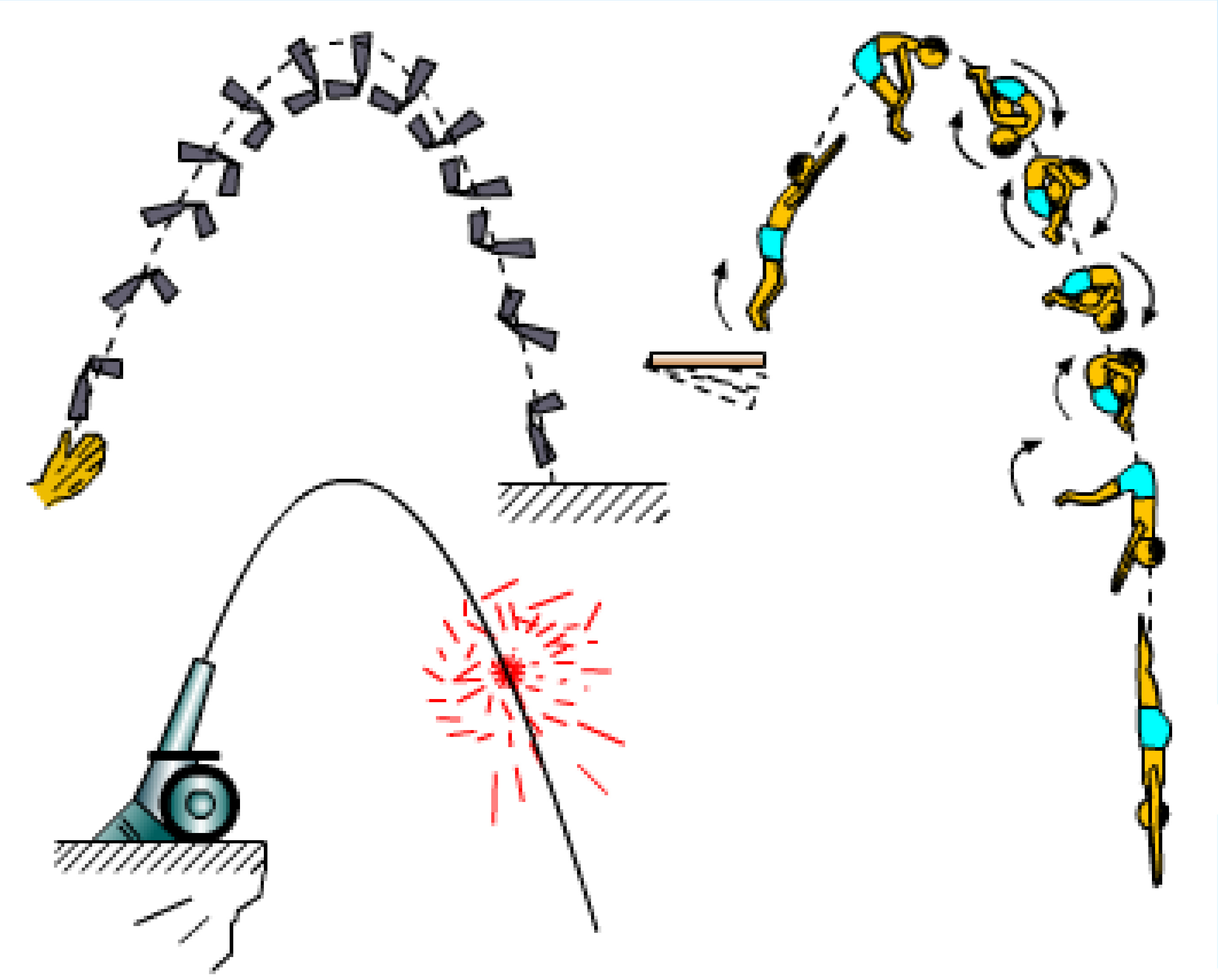
第6章 质心力学定理

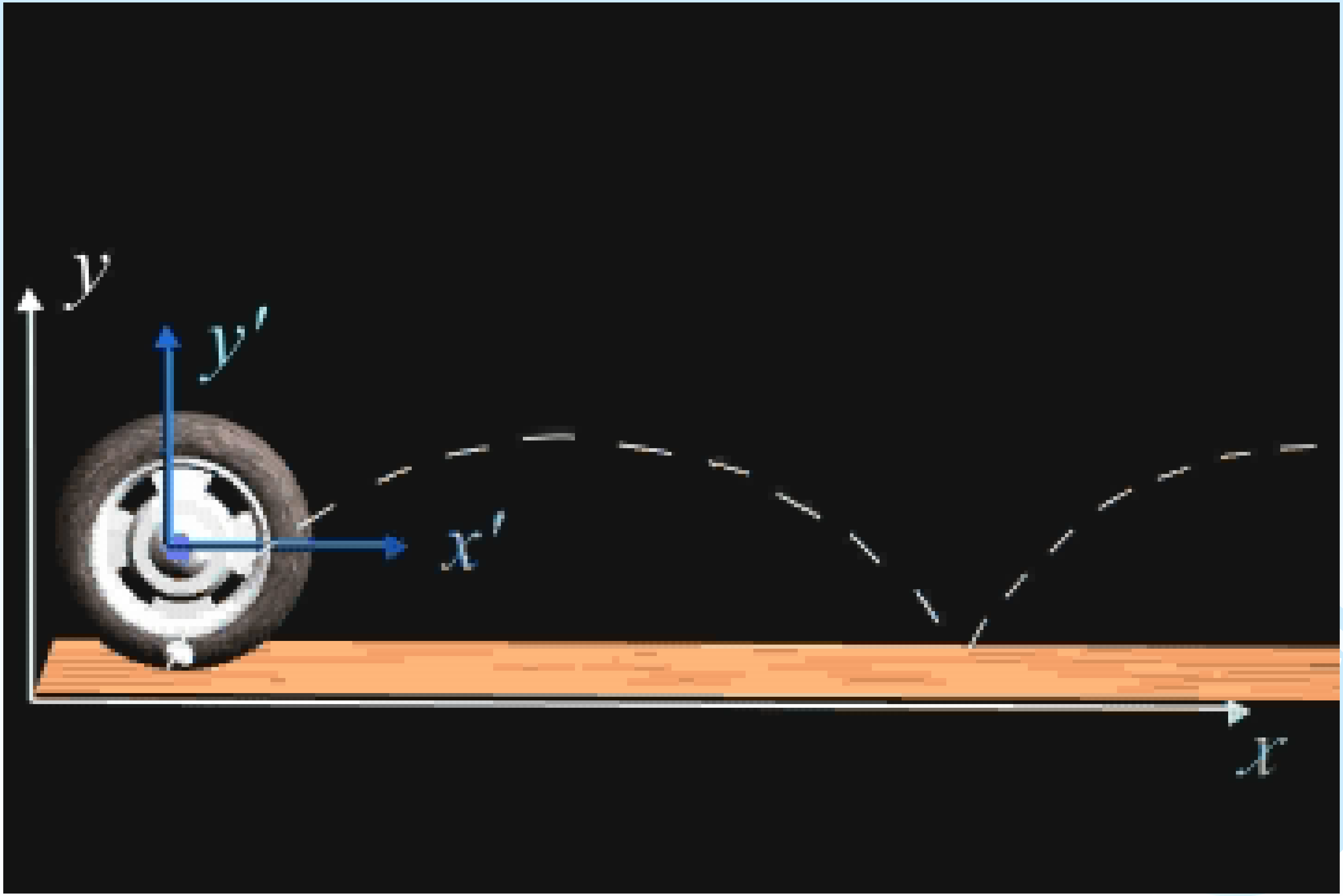
§6-1. 质心动量定理

§6-2.质心动能定理

§6-3. 质心角动量定理

§6-4. 有心运动方程与约化质量




y
y'
x'
x

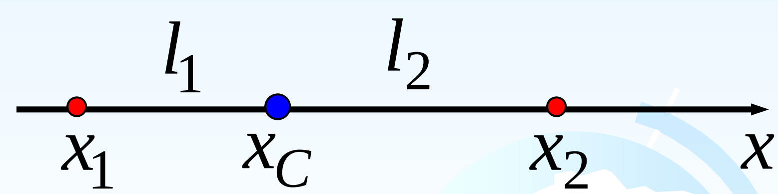
§6-1. 质心动量定理

一. 质心

质点系中总有一特殊点，其运动和质点系的所有质量集中于该处的质点运动相同 ⇒ 质心

= 以质点系**各点质量为权重**的系统位置的**平均值**

例如：以两质点质点组为例



若有一点x_C，使 $m_1 l_1 = m_2 l_2$

x_C就是x_1和x_2的质心

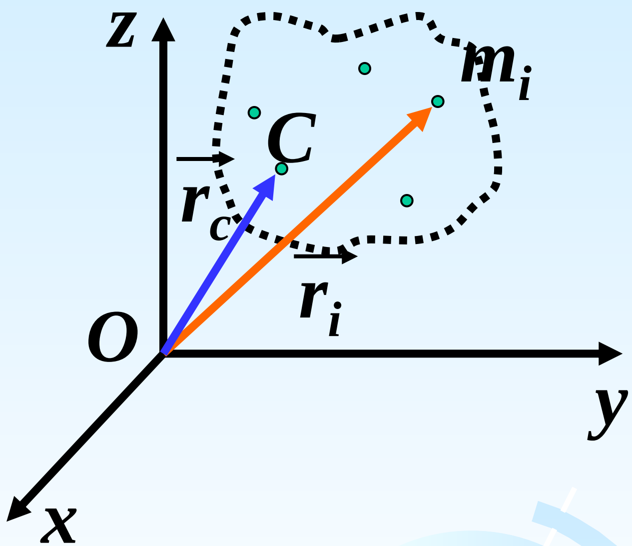
$$m_1(x_C - x_1) = m_2(x_2 - x_C) \Rightarrow x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

推广到3维质点组，若n个质点的位矢为$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots \vec{r}_n$，

总质量 $M = \sum_i m_i$

二. 质心坐标

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i}$$



$\vec{r}_i$—第i个质点的位矢

M—质点系的总质量

在直角坐标系中质心位置坐标：

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

对于质量连续分布物体： $\vec{r}_C = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$

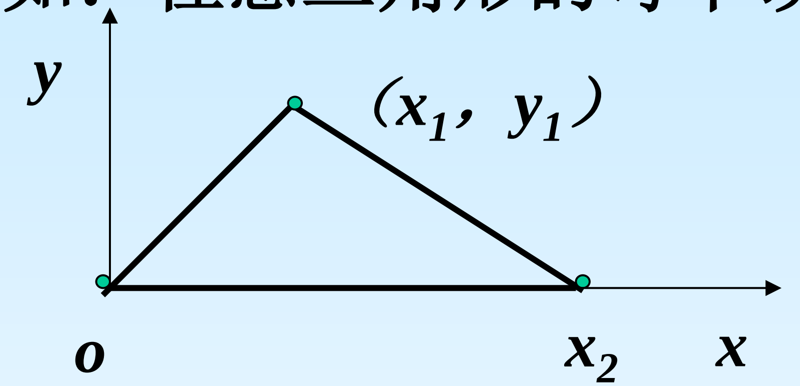
$$x_C = \frac{\int xdm}{M} \qquad y_C = \frac{\int ydm}{M} \qquad z_C = \frac{\int zdm}{M}$$

一维：$dm = \lambda(x)dx \quad \lambda(x)$ —线密度

二维：$dm = \sigma(x,y)dS \quad \sigma(x,y)$ —面密度

三维：$dm = \rho(x,y,z)dV \quad \rho(x,y,z)$ —体密度

如：任意三角形的每个顶点有一质点m。



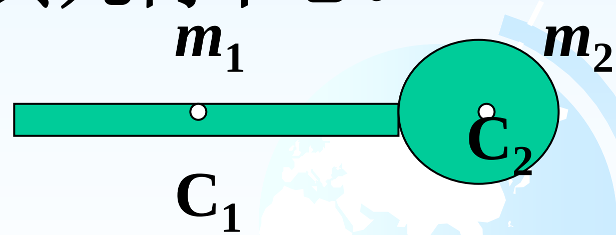
$$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{3m} = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

$$y_c = \frac{my_1}{3m} = \frac{y_1}{3}$$

● 匀质物体，质心在几何中心

均匀杆、圆盘、圆环、球，质心为其几何中心。

● 叠加性：　如图，由C1,C2→C



● 区别质心和重心：

"小线度"物体，地面附近，质心和重心是重合的。

- 质心，指物质系统上被认为质量集中于此的一个假想点。与重心不同的是，质心不一定要在有重力场的系统中。除非重力场是均匀的，否则同一物质系统的质心与重心不通常在同一假想点上。
- 详细点：质心就是物体质量集中的假想点(对于规则形状物体就是它的几何中心),重心就是重力的作用点。

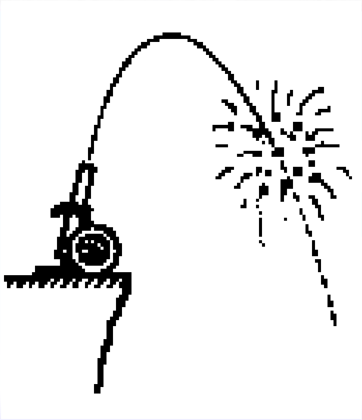
- 通常情况下,由于普通物体的体积比地球十分微小,所以物体所处的重力场可看作是均匀的,此时质心与重心重合;如果该物体的体积比之于地球不可忽略(例如一个放在地面上半径为3000km的球体),则该球体所处的重力场就不均匀了,具体说是由下自上重力场逐渐减小,此时重力的作用点靠下,也就是重心低于质心.

- 如果物体所处的位置不存在重力场(如外太空),则物体就无所谓重心了,但由于质量仍然存在,所以质心仍然存在

▲在光滑水平面上滑动的扳手，其质心做匀速直线运动

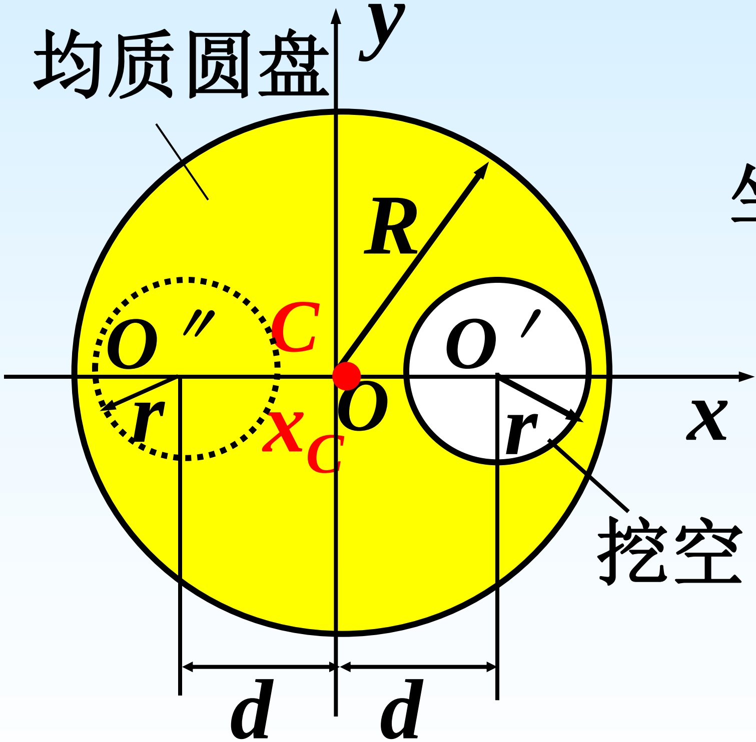
▲做跳马落地动作的运动员尽管在翻转，但其质心仍做抛物线运动

▲爆炸的焰火弹虽然碎片四散，但其质心仍在做抛物线运动



[例] 如图示， 求挖掉小圆盘后系统的质心坐标。

解： 由对称性分析，质心C应在x轴上。

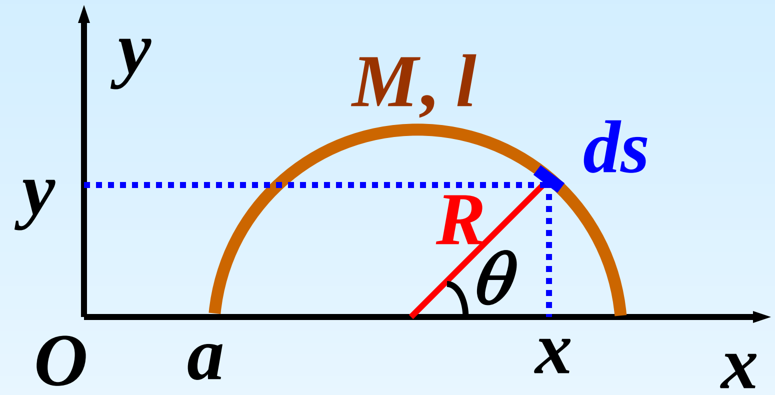


令 σ为质量的面密度，则质心坐标为：

$$x_C = \frac{0 + (-d \cdot \sigma \cdot \pi r^2)}{\sigma \cdot \pi R^2 - \sigma \cdot \pi r^2}$$

$$= -\frac{d}{(R/r)^2 - 1}$$

例： 质量为M，长度为l的均匀细杆弯成半圆形，求质心的位置。



解： 取弧元$ds = Rd\theta$

$$\Rightarrow dm = \lambda ds = (M/l)Rd\theta$$

或 $dm = Md\theta/\pi$

ds的坐标：$x = a + R + R\cos\theta$; $y = R\sin\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{1}{M}\int x dm = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi (a + R + R\cos\theta)d\theta = a + R \\ y_C = \dfrac{1}{M}\int y dm = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi R\sin\theta d\theta = \dfrac{2R}{\pi} \end{cases}$$

三. 质心动量

质心运动速度：$\vec{v}_C = \dfrac{d\vec{r}_C}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i\right] = \dfrac{1}{M}\dfrac{d}{dt}\left[\sum_i m_i\vec{r}_i\right]$

$$= \frac{1}{M}\left[\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right] = \frac{1}{M}\left[\sum_i m_i\vec{v}_i\right]$$

$$\boxed{M\vec{v}_C = \sum_i m_i\vec{v}_i}$$

定义：$M\vec{v}_C = \left[\sum_i m_i\right]\vec{v}_c$ ——质心动量

质点组的总质量乘以质心速度为质心动量.

结论：质心动量等于质点组的总动量.

四. 质心运动定理

质心动量：$M\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i$

质点组动量变化定理：$d\vec{I}_{外} = d\vec{P} \Rightarrow \sum_i \vec{F}_i dt = d\left[\sum_i m_i \vec{v}_i\right]$

所以：$\boxed{d\left(M\vec{v}_C\right) = \sum_i F_i dt}$ ——质心动量变化定理

质心动量的改变量等于合外力的冲量.

又：$\boxed{M\dfrac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_i \vec{F}_i}$ 即 $\boxed{M\vec{a}_C = \sum_i \vec{F}_i}$ ——质心运动定理

质点组总质量与质心加速度的乘积等于质点组所受到的合外力.

从动力学角度看，质心是这样一个质点：

1.质心集中了质点组的全部质量；

2.质心动量等于质点组的总动量,即

$$\overrightarrow{P_C} = M\overrightarrow{v_C} = \sum m_i v_i = \overrightarrow{P}$$

3.质心运动服从质心运动定理,即

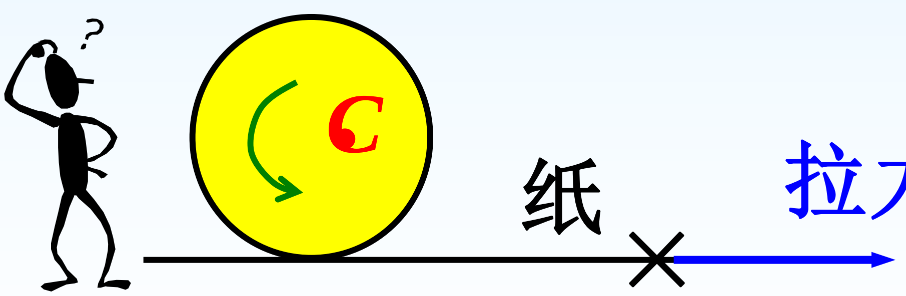
$$d\left(M\vec{\mathbf{v}}_C\right) = \sum_i F_i dt$$

作用在质点组上的外力的冲量,等于质点组质量与质心速度的乘积.适用于惯性参考系.

在质点力学中所谓“物体”的运动，

实际上是物体质心的运动。

思考

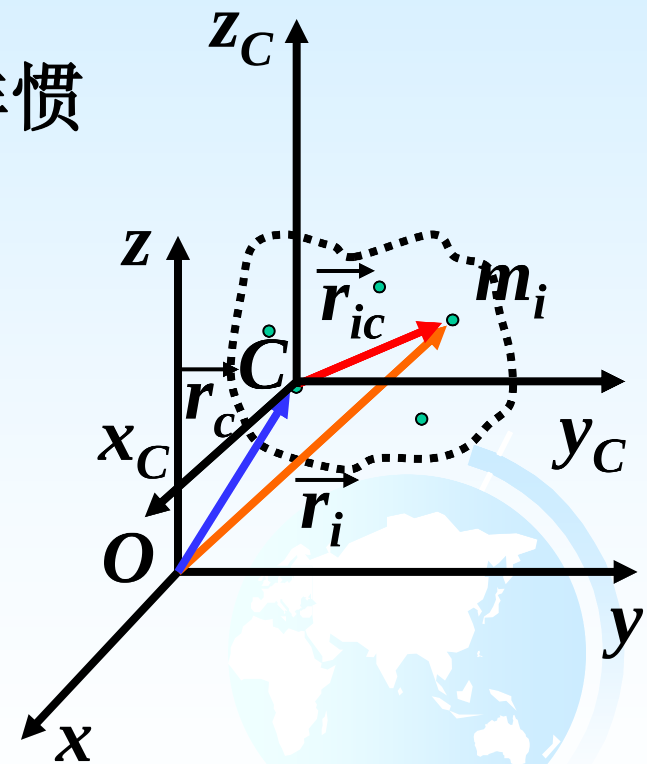


球往哪边移动？

五. 质心参考系

质心参考系： 以 $\vec{r}_C = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$ 为参考系

- 质心系可以是惯性系，也可以是非惯性系.



当质点系所受合外力为零时，质心系是惯性系，否则是非惯性系.

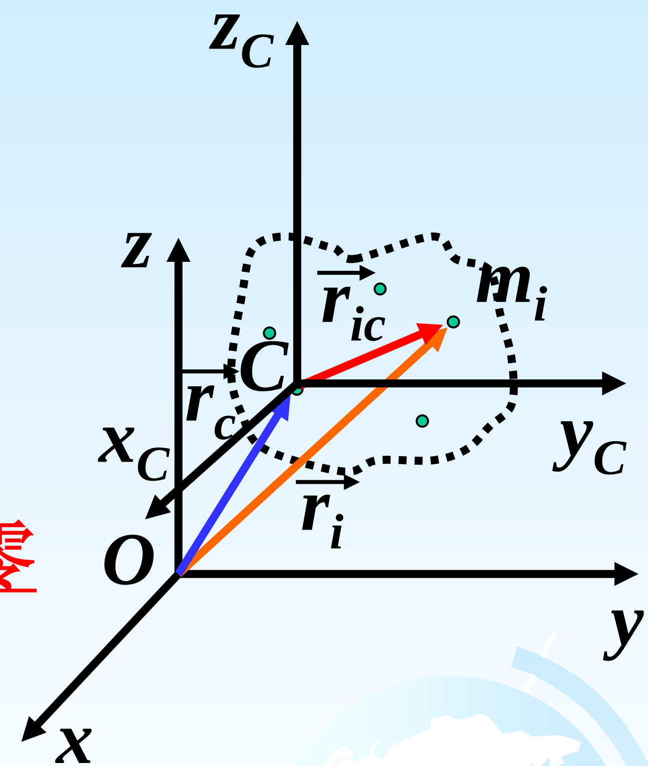
根据质心运动定理

$$M\vec{a}_C = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

$\vec{a}_C = 0$ 质心系为惯性系

- 质心速度在质心系中为零 ⇔质点组总动量为零.

$$\vec{r}_C=\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_{iC}=0 \qquad \vec{v}_C=\frac{d\vec{r}_C}{dt}=0$$



$$\boxed{M\vec{v}_C=\sum_i m_i\vec{v}_i=0}$$

——质点组总动量为零

质点系的复杂运动通常可分解为:

各质点相对于质心的运动

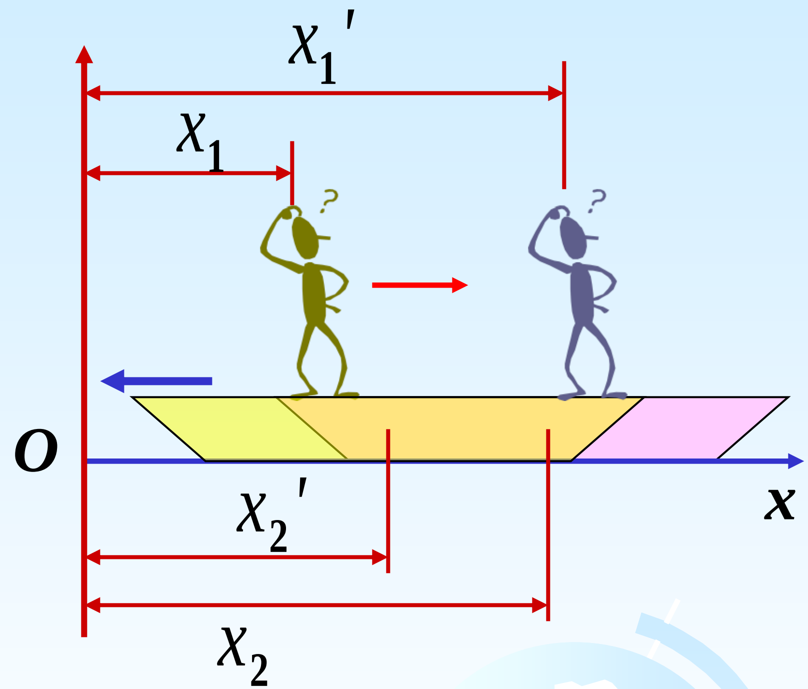
＋质点系整体随质心的运动。

例 如图所示，人与船构成质点系，当人从船头走到船尾

求 人和船各移动的距离

解 在水平方向上，外力为零，则

$$a_{cx}=\frac{\mathrm{d}\upsilon_{cx}}{\mathrm{d}t}=0 \qquad x_c=x_c'$$



开始时，系统质心位置

$$x_c=\frac{mx_1+Mx_2}{m+M}$$

终了时，系统质心位置

$$x_c'=\frac{mx_1'+Mx_2'}{m+M}$$

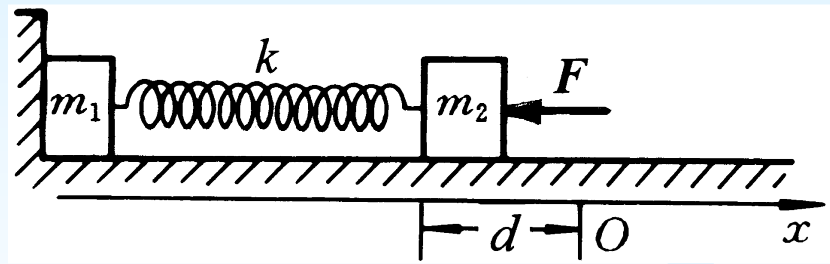
$$M\underbrace{(x_2-x_2')}_{S}=m\underbrace{(x_1'-x_1)}_{l-S}$$

解得 $$S=\frac{ml}{m+M}$$

$$s=l-S=\frac{Ml}{m+M}$$

例 用劲度系数为k的弹簧，将质量分别为m_1和m_2的物体连接起来，放置在光滑的水平面上。设m_1紧靠墙，在m_2上施力将弹簧压缩了d. 若以物体m_1，m_2和弹簧为系统，试求在外力撤去之后，(1) 系统质心加速度的最大值；(2) 系统质心速度的最大值。

[解] (1)选取O点为x轴的原点。按题意，物体m_1，m_2和弹簧所组成的系统，在受到了外



力$F_{1x}=-kd$使弹簧压缩了d之后,墙壁对该系统的作用力为$F_{2x}=kd$. 在撤去F_{1x}后，在作用F_{2x}下，该系统质心加速度的最大值为

$$a_{cmax}=\frac{kd}{m_1+m_2}$$

(2) 在撤去F_{1x}后的最初阶段，物体m_2在力$F_x = -kx$ 作用下作加速运动;

在 $x = 0$ 时力F_x减小到零，然而物体m_2的速度却达到了它的最大值$v_{2\max}$;

物体m_2的动能等于弹簧的弹性势能，$\frac{1}{2} m_2 v_{2\max}^2 = \frac{1}{2} k d^2$

由此可得 $v_{2\max} = \sqrt{k/m_2}\, d$

这时，系统的质心速度也达到了它的最大值，即

$$v_{c\max} = \frac{m_2 v_{2\max}}{m_1 + m_2} = \frac{\sqrt{k m_2}\, d}{m_1 + m_2}$$

前:系统一直受到墙壁的作用力,质心速度一直在增加;

后:系统不再受到外力的作用,质心速度将不再改变。

§6-2.质心动能定理

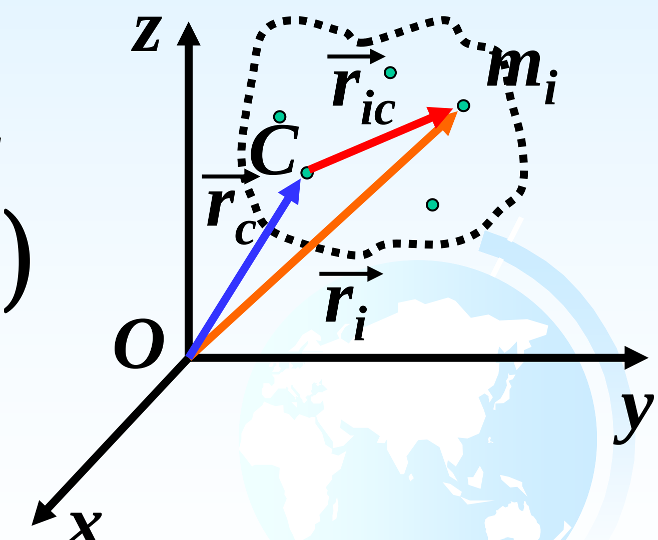
一. 质心动能定理 (科尼希定理)

定义：$E_C = \frac{1}{2} M \upsilon_C^{\,2}$ ——质心动能

$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^{\,2}$ ——质点组总动能

是否相等?

如图：$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{iC} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{iC}$



$$\upsilon_i^{\,2} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \left(\vec{v}_C + \vec{v}_{iC}\right)\cdot\left(\vec{v}_C + \vec{v}_{iC}\right)$$

$$= \upsilon_C^{\,2} + \upsilon_{iC}^{\,2} + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{iC}$$

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^{\,2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\upsilon_C^{\,2} + \upsilon_{iC}^{\,2} + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{iC}\right)$$

$$E_k = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \upsilon_C^{\ 2} \right) + \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \upsilon_{iC}^{\ 2} \right) + \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{iC} \right)$$

$$\sum_i \left(\frac{1}{2} m_i 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{iC} \right) = \vec{v}_C \cdot \underbrace{\sum_i m_i \cdot \vec{v}_{iC}}_{\text{质心系中质点组总动量}} = \vec{v}_C \cdot 0 = 0$$

$$E_k = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \upsilon_C^{\ 2} \right) + \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \upsilon_{iC}^{\ 2} \right) = \underbrace{\frac{1}{2} M \upsilon_C^{\ 2}}_{E_C} + \underbrace{\sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \upsilon_{iC}^{\ 2} \right)}_{E_{rC}}$$

$\boxed{E_k = E_C + E_{rC}}$ ——质心动能定理(科尼希定理)

质点组总动能等于质心动能与相对质心动能之和.

二. 重力势能与质心势能

定义： $E_C = Mgh_C$ ——质心重力势能

$E = \sum_i m_i g h_i$ ——质点组重力势能

是否相等？

$M = \sum_i m_i$

$$E = \sum_i m_i g h_i = g\sum_i m_i h_i = g\frac{\sum_i m_i h_i}{\sum_i m_i}\sum_i m_i = Mgh_C = E_C$$

即 $\boxed{E = E_C}$

质心重力势能等于质点组总重力势能.

§6-3. 质心角动量定理

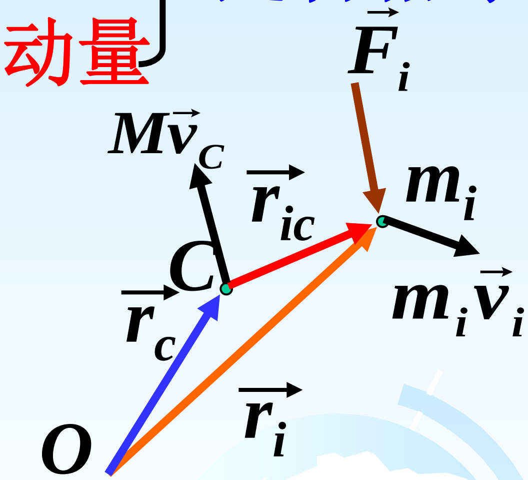
一. 质心角动量

定义：$\vec{L}_C=\vec{r}_C\times M\vec{v}_C$ ——质心角动量

$\vec{L}=\sum_i\left(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i\right)$ ——质点组总角动量

是否相等？

$M=\sum_i m_i$



因为： $\vec{r}_i=\vec{r}_C+\vec{r}_{iC}$ $\vec{v}_i=\vec{v}_C+\vec{v}_{iC}$

$$\vec{L}=\sum_i\left(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i\right)=\sum_i\left(\vec{r}_C+\vec{r}_{iC}\right)\times m_i\left(\vec{v}_C+\vec{v}_{iC}\right)$$

$$=\sum_i\left(\vec{r}_C\times m_i\vec{v}_C\right)+\sum_i\left(\vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_{iC}\right)$$

$$+\sum_i\left(\vec{r}_C\times m_i\vec{v}_{iC}\right)+\sum_i\left(\vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_C\right)$$

$$\vec{L}=\vec{r}_C\times\left(\sum_i m_i\right)\vec{v}_C+\sum_i\left(\vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_{iC}\right)$$
$$+\vec{r}_C\times\sum_i\left(m_i\vec{v}_{iC}\right)+\sum_i\left(m_i\vec{r}_{iC}\right)\times\vec{v}_C$$
$$=\vec{r}_C\times M\vec{v}_C+\underbrace{\sum_i\left(\vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_{iC}\right)}_{\vec{L}_{rC}}+\vec{r}_C\times 0+0\times\vec{v}_C$$
$$=\vec{L}_C+\vec{L}_{rC}$$

$$\boxed{\vec{L}=\vec{L}_C+\vec{L}_{rC}}$$

质点组总角动量等于质心角动量与相对质心角动量之和.

二. 质心角动量变化定理

与单质点完全相同

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C} \quad \boxed{\vec{M}_C = \vec{r}_C \times \sum_i \vec{F}_i} \quad (\vec{M}_C\text{和}\vec{L}_C\text{都对同一点}O\,)$$

三. 相对质心角动量变化定理

质点组的角动量变化定理 $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = M_{外} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)}$

因为： $\vec{L} = \vec{L}_C + \vec{L}_{rC}$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{iC}$$

左边： $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_C}{dt} + \frac{d\vec{L}_{rC}}{dt}$

右边： $$\sum_i\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_i\right)=\sum_i\left(\vec{r}_C\times\vec{F}_i\right)+\underbrace{\sum_i\left(\vec{r}_{iC}\times\vec{F}_i\right)}_{\vec{M}_{rC}}$$

$$=\vec{M}_C+\vec{M}_{rC}$$

$$\because\quad \frac{d\vec{L}_C}{dt}=\vec{M}_C \qquad \boxed{\therefore\quad \frac{d\vec{L}_{rC}}{dt}=\vec{M}_{rC}}$$

——相对质心角动量变化定理

相对质心角动量的时间变化率等于外力相对于质心的总力矩.

尽管质心系可能不是惯性系，但对质心来说，角动量定理仍然成立。这再次显示了质心的特殊之处和选择质心系来讨论问题的优点。

若质心系是非惯性系，则外力矩中应包括

惯性力对质心的力矩：

$$\vec{M}'+\vec{M}_{惯C}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}$$

设质心加速度为 $\vec{a}_C$， 则有

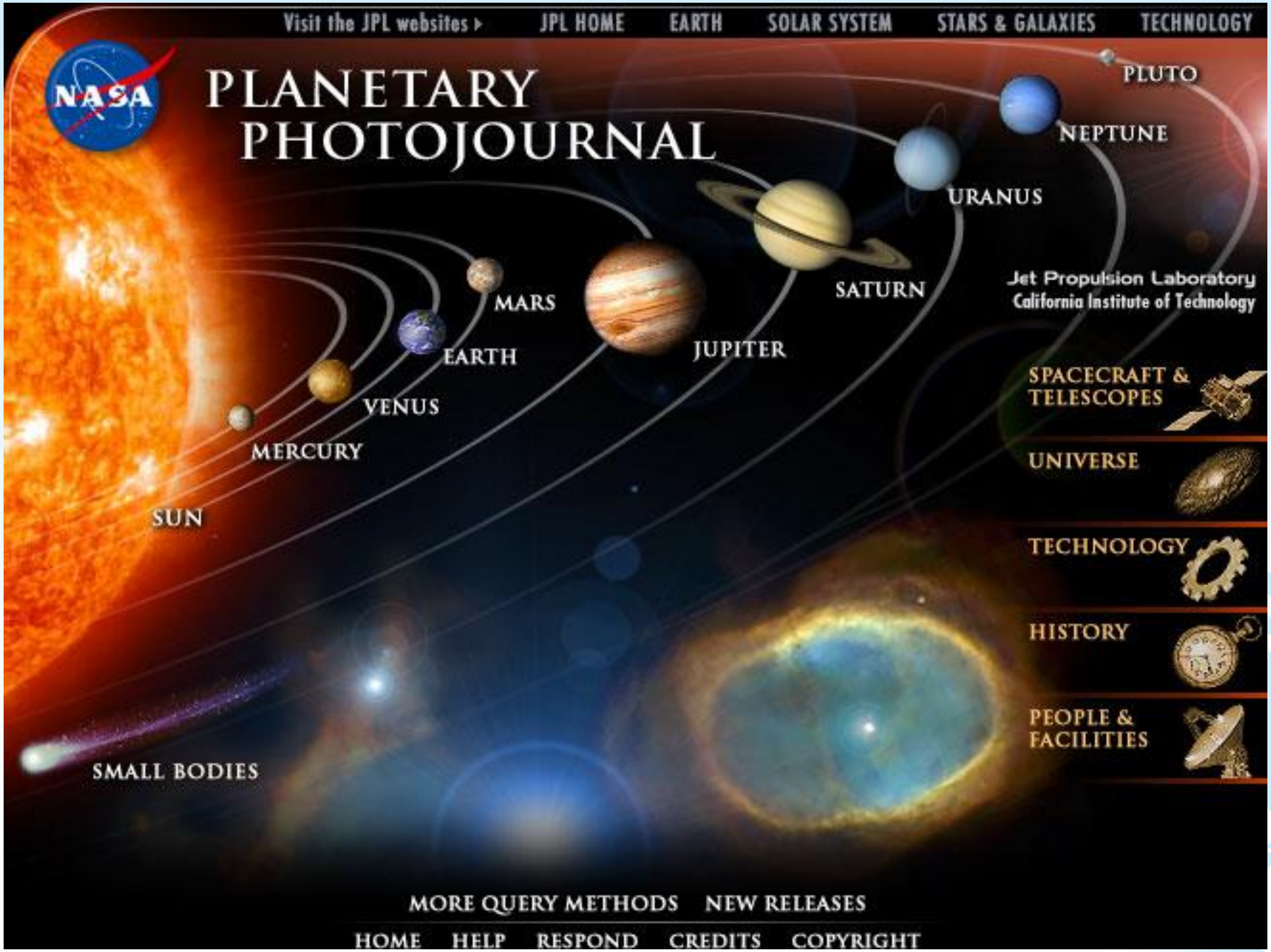
$$\vec{M}_{惯C}=\sum_i \vec{r}_i'\times(-m_i\vec{a}_C)=-(\sum_i m_i\vec{r}_i')\times\vec{a}_C=0$$

惯性力对质心的力矩之和为零。

这正是即使质心系为非惯性系，但质点系对质心的角动量仍能满足角动量定理的原因。

§6-4. 有心运动方程与约化质量

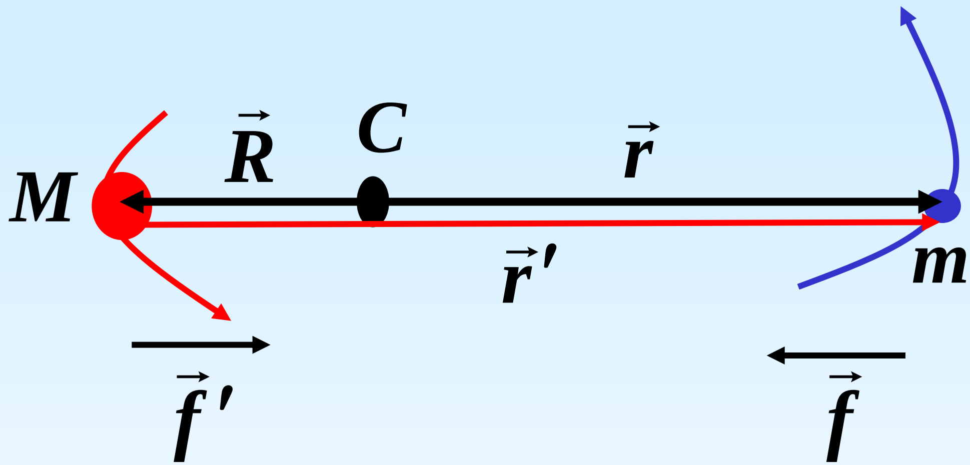
行星运动



一. 有心运动方程

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}$$

$$\vec{f}\,' = -\vec{f}$$



不考虑第三者的影响

质心系可以是惯性系

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f} \rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{f}$$

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{f}\,' \rightarrow \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{1}{M}\vec{f}\,'$$

相减

$$\frac{d^2(\vec{r} - \vec{R})}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{f} - \frac{1}{M}\vec{f}\,'$$

$$\frac{d^2(\vec{r}-\vec{R})}{dt^2}=(\frac{1}{m}+\frac{1}{M})\vec{f} \longrightarrow \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}=(\frac{1}{m}+\frac{1}{M})\vec{f}$$

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m}+\frac{1}{M}$$

μ——约化质量(折合质量)

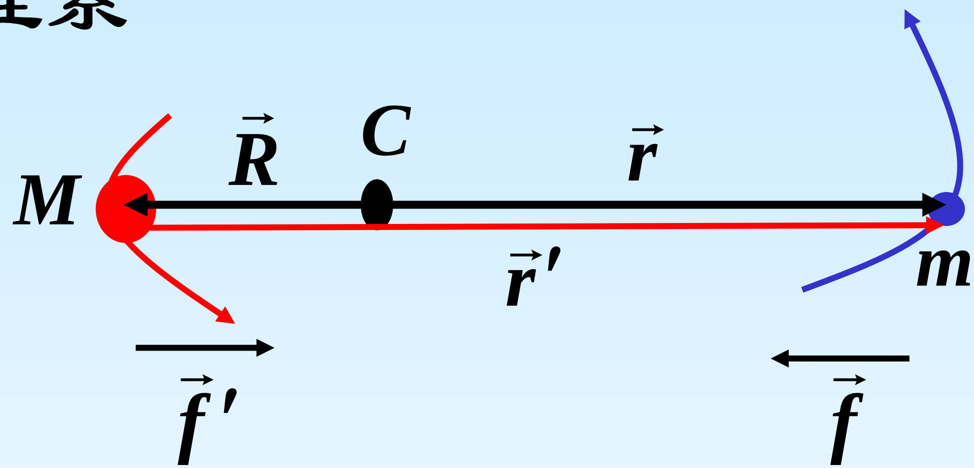
$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}=\frac{1}{\mu}\vec{f} \longrightarrow \boxed{\mu\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}=\vec{f}}$$

——行星运动方程(有心运动方程)

虽然日心系是个非惯性系，但把行星的真实质量用约化质量替代，行星运动方程具有牛顿运动方程的表达形式。

二. 日心系可作为准惯性系

行星运动方程 $\boxed{\mu\dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2}=\vec{f}}$



$M>>m$ → $\mu\approx m$

$\boxed{m\dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2}=\vec{f}}$ → 日心系可作为准惯性系

准惯性系的精度(相对偏差)

$$\Delta=\frac{m-\mu}{m}=1-\frac{1}{1+\dfrac{m}{M}}\approx\frac{m}{M}$$

- 本章作业
- 6.1, 6.3, 6.4, 6.7