连续函数介值定理及其推论的逆命题

施　彩　凤

（基础课部）

摘　要　本文利用介值定理的结论引进了一个函数是区间保持的概念，并给出了关于区间保持的函数是连续的一个充要条件。我们证明了对于单调函数，区间保持的性质与连续性等价。最后还证明了对于实数的子集A，如果定义在A上取值于A内的任一连续函数都有不动点，则A为实数的有限闭区间。

关键词　连续函数　介值定理　区间保持　不动点

定义在一个区间上的连续函数的介值定理是数学分析中一个很重要的基本定理。这个定理是说：定义在一个区间上的连续函数能够取得任何两个函数值之间的一切实数。

如果我们把函数看成变换，那么介值定理是说，连续函数总是把实数的区间变换成区间（注：这里的区间也可能是单独一点，本文总把单独一点视为退化的区间）。

所谓实数的区间Ⅰ，确切地说Ⅰ是实数集的子集，并满足条件：当 $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ 且 $x_1 \leqslant x_2$ 时，则介于它们之间的任何x，即满足 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 的 $x \in \mathrm{I}$。

介值定理有一个推论：对于定义在闭区间〔a, b〕（a<b）上取值于〔a, b〕内的任一连续函数 $f(x)$，总存在一个点 $x_0 \in$〔a, b〕使 $f(x_0) = x_0$（见〔1〕P6）。从变换的观点来说，这种点 x_0 叫做 $f(x)$ 的不动点。

本文是要讨论介值定理及其推论的逆命题是否成立的问题。

首先，考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

易见 $f(x)$ 总是把实数的区间变换成区间，但 $f(x)$ 在 x_0 处不连续。

由此可见介值定理的逆命题是否定的。现在我们的问题是，能否在适当的条件下部分地成立呢？为此我们引进：

定义1　若函数 $f(x)$ 总是把区间变换成区间，就说 $f(x)$ 是区间保持的。

于是介值定理是说若 $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 是区间保持的。而上述例子表明，如果 $f(x)$ 是区间保持的，则 $f(x)$ 未必连续。

本文于1988年5月7日收到

定理1 设$f(x)$是定义在区间I上的函数，如果$f(x)$是区间保持的，那么$f(x)$在定义域I内一点x_0处连续的充要条件是$f(x)$在x_0处存在（有限的）极限。

证明：显然只须证明条件的充分性。设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ 。现在假定$f(x)$在x_0处不连续，则$l\neq f(x_0)$。于是存在$\varepsilon>0$（如取$\varepsilon=\frac{|f(x_0)-l|}{2}$）使$f(x_0)\notin(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$，但对上述$\varepsilon>0$存在$\delta>0$使当$x\in I$，$0<|x-x_0|<\delta$时，

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$$

这就表明I的子区间$I\cap(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$内除$x_0$以外，每一点的函数值都落在区间$(l-\varepsilon/2,\ l+\varepsilon/2)$内，又因$f(x)$是区间保持的，所以必有$f(x_0)\in[l-\varepsilon/2,\ l+\varepsilon/2]\subset(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$，这与$f(x_0)\notin(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$矛盾。从而证明了$f(x)$在$x_0$处连续。

定理2 设定义在闭区间$[a,\ b]$（$a<b$）上的函数$f(x)$是区间保持的，则$f(x)$在$[a,\ b]$上连续的充要条件是对值域内每个y，集合$A(y)=\{x\in[a,\ b]\mid f(x)=y\}$为闭集（即$A(y)$的聚点都在$A(y)$内，见〔2〕）。

证：先证必要性。设x_0为$A(y)$的聚点，则$x_0\in[a,\ b]$且存在$x_n\in A(y)$，$n=1,2,\cdots$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，因为$f(x_n)=y$，$n=1,2\cdots$，又$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，所以$f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=y$，从而$x_0\in A(y)$，因此$A(y)$是闭集。

再证充分性。用反证法，假定$f(x)$在$x_0\in[a,b]$处不连续，当然$f(x_0)$就不是$f(x)$在x_0处的极限。这就是说存在$\varepsilon>0$，对每个$\delta>0$都有x_δ使$|x_\delta-x_0|<\delta$，但$|f(x_\delta)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$。现取$\delta=\frac{1}{n}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）则存在$x_n$使$|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$，$|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$。令

$$N_1=\{n\mid f(x_n)>f(x_0)\},\qquad N_2=\{n\mid f(x_n)<f(x_0)\}$$

显然$N_1\cup N_2$为全体自然数，故N_1、N_2中至少有一个是无限集，不妨假定N_1是无限集。将N_1中的自然数由小到大顺次排列，并记为$n_1<n_2<n_3<\cdots$于是$|x_{n1}-x_0|<\frac{1}{n_1}$，$f(x_{n1})-f(x_0)\geqslant\varepsilon$。由于$f(x)$是区间保持的，所以$f$把区间$(x_0-\frac{1}{n_1},x_0+\frac{1}{n_1})$变换成包含$f(x_{n1})$与$f(x_0)$的区间，从而存在

$$x'_{n1}\in(x_0-\frac{1}{n_1},x_0+\frac{1}{n_1})$$

使$f(x'_{n1})=f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$，对每个$n_1$都如此做，就得到数列$\{x'_{n1}\}$它收敛到$x_0$。令$y'=f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$，则$x'_{n1}\in A(y')$，$x_0$是$A(y')$的聚点。但$x_0\notin A(y')$，这与$A(y')$是闭集的条件相矛盾，从而证明了$f(x)$连续。

注：由上述证明可见，如果把$f(x)$的定义区间$[a, b]$改成$(-\infty, +\infty)$或$[a, +\infty)$与$(-\infty, b]$形式的无限区间，定理仍然成立。

现设I为任意的区间，$A\subset I$，A的任意一个聚点a，只要$a\in I$，必有$a\in A$，我们称满足这种条件的A为I中的相对闭集。显然闭区间$[a, b]$中的相对闭集就等价于闭集，利用这个概念，上述定理就可扩充为

定理2′ 设定义在任意区间I上的函数$f(x)$是区间保持的，则$f(x)$在I上连续的充要条件是对值域内每个y，集合$A(y)=\{x\in I \mid f(x)=y\}$是$I$中的相对闭集。

定理3 如果$f(x)$是定义在区间I上的单调函数（不必是严格的），那么$f(x)$在I上连续的充要条件为$f(x)$是区间保持的。

证明：条件的必要性是显然的，现证充分性。不妨设$f(x)$是单调不减的。我们利用定理2′，在值域内任取y，证明集合$A(y)=\{x\in I \mid f(x)=y\}$是$I$中的相对闭集。如果$A(y)$只含一个点，当然是相对闭集。故不妨假定$A(y)$中至少有两个不同的点$x_1$，$x_2$ $(x_1<x_2)$，于是$f(x_1)=f(x_2)=y$。因为$f(x)$是单调不减的，所以对每个$x\in(x_1, x_2)$，有$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$，于是$f(x)=y$，从而$x\in A(y)$，这就表明$A(y)$是$I$的一个子区间。假定$A(y)$不是$I$中的相对闭集，即有一点$a\in I$是$A(y)$的聚点，但$a\overline{\in} A(y)$，则$a$必为$A(y)$的一个端点。因此$B=A(y)\cup\{a\}$仍是一个区间，$f$将$B$变换成两个点$\{y, f(a)\}$，因$a\overline{\in} A(y)$，故$f(a)\neq y$，这与$f(x)$是区间保持的条件矛盾。所以$A(y)$是$I$中的相对闭集，由定理2′即得$f(x)$在$I$上连续。

下面需要用到定义在任何一个数集A（未必是区间）上函数的连续性概念。

定义2 （见[2]P113）设$f(x)$定义在数集A上，$x_0\in A$，如果（1）x_0是A的孤立点，或者（2）x_0是A的聚点，且当$x_n\in A$，$x_n\longrightarrow x_0$时总有$f(x_n)\longrightarrow f(x_0)$成立，就叫$f(x)$在$x_0$处是连续的；若在$A$的每一点都连续就叫在$A$上连续。

现在我们的第二个问题是：设A为一个数集，如果定义在A上并取值于A内的任一连续函数$f(x)$都有不动点，即都有一点$x_0\in A$使$f(x_0)=x_0$，那么A是否为有界闭区间呢？答案是肯定的。我们有

定理4 设A为至少含有两个数的数集，定义在数集A上取值于A内的任一连续函数$f(x)$都有不动点的充要条件是A为有界闭区间。

证明：条件的充分性是已知的，现证必要性。

首先证明A必为区间，否则存在实数$a\overline{\in} A$使$A=A_1\cup A_2$，其中$A_1=(-\infty, a]\cap A\neq\phi$，$A_2=[a, +\infty)\cap A\neq\phi$，且$A_1\cap A_2=\phi$。现取$a_1\in A_1$，$a_2\in A_2$，令

$$f(x)=\begin{cases} a_2 & x\in A_1 \\ a_1 & x\in A_2 \end{cases}$$

下面证明$f(x)$在A上连续。

设$x_0\in A$，且为A的聚点，即存在$x_n\in A$，且$x_n\longrightarrow x_0$。不妨认为$x_0\in A_1$，则x_0绝不是A_2的聚点，因为A_2的聚点必需属于$[a, +\infty)$，而$[a, +\infty)\cap A_1=\phi$。于是$\{x_n\}$中最多只能有有限个点属于$A_2$，否则$\{x_n\}$中就有属于$A_2$的点组成的数列收敛到$x_0$，于是$x_0$就是$A_2$的聚点了（见[2]P32定理1）。既然如此，不妨认为$\{x_n\}$全部是属于A_1的点（否则只要删去属于A_2的有限个点不影响数列的收敛性），于是对每个n，$f(x_n)=a_2$，

从而$f(x_n) \longrightarrow a_2 = f(x_0)$。据定义2，$f(x)$在A上连续，但因$\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \phi$，$a_1 \bar{\in} \Lambda_2$，$a_2 \bar{\in} \Lambda_1$，故$f(x)$没有不动点，与假设矛盾。

其次，A必为有界区间。若A为无界区间，不妨认为$A = (a, +\infty)$（或$A = [a, +\infty)$），则函数$f(x) = x + 1$在A上连续但无不动点。

最后，A必为有界闭区间。若A非闭，不妨设$A = [a, b)$，则函数$f(x) = \frac{1}{2}(x + b)$在A上连续，但无不动点。至此完成了定理的证明。

参 考 文 献

〔1〕一九八七年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题参考解答.

〔2〕И.П 那汤松著，徐瑞云译．实变函数论上册.第2版（修订本），北京人民教育出版社，1958.

THE CONVERSE INTERMEDIATE VALUE THEOREM OF CONTINUOUS FUNCTIONS AND ITS COROLLARY

Shi Caifeng

(Department of Basic Courses)

Abstract In this paper we introduce the concept that a function is interval-preserving by the assertion of intermediate value theorem and give a necessary and sufficient condition for the continuity of an interval-preserving function. We prove that interval-preserving property is equivalent to continuity for a monotone function. And finally we prove that let Λ be a subset of real numbers, if every continuous function which is defined on Λ and taken value in Λ has fixed point, then Λ is a finite closed interval.

Key words continuous function, intermediate value theorem, interval-preserving, fixed point.