数字信号处理

——第7讲

利用Z变换对系统分析

- 用Z变换分析系统：
  - 频率响应
  - 系统函数
  - 零点和极点
  - 稳定性判别
  - 系统特性分析

利用Z变换对系统分析

- 频率响应

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}\qquad -\infty<n<\infty$$

$$\Downarrow$$

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[n-m]$$

$$\Downarrow$$

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]e^{j\omega_0(n-m)}=e^{j\omega_0 n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]e^{-j\omega_0 m}$$

$$\Downarrow$$

$$y[n]=e^{j\omega_0 n}H(e^{j\omega_0})\quad\Rightarrow\quad H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}$$

利用Z变换对系统分析

- 系统函数

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[n-m]$$

$$\Downarrow$$

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\Downarrow$$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}$$

$$\Downarrow$$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}\quad\Rightarrow\quad H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

利用Z变换对系统分析

❖ 分析系统方法

- 时域分析（第1章）
- 频域分析
- 复频域分析

利用Z变换对系统分析

❖ 系统的因果性和稳定性

$$\sum_{i=0}^{M} b_i x[n-i] = \sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i]$$

$$\Downarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}$$

$$\Downarrow$$

$$H(z) = A\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^{N}(1-d_r z^{-1})}$$

利用Z变换对系统分析

❖ 因果性判定

- 时域判定：单位脉冲响应是因果序列 $h[n]=0, \quad n<0$
- 频域判定： Z变换的收敛域为 $R_{x-} < |z| \le \infty$

利用Z变换对系统分析

❖ 稳定性判定：

- **h(n)**是绝对可求和的 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$
- ***H*(*z*)** 收敛域包含单位圆 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h[n]z^{-n}\right|_{|z|=1} < \infty$

利用Z变换对系统分析

❖ 根据系统零极点分析频率特性

$$H(z)=Az^{N-M}\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-c_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_r)} \Leftarrow H(z)=A\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_r z^{-1})} \qquad A=\frac{b_0}{a_0}$$

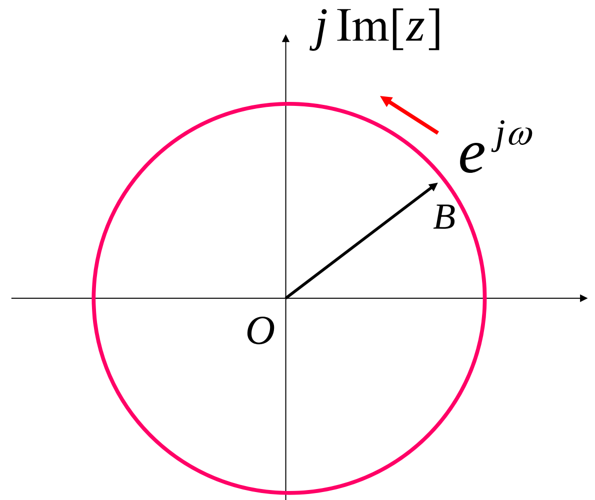
$$\Downarrow$$

$$H(e^{j\omega})=Ae^{j\omega(N-M)}\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-c_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-d_r)}$$

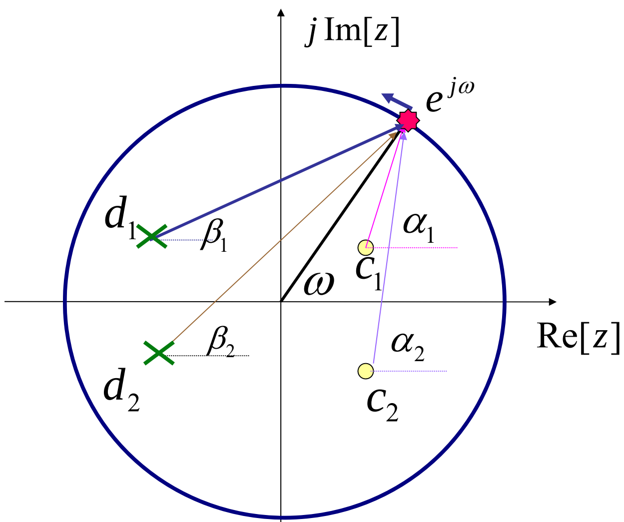
$$\Downarrow$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=|A|\frac{\prod_{r=1}^{M}\overline{c_r B}}{\prod_{k=1}^{N}\overline{d_r B}} \qquad \varphi(\omega)=\omega(N-M)+\sum_{r=1}^{M}\alpha_r-\sum_{r=1}^{N}\beta_r$$

利用Z变换对系统分析



利用Z变换对系统分析



利用Z变换对系统分析

❖ 一阶系统实例

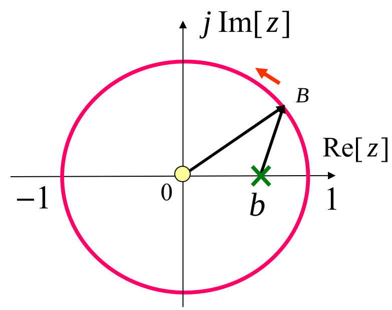
$$y(n)=by(n-1)+x(n) \quad 0<b<1$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z)=bz^{-1}Y(z)+X(z)$$

$$\Downarrow$$

$$H(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}=\frac{z}{z-b}$$



利用Z变换对系统分析

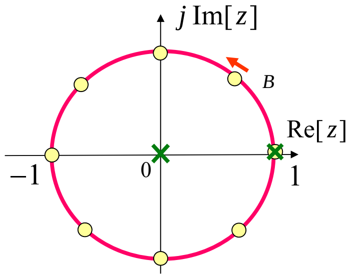
❖ 矩形序列实例

$$x(n) = R_N(n)$$

$$\Downarrow$$

$$X(z) = ZT[R_N(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} R_N(n) z^{-n}$$

$$= \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)}$$



第7次作业

❖ 课后作业：

2.27 (1), (2)，2.30，2.32，2.47(1),(2)

❖ 补充作业：已知离散时间线性时不变系统（**LTI**）的输入为$x[n]$，系统的单位脉冲响应为$h[n]$，系统的输出为$y[n]$，分别从系统卷积、差分方程、频率响应、系统函数等方面论述输入-输出关系。

本章小结

❖ 傅里叶变换体系

CTFS、CTFT、DTFS、DTFT

❖ Z变换与逆变换

DTFT => Z、ROC

观察法、部分分式展开

❖ 系统函数与频率响应

❖ 时频与频域对应关系