A

北京航空航天大学

2012－2013 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2013 年 06 月 19 日

A

一、 求解下面问题（每小题 6 分，满分 48 分）

1. 设 $f(x,y)$ 为一连续函数，求极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)dxdy$.

解 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)dxdy = f(0,0)$

建议：中间过程 4 分

2. 改变累次积分的积分顺序：

$$\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$$

$$=\int_{-1}^{0}dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)dx+\int_{0}^{8}dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)dx$$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中积分区域为

$D=\{(x,y)\mid \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$.

解：$\iint\limits_{D}\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\pi}^{2\pi} r\sin r dr=-6\pi$

4. 计算三重积分 $\iiint\limits_{V}(y^{2012}x+1)dxdydz$，其中 V 由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $3z=x^2+y^2$ 所成的立体.

解：由于 V 是关于 yoz 平面对称的，且 $y^{2012}x$ 是关于 x 的奇函数，所以 $\iiint\limits_{V}y^{2012}xdxdydz=0$，于是

$$\iiint\limits_{V}(y^{2012}x+1)dxdydz=\iiint\limits_{V}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}rdr\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}(\sqrt{4-r^2}-\tfrac{r^2}{3})rdr=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}(\sqrt{4-r^2}-\tfrac{r^2}{3})d(r^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left[-\sqrt{4-r^2}d(4-r^2)-\frac{2r^2}{6}d(r^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\left[-\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{6}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{19}{6}\pi$$

（写出对称性给 2 分，计算过程适当给分）

5. 计算积分 $I=\int_{\Gamma}(x^2+2z)ds$，其中曲线 Γ 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x+y+z=0.\end{cases}$（利用对称性）

解： 利用轮换对称性知

$$\int_{\Gamma}x^2ds=\int_{\Gamma}y^2ds=\int_{\Gamma}z^2ds=\frac{1}{3}\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{a^2}{3}\int_{\Gamma}ds=\frac{2\pi a^3}{3}$$

$$\int_{\Gamma}zds=\int_{\Gamma}xds=\int_{\Gamma}yds=\frac{1}{3}\int_{\Gamma}(x+y+z)ds=0$$

所以 $\int_{\Gamma}(x^2+2z)ds=\dfrac{2\pi a^3}{3}$

（建议：两个对称性各 3 分，写出参数方程直接计算适当给分）

6. 计算第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\ge h\ (0<h<a)$ 的部分.（可利用对称性）

解： 利用对称性知 $\iint_{\Sigma}xdS=\iint_{\Sigma}ydS=0$

设 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2-h^2\}$

则 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint_{\Sigma}zdS$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ \sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}dxdy$$

$$=a\iint_{D_{xy}}dxdy$$

$$=\pi a(a^2-h^2)$$

（建议：对称性 $\iint_{\Sigma}xdS=\iint_{\Sigma}ydS=0$ 2 分， $\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ 1 分，$\iint_{\Sigma}zdS$ 计算过程 3 分）

7. 证明向量场

$$\vec{F}=(yz(2x+y+z),\ \ xz(x+2y+z),\ \ xy(x+y+2z))$$

是有势场，并求其势函数.

解：先验证有势场

$$rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz(2x+y+z) & xz(x+2y+z) & xy(x+y+2z) \end{vmatrix}=\vec{0}$$

故 $\vec{F}$ 是有势场.　　　　　　　　　　　　----------3 分

$$\phi\,(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\vec{F}.d\vec{s}=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_{x_0}^{x}y_0z_0(2x+y_0+z_0)dx+\int_{y_0}^{y}xz_0(x+2y+z_0)dy+\int_{z}^{z}xy(x+y+2z)dz$$

$$=x^2yz+xy^2z+xyz^2+C.$$

（另一种方法也可（这里略），请判卷的时候注意。）

8. 设曲面Σ：$x+y+z=1\ \ (x,y,z\ge 0)$，已知连续函数 $f(x,y,z)$ 满足

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^3+\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

求 $f(x,y,z)$.

解：　设 $A=\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$，则有　$f(x,y,z)=(x+y+z)^3+A,$　　---2 分

对上式两边同时积分得，

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(x+y+z)^3\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma}A\mathrm{d}S,$$　　--------2 分

即：　$A=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S+A\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S,$

又　　$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=3+2\sqrt{3}$，　　　　-----1 分

所以　　$f(x,y,z)=(x+y+z)^3+3+2\sqrt{3}.$　　　　-----1 分

二、（10 分）(直接计算，不能用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_S (z^2+x)dydz + ydzdx - zdxdy$, 其中 S 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧。

解：曲面 S： $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad 0\le z\le 2$ ，在 xoy 平面上的投影区域为

$D_{xy}=\{(x,y)\big| x^2+y^2\le 4\}$ ------------------------1 分

$$\iint\limits_S (z^2+x)dydz+ydzdx-zdxdy$$
$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]\cdot(-z_x)+y\cdot(-z_y)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}dxdy$$
$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]\cdot(-x)+y\cdot(-y)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}dxdy$$
$$=\iint\limits_{D_{xy}}[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2x+\frac{3}{2}(x^2+y^2)]dxdy$$ ------------4分

由对称性 $\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)^2xdxdy=0$，所以 -------------------- 2 分

$$\iint\limits_S (z^2+x)dydz+ydzdx-zdxdy=\frac{3}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr=12\pi$$ --------3分

三、(12 分)(利用 Green 公式)

计算 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{b^2x^2+a^2y^2}$, $(a>0,\ b>0)$ 其中 L 为一条无重点, 分段光滑且不经过原点的连续闭曲线, L 的方向为逆时针方向.

解：记 L 所围成的闭区域为 D, 令 $P=\frac{-y}{b^2x^2+a^2y^2}$， $Q=\frac{x}{b^2x^2+a^2y^2}$，

则当 $b^2x^2+a^2y^2\ne 0$ 时, 有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{a^2y^2-b^2x^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$. -------3 分

(1) 当 $(0,0)\notin D$ 时, 由 Green 公式知: $\oint_L \frac{xdy-ydx}{b^2x^2+a^2y^2}=0.$ ------1 分

(2) 当 $(0,0)\in D$ 时，作位于 D 内圆周 $l:\ x^2+y^2=r^2$, 记 D_1 由 L 和 l 所围成， （其中 l 的方向取逆时针方向）。由 Green 公式得:

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{b^2x^2+a^2y^2}-\oint_l \frac{xdy-ydx}{b^2x^2+a^2y^2}=0 \quad 即: \oint_L \frac{xdy-ydx}{b^2x^2+a^2y^2}=\oint_l \frac{xdy-ydx}{b^2x^2+a^2y^2}=\frac{2\pi}{ab}.$$

（建议： 挖点和方向： 2 分， 计算过程 4 分）

四 、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_S yz\ dydz+(x^2+z^2)y\ dzdx+xy\ dxdy$,其中 S 为曲面 $4-y=x^2+z^2\ (y>0)$ 的外侧.

解： 添加平面 $S_1: x^2+z^2\le 4\ (y=0)$，方向向左侧， --------2 分

则 S,S_1 构成闭曲面，由 Gauss 公式得

$$\iint\limits_S yz\ dydz+(x^2+z^2)y\ dzdx+xy\ dxdy$$

$$=\oiint\limits_{S+S_1} yz\ dydz+(x^2+z^2)y\ dzdx+xy\ dxdy-\iint\limits_{S_1} yz\ dydz+(x^2+z^2)y\ dzdx+xy\ dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)dxdydz-\iint\limits_{S_1} yz\ dydz+(x^2+z^2)y\ dzdx+xy\ dxdy$$

---------5 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr\int_0^{4-r^2}dy=\frac{32}{3}\pi.$$ ---------3 分

五、（10 分）(利用 Stokes 公式)

计算 $\oint_\Gamma 2ydx+3xdy-z^2dz$,其中 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的上半部分 S（取外侧）的边界曲线，从 z 轴正向看逆时针方向.

解： 由于 $P=2y,\ Q=3x,\ R=-z^2$

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1,$$ --------3 分

由 Stokes 公式得

$$\oint_\Gamma 2ydx+3xdy-z^2dz=\iint\limits_S dxdy=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy=9\pi.$$

（建议：上式的第一个等号给 3 分，第二个等号给 2 分，最后答案给 2 分）

六、（**10** 分）证明 Green 第一公式：

$$\iint\limits_D [(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]dxdy=-\iint\limits_D u\Delta u dxdy+\oint_L u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds.$$

其中 L 为封闭光滑曲线，D 为 L 围成的区域。这里假设 u 有连续的二阶偏导数，$\vec{n}$ 为 L 外法线单位向量，上式曲线积分为逆时针方向。

证明：不妨假设曲线沿逆时针方向，记 $\vec{n}=(\cos(\vec{n},x),\cos(\vec{n},y)),$

其中 $(\vec{n},x),(\vec{n},y)$ 分别表示外法向量 $\vec{n}$ 与 x,y 轴正方向的夹角。

又 u 具有一阶连续偏导数，所以方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{n},y)$$ --2 分

设曲线的单位切向量为 $\vec{\tau}=(\cos(\vec{\tau},x),\cos(\vec{\tau},y)),$ 则 $\begin{cases}\cos(\vec{n},x)=\cos(\vec{\tau},y),\\ \cos(\vec{n},y)=-\cos(\vec{\tau},x),\end{cases}$ -------------2 分

所以由上面两个等式及一二型曲线积分的关系及 Green 公式，可得

$$\oint_L u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds=\oint_L u[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{n},y)]ds$$

$$=\oint_L u[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{\tau},y)-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{\tau},x)]ds$$

$$=\oint_L u\frac{\partial u}{\partial x}dy-u\frac{\partial u}{\partial y}dx$$ ------------------------------2 分

$$=\iint\limits_D[\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial u}{\partial y})]dxdy$$ -------------------------------2 分

$$=\iint\limits_D[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+u\,(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})]dxdy$$

即 $$\iint\limits_D [(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]dxdy=-\iint\limits_D u\Delta u dxdy+\oint_L u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds.$$ -------------------整理及结论 2 分

七、附加题（10 分） 已知函数 $f(x)$ 为【$0,+\infty)$ 上的连续函数，且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$，求 $f(x)$ 的表达式.

解：显然 $f(0)=1$， -----1 分

由于 $$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t} f(\frac{1}{2}r)\mathrm{r}dr=2\pi\int_0^{2t} rf(\frac{1}{2}r)dr,$$ --------2 分

所以 $$f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} rf(\frac{1}{2}r)dr,$$

等式两边关于 t 求导，得 $f^{'}(t)=8\pi t\cdot e^{4\pi t^2}+8\pi tf(t),$ ------3 分

于是有

$$f(t)=e^{\int 8\pi tdt}【C+\int(8\pi tdt\cdot e^{4\pi t^2}\cdot e^{\int --8\pi tdt})dt】=e^{4\pi t^2}(4\pi t^2+C),$$ ----3 分

代入 $f(0)=1$，得 $C=1,$

故 $f(t)=e^{4\pi t^2}(4\pi t^2+1),\ \mathrm{t}\in[0,+\infty).$ ---------1 分