2004-2014 定积分应用考点分布（仅供参考）

旋转体体积	曲线弧长	物理中应用	旋转体表面积	曲率与曲率半径
2004-2005 三（3）	2006-2007 一（3）	2007-2008 六		
2005-2006 三（4）	2007-2008 一（3）			
2006-2007 三（4）	2011-2012 一（7）			
2009-2010 五（1）	2012-2013 一（7）			
2010-2011 三	2013-2014 一（9）			
2011-2012 三				
2012-2013 三				
2013-2014 四				

注：①用积分求曲线弧长几乎都是结合参数方程进行考察。

②定积分应用在考试时候属于简单送分题

③由于极坐标方程和参数方程都可以间接化成直角坐标方程，下面只介绍直角坐标下的原理。若需旋转，则绕 x 轴旋转。

一、用定积分求旋转体体积

原理：$dV = \pi y^2 dx$

例题：（2013-2014 第四题）：

设直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的图形面积为 S_1，它们与直线 $x = 1$ 所围成图形的面积为 S_2，且 $a < 1$,

（1） 确定 a 的值，使得 $S_1 + S_2$ 达到最小，并求出最小值；

（2） 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1）

由 $\begin{cases} y = ax \\ y = x^2, \end{cases}$ 解出交点 $(0,0)$ 和 (a,a^2).

所以

$$S_1 = \int_0^a (ax - x^2)dx = \frac{1}{6}a^3,$$

$$S_2 = \int_a^1 (x^2 - ax)dx = \frac{a^3}{6} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}.$$

因此 $|S_1 + S_2| = |\frac{a^3}{6} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}|$，令 $f(a) = \frac{a^3}{6} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$，则 $f'(a) = a^2 - \frac{1}{2}$，则

当 $a > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(a) > 0$; 当 $a < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(a) < 0$,

所以当 $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(a)$ 取到极小值，也即最小值 $f(a)_{\min} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

即 $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, |S_1 + S_2|_{\min} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

（2） $V_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2 dx - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi(x^2)^2 dx = \dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$,

因此 $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1}{30}(\sqrt{2}+1)\pi$.

二、用定积分求曲线弧长

原理：$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

例题：（2007-2008 第一题（3））：

如果椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t, (a < b)$ 的周长等于正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $0 \le x \le 2\pi$ 上的一段弧长，请给出满足条件的一组数。

依题意：$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}dx$

且$a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = a^2 +（b^2 - a^2）\cos^2 t$

所以$a^2 = 1$，$b^2 = 2$

取$a = 1$，$b = \sqrt{2}$

三、用定积分求旋转体表面积

原理：$dS = 2\pi y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

四、曲率与曲率半径

原理：曲率：$K = \dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$，曲率半径 $\rho = \dfrac{1}{K}$