北京航空航天大学

2011-2012 学年第一学期期末

考试统一用答题册

考试课程 高等数学（上）

班级________ 学号________ 姓名________

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
阅卷人									

2012 年 01 月 12 日

一．填空题（本题 20 分）

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3} =$ __________. $1/3$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内满足 $\ln(1+x) \le f(x) \le x + x^2$，则 $f'(0) =$ ___1___ .

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \le x \le 1, \\ x^2, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$ 并设函数 $y = f(1 + f(x))$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{1}{2}} =$ ___$27/16$__.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n!}) x^n$ 的收敛域是___$(-1,1)$__________.

5. $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-2x^2}，则 $\int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x =$ __$1 - 5e^{-2}$______.

二．单项选择题（本题 20 分）

1. 已知方程 $cx - \tan x = 0$ 有三个实根，则 c 的可能取值是（ B ）.

A. 0.　　B. $\dfrac{1}{2}$.　　C. 1.　　D. 2.

2. 设在 $(-\pi, \pi)$ 内有界函数 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，则当 $n \to \infty$ 时（ A ）.

A. $a_n \to 0$ 且 $b_n \to 0$.　　B. $a_n \to 0$ 且 $b_n \to 0$.

C. $a_n \to 0$ 且 $b_n \to 0$.　　D. $a_n \to 0$ 且 $b_n \to 0$.

3. 已知反常积分 $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x^{n-1}}}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ 收敛，则常数 n 的取值范围为（D ）.

A. $(-1, 0]$.　　B. $(0, 1]$.　　C. $(1, 2]$.　　D. $(2, 3)$.

4. 设一细棒位于 x 轴上 $[0,1]$ 区间，其在 x 点处的线密度是 $\rho(x)$，则细棒对在 $x = 2$ 处的单位质点的引力为（ B ）.

A. $\int_0^1 \dfrac{x\rho(x)}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x$.　　B. $\int_0^1 \dfrac{\rho(x)}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x$.　　C. $\int_1^2 \dfrac{x\rho(x)}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x$.　　D. $\int_1^2 \dfrac{\rho(x)}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x$.

5. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则下列级数中***发散*** 的是（ C ）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$.　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$.　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$.　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|u_n| - |v_n|)$.

三．（本题 *10* 分）计算

1． $\lim\limits_{x\to 0}(1+x-\ln(1+x))^{\frac{1}{x^2}}$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\{[(1+x-\ln(1+x))]^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}\}^{\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$ 。。。。。。。。。。。。。。 2 分

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$ 。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。 2 分

原式$=e^{\frac{1}{2}}$ 。。。。。。。。。。。。 1 分

2．求曲线$\begin{cases} x=\cos^3 x, \\ y=\sin^3 x \end{cases}$在$t=\frac{\pi}{4}$处对应的切线方程.

$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin^2 x\cos x}{-3\cos^2 x\sin x}=-\tan x$ 。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。 2 分

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=-\tan x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-1$， 切点$(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$.。。。。。。。。。。。。 1 分

切线方程 $y-\frac{\sqrt{2}}{4}=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4})$ ， 即 $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。。。。。。。。。。。。 2 分

四．（本题 12 分）求积分

1．$\int \frac{\ln^2 x+\ln x+1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

$=\int \ln x\,\mathrm{d}(\ln x)+\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)$ ……………… 3 分

$=\frac{\ln^2 x}{2}+\ln x+\ln\ln x+C$ ……………………… 3 分

2．$\int_0^1 \frac{x}{(1+\sqrt{x})^2}\mathrm{d}x$

令 $1+\sqrt{x}=t, x=(t-1)^2$

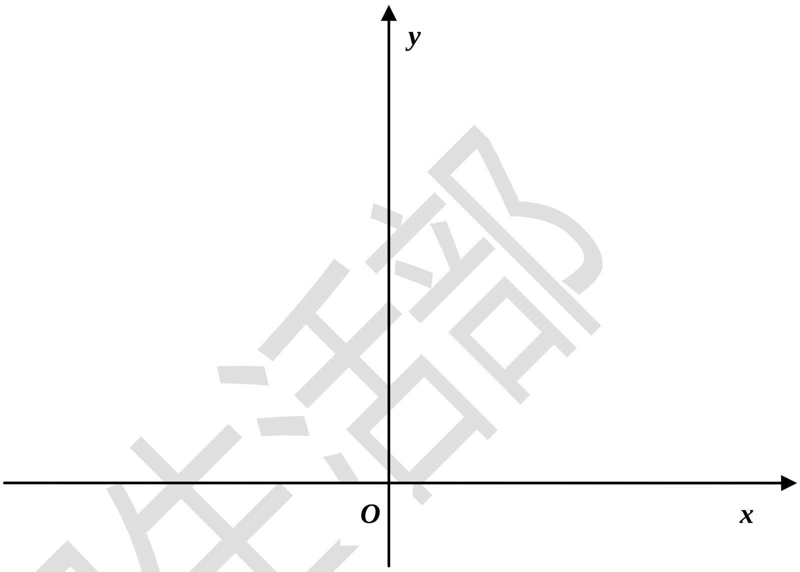
$\int_0^1 \frac{x}{(1+\sqrt{x})^2}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{2(t-1)^3}{t^2}\mathrm{d}t$ ……………………… 3 分

$=2\int_1^2 (t-3+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t$

$=2(\frac{t^2}{2}-3t+3\ln t+\frac{1}{t})\Big|_1^2=6\ln 2-4$ …………………… 3 分

五．（本题 10 分） 设曲线 $y = e^x (x-1)^2$，填写下表且画出函数图象草图.

$y' =$	$e^x (x-1)(x+1)$
$y'' =$	$e^x (x^2+2x-1)$
单减区间	$(-1,1)$
单增区间	$(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$
凸区间	$(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$
凹区间	$(-\infty,-1-\sqrt{2})$, $(-1+\sqrt{2},+\infty)$
极大值点	$x=-1$
极小值点	$x=1$
拐点的横坐标	$x=-1-\sqrt{2}$, $x=-1+\sqrt{2}$



六．（本题 12 分） 平面区域 D 由曲线 $y=\arctan x$ 与直线 $x=1$ 以及 x 轴所围. 求

（1）区域 D 的面积；

（2）区域 D 绕 y 轴旋转一周而成的立体体积.

解（1）区域 D 的面积 $=\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x$. …………… 2 分

$= x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ …………………… 2 分

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ ……………… 2 分

（2）立体体积 $=2\pi\int_0^1 x\arctan x \,\mathrm{d}x$ ……………… 2 分

$=\pi x^2 \arctan x\Big|_0^1 - \pi\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \pi\int_0^1 (1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$ ……… 2 分

$= \frac{\pi^2}{2} - \pi$ ………………………………………… 2 分

七．（本题 10 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\,x^n$ 的和函数及数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 的和.

$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\ x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2\ x^{n-1}$，设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\ x^{n-1}$ ………… 2 分

$$\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

$s(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$ ………………………………… 4 分

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\ x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\,x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}+\frac{x}{1-x}$ ………………………… 2 分

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=s(\frac{1}{2})$=12 ………………………… 2 分

八．（本题 6 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是连续的函数，且在 $(-1,1)$ 内有连续的二阶导数.

证明：至少存在一点 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f''(\xi)=f(-1)-2f(0)+f(1)$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f'(\eta)}{2}x^2,\quad \eta\in(0,x)$，

$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f'(\eta_1)}{2},\quad \eta_1\in(-1,0)$

$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f'(\eta_2)}{2},\quad \eta_2\in(0,1)$

$f(-1)+f(1)-2f(0)=\frac{f'(\eta_1)+f'(\eta_2)}{2},\quad \eta_2\in(0,1)$，$\eta_1\in(-1,0)$

$\min(f'(\eta_1),f'(\eta_2))\le\frac{f'(\eta_1)+f'(\eta_2)}{2}\le\max(f'(\eta_1),f'(\eta_2)),$

由于二阶导数连续，则存在 $\xi\in(-1,1)$，使得

$f''(\xi)=\frac{f'(\eta_1)+f'(\eta_2)}{2}$,即

$f''(\xi)=f(-1)-2f(0)+f(1)$。