第 12 章　反馈控制

本书最后三章将讨论反馈控制的设计，介绍非线性控制设计中使用的各种工具，其中包括：

1) 近似线性化、积分控制、增益分配（gain scheduling）；

2) 精确反馈线性化;

3) 滑模控制;

4) Lyapunov 再设计;

5) 反步控制设计;

6) 无源控制;

7) 高增益观测器。

12.1 节为控制概述，讨论了一些控制问题，并以此引出后续内容。随后四个小节讨论了非线性分析中常用的经典分析工具，即线性化、积分控制和增益分配；

第 **13** 章讨论了反馈线性化；

其他非线性设计工具将在第 **14** 章中讨论。

12.1 控制概述

典型控制问题：

- 状态镇定
- 输出调节
- 状态轨迹跟踪
- 输出轨迹跟踪（扰动抑制或衰减控制，或其组合）。

解决控制问题的手段：

- 状态反馈：所有状态变量可测，控制输入由状态的静态或者动态函数实时计算；
- 输出反馈：只有输出向量是可测的，且其维数通常小于系统状态维数。控制输入由输出的静态或者动态函数实时计算。

其它控制问题：

- 优化控制：考虑一些附加的设计要求，例如满足某一瞬态响应指标（上升调节时间等）或满足输入的某些约束，这些附加要求可能是互相矛盾的，设计者需要做出折中选择。对这些设计进行折中优化，引发出各种优化控制问题。
- 鲁棒自适应控制：当考虑模型的不确定性时，灵敏度(模型参数变化对系统解的定量影响

等)与鲁棒性（模型参数变化对系统稳定性的影响等）就成为设计者关心的问题。通过设计反馈控制处理大量的模型和外部不确定性，产生了鲁棒控制或自适应控制问题。

鲁棒控制：

模型的不确定性是通过归一化模型的扰动描述：把模型看成空间的一点，把被扰动模型看成是球内的一点，归一化模型包含在球内。鲁棒控制就是对“不

确定球”内的任意模型，其设计都能满足控制目标的要求。例如控制律$u=-kx(k>0)$可以保证所有满足$|f(x)|<|kx|$的非线性系统$\dot{x}=f(x)+u$的原点渐近稳定；动态比例积分反馈控制律：$\dot{x}_0=x-r,u=-k_0x_0-k_1x(k_0>0,k_1>0)$可以保证线性不确定系统$\dot{x}=u+d$的状态$x$全局趋于$r$，其中$r$为已知常数，$d$为未知常值扰动。

自适应控制：

将某些未知参数作为模型不确定性参数，通过反馈以在线的方式（即在系统运行中）（辨识）确定这些参数，例如，自适应控制律 $u=-kx, \dot{k}=\beta x^2 (\beta>0)$ 可以保证参数（ p ）不确定线性系统 $\dot{x}=px+u$ 的状态全局趋于零。

鲁棒自适应控制：

在更为复杂的情况下，控制器不仅需要处理某些

未知参数，可能还需要处理未知的非线性函数，从而引发鲁棒控制与自适应控制的混合问题。例如对于 $\dot{x} = px + d(x) + u$ (p 为未知定常参数， $d(x)$ 为未知函数，满足 $\left|d(x)\right| \le D(x)$ ， $D(x)$ 为已知函数)，对此系统可以设计鲁棒自适应控制律

$$u = -kx - (D(x) + \varepsilon)\operatorname{sgn}(x), \dot{k} = \beta x^2;$$
$$\beta > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

反馈控制的分类：

● 静态状态反馈控制

系统

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

的状态反馈稳定问题是设计一个反馈控制律

$$u = \gamma(t, x)$$

使得原点 $x = 0$ 是闭环系统

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x))$$

的一致渐近稳定平衡点。

评注：因反馈控制律$u=\gamma(t,x)$是x的无记忆函数，所以称为“静态反馈”。

- **动态状态反馈控制：**

$$u=\gamma(t,x,z)$$

其中z为x驱动的动力学系统的解，即

$$\dot{z}=g(t,x,z)$$

动态状态反馈控制的一般例子出现在积分控制和自

适应控制中。

例如：

$$\dot{x} = px + u，\quad u = -kx, \dot{k} = \beta x^2 (\beta > 0)$$

- **静态输出反馈控制：**

系统

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$
$$y = h(t, x, u)$$

的输出反馈稳定问题是设计一个静态输出反馈控制

律

$$u = \gamma(t, y)$$

使得闭环系统渐近稳定。

例如：$\dot{x} = -x_1 + x_2^2, \dot{x}_2 = u, y = x_2, u = -y$ 。

动态输出反馈控制：

$$u = \gamma(t, y, z)$$
$$\dot{z} = g(t, y, z)$$

动态反馈控制在输出反馈控制中更为常见，因为缺少某些状态变量测量值，一般采用反馈控制器中的

“观测器”或“准观测器”成分进行补偿。

非零平衡点稳定：

当标准的稳定性问题由原点处平衡点的稳定性定义时，可以用同样的方法使系统在指定状态点 x_{ss} 稳定，在该状态点 x_{ss} 处要求必须存在一个输入 u_{ss} 使系统保持平衡，即

$$0 = f(t, x_{ss}, u_{ss}),\quad \forall t \geq 0$$

然后，进行变量代换

$$x_\delta = x - x_{\mathrm{ss}}，\quad u_\delta = u - u_{\mathrm{ss}}$$

得

$$\dot{x}_\delta = f(t, x_{\mathrm{ss}} + x_\delta, u_{\mathrm{ss}} + u_\delta) \triangleq f_\delta(t, x_\delta, u_\delta)$$

其中对于所有$t \geq 0$， $f_\delta(t,0,0) = 0$，原点称为变换后系统的平衡点。

对于输出反馈控制问题，为了使得平衡点x_{ss}处的输出为零，可定义新输出为

$$
\begin{aligned}
y_{\delta} &= y - h(t, x_{\mathrm{ss}}, u_{\mathrm{ss}}) \\
&= h(t, x_{\mathrm{ss}} + x_{\delta}, u_{\mathrm{ss}} + u_{\delta}) - h(t, x_{\mathrm{ss}}, u_{\mathrm{ss}}) \\
&\triangleq h_{\delta}(t, x_{\delta}, u_{\delta})
\end{aligned}
$$

这样就可以保证：对于所有$t \geq 0$， $h_{\delta}(t,0,0) = 0$。

通过上面的处理，非零平衡点的稳定问题就转换成转换后新系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{\delta} &= f_{\delta}(t, x_{\delta}, u_{\delta}) \\
y_{\delta} &= h_{\delta}(t, x_{\delta}, u_{\delta})
\end{aligned}
$$

的标准原点稳定问题，其中u_{δ}设计为x_{δ}或y_{δ}的反馈

控制形式。总的控制$u = u_\delta + u_{\mathrm{ss}}$包含反馈分量$u_\delta$和前馈分量$u_{\mathrm{ss}}$两个部分。

当系统为线性时不变系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

时，标准反馈稳定问题非常简单。在这种情况下，状态反馈控制$u = -Kx$使闭环系统

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

的原点是渐近稳定的，当且仅当矩阵 $A-BK$ 是 **Hurwitz** 矩阵。因此，状态反馈稳定问题就简化为设计一个矩阵 K，使得矩阵 $A-BK$ 的特征值位于复平面的左半开平面。

线性系统控制理论[①]证明，只要矩阵对 (A,B) 是可控的，则可以任意设计 $A-BK$ 的特征值（复特征值必须是共轭对）；

即使 A 的某些特征值不是可控的，只要不可控的

① 例如，见文献[9]，文献[35]，文献[110]或文献[158]。

特征值具有负实部（能稳定），仍可以达到稳定。在这种情况下，矩阵对(A,B)称为可稳定的，且A的不可控（开环）特征值成为$A-BK$闭环特征值。

如果只能测得输出y，就可以采用动态补偿的方法，例如基于观测器的控制器

$$u=-K\hat{x}$$
$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+H(y-C\hat{x}-Du)$$

来稳定系统。

上式中，反馈增益K为状态反馈，使$A-BK$为

Hurwitz 矩阵，而观测器增益 H 使 $A-HC$ 为 **Hurwitz** 矩阵。闭环系统的特征值由 $A-BK$ 的特征值和 $A-HC$ 的特征值组成[①]。

$A-HC$ 的稳定性与 $A-BK$ 的稳定性呈对偶关系，并且要求 (A,C) 具有可观测性（或至少具有可检测性）。

此外，为了简化控制律计算，还可以设计基于降维状态观测器或者函数观测器的输出反馈控制律。

[①] 这种方法通常称为“分离原理”，因为通过状态反馈与观测器的分离可完成闭环特征值的分配。

对于一般的非线性系统，‘分离原理’（首先‘分别’设计‘状态反馈控制器’和‘状态观测器’，然后用状态观测器得到的状态估计值‘代替’状态反馈控制器中的状态值直接得到输出反馈控制器）一般不再成立，问题会更加复杂和难解。

常用的非线性系统控制方法主要包括：

- 局部近似线性化：即通过对系统在期望平衡点的线性化设计反馈控制律，并对线性化系

统设计稳定线性反馈控制。这种方法的有效性基于定理 **4.7** 和定理 **4.13** 所述的 **Lyapunov** 间接方法；然而这种方法只能保证局部渐近稳定性。为了扩大线性化的有效区域，可以采用**增益分配技术(见 12.5 节)**，其思路是在不同的工作点求解稳定性问题，并允许控制器以光滑或突变方式从一种模式转换到另一种模式；

- **精确反馈线性化（第 13 章）**：上个世纪八十

年代，人们提出了另一种线性化思想，即对于一类特殊的非线性系统，可以通过反馈和（如果可能）变量代换的方法将其转换为线性系统，再对转换后的线性系统设计线性状态反馈控制。这种线性化的方法未采用近似，所以又称精确反馈线性化。然而，这种方法需要完全知道系统的状态方程，以抵消系统的非线性。由于很难完全知道系统的状态方程，并在数学上精确抵消非线性项，因此应

用这种方法几乎总是得到一个闭环系统，该系统具有线性稳定系统加扰动的形式，利用扰动系统（见第 9 章）的 **Lyapunov** 理论，可以比较容易地分析其稳定性问题；

- 滑模控制：针对具有匹配不确定项的非线性系统的设计方法；
- 反步设计：针对具有阶联结构的非线性系统的设计方法；
- **Lyapunov** 再设计：通过增加附加控制项抵消

不确定项影响的设计方法；

- **基于 Lyapunov 函数的直接设计方法。**

几种不同的稳定概念

- 局部稳定：如果非线性系统在原点的近似线性化是渐近稳定的，那么该非线性系统的原点也是渐近稳定的。需要做进一步分析，才能知道原点的吸引区，此时称反馈控制达到了局部稳定。对于存在中心流形且在中心流

形上的运动渐近稳定的非线性系统，也称之为局部稳定的。

- 区域稳定：如果反馈控制能保证某一（不变）集合包含在吸引区内，或者能给出吸引区的估计值，就称反馈控制达到了区域稳定。
- 全局稳定：如果闭环系统的原点是全局渐近稳定的，则称反馈控制达到了全局稳定。
- 半全局稳定：如果反馈控制没有达到全局稳定，但可以设计一个闭环系统，使任意给定

的紧集（无论多大）都包含在吸引区内，则称反馈控制达到了半全局稳定。下面的两个例子将说明上述四个稳定概念。

例 12.1 假设希望通过状态反馈稳定标量系统

$$\dot{x} = x^2 + u$$

在原点对系统线性化可得到线性系统 $\dot{x} = u$ ，通过 $u = -kx(k > 0)$ 可使其稳定。当该控制应用到非线性系统时，将得到

$$\dot{x} = -kx + x^2$$

在原点线性化的方程为 $\dot{x} = -kx$ 。由定理 4.7 可知原点是渐近稳定的，因此反馈控制 $u = -kx$ 使系统实现了局部稳定。不难看出，吸引区是集合 $\{x < k\}$ ，因此反馈控制 $u = -kx$ 实现了区域稳定。增加 k 可以扩大吸引区。实际上，给定任何紧集 $B_r = \{|x| \le r\}$ ，都可以通过选择 $k > r$ 使其包含在吸引区内。因此，$u = -kx$ 实现了半全局稳定。但

一定要注意，$u=-kx$ 不能实现全局稳定。实际上对于任意有限的 k，总有一部分状态空间（即 $x \geq k$）不在吸引区内。当半全局稳定可以将任何紧集包含在吸引区内时。对于一个给定的 r 可以取 $k>r$，一旦 k 固定且控制器开始执行，如果初态恰好在区域 $\{x>k\}$ 内，那么解 $x(t)$ 将发散到无穷大。

为实现全局稳定，可以设计如下非线性控制律

$$u=-x^{2}-kx$$

该控制律消除了开环非线性，得到一个线性闭环系统 $\dot{x}=-kx$ 。

类似的，对于系统 $\dot{x}=\sin u$ ，可以得到以下结论：

（1）线性反馈控制 $u=-kx(k>0)$ 可以保证闭环系统局部指数稳定，因为闭环系统的线性化 $\dot{x}=-kx$ 指数稳定；

（2）线性反馈控制 $u=-kx(k>0)$ 可以保证闭环系统区域稳定，因为该系统的吸引区为 $k|x|<\pi$ ，即

$|x| < \dfrac{\pi}{k}$；

（3）线性反馈控制 $u = -kx(k > 0)$ 可以保证闭环系统半全局稳定，因为可选择充分小的 k 使得吸引区 $\left\{ x : |x| < \dfrac{\pi}{k} \right\}$ 包含状态空间 $\left\{ x : x \in R^1 \right\}$ 的任意紧集；

（4）线性反馈控制 $u = -kx(k > 0)$ 不能使得闭环系统全局渐近稳定，因为对于给定的任意小的 k，总有某些初始状态在闭环系统的吸引区以外，起始于该

初始状态的轨迹将发散;

（5）非线性反馈控制 $u=-k\tanh(x)(0<k<\pi)$ 可以保证闭环系统全局渐近稳定，因为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=x\dot{x}=x\sin(-k\tanh(x))<0$$ 。

扰动跟踪问题:

系统模型为

$$\dot{x} = f(t,x,u,w)$$
$$y = h(t,x,u,w)$$
$$y_m = h_m(t,x,u,w)$$

其中 x 是状态，u 是控制输入，w 是扰动输入，y 是受控输出，y_m 是测得的输出。该控制问题的基本目标是设计控制输入，使受控输出 y 跟踪一个参考信号 r，即

$$e(t) = y(t) - r(t) \approx 0\text{，}\quad \forall t \ge t_0$$

其中t_0是控制的初始时刻，由于y的初始值取决于初始状态$x(t_0)$，为了对于所有$t \geq t_0$都要满足这个要求，就必须预设$x(t_0)$，或假设已知$x(t_0)$为预设参考信号的初始值，而这在许多情况下是无法实现的。因此，通常寻找一个渐近输出去跟踪目标，当t趋近于无穷时，使跟踪误差e趋近零，即

$$e(t) \to 0\text{，当 } t \to \infty$$

如果在输入扰动w存在时实现了渐近输出跟踪，就说

实现了渐近扰动抑制。如果外部信号 r 和 w 是由已知模型产生的（模型状态初值可以未知），例如恒定信号或频率已知的正弦信号，那么在反馈控制器中加入这些信号模型，就可以实现渐近输出跟踪和扰动抑制[①]。这种方法非常适用于系统模型中包含某些不确定参数时的情况。外部信号为常数是一类特殊而重要的情况，其控制目标是把 y 渐近调整到“设定点” r，通过在控制器中加入“积分作用”，就可以实现渐近

[①] 这就是所谓的“内模原理”（见文献[32]）。

调整和扰动抑制，这是存在参数不确定性时实现渐近调整的惟一方法，这也是为什么在工业应用中普遍使用 **PI**（比例-积分）和 **PID**（比例-积分-微分）控制器的原因。

对于一般时变扰动输入 $w(t)$，实现渐近扰动抑制一般是不可能的。在这种情况下可以实现扰动衰减，即按照要求在给定容限内，实现跟踪误差的毕竟有界性，即

$$\|e(t)\| \leq \varepsilon \text{，} \quad \forall t \geq T$$

其中ε是预先指定的（小的）正数。还可以考虑从扰动输入w到跟踪误差e的映射的增益。例如，如果将w看成是L_2信号，那么我们的目标就是使闭环输入-输出映射从$w \to e$的L增益至少小于预给定容限值[①]。

在跟踪问题中，反馈控制律也采用与稳定问题相同的分类方法。如果x是可测的，即$y_m = x$，就称为状态反馈，否则就是输出反馈。同样，反馈控制律也

① 这就是H_∞控制问题的公式表示。例如，可参阅文献[20]，文献[54]，文献[61]，文献[90]，文献[l99]和文献[219]。

有静态和动态之分，控制律也可以实现局部、区域、半全局和全局跟踪，所不同的是这些概念不仅对初始状态的大小而言，还包括外部信号 r 及 w 的大小。例如，在一个典型问题中，局部跟踪意味着对于足够小的初始状态，系统的输出可以跟踪足够小的外部信号，而全局跟踪意味着对于任意初始状态，系统输出可以跟踪给定的一类外部信号。

习题 13.1.

（1）证明控制律$u=-kx(k>1)$ 可以保证非线性系统$\dot{x}=\dfrac{u}{1+x^2}+x$局部（渐近）稳定、区域（渐近）稳定和半全局（渐近）稳定，但不能保证系统全局（渐近）稳定。

（2）试设计非线性控制律使得闭环系统$\dot{x}=\dfrac{u}{1+x^2}+x$的原点全局渐近稳定。

习题 13.2：考虑线性系统$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=u$，$y=x_1$，假定输

出 $y = x_1$ 可以测量， x_2 不可测量。设计如下动态输出反馈控制律：$u = -k_1 x_1 - k_2 z, \dot{z} = -k_3 z - k_4 x_1$ 。

（1） 写出以 (x_1, x_2, z) 为状态的闭环系统的状态方程；

（2） 给出闭环系统原点渐近稳定时控制器参数 (k_1, k_2, k_3, k_4) 应该满足的条件。