13.3 全状态线性化

考虑单输入仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

其中 f 和 g 在定义域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上足够光滑，如果存在一个足够光滑的函数 $h: D \to \mathbb{R}$，使系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \qquad \textbf{(13.27)}$$

在区域 $D_0 \subset \mathbb{R}$ 上相对阶为 n，则系统（**13.27**）是可反馈线性化的。相应的输出 $h(x)$ 满足以下偏微分方程：

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1 \qquad \textbf{(13.34)}$$

其约束条件为

$$L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0 \tag{13.35}$$

输出 $h(x)$ 的存在性可由向量场 $f(x)$ 和 $g(x)$ 应满足的充分必要条件描述。这些条件用到了 **Lie** 括号和不变分布的概念，下面将进行介绍。

对于 $D \subset R^n$ 上的两个向量场 $f(x)$ 和 $g(x)$，**Lie** 括号 $[f,g]$ 是第三个向量场，定义为

$$[f,g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

其中 $\frac{\partial g}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是雅可比矩阵。$g(x)$ 对 $f(x)$ 的 **Lie** 括号可以

重复递归定义，下面的表示法可简化该过程：

$$ad_f^0 g(x) = g(x),$$
$$ad_f g(x) = [f, g](x),$$
$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g](x), k \geq 1$$

显然$[f, g] = -[g, f]$，且对常数向量场 f 和 g，有

$$[f, g] = 0$$

例 13.9 设

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

则

$$[f,g](x)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ -\sin x_1-x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\cos x_1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ x_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-x_1\\ x_1+x_2\end{bmatrix}\overset{def}{=}ad_f g$$

$$ad_f^2 g=[f,ad_f g]$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ -\sin x_1-x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\cos x_1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x_1\\ x_1+x_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-x_1-2x_2\\ x_1+x_2-\sin x_1-x_1\cos x_1\end{bmatrix}$$

Δ

例 13.10 如果 $f(x)=Ax$，且 g 是常数向量场，则

$$ad_f g(x) = [f, g](x) = -Ag$$

$$ad_f^2 g = [f, ad_f g] = -A(-Ag) = A^2 g$$

和

$$ad_f^k g = (-1)^k A^k g \qquad \Delta$$

对 $D \subset R^n$ 上的 k 个向量场 $f_1, f_2, \cdots, f_k$,设

$$\Delta(x) = span\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$$

为 R^n 的子空间，该子空间由任意固定的 $x \in D$ 的向量 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 张成。对 $x \in D$ ，所有向量空间 $\Delta(x)$ 的集合称为一个分布，记为

$$\Delta = span\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$$

$\Delta(x)$ 的维数定义为

$$\dim(\Delta(x)) = rank[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)]$$

它可能随 x 变化，但如果 $\Delta = span\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$，其中 $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$ 对所有 $x \in D$ 是线性独立的，则对于所有 $x \in D$，$\dim(\Delta(x)) = k$。此时称 Δ 是 D 上的非奇异分布，由 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 生成。

如果

$$g_1 \in \Delta，\quad g_2 \in \Delta \Rightarrow [g_1, g_2] \in \Delta$$

则分布 Δ 是对合的。如果 Δ 是 D 上的非奇异分布，由

$f_1, f_2, \cdots, f_k$ **生成，则可以验证(见习题 13.9)当且仅当**

$$[f_i, f_j] \in \Delta \qquad \forall 1 \le i, j \le k$$

时，Δ是对合的。

例 13.11 **设**$D = R^3$**，** $\Delta = span\{f_1, f_2\}$**，其中**

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

可以验证，对于所有$x \in D$**，** $\dim(\Delta(x)) = 2$**，并且当且仅当对于所有**$x \in D$**，** $rank\left[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)\right] = 2$**时，该**

分布是对合的。下面具体验证分布$\Delta = span\{f_1, f_2\}$是否对合。由于

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$rank[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = rank \begin{bmatrix} 2x_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = 3，$$

$$\forall x \in D$$

因此$[f_1, f_2](x) \notin \Delta$，即$\Delta$不是对合的。

例 13.12 设 $D=\{x\in R^3 \,|\, x_1^2+x_3^2\neq 0\}$， $\Delta = span\{f_1, f_2\}$，

$$f_1=\begin{bmatrix}2x_3\\-1\\0\end{bmatrix},\quad f_2=\begin{bmatrix}-x_1\\-2x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

可以验证对于所有 $x\in D$， $\dim(\Delta(x))=2$，且有

$$[f_1,f_2]=\frac{\partial f_2}{\partial x}f_1-\frac{\partial f_1}{\partial x}f_2=\begin{bmatrix}-4x_3\\2\\0\end{bmatrix}$$

和

$$rank[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = rank\begin{bmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

$$\forall x \in D$$

因此，$[f_1, f_2] \in D$。由于$[f_2, f_1] = -[f_1, f_2]$，故可以推出Δ是对合的。

现在我们讨论这类可反馈线性化的系统。

定理 13.2 对于系统(13.27)，当且仅当存在定义域$D_0 \in D$，使得

1. 对于所有 $x \in D_0$，矩阵 $G(x)=[g(x), ad_f g(x), \cdots, ad_f^{n-2} g(x), ad_f^{n-1} g(x)]$ 的秩为 n；

2. 分布 $\Delta = span\{g, ad_f g, \cdots, ad_f^{n-2} g\}$ 在 D_0 上是对合的，

则该系统是可反馈线性化的。

证明：见附录 **C.22**。

推论 13.2：如果定理 13.2 的条件成立，则一定存在相对阶为 n 的输出函数 $h(x)$，满足以下偏微分方程：

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} ad_f^i g = 0(i = 0,1,2,\cdots,n-2), \frac{\partial h(x)}{\partial x} ad_f^{n-1} g \neq 0$$

例 13.13 **重新考虑 13.1 节中的系统**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a\sin x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \overset{def}{=} f(x) + gu$$

有

$$ad_f g = [f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} -a\cos x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于所有 $\cos x_2 \neq 0$**，矩阵**

$$G=[g,ad_f g]=\begin{bmatrix}0 & -a\cos x_2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

的秩为 **2**，分布 $\Delta=span\{g\}$ 是对合的。因此，定理 **13.2** 的条件在定义域 $D_0=\{x\in R^2\,|\cos x_2\neq 0\}$ 上成立。为了找到使系统转换为方程**(13.6)**的变量代换，需要求 $h(x)$，使之满足

$$\frac{\partial h}{\partial x}g=0\text{；}\quad \frac{\partial h}{\partial x}ad_f g\neq 0\text{；}\quad h(0)=0$$

根据条件 $[\partial h/\partial x]g=0$，有

$$\frac{\partial h}{\partial x}g=\frac{\partial h}{\partial x_2}=0$$

这样 $h(x)$ 一定与 x_2 无关，因此 $h(x)=h(x_1)$。再由条件 $\frac{\partial h}{\partial x}ad_f g \neq 0$ 得到：

$$\frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1}(-a\cos x_2) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} \neq 0$$

因此可选取 $h(x)=x_1$。当然也可以选择其他 $h(x)$，例如取 $h(x)=x_1+x_1^3$，则给出另一个变量代换，也能使系统转换为方程**(13.6)**的形式。

例 13.14 一个带有柔性接头的单连杆操纵器，阻尼忽略不计，可用形如

$$\dot{x} = f(x) + gu$$

的四阶模型表示(见习题 1.5)，其中

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a\sin x_1 - b(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c(x_1 - x_3) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

a, b, c, d 是正常数。该无激励系统平衡点为 $x = 0$，故有

$$ad_f g = [f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$ad_f^2 g = [f, ad_f g] = -\frac{\partial f}{\partial x} ad_f g = \begin{bmatrix} 0 \\ bd \\ 0 \\ -cd \end{bmatrix}$$

$$ad_f^3 g = [f, ad_f^2 g] = -\frac{\partial f}{\partial x} ad_f^2 g = \begin{bmatrix} -bd \\ 0 \\ cd \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于所有 $x \in R^4$，矩阵

$$G=[g,ad_f g,ad_f^2 g,ad_f^3 g]=\begin{bmatrix}0&0&0&-bd\\0&0&bd&0\\0&-d&0&cd\\d&0&-cd&0\end{bmatrix}$$

是满秩矩阵。另外，分布$\Delta=span\left\{g,ad_f g,ad_f^2 g\right\}$显然是对合的，因为$g$，$ad_f g$，$ad_f^2 g$都是常数向量场，这样定理 **13.2** 的条件对于所有$x\in R^4$都成立，因此系统是可以反馈线性化的。为了找到变量代换将状态方程转换为式**(13.6)**的形式，需要找到$h(x)$，使之满足

$$\frac{\partial h}{\partial x}g=0,\frac{\partial h}{\partial x}ad_f g=0,\frac{\partial h}{\partial x}ad_f^2 g=0,\frac{\partial h}{\partial x}ad_f^3 g\neq 0,h(0)=0$$

根据条件$[\partial h/\partial x]g=0$，有$\partial h/\partial x_4=0$，所以必须选择$h(x)$和$x_4$无关，因此$h(x)=h(x_1,x_2,x_3)$。

根据条件$\frac{\partial h}{\partial x}ad_f g=0$，有$(\partial h/\partial x_3)=0$，所以必须选择$h(x)$和$x_3$无关，因此$h(x)=h(x_1,x_2)$。

根据条件$\frac{\partial h}{\partial x}ad_f^2 g=0$有$\partial h/\partial x_2=0$，所以必须选择$h(x)$和$x_2$无关，因此$h(x)=h(x_1)$。

根据条件$\frac{\partial h}{\partial x}ad_f^3 g\neq 0$有$\partial h/\partial x_1\neq 0$，所以可以选择$h(x)=x_1$。

进行变量代换

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= h(x) = x_1, \\
\xi_2 &= L_f h(x) = x_2, \\
\xi_3 &= L_f^2 h(x) = -a\sin x_1 - b(x_1 - x_3), \\
\xi_4 &= L_f^3 h(x) = -a x_2 \cos x_1 - b(x_2 - x_4)
\end{aligned}$$

将状态方程转换为

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\
\dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\
\dot{\xi}_4 &= -(a\cos\xi_1 + b + c)\xi_3 + a(\xi_2^2 - c)\sin\xi_1 + bdu
\end{aligned}$$

上式即具有方程(13.6)的形式。与例 13.13 不同的是，本例

在 z 坐标系下的状态方程全局有效，因为 $\xi = T(x)$ 是全局微分同胚映射。

例 13.15 在例 **13.3** 和例 **13.7** 中，讨论了一个由三阶模型

$$\dot{x} = f(x) + gu$$

表示的场控直流电机，式中

$$f(x) = \begin{bmatrix} -ax_1 \\ -bx_2 + k - cx_1x_3 \\ \theta x_1x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a,b,c,θ,k 是正常数。已知以 $y = x_3$ 作为输出时，系统的相对阶为 **2**，因此是部分可反馈线性化的。下面研究状态方

程能否完全线性化。我们有

$$ad_f g = [f, g] = \begin{bmatrix} a \\ cx_3 \\ -\theta x_2 \end{bmatrix};$$

$$ad_f^2 g = [f, ad_f g] = \begin{bmatrix} a^2 \\ (a+b)cx_3 \\ (b-a)\theta x_2 - \theta k \end{bmatrix}$$

矩阵

$$G = [g, ad_f g, ad_f^2 g] = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & cx_3 & (a+b)cx_3 \\ 0 & -\theta x_2 & (b-a)\theta x_2 - \theta k \end{bmatrix}$$

的行列式为

$$\det G = c\theta(-k + 2bx_2)x_3$$

因此，当 $x_2 \neq k/2b$ **，** $x_3 \neq 0$ **时，** G **的秩为 3。如果** $[g, ad_f g] \in \Delta$**，则分布** $\Delta = span\{g, ad_f g\}$ **是对合的。有**

$$[g, ad_f g] = \frac{\partial ad_f g}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & -\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此，分布 Δ **是对合的，定理 13.2 的条件在我们感兴趣的定义域（连通域）**

$$D_0 = \left\{ x \in R^3 \middle| x_2 > \frac{k}{2b}, x_3 > 0 \right\}$$

内成立。继续求满足方程**(13.34)**和方程**(13.35)**的函数 $h(x)$。无激励系统在 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = k/b$ 有一个平衡点集合。取理想工作点为 $x^* = [0, k/b, \omega_0]^T$，这里 ω_0 是角速度 x_3 的理想设定点。我们希望找到满足

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = 0\text{；}\quad \frac{\partial h}{\partial x} ad_f g = 0\text{；}\quad \frac{\partial h}{\partial x} ad_f^2 g \neq 0$$

的 $h(x)$，且 $h(x^*)$**=0**。

根据条件 $\dfrac{\partial h}{\partial x} g = \dfrac{\partial h}{\partial x_1} = 0$ 可知，$h(x)$ 一定与 x_1 无关，因此 $h(x) = h(x_2, x_3)$。

根据条件$\frac{\partial h}{\partial x} ad_f g = 0$可知，$\frac{\partial h}{\partial x_2}(cx_3) + \frac{\partial h}{\partial x_3}\left(-\theta x_2\right) = 0$

满足以上偏微分方程的一个通解为：

$$h = c_1[\theta x_2^2 + cx_3^2] + c_2$$

c_1 和 c_2 为常数。选择 $c_1 = 1$，$c_2 = -\theta(x_2^*)^2 - c(x_3^*)^2 = -\theta(k/b)^2 - c\omega_0^2$ 可满足条件 $h(x^*) = 0$。

最后容易验证：只要 $x_2 \neq k/2b$，$x_3 \neq 0$，条件

$\frac{\partial h}{\partial x} ad_f^2 g \neq 0$ 也成立。

如此选择 $h(x)$，则 $L_f h$ 和 $L_f^2 h$ 为

$$L_f h(x) = 2\theta x_2 (k - bx_2)\text{，}$$

$$L_f^2 h(x) = 2\theta(k - 2bx_2)(-bx_2 + k - cx_1 x_3)$$

在坐标变换 $\xi_1 = h(x), \xi_2 = L_f h, \xi_3 = L_f^2 h$ 下，系统的模型转化为：

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = \xi_3, \dot{\xi}_3 = \frac{\partial L_f^2 h(x)}{\partial x} \dot{x} = \gamma(x)(u - \alpha(x))$$

请同学们补充写出 $(\gamma(x), \alpha(x))$ 的具体形式。

习题 16.1：考虑以下非线性控制系统

(1) $\dot{x}_1 = -\sin x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = -\sin x_3 + (1+\cos x_3)u$

(2) $\dot{x}_1 = u, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = \sin x_2 + u$

(3) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, \dot{x}_3 = \sin x_1 + (1+\cos x_2)u$

判断以上系统是否可以输入-状态反馈线性化?如果可以，求出相应的状态和输入反馈变换使得系统在新的状态和新的输入下表示为线性系统。