



# 第5章 角动量变化定理与角动量守恒

§ 5-1. 角动量与力矩

§ 5-2. 质点的角动量变化定理角动量守恒

§ 5-3. 质点组的角动量变化定理角动量守恒

§ 5-4. 有心运动





## § 5-1. 角动量与力矩

### 一. 质点的角动量(动量矩)

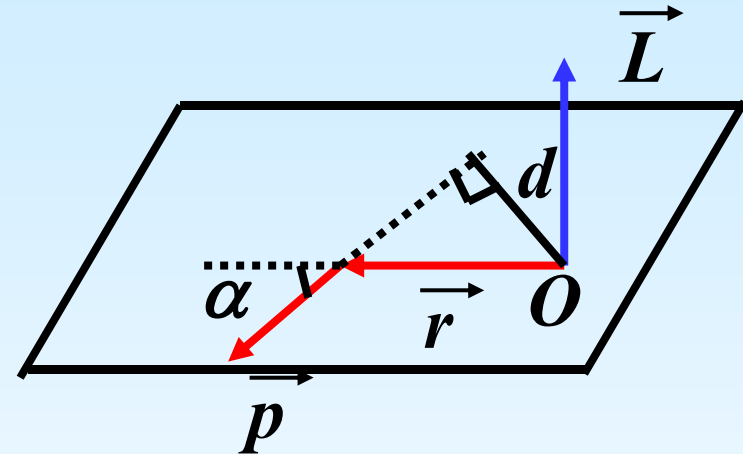
1. 定义：在惯性参考系中选一固定的参考点 $O$ ，运动质点对 $O$ 点的位矢 $\vec{r}$ ，动量为 $\vec{p}$ ，则质点对 $O$ 点的角动量为：

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \equiv \vec{r} \times m \vec{v} \quad \text{又称动量矩}$$

角动量 $\vec{L}$ 的大小： $L = rp \sin \alpha = rmv \sin \alpha = mvd$

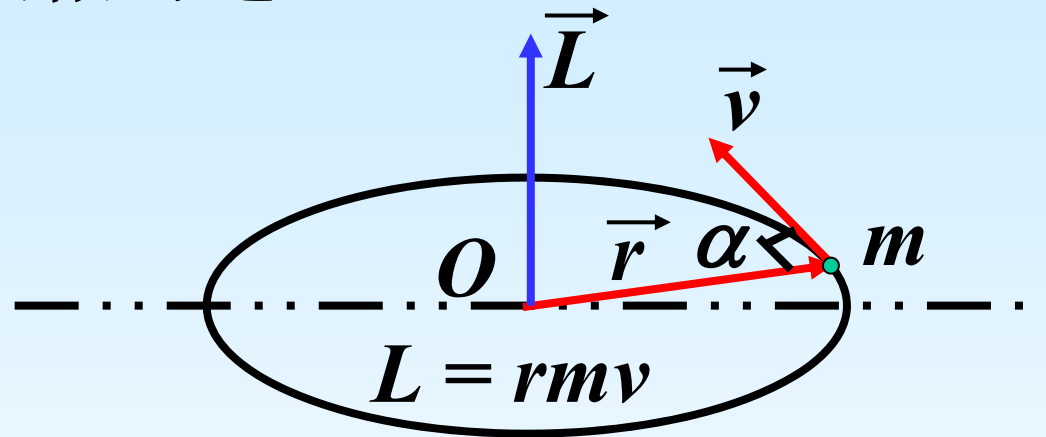
$\alpha$ 为 $\vec{r}$ 和 $\vec{p}$ 两矢量间的夹角

角动量 $\vec{L}$ 的方向：垂直于矢径 $\vec{r}$ 和动量 $\vec{p}$ 所组成的平面，指向由右手螺旋法则确定。





例：水平面上质点做匀速  
圆周运动

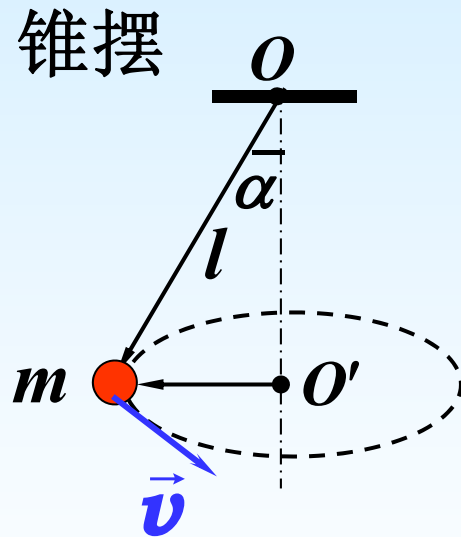


注意：

- 角动量的大小和方向不仅决定于质点的运动也依赖于所选定的参考点，参考点不同，质点的动量矩不同。
- 角动量的单位      千克·米<sup>2</sup>/秒      ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ )



例如:



$$\vec{L}_O = \vec{r}_{Om} \times m \vec{v} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_O = l m v \\ \text{方向变化} \end{array} \right.$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{O'm} \times m \vec{v} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{O'} = l m v \sin \alpha \\ \text{方向竖直向上不变} \end{array} \right.$$



## 2.角动量的分量表示

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \equiv \vec{r} \times m \vec{v}$$

在直角坐标系中:  $\vec{L} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}$

$$L_x = yp_z - zp_y = ymv_z - zmv_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z = zmv_x - xmv_z$$

$$L_z = xp_y - yp_x = xmv_y - ymv_x$$

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$



## 二. 力矩

### 1. 定义

给定一力 $\vec{F}$ ,若 $\vec{r}$ 为任选一固定点 $O$ 到力 $F$ 作用点 $A$ 的矢径,则力 $F$ 对 $O$ 点的力矩 $M$ 定义为矢径 $r$ 与力 $F$ 的矢积.

即

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

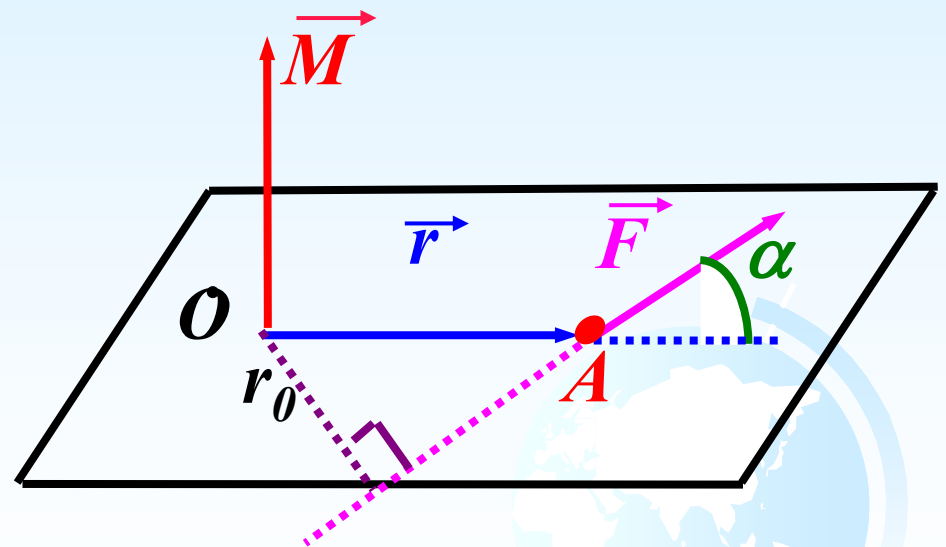
力矩的大小:

$$M = rF \sin \alpha = r_0 F$$

$$r_0 = r \sin \alpha \quad \text{——称力臂。}$$

力矩的方向:

垂直于 $\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 组成的平面, 指向按右手螺旋法则确定.





## 2. 力矩的分量表示

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

在直角坐标系中： $\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$

$$M_x = yF_z - zF_y$$

$$M_y = zF_x - xF_z$$

$$M_z = xF_y - yF_x$$

$$\vec{M} = (M_x, M_y, M_z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



## § 5-2. 质点的角动量变化定理角动量守恒

### 一. 质点的角动量变化定理

角动量对 $t$ 求导

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

因为  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ,  $\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$

则  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \underbrace{\frac{d}{dt}(m\vec{v})}_{\text{牛顿第二定律}} = \vec{r} \times \vec{F}$

因为

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

——为力  $\vec{F}$  对固定点 $O$ 的力矩





所以  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  —角动量变化定理(微分形式)

质点所受的合外力矩等于它的角动量对时间的变化率。

**注意：**力矩和动量矩都是对于惯性系中同一点来说的。

$$\text{又 } \vec{M} dt = d\vec{L}$$

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{L_1}^{L_2} d\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \Delta\vec{L}$  —角动量变化定理(积分形式)

定义  $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$  为合力矩  $\vec{M}$  在  $t_1$  到  $t_2$  时间内的角冲量。

质点角动量的增量等于作用于质点的角冲量。



[例] 锥摆的角动量

对O点:  $\vec{r}_{om} \times \vec{T} = 0$

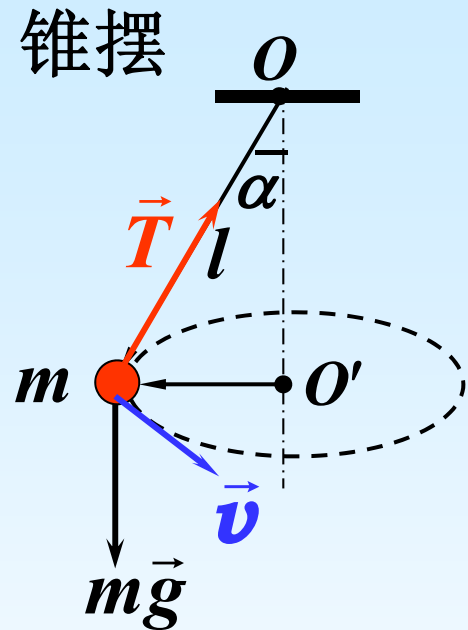
$$|\vec{r}_{om} \times m\vec{g}| = l \sin \alpha (mg)$$

合力矩不为零，角动量变化。

对O'点:  $\vec{r}_{o'm} \times \vec{T} = \vec{r}_{o'm} \times (-m\vec{g}) \neq 0$

$$\vec{r}_{o'm} \times m\vec{g} = -\vec{r}_{o'm} \times \vec{T}$$

合力矩为零，角动量大小、方向都不变。





## 质点对轴的角动量

### 1. 力对轴的力矩

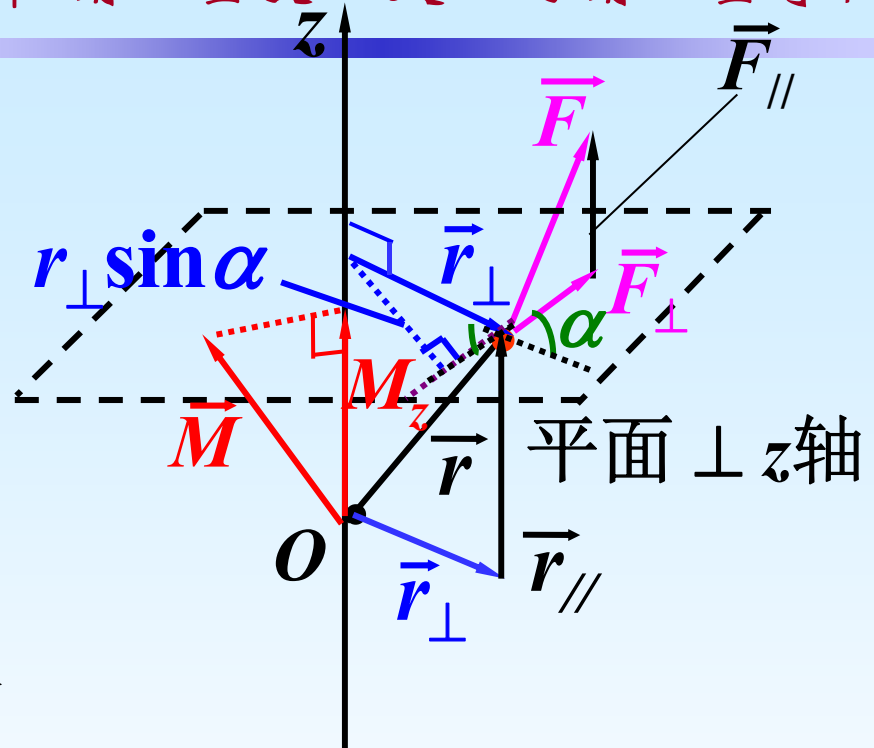
把对 $O$ 点的力矩向过 $O$ 点的轴（如 $z$ 轴）投影：

$$M_z = \vec{M} \cdot \vec{k} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{k}$$

$$= [(\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel) \times (\vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel)] \cdot \vec{k}$$

$$= (\vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp) \cdot \vec{k}$$

$$= F_\perp r_\perp \sin \alpha \quad \text{——力对轴的力矩。}$$

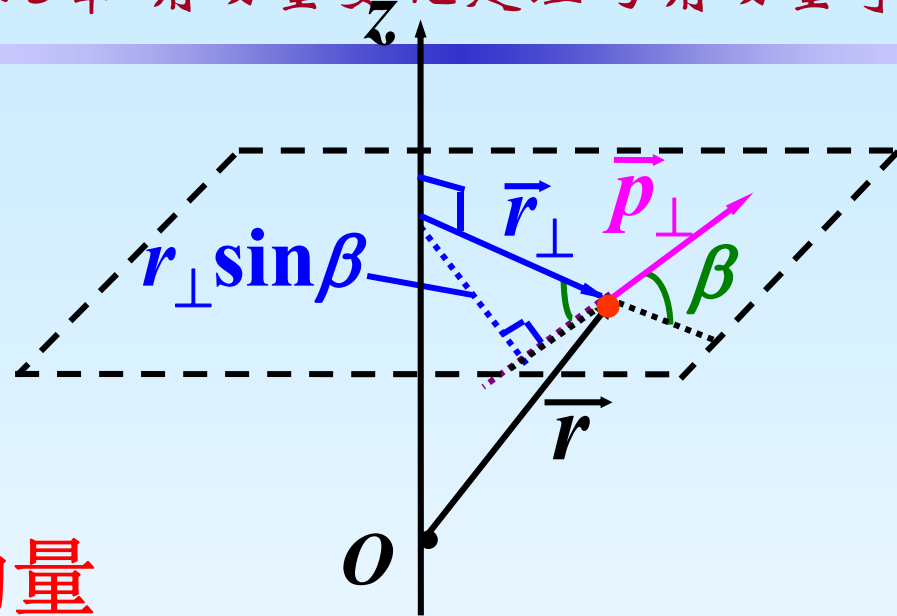




## 2. 质点对轴的角动量

$$\begin{aligned} L_z &= (\vec{r}_\perp \times \vec{p}_\perp) \cdot \vec{k} \\ &= p_\perp r_\perp \sin \beta \end{aligned}$$

——质点对轴的角动量



## 3. 对轴的角动量定理

$$\vec{M} \cdot \vec{k} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \vec{k} = \frac{d}{dt}(\vec{L} \cdot \vec{k})$$

即

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

——质点对轴的  
角动量定理



## 二. 质点的角动量守恒定律

- 由质点的角动量变化定理,

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

若  $\vec{M} = 0$ , 则  $\vec{L} = \text{常矢量}$  — 质点的角动量守恒定律

若质点所受的合力矩为零, 则质点的角动量不随时间改变。

因为

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \vec{M} = 0 \begin{cases} \vec{F} = 0, \\ \vec{F} \text{ 过 } O \text{ 点: 中心力 (如行星受中心恒星的万有引力)} \end{cases}$$



若  $M_z = 0$  ， 则  $L_z = \text{常量}$  — 质点对轴的角动量守恒定律

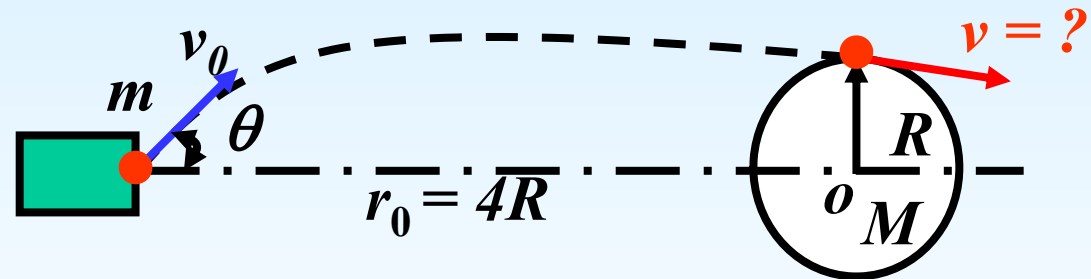
角动量守恒定律是物理学的基本定律之一，

它不仅适用于宏观体系， 也适用于微观体系，  
而且在高速低速范围均适用。





例. 发射一宇宙飞船去考察一质量为 $M$ ,半径为 $R$ 的行星,当飞船静止于空间距行星中心 $4R$ 时,以速度 $v_0$ 发射一质量为 $m$ ( $m$ 远小于飞船质量)的仪器。要使这仪器恰好掠着行星的表面着陆, $\theta$ 角应是多少? 着陆滑行初速度 $v$ 多大?



解: 在不计其它星体对仪器作用的情况下, 仪器只处在行星的中心力场中。

故仪器对行星中心的角动量守恒;

又行星引力场为保守力场, 仪器机械能也应守恒;



$$\text{则 } mv_0 r_0 \sin \theta = mvR, \quad r_0 = 4R \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} \quad (2)$$

$$\text{由(1)得 } v = \frac{v_0 r_0 \sin \theta}{R} = 4v_0 \sin \theta$$

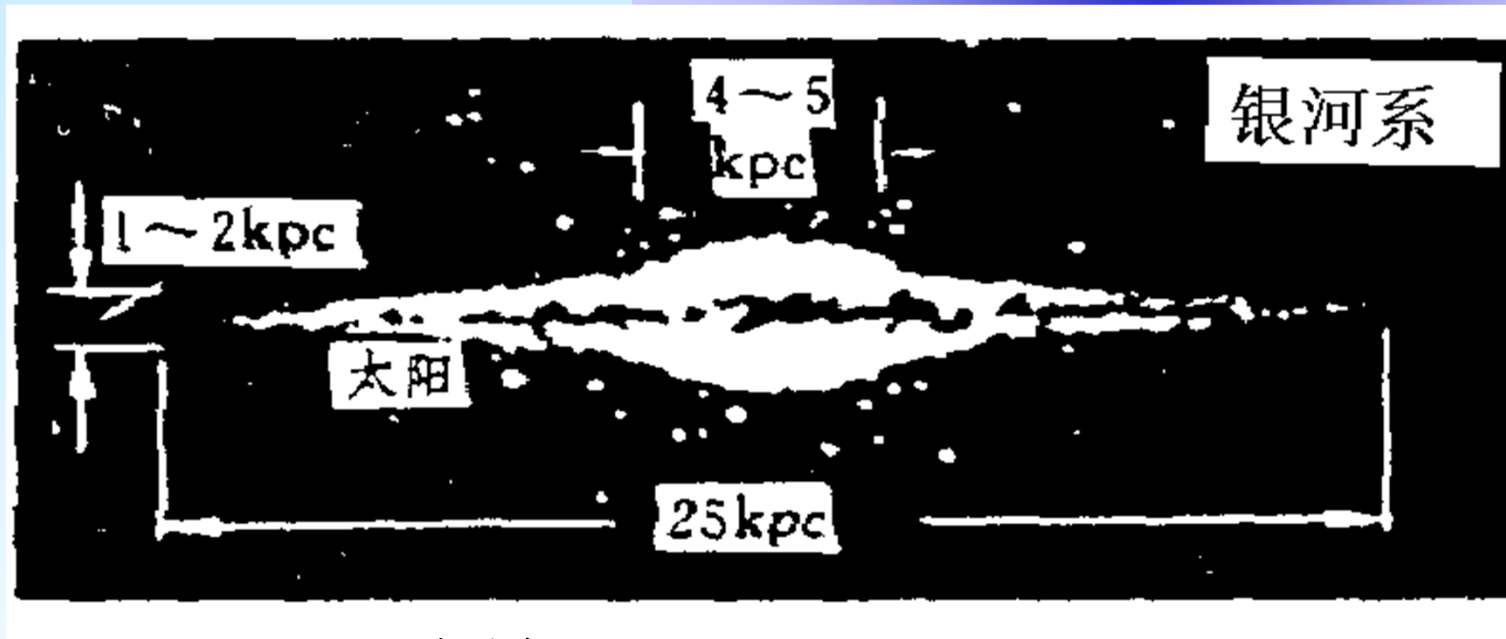
$$\text{代入(2)式得 } \sin \theta = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{3GM}{2Rv_0^2} \right)^{1/2}$$

$$\text{则 } v = 4v_0 \times \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{3GM}{2Rv_0^2} \right)^{1/2} = v_0 \left( 1 + \frac{3GM}{2Rv_0^2} \right)^{1/2}$$



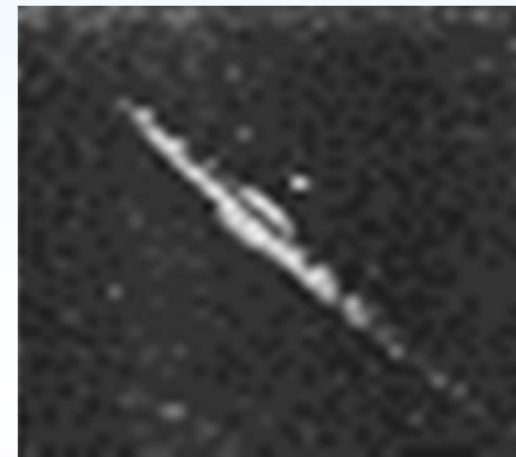


▲ 星云具有盘形结构:



pc — 秒差距,  $1\text{pc} = 3.086 \times 10^{16}\text{m}$

旋转的星云





第5章 角动量变化定理与角动量守恒

星球具有原始角动量  $r_0 m v_0 \vec{k}$

$$M_z = 0 \rightarrow L_z = \text{const.}$$

$$\rightarrow r_0 m v_0 = r m v$$

$$\therefore v = \frac{v_0 r_0}{r} \propto \frac{1}{r}$$

$$F_{\text{向}} = m \frac{v^2}{r} \propto \frac{1}{r^3}$$

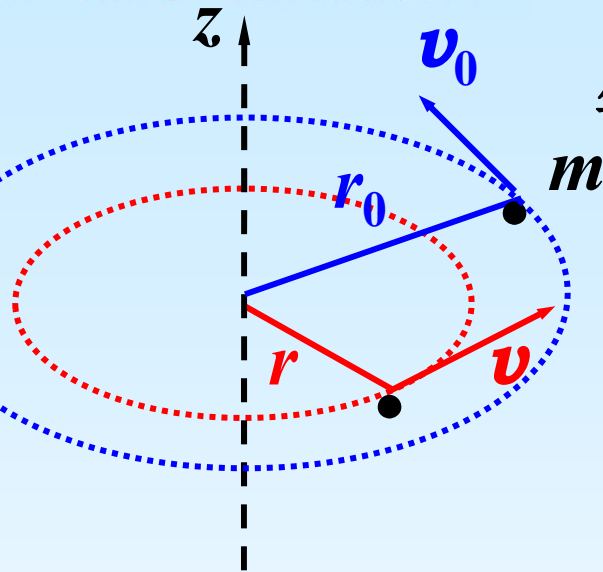
星球所需向心力:

可近似认为引力:  $F_{\text{引}} \propto \frac{1}{r^2}$

引力使  $r \downarrow$  到一定程度  $\rightarrow F_{\text{引}} = F_{\text{向}}$ ,  $r$  就不变了,

引力不能再使  $r$  减小。但在  $z$  轴方向却无此限制, 可以在引力作用下不断收缩。

粗略的解释:





## § 5-3. 质点组的角动量变化定理 角动量守恒

### 一. 质点组的角动量变化定理

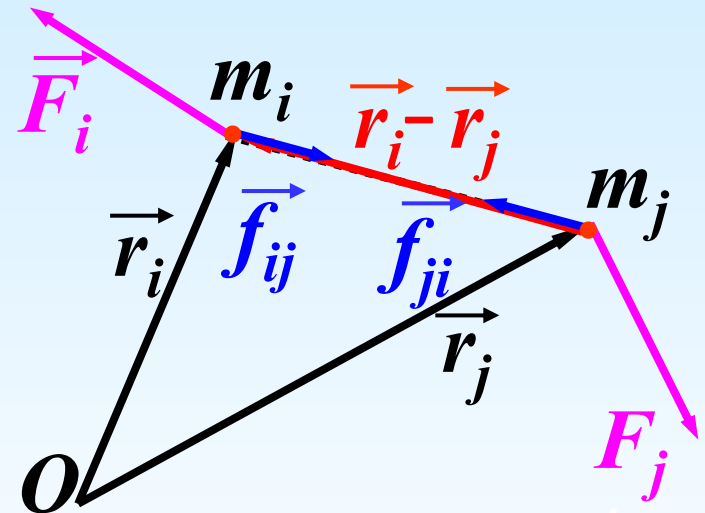
#### 1. 一对内力的力矩之和为零

如图示, 一对内力  $\vec{f}_{ij}$  和  $\vec{f}_{ji} (= -\vec{f}_{ij})$

$$\begin{aligned}\vec{M}_i + \vec{M}_j &= \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \\ &= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{M}_i dt + \vec{M}_j dt = 0$$

一对内力的角冲量之和为零





## 2. 质点组的角动量变化定理

质点组角动量:  $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$  (对同一点)

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{L}_i \right) = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} \\ &= \sum_i (\vec{M}_{i\text{外}} + \vec{M}_{i\text{内}}) = \vec{M}_{\text{外}} + \vec{M}_{\text{内}}\end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{\text{外}} &= \sum_i \vec{M}_{i\text{外}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ \vec{M}_{\text{内}} &= \sum_i \vec{M}_{i\text{内}} = \sum_i \left( \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \right)\end{aligned}$$

因为一对内力的力矩之和为零

$$\therefore \vec{M}_{\text{内}} = \sum_i \vec{M}_{i\text{内}} = 0$$





于是有：
$$\vec{M}_{\text{外}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\vec{M}_{\text{外}} \text{ 和 } \vec{L} \text{ 都对同一点})$$

——质点组的角动量变化定理(微分形式)

质点组所受的合外力矩等于它的角动量对时间的变化率。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{L_1}^{L_2} d\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \Delta\vec{L}$$

——质点组的角动量变化定理(积分形式)

质点组角动量的增量等于作用于质点组的角冲量。



## 二. 质点组的角动量守恒定律

### 1. 质点组的角动量守恒条件

由质点系的动量矩定理,若对于某点而言,质点系所受的外力矩之和为零,则质点系对该点的动量矩不随时间改变,即:

$$\text{若 } \vec{M}_{\text{外}} = 0, \text{ 则 } \vec{L} = \vec{C}$$

——质点组的角动量守恒定律

$$\vec{M}_{\text{外}} = 0$$

——质点组的角动量守恒条件



## 2. 合外力为零时合外力矩与参考点无关

参考点  $O$ ，合外力矩

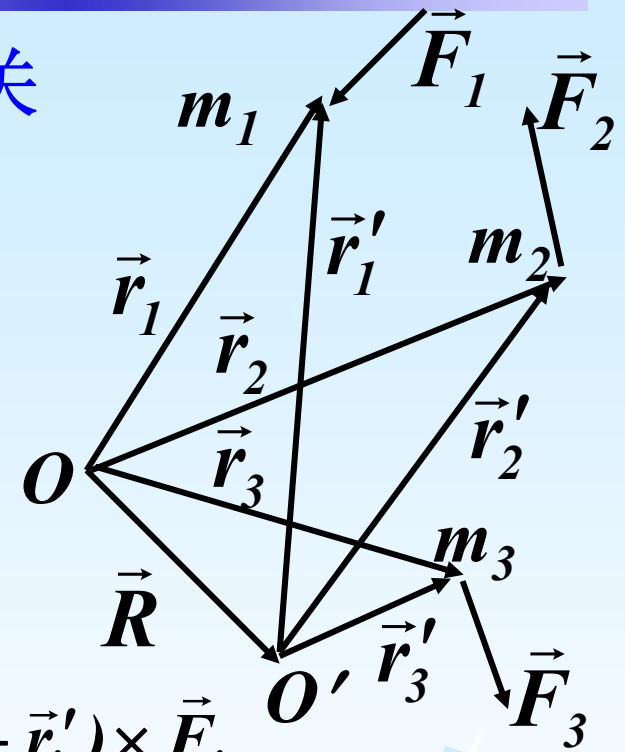
$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

参考点  $O'$ ，合外力矩

$$\vec{M}' = \sum_i \vec{M}'_i = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i$$

$$\begin{aligned}\vec{M} - \vec{M}' &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}'_i) \times \vec{F}_i \\ &= \sum_i \vec{R} \times \vec{F}_i = \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i\end{aligned}$$

$$\text{当 } \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \vec{M} = \vec{M}'$$



合外力为零时合外力矩与参考点无关





例:如图, 理想轻滑轮, 轻绳,  
 $m_1 = m_2$ , 从静止开始,  
问哪个猴先到?

解:  $m_1, m_2$  系统合外力矩为零,  
对  $O$  角动量守恒.

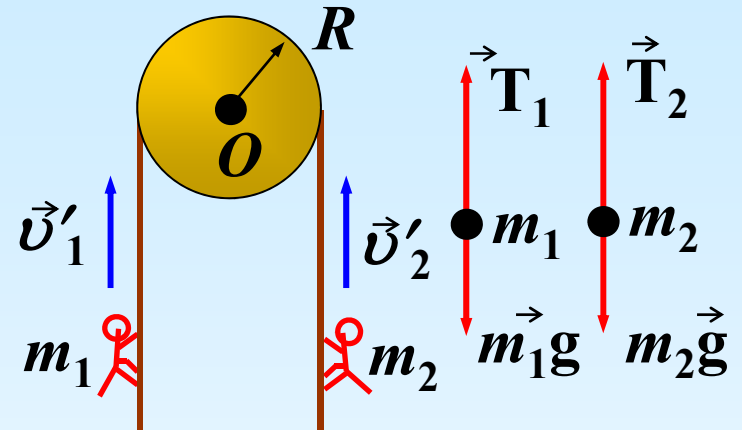
设右边绳对地速度为  $V$ , 方向向上.

$v'_1, v'_2$  为  $m_1, m_2$  对绳的速度, 有

$$m_1(v'_1 - V)R - m_2(v'_2 + V)R = 0$$

解得  $V = (v'_1 - v'_2)/2$

$$v_1 = v_2 = (v'_1 + v'_2)/2$$







## 小结：动量与角动量的比较

动量  $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$

矢量

与固定点无关

与内力无关

守恒条件  $\sum_i \vec{F}_i = 0$

角动量  $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

矢量

与固定点有关

与内力矩无关

守恒条件  $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$



## § 5-4. 有心运动

### 一 质点在有心力场中的运动方程

#### (1) 有心力

**有心力：** 方向始终指向或背向一个固定中心的力，  
固定中心叫力心。

**有心力场：** 有心力存在的空间。

**(中心对称)有心力：** 有心力的大小仅与参考点 $P$ 到力心 $O$ 的距离 $r$ 有关，即

$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$$

可以证明，这类有心力必定是保守力。



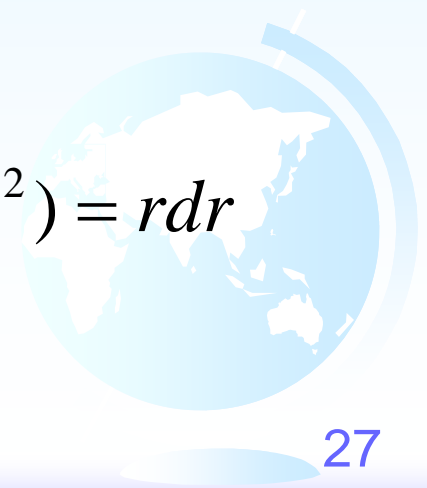


$$\vec{\mathbf{F}} = F(r) \vec{\mathbf{e}}_r = F(r) \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}$$

$$\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b F(r) \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{r_a}^{r_b} F(r) dr$$

这里，被积函数只是 $r$ 的函数，积分值仅与起点位置和终点位置有关，而与积分路径无关。

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} + d\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}d(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}d(r^2) = r dr$$





## (2) 运动方程

在有心力场中运动的质量为 $m$ 的质点，其运动方程为

$$m\ddot{\vec{r}} = F(r) \vec{e}_r$$

一般而言，这是一个三维的运动方程。

## (3) 二维平面运动与运动方程

由于质点所受的力始终指向或背向力心，当质点在初始时刻的速度 $v_0$ 给定后，质点以后就只能在初速度 $v_0$ 和初始位矢 $r$ 所构成的平面内运动，所以，有心力场中质点的运动必定在一个平面上，是二维的。



## 二 角动量守恒和机械能守恒

### (1) 有心力场中运动的质点的特点

**角动量守恒：** 由于有心力对力心 $O$ 的力矩为零，所以在有心力场中运动的质点对**力心 $O$** 的角动量守恒；

**机械能守恒：** 由于有心力是保守力，所以在有心力场中运动的质点的机械能也守恒。

在处理有心力场中质点运动的问题时，灵活运用这两个守恒定律是极其重要的。





## (2) 二维平面运动与角动量守恒

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

由于角动量守恒，即它在空间固定不变，根据矢量积的性质就可以得出结论， $\vec{r}$ 只能在垂直于 $\vec{L}$ 并通过原点的平面内运动。



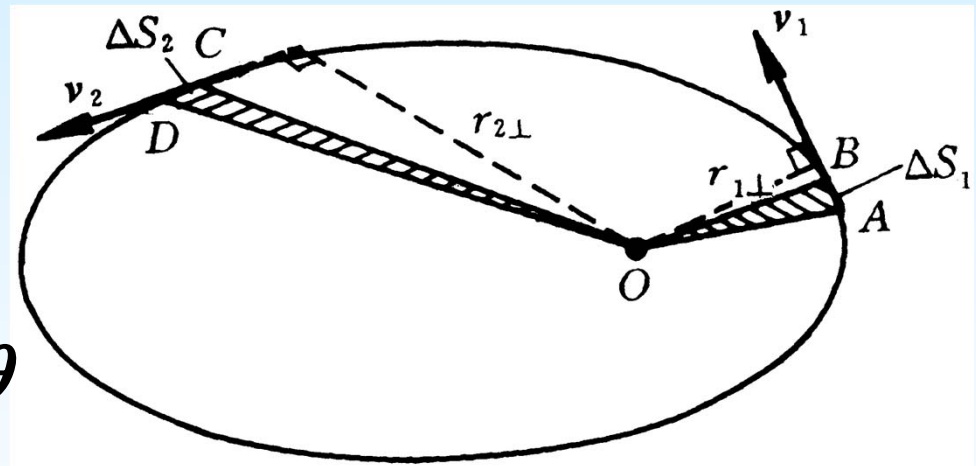


**[例]** 试利用角动量守恒定律,证明关于行星运动的开普勒第二定律: 任一行星和太阳之间的连线, 在相等的时间内扫过的面积相等, 即掠面速度不变。

**[证明]**

行星对太阳 $O$ 的角动量的大小为

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = r m v \sin \theta$$



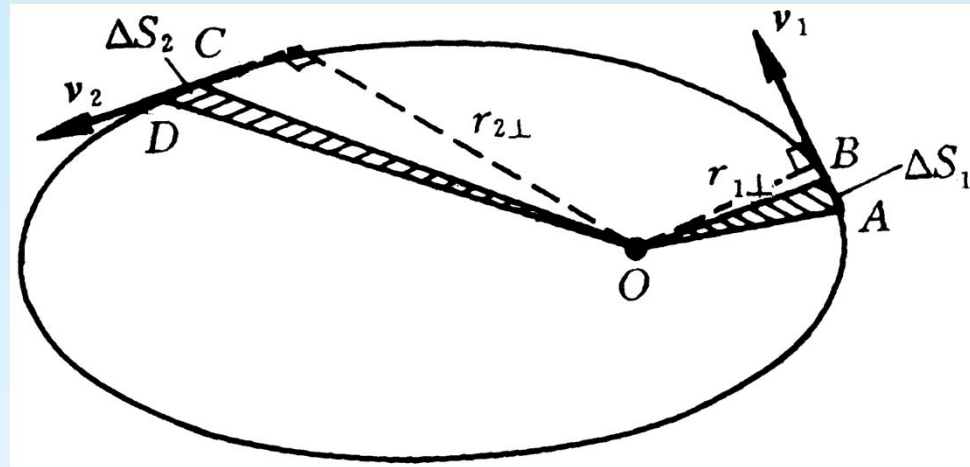
其中 $\theta$ 是径矢 $\vec{r}$ 与行星的动量 $\vec{p}$ 或速度 $\vec{v}$ 之间的夹角。  
用 $\Delta s$ 表示时间 $\Delta t$ 内行星所走过的弧长, 则有

$$L = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( r m \frac{\Delta s}{\Delta t} \sin \theta \right)$$



若用 $r_{\perp}$ 表示从 $O$ 到速度矢量 $\vec{v}$ 的垂直距离，则有

$$r \sin \theta \Delta s = r_{\perp} \Delta s = 2 \Delta S$$



其中 $\Delta S$ 是时间 $\Delta t$ 内行星与太阳间的连线所扫过的面积。于是，行星对太阳 $O$ 的角动量的公式化为

$$L = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2m \frac{\Delta S}{\Delta t}) = 2m \frac{dS}{dt} \quad \text{其中 } dS/dt \text{ 称为掠面速度.}$$

由于万有引力是有心力，它对力心 $O$ 的力矩总是等于零，所以角动量守恒， $L = \text{常量}$ ，亦即

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{常量} \quad \text{——开普勒第二定律}$$

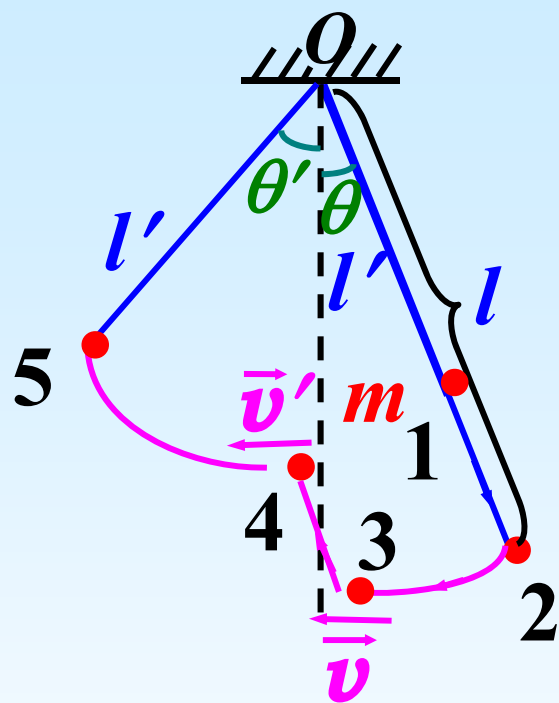




质点角动量变化定理和角动量守恒定律的适用条件？为什么？

条件：惯性参考系中的固定参考点

1. 推导角动量定理时用到了牛顿第二定律；
2. 力矩和角动量是对参考点定义的物理量，相应的物理规律是对参考点的规律；
3. 推导角动量定理过程中，还用到了 $\frac{dr}{dt}=v$ ，只有参考点固定不动时， $\frac{dr}{dt}$ 才是质点速度。



▲ 1→2: 人迅速蹲下, 使有效摆长  $Om$  由  $l'$  变为  $l$ ;

▲ 2→3: 对 (人+地球) 系统, 只有重力做功, 机械能守恒:

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgl(1 - \cos \theta) \quad (1)$$

▲ 3→4: 人对  $O$ ,  $M_{\text{外}} = 0$ ,

角动量守恒:

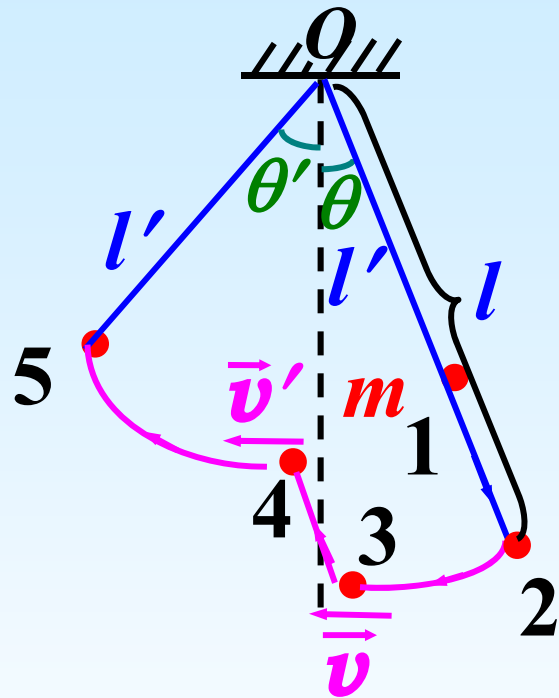
$$m v' l' = m v l \quad (2)$$

▲ 4→5: 对 (人+地球) 系统, 机械能守恒:

$$\frac{1}{2} m v'^2 = mgl'(1 - \cos \theta') \quad (3)$$



第5章 角动量变化定理与角动量守恒  
(1)、(2)、(3) 联立解得:



$$\frac{1 - \cos \theta'}{1 - \cos \theta} = \frac{l^3}{l'^3} > 1$$

$$\therefore \cos \theta' < \cos \theta ,$$

$$\theta' > \theta .$$

即人越摆越高。



思考

人越摆越高，能量从哪儿来？





## 第5章 角动量变化定理与角动量守恒

- 本章作业
- 5.1, 5.4, 5.6, 5.9





思考

[例1] 猴子“抓”菠萝（等重）

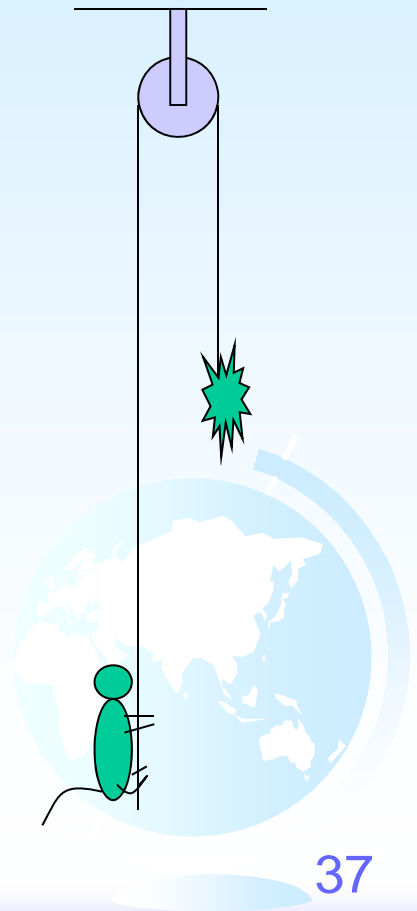
猴爬绳能缩短与菠萝的距离吗？

对猴子+菠萝：

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \quad (|\vec{r}_i \times \vec{T}_i| = RT \dots)$$

二者获得相等相反的角动量；  
而动量相同！

$$\sum_i \vec{F}_i \neq 0!$$





**[例2]** 一根长为 $l$ 的轻质杆，端部固结一小球 $m_1$ ，另一小球 $m_2$ 以水平速度 $v_0$ 碰杆中部并与杆粘合。

**求：**碰撞后杆的角速度 $\omega$

**解：**选 $m_1$ （含杆）+  $m_2$ 为系统

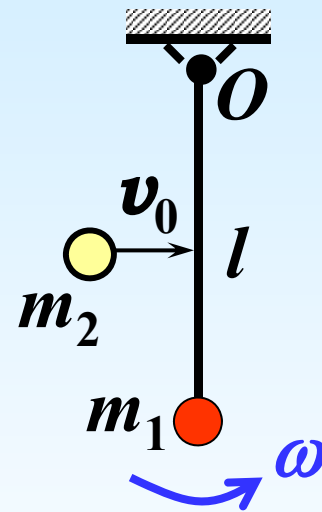
碰撞时重力和轴力都通过 $O$ ，  
对 $O$ 力矩为零，故角动量守恒。

有

$$\frac{l}{2} m_2 v_0 = l m_1 \omega + \frac{l}{2} m_2 \omega$$

解得：

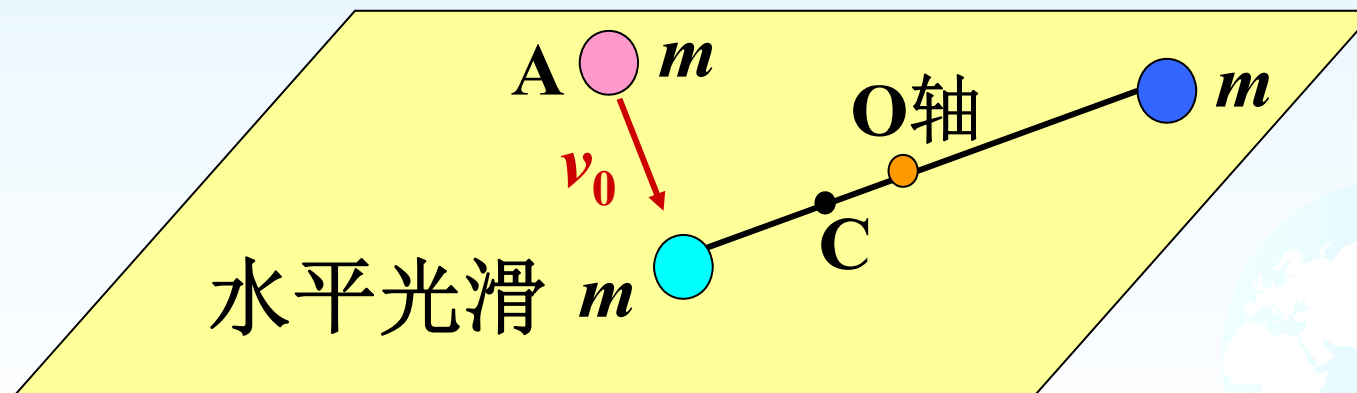
$$\omega = \frac{2m_2}{4m_1 + m_2} \cdot \frac{v_0}{l}$$





**[例3]** 如图，轻质杆长 $l$ ，两端固结球；球A以速度 $v_0 \perp$ 杆与杆端球碰，碰后粘合，三球质量同为 $m$

求：碰后角速度及对杆的作用力





解：对三球系统，角动量守恒

初态： $(l/2)mv_0$

末态： $\frac{l}{2}2m\omega\frac{l}{2} + \frac{l}{2}m\omega\frac{l}{2} (= \frac{3l^2m\omega}{4})$

$$\therefore \frac{lmv_0}{2} = \frac{3l^2m\omega}{4} \rightarrow \rightarrow \omega = \frac{2v_0}{3l}$$

碰后均匀转动。系统的质心作匀速率圆周运动

$$\text{质心的半径: } R_c = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}$$

$$\text{运动方程: } T = (3m)\omega^2 \frac{l}{6} \xrightarrow{\text{轴力}} T = \frac{2mv_0^2}{9l}$$

