北京航空航天大学

2008-2009 学年第一学期期末

考试统一用答题册

考试课程____高等数学____

班级________学号________姓名________

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

2009 年 01 月 16 日

一． 填空题（本题 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{3x}-1)}{\ln(1+x^2)}$ = ___3___ .

2. 设 $y=2^{x^x}$，则 $y'=\underline{2^{x^x}\cdot x^x\cdot\ln 2(1+\ln x)}$.

3. 设函数 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$, 则其渐近线是 $\underline{\quad y=x\qquad}$.

4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2+\sin^3 x)\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\underline{\quad 4\quad}$.

5. 直线 $z=1-y$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面 的方程是 $\underline{x^2+y^2-(z-1)^2=0}$.

二．选择题（本题 20 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2, & x\le 0\end{cases}$ 则 $f(x)$在 $x=0$ 处___D___.

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导.

2.已知方程 $xe^{-x}=a\ (a>0)$ 有唯一的实根，则$a=$ ___A___

(A) $a=e^{-1}$　(B) $a>e^{-1}$　(C) $a<e^{-1}$　(D) $a\ne e^{-1}$.

3. 设函数 $f(x)$ 在$x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其极小值,，则存在 $\delta>0$, 当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有___D___.

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\ge 0$.　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\le 0$.

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\ge 0, (x\ne a)$　(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\le 0, (x\ne a)$

4. 下列广义积分中，发散的为 ___B___

(A) $\int_0^1\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$　(B) $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$　(C) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx$　(D) $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$.

5. 下面结论错误的是___C___

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界

(B) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也必可积

(C) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上必可导

(D) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必可积

三.（本题 10 分）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{2}}{2}\right)^n$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{2}-1}{2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{2}-1}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2}-1}\cdot\frac{(\sqrt[n]{2}-1)n}{2}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt[n]{2}-1)}{2\cdot\frac{1}{n}}}=e^{\frac{\ln 2}{2}}=\sqrt{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left(\int_0^u\sin(u-t)^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u}{x^2\sin x^2}$

$$\because \int_0^u\sin(u-t)^2\,\mathrm{d}t\ \underline{\underline{w=u-t}}\ \int_0^u\sin(w)^2\,\mathrm{d}w,$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left(\int_0^u\sin(u-t)^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left(\int_0^u\sin(u-t)^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin w^2\,\mathrm{d}w}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{12x^2}=\frac{1}{12}$$

四.（本题 10 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x\sin 2x}{x^2}=0,$

求 $f(0), f'(0), f''(0).$

解 $\quad\because f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),$

$\quad x\sin 2x=2x^2+o(x^2),$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)-x\sin 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2-2x^2+o(x^2)}{x^2},$$

故 $\quad f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=4.$

2. 设 函数 $y=y(x)$由方程$e^{xy}=2x+y$所确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

解 当 x=0 时， y=1.

方程$e^{xy}=2x+y$两端对x求导得

$$e^{xy}(y+xy')=2+y',$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2-ye^{xy}}{xe^{xy}-1},\quad \frac{dy}{dx}|_{x=0}=-1.$$

五.（本题 10 分）

1. $\int(\arcsin x)^2\,dx$

解 $\int(\arcsin x)^2\,dx=x(\arcsin x)^2-\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x\,d\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\sqrt{1-x^2}-2\int dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\sqrt{1-x^2}-2x+C$$

2. 计算 $\int_0^1\frac{x^3+1}{(\sqrt{1+x^2})^3}dx$

解

$$\int_0^1\frac{x^3+1}{(\sqrt{1+x^2})^3}dx\ \underline{\underline{x=\tan t}}\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^3 t+1}{\sec^3 t}d\tan t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}+\cos t)\,dt=\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 t-1}{\cos^2 t}d\cos t$$

$$=2\sqrt{2}-2$$

六.（本题 10 分）

设曲线$y=x^2$与直线$y=ax(0<a<2)$围成的平面图形的面积为S_1，曲线$y=x^2$与直线$y=ax(0<a<2)$及$x=2$围成的平面图形的面积为S_2.

(1) 求S_1,S_2,

(2) 求a的值使S_1+S_2最小.

解 (1) $S_1=\int_0^a(ax-x^2)dx=\frac{a^3}{6}$.

$S_2=\int_a^2(x^2-ax)dx=\frac{8}{3}-2a+\frac{a^3}{6}.$

(2) $S_1+S_2=\frac{8}{3}-2a+\frac{a^3}{3}.$

设 $f(x)=\frac{8}{3}-2x+\frac{x^3}{3},0<x<2,$

$f'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{2},$

$\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\frac{8}{3},\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\frac{4}{3},f(\sqrt{2})=\frac{8-4\sqrt{2}}{3},$

$\therefore$ 当 $a=\sqrt{2}$ 时，S_1+S_2 最小.

七．（本题 10 分）

试证明两条直线 $L_1:\begin{cases}x+y-z+4=0\\2x+3y-z-4=0\end{cases}$ 与 $L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$ 是共面的，并写出它们所在的平面方程.

解

$\because \vec{s}_1//\vec{s}_2,\therefore L_1$ 与 L_2 共面.

它们所在的平面方程.为 $10x+13y-7z+4=0$

八．（本题 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$. 证明对于任意实数 λ, 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'(1-\xi)=\lambda f(1-\xi)$$

证明

设 $F(x)=e^{\lambda x}f(1-x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导, 且 $F(0)=F(1)=0$.

由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$,

即对于任意实数 λ, 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(1-\xi)=\lambda f(1-\xi)$