北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

§6.4 定积分的计算:
分部积分与换元公式

一、分部积分公式

定理4.1 设函数$u(x)$、$v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数，则有

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

或 $$\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$

定积分的分部积分公式

二、换元公式

定理4.2 假设（1）$f(x)$在$[a,b]$上连续；

（2）函数$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续导数；

（3）当t在区间$[\alpha,\beta]$上变化时，$x=\varphi(t)$的值在$[a,b]$上变化，且$\varphi(\alpha)=a$、$\varphi(\beta)=b$，

则有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

证明 设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,

定义$\Phi(t)=F[\varphi(t)]$,

易证其是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$$

$$=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

注 当$\alpha>\beta$时，换元公式仍成立.

应用换元公式时应注意:

（1）由左到右时 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

相当于第二类换元法

由右到左时 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$

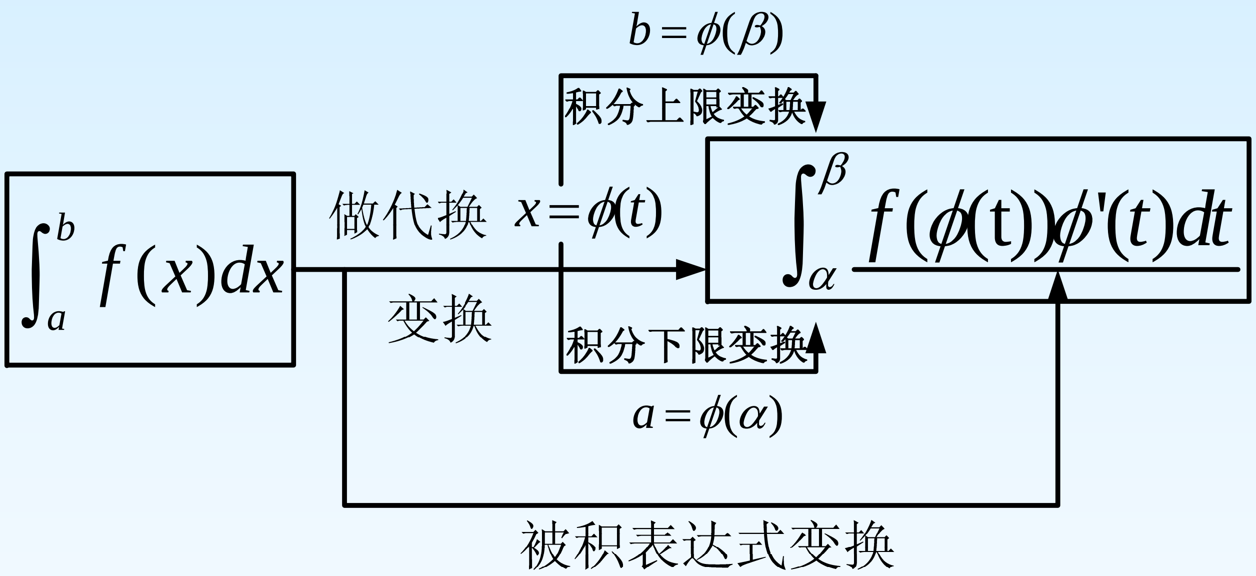
相当于第一类换元法

把原变量换成新变量时，积分限也相应改变.

（2） $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必再把 $\Phi(t)$ 变换成原变量 x 的函数，而只求 $\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$.

- 定积分的换元公式示意图



推论 4.1

(1)若 $f(x)$ 为偶函数，且在 $[-a,a]$ 上可积，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

(2)若 $f(x)$ 为偶函数，且在 $[-a,a]$ 上可积，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

(3)若 $f(x)$ 是R上的周期为 T 的连续函数，则对任意实数 a,成立

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

证 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx,$

在 $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ 中令 $x = -t$,

$$\boxed{\int_{-a}^{0} f(x)dx =} -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \boxed{\int_{0}^{a} f(-t)dt,}$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx,$$

(1) $f(x)$为偶函数，则$f(-x) = f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

(2) $f(x)$为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

$$(3)\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{a+T} f(x)dx$$

$$(u = x - T)$$

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(u)du$$ 结论得证

例1 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx.$

解 令 $t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx,$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0, \qquad x = 0 \Rightarrow t = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$$

$$= -\int_1^0 t^5 dt = \left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

例2 计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx.$

解 因为 $f(x)=\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x$$

$$=\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}.$$

例3 计算$\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

解 原式 $= \displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

$$= \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}\sqrt{(1-\ln x)}} = 2\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$$

$$= 2\Big[\arcsin(\sqrt{\ln x})\Big]_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi}{6}.$$

例4 计算 $\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx. \quad (a>0)$

解 令 $x = a\sin t, \quad dx = a\cos t dt,$

$$x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \qquad x = 0 \Rightarrow t = 0,$$

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t}{a\sin t + \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\Big[\ln|\sin t + \cos t|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

例5 计算$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 原式$=\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx+\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx$

偶函数　　奇函数

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx=4\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})dx$$

$$=4-\boxed{4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx}=4-\pi.$$

单位圆的面积

例6 若 $f(x)$在$[0,1]$上连续，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

并由此计算$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

证（1）设$x = \frac{\pi}{2} - t$, 则$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$$

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

设 $x = \pi - t$, 则 $x = 0 \Rightarrow t = \pi, x = \pi \Rightarrow t = 0,$

$$\boxed{\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx} = -\int_{\pi}^{0}(\pi - t) f[\sin(\pi - t)]dt$$

$$= \int_0^{\pi}(\pi - t) f(\sin t)dt,$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \boxed{\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx,}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

例7 设 $f(x)$ 在区间R上连续，则

$$\int_0^{2\pi} f\left(a\cos\theta+b\sin\theta\right)d\theta=\int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda\right)d\lambda$$

证明:

$$\int_0^{2\pi} f\left(a\cos\theta+b\sin\theta\right)d\theta=\int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\theta-\alpha\right)\right)d\theta,$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

令 $\theta-\alpha=\lambda,$

$$\int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\theta-\alpha\right)\right)d\theta=\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda\right)d\lambda$$

$$=\int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda\right)d\lambda$$

例8 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

解 令 $u = \arcsin x$, $dv = dx$,

则 $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \left[x \arcsin x\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例9 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x}$.

解 因为 $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$,

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} xd(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2}[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}[\ln\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

例10 计算$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx.$

解 $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)d\left(\frac{1}{2+x}\right)$$

$$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}d\ln(1+x)$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \boxed{\frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}}dx \qquad \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + [\ln(1+x) - \ln(2+x)]_0^1 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$$

例11 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$, 求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

解 $\frac{\sin t}{t}$的原函数无法直接求出,所以用分部积分法

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2 f(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)dx$$

$$f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x},$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2 dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2 d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

例12 证明定积分公式

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇数} \end{cases}$$

证　设 $u=\sin^{n-1}x,\ dv=\sin x dx,$

$$I_n=\underbrace{\left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}dx$$

$$I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}xdx$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$ 积分I_n关于下标的递推公式

$$I_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}$$ ……，直到下标减到0或1为止

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0,$$

$$(m=1,2,\cdots)$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1,$$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2},\qquad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=1,$$

于是 $$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

三、小结

定积分的换元法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

几个特殊积分、定积分的几个等式

定积分的分部积分公式

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu.$$

作业 习题6.4 1(2)(4)(6)\2(2)\5\6(1)\8

补例1： 设**f(x)**在**[a,b]**上有连续的二阶导函数，

$f(a)=f(b)=0$ 证明：

$$(1)\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$$

$$(2)\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{1}{12}(b-a)^3\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$$

证明：（１）

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)d(x-a)=f(x)(x-a)\Big|_a^b-\int_a^b (x-a)f'(x)dx$$

$$=-\int_a^b (x-a)f'(x)dx=-\int_a^b (x-a)f'(x)d(x-b)$$

$$=-(x-a)f'(x)(x-b)\Big|_a^b+\int_a^b\{(x-a)f''(x)+f'(x)\}(x-b)dx$$

$$=\int_a^b\{(x-a)f''(x)+f'(x)\}(x-b)dx$$

$$=\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx+\int_a^b\{f'(x)\}(x-b)dx$$

$$=\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx+f(x)(x-b)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx$$

$$2)\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b |(x-a)||(x-b)||f''(x)|dx$$

$$\le \frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\int_a^b |(x-a)||(x-b)|dx$$

$$= \frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\int_a^b (x-a)(b-x)dx$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)^3 \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

补例2 设$f(x)$满足$\int_0^1 f(tx)dt = f(x) + x\sin x$，$f(0)=0$，

且有一阶导数，求 $f(x)$（$x\neq 0$）.

解： 设 $y = tx$，则

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy = xf(x) + x^2\sin x$$

两边对x求导得到：

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 2x\sin x + x^2\cos x \ (x\neq 0),$$

则 $f'(x) = -2\sin x - x\cos x.$

§6.5 积分中值定理

定理5.1（积分第一中值定理）

假设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续.$g(x)$在$[a,b]$上不变号

则存在$\theta\in[a,b]$满足：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\theta)\int_a^b g(x)dx.$$

证明 不妨假设,$g(x)\ge 0, x\in[a,b]$,

设M,m为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值,则

t1

$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x).$$

$$\therefore \quad \int_a^b mg(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b Mg(x)dx,$$

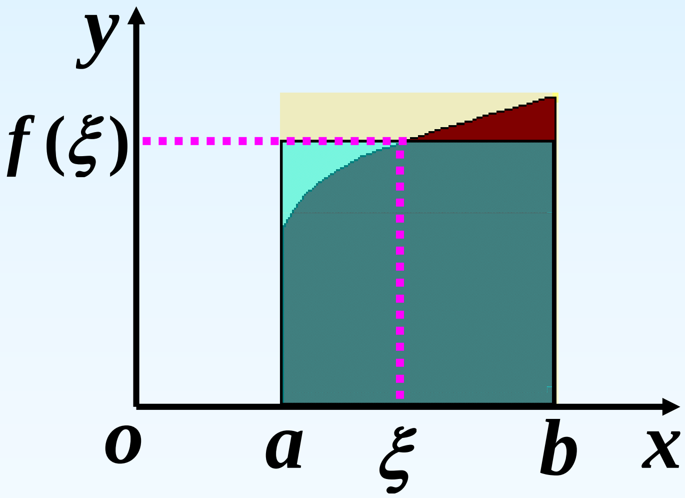
等价于$m\le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M$，由连续函数的介值定理即得.

注 同样的条件可以得到存在的$\theta\in(a,b)$

推论

$$f\in C[a,b],\exists\xi\in(a,b),\text{使}\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

几何解释：



在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边，以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积.

定理5. 2（积分第二中值定理）

设函数f在$[a,b]$上可积,

1)如果函数g在$[a,b]$上非负递减,则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx.$$

2)如果函数g在$[a,b]$上非负递增,则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

t2

定理5. 3（积分第三中值定理）

若f在$[a,b]$上可积, g为单调函数,则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

例1 $f(x)$在$[a,b]$连续,(a,b)可导，且有

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)$$

证明：存在$\xi \in (a,b), st. f'(\xi) = 0.$

证明 由积分中值定理知$\exists \eta \in (a, \frac{a+b}{2}),$

$$使得 f(\eta) = \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)$$

再在$[\eta,b]$上使用微分中值定理即可.

例2 $f(x)$在$[0,1]$连续、单调减少，证明对$\forall\alpha\in[0,1]$,有

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx$$

证明 问题等价于对$\forall\alpha\in[0,1]$,有

$$(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)dx \ge \alpha\int_{\alpha}^1 f(x)dx$$

两端分别使用积分中值 定理得

$$(1-\alpha)\alpha f(x_1) \ge (1-\alpha)\alpha f(x_2)$$

显然有$f(x_1)\ge f(x_2)$.

例3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx \quad p,n$ 为自然数.

解 因为 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[n,n+p]$ 上连续，由积分中值定理，

$\exists\xi_n\in(n,n+p)$，使得 $\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\cdot p.$

又因为 $n\to\infty$ 时， $\xi_n\to\infty$， 而 $|\sin\xi_n|\le 1$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0.$

作业 习题6.5 1\2\3(1)(2)

补例 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)dx$.

解：

$$\int_0^1 xf''(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 xdf'(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[xf'(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx = \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}\left[f(2x)\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\left[f(2) - f(0)\right] = 2.$$

补例 证明：如果$f(x)$在$[0,\ \pi]$上连续，且$\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=0$，则存在$\xi_1,\ \xi_2$，且$\xi_1 \neq \xi_2$，使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)$.

证 由中值定理，存在 $\xi_1 \in (0, \dfrac{\pi}{2})$，$\xi_2 \in (\dfrac{\pi}{2}, \pi)$，使得

$$0=\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x dx$$

$$=f(\xi_1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+f(\xi_2)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx$$

$$=f(\xi_1)-f(\xi_2)$$

原命题得证.