第3章 动量变化定理与动量守恒

§3-1. 冲量与动量定理

§3-2.动量守恒定理

§3-3.“变质量”问题

本章：力对时间的累积作用与物体运动量的变化

§3-1.冲量与动量

一. 冲量的定义

元冲量: $d\vec{I} = \vec{f}dt$

总冲量: $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}dt$

若 $\vec{f}$ 为恒力:

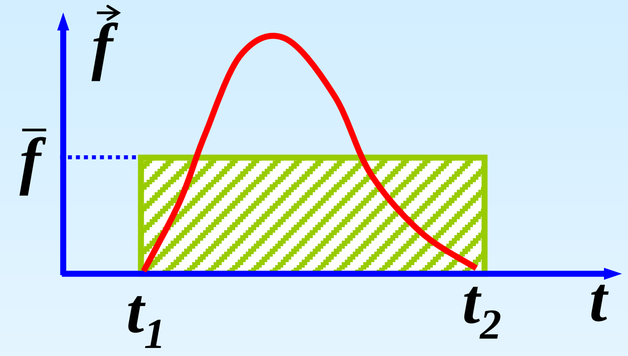
$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}dt = \vec{f}(t_2 - t_1)$ $\vec{I}$ 与 $\vec{f}$ 方向相同

- 矢量, 过程量; 与参考系无关.

二. 平均力

碰撞、爆炸过程中，冲力变化复杂，常引入平均力：

$$\overline{\vec{f}}(t_2-t_1)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}\,dt$$



- $t_2 - t_1$内，平均力的冲量等于变力的冲量.

三. 质点的动量定理

$$\vec{F}_{合}=\frac{d\ (m\vec{v})}{dt} \qquad \vec{F}_{合}dt=d(m\vec{v}) \qquad d\vec{I}=d(m\vec{v})$$

定义质点的动量为 $\boxed{\vec{P}=m\vec{v}}$

动量定理: $\boxed{d\vec{I}=\vec{F}_{合}\,dt=d\vec{P}}$ $\quad \vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{合}\,dt=\Delta\vec{P}$

质点动量的改变量等于它所受合外力的冲量

- 矢量!; 适用于惯性系.
- 动量与参考系选择有关, 但冲量、动量的增量与惯性系的选取无关.
- 要求物理量在同一惯性参照系中。

四. 直角坐标系质点动量定理的表示

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{合}\, dt = \Delta\vec{P}$$ 沿三个坐标轴分解

得

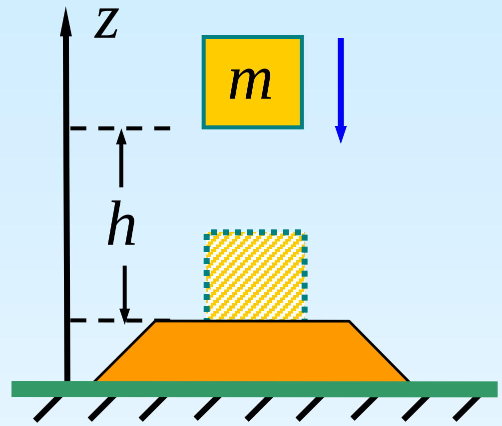
$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = P_{x_2} - P_{x_1}$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = P_{y_2} - P_{y_1}$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = P_{z_2} - P_{z_1}$$

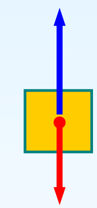
质点所受合外力的冲量在某一方向上的分量，等于质点的动量在该方向的分量的增量。

例1: 一锤从1.5m高处静止下落,与工件碰撞后末速为零.
若Δt分别为10^{-1},10^{-2},10^{-3}, 10^{-4}秒,求平均冲击力与重力的比值.



解: 碰撞前后有$\upsilon_0=-\sqrt{2gh}$; $\upsilon=0$

$$\int_{t_0}^{t}(N-mg)dt=0-m\upsilon_0=m\sqrt{2gh}$$

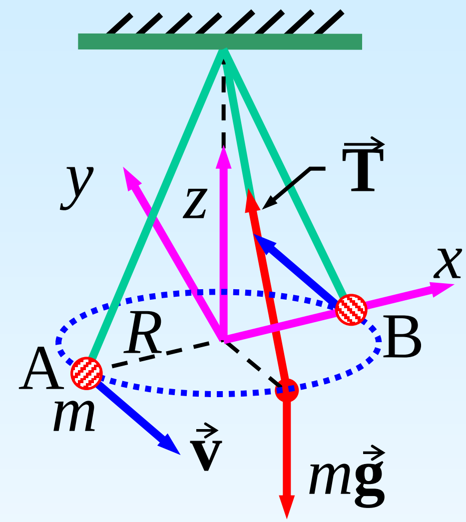


$$\therefore \quad (\overline{N}-mg)\Delta t=m\sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{N}}{mg}=1+\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1}{\Delta t}=1+\frac{0.55}{\Delta t}$$ ⇒ 缓冲作用

Δt	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\overline{N}/mg$	6.5	56	5.5×10^2	5.5×10^3

例2: 如图, m绕Z轴作圆周运动, 求从 A到B时张力T 对m的冲量.



解: $\vec{I}_T + \vec{I}_G = \Delta\vec{P};$

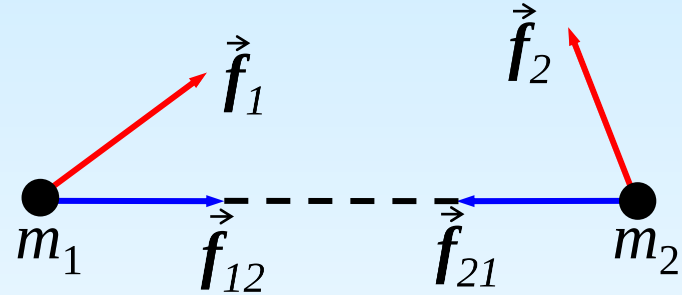
$$\Delta\vec{P} = 2m\upsilon\vec{j}$$

$$\vec{I}_G = m\vec{g}\,\frac{\pi R}{\upsilon} = -\frac{\pi Rmg}{\upsilon}\vec{k}$$

$$\vec{I}_T = \Delta\vec{P} - \vec{I}_G = 2m\upsilon\vec{j} + \frac{\pi Rmg}{\upsilon}\vec{k}$$

四. 质点系的动量定理

如图, $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ 为外力, $\vec{f}_{12}, \vec{f}_{21}$ 为一对内力.



$$\left(\vec{f}_1 + \vec{f}_{12}\right)dt = d\vec{P}_1$$

$$\left(\vec{f}_2 + \vec{f}_{21}\right)dt = d\vec{P}_2$$

$$d\vec{I}_{外} = \vec{f}_1 dt + \vec{f}_2 dt$$

$$d\vec{I}_{内} = \vec{f}_{12} dt + \vec{f}_{21} dt = 0$$

若定义质点系动量: $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ 推广: $\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i$

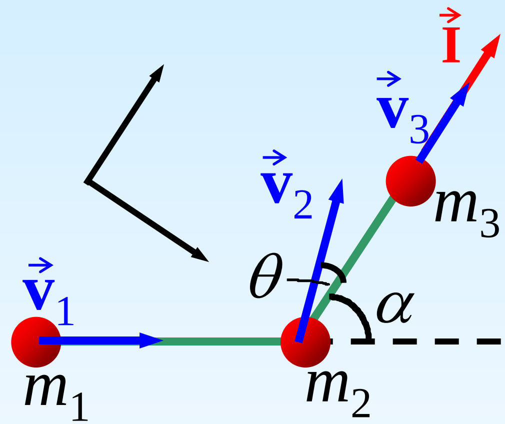
$\Rightarrow$ 质点系动量定理: $\boxed{d\vec{I}_{外} = d\vec{P}}$ 或 $\boxed{\vec{I}_{外} = \Delta\vec{P}}$

某过程中质点系动量的增量等于该质点系所受合外力的冲量.

$$\boxed{d\vec{I}_{外} = d\vec{P}} \quad 或 \quad \boxed{\vec{I}_{外} = \Delta\vec{P}}$$

- 适用于惯性系，矢量公式.
- 内、外力取决于所选研究对象 ⇒ 可避开内力
- 内力的冲量≡ 0, <u>内力不能改变质点系的动量</u>.
- 只有外力能改变质点系的动量. $\vec{I}_{外}$是合外力的冲量. <u>合外力的冲量就等于外力冲量之和.</u>

例: 如图, 光滑水平面上的三个质点用不可伸长的柔软轻绳相连并拉直, 沿BC方向的冲量作用于m_3. 求m_1开始运动时的速度.



解: m_1, m_2, m_3系统, 由动量定理:

$$I = m_1 \upsilon_1 \cos\alpha + m_2 \upsilon_2 \cos\theta + m_3 \upsilon_3$$

$$0 = m_1 \upsilon_1 \sin\alpha - m_2 \upsilon_2 \sin\theta$$

由绳子不可伸长有:

$$\upsilon_2 \cos\theta = \upsilon_3$$

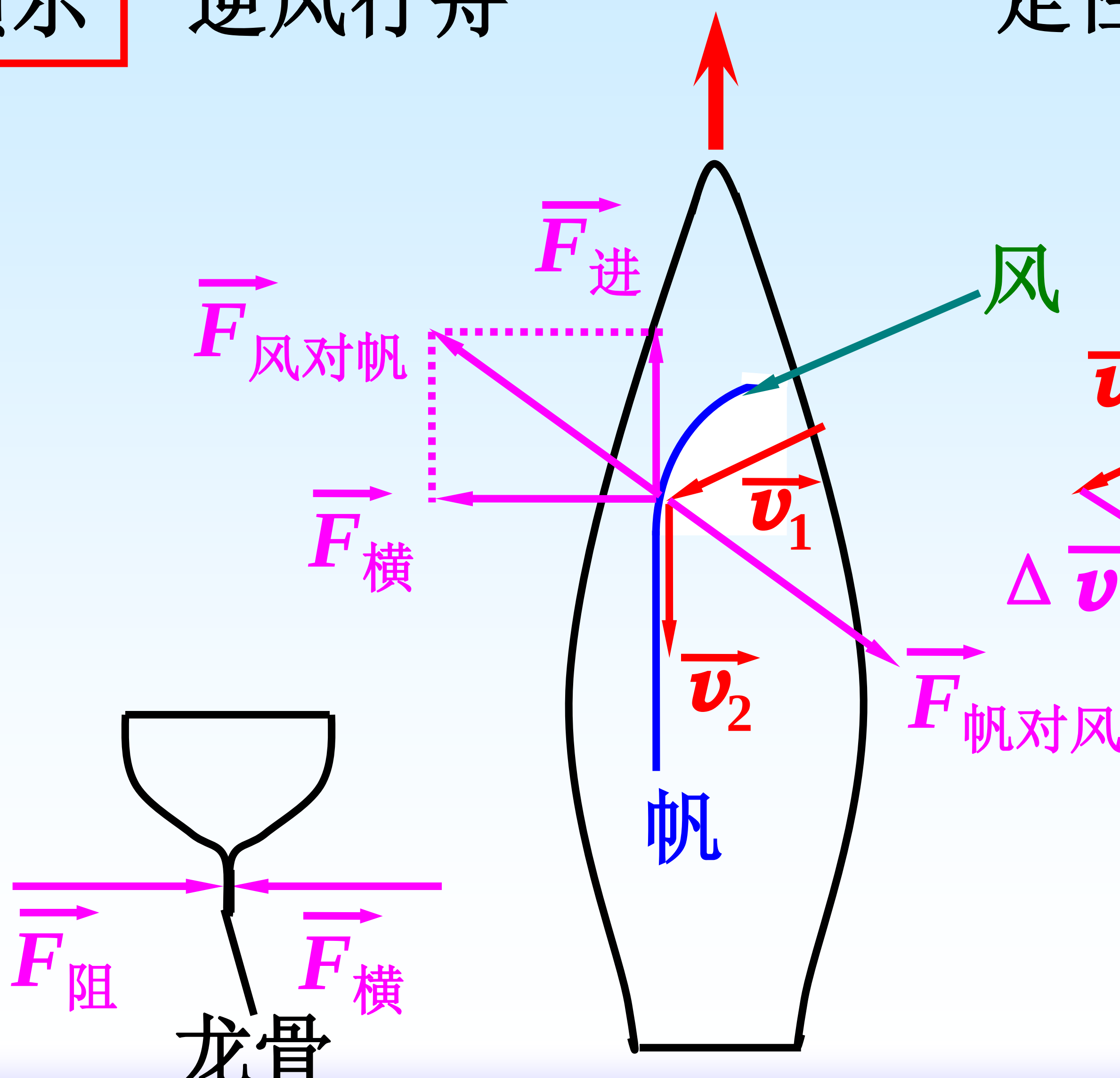
$$\upsilon_2 \cos(\theta + \alpha) = \upsilon_1$$

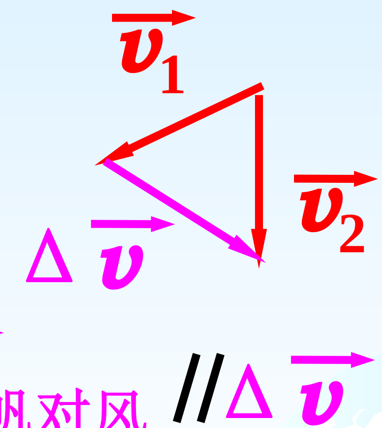
联立解得: $$\upsilon_1 = \frac{I m_2 \cos\alpha}{m_2(m_1 + m_2 + m_3) + m_1 m_3 \sin^2\alpha}$$

演示 逆风行舟

定性分析

设只改变风向





例: 如图，试解释逆风行舟原理.

解：取dt内吹来的空气质量dm为研究对象。设帆面光滑，dm与帆作用后，方向改变，速率不变$v_1=v_2$

由动量定理有

$$\vec{F}_{帆对风}dt=\vec{p}_2-\vec{p}_1=(dm)(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$$

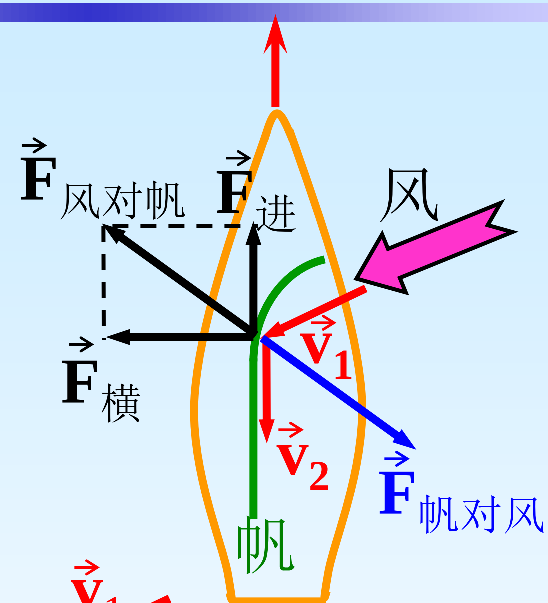
$\vec{F}_{帆对风}$沿 方向指向右下方。

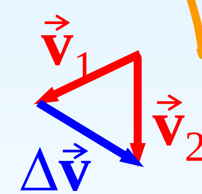
“牛三” $\Rightarrow \vec{F}_{风对帆}$ 指向左上方

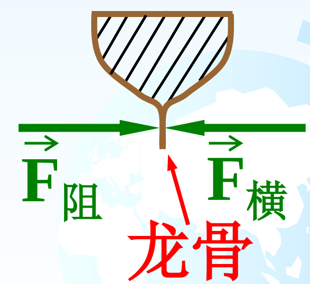
且可分解为$\vec{F}_{进}$和$\vec{F}_{横}$

$\vec{F}_{横}$被船的侧向阻力平衡，

推动船向前航行。







§3-2. 动量守恒定理

若系统在任意微过程中有 $d\vec{I}_{外}=0$

则变化过程中系统的总动量P守恒

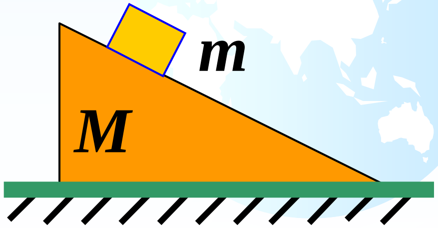
$$\boxed{\vec{P}=\sum\vec{P}_i=常量}$$

系统动量守恒的条件:

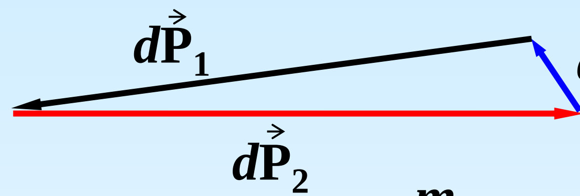
$$d\vec{I}_{外}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sum\vec{F}_{外}\equiv 0}$$

不受外力或外力矢量和为零的系统中动量守恒.

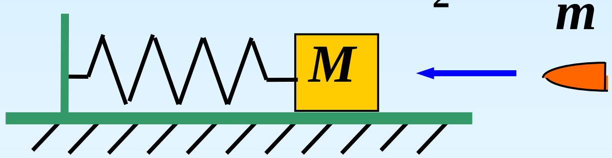
- 若在某惯性系中守恒，则在所有惯性系中均守恒
- 系统在某方向上动量分量守恒的条件: $\boxed{\sum\vec{F}_{外}\cdot\vec{l}\equiv 0}$

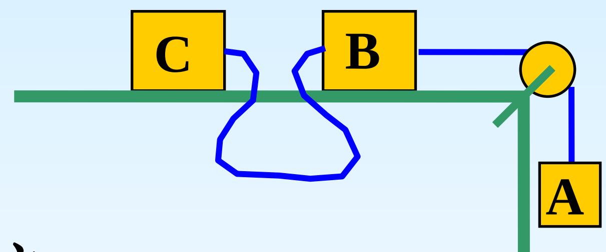


- 系统动量近似守恒的条件： 内力 >> 外力



$$d\vec{P} = d\vec{P}_1 + d\vec{P}_2 \approx 0$$





- 动量守恒与牛顿定律比较：

  a) 方便，不需知道系统内部作用详情

  b) 普适性强，对高速/微观粒子也适用

$$^{14}_{6}C \xrightarrow{\beta\text{衰变}} {}^{14}_{7}N + e + \bar{\nu}_e$$

动量守恒定律

（law of conservation of momentum）

质点系所受合外力为零时，质点系的总动量不随时间改变。

即 $\boxed{\vec{F}_{外}=0\text{ 时，}\vec{P}=\text{常矢量}}$

几点说明：

1.动量守恒定律是牛顿第三定律的必然推论。

2.动量定理及动量守恒定律只适用于惯性系。

3. 动量若在某一惯性系中守恒，则在其它一切惯性系中均守恒。

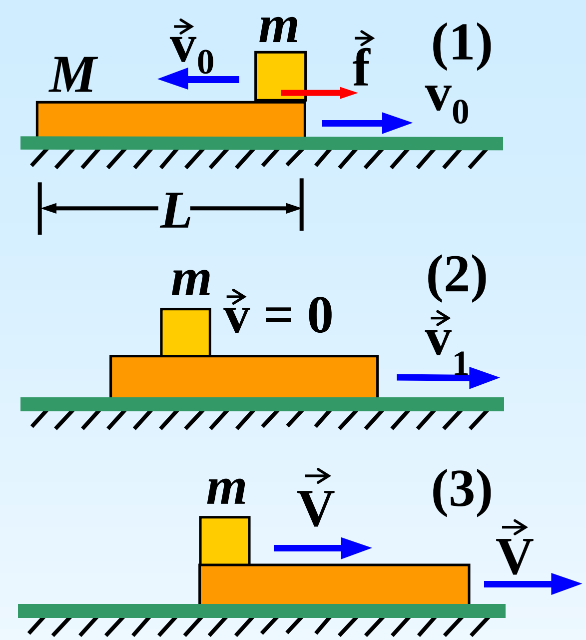
4.若某个方向上合外力为零，则该方向上动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。

5.当外力<<内力,且作用时间极短时（如碰撞），可认为动量近似守恒。

6.动量守恒定律是比牛顿定律更普遍、更基本的定律，它在宏观、微观和高速领域均适用。

7.用守恒定律作题，应注意分析 过程、系统和条件。

例： 如图, $m < M$, 地面光滑, m 运动到M左端时，相对M的速度为零.求对地面参考系, m 向左运动离出发点的最远距离S.



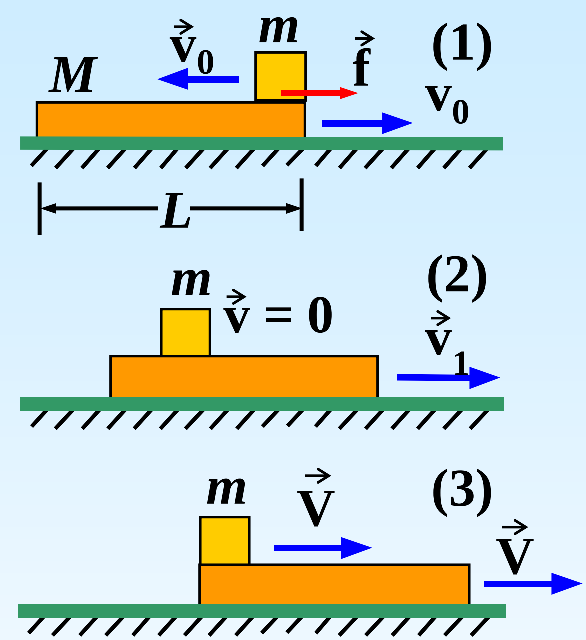
分析： 从地面看,可分为两个阶段

$(1) \rightarrow (2)$：

m向左直到相对地面静止

$(2) \rightarrow (3)$:

然后m向右直到和M速度相同, (3)时m对M静止



解： 对m, M系统, 动量守恒

$$M\upsilon_0 - m\upsilon_0 = (M+m)V$$

(1) → (2) 过程：对m用动能定理

$$-fS = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$$

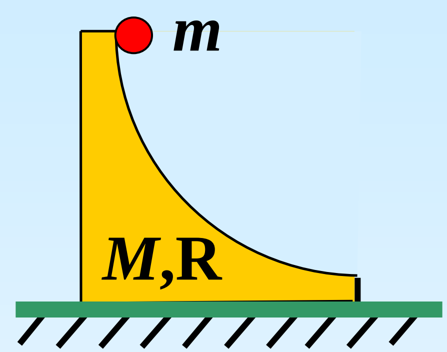
(1) → (3) 过程：

对m、M系统用能量转换/守恒定律

$$-fL = \frac{1}{2}(M+m)V^2 - \frac{1}{2}(M+m)\upsilon_0^2$$

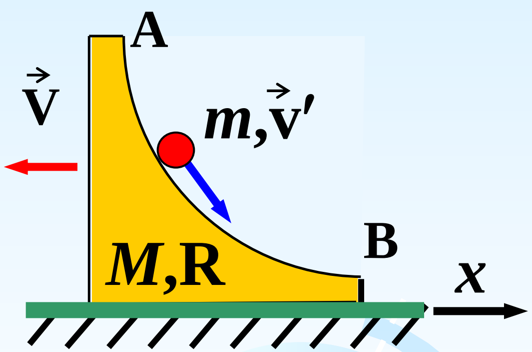
联立解得: $S = L\dfrac{M+m}{4M}$

例： 如图, 处处光滑, m, M原先静止, m从顶部下滑直到m, M脱离, 求M在地面上滑行的距离S.



解： 设任一时刻m对M的速度为$\vec{v}'$

M对地速度为$\vec{V}$, 方向如图.



对m, M系统,动量水平分量守恒:

$$m(\upsilon'_x - V) - MV = 0$$

$$V = \frac{m}{m+M}\upsilon'_x$$

$$\int_A^B V dt = \frac{m}{m+M}\int_A^B \upsilon'_x dt \quad \Rightarrow \quad S = \frac{m}{m+M}R$$

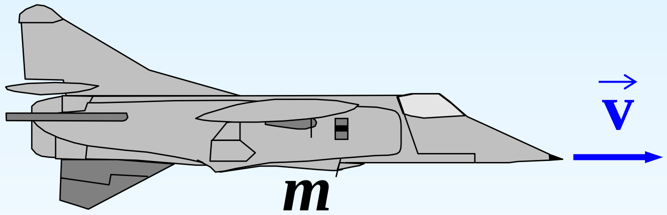
§3-3.“变质量”问题

一.“变质量”问题

牛顿力学：质量与运动状态无关。“变质量”？

因为选取系统时的方法特殊而造成的

例: 喷气式飞行器的推力.



设t 时刻质量为m,速度为$\vec{v}$,

dt内：吸进 dm_1 (对地静止)

喷出 dm_2 (对飞行器速度$\vec{u}'$)

dt后：$m \to m + dm$; $(dm = dm_1 - dm_2)$

$$\vec{v} \to \vec{v} + d\vec{v}$$

对m、dm_1系统(或: $m+dm$、dm_2系统)由动量定理有

$$\vec{F}_{外}dt=\left[(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})+dm_2(\vec{v}+d\vec{v}+\vec{u}')\right]-m\vec{v}$$

$$=md\vec{v}+(\vec{v}+d\vec{v})dm_1+\vec{u}'dm_2$$

$$\vec{F}_{外}+\underbrace{\left[-(\vec{v}+d\vec{v})\frac{dm_1}{dt}-\vec{u}'\frac{dm_2}{dt}\right]}_{推力!}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

特例:火箭 $dm_1=0,\qquad dm=-dm_2$

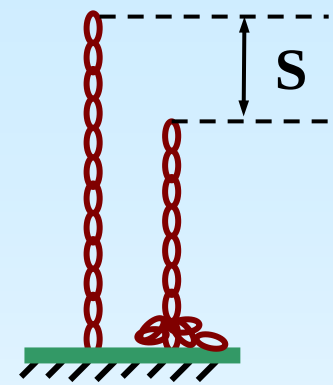
减质量密舍尔斯基方程: $\boxed{\vec{F}_{外}+\vec{u}'\frac{dm}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}}$

若$\vec{F}_{外}$可略, 则有 $u'dm=mdv$

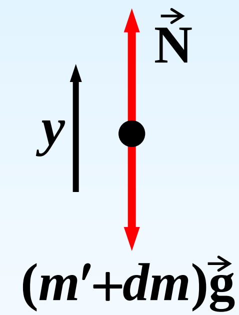
$$u'\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}=\int_{v_0}^{v}dv\,,$$

$$\boxed{v=v_0+u'\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)}$$

例: 如图, 绳细软且不可伸长, m , l 已知, 初态静止, 求绳子落下S时地面所受压力.



解: 取已落地的绳子(质量为m')和在dt时间内即将落地的绳子(质量为dm)为研究对象, y轴向上, 由动量定理，有



$$\left[N-\left(m'+dm\right)g\right]dt=0-\left(-dm\sqrt{2gS}\right)$$

$$m'=m\frac{S}{l},\qquad dm=\frac{m}{l}\upsilon dt=\frac{m}{l}\sqrt{2gS}dt$$

解得 $$N=\frac{3mgS}{l},\qquad \vec{N}'=-\vec{N}$$