# 第六章 图

郑征

zhengz@buaa.edu.cn

软件与控制研究室

# 第六章 图

## 第3讲图的矩阵表示

# 前言

- 图：
  - 计算机如何理解；
  - 算法如何运算；
  - 。。。

# 第3讲 图的矩阵表示

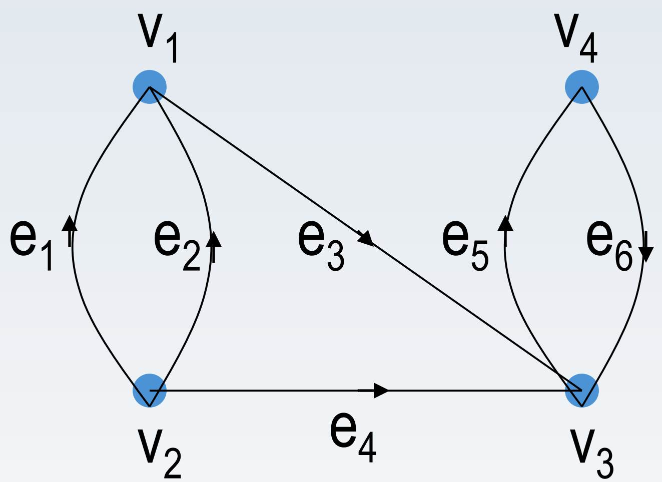
- 1. 关联矩阵M(D), M(G)
- 2. 邻接矩阵A(D), 相邻矩阵A(G)
- 3. 用A的幂求不同长度通路(回路)总数
- 4. 可达矩阵P(D), 连通矩阵P(G)
- 5. 单源最短路径问题, Dijkstra算法

# 有向图关联矩阵

- 设D=<V,E>是无环有向图,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,
  $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$;
- 关联矩阵(incidence matrix): $M(D)=[m_{ij}]_{n\times m}$,

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{是}e_j\text{的起点}\\0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\-1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

# 有向图关联矩阵(例)




$$
M(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

# 有向图关联矩阵(性质)

- 每列和为零: $\Sigma^{n}_{i=1}m_{ij}=0$
- 每行**绝对值**和为d(v): $d(v_i)=\Sigma^{m}_{j=1}m_{ij}$, 其中1的个数为$d^{+}(v)$, -1的个数为$d^{-}(v)$
- 握手定理: $\Sigma^{n}_{i=1}\Sigma^{m}_{j=1}m_{ij}=0$
- 平行边: 相同两列

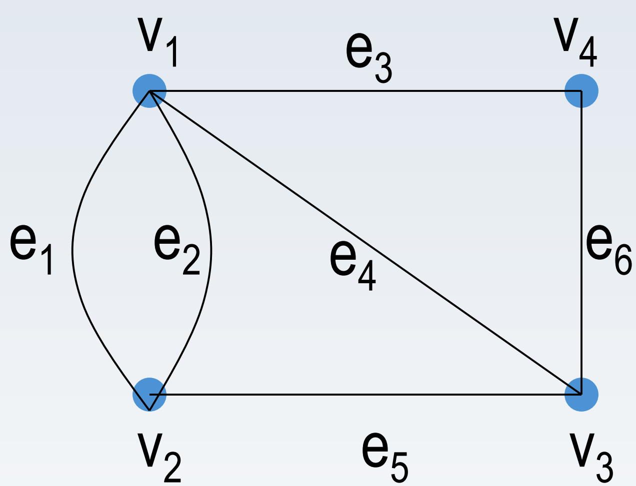
$$M(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

# 无向图关联矩阵

- 设$G=<V,E>$是无环无向图,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
- 关联矩阵(incidence matrix): $M(G)=[m_{ij}]_{n\times m}$,

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}e_j\text{关联}\\ 0, & v_i\text{不与}e_j\text{关联}\end{cases}$$

# 无向图关联矩阵(例)




$$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

# 无向图关联矩阵(性质)

因为一条边有两个结点

- 每列和为2: $\Sigma^n_{i=1} m_{ij}=2$ ( $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^m_{j=1} m_{ij}=2m$ )
- 每行和为d(v): $d(v_i)=\Sigma^m_{j=1} m_{ij}$
- 每行所有1对应的边构成断集（比较：割集）
- 平行边: 相同两列
- 伪对角阵: 对角块是连通分支

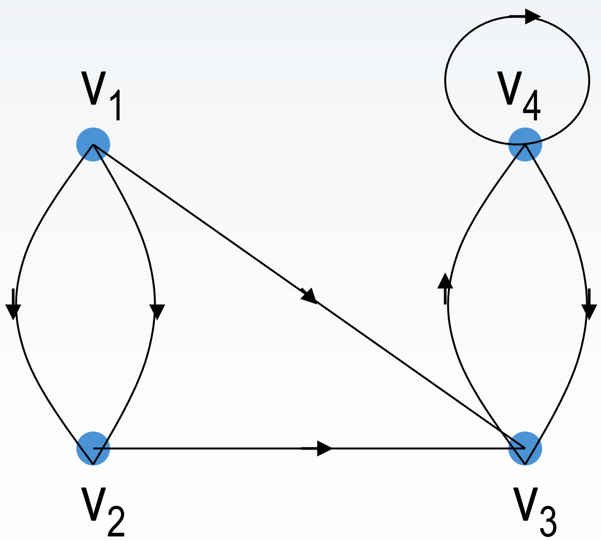
$$M(G)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M(G)=\begin{bmatrix} M(G_1) & & & \\ & M(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M(G_k) \end{bmatrix}$$

# 有向图邻接矩阵

- 设D=<V,E>是有向图,V={$v_1$,$v_2$,…,$v_n$}
- 邻接矩阵(adjacence matrix):

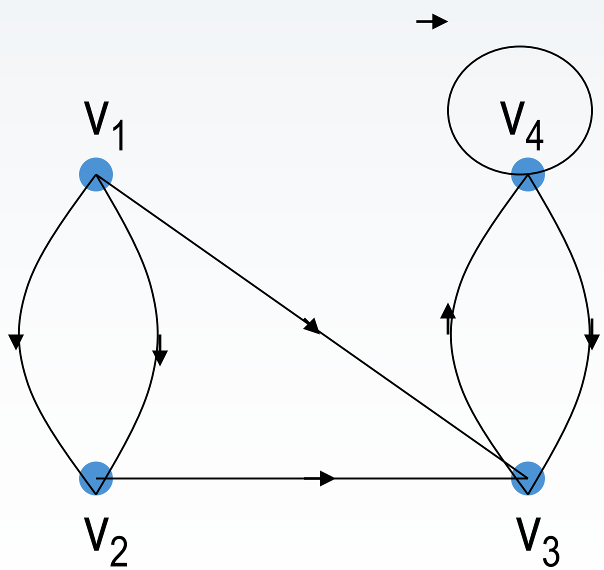
  $A(D)=[a_{ij}]_{n\times n}$，$a_{ij}$ = 从$v_i$到$v_j$的边数




$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

# 有向图邻接矩阵(性质)

- 每行和为出度: $\Sigma^{n}_{j=1}a_{ij}=d^{+}(v_i)$
- 每列和为入度: $\Sigma^{n}_{i=1}a_{ij}=d^{-}(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^{n}_{i=1}\Sigma^{n}_{j=1}a_{ij}=\Sigma^{n}_{i=1}d^{-}(v_j)=m$
- 环个数: $\Sigma^{n}_{i=1}a_{ii}$




$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

# 邻接矩阵与通路数

矩阵相乘？？

- 设$A(D)=A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$, $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- 定理4: $a^{(r)}_{ij}$=从$v_i$到$v_j$长度为r的通路总数∧

  $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a^{(r)}_{ij}$=长度为r的通路总数 ∧

  $\Sigma^n_{i=1}a^{(r)}_{ii}$=长度为r的回路总数
- 推论: $b^{(r)}_{ij}$=从$v_i$到$v_j$长度≤r的通路总数∧

  $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}b^{(r)}_{ij}$=长度≤r的通路总数 ∧

  $\Sigma^n_{i=1}b^{(r)}_{ii}$=长度≤r的回路总数. #

# 定理4(证明)

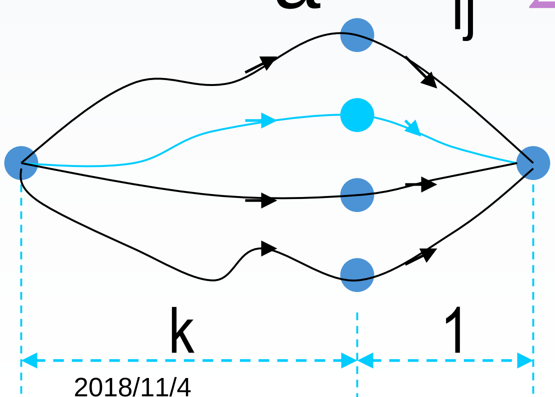
自学

- 证明: (归纳法) (1)r=1: $a^{(1)}_{ij}=a_{ij}$, 结论根据定义显然.

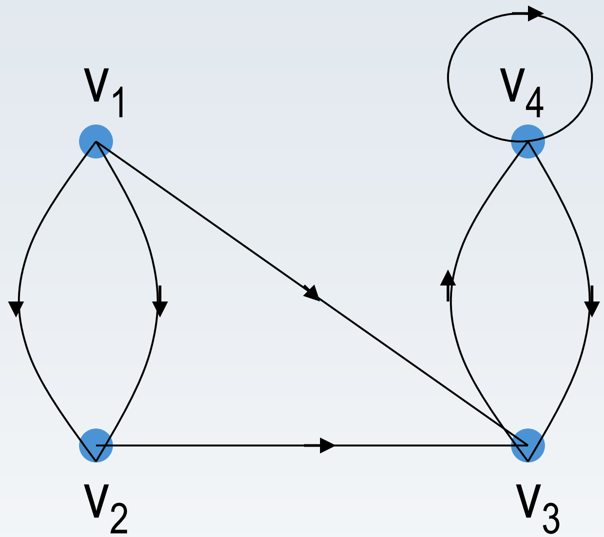
  (2) 设r≤k时结论成立, 当r=k+1时,

  $a^{(k)}_{it} \bullet a^{(1)}_{tj}$=从$v_i$到$v_j$最后经过$v_t$的长度为k+1的通路总数,

  $a^{(k+1)}_{ij}=\sum^{n}_{t=1} a^{(k)}_{it} \bullet a^{(1)}_{tj}$=从$v_i$到$v_j$的长度为k+1的通路总数. #



# 用邻接矩阵求通路数(例)




$$A(D) = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

# 用邻接矩阵求通路数(例,续)

- $v_2$到$v_4$长度为3和4的通路数: 1, 2
- $v_2$到$v_4$长度≤4的通路数: 4
- $v_4$到$v_4$长度为4的回路数: 5
- $v_4$到$v_4$长度≤4的回路数: 11

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&\boxed{1}\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&\boxed{2}\\0&0&2&3\\0&0&3&\boxed{5}\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\begin{bmatrix}0&2&7&8\\0&0&3&\boxed{4}\\0&0&4&7\\0&0&7&\boxed{11}\end{bmatrix}$$

# 用邻接矩阵求通路数(例,续)

- 长度=4的通路(不含回路)数: 16
- 长度≤4的通路和回路数: 53, 15

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&\boxed{0}&\boxed{3}&\boxed{4}\\\boxed{0}&0&\boxed{1}&\boxed{2}\\\boxed{0}&\boxed{0}&2&\boxed{3}\\\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{3}&5\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\boxed{\begin{bmatrix}\boxed{0}&2&7&8\\0&\boxed{0}&3&4\\0&0&\boxed{4}&7\\0&0&7&\boxed{11}\end{bmatrix}}$$

# 可达矩阵

- 设D=<V,E>是有向图,V={$v_1$,$v_2$,…,$v_n$},
- 可达矩阵: P(D)=$[p_{ij}]_{n\times n}$,

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & 从v_i可达v_j \\ 0, & 从v_i不可达v_j \end{cases}$$

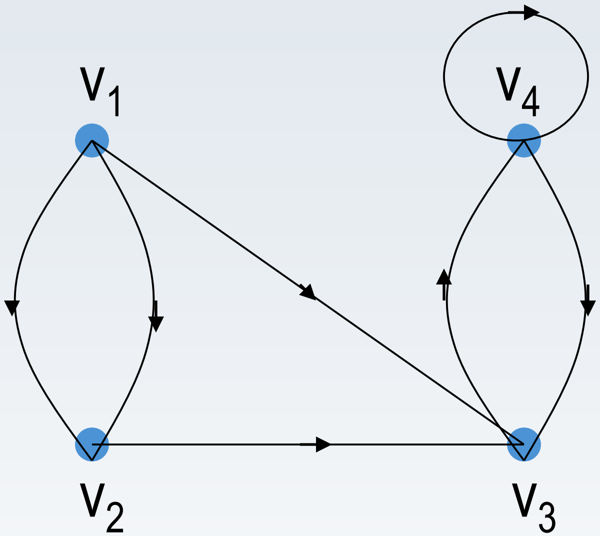
# 可达矩阵(性质)

- 主对角线元素都是1: $\forall v_i \in V$, 从$v_i$可达$v_i$
- 强连通图: 所有元素都是1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的可达矩阵
- $\forall i \neq j,\ p_{ij}=1 \Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij} > 0$

邻接矩阵幂次的和

$$P(D) = \begin{bmatrix} P(D_1) & & & \\ & P(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(D_k) \end{bmatrix}$$

# 可达矩阵(例)




$$A(D)=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

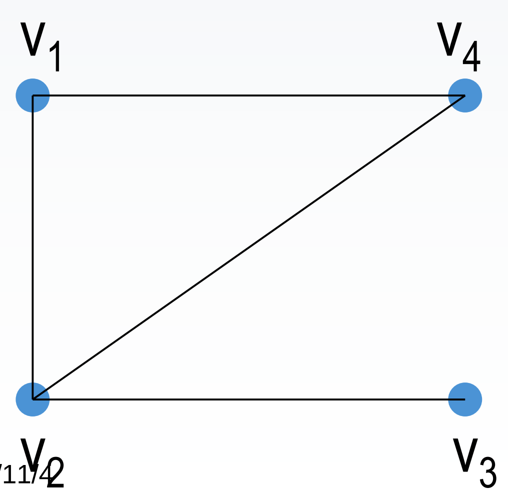
$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

# 无向图相邻矩阵

- 设$G=<V,E>$是无向简单图,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$
- 相邻矩阵(adjacence matrix): $A(G)=[a_{ij}]_{n\times n}$,
  $a_{ii}=0$,

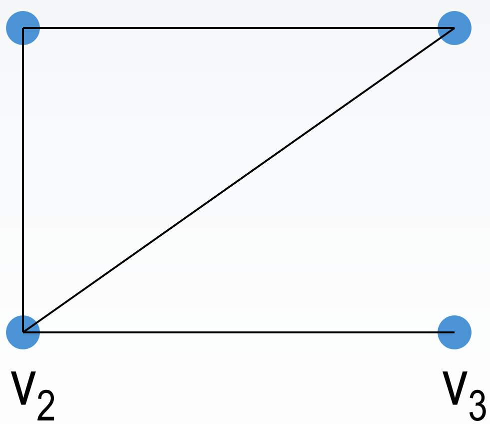
$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}v_j\text{相邻},i\neq j\\ 0, & v_i\text{与}v_j\text{不相邻}\end{cases}$$




$$A(G)=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

# 无向图相邻矩阵(性质)

- A(G)对称: $a_{ij}=a_{ji}$
- 每行(列)和为顶点度: $\Sigma^n_{i=1}a_{ij}=d(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=\Sigma^n_{i=1}d(v_j)=2m$




$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

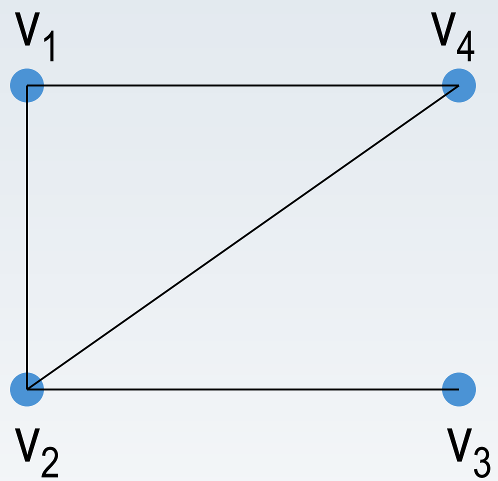
# 相邻矩阵与通路数

- 设$A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$,

  $B_r=A+A^2+\ldots+A^r= [b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- 定理5: $a^{(r)}_{ij}$=从$v_i$到$v_j$长度为r的通路总数∧

  $\Sigma^n_{i=1}a^{(r)}_{ii}$=长度为r的回路总数. #
- 推论1: $a^{(2)}_{ii}=d(v_i)$. #
- 推论2: G连通⇒距离$d(v_i,v_j)=\min\{r|a^{(r)}_{ij}\neq 0\}$.

# 用相邻矩阵求通路数(例)




$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

# 用相邻矩阵求通路数(例,续)

- $v_1$到$v_2$长度为4的通路数: 6

14142,14242,14232,12412,14212,12142

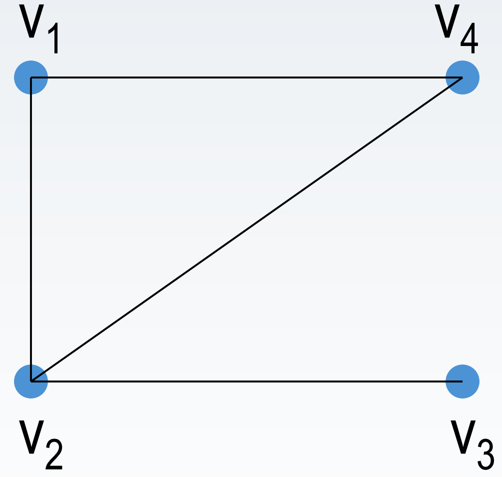
- $v_1$到$v_3$长度为4的通路数: 4

12423,12323,14123,12123

- $v_1$到$v_1$长度为4的回路数: 7

14141,14241,14121,12121,

12421,12321,12141,




$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} \boxed{7} & 6 & 4 & 6 \\ \boxed{6} & 11 & 2 & 6 \\ \boxed{4} & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

# 连通矩阵

- 设G=<V,E>是无向简单图,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,
- 连通矩阵: $P(G)=[p_{ij}]_{n\times n}$,

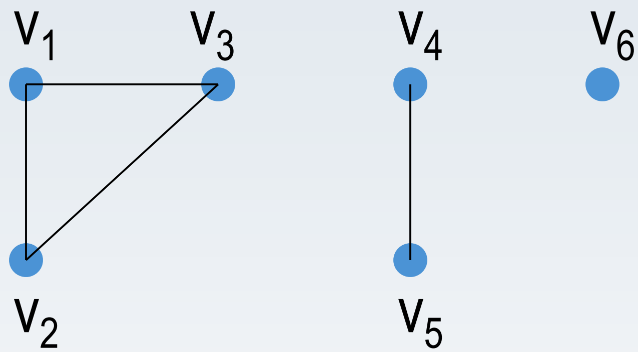
$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{连通}\\ 0, & \text{若}v_i\text{与}v_j\text{不连通}\end{cases}$$

# 连通矩阵(性质)

- 主对角线元素都是1: $\forall v_i \in V$, $v_i$与$v_i$连通
- 连通图: 所有元素都是1
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的连通矩阵
- 设$B_r = A + A^2 + \ldots + A^r = [b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$, 则$\forall i \neq j$, $p_{ij} = 1 \Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij} > 0$

$$P(G) = \begin{bmatrix} P(G_1) & & & \\ & P(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(G_k) \end{bmatrix}$$

# 连通矩阵(例)




$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 单源最短路径问题

- 单源最短路径 (single-source shortest paths)问题: 给定带权图G(有向或无向)和顶点s, 求从s到其余顶点的最短路径
- 所有顶点之间最短路径(all-pairs shortest paths)问题: 给定带权图G(有向或无向), 求G所有顶点对之间的最短路径
- 带权图路径长度: $W(P)=\Sigma_{e\in E(P)}W(e)$

# Dijkstra算法

- 输入: 带权图G=<V,E,W>, W非负, $s\in V$
- 输出: 以s为根的最短路径树
- 算法:

d(s)=0;

pred(s)=0;

$d(j)=\infty$ for all $j\in V-\{s\}$;

LIST=V;

# Dijkstra算法(续)

while LIST$\neq\emptyset$

{Vertex selection}

let i be a vertex for wihch d(i)=$\min_{j\in LIST}d(j)$;

LIST=LIST-{i};

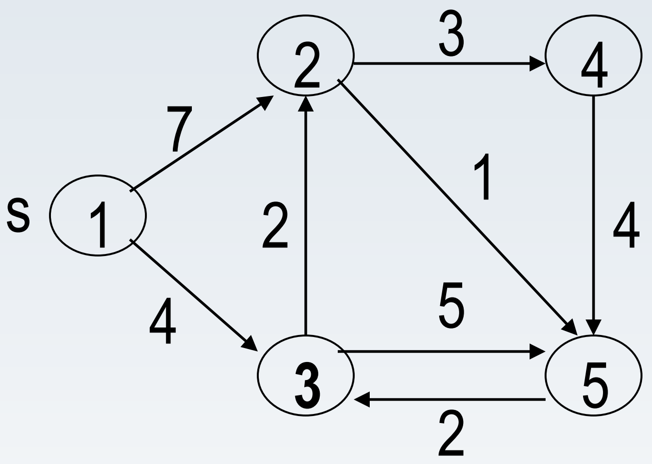
{Distance update}

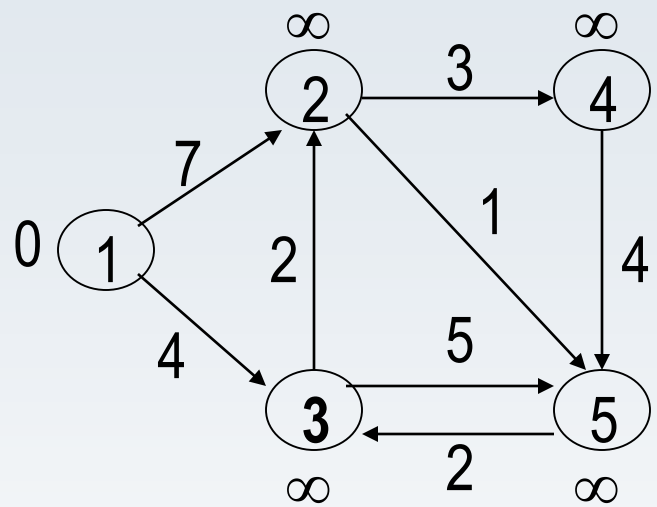
for each $(i,j)\in E$

if d(j)>d(i)+W(i,j) then

d(j)=d(i)+W(i,j); pred(j)=i;

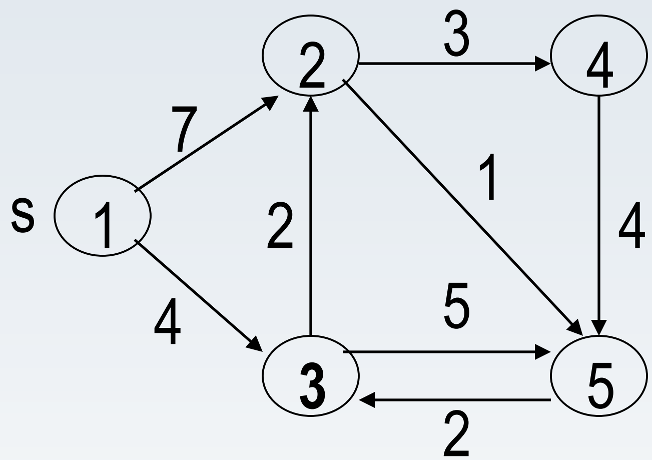
# Dijkstra算法(例1-1)

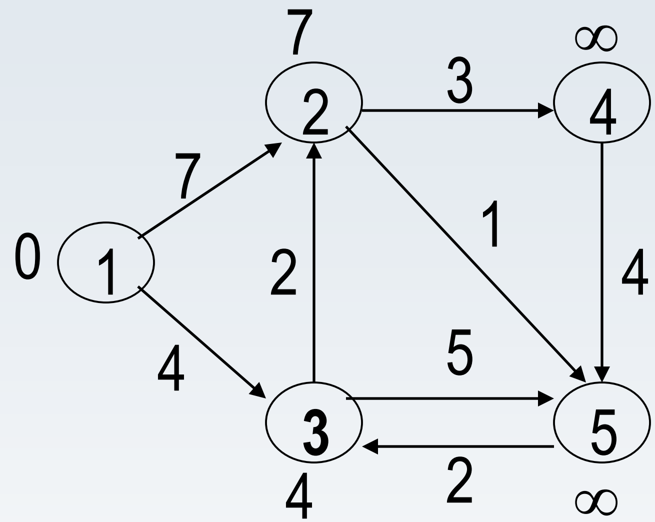



| 遍 | 标号 | LIST | 选 | 更新 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,∞,∞,∞,∞ | 1,2,3,4,5 | 1 | d(2)=7,d(3)=4 |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |

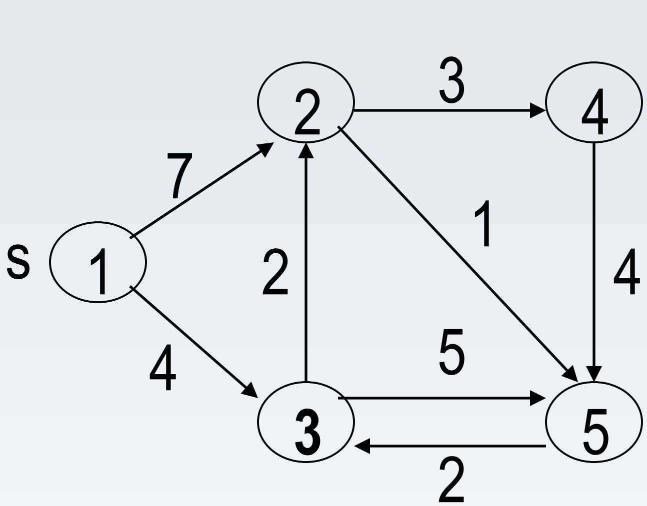
# Dijkstra算法(例1-2)

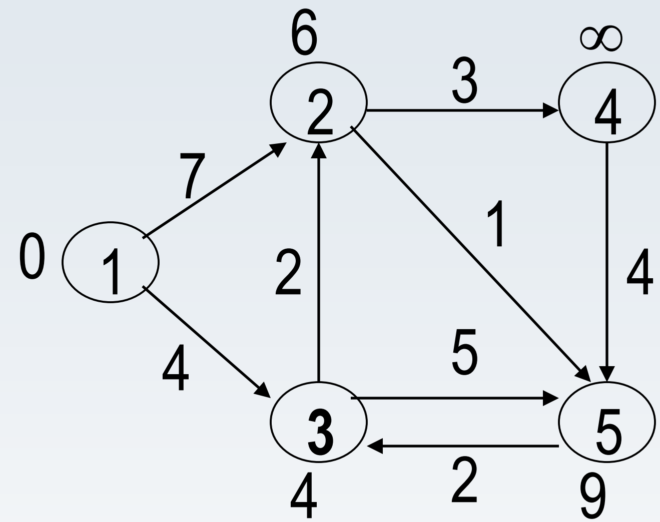



| 遍 | 标号 | LIST | 选 | 更新 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,∞,∞,∞,∞ | 1,2,3,4,5 | 1 | d(2)=7,d(3)=4 |
| 2 | 0,7,4,∞,∞ | 2,3,4,5 | 3 | d(2)=min{7,4+2}=6, d(5)=9 |

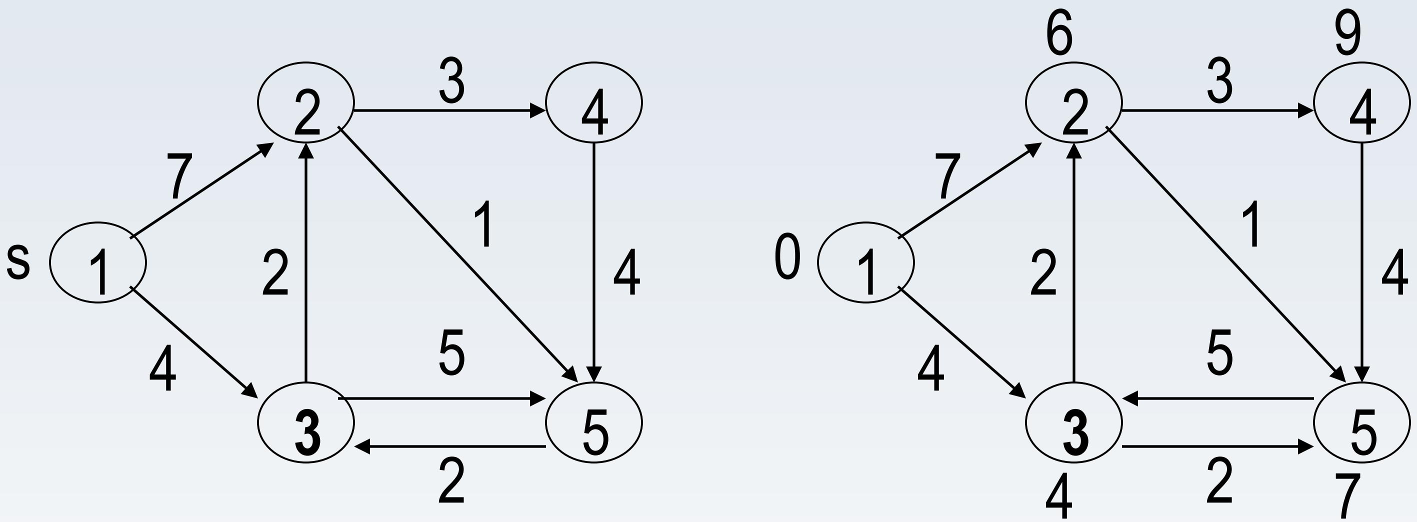
# Dijkstra算法(例1-3)




| 遍 | 标号 | LIST | 选 | 更新 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,7,4,∞,∞ | 2,3,4,5 | 3 | d(2)=min{7,4+2}=6, d(5)=9 |
| 3 | 0,6,4,∞,9 | 2,4,5 | 2 | d(4)=9, d(5)=min{9,6+1}=7 |

# Dijkstra算法(例1-4,5)

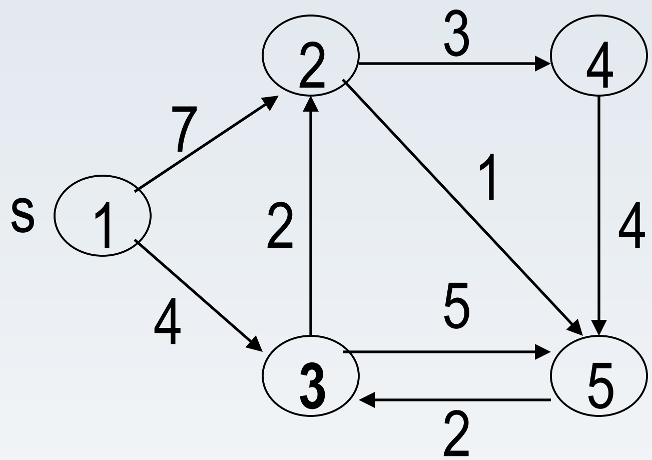


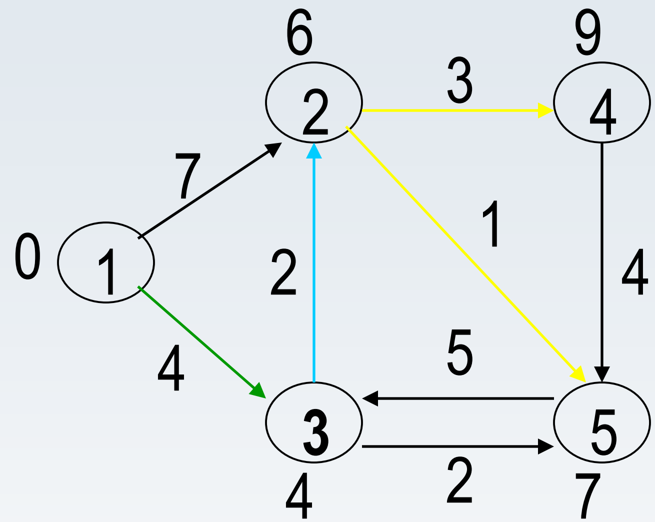

| 遍 | 标号 | LIST | 选 | 更新 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,6,4,∞,9 | 2,4,5 | 2 | d(4)=9,<br>d(5)=min{9,6+1}=7 |
| 4 | 0,6,4,9,7 | 4,5 | 5 | d(3)=min{4,7+2}=4 |
| 5 | 0,6,4,9,7 | 4 | 4 | d(5)=min{7,9+4}=7 |

# Dijkstra算法(例1-1~5)

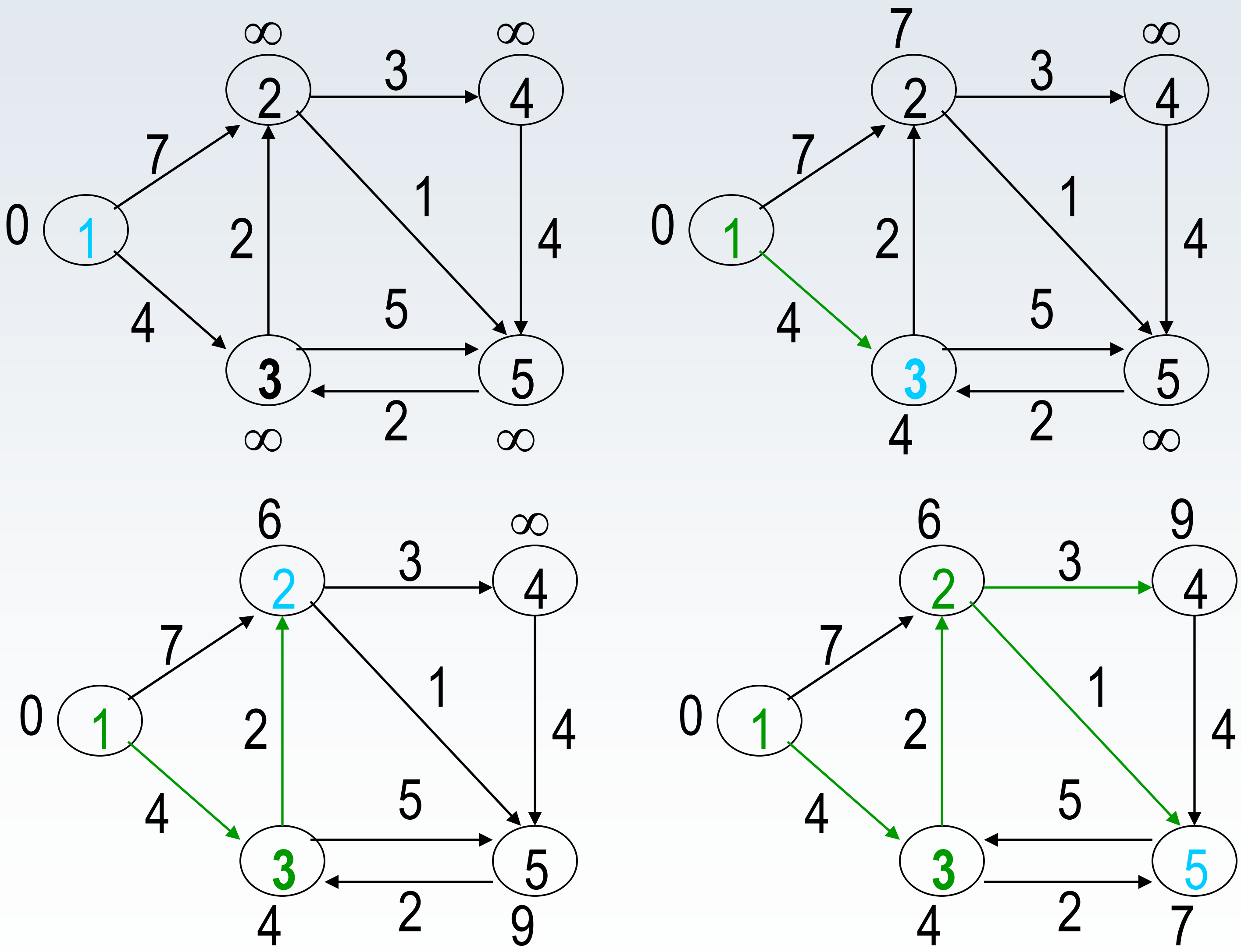
| 遍 | 标号 | LIST | 选 | 更新 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,∞,∞,∞,∞ | 1,2,3,4,5 | 1 | d(2)=7,d(3)=4 |
| 2 | 0,7,4,∞,∞ | 2,3,4,5 | 3 | d(2)=min{7,4+2}=6,<br>d(4)=9, |
| 3 | 0,6,4,∞,9 | 2,4,5 | 2 | d(4)=9,<br>d(5)=min{9,6+1}=7 |
| 4 | 0,6,4,9,7 | 4,5 | 5 | d(3)=min{4,7+2}=4 |
| 5 | 0,6,4,9,7 | 4 | 4 | d(5)=min{7,9+4}=7 |

# Dijkstra算法(例1-结果)



# Dijkstra算法(例1)



# 总结

- 关联矩阵M(D), M(G)
- 邻接矩阵A(D), 相邻矩阵A(G)
- 用A的幂求不同长度通路(回路)总数
- 可达矩阵P(D), 连通矩阵P(G)
- 单源最短路径问题, Dijkstra算法