第 5 章 计算机控制系统的离散域经典设计

教学大纲

离散系统的稳态、动态时域设计指标；Z 平面根轨迹分析及根轨迹设计；离散系统的频率域指标；W′变换及频率域设计；强调离散系统的根轨迹和频率域分析，使学生掌握分析方法与概念，熟悉运用设计方法。

学习重点

1、本章学习要求与重点

离散域设计是 CCS 设计的另一种重要方法，其通常又分为经典与现代控制方法。本章主要涉及经典控制设计方法。连续系统的根轨迹设计、频率域设计在单入/单出系统设计中起着重要的作用。对于单入/单出离散化系统，沿袭连续域的设计与分析方法有助于学生更深层次地了解控制原理的基础知识，了解其在离散域的相应知识与结论，有利于今后的工程实践过程。本章主要介绍 z 平面根轨迹设计和 w’ 平面频率域设计。从基本原理及概念上来说，与连续系统基本相同。设计者可以沿用连续系统设计方法完成离散系统设计。

学习本章时主要应注意掌握下述有关问题.

（1）时域与频域设计要求

本章第一节给出离散系统时间域和频率域的设计要求，需要将连续系统设计要求推广到离散系统。其中：

- 时域要求为稳定性、稳态精度和动态响应过程的各项指标，在连续系统设计中给出的：单位阶跃响应的升起时间、峰值时间、超调量和调节时间等，仍然为离散系统的设计指标。

特别应注意的是：应掌握依给定的时域指标，利用等ζ线、等$\mathrm{Re}(s)$线及等$\mathrm{Im}(s)$线，确定期望主导极点在 z 平面上的范围的方法。

- 频率域要求仍然为低频段、中频段和截止频率等指标，与连续系统设计要求相同。由于 z 变换是一种超越函数，无法获得连续域渐近对数频率特性，因此不可直接利用 z 平面对数频率特性进行设计。而是采用所介绍的 w’ 变换方法进

行离散系统频率域设计。

（2）平面根轨迹及其设计

① 根轨迹分析

连续系统的根轨迹分析，帮助我们从系统开环零极点位置了解增益变化时极点的走向，从而了解系统的稳定性、振荡性等特征，是一种很有效的分析方法。离散系统根轨迹的绘制方法与连续系统基本相同，但应注意掌握以下几点：

- 当采样周期较小时，z 平面极点密集与 z=1 处，在 z=1 附近的根轨迹需要高精度计算才能分辨出来；
- 在确定临界放大系数时应依据根轨迹与单位圆的交点确定.
- 采样周期直接影响离散系统的根轨迹走向，需要选择合理的采样周期等。

② 根轨迹设计

根轨迹设计具体步骤与连续系统类似。但离散系统利用根轨迹方法设计时需注意下述问题：

- 设计时多数采用零极对消方法，对消掉系统原有的收敛较慢的极点，配以收敛更快的极点，这一点与连续系统相同。但如果原极点在 z=1 附近，要精确对消，需要更高字长的计算机或者处理器。任何不精确的对消都可能造成闭环系统不稳定。
- 采用对消设计时，通常在系统中串入适当的超前或滞后环节。因此应清楚了解超前或滞后环节的零极点分布特点。
- 应注意离散系统常常有较多零点，而系统特性还受零点影响。所以在最后分析系统品质时还应注意零点的影响。

（3）w’变换及频率域设计

由于离散系统频率特性的特殊性，离散系统频域设计通常在 w’平面内进行.

① w’变换

w’变换公式类似于 Tustin 变换公式，是一种由 z 平面到 w’平面的变换，其结果是离散系统的频率特性与连续系统的频率特性在中低频段内保持一致。这样设计者可以利用连续系统频率域的设计经验完成设计。注意掌握以下几点：

- 记住由 z 域传递函数变换为 w’域传递函数的变换公式。
- 了解和掌握 w’变换的基本特性，特别应注意 w’变换将 z 平面单位圆映

射为 w’平面虚轴，w’平面特性类似于 s 平面。此外应注意 w’变换后的频率特性低频段与原连续系统相同，由于变换后有附加零点，分子分母同阶，高频段走平，不具备衰减特性。当采样周期较小时，w’域传递函数与连续系统近似相同。

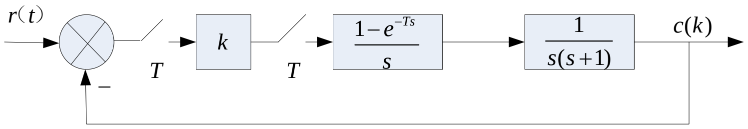
② w’域设计

- 在获得了 w’域传递函数后，通常连续域所用的系统分析与设计方法均可使用。但最常使用的方法是 w’域的频率特性设计方法（即 bode 设计法）。
- w’变换后的设计过程与连续系统一样。但需注意的是：z 域的真实频率值与 w’域的虚拟频率值是非线性关系。当采样频率较高或频率较低时，两者近似相等，否则就应进行相互转换。
- 在 w’域设计得到的是 w’域的控制律，实际实现时需要反变换到 z 传递函数的形式，需要对真实频率来效验是否达到设计要求，并以差分方程形式编程实现。

2、重点与难点问题说明

（1）当将脉冲传递函数变换到 w' 平面后，可以利用连续域系统分析和设计方法进行分析和设计。例如利用各种稳定判据进行稳定性判断。

例如，对图 5-1 所示系统，令 T=1s，试求使系统稳定的 k 值。



解：$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-s}}{s}\cdot\frac{1}{s(s+1)}\right]=\frac{0.3679z+0.2642}{z^2-1.3679z+0.3679}$，

(1)在 z 域依朱利判据，可得如下结果，

$$\Delta(z)=z^2-(1.3679-0.3679k)z+(0.3679+0.2642k)=0$$

依 $|\Delta(0)|<1$，可求得：$-5.2130<k<2.4089$；

依 $\Delta(1)>0$，可求得：$k>0$

依 $\Delta(-1)>0$，可求得：$k<25.9318$

所以最后可得：　　　　　　　　　$0<k<2.4089$

(2)在W'域，依变换公式可得

$$G(w')=G(z)\Big|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}w'}{1-\frac{T}{2}w'}}=\frac{-0.0379(w')^2-0.3863w'+0.9242}{(w')^2+0.9242w'}$$

闭环特征方程为

$$\Delta(w')=(w')^2+0.9242w'+k[-0.0379(w')^2-0.3863w'+0.9242]$$
$$=(1-0.0379k)(w')^2+(0.9242\text{-}0.3863k)w'+0.9242k=0$$

依连续系统稳定条件，对二阶系统充要条件是系数均为正数，即

$(1-0.0379k)>0,$ 所以可得：　$k<26.3852$；

$(0.9242-0.3863k)>0$，所以可得：　$k<2.3924$；

$0.9242k>0$，所以可得　$k>0$。

可见，结果与 z 域的结果一致。当然，对这样问题没有必要变换到W'域进行判断，这里仅是说明结果是一致的。

（2）在某些教材中，提到另一种变换是w 变换。w 变换定义为$w=\dfrac{z+1}{z-1}$。它和本章所讲的w'变换有许多相似特性，但由于该变换没有考虑采样周期的影响，因此缺少一些设计时所希望的特性。如采样周期趋于零时，w 并不趋于 s，并且w 域传递函数在数值上与原连续系统传递函数相差较大，不方便使用，因此工程中应用较少。

（3）有关零极点对消设计的几点说明

① 在选择控制器的零极点时，不应选择控制器的零极点对消被控过程中位于单位圆上及外的零点或极点。如果发生这种对消，其中任何不精确对消，都有可能使系统性能变坏甚至不稳定。

② 若系统为非单位反馈系统，如图 5-2 所示。如果反馈通道传递函数与被控过程传递函数发生零极点对消，使特征方程降阶，这样$G(z)H(z)$的根轨迹图上就不能显示特征方程全部根。但分析表明，$G(z)H(z)$中对消的极点也是闭环的极点，所以为了得到全部闭环极点，除了在$G(z)H(z)$的根轨迹图上得到的极点外，还应加上$G(z)H(z)$中对消的极点，实际上系统并未降阶。

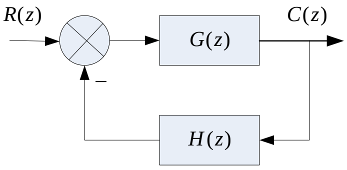


图 5-2 非单位反馈系统

但应注意，位于正向通道的控制器传递函数与被控过程传递函数发生零极对消时，被对消的极点将不是闭环系统传递函数极点，系统将要降阶。

③ 在根轨迹设计时，曾提到控制器设计时常常使用零极对消法，即控制器传递函数取被控对象传递函数的倒数，并附加所期望的零极点。因此控制器的一部分零极点对消了被控对象的零极点。看来这种方法似乎是解决设计问题的最简单方法，但应注意，这种设计方法对广泛一类的设计问题并不能获得满意结果。主要的限制是，利用这种方法所获得控制器常常比较复杂，难于实现，甚至是物理不可实现的。另一个限制是，在零极点对消时，如不能精确对消，常常会使系统性能变坏，甚至不稳定。因此在使用对消法设计时，必须要慎重和细心。