§2.5 利用函数连续性计算极限（2）

一、连续函数的极限

如果函数 f 在x_0连续, 那么

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \to x_0} x)$$

对于连续函数可以采用代入法求极限.

如果函数 f 在 $\lim_{x \to x_0} g(x)$处连续, 则

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x))$$

对连续函数, 极限符号和函数符号可以交换次序.

例1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$$

例2

$$\boxed{a^x-1=t}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\ln a}{\ln(1+t)}=\ln a\cdot$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

例3

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

(解法二 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha,(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x).$

利用等价关系（见本节后面的PPT）

例4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin\sqrt{e^x-1}$.

解 原式 $=\sin\sqrt{e^1-1}=\sin\sqrt{e-1}$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

二、有理函数的极限

有理函数 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, 其中p,q都是多项式. 考虑 $l=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{p(x)}{q(x)}$,

1. 如果 $q(x_0)\neq 0$, 则$l=\dfrac{p(x_0)}{q(x_0)}$.

2. 如果 $q(x_0)=0,\ p(x_0)\neq 0$, 则$l=\infty$, 极限不存在.

3. 如果 $q(x_0)=0,\ p(x_0)=0$, 则可设

$$p(x)=(x-x_0)^{\alpha}p_1(x),\quad (\alpha\in N^*, p_1(x_0)\neq 0);$$
$$q(x)=(x-x_0)^{\beta}q_1(x),\quad (\beta\in N^*, q_1(x_0)\neq 0);$$

此时 $l=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^{\alpha-\beta}\dfrac{p_1(x)}{q_1(x)}$

$$=\begin{cases}0, & \alpha>\beta;\\ \dfrac{p_1(x_0)}{q_1(x_0)}, & \alpha=\beta;\\ \infty, & \alpha<\beta.\end{cases}$$

显然，L为有限数当且仅当α ≥ β

例6 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{m(x-1)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t+1)^m-1}{mt}=1.$

$\boxed{x-1=t}$

例7 $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{x^m-1}-\frac{n}{x^n-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{m(x^n-1)-n(x^m-1)}{(x^m-1)(x^n-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{m(x^n-1)-n(x^m-1)}{mn(x-1)^2}\qquad (x-1=t)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{m[(t+1)^n-1]-n[(t+1)^m-1]}{mnt^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{m(1 + nt + \frac{n(n+1)}{2} t^2 + \cdots - 1) - n(1 + mt + \frac{m(m+1)}{2} t^2 + \cdots - 1)}{mnt^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(mn \cdot \frac{n+1}{2} - mn \frac{m+1}{2}) t^2 + o(t^2)}{mnt^2}$$

$$= \frac{n+1}{2} - \frac{m+1}{2} \quad = \frac{n-m}{2}.$$

三、幂指函数的极限

$$u(x)^{v(x)},\quad u(x)>0.$$

当$\lim u(x)$, $\lim v(x)$存在时,

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim(v(x)\ln u(x))}$$

$$=e^{\lim v(x)\cdot\lim\ln u(x)}=e^{\lim v(x)\cdot\ln(\lim u(x))}$$

$$=e^{\ln(\lim u(x))^{\lim v(x)}}=(\lim u(x))^{\lim v(x)}$$

u,v连续时，u^v也连续

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = u(x_0)^{v(x_0)}$$

$\lim u(x)=0,\quad \lim v(x)=0.\quad 0^0$型

$\lim u(x)=\infty,\quad \lim v(x)=0.\quad \infty^0$型

$\lim u(x)=1,\quad \lim v(x)=\infty.\quad 1^\infty$型

1^{∞}型

$$u^{v}=\left(\left(1+(u-1)\right)^{\frac{1}{u-1}}\right)^{(u-1)v}$$

记 $A=u-1, u\to 1$时A 为无穷小量,

$$\lim_{A\to 0}(1+A)^{\frac{1}{A}}=e$$

如果 $\lambda=\lim(u-1)v$ 存在, 则

$$\lim u^{v}=e^{\lambda}.$$

例8 $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}$

解1. $\because \lambda = \lim\limits_{x\to\infty} x^2(\cos\frac{1}{x}-1)$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{t^2}{2}}{t^2}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore 原式 = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

解2.

$$\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2\ln\cos\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\cos\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}x^2\ln\cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln[1+(\cos\frac{1}{x}-1)]}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln[1+(\cos t-1)]}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{原式}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

例9 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad (a_i>0)$

解：令$A=\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}-1,$

只需计算：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{A}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a_1^x+\cdots+a_n^x)-n}{nx}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{nx}=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}$$

$$=\ln(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{原式}=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

§2.7无穷小与无穷大的阶的比较

一、无穷小

定义7.1 设 $f(x)$在$U^0(x_0;\delta)$内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 则称$f(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

例 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, $\sin x$是当$x\to 0$时的无穷小.

类似可以定义其它极限过程的无穷小.

$$x\to x_0+, x\to x_0-, x\to\pm\infty, x\to\infty.$$

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\frac{1}{x}$是当$x\to\infty$时的无穷小.

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

观察下列无穷小收敛到零的速度：

当$x \to 0$时, $x, x^2, \sin x$ 都是无穷小.

x	0.1	0.01	0.001
x^2	0.01	0.0001	1×10^{-6}
$\sin x$	0.0998	0.01	0.001

不同的无穷小收敛到零的速度不同，如何描述？

定义7.2（无穷小量阶的比较）

设$f(x), g(x)$为$x \to x_0$时的无穷小，且在x_0某个空心邻域内$g(x) \neq 0$.

1. 若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$，称$f$是$g$的高阶无穷小；
2. 若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$，称$f$与$g$是同阶无穷小；
3. 若$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，称$f$与$g$是等价的无穷小；

记为：$f \sim g \quad (x \to x_0)$

定义7.3（无穷小量阶的量化比较）

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=l\ (l\neq 0,k>0)$，称$f$是$k$阶无穷小.

实际上，在过程$x\to x_0, x_0^+, x_0^-$中，

以$g(x)=x-x_0$为标准，确定无穷小$f(x)$的阶.

当$x\to\infty,\pm\infty$时，　比较标准选为 $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

例1 证明：当$x \to 0$时，$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{4x\tan^3 x}{x^4} = 4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 = 4,$$

故当$x \to 0$时，$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

例2 当$x \to 0$时，求$\tan x - \sin x$关于x的阶数.

解 $$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2},$$

$\therefore \tan x - \sin x$为$x$的三阶无穷小.

例3 确定下列无穷小的阶 $(x \to 0)$

(1) $x^3 + x^6,$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^6}{x^3}=1.$$ x^3+x^6的阶为3（无穷小量者低阶）

(2) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x},$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^k(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1.\ (k=1)$$

1阶

(3) $1-\cos x,$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$

2阶

二、无穷大

定义7.4 设 $f(x)$在$U^0(x_0;\delta)$内有定义，若对$\forall M>0$,

$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$,都有$|f(x)|>M$,

则称$f(x)$是$x\to x_0$时的无穷大.

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$).

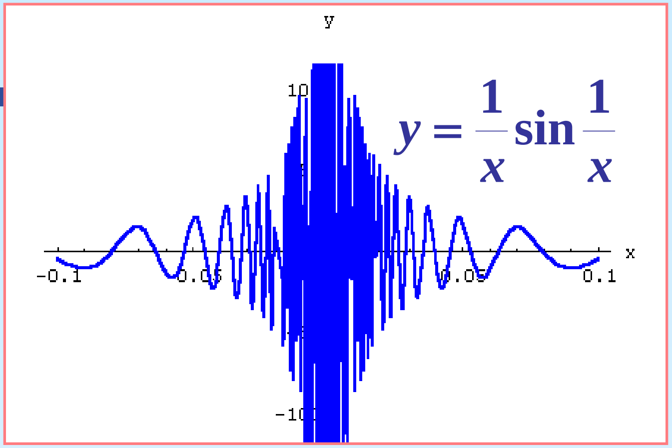
其它过程：$x\to x_0+$, $x\to x_0-$, $x\to\pm\infty$, $x\to\infty$,类似.

特别： $f(x)>+\infty$,正无穷大，$f(x)<-\infty$,负无穷大.

注意： 无界变量和无穷大的区别.

例如, 当$x \to 0$时, $y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

是一个无界变量, 但不是无穷大.



(1) 取 $x_k = \dfrac{1}{2k\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ $\quad (k = 0,1,2,3,\cdots)$

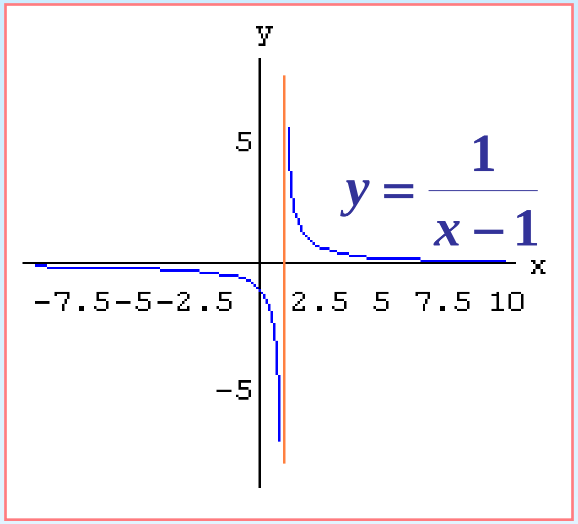
$y(x_k) = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, 当$k$充分大时, $y(x_k) > M$. 无界!

(2) 取 $x_k = \dfrac{1}{2k\pi}$ $\quad (k = 0,1,2,3,\cdots)$

当k充分大时, $x_k < \delta$,

但 $y(x_k) = 2k\pi \sin 2k\pi = 0 < M$. 不是无穷大.

例 4 证明 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$



证 $\forall M>0$, 要使 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$,

只要 $|x-1|<\frac{1}{M}$, 取 $\delta=\frac{1}{M}$,

当 $0<|x-1|<\delta=\frac{1}{M}$ 时, 就有 $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

定义7.5（无穷大量阶的比较）

设$f(x), g(x)$为$x \to x_0$时的无穷大，

1. 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，称$g$是$f$的高阶无穷大；

2. 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$，称$f$与$g$是同阶无穷大；

3. 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，称$f$与$g$是等价的无穷大；

记为：$f \sim g \quad (x \to x_0)$

定义7.6（无穷大量阶的量化比较）

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^{-k}}=l\ (l\neq 0,k>0)$,称$f$是$k$阶无穷大.

即以$\dfrac{1}{(x-x_0)}$为标准.

若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^k}=l\ (l\neq 0,k>0)$,称$f$是$k$阶无穷大.

即以x^k为标准.

例4 判断下列无穷大的阶

（1） $$\frac{x^2+x-2}{(x^2-1)^3}(x\to 1)$$

$$\text{解：}\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x+2}{(x^2-1)^2}}{\dfrac{1}{(x-1)^2}}=\frac{3}{2}$$

2阶无穷大

（2） $$\frac{2x^5}{x^3-3x+1}(x\to\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x^3-3x+1}\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3-3x+1}=2$$

2阶无穷大

三、 表示与性质

定义7.7: f,g在$U^o(x_0)$内有定义,且$g(x)\neq 0$.

（1）当$x\to x_0$时,若存在$M>0$,使得$\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\leq M$.

就记为 $f(x)=O(g(x))\quad (x\to x_0)$.

特别地,$|f(x)|\leq M$,记为$f(x)=O(1)\to$“有界”

（2）若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,就记为$f(x)=o(g(x))\,(x\to x_0)$

特别地,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$,记为$f(x)=o(1)\to$“无穷小”

定义7.8:

（1）当$x \to 0, n > 0$,有 $o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$

$$o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)(n < m);$$

（2）当$x \to +\infty, n > 0$,有 $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$

$$O(x^n) + O(x^m) = o(x^n)(n > m);$$

（3）当$x \to x_0$,时$\alpha = o(1)$,有

$$o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha); \qquad (o(\alpha))^k = o(\alpha^k).$$

四、等价代换定理

定理7.1 若函数$f(x),g(x),h(x)$在x_0某邻域有定义，

且$f(x)\sim g(x)$,若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x)=a$,则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=a$. 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=a$,则

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=a$, $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$.

证明:

$$\lim f(x)h(x)=\lim\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)h(x)$$

$$=\lim g(x)h(x).$$

例5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$$

$$\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$$

例6

$$\boxed{a^x-1=t}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\ln a}{\ln(1+t)}=\ln a\cdot$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

$$e^x-1\sim x\,(x\to 0)$$

例7 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=1,(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\right).$$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$， $\tan 2x\sim 2x$.

$$原式=\lim_{x\to 0}(2x)^2/\frac{1}{2}x^2=8$$

常用等价无穷小： 当$x \to 0$时,

$\sin x \sim x$,　　$\arcsin x \sim x$,

$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$,　　$\ln(1+x) \sim x$,

$\tan x \sim x$,　　$\arctan x \sim x$,

$e^x - 1 \sim x$,　　$(1+x)^\lambda - 1 \sim \lambda x$,

$\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$,　　$(1+x)^2 - 1 \sim 2x$.

注意　正确使用：　多用于乘除慎用于加减

六、小结

1、无穷小的定义

2、无穷大的定义

3、无穷小无穷大的表示与性质

4、无穷小的等价代换

5、有理函数、幂指函数的极限

作业

习题2.5

2 ，3（2, 3），4, 5

习题2.7

1，2