§1. 利息的度量

积累函数 $a(t)$. ← 原始投资为1

金额函数 $A(t) = k \cdot a(t)$. ← 原始投资为k.

利息金额：$I_n = A(n) - A(n-1)$. ← 第n个时期所得到的.

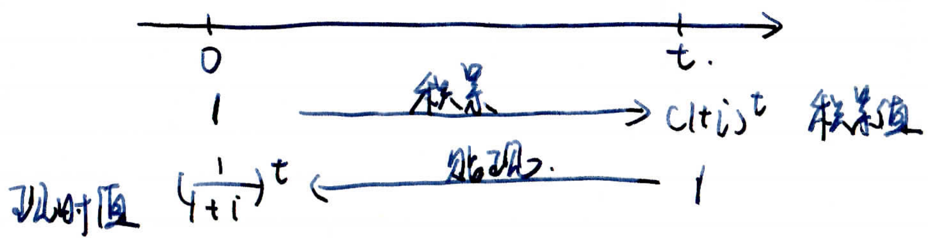
实际利率：i 某一时期投资1，此时期内利息.

· 单利：$a(t) = 1 + it$

$a(t+s) = a(t) + a(s) - 1$.

· 复利：$a(t) = (1+i)^t$

$a(t+s) = a(t) \cdot a(s)$.



积累因子：$(1+i)$ 贴现因子：$\frac{1}{1+i} = v$.

单利贴现：$\frac{1}{1+it}$ 复利贴现：$\frac{1}{(1+i)^t} = v^t$

实际贴现率：$d = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)}$. 时期末余额的百分比

等价：$i = \frac{d}{1-d}$ $d = \frac{i}{1+i} = iv$. $v = 1-d = \frac{1}{1+i}$

利息理论

名义利率: $i^{(m)}$: 每m时期支付一次

每一时期 $i^{(m)}$ 的名义利率 ⇒ 每m时期 $\frac{i^{(m)}}{m}$ 的实际.

例: 一个季度转换的8%名义利率 ⇒ 每季利率2%.

$$1+i=\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^m. \qquad 1-d=\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^m.$$

利息效力: $\delta(t)=\frac{A'(t)}{A(t)}=\frac{a'(t)}{a(t)}$.

表示利息在t时刻强度的度量.

$$\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^m=1+i=v^{-1}=(1-d)^{-1}=\left[1-\frac{d^{(p)}}{p}\right]^{-p}=e^{\delta}.$$

§利息问题求解.

时期的确定: 严格单利: 365天为一年. 取精确值.

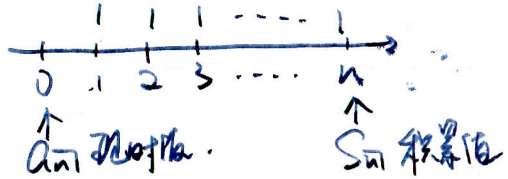
(360天). 常规单利: $360(Y_2-Y_1)+30(M_2-M_1)+D_2-D_1$

银行家规定: 360天为一年. 取精确值.

§基本年金.

期末付年金:

/初付年金:



$$a_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{i} \qquad \ddot{a}_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{d}.$$

$$s_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)^n-1}{d}.$$

$$s_{\overline{n}|}=a_{\overline{n}|}(1+i)^n \qquad \ddot{s}_{\overline{n}|}=\ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n.$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i \qquad \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}+d.$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=a_{\overline{n}|}(1+i)=1+a_{\overline{n-1}|}$$

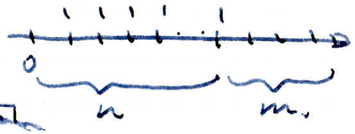
$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=s_{\overline{n}|}(1+i)=s_{\overline{n+1}|}-1$$

任意时间的年金值：

(1). 第一次付款前的若干个时期：

推迟m个时期：现时值：$v^m a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$

(2). 最后一次付款后的若干个时期：



积累值：$s_{\overline{n}|}(1+i)^m = s_{\overline{m+n}|} - s_{\overline{m}|}$

永久年金： $a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$ $\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d}$

n个时期延付，最后在n+k付款 $\frac{(1+i)^k-1}{i}$：

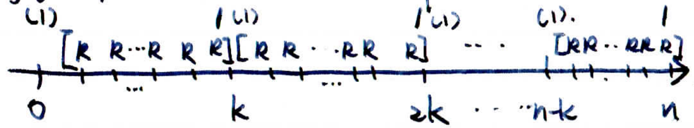
$$a_{\overline{n+k}|} = a_{\overline{n}|} + v^{n+k}\cdot\left[\frac{(1+i)^k-1}{i}\right].$$

§ 一般年金.

支付频率小于利息转换频率：

k：一个支付时期内的利息转换次数

n：利息时期数.



延付年金：现时值 $= v^k + v^{2k} + \cdots + v^{\frac{n}{k}k}$

$$= \frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}.$$

积累值 $= \frac{s_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}$

初付年金：现时值 $= 1 + v^k + \cdots + v^{n-k} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}$.

积累值：$\frac{s_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}$.

永久年金. 现时值：$\frac{1}{i\cdot s_{\overline{k}|}}$（延付）. $\frac{1}{i\cdot a_{\overline{k}|}}$（初付）.

支付频率大于利息转换频率： m：一利息时期内支付次数.

$a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}}$ $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}}$

$s^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n-1}{i^{(m)}}$ $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n-1}{d^{(m)}}$

支付频率趋于无穷：连续年金. $\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\delta}$

$\bar{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n-1}{\delta}$

付款金额按算数级数变化：

$$\begin{array}{ccccccc} & P & P+Q & P+2Q & \cdots & P+(n-2)Q & P+(n-1)Q \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{array}$$

现时值：$P\cdot a_{\overline{n}|}+Q\dfrac{a_{\overline{n}|}-nv^n}{i}$

积累值：$P\cdot s_{\overline{n}|}+Q\dfrac{s_{\overline{n}|}-n}{i}$

①. 递增年金：$P=1$ $Q=1$

现时值：$(Ia)_{\overline{n}|}=\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{i}$

积累值：$(Is)_{\overline{n}|}=\dfrac{\ddot{s}_{\overline{n}|}-n}{i}=\dfrac{s_{\overline{n+1}|}-(n+1)}{i}$

②. 递减年金：$P=n.$ $Q=-1.$ 永久：$\dfrac{P}{i}+\dfrac{Q}{i^2}$ $(Ia)_{\overline{\infty}|}$

$(Da)_{\overline{n}|}=\dfrac{n-a_{\overline{n}|}}{i}$

$(Ds)_{\overline{n}|}=\dfrac{n(1+i)^n-s_{\overline{n}|}}{i}$

☆ 将i换为d即为初付年金.

- $F_n=v^n$ 在n时期末付款1的现时值.
- $G_n=\dfrac{v^n}{d}$ 一项1，1，1……1…的永久金的现时值. 第一次支付在第n个时期末
- $H_n=\dfrac{v^n}{d^2}$ 一项1，2，3…… 的永久年金的现时值.

几何级数：现时值：$\dfrac{1-\left[\frac{1+k}{1+i}\right]^n}{i-k}$，n个时期，$q=1+k$.

$k=i$. 现时值 nv.

§ 收益率（内返回率）

$P(i)=\sum_{t=0}^{n}v^tR_t=0.$ i为收益率.

i：按此利率投资返回的现时值＝投入的现时值.

收益率唯一：①. 一笔业务中净负款只改变一次符号.
②. 未到期投资余额始终为正.

基金的利息度量：

A：基金期初金额
B：基金期末金额
I：时期中赚得利息金额
C_t/C：时刻t/时期内投入金额.

$B=A+C+I.$

$I=iA+\sum_t C_t\cdot {}_{1-t}i_t.$ ${}_ai_b$：时刻b投资1，随后a时期赚的i

均匀假设，$i=\dfrac{2I}{A+B-I}$. $\delta_t=\dfrac{i}{1+(1-t)i}$ $\left(\dfrac{I}{A+\sum C_t(1-t)}\right)$

时间加权利率：

~~i=~~ $i=(1+j_1)(1+j_2)\cdots(1+j_m)-1$

5 分期偿还表和偿债基金.

将来法：未偿还余额 = 余下付款的现时值

过去法：未偿还余额 = 原始贷款积累值 − 已还积累值.

分期偿还表 $R = \dfrac{\text{贷款}}{a_{\overline{n|}\,\text{利率}}}$.

偿债基金年度付款 $= \dfrac{\text{贷款}}{a_{\overline{n|}\,i\&j}} = \text{贷款}\cdot i + \dfrac{\text{贷款}}{s_{\overline{n|}\,j}}$

$$\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^m = 1+i = v^{-1} = (1-d)^{-1} = \left[1-\frac{d^{(p)}}{p}\right]^{-p} = e^{\delta}.$$

$$a(t) = e^{\int_0^t \delta_r dr}.$$

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{i} \qquad s_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad \frac{1}{a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{s_{\overline{n|}}} + i$$

$$a_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{i}$$

$k \cdots n$

支付f > 利息f： $a = \dfrac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}}$ $\quad s = \dfrac{s_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}}$

$$\ddot{a} = \frac{a_{\overline{n|}}}{a_{\overline{k|}}} \qquad \ddot{s} = \frac{s_{\overline{n|}}}{a_{\overline{k|}}}.$$

$$a_{\infty} = \frac{1}{i\cdot s_{\overline{k|}}} \qquad \ddot{a}_{\infty} = \frac{1}{i\, a_{\overline{k|}}}$$

偿债：

$R = \text{贷}\cdot i + \dfrac{\text{贷}}{s_{\overline{n|}\,j}}$

$a_{\overline{n|}\,i\&j}$

$$a = P\cdot a_{\overline{n|}} + Q\,\frac{a_{\overline{n|}} - n v^n}{i} \qquad s = P\cdot s_{\overline{n|}} + Q\cdot\frac{s_{\overline{n|}} - n}{i}$$

$$(Ia)_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - n v^n}{i} \qquad (Is)_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{i}$$

$$(Da)_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i} \qquad (Ds)_{\overline{n|}} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n|}}}{i}$$

$$(Ia)_{\overline{\infty|}} = \frac{P}{i} + \frac{Q}{i^2}.$$

$1+i_0 = it \rightarrow \delta_t = \dfrac{i}{1+it}$

$1+it = (1-t)i \rightarrow \delta_t = \dfrac{i}{1+(1-t)i}$

$$I_n = v^n \quad G_n = \frac{v^n}{d} \quad H_n = \frac{v^n}{d^2}. \qquad a_{\overline{n|}\,\text{几何}} = \frac{1-\left[\frac{1+k}{1+i}\right]^n}{i-k}.$$

$$i = \frac{I}{A+\sum C_t(1-t)} \approx \frac{2I}{A+B-I} = (1+j_1)\cdots(1+j_n)-1$$