R\sin\varphi$$

将其代入

$$\Delta_{Ay} = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{M}(\varphi) M(\varphi) R \mathrm{d}\varphi$$

积分后，得

$$\Delta_{Ay} = \frac{R^2}{EI}\left(\frac{\pi}{4} F_{Ay} R - M_{\mathrm{e}}\right)$$

代入协调条件

$$\Delta_{Ay} = 0$$

得

$$F_{Ay}=\frac{4M_{\mathrm{e}}}{\pi R}\quad(\uparrow)$$

进而求得

$$F_{Bx}=0\,,\qquad F_{By}=\frac{4M_{\mathrm{e}}}{\pi R}\quad(\downarrow)\,,\qquad M_B=\frac{4-\pi}{\pi}M_{\mathrm{e}}\quad(\circlearrowright)$$

求 $\varDelta_{Ax}$ 的载荷状态及单位状态示如图（3）和（4）。

弯矩方程为

$$M(\varphi)=M_{\mathrm{e}}-\frac{4M_{\mathrm{e}}}{\pi}\sin\varphi$$

$$\overline{M}(\varphi)=R(1-\cos\varphi)$$

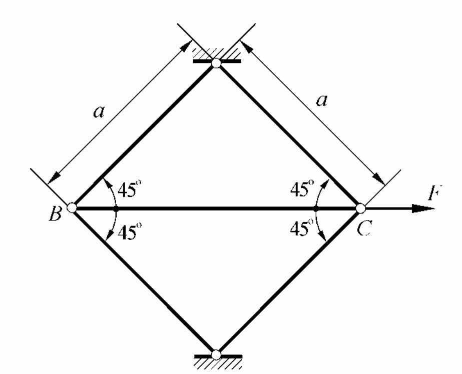
将其代入

$$\varDelta_{Ax}=\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overline{M}(\varphi)M(\varphi)R\mathrm{d}\varphi$$

积分后，得到

$$\varDelta_{Ax}=\frac{(\pi^2-2\pi-4)}{2\pi}\frac{M_{\mathrm{e}}R^2}{EI}=-0.0658\frac{M_{\mathrm{e}}R^2}{EI}\qquad(\leftarrow)$$

**14-4** 图示桁架，各杆各截面的拉压刚度均为 $EA$。试求杆 $BC$ 的轴力。




题 14-4 图

解：此为一度静不定问题。

求 $\varDelta_{e/e'}$ 的载荷状态及单位状态如图 14-4a 和 b 所示。

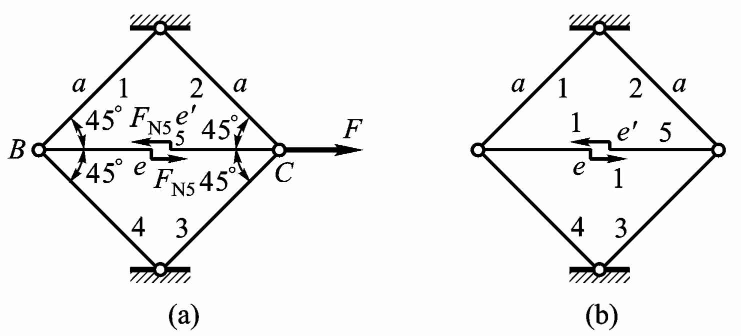



**图 14-4**

求切口处相对位移 $\varDelta_{e/e'}$ 的过程列于下表：

| $i$ | $l_i$ | $\overline{F}_{\mathrm{N}i}$ | $F_{\mathrm{N}i}$ | $\overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i$ |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $a$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\dfrac{F_{\mathrm{N5}}}{\sqrt{2}}$ | $\dfrac{F_{\mathrm{N5}}a}{2}$ |
| **2** | $a$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\dfrac{F-F_{\mathrm{N5}}}{\sqrt{2}}$ | $\dfrac{(F_{\mathrm{N5}}-F)a}{2}$ |
| **3** | $a$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\dfrac{F-F_{\mathrm{N5}}}{\sqrt{2}}$ | $\dfrac{(F_{\mathrm{N5}}-F)a}{2}$ |
| **4** | $a$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\dfrac{F_{\mathrm{N5}}}{\sqrt{2}}$ | $\dfrac{F_{\mathrm{N5}}a}{2}$ |
| **5** | $\sqrt{2}a$ | 1 | $F_{\mathrm{N5}}$ | $\sqrt{2}F_{\mathrm{N5}}a$ |
| $\Sigma$ | | | | $\left(2+\sqrt{2}\right)F_{\mathrm{N5}}a-Fa$ |

由此得

$$\varDelta_{e/e'}=\frac{\sum_{i=1}^{5}\overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i}{EA}=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)F_{\mathrm{N5}}a-Fa}{EA}$$

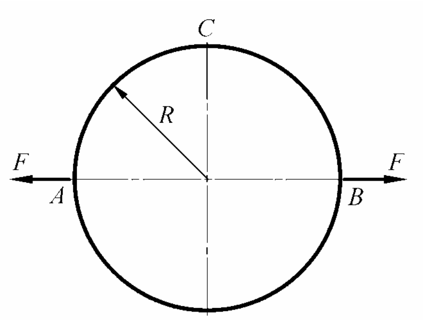
代入协调条件

$$\varDelta_{e/e'}=0$$

得到

$$F_{\mathrm{N}BC}=F_{\mathrm{N5}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}F$$

**14-5** 图示小曲率圆环，承受载荷 $F$ 作用。试求截面 $A$ 与 $C$ 的弯矩以及截面 $A$ 与 $B$ 的相对线位移。设弯曲刚度 $EI$ 为常数。




题 14-5 图

解：1．求 $M_A$ 和 $M_C$

此为三度静不定问题。有双对称性可利用。

由对称条件可得（图 14-5a）

$$F_{NC}=F_{ND}=\frac{F}{2}$$

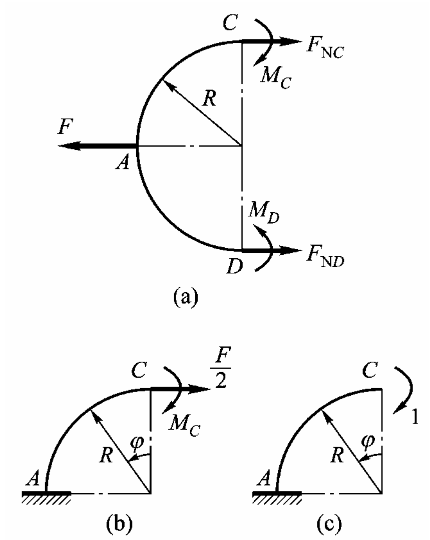



图 14-5

由双对称性可知，

$$\theta_C=0\text{，}\qquad \theta_A=0$$

据此可方便地求出 $M_C$。求 $\theta_C$ 的载荷状态及单位状态示如图 b 和 c。

弯矩方程为

$$M(\varphi)=M_C+\frac{F}{2}R(1-\cos\varphi)$$

$$\overline{M}(\varphi)=1$$

将其代入

$$\theta_C=\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overline{M}(\varphi)M(\varphi)R\mathrm{d}\varphi$$

积分后，代入协调条件

$$\theta_C=0$$

可得

$$M_C=-\frac{\pi-2}{2\pi}FR$$

进而可求得

$$M_A=\frac{FR}{\pi}$$

2．求 $\Delta_{A/B}$

令原题图中的 $F$=1，即为求 $\Delta_{A/B}$ 的单位状态。

依据图 a，可以写出弯矩方程如下：

$$M(\varphi)=-\frac{\pi-2}{2\pi}FR+\frac{F}{2}R(1-\cos\varphi)$$

$$\overline{M}(\varphi)=-\frac{\pi-2}{2\pi}R+\frac{R}{2}(1-\cos\varphi)$$

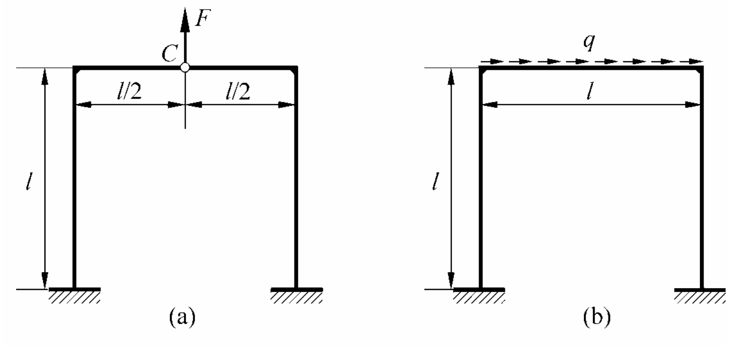
将其代入

$$\Delta_{A/B}=\frac{4}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overline{M}(\varphi)M(\varphi)R\mathrm{d}\varphi$$

积分后，得到

$$\Delta_{A/B}=\frac{(\pi^2-8)}{4\pi}\frac{FR^3}{EI}=0.1488\frac{FR^3}{EI}\quad(\leftarrow\quad\rightarrow)$$

**14-7** 试画图示刚架的弯矩图。设弯曲刚度 $EI$ 为常数。




**题 14-7 图**

（**a**）解：此为二度静不定问题。有对称性可利用。

如图 **14-7a** 所示，由于 ***C*** 处有铰，所以 $M_C=0$；又由于 ***C*** 处在对称位置，故知其 $F_S=0$。铰 **C** 左右两边各受切向载荷 ***F*/2**。相当系统（取左边一半）如图（**1**）所示，待求未知力仅有 $\boldsymbol{F_{NC}}$ 一个。

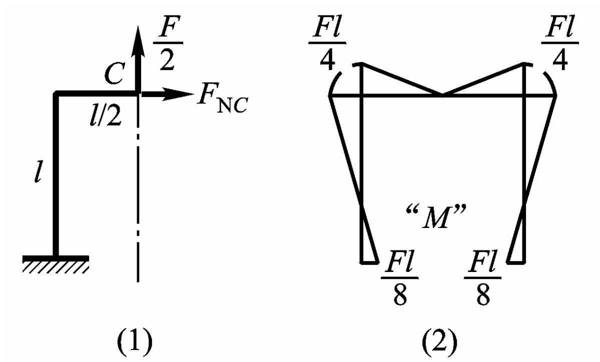



**图 14-7a**

求截面 ***C*** 的水平位移 $\Delta_{Cx}$，并根据对称条件，有

$$\Delta_{Cx}=0$$

由此得到

$$F_{NC}=\frac{3}{8}F \quad (\rightarrow)$$

弯矩图如图（**2**）所示，其最大弯矩为

$$|M|_{\max}=\frac{Fl}{4}$$

（**b**）解：此为三度静不定问题。有反对称性可利用。

在结构对称面 ***C*** 处假想切开，由于反对称，故有

$$F_{NC}=0\,,\qquad M_C=0$$

待求未知内力仅有 $F_{SC}$ 一个。

求 $\Delta_{Cy}$ 的载荷状态及单位状态如图 14-7b 所示。

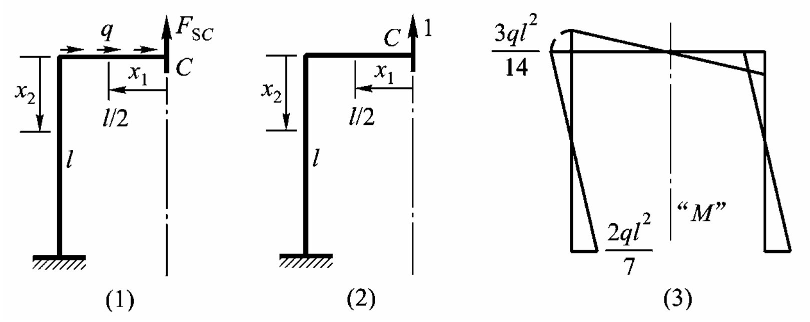



图 14-7b

弯矩方程为

$$M(x_1)=F_{SC}x_1\text{，}\qquad M(x_2)=F_{SC}\frac{l}{2}-\frac{ql}{2}x_2$$

$$\overline{M}(x_1)=x_1\text{，}\qquad \overline{M}(x_2)=\frac{l}{2}$$

将其代入

$$\Delta_{Cy}=\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}}\overline{M}(x_1)M(x_1)\mathrm{d}x_1+\frac{1}{EI}\int_0^{l}\overline{M}(x_2)M(x_2)\mathrm{d}x_2$$

积分后，得

$$\Delta_{Cy}=\frac{7F_{SC}l^3-3ql^4}{24EI}$$

代入协调条件

$$\Delta_{Cy}=0$$

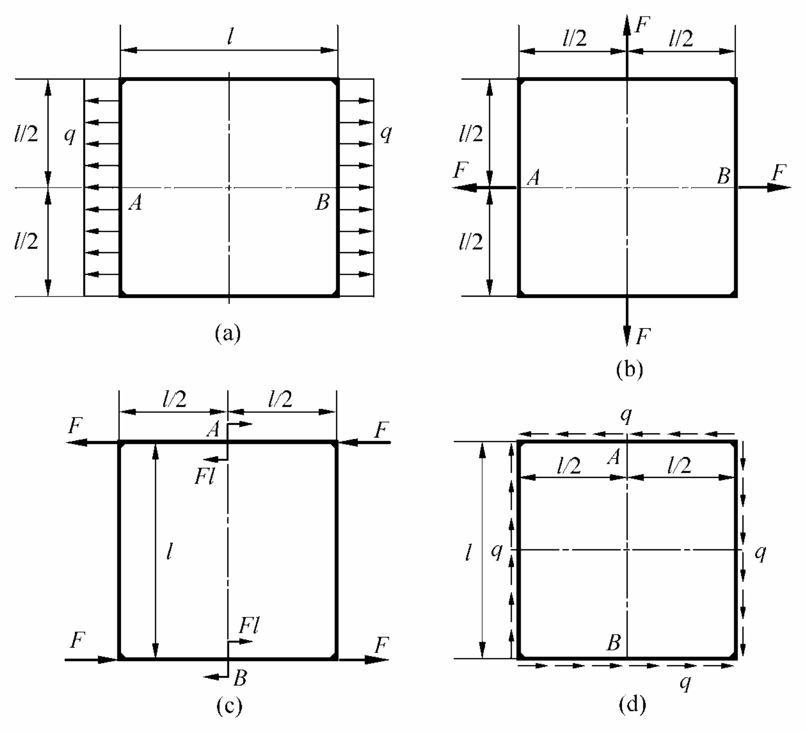
得

$$F_{SC}=\frac{3}{7}ql\ (\uparrow)$$

弯矩图如图（3）所示，其最大弯矩为

$$|M|_{\max}=\frac{2ql^2}{7}$$

**14-8** 试画图示各刚架的弯矩图，并计算截面 $A$ 与 $B$ 沿 $AB$ 连线方向的相对线位移。设弯曲刚度 $EI$ 为常数。




**题 14-8 图**

提示：本题 **a~d** 均为三度静不定问题。其中，**a** 与 **b** 均为双对称问题。对称面上 $F_S = 0$，$\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$ 可由静力平衡条件求出，只剩下一个未知内力待求，依据协调条件（切口两边相对转角为零）即可求出。**c** 与 **d** 均为双反对称问题，结构对称面上只有 $F_S$ 待求，而且可由静力平衡条件求出。

由于问题比较简单，这里拟直接给出结果。

(a)

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{12}, \qquad \varDelta_{A/B} = \frac{ql^4}{64EI} \quad (\leftarrow \quad \rightarrow)$$

(b)

$$M_{\max} = \frac{Fl}{8}, \qquad \varDelta_{A/B} = \frac{Fl^3}{96EI} \quad (\leftarrow \quad \rightarrow)$$

(c)

$$M_{\max} = \frac{Fl}{2}, \qquad \varDelta_{A/B} = 0$$

(d)

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{4}, \qquad \varDelta_{A/B} = 0$$

弯矩图见图 14-8。

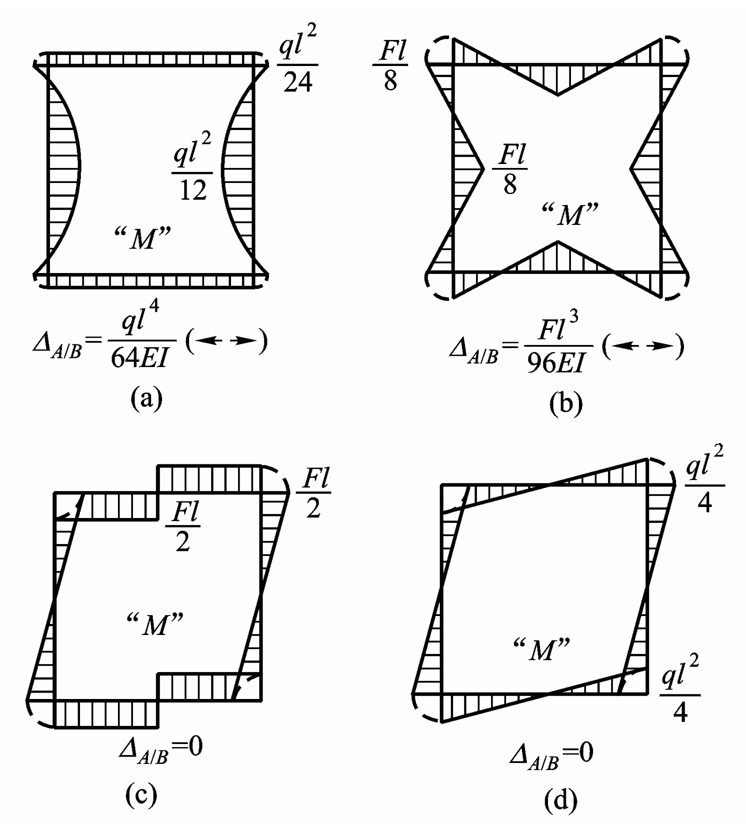
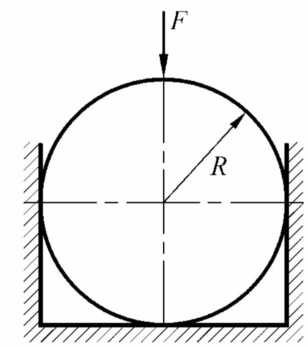



图 14-8

**14-10** 图示小曲率圆环，承受载荷 $F$ 作用。试计算支反力。设弯曲刚度 $EI$ 为常数。




题 14-10 图

解：此为四度静不定问题。有双对称条件可以利用。

若圆环无左右刚壁约束，由题 14-5 之解可得

$$F_{NC}=F_{ND}=-\frac{F}{2}\text{（负号代表压力）}$$

$$M_C=M_D=\frac{\pi-2}{2\pi}FR\text{，}\qquad M_A=M_B=-\frac{FR}{\pi}$$

由 $F$ 引起的 $\Delta'_{CD}$ 可根据图 14-10a 和 b 来算。

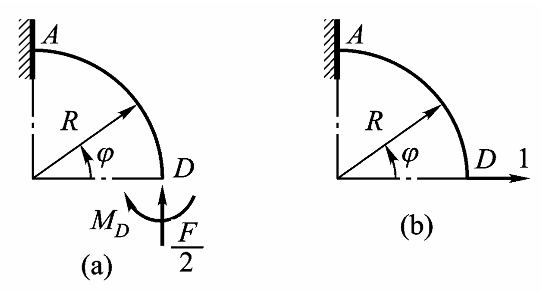



**图 14-10**

弯矩方程为

$$M(\varphi)=\frac{\pi-2}{2\pi}FR-\frac{F}{2}R(1-\cos\varphi)$$

$$\overline{M}(\varphi)=-R\sin\varphi$$

将其代入

$$\varDelta'_{C/D}=\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overline{M}(\varphi)M(\varphi)R\mathrm{d}\varphi$$

积分后，得

$$\varDelta'_{C/D}=\frac{(4-\pi)FR^3}{2\pi EI}\quad(\leftarrow\ \rightarrow)$$

设 $C$ 与 $D$ 处的水平反力为 $F_x$，根据题 14-5 所得的 $\varDelta_{A/B}$，这里有 $F_x$ 引起的 $\varDelta''_{C/D}$，

$$\varDelta''_{C/D}=-\frac{(\pi^2-8)}{4\pi}\frac{F_xR^3}{EI}\quad(\rightarrow\ \leftarrow)$$

代入协调条件

$$\varDelta_{C/D}=\varDelta'_{C/D}+\varDelta''_{C/D}=0$$

最后得

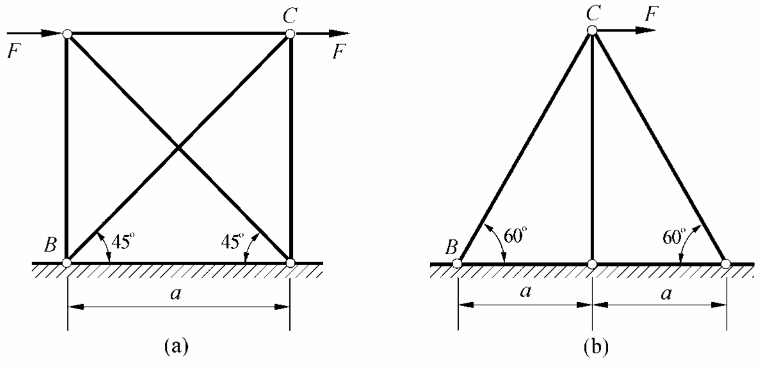
$$F_x=\frac{8-2\pi}{\pi^2-8}F\quad(\rightarrow\ \leftarrow)$$

$B$ 处支反力为

$$F_{By}=F\quad(\uparrow)$$

**14-11** 图示桁架，承受载荷 $F$ = 80kN 作用，各杆各截面的拉压刚度均为 $EA$。试求杆 $BC$ 的角位移。

于是得




**题 14-11 图**

（a）解：此为一度静不定问题。由图 14-11a（1）可知，因为反对称，所以有

$$F_{\mathrm{N2}}=0$$

又据图（2）可得

$$F_{\mathrm{N3}}=-F\ （压），F_{\mathrm{N5}}=\sqrt{2}F$$

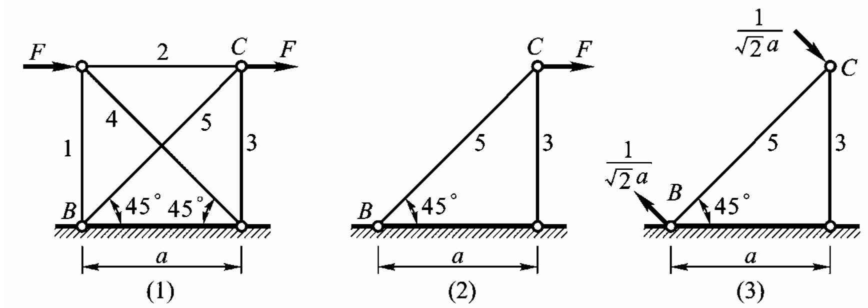



**图 14-11a**

求$\theta_{BC}$的载荷状态及单位状态可简画如图（2）和（3）。计算过程归纳如下表：

| ***i*** | $l_i$ | $\overline{F}_{\mathrm{N}i}$ | $F_{\mathrm{N}i}$ | $\overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i$ |
|---|---|---|---|---|
| **3** | $a$ | $-\dfrac{1}{a}$ | $-F$ | $F$ |
| **5** | $\sqrt{2}a$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}a}$ | $\sqrt{2}F$ | $\sqrt{2}F$ |
| $\Sigma$ | | | | $\left(1+\sqrt{2}\right)F$ |

于是得

$$\theta_{BC}=\frac{\sum \overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i}{EA}=\frac{(1+\sqrt{2})F}{EA}\quad (\circlearrowright)$$

（b）解：此为一度静不定问题。由图 14-11b（1）可知，由于反对称，故有

$$F_{\mathrm{N2}}=0$$

进而可得

$$F_{\mathrm{N1}}=F,\quad F_{\mathrm{N3}}=-F\quad （压）$$

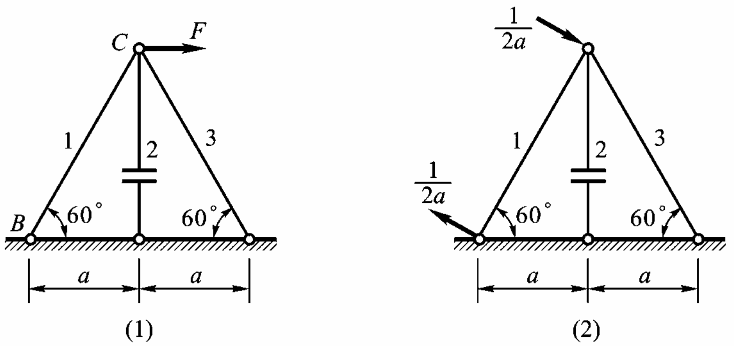



图 14-11b

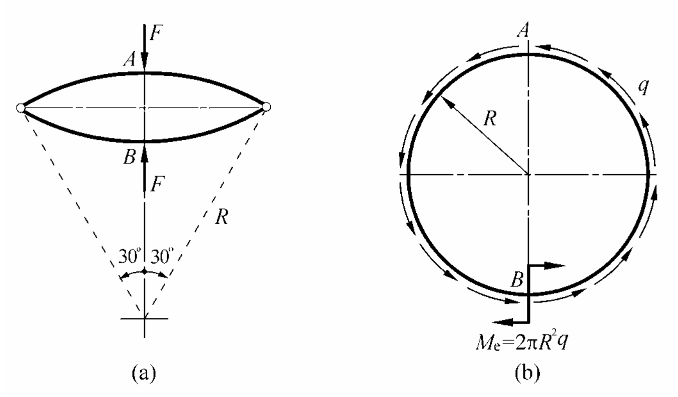
求$\theta_{BC}$的载荷状态及单位状态如图（1）和（2）所示，杆 2 均视为被切断。计算过程归纳如下表：

| $i$ | $l_i$ | $\overline{F}_{\mathrm{N}i}$ | $F_{\mathrm{N}i}$ | $\overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i$ |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $2a$ | $\frac{1}{2\sqrt{3}a}$ | $F$ | $\frac{F}{\sqrt{3}}$ |
| **3** | $2a$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}a}$ | $-F$ | $\frac{2F}{\sqrt{3}}$ |
| $\Sigma$ | | | | $\sqrt{3}F$ |

于是得

$$\theta_{BC}=\frac{\sum \overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i}{EA}=\frac{\sqrt{3}F}{EA}\quad (\circlearrowright)$$

**14-12** 图示结构（均为小曲率圆杆），弯曲刚度 $EI$ 为常数。试计算截面 $A$ 与 $B$ 沿 $AB$ 连线方向的相对线位移。




**题 14-12 图**

（**a**）解：此为一度静不定问题。有双对称条件可以利用。

取上半部分来分析，受力如图 **14-12a** 所示。此即为求 $\varDelta_{A/B}$ 的载荷状态，将 $\boldsymbol{F}$ 换成 **1**，即为求 $\varDelta_{A/B}$ 的单位状态。

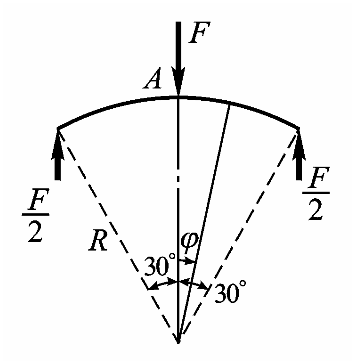



**图 14-12a**

取 $\varphi$ 如图（这样取计算较方便），弯矩方程为

$$M(\varphi)=\frac{FR}{2}\left(\frac{1}{2}-\sin\varphi\right)$$

$$\overline{M}(\varphi)=\frac{R}{2}\left(\frac{1}{2}-\sin\varphi\right)$$

将其代入

$$\varDelta_{A/B}=\frac{4}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\overline{M}(\varphi)M(\varphi)R\mathrm{d}\varphi$$

积分后，得

$$\varDelta_{A/B}=\frac{\left(\pi+3\sqrt{3}-8\right)FR^3}{8EI}=0.0422\frac{FR^3}{EI}$$

（**b**）解：此为三度静不定问题。有反对称条件可以利用。

先求内力。取相当系统如图 14-12b(1)，另二内力均为零，图中未画。

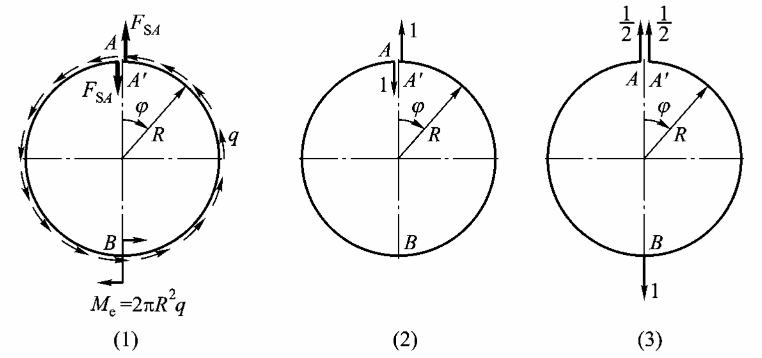



图 14-12b

求 $\Delta_{A/A'}$ 的载荷状态及单位状态示如图（1）和（2）。弯矩方程为

$$M(\varphi)=qR^2(\varphi-\sin\varphi)-F_{SA}R\sin\varphi$$

$$\overline{M}(\varphi)=-R\sin\varphi$$

将其代入

$$\Delta_{A/A'}=\frac{2}{EI}\int_0^{\pi}\overline{M}(\varphi)M(\varphi)R\mathrm{d}\varphi$$

积分后，代入协调条件 $\Delta_{A/A'}$=0，可得

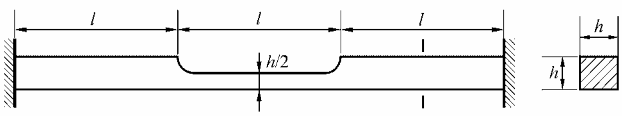
$$F_{SA}=qR$$

求 $\Delta_{A/B}$ 的载荷状态及单位状态如图（1）和（3）所示。

由于 $M(\varphi)$ 左右异号，而 $\overline{M}(\varphi)$ 左右同号，不难判断，二者相乘后的积分值必为零，即

$$\Delta_{A/B}=0$$

**14-13** 图示两端固定杆，如果温度升高 $T$，试计算杆内的最大正应力。材料的弹性模量为 $E$，线膨胀系数为 $\alpha_l$，截面宽度不变。




题 14-13 图

解：此为三度静不定问题。有对称条件可以利用。

**1．求对称面 $C$ 上的内力**

**载荷状态、求 $\varDelta_{Cx}$ 的单位状态及求 $\theta_C$ 的单位状态分别示如图 14-13a,b 和 c。**

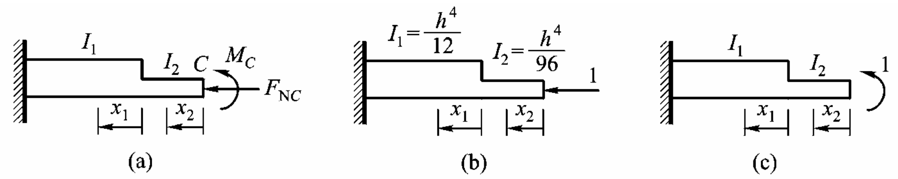



**图 14-13**

求 $\varDelta_{Cx}$ 的内力方程为

$$F_{\mathrm{N}}(x_1)=F_{\mathrm{N}C}\text{，}\qquad F_{\mathrm{N}}(x_2)=F_{\mathrm{N}C}$$

$$\overline{F}_{\mathrm{N}}(x_1)=1\text{，}\qquad \overline{F}_{\mathrm{N}}(x_2)=1$$

$$M(x_1)=M_C-F_{\mathrm{N}C}\frac{h}{4}\text{，}\qquad M(x_2)=M_C$$

$$\overline{M}(x_1)=-\frac{h}{4}\text{，}\qquad \overline{M}(x_2)=0$$

将其代入

$$\varDelta_{Cx}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i}{EA_i}+\frac{1}{EI_1}\int_0^l\overline{M}(x_1)M(x_1)\mathrm{d}x_1$$

算得

$$\varDelta_{Cx}=\frac{11l}{4Eh^2}F_{\mathrm{N}C}-\frac{3l}{Eh^3}M_C=\frac{3}{2}\alpha_l Tl \tag{1}$$

求 $\theta_C$ 的内力方程为

$$M(x_1)=M_C-F_{\mathrm{N}C}\frac{h}{4}\text{，}\qquad M(x_2)=M_C$$

$$\overline{M}(x_1)=1\text{，}\qquad \overline{M}(x_2)=1$$

将其代入

$$\theta_C=\frac{1}{EI_1}\int_0^l\overline{M}(x_1)M(x_1)\mathrm{d}x_1+\frac{1}{EI_2}\int_0^{\frac{l}{2}}\overline{M}(x_2)M(x_2)\mathrm{d}x_2$$

积分后，得

$$\theta_C = \frac{12l}{Eh^4}\left(M_C - \frac{F_{NC}h}{4}\right) + \frac{48l}{Eh^4}M_C = 0 \quad (2)$$

联解方程（1）与（2），得

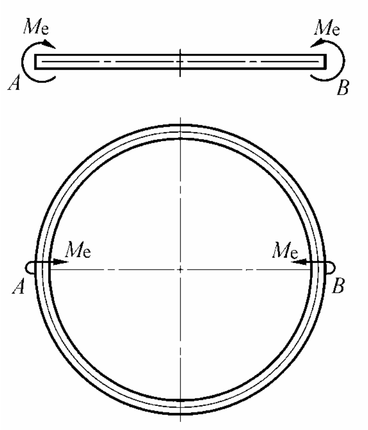
$$M_C = \frac{3}{104}\alpha_l TEh^3, \qquad F_{NC} = \frac{15}{26}\alpha_l TEh^2$$

2．求杆内的最大正应力

最大正应力存在于该杆中段，其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{6M_C}{h\left(\frac{h}{2}\right)^2} + \frac{2F_{NC}}{h^2} = \left(\frac{9}{13} + \frac{15}{13}\right)E\alpha_l T = 1.846E\alpha_l T$$

**14-14** 图示小曲率圆环，承受矩为 $M_e$ 的力偶作用，试计算截面 $A$ 与 $B$ 间的相对转角。已知圆环的平均半径为 $R$，横截面的直径为 $d$，弹性模量为 $E$，切变模量为 $G$。




题 14-14 图

解：此为六度静不定问题。有双对称条件及平面-空间问题的规律可以利用。

设竖向直径两端截面为 $C$ 和 $D$，由于 $C$ 为对称截面，故有反对称内力素为零，即

$$F_{SyC} = F_{SzC} = T_C = 0$$

又由于这是平面-空间问题（即平面结构、外载荷均垂直于结构平面的问题），故有结构平面内的内力素为零，即

$$F_{NC} = M_{zC} = 0$$

由此可知，截面 $C$（或 $D$）待求未知内力只剩下 $M_{yC}$（或 $M_{yD}$）一个（见图 14-14a）。

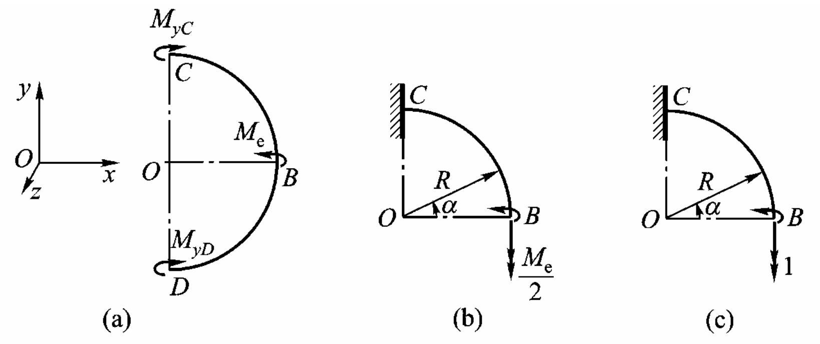



**图 14-14**

由于双对称，故有

$$M_{yC} = M_{yD}$$

由图 a 可得

$$M_{yC} = M_{yD} = \frac{M_e}{2}$$

由于双对称，求 $\varphi_{A/B}$ 的载荷状态及单位状态可示如图 b 和 c。

内力方程为

$$T(\alpha) = \frac{M_e}{2}\cos\alpha, \qquad M(\alpha) = \frac{M_e}{2}\sin\alpha$$

$$\overline{T}(\alpha) = \cos\alpha, \qquad \overline{M}(\alpha) = \sin\alpha$$

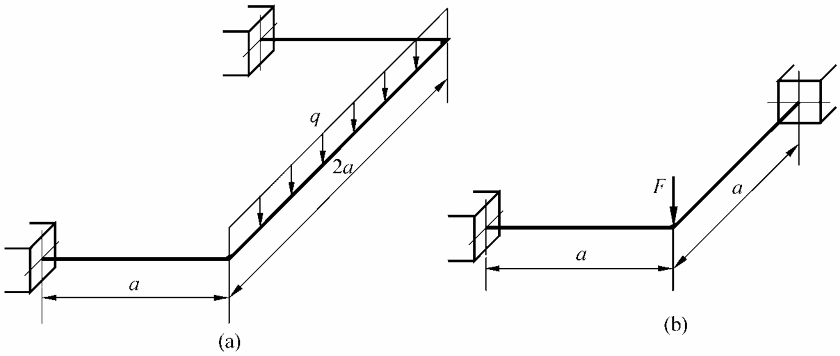
将其代入

$$\varphi_{A/B} = \frac{2}{GI_p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{T}(\alpha)T(\alpha)R\mathrm{d}\alpha + \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{M}(\alpha)M(\alpha)R\mathrm{d}\alpha$$

积分后，得截面 $A$ 与 $B$ 之间的相对转角为

$$\varphi_{A/B} = \frac{\pi M_e R}{4I}\left(\frac{1}{2G}+\frac{1}{E}\right) = \frac{8M_e R}{d^4}\left(\frac{1}{G}+\frac{2}{E}\right)$$

**14-15** 图示等截面刚架，横截面为圆形，材料的弹性模量为 $E$，泊松比为 $\mu = 0.3$。试画刚架的弯矩图与扭矩图。




**题 14-15 图**

（a）解：此为六度静不定问题。有对称条件及平面-空间问题的规律可以利用。

如图 14-15a（1）所示，在对称截面 $C$ 处“ 切开 ”，有

$$F_{\mathrm{S}xC}=F_{\mathrm{S}zC}=T_C=0$$

由于是平面-空间问题，故有

$$F_{\mathrm{N}C}=M_{zC}=0$$

至此，待求的未知内力只剩下 $M_{xC}$。

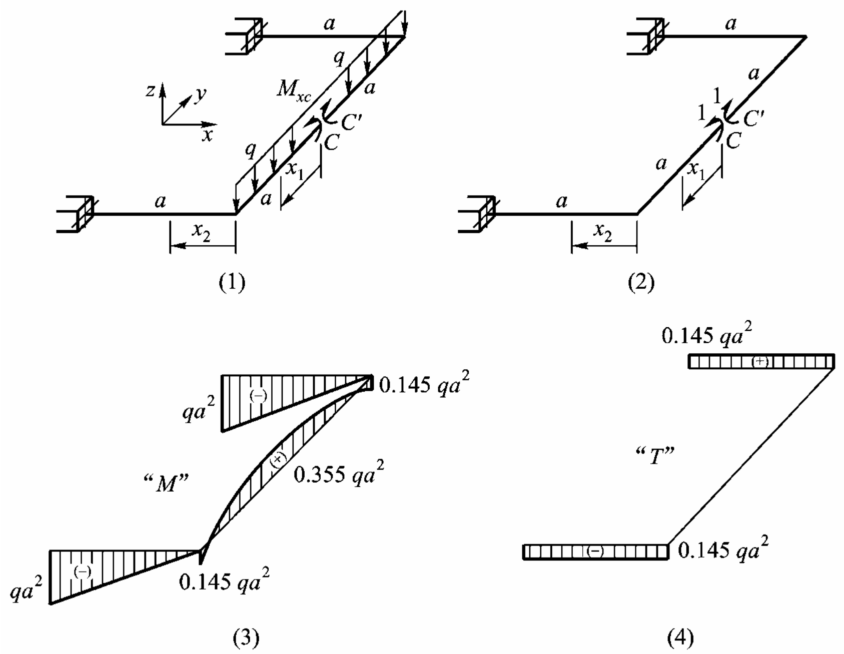



**图 14-15a**

变形协调条件为

$$\theta_{xC/C'}=0$$

求$\theta_{xC/C'}$的载荷状态及单位状态示如图（1）和（2）。内力方程为

$$M_x(x_1)=M_{xC}-\frac{q}{2}x_1^2,\qquad T(x_2)=M_{xC}-\frac{q}{2}a^2$$

$$\overline{M}_x(x_1)=1,\qquad \overline{T}(x_2)=1$$

由于$\overline{M}(x_2)=0$，故$M(x_2)$也可省写。

将内力方程代入

$$\theta_{xC/C'}=\frac{1}{EI_x}\int_0^a\overline{M}_x(x_1)M_x(x_1)\mathrm{d}x_1+\frac{1}{GI_{\mathrm{p}}}\int_0^a\overline{T}(x_2)T(x_2)\mathrm{d}x_2$$

积分后，得

$$\theta_{xC/C'}=\frac{a}{EI_x}\left[M_{xC}-\frac{qa^2}{6}+(1+\mu)M_{xC}-\frac{1+\mu}{2}qa^2\right]=0$$

注意到$\mu$=0.3 ，故有

$$M_{xC}=0.355qa^2$$

上述计算中用到

$$GI_{\mathrm{p}}=\frac{E}{2(1+\mu)}(2I_x)=\frac{EI_x}{1+\mu}$$

$M_{xC}$求出后，可画内力图了。该刚架的弯矩图和扭矩图如图（3）和（4）所示，其中，

$$|M|_{\max}=qa^2,\qquad T_{\max}=0.145qa^2$$

（b）解：法 1，解除多余外约束

此为六度静不定问题。有对称条件及平面-空间问题的规律可以利用。

此静不定刚架的相当系统如图 14-15b（1）所示。$A$ 端解除多余约束后，由于对称性（关于$45^\circ$铅垂面对称），可得

$$F_{\mathrm{S}zA}=\frac{F}{2}\ (\uparrow)$$

由于是平面-空间问题，故有

$$F_{\mathrm{N}A}=F_{\mathrm{S}yA}=M_{zA}=0$$

实际上，待求的未知多余反力只剩下$M_{yA}$和$T_A$。

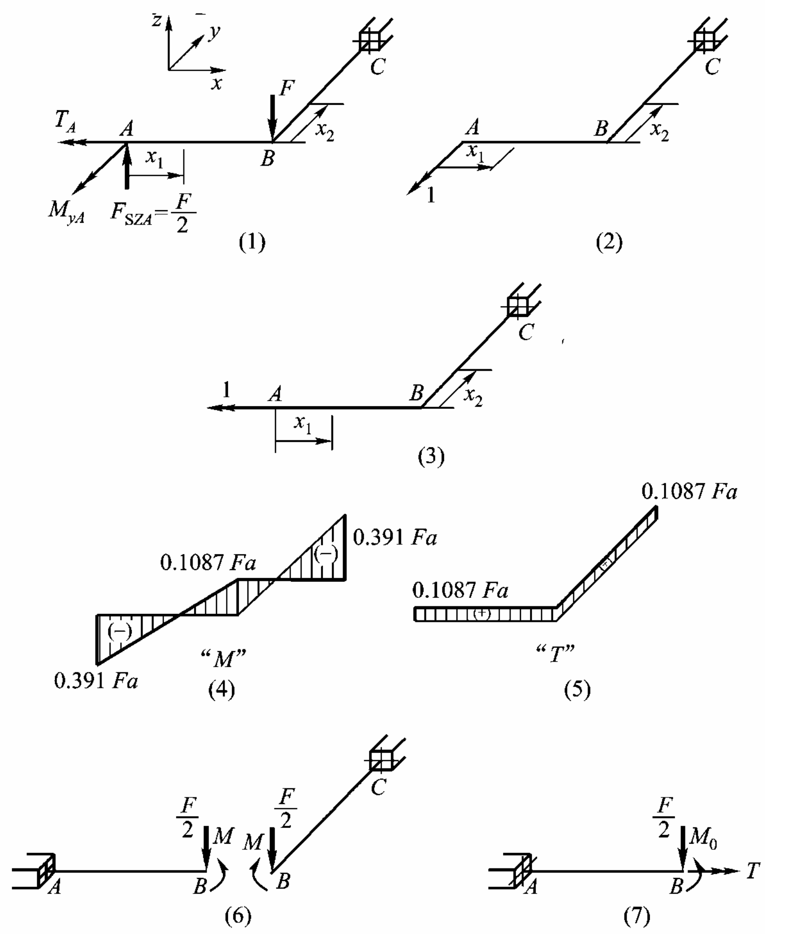



**图 14-15b**

求$\theta_{yA}$和$\varphi_A$的单位状态示如图（2）和（3）。

内力方程为

$$M_y(x_1)=M_{yA}-\frac{F}{2}x_1 \ ， \qquad T(x_1)=T_A$$

$$\overline{M}_y(x_1)=1 \ ， \qquad \overline{T}(x_1)=1$$

$$T(x_2)=M_{yA}-\frac{F}{2}a \ ， \qquad M_x(x_2)=T_A-\frac{F}{2}x_2$$

$$\overline{T}(x_2)=1 \ ， \qquad \overline{M}_x(x_2)=1$$

将其代入

$$\theta_{yA}=\frac{1}{EI}\int_0^a \overline{M}_y(x_1)M_y(x_1)\mathrm{d}x_1+\frac{1}{GI_{\mathrm{p}}}\int_0^a \overline{T}(x_2)T(x_2)\mathrm{d}x_2$$

及

$$\varphi_A = \frac{1}{GI_p}\int_0^a \overline{T}(x_1)T(x_1)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{EI}\int_0^a \overline{M}_x(x_2)M_x(x_2)\mathrm{d}x_2$$

完成积分，并代入协调条件

$$\theta_{yA} = 0, \qquad \varphi_A = 0$$

得方程

$$\frac{a}{EI}\left(M_{yA} - \frac{Fa}{4}\right) + \frac{(1+\mu)a}{EI}\left(M_{yA} - \frac{Fa}{2}\right) = 0$$

及

$$\frac{(1+\mu)T_A a}{EI} + \frac{a}{EI}\left(T_A - \frac{Fa}{4}\right) = 0$$

依次解得

$$M_{yA} = \frac{9}{23}Fa = 0.391Fa, \qquad T_A = \frac{5}{46}Fa = 0.1087Fa$$

刚架的弯矩图和扭矩图示如图（4）和（5）。

法 2，解除多余内约束

此题亦可在对称面处切开（解除多余内约束），从而得到原静不定刚架的相当系统，如图 **13-15b**（6）所示。由平面-空间问题的规律可知，被切截面上只有一种内力偶矩 ***M*** 存在，其矢量是沿铅垂对称面与刚架平面的交线方向（45 ° 方向）的。

取杆段 ***AB*** 来分析，将内力偶矩分解（按矢量分解容易看清楚）为弯矩 $M_0$ 和扭矩 ***T***（见图 7），易知二者的大小相等，即

$$M_0 = T = M\cos 45^\circ \tag{a}$$

由对称性可知，变形协调条件为

$$\theta_{B45^\circ} = \theta_B \cos 45^\circ + \varphi_B \cos 45^\circ = 0 \tag{b}$$

式中，$\theta_{B45^\circ}$ 为 ***B*** 处对称截面的总转角，$\theta_B$ 为 ***B*** 处横截面由弯矩产生的转角，$\varphi_B$ 为 ***B*** 处横截面由扭矩产生的扭转角。

用单位载荷法不难求出 $\theta_B$ 和 $\varphi_B$，其值分别为

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left(M_0 a - \frac{F}{4}a^2\right) \tag{c}$$

和

$$\varphi_B = \frac{Ta}{GI_p} = \frac{(1+\mu)Ta}{EI} \tag{d}$$

将式（c）和（d）代入式（b），并注意到式（a），得

$$\begin{aligned}\theta_{B45^\circ} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\theta_B + \varphi_B) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{EI}\left(M_0 a - \frac{F}{4}a^2\right) + \frac{(1+\mu)M_0 a}{EI}\right] = 0\end{aligned}$$

由此得

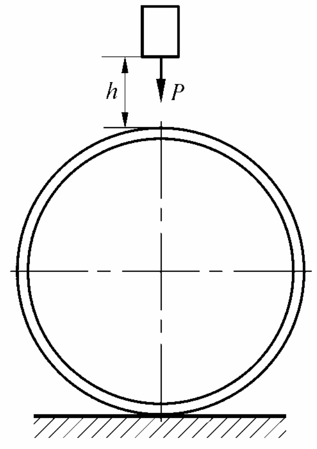
$$(2+\mu)M_0 = \frac{1}{4}Fa$$

即

$$M_0 = T = \frac{Fa}{4(2+\mu)} = \frac{5}{46}Fa = 0.1087Fa$$

可见，法 2 所得结果与法 1 的结果是一致的，弯矩图同图（4），扭矩图同图（5）。

**14-16** 图示小曲率圆环，一重量为 $P$ 的物体自高度 $h$ 处自由下落。试计算圆环内的最大正应力。已知圆环的平均半径为 $R$，横截面的直径为 $d$，弹性模量为 $E$，切变模量为 $G$，圆环的质量与物体的变形忽略不计。




题 14-16 图

解：此为三度静不定问题。

1．求被冲击点的静位移 $\Delta_{st}$

由题 13-5 之解可知，

$$\Delta_{st}=\frac{(\pi^2-8)PR^3}{4\pi EI}=0.1488\frac{PR^3}{EI}=3.03\frac{PR^3}{Ed^4}\quad(\downarrow)$$

2．求最大冲击载荷 $F_d$

$$F_d=P\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}\right)$$

3．计算圆环内的最大正应力 $\sigma_{max}$

由题 13-5 之解还可知，$|M|_{max}$ 发生在冲击载荷作用处（及铅垂直径下端）截面上，其值为

$$|M|_{max}=\frac{F_d R}{\pi}=0.318F_d R$$

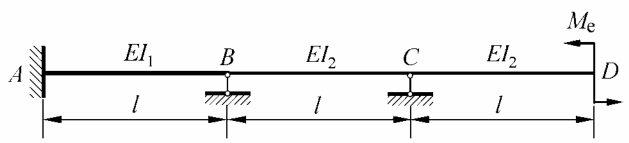
由此得

$$\sigma_{max}=\frac{|M|_{max}}{W}=\frac{3.24PR}{d^3}\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}\right)$$

4．检查

在水平直径两端的截面上，受 $M$、$F_N$ 联合作用，检查其正应力，其值小于以上所算结果；对任意截面求 $\sigma(\varphi)$，进而求极值，未发现有新的极大值。

## 14-18 图示阶梯形梁，$I_1=2I_2=I$。试用三弯矩方程求解并画弯矩图。




题 14-18 图

解：此为二度静不定问题。

原静不定梁的相当系统示如图 14-18a，待求的未知支点弯矩有 $M_0$（即 $M_A$）和 $M_1$（即 $M_B$）。

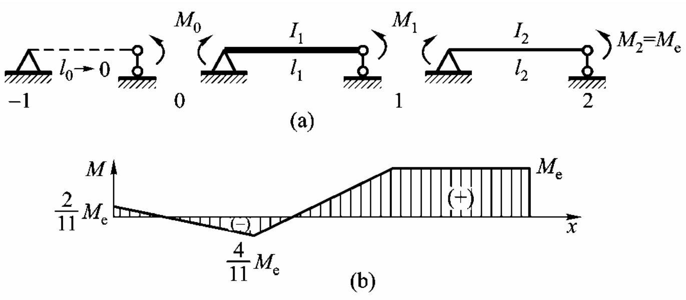



**图 14-18**

在图 a 中，有

$$M_{-1}=0,\quad M_2=M_e,\quad l_0=0,\quad l_1=l_2=l$$

$$I_1=I,\quad I_2=\frac{I}{2};\quad \omega_0=\omega_1=\omega_2=0$$

对于支座 0，得三弯矩方程

$$\frac{2M_0 l}{I_1}+\frac{M_1 l}{I_1}=0 \tag{a}$$

对于支座 1，得三弯矩方程

$$\frac{M_0 l}{I_1}+2M_1 l\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}\right)+\frac{M_e l}{I_2}=0 \tag{b}$$

方程（a）与（b）化简后联立求解，得

$$M_0=\frac{2}{11}M_e,\quad M_1=-\frac{4}{11}M_e=M_B$$

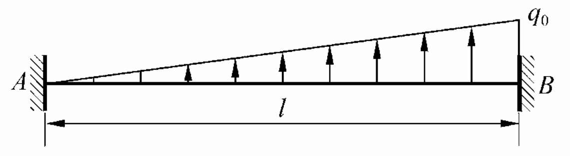
进而求得支反力为

$$F_{yA}=\frac{6M_e}{11l}\ (\downarrow),\quad M_A=\frac{2}{11}M_e\ (\circlearrowright),$$

$$F_{yB}=\frac{21M_e}{11l}\ (\uparrow),\quad F_{yC}=\frac{15M_e}{11l}\ (\downarrow)$$

该梁的弯矩图如图 14-18b 所示。

## 14-20 试用三弯矩方程求图示梁的支反力。弯曲刚度 *EI* 为常数。



**题 14-20 图**

**解：此为三度静不定问题。**

**原静不定梁的相当系统如图 14-20a 所示。*AB* 段载荷弯矩图示如图 b。**

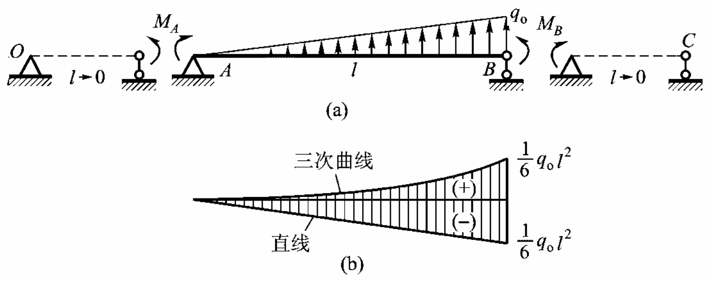



**图 14-20**

**对于支座 *A*，有**

$$M_1=0,\quad M_2=M_A,\quad M_3=M_B,\quad \omega_1a_1=0$$

$$\omega_2b_2=\frac{q_0l^2}{6}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{l}{5}-\frac{q_0l^2}{6}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{3}=-\frac{7}{360}q_0l^4$$

**由此得三弯矩方程**

$$2M_A\left(0+\frac{l}{I}\right)+M_B\left(\frac{l}{I}\right)=\frac{(-6)}{Il}\times\left(-\frac{7}{360}q_0l^4\right)$$

**或**

$$2M_A+M_B=\frac{7}{60}q_0l^2\qquad\text{(a)}$$

**对于支座 *B*，有**

$$M_1=M_A,\quad M_2=M_B,\quad M_3=0$$

$$\omega_1a_1=\frac{q_0l^2}{6}\cdot\frac{l}{4}\cdot\frac{4l}{5}-\frac{q_0l^2}{6}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2l}{3}=-\frac{1}{45}q_0l^4$$

$$\omega_2b_2=0$$

**由此得三弯矩方程**

$$M_A\left(\frac{l}{I}\right)+2M_B\left(\frac{l}{I}+0\right)=\frac{(-6)}{I\,l}\times\left(-\frac{1}{45}q_0l^4\right)$$

**或**

$$M_A + 2M_B = \frac{2}{15} q_0 l^2 \tag{b}$$

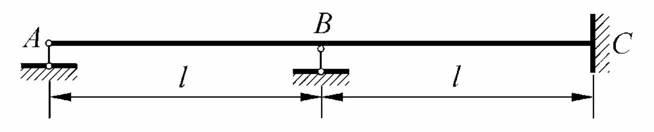
联解方程（a）与（b），得

$$M_A = \frac{1}{30} q_0 l^2 \ (↻), \qquad M_B = \frac{1}{20} q_0 l^2 \ (↺)$$

进而可求得

$$F_{yA} = \frac{3}{20} q_0 l \ (\downarrow), \qquad F_{yB} = \frac{7}{20} q_0 l \ (\downarrow)$$

**14-21** 图示梁，支座 $B$ 沉陷 $\delta$，试用三弯矩方程求支反力并画弯矩图。弯曲刚度 $EI$ 为常数。




题 14-21 图

解：此为二度静不定问题。

原静不定梁的相当系统如图 14-21a 所示。

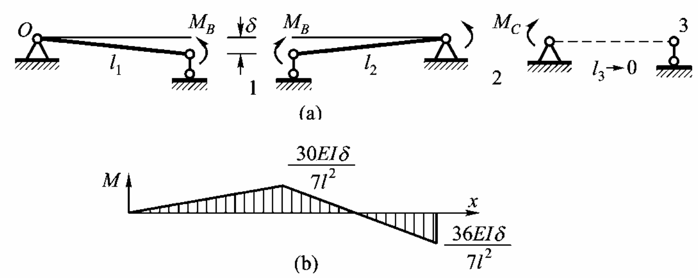



图 14-21

对于支座 $B$，有

$$M_0 = 0, \quad M_1 = M_B, \quad M_2 = M_C; \quad l_1 = l_2 = l$$

$$I_1 = I_2 = I; \quad \alpha'_1 = -\frac{\delta}{l}, \quad \alpha''_1 = \frac{\delta}{l}$$

得相应三弯矩方程

$$4M_B l + M_C l = -6EI\left(-\frac{2\delta}{l}\right) \tag{a}$$

对于支座 $C$，有

$$M_1 = M_B,\quad M_2 = M_C,\quad M_3 = 0;\quad l_2 = l,\quad l_3 = 0$$

$$I_2 = I,\quad I_3 = \infty;\quad \alpha_2' = \frac{\delta}{l},\quad \alpha_2'' = 0$$

由此得得三弯矩方程

$$M_B l + 2M_C l = -6EI\left(\frac{\delta}{l}\right) \tag{b}$$

将方程（a）与（b）联立求解，得

$$M_B = \frac{30EI\delta}{7l^2},\qquad M_C = -\frac{36EI\delta}{7l^2}$$

进而可求得

$$F_{yA} = \frac{30EI\delta}{7l^3}\ (\uparrow),\quad F_{yB} = \frac{96EI\delta}{7l^3}\ (\downarrow),\quad F_{yC} = \frac{66EI\delta}{7l^3}\ (\uparrow)$$

该梁的弯矩图如图 14-21b 所示。