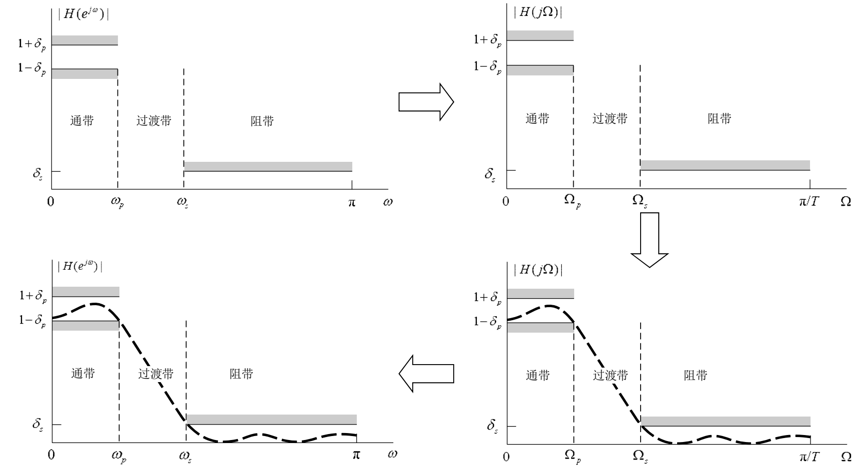
数字信号处理

——第14讲

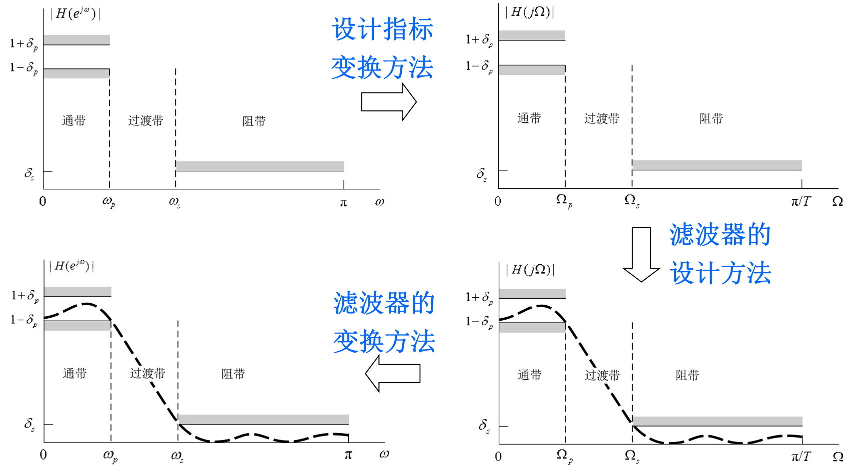
IIR数字滤波器—设计流程

❖ 设计流程—基本问题



IIR数字滤波器—设计流程

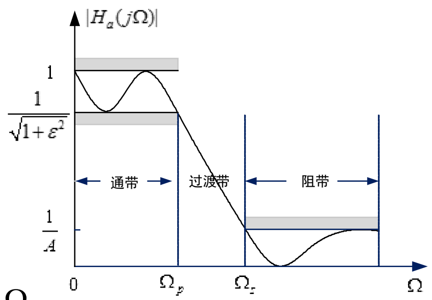
❖ 设计流程—基本内容



模拟滤波器—设计方法

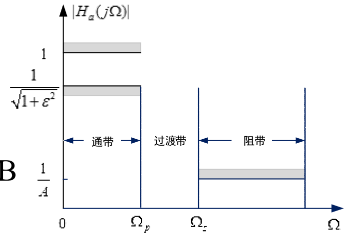
❖ 技术指标—描述方法

- 通带截止频率
  $\Omega = \Omega_p$
- 阻带截止频率
  $\Omega = \Omega_s$
- 通带误差要求
  $$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \le |H_a(j\Omega)| \le 1 \quad |\Omega| \le \Omega_p$$
- 阻带误差要求
  $$|H_a(j\Omega)| \le \frac{1}{A} \quad \Omega_s \le |\Omega| \le \infty$$



模拟滤波器—设计方法

❖ 技术指标—分贝描述



➢ 通带最大衰减

$$\alpha_p = -20\lg\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 10\lg(1+\varepsilon^2)\ \ \text{dB}$$

➢ 阻带最小衰减

$$\alpha_s = -20\lg\left(\frac{1}{A}\right) = 20\lg A\ \ \text{dB}$$

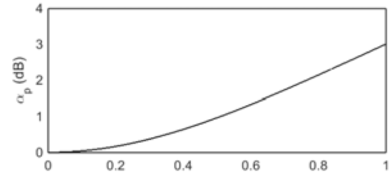
➢ 通带/阻带纹波参数

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_p/10}-1} \qquad A = 10^{\alpha_s/20}$$

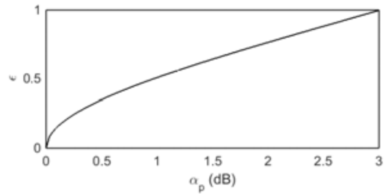
模拟滤波器—设计方法

➢ 通带最大衰减-纹波参数

$$\alpha_p = 10\lg(1+\varepsilon^2)\quad \text{dB}$$

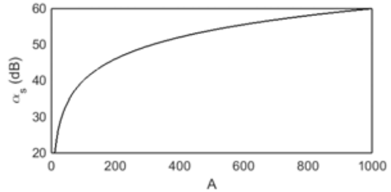


$$\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_p/10}-1}$$

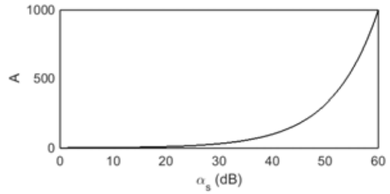


➢ 阻带最小衰减-纹波参数

$$\alpha_s = 20\lg A\quad \text{dB}$$



$$A = 10^{\alpha_s/20}$$

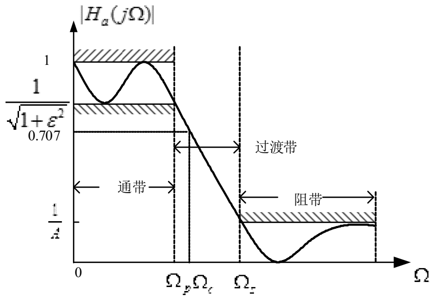


模拟滤波器—设计方法

❖ 技术指标—损耗函数

➢ 损耗（衰减）函数

$$\alpha(\Omega) = -20\lg|H_a(j\Omega)|$$
$$= -10\lg|H_a(j\Omega)|^2$$



➢ **3dB**截止频率

$$\alpha(\Omega_c) = 3\quad \text{dB}$$

➢ 两个附加参数

过度比：

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$$

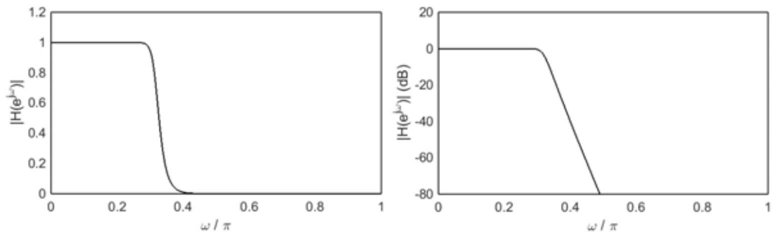
偏离参数：

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}$$

模拟滤波器—巴特沃斯

❖ 巴特沃斯滤波器

➢ 幅度响应特点：



➢ 巴特沃斯滤波器：

由英国工程师斯蒂芬·巴特沃斯（**Stephen Butterworth**）在**1930**年提出，并议发表在英国《无线电工程》期刊。

模拟滤波器—巴特沃斯

❖ 系统描述

➤ 幅度平方函数

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \Rightarrow |H_a(\Omega)|=\begin{cases}1 & \text{if } \Omega=0\\ \sqrt{2}/2 & \text{if } \Omega=\Omega_c\end{cases}$$

➤ 损耗函数

$$\alpha(\Omega)=-20\lg|H_a(j\Omega)|=10\lg\left(\frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2}\right)=10\lg\left(1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha(0)=0\ \text{dB}\qquad \alpha(\Omega_c)=10\lg\left(1+\left(\frac{\Omega_c}{\Omega_c}\right)^{2N}\right)=10\lg 2\approx 3\ \text{dB}$$

模拟滤波器—巴特沃斯

❖ 参数计算

➤ 通带截止频率位置

$$\left|H_a(j\Omega_p)\right|^2=\frac{1}{1+(\Omega_p/\Omega_c)^{2N}}=\frac{1}{1+\varepsilon^2} \Rightarrow \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}=\varepsilon^2$$

➤ 阻带截止频率位置

$$\left|H_a(j\Omega_s)\right|^2=\frac{1}{1+(\Omega_s/\Omega_c)^{2N}}=\frac{1}{A^2} \Rightarrow \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}=A^2-1$$

➤ 滤波器阶数

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)^{N}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}=k_1 \Rightarrow N=\frac{\lg\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}\right)}{\lg\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)}=\frac{\lg k_1}{\lg k}$$

模拟滤波器—巴特沃斯

➤ 截止频率计算

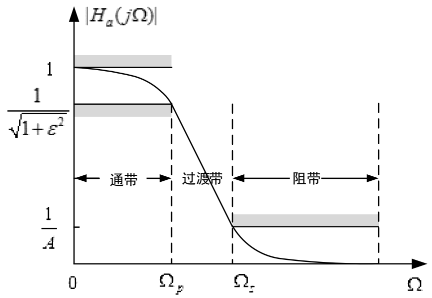
$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}=\varepsilon^2 \Rightarrow \Omega_c=\frac{\Omega_p}{\varepsilon^{1/N}}$$

$$\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}=A^2-1 \Rightarrow \Omega_c=\frac{\Omega_s}{(A^2-1)^{1/2N}}$$

两种算法区别：

1 满足通带指标，
阻带指标有富裕。

2 满足阻带指标，
阻带指标有富裕



模拟滤波器—巴特沃斯

❖ 系统参数计算小结

➤ 给出通带/阻带衰减

$$\alpha_p=-20\lg\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=10\lg(1+\varepsilon^2)\quad \text{dB}$$

$$\alpha_s=-20\lg\left(\frac{1}{A}\right)=20\lg A\quad \text{dB}$$

$$\Downarrow$$

➤ 计算通带/阻带纹波

$$\varepsilon=\sqrt{10^{\alpha_p/10}-1}\qquad A=10^{\alpha_s/20}$$

$$\Downarrow$$

➤ 计算阶数/截止频率

$$N=\frac{\lg\left(\varepsilon/\sqrt{A^2-1}\right)}{\lg\left(\Omega_p/\Omega_s\right)}\qquad \Omega_c=\frac{\Omega_s}{(A^2-1)^{\frac{1}{2N}}}$$

模拟滤波器—巴特沃斯

- 构造系统函数
  - 滤波器系统函数

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}} \Rightarrow H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{D_N(s)}$$

  - **$D_N(s)$**的归一化形式

N阶多项式形式： $D_N(s)=B_N(s)=s^N+\sum_{k=0}^{N-1}b_k s^k$

N阶极点形式： $D_N(s)=\prod_{k=1}^{N}(s-\Omega_c p_k) \quad p_k=e^{j\pi(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N})}$

N/2个因式分解： $D_N(s)=\prod_{k=1}^{\lfloor N/2\rfloor}B_k(s) \quad B_k(s)=s^2+b_{k1}s+b_{k0}$

模拟滤波器—巴特沃斯

N 阶多项式形式：

分母多项式 / 系数阶数 N	$B(p)=p^N+b_{N-1}p^{N-1}+b_{N-2}p^{N-2}+\cdots+b_1p+b_0$								
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.0000								
2	1.0000	1.4142							
3	1.0000	2.0000	2.0000						
4	1.0000	2.6131	3.4142	2.613					
5	1.0000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361				
6	1.0000	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637			
7	1.0000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940		
8	1.0000	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8642	13.1371	5.1258	
9	1.0000	5.7588	16.5817	31.1634	41.9864	41.9864	31.1634	16.5817	5.7588

模拟滤波器—巴特沃斯

N 阶极点形式：

极点位置 / 阶数 N	$P_{0,N-1}$	$P_{1,N-2}$	$P_{2,N-3}$	$P_{3,N-4}$	P_4
1	−1.0000				
2	−0.7071±j0.7071				
3	−0.5000±j0.8660	−1.0000			
4	−0.3827±j0.9239	−0.9239±j0.3827			
5	−0.3090±j0.9511	−0.8090±j0.5878	−1.0000		
6	−0.2588±j0.9659	−0.7071±j0.7071	−0.9659±j0.2588		
7	−0.2225±j0.9749	−0.6235±j0.7818	−0.9010±j0.4339	−1.0000	
8	0.1951±j0.9808	0.5556±j0.8315	−0.8315±j0.5556	−0.9808±j0.1951	
9	−0.1736±j0.9848	−0.5000±j0.8660	−0.7660±j0.6428	−0.9397±j0.3420	−1.0000

模拟滤波器—巴特沃斯

N/2个因式分解：

分母因式 / 阶数 N	$B(p)=B_1(p)B_2(p)B_3(p)B_4(p)B_5(p)$ $B(p)$
1	$(p+1)$
2	$(p^2+1.4142p+1)$
3	$(p^2+p+1)(p+1)$
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$
5	$(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)(p+1)$
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9319p+1)$
7	$(p^2+0.4450p+1)(p^2+1.2470p+1)(p^2+1.8019p+1)(p+1)$
8	$(p^2+0.3902p+1)(p^2+1.1111p+1)(p^2+1.6629p+1)(p^2+1.9616p+1)$
9	$(p^2+0.3473p+1)(p^2+p+1)(p^2+1.5321p+1)(p^2+1.8794p+1)(p+1)$

模拟滤波器—巴特沃斯

- 滤波器系统函数

归一化

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{D_N(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$G(p)=\frac{1}{D'_N(p)}$$

$$\Downarrow$$

$$D'_N(p)=D_N\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)\bigg|_{\frac{s}{\Omega_c}=p}$$

去归一化

$$G(p)=\frac{1}{D'_N(p)}$$

$$\Downarrow$$

$$H_a(s)=G(p)\big|_{p=s/\Omega_c}$$

$$\Leftarrow \quad p=\frac{s}{\Omega_c}=\eta+j\lambda,\quad \lambda=\frac{\Omega}{\Omega_c}$$

模拟滤波器—设计实例

❖ 设计要求：

- 已知通带边界频率$f_p = 1$ kHz，通带最大衰减α_p=1 dB，阻带截止频率$f_s = 5$ kHz，阻带最小衰减α_s=40 dB，设计巴特沃斯低通滤波器。

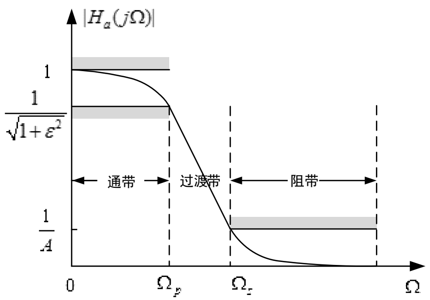
模拟滤波器—设计实例

❖ 设计过程

- 设计指标参数转换：

由α_p和α_s求解ε和*A*。

$$\varepsilon=\sqrt{10^{\alpha_p/10}-1}$$
$$=\sqrt{10^{1/10}-1}=0.508847$$
$$A=10^{\alpha_s/20}=10^{40/20}=100$$



- 计算过渡比和偏离参数

$$k=\frac{\Omega_p}{\Omega_s}=\frac{2\pi\cdot 1000}{2\pi\cdot 5000}=0.2 \qquad k_1=\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-1}}=\frac{0.50885}{\sqrt{9999}}=0.005089$$

模拟滤波器—设计实例

- 计算阶数和截止频率

$$N=\frac{\lg\left(\varepsilon/\sqrt{A^2-1}\right)}{\lg\left(\Omega_p/\Omega_s\right)}=\frac{\lg k_1}{\lg k}=3.2811$$

$$\Omega_c=\frac{\Omega_s}{(A^2-1)^{\frac{1}{2N}}}=\frac{2\pi f_s}{9999^{1/8}}=9934.7\ rad/s$$

- 查表得到归一化多项式

2	$(p^2+1.4142p+1)$
3	$(p^2+p+1)(p+1)$
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$
5	$(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)(p+1)$
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9319p+1)$

$$D'_4(p)=(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$$

模拟滤波器—设计实例

➤ 获得滤波器系统函数

$$H_a(s)=\left.\frac{1}{D'_N(p)}\right|_{p=s/\Omega_c}=\frac{1}{D'_N(s/\Omega_c)}$$

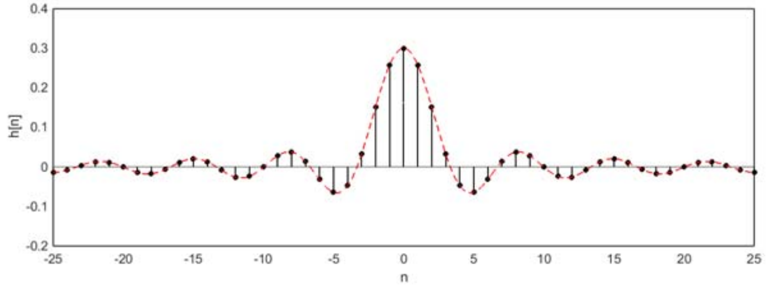
$$=\frac{\Omega_c^{\ 4}}{(s^2+0.7654\Omega_c s+\Omega_c^{\ 2})(s^2+1.8478\Omega_c s+\Omega_c^{\ 2})}$$

$$=\frac{9.7414\times10^{15}}{(s^2+7.6040\times10^3 s+9.8699\times10^7)(s^2+1.8357\times10^4 s+9.8699\times10^7)}$$

脉冲响应不变法

❖ 脉冲响应不变

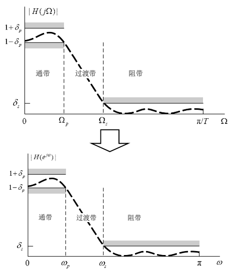
➤ 基本原理：对模拟滤波器的单位脉冲响应 $h_a(t)$ 进行等间隔采样得到数字滤波器的单位脉冲响应 $h[n]$。



$$h(n)=h_a(nT) \quad \Rightarrow \quad H(z)=ZT[h(n)]$$

脉冲响应不变法

➤ $H(s)$到$H(z)$ 映射：以单极点为例



系统函数： $H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k}$

⇩

拉氏逆变换： $h_a(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k t}u(t)$

⇩

等间隔采样： $h[n]=h_a(nT)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k nT}u[n]=\sum_{k=1}^{N}A_k (e^{s_k T})^n u[n]$

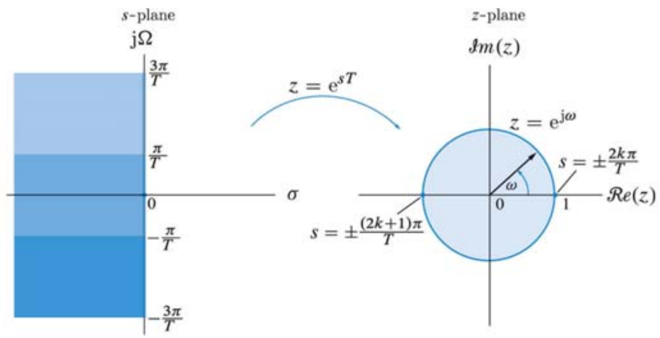
⇩

Z变换： $H(z)=\mathrm{ZT}(h[n])=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{s_k T}z^{-1}}$

脉冲响应不变法

➤ s平面到z-平面映射： $z=e^{sT}=e^{(\sigma+j\Omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\Omega T}=re^{j\omega}$

$$r=e^{\sigma T}\Rightarrow\begin{cases}r<1 & \text{if } \sigma<0\\ r>1 & \text{if } \sigma>0\\ r=1 & \text{if } \sigma=0\end{cases} \qquad \omega=\Omega T=2\pi\frac{f}{F_s}=2\pi\frac{\Omega}{\Omega_s}$$



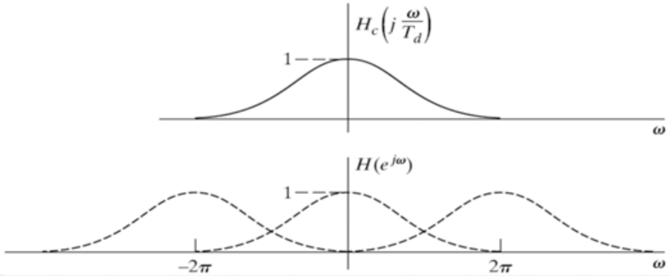
脉冲响应不变法

- 实际情况：模拟滤波器是非带限的，会存在频谱混叠。

$$H(s) \Rightarrow H(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$H(z) \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega-2k\pi}{T}\right)$$



脉冲响应不变法

- ***H(s)*到*H(z)* 映射实例：采样周期（频率）影响频谱混叠**

$$H_a(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow s_1 = -1 \quad s_2 = -3 \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-3T}z^{-1}} = \frac{z^{-1}(e^{-T}-e^{-3T})}{1-z^{-1}(e^{-T}+e^{-3T})+e^{-4T}z^{-2}}$$

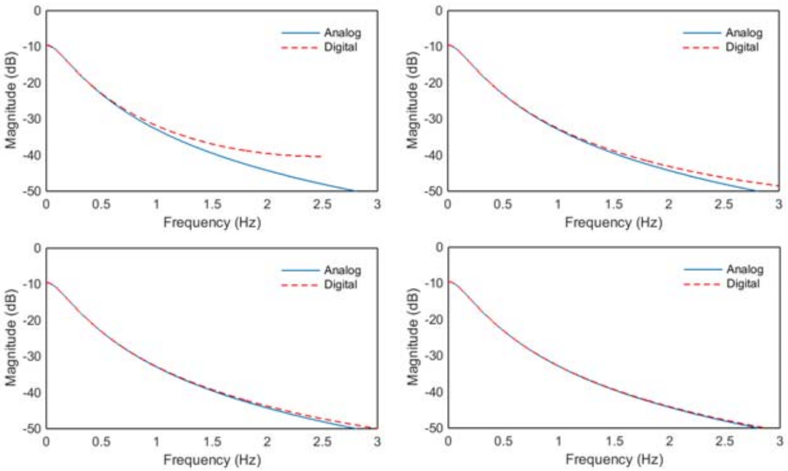
$$\Downarrow$$

$$H_a(j\Omega) = H_a(s)\big|_{s=j\Omega} = \frac{2}{(j\Omega+1)(j\Omega+3)} = \frac{2}{3-\Omega^2+j4\Omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{(e^{-T}-e^{-3T})e^{-j\omega}}{1-(e^{-T}+e^{-3T})e^{-j\omega}+e^{-4T}e^{-j2\omega}}$$

脉冲响应不变法

- ***H(s)*到*H(z)* 映射实例：Fs=5 Hz, 10 Hz, 15 Hz, 25 Hz**



脉冲响应不变法

- 保持相同增益

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega-2k\pi}{T}\right) \Leftarrow h(n) = h_a(nT)$$

$$\Downarrow$$

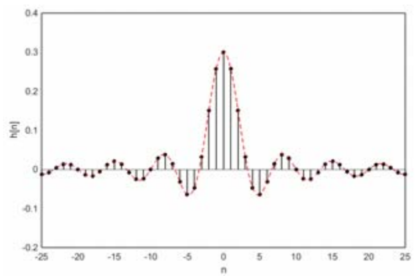
$$h[n] = Th_a(t)\big|_{t=nT}$$

$$\Downarrow$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega-2k\pi}{T}\right)$$



第14次作业

- **P175-P176：**

  6.2

  6.8： 题干不变，要求改为：求满足要求的最低阶数N，与截止频率Ω_c。

- 补充作业：

  以巴特沃斯低通滤波器为例，结合数字滤波器的四个典型技术指标（ω_p , ω_s , α_p , α_s ），论述当采用脉冲响应不变法时，基于模拟滤波器设计IIR数字滤波器的基本过程，并给出技术指标对设计结果的影响。