第二章

自动控制系统的数学模型(1)

引 言

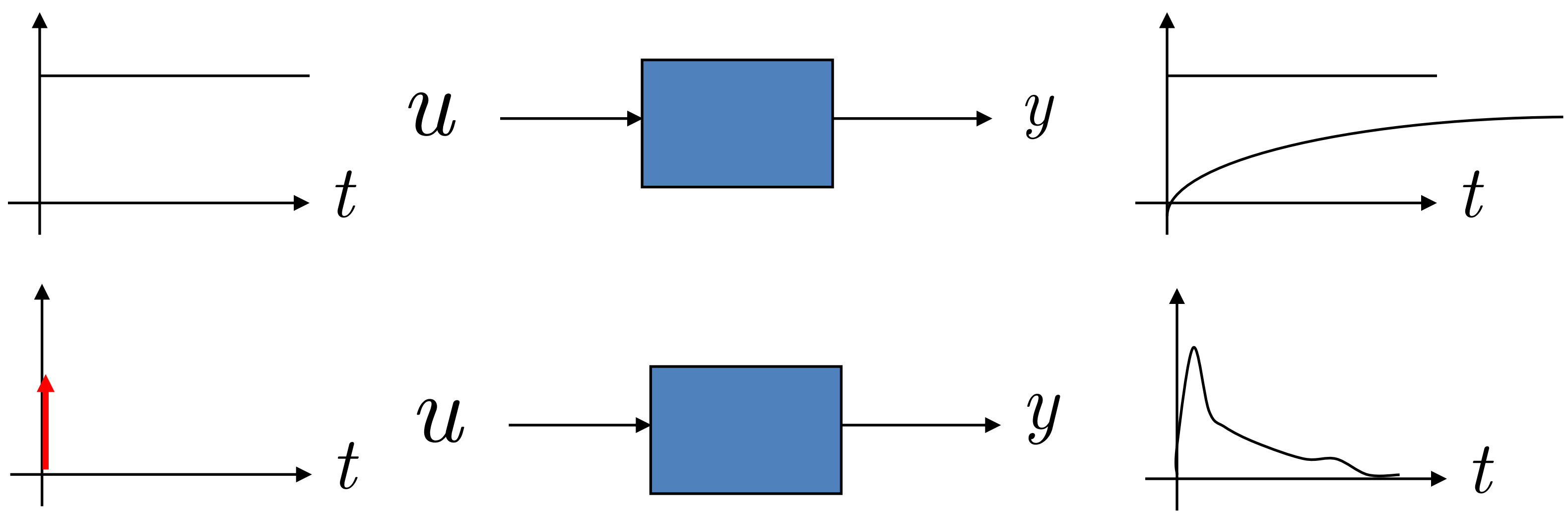
为控制一系统，特别是复杂系统，需要知道其数学模型，即描述系统输入、输出变量以及内部各变量之间关系的数学表达式。

绝大多数系统的数学模型都可以用一个或一组微分方程和代数方程来描述。

建立数学模型一般有两种方法：实验法和解析法。

实验法和解析法简介：

假定对系统的内部结构一无所知。为描述这个系统的动态行为，可在系统的输入端施以一系列典型信号，并观察其响应，例如：



尽管这个物理系统可能非常复杂，但通过若干典型响应的分析却可以认为，该系统可用一个一阶微分方程来逼近（或描述）：

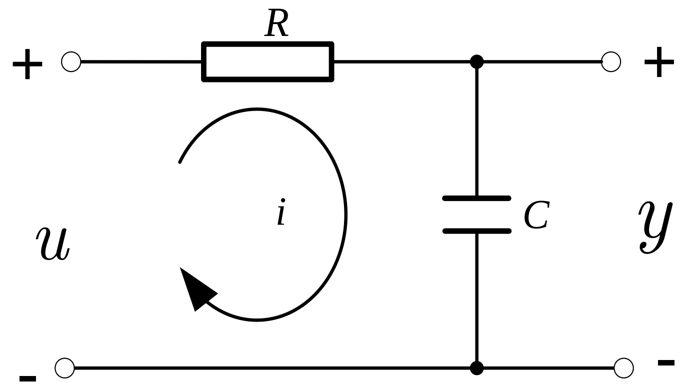
$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=u(t)$$

实验方法适用于复杂系统；而解析法是对系统各部分的运动机理进行分析，根据物理定律得到数学模型，一般适用于简单系统。实际上常把这两种方法结合起来建立数学模型。

2-1 控制系统微分方程的建立

一、列写微分方程的一般方法

例：RC 网络：

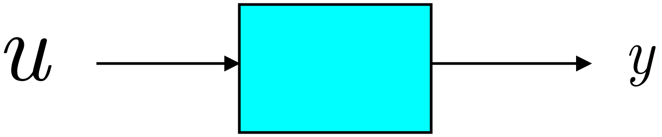


根据关系

$$i = C\frac{dy}{dt}$$

可得

$$RC\frac{dy}{dt} + y = u$$



这是一个一阶微分方程。

根据对象的不同，描述其动态行为的数学模型也不同。例如

1. 线性微分方程；

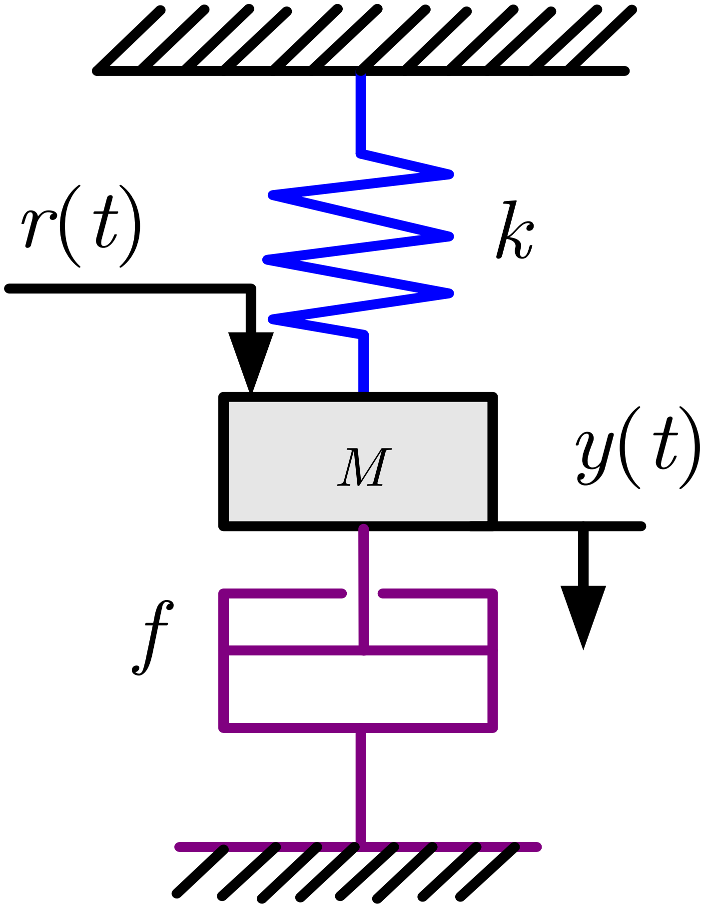
2. 非线性微分方程；

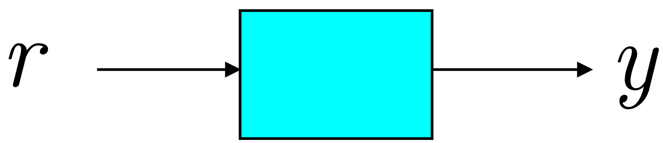
3. 偏微分方程；

4. 其它数学模型…

有时，同一个被控对象，如飞机，在不同的工作状态下，表现出完全不同的动态行为，描述它们的数学模型也不同。

例：考虑如下弹簧-质量-阻尼器系统：当外力$r(t)$作用于系统时，试写出$r(t)$与质量块的位移$y(t)$之间的动态方程，其中弹簧的弹性系数为k，阻尼器的阻尼系数为f，质量块的质量为M。





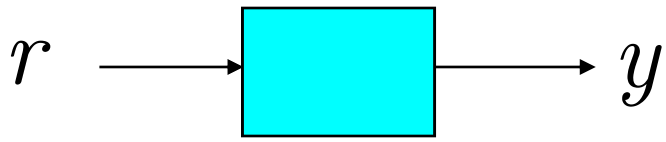
解：分析质量块M受力：

外力：$r(t)$；

弹簧恢复力：$Ky(t)$；

阻尼力：$fdy(t)/dt$；

惯性力：$Md^2y(t)/dt^2$。



根据牛顿第二定律，

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}=r(t)-f\frac{dy(t)}{dt}-ky(t)$$

或

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+f\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=r(t)$$

二、线性系统

一般地，如下形式微分方程描述的系统称为线性系统：

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y$$
$$= b_0 r^{(m)} + b_1 r^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{r} + b_m r, \quad m \le n$$

若其所有系数均为常数，称为定常线性系统；若至少有一个系数是时间的函数，称为时变线性系统。

例：考虑如下两个系统：

$$y^{(3)} + 2y'' + 3y' + 4y = r(t)$$

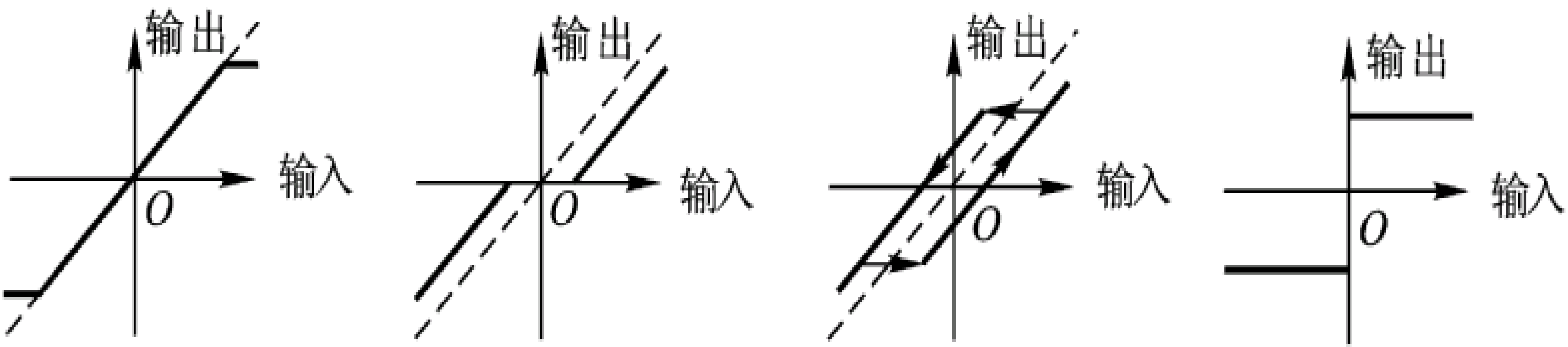
及

$$y^{(3)} + \sin(t)y'' + t^2 y' + 4ty = r(t)$$

它们是线性系统吗？是时不变线性系统吗？是时变线性系统吗？

2-2 非线性微分方程的线性化

一、工程中的非线性



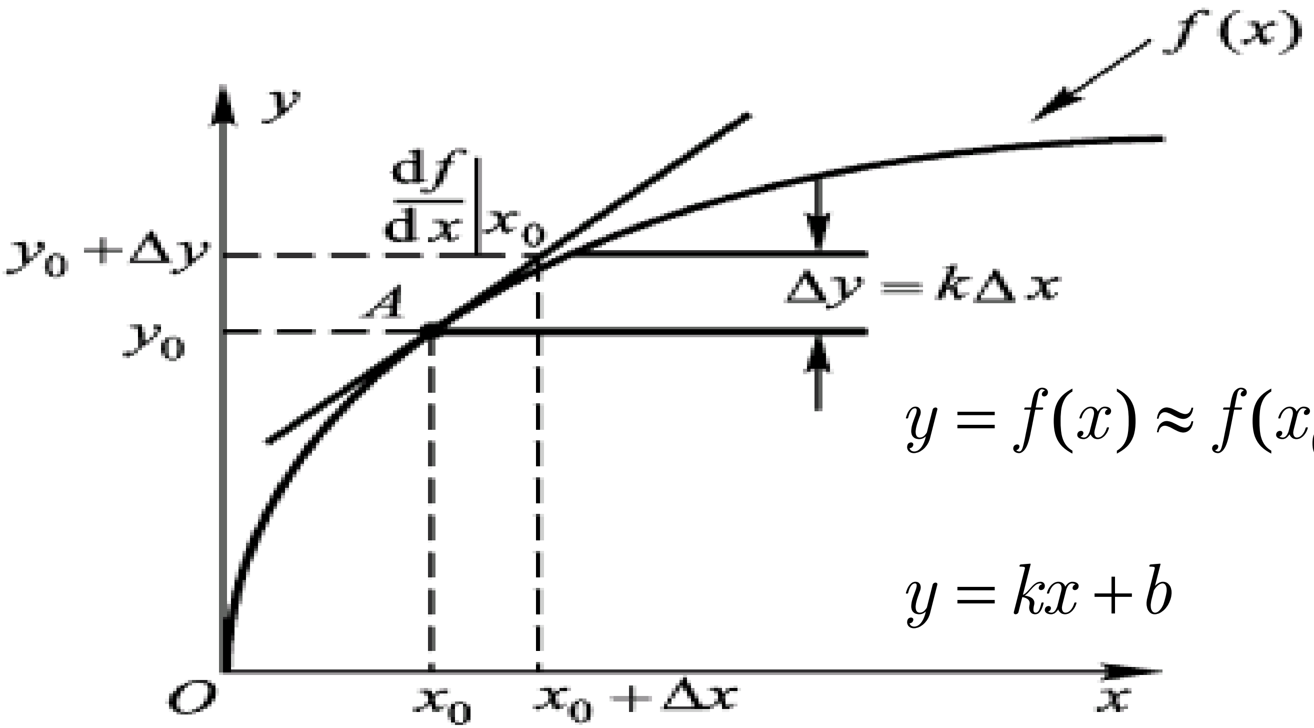
(a)饱和　(b)死区　(c)间隙　(d)继电

二、弱非线性的线性化

如上图(a)，当输入信号幅值较小时，可忽略非线性影响，近似为放大特性。对(b)和(c)，当死区或间隙很较小时(相对于输入信号)同样忽略其影响，近似为放大特性，如图中虚线所示。

三、平衡位置附近的小偏差线性化

输入和输出关系具有如下图所示的非线性特性



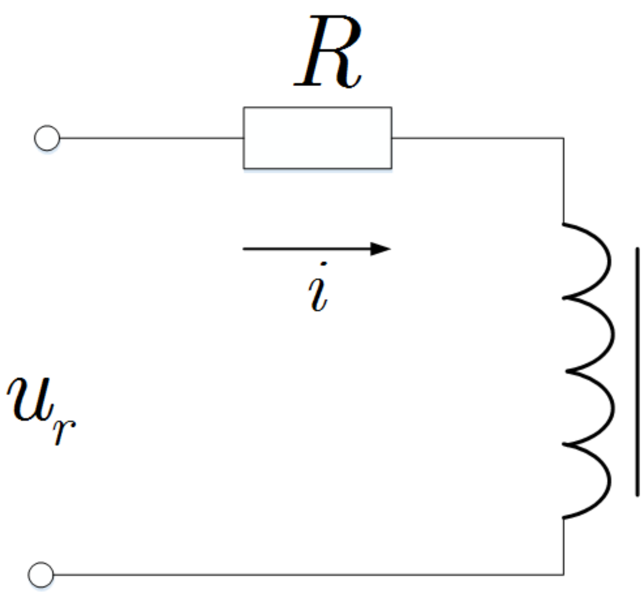
$$y = f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0)$$

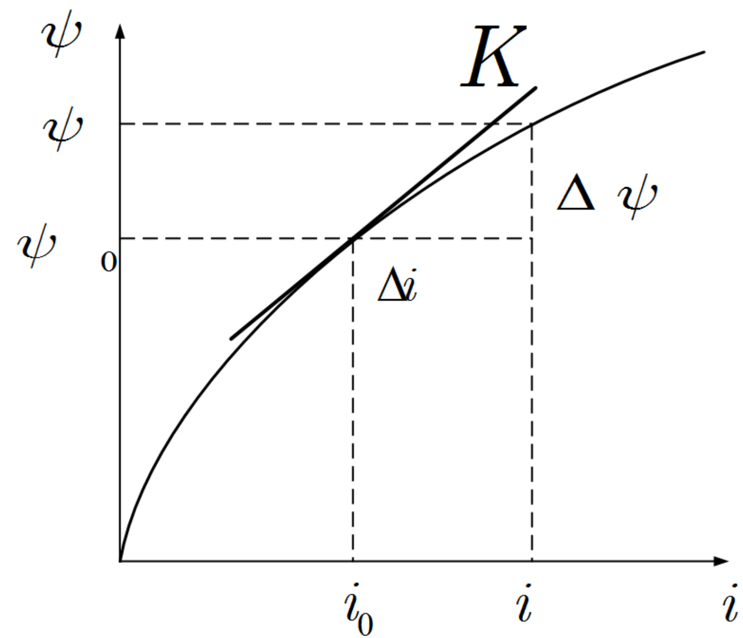
$$y = kx + b$$

例：铁芯线圈电路如图所示：

$$iR + K_1 \frac{d\psi(i)}{dt} = u_r(t)$$

其中，$d\psi/dt$ 为电感的感应电压，$\psi(i)$为磁通量，与电流i的关系如图所示。





线性化：

$$\psi(i) \approx \psi(i_0) + \left.\frac{d\psi}{di}\right|_{i=i_0} (i - i_0)$$

$$\Rightarrow \psi(i) \approx Ki + b,\ \ K = \left.\frac{d\psi}{di}\right|_{i=i_0}$$

所以

$$\frac{d\psi(i)}{dt} = \frac{d\psi(i)}{di}\frac{di}{dt} = K\frac{di}{dt}$$

故

$$iR + K_1 K\frac{di}{dt} = u_r(t)$$

复习：*Laplace* 变换及反变换

一、*Laplace* 变换

给定实函数$f(t)$, $f(t)=0, \forall t<0$。$f(t)$的 *Laplace* 变换定义为

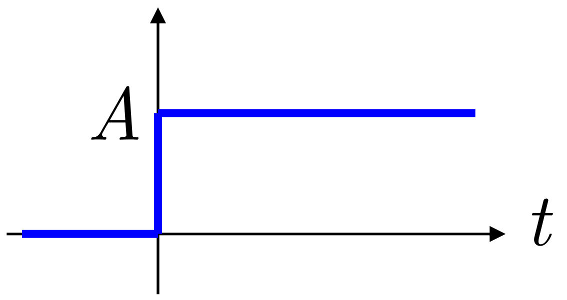
$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

其中，s 为一复变量。

例：令 $f(t)=e^{-\alpha t},\ t\geq 0$。求$\mathcal{L}[f(t)]$。

例：阶跃函数：

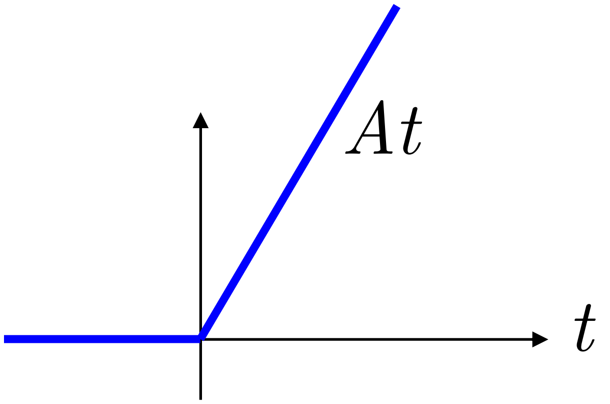
$$f(t)=\begin{cases}A, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$$



求 $\mathcal{L}[f(t)]$。

例：斜坡函数：

$$f(t)=\begin{cases}At, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$$



求 $\mathcal{L}[f(t)]$。

例：

$$f(t)=\begin{cases} A\sin\omega t, t\geq 0 \\ 0, t<0 \end{cases}$$

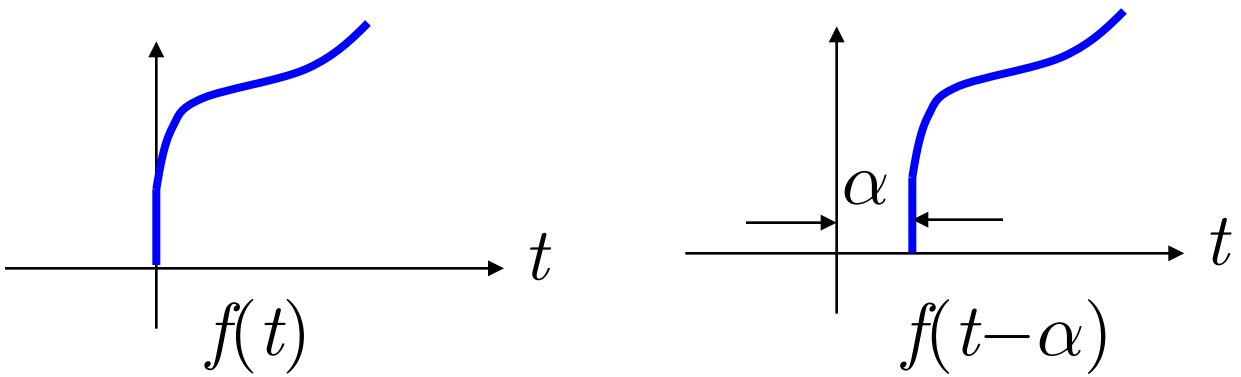
求 $\mathcal{L}[f(t)]$。

同理，

$$\mathcal{L}[A\cos\omega t 1(t)]$$

求 $\mathcal{L}[f(t)]$。

例：延迟函数 $f(t-\alpha)$:

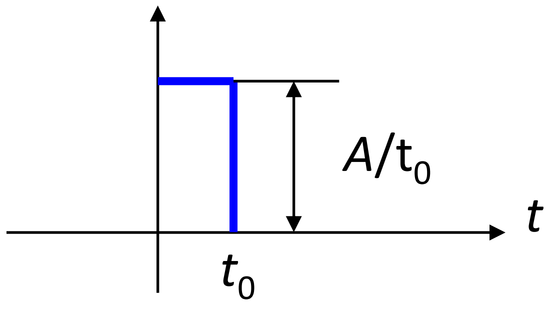


令 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)]=e^{-\alpha s}F(s),\ \forall\ \alpha\geq 0$$

例：脉动函数

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{A}{t_0},0\le t\le t_0\\ 0,t<0,t>t_0\end{cases}$$



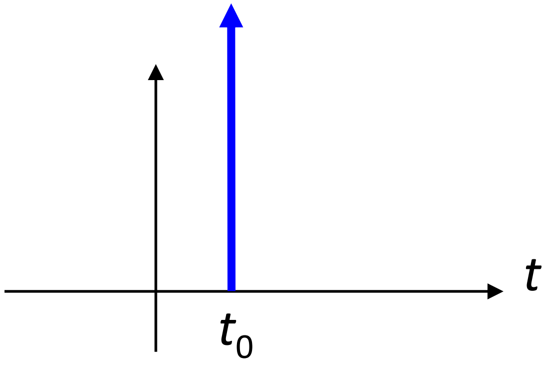
$f(t)$ 可表示为

$$f(t)=\frac{A}{t_0}1(t)-\frac{A}{t_0}1(t-t_0)$$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{A}{t_0 s}-\frac{A}{t_0 s}e^{-st_0}$$

例：脉冲函数：

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$$



则

$$\int_{t_0-}^{t_0+}\delta(t-t_0)dt=1$$

特别地，

$$\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt=1$$

*Laplace*变换

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)]=e^{-st_0}$$

及

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$$

二、*Laplace* 反变换

给定$Laplace$ 变换$F(s)$, 其反变换记为

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

由下式给出

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

其中，c 为大于$F(s)$所有奇异点实部的常数。

由于$Laplace$变换和其时间函数是一一对应的，对许多函数可以直接求得其反变换。

例：给定 $F(s)=1/(s+1)$，求 $f(t)$。

例：给定 $F(s)=1/s$，求 $f(t)$。

三、*Laplace* 变换定理

定理1：令 k 为一常数， $F(s)$ 为$f(t)$的$Laplace$ 变换。则

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$$

定理2：令 $F_1(s)$ 及$F_2(s)$ 分别为 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$的 $Laplace$ 变换。则

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$$

定理 3(微分定理)：令 $F(s)$为$f(t)$的 $Laplace$ 变换，$f(0)$ 为t趋于0时$f(t)$的极限。则$f(t)$的微分的$Laplace$ 变换为

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-\lim_{t\to 0}f(t)=sF(s)-f(0)$$

更一般地，

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s)-\lim_{t\to 0}\left[s^{n-1}f(t)+s^{n-2}\frac{df(t)}{dt}+\cdots+\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\right]$$

$$=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f^{(1)}(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

定理4(积分定理)：$f(t)$积分的$Laplace$ 变换为

$$\mathcal{L}\left[\int_o^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}$$

对n阶积分，

$$\mathcal{L}\left(\underbrace{\int_0^t\cdots\int_0^t f(u)(du)^n}_{n}\right)=\frac{F(s)}{s^n}$$

定理5 (复位移定理)：令$F(s)$为$f(t)$的$Laplace$变换，则 $e^{\mp\alpha t}f(t)$ 的$Laplace$ 变换为

$$\mathcal{L}[e^{\mp\alpha t}f(t)]=F(s\pm\alpha)$$

其中，α 是一常数。

定理6 (卷积定理)：令$F_1(s)$ 和 $F_2(s)$分别为$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$的$Laplace$变换，且$f_1(t)=0$, $f_2(t)=0$, $\forall\ t<0$。则

$$F_1(s)F_2(s)=\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]$$

四、*Laplace* 反变换：部分分式展开法

考虑函数

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

其中，$A(s)$和$B(s)$均为s的多项式且$\deg(A(s))\geq\deg(B(s))$。记 $A(s)$为

$$A(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

其根称为极点；记

$$B(s)=b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m$$

其根称为零点。

1. $F(s)$ 均为单根时的部分分式展开

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\cdots\frac{a_n}{s+p_n}$$

其中，

$$a_i=\left[(s+p_i)F(s)\right]\Big|_{s=-p_i}$$

$$f(t)=a_1e^{-p_1t}+a_2e^{-p_2t}+\cdots+a_ne^{-p_nt},\forall t\geq 0$$

例：

$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

例：

$$F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}$$

$$F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}=\frac{10+2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}$$

$$=\frac{10}{(s+1)^2+2^2}+\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}$$

$$=5\frac{2}{(s+1)^2+2^2}+2\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}$$

因此，

$$f(t)=5e^{-t}\sin 2t+2e^{-t}\cos 2t,\quad t\geq 0$$

2. $F(s)$ 含重根时的部分分时展开

$$G(s)=\frac{B(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_{n-r})(s+p_i)^r},\quad (i\neq 1,2,\cdots,n-r)$$

则 $G(s)$ 可展开成

$$G(s)=\underbrace{\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{a_{n-r}}{s+p_{n-r}}}_{|\leftarrow\, n-r \text{ terms of simple roots } \rightarrow|}$$

$$+\underbrace{\frac{A_1}{s+p_i}+\frac{A_2}{(s+p_i)^2}+\cdots+\frac{A_r}{(s+p_i)^r}}_{|\leftarrow\, r \text{ terms of repeated roots } \rightarrow|}$$

其中，

$$a_j = \left[(s + p_j) G(s) \right] \Big|_{s=-p_j} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n - r)$$

$$\begin{cases} A_r = \left[(s + p_i)^r G(s) \right] \Big|_{s=-p_i} \\ A_{r-k} = \dfrac{1}{k!} \dfrac{d^k}{ds^k} \left[(s + p_i)^r G(s) \right] \Big|_{s=-p_i} \qquad (k = 1, 2, \cdots r - 1) \end{cases}$$

例：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$$

则

$$G(s)=\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s+2}+\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{(s+1)^2}+\frac{A_3}{(s+1)^3}$$

其中

$$\begin{cases} a_1=\left[sG(s)\right]\big|_{s=0}=\dfrac{1}{2} \\ a_2=\left[(s+2)G(s)\right]\big|_{s=-2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3=\left[(s+1)^3G(s)\right]\big|_{s=-1}=-1 \\ A_2=\dfrac{d}{ds}\left[(s+1)^3G(s)\right]\big|_{s=-1}=0 \\ A_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3G(s)\right]\big|_{s=-1}=-1 \end{cases}$$

五、解 LTI 微分方程

- 对微分方程两端进行$Laplace$ 变换；
- 求输出变量；
- 部分分式展开；
- 用$Laplace$ 反变换求得微分方程的时间解。

例：解方程：$\ddot{y}+3\dot{y}+2y=5u(t)$

其中　$u(t)=1(t), y(0)=-1, \dot{y}(0)=2$

解：方程两边进行$Laplace$变换:

$$s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)+3sY(s)-3y(0)+2Y(s)=5/s$$

将初始条件点入并用部分分式展开得:

$$Y(s)=\frac{-s^2-s+5}{s(s+1)(s+2)}=\frac{5}{2s}-\frac{5}{s+1}+\frac{3}{2(s+2)}$$

取$Laplace$反变换:

$$y(t)=2.5-5e^{-t}+1.5e^{-2t}, \qquad t\geq 0$$

例：解方程：

$$y^{(3)}+3y''+3y'+y=1,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0$$

解：

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{b_1}{s+1}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_3}{(s+1)^3}+\frac{c_4}{s}$$

$$b_3=[(s+1)^3\frac{1}{s(s+1)^3}]_{s=-1}=-1$$

$$b_2=\left\{\frac{d}{ds}[\frac{1}{s(s+1)^3}(s+1)^3]\right\}_{s=-1}=[\frac{d}{ds}(\frac{1}{s})]_{s=-1}$$

$$=(-s^{-2})\Big|_{s=-1}=-1$$

$$b_1 = \frac{1}{2!}(2s^{-3})\bigg|_{s=-1} = -1$$

$$c = \frac{1}{s(s+1)^3}s\bigg|_{s=0} = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1}$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - te^{-t} - e^{-t}, \quad t \geq 0$$