计算机控制系统

第3章 计算机控制系统分析

北京航空航天大学

xia jie

2020年3月

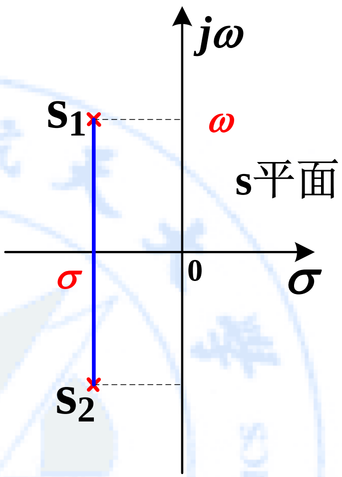
3.1 稳定性分析

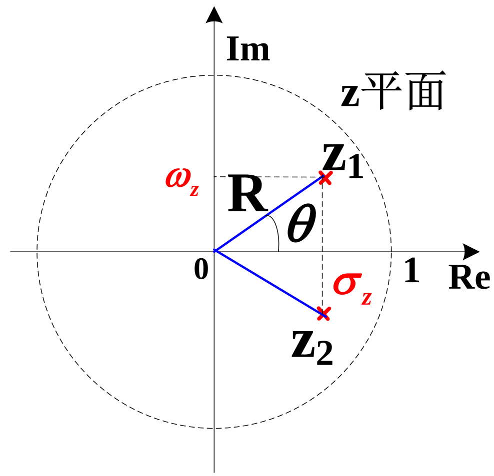
3.1.1 s平面到z平面之间映射关系

s平面与z平面点映射：

映射关系 $z = e^{sT}$

s平面的点 $s = \sigma + j\omega$





z平面对应点

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} = e^{\sigma T} \angle \omega T$$

z平面：
$$\begin{cases} R = |z| = e^{\sigma T} & \text{模} \\ \theta = \angle z = \omega T & \text{相角} \end{cases}$$

s平面和z平面的具体映射关系

1. s平面虚轴的映射

s平面整个虚轴映射为z平面单位圆，左半平面任一点映射在z平面单位圆内，右半平面任一点映射在单位圆外。

表3-1 s平面与z平面关系

	$s=\sigma+j\omega$			$z=R\angle\theta$	
几何位置	σ	ω	几何位置	$R=e^{\sigma T}$	$\theta=\omega T$
虚轴	=0	任意值	单位圆周	=1	任意值
左半平面	<0	任意值	单位圆内	<1	任意值
右半平面	>0	任意值	单位圆外	>1	任意值

s平面和z平面的具体映射关系

$$z = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$$

$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega T + 2k\pi)}$$

2. 角频率ω与z平面相角θ 关系

$$\theta = \omega T + 2k\pi = (\omega + k\frac{2\pi}{T})T = (\omega + k\omega_s)T$$

- ◆表明s 平面上频率相差采样频率整数倍的所有点，映射到z平面上同一点。
- ◆ω 变化一个ω_s 时，z平面相角θ 变化2π，即转了1周
- ◆若ω 在s平面虚轴上从$-\infty$变化到$+\infty$时，z平面上相角将转无穷多圈。

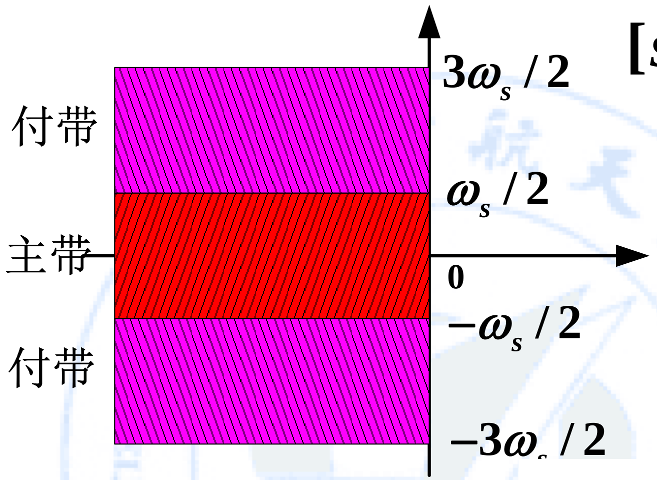
表3-2 角频率ω与z平面相角θ关系

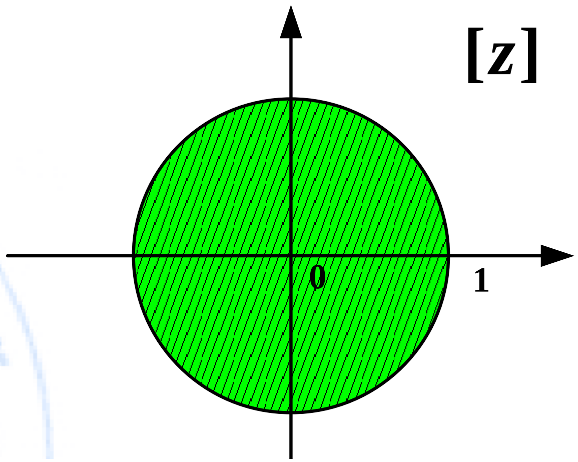
ω	$-\infty$	…	$-2\omega_s$	$-\omega_s$	$-\frac{\omega_s}{2}$	0	$\frac{\omega_s}{2}$	ω_s	$2\omega_s$	…	$+\infty$
θ	$-\infty$	…	-4π	-2π	$-\pi$	0	π	2π	4π	…	$+\infty$

3. s平面上的主带和旁带

- 将s平面以带的形式，重复映射到z平面

主带 $\begin{cases} -\dfrac{\omega_s}{2} \le \omega \le \dfrac{\omega_s}{2} \\ (\sigma\text{任意变化}) \end{cases}$





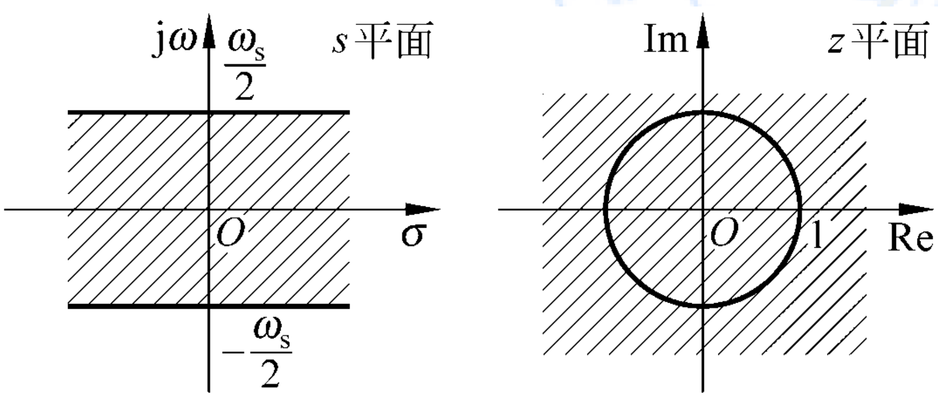


图3-3 主带映射

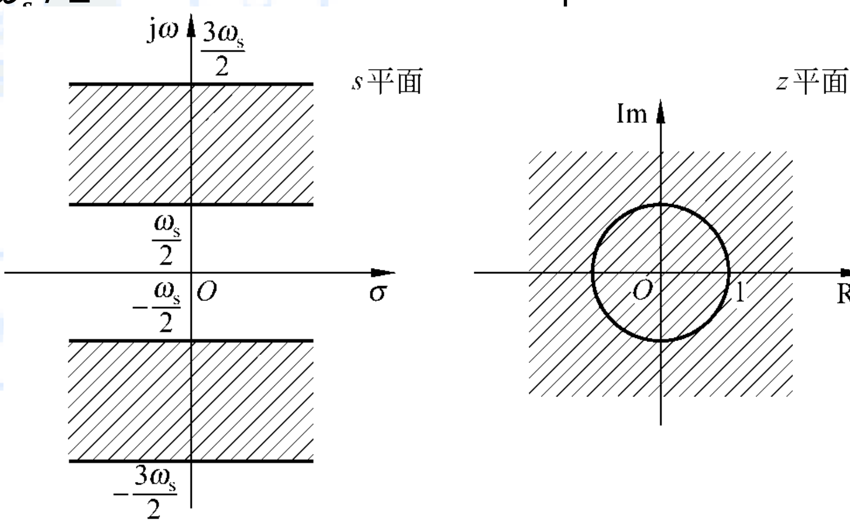


图3-4旁带映射

s平面和z平面的具体映射关系

4. s平面主带的映射

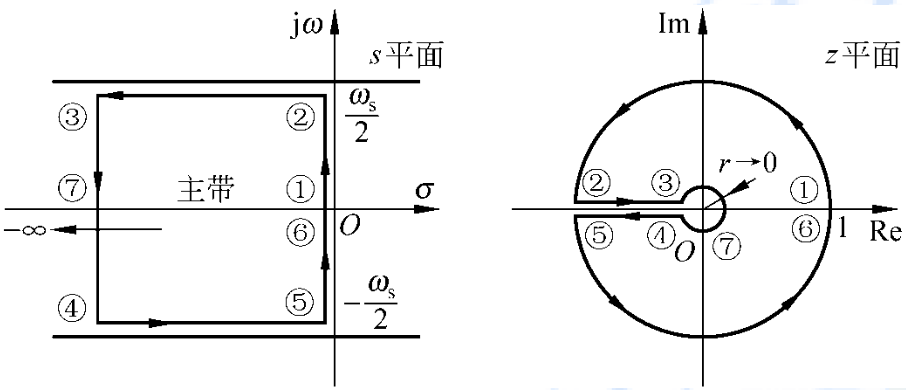


图3-5 s平面主带左半平面的映射

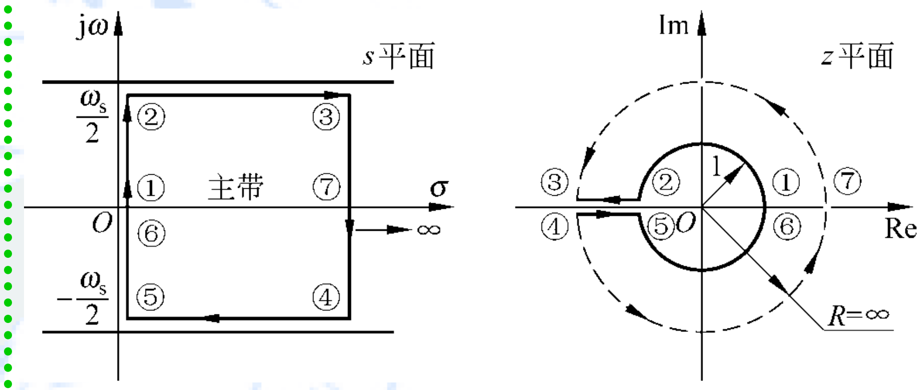


图3-6 s平面主带右半平面的映射

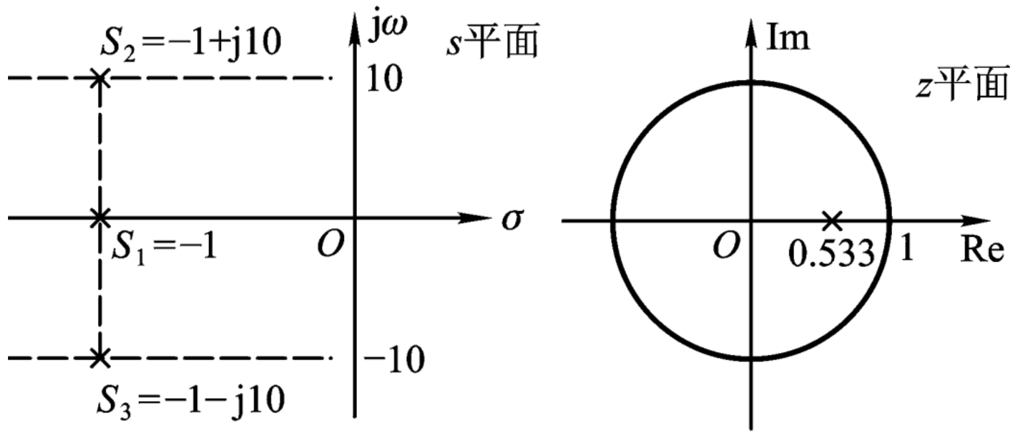
例3-1

$s_1=-1, s_{2,3}=-1\pm j10$ 取$\omega_s=10$ 求对应映射点

$$z_1=e^{s_1T}=e^{-1\times 2\pi/\omega_s}=e^{-1\times 2\pi/10}=0.533\angle 0$$

$$z_2=e^{s_2T}=e^{(-1+j10)2\pi/10}=0.533\angle 2\pi$$

$$z_3=e^{s_3T}=e^{(-1-j10)2\pi/10}=0.533\angle -2\pi$$



4-3

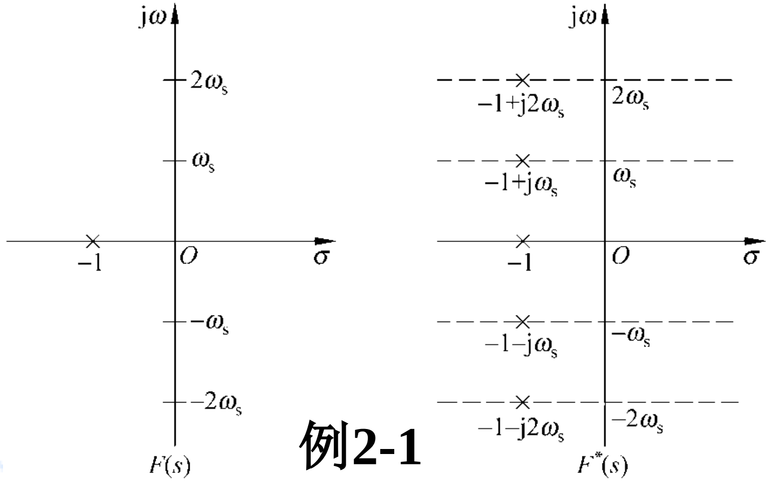
$z=e^{sT}$ 将s平面上实部相同而虚部相差 ω_s 整倍数的点映射到z平面同一点上。

5. 极点的映射

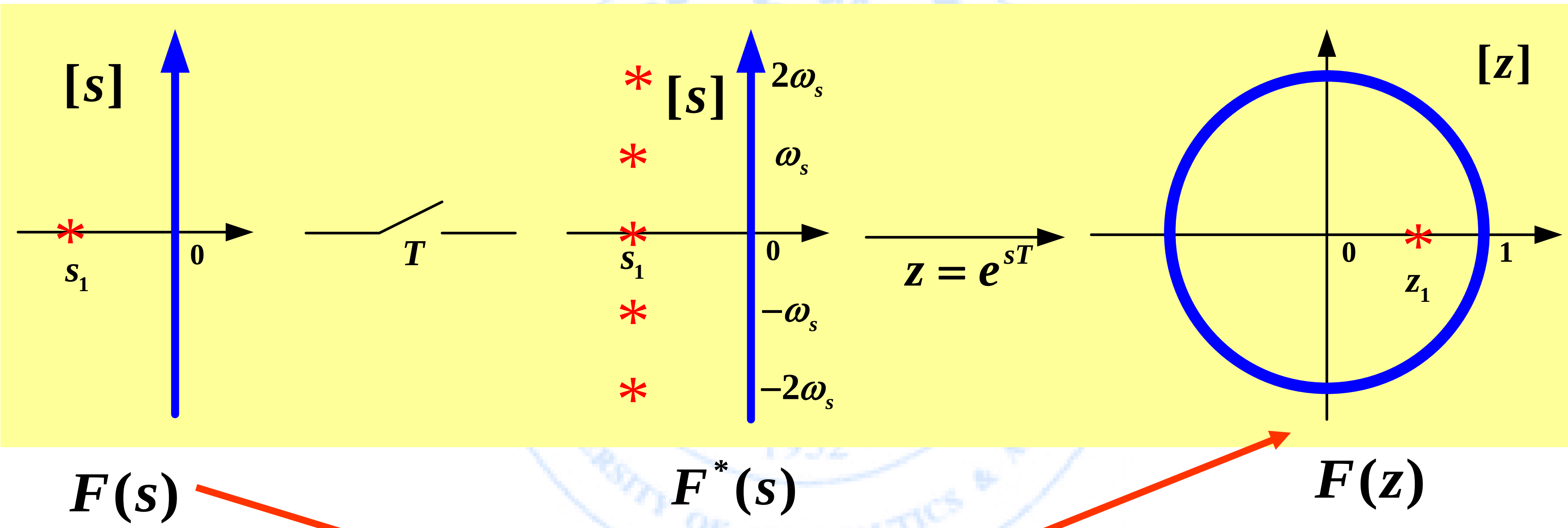
因为

$$F^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum F(j\omega+jn\omega_s)$$

$$F^*(s)=\frac{1}{T}\sum F(s+jn\omega_s)$$



例2-1



重要结论？

极点有一一对应映射关系

5. 极点的映射(续)

4阶连续系统

连续系统的极点为: $s_1, s_2, \boxed{s_{3,4} = s_2 \pm j\omega_s}$

映射后得到离散系统的极点: $z_1 = e^{s_1 T}$　　$z_2 = e^{s_2 T}$

2阶离散系统

连续系统映射后可能产生降阶现象!

分析原因?

极点和零点的映射

- 极点有一一对应映射关系
- 零点没有一一对应关系

	$F(s)=\dfrac{1}{s}$	$F(z)=\dfrac{z}{z-1}$		$F(s)=\dfrac{1}{s^2}$	$F(z)=\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
零点	无	=0	零点	无	=0
极点	=0	=1	极点	=0,=0	=1,=1

6. s平面上等值线在z平面的映射

1） *s*平面实轴平行线（即等频率线）的映射

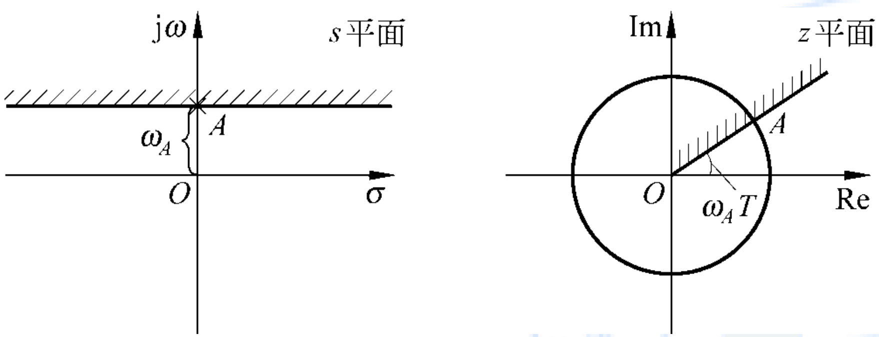


图3-7 等频率线的映射

s平面：ω=常数

z平面：$\theta = \omega T$ =常数

等俯角线

2） *s*平面虚轴平行线（即等衰减率线）的映射

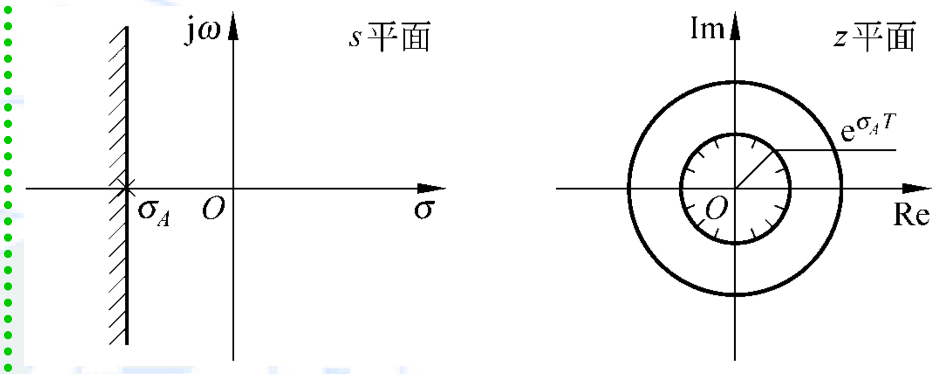


图3-8 等衰减率线的映射

s平面：σ=常数

z平面：$R = e^{\sigma T}$ =常数

等半径圆

6．s平面上等值线在z平面的映射

3）s平面上等阻尼比轨迹的映射

$$\cos\beta = \xi$$

$$s = \sigma + j\omega = -\omega\cot\beta + j\omega$$

映射至z平面

$$|z| = e^{\sigma T} = e^{-\omega T\cot\beta}$$

$$\angle z = \theta = \omega T$$

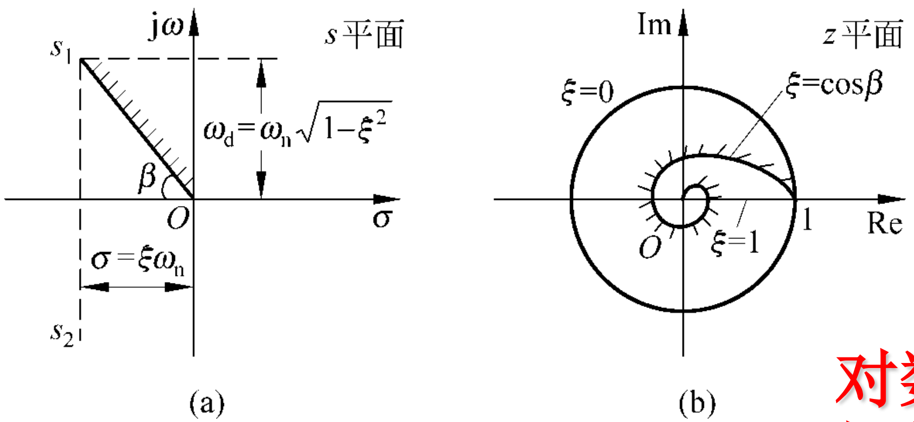
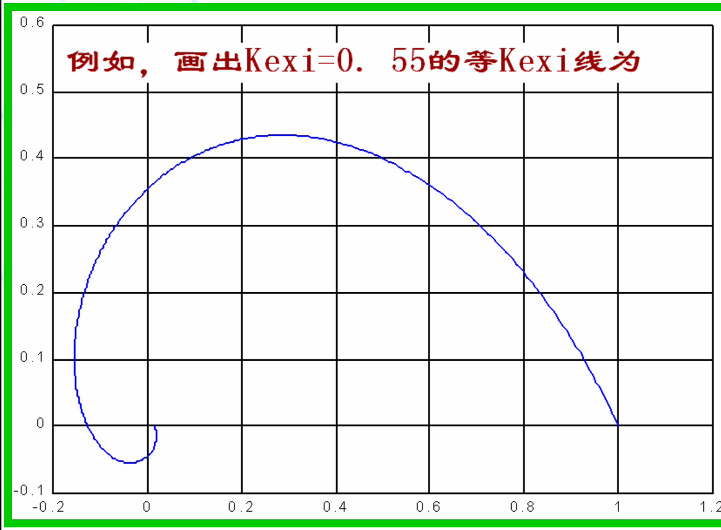


图 3-9　阻尼比线及其映射

对数螺线

相关公式	Matlab命令

$\xi = \cos\beta$
$ctg\beta = ctg(\cos^{-1}\xi) = -\sigma/\omega$
$s = -\sigma + j\omega = -\omega ctg\beta + j\omega$
$z = e^{Ts} = e^{-\omega T ctg\beta}e^{j\omega T}$
$\|z\| = e^{-\omega T\cdot ctg\beta}$
$\angle z = \omega T$
	B=acos(Kexi);
	ctgB=1/tan(B);
	WT=0:0.01:2*pi;
	EW=exp(-WT*ctgB);
	x=EW.*cos(WT);
	y=EW.*sin(WT);
	plot(x,y)

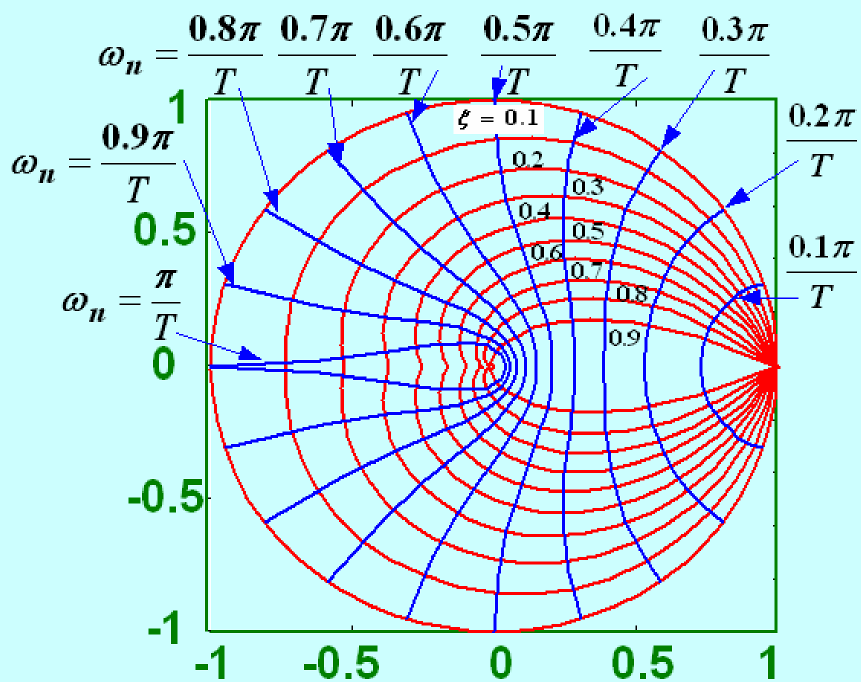


6. s平面上等值线在z平面的映射

4）s平面上等自然频率轨迹的映射

s平面 $s=\sigma\pm j\omega=\omega_n e^{j\varphi}=\omega_n\sin\varphi\pm\omega_n\cos\varphi$ $\varphi=\cot^{-1}(\sigma/\omega)$

z平面 $z=e^{sT}=e^{T\omega_n\cos\varphi}e^{T\omega_n\cos\varphi}$ $R=e^{T\omega_n\cos\varphi},\angle z=T\omega_n\sin\varphi$



采用matlab的“zgrid”命令

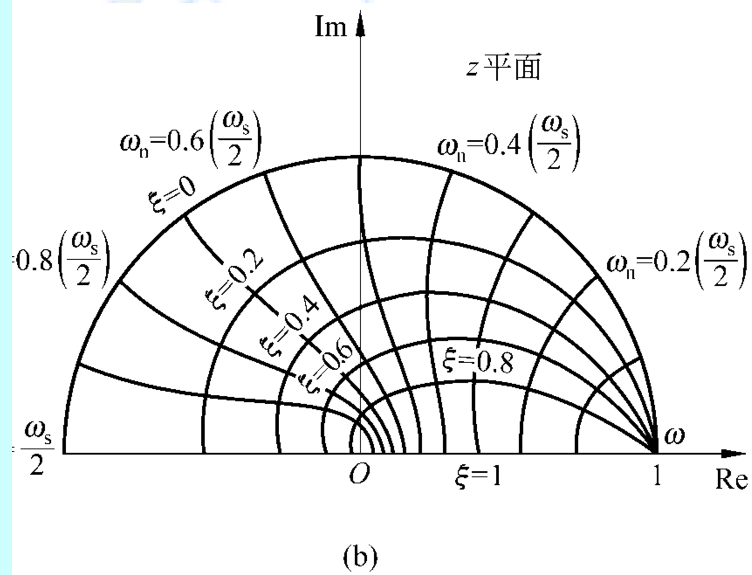


图3-10 等自然频率轨迹映射

3.1.2 离散系统的稳定条件

稳定性定义：

当作用于系统上的扰动作用消失以后，系统能恢复到原来的平衡状态。系统稳定性是系统固有特性，与扰动形式无关，只取决于系统本身固有参数。

对于连续系统：

$$G(s)=\frac{M(s)}{D(s)}=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}\qquad m\le n$$

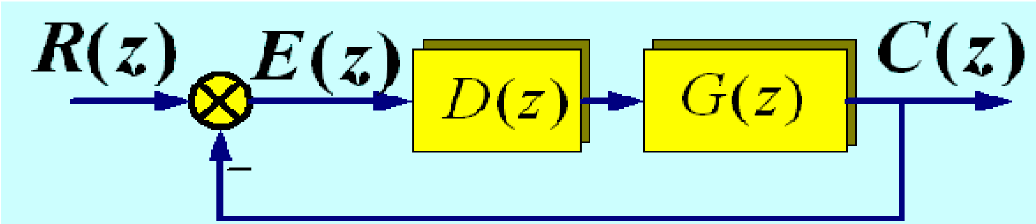
系统稳定的充分必要条件是所有极点分布在S左平面。

对于离散系统：

$$F(z)=\frac{KN(z)}{D(z)}=\frac{K(z-z_1)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)\cdots(z-p_n)}\qquad m\le n$$

可通过S平面到Z平面之间映射关系确定

3.1.2 离散系统稳定性条件



系统闭环脉冲传函：

$$\phi(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$$

计算机控制系统离散域结构图

$$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right]$$

闭环系统特征方程：

$$1+D(z)G(z)=0$$

s平面上，系统稳定的分界线为 虚轴　　劳斯稳定判据

z平面上，系统稳定的分界线为 单位圆

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}$$

离散系统稳定性条件推导：

$$C(z)=\frac{A_1 z}{z-p_1}+\frac{A_2 z}{z-p_2}+\cdots+\frac{A_n z}{z-p_n}$$

$$C(k)=A_1 p_1^k+A_2 p_2^k+\cdots+A_n p_n^k=\sum_{i=1}^{n}A_i p_i^k$$

稳定性要求：扰动消失后系统能回到平衡状态

$$\lim_{k\to\infty}C(k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A_i p_i^k=0$$

$$\lim_{k\to\infty}A_i p_i^k=0 \Rightarrow A_i\neq 0 \Rightarrow |p_i|<1 \quad i=1,2,\cdots,n$$

判别法
- 直接法——直接求G(z)的极点
- 稳定判据——朱利判据

$$G(z)=\frac{P(z)}{z^2-z-2} \rightarrow z^2-z-2=(z-2)(z+1)=0 \rightarrow$$ 系统不稳定。

```
C=[1,-1,-2]; r=roots(C);
```

3.1.3 离散系统稳定性检测

1. 直接求取特征方程根

❖缺点是难于分析系统参数的影响

例3-2 已知 $\Delta(z)=z^4-1.2z^3+0.07z^2+0.3z-0.08=0$

Matlab命令

```
c=[1 -1.2  0.07  0.3  -0.08];
r=roots(c)
```

```
r =  -0.5000
     0.8000
     0.5000
     0.4000
```

系统稳定

例3-3 已知 $\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3 & -0.4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$

Matlab命令

```
F = [-1.3   -0.4
          1       0   ];
g=eig(F)
```

```
g =
   -0.8000
   -0.5000
```

系统稳定

2 朱利–阿斯特隆姆稳定判据

$$\Delta(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$ a_i 为实系数

$$b_{n-i}=a_{n-i}-a_i\times k_1$$

$$
\begin{array}{lllllllll}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \\
—) & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \times(k_1=a_n/a_0) \\
\hline
 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & & \\
—) & b_{n-1} & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 & \times(k_2=b_{n-1}/b_0) & \\
\hline
 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & & & \\
—) & c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \cdots & c_0 & \times(k_3=c_{n-2}/c_0) & & \\
\hline
 & \vdots & & & & & & & \\
\hline
 & l_0 & l_1 & & & & & & \\
—) & l_1 & l_0 & \times(k_n=l_1/l_0) & & & & & \\
\hline
 & m_0 & & & & & & &
\end{array}
$$

系统稳定条件

$$a_0>0,b_0>0,c_0>0,\cdots,l_0>0,m_0>0$$

系统稳定必要条件：

$$\Delta(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

$$\begin{cases}\Delta(z)\big|_{z=1}>0\\(-1)^n\Delta(z)\big|_{z=-1}>0\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases}\Delta(1)>0\\(-1)^n\Delta(-1)>0\end{cases}$$

判断系统稳定性步骤：

1. 判断必要条件是否成立，若不成立则系统不稳定
2. 若必要条件成立，构造朱利表。

二阶系统稳定性条件：

$$\Delta(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

必要条件： $\Delta(1) > 0 \quad \Delta(-1) > 0$

构造朱利表：

$$\begin{array}{rccccl} & 1 & a_1 & a_2 & \\ -) & a_2 & a_1 & 1 & \times \dfrac{a_2}{1} \\ \hline & 1-a_2^2 & & & \end{array}$$

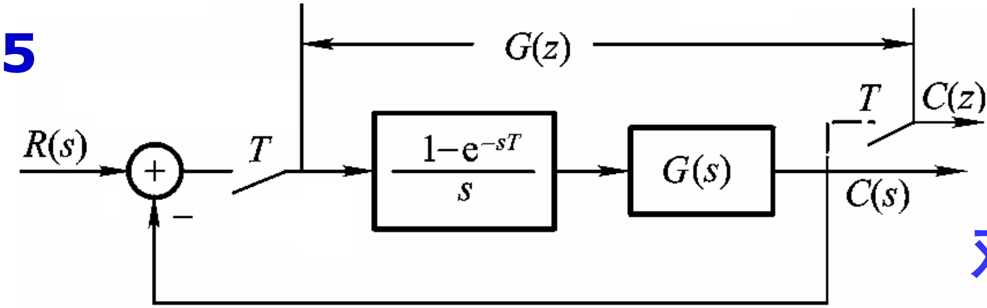
$$1 - a_2^2 > 0 \Rightarrow |a_2| < 1 \Rightarrow |\Delta(0)| < 1$$

充分必要条件：

$$\begin{cases} |\Delta(0)| < 1 \\ \Delta(1) > 0 \\ \Delta(-1) > 0 \end{cases}$$

3.1.4 采样周期与系统稳定性

例3-5



$$G(s)=\frac{k}{0.1s+1}$$

对连续系统，$k>0$即稳定

讨论采样周期对离散系统稳定性影响

$$G(s)=\frac{k}{0.1s+1} \Rightarrow G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{k}{s(0.1s+1)}\right]=\frac{k(1-e^{-10T})}{z-e^{-10T}}$$

$$\Delta(z)=1+G(z)=0 \Rightarrow \Delta(z)=z+k(1-e^{-10T})-e^{-10T}=0$$

$$|(1-e^{-10T})k-e^{-10T}|<1 \Rightarrow -1<(1-e^{-10T})k-e^{-10T}<1$$

$$\boxed{k>-1}$$

$$\boxed{k<(1+e^{-10T})/(1-e^{-10T})}$$

$T=1 \Rightarrow -1<k<1$

$T=0.1 \Rightarrow -1<k<2.165$

$T=0.01 \Rightarrow -1<k<20$

结 论

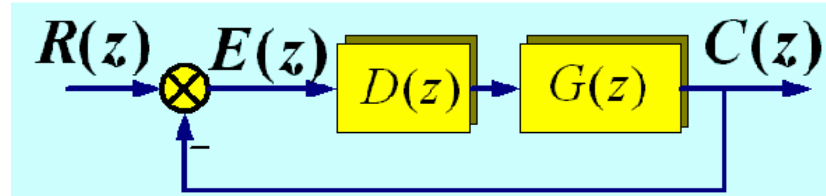
- 离散系统稳定性比连续系统稳定性差
  - 对连续系统， $k>0$即稳定；
  - 对离散系统，k必须限制在一定范围内，且依赖采样周期。
- 采样周期T是影响稳定性的重要参数
  - 一般来说，T减小，稳定性增强。

$$T=1 \Rightarrow -1<k<1$$

$$T=0.1 \Rightarrow -1<k<2.165$$

$$T=0.01 \Rightarrow -1<k<20$$

3.2 稳态误差分析



连续系统：$e(t)=r(t)-c(t)$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)$$

离散系统： $e^*(t)=r^*(t)-c^*(t)$

$$e_{ss}^*=\lim_{t\to\infty}e^*(t)=\lim_{k\to\infty}e(kT)$$

给定$R(z)$情况下的离散系统稳态误差的计算：

$$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+D(z)G(z)} \qquad E(z)=\Phi_e(z)R(z)=\frac{1}{1+D(z)G(z)}R(z)$$

$$e_{ss}^*=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to1}(z-1)E(z)$$ (终值定理)

$$e_{ss}^*=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+D(z)G(z)}R(z)$$

e_{ss}^* 与输入信号$R(z)$及系统 $D(z)G(z)$ 结构特性均有关

1. 指令信号作用下的稳态误差计算

$r(t) = 1(t)$

（1）输入信号为单位阶跃函数

$R(z) = 1/(1 - z^{-1})$

$$e_{ss}^* = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{1}{1 + D(z)G(z)}\cdot\frac{1}{(1 - z^{-1})} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{1 + D(z)G(z)}$$

$$= \frac{1}{1 + \lim_{z\to 1} D(z)G(z)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{1}{1 + D(z)G(z)}R(z)$$

$K_p = \lim_{z\to 1} D(z)G(z)$ 称为**稳态位置误差系数**

对"0"型系统，$D(z)G(z)$ 在z=1处无极点 Kp为有限值

对"I"型系统，$D(z)G(z)$ 在z=1处有1个极点 $K_p = \infty, e_{ss} = 0$

若输入为阶跃信号，对单位反馈系统，系统无稳态误差的条件是系统前向通道中至少含有1个积分环节。

(2)输入信号为单位斜坡信号

$$r(t)=t \qquad R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e_{ss}^{*}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+D(z)G(z)}\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{T}{(z-1)+(z-1)D(z)G(z)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{T}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)D(z)G(z)}=1/K_v$$

$$e_{ss}^{*}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+D(z)G(z)}R(z)$$

$K_v=\frac{1}{T}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)D(z)G(z)$ 称为稳态速度误差系数

对“0”型系统,$D(z)G(z)$ 在z=1处无极点, $K_v=0, e_{ss}=\infty$

对“I”型系统,$D(z)G(z)$ 在z=1处有1个极点 , $K_v=常值, e_{ss}=\frac{1}{K_v}$

对“II”型系统,$D(z)G(z)$ 在z=1处有2个极点, $K_v=\infty, e_{ss}=0$

(3)输入信号为单位加速度信号

$$r(t)=\frac{1}{2}t^2 \qquad R(z)=\frac{T^2(z+1)z}{2(z-1)^3}$$

$$e_{ss}^*=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+D(z)G(z)}\frac{T^2(z+1)z}{2(z-1)^3}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{T^2}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2D(z)G(z)}=1/K_a$$

$$e_{ss}^*=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+D(z)G(z)}R(z)$$

$K_a=\frac{1}{T^2}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2D(z)G(z)$称为稳态加速度误差系数

对“0”型系统,$D(z)G(z)$ 在z=1处无极点,$K_a=0, e_{ss}=\infty$

对“I”型系统,$D(z)G(z)$ 在z=1处有1个极点,$K_a=0, e_{ss}=\infty$

对“II”型系统,$D(z)G(z)$ 在z=1处有2个极点,$K_a=$常值$, e_{ss}=\frac{1}{K_a}$

离散及连续系统稳态误差系数

误差系数	连续系统	离散系统
K_p	$\lim\limits_{s\to 0} D(s)G(s)$	$\lim\limits_{z\to 1} D(z)G(z)$
K_v	$\lim\limits_{s\to 0} sD(s)G(s)$	$\frac{1}{T}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)D(z)G(z)$
K_a	$\lim\limits_{s\to 0} s^2 D(s)G(s)$	$\frac{1}{T^2}\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2 D(z)G(z)$

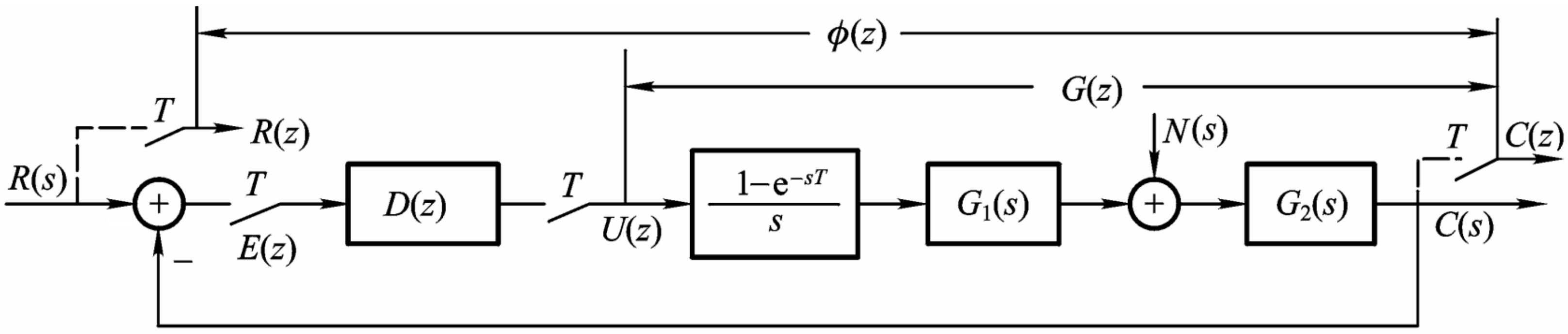
离散系统稳态误差

e_{ss}^*	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=\frac{1}{2}t^2$
0型系统	$1/(1+K_p)$	∞	∞
I型系统	0	$1/K_v$	∞
II型系统	0	0	$1/K_a$

关于稳态误差的说明

1. 计算稳态误差前提条件是系统稳定；
2. 稳态误差无穷大不等于系统不稳定，它只表明该系统不能跟踪所输入的信号。
3. 稳态误差是系统原理性误差，只与系统结构和外部输入有关，与元器件精度无关。
4. 对于具有零阶保持器的采样系统，稳态误差与采样周期无关。P89-90自学

2.干扰作用下的离散系统稳态误差



干扰 $n(t)$ 是一种无用信号，

它引起的输出 $c_n(t)$ 完全是系统的误差。 $e(t)=-c_n(t)$

$$r(t)=0$$

干扰引起的输出 $C_N(z)=\dfrac{NG_2(z)}{1+D(z)G(z)}$

$$e_{ssN}^{*}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=-\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})C_N(z)$$

3.2.3 采样周期对稳态误差的影响

- 对具有零阶保持器的采样系统而言，稳态误差的计算与T无关，只与系统的类型、输入信号的形式有关。

以下为针对不具有ZOH的采样系统的计算。

$$G(z)=Z\left[\frac{1}{s}\right]=\frac{z}{z-1}$$

$$K_p=\lim_{z\to 1}G(z)=\infty$$

$$K_v=\frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)=\frac{1}{T}$$

$$K_a=\frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)=0$$

$$G(z)=Z\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$K_p=\lim_{z\to 1}G(z)=\infty$$

$$K_v=\frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)=\infty$$

$$K_a=\frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)=\frac{1}{T}$$

D/A本身就是一个ZOH

3.3 时域特性分析

3.3.1 离散系统动态特性指标的提法及限制条件

一、离散系统动态性能指标

动态特性主要是用系统在单位阶跃输入信号作用下的响应特性来描述。

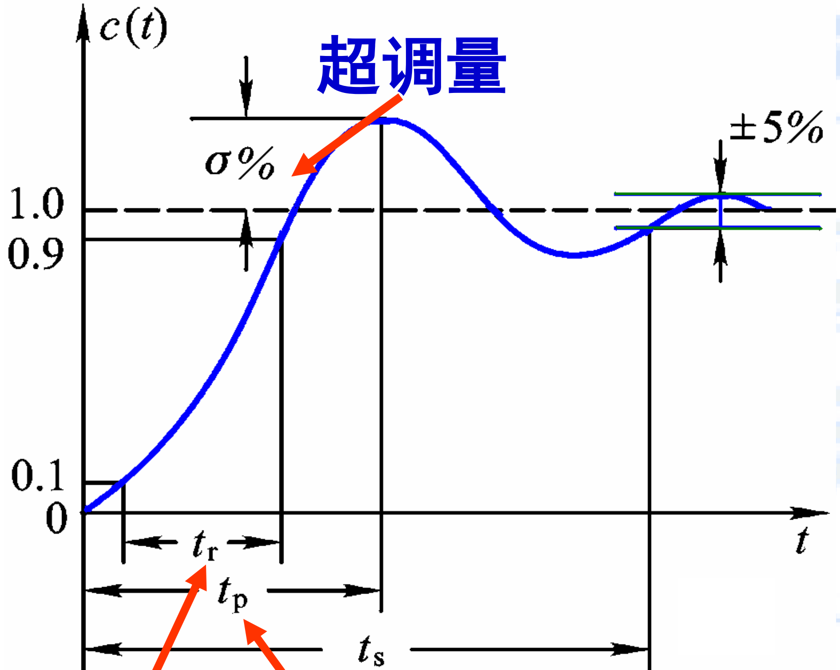


图3-15 系统阶跃响应特性

上升时间

峰值时间

调节时间

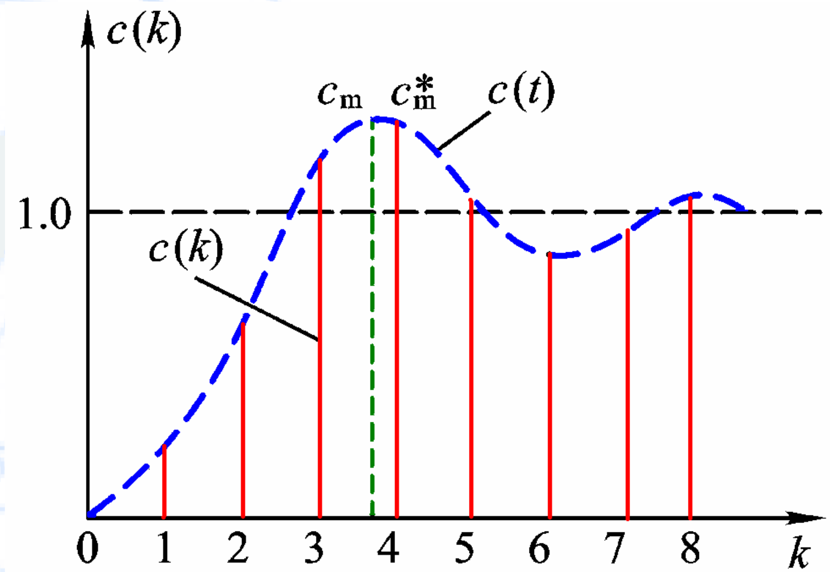


图3-16 系统阶跃响应的采样

3.3.2 极点位置与时间响应的关系

1．极点位于实轴

$$G(z)=c_i\frac{z}{z-p_i} \Rightarrow c(k)=c_i p_i^k$$

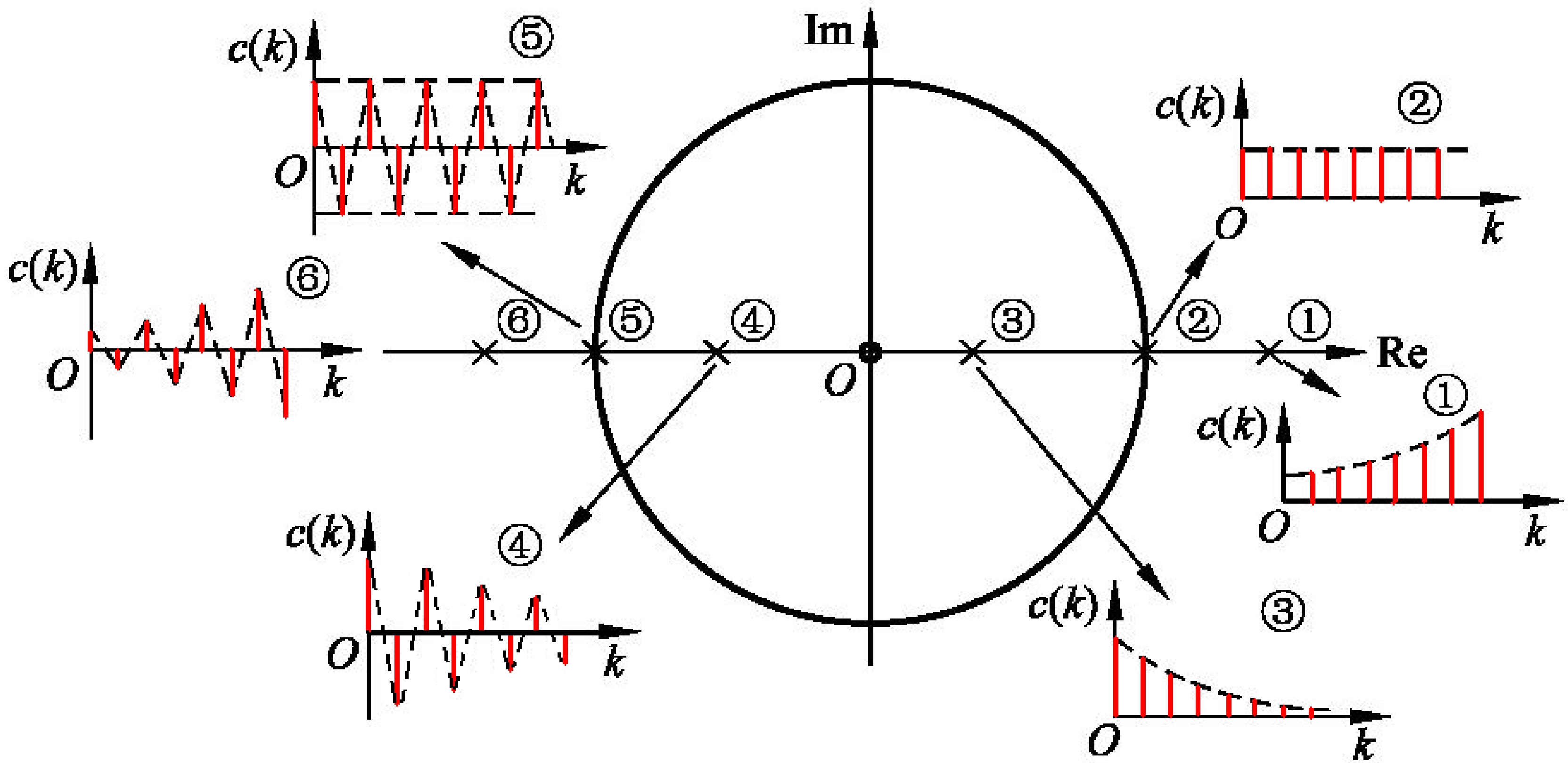


图3-17　z 平面极点分布与脉冲响应（实极点）

例3-7 已知数字滤波器 $D(z)=\dfrac{0.126z^3}{(z+1)(z-0.55)(z-0.6)(z-0.65)}$

试估计单位阶跃响应及稳态值

$$C(z)=D(z)R(z)=\frac{0.126z^3}{(z+1)(z-0.55)(z-0.6)(z-0.65)}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{Az}{z-1}+\frac{Bz}{z+1}+\frac{c_1z}{z-0.55}+\frac{c_2z}{z-0.6}+\frac{c_3z}{z-0.65}$$

$$c(k)=A+B(-1)^k+\sum_{i=1}^{3}c_ip_i^k$$

$$A=C(z)(z-1)\big|_{z=1}=1$$

$$B=C(z)(z+1)\big|_{z=-1}=0.015\,4$$

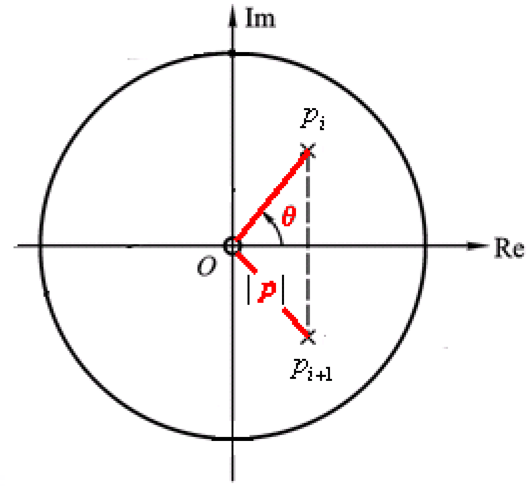
稳态值A

单调收敛，很快衰减为0

振幅为 $\pm B$ 的等幅振荡脉冲

2. 极点为复根

$$G(z)=\frac{c_{i+1}z}{z-p_i}+\frac{c_i z}{z-p_{i+1}}$$



$$c_i\,,c_{i+1}=|c|e^{\pm j\varphi} \qquad p_i\,,p_{i+1}=|p|e^{\pm j\theta}$$

$$c(k)=Z^{-1}\left[G(z)\right]=c_{i+1}p_i^k+c_i p_{i+1}^k$$

$$=|c|e^{-j\varphi}|p|^k e^{j\theta k}+|c|e^{j\varphi}|p|^k e^{-j\theta k}$$

$$=|c||p|^k[e^{j(k\theta-\varphi)}+e^{-j(k\theta-\varphi)}]$$

$$=2|c||p|^k\cos(k\theta-\varphi)$$

$$=2|c||p|^k\cos\left(\frac{\theta}{T}kT-\varphi\right)$$

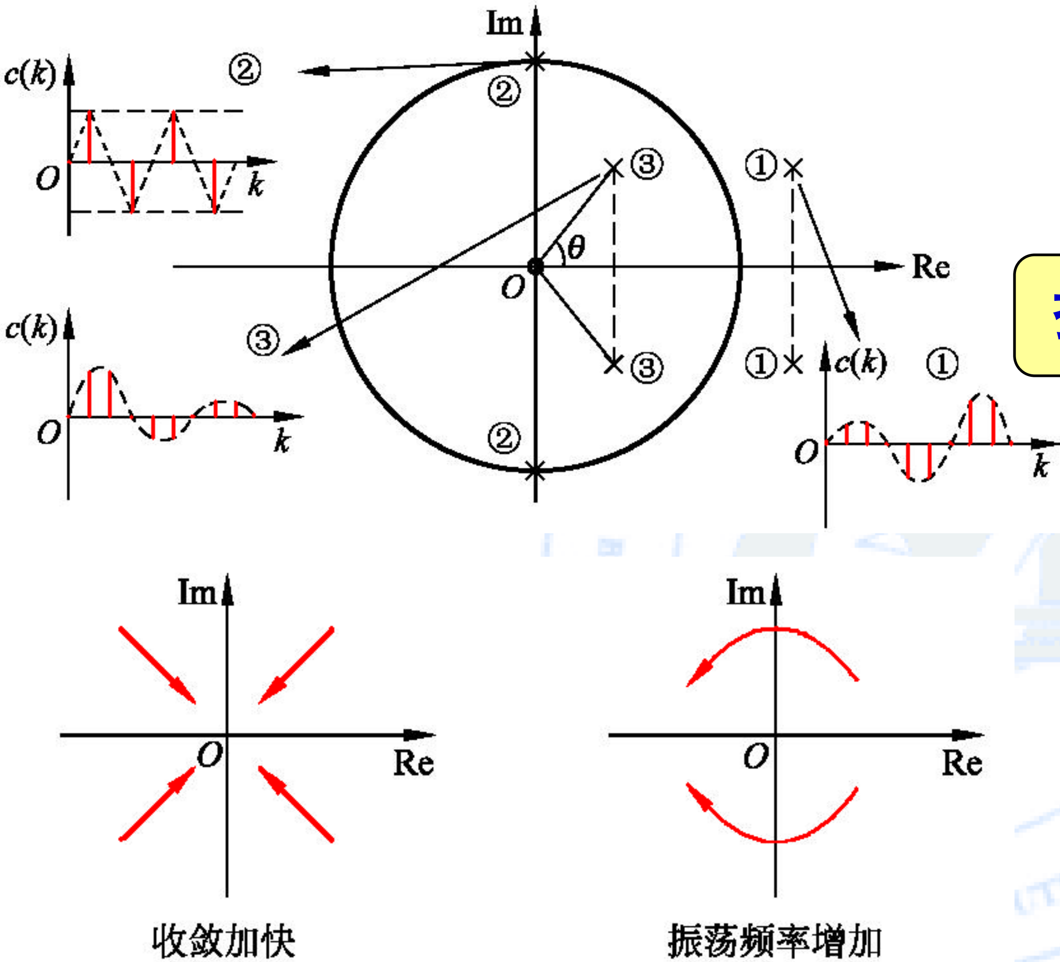
振荡频率：

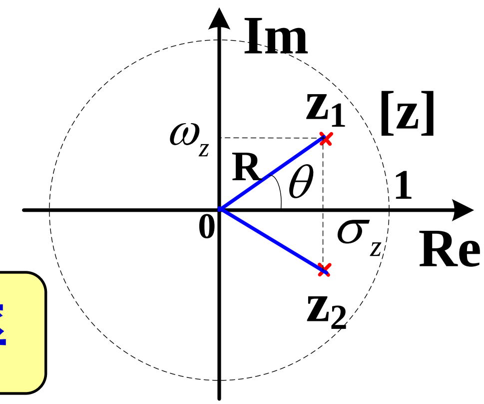
$$\omega=\frac{\theta}{T}=\frac{\omega_s\theta}{2\pi}$$

振荡幅值与 $|p|^k$ 有关

$$x(t)=A\cos\left(\omega_1 t-\varphi\right)$$ 的振荡频率？

复极点位置与系统响应之间关系





振荡频率

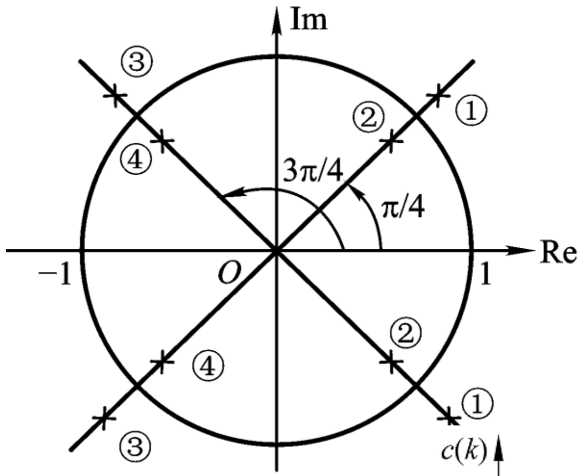
$$\omega_d = \frac{\theta}{T} = \frac{\omega_s \theta}{2\pi}$$

振荡周期

$$T_d = 2\pi / \omega_d = 2\pi T / \theta$$

图3-17 z平面极点分布与脉冲响应（复极点）

例3-8 分析z平面上4对共轭复数极点对应的脉冲响应



(a)

极点①②： $\theta=\pm\dfrac{\pi}{4},T_d=2\pi T/\theta=8T$

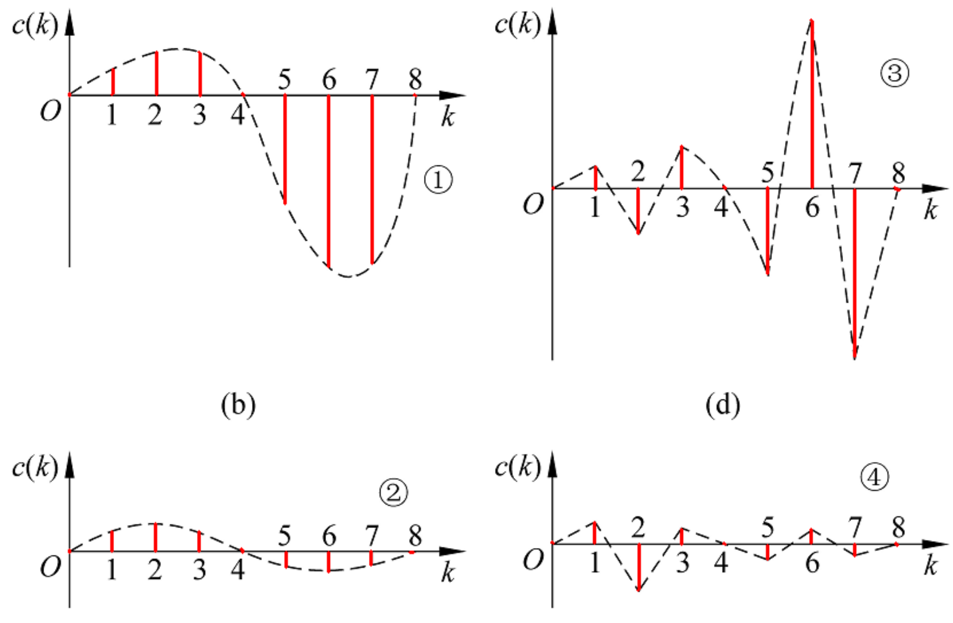
极点③④： $\theta=\pm\dfrac{3\pi}{4},T_d=2\pi T/\theta=\dfrac{8T}{3}$

$|p_1|>1$

发散

$|p_3|>1$

发散



(b) (d)

(c) (e)

$|p_2|<1$

收敛

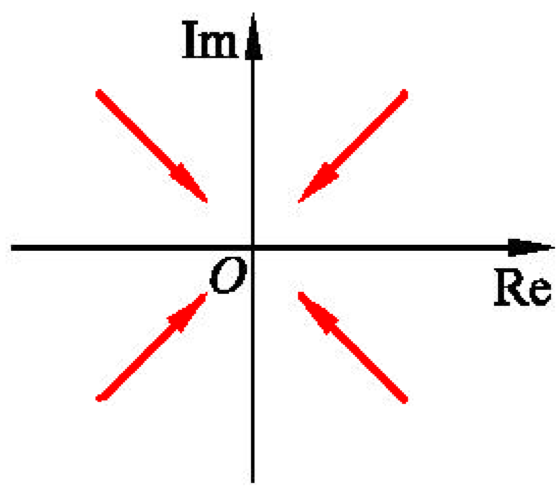
$|p_4|<1$

收敛

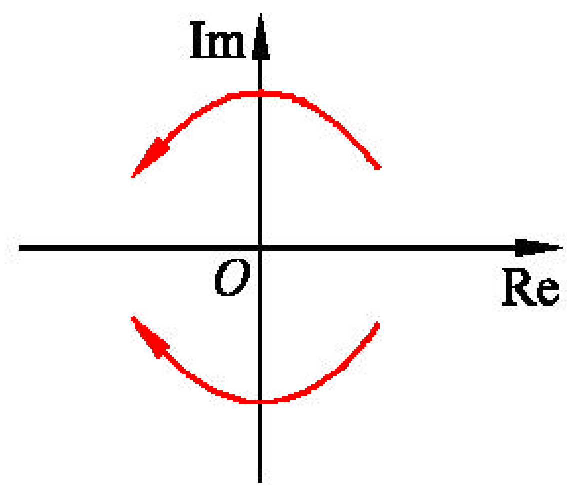
脉冲响应的形状、周期？

结论

- 极点越靠近原点，收敛越快。
- 极点的相角越大，振荡频率越高。
- 系统的脉冲响应与极点有关，还与零点有关。
  - 零点使动态相应提前，极点则滞后。



收敛加快



振荡频率增加

P_i=0，脉冲响应时间最短，延时一拍。

3.4 频域特性分析

3.4.1 频域系统稳定性分析

离散系统特征方程 $1+kD(z)G(z)=0$

乃奎斯特稳定判据：

(1) 确定 $kD(z)G(z)$ 的不稳定的极点数 p；

(2) 以 $z=e^{j\omega T}$ 代入，在 $0\le\omega T\le 2\pi$ 范围内，画开环频率特性 $kD(e^{j\omega T})G(e^{j\omega T})$；

(3) 计算该曲线顺时针方向包围$z=-1$的数目 n；

(4) 计算$z=p-n$；当且仅当$z=0$时，闭环系统稳定。

注意：z平面的不稳定域是单位圆外部。

3.4.2相对稳定性的检验

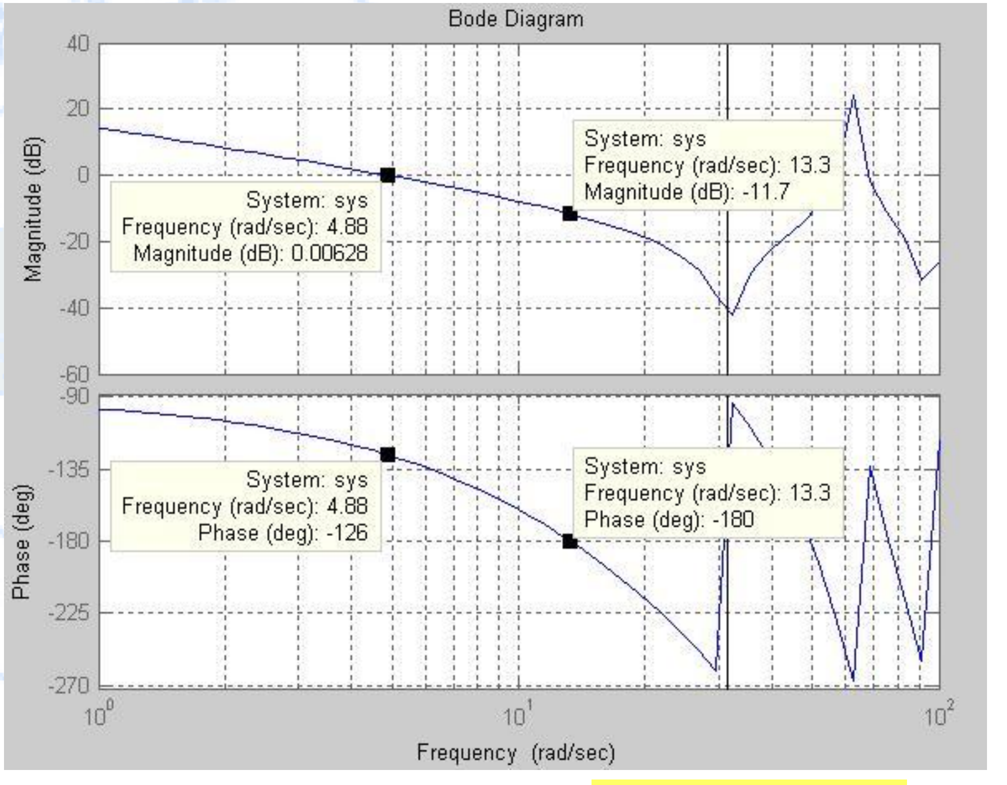
- 离散时间系统引进**幅值裕度**和**相位裕度**的相对稳定性的概念（定义与连续系统相同）
- 利用这两个指标，可以间接判断和检测闭环系统的动态特性（系统快速性、振荡性等）

$$G(z)=\frac{k(z+1)}{(z-1)(z-0.242)}$$

***k*= 0. 198**

Matlab命令

```
w=logspace(0,2);
zG=[0.198 0.198];
pG=[1 -1.242 0.242];
dbode(zG,pG,0.1,w)
grid
```



截止频率 $\omega_c=4.88rad/s$ 相位裕度 $\gamma_m=54^0$ 幅值裕度 $L_h=11.7dB$ $\omega_h=13.3rad/s$

Matlab程序

```
zG=[0.198 0.198];
pG=[1 -1.242 0.242];
T=0.1;
hd = tf(zG,pG,T) ;
[Gm,Pm,Wg,Wp] = margin(hd)
```

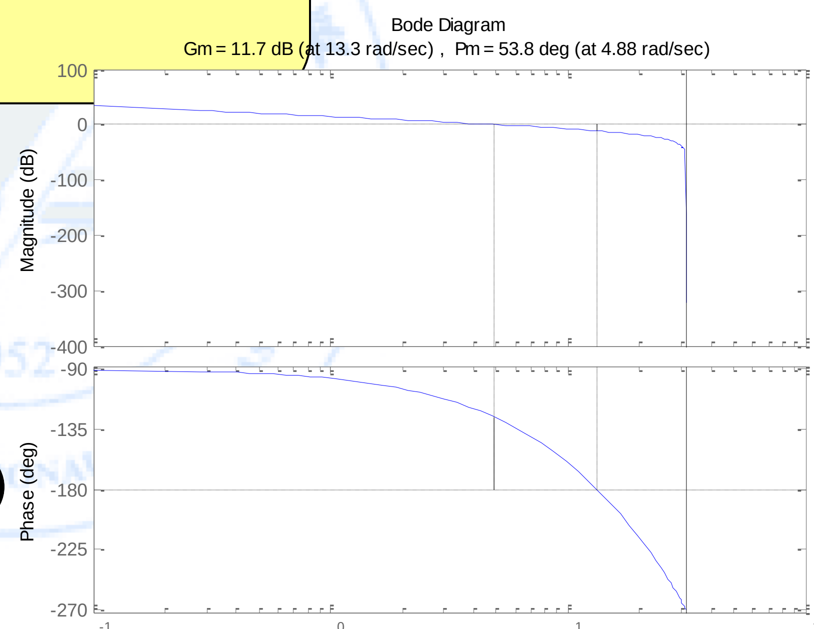
Gm = 3.8284

Pm = 53.7924 deg

Wg = 13.2639 rad/s

Wp = 4.8850 rad/s

margin(hd)



Gm=11.7dB(at13.3rad/sec),

Pm=53.8deg(at4.88rad/sec)

注意有: Gm_dB = 20*log10(3.8284)= 11.6603 (dB)

3.5 应用实例

$D(z)=k_d$

- 求使系统稳定的参数$D(z)=k_d$的范围；
- 确定系统的静态误差系数以及常值干扰$U_n(s)$时的稳态误差；
- 确定当T=0.02s、k_d=10时系统的稳定裕度；
- 计算T=0.02s、k_d=10时，闭环系统的单位阶跃曲线，并求系统的主要动态响应指标。

解：(1) 系统传递函数

$$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K_\omega}{(T_\omega s+1)}\cdot\frac{1}{is}\right]=Z\left[\frac{K(1-e^{-Ts})}{s^2(s+a)}\right]=Z\left[\frac{20(1-e^{-Ts})}{s^2(s+10)}\right]$$

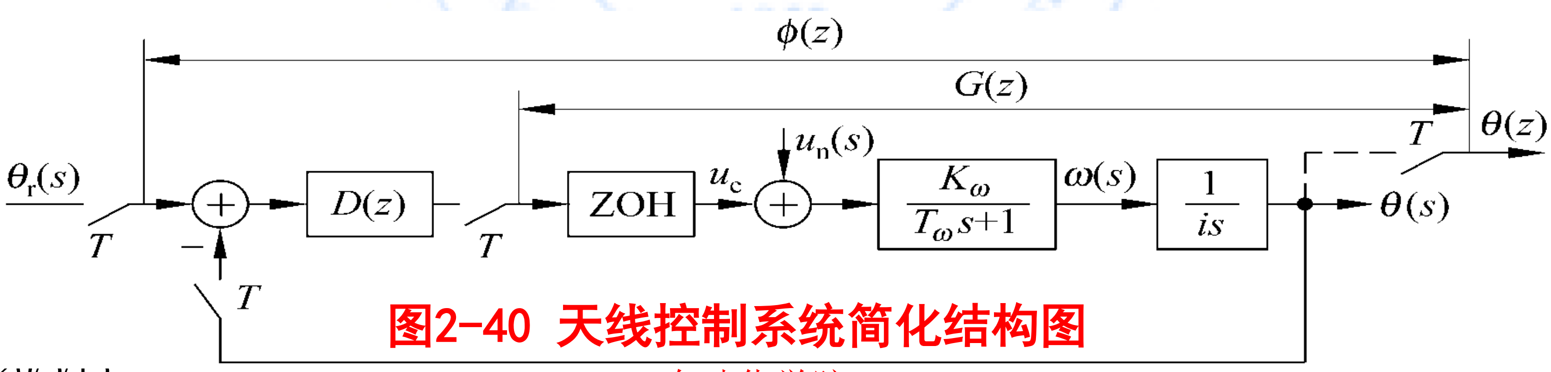


图2-40 天线控制系统简化结构图

(2) 判断稳定性

根据 $\begin{cases} |\Delta(0)|<1 \\ \Delta(1)>0 \\ \Delta(-1)>0 \end{cases}$ $D(z)=k_d$

$$\Delta(z)=1+D(z)G(z)$$

$$=(z-1)(z-e^{-10T})+k_d\{(2T-0.2+0.2e^{-10T})z-[(0.2+2T)e^{-10T}-0.2]\}$$

$$=z^2-[1+e^{-10T}-(2T-0.2+0.2e^{-10T})k_d]z+\{e^{-10T}-k_d[(0.2+2T)e^{-10T}-0.2]\}=0$$

$$G(z)=\frac{(2T-0.2+0.2e^{-10T})z-[(0.2+2T)e^{-10T}-0.2]}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

$$\Delta(1)=1-[1+e^{-10T}-(2T-0.2+0.2e^{-10T})k_d]+\{e^{-10T}-k_d[(0.2+2T)e^{-10T}-0.2]\}>0$$

整理得 $2k_dT(1-e^{-10T})>0 \xrightarrow{T>0} \boxed{k_d>0}$

$$\Delta(-1)=1+[1+e^{-10T}-(2T-0.2+0.2e^{-10T})k_d]+\{e^{-10T}-k_d[(0.2+2T)e^{-10T}-0.2]\}>0$$

$$\boxed{(1+e^{-10T})+\left[0.2(1-e^{-10T})-T(1+e^{-10T})\right]k_d>0}$$

．若改变采样周期T，考查极限放大系数k_d的变化

$$-1<[e^{-10T}-k_d((0.2+2T)e^{-10T}-0.2)]<1$$

$$k_d>0$$

$$(1+e^{-10T})+\left[0.2(1-e^{-10T})-T(1+e^{-10T})\right]k_d>0$$

$T=$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5
$k_d\le$	100.8	51.6	21.8	11.96	7.28	5.17

结论：随着采样周期的增大，
保证系统稳定的极限放大系数减小

(3) 稳态特性分析

- 该系统为I型系统，位置误差系数 $k_p = \infty$
  速度误差系数 $k_v = k_d k_\omega / i = 2k_d$
- 由于干扰 $u_n = 1(t)$ 所引起的输出均为误差

$$U_n G_1(z) = 2Z\left[\frac{10}{s^2(s+10)}\right] = \frac{0.003\,74(z+0.939)z}{(z-1)^2(z-0.8187)}$$

T=0.02s、*kd* =10时

$$\theta_n(z) = \frac{U_n G(z)}{1+D(z)G(z)} = \frac{U_n G(z)}{1+10G(z)} = \frac{0.00374(z+0.939)z}{(z^2-1.7813z+0.85382)(z-1)}$$

稳态误差：

$$e_{ss} = -\theta_{ss} = -\lim_{z\to 1}(z-1)\theta_n(z) = \frac{-0.00374(z+0.939)z}{(z^2-1.7813z+0.85382)(z-1)} = -0.1$$

(4)稳定裕度的计算

开环传函 $$D(z)G(z)=\frac{10\times 0.00374(z+0.939)}{z^2-1.8187z+0.8187}=\frac{0.0374z+0.0351}{z^2-1.8187z+0.8187}$$

Matlab命令

```
num=[0.0374 0.0351];
den=[1 -1.8187 0.8187];
w=logspace(0,2);
dbode(num,den,0.02,w)
grid
```

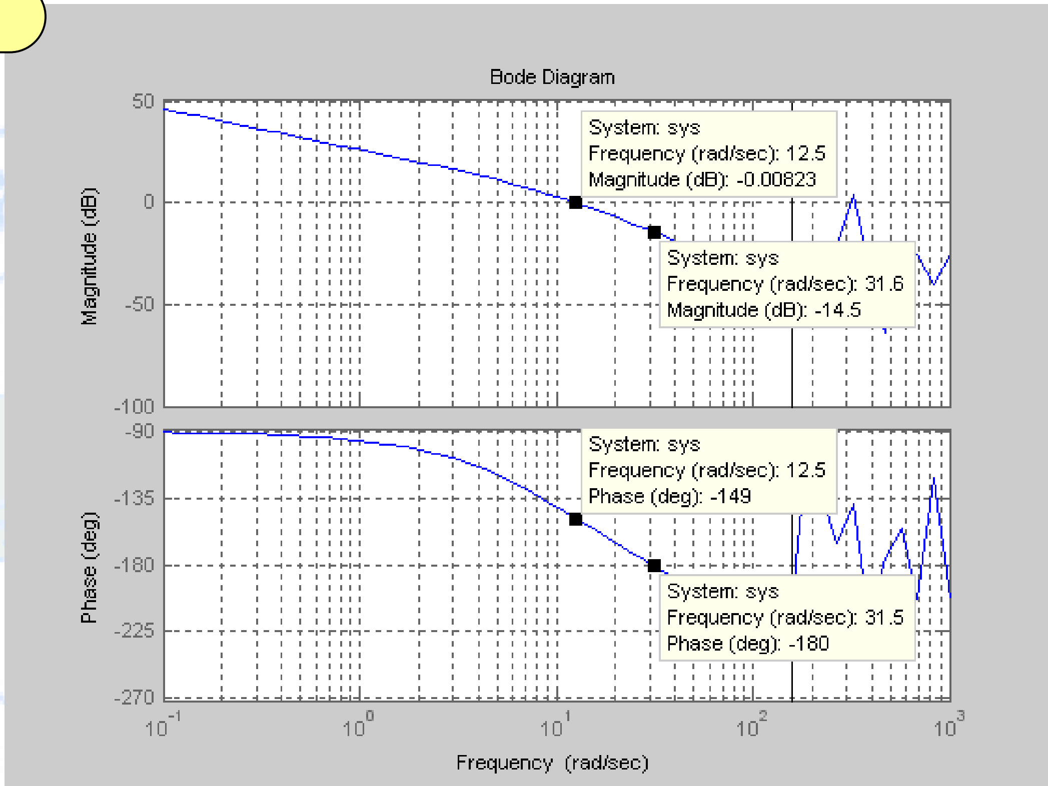


图3-21 Bode图及稳定裕度

Gm=14.3dB(at31.1rad/sec)
Pm=31.6deg(at12.5rad/sec)

截止频率 $$\omega_c=12.5rad/s$$

相位裕度 $$\gamma_m=31^0$$

幅值裕度 $$L_h=14.5dB$$

$$\omega_h=31.5rad/s$$

(5) 动态响应计算

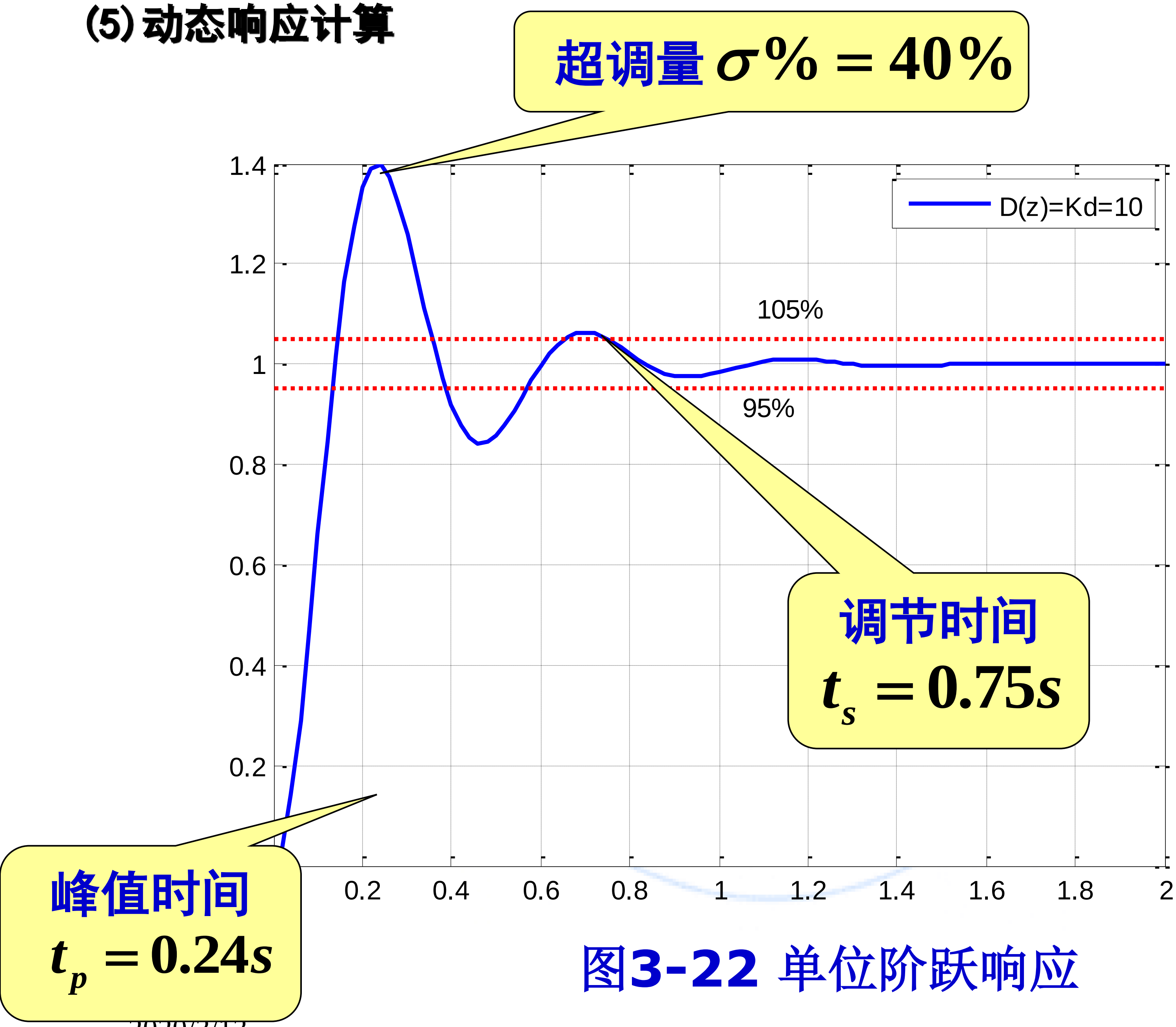


图3-22 单位阶跃响应