



第六章 图

郑征

zhengz@buaa.edu.cn

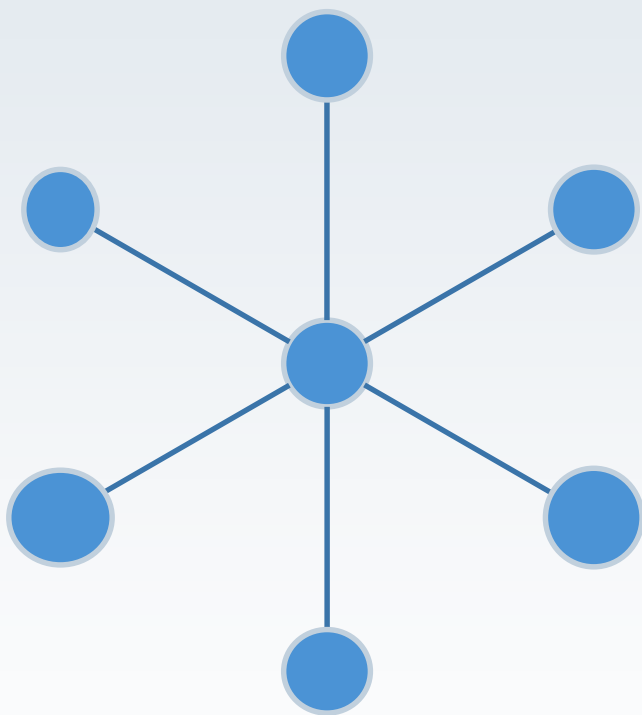
软件与控制研究室



第六章 图

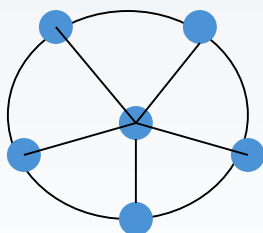
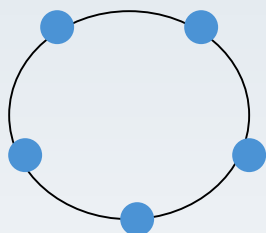
第四讲 几种特殊的图

局域网



- 在一座大楼里，像小型计算机和个人电脑这样的各种计算机，以及像打印机和绘图仪这样的外设，都可以用局域网来连接。一些这样的网络是基于星形拓扑，其中所有设备都连接到中央控制设备。通过中央控制设备在设备间传输信息。

局域网



- 有些局域网基于环形拓扑，其中每个设备恰恰连接到两个其他设备。
- 有些局域网采用者两种拓扑的混合形式。消息是围绕着环或者中央设备来传送，这样的荣誉使得网络更加可靠。

第4讲几种特殊的图

- 1. 二部图
- 2. 欧拉图
- 3. 哈密顿图
- 4. 平面图

二部图

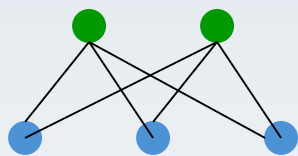
二部图

- 定义：若能将无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 的顶点集 V 分成两个子集 V_1 和 V_2 ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$) 使得 G 中任何一条边的两个端点一个属于 V_1 ，另一个属于 V_2 ，则称 G 为**二部图**， V_1 和 V_2 称为**互补顶点子集**。若 G 是二部图，也可将 G 记为 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ ，其中 V_1, V_2 是**互补顶点子集**。

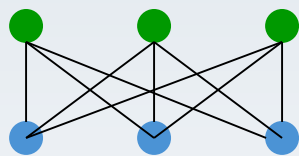
完全二部图

- 定义：若 V_1 中的任一顶点与 V_2 中任一顶点均有且仅有一条边相关联，则称二部图 G 为完全二部图。若 $|V_1|=r$ 和 $|V_2|=s$ ，则记为完全二部图为 $K_{r,s}$ 。

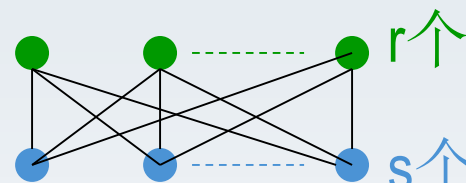
二部图



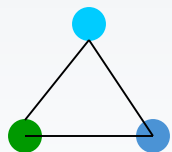
$K_{2,3}$



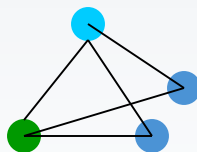
$K_{3,3}$



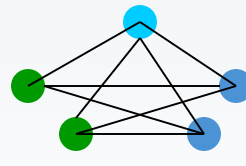
$K_{r,s}$



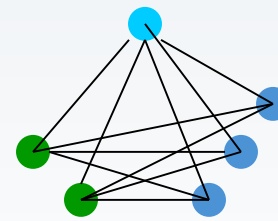
$K_{1,1,1}$



$K_{1,1,2}$

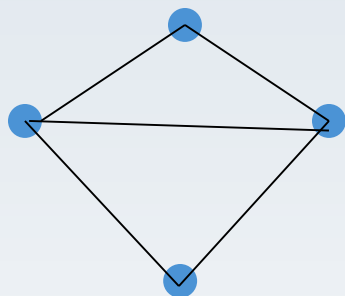


$K_{1,2,2}$

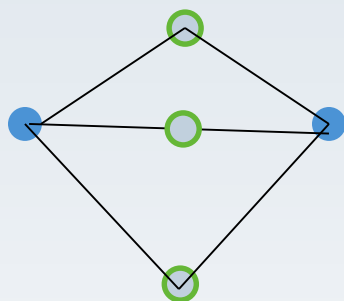


$K_{1,2,3}$

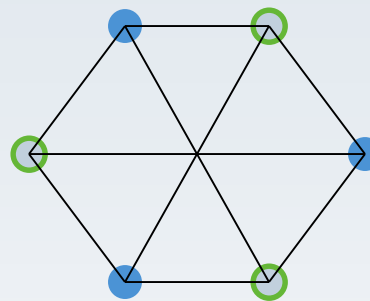
二部图



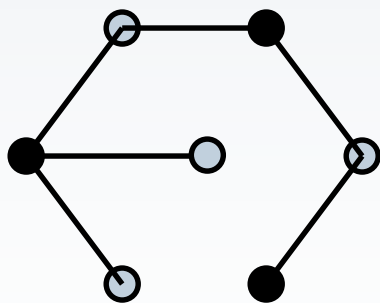
(a)



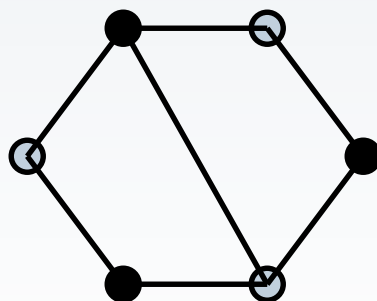
(b)



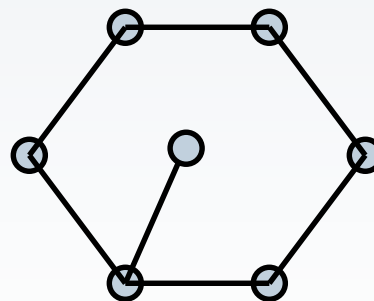
(c)



(d)



(e)



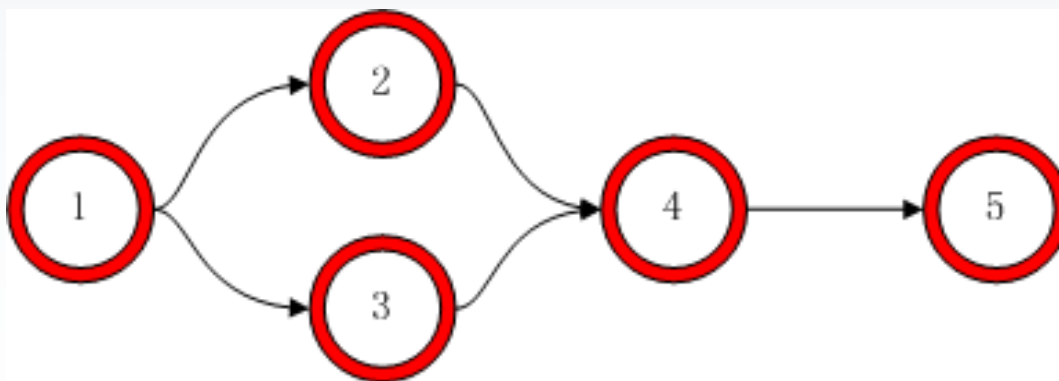
(f)

二部图

- 定理：一个无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 是二部图当且仅当 G 中无奇数长度的回路。
- 证明：。。。。

在实际问题进行建模时

- 部分的划分可以根据时间
- 部分的划分可以根据空间
- ○ ○ ○



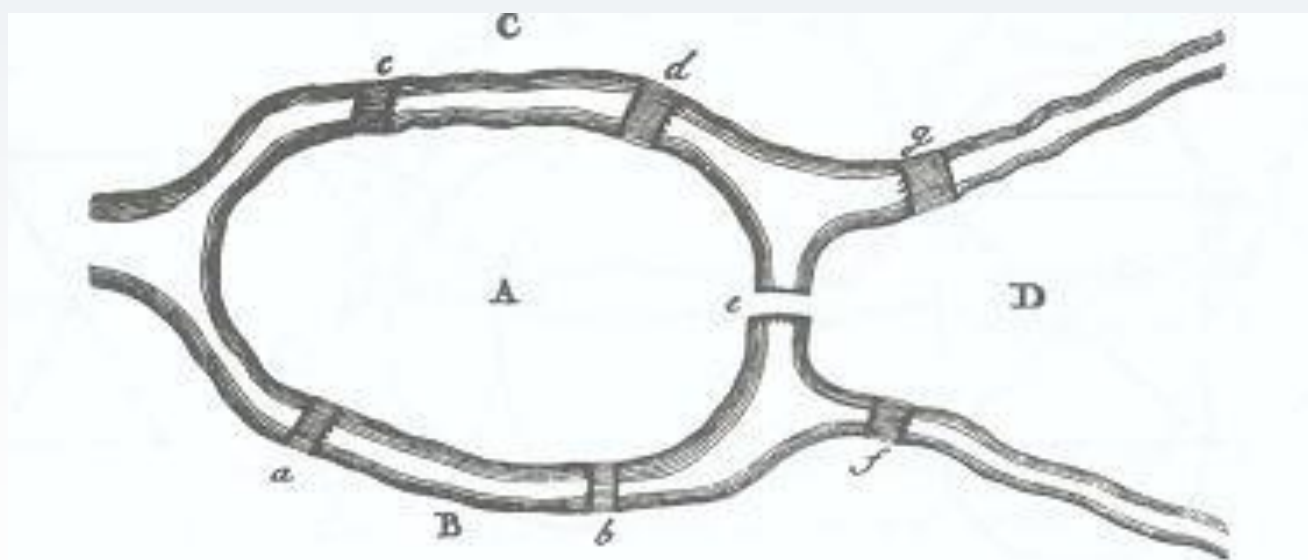
欧拉图

欧拉图

- 1. 七桥问题,一笔画
- 2. 欧拉通(回)路,欧拉图
- 2. 判定欧拉图的充分必要条件
- 3. 求欧拉回路的算法
- 4. 中国邮递员问题

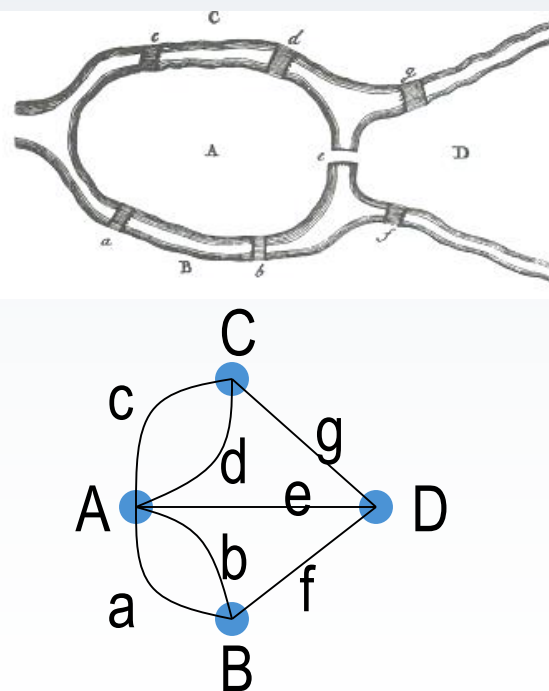
七桥问题

- 七桥问题(Seven bridges of Königsberg problem): River Pregel, Kaliningrad, Russia

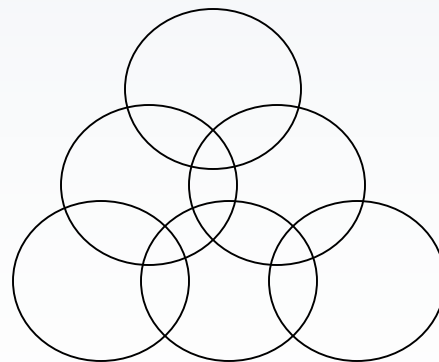
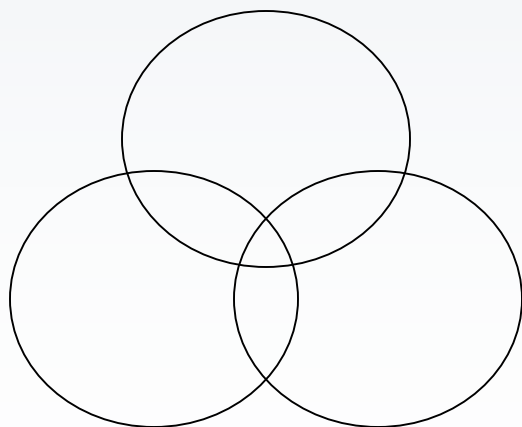
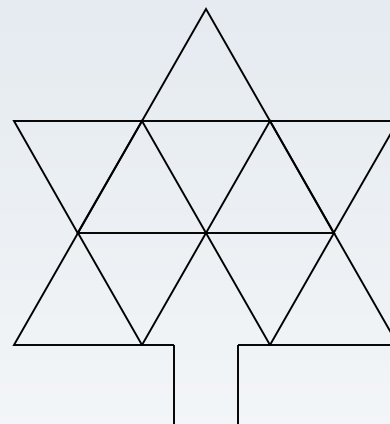
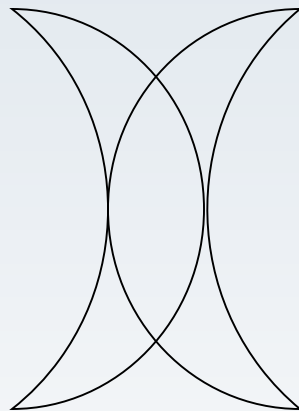
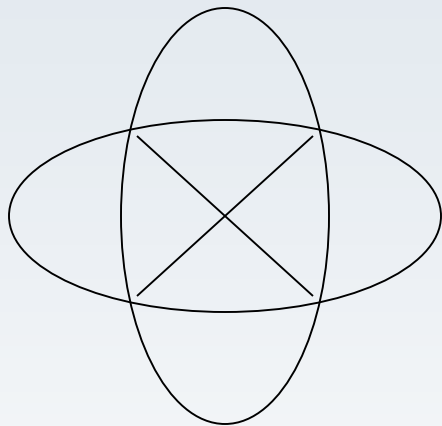


Leonhard Euler

- Leonhard Euler(1707~1783):
 - 人类有史以来最多产的数学家.
 - 1736年, “七桥问题”, 图论和拓扑学诞生



一笔画



欧拉图(Eulerian)

简单通路：若 Γ
中所有边各异

- 欧拉通路(Euler trail): 经过图中**所有**边的简单通路
- 欧拉回路(Euler tour/circuit): 经过图中**所有**边的简单回路
- 欧拉图(Eulerian): 有欧拉回路的图
- 半欧拉图(semi-Eulerian): 有欧拉通路的图

无向欧拉图的充分必要条件

- **定理1**: 设 G 是无向连通图,则

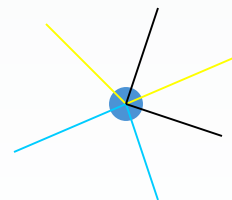
- (1) G 是欧拉图

- \Leftrightarrow (2) G 中所有顶点都是偶数度;

- \Leftrightarrow (3) G 是若干个边不交的圈的并

- **证明**: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

- $(1) \Rightarrow (2)$: 若欧拉回路总共 k 次经过顶点 v ,则 $d(v)=2k$.

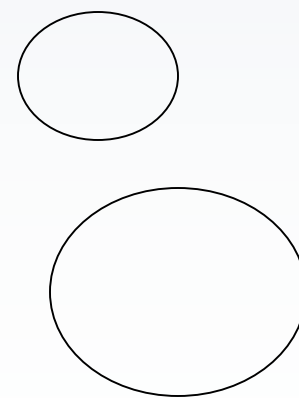
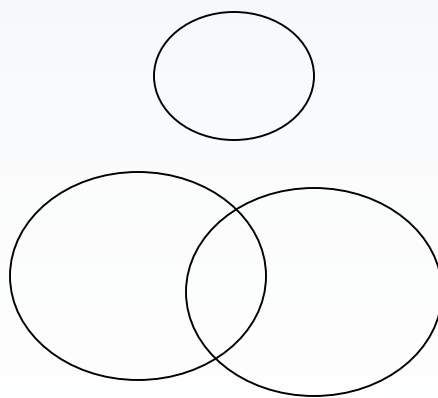
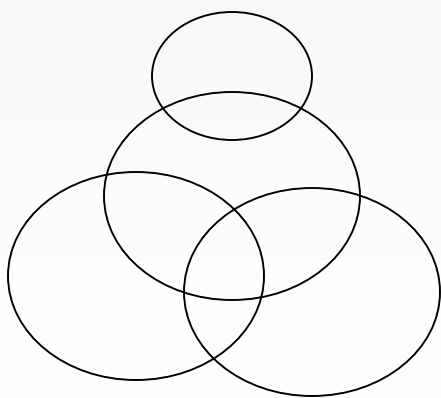


定理1((2) \Rightarrow (3))

(2) G 中所有顶点都是偶数度

(3) G 是若干个边不交的圈的并

- 证明: (2) \Rightarrow (3): 若删除任意1个圈上的边, 则所有顶点的度还是偶数, 但是不一定连通了. 对每个连通分支重复进行.

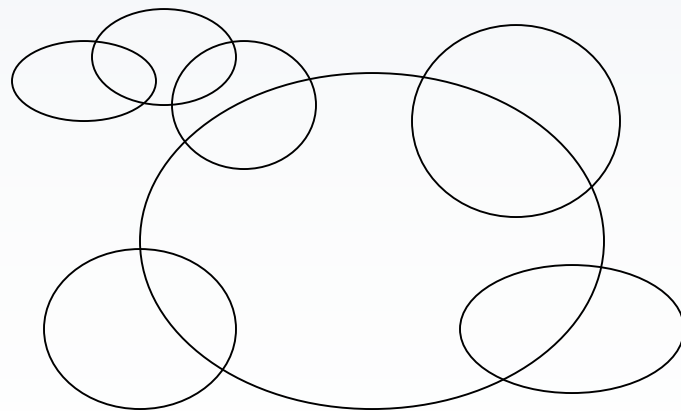
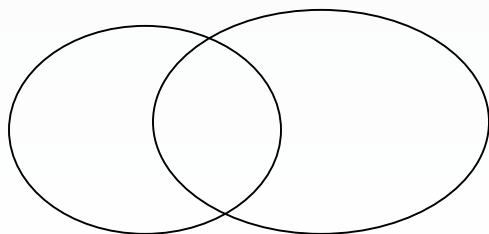


定理1((3) \Rightarrow (1))

(1) G 是欧拉图

(3) G 是若干个边不交的圈的并

- 证明: (3) \Rightarrow (1): 有公共点但边不交的简单回路, 总可以拼接成欧拉回路: 在交点处, 走完第1个回路后再走第2个回路. #
- 用归纳法严格证明



有向欧拉图的充分必要条件

- 定理3: 设 G 是有向连通图,则

(1) G 是欧拉图

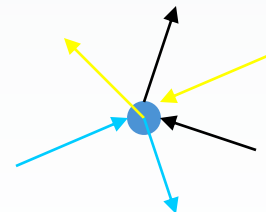
\Leftrightarrow (2) $\forall v \in V(G), d^+(v)=d^-(v)$

\Leftrightarrow (3) G 是若干个边不交的有向圈的并

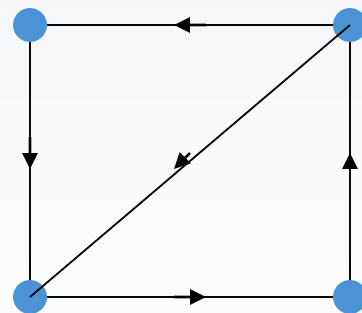
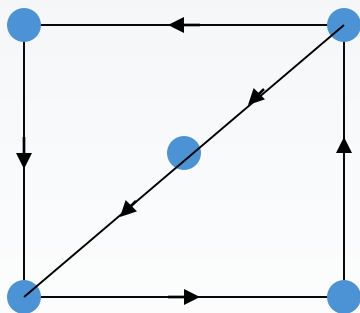
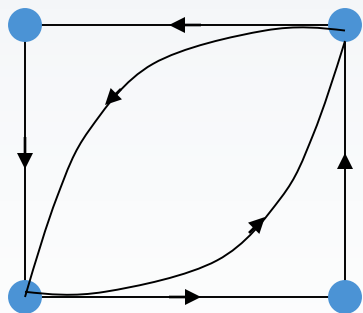
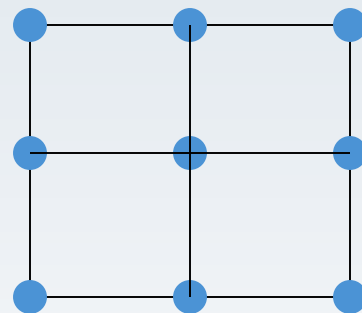
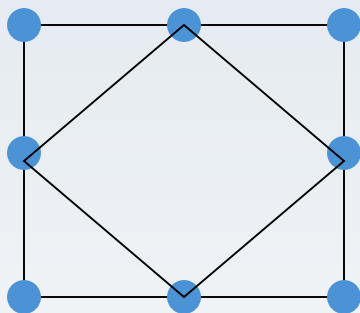
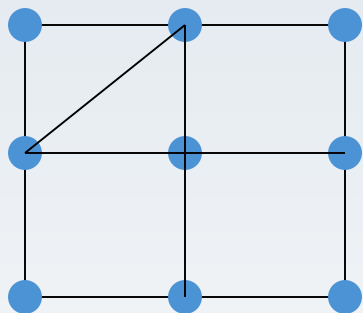
- 证明: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$: 若欧拉回路总共 k 次经过顶点 v ,则
 $d^+(v)=d^-(v)=k$.

其余与定理1类似. #

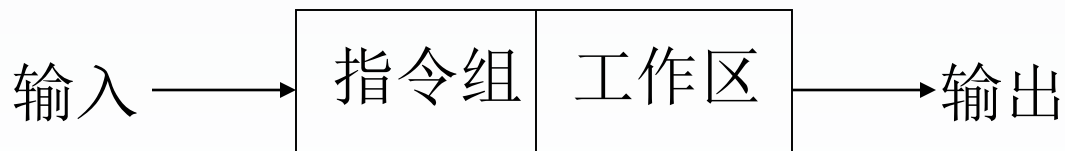


例



算法(algorithm)

- 一组有限条指令, 具有以下特征:
 - 输入: 算法工作对象
 - 输出: 算法工作结果
 - 确定性: 算法根据输入和当前工作状态, 决定下一步采用的指令
 - 可行性: 算法的指令都是可以实现的
 - 终止性: 算法工作有穷步后停止



Fleury算法

- 输入: 连通图 G , 起点 v , 终点 w . 若 $v \neq w$, 则除 v, w 外的顶点都有偶数度; 若 $v = w$, 则所有顶点都有偶数度.
- 输出: 从 v 到 w 的欧拉通路/欧拉回路.
- 算法: (下一页)

Fleury算法(递归形式)

- 算法:

- (1) **if** $d(v) > 1$ **then** $e := v$ 关联的任意非割边
- (2) **else** $e := v$ 关联的唯一边
- (3) $u := e$ 的另一个端点.
- (4) 递归地求 $G - e$ 的从 u 到 w 的欧拉通路
- (5) 把 e 接续在递归地求出的通路上

Fleury算法(迭代形式)

- 算法:

(1) $P_0 := v$;

(2) 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i$ 已经行遍, 设 $G_i = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$,

$e_{i+1} := G_i$ 中满足如下2条件的边:

(a) e_{i+1} 与 v_i 关联

(b) 除非别无选择, 否则 e_{i+1} 不是 G_i 中的桥

(3) 若 $G_i \neq N_i$, 则回到(2); 否则算法停止

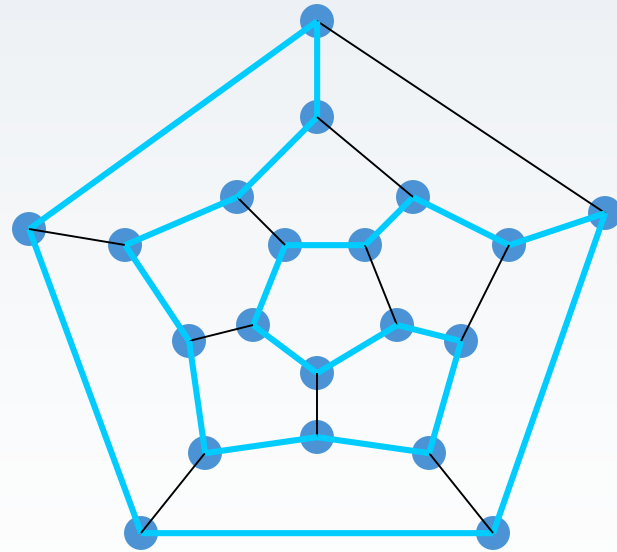
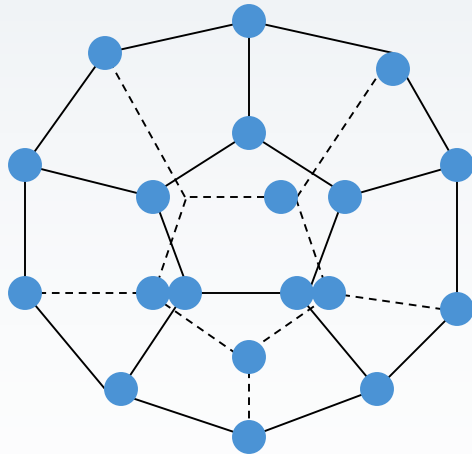
哈密顿图

哈密顿图

- 1. 周游世界
- 2. 哈密顿通(回)路,哈密顿图
- 3. 判定哈密顿图的必要条件
- 4. 判定哈密顿图的充分条件
- 5. 货郎问题, 计算复杂性

周游世界

- Sir William Rowan Hamilton, 1857, Icosian game:



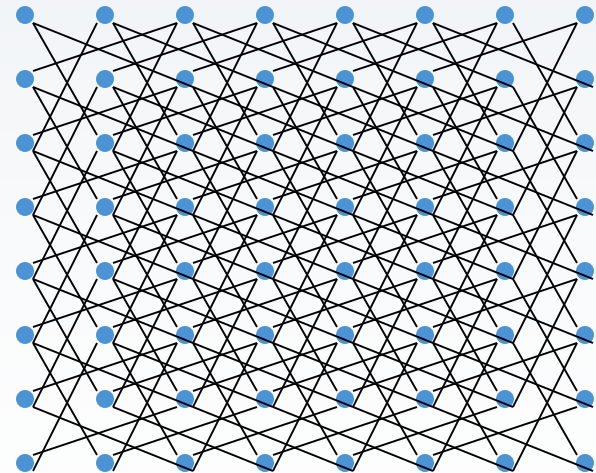
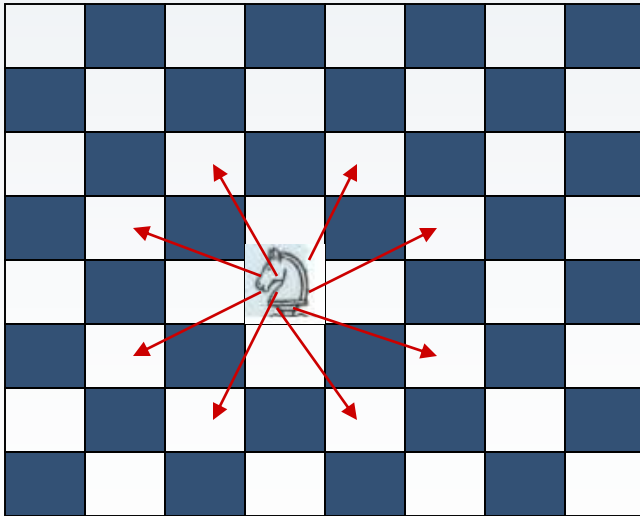
Willam Rowan Hamilton

- Willam Rowan Hamilton(1805~1865):
 - 爱尔兰神童(child prodigy)
 - 三一学院(Trinity College)
 - 光学(optics)



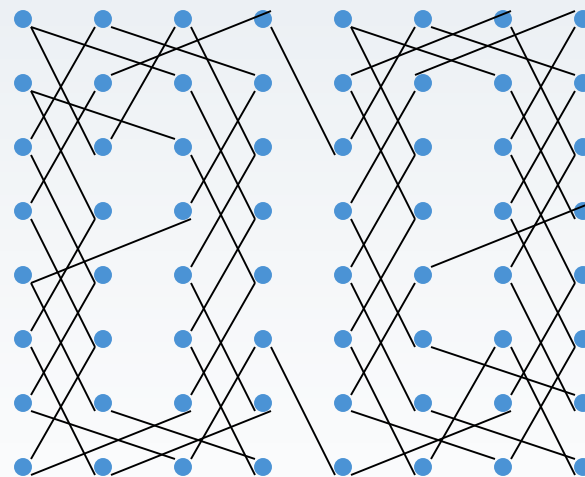
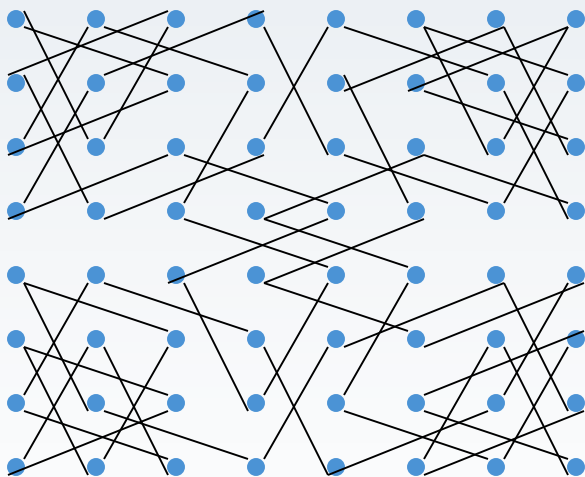
马的周游路线(knight's tour)

- Leohard Euler, 1759, 棋盘上马的周游路线(knight's tour on a chessboard)



马的周游路线(knight's tour)

- Leohard Euler, 1759, 详细分析



哈密顿图(Hamilton)

- 哈密顿通路(Hamilton path): 经过图中所有顶点的初级通路
- 哈密顿回路(Hamilton circuit/cycle): 经过图中所有顶点的初级回路
- 哈密顿图(Hamiltonian): 有哈密顿回路的图
- 半哈密顿图(semi- Hamiltonian): 有哈密顿通路的图

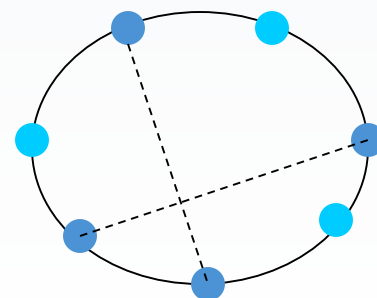
初级通路（路径）：若 Γ 中所有顶点各异，所有边也各异；

无向哈密顿图的必要条件

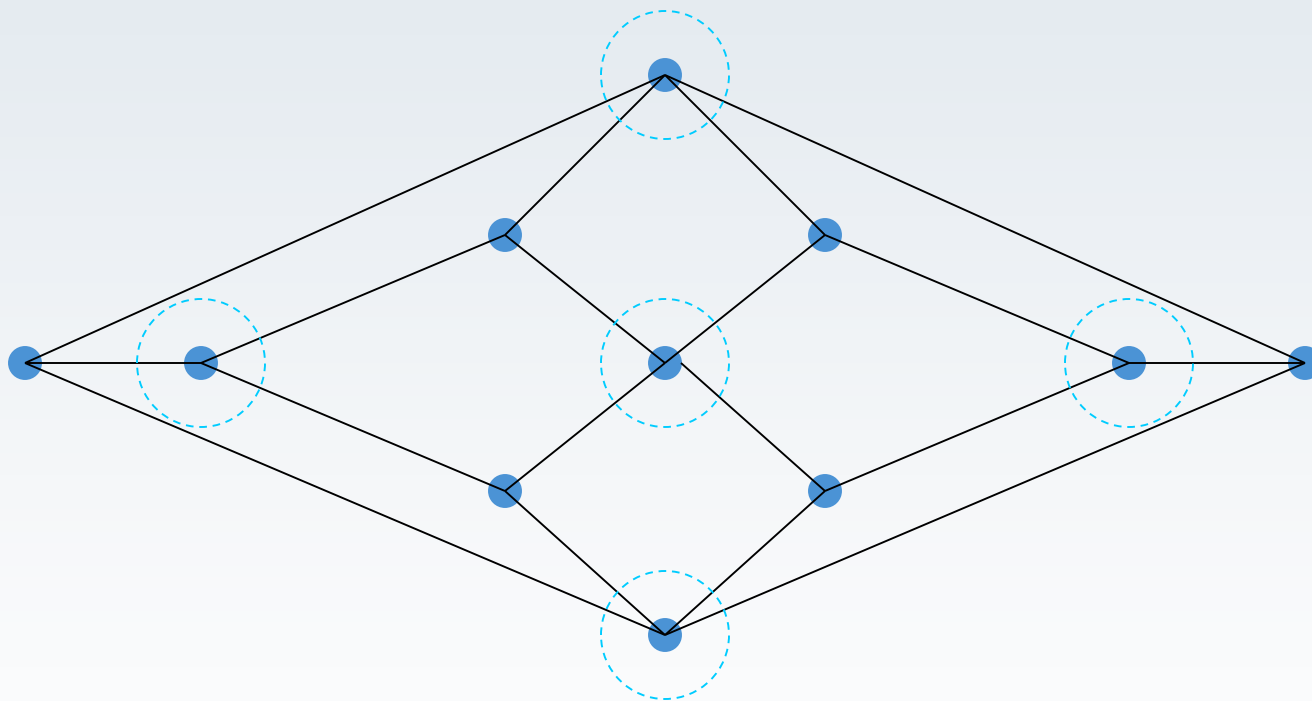
- **定理6**: 设 $G=\langle V, E \rangle$ 是无向哈密顿图, 则对 V 的任意非空真子集 V_1 有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$

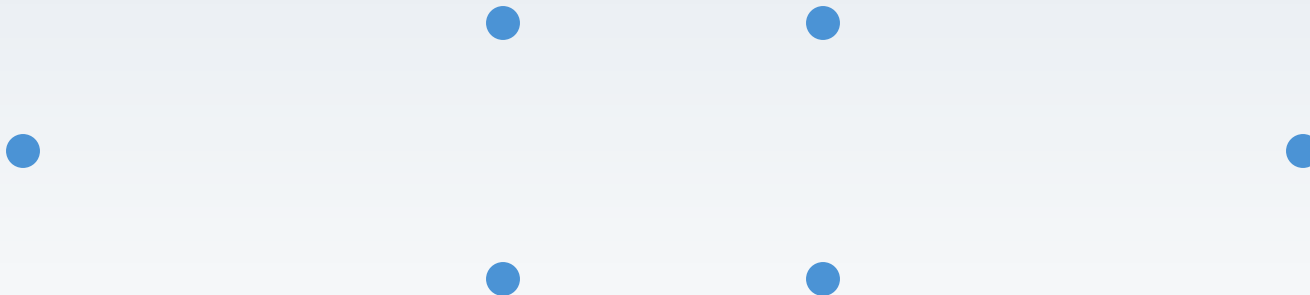
- **证明**: 设 C 是 G 中任意哈密顿回路, 当 V_1 中顶点在 C 中都不相邻时, $p(C-V_1)=|V_1|$ 最大; 否则, $p(C-V_1) < |V_1|$. C 是 G 的生成子图, 所以 $p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1|$. #



举例

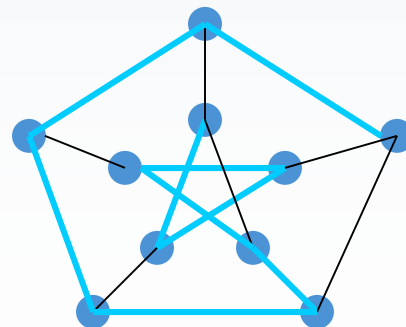
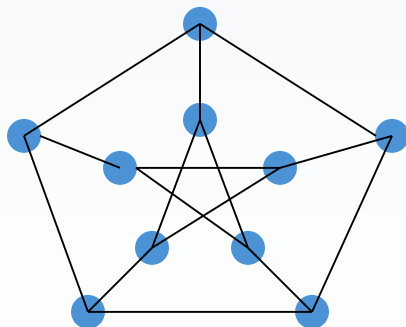


举例(续)



反例：非充分条件

- 上述条件只是必要条件,而不是充分条件
- 反例：Petersen图
 - Petersen图满足： $\forall V_1 \neq \emptyset, p(G-V_1) \leq |V_1|$
 - Petersen图不是哈密顿图：穷举
 - Petersen图是半哈密顿图



无向半哈密顿图的充分条件

- **定理7:** 设 G 是 $n(\geq 2)$ 阶无向简单图,若对 G 中任意不相邻顶点 u 与 v 有

$$d(u)+d(v)\geq n-1$$

则 G 是半哈密顿图.

无向哈密顿图的充分条件

- 推论1: 设 G 是 $n(\geq 3)$ 阶无向简单图,若对 G 中任意不相邻顶点 u 与 v 有

$$d(u)+d(v)\geq n$$

则 G 是哈密顿图.

无向哈密顿图的充分条件

- 推论2: 设 G 是 $n(\geq 3)$ 阶无向简单图,若对 G 中任意顶点 u 有

$$d(u) \geq n/2$$

则 G 是哈密顿图.

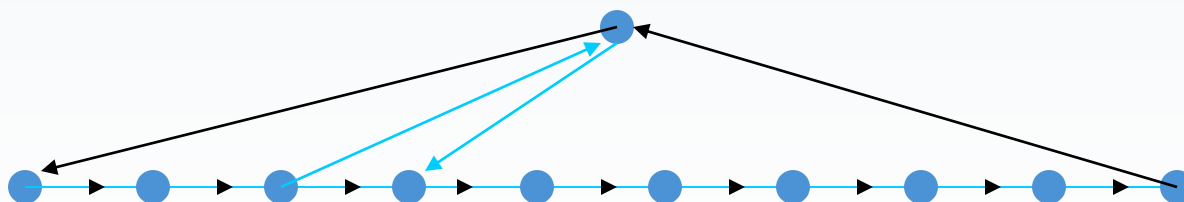
- 证明: 由推论1. #

定理8

- 定理8: 设 u, v 是无向 n 阶简单图 G 中两个不相邻顶点, 且 $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 是哈密顿图 $\Leftrightarrow G \cup (u, v)$ 是哈密顿图.

有向半哈密顿图的充分条件

- **定理9**: 设 D 是 $n(\geq 2)$ 阶竞赛图, 则 D 是半哈密顿图. #
- **推论**: 设 D 是 n 阶有向图, 若 D 含 n 阶竞赛图作为子图, 则 D 是半哈密顿图. #

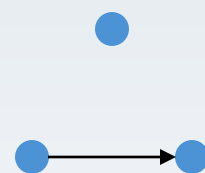


有向哈密顿图的充分条件

- 定理10: 强连通的竞赛图是哈密顿图.

- 证明: $n=1$ 时,平凡图是哈密顿图.

$n=2$ 时,不可能强连通. 下面设 $n \geq 3$.



(1) D 中存在长度为3的圈.

(2) D 中存在长度为 k 的圈 $\Rightarrow D$ 中存在长度为 $k+1$ 的圈.

证明自学

定理10(证明(1))

- 证明(续): (1) D 中存在长度为3的圈.

$\forall v \in V(D)$, 考虑 v 的前驱集

$\Gamma_D^-(v) = \{ u \in V(D) \mid \langle u, v \rangle \in E(D) \}$ 与后继集

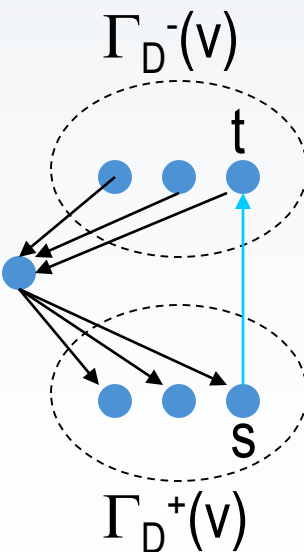
$\Gamma_D^+(v) = \{ u \in V(D) \mid \langle v, u \rangle \in E(D) \}$.

D 强连通竞赛图, 所以 $\Gamma_D^-(v) \neq \emptyset$,

$\Gamma_D^+(v) \neq \emptyset, \Gamma_D^-(v) \cup \Gamma_D^+(v) = V(D) - \{v\}$,

$\exists s \in \Gamma_D^+(v), \exists t \in \Gamma_D^-(v), \langle s, t \rangle \in E(D)$.

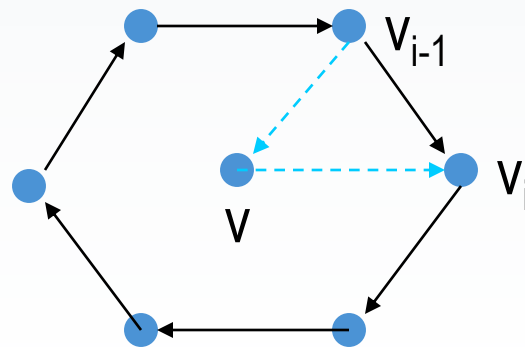
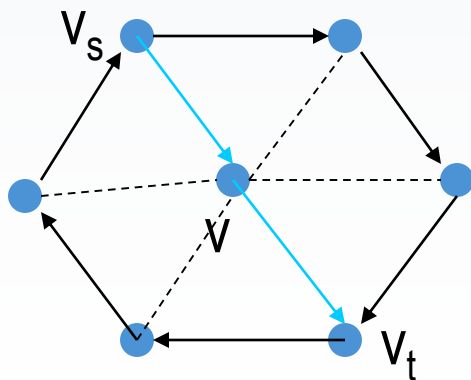
于是 $C = vstv$ 是长度为3的圈.



定理10(证明(2))

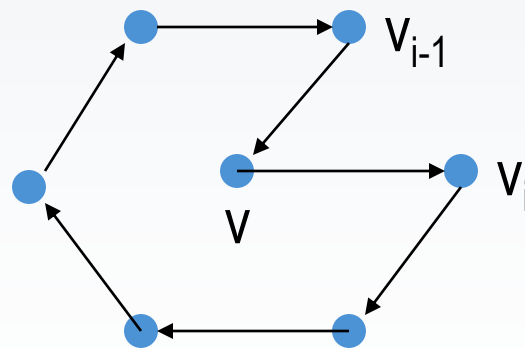
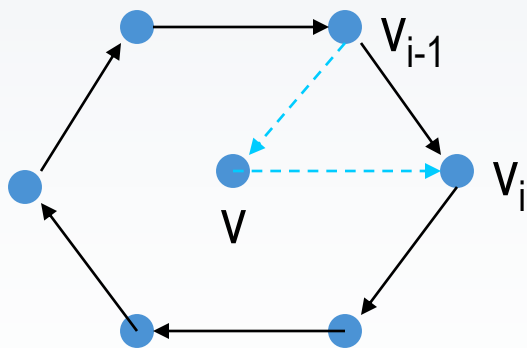
- 证明(续): (2) D 中存在长度为 k 的圈 $\Rightarrow D$ 中存在长度为 $k+1$ 的圈: 设 D 中长度为 k ($3 \leq k \leq n$) 的圈 $C=v_1v_2 \dots v_kv_1$.

(2a) $\exists v \in V(D-C), \exists v_s \in V(C), \exists v_t \in V(C), \langle v_s, v \rangle \in E(D), \langle v, v_t \rangle \in E(D)$: 则 $\exists v_{i-1} \in V(C), \exists v_j \in V(C), \langle v_{i-1}, v \rangle \in E(D), \langle v, v_j \rangle \in E(D)$.



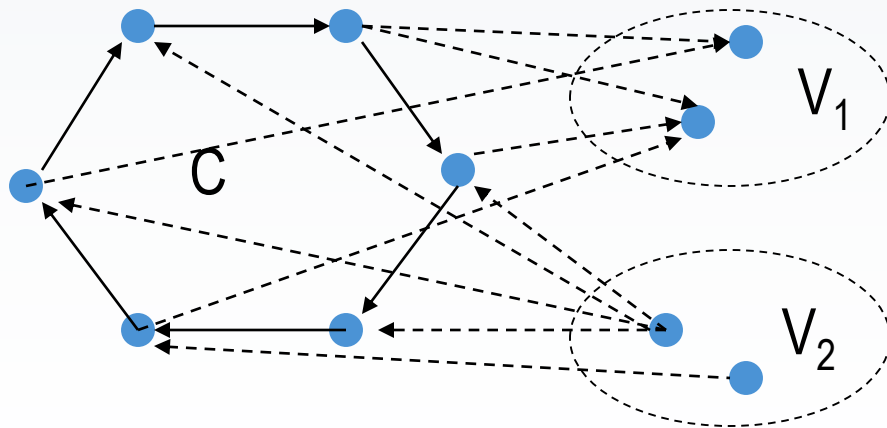
定理10(证明(2a))

- 证明(续): (2a) $\exists v \in V(D-C), \exists v_{i-1} \in V(C), \exists v_i \in V(C), \langle v_{i-1}, v \rangle \in E(D), \langle v, v_i \rangle \in E(D)$, 则 $C' = v_1 v_2 \dots v_{i-1} v v_i \dots v_k v_1$ 是长度为 $k+1$ 的圈.



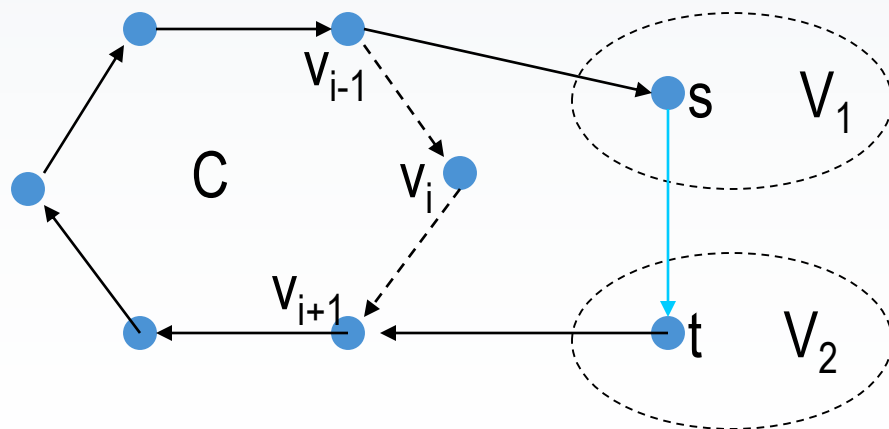
定理10(证明(2b))

- 证明(续): (2b) $\forall v \in V(D-C),$
($\forall u \in V(C), \langle u, v \rangle \in E(D)$) \vee
($\forall u \in V(C), \langle v, u \rangle \in E(D)$): 则令
 $V_1 = \{v \in V(D-C) \mid \forall u \in V(C), \langle u, v \rangle \in E(D)\},$
 $V_2 = \{v \in V(D-C) \mid \forall u \in V(C), \langle v, u \rangle \in E(D)\},$
则 $V_1 \neq \emptyset,$
 $V_2 \neq \emptyset,$
 $V_1 \cap V_2 = \emptyset.$



定理10(证明(2b))

- 证明(续): (2b) 于是 $\exists s \in V_1, \exists t \in V_2$, $\langle s, t \rangle \in E(D)$. 在 C 上任取相邻3点 v_{i-1}, v_i, v_{i+1} , 则 $C' = v_1 v_2 \dots v_{i-1} st v_{i+1} \dots v_k v_1$ 是长度为 $k+1$ 的圈. #



推论

- 推论: 设 D 是 n 阶有向图, 若 D 含 n 阶强连通竞赛图作为子图, 则 D 是哈密顿图. #

货郎问题(TSP)

- 货郎问题(Travling Salesman Problem): 给定 n 个城市之间的所有距离, 求推销员走遍所有城市的最短路线
- 又名旅行商问题,巡回售货员问题,TSP
- TSP: 给定带权完全图 $G=<V,E,W>$,求最短哈密顿回路.

旅行商问题的发展历史

- 旅行商问题，也称货郎担问题，是一个较古老的问题。其起源已经有些模糊了。最早大概可以追溯到 1759 年 Euler 提出的骑士旅行问题。
- 十九世纪初，爱尔兰数学家William R. Hamilton和英国数学家Thomas P. Kirkman研究过一些与旅行商问题相关的数学问题。

- 二十世纪初，人们开始研究通用形式的旅行商问题。
- 二十世纪二十年代，数学家和经济学家 Karl Menger 在维也纳向他的同事提出了这个问题。
- 二十世纪三十年代，旅行商问题出现在 Princeton 大学的数学圈子里，主要的推动者有 Hassler Whitney 与 Merrill Flood。
- 二十世纪四十年代，统计学家(Mahalanobis(1940), Jessen(1942), Gosh(1948), Marks(1948))把它和农业应用联系在一起研究。美国RAND 公司也推动了这个问题的发展。
- 最终，**旅行商问题成为了组合优化问题中的一个困难问题原型的典型代表**。求解这种问题令人望而生畏：当问题规模变大的时候，路径的数目将是个天文数字，逐一检查它们几乎是不可能的。在很长的一段时间内，没有任何解决这个问题的好想法出现。

- 1954 年，旅行商问题的求解终于获得了突破。George Dantzig, Ray Fulkerson 和 Selmer Johnson 提出了一个求解旅行商问题的算法并用它成功地解决了一个有49 个城市的实例。这个规模在当时相当引人注目；
- 1977 年，Groetschel 找到了有 120 个城市的旅行商问题的最优路径；
- 1987年，Padberg 与 Rinaldi 找到了规模为 532 和 2392 的旅行商问题的最优路径；Groetschel与Holland找到了规模为666的旅行商问题的最优路径。
- Applegate, Bixby, Chavátal 和 Cook 于 1994 年,1998年和 2001年解决了规模为 7397, 13509和 15112的旅行商问题。
- 2004 年，一个具有 24978 个城市的旅行商问题的最优路径由 Applegate, Bixby, Chavátal, Cook 和 Helsgaun 找到。这是到目前为止**精确找到最优解**的最大规模的旅行商问题。

- 旅行商问题吸引了越来越多的人对它进行研究。其中，有数学家，计算机科学家，运筹学家，还有一些其它领域的研究者。
- 然而，**该问题是否存在一个有效的通用的求解方法仍然是一个开放性的问题**。事实上，旅行商问题的解决将意味着 $P=NP$ 问题的解决。Clay Mathematics Institute 曾悬赏 100 万美元来寻求这个问题的解法，但没人拿到这个奖。

旅行商问题的分类

- 从问题对应到图的类型，TSP 可以分为两类：
 - 1、任意两个城市间的距离都是对称的，它对应的是图论中的**无向图**；
 - 2、两个城市间的距离是非对称的，它对应的是图论中的**有向图**；
- 从问题本身的限制条件的强弱，主要有三类：
 - 1、**不做任何限制**(但是一般都要求城市间的费用不为负数)，只给出距离矩阵，求最短回路；
 - 2、要求距离间要满足**三角不等式**；
 - 3、定义在欧氏平面上的 TSP，即 Euclidean TSP，它给出每个城市在欧氏平面上的坐标，而城市间的距离就是以它们的**欧氏距离**来定义。

TSP的时间复杂度

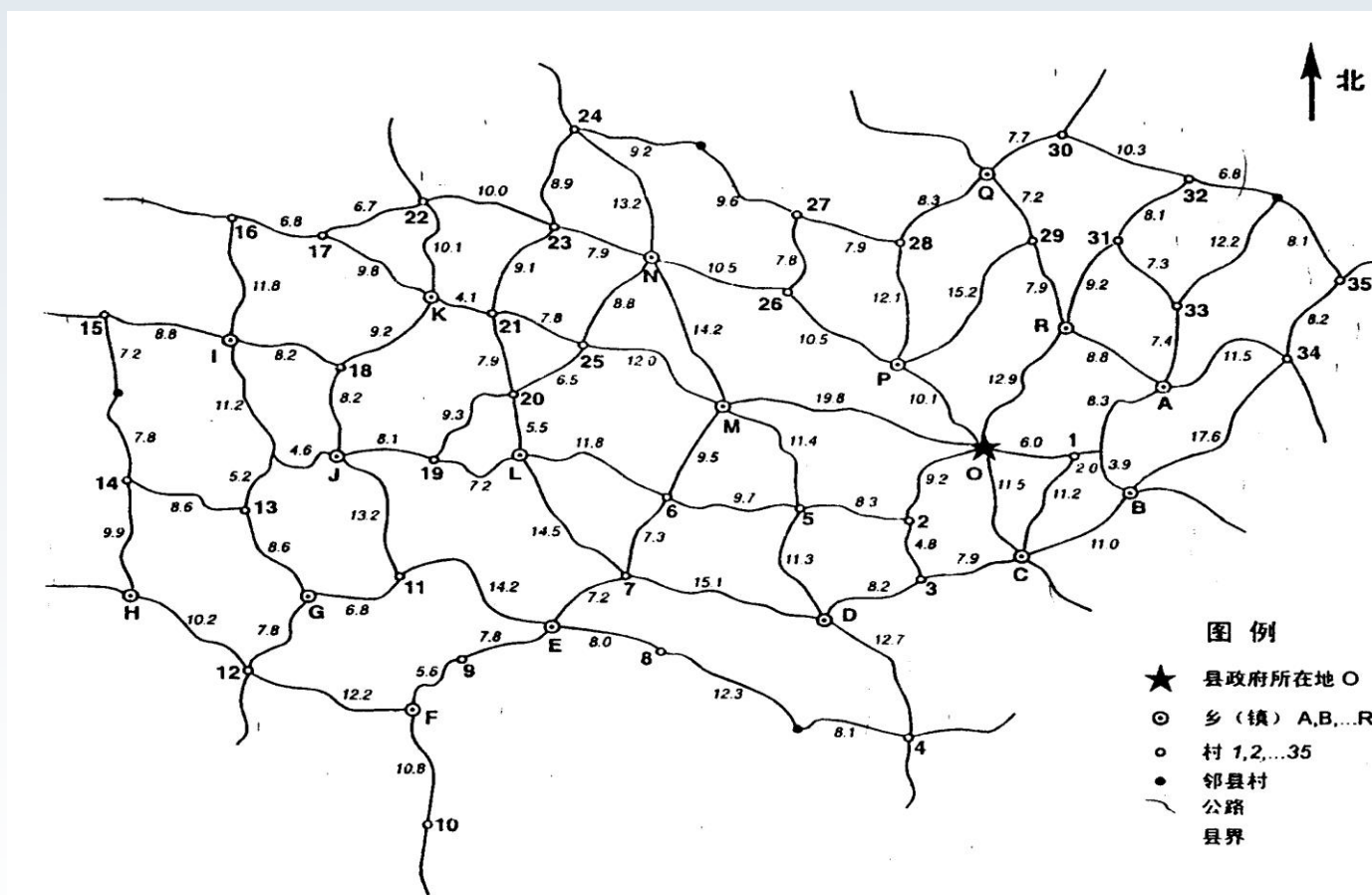
- TSP 搜索空间随着城市数 n 的增大而增大，所有的旅程路线组合数为 $(n-1)!/2$ 。
- 5 个城市的情形对应 $120/10=12$ 条路线；
- 10 个城市的情景对应 $3628800/20=181440$ 条路线；
- 100 个城市的情景对应应有 4.666×10^{155} 条路线。
- 所以对于输入规模为 n 个城市的 TSP 找到最优解的时间复杂性函数的数量级是 $O(n!)$ ，当 n 比较大时，耗费的时间已经是个天文数字。
- 表 2.1 是在假定所用计算机每秒可以执行 10 亿次运算的前提下，对不同的时间复杂性函数所耗费时间的比较。

表 2.1 不同时间复杂度函数所耗费时间的比较

时间复杂度 函数	输入量 n				
	10	20	30	40	100
n^2	100ns	400ns	900ns	1.6 μ s	10 μ s
2^n	1.0 μ s	1.0ms	1.1s	18.3min	4.0c
$n!$	3.6 μ s	77.1y	8.4×10^{13} c	2.6×10^{29} c	3.0×10^{139} c

y:表示年，c:表示世纪。

引例



公路边的数字为该路段的公里数。

标准TSP

- 旅行商问题（简称TSP），也称货郎担问题或旅行推销员问题，是运筹学中一个著名的问题。
- 其一般提法为：有一个旅行商从城市1出发，需要到城市2、3、...、 n 去推销货物，最后返回城市1，若任意两个城市间的距离已知，则该旅行商应如何选择其最佳行走路线？

记为赋权图 $G=(V,E)$, V 为顶点集, E 为边集, 各顶点间的距离 d_{ij} 已知。设

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若}(i,j)\text{在回路路径上} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则经典的TSP可写为如下的数学规划模型:

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, & i \in V & (7-1) \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, & j \in V & (7-2) \\ \text{除起点和终点, 各边都不形成圈} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, & i \in V \quad (7-1) \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, & j \in V \quad (7-2) \\ \text{除了起点和终点外, 各边都不形成圈} & (7-3) \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

模型中， n 为集合中所含图的顶点数。约束（7-1）和（7-2）意味着对每个点而言，仅有一条边进和一条边出；约束（7-3）则保证了没有任何子回路解的产生。于是，满足约束（7-1）、（7-2）和（7-3）的解构成了一条Hamilton回路。



- 当 $d_{ij}=d_{ji}$ ($i, j \in V$) 时, 问题被称为**对称型TSP**, 否则称为**非对称型TSP**。
- 若对所有 $1 \leq i, j, k \leq n$, 有不等式 $d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik}$ 成立, 则问题被称为是**满足三角形不等式的**, 简称为 **Δ TSP**。

TSP解法及其复杂性

- 蛮力法(brute force): 穷举所有的可能性来进行验证或比较, 复杂性为 2^n 以上.
- 启发式(Heuristic)方法: 分支限界,
- 目前还不知道TSP是否有多项式时间算法, 大多数学者认为没有. 证明?
- 近似(approximation)算法

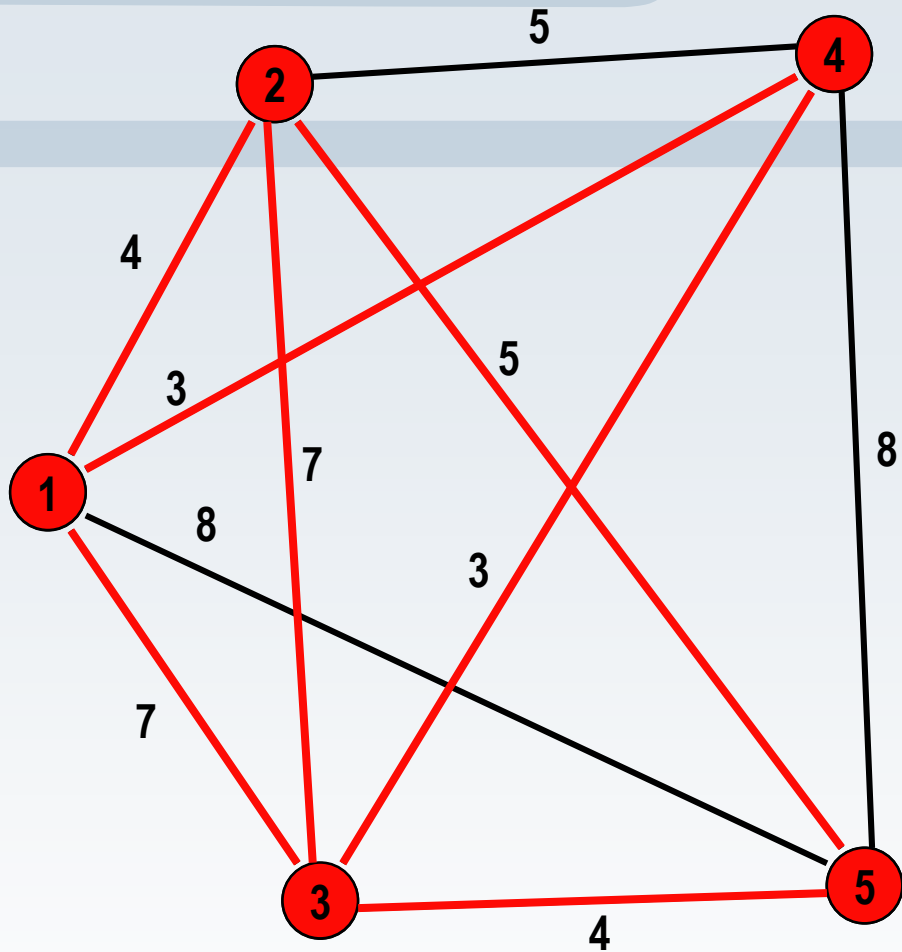
蛮力法

- 在解决旅行商问题时，以顶点1为起点和终点，然后求 $\{2 \dots N\}$ 的一个全排列，使路程 $1 \rightarrow \{2 \dots N\}$ 的一个全排列 $\rightarrow 1$ 上所有边的权（代价）之和最小。
- 所有可能解由 $(2, 3, 4, \dots, N)$ 的不同排列决定。

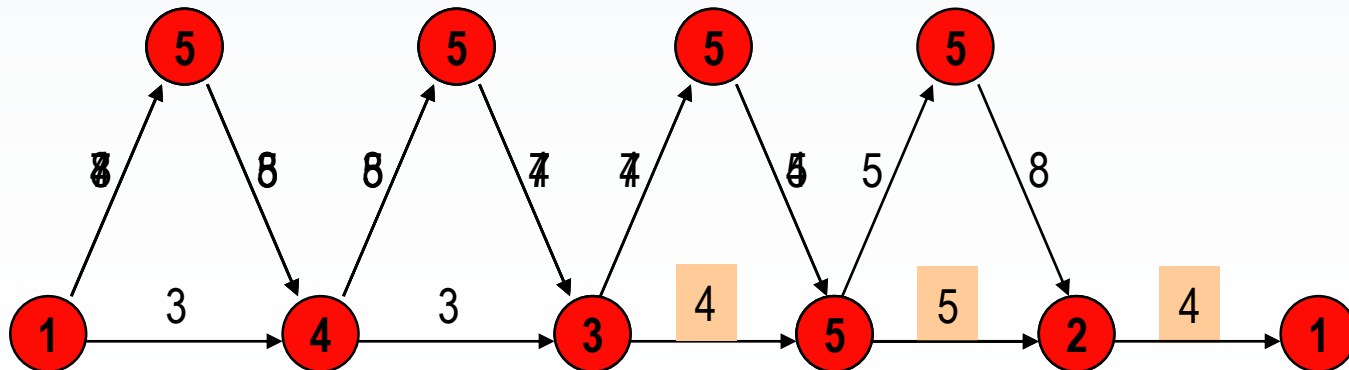
插入法(Insertion Method)

- 1 任选一节点为起点 a ;
- 2 寻找距离节点 a 最近的节点 b 作为下一个造访的节点, 形成 $a-b-a$ 的子回路;
- 3 寻找距离子回路最近的节点 k 作为下一个插入点;
- 4 寻找插入成本最小的位置($i-j$), 将 k 插入 $i-j$ 之间, 形成新的子回路;
- 插入成本: $C_{ik}+C_{kj}-C_{ij}$
- 5 重复步骤3~4, 直到所有节点均已插入回路之中, 即形成一个TSP的可行解。

插入法



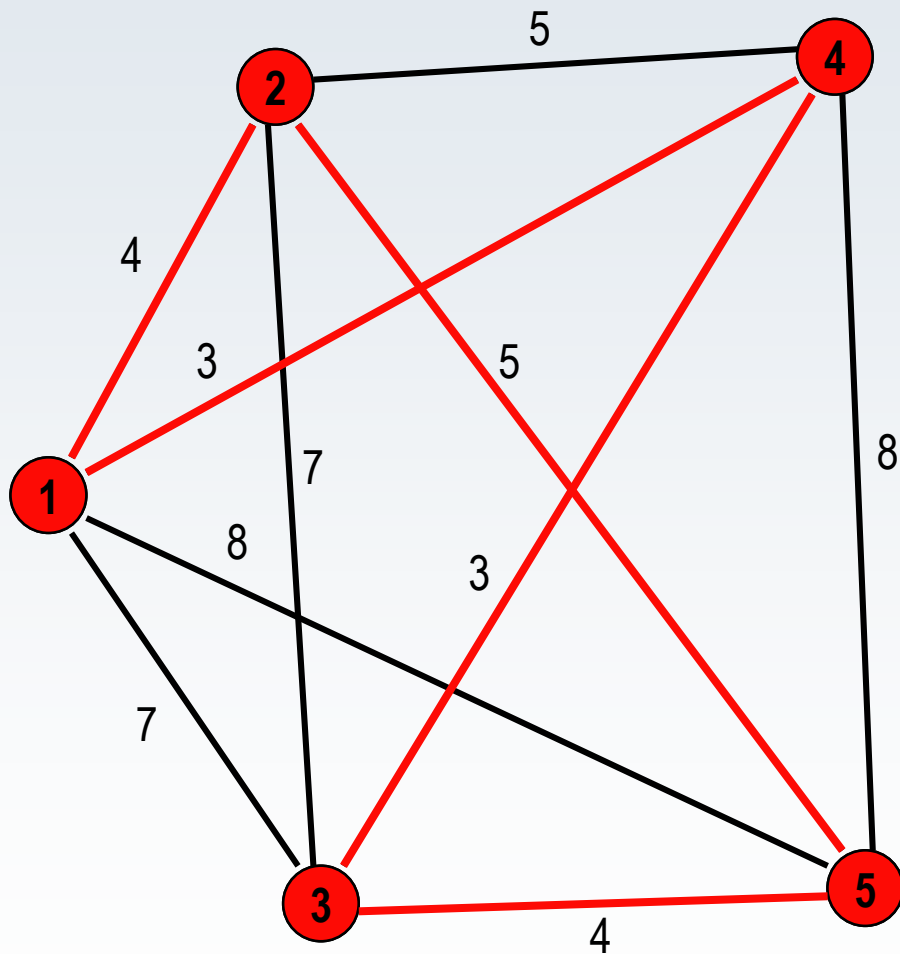
- 1 任选一节点为起点 a ;
- 2 寻找距离节点 a 最近的节点 b 作为下一个造访的节点, 形成 $a-b-a$ 的子回路;
- 3 寻找距离子回路最近的节点 k 作为下一个插入点;
- 4 寻找插入成本最小的位置 $(i-j)$, 将 k 插入 $i-j$ 之间, 形成新的子回路;
- 插入成本: $C_{ik} + C_{kj} - C_{ij}$
- 5 重复步骤3~4, 直到所有节点均已插入回路之中, 即形成一个TSP的可行解。



最近邻点法(Nearest-neighbor Heuristic)

- 1 任选一节点为起点 x ;
- 2 寻找距离节点 x 最近的节点 y 作为下一个造访的节点;
- 3 寻找距离节点 y 最近的节点 z 作为下一个造访的节点;
- 4 重复以上步骤, 直到所有节点均已访问;
- 5 连接最后一个节点与起点, 即形成一个TSP的可行解;

最近邻点法



	1	2	3	4	5
1	—	4	7	3	8
2	4	—	7	5	5
3	7	7	—	3	4
4	3	5	3	—	8
5	8	5	4	8	—

最小生成树法

旅行售货员问题的一些特殊性质：

比如，费用函数 w 往往具有三角不等式性质，即对任意的3个顶点 $u, v, w \in V$ ，有： $w(u, w) \leq w(u, v) + w(v, w)$ 。当图 G 中的顶点就是平面上的点，任意2顶点间的费用就是这2点间的欧氏距离时，费用函数 w 就具有三角不等式性质。

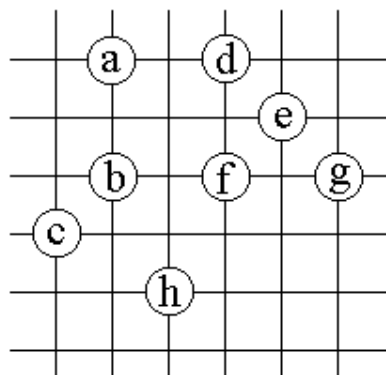
对于给定的无向图 G ，可以利用找图 G 的最小生成树的算法设计找近似最优的旅行售货员回路的算法。



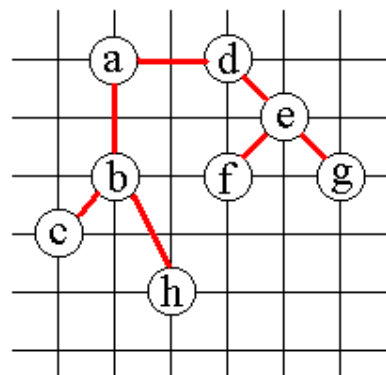
void approxTSP (Graph g)

```
{  
    (1)选择g的任一顶点r;  
    (2)用Prim算法找出带权图g的一棵以r为根的  
    的最小生成树T;  
    (3)前序遍历树T得到的顶点表L;  
    (4)将r加到表L的末尾, 按表L中顶点次序  
    组成回路H, 作为计算结果返回;  
}
```

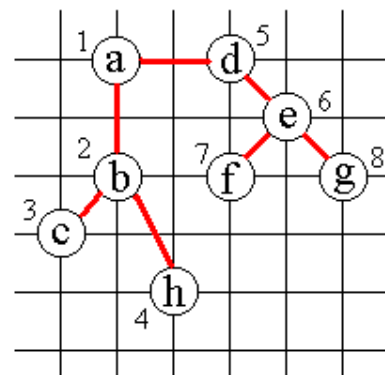
当费用函数满足三角不等式时, 算法找出的旅行售货员回路的费用不会超过最优旅行售货员回路费用的2倍。



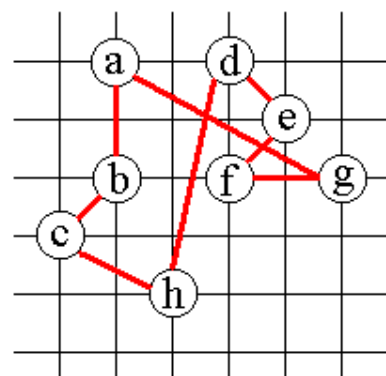
(a)



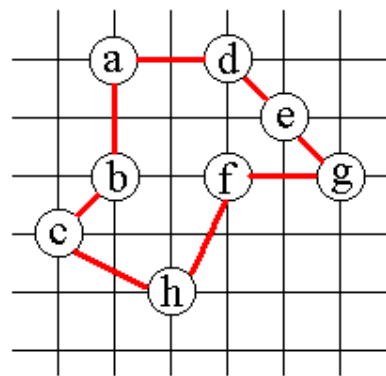
(b)



(c)



(d)



(e)

(b)表示找到的最小生成树T;

(c)表示对T作前序遍历的次序;

(d)表示L产生的哈密顿回路H;

(e)是G的一个最小费用旅行售货员回路。

为什么： 当费用函数满足三角不等式时，算法找出的旅行售货员回路的费用不会超过最优旅行售货员回路费用的2倍。

复杂性(complexity)

- 复杂性(complexity): 算法工作时需要的资源数量, 如时间,空间等
- 输入规模(input size): 反映输入大小的量, 如图的顶点数,图的边数等
- 最坏情形(worst-case)复杂性: 在所有规模为 n 的输入上, 算法工作所需要的最大资源量, 通常表示为 n 的函数, 如 n^2 , 2^n 等

可行(efficient)算法

- 可行(efficient)算法: 复杂性是多项式函数的算法, 如 $O(n^2)$, $O(n)$, $O(n^3)$, $O(n^{100})$.
- 易解(tractable)问题: 存在多项式复杂性算法的问题, 如欧拉图问题
- P(polynomial time): 存在多项式时间复杂性算法的问题, 如欧拉图问题
- 难解(intractable)问题: 不存在多项式复杂性算法的问题或者至今没有找到多项式时间算法的问题, 如货郎问题(TSP)

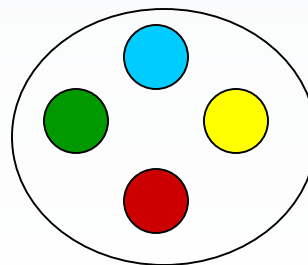
平面图

平面图

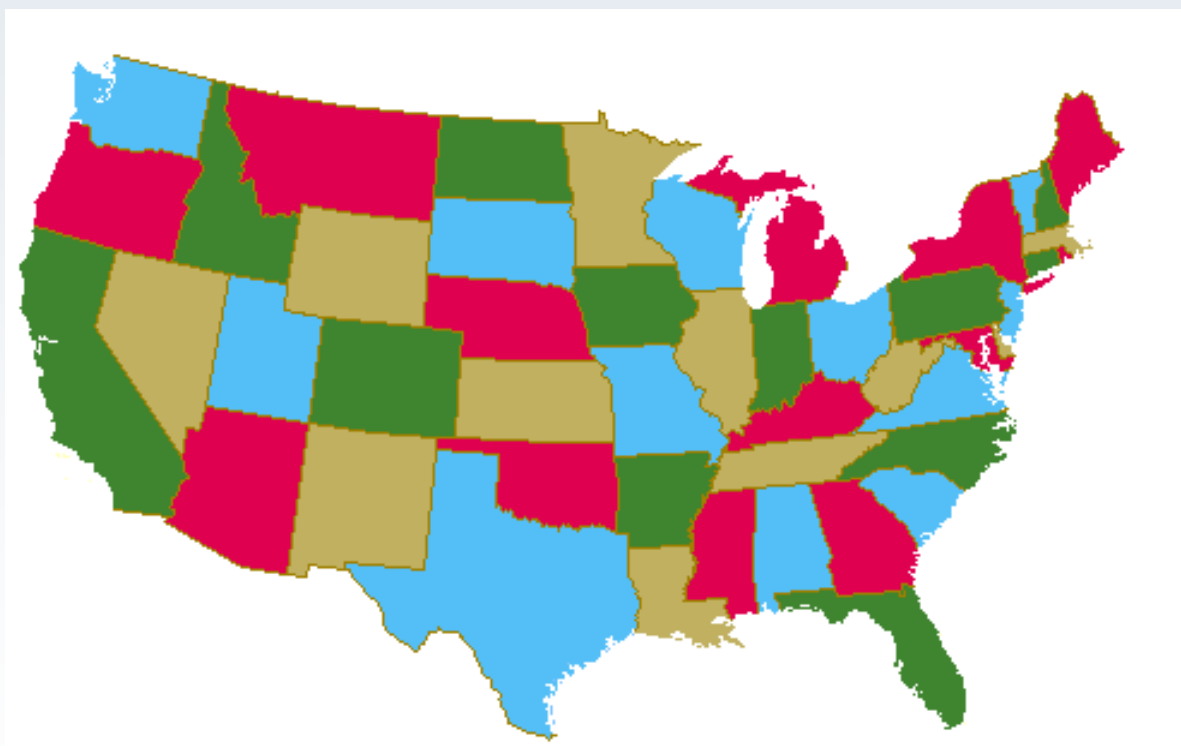
- 四色问题
- 平面图,面, 极大平面图
- 欧拉公式
- Kuratowski定理
- 对偶图,自对偶图

四色问题(Four Color Problem)

- 1852, Francis Guthrie, 注意到**英格兰**地图可以用**4**种颜色染色, 使得相邻区域(有一段公共边界, 不只是有一个公共点)有不同颜色; 他问其弟 Frederick 是否**任意**地图都有此性质? Frederick Guthrie → DeMorgan → Hamilton.
- 1878, Cayley, 提交伦敦数学会.
- 约定: 无飞地



四色问题(Four Color Problem)



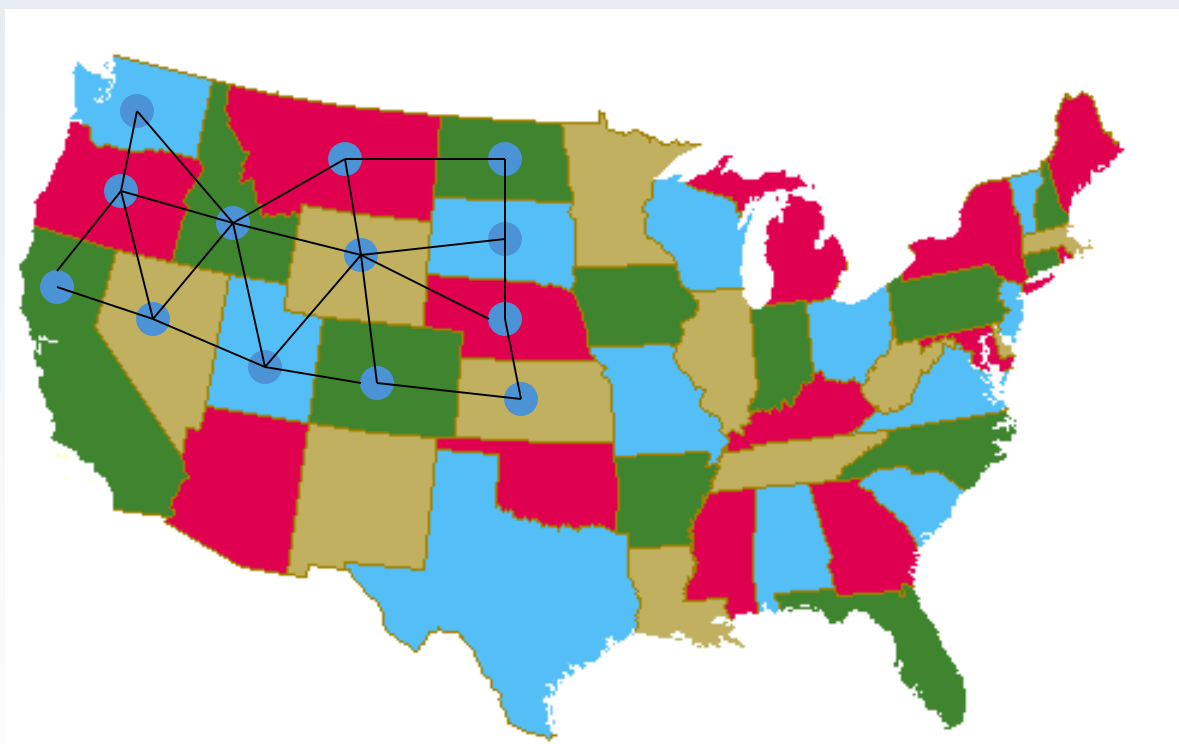
四色问题(Four Color Problem)

- 1879, Kempe, 第一次“证明”
- 1890, Heawood 发现Kempe证明的错误
- 1880, Tait, 另一个错误证明
- 1891, Petersen发现Tait证明的漏洞(Tait猜想)
- 1946, Tutte发现Tait证明的错误(Tait猜想反例)
- 两次错误证明带来的收获:
 - “Kempe chains”,
 - 用“3-边-着色”描述的四色定理的等价形式.

四色问题(Four Color Problem)

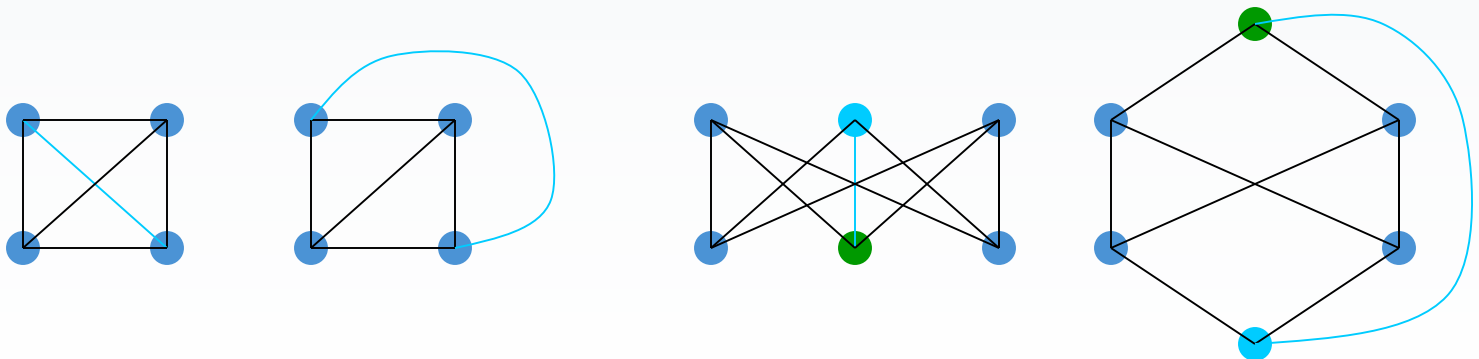
- 1913, Birkhoff, 下一个大贡献, 导致
- 1922, Franklin, 证明不超过25个区域的地图四色猜想成立
- 其他人取得其他形式进展:1974,52区域
- 1972-76, Appel, Haken, 1482个情形, IBM360, 1200小时, 论文139页+400页程序

四色问题(Four Color Problem)



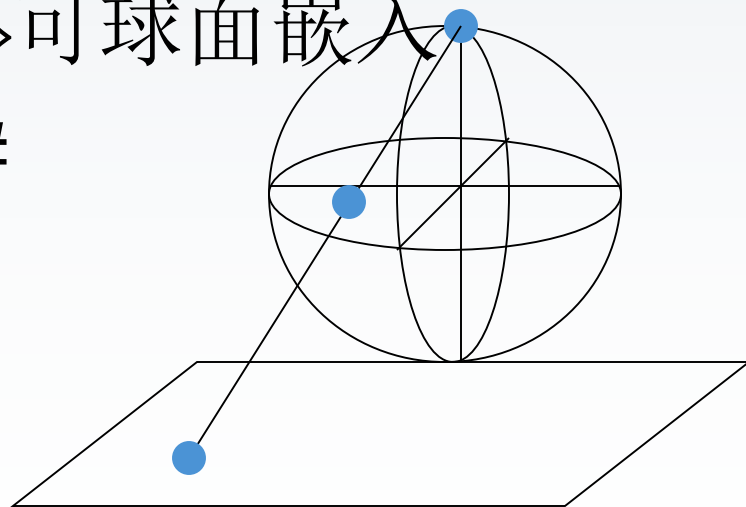
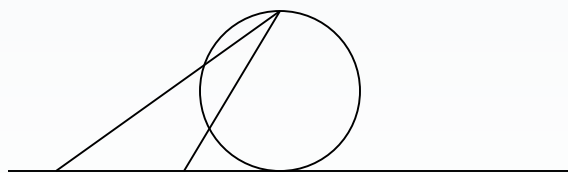
平面图

- **可平面图(planar graph)**: 可以画在平面上, 使得边与边不在非顶点处相交的图
- **平面嵌入(imbedding)**: 画在平面上使得边与边不在非顶点处相交的图称为**G**的..
- **平面图(plane graph)**: 在平面上边与边不在非顶点处相交的图



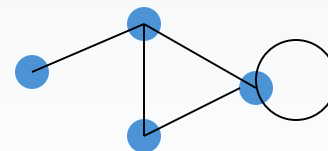
球面嵌入, 曲面嵌入

- 球面嵌入: 画在球面上使得边与边不在非顶点处相交
- 曲面嵌入: 画在曲面上使得边与边不在非顶点处相交, 如环面嵌入
- 定理6.1: 可平面嵌入 \Leftrightarrow 可球面嵌入
- 证明: 连续球极投影. #



面

- 区域(region): 不含顶点与边的极大连通曲面, R
- 外部区域(exterior region): 面积无限的区域, R_0
- 区域边界(boundary of region): 与 R 关联的边和顶点构成的子图
- 面(face): 区域及其边界
- 面的次数(degree): $\deg(R) = \text{边界长度}$



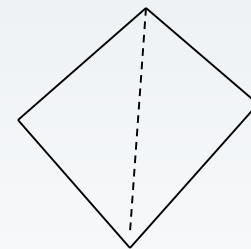
定理

因为每个边最多只能属于两个面

- 定理6.2: $\sum_{i=1}^r \deg(R_i) = 2m$. #
- 定理6.3: 任何平面嵌入的内部面都可以在另一种平面嵌入下成为外部面
- 证明: 平面嵌入 \rightarrow 球面嵌入 \rightarrow 把该面旋转到北极 \rightarrow 平面嵌入. #

极大(maximal)平面图

- 极大平面图: 是平面图, 但是在任意两个不相邻顶点之间加边就是非平面图
- 定理6.4: $n(\geq 3)$ 阶简单连通平面图是极大平面图 $\Leftrightarrow \forall R, \deg(R)=3$
- 证明: (\Rightarrow) 简单图 $\Rightarrow \deg(R) \geq 3$,
极大平面图 $\Rightarrow \deg(R) \leq 3$
 $(\Leftarrow) \forall R, \deg(R)=3 \Rightarrow$ 不能加边而不交叉. #
- 极小非平面图: 是非平面图, 但是删除任意1边就是平面图



欧拉公式

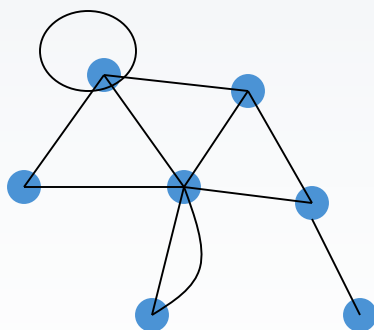
重点

- 欧拉公式: 设 G 是连通平面图, 则

$$n-m+r=2$$

其中 n 为顶点数, m 为边数, r 是 G 的面数.

- 例: $n=7, m=11, r=6$: $7-11+6=2$. #



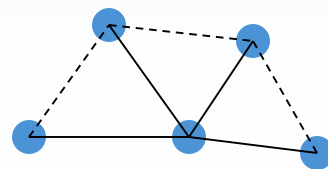
欧拉公式(推广形式)

- 欧拉公式: 设 G 是平面图, 则

$$n-m+r=1+p$$

其中 r 是 G 的面数, p 是 G 的连通分支数

- 证明:(破圈法)任选一个回路,删除回路上1边, $m'=m-1$,这边分隔的2个面合并, $r'=r-1$, 所以 $n-m+r=n-m'+r'$. 到最后无回路时是森林, $m''=n-p$, $r''=1$, 即 $n-m+r=n-m''+r''=1+p$. #



定理6.8

- 定理6.8: 设 G 是连通平面图, G 的各面的次数至少是 $\ell(\geq 3)$, 则

$$m \leq (n-2)\ell/(\ell-2)$$

- 证明: $r=2+m-n$, (r 面数)

$$2m = \sum_{i=1}^r \deg(R_i) \geq \ell \bullet r = \ell \bullet (2+m-n),$$

$$\text{所以 } m \leq (n-2)\ell/(\ell-2). \quad \#$$

- 定理6.9: 设平面图 G 有 p 个连通分支, G 的各面的次数至少是 $\ell(\geq 3)$, 则

$$m \leq (n-p-1)\ell/(\ell-2). \quad \#$$

定理6.10

- 定理6.10: 设 $n(\geq 3)$ 阶简单平面图 G 有 m 条边, 则 $m \leq 3n - 6$. #
- 证明: G 是简单图, 所以 $\ell \geq 3$,
 $m \leq (n - p - 1) \ell / (\ell - 2) \leq (n - 2) 3 = 3n - 6$,
其中 $p \geq 1$, $\ell / (\ell - 2)$ 在 $\ell = 3$ 时达到最大值. #
- 定理6.11: 设 $n(\geq 3)$ 阶简单极大平面图 G 有 m 条边, 则 $m = 3n - 6$. #
- 证明: G 是极大平面图, 所以 $2m = 3r$,
 $r = 2 + m - n$. #

$$\sum_{i=1}^r \deg(R_i) = 2m$$

定理6.12

δ 最小度

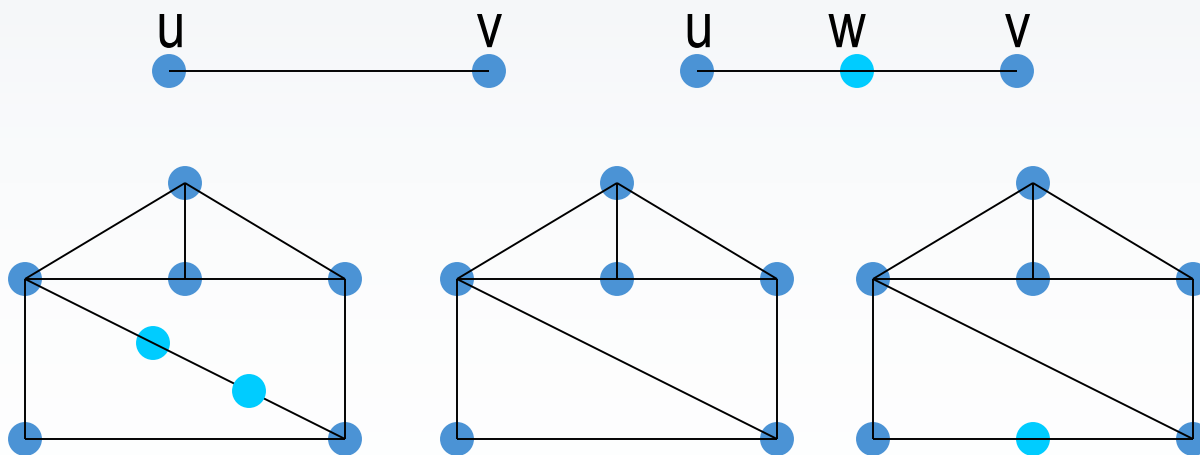
- 定理6.12: 设 G 是简单平面图, 则 $\delta(G) \leq 5$.
- 证明: (反证) 设 $n \geq 6$ 并且 $\delta \geq 6$, 则

$$2m = \sum d(v) \geq n\delta \geq 6n \Rightarrow m \geq 3n,$$

与 $m \leq 3n - 6$ 矛盾. #

同胚(homomorphism)

- 插入2度顶点: 把 (u,v) 变成 $(u,w),(w,v)$
- 删除2度顶点: $\deg(w)=2$, 把 $(u,w),(w,v)$ 变成 (u,v)
- 同胚: 反复插入或删除2度顶点后同构

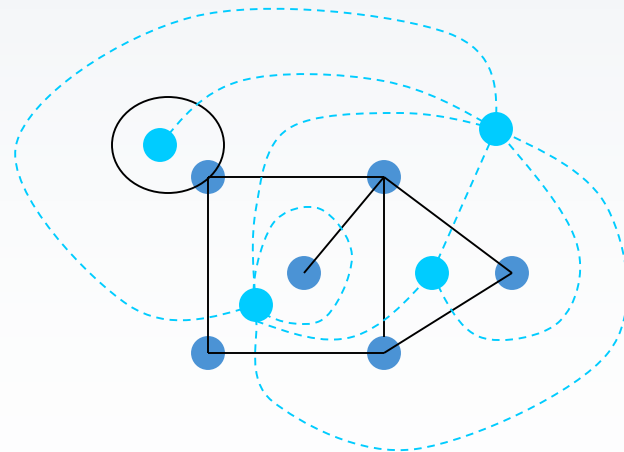
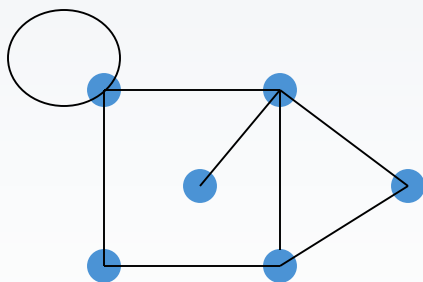


Kuratowski定理

- 定理6.13: 图 G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 没有与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图
- 定理6.14: 图 G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 没有可以边收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图

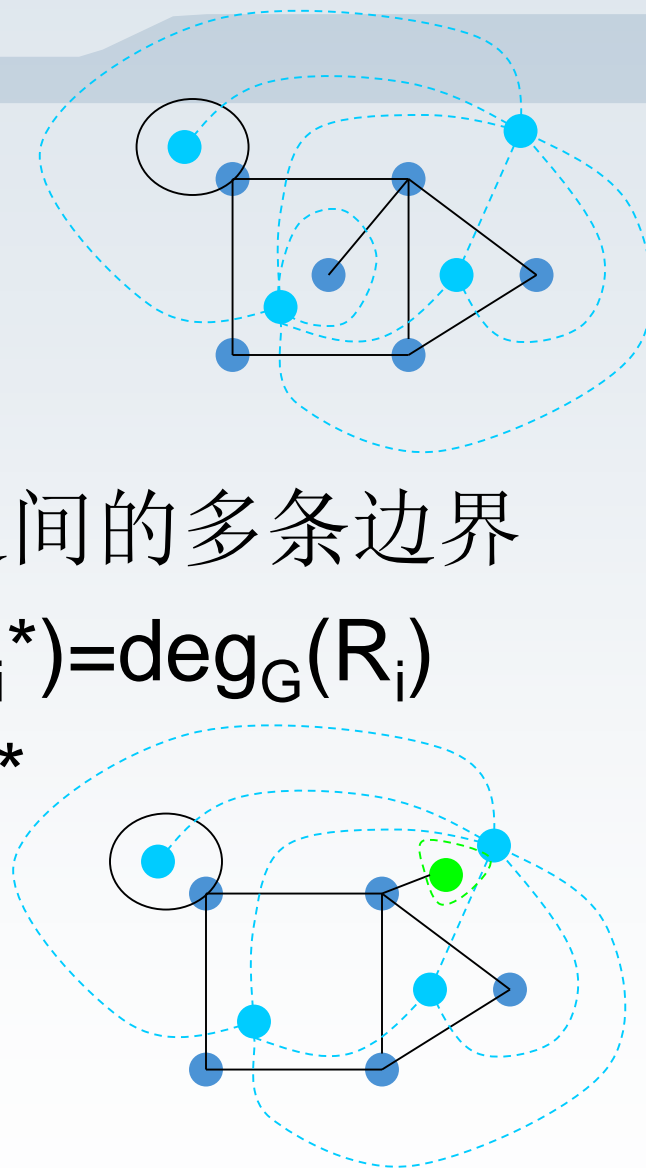
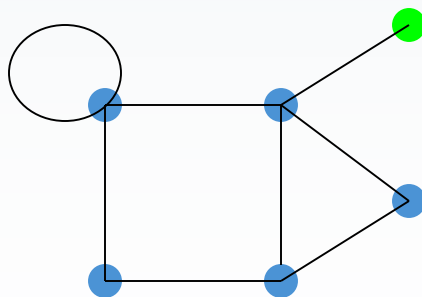
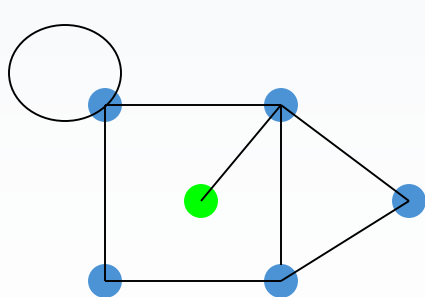
对偶图(dual graph)

- 对偶图: 平面图 $G=\langle V, E \rangle$ 的对偶图是 $G^*=\langle V^*, E^* \rangle$, 设 G 和 G^* 的面集合是 R 和 R^* , 则 V^* 与 R , E^* 与 E , 都是一一对应的
- 参考教材定义



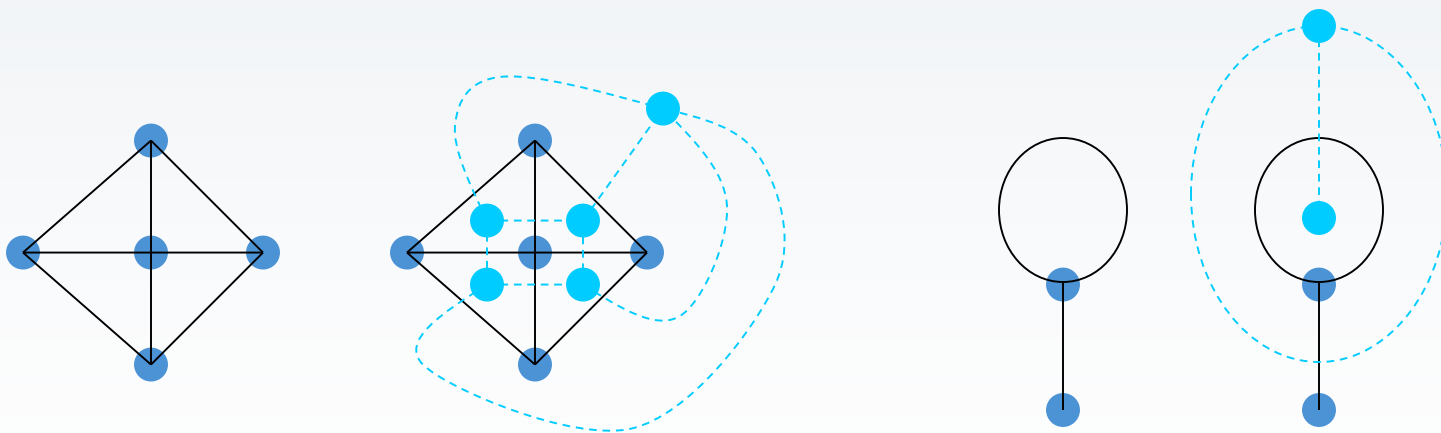
对偶图的性质

- 对偶图是连通平面图
- 环与桥互相对偶
- 平行边对偶于2个面之间的多条边界
- $n^*=r, m^*=m, r^*=n, d_{G^*}(v_i^*)=\deg_G(R_i)$
- $G_1 \cong G_2$, 不一定 $G_1^* \cong G_2^*$



自对偶(self-dual)图

- 自对偶图: $G \cong G^*$.
- $n \geq 4$ 时, 轮图 W_n 是自对偶图
- G 连通 $\Leftrightarrow G \cong G^{**}$ (要求 G^* 不改变形状)



总结

- 二部图
- 欧拉图
- 哈密顿图
- 平面图