工科数分习题课五　函数的连续性

石岩

shiyan200245@163.com

Oct.26.2012

本节课的内容和要求

1.掌握函数的连续性;

2.掌握函数的一致连续性.

基本概念和主要结论

1.函数的连续性

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0);$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \text{ s.t. } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ for } |x - x_0| < \delta.$$

◇ 间断点

1)第一类间断点（左、右极限存在）

i)可去间断点 若$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$,而f在点x_0无定义，或有定义但$f(x_0) \neq A$;

ii)跳跃间断点 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$.

2)第二类间断点（至少有一侧极限不存在）

◇ 连续函数的局部性质

a)局部有界性 b)局部保号性 c)四则运算

◇ 重要结论

a)初等函数的连续性 初等函数在其定义域内是连续的.

b)复合函数的连续性 f在x_0处连续,g在u_0处连续,$u_0 = f(x_0)$,则

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0)).$$

c)反函数的连续性 若函数f在$[a,b]$上严格单调并连续,则反函数f^{-1}在其定义域$[f(a), f(b)]$或$[f(b), f(a)]$上连续.

2. 函数的一致连续性

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ s.t. } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \text{ for } |x' - x''| < \delta.$$

■ 一致连续性定理　若函数f在闭区间$[a,b]$上连续,则f在$[a,b]$上一致连续.

重要结论

1)设区间I_1, I_2为有限或无限区间,且I_1的右端点$c \in I_1$,I_2的左端点也为$c \in I_2$.若f分别在I_1, I_2上一致连续,则在$I_1 \bigcup I_2$上也一致连续.

2)若f, g都在区间I上一致连续,

a)则$f+g$也在I上一致连续;

b)若I为有限区间,则$f \cdot g$也在I上一致连续.

1. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

2.设f为区间I上的单调函数.证明:若$x_0\in I$为f的间断点,则x_0必是f的第一类间断点.

3. 设函数$f(x)$在$(0,1)$上有定义且$f(x)\mathrm{e}^x$与$\mathrm{e}^{-f(x)}$在$(0,1)$上单调递增. 证明$f(x)$在$(0,1)$上连续.

4.证明:在(a,b)上的连续函数f为一致连续的充要条件是$f(a+0)$和$f(b-0)$都存在.

思考:1.设I为有限区间.若f在I上一致连续，则f在I上有界(证明).

若I为无限区间结论是否成立?

2.若$\forall\ \varepsilon>0$,f在$[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$上连续能否推出$f$在$(a,b)$上连续?

能否推出f在(a,b)上一致连续?

5.设f在$[a,+\infty)$上连续,且$\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在(有限值).

证明:1)f在$[a,+\infty)$上有界;

2)f在$[a,+\infty)$上一致连续.

思考:3)f满足上述条件,则在$[a,+\infty)$上必能取到最大值和最小值?

4)若f在$[a,+\infty)$上一致连续,则$\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在?

5)若f在$[a,+\infty)$上一致连续,则f在$[a,+\infty)$上有界?