# 工科数分习题课四　函数极限

石岩

shiyan200245@163.com

Oct.19.2012

**本节课的内容和要求**

1. 深入理解函数极限的定义, 熟练掌握用$\varepsilon-\delta$语言表述极限、左右极限、无穷极限等;

2. 熟练掌握函数极限的性质;

3. 学会使用Heine定理和Cauchy收敛定理判断极限存在;

4. 掌握无穷小量和无穷大量的概念, 会利用等价无穷小求极限.

**基本概念和主要结论**

1.函数极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

$$\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \text{s.t.}\ |f(x)-A|<\varepsilon \text{ for } 0<|x-x_0|<\delta.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=A$$

$$\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,M>0,\ \text{s.t.}\ |f(x)-A|<\varepsilon \text{ for } x>M.$$

类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$;

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=A;\ \lim_{x\to \infty} f(x)=A.$$

2.函数极限的性质

a)唯一性　　b)局部有界性　　c)局部保序性

d)局部保号性　　e)夹逼定理　　f)四则运算法则

3.函数极限存在的条件(以$x\to x_0$为例)

1)Heine定理

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \text{对任何 } x_n\to x_0 (n\to\infty) \text{有} \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

2)Cauchy收敛准则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon, \exists\,\delta>0, |f(x')-f(x'')|<\varepsilon \text{ for } x', x''\in U^o(x_0;\delta).$$

4.无穷小量, 无穷大量

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 称$f$为当$x\to x_0$时的无穷小量.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (or $\pm\infty$),称$f$为当$x\to x_0$时的无穷大量.

$f$无穷小量 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{f}$无穷大量.

**无穷小量阶的比较** 设$x\to x_0$时，$f$与$g$均为无穷小量.

$$a)\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow f(x)=o\left(g(x)\right)\ (x\to x_0);$$

$$\text{e.g.}\quad f(x)=o(1)\ (x\to x_0),$$

$$1-\cos x=o(\sin x)\ (x\to 0).$$

$$b)\qquad K\le\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le L,\quad x\in U^o(x_0);$$

$$\text{esp.}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=c\ne 0.$$

$$(*)K=0\Leftrightarrow f(x)=O\left(g(x)\right)\ (x\to x_0);$$

$$\text{e.g.}\quad 1-\cos x=O(x^2)\ (x\to 0).$$

$$c)\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1\Leftrightarrow f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0);$$

$$\text{e.g.}\quad \sin x\sim x\ (x\to 0)$$

$$\tan x\sim x\ (x\to 0)$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\ (x\to 0)$$

$$\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$$

$$\mathrm{e}^x-1\sim x\ (x\to 0)$$

$$a^x-1\sim x\ln a\ (x\to 0)$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha\,x,\ \alpha\ne 0\ (x\to 0)$$

无穷大量阶的比较可以通过转化为无穷小量来进行.

练习

1. 证明

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0; \\
&(2) \qquad \lim_{x\to \infty} \cos x \text{ 不存在}.
\end{aligned}
$$

2. 已知定义在$\mathbb{R}$上的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$
D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}x\text{为有理数}, \\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}. \end{cases}
$$

证明: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} D(x)$不存在,.

3.证明:若 $f$ 为周期函数,$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,则$f(x)\equiv 0$.

4. 设函数 $f$ 在点$x_0$的某空心右邻域$U_+^o(x_0)$有定义.证明:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \text{对任何以}x_0\text{为极限的递减数列}\{x_n\}\subset U_+^o(x_0),$$

$$\text{有}\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

5.

1)设$f$为定义在$U^o(x_0)$上的递增函数,则$f(x_0+0)$和$f(x_0-0)$都存在,且

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x\in U_+^o(x_0)} f(x),\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in U_-^o(x_0)} f(x).$$

2)设$f$为定义在$U_-^o(x_0)$内的递增函数.证明:若存在数列$\{x_n\}\subset U_-^o(x_0)$且$x_n\to x_0\,(n\to\infty)$,使得$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$,则有

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in U_-^o(x_0)} f(x) = A.$$

6. 求极限

$$(1)\qquad \lim_{x\to a^+}(x-[x]),\quad a\in\mathbb{Z};$$

$$(2)\qquad \lim_{x\to a^-}\frac{[x]}{x},\quad a\in\mathbb{Z},a\neq 0;$$

$$(3)\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x};$$

$$(4)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}\ (a>0);$$

$$(5)\qquad \lim_{x\to a}\frac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a};$$

$$(6)\qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right),\quad m,n \text{ are positive integers};$$

$$(7)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x};$$

$$(8)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x^2};$$

$$(9)\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x};$$

$$(10)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x};$$

$$(11)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1x\cos a_2x\cdots\cos a_nx}{x^2};$$

$$(12)\qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{(x+\alpha_1)\cdots(x+\alpha_n)}-x.$$