工科数学分析（2）期中复习提纲

☺ 函数列与函数项级数：

熟练掌握函数序列逐点收敛定义，一致收敛的定义以及判别方法（充要条件）；函数项级数一致收敛的判别定理：Cauchy 收敛原理、 Weierstrass 判别法、Dirichlet 判别法、Abel 判别法；内闭一致收敛；函数序列极限函数以及函数项级数和函数的分析性质：连续，可微，可积分；幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域的求法；会使用逐项求导逐项积分的方法求幂级数的和函数…

典型题目：

1．判断或讨论下列函数列和函数项级数的一致收敛性

（1） $f_n(x)=x^n \quad (a)x\in(0,1) \quad (b)x\in(0,\delta)$

(2) $f_n(x)=xe^{-nx} \quad x\in(0,+\infty)$

(3) $f_n(x)=nx(1-x)^n \quad x\in[0,1]$

(4) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2} \quad (a)x\in(0,1)\,(b)x\in(0,1)$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx} \quad x\in[0,+\infty)$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx} \quad (a)x\in(0,+\infty)\,(b)x\in[\delta,+\infty)$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n} \quad x\in[\delta,2\pi-\delta] \quad 0<\delta<\pi$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}} \quad x\in[0,1]$

2．证明（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在[0, 1]上一致收敛（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ 在[0, 1]上不一致收敛，

但是在$[0,\delta]$(其中$0<\delta<1$)上一致收敛.

3．证明函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ （1）在$(0,+\infty)$上不一致收敛（2）在$(0,+\infty)$上连续，且有各阶连续导数.

4．证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续，且在 $(1,+\infty)$ 上有各阶连续导数.

5．求下列幂级数的收敛区间和收敛域.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)3^n}$ （2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n2^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$

6．求下列幂级数的收敛区间，并求其在收敛区间上的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2x^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

7．设 $a>0$，计算极限 $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n})$ 的值

☺ Fourier 级数与 Fourier 变换

了解 Fourier 级数的基本概念。熟练掌握 Fourier 级数的计算： 以 2π 、$2l$ 为周期的周期函数的 Fourier 级数展开； 偶函数与奇函数的 Fourier 级数…（含 Fourier 级数收敛性的判别—Diriclilet 收敛定理）

典型题目：

1. 将下列函数在展开成 Fourier 级数:

（1） $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0;\\ x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

(2) $f(x)=|\cos x| \quad x\in[-\pi,\pi]$

(3) **将 $f(x)=x^2$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦和余弦级数.**

(4) 求函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{12}\left(3x^2-6\pi x+2\pi^2\right), 0<x<2\pi$，的 *Fourier* 级数，

并证明： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(5)将函数 $f(x)=|x| \ (-1\le x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅立叶级数.

2. 试问如何把定义在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的可积函数延拓到区间 $\left(-\pi,\pi\right)$，使它们的 *Fourier* 级数具有如下形式：

$$1)\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos\left(2nx\right);\qquad 2)\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}\sin\left(2nx\right).$$

☺ 多变量函数的极限与连续

了解 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中点集（开集，闭集，补集，边界，区域）的基本概念和性质。

掌握 $\boldsymbol{R}^n$ 中点列的极限、多变量函数极限和连续、一致连续的定义及其基本理论；有界闭集上连续函数的性质。熟练掌握二元函数重极限的求法（包括重极限不存在的判别），重极限与累次极限的关系…

典型题目：

1. 求下列函数的极限

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$　　（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{y}$

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$　　（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{xy}$

（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$　　（6）$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (1+\dfrac{1}{xy})^{x\sin y}$

2. 讨论下列函数在（0, 0）点的重极限和累次极限

（1）$f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$　　(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$　　(4) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}$

(5) $f(x,y)=\dfrac{x-y^2+y^3}{2x+y^2}$

3. 定义在 D 上的函数 $f(x,y)$ 分别对变量 x, y 连续，证明满足下列条件之一时，$f(x,y)$ 在 D 上连续.

1）$f(x,y)$ 对变量 y 满足 Lipschitz 条件：$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$, ,

$\forall (x,y_1),(x,y_2)\in D$

2）$f(x,y)$ 对 x 的连续关于 y 是一致的，即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0, |x_1-x_2|<\delta, \forall y\in D$:

$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<\varepsilon$；

3）$f(x,y)$ 关于变量 y 单调.

☺ 多元函数的微分学

掌握多变量函数偏导数与微分的定义以及连续、可偏导、可微分的关系。了解多变量函数的 Taylor 公式以及简单应用。熟练掌握多元函数求导法则、方向导数和梯度、高阶偏导数的计算；隐函数和隐函数组的存在定理以及求导方法、隐函数的几何应用：平面曲线的切线与法线、空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线方程；无条件极值及条件极值的求解方法、Lagrange 乘数法的基本原理与应用.

典型题目：

1. 求下列函数的偏导数、微分、方向导数、梯度

（1）$z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

（2）$u=x^{\frac{y}{z}}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$

（3）设 $z=e^{x-2y},x=\sin t,y=t^3$，求 $\dfrac{d^2 z}{dt^2}$

（4）设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\dfrac{x}{y},v=3x-2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

（5）$u=f(xy,\dfrac{x}{y})$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

（6）求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$，在点（2, 4）的全微分.

（7）求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处的沿由 $P(1,0)$ 到 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数.

(8) 求函数 $z=x^2+y^2\sin(xy)$ 的梯度

2. 假设 f_x,f_y,f_{yx} 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 的某个邻域内存在，f_{yx} 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 连续，证明：$f_{xy}\left(x_0,y_0\right)$ 存在，并且 $f_{xy}\left(x_0,y_0\right)=f_{yx}\left(x_0,y_0\right)$.

3. 函数 $f\left(x,y\right)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)点连续，偏导数存在，但偏导数在(0,0)点不连续，但在（0,0）点可微.

4. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在 $\left(0,0\right)$ 点连续，且偏导数存在，但在

$(0,0)$处不可微分.

5. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \qquad x^2+y^2\neq 0\end{cases}$ 在原点沿着任何方向的方向导数存在, 但是在原点不连续, 因此不可微.

6. 求下列方程或方程组所确定隐函数的导数

（1） $x+y+z=e^z$ 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

（2） $F\left(x+y+z,x^2+y^2+z^2\right)=0$， 求 z_x,z_{xy}；

（3） $\begin{cases}x+y+z=1\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$， 求 $\dfrac{dx}{dz},\dfrac{dy}{dz}$

（4） $\begin{cases}xu^2+v=y^3\\ 2yu-zv^3=4x\end{cases}$， 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$

7. 求下列曲线在指定点处的切线和法平面

（1） $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t, \quad 在点 t=\dfrac{\pi}{2}\\ z=4\sin\dfrac{t}{2}.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$ 在（1，−2, 1）点

8. 求下列曲面在指定点处的切平面和法线

（1） $z=2x^4+3y^2$ 在点 $(2,1,35)$；

（2） $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{4}{z}}=4$ 在点 $(\ln 2,\ln 2,1)$.

9.证明曲面 $F(\dfrac{z}{y},\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{x})=0$ 的所有切平面都过某一定点, 其中 F 具有连续的偏导数.

10.求函数 $f(x,y)=x^4+2y^4-2x^2-12y^2+6$ 的极值

11. 求 $z=\sin x+\sin y-\sin(x+y),(x,y)\in D=\left\{(x,y)\middle|x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq 2\pi\right\}$ 的最大值最小值.

12. 求函数 $u=xyz$, 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=0$ 下的极值.

13.要做一个容积为$1m^3$的有盖圆桶,什么样的尺寸才能使用料最省?

☺ 常微分方程

掌握微分方程的基本概念（常微分方程的定义、分类、通解、特解、初值条件…）

熟练掌握几类一阶微分方程的求解：变量分离方程、齐次方程、可化为齐次方程的方程、一阶线性微分方程、 伯努利(Bernoulli)方程；熟练掌握二阶线性微分方程齐次和非齐次微分方程解的结构，二阶常系数线性齐次和非齐次微分方程的解法…

典型题目：

求解下列微分方程

（1） $ydx+(x^2-4x)dy=0$

(2) $\cos x\sin y\mathrm{d}y+\sin x\cos y\mathrm{d}x=0$,初值条件$y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$

(3) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$

(4) $(2x-5y+3)\mathrm{d}x-(2x+4y-6)\mathrm{d}y=0$

(5) $xy'+y-x^2-3x-2=0$

（6） $y'+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$

（7） $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$;

(8) $y''-2y'-3y=3x+1$;

(9) $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$;

(10) $y''+y=x\cos 2x$