第四章　关系

郑征

zhengz@buaa.edu.cn

软件与控制研究室

第3讲 关系幂运算与关系闭包

1. 关系幂(power)运算

2. 关系闭包(closure)

1. 关系幂(POWER)运算

关系的幂运算

- n次幂的定义
- 指数律
- 幂指数的化简

关系的n次幂

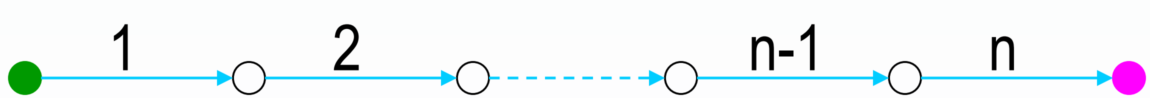
- 关系的n次幂(*n*th power): 设$R \subseteq A \times A$, $n \in N$, 则

  (1) $R^0 = I_A$; I_A：恒等关系

  (2) $R^{n+1} = R^n \circ R$, ($n \geq 1$).

- $$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n个R}$$

- R^n表示的关系, 是R的关系图中长度为n的有向路径的起点与终点的关系.



关系幂运算是否有指数律?

- 指数律:

(1) $R^m \bigcirc R^n = R^{m+n}$;

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

- 说明:

对一般关系R来说, $m, n \in N$.

也就是定义与和值域可以互换

对满足$I_A \subseteq R$且$A \subseteq domR \cap ranR$的关系R来说,

$m, n \in N$, Z, 例如$R^2 \bigcirc R^{-5} = R^{-3}$,因为可以定义

$$R^{-n} = (R^{-1})^n$$

定理17

- 定理17: 设 $R \subseteq A \times A$, $m,n \in N$, 则

  (1) $R^m \bigcirc R^n = R^{m+n}$;

  (2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

定理17(证明(1))

- (1) $R^m \bigcirc R^n = R^{m+n}$;
- 证明: (1) 给定m, 对n归纳. n=0时,

$R^m \bigcirc R^n = R^m \bigcirc R^0 = R^m \bigcirc I_A = R^m = R^{m+0}$.

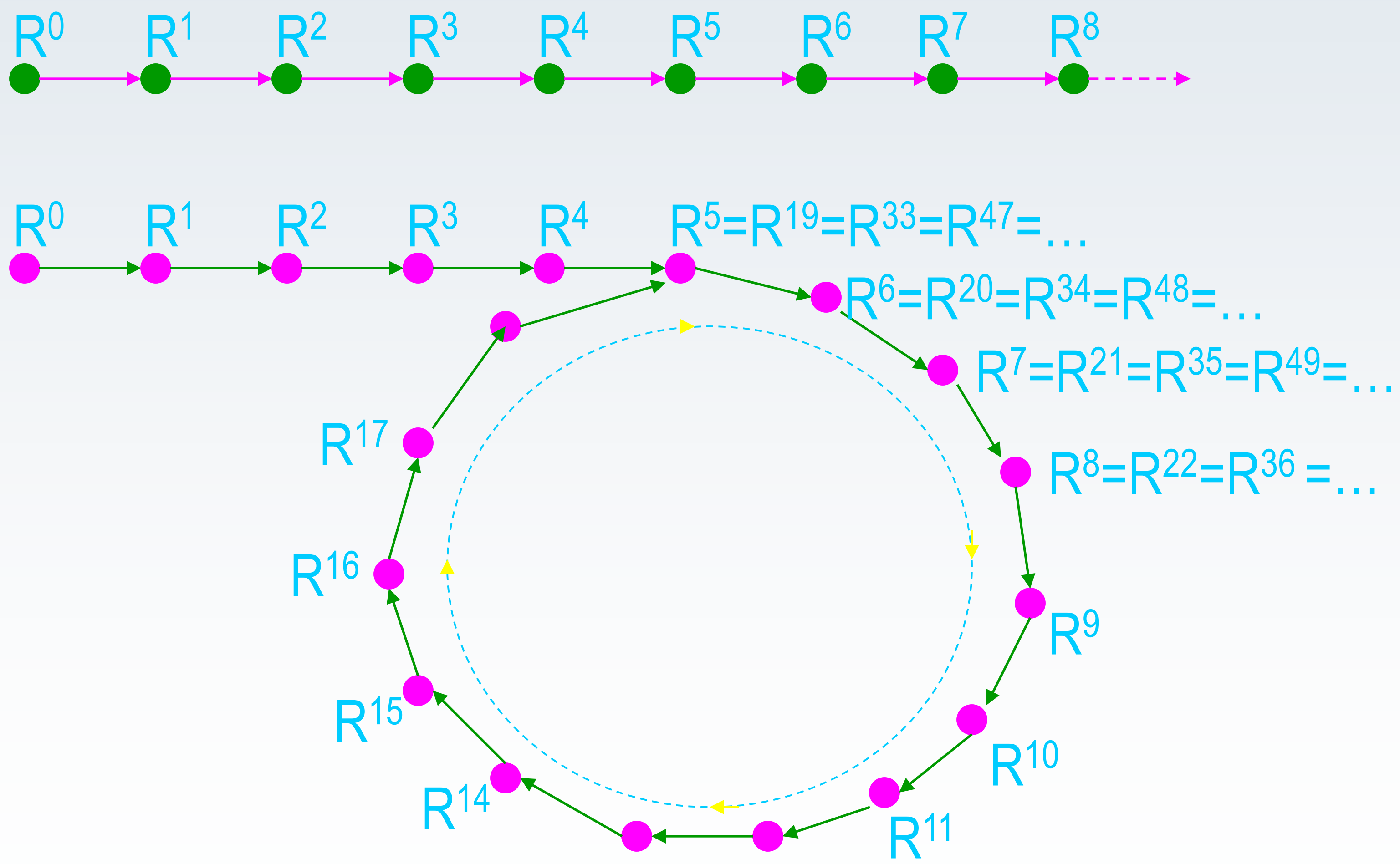
假设 $R^m \bigcirc R^n = R^{m+n}$, 则 $R^m \bigcirc R^{n+1}$

$= R^m \bigcirc (R^n \bigcirc R^1) = (R^m \bigcirc R^n) \bigcirc R^1 = R^{m+n} \bigcirc R$

$= R^{(m+n)+1} = R^{m+(n+1)}$.

- (2) 同样对n归纳. #

$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$是否互不相等?



定理16

- 定理16: 设 $|A|=n$, $R\subseteq A\times A$, 则 $\exists s,t\in N$, 并且 $0\le s<t\le 2^{n^2}$ 使得 $R^s = R^t$.
- 证明: $P(A\times A)$对幂运算是封闭的, 即

$\forall R,\ R\in P(A\times A) \Rightarrow R^k\in P(A\times A),\ (k\in N)$.

$|P(A\times A)| = 2^{n^2}$ 在$R^0,R^1,R^2,\ldots,R^{2^{n^2}}$这$2^{n^2}+1$个集合中, 必有两个是相同的.

所以 $\exists s,t\in N$, 并且 $0\le s<t\le 2^{n^2}$

使得 $R^s = R^t$. #

无论怎么合成，其中所含有序对中的元素永远属于A

鸽巢原理(pigeonhole principle)

- 鸽巢原理(pigeonhole principle): 若把n+1只鸽子装进n只鸽巢, 则至少有一只鸽巢装2只以上的鸽子.
- 又名抽屉原则(Dirichlet drawer principle),
  (Peter Gustav Lejeune Dirichlet,1805~1859)
- 推广形式: 若把m件物品装进k只抽屉, 则至少有一只抽屉装$\left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil$只以上的物品.
- $\lceil 1.8 \rceil=2$, $\lfloor 1.8 \rfloor=1$, $\lceil -1.8 \rceil=-1$, $\lfloor -1.8 \rfloor=-2$.

定理18

- 定理18: 设 $R \subseteq A \times A$, 若 $\exists s,t \in N$ $(s<t)$,使得$R^s = R^t$, 则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$;

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$k,i \in N$, $p=t-s$;

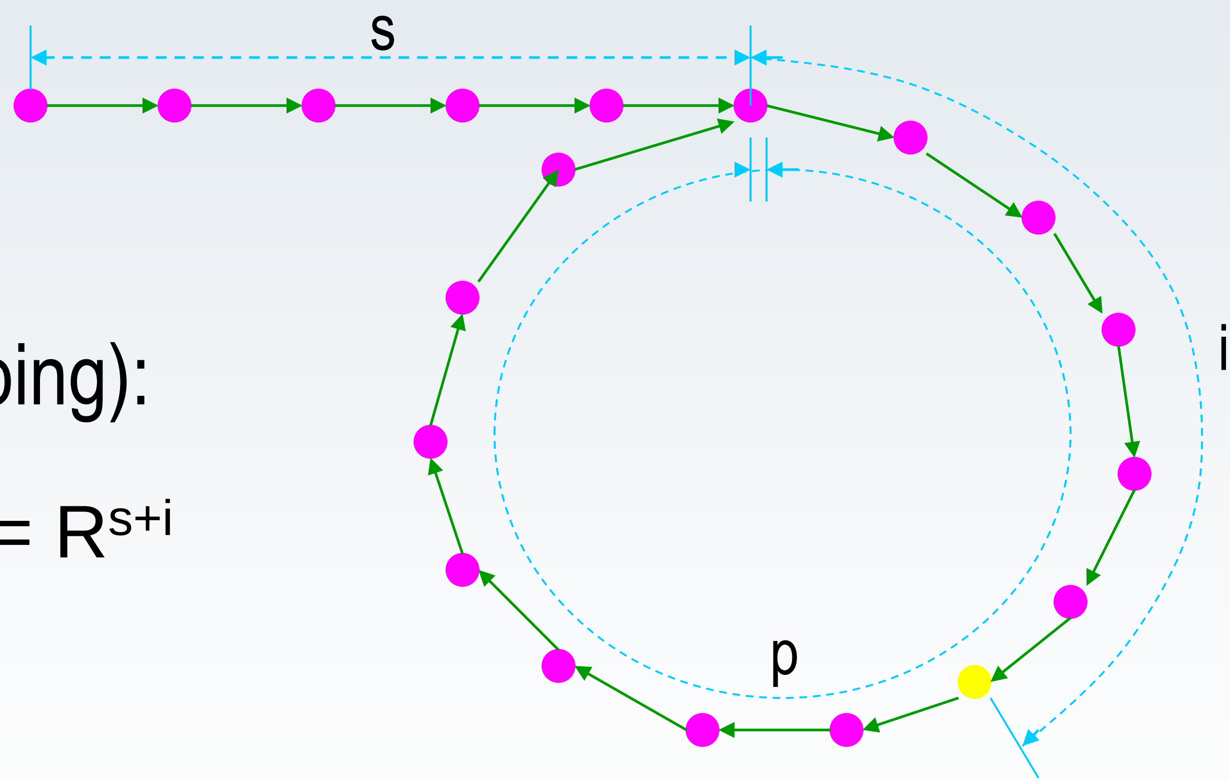
(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q \in N$, $R^q \in S$.

因为合成算子满足结合律

定理18(说明)

泵(pumping):

$$R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$



定理18 (证明(1)(3))

- (1) $R^{s+k} = R^{t+k}$;

  (3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q\in N$, $R^q\in S$.
- 证明: (1) $R^{s+k} = R^s \bigcirc R^k = R^t \bigcirc R^k = R^{t+k}$;

(3) 若 $q>t-1\geq s$, 则令 $q=s+kp+i$,(构造法)

其中 $k,i\in N$, $p=t-s$, $s+i<s+p=s+t-s=t$;

于是 $R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}\in S$.

基本思路：若q小于等于t-1，则显然；若q大于t-1，则根据（2）进行

定理18(证明(2))

- (2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$k,i \in N$, $p=t-s$;
- 证明: (2) k=0时,显然;

  k=1时,即(1);

  设 $k \geq 2$. 则

$R^{s+kp+i} = R^{s+k(t-s)+i} = R^{s+t-s+(k-1)(t-s)+i}$

$= R^{t+(k-1)(t-s)+i} = R^{s+(k-1)(t-s)+i} = \ldots$

$= R^{s+(t-s)+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$. #

在这一步就可以根据k-1的情况得到

幂指数的化简

$R^{s+kp+i} = R^{s+i}$;p=t-s

- 方法: 利用定理16, 定理18.
- 例6: 设 $R\subseteq A\times A$, 化简R^{100}的指数. 已知

(1) $R^7 = R^{15}$; (2) $R^3 = R^5$; (3) $R^1 = R^3$.

s t

- 解:

(1) $R^{100}=R^{7+11\times 8+5}=R^{7+5}=R^{12}\in\{R^0,R^1,\ldots,R^{14}\}$;

(2) $R^{100}=R^{3+48\times 2+1}=R^{3+1}=R^4\in\{R^0,R^1,\ldots,R^4\}$;

(3) $R^{100}=R^{1+49\times 2+1}=R^{1+1}=R^2\in\{R^0,R^1,R^2\}$. #

2. 关系闭包

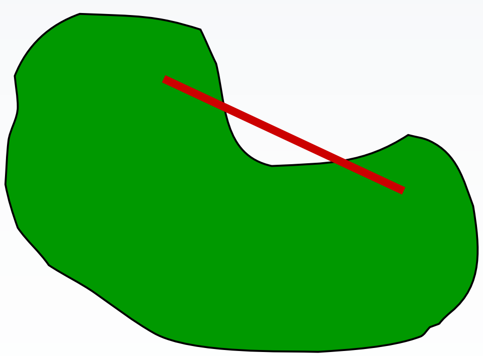
关系的闭包

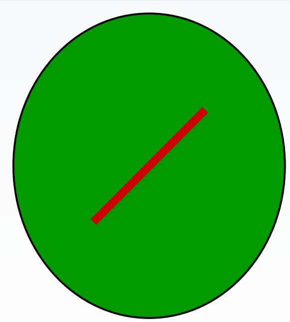
- 自反闭包r(R)
- 对称闭包s(R)
- 传递闭包t(R)
- 闭包的性质, 求法, 相互关系

什么是闭包

- 闭包(closure)：包含一些给定对象, 具有指定性质的最小集合
- “最小”：任何包含同样对象, 具有同样性质的集合, 都包含这个闭包集合
- 例: (平面上点的凸包)

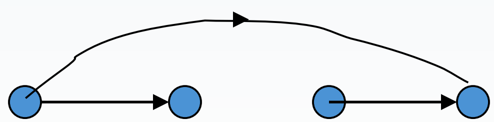
一个点集，其中任何两个点连线上的点还属于这个集合



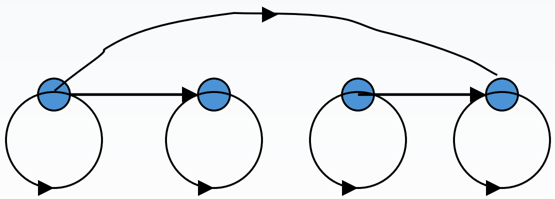


自反闭包(reflexive closure)

- 自反闭包: 包含给定关系R的**最小自反**关系, 称为R的自反闭包, 记作r(R).
  - (1) $R \subseteq r(R)$;　（包）
  - (2) r(R)是自反的; **(自反)**
  - (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S\text{自反}) \rightarrow r(R) \subseteq S)$.　（闭）



G(R)



G(r(R))

自反闭包举例

- 在数学中经常要用到小于关系表示量之间的关系，但是有时感到用小于关系不方便，而用小于等于关系，实际上是将量之间的关系进行扩大，不自觉地用了小于的自反闭包，
- 日常生活中我们按同龄或同班或同乡关系将人分组，一般来说同龄，同班，同乡关系指两个不同的人之间的一种关系，这种关系就不具有自反性，如果我们约定了自已与自已同龄，同班，同乡，此时它们就有了自反性。

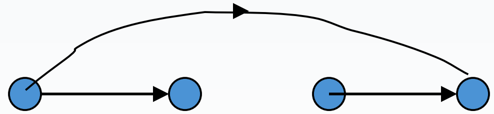
对称闭包(symmetric closure)

✱对称闭包: 包含给定关系R的**最小对称**关系, 称为R的对称闭包, 记作s(R).

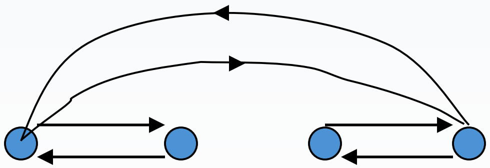
(1) $R \subseteq s(R)$; （包）

(2) s(R)是对称的; （对称）

(3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$对称$) \rightarrow s(R) \subseteq S)$. （闭）



G(R)



G(s(R))

对称闭包举例

- 小于关系是不对称，它的逆关系大于关系也是不对称，但将两者关系并起来(将关系看成集合)，得不等关系却是的对称的，不等关系是小于或大于关系的对称闭包；
- 夫对妻的关系是不对称的，妻对夫的关系也是不对称的，但对称闭包婚姻关系却是对称的(考虑到男女平等，即对称性)。

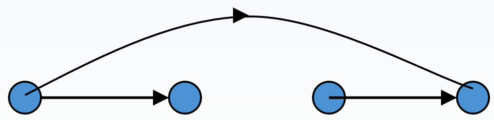
传递闭包(transitive closure)

- 传递闭包: 包含给定关系R的**最小传递**关系, 称为R的传递闭包, 记作t(R).

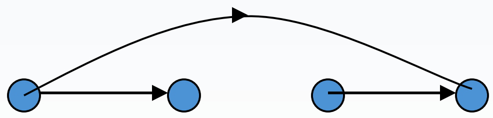
  (1) $R \subseteq t(R)$;

  (2) $t(R)$是传递的;

  (3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S\text{传递}) \rightarrow t(R) \subseteq S)$.



G(R)



G(t(R))

传递闭包举例

- 例1：如果 X 是(生或死)人的集合，而 R 是关系“为父子”，则 R 的传递闭包是关系“x 是 y 的祖先”。

- 例2：如果 X 是空港的集合而关系，xRy 为“从空港 x 到空港 y 有直航”，则 R 的传递闭包是“可能经一次或多次航行从 x 飞到 y”。

定理19

- 定理19: 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$,则

(1) R自反 $\Leftrightarrow r(R) = R$;

(2) R对称 $\Leftrightarrow s(R) = R$;

(3) R传递 $\Leftrightarrow t(R) = R$;

证明: (1) $R \subseteq R \wedge R$自反 $\Rightarrow r(R) \subseteq R$

(根据自反闭包最小的定义)

又 $R \subseteq r(R)$, $\therefore r(R) = R$.

(2)(3) 完全类似. #

定理20

- 定理20: 设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$;

证明: (1) $R_1 \subseteq R_2 \subseteq r(R_2)$自反,

$\therefore r(R_1) \subseteq r(R_2)$ (根据自反闭包最小的定义)

(2)(3) 类似可证. #

如何求闭包?

- 问题:

(1) $r(R) = R \cup$?

(2) $s(R) = R \cup$?

(3) $t(R) = R \cup$?

定理22~24

- 定理22~24: 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

  (1) $r(R) = R\cup I_A$;

  (2) $s(R) = R\cup R^{-1}$;

  (3) $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$.

- 对比: R自反 $\Leftrightarrow I_A\subseteq R$

  R对称 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$

  R传递 $\Leftrightarrow R^2\subseteq R$

证明自学

定理22

- 定理22: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

$$r(R) = R \cup I_A;$$

- 证明: (1) $R \subseteq R \cup I_A$;

证明$r(R) \subseteq R \cup I_A$

(2) $I_A \subseteq R \cup I_A \Leftrightarrow R \cup I_A$自反 $\Rightarrow r(R) \subseteq R \cup I_A$;（根据闭包的最小）

证明$R \cup I_A \subseteq r(R)$

(3) $R \subseteq r(R) \wedge r(R)$自反

$\Rightarrow R \subseteq r(R) \wedge I_A \subseteq r(R) \Rightarrow R \cup I_A \subseteq r(R)$

$\therefore\ r(R) = R \cup I_A.$

定理23

- 定理23: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

$$s(R) = R \cup R^{-1};$$

- 证明: (1) $R \subseteq R \cup R^{-1}$;

(2) $\boxed{(R \cup R^{-1})^{-1} = R \cup R^{-1}} \Leftrightarrow R \cup R^{-1}$对称

$\Rightarrow s(R) \subseteq R \cup R^{-1}$;

并运算逆的性质

(3) $R \subseteq s(R) \wedge s(R)$对称

$\Rightarrow R \subseteq s(R) \wedge R^{-1} \subseteq s(R) \Rightarrow R \cup R^{-1} \subseteq s(R)$

$\therefore s(R) = R \cup R^{-1}$.

对称闭包的性质，请下来证明

- 基本思路：
  同前
- 自学

- 定理24: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$$

- 证明: (1) $R \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$

(2) $(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)^2 = R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

$\Leftrightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$传递 $\Rightarrow t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$

(3) $R \subseteq t(R) \wedge t(R)$传递

$\Rightarrow R \subseteq t(R) \wedge R^2 \subseteq t(R) \wedge R^3 \subseteq t(R) \wedge \ldots$

$\Rightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$

$\therefore t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots.$

R是传递的
$\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

定理24的推论

✱推论: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $0<|A|<\infty$, 则$\exists \ell \in N$, 使得 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^\ell$;

✱证明: **由定理16**知 $\exists s,t \in N$, 使得 $R^s = R^t$.

由定理18知 $R, R^2, R^3, \ldots \in \{ R^0, R^1, \ldots, R^{t-1} \}$.

取$\ell=t-1$, 由定理24知

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$

$$= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^\ell$$

$$\therefore\ t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^\ell. \qquad \#$$

该推论说明求取传递闭包可以经过有限次运算
证明采用构造法

例8

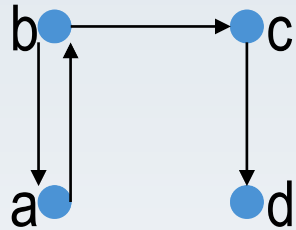
- 例8: 设 A = { a,b,c,d },

  R = { <a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d> }.

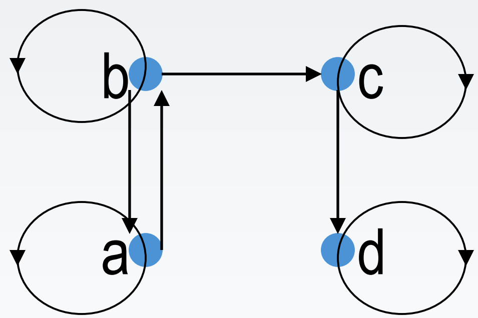
 求 r(R), s(R), t(R).

例8(续)

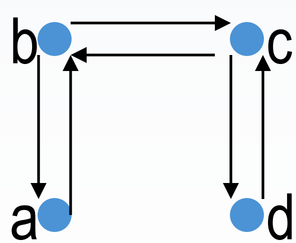
- 解(续):



$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



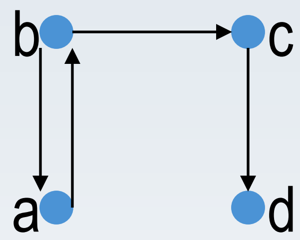
$$M(r(R)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



$$M(s(R)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

例8(续2)

- 解(续2):



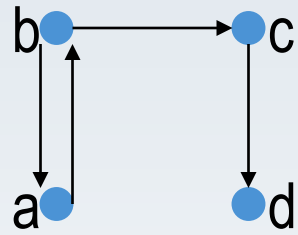
$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

例8(续3)

- 解(续3):



$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

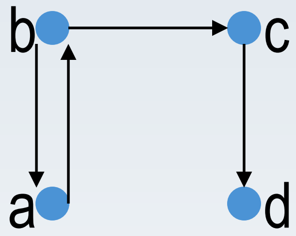
$$M(R^2)=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(R^2).$$

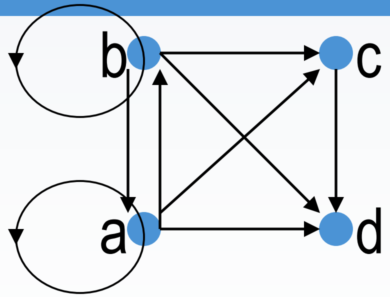
例8(续4)

- 解(续4):



$$M(t(R)) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

\#



闭包运算是否保持关系性质?

- 问题:

(1) R自反 $\Rightarrow$ s(R), t(R)自反？

(2) R对称 $\Rightarrow$ r(R), t(R)对称 ？

(3) R传递 $\Rightarrow$ s(R), r(R)传递？

定理25

- 定理25: 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$,则

(1) R自反 $\Rightarrow$ s(R)和t(R)自反;

(2) R对称 $\Rightarrow$ r(R)和t(R)对称;

(3) R传递 $\Rightarrow$ r(R)传递;

定理25(反例)

- 反例：R传递, 但是s(R)非传递.

G(R)

G(s(R))

- 小结：闭包运算保持下列关系性质.

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√ (定义)	√(定理25(2))	√(定理25(3))
s(R)	√(定理25(1))	√(定义)	×(反例)
t(R)	√(定理25(1))	√(定理25(2))	√(定义)

闭包运算是否可以交换顺序?

- 问题:

(1) $rs(R) = sr(R)$?

(2) $rt(R) = tr(R)$?

(3) $st(R) = ts(R)$?

- 说明: $rs(R) = r(s(R))$

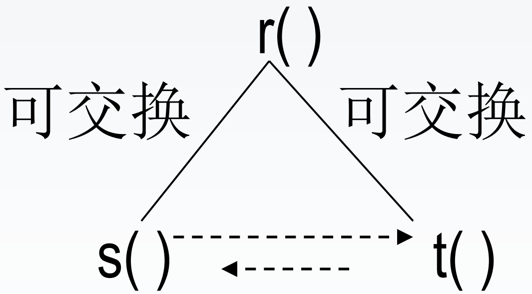
定理26

- 定理26: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \emptyset$, 则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

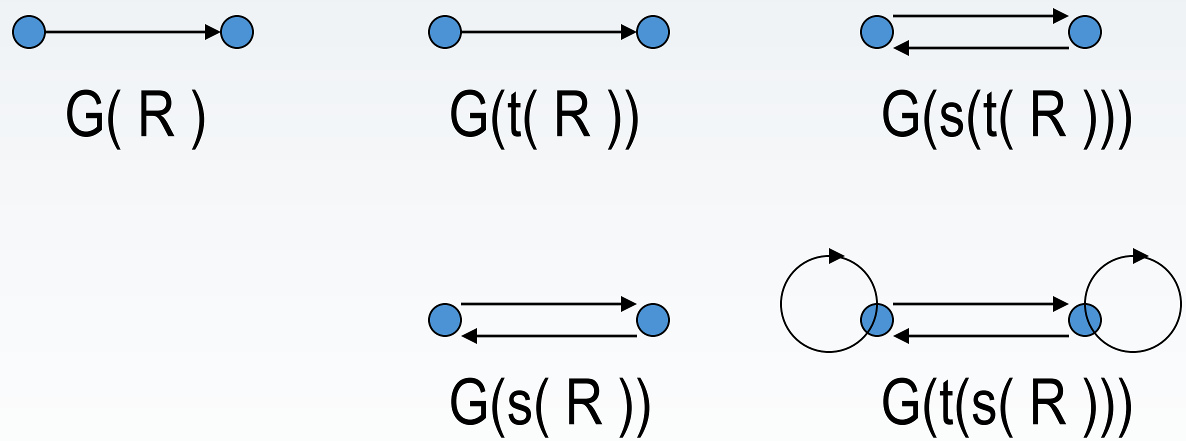
(3) $st(R) \subseteq ts(R)$;



定理26((3)反例)

- (3) st(R) = ts(R) ?

反例: st(R) $\subset$ ts(R)



总结

- 关系幂运算
- 关系闭包