一、 （20）回答题

1) 叙述带有 Peano 余项的 Taylor 定理.

设函数f在点x_0有直到n阶的导数, 则:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n],\quad (x\to x_0)$$

2) 叙述带有 Lagrange 余项的 Taylor 定理.

f在$[a,b]$上有n阶连续导数, 在(a,b)内有$n+1$阶导数,
则对$\forall x_0, x\in[a,b]$, 有:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k)+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad (\xi_1\text{介于}x,x_0\text{之间})$

3) 叙述利用达布上和和下和的可积的两个等价定理。

1 $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$, 其中$\omega_i=M_i-m_i$是$f$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅; $(i=1,2,\cdots,n)$

2 $\underline{I}=\overline{I}$.

4) 叙述定积分的定义.

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界,

在$[a,b]$中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间,

各小区间的长度依次为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $(i=1,2,\cdots)$,

在各小区间上任取 一点ξ_i（$\xi_i\in\Delta x_i$）,

作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots)$

并作和 $$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$,

只要当$\lambda \to 0$时，$I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，

称 $f(x)$在区间$[a,b]$上(Riemann)可积.

极限值 I 称为函数 $f(x)$

在区间$[a,b]$上的 Riemann 积分或定积分，记为

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

5) 叙述 Lebesgue 定理.

若函数f在有限区间$[a,b]$上有界,那么f在$[a,b]$上 Riemann可积的充要条件是$D(f)$是一零测集

其中: $D(f) = \{x \in [a,b]: f\text{在}x\text{处不连续}\}$

二、 （20）计算下面问题

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{\sqrt{1+x^2} - \cos x^2}$ （利用带有 Peano 余项的 Maclaurin 公式）

提示: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)x^2 + o(x^2)$

解: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ $\qquad \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$\ln(1+x) - \sin x = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3) = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ 2 分

$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)x^4 + o(x^4)$ $\qquad \cos x^2 = 1 - \dfrac{x^4}{2!} + o(x^4)$

$\sqrt{1+x^2} - \cos x^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ 4 分

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\sqrt{1+x^2} - \cos x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}{\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)^2} = -1$$ 5 分

2)　求 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}$

$$\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{\tan(\sin x)}\cos x}{\sqrt{\sin(\tan x)}\sec^2 x}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\tan x}}=1$$ **5 分**

3)　利用定积分定义，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$ **2分**

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{i}{n}\cdot\pi\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx.$$ **5分**

或

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{i\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx.$$

4)　求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在x=3点的泰勒展开.

$$f(x)=\ln(1+x)=\ln(4+x-3)=\ln\left(4\left(1+\frac{x-3}{4}\right)\right)$$ **2分**

$$=\ln4+\ln\left(1+\frac{x-3}{4}\right)$$

$$=\ln4+\frac{x-3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+\ldots\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-3}{4}\right)^n+o(x-3)^n$$ **5分**

三、　**（10）证明下列问题（两个题目中任选其一）**

1.　设函数 $f(x)$ 在 R 上二阶可导，$M_k=\sup\limits_{x\in R}\left|f^{(k)}(x)\right|$，$k=0,1,2$

1)　求 $f(x+h)$ 在 x 点的泰勒展开；

2)　求 $f(x-h)$ 在 x 点的泰勒展开；

3) 证明：$\forall h>0, \left|f'(x)\right| \le \frac{M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2$

4) 证明：$M_1^{\,2} \le 2M_0M_2$

解：

1）$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2 \qquad x<\xi_1<x+h$ **2 分**

2）$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2 \qquad x-h<\xi_2<x$ **4 分**

3）$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2-\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2$

$f(x)\le M_0, f^{(2)}(x)\le M_2 \ \forall h>0, \left|f'(x)\right| \le \frac{M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2$ **7 分**

4）$\frac{M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2 \ge 2\sqrt{\frac{M_0}{h}\cdot\frac{h}{2}M_2}=\sqrt{2M_0M_2}$

当 $\frac{M_0}{h}=\frac{h}{2}M_2$，即 $h=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$，代入 $\forall h>0, \left|f'(x)\right| \le \frac{M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2$，有

$\left|f'(x)\right| \le M_0\sqrt{\frac{M_2}{2M_0}}+\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\cdot\frac{M_2}{2}=\sqrt{2M_0M_2}$

因此，$M_1^{\,2} \le 2M_0M_2$ **10 分**

2. **利用带有 Lagrange 余项的 Taylor 定理证明**

f在$(-\infty,+\infty)$三阶可导,若f, f'''有界，证明: f', f''也有界.

证明：在$x_0=x$处展开，分别计算$x+1$, $x-1$处值.

$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!} \qquad x<\xi_1<x+1$ **2分**

$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_2)}{3!} \qquad x-1<\xi_2<x$ **4分**

两式相加 $f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+f''(x)+\frac{1}{3!}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$

$\therefore \left|f''(x)\right| \le 4M_1+\frac{1}{3}M_2$ 有界

两式相减 $f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{1}{3!}[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)]$

$\therefore \left|f'(x)\right| \le M_1+\frac{1}{3!}M_2$ **有界**

10分

四、（20）求或证明下列积分

1） $\int \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$

令 $u=\ln(1+x)$，$v'=(2-x)^{-2}$

故 $\int \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int \ln(1+x)d(\frac{1}{2-x})$ 2 分

$$=\frac{1}{2-x}\ln(1+x)-\int (\frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x})dx$$

$$=\frac{1}{2-x}\ln(1+x)-\frac{1}{3}\int (\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x})dx$$ 4 分

$$=\frac{1}{2-x}\ln(1+x)-\frac{1}{3}\ln(1+x)+\frac{1}{3}\ln|x-2|+C$$ …… 5 分

2) $\int\frac{dx}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}$

$$=\int\frac{dx}{\left(\cos^2 x\right)\left(3\tan^2 x-8\tan x+5\right)}$$

$$=\int\frac{d\tan x}{\left(3\tan^2 x-8\tan x+5\right)}=\int\frac{d\tan x}{3\left(\tan^2 x-\frac{8}{3}\tan x+\frac{5}{3}\right)}$$ **3 分**

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\tan x}{\left(\left(\tan x-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x+1}{\tan x-1}\right|+c$$

5 分

3) $\int\frac{1-x}{1+x^3}dx$

$$=\int\frac{1-x+x^2-x^2}{1+x^3}dx=\int\frac{1-x+x^2}{1+x^3}dx-\int\frac{x^2}{1+x^3}dx$$ **3 分**

$$=\ln\left(1+x\right)-\frac{1}{3}\ln\left(1+x^3\right)+C$$ 5 分

4） 设 $f(x)$ 在区间 **R** 上连续，则 $\int_0^{2\pi} f(3\cos\alpha+4\sin\alpha)d\alpha=\int_0^{2\pi} f(5\cos\beta)d\beta$

$$\int_0^{2\pi} f(3\cos\alpha+4\sin\alpha)d\alpha$$
$$=\int_0^{2\pi} f\left(5\left(\frac{3\cos\alpha}{5}+\frac{4\sin\alpha}{5}\right)\right)d\alpha$$
$$=\int_0^{2\pi} f(5\cos(\alpha-\theta))d\alpha \qquad \cos\theta=\frac{3}{5}$$

3 分

$$\alpha-\theta=\beta$$
$$\int_0^{2\pi} f(5\cos(\alpha-\theta))d\alpha=\int_{-\theta}^{2\pi-\theta} f(5\cos\beta)d\beta$$
$$=\int_0^{2\pi} f(5\cos\beta)d\beta$$

5 分

五、 **（20）定积分**

1。在曲线上 $y=x^2\,(x\ge 0)$ 某点作切线。使该曲线、切线、与 x 轴围成的面积 $\frac{1}{12}$，并求此图形绕 x 轴旋转一周所围成的体积。

解：在曲线上 $y=x^2\,(x\ge 0)$ 取一点 (a,a^2)，

过 (a,a^2) 的切线方程为：$y-a^2=2a(x-a)$ **2 分**

$$S=\int_0^{a^2}\left(\frac{y+a^2}{2a}-\sqrt{y}\right)dy=\frac{a^3}{12}\Rightarrow a=1$$ **5 分**

因此切线方程为：$y-1=2(x-1)$

$$V=\int_0^1 \pi x^4dx-\int_0^1\pi(2x-1)^2dx=\frac{\pi}{30}$$ **10 分**

3． 假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$0<f'(x)<1,\forall x\in(0,1), f(0)=0$，证明：

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2>\int_0^x f^3(t)dt,\quad \forall x\in(0,1)$$

证明：$F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt$

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)\left(2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\right)$$ **3 分**

因 $0<f'(x)<1,\forall x\in(0,1), f(0)=0$，所以 $f(x)>0$ 5 分

令 $g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)$，则 $g'(x)=2f(x)\left[1-f'(x)\right]>0$

即得 $g(x)>g(0)=0$

所以 $F'(x)>0$， **8 分**

则 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt>F(0)=0$， $\forall x\in(0,1)$ **10 分**

六、（10 分） 证明下面问题

设 $f(x)$ 在[0，1]上连续， $f(x)>0$，证明：

1） $F(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^1\frac{dt}{f(t)}$ 存在唯一根 $\alpha\in(0,1)$

解： $F(0)=-\int_0^1\frac{dt}{f(t)}<0$， $F(1)=\int_0^1 f(t)dt>0$

根据介值定理，有 $\alpha\in(0,1)$，使得 $F(\alpha)=0$

又 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$，即 $F(x)$ 在[0，1]上严格递增，

则上述的 α 唯一。

2） 对任意自然数 n，存在唯一 $x_n\in(0,1)$ 使得

$\int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(t)dt=\int_{x_n}^1\frac{dt}{f(t)}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$

解：令 $F_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{x} f(t)dt-\int_x^1\frac{dt}{f(t)}$，则

$F_n(\frac{1}{n})=-\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{dt}{f(t)}<0$， $F_n(1)=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt>0$

根据介值定理，有 $x_n\in\left(\frac{1}{n},1\right)$，使得 $F_n(x_n)=0$

又对任意的自然数 n， $F_n'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$，即 $F_n(x)$ 在[0，1]上严格递增，

则上述的 x_n 唯一。

对任意的自然数 n， $F_{n+1}(x)-F_n(x)=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)dt>0$ ， $\forall x\in(0,1)$

则 $F_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{x} f(t)dt-\int_{x}^{1}\frac{dt}{f(t)}$ 对 n 单调递增。

因此， $F_n(x_n)=0=F_{n+1}(x_{n+1})>F_n(x_{n+1})$ ，可得 $x_n>x_{n+1}$

$\{x_n\}$ 单调递减且有界，从而可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$

根据 $F_n(x_n)=0$，即 $\int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(t)dt=\int_{x_n}^{1}\frac{dt}{f(t)}$，当 $n\to\infty$，有

$$\int_0^{\beta} f(t)dt=\int_{\beta}^{1}\frac{dt}{f(t)},$$

结合 1）的结果， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta=\alpha$

$$\int\frac{dx}{1+x^3}$$

解：$\int\frac{dx}{1+x^3}=\int\frac{1+x-x}{1+x^3}dx$

$$=\int\frac{1}{1-x+x^2}dx-\int\frac{x}{1+x^3}dx$$

其中

$$\int\frac{1}{1-x+x^2}dx=\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2}{3}\sqrt{3}(x-\frac{1}{2})+C$$

$$-\int\frac{x}{1+x^3}dx$$

$$=\int\frac{1-x-1}{1+x^3}dx=\int\frac{1-x}{1+x^3}dx-\int\frac{1}{1+x^3}dx$$

$$=\int\frac{1-x+x^2}{1+x^3}dx-\int\frac{x^2}{1+x^3}dx-\int\frac{1}{1+x^3}dx=\ln\left(1+x\right)-\frac{1}{3}\ln\left(1+x^3\right)-\int\frac{1}{1+x^3}dx$$

因此

$$\int\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{1}{2}\ln\left(1+x\right)-\frac{1}{6}\ln\left(1+x^3\right)+\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2}{3}\sqrt{3}(x-\frac{1}{2})+C$$