第二章

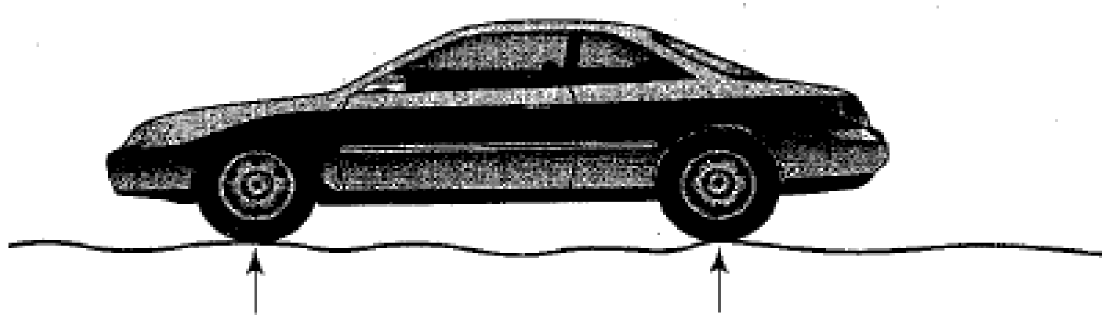
自动控制系统的数学模型（3）

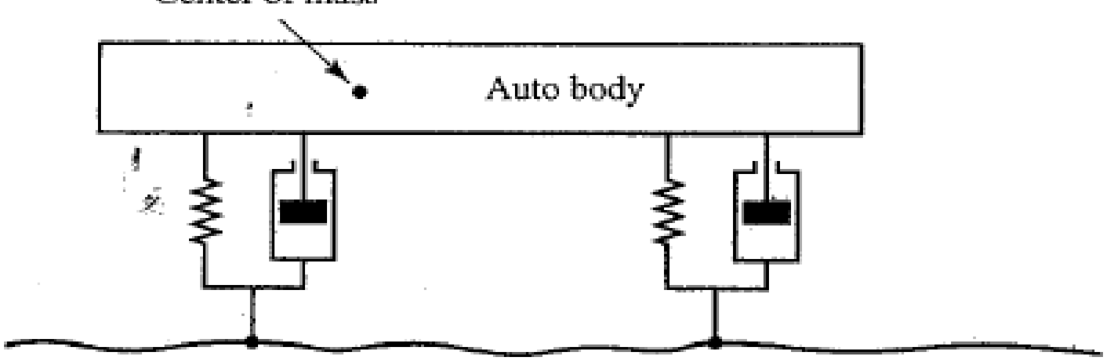
2-6 典型系统的传递函数

一、机械系统

典型的机械系统包含两种运动：直线运动及旋转运动。弹簧、质量块、阻尼器、倒立摆等被广泛用来描述机械系统。

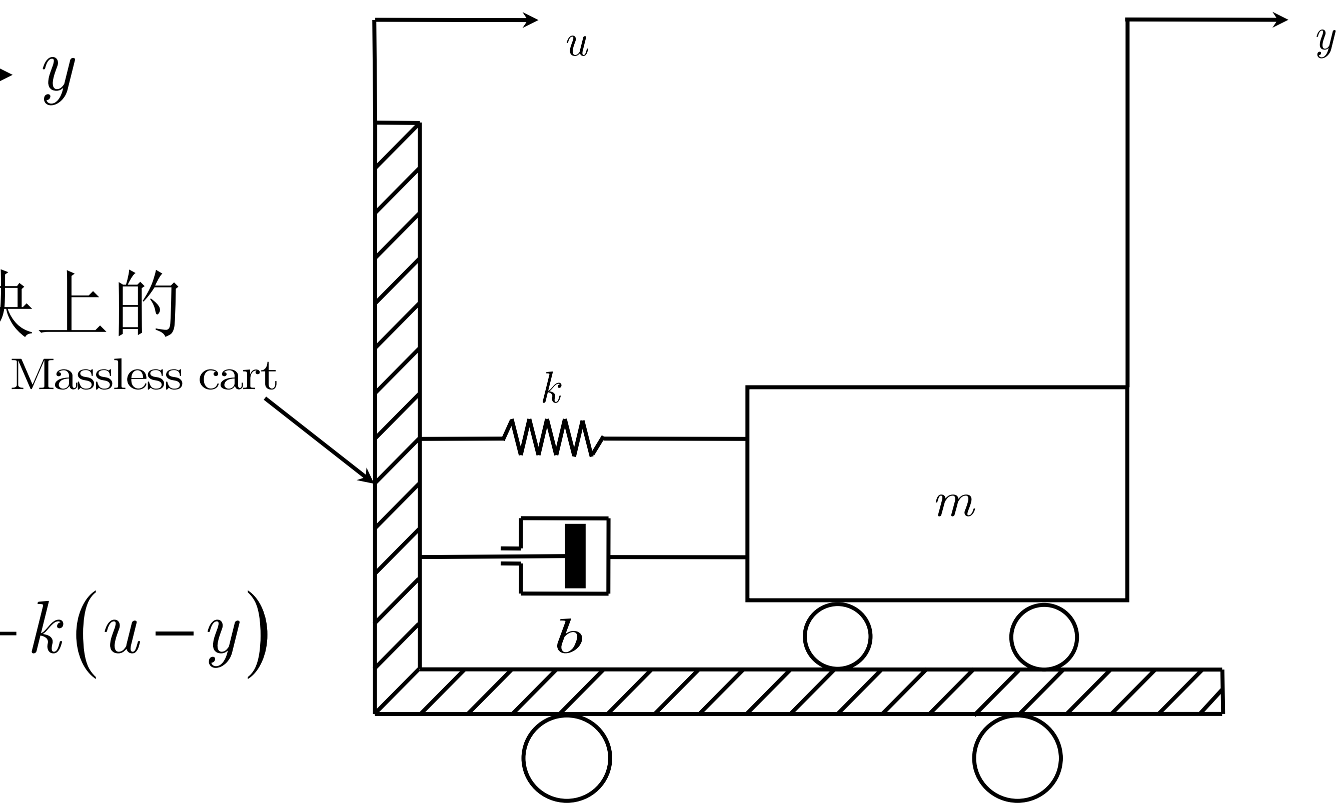
例 (汽车悬挂系统)：汽车沿道路行驶时，轮胎的垂直位移作用在汽车悬挂系统上，其运动包括质心的平移旋转。





(a)

例：一弹簧-质量块-阻尼器系统置于一无质量的小车之上。令u为输入，是小车的位移，y为输出，是质量块的位移。求该系统的数学模型。



作用在质量块上的力：

$$b\left(\frac{du}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)+k(u-y)$$

根据牛顿定律，

$$m\frac{d^2y}{dt}=b\left(\frac{du}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)+k(u-y)$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2y}{dt}+b\frac{dy}{dt}+ky=b\frac{du}{dt}+ku$$

因此，系统的传递函数为

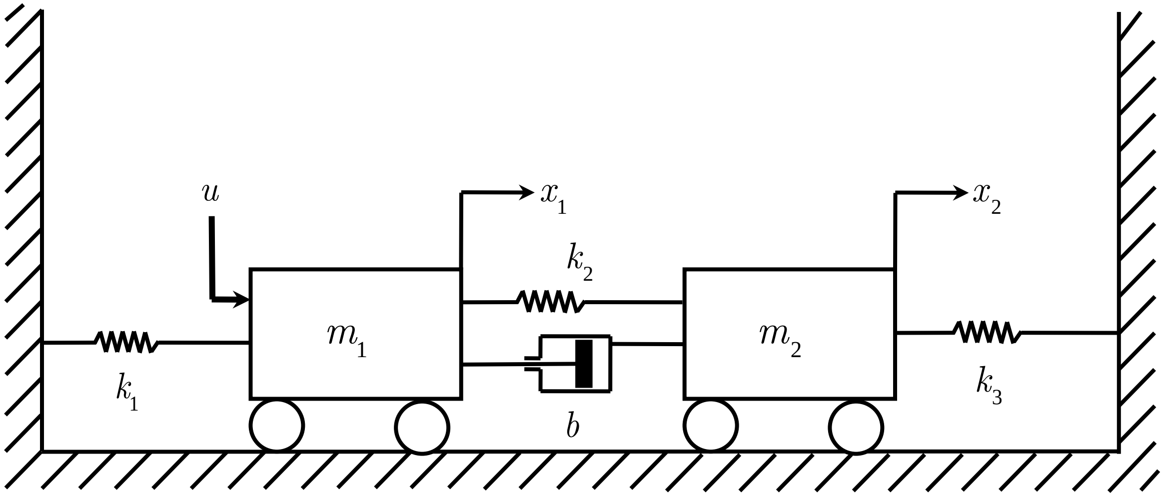
$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$

例：某机械系统如图所示。求传递函数$X_1(s)/U(s)$及$X_2(s)/U(s)$，这里，u 表示外力，为输入， x_1 和x_2 分别为两个小车的位移。

解：根据牛顿第二定律

$$m_1\ddot{x}_1 = u - k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$



整理得到

$$m_1\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = u + b\dot{x}_2 + k_2x_2$$

$$m_2\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 = b\dot{x}_1 + k_2x_1$$

进行$Laplace$变换，得到

$$[m_1s^2 + bs + (k_1 + k_2)]X_1(s) = U + (bs + k_2)X_2(s) \quad (1)$$

$$[m_2s^2 + bs + (k_2 + k_3)]X_2(s) = (bs + k_2)X_1(s) \quad (2)$$

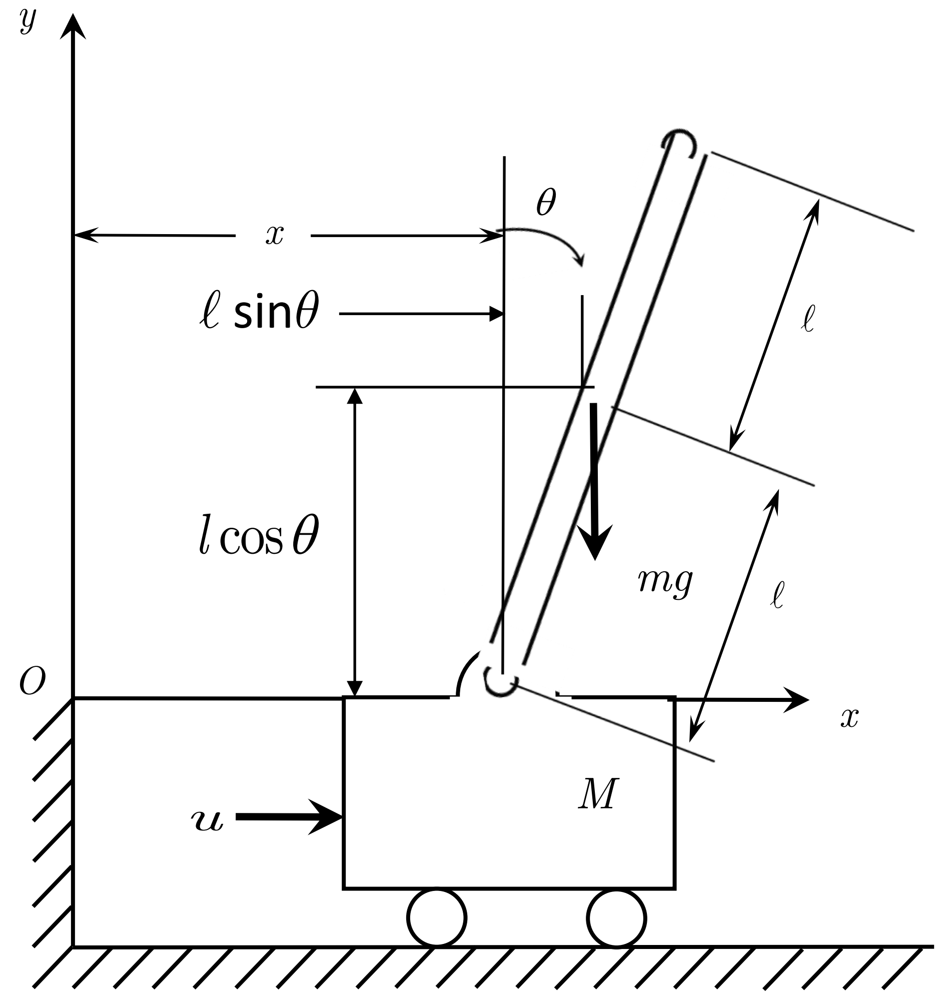
由 (2)求$X_2(s)$并将其代入(1)，

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} =$$

$$\frac{[m_2s^2+bs+(k_2+k_3)]}{[m_1s^2+bs+(k_1+k_2)][m_2s^2+bs+(k_2+k_3)]-(bs+k_2)^2}$$

同理可得$X_2(s)/U(s)$。

例：如图所示，一倒立摆置于一个电机驱动的小车之上。这是一个火箭起飞时的姿态控制问题，即保持火箭始终是垂直的。



其中：

u：小车控制力；

θ：摆与垂线的偏离角；

(x_G, y_G)：摆的重心在(x, y)坐标系中的位置。

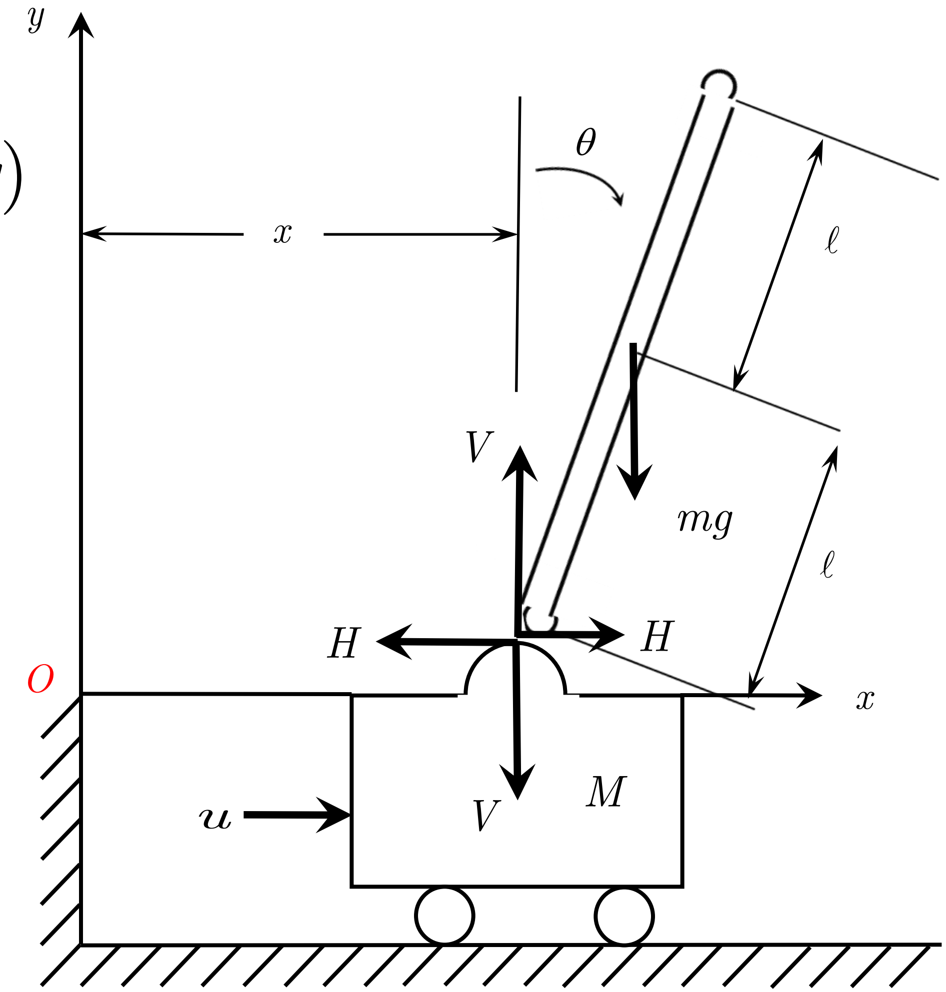
因此，

$$x_G = x + l\sin\theta$$

$$y_G = l\cos\theta$$

1) 小车水平运动：

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = u - H \quad (1)$$

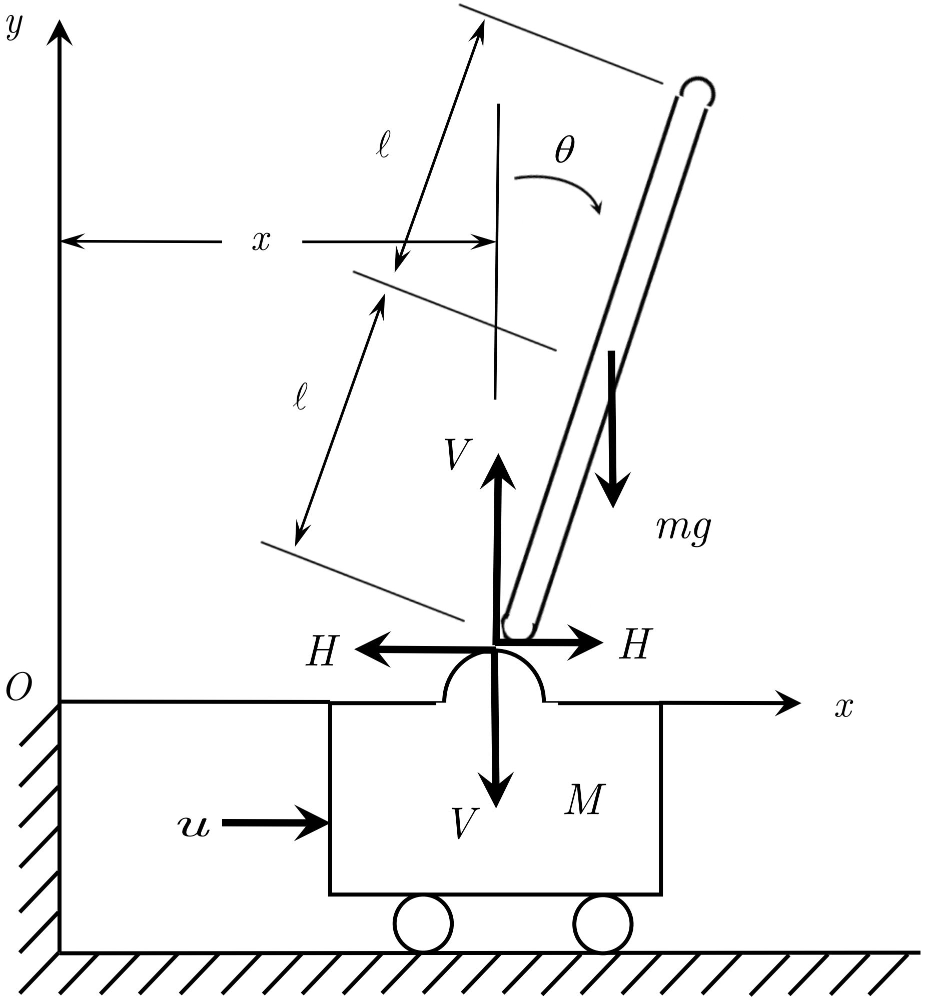


2)摆重心的水平运动为

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x+l\sin\theta)=H \quad (2)$$

3)摆重心的垂直运动为

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta)=V-mg \quad (3)$$

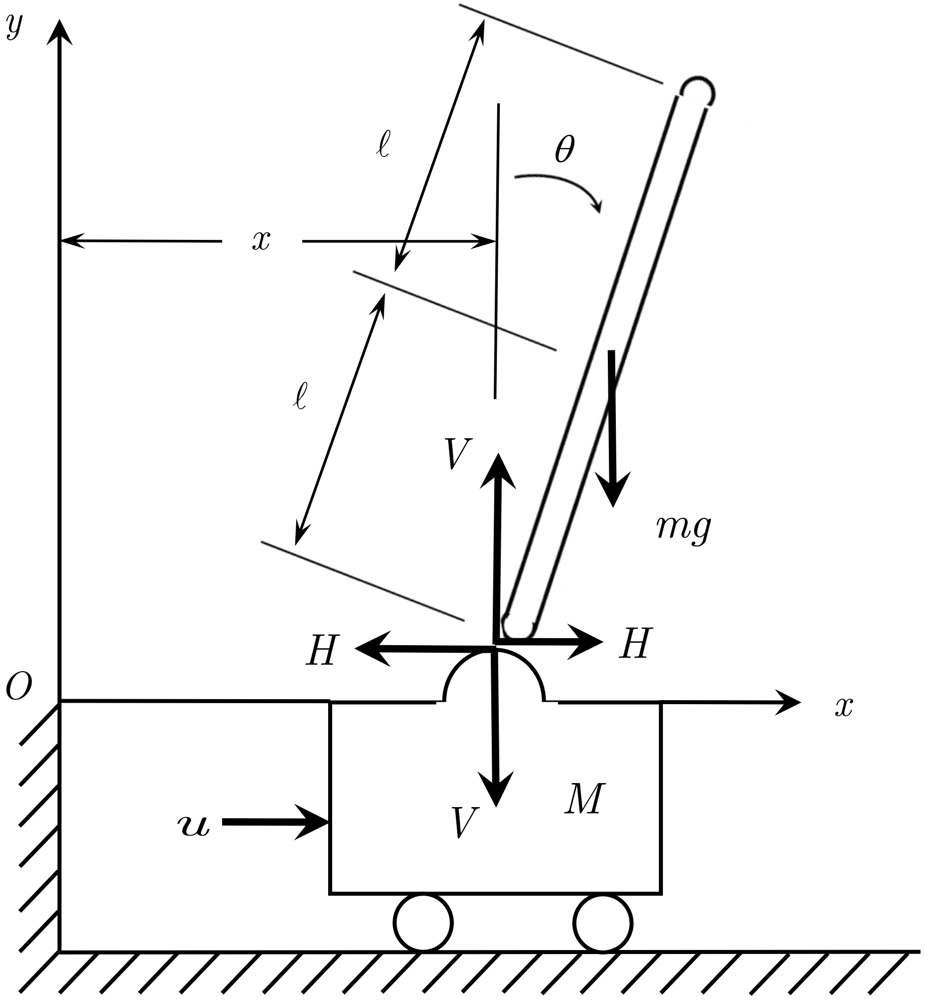


4) 摆重心的旋转运动为

$$I\ddot{\theta} = l(V\sin\theta) - l(H\cos\theta) \quad (4)$$

其中，I 为摆重心的转动惯量。

5) 将(2)-(4)线性化：



因为目的是保持摆的垂直，故假设 θ 及 $d\theta/dt$ 很小。此时，$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1$ and $\theta(d\theta/dt)^2\approx0$。因此，(2)-(4) 可线性化为：

$$\begin{cases} m(\ddot{x}+l\ddot{\theta})=H & (2) \\ 0=V-mg & (3) \\ I\ddot{\theta}=V\theta l-Hl & (4) \end{cases} \quad + \quad M\ddot{x}=u-H \quad (1)$$

将(1)代入 (2)，

$$(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}=u \quad (5)$$

由方程(2)-(4)，由

$$I\ddot{\theta} = mgl\theta - Hl = mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta})$$

$$\Rightarrow (I + ml^2)\ddot{\theta} + lm\ddot{x} = mgl\theta \quad (6)$$

由(6)，

$$\ddot{x} = \frac{mgl\theta - (I + ml^2)\ddot{\theta}}{lm} \quad (7)$$

将(7)代入(5)，

$$(M + m)\frac{mgl\theta - (I + ml^2)\ddot{\theta}}{lm} + ml\ddot{\theta} = u \quad (8)$$

对(8)两边进行$Laplace$变换，

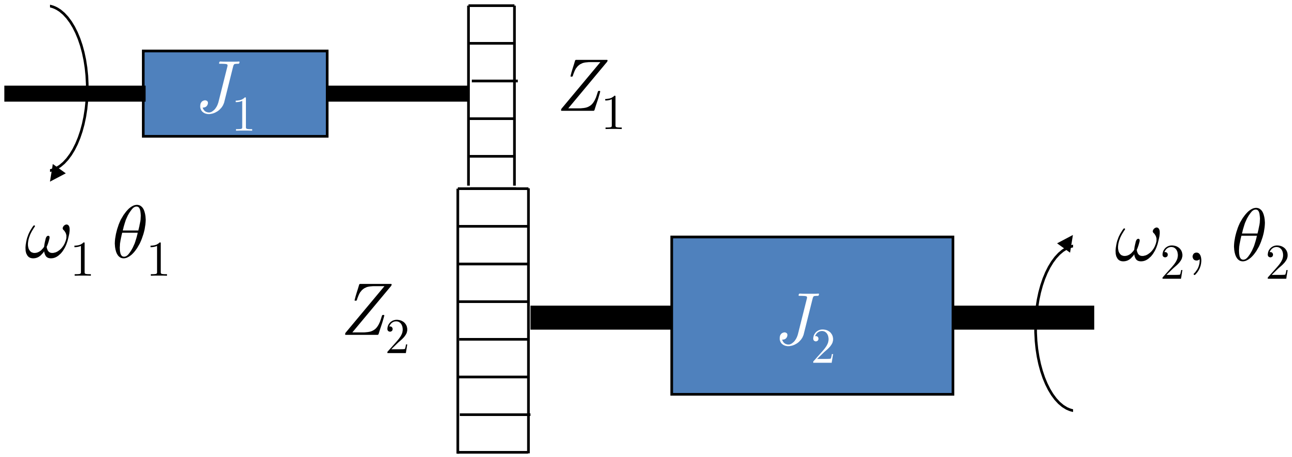
$$(M+m)\frac{mgl\Theta-(I+ml^2)s^2\Theta}{lm}+mls^2\Theta=U(s) \quad (9)$$

故

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{lm}{\left[(M+m)mgl-(MI+mMl^2+mI)s^2\right]}$$

例：齿轮系。

- 传动比：



Z_1为主动轮的齿数，Z_2为被动轮的齿数。齿轮系的传动比：

$$i = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

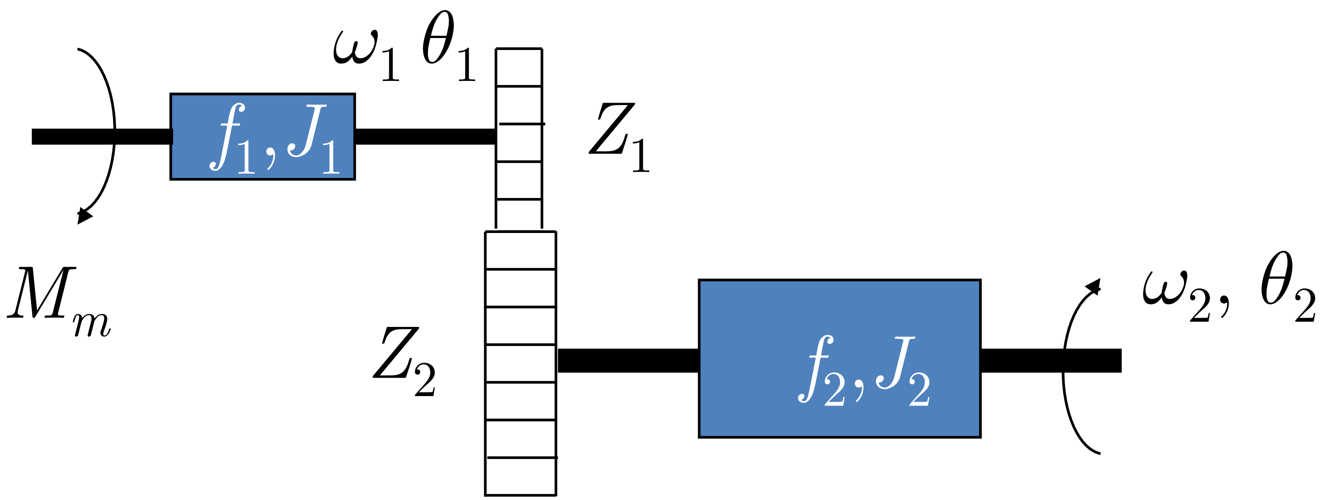
$$\omega_1 \longrightarrow \boxed{K_i} \longrightarrow \omega_2$$

传递函数：$K_1 = 1/i$。

一般地，n–1级齿轮传动的传动比：

$$i = i_1 \cdot i_2 \cdots i_{n-1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdots \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}$$

- 齿轮传动时的折算：



电机通过齿轮系驱动负载时，需要将负载转动惯量、粘性摩擦系数折算到电机轴上。根据牛顿定律，列写电机轴上的力矩平衡方程，可以导出折算到电机轴上的转动惯量和等效粘性摩擦系数分别为：

$$J = J_1 + \frac{1}{\dot{i}^2} J_2$$

$$f = f_1 + \frac{1}{\dot{i}^2} f_2$$

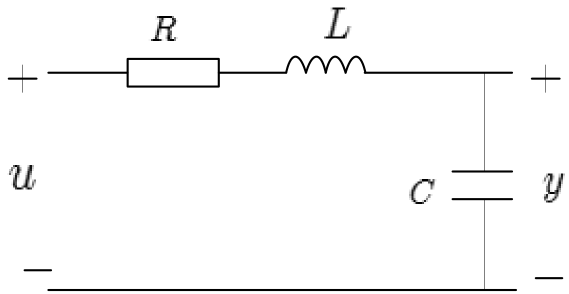
对于多级齿轮系，折算到电机轴上的转动惯量和等效粘性摩擦系数分别为

$$J = J_1 + \frac{1}{\dot{i}_1^2} J_2 + \left(\frac{1}{\dot{i}_1 \dot{i}_2} \right)^2 J_3 + \cdots$$

$$f = f_1 + \frac{1}{\dot{i}^2} f_2 + \left(\frac{1}{\dot{i}_1 \dot{i}_2} \right)^2 f_3 + \cdots$$

二、电器系统

例： RLC 电路：



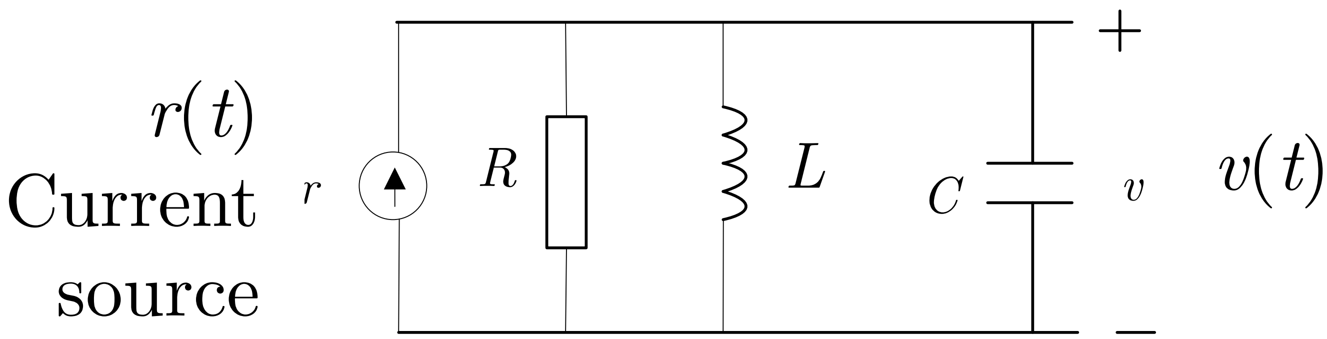
根据$Kirchihoff$定律， $u = iR + y + v_L$

因 $i = C\dfrac{dy}{dt}$， $v_L = L\dfrac{di}{dt} = LC\dfrac{d^2y}{dt^2}$

有

$$CL\frac{d^2y}{dt^2} + CR\frac{dy}{dt} + y = u$$

例：RLC电路如下图所示，求$V(s)/R(s)$。



$$\frac{v(t)}{R}+C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt=r(t)$$

取$Laplace$变换后

$$\frac{V(s)}{R}+CsV(s)+\frac{1}{Ls}V(s)=R(s)$$

故

$$V(s)\left(\frac{1}{R}+Cs+\frac{1}{Ls}\right)=R(s)$$

$$\Rightarrow \frac{V(s)}{R(s)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{R}+Cs+\frac{1}{Ls}\right)}$$

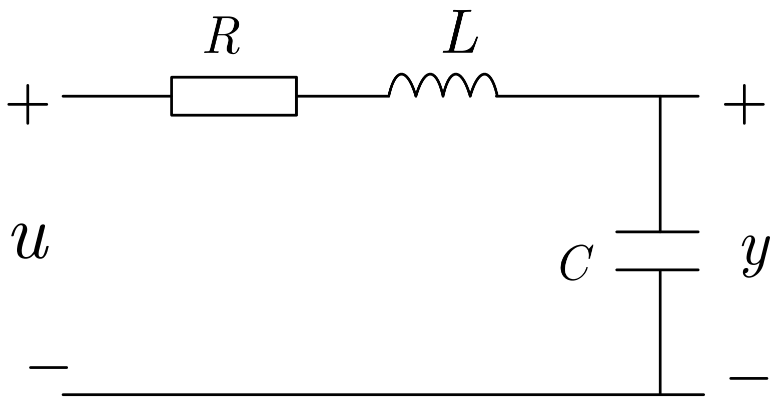
$$=\frac{RLs}{RLCs^2+Ls+R}$$

- **复阻抗**

阻抗：R

容抗：$1/Cs$

感抗：Ls



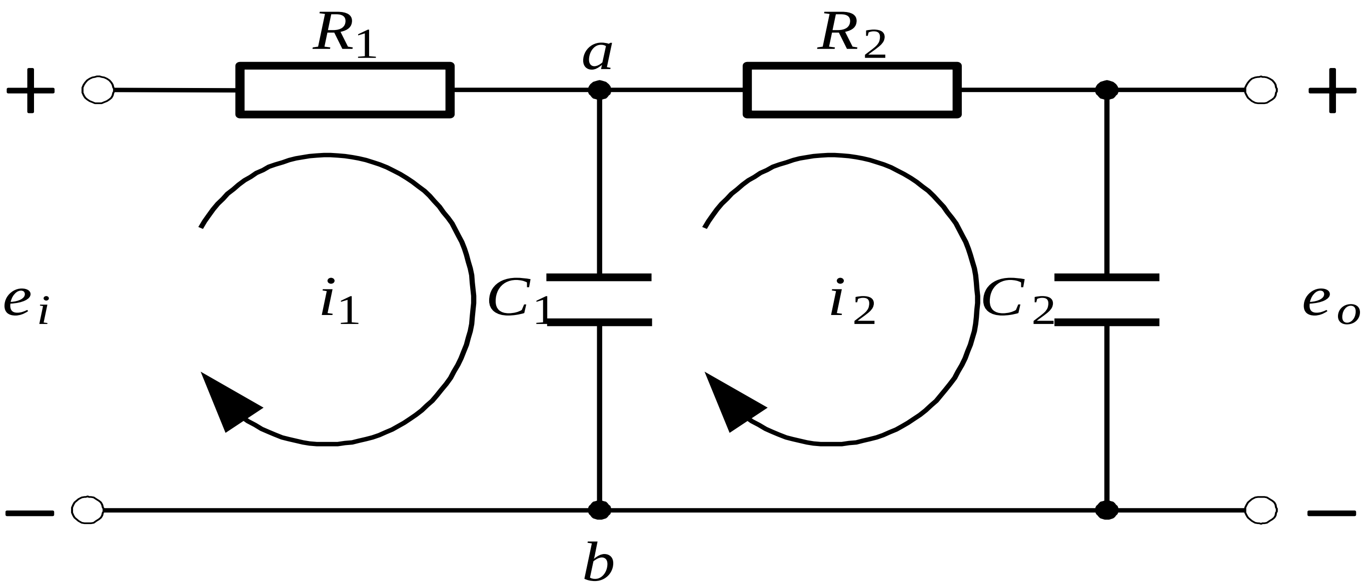
例： 求 $Y(s)/U(s)$。

解：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1/Cs}{R+Ls+1/Cs}$$

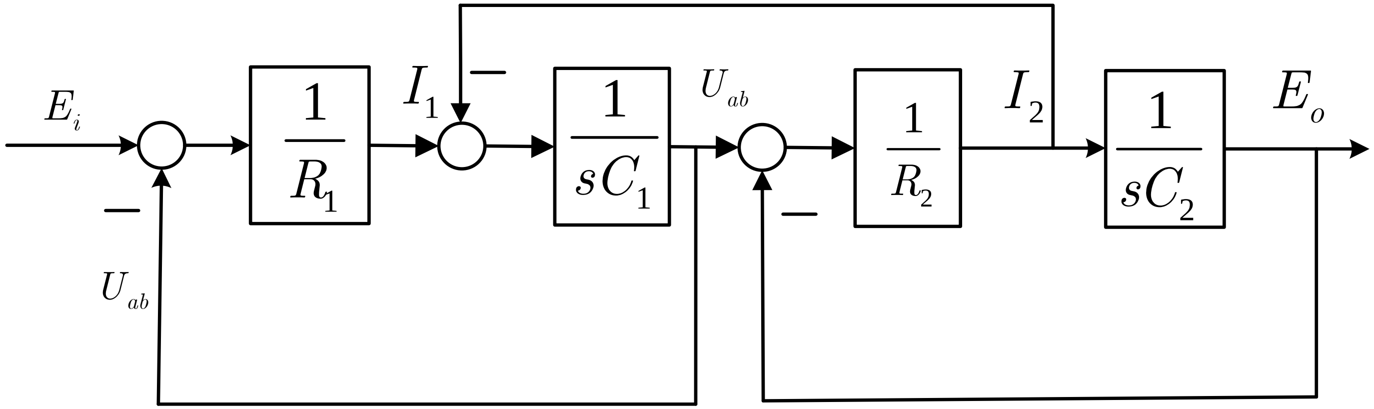
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

例：求$E_o(s)/E_i(s)$：



解：利用复阻抗概念，有：

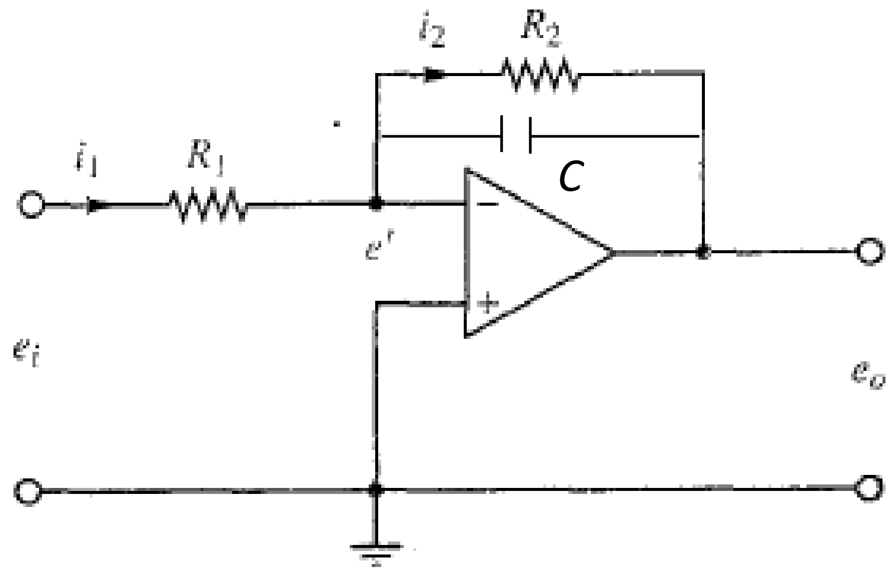
$$
\begin{cases}
I_1(s) = \dfrac{E_i(s) - U_{ab}(s)}{R_1} = \dfrac{1}{R_1}[E_i(s) - U_{ab}(s)] \\
U_{ab}(s) = \dfrac{1}{sC_1}[I_1(s) - I_2(s)] \\
I_2(s) = \dfrac{1}{R_2}[U_{ab}(s) - E_0(s)] \\
E_0(s) = \dfrac{1}{sC_2} I_2(s)
\end{cases}
$$



由此得到

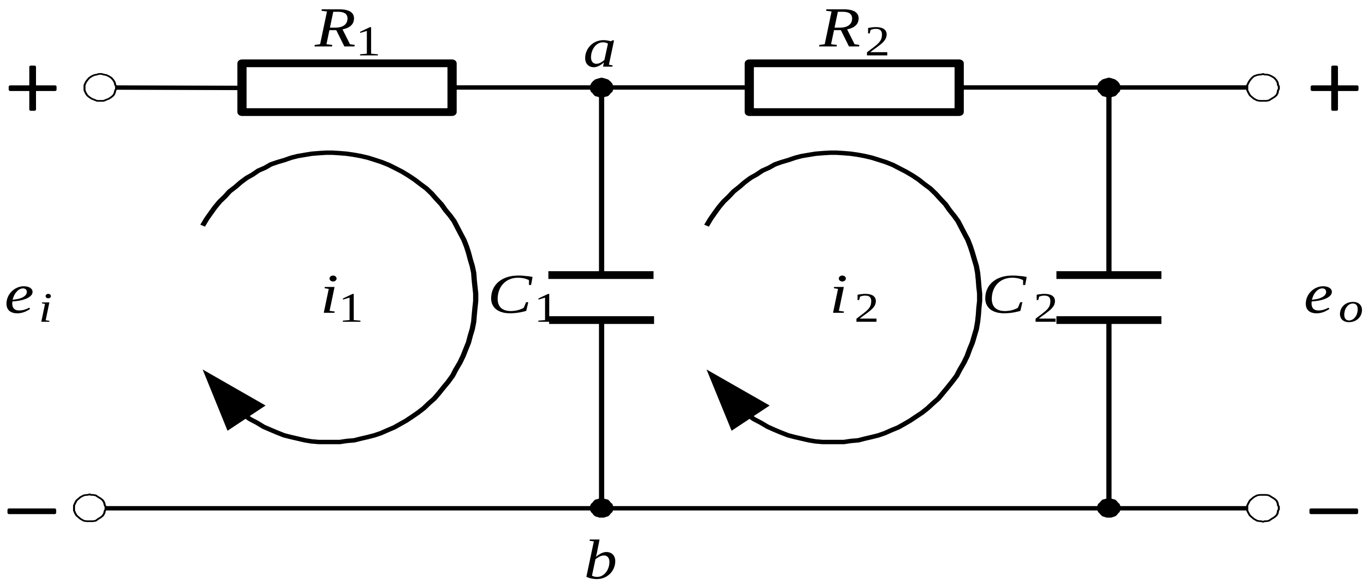
$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1}$$

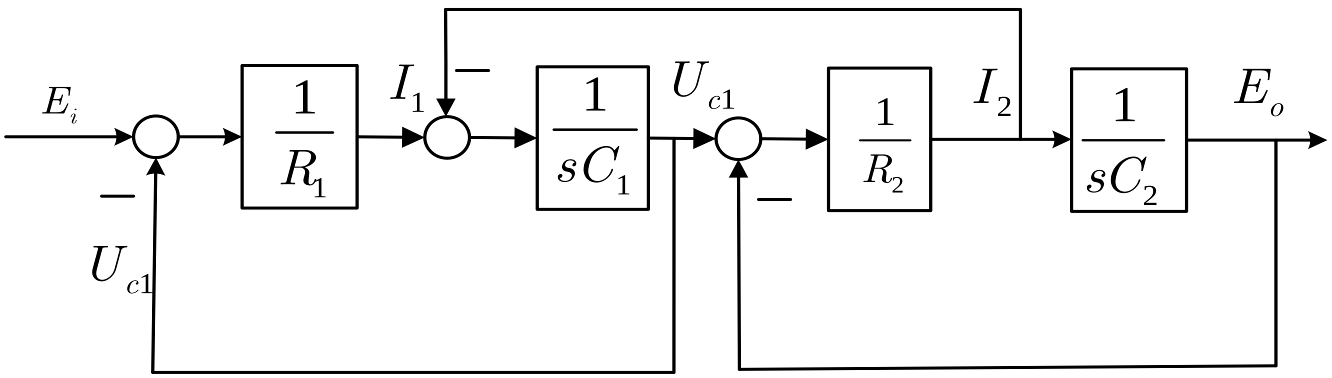
例：求$E_o(s)/E_i(s)$：



- **负载效应**

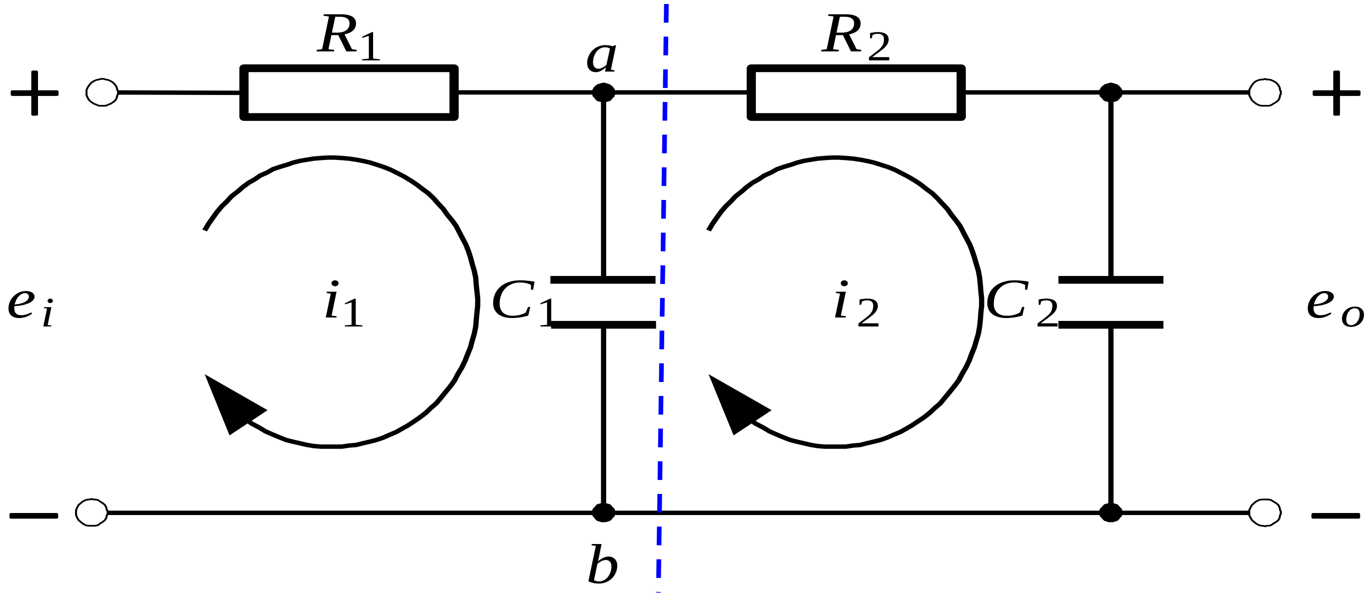
例： 考虑如下系统，求 $E_o(s)/E_i(s)$。





由此得到

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

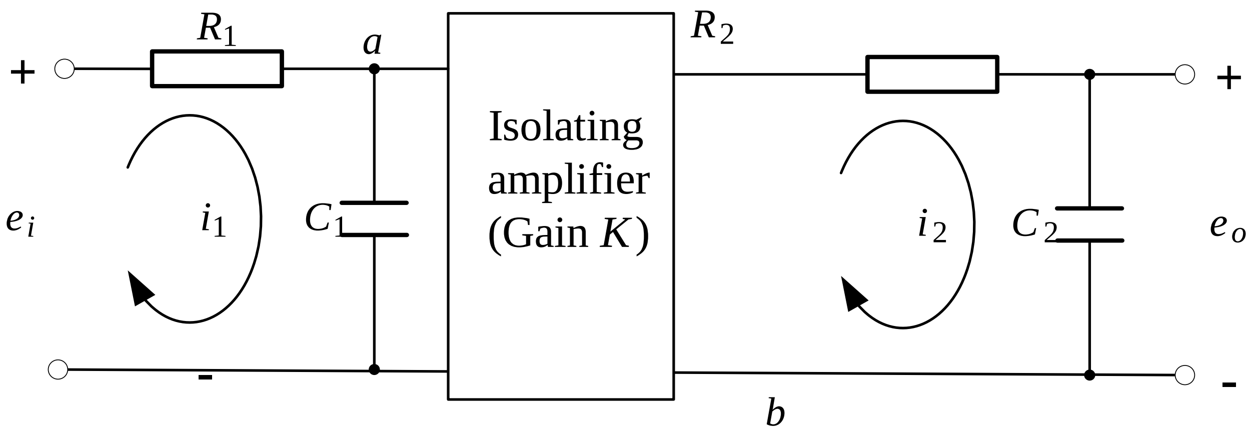


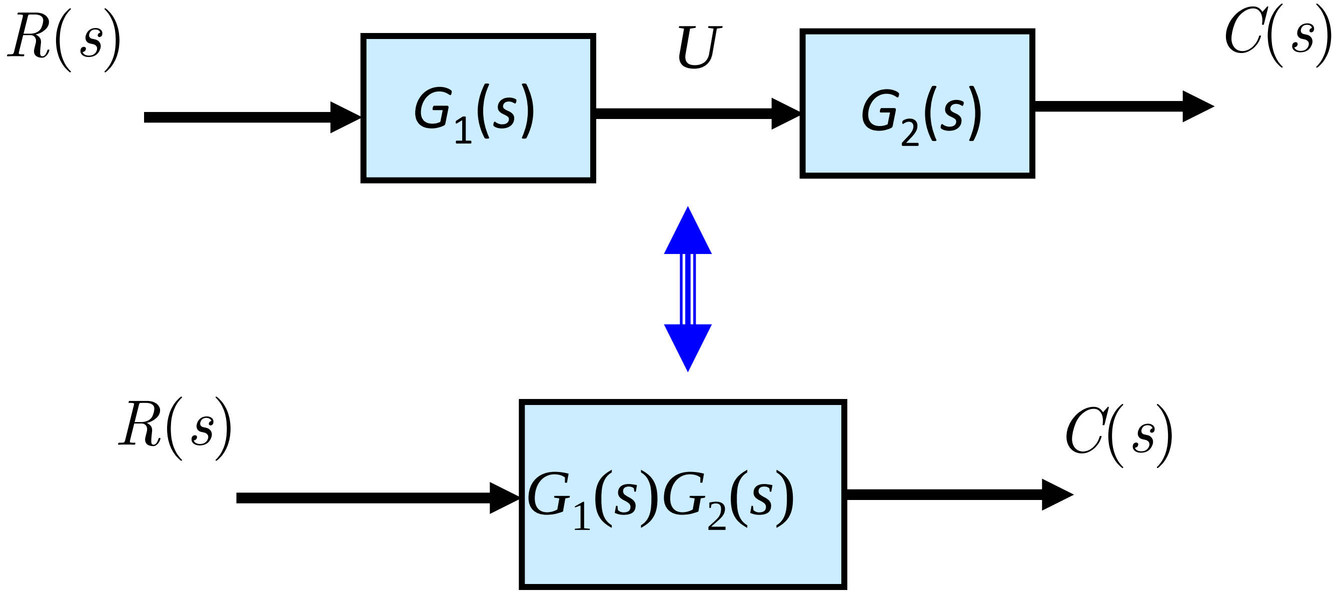
$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} \neq \frac{1}{R_1C_1s+1} \cdot \frac{1}{R_2C_2s+1}$$

- **无负载效应的系统**

两个RC电路用一个集成运放隔离，可消除负载效应：

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)}=\frac{K}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}$$



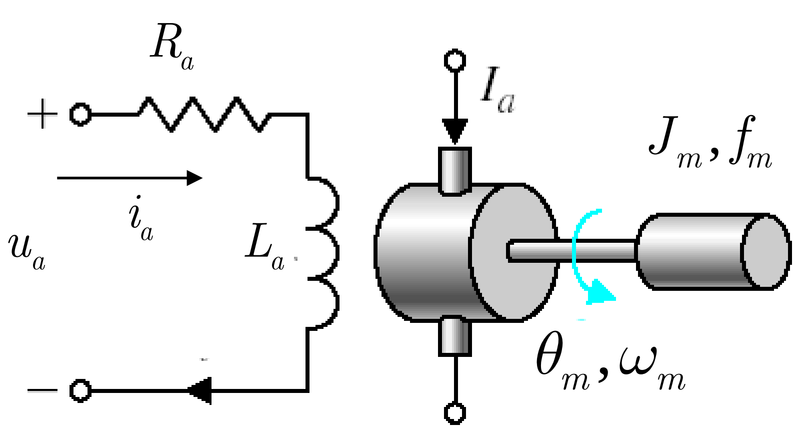


$$C(s) = G_2(s)U(s) = G_2(s)G_1(s)R(s)$$

三、机电系统

例：求直流电机的传递函数$\Theta_m(s)/U_a(s)$，这里，θ_m表示电机转角，u_a为输入电压，i_a为电枢电流J_m表示电机轴的转动惯量，f_m为粘性摩擦系数，

$$U_a(s) \longrightarrow \boxed{DC\ \text{motor}} \longrightarrow \Theta_m(s)$$



f_m为粘性摩擦系数，

电机方程：

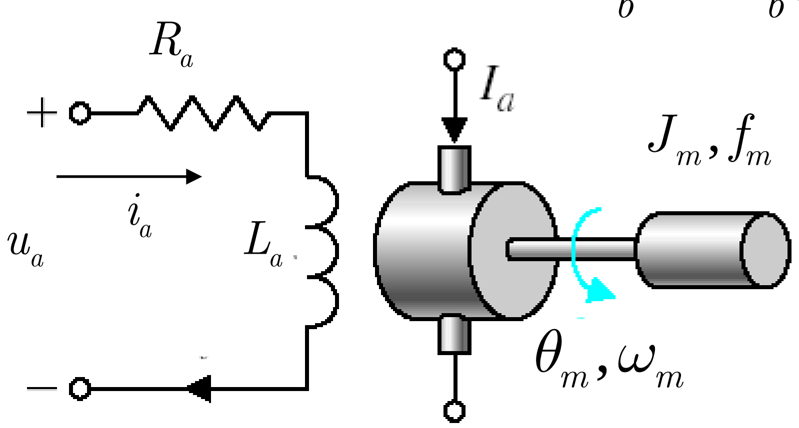
1) 电磁转矩

$$M_m = C_m i_a \quad (1)$$

其中，i_a为电枢电流，C_m为转矩常数；

2)反电势

$$E_b = K_b \dot{\theta}_m \quad (2)$$



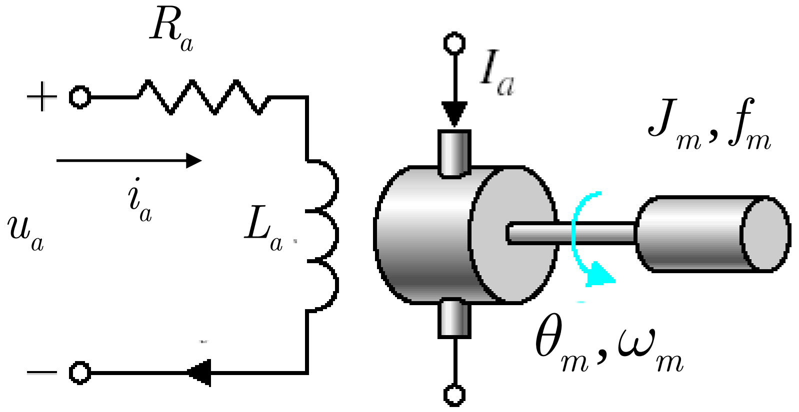
其中，$d\theta_m/dt$为电机轴的转速，K_b为电气常数；

3) 电气方程：

$$u_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_b \quad (3)$$

4) 转矩方程：由Newton定律，

$$J_m \ddot{\theta}_m = M_m - f_m \dot{\theta}_m \Rightarrow J_m \ddot{\theta}_m + f_m \dot{\theta}_m = M_m \quad (4)$$



对(3)取$Laplace$变换并注意到(2)，

$$U_a = I_a R_a + L_a s I_a + K_b s \Theta_m$$

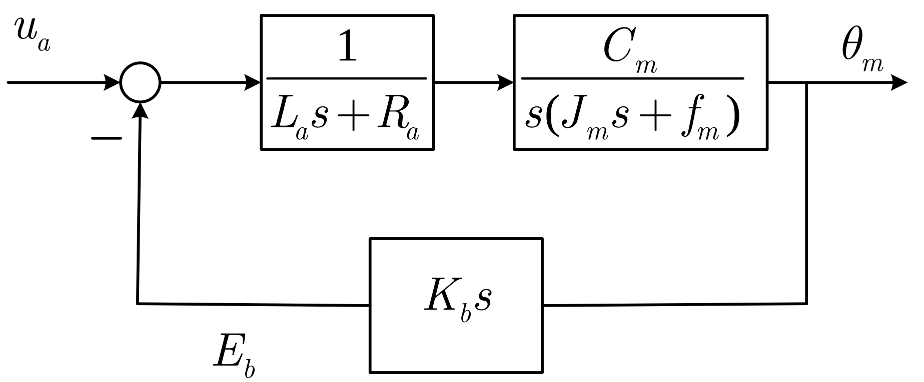
因此，

$$I_a = \frac{1}{L_a s + R_a}[U_a - K_b s \Theta_m] \quad (5)$$

对(4)取$Laplace$变换并注意到(1)，

$$\Theta_m = \frac{1}{J_m s^2 + f_m s} C_m I_a \quad (6)$$

由(5)和(6)，



$$\frac{\Theta_m}{U_a(s)} = \frac{C_m}{[(L_a s + R_a)(J_m s^2 + f_m s) + C_m K_b s]}$$

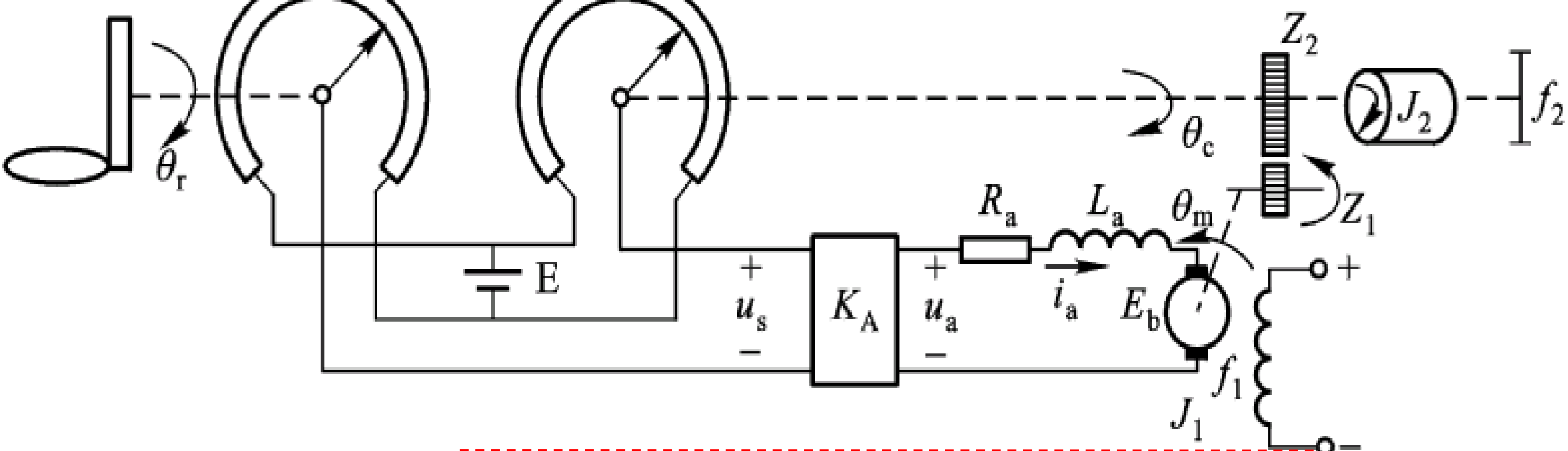
若$L_a \approx 0$，

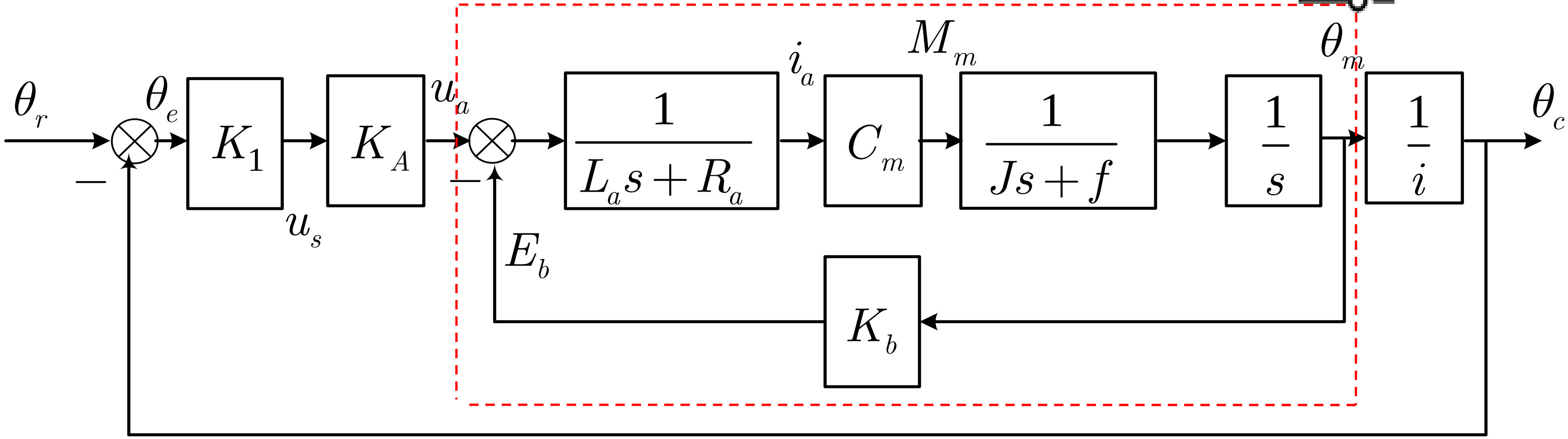
$$\frac{\Theta_m}{U_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

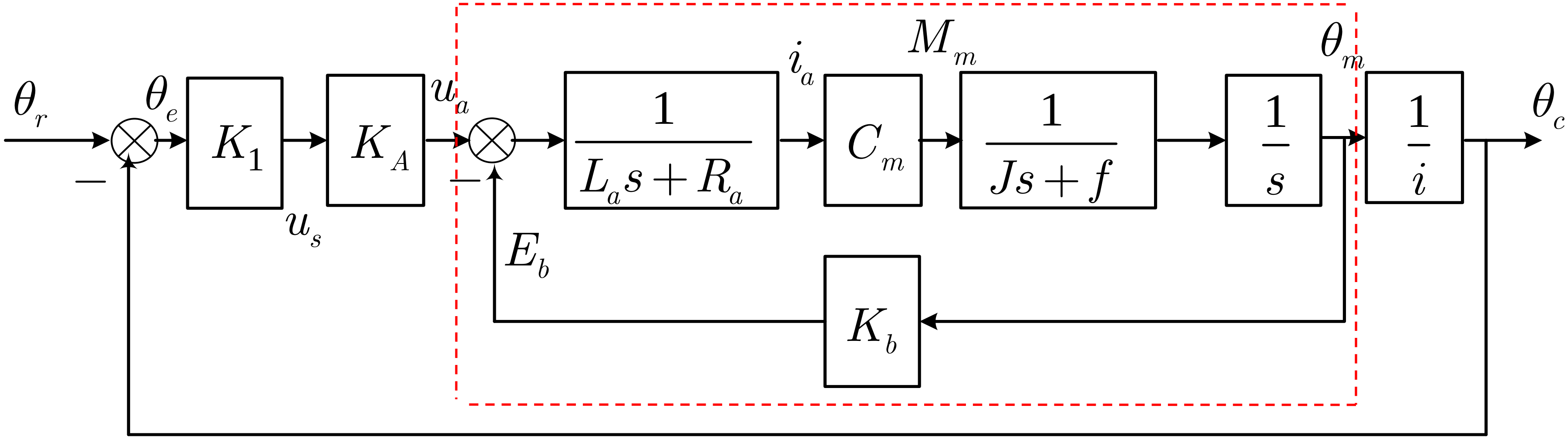
这里，

$$K_m = \frac{C_m}{R_a f_m + C_m K_b} \qquad T_m = \frac{J_m R_a}{R_a f_m + C_m K_b}$$

例：伺服系统如下：


θ_r
E
u_s
K_A
u_a
R_a
L_a
i_a
E_b
θ_m
θ_c
Z_2
Z_1
J_2
f_2
f_1
J_1


θ_r
θ_e
K_1
u_s
K_A
u_a
$\frac{1}{L_a s+R_a}$
i_a
C_m
M_m
$\frac{1}{Js+f}$
$\frac{1}{s}$
θ_m
$\frac{1}{i}$
θ_c
E_b
K_b



直流电机方程：

$$M_m(s) = C_m I_a(s)$$

$$E_b(s) = K_b s\theta_m(s)$$

$$Js^2\theta_m(s) = M_m - fs\theta_m(s)$$

$$U_a(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + E_b(s)$$

$$J = J_1 + \frac{1}{i^2} J_2,\ f = f_1 + \frac{1}{i^2} f_2$$