北京航空航天大学
2010－2011 学年第一学期期中

《 工科数学分析(I) 》
试卷

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成　绩									
阅卷人									
校对人									

2010 年 11 月 25 日

一 计算下面各题（满分 **40** 分，每个题目 **5** 分）

1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+1\right)}$ ………….. （3 分）

$=\dfrac{1}{2}$ …………… （2 分）

2) 求下面无穷小的阶

$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}\,(x\to 0)$.

解：

$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}=\dfrac{\tan x+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}$ ………………………（3 分）

$=\dfrac{\sin x\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}+1\right)}{x}=2$ 为 1 阶 (2 分)

3) 假设 $f=(\sin x)^{\cos x}\,(0<x<\pi)$ 求 $f'(x)$.

解：$f=(\sin x)^{\cos x}=e^{\cos x\ln\sin x}$ ……………….. (2 分)

$f'=\left(e^{\cos x\ln\sin x}\right)'=e^{\cos x\ln\sin x}\left(-\sin x\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$ ……….(3 分)

$=\sin x^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$

4) 假设 $\begin{cases}x=t\sin t,\\ y=t\cos t.\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解: $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}$ (2 分)

$=\dfrac{\cos t+t\sin t}{\cos t-t\sin t}$ (3 分)

5) 假设 $f(x)=\left(x^2+2x+3\right)e^{-x}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解:

$$f^{(n)}(x)=\left[\left(x^2+2x+3\right)e^{-x}\right]^{(n)}$$

$$=C_n^0\left(\left(x^2+2x+3\right)\right)\left(e^{-x}\right)^{(n)}+C_n^1\left(\left(x^2+2x+3\right)'\right)\left(e^{-x}\right)^{(n-1)}$$ (3 分)

$$+C_n^2\left(\left(x^2+2x+3\right)''\right)\left(e^{-x}\right)^{(n-2)}$$

$$=(-1)^n\left(x^2+2x+3\right)e^{-x}+$$

$$(-1)^{n-1}n(2x+2)e^{-x}+(-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x}$$ (2 分)

$$=(-1)^n e^{-x}\left[x^2-2(n-1)x+n^2-3n+3\right]$$

6) 求 $f(x)=\ln x$ 在 $x=2$ 的 n 阶 Taylor 展开,并写出 peano 余项.

解:

$$f(x)=\ln x=\ln\left[(x-2)+2\right]=\ln 2\left[1+\frac{x-2}{2}\right]$$

$$=\ln 2+\ln\left[1+\frac{x-2}{2}\right]$$ (2 分)

$$=\ln 2+\ln\left[1+\frac{x-2}{2}\right]=\ln 2+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)^k+o\left(x-2\right)^n$$ (3 分)

7) 假设函数 $f(x)=e^x$, 判断函数的凹凸性.

解 $f''(x)=\left(e^x\right)''=e^x$ (4 分)

凸函数 (1 分)

8) 已知 $f\left(x\right)=\begin{cases} x^m\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \quad x=0. \end{cases}$ m 为正整数.

求: m 满足什么条件，函数在 $x=0$ 连续，

m 满足什么条件，函数在 $x=0$ 可导.

解: $m\geq 1$，函数在 $x=0$ 连续 (2 分)

$m\geq 2$，函数在 $x=0$ 可导数 (3 分)

二 证明下面问题（**10** 分）

假设 $\sigma>0, x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{\sigma}{x_n}\right)$, 证明数列 $\left\{x_n\right\}$ 单调有界，且极限为 $\sqrt{\sigma}$.

证明: 1) 数列单调递减有下界(5 分)

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\sigma}{x_n}\right)\Rightarrow x_{n+1}\geq\sqrt{\sigma},$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\sigma}{x_n}\right)-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{x_n}-x_n\right)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma}}-\sqrt{\sigma}\right)=0$$

2) **下面说明极限为 $\sqrt{\sigma}$ (5 分)**

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=b\Rightarrow\frac{1}{2}\left(b+\frac{\sigma}{b}\right)=b, b=\sqrt{\sigma}$$

三. 证明下面问题（**10** 分）

假设数列 $\left\{x_n\right\}$ 满足 $\left|x_{n+1}-x_n\right|<\dfrac{1}{2^n}$, 用 Cauchy 收敛定理证明 $\left\{x_n\right\}$ 收敛.

证明 **1) (5 分)**

$$\forall p\in N, \left|x_{n+P}-x_n\right|\leq\left|x_{n+P}-x_{n+P-1}\right|+\left|x_{n+P-1}-x_{n+P-2}\right|+.......+\left|x_{n+1}-x_n\right|$$

$$\leq\frac{1}{2^{n+P-1}}+\frac{1}{2^{n+P-2}}+........+\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^{P-1}}+\frac{1}{2^{P-2}}+........+1\right)=\left(\frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^p}{\dfrac{1}{2}}\right)\leq\frac{1}{2^{n-1}}.$$

2) 柯西定理写正确 5 分

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\ln\frac{1}{\varepsilon}/\ln 2\right] + 1, n > N, \forall p \in N, \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

四. 证明下面不等式 (10 分)

$$e^{-x} + \sin x < 1 + \frac{x^2}{2}, \quad x \in (0, \pi).$$

证明: **1) 下面每个式子 2 分,共 6 分**

$$F(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - e^{-x} - \sin x, x \in (0, \pi)$$
$$F^{'}(x) = x + e^{x} - \cos x, x \in (0, \pi)$$
$$F^{"}(x) = 1 + e^{x} + \sin x, x \in (0, \pi)$$

2) (2 分)

$$F^{"}(x) > 0, x \in (0, \pi),\ F^{'}(0) = 0 \text{因此} F^{'}(x) > 0, x \in (0, \pi)$$

3) (2 分)

$$F(0) = 0, F(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - e^{-x} - \sin x > 0, x \in (0, \pi)$$

五. （**10** 分）假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 存在二阶导数，并且 $g^{"}(x) \neq 0$,且

$f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$，证明下面问题:

1）在 (a,b) 内 $g(x) \neq 0$；

2）在 (a,b) 内至少存在一点在 θ, 满足 $\dfrac{f(\theta)}{g(\theta)} = \dfrac{f^{"}(\theta)}{g^{"}(\theta)}$.

证明: **1) 下面每个式子 2 分,共 6 分**

用反证法证明,假设 $\exists \theta \in (a,b), g(\theta) = 0$. 则

$$g(a) - g(\theta) = g^{'}(x_1)(a - \theta) = 0 \Rightarrow g^{'}(x_1) = 0, x_1 \in (a, \theta)$$
$$g(b) - g(\theta) = g^{'}(x_2)(b - \theta) = 0 \Rightarrow g^{'}(x_2) = 0, x_2 \in (\theta, b)$$
$$g^{'}(x_1) - g^{'}(x_2) = g^{"}(x_3)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow g^{"}(x_3) = 0, x_3 \in (x_1 - x_2)$$

矛盾,结论得证.

2) 令 $F(x) = f(x)g^{'}(x) - f^{'}(x)g(x)$ …….. (2 分)

$F^{'}(x) = f(x)g^{"}(x) - f^{"}(x)g(x)$………………(2 分)

$$F(a)=F(b)=0$$

$$F'(\theta)=f(\theta)g''(\theta)-f''(\theta)g(\theta)=0$$ …………(1 分)

六 **(10 分)** 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 存在二阶导数, $f(0)=0,\ f(1)=1,$ 并 $f'(0)=f'(1)=0,$ 求解和证明下面问题.

1) 写出 $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 的 Lagrange 余项的 Taylor 公式;

2) 证明在 $(0,1)$ 至少存在一点 $\theta\in(0,1)$ 满足 $\left|f''(\theta)\right|\geq 4$.

证明 **1) 下面每个式子 2 分**

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2,\ \xi_1 \text{介于} 0, x \text{之间}.$$

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-1)^2,\ \xi_2 \text{介于} x,1 \text{之间}.$$

2)

$$\left.\begin{aligned}&f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2\\&f(x)=1+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-1)^2\end{aligned}\right\}\ 2\text{ 分}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2=1+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-1)^2\Rightarrow\\&1\leq\frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)\right|x^2+\frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)\right|(x-1)^2\\&\leq\frac{1}{2}\left(\max\left\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_1)\right|\right\}\right)\left(x^2+(x-1)^2\right)\end{aligned}\right\}\qquad 2\text{ 分}$$

而 $x^2+(x-1)^2$ 在 $[0,1]$ 区间上的最大值 $\frac{1}{2}$, (2 分)

因此 $\max\left\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_1)\right|\right\}\geq 4.$

七 （**10 分**）**证明下面问题**

假设 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上. 如果对 (a,b) 内任何收敛的点列 $\{x_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在，则 f 在 (a,b) 上一致连续.

证明: 1) 写出不一致连续定义 3 分

如果 f 在 (a,b) 上不一致连续，则

$$\exists\varepsilon_0>0,\exists s_n,t_n\in(a,b),|s_n-t_n|\le\frac{1}{n},|f(s_n)-f(t_n)|\ge\varepsilon_0$$

2) **写出下面 3 分(有界数列必存在收敛子列)**

$$\{s_n,t_n\}\in(a,b),\text{则存在}\left\{s_{n_k},t_{n_k}\right\}\in(a,b),\lim_{k\to\infty}s_{n_k}=\lim_{k\to\infty}t_{n_k}=\alpha$$

3) **下面结论 4 分**

构造 $\left\{s_{n_1},t_{n_1},\ldots\ldots s_{n_k},t_{n_k},\ldots\ldots\ldots\right\}=\{z_n\}$ 数列收敛且极限为 α, (2 分)

则有已知条件 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$ 存在，因此 $\lim\limits_{k\to\infty}f\left(s_{n_k}\right)=\lim\limits_{k\to\infty}f\left(t_{n_k}\right)$ (2 分)

与 1)矛盾.

八 （**10 分**）**附加题 (下面两个题目任选其一)**

1) 假设函数 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n$，证明下面问题

a) 对于任意的自然数 n，方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 中仅有一根.

b) 设 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 满足 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$.

证明: 1) 5 分

$$f_n(0)=1,f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\text{由介值定理}\exists x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),f_n(x_n)=\frac{1}{2}.\ (3\text{ 分})$$

$$f_n'(x)=-n\sin x(1-\cos x)^{n-1}<0,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\qquad(2\text{ 分})$$

因此根唯一.

2) 5 分

由于 $f_n\left(\arccos\dfrac{1}{n}\right)=1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n,\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(\arccos\dfrac{1}{n}\right)=1-e^{-1}$,（2 分）

由极限的保号性

$$\left.\begin{array}{l}\exists N, n>N, f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{2} \\ f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{2}=f_n\left(x_n\right)\end{array}\right\}$$ （2 分）

单调性 $\arccos\frac{1}{n}<x_n<\frac{\pi}{2}$ 和夹逼定理 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}.$ （1 分）

2) 用有限覆盖定理证明下面问题

假设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$，对于 $\forall x_0\in[a,b]$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明： **1）4 分**

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，根据函数局部有界性

$$\forall x\in[a,b],\exists U(x,\delta_x),t\in U_x(x\ ,\delta_x),\left|f(t)\right|\le M_x$$

2）**3 分**

根据有限覆盖定理

$\bigcup\limits_{x\in[a,b]}U(x,\delta_x)\supset[a,b]$，存在有限个 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}U_{x_i}(x_i,\delta)\supset[a,b]$

3）3 分

取 $M=\max\limits_{1\le i\le k}M_{x_i}$，则 $\forall x\in[a,b]$，$x\in\bigcup\limits_{i=1}^{k}U_{x_i}(x_i,\delta)$，则

$\left|f(x)\right|\le M$ 。