2004-2014 不定积分考点分布（仅供参考）

一类换元	二类换元	分部积分	有理积分	其它
2005-2006 一（2）	2007-2008 一（4）	2004-2005 一（3）	2005-2006 三（2）	2006-2007 三（2）
2006-2007 三（3）	2007-2008 三（1）	2004-2005 一（4）	2012-2013 一（2）	2011-2012 一（2）
2009-2010 四（3）	2009-2010 四（2）	2005-2006 三（1）	2013-2014 一（2）	
2010-2011 一（3）	2010-2011 一（2）	2005-2006 三（3）		
2011-2012 一（3）	2013-2014 一（1）	2006-2007 三（1）		
2012-2013 一（1）		2007-2008 三（2）		
2013-2014 一（5）		2009-2010 四（1）		
		2010-2011 一（1）		
		2011-2012 一（1）		
		2013-2014 一（4）		

不定积分常用基本公式

1、$\int kdx = kx + C$

2、$\int x^{\lambda} dx = \dfrac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C(\lambda \neq -1)$

3、$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

4、$\int \dfrac{1}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$

5、$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

6、$\int \sin xdx = -\cos x + C$

7、$\int \cos xdx = \sin x + C$

8、$\int \sec^2 xdx = \tan x + C$

9、$\int \csc^2 x = -\cot x + C$

10、$\int \tan x \sec xdx = \sec x + C$

11、$\int \cot x \csc xdx = -\csc x + C$

12、$\int e^x dx = e^x + C$

13、$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

14、$\int \csc xdx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

15、$\int \sec xdx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

16、$\int \dfrac{1}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

17、$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

18、$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

常见不定积分方法汇总

一、一类换元

定理：设 $f(u)$ 具有原函数 $u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

例题：（2012-2013 第一题（1））：

$$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$$=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}$$

$$=2\int\arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x})$$

$$=(\arctan\sqrt{x})^2+C$$

二、分部积分

定理：设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 可导且存在原函数，则 $u(x)v'(x)$ 存在原函数，并有：

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

选择 u 的有效方法:LIATE 选择法：哪个在前哪个选作 u .

（L----对数函数；I----反三角函数；A----代数函数；T----三角函数；E----指数函数。）

例题：（2011-2012 第一题（1））：

$$\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int\frac{(x+1)e^x-e^x}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int\frac{e^x}{1+x}dx-\int\frac{e^x}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\frac{e^x}{1+x}-\int\frac{e^x}{1+x}dx$$

$$=\frac{e^x}{1+x}+C$$

三、二类换元（三角换元）

原理：利用$\sec^2 x=\tan^2 x+1$和$\sin^2 x=1-\cos^2 x$等三角恒等式进行还原去掉根号。

例题：（2007-2008 第三题（1））：

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$设x=a\sin t,$$

$$所以dx=a\cos t dt$$

$$I=\int\frac{a\cos t}{a^2\sin^2 t\cdot a\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sin^2 t}dt$$

$$=-\frac{\cot t}{a^2}+C$$

$$=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x^2}+C$$

四、二类换元（化掉根式）

原理：当出现复杂根式的时候可以选择整体代换。

例题：（2010-2011 第一题（2））

$$\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx$$

$$设t=2-5x^3,$$

$$则x^3=\frac{2-t}{5};$$

$$dx^3=-\frac{1}{5}dt$$

$$I=\frac{1}{3}\int x^3(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx^3$$

$$=\frac{1}{3}\int(\frac{2-t}{5})\cdot t^{\frac{2}{3}}\cdot(-\frac{1}{5})dt$$

$$=-\frac{1}{75}\int t^{\frac{2}{3}}(2-t)dt$$

$$=-\frac{2}{125}t^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{200}t^{\frac{8}{3}}+C$$

$$=-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C$$

五：二类换元（倒代换）　注：没考过

原理：当分母的阶较高时，可采用倒代换 $x=\frac{1}{t}$。

例题：

$$\int\frac{1}{x^4\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=\int\frac{1}{(\frac{1}{t})^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\cdot(-\frac{1}{t^2})dt$$

$$=-\int\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt^2$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1-(t^2+1)}{\sqrt{1+t^2}}d(t^2+1)$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x})^3+C$$

五：二类换元（最小公倍数法）　　注：没考过

原理：当被积函数含有两种或两种以上的根式 $\sqrt[k]{x},\cdots\sqrt[l]{x}$ 时，可采用令 $x=t^n$（其中 n 为各根指数的最小公倍数）。

例题：

$$\text{求}\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$$

$$\text{令}x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt$$

$$I=\int\frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt$$

$$=\int\frac{6t^2}{1+t^2}dt$$

$$=6\int(1-\frac{1}{1+t^2})dt$$

$$=6(t-\arctan t)+C$$

$$=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$$

六：有理积分（分母中有 $(x-a)^k$）

原理：若分母中含有 $(x-a)^k$，则分解成 $\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a}$，

其中 A_1、A_2、$\cdots$、A_k 都是常数。

例题：（2005-2006 第三题（2））

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x+2)}dx$$

$$=\int(\frac{5}{x+2}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{4}{x+1})dx$$

$$=5\ln(x+2)-\frac{2}{x+1}-4\ln(x+1)+C$$

七、有理积分（分母中有$(x^2+px+q)^k$且$p^2-4q<0$）：　注：没考过

原理：若分母中有$(x^2+px+q)^k$且$p^2-4q<0$，则分解成

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$，其中

M_i,N_i都是常数（i=1,2,3⋯，k）

例题：

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$\text{整理得}1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+(C+A)$$

$$A+2B=0,B+2C=0,A+C=1$$

$$\therefore A=\frac{4}{5},B=-\frac{2}{5},C=\frac{1}{5}$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}$$

八、有理积分（$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$形）

原理：设$x^2+px+q=t$

例题（2013-2013 第一题（2））：

$$\int\frac{x}{x^2-4x+5}dx$$

$$d$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}+2\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+2\arctan(x-2)+C$$

九、假分式形　　注：没考过

原理：将假分式化为多项式和真分式的和：

例题：

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$$

$$=\int (x+\frac{1}{x^2+1})dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\arctan x+C$$

十、万能公式　　注：没考过且不到万不得已的时候不要用

原理：①$u=\tan\frac{x}{2}, \sin x=\frac{2u}{1+u^2}, \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}, dx=\frac{2du}{1+u^2}$

②$u=\tan x, \sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, dx=\frac{du}{1+u^2}$

例题：

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

$$=\int \frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2du}{1+u^2}$$

$$=\int \frac{du}{u}$$

$$=\ln|u|+C$$

$$=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$