作业3 习题答案

1. 计算行列式

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} (1+a) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1-a) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (1+b) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (1-b) \end{vmatrix}$

解: (1) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1,c_3-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 \end{vmatrix}$

第三列提出2,第二行、第三行减去第一行,再按第三列展开得到$D = 4(b-a)(c-a)(b-c)$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$每列的和相等,所以第二、三行加到第一行,再提出$(a+2b)$

得$(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1,c_3-c_1} (a+2b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ b & 0 & a-b \end{vmatrix}$按第一行展开得$D = (a+2b)(a-b)^2$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-4c_4} \begin{vmatrix} -15 & 2 & 3 & 4 \\ -10 & 0 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$按第四行展开得$D=0$

(4)由行列式的性质$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (1+a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-b) \end{vmatrix} = a^2b^2$

2.已知x, y, z两两不相等,求证: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \neq 0.$

证: 这是范德蒙行列式,显然.

3.计算n阶行列式(1)$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} x_1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_1+a_n \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix}$

解: (1) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}b^n + a^n$按最后一行展开可得

(2)若$x_1 = 0, D = 0.$

若$x_1 \neq 0.$加上一行,方便消项$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_1+a_n \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 \end{vmatrix}$

$\rightarrow \begin{vmatrix} 1+\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{x_1} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 \end{vmatrix} = x_1^n(1+\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{x_1}).$

(3)按第一行展开可得递推公式$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$. 令$k_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}, k_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$ 则

$$D_n - k_1 D_{n-1} = k_2(D_{n-1} - k_1 D_{n-2})$$

$$D_n - k_2 D_{n-1} = k_1(D_{n-1} - k_2 D_{n-2})$$

由上两式可得$D_n = \frac{k_1^{n+1} - k_2^{n+1}}{\sqrt{a^2-4bc}}$

4.求4阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$中第四行各元素余子式之和.

解: 由余子式定义,即求$\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$=7$\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$

5.证明n阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n(a_0-\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i})$

(2) $\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&0&\cdots&0&0\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&\cdots&0&0\\0&1&\alpha+\beta&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$

(3) $\begin{vmatrix}\cos\theta&1&0&\cdots&0&0\\1&2\cos\theta&1&\cdots&0&0\\0&1&2\cos\theta&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2\cos\theta&1\\0&0&0&\cdots&1&2\cos\theta\end{vmatrix}=\cos n\theta.$

证: (1)第2列提出a_1,第3列提出$a_2\cdots$,第n 列提出a_n得$a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}a_0&\frac{1}{a_1}&\frac{1}{a_2}&\cdots&\frac{1}{a_n}\\1&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$,再第一列减去后面每一列,再按第一列展开可得结论.

(2)利用3.(3)的结论,令$c=1,a=\alpha+\beta,b=\alpha\beta$ 分$\alpha>\beta,\alpha<\beta$两种情况讨论即可

(3)用数学归纳法.

$D_1=\cos\theta, D_2=2\cos\theta^2-1=\cos 2\theta$.猜想$D_n=\cos n\theta$.设$n<k$ 时假设成立,当$n=k+1$时,按第n行展开$D_n=2\cos\theta D_{n-1}-D_{n-2}=\cos n\theta$.

6.证明$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

证: 由行列式的性质$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$(互换两次列,不变号)

7.由$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$证明奇偶排列各半.

证: 由行列式的定义$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$等于奇排列的个数减去偶排列的个数,等于零,显然各半.

8.证明:$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$

证: 把矩阵的前k行作行变换,化为三角矩阵,再把第$(k+1)$列到第(k+r)列作列变换化为上三角矩阵,即得结论

9.用克莱姆法则解下列线性方程组:

$$(1)\begin{cases} 5x_1+6x_2=1 \\ x_1+5x_2+6x_3=0 \\ x_2+5x_3+6x_4=0 \\ x_3+5x_4+6x_5=0 \\ x_4+5x_5=0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=0 \\ x_1-3x_2-6x_4=3 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_4-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

解: (1) $x_1=\frac{221}{665}, x_2=\frac{-13}{133}, x_3=\frac{1}{35}, x_4=\frac{-1}{133}, x_5=\frac{1}{665}$
(2) $x_1=\frac{-11}{3}, x_2=\frac{-134}{27}, x_3=\frac{-59}{27}, x_4=\frac{37}{27}$

10.设线性空间$a_1,a_2,\cdots,a_n$是数域P中互不相同的数,$b_1,b_2,\cdots,b_n$是数域P中任意一组给定的数,用克莱姆法则证明:存在唯一的数域P上的多项式$f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$ 使$f(a_i)=b_i, i=1,2,\cdots,n$

证: $f(a_i)=b_i$,写成矩阵的形式为
$\begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,系数矩阵转置再换下行的顺序后是范德蒙行列式,又$a_i$互不相同,行列式不为零,即可有克莱姆法则求出唯一解