北航工科数分
第一学期
历年期中试题讲评

说明

本资料基于以下内容：

2009年《工科数学分析》第一学期期中试题
2010年《工科数学分析》第一学期期中试题
2011年《工科数学分析》第一学期期中试题
2012年《工科数学分析》第一学期期中试题
2013年《工科数学分析》第一学期期中试题

以上均为公开资料，可在课程中心下载或联系任课教师索取。

目录

试卷基本结构

第一大题包含8个小题，主要为极限计算、导数计算、导数的简单应用。每题5分。

第二题至第七题为解答题，每题10分，可能包含1-2个小问。主要为证明题。

一. 数列极限的计算

很少直接考到。即便考到，难度也很低，均属于中低难度送分题。

启示：不用太关注技巧性过高的数列极限计算，只需要掌握基本类型即可。

求数列极限的主要方法

1. 利用初等方法（有理化、恒等变形）
2. 利用重要极限
3. 利用单调有界定理，两边取极限
4. 利用夹逼定理
5. 利用Stolz定理
6. 转化为函数极限（Heine定理）

例1：（2011年）一1

1)　用 Stolz 定理计算极限 $\lim_{n}\dfrac{1^{\frac{2}{1}}+2^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{4}{3}}+\cdots+n^{\frac{n+1}{n}}}{n^2}$.

解：使用 Stolz 定理，

$$\lim_{n}\frac{1^{\frac{2}{1}}+2^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{4}{3}}+\cdots+n^{\frac{n+1}{n}}}{n^2}=\lim_{n}\frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n}\frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{2n-1}=\frac{1}{2}$$

建议评分标准： 使用 Stoltz 定理 3 分，求出答案 2 分

注意：Stolz定理的使用条件、最后一步的计算

例2：（2013年）一1

1．用“ε- N”定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

证明：$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$, 则 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1}{n\cdot n\cdots n\cdot n}\le\frac{1}{n}<\varepsilon$$

二. 数列极限的证明与应用

主要考察：单调有界定理、柯西收敛定理

单调有界定理主要涉及递推公式题目，柯西收敛定理直接通过其证明即可。

1.叙述、证明定理类

例1：（2009年）一1

1） 叙述数列是柯西列(基本列)的定义

例2：（2009年）一3

3） 叙述闭区间套定理

例3：（2009年）四

四、 叙述并证明关于函数极限与数列极限之间关系的海涅定理(10 分)

2.单调有界定理类

例4：（2010年）二

假设$\sigma > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\sigma}{x_n}\right)$，证明数列$\{x_n\}$单调有界，且极限为$\sqrt{\sigma}$.

应用均值不等式证有界性。利用有界性证明单调性。

1) 数列单调递减有下界(5 分)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\sigma}{x_n}\right) \Rightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{\sigma},$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\sigma}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{x_n} - x_n\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma}} - \sqrt{\sigma}\right) = 0$$

2) 下面说明极限为$\sqrt{\sigma}$ (5 分)

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = b \Rightarrow \frac{1}{2}\left(b + \frac{\sigma}{b}\right) = b, b = \sqrt{\sigma}$$

完全相似题目：（2012年）二

例5：（2011年）三

（10 分）设 $A>0, 0<x_1<\frac{1}{A}, x_{n+1}=x_n(2-Ax_n)\quad(n=1,2,\cdots)$，证明不等式 $x_n<x_{n+1}<\frac{1}{A}$ 对所有正整数 n 成立，并求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

重点讲解

例6：（2009年）二

$$1)\ \frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$2)\ x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛（可用单调有界定理）.

3.柯西收敛定理类

例7：（2010年）三

三. 证明下面问题（10 分）

假设数列$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}-x_n|<\dfrac{1}{2^n}$，用 Cauchy 收敛定理证明$\{x_n\}$收敛.

证明　1) (5 分)

$$\forall p\in N, |x_{n+P}-x_n|\le|x_{n+P}-x_{n+P-1}|+|x_{n+P-1}-x_{n+P-2}|+\cdots\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$

$$\le\frac{1}{2^{n+P-1}}+\frac{1}{2^{n+P-2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^{P-1}}+\frac{1}{2^{P-2}}+\cdots\cdots+1\right)=\left(\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{\frac{1}{2}}\right)\le\frac{1}{2^{n-1}}.$$

2) 柯西定理写正确 5 分

3.柯西收敛定理类

例8：（2012年）三

三. **证明下面问题（10 分）**

数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n=\dfrac{\sin 2x}{2(2+\cos 2x)}+\dfrac{\sin 3x}{3(3+\cos 3x)}+\cdots\dfrac{\sin nx}{n(n+\cos nx)}$，

用 Cauchy 收敛定理证明 $\{x_n\}$ 收敛。

完全相似题目：（2011年）四

仅把分母中的cos改为sin

4.综合类

例9：（2013年）三

设数列 $b_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|$， $n=1,2,\cdots$ 且 $\{b_n\}$ 有界，证明：数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛.

证明：（1）因为 $\{b_n\}$ 是递增有界数列，有单调有界定理，数列 $\{b_n\}$ 收敛.

（2）由（1），由数列极限的柯西准则（必要性），$\forall\varepsilon>0$, $\exists N,\forall n>N$, 对任何正整数 p，有

$$|b_{n+p}-b_n|<\varepsilon,\text{即}$$

$$|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-2}-a_{n+p-3}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon,$$

于是有

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=|a_{n+p}-a_{n+p-1}+a_{n+p-1}-a_{n+p-2}+\cdots+a_{n+1}-a_n|\\&\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

于是由数列极限的柯西准则（充分性），可知数列 $\{a_n\}$ 也是收敛的。

例10：（2013年）二

二.（本题 10 分）

（1）证明：$\ln(1+x)<x\ (x>0)$;

（2）设 $x_1>0,\ x_{n+1}=\ln(1+x_n)\ (n=1,2,\ldots)$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；

（3）利用 Stolz 定理证明：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=2.$

重点讲解

三. 函数极限的计算

通过等价无穷小、洛必达法则、1的无穷次方方法计算函数极限或确定无穷小的阶。

通常方法不唯一，难度不大。

求函数极限的主要方法

1. 利用等价无穷小
2. 利用洛必达法则
3. 1的无穷次方类题型，化为(u-1)v
4. 化为指数形式（尤其对幂指函数）
5. 利用泰勒公式
6. 利用导数定义

……

例1：（2009年）三1、2、3

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ 通分后洛必达法则

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$ 1的无穷次方

3) $f(x)=x\sin\sqrt{x}\,(x\to 0)$,求无穷小阶；

由等价无穷小知其为3/2阶

例2：（2010年）一1、2

1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

分子有理化、等价无穷小

2) 求下面无穷小的阶

$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}\,(x\to 0).$$

可由泰勒公式进行预判；
直接有理化亦可

例3：（2011年）一3

3） 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to0}e\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}e\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim_{x\to0}e\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}e\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{e}{2}$$

例4：（2012年）一1、2

1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. 重点讲解

2) 在 $x\to 0^+$ 时，求下列无穷小的阶

$$\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{x}}}-2\right).$$

连续两次有理化

例5：（2013年）一2

2. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

做法很多：1的无穷次方、化为指数、等价无穷小、洛必达法则

四. 函数极限的证明与应用

主要考察一致连续。

综合性并不很强（综合性强的都与导数结合了），主要熟练掌握基本的定义及证明/否定一致连续的方法即可

1.连续与间断

例1：（2011年）一7

7） 判断函数 $f(x)=\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}$ 间断点的类型.

解：函数在 $x\neq 0$ 时，由初等函数连续性知，均为连续点。

当 $x=0$ 时，$f(x)$ 没有定义，但由 L'hospital 法则，我们有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{n!}{e^{t^2}P_n(t)}=0$$

，其中 $P_n(t)$ 为 t 的一个多项式。

因此 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

多项式与指数的阶的比较、倒代换思想

2.一致连续

例2：（2009年）七

七、（10 分）讨论函数 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 一致连续性.

解：对 $\varepsilon_0=0$，取 $s_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $t_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, $|s_n-t_n|=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi(2n\pi+\frac{\pi}{2})}<\dfrac{1}{2n\pi}<\dfrac{1}{2n}$

但 $|f(s_n)-f(t_n)|=1\geq\varepsilon_0$，所以 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不一致连续性.

基本的判断不一致连续的方法

例3：（2010年）七

假设 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上. 如果对 (a,b) 内任何收敛的点列 $\{x_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在, 则 f 在 (a,b) 上一致连续.

重点讲解

例4：（2012年）七

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)>0$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，求证 $f(x)^{\frac{1}{2}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

重点讲解

例5：（2009年）八1

1) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A<0, \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\mathrm{B}>0$，证明存在 $\xi\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 使得 $f(\xi)=0$.

证明：由 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A<0$, 知存在一个 $\delta_1>0$ 使得 $a+\delta_1\in(a,b)$，且 $f(a+\delta_1)<0$

(4 分)

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\mathrm{B}>0$，知存在一个 $\delta_2>0$ 使得 $b-\delta_2\in(a,b)$，且 $f(b-\delta_2)>0$，

(8 分)

则在 $f(x)$ 区间 $[a+\delta_1, b-\delta_2]$ 上两端点异号，由连续函数介值定理知存在 $\xi\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 使得 $f(\xi)=0$.

介值定理、极限定义、极限的有界性 (10 分)

五. 导数的计算

均为容易题。

几乎只考察三类：幂指函数求导（对数求导法）、参数方程求导（包括求二阶导）、求函数的高阶导数（莱布尼茨公式、数学归纳法）。

（2009年）三4、5

（2010年）一3、4、5

（2011年）一2、5

（2012年）一3、4、5

（2013年）一3、4、6

求高阶导	幂指函数求导	参数方程求导	初等函数求导	参数方程求高阶导
4次	4次	3次	1次	1次

例1：（2011年）二2

2） 设函数 $y=x^{n-1}\ln x$（n为正整数），证明 $y^{(n)}=\dfrac{(n-1)!}{x}$.

证明：用数学归纳法，$n=1$ 时，$y=\ln x$，$y'=\dfrac{1}{x}$，命题成立。

假设当 $n=k$ 时命题成立，则当 $n=k+1$ 时，$y=x^{k}\ln x$，$y'=kx^{k-1}\ln x+x^{k-2}$。易得

$$y^{(k+1)}=(kx^{k-1}\ln x+x^{k-2})^{(k)}=k(x^{k-1}\ln x)^{(k)}=k\frac{(k-1)!}{x}=\frac{k!}{x}。$$

命题对 $n=k+1$ 也成立，所以该命题对所有正整数 n 都成立。

数学归纳法应用于求高阶导数

六. 导数的证明与应用

最重点的内容。难度最高的内容。

可导性	单调性（不等式、实根）	凹凸性	最值	中值定理	综合题
3次	4次	5次	4次	5次	2次

例1：（2009年）五

五、讨论下面问题(10 分)

$$\text{设 } f(x)=\begin{cases} a+e^{\frac{-1}{x}} & x>0 \\ b & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{e^{x}-1} & x<0 \end{cases}\text{，试问}$$

1） a, b 为何值时 f(x)在(–∞, +∞)内连续；

2） f(x)在(–∞, +∞)内是否可导.

重点讲解

1. 可导性

例2：（2010年）一8

8) 已知 $f(x)=\begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \quad x=0. \end{cases}$ m 为正整数.

求：m 满足什么条件，函数在 $x=0$ 连续，

m 满足什么条件，函数在 $x=0$ 可导.

参加作业习题3.3:7

例3：（2013年）一7

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x>0, \\ ax^2, & x\le 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解：$\because \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} xe^x=0,\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} ax^2=0,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0=f(0)$, 从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$\because f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x e^{\Delta x}}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{a\Delta x^2}{\Delta x}=0,$$

$\therefore f'_+(0)\ne f'_-(0)$, 从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

例4：（2009年）六2

2） 若 $x>0$ 证明 $x^2+\ln(1+x)^2>2x$

例5：（2010年）四

四. 证明下面不等式（10 分）

$$e^{-x}+\sin x<1+\frac{x^2}{2},\quad x\in(0,\pi).$$

例6：（2011年）二1

1） $\sin x>x-\frac{x^3}{6}(x>0);$

利用微分学证明不等式有许多方法（中值定理、Jensen不等式、Taylor公式、单调性等），考试中出现的全为只利用一阶单调性的基本题。

例7：（2013年）一8

8.求证:方程$x+3+\frac{1}{2}\cos x=0$有且只有一个实根.

证明：设$f(x)=x+3+\frac{1}{2}\cos x$, 则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续,

且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

又因为在$(-\infty,+\infty)$上，$f'(x)=1-\frac{1}{2}\sin x>0$, 即函数$f(x)$严格单调递增,

所以方程$x+3+\frac{1}{2}\cos x=0$有且只有一个实根.

3. 凹凸性

（2009年）六3
（2010年）一7
（2011年）一4
（2012年）一7
（2013年）四

基本题型：判断一个给定函数的凹凸性及拐点

判断函数arctanx的凹凸性及一致连续性。在判断一致连续性时用到了中值定理。

（2009年）六4
（2011年）一6
（2012年）一8

基本题型：判断一个给定函数在某区间的最值

（2013年）六

解决应用问题。

设用某种仪器进行测量时,得到 n 次试验数据 $a_1,a_2,\cdots a_n$. 问以怎样的数值 x 表达所要测量的真实值,才能使它与这 n 个数之差的平方和为最小.

解：设 x 与 n 个数之差的平方和为 $S(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$. 则

$$S'(x)=2(x-a_1)+2(x-a_2)+\cdots+2(x-a_n),$$

可得到 $x=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$,

这是唯一的驻点，而且是最小值点。

例8：（2009年）六1

1） 设 $f(0)=0$, $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，试证函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加;

证明：$g'(x)=(\dfrac{f(x)}{x})'=-\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$，

对 f(x)使用中值定理得 $f(x)=f'(\xi)x, \xi\in(0,x)$，由 $f'(x)$ $[0,+\infty)$ 内单调增加知

$f'(x)x-f(x)=f'(x)x-f'(\xi)x\ge 0$，所以 $g'(x)\ge 0$，

即函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加 （5 分）

中值定理的“暗示语”

例9：（2009年）八2

2) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且

$f(a)=f(b)=0$，，求证：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证明：令 $F(x)=e^{x}f(x)$ 则，

$F(a)=F(b)=0$　所以 F(x)在 $[a,b]$ 满足中值定理，即

存在 $\xi\in[a,b]$ ，使得 $F'(\xi)=e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$，因为 $e^{\xi}\neq 0$，所以

$f'(\xi)+f(\xi)=0$。

中值定理的常规题型

例10：（2010年）五

五.（10 分）假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq 0$，且

$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明下面问题:

1）在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

2）在 (a,b) 内至少存在一点在 θ，满足 $\dfrac{f(\theta)}{g(\theta)}=\dfrac{f''(\theta)}{g''(\theta)}$.

第一问比较灵活，第二问为常规题型

例11：（2012年）五

（10 分）假设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可导，且 $f(0)+f(1)=0$, $f(2)=0$

证明: 1)利用介值定理证明存在 $\alpha\in[0,1]$, 使得 $f(\alpha)=0$；

2) 存在 $\theta\in(0,2)$ 使得 $f(\theta)+f'(\theta)=0$.

第一问为第二章的简单题型，第二问为常规题型

例12：（2012年）四

四. 证明下面问题 (10 分).

(1) 利用拉格朗日中值定理证明 $|\arctan x_1 - \arctan x_2| \le |x_1 - x_2|$;

(2) $\lim_{x\to+\infty}(\arctan\sqrt{x+k} - \arctan\sqrt{x}) = 0$, 其中 $k \in Z$;

(3) 设常数 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots a_n = 0$ ，求证 $\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \arctan\sqrt{x+k} = 0$.

一步步把台阶搭好，很难的题目变得很容易。

例13：（2011年）六

设 $f'(x)$ 在 $(0,a]$ 连续，且极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}f'(x)$ 存在，证明 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上一致连续.

重点讲解

例14：（2013年）七

假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 二次可导，且 $f(0)=f(1)=0$, 对 $\forall x\in(0,1)$, 都有 $f''(x)<0$, 若 $M>0$ 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最大值，证明：

（1） 对于任意自然数 n，存在唯一 $x_n\in(0,1)$，满足 $f'(x_n)=\dfrac{M}{n}$；

（2） $\lim\limits_{n} x_n$ 存在，且 $f(\lim\limits_{n} x_n)=M$.

重点讲解
考察态度

七. 泰勒公式

每年两道题：展开一个给定函数；与微分中值定理一起构成综合题。

前者为基本题（放在第一大题中），后者为难度很高的压轴题。

（2010年）一6、六
（2011年）一8、五
（2012年）一6、六
（2013年）一5、五

由于大家目前还未学完此部分内容，本次讲座暂不详细展开。

对什么时候应该使用泰勒展开应保持敏锐的直觉。

最后的话

考试有规律，学习无捷径。

掌握最适合自己的复习方法。

早动手，早安排。

预祝大家取得好的成绩
谢谢！