高等数学期末考试试题（ 2009-12-25）

一．填空（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x} =$ __________.

2. $\int_{-1}^{1}(\sin^5 x+\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x =$ _____.

3. 曲线 $y=\dfrac{2}{3}(\sqrt{x})^3\ (0\le x\le 1)$ 的弧长为____.

4. 曲线 $r=\sqrt{\cos 2\theta}\ (0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4})$ 与 $\theta=0$ 所围图形的面积为____.

5. 设向量 $\vec{a}=\{1,2,k\},\vec{b}=\{2k,1,1\}$ 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $k=$ ____.

二．单项选择（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设数列 $\{x_n\}$，则 $\{x_{2n}\}$ 收敛是 $\{x_{2^n}\}$ 收敛的（　）.

(A) 充分必要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 既不充分也非必要条件

2. 若存在 $\varepsilon>0$，对任意的 $X>0$, 都有 $x_0>X$, 使 $|f(x_0)|<\varepsilon$, 则可断定的是（　）.

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ne 0$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ne\infty$

3. 若 $f'(x_0)>0$, 则下述结论中**错误**的是（　）.

(A) 存在 $\delta>0$, 使 $f(x_0+\delta)>f(x_0-\delta)$

(B) 存在 $\delta>0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有 $f(x)<f(x_0)$

(C) 存在 $\delta>0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内有 $f(x)>f(x_0)$

(D) 存在 $\delta>0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内单调增加

4. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\,\mathrm{d}x$，则（　）.

(A) $I<1$　　(B) $I>1$　　(C) $I=1$　　(D) $I=0$

5. 设 $I_1=\int_0^1\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$，$I_2=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$，则（　）.

(A) I_1 收敛 I_2 发散　(B) I_1 发散 I_2 收敛　(C) I_1 与 I_2 都收敛　(D) I_1 与 I_2 都发散

三．求极限（每小题 5 分，共 10 分）

1． $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

2． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\sin x}^{x}\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t}{x\sin^2 x}$

四．求导数（每小题 5 分，共 10 分）

1．设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t^3 \\ y = t + \ln t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

2．已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x} x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ 所确定，求 $y'(0)$.

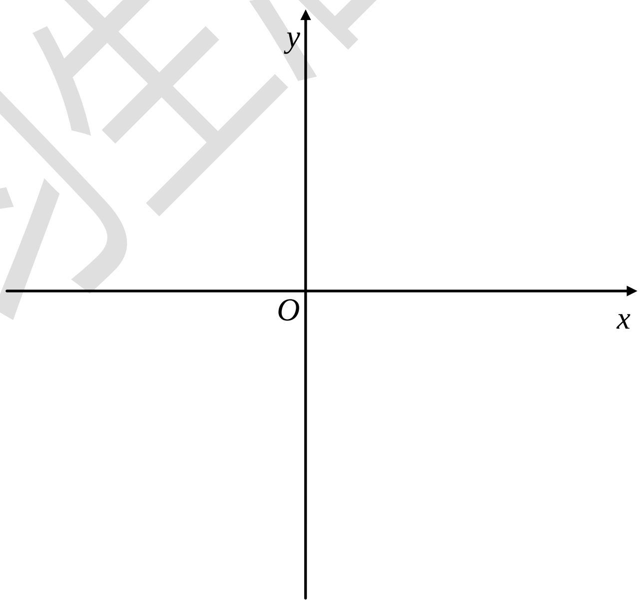
五．求积分（每小题
6 分，共 12 分）

1．$\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

2．$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$

六. (10 分) 设函数 $y = |x^2 - 3x + 2|\, e^x$，填表并作图.

单增区间	
单减区间	
凹 区 间	
凸区间	
极大值点	
极小值点	
拐　点	
渐近线	



七.(6 分) 求过直线 $\begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$ 且与平面 $x - 4y - 8z + 12 = 0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的平面方程.

八.(6 分) 求由曲线 $y = e^x$ 与直线 x=0， y=0，x=1 所围成的图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

九. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, $f(0) = f(1) = 0$, 且 $\max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\} = 1$,

证明$\min\limits_{0\le x\le 1}\{f''(x)\}\le -8.$