$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

有限　　有界

第八章 广义积分

§8.1 无穷区间上积分的基本概念和计算

一、无穷区间上的积分的基本概念和计算

定义1.1 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上有定义，对于对于任何$A>a$, 函数$f(x)$在$[a,A]$上黎曼可积，若$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = M\ (M<+\infty)$, 则称$M$为$f(x)$在$[a,+\infty)$上的广义积分(也称无穷积分)，记为$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 并称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，否则为发散．这时

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

同理可定义： (1) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x.$

例 计算广义积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$

解 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = -\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\cos \frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}$

$= 1$

$$= -\lim_{b\to+\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^{b} \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\cos \frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\cos \frac{1}{b} - \cos \frac{\pi}{2}\right] = 1.$$

(2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,\ \forall c \in R.$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\cancel{=} \lim_{a\to+\infty}\left(\int_{-a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{a} f(x)\mathrm{d}x\right)$$

当两个积分都收敛时，称f在$(-\infty,+\infty)$上积分收敛.

（不依赖于c）

两个积分有一个不收敛时，称该积分发散.

性质1.1 若$\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$收敛， k_1, k_2为任意实数，则 $\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x$ 收敛，且有

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$$

性质1.2 设函数$f(x)$在$[a,u]$上可积，则对于 $\forall b>a$，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$同时收敛和发散．

定理1.1 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上可积分，且有原函数$F(x)$，则有$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty)-F(a)$,

同理：$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(-\infty)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty)-F(-\infty),$$

这里，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x), F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x).$

广义积分的牛—莱公式,换元,分部也有相应的推广.

例1 证明广义积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (a>0)$当$p>1$时收敛，当 $p\le 1$时发散.

证明: 当$p=1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln x]_a^{+\infty}=+\infty$;

$$当p\ne 1时，\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{1-p}}{1\text{-}p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & p<1,\\ \dfrac{a^{1-p}}{1\text{-}p}, & p>1.\end{cases}$$

命题得证.

所以广义积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$

当$p>1$时收敛，其值为$\frac{a^{1-p}}{p-1}$.

当$p \le 1$时发散.

例2 计算无穷广义积分

$$(1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx,\quad (2)\ \int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx.$$

解:
$$(1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\arctan]_a^0+\lim_{b\to+\infty}[\arctan]_0^b$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b=\pi.$$

$$(2)\ \int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx=[-\frac{1}{2}e^{-x^2}]_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

广义积分的牛--莱,换元,分部.

上（1）题也可直接写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\left[\arctan x\right]_{-\infty}^{0}+\left[\arctan x\right]_{0}^{+\infty}$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例3 求$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x,\forall\alpha\in R$

解 令$x=\frac{1}{t}$, $I=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\alpha})}\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha+1-1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$$

§10.2 无穷区间上的积分的收敛性问题

二、无穷区间上的积分的收敛性问题

设f定义于$[a,+\infty)$且在任意有限区间 $[a,A]$ 上黎曼可积，

$$\text{记}\ F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

如果 $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)<+\infty$，称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

设$f\geq 0$,则$F(A)$是关于A的增函数,故有：

定理2.1 设$f \geq 0$,则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\text{收敛} \Leftrightarrow F(A)\text{在}[a,+\infty)\text{上有界.}$$

定理2.2（比较判别法）

设$0 \leq f(x) \leq g(x)$, (充分大的 x), 那么

1^o 若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛

2^o 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散$\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散

常用的比较对象:

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\,(a>0)\quad\begin{cases}\text{当 } p>1 \text{ 时收敛;}\\ \text{当 } p\le 1 \text{ 时发散.}\end{cases}$$

例1 判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

解: $\because 0<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=\frac{1}{x^{4/3}},\quad p=\frac{4}{3}>1,$

根据比较判别法

广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 收敛.

定理2.3（比较判别法的极限形式）

设$f(x), g(x) \geq 0$, 且$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$，则

1° 若$0 < l < +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$同敛散；

2° 若$l=0$, 且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；

3° 若$l=+\infty$, 且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

例2　判断$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$的敛散性.

解:

当$x\to+\infty$时,

$$f(x)=\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\sim\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^3}=g(x)$$

$\therefore$ 该广义积分收敛 .

例3 讨论$\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x \quad (p>0)$的敛散性

解： 由于当$x \to +\infty$时，$f(x)=x^{p-1}e^{-x}$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x}=0,$$

于是由$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛，知原积分收敛.

例4 讨论下列积分的敛散性.

$$(1)\ \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx,\quad (2)\ \int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx\ (m,n>0).$$

解： (1) 若$n>1$,取$n=1+\delta$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^{1+\delta}}}{\dfrac{1}{x^{1+\delta/2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\delta/2}}=\delta/2\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{x^{\delta/2-1}}=0,$$

因此$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$收敛.

若$n\le1$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\frac{\ln(1+x)}{x^n}=+\infty$, 因此$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$发散.

(2) 由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n-m}\frac{x^m}{1+x^n}=1,$$

故当$n-m>1$时，$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$收敛；

故当$n-m\le 1$时，$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$发散.

三. 小结

(1) 无穷积分的定义和性质;

(2) 无穷积分的计算;

(3) 无穷积分的比较审敛法.

四. 作业

8.1

（1）------（11）；

8.2

1，2，3，4，5，6