

# 第10章 含有耦合电感的电路

## 本章重点

- 1.互感和互感电压
- 2.有互感电路的计算
- 3.空心变压器和理想变压器

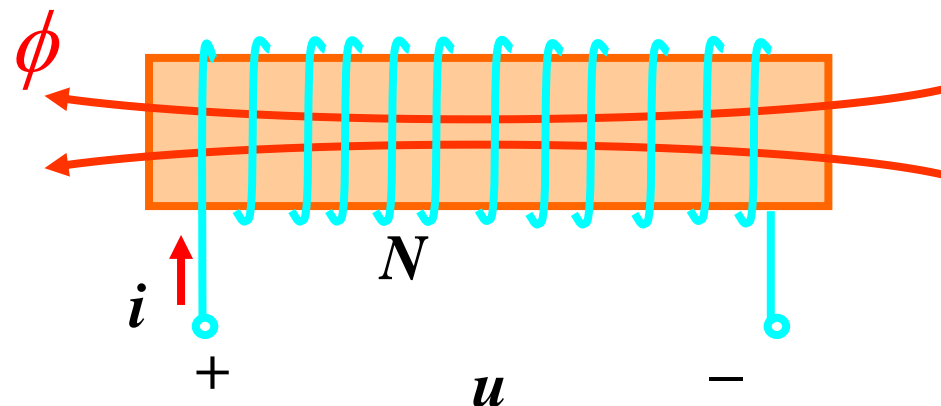
# 10.1 互感

## 1. 互感

单独的一个线圈

通入电流→产生磁通  $\phi$

磁链  $\psi = N \phi = L i$



感应电压：

$$u = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

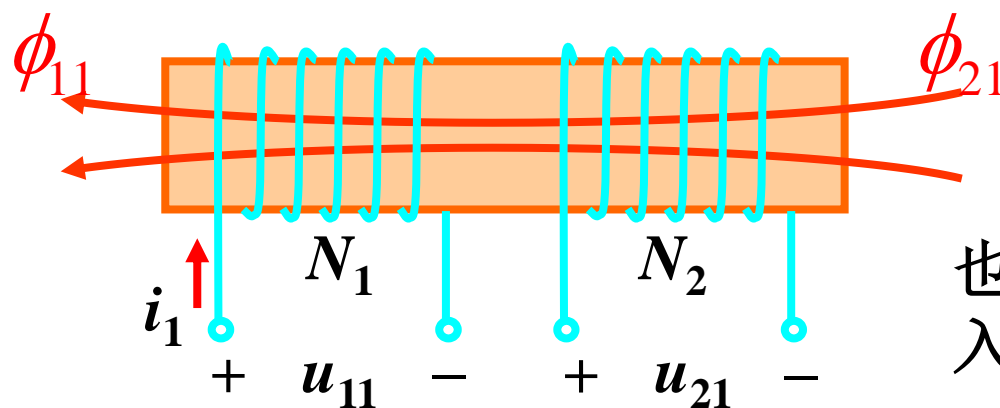
线性电感元件,电压是由自身线圈电流产生的,  
故叫自感电压,  $L$ 称为自感系数。

# 10.1 互感

## 1. 互感

- 如果在该轴芯上再绕一个线圈

对任一线圈的产生磁通,只通过一个线圈的磁通叫**漏磁通**  
同时铰链于另一线圈的磁通叫**互感磁通**



$$\psi_{21} = N_2 \phi_{21}$$

也写成与自感磁链类似形式→引入互感系数

$$\psi_{11} = N_1 \phi_{11}$$

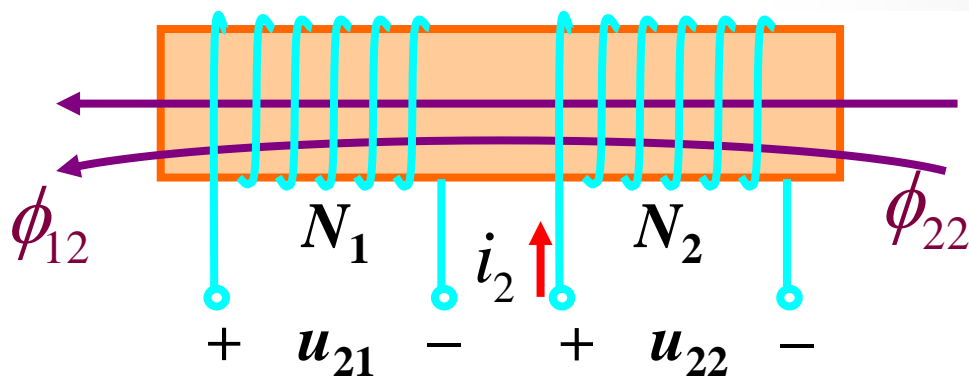
$$\psi_{11} = L_1 i_1$$

$$L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1}$$

互感系数  $M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1}$

双下标的含义

若线圈2通电流



$$\psi_{22} = N_2 \phi_{22}$$

$$\psi_{22} = L_2 i_2$$

则线圈1中同样存在互感磁链

$$\psi_{12} = N_1 \phi_{12}$$

互感系数

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

互感系数，单位亨(H)。

**注意：**  $M$ 值与线圈的形状、匝数、几何位置、空间媒质物理性质有关，满足  $M_{12}=M_{21}$ 。

## 2. 耦合系数

两个线圈磁耦合的紧密程度。

$$k = \sqrt{\frac{\psi_{21}\psi_{12}}{\psi_{11}\psi_{22}}} = \sqrt{\frac{(N_1\phi_{12})(N_2\phi_{21})}{(N_1\phi_{11})(N_2\phi_{22})}} \leq 1 \quad \left( \begin{array}{l} \phi_{12} \leq \phi_{22} \\ \phi_{21} \leq \phi_{11} \end{array} \right)$$

$$\stackrel{\text{def}}{k} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

相关因素

线圈的结构

相互几何位置

空间磁介质

**k=1**      全耦合  
**k≈1**      紧耦合  
**k小**        松耦合

>(变压器) (双线并绕)

(不希望彼此干扰,信号电路)  
 (垂直轴线)

### 3. 耦合电感上的电压、电流关系

两个线圈都注入电流

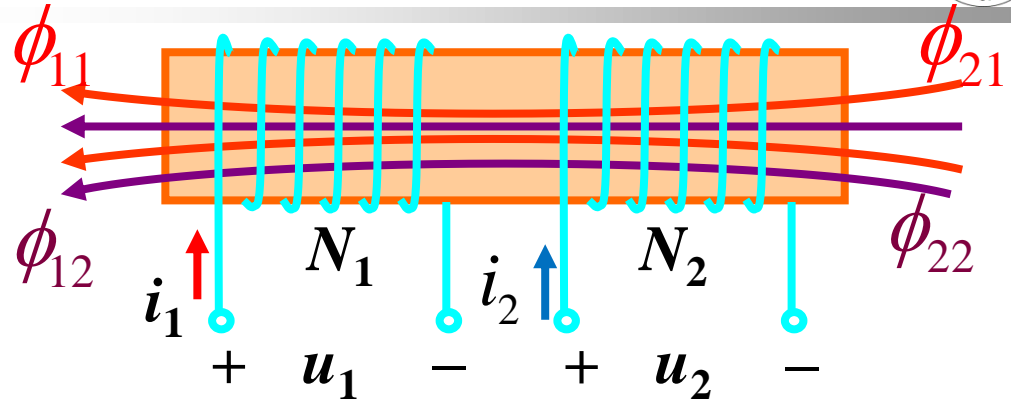
$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\psi_1 = N_1 \phi_1 = N_1 \phi_{11} + N_1 \phi_{12} = \psi_{11} + \psi_{12}$$

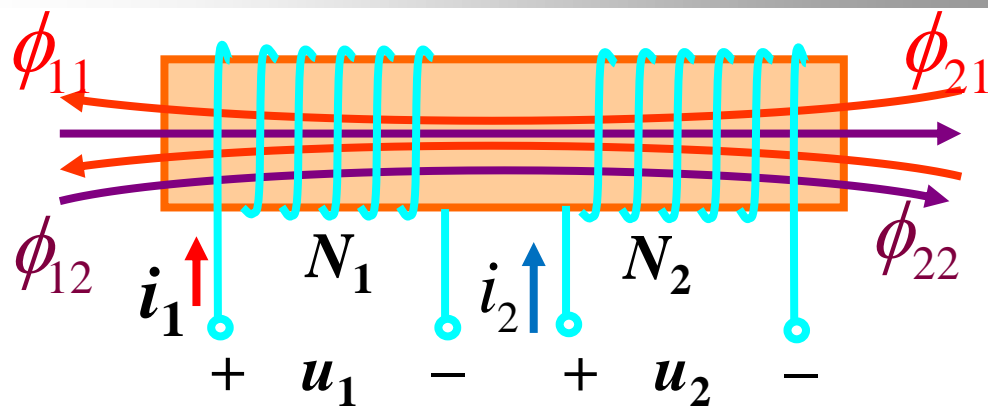
$$\psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{同理} \quad \psi_2 = M i_1 + L_2 i_2$$

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



把线圈2绕线方向变一下



$$\phi_1 = \phi_{11} - \phi_{12}$$

$$\psi_1 = N_1 \phi_1 = N_1 \phi_{11} - N_1 \phi_{12} = \psi_{11} - \psi_{12}$$

$$\psi_1 = L_1 i_1 - M i_2$$

同理

$$\psi_2 = -M i_1 + L_2 i_2$$

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

## 互感电压 符号原则:

两线圈的自磁链和互磁链方向相同，互感电压取正，否则取负。

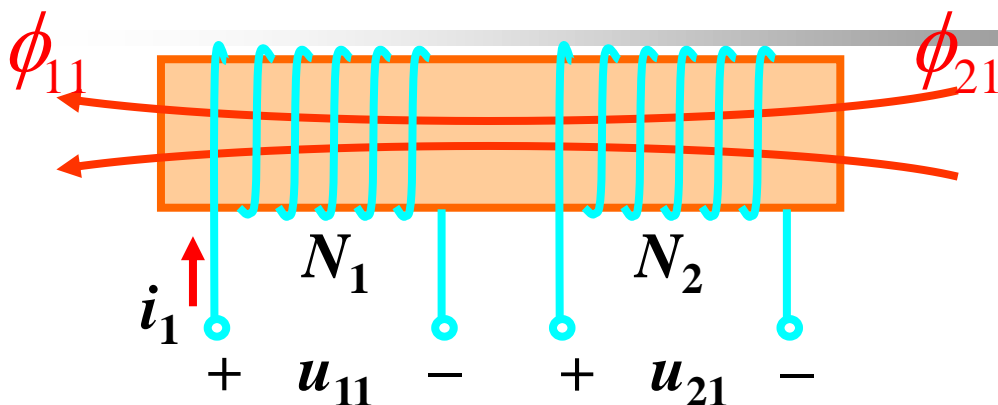
{ 电流的参考方向  
线圈的相对位置和绕向有关

$$\begin{cases} u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = u_{21} + u_{22} = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$



影响 $u_{21}$ 实际方向的因素有：



A

施感电流 $i_1$ 的方向；

B

施感电流 $i_1$ 的变化率；

C

$u_{21}$ 参考方向的指定；

D

线圈1的绕线方向；

E

线圈2的绕线方向；

F

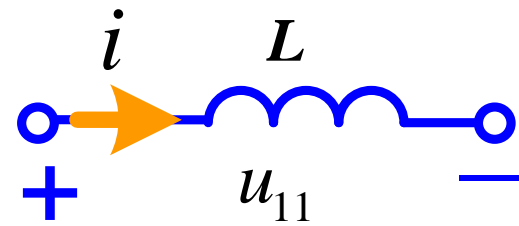
线圈2的电流方向。

提交

## 4.互感线圈的同名端

自感电压，当 $u, i$  取关联参考方向， $u、i$ 与 $\phi$  符合右手螺旋定则，其表达式为

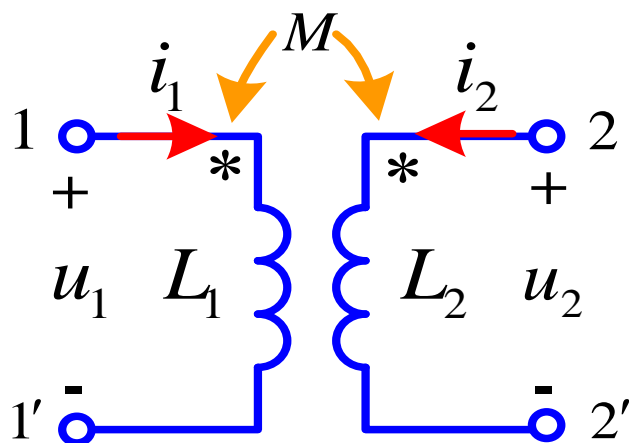
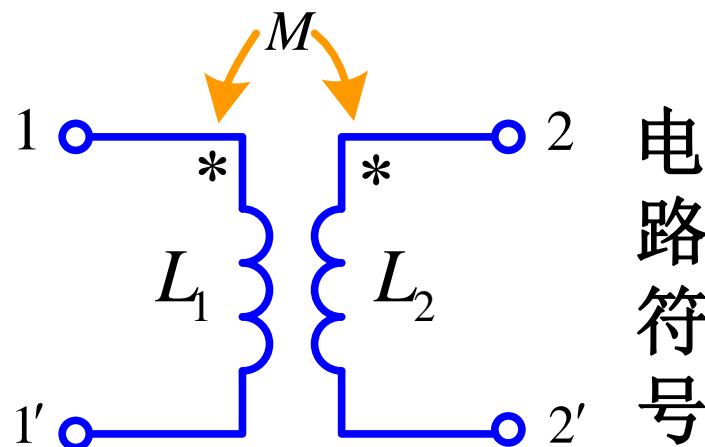
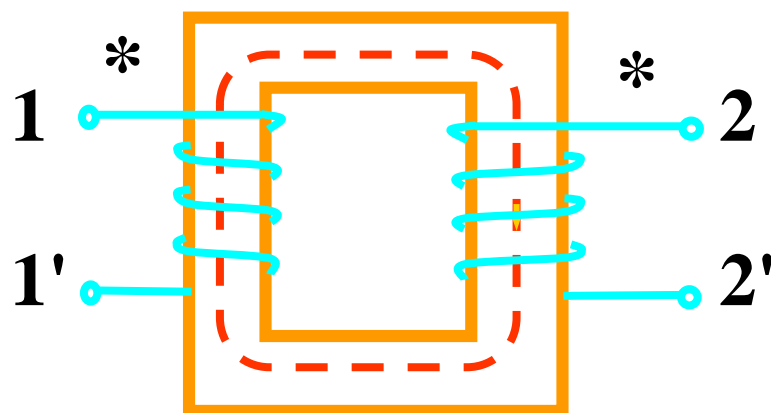
$$u_{11} = \frac{d\Psi_{11}}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$



- ★互感电压极性与绕向、与电流参考方向有关：  
线圈一定则绕向一定，则互感电压极性与  
施感电流参考方向存在一、一对应关系。  
为体现该关系则引入同名端的概念。

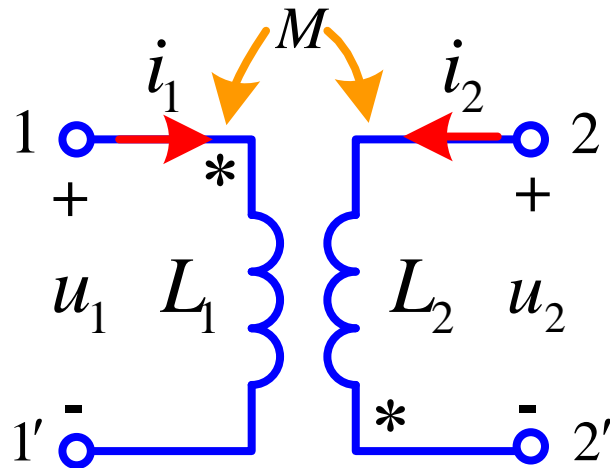
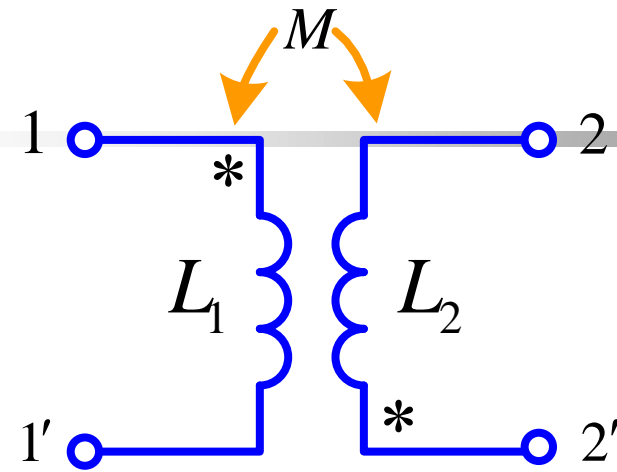
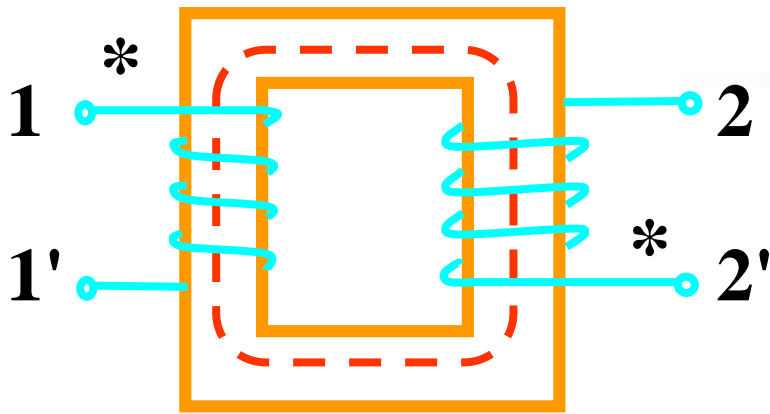
同名端

施感电流的流入端(进端)同互感电压正极性端称为同名端用符号“●”或“△”或“\*”表示。



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

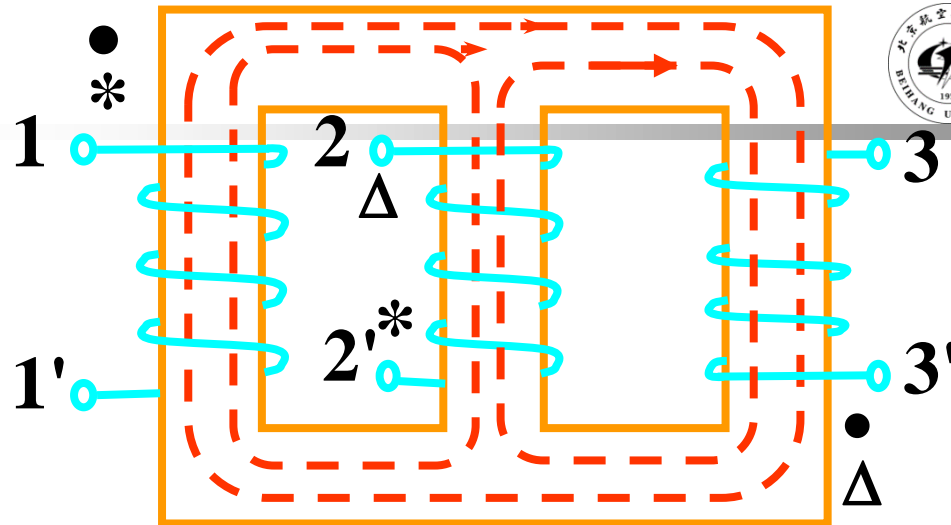
正弦稳态电路

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2$$

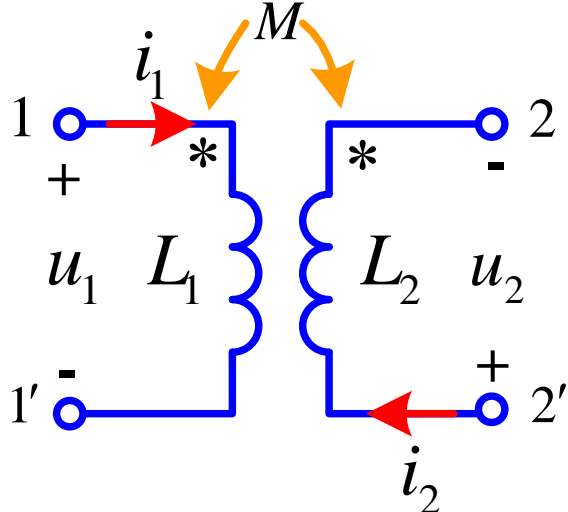
$$\dot{U}_2 = \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

# 确定同名端的方法:

实验的方法  
测耦合线圈  
的同名端:

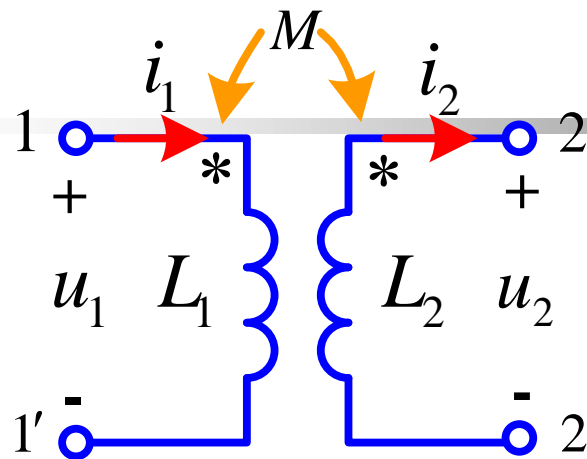


- (1) 当随时间增大的时变电流从一线圈的一端流入时, 将会引起另一线圈相应同名端的电位升高。
- (2) 当两个线圈中电流同时由同名端流入(或流出)时, 两个电流产生的磁场相互增强。
- (3) 线圈的同名端必须两两确定。



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$$

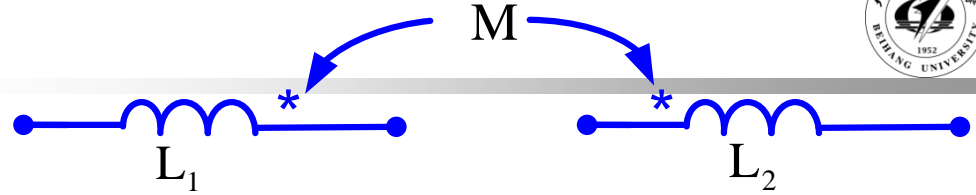
互感电压的方向 { 同名端  
产生它的电流

一端电流从\*端流入，另端互感电压\*端为正

互感前正负号由施感电流方向与互感电压参考方向有关。  
同名端时取正,否则取负。

写出图示电路电压电流关系式

## 五. 耦合电感的电路符号

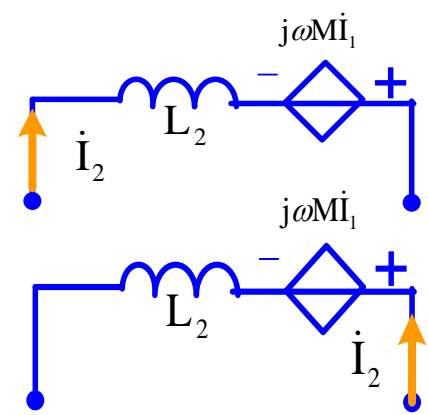
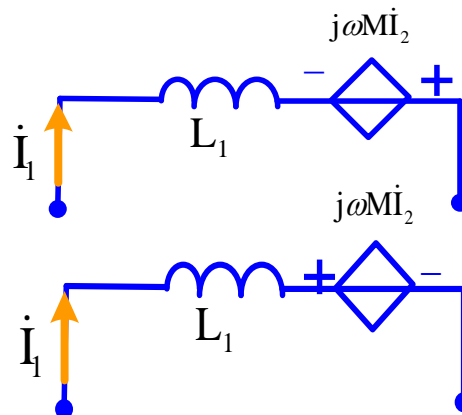
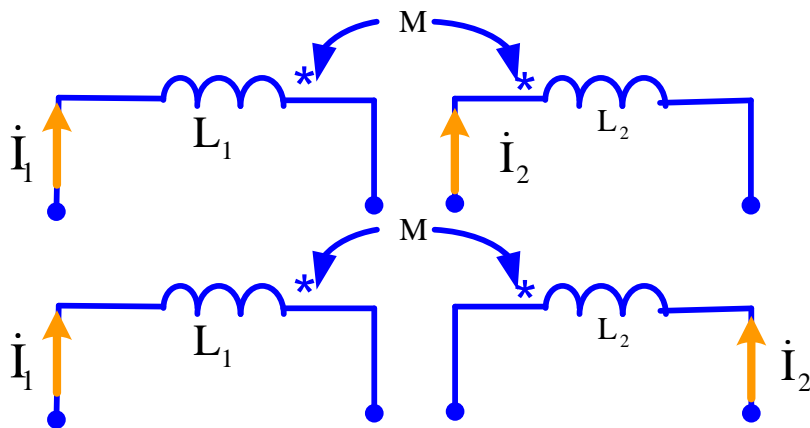
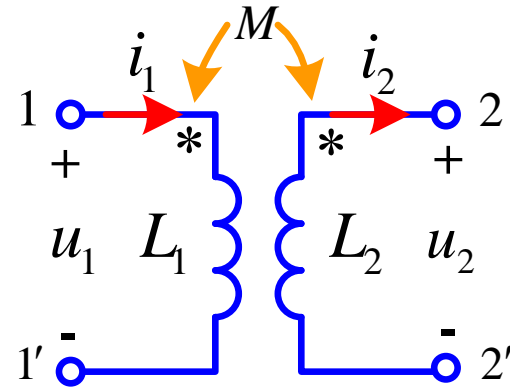


• 互感电压的作用可用受控源来表示

• CCVS

• 受控源极性与施感电流方向有关

• 受控源极性与同名端有关

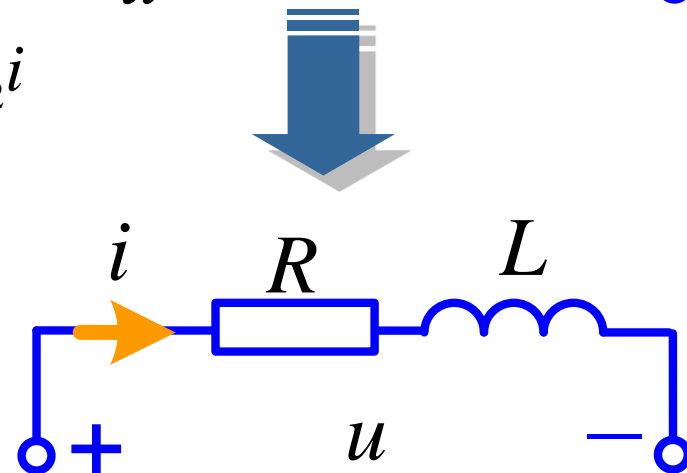
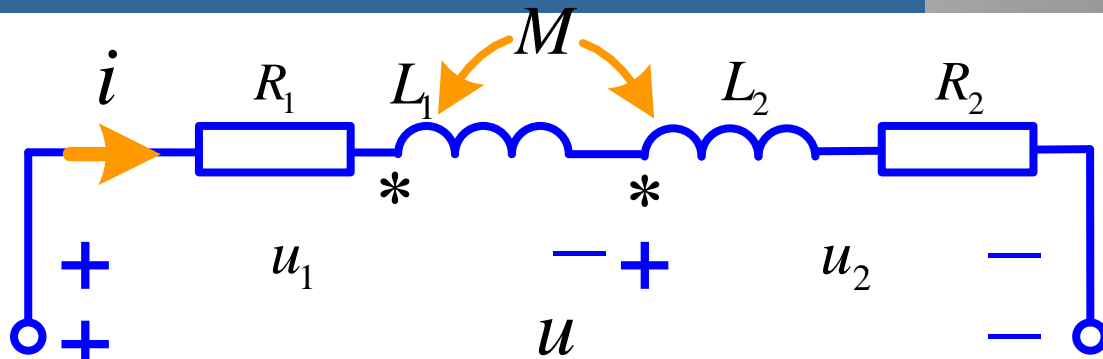


# 10.2 含有耦合电感电路的计算

## 1. 耦合电感的串联

### (1) 顺接串联

$$\begin{aligned}
 u &= R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i \\
 &= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} \\
 &= R i + L \frac{di}{dt}
 \end{aligned}$$

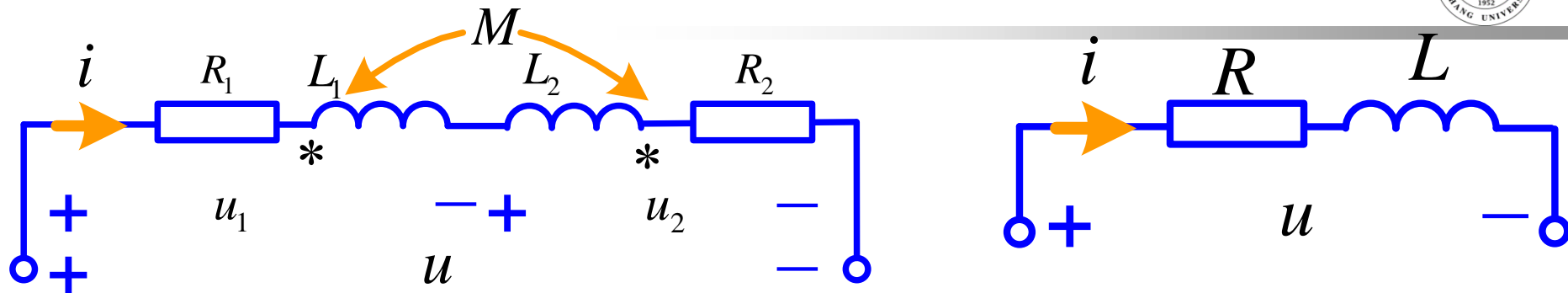


去耦等效电路

$$\begin{aligned}
 R &= R_1 + R_2 \\
 L &= L_1 + L_2 + 2M
 \end{aligned}$$



## (2) 反接串联



$$u = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + R_2 i$$

$$= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$R = R_1 + R_2$$

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

$$M \leq \frac{1}{2} (L_1 + L_2)$$

互感不大于两个自感的算术平均值。

$$L = L_1 + L_2 - 2M \geq 0$$

## 互感系数的测量方法:

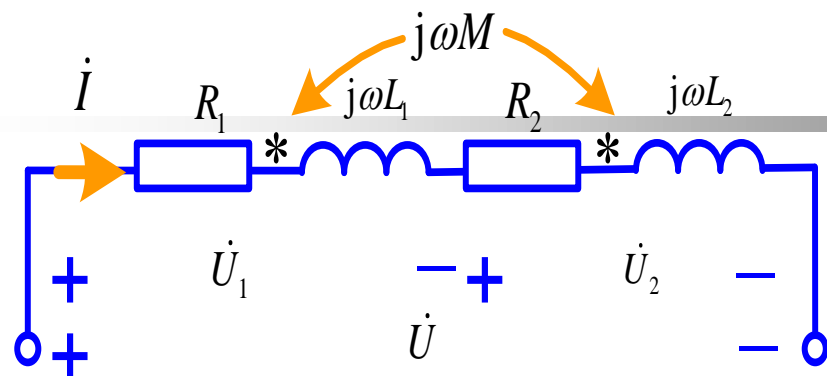
顺接一次，反接一次，可测互感系数:

$$M = \frac{L_{\text{顺}} - L_{\text{反}}}{4}$$

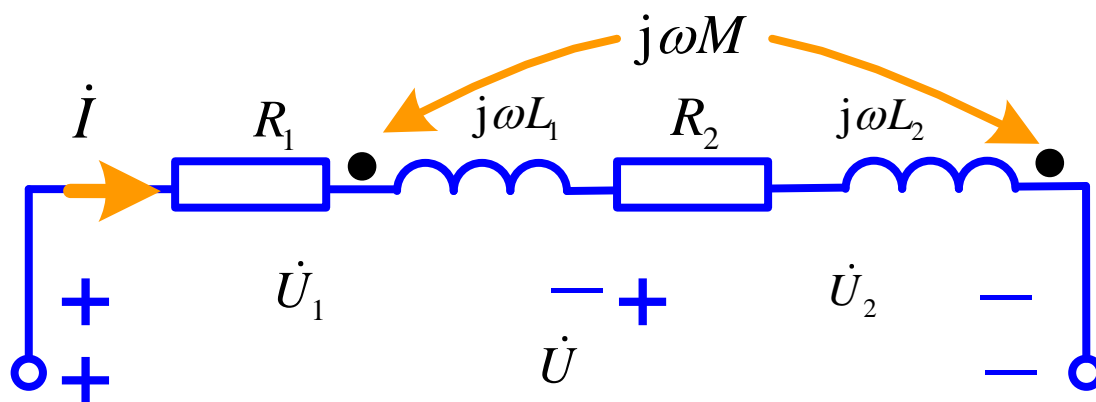
全耦合时  $M = \sqrt{L_1 L_2}$

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 \pm 2M = L_1 + L_2 \pm 2\sqrt{L_1 L_2} \\ &= (\sqrt{L_1} \pm \sqrt{L_2})^2 \end{aligned}$$

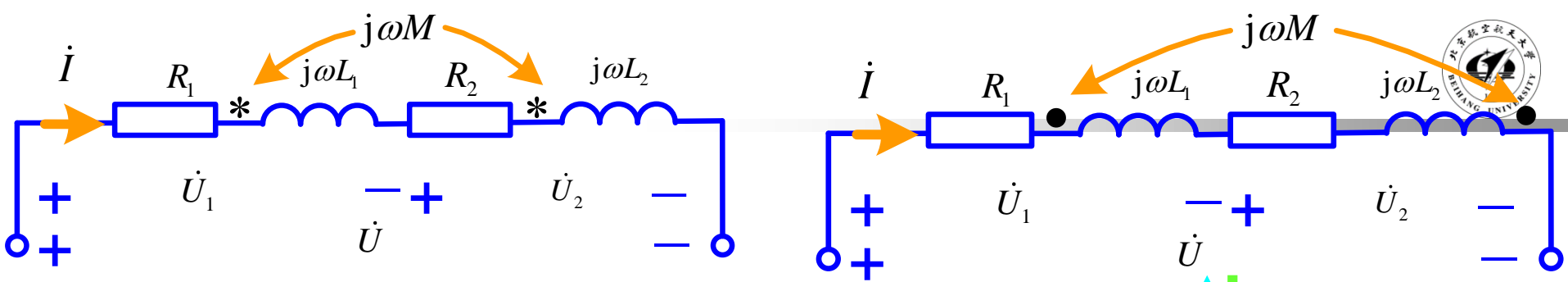
在正弦激励下:



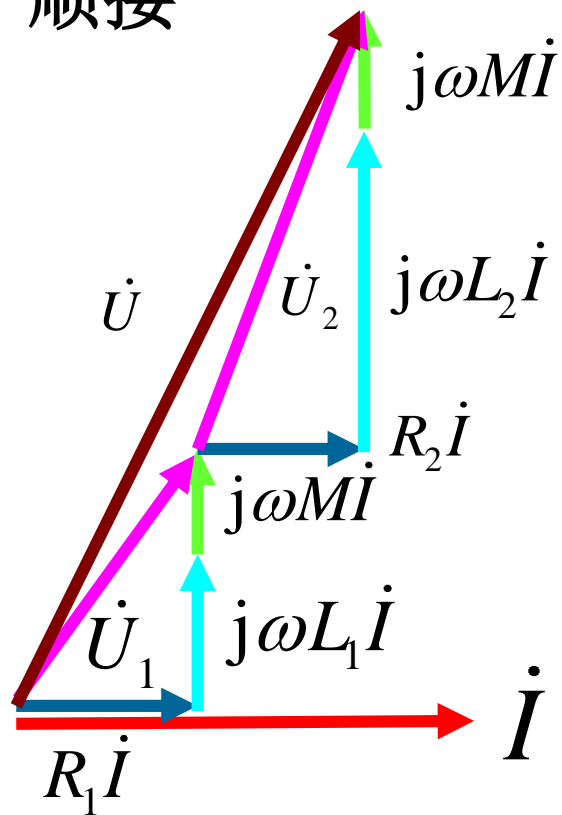
$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I}$$



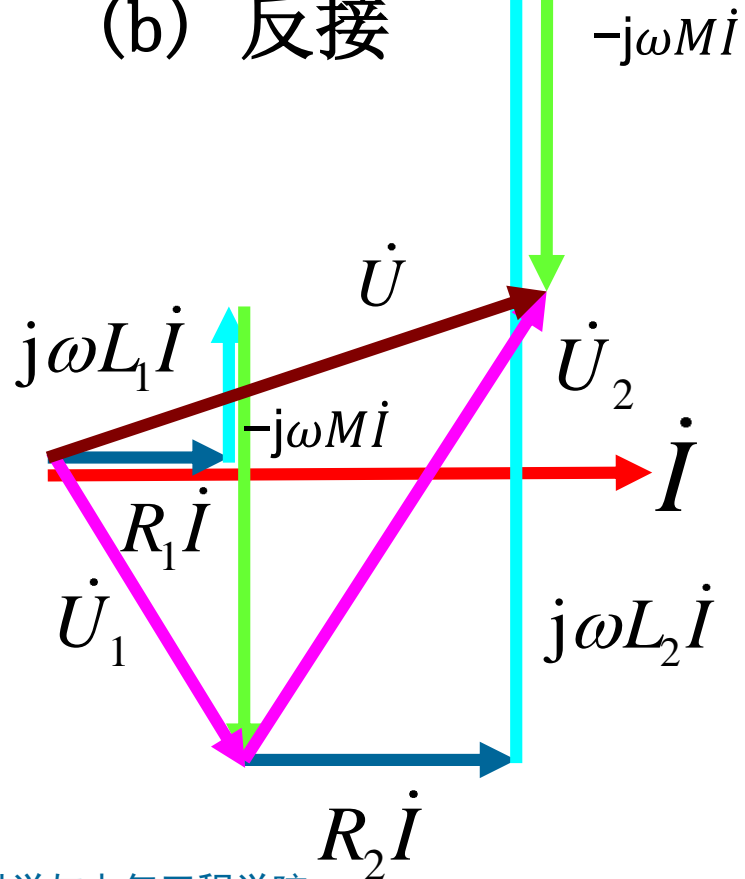
$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I}$$



相量图：  
(a) 顺接



(b) 反接

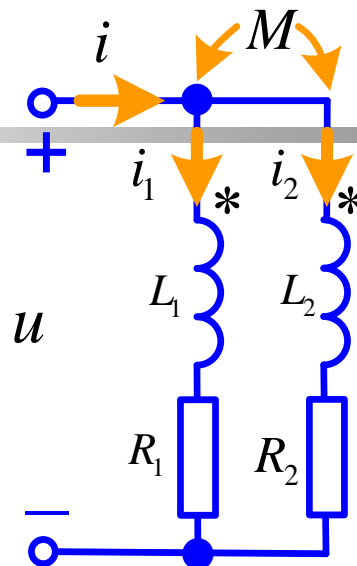


## 2. 耦合电感的并联

### (1) 同侧并联

$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 \end{cases}$$

$$i = i_1 + i_2$$



$$\begin{cases} \dot{U} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 + R_1 \dot{I}_1 \\ \dot{U} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

$$Z_1 = j\omega L_1 + R_1$$

$$Z_2 = j\omega L_2 + R_2$$

$$Z_m = j\omega M$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_1 = \dot{U} \frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_m}{Z_1 Z_2 - Z_m^2}$$

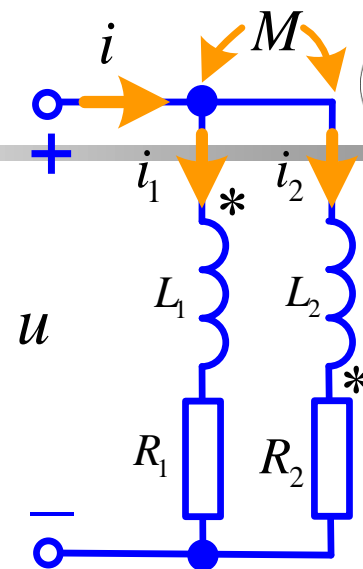
**等效  
阻抗**

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_m^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_m}$$

## (2) 异侧并联

$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 \end{cases}$$

$$i = i_1 + i_2$$



$$\begin{cases} \dot{U} = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 + R_1 \dot{I}_1 \\ \dot{U} = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

$$Z_1 = j\omega L_1 + R_1$$

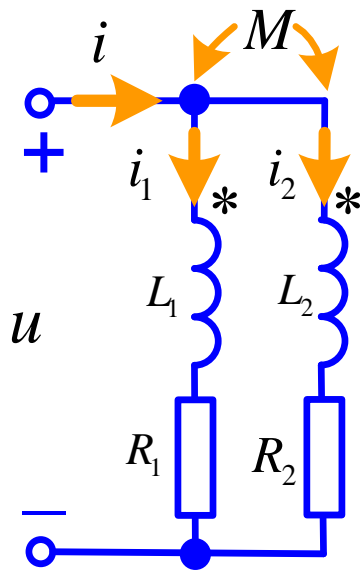
$$Z_2 = j\omega L_2 + R_2$$

$$Z_m = j\omega M$$

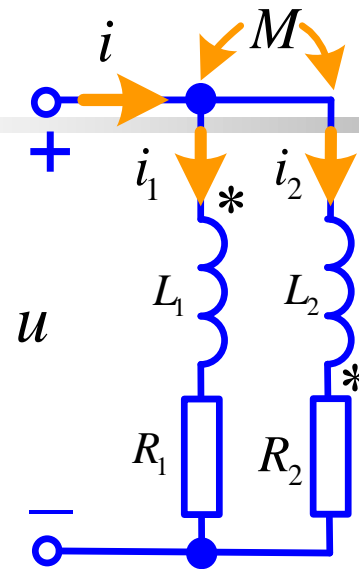
$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_1 = \dot{U} \frac{Z_1 + Z_2 + 2Z_m}{Z_1 Z_2 - Z_m^2}$$

**等效  
阻抗**

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_m^2}{Z_1 + Z_2 + 2Z_m}$$



$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_m^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_m}$$



$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_m^2}{Z_1 + Z_2 + 2Z_m}$$

**R1=R2=0时**

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

两个耦合电感，下面哪种连接方式，使得端口上的阻抗仍是感性的：

- ☒ A 串联的顺接方式；
- ☒ B 串联的反接方式；
- ☒ C 同侧并联；
- ☒ D 异侧并联。

提交



# 作业



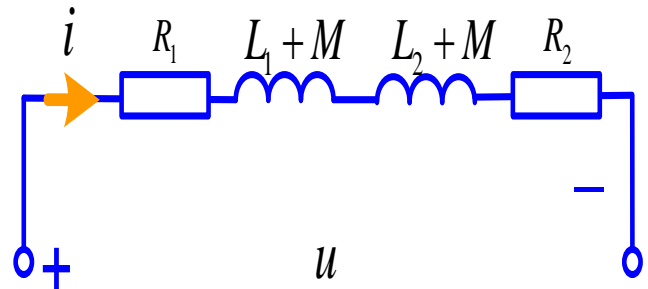
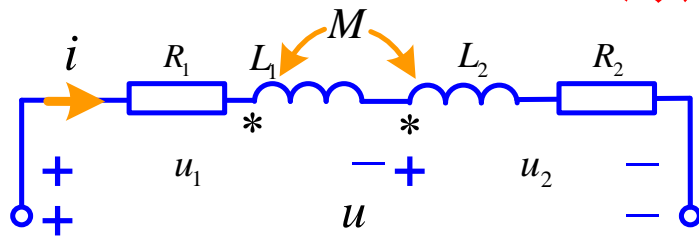
- 10-1 【同名端】
- 10-2 【同名端】
- 10-8 【串接】
- 10-15 【回路法方程】

### 3.互感消去法

两个耦合电感有一端相联接时, 可把具有互感的电路快速转化为等效的无互感的电路。

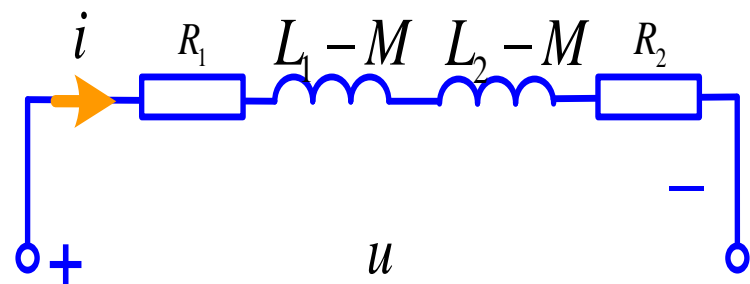
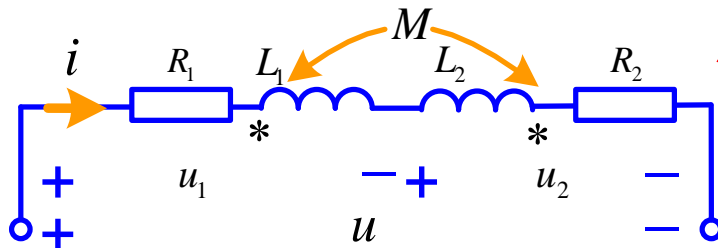
#### (1) 串联

顺接



$$u = (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}$$

反接

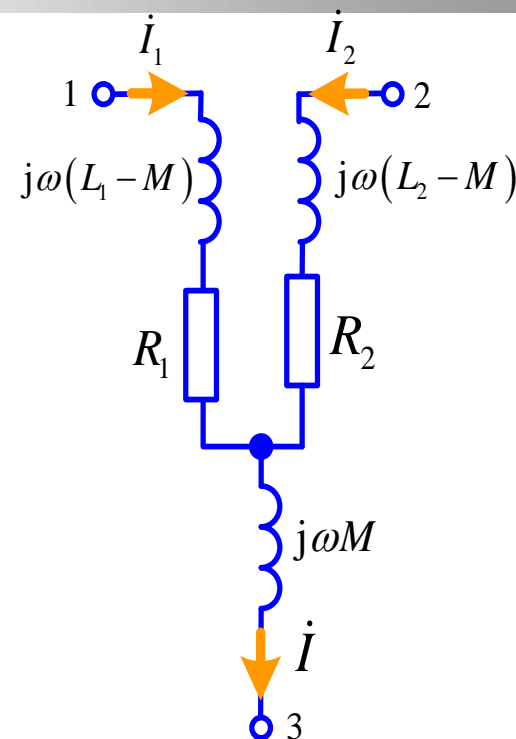
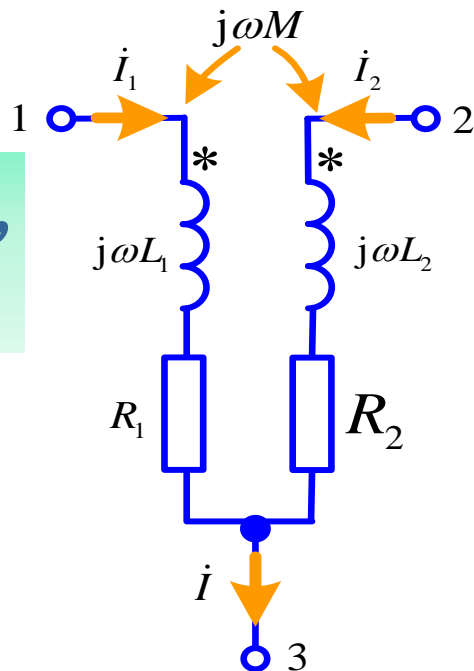


$$u = (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}$$

### 3.互感消去法

#### (2) 同名端为共端的T型去耦等效

( 1、2端也共点，  
则为同侧并联)



同侧联接

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

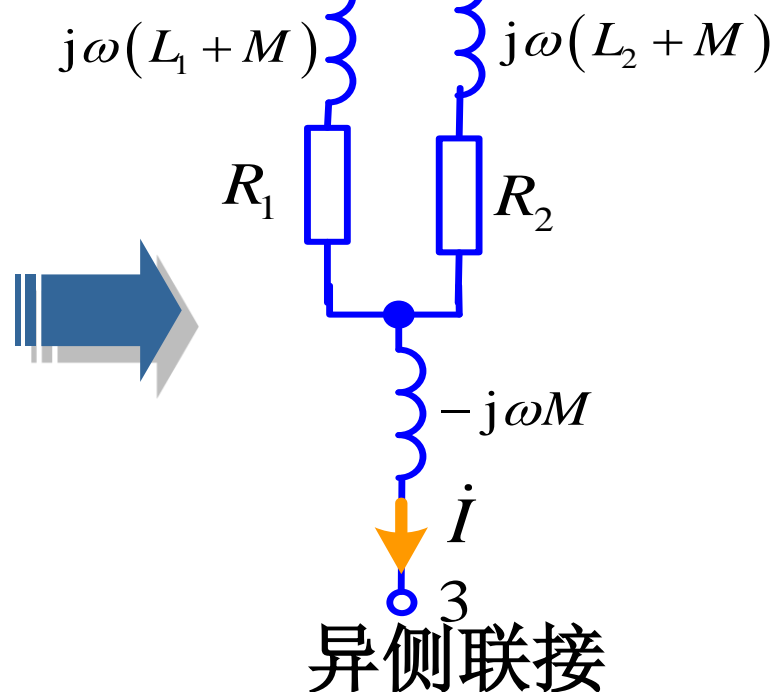
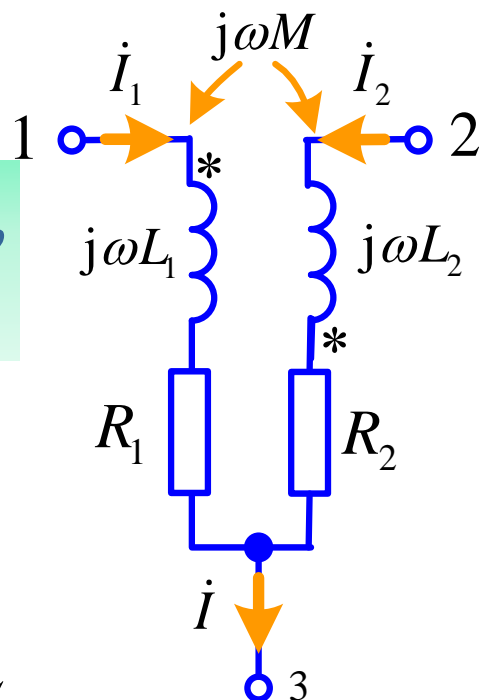
$$\dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = j\omega(L_1 - M) \dot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}$$

$$\dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = j\omega(L_2 - M) \dot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}$$

### (3) 异名端为共端的T型去耦等效

(1、2端也共点, 则为异侧并联)

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

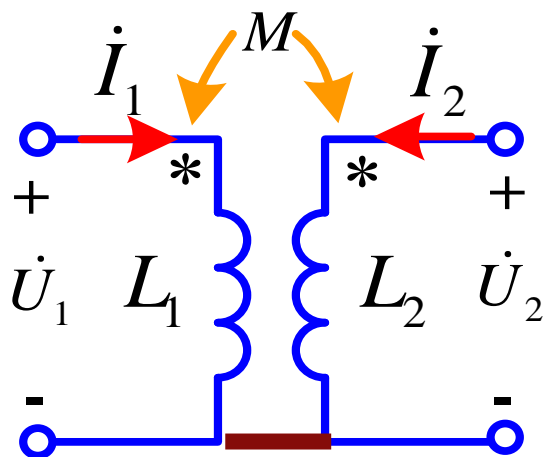


异侧联接

$$\dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = j\omega(L_1 + M) \dot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}$$

$$\dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 = j\omega(L_2 + M) \dot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}$$

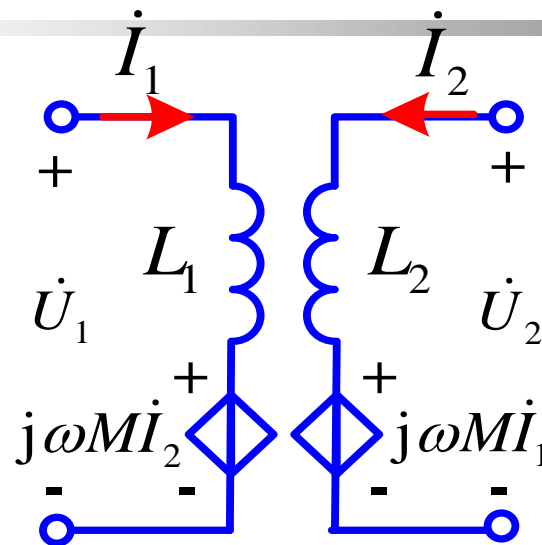
## 4. 受控源等效电路



?



**T型等效（去耦等效）**

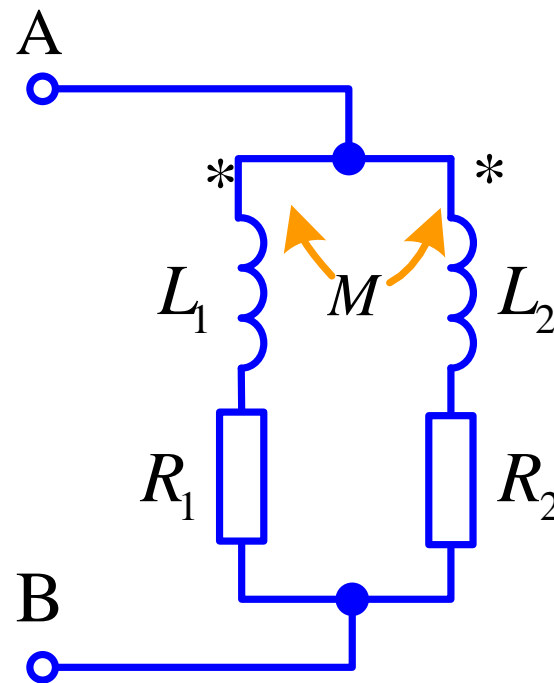
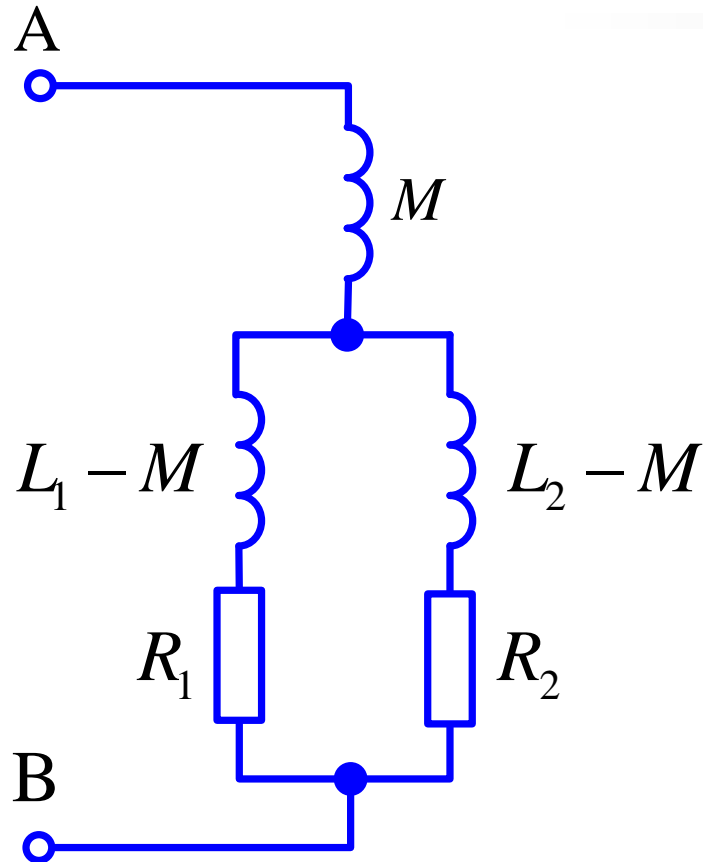


$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

【例】 求：AB端的输入阻抗。

解

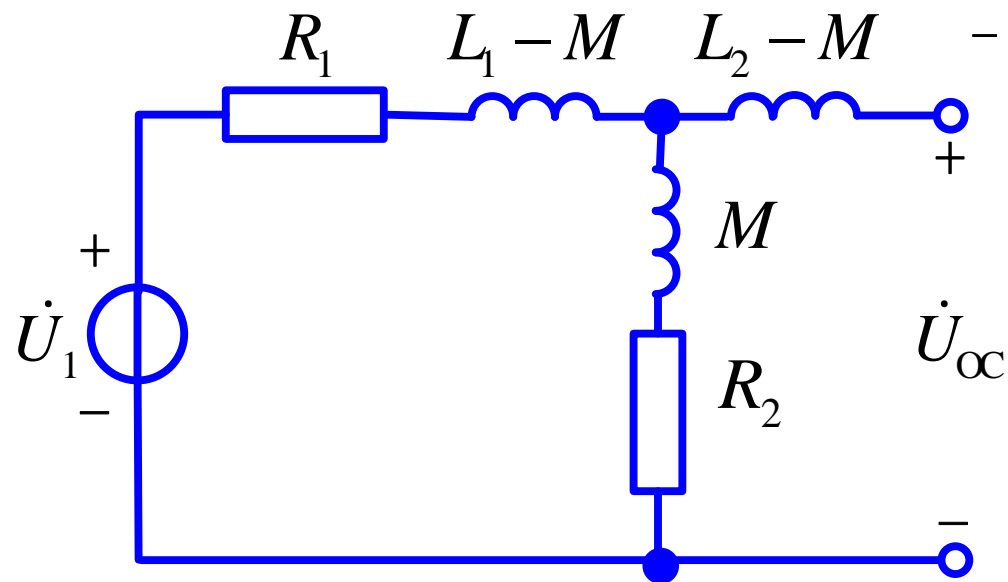
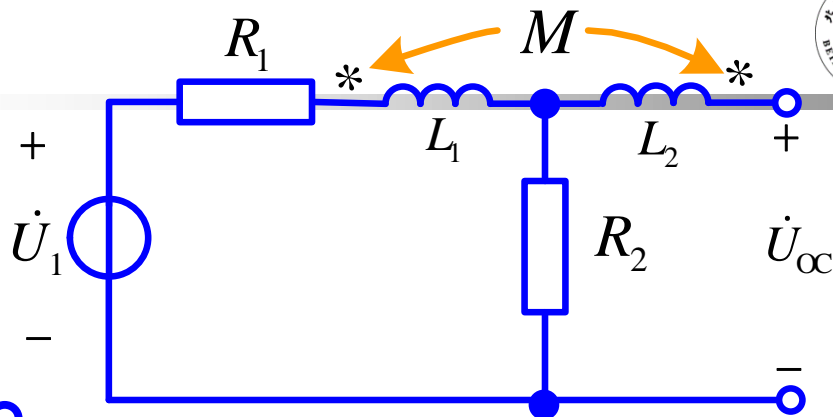


$$Z_{\text{in}} = j\omega M + \frac{[R_1 + j\omega(L_1 - M)][R_2 + j\omega(L_2 - M)]}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}$$

【例】求开路电压  $\dot{U}_{oc}$ 。

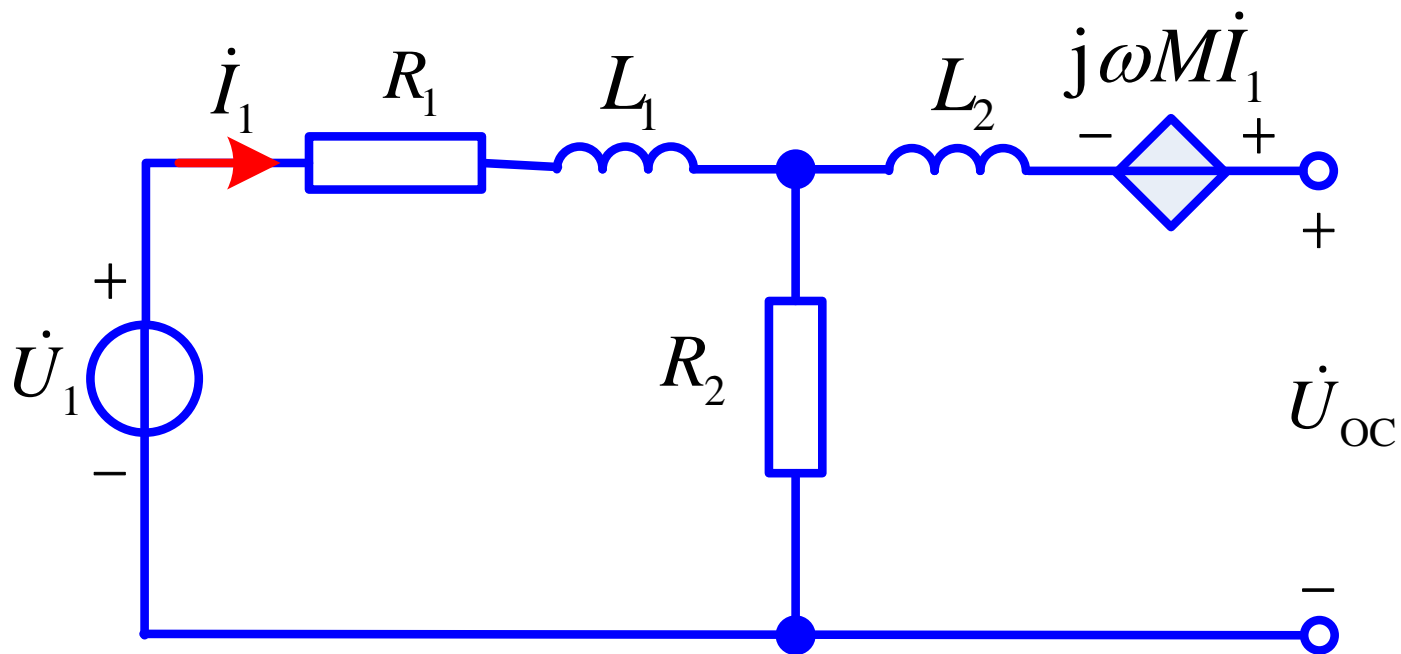
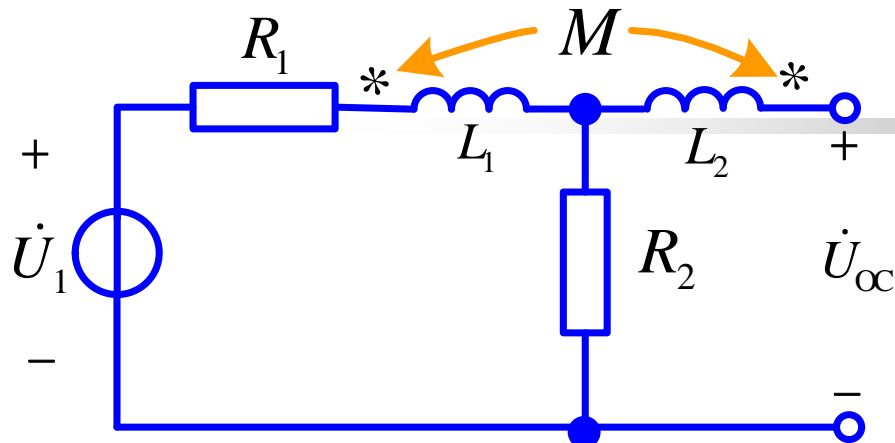
解

解法1:

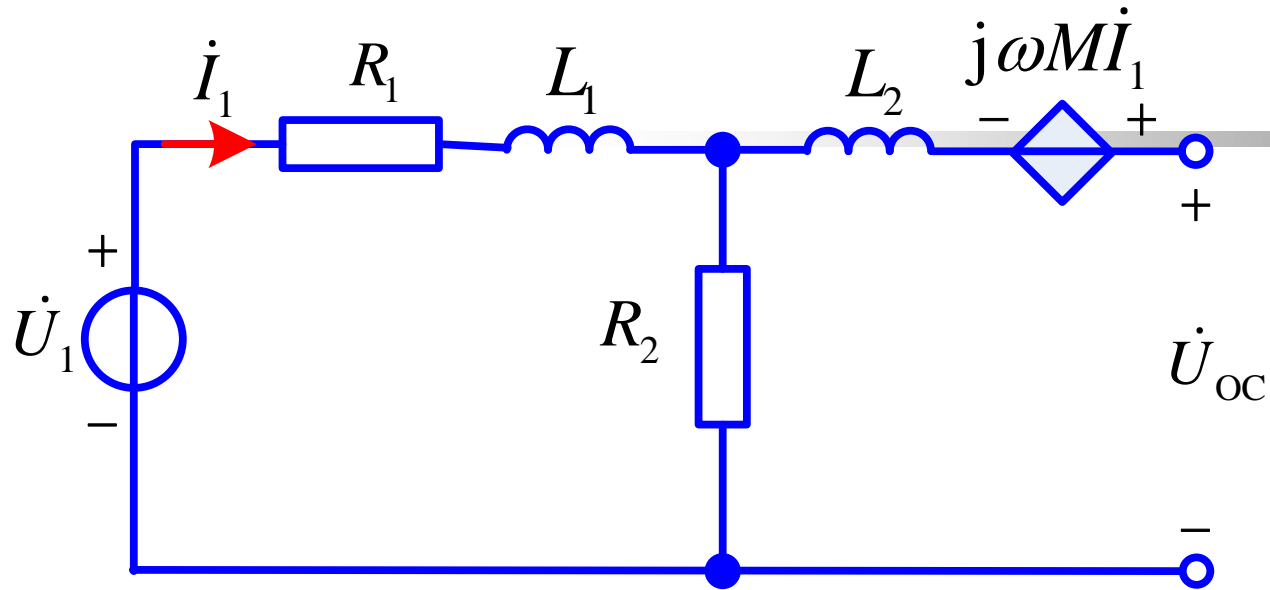


$$\begin{aligned}\dot{U}_{oc} &= \frac{\dot{U}_1(R_2 + j\omega M)}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 - M + M)} \\ &= \frac{\dot{U}_1(R_2 + j\omega M)}{R_1 + R_2 + j\omega L_1}\end{aligned}$$

# 解法2:





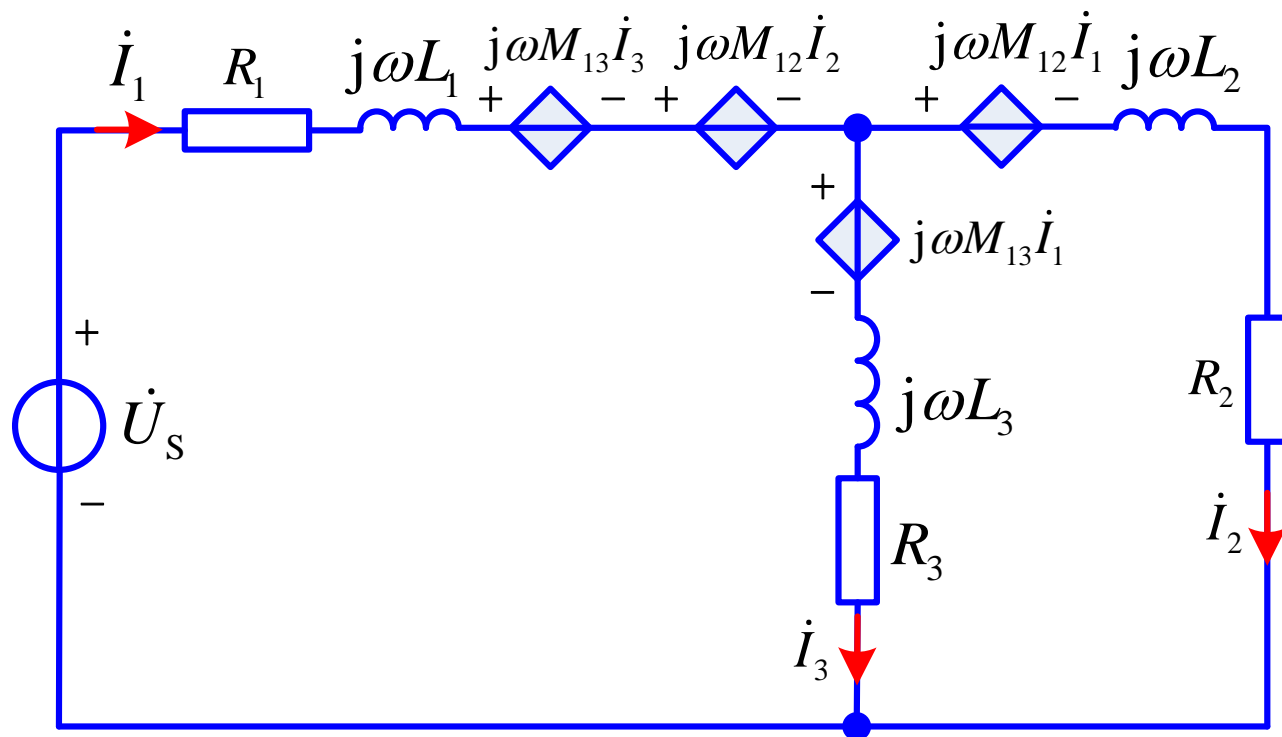
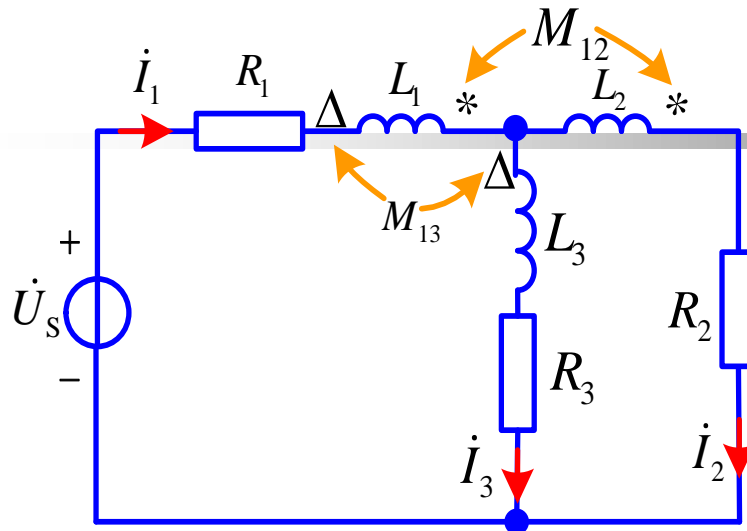


$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{oc} &= j\omega M \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_1 \\
 &= (R_2 + j\omega M) \dot{I}_1 \\
 &= (R_2 + j\omega M) \frac{\dot{U}_1}{R_1 + R_2 + j\omega L_1}
 \end{aligned}$$

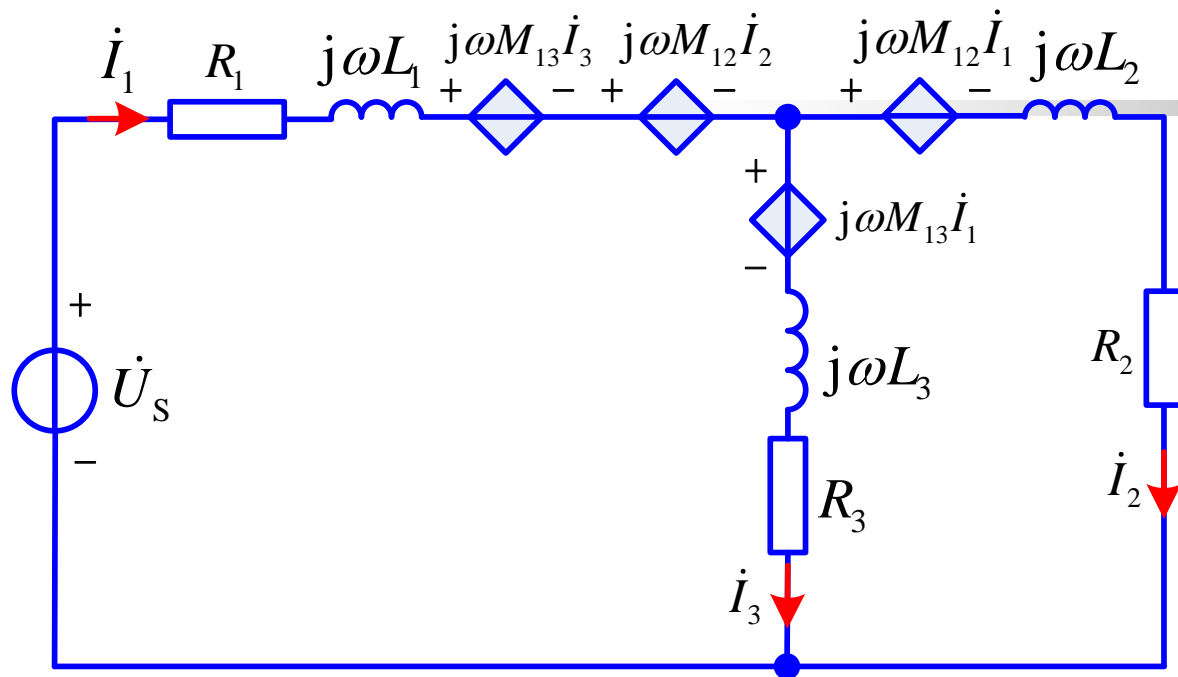
# 【例】列支路法方程

解

方法1:



解

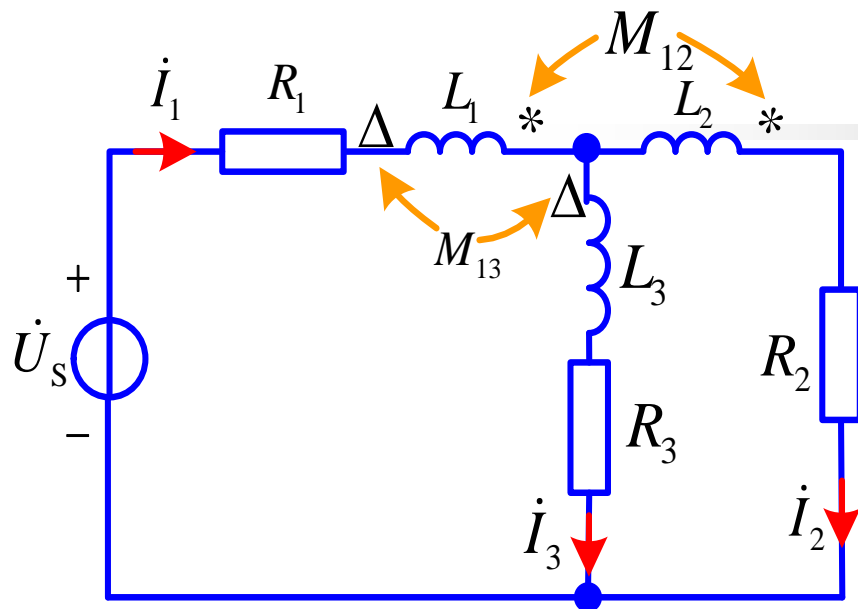


$$\dot{U}_1 = -\dot{U}_s + \dot{I}_1 (R_1 + j\omega L_1) + j\omega M_{13} \dot{I}_3 + j\omega M_{12} \dot{I}_2$$

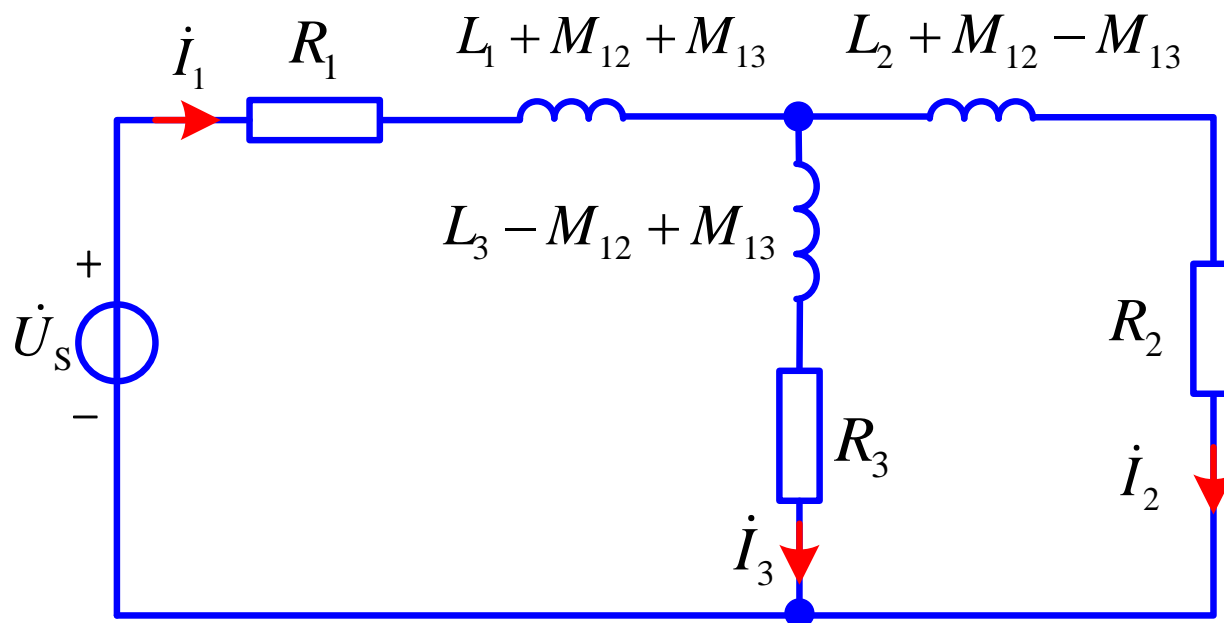
$$\dot{U}_2 = (R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 + j\omega M_{12} \dot{I}_1$$

$$\dot{U}_3 = (R_3 + j\omega L_3) \dot{I}_3 + j\omega M_{13} \dot{I}_1$$

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0 \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_3 \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$



方法2:



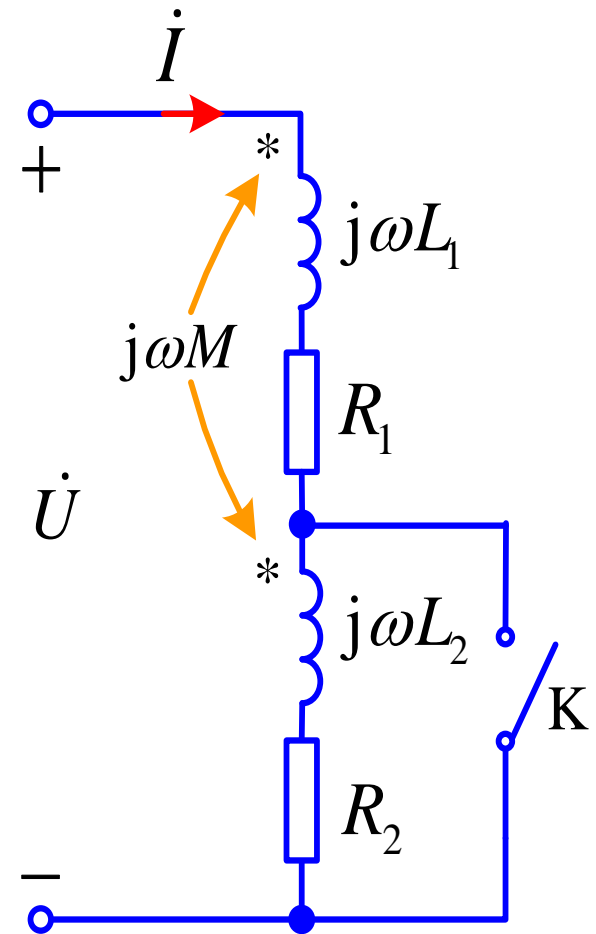
【例】 已知：  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $M$ 、 $\omega$  和  $\dot{U}$

求： 开关K打开和闭合时的电流  $\dot{I}$ 。

解

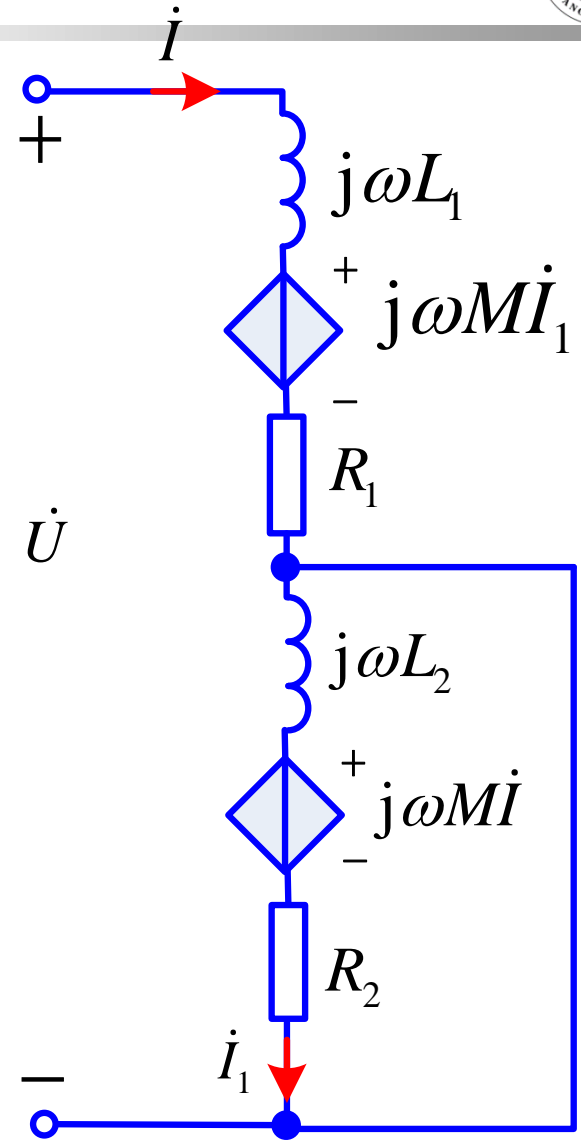
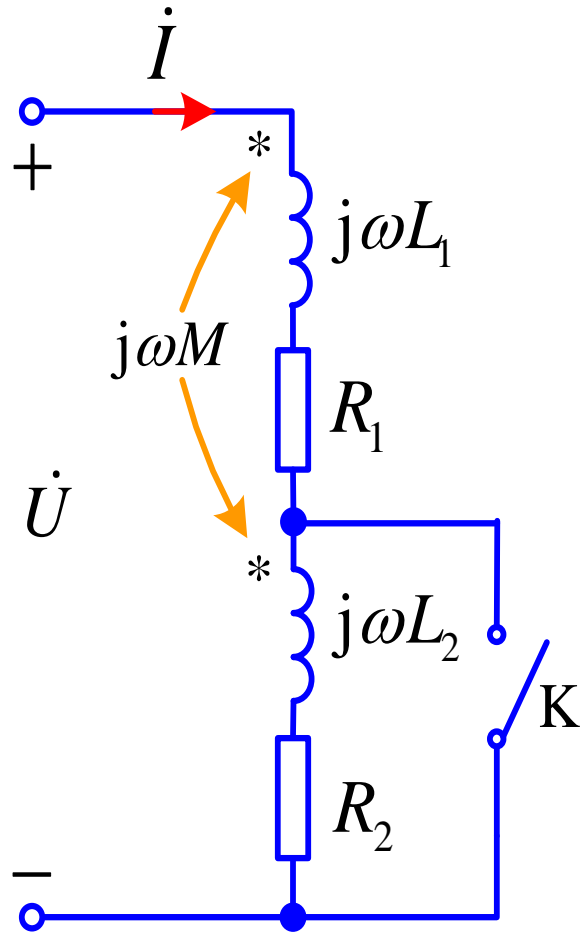
K打开时

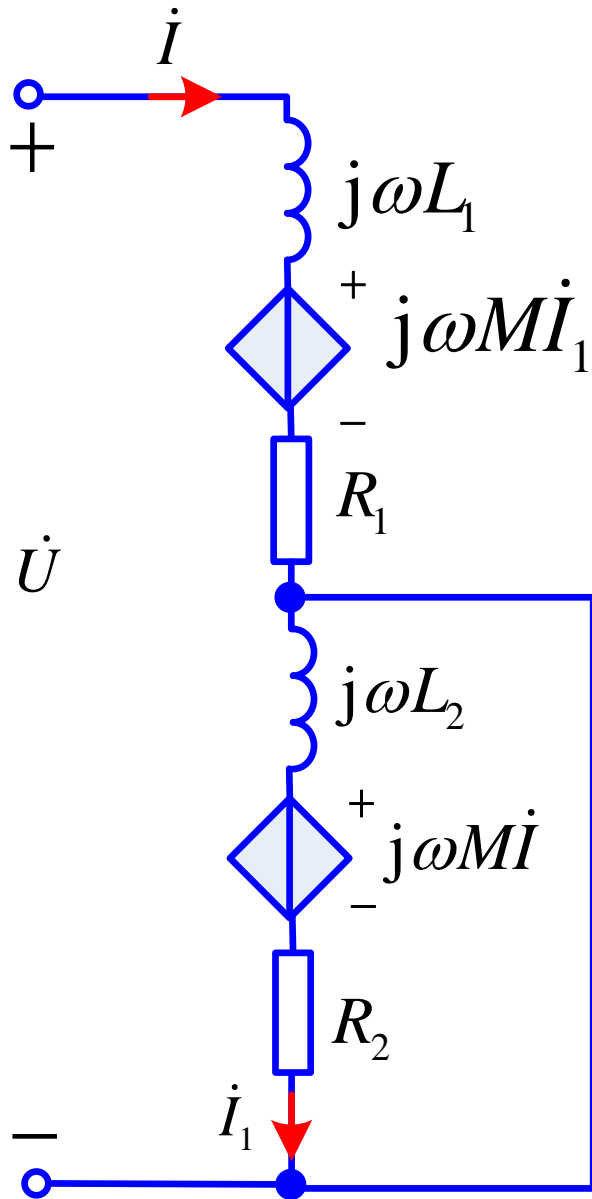
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)}$$



K闭合时:

解法1: 受控源等效变换





$$\dot{U} = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I} + j\omega M\dot{I}_1$$

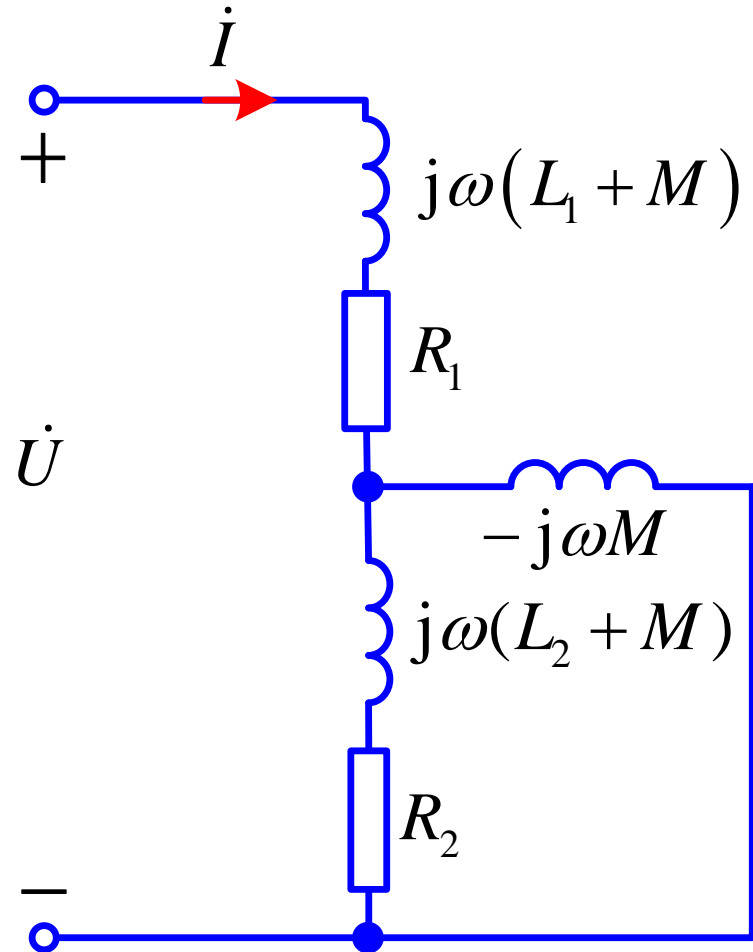
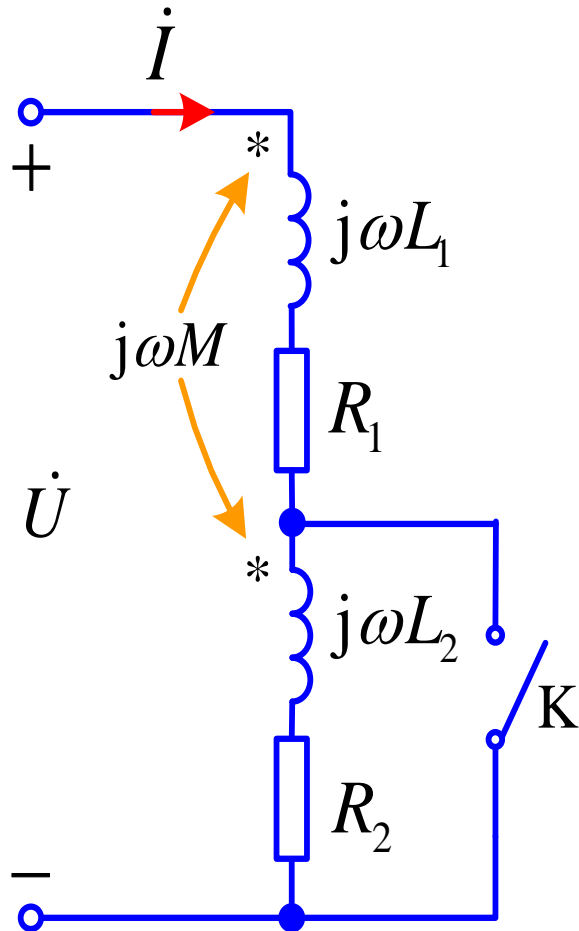
$$(R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I} = 0$$

$$\dot{I}_1 = \frac{-j\omega M\dot{I}}{R_2 + j\omega L_2}$$

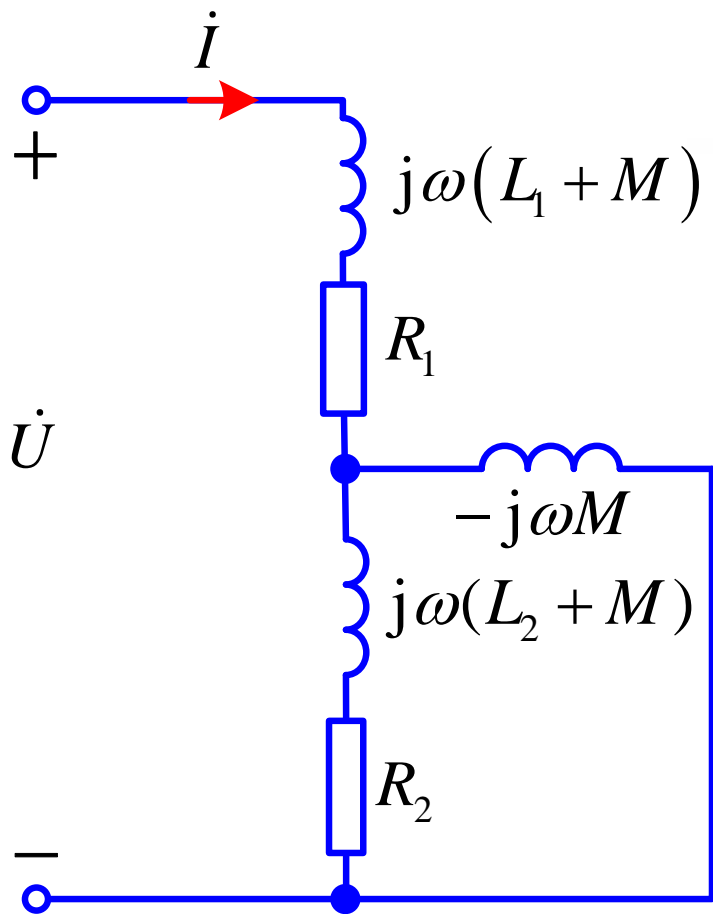
$$\dot{U} = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I} + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2} \dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2}}$$

## 解法2：用互感消去法







$$Z = R_1 + j\omega(L_1 + M) + \frac{[R_2 + j\omega(L_2 + M)](-j\omega M)}{R_2 + j\omega(L_2 + M) - j\omega M}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

## 10.2 含有耦合电感电路的计算

### 含有互感的电路：

- ★关键在方程中正确计入互感电压（大小、方向）
- ★互感消去法（去耦法）特殊性：需满足有一端相联的条件，否则只能用受控源方法处理互感
- ★一般采用支路法和回路法，不用节点法计算电路：支路电流不能用节点电压表示出来，（含有互感的原因）只是增加了节点电压未知数而已，若电路用去耦电路等效后可以用节点法。
- ★使用Y- $\Delta$ 变换必须先去耦合
- ★使用戴维宁定理时，对外解耦合。

# 作业



- 10-8 【串接，用去耦法】
- 10-15 【回路法方程，用去耦法】