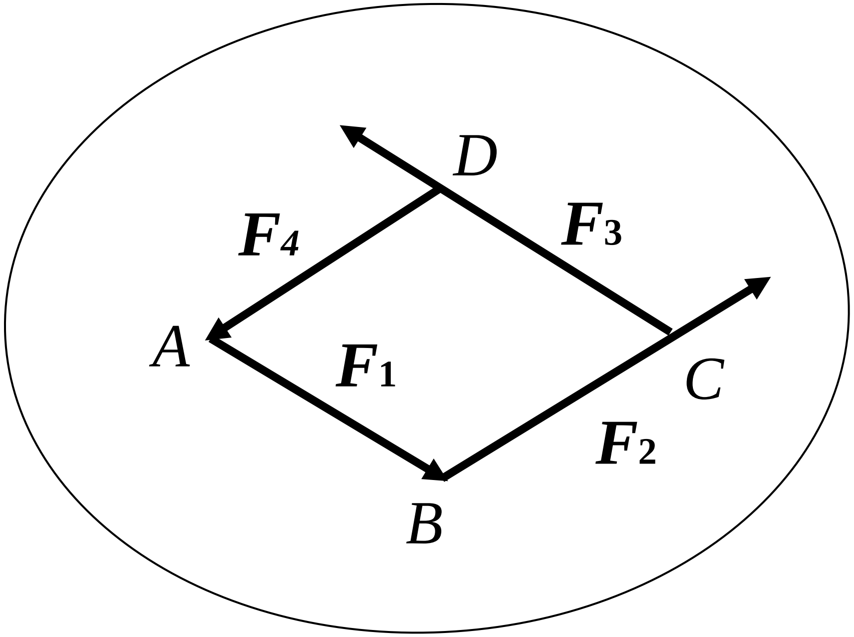
The devil is in the details

领导我们事业的核心力量是牛顿、达朗贝尔

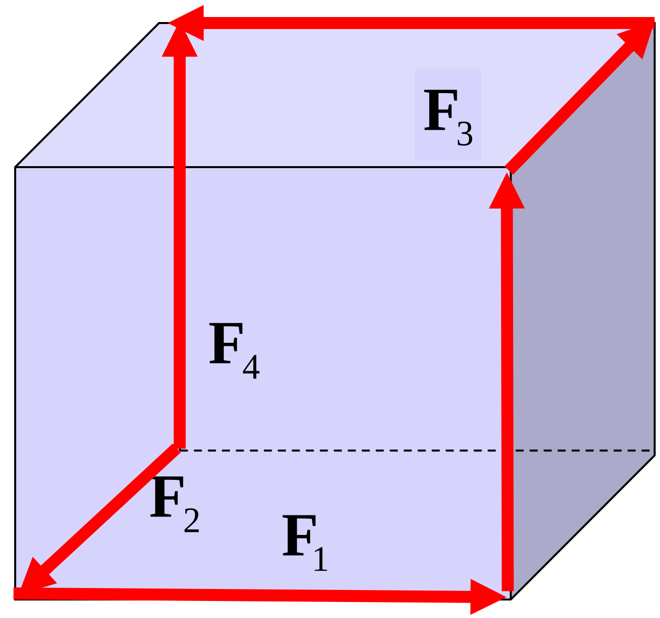
指导我们思想的理论基础是微分、变分原理

——献给与魔鬼打交道的同学们

ABCD 为菱形，角A 为60度，$F_2 = F_3 = 1.5F_1 = 1.5F_4$求力系的简化结果（最简等效力系）



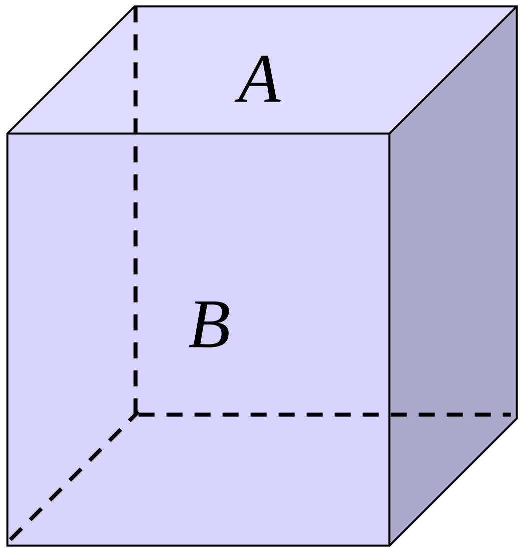
空间一般力系

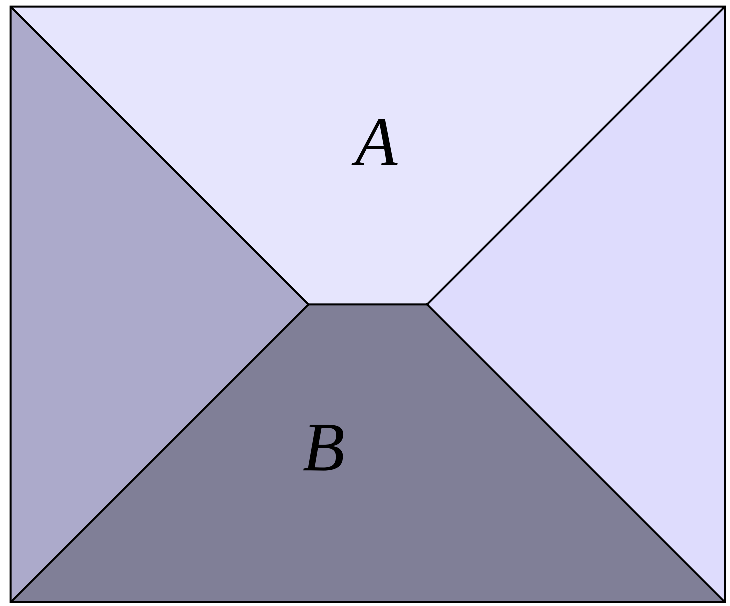


A B 面内各作用有平面任意力系，刚体可否平衡？

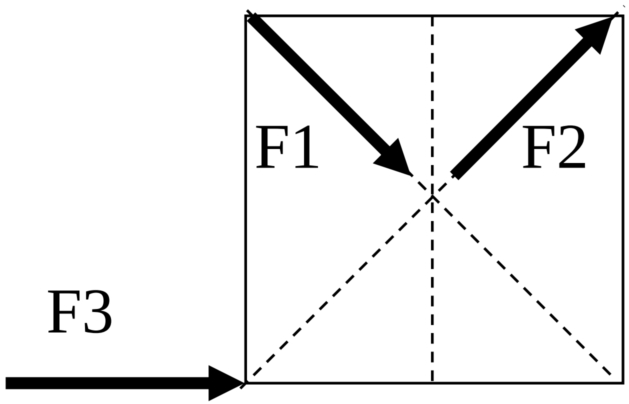
刚体平衡时，两个力系是否分别平衡？

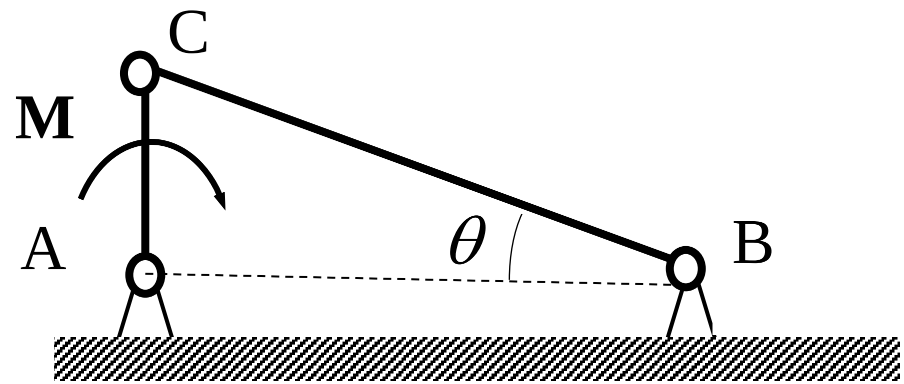
独立的平衡方程数目最多有几个？





边长为2a的正方形刚性板上作用有大小相等且共面的三个力F1、F2、F3，其作用线及方向如图所示，求板的中心到该力系的合力作用线的距离d.





结构如图2所示，在图2中的AC杆上作用一力偶M，已知力偶的作用面在图示平面内; AC=2.3m， $\theta = 30^0$

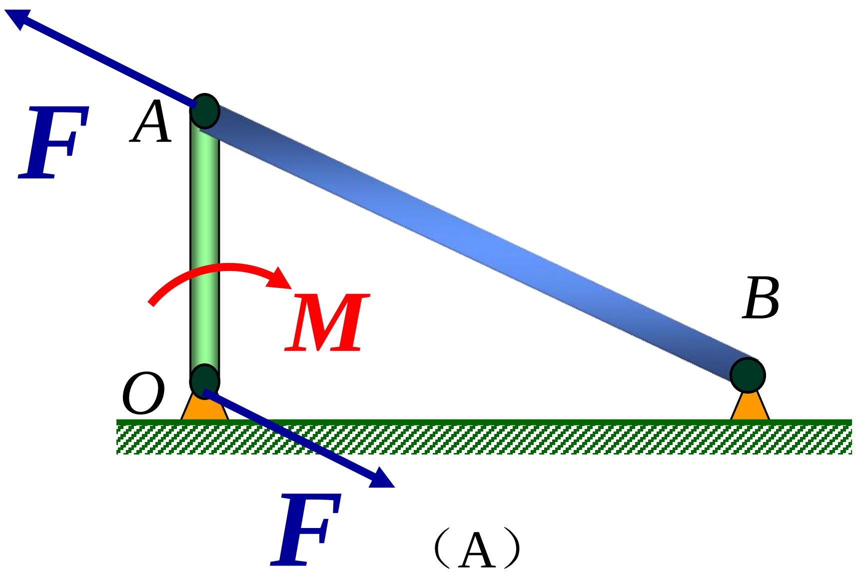
AC垂直于AB，构件自重不计。求A处约束反力的大小.

例：结构如图所示，已知主动力偶 M，比较两种情况下铰链 B 处的约束力小，并确定约束力的方向（不计构件自重）

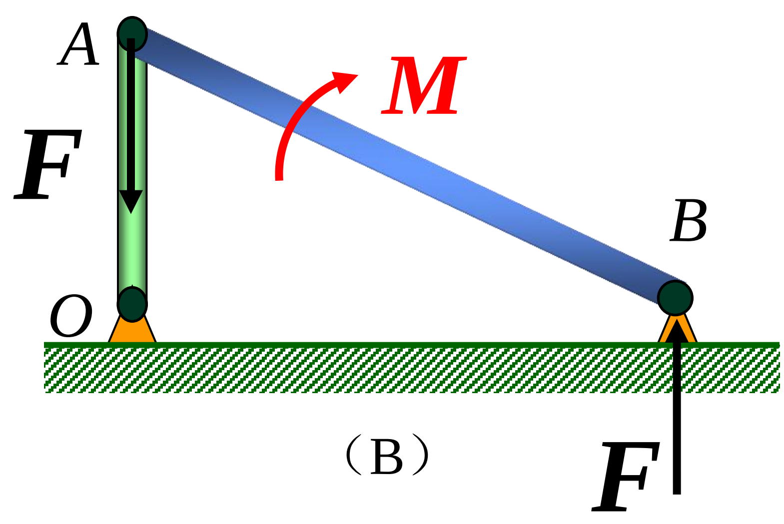
二力杆

1、研究OA杆

2、研究AB杆

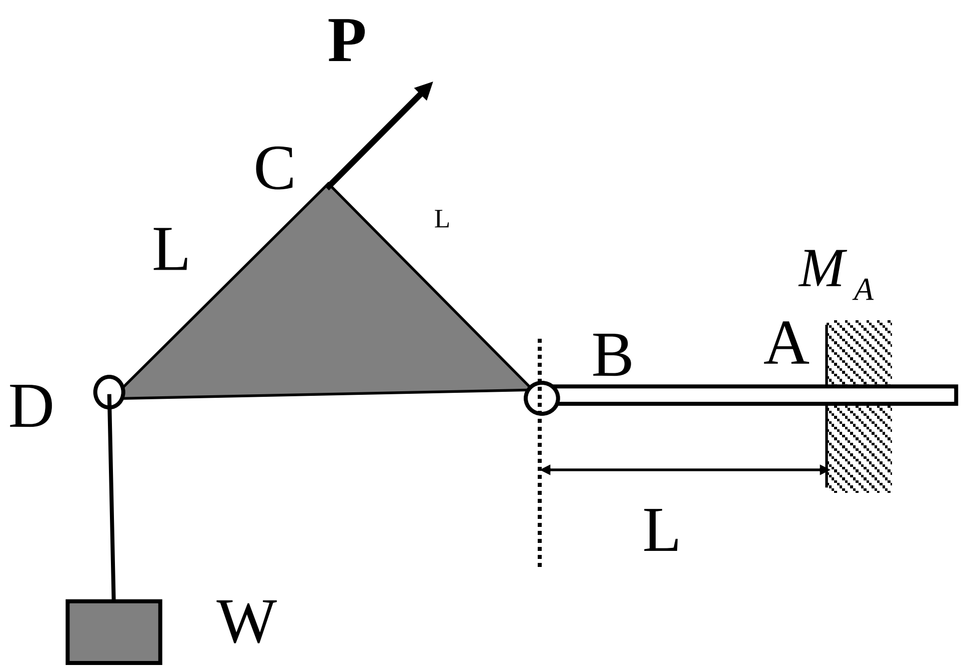


（A）



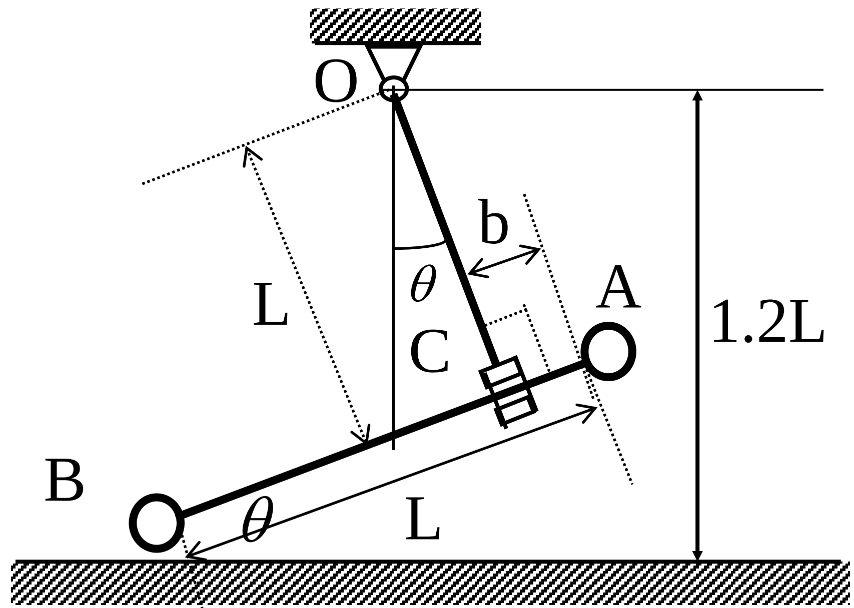
（B）

3、（4分）平面结构如图3所示，AB在A点固支，并与等腰直角三角板BCD在B点铰接，D点吊起一重为W的物块，在作用力P的作用下平衡。已知力P 沿DC方向，各构件自重不计，求A处的约束力偶：

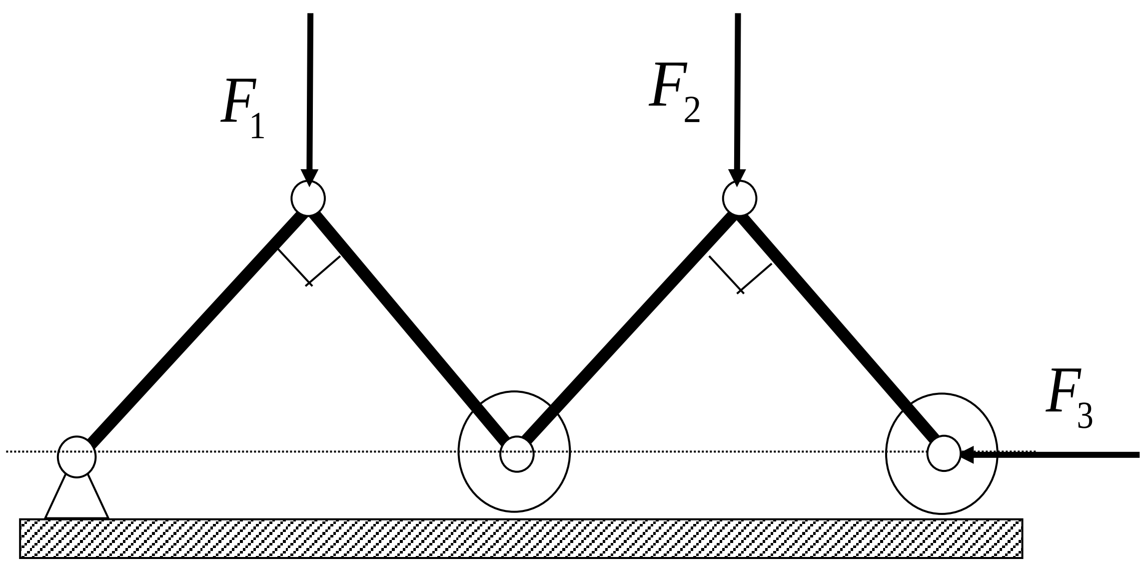


4、（8分）长为L的无质量刚性杆AB的两端分别联结两个重量相同的铅球，AB杆可在宽度为a的套筒C上滑动。套筒C与长度为L的无质量杆OC垂直焊接于C点，如图所示。若套筒、铅球的重量均为W。忽略各处摩擦、套筒滑杆之间的间隙，求系统的平衡时，

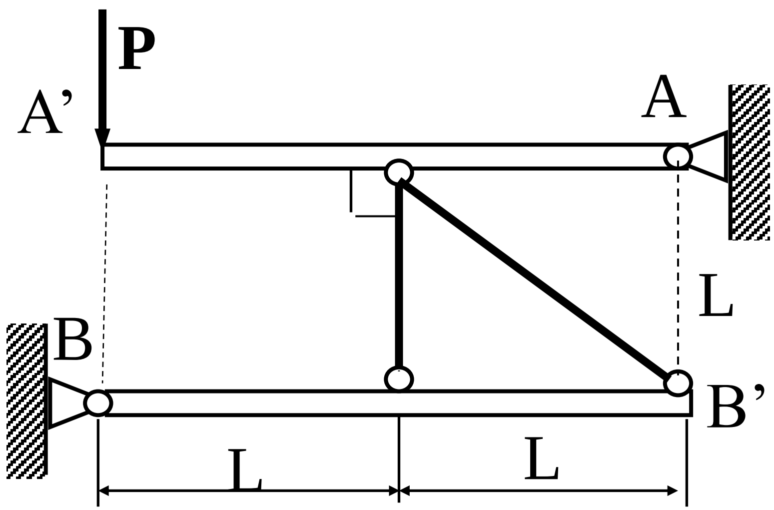
θ 和b应该满足的条件。



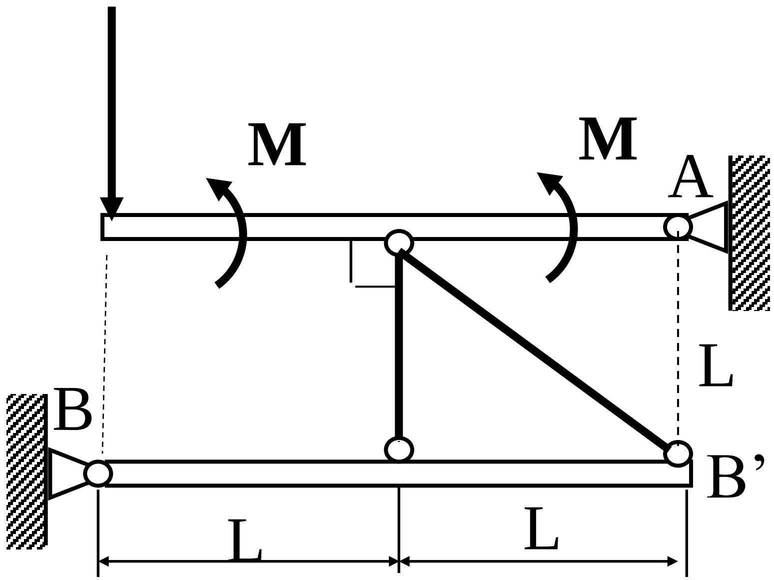
5、（5分）图3所示机构各杆等长，在**F**1、**F**2 和**F**3的作用下，在图示位置保持平衡。若不计各处摩擦，求各力之间的关系。



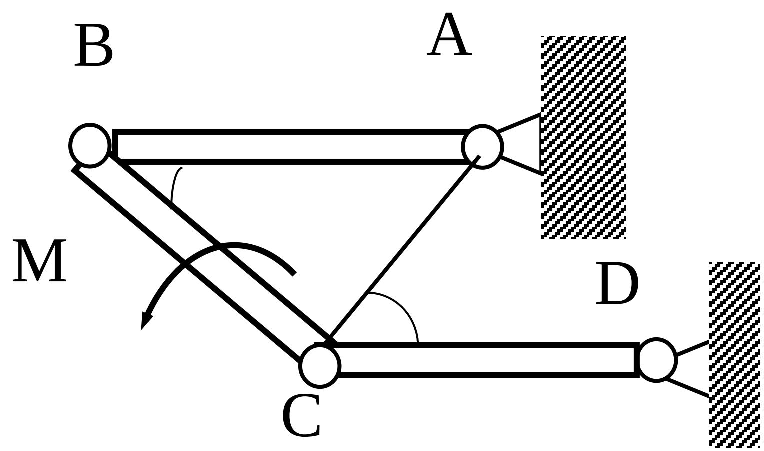
1、结构中各杆件用铰链连接（如图所示），**各杆件自重不计**。确定A、B处约束力的方向，并画在图上。（5分）



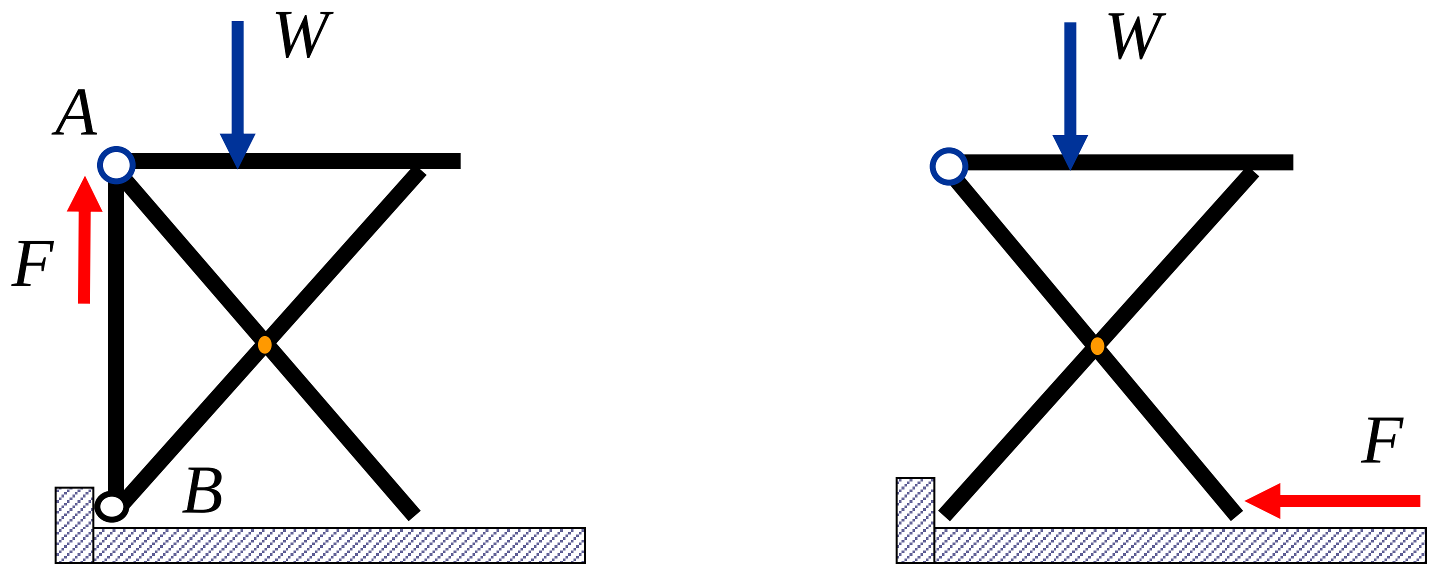
结构中各杆件用铰链连接（如图所示），各杆件自重不计。确定A、B处约束力的方向，并画在图上。



2、三根等长的均质杆用铰链连接如图6所示，每个杆的重量为W，铰链A、C间用细绳连接，已知AB = BC = CD = L，AB杆和CD杆均水平放置， BC杆上作用一已知力偶（力偶作用面在图示平面内），其力偶矩为M，则AC绳的拉力 F=



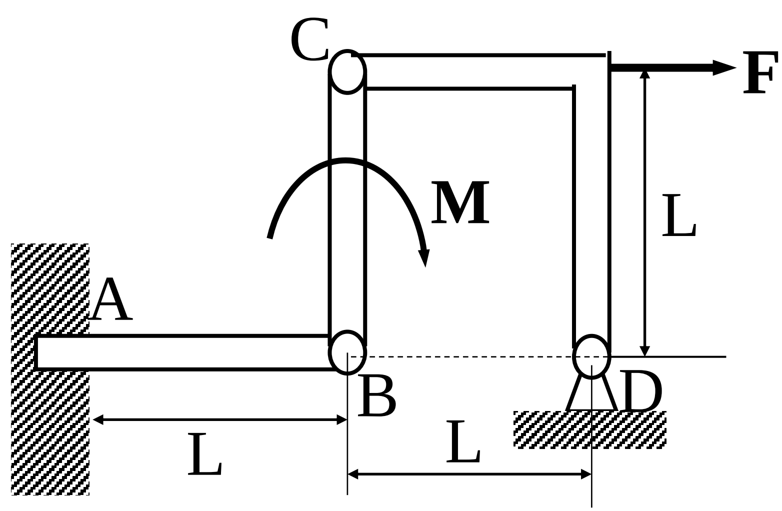
例：图示机构平衡，不计杆重,各铰链光滑,求 AB 内力



一计算题（本题20分）

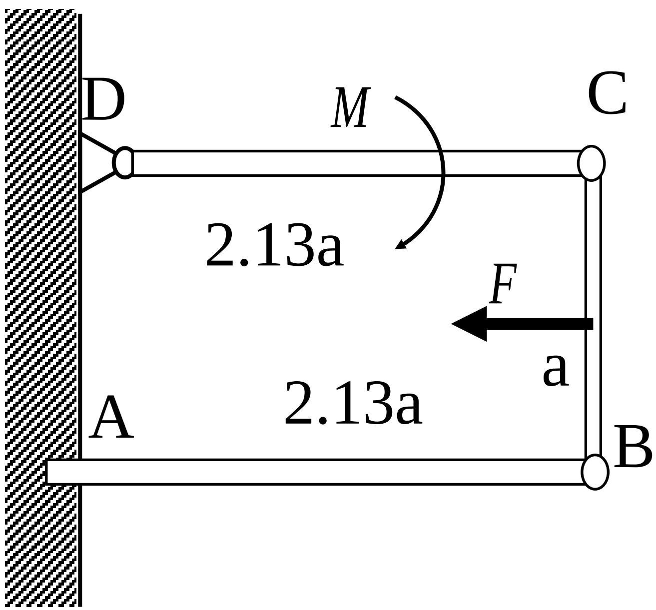
结构如图所示，已知BC杆上作用有一力偶，其力偶矩为M，CD构件上作用有一力F，所有构件自重不计，几何尺寸如图所示。求A、D处的约束力。

要求：指明研究对象，画其受力图，给出平衡方程以及计算结果

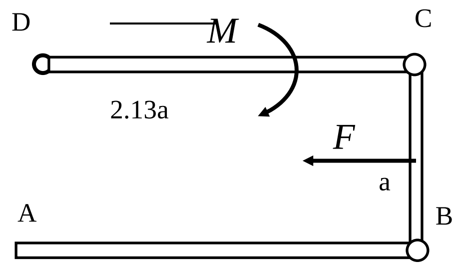


（本题20分）结构如图所示，已知**DC**杆上作用有一力偶，其力偶矩为**M**，**BC**杆的中点上作用有水平力**F**，所有构件自重不计，几何尺寸如图所示。求**A**、**D**处的约束力。

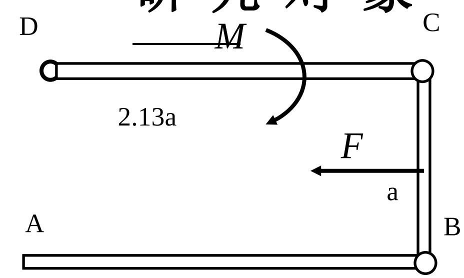
要求：指明研究对象，画其受力图，给出平衡方程(或平衡条件)以及计算结果



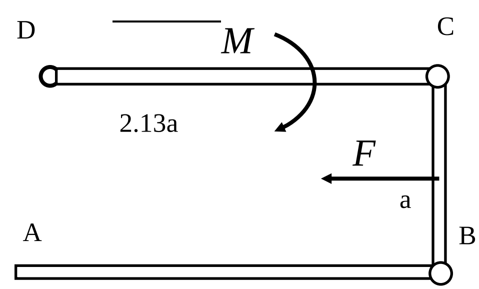
研 究 对 象



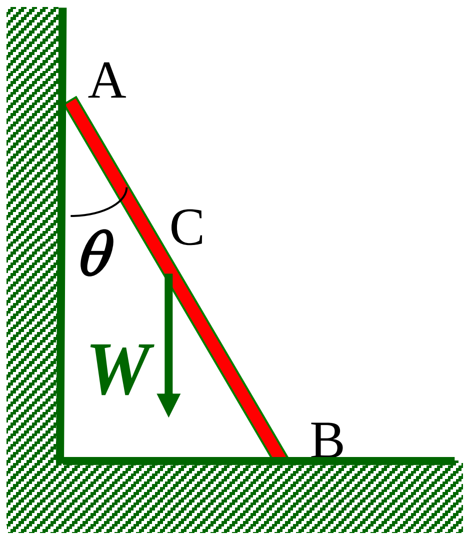
研 究 对 象

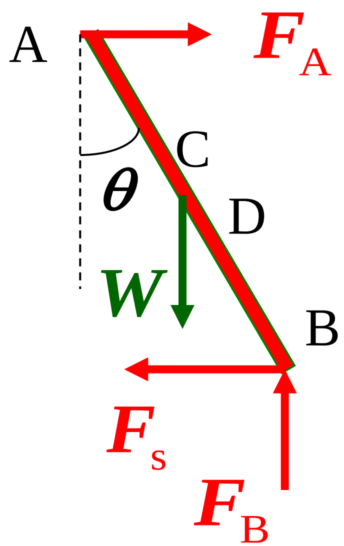


研 究 对 象



例：重为W长为L的均质梯子靠在光滑的墙壁上，其与地面的静滑动摩擦因数为 f，求维持平衡的最大夹角θ。





解：取梯子为研究对象，画受力图

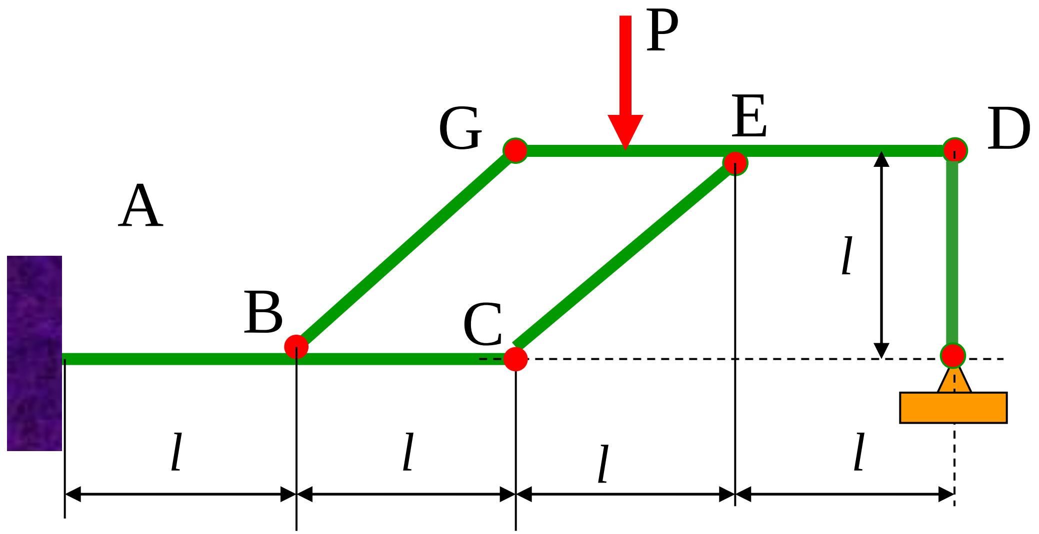
$$\sum F_y = 0, \quad F_B - W = 0$$

$$F_{s\max} = f \cdot F_B$$

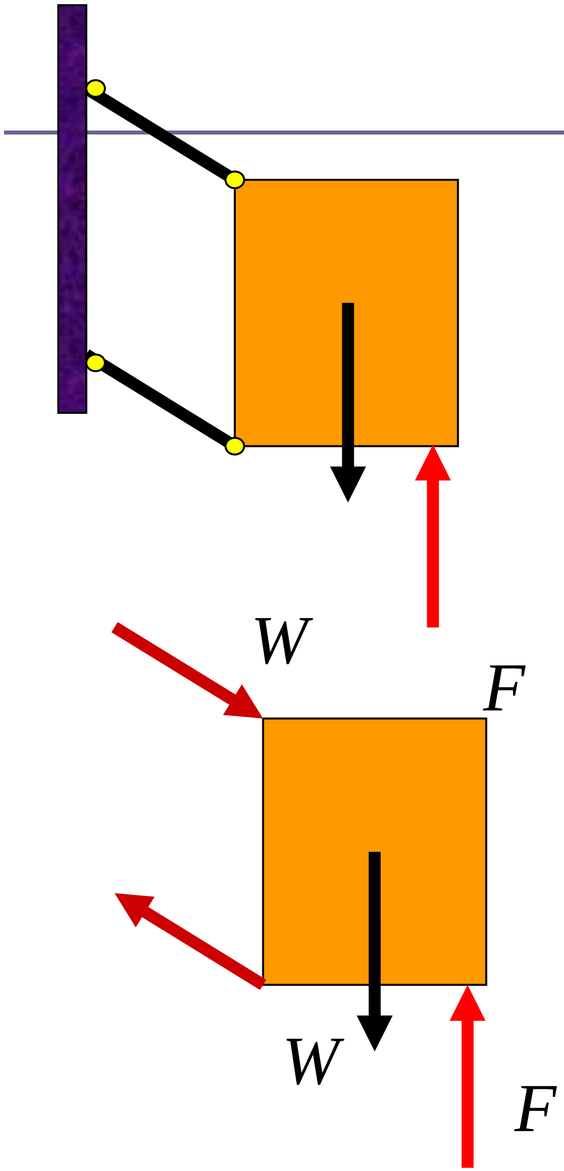
$$WL\sin\theta - f \cdot W \cdot L\cos\theta - W\frac{L}{2}\sin\theta = 0$$

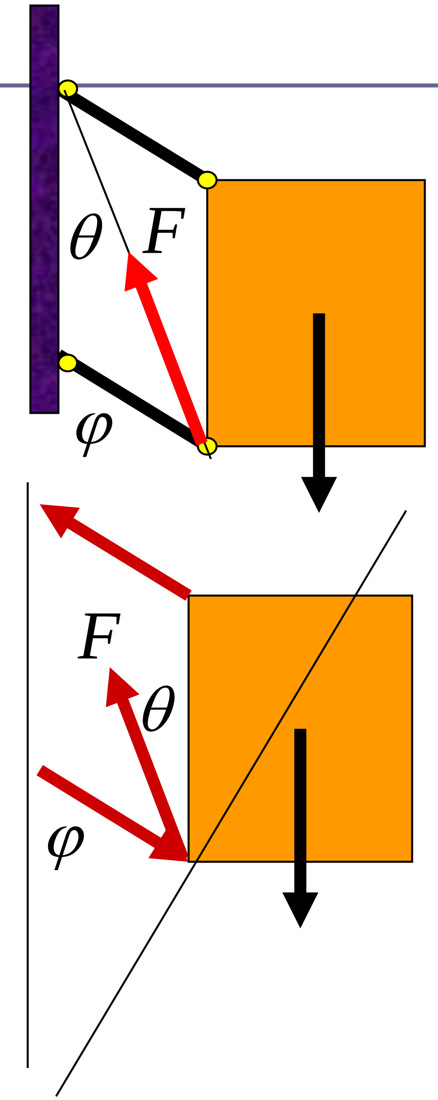
$$f \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$$

例：图示结构在力F作用下平衡，不计杆重,各铰链光滑。求*BG* 和 *CE* 杆的内力

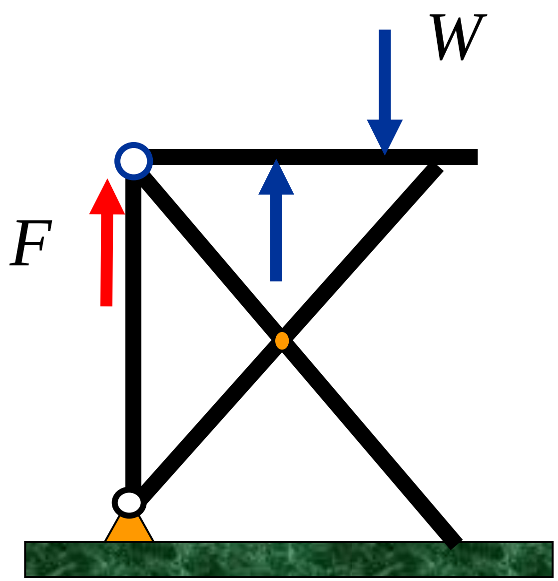


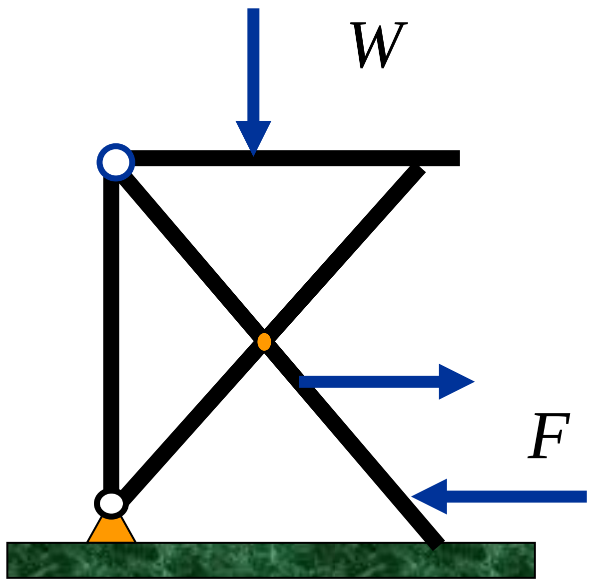
例：机构在力 *F* 作用下平衡，不计杆重、摩擦，求 *F*

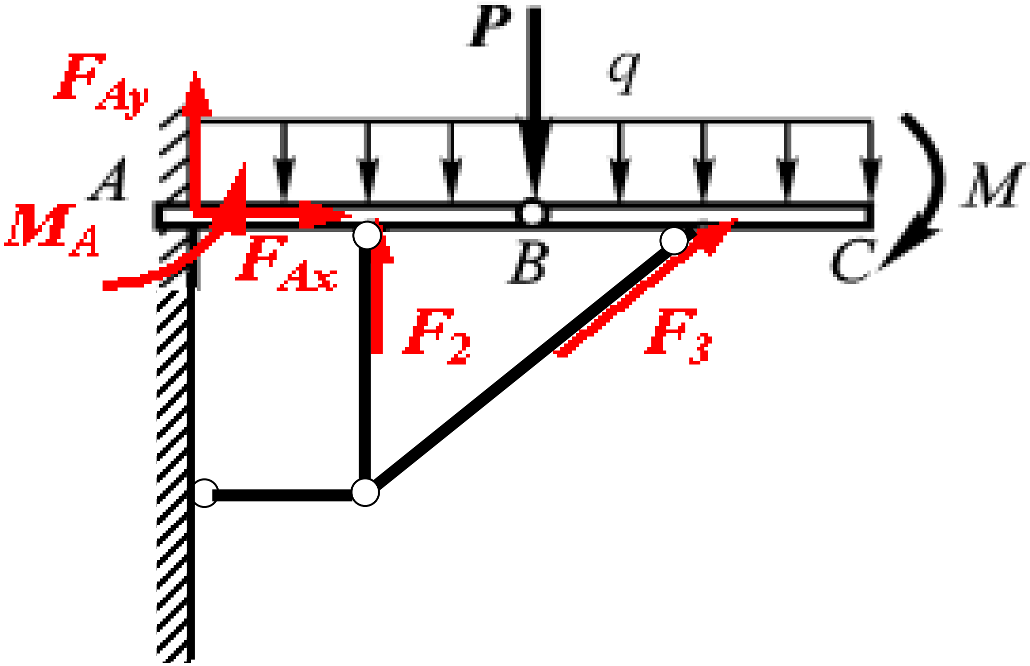




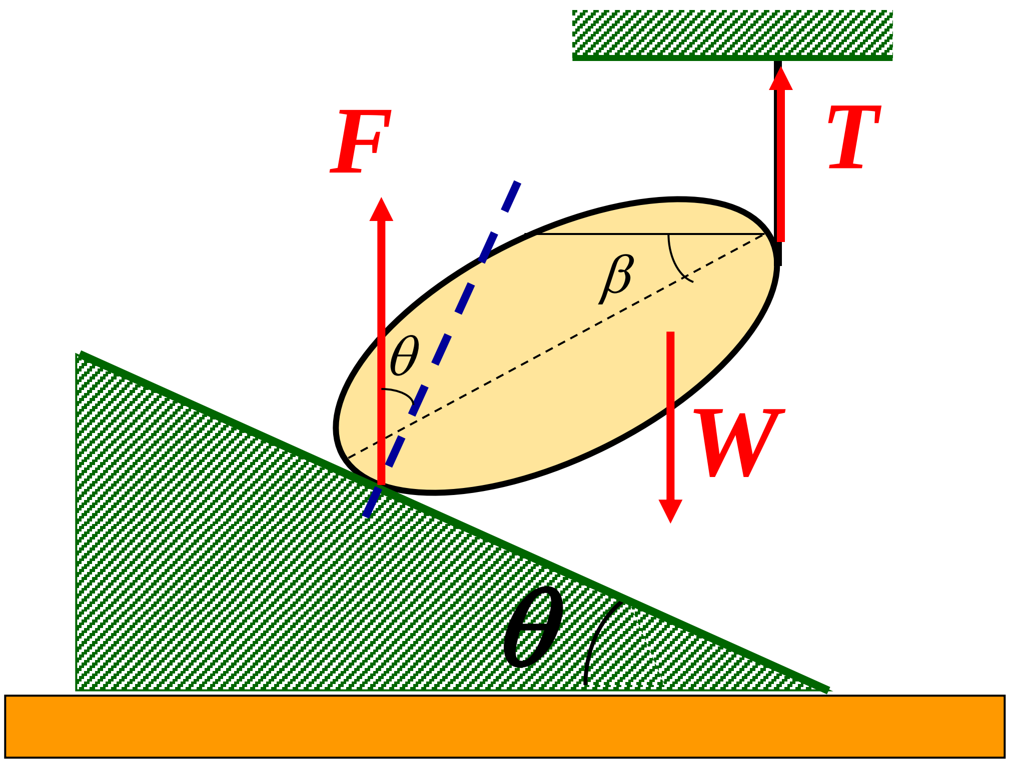
例：图示机构平衡，不计杆重,各铰链光滑,求力 F






P
q
F_Ay
A
M_A
F_Ax
B
C
M
F_2
F_3

问题： 重为W 的椭圆，一端铅垂吊起，另一端放在倾角为 θ 的固定斜面上，若圆盘处于平衡，圆盘与斜面的静滑动摩擦因数至少为多大?



不滑动的条件

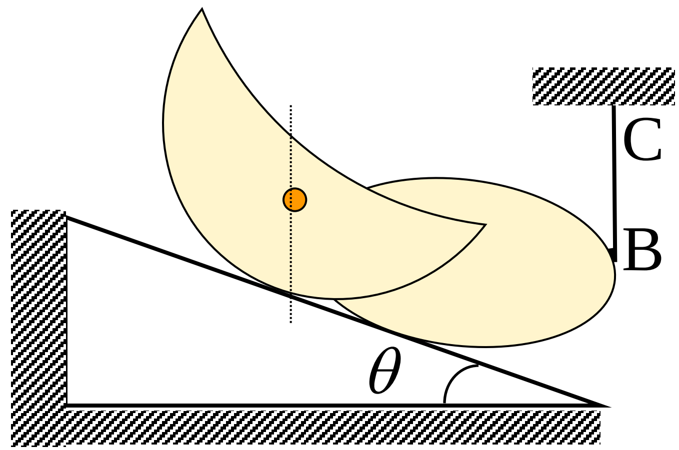
$$\theta \le \varphi_m$$

$$\tan\theta \le \tan\varphi_m = f$$

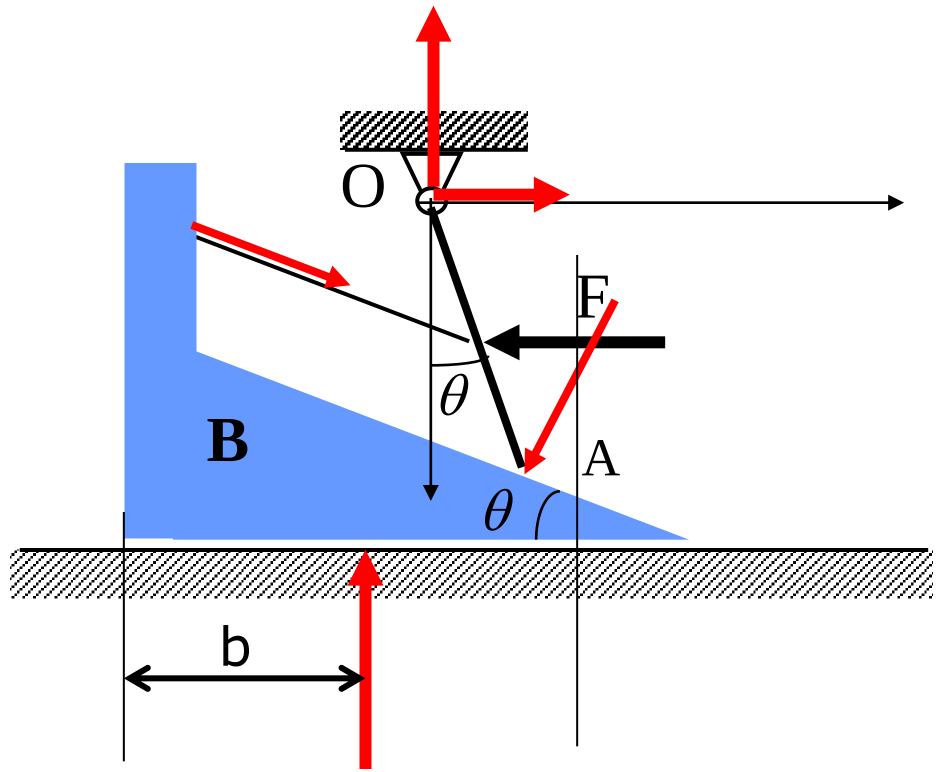
$$f_{\min} = \tan\theta$$

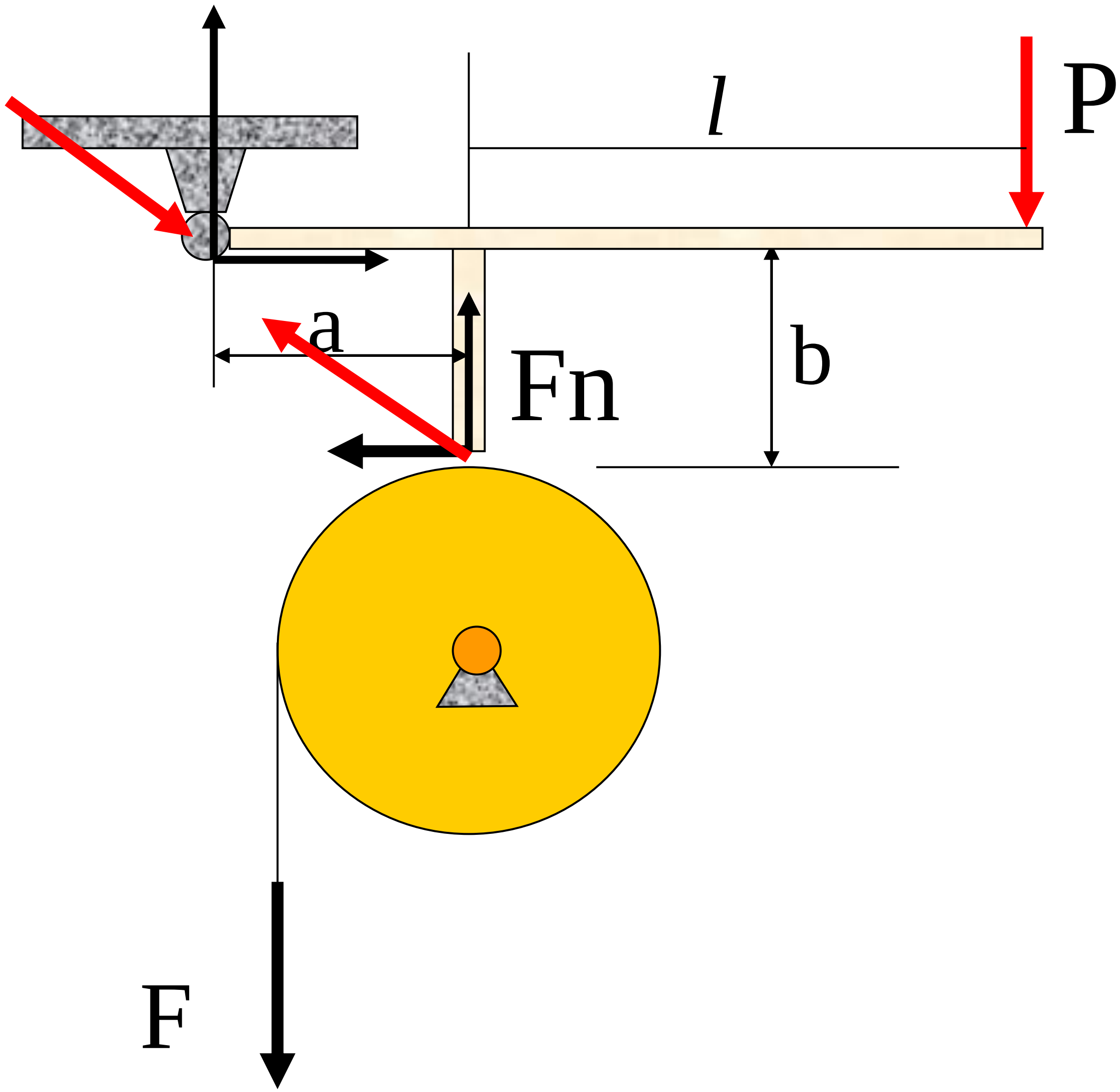
（5分）重为W的均质杆A端放在倾角为 θ 的非光滑斜面上，B端用绳子**铅垂吊起**。若杆能在图示位置保持平衡，则杆与斜面间摩擦系数的最小值：

$f_{\min} =$ ________。



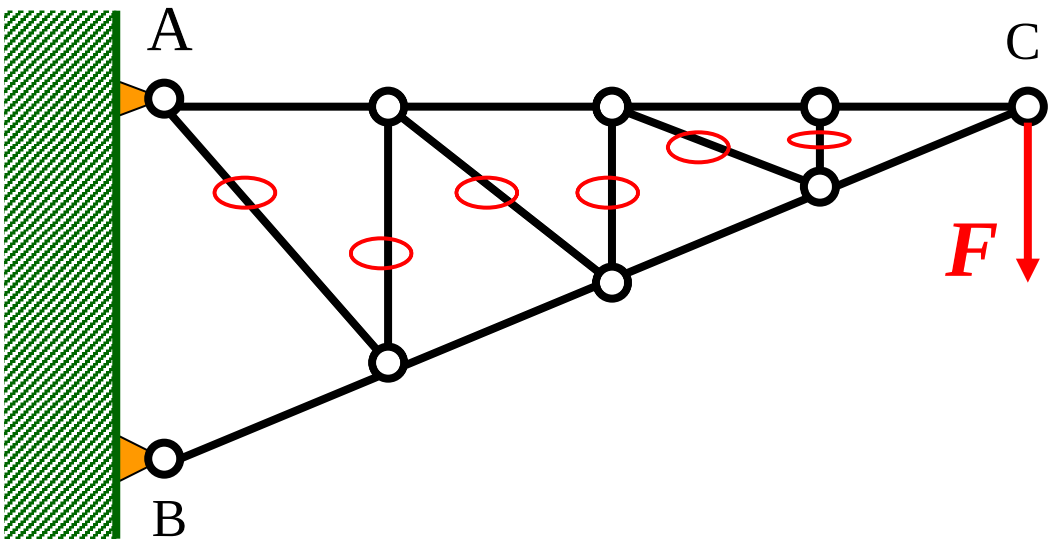
6、（10分）杆的中点有一个水平力F作用；绳索一端联结在OA杆的中点另一端联结在滑块B上，且与滑块B的斜面平行，系统在图示位置保持平衡，求O处的约束反力及绳索的张力，各处摩擦和构件重力不计。



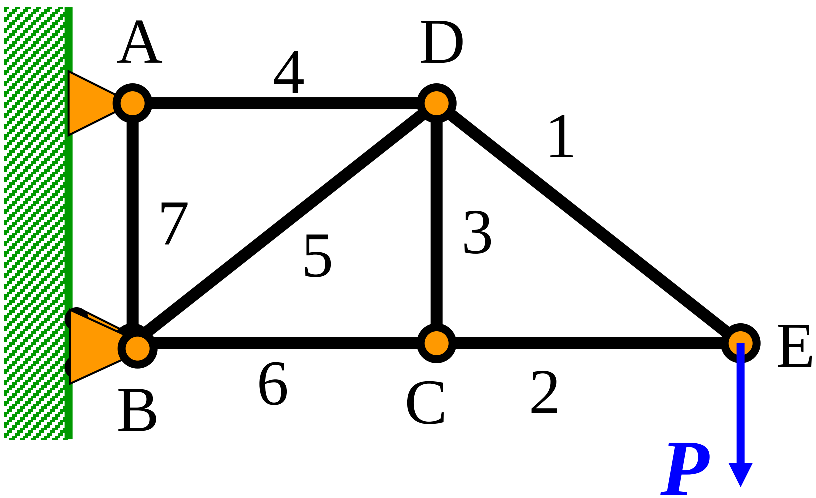


l
P
a
Fn
b
F

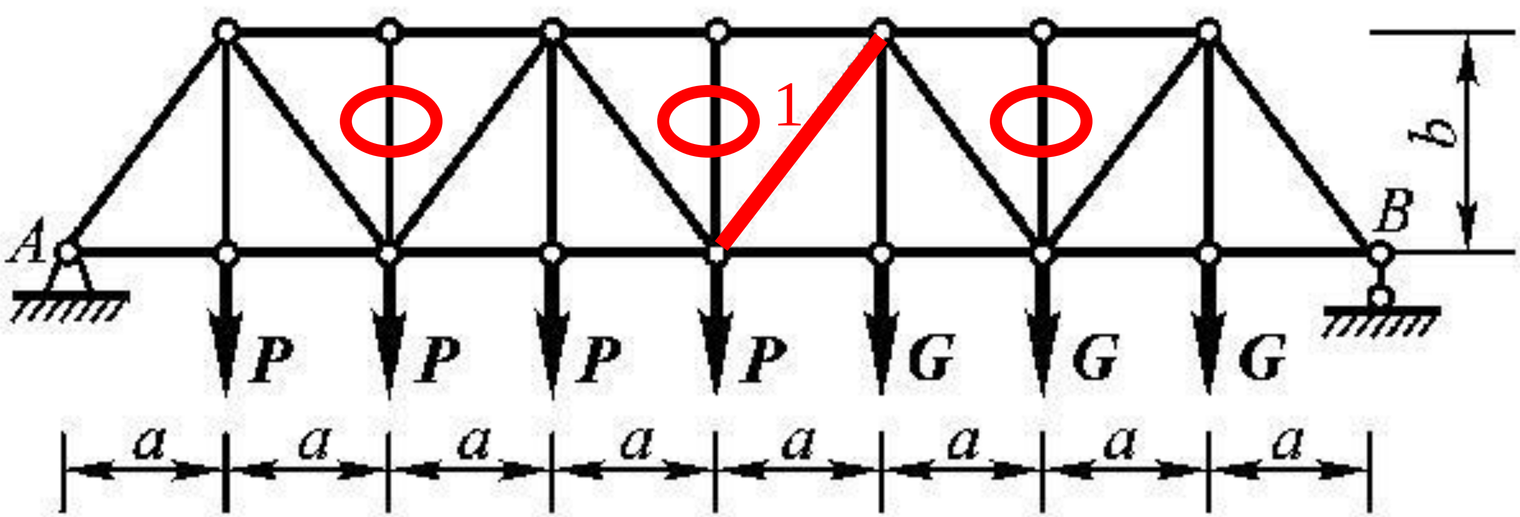
例题：确定图示桁架中的零力杆。



例题：静不定问题的部分解



•零力杆 (zero-force member): 在桁架中受力为零的杆件

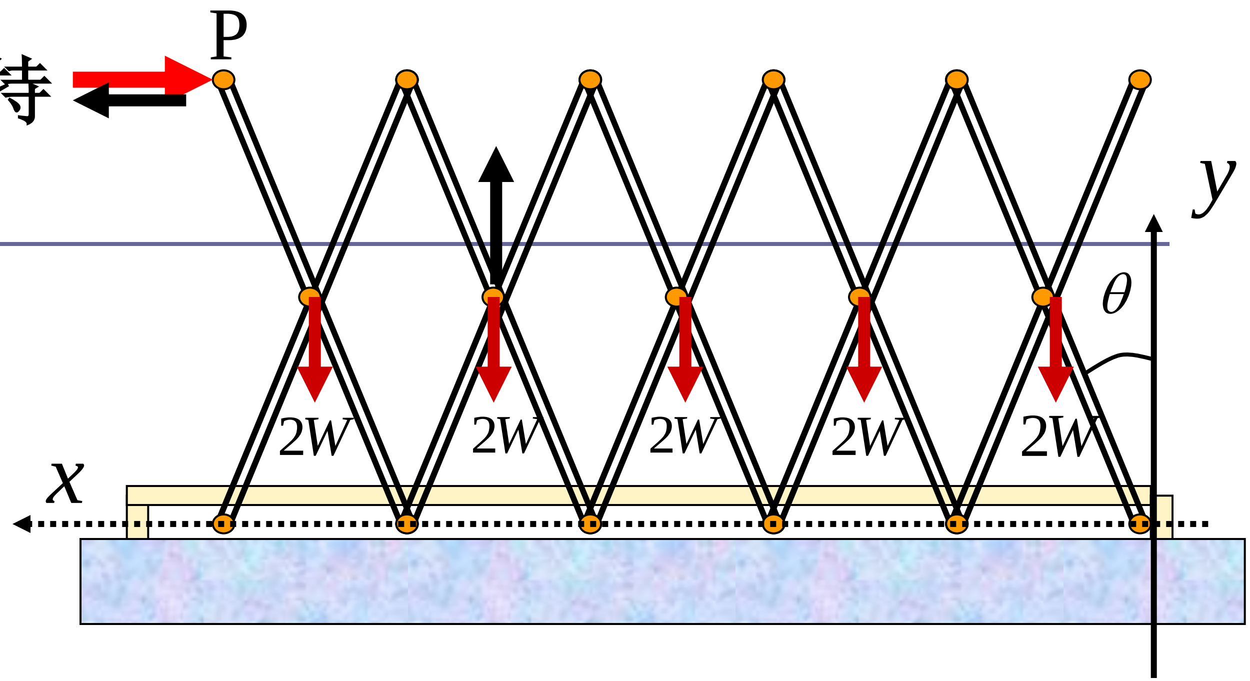


问题1: 在图示桁架中， 哪些杆件为零力杆?

问题2: 在图示桁架中， 杆1的内力如何求?

2、截面法 the method of sections：以部分桁架为研究对象计算杆件内力的方法

2n根杆，长l，不计各处摩擦求维持平衡的力P



1，自由度

2，系统虚位移 $\delta\theta$

3，力作用点的虚位移

$$x_p = nl\sin\theta$$

$$\delta x_p = nl\cos\theta\delta\theta$$

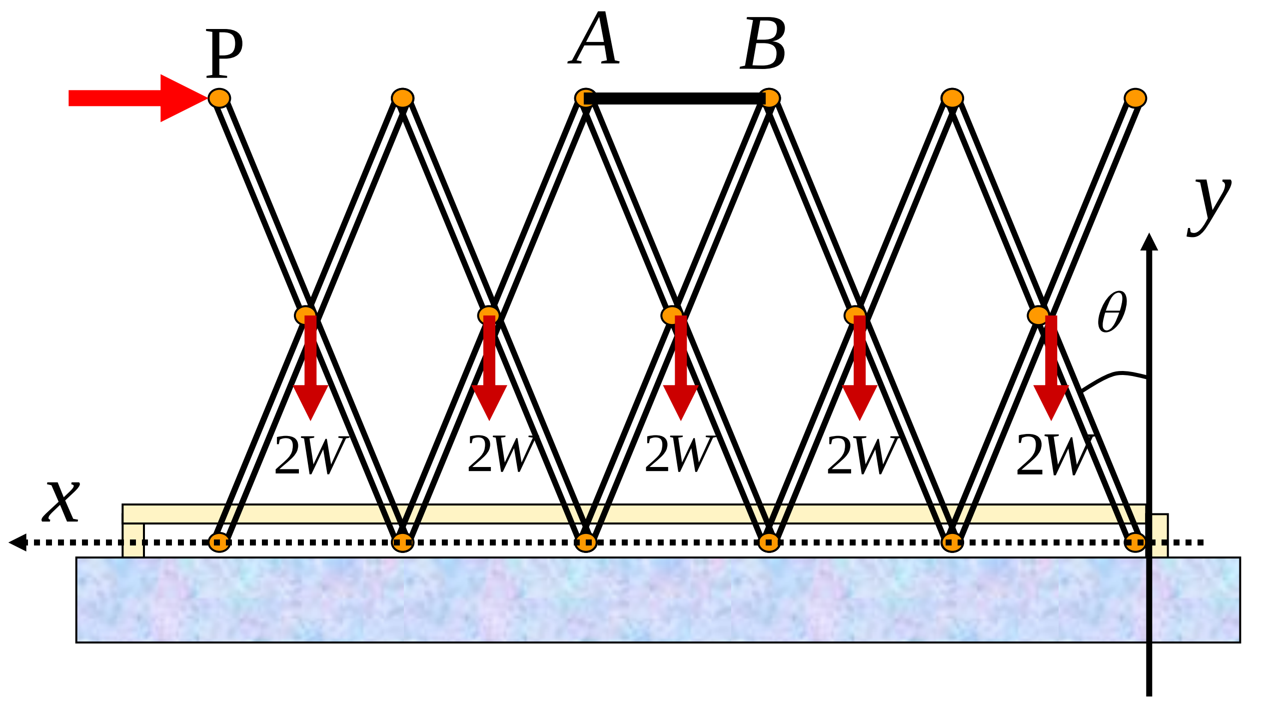
$$y_W = \frac{l}{2}\cos\theta \quad \delta y_W = -\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta$$

4，计算虚功

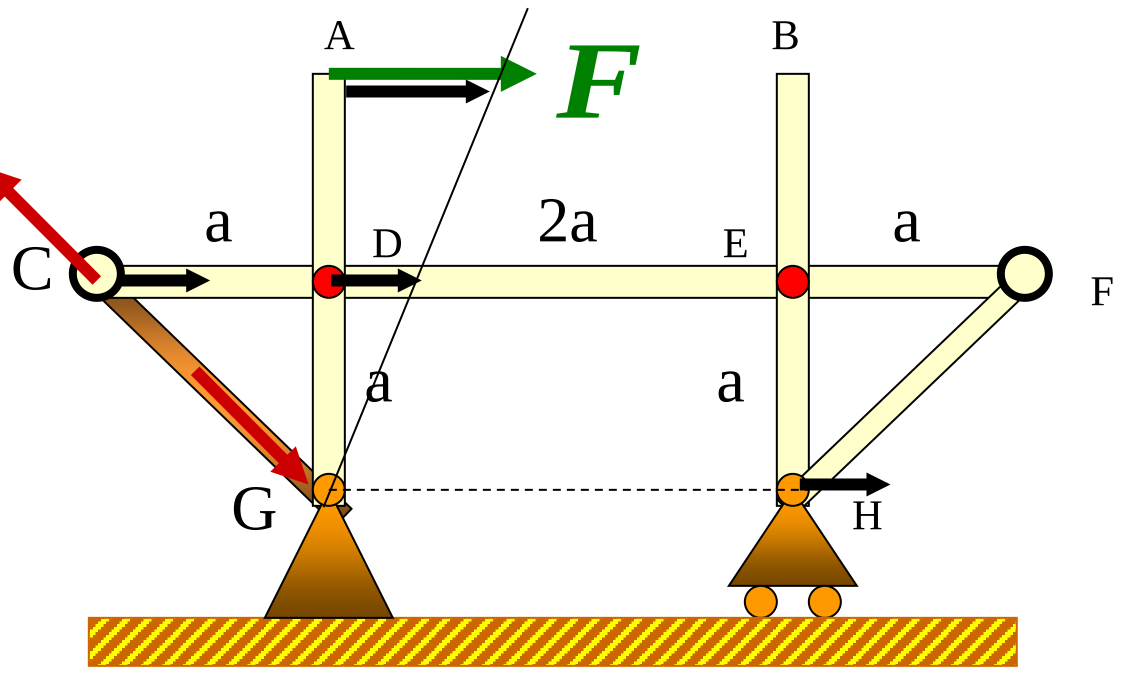
$$-P\delta x_P - 2nW\delta y_W = -Pnl\cos\theta\delta\theta + nlW\sin\theta\delta\theta$$

$$P = W\tan\theta$$

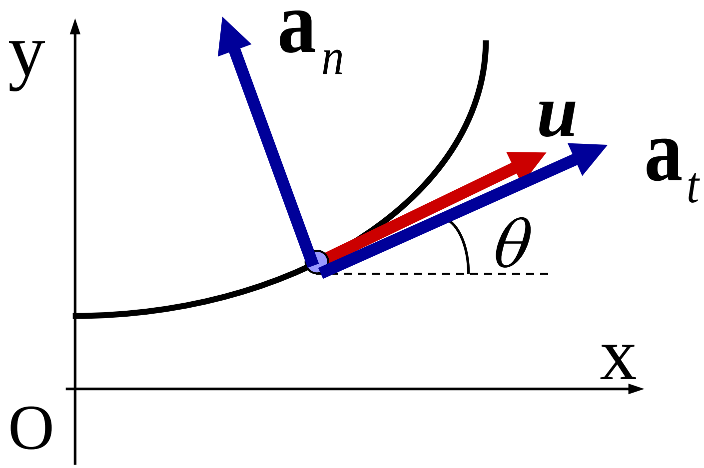
2n根杆，长l，已知P；不计各处摩擦，求维持平衡时AB的内力



例： 已知 F，求 AG 杆上的约束力



例： 已知点沿给定的轨迹以速度 u(s) 运动，且速度与水平线的夹角 $\theta = f(s)$ 求点任意时刻的加速度

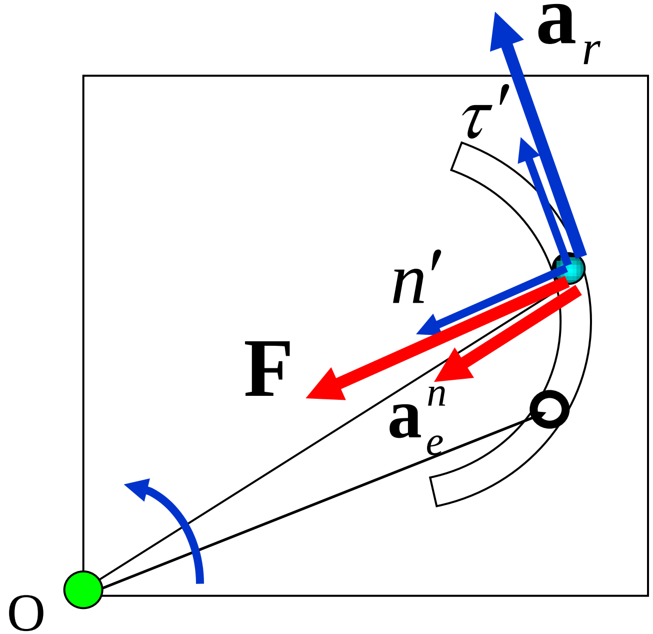


$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_{\mathrm{t}} + \dot{s}^2 k \mathbf{e}_{\mathrm{n}} = \ddot{s}\mathbf{e}_{\mathrm{t}} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_{\mathrm{n}}$$

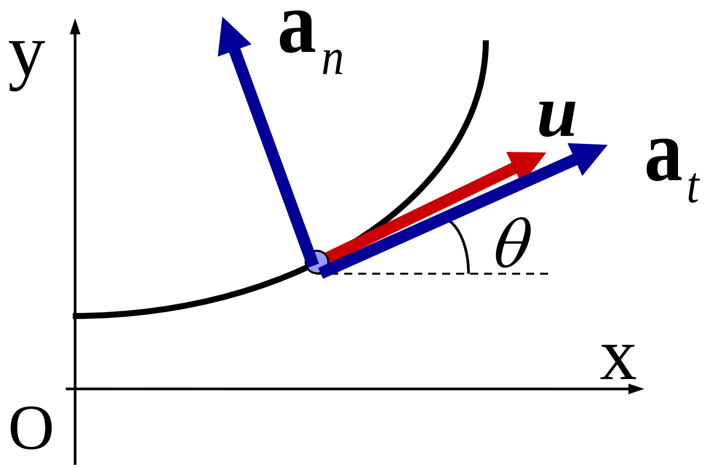
$$\mathrm{a}_t = \frac{du(s)}{dt} = \frac{du(s)}{ds}u(s)$$

$$\mathrm{a}_n = ku^2(s) = \frac{d\theta}{ds}u^2(s)$$

水平板以匀角速度 ω 绕铅垂轴O转动，小球M可在板内一光滑槽中运动，初始时小球相对静止且到转轴O的距离为 R_O 求小球到转轴的距离为 $R > R_O$ 时的相对速度。



例：已知点沿给定的轨迹以速度$u(s)$运动，且速度与水平线的夹角 $\theta = f(s)$ 求点任意时刻的加速度

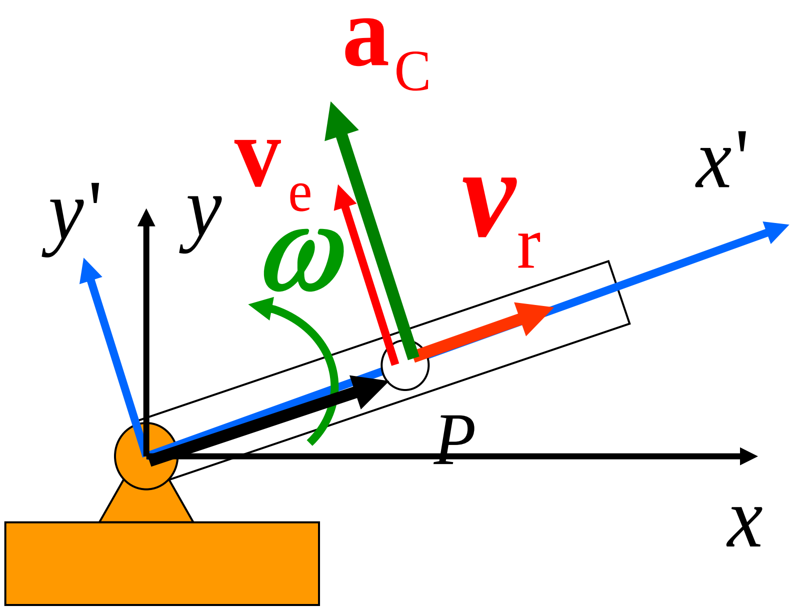


$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_\mathrm{t} + \dot{s}^2 k\mathbf{e}_\mathrm{n} = \ddot{s}\mathbf{e}_\mathrm{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_\mathrm{n}$$

$$\mathrm{a}_t = \frac{du(s)}{dt} = \frac{du(s)}{ds}u(s)$$

$$\mathrm{a}_n = ku^2(s) = \frac{d\theta}{ds}u^2(s)$$

E1: 已知 $\omega; v_r; r'$，求P点的绝对速度、加速度



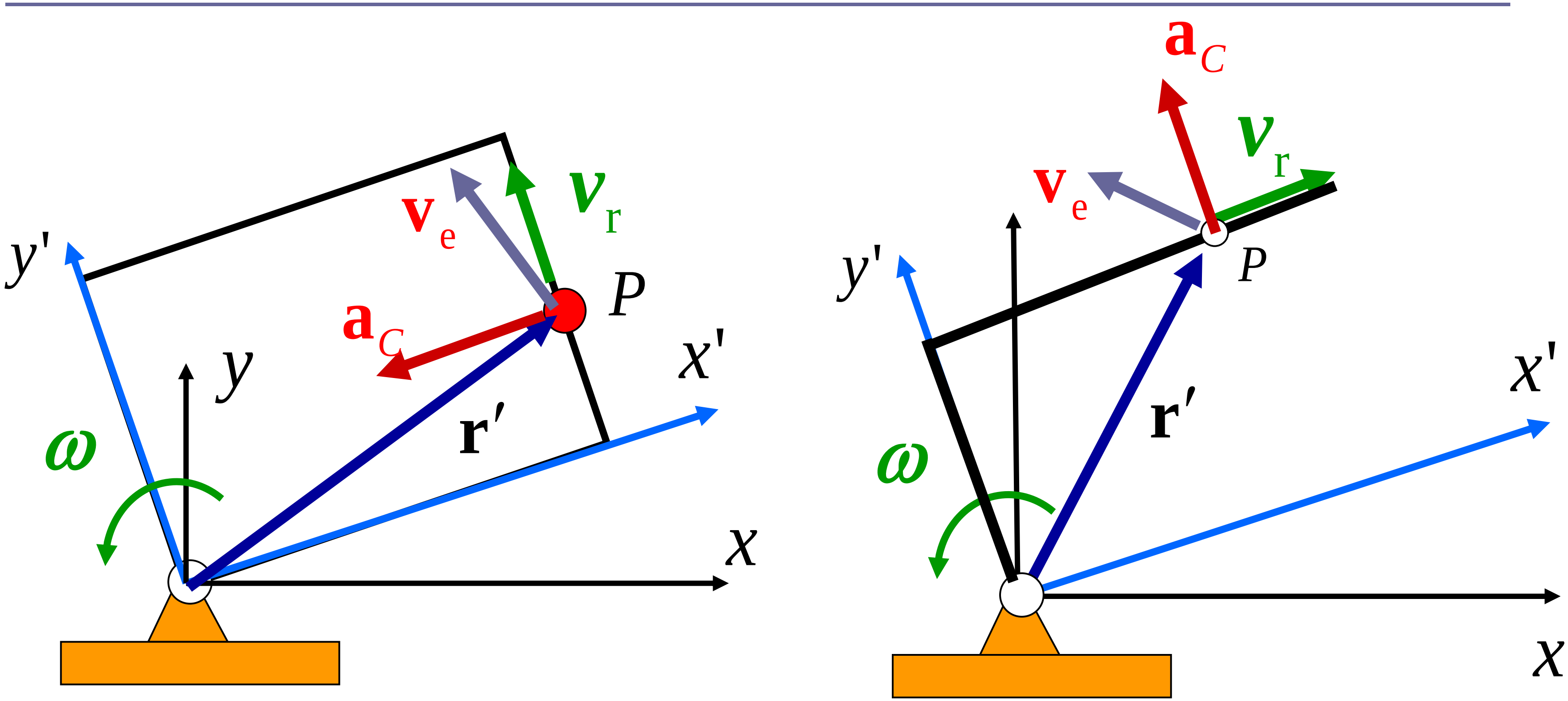
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$$

牵连速度

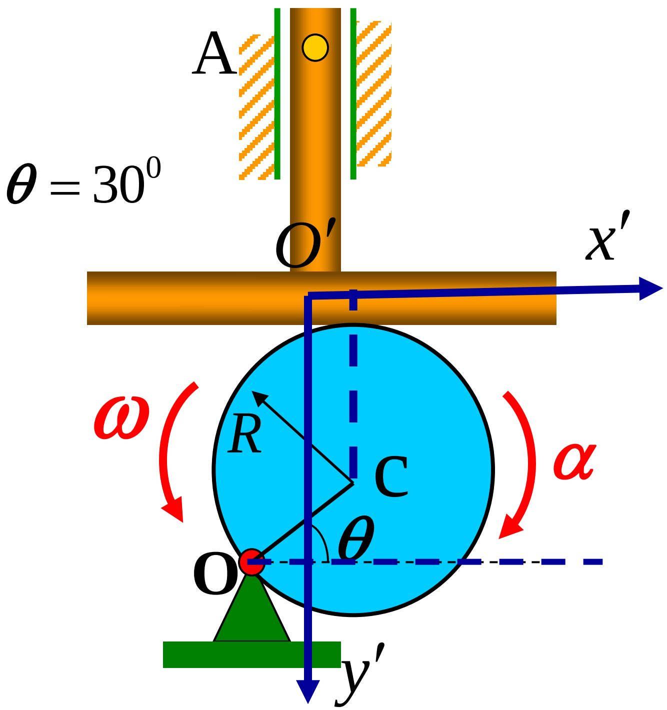
$$\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

E2：已知 $\omega; v_r; r'$ 求P点的绝对速度、加速度

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$ 牵连速度 $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$



例： 已知图示瞬时圆盘的角速度 ω 和角加速度 α ， 求杆上A点的速度和加速度



解： 动点： 盘心C

动系： 杆

定系： 地面

运动分析

绝对运动： 圆周运动

相对运动： 直线运动

牵连运动： 直线平移

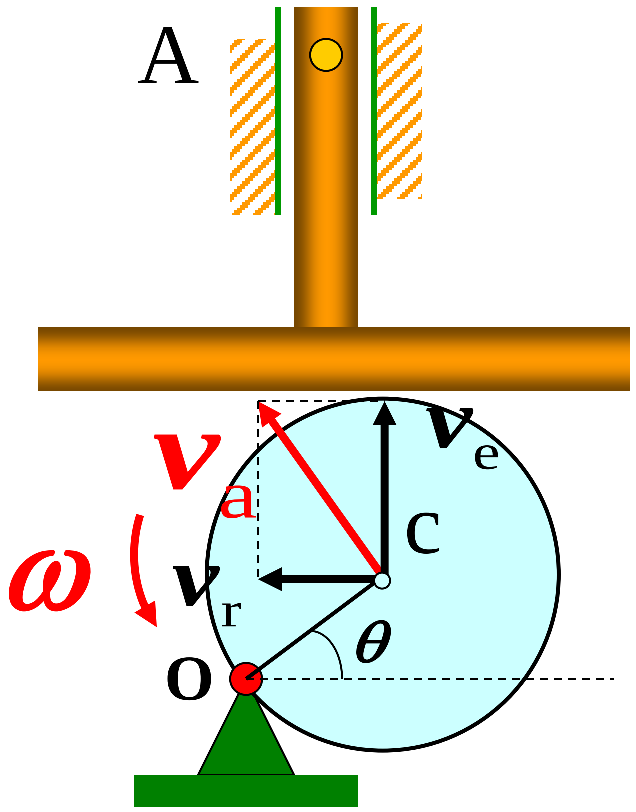
速度关系

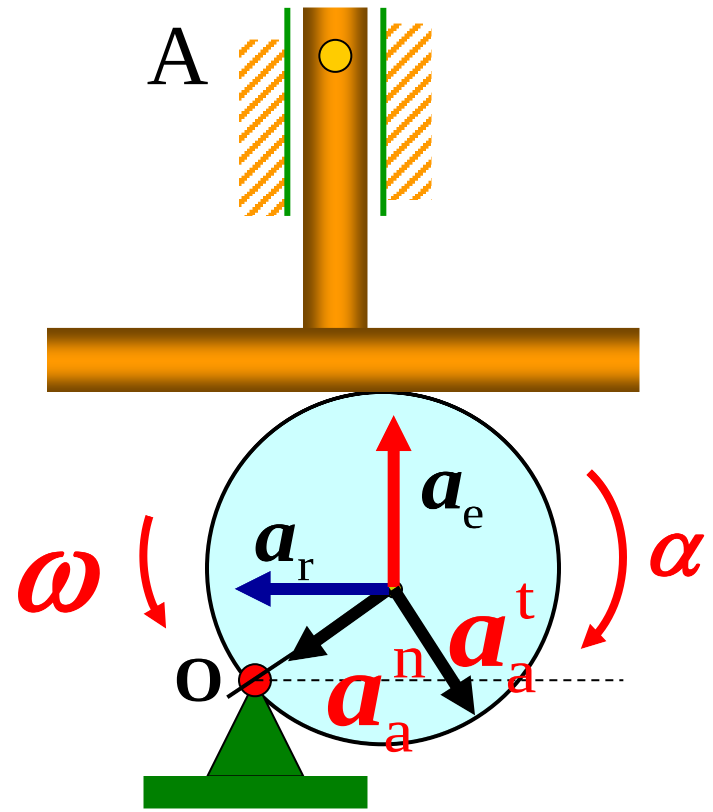
$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

加速度关系

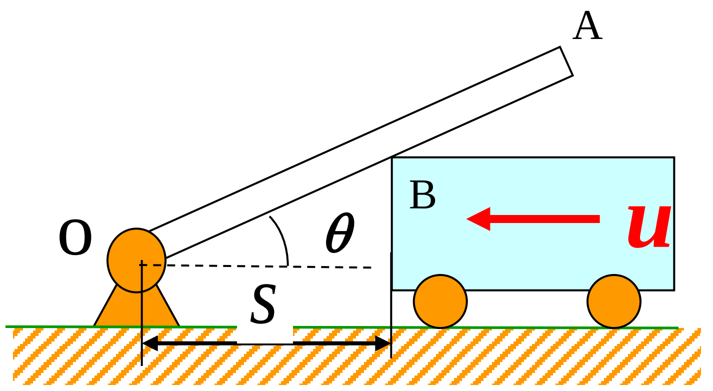
$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{a}_a^n + \mathbf{a}_a^t = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r$$





例：已知滑块以匀速 u 平移，求图示位置时，杆的角速度和角加速度



解：动点：板上的接触点B

动系：OA杆

定系：地面

求：牵连速度和

牵连加速度

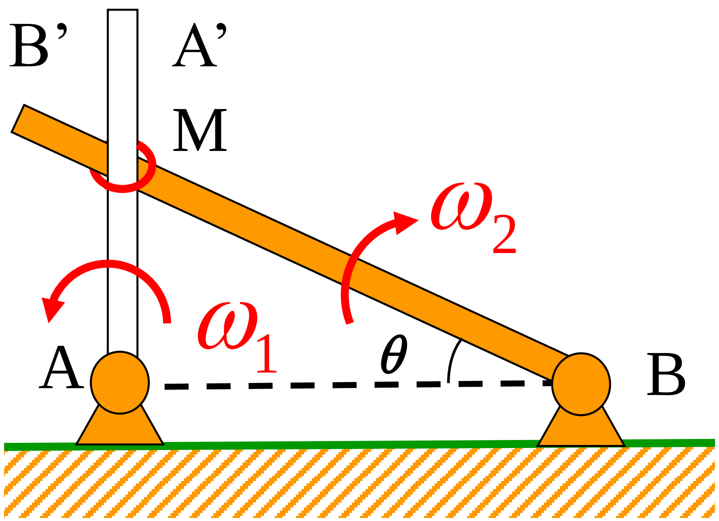
运动分析

绝对运动：直线运动

相对运动：直线运动

牵连运动：定轴转动

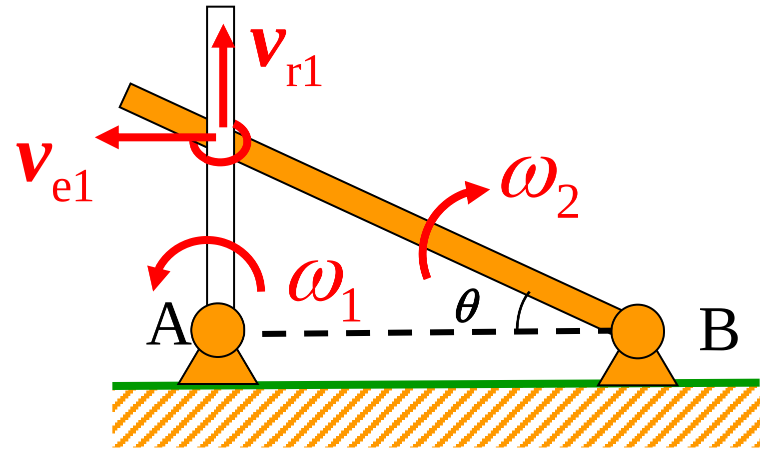
例：已知 $AB=L$，求小环 M 的速度和加速度

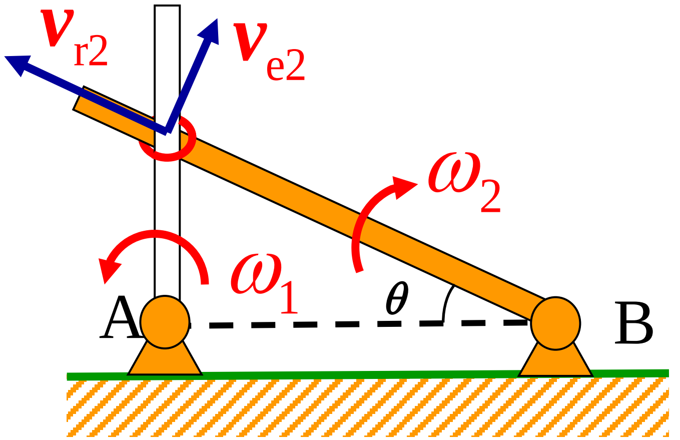


$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \theta = 30^0$$

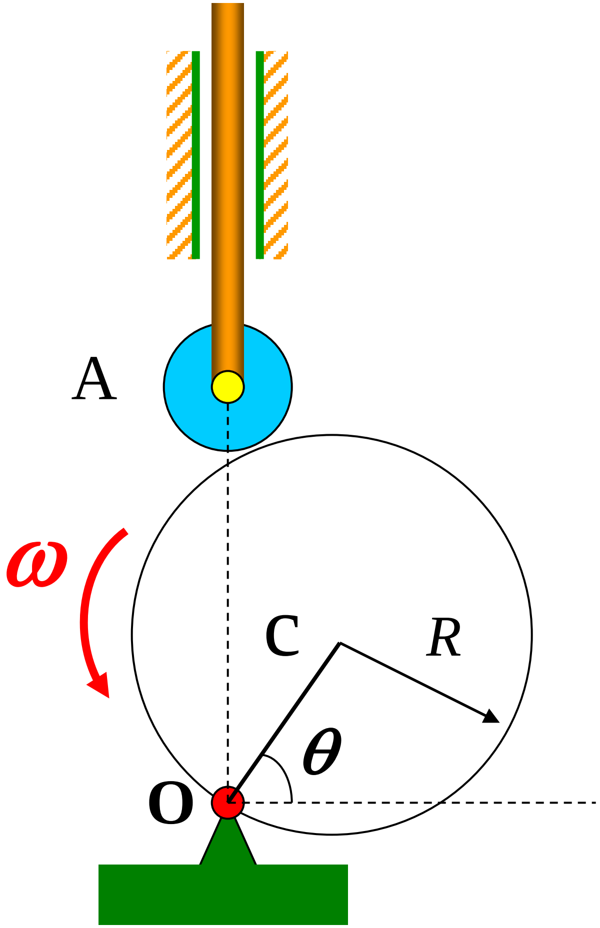
$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

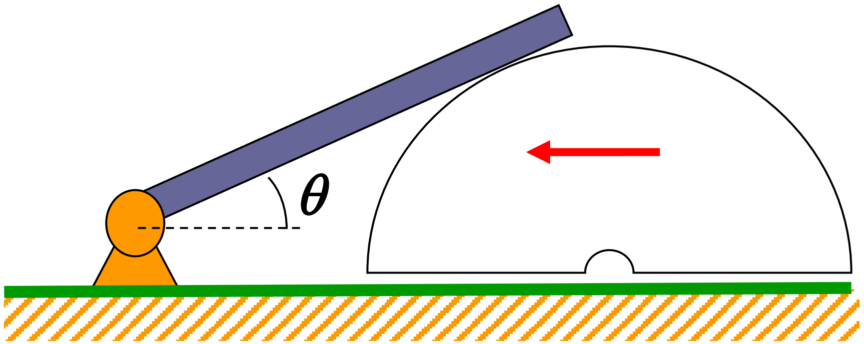
$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_C$$

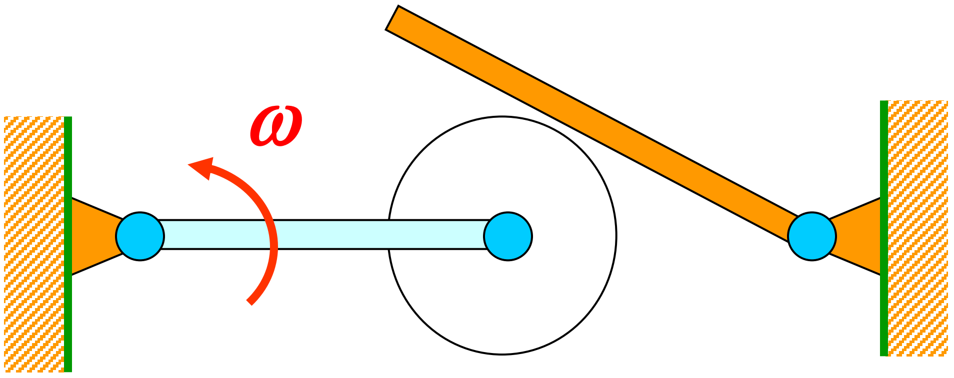




如何选取动点、动系







平面运动刚体上各点的速度

依据 $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$

1: 已知刚体上某一点速度的大小和方向，以及刚体的角速度能否确定任意一点的速度?

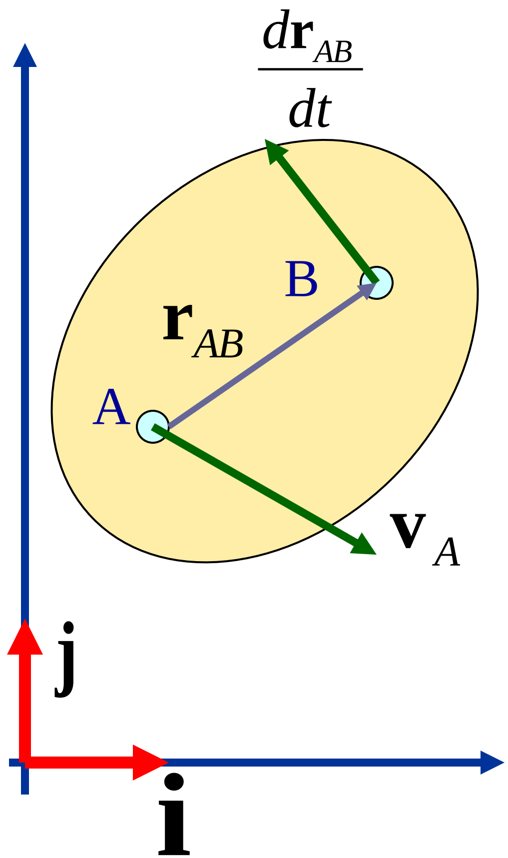
2: 已知刚体上某一点速度的大小和方向，以及另一点的速度大小(或方向)能否确定任意一点的速度?

3:已知刚体上某两点速度的大小（或方向），以及刚体的角速度大小能否确定任意一点的速度?

4:已知刚体运动的三个参数（点速度的大小或方向或角速度），能否确定任意一点的速度?

A, B在同一刚体上

平面图形上各点的速度关系



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

$$\mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \qquad \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$$

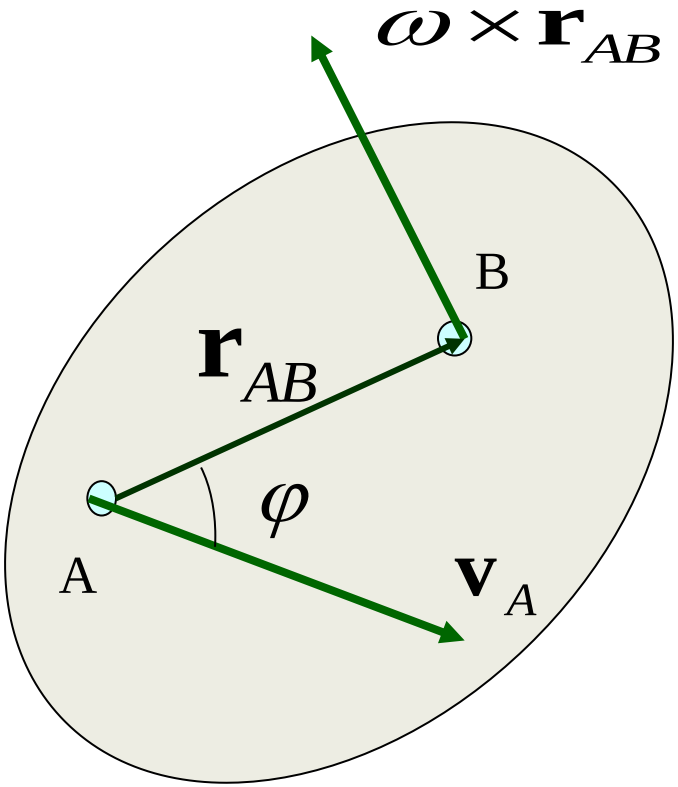
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_{AB}$$

2、速度投影定理

3、速度瞬心

3:已知刚体上某两点速度的大小，以及刚体的角速度求任意一点的速度。



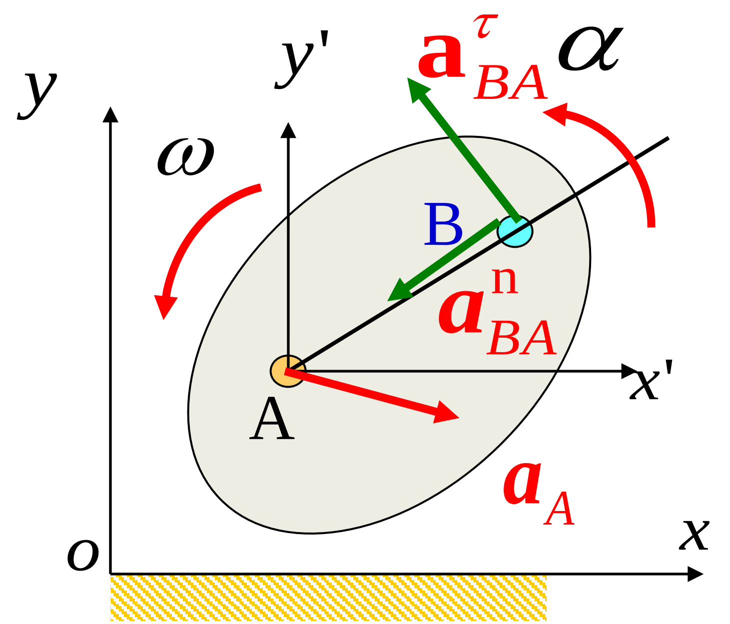
$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \qquad \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{a}_{BA}^{\tau} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{a}_{BA}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

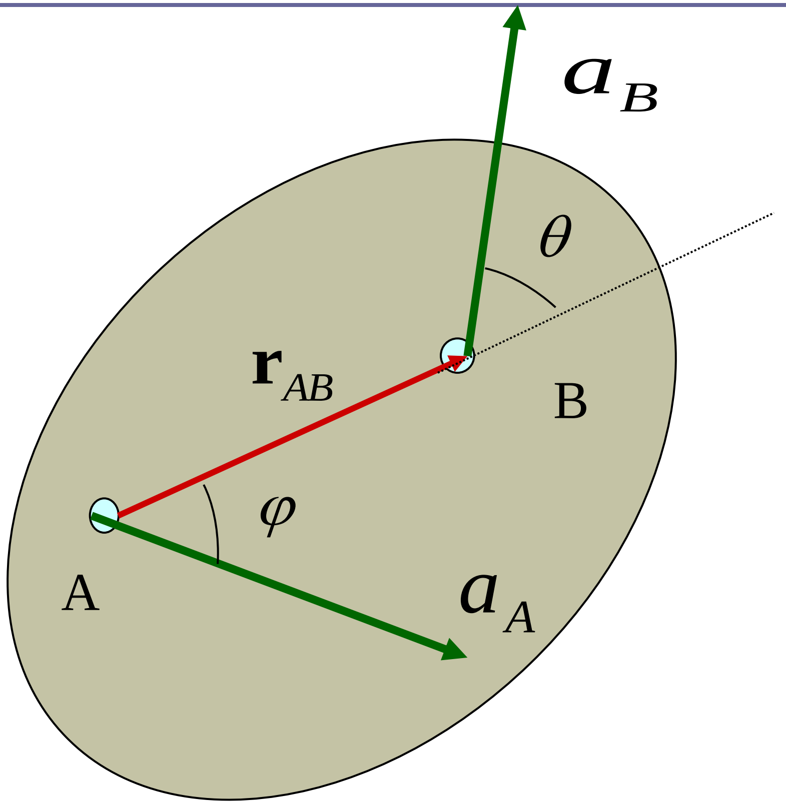
方向

$$\mathbf{a}_{\mathrm{B}} = \mathbf{a}_{\mathrm{A}} + \mathbf{a}_{\mathrm{BA}}^{\tau} + \mathbf{a}_{BA}^{n}$$



确定平面图形上各点的加速度需要什么条件?

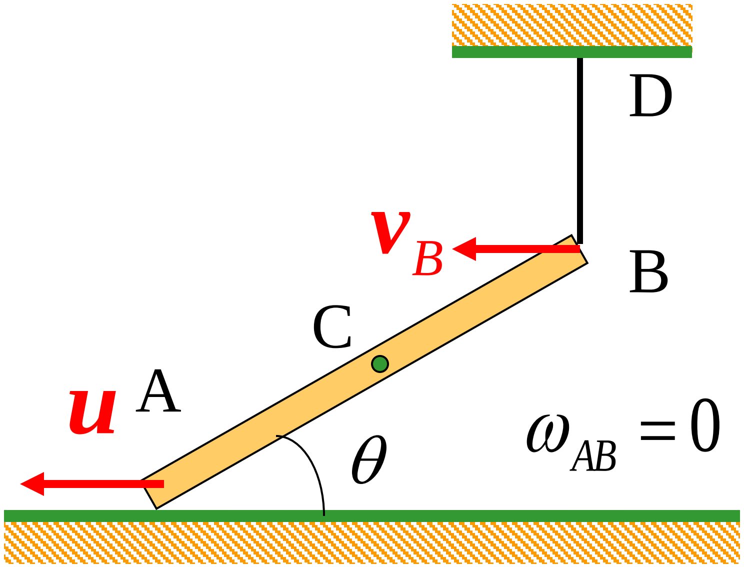
Q:已知刚体上某两点加速度的大小和方向，求任意一点的加速度。

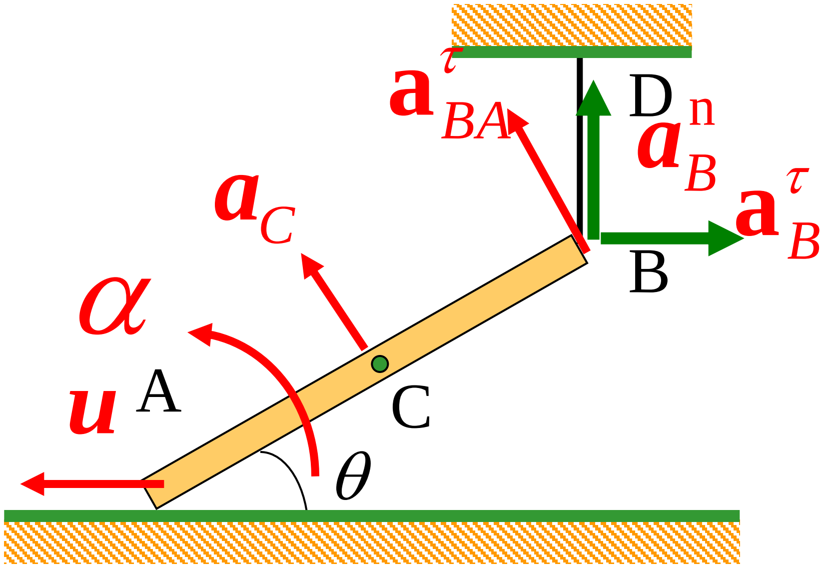


例：A端沿直线匀速运动，求绳铅垂时AB杆的角加速度和中点C的加速度

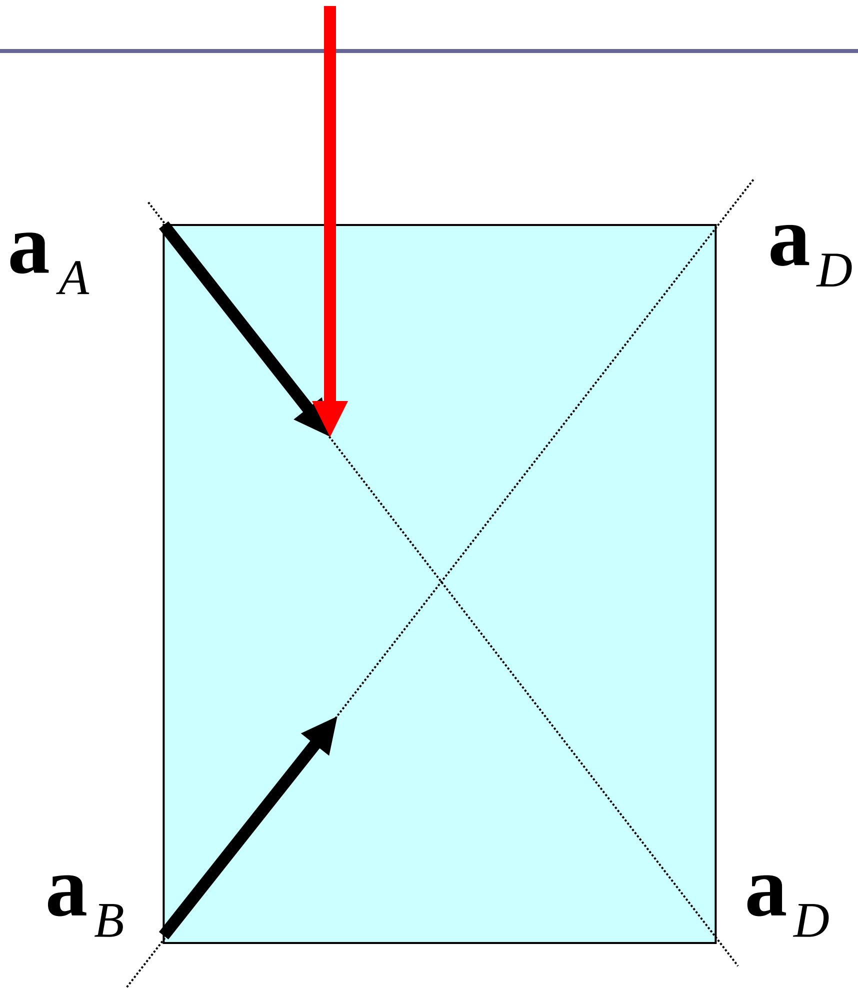
$AB = 2r \qquad BD = r$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^{\tau} + \mathbf{a}_{BA}^{n}$$

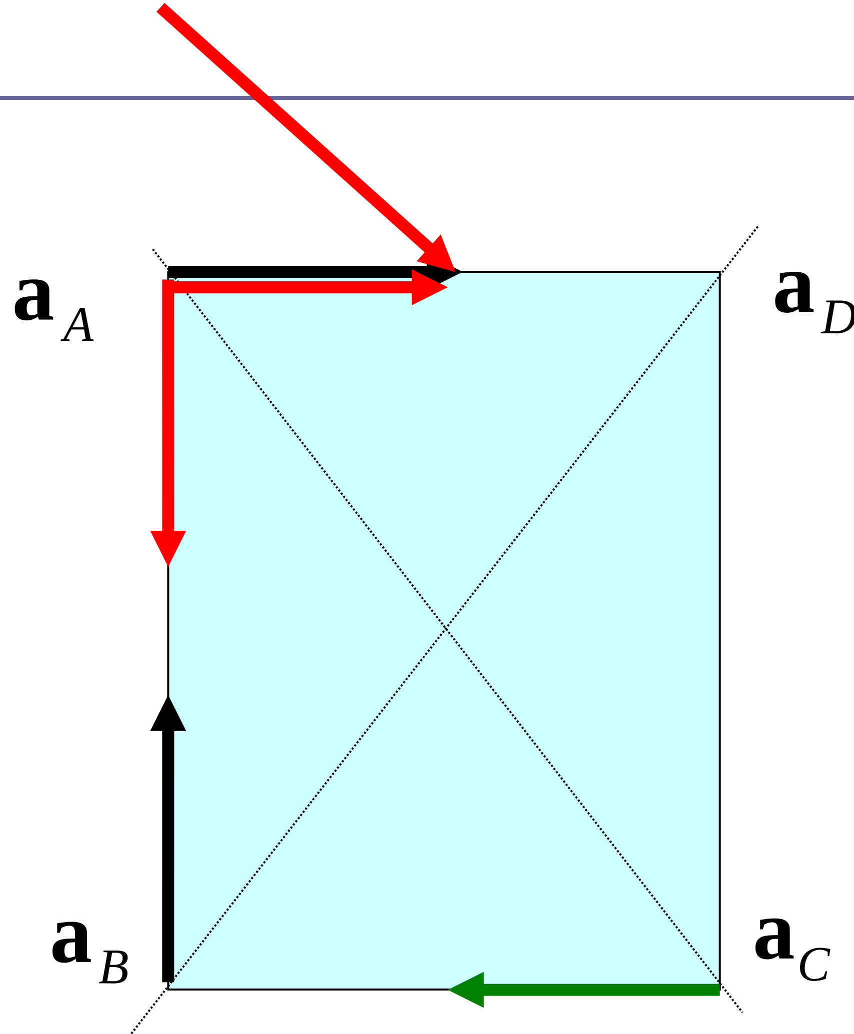




已知 $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$，且$a_A=a_B$，求$\mathbf{a}_C$ $\mathbf{a}_D$



已知 $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$, 且$a_A=a_B$，求$\mathbf{a}_C$ $\mathbf{a}_D$



运动微分方程-质点

牛顿第二定律（动量定理）

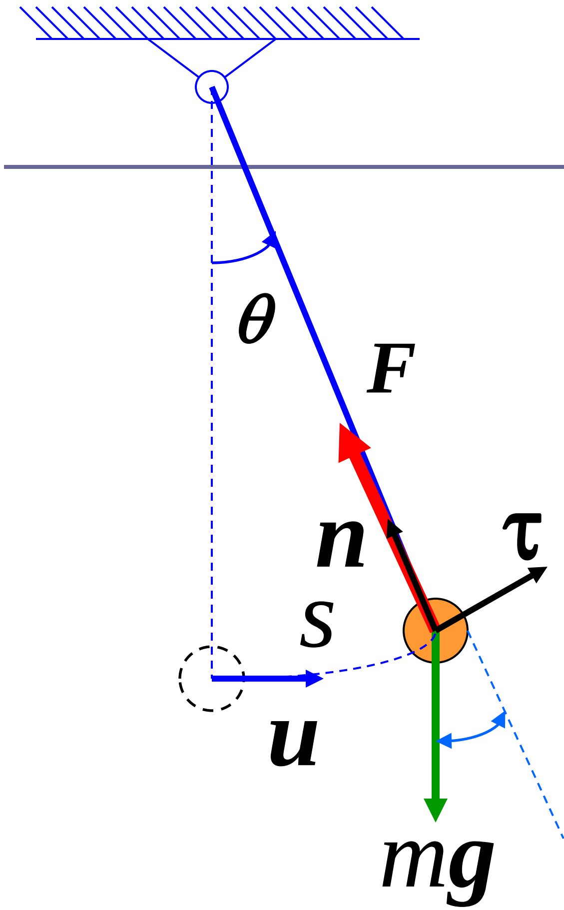
$$\frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$$

动能定理

$$T-T_0=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}_\mathbf{i}\cdot d\mathbf{r}$$

动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{r}\times m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}\times\mathbf{F}_\mathbf{i}$$



受力分析：

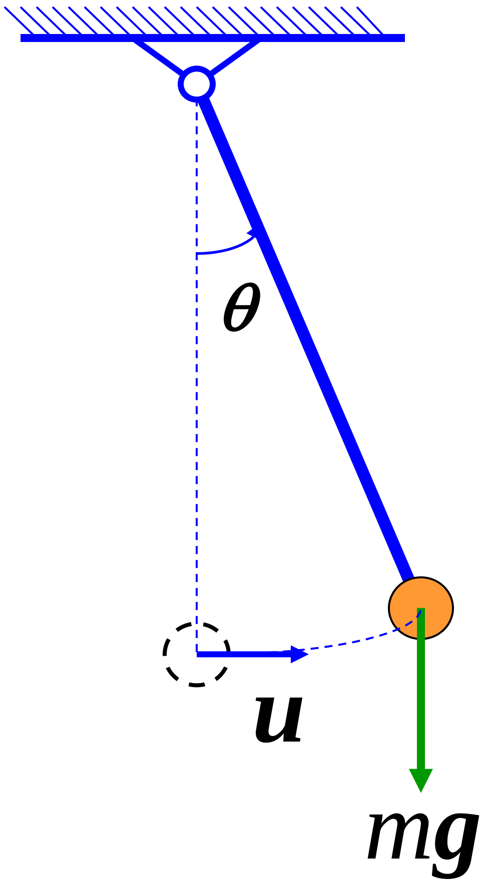
运动（描述）分析：

$\theta \qquad l\dot{\theta}\boldsymbol{\tau}$

$ml\dot{\theta}\boldsymbol{\tau}$

$ml^2\dot{\theta}$

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

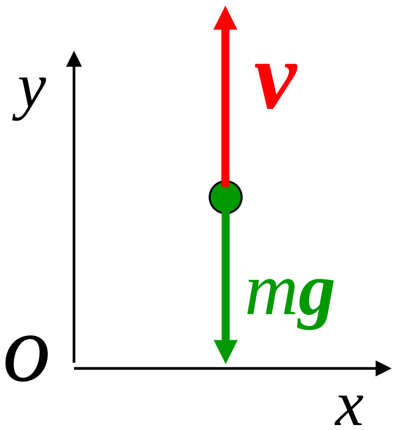


解： 1、受力分析，画受力图

2、选择（广义）坐标系
（运动描述）

3、依据定（律）理建立运动微分方程

设空气阻力的大小与速度的平方成正比，方向与速度方向相反，垂直上抛体的运动微分方程

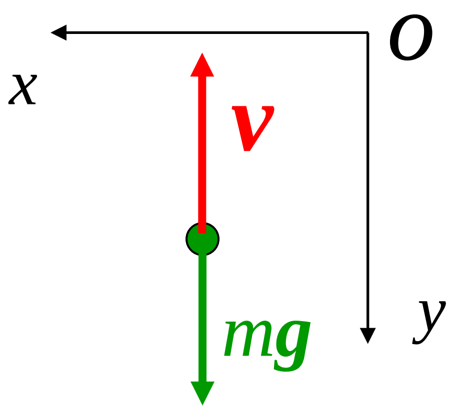


$$\mathrm{A}: m\ddot{y} = -mg - c\dot{y}^2$$

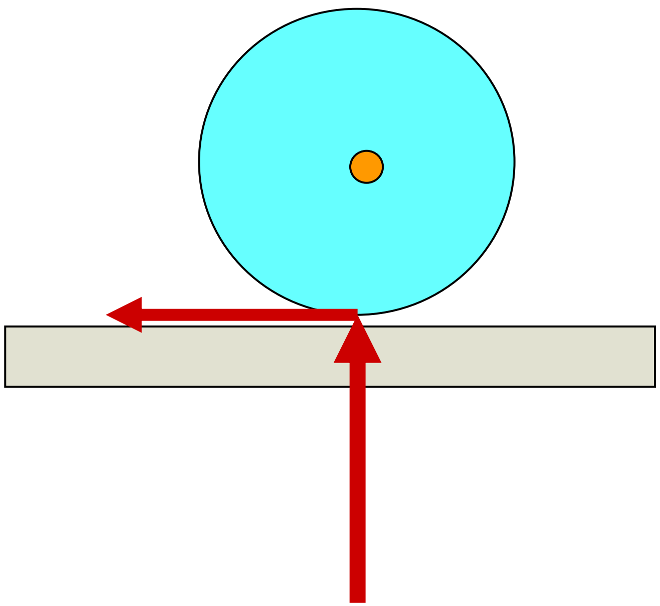
$$\mathrm{B}: m\ddot{y} = -mg + c\dot{y}^2$$

$$\mathrm{C}: m\ddot{y} = +mg - c\dot{y}^2$$

$$\mathrm{D}: m\ddot{y} = +mg + c\dot{y}^2$$



运动微分方程-刚体



受力分析：

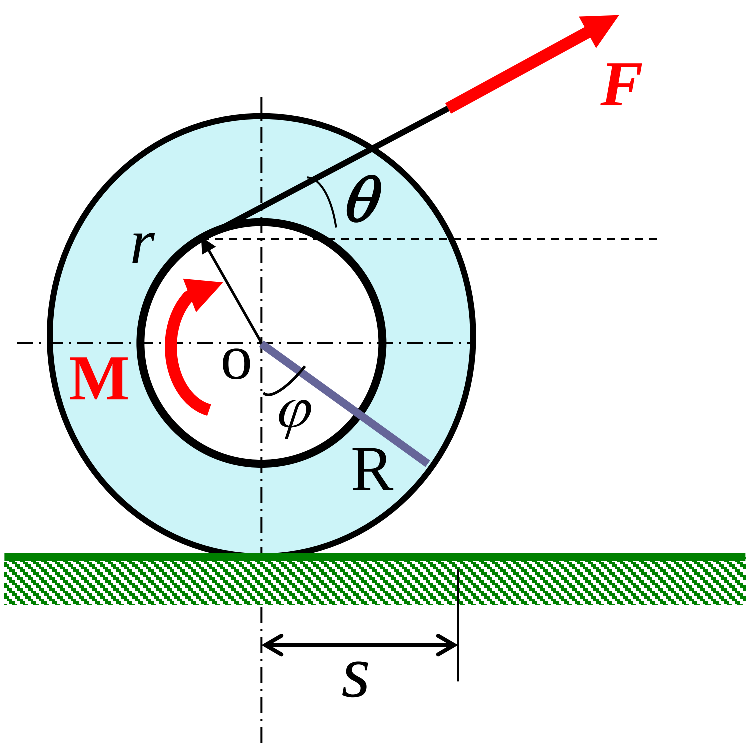
运动（描述）分析：

$$s \quad \dot{s} \quad \ddot{s} \qquad \dot{s} = \omega R$$

$$\ddot{s} = \alpha R$$

受物理量： $m\dot{s}$ $\quad J\dfrac{\dot{s}}{R} \quad \dfrac{1}{2}m\dot{s}^2 + \dfrac{1}{2}J(\dfrac{\dot{s}}{R})^2$

例：半径为R的圆盘在地面上纯滚动，常力F作用在绕在鼓轮的绳索上，求圆盘中心移动S后，F做的功



$$s = R\varphi$$

$$w = Fs + Fr\varphi$$

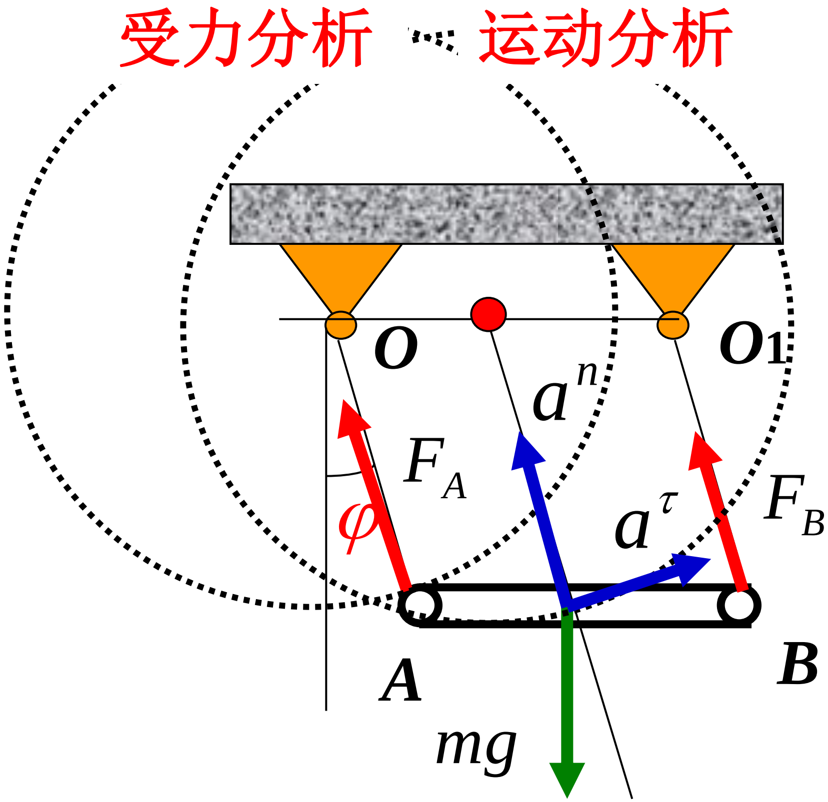
$$= Fs + Fr\frac{s}{R}$$

$$= \frac{Fs(R+r)}{R}$$

等效力系做功定理：

等效力系的功相同

例：设均质杆AB的杆长均为l，质量为m，由两根长度为l，无质量柔索分别系于O、O1两点，求AB杆的运动微分方程，及柔索中的张力。



运动方程　**1 质心运动：**

$$-mg\sin\varphi = ma^\tau = ml\ddot{\varphi}$$

$$-g\sin\varphi = l\ddot{\varphi}$$

$$F_A + F_B - mg\cos\varphi$$

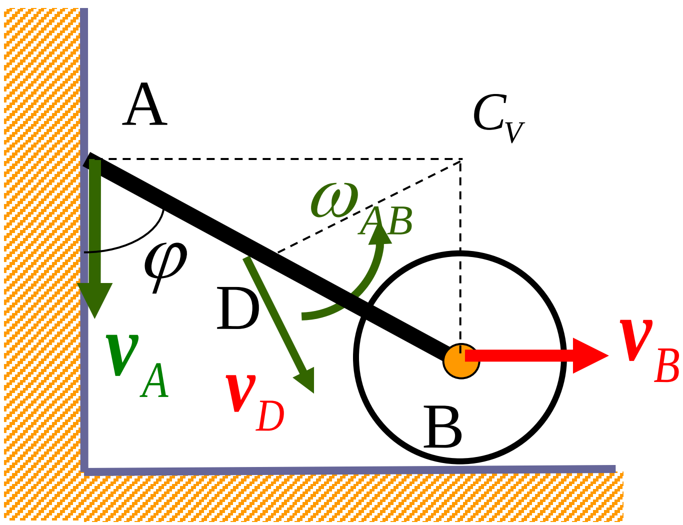
$$= ma^n = ml\varphi^2$$

2 相对质心的动量矩

$$F_A = F_B$$

例： 已知 AB 杆A点的速度，求杆B端的速度、杆的角速度、杆中点D的速度和圆盘的角速度。

解：研究AB杆



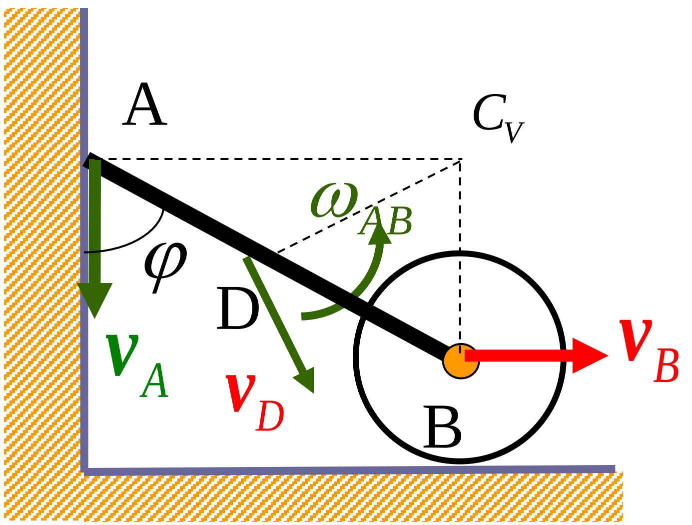
$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AC_V}=\frac{v_A}{L\sin\varphi}$$

$$v_B=BC_V\omega_{AB},\quad v_D=DC_V\omega_{AB}$$

$$\omega_B=\frac{v_B}{R}=\frac{v_A}{R}\cot\varphi$$

例：已知 AB 杆质量为m 长为l，圆盘质量为m_1沿路面纯滚动，系统由静止开始运动，求

解：以 φ 为参数描述系统的位置

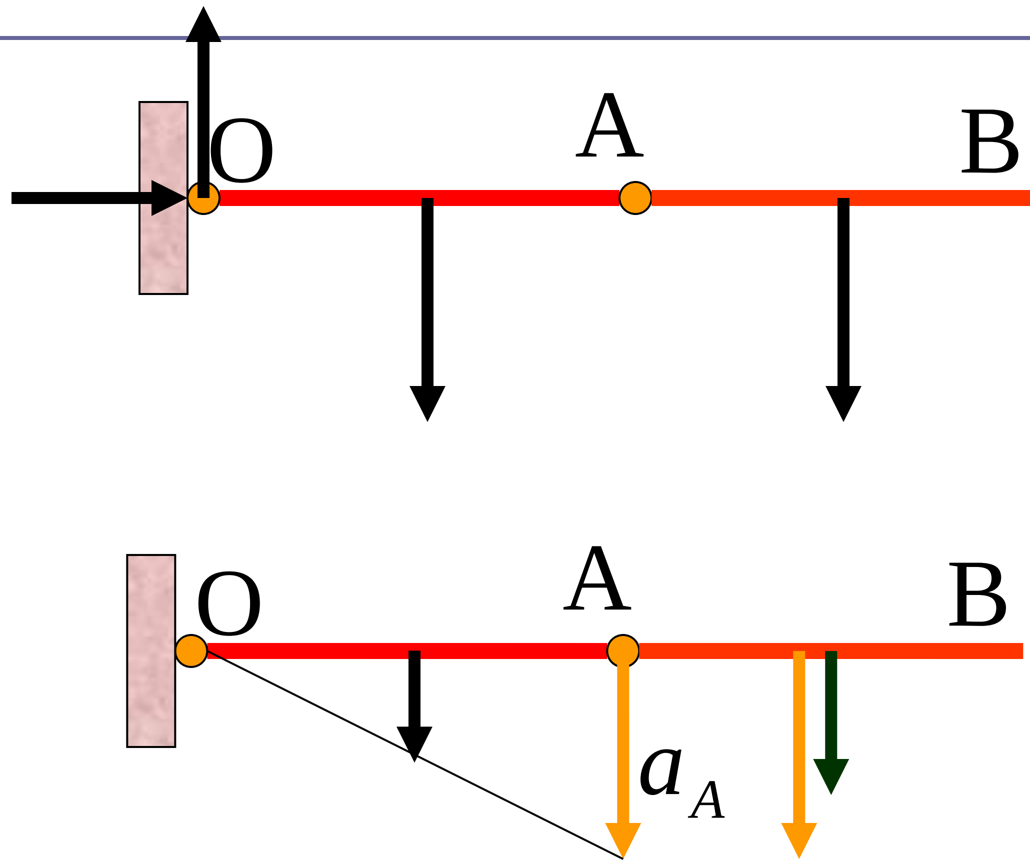


$$\omega_{AB} = \dot{\varphi} \qquad v_D = \omega_{AB}\frac{l}{2}$$

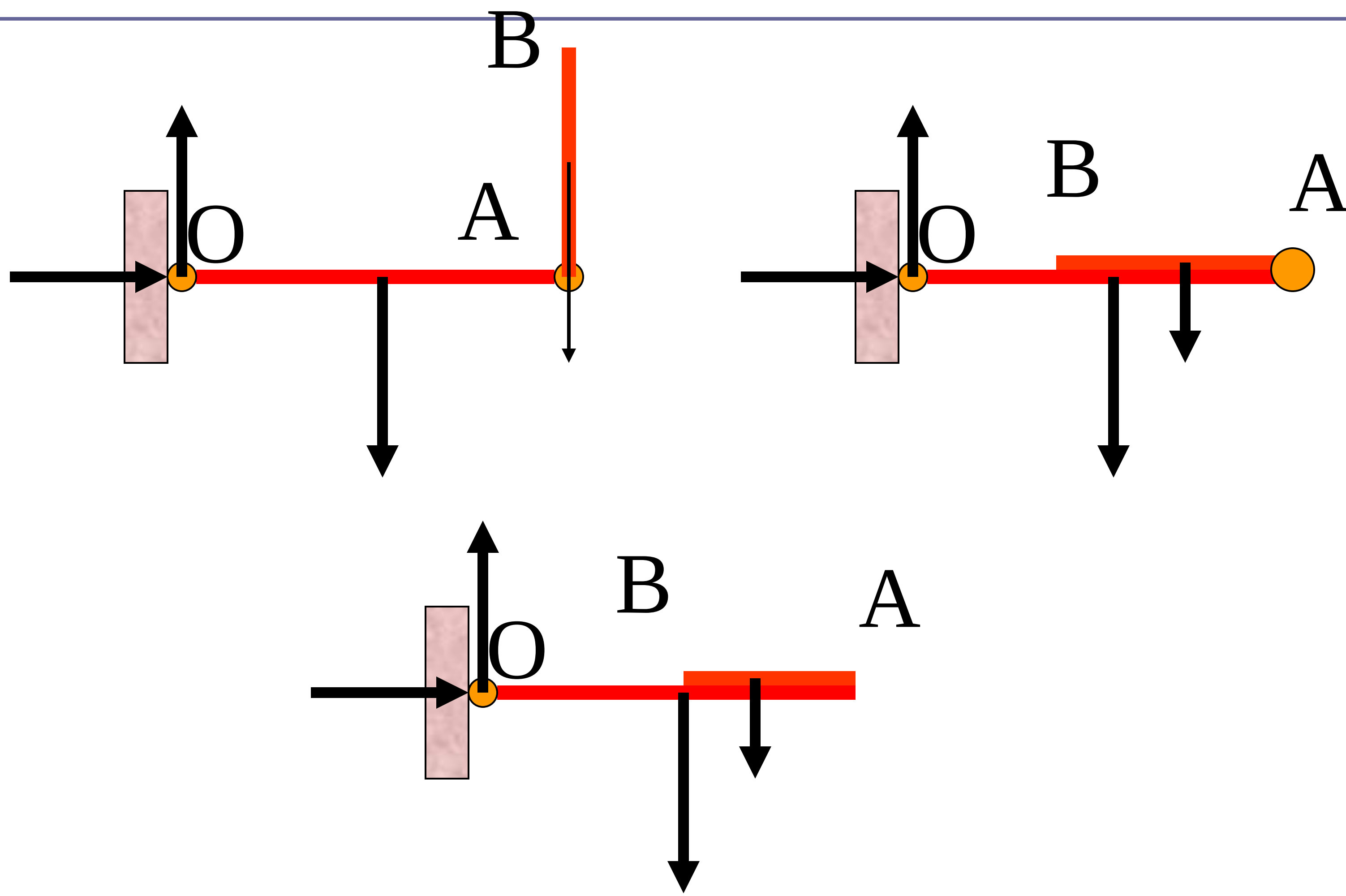
$$v_B = \dot{\varphi} l \cos\varphi$$

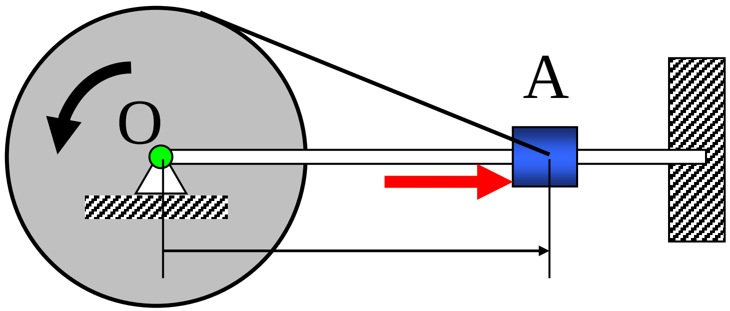
$$\omega_B = \dot{\varphi}\frac{l}{R}\cos\varphi$$

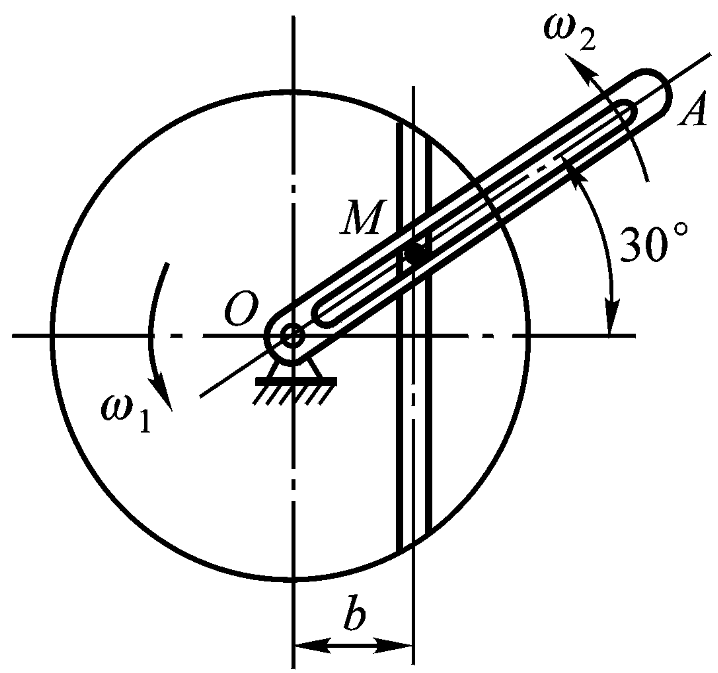
例5 、系统由静止开始运动，求各杆的角加速度



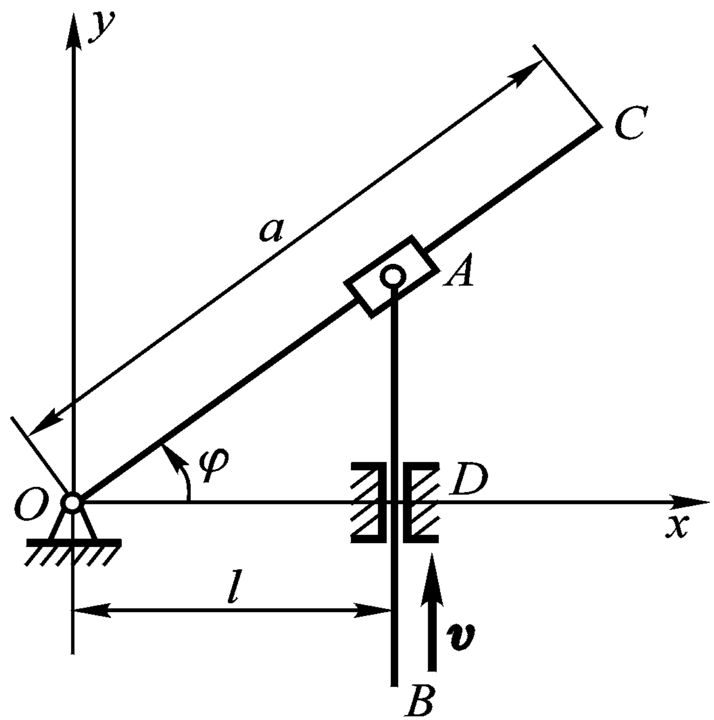
例5 、系统由静止开始运动，求各杆的角加速度

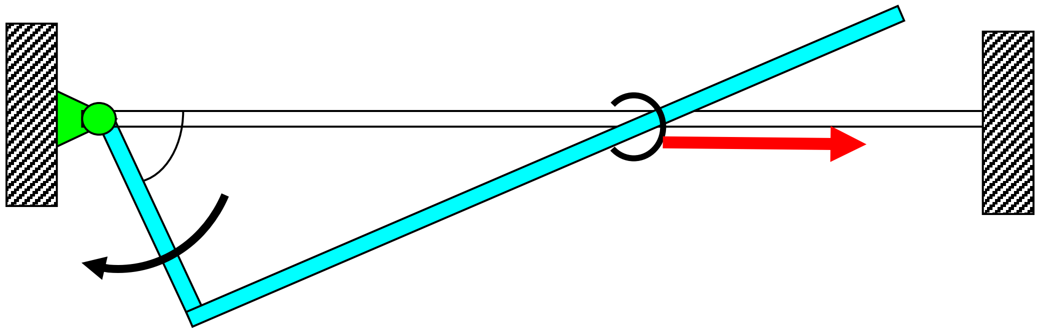


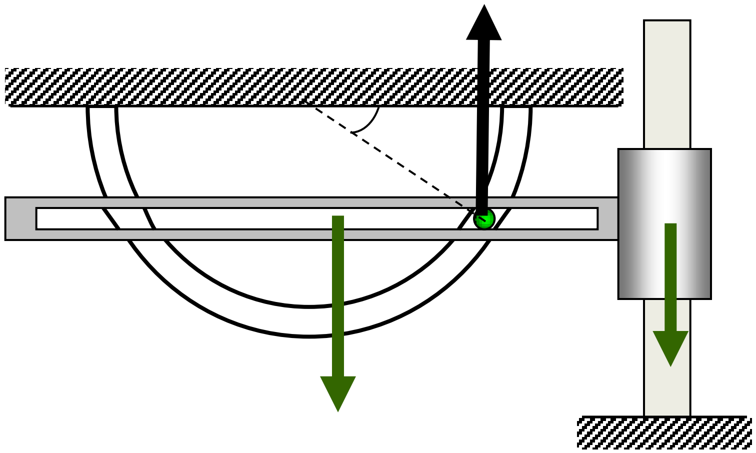

O
A

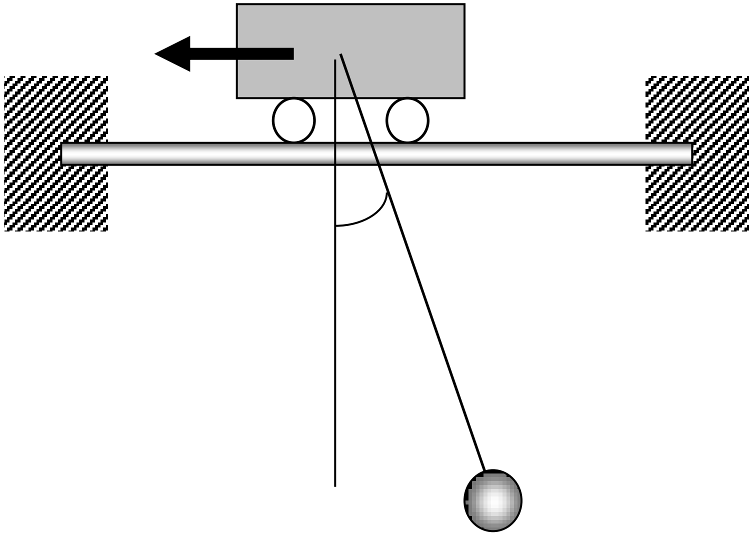


ω_2
A
M
30°
O
ω_1
b

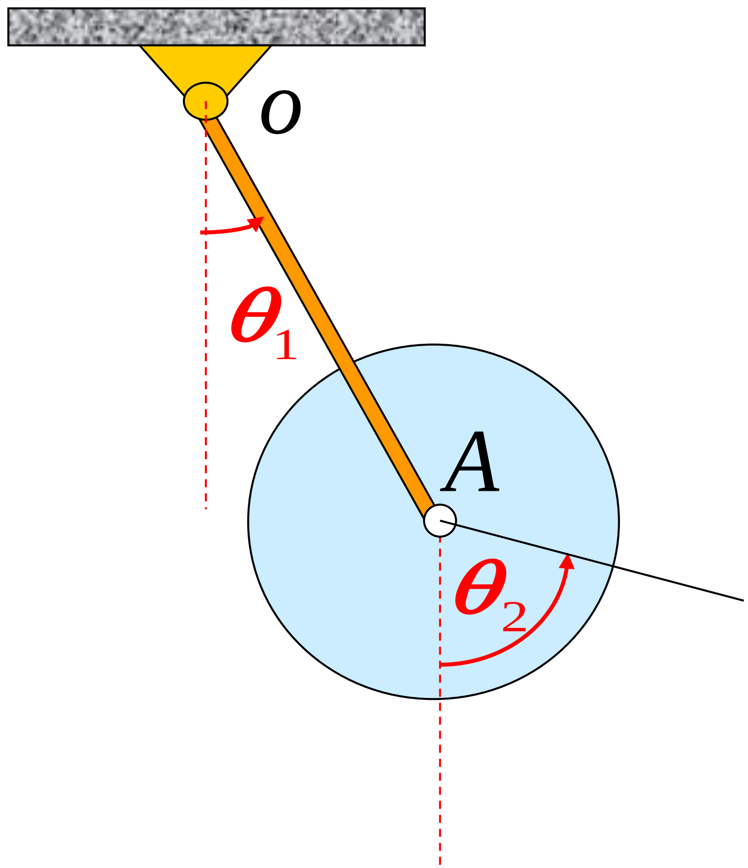

y
a
C
A
φ
D
O
x
l
v
B







例： 系统如图所示，杆长为5m，质量为1kg，圆盘为直径 0.6m，质量为10kg 。系统由静止开始运动，求系统运动微分方程。



3－21　由于圆盘纯滚动，所以有

$$a_C = r\alpha$$

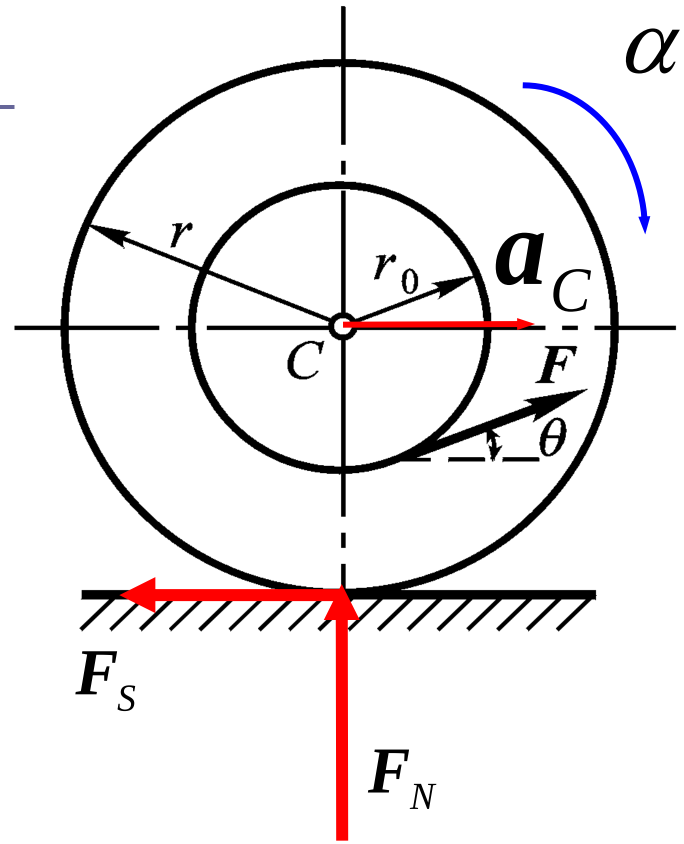
根据质心运动定理有：

$$ma_C = F\cos\theta - F_S$$

$$0 = F_N + F\sin\theta - mg$$

根据相对质心的动量矩定理有

$$-m\rho^2\alpha = -F_S r + F r_0$$



求解上式可得：

$$F_N = mg - F\sin\theta \qquad a_C = \frac{Fr(r\cos\theta - r_0)}{m(r^2+\rho^2)}$$

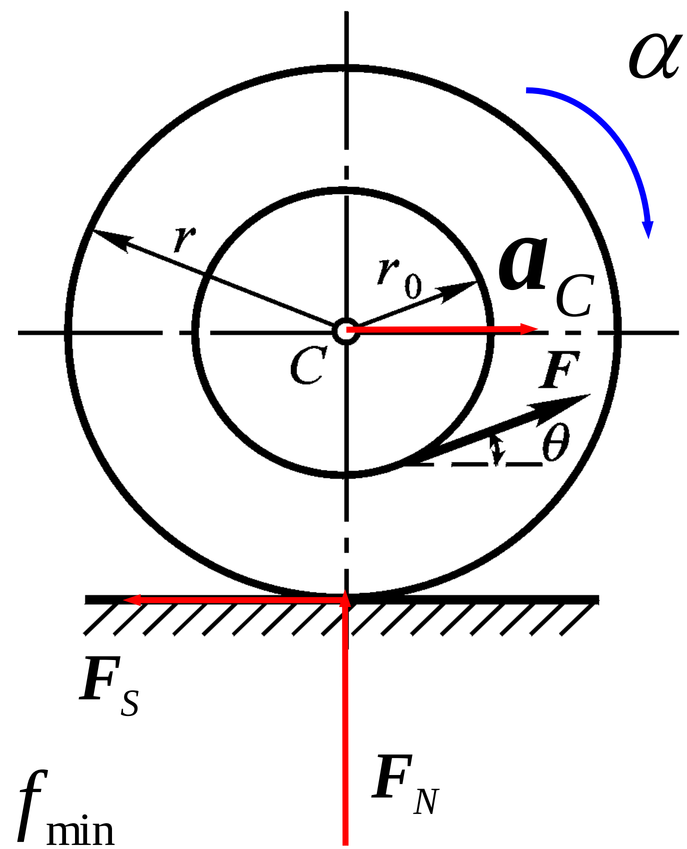
$$F_S = \frac{F(\rho^2 \cos\theta + r r_0)}{r^2 + \rho^2}$$

若圆盘无滑动，摩擦力应满足

$$F_S \le f F_N$$

由此可得, 当:

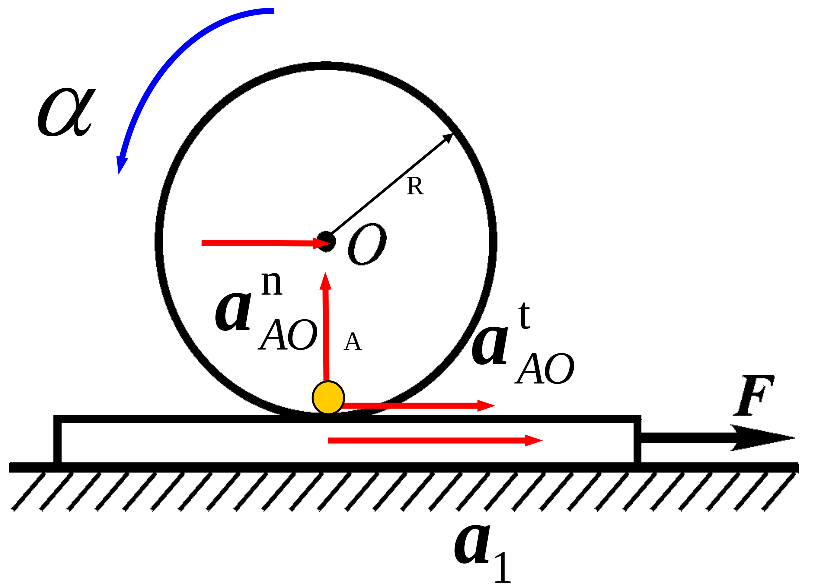
$mg > F\sin\theta$ 时,



$$f \ge \frac{F(\rho^2 \cos\theta + r r_0)}{(mg - F\sin\theta)(r^2 + \rho^2)} = f_{\min}$$

3—35 设板和圆盘中心O的加速度分别为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_O$

圆盘的角加速度为 α



圆盘上与板的接触点为A，则A点的加速度为

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{AO}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{AO}^{\mathrm{n}}$$

将上式在水平方向投影有

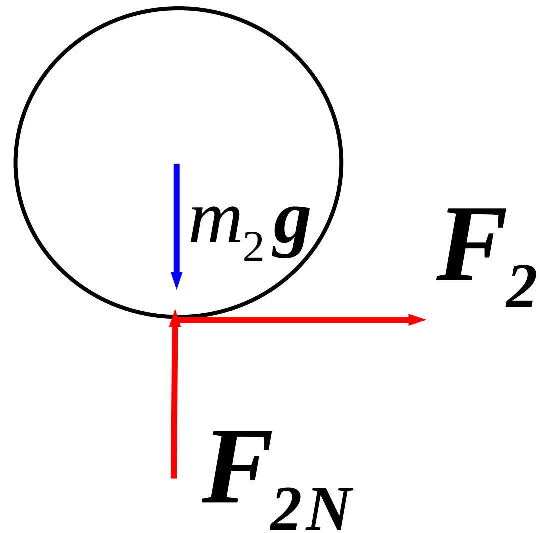
$$a_{xA} = a_O + a_{AO}^{\mathrm{t}} = a_O + \alpha R = a_1 \qquad \text{（a）}$$

取圆盘为研究对象，受力如图，应用质心运动定理有

$$m_2 a_O = F_2 \qquad \text{(b)}$$

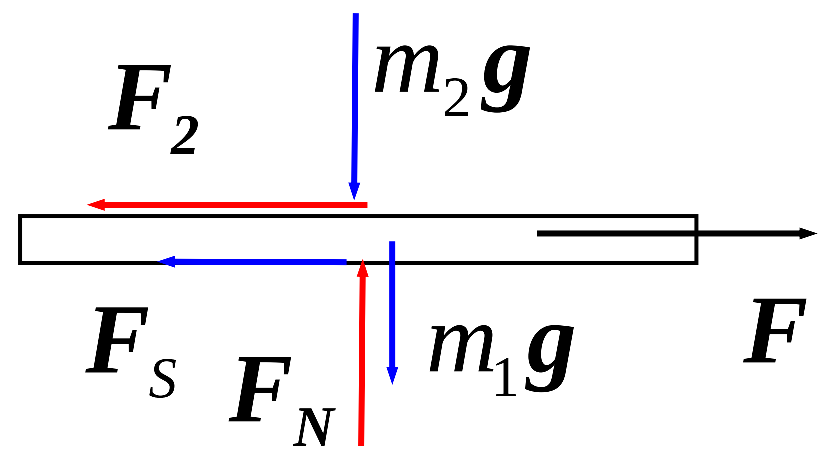
应用相对质心动量矩定理有

$$\frac{1}{2} m_2 R^2 \alpha = F_2 R \qquad \text{(c)}$$



再取板为研究对象，受力如图，应用质心运动定理有

$$m_1 a_1 = F - F_S - F_2$$



作用在板上的滑动摩擦力为：

$$F_S = fF_N = f(m_1 + m_2)g$$

由上式可解得：

$$a_1 = \frac{3F - 3f(m_1 + m_2)g}{3m_1 + m_2}$$

图示机构在铅垂面内运动，均质圆盘在地面上纯滚动，均质杆AB用光滑铰链与圆盘连接。求系统运动微分方程。已知 $AB = l, r, m$