2007－2008 学年 第一学期期末

北京航空航天大学

# 考试统一用答题册

## 一、单项选择题（18 分）

1. 一种零件的加工由两道相互独立的工序组成，第一道工序的废品率为 $p$，第二道工序的废品率为 $q$，则该零件加工的成品率为（　　）.

（A）$1-p-q$；　（B）$1-pq$；　（C）$1-p-q+pq$；　（D）$(1-p)+(1-q)$.

2. 设三个寿命分别为 $X,Y,Z$ 的元件并联成一个系统，则事件“系统的寿命超过 T”可表示为（　　）.

（A）$X+Y+Z>T$；　（B）$XYZ>T$；

（C）$\min\{X,Y,Z\}>T$；　（D）$\max\{X,Y,Z\}>T$.

3. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为两个随机变量的分布函数，令 $F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$，则下列各组数中能使 $F(x)$ 为某随机变量的分布函数的有（　　）.

（A）$a=\frac{2}{3},\quad b=\frac{2}{3}$；　（B）$a=\frac{3}{5},\quad b=\frac{2}{5}$；

（C）$a=\frac{3}{2},\quad b=\frac{1}{2}$；　（D）$a=\frac{3}{4},\quad b=\frac{2}{5}$.

4. 设随机变量 $X$ 的分布律为 $P\{X=k\}=k/15,\ k=1,2,3,4,5$。则 $P\{0.5<X<2.5\}$ 的值是（　　）.

（A）0.6；　（B）0.4；　（C）0.2；　（D）0.8.

5. 设随机变量 $X$ 的分布律为：

| $X$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.7 | 0.3 |

则 $D(-2X+3)=$（　　）.

（A）0.21；　（B）3.21；　（C）0.84；　（D）3.36.

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 $X$ 的样本，则 $D(X)=\sigma^2$ 的无偏估计为（　）.

(A) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；　　(B) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-\overline{X})^2$；

(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；　　(D) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-\overline{X})^2$.

## 二、填空题（18 分）

1. 已知 $P(A)=p, P(B)=q, P(A+B)=p+q$，则 $P(\bar{A}+B)=$ ______________。

2. 已知二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布函数为 $F(x,y)$，试用其联合分布函数表示概率 $P\{a<X\le b, a<Y\le b\}=$ ________________________________。

3. 设随机变量 $X\sim U(0,2)$，则随机变量 $Y=X^2$ 在区间 $(0,4)$ 内的概率密度函数为 $f_Y(y)=$ ______________________________。

4. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，则数学期望 $E(e^{2X})=$ ________________。

5. 设随机变量 $X$ 服从参数为 2 的指数分布，由契比雪夫不等式得 $P\{\left|X-\frac{1}{2}\right|\ge 1\}\le$ ______________。

6. 设 $X$ 和 $Y$ 是相互独立的两个随机变量，且 $X\sim\Pi(5)$，$Y\sim N(1,4)$，则 $E(XY)=$ _________，$D(XY)=$ ________。

**三、**（7 分）设 $(X,Y)$ 的分布律为

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **1** | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{12}$ |
| **2** | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 |

$Z=\max(X,Y)$,求 $Z$ 的分布律及分布函数。

**四、**（15 分）设随机变量（$X,Y$）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & 0\le x\le 1, 0\le y\le x,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

求 1. $X$ 与 $Y$ 的边缘概率密度函数，并判断 $X$ 与 $Y$ 是否独立；

2. $P\{X+2Y>1\}$；

3. $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$。

**五、**（12 分）设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$\theta>-1$ 为未知参数. 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是取自总体 $X$ 的一个样本。求：

1. 未知参数 $\theta$ 的矩估计；

2. 未知参数 $\theta$ 的极大似然估计。

**六、**（10 分）在正常情况下，某种产品的某一性能指标 $X$ 服从正态分布 $N(31,\sigma^2)$，现从某一天生产的产品中抽取 9 件，其性能指标的样本均值 $\bar{x}=30$，样本方差 $s^2=0.81$。给定检验水平 $\alpha=0.05$，从该性能指标抽样结果检验这一天的生产是否正常。（$z_{0.95}=1.645$，$z_{0.975}=1.960$，$t_{0.95}(8)=1.8595$，$t_{0.975}(8)=2.3060$，$t_{0.95}(9)=1.8331$，$t_{0.975}(9)=2.2622$）

**七、**（满分 8 分）**（此题学过 1-9 章和 11-13 章的学生做，仅学过 1 至 9 章的学生不做）**

设 $Z(t)=X\sin\omega t+Y\cos\omega t$，其中 $\omega$ 是常数，$X$ 与 $Y$ 是相互独立的随机变量，

且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim U[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，试求：

（1）$EX^2$，$EY^2$；　　（2）$E[Z(t)]$，$E[Z(t)Z(t+\tau)]$，$E[Z^2(t)]$；

（3）问 $Z(t)$ 是否为广义平稳过程？

**[七]、**（8 分）**（此题讲 1 至 9 章学生做，讲 1 至 13 章学生不做）**

某工厂有四种不同类型的机床，型号为 1，2，3，4，其台数之比为 $9:3:2:1$，它们在一定时间内需要修理的概率之比为 $1:2:3:1$，当有一台机床需要修理时，问这台机床恰是型号为 1 的机床的概率是多少。

**八、（满分 12 分）（此题学过 1 至 9 章和 11-13 章的学生作，仅学过 1 至 9 章的学生不做）**

四个位置：1, 2, 3, 4 在圆周上逆时针排列. 粒子在这四个位置上随机游动. 粒子从任何一个位置, 以概率 $\frac{2}{3}$ 逆时针游动到相邻位置；以概率 $\frac{1}{3}$ 顺时针游动到相邻位置；以 $X(n)=j$ 表示时刻 $n$ 粒子处在位置 $j(j=1,2,3,4)$，

试作：(1) 写出齐次马尔可夫链 $\{X(n), n=1,2,\cdots\}$ 的状态空间；

(2) 求齐次马尔可夫链 $\{X(n), n=1,2,\cdots\}$ 的一步转移概率矩阵；

（3） 求两步转移概率矩阵 $P^{(2)}$； (4) 求该齐次马尔可夫链的平稳分布.

**[八]、**（12 分）**（此题讲 1 至 9 章学生做，讲 1 至 13 章学生不做）**

设总体 $X \sim N(0, 3^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 $X$ 一个样本，$\bar{X}$ 为样本均值。设

$$Z_i = X_i - \bar{X},\ i = 1,2,\cdots,n$$

求：1. $D(Z_i)$；2. $E(Z_1 Z_2)$.

# 答案：

## 一、单项选择题（18 分）

1.C。 2.D。 3.B。 4.C。 5.D。 6.A。

## 二、填空题（18 分）

1. $1-p$。2. $F(b,b)+F(a,a)-F(a,b)-F(b,a)$。3. $\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$。4. $(e^2 p+1-q)^n$。5. $\dfrac{1}{4}$。

6．5，125。

## 三、（7 分）

| Z | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | 1/12 | 1/2 | 5/12 |

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0 & z<1 \\ 1/12 & 1\le z<2 \\ 7/12 & 2\le z<3 \\ 1 & 3\le z \end{cases}$$

**四**、（15 分）

1. $f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & (0\le x\le 1),\\ 0 & (\text{其　它}),\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}3(1-y^2)/2 & (0\le y\le 1),\\ 0 & (\text{其　它}).\end{cases}$　　　$X$ 与 $Y$ 不独立．

2. $P(X+2Y>1)=\int_{1/3}^{1}dx\int_{(1-x)/2}^{x}3xdy\ =\dfrac{3}{2}\int\limits_{1/3}^{1}(3x^2-x)dx=7/9$

3. $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$　　1 **分** $z\le 0$或$z\ge 2$　$f_Z(z)=0$

$0\le z<1$　$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}3xdx=\dfrac{9}{8}z^2$　，　$1\le z<2$　$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}3xdx=\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{z^2}{4})$

**五**、（12 分）

1．解　因为 $EX=\int\limits_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$

即 $\theta+1=(\theta+2)EX$　　得　$\theta=\dfrac{2EX-1}{1-EX}$

得矩估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{x}-1}{1-\overline{x}}$

2．解：似然函数

$$\boldsymbol{L(x_1,\cdots x_n;\theta)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}},\ \ \boldsymbol{0<x_i<1}$$

$\boldsymbol{\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，　　　　$\boldsymbol{\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

令 $\boldsymbol{\dfrac{d\ln L}{d\theta}=0}$，得到极大似然估计 $\boldsymbol{\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1}$

**六**、（10 分）

解：检验：$H_0$：$\mu=\mu_0=31$　　$H_1$：$\mu\ne\mu_0$

若 $\boldsymbol{H_0}$ 成立，则，$\boldsymbol{T=\dfrac{\mu-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)}$

$|T|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|=10/3$ **2 分**， $t_{0.975}(8)=2.3060$

$|T|>t_{0.975}(8)$ 拒绝 $H_0$，生产不正常。

**七**、（8 分）

解.（1）由题设条件得 $EX=0, DX=1, EX^2=1$；

$EY=0, EY^2=1, DY=1$；

$E[XY]=EX\cdot EY=0$ ；…………………………………………………………2 分

（2） $E[Z(t)]=\sin\omega t\times EX+\cos\omega t\times EY=0$，……………………………………1 分

$E[Z(t)Z(t+\tau)]$

$=\sin\omega t\cdot\sin\omega(t+\tau)\times EX^2+[\sin\omega t\cdot\cos\omega(t+\tau)+\cos\omega t\cdot\sin\omega(t+\tau)]E[XY]$

$+\cos\omega t\cdot\cos\omega(t+\tau)\times EY^2$

$=\sin\omega t\cdot\sin\omega(t+\tau)+\cos\omega t\cdot\cos\omega(t+\tau)=\cos\omega\tau$ ，……………………………2 分

$E[Z^2(t)]=1$，……………………………………………………………………1 分

（3）因为 $E[Z(t)]=0$， $E[Z^2(t)]=1$， $E[Z(t)Z(t+\tau)]=\cos\omega\tau$，（不依赖于 $t$），

所以 $Z(t)$ 是广义平稳过程. ………………………………………………………2 分

**[七]**、（8 分）

解：设 $A_i$ 表示“任取一台机床是型号为 $i$ 的机床”，

$B$ 表示“任取一台机床，它需要修理”

则由 Bayes 公式，得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$=\frac{\frac{9}{15}\times\frac{1}{7}k}{\frac{9}{15}\times\frac{1}{7}k+\frac{3}{15}\times\frac{2}{7}k+\frac{2}{15}\times\frac{3}{7}k+\frac{1}{15}\times\frac{1}{7}k}=\frac{9}{22}$$

## 八、（12 分）

解. (1) 依题意，状态空间 $S=\{1,2,3,4\}$，……………………………………3 分

（2）转移概率矩阵 $P=(p_{ij})_{4\times4}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$，……………………3 分

（3）
$$P^{(2)}=P^2=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$；……………………………………3 分

(4) $\begin{cases}(p_1,p_2,p_3,p_4)=(p_1,p_2,p_3,p_4)P \\ p_1+p_2+p_3+p_4=1\end{cases}$，

$$(p_1,p_2,p_3,p_4)=(p_1,p_2,p_3,p_4)\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_1 = p_2 \frac{1}{3} + p_4 \frac{2}{3},$$

$$p_2 = p_1 \frac{2}{3} + p_3 \frac{1}{3},$$

$$p_3 = p_2 \frac{2}{3} + p_4 \frac{1}{3},$$

$$p_4 = p_1 \frac{1}{3} + p_3 \frac{2}{3} \quad ,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \text{。}$$

解之得 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$ .

故平稳分布为$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. ……………………………………3 分

**[八]、**（12 分）

1. $D(Z_i) = D(\frac{n-1}{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{k \neq i} X_k) = \frac{9(n-1)}{n}$

2. $E(Z_1 Z_2) = E[X_1 X_2 - X_1 \bar{X} - X_2 \bar{X} + (\bar{X})^2]$

$$= -2 \times \frac{1}{n} E(X^2) + E(\bar{X}^2)$$

$$= -\frac{9}{n}$$