工科数分习题课八　导数的应用

石岩

shiyan200245@163.com

Nov.16.2012

本节课的内容和要求

1. 利用L'Hospital法则求不定式极限;

2. 利用导数分析函数性质（单调性、凹凸性、极值最值）.

基本概念和主要结论

○ L'Hospital法则求不定式极限. 以$\frac{0}{0}$型为例,

$$(a)\lim_{x\to x_0} f(x)=0, \lim_{x\to x_0} g(x)=0,$$

$$(b)\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

○ 用导数研究函数的性质

◇ 单调性

定理　$f(x)$在区间I上可导, 则f递增(减) $\Leftrightarrow f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$.

定理　$f(x)$在区间(a,b)内可导, 则f严格递增(减)的充要条件是

(1)$f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0), \forall\, x\in(a,b)$;

(2)在(a,b)内的任何子区间上$f'(x)$不恒为零.

推论　若$f'(x)>0(<0)$, 则f在I上严格递增(严格递减).

◇ 极值问题

Fermat定理　f在x_0可导且取得极值, 则$f'(x_0)=0$.

第一充分条件　f在x_0连续, 在某邻域$U^o(x_0;\delta)$可导.

(i)$x\in(x_0-\delta,x_0), f'(x)\leqslant 0, x\in(x_0,x_0+\delta), f'(x)\geqslant 0, \Rightarrow f(x_0)$极小值;

(ii)$x\in(x_0-\delta,x_0), f'(x)\geqslant 0, x\in(x_0,x_0+\delta), f'(x)\leqslant 0, \Rightarrow f(x_0)$极大值.

第二充分条件　f在某邻域$U(x_0;\delta)$内一阶可导, 在$x=x_0$处二阶可导, 且$f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$.

(i)$f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x_0)$极小值;

(ii)$f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x_0)$极大值.

最值　计算f在$[a,b]$上的驻点、不可导点和端点的函数值, 其中最大(小)一个为最大(小)值.

◇ 凸性和拐点

凸函数 $\Leftrightarrow$

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\ \lambda\in(0,1),\forall\, x_1,x_2\in I.$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},\ \forall x_1<x_2<x_3.\right)$$

凹函数 $\Leftrightarrow$

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\ \lambda\in(0,1),\forall\, x_1,x_2\in I.$$

当不等式严格成立, 则分别称为严格凸(凹)函数.

定理　f在I上可导, 下述命题等价:

1°　f凸函数;

2°　f'增函数;

3°　$f(x_2)\geqslant f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1),\ \forall\, x_1,x_2\in I.$

定理　f在I上二阶可导, 则f是凸(凹)函数$\Leftrightarrow f''(x)\geqslant 0(\leqslant 0), x\in I$.

拐点(inflection point)　拐点是凸曲线与凹曲线的分界点.

必要条件　若$(x_0, f(x_0))$是曲线$y = f(x)$的拐点, 且在该点二阶可导, 则$f''(x_0) = 0$.

充分条件　设f在x_0处可导, 在$U^o(x_0)$上二阶可导, 若$f''(x)$在$U_+^o(x_0), U_-^o(x_0)$符号相反, 则$(x_0, f(x_0))$是曲线$y = f(x)$的拐点.

1. 求极限

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x},\qquad (2)\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x},$$

$$(3)\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x},\qquad (4)\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}},$$

$$(5)\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x},\qquad (6)\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^{ax}}.$$

2. 设$g(x)$有二阶连续导函数, 且$g(0)=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

(1)试确定a使得f在$(-\infty,+\infty)$处连续.

(2)试确定a使得f'在$(-\infty,+\infty)$处连续.

3. 判断函数$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$在$(0,+\infty)$上的单调性.

4. 证明不等式

$$\sin x > x-\frac{x^3}{6}, x>0.$$

5. 设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 在第一象限上求一点$p$ 使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小.

6. 判断函数$f(x)=x\ln x, x>0$的凹凸性, 并求在$(0,\mathrm{e}]$上的最大值和最小值.