基于 Lyapunov 函数的移动机器人非线性控制器设计

Lyapuno 方法不仅可用于非线性系统的分析，还可以直接用于控制器的综合设计。本节以移动机器人的非线性控制器设计为例，说明如何通过构造适当的 Lyapunov 函数得到控制律达到控制目标。

1. 移动小车的匀速直线跟踪控制

考虑轮式移动机器人 $\dot{x}=v\cos\theta, \dot{y}=v\sin\theta, \dot{\theta}=r$ 的直

线路径跟踪控制器设计问题。控制目标为：设计控制器 $r(\cdot)$ 使得系统 $\dot{y}=v\sin\theta,\dot{\theta}=r$ 的原点渐近稳定。其中假定线速度 v 为给定的非零常数，不失一般性取 v =1，则控制目标为设计控制律 $r(\cdot)$ 使得非线性系统 $\dot{y}=\sin\theta,\dot{\theta}=r$ 的原点渐近稳定。

（1） 近似线性化方法

对方程 $\dot{y}=\sin\theta,\dot{\theta}=r$ 在原点近似线性化得到：$\dot{y}=\theta,\dot{\theta}=r$，设计线性控制律

$$r=-k_1 y-k_2\theta \quad (k_1>0, k_2>0)$$

可以保证近似线性化系统的原点渐近稳定，因而也可以保证原非线性系统 $\dot{y}=\sin\theta, \dot{\theta}=r$ 原点的局部渐近稳定。

吸引区估计:

虽然以上控制律的设计仅利用了近似线性化的相关结果（该结果也是通过构造 Lyapunov 函数来证明），不需要显式的构造 Lyapunov 函数，但是为了估计闭环系统原点的吸引区，仍需要求出系统的 Lyapunov 函数。

闭环系统为:

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= \theta + (\sin\theta - \theta) = \theta + g(\theta), \\
\dot{\theta} &= -k_1 y - k_2 \theta
\end{aligned}
$$

写成向量形式有：

$$\dot{X} = AX + Bg(\theta) \tag{1.1}$$

其中 $X = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, g(\theta) = \sin\theta - \theta$，为

θ的二阶无穷小量。

因 A 为 Hurwitz 矩阵，所以 $PA + A^T P = -I$ 有对称正定

解 P。以 $V(X)=X^{T}PX$ 作为整个非线性系统（1.1）的候选 Lyapunov 函数，显然该函数全局正定且径向无界，其沿系统（1.1）的导数为：

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(X) &= (AX+Bg)^{T}PX + X^{T}P(AX+Bg) \\
&= X^{T}(PA+A^{T}P)X + 2X^{T}PBg \\
&\le -\|X\|_2^2 + 2\|PB\|_2\|X\|_2|g(\theta)|
\end{aligned}
$$

因 $|g(\theta)|=|\sin\theta-\theta|\le\theta^2\le\|X\|_2^2$ **（请同学们思考是否有更精准的估计？）**，所以

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(X) &\le -\|X\|_2^2 + 2\|PB\|_2 \|X\|_2^3 \\
&= -\|X\|_2^2 \left(1 - 2\|PB\|_2 \|X\|_2\right) \\
&< 0, if \quad \|X\|_2 < \frac{1}{2\|PB\|_2}
\end{aligned}
$$

由于$\lambda_{\min}(P)\|X\|_2^2 \le V(X) = X^T PX \le \lambda_{\max}(P)\|X\|_2^2$，因此当$V(X) \le c < \lambda_{\min}(P)\left(\frac{1}{2\|PB\|_2}\right)^2$时，$\dot{V}(X) < 0$，从而系统（1.1）的原点渐近稳定，且吸引区的一个估计为包含原点的不变集：$\Omega_c = \left\{X : V(X) \le c < \frac{\lambda_{\min}(P)}{2\|PB\|_2^2}\right\}$，因此可以说所

设计的近似线性化控制律实现了原点的区域稳定。**（请思考是否半全局稳定？）**。

（2） 非线性控制器

基于不同的 Lyapunov 函数，可以设计不同的控制律使其导数负定（或者至少半负定），从而保证闭环系统的原点渐近稳定（或者至少稳定）。在以下的讨论中，我们分别选取三种不同的 Lyapunov 函数，相应的可以得到三种不同的非线性控制律。其中第一种控制律可以实现区域

（渐近）稳定，第二种控制律可实现全局（渐近）稳定，第三种控制律可以实现全局渐近稳定、且可保证 Lyapunov 函数的导数负定。

第一种控制律：

$$
\begin{aligned}
&L_1 = (1-\cos\theta) + 0.5k_1 y^2 \quad (k_1 > 0) \Rightarrow \\
&\dot{L}_1 = r\sin\theta + k_1 y \sin\theta = \sin\theta\left(r + k_1 y\right) \Rightarrow \\
&r = -k_1 y - k_2 \sin\theta \quad (k_2 > 0) \Rightarrow \\
&\dot{L}_1 = -k_2(\sin\theta)^2 \le 0.
\end{aligned}
$$

以下将讨论限定在包含原点的集合 $D=\left\{\left(y,\theta\right):\left|\theta\right|<\pi\right\}$ 内。在集合 D 内，L_1 为正定函数，$\dot{L}_1$ 半负定且 $\dot{L}_1\equiv 0\Leftrightarrow \sin\theta\equiv 0\Leftrightarrow \theta\equiv 0\Rightarrow \dot{\theta}\equiv 0\Rightarrow r\equiv 0\Rightarrow y\equiv 0$。因此所设计的控制律可以保证闭环系统的原点区域稳定，且吸引区的一个估计（属于吸引区的一个子集）为：

$$\Omega_c=\left\{(y,\theta):L_1\le c\right\}\in B_r\in D\triangleq\left\{(y,\theta):\left|\theta\right|<\pi\right\}$$

第二种控制律

$$
\begin{aligned}
&L_2 = 0.5(k_1 y^2 + \theta^2) \Rightarrow \\
&\dot{L}_2 = r\theta + k_1 y \sin\theta = \theta\left(r + k_1 f(\theta) y\right) \Rightarrow \\
&r = -k_1 y f(\theta) - k_2\theta \quad (k_1 > 0, k_2 > 0) \Rightarrow \\
&\dot{L}_2 = -k_2\theta^2 \le 0. \\
&\dot{L}_2 \equiv 0 \Rightarrow \theta \equiv 0 \Rightarrow r \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0
\end{aligned}
$$

其中 $k_1 > 0,\ f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{\theta}, & \theta \ne 0; \\ 1, & \theta = 0 \end{cases}$ 。

因 L_2 全局正定且径向无界，因此闭环系统的原点全局渐近稳定。

第三种控制律：

$$L_3 = 0.5\left(k_1 y^2 + \left(\theta + \alpha(y)\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\dot{L}_3 = k_1 y \sin\theta + \left(\theta + \alpha(y)\right)\left(r + \dot{\alpha}(y)\right)$$

$$= k_1 y \sin\left(-\alpha(y)\right) + k_1 y\left(\sin\theta - \sin\left(-\alpha(y)\right)\right) + \left(\theta + \alpha(y)\right)\left(r + \dot{\alpha}(y)\right)$$

$$= -k_1 y \sin\left(\alpha(y)\right) + \left(\theta + \alpha(y)\right)\left(r + \dot{\alpha}(y) + k_1 y f\left(\theta, \alpha(y)\right)\right)$$

$$r = -\dot{\alpha}(y) - k_1 y f\left(\theta, \alpha(y)\right) - k_2\left(\theta + \alpha(y)\right), (k_1 > 0, k_2 > 0)$$

$$\dot{L}_3 = -k_1 y \sin(\alpha(y)) - k_2\left(\theta + \alpha(y)\right)^2.$$

选择 $\alpha(0)=0$，$y\alpha(a) > 0 (a \neq 0)$，则有 $\dot{L}_3 < 0$。因此控制律

$$r=-\dot{\alpha}(y)-k_1 yf\left(\theta,\alpha(y)\right)-k_2\left(\theta+\alpha(y)\right),(k_1>0,k_2>0),$$

$$f\left(\theta,\alpha(y)\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin\theta-\sin\left(-\alpha(y)\right)}{\theta+\alpha(y)}, & \theta+\alpha(y)\neq 0\\ \cos\left(\alpha(y)\right), & \theta+\alpha(y)=0\end{cases},$$

$\alpha(0)=0$，$y\alpha(a)>0(a\neq 0)$

可以保证闭环系统的原点全局渐近稳定。

评注：一般直线 $ax+by+c=0(a^2+b^2>0)$ 的跟踪问题可以转化为标准直线 $y=0,v=1$ 的跟踪问题。考虑轮式移动机器人 $\dot{x}=v\cos\theta,\dot{y}=v\sin\theta,\dot{\theta}=r$ 的直线路径

$ax+by+c=0$ 跟踪控制问题。令 $z=ax+by+c$，则有

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= av\cos\theta + bv\sin\theta \\
&= v\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right) \\
&= v\sqrt{a^2+b^2}\left(-\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta\right) \\
&= v\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\theta-\alpha\right) \\
&\triangleq \bar{v}\sin\bar{\theta}, \\
\dot{\bar{\theta}} &= r
\end{aligned}
$$

其中

$$\bar{v} \triangleq v\sqrt{a^2+b^2}, \bar{\theta} = \theta - \alpha,$$

$$\sin\alpha = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

再令 $\bar{z} = z/\bar{v}$，则有 $\dot{z} = \sin\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}} = r$。经过上述变量代换，移动机器人的任意直线路径跟踪控制问题已经转化为非线性系统 $\dot{z} = \sin\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}} = r$ 的原点镇定控制问题。其中系统模型 $\dot{z} = \sin\bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}} = r$ 完全等价于标准直线跟踪问题的系统模型 $\dot{y} = \sin\theta, \dot{\theta} = r$。

仿真验证程序：

```
clear
global k1 k2 k3
k1=1;k2=k1;k3=1;
x0=5*[0 1 0];
tol1=1e-8;er=1e-16;
options =
odeset('RelTol',tol1,'AbsTol',[er er er]);
[t,x]=ode45('non2',[0,100],x0,options);
subplot(2,2,1),plot(x(:,1),x(:,2))
subplot(2,2,2),plot(t,x(:,1))
subplot(2,2,3),plot(t,x(:,2))
subplot(2,2,4),plot(t,x(:,3)/pi)

function dx=non2(t,x)
```

```
global k1 k2 k3

%linear controller
%v=1;omega=-k1*x(2)-k2*x(3);

%non-linear controller 1
%v=1;omega=-k1*x(2)-k2*sin(x(3));

%non-linear controller 2
%if
abs(x(3))>1e-6;alpha=sin(x(3))/x(3);else;
alpha=1;end
%v=1;omega=-k1*v*x(2)*alpha-k2*x(3);

%nonlinea controller 3
%x3r=-k3*tanh(x(2));dx3r=-k3*(1-(tanh(x(2
```

```
)))^2)*sin(x(3));
%if abs(x(3)-x3r)>1e-6
%alpha=(sin(x(3))-sin(x3r))/(x(3)-x3r)
%else
%alpha=cos(x3r)
%end
%v=1;omega=dx3r-k1*alpha*x(2)-k2*(x(3)-x3
r);

dx1=v*cos(x(3));
dx2=v*sin(x(3));
dx3=omega;
dx=[dx1;dx2;dx3];
```

2. 移动小车的变速直线跟踪问题

问题描述： 考虑系统 $\dot{y}=v_d(t)\sin\theta,\dot{\theta}=r$，其中 $\left(v_d(t),\dot{v}_d(t)\right)$ 有界且 $\lim\limits_{t\to\infty}v_d(t)\neq 0$。试设计控制律 $r(\cdot)$ 使得闭环系统的原点一致渐近稳定。

解答：

（1）近似线性化方法

系统 $\dot{y}=v_d(t)\sin\theta,\dot{\theta}=r$ 在原点的近似线性化为 $\dot{y}=v_d(t)\theta,\dot{\theta}=r$，设计线性时变控制律 $r=-\theta-v_d y$，得到

线性化闭环系统为 $\dot{y}=v_d(t)\theta,\dot{\theta}=-\theta-v_d y$，对此系统构造正定函数 $L_1=0.5(y^2+\theta^2)$ ，沿近似线性化系统求导得 $\dot{L}_1=-\theta^2\le 0$，因此近似线性化系统 Lyapunov 一致稳定，L_1 有界有极限，$(y,\theta,\dot{y},\dot{\theta},\ddot{y},\ddot{\theta})$ 有界。因 $\dot{L}_1$ 可积，$\ddot{L}_1$ 有界，应用巴巴拉特引理知 $\dot{L}_1\to 0\Rightarrow\theta\to 0$。因 $\dot{\theta}$ 可积，$\ddot{\theta}$ 有界，再次应用巴巴拉特引理可知：

$$\dot{\theta}\to 0\Rightarrow r\to 0\Rightarrow v_d y\to 0\Rightarrow v_d\left(y\left(\infty\right)+\left(y(t)-y(\infty)\right)\right)\to 0$$
$$\Rightarrow y(\infty)\lim_{t\to\infty}v_d(t)=0\Rightarrow y\left(\infty\right)=0.$$

由以上分析可知，近似线性化系统一致稳定且状态趋于零，因此一致渐近稳定，从而原系统局部一致渐近稳定。

（问题：如何估计吸引区？）

（2）非线性控制律

构造非负函数 $L_2 = 0.5y^2 + (1-\cos\theta)$，沿非线性系统方程求导得：$\dot{L}_2 = yv_d\sin\theta + r\sin\theta = \sin\theta\left(r + yv_d\right)$，设计非线性控制律 $r = -v_d y - \sin\theta$，则 $\dot{L}_2 = -\left(\sin\theta\right)^2 \le 0$。定义包含原点的集合 $D = \left\{(x,\theta): |\theta| < \pi\right\}$，在集合 D 内 L_2 正定、

$\dot{L}_2$ 半负定，因此闭环系统的原点 Lyapunov 一致稳定；进一步由巴巴拉特引理可以证明状态 (y,θ) 一致趋于零，因此闭环系统原点一致渐近稳定；由于以上结论仅在 D 内成立，因而系统原点仅是区域稳定，不能得到全局一致渐近稳定的结论。事实上，闭环系统 $\dot{y}=v_d\sin\theta,\dot{\theta}=r=-v_d y-\sin\theta$ 的平衡点为 $(0,k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，因此系统不是全局渐近稳定的。

构造正定径向无界函数 $L_3=0.5\left(y^2+\theta^2\right)$，沿非线性系

统方程求导得： $\dot{L}_3 = yv_d \sin\theta + \theta r = \theta\left(v_d f(\theta) + r\right)$，其中 $f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{\theta}, & \theta \neq 0; \\ 1, & \theta = 0 \end{cases}$。选取控制律 $r = -v_d f(\theta) y - \theta$，则有 $\dot{L}_3 = -\theta^2 \leq 0$，因此系统原点全局一致稳定，$L_3$ 有界有极限，$(y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta}, \ddot{y}, \ddot{\theta})$ 有界。因 $\dot{L}_3$ 可积，$\ddot{L}_3$ 有界，因此 $\dot{L}_3 \to 0 \Rightarrow \theta \to 0$。因 $\dot{\theta}$ 可积，$\ddot{\theta}$ 有界，因此 $\dot{\theta} \to 0 \Rightarrow v_d f(\theta) y \to 0 \Rightarrow y \to 0$。结论：系统原点全局一致渐近稳定。

3. 移动小车的位置镇定

小车运动模型：

$$\dot{x} = v\cos\theta, \dot{y} = v\sin\theta, \dot{\theta} = r$$

期望常值位置 (x_d, y_d)。

构造坐标变换：

$$\begin{aligned} z_1 &= (x - x_d)\cos\theta + (y - y_d)\sin\theta, \\ z_2 &= -(x - x_d)\sin\theta + (y - y_d)\cos\theta, \\ z_3 &= \theta \end{aligned}$$

变换后方程：

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= v\cos^2\theta - (x - x_d)r\sin\theta + v\sin^2\theta + (y - y_d)r\cos\theta \\
&= v + z_2 r \\
\dot{z}_2 &= -z_1 r
\end{aligned}
$$

控制目标： 设计控制律 (v, r) 使得系统 $\dot{z}_1 = v + z_2 r, \dot{z}_2 = -z_1 r$ 的原点渐近稳定。

算法 1：

$$
\begin{aligned}
&L_1 = 0.5(z_1^2 + z_2^2) \Rightarrow \\
&\dot{L}_1 = z_1 v, v = -z_1 \Rightarrow \\
&\dot{L}_1 = -z_1^2 \le 0 \Rightarrow z_1 = 0, v = 0 \Rightarrow \\
&\dot{z}_1 = v + z_2 r = 0 \Rightarrow z_2 r = 0, \\
&r = z_2 \Rightarrow z_2 = 0.
\end{aligned}
$$

结论： 控制律 $v = -z_1, r = z_2$ 可以保证闭环系统 $\dot{z}_1 = v + z_2 r, \dot{z}_2 = -z_1 r$ 的原点全局渐近稳定，实现小车的全局位置镇定。

算法 2：

$$
\begin{aligned}
L_2 &= 0.5(z_1 - z_2)^2 + 0.5 z_2^2, \\
\dot{L}_2 &= (z_1 - z_2)(v + r z_2 + z_1 r) - z_2 z_1 r \\
&= (z_1 - z_2)(v + r z_2 + z_1 r) - z_2 (z_1 - z_2) r - z_2^2 r \\
&= (z_1 - z_2)(v + z_1 r) - z_2^2 r \Rightarrow \\
r &= -z_2^2, v = -z_1 r - (z_1 - z_2), \\
\dot{L}_2 &= -(z_1 - z_2)^2 - z_2^4 < 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0.
\end{aligned}
$$

算法 3：

$$
\begin{aligned}
& v = ru \Rightarrow \\
& \dot{z}_1 = r(u + z_2), \dot{z}_2 = -rz_1 \Rightarrow \\
& z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = r\left(Az + bu\right), \\
& A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& u = -Kz, \dot{z} = r(A - bK)z, \\
& P(A - bK) + (A - bK)^T P = -I, \\
& V = z^T Pz, \dot{V} = -r\|z\|_2^2, \\
& r = \|z\|_2^2 \Rightarrow \dot{V} = -\|z\|_2^4 < 0 \\
& \Rightarrow z \to 0.
\end{aligned}
$$

仿真验证程序：

```
clear
```

```
global xd yd
xd=0;yd=10;
T=20;
y0=[0;0;0];
tol1=1e-6;er=1e-9;
options = odeset('RelTol',tol1,'AbsTol',[er er
er]);
[t,y]=ode45('non2',[0,T],y0,options);
subplot(2,2,1),plot(y(:,1),y(:,2))
subplot(2,2,2),plot(t,y(:,1));
subplot(2,2,3),plot(t,y(:,2));
subplot(2,2,4),plot(t,y(:,3));

function dy=non2(t,y)
global xd yd
z1=(y(1)-xd)*cos(y(3))+(y(2)-yd)*sin(y(3));
```

```
z2=(y(1)-xd)*sin(y(3))-(y(2)-yd)*cos(y(3));
z3=y(3);

%control law 1
%v=-z1;omega=z2;

%control law 2
%omega=-4*tanh(z2^2);v=z2*omega-(z1-z2);

%control  law 3
A=[0 -1;1 0];b=[1;0];s=[-2 -3];K=place(A,b,s);
u=-K(1,1)*z1-K(1,2)*z2;omega=4*tanh(z1^2+z2^2);v=
u*omega;

dy1=v*cos(y(3));dy2=v*sin(y(3));dy3=omega;
dy=[dy1;dy2;dy3];
```

4. 移动小车的全状态镇定

问题描述:考虑非线性系统 $\dot{x}=v\cos\theta, \dot{y}=v\sin\theta, \dot{\theta}=r$， 需要设计控制律 (v,r) 使得闭环系统的状态全局渐近收敛到期望值 (x_d, y_d, θ_d)。

定义状态误差：

$$
\begin{aligned}
z_1 &= (x-x_d)\cos\theta+(y-y_d)\sin\theta, \\
z_2 &= (y-y_d)\cos\theta-(x-x_d)\sin\theta, \\
z_3 &= \theta-\theta_d
\end{aligned}
$$

则可得到误差状态方程为：

$$\dot{z}_1 = v + z_2 r, \dot{z}_2 = -z_1 r, \dot{z}_3 = r$$

考虑非负函数 $L = 0.5(z_1^2 + z_2^2)$ ，求导得到 $\dot{L} = vz_1$ ，设计 $v = -z_1$，则 $\dot{L} = -z_1^2 \le 0$，因此 L 有界有极限，(z_1, z_2) 有界。再设计 $r = -z_3 + z_2 \sin t$，则 $\dot{z}_3 = -z_3 + z_2 \sin t$。由于 z_2 有界，因此 z_3 有界，从而所有状态 (z_1, z_2, z_3) 有界，进一步可以证明所有状态的各阶导数均有界。对 $\dot{L}$ 应用巴巴拉特引理可知 $\dot{L} \to 0 \Rightarrow z_1 \to 0$，对 $\dot{z}_1$ 应用巴巴拉特引理可知 $z_2 r \to 0$。

因 L, z_1 均有极限，因此 z_2 有极限，从而 $z_2 r \to 0 \Rightarrow z_2(\infty) r \to 0$。若 $z_2(\infty) = 0$，则由 $\dot{z}_3 = -z_3 + z_2 \sin t$ 知，$z_3 \to 0$，因此所有状态趋于零，控制目标达到；若 $z_2(\infty) \neq 0$，则 $r \to 0$，对 $\dot{r} = -r - z_1 r \sin t - z_2 \cos t$ 应用巴巴拉特引理可知 $\dot{r} \to 0 \Rightarrow z_2 \cos t \to 0 \Rightarrow z_2(\infty) \cos t \to 0 \Rightarrow z_2(\infty) = 0$，因此所有状态趋于零，控制目标达到。

5. 移动小车状态轨迹跟踪

问题描述： 给定移动机器人模型 $\dot{x}=v\cos\theta,\dot{y}=v\sin\theta,\dot{\theta}=r$，期望状态轨迹 $\dot{x}_d=v_d\cos\theta_d,\dot{y}_d=v_d\sin\theta_d,\dot{\theta}_d=r_d$，其中假定 (v_d,r_d) 及其各阶导数均有界，且 $\lim_{t\to\infty}\left(v_d^2+r_d^2\right)\neq 0$。控制目标为：设计控制律使得状态误差 $(x-x_d,y-y_d,\theta-\theta_d)\to(0,0,0)$。

解： 定义车体坐标系下的跟踪误差

$$
\begin{aligned}
z_1 &= (x-x_d)\cos\theta + (y-y_d)\sin\theta, \\
z_2 &= (y-y_d)\cos\theta - (x-x_d)\sin\theta, \\
z_3 &= \theta - \theta_d
\end{aligned}
$$

求导可得相应的误差方程为：

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= v + z_2 r - v_d \cos z_3, \\
\dot{z}_2 &= -z_1 r + v_d \sin z_3, \\
\dot{z}_3 &= r - r_d
\end{aligned}
$$

构造正定函数 $L = 0.5(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$，沿误差方程求导得

$$
\begin{aligned}
\dot{L} &= z_1(v + z_2 r - v_d \cos z_3) + z_2(-z_1 r + v_d \sin z_3) + z_3(r - r_d) \\
&= z_1(v - v_d \cos z_3) + z_2 v_d \sin z_3 + z_3(r - r_d) \\
&= z_1(v - v_d \cos z_3) + z_3\left(v_d z_2 f(z_3) + r - r_d\right)
\end{aligned}
$$

其中 $f(z_3)=\begin{cases}\dfrac{\sin z_3}{z_3}, & z_3\neq 0;\\ 1, & z_3=0\end{cases}$。

设计控制律：

$$v=v_d\cos z_3-z_1, r=r_d-v_d f(z_3)z_2-z_3$$

则有 $\dot{L}=-z_1^2-z_3^2\leq 0$，因此 L 有界有极限，(z_1,z_2,z_3) 有界。由 (z_1,z_2,z_3) 有界、(v_d,r_d) 及其各阶导数有界可证状态 (z_1,z_2,z_3) 的各阶导数有界。对 $\dot{L}$ 应用巴巴拉特引理可得 $\dot{L}\to 0\to(z_1,z_3)\to(0,0)$；对 $(\dot{z}_1,\dot{z}_3)$ 应用巴巴拉特引理可得

$\left(z_2 r, v_d f(z_3) z_2\right) \to (0,0)$。由于$(L, z_1, z_3)$有极限，因此$z_2$ 有极限，所以

$$
\begin{aligned}
&\left(z_2(\infty)\left(r_d - v_d z_2\right), v_d z_2(\infty)\right) \to (0,0) \Rightarrow \\
&\left(z_2(\infty) r_d, z_2(\infty) v_d\right) \to (0,0) \Rightarrow z_2^2(\infty)\left(v_d^2 + r_d^2\right) \to 0 \\
&\Rightarrow z_2^2(\infty) = 0 \Rightarrow z_2(\infty) = 0
\end{aligned}
$$

因此所设计的控制律可以保证状态跟踪误差趋于零，达到控制目标。

6. 水面船舶直线跟踪控制

考虑水面船舶运动方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= u\cos\psi - v\sin\psi, \\
\dot{y} &= u\sin\psi + v\cos\psi, \\
\dot{\psi} &= r, \\
\dot{v} &= -cur - dv
\end{aligned}
$$

其中 (x, y, ψ) 为船舶的位置和姿态，(u, v, r) 为船体的纵向速度、横漂速度和绕竖直轴的旋转角速度。给定 u 为非零常数，(c, d) 为大于零的常数，试设计控制律 r 使得系统

$$\dot{y} = u\sin\psi + v\cos\psi, \dot{\psi} = r, \dot{v} = -cur - dv$$

的原点渐近稳定，即使得船舶从任意初始位置和姿态出发收敛到直线 $y = 0$ 上、且保持在该直线上以非零恒定速度 u 运动。

解：

（1）近似线性化控制律设计

在原点近似线性化后证明该系统可控，进一步设计控制律实现局部渐近稳定（请同学们自行完成）。

（2） 反馈线性化控制律设计

首先将 y 作为系统输出判断系统是否为最小相位：

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= u\sin\psi + v\cos\psi, \\
\ddot{y} &= ur\cos\psi + \dot{v}\cos\psi - vr\sin\psi \\
&= ur\cos\psi + (-cur - dv)\cos\psi - vr\sin\psi \\
&= \left(u\cos\psi - cu\cos\psi - v\sin\psi\right)r - dv\cos\psi
\end{aligned}
$$

假定 $u \neq 0, c \neq 1$，则在原点的邻域内系统具有相对阶 2。在 $y \equiv \dot{y} \equiv \ddot{y} \equiv 0$ 的约束下，降阶系统的运动方程为：

$$\dot{\psi}=r=\frac{dv\cos\psi}{u\cos\psi-cu\cos\psi-v\sin\psi}$$

$$=\frac{d\left(-u\tan\psi\right)\cos\psi}{(1-c)u\cos\psi-\left(-u\tan\psi\right)\sin\psi}$$

$$=-\frac{du\sin\psi\cos\psi}{(1-c)u\left(\cos\psi\right)^{2}+u\left(\sin\psi\right)^{2}}$$

$$=-\frac{du\sin\psi\cos\psi}{u-cu\left(\cos\psi\right)^{2}}=-\frac{d\sin\psi\cos\psi}{1-c\left(\cos\psi\right)^{2}}$$

该方程在原点的近似线性化为：

$$\dot{\psi}=-d/(1-c)\ \psi$$

假定 $0<c<1, d>0$，则降阶系统渐近稳定，原系统

为最小相位系统，可以设计反馈线性化控制律为：

$$\ddot{y} = \left(u\cos\psi - cu\cos\psi - v\sin\psi\right)r - dv\cos\psi \Rightarrow$$

$$r = \frac{dv\cos\psi - k_1 y - k_2\dot{y}}{u\cos\psi - cu\cos\psi - v\sin\psi}$$

$$= \frac{dv\cos\psi - k_1 y - k_2\left(u\cos\psi + v\sin\psi\right)}{u\cos\psi - cu\cos\psi - v\sin\psi}$$

$$(k_1 > 0, k_2 > 0)$$

结论：如果$0 < c < 1, d > 0$， u为非零常数，则以下

控制律

$$r = \frac{dv\cos\psi - k_1 y - k_2\left(u\cos\psi + v\sin\psi\right)}{u\cos\psi - cu\cos\psi - v\sin\psi}, \ (k_1 > 0, k_2 > 0)$$

可以保证非线性系统 $\dot{y}=u\sin\psi+v\cos\psi$， $\dot{\psi}=r$，

$\dot{v}=-cur-dv$ 的原点渐近稳定。

（3） **全局渐近稳定控制律设计**

$$\begin{aligned}\dot{y}&=u\sin\psi+v\cos\psi\\&=u\sin\psi+v+v(\cos\psi-1)\\&=u\sin\psi+(-cur-\dot{v})/d+v(\cos\psi-1)\end{aligned}$$

状态变换：

$$z=y+(cu\psi+v)/d,\bar{v}=v+cu\psi$$

得到

$$\begin{aligned}\dot{z} &= u\sin\psi - v(1-\cos\psi) \\ &= u\sin\psi - (\bar{v} - cu\psi)(1-\cos\psi), \\ \dot{\psi} &= r, \\ \dot{\bar{v}} &= -dv = -d(\bar{v} - cu\psi) \\ &= -d\bar{v} + dcu\psi\end{aligned}$$

构造正定函数 $L = 0.5\left(z^2 + \psi^2 + \bar{v}^2\right)$，沿以上方程求导得：

$$\begin{aligned}\dot{L} &= zu\sin\psi - z(\bar{v} - cu\psi)(1-\cos\psi) + \psi r - d\bar{v}^2 + dcu\bar{v}\psi \\ &= -d\bar{v}^2 + \psi\left(zuf\left(\psi\right) - z(\bar{v} - cu\psi)g\left(\psi\right) + r + dcu\bar{v}\right)\end{aligned}$$

其中

$$f(\psi)=\begin{cases}\dfrac{\sin\psi}{\psi}, & \psi\neq 0,\\ 1, & \psi=0\end{cases},\quad g(\psi)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\psi}{\psi}, & \psi\neq 0,\\ 0, & \psi=0\end{cases}$$

设计控制律

$$r=-\left(zuf(\psi)-z(\bar{v}-cu\psi)g(\psi)+dcu\bar{v}\right)-\psi$$

可以保证 $\dot{L}=-d\bar{v}^2-\psi^2\leq 0$。

应用不变原理可知系统轨线收敛到 $\dot{L}\equiv 0$ 的集合，在该集合内有：

$$\dot{L} \equiv 0 \Rightarrow (\psi, \bar{v}) \equiv (0,0) \Rightarrow (\psi, \dot{\psi}, \bar{v}) \equiv (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \left(\psi, uz, \bar{v}\right) \equiv (0,0,0) \Rightarrow (\psi, z, \bar{v}) \equiv (0,0,0)$$
$$\Rightarrow (z, \psi, v) \equiv (0,0,0)$$

即 $\dot{L} \equiv 0$ 的集合内仅包含原点，因此闭环系统的原点全局渐近稳定，即所设计的控制律可以保证船舶收敛到期望直线路径 x 轴上。

7. 水面船舶位置镇定

考虑水面船舶模型：

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u\cos\psi - v\sin\psi, \\
\dot{y} &= u\sin\psi + v\cos\psi, \\
\dot{\psi} &= r, \\
\dot{v} &= -cur - dv
\end{aligned}$$

其中(c,d)为正常数。

记(x_d, y_d)为期望位置，需要设计状态反馈控制律$\left(v(\cdot), r(\cdot)\right)$使得$(x - x_d, y - y_d) \to (0,0)$。

解：定义船体坐标系下的位置误差为

$$\begin{aligned}
e_1 &= (x - x_d)\cos\psi + (y - y_d)\sin\psi, \\
e_2 &= (y - y_d)\cos\psi - (x - x_d)\sin\psi
\end{aligned}$$

则可得到误差动态模型为：

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= u + e_2 r, \\
\dot{e}_2 &= v - e_1 r, \\
\dot{v} &= -cur - dv
\end{aligned}
$$

控制目标为：设计控制律$\left(v(\cdot), r(\cdot)\right)$使得以上系统的原点渐近稳定。

Step 1）第二个方程中横漂速度项的处理

由误差动态模型的第三个方程可解出：

$$
v = -\frac{cur + \dot{v}}{d}
$$

将其代入第二个方程得到：

$$\dot{e}_2 = v - e_1 r = -\frac{cur + \dot{v}}{d} - e_1 r$$

考虑状态变换 $\bar{e}_2 = e_2 + v/d$，则可得到新的误差状态

方程为：

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= u + e_2 r = u + (\bar{e}_2 - v/d)r \\ &= u + \bar{e}_2 r - \tfrac{1}{d} vr,\end{aligned}$$

$$\dot{\bar{e}}_2 = -\frac{cur}{d} - e_1 r,$$

$$\dot{v} = -cur - dv$$

Step 2) 设计控制律 $v = -k_1 e_1$ 使得闭环系统 Lyapunov 稳定

将 $v=-k_1e_1$ 代入上式得：

$$\dot{e}_1=-k_1e_1+\bar{e}_2r-\tfrac{1}{d}vr,$$

$$\dot{\bar{e}}_2=\frac{ck_1re_1}{d}-e_1r=-\left(1-\frac{ck_1}{d}\right)e_1r,$$

$$\dot{v}=ck_1e_1r-dv$$

选择 $0<k_1<d/c$ 使得 $1-\dfrac{ck_1}{d}>0$，则可构造以下正定函数：

$$L=\frac{1}{2}e_1^2+\frac{d}{2(d-ck_1)}\bar{e}_2^2+\frac{1}{2ck_1d}v^2$$

沿误差方程求导得到：

$$\dot{L} = -k_1 e_1^2 - \frac{1}{ck_1} v^2 \le 0$$

因此闭环系统（至少）Lyapunov 稳定。

Step 3） 设计控制律$r(\cdot)$使得闭环系统渐近稳定

在$\dot{L} \equiv 0$得集合上有：

$$\dot{L} \equiv 0 \Rightarrow (e_1, v) \equiv (0,0) \Rightarrow \dot{e}_1 \equiv 0 \Rightarrow \overline{e}_2 r \equiv 0 \Rightarrow e_2 r \equiv 0$$

设计控制律$r = \alpha(e_2)$，其中$\alpha(0) = 0, \alpha(a) \ne 0 (a \ne 0)$，则有：

$e_2 r \equiv 0 \Rightarrow e_2 \alpha(e_2) \equiv 0 \Rightarrow e_2 \equiv 0 \Rightarrow \overline{e}_2 \equiv 0$。因此$\dot{L} \equiv 0$的集合

上仅包含原点，由不变原理知，闭环系统

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + \overline{e}_2 \alpha(\overline{e}_2) - \tfrac{1}{d} v \alpha(\overline{e}_2),$$
$$\dot{\overline{e}}_2 = -\left(1 - \frac{ck_1}{d}\right) e_1 \alpha(\overline{e}_2),$$
$$\dot{v} = ck_1 e_1 \alpha(\overline{e}_2) - dv$$

的原点全局渐近稳定，控制目标达到。

8. 飞行器定点控制

问题描述：考虑飞行器模型 $\ddot{x} = u\sin\theta, \ddot{y} = u\cos\theta - g, \dot{\theta} = r$ ，

控制目标为：设计控制律(u,r)使得系统稳定到期望的平衡点$(x,\dot{x},y,\dot{y},\theta)_s=(x_d,0,y_d,0,0)$。

解：记$z_1=x-x_d, z_2=\dot{x}, z_3=y-y_d, z_4=\dot{y}, z_5=\theta$，则可得到状态方程：

$$
\begin{aligned}
&\dot{z}_1=z_2, \dot{z}_2=u\sin z_5,\\
&\dot{z}_3=z_4, \dot{z}_4=u\cos z_5-g,\\
&\dot{z}_5=r
\end{aligned}
$$

记z_{5d}待设计的函数，并定义$\bar{z}_5=z_5-z_{5d}$，则系统方程可以重写为：

$$
\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \\
&\dot{z}_2 = u\sin z_5 = u\sin z_{5d} + u(\sin z_5 - \sin z_{5d}), \\
&\dot{z}_3 = z_4, \\
&\dot{z}_4 = u\cos z_5 - g = u\cos z_{5d} + u(\cos z_5 - \cos z_{5d}) - g, \\
&\dot{\bar{z}}_5 = r - \dot{z}_{5d}
\end{aligned}
$$

设 $\alpha_i(\cdot)(\mathrm{i}=1,2,3,4)$ 为值域为 $(-1,1)$ 的光滑有界函数，

且满足 $\alpha_i(0)=0, a\alpha_i(a)>0(a\neq 0)$ 。设计 (u,θ_d) 满足下式：

$$
\begin{aligned}
u\sin\theta_d &= -k_1\alpha_1(z_1) - k_2\alpha_2(z_2), \\
u\cos\theta_d - g &= -k_3\alpha_3(z_3) - k_4\alpha_4(z_4)
\end{aligned}
$$

其中 k_i 为正常数，满足 $k_3+k_4<g$ 。由上式可以解出：

$$u=\sqrt{\left(-k_1\alpha_1(z_1)-k_2\alpha_2(z_2)\right)^2+\left(-k_3\alpha_3(z_3)-k_4\alpha_4(z_4)+g\right)^2},$$

$$\sin\theta_d=\frac{-k_1\alpha_1(z_1)-k_2\alpha_2(z_2)}{u},\cos\theta_d=\frac{-k_3\alpha_3(z_3)-k_4\alpha_4(z_4)+g}{u}$$

注意到 $k_3+k_4<g$ 以及 $\left|\alpha_i\right|<1(i=3,4)$，以上解中的分母 u 严格大于零。

系统方程可以重写如下：

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2, \\
\dot{z}_2 &= u\sin z_5 = u\sin z_{5d} + u(\sin z_5 - \sin z_{5d}) \\
&= -k_1\alpha_1(z_1) - k_2\alpha_2(z_2) + u(\sin z_5 - \sin z_{5d}), \\
\dot{z}_3 &= z_4, \\
\dot{z}_4 &= u\cos z_5 - g \\
&= u\cos z_{5d} - g + u(\cos z_5 - \cos z_{5d}) \\
&= -k_3\alpha_3(z_3) - k_4\alpha_4(z_4) + u(\cos z_5 - \cos z_{5d}), \\
\dot{\bar{z}}_5 &= r - \dot{z}_{5d}
\end{aligned}
$$

构造正定函数

$$
L = \int_0^{z_1} \alpha_1(\tau)d\tau + 0.5z_2^2 + \int_0^{z_3} \alpha_3(\tau)d\tau + 0.5z_4^2 + 0.5\bar{z}_5{}^2
$$

求导可得：

$$
\begin{aligned}
\dot{L} &= -k_2 z_2 \alpha_2(z_2) - k_4 z_4 \alpha_4(z_4) + z_2 u\left(\sin z_5 - \sin z_{5d}\right) \\
&\quad + z_4 u(\cos z_5 - \cos z_{5d}) + \overline{z}_5(r - \dot{z}_{5d}) \\
&= -k_2 z_2 \alpha_2(z_2) - k_4 z_4 \alpha_4(z_4) + \overline{z}_5\left(z_2 uf + z_4 ug + r - \dot{z}_{5d}\right)
\end{aligned}
$$

其中：

$$
f = \begin{cases} \dfrac{\sin z_5 - \sin z_{5d}}{\overline{z}_5}, & \overline{z}_5 \neq 0, \\ \cos z_{5d}, & \overline{z}_5 = 0 \end{cases},
$$

$$
g = \begin{cases} \dfrac{\cos z_5 - \cos z_{5d}}{\overline{z}_5}, & \overline{z}_5 \neq 0, \\ -\sin z_{5d}, & \overline{z}_5 = 0 \end{cases}
$$

设计控制律 $r = -z_2 uf - z_4 ug + \dot{z}_{5d} - \overline{z}_5$ ，则有：

$$\dot{L} = -k_2 z_2 \alpha_2(z_2) - k_4 z_4 \alpha_4(z_4) - \bar{z}_5^{\ 2} \le 0$$

进一步应用不变原理可以证明以$(z_1, z_2, z_3, z_4, \bar{z}_5)$为状态的闭环系统的原点全局渐近稳定，控制目标达到。

习题 1：考虑某卫星的简化运动方程

$$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_1 x_2$$

试基于 Lyapunov 稳定性理论构造至少两种控制律，使得以上系统的原点全局渐近稳定，并编写 MATLAB 程序进行

仿真验证。

习题 2：考虑水面船舶模型

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= u\cos\psi - v\sin\psi,\\
\dot{y} &= u\sin\psi + v\cos\psi,\\
\dot{\psi} &= r,\\
\dot{v} &= -cur - dv
\end{aligned}
$$

其中(x, y, ψ)为船舶的位置和姿态，(u, v, r)为船体的纵向速度、横漂速度和沿竖直轴的旋转角速度。给定$u = u_0$为非零常数，(c, d)为大于零的常数。试设计控制律r使得船

舶收敛到直线 $b_1 x + b_2 y + c = 0 (b_1^2 + b_2^2 > 0)$ 上且沿该直线以非零定常速度 u_0 运动。

习题 3. 考虑非线性系统 $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = x_1 u_2$，试通过构造适当的 Lyapuno 函数设计控制律，使得闭环系统的原点全局渐近稳定。