一、 误差的基本知识

1. **真值**——被测量在其所处的确定条件下，实际具有的量值，通常记为 A；

$$\text{约定真值：}\begin{cases}\text{公认值—如物理常数等}\\\text{标准值—更高精度仪器测量结果}\\\text{理论值—理论公式计算结果}\end{cases}$$

2. **绝对误差**——测量值与真值之差，因此既有大小，又有方向（正负），记为：

$$\Delta N = N - A\text{。}$$

其中：N 为测量结果，A 是被测量的真值

3. **相对误差**——绝对误差与真值之比，记为：

$$E = \frac{\Delta N}{A} = \frac{N - A}{A} \times 100\%$$

4. 误差的分类：系统误差、随机误差和粗大误差

- **系统误差**——在同一被测量的多次测量过程中，保持恒定或以可预知方式变化的那一部分误差分量称为系统误差。

  系统误差的特点是：**<u>确定规律性</u>**

  ✓ 已被确切掌握了其大小和符号的系统误差，称为**可定系统误差**——可消除或修正；

  ✓ 对大小和符号不能确切掌握的系统误差，称为**未定系统误差**——难以修正，只能估计取值范围。

- **随机误差**——在同一测量条件下，多次测量同一量时，以不可预知的方式变化的那一部分误差称为随机误差。

  随机误差的特点是：**<u>单个具有随机性，总体服从统计规律</u>**

- **粗大误差**——由于测量系统偶然偏离所规定的测量条件和方法或在记录、计算数据时出现失误而产生的误差称为粗大误差，简称粗差 or 过失误差——本质：测量错误。

  !! 不应当把有某种异常的观测值都作为粗大误差来处理，因为它可能是数据中固有的随机性的极端情况。

✧ 在一定的实验条件下，三类误差有自己的内涵和界限；但当条件改变时，彼此又可互相转化。比如：由于温度变化造成的误差在短时间内可以看成是系统误差，而在长时间内则宜作速记误差处理。总之，系统误差和随机误差并不存在绝对的界限。

5. **精密度**——表示测量结果中随机误差大小的程度。

   正确度——表示测量结果中系统误差大小的程度。

准确度（or 精确度）——表示测量结果与被测量的（约定）真值之间的一致程度。

二、　随机误差的统计处理

- 此部分内容，请仔细阅读《基础物理实验（修订版）》北京航空航天大学出版社（简称：教材）的 P10-P13
- 服从正态分布的随机误差具有的四个特点：单峰性，对称性，有界性，抵偿性

1. 标准差与标准偏差

标准差$\sigma=\sqrt{\lim_{k\to\infty}\frac{\sum(x_i-A)^2}{k}}$，因为真值 A 不可知，且测量次数 k 为有限次，因此σ实际上也不可知，于是用标准偏差 S 代替标准差σ

单次测量的标准偏差——$S(x)=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{k-1}}$

结果表述：　$x_i \pm S\left(x\right)$　　（置信概率~68.3%）

真值的估计值　　　　单次测量的标准差最佳估计值

S(x)的物理意义：在有限次测量中，每个测量值平均所具有的标准偏差。

2. 平均值的标准差

真值的最佳估计值是平均值，故结果应表述为：

$\bar{x} \pm S\left(\bar{x}\right)$　　（置信概率~68.3%）

真值的最佳估计值　　　　平均值的标准差最佳估计值

其中$S\left(\bar{x}\right)=\sqrt{\frac{\sum_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{k(k-1)}}$　　——平均值的标准偏差

【例题】某观察量的 n 次独立测量的结果是$x_1,x_2,\cdots,x_n$。试用方差合成公式证明平均值的标准偏差是样本标准偏差的$\frac{1}{\sqrt{n}}$，即$S(\bar{X})=\frac{S(X)}{\sqrt{n}}$。

【解】$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$，由题意知$x_i$相互独立，则根据方差合成公式有：$u(\bar{x})=\frac{\sqrt{u^2(x_1)+\cdots+u^2(x_n)}}{n}$

利用样本标准偏差的定义，可知$U\left(x_i\right)=S\left(x\right),i=1,2,\cdots,n$

故有：$u(\bar{x})=S(\bar{x})=\frac{\sqrt{S^2(x)+\cdots+S^2(x)}}{n}=\frac{\sqrt{nS^2(x)}}{n}=\frac{S(x)}{\sqrt{n}}$

三、 仪器误差限

1. **仪器误差（限）**——由国家技术标准或检定规程规定的计量器具的允许误差或允许基本误差，经过适当简化称为仪器误差限，用以代表常规使用中仪器示值和（作用在仪器上的）被测真值之间可能产生的最大误差。
2. 常用仪器的仪器误差（限）：详细参见教材 P13- P18 和教材 P60-P62
   - 长度测量仪器：游标卡尺的仪器误差限按其分度值估计；钢板尺、螺旋测微计的仪器误差限按其最小分度的$\frac{1}{2}$计算。
   - 指针式仪表：$\Delta_{仪}=\text{a}\%\cdot N_m$，式中$N_m$是电表的量程，a 是准确度等级。
   - 数字式仪表：$\Delta_{仪}=\text{a}\%\cdot N_x+b\%\cdot N_m$ 或 $\Delta_{仪}=\text{a}\%\cdot N_x+n\text{字}$，式中 a 是数字式电表的准确度等级，$N_x$是显示的读数，b 是误差的绝对项系数，$N_\text{m}$是仪表的满度值，n 代表仪器固定项误差，相当于最小量化单位的倍数。
   - 电阻箱：$\Delta_{仪}=\sum_i \text{a}_i\%\cdot R_i+R_0$，式中$R_0$是残余电阻，$R_i$是第 i 个度盘的示值，$\text{a}_i$是相应电阻度盘的准确度级别。
   - 直流电位差计：$\Delta_{仪}=\text{a}\%\left(U_x+\frac{U_0}{10}\right)$，式中 a 是电位差计的准确度级别，$U_x$是标度盘示值，$U_0$是有效量程的基准值，规定为该量程中最大的 10 的整数幂。
   - 直流电桥：$\Delta_{仪}=\text{a}\%\left(R_x+\frac{R_0}{10}\right)$，式中$R_x$是电桥标度盘示值，a 是电桥的准确度级别，$R_0$是有效量程的基准值，意义同上。

四、 不确定度

1. **不确定度**——测量结果带有的一个参数，用以表征合理赋予被测量值的分散性。

   一个完整的测量结果应该包括<u>被测量的估计</u>和<u>分散性参数</u>两部分。

   A 类不确定度——对测量数据进行统计分析而获得的不确定度分量；

   B 类不确定度——用非统计方法获得的不确定度分量；

2. 采用统计方法评定的 A 类分量（教材 P19）

$$S\left(\bar{x}\right)=\sqrt{\frac{\sum_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{k\left(k-1\right)}}=\sqrt{\frac{\overline{x^2}-\bar{x}^2}{k-1}}\text{，其中 }\overline{x^2}=\frac{\sum_i x_i^2}{k}$$

3. 采用其他方法评定的 B 类分量

   - 根据实际条件估算误差限
   - 根据理论公式或实验测定来推算误差限
   - 根据计量部门、制造厂或其他资料提供的检定结论或误差限

   通常情况下，B 类分量在许多场合以误差限 Δ_b 的形式出现，在不确定度的计算中，常常需要它的标准差 u_b 的信息，两者的关系为：$u_b=\frac{\Delta_b}{K}$。式中，K 是一个与该分量分布有关的常数，称为包含因子。

   ✓ 对于正态分布而言，$K\approx3$（误差限对应 0.9973 的置信概率）

   ✓ 对于均匀分布而言，$K=\sqrt{3}$

- 兼顾保险和教学训练的规范，人为规定：**除非另有说明，仪器误差限和近似标准差的关系在缺乏信息的情况下，按均匀分布近似处理，即 $u_b=\frac{\Delta_b}{\sqrt{3}}$。**

- 不确定度评定是以统一的观点来处理误差的，A 类和 B 类只说明不确定度评定方法有所不同，但并不是区分随机误差和系统误差的反映。把 A 类方法理解为对随机误差的处理，而把 B 类方法理解为对系统误差的处理，是不妥当的。（教材 P20）

4. 不确定度的方差合成（教材 P20-21）

   - 直接测量量的不确定度合成

不确定度的综合是以方差合成为基础的。在尽可能地削减或修正了可定系统误差后，把余下的全部误差估计按照 A、B 分类（为表示方便，此处写成向量形式）：

A 类不确定度：$u_a=\left(u_{a1},u_{a2},\cdots,u_{ai},\cdots\right)$

B 类不确定度：$u_b=\left(u_{b1},u_{b2},\cdots,u_{bj},\cdots\right)$

如果他们相互独立，则合成的不确定度由下式给出：

$$u=\sqrt{u_a\times u_a^T+u_b\times u_b^T}=\sqrt{\sum_i u_{ai}^2+\sum_j u_{bj}^2}$$

- 间接测量量的不确定度合成（此法最为常用）

设间接观测量F是n个独立输入量（直接观测量）$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，记为 $F=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，则合成不确定度 $u\left(F\right)$ 可以写成：

$$u\left(F\right)=\sqrt{\sum_i u_i^2}=\sqrt{\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2\left(x_i\right)}$$

关于上式的几点说明：

✓ $u_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}u\left(x_i\right)$，$u\left(x_i\right)$ 是输入量 x_i 的标准差，它代表 x_i 的不确定度，若它包含若干个 A、B 类分量，则 $u\left(x_i\right)$ 可先合成；

✓ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 是被测量 F 对输入量 x_i 的偏导数，称为不确定度的传播系数；

✓ 请注意 u_i 和 $u\left(x_i\right)$ 的区别：u_i 表示输出量 F 的一个不确定度分量，而 $u\left(x_i\right)$ 则是输入量 x_i 的标准不确定度。

- 一个特殊情况下的计算公式

当 $F=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 为乘除或方幂的函数关系时，采用相对不确定度可以简化合成不确定度的运算。方法是：取对数，再合成。则有：

$$\frac{u\left(F\right)}{F}=\sqrt{\sum_i\left[\frac{\partial\ln f}{\partial x_i}u\left(x_i\right)\right]^2}$$

例如，$F=Ax^p y^q z^r\cdots$（其中 A 是常数）则有：

$$\frac{u(F)}{F}=\sqrt{\left[\frac{pu(x)}{x}\right]^2+\left[\frac{qu(y)}{y}\right]^2+\left[\frac{ru(z)}{z}\right]^2+\cdots}$$

5. 最终结果表达形式：

$$X\pm u(X)=(\_\_\pm\_\_)\text{单位}$$

注意：①不确定度$u(X)$只保留一位有效数字；

②测量结果X与不确定度$u(X)$的小数位数对齐。

【例题】用分光仪测棱镜材料的折射率公式为：$n=\dfrac{\sin\frac{A+\delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$。已测得$A=60°0'\pm 2'$，黄光（汞灯光源）对应的$\delta=50°58'\pm 3'$，则黄光对应的折射率$n\pm u(n)$=____________________。

【解】依题意，有：$n=\dfrac{\sin\frac{A+\delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\dfrac{\sin\frac{60°0'+50°58'}{2}}{\sin\frac{50°58'}{2}}=1.6479$

对折射率公式取对数：$\ln n=\ln\sin\dfrac{A+\delta}{2}-\ln\sin\dfrac{A}{2}$

对上式微分：$\dfrac{dn}{n}=\dfrac{\cos\frac{A+\delta}{2}\left(\frac{1}{2}dA+\frac{1}{2}d\delta\right)}{\sin\frac{A+\delta}{2}}-\dfrac{\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2}dA}{\sin\frac{A}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(\cot\dfrac{A+\delta}{2}-\cot\dfrac{A}{2}\right)dA+\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{A+\delta}{2}d\delta$

于是有：$\dfrac{u(n)}{n}=\sqrt{\dfrac{1}{4}(\cot\dfrac{A+\delta}{2}-\cot\dfrac{A}{2})^2u^2(A)+\dfrac{1}{4}\cot^2\dfrac{A+\delta}{2}u^2(\delta)}$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}(\cot\frac{60°0'+50°58'}{2}-\cot\frac{60°0'}{2})^2(\frac{2}{60}\times\frac{180}{\pi})^2+\frac{1}{4}\cot^2\frac{60°0'+50°58'}{2}(\frac{3}{60}\times\frac{180}{\pi})^2}$$

$=0.0004$

故有，$u(n)=n\cdot\dfrac{u(n)}{n}=1.6479\times 0.000426=0.0007$

最终结果为：$n\pm u(n)=1.6479\pm 0.0007$

（更多不确定度的计算，参见教材 P70-P71，P74,P75-P76）

6. 测量结果的加权平均（教材 P328）

设进行了 n 次不等精度测量，观测量 X 的 n 次测量结果为：$x_1 \pm u(x_1)$，$x_2 \pm u(x_2)$，•••，$x_n \pm u(x_n)$，则最佳观测值 $\bar{x}$ 应由 $\frac{\partial}{\partial x}\sum_i \left(\frac{x-x_i}{u(x_i)}\right)^2 = 0$ 导出，由此可得：

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \frac{x_i}{u^2(x_i)}}{\sum_i \frac{1}{u^2(x_i)}}, \quad u(x) = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{u^2(x_i)}}$$

五、 有效数字及其运算法则

1. 由若干位可靠数字和一位可疑数字合起来就构成了测量的**有效数字**。（区别于计量学中的有效数字）
2. 测量结果第一位（最高位）非零数字前的 0，不属于有效数字，而非零数字后面的 0 都是有效数字。
3. 仪器示值有效数字的读取

   对于直接观测量，直接读取仪器示值时，规定：通常可按“估读误差”来决定数据的有效数字，即一般可读至标尺最小分度的 $\frac{1}{10}$ 或 $\frac{1}{5}$。
4. 有效数字的运算法则

- 加减法：以参加运算各量中有效数字最末一位位数最高的为准并与之对齐。

  记 $N = A + B - C - D$，则 $u(N) = \sqrt{u^2(A) + u^2(B) + u^2(C) + u^2(D)}$，因此取决于 $u(A)$、$u(B)$、$u(C)$、$u(D)$ 中位数最高者，最后结果与之对齐。

  [例] $N = 5472.3 + 0.8 + 1214 + 7.3 = 6694$（结果与 1214 对齐）

- 乘除法：以参加运算各量中有效数字最少的为准，结果的有效数字个数与该量相同。

  记 $N = \frac{A \cdot B \cdot C}{D}$，则 $\frac{u(N)}{N} = \sqrt{\left[\frac{u(A)}{A}\right]^2 + \left[\frac{u(B)}{B}\right]^2 + \left[\frac{u(C)}{C}\right]^2 + \left[\frac{u(D)}{D}\right]^2}$，因此取决于其中相对不确定度最大者，即有效数字个数最少者。

  [例] $N = \frac{80.5 \times 0.0014 \times 3.08326}{764.9} = 0.00045$（结果与 0.0014 对齐）

- 混合四则运算：按照前述原则，按部就班进行运算，并获得最后结果。

  ［例］ $N = \frac{A}{B - C} + D = \frac{7.032}{5.709 - 5.702} + 31.54 = 1005 + 31.54 = 1 \times 10^3$

- 特殊函数的有效数字：根据不确定度决定有效数字的原则，在自变量有效数字末位设置一个单位的不确定度，通过微分关系作传播处理。

  具体做法为：先在直接观测量的最后一位有效数字位上取 1 个单位作为测量值的不确定度，再用函数的微分公式求出简介量不确定度所在的位置，最后由它确定有效数字的位数。

  ［例］ $y = \sqrt[20]{3.25} =$ ________，其中 20 是准确数字。

  ［解］记 $x = 3.25$，$n = 20$，则原式：$y = x^{\frac{1}{n}} = 3.25^{\frac{1}{20}} = 1.060739$

取 $\Delta x = 0.01$，则有：$\Delta y = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta x}{x}\cdot y = \frac{1}{20}\times\frac{0.01}{3.25}\times 3.25^{\frac{1}{20}} = 1.63\times10^{-4}$

说明 Δy 的可疑数字发生在小数点后第 4 位，故：$y = 1.0607$，有 5 位有效数字。

5. 补充例题

【例 1】某物理量的计算公式为 $Y = \dfrac{\mathrm{k}}{1+1.6\dfrac{d}{H}}$，其中 k 为常数，1.6 为准确数，$H \approx 16cm$，$d = 0.1500cm$。若使 Y 的表示式中分母的值具有 4 位有效数字，正确测 H 的方法是（ D ）。

A. 用游标卡尺估读到 cm 千分位　　B. 用米尺估读到 cm 百分位

C. 用米尺只读到 mm 位　　D. 用米尺只读到 cm 位

【解】$\frac{1.6d}{H} \approx \frac{1.6\times0.1500}{16} = 0.015$，分母 $1+\frac{1.6d}{H} \approx 1.015$ 为 4 位有效数字，即 H 只需 2 位有效数字即可，故应选 D

【例 2】$\tan 45^{o}2' = 1.00116423$ 最多可以有几位有效数字？

【解】令 $y = \tan x$，其中 $x = 45^{\circ}2'$，取 $\Delta x = 1' = \frac{1}{60}\cdot\frac{\pi}{180} = 0.00029$（rad）

则 $\Delta y = \frac{1}{\cos^2 x}\Delta x = \frac{1}{\cos^2 45^{\circ}2'}\times0.00029 = 0.00058$

即小数点后第 4 位产生误差

$\therefore \tan 45^{\circ}2' = 1.$，有 **5** 位有效数字。

【例 3】双棱镜测波长的计算公式为 $\lambda = \dfrac{\Delta x\sqrt{bb'}}{S+S'}$，对实验数据进行处理的计算结果如下表所示。

x=0.28144mm	b=5.9325mm	b’=0.7855mm	S=27.65cm	S’=75.90cm
u(x)=2.010×10^{-4}mm	(b)/b=0.025	(b’)/b’=0.025	(S) =0.5cm	(S’) =0.5cm
	(b)=0.005mm	(b’)=0.005mm	(S) =0.05cm	(S’) =0.05cm

注：下标 1 代表来自方法误差，下标 2 代表来自仪器误差。
要求：（1）给出测量结果的正确表述（包括必要的计算公式）。

（2）定量讨论各不确定度的分量中，哪些是主要的，哪些是次要的，哪些是可以忽略的？如果略去次要因素和可以忽略项的贡献，不确定度的计算将怎样简化？结果如何？

【解】（1） $\lambda=\dfrac{\Delta x\sqrt{bb'}}{S+S'}=\dfrac{0.28144\times\sqrt{5.9325\times0.7855}}{(276.5+759.0)}=5.86716\times10^{-4}\,\mathrm{mm}$

$\ln\lambda=\ln\Delta x+\dfrac{1}{2}\ln b+\dfrac{1}{2}\ln b'-\ln(S+S')$， $\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}=\dfrac{\mathrm{d}(\Delta x)}{\Delta x}+\dfrac{\mathrm{d}b}{2b}+\dfrac{\mathrm{d}b'}{2b'}-\dfrac{\mathrm{d}S}{S+S'}-\dfrac{\mathrm{d}S'}{S+S'}$

$$\frac{u(\lambda)}{\lambda}=\sqrt{\left[\frac{u(\Delta x)}{\Delta x}\right]^2+\left[\frac{u(b)}{2b}\right]^2+\left[\frac{u(b')}{2b'}\right]^2+\left[\frac{u(S)}{S+S'}\right]^2+\left[\frac{u(S')}{S+S'}\right]^2}=0.0111$$

其中 $\dfrac{u(\Delta x)}{\Delta x}=\dfrac{2.010\times10^{-4}}{0.28144}=0.000714$；

$$\begin{cases}\dfrac{u_1(b)}{2b}=\dfrac{\Delta_1(b)/\sqrt{3}}{2b}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\Delta_1(b)}{b}=\dfrac{0.025}{2\sqrt{3}}=0.00722\\ \dfrac{u_2(b)}{2b}=\dfrac{\Delta_2(b)/\sqrt{3}}{2b}=\dfrac{0.005}{2\times5.9325\sqrt{3}}=0.000243\end{cases}\to\left[\frac{u(b)}{2b}\right]^2=\left[\frac{u_1(b)}{2b}\right]^2+\left[\frac{u_2(b)}{2b}\right]^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{u_1(b')}{2b'}=\dfrac{\Delta_1(b')/\sqrt{3}}{2b'}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\Delta_1(b')}{b'}=\dfrac{0.025}{2\sqrt{3}}=0.00722\\ \dfrac{u_2(b')}{2b'}=\dfrac{\Delta_2(b')/\sqrt{3}}{2b'}=\dfrac{0.005}{2\times0.7855\sqrt{3}}=0.00184\end{cases}\to\left[\frac{u(b')}{2b'}\right]^2=\left[\frac{u_1(b')}{2b'}\right]^2+\left[\frac{u_2(b')}{2b'}\right]^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{u_1(S)}{S+S'}=\dfrac{\Delta_1(S)/\sqrt{3}}{S+S'}=\dfrac{0.5}{(27.65+75.90)\sqrt{3}}=0.00279\\ \dfrac{u_2(S)}{S+S'}=\dfrac{\Delta_2(S)/\sqrt{3}}{S+S'}=\dfrac{0.05}{(27.65+75.90)\sqrt{3}}=0.000279\end{cases}\to\left[\frac{u(S)}{S+S'}\right]^2=\left[\frac{u_1(S)}{S+S'}\right]^2+\left[\frac{u_2(S)}{S+S'}\right]^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{u_1(S')}{S+S'}=\dfrac{\Delta_1(S')/\sqrt{3}}{S+S'}=\dfrac{0.5}{(27.65+75.90)\sqrt{3}}=0.00279\\ \dfrac{u_2(S')}{S+S'}=\dfrac{\Delta_2(S')/\sqrt{3}}{S+S'}=\dfrac{0.05}{(27.65+75.90)\sqrt{3}}=0.000279\end{cases}\to\left[\frac{u(S')}{S+S'}\right]^2=\left[\frac{u_1(S')}{S+S'}\right]^2+\left[\frac{u_2(S')}{S+S'}\right]^2$$

于是得：$u(\lambda)=\lambda\cdot\dfrac{u(\lambda)}{\lambda}=5.86716\times10^{-4}\times0.0111=6.53\times10^{-6}\,mm$

即：$\lambda\pm u(\lambda)=(587\pm7)\,nm$

（2）由前面的计算可知，不确定度主要来自 $\dfrac{u_1(b)}{2b}$ 和 $\dfrac{u_1(b')}{2b'}$，次要因素是 $\dfrac{u_1(S)}{S+S'}$、$\dfrac{u_1(S)}{S+S'}$ 和 $\dfrac{u_1(S')}{S+S'}$，可以忽略的因素是 $\dfrac{u(\Delta x)}{\Delta x}$、$\dfrac{u_2(b)}{2b}$、$\dfrac{u_2(S)}{S+S'}$ 和 $\dfrac{u_2(S')}{S+S'}$。

若只考虑主要项的贡献：$\dfrac{u(\lambda)}{\lambda}=\sqrt{\left[\dfrac{u_1(b)}{2b}\right]^2+\left[\dfrac{u_1(b')}{2b'}\right]^2}=\dfrac{\Delta_1(b)}{\sqrt{6}b}=0.0102$

则：$u(\lambda)=6nm$，因此$\lambda \pm u(\lambda)=(587\pm 6)nm$，比严格计算结果稍小但相差无几

六、 实验数据的基本处理方法

1. **列表法**：按照一定规律把数据列成表格。

   列表原则：

   - 表格的标题栏中注明物理量的名称、符号和单位；
   - 记录原始数据（如记录刻度数，而不是记录长度）；
   - 简单处理结果（如算出长度）或函数关系；
   - 参数和说明（如表格名称、仪器规格、环境参数、常量以及公用单位等）。

2. **作图法**：把实验数据用自变量和因变量的关系作成曲线，以便反映它们之间的变化规律或函数关系。

   作图要点：

   - 原始数据列表表示——见列表法；
   - 用**坐标纸**作图，图纸大小以不损失有效数字和能包括所有点为最低要求，因此**至少应保证坐标纸的最小分格（通常为 1mm）以下的估计位与实验数据中最后一位数字对应**；
   - 选好坐标轴并标明有关物理量的名称（或符号）、单位和坐标分度值。其中分度比例一般取 1、2、5、10……较好，以便于换算和描点；
   - 实验数据点以 +、×、□、⊙、△等符号标出，一般不用细圆点“·”标示实验点；光滑连接曲线并使实验点匀称地分布于曲线两侧（起平均的作用）；

     （注意：光滑处理的原则不适用于绘制校准曲线！）
   - 图解法求直线斜率和截距时，应在线上取点（不能使用实验点）；所取两点要相距足够远（以提高精度）；在图上要注明所取点的坐标。

3. **一元线性回归法**（见后）

4. **逐差法**（见后）

七、 最小二乘法与一元线性回归（教材 P48-P50）

1. 最小二乘法的判据：**对等精密度测量若存在一条最佳的拟合曲线，那么各测量值与这条曲线上对应点之差（残差）的平方和应取极小值。**
2. 采用最小二乘法来处理直线拟合（或可化为直线拟合）问题，要求只有因变量 y 有误差，自变量 x 作为准确值处理（实际上，只要 x 的测量误差远小于 y 的测量误差即可）
3. 一元线性回归

设直线的函数形式为：$y=a+bx$

实验测得的数据为：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_k,y_k)$

则有：$\begin{cases} b=\dfrac{\sum x_i\sum y_i-k\sum x_iy_i}{(\sum x_i)^2-k\sum x_i^2}=\dfrac{\overline{x}\cdot\overline{y}-\overline{xy}}{\overline{x}^2-\overline{x^2}} \\ a=\dfrac{\sum x_iy_i\sum x_i-\sum y_iy_{x_i^2}}{(\sum x_i)^2-k\sum x_i^2}=\overline{y}-b\overline{x} \end{cases}$ ，这里 a、b 称为回归系数

其中：$\overline{x}=\dfrac{1}{k}\sum_i x_i,\overline{y}=\dfrac{1}{k}\sum_i y_i,\overline{x^2}=\dfrac{1}{k}\sum_i x_i^2,\overline{xy}=\dfrac{1}{k}\sum_i x_i\cdot y_i$

- 相关系数 r：用于检验 x 和 y 之间是否存在线性关系。$r=\dfrac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2}-\overline{x}^2)(\overline{y^2}-\overline{y}^2)}}$，其物理意义如下：

  $|r|=1$，$y=a+bx$ 通过全部实验点

  $|r|\approx1$，x_i,y_i 之间线性关系相当强烈

  $r>0$，y_i 随 x_i 增加而增加

  $r<0$，y_i 随 x_i 增加而减小

  $r\approx0$，x_i,y_i 之间无线性关系$\Longrightarrow$拟合直线为与 x 轴平行的直线

- y_i 的不确定度估计

  y_i 为等精度测量，所有的 y_i 应有相同的标准差 $\sigma(y)$，若 $\sigma(y)$ 未知，可用 y 的标准差 $S(y)$ 作为其估计值：

$$S(y)=\sqrt{\frac{\sum_i\left[y_i-(a+bx_i)\right]^2}{k-2}}$$

- 回归系数的不确定度估计

  a、b 的标准差（A 类不确定度）由下式给出：

$$\begin{cases} u_a(a)=s(a)=s(y)\sqrt{\dfrac{\sum_i x_i^2}{k\sum_i x_i^2-\left(\sum_i x_i\right)^2}}=s(y)\sqrt{\dfrac{\overline{x^2}}{k\left(\overline{x^2}-\bar{x}^2\right)}} \\ u_a(b)=s(b)=s(y)\sqrt{\dfrac{k}{k\sum_i x_i^2-\left(\sum_i x_i\right)^2}}=s(y)\sqrt{\dfrac{1}{k\left(\overline{x^2}-\bar{x}^2\right)}} \end{cases}$$

  若回归系数和相关系数已经算出，则 a、b 的标准差还可由下式给出：

$$\begin{cases} u_a(a)=s(a)=\sqrt{\overline{x^2}}\cdot u_a(b) \\ u_a(b)=s(b)=b\sqrt{\dfrac{1}{k-2}\left(\dfrac{1}{r^2}-1\right)} \end{cases}$$

4. 回归法使用要点：
   - 自变量 x 测量误差可略，即应选择测量精度较高的物理量作自变量；
   - 因变量 y 为等精度测量或近似等精度测量，即 u(yi)近似相等；
   - 作线性关系的检验：利用物理规律或作图等其它方法确认线性关系的存在；或检验相关系数是否满足|r|≈1。

八、 逐差法

设自变量和因变量之间存在线性关系：$y=a+bx$

已测得一组相关实验数据：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_k,y_k)$

1. 测量次数为偶数的逐差法

不妨取$k=2n$，把数据分组，用“；”隔开：

$$\begin{cases} x_1,\cdots,x_n \\ x_{n+1},\cdots x_{2n} \end{cases};\quad \begin{cases} y_1,\cdots,y_k \\ y_{n+1},\cdots y_{2n} \end{cases}$$

用每组下面一排的测量值和该组上面一排的测量值对应相减（隔 n 项逐差），并利用 $y=a+bx$ 得到：

$$b_1=\frac{y_{n+1}-y_1}{x_{n+1}-x_1},\cdots,b_n=\frac{y_{2n}-y_n}{x_{2n}-x_n}$$

取平均值 $\bar{b}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{n+i}-y_i}{x_{n+i}-x_i}$

对于自变量 x 等间隔分布的情况，有：$x_{n+i}-x_i=\Delta_n x$

于是 $\bar{b}=\frac{1}{n\Delta_n x}\sum_{i=1}^{n}(y_{n+i}-y_i)$

求出 $\bar{b}$ 后，可由公式 $\sum y_i=a+b\sum x_i$，求出 $\bar{a}=\frac{1}{k}\left(\sum y_i-\bar{b}\sum x_i\right)$

$\bar{b}$ 的 A 类不确定度在等精密度测量条件下的标准差估计式为：$u_a(b)=s(b)=\sqrt{\frac{\sum_i\left(b_i-\bar{b}\right)^2}{n(n-1)}}$

2. 测量次数为奇数的逐差法——处理原则：**去掉中间的数据**

设$k=2n-1$，则有：$b_i=\frac{y_{n+i}-y_i}{x_{n+i}-x_i}$，其中$i=1,2,\cdots,n-1$

$$\bar{b}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{y_{n+i}-y_i}{x_{n+i}-x_i},\qquad u_a(b)=s(\bar{b})=\sqrt{\frac{\sum_i\left(b_i-\bar{b}\right)^2}{(n-1)(n-2)}}$$

3. 逐差法说明

- 逐差法多用在自变量等间隔测量且其测量误差可略去的情况，这样可简化计算。

- 使用逐差法要隔项进行，不应逐项逐差，后者一方面使测量精度降低，另一方面不能均匀使用实验数据。

九、 练习题

1． $Y=\sqrt{1+\sin 30°}$ 有___4___位有效数字（根式中的 1 是常数）。

2．按有效数字运算法则，应有 a=423.4m÷0.10s^2=__4.2×10^3 m/s^2__；

$y=\dfrac{17600}{20.00-4.0}=$__1.10×10^3__。

3．已知 $Y=\dfrac{4\pi}{6+2\dfrac{r}{h}}$，观测量 h=10.0cm，r=0.40cm，其余为常数。运算中至少应取__3.1416__。

4．已知 C=2$abLR$(a−b)，则相对不确定度的计算公式为:

$$\frac{u(C)}{C}=\sqrt{\left[\frac{(2a-b)u(a)}{a(a-b)}\right]^2+\left[\frac{(a-2b)u(b)}{b(a-b)}\right]^2+\left[\frac{u(L)}{L}\right]^2+\left[\frac{u(R)}{R}\right]^2}$$

5．用 mm 分度的米尺测量某长度 L 的结果为 9.30cm,9.30cm,9.35cm,9.28cm,9.22cm，其测量结果应写成__9.29±0.04 cm__。

6.1.0 级的磁电式电流表的量程为 15mA，读数为 1.00mA，则其标准不确定度应写成__0.09 mA__。

四位半数字电压表的仪器误差限 V=0.05%V_x+3 字，读数为 1.0005V，则其标准不确定度应写成__0.0005V__。