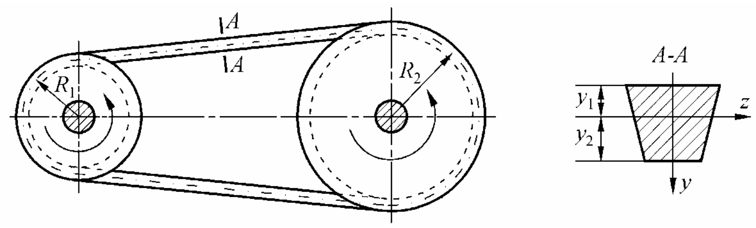
第六章 弯曲应力

题号 页码
6-3 1
6-7 2
6-10 3
6-13 4
6-14 6
6-17 7
6-18 9
6-19 10
6-21 11
6-23 13
6-26 15
6-28 16
6-31 17
6-33 18
6-34 19
6-36 20
6-38 22
6-40 22

(也可用左侧题号书签直接查找题目与解)

6-3 图示带传动装置，胶带的横截面为梯形，截面形心至上、下边缘的距离分别为 y_1 与 y_2，材料的弹性模量为 E。试求胶带内的最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力。



题 6-3 图

解：由题图可见，胶带中性层的最小曲率半径为

$$\rho_{\min} = R_1$$

依据

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}$$

可得胶带内的最大弯曲拉应力和最大弯曲压应力分别为

$$\sigma_{\mathrm{t,max}} = \frac{Ey_1}{R_1}$$

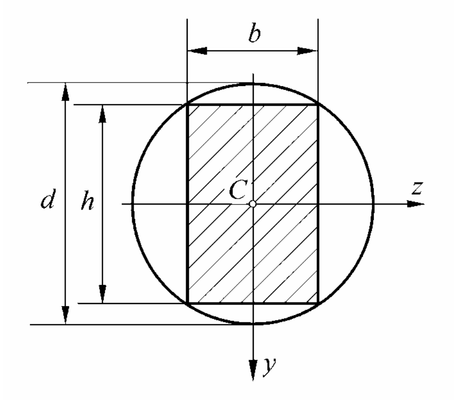
和

$$\sigma_{\mathrm{c,max}} = \frac{Ey_2}{R_1}$$

6-7 图示直径为 d 的圆木，现需从中切取一矩形截面梁。试问：

(1) 如欲使所切矩形梁的弯曲强度最高，h 和 b 应分别为何值；

(2) 如欲使所切矩形梁的弯曲刚度最高，h 和 b 又应分别为何值。



题 6-7 图

解：(1) 为使弯曲强度最高，应使 W_z 取最大值。

由

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b}{6}(d^2 - b^2)$$

得

$$\frac{\mathrm{d}W_z}{\mathrm{d}b} = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0$$

由此可得

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3}d，\ h = \sqrt{d^2 - b^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}d$$

(2) 为使弯曲刚度最高，应使 I_z 取最大值。

由

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12}\sqrt{d^2 - h^2}$$

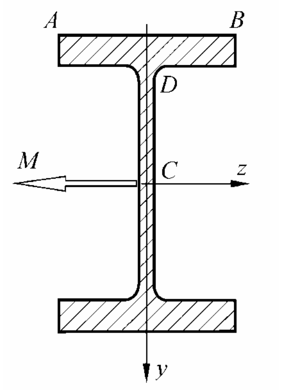
得

$$\frac{\mathrm{d}I_z}{\mathrm{d}h}=\frac{3h^2(d^2-h^2)-h^4}{12\sqrt{d^2-h^2}}=0$$

由此得

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}d,\quad b=\sqrt{d^2-h^2}=\frac{d}{2}$$

6-10 图示截面梁，由№18 工字钢制成，截面上的弯矩 $M = 20\mathrm{kN\cdot m}$，材料的弹性模量 $E = 200\mathrm{GPa}$，泊松比 $\mu = 0.29$。试求截面顶边 AB 与上半腹板 CD 的长度改变量。



题 6-10 图

解：1.查№18 工字钢的有关数据

工字钢截面大致形状及尺寸符号示如图 6-10。

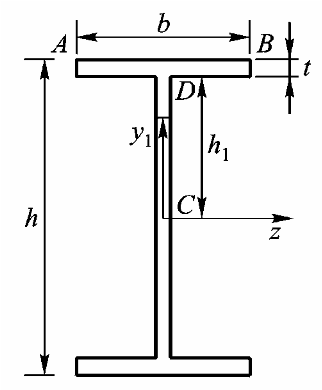


图 6-10

由附录 F 表 4 查得

$$h=180\mathrm{mm},\quad b=94\mathrm{mm}$$

$$t=10.7\mathrm{mm},\quad I_z=1660\mathrm{cm}^4,\quad W_z=185\mathrm{cm}^3$$

2．计算顶边 AB 的长度改变量

顶边处有

$$|\sigma|_{\max}=\frac{M}{W_z}$$

$$\varepsilon'=\mu|\varepsilon|=\frac{\mu|\sigma|_{\max}}{E}$$

由此可得 AB 边的伸长量为

$$\begin{aligned}\Delta_{AB}&=\varepsilon' b=\frac{\mu bM}{EW_z}=\frac{0.29\times0.094\times20\times10^{3}}{200\times10^{9}\times185\times10^{-6}}\mathrm{m}\\&=1.474\times10^{-5}\mathrm{m}=0.01474\mathrm{mm}\end{aligned}$$

3．计算上半腹板 CD 的长度改变量

距中性轴 z 为 y_1 的点，弯曲正应力的绝对值为

$$|\sigma(y_1)|=\frac{My_1}{I_z}\qquad\text{（这里，}y_1\text{以向上为正）}$$

该处的横向应变为

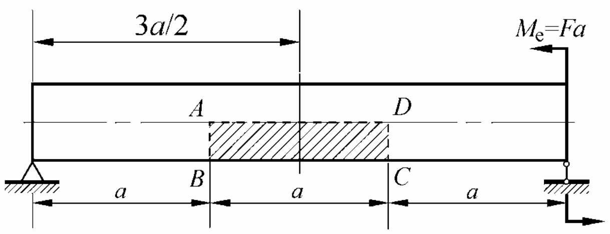
$$\varepsilon'=\mu|\varepsilon(y_1)|=\frac{\mu My_1}{EI_z}$$

由此可得线段 CD 的伸长量为

$$\begin{aligned}\Delta_{CD}&=\int_0^{h_1}\varepsilon'\mathrm{d}y_1=\frac{\mu M}{EI_z}\int_0^{h_1}y_1\mathrm{d}y_1=\frac{\mu Mh_1^2}{2EI_z}\\&=\frac{0.29\times20\times10^{3}\times0.0793^{2}}{2\times200\times10^{9}\times1660\times10^{-8}}\mathrm{m}\\&=5.49\times10^{-6}\mathrm{m}=0.00549\mathrm{mm}\end{aligned}$$

计算中用到 $h_1=h/2-t=79.3\mathrm{mm}$。

6-13 图示矩形截面简支梁，承受矩为 $M_e=Fa$ 的集中力偶作用。试绘单元体 $ABCD$ 的应力分布图（注明应力大小），并说明该单元体是如何平衡的。截面的宽度为 b，高度为 h。



题 6-13 图

解：1.画剪力、弯矩图

左、右支座的支反力大小均为 $F/3$，方向是左向上、右向下。据此可画 F_S与M 图，示如图 6-13a 与 b。

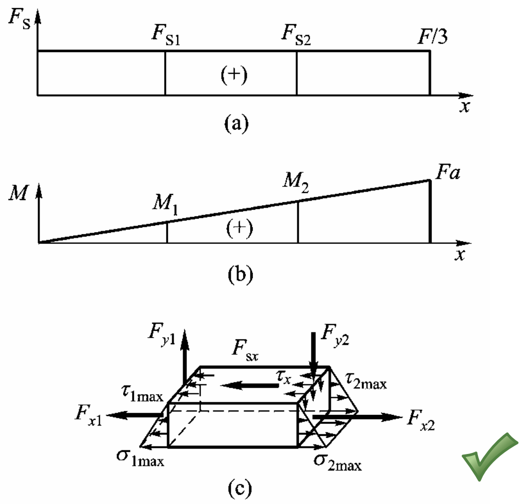


图 6-13

2．求单元体两端面上的应力及其合力

单元体两端面及纵截面上的应力分布情况示如图 c，最大弯曲正应力和剪应力值分别为

$$\sigma_{1\max}=\frac{M_1}{W_z}=\frac{6Fa}{3bh^2}=\frac{2Fa}{bh^2}$$

$$\sigma_{2\max}=\frac{M_2}{W_z}=\frac{4Fa}{bh^2}$$

$$\tau_{1\max}=\tau_{2\max}=\frac{3F_{S2}}{2A}=\frac{F}{2bh}$$

由切应力互等定理可知，纵截面上的切应力 τ_x 与 $\tau_{2\max}$ 一样大。

左、右端面上弯曲正应力构成的轴向合力分别为

$$F_{x1}=\frac{1}{2}\sigma_{1\max}(\frac{bh}{2})=\frac{Fa}{2h}$$

$$F_{x2}=\frac{1}{2}\sigma_{2\max}(\frac{bh}{2})=\frac{Fa}{h}$$

左、右端面上弯曲切应力构成的竖向合力大小相等，其值为

$$F_{y1}=F_{y2}=\frac{1}{6}F$$

顺便指出，纵截面上弯曲切应力构成的轴向合力为

$$F_{Sx}=\tau_x(ab)=\frac{Fa}{2h}$$

3．检查单元体的平衡方程是否满足

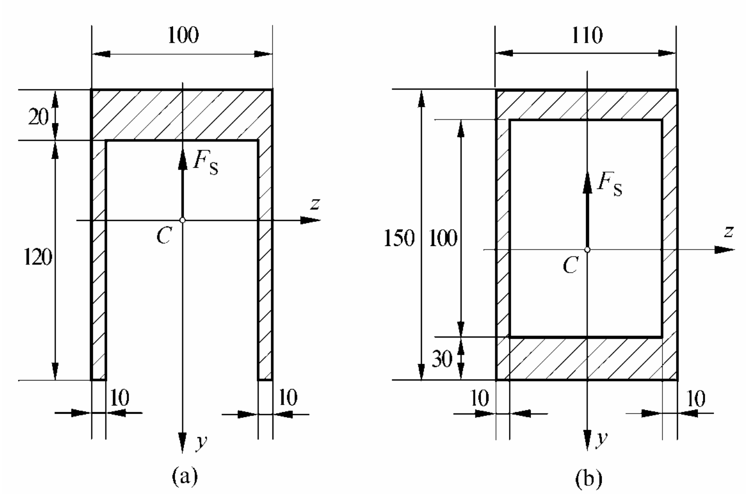
$$\sum F_x=0，F_{x2}-F_{x1}-F_{Sx}=\frac{Fa}{h}-\frac{Fa}{2h}-\frac{Fa}{2h}=0$$

$$\sum F_y=0，F_{y1}-F_{y2}=\frac{F}{6}-\frac{F}{6}=0$$

$$\sum M_{z1}=0,\ F_{x2}\frac{h}{3}-F_{x1}\frac{h}{3}-F_{y2}a=\frac{Fa}{3}-\frac{Fa}{6}-\frac{Fa}{6}=0$$

由此可见，单元体的全部平衡方程均能满足（另三个平衡方程是恒等满足，无需写出）。

6-14 梁截面如图所示，剪力 $F_s=200\text{kN}$，并位于 x-y 平面内。试计算腹板上的最大弯曲切应力，以及腹板与翼缘（或盖板）交界处的弯曲切应力。



题 6-14 图

(a)解：首先，确定截面形心位置

$$y_C=\frac{0.020\times0.100\times0.010+0.120\times0.010\times2\times0.080}{0.020\times0.100+0.120\times0.020}\text{m}$$
$$=0.04818\text{m}\qquad(C\text{到顶边之距})$$

其次，计算惯性矩和截面静矩

$$I_z=[\frac{0.100\times0.020^3}{12}+0.100\times0.020\times0.03818^2+2\times\frac{0.010\times0.120^3}{12}$$
$$+2\times0.010\times0.120\times0.03182^2]\text{m}^4=8.292\times10^{-6}\text{m}^4$$

$$S_{z,\max}=0.09182\times0.020\times\frac{0.09182}{2}\text{m}^3=8.431\times10^{-5}\text{m}^3$$

$$S_z=0.100\times0.020\times0.03818\text{m}^3=7.636\times10^{-5}\text{m}^3$$

最后，计算弯曲切应力。腹板上的最大弯曲切应力为

$$\tau_{\max}=\frac{F_S S_{z,\max}}{I_z\delta}=\frac{200\times10^3\times8.431\times10^{-5}\text{N}}{8.292\times10^{-6}\times0.020\text{m}^2}=1.017\times10^8\text{Pa}=101.7\text{MPa}$$

腹板与翼缘交界处的弯曲切应力为

$$\tau_{交界}=\frac{F_s S_z}{I_z\delta}=\frac{200\times10^3\times7.636\times10^{-5}\text{N}}{8.292\times10^{-6}\times0.020\text{m}^2}=9.21\times10^7\text{Pa}=92.1\text{MPa}$$

(b)解：首先，确定截面形心位置（采用负面积法）

$$y_C = [\frac{0.110\times0.150\times0.075-(0.110-0.020)\times0.100\times0.070}{0.110\times0.150-(0.110-0.020)\times0.100}]\text{m}$$
$$=0.081\text{m} \quad (C\text{到顶边之距})$$

其次，计算惯性矩和截面静矩（算 I_z 时也采用负面积法）

$$I_z=\{\frac{0.110\times0.150^3}{12}+0.110\times0.150\times(0.081-0.075)^2-[\frac{0.090\times0.100^3}{12}$$
$$+0.090\times0.100\times(0.081-0.070)^2]\}\text{m}^4=2.294\times10^{-5}\text{m}^4$$

$$S_{z,\max}=[0.030\times0.110\times(0.069-0.015)+0.020\times(0.069-0.030)^2\times\frac{1}{2}]\text{m}^3$$
$$=1.934\times10^{-4}\text{m}^3$$

$$S_{z上}=0.020\times0.110\times(0.081-0.010)\text{m}^3=1.562\times10^{-4}\text{m}^3$$

$$S_{z下}=0.030\times0.110\times(0.069-0.015)\text{m}^3=1.782\times10^{-4}\text{m}^3$$

最后，计算弯曲切应力。腹板上的最大弯曲切应力为

$$\tau_{\max}=\frac{F_\text{S}S_{z,\max}}{I_z\delta}=\frac{200\times10^3\times1.934\times10^{-4}\text{N}}{2.294\times10^{-5}\times0.020\text{m}^2}=8.43\times10^7\text{Pa}=84.3\text{MPa}$$

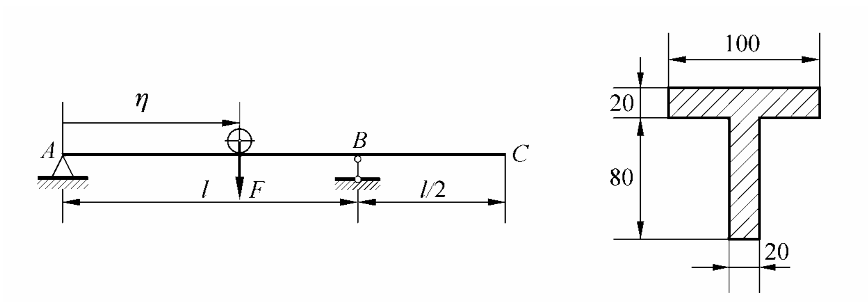
腹板与上盖板交界处的弯曲切应力为

$$\tau_{交界上}=\frac{F_\text{S}S_{z上}}{I_z\delta}=\frac{200\times10^3\times1.562\times10^{-4}\text{N}}{2.294\times10^{-5}\times0.020\text{m}^2}=6.81\times10^7\text{Pa}=68.1\text{MPa}$$

腹板与下盖板交界处的弯曲切应力为

$$\tau_{交界下}=\frac{F_\text{S}S_{z下}}{I_z\delta}=\frac{200\times10^3\times1.782\times10^{-4}\text{N}}{2.294\times10^{-5}\times0.020\text{m}^2}=7.77\times10^7\text{Pa}=77.7\text{MPa}$$

6-17 **图示铸铁梁，载荷 F 可沿梁 AC 水平移动，其活动范围为 0< η <3l / 2。试确定载荷 F 的许用值。已知许用拉应力[σ_t]=35MPa，许用压应力[σ_c]=140MPa, l=1m。**



题 6-17 图

解：1.确定截面的形心位置及对形心轴 z 的惯性矩

由图 6-17 可得

$$y_C=(\frac{0.100\times0.020\times0.010+0.080\times0.020\times0.060}{0.100\times0.020+0.080\times0.020})\text{m}=0.03222\text{m}$$

$$I_z=[\frac{0.100\times0.020^3}{12}+0.100\times0.020\times0.02222^2+\frac{0.020\times0.080^3}{12}$$
$$+0.020\times0.080\times(0.060-0.03222)^2]\text{m}^4=3.142\times10^{-6}\text{m}^4$$

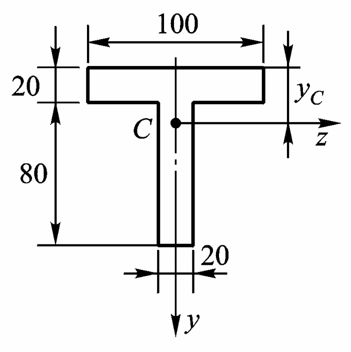


图 6-17

2．确定危险面的弯矩值

分析可知，可能的危险面有两个：

当 F 作用在 AB 段时，危险位置是

$$\eta=\frac{l}{2}，M_{\max}^{+}=\frac{Fl}{4}$$

当 F 作用在 BC 段时，危险位置是

$$\eta=\frac{3l}{2}，\left|M_{\max}^{-}\right|=\frac{Fl}{2}$$

3．确定载荷 F 的许用值

由危险面 B 的压应力强度要求

$$\sigma_{\text{c,max}}=\frac{\left|M_{\max}^{-}\right|}{I_z}(0.100-y_C)=\frac{Fl}{2I_z}(0.100-y_C)\le[\sigma_{\text{c}}]$$

得

$$F\le\frac{2I_z[\sigma_{\text{c}}]}{l(0.100-y_C)}=\frac{2\times3.142\times10^{-6}\times140\times10^{6}\text{N}}{1.000\times(0.100-0.03222)}=1.298\times10^4\text{N}=12.98\text{kN}$$

由截面 B 的拉应力强度要求

$$\sigma_{\text{t,max}}=\frac{\left|M_{\max}^{-}\right|}{I_z}y_C=\frac{Fl}{2I_z}y_C\le[\sigma_{\text{t}}]$$

得

$$F\le\frac{2I_z[\sigma_{\text{t}}]}{ly_C}=\frac{2\times3.142\times10^{-6}\times35\times10^{6}\text{N}}{1.000\times0.03222}=6.83\times10^3\text{N}=6.83\text{kN}$$

由 $M_{\max}^{+}$ 作用面的拉应力强度要求

$$\sigma_{\mathrm{t,max}} = \frac{M_{\max}^{+}}{I_z}(0.100 - y_C) = \frac{Fl}{4I_z}(0.100 - y_C) \le [\sigma_{\mathrm{t}}]$$

得

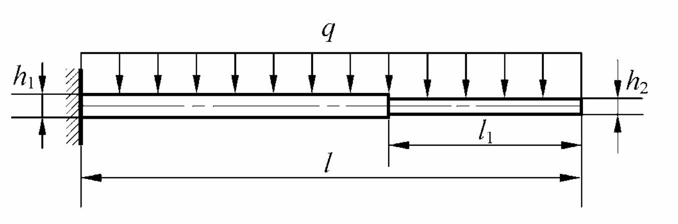
$$F \le \frac{4I_z[\sigma_{\mathrm{t}}]}{l(0.100 - y_C)} = \frac{4 \times 3.142 \times 10^{-6} \times 35 \times 10^{6}\,\mathrm{N}}{1.000 \times (0.100 - 0.03222)} = 6.49 \times 10^{3}\,\mathrm{N} = 6.49\mathrm{kN}$$

该面上的最大压应力作用点并不危险，无需考虑。

比较以上各结果，最后确定取载荷的许用值为

$$[F] = 6.49\mathrm{kN}。$$

6-18 图示矩形截面阶梯梁，承受均布载荷 q 作用。为使梁的重量最轻，试确定 l_1 与截面高度 h_1 和 h_2。已知截面宽度为 b，许用应力为$[\sigma]$。



题 6-18 图

解：1.求最大弯矩

左段最大弯矩的绝对值为

$$|M_1|_{\max} = \frac{ql^2}{2}$$

右段最大弯矩的绝对值为

$$|M_2|_{\max} = \frac{ql_1^2}{2}$$

2．求截面高度 h_1 和 h_2

由根部截面弯曲正应力强度要求

$$\sigma_{1\max} = \frac{|M_1|_{\max}}{W_{z1}} = \frac{6ql^2}{2bh_1^2} \le [\sigma]$$

得

$$h_1 \ge \sqrt{\frac{3ql^2}{b[\sigma]}} = l\sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}} \tag{a}$$

由右段危险截面的弯曲正应力强度要求

$$\sigma_{2\max}=\frac{|M_2|_{\max}}{W_{z2}}=\frac{6ql_1^2}{2bh_2^2}\le[\sigma]$$

得

$$h_2\ge l_1\sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}} \tag{b}$$

3．确定l_1

该梁的总体积为

$$V=V_1+V_2=bh_1(l-l_1)+bh_2l_1=b\sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}}[l(l-l_1)+l_1^2]$$

由

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_1}=0,\quad 2l_1-l=0$$

得

$$l_1=\frac{l}{2}$$

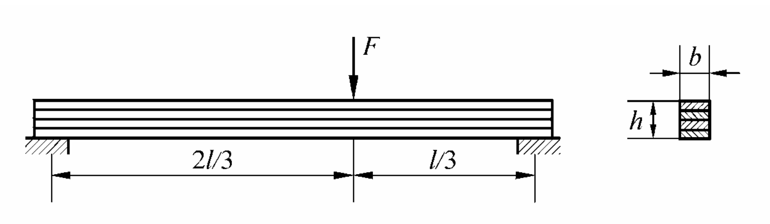
最后，将式(c)代入式(b)，得

$$h_2\ge\frac{l}{2}\sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}}$$

为使该梁重量最轻（也就是V最小），最后取

$$l_1=\frac{l}{2},\quad h_1=2h_2=l\sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}}$$

6-19 图示简支梁，由四块尺寸相同的木板胶接而成，试校核其强度。已知载荷 $F=4\text{kN}$，梁跨度 $l=400\text{mm}$，截面宽度 $b=50\text{mm}$，高度 $h=80\text{mm}$，木板的许用应力$[\sigma]=7\text{MPa}$，胶缝的许用切应力$[\tau]=5\text{MPa}$。



题 6-19 图

解：1.画剪力、弯矩图

该梁的剪力、弯矩图如图 6-19 所示。由图可知，最大剪力（绝对值）和最大弯矩分别为

$$|F_S|_{\max}=\frac{2}{3}F,\quad M_{\max}=\frac{2}{9}Fl$$

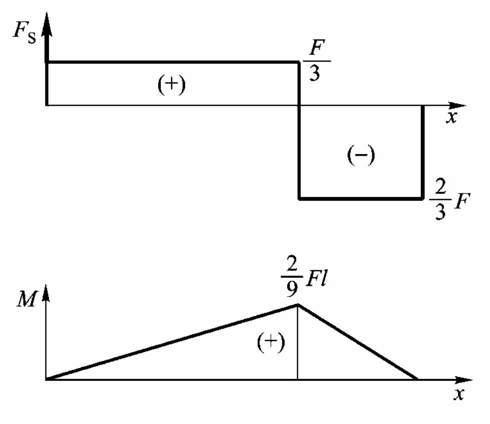


图 6-19

2．校核木板的弯曲正应力强度

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{6\times 2Fl}{9bh^2} = \frac{4\times 4\times 10^3\times 0.400\text{N}}{3\times 0.050\times 0.080^2\text{m}^2}$$
$$= 6.67\times 10^6\text{Pa} = 6.67\text{MPa} < [\sigma]$$

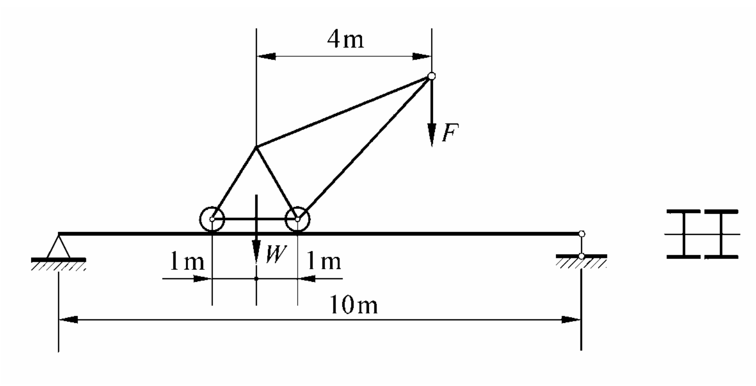
3．校核胶缝的切应力强度

$$\tau_{max} = \frac{3|F_S|_{max}}{2A} = \frac{3\times 2F}{3\times 2bh} = \frac{4\times 10^3\text{N}}{0.050\times 0.080\text{m}^2}$$
$$= 1.000\times 10^6\text{Pa} = 1.000\text{MPa} < [\tau]$$

结论：该胶合木板简支梁符合强度要求。

6-21 图示四轮吊车起重机的导轨为两根工字形截面梁，设吊车自重 W = 50kN，最大起重量 F = 10kN，许用应用[σ]=160MPa，许用切应力[τ]= 80MPa。试选择工字钢型号。由于梁较长，需考虑梁自重的影响。

提示：首先按载荷 W 与 F 选择工字钢型号，然后根据载荷 W 与 F 以及工字钢的自重校核梁的强度，并根据需要进一步修改设计。



题 6-21 图

解：1.求最大弯矩

设左、右轮给梁的压力分别为F_1和F_2，不难求得

$$F_1 = 10\text{kN}，F_2 = 50\text{kN}$$

由图 6-21a 所示梁的受力图及坐标，可得支反力

$$F_{Ay} = \frac{1}{l}[F_1(l-x)+F_2(l-x-2)] = 50-6x \qquad (0<x<8)$$

$$F_{By} = \frac{1}{l}[F_1 x + F_2(x+2)] = 6x+10 \qquad (0<x<8)$$

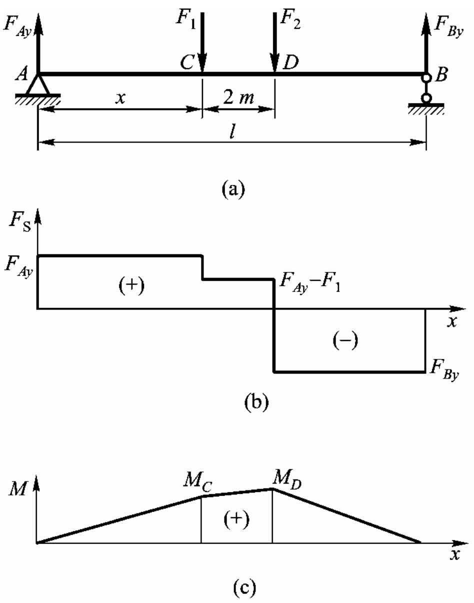


图 6-21

该梁的剪力、弯矩图示如图 b 和 c。图中，

$$M_C = F_{Ay}x = (50-6x)x \qquad (0 \le x \le 8)$$

$$M_D = F_{By}(l-x-2) = (6x+10)(8-x) \qquad (0 \le x \le 8)$$

由

$$\frac{\mathrm{d}M_C}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}M_D}{\mathrm{d}x} = 0$$

得极值位置依次为

$$x = \frac{25}{6}\text{m}，x = \frac{19}{6}\text{m}$$

两个弯矩极值依次为

$$M_{C\max} = (50-25)\times\frac{25}{6}\text{kN}\cdot\text{m} = 104.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

和

$$M_{D\max} = (19+10)(8-\frac{19}{6})\text{kN}\cdot\text{m} = 140.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

比较可知，单梁的最大弯矩值为

$$M_{\max}=\frac{1}{2}M_{D\max}=70.1\mathrm{kN\cdot m}$$

2．初选工字钢型号

先不计梁的自重，由弯曲正应力强度要求

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}\le[\sigma]$$

得

$$W_z\ge\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=\frac{70.1\times10^3\mathrm{m}^3}{160\times10^6}=4.38\times10^{-4}\mathrm{m}^3=438\mathrm{cm}^3$$

由附录 F 表 4 初选№28a 工字钢，有关数据为

$$W_z=508\mathrm{cm}^3,\ q=43.492\mathrm{kg/m},\ \delta=8.5\mathrm{mm},\ I_z/S_z=24.6\mathrm{cm}$$

3．检查和修改

考虑梁自重的影响，检查弯曲正应力强度是否满足。

梁中点处弯矩增量为

$$\Delta M_{\max}=\frac{ql^2}{8}=\frac{43.492\times9.81\times10^2}{8}\mathrm{N\cdot m}=5.33\times10^3\mathrm{N\cdot m}$$

上面分析的最大弯矩作用面在跨中以右 0.167m 处，二者相距很近，检查正应力强度时可将二者加在一起计算（计算的 $\sigma_{\max}$ 比真实的略大一点，偏于安全），即

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}+\Delta M_{\max}}{W_z}=\frac{(70.1\times10^3+5.33\times10^3)\mathrm{N}}{508\times10^{-6}\mathrm{m}^2}$$
$$=(1.380\times10^8+1.049\times10^7)\mathrm{Pa}=148.5\mathrm{MPa}<[\sigma]$$

最后，再检查弯曲切应力强度是否满足。

$$F_{\mathrm{S,max}}=[\frac{1}{2}(6\times8+10)+\frac{1}{2}\times43.492\times9.81\times10^{-3}\times10]\mathrm{kN}=31.13\mathrm{kN}$$

$$\tau_{\max}=\frac{F_{\mathrm{S,max}}}{(\frac{I_z}{S_z})\delta}=\frac{31.13\times10^3\mathrm{N}}{24.6\times10^{-2}\times8.5\times10^{-3}\mathrm{m}^2}$$
$$=1.489\times10^7\mathrm{Pa}=14.89\mathrm{MPa}<[\tau]$$

结论：检查的结果表明，考虑梁自重影响后，弯曲正应力和切应力强度均能满足要求，故无需修改设计，最后选择的工字钢型号为№28a。

6-23 图示简支梁，由两根№50b 工字钢经铆钉连接而成，铆钉的直径 $d=23\mathrm{mm}$，许用切应力[τ]=90MPa，梁的许用应力[σ]=160MPa。试确定梁的许用载荷[q]及铆钉的相应间距 e。

提示：按最大剪力确定间距。

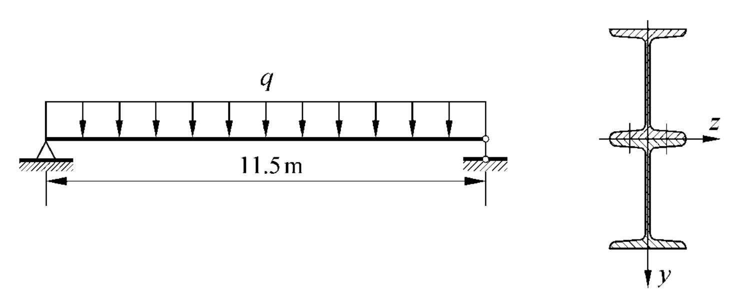


图 6-23 图

解：1.计算组合截面的 I_z 和 S_z

由附录 F 表 4 查得№50b 工字钢的有关数据为

$$h = 500\text{mm}，A = 129.304\text{cm}^2，I_{z_1} = 48600\text{cm}^4$$

形成组合截面后，有

$$I_z = 2I_{z_1} + 2(\frac{Ah^2}{4}) = [2\times 4.86\times 10^{-4} + \frac{1}{2}1.29304\times 10^{-2}\times 0.500^2]\text{m}^4$$
$$= 2.5883\times 10^{-3}\text{m}^4$$

$$S_z = A\cdot\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\times 1.29304\times 10^{-2}\times 0.500\text{m}^3 = 3.2326\times 10^{-3}\text{m}^3$$

2．由弯曲正应力强度要求计算 $[q]$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}h}{I_z} = \frac{ql^2h}{8I_z} \le [\sigma]$$

由此可得

$$q \le \frac{8I_z[\sigma]}{l^2h} = \frac{8\times 2.5883\times 10^{-3}\times 160\times 10^6\text{N}}{11.5^2\times 0.500\text{m}} = 5.01\times 10^4\text{N/m} = 50.1\text{N/mm}$$

梁的许用载荷为

$$[q] = 50.1\text{N/mm}$$

3．求铆钉间距 e

由铆钉的切应力强度要求来计算 e。

由对称条件可得

$$F_{\text{s,max}} = \frac{1}{2}ql = \frac{1}{2}\times 5.01\times 10^4\times 11.5\text{N} = 2.881\times 10^5\text{N} = 288.1\text{kN}$$

按最大剪力计算两工字钢交界面上单位长度上的剪力（剪流 $\overline{q}$），其值为

$$\overline{q} = \frac{F_{\text{s,max}}S_z}{I_z} = \frac{288.1\times 10^3\times 3.2326\times 10^{-3}\text{N}}{2.5883\times 10^{-3}\text{m}} = 3.598\times 10^5\text{N/m}$$

间距长度内的剪力为$\overline{q}e$，它实际上是靠一对铆钉的受剪面来承担的，即

$$\overline{q}e = 2[\tau]\cdot A_1 = 2[\tau]\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2[\tau]}{2}$$

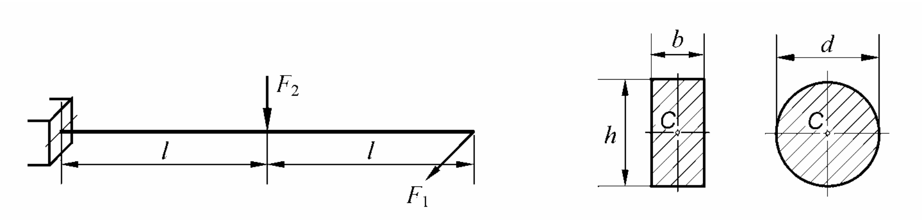
由此得梁长方向铆钉的间距为

$$e = \frac{\pi d^2[\tau]}{2\overline{q}} = \frac{\pi\times 0.023^2\times 90\times 10^6}{2\times 3.598\times 10^5}\text{m} = 0.208\text{m} = 208\text{mm}$$

6-26 图示悬臂梁，承受载荷 F_1 与 F_2 作用，已知 F_1=800N，F_2=1.6kN，l=1m，许用应力[σ]=160MPa。试分别按下列要求确定截面尺寸：

(1) 截面为矩形，$h = 2b$；

(2) 截面为圆形。



题 6-26 图

解：(1)矩形截面

危险截面在悬臂梁根部，危险点为截面左上角点（拉应力）和右下角点（压应力）。由弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{F_2 l}{W_z} + \frac{F_1(2l)}{W_y} = \frac{6F_2 l}{bh^2} + \frac{6\times(2F_1 l)}{hb^2}$$
$$= \frac{3l}{2b^3}(F_2 + 4F_1) \le [\sigma]$$

得

$$b \ge \sqrt[3]{\frac{3l(F_2+4F_1)}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3\times 1.000\times(1.6\times 10^3 + 4\times 800)}{2\times 160\times 10^6}}\text{m} = 0.0356\text{m} = 35.6\text{mm}$$

最后确定

$$h = 2b \ge 71.2\text{mm}$$

(2)圆形截面

危险截面的合弯矩为

$$M_{\max} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(2F_1 l)^2 + (F_2 l)^2}$$

由弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{32M_{\max}}{\pi d^3} \le [\sigma]$$

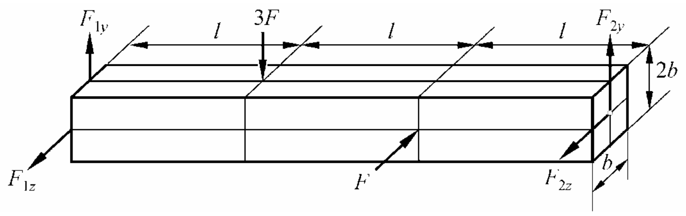
得

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{(2\times800\times1)^2+(1.6\times10^3\times1)^2}}{\pi\times160\times10^6}}\text{m} = 0.0524\text{m} = 52.4\text{mm}$$

最后确定

$$d \geq 52.4\text{mm}$$

6-28 图示简支梁，在两个纵向对称面内分别承受集中载荷作用。试求梁内的最大弯曲正应力。



题 6-28 图

解：1.求支反力

由图 6-28a 可得支反力为

$$F_{1y} = \frac{2}{3}(3F) = 2F，F_{2y} = \frac{1}{3}(3F) = F$$

$$F_{1z} = \frac{1}{3}F，F_{2z} = \frac{2}{3}F$$

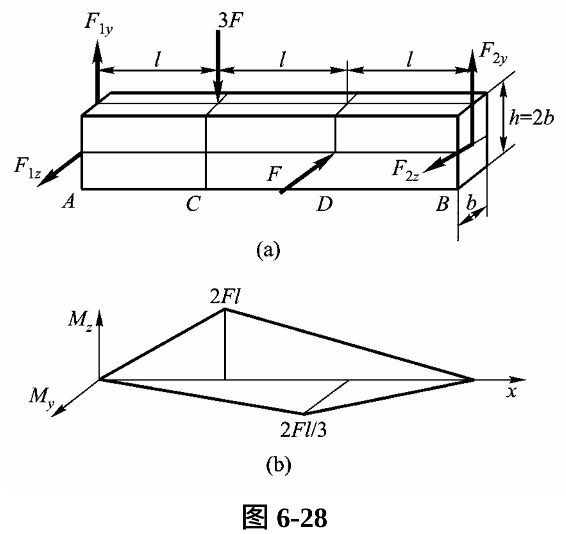


图 6-28

2．画弯矩图，并分析危险面位置

弯矩图示如图 b。由该图不难判断：

在 AC 段，M_y与M_z 均为 x 的正比函数，截面 C 最危险；

在 BD 段，与 AC 段的情况类似，截面 D 最危险；

在 CD 段，M_z 是线性减函数，M_y 是线性增函数，求 $\sigma_{\max}$ 时分母上均为常数（W_y 或 W_z），

由此知$\sigma_{\max}$必是x的线性函数，其最大值必在该段端点处，不在截面C，就在截面D。

3．计算该梁内的最大弯曲正应力

由以上分析可知，只需计算两个截面的$\sigma_{\max}$即可。

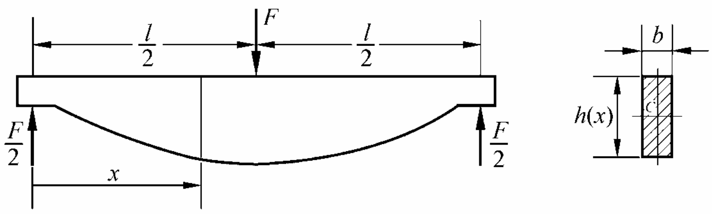
$$\sigma_{C,\max}=\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{6Fl}{3hb^2}+\frac{6\times 2Fl}{bh^2}=\frac{4Fl}{b^3}$$

$$\sigma_{D,\max}=\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{6\times 2Fl}{3hb^2}+\frac{6Fl}{bh^2}=\frac{7Fl}{2b^3}$$

比较可知，该梁内的最大弯曲正应力在截面C处，其值为

$$\sigma_{\max}=\frac{4Fl}{b^3}$$

6-31 图示简支梁，跨度中点承受集中载荷 F 作用。若横截面的宽度 b 保持不变，试根据等强度观点确定截面高度 $h(x)$的变化规律。许用应力[σ]与许用切应力[τ]均为已知。



题 6-31 图

解：1.求$h(x)$

$$M(x)=\frac{F}{2}x$$

由等强度观点可知，

$$\sigma_{\max}=\frac{M(x)}{W(x)}=\frac{6Fx}{2bh^2(x)}=[\sigma]$$

由此可得

$$h(x)=\sqrt{\frac{3Fx}{b[\sigma]}}\qquad (0<x\le l/2) \tag{a}$$

梁的右半段与左边对称。

2．求两端的截面高度

由式(a)可知，在$x=0$处，$h(0)=0$，这显然是不合理的，弯曲切应力强度要求得不到满足，故需作局部修正。由

$$\tau_{\max}=\frac{3F_{\mathrm{S,max}}}{2A}=\frac{3F}{4bh(0)}=[\tau]$$

得梁左端的截面高度为

$$h(0)=\frac{3F}{4b[\tau]} \tag{b}$$

这是满足剪切强度要求的最小截面高度，梁的右端亦同此值。

3．确定 $h(x)$的变化规律

设可取截面高度为 $h(0)$的最大长度为 x_1，为了同时满足正应力和切应力强度要求，应取

$$\sqrt{\frac{3Fx_1}{b[\sigma]}}=h(0)=\frac{3F}{4b[\tau]}$$

由此得

$$x_1=\frac{3F[\sigma]}{16b[\tau]^2}$$

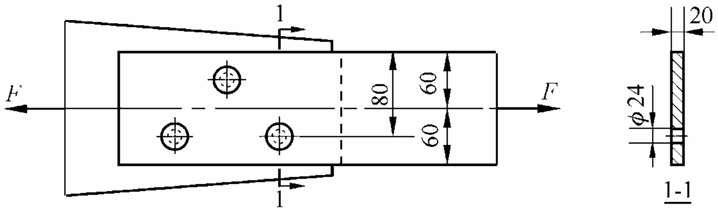
最终确定截面高度 $h(x)$的变化规律为：

在区间 $(0\le x\le x_1)$ 内 $\quad h(x)=\dfrac{3F}{4b[\tau]}$

在区间 $(x_1\le x\le l/2)$ 内 $\quad h(x)=\sqrt{\dfrac{3Fx}{b[\sigma]}}$

梁的右半段与左边对称。

6-33 图示板件，受拉力 F = 150kN 作用。试绘横截面 A-A 上的正应力分布图，并计算最大与最小正应力。



题 6-33 图

解：1.计算截面 $A-A$ 的有关几何量

截面的形心位置为

$$y_C=\frac{0.020\times0.120\times0.060-0.020\times0.024\times0.080}{0.020\times0.120-0.020\times0.024}\mathrm{m}=0.055\mathrm{m}=55\mathrm{mm}$$

载荷偏心距为

$$e=(60-55)\mathrm{mm}=5\mathrm{mm}$$

截面对形心轴 z 的惯性距为

$$I_z=[\frac{0.020\times0.120^3}{12}+0.020\times0.120\times0.005^2-\frac{0.020\times0.024^3}{12}$$
$$-0.020\times0.024\times(0.080-0.055)^2]\mathrm{m}^4=2.617\times10^{-6}\mathrm{m}^4$$

截面面积为

$$A=[0.020\times(0.120-0.024)]\mathrm{m}^2=1.920\times10^{-3}\mathrm{m}^2$$

2．计算正应力并画其分布图

由以上分析可知，截面 A - A 上有

$$F_{\mathrm{N}}=150\mathrm{kN},\ M=150\times10^3\times0.005\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}=7.5\times10^2\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

故有

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}+\frac{My_1}{I_z}=(\frac{150\times10^3}{1.920\times10^{-3}}+\frac{7.5\times10^2\times0.065}{2.617\times10^{-6}})\,\mathrm{Pa}$$
$$=9.68\times10^7\mathrm{Pa}=96.8\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{\min}=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}+\frac{My_2}{I_z}=(\frac{150\times10^3}{1.920\times10^{-3}}-\frac{7.5\times10^2\times0.055}{2.617\times10^{-6}})\,\mathrm{Pa}$$
$$=6.24\times10^7\mathrm{Pa}=62.4\mathrm{MPa}$$

据此可画正应力分布图，如图 6-33 所示。

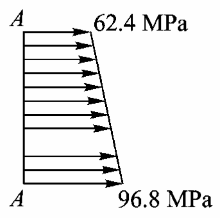
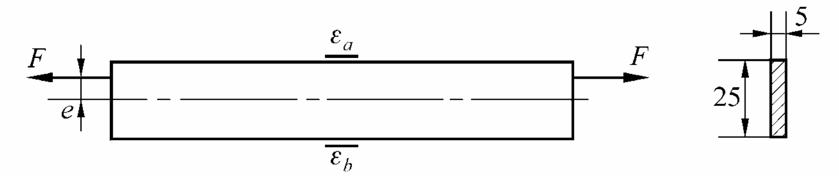


图 6-33

6-34 图示矩形截面钢杆，用应变片测得上、下表面的纵向正应变分别为 ε_a=1.0×10^{-3} 与 ε_b=0.4×10^{-3}，材料的弹性模量 E=210GPa。试绘横截面上的正应力分布图，并求拉力 F 及其偏心距 e 的数值。



题 6-34 图

解：1.求 σ_a 和 σ_b

截面的上、下边缘处均处于单向受力状态，故有

$$\sigma_a = E\varepsilon_a = 210\times10^9 \times 1.0\times10^{-3}\,\text{Pa} = 210\text{MPa}$$
$$\sigma_b = E\varepsilon_b = 210\times10^9 \times 0.4\times10^{-3}\,\text{Pa} = 84\text{MPa}$$

偏心拉伸问题，正应力沿截面高度线性变化，据此即可绘出横截面上的正应力分布图，如图 6-34 所示。

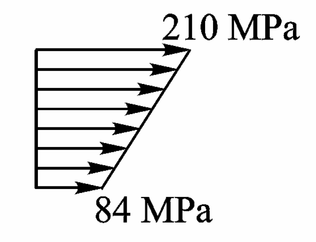


图 6-34

2．求 F 和 e

将 F 平移至杆轴线，得

$$F_{\text{N}} = F，\ M = Fe$$

由方程

$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{F}{A} + \dfrac{Fe}{W_z} = E\varepsilon_a & \text{(a)} \\ \sigma_b = \dfrac{F}{A} - \dfrac{Fe}{W_z} = E\varepsilon_b & \text{(b)} \end{cases}$$

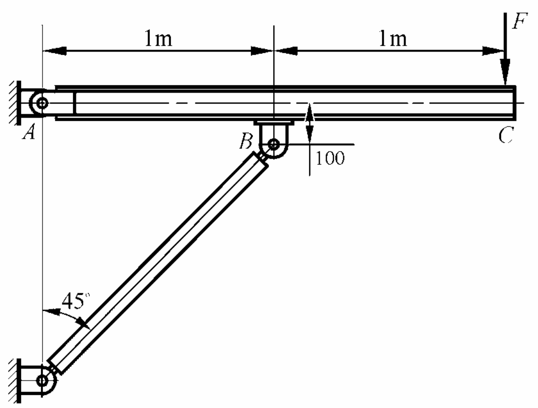
联立求解，可得 F 和 e 的值。代入数据后，方程(a)与(b)成为

$$\begin{cases} F + 240Fe = 26250 & \text{(a)}' \\ F - 240Fe = 10500 & \text{(b)}' \end{cases}$$

由此解得

$$F = 18375\text{N} \approx 18.38\text{kN}，\ e = 1.786\times10^{-3}\,\text{m} = 1.786\text{mm}$$

6-36 **图示结构，承受集中载荷 F 作用，试校核横梁的强度。已知载荷 F = 12kN，横梁用№14 工字钢制成，许用应力[σ]=160MPa。**



题 6-36 图

解：1.横梁外力分析

横梁受力示如图 6-36a，由平衡方程$\sum M_A = 0, \sum F_x = 0$和$\sum F_y = 0$依次求得

$$F_B = 30.9\text{kN}，F_{Ax} = 21.8\text{kN}，F_{Ay} = 9.82\text{kN}$$

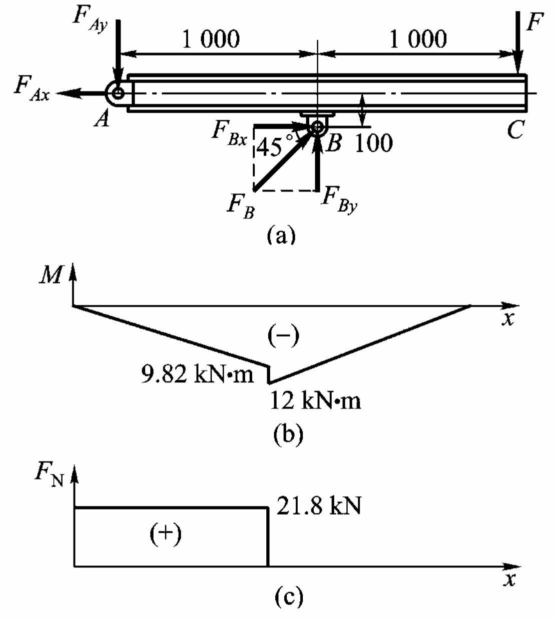


图 6-36

2．横梁内力分析

将F_B分解为F_{Bx}和F_{By}，并将F_{Bx}平移至梁轴线，由此即可画横梁的内力图，M图和F_N图分别示如图 b 和 c。

3．横梁强度校核

由内力图不难判断，危险面可能是横截面B_-或B_+。

对于B_-面，其最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{NB_-}}{A} + \frac{M_{B_-}}{W_z} \tag{a}$$

由附录F表 4 查得，№14 工字钢的$A = 21.516\text{cm}^2$，$W_z = 102\text{cm}^3$。将有关数据代入式(a)，可得

$$\sigma_{\max 1} = (\frac{21.8\times10^3}{21.516\times10^{-4}} + \frac{9.82\times10^3}{102\times10^{-6}})\,\text{Pa} = 1.064\times10^8\,\text{Pa} = 106.4\text{MPa}$$

对于B_+面，其最大弯曲正应力为

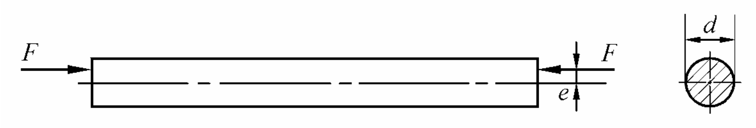
$$\sigma_{\max 2}=\frac{M_{B_+}}{W_z}=\frac{12\times10^3\,\mathrm{N}}{102\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2}=1.176\times10^8\,\mathrm{Pa}=117.6\mathrm{MPa}$$

比较可知，最大正应力发生在 B_+ 截面上、下边缘处，其值为

$$\sigma_{\max}=117.6\mathrm{MPa}<[\sigma]$$

可见，横梁的强度是足够的。

6-38 图示直径为 d 的圆截面铸铁杆，承受偏心距为 e 的载荷 F 作用。试证明：当 $e\le d/8$ 时，横截面上不存在拉应力，即截面核心为 $R = d/8$ 的圆形区域。



题 6-38 图

证明：此为偏心压缩问题。载荷偏心产生的弯矩为

$$M=Fe$$

受拉区的最大拉应力为

$$\sigma_{\mathrm{t,max}}=\frac{M}{W}-\frac{F}{A} \tag{a}$$

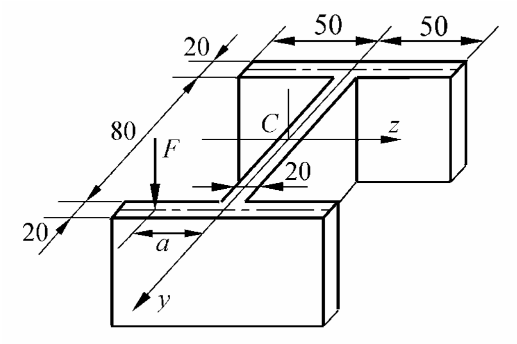
横截面上不存在拉应力的条件，要求式(a)小于或等于零，即要求

$$\frac{32Fe}{\pi d^3}\le\frac{4F}{\pi d^2}$$

由此得

$$e\le\frac{d}{8}$$

6-40 在图示立柱的顶部，作用一偏心载荷 $F = 250\mathrm{kN}$。若许用应力$[\sigma]$=125MPa，试求偏心距 a 的许用值。



题 6-40 图

解：1.确定内力

$$F_{\mathrm{N}}=250\mathrm{kN}，M_y=Fa=2.50\times10^5 a \quad (\mathrm{N\cdot m})$$

$$M_z=0.050F=0.050\times250\times10^3\,\mathrm{N\cdot m}=1.25\times10^4\,\mathrm{N\cdot m}$$

2．计算 I_z，I_y 及 A

$$I_z=(\frac{0.100\times0.120^3}{12}-\frac{0.080\times0.080^3}{12})\mathrm{m}^4=1.099\times10^{-5}\,\mathrm{m}^4$$

$$I_y=(\frac{0.020\times0.100^3}{12}\times2+\frac{0.080\times0.020^3}{12})\mathrm{m}^4=3.39\times10^{-6}\,\mathrm{m}^4$$

$$A=(0.100\times0.020\times2+0.080\times0.020)\mathrm{m}^2=5.60\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

3．求 a 的许用值

由正应力强度要求

$$\sigma_{\mathrm{c,max}}=\frac{M_z y}{I_z}+\frac{M_y z}{I_y}+\frac{F}{A}$$

$$=[\frac{(1.25\times10^4)\times0.060}{1.099\times10^{-5}}+\frac{(2.50\times10^5 a)\times0.050}{3.39\times10^{-6}}+\frac{250\times10^3}{5.60\times10^{-3}}]\,\mathrm{Pa}$$

$$=[112.88+3.69\times10^3 a]\times10^6\,(\mathrm{Pa})\le125\times10^6\,\mathrm{Pa}=[\sigma]$$

得偏心距的许用值为

$$a\le3.28\times10^{-3}\,\mathrm{m}=3.28\mathrm{mm}$$