

大学力学论坛搜集网络资料整理



力学学习交流，资料分享请点击

www.xuelixue.cn

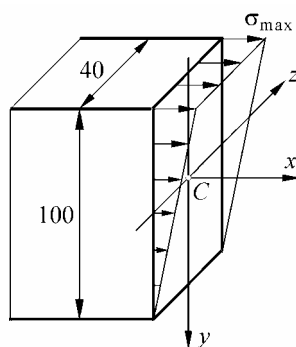
感谢作者的辛勤劳动！

请尊重知识产权

如果感觉本资料不错，请购买正版！

1-3.....	1
1-4.....	1

1-3 图示矩形截面杆，横截面上的正应力沿截面高度线性分布，截面顶边各点处的正应力均为 $\sigma_{\max}=100\text{MPa}$ ，底边各点处的正应力均为零。试问杆件横截面上存在何种内力分量，并确定其大小。图中之 C 点为截面形心。



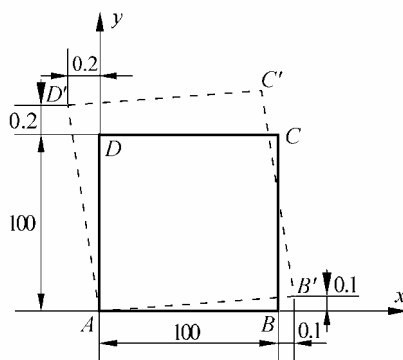
题 1-3 图

解：由题图所示正应力分布可以看出，该杆横截面上存在轴力 F_N 和弯矩 M_z ，其大小分别为

$$F_N = \frac{1}{2} \sigma_{\max} A = \frac{1}{2} \times (100 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}) \times (0.100\text{m} \times 0.040\text{m}) = 2.00 \times 10^5 \text{ N} = 200\text{kN}$$

$$M_z = F_N \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3} \right) = \frac{1}{6} F_N h = \frac{1}{6} \times (200 \times 10^3 \text{ N}) \times (0.100\text{m}) = 3.33 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 3.33\text{kN} \cdot \text{m}$$

1-4 板件的变形如图中虚线所示。试求棱边 AB 与 AD 的平均正应变以及 A 点处直角 BAD 的切应变。



题 1-4 图

解：平均正应变为

$$\bar{\varepsilon}_{AB} = \bar{\varepsilon}_x = \frac{0.1 \times 10^{-3} \text{ m}}{0.100 \text{ m}} = 1.00 \times 10^{-3}$$

$$\bar{\varepsilon}_{AD} = \bar{\varepsilon}_y = \frac{0.2 \times 10^{-3} \text{ m}}{0.100 \text{ m}} = 2.00 \times 10^{-3}$$

由转角

$$\alpha_{AD} = \frac{0.2 \times 10^{-3} \text{ m}}{0.100 \text{ m}} = 2.00 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{0.1 \times 10^{-3} \text{ m}}{0.100 \text{ m}} = 1.00 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

得 A 点处直角 BAD 的切应变为

$$\gamma_A = \gamma_{BAD} = \alpha_{AD} - \alpha_{AB} = 1.00 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

第二章 轴向拉压应力与材料的力学性能

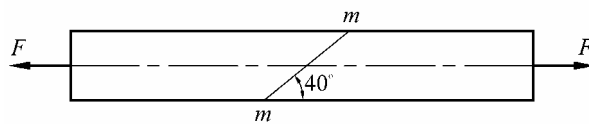
题号	页码
2-3	1
2-5	2
2-7	2
2-9	3
2-10	3
2-15	4
2-16	5
2-18	6
2-19	7
2-21	7
2-22	8

(也可通过左侧题号书签直接查找题目与解)

2-3

$$A=500\text{mm}^2 \quad F=50\text{kN}$$

m-m



2-3

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{500 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 1.00 \times 10^8 \text{ Pa} = 100 \text{ MPa}$$

m-m $\alpha = -50^\circ$,

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha = 100 \text{ MPa} \cdot \cos^2(-50^\circ) = 41.3 \text{ MPa}$$

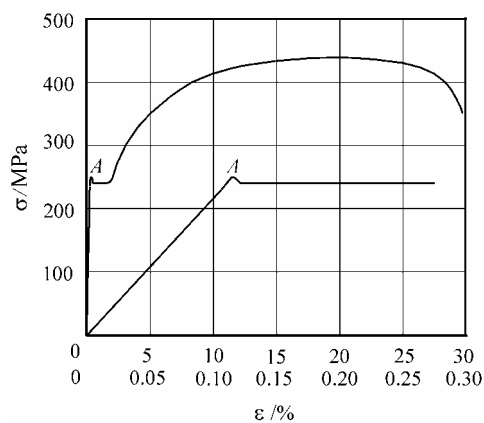
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = 50 \text{ MPa} \cdot \sin(-100^\circ) = -49.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma = 100 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} = 50 \text{ MPa}$$

2-5

E σ_p σ_s σ_b δ



2-5

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \approx \frac{220 \times 10^6 \text{ Pa}}{0.001} = 220 \times 10^9 \text{ Pa} = 220 \text{ GPa}$$

$$\sigma_p \approx 220 \text{ MPa} \quad \sigma_s \approx 240 \text{ MPa} \quad \sigma_b \approx 440 \text{ MPa} \quad \delta \approx 29.7\%$$

2-7

-

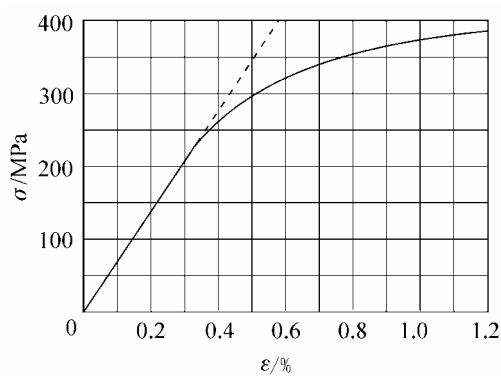
2-6

$d = 10 \text{ mm}$

$l = 200 \text{ mm}$

$F = 12 \text{ kN}$

$F = 20 \text{ kN}$



2-6

1. $F = 12 \text{ kN}$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{4 \times 12 \times 10^3 \text{ N}}{\pi \times 0.010^2 \text{ m}^2} = 1.528 \times 10^8 \text{ Pa} = 152.8 \text{ MPa}$$

2-6 $\sigma - \varepsilon$

$$\varepsilon = 0.0022 = 0.22\%$$

$$\Delta l = l\varepsilon = (0.200\text{m}) \times 0.0022 = 4.4 \times 10^{-4}\text{m} = 0.44\text{mm}$$

$$\Delta l = 0$$

2. $F = 20\text{kN}$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{4 \times 20 \times 10^3 \text{ N}}{\pi \times 0.010^2 \text{ m}^2} = 2.55 \times 10^8 \text{ Pa} = 255\text{MPa}$$

$\sigma - \varepsilon$

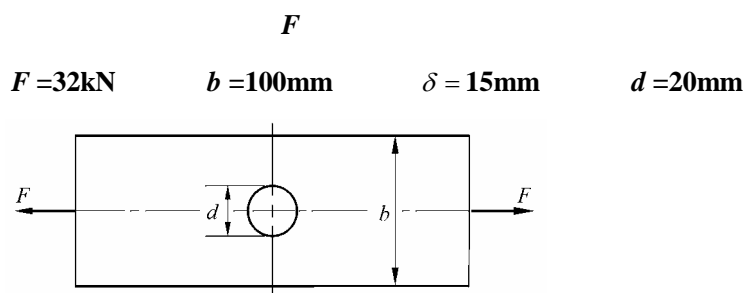
$$\varepsilon = 0.0039 = 0.39\%$$

$$\Delta l = l\varepsilon = (0.200\text{m}) \times 0.0039 = 7.8 \times 10^{-4}\text{m} = 0.78\text{mm}$$

$$\varepsilon_e = 0.00364 \quad \varepsilon_p = 0.00026$$

$$\Delta l = l\varepsilon_p = (0.200\text{m}) \times 0.00026 = 5.2 \times 10^{-5}\text{m} = 0.052\text{mm}$$

2-9



2-9

$$d/b = 0.020\text{m}/(0.100\text{m}) = 0.2 \quad 2-25(\text{a}),$$

$$K \approx 2.42$$

$$\sigma_n = \frac{F}{(b-d)\delta} \quad K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}$$

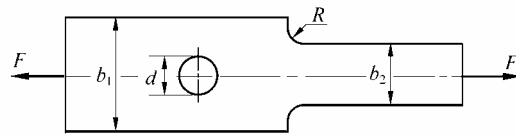
$$\sigma_{\max} = K\sigma_n = \frac{KF}{(b-d)\delta} = \frac{2.42 \times 32 \times 10^3 \text{ N}}{(0.100 - 0.020) \times 0.015\text{m}^2} = 6.45 \times 10^7 \text{ Pa} = 64.5\text{MPa}$$

2-10

F

$$F=36\text{kN} \quad b_1=90\text{mm} \quad b_2=60\text{mm} \quad \delta=10\text{mm} \quad d=10\text{mm}$$

$$R=12\text{mm}$$



2-10

1.

$$d/b_1 = 0.010\text{m}/(0.090\text{m}) = 0.1111, \quad 2-25(\text{a}) \quad K_1 \approx 2.6$$

$$\sigma_{\max} = K_1 \sigma_{n_1} = \frac{K_1 F}{(b_1 - d)\delta} = \frac{2.6 \times 36 \times 10^3 \text{ N}}{(0.090 - 0.010) \times 0.010 \text{ m}^2} = 1.17 \times 10^8 \text{ Pa} = 117 \text{ MPa}$$

2

$$D/d = b_1/b_2 = 0.090\text{m}/(0.060\text{m}) = 1.5 \quad R/d = R/b_2 = 0.012\text{m}/(0.060\text{m})$$

0.2 2-25(b)

$$K_2 \approx 1.74$$

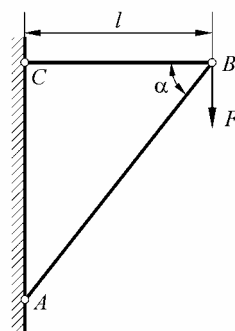
$$\sigma_{\max} = K_2 \sigma_{n_2} = \frac{K_2 F}{b_2 \delta} = \frac{1.74 \times 36 \times 10^3 \text{ N}}{0.060 \times 0.010 \text{ m}^2} = 1.04 \times 10^8 \text{ Pa} = 104 \text{ MPa}$$

3.

$$\sigma_{\max} = 117 \text{ MPa}$$

2-15

F $[\sigma]$ B C



2-15

1.

AB BC F_{N1} F_{N2} B

$$F_{N1} = F / \sin\alpha, \quad F_{N2} = F \tan\alpha$$

$$2. \quad \alpha$$

$$A_1 = \frac{F}{[\sigma] \sin\alpha}, \quad A_2 = \frac{F}{[\sigma]} \tan\alpha$$

$$V = A_1 l_1 + A_2 l_2 = \frac{F}{[\sigma] \sin\alpha} \cdot \frac{l}{\cos\alpha} + \frac{Fl}{[\sigma]} \tan\alpha = \frac{Fl}{[\sigma]} \left(\frac{2}{\sin 2\alpha} + \tan\alpha \right)$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0$$

$$3\cos^2\alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = 54^\circ 44'$$

$$\alpha$$

2-16

$$F$$

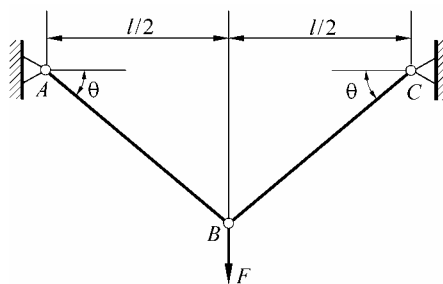
$$[\sigma]$$

$$A$$

$$C$$

$$l$$

$$\theta$$



2-16

$$1.$$

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{F}{2\sin\theta}$$

$$2. \quad \theta$$

$$A_1 = A_2 = \frac{F}{2[\sigma] \sin\theta}$$

$$V = 2A_1 l_1 = \frac{F}{[\sigma] \sin \theta} \cdot \frac{l}{2 \cos \theta} = \frac{Fl}{[\sigma] \sin 2\theta}$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0$$

$$\cos 2\theta = 0$$

$$\theta = 45^\circ$$

θ

θ

2-18

$$F_2 = 35.4 \text{ kN}$$

F_1

F_2

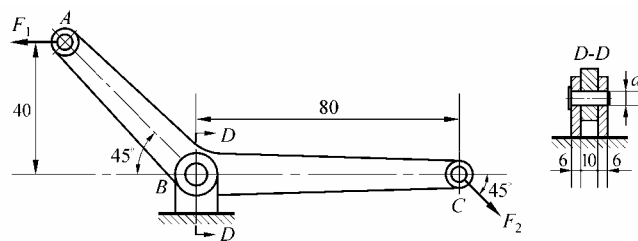
B

d

$$F_1 = 50 \text{ kN}$$

$$[\tau] = 100 \text{ MPa}$$

$$[\sigma_{bs}] = 240 \text{ MPa}$$



2-18

1.

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Bx} = F_1 - F_2 \cos 45^\circ = 25 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{By} = F_2 \sin 45^\circ = 25 \text{ kN}$$

$$F_B = \sqrt{25^2 + 25^2} \text{ kN} = 35.4 \text{ kN}$$

2.

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{2F_B}{\pi d^2} \leq [\tau]$$

$$d \geq \sqrt{\frac{2F_B}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{2 \times 35.4 \times 10^3}{\pi \times 100 \times 10^6}} \text{ m} = 0.015 \text{ m}$$

$$\sigma_{bs} = \frac{F_b}{d\delta} = \frac{F_B}{d\delta} \leq [\sigma_{bs}]$$

$$d \geq \frac{F_B}{\delta[\sigma_{bs}]} = \frac{35.4 \times 10^3}{0.010 \times 240 \times 10^6} \text{ m} = 0.01475 \text{ m}$$

$$d \geq 0.015 \text{ m} = 15 \text{ mm}$$

2-19

2-1

2-19

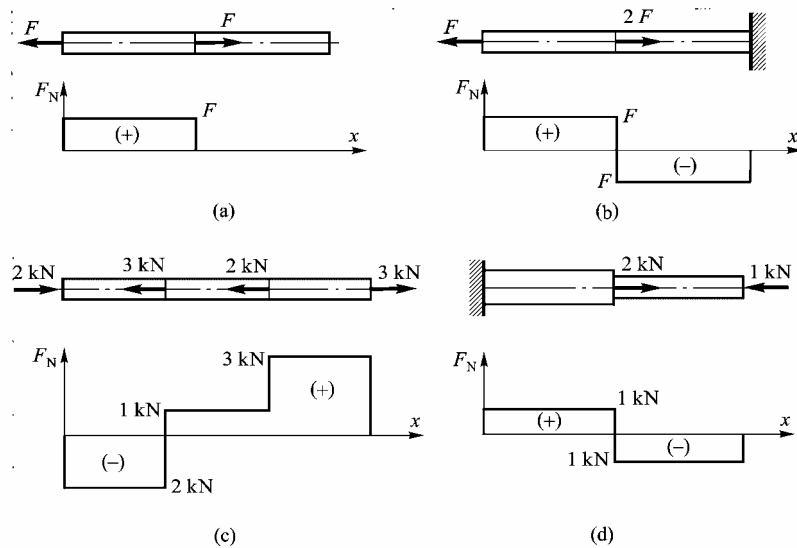


图 2-19

2-21

$$F = 45 \text{ kN}$$

$$b = 250 \text{ mm}$$

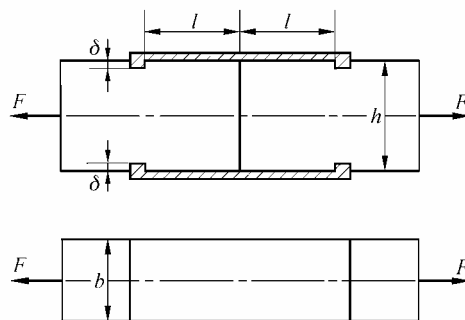
$$[\sigma] = 6 \text{ MPa}$$

$$[\sigma_{bs}] = 10 \text{ MPa}$$

$$[\tau] = 1 \text{ MPa}$$

$$\delta \quad l$$

$$h$$



2-21

$$\sigma = \frac{F}{b(h - 2\delta)} \leq [\sigma]$$

$$h - 2\delta \geq \frac{F}{b[\sigma]} = \frac{45 \times 10^3}{0.250 \times 6 \times 10^6} \text{ m} = 0.030 \text{ m} \quad \mathbf{a}$$

$$\sigma_{\text{bs}} = \frac{F}{2b\delta} \leq [\sigma_{\text{bs}}]$$

$$\delta \geq \frac{F}{2b[\sigma_{\text{bs}}]} = \frac{45 \times 10^3}{2 \times 0.250 \times 10 \times 10^6} \text{ m} = 0.009 \text{ m} = 9 \text{ mm} \quad \mathbf{b}$$

$$\tau = \frac{F}{2bl} \leq [\tau]$$

$$l \geq \frac{F}{2b[\tau]} = \frac{45 \times 10^3}{2 \times 0.250 \times 1 \times 10^6} \text{ m} = 0.090 \text{ m} = 90 \text{ mm}$$

$$\delta = 0.009 \text{ m} \quad \mathbf{a}$$

$$h \geq (0.030 + 2 \times 0.009) \text{ m} = 0.048 \text{ m} = 48 \text{ mm}$$

$$\delta \geq 9 \text{ mm} \quad l \geq 90 \text{ mm} \quad h \geq 48 \text{ mm}$$

2-22

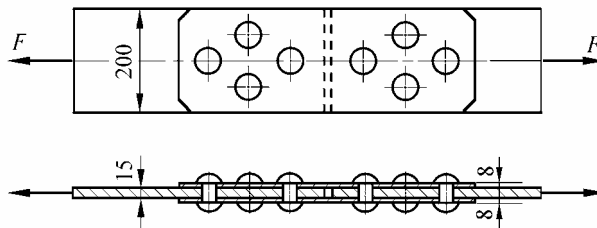
F

$d=20\text{mm}$

$[\sigma]=160\text{MPa}$

$[\tau]=120\text{MPa}$

$[\sigma_{\text{bs}}]=340\text{MPa}$



2-22

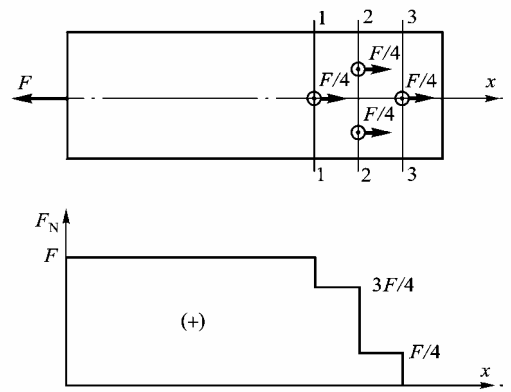


图 2-22

1.
2-22

$$F_{N1} = F, F_{N2} = 3F/4$$

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{F}{(b-d)\delta} \leq [\sigma]$$

$$F \leq (b-d)\delta[\sigma] = (0.200-0.020) \times 0.015 \times 160 \times 10^6 \text{ N} = 4.32 \times 10^5 \text{ N} = 432 \text{ kN}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{3F}{4(b-2d)\delta} \leq [\sigma]$$

$$F \leq \frac{4}{3}(b-2d)\delta[\sigma] = \frac{4}{3}(0.200-0.040) \times 0.015 \times 160 \times 10^6 \text{ N} = 5.12 \times 10^5 \text{ N} = 512 \text{ kN}$$

2.

$$F_s = F/8$$

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{4F}{8\pi d^2} \leq [\tau]$$

$$F \leq 2\pi d^2[\tau] = 2 \times \pi \times 0.020^2 \times 120 \times 10^6 \text{ N} = 3.02 \times 10^5 \text{ N} = 302 \text{ kN}$$

3

$$F_b = F/4$$

$$\sigma_{bs} = \frac{F_b}{\delta d} = \frac{F}{4\delta d} \leq [\sigma_{bs}]$$

$$F \leq 4\delta d[\sigma_{bs}] = 4 \times 0.015 \times 0.020 \times 340 \times 10^6 \text{ N} = 4.08 \times 10^5 \text{ N} = 408 \text{ kN}$$

$$F \quad [F] = 302 \text{ kN}$$

3-2.....	1
3-4.....	2
3-5.....	2
3-7.....	3
3-8.....	5
3-10.....	6
3-11.....	7
3-13.....	8
3-15.....	10
3-16.....	10
3-18.....	11
3-19.....	13
3-20.....	14
3-24.....	15
3-25.....	16
3-27.....	17
3-28.....	18
3-29.....	20
3-30.....	21
3-32.....	22

3-2 一外径 $D=60\text{mm}$ 、内径 $d=20\text{mm}$ 的空心圆截面杆，杆长 $l = 400\text{mm}$ ，两端承受轴向拉力 $F = 200\text{kN}$ 作用。若弹性模量 $E = 80\text{GPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.30$ 。试计算该杆外径的改变量 ΔD 及体积改变量 ΔV 。

解：1. 计算 ΔD

由于

$$\varepsilon = \frac{F}{EA}, \quad \varepsilon' = \frac{\Delta D}{D} = -\mu\varepsilon = -\frac{\mu F}{EA}$$

故有

$$\begin{aligned}\Delta D = \varepsilon' D &= -\frac{\mu FD}{EA} = -\frac{4\mu FD}{E\pi(D^2 - d^2)} = -\frac{4 \times 0.30 \times 200 \times 10^3 \times 0.060}{80 \times 10^9 \times \pi \times (0.060^2 - 0.020^2)} \text{m} \\ &= -1.79 \times 10^{-5} \text{m} = -0.0179 \text{mm}\end{aligned}$$

2. 计算 ΔV

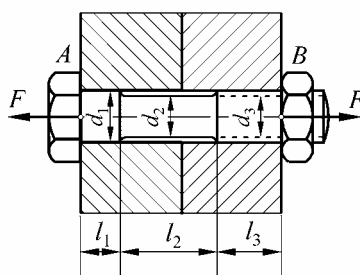
由于变形后该杆的体积为

$$V' = l'A' = (l + \varepsilon l) \frac{\pi}{4} [(D + \varepsilon' D)^2 - (d + \varepsilon' d)^2] = Al(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon')^2 \approx V(1 + \varepsilon + 2\varepsilon')$$

故有

$$\begin{aligned}\Delta V &= V' - V = V(\varepsilon + 2\varepsilon') = \frac{Fl}{E}(1 - 2\mu) = \frac{200 \times 10^3 \times 0.400}{80 \times 10^9} \text{m}^3 (1 - 2 \times 0.3) \\ &= 4.00 \times 10^{-7} \text{m}^3 = 400 \text{mm}^3\end{aligned}$$

3-4 图示螺栓，拧紧时产生 $\Delta l = 0.10 \text{mm}$ 的轴向变形。试求预紧力 F ，并校核螺栓的强度。已知： $d_1 = 8.0 \text{mm}$ ， $d_2 = 6.8 \text{mm}$ ， $d_3 = 7.0 \text{mm}$ ； $l_1 = 6.0 \text{mm}$ ， $l_2 = 29 \text{mm}$ ， $l_3 = 8 \text{mm}$ ； $E = 210 \text{GPa}$ ， $[\sigma] = 500 \text{MPa}$ 。



题 3-4 图

解：1. 求预紧力 F

由于各段轴力数值上均等于 F ，故有

$$\Delta l = \frac{F}{E} \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3} \right) = \frac{4F}{\pi E} \left(\frac{l_1}{d_1^2} + \frac{l_2}{d_2^2} + \frac{l_3}{d_3^2} \right)$$

由此得

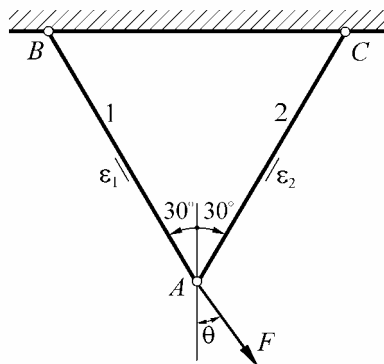
$$F = \frac{\pi E \Delta l}{4 \left(\frac{l_1}{d_1^2} + \frac{l_2}{d_2^2} + \frac{l_3}{d_3^2} \right)} = \frac{\pi \times 210 \times 10^9 \times 0.10 \times 10^{-3}}{4 \times \left(\frac{0.006}{0.008^2} + \frac{0.029}{0.0068^2} + \frac{0.008}{0.007^2} \right)} \text{N} = 1.865 \times 10^4 \text{N} = 18.65 \text{kN}$$

2. 校核螺栓的强度

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A_{\min}} = \frac{4F}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times 18.65 \times 10^3 \text{N}}{\pi \times 0.0068^2 \text{m}^2} = 5.14 \times 10^8 \text{Pa} = 514 \text{MPa}$$

此值虽然超过 $[\sigma]$ ，但超过的百分数仅为 2.6%，在 5% 以内，故仍符合强度要求。

3-5 图示桁架，在节点 A 处承受载荷 F 作用。从试验中测得杆 1 与杆 2 的纵向正应变分别为 $\varepsilon_1 = 4.0 \times 10^{-4}$ 与 $\varepsilon_2 = 2.0 \times 10^{-4}$ 。试确定载荷 F 及其方位角 θ 之值。已知杆 1 与杆 2 的横截面面积 $A_1 = A_2 = 200 \text{mm}^2$ ，弹性模量 $E_1 = E_2 = 200 \text{GPa}$ 。



题 3-5 图

解：1. 求各杆轴力

$$F_{N1} = E_1 \varepsilon_1 A_1 = 200 \times 10^9 \times 4.0 \times 10^{-4} \times 200 \times 10^{-6} \text{ N} = 1.6 \times 10^4 \text{ N} = 16 \text{ kN}$$

$$F_{N2} = E_2 \varepsilon_2 A_2 = 200 \times 10^9 \times 2.0 \times 10^{-4} \times 200 \times 10^{-6} \text{ N} = 8 \times 10^3 \text{ N} = 8 \text{ kN}$$

2. 确定 F 及 θ 之值

由节点 A 的平衡方程 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 可得

$$F_{N2} \sin 30^\circ + F \sin \theta - F_{N1} \sin 30^\circ = 0 \quad (\text{a})$$

$$F_{N1} \cos 30^\circ + F_{N2} \cos 30^\circ - F \cos \theta = 0 \quad (\text{b})$$

化简后，成为

$$F_{N1} - F_{N2} = 2F \sin \theta \quad (\text{c})$$

及

$$\sqrt{3}(F_{N1} + F_{N2}) = 2F \cos \theta \quad (\text{d})$$

联解方程(c)与(d)，得

$$\tan \theta = \frac{F_{N1} - F_{N2}}{\sqrt{3}(F_{N1} + F_{N2})} = \frac{(16 - 8) \times 10^3}{\sqrt{3}(16 + 8) \times 10^3} = 0.1925$$

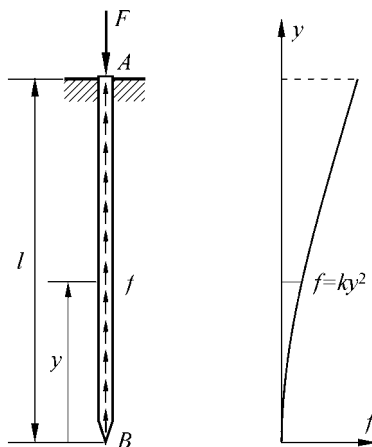
由此得

$$\theta = 10.89^\circ \approx 10.9^\circ$$

$$F = \frac{F_{N1} - F_{N2}}{2 \sin \theta} = \frac{(16 - 8) \times 10^3}{2 \sin 10.89^\circ} \text{ N} = 2.12 \times 10^4 \text{ N} = 21.2 \text{ kN}$$

3-7 图示为打入土中的混凝土桩，顶端承受载荷 F ，并由作用于地桩的摩擦力所支持。

设沿地桩单位长度的摩擦力为 f ，且 $f = ky^2$ ，式中 k 为常数。试求地桩的缩短量 δ 。已知地桩的横截面面积为 A ，弹性模量为 E ，埋入土中的长度为 l 。



题 3-7 图

解：1. 求总摩擦力 F_y

$$F_y = \int_l f dy = \int_0^l ky^2 dy = \frac{kl^3}{3}$$

2. 确定 k

根据 $F_y = F$ ，得

$$\frac{kl^3}{3} = F \rightarrow k = \frac{3F}{l^3} \quad (a)$$

3. 求 y 处的轴力 F_N

$$F_N = \int_0^y f dy^* = \int_0^y ky^{*2} dy^* = \frac{ky^3}{3}$$

4. 求 δ

y 处 dy 微段的缩短量为

$$d\delta = \frac{F_N dy}{EA}$$

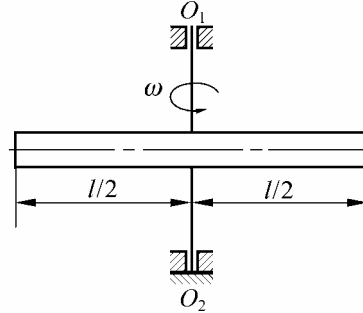
积分可得

$$\delta = \int_0^l \frac{F_N dy}{EA} = \frac{k}{3EA} \int_0^l y^3 dy = \frac{kl^4}{12EA} \quad (b)$$

将式(a)代入式(b)，最后得

$$\delta = \frac{Fl}{4EA}$$

3-8 长度为 $l = 180\text{mm}$ 的铸铁杆, 以角速度 ω 绕 O_1O_2 轴等速旋转。若铸铁密度 $\rho = 7.54 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 许用应力 $[\sigma] = 40\text{MPa}$, 弹性模量 $E = 160\text{GPa}$, 试根据杆的强度确定轴的许用转速, 并计算杆的相应伸长。



题 3-8 图

解: 1. 求轴的许用转速 n

离轴为 x 处的 dx 微段质量的离心惯性力为

$$dF = (\mu A dx) \cdot \omega^2 x$$

x 处杆截面的轴力为

$$F_N(x) = \int_x^{l/2} \rho A \omega^2 x^* dx^* = \frac{\rho A \omega^2}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) \quad (a)$$

最大轴力在轴线处 ($x = 0$), 其值为

$$F_{N,\max} = \frac{\rho A \omega^2 l^2}{8}$$

由强度要求

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N,\max}}{A} = \frac{\rho \omega^2 l^2}{8} \leq [\sigma]$$

可得

$$\omega \leq \sqrt{\frac{8[\sigma]}{\rho l^2}} = \sqrt{\frac{8 \times 40 \times 10^6}{7.54 \times 10^3 \times 0.180^2 \text{sec}^2}} = 1144.5 \text{ 1/sec}$$

计算中用到 $1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m/sec}^2$ 。

相应之许用转速为

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega = \frac{60 \times 1144.5 \text{r}}{2\pi \text{ min}} = 10929 \text{ r/min}$$

2. 计算杆的总伸长量

由式(a)可得

$$\varepsilon(x) = \frac{F_N(x)}{EA} = \frac{\rho\omega^2}{2E} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right)$$

从而有

$$\begin{aligned} \Delta l &= 2 \int_0^{l/2} \varepsilon(x) dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{\rho\omega^2}{2E} \left[\frac{l^2}{4} - x^2 \right] dx \\ &= \frac{\rho\omega^2 l^3}{12E} = \frac{7.54 \times 10^3 \times 1144.5^2 \times 0.180^3}{12 \times 160 \times 10^9} \text{ m} \\ &= 3.00 \times 10^{-5} \text{ m} = 0.030 \text{ mm} \end{aligned}$$

计算中再次用到 $1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$ 。

3-10 图 3-10a 所示涡轮叶片，当涡轮等速旋转时承受离心力作用。设叶冠 A 的重量为 W ，涡轮的角速度为 ω ，叶片材料的弹性模量为 E ，密度为 ρ ，许用应力为 $[\sigma]$ 。试按各横截面的正应力均等于许用应力的原则，确定叶片 x 截面处的横截面面积 $A(x)$ ，并计算叶片的轴向变形。与叶片的离心力相比，叶片的重量很小，可以忽略不计。

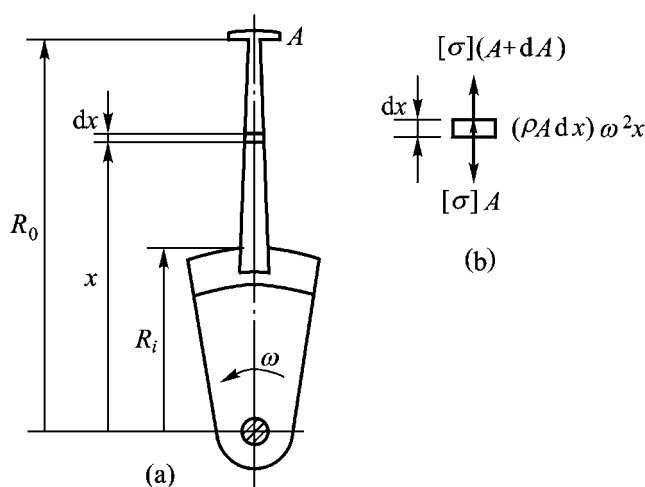


图 3-10

解：当各横截面上的正应力均等于许用应力 $[\sigma]$ 时，叶片微段 dx 的受力情况如图 3-10(b) 所示。由 x 方向力的平衡方程

$$[\sigma](A + dA) + (\rho A dx)\omega^2 x - [\sigma]A = 0$$

得

$$\frac{dA}{A} = - \frac{\rho\omega^2 x dx}{[\sigma]}$$

等号两边积分，得

$$\ln A = -\frac{\rho\omega^2 x^2}{2[\sigma]} + \ln C$$

或写成

$$A(x) = Ce^{-\frac{\rho\omega^2 x^2}{2[\sigma]}} \quad (a)$$

确定 C 的边界条件（坐标 x 以盘心为原点）是：

$$\text{当 } x = R_0 \text{ 时, } A(x) = A(R_0) = \frac{W\omega^2 R_0}{g[\sigma]} \quad (b)$$

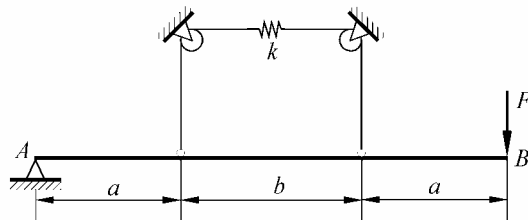
将式(b)代入式(a)，得

$$C = \frac{W\omega^2 R_0}{g[\sigma]} e^{\frac{\rho\omega^2 R_0^2}{2[\sigma]}} \quad (c)$$

将式(c)代入式(a)，最后得到

$$A(x) = \frac{W\omega^2 R_0}{g[\sigma]} e^{\frac{\rho\omega^2 (R_0^2 - x^2)}{2[\sigma]}}$$

3-11 图示刚性横梁 AB ，由钢丝绳并经无摩擦滑轮所支持。设钢丝绳的轴向刚度（即产生单位轴向变形所需之力）为 k ，试求当载荷 F 作用时端点 B 的铅垂位移。



题 3-11 图

解：力 F 作用后刚性梁 AB 倾斜如图(见图 3-11)。设钢丝绳中的轴力为 F_N ，它的总伸长为 Δl 。

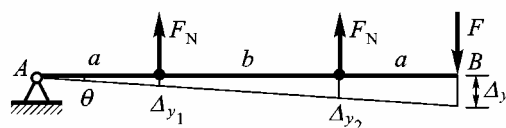


图 3-11

由刚性梁所受各力对点 A 的力矩平衡条件可得

$$F_N a + F_N (a + b) = F(2a + b)$$

$$F_N = F$$

由图示的几何关系易得

$$\Delta_y = \theta(2a + b)$$

$$\Delta l = \Delta_{y_1} + \Delta_{y_2} = \theta a + \theta(a + b) = \theta(2a + b)$$

由此可见，有

$$\Delta_y = \Delta l \quad (b)$$

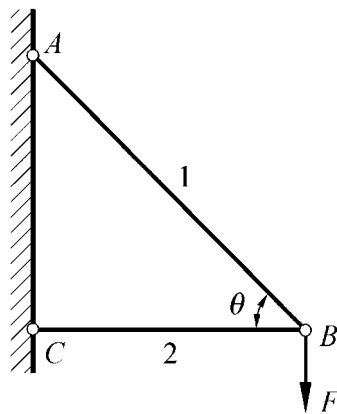
根据 k 的定义，有

$$F_N = k\Delta l = k\Delta_y$$

即

$$\Delta_y = \frac{F_N}{k} = \frac{F}{k}$$

3-13 图示桁架 ABC ，在节点 B 承受集中载荷 F 作用。杆 1 与杆 2 的弹性模量均为 E ，横截面面积分别为 $A_1=320\text{mm}^2$ 与 $A_2=2\,580\text{mm}^2$ 。试问在节点 B 和 C 的位置保持不变的情况下，为使节点 B 的铅垂位移最小， θ 应取何值（即确定节点 A 的最佳位置）。



题 3-13 图

解：1. 求各杆轴力

由图 3-13(a) 可得

$$F_{N1} = \frac{F}{\sin\theta}, \quad F_{N2} = F \tan\theta$$

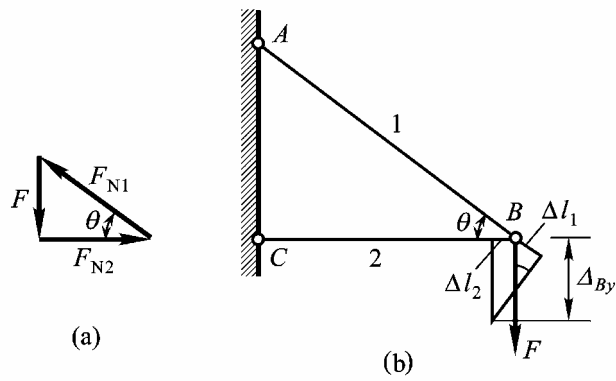


图 3-13

2. 求变形和位移

由图 3-13(b)可得

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} = \frac{2Fl_2}{EA_1 \sin 2\theta}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{EA_2} = \frac{Fl_2 \cot \theta}{EA_2}$$

及

$$\Delta_{By} = \frac{\Delta l_1}{\sin \theta} + \frac{\Delta l_2}{\tan \theta} = \frac{Fl_2}{E} \left(\frac{2}{A_1 \sin 2\theta \sin \theta} + \frac{\cot^2 \theta}{A_2} \right)$$

3. 求 θ 的最佳值

由 $d\Delta_{By}/d\theta = 0$, 得

$$\frac{-2}{A_1} \frac{(2\cos 2\theta \sin \theta + \cos \theta \sin 2\theta)}{\sin^2 2\theta \sin^2 \theta} - \frac{2\cot \theta \cdot \csc^2 \theta}{A_2} = 0$$

或化成

$$\frac{2\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{A_1 \cos^2 \theta} + \frac{2\cos \theta}{A_2} = 0$$

再化简为

$$2A_1 \cos^3 \theta - A_2(1 - 3\cos^2 \theta) = 0$$

将 A_1 、 A_2 的已知数据代入并化简, 得

$$\cos^3 \theta + 12.09375 \cos^2 \theta - 4.03125 = 0$$

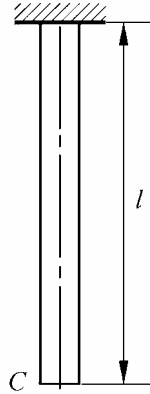
解此三次方程, 舍去增根, 得

$$\cos \theta = 0.564967$$

由此得 θ 的最佳值为

$$\theta = 55.6^\circ$$

3-15 图示杆件，长为 l ，横截面面积为 A ，材料密度为 ρ ，应力-应变关系如图 3-14 图 b 所示。试求杆下端截面 C 的位移。



题 3-15 图

解：自杆的下端截面 C 向上取坐标 y ，在 y 处的轴力为

$$F_N = \rho g A y$$

根据

$$\sigma = \frac{F_N}{A}, \quad \varepsilon = \frac{d\Delta_y}{dy}$$

及

$$\sigma^n = B\varepsilon$$

可得

$$B\left(\frac{d\Delta_y}{dy}\right)^n = \left(\frac{\rho g A y}{A}\right)^n$$

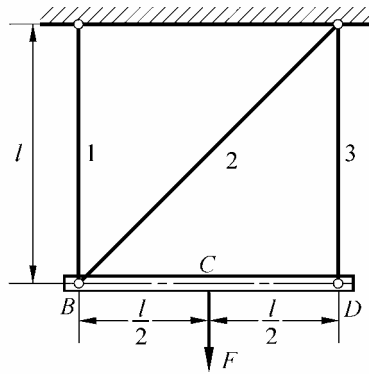
由此得

$$d\Delta_y = \frac{(\rho g)^n}{B} y^n dy$$

等号两边积分，最后得到该杆下端截面 C 的位移为

$$\Delta_{Cy} = \frac{(\rho g)^n}{B} \int_0^l y^n dy = \frac{(\rho g)^n l^{n+1}}{(n+1)B} \quad (\downarrow)$$

3-16 图示结构，梁 BD 为刚体，杆 1、杆 2 与杆 3 的横截面面积与材料均相同。在梁的中点 C 承受集中载荷 F 作用。试计算该点的水平与铅垂位移。已知载荷 $F = 20\text{kN}$ ，各杆的横截面面积均为 $A = 100\text{mm}^2$ ，弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ ，梁长 $l = 1\,000\text{mm}$ 。



题 3-16 图

解：1. 求各杆轴力

由 $\sum F_x = 0$, 得

$$F_{N2} = 0$$

由 $\sum F_y = 0$, 得

$$F_{N1} = F_{N3} = \frac{F}{2} = 10\text{kN}$$

2 . 求各杆变形

$$\Delta l_2 = 0$$

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1}l}{EA} = \frac{10 \times 10^3 \times 1.000}{200 \times 10^9 \times 100 \times 10^{-6}} \text{m} = 5.0 \times 10^{-4} \text{m} = 0.50\text{mm} = \Delta l_3$$

3 . 求中点 C 的位移

由图 3-16 易知 ,

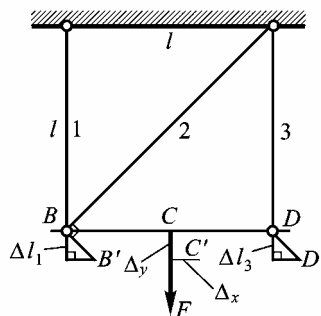
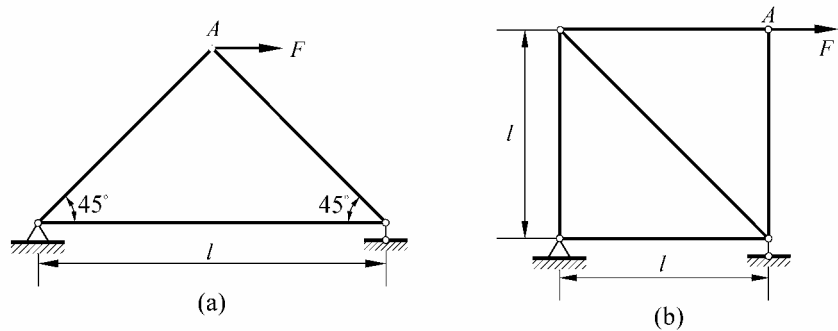


图 3-16

$$\Delta_x = \Delta l_1 = 0.50\text{mm} (\rightarrow) , \Delta_y = \Delta l_1 = 0.50\text{mm} (\downarrow)$$

3-18 如图所示桁架 , 试用能量法求载荷作用点沿载荷作用方向的位移。设各杆各截

面的拉压刚度均为 EA 。



题 3-18 图

(a)解：各杆编号示如图 3-18(a)。各杆轴力依次为

$$F_{N1} = \frac{\sqrt{2}}{2}F, F_{N2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F, F_{N3} = \frac{1}{2}F$$

该桁架的应变能为

$$V_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \frac{F_{Ni}^2 l_i}{2EA} = \frac{1}{2EA} \left(\frac{1}{2}F^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l \times 2 + \frac{1}{4}F^2 l \right) = \frac{F^2 l}{2EA} \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4} \right)$$

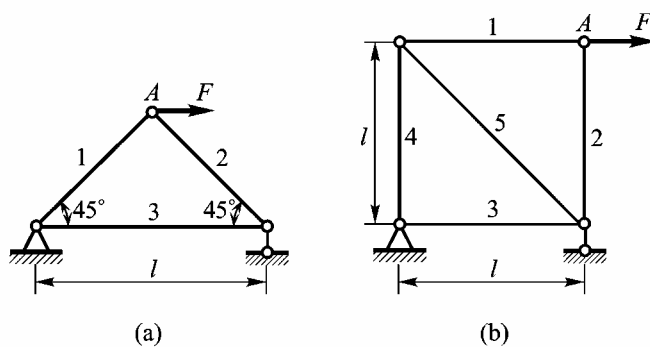


图 3-18

依据

$$W = \frac{1}{2}F\Delta, W = V_{\varepsilon}$$

最后得到

$$\Delta = \frac{2}{F} \cdot \frac{F^2 l}{2EA} \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4} \right) = \frac{(2\sqrt{2}+1)Fl}{4EA} \quad (\rightarrow)$$

(b)解：各杆编号示如图(b)

列表计算如下：

i	F_{Ni}	l_i	$F_{Ni}^2 l_i$
1	F	l	$F^2 l$
2	0	l	0
3	F	l	$F^2 l$

4	F	l	$F^2 l$
5	$-\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}l$	$2\sqrt{2}F^2 l$
Σ			$(3+2\sqrt{2})F^2 l$

于是，

$$V_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^5 \frac{F_{Ni}^2 l_i}{2EA} = \frac{(3+2\sqrt{2})F^2 l}{2EA}$$

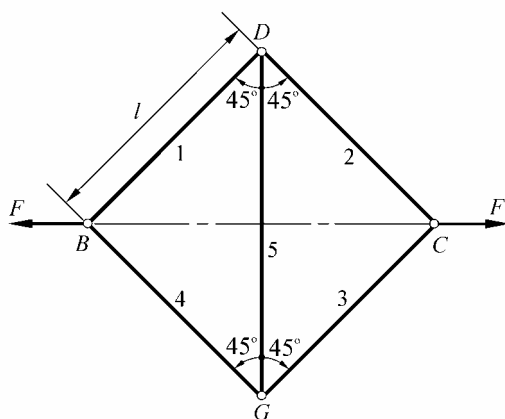
依据

$$W = \frac{1}{2} F \Delta, \quad W = V_{\varepsilon}$$

可得

$$\Delta = \frac{(3+2\sqrt{2})Fl}{EA} \quad (\rightarrow)$$

3-19 试用能量法解题 3-17。



题 3-17 图

解：依据题 3-17 图，可列表计算如下：

i	F_{Ni}	l_i	$F_{Ni}^2 l_i$
1	$\sqrt{2}F/2$	l	$F^2 l/2$
2	$\sqrt{2}F/2$	l	$F^2 l/2$
3	$\sqrt{2}F/2$	l	$F^2 l/2$
4	$\sqrt{2}F/2$	l	$F^2 l/2$
5	$-F$	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}F^2 l$
Σ			$(2+\sqrt{2})F^2 l$

由表中结果可得

$$V_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^5 \frac{F_{Ni}^2 l_i}{2EA} = \frac{(2+\sqrt{2})F^2 l}{2EA}$$

依据

$$W = \frac{1}{2} F \Delta_{B/C}$$

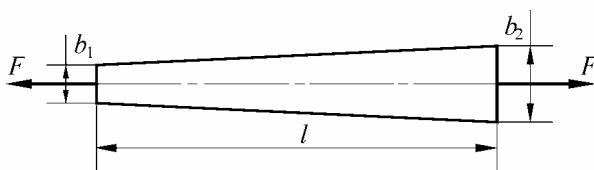
及

$$W = V_{\varepsilon}$$

得

$$\Delta_{B/C} = \frac{(2 + \sqrt{2})Fl}{EA} \quad (\longleftrightarrow)$$

3-20 试用能量法解题 3-6。



题 3-6 图

解：1. 求 $\sigma(x)$

由题 3-6 图可知，若自左向右取坐标 x ，则有

$$b(x) = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{l}x$$

x 截面上有应力

$$\sigma(x) = \frac{F}{\delta b(x)} = \frac{F}{\delta (b_1 + \frac{b_2 - b_1}{l}x)}$$

2. 求 V_{ε}

$$v_{\varepsilon}(x) = \frac{\sigma^2(x)}{2E}$$

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon} &= \int_l v_{\varepsilon}(x) \delta b(x) dx = \int_0^l \frac{1}{2E} \frac{F^2}{\delta (b_1 + \frac{b_2 - b_1}{l}x)} dx = \frac{F^2 l}{2E \delta (b_2 - b_1)} \ln(b_1 + \frac{b_2 - b_1}{l}x) \Big|_0^l \\ &= \frac{F^2 l}{2E \delta (b_2 - b_1)} \ln \frac{b_2}{b_1} \end{aligned}$$

3. 求 Δl

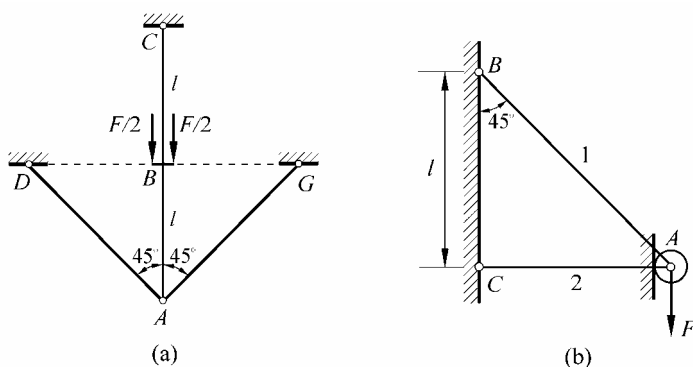
由

$$W = \frac{F \Delta l}{2} = V_{\varepsilon}$$

得

$$\Delta l = \frac{Fl}{E\delta(b_2 - b_1)} \ln \frac{b_2}{b_1}$$

3-24 图示桁架，各杆各截面的拉压刚度相同。试计算在载荷 F 作用时各杆的轴力。



题 3-24 图

(a)解：此为一度静不定桁架。

设 $F_{N,AB}$ 以压为正，其余各段轴力以拉力为正。先取杆 AB 为研究对象，由 $\sum F_y = 0$ ，

得

$$F_{N,BC} + F_{N,AB} = F \quad (a)$$

后取节点 A 为研究对象，由 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 依次得到

$$F_{N,AD} = F_{N,AG} \quad (b)$$

及

$$2F_{N,AD} \cos 45^\circ = F_{N,AB} \quad (c)$$

在节点 A 处有变形协调关系（节点 A 铅垂向下）

$$\Delta l_{BC} - \Delta l_{AB} = \frac{\Delta l_{AD}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \Delta l_{AD} \quad (d)$$

物理关系为

$$\Delta l_{BC} = \frac{F_{N,BC} l}{EA}, \quad \Delta l_{AB} = \frac{F_{N,AB} l}{EA}, \quad \Delta l_{AD} = \frac{F_{N,AD} \sqrt{2} l}{EA} = \Delta l_{AG} \quad (e)$$

将式(e)代入式(d)，化简后得

$$F_{N,BC} - F_{N,AB} = 2F_{N,AD} \quad (d')$$

联解方程(a)、(c)和(d)'，得

$$F_{N,BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}F \text{ (拉)}, F_{N,AB} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}F \text{ (压)}, F_{N,AD} = F_{N,AG} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}F \text{ (拉)}$$

(b)解：此为一度静不定问题。

考虑小轮 A 的平衡，由 $\sum F_y = 0$ ，得

$$F_{N1}\sin 45^\circ - F = 0$$

由此得

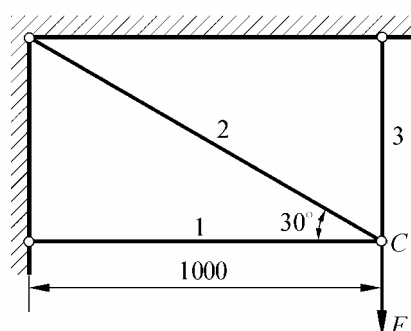
$$F_{N1} = \sqrt{2}F$$

在 F 作用下，小轮 A 沿刚性墙面向下有一微小位移，在小变形条件下， $\Delta l_2 \approx 0$ ，故有

$$F_{N2} = 0$$

F_{N1} 的水平分量由刚性墙面提供的约束反力来平衡。

3-25 图示桁架，杆 1、杆 2 与杆 3 分别用铸铁、铜和钢制成，许用应力分别为 $[\sigma_1]=40\text{MPa}$ ， $[\sigma_2]=60\text{MPa}$ ， $[\sigma_3]=120\text{MPa}$ ，弹性模量分别为 $E_1=160\text{GPa}$ ， $E_2=100\text{GPa}$ ， $E_3=200\text{GPa}$ 。若载荷 $F=160\text{kN}$ ， $A_1=A_2=2A_3$ ，试确定各杆的横截面面积。



题 3-25 图

解：此为一度静不定结构。节点 C 处的受力和变形图分别示如图 3-25(a)和(b)。

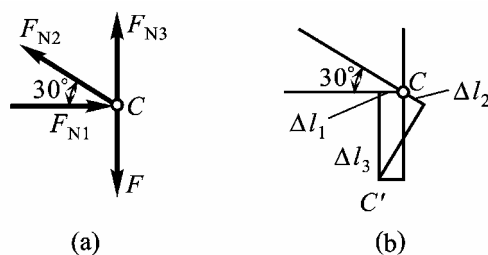


图 3-25

静力学方面

由图(a)可得

$$\sum F_x = 0, F_{N1} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_{N2} \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, \frac{1}{2} F_{N2} + F_{N3} = F \quad (b)$$

几何方面

由图(b)得变形协调方程为

$$\Delta l_1 \tan 30^\circ + \frac{\Delta l_2}{\sin 30^\circ} = \Delta l_3 \quad (c)$$

物理方面

根据胡克定律, 有

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{E_1 A_1} = \frac{F_{N1} l_1}{2 E_1 A_3}, \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{E_2 A_2} = \frac{F_{N2} l_1}{\sqrt{3} E_2 A_3}, \Delta l_3 = \frac{F_{N3} l_3}{E_3 A_3} = \frac{F_{N3} l_1}{\sqrt{3} E_3 A_3} \quad (d)$$

将式(d)代入式(c), 化简后得

$$15 F_{N1} + 32 F_{N2} = 8 F_{N3} \quad (c)'$$

联解方程(a)、(b)和(c)', 并代入数据, 得

$$F_{N1} = 22.6 \text{ kN (压)}, F_{N2} = 26.1 \text{ kN (拉)}, F_{N3} = 146.9 \text{ kN (拉)}$$

根据强度要求, 计算各杆横截面面积如下:

$$A_1 \geq \frac{F_{N1}}{[\sigma_1]} = \frac{22.6 \times 10^3}{40 \times 10^6} \text{ m}^2 = 5.65 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 565 \text{ mm}^2$$

$$A_2 \geq \frac{F_{N2}}{[\sigma_2]} = \frac{26.1 \times 10^3}{60 \times 10^6} \text{ m}^2 = 4.35 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 435 \text{ mm}^2$$

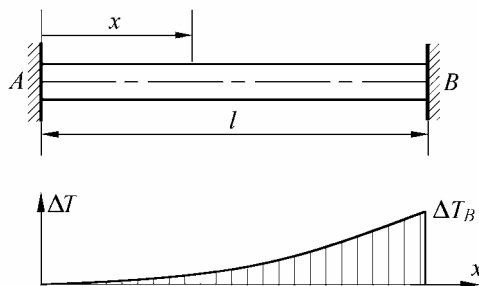
$$A_3 \geq \frac{F_{N3}}{[\sigma_3]} = \frac{146.9 \times 10^3}{120 \times 10^6} \text{ m}^2 = 1.224 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 1224 \text{ mm}^2$$

根据题意要求, 最后取

$$A_1 = A_2 = 2 A_3 \geq 2450 \text{ mm}^2$$

3-27 图示两端固定的等截面杆 AB, 杆长为 l 。在非均匀加热的条件下, 距 A 端 x

处的温度增量为 $\Delta T = \Delta T_B x^2 / l^2$, 式中的 ΔT_B 为杆件 B 端的温度增量。试求杆件横截面上的应力。材料的弹性模量与线膨胀系数分别为 E 与 α_l 。



题 3-27 图

解：1. 求温度增高引起的杆件伸长

此为一度静不定问题。假如将 B 端约束解除掉，则在 x 处的杆微段 dx 就会因温升而有一个微伸长

$$d(\Delta l_t) = \alpha_l \Delta T dx = \frac{\alpha_l \Delta T_B x^2}{l^2} dx$$

全杆伸长为

$$\Delta l_t = \int_0^l \frac{\alpha_l \Delta T_B x^2}{l^2} dx = \frac{\alpha_l \Delta T_B l}{3}$$

2. 求约束反力

设固定端因阻止伸长而产生的约束反力为 F ，杆件因 F 作用而引起的缩短量为

$$\Delta l_F = \frac{F_N l}{EA} = \frac{Fl}{EA}$$

由变形协调条件

$$\Delta l_F = \Delta l_t$$

可得

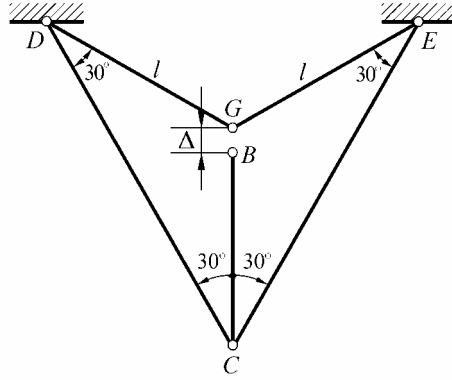
$$F = \frac{EA}{l} \cdot \frac{\alpha_l \Delta T_B l}{3} = \frac{EA \alpha_l \Delta T_B}{3}$$

3. 求杆件横截面上的应力

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{E \alpha_l \Delta T_B}{3}$$

3-28

图示桁架，杆 BC 的实际长度比设计尺寸稍短，误差为 Δ 。如使杆端 B 与节点 G 强制地连接在一起，试计算各杆的轴力。设各杆各截面的拉压刚度均为 EA 。



题 3-28 图

解：此为一度静不定问题。自左向右、自上向下将各杆编号1~5。由强制装配容易判断，杆1~3受拉，杆4和5受压。装配后节点G和C的受力图分别示如图3-28(a)和(b)。

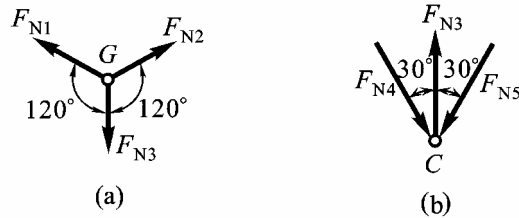


图 3-28

静力学方面

由图(a)可得

$$F_{N1} = F_{N2} = F_{N3} \quad (a)$$

由图(b)可得

$$F_{N4} = F_{N5}, F_{N3} = 2F_{N4}\cos 30^\circ = \sqrt{3}F_{N4} \quad (b)$$

几何方面

变形协调关系为(参看原题图)

$$\Delta = \frac{\Delta l_1}{\cos 60^\circ} + \frac{\Delta l_4}{\cos 30^\circ} + \Delta l_3 \quad (c)$$

物理方面

依据胡克定律，有

$$\Delta l_i = \frac{F_{Ni}l_i}{EA} \quad (i = 1 \sim 5) \quad (d)$$

将式(d)代入式(c)，得

$$\Delta = \frac{2F_{N1}l}{EA} + \frac{2F_{N4}\sqrt{3}l}{\sqrt{3}EA} + \frac{F_{N3}l}{EA} \quad (e)$$

补充方程(e)与静力学方程(a)、(b)联立求解，最后得

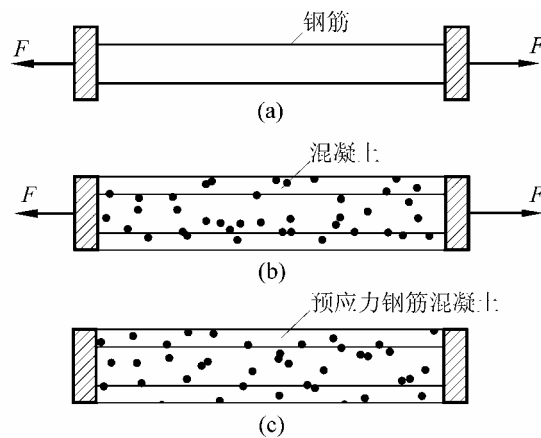
$$F_{N3} = \frac{(9-2\sqrt{3})EA}{23l} \Delta, \quad F_{N4} = \frac{(3\sqrt{3}-2)EA}{23l} \Delta$$

即

$$F_{N,BC} = F_{N,GD} = F_{N,GE} = \frac{(9-2\sqrt{3})EA}{23l} \Delta \quad (\text{拉})$$

$$F_{N,CD} = F_{N,CE} = \frac{(3\sqrt{3}-2)EA}{23l} \Delta \quad (\text{压})$$

3-29 一种制作预应力钢筋混凝土的方式如图所示。首先用千斤顶以拉力 F 拉伸钢筋 (图 a), 然后浇注混凝土 (图 b)。待混凝土凝固后, 卸除拉力 F (图 c), 这时, 混凝土受压, 钢筋受拉, 形成预应力钢筋混凝土。设拉力 F 使钢筋横截面上产生的初应力 $\sigma_0 = 820 \text{ MPa}$, 钢筋与混凝土的弹性模量之比为 8:1, 横截面面积之比为 1:30, 试求钢筋与混凝土横截面上的预应力。



题 3-29 图

解：此为一度静不定问题。

卸除拉力 F 后, 钢筋仍受拉, 而混凝土却受压。设它们的应力分别为 σ_s 和 σ_c , 由静力平衡条件可得

$$\sigma_c A_c = \sigma_s A_s \quad (\text{a})$$

这里 σ_s 以拉为正, σ_c 以压为正。

变形协调方程为

$$\Delta l_0 = \Delta l_s + \Delta l_c \quad (\text{b})$$

式中, Δl_0 代表初加 F 时钢筋的总伸长量, Δl_s 代表卸除 F 后钢筋保留的伸长量, 而 Δl_c 则代表卸除 F 后混凝土产生的缩短量, 并以缩短为正。

物理关系为

$$\Delta l_0 = \frac{\sigma_0}{E_s} l, \Delta l_s = \frac{\sigma_s}{E_s} l, \Delta l_c = \frac{\sigma_c}{E_c} l \quad (c)$$

将式(c)代入式(b)，稍作化简，得

$$\sigma_0 = \sigma_s + \frac{E_s}{E_c} \sigma_c$$

考虑到式(a)，有

$$\sigma_0 = \sigma_s \left(1 + \frac{E_s}{E_c} \cdot \frac{A_s}{A_c} \right) = \frac{19}{15} \sigma_s$$

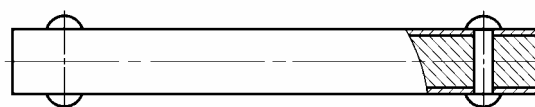
由此得

$$\sigma_s = \frac{15}{19} \sigma_0 = \frac{15}{19} \times 820 \text{ MPa} = 647 \text{ MPa (拉)}$$

根据式(a)，最后得到

$$\sigma_c = \frac{A_s}{A_c} \sigma_s = \frac{1}{30} \times 647 \text{ MPa} = 21.6 \text{ MPa (压)}$$

3-30 图示组合杆，由直径为 30mm 的钢杆套以外径为 50mm、内径为 30mm 的铜管组成，二者由两个直径为 10mm 的铆钉连接在一起。铆接后，温度升高 40℃，试计算铆钉剪切面上的切应力。钢与铜的弹性模量分别为 $E_s = 200 \text{ GPa}$ 与 $E_c = 100 \text{ GPa}$ ，线膨胀系数分别为 $\alpha_{js} = 12.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 与 $\alpha_{jc} = 16 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 。



题 3-30 图

解：设温度升高 ΔT 时钢杆和铜管自由伸长量分别为 δ_{Ts} 和 δ_{Tc} ，由于二者被铆钉连在一起，变形要一致，即

$$\delta_{Ts} + \Delta l_s = \delta_{Tc} - \Delta l_c$$

或写成

$$\Delta l_s + \Delta l_c = \delta_{Tc} - \delta_{Ts}$$

这是本题的变形协调方程。这里，伸长量 Δl_s 和缩短量 Δl_c 均设为正值。

引入物理关系，得

$$\frac{F_{Ns}l}{E_s A_s} + \frac{F_{Nc}l}{E_c A_c} = (\alpha_{lc} - \alpha_{ls})l\Delta T$$

将静力平衡条件 $F_{Ns} = F_{Nc} = F$ 代入上式，得

$$F = \frac{E_s A_s E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} (\alpha_{lc} - \alpha_{ls}) \Delta T$$

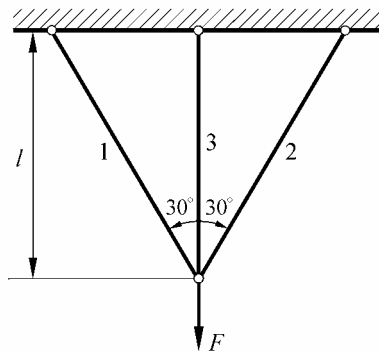
注意到每个铆钉有两个剪切面，故其切应力为

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{F}{2A} = \frac{E_s A_s E_c A_c (\alpha_{lc} - \alpha_{ls}) \Delta T}{2A(E_s A_s + E_c A_c)}$$

$$= \frac{200 \times 10^9 \times 0.030^2 \times 100 \times 10^9 \times (0.050^2 - 0.030^2) \times (16 - 12.5) \times 10^{-6} \times 40 \text{ N}}{2 \times 0.010^2 \times [200 \times 10^9 \times 0.030^2 + 100 \times 10^9 \times (0.050^2 - 0.030^2)] \text{ m}^2}$$

$$= 5.93 \times 10^7 \text{ Pa} = 59.3 \text{ MPa}$$

3-32 图示桁架，三杆的横截面面积、弹性模量与许用应力均相同，并分别为 A ， E 与 $[\sigma]$ ，试确定该桁架的许用载荷 $[F]$ 。为了提高许用载荷之值，现将杆 3 的设计长度 l 变为 $l + \Delta l$ 。试问当 Δl 为何值时许用载荷最大，其值 $[F]_{\max}$ 为何。



题 3-32 图

解: 此为一度静不定问题。

节点 C 处的受力及变形示如图 3-32(a)和(b)。

静力学方面

由图(a)可得

$$F_{N1} = F_{N2}, 2F_{N1} \cos 30^\circ + F_{N3} = F \quad (a)$$

几何方面

由图(b)可得

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos 30^\circ \quad (b)$$

物理方面

依据胡克定律, 有

$$\Delta l_i = \frac{F_{Ni} l_i}{EA} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (c)$$

将式(c)代入式(b), 化简后得

$$F_{N3} = \frac{4}{3} F_{N1} \quad (b)'$$

将方程(b)'与方程(a)联解, 得

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{3}{4 + 3\sqrt{3}} F, \quad F_{N3} = \frac{4}{4 + 3\sqrt{3}} F > F_{N1}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N3}}{A} = \frac{4F}{(4 + 3\sqrt{3})A} \leq [\sigma]$$

由此得

$$F \leq \frac{(4 + 3\sqrt{3})[\sigma]A}{4}, \quad [F] = \frac{(4 + 3\sqrt{3})[\sigma]A}{4}$$

为了提高 $[F]$ 值, 可将杆3做长 Δ , 参考图(b)给的几何关系, 这里有

$$\Delta l_3 + \Delta = \frac{\Delta l_1}{\cos 30^\circ}$$

式中, Δl_3 , Δl_1 均为受载后的伸长, 依题意, 有了 Δ 后, 应使三根杆同时达到 $[\sigma]$, 即

$$\frac{[\sigma]}{E} l + \Delta = \frac{4[\sigma]}{3E} l$$

由此得

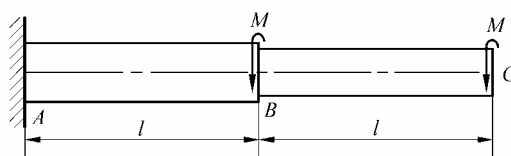
$$\Delta = \left(\frac{4}{3} - 1\right) \frac{[\sigma]l}{E} = \frac{[\sigma]l}{3E}$$

此时, 各杆的强度均充分发挥出来, 故有

$$[F]_{\max} = 2([\sigma]A \cos 30^\circ) + [\sigma]A = (1 + \sqrt{3})[\sigma]A$$

4-4	1
4-5	2
4-7	2
4-8	3
4-9	4
4-11	6
4-13	7
4-14	9
4-19	9
4-20	10
4-21	11
4-22	12
4-23	14
4-24	16
4-26	17
4-27	18
4-28	20
4-29	21
4-33	22
4-34	22
4-35	24
4-36	25

4-4 图示圆截面轴， AB 与 BC 段的直径分别为 d_1 与 d_2 ，且 $d_1 = 4d_2/3$ 。试求轴内的最大扭转切应力。



题 4-4 图

解：由题图可知， AB 段和 BC 段的扭矩分别为

$$T_1 = 2M, T_2 = M$$

AB 段内的最大扭转切应力为

$$\tau_{1\max} = \frac{16T_1}{\pi d_1^3} = \frac{16(2M) \times 3^3}{\pi (\pi(4d_2)^3)} = \frac{13.5M}{\pi d_2^3}$$

BC 段内的最大扭转切应力为

$$\tau_{2\max} = \frac{16T_2}{\pi d_2^3} = \frac{16M}{\pi d_2^3}$$

结论：轴内的最大扭转切应力为 $\tau_{\max} = 16M / (\pi d_2^3)$ 。

4-5 一受扭薄壁圆管，外径 $D = 42\text{mm}$ ，内径 $d = 40\text{mm}$ ，扭力矩 $M = 500\text{N} \cdot \text{m}$ ，切变模量 $G = 75\text{GPa}$ 。试计算圆管横截面与纵截面上的扭转切应力，并计算管表面纵线的倾斜角。

解：该薄壁圆管的平均半径和壁厚依次为

$$R_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} + \frac{d}{2} \right) = 20.5\text{mm}, \quad \delta = \frac{D}{2} - \frac{d}{2} = 1\text{mm}$$

于是，该圆管横截面上的扭转切应力为

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2 \delta} = \frac{500\text{N}}{2\pi \times 0.0205^2 \times 0.001\text{m}^2} = 1.894 \times 10^8 \text{Pa} = 189.4\text{MPa}$$

依据切应力互等定理，纵截面上的扭转切应力为

$$\tau' = \tau = 189.4\text{MPa}$$

该圆管表面纵线的倾斜角为

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{189.4 \times 10^6}{75 \times 10^9} \text{rad} = 2.53 \times 10^{-3} \text{rad}$$

4-7 试建立薄壁圆管的扭转切应力公式，即式 (4-7)，并证明当 $R_0 / \delta \geq 10$ 时，该公式的最大误差不超过 4.53%。

解：我们设薄壁圆管的平均半径和壁厚分别为 R_0 和 δ 。微剪力 τ dA 对截面圆心（矩心）

的微力矩为 $R_0 \tau dA$ ，由构成关系知，该截面的扭矩为

$$T = \int_A R_0 \tau dA \quad (\text{a})$$

由于中心对称， τ 沿圆周方向大小不变；又由于管壁很薄， τ 沿壁厚方向也可近似地认为是均匀分布的。这样一来，式(a)可以写成

$$T = R_0 \tau A \quad (\text{b})$$

对于薄壁圆管，其横截面面积可表示为

$$A \approx 2\pi R_0 \delta \quad (\text{c})$$

将式(c)代入式(b)，得薄壁圆管的扭转切应力公式为

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2 \delta} \quad (4-7)$$

设 $R_0/\delta = \beta$ ，按照公式(4-7)计算的扭转切应力为

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2 \delta} = \frac{T}{2\pi \beta^2 \delta^3} \quad (d)$$

按照一般空心圆轴考虑，轴的内、外直径依次为

$$d = 2R_0 - \delta, \quad D = 2R_0 + \delta$$

横截面的极惯性矩为

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32}[(2R_0 + \delta)^4 - (2R_0 - \delta)^4] = \frac{\pi R_0 \delta}{2}(4R_0^2 + \delta^2)$$

由此可得

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p}(R_0 + \frac{\delta}{2}) = \frac{T}{\pi R_0 \delta (4R_0^2 + \delta^2)}(2R_0 + \delta) = \frac{T(2\beta + 1)}{\pi \beta \delta^3 (4\beta^2 + 1)} \quad (e)$$

将式(d)与式(e)作比较，即

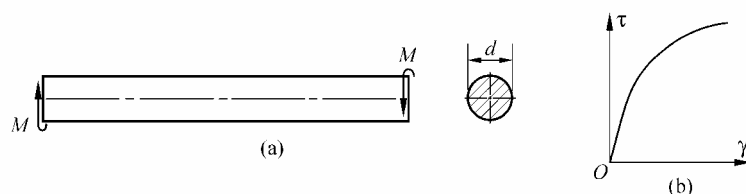
$$\frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{T}{2\pi \beta^2 \delta^3} \cdot \frac{\pi \beta \delta^3 (4\beta^2 + 1)}{T(2\beta + 1)} = \frac{4\beta^2 + 1}{2\beta(2\beta + 1)}$$

当 $\beta = \frac{R_0}{\delta} = 10$ 时，

$$\frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{4 \times 10^2 + 1}{2 \times 10 \times (2 \times 10 + 1)} = 0.9548$$

可见，当 $R_0/\delta \geq 10$ 时，按公式(4-7)计算 τ 的最大误差不超过 4.53%。

4-8 图 a 所示受扭圆截面轴，材料的 $\tau-\gamma$ 曲线如图 b 所示，并可用 $\tau = C\gamma^{1/m}$ 表示，式中的 C 与 m 为由试验测定的已知常数。试建立扭转切应力公式，并画横截面上的切应力分布图。



题 4-8 图

解：这里是圆截面轴，平面假设仍然成立。据此，从几何方面可以得到（见书中 § 4-2 节）

$$\gamma_{\rho} = \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (a)$$

根据题设，轴横截面上距圆心为 ρ 处的切应力为

$$\tau_{\rho} = C \left(\rho \frac{d\varphi}{dx} \right)^{1/m} \quad (b)$$

由静力学可知（构成关系），

$$\int_A \rho \tau_{\rho} dA = C \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^{1/m} \int_A \rho^{(m+1)/m} dA = T \quad (c)$$

可取径向宽度为 $d\rho$ 的环形微面积作为 dA ，即

$$dA = 2\pi\rho d\rho \quad (d)$$

将式(d)代入式(c)，可得

$$2\pi C \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^{1/m} \int_0^{d/2} \rho^{(2m+1)/m} d\rho = T$$

由此得

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^{1/m} = \frac{(3m+1)T}{2\pi C m \left(\frac{d}{2} \right)^{(3m+1)/m}} \quad (e)$$

将式(e)代入式(b)，并注意到 $T=M$ ，最后得到扭转切应力公式为

$$\tau_{\rho} = \frac{M \rho^{1/m}}{\frac{2\pi m}{3m+1} \left(\frac{d}{2} \right)^{(3m+1)/m}}$$

横截面上的切应力分布图（以某一半径上的分布为例）示如图 4-8。

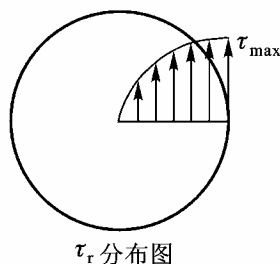
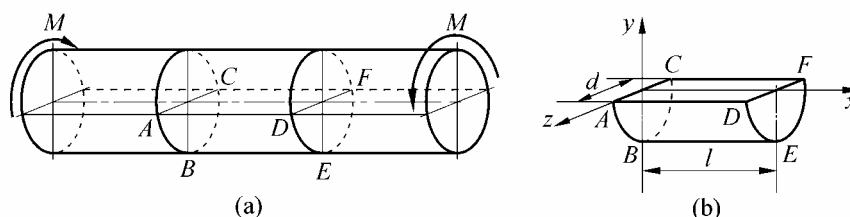


图 4-8

4-9 在图 a 所示受扭圆截面轴内，用横截面 ABC 和 DEF 与径向纵截面 $ADFC$ 切出单元体 $ABCDEF$ （图 b）。试绘各截面上的应力分布图，并说明该单元体是如何平衡的。



题 4-9 图

解：单元体 $ABCDEF$ 各截面上的应力分布图如图 4-9(a) 所示。

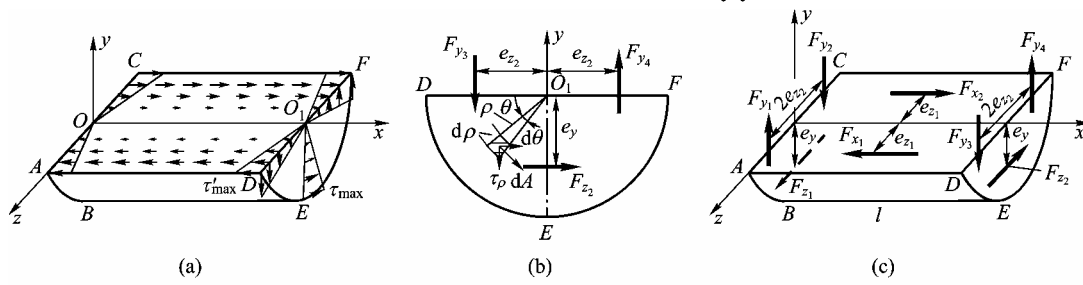


图4-9

根据图(a)，不难算出截面 AOO_1D 上分布内力的合力为

$$F_{x_1} = \frac{1}{2} \tau'_{\max} \left(\frac{d}{2} l \right) = \frac{4Tl}{\pi d^2}$$

同理，得截面 $OCFO_1$ 上分布内力的合力为

$$F_{x_2} = \frac{4Tl}{\pi d^2}$$

方向示如图(c)。

设 F_{x_1} 、 F_{x_2} 作用线到 x 轴线的距离为 e_{z_1} ，容易求出

$$e_{z_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d}{3}$$

根据图(b)，可算出单元体右端面上水平分布内力的合力为

$$F_{z_2} = \int_0^\pi \int_0^{d/2} \frac{T\rho}{I_p} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \rho d\rho d\theta = \frac{8T}{3\pi d}$$

同理，左端面上的合力为

$$F_{z_1} = \frac{8T}{3\pi d}$$

方向亦示如图(c)。

设 F_{z_2} 作用线到水平直径 DF 的距离为 e_y (见图 b)，由

$$F_{z_2} e_y = \frac{T}{I_p} \int_0^\pi \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{T}{4}$$

得

$$e_y = \frac{T}{4} \cdot \frac{3\pi d}{8T} = \frac{3\pi d}{32} \approx 0.295d$$

同理， F_{z_1} 作用线到水平直径 AC 的距离也同此值。

根据图(b)，还可算出半个右端面 DO_1E 上竖向分布内力的合力为

$$F_{y_3} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{d/2} \frac{T\rho}{I_p} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \rho d\rho d\theta = \frac{4T}{3\pi d}$$

设 F_{y_3} 作用线到竖向半径 O_1E 的距离为 e_{z_2} (见图 b)，由

$$F_{y_3} e_{z_2} = \frac{T}{I_p} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{T}{8}$$

得

$$e_{z_2} = \frac{T}{8} \cdot \frac{3\pi d}{4T} = \frac{3\pi d}{32} \approx 0.295d$$

同理，可算出另半个右端面 O_1FE 以及左端面 AOB 、 OCB 上的竖向分布内力的合力为

$$F_{y_4} = F_{y_1} = F_{y_2} = \frac{4T}{3\pi d}$$

方向均示如图(c)。它们的作用线到所在面竖向半径的距离均为 e_{z_2} 。

由图(c)可以看得很清楚，该单元体在四对力的作用下处于平衡状态，这四对力构成四个力偶，显然，这是一个空间力偶系的平衡问题。

$$\sum M_x = 0, F_{y_4} \cdot (2e_{z_2}) + F_{z_2} \cdot e_y - F_{y_1} \cdot (2e_{z_2}) - F_{z_1} \cdot e_y = \frac{T}{2} - \frac{T}{2} = 0$$

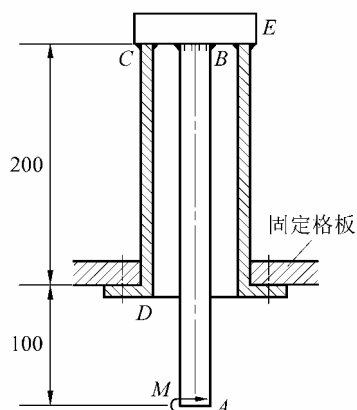
$$\sum M_y = 0, F_{z_2} \cdot l - F_{x_1} \cdot (2e_{z_1}) = \frac{8Tl}{3\pi d} - \frac{8Tl}{3\pi d} = 0$$

$$\sum M_z = 0, F_{y_4} \cdot l - F_{y_3} \cdot l = \frac{4Tl}{3\pi d} - \frac{4Tl}{3\pi d} = 0$$

既然是力偶系，力的平衡方程（共三个）自然满足，这是不言而喻的。

上述讨论中，所有的 T 在数值上均等于 M 。

4-11 如图所示，圆轴 AB 与套管 CD 用刚性突缘 E 焊接成一体，并在截面 A 承受扭力矩 M 作用。圆轴的直径 $d = 56\text{mm}$ ，许用切应力 $[\tau_1] = 80\text{MPa}$ ，套管的外径 $D = 80\text{mm}$ ，壁厚 $\delta = 6\text{mm}$ ，许用切应力 $[\tau_2] = 40\text{MPa}$ 。试求扭力矩 M 的许用值。



题 4-11 图

解：由题图知，圆轴与套管的扭矩均等于 M 。

1. 由圆轴 AB 求 M 的许用值 M_1

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_1}{W_{p1}} = \frac{16M_1}{\pi d^3} \leq [\tau_1]$$

由此得

$$M_1 \leq \frac{\pi d^3 [\tau_1]}{16} = \frac{\pi \times 0.056^3 \times 80 \times 10^6}{16} \text{ N} \cdot \text{m} = 2.76 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 2.76 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

2. 由套管 CD 求 M 的许用值 M_2

$$R_0 = \frac{D - \delta}{2} = \frac{80 - 6}{2} \text{ mm} = 37 \text{ mm}, \quad \delta = 6 \text{ mm} > R_0 / 10$$

此管不是薄壁圆管。

$$\alpha = \frac{80 - 6 \times 2}{80} = \frac{68}{80} = 0.85$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{M_2}{W_{p2}} = \frac{16M_2}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} \leq [\tau_2]$$

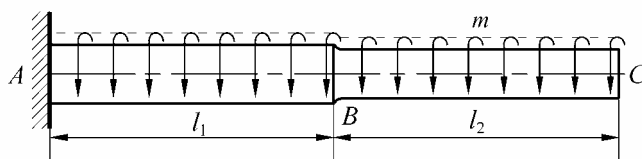
由此得

$$\begin{aligned} M_2 &\leq \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4) [\tau_2]}{16} = \frac{\pi \times 0.080^3 \times (1 - 0.85^4) \times 40 \times 10^6}{16} \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 1.922 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.922 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

结论：扭矩的许用值为 $[M] = 1.922 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

4-13 图示阶梯形轴，由 AB 与 BC 两段等截面圆轴组成，并承受集度为 m 的均匀分布的扭矩作用。为使轴的重量最轻，试确定 AB 与 BC 段的长度 l_1 与 l_2 以及直径 d_1 与 d_2 。

已知轴总长为 l ，许用切应力为 $[\tau]$ 。



题 4-13 图

解：1. 求 d_1

在截面 A 处有最大扭矩，其值为

$$T_{\max 1} = ml$$

由该截面的扭转强度条件

$$\tau_{\max 1} = \frac{T_{\max 1}}{W_{p1}} = \frac{16ml}{\pi d_1^3} \leq [\tau]$$

得

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16ml}{\pi[\tau]}} \quad (a)$$

2. 求 $d_2(l_2)$

BC 段上的最大扭矩在截面 B 处，其值为

$$T_{\max 2} = ml_2$$

由截面 B 的扭转强度条件可得

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16ml_2}{\pi[\tau]}}$$

3. 求 $V(l_2)$

该轴的总体积为

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{4} d_1^2 (l - l_2) + \frac{\pi}{4} d_2^2 l_2 \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{16ml}{\pi[\tau]} \right)^{2/3} (l - l_2) + \left(\frac{16ml_2}{\pi[\tau]} \right)^{2/3} l_2 \right] \end{aligned}$$

4. 求 l_2

根据极值条件

$$\frac{dV}{dl_2} = 0$$

得

$$-\left(\frac{16ml}{\pi[\tau]}\right)^{2/3} + \left(\frac{16m}{\pi[\tau]}\right)^{2/3} \times \frac{5}{3} l_2^{2/3} = 0$$

即

$$l_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} l \approx 0.465l \quad (b)$$

5. 求 l_1 和 d_2

$$l_1 = l - l_2 = \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2}\right] l \approx 0.535l \quad (c)$$

$$d_2 = \left(\frac{16m}{\pi[\tau]}\right)^{1/3} \cdot l_2^{1/3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \sqrt[3]{\frac{16ml}{\pi[\tau]}} \approx 0.775d_1 \quad (d)$$

该轴取式(a) ~ (d)所给尺寸, 可使轴的体积最小, 重量自然也最轻。

4-14 一密圈螺旋弹簧, 承受轴向载荷 $F = 1\text{kN}$ 作用。设弹簧的平均直径 $D = 40\text{mm}$, 弹簧丝的直径 $d = 7\text{mm}$, 许用切应力 $[\tau] = 480\text{MPa}$, 试校核弹簧的强度。

解: 由于

$$m = \frac{D}{d} = \frac{40}{7} = 5.71 < 10$$

故需考虑曲率的影响, 此时,

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{8FD(4m+2)}{\pi d^3(4m-3)} = \frac{8 \times 1.00 \times 10^3 \times 0.040 \times (4 \times 5.71 + 2)\text{N}}{\pi \times 0.007^3 \times (4 \times 5.71 - 3)\text{m}^2} \\ &= 3.72 \times 10^8 \text{Pa} = 372\text{MPa} \end{aligned}$$

结论: $\tau_{\max} < [\tau]$, 该弹簧满足强度要求。

4-19 一薄壁圆管, 两端承受扭力矩 M 作用。设管的平均半径为 R_0 , 壁厚为 δ , 管长为 l , 切变模量为 G , 试证明薄壁圆管的扭转角为

$$\varphi = \frac{Ml}{2G R_0^3 \delta}$$

证明: 解此证明题的思路是 $\tau \rightarrow \gamma \rightarrow \varphi$ 。

薄壁圆管的扭转切应力为

$$\tau = \frac{T}{W_p} = \frac{M}{2\pi R_0^2 \delta}$$

从而有

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{M}{2G\pi R_0^2 \delta}$$

注意到切应变 γ 代表了圆管母线 AB 的倾斜角，示如图 4-19。右端点 B 绕所在截面圆心转过

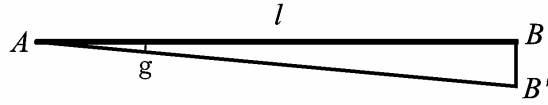


图 4-19

弧段 BB' ，在小变形条件下，其值

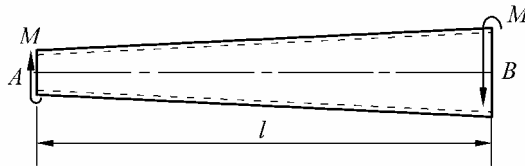
$$s = \gamma l = \frac{Ml}{2G\pi R_0^2 \delta}$$

弧段 BB' 所对应的圆心角，正是圆管右端面相对于左端面的扭转角，即

$$\phi = \frac{s}{R_0} = \frac{Ml}{2G\pi R_0^3 \delta}$$

4-20 图示圆锥形薄壁轴 AB ，两端承受扭力矩 M 作用。设壁厚为 δ ，横截面 A 与 B 的平均直径分别为 d_A 与 d_B ，轴长为 l ，切变模量为 G 。试证明截面 A 和 B 间的扭转角为

$$\varphi_{A/B} = \frac{2Ml}{G\delta} \frac{(d_A + d_B)}{d_A^2 d_B^2}$$



题 4-20 图

证明：自左端 A 向右取坐标 x ，轴在 x 处的平均半径为

$$R_0(x) = \frac{1}{2} \left(d_A + \frac{d_B - d_A}{l} x \right) = \frac{1}{2} (d_A + cx)$$

式中，

$$c = \frac{d_B - d_A}{l}$$

轴在 x 处的极惯性矩为

$$I_p = 2\pi R_0^3 \delta = 2\pi \delta \left[\frac{1}{2} (d_A + cx) \right]^3 = \frac{\pi \delta}{4} (d_A + cx)^3$$

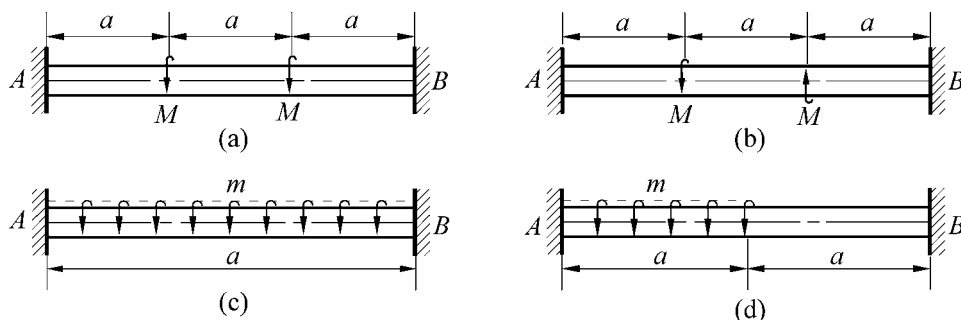
依据

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T(x)}{GI_p} = \frac{4M}{G\pi \delta (d_A + cx)^3}$$

得截面 A 和 B 间的扭转角为

$$\begin{aligned}\varphi_{A/B} &= \frac{4M}{\pi G \delta} \int_0^l \frac{d(d_A + cx)}{c(d_A + cx)^3} = \frac{-2M}{\pi G \delta c} (d_A + cx)^{-2} \Big|_0^l \\ &= \frac{-2Ml}{\pi G \delta (d_B - d_A)} \left(\frac{1}{d_B^2} - \frac{1}{d_A^2} \right) = \frac{2Ml(d_A + d_B)}{\pi G \delta d_A^2 d_B^2}\end{aligned}$$

4-21 图示两端固定的圆截面轴，承受扭力矩作用。试求支反力偶矩。设扭转刚度为已知常数。



题 4-21 图

(a)解：此为静不定轴，但有对称条件可以利用。

设 A 、 B 两端的支反力偶矩分别为 M_A 和 M_B ，它们的转向与扭力矩 M 相反。由于左右对称，故知

$$M_A = M_B$$

由 $\sum M_x = 0$ 可得

$$M_A + M_B = 2M_A = 2M$$

即

$$M_A = M_B = M$$

(b)解：此为静不定轴，可解除右端约束，代之以支反力偶矩 M_B ，示如图 4-21(b)。

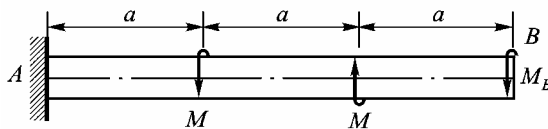


图 4-21 (b)

变形协调条件为

$$\varphi_B = 0 \quad (a)$$

利用叠加法求 φ_B , 得到

$$\varphi_B = \frac{Ma}{GI_p} - \frac{M(2a)}{GI_p} + \frac{M_B(3a)}{GI_p} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a), 可得

$$M_B = \frac{1}{3}M$$

进而求得

$$M_A = \frac{1}{3}M \quad (\text{转向与 } M_B \text{ 相反})$$

(c)解: 此为静不定轴, 与(a)类似, 利用左右对称条件, 容易得到

$$M_A = M_B = \frac{ma}{2}$$

M_A 、 M_B 的转向与 m 相反。

(d)解: 此为静不定轴, 可解除右端约束, 代之以支反力偶矩 M_B , 从变形趋势不难判断,

M_B 的转向与 m 相反。

变形协调条件为

$$\varphi_B = 0 \quad (c)$$

利用叠加法求 φ_B , 得到 (x 从左端向右取)

$$\varphi_B = \varphi_{B,m} + \varphi_{B,M_B} = \int_0^a \frac{m(a-x)}{GI_p} dx - \frac{M_B(2a)}{GI_p} = \frac{ma^2}{2GI_p} - \frac{2M_B a}{GI_p} \quad (d)$$

将式(d)代入式(c), 可得

$$M_B = \frac{ma}{4}$$

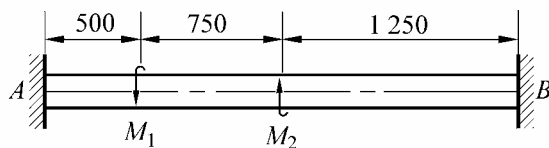
进而求得

$$M_A = ma - M_B = \frac{3ma}{4}$$

M_A 的转向亦与 m 相反。

说明: 用书中例 4-7 介绍的方法求解本题, 结果相同, 但工作量要大一些。

4-22 试确定图示轴的直径。已知扭力矩 $M_1=400\text{N} \cdot \text{m}$, $M_2=600\text{N} \cdot \text{m}$, 许用切应力 $[\tau]=40\text{MPa}$, 单位长度的许用扭转角 $[\theta]=0.25(^{\circ})/\text{m}$, 切变模量 $G=80\text{GPa}$ 。



题 4-22 图

解：1. 求 M_B ，画扭矩图

此为静不定轴，设 B 端支反力偶矩为 M_B ，该轴的相当系统示如图 4-22(a)。

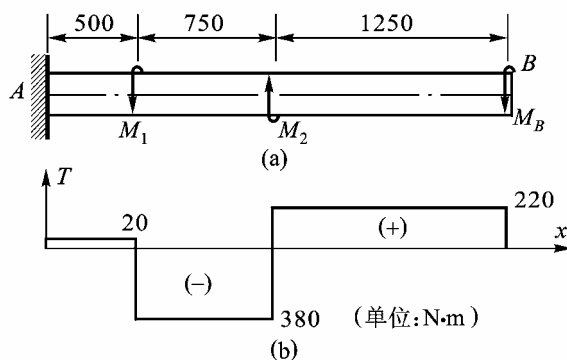


图 4-22

用叠加法求 φ_B ，

$$\varphi_B = \frac{1}{GI_p} [400 \times 0.500 - 600 \times 1.250 + M_B \times 2.500]$$

将其代入变形协调条件 $\varphi_B = 0$ ，得

$$M_B = \frac{(600 \times 1.250 - 400 \times 0.500) \text{N} \cdot \text{m}^2}{2.500 \text{m}} = 220 \text{N} \cdot \text{m}$$

该轴的扭矩图示如图 4-22(b)。

2. 由圆轴扭转的强度条件求 d

由扭矩图易见，

$$|T|_{\max} = 380 \text{N} \cdot \text{m}$$

将其代入扭转强度条件，

$$\tau_{\max} = \frac{|T|_{\max}}{W_p} = \frac{16|T|_{\max}}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

由此得

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16|T|_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 380 \text{m}^3}{\pi \times 40 \times 10^6}} = 0.0364 \text{m} = 36.4 \text{mm}$$

3. 由圆轴扭转的刚度条件求 d

将最大扭矩值代入

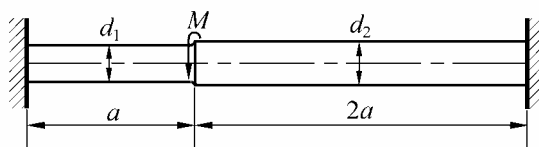
$$\frac{|T|_{\max}}{GI_p} = \frac{32|T|_{\max}}{G\pi d^4} \leq [\theta]$$

得

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32|T|_{\max}}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 380 \times 180 \text{m}^4}{\pi \times 80 \times 10^9 \times 0.25\pi}} = 0.0577 \text{m} = 57.7 \text{mm}$$

结论：最后确定该轴的直径 $d \geq 57.7 \text{mm}$ 。

4-23 图示两端固定阶梯形圆轴，承受扭力矩 M 作用。为使轴的重量最轻，试确定轴径 d_1 与 d_2 ，已知许用切应力为 $[\tau]$ 。



题 4-23 图

解：解法 1

1. 几何方面

此为静不定轴，本题从几何分析入手比较方便。解题思路为：

$$\varphi \rightarrow \gamma \rightarrow \tau \rightarrow d_2 / d_1 \rightarrow T \rightarrow d_2$$

在 M 作用下， M 所在截面 C 只有一个扭转角，故知变形协调条件为

$$\varphi_{AC} = |\varphi_{BC}| = \varphi_C \quad (a)$$

这里足标中的 A 和 B 系指轴的左端面 and 右端面。

2. 物理方面

依据剪切胡克定律，有

$$\gamma_{1\max} = \frac{\tau_{1\max}}{G}, \quad \gamma_{2\max} = \frac{\tau_{2\max}}{G} \quad (b)$$

要使轴最轻，只有使 $\tau_{1\max} = \tau_{2\max} = [\tau]$ 才能实现（等强度观点），由式(b)可得

$$\gamma_{1\max} = \gamma_{2\max} \quad (c)$$

注意到

$$\gamma_{1\max} = \frac{\varphi_C(d_1/2)}{a}, \quad \gamma_{2\max} = \frac{\varphi_C(d_2/2)}{2a} \quad (d)$$

将式(d)代入式(c)，得到

$$d_2 / d_1 = 2 \quad (e)$$

3. 静力学方面

从 M 作用截面处取一轴段，由该轴段的力矩平衡条件，可得

$$T_1 + |T_2| = M \quad (f)$$

又从等强度要求可知，

$$T_1 = W_{p_1} [\tau], \quad |T_2| = W_{p_2} [\tau]$$

由此可得

$$\frac{|T_2|}{T_1} = \frac{W_{p_2}}{W_{p_1}} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3 = 8 \quad (g)$$

联解方程(g)与(f)，得

$$|T_2| = 8T_1 = \frac{8}{9}M$$

进而由

$$|T_2| = \frac{\pi d_2^3}{16} [\tau] = \frac{8}{9}M$$

得到轴的直径为

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 \times 8M}{9\pi[\tau]}} = 2 \sqrt[3]{\frac{16M}{9\pi[\tau]}} = 2d_1$$

解法 2

1. 静力学方面

设该轴左、右端的支反力偶矩分别为 M_A 和 M_B ，并设它们均与 M 反向。由 $\sum M_x = 0$ 得

$$M_A + M_B - M = 0$$

或以扭矩表示为

$$T_1 + |T_2| - M = 0 \quad (a)$$

2. 几何方面

设 M 所在截面为 C ，可写出变形协调条件为

$$\varphi_{AC} + \varphi_{CD} = 0$$

或写成

$$\varphi_{AC} = |\varphi_{CB}| \quad (b)$$

3. 物理方面

$$\varphi_{AC} = \frac{T_1 a}{GI_{p_1}}, \quad |\varphi_{CB}| = \frac{|T_2| \cdot 2a}{GI_{p_2}} \quad (c)$$

将式(c)代入式(b)，得

$$\frac{T_1}{|T_2|} = \frac{2I_{p1}}{I_{p2}} = \frac{2d_1^4}{d_2^4} \quad (d)$$

为使该轴最轻，引入等强度条件

$$\tau_{1\max} = \tau_{2\max} = [\tau]$$

即

$$\frac{T_1}{W_{p1}} = \frac{|T_2|}{W_{p2}} = [\tau] \quad (e)$$

由此得

$$\frac{T_1}{|T_2|} = \frac{W_{p1}}{W_{p2}} = \frac{d_1^3}{d_2^3} \quad (f)$$

比较式(d)和(f)，得

$$d_2 = 2d_1 \quad (g)$$

将方程(a)与补充方程(f)联解，并注意到式(g)，有

$$|T_2| = 8T_1 = \frac{8}{9}M$$

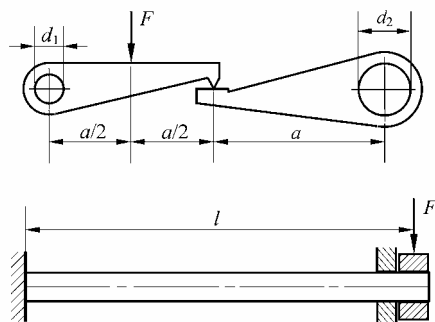
进而由式(e)得到

$$|T_2| = \frac{[\tau]\pi d_2^3}{16} = \frac{8}{9}M$$

由此可得

$$d_2 = 2\sqrt[3]{\frac{16M}{9\pi[\tau]}} = 2d_1$$

4-24 图示二平行圆轴，通过刚性摇臂承受载荷 F 作用。试求轴端的扭转角。已知载荷 $F=750\text{N}$ ，轴 1 和轴 2 的直径分别为 $d_1=12\text{mm}$ 和 $d_2=15\text{mm}$ ，轴长均为 $l=500\text{mm}$ ，摇臂长度 $a=300\text{mm}$ ，切变模量 $G=80\text{GPa}$ 。



题 4-24 图

解：这是静不定问题。

变形协调条件为

$$\Delta_1 = \Delta_2 \text{ 或 } |\varphi_1| = \varphi_2 \quad (\text{a})$$

这里， Δ_1 和 Δ_2 分别为刚性摇臂 1, 2 在接触点处的竖向位移。

设二摇臂的接触力为 F_2 ，则轴 1 和 2 承受的扭矩分别为

$$|T_1| = F\left(\frac{a}{2}\right) - F_2 a, \quad T_2 = F_2 a \quad (\text{b})$$

物理关系为

$$|\varphi_1| = \frac{|T_1|l}{GI_{p_1}}, \quad \varphi_2 = \frac{T_2 l}{GI_{p_2}} \quad (\text{c})$$

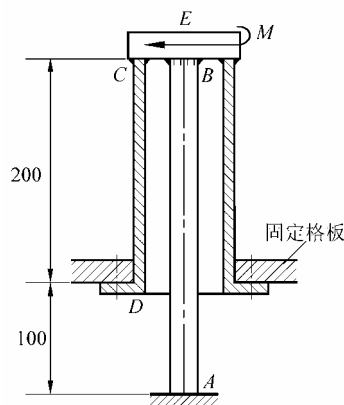
将式(c)代入式(a)，并注意到式(b)，可得

$$F_2 = \frac{d_2^4 F}{2(d_1^4 + d_2^4)}$$

由此得

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{T_2 l}{GI_{p_2}} = \frac{16Fal}{\pi G(d_1^4 + d_2^4)} = \frac{16 \times 750 \times 0.300 \times 0.500 \text{m}}{\pi \times 80 \times 10^9 \times (0.012^4 + 0.015^4) \text{m}} \\ &= 0.1004 \text{ rad} = 5.75^\circ = |\varphi_1| \end{aligned}$$

4-26 如图所示，圆轴 AB 与套管 CD 借刚性突缘 E 焊接成一体，并在突缘 E 承受扭力矩 M 作用。圆轴的直径 $d=38\text{mm}$ ，许用切应力 $[\tau_1]=80\text{MPa}$ ，切变模量 $G_1=80\text{GPa}$ ；套管的外径 $D=76\text{mm}$ ，壁厚 $\delta=6\text{mm}$ ，许用切应力 $[\tau_2]=40\text{MPa}$ ，切变模量 $G_2=40\text{GPa}$ 。试求扭力矩 M 的许用值。



题 4-26 图

解：1. 解静不定，求 T_1 、 T_2

此为静不定问题。静力学关系和变形协调关系分别为

$$T_1 + T_2 = M \quad (a)$$

和

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (b)$$

物理关系为

$$\varphi_1 = \frac{T_1 l_1}{G_1 I_{p1}}, \varphi_2 = \frac{T_2 l_2}{G_2 I_{p2}} \quad (c)$$

将式(c)代入式(b)，并注意到

$$\alpha = \frac{76-12}{76} = 0.8421, I_{p2} = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4), I_{p1} = \frac{\pi d^4}{32}$$

可得

$$T_1 = \frac{G_1 I_{p1} l_2}{G_2 I_{p2} l_1} T_2 = \frac{2d^4}{D^4(1-\alpha^4)} \cdot \frac{2}{3} T_2 = \frac{4 \times 38^4}{3 \times 76^4(1-0.8421^4)} T_2 = 0.1676 T_2 \quad (d)$$

将方程(a)与(d)联解，得

$$T_2 = 0.856M, T_1 = 0.144M$$

2. 由圆轴的强度条件定 M 的许用值

$$\tau_{1\max} = \frac{T_1}{W_{p1}} = \frac{16 \times 0.144M}{\pi d^3} \leq [\tau_1]$$

由此得

$$M \leq \frac{\pi d^3 [\tau_1]}{16 \times 0.144} = \frac{\pi \times 0.038^3 \times 80 \times 10^6}{16 \times 0.144} \text{ N} \cdot \text{m} = 5.99 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 5.99 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3. 由套管的强度条件定 M 的许用值

$$\tau_{2\max} = \frac{T_2}{W_{p2}} = \frac{16 \times 0.856M}{\pi D^3(1-\alpha^4)} \leq [\tau_2]$$

由此得

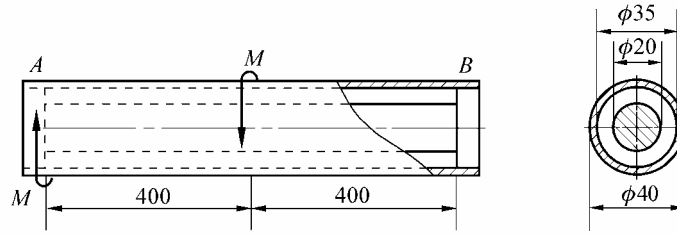
$$M \leq \frac{\pi D^3(1-\alpha^4)[\tau_2]}{16 \times 0.856} = \frac{\pi \times 0.076^3 \times (1-0.8421^4) \times 40 \times 10^6}{16 \times 0.856} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= 2.00 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 2.00 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

结论：扭力的许用值为 $[M] = 2.00 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

4-27

图示组合轴，由圆截面钢轴与铜圆管并借两端刚性平板连接成一体。该轴承受扭力矩 $M=100 \text{ N} \cdot \text{m}$ 作用，试校核其强度。设钢与铜的许用切应力分别为 $[\tau_s]=80 \text{ MPa}$ 与 $[\tau_c]=20 \text{ MPa}$ ，切变模量分别为 $G_s=80 \text{ GPa}$ 与 $G_c=40 \text{ GPa}$ 。



题 4-27 图

解：1. 解静不定，求 T_s 和 T_{c1}

此为静不定问题。为看清楚起见，可将钢轴与铜管拆开，二者的受力图分别示如图 4-27(a) 和(b)。

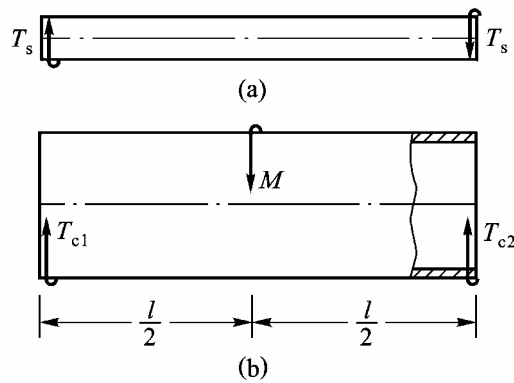


图 4-27

静力学方面

$$T_s + T_{c1} = M, |T_{c2}| = T_s \quad (a)$$

几何方面

$$\varphi_s = \varphi_c = \varphi_{c1} = \varphi_{c2} \quad (b)$$

物理方面

$$\varphi_s = \frac{T_s l}{G_s I_{ps}}, \varphi_c = \frac{(T_{c1} - |T_{c2}|)(\frac{l}{2})}{G_c I_{pc}} \quad (c)$$

将式(c)代入式(b)，并注意到式(a)中的第二式及 $G_s / G_c = 2$ ，得

$$(1 + \frac{I_{pc}}{I_{ps}})T_s = T_{c1} \quad (d)$$

将

$$\alpha = \frac{35}{40} = 0.875, I_{ps} = \frac{\pi \times 0.020^4}{32} \text{m}^4 = 1.571 \times 10^{-8} \text{m}^4$$

$$I_{pc} = \frac{\pi \times 0.040^4}{32} \times (1 - 0.875^4) \text{m}^4 = 1.040 \times 10^{-7} \text{m}^4$$

代入式(d), 得

$$7.62T_s = T_{cl} \quad (e)$$

再将式(e)代入式(a)中的第一式, 得到

$$T_s = 0.116M = 11.6 \text{N} \cdot \text{m}, \quad T_{cl} = 0.884M = 88.4 \text{N} \cdot \text{m}$$

2. 校核强度

对于钢轴,

$$\tau_{s,\max} = \frac{T_s}{W_{ps}} = \frac{16 \times 11.6 \text{N}}{\pi \times 0.020^3 \text{m}^2} = 7.38 \times 10^6 \text{Pa} = 7.38 \text{MPa} < [\tau_s]$$

对于铜管,

$$\tau_{c,\max} = \frac{T_{cl}}{W_{pc}} = \frac{16 \times 88.4 \text{N}}{\pi \times 0.040^3 (1 - 0.875^4) \text{m}^2} = 1.700 \times 10^7 \text{Pa} = 17.00 \text{MPa} < [\tau_c]$$

结论: 二者均满足扭转强度要求。

4-28 将截面尺寸分别为 $\phi 100 \text{mm} \times 90 \text{mm}$ 与 $\phi 90 \text{mm} \times 80 \text{mm}$ 的两钢管相套合, 并

在内管两端施加扭力矩 $M_0 = 2 \text{kN} \cdot \text{m}$ 后, 将其两端与外管相焊接。试问在去掉扭力矩 M_0 后, 内、外管横截面上的最大扭转切应力。

解: 1. 解静不定, 求 T_i 、 T_e

此为静不定问题。内管两端施加 M_0 后, 产生的扭转角为

$$\varphi_0 = \frac{M_0 l}{GI_{pi}} \quad (a)$$

去掉 M_0 后, 有静力学关系

$$T_i = T_e \quad (b)$$

几何关系为

$$\varphi_i + \varphi_e = \varphi_0 \quad (c)$$

物理关系为

$$\varphi_i = \frac{T_i l}{GI_{pi}}, \quad \varphi_e = \frac{T_e l}{GI_{pe}} \quad (d)$$

将式(d)和式(a)代入式(c), 得

$$\frac{T_i l}{GI_{pi}} + \frac{T_e l}{GI_{pe}} = \frac{M_0 l}{GI_{pi}}$$

或写成

$$\frac{T_e}{I_{pe}} = \frac{M_0 - T_i}{I_{pi}}$$

由此得

$$T_e = \frac{I_{pe}}{I_{pi}}(M_0 - T_i) = 1.395(M_0 - T_i) \quad (e)$$

将方程(e)与(b)联解, 得

$$T_i = T_e = 0.5825M_0 = 1.165\text{kN} \cdot \text{m}$$

2. 计算最大扭转切应力

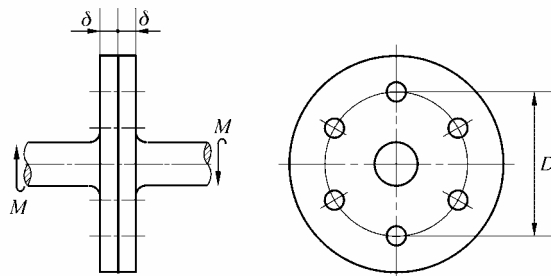
内、外管横截面上的最大扭转切应力分别为

$$\tau_{i,\max} = \frac{T_i}{W_{pi}} = \frac{16 \times 1165\text{N}}{\pi \times 0.090^3 [1 - (8/9)^4] \text{m}^2} = 2.17 \times 10^7 \text{Pa} = 21.7\text{MPa}$$

$$\tau_{e,\max} = \frac{T_e}{W_{pe}} = \frac{16 \times 1165\text{N}}{\pi \times 0.100^3 \times (1 - 0.9^4) \text{m}^2} = 1.725 \times 10^7 \text{Pa} = 17.25\text{MPa}$$

4-29

图示二轴, 用突缘与螺栓相连接, 各螺栓的材料、直径相同, 并均匀地排列在直径为 $D = 100\text{mm}$ 的圆周上, 突缘的厚度为 $\delta = 10\text{mm}$, 轴所承受的扭力矩为 $M = 5.0\text{kN} \cdot \text{m}$, 螺栓的许用切应力 $[\tau] = 100\text{MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 300\text{MPa}$ 。试确定螺栓的直径 d 。



题 4-29 图

解: 1. 求每个螺栓所受的剪力
由

$$\sum M_x = 0, 6F_s \left(\frac{D}{2}\right) = M$$

得

$$F_s = \frac{M}{3D}$$

2. 由螺栓的剪切强度条件求 d

$$\frac{F_s}{A} = \frac{4M}{3\pi D d^2} \leq [\tau]$$

由此得

$$d \geq \sqrt{\frac{4M}{3\pi D[\tau]}} = \sqrt{\frac{4 \times 5.0 \times 10^3 \text{ m}^2}{3\pi \times 0.100 \times 100 \times 10^6}} = 1.457 \times 10^{-2} \text{ m} = 14.57 \text{ mm}$$

3. 由螺栓的挤压强度条件求 d

$$\sigma_{bs} = \frac{F_b}{\delta d} = \frac{M}{3D\delta d} \leq [\sigma_{bs}]$$

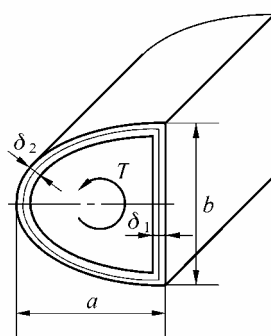
由此得

$$d \geq \frac{M}{3D\delta[\sigma_{bs}]} = \frac{5.0 \times 10^3 \text{ m}}{3 \times 0.100 \times 0.010 \times 300 \times 10^6} = 5.56 \times 10^{-3} \text{ m} = 5.56 \text{ mm}$$

结论：最后确定螺栓的直径 $d \geq 14.57 \text{ mm}$ 。

4-33 图示半椭圆形闭口薄壁杆， $a=200 \text{ mm}$ ， $b=160 \text{ mm}$ ， $\delta_1=3 \text{ mm}$ ， $\delta_2=4 \text{ mm}$ ，

$T=6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。试求最大扭转切应



题 4-33 图

解：该薄壁杆截面中心线所围面积为

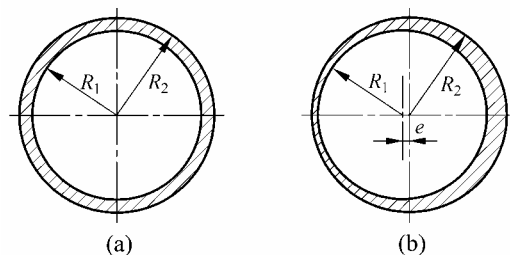
$$\begin{aligned} \Omega &= \pi \left(a - \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_2}{2} \right) (b - \delta_2) / 4 \\ &= \pi \times (0.200 - 0.0015 - 0.002) \times (0.160 - 0.004) \text{ m}^2 / 4 \\ &= 2.41 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

由此得最大扭转切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\Omega\delta_{\min}} = \frac{6 \times 10^3 \text{ N}}{2 \times 2.41 \times 10^{-2} \times 0.003 \text{ m}^2} = 4.15 \times 10^7 \text{ Pa} = 41.5 \text{ MPa}$$

4-34 图 a 所示等厚度薄壁圆管，内、外壁的半径分别为 R_1 与 R_2 ，即壁厚 $\delta = R_2 - R_1$ 。

因加工原因，圆管内壁轴线与外壁轴线间存在偏差 e （图 b）。若图 a 和 b 所示圆管的许用扭矩分别为 $[T_0]$ 与 $[T]$ ，试建立二者间的关系式，并计算当偏差 $e = \delta / 10$ 与 $e = \delta / 2$ 时，许用扭矩的降低量（用 $[T_0]$ 的百分比表示）。



题 4-34 图

解：对于等厚度薄壁圆管，平均半径和壁厚分别为

$$R_0 = \frac{R_1 + R_2}{2}, \quad \delta = R_2 - R_1$$

根据扭转强度条件

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2 \delta} \leq [\tau]$$

得

$$T \leq 2\pi \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)^2 (R_2 - R_1) [\tau]$$

由此得

$$[T_0] = \frac{\pi}{2} (R_1 + R_2)^2 (R_2 - R_1) [\tau] \quad (a)$$

对于有加工偏差 e 的变厚度薄壁圆管，平均半径同上，但最小壁厚成为

$$\delta_{\min} = R_2 - R_1 - e$$

根据扭转强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\pi R_0^2 \delta_{\min}} \leq [\tau]$$

得

$$T \leq 2\pi \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)^2 (R_2 - R_1 - e) [\tau]$$

由此得

$$[T] = \frac{\pi}{2} (R_1 + R_2)^2 (R_2 - R_1 - e) [\tau] \quad (b)$$

比较式(b)和式(a)，不难找到二者的关系，其关系式为

$$[T] = [T_0] \frac{(R_2 - R_1) - e}{(R_2 - R_1)} = [T_0] \left(1 - \frac{e}{\delta} \right)$$

当偏差 $e = \delta/10$ 和 $e = \delta/2$ 时， $[T]$ 与 $[T_0]$ 的比值依次为

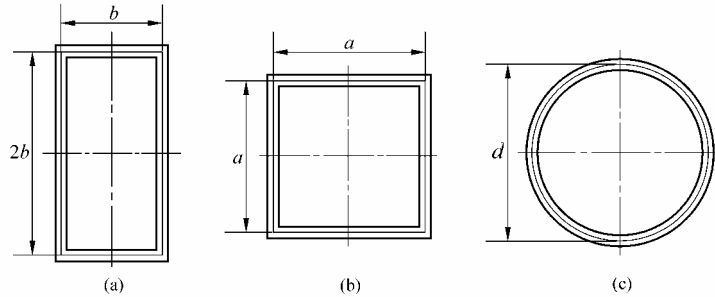
$$[T]/[T_0] = \left(1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{90}{100}$$

和

$$[T]/[T_0] = (1 - \frac{1}{2}) = \frac{50}{100}$$

即许用扭矩的降低率依次为 10% 和 50%。

4-35 图示三种截面形状的闭口薄壁杆，若截面中心线的长度、壁厚、杆长、材料以及所受扭矩均相同，试计算最大扭转切应力之比和扭转角之比。



题 4-35 图

解：由于三者中心线的长度相同，故有

$$2 \times (2b + b) = 4a = \pi d$$

由此得

$$b = \pi d / 6, a = \pi d / 4$$

据此可求得长方形、正方形及圆形薄壁截面的 Ω ，其值依次为

$$\Omega_1 = 2b^2 = \pi^2 d^2 / 18$$

$$\Omega_2 = a^2 = \pi^2 d^2 / 16$$

$$\Omega_3 = \pi d^2 / 4$$

依据

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\Omega\delta_{\min}}$$

可得三种截面薄壁杆的最大扭转切应力之比为

$$\tau_{\text{矩}\max} : \tau_{\text{方}\max} : \tau_{\text{圆}\max} = 1.432 : 1.273 : 1$$

依据

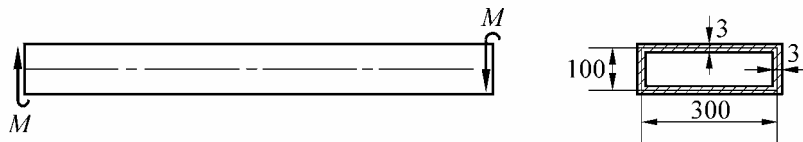
$$\varphi = \frac{Tl}{4G\Omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}$$

可得三种截面薄壁杆的扭转角之比为

$$\varphi_{\text{矩}} : \varphi_{\text{方}} : \varphi_{\text{圆}} = 2.05 : 1.621 : 1$$

结果表明：在题设条件下，圆形截面薄壁杆的扭转强度及扭转刚度均最佳，正方形截面薄壁杆的次之，长方形截面薄壁杆的最差。一般说来，在制造闭口薄壁杆时，应尽可能加大其中心线所围的面积 Ω ，这样对强度和刚度均有利。

4-36 图示闭口薄壁杆，承受扭力矩 M 作用，试计算扭力矩的许用值。已知许用切应力 $[\tau]=60\text{MPa}$ ，单位长度的许用扭转角 $[\theta]=0.5(^{\circ})/\text{m}$ ，切变模量 $G=80\text{GPa}$ 。若在杆上沿杆件母线开一槽，则许用扭力矩将减少至何值。



题 4-36 图

解：1. 计算闭口薄壁杆扭力矩的许用值

由扭转强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\Omega\delta_{\min}} \leq [\tau]$$

得

$$\begin{aligned} T &\leq 2\Omega\delta_{\min}[\tau] = 2 \times 0.100 \times 0.300 \times 0.003 \times 60 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 1.080 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m} = 10.80 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

由扭转刚度条件

$$\theta = \frac{T}{4G\Omega^2} \oint \frac{ds}{\delta} \leq [\theta]$$

得

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{4G\Omega^2[\theta]}{\oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{4 \times 80 \times 10^9 \times (0.100 \times 0.300)^2 \times 8.727 \times 10^{-3}}{\frac{2 \times (0.300 + 0.100)}{0.003}} \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 9.43 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 9.43 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

其中用到

$$[\theta] = \frac{0.5 \times \pi}{180} \text{ rad/m} = 8.727 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$$

比较可知，

$$[M] = 9.43 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

2. 计算开口薄壁杆扭力矩的许用值

由扭转强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{3T\delta_{\max}}{\sum_{i=1}^n h_i \delta_i^3} \leq [\tau]$$

得

$$T \leq \frac{[\tau] \sum_{i=1}^n h_i \delta_i^3}{3\delta_{\max}} = \frac{60 \times 10^6 \times [2 \times (0.300 + 0.100) \times 0.003^3]}{3 \times 0.003} \text{ N} \cdot \text{m} = 144.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由扭转刚度条件

$$\theta = \frac{3T}{G \sum_{i=1}^n h_i \delta_i^3} \leq [\theta]$$

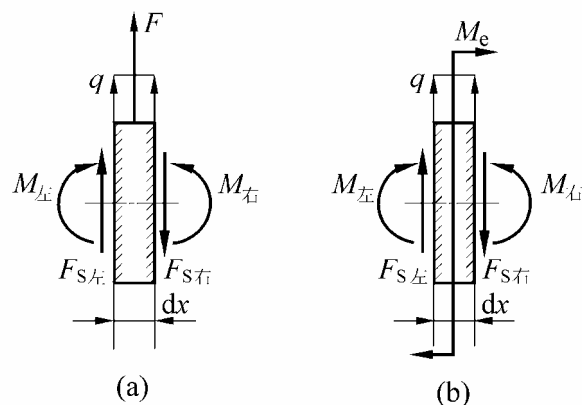
得

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{[\theta] G \sum_{i=1}^n h_i \delta_i^3}{3} \\ &= \frac{8.727 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^9 \times [2 \times (0.300 + 0.100) \times 0.003^3]}{3} \text{ N} \cdot \text{m} = 5.03 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

比较可知，

$$[M]_{\text{开}} = 5.03 \text{ N} \cdot \text{m}$$

说明：本书 1999 年印刷时，题 4-36 图所示长、宽尺寸为横截面外边缘线长度，扭矩的两个许用值依次为 $[M] = 8.82 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 和 $[M]_{\text{开}} = 4.95 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。



题 5-3 图

证明：根据题图(a)，由

$$\sum F_y = 0, F_{S左} + F + qdx - F_{S右} = 0$$

保留有限量，略去微量 qdx 后，得

$$F_{S右} - F_{S左} = F$$

为了更一般地反映 F 作用处剪力的突变情况（把向下的 F 也包括在内），可将上式改写为

$$|F_{S右} - F_{S左}| = F \quad (a)$$

仍据题图(a)，由

$$\sum M_C = 0, M_{右} - F\left(\frac{dx}{2}\right) + qdx\left(\frac{dx}{2}\right) - F_{S左}dx - M_{左} = 0$$

保留有限量，略去一阶和二阶微量后，得

$$M_{右} = M_{左} \quad (b)$$

足标 C 系指梁微段右端面的形心，对题图(b)亦同。

根据题图(b)，由

$$\sum F_y = 0, F_{S左} + qdx - F_{S右} = 0$$

略去微量 qdx 后，得

$$F_{S右} = F_{S左} \quad (c)$$

仍据题图(b)，由

$$\sum M_C = 0, M_{右} - M_e - qdx\left(\frac{dx}{2}\right) - F_{S左}dx - M_{左} = 0$$

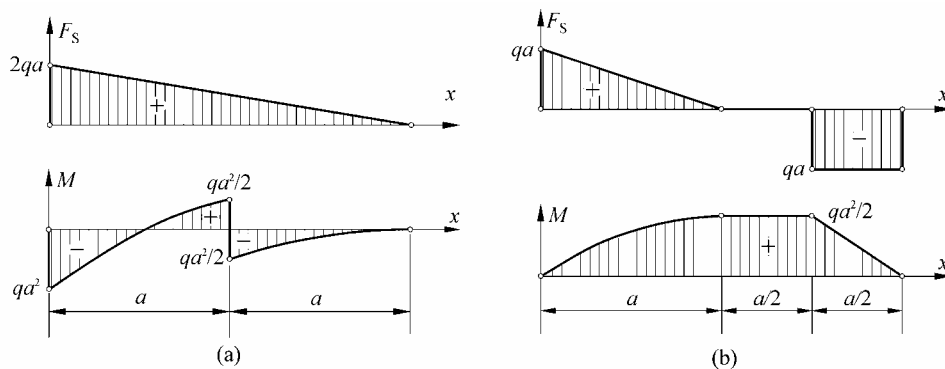
保留有限量，略去一阶和二阶微量后，得

$$M_{右} - M_{左} = M_e$$

为了更一般地反映 M_e 作用处弯矩的突变情况（把逆钟向的 M_e 也包括在内），可将上式改写为

$$|M_{\text{右}} - M_{\text{左}}| = M_e \quad (d)$$

5-5 已知梁的剪力、弯矩图如图所示，试画梁的外力图。



题 5-5 图

解：根据题图中所给的 F_S 图和 M 图，并依据三个微分关系和两个突变关系，可画梁的外力图，示如图 5-5(a)和(b)。

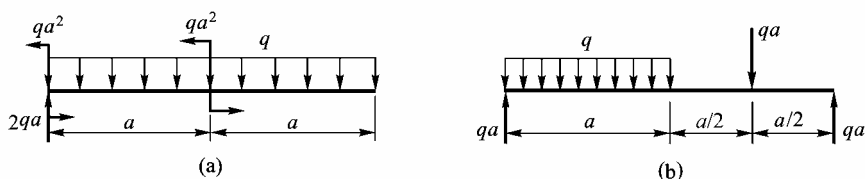
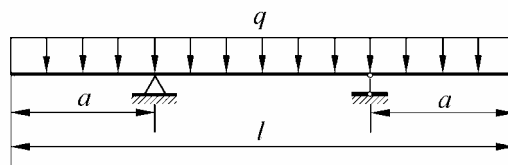


图 5-5

5-7 图示外伸梁，承受均布载荷 q 作用。试问当 a 为何值时梁的最大弯矩值（即 $|M|_{\max}$ ）最小。



题 5-7 图

解：1. 求支反力

由对称性可知，二支座的支反力相等[见图 5-7(a)]，其值为

$$F_{Cy} = F_{Dy} = \frac{ql}{2} \quad (\uparrow)$$

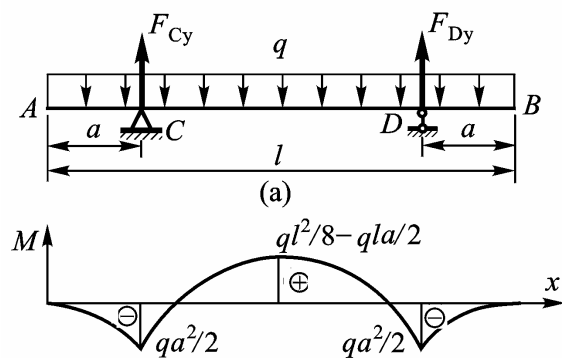


图 5-7

2. 画弯矩图

根据各梁段的端值及剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系，画弯矩图如图(b)所示。

3. 确定 a 值

由进一步分析可知，只有当梁中点处的弯矩值与 C 、 D 处弯矩的绝对值相等时，梁的最大弯矩值才可能最小，由此得

$$\frac{1}{8}ql^2 - \frac{1}{2}qla = \frac{1}{2}qa^2$$

解此方程，得

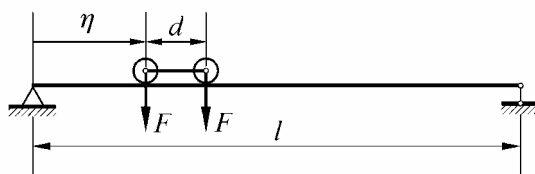
$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}l$$

舍去增根，最后确定

$$a = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}l = 0.207l$$

5-8 图示简支梁，梁上小车可沿梁轴移动，二轮对梁之压力均为 F 。试问：

- (1) 小车位于何位置时，梁的最大弯矩值最大，并确定该弯矩之值；
- (2) 小车位于何位置时，梁的最大剪力值最大，并确定该剪力之值。



题 5-8 图

解：1. 求支反力

由图 5-8(a) 所示小车位置，可求得两端的支反力，其值分别为

$$F_{Ay} = \frac{F}{l}(2l - 2\eta - d), \quad F_{By} = \frac{F}{l}(2\eta + d) \quad [0 < \eta < (l - d)]$$

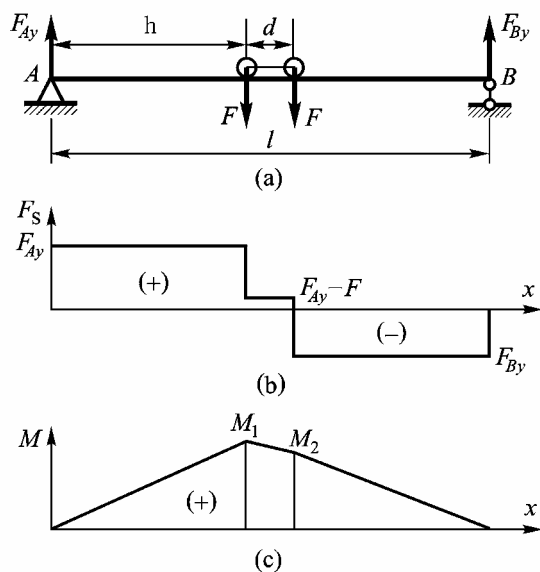


图 5-8

2. 画剪力、弯矩图

根据支反力及梁上小车压力，画剪力、弯矩图如图(b)和(c)所示。

3. 确定最大弯矩值及小车位置

由 M 图可以看出最大弯矩必在 F 作用处。求左轮处之 M_1 ，并求其极值，即可得到 M_{\max} 。

$$M_1(\eta) = F_{Ay}\eta = \frac{F}{l}[(2l-d)\eta - 2\eta^2] \quad [0 \leq \eta \leq (l-d)] \quad (a)$$

由

$$\frac{dM_1(\eta)}{d\eta} = 0$$

得

$$\eta = \frac{2l-d}{4} \quad (b)$$

此即左轮处 M_1 达最大值的左轮位置。

将式(b)代入式(a)，得弯矩的最大值为

$$M_{\max} = \frac{F}{8l}(2l-d)^2 \quad (c)$$

由对称性可知，当 $\eta = (2l-3d)/4$ 时，右轮处的 M_2 达到最大，其值同式(c)。

4. 确定最大剪力值及小车位置

由剪力图不难判断，最大剪力只可能出现在左段或右段，其剪力方程依次为

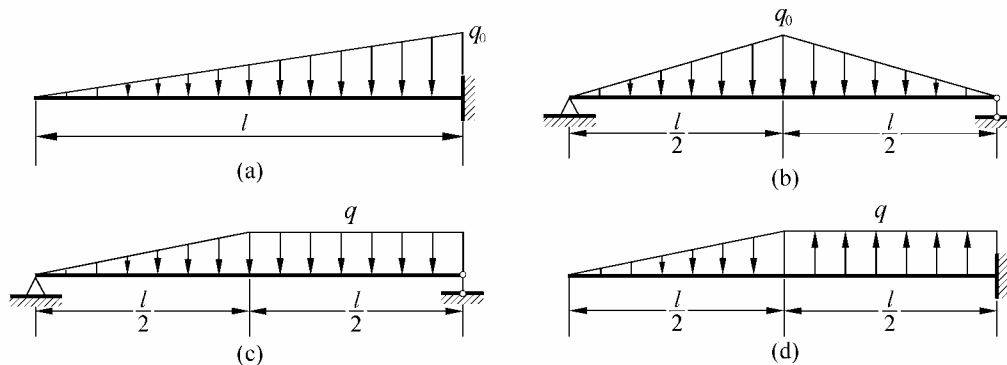
$$F_{s1} = F_{Ay} = \frac{F}{l}(2l-2\eta-d) \quad [0 < \eta < (l-d)]$$

$$|F_{s2}| = F_{By} = \frac{F}{l}(2\eta+d) \quad [0 < \eta < (l-d)]$$

二者都是 η 的一次函数，容易判断，当 $\eta \rightarrow 0$ 或 $\eta \rightarrow (l-d)$ 时，即小车无限移近梁的左端或右端时，梁支座内侧截面 A_+ 或 B_- 出现最大剪力，其绝对值为

$$|F_s|_{\max} = \frac{F}{l}(2l-d) \quad (d)$$

5-9 图示各梁，承受分布载荷作用。试建立梁的剪力、弯矩方程，并画剪力、弯矩图。



题 5-9 图

(a)解：1. 建立剪力、弯矩方程

设截面 x 处的载荷集度为 $q(x)$ ，由图 5-9(a, 1)可知，

$$q(x) = \frac{q_0}{l}x$$

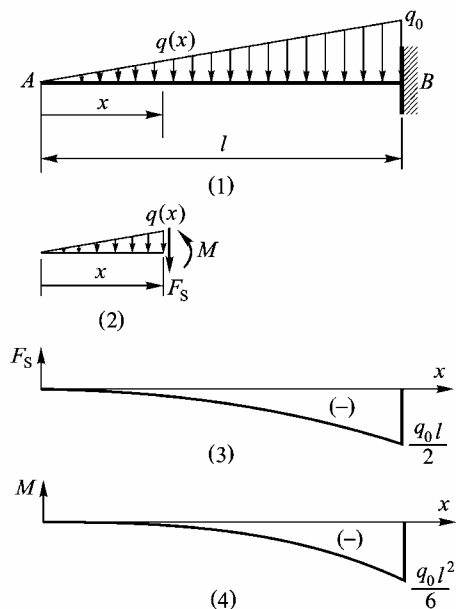


图 5-9 (a)

由图(2)可得，剪力与弯矩方程分别为

$$F_s = -\frac{q(x) \cdot x}{2} = -\frac{q_0 x^2}{2l} \quad (0 \leq x < l) \quad (a)$$

$$M = -[q(x) \cdot \frac{x}{2}] \frac{x}{3} = -\frac{q_0 x^3}{6l} \quad (0 \leq x < l) \quad (b)$$

2. 画剪力、弯矩图

由式(a)和(b)可知，二者均为简单的幂函数，其函数图依次为二次下凹曲线及三次下凹曲线。

算出 A 、 B 两端的 F_s 、 M 值，并考虑到上述曲线形状，即可绘出 F_s 、 M 图，如图 (3) 和 (4) 所示。

(b)解：1. 求支反力

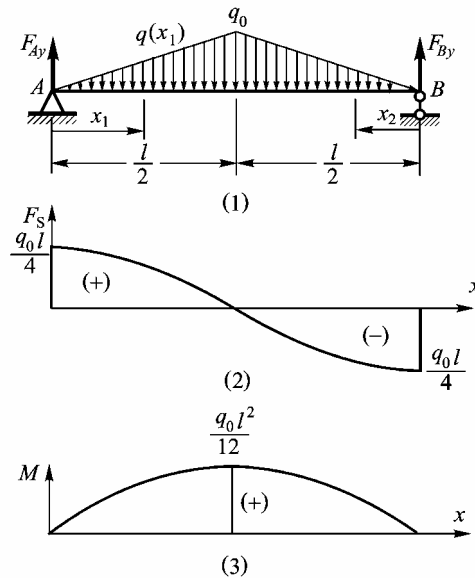


图 5-9 (b)

由梁的对称条件可知，

$$F_{Ay} = F_{By} = \frac{1}{4} q_0 l \quad (\uparrow)$$

2. 建立剪力、弯矩方程

设截面 x_1 处的载荷集度为 $q(x_1)$ ，由图 5-9(b, 1)可知，

$$q(x_1) = \frac{2q_0}{l} x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2})$$

由此可得，左半段梁的剪力与弯矩方程分别为

$$F_s = F_{Ay} - \frac{q(x_1) \cdot x_1}{2} = \frac{q_0 l}{4} - \frac{q_0 x_1^2}{l} \quad (0 < x_1 \leq \frac{l}{2}) \quad (c)$$

$$M = F_{Ay} x_1 - [q(x_1) \cdot \frac{x_1}{2}] \frac{x_1}{3} = \frac{q_0 l}{4} x_1 - \frac{q_0 x_1^3}{3l} \quad (0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}) \quad (d)$$

根据问题的对称性（对于 F_s ，是反对称的），可写出右半段梁的剪力与弯矩方程如下：

$$F_s = -\frac{q_0 l}{4} + \frac{q_0 x_2^2}{l} \quad (0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2}) \quad (e)$$

$$M = \frac{q_0 l}{4} x_2 - \frac{q_0 x_2^3}{3l} \quad (0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2}) \quad (f)$$

3. 画剪力、弯矩图

依据式(c)和(e)可绘剪力图，如图(2)所示；依据式(d)和(f)可绘弯矩图，如图(3)所示。

(c)解：1. 求支反力

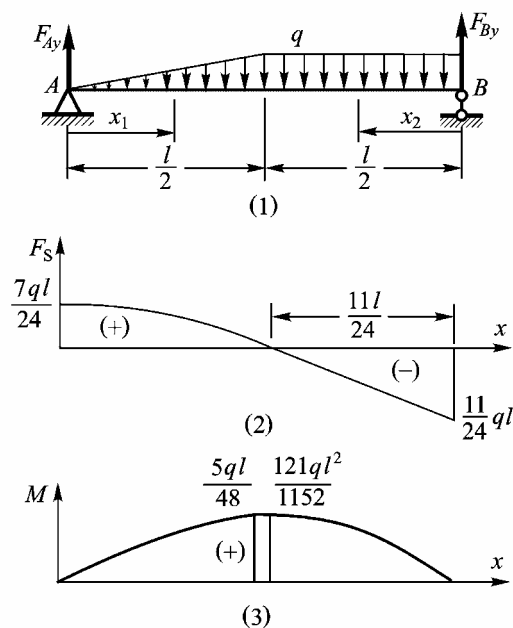


图 5-9 (c)

由 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 可得

$$F_{Ay} = \frac{7ql}{24} \quad (\uparrow), \quad F_{By} = \frac{11ql}{24} \quad (\uparrow)$$

2. 建立剪力、弯矩方程

坐标如图 5-9(c, 1) 所示，由截面法可得剪力、弯矩方程分别为

$$F_{s1} = F_{Ay} - \frac{q(x_1) \cdot x_1}{2} = \frac{7ql}{24} - \frac{qx_1^2}{l} \quad (0 < x_1 \leq \frac{l}{2}) \quad (e)$$

$$F_{s2} = -F_{By} + qx_2 = -\frac{11ql}{24} + qx_2 \quad (0 < x_2 \leq \frac{l}{2}) \quad (f)$$

$$M_1 = F_{Ay} \cdot x_1 - [q(x_1) \cdot \frac{x_1}{2}] \cdot \frac{x_1}{3} = \frac{7ql}{24} x_1 - \frac{qx_1^3}{3l} \quad (0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}) \quad (g)$$

$$M_2 = F_{By} \cdot x_2 - \frac{q}{2} x_2^2 = \frac{11ql}{24} x_2 - \frac{q}{2} x_2^2 \quad (0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2}) \quad (h)$$

3. 画剪力、弯矩图

依据式 (e)、(f) 可绘剪力图，如图(2)所示；依据式(g)、(h)可绘弯矩图，如图(3)所示。

注意在 $x_2 = \frac{11l}{24}$ 处有 $F_{s2} = 0$, M_2 有极大值, 其值为

$$M_{2\max} = M_{\max} = \frac{121}{1152}ql^2$$

(d)解: 1. 建立剪力、弯矩方程

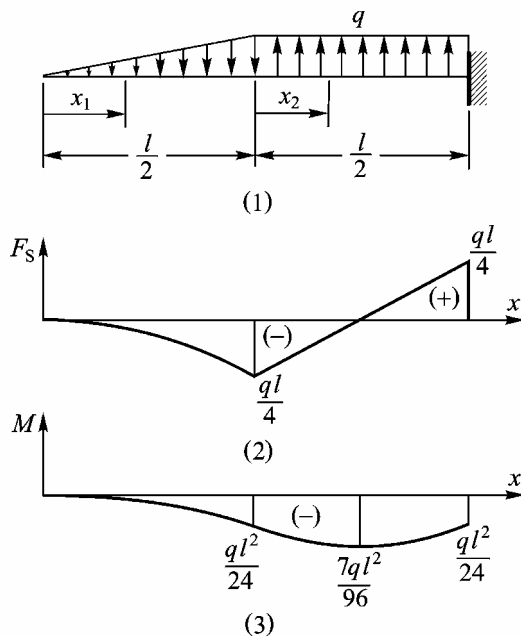


图 5-9 (d)

坐标如图 5-9(d, 1)所示, 由截面法易得剪力、弯矩方程分别为

$$F_{s1} = -\frac{q(x_1) \cdot x_1}{2} = -\frac{qx_1^2}{l} \quad (0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}) \quad (i)$$

$$F_{s2} = -\frac{ql}{4} + qx_2 \quad (0 \leq x_2 < \frac{l}{2}) \quad (j)$$

$$M_1 = -\frac{qx_1^3}{3l} \quad (0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}) \quad (k)$$

$$M_2 = \frac{q}{2}x_2^2 - \frac{ql}{4} \cdot (\frac{l}{6} + x_2) \quad (0 \leq x_2 < \frac{l}{2}) \quad (l)$$

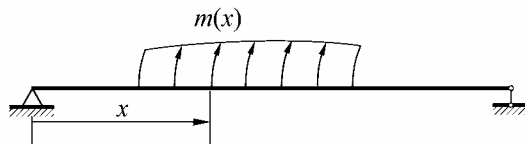
2. 画剪力、弯矩图

依据式(i)、(j)可绘剪力图, 如图(2)所示; 依据式(k)、(l)可绘弯矩图, 如图(3)所示。

注意在 $x_2 = l/4$ 处有 $F_{s2} = 0$, 此处 M_2 有极值, 其绝对值为

$$|M_2|_{\max} = \frac{7ql^2}{96}$$

5-10 在图示梁上, 作用有集度为 $m = m(x)$ 的分布力偶。试建立力偶矩集度、剪力与弯矩间的微分关系。



题 5-10 图

解：在 x 处取 dx 微段，画其受力图，如图 5-10 所示。

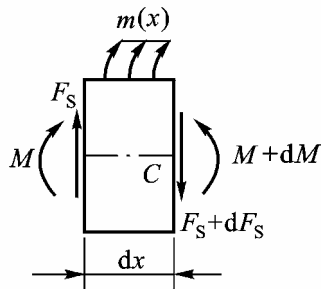


图 5-10

根据图示，由

$$\sum M_C = 0, M + dM - M - F_s dx - m(x)dx = 0$$

得

$$dM = F_s dx + m(x)dx$$

或写成

$$\frac{dM}{dx} = F_s + m \quad (a)$$

其中 C 系指微段右端截面的形心。

又由

$$\sum F_y = 0, F_s + dF_s - F_s = 0$$

得

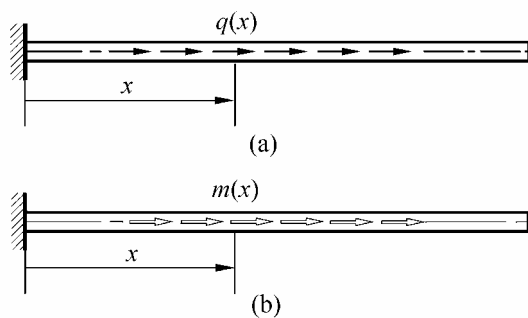
$$dF_s = 0$$

或写成

$$\frac{dF_s}{dx} = 0 \quad (b)$$

式(a)和(b)即为本题要求建立的微分关系。

5-11 对于图示杆件，试建立载荷集度（轴向载荷集度 q 或扭力矩集度 m ）与相应内力（轴力或扭矩）间的微分关系。



题 5-11 图

解：在 x 处取 dx 微段，画其受力图，如图 5-11(a)和(b)所示。

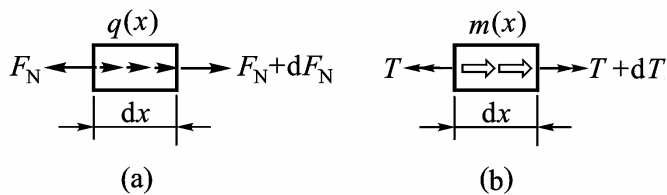


图 5-11

根据图(a)，由

$$\sum F_x = 0, F_N + dF_N + q(x)dx - F_N = 0$$

得

$$dF_N + q(x)dx = 0$$

或写成

$$\frac{dF_N}{dx} = -q \quad (a)$$

根据图(b)，由

$$\sum M_x = 0, T + dT + m(x)dx - T = 0$$

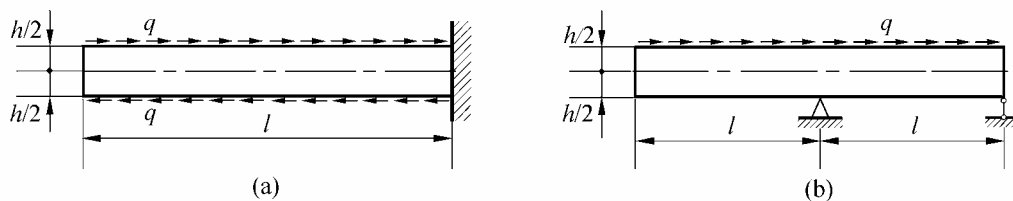
得

$$dT + m(x)dx = 0$$

或写成

$$\frac{dT}{dx} = -m \quad (b)$$

5-13 图示杆件，承受平行于杆轴方向的均布载荷 q 作用。试画杆的内力图，并利用相应载荷与内力间的微分关系检查内力图的正确性。



题 5-13 图

(a)解: 坐标自左端向右取, 内力 $F_N = 0$, $F_s = 0$, 故内力图只剩下 M 图了, 如图 5-13(a) 所示。

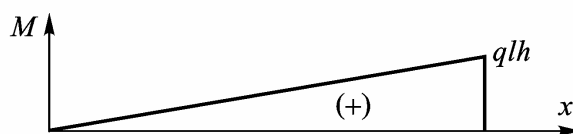


图 5-13(a)

此种受力情况, 相当于梁上承受集度为 $m = qh$ 的分布力偶的情况, 利用微分关系 (见题 5-10 式(a))

$$\frac{dM}{dx} = F_s + m$$

可以检查 M 图的正确性。这里, $F_s = 0$, $m = qh$ 为正的常值, 表明 M 图应为上倾斜直线。

图中正是这种斜直线, 说明所画 M 图是正确的。

(b)解: 坐标自左端向右取, 剪力、弯矩图及轴力图依次示于图 5-13(b)的(1)、(2)和(3)。

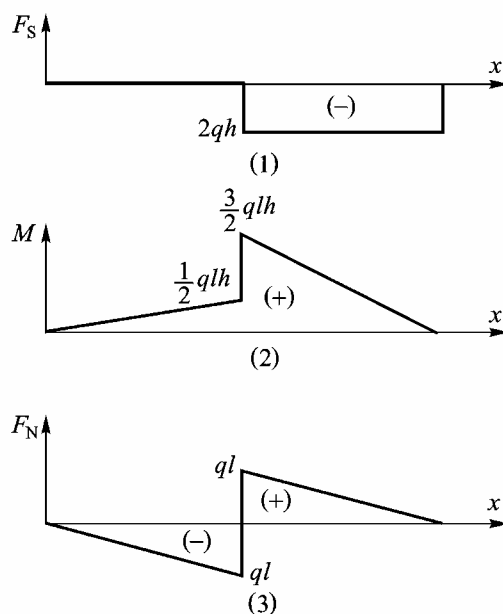


图 5-13(b)

此种受力情况, 相当于杆上作用有载荷集度为 q 的均布轴向载荷和集度为 $m = qh/2$ 的

均布力偶。

y 方向无分布载荷作用，即 $q_y = 0$ ，利用微分关系

$$\frac{dF_s}{dx} = q_y = 0$$

检查 F_s 图，斜率为 0，应为水平直线，这是对的。

利用微分关系

$$\frac{dM}{dx} = F_s + m = \begin{cases} qh/2 & (\text{左半段}) \\ -3qh/2 & (\text{右半段}) \end{cases}$$

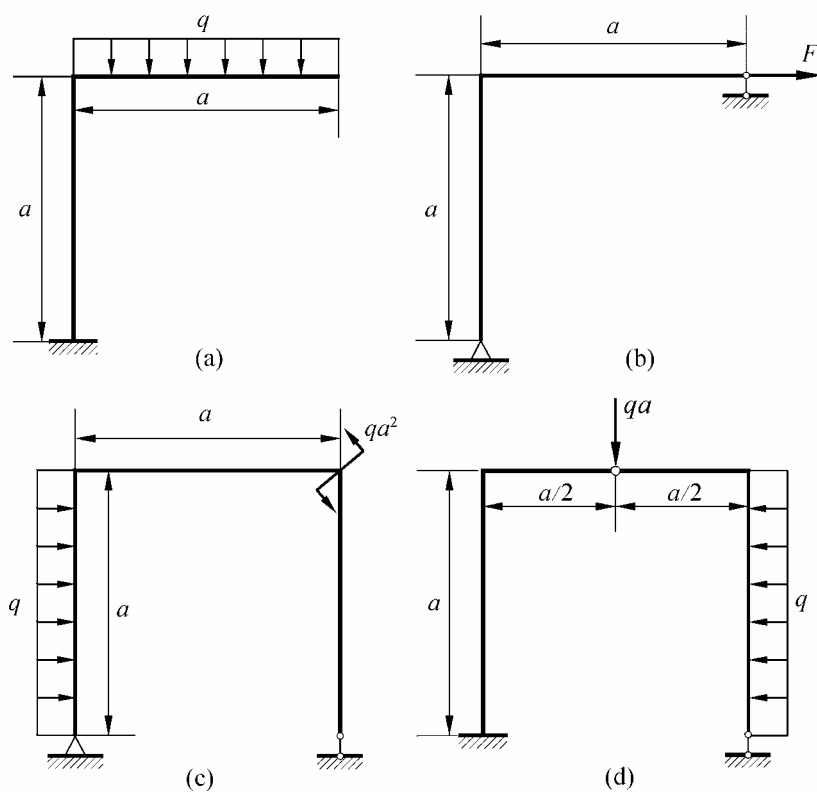
检查 M 图，左半段为正常数，应为上倾斜直线，对的；右半段为负常数，应为下倾斜直线，且斜率是左边的三倍，也是对的。

利用微分关系

$$\frac{dF_N}{dx} = -q$$

检查 F_N 图，斜率为负常数，应为下倾斜直线，所绘 F_N 图是对的。

5-14 试画图示刚架的内力图。



题 5-14 图

解：内力图示如图 5-14。

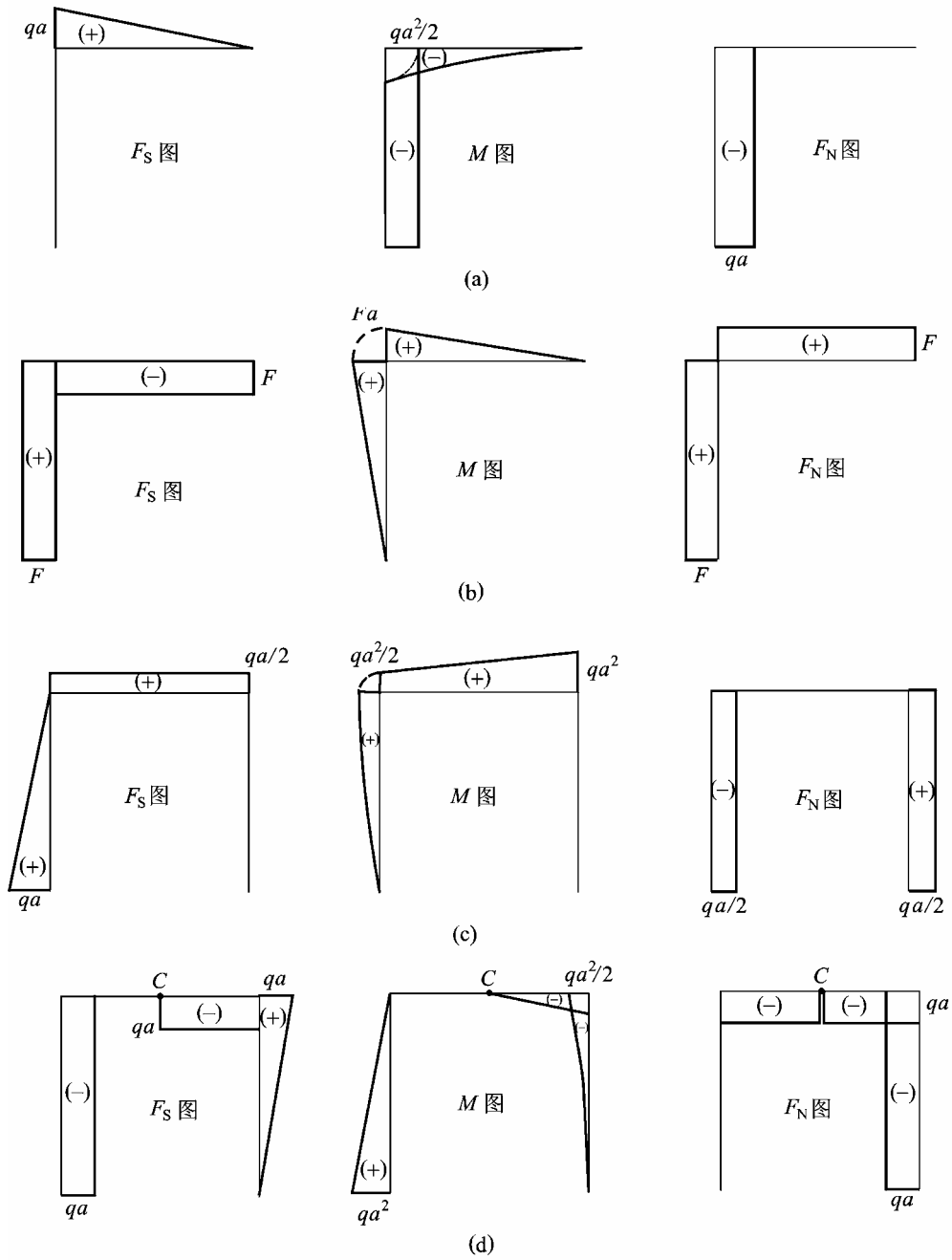
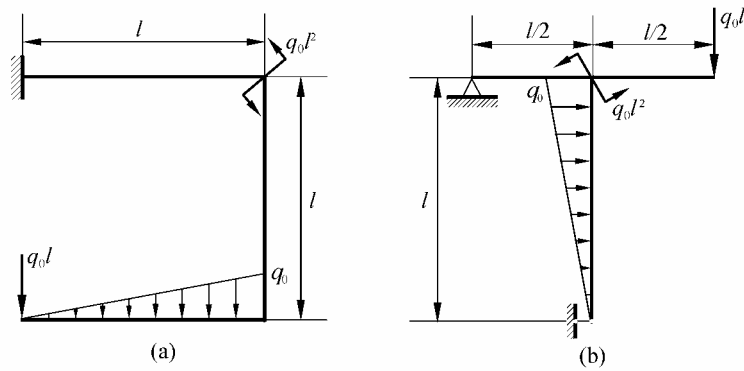


图 5-14

5-15 试画图示刚架的弯矩图。



题 5-15 图

解：刚架的弯矩图示如图 5-15。

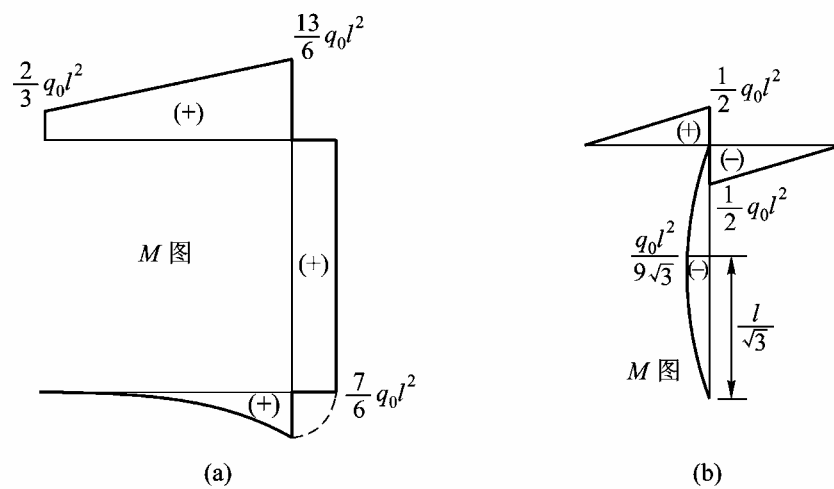
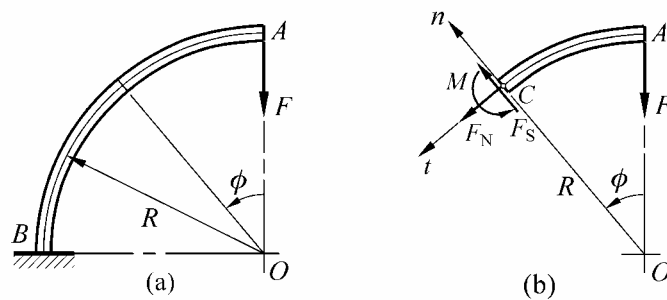


图5-15

5-16 图 a 所示曲杆 AB ， B 端固定， A 端承受集中载荷 F 。杆的轴线为四分之一圆弧，半径为 R ，横截面的位置用极角 φ 表示，其受力如图 b 所示。试计算截面 φ 的内力，并求杆内的最大弯矩。



题 5-16 图

解：参看题图(b)，杆段 AC 的平衡方程为

$$\begin{aligned}\sum F_n &= 0, F_s - F\cos\varphi = 0 \\ \sum M_C &= 0, M - FR\sin\varphi = 0 \\ \sum F_t &= 0, F_N + F\sin\varphi = 0\end{aligned}$$

由此得到剪力、弯矩及轴力方程依次为

$$F_s = F\cos\varphi \quad (a)$$

$$M = FR\sin\varphi \quad (b)$$

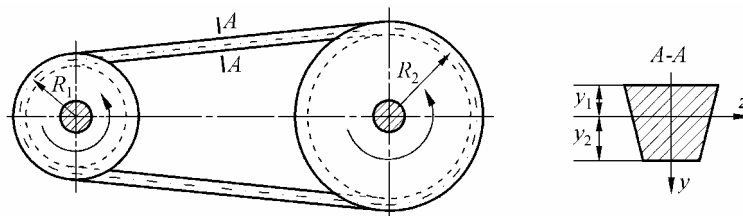
$$F_N = -F\sin\varphi \quad (c)$$

此即截面 φ 的内力。

由式(b)不难判断，最大弯矩发生在固定端截面 B ，其值为

$$M_{\max} = FR$$

5-19 图示带传动装置，胶带的横截面为梯形，截面形心至上、下边缘的距离分别为 y_1 与 y_2 ，材料的弹性模量为 E 。试求胶带内的最大弯曲拉应力与最大弯曲压应力。



题 5-19 图

解：由题图可见，胶带中性层的最小曲率半径为

$$\rho_{\min} = R_1$$

依据

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}$$

可得胶带内的最大弯曲拉应力和最大弯曲压应力分别为

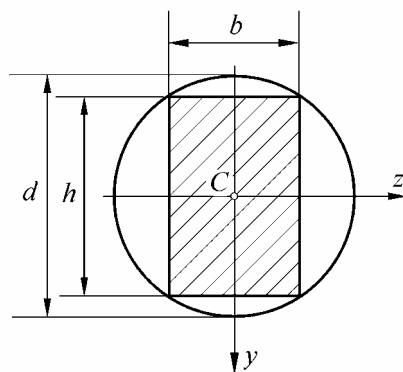
$$\sigma_{t,\max} = \frac{Ey_1}{R_1}$$

和

$$\sigma_{c,\max} = \frac{Ey_2}{R_1}$$

5-23 图示直径为 d 的圆木，现需从中切取一矩形截面梁。试问：

- (1) 如欲使所切矩形梁的弯曲强度最高， h 和 b 应分别为何值；
- (2) 如欲使所切矩形梁的弯曲刚度最高， h 和 b 又应分别为何值。



题 5-23 图

解：(1)为使弯曲强度最高，应使 W_z 取最大值。

由

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b}{6}(d^2 - b^2)$$

得

$$\frac{dW_z}{db} = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0$$

由此可得

$$b = \frac{\sqrt{3}}{3}d, \quad h = \sqrt{d^2 - b^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}d$$

(2)为使弯曲刚度最高，应使 I_z 取最大值。

由

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12}\sqrt{d^2 - h^2}$$

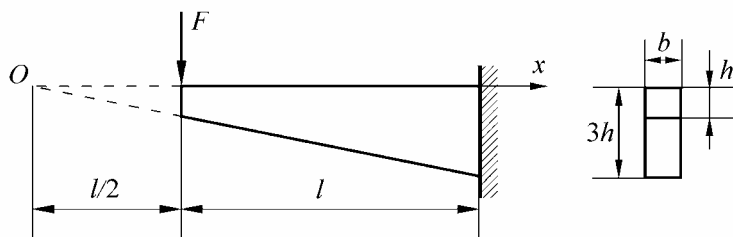
得

$$\frac{dI_z}{dh} = \frac{3h^2(d^2 - h^2) - h^4}{12\sqrt{d^2 - h^2}} = 0$$

由此得

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}d, \quad b = \sqrt{d^2 - h^2} = \frac{d}{2}$$

5-25 图示变截面梁，自由端承受载荷 F 作用，梁的尺寸 l, b 与 h 均为已知。试计算梁内的最大弯曲正应力。



题 5-25 图

解：1. 求截面 x 处的抗弯截面系数

由于 x 处的截面高度为

$$h(x) = \frac{2 \times 3h}{3l} x = \frac{2h}{l} x$$

故有

$$W_z(x) = \frac{b}{6} h^2(x) = \frac{2bh^2}{3l^2} x^2$$

2. 求截面 x 处的最大弯曲正应力

截面 x 处的弯矩为

$$M(x) = F(x - \frac{l}{2})$$

该截面上的最大弯曲正应力为

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{W_z(x)} = \frac{3Fl^2}{2bh^2x^2} (x - \frac{l}{2})$$

3. 计算梁内的最大弯曲正应力

由

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = 0$$

得

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} (x - \frac{l}{2}) = \frac{1}{x^3} (l - x) = 0$$

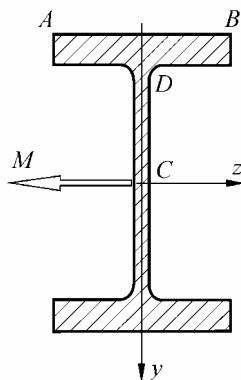
$$x = l$$

故梁内的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{3Fl}{4bh^2}$$

5-26

图示截面梁，由 18 工字钢制成，截面上的弯矩 $M = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ，材料的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.29$ 。试求截面顶边 AB 与上半腹板 CD 的长度改变量。



题 5-26 图

解：1. 查 18 工字钢的有关数据

工字钢截面大致形状及尺寸符号示如图 5-26。

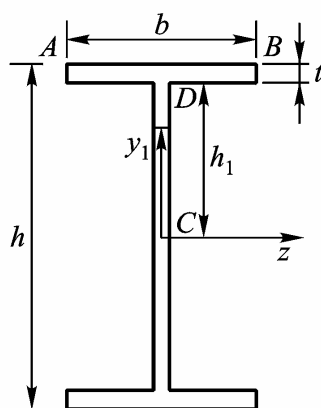


图5-26

由附录 F 表 4 查得

$$h = 180\text{mm}, b = 94\text{mm}$$

$$t = 10.7\text{mm}, I_z = 1660\text{cm}^4, W_z = 185\text{cm}^3$$

2. 计算顶边 AB 的长度改变量

顶边处有

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

$$\varepsilon' = \mu|\varepsilon| = \frac{\mu|\sigma|_{\max}}{E}$$

由此可得 AB 边的伸长量为

$$\Delta_{AB} = \varepsilon'b = \frac{\mu b M}{E W_z} = \frac{0.29 \times 0.094 \times 20 \times 10^3}{200 \times 10^9 \times 185 \times 10^{-6}} \text{m}$$

$$= 1.474 \times 10^{-5} \text{m} = 0.01474 \text{mm}$$

3. 计算上半腹板 CD 的长度改变量

距中性轴 z 为 y_1 的点，弯曲正应力的绝对值为

$$|\sigma(y_1)| = \frac{My_1}{I_z} \quad (\text{这里, } y_1 \text{ 以向上为正})$$

该处的横向应变为

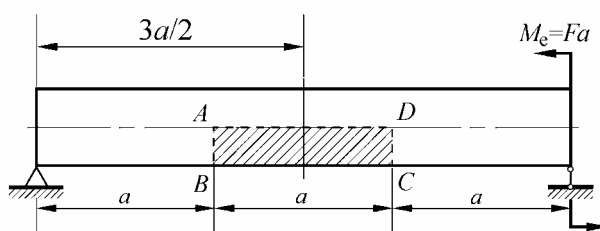
$$\varepsilon' = \mu |\varepsilon(y_1)| = \frac{\mu My_1}{EI_z}$$

由此可得线段 CD 的伸长量为

$$\begin{aligned} \Delta_{CD} &= \int_0^{h_1} \varepsilon' dy_1 = \frac{\mu M}{EI_z} \int_0^{h_1} y_1 dy_1 = \frac{\mu M h_1^2}{2EI_z} \\ &= \frac{0.29 \times 20 \times 10^3 \times 0.0793^2}{2 \times 200 \times 10^9 \times 1660 \times 10^{-8}} \text{m} \\ &= 5.49 \times 10^{-6} \text{m} = 0.00549 \text{mm} \end{aligned}$$

计算中用到 $h_1 = h/2 - t = 79.3 \text{mm}$ 。

5-29 图示矩形截面简支梁，承受矩为 $M_e = Fa$ 的集中力偶作用。试绘单元体 $ABCD$ 的应力分布图（注明应力大小），并说明该单元体是如何平衡的。截面的宽度为 b ，高度为 h 。



题 5-29 图

解：1. 画剪力、弯矩图

左、右支座的支反力大小均为 $F/3$ ，方向是左向上、右向下。据此可画 F_s 、 M 图，示如图 5-29(a)、(b)。

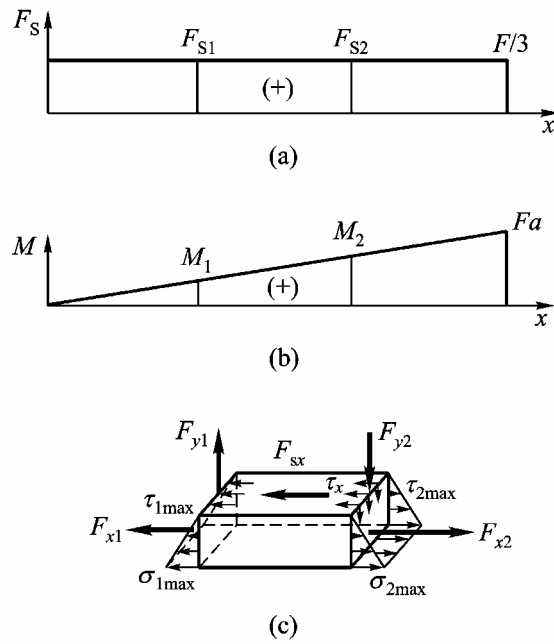


图5-29

2. 求单元体两端面上的应力及其合力

单元体两端面及纵截面上的应力分布情况示如图(c)，最大弯曲正应力和剪应力值分别为

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_1}{W_z} = \frac{6Fa}{3bh^2} = \frac{2Fa}{bh^2}$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{M_2}{W_z} = \frac{4Fa}{bh^2}$$

$$\tau_{1\max} = \tau_{2\max} = \frac{3F_{s2}}{2A} = \frac{F}{2bh}$$

由切应力互等定理可知，纵截面上的切应力 τ_x 与 $\tau_{2\max}$ 一样大。

左、右端面上弯曲正应力构成的轴向合力分别为

$$F_{x1} = \frac{1}{2} \sigma_{1\max} \left(\frac{bh}{2} \right) = \frac{Fa}{2h}$$

$$F_{x2} = \frac{1}{2} \sigma_{2\max} \left(\frac{bh}{2} \right) = \frac{Fa}{h}$$

左、右端面上弯曲切应力构成的竖向合力大小相等，其值为

$$F_{y1} = F_{y2} = \frac{1}{6} F$$

顺便指出，纵截面上弯曲切应力构成的轴向合力为

$$F_{sx} = \tau_x (ab) = \frac{Fa}{2h}$$

3. 检查单元体的平衡方程是否满足

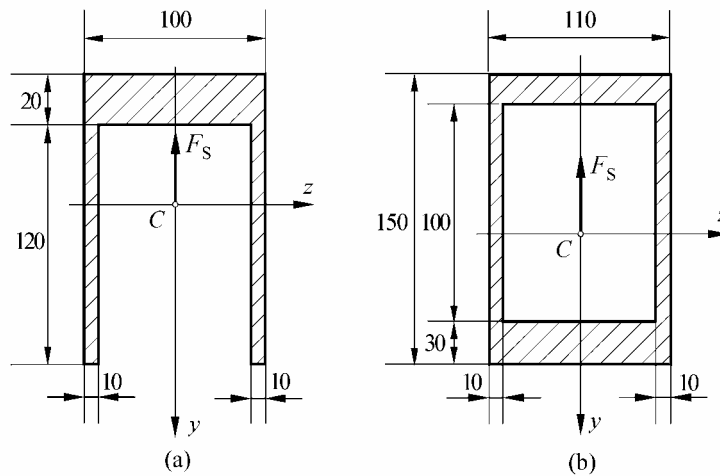
$$\sum F_x = 0, F_{x2} - F_{x1} - F_{sx} = \frac{Fa}{h} - \frac{Fa}{2h} - \frac{Fa}{2h} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{y1} - F_{y2} = \frac{F}{6} - \frac{F}{6} = 0$$

$$\sum M_{z1} = 0, F_{x2} \frac{h}{3} - F_{x1} \frac{h}{3} - F_{y2} a = \frac{Fa}{3} - \frac{Fa}{6} - \frac{Fa}{6} = 0$$

由此可见，单元体的全部平衡方程均能满足（另三个平衡方程是恒等满足，无需写出）。

5-30 梁截面如图所示，剪力 $F_s = 200\text{kN}$ ，并位于 $x-y$ 平面内。试计算腹板上的最大弯曲切应力，以及腹板与翼缘（或盖板）交界处的弯曲切应力。



题 5-30 图

(a)解：首先，确定截面形心位置

$$y_C = \frac{0.020 \times 0.100 \times 0.010 + 0.120 \times 0.010 \times 2 \times 0.080}{0.020 \times 0.100 + 0.120 \times 0.020} \text{ m}$$

$$= 0.04818 \text{ m} \quad (\text{C到顶边之距})$$

其次，计算惯性矩和截面静矩

$$I_z = \left[\frac{0.100 \times 0.020^3}{12} + 0.100 \times 0.020 \times 0.03818^2 + 2 \times \frac{0.010 \times 0.120^3}{12} + 2 \times 0.010 \times 0.120 \times 0.03818^2 \right] \text{ m}^4 = 8.292 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$S_{z,\max} = 0.09182 \times 0.020 \times \frac{0.09182}{2} \text{ m}^3 = 8.431 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$S_z = 0.100 \times 0.020 \times 0.03818 \text{ m}^3 = 7.636 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

最后，计算弯曲切应力。腹板上的最大弯曲切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{F_s S_{z,\max}}{I_z \delta} = \frac{200 \times 10^3 \times 8.431 \times 10^{-5} \text{ N}}{8.292 \times 10^{-6} \times 0.020 \text{ m}^2} = 1.017 \times 10^8 \text{ Pa} = 101.7 \text{ MPa}$$

腹板与翼缘交界处的弯曲切应力为

$$\tau_{\text{交界}} = \frac{F_s S_z}{I_z \delta} = \frac{200 \times 10^3 \times 7.636 \times 10^{-5} \text{ N}}{8.292 \times 10^{-6} \times 0.020 \text{ m}^2} = 9.21 \times 10^7 \text{ Pa} = 92.1 \text{ MPa}$$

(b)解：首先，确定截面形心位置（采用负面积法）

$$y_C = \left[\frac{0.110 \times 0.150 \times 0.075 - (0.110 - 0.020) \times 0.100 \times 0.070}{0.110 \times 0.150 - (0.110 - 0.020) \times 0.100} \right] \text{ m}$$

$$= 0.081 \text{ m} \quad (\text{C到顶边之距})$$

其次，计算惯性矩和截面静矩（算 I_z 时也采用负面积法）

$$I_z = \left\{ \frac{0.110 \times 0.150^3}{12} + 0.110 \times 0.150 \times (0.081 - 0.075)^2 - \left[\frac{0.090 \times 0.100^3}{12} + 0.090 \times 0.100 \times (0.081 - 0.070)^2 \right] \right\} \text{ m}^4 = 2.294 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$S_{z,\text{max}} = \left[0.030 \times 0.110 \times (0.069 - 0.015) + 0.020 \times (0.069 - 0.030)^2 \times \frac{1}{2} \right] \text{ m}^3$$

$$= 1.934 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$S_{z\text{上}} = 0.020 \times 0.110 \times (0.081 - 0.010) \text{ m}^3 = 1.562 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$S_{z\text{下}} = 0.030 \times 0.110 \times (0.069 - 0.015) \text{ m}^3 = 1.782 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

最后，计算弯曲切应力。腹板上的最大弯曲切应力为

$$\tau_{\text{max}} = \frac{F_s S_{z,\text{max}}}{I_z \delta} = \frac{200 \times 10^3 \times 1.934 \times 10^{-4} \text{ N}}{2.294 \times 10^{-5} \times 0.020 \text{ m}^2} = 8.43 \times 10^7 \text{ Pa} = 84.3 \text{ MPa}$$

腹板与上盖板交界处的弯曲切应力为

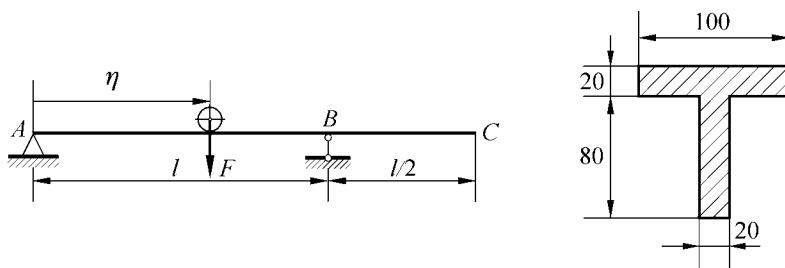
$$\tau_{\text{交界上}} = \frac{F_s S_{z\text{上}}}{I_z \delta} = \frac{200 \times 10^3 \times 1.562 \times 10^{-4} \text{ N}}{2.294 \times 10^{-5} \times 0.020 \text{ m}^2} = 6.81 \times 10^7 \text{ Pa} = 68.1 \text{ MPa}$$

腹板与下盖板交界处的弯曲切应力为

$$\tau_{\text{交界下}} = \frac{F_s S_{z\text{下}}}{I_z \delta} = \frac{200 \times 10^3 \times 1.782 \times 10^{-4} \text{ N}}{2.294 \times 10^{-5} \times 0.020 \text{ m}^2} = 7.77 \times 10^7 \text{ Pa} = 77.7 \text{ MPa}$$

5-33

图示铸铁梁，载荷 F 可沿梁 AC 水平移动，其活动范围为 $0 < \eta < 3l/2$ 。试确定载荷 F 的许用值。已知许用拉应力 $[\sigma_t] = 35 \text{ MPa}$ ，许用压应力 $[\sigma_c] = 140 \text{ MPa}$ ， $l = 1 \text{ m}$ 。



题 5-33 图

解：1. 确定截面的形心位置及对形心轴 z 的惯性矩

由图 5-33 可得

$$y_C = \left(\frac{0.100 \times 0.020 \times 0.010 + 0.080 \times 0.020 \times 0.060}{0.100 \times 0.020 + 0.080 \times 0.020} \right) \text{m} = 0.03222 \text{m}$$

$$I_z = \left[\frac{0.100 \times 0.020^3}{12} + 0.100 \times 0.020 \times 0.02222^2 + \frac{0.020 \times 0.080^3}{12} + 0.020 \times 0.080 \times (0.060 - 0.03222)^2 \right] \text{m}^4 = 3.142 \times 10^{-6} \text{m}^4$$

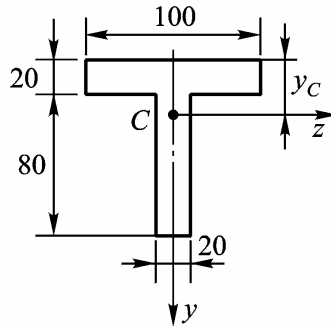


图5-33

2. 确定危险面的弯矩值

分析可知，可能的危险面有两个：

当 F 作用在 AB 段时，危险位置是

$$\eta = \frac{l}{2}, M_{\max}^+ = \frac{Fl}{4}$$

当 F 作用在 BC 段时，危险位置是

$$\eta = \frac{3l}{2}, |M_{\max}^-| = \frac{Fl}{2}$$

3. 确定载荷 F 的许用值

由危险面 B 的压应力强度要求

$$\sigma_{c, \max} = \frac{|M_{\max}^-|}{I_z} (0.100 - y_C) = \frac{Fl}{2I_z} (0.100 - y_C) \leq [\sigma_c]$$

得

$$F \leq \frac{2I_z[\sigma_c]}{l(0.100 - y_C)} = \frac{2 \times 3.142 \times 10^{-6} \times 140 \times 10^6 \text{ N}}{1.000 \times (0.100 - 0.03222)} = 1.298 \times 10^4 \text{ N} = 12.98 \text{ kN}$$

由截面 B 的拉应力强度要求

$$\sigma_{t, \max} = \frac{|M_{\max}^-|}{I_z} y_C = \frac{Fl}{2I_z} y_C \leq [\sigma_t]$$

得

$$F \leq \frac{2I_z[\sigma_t]}{ly_c} = \frac{2 \times 3.142 \times 10^{-6} \times 35 \times 10^6 \text{ N}}{1.000 \times 0.03222} = 6.83 \times 10^3 \text{ N} = 6.83 \text{ kN}$$

由 M_{\max}^+ 作用面的拉应力强度要求

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_{\max}^+}{I_z}(0.100 - y_c) = \frac{Fl}{4I_z}(0.100 - y_c) \leq [\sigma_t]$$

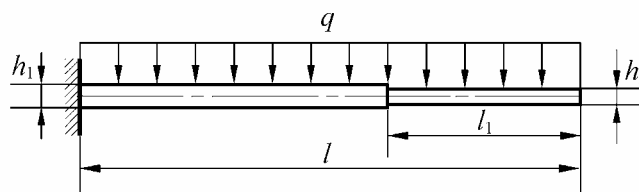
得

$$F \leq \frac{4I_z[\sigma_t]}{l(0.100 - y_c)} = \frac{4 \times 3.142 \times 10^{-6} \times 35 \times 10^6 \text{ N}}{1.000 \times (0.100 - 0.03222)} = 6.49 \times 10^3 \text{ N} = 6.49 \text{ kN}$$

该面上的最大压应力作用点并不危险，无需考虑。

比较以上各结果，最后确定取载荷的许用值为 $[F] = 6.49 \text{ kN}$ 。

5-34 图示矩形截面阶梯梁，承受均布载荷 q 作用。为使梁的重量最轻，试确定 l_1 与截面高度 h_1 和 h_2 。已知截面宽度为 b ，许用应力为 $[\sigma]$ 。



题 5-34 图

解：1. 求最大弯矩

左段最大弯矩的绝对值为

$$|M_1|_{\max} = \frac{ql^2}{2}$$

右段最大弯矩的绝对值为

$$|M_2|_{\max} = \frac{ql_1^2}{2}$$

2. 求截面高度 h_1 和 h_2

由根部截面弯曲正应力强度要求

$$\sigma_{1\max} = \frac{|M_1|_{\max}}{W_{z1}} = \frac{6ql^2}{2bh_1^2} \leq [\sigma]$$

得

$$h_1 \geq \sqrt{\frac{3ql^2}{b[\sigma]}} = l \sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}} \quad (\text{a})$$

由右段危险截面的弯曲正应力强度要求

$$\sigma_{2\max} = \frac{|M_2|_{\max}}{W_{z2}} = \frac{6ql_1^2}{2bh_2^2} \leq [\sigma]$$

得

$$h_2 \geq l_1 \sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}} \quad (\text{b})$$

3. 确定 l_1

该梁的总体积为

$$V = V_1 + V_2 = bh_1(l - l_1) + bh_2l_1 = b \sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}} [l(l - l_1) + l_1^2]$$

由

$$\frac{dV}{dl_1} = 0, \quad 2l_1 - l = 0$$

得

$$l_1 = \frac{l}{2}$$

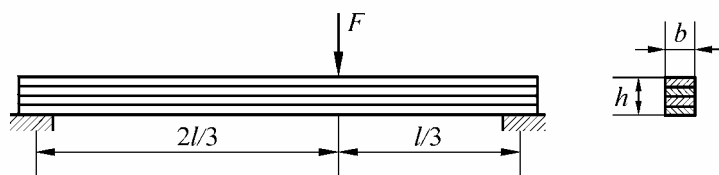
最后，将式(c)代入式(b)，得

$$h_2 \geq \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}}$$

为使该梁重量最轻（也就是 V 最小），最后取

$$l_1 = \frac{l}{2}, \quad h_1 = 2h_2 = l \sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}}$$

5-35 图示简支梁，由四块尺寸相同的木板胶接而成，试校核其强度。已知载荷 $F = 4\text{kN}$ ，梁跨度 $l = 400\text{mm}$ ，截面宽度 $b = 50\text{mm}$ ，高度 $h = 80\text{mm}$ ，木板的许用应力 $[\sigma] = 7\text{MPa}$ ，胶缝的许用切应力 $[\tau] = 5\text{MPa}$ 。



题 5-35 图

解：1. 画剪力、弯矩图

该梁的剪力、弯矩图如图 5-35 所示。由图可知，最大剪力（绝对值）和最大弯矩分别为

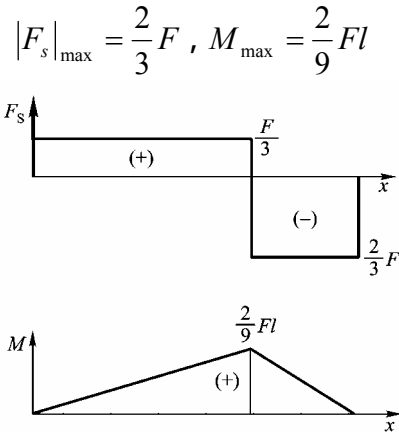


图5-35

2. 校核木板的弯曲正应力强度

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6 \times 2Fl}{9bh^2} = \frac{4 \times 4 \times 10^3 \times 0.400 \text{ N}}{3 \times 0.050 \times 0.080^2 \text{ m}^2} \\ &= 6.67 \times 10^6 \text{ Pa} = 6.67 \text{ MPa} < [\sigma]\end{aligned}$$

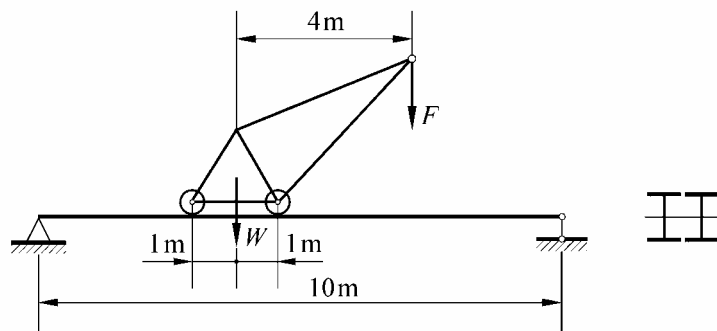
3. 校核胶缝的切应力强度

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{3|F_s|_{\max}}{2A} = \frac{3 \times 2F}{3 \times 2bh} = \frac{4 \times 10^3 \text{ N}}{0.050 \times 0.080 \text{ m}^2} \\ &= 1.000 \times 10^6 \text{ Pa} = 1.000 \text{ MPa} < [\tau]\end{aligned}$$

结论：该胶合木板简支梁符合强度要求。

5-37 图示四轮吊车起重机的导轨为两根工字形截面梁，设吊车自重 $W = 50 \text{ kN}$ ，最大起重量 $F = 10 \text{ kN}$ ，许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ ，许用切应力 $[\tau] = 80 \text{ MPa}$ 。试选择工字钢型号。由于梁较长，需考虑梁自重的影响。

提示：首先按载荷 W 与 F 选择工字钢型号，然后根据载荷 W 与 F 以及工字钢的自重校核梁的强度，并根据需要进一步修改设计。



题 5-37 图

解：1. 求最大弯矩

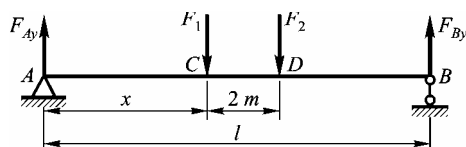
设左、右轮给梁的压力分别为 F_1 和 F_2 ，不难求得

$$F_1 = 10\text{kN}, F_2 = 50\text{kN}$$

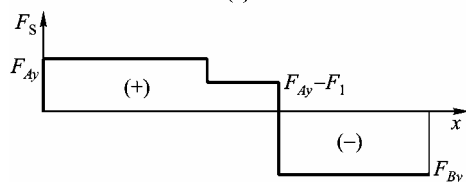
由图 5-37(a)所示梁的受力图及坐标，可得支反力

$$F_{Ay} = \frac{1}{l}[F_1(l-x) + F_2(l-x-2)] = 50 - 6x \quad (0 < x < 8)$$

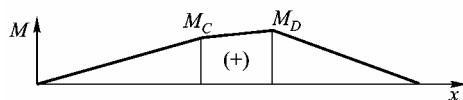
$$F_{By} = \frac{1}{l}[F_1x + F_2(x+2)] = 6x + 10 \quad (0 < x < 8)$$



(a)



(b)



(c)

图5-37

该梁的剪力、弯矩图示如图(b)和(c)。图中，

$$M_C = F_{Ay}x = (50 - 6x)x \quad (0 \leq x \leq 8)$$

$$M_D = F_{By}(l - x - 2) = (6x + 10)(8 - x) \quad (0 \leq x \leq 8)$$

由

$$\frac{dM_C}{dx} = 0, \quad \frac{dM_D}{dx} = 0$$

得极值位置依次为

$$x = \frac{25}{6} \text{ m}, \quad x = \frac{19}{6} \text{ m}$$

两个弯矩极值依次为

$$M_{C_{\max}} = (50 - 25) \times \frac{25}{6} \text{ kN} \cdot \text{m} = 104.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

和

$$M_{D\max} = (19 + 10)(8 - \frac{19}{6})\text{kN} \cdot \text{m} = 140.2\text{kN} \cdot \text{m}$$

比较可知，单梁的最大弯矩值为

$$M_{\max} = \frac{1}{2} M_{D\max} = 70.1\text{kN} \cdot \text{m}$$

2. 初选工字钢型号

先不计梁的自重，由弯曲正应力强度要求

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

得

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{70.1 \times 10^3 \text{m}^3}{160 \times 10^6} = 4.38 \times 10^{-4} \text{m}^3 = 438 \text{cm}^3$$

由附录 F 表 4 初选 28a 工字钢，有关数据为

$$W_z = 508 \text{cm}^3, q = 43.492 \text{kg/m}, \delta = 8.5 \text{mm}, I_z / S_z = 24.6 \text{cm}$$

3. 检查和修改

考虑梁自重的影响，检查弯曲正应力强度是否满足。

梁中点处弯矩增量为

$$\Delta M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{43.492 \times 9.81 \times 10^2}{8} \text{N} \cdot \text{m} = 5.33 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}$$

上面分析的最大弯矩作用面在跨中以右 0.167m 处，二者相距很近，检查正应力强度时可
将二者加在一起计算（计算的 σ_{\max} 比真实的略大一点，偏于安全），即

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max} + \Delta M_{\max}}{W_z} = \frac{(70.1 \times 10^3 + 5.33 \times 10^3) \text{N}}{508 \times 10^{-6} \text{m}^2} \\ &= (1.380 \times 10^8 + 1.049 \times 10^7) \text{Pa} = 148.5 \text{MPa} < [\sigma] \end{aligned}$$

最后，再检查弯曲切应力强度是否满足。

$$\begin{aligned} F_{s,\max} &= \left[\frac{1}{2} (6 \times 8 + 10) + \frac{1}{2} \times 43.492 \times 9.81 \times 10^{-3} \times 10 \right] \text{kN} = 31.13 \text{kN} \\ \tau_{\max} &= \frac{F_{s,\max}}{\left(\frac{I_z}{S_z} \right) \delta} = \frac{31.13 \times 10^3 \text{N}}{24.6 \times 10^{-2} \times 8.5 \times 10^{-3} \text{m}^2} \\ &= 1.489 \times 10^7 \text{Pa} = 14.89 \text{MPa} < [\tau] \end{aligned}$$

结论：检查的结果表明，考虑梁自重影响后，弯曲正应力和切应力强度均能满足要求，故无需修改设计，最后选择的工字钢型号为 28a。

5-39

图示简支梁，由两根 50b 工字钢经铆钉连接而成，铆钉的直径 $d = 23 \text{mm}$ ，许用切应力 $[\tau] = 90 \text{MPa}$ ，梁的许用应力 $[\sigma] = 160 \text{MPa}$ 。试确定梁的许用载荷 $[q]$ 及铆钉的相应

间距 e 。

提示：按最大剪力确定间距。

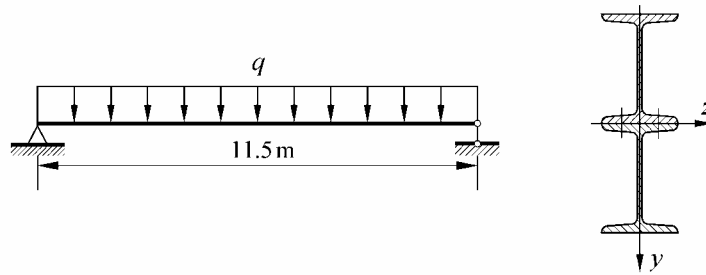


图 5-39 图

解：1. 计算组合截面的 I_z 和 S_z

由附录 F 表 4 查得 50b 工字钢的有关数据为

$$h = 500\text{mm}, A = 129.304\text{cm}^2, I_{z_1} = 48600\text{cm}^4$$

形成组合截面后，有

$$\begin{aligned} I_z &= 2I_{z_1} + 2\left(\frac{Ah^2}{4}\right) = [2 \times 4.86 \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 1.29304 \times 10^{-2} \times 0.500^2] \text{m}^4 \\ &= 2.5883 \times 10^{-3} \text{m}^4 \end{aligned}$$

$$S_z = A \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \times 1.29304 \times 10^{-2} \times 0.500 \text{m}^3 = 3.2326 \times 10^{-3} \text{m}^3$$

2. 由弯曲正应力强度要求计算 $[q]$

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{ql^2}{8} \\ \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}h}{I_z} = \frac{ql^2h}{8I_z} \leq [\sigma] \end{aligned}$$

由此可得

$$q \leq \frac{8I_z[\sigma]}{l^2h} = \frac{8 \times 2.5883 \times 10^{-3} \times 160 \times 10^6 \text{N}}{11.5^2 \times 0.500 \text{m}} = 5.01 \times 10^4 \text{N/m} = 50.1 \text{N/mm}$$

梁的许用载荷为

$$[q] = 50.1 \text{N/mm}$$

3. 求铆钉间距 e

由铆钉的切应力强度要求来计算 e 。

由对称条件可得

$$F_{s,\max} = \frac{1}{2}ql = \frac{1}{2} \times 5.01 \times 10^4 \times 11.5 \text{N} = 2.881 \times 10^5 \text{N} = 288.1 \text{kN}$$

按最大剪力计算两工字钢交界面上单位长度上的剪力（剪流 \bar{q} ），其值为

$$\bar{q} = \frac{F_{s,\max} S_z}{I_z} = \frac{288.1 \times 10^3 \times 3.2326 \times 10^{-3} \text{ N}}{2.5883 \times 10^{-3} \text{ m}} = 3.598 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

间距长度内的剪力为 $\bar{q}e$ ，它实际上是靠一对铆钉的受剪面来承担的，即

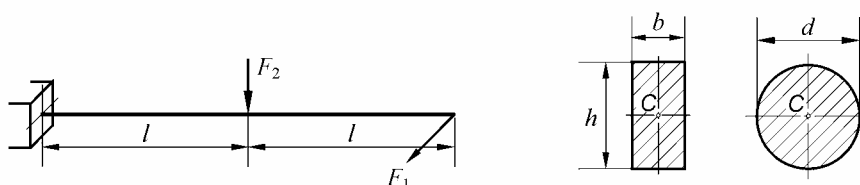
$$\bar{q}e = 2[\tau] \cdot A_1 = 2[\tau] \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2 [\tau]}{2}$$

由此得梁长方向铆钉的间距为

$$e = \frac{\pi d^2 [\tau]}{2\bar{q}} = \frac{\pi \times 0.023^2 \times 90 \times 10^6}{2 \times 3.598 \times 10^5} \text{ m} = 0.208 \text{ m} = 208 \text{ mm}$$

5-42 图示悬臂梁，承受载荷 F_1 与 F_2 作用，已知 $F_1=800\text{N}$ ， $F_2=1.6\text{kN}$ ， $l=1\text{m}$ ，许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。试分别按下列要求确定截面尺寸：

- (1) 截面为矩形， $h=2b$ ；
- (2) 截面为圆形。



题 5-42 图

解：(1) 矩形截面

危险截面在悬臂梁根部，危险点为截面左上角点（拉应力）和右下角点（压应力）。由弯曲正应力强度条件

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F_2 l}{W_z} + \frac{F_1 (2l)}{W_y} = \frac{6F_2 l}{bh^2} + \frac{6 \times (2F_1 l)}{hb^2} \\ &= \frac{3l}{2b^3} (F_2 + 4F_1) \leq [\sigma] \end{aligned}$$

得

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3l(F_2 + 4F_1)}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 1.000 \times (1.6 \times 10^3 + 4 \times 800)}{2 \times 160 \times 10^6}} \text{ m} = 0.0356 \text{ m} = 35.6 \text{ mm}$$

最后确定 $h = 2b \geq 71.2 \text{ mm}$ 。

(2) 圆形截面

危险截面的合弯矩为

$$M_{\max} \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(2F_1 l)^2 + (F_2 l)^2}$$

由弯曲正应力强度条件

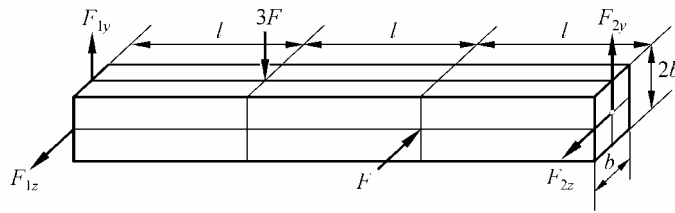
$$\sigma_{\max} = \frac{32M_{\max}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

得

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{(2 \times 800 \times 1)^2 + (1.6 \times 10^3 \times 1)^2}}{\pi \times 160 \times 10^6}} \text{m} = 0.0524 \text{m} = 52.4 \text{mm}$$

最后确定 $d \geq 52.4 \text{mm}$ 。

5-44 图示简支梁，在两个纵向对称面内分别承受集中载荷作用。试求梁内的最大弯曲正应力。



题 5-44 图

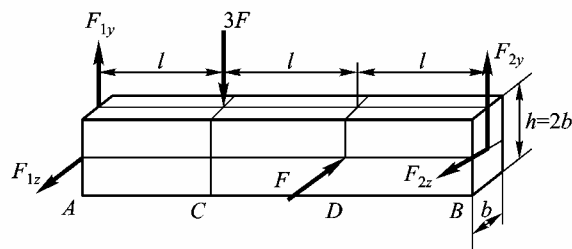
解：1. 求支反力

由图 5-44(a)可得支反力为

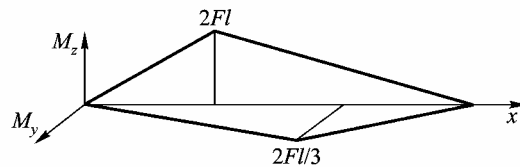
$$F_{1y} = \frac{2}{3}(3F) = 2F, F_{2y} = \frac{1}{3}(3F) = F$$

$$F_{1z} = \frac{1}{3}F, F_{2z} = \frac{2}{3}F$$

方向如图(a)所示。



(a)



(b)

图5-44

2. 画弯矩图，并分析危险面位置

弯矩图示如图(b)。由该图不难判断：

在 AC 段, M_y 、 M_z 均为 x 的正比函数, 截面 C 最危险;

在 BD 段, 与 AC 段的情况类似, 截面 D 最危险;

在 CD 段, M_z 是线性减函数, M_y 是线性增函数, 求 σ_{\max} 时分母上均为常数 (W_y 或 W_z),

由此知 σ_{\max} 必是 x 的线性函数, 其最大值必在该段端点处, 不在截面 C , 就在截面 D 。

3. 计算该梁内的最大弯曲正应力

由以上分析可知, 只需计算两个截面的 σ_{\max} 即可。

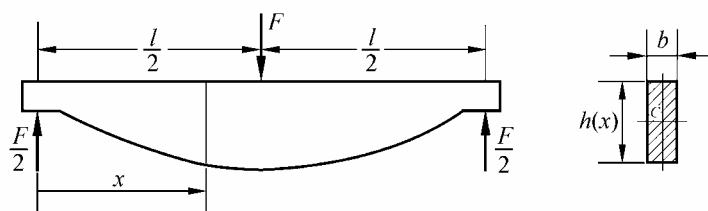
$$\sigma_{C,\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{6Fl}{3hb^2} + \frac{6 \times 2Fl}{bh^2} = \frac{4Fl}{b^3}$$

$$\sigma_{D,\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{6 \times 2Fl}{3hb^2} + \frac{6Fl}{bh^2} = \frac{7Fl}{2b^3}$$

比较可知, 该梁内的最大弯曲正应力在截面 C 处, 其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{4Fl}{b^3}$$

5-47 图示简支梁, 跨度中点承受集中载荷 F 作用。若横截面的宽度 b 保持不变, 试根据等强度观点确定截面高度 $h(x)$ 的变化规律。许用应力 $[\sigma]$ 与许用切应力 $[\tau]$ 均为已知。



题 5-47 图

解: 1. 求 $h(x)$

$$M(x) = \frac{F}{2}x$$

由等强度观点可知,

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{6Fx}{2bh^2(x)} = [\sigma]$$

由此可得

$$h(x) = \sqrt{\frac{3Fx}{b[\sigma]}} \quad (0 < x \leq l/2) \quad (a)$$

梁的右半段与左边对称。

2. 求两端的截面高度

由式(a)可知, 在 $x = 0$ 处, $h(0) = 0$, 这显然是不合理的, 弯曲切应力强度要求得不到满足, 故需作局部修正。由

$$\tau_{\max} = \frac{3F_{s,\max}}{2A} = \frac{3F}{4bh(0)} = [\tau]$$

得梁左端的截面高度为

$$h(0) = \frac{3F}{4b[\tau]} \quad (b)$$

这是满足剪切强度要求的最小截面高度, 梁的右端亦同此值。

3. 确定 $h(x)$ 的变化规律

设可取截面高度为 $h(0)$ 的最大长度为 x_1 , 为了同时满足正应力和切应力强度要求, 应取

$$\sqrt{\frac{3Fx_1}{b[\sigma]}} = h(0) = \frac{3F}{4b[\tau]}$$

由此得

$$x_1 = \frac{3F[\sigma]}{16b[\tau]^2}$$

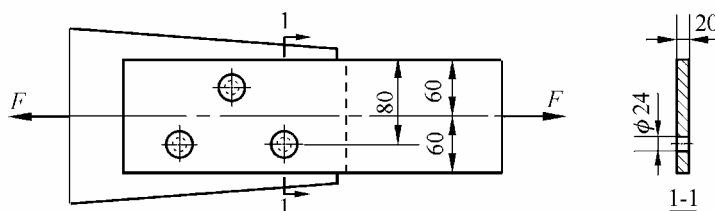
最终确定截面高度 $h(x)$ 的变化规律为:

$$\text{在区间 } (0 \leq x \leq x_1) \text{ 内} \quad h(x) = \frac{3F}{4b[\tau]}$$

$$\text{在区间 } (x_1 \leq x \leq l/2) \text{ 内} \quad h(x) = \sqrt{\frac{3Fx}{b[\sigma]}}$$

梁的右半段与左边对称。

5-49 图示板件, 受拉力 $F = 150\text{kN}$ 作用。试绘横截面 A-A 上的正应力分布图, 并计算最大与最小正应力。



题 5-49 图

解: 1. 计算截面 A-A 的有关几何量

截面的形心位置为

$$y_c = \frac{0.020 \times 0.120 \times 0.060 - 0.020 \times 0.024 \times 0.080}{0.020 \times 0.120 - 0.020 \times 0.024} \text{ m} = 0.055 \text{ m} = 55 \text{ mm}$$

载荷偏心距为

$$e = (60 - 55)\text{mm} = 5\text{mm}$$

截面对形心轴 z 的惯性距为

$$I_z = \left[\frac{0.020 \times 0.120^3}{12} + 0.020 \times 0.120 \times 0.005^2 - \frac{0.020 \times 0.024^3}{12} - 0.020 \times 0.024 \times (0.080 - 0.055)^2 \right] \text{m}^4 = 2.617 \times 10^{-6} \text{m}^4$$

截面面积为

$$A = [0.020 \times (0.120 - 0.024)] \text{m}^2 = 1.920 \times 10^{-3} \text{m}^2$$

2. 计算正应力并画其分布图

由以上分析可知, 截面 $A-A$ 上有

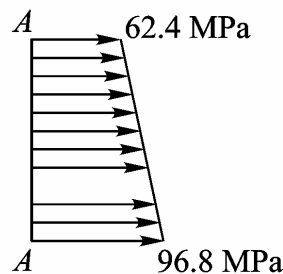
$$F_N = 150\text{kN}, M = 150 \times 10^3 \times 0.005 \text{N} \cdot \text{m} = 7.5 \times 10^2 \text{N} \cdot \text{m}$$

故有

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{My_1}{I_z} = \left(\frac{150 \times 10^3}{1.920 \times 10^{-3}} + \frac{7.5 \times 10^2 \times 0.065}{2.617 \times 10^{-6}} \right) \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 9.68 \times 10^7 \text{Pa} = 96.8 \text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{F_N}{A} + \frac{My_2}{I_z} = \left(\frac{150 \times 10^3}{1.920 \times 10^{-3}} - \frac{7.5 \times 10^2 \times 0.055}{2.617 \times 10^{-6}} \right) \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 6.24 \times 10^7 \text{Pa} = 62.4 \text{MPa}$$

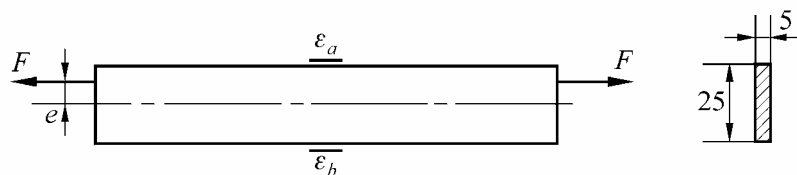
据此可画正应力分布图, 如图 5-49 所示。



σ 分布图

图5-49

5-50 图示矩形截面钢杆, 用应变片测得上、下表面的纵向正应变分别为 $\varepsilon_a = 1.0 \times 10^{-3}$ 与 $\varepsilon_b = 0.4 \times 10^{-3}$, 材料的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$ 。试绘横截面上的正应力分布图, 并求拉力 F 及其偏心距 e 的数值。



题 5-50 图

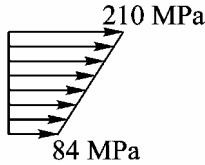
解：1. 求 σ_a 和 σ_b

截面的上、下边缘处均处于单向受力状态，故有

$$\sigma_a = E\varepsilon_a = 210 \times 10^9 \times 1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} = 210 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = E\varepsilon_b = 210 \times 10^9 \times 0.4 \times 10^{-3} \text{ Pa} = 84 \text{ MPa}$$

偏心拉伸问题，正应力沿截面高度线性变化，据此即可绘出横截面上的正应力分布图，如图 5-50 所示。



σ 分布图

图5-50

2. 求 F 和 e

将 F 平移至杆轴线，得

$$F_N = F, M = Fe$$

由方程

$$\begin{cases} \sigma_a = \frac{F}{A} + \frac{Fe}{W_z} = E\varepsilon_a & (a) \\ \sigma_b = \frac{F}{A} - \frac{Fe}{W_z} = E\varepsilon_b & (b) \end{cases}$$

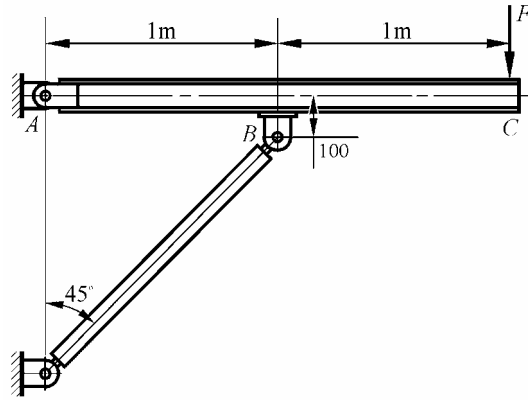
联立求解，可得 F 和 e 的值。代入数据后，方程(a)、(b)成为

$$\begin{cases} F + 240Fe = 26250 & (a)' \\ F - 240Fe = 10500 & (b)' \end{cases}$$

由此解得

$$F = 18375 \text{ N} \approx 18.38 \text{ kN}, e = 1.786 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.786 \text{ mm}$$

5-52 图示结构，承受集中载荷 F 作用，试校核横梁的强度。已知载荷 $F = 12 \text{ kN}$ ，横梁用 14 工字钢制成，许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。



题 5-52 图

解：1. 横梁外力分析

横梁受力示如图 5-52(a)，由平衡方程 $\sum M_A = 0$, $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 依次求得

$$F_B = 30.9\text{kN}, F_{Ax} = 21.8\text{kN}, F_{Ay} = 9.82\text{kN}$$

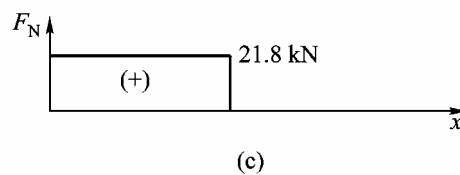
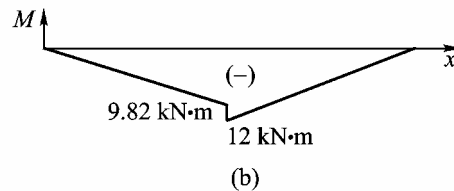
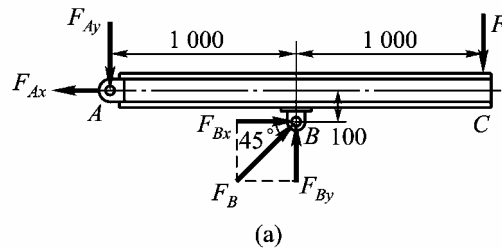


图5-52

2. 横梁内力分析

将 F_B 分解为 F_{Bx} 和 F_{By} ，并将 F_{Bx} 平移至梁轴线，由此即可画横梁的内力图， M 图和 F_N

图分别示如图(b)和(c)。

3. 横梁强度校核

由内力图不难判断，危险面可能是横截面 B_- 或 B_+ 。

对于 B_- 面，其最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{NB_-}}{A} + \frac{M_{B_-}}{W_z} \quad (\text{a})$$

由附录 F 表 4 查得, 14 工字钢的 $A = 21.516\text{cm}^2$, $W_z = 102\text{cm}^3$ 。将有关数据代入式(a), 可得

$$\sigma_{\max 1} = \left(\frac{21.8 \times 10^3}{21.516 \times 10^{-4}} + \frac{9.82 \times 10^3}{102 \times 10^{-6}} \right) \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1.064 \times 10^8 \text{ Pa} = 106.4 \text{ MPa}$$

对于 B_+ 面, 其最大弯曲正应力为

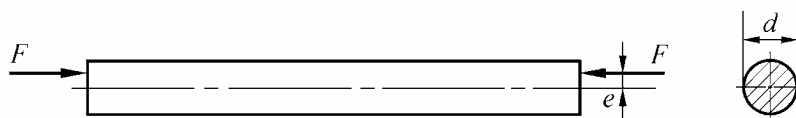
$$\sigma_{\max 2} = \frac{M_{B_+}}{W_z} = \frac{12 \times 10^3 \text{ N}}{102 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 1.176 \times 10^8 \text{ Pa} = 117.6 \text{ MPa}$$

比较可知, 最大正应力发生在 B_+ 截面上、下边缘处, 其值为

$$\sigma_{\max} = 117.6 \text{ MPa} < [\sigma]$$

可见, 横梁的强度是足够的。

5-54 图示直径为 d 的圆截面铸铁杆, 承受偏心距为 e 的载荷 F 作用。试证明: 当 $e \leq d/8$ 时, 横截面上不存在拉应力, 即截面核心为 $R = d/8$ 的圆形区域。



题 5-54 图

证明: 此为偏心压缩问题。载荷偏心产生的弯矩为

$$M = Fe$$

受拉区的最大拉应力为

$$\sigma_{t, \max} = \frac{M}{W} - \frac{F}{A} \quad (\text{a})$$

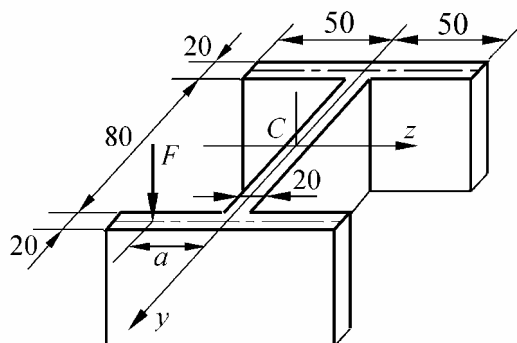
横截面上不存在拉应力的条件, 要求式(a)小于或等于零, 即要求

$$\frac{32Fe}{\pi d^3} \leq \frac{4F}{\pi d^2}$$

由此得

$$e \leq \frac{d}{8}$$

5-56 在图示立柱的顶部, 作用一偏心载荷 $F = 250\text{kN}$ 。若许用应力 $[\sigma] = 125\text{MPa}$, 试求偏心距 a 的许用值。



题 5-56 图

解：1. 确定内力

$$F_N = 250 \text{ kN}, M_y = Fa = 2.50 \times 10^5 a \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$M_z = 0.050F = 0.050 \times 250 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.25 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. 计算 I_z 、 I_y 及 A

$$I_z = \left(\frac{0.100 \times 0.120^3}{12} - \frac{0.080 \times 0.080^3}{12} \right) \text{ m}^4 = 1.099 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_y = \left(\frac{0.020 \times 0.100^3}{12} \times 2 + \frac{0.080 \times 0.020^3}{12} \right) \text{ m}^4 = 3.39 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$A = (0.100 \times 0.020 \times 2 + 0.080 \times 0.020) \text{ m}^2 = 5.60 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

3. 求 a 的许用值

由正应力强度要求

$$\begin{aligned} \sigma_{c, \max} &= \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{F}{A} \\ &= \left[\frac{(1.25 \times 10^4) \times 0.060}{1.099 \times 10^{-5}} + \frac{(2.50 \times 10^5 a) \times 0.050}{3.39 \times 10^{-6}} + \frac{250 \times 10^3}{5.60 \times 10^{-3}} \right] \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \\ &= [112.88 + 3.69 \times 10^3 a] \times 10^6 \text{ (Pa)} \leq 125 \times 10^6 \text{ Pa} = [\sigma] \end{aligned}$$

得偏心距的许用值为

$$a \leq 3.28 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.28 \text{ mm}$$

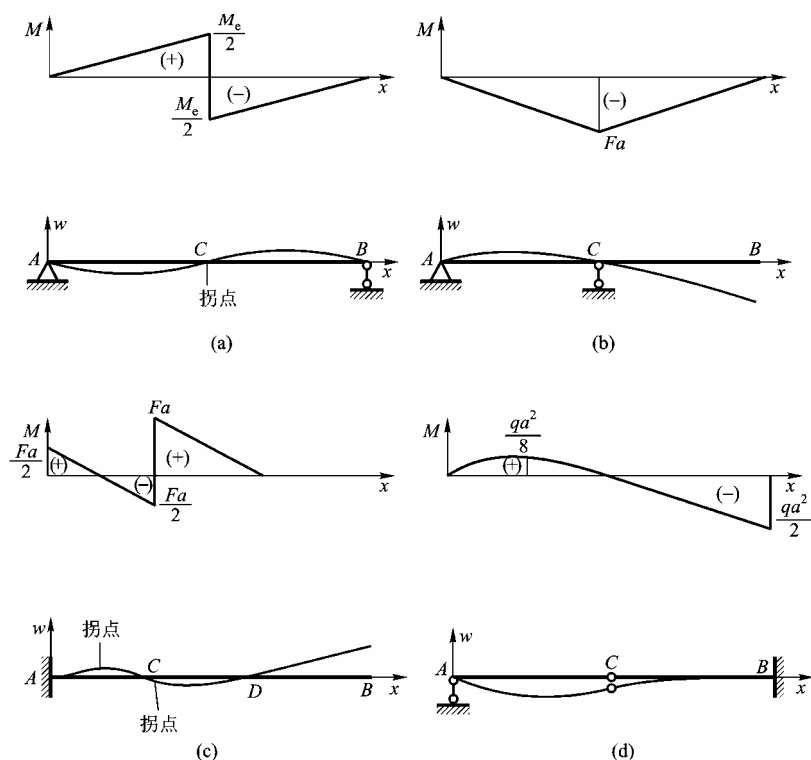
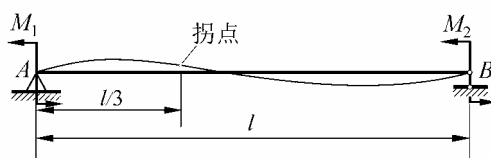


图6-2

6-4 图示简支梁，左、右端各作用一个力偶矩分别为 M_1 与 M_2 的力偶。如欲使挠曲轴的拐点位于离左端 $l/3$ 处，则力偶矩 M_1 与 M_2 应保持何种关系。



题 6-4 图

解：解法 1，常规解法

1. 建立弯矩方程

左端 A 的支反力为

$$F_{Ay} = \frac{M_1 + M_2}{l} \quad (\uparrow)$$

自左端向右取坐标 x ，弯矩方程为

$$M(x) = \frac{M_1 + M_2}{l} x - M_1$$

2. 建立挠曲轴近似微分方程

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) = \frac{M_1 + M_2}{l} x - M_1$$

依题意，在 $x = l/3$ 处有拐点，即 $w'' = 0$ ，于是，

$$\left(\frac{M_1 + M_2}{l}\right)\frac{l}{3} - M_1 = 0$$

由此得

$$M_2 = 2M_1$$

解法 2，简便解法

分析本题的弯矩图：左端为 $-M_1$ ，右端为 $+M_2$ ，将这两个端值点连线，即得到 M 图，

示如图 6-4。 $M(x) = 0$ 的点为拐点，依题意，此点应在 $x = l/3$ 处，由几何上的比例关系

$$M_2 : M_1 = \frac{2l}{3} : \frac{l}{3}$$

直接得到

$$M_2 = 2M_1$$

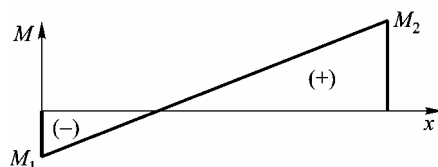
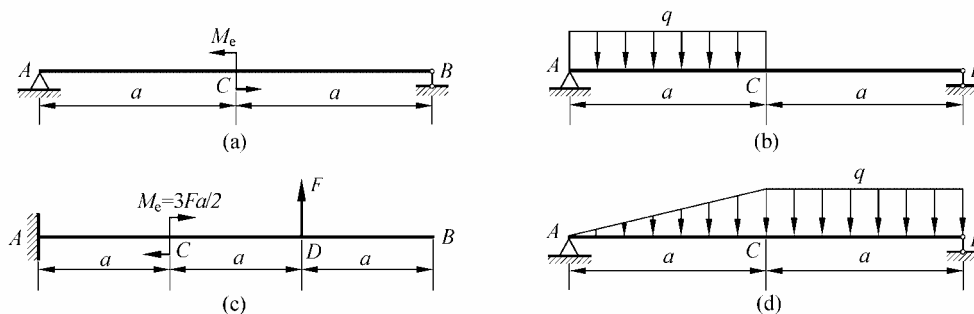


图6-4

6-6 图示各梁，弯曲刚度 EI 均为常数。试用奇异函数法计算截面 B 的转角与截面 C 的挠度。



题 6-6 图

(a)解：1. 求支反力

由梁的平衡方程 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 可得

$$F_{Ay} = \frac{M_e}{2a} \quad (\uparrow), \quad F_{By} = \frac{M_e}{2a} \quad (\downarrow)$$

2. 建立挠曲轴近似微分方程并积分

自 A 向右取坐标 x , 由题图可见 , 弯矩的通用方程为

$$M = \frac{M_e}{2a}x - M_e \langle x - a \rangle^0$$

挠曲轴的通用近似微分方程为

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_e}{2a}x - M_e \langle x - a \rangle^0$$

将其相继积分两次 , 得

$$EI \frac{dw}{dx} = \frac{M_e}{4a}x^2 - M_e \langle x - a \rangle + C \quad (a)$$

$$EIw = \frac{M_e}{12a}x^3 - \frac{M_e}{2} \langle x - a \rangle^2 + Cx + D \quad (b)$$

3. 确定积分常数

该梁的位移边界条件为 :

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处, } w = 0 \quad (c)$$

$$\text{在 } x = 2a \text{ 处, } w = 0 \quad (d)$$

将条件(c)代入式(b) , 得

$$D = 0$$

将条件(d)代入式(b) , 得

$$C = -\frac{M_e a}{12}$$

4. 建立挠曲轴方程

将所得 C 、 D 值代入式(b) , 得挠曲轴的通用方程为

$$w = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_e}{12a}x^3 - \frac{M_e}{2} \langle x - a \rangle^2 - \frac{M_e a}{12}x \right]$$

由此得 AC 段与 CB 段的挠曲轴方程分别为

$$w_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_e}{12a}x^3 - \frac{M_e a}{12}x \right)$$

和

$$w_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_e}{12a}x^3 - \frac{M_e}{2}(x-a)^2 - \frac{M_e a}{12}x \right]$$

5. 计算 w_C 和 θ_B

将 $x = a$ 代入上述 w_1 或 w_2 的表达式中 , 得截面 C 的挠度为

$$w_C = 0$$

将以上所得 C 值和 $x = 2a$ 代入式(a), 得截面 B 的转角为

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left(\frac{4M_e a^2}{4a} - M_e a - \frac{M_e a}{12} \right) = -\frac{M_e a}{12EI} \quad (\text{C})$$

(b)解: 1. 求支反力

由梁的平衡方程 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 可得

$$F_{Ay} = \frac{3}{4}qa \quad (\uparrow), \quad F_{By} = \frac{1}{4}qa \quad (\uparrow)$$

2. 建立挠曲轴近似微分方程并积分

自 A 向右取坐标 x , 由题图可见, 弯矩的通用方程为

$$M = \frac{3qa}{4}x - \frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2}\langle x-a \rangle^2$$

挠曲轴的通用近似微分方程为

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{3qa}{4}x - \frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2}\langle x-a \rangle^2$$

将其相继积分两次, 得

$$EI \frac{dw}{dx} = \frac{3qa}{8}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + \frac{q}{6}\langle x-a \rangle^3 + C \quad (a)$$

$$EIw = \frac{qa}{8}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + \frac{q}{24}\langle x-a \rangle^4 + Cx + D \quad (b)$$

3. 确定积分常数

该梁的位移边界条件为:

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处, } w = 0 \quad (c)$$

$$\text{在 } x = 2a \text{ 处, } w = 0 \quad (d)$$

将条件(c)、(d)分别代入式(b), 得

$$D = 0, \quad C = -\frac{3qa^3}{16}$$

4. 建立挠曲轴方程

将所得 C 、 D 值代入式(b), 得挠曲轴的通用方程为

$$w = \frac{1}{EI} \left[\frac{qa}{8}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + \frac{q}{24}\langle x-a \rangle^4 - \frac{3qa^3}{16}x \right]$$

由此得 AC 段与 CB 段的挠曲轴方程分别为

$$w_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{qa}{8}x^3 - \frac{q}{24}x^4 - \frac{3qa^3}{16}x \right)$$

和

$$w_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{qa}{8} x^3 - \frac{q}{24} x^4 + \frac{q}{24} (x-a)^4 - \frac{3qa^3}{16} x \right]$$

5. 计算 w_C 和 θ_B

将 $x = a$ 代入上述 w_1 或 w_2 的表达式中, 得截面 C 的挠度为

$$w_C = -\frac{5qa^4}{48EI} \quad (\downarrow)$$

将以上所得 C 值和 $x = 2a$ 代入式 (a), 得截面 B 的转角为

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{3qa}{8} (2a)^2 - \frac{q}{6} (2a)^3 + \frac{q}{6} (2a-a)^3 - \frac{3qa^3}{16} \right] = \frac{7qa^3}{48EI} \quad (\curvearrowright)$$

(c) 解: 1. 求支反力

由梁的平衡方程 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum M_A = 0$ 可得

$$F_{Ay} = F \quad (\downarrow), \quad M_A = \frac{1}{2} Fa \quad (\curvearrowright)$$

2. 建立挠曲轴近似微分方程并积分

自 A 向右取坐标 x , 由题图可见, 弯矩的通用方程为

$$M = \frac{Fa}{2} - Fx + \frac{3Fa}{2} \langle x-a \rangle^0 + F \langle x-2a \rangle$$

挠曲轴的通用近似微分方程为

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{Fa}{2} - Fx + \frac{3Fa}{2} \langle x-a \rangle^0 + F \langle x-2a \rangle$$

将其相继积分两次, 得

$$EI \frac{dw}{dx} = \frac{Fa}{2} x - \frac{F}{2} x^2 + \frac{3Fa}{2} \langle x-a \rangle + \frac{F}{2} \langle x-2a \rangle^2 + C \quad (a)$$

$$EI w = \frac{Fa}{4} x^2 - \frac{F}{6} x^3 + \frac{3Fa}{4} \langle x-a \rangle^2 + \frac{F}{6} \langle x-2a \rangle^3 + Cx + D \quad (b)$$

3. 确定积分常数

该梁的位移边界条件为:

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } w=0 \quad (c)$$

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } \theta = \frac{dw}{dx} = 0 \quad (d)$$

将条件(c)、(d)分别代入式(b)和(a), 得

$$D=0, C=0$$

4. 建立挠曲轴方程

将所得 C 、 D 值代入式(b), 得挠曲轴的通用方程为

$$w = \frac{1}{EI} \left[\frac{Fa}{4} x^2 - \frac{F}{6} x^3 + \frac{3Fa}{4} \langle x-a \rangle^2 + \frac{F}{6} \langle x-2a \rangle^3 \right]$$

由此得 AC 段、 CD 段和 DB 段的挠曲轴方程依次为

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{1}{EI} \left(\frac{Fa}{4} x^2 - \frac{F}{6} x^3 \right) \\w_2 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{Fa}{4} x^2 - \frac{F}{6} x^3 + \frac{3Fa}{4} (x-a)^2 \right] \\w_3 &= \frac{1}{EI} \left[\frac{Fa}{4} x^2 - \frac{F}{6} x^3 + \frac{3Fa}{4} (x-a)^2 + \frac{F}{6} (x-2a)^3 \right]\end{aligned}$$

5. 计算 w_C 和 θ_B

将 $x = a$ 代入上述 w_1 或 w_2 的表达式中, 得截面 C 的挠度为

$$w_C = \frac{Fa^3}{12EI} \quad (\uparrow)$$

将以上所得 C 值和 $x = 3a$ 代入式(a), 得截面 B 的转角为

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left[\frac{Fa}{2} (3a) - \frac{F}{2} (3a)^2 + \frac{3Fa}{2} (2a) + \frac{F}{2} (a)^2 \right] = \frac{Fa^2}{2EI} \quad (\curvearrowright)$$

(d)解: 1. 求支反力

由梁的平衡方程 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 可得

$$F_{Ay} = \frac{7}{12} qa \quad (\uparrow), \quad F_{By} = \frac{11}{12} qa \quad (\uparrow)$$

2. 建立挠曲轴近似微分方程并积分

自 A 向右取坐标 x , 由题图可见, 弯矩的通用方程为

$$M = \frac{7qa}{12} x - \frac{q}{6a} x^3 + \frac{q}{6a} \langle x-a \rangle^3$$

挠曲轴的通用近似微分方程为

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{7qa}{12} x - \frac{q}{6a} x^3 + \frac{q}{6a} \langle x-a \rangle^3$$

将其相继积分两次, 得

$$EI \frac{dw}{dx} = \frac{7qa}{24} x^2 - \frac{q}{24a} x^4 + \frac{q}{24a} \langle x-a \rangle^4 + C \quad (a)$$

$$EI w = \frac{7qa}{72} x^3 - \frac{q}{120a} x^5 + \frac{q}{120a} \langle x-a \rangle^5 + Cx + D \quad (b)$$

3. 确定积分常数

该梁的位移边界条件为:

在 $x = 0$ 处, $w = 0$ (c)

在 $x = 2a$ 处, $w = 0$ (d)

将条件(c)代入式(b), 得

$$D = 0$$

将条件(d)代入式(b)，得

$$C = -\frac{187}{720}qa^3$$

4. 建立挠曲轴方程

将所得 C 、 D 值代入式(b)，得挠曲轴的通用方程为

$$w = \frac{1}{EI} \left[\frac{7qa}{72}x^3 - \frac{q}{120a}x^5 + \frac{q}{120a} \langle x-a \rangle^5 - \frac{187qa^3}{720}x \right]$$

由此得 AC 段与 CB 段的挠曲轴方程分别为

$$w_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{7qa}{72}x^3 - \frac{q}{120a}x^5 - \frac{187qa^3}{720}x \right)$$

和

$$w_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{7qa}{72}x^3 - \frac{q}{120a}x^5 + \frac{q}{120a}(x-a)^5 - \frac{187qa^3}{720}x \right]$$

5. 计算 w_C 和 θ_B

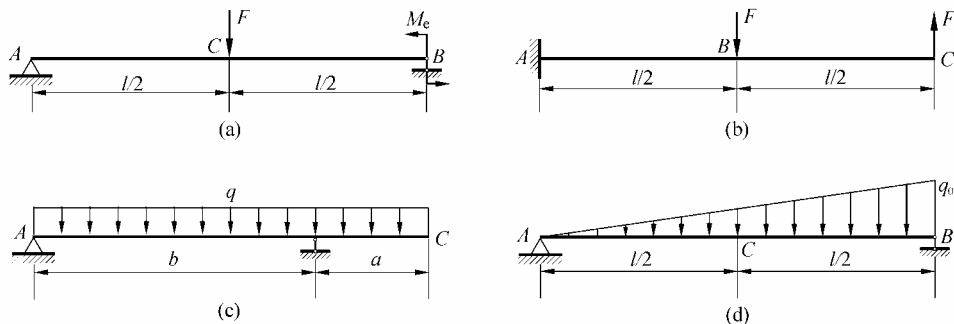
将 $x = a$ 代入上述 w_1 或 w_2 的表达式中，得截面 C 的挠度为

$$w_C = -\frac{41qa^4}{240EI} \quad (\downarrow)$$

将以上所得 C 值和 $x = 2a$ 代入式(a)，得截面 B 的转角为

$$\theta_B = \frac{qa^3}{EI} \left[\frac{7 \times 4}{24} - \frac{16}{24} + \frac{1}{24} - \frac{187}{720} \right] = \frac{203qa^3}{720EI} \quad (\curvearrowright)$$

6-8 图示各梁，弯曲刚度 EI 均为常数。试用叠加法计算截面 B 的转角与截面 C 的挠度。



题 6-8 图

(a)解：由 F 产生的位移为

$$\theta_{B1} = \frac{Fl^2}{16EI} \quad (\curvearrowright), \quad w_{C1} = \frac{Fl^3}{48EI} \quad (\downarrow)$$

由 M_e 产生的位移为

$$\theta_{B2} = \frac{M_e l}{3EI} \quad (\curvearrowright), \quad w_{C2} = \frac{M_e l^2}{16EI} \quad (\downarrow)$$

应用叠加法，得截面 B 的转角及截面 C 的挠度分别为

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} = \frac{Fl^2}{16EI} + \frac{M_e l}{3EI} \quad (\curvearrowright)$$

$$w_C = w_{C1} + w_{C2} = \frac{Fl^3}{48EI} + \frac{M_e l^2}{16EI} \quad (\downarrow)$$

(b)解： AB 梁段及 BC 梁段的受力情况示如图 6-8(b)的图(1)和图(2)。

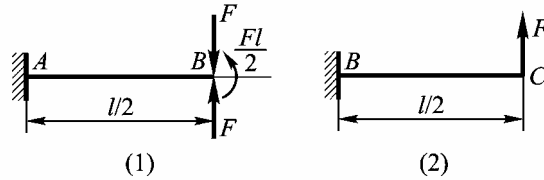


图6-8 (b)

由图(1)可得截面 B 的转角为

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fl}{2} \right) \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{Fl^2}{4EI} \quad (\curvearrowright)$$

由图(1)和图(2)，应用叠加法得截面 C 的挠度为

$$w_C = w_B + \theta_B \left(\frac{l}{2} \right) + w_{C3} = \frac{Fl^3}{16EI} + \frac{Fl^3}{8EI} + \frac{Fl^3}{24EI} = \frac{11Fl^3}{48EI} \quad (\uparrow)$$

(c)解： AB 梁段及 BC 梁段的受力情况示如图 6-8(c)的图(1)和图(2)。

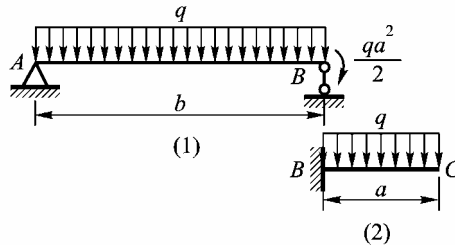


图6-8 (c)

由图(1)可得截面 B 的转角为

$$\theta_B = \frac{qb^3}{24EI} - \frac{b}{3EI} \left(\frac{qa^2}{2} \right) = \frac{qb}{24EI} (b^2 - 4a^2)$$

由图(1)和图(2)，应用叠加法得截面 C 的挠度为

$$w_C = \theta_B \cdot a + w_{C2} = \frac{qab}{24EI}(b^2 - 4a^2) - \frac{qa^4}{8EI} = \frac{qa}{24EI}(b^3 - 4a^2b - 3a^3)$$

(d)解：求 θ_B 时可以书中附录 E 的 7 号梁为基础，以 x 代替 a ，以 $q(x)dx$ 代替 F ，写出 B 端截面的微转角

$$d\theta_B = \frac{x(l^2 - x^2)q(x)}{6lEI} dx \quad (a)$$

式中， $q(x)$ 为截面 x 处的载荷集度，其值为

$$q(x) = \frac{q_0}{l} x \quad (b)$$

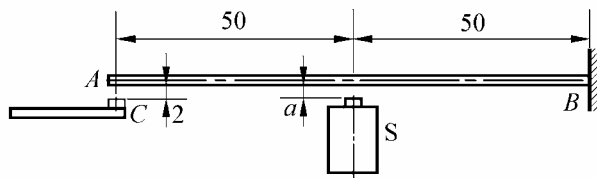
将式(b)代入式(a)后两边积分，即得截面 B 的转角为

$$\theta_B = \int_0^l \frac{q_0 x^2 (l^2 - x^2)}{6l^2 EI} dx = \frac{q_0 l^3}{45EI} \quad (c)$$

求 w_C 可以附录 E 中 8 号梁为基础，所求截面 C 的挠度为表中所列 δ 的一半，即

$$w_C = \frac{1}{2}\delta = -\frac{5q_0 l^4}{768EI} \quad (\downarrow)$$

6-9 图示电磁开关，由铜片 AB 与电磁铁 S 组成。为使端点 A 与触点 C 接触，试求电磁铁 S 所需吸力的最小值 F 以及间距 a 的尺寸。铜片横截面的惯性矩 $I_z = 0.18 \times 10^{-12} \text{m}^4$ ，弹性模量 $E = 101 \text{GPa}$ 。



题 6-9 图

解：铜片 AB 的受力及变形情况示如图 6-9。

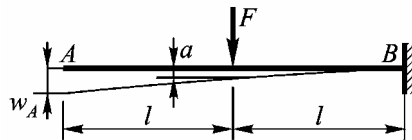


图6-9

由图可得

$$w_A = \frac{Fl^3}{3EI} + \left(\frac{Fl^2}{2EI}\right)l = \frac{5Fl^3}{6EI}$$

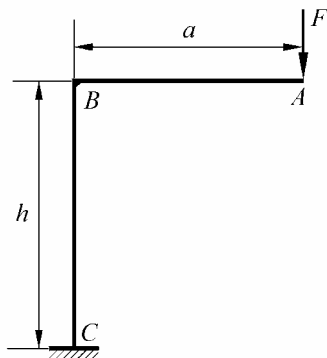
由此可求得电磁铁的最小吸力，其值为

$$F = \frac{6EIw_A}{5l^3} = \frac{6 \times 101 \times 10^9 \times 0.18 \times 10^{-12} \times 0.002}{5 \times 0.050^3} \text{ N} = 0.349 \text{ N}$$

间距的尺寸为

$$a = \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{0.349 \times 0.050^3 \text{ m}}{3 \times 101 \times 10^9 \times 0.18 \times 10^{-12}} = 8.0 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.80 \text{ mm}$$

6-12 试计算图示刚架截面 A 的水平 and 铅垂位移。设弯曲刚度 EI 为常数。



题 6-12 图

解：用叠加法来求 Δ_x 和 Δ_y 。

杆段 BC 在力矩 Fa 作用下产生水平位移 Δ_B 和转角 θ_B ，其值分别为

$$\Delta_B = \frac{(Fa)h^2}{2EI} = \frac{Fah^2}{2EI} \quad (\rightarrow)$$

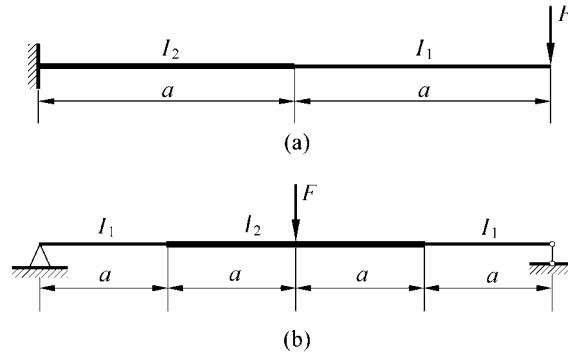
$$\theta_B = \frac{(Fa)h}{EI} = \frac{Fah}{EI} \quad (\curvearrowright)$$

由此不难求得截面 A 的两个位移分量，其值分别为

$$\Delta_x = \Delta_B = \frac{Fah^2}{2EI} \quad (\rightarrow)$$

$$\Delta_y = \frac{Fa^3}{3EI} + \theta_B a = \frac{Fa^2}{3EI}(a + 3h) \quad (\downarrow)$$

6-14 试用叠加法计算图示各阶梯形梁的最大挠度。设惯性矩 $I_2 = 2I_1$ 。



题 6-14 图

(a)解：容易判断，最大挠度发生在截面 C 处（见下图）。
如图 6-14(a, 1)所示，梁段 AB 在 F 和 Fa 作用下，有

$$\theta_B = \frac{Fa^2}{2EI_2} + \frac{Fa \cdot a}{EI_2} = \frac{3Fa^2}{2EI_2} = \frac{3Fa^2}{4EI_1} \quad (\curvearrowright)$$

和

$$\Delta_B = \frac{Fa^3}{3EI_2} + \frac{Fa \cdot a^2}{2EI_2} = \frac{5Fa^3}{6EI_2} = \frac{5Fa^3}{12EI_1} \quad (\downarrow)$$

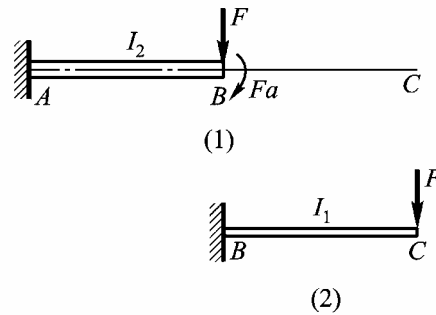


图6-14 (a)

由图(2)可得

$$\Delta'_C = \frac{Fa^3}{3EI_1} \quad (\downarrow)$$

最后，应用叠加法求得最大挠度为

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_C = \Delta_B + \theta_B \cdot a + \Delta'_C \\ &= \frac{5Fa^3}{12EI_1} + \frac{3Fa^2}{4EI_1} \cdot a + \frac{Fa^3}{3EI_1} = \frac{3Fa^3}{2EI_1} \quad (\downarrow) \end{aligned} \quad (\text{a})$$

(b)解：不难判断，最大挠度发生在中间截面 G 处。

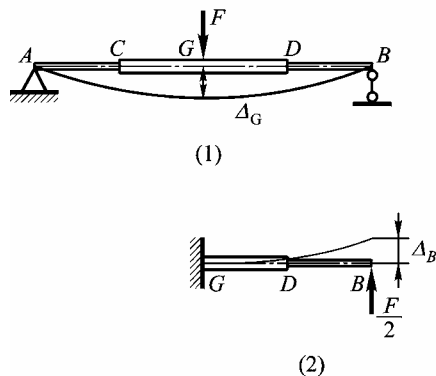
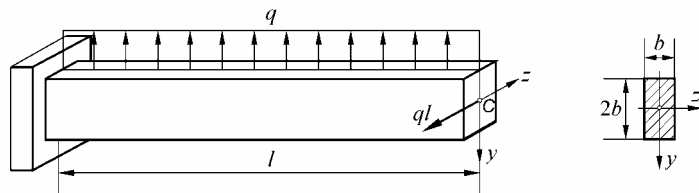


图6-14 (b)

如图 6-14(b, 1)所示, 由于左右对称, 截面 G 的转角必然为零。由此可将图(1)求 Δ_G 的问题转化为图(2)所示悬臂梁求挠度 Δ_B 的问题, 并可利用本题(a)中所得的结果, 只需将式(a)中的 F 更换为 $F/2$ 即可。最后求得的最大挠度为

$$\Delta = \Delta_G = \Delta_B = \frac{3a^3}{2EI_1} \left(\frac{F}{2} \right) = \frac{3Fa^3}{4EI_1} \quad (\downarrow) \quad (b)$$

6-15 图示悬臂梁, 承受均布载荷 q 与集中载荷 ql 作用。试计算梁端的挠度及其方向, 材料的弹性模量为 E 。



题 6-15 图

提示: 分解成为两个互垂对称弯曲问题, 分别计算端点挠度, 并求其矢量和。

解: 1. 求 Δ_y

$$\Delta_y = \frac{ql^4}{8EI_z} = \frac{12ql^4}{8Eb(2b)^3} = \frac{3ql^4}{16Eb^4} \quad (\uparrow)$$

2. 求 Δ_z

$$\Delta_z = \frac{(ql)l^3}{3EI_y} = \frac{12ql^4}{3E(2b)b^3} = \frac{2ql^4}{Eb^4} \quad (\leftarrow)$$

3. 求总挠度 Δ

梁端的总挠度为

$$\Delta = \sqrt{\Delta_y^2 + \Delta_z^2} = \frac{ql^4}{Eb^4} \sqrt{\left(\frac{3}{16}\right)^2 + 2^2} = \frac{2.01ql^4}{Eb^4}$$

其方向示如图 6-15，由图可知，

$$\tan\theta = \frac{\Delta_y}{\Delta_z} = \frac{3}{32}$$

$$\theta = 5.36^\circ$$

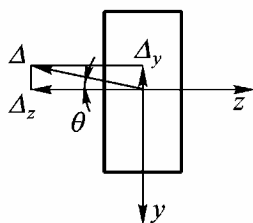
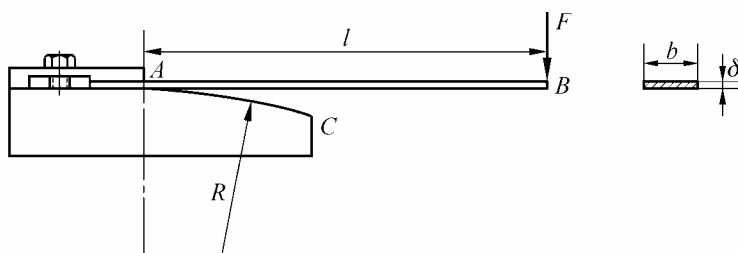


图6-15

6-16 如图所示，梁左端 A 固定在具有圆弧形表面的刚性平台上，自由端 B 承受载荷 F 作用。试计算截面 B 的挠度及梁内的最大弯曲正应力。平台圆弧表面 AC 的曲率半径 R 、梁的尺寸 l 、 b 、 δ 以及材料的弹性模量 E 均为已知。



题 6-16 图

解：1. 计算截面 B 的挠度

设在 F 作用下梁段 AD 与圆弧形表面贴合，并设 DB 段的长度为 x ，由图 6-16(a) 可得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} = \frac{Fx}{EI}$$

由此得

$$x = \frac{EI}{FR} \quad (a)$$

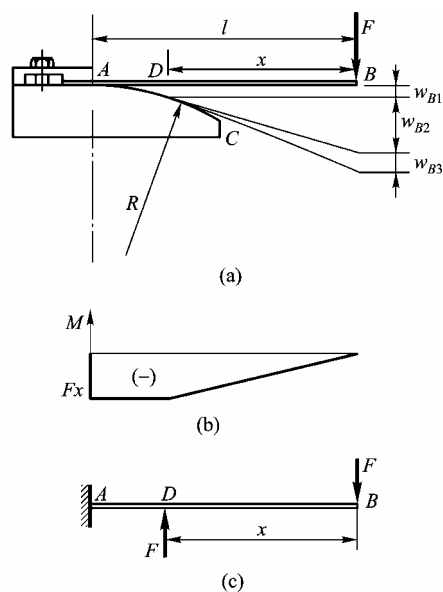


图6-16

由于贴合段梁的曲率为常值，可推知此段的弯矩也是常值。据此可画出梁的弯矩图，示如图(b)。根据梁的约束条件及图(b)，可进一步推知其受力情况，示如图(c)。

由图(c)可得截面 B 的挠度为

$$w_B = -\frac{Fx(l-x)^2}{2EI} - \frac{Fx(l-x)}{EI}x - \frac{Fx^3}{3EI} \quad (b)$$

再将式(a)代入式(b)，化简后得到

$$w_B = -\frac{l^2}{2R} + \frac{(EI)^2}{6F^2R^3} \quad (\downarrow) \quad (c)$$

作为一种特殊情况，当 F 较小，以致使

$$\frac{Fl}{EI} \leq \frac{1}{R}$$

此时，又回到一般悬臂梁的结果，将 $x = l$ 代入式(b)，得到

$$w_B = -\frac{Fl^3}{3EI} \quad (\downarrow) \quad (c)'$$

应当指出，以上结果均由挠曲轴的近似微分方程得到，因而只有当 $R \gg \delta$ 时才是正确的。

2. 计算梁内的最大弯曲正应力

由于梁内的最大弯矩（绝对值）必须满足

$$\frac{M_{\max}}{EI} \leq \frac{1}{R}$$

即

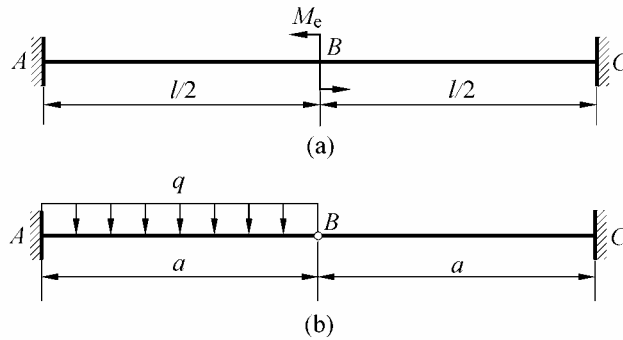
$$M_{\max} \leq \frac{EI}{R} \quad (d)$$

由此得到梁内的最大弯曲正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} \frac{\delta}{2} \leq \frac{E\delta}{2R} \quad (\text{e})$$

当式(d)取等号时，式(e)也取等号。

6-18 试求图示各梁的支反力。设弯曲刚度 EI 为常数。



题 6-18 图

(a)解：此为三度静不定问题，但有反对称条件可以利用。

此题以解除多余内约束较为方便。可在 M_e 作用的反对称面 B 处假想将梁切开， M_e 左、

右面各分一半，另有反对称内力 F_{SB} 存在，示如图 6-18(a)。

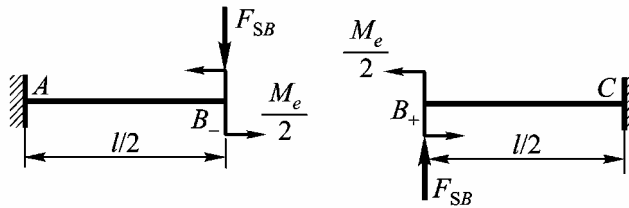


图6-18 (a)

变形协调条件为

$$w_{B_-} = w_{B_+} = 0 \quad (\text{a})$$

截面 B 的挠度之所以为零，这是由反对称条件决定的。

取左半梁段 AB 写物理关系

$$w_{B_-} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{M_e}{2} \right) \left(\frac{l}{2} \right)^2 - \frac{F_{SB}}{3EI} \left(\frac{l}{2} \right)^3 \quad (\text{b})$$

将式(b)代入式(a)，得

$$F_{SB} = \frac{3M_e}{2l} \quad (\text{c})$$

方向如图所示。

据此可求得支反力为

$$F_{Ay} = \frac{3M_e}{2l} \quad (\uparrow), \quad F_{Cy} = \frac{3M_e}{2l} \quad (\downarrow)$$

$$M_A = \frac{M_e}{4} \quad (\circlearrowleft), \quad M_C = \frac{M_e}{4} \quad (\circlearrowright)$$

(b)解：此为两度静不定问题。可在梁间铰 B 处解除多余约束，得该静不定结构的相当系统如图 6-18(b)所示。

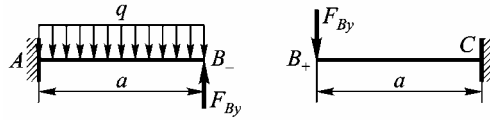


图6-18 (b)

变形协调条件为

$$w_{B-} = w_{B+} \quad (d)$$

物理关系为

$$w_{B-} = \frac{qa^4}{8EI} - \frac{F_{By}a^3}{3EI}, \quad w_{B+} = \frac{F_{By}a^3}{3EI} \quad (e)$$

将式(e)代入式(d)，得

$$F_{By} = \frac{3qa}{16} \quad (f)$$

由相当系统的平衡条件最后求得支反力为

$$F_{Ay} = \frac{13qa}{16} \quad (\uparrow), \quad F_{Cy} = \frac{3qa}{16} \quad (\uparrow)$$

$$M_A = \frac{5qa^2}{16} \quad (\circlearrowleft), \quad M_C = \frac{3qa^2}{16} \quad (\circlearrowright)$$

6-20 题 6-19 所示传动轴，由于加工误差，轴承 C 处的位置偏离轴线 $\delta = 0.25\text{mm}$ ，

试计算安装后轴内的最大弯曲正应力。已知轴的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ 。

解：此为一度静不定问题。

该静不定梁（即传动轴）的相当系统示如图 6-20。变形协调条件为

$$w_C = \delta \quad (a)$$

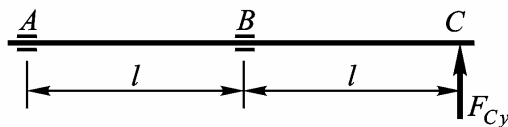


图6-20

在多余支反力 F_{Cy} 作用下，图中截面 C 的挠度（物理条件）为

$$w_C = \frac{2F_{Cy}l^3}{3EI} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a)，得

$$\frac{2F_{Cy}l^3}{3EI} = \delta$$

由此可得

$$F_{Cy} = \frac{3EI\delta}{2l^3} \quad (c)$$

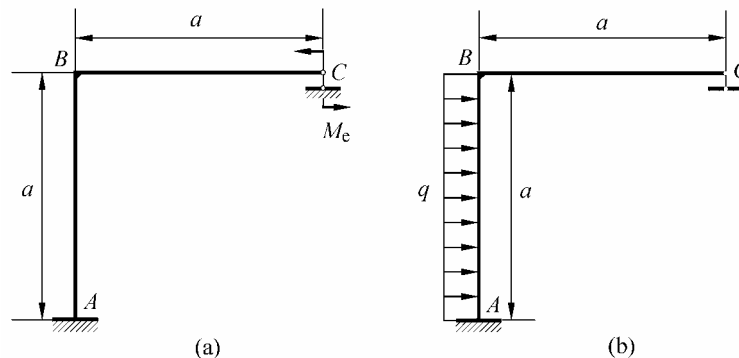
由图可知，梁内的最大弯矩发生在截面 B ，其值为

$$M_{\max} = F_{Cy}l = \frac{3EI\delta}{2l^2}$$

由此可得梁内的最大弯曲正应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{3E\delta}{2l^2} \left(\frac{I}{W_z} \right) = \frac{3E\delta d}{4l^2} \\ &= \frac{3 \times 200 \times 10^9 \times 0.00025 \times 0.050 \text{ N}}{4 \times 0.200^2 \text{ m}^2} = 4.69 \times 10^7 \text{ Pa} = 46.9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

6-22 图示刚架，弯曲刚度 EI 为常数，试画刚架的弯矩图。



题 6-22 图

解：题(a)与(b)均为一度静不定问题。解除 C 端的多余约束，代之以多余约束反力 F_{Cy} ，

由变形协调条件

$$\Delta_{Cy} = 0$$

解得此二刚架的多余约束反力依次为

$$F_{Cy} = \frac{9M_e}{8a} \quad (\downarrow), \quad F_{Cy} = \frac{1}{8}qa \quad (\uparrow)$$

此二刚架的弯矩图示如图 6-22(a)和(b)。

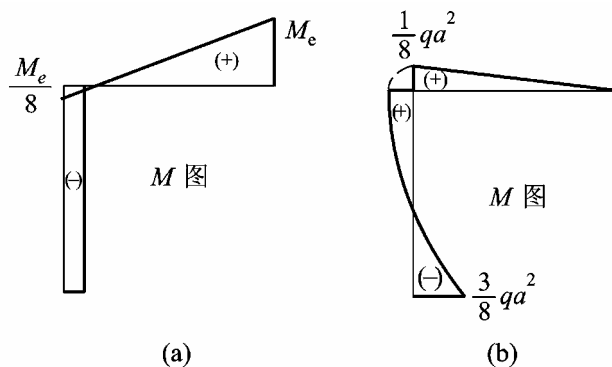
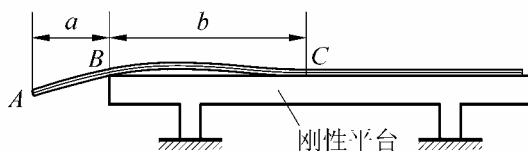


图6-22

6-24 图示匀质梁，放置在水平的刚性平台上，若伸出台外部分 AB 的长度为 a ，试计算台内梁上拱部分 BC 的长度 b 。设弯曲刚度 EI 为常数，梁单位长度的重量为 q 。



题 6-24 图

解：由于此梁在截面 C 以右的部分曲率处处为零，因此截面 C 处的曲率、转角及弯矩也都为零，即

$$\theta_C = 0, M_C = 0$$

假想此梁从截面 C 处切开，并取梁段 AC 为研究对象，可将其画成图 6-24 所示的外伸梁。

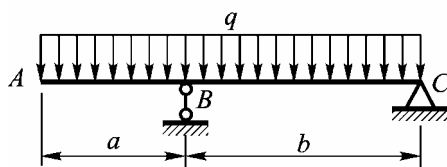


图6-24

由以上分析可知，在均布载荷 q （梁自重）作用下，有

$$\theta_C = \frac{qb^3}{24EI} - \frac{qa^2 \cdot b}{2 \times 6EI} = 0$$

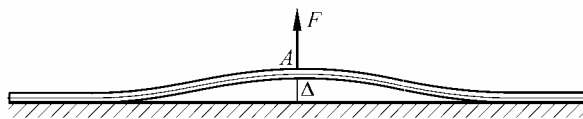
由此得到

$$b = \sqrt{2}a$$

顺便指出，这种解法是初等的，未考虑剪切变形的影响，致使分离面 C 处出现集中力形式的支承反力。这类问题（包括 6-25 题）的进一步分析可参考有关文献，如张行教授主编、国防工业出版社 1988 年出版的《材料力学分析方法》。

6-25 图示匀质梁，放置在水平刚性平台上。若在横截面 A 作用一铅垂向上的载荷 F ，

试建立该截面的挠度 Δ 与载荷 F 的关系。设弯曲刚度 EI 为常数，梁单位长度的重量为 q 。



题 6-25 图

解：可从该匀质梁的上拱部分提取力学模型，如图 6-25 所示。

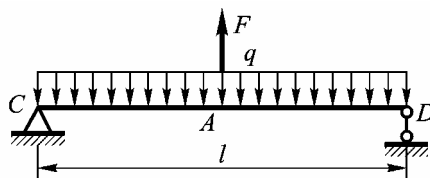


图6-25

与上题相同的理由，这里有简支梁两端截面的转角和弯矩均为零。

由图可知，截面 A 的挠度为

$$\Delta = \frac{Fl^3}{48EI} - \frac{5ql^4}{384EI} \quad (a)$$

该梁左端截面的转角为

$$\theta_C = \frac{Fl^2}{16EI} - \frac{ql^3}{24EI} \quad (b)$$

由于

$$\theta_C = 0$$

故有

$$F = \frac{2}{3}ql$$

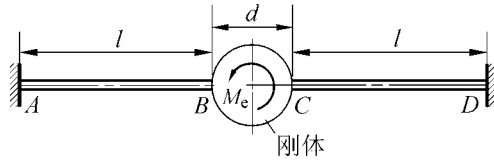
或写成

$$l = \frac{3F}{2q} \quad (c)$$

将式(c)代入式(a)，得到

$$\Delta = \frac{F}{48EI} \left(\frac{3F}{2q} \right)^3 - \frac{5q}{384EI} \left(\frac{3F}{2q} \right)^4 = \frac{9F^4}{2048EIq^3}$$

6-26 图示梁 AB 与 CD ， B 端、 C 端与刚性圆柱体相连，其上并作用一矩为 M_e 的集中力偶。试画梁的剪力、弯矩图。设二梁各截面的弯曲刚度均为 EI ，长度均为 l ，圆柱体的直径为 d ，且 $d = l/2$ 。



题 6-26 图

解：此为三度静不定结构，有反对称条件可以利用。

该结构相当系统的一部分示如图 6-26(a)。

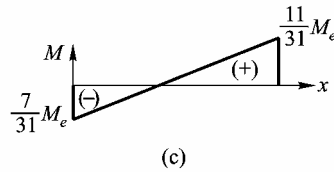
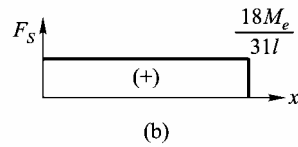
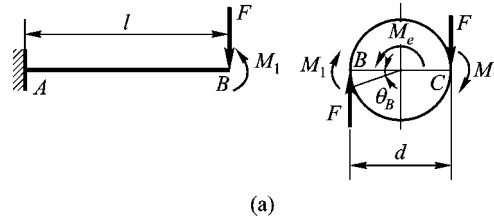


图6-26

静力学方面，由刚性圆柱体的力矩平衡可得

$$2M_1 + Fd = M_e \quad (a)$$

几何方面，考虑梁 AB，其截面 B 的挠度与转角之间应满足协调关系(请读者自己画出结构变形图以帮助理解)

$$w_B = \theta_B \left(\frac{d}{2} \right) \quad (b)$$

物理方面，有

$$w_B = \frac{Fl^3}{3EI} - \frac{M_1 l^2}{2EI}, \quad \theta_B = \frac{M_1 l}{EI} - \frac{Fl^2}{2EI} \quad (c)$$

将式(c)代入式(b)，得补充方程

$$\frac{Fl^3}{3EI} - \frac{M_1 l^2}{2EI} = \frac{d}{2} \left(\frac{M_1 l}{EI} - \frac{Fl^2}{2EI} \right)$$

注意到 $d = l/2$ ，上式可化为

$$M_1 = \frac{11}{18} Fl \quad (d)$$

将式(d)与式(a)联解，得

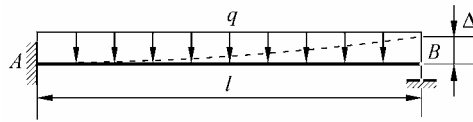
$$F = \frac{18M_e}{31l}, M_1 = \frac{11}{31}M_e$$

求出 F 和 M_1 后就可以画梁 AB 的剪力、弯矩图了, 示如图(b)和(c)。梁 CD 的剪力图与图(b)左右对称, 其弯矩图与图(c)反对称, 这里未画出。

6-27 图示静不定梁 AB , 承受集度为 q 的均布载荷作用。已知抗弯截面系数为 W , 许用应力为 $[\sigma]$ 。

(1) 试求载荷的许用值 $[q]$;

(2) 为提高梁的承载能力, 可将支座 B 提高少许, 试求提高量 Δ 的最佳值及载荷 q 的相应许用值 $[q']$ 。



题 6-27 图

解: (1) 求 $\Delta = 0$ 时的 $[q]$

此为一度静不定问题。解除 B 端的多余约束, 代之以多余反力 F_{By} , 将截面 B 的挠度

$$w_B = \frac{F_{By}l^3}{3EI} - \frac{ql^4}{8EI} \quad (a)$$

代入变形协调条件

$$w_B = 0$$

可得

$$F_{By} = \frac{3ql}{8} \quad (b)$$

自 B 端向左取坐标 x , 弯矩方程为

$$M(x) = F_{By}x - \frac{q}{2}x^2 \quad (c)$$

由条件

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0$$

得 $M(x)$ 取得极值的位置为

$$x_0 = F_{By} / q \quad (d)$$

将式(d)代入式(c), 得极值弯矩为

$$M(x_0) = \frac{F_{By}^2}{2q} = \frac{9ql^2}{128} \approx 0.0703ql^2$$

该梁固定端 A 截面的弯矩为

$$M(l) = F_{By}l - \frac{q}{2}l^2 = -\frac{ql^2}{8} = -0.125ql^2$$

二者比较（请读者自己画出 M 图以帮助理解），知危险截面在 A 端，其最大弯矩（绝对值）为

$$|M|_{\max} = |M(l)| = \frac{ql^2}{8}$$

由弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = \frac{ql^2}{8W_z} \leq [\sigma]$$

得

$$[q] = \frac{8W_z[\sigma]}{l^2} \quad (e)$$

(2) 求 Δ 的最佳值及相应的 $[q']$

Δ 不为零时，变形协调条件成为

$$w_B = \Delta$$

将式(a)代入后，得

$$F_{By} = \frac{3EI\Delta}{l^3} + \frac{3ql}{8} \quad (b)'$$

式(c)、(d)在此仍然有效。正的极值弯矩和固定端负弯矩依次为

$$M(x_0) = \frac{F_{By}^2}{2q}, \quad M(l) = F_{By}l - \frac{1}{2}ql^2$$

依据等强度观点，当 $M(x_0)$ 与 $M(l)$ 的绝对值相等时，对梁的强度最有利，即

$$\frac{F_{By}^2}{2q} = \frac{1}{2}ql^2 - F_{By}l$$

或写成

$$F_{By}^2 + 2qlF_{By} - q^2l^2 = 0$$

解此方程，舍去增根后，得

$$F_{By} = (\sqrt{2} - 1)ql \quad (f)$$

将式(f)代入式(a)，得到最佳提高量，其值为

$$\Delta = w_B = \frac{(8\sqrt{2} - 11)ql^4}{24EI} \quad (g)$$

有此 Δ 后，梁内的最大弯矩为

$$M_{\max} = M(x_0) = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)ql^2$$

由弯曲正应力强度条件

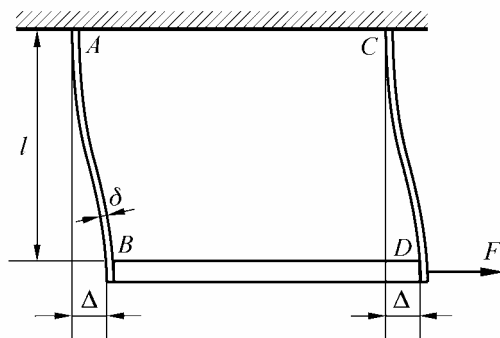
$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\tau]$$

得载荷 q 的许用值为

$$[q'] = \frac{W_z[\tau]}{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)l^2} = 11.66 \frac{W_z[\tau]}{l^2} \quad (h)$$

比较式(h)与式(e)，支座 B 提高式(g)所示的 Δ 后，梁的承载能力可提高 45.7%。

6-28 图示结构， AB 与 DC 为铜片，其厚度 δ 、宽度 b 、长度 l 及弹性模量 E 均为已知， BD 杆的刚度很大，可视为刚体。试建立水平位移与载荷 F 间的关系。轴力对铜片变形的影响忽略不计。



题 6-28 图

解：此为三度静不定结构。

由于 BD 杆可视为刚体，且 AB 与 CD 二铜片具有相同的材料性质、几何尺寸和约束条件，如题图所示，其变形具有反对称性。与此种变形图对应的受力图也是反对称的，示如图 6-28。

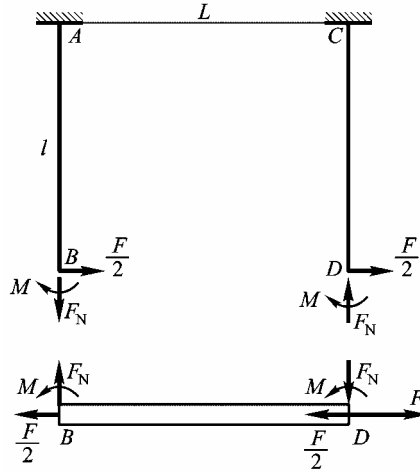


图6-28

由 BD 杆的力矩平衡条件可得 (设 BD 杆长为 L)

$$F_N L = 2M$$

不计轴力对铜片变形的影响, 以铜片 AB 为例, 其变形协调条件为

$$\theta_B = 0, \Delta_B = \Delta$$

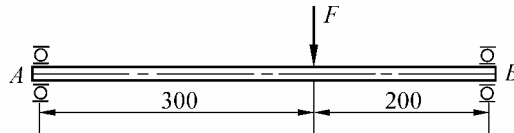
将物理关系引入, 得

$$\begin{aligned} \frac{Fl^2}{2 \times 2EI} - \frac{Ml}{EI} &= 0 \\ \frac{Fl^3}{2 \times 3EI} - \frac{Ml^2}{2EI} &= \Delta \end{aligned}$$

由此得到水平位移 Δ 与载荷 F 间的关系为

$$\Delta = \frac{Fl^3}{24EI} = \frac{Fl^3}{2Eb\delta^3}$$

6-29 图示圆截面轴, 两端用轴承支持。承受载荷 $F = 10\text{kN}$ 作用。若轴承处的许用转角 $[\theta] = 0.05 \text{ rad}$, 材料的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$, 试根据刚度要求确定轴径 d 。



题 6-29 图

解: 由题图可知, 最大转角必在 B 端 (因为 F 距此端较近), 其值为 (可查附录 E)

$$\theta_{\max} = \theta_B = \frac{Fa(l^2 - a^2)}{6lEI}$$

依题设, 这里 $l = 500\text{mm}$, $a = 300\text{mm}$ 。

由刚度要求

$$\theta_{\max} \leq [\theta]$$

可得

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \geq \frac{Fa(l^2 - a^2)}{6lE[\theta]}$$

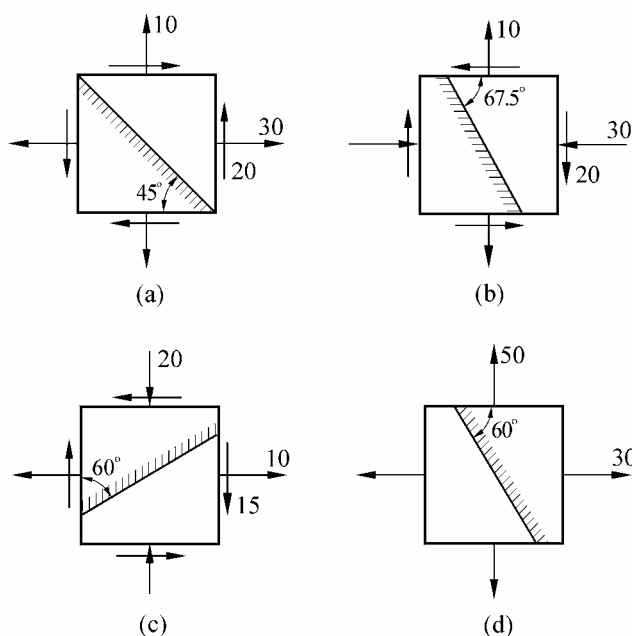
由此得到该轴的直径为

$$\begin{aligned} d &\geq \sqrt[4]{\frac{64Fa(l^2 - a^2)}{6\pi lE[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{64 \times 10 \times 10^3 \times 0.300 \times (0.500^2 - 0.300^2)}{6\pi \times 0.500 \times 200 \times 10^9 \times 0.05}} \text{m} \\ &= 0.0239 \text{m} = 23.9 \text{mm} \end{aligned}$$

7-2.....	1
7-3.....	2
7-5.....	3
7-6.....	3
7-7.....	4
7-9.....	5
7-12.....	6
7-15.....	7
7-16.....	8
7-20.....	9
7-21.....	9
7-22.....	10
7-24.....	11
*7-26.....	12

()

7-2 已知应力状态如图所示 (应力单位为 MPa), 试用解析法计算图中指定截面的正应力与切应力。



题 7-2 图

(a)解：由题图所示应力状态可知，

$$\sigma_x = 30\text{MPa}, \sigma_y = 10\text{MPa}, \tau_x = -20\text{MPa}, \alpha = 45^\circ$$

将上列数据代入平面应力状态斜截面应力公式，得指定斜截面上的正应力和切应力分别为

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \left(\frac{30+10}{2} + 20\sin 90^\circ \right) \text{MPa} = 40.0\text{MPa} \\ \tau_\alpha &= \left(\frac{30-10}{2} \sin 90^\circ \right) \text{MPa} = 10.0\text{MPa}\end{aligned}$$

(b)解：由题图所示应力状态可知，

$$\sigma_x = -30\text{MPa}, \sigma_y = 10\text{MPa}, \tau_x = 20\text{MPa}, \alpha = 22.5^\circ$$

由此可得指定斜截面上的正应力和切应力分别为

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \left(\frac{-30+10}{2} + \frac{-30-10}{2} \cos 45^\circ - 20\sin 45^\circ \right) \text{MPa} = -38.3\text{MPa} \\ \tau_\alpha &= \left(\frac{-30-10}{2} \sin 45^\circ + 20\cos 45^\circ \right) \text{MPa} = 0\end{aligned}$$

(c)解：由题图所示应力状态可知，

$$\sigma_x = 10\text{MPa}, \sigma_y = -20\text{MPa}, \tau_x = 15\text{MPa}, \alpha = -60^\circ$$

由此可得指定斜截面上的正应力和切应力分别为

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \left[\frac{10-20}{2} + \frac{10+20}{2} \cos(-120^\circ) - 15\sin(-120^\circ) \right] \text{MPa} = 0.490\text{MPa} \\ \tau_\alpha &= \left[\frac{10+20}{2} \sin(-120^\circ) + 15\cos(-120^\circ) \right] \text{MPa} = -20.5\text{MPa}\end{aligned}$$

(d)解：由题图所示应力状态可知，

$$\sigma_x = 30\text{MPa}, \sigma_y = 50\text{MPa}, \tau_x = 0, \alpha = -150^\circ$$

由此可得指定斜截面上的正应力和切应力分别为

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \left[\frac{30+50}{2} + \frac{30-50}{2} \cos(-300^\circ) \right] \text{MPa} = 35.0\text{MPa} \\ \tau_\alpha &= \left[\frac{30-50}{2} \sin(-300^\circ) \right] \text{MPa} = -8.66\text{MPa}\end{aligned}$$

7-3 试用图解法（应力圆）解题 7-1。

解：题 7-1 图所示应力状态的应力圆示如图 7-3。

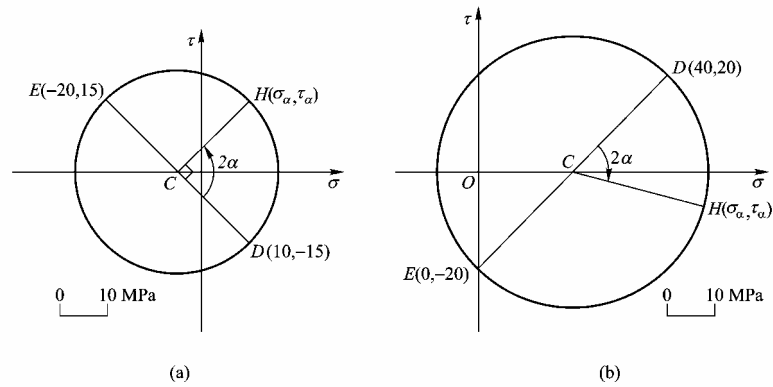


图7-3

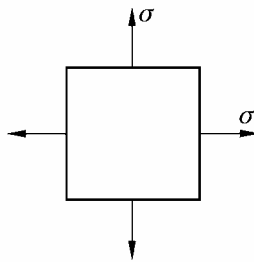
由图(a)可以量得指定截面上的正应力和切应力分别为

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{45^{\circ}} = 10.0 \text{ MPa}, \tau_{\alpha} = \tau_{45^{\circ}} = 15.0 \text{ MPa}$$

由图(b)可以量得指定截面上的正应力和切应力分别为

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{-30^{\circ}} = 47.3 \text{ MPa}, \tau_{\alpha} = \tau_{-30^{\circ}} = -7.3 \text{ MPa}$$

7-5 图示双向拉伸应力状态，应力 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ 。试证明任意斜截面上的正应力均等于 σ ，而切应力则为零。



题 7-5 图

证明：由题设条件可知， $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ， $\tau_x = 0$ 。

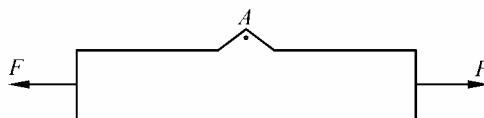
将上述已知数据代入平面应力状态斜截面应力公式，则有

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma + \sigma}{2} + \frac{\sigma - \sigma}{2} \cos 2\alpha - 0 = \sigma$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma - \sigma}{2} \sin 2\alpha + 0 = 0$$

由于式中 α 为任意值，故原命题得证。

7-6 图示受力板件，试证明 A 点处各截面的正应力与切应力均为零。



题 7-6 图

证明：在 A 点近处假想沿任意斜面 $m-m$ 方向切一刀，取微体（含 A 点）如图 7-6 所示。

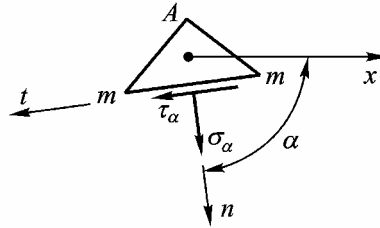


图 7-6

设 $m-m$ 面之法线与 x 轴的夹角为 α ，并假设该斜面之面积为 dA ，其上作用有正应力 σ_α 和切应力 τ_α 。

由微体在 $m-m$ 面法向和切向力的平衡方程

$$\sum F_n = 0, \quad \sigma_\alpha dA = 0$$

及

$$\sum F_t = 0, \quad \tau_\alpha dA = 0$$

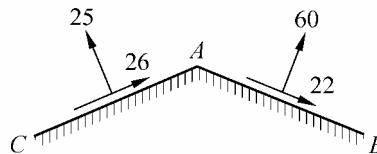
分别得到

$$\sigma_\alpha = 0, \quad \tau_\alpha = 0$$

由于方位角 α 是任取的，这就证明了 A 点处各截面上的正应力与切应力均为零。

顺便指出，本题用图解法来证更为方便，依据 A 点上方两个自由表面上的已知应力（零应力）画应力图，该应力圆为坐标原点处的一个点圆。至此，原命题得证。

7-7 已知某点 A 处截面 AB 与 AC 的应力如图所示（应力单位为 MPa），试用图解法求主应力的大小及所在截面的方位。



题 7-7 图

解：根据题图所给的已知应力，可画出应力圆来，如图 7-7 所示。

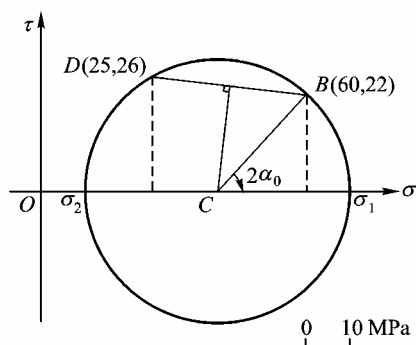


图7-7

从所画的应力圆上可以量得两个主应力，它们是：

$$\sigma_1 = 69.7 \text{ MPa}, \sigma_2 = 9.9 \text{ MPa}$$

由于是平面应力状态，故知

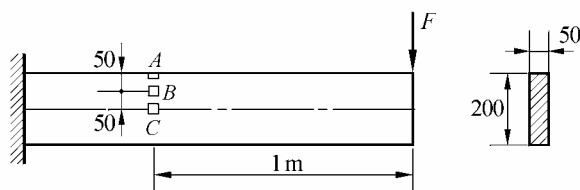
$$\sigma_3 = 0$$

从该应力圆上还可以量得 σ_1 的方位角为

$$\alpha_0 = -23.7^\circ$$

式中负号表示从 AB 面的外法线沿顺时针方向旋转。

7-9 图示悬臂梁，承受载荷 $F = 20 \text{ kN}$ 作用，试绘微体 A, B 与 C 的应力图，并确定主应力的大小及方位。



题 7-9 图

解：由题图可知，指定截面的剪力、弯矩分别为

$$F_s = F = 20 \text{ kN}, |M| = Fa = 20 \times 1 \text{ kN} \cdot \text{m} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

微体 A, B, C 的应力图依次示如图 7-9 (a), (b) 和 (c)。

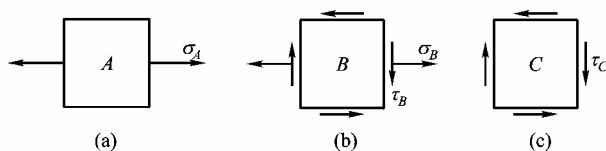


图7-9

对于应力图(a)，其正应力为

$$\sigma_A = \frac{|M|}{W_z} = \frac{6 \times 20 \times 10^3 \text{ N}}{0.050 \times 0.200^2 \text{ m}^2} = 6.00 \times 10^7 \text{ Pa} = 60.0 \text{ MPa}$$

由此可知，主应力各为

$$\sigma_1 = 60.0 \text{ MPa}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

σ_1 的方位角为

$$\alpha_0 = 0^\circ$$

对于应力图(b), 其正应力和切应力分别为

$$\sigma_B = \frac{|M| |y_B|}{I_z} = \frac{12 \times 20 \times 10^3 \times 0.050 \text{ N}}{0.050 \times 0.200^3 \text{ m}^2} = 3.00 \times 10^7 \text{ Pa} = 30.0 \text{ MPa}$$
$$\tau_B = \frac{F_s S_z(\omega)}{I_z b} = \frac{12 \times 20 \times 10^3 \times 0.050 \times 0.050 \times 0.075 \text{ N}}{0.050 \times 0.200^3 \times 0.050 \text{ m}^2} = 2.25 \times 10^6 \text{ Pa} = 2.25 \text{ MPa}$$

极值应力为

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_B}{2}\right)^2 + \tau_B^2} = [15.0 \pm \sqrt{15.0^2 + 2.25^2}] \text{ MPa} = \begin{cases} 30.2 \\ -0.1678 \end{cases} \text{ MPa}$$

由此可知, 主应力各为

$$\sigma_1 = 30.2 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -0.1678 \text{ MPa}$$

由

$$\tan \alpha_0 = -\frac{\tau_x}{\sigma_x - \sigma_{\min}} = -\frac{2.25}{30.0 + 0.1678} = -0.07458$$

得 σ_1 的方位角为

$$\alpha_0 = -4.27^\circ$$

对于应力图(c), 其切应力为

$$\tau_c = \frac{3F_s}{2A} = \frac{3 \times 20 \times 10^3 \text{ N}}{2 \times 0.050 \times 0.200 \text{ m}^2} = 3.00 \times 10^6 \text{ Pa} = 3.00 \text{ MPa}$$

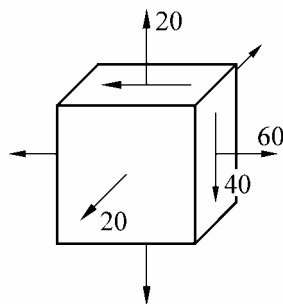
由此得各主应力依次为

$$\sigma_1 = 3.00 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -3.00 \text{ MPa}$$

σ_1 的方位角为

$$\alpha_0 = -45^\circ$$

7-12 已知应力状态如图所示, 试求主应力的大小。



题 7-12 图

解：由题图可知，

$$\sigma_x = 60 \text{ MPa}, \sigma_y = 20 \text{ MPa}, \tau_x = 40 \text{ MPa}, \sigma_z = 20 \text{ MPa}$$

由应力作用线均平行于 $x-y$ 平面的三个应力分量可得

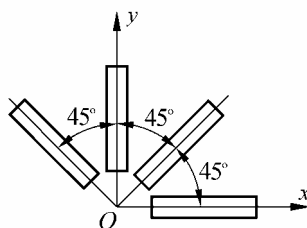
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$= \left[\frac{60 + 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 20}{2}\right)^2 + 40^2} \right] \text{ MPa} = \begin{cases} 84.7 \\ -4.72 \end{cases} \text{ MPa}$$

将此二极值应力与 σ_z 一同排序，得三个主应力依次为

$$\sigma_1 = 84.7 \text{ MPa}, \sigma_2 = 20.0 \text{ MPa}, \sigma_3 = -4.72 \text{ MPa}$$

7-15 在构件表面某点 O 处，沿 $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 与 135° 方位粘贴四个应变片，并测得相应正应变依次为 $\epsilon_{0^\circ} = 450 \times 10^{-6}$ ， $\epsilon_{45^\circ} = 350 \times 10^{-6}$ ， $\epsilon_{90^\circ} = 100 \times 10^{-6}$ 与 $\epsilon_{135^\circ} = 100 \times 10^{-6}$ ，试判断上述测试结果是否可靠。



题 7-15 图

解：依据平面应变状态任意方位的正应变公式(7-15)，有

$$\varepsilon_{0^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_x = 450 \times 10^{-6} \quad (a)$$

$$\varepsilon_{90^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_y = 100 \times 10^{-6} \quad (b)$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\gamma_{xy}}{2} = 350 \times 10^{-6} \quad (c)$$

将式(a)和(b)的结果代入式(c)，得

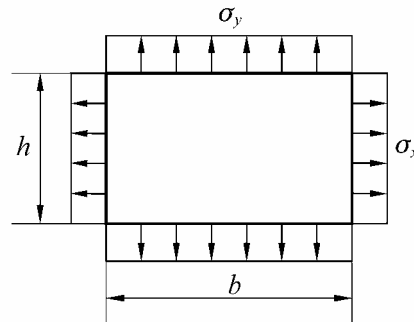
$$\gamma_{xy} = (550 - 700) \times 10^{-6} = -150 \times 10^{-6} \quad (d)$$

将以上所得结果(a)、(b)和(d)代入公式(7-15)，计算 ε_{135° 应有的测量值，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{135^\circ} &= \frac{1}{2}(450 + 100) \times 10^{-6} + \frac{1}{2}(450 - 100) \times 10^{-6} \cos 270^\circ \\ &\quad - \frac{1}{2} \times (-150 \times 10^{-6}) \sin 270^\circ = 200 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

ε_{135° 的实际测量值比上述结果小了一半，这说明题中所给的这组测试结果不可靠。

7-16 图示矩形板，承受正应力 σ_x 与 σ_y 作用，试求板厚的改变量 $\Delta\delta$ 与板件的体积改变量 ΔV 。已知板件厚度 $\delta=10\text{mm}$ ，宽度 $b=800\text{mm}$ ，高度 $h=600\text{mm}$ ，正应力 $\sigma_x=80\text{MPa}$ ， $\sigma_y=-40\text{MPa}$ ，材料为铝，弹性模量 $E=70\text{GPa}$ ，泊松比 $\mu=0.33$ 。



题 7-16 图

解：此为平面应力状态问题。设板厚度方向的正应变为 ε_z ，则有

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

板厚的改变量为

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \varepsilon_z \delta = -\frac{\mu\delta}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ &= -\frac{0.33 \times 0.010}{70 \times 10^9} \times (80 - 40) \times 10^6 \text{ m} = -1.886 \times 10^{-6} \text{ m} = -0.001886 \text{ mm} \end{aligned}$$

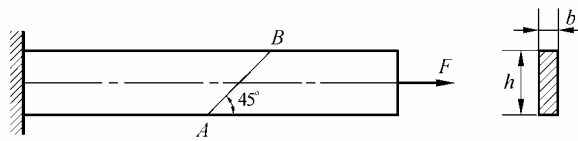
体应变为

$$\theta = \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

由此可得该板件的体积改变量为

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(bh\delta) \\ &= \frac{(1-2 \times 0.33)}{70 \times 10^9} \times (80-40) \times 10^6 \times (0.800 \times 0.600 \times 0.010) \text{m}^3 \\ &= 9.33 \times 10^{-7} \text{m}^3 = 933 \text{mm}^3\end{aligned}$$

7-20 图示矩形截面杆, 承受轴向载荷 F 作用, 试计算线段 AB 的正应变。设截面尺寸 b 和 h 与材料的弹性常数 E 和 μ 均为已知。



题 7-20 图

解：由题图可知, AB 上任一点处有

$$\sigma_x = \frac{F}{bh}, \sigma_y = 0, \tau_x = 0$$

故有

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{F}{2bh}, \sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{F}{2bh}$$

由平面应力状态的广义胡克定律可得

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}(\sigma_{45^\circ} - \mu\sigma_{-45^\circ}) = \frac{(1-\mu)F}{2Ebh}$$

7-21 在构件表面某点 O 处, 沿 0° 、 45° 与 90° 方位, 粘贴三个应变片, 测得该三方位的正应变分别为 $\varepsilon_{0^\circ} = 450 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{45^\circ} = 350 \times 10^{-6}$ 与 $\varepsilon_{90^\circ} = 100 \times 10^{-6}$, 该表面处于平面应力状态, 试求该点处的应力 σ_x, σ_y 与 τ_x 。已知材料的弹性模量 $E = 200 \text{GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$ 。

解：由公式(7-15)可知,

$$\varepsilon_{0^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 0^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 0^\circ \quad (\text{a})$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 90^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 90^\circ \quad (\text{b})$$

$$\varepsilon_{90^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 180^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 180^\circ \quad (\text{c})$$

联解方程(a)、(b)和(c), 得

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0^\circ} = 450 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ} = 100 \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{0^\circ} + \varepsilon_{90^\circ} - 2\varepsilon_{45^\circ} = -150 \times 10^{-6}$$

根据平面应力状态的广义胡克定律，有

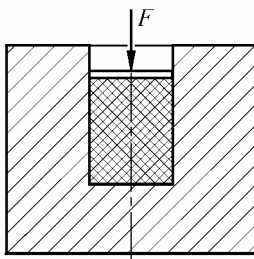
$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ &= \frac{200 \times 10^9 \text{ Pa}}{1-0.3^2} \times (450 \times 10^{-6} + 0.3 \times 100 \times 10^{-6}) = 1.055 \times 10^8 \text{ Pa} = 105.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \\ &= \frac{200 \times 10^9 \text{ Pa}}{1-0.3^2} \times (100 \times 10^{-6} + 0.3 \times 450 \times 10^{-6}) = 5.16 \times 10^7 \text{ Pa} = 51.6 \text{ MPa}\end{aligned}$$

根据剪切胡克定律，有

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E\gamma_{xy}}{2(1+\mu)} = \frac{200 \times 10^9 \text{ Pa} \times (-150 \times 10^{-6})}{2 \times (1+0.3)} \\ &= -1.154 \times 10^7 \text{ Pa} = -11.54 \text{ MPa}\end{aligned}$$

7-22 如图所示，一直径为 d 的橡皮圆柱体，放置在刚性圆筒内，并承受合力为 F 的均布压力作用，试求橡皮柱的主应力。设橡皮的弹性模量与泊松比分别为 E 与 μ ，并忽略橡皮与刚筒间的摩擦。



题 7-22 图

解：由图 7-22 可知，橡皮圆柱体中的微体处于三向压应力状态（这里以图示应力箭头为正），且 x 、 z 方向的正应变均为零，即

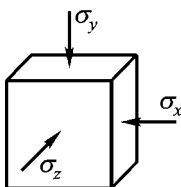


图7-22

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[-\sigma_x - \mu(-\sigma_y - \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{E}[-\sigma_x + \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[-\sigma_z + \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0\end{aligned}$$

将此二方程联立求解，得

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y = \frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{4F}{\pi d^2}\right) \quad (\text{压})$$

由此可知，橡皮柱的三个主应力依次为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{4\mu F}{(1-\mu)\pi d^2}, \quad \sigma_3 = -\frac{4F}{\pi d^2}$$

7-24 在建立圆轴扭转切应力公式时，曾提出若干假设，试根据该假设说明圆轴横截面与径向纵截面上均无正应力。

解：根据各横截面仍保持平面，其形状、大小均不改变，如同刚性圆片这一假设可得（这里采用圆柱坐标）

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\varphi = 0 \quad (\text{a})$$

其中，足标 ρ 和 φ 分别代表圆轴的径向和环向。

又据横截面间的距离均不改变这一假设可得

$$\varepsilon_x = 0 \quad (\text{b})$$

依据圆柱坐标系中的广义胡克定律，有

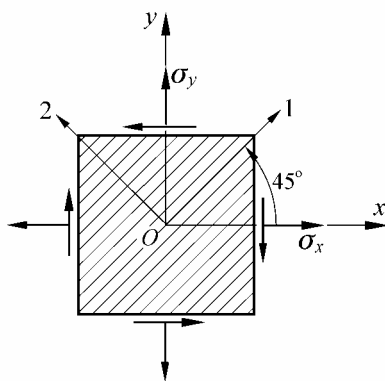
$$\left. \begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_\rho + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_x) + \varepsilon_\rho \right] \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_x + \varepsilon_\rho) + \varepsilon_\varphi \right] \\ \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_\rho + \varepsilon_\varphi) + \varepsilon_x \right]\end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

将式(a)和(b)代入式(c)，得到

$$\sigma_\rho = 0, \quad \sigma_\varphi = 0, \quad \sigma_x = 0$$

这就说明圆轴横截面与径向纵截面（及同心圆柱面）上均无正应力。

***7-25** 图示碳/环氧复合材料（T300/5208）微体处于平面应力状态，已知应力 $\sigma_x = 100\text{MPa}$ ， $\sigma_y = 80\text{MPa}$ ， $\tau_{xy} = 50\text{MPa}$ ，材料的弹性常数见表 7-1，试求正应变 ε_x 和 ε_y 与切应变 γ_{xy} ，并绘制微体变形后的大致形状。



题 7-25 图

解：偏轴应力、应变关系为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (a)$$

查表 7-1，当 $\alpha = 45^\circ$ 时，有

$$s_{11} = s_{22} = 59.8, \quad s_{66} = 105.7, \quad s_{12} = -9.99, \quad s_{16} = s_{26} = 45.8$$

单位均为 $(10^3 \text{ GPa})^{-1}$ 。

将以上数据及各应力值代入式(a)，得

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59.8 & -9.99 & 45.8 \\ -9.99 & 59.8 & 45.8 \\ 45.8 & 45.8 & 105.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 50 \end{bmatrix} \frac{10^6}{10^3 \times 10^9} = \begin{bmatrix} 7.47 \\ 6.08 \\ 13.53 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

即

$$\varepsilon_x = 7.47 \times 10^{-3}, \quad \varepsilon_y = 6.08 \times 10^{-3}, \quad \gamma_{xy} = 13.53 \times 10^{-3}$$

微体变形后的大致形状示如图 7-25。

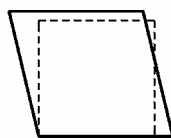


图7-25

可见，对于复合材料等各向异性材料，存在拉剪耦合效应。

***7-26** 试计算题 7-16 所述板件的体应变、应变能密度与畸变能密度。

解：1. 计算体应变 θ

由题 7-16 知 $\sigma_1 = \sigma_x = 80 \text{ MPa}$ ， $\sigma_2 = \sigma_z = 0$ ， $\sigma_3 = \sigma_y = -40 \text{ MPa}$ ， $E = 70 \text{ GPa}$ ，

$\mu = 0.33$ 。由此得体积应变为

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \frac{1-2 \times 0.33}{70 \times 10^9} \times (80 + 0 - 40) \times 10^6 = 1.943 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

2. 计算应变能密度 v_ε

$$\begin{aligned}v_\varepsilon &= \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \\ &= \frac{1}{2 \times 70 \times 10^9} [80^2 + 0 + (-40)^2 - 2 \times 0.33 \times (0 + 0 - 40 \times 80)] \times 10^{12} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ &= 7.22 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^3}\end{aligned}$$

3. 计算畸变能密度 v_d

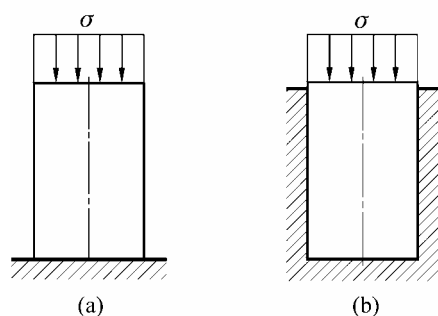
$$\begin{aligned}v_d &= \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1+0.33}{6 \times 70 \times 10^9} [80^2 + 40^2 + (-120)^2] \times 10^{12} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ &= 7.09 \times 10^4 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^3}\end{aligned}$$

8-4.....	1
8-5.....	3
8-8.....	4
8-9.....	5
8-10.....	6
8-14.....	7
8-16.....	10
8-17.....	11
8-18.....	13
8-19.....	15
8-22.....	17
8-23.....	17
8-24.....	18
8-25.....	18
8-26.....	19
8-27.....	21

()

8-4 试比较图示正方形棱柱体在下列两种情况下的相当应力 σ_{r3} ,弹性常数 E 和 μ 均为已知。

- (a) 棱柱体轴向受压 ;
(b) 棱柱体在刚性方模中轴向受压。



题 8-4 图

(a)解：对于棱柱体轴向受压的情况（见题图 a）, 三个主应力依次为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 , \sigma_3 = -\sigma$$

由此可得第三强度理论的相当应力为

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma \quad (a)$$

(b)解：对于棱柱体在刚性方模中轴向受压的情况（见图 b），可先取受力微体及坐标如图 8-4 所示，然后计算其应力。

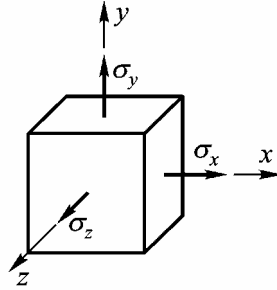


图8-4

由图 8-4 可得

$$\sigma_y = -\sigma$$

根据刚性方模的约束条件，有

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

即

$$\sigma_x = \mu(\sigma_y + \sigma_z)$$

注意到

$$\sigma_z = \sigma_x$$

故有

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\mu}{1-\mu}\sigma$$

三个主应力依次为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{\mu}{1-\mu}\sigma, \sigma_3 = -\sigma$$

由此可得其相当应力为

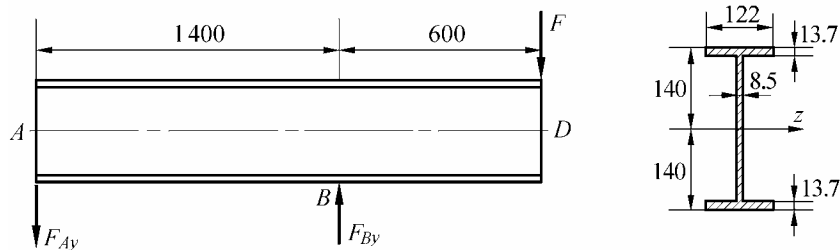
$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{1-2\mu}{1-\mu}\sigma \quad (b)$$

比较：按照第三强度理论，(a)、(b)两种情况相当应力的比值为

$$r = \frac{\sigma_{r3(a)}}{\sigma_{r3(b)}} = \frac{1-\mu}{1-2\mu}$$

$r > 1$ ，这表明加刚性方模后对棱柱体的强度有利。

8-5 图示外伸梁，承受载荷 $F = 130\text{kN}$ 作用，许用应力 $[\sigma] = 170\text{MPa}$ 。试校核梁的强度。如危险点处于复杂应力状态，采用第三强度理论校核强度。



题 8-5 图

解：1. 内力分析

由题图可知， B_+ 截面为危险截面，剪力与弯矩均为最大，其值分别为

$$F_s = F = 130\text{kN}, \quad |M| = Fl_2 = 130 \times 10^3 \text{ N} \times 0.600\text{m} = 7.80 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. 几何量计算

$$I_z = \left[\frac{0.122 \times 0.280^3}{12} - \frac{(0.122 - 0.0085) \times (0.280 - 2 \times 0.0137)^3}{12} \right] \text{m}^4 = 7.07 \times 10^{-5} \text{m}^4$$

$$W_z = \frac{7.07 \times 10^{-5}}{0.140} \text{m}^3 = 5.05 \times 10^{-4} \text{m}^3$$

$$S_{z(b)} = 0.122 \times 0.0137 \times (0.140 - \frac{0.0137}{2}) \text{m}^3 = 2.23 \times 10^{-4} \text{m}^3 = 2S_{z(a)}$$

$$S_{z,\max} = [2.23 \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 0.0085 \times (0.140 - 0.0137)^2] \text{m}^3 = 2.90 \times 10^{-4} \text{m}^3$$

式中的足标 b ，系指翼缘与腹板的交界点，足标 a 系指上翼缘顶边中点。三个可能的危险点（ a 、 b 和 c ）示如图 8-5。

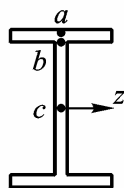


图8-5

3. 应力计算及强度校核

点 a 的正应力和切应力分别为

$$\sigma = \frac{|M|}{W_z} = \frac{7.80 \times 10^4 \text{ N}}{5.05 \times 10^{-4} \text{m}^3} = 1.545 \times 10^8 \text{ Pa} = 154.5 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{F_s S_{z(a)}}{I_z t} = \frac{130 \times 10^3 \times 1.115 \times 10^{-4} \text{ N}}{7.07 \times 10^{-5} \times 0.0137 \text{m}^2} = 1.496 \times 10^7 \text{ Pa} = 14.96 \text{ MPa}$$

该点处于单向与纯剪切组合应力状态，根据第三强度理论，其相当应力为

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{154.5^2 + 4 \times 14.96^2} \text{ MPa} = 157.4 \text{ MPa} < [\sigma]$$

点 b 的正应力和切应力分别为

$$\sigma = \frac{|M|y_b}{I_z} = \frac{7.80 \times 10^4 \times (0.140 - 0.0137) \text{ N}}{7.07 \times 10^{-5} \text{ m}^2} = 1.393 \times 10^8 \text{ Pa} = 139.3 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{F_s S_{z(b)}}{I_z \delta} = \frac{130 \times 10^3 \times 2.23 \times 10^{-4} \text{ N}}{7.07 \times 10^{-5} \times 0.0085 \text{ m}^2} = 4.82 \times 10^7 \text{ Pa} = 48.2 \text{ MPa}$$

该点也处于单向与纯剪切组合应力状态，其相当应力为

$$\sigma_{r3} = \sqrt{139.3^2 + 4 \times 48.2^2} \text{ MPa} = 169.4 \text{ MPa} < [\sigma]$$

点 c 处于纯剪切应力状态，其切应力为

$$\tau = \frac{F_s S_{z,\max}}{I_z \delta} = \frac{130 \times 10^3 \times 2.90 \times 10^{-4} \text{ N}}{7.07 \times 10^{-5} \times 0.0085 \text{ m}^2} = 6.27 \times 10^7 \text{ Pa} = 62.7 \text{ MPa}$$

其相当应力为

$$\sigma_{r3} = 2\tau = 2 \times 62.7 \text{ MPa} = 125.4 \text{ MPa}$$

结论：该梁满足强度要求。

4. 强度校核

依据第三强度理论，上述三点的相当应力依次为

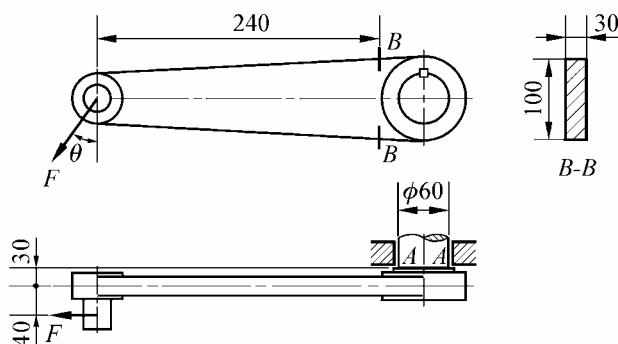
$$\sigma_{r3(a)} = \sigma_1 - \sigma_3 = [155.9 - (-1.44)] \text{ MPa} = 157.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3(b)} = [154.4 - (-15.05)] \text{ MPa} = 169.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r3(c)} = 2\tau = 2 \times 62.7 \text{ MPa} = 125.4 \text{ MPa}$$

它们均小于许用应力，故知该梁满足强度要求。

8-8 图示曲柄轴，承受载荷 $F = 10 \text{ kN}$ 作用。试问当载荷方位角 θ 为何值时，对截面 $A-A$ 的强度最为不利，并求相应的相当应力 σ_{r3} 。



题 8-8 图

解：1. 分析内力

由于 $A-A$ 为圆形截面，其任一直径均为主形心轴，故载荷 F 无需分解，可直接用以分析内力。根据平衡关系，截面 $A-A$ 上的剪力、弯矩和扭矩值（绝对值）分别为

$$F_s = F = 10 \text{ kN}, M = Fl = 10 \times 10^3 \times 0.070 \text{ N} \cdot \text{m} = 700 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T = Fa \cos \theta$$

由此可见, F 的方位角 θ 对剪力和弯矩值并无影响, 它只改变扭矩的大小, 当 $\theta = 0$ 时扭矩取最大值, 对截面 $A-A$ 的强度最为不利, 其值为

$$T_{\max} = Fa = 10 \times 10^3 \times 0.240 \text{ N} \cdot \text{m} = 2.40 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. 计算相当应力

截面 $A-A$ 上铅垂直径的上、下点为可能的危险点, 按照第三强度理论, 其相当应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{r3} &= \frac{\sqrt{M^2 + T_{\max}^2}}{W} = \frac{32 \times \sqrt{700^2 + (2.40 \times 10^3)^2}}{\pi \times 0.060^3} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ &= 1.179 \times 10^8 \text{ Pa} = 117.9 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{a})$$

由于是短粗轴, 弯曲剪力产生的切应力应予考虑, 这时截面 $A-A$ 上水平直径的左端点, 为又一个可能的危险点, 该点处的正应力为零, 而切应力则为

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1 + \tau_2 = \frac{16T_{\max}}{\pi d^3} + \frac{4 \times 4F_s}{3\pi d^2} \\ &= \left(\frac{16 \times 2.40 \times 10^3}{\pi \times 0.060^3} + \frac{16 \times 10 \times 10^3}{3\pi \times 0.060^2} \right) \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = (56.6 + 4.72) \times 10^6 \text{ Pa} = 61.3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

其相当应力为

$$\sigma_{r3} = 2\tau = 2 \times 61.3 \text{ MPa} = 122.6 \text{ MPa} \quad (\text{b})$$

比较式(a)和(b)可知, 该轴真正的危险点是截面 $A-A$ 上水平直径的左端点, 其相当应力如式(b)所示。

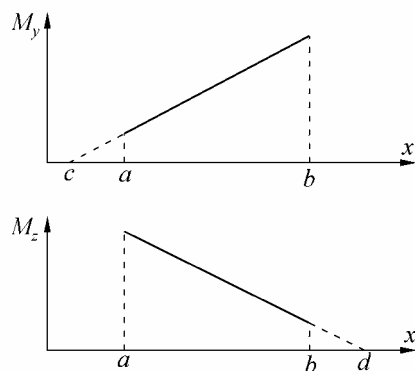
顺便指出, 本题计算相当应力的另一种方法是先求 $\sigma(\varphi)$ 、 $\tau(\varphi)$, 再求 $\sigma_{r3}(\varphi)$ 。这里的 φ

从截面 $A-A$ 上左边水平半径量起, 以顺时针为正。将 $\sigma_{r3}(\varphi)$ 对 φ 求导, 寻找其极值位置, 找

到的极值位置是 $\varphi = 0$, 由此确定的危险点同上述真正的危险点, 相当应力当然也同式(b)。

8-9 图示某段杆的弯矩 M_y 与 M_z 图, 它们均为直线, 且其延长线分别与 x 轴相交于 c

和 d 点。试证明: 如果 c, d 点不重合, 则该段杆的总弯矩 \bar{M} 图必为凹曲线。



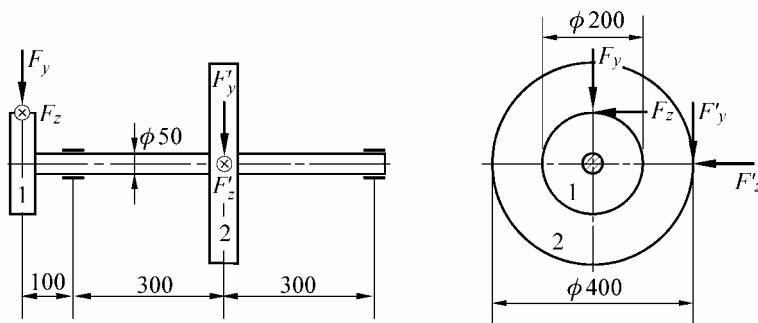
题 8-9 图

证明：本题用几何法证明比较简便而直观。

证明要点如下：

1. 将题设 M_y 图线和 M_z 图线画在图 8-9(a) 所示的三维坐标系中 (图 a 中的直线 e_1f_1 和 e_2f_2)
2. 画总弯矩 (合成弯矩) 矢量 \bar{M} 的矢端图 e_3f_3 (它为两个坐标平面的两个垂面 $e_1e_3f_3f_1$ 与 $e_2e_3f_3f_2$ 的交线。)
3. 将矢端图 e_3f_3 向坐标平面 M_yOM_z 投影, 得其投影图线 ef 。 ef 直线上任一点与原点 O 的连线, 即代表某一截面总弯矩的大小 (为清楚起见, 参看图 b)。
4. 将 \bar{M} 由大 (\bar{M}_a) 到小 (\bar{M}_{\min}) 又由小到大 (\bar{M}_b) 连续变化的函数关系画在平面坐标系 $xO\bar{M}$ 中, 即成图(c)所示之凹曲线。

8-10 图示齿轮传动轴, 用钢制成。在齿轮 1 上, 作用有径向力 $F_y = 3.64\text{kN}$ 、切向力 $F_z = 10\text{kN}$; 在齿轮 2 上, 作用有切向力 $F'_y = 5\text{kN}$ 、径向力 $F'_z = 1.82\text{kN}$ 。若许用应力 $[\sigma] = 100\text{MPa}$, 试根据第四强度理论确定轴径。



题 8-10 图

解：将各力向该轴轴线简化，得其受力图如图 8-10(a)所示。内力图（ M_z 、 M_y 和 T ）分别示如图(b)、(c)和(d)。

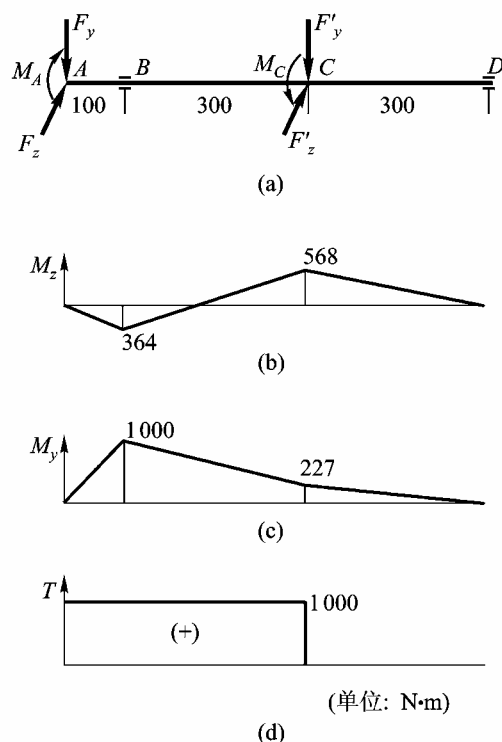


图8-10

由内力图和 8-9 题所证明的结论可知，截面 B 和 C 都可能为危险面。

对于截面 B ，总弯矩为

$$\bar{M}_B = \sqrt{1000^2 + 364^2} \text{ N} \cdot \text{m} = 1064 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (\text{a})$$

对于截面 C ，总弯矩为

$$\bar{M}_C = \sqrt{227^2 + 568^2} \text{ N} \cdot \text{m} = 612 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (\text{b})$$

比较式(a)和(b)可知，截面 B 最危险。由第四强度理论的强度条件

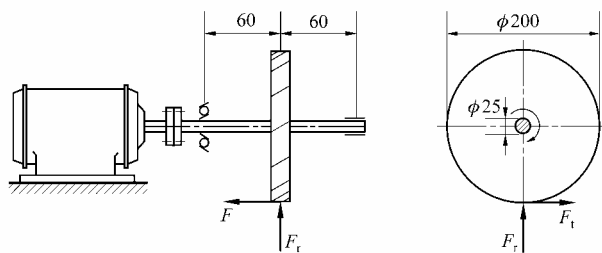
$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{\bar{M}_B^2 + 0.75T^2}}{W} = \frac{32\sqrt{\bar{M}_B^2 + 0.75T^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

得该轴的直径为

$$\begin{aligned} d &\geq \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{\bar{M}_B^2 + 0.75T^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{1064^2 + 0.75 \times 1000^2}}{\pi \times 100 \times 10^6}} \text{ m} \\ &= 5.19 \times 10^{-2} \text{ m} = 51.9 \text{ mm} \end{aligned}$$

8-14 图示圆截面钢轴，由电机带动。在斜齿轮的齿面上，作用有切向力 $F_t = 1.9\text{kN}$ 、

径向力 $F_r = 740\text{N}$ 以及平行于轴线的外力 $F = 660\text{N}$ 。若许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ，试根据第四强度理论校核轴的强度。



题 8-14 图

解：1. 外力分析

将力 F 、 F_r 、 F_t 向轴 AD 的轴线简化，得该轴的计算简图如图 8-14(a)所示。图中，

$$M_{zC} = FR = 660 \times 0.100 \text{ N} \cdot \text{m} = 66.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_A = M_C = F_t R = 1.9 \times 10^3 \times 0.100 \text{ N} \cdot \text{m} = 190.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

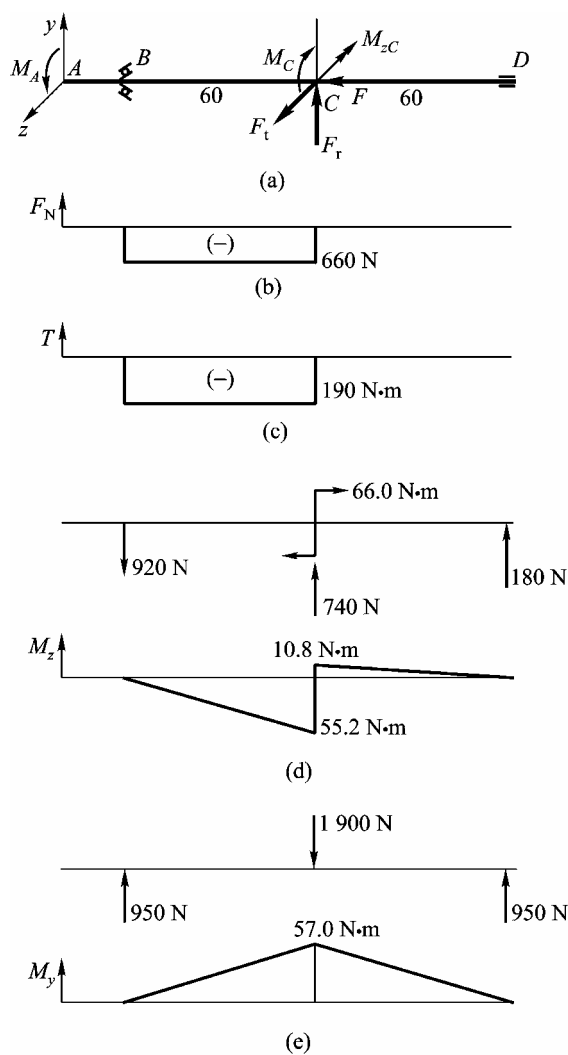


图8-14

2. 内力分析

根据图(a)，可画轴力、扭矩及弯矩图如图(b)、(c)、(d)和(e)所示。

由内力图可知，截面C_为危险截面，该截面上的轴力、扭矩及总弯矩值依次为

$$|F_N| = F = 660 \text{ N (压)}, |T| = 190.0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{57.0^2 + 55.2^2} \text{ N} \cdot \text{m} = 79.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

3. 强度校核

危险面上危险点处于单向与纯剪切组合应力状态，其正应力和切应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\bar{M}}{W} + \frac{|F_N|}{A} = \left(\frac{32 \times 79.3}{\pi \times 0.025^3} + \frac{4 \times 660}{\pi \times 0.025^2} \right) \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ &= 5.30 \times 10^7 \text{ Pa} = 53.0 \text{ MPa (压)} \end{aligned}$$

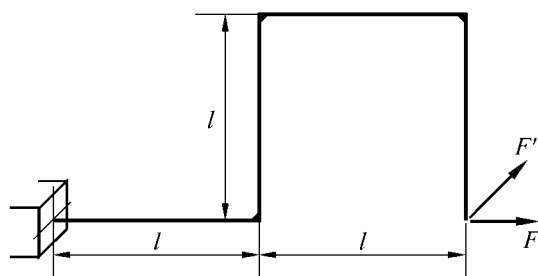
$$\tau = \frac{|T|}{W_p} = \frac{16 \times 190.0 \text{ N}}{\pi \times 0.025^3 \text{ m}^2} = 6.19 \times 10^7 \text{ Pa} = 61.9 \text{ MPa}$$

将其代入第四强度理论的强度条件，有

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{53.0^2 + 3 \times 61.9^2} \text{ MPa} = 119.6 \text{ MPa} < [\sigma]$$

可见，该轴满足强度要求。

8-16 图示等截面刚架，承受载荷 F 与 F' 作用，且 $F' = 2F$ 。试根据第三强度理论确定 F 的许用值 $[F]$ 。已知许用应力为 $[\sigma]$ ，截面为正方形，边长为 a ，且 $a = l/10$ 。



题 8-16 图

解: 1. 寻找危险面

为了寻找危险面，首先需画出内力图。在图 8-16(a)所示坐标下，由 F 产生的内力示如图(b)和(c)；由 F' 产生的内力示如图(d)、(e)和(f)。

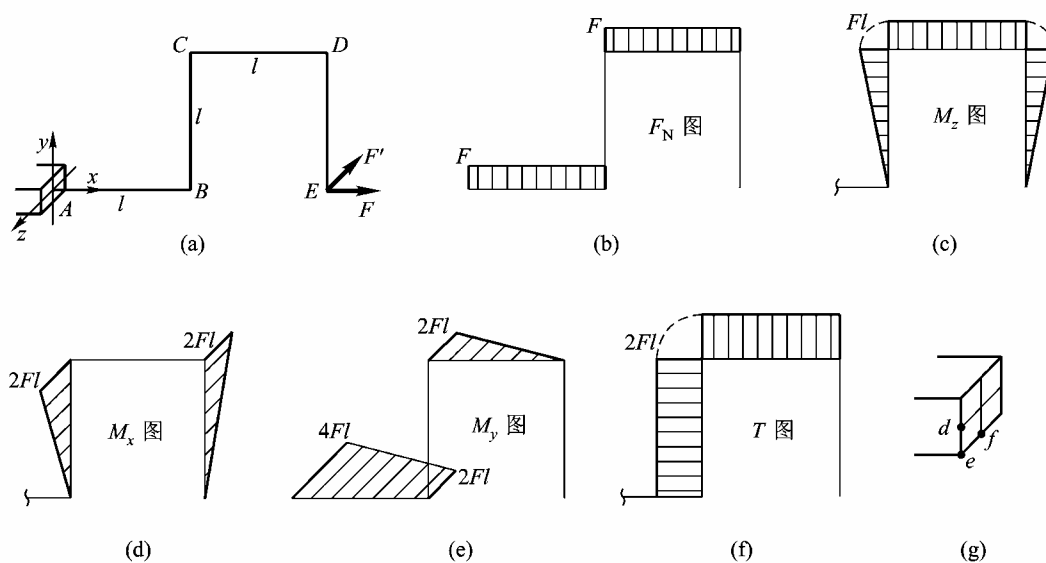


图8-16

从内力图上不难找到可能的危险面有两个：截面 A 和截面 C_+ 。

2. 确定 F 的许用值

截面 A 为弯、拉组合（危险点处于单向应力状态），由强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \times 4Fl}{a^3} + \frac{F}{a^2} = \frac{241F}{a^2} \leq [\sigma]$$

得

$$F \leq \frac{[\sigma]a^2}{241} = 4.15 \times 10^{-3}[\sigma]a^2 = 4.15 \times 10^{-5}[\sigma]l^2 \quad (\text{a})$$

截面 C_+ 为弯 (有 M_y 、 M_z) 拉、扭组合, 可能的危险点为 d 和 e (见图 g), 点 f 的扭转切应力虽然与点 d 的一样大, 但其弯曲正应力只是点 d 的一半, 故可将它排除在外。

对于点 d , 正应力和切应力依次为

$$\sigma_d = \frac{6 \times 2Fl}{a^3} + \frac{F}{a^2} = 121 \frac{F}{a^2}$$

$$\tau_d = \frac{T}{\alpha hb^2} = \frac{2Fl}{0.208a^3} = 96.2 \frac{F}{a^2}$$

由第三强度理论的强度条件

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_d^2 + 4\tau_d^2} = \frac{F}{a^2} \sqrt{121^2 + 4 \times 96.2^2} = 227 \frac{F}{a^2} \leq [\sigma]$$

得

$$F \leq 4.41 \times 10^{-3}[\sigma]a^2 = 4.41 \times 10^{-5}[\sigma]l^2 \quad (\text{b})$$

对于点 e , 切应力为零, 由弯、拉组合 (点 e 处于单向应力状态) 的强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \times 2Fl}{a^3} + \frac{6 \times Fl}{a^3} + \frac{F}{a^2} = 181 \frac{F}{a^2} \leq [\sigma]$$

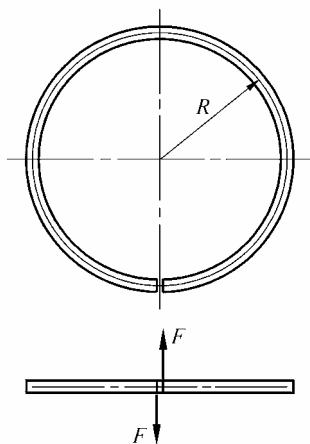
得

$$F \leq 5.52 \times 10^{-3}[\sigma]a^2 = 5.52 \times 10^{-5}[\sigma]l^2 \quad (\text{c})$$

比较式(a)、(b)和(c), 最后确定 F 的许用值为

$$[F] = 4.15 \times 10^{-5}[\sigma]l^2$$

8-17 图示圆截面圆环, 缺口处承受一对相距极近的载荷 F 作用。已知圆环轴线的半径为 R , 截面的直径为 d , 材料的许用应力为 $[\sigma]$, 试根据第三强度理论确定载荷 F 的许用值。



题 8-17 图

解: 1. 分析内力

本题为反对称问题，可取半个圆环来分析。例如取右半圆环，示如图 8-17。

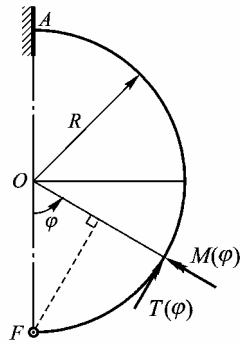


图8-17

由图可得

$$|M(\varphi)| = FR\sin\varphi, \quad |T(\varphi)| = FR(1 - \cos\varphi)$$

2. 求相当应力

根据第三强度理论，截面 φ 危险点处的相当应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{r3} &= \frac{\sqrt{M^2(\varphi) + T^2(\varphi)}}{W} = \frac{FR\sqrt{\sin^2\varphi + (1 - \cos\varphi)^2}}{W} \\ &= \frac{FR\sqrt{2 - 2\cos\varphi}}{W}\end{aligned}\quad (a)$$

3. 求 σ_{r3} 的最大值

由

$$\frac{d\sigma_{r3}}{d\varphi} = 0$$

得极值位置为

$$\varphi = 180^\circ \quad (b)$$

进一步分析可知，该极值位置使 σ_{r3} 取得极大值，即截面 A 为危险截面，其危险点的相当应力为

$$\sigma_{r3,\max} = \frac{2FR}{W} = \frac{64FR}{\pi d^3} \quad (c)$$

4. 确定 F 的许用值

将式(c)代入强度条件

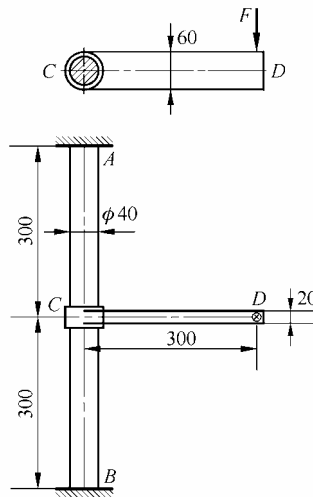
$$\sigma_{r3,\max} \leq [\sigma]$$

得载荷 F 的许用值为

$$[F] = \frac{\pi d^3 [\sigma]}{64R} = \frac{d^3 [\sigma]}{20.4R} \approx \frac{d^3 [\sigma]}{20R}$$

8-18 图示结构，由轴 AB 与梁 CD 组成，并在截面 D 承受集中载荷 F 作用。已知载荷 $F = 1\text{kN}$ ，弹性模量 $E = 210\text{GPa}$ ，切变模量 $G = 0.4E$ 。试：

- (1) 根据第三强度理论计算轴内危险点处的相当应力；
- (2) 计算截面 D 的转角与挠度。



题 8-18 图

解：(1) 计算相当应力

此为六度静不定问题，但有对称性可以利用。

将载荷 F 向轴 AB 的轴线简化，得力 F 和矩为 M_c 的力偶，示如图 8-18(a)。

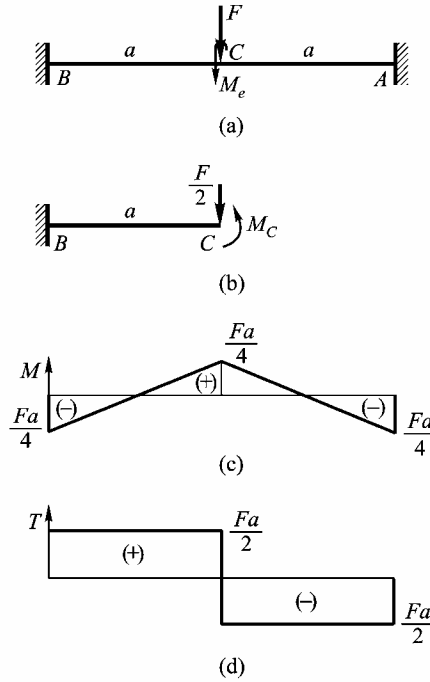


图8-18

根据叠加原理，可将 F 和 M_e 分开考虑。仅考虑 F 时，利用对称性，可在截面 C 处解除多余内约束，得相当系统如图(b)所示。（图中只画了左边一半）。由变形协调条件

$$\theta_c = 0, \quad \frac{M_c a}{EI} - \frac{\left(\frac{F}{2}\right)a^2}{2EI} = 0$$

得

$$M_c = \frac{Fa}{4}$$

据此，并利用对称性，可画出 M 图（见图c）。

仅考虑 M_e 时，由对称性可知，两端的支反力偶矩相等，并等于 M_e 的一半，即

$$M_{Ax} = M_{Bx} = \frac{1}{2} M_e = \frac{1}{2} Fa$$

据此，并考虑到扭矩的符号规定，可画 T 图如图(d)所示。

由图(c)、(d)容易判断， B 、 A 、 C_- 和 C_+ 四个截面同等危险，它们的弯矩值和扭矩值（均指绝对值）分别相等。按照第三强度理论，这些面上危险点处的相当应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{r3} &= \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \frac{32Fa\sqrt{1^2 + 2^2}}{4\pi d^3} = \frac{8 \times 1 \times 10^3 \times 0.300 \times \sqrt{5} \text{ N}}{\pi \times 0.040^3 \text{ m}^2} \\ &= 2.67 \times 10^7 \text{ Pa} = 26.7 \text{ MPa} \end{aligned}$$

(2) 计算转角和挠度

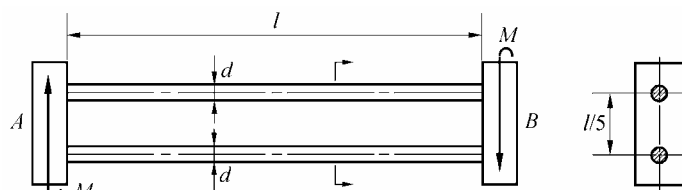
截面 D 的转角由轴 AB 的扭转变形和梁 CD 的弯曲变形两部分提供，由叠加法可得

$$\begin{aligned}\theta_D &= \varphi_C + \theta_{D(F)} = \frac{(\frac{1}{2}Fa)a}{GI_p} + \frac{Fa^2}{2EI_1} = \frac{5Fa^2}{4EI_p} + \frac{Fa^2}{2EI_1} \\ &= \frac{1 \times 10^3 \times 0.300^2}{210 \times 10^9} \left(\frac{5 \times 32}{4 \times \pi \times 0.040^4} + \frac{12}{2 \times 0.020 \times 0.060^3} \right) \text{ rad} = 2.73 \times 10^{-3} \text{ rad}\end{aligned}$$

截面 D 的挠度由轴 AB 的弯曲变形、扭转变形和梁 CD 的弯曲变形三部分提供，由叠加法可得

$$\begin{aligned}w_D &= w_C + \varphi_C a + w_{D(F)} = \frac{Fa^3}{24EI} + \frac{5Fa^3}{4EI_p} + \frac{Fa^3}{3EI_1} \\ &= \frac{1 \times 10^3 \times 0.300^3}{210 \times 10^9} \left(\frac{64}{24 \times \pi \times 0.040^4} + \frac{5 \times 32}{4 \times \pi \times 0.040^4} + \frac{12}{3 \times 0.020 \times 0.060^3} \right) \text{ m} \\ &= 8.0 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.80 \text{ mm}\end{aligned}$$

8-19 图示结构，由两根相同的圆截面杆及刚体 A 和 B 组成。设在该刚体上作用一对方向相反、其矩均为 M 的力偶，试画杆的内力图，并根据第三强度理论建立杆的强度条件。杆的长度 l 、直径 d 、材料的弹性模量 E 、切变模量 G 以及许用应力 $[\sigma]$ 均为已知，且 $l = 20d$, $G = 0.4E$ 。



题 8-19 图

解：1. 求内力

此为六度静不定问题。利用反对称性，可取相当系统如图 8-19(a)所示。

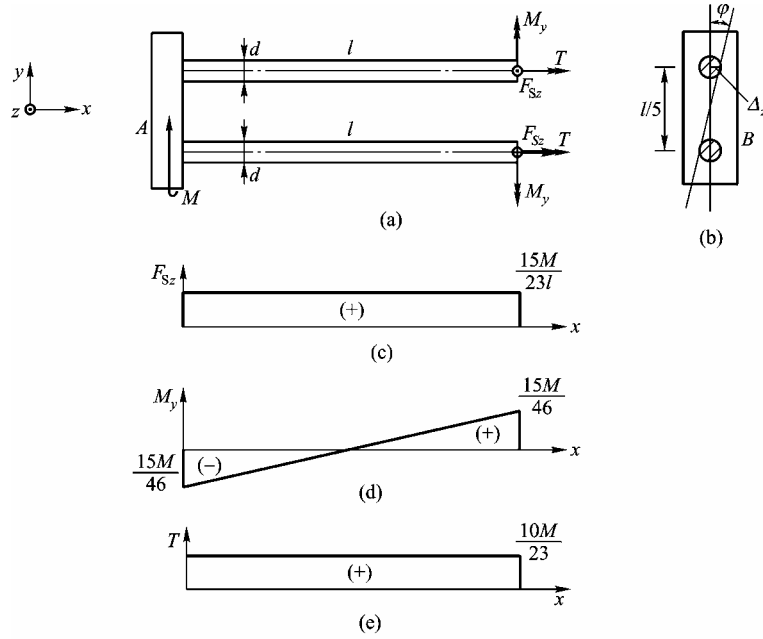


图8-19

静力学方面（见图 a ）

$$\sum M_x = 0, \quad 2T + F_{sz} \left(\frac{l}{5}\right) - M = 0 \quad (a)$$

几何方面（见图 a 和 b ）

由于刚体 B 只能绕结构水平中轴线相对于刚体 A 作刚性转动，故有变形协调条件

$$\theta_y = 0 \quad (b)$$

$$\Delta_z = \varphi \left(\frac{l}{10}\right) \quad (c)$$

物理方面

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{Tl}{(0.4E)(2I)} = \frac{1.25Tl}{EI} \quad (d)$$

$$\Delta_z = \frac{F_{sz}l^3}{3EI} - \frac{M_y l^2}{2EI} \quad (e)$$

$$\theta_y = \frac{M_y l}{EI} - \frac{F_{sz} l^2}{2EI} \quad (f)$$

将式(d) ~ (f)代入式(b)和(c)，得补充方程

$$2M_y = F_{sz} l \quad (g)$$

及

$$8F_{sz} l - 12M_y = 3T \quad (h)$$

联解方程(g)、(h)和(a)，得

$$F_{sz} = \frac{15M}{23l}, \quad T = \frac{10}{23}M, \quad M_y = \frac{15}{46}M$$

2. 画内力图

上杆的内力图如图 8-19(c) ~ (e)。

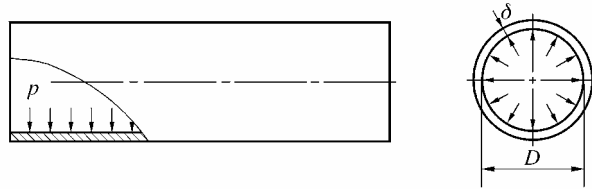
下杆的 T 图与上杆一样，而 F_{sz} 图及 M_y 图与上杆仅差符号，最大内力值（绝对值）与上杆相同，故可省画其内力图。

3. 建立强度条件

由于 $l = 20d$ ，属于细长杆，可以不计剪力对强度的影响。危险面在杆的两端，按照第三强度理论，杆的强度条件为

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M_y^2 + T^2}}{W} = \frac{M \sqrt{\left(\frac{15}{46}\right)^2 + \left(\frac{10}{23}\right)^2}}{\frac{\pi}{32} d^3} = 5.54 \frac{M}{d^3} \leq [\sigma]$$

8-22 图示油管，内径 $D = 11\text{mm}$ ，壁厚 $\delta = 0.5\text{mm}$ ，内压 $p = 7.5\text{MPa}$ ，许用应力 $[\sigma] = 100\text{MPa}$ 。试校核油管的强度。



题 8-22 图

解：油管工作时，管壁内任一点的三个主应力依次为

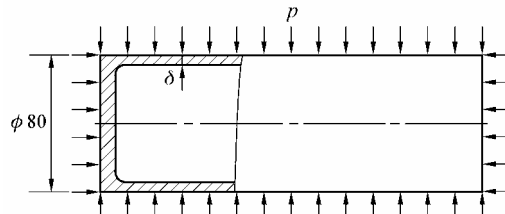
$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pD}{2\delta}, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_r \approx 0$$

按照第三强度理论，有

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pD}{2\delta} = \frac{7.5 \times 10^6 \times 0.011 \text{ N}}{2 \times 0.0005 \text{ m}^2} = 8.25 \times 10^7 \text{ Pa} = 82.5 \text{ MPa} < [\sigma]$$

计算结果表明，该油管满足强度要求。

8-23 图示圆柱形容器，受外压 $p = 15\text{MPa}$ 作用。试按第四强度理论确定其壁厚。材料的许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。



题 8-23 图

解：根据第四强度理论，圆柱形薄壁容器的强度应满足

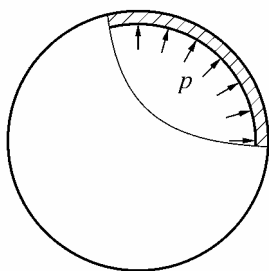
$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{3}pD}{4\delta} \leq [\sigma]$$

由此可得

$$\delta \geq \frac{\sqrt{3}pD}{4[\sigma]} = \frac{\sqrt{3} \times 15 \times 10^6 \times 0.080}{4 \times 160 \times 10^6} \text{ m} = 3.25 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.25 \text{ mm}$$

所得 $\delta < D/20$ ，属于薄壁容器，上述计算有效。

8-24 图示圆球形薄壁容器，其内径为 D ，壁厚为 δ ，承受压强为 p 之内压。试证明壁内任一点处的主应力为 $\sigma_1 = \sigma_2 = pD/(4\delta)$, $\sigma_3 \approx 0$ 。



题 8-24 图

证明：用截面法取该容器的一半（连同内压）示如图 8-24(a)。

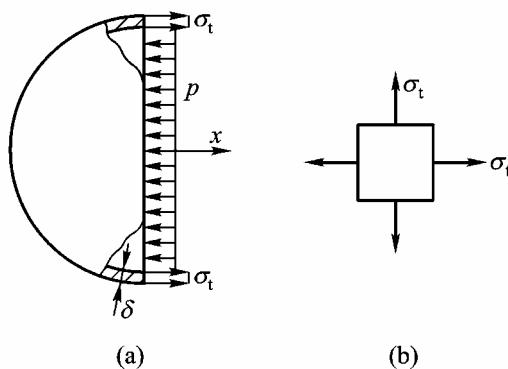


图8-24

由图(a)所示半球的平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad \pi D \delta \sigma_t - \frac{\pi D^2}{4} p = 0$$

得

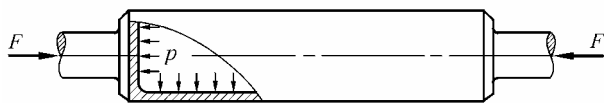
$$\sigma_t = \frac{pD}{4\delta}$$

球壁内任一点的应力状态如图(b)所示，由此可得三个主应力依次为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_t = \frac{pD}{4\delta}, \quad \sigma_3 \approx 0$$

8-25 图示铸铁构件，中段为一内径 $D=200\text{mm}$ 、壁厚 $\delta=10\text{mm}$ 的圆筒，圆筒内的

压力 $p = 1\text{MPa}$,两端的轴向压力 $F = 300\text{kN}$,材料的泊松比 $\mu = 0.25$,许用拉应力 $[\sigma_t] = 30\text{MPa}$ 。
试校核圆筒部分的强度。



题 8-25 图

解：1. 应力计算

圆筒的 $\delta = D/20$, 属于薄壁圆筒。故由内压引起的轴向应力和周向应力分别为

$$\sigma_{xp} = \frac{pD}{4\delta} = \frac{1 \times 10^6 \times 0.200}{4 \times 0.010} \text{ Pa} = 5 \times 10^6 \text{ Pa} = 5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{tp} = \frac{pD}{2\delta} = \frac{1 \times 10^6 \times 0.200}{2 \times 0.010} \text{ Pa} = 10 \times 10^6 \text{ Pa} = 10 \text{ MPa}$$

由轴向压力引起的轴向应力为

$$\sigma_{xF} = \frac{F}{\pi D \delta} = \frac{300 \times 10^3 \text{ N}}{\pi \times 0.200 \times 0.010 \text{ m}^2} = 4.77 \times 10^7 \text{ Pa} = 47.7 \text{ MPa (压)}$$

筒壁内任一点的主应力依次为

$$\sigma_1 = 10 \text{ MPa} , \sigma_2 \approx 0 , \sigma_3 = (5 - 47.7) \text{ MPa} = -42.7 \text{ MPa}$$

2 . 强度校核

由于该铸铁构件的最大压应力超过最大拉应力 , 且超过较多 , 故宜采用最大拉应变理论对其进行强度校核 , 即要求

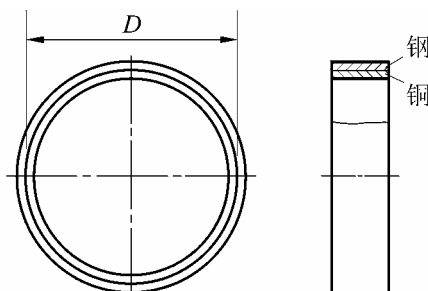
$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

将上述各主应力值代入上式 , 得

$$\sigma_{r2} = [10 - 0.25 \times (-42.7)] \text{ MPa} = 20.7 \text{ MPa} < [\sigma]$$

可见 , 该铸铁构件满足强度要求。

8-26 图示组合圆环 , 内、外环分别用铜与钢制成 , 试问当温度升高 ΔT 时 , 环的周向正应力为何值。已知铜环与钢环的壁厚分别为 δ_1 与 δ_2 , 交接面的直径为 D , 铜与钢的弹性模量分别为 E_1 与 E_2 , 线胀系数分别为 α_1 与 α_2 , 且 $\alpha_1 > \alpha_2$



题 8-26 图

提示：由于 $\alpha_1 > \alpha_2$ ，故当温度升高时，环间出现径向压力 p ，外环周向受拉，内环周向受压，但二环仍应紧贴在一起。

解：内、外环的受力情况示如图 8-26(a)和(b)。

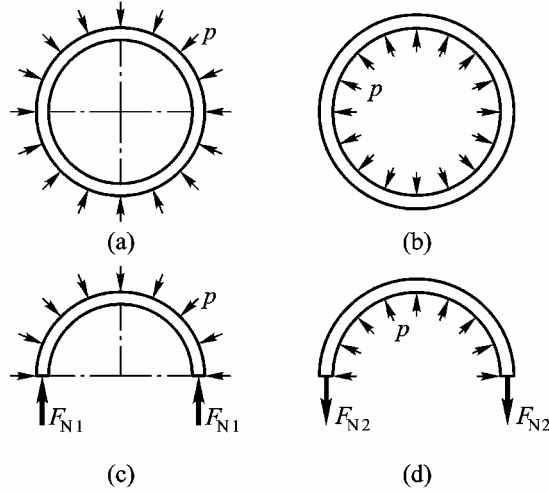


图8-26

设铜环的轴力（绝对值）为 F_{N1} ，钢环的轴力为 F_{N2} ，由图(c)、(d)所示各半个薄圆环的平衡条件可得

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{pD}{2} \quad (a)$$

变形协调条件为

$$\Delta D_1 = \Delta D_2 \quad (b)$$

物理关系为

$$\left. \begin{aligned} \Delta D_1 &= \alpha_1 D \Delta T - \frac{F_{N1} D}{E_1 A_1} \\ \Delta D_2 &= \alpha_2 D \Delta T + \frac{F_{N2} D}{E_2 A_2} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

将式(c)代入式(b)，得

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T = \frac{F_{N1}}{E_1 A_1} + \frac{F_{N2}}{E_2 A_2} = \frac{|\sigma_{1t}|}{E_1} + \frac{\sigma_{2t}}{E_2} \quad (d)$$

由式(a)可知，

$$|\sigma_{1t}| A_1 = \sigma_{2t} A_2, \quad \frac{|\sigma_{1t}|}{\sigma_{2t}} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

即

$$|\sigma_{1t}| = \frac{\delta_2}{\delta_1} \sigma_{2t} \quad (e)$$

将方程(e)与方程(d)联立求解，得铜环和钢环内的周向正应力依次为

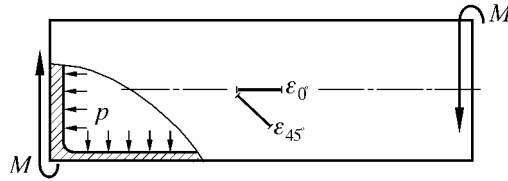
$$|\sigma_{1t}| = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)E_1E_2\delta_2}{E_1\delta_1 + E_2\delta_2} \Delta T \quad (f)$$

$$\sigma_{2t} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)E_1E_2\delta_1}{E_1\delta_1 + E_2\delta_2} \Delta T \quad (g)$$

式(f)亦可写成

$$\sigma_{1t} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)E_1E_2\delta_2}{E_1\delta_1 + E_2\delta_2} \Delta T \quad (f)'$$

8-27 图示薄壁圆筒，同时承受内压 p 与扭力矩 M 作用，由实验测得筒壁沿轴向及与轴线成 45° 方位的正应变分别为 ε_{0° 和 ε_{45° 。试求内压 p 与扭力矩 M 之值。筒的内径 D 、壁厚 δ 、材料的弹性模量 E 与泊松比 μ 均为已知。



题 8-27 图

解：圆筒壁内任意一点的应力状态如图 8-27 所示。

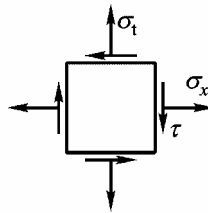


图8-27

图中所示各应力分量分别为

$$\sigma_x = \frac{pD}{4\delta}, \quad \sigma_t = \frac{pD}{2\delta}; \quad \tau = \frac{T}{2\Omega\delta} = \frac{2M}{\pi D^2\delta}$$

由此可得

$$\sigma_{0^\circ} = \sigma_x, \quad \sigma_{90^\circ} = \sigma_t; \quad \sigma_{45^\circ} = \tau + \frac{3pD}{8\delta}; \quad \sigma_{+45^\circ} = \frac{3pD}{8\delta} - \tau$$

根据广义胡克定律，贴片方向的正应变为

$$\varepsilon_{0^\circ} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu\sigma_t] = \frac{(1-2\mu)pD}{4E\delta} \quad (a)$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}[\sigma_{45^\circ} - \mu\sigma_{+45^\circ}] = \frac{1}{E}\left[\frac{2(1+\mu)M}{\pi D^2\delta} + \frac{(1-\mu)3pD}{8\delta}\right] \quad (b)$$

由式(a)可得圆筒所承受的内压为

$$p = \frac{4E\delta}{(1-2\mu)D} \varepsilon_{0^\circ} \quad (c)$$

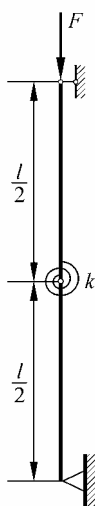
将式(c)代入式(b)，可得扭力矩为

$$M = \frac{\pi E D^2 \delta}{4(1+\mu)(1-2\mu)} [2(1-2\mu)\varepsilon_{45^\circ} - 3(1-\mu)\varepsilon_{0^\circ}]$$

9-1	1
9-3	2
9-4	3
9-7	4
9-8	5
9-10	6
9-11	8
9-13	9
9-15	11
9-18	12
9-19	13
9-20	13
9-21	15
9-23	17

()

9-1 在分析人体下肢稳定问题时，可简化为图示两端铰支刚杆-蝶形弹簧系统，图中的 k 代表使蝶形弹簧产生单位转角所需之力矩。试求该系统的临界载荷 F_{cro} 。



题 9-1 图

解：系统的临界状态（微偏斜状态）如图 9-1 所示。注意到蝶形弹簧产生的转角为 2θ ，由上段刚杆的力矩平衡方程

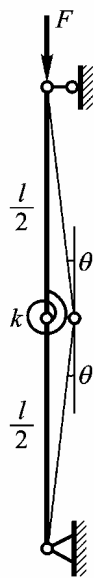


图9-1

$$k(2\theta) - F \cdot \left(\theta \frac{l}{2}\right) = 0$$

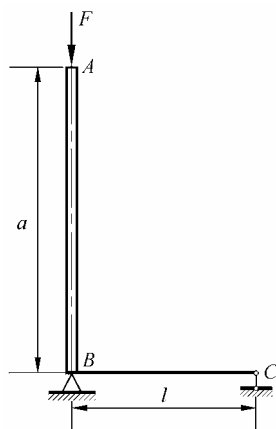
得

$$F = \frac{4k}{l}$$

即

$$F_{cr} = \frac{4k}{l}$$

9-3 图示结构, AB 为刚性杆, BC 为弹性梁, 在刚性杆顶端承受铅垂载荷 F 作用。试求其临界值。设梁 BC 各截面的弯曲刚度均为 EI 。



题 9-3 图

解：结构的临界状态示如图 9-3。

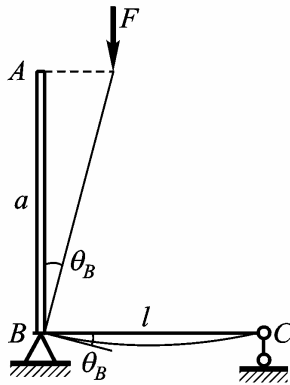


图9-3

使梁 B 端截面产生转角 θ_B 的力矩应为

$$M_e = \frac{3EI}{l} \theta_B$$

而

$$M_e = F \cdot (\theta_B a)$$

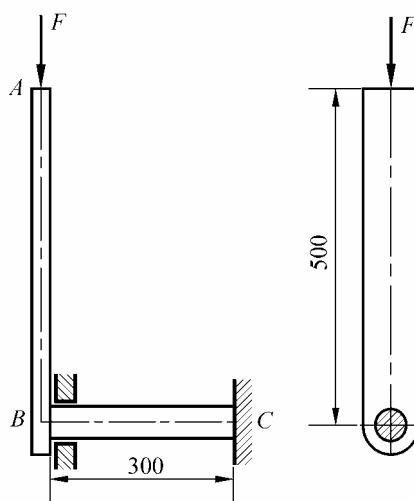
由此得

$$F = \frac{3EI}{al}$$

即

$$F_{cr} = \frac{3EI}{al}$$

9-4 图示刚性杆 AB ，下端与圆截面钢轴 BC 相连。为使刚性杆在图示铅垂位置保持稳定平衡，试确定轴 BC 的直径 d 。已知 $F = 42\text{kN}$ ，切变模量 $G = 79\text{GPa}$ 。



题 9-4 图

解：刚性杆 AB 在微偏斜（设偏斜角为 φ ，见图 9-4）状态下处于平衡，此时加给轴 BC

的扭矩矩为

$$M_B = F\varphi a$$

而

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$$

注意到 $T = M_B$, 于是得

$$F = \frac{GI_p}{al}$$

即

$$F_{cr} = \frac{GI_p}{al} = \frac{\pi G d^4}{32al}$$

由此得 (题中给出 $F=42\text{kN}$)

$$d = \sqrt[4]{\frac{32alF_{cr}}{\pi G}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 0.500 \times 0.300 \times 42 \times 10^3}{\pi \times 79 \times 10^9}} \text{m} = 0.030\text{m} = 30\text{mm}$$

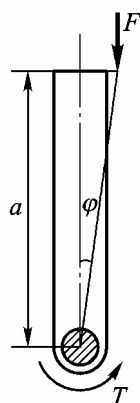
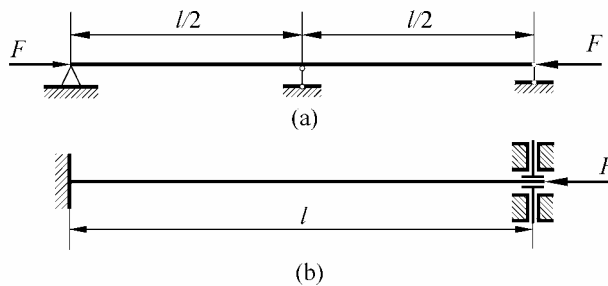


图9-4

9-7 试确定图示各细长压杆的相当长度与临界载荷。设弯曲刚度 EI 为常数。



题 9-7 图

(a)解：该细长压杆的微弯状态如图 9-7(a)所示。

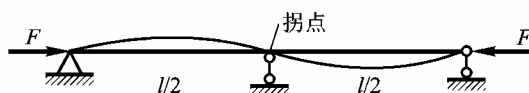


图9-7 (a)

对比两端铰支细长压杆的微弯状态(见书中图 9-5)，这里半个正弦波相应的长度为 $l/2$ ，即相当长度为

$$\mu l = 0.5l, \mu = 0.5$$

其临界载荷为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

(b)解：该细长压杆的微弯状态如图 9-7(b)所示。

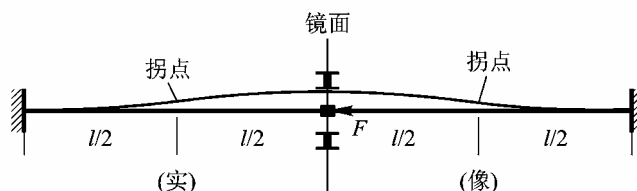


图9-7 (b)

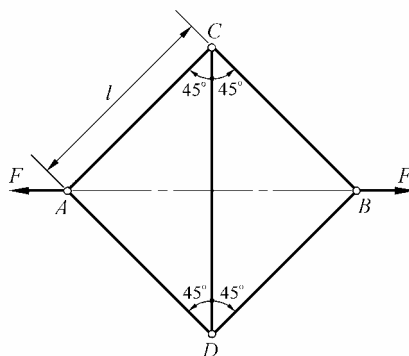
对比书中图 9-5 所示的微弯状态，这里半个正弦波相应的长度为 l (看两个拐点之间的长度)，即

$$\mu l = l, \mu = 1$$

其临界载荷为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

9-8 图示正方形桁架，各杆各截面的弯曲刚度均为 EI ，且均为细长杆。试问当载荷 F 为何值时结构中的个别杆件将失稳？如果将载荷 F 的方向改为向内，则使杆件失稳的载荷 F 又为何值？



题 9-8 图

解：1. 当 F 向外时
 竖向杆 CD 受压，其余四根杆受拉。
 设杆 CD 编号为 5，则有

$$F_{N5} = F$$

由此得

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2}l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{2l^2}$$

2. 当 F 向内时
 此时 5 号杆受拉，其余各杆（编号 1, 2, 3, 4）受压。且

$$F_{N1} = F_{N2} = F_{N3} = F_{N4} = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

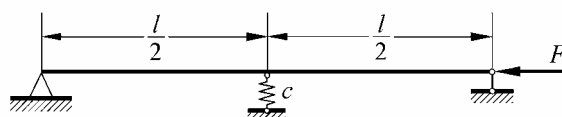
由此得

$$F_{cr} = \sqrt{2} \left(\frac{\pi^2 EI}{l^2} \right) = \frac{\sqrt{2} \pi^2 EI}{l^2}$$

9-10 图示两端铰支细长压杆，弯曲刚度 EI 为常数，压杆中点用弹簧常量为 c 的弹簧支持。试证明压杆的临界载荷满足下述方程：

$$\sin \frac{kl}{2} \left[\sin \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \left(1 - \frac{4k^2 EI}{cl} \right) \cos \frac{kl}{2} \right] = 0$$

式中， $k = \sqrt{F/(EI)}$ 。



题 9-10 图

解：该细长压杆的微弯状态如图 9-10 所示。

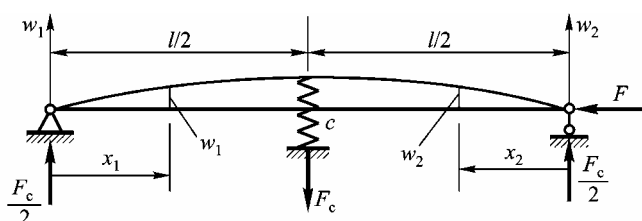


图9-10

按图中所取坐标，有

$$M(x_1) = \frac{F_c}{2} x_1 - F w_1, \quad M(x_2) = \frac{F_c}{2} x_2 - F w_2$$

$$w_1'' + k^2 w_1 = \frac{F_c}{2F} k^2 x_1, \quad w_2'' + k^2 w_2 = \frac{F_c}{2F} k^2 x_2$$

式中，

$$k^2 = \frac{F}{EI}$$

通解为

$$w_1 = A_1 \sin kx_1 + B_1 \cos kx_1 + \frac{F_c}{2F} x_1$$

$$w_2 = A_2 \sin kx_2 + B_2 \cos kx_2 + \frac{F_c}{2F} x_2$$

$$\text{当 } x_1 = 0, w_1 = 0 \rightarrow B_1 = 0$$

$$\text{当 } x_2 = 0, w_2 = 0 \rightarrow B_2 = 0$$

$$\text{当 } x_1 = x_2 = \frac{l}{2}, w_1 = w_2 = \frac{F_c}{c}, w_1' = -w_2'$$

或写成

$$\begin{cases} A_1 \sin \frac{kl}{2} + \frac{F_c l}{4F} = \frac{F_c}{c} \\ A_2 \sin \frac{kl}{2} + \frac{F_c l}{4F} = \frac{F_c}{c} \\ A_1 k \cos \frac{kl}{2} + \frac{F_c}{2F} = -A_2 k \cos \frac{kl}{2} - \frac{F_c}{2F} \end{cases}$$

重排一下，得

$$\begin{cases} (\sin \frac{kl}{2}) A_1 + 0 + (\frac{l}{4F} - \frac{1}{c}) F_c = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 0 + (\sin \frac{kl}{2}) A_2 + (\frac{l}{4F} - \frac{1}{c}) F_c = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} (k \cos \frac{kl}{2}) A_1 + (k \cos \frac{kl}{2}) A_2 + \frac{1}{F} F_c = 0 \end{cases} \quad (3)$$

这里， A_1 、 A_2 和 F_c 不可全为零，必要求其系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{kl}{2} & 0 & (\frac{l}{4F} - \frac{1}{c}) \\ 0 & \sin \frac{kl}{2} & (\frac{l}{4F} - \frac{1}{c}) \\ k \cos \frac{kl}{2} & k \cos \frac{kl}{2} & \frac{1}{F} \end{vmatrix} = 0$$

展开上列行列式，并注意到 $F = EIk^2$ ，可得

$$\frac{1}{EIk^2} \sin \frac{kl}{2} \left[\sin \frac{kl}{2} - k \left(\frac{l}{2} - \frac{2k^2 EI}{c} \right) \cos \frac{kl}{2} \right] = 0$$

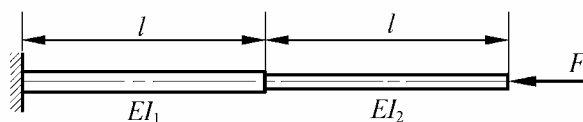
或简化成

$$\sin \frac{kl}{2} \left[\sin \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \left(1 - \frac{4k^2 EI}{cl} \right) \cos \frac{kl}{2} \right] = 0$$

9-11 图示阶梯形细长压杆，左、右两段各截面的弯曲刚度分别为 EI_1 与 EI_2 。试证明压杆的临界载荷满足下述方程：

$$\tan k_1 l \cdot \tan k_2 l = \frac{k_2}{k_1}$$

式中： $k_1 = \sqrt{F/(EI_1)}$ ； $k_2 = \sqrt{F/(EI_2)}$ 。



题 9-11 图

解：该压杆的微弯状态如图 9-11 所示。按图中所取坐标，有

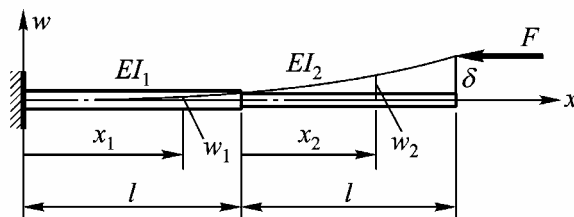


图9-11

$$M(x_1) = F(\delta - w_1), \quad M(x_2) = F(\delta - w_2)$$

进而可得

$$w_1'' + k_1^2 w_1 = k_1^2 \delta, \quad w_2'' + k_2^2 w_2 = k_2^2 \delta$$

式中，

$$k_1^2 = \frac{F}{EI_1}, \quad k_2^2 = \frac{F}{EI_2}$$

以上二微分方程的通解为

$$w_1 = A_1 \sin k_1 x_1 + B_1 \cos k_1 x_1 + \delta$$

$$w_2 = A_2 \sin k_2 x_2 + B_2 \cos k_2 x_2 + \delta$$

定未知常数的条件为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0, w_1 = 0, w'_1 = 0 \\ x_1 &= l \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \right\}, w_1 = w_2, w'_1 = w'_2$$

$$x_2 = l, w_2 = \delta$$

由这些条件依次得到

$$B_1 + \delta = 0 \rightarrow B_1 = -\delta$$

$$k_1 A_1 = 0 \rightarrow A_1 = 0$$

$$-\delta \cos k_1 l + \delta = B_2 + \delta \rightarrow B_2 = -\delta \cos k_1 l \quad (a)$$

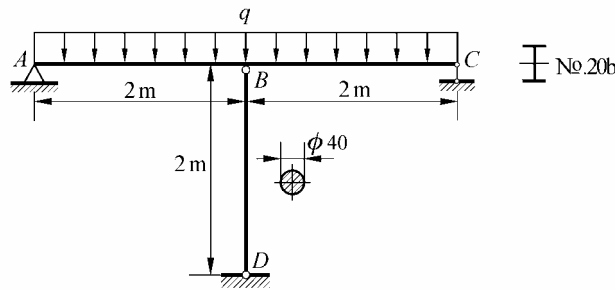
$$-B_1 k_1 \sin k_1 l = A_2 k_2 \rightarrow A_2 = \frac{k_1}{k_2} \delta \sin k_1 l \quad (b)$$

$$A_2 \sin k_2 l + B_2 \cos k_2 l + \delta = \delta \rightarrow A_2 \sin k_2 l + B_2 \cos k_2 l = 0 \quad (c)$$

将式(a)和(b)代入式(c), 得到

$$\tan k_1 l \cdot \tan k_2 l = \frac{k_2}{k_1}$$

9-13 图示结构, 由横梁 AC 与立柱 BD 组成, 试问当载荷集度 $q = 20\text{N/mm}$ 与 $q = 26\text{N/mm}$ 时, 截面 B 的挠度分别为何值。横梁与立柱均用低碳钢制成, 弹性模量 $E = 200\text{GPa}$, 比例极限 $\sigma_p = 200\text{MPa}$ 。



题 9-13 图

解: 1. 求立柱 BD 的临界载荷 F_{cr}

给立柱和梁编号分别为 1 和 2, 我们有

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 99.3$$

$$i = \sqrt{\frac{I_1}{A_1}} = \frac{d}{4} = 10\text{mm} = 0.010\text{m}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 2.00}{0.010} = 200 > \lambda_p$$

立柱 BD 为大柔度杆，其临界载荷为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{l_1^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{2.00^2} \times \frac{\pi \times 0.040^4}{64} \text{ N} = 6.2013 \times 10^4 \text{ N} = 62.013 \text{ kN}$$

2. 计算 q_{cr}

这里的 q_{cr} 系指使立柱刚刚到达 F_{cr} 时的 q 值，立柱 BD 还处在直线平衡状态。 B 处的变形协调条件为

$$w_B = \Delta l_1$$

引入物理关系

$$w_B = \frac{5q_{cr}l_2^4}{384EI_2} - \frac{F_{cr}l_2^3}{48EI_2}, \Delta l_1 = \frac{F_{cr}l_1}{EA_1}$$

并代入 l_1 、 l_2 、 E 、 F_{cr} 的已知数据及

$$I_2 = 2500 \text{ cm}^4 = 2.500 \times 10^{-5} \text{ m}^4, A_1 = \frac{\pi}{4} 0.040^2 \text{ m}^2 = 1.2566 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

计算可得

$$q_{cr} = 2.555 \times 10^4 \text{ N/m} = 25.55 \text{ N/mm}$$

3. 计算 $q = 20 \text{ N/mm}$ 时的挠度

由于 $q < q_{cr}$ ，立柱中 $F_N < F_{cr}$ ，直线平衡状态是稳定的。

由变形协调条件

$$w_B = \Delta l_1$$

得

$$\frac{5ql_2^4}{384EI_2} - \frac{F_N l_2^3}{48EI_2} = \frac{F_N l_1}{EA_1}$$

代入已知数据后，算得

$$F_N = 4.8554 \times 10^4 \text{ N} = 48.554 \text{ kN}$$

进而可得截面 B 的挠度为

$$w_B = \Delta l_1 = \frac{F_N l_1}{EA_1} = 3.86 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.386 \text{ mm}$$

4. 计算 $q = 26 \text{ N/mm}$ 时的挠度

此时 $q > q_{cr}$ ，立柱处于微弯状态， $F_N = F_{cr}$ ，截面 B 的挠度由梁变形确定，即

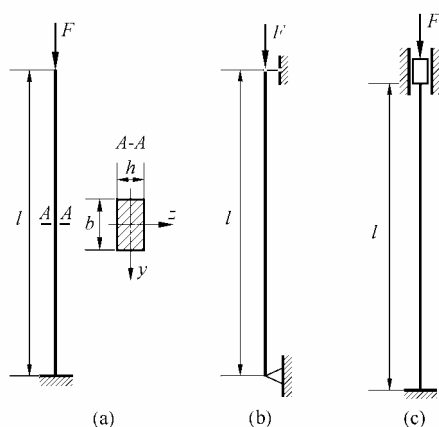
$$\begin{aligned}
 w_B' &= \frac{5ql_2^4}{384EI_2} - \frac{F_{cr}l_2^3}{48EI_2} \\
 &= \frac{5 \times 2.60 \times 10^4 \times 4.00^4 \text{ m}}{384 \times 200 \times 10^9 \times 2.500 \times 10^{-5}} - \frac{62013 \times 4.00^3 \text{ m}}{48 \times 200 \times 10^9 \times 2.500 \times 10^{-5}} \\
 &= 7.97 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.797 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

9-15 图示矩形截面压杆，有三种支持方式。杆长 $l = 300 \text{ mm}$ ，截面宽度 $b = 20 \text{ mm}$ ，

高度 $h = 12 \text{ mm}$ ，弹性模量 $E = 70 \text{ GPa}$ ， $\lambda_p = 50$ ， $\lambda_0 = 0$ ，中柔度杆的临界应力公式为

$$\sigma_{cr} = 382 \text{ MPa} - (2.18 \text{ MPa}) \lambda$$

试计算它们的临界载荷，并进行比较。



题 9-15 图

(a)解：

$$I_{\min} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.020 \times 0.012^3}{12} \text{ m}^4 = 2.88 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{0.012}{\sqrt{12}} \text{ m} = 3.464 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \times 0.300}{3.464 \times 10^{-3}} = 173.2 > \lambda_p$$

此杆为大柔度杆，其临界载荷为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 \times 70 \times 10^9 \times 2.88 \times 10^{-9}}{(2 \times 0.300)^2} \text{ N} = 5.53 \times 10^3 \text{ N} = 5.53 \text{ kN}$$

(b)解：

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 0.300}{3.464 \times 10^{-3}} = 86.6 > \lambda_p$$

此杆为大柔度杆，其临界载荷为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 70 \times 10^9 \times 2.88 \times 10^{-9}}{0.300^2} \text{ N} = 2.21 \times 10^4 \text{ N} = 22.1 \text{ kN}$$

(c)解：

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.5 \times 0.300}{3.464 \times 10^{-3}} = 43.3$$

$\lambda_0 < \lambda < \lambda_p$ ，为中柔度杆。

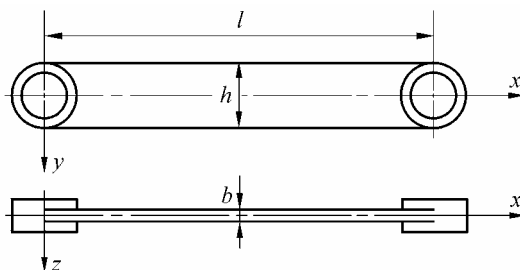
$$\sigma_{cr} = (382 - 2.18\lambda) \text{MPa} = (382 - 2.18 \times 43.3) \text{MPa} = 287.6 \text{MPa}$$

于是得

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 287.6 \times 10^6 \times (0.020 \times 0.012) \text{N} = 6.90 \times 10^4 \text{N} = 69.0 \text{kN}$$

9-18 图示压杆，横截面为 $b \times h$ 的矩形，试从稳定性方面考虑， h/b 为何值最佳。

当压杆在 $x-z$ 平面内失稳时，可取长度因数 $\mu_y = 0.7$ 。



题 9-18 图

解：由

$$I_y = \frac{hb^3}{12}, I_z = \frac{bh^3}{12}$$

和

$$A = bh$$

得

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \frac{b}{\sqrt{12}}, i_z = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

从稳定性方面考虑， h/b 的最佳值应使

$$\lambda_y = \lambda_z$$

即

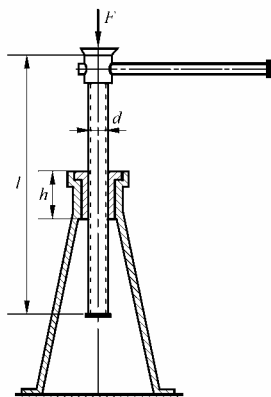
$$\frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{\mu_z l}{i_z}, \quad \frac{0.7l\sqrt{12}}{b} = \frac{l\sqrt{12}}{h}$$

由此得

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{0.7} = 1.429$$

9-19 试检查图示千斤顶丝杠的稳定性。若千斤顶的最大起重量 $F=120\text{kN}$ ，丝杠内径 $d=52\text{mm}$ ，丝杠总长 $l=600\text{mm}$ ，衬套高度 $h=100\text{mm}$ ，稳定安全因数 $n_{\text{st}}=4$ ，丝杠用 Q235 钢制成，中柔度杆的临界应力公式为

$$\sigma_{\text{cr}} = 235\text{MPa} - (0.00669\text{MPa})\lambda^2 \quad (\lambda < 123)$$



题 9-19 图

解：该千斤顶丝杠的

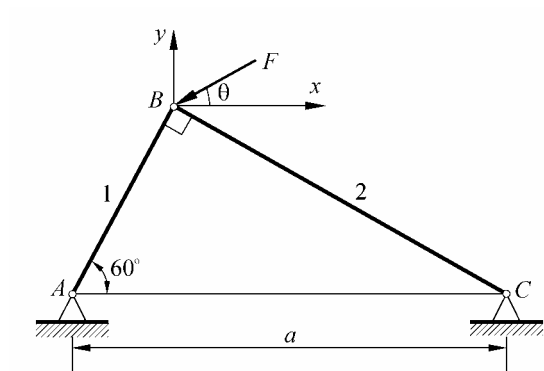
$$\begin{aligned} l_1 &= l - h = (0.600 - 0.100)\text{m} = 0.500\text{m} \\ A &= \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times 0.052^2 \text{m}^2 = 2.124 \times 10^{-3} \text{m}^2 \\ I &= \frac{\pi d^4}{64}, \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = \frac{0.052}{4} \text{m} = 0.013\text{m} \\ \lambda &= \frac{\mu l_1}{i} = \frac{2 \times 0.500}{0.013} = 76.9 < \lambda_p = 123 \end{aligned}$$

它属于中柔度杆，故有

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{cr}} &= 235\text{MPa} - (0.00669\text{MPa}) \times 76.9^2 = 195.4\text{MPa} \\ [F_{\text{st}}] &= \frac{F_{\text{cr}}}{n_{\text{st}}} = \frac{A \sigma_{\text{cr}}}{n_{\text{st}}} = \frac{2.124 \times 10^{-3} \times 195.4 \times 10^6}{4} \text{N} \\ &= 1.037 \times 10^5 \text{N} = 103.7\text{kN} \end{aligned}$$

F 比 $[F_{\text{st}}]$ 大 15.7%，该千斤顶丝杠稳定性不够。

9-20 图示桁架 ABC ，由两根材料相同的圆截面杆组成，并在节点 B 承受载荷 F 作用，其方位角 θ 可在 0° 与 90° 间变化（即 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ）。试求载荷 F 的许用值。已知杆 AB 与杆 BC 的直径分别为 $d_1=20\text{mm}$ 与 $d_2=30\text{mm}$ ，支座 A 和 C 间的距离 $a=2\text{m}$ ，材料的屈服应力 $\sigma_s=240\text{MPa}$ ，比例极限 $\sigma_p=196\text{MPa}$ ，弹性模量 $E=200\text{GPa}$ ，按屈服应力规定的安全因数， $n_s=2.0$ ，稳定安全因数 $n_{\text{st}}=2.5$ 。



题 9-20 图

解：1. 求 F_{N1} 、 F_{N2} 的极值和边值

设 F_{N1} 和 F_{N2} 均为拉力，由节点 B 的平衡可得

$$F_{N1} = -\frac{F}{2}(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)$$

$$F_{N2} = -\frac{F}{2}(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta)$$

由 $dF_{N1}/d\theta = 0$ 求得 F_{N1} 的极值为

$$F_{N1, \max} = -F \quad (\text{为压力, 极值方位角 } \theta = 60^\circ)$$

在 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ 范围内， F_{N2} 无极值。

两根杆的边值为

$$\theta = 0^\circ \text{ 时, } F_{N1} = -\frac{F}{2}, F_{N2} = \frac{\sqrt{3}}{2}F$$

$$\theta = 90^\circ \text{ 时, } F_{N1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}F, F_{N2} = -\frac{F}{2}$$

比较可知，下列四种情况为可能的危险情况：

(1) $\theta = 60^\circ$ 时， $F_{N1, \max} = -F$ ，杆 1 的稳定问题；

(2) $\theta = 90^\circ$ 时， $F_{N2} = -\frac{F}{2}$ ，杆 2 的稳定问题；

(3) $\theta = 0^\circ$ 时， $F_{N2} = \frac{\sqrt{3}}{2}F$ ，杆 2 的强度问题；

(4) $\theta = 60^\circ$ 时， $F_{N1, \max} = -F$ ，杆 1 的强度问题。

2. 求 F 的许用值

(1) 由杆 1 的 $F_{N1, cr}$ 求 F_{cr}

$$\lambda = \frac{\mu l_1}{i_1} = \frac{1 \times 1.000}{\frac{0.020}{4}} = 200 > \lambda_p = 100$$

$$F_{cr} = F_{N1,cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{l_1^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{1.000^2} \times \left(\frac{\pi \times 0.020^4}{64} \right) \text{N} = 1.550 \times 10^4 \text{N} = 15.50 \text{kN}$$

(2) 由杆 2 的 $F_{N2,cr}$ 求 F_{cr}

$$\lambda = \frac{\mu l_2}{i_2} = \frac{1 \times 1.732 \times 4}{0.030} = 231 > \lambda_p$$

$$F_{N2,cr} = \frac{\pi^2 EI_2}{l_2^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{1.732^2} \times \left(\frac{\pi \times 0.030^4}{64} \right) \text{N} = 2.62 \times 10^4 \text{N}$$

$$F_{cr} = 2F_{N2,cr} = 5.24 \times 10^4 \text{N} = 52.4 \text{kN}$$

比较可知，由稳定条件确定的载荷许用值为

$$[F] = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = \frac{15.50 \text{kN}}{2.5} = 6.20 \text{kN} \quad (\text{a})$$

(3) 由杆 2 的强度要求计算 $[F]$

$$\sigma_{2,\max} = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} F \times 4}{\pi d_2^2} \leq [\sigma] = \frac{240 \text{MPa}}{2} = 120 \text{MPa}$$

由此得

$$[F] \leq \frac{\pi d_2^2 [\sigma]}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi \times 0.030^2 \times 120 \times 10^6}{2\sqrt{3}} \text{N} = 9.79 \times 10^4 \text{N} = 97.9 \text{kN} \quad (\text{b})$$

(4) 由杆 1 的强度要求计算 $[F]$

$$|\sigma_{1,\max}| = \frac{|F_{N1,\max}|}{A_1} = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq [\sigma] = \frac{240}{2} \text{MPa} = 120 \text{MPa}$$

由此得

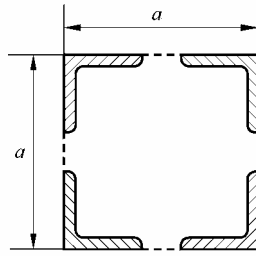
$$[F] \leq \frac{\pi d_1^2 [\sigma]}{4} = \frac{\pi \times 0.020^2 \times 120 \times 10^6}{4} \text{N} = 3.77 \times 10^4 \text{N} = 37.7 \text{kN} \quad (\text{c})$$

(5) 结论

比较式(a)、(b)和(c)所示结果，最后确定取 $[F] = 6.20 \text{kN}$ 。

9-21 横截面如图所示之立柱，由四根 $80 \text{mm} \times 80 \text{mm} \times 6 \text{mm}$ 的角钢所组成，柱长 $l =$

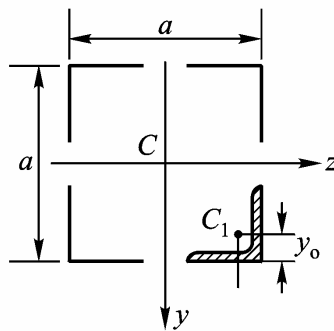
6m。立柱两端为铰支，承受轴向压力 $F = 450\text{kN}$ 作用。立柱用 Q235 钢制成，许用压应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ，试确定横截面的边宽 a 。



题 9-21 图

解：1. 查角钢的有关数据

由书中附录 F 表 1 查得（参看图 9-21）



(双对称截面)

图9-21

$$A_1 = 9.397\text{cm}^2 = 9.397 \times 10^{-4}\text{m}^2$$

$$I_1 = 57.35\text{cm}^4 = 5.735 \times 10^{-7}\text{m}^4$$

$$y_0 = 2.19\text{cm} = 0.0219\text{m}$$

2. 计算惯性矩及横截面面积（长度均以 m 为单位）

$$\begin{aligned} I_z &= 4[I_1 + A_1(\frac{a}{2} - y_0)^2] = 4 \times [5.735 \times 10^{-7} + (9.397 \times 10^{-4}) \times (\frac{a}{2} - 0.0219)^2] \text{m}^4 \\ &= [9.397 \times 10^{-4} a^2 - 8.232 \times 10^{-5} a + 4.097 \times 10^{-6}] \text{m}^4 \end{aligned} \quad (\text{a})$$

$$A = 4A_1 = 4 \times 9.397 \times 10^{-4}\text{m}^2 = 3.759 \times 10^{-3}\text{m}^2$$

3. 计算折减系数

依据公式(9-18)，得

$$\varphi = \frac{\sigma}{[\sigma]} = \frac{F}{A[\sigma]} = \frac{450 \times 10^3}{3.759 \times 10^{-3} \times 160 \times 10^6} = 0.748$$

4. 查 λ 值

根据 φ 值及所给材料，由书中图 9-17 查到 $\lambda = 79$ 。

5. 确定边宽 a

依据柔度算式 $\lambda = \mu l \sqrt{A/I}$ ，可得

$$I = \frac{A(\mu l)^2}{\lambda^2} = \frac{3.759 \times 10^{-3} \times (1 \times 6)^2 \text{ m}^4}{79^2} = 2.168 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \quad (\text{b})$$

注意到式(b)与式(a)相等，由此得

$$(9.397 \times 10^{-4} a^2 - 8.232 \times 10^{-5} a + 4.097 \times 10^{-6}) = 2.168 \times 10^{-5}$$

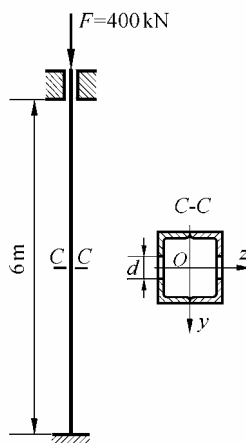
化简后成为

$$(a^2 - 8.76 \times 10^{-2} a - 1.871 \times 10^{-2}) = 0$$

$$a = \frac{8.76 \times 10^{-2} \pm \sqrt{(8.76 \times 10^{-2})^2 + 4 \times 1.871 \times 10^{-2}}}{2} \text{ m} = \frac{0.0876 \pm 0.2873}{2} \text{ m}$$

舍去增根，最后取 $a = 0.1874 \text{ m} = 187.4 \text{ mm}$ 。

9-23 图示立柱，由两根槽钢焊接而成，在其中点横截面 C 处，开有一直径为 $d = 60 \text{ mm}$ 的圆孔，立柱用低碳钢 Q275 制成，许用压应力 $[\sigma] = 180 \text{ MPa}$ ，轴向压力 $F = 400 \text{ kN}$ 。试选择槽钢型号。



题 9-23 图

解：1. 第一次试算

设取 $\varphi_1 = 0.5$ ，依据书上公式 (9-18)，可得

$$A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{400 \times 10^3 \text{ N}}{0.5 \times (180 \times 10^6 \text{ Pa})} = 4.444 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

单根槽钢的横截面面积为 $A' = 2.222 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 。从书中附录 F 型钢表中查得 16 槽钢横截面的有关数据为

$$A = 25.162 \text{ cm}^2 = 2.5162 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \quad I_z = 935 \text{ cm}^4 = 9.35 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = 83.4 \text{ cm}^4 = 8.34 \times 10^{-7} \text{ m}^4, \quad b = 65 \text{ mm} = 6.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$z_0 = 1.75 \text{ cm} = 1.75 \times 10^{-2} \text{ m}$$

由此可得立柱横截面的有关几何量为

$$A = 2 \times 2.5162 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 5.032 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_z = 2 \times 9.35 \times 10^{-6} \text{ m}^4 = 1.87 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_y = 2 \times [8.34 \times 10^{-7} + 2.5162 \times 10^{-3} \times (6.5 - 1.75)^2 \times 10^{-4}] \text{ m}^4 = 1.302 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_y < I_z$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{1.302 \times 10^{-5}}{5.032 \times 10^{-3}}} \text{ m} = 5.087 \times 10^{-2} \text{ m}$$

于是有

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0.5 \times 6}{5.087 \times 10^{-2}} = 58.97$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{400 \times 10^3 \text{ N}}{5.032 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 7.95 \times 10^7 \text{ Pa} = 79.5 \text{ MPa}$$

从 $\varphi - \lambda$ 图中查得 $\varphi_1' = 0.822$, 由此得

$$[\sigma_{\text{st}}] = \varphi_1' [\sigma] = 0.822 \times (180 \times 10^6 \text{ Pa}) = 148.0 \text{ MPa}$$

稳定许用应力超过工作应力甚多, 故需再算。

2. 第二次试算

设取 $\varphi_2 = \frac{1}{2}(0.5 + 0.822) = 0.661$, 由此可得

$$A \geq \frac{400 \times 10^3 \text{ N}}{0.661 \times (180 \times 10^6 \text{ Pa})} = 3.36 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

单根槽钢的横截面面积为 $A' = 1.68 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 。从型钢表中查得 14a 槽钢横截面的有关数据为

$$A = 18.516 \text{ cm}^2 = 1.8516 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \quad I_z = 564 \text{ cm}^4 = 5.64 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = 53.2 \text{ cm}^4 = 5.32 \times 10^{-7} \text{ m}^4, \quad b = 58 \text{ mm} = 5.8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$z_0 = 1.71 \text{ cm} = 1.71 \times 10^{-2} \text{ m}$$

由此可得立柱横截面的有关几何量为

$$A = 2 \times 1.8516 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 3.7032 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_y = 2 \times [5.32 \times 10^{-7} + 1.8516 \times 10^{-3} \times (5.8 - 1.71)^2 \times 10^{-4}] \text{ m}^4 = 7.259 \times 10^{-6} \text{ m}^4 < I_z$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{7.259 \times 10^{-6}}{3.7032 \times 10^{-3}}} \text{ m} = 4.427 \times 10^{-2} \text{ m}$$

于是有

$$\lambda = \frac{0.5 \times 6}{4.427 \times 10^{-2}} = 67.77$$

$$\sigma = \frac{400 \times 10^3 \text{ N}}{3.7032 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 108.0 \text{ MPa}$$

从 $\varphi - \lambda$ 图中查得 $\varphi'_2 = 0.782$, 由此得

$$[\sigma_{\text{st}}] = 0.782 \times 180 \text{ MPa} = 140.8 \text{ MPa}$$

稳定许用应力超过工作应力仍然较多, 还需再算。

3. 第三次试算

设取 $\varphi_3 = \frac{1}{2}(0.661 + 0.782) = 0.722$, 由此可得

$$A \geq \frac{400 \times 10^3 \text{ N}}{0.722 \times (180 \times 10^6 \text{ MPa})} = 3.078 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

单根槽钢的横截面面积为 $A' = 1.539 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ 。从型钢表中查得 12.6 槽钢横截面的有关数据为

$$\begin{aligned} A &= 15.692 \text{ cm}^2 = 1.5692 \times 10^{-3} \text{ m}^2, & I_z &= 391 \text{ cm}^4 = 3.91 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \\ I_y &= 38.0 \text{ cm}^4 = 3.80 \times 10^{-7} \text{ m}^4, & b &= 53 \text{ mm} = 5.3 \times 10^{-2} \text{ m} \\ z_0 &= 1.59 \text{ cm} = 1.59 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

由此可得立柱横截面的有关几何量为

$$A = 2 \times 1.5692 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 3.1384 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_y = 2 \times [3.80 \times 10^{-7} + 1.5692 \times 10^{-3} \times (5.3 - 1.59)^2 \times 10^{-4}] \text{ m}^4 = 5.080 \times 10^{-6} \text{ m}^4 < I_z$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{5.080 \times 10^{-6}}{3.1384 \times 10^{-3}}} \text{ m} = 4.023 \times 10^{-2} \text{ m}$$

于是有

$$\lambda = \frac{0.5 \times 6}{4.023 \times 10^{-2}} = 74.57$$

$$\sigma = \frac{400 \times 10^3 \text{ N}}{3.1384 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 127.5 \text{ MPa}$$

从 $\varphi - \lambda$ 图中查得 $\varphi'_3 = 0.742$, 由此得

$$[\sigma_{\text{st}}] = 0.742 \times 180 \text{ MPa} = 133.6 \text{ MPa}$$

稳定许用应力略大于工作应力 (大 4.8%), 选用 12.6 槽钢能满足稳定性要求。

4. 强度校核

查型钢表, 得 12.6 槽钢的 $t = 5.5 \text{ mm} = 5.5 \times 10^{-3} \text{ m}$, 由此得

$$\sigma = \frac{F}{A_c} = \frac{400 \times 10^3 \text{ N}}{2 \times (1.5692 \times 10^{-3} - 60 \times 10^{-3} \times 5.5 \times 10^{-3}) \text{ m}^2} = 161.4 \text{ MPa} < [\sigma]$$

可见，其强度也符合要求。

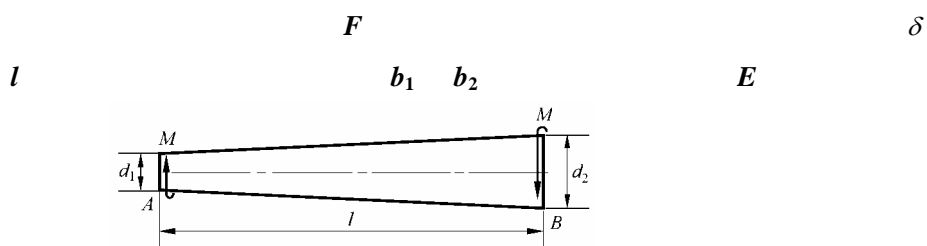
5．结论

选用 12.6 槽钢。

11-2	1
11-3	2
11-4	3
11-5	4
11-6	4
11-8	5
11-9	6
11-10	7
11-12	8
11-13	9
11-14	9
11-15	10
11-16	11
11-17	12
11-18	14
11-21	16
11-23	16
11-24	17
11-26	18
11-28	19
11-29	20
11-30	21
11-31	22
11-33	24
*11-34	25
11-36	26
11-38	28
11-40	28

()

11-2



11-2

$$A(x)=\delta\left(b_1+\frac{b_2-b_1}{l}x\right)$$

$$\sigma(x)=\frac{F}{\delta\left(b_1+\frac{b_2-b_1}{l}x\right)}$$

$$V_{\varepsilon}=\int_0^l\frac{\sigma^2(x)}{2E}A(x)\mathrm{d}x=\frac{F^2}{2E\delta}\int_0^l\frac{1}{b_1+\frac{b_2-b_1}{l}x}\mathrm{d}x=\frac{F^2l}{2E\delta(b_2-b_1)}\ln\frac{b_2}{b_1}$$

$$W=\frac{1}{2}F\Delta l$$

$$W=V_{\varepsilon}$$

$$\Delta l=\frac{Fl}{E\delta(b_2-b_1)}\ln\frac{b_2}{b_1}$$

11-3

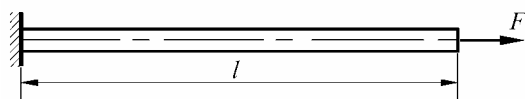
F

A

-

$$\sigma=c\sqrt{\varepsilon}$$

c



11-3

$$\sigma=\frac{F}{A}\quad,\quad\varepsilon=\frac{\Delta}{l}$$

$$\sigma=c\sqrt{\varepsilon}$$

$$F=cA\sqrt{\frac{\Delta}{l}}$$

11-3

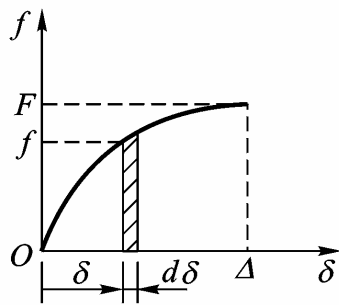


图11-3

$$dW = fd\delta = cA\sqrt{\frac{\delta}{l}}d\delta$$

$$W = \int_0^{\Delta} cA\sqrt{\frac{\delta}{l}}d\delta = \frac{2cA}{3\sqrt{l}}\Delta^{3/2} = \frac{2F^3l}{3c^2A^2}$$

11-4

F

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4} \left(\cos \alpha + \frac{2G \sin^2 \alpha}{E \cos \alpha} \right)$$

D

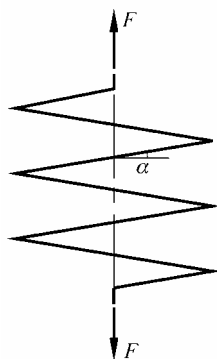
d

n

α

E

G



11-4

$$M(s) = \frac{FD}{2} \sin \alpha, \quad T(s) = \frac{FD}{2} \cos \alpha$$

a

$$W = V_{\epsilon}$$

b

$$W = \frac{F\lambda}{2}$$

c

$$V_{\varepsilon} = \int_0^l \frac{T^2(s)}{2GI_p} ds + \int_0^l \frac{M^2(s)}{2EI} ds \qquad \text{d}$$

$$l = \frac{\pi D n}{\cos \alpha} \qquad \text{e}$$

$$V_{\varepsilon} = \frac{F^2 D^3 n \pi}{8GI_p} \left(\cos \alpha + \frac{GI_p \sin^2 \alpha}{EI \cos \alpha} \right) \qquad \text{f}$$

$$\lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} \left(\cos \alpha + \frac{2G \sin^2 \alpha}{E \cos \alpha} \right)$$

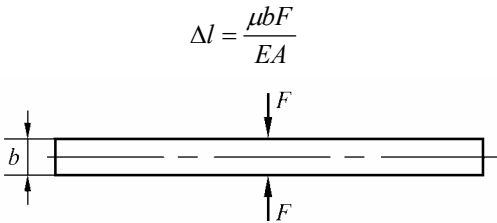
11-5

EA

μ

F

b



11-5

F_1

$$F_1 \cdot \Delta l = F \cdot \left(\frac{\mu F_1 b}{EA} \right)$$

$$\Delta l = \frac{\mu b F}{EA}$$

11-6

1

2

σ_1

a

1

2

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E_1}, \quad \varepsilon_2' = -\frac{\mu_{12} \sigma_1}{E_1}$$

E_1

μ_{12}

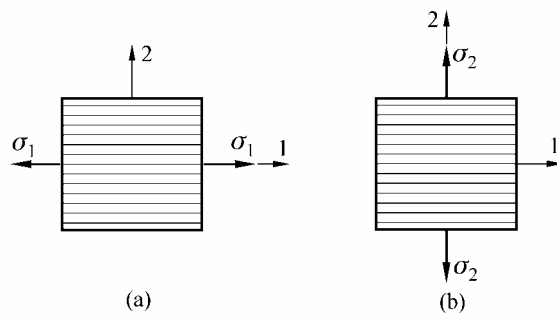
σ_2

b

$$\varepsilon_1'' = -\frac{\mu_{21} \sigma_2}{E_2}, \quad \varepsilon_2'' = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$E_2 \quad \mu_{21}$$

$$\frac{\mu_{12}}{E_1} = \frac{\mu_{21}}{E_2}$$



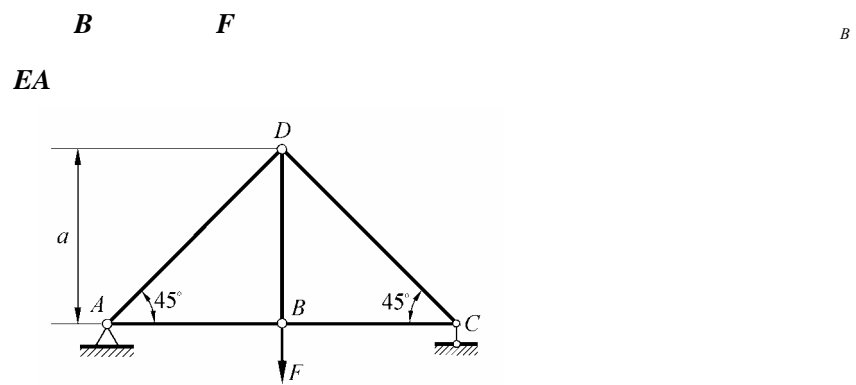
11-6

$$\sigma_2 \cdot \varepsilon_2' = \sigma_1 \cdot \varepsilon_1''$$

$$\sigma_2 \cdot \left(-\frac{\mu_{12}\sigma_1}{E_1} \right) = \sigma_1 \cdot \left(-\frac{\mu_{21}\sigma_2}{E_2} \right)$$

$$\frac{\mu_{12}}{E_1} = \frac{\mu_{21}}{E_2}$$

11-8



11-8

$$\Delta_B = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^5 F_{Ni} l_i \frac{\partial F_{Ni}}{\partial F}$$

11-8

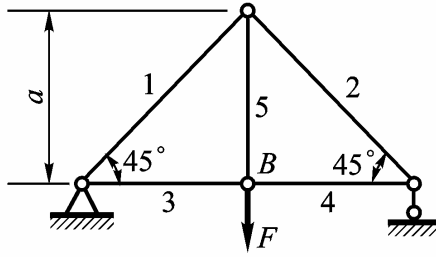


图11-8

Δ_B

l	l_i	F_{Ni}	$\frac{\partial F_{Ni}}{\partial F}$	$F_{Ni} l_i \frac{\partial F_{Ni}}{\partial F}$
1	$\sqrt{2}a$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}F$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}Fa$
2	$\sqrt{2}a$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}F$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}Fa$
3	a	$\frac{1}{2}F$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}Fa$
4	a	$\frac{1}{2}F$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}Fa$
5	a	F	1	Fa
Σ				$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}Fa$

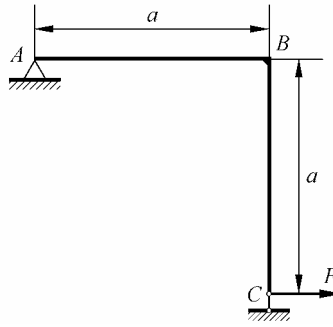
$$\Delta_B = \frac{(3+2\sqrt{2})Fa}{2EA}$$

11-9

F

C

EI



11-9

C

M_C

11-9

$$M(x_1) = \left(F + \frac{M_C}{a} \right) x_1, \quad \frac{\partial M(x_1)}{\partial M_C} = \frac{x_1}{a}$$

$$M(x_2) = Fx_2 + M_C, \quad \frac{\partial M(x_2)}{\partial M_C} = 1$$

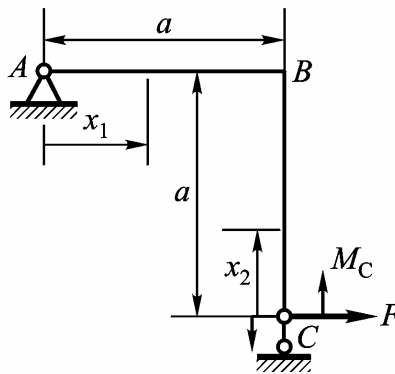


图11-9

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (Fx_1) \left(\frac{x_1}{a} \right) dx_1 + \int_0^a (Fx_2)(1) dx_2 \right] = \frac{5Fa^2}{6EI} \quad \curvearrowright$$

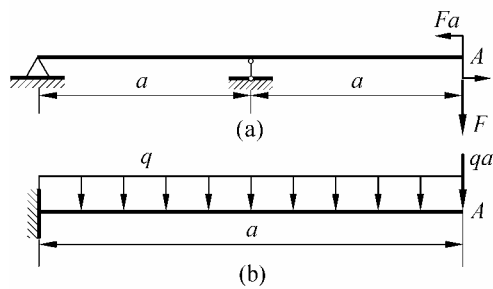
11-10

A

A

θ_A

EI



11-10

a $Fa = M_A$ **11-10 a**

$$M(x) = M_A - Fx \quad \frac{\partial M(x)}{\partial F} = -x \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_A} = 1$$

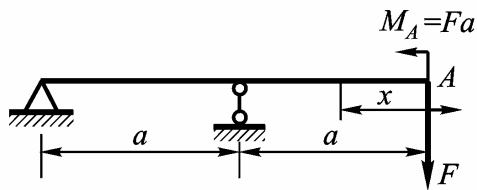


图11-10(a)

$$M = 0$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^a (Fa - Fx)(-x) dx = -\frac{Fa^3}{6EI}$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^a (Fa - Fx)(1) dx = \frac{Fa^2}{2EI} \quad \curvearrowright$$

b $qa = F$ **A** M_A **A** **x**

$$M(x) = -M_A - Fx - \frac{1}{2}qx^2 \quad \frac{\partial M(x)}{\partial F} = -x \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_A} = -1$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^a \left(-qax - \frac{1}{2}qx^2 \right) (-x) dx = \frac{11qa^4}{24EI}$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^a \left(-qax - \frac{1}{2}qx^2 \right) (-1) dx = \frac{2qa^3}{3EI} \quad \curvearrowright$$

11-12

A GI_p **m**



11-12

A M_A **A** x_1 x_2

$$T(x_1) = M_A + mx_1 \quad , \quad T(x_2) = M_A + ma$$

$$\frac{\partial T(x_1)}{\partial M_A}=\frac{\partial T(x_2)}{\partial M_A}=1$$

$$\varphi_A=\frac{1}{GI_{\rm p}}\biggl[\int_0^a(mx_1)(1){\rm d}x_1+\int_0^a(ma)(1){\rm d}x_2\biggr]=\frac{3ma^2}{2GI_{\rm p}}$$

11-13

11-3

F

1

V

$$\sigma = c\sqrt{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma^2}{c^2} = \frac{F^2}{c^2A^2}$$

$$\mathrm{d}v\,=\,\sigma\cdot\mathrm{d}\varepsilon=c\sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon$$

$$v_{\varepsilon}=c\int_0^{\varepsilon}\varepsilon^{*\frac{1}{2}}\mathrm{d}\varepsilon^{*}=\frac{2c}{3}\varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

$$V_{\varepsilon}=v_{\varepsilon}\cdot V=\frac{2c}{3}\biggl(\frac{F^2}{c^2A^2}\biggr)^{\frac{3}{2}}\cdot Al=\frac{2F^3l}{3c^2A^2}$$

2

*V*_c

$$v_{\rm c}=\sigma\varepsilon-v_{\varepsilon}=\frac{F^3}{3c^2A^3}$$

$$V_{\rm c}=v_{\rm c}\cdot V=\biggl(\frac{F^3}{3c^2A^3}\biggr)\cdot Al=\frac{F^3l}{3c^2A^2}$$

3

F

F

$$\varDelta_F=\varDelta l=\varepsilon l=\frac{F^2l}{c^2A^2}$$

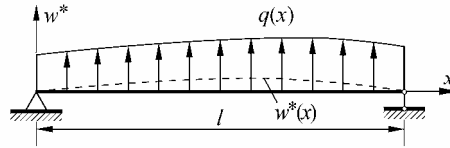
11-14

***q*(*x*)**

w^{*}(*x*)

$$\int_l w^*(x) q(x) dx = \int_l M(x) d\theta^*$$

$$q(x) \quad W_e \quad M(x) \quad W_i$$



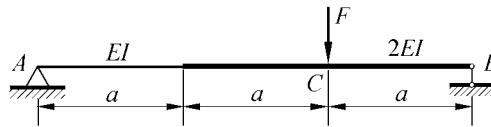
11-14

$$q(x) = \frac{dF_s}{dx}, \quad F_s(x) = \frac{dM}{dx}, \quad \theta^* = \frac{dw^*}{dx}$$

$$\begin{aligned} W_e &= \int_l w^*(x) q(x) dx = \int_0^l w^*(x) \cdot \frac{dF_s}{dx} dx = w^* F_s \Big|_0^l - \int_0^l F_s \cdot \frac{dw^*}{dx} dx \\ &= - \int_0^l \theta^* \frac{dM}{dx} dx = - \theta^* M \Big|_0^l + \int_0^l M(x) d\theta^* = \int_l M(x) d\theta^* = W_i \end{aligned}$$

11-15

$$F \quad C \quad A \quad \theta_A$$



11-15

$$1 \quad F = 1$$

$$2 \quad A$$

$$M_A = 1$$

$$11-15$$

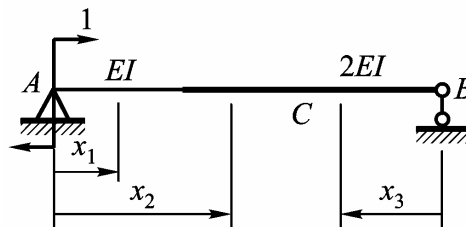


图11-15

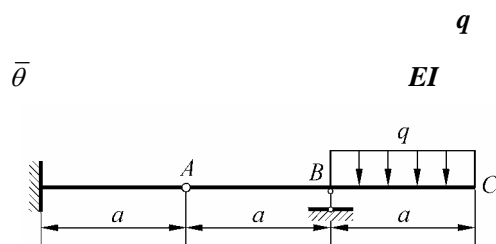
$$\overline{M}(x_1) = \frac{1}{3} x_1, \quad \tilde{M}(x_1) = 1 - \frac{1}{3a} x_1, \quad M(x_1) = \frac{F}{3} x_1$$

$$\begin{aligned}\bar{M}(x_2) &= \frac{1}{3}x_2 \quad , \quad \tilde{M}(x_2) = 1 - \frac{1}{3a}x_2 \quad , \quad M(x_2) = \frac{F}{3}x_2 \\ \bar{M}(x_3) &= \frac{2}{3}x_3 \quad , \quad \tilde{M}(x_3) = \frac{1}{3a}x_3 \quad , \quad M(x_3) = \frac{2F}{3}x_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_C &= \frac{1}{EI} \int_0^a \left(\frac{1}{3}x_1 \right) \left(\frac{F}{3}x_1 \right) dx_1 + \frac{1}{2EI} \int_a^{2a} \left(\frac{x_2}{3} \right) \left(\frac{F}{3}x_2 \right) dx_2 + \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{2}{3}x_3 \right) \left(\frac{2F}{3}x_3 \right) dx_3 \\ &= \frac{13Fa^3}{54EI}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_A &= \frac{1}{EI} \int_0^a \left(1 - \frac{x_1}{3a} \right) \left(\frac{F}{3}x_1 \right) dx_1 + \frac{1}{2EI} \int_a^{2a} \left(1 - \frac{x_2}{3a} \right) \left(\frac{F}{3}x_2 \right) dx_2 + \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{x_3}{3a} \right) \left(\frac{2F}{3}x_3 \right) dx_3 \\ &= \frac{31Fa^2}{108EI} \quad \curvearrowright\end{aligned}$$

11-16



11-16

$\bar{\theta}$

11-16

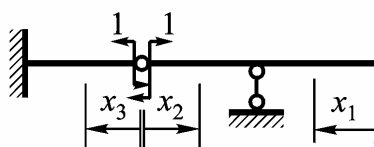


图11-16

$$\bar{M}(x_1) = 0, \quad M(x_1) = -\frac{q}{2}x_1^2$$

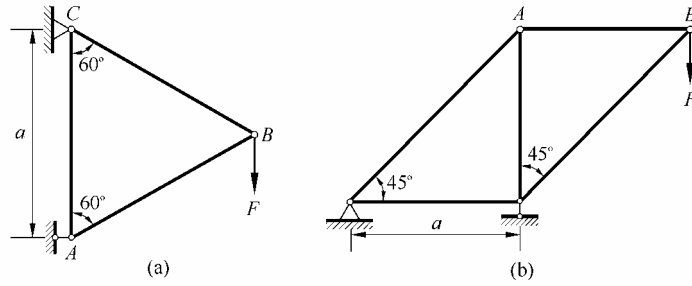
$$\bar{M}(x_2) = 1 - \frac{x_2}{a}, \quad M(x_2) = -\frac{qa}{2}x_2$$

$$\bar{M}(x_3) = 1 + \frac{x_3}{a}, \quad M(x_3) = \frac{qa}{2}x_3$$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{EI} \int_0^a \left(1 - \frac{x_2}{a}\right) \left(-\frac{qa}{2} x_2\right) dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^a \left(1 + \frac{x_3}{a}\right) \left(\frac{qa}{2} x_3\right) dx_3 = \frac{qa^3}{3EI}$$

11-17

B AB B F EA



11-17

a Δ_B θ_{AB} 11-17 a, 1 a, 2

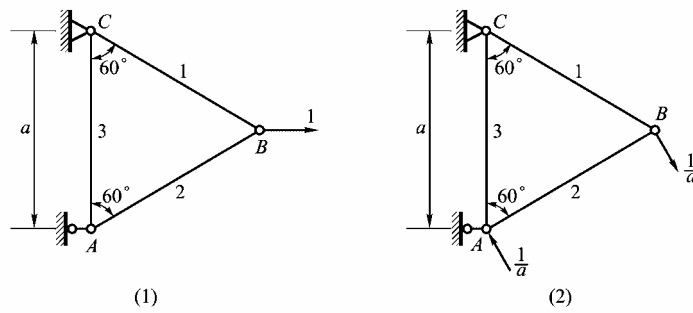


图11-17(a)

B

i	l_i	\bar{F}_{Ni}	F_{Ni}	$\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i$
1	a	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	F	$\frac{\sqrt{3}}{3} Fa$
2	a	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	F	$-\frac{\sqrt{3}}{3} Fa$
3	a	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{F}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{12} Fa$
Σ				$-\frac{\sqrt{3}}{12} Fa$

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA} = -\frac{\sqrt{3} Fa}{12EA}$$

θ_{AB}

i	l_i	\bar{F}_{Ni}	F_{Ni}	$\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i$
1	a	$\frac{2}{\sqrt{3}a}$	F	$\frac{2\sqrt{3}}{3}F$
2	a	$-\frac{1}{\sqrt{3}a}$	F	$-\frac{\sqrt{3}}{3}F$
3	a	$-\frac{1}{\sqrt{3}a}$	$\frac{F}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}F$
Σ				$\frac{5\sqrt{3}}{6}F$

$$\theta_{AB} = \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA} = \frac{5\sqrt{3}F}{6EA} \quad \circlearrowright$$

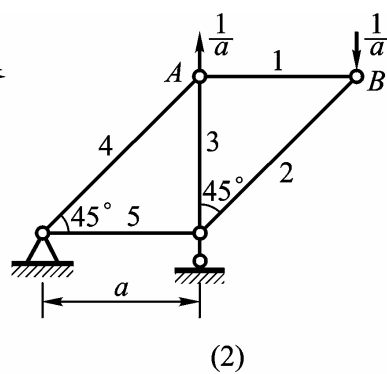
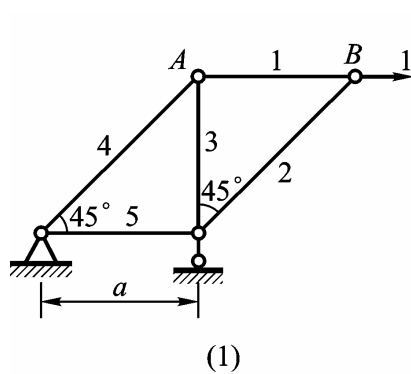
b
 θ_{AB}
11-17 b, 1
b, 2


图11-17(b)

 θ_{AB}

i	l_i	\bar{F}_{Ni}	F_{Ni}	$\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i$
1	a	1	F	Fa
2	$\sqrt{2}a$	0	$-\sqrt{2}F$	0
3	a	-1	F	Fa
4	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}F$	$2\sqrt{2}Fa$
5	a	0	F	0
Σ				$(2 + 2\sqrt{2})Fa$

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^5 \frac{\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA} = \frac{(2 + 2\sqrt{2})Fa}{EA}$$

$$\theta_{AB}$$

i	l_i	\bar{F}_{Ni}	F_{Ni}	$\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i$
1	a	$\frac{1}{a}$	F	F
2	$\sqrt{2}a$	$-\frac{\sqrt{2}}{a}$	$-\sqrt{2}F$	$2\sqrt{2}F$
3	a	0	F	0
4	$\sqrt{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{a}$	$\sqrt{2}F$	$2\sqrt{2}F$
5	a	$-\frac{1}{a}$	F	F
Σ				$(2 + 4\sqrt{2})F$

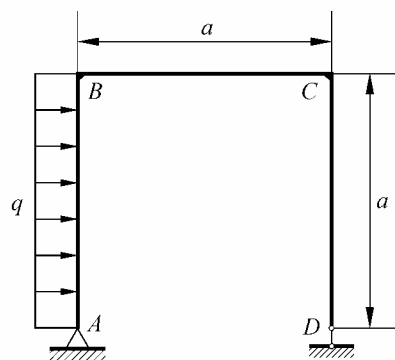
$$\theta_{AB} = \sum_{i=1}^5 \frac{\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA} = \frac{(2 + 4\sqrt{2})F}{EA} \quad \curvearrowright$$

11-18

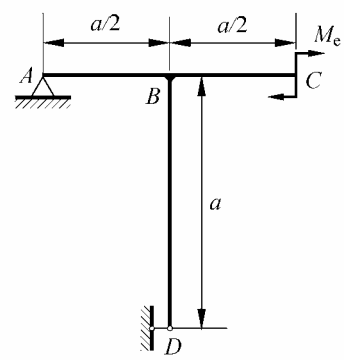
EI

A

D



(a)



(b)

11-18

a θ_A D

11-18 a, 1

a, 2

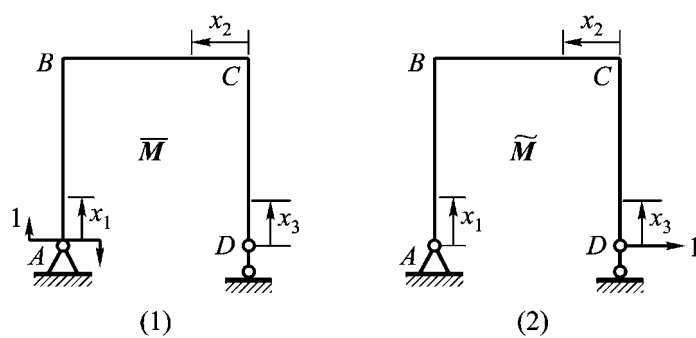


图11-18(a)

$$\begin{aligned}\overline{M}(x_1) &= 1, & \tilde{M}(x_1) &= x_1, & M(x_1) &= qax_1 - \frac{q}{2}x_1^2 \\ \overline{M}(x_2) &= \frac{1}{a}x_2, & \tilde{M}(x_2) &= a, & M(x_2) &= \frac{qa}{2}x_2 \\ \overline{M}(x_3) &= 0, & \tilde{M}(x_3) &= x_3, & M(x_3) &= 0\end{aligned}$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (1) \left(qax_1 - \frac{q}{2}x_1^2 \right) dx_1 + \int_0^a \left(\frac{x_2}{a} \right) \left(\frac{qax_2}{2} \right) dx_2 \right] = \frac{qa^3}{2EI} \quad \cup$$

$$\Delta_D = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (x_1) \left(qax_1 - \frac{q}{2}x_1^2 \right) dx_1 + \int_0^a (a) \left(\frac{qa}{2}x_2 \right) dx_2 \right] = \frac{11qa^4}{24EI}$$

b θ_A Δ_D 11-18 b, 1 b, 2

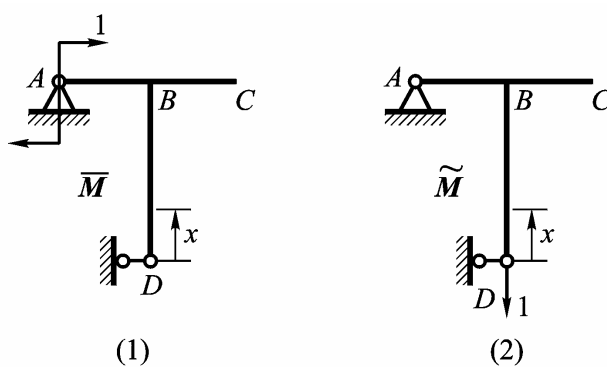


图11-18(b)

$$\overline{M}(x) = \frac{1}{a}x, \quad \tilde{M}(x) = \frac{1}{2}x, \quad M(x) = \frac{M_e}{a}x$$

BC \overline{M} \tilde{M} 0 AB M 0

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^a \left(\frac{x}{a} \right) \left(\frac{M_e}{a}x \right) dx = \frac{M_e a}{3EI} \quad \cup$$

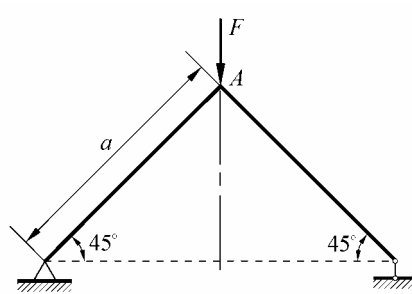
$$\Delta_D = \frac{1}{EI} \int_0^a \left(\frac{x}{2} \right) \left(\frac{M_e}{a} x \right) dx = \frac{M_e a^2}{6EI}$$

11-21

$$d \quad a = 10d$$

A

- 1
- 2



11-21

$$F=1$$

A

x

$$1 \quad M \quad F_N$$

$$\overline{M}(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} x, \quad M(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} Fx$$

$$\overline{F}_N = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad F_N = \frac{\sqrt{2}}{4} F$$

$$\Delta_A = \frac{2}{EI} \int_0^a \left(\frac{\sqrt{2}}{4} x \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} Fx \right) dx + \frac{2}{EA} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{4} F \right) a = \frac{Fa^3}{12EI} + \frac{Fa}{4EA} = \frac{16030F}{3\pi Ed}$$

$$2 \quad M$$

$$\Delta_A = \frac{Fa^3}{12EI} = \frac{16000F}{3 \quad Ed}$$

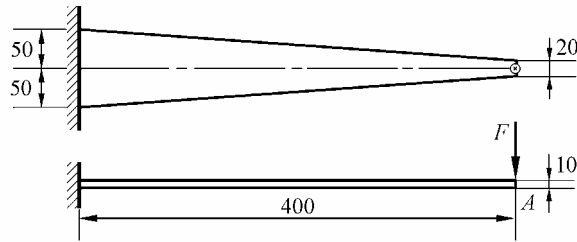
0.2%

11-23

$$F = 1\text{kN}$$

$$E = 200\text{GPa}$$

A



11-23

$F=1$ Δ_A A x

$$\overline{M}(x) = -x, \quad M(x) = -Fx$$

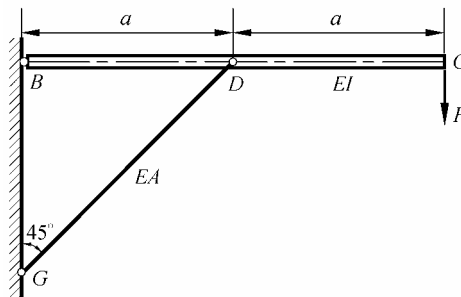
$$I_z(x) = \frac{b(x)h^3}{12} = \frac{0.010^3}{12} \times \left(0.020 + \frac{x}{5}\right) = \frac{1.000 \times 10^{-7}}{6} \times (0.100 + x)$$

$$\Delta_A = \int_0^l \frac{\overline{M}(x)M(x)}{EI_z(x)} dx = \frac{6F}{10^{-7}E} \int_0^{0.400} \frac{x^2}{0.100 + x} dx = \frac{6 \times 1 \times 10^3 \times 0.0560943}{10^{-7} \times 200 \times 10^9} \text{ m}$$

$$= 0.01683 \text{ m} = 16.83 \text{ mm}$$

11-24

C F
 θ_C BC EI DG EA



11-24

$F=1$ C θ_C 11-24

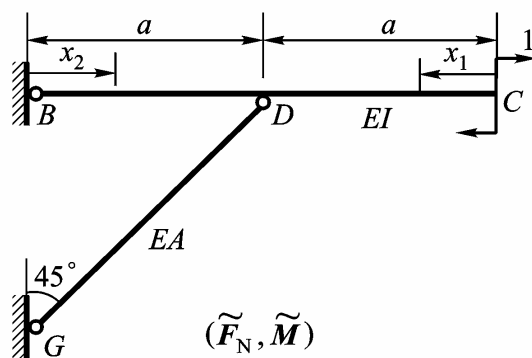


图11-24

$$\bar{M}(x_1) = -x_1, \quad \tilde{M}(x_1) = -1, \quad M(x_1) = -Fx_1$$

$$\bar{M}(x_2) = -x_2, \quad \tilde{M}(x_2) = -\frac{x_2}{a}, \quad M(x_2) = -Fx_2$$

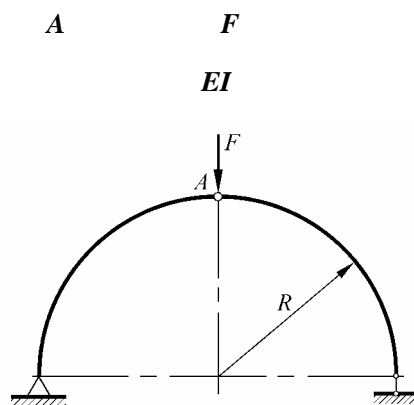
$$\bar{F}_N = -2\sqrt{2}, \quad \tilde{F}_N = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \quad F_N = -2\sqrt{2}F$$

$$\Delta_C = \frac{2}{EI} \int_0^a (-x_1)(-Fx_1) dx_1 + \frac{1}{EA} (-2\sqrt{2}) \left(-2\sqrt{2}F \right) (\sqrt{2}a) = \frac{2Fa^3}{3EI} + \frac{8\sqrt{2}Fa}{EA}$$

$$\begin{aligned} \theta_C &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^a (-1)(-Fx_1) dx_1 + \int_0^a \left(-\frac{x_2}{a} \right) (-Fx_2) dx_2 \right] + \frac{1}{EA} \left(-\frac{\sqrt{2}}{a} \right) (-2\sqrt{2}F) (\sqrt{2}a) \\ &= \frac{5Fa^2}{6EI} + \frac{4\sqrt{2}F}{EA} \quad \curvearrowright \end{aligned}$$

11-26

$\bar{\theta}$



11-26

$\bar{\theta}$

11-26

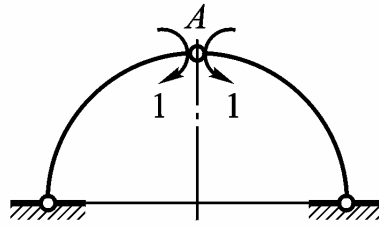


图11-26

φ A

$$\bar{M}(\varphi) = \cos \varphi, \quad M(\varphi) = \frac{FR}{2}(\sin \varphi + \cos \varphi - 1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \frac{2}{EI} \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi) \left[\frac{FR}{2} (\sin \varphi + \cos \varphi - 1) \right] R d\varphi \\ &= \frac{FR^2}{EI} \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi - \cos \varphi) d\varphi = \frac{(\pi - 2)FR^2}{4EI} \end{aligned}$$

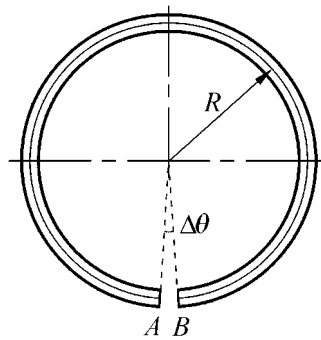
11-28

A B

A B

$\Delta \theta$

EI



11-28

A B

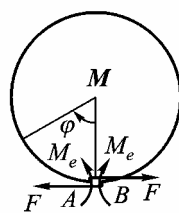
M_e

F

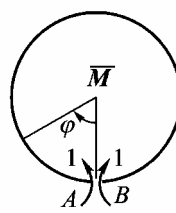
M_e F

$\theta_{A/B}$ $\Delta_{A/B}$

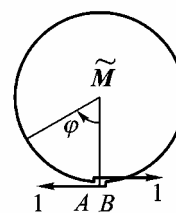
11-28 a b c



(a)



(b)



(c)

图11-28

$$M(\varphi) = M_e + FR(1 - \cos \varphi), \quad \overline{M}(\varphi) = 1, \quad \tilde{M}(\varphi) = R(1 - \cos \varphi)$$

$$\theta_{A/B} = \frac{2}{EI} \int_0^\pi (1) [M_e + FR(1 - \cos \varphi)] R d\varphi = \frac{2\pi R}{EI} (M_e + FR)$$

$$\Delta_{A/B} = \frac{2}{EI} \int_0^\pi [R(1 - \cos \varphi)] [M_e + FR(1 - \cos \varphi)] R d\varphi = \frac{2\pi R^2}{EI} \left(M_e + \frac{3}{2} FR \right)$$

$$\theta_{A/B} = \Delta\theta, \quad \Delta_{A/B} = R \cdot \Delta\theta$$

$$F = 0, \quad M_e = \frac{EI}{2\pi R} \Delta\theta$$

$$M_e = EI \Delta\theta / (2\pi R)$$

11-29

A B

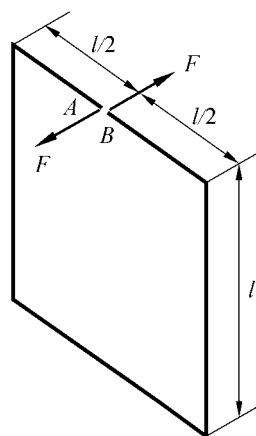
F

A / B

EI_y EI_z

GI_t

$$I_y = I_z = I$$



11-29

11-29

A / B

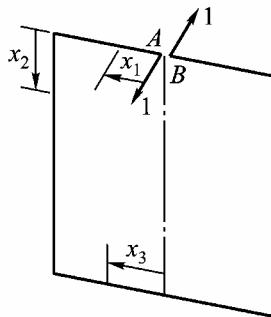


图11-29

$$M(x_1) = -Fx_1, \quad \bar{M}(x_1) = -x_1$$

$$M(x_2) = Fx_2, \quad \bar{M}(x_2) = x_2$$

$$M(x_3) = Fx_3, \quad \bar{M}(x_3) = x_3$$

$$T(x_2) = -\frac{Fl}{2}, \quad \bar{T}(x_2) = -\frac{l}{2}$$

$$T(x_3) = -Fl, \quad \bar{T}(x_3) = -l$$

$$I_y = I_z = I$$

$$\Delta_{A/B} = 2 \left[\frac{1}{EI} \int_0^{l/2} Fx_1^2 dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^l Fx_2^2 dx_2 + \frac{1}{GI_t} \int_0^l \frac{Fl^2}{4} dx_2 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} Fx_3^2 dx_3 + \frac{1}{GI_t} \int_0^{l/2} Fl^2 dx_3 \right]$$

$$= \frac{5Fl^3}{6EI} + \frac{3Fl^3}{2GI_t} \quad \swarrow \nearrow$$

11-30

M_e

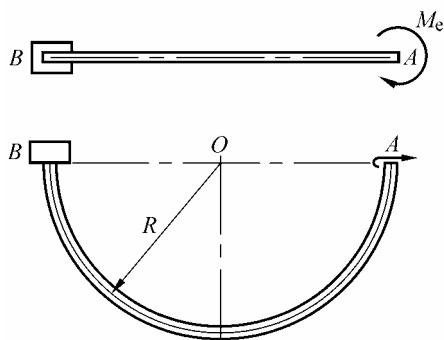
A

φ_A

A

EI

GI_t



11-30

φ_A φ_A 11-30 a b

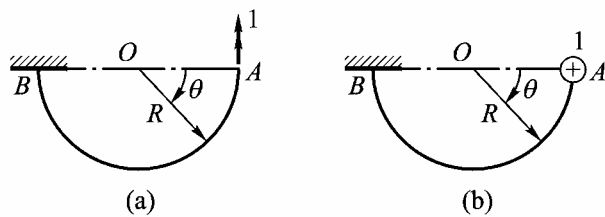


图11-30

φ_A

$$\overline{M}(\theta) = -\sin\theta, \quad M(\theta) = -M_e \sin\theta$$

$$\overline{T}(\theta) = \cos\theta, \quad T(\theta) = M_e \cos\theta$$

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \int_0^\pi M_e \sin^2 \theta R d\theta + \frac{1}{GI_t} \int_0^\pi M_e \cos^2 \theta R d\theta = \frac{\pi M_e R}{2EI} + \frac{\pi M_e R}{2GI_t} \quad \text{C}$$

Δ_A

$$\tilde{M}(\theta) = -R \sin\theta, \quad \tilde{T}(\theta) = -R(1 - \cos\theta)$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^\pi M_e R \sin^2 \theta R d\theta + \frac{1}{GI_t} \int_0^\pi M_e R (\cos^2 \theta - \cos\theta) R d\theta = \frac{\pi M_e R^2}{2EI} + \frac{\pi M_e R^2}{2GI_t}$$

11-31

C F

y

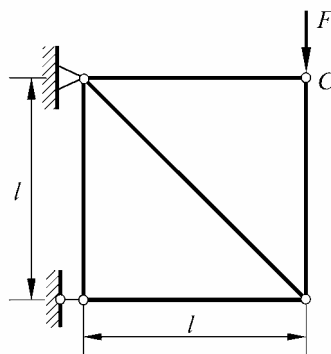
x

-

$$\sigma = c\sqrt{\varepsilon}$$

c

A



11-31

1 $F=1$

11-31

y

x

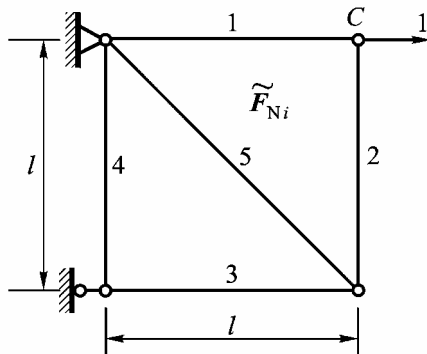


图11-31

2

i	\bar{F}_{Ni}	\tilde{F}_{Ni}	F_{Ni}	l_i
1	0	1	0	l
2	-1	0	$-F$	l
3	-1	0	$-F$	l
4	0	0	0	l
5	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}l$

3 Δl_i F_{Ni}

$$\sigma = c\sqrt{\varepsilon}$$

$$\sigma = -c\sqrt{-\varepsilon}$$

$$\sigma^2 = c^2 \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma^2}{c^2} = \frac{F_N^2}{A^2 c^2}$$

$$\Delta l = \frac{F_N^2 l}{A^2 c^2}, \quad \Delta l_i = \pm \frac{F_{Ni}^2 l_i}{A^2 c^2}$$

4

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^5 \overline{F}_{Ni} \Delta l_i = \frac{6F^2 l}{A^2 c^2}$$

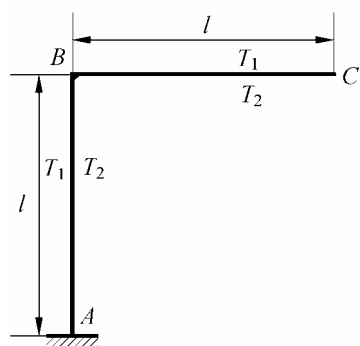
$$\Delta_x = \sum_{i=1}^5 \widetilde{F}_{Ni} \Delta l_i = 0$$

11-33

T_2 AB BC T_1
 C y x θ_C

h

α_l



11-33

1 $d\theta$ $d\delta$

T_2 T_1 11-32

$$d\theta = \frac{\alpha_l (T_2 - T_1) dx}{h}, \quad d\delta = \frac{\alpha_l (T_2 + T_1) dx}{2}$$

2 C

y x θ_C

11-33 a b c

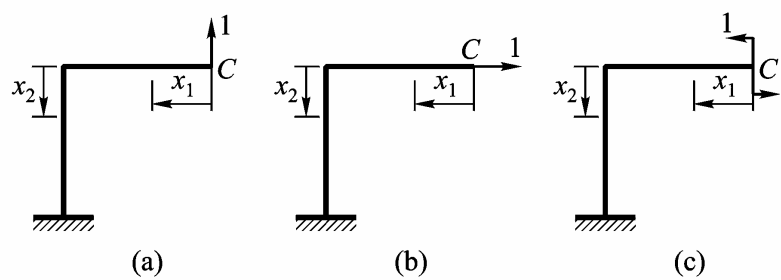


图11-33

a

$$\overline{M}(x_1) = x_1, \quad \overline{M}(x_2) = l, \quad \overline{F}_{N2} = 1$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \int_0^l (x_1) \frac{\alpha_l (T_2 - T_1)}{h} dx_1 + \int_0^l (l) \frac{\alpha_l (T_2 - T_1)}{h} dx_2 + \int_0^l (1) \frac{\alpha_l (T_2 + T_1)}{2} dx_2 \\ &= \frac{3l^2 \alpha_l (T_2 - T_1)}{2h} + \frac{l \alpha_l (T_2 + T_1)}{2} \end{aligned}$$

b

$$\bar{F}_N = 1, \quad \bar{M}(x_2) = -x_2$$

$$\Delta_x = \int_0^l (1) \frac{\alpha_l (T_2 + T_1)}{2} dx_1 + \int_0^l (-x_2) \frac{\alpha_l (T_2 - T_1)}{h} dx_2 = \frac{l \alpha_l (T_2 + T_1)}{2} - \frac{l^2 \alpha_l (T_2 - T_1)}{2h}$$

c

$$\bar{M}(x_1) = 1, \quad \bar{M}(x_2) = 1$$

$$\theta_C = \int_0^l (1) \frac{\alpha_l (T_2 - T_1)}{h} dx_1 + \int_0^l (1) \frac{\alpha_l (T_2 - T_1)}{h} dx_2 = \frac{2l \alpha_l (T_2 - T_1)}{h} \quad \text{C}$$

$T_2 \quad T_1$

***11-34**

11-17

AB

ΔT

B

α_l

a

11-34 a

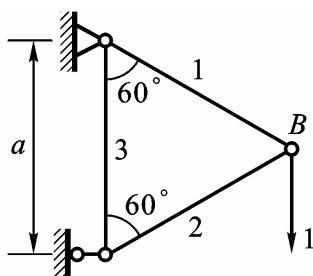


图11-34(a)

i	\bar{F}_{Ni}	Δl_i	$\bar{F}_{Ni} \Delta l_i$
1	1	0	0
2	-1	$\alpha_l a \Delta T$	$-\alpha_l a \Delta T$
3	1/2	0	0
Σ			$-\alpha_l a \Delta T$

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^3 \bar{F}_{Ni} \Delta l_i = -\alpha_l a \Delta T$$

b 11-34 b

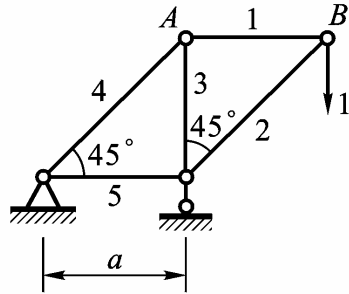


图11-34(b)

i	\bar{F}_{Ni}	Δl_i	$\bar{F}_{Ni} \Delta l_i$
1	1	$\alpha_l a \Delta T$	$\alpha_l a \Delta T$
2	$-\sqrt{2}$	0	0
3	-1	0	0
4	$\sqrt{2}$	0	0
5	-1	0	0
Σ			$\alpha_l a \Delta T$

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^5 \bar{F}_{Ni} \Delta l_i = \alpha_l a \Delta T$$

11-36

11-15

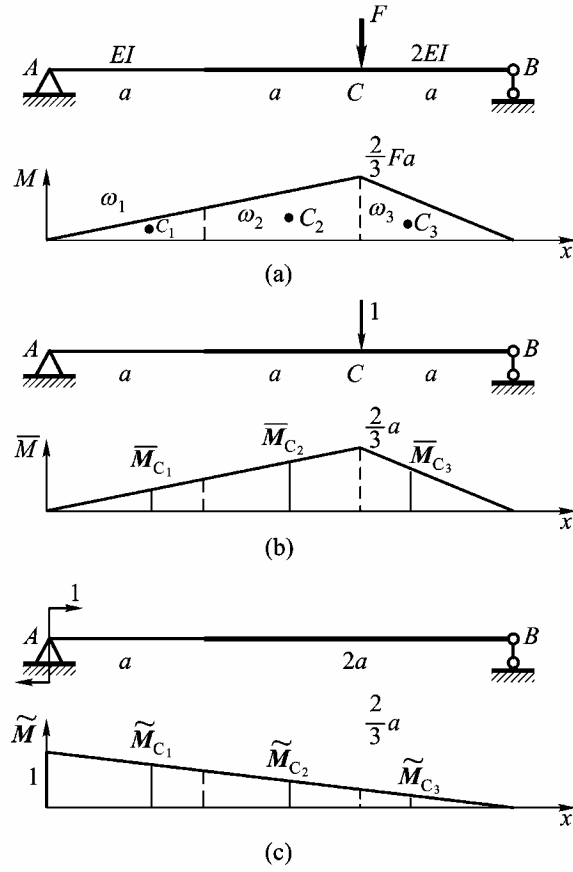


图11-36

$$\omega_1 = \frac{1}{6} Fa^2, \quad \overline{M}_{C_1} = \frac{2}{9} a$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} Fa^2, \quad \overline{M}_{C_2} = \frac{14}{27} a$$

$$\omega_3 = \frac{1}{3} Fa^2, \quad \overline{M}_{C_3} = \frac{4}{9} a$$

$$\tilde{M}_{C_1} = \frac{2}{9}, \quad \tilde{M}_{C_2} = \frac{13}{27}, \quad \tilde{M}_{C_3} = \frac{7}{9}$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fa^2}{6} \right) \left(\frac{2}{9} a \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{Fa^2}{2} \right) \left(\frac{14}{27} a \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{Fa^2}{3} \right) \left(\frac{4}{9} a \right) = \frac{13Fa^3}{54EI}$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fa^2}{6} \right) \left(\frac{2}{9} \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{Fa^2}{2} \right) \left(\frac{13}{27} \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{Fa^2}{3} \right) \left(\frac{7}{9} \right) = \frac{31Fa^2}{108EI} \quad \circlearrowleft$$

11-38

11-11

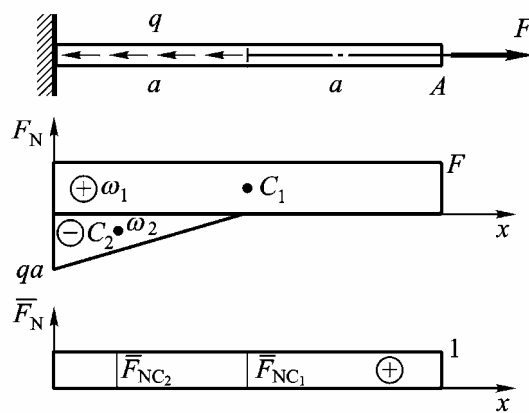


图11-38

$$\omega_1 = 2Fa, \quad \bar{F}_{NC_1} = 1$$

$$\omega_2 = -\frac{qa^2}{2}, \quad \bar{F}_{NC_2} = 1$$

$$\Delta_A = \frac{1}{EA} \left[(2Fa)(1) + \left(-\frac{qa^2}{2} \right) (1) \right] = \frac{(4F - qa)a}{2EA}$$

11-40

11-22

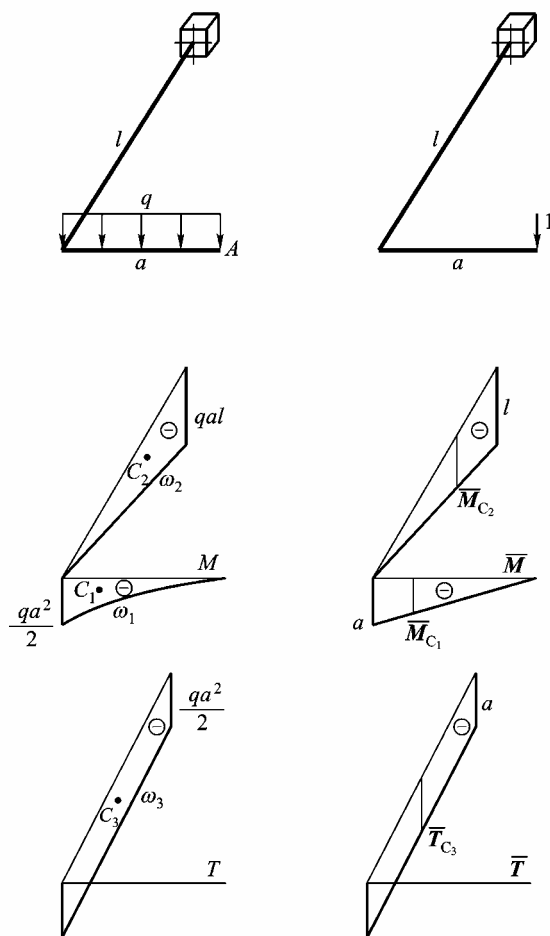


图11-40

$$\omega_1 = -\frac{qa^3}{6}, \quad \overline{M}_{C_1} = -\frac{3}{4}a$$

$$\omega_2 = -\frac{qal^2}{2}, \quad \overline{M}_{C_2} = -\frac{2l}{3}$$

$$\omega_3 = -\frac{qa^2l}{2}, \quad \overline{T}_{C_3} = -a$$

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{qa^3}{6} \right) \left(-\frac{3a}{4} \right) + \frac{1}{EI} \left(-\frac{qal^2}{2} \right) \left(-\frac{2l}{3} \right) + \frac{1}{GI_t} \left(-\frac{qa^2l}{2} \right) (-a) \\ &= \frac{qa^4}{8EI} + \frac{qal^3}{3EI} + \frac{qa^3l}{2GI_t} \end{aligned}$$

12-2	1
12-3	2
12-5	3
12-7	5
12-8	6
12-9	7
12-10	9
12-11	10

()

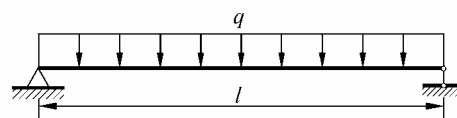
12-2

d q E G

8/3

1

2 $l/d=10$ $l/d=5$



12-2

1

12-2 a

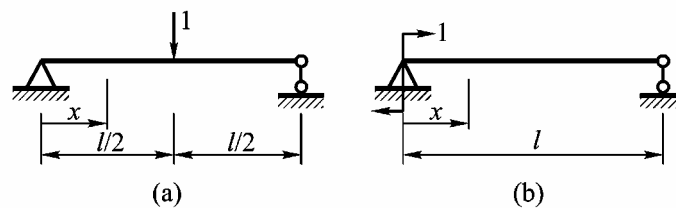


图12-2

$$\overline{M}(x) = \frac{1}{2}x, \quad M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$\overline{F}_s(x) = \frac{1}{2}, \quad F_s(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

$$\Delta_{\max} = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{x}{2} \right) \left(\frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right) dx + \frac{10 \times 2}{9GA} \int_0^{l/2} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{ql}{2} - qx \right) dx$$

$$= \frac{5ql^2}{\pi Ed^2} \left(\frac{l^2}{6d^2} + \frac{8}{27} \right)$$

12-2 b

$$\overline{M}(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad \overline{F}_s(x) = -\frac{1}{l}$$

$$\begin{aligned} \theta_{\max} &= \frac{1}{EI} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(\frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right) dx + \frac{10}{9GA} \int_0^l \left(-\frac{1}{l} \right) \left(\frac{ql}{2} - qx \right) dx \\ &= \frac{ql^3}{24EI} = \frac{8ql^3}{3\pi Ed^4} \end{aligned}$$

2

$$\Delta_s = \frac{40ql^2}{27\pi Ed^2}$$

$$\delta = \frac{\Delta_s}{\Delta_{\max}} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{\left(\frac{l^2}{6d^2} + \frac{8}{27} \right)}$$

$$l/d = 10 \quad \delta = 1.75\%$$

$$l/d = 5 \quad \delta = 6.64\%$$

12-3

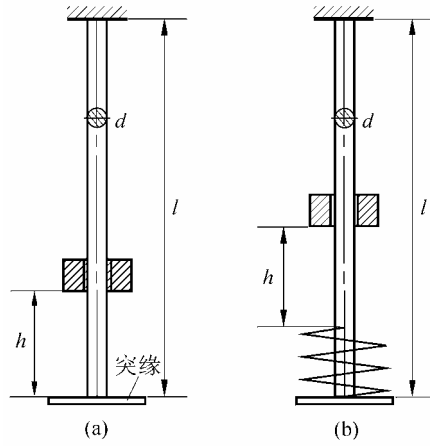
500N **$d=20\text{mm}$** **$l=2\text{m}$** **$E=210\text{GPa}$** **$P=$**
 $h=100\text{mm}$

1

a

2

$k=200 \text{ N/mm}$ **b**



12-3

1 P

$$\Delta_{\text{st}} = \frac{Pl}{EA} = \frac{500 \times 2.00}{210 \times 10^9} \left(\frac{4}{\pi \times 0.020^2} \right) \text{m} = 1.516 \times 10^{-5} \text{m}$$

$$F_{\text{d}} = P \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}} \right)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} &= \frac{F_{\text{d}}}{A} = \frac{P}{A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}} \right) = \frac{500 \text{N}}{\times 10^{-4} \text{m}^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.100}{1.516 \times 10^{-5}}} \right) \\ &= 1.844 \times 10^8 \text{Pa} = 184.4 \text{MPa} \end{aligned}$$

2

$$\Delta_{\text{st}} = \frac{Pl}{EI} + \frac{P}{k} = 1.516 \times 10^{-5} \text{m} + \frac{500}{200 \times 10^3} \text{m} = 2.52 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$F_{\text{d}} = P \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}} \right)$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F_{\text{d}}}{A} = \frac{500 \text{N}}{\times 10^{-4} \text{m}^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.100}{2.52 \times 10^{-3}}} \right) = 1.586 \times 10^7 \text{Pa} = 15.86 \text{MPa}$$

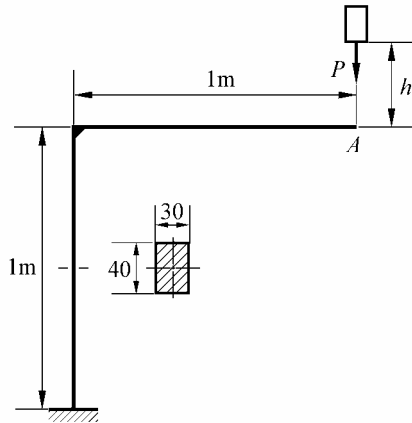
12-5

$P = 300 \text{ N}$

$h = 50 \text{ mm}$

A

$E = 200 \text{ GPa}$



12-5

A

P

$P=1$)

$$\begin{aligned} M(x_1) &= -Px_1, & M(x_2) &= -Pl \\ \bar{M}(x_1) &= -x_1, & \bar{M}(x_2) &= -l \end{aligned}$$

$l=1\text{m}$

x_1

A

x_2

A

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{st}} &= \int_0^l \frac{\bar{M}(x_1)M(x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^l \frac{\bar{M}(x_2)M(x_2)}{EI} dx_2 = \frac{4Pl^3}{3EI} \\ &= \frac{4 \times 300 \times 1.00^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times \left(\frac{0.040 \times 0.030^3}{12} \right)} \text{m} = 2.22 \times 10^{-2} \text{m} \end{aligned}$$

A

$$\Delta_{\text{max}} = \Delta_{\text{d}} = \left(2.22 \times 10^{-2} \text{m} \right) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.050}{2.22 \times 10^{-2}}} \right) = 7.44 \times 10^{-2} \text{m} = 74.4 \text{mm}$$

$$F_{\text{d}} = (300 \text{N}) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.050}{2.22 \times 10^{-2}}} \right) = 1.004 \times 10^3 \text{N}$$

$$M_{\text{max}} = (1.004 \times 10^3 \text{N})(1.00 \text{m}) = 1.004 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}$$

F_{d}

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{1.004 \times 10^3 \text{N}}{\left(\frac{0.040 \times 0.030^2}{6} \right) \text{m}^2} + \frac{1.004 \times 10^3 \text{N}}{(0.040 \times 0.030) \text{m}^2} = 1.682 \times 10^8 \text{Pa} = 168.2 \text{MPa}$$

12-7

$$P = 600\text{N}$$

$$h = 20\text{mm}$$

1

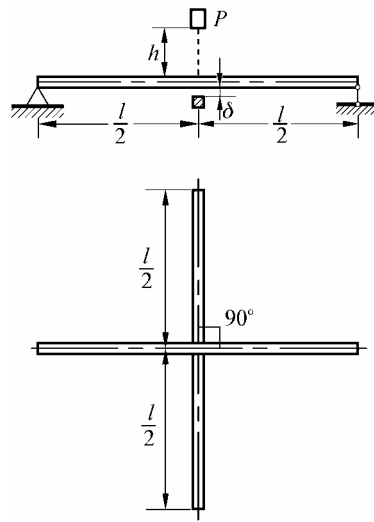
2

$$\delta = 2\text{mm}$$

$$l = 1\text{m}$$

$$a = 30\text{mm}$$

$$E = 200\text{GPa}$$



12-7

1 $\delta = 0$

$$\Delta = \frac{Fl^3}{48EI}$$

$$k = \frac{F}{\Delta} = \frac{48EI}{l^3} = \frac{48 \times 200 \times 10^9 \times \left(\frac{0.030^4}{12} \right)}{1.00^3} \frac{\text{N}}{\text{m}} = 6.48 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$F_d = P \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4hk}{P}} \right) = (600\text{N}) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 \times 0.020 \times 6.48 \times 10^5}{600}} \right)$$

$$= 6.209 \times 10^3 \text{N}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{F_d l}{8 \left(\frac{a^3}{6} \right)} = \frac{6 \times 6.209 \times 10^3 \times 1.00}{8 \times 0.030^3} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$= 1.725 \times 10^8 \text{ Pa} = 172.5 \text{ MPa}$$

$$2 \quad \delta = 2 \text{ mm}$$

$$V = \frac{k}{2} \delta^2$$

$$V_{\varepsilon} = \frac{1}{2} k \Delta_d^2 + \frac{1}{2} k (\Delta_d - \delta)^2$$

$$E_p = (h + \Delta_d) P$$

$$E_p = V$$

$$\Delta_d^2 - \left(\frac{P}{k} + \delta \right) \Delta_d + \left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{Ph}{k} \right) = 0$$

$$\Delta_d = \frac{(P + k\delta) + \sqrt{(P + k\delta)^2 + 4k \left(Ph - \frac{k}{2} \delta^2 \right)}}{2k} = 5.78 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$F_d = k\Delta_d + k(\Delta_d - \delta) = P + \sqrt{(P + k\delta)^2 + 4k \left(Ph - \frac{k}{2} \delta^2 \right)}$$

$$F_{d1}$$

$$F_{d1} = k\Delta_d = \left(6.48 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) \times (5.78 \times 10^{-3} \text{ m}) = 3.747 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{1\max}}{W} = \frac{6F_{d1}l}{4a^3} = \frac{6 \times 3.747 \times 10^3 \times 1.00 \text{ N}}{4 \times 0.030^3 \text{ m}^2}$$

$$= 2.08 \times 10^8 \text{ Pa} = 208 \text{ MPa}$$

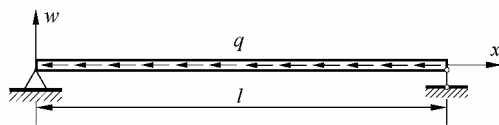
12-8

q

q

$$w = f \sin \frac{x}{l}$$

f



12-8

$$w = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w' = \frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$$

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x (w')^2 dx^* = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\pi f}{l} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi x^*}{l} dx^* \\ &= \frac{\pi f^2}{8l} \left(\frac{2\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l} \right) \end{aligned}$$

q_{cr}

$$\Delta W = \int_0^l \lambda(x) q_{\text{cr}} dx = \frac{\pi f^2 q_{\text{cr}}}{8l} \int_0^l \left(\frac{2\pi x}{l} + \sin \frac{2\pi x}{l} \right) dx = \frac{\pi^2 f^2 q_{\text{cr}}}{8}$$

$$w'' = -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\Delta V_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx = \frac{EI \pi^4 f^2}{2l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EI \pi^4 f^2}{4l^3}$$

$$\Delta W = \Delta V_{\varepsilon}$$

q

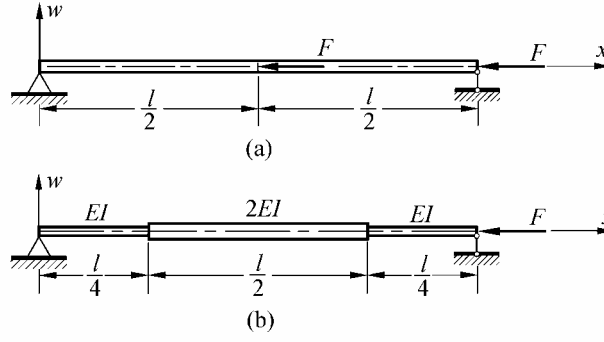
$$q_{\text{cr}} = \frac{2\pi^2 EI}{l^3}$$

12-9

F_{cr}

$$w = f \sin \frac{x}{l}$$

f



12-9

a

$$w = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$w' = f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad w'' = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\lambda \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{l/2} (w')^2 dx = \frac{\pi^2 f^2}{2l^2} \int_0^{l/2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 f^2}{8l}$$

$$\lambda(l) = \frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l}$$

$$\Delta W = F \left[\lambda \left(\frac{l}{2} \right) + \lambda(l) \right] = \frac{3\pi^2 f^2 F}{8l}$$

$$\Delta V_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx = \frac{EI \pi^4 f^2}{2l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EI \pi^4 f^2}{4l^3}$$

$$\Delta W = \Delta V_\varepsilon$$

F

$$F_{\text{cr}} = \frac{8l}{3\pi^2 f^2} \cdot \frac{EI \pi^4 f^2}{4l^3} = \frac{2\pi^2 EI}{3l^2}$$

b

$$w = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$w' = f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad w'' = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx = \frac{\pi^2 f^2}{2l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l}$$

$$\Delta W = F\lambda = \frac{\pi^2 f^2}{4l} F$$

$$\begin{aligned} \Delta V_\varepsilon &= \frac{1 \times 2}{2} \left[\int_0^{l/4} EI (w'')^2 dx + \int_{l/4}^{l/2} 2EI (w'')^2 dx \right] \\ &= \frac{EI f^2 \pi^4}{l^4} \int_0^{l/4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx + \frac{2EI f^2 \pi^4}{l^4} \int_{l/4}^{l/2} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \\ &= \frac{(3\pi + 2)EI \pi^3 f^2}{8l^3} \end{aligned}$$

$$\Delta W = \Delta V_\varepsilon$$

F

$$F_{\text{cr}} = \frac{(3\pi + 2)}{2\pi} \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 1.82 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

12-10

A

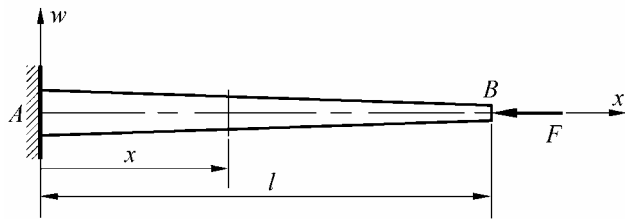
I₀, x

$$I = I_0 \left(1 - \frac{x}{2l} \right)$$

$$w = f \frac{x^2}{l^2}$$

f

F_{cr}



12-10

$$w = f \frac{x^2}{l^2}$$

$$w' = \frac{2f}{l^2} x, \quad w'' = \frac{2f}{l^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx = \frac{2f^2}{l^4} \int_0^l x^2 dx = \frac{2f^2}{3l}$$

$$\Delta W = F\lambda = \frac{2f^2 F}{3l}$$

$$\Delta V_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx = \frac{2f^2}{l^4} \int_0^l EI_0 \left(1 - \frac{x}{2l}\right) dx = \frac{3f^2 EI_0}{2l^3}$$

$$\Delta W = \Delta V_\varepsilon$$

F

$$F_{\text{cr}} = \frac{9EI_0}{4l^2}$$

12-11

q

F

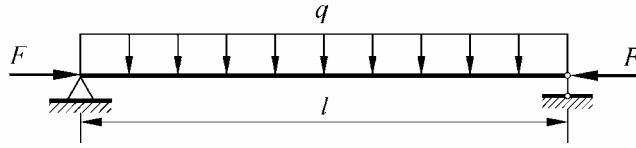
$$M_{\text{max}} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Fw_0}{1-\alpha}$$

***w*₀**

q

$$w = f \sin \frac{x}{l}$$

f



12-11

$$w = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial f} \delta f = \left(\sin \frac{\pi x}{l} \right) \delta f$$

$w \quad \lambda$

$\delta w \quad \delta \lambda$

V

δV_{ε}

$$\delta V_{\varepsilon} = \int_0^l (q dx) \cdot \delta w + F \delta \lambda$$

a

$$\int_0^l (q dx) \cdot \delta w = \int_0^l \left(q \sin \frac{\pi x}{l} dx \right) \cdot \delta f = \frac{2ql}{\pi} \delta f$$

b

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} f^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2}{4l} f^2$$

$$\delta \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial f} \delta f = \frac{\pi^2}{2l} f \delta f$$

c

$$V_{\varepsilon} = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{\pi^4}{l^4} f^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} f^2$$

$$\delta V_{\varepsilon} = \frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial f} \delta f = \frac{\pi^4 EI}{2l^3} f \delta f$$

d

b ~ d

a

$$\frac{\pi^4 EI}{2l^3} f \delta f = \frac{2ql}{\pi} \delta f + F \left(\frac{\pi^2}{2l} f \delta f \right)$$

$$f = \frac{2ql}{\frac{\pi^3}{2l} \left(\frac{\pi^2 EI}{l^2} - F \right)} = \frac{4ql^2}{\pi^3 F_{\text{cr}} (1 - \alpha)} = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI (1 - \alpha)}$$

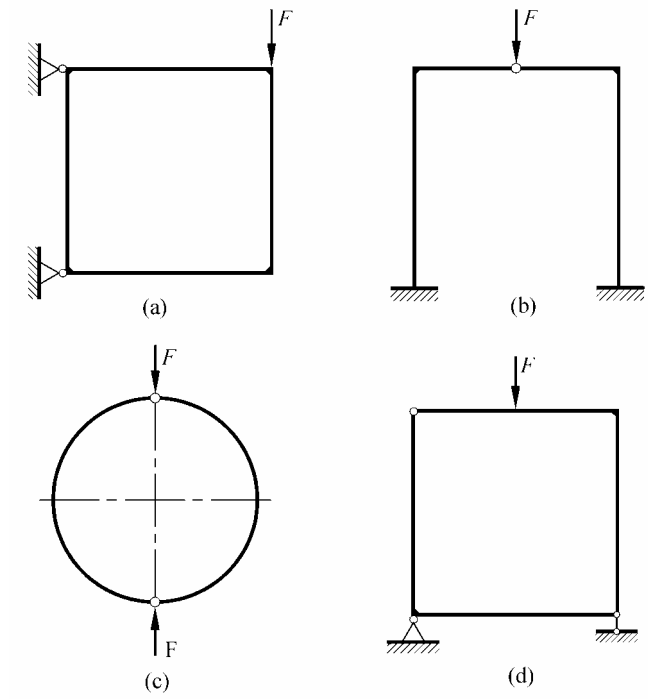
$$\approx \frac{5ql^4}{384EI} \cdot \frac{1}{(1 - \alpha)} = \frac{w_o}{1 - \alpha}$$

$$\alpha = \frac{F}{F_{\text{cr}}}, \quad F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad w_o = \frac{5ql^4}{384EI}$$

$$M_{\text{max}} = \frac{ql^2}{8} + Ff = \frac{ql^2}{8} + \frac{Fw_o}{1 - \alpha}$$

13-1	1
13-2	2
13-3	5
13-4	7
13-5	9
13-7	11
13-8	13
13-10	15
13-11	16
13-12	18
13-13	20
13-14	22
13-15	23
13-16	28
13-18	30
13-20	31
13-21	32

13-1



13-1

a

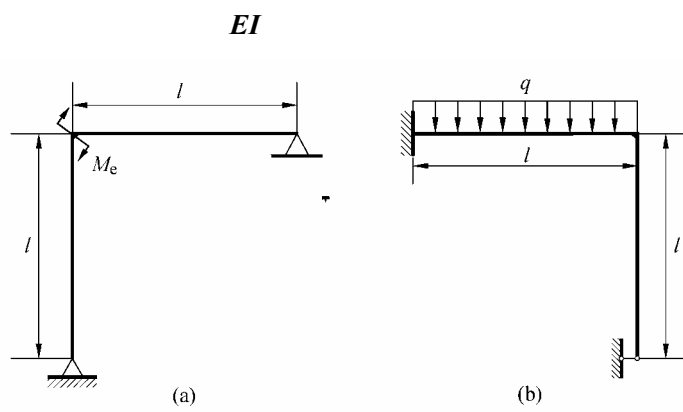
b

x y

c

d

13-2



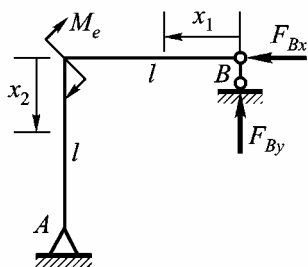
13-2

a

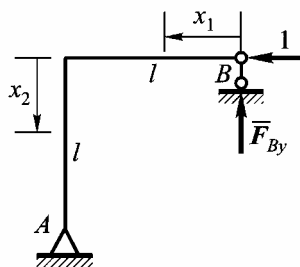
1

B

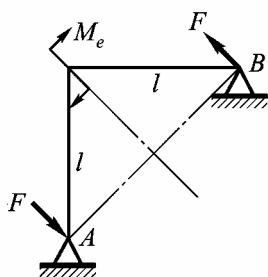
13-2 1

 F_{Bx} 

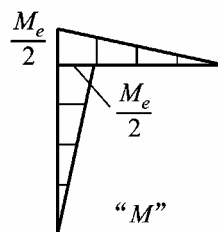
(1)



(2)



(3)



(4)

图13-2(a)

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{By} = \frac{M_e}{l} - F_{Bx}$$

1

2

$$M(x_1) = \left(\frac{M_e}{l} - F_{Bx} \right) x_1 \quad M(x_2) = F_{Bx} x_2 - F_{Bx} l$$

$$\overline{M}(x_1) = -x_1 \quad \overline{M}(x_2) = x_2 - l$$

$$\Delta_{Bx} = \frac{1}{EI} \int_0^l \overline{M}(x_1) M(x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^l \overline{M}(x_2) M(x_2) dx_2$$

$$\Delta_{Bx} = 0$$

$$F_{Bx} = \frac{M_e}{2l}$$

$$F_{By} = \frac{M_e}{2l} \quad F_{Ax} = \frac{M_e}{2l} \quad F_{Ay} = \frac{M_e}{2l}$$

2

3

F

$$F = \frac{M_e}{\sqrt{2}l}$$

1

4

b

13-2(b) 1 2

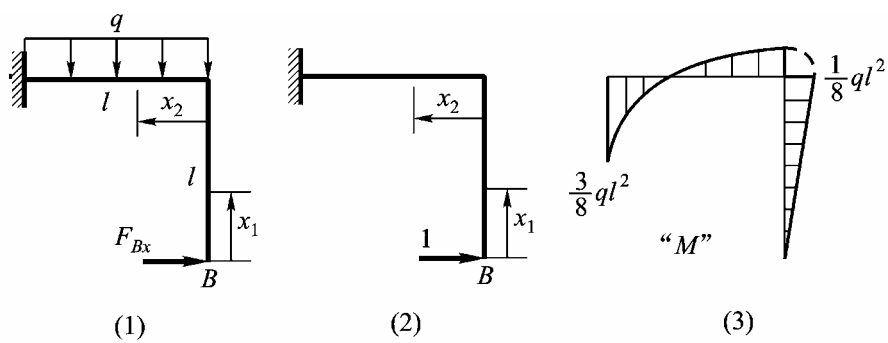


图13-2(b)

$$M(x_1) = F_{Bx} x_1 \quad M(x_2) = F_{Bx} l - \frac{q}{2} x_2^2$$

$$\overline{M}(x_1) = x_1 \quad \overline{M}(x_2) = l$$

$$\Delta_{Bx} = \frac{1}{EI} \int_0^l \overline{M}(x_1) M(x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^l \overline{M}(x_2) M(x_2) dx_2$$

$$\Delta_{Bx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{3} F_{Bx} l^3 - \frac{ql^4}{6} \right)$$

$$\Delta_{Bx} = 0$$

$$F_{Bx} = \frac{ql}{8}$$

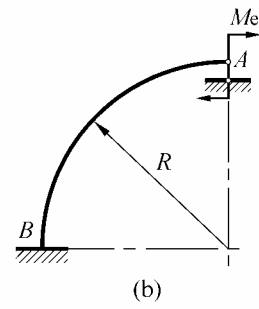
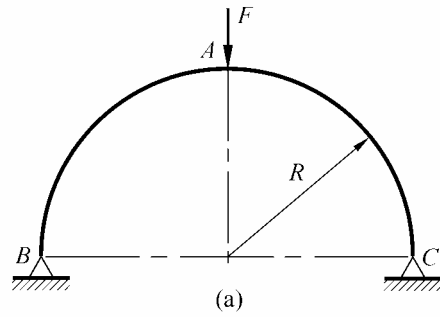
3

13-3

EI

(b)

A



13-3

a

$$F_{By} = F_{Cy} = \frac{F}{2}$$

$\theta_A = 0$

C_x

1

2

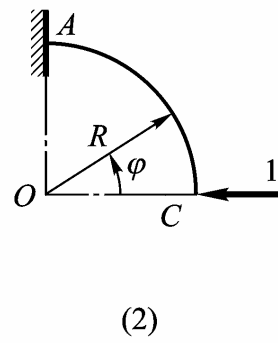
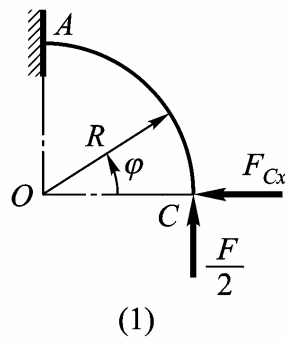


图13-3(a)

$$M(\varphi) = F_{Cx} R \sin \varphi - \frac{F}{2} R (1 - \cos \varphi)$$

$$\overline{M}(\varphi) = R \sin \varphi$$

$$\Delta_{Cx} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \overline{M}(\varphi) M(\varphi) R d\varphi$$

$$\Delta_{Cx} = \frac{R^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} F_{Cx} - \frac{F}{4} \right)$$

$$\Delta_{Cx} = 0$$

$$F_{Cx} = \frac{F}{\pi}$$

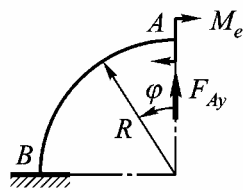
$$F_{Bx} = \frac{F}{\pi}$$

b

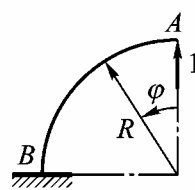
Δ_{Ay}

1

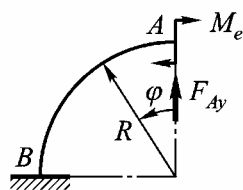
2



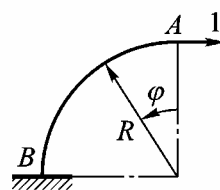
(1)



(2)



(3)



(4)

图13-3(b)

$$M(\varphi) = M_e - F_{Ay} R \sin \varphi$$

$$\overline{M}(\varphi) = -R \sin \varphi$$

$$A_y = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \overline{M}(\varphi) M(\varphi) R d\varphi$$

$$\Delta_{Ay} = \frac{R^2}{EI} \left(\frac{\pi}{4} F_{Ay} R - M_e \right)$$

$$A_y = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{4M_e}{R}$$

$$F_{Bx} = 0 \qquad F_{By} = \frac{4M_e}{\pi R} \qquad M_B = \frac{4-\pi}{\pi} M_e \quad \curvearrowright$$

Δ_{Ax} **3** **4**

$$M(\varphi) = M_e - \frac{4M_e}{\pi} \sin \varphi$$

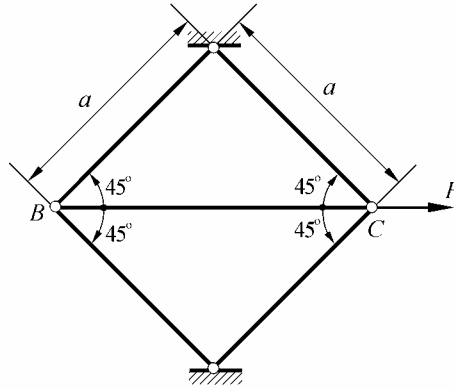
$$\overline{M}(\varphi) = R(1 - \cos \varphi)$$

$$A_x = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{1}{2}} \overline{M}(\varphi) M(\varphi) R d\varphi$$

$$\Delta_{Ax} = \frac{(\pi^2 - 2\pi - 4)}{2\pi} \frac{M_e R^2}{EI} = -0.0658 \frac{M_e R^2}{EI}$$

13-4

$$EA \qquad BC$$



13-4

$\Delta_{e/e'}$

13-4 a b

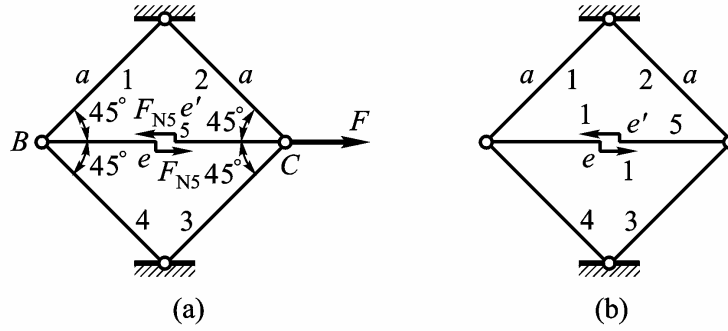


图13-4

$\Delta_{e/e'}$

i	l_i	\bar{F}_{Ni}	F_{Ni}	$\bar{F}_{Ni}F_{Ni}l_i$
1	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{F_{N5}}{\sqrt{2}}$	$F_{N5}a/2$
2	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(F - F_{N5})/\sqrt{2}$	$(F_{N5} - F)a/2$
3	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(F - F_{N5})/\sqrt{2}$	$(F_{N5} - F)a/2$
4	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{F_{N5}}{\sqrt{2}}$	$F_{N5}a/2$
5	$\sqrt{2}a$	1	F_{N5}	$\sqrt{2}F_{N5}a$

Σ		$(2 + \sqrt{2})F_{N5}a - Fa$
----------	--	------------------------------

$$\Delta_{e/e'} = \frac{\sum_{i=1}^5 \bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA} = \frac{(2 + \sqrt{2})F_{N5}a - Fa}{EA}$$

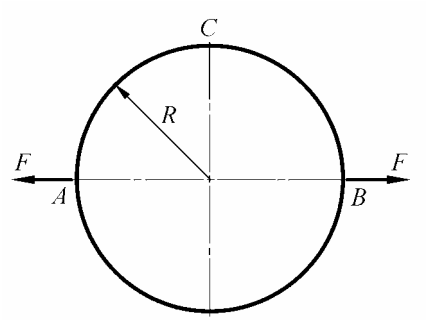
$$\Delta_{e/e'} = 0$$

$$F_{NBC} = F_{N5} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} F$$

13-5

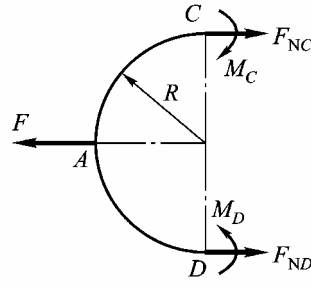
F A C A B

EI

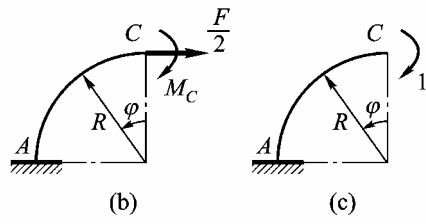


13-5

1 M_A M_C



(a)



(b)

(c)

图13-5

a

$$F_{\text{NC}} = F_{\text{ND}} = \frac{F}{2}$$

$$\theta_C = 0 \quad \theta_A = 0$$

$$M_C \quad \theta_C$$

b

c

$$M(\varphi) = M_C + \frac{F}{2} R(1 - \cos \varphi)$$

$$\overline{M}(\varphi) = 1$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \overline{M}(\varphi) M(\varphi) R d\varphi$$

$$\theta_C = 0$$

$$M_C = -\frac{\pi - 2}{2\pi} FR$$

$$M_A = \frac{FR}{\pi}$$

$$\Delta_{A/B}$$

$$F=1 \quad A/B$$

a

$$M(\varphi) = -\frac{\pi-2}{2\pi}FR + \frac{F}{2}R(1-\cos\varphi)$$

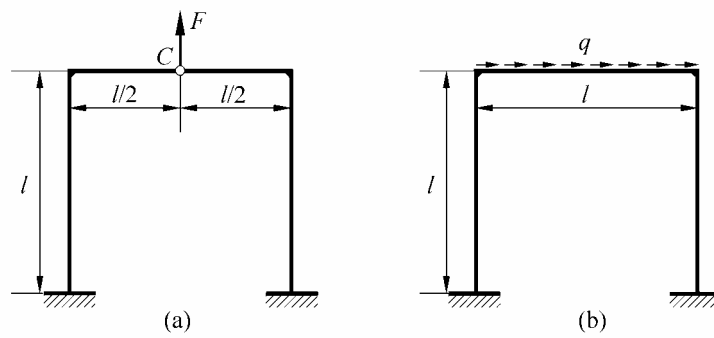
$$\overline{M}(\varphi) = -\frac{\pi-2}{2\pi}R + \frac{R}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$\Delta_{A/B} = \frac{4}{EI} \int_0^{\pi/2} \overline{M}(\varphi)M(\varphi)Rd\varphi$$

$$\Delta_{A/B} = \frac{(\pi^2-8)}{4\pi} \frac{FR^3}{EI} = 0.1488 \frac{FR^3}{EI}$$

13-7

EI



13-7

a

C

$$M_C = 0$$

C

$$F_S = 0$$

C

$$F/2$$

1

$$F_{NC}$$

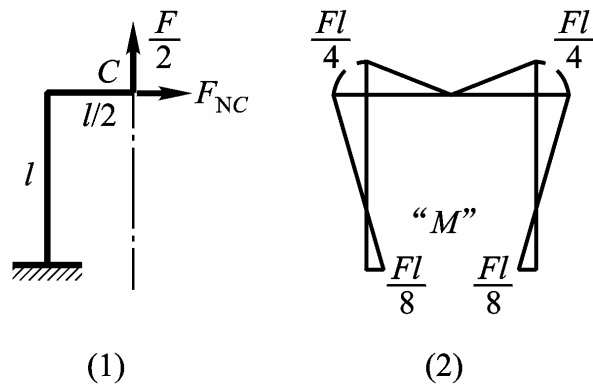


图13-7(a)

C

Δ_{Cx}

$$\Delta_{Cx} = 0$$

$$F_{NC} = \frac{3}{8}F$$

2

$$|M|_{\max} = \frac{Fl}{4}$$

13-7 a

b

C

$$F_{NC} = 0 \quad M_C = 0$$

F_{SC}

Δ_{Cy}

1 2

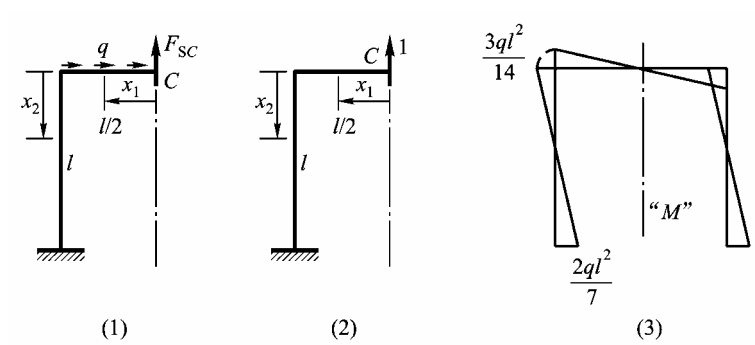


图13-7(b)

$$M(x_1) = F_{\text{sc}} x_1 \qquad M(x_2) = F_{\text{sc}} \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} x_2$$

$$\overline{M}(x_1) = x_1 \qquad \overline{M}(x_2) = \frac{l}{2}$$

$$\Delta_{Cy} = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \overline{M}(x_1) M(x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^l \overline{M}(x_2) M(x_2) dx_2$$

$$\Delta_{Cy} = \frac{7F_{\text{sc}}l^3 - 3ql^4}{24EI}$$

$$\Delta_{Cy} = 0$$

$$F_{\text{sc}} = \frac{3}{7} ql$$

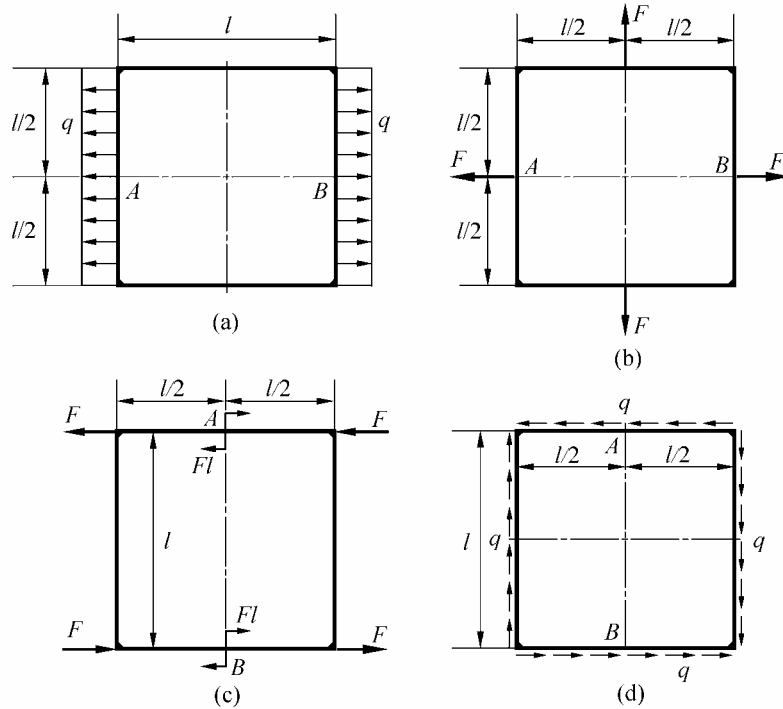
3

$$|M|_{\text{max}} = \frac{2ql^2}{7}$$

13-8

EI

A B AB



13-8

a ~ d

a b

$$F_S = 0$$

F_N

c d

F_s

a

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{12} \quad \Delta_{A/B} = \frac{ql^4}{64EI}$$

b

$$M_{\max} = \frac{Fl}{8} \quad \Delta_{A/B} = \frac{Fl^3}{96EI}$$

c

$$M_{\max} = \frac{Fl}{2} \quad \Delta_{A/B} = 0$$

d

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{4} \quad \Delta_{A/B} = 0$$

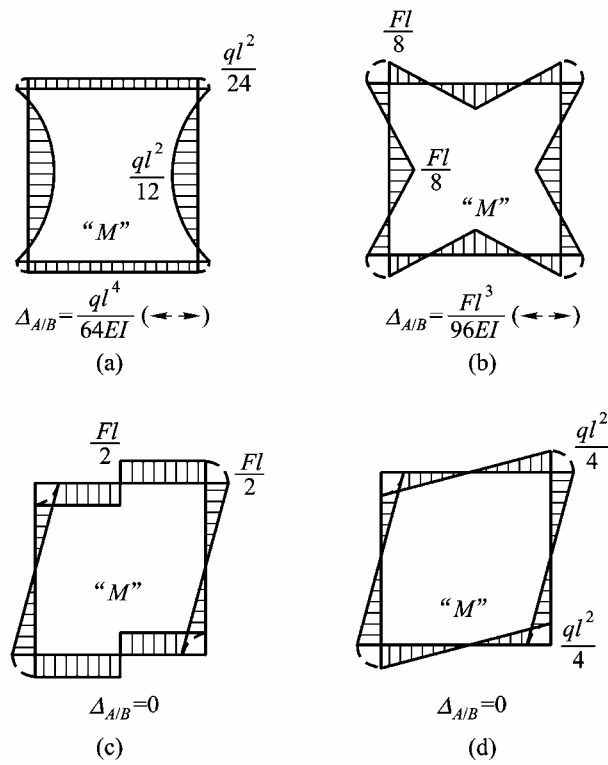
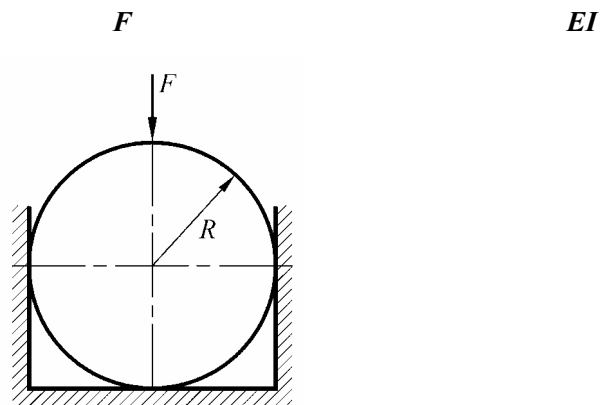


图13-8

13-10



13-10

13-5

$$F_{\text{NC}} = F_{\text{ND}} = -\frac{F}{2}$$

$$M_C = M_D = \frac{\pi - 2}{2\pi} FR \qquad M_A = M_B = -\frac{FR}{2}$$

F $\Delta'_{C/D}$ 13-10 a b

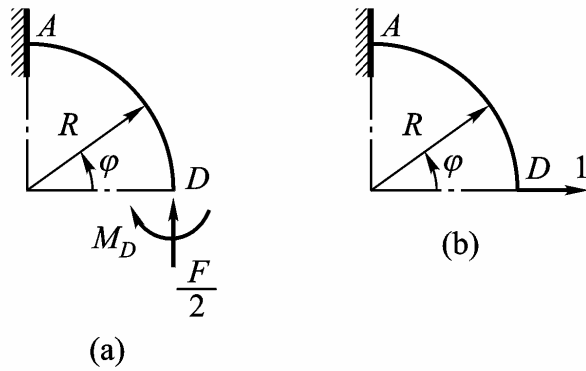


图13-10

$$M(\varphi) = \frac{\pi - 2}{2\pi} FR - \frac{F}{2} R(1 - \cos\varphi)$$

$$\overline{M}(\varphi) = -R\sin\varphi$$

$$\Delta'_{C/D} = \frac{2}{EI} \int_0^{\pi/2} \overline{M}(\varphi) M(\varphi) R d\varphi$$

$$\Delta'_{C/D} = \frac{(4 - \pi)FR^3}{2\pi EI}$$

C D

F_x

13-5

A/B

F_x

$\Delta''_{C/D}$

$$\Delta''_{C/D} = -\frac{(\pi^2 - 8)F_x R^3}{4\pi EI}$$

$$\Delta_{C/D} = \Delta'_{C/D} + \Delta''_{C/D} = 0$$

$$F_x = \frac{8 - 2\pi}{\pi^2 - 8} F$$

B

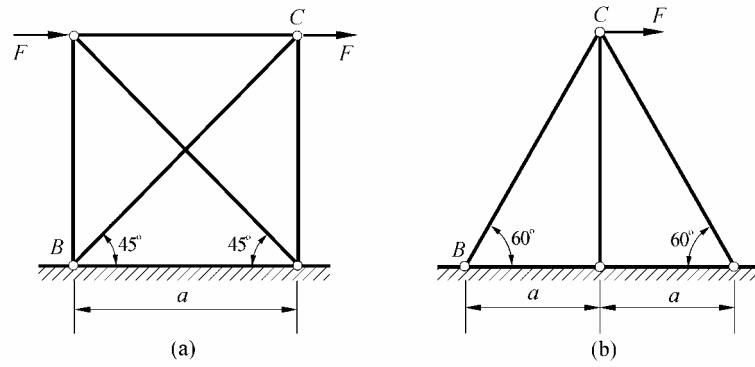
$$F_{By} = F$$

13-11

$$F = 80\text{kN}$$

EA

BC



13-11

a

1

$$F_{N2} = 0$$

2

$$F_{N3} = -F \quad F_{N5} = \sqrt{2}F$$

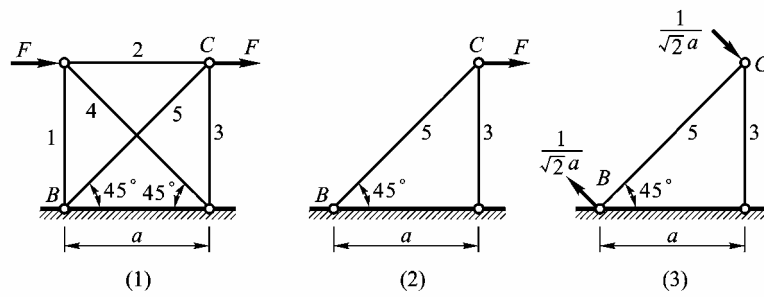


图13-11(a)

θ_{BC}

2

3

i	l_i	\bar{F}_{Ni}	F_{Ni}	$\bar{F}_{Ni}F_{Ni}l_i$
3	a	$-\frac{1}{a}$	$-F$	F
5	$\sqrt{2}a$	$\frac{1}{\sqrt{2}a}$	$\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}F$
Σ				$(1 + \sqrt{2})F$

$$\theta_{BC} = \frac{\sum \bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA} = \frac{(1 + \sqrt{2})F}{EA} \quad \curvearrowright$$

b

1

$$F_{N2} = 0$$

$$F_{N1} = F, \quad F_{N3} = -F$$

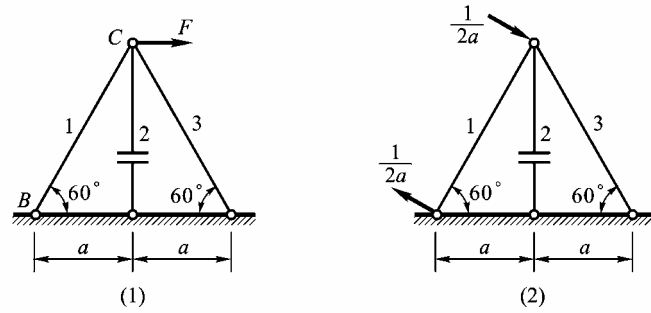


图13-11(b)

θ_{BC}

1

2

2

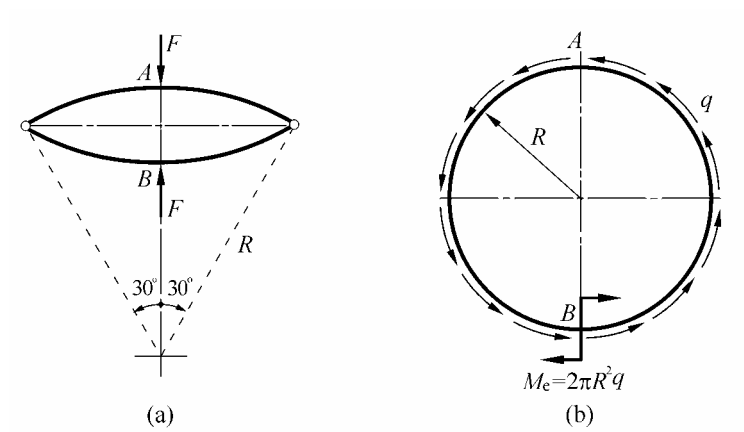
i	l_i	\bar{F}_{Ni}	F_{Ni}	$\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i$
1	$2a$	$\frac{1}{2\sqrt{3}a}$	F	$\frac{F}{\sqrt{3}}$
3	$2a$	$-\frac{1}{\sqrt{3}a}$	$-F$	$\frac{2F}{\sqrt{3}}$
Σ				$\sqrt{3}F$

$$\theta_{BC} = \frac{\sum \bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA} = \frac{\sqrt{3}F}{EA} \quad \curvearrowright$$

13-12

EI

$A \quad B \quad AB$



13-12

a

13-12 a

A/B

F 1

A/B

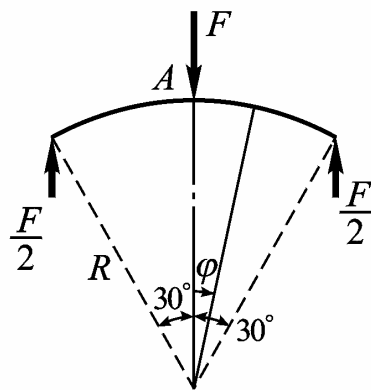


图13-12(a)

φ

$$M(\varphi) = \frac{FR}{2} \left(\frac{1}{2} - \sin \varphi \right)$$

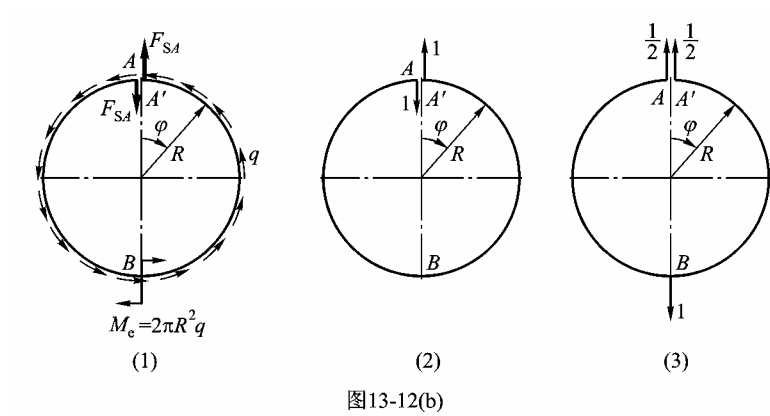
$$\overline{M}(\varphi) = \frac{R}{2} \left(\frac{1}{2} - \sin \varphi \right)$$

$$A/B = \frac{4}{EI} \int_0^{\pi/6} \overline{M}(\varphi) M(\varphi) R d\varphi$$

$$\Delta_{A/B} = \frac{(+3\sqrt{3}-8)FR^3}{8EI} = 0.0422 \frac{FR^3}{EI}$$

b

1



A/A'

1

2

$$M(\varphi) = qR^2(\varphi - \sin\varphi) - F_{SA}R\sin\varphi$$

$$\overline{M}(\varphi) = -R\sin\varphi$$

$$\Delta_{A/A'} = \frac{2}{EI} \int_0^\pi \overline{M}(\varphi) M(\varphi) R d\varphi$$

$$\Delta_{A/A'} = \mathbf{0}$$

$$F_{SA} = qR$$

A/B

1

3

$$M(\varphi)$$

$$\overline{M}(\varphi)$$

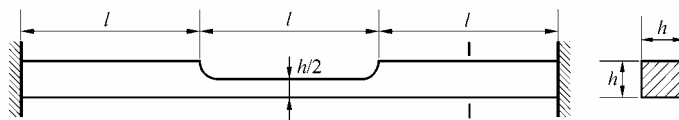
$$\Delta_{A/B} = \mathbf{0}$$

13-13

T

E

α_l



13-13

1

C

C_x

θ_C

13-13 a b c

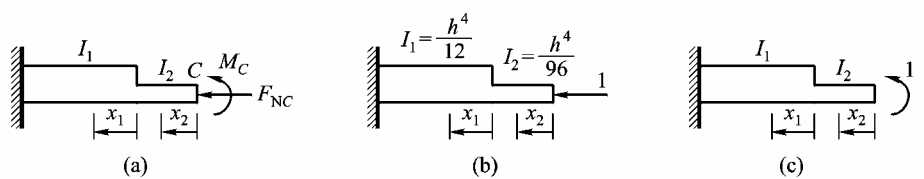


图13-13

C_x

$$F_N(x_1) = F_{NC}$$

$$F_N(x_2) = F_{NC}$$

$$\bar{F}_N(x_1) = 1$$

$$\bar{F}_N(x_2) = 1$$

$$M(x_1) = M_C - F_{NC} \frac{h}{4}$$

$$M(x_2) = M_C$$

$$\bar{M}(x_1) = -\frac{h}{4}$$

$$\bar{M}(x_2) = 0$$

$$\Delta_{Cx} = \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA_i} + \frac{1}{EI_1} \int_0^l \bar{M}(x_1) M(x_1) dx_1$$

$$C_x = \frac{11l}{4Eh^2} F_{NC} - \frac{3l}{Eh^3} M_C = \frac{3}{2} \alpha_l Tl$$

1

θ_C

$$M(x_1) = M_C - F_{NC} \frac{h}{4}$$

$$M(x_2) = M_C$$

$$\bar{M}(x_1) = 1$$

$$\bar{M}(x_2) = 1$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI_1} \int_0^l \overline{M}(x_1) M(x_1) dx_1 + \frac{1}{EI_2} \int_0^{l/2} \overline{M}(x_2) M(x_2) dx_2$$

$$\theta_C = \frac{12l}{Eh^4} \left(M_C - \frac{F_{NC}h}{4} \right) + \frac{48l}{Eh^4} M_C = 0 \quad 2$$

1 2

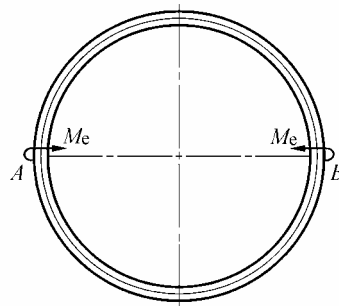
$$M_C = \frac{3}{104} \alpha_l T E h^3, \quad F_{NC} = \frac{15}{26} \alpha_l T E h^2$$

2

$$\sigma_{\max} = \frac{6M_C}{h \left(\frac{h}{2} \right)^2} + \frac{2F_{NC}}{h^2} = \left(\frac{9}{13} + \frac{15}{13} \right) E \alpha_l T = 1.846 E \alpha_l T$$

13-14

R M_e d E A B
 G



13-14

-

C D C

$$F_{syC} = F_{szC} = T_C = 0$$

-

$$F_{NC} = M_{zC} = 0$$

C D

M_{yC} M_{yD}

13-14 a

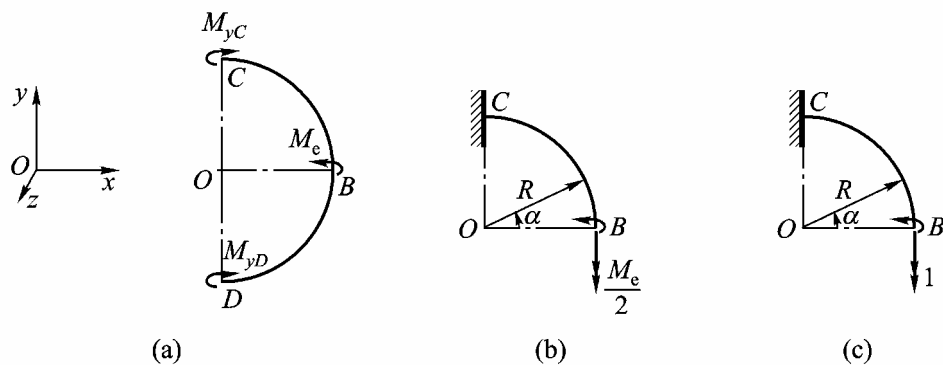


图13-14

$$M_{yC} = M_{yD}$$

a

$$M_{yC} = M_{yD} = \frac{M_e}{2}$$

$\varphi_{A/B}$

b c

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \frac{M_e}{2} \cos \alpha, & M(\alpha) &= \frac{M_e}{2} \sin \alpha \\ \bar{T}(\alpha) &= \cos \alpha, & \bar{M}(\alpha) &= \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\varphi_{A/B} = \frac{2}{GI_p} \int_0^{\pi/2} \bar{T}(\alpha) T(\alpha) R d\alpha + \frac{2}{EI} \int_0^{\pi/2} \bar{M}(\alpha) M(\alpha) R d\alpha$$

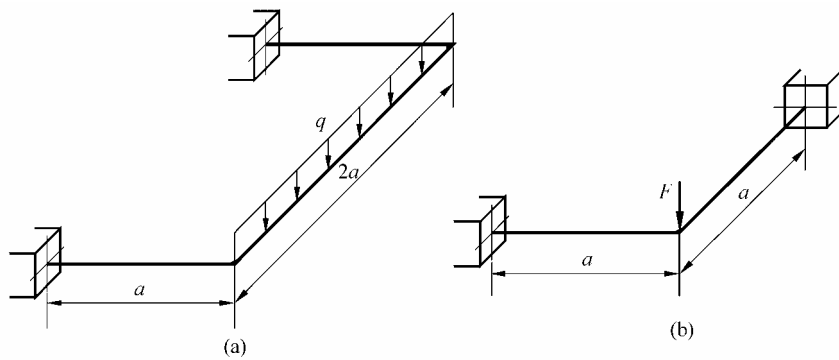
A B

$$\varphi_{A/B} = \frac{M_e R}{4I} \left(\frac{1}{2G} + \frac{1}{E} \right) = \frac{8M_e R}{d^4} \left(\frac{1}{G} + \frac{2}{E} \right)$$

13-15

E

$\mu = 0.3$



13 15

a

C

1

$$F_{SxC} = F_{SzC} = T_C = 0$$

-

$$F_{NC} = M_{zC} = 0$$

$$M_{xC}$$

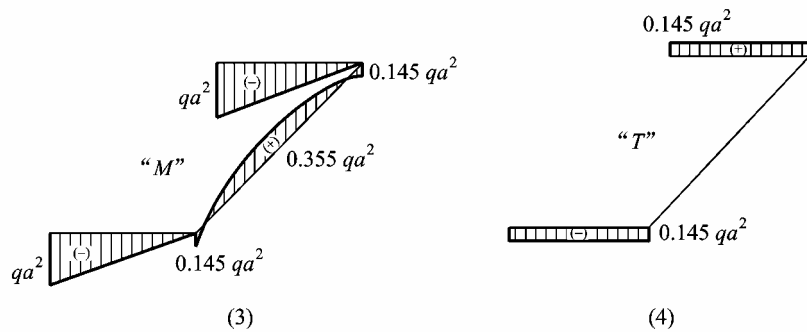
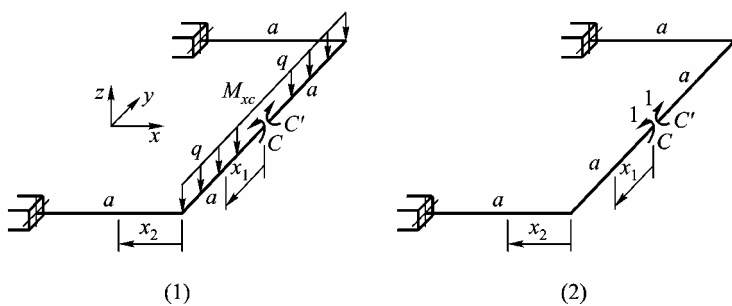


图13-15(a)

$$\theta_{xC/C'} = 0$$

$\theta_{xC/C'}$	1	2
------------------	---	---

$$M_x(x_1) = M_{xC} - \frac{q}{2}x_1^2, \quad T(x_2) = M_{xC} - \frac{q}{2}a^2$$

$$\overline{M}_x(x_1)=1, \quad \overline{T}(x_2)=1$$

$$\overline{M}(x_2) = 0 \quad M(x_2)$$

$$\theta_{x_C/C'} = \frac{1}{EI_x} \int_0^a \overline{M}_x(x_1) M_x(x_1) dx_1 + \frac{1}{GI_p} \int_0^a \overline{T}(x_2) T(x_2) dx_2$$

$$\theta_{x_C/C'} = \frac{a}{EI_x} \left[M_{x_C} - \frac{qa^2}{6} + (1 + \mu)M_{x_C} - \frac{1 + \mu}{2}qa^2 \right] = 0$$

$\mu=0.3$

$$M_{xC} = 0.355qa^2$$

$$GI_p = \frac{E}{2(1+\mu)}(2I_x) = \frac{EI_x}{1+\mu}$$

M_{xC}	3	4
----------	----------	----------

$$|M|_{\max} = qa^2, \quad T_{\max} = 0.145qa^2$$

b **1**

—

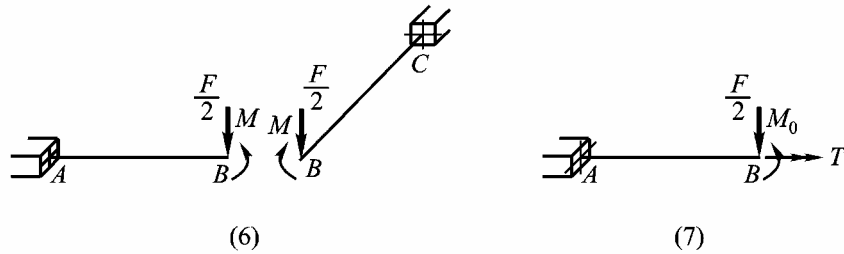
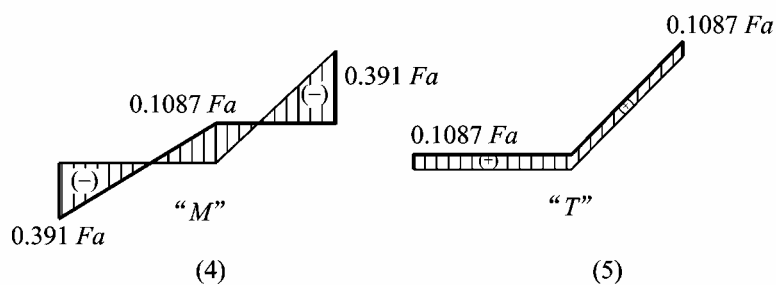
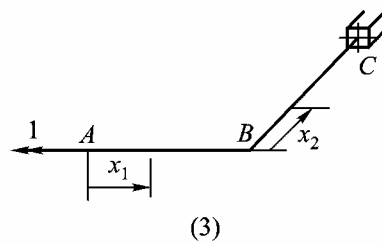
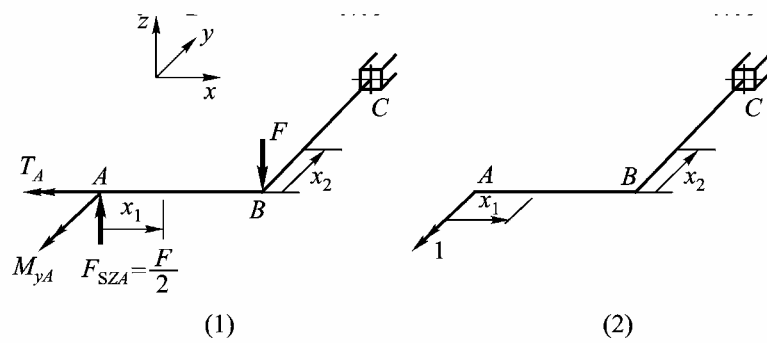


图13-15(b)

1

A

45

$$F_{S_{zA}} = \frac{F}{2}$$

-

$$F_{N_A} = F_{S_{yA}} = M_{zA} = 0$$

$$M_{yA} \quad T_A$$

$$\theta_{yA} \quad \varphi_A$$

2

3

$$M_y(x_1) = M_{yA} - \frac{F}{2}x_1 \qquad T(x_1) = T_A$$

$$\overline{M}_y(x_1) = 1 \qquad \overline{T}(x_1) = 1$$

$$T(x_2) = M_{yA} - \frac{F}{2}a \qquad M_x(x_2) = T_A - \frac{F}{2}x_2$$

$$\overline{T}(x_2) = 1 \qquad \overline{M}_x(x_2) = 1$$

$$\theta_{yA} = \frac{1}{EI} \int_0^a \overline{M}_y(x_1) M_y(x_1) dx_1 + \frac{1}{EI_p} \int_0^a \overline{T}(x_2) T(x_2) dx_2$$

$$\varphi_A = \frac{1}{EI_p} \int_0^a \overline{T}(x_1) T(x_1) dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a \overline{M}_x(x_2) M_x(x_2) dx_2$$

$$\theta_{yA} = 0, \qquad \varphi_A = 0$$

$$\frac{a}{EI} \left(M_{yA} - \frac{Fa}{4} \right) + \frac{(1+\mu)a}{EI} \left(M_{yA} - \frac{Fa}{2} \right) = 0$$

$$\frac{(1+\mu)T_A a}{EI} + \frac{a}{EI} \left(T_A - \frac{Fa}{4} \right) = 0$$

$$M_{yA} = \frac{9}{23} Fa = 0.391Fa, \qquad T_A = \frac{5}{46} Fa = 0.1087Fa$$

$$\mathbf{4} \qquad \mathbf{5}$$

$$\mathbf{2}$$

$$\mathbf{13-15}$$

$$\mathbf{b} \quad \mathbf{6}$$

$$\mathbf{-}$$

$$\mathbf{M}$$

$$\mathbf{45}$$

$$\mathbf{AB}$$

$$M_0$$

$$\mathbf{T}$$

$$\mathbf{7}$$

$$M_0 = T = M \cos 45^\circ \quad \mathbf{a}$$

$$\theta_{B45^\circ} = \theta_B \cos 45^\circ + \varphi_B \cos 45^\circ = 0 \quad \mathbf{b}$$

$$\theta_{B45^\circ} \quad \mathbf{B} \qquad \theta_B \quad \mathbf{B} \qquad \varphi_B \quad \mathbf{B}$$

$$\theta_B \quad \varphi_B$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left(M_0 a - \frac{F}{4} a^2 \right) \quad \mathbf{c}$$

$$\varphi_B = \frac{Ta}{GI_p} = \frac{(1+\mu)Ta}{EI} \quad \mathbf{d}$$

$$\mathbf{c} \quad \mathbf{d} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned} \theta_{B45^\circ} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\theta_B + \varphi_B) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{1}{EI} \left(M_0 a - \frac{F}{4} a^2 \right) + \frac{(1+\mu)M_0 a}{EI} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$(2+\mu)M_0 = \frac{1}{4} Fa$$

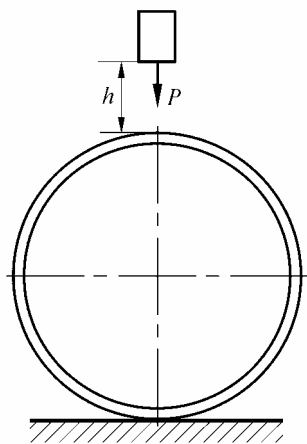
$$M_0 = T = \frac{Fa}{4(2+\mu)} = \frac{5}{46} Fa = 0.1087 Fa$$

$$\mathbf{2} \qquad \mathbf{1} \qquad \mathbf{4} \qquad \mathbf{5}$$

13-16

$$\mathbf{P} \qquad \mathbf{h}$$

$$\mathbf{R} \qquad \mathbf{d} \qquad \mathbf{E} \qquad \mathbf{G}$$



13-16

1 Δ_{st}

13-5

$$\Delta_{\text{st}} = \frac{(\pi^2 - 8)PR^3}{4\pi EI} = 0.1488 \frac{PR^3}{EI} = 3.03 \frac{PR^3}{Ed^4} \quad ()$$

2 F_{d}

$$F_{\text{d}} = P \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}} \right)$$

3 σ_{max}

13-5 $|M|_{\text{max}}$

$$|M|_{\text{max}} = \frac{F_{\text{d}} R}{\pi} = 0.318 F_{\text{d}} R$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{|M|_{\text{max}}}{W} = \frac{3.24 PR}{d^3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{st}}}} \right)$$

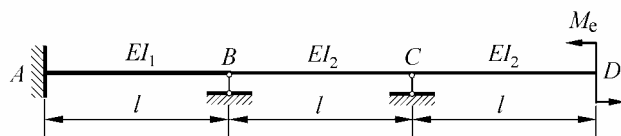
4

$$M \quad F_{\text{N}}$$

$$\sigma(\varphi)$$

13-18

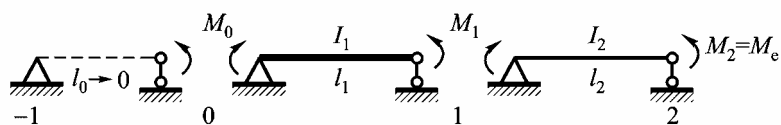
$$I_1 = 2I_2 = I$$



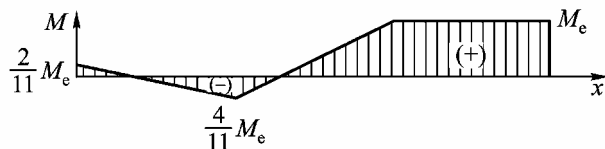
13-18

13-18 a

$$M_0 \quad M_A \quad M_1 \quad M_B$$



(a)



(b)

图13-18

a

$$M_{-1} = 0, \quad M_2 = M_e, \quad l_0 = 0, \quad l_1 = l_2 = l$$

$$I_1 = I, \quad I_2 = \frac{I}{2}; \quad \omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 0$$

0

13-1

$$\frac{2M_0 l}{I_1} + \frac{M_1 l}{I_1} = 0$$

a

1

13-1

$$\frac{M_0 l}{I_1} + 2M_1 l \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) + \frac{M_e l}{I_2} = 0$$

b

a b

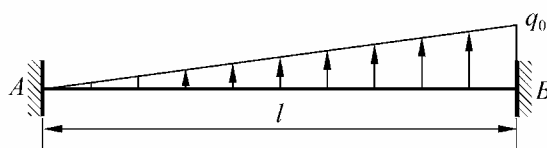
$$M_0 = \frac{2}{11} M_e, \quad M_1 = -\frac{4}{11} M_e = M_B$$

$$F_{yA} = \frac{6M_e}{11l} \quad M_A = \frac{2}{11}M_e \quad \curvearrowright$$

$$F_{yB} = \frac{21M_e}{11l} \qquad F_{yC} = \frac{15M_e}{11l}$$

13-18 b

13-20

 EI 

13-20

13-20 a

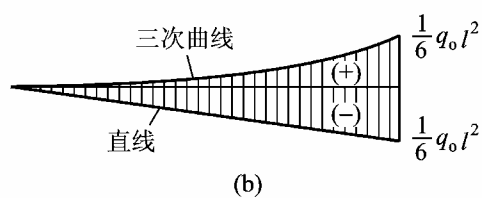
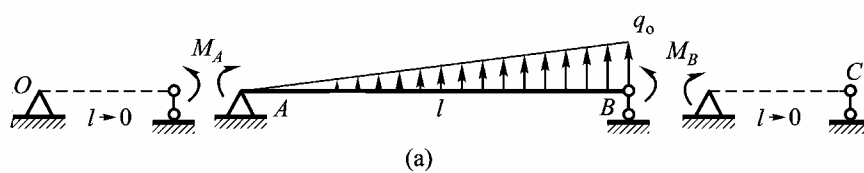
 \mathbf{AB} **b**

图13-20

A

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M_A, \quad M_3 = M_B; \quad \omega_1 a_1 = 0$$

$$\omega_2 b_2 = \frac{q_0 l^2}{6} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{5} - \frac{q_0 l^2}{6} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{7}{360} q_0 l^4$$

13-1

$$2M_A\left(0+\frac{l}{I}\right)+M_B\left(\frac{l}{I}\right)=\frac{(-6)}{Il}\times\left(-\frac{7}{360}q_0l^4\right)$$

$$2M_A + M_B = \frac{7}{60} q_0 l^2 \quad \mathbf{a}$$

B

$$M_1 = M_A, \quad M_2 = M_B, \quad M_3 = 0$$

$$\omega_1 a_1 = \frac{q_0 l^2}{6} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{4l}{5} - \frac{q_0 l^2}{6} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2l}{3} = -\frac{1}{45} q_0 l^4$$

$$\omega_2 b_2 = 0$$

13-1

$$M_A \left(\frac{l}{I} \right) + 2M_B \left(\frac{l}{I} + 0 \right) = \frac{(-6)}{I l} \times \left(-\frac{1}{45} q_0 l^4 \right)$$

$$M_A + 2M_B = \frac{2}{15} q_0 l^2 \quad \mathbf{b}$$

a b

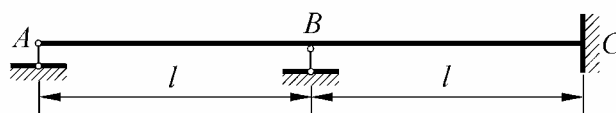
$$M_A = \frac{1}{30} q_0 l^2 \quad \curvearrowright \quad M_B = \frac{1}{20} q_0 l^2 \quad \curvearrowright$$

$$F_{yA} = \frac{3}{20} q_0 l \quad F_{yB} = \frac{7}{20} q_0 l$$

13-21

B δ

EI



13-21

13-21 a

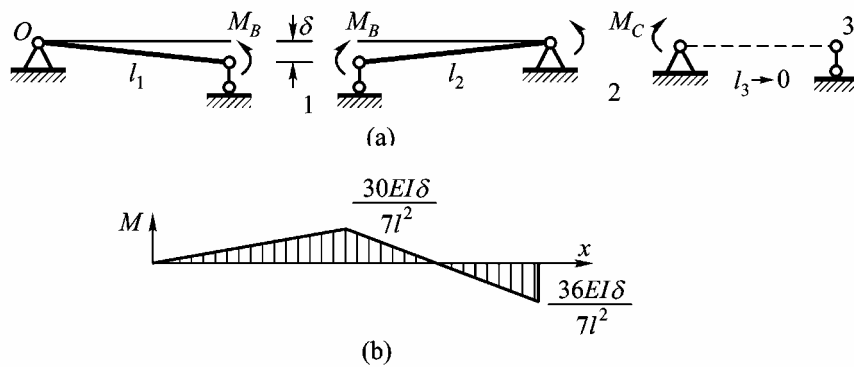


图13-21

B

$$M_0 = 0, \quad M_1 = M_B, \quad M_2 = M_C; \quad l_1 = l_2 = l$$

$$I_1 = I_2 = I; \quad \alpha'_1 = -\frac{\delta}{l}, \quad \alpha''_1 = \frac{\delta}{l}$$

13-3

$$4M_B l + M_C l = -6EI \left(-\frac{2\delta}{l} \right) \quad \mathbf{a}$$

C

$$M_1 = M_B, \quad M_2 = M_C, \quad M_3 = 0; \quad l_2 = l, \quad l_3 = 0$$

$$I_2 = I, \quad I_3 = \infty; \quad \alpha'_2 = \frac{\delta}{l}, \quad \alpha''_2 = 0$$

13-3

$$M_B l + 2M_C l = -6EI \left(\frac{\delta}{l} \right) \quad \mathbf{b}$$

a b

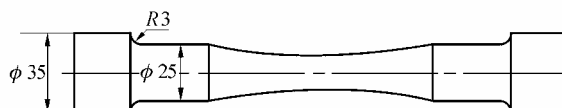
$$M_B = \frac{30EI\delta}{7l^2} \quad M_C = -\frac{36EI\delta}{7l^2}$$

$$F_{yA} = \frac{30EI\delta}{7l^3} \quad F_{yB} = \frac{96EI\delta}{7l^3} \quad F_{yC} = \frac{66EI\delta}{7l^3}$$

13-21 b

16-3.....	1
16-5.....	2
16-6.....	3
16-7.....	4
16-8.....	5
16-9.....	6
16-10.....	7
16-12.....	9
16-13.....	10

16-3 图示疲劳试样，由钢制成，强度极限 $\sigma_b = 600\text{MPa}$ ，试验时承受对称循环的轴向载荷作用，试确定试样夹持部位圆角处的有效应力集中因数。试样表面经磨削加工。



题 16-3 图

解：1. 确定修正系数 ξ 和有效应力集中因数 $K_{\sigma 0}$

根据对称拉-压受载及 $D/d = 35/25 = 1.4 < 2$ ，查图 16-11，得
 $\xi = 0.96$

又根据 $R/d = 3/25 = 0.12$ 及 $\sigma_b = 600\text{MPa}$ ，查图 16-9，得

$$\sigma_b = 400\text{MPa 钢材的 } K_{\sigma 0} = 1.38$$

$$\sigma_b = 800\text{MPa 钢材的 } K_{\sigma 0} = 1.73$$

用线性插入法，得 $\sigma_b = 600\text{MPa}$ 钢材的

$$K_{\sigma 0} = 1.38 + \frac{600 - 400}{800 - 400} \times (1.73 - 1.38) = 1.55$$

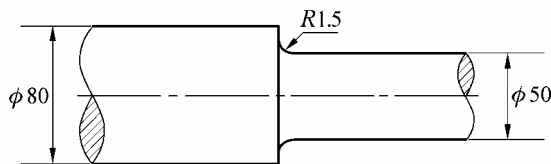
2. 确定有效应力集中因数 K_σ

依据公式(16-5)，得到该试样夹持部位圆角处的有效应力集中因数为

$$K_\sigma = 1 + \xi(k_{\sigma 0} - 1) = 1 + 0.96 \times (1.55 - 1) = 1.53$$

16-5 图示钢轴，承受对称循环的弯曲应力作用。钢轴分别由合金钢和碳钢制成，前

者的强度极限 $\sigma_b = 1200\text{MPa}$ ，后者的强度极限 $\sigma_b' = 700\text{MPa}$ ，它们都是经粗车制成。设疲劳安全因数 $n_f = 2$ ，试计算钢轴的许用应力 $[\sigma_{-1}]$ ，并进行比较。



题 16-5 图

解：1. 确定各影响因数

根据 $D/d = 80/50 = 1.6$ 查图 16-11，得

$$\xi = 1$$

根据 $R/d = 1.5/50 = 0.03$ 及 σ_b 值查图 16-8，得

$$\sigma_b = 1200\text{MPa 钢材的 } K_{\sigma 0} = 2.9$$

$$\sigma_b = 500\text{MPa 钢材的 } K_{\sigma 0} = 2.2$$

利用线性插入法可求得 $\sigma_b = 700\text{MPa}$ 钢材的

$$K_{\sigma 0} = 2.2 + \frac{2.9 - 2.2}{1200 - 500} \times (700 - 500) = 2.4$$

于是得 $\sigma_b = 1200\text{MPa}$ 及 $\sigma_b = 700\text{MPa}$ 两种钢材的 K_σ 依次为

$$K_\sigma = 1 + 1 \times (2.9 - 1) = 2.9$$

$$K_\sigma = 1 + 1 \times (2.4 - 1) = 2.4$$

根据 $d = 50\text{mm}$ 及 σ_b 值查图 16-14 所示的尺寸因数，得

$$\sigma_b = 1200\text{MPa 钢材的 } \varepsilon = 0.69 = \varepsilon_\sigma$$

$$\sigma_b = 400\text{MPa 钢材的 } \varepsilon = 0.79 = \varepsilon_\sigma$$

利用线性插入法可求得 $\sigma_b = 700\text{MPa}$ 钢材的

$$\varepsilon = 0.69 + \frac{0.79 - 0.69}{1200 - 400} \times (1200 - 700) = 0.755 = \varepsilon_\sigma$$

根据 σ_b 值及粗车加工情况查图 16-16 所示的表面质量因数，得

$$\sigma_b = 1200\text{MPa 钢材的 } \beta = 0.61$$

$$\sigma_b = 700\text{MPa 钢材的 } \beta = 0.78$$

2. 计算两种钢轴的许用应力

参照公式(16-4)，我们取

$$\sigma_{-1} \approx 0.4\sigma_b$$

依据公式(16-13)，得到两种钢轴的许用应力依次为

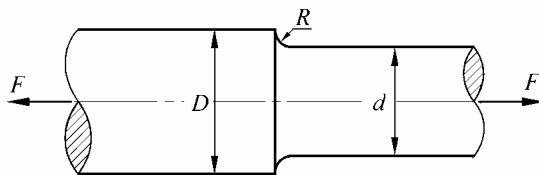
$$[\sigma_{-1}] = \frac{\varepsilon_\sigma \beta}{n_f K_\sigma} \sigma_{-1} = \frac{0.69 \times 0.61}{2 \times 2.9} \times (0.4 \times 1200)\text{MPa} = 34.8\text{MPa} \quad (\text{对应 } \sigma_b = 1200\text{MPa 钢材})$$

$$[\sigma_{-1}] = \frac{0.755 \times 0.78}{2 \times 2.4} \times (0.4 \times 700)\text{MPa} = 34.4\text{MPa} \quad (\text{对应 } \sigma_b = 700\text{MPa 钢材})$$

二者比较， $[\sigma_{-1}]$ 值基本相同。由此可见，承受交变应力作用的构件，若无精细的表面加工，却有应力集中影响，采用高强度材料并无优越性可言。

16-6 图示阶梯形图截面钢杆，承受非对称循环的轴向载荷 F 作用，其最大和最小值分别为 $F_{\max} = 100\text{kN}$ 和 $F_{\min} = 10\text{kN}$ ，设规定的疲劳安全因数 $n_f = 2$ ，试校核杆的疲劳强度。

已知： $D = 50\text{mm}$ ， $d = 40\text{mm}$ ， $R = 5\text{mm}$ ， $\sigma_b = 600\text{MPa}$ ， $\sigma_{-1}^{\text{拉-压}} = 170\text{MPa}$ ， $\psi_\sigma = 0.05$ 。杆表面经精车加工。



题 16-6 图

解：1. 计算工作应力

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A} = \frac{100 \times 10^3 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \times (0.040)^2 \text{ m}^2} = 7.96 \times 10^7 \text{ Pa} = 79.6\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{F_{\min}}{A} = 7.96\text{MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 35.8\text{MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = 43.8\text{MPa}$$

2. 确定各影响因数

根据 $R/d = 5/40 = 0.125$ 查图 16-9， $\sigma_b = 400\text{MPa}$ 钢材的 $K_{\sigma_0} = 1.38$ ，

$\sigma_b = 800\text{MPa}$ 钢材的 $K_{\sigma_0} = 1.72$ 。据此，可用线性插入法求得 $\sigma_b = 600\text{MPa}$ 钢材的 K_{σ_0} ，

$$K_{\sigma 0} = 1.38 + \frac{1.72 - 1.38}{800 - 400} \times (600 - 400) = 1.55$$

又根据 $D/d = 50/40 = 1.25$ 查图 16-11, 得
 $\xi = 0.87$

于是有

$$K_{\sigma} = 1 + \xi(K_{\sigma 0} - 1) = 1 + 0.87 \times (1.55 - 1) = 1.48$$

根据 $d = 40\text{mm}$ 查图 16-14, 得

$$\sigma_b = 1200\text{MPa 钢材的 } \varepsilon = 0.73$$

$$\sigma_b = 400\text{MPa 钢材的 } \varepsilon = 0.83$$

利用线性插入法可得 $\sigma_b = 600\text{MPa}$ 钢材的 ε ,

$$\varepsilon = 0.83 - \frac{0.83 - 0.73}{1200 - 400} \times (600 - 400) = 0.805 = \varepsilon_{\sigma}$$

根据 $\sigma_b = 600\text{MPa}$ 及精车加工情况, 查图 16-16, 得

$$\beta = 0.94$$

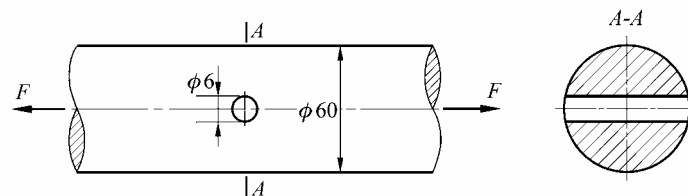
3. 校核杆的疲劳强度

依据公式(16-18), 算得

$$n_{\sigma} = \frac{170}{35.8 \times \frac{1.48}{0.805 \times 0.94} + 43.8 \times 0.05} = 2.35 > n_f$$

可见该杆的疲劳强度是足够的。

16-7 图示带横孔的圆截面钢杆, 承受非对称循环的轴向外力作用, 设该力的最大值为 F , 最小值为 $0.2F$, 材料的强度极限 $\sigma_b = 500\text{MPa}$, 对称循环下拉压疲劳极限 $\sigma_{-1}^{\text{拉-压}} = 150\text{MPa}$, 敏感因数 $\psi_{\sigma} = 0.05$, 疲劳安全因数 $n_f = 1.7$, 试计算外力 F 的许用值。杆表面经磨削加工。



题 16-7 图

解: 1. 计算工作应力

$$A = \left(\frac{\pi \times 0.060^2}{4} - 0.060 \times 0.006 \right) \text{m}^2 = 2.467 \times 10^{-3} \text{m}^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{F}{2.467 \times 10^{-3} \text{m}^2} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 405F (\text{Pa})$$

$$\sigma_{\min} = \frac{0.2F}{A} = 81F (\text{Pa})$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = 243F (\text{Pa})$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = 162F (\text{Pa})$$

2. 确定各影响因数

根据 $d_0/d = 6/60 = 0.1$ 和 $\sigma_b = 500\text{MPa}$, 由 16 章附表 2 查得

$$K_\sigma = 1.95$$

根据 $d = 60\text{mm}$ 和 $\sigma_b = 500\text{MPa}$ 及磨削加工情况, 由图 16-14 及 16-16 依次查得

$$\varepsilon = \varepsilon_\sigma = 0.78, \beta = 1$$

3. 计算 F 的许用值

依据公式(16-18)

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} + \sigma_m \psi_\sigma} \geq n_f$$

可得

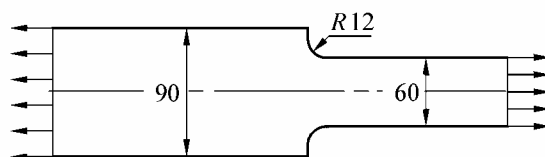
$$F \leq \frac{150 \times 10^6}{1.7 \times \left(162 \times \frac{1.95}{0.78 \times 1} + 243 \times 0.05 \right)} \text{N} = 2.12 \times 10^5 \text{N} = 212\text{kN}$$

外力的许用值取为

$$F_{\max} = 212\text{kN}$$

16-8 图示矩形截面阶梯形杆, 承受对称循环的轴向载荷作用, 试利用敏感系数 q 确定截面变化处的有效应力集中因数 K_σ 。杆用 Q275 钢制成, 强度极限 $\sigma_b = 550\text{MPa}$, 屈服应力 $\sigma_s = 275\text{MPa}$ 。

提示: 理论应力集中因数 $K_{t\sigma}$ 可由图 2-25 查得。



题 16-8 图

解：1. 求敏感系数 q

对于钢材，有

$$q_{\sigma} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{A}{R}}}$$

其中， R 为缺口的曲率半径，本题 $R = 12\text{mm}$ ； \sqrt{A} 为材料常数，可查图 16-12，据 $\sigma_b = 550\text{MPa}$ 之横标值查得 $\sqrt{A} = 0.57\text{mm}^{1/2}$ ，据 $\sigma_s / \sigma_b = 0.5$ 查得 $\sqrt{A} = 0.77\text{mm}^{1/2}$ ，二者的平均值为

$$\sqrt{A} = 0.67\text{mm}^{1/2}$$

于是得

$$q = q_{\sigma} = \frac{1}{1 + \frac{0.67}{\sqrt{12}}} = 0.838$$

2. 确定有效应力集中因数 K_{σ}

先查找 $K_{t\sigma}$ ，据 $D/d = 90/60 = 1.5$ 及 $R/d = 12/60 = 0.2$ ，查图 2-25(b)，得

$$K = 1.72 = K_{t\sigma}$$

此即理论应力集中因数。

后确定 K_{σ} ，依据公式(16-9)，我们有

$$K_{\sigma} = 1 + q_{\sigma}(K_{t\sigma} - 1) = 1 + 0.838 \times (1.72 - 1) = 1.60$$

16-9 一圆柱形密圈螺旋弹簧，平均半径 $R = 20\text{mm}$ ，弹簧丝直径 $d = 5\text{mm}$ ，弹簧承受交变压力 F 作用，其最大值 $F_{\max} = 300\text{N}$ ，最小值 $F_{\min} = 100\text{N}$ ，弹簧用合金钢制成，强度极限 $\sigma_b = 1200\text{MPa}$ ，疲劳极限 $\tau_{-1} = 300\text{MPa}$ ，敏感因数 $\psi_{\tau} = 0.1$ ，试确定弹簧的工作安全因数。表面质量因数 β 可取为 1。

解：1. 计算弹簧的工作应力

由于

$$m = \frac{2R}{d} = \frac{40}{5} = 8 < 10$$

故需采用公式(4-16)计算簧丝中的最大切应力，即

$$\tau_{\max} = \frac{8F_{\max}D(4m+2)}{\pi d^3(4m-3)} = \frac{8 \times 300 \times 0.040}{\pi \times 0.005^3} \times \frac{(4 \times 8 + 2)\text{N}}{(4 \times 8 - 3)\text{m}^2} = 2.87 \times 10^8 \text{Pa} = 287 \text{MPa}$$

$$\tau_{\min} = \frac{8 \times 100 \times 0.040}{\pi \times 0.005^3} \times \frac{(4 \times 8 + 2)\text{N}}{(4 \times 8 - 3)\text{m}^2} = 9.55 \times 10^7 \text{Pa} = 95.5 \text{MPa}$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = 95.8 \text{MPa}$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = 191.3 \text{MPa}$$

2. 确定各影响因数

由于簧丝为等截面杆，无应力集中问题，故取

$$K_{\tau} = 1$$

由于簧丝直径 $d < 10 \text{mm}$ ，故取

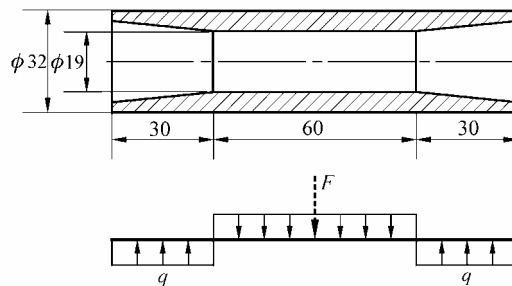
$$\varepsilon_{\tau} = 1$$

3. 计算弹簧的工作安全因数

依据公式(16-19)，得

$$n_{\tau} = \frac{300}{95.8 \times \frac{1}{1 \times 1} + 191.3 \times 0.1} = 2.61$$

16-10 图示活塞销，承受交变外力 F 作用，该力在最大值 $F_{\max}=52 \text{kN}$ 和最小值 $F_{\min} = -11.5 \text{kN}$ 之间变化，试计算活塞销的工作安全因数。活塞销用铬镍合金钢制成，强度极限 $\sigma_b=960 \text{MPa}$ ，弯曲疲劳极限 $\sigma_{-1}=430 \text{MPa}$ ，敏感因数 $\psi_{\sigma} = 0.1$ ，活塞销表面经磨削加工。



题 16-10 图

解：该活塞销除了计算工作应力时按管状考虑外，其它分析均按等截面实心轴销考虑。

1. 分析外力

该活塞销所受外力如题图（下图）所示，均布载荷集度为

$$q_{\max} = \frac{F_{\max}}{l} = \frac{52 \times 10^3 \text{ N}}{0.060 \text{ m}} = 8.67 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$q_{\min} = \frac{F_{\min}}{l} = \frac{-11.5 \times 10^3 \text{ N}}{0.060 \text{ m}} = -1.917 \times 10^5 \text{ N/m}$$

2. 分析内力

$$M_{\max} = (8.67 \times 10^5 \times 0.030 \times 0.045 - 8.67 \times 10^5 \times \frac{0.030^2}{2}) \text{ N} \cdot \text{m} = 780.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{\min} = (-1.917 \times 10^5 \times 0.030 \times 0.045 - 1.917 \times 10^5 \times \frac{0.030^2}{2}) \text{ N} \cdot \text{m} = -172.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

3. 计算工作应力

$$W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \times 0.032^3}{32} \times [1 - (\frac{19}{32})^4] \text{ m}^3 = 2.817 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{780.3}{2.817 \times 10^{-6}} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2.77 \times 10^8 \text{ Pa} = 277 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\min}}{W} = \frac{-172.5}{2.817 \times 10^{-6}} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = -6.12 \times 10^7 \text{ Pa} = -61.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) = 107.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = 169.1 \text{ MPa}$$

4. 确定各影响因数

根据 $D = 32 \text{ mm}$, 由图 16-14 查得

$$\sigma_b = 400 \text{ MPa 钢材的 } \varepsilon = 0.87$$

$$\sigma_b = 1200 \text{ MPa 钢材的 } \varepsilon = 0.77$$

$\sigma_b = 960 \text{ MPa}$ 钢材的 ε 可用线性插入法得到 ,

$$\varepsilon = 0.87 - \frac{960 - 400}{1200 - 400} \times (0.87 - 0.77) = 0.80 = \varepsilon_\sigma$$

此外 , 根据构件外形和表面加工情况可以确定有效应力集中因数和表面质量因数 , 其值依次为

$$K_\sigma = 1, \beta = 1$$

5. 计算工作安全因数

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} + \sigma_m \psi_\sigma} = \frac{430}{169.1 \times \frac{1}{0.80 \times 1} + 107.9 \times 0.1} = 1.94$$

16-12 一阶梯形圆截面轴，粗、细两段的直径分别为 $D = 50\text{mm}$ 和 $d = 40\text{mm}$ ，过渡处的圆角半径 $R = 2\text{mm}$ ，危险截面上的内力为同相位的交变弯矩和交变扭矩，弯矩的最大值为 $M_{\max} = 200\text{N} \cdot \text{m}$ 、最小值为 $M_{\min} = -200\text{N} \cdot \text{m}$ ，扭矩的最大值为 $T_{\max} = 500\text{N} \cdot \text{m}$ 、最小值为 $T_{\min} = 250\text{N} \cdot \text{m}$ 。试校核危险截面的疲劳强度。轴用碳钢制成，其强度极限 $\sigma_b = 500\text{MPa}$ ，弯曲疲劳极限 $\sigma_{-1} = 200\text{MPa}$ ，扭转疲劳极限 $\tau_{-1} = 115\text{MPa}$ ，敏感因数 $\psi_\tau = 0$ ，疲劳安全因数 $n_f = 2$ 。轴表面经磨削加工。

解：1. 计算工作应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{32 \times (200)}{\pi \times (0.040)^3} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 3.18 \times 10^7 \text{Pa} = 31.8\text{MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} = \frac{16 \times (500)}{\pi \times (0.040)^3} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 3.98 \times 10^7 \text{Pa} = 39.8\text{MPa}$$

$$\tau_{\min} = \frac{T_{\min}}{W_p} = \frac{16 \times (250)}{\pi \times (0.040)^3} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1.99 \times 10^7 \text{Pa} = 19.9\text{MPa}$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = 9.95\text{MPa}$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = 29.85\text{MPa}$$

2. 确定各影响因数

根据 $D/d = 1.25$ ， $R/d = 0.05$ 及 $\sigma_b = 500\text{MPa}$ ，由图 16-8，16-10 及 16-11 查得 K_{σ_0} 、

K_{τ_0} 和 ζ 后，代入公式 (16-5) 及 (16-6)，得

$$K_\sigma = 1 + \zeta (K_{\sigma_0} - 1) = 1 + 0.87 \times (1.9 - 1) = 1.78$$

$$K_\tau = 1 + \zeta (K_{\tau_0} - 1) = 1 + 0.84 \times (1.5 - 1) = 1.42$$

又由图 16-14 和 16-16 查得

$$\varepsilon_\sigma = 0.83, \varepsilon_\tau = 0.83, \beta = 1.0$$

3. 校核疲劳强度

依据公式 (16-14)，得

$$n_\sigma = \frac{\varepsilon_\sigma \beta \sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_{\max}} = \frac{0.83 \times 1.0 \times (200 \times 10^6)}{1.78 \times (3.18 \times 10^7)} = 2.93$$

依据公式 (16-19)，得

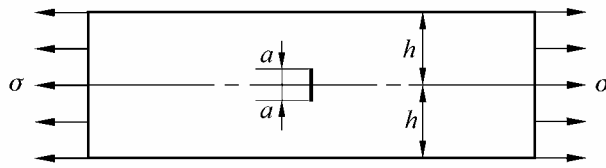
$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} + \tau_m \psi_\tau} = \frac{115}{9.95 \times \frac{1.42}{0.83 \times 1.0} + 0} = 6.76$$

最后，依据公式(16-22)，得

$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_{\sigma}n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2.93 \times 6.76}{\sqrt{2.93^2 + 6.76^2}} = 2.69 > n_f$$

由此可见，该危险截面处的疲劳强度是足够的。

16-13 图示板件，宽度 $2h = 100\text{mm}$ ，厚度 $b = 10\text{mm}$ ，板中心含穿透裂纹，其长度 $2a = 20\text{mm}$ ，在远离裂纹处承受拉应力 $\sigma = 700\text{MPa}$ ，板的材料为 30 铬锰硅镍 (30CrMnSiNi2A)，屈服应力 $\sigma_s = 1500\text{MPa}$ ，平面应变断裂韧度 $K_{Ic} = 85.1\text{MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$ ，试问板是否会断裂。



题 16-13 图

解：1. 算修正系数 α

据表 16-3，得

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1.77 + 0.277 \times \left(\frac{10}{50} \right) - 0.510 \times \left(\frac{10}{50} \right)^2 + 2.7 \times \left(\frac{10}{50} \right)^3 \right] = 1.031$$

2. 算应力强度因子 K_I

依据公式(16-29)，得

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} = 1.031 \times 700\text{MPa} \times \sqrt{\pi \times 0.010\text{m}} = 127.9\text{MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$$

3. 算最小板厚 b_{\min} 并作判断

依据公式(16-26)，得

$$b_{\min} = 2.5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2 = 2.5 \times \left(\frac{85.1}{1500} \right)^2 \text{m} = 8.05 \times 10^{-3} \text{m} = 8.05\text{mm}$$

由于

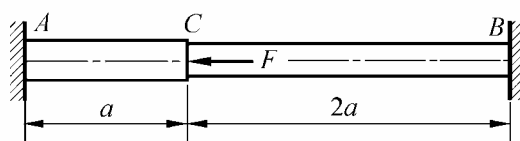
$$b = 10\text{mm} > b_{\min}$$

故属于厚板。

结论：因为 $K_I = 127.9\text{MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}} > K_{Ic}$ ，所以该板将可能发生脆性断裂。

17-2.....	1
17-4.....	1
17-5.....	2
17-8.....	3
17-9.....	3
17-10.....	5
17-12.....	5
17-13.....	7
17-14.....	8
17-15.....	10
17-16.....	11

17-2 图示两端固定杆 AB ，截面 C 承受轴向载荷 F 作用。试确定极限载荷 F_u 。已知 AC 与 CB 段的横截面面积分别为 $A_1 = 200 \text{ mm}^2$ ， $A_2 = 150 \text{ mm}^2$ ，屈服应力 $\sigma_s = 300 \text{ MPa}$ 。



题 17-2 图

解：此为一度静不定杆，只有当截面 C 两边的杆段均屈服时才会变成塑性机构。这两段杆的屈服内力依次为

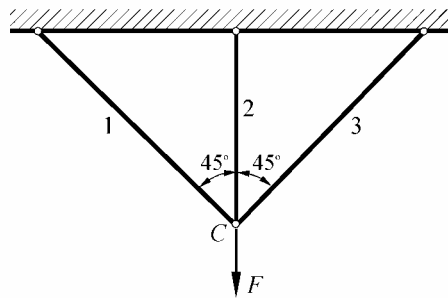
$$F_{N1s} = A_1 \sigma_s = 60 \text{ kN}$$

$$F_{N2s} = A_2 \sigma_s = 45 \text{ kN}$$

当两段杆的内力均达到屈服内力时，截面 C 有向左移动的趋势，故 F_{N1s} 为压， F_{N2s} 为拉，由轴向平衡条件可得该杆的极限载荷为

$$F_u = F_{N1s} + F_{N2s} = 105 \text{ kN}$$

17-4 图示桁架，由三根钢杆所组成，在节点 C 承受载荷 F 作用。试求极限载荷 F_u 。已知三杆的横截面面积均为 $A = 150 \text{ mm}^2$ ，屈服应力 $\sigma_s = 360 \text{ MPa}$ 。



题 17-4 图

解：此为一度静不定桁架结构。不难判断，当载荷 F 增加时，杆 2 首先到达屈服。又由于结构及载荷对称，其后的杆 1 与杆 3 必然是同时屈服，故该结构只有当三根杆都屈服时才会变成极限状态。各杆的屈服内力为

$$F_{N1s} = F_{N2s} = F_{N3s} = A\sigma_s = 54\text{kN}$$

进而由节点 C 的平衡方程 $\sum F_y = 0$ 可得极限载荷为

$$F_u = F_{N2s} + (F_{N1s} + F_{N3s})\cos 45^\circ = 130.4\text{kN}$$

17-5 试绘制题 17-4 所述桁架节点 C 的铅垂位移 f 与载荷 F 间的关系曲线。设杆长

$l_1 = l_3 = \sqrt{2}l_2 = 1\text{m}$ ，材料的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$ 。

解：1. 求各杆的轴力

解静不定，求得

$$F_{N1} = F_{N3} = \frac{F\cos^2 45^\circ}{1 + 2\cos^3 45^\circ}$$

$$F_{N2} = \frac{F}{1 + 2\cos^3 45^\circ}$$

比较可知， $F_{N2} > F_{N1}$ ，杆 2 将首先屈服。

2. 计算杆 2 屈服时点 C 的铅垂位移

杆 2 中的应力到达 σ_s 时，有

$$F_s = (1 + 2\cos^3 45^\circ)F_{N2s} = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \times 54\text{kN} = 92.2\text{kN}$$

$$f_s = \Delta l_2 = \frac{F_{N2s}l_2}{EA} = \frac{\sigma_s l_2}{E} = \frac{(360 \times 10^6) \times (\frac{1}{\sqrt{2}})\text{m}}{210 \times 10^9} = 1.212 \times 10^{-3}\text{m} = 1.212\text{mm}(\downarrow)$$

3. 计算结构达到极限状态时点 C 的铅垂位移

载荷若继续增大，会使杆 1 和 3 也屈服，即整个结构达到极限状态。此时点 C 的铅垂位

移为

$$f_u = \sqrt{2}\Delta l_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sigma_s l_1}{E}\right) = \sqrt{2} \times \frac{(360 \times 10^6) \times (1)\text{m}}{210 \times 10^9} = 2.424 \times 10^{-3} \text{m} = 2.424 \text{mm}(\downarrow)$$

4. 绘制 f 与 F 的关系曲线

根据以上计算结果及上题所得的 F_u 值，可画出 f 与 F 的关系曲线，如图 17-5 所示。

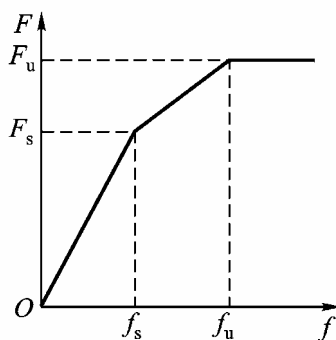
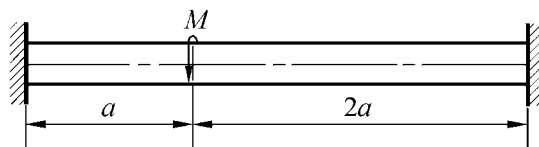


图17-5

17-8 图示两端固定的圆截面轴，承受扭力矩 M 作用，试求其极限值 M_u 。已知轴径 $d = 40\text{mm}$ ，剪切屈服应力为 $\tau_s = 100\text{MPa}$ 。



题 17-8 图

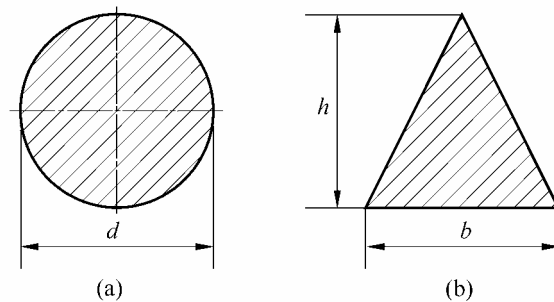
解：此为一度静不定问题。当扭力矩 M 两边的轴段均到达屈服时，该轴达到极限状态。两段轴的极限扭矩均为

$$T_p = \frac{\pi d^3}{12} \tau_s = \frac{\pi \times 0.040^3}{12} \times 100 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m} = 1676 \text{N} \cdot \text{m}$$

不难判断，左、右两边的 T_p 均与极限扭力矩 M_u 反向，故由平衡方程 $\sum M_x = 0$ 得到

$$M_u = 2T_p = 3.35 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m} = 3.35 \text{kN} \cdot \text{m}$$

17-9 梁截面如图所示，弯矩作用在铅垂对称面内。试求极限弯矩 M_p 。已知屈服应力为 σ_s 。



题 17-9 图

(a)解：达极限状态时，圆截面的水平对称轴 z 仍为中性轴。我们知道，半圆的形心坐标为

$$y_c = \frac{2d}{3\pi}$$

故极限弯矩为

$$M_p = \sigma_s (S_1 + S_2) = 2\sigma_s \left(\frac{\pi d^2}{8} \right) \left(\frac{2d}{3\pi} \right) = \frac{\sigma_s d^3}{6}$$

(b)解：先确定中性轴位置

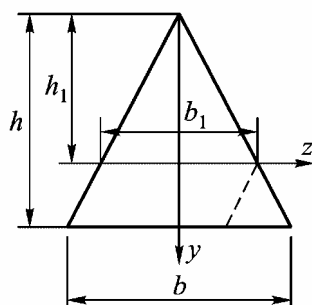


图17-9(b)

设中性轴为水平轴线 z ，如图 17-9(b)所示，有

$$h_1 : b_1 = h : b \quad (a)$$

$$\frac{1}{2} h_1 b_1 = \frac{1}{4} hb \quad (b)$$

由式(a)、(b)可得

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} h, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} b$$

后计算极限弯矩

$$M_p = \sigma_s (S_1 + S_2) \quad (c)$$

其中，

$$S_1 = (\frac{1}{2}h_1b_1)(\frac{1}{3}h_1) = \frac{\sqrt{2}}{24}bh^2 \quad (d)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}b_1(h-h_1)^2 + \frac{1}{2}(b-b_1)(h-h_1)\frac{2}{3}(h-h_1) = \frac{1}{24}(8-5\sqrt{2})bh^2 \quad (e)$$

将式(d)、(e)代入式(c)，得

$$M_p = \sigma_s [\frac{\sqrt{2}}{24}bh^2 + \frac{1}{24}(8-5\sqrt{2})bh^2] = \frac{2-\sqrt{2}}{6}\sigma_sb h^2$$

17-10 一矩形截面梁，宽为 b ，高为 h ，横截面上的弯矩为 M ，且 $M_s < M < M_p$ 。试求梁的曲率半径 ρ 。拉、压屈服应力均为 σ_s 。

解：该梁横截面上正应力分布情况如图 17-10 所示。

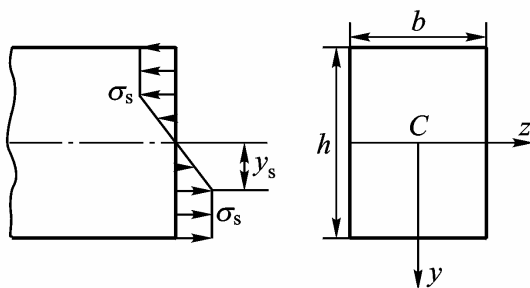


图17-10

由弯矩 M 的构成关系可知，

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sigma_s \cdot (by_s)}{2} (\frac{2}{3}y_s) \times 2 + [\sigma_s(\frac{h}{2} - y_s)b(\frac{h}{2} + y_s) \times \frac{1}{2}] \times 2 \\ &= \frac{2}{3}b\sigma_sy_s^2 + b\sigma_s(\frac{h^2}{4} - y_s^2) = \frac{b\sigma_sh^2}{4} - \frac{b\sigma_sy_s^2}{3} \end{aligned}$$

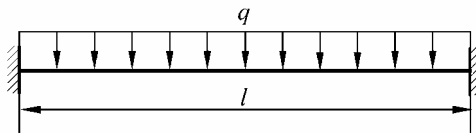
由此得

$$y_s = \sqrt{\frac{3}{b\sigma_s}(\frac{b\sigma_sh^2}{4} - M)}$$

依据关系式 $\varepsilon = y/\rho$ ，得

$$\rho = \frac{y_s}{\varepsilon_s} = \frac{Ey_s}{\sigma_s} = \frac{E}{\sigma_s} \sqrt{3(\frac{h^2}{4} - \frac{M}{b\sigma_s})}$$

17-12 图示两端固定梁，承受均布载荷 $q = 50\text{N/mm}$ 作用，试根据许用载荷法选择一合适型号的工字钢。已知许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ，梁的跨度 $l = 4\text{m}$ 。



题 17-12 图

解：1. 确定极限状态

此为三度静不定梁，但在小变形条件下，轴力很小，可以不计，故只存在两个多余未知反力，当该梁出现三个塑性铰时即处于极限状态。由于结构及载荷均对称，故极限状态只可能如图 17-12 所示。

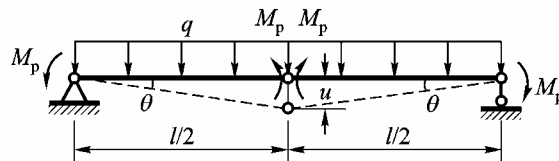


图17-12

2. 确定极限弯矩与载荷的关系

根据虚功原理，有

$$(q \frac{l}{2}) \cdot \frac{u}{2} \times 2 - (M_p \cdot \theta) \times 4 = 0$$

其中，

$$u = \frac{l}{2} \theta$$

于是得到

$$M_p = \frac{ql^2}{16}$$

3. 选择工字钢型号

依据许用载荷法，应有

$$\frac{ql^2}{16} \leq [M_p] = f[\sigma]W$$

由此得

$$W \geq \frac{ql^2}{16f[\sigma]}$$

对于工字形截面，可取 $f = 1.16$ ，于是

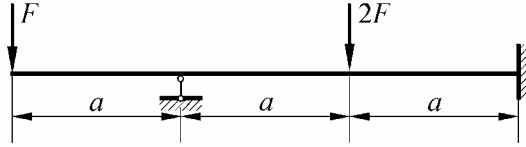
$$W \geq \frac{(50 \times 10^3) \times 4^2}{16 \times 1.16 \times 160 \times 10^6} \text{ m}^3 = 2.69 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

查附录 F 表 4，22a 工字钢的

$$W_x = 309\text{cm}^3 = 3.09 \times 10^{-4} \text{m}^3 > W$$

能满足强度要求，故选择 22a 工字钢。

17-13 试分别按许用载荷法与许用应力法分析图示梁的承载能力并进行比较。许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ ，梁截面为 22a 工字钢， $a=1\text{m}$ 。



题 17-13 图

解：1. 按许用载荷法来求

此为一度静不定梁，可能的极限状态有两种，分别示如图 17-13(a)和(b)。

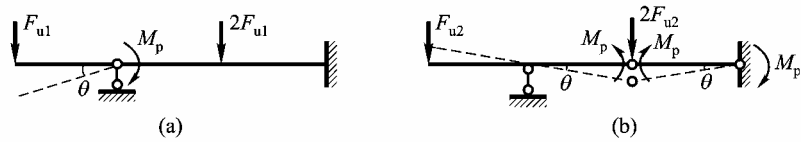


图17-13

对于图(a)，根据虚功原理，有

$$F_{u1}(\theta a) - M_p \theta = 0$$

由此得

$$F_{u1} = \frac{M_p}{a}$$

对于图(b)，根据虚功原理，有

$$2F_{u2}(\theta a) - F_{u2}(\theta a) - 3M_p \theta = 0$$

由此得

$$F_{u2} = \frac{3M_p}{a}$$

比较可知，图(a)所示为该梁真实的极限状态，故取

$$F_u = \frac{M_p}{a}$$

依据许用载荷法，该梁的承载能力为

$$F \leq \frac{[M_p]}{a} = \frac{fW[\sigma]}{a} = \frac{1.16 \times 3.09 \times 10^{-4} \times 160 \times 10^6}{1} \text{N} = 5.74 \times 10^4 \text{N} = 57.4\text{kN} = [F_u]$$

2. 按许用应力法来求

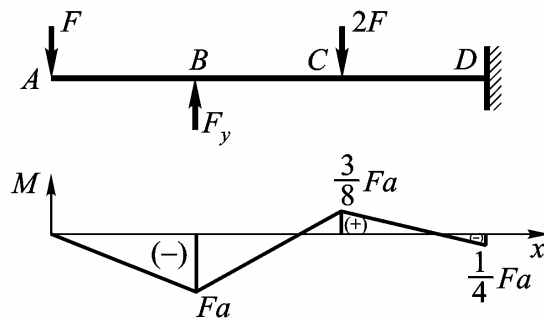


图17-13(c)

参看图 17-13(c)，解静不定，得 B 处多余反力为

$$F_y = \frac{19}{8} F$$

由弯矩图可知，

$$|M|_{\max} = Fa$$

依据许用应力法，应有

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W} = \frac{Fa}{W} \leq [\sigma]$$

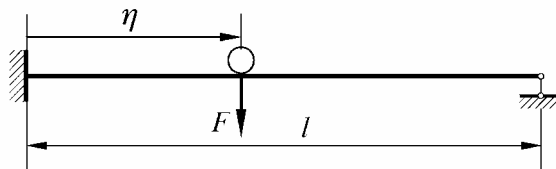
由此得

$$F \leq \frac{W[\sigma]}{a} = \frac{3.09 \times 10^{-4} \times 160 \times 10^6}{1} \text{ N} = 4.94 \times 10^4 \text{ N} = 49.4 \text{ kN} = [F]$$

3. 比较

$[F_u] = 57.4 \text{ kN}$ ， $[F] = 49.4 \text{ kN}$ ， $[F_u]/[F] = f = 1.16$ 。用许用载荷法所得结果比用许用应力法所得结果大 16%。

17-14 在图示梁上作用一沿梁轴移动的载荷 F ，试求极限载荷 F_u 。已知极限弯矩为 M_p 。



题 17-14 图

解：此为一度静不定梁，当出现两个塑性铰时，该梁即处于极限状态。由于弯矩的峰值将发生在左端截面和载荷 F 作用截面处，故可能的极限状态应如图 17-14 所示。

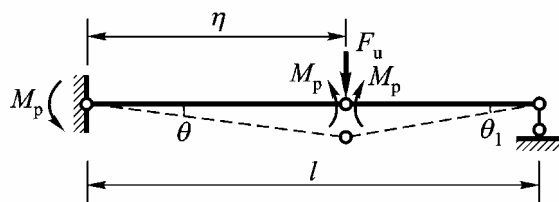


图17-14

根据虚功原理，有

$$F_u \theta \eta - 2M_p \theta - M_p \theta_1 = 0 \quad (a)$$

由几何关系可知，

$$\theta_1 = \frac{\theta \eta}{l - \eta} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a)，得

$$F_u \theta \eta - 2M_p \theta - M_p \frac{\theta \eta}{l - \eta} = 0$$

即

$$F_u = \left(\frac{2}{\eta} + \frac{1}{l - \eta} \right) M_p \quad (c)$$

进而由

$$\frac{dF_u}{d\eta} = 2\left(-\frac{1}{2}\eta^{-2}\right) + \frac{1}{2}(l - \eta)^{-2} = 0$$

得

$$\frac{2(l - \eta)^2 - \eta^2}{2\eta^2(l - \eta)^2} = 0$$

或

$$\eta^2 - 4l\eta + 2l^2 = 0 \quad (d)$$

求解方程(d)，得

$$\eta = (2 \pm \sqrt{2})l$$

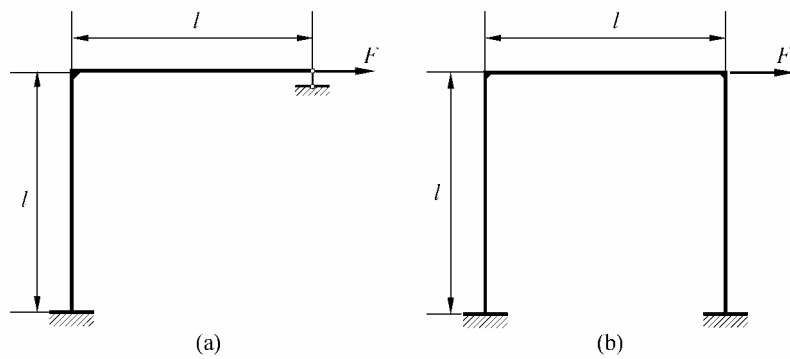
舍去增根，取

$$\eta = (2 - \sqrt{2})l = 0.586l \quad (e)$$

将式(e)代入式(c)，得极限载荷为

$$F_u = \left(\frac{2}{0.586l} + \frac{1}{l - 0.586l} \right) M_p = 5.83 \frac{M_p}{l}$$

17-15 试求图示刚架的极限载荷，已知极限弯矩为 M_p 。



题 17-15 图

(a)解：此为一度静不定刚架。其极限状态如图 17-15(a)所示。

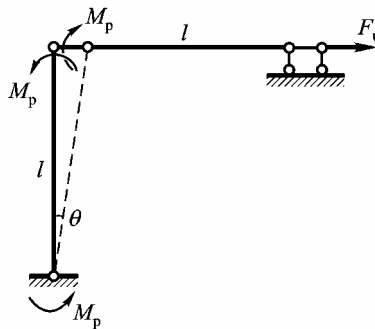


图17-15(a)

依据虚功原理，有

$$F_u(\theta l) - (M_p \theta) \times 2 = 0$$

由此得

$$F_u = \frac{2M_p}{l}$$

(b)解：此为三度静不定刚架。其极限状态如图 17-15(b)所示。

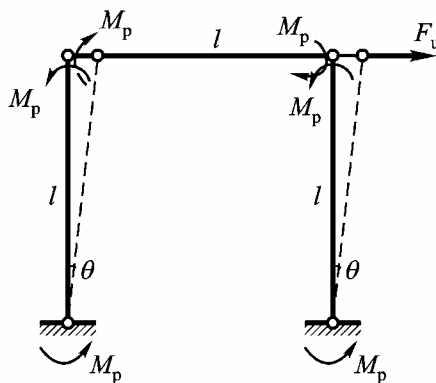


图17-15(b)

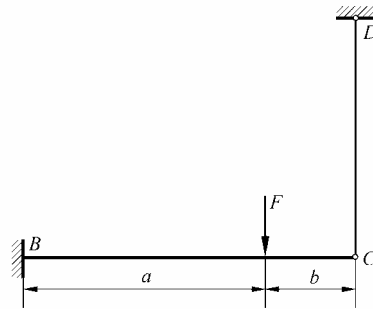
依据虚功原理，有

$$F_u(\theta l) - (M_p \theta) \times 4 = 0$$

由此得

$$F_u = \frac{4M_p}{l}$$

17-16 图示结构，由梁 BC 与杆 CD 组成。试求极限载荷 F_u 。梁用 32b 工字钢制成，杆的横截面面积 $A = 250\text{mm}^2$ ，梁与杆的屈服应力均为 $\sigma_s = 240\text{MPa}$ ， $a = 8\text{m}$ ， $b = 1\text{m}$ 。



题 17-16 图

解：此为一度静不定结构。可能的极限状态有两种，如图 17-16(a)和(b)所示。

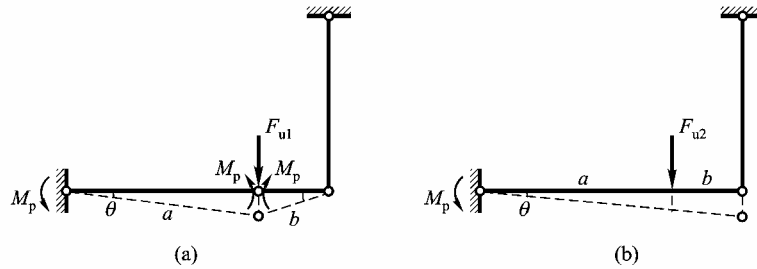


图17-16

对于图(a)，依据虚功原理，有

$$F_{u1}(\theta a) - (M_p \theta) \times 2 - M_p \left(\frac{\theta a}{b} \right) = 0$$

由此得

$$\begin{aligned} F_{u1} &= \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \right) M_p = \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \right) (fW \sigma_s) = \left(\frac{2}{8} + \frac{1}{1} \right) (1.16 \times 726 \times 10^{-6} \times 240 \times 10^6) \text{N} \\ &= 2.53 \times 10^5 \text{N} = 253 \text{kN} \end{aligned}$$

对于图(b)，依据虚功原理，有

$$F_{u2}(\theta a) - M_p \theta - F_{NS} \theta (a + b) = 0$$

由此得

$$F_{u2} = \frac{M_p + F_{NS}(a + b)}{a} = \frac{\sigma_s}{a} [(fW) + A(a + b)]$$

$$F_{u2} = \frac{240 \times 10^6}{8} [(1.16 \times 726 \times 10^{-6}) + 250 \times 10^{-6} \times (8 + 1)] \text{N} = 9.28 \times 10^4 \text{N} = 92.8 \text{kN}$$

比较以上二结果可知，图(b)所示为该结构真实的极限状态，其极限载荷为

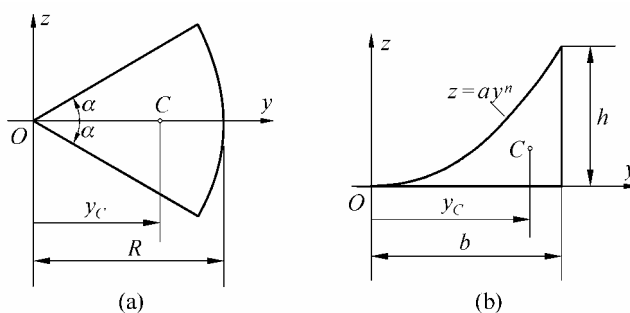
$$F_u = 92.8 \text{kN}$$

A

A-1	1
A-3	2
A-4	3
A-6	4
A-7	4
A-8	5

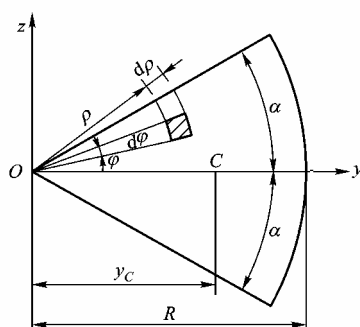
()

A-1 试确定图示截面形心 C 的坐标 y_c 。



题 A-1 图

(a)解：坐标及微面积示如图 A-1 (a)。



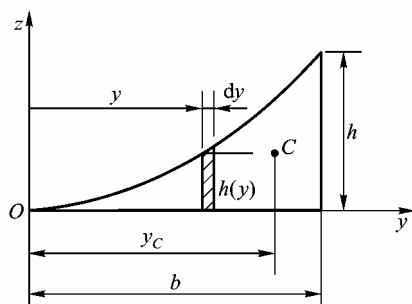
图A-1 (a)

$$dA = \rho \, d\varphi d\rho$$

由此得

$$y_C = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{\int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \cos \varphi \cdot \rho \, d\varphi d\rho}{\int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \, d\varphi d\rho} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}$$

(b)解：坐标及微面积示如图 A-1 (b)。



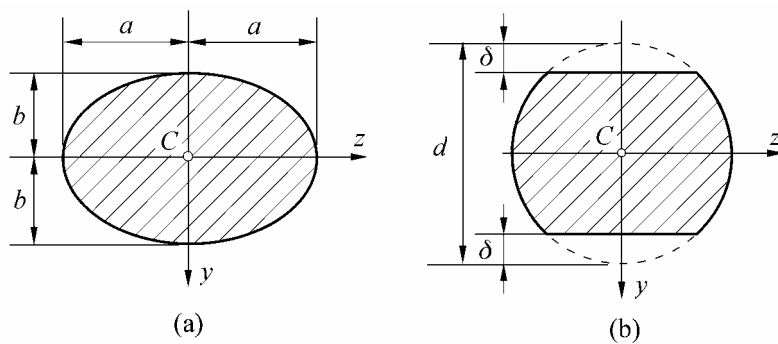
图A-1 (b)

$$dA = h(y)dy = ay^n dy$$

由此得

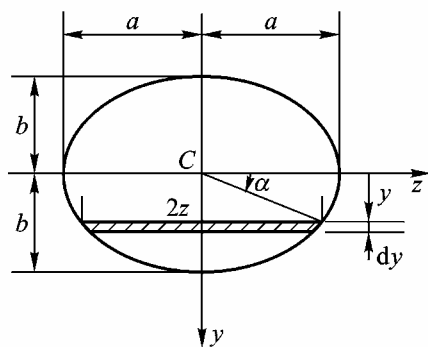
$$y_C = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{\int_0^b y \cdot ay^n dy}{\int_0^b ay^n dy} = \frac{(n+1)b}{n+2}$$

A-3 试计算图示截面对水平形心轴 z 的惯性矩。



题 A-3 图

(a)解：取微面积如图 A-3 (a) 所示。



图A-3 (a)

$$dA = 2zdy$$

由于

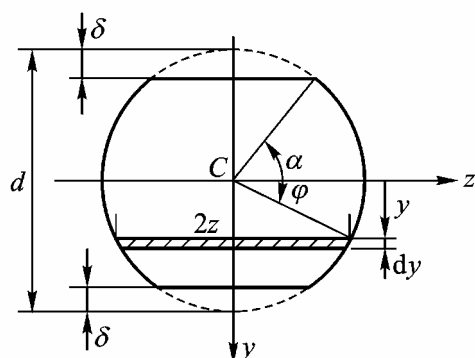
$$z = a \cos \alpha$$

$$y = b \sin \alpha, \quad dy = b \cos \alpha d\alpha$$

故有

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (b \sin \alpha)^2 \cdot 2a \cos \alpha \cdot b \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{ab^3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\alpha) d\alpha = \frac{\pi ab^3}{4} \end{aligned}$$

(b)解：取微面积如图 A-3 (b) 所示。



图A-3 (b)

$$dA = 2z dy = \frac{d^2}{2} \cos^2 \varphi d\varphi$$

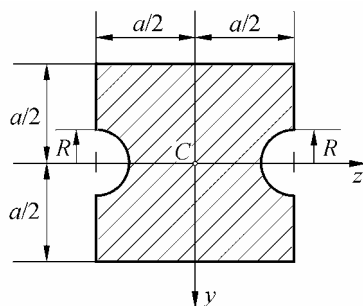
且 φ 在 α 与 $-\alpha$ 之间变化，而

$$\sin \alpha = \frac{d - 2\delta}{d}$$

由此可得

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{d}{2} \sin \varphi\right)^2 \cdot \frac{d^2}{2} \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{d^4}{8} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{d^4}{64} \int_{-\alpha}^{\alpha} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi \\ &= \frac{d^4}{32} \left(\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4}\right) \end{aligned}$$

A-4 试计算图示截面对水平形心轴 z 的惯性矩。

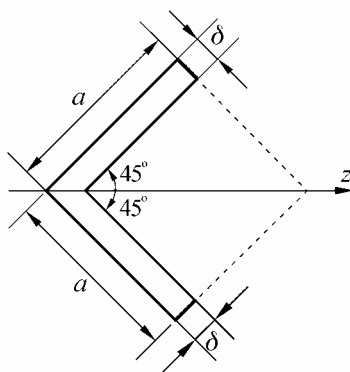


题 A-4 图

解：由截面的对称性可得

$$I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi R^4}{4}$$

A-6 试计算图示截面对水平形心轴 z 的惯性矩。

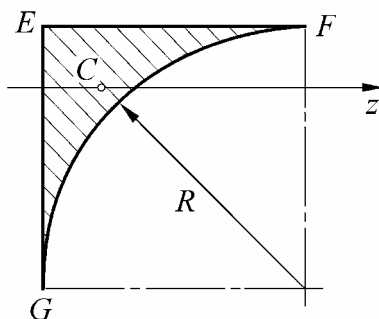


题 A-6 图

解：由截面关于 z 轴的对称性可得

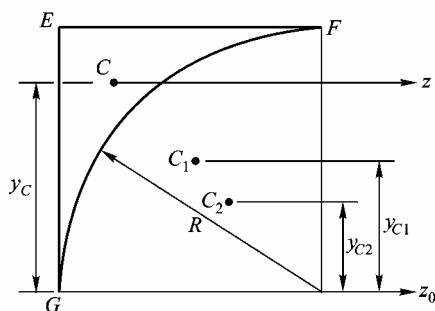
$$I_z = \frac{a^4}{12} - \frac{(a-\delta)^4}{12} = \frac{1}{12}[a^4 - (a-\delta)^4]$$

A-7 图示曲边三角形 EFG ， z 轴为平行于 EF 边的形心轴，试计算该截面对 z 轴的惯性矩。



题 A-7 图

解：视曲边三角形面积 A 为正方形面积 A_1 与 $\frac{1}{4}$ 圆面积 A_2 之差（见图 A-7），即



图A-7

$$A = A_1 - A_2 = \frac{4 - \pi}{4} R^2$$

由图可知， A_1 及 A_2 的形心位置（竖向）依次为

$$y_{C1} = \frac{R}{2}, y_{C2} = \frac{4R}{3\pi}$$

由

$$A_1 y_{C1} = A y_C + A_2 y_{C2}$$

可得 A 的形心位置为

$$y_C = \frac{A_1 y_{C1} - A_2 y_{C2}}{A} = \frac{2}{3(4 - \pi)} R$$

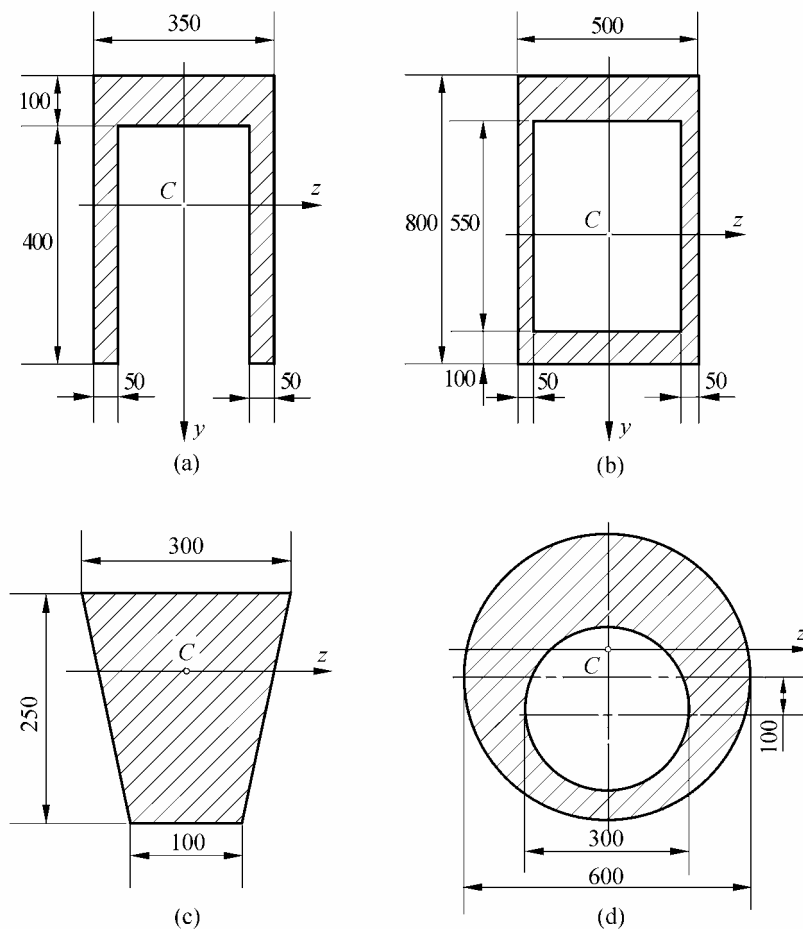
进而求曲边三角形截面对 z 轴的惯性矩。先求 A 对 z_0 轴的 I_{z_0} ，

$$I_{z_0} = I_{z_0}^{(1)} - I_{z_0}^{(2)} = \frac{1}{3} R^4 - \frac{\pi}{16} R^4 = \frac{16 - 3\pi}{48} R^4$$

最后求 I_z ，

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z_0} - A y_C^2 = \frac{16 - 3\pi}{48} R^4 - \left(\frac{4 - \pi}{4} R^2 \right) \left(\frac{2}{12 - 3\pi} R \right)^2 \\ &= \frac{3(16 - 3\pi)(4 - \pi) - 16}{144(4 - \pi)} R^4 \approx 7.55 \times 10^{-3} R^4 \end{aligned}$$

A-8 试计算图示截面对水平形心轴 z 的惯性矩。



题 A-8 图

(a)解：1. 确定形心位置（到顶边之距为 y_C ）

$$y_C = \frac{0.350 \times 0.100 \times 0.050 + 2 \times (0.400 \times 0.050 \times 0.300)}{0.350 \times 0.100 + 2 \times (0.400 \times 0.050)} \text{m} = 0.1833 \text{m}$$

2. 计算惯性矩

$$\begin{aligned} I_z &= \left\{ \frac{0.350 \times 0.100^3}{12} + 0.350 \times 0.100 \times (0.1833 - 0.050)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \times \left[\frac{0.050 \times 0.400^3}{12} + 0.050 \times 0.400 \times (0.300 - 0.1833)^2 \right] \right\} \text{m}^4 \\ &= 1.729 \times 10^{-3} \text{m}^4 = 1.729 \times 10^9 \text{mm}^4 \end{aligned}$$

(b)解：1. 确定形心位置（到顶边之距为 y_C ）

$$y_C = \frac{0.800 \times 0.500 \times 0.400 - 0.550 \times 0.400 \times 0.425}{0.800 \times 0.500 - 0.550 \times 0.400} \text{m} = 0.3694 \text{m}$$

2. 计算惯性矩

$$I_z = \left[\frac{0.500 \times 0.800^3}{12} + 0.500 \times 0.800 \times (0.400 - 0.3694)^2 - \frac{0.400 \times 0.550^3}{12} - 0.400 \times 0.550 \times (0.425 - 0.3694)^2 \right] \text{m}^4 = 1.548 \times 10^{-2} \text{m}^4 = 1.548 \times 10^{10} \text{mm}^4$$

(c)解：根据附录C第4行的公式，可直接计算惯性矩，

$$I_z = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} = \frac{0.250^3 \times (0.100^2 + 4 \times 0.100 \times 0.300 + 0.300^2)}{36 \times (0.100 + 0.300)} \text{m}^4$$

$$= 2.39 \times 10^{-4} \text{m}^4 = 2.39 \times 10^8 \text{mm}^4$$

(d)解：1. 确定形心位置（到大圆水平直径之距为 y_C ）

$$y_C = \frac{0 - \frac{\pi \times 0.300^2}{4} \times 0.100}{\frac{\pi}{4}(0.600^2 - 0.300^2)} \text{m} = -0.0333 \text{m}$$

结果为负值，表示形心C在大圆水平直径上方。

2. 计算惯性矩

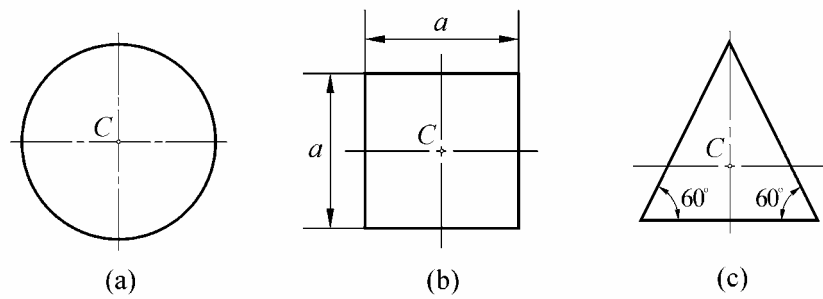
$$I_z = \left[\frac{\pi \times 0.600^4}{64} + \frac{\pi \times 0.600^2}{4} \times 0.0333^2 - \frac{\pi \times 0.300^4}{64} - \frac{\pi \times 0.300^2}{4} \times 0.1333^2 \right] \text{m}^4$$

$$= 5.02 \times 10^{-3} \text{m}^4 = 5.02 \times 10^9 \text{mm}^4$$

G

G-1.....	1
G-2.....	1
G-3.....	2
G-4.....	3

G-1



G-1

1

1 y, z

2 I_y, I_z, I_{yz} $I_y = I_z, I_{yz} = 0$

3 α y_1, z_1

$I_{y_1} = I_{z_1}, I_{y_1 z_1} = 0, I_{y_1} = I_y$

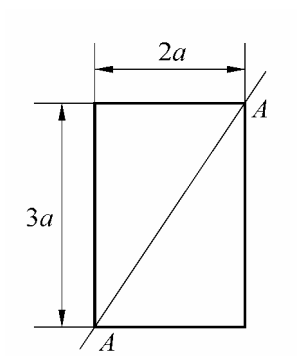
α

2

I_y, I_{yz}

G-2

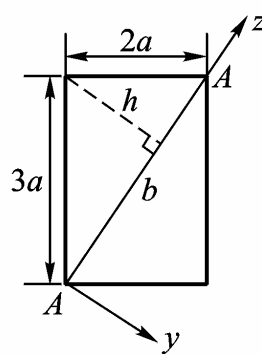
AA



G-2

G-2

$$b = \sqrt{13}a \quad h = 6a / \sqrt{13}$$



图G-2

A-16

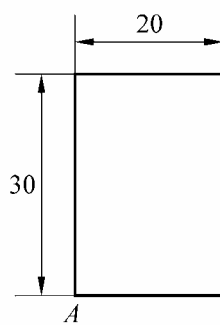
$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

b h z AA
G-2

$$I_z = 2 \times \left[\frac{1}{12} (\sqrt{13}a) \left(\frac{6a}{\sqrt{13}} \right)^3 \right] = \frac{36}{13} a^4 = I_{AA}$$

G-3

A



G-3

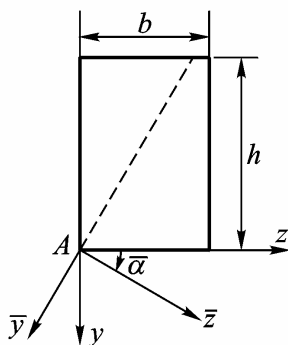
G-3

$b = 20\text{mm}$ $h = 30\text{mm}$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} + bh\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} \times 0.030 \times 0.020^3 + 0.020 \times 0.030 \times 0.010^2\right)\text{m}^4 = 8.00 \times 10^{-8} \text{m}^4$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} \times 0.020 \times 0.030^3 + 0.020 \times 0.030 \times 0.015^2\right)\text{m}^4 = 1.800 \times 10^{-7} \text{m}^4$$

$$I_{yz} = (bh)\left(\frac{b}{2}\right)\left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{b^2h^2}{4} = -\frac{1}{4} \times (0.020)^2 \times (0.030)^2 \text{m}^4 = -9.00 \times 10^{-8} \text{m}^4$$



图G-3

G-7

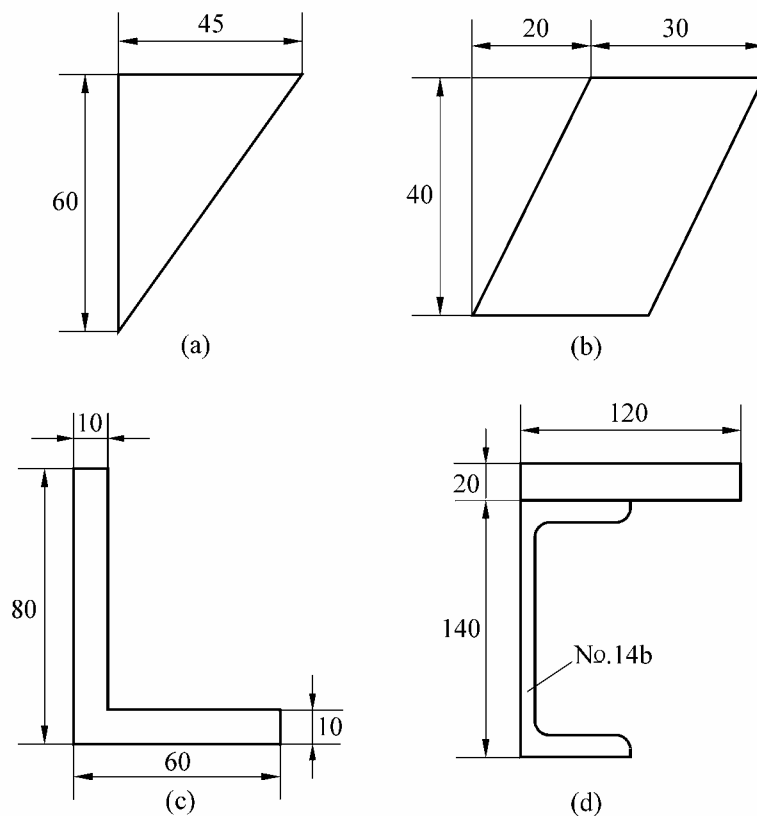
G-8

$$2\bar{\alpha} = \arctan \frac{2 \times (-0.900 \times 10^{-8})}{1.800 \times 10^{-7} - 8.00 \times 10^{-8}} = -60.945^\circ, \quad \bar{\alpha} = -30.47^\circ$$

$$I_{\bar{y}} = \left[\frac{8.00 \times 10^{-8} + 1.800 \times 10^{-7}}{2} + \frac{8.00 \times 10^{-8} - 1.800 \times 10^{-7}}{2} \cos(-60.945^\circ) - (-9.00 \times 10^{-8}) \sin(-60.945^\circ) \right] \text{m}^4 = 2.70 \times 10^{-8} \text{m}^4 = 2.70 \times 10^4 \text{mm}^4$$

$$I_{\bar{z}} = \left[\frac{8.00 \times 10^{-8} + 1.800 \times 10^{-7}}{2} - \frac{8.00 \times 10^{-8} - 1.800 \times 10^{-7}}{2} \cos(-60.945^\circ) + (-9.00 \times 10^{-8}) \sin(-60.945^\circ) \right] \text{m}^4 = 2.33 \times 10^{-7} \text{m}^4 = 2.33 \times 10^5 \text{mm}^4$$

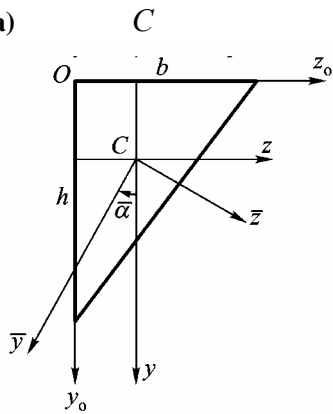
G-4



G-4

(a)

G-4 (a)



图G-4(a)

$$I_y = \frac{hb^3}{36} = \frac{0.060 \times 0.045^3}{36} \text{ m}^4 = 1.519 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{bh^3}{36} = \frac{0.045 \times 0.060^3}{36} \text{ m}^4 = 2.70 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\begin{aligned} I_{yz} = I_{y_0 z_0} - A y_C z_C &= \frac{b^2 h^2}{24} - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right) = -\frac{b^2 h^2}{72} \\ &= -\frac{0.045^2 \times 0.060^2}{72} \text{ m}^4 = -1.013 \times 10^{-7} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\tan 2\bar{\alpha} = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \times (-1.013 \times 10^{-7})}{2.70 \times 10^{-7} - 1.519 \times 10^{-7}} = -1.715$$

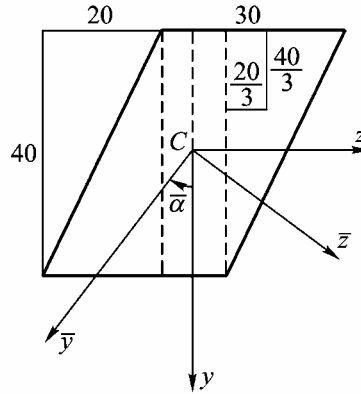
$$2\bar{\alpha} = -59.75^\circ \quad \bar{\alpha} = -29.88^\circ \approx -29.9^\circ$$

$$\left. \begin{matrix} I_{\bar{y}} \\ I_{\bar{z}} \end{matrix} \right\} = \left[\frac{1.519 \times 10^{-7} + 2.70 \times 10^{-7}}{2} \pm \frac{1.519 \times 10^{-7} - 2.70 \times 10^{-7}}{2} \cos(-59.75^\circ) \right. \\ \left. \mp (-1.013 \times 10^{-7}) \sin(-59.75^\circ) \right] \text{m}^4$$

$$I_{\bar{y}} = 9.37 \times 10^{-8} \text{m}^4 = 9.37 \times 10^4 \text{mm}^4 \quad I_{\bar{z}} = 3.28 \times 10^{-7} \text{m}^4 = 3.28 \times 10^5 \text{mm}^4$$

(b)

G-4 (b)



图G-4(b)

$$I_z = \frac{0.030 \times 0.040^3}{12} \text{m}^4 = 1.600 \times 10^{-7} \text{m}^4$$

$$I_y = \left\{ \frac{0.040 \times 0.010^3}{12} + \left[\frac{0.040 \times 0.020^3}{36} + \frac{1}{2} \times 0.040 \times 0.020 \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(0.005 + \frac{0.020}{3} \right)^2 \right] \times 2 \right\} \text{m}^4 = 1.300 \times 10^{-7} \text{m}^4$$

$$I_{yz} = \left\{ \frac{1}{2} \times 0.040 \times 0.020 \times \left[-\left(0.020 - \frac{0.040}{3} \right) \right] \left(0.005 + \frac{0.020}{3} \right) \right\} \times 2 \text{m}^4 \\ = -6.22 \times 10^{-8} \text{m}^4$$

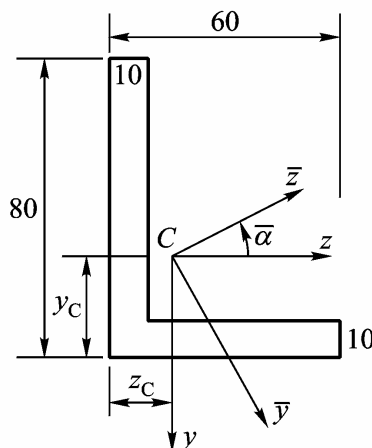
$$\tan 2\bar{\alpha} = \frac{2 \times (-6.22 \times 10^{-8})}{1.600 \times 10^{-7} - 1.300 \times 10^{-7}} = -4.147$$

$$2\bar{\alpha} = -76.44^\circ, \quad \bar{\alpha} = -38.22^\circ \approx -38.2^\circ$$

$$\left. \begin{matrix} I_{\bar{y}} \\ I_{\bar{z}} \end{matrix} \right\} = \left[\frac{1.300 \times 10^{-7} + 1.600 \times 10^{-7}}{2} \pm \frac{1.300 \times 10^{-7} - 1.600 \times 10^{-7}}{2} \cos(-76.44^\circ) \right. \\ \left. \mp (-6.22 \times 10^{-8}) \sin(-76.44^\circ) \right] \text{m}^4$$

$$I_{\bar{y}} = 8.10 \times 10^{-8} \text{m}^4 = 8.10 \times 10^4 \text{mm}^4, I_{\bar{z}} = 2.09 \times 10^{-7} \text{m}^4 = 2.09 \times 10^5 \text{mm}^4$$

(c) G-4(c) C



图G-4(c)

$$y_C = \left(\frac{80 \times 10 \times 40 + 50 \times 10 \times 5}{80 \times 10 + 50 \times 10} \right) \times 10^{-3} \text{m} = 26.54 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$z_C = \left(\frac{70 \times 10 \times 5 + 60 \times 10 \times 30}{70 \times 10 + 60 \times 10} \right) \times 10^{-3} \text{m} = 16.54 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$I_z = \left[\frac{10 \times 80^3}{12} + 80 \times 10 \times (40 - 26.54)^2 + \frac{50 \times 10^3}{12} + 50 \times 10 \times (26.54 - 5)^2 \right] \times 10^{-12} \text{m}^4 = 8.078 \times 10^{-7} \text{m}^4$$

$$I_y = \left[\frac{10 \times 60^3}{12} + 60 \times 10 \times (30 - 16.54)^2 + \frac{70 \times 10^3}{12} + 70 \times 10 \times (16.54 - 5)^2 \right] \times 10^{-12} \text{m}^4 = 3.878 \times 10^{-7} \text{m}^4$$

$$I_{yz} = [80 \times 10 \times (26.54 - 40)(5 - 16.54) + 50 \times 10 \times (26.54 - 5) \times (10 + \frac{50}{2} - 16.54)] \times 10^{-12} \text{m}^4 = 3.231 \times 10^{-7} \text{m}^4$$

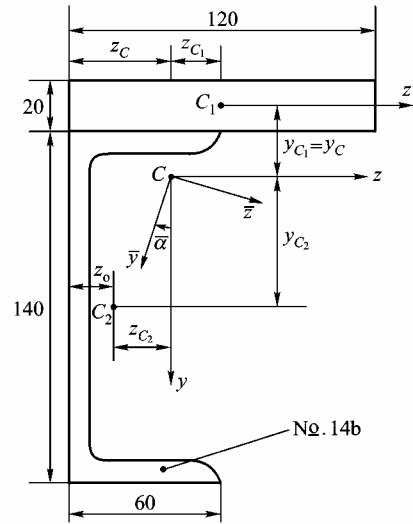
$$\tan 2\bar{\alpha} = \frac{2 \times 3.231 \times 10^{-7}}{(8.078 - 3.878) \times 10^{-7}} = 1.539$$

$$2\bar{\alpha} = 56.98^\circ, \bar{\alpha} = 28.49^\circ \approx 28.5^\circ$$

$$\left. \begin{matrix} I_{\bar{y}} \\ I_{\bar{z}} \end{matrix} \right\} = \left[\frac{(3.878 + 8.078) \times 10^{-7}}{2} \pm \frac{(3.878 - 8.078) \times 10^{-7}}{2} \cos 56.98^\circ \right. \\ \left. \mp 3.231 \times 10^{-7} \sin 56.98^\circ \right] \text{m}^4$$

$$I_{\bar{y}} = 2.13 \times 10^{-7} \text{m}^4 = 2.13 \times 10^5 \text{mm}^4, \quad I_{\bar{z}} = 9.83 \times 10^{-7} \text{m}^4 = 9.83 \times 10^5 \text{mm}^4$$

(d) G-4 (d)



图G-4(d)

1

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \left[\frac{0 + 2131.6 \times (70 + 10)}{120 \times 20 + 2131.6} \right] \times 10^{-3} \text{m} = 37.63 \times 10^{-3} \text{m} = y_{C_1}$$

$$z_C = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \left[\frac{(120 \times 20) \times 60 + 2131.6 \times 16.7}{(120 \times 20) + 2131.6} \right] \times 10^{-3} \text{m} = 39.63 \times 10^{-3} \text{m}$$

2

$$y_{C_2} = (80 - 37.63) \times 10^{-3} \text{m} = 42.37 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$z_{C_1} = (60 - 39.63) \times 10^{-3} \text{m} = 20.37 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$z_{C_2} = (39.63 - 16.7) \times 10^{-3} \text{m} = 22.93 \times 10^{-3} \text{m}$$

3 I_z I_y I_{yz}

$$\begin{aligned}
I_z &= \left[\frac{120 \times 20^3}{12} + (120 \times 20) \times 37.63^2 + 609 \times 10^4 + 2131.6 \times 42.37^2 \right] \times 10^{-12} \text{ m}^4 \\
&= 1.340 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \\
I_y &= \left[\frac{20 \times 120^3}{12} + (120 \times 20) \times 20.37^2 + 61.1 \times 10^4 + 2131.6 \times 22.93^2 \right] \times 10^{-12} \text{ m}^4 \\
&= 5.608 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \\
I_{yz} &= [(120 \times 20) \times (-37.63) \times 20.37 + 2131.6 \times 42.37 \times (-22.93)] \times 10^{-12} \text{ m}^4 \\
&= -3.911 \times 10^{-6} \text{ m}^4
\end{aligned}$$

4

$$\tan 2\bar{\alpha} = \frac{2 \times (-3.911 \times 10^{-6})}{1.340 \times 10^{-5} - 5.608 \times 10^{-6}} = -1.004$$

$$2\bar{\alpha} = -45.11^\circ, \bar{\alpha} = -22.56^\circ \approx -22.6^\circ$$

5

$$\begin{aligned}
\left. \begin{matrix} I_{\bar{y}} \\ I_{\bar{z}} \end{matrix} \right\} &= \left[\frac{(5.608 + 13.40) \times 10^{-6}}{2} \pm \frac{(5.608 - 13.40) \times 10^{-6}}{2} \cos(-45.11^\circ) \right. \\
&\quad \left. \mp (-3.911 \times 10^{-6}) \sin(-45.11^\circ) \right] \text{ m}^4 \\
I_{\bar{y}} &= 3.98 \times 10^{-6} \text{ m}^4 = 3.98 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_{\bar{z}} = 1.502 \times 10^{-5} \text{ m}^4 = 1.502 \times 10^7 \text{ mm}^4
\end{aligned}$$