

北京航空航天大学
2015-2016 学年第一学期期末

考试统一用答题册

考试课程 一元微积分 任课老师

班级 学号 姓名

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
阅卷人									

2016 年 01 月 20 日

一. 填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $x + 2y = \sin y$ 确定, 则 $dy =$ _____.
2. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 24x - 19$ 在拐点处的切线方程为 _____.
3. 设 $y = x + \ln x$, 则 $\frac{dx}{dy} =$ _____.
4. 若反常积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha \sqrt{1+x}} dx (\alpha > 0)$ 收敛, 则 α 的取值范围是 _____.
5. 有一细杆, 位于 x 轴上区间 $[0, 1]$, 已知细杆上任一点处的线密度为 $\rho(x) = x$, 则当 $x =$ _____ 时, $[0, x]$ 一段的质量为整个细杆质量的一半.

二. 单项选择题(每小题 4 分, 共 20 分)

1. 若 $f(x) = \begin{cases} a + 2x, & x < 0 \\ e^{bx}, & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处可导, 则 $a + 2b$ 的值为().
(A) 5; (B) 4; (C) 3; (D) 2.
2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 (1) $e^{x-x^2} - 1$; (2) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1+\sin x}$; (3) $x + \ln(1-x)$; (4) $1 - \cos x^2$ 从低阶到高阶排列的顺序为().
(A) (1)(2)(3)(4); (B) (3)(1)(2)(4); (C) (1)(3)(2)(4); (D) (1)(3)(4)(2).
3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 则 $\phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在区间 $[0, 2]$ 上 ().
(A) 有第一类间断点; (B) 有第二类间断点; (C) 连续但不可导; (D) 可导.
4. 设函数 $f(x)$ 连续, $F(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$, 则 $F''(x) =$ ().
(A) $\int_0^x f(t) dt$; (B) $f(x)$; (C) $x \int_0^x f(t) dt$; (D) 0.
5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列结论中正确的是().
(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ 收敛; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛;
(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛.

三. 求极限 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2}$

四. 求积分 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\int \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx$

五. (10 分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过原点 $(0, 0)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $y \geq 0$. 试确定

a, b, c 的值, 使得抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围图形的面积为 $\frac{2}{3}$, 且使该图形

绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小, 并求最小体积.

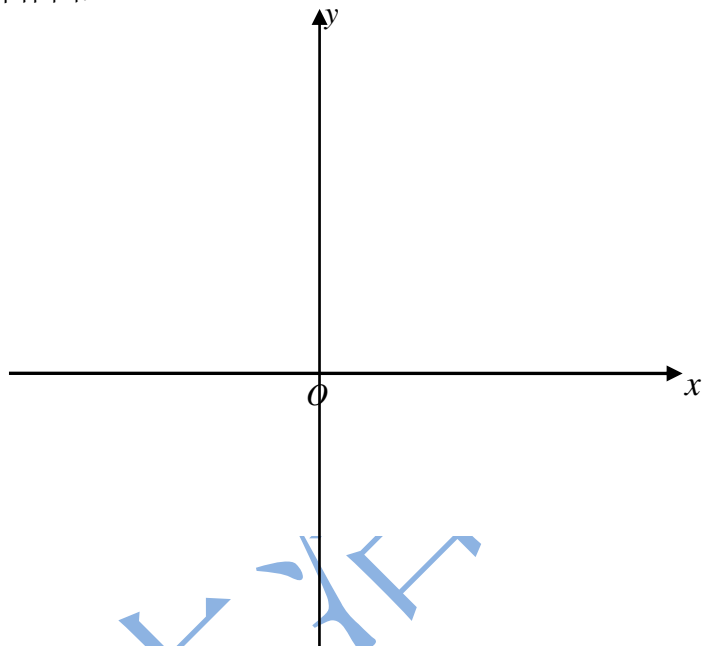
六. (10 分) 判别下列级数的收敛性, 并说明是条件收敛还是绝对收敛.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$;

2. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p \ln n} \quad (p > 0).$

七. (10 分) 设函数 $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$, 填表并作图.

单增区间	
单减区间	
凹区间	
凸区间	
极值	
拐点	
渐近线	



八. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

(1) 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$.

(2) 若 $f(a) = 0, \int_a^b f(x) dx = 0$, 证明存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\eta) = 0$.