力学(Mechanics)

力学是物理学的一个分支;

研究对象是宏观物体之间或物体内各部分之间的相对位置的运动，称为机械运动(Mechanics motion) 。

力学： 运动学(kinematics) 动力学(dynamics)

静力学(statics)

基本物理量：时间[T](s) 长度[L](m) 质量[M](kg)

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

力学(Mechanics)

第一章　质点运动学

§1-1. 质点、参考系与坐标系

一. 质点

理想模型：有质量，大小形状忽略 各向同性

突出主要性质，简化问题，有相对性！

二. 参考系与坐标系

1. 参考系 描述物体运动时选作参考的物体。有任意性

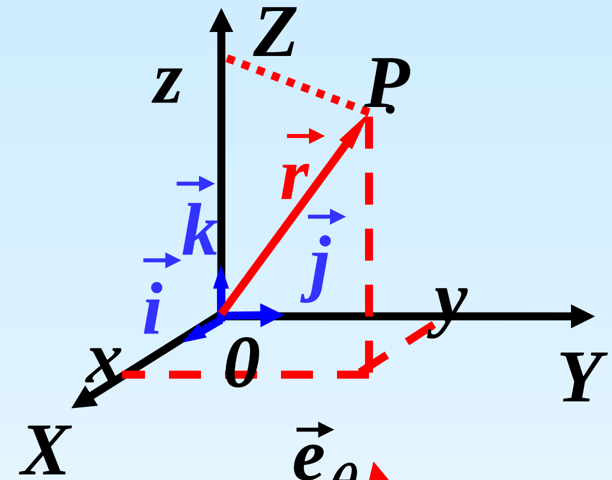
2. 坐标系 固结在参考系上的一组有刻度的射线、曲线或角度。

- 是实物构成的参考系的数学抽象
- 坐标系必须有原点和一组单位矢量

- 常用坐标系

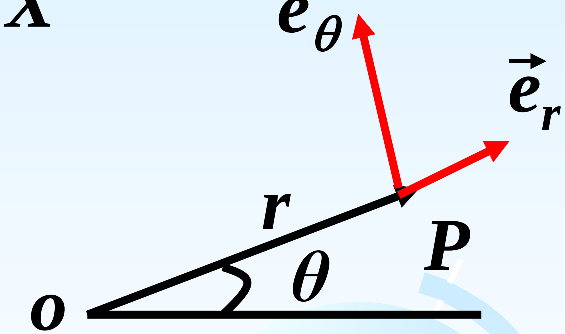
(1)直角坐标系 $\quad$ P坐标：(x,y,z)

单位矢量：$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$



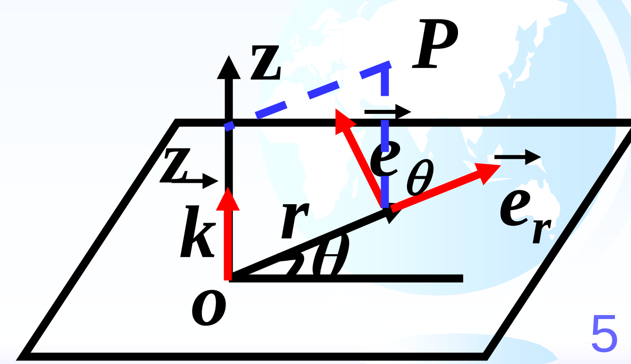
(2)平面极坐标系 $\quad$ P坐标：(r,θ)

单位矢量：$\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta\}$



(3)柱坐标系 $\quad$ P坐标：(r,θ,z)

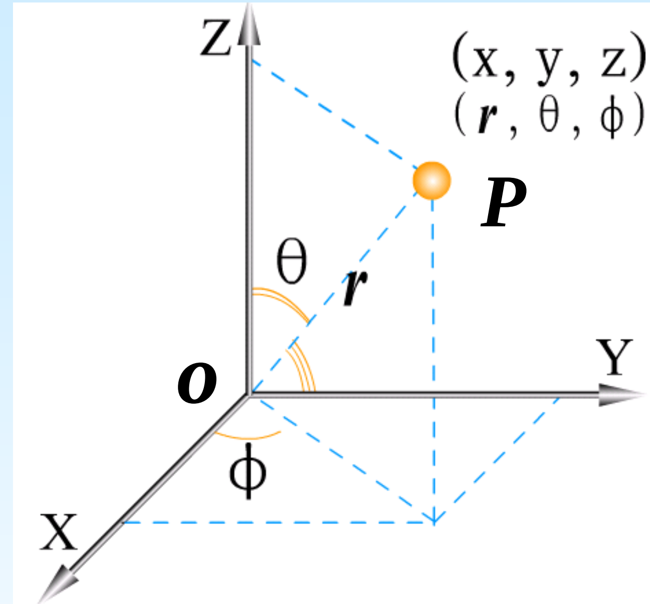
单位矢量：$\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}\}$



(4) 球坐标系 P坐标：(r,θ,ϕ)

单位矢量: $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\}$

θ——纬度；ϕ——经度



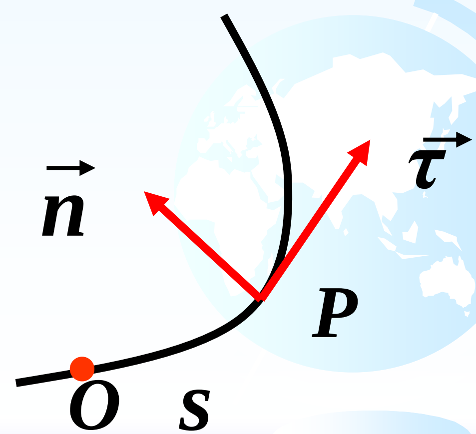
(5) 自然坐标系

选轨迹上任一点O为原点

质点位置 $\overset{\frown}{OP} = S$

单位矢量: 切线方向$\vec{\tau}$

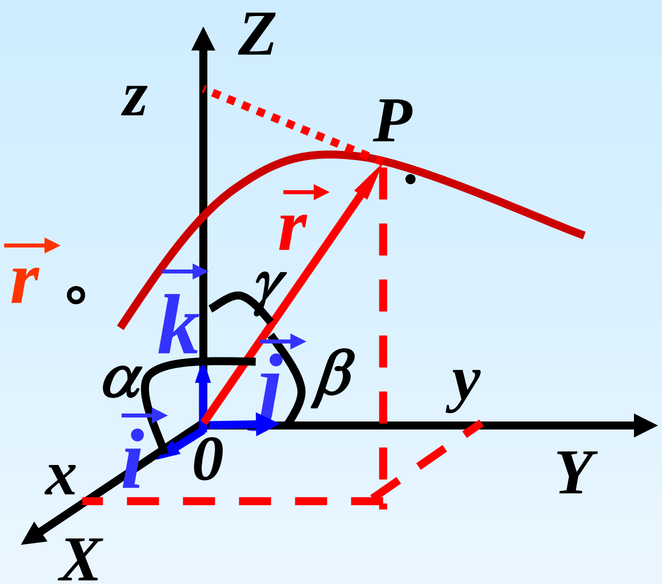
法线方向$\vec{n}$



§1-2. 位置矢量与轨道方程

一． 位置矢量（位矢）

位置矢量演示



位矢：从原点O指向运动质点的矢量 $\vec{r}$。

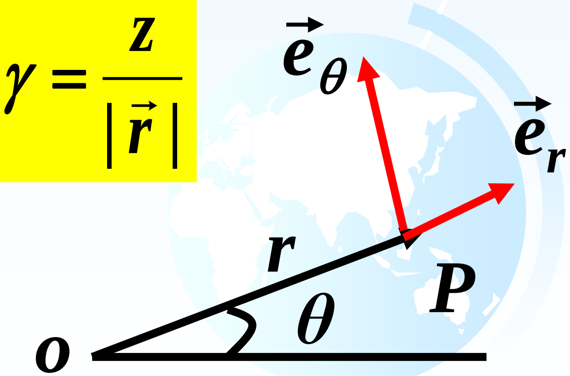
1.直角坐标系：$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

大小：$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

方向余弦：$\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{r}|};\ \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{r}|};\ \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{r}|}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

2.平面极坐标系



$\vec{r} = r\vec{e}_r$ r为原点O到P点的直线距离

二. 轨道方程

1.轨道方程： 质点运动时位置矢量随时间的变化方程。

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

- 直角坐标系 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

分量方程 $x=x(t);\quad y=y(t);\quad z=z(t)$

- 平面极坐标系 $\vec{r}=r(t)\vec{e}_r$
- 自然坐标系 $s=f(t)$

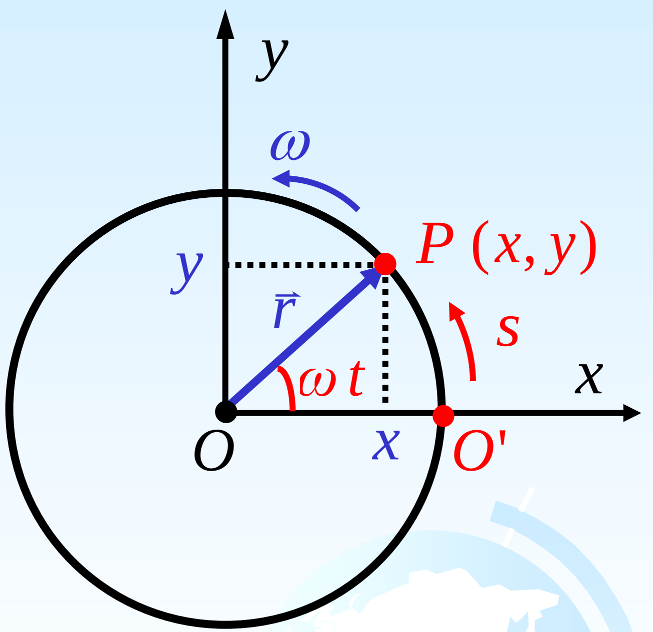
2.质点运动轨迹

从轨道方程中消去时间t,就得到质点在空间运动轨迹。

例1 一质点作匀速圆周运动，半径为 r，角速度为 ω。

求用直角坐标表示位矢、自然坐标表示的质点轨道方程。

解 以圆心O 为原点。建立直角坐标系Oxy ，O'点为起始时刻，设t 时刻质点位于$P(x,y)$，用直角坐标表示的质点轨道方程为



$$x = r\cos\omega t,\quad y = r\sin\omega t$$

位矢表示为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\cos\omega t\vec{i} + r\sin\omega t\vec{j}$$

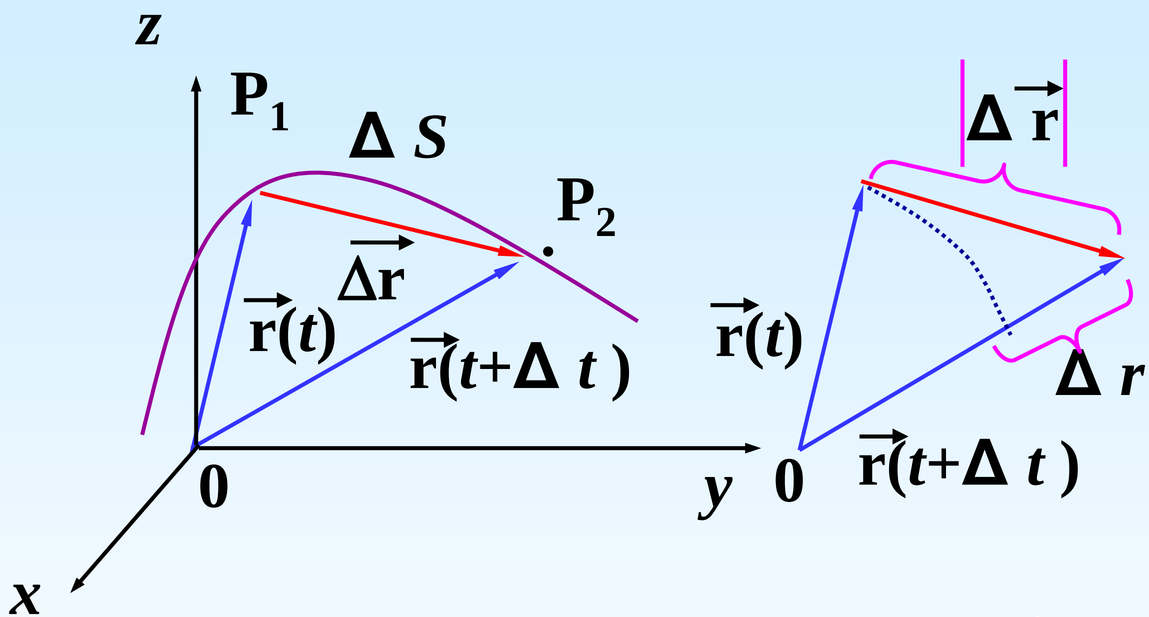
自然坐标表示为 $s = r\omega t$

§1-3. 位移、速度、加速度

一. 位移

如图, 质点从P_1沿ΔS到P_2时, 从P_1指向P_2的矢量$\Delta \mathbf{r}$称为位移。

位移矢量反映了物体运动中位置（距离与方位）的变化。



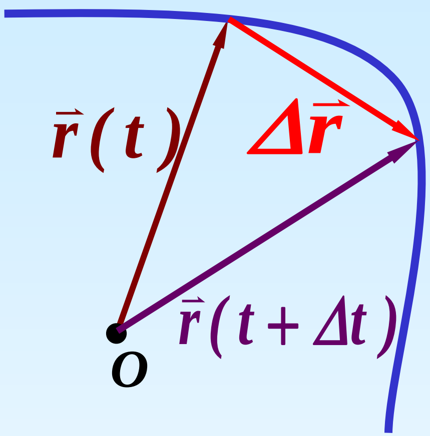
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

注意

1 位移是矢量(有大小, 有方向) 位移不同于路程 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta S$

2 位移与参照系位置的变化无关 分清$|\Delta\vec{r}|$与Δr 的区别

二. 速度



1. 平均速度

$$\bar{\vec{\upsilon}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

2. 瞬时速度

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

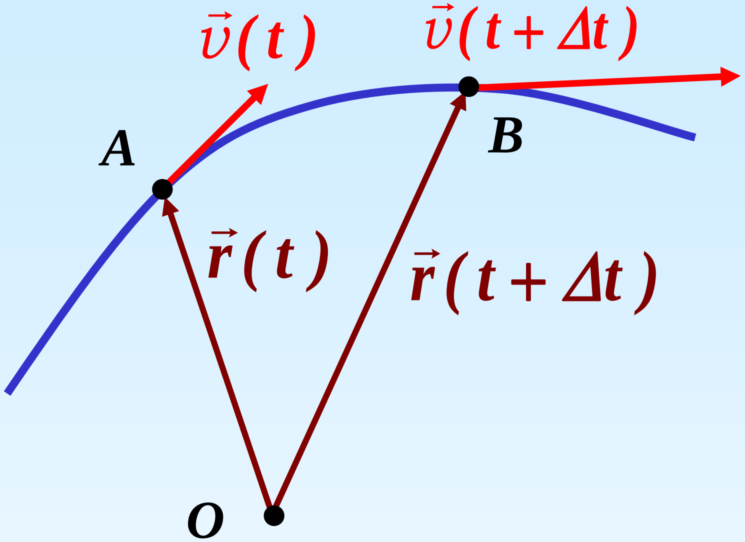
注意

(1) 速度的矢量性、瞬时性。

(2) 注意速度与速率的区别

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \upsilon = |\vec{\upsilon}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \neq \frac{dr}{dt}$$

三. 加速度

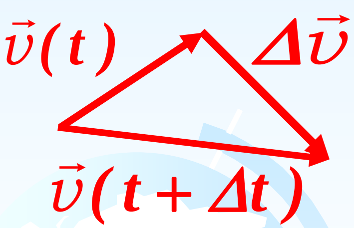


1.平均加速度

$$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\frac{\vec{\upsilon}(t+\Delta t)-\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t}$$

2.瞬时加速度

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\upsilon}(t+\Delta t)-\vec{\upsilon}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



注意

(1) 加速度反映速度的变化（大小和方向）情况。

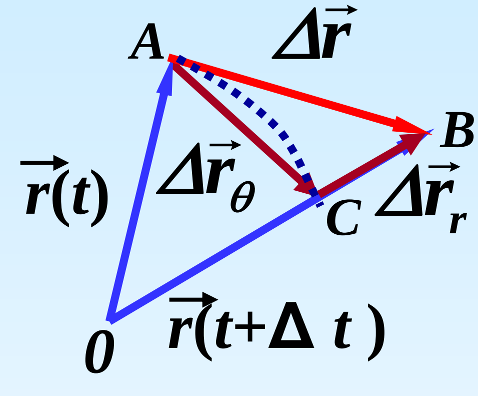
(2) 加速度的方向总是指向轨迹曲线凹的一面。

四. 位移、速度矢量三角形

1. 位移矢量三角形 $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_\theta + \Delta\vec{r}_r$

$$\vec{v} = \vec{v}_\theta + \vec{v}_r$$

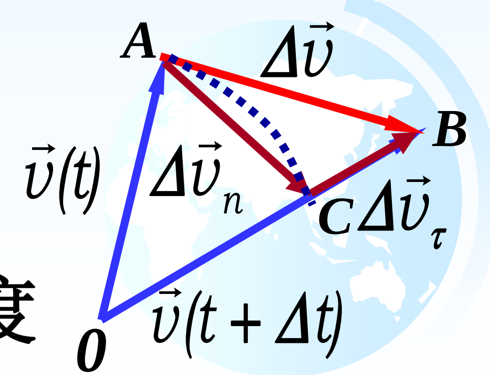
$\dfrac{d\vec{r}_\theta}{dt}$ ——横向速度 $\dfrac{d\vec{r}_r}{dt}$ ——径向速度



2. 速度矢量三角形 $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_\tau$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$\dfrac{d\vec{v}_n}{dt}$ ——法向加速度 $\dfrac{d\vec{v}_\tau}{dt}$ ——切向加速度



五.哈勃定律

$$\upsilon_r = H_0 r$$

$$H_0 = (67 \pm 8)km/(s \cdot Mpc)$$

——哈勃常数

谱线红移速度与星系距离成正比。距离我们越远的星系，则远离我们的退行速度也越大。依据：多普勒效应。红移频率减小。

哈勃常数意义：估算宇宙上限年龄

$$t_0 = \frac{1}{H_0}$$

pc秒差距： $1pc = 3.0857 \times 10^{16} m$

$$1km/(s \cdot Mpc) \approx (10^{12}年)^{-1}$$

宇宙年龄： $t_0 = 1/H_0 \approx 150$亿年

哈勃半径： $R_0 = ct_0 \approx 150$亿光年$\approx 10^{23} km$

六. 不同坐标系的位移、速度、加速度的表达式

任何坐标系 位移：$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$

1. 直角坐标系：

- 位矢： $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$
- 速度: $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j}+\dfrac{dz}{dt}\vec{k}$

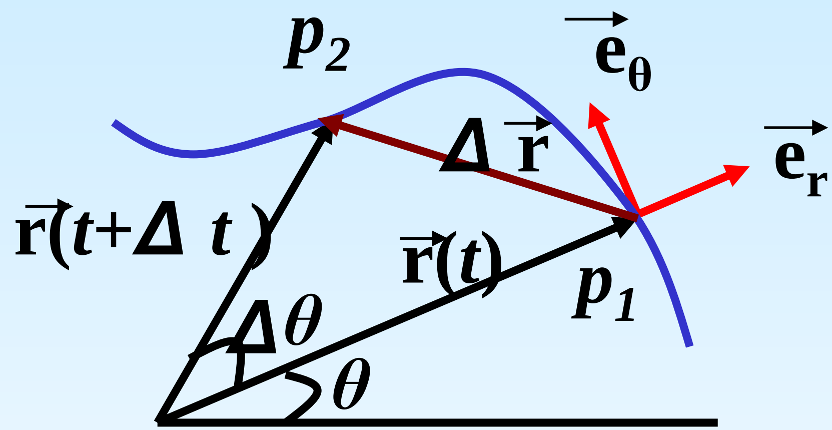
$$=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$$

- 加速度：$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\qquad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}\qquad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}$$

2.平面极坐标系：

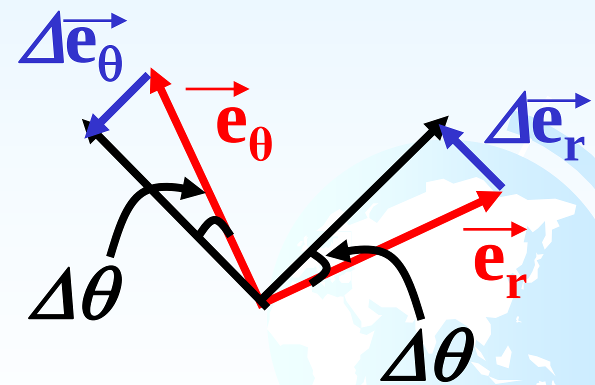
位矢：$\vec{r} = \vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r$



速度：$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}$

$$= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

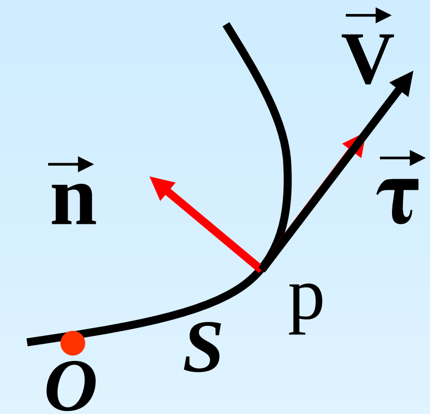
$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta\ ; \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r}$$



加速度：$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

3.自然坐标系:　轨道方程: $S = f(t)$



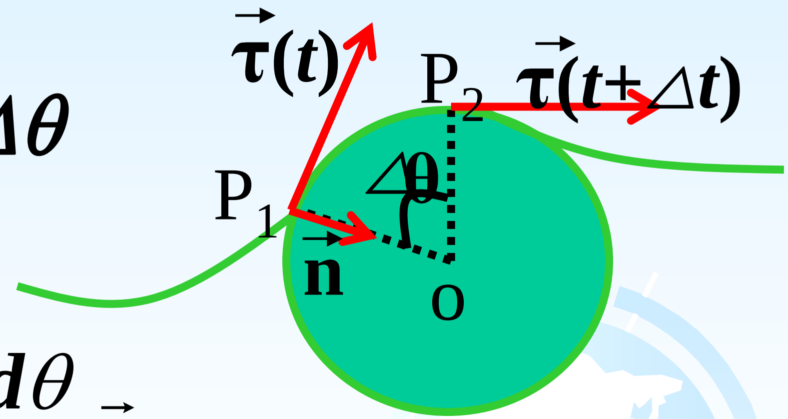
速度$\vec{v}$方向是轨迹切线方向　速度: $\vec{v} = v\vec{\tau}$

加速度: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$

$$\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}(t+\Delta t) - \vec{\tau}(t)$$

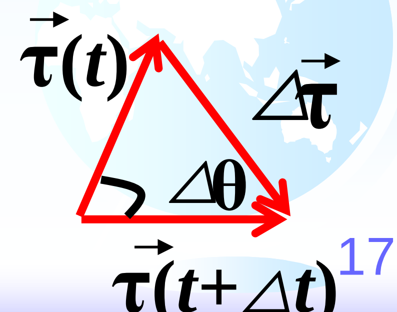
$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = ?\quad \Delta\theta \to 0, |\Delta\vec{\tau}| = |\vec{\tau}|\Delta\theta = \Delta\theta$$

$\Delta\vec{\tau}$的方向 $\to \vec{n}$



因此 $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{n} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{n}$

定义: P_1点的曲率半径为ρ　$\rho = \dfrac{ds}{d\theta}$



所以： $$\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\vec{n}=\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{n}=\frac{\upsilon}{\rho}\vec{n}$$

加速度： $$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}+\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$$

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$

$$\vec{a}_\tau=\frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}$$

——切向加速度

$$\vec{a}_n=\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$$

——法向加速度（向心加速度）

§1-4. 质点运动学的两类问题

1.已知运动学方程 $\vec{r}=\vec{r}(t)$, 求$\vec{v}, \vec{a}$, ⟵ 微分

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt};\ \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

2.已知$\vec{a}$和某时刻t_0时的$\vec{r_0}$, $\vec{v_0}$, 求任意时刻的$\vec{r}(t)$,$\vec{v}(t)$,

⟵ 积分

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)dt;$$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)dt$$

例2: 质点运动的矢径为 $\vec{r}=3\cos\frac{\pi}{6}t\vec{i}+3\sin\frac{\pi}{6}t\vec{j}\quad(SI)$

求其轨迹, 速度, 加速度.

解: 分量方程 $x=3\cos\frac{\pi}{6}t,\ y=3\sin\frac{\pi}{6}t$

$\Rightarrow$ 轨迹方程: $x^2+y^2=9$

$\Rightarrow$速度: $\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}t\ ;\ \upsilon_y=\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6}t$

$\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$常量,匀速圆周运动

$$tg\theta_\upsilon=\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}=-ctg\frac{\pi}{6}t\ \left(=-\frac{1}{tg\theta}\right)\Rightarrow\vec{r}\perp\vec{v}$$

$\Rightarrow$加速度：$a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = -\dfrac{\pi^2}{12}\cos\dfrac{\pi}{6}t$；$a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -\dfrac{\pi^2}{12}\sin\dfrac{\pi}{6}t$

大小：$\boldsymbol{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \dfrac{\pi^2}{12}}$ $\rightarrow$常量

方向：$\boldsymbol{tg\,\theta_a = \dfrac{a_y}{a_x} = tg\,\dfrac{\pi}{6}t}$

与$\vec{\mathbf{r}}$ 的方向一致?

否! $\boldsymbol{\vec{a} = -\dfrac{\pi^2}{12}\cos\dfrac{\pi}{6}t\vec{i} - \dfrac{\pi^2}{12}\sin\dfrac{\pi}{6}t\vec{j} = -\dfrac{\pi^2}{36}\vec{r}}$

例3. 已知质点加速度和速度之间的关系为 $a = -kv^2$

求速度随距离的变化。

解： 减速运动，速度变化渐慢（流体中粒子）取速度方向为正z方向：

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = v\frac{dv}{dz}$$

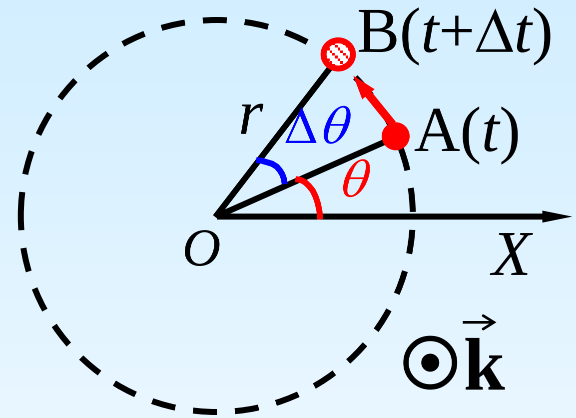
代入a，有 $\dfrac{dv}{dz} = -kv \Rightarrow \displaystyle\int_{v_o}^{v}\frac{dv}{v} = -k\int_{z_0}^{z} dz$

$$v = v_o \exp\left[-k\left(z - z_0\right)\right]$$

即：速度随距离按照e指数衰减。

§1-5. 圆周运动与一般曲线运动

一. 角量描述



r固定, 质点位置是转角的单值函数

角位置θ： t时刻OA与X轴夹角

角位移$\Delta\theta$：经Δt由A到B的转角.

平均角速度：$\overline{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

(瞬时)角速度：$\boxed{\vec{\omega} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{k} = \omega_z \vec{k}}$

规定为矢量!

角速度演示

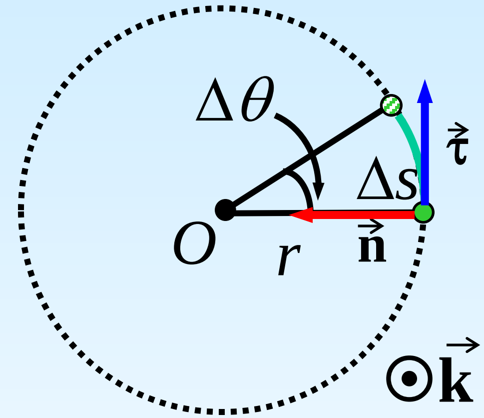
(瞬时)角加速度：$\boxed{\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d\omega_z}{dt}\vec{k} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k} = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta}\vec{k}}$

二. 角量与线量的关系

如图，Δt内，$\Delta s = r\Delta\theta$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\boxed{\therefore\ \upsilon = r\omega \text{ 或 } \upsilon_\tau = r\omega_z}$$



考虑方向后,可写成 $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$

同理，有

$$\boxed{\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}}$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon_\tau}{dt} = r\frac{d\omega_z}{dt} = r\beta_z$$

$$a_n = r\omega^2$$

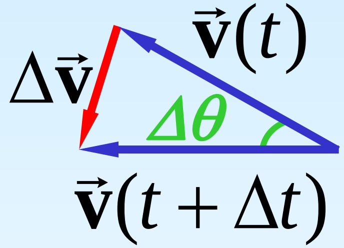
三.圆周运动

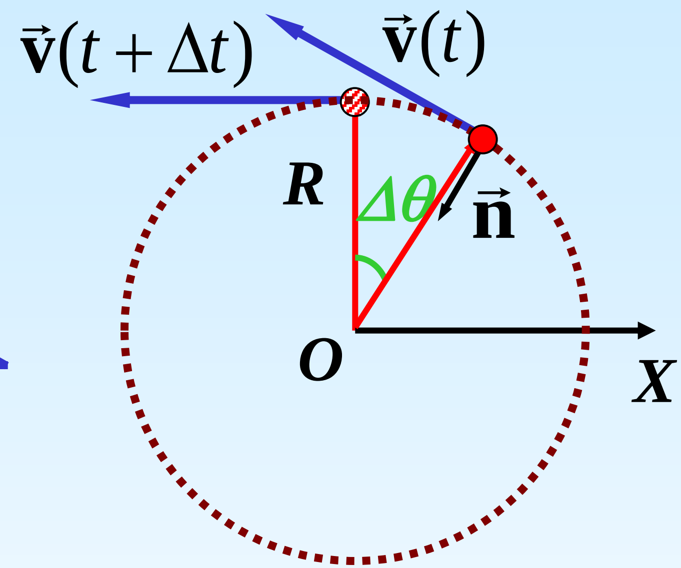
匀速(率)圆周运动：

$$\upsilon = |\vec{v}| = 常量$$

$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t+\Delta t) - \vec{\upsilon}(t)$$

$$\vec{a} = a_n\vec{n} = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$$





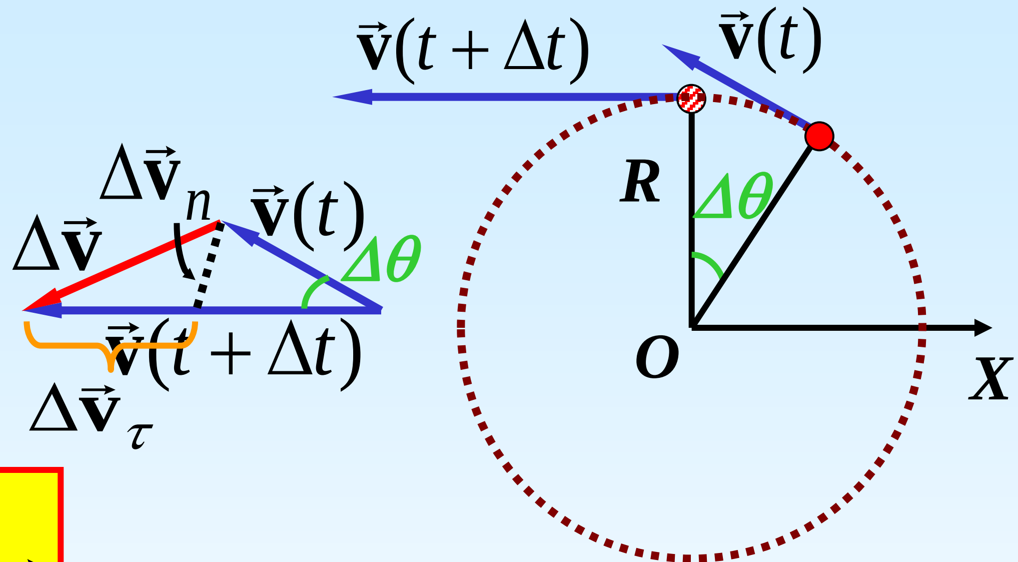
即：$\vec{a}$ 的方向恒沿该点半径指向圆心 $\Rightarrow$ 向心加速度

或：匀速圆周运动实际上是一种(加速度大小不变的)变加速运动。

变速(率)圆周运动:

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| \neq \text{常量}$$

$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t+\Delta t) - \vec{\upsilon}(t)$$
$$= \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_n$$



$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}}$$

切向加速度$\vec{a}_\tau$代表速度大小的改变

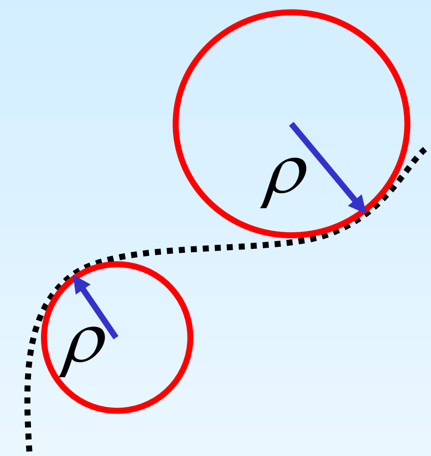
法向加速度$\vec{a}_n$代表速度方向的改变

变速圆周运动时,$\vec{a}$ 的方向一般不指向圆心$(\vec{a}_\tau \neq 0)$

四.一般曲线运动

用曲率半径 ρ 代替R, 公式仍适用, 即

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_{\tau}+\vec{a}_{n}=\frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}+\frac{\upsilon^{2}}{\rho}\vec{n}}$$



这时 ρ 是时间、质点位置的函数

- 曲线运动中$\vec{a}$ 的大小一般不等于υ对t的变化率!

$$a=\left|\vec{a}\right|=\left|\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right|\neq\frac{d\upsilon}{dt}$$

- 也可由$\vec{a}$求ρ:

$$\rho=\frac{\upsilon^{2}}{\sqrt{a^{2}-\left(d\upsilon/dt\right)^{2}}}$$

§1-6.相对运动

一. 伽利略变换 (Galilean transformation)

“刻舟求剑” →不同参考系对运动的描述不同!

某运动在特定参考系中不一定最容易研究

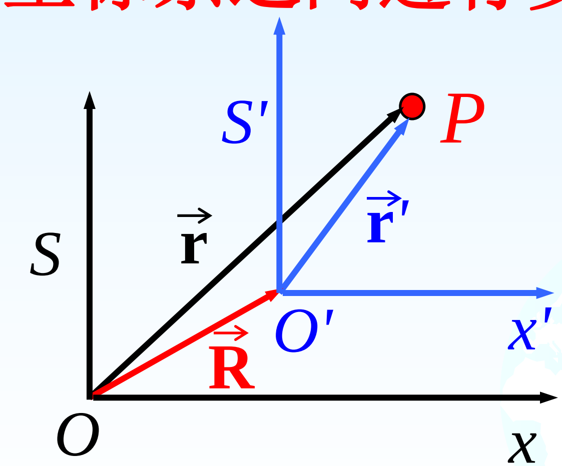
⇒ 需要在不同参考系及其各坐标系之间进行变换

如图, S, S' 相对运动

P在S中: $t, \vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$.

P在S'中: $t', \vec{r}', \vec{v}', \vec{a}'$.

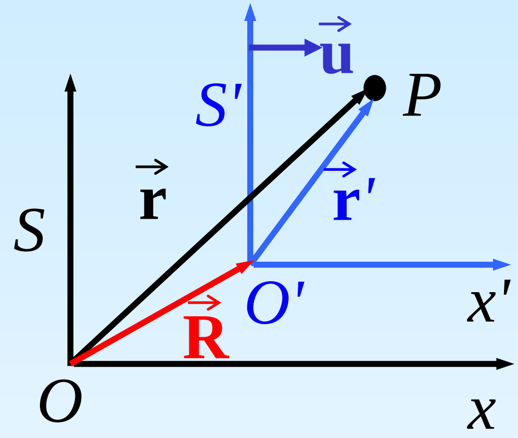
S'相对于S的位矢为$\vec{R}$



S' 相对S运动:

$$\vec{u}=\frac{d\vec{R}}{dt}$$ 牵连速度

$$\vec{A}=\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$ 牵连加速度



经典时空观：运动与时间相互独立

P点在S'中有:

位矢: $\vec{r}'=\vec{r}-\vec{R}$ 伽利略变换

速度: $\vec{v}'=\vec{v}-\vec{u}$ 伽利略速度变换

加速度: $$\vec{a}'=\frac{d\vec{v}'}{dt}=\frac{d\vec{v}}{dt}-\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{a}-\vec{A}$$

或：对物体A、B、C，有 $\vec{a}_{A\to B}=\vec{a}_{A\to C}+\vec{a}_{C\to B}$

思考：

速度：$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$

$\Leftrightarrow$ 对物体A、B、C，有 $\boxed{\vec{v}_{A\to B} = \vec{v}_{A\to C} + \vec{v}_{C\to B}}$

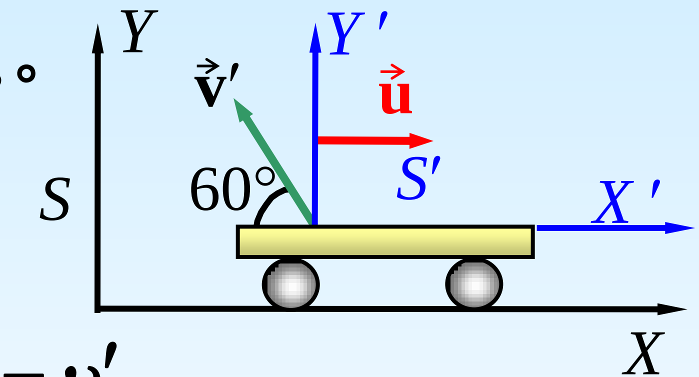
与速度合成与分解有何不同？例如：$\vec{v} = \vec{v}_{水平} + \vec{v}_{垂直}$

区别：前式两边是不同物体相对于不同参考系

后式两边式同一物体相对于同一参考系

例4: 如图,车以$10m\cdot s^{-1}$水平前进，车上A向后上方以60°斜抛一石块. 地面上B看到石块铅直向上. 求其上升高度.

解: 如图, 地面: S系; 平板车: S'系。



S'中：$\upsilon'_x, \upsilon'_y \quad tg\alpha = \upsilon'_y / \upsilon'_x$

S 中：υ_x, υ_y

由速度变换有：$\upsilon_x = \upsilon'_x + u;\ \upsilon_y = \upsilon'_y$

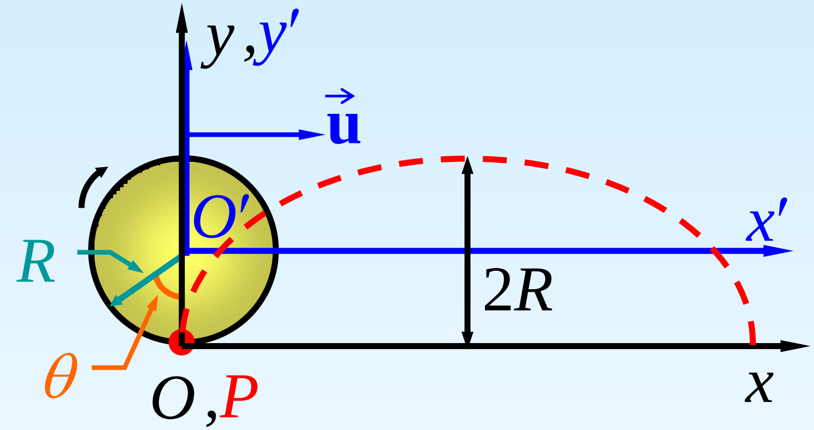
S中石块铅直向上：$\upsilon_x = 0 \ \Rightarrow\ \upsilon'_x = -u = -10m\cdot s^{-1}$

$$|\upsilon_y| = |\upsilon'_y| = |\upsilon'_x \cdot \tan\alpha| = 10\tan 60° = 17.3m\cdot s^{-1}$$

由匀变速直线运动/抛体运动公式得石块上升高度:

$$y = \frac{\upsilon_y^2}{2g} = \frac{17.3^2}{2\times 9.80} = 15.3m$$

例5: 车轮在平直路面上作纯滚动，匀速前进，求轮缘上一点 P的速度、加速度和运动轨迹。



解： 如图, $t=0$时, P点位于 O

地面$\Leftrightarrow S$ 系；**轮轴**$\Leftrightarrow S'$**系**

***S*系:**

纯滚动$\Rightarrow$ 轮轴每圈前进$2\pi R$,

P点绕轴转角$2\pi \Rightarrow s = R\theta = R\omega t$

$$\therefore \text{车轴速度(牵连速度)}\vec{u} = \frac{ds}{dt}\vec{i} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{i} = R\omega\vec{i} \quad \text{(常量)}$$

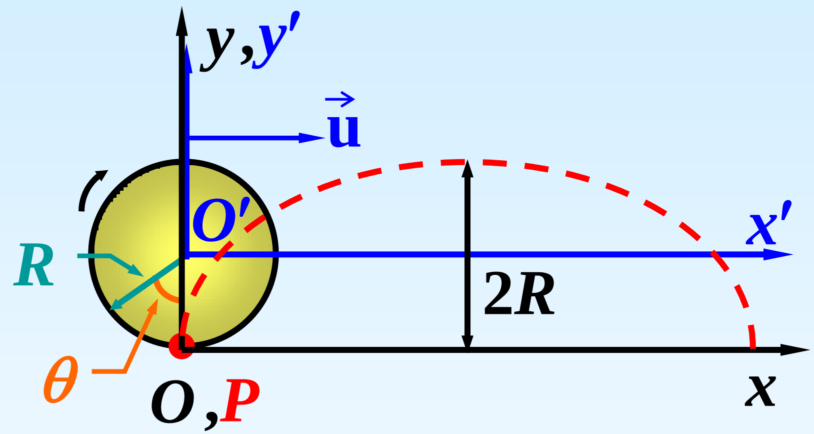
$$\text{牵连加速度} \quad \vec{A} = \frac{d\vec{u}}{dt} = R\beta\,\vec{i} = 0$$

S'系:

P点作匀速圆周运动,

$t=0$时恰与地面接触。

P点的运动学方程:



$$x'=-R\sin\omega t,\ y'=-R\cos\omega t$$

$\Rightarrow$ P点相对速度分量:

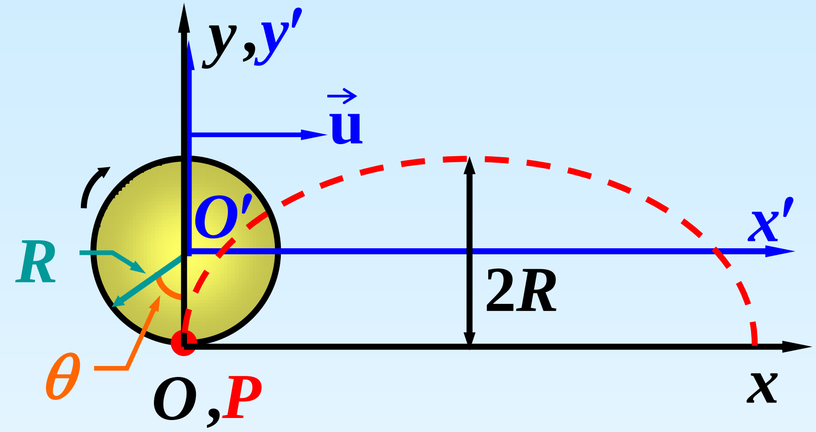
$$\upsilon'_x=\frac{dx'}{dt}=-\omega R\cos\omega t\ ,\quad \upsilon'_y=\frac{dy'}{dt}=\omega R\sin\omega t$$

$\Rightarrow$ P点对地速度(绝对速度) 分量:

$$\left.\begin{aligned}\upsilon_x&=\upsilon'_x+u_x=\omega R(1-\cos\omega t\ )\\ \upsilon_y&=\upsilon'_y+u_y=\omega R\sin\omega t\end{aligned}\right\}\ P\text{触地时}\ \vec{\upsilon}=0$$

因牵连加速度 $\vec{A}=0$

$$\begin{cases} a_x = a'_x = \dfrac{d\upsilon'_x}{dt} = \omega^2 R\sin\omega t \\ a_y = a'_y = \dfrac{d\upsilon'_y}{dt} = \omega^2 R\cos\omega t \end{cases}$$



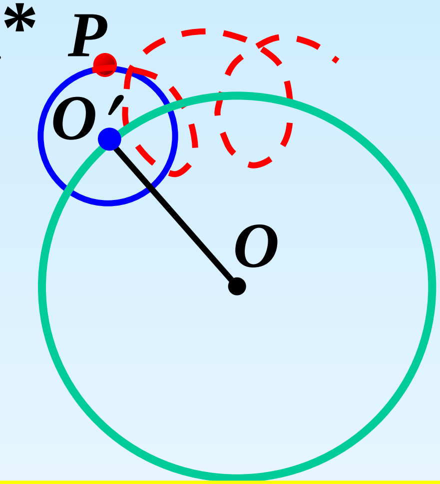
即: 对任意t有 $a=\omega^2 R=\upsilon^2/R$

车轮P点在S系中的运动学方程：$x=x'+ut, y=y'+R$

$$\begin{cases} x = R(\omega t - \sin\omega t) = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1-\cos\omega t) = R(1-\cos\theta) \end{cases}$$

以θ(或ωt)为参数的轨迹方程 — 旋轮线(摆线)

托勒蜜的“地心说”中行星运行的轨迹*

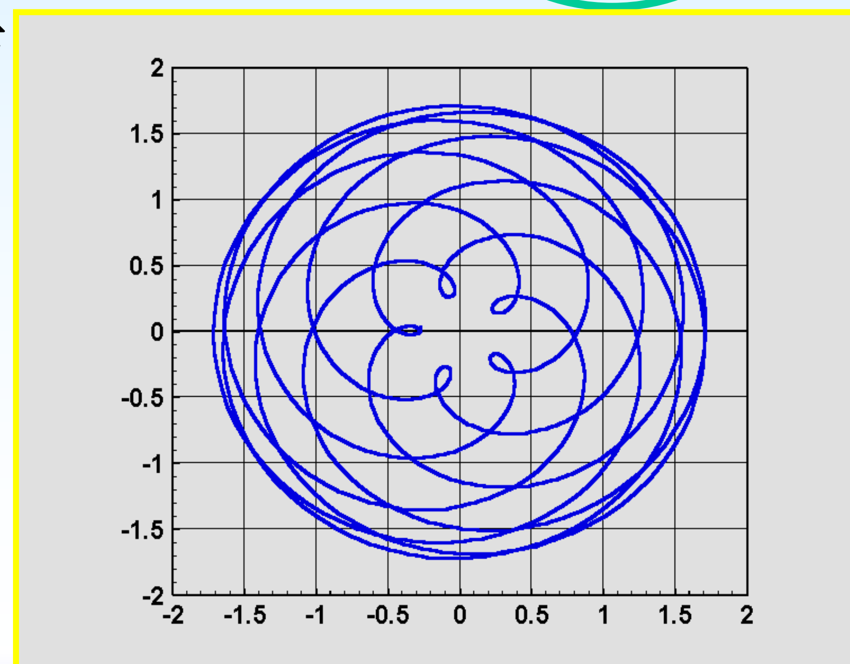


从轮心 O'上看：

轮上各点绕 O'作圆周运动；

从另一点 $O(\neq O')$上看： O'绕 O点作圆周运动，此时轮上任一点 P的运动可看作两个圆运动的叠加：

P绕 O'的转动+ O'绕 O的转动⇒ P点轨迹为绕 O圆轨道上的摆线。



地心参考系中金星的运动轨迹

☞