第六章 图

郑征

zhengz@buaa.edu.cn

软件与控制研究室

第六章 图

第0讲 图论简介

解“图”

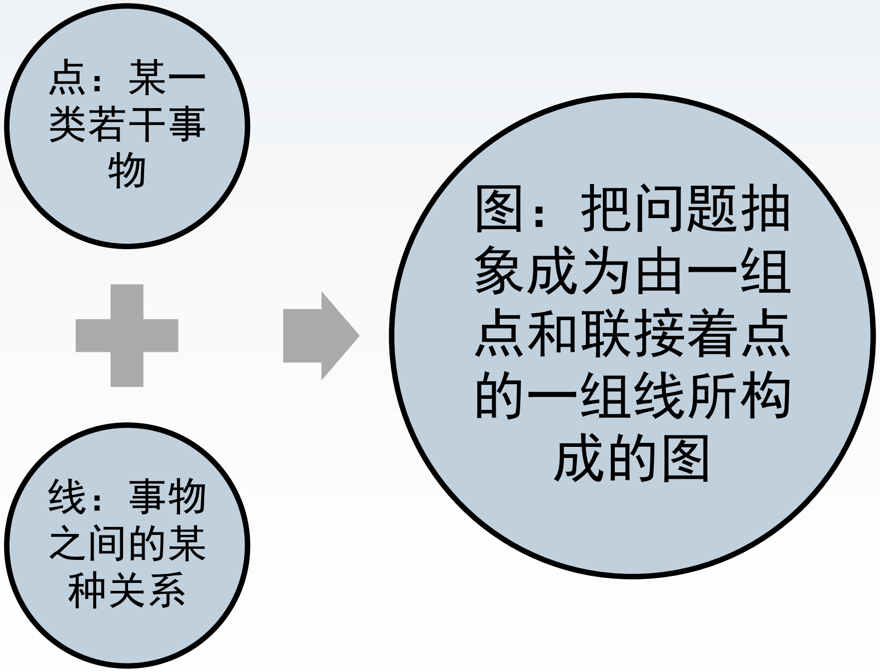
- 圖
  - (会意。从囗,从啚。囗({wéi}),表示范围。啚({bǐ}),“鄙”的本字,表示艰难。合起来表示规划一件事,需慎重考虑,相当不容易。本义:谋划,反复考虑)
  - 词性变化:(所画的图画)

图论简介（一）

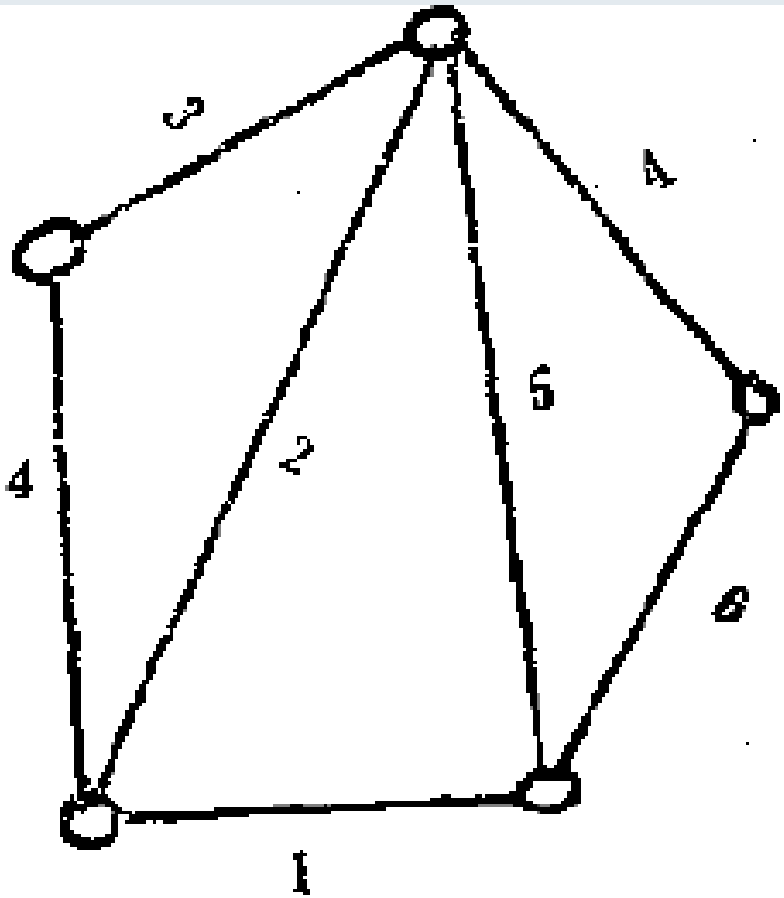
- 在数学领域，专门研究由一组点和联结着点的一组线所组成的图的问题的学科，叫做图论。
- 重要性：
  - 近年来离散数学论坛上的一门活跃的分支；
  - 它在生产、生活中有着广泛的应用；
  - 不少专题已列入科研课题；
  - 中国组合数学与图论学会；
  - 很多大学设立图论专业。

图论简介（二）

- 重要性（续）：
  - 一种实际问题的建模方法:
    - 许多问题都是研究某一类实物和它们之间的某种关系;

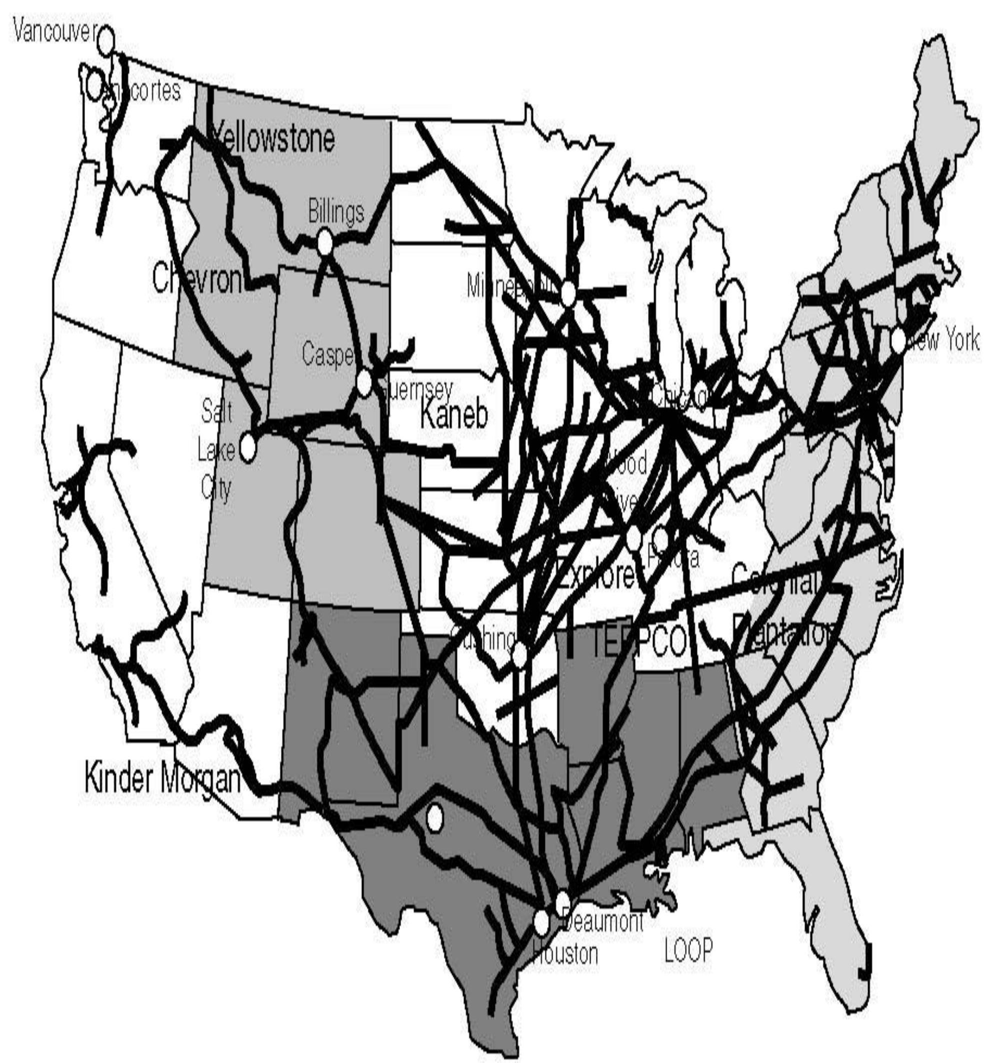


图论简介（三）



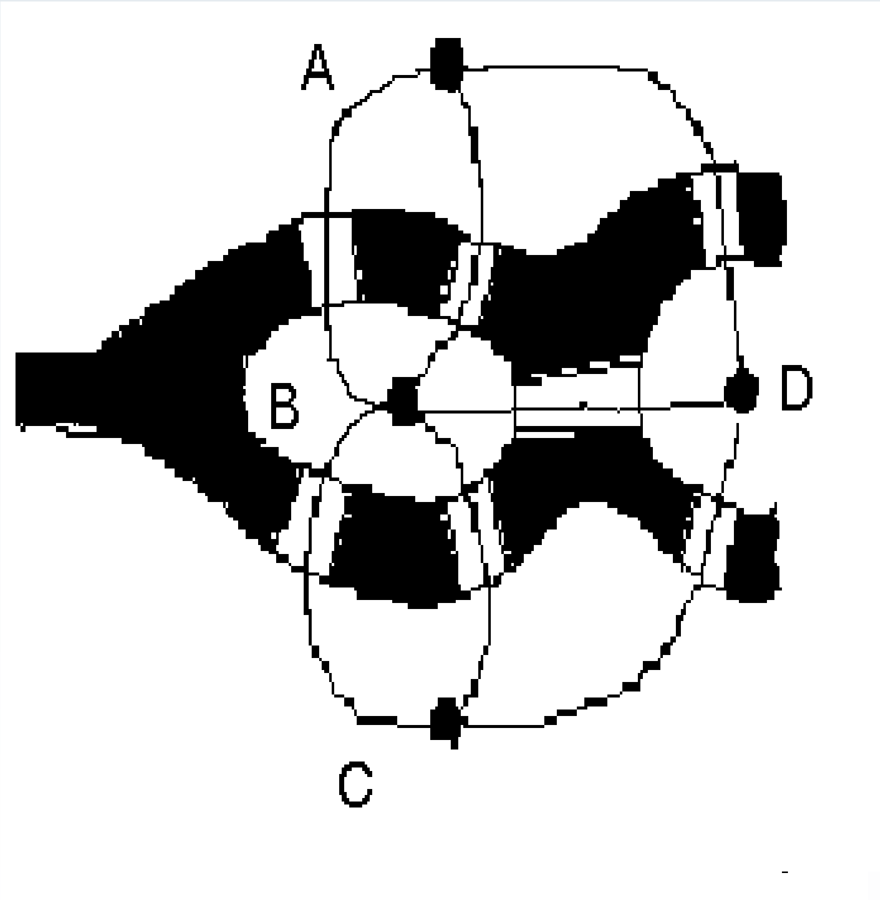
- **启发问题1**：
  - 某乡镇的五个村，它们之间都有公路相通；
  - 我们要在这些村间架起电话线，既保证各村之间都能通话，又要电话线路长度最短，试求一个最优方案。
  - 试想：如果有50个村，100个村或更多的村镇？？

图论简介（五）



- **启发问题2：**
  - 在空袭作战下，石油管道网中的关键节点通常是首先被攻击的目标。因此，如何根据节点的网络分布结构以及其他环境或实际约束找到这些关键节点进行保护，对于反空袭作战至关重要。
  - 攻击?

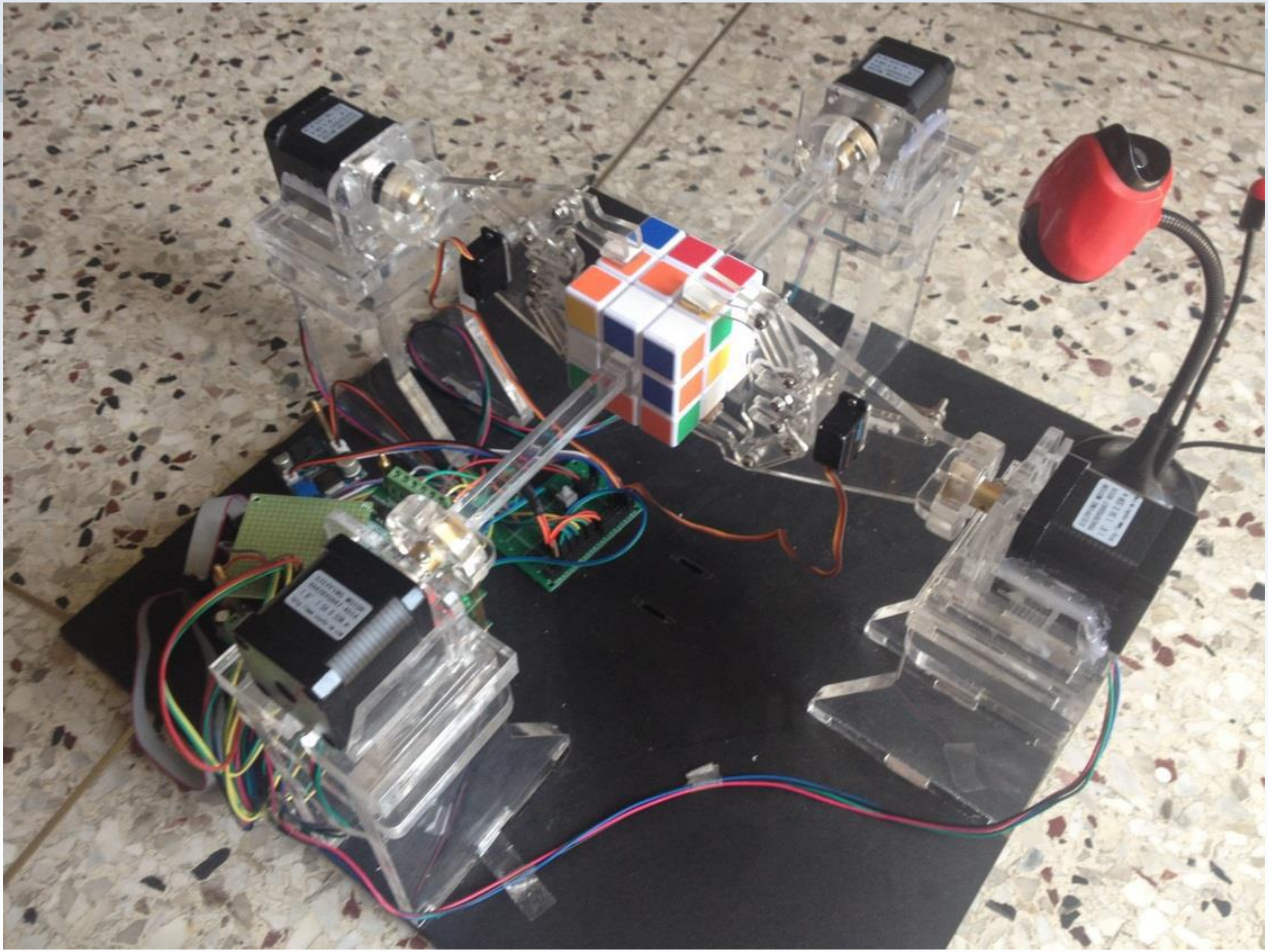
图论简介（七）



- **启发问题3：**
  - 邮递员能否每天在**每一条街上只是不重复地走过一次**，最后完成任务返回邮局。
  - 哥尼斯堡桥问题，图中A、B、C、D四块陆地有七座桥联通。

图论简介（九）

* **启发问题4:**
  * 魔方的原理是什么？
  * 能否用图的概念进行解释？



图论中的重要知识

- 欧拉通路：通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通路；（哥尼斯堡桥问题）
  - 欧拉回路；欧拉图；半欧拉图
  - 判别方法
- 最短路径问题（邮递员问题，布线问题）
  - 单源点的最短路径问题
  - 判别方法

图论中的重要知识

- 二部图（资源分配问题）
  - 二部：资源供应部和资源接受部

第六章

第1讲 图的基本概念

第六章 第1讲 图的基本概念

- 1.预备知识,无向图,有向图,相邻,关联
- 2.度,握手定理,度数列,可(简单)图化
- 3.图同构
- 4.图族

预备知识

- 有序积: $A\times B=\{ <x,y> \mid x\in A\wedge y\in B\}$

  有序对: $<x,y>\neq<y,x>$

  卡氏积

- 无序积: $A\&B=\{ \{x,y\} \mid x\in A\wedge y\in B\}$

  无序对: $\{x,y\}=\{y,x\}$

  二元集合的集合

- 多重集: $\{a,a,a,b,b,c\}\neq\{a,b,c\}$

  重复度: a的重复度为3, b的为2, c的为1

无向图(undirected graph)

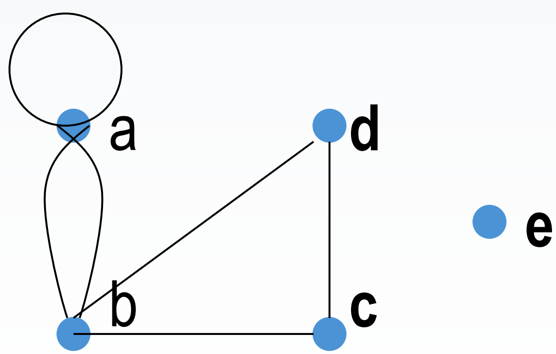
- 无向图(graph): $G=<V,E>$,

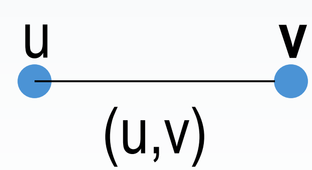
  (1) $V\neq\emptyset$, 顶点,结点(vertex / node)

  (2) 多重集$E\subseteq V\&V$, 边(edge / link)

- 例: $G=<V,E>, V=\{a,b,c,d,e\}$,

  $E=\{(a,a),(a,b),(a,b),(b,c),(c,d),(b,d)\}$.





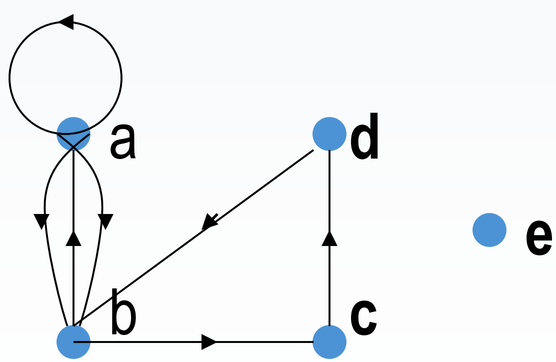
有向图(directed graph)

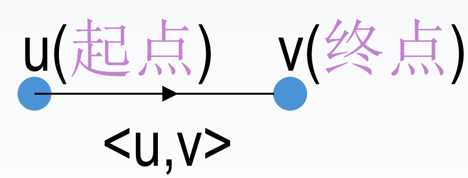
- 有向图(digraph): D=<V,E>,

  (1) V≠∅, 顶点,结点(vertex / node)

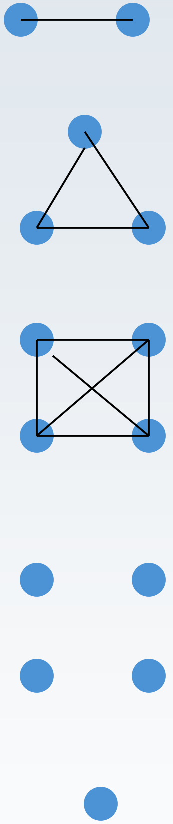
  (2) 多重集E⊆V×V, 边(edge / link / arc)

- 例: D=<V,E>,V={a,b,c,d,e}, E={ <a,a>, <a,b>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,(d,b) }.





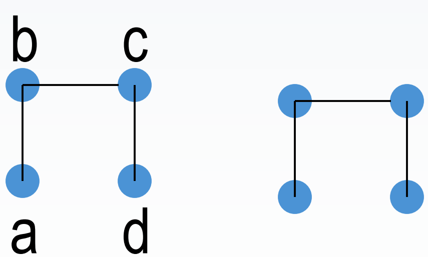
n阶图,零图,平凡图,空图

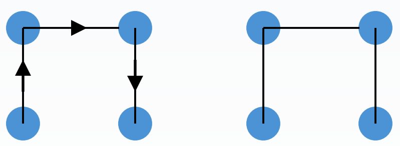


- 若$G=<V,E>$, 则$V(G)=V$, $E(G)=E$
- 若$D=<V,E>$, 则$V(D)=V$, $E(D)=E$
- n阶图(order-n graph): $|V(G)|=n$
- 有限图(finite graph): $|V(G)|<\infty$
- 零图(null graph): $E=\varnothing$, N_n
- 平凡图(trival graph): 1阶零图, N_1
- 空图(empty graph): $V=E=\varnothing$, $\varnothing$

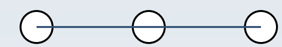
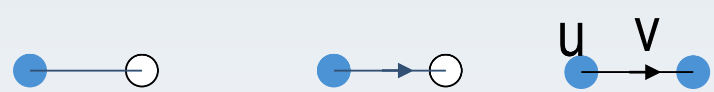
标定图,非标定图,基图

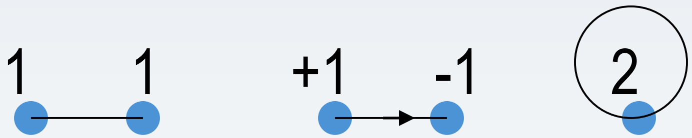
- 标定图(labeled graph): 顶点或边带标记
- 非标定图(unlabeled graph): 顶点或边不带标记
- 基图(底图): 有向图去掉边的方向后得到的无向图

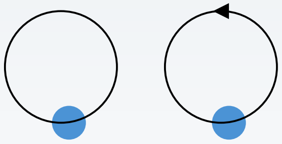


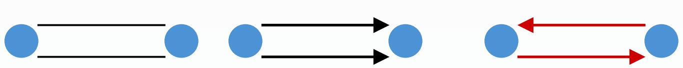


相邻(adjacent),关联(incident)

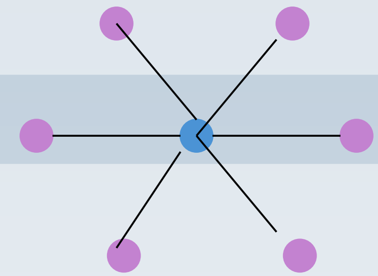
- 相邻(邻接)(adjacent): 点与点,边与边 
- 邻接到,邻接于: u邻接到v, v邻接于u 
- 关联(incident):点与边 

- 关联次数: 

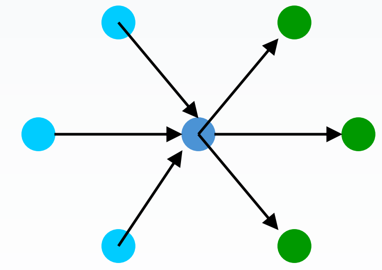
- 环(loop):只与一个顶点关联的边 
- 孤立点(isolated vertex): 
- 平行边(parallel edge):



邻域(neighborhood)



- 邻域: $N_G(v)=\{u|u\in V(G)\wedge(u,v)\in E(G)\wedge u\neq v\}$
- 闭(closed)邻域: $\overline{N_G(v)} = N_G(v)\cup\{v\}$
- 关联集: $I_G(v) = \{\, e \mid e\text{与}v\text{关联} \,\}$
- 后继: $\Gamma_D^+(v)=\{u|u\in V(D)\wedge\langle v,u\rangle\in E(D)\wedge u\neq v\}$
- 前驱: $\Gamma_D^-(v)=\{u|u\in V(D)\wedge\langle u,v\rangle\in E(D)\wedge u\neq v\}$
- 邻域: $N_D(v)=\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$
- 闭邻域: $\overline{N_D(v)} = N_D(v)\cup\{v\}$

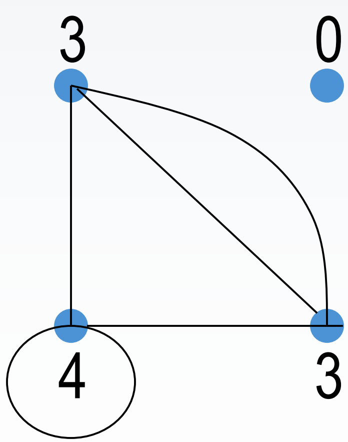


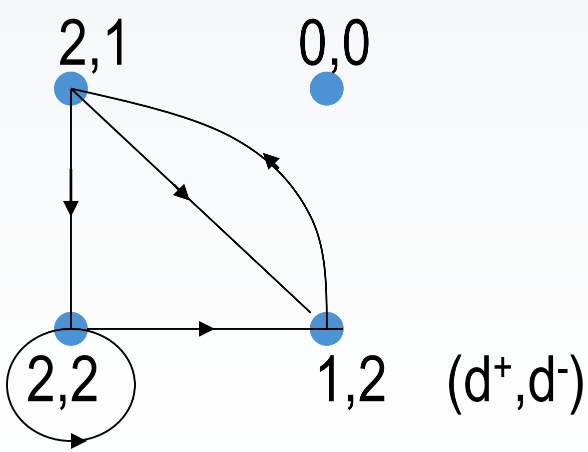
第六章 第1讲 图的基本概念

- 1.预备知识,无向图,有向图,相邻,关联
- 2.度,握手定理,度数列,可(简单)图化
- 3.图同构
- 4.图族

顶点的度数(degree/valence)

- 度$d_G(v)$: 与v关联的边的次数之和
- 出度$d_D^+(v)$: 与v关联的出边的次数之和
- 入度$d_D^-(v)$: 与v关联的入边的次数之和
- 度$d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$



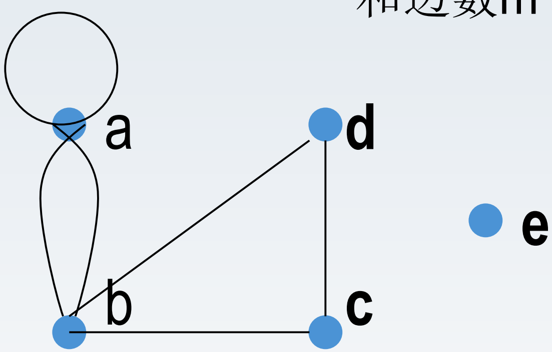


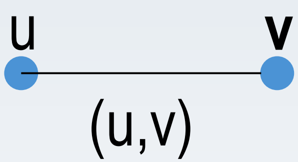
最大(出/入)度,最小(出/入)度

- 最大度: $\Delta(G) = \max\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最小度: $\delta(G) = \min\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最大出度: $\Delta^+(D) = \max\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小出度: $\delta^+(D) = \min\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最大入度: $\Delta^-(D) = \max\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小入度: $\delta^-(D) = \min\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 简记为 Δ, δ, Δ^+, δ^+, Δ^-, δ^-

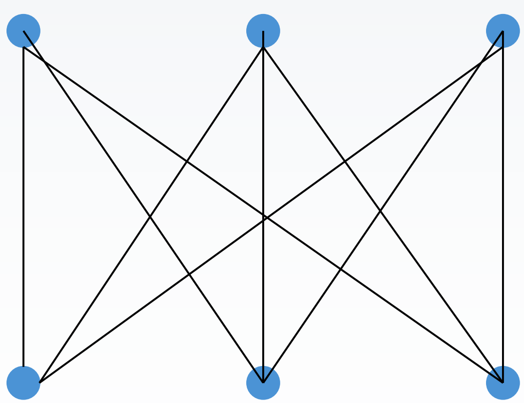
练习

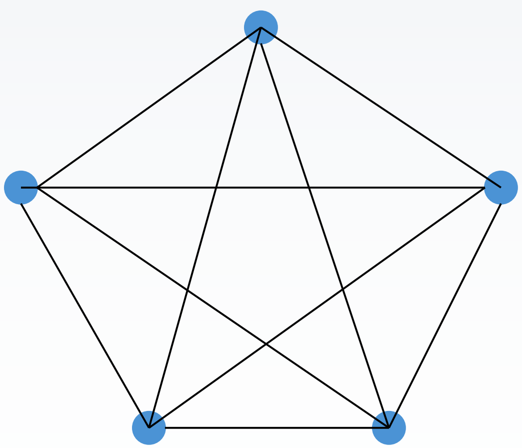
计算$d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_n)$
和边数m





25





握手定理(图论基本定理)

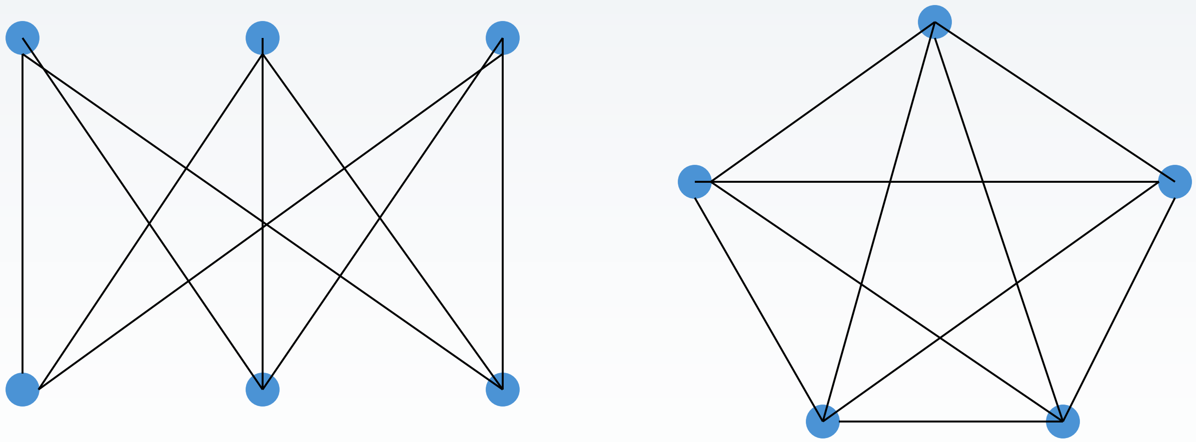
- 定理1:设G=<V,E>是无向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则
  $$d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_n)=2m. \quad \#$$
- 定理2:设D=<V,E>是有向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则
  $$d^+(v_1)+d^+(v_2)+\ldots+d^+(v_n)$$
  $$= d^-(v_1)+d^-(v_2) +\ldots+d^-(v_n) = m. \quad \#$$
- 推论:任何图中,奇数度顶点的个数是偶数. #

简单图(simple graph),正则图

- 简单图(simple graph): 无环,无平行边
  - 若G是简单图, 则 $0 \le \Delta(G) \le n-1$

最大度

- k-正则图(regular graph): $\forall v,\ d(v) \equiv k$



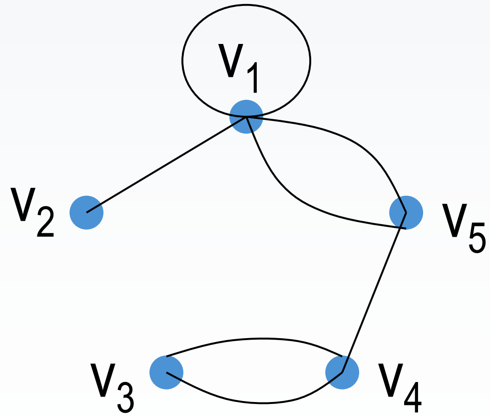
度数列

- 度数列: 设$G=<V,E>, V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 称

$$\mathbf{d} = (d(v_1),d(v_2),\ldots, d(v_n))$$

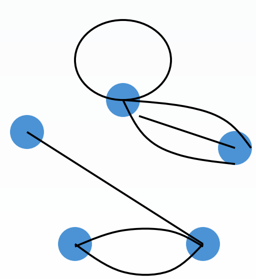
为G的度数列

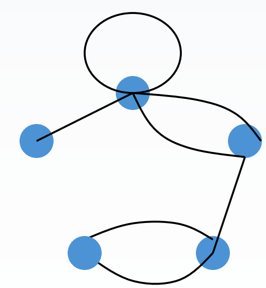
- 例: $\mathbf{d} = (5, 1, 2, 3, 3)$



可图化,可简单图化

- 可图化:设非负整数列**d**=(d_1,d_2, …, d_n), 若存在图G, 使得G的度数列是**d**, 则称**d**为可图化的。
- 可简单图化:设非负整数列**d**=(d_1, d_2, …, d_n), 若存在简单图G, 使得G的度数列是**d**, 则称**d**为可简单图化的
- 例: **d** = (5, 3, 3, 2, 1)





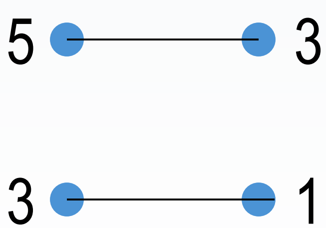
问题

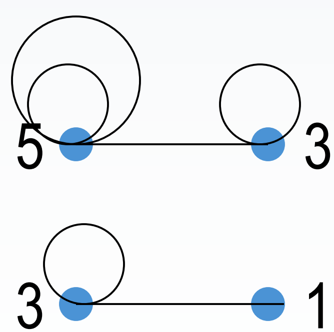
- 给定一个数列，如何判断他们是否可图化？

定理3(可图化充要条件)

- 定理3:非负整数列**d**=($d_1,d_2,\ldots,d_n$)是可图化的, 当且仅当($d_1+d_2+\ldots+d_n$) mod 2=0.
- 证明: (⇒) 握手定理

  (⇐) 奇数度点两两之间连一边, 剩余度用环来实现. #
- 例2: (1)**d**=(5,4,4,3,3,2); (2)**d**=(5,3,3,2,1).





总结

- 预备知识,无向图,有向图,相邻,关联
- 度,握手定理,度数列,可(简单)图化