北京航空航天大学数学分析(上)期中考试试题

2006 年 11 月 26 日

班级 ______________ 学号 ________________ 姓名 _________________

一、填空题（每小题 4 分, 共 28 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ = ____________________

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ = _________________

3. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，则 $a=$ ________，$b=$ ________ 。

4. 设圆周 $x^2+y^2=2$ 在某 P 点处的切线平行于直线 $y=1-x$， 则 P 点的坐标为 ______________________________

5. 已 知 $y=\dfrac{x^2+\sin x}{1+x}$， 则 y' = _____________________________________

6. 设 $y=x^{x^2}$，则 y' =____

7. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+2xy=e$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$ = ______________

二、单项选择(每小题 4 分, 共 16 分)

1. 当 $x\to 0$ 时，x^3 是 $\tan x-\sin x$ 的 【 】

   A. 较高阶无穷小　　B. 等价无穷小

   C. 同阶（不等价）无穷小　　D. 较低阶无穷小

2. 设函数 $f(x)$ 对一切 x 满足：$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$ 。若有 $x_0\neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的驻点，即 $f'(x_0)=0$，则 【 】

   A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

   C. $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

   D. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极值，$(x_0,f(x_0))$ 也是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{x^2}}{1-e^{x^2}}$ 【 】

   A. 仅有水平渐近线　　B. 既有水平渐近线，又有铅直渐近线

   C. 仅有铅直渐近线　　D. 既无水平渐近线，又无铅直渐近线

4. “$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续”的正确表述是 【 】

   A. $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，对 $[a,b]$ 中一切满足 $|x'-x''|<\delta$ 的 x',x''，都有

$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$。

B．$\forall\varepsilon_0>0$，$\forall n\in N^+$，对 $[a,b]$ 中一切满足 $|s_n-t_n|<\dfrac{1}{n}$ 的 s_n,t_n，都有

$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$。

C．$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，在 $[a,b]$ 中都存在 $|x'-x''|<\delta$ 的 x',x''，使得

$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$。

D．$\forall\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，在 $[a,b]$ 中存在满足 $\lim\limits_{n\to\infty}|s_n-t_n|=0$ 的数列 $\{s_n\},\{t_n\}$，使得

$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$。

三、计算题（每小题 6 分, 本题共 30 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

（2）设 $x_1>0,\quad x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right),\quad n=1,2,3,\cdots\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

（3）设 $x=e^t\cos t,\quad y=e^t\sin t,$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$

（4）$y=\dfrac{x^2}{1-x}$，求 $y^{(n)},\quad(n>2)$

（5）已知 $f(x)=12x^5+15x^4-40x^3$，求 $f(x)$ 的极值点与极值。

四、证明题（8）

设函数 $f(x)$ 有二阶连续导函数，且 $f(0)=0$．令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ f'(0) & x=0\end{cases}$，

（1）求 $g'(x)$

（2）证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

五、证明题（8 分）

设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，并且 $f(x_0)>0$.

求证：$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $f(x)>0$。

六、证明题（10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三阶导函数，且 $f(0)=f(1)=0$，$F(x)=x^2f(x)$。

证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'''(\xi)=0$。

七、加选题（10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对区间 $[a,b]$ 上的每一个 x，总存在 $y\in[a,b]$，使

$\left|f(y)\right| \le \frac{1}{2}\left|f(x)\right|$。 求证：至少存在一点 $\xi \in [a,b]$， 使得 $f(\xi)=0$。