数字信号处理

——第6讲

数字信号的Z变换

❖ **Z变换**

- **Z变换的定义**
- **与DTFT关系**
- **Z变换收敛性**
- **Z及逆Z变换**

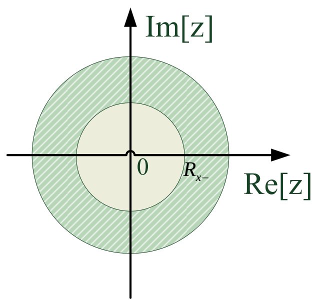
数字信号的Z变换

❖ **Z变换的定义**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]z^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]||z|^{-n}<\infty$$



数字信号的Z变换

❖ **与DTFT关系**

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\Downarrow\quad z=re^{j\omega}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

***u*[*n*]的Z变换**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}\qquad |z|>1$$

数字信号的Z变换

❖ 计算Z变换——有限长序列

$$x[n]=R_N[n]$$

$$\Downarrow$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\Downarrow$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\qquad 0<|z|\le\infty$$

数字信号的Z变换

❖ 计算Z变换——右边序列

$$x[n]=a^nu[n]$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^nu[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

$$\Downarrow\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left|az^{-1}\right|^n<\infty\qquad \left|az^{-1}\right|<1$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad |z|>|a|$$

数字信号的Z变换

❖ 计算Z变换——左边序列

$$x[n]=-a^nu[-n-1]$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-a^nz^{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(a^{-1}z)^n$$

$$\Downarrow\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left|a^{-1}z\right|^n<\infty\qquad \left|a^{-1}z\right|<1$$

$$X(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}(a^{-1}z)^n=-\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad |z|<|a|$$

数字信号的Z变换

❖ Z变换的收敛域——有限长序列

$$x[n],\quad n_1<n<n_2,\quad |x[n]|<\infty$$

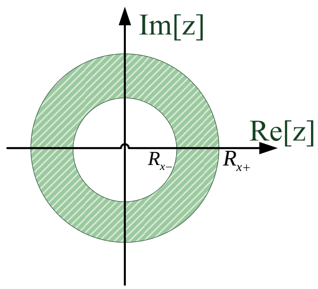
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x[n]z^{-n}$$

收敛域

$0<|z|<\infty\qquad \forall n_1,n_2$

$0\le|z|<\infty\qquad n_1<0,\ n_2\le 0$

$0<|z|\le\infty\qquad n_1\ge 0,\ n_2>0$



数字信号的Z变换

❖ Z变换的收敛域——右边序列

$$x[n],\quad n \ge n_1,\quad |x[n]| < \infty$$

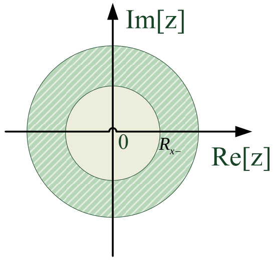
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

收敛域

$0 \le |z| < \infty \qquad n_1 < 0$

$R_{x-} < |z| \le \infty$

$R_{x-} < |z| < \infty$



数字信号的Z变换

❖ Z变换的收敛域——左边序列

$$x[n],\quad n \le n_1,\quad |x[n]| < \infty$$

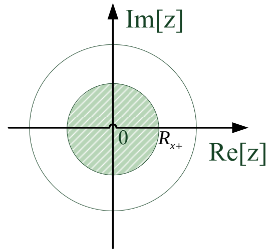
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_1} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{n_1} x[n]z^{-n}$$

收敛域

$0 \le |z| < R_{x+}$

$R_{x-} < |z| \le \infty$

$R_{x-} < |z| < R_{x+}$



数字信号的Z变换

❖ Z变换的收敛域——双边序列

$$x[n],\quad -\infty \le n \le \infty,\quad |x[n]| < \infty$$

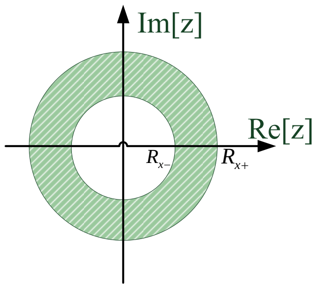
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

收敛域

$0 \le |z| < R_{x+}$

$R_{x-} < |z| \le \infty$

$R_{x-} < |z| < R_{x+}$



数字信号的Z变换

❖ 计算Z变换及其收敛域（一）

$$x(n) = a^{|n|},\quad a \in R$$

$$\Downarrow$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|}z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n}z^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a^{n}z^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n}z^{-n}$$

$$\Downarrow$$

$$|az| < 1,\quad |z| < |a|^{-1}$$

$$|az^{-1}| < 1,\quad |z| > |a| \qquad \Rightarrow \qquad |a| < |z| < |a|^{-1} \quad \& \quad |a| < 1$$

时域离散信号的Z变换

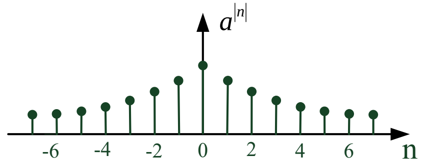
❖计算Z变换及其收敛域（二）

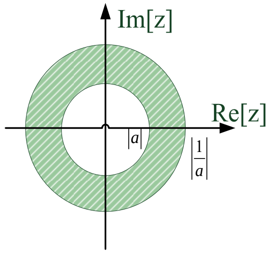
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

$$=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{1-a^{2}}{(1-az)(1-az^{-1})}\qquad |a|<|z|<|a|^{-1}\quad \&\quad |a|<1$$

$$\Downarrow$$

$$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1-a^{2}}{(1-ae^{j\omega})(1-ae^{-j\omega})}$$





逆Z变换

❖逆Z变换

- 部分分式展开（重点内容）
- 围线积分法（定义方法）

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C}X(z)z^{n-1}dz\qquad \mathrm{C}\in(\mathrm{R}_{x1},\mathrm{R}_{x2})$$

- 幂级数法、长除法、观察法等；

逆Z变换

❖部分分式展开

- 基本展开思想
- 基本对应关系

$$x[n]=a^{n}u[n]\quad\Longleftrightarrow\quad X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad |z|>|a|$$

$$x[n]=-a^{n}u[-n-1]\quad\Longleftrightarrow\quad X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad |z|<|a|$$

逆Z变换

❖逆Z变换——部分分式展开法：

设***X*(z)**有***N***个一阶极点

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{N}\frac{A_m z}{z-z_m}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_0}{z}+\sum_{m=1}^{N}\frac{A_m}{z-z_m}$$

通过留数计算

$$A_0=\mathrm{Res}\left[\frac{X(z)}{z},\ 0\right]\qquad A_m=\mathrm{Res}\left[\frac{X(z)}{z},\ z_m\right]$$

逆Z变换

$$X(z)=\frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}},\quad 2<|z|<3$$

$$\Downarrow$$

$$X(z)=\frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}=\frac{5z}{z^2+z-6}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{5}{z^2+z-6}=\frac{A_1}{z-2}+\frac{A_2}{z+3}$$

$$\Downarrow$$

$$A_1=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},\ 2]=\frac{5}{(z-2)(z+3)}(z-2)|_{z=2}=1$$

$$A_2=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},\ -3]=\frac{5}{(z-2)(z+3)}(z+3)|_{z=-3}=-1$$

逆Z变换

$$X(z)=\frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}},\quad 2<|z|<3$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+3}\qquad X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$|z|>2 \quad 2^n u(n)$

$|z|<3 \quad (-3)^n u(-n-1)$

$$\Downarrow$$

$$x(n)=2^n u(n)+(-3)^n u(-n-1)$$

第6次作业

- 课后作业：

  2.21(1),(2), (4), (7)，仅求收敛域。

  2.23，**2.24**。

- 补充作业：已知序列**x[*n*]**的**Z**变换为$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]z^{-n}$（$n_1<n_2$），试根据$n_1$和$n_2$可能的取值范围（有限值，无限值、正整数，负整数，**0**等）讨论**X(z)**的收敛区区域，并绘制出收敛区域的示意图。