北京航空航天大学

2013－2014 学年 第二学期期中

《 工科数学分析（2） 》

班号__________ 学号_________ 姓名________ 成绩________

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
成 绩							
阅卷人							
校对人							

2014 年 05 月 14 日

1. **求解下面问题（每小题 6 分，满分 56 分）**

1） 已知 $f(x,y,z)=xz-y^2$ 及点 $A(2,-1,1)$、$B(2,1,-1)$，求函数 $f(x,y,z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向的方向导数，并求此函数在点 A 处方向导数的最大值。

解：由条件得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=z,\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y,\dfrac{\partial f}{\partial z}=x$ -------------1 分

$\overrightarrow{AB}=\{0,2,-2\}\Rightarrow\overrightarrow{AB^0}=\{0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ ------------2 分

从而 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right]_{A(2,-1,1)}=0$ --------------1 分

点 A 的梯度方向是 $\vec{l}=grad\ f\,|_A=\{z,-2y,x\}|_A=\{1,2,2\}$ -------------1 分

所以方向导数的最大值是 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$ --------------1 分

2）将函数 $f(x)=|x|,\ x\in(-\pi,\ \pi)$ 展开为 Fourier 级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

解：将函数延拓成的 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2π 的函数，延拓后函数的不连续点为 $n\pi,n=\pm1,\pm2,\cdots$，由于函数为偶函数，所以 Fourier 系数 $b_n=0$ --------------- --1 分

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$ ------------1 分

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi},n=2k-1, & k=1,2,\cdots\\ 0,\qquad\qquad n=2k.\end{cases}$$ ----------2 分

由收敛定理，$f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x=\begin{cases}f(x),x\in(-\pi,\pi)\\ \pi,\ \ x=\pm\pi\end{cases}$$ -------------1 分

令 $x=0$,则得 $\dfrac{\pi}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi}=f(0)=0$ 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$ ----------1 分

2） 求二元函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ 在 $(0,0)$ 点的两个累次极限和重极限。

解：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x+y}=0$ -------------1 分

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x+y}=0$ -------------1 分

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^2-x)}{x+(x^2-x)}=-1,$ -------------2 分

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{x+x}=0,$ -------------2 分

沿不同路径极限不同，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的重极限不存在.（**注意，也可以选取别的特殊路径。**）

.

3） 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=50, \\ x^2+y^2=z^2, \end{cases}$ 在 $(3,4,5)$ 点处的切线方程与法平面方程。

解：记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-50,\quad G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ --------1 分

曲线在点 $P_0(3,4,5)$ 的切向量为

$$\vec{\tau}=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right)_{P_0}=\left(\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & -2z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2z & 2x \\ -2z & 2x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix}\right)_{P_0}$$

$=(-8yz,8xz,0)_{P_0}=(-160,120,0)$ ------------3 分

所以曲线在 $P_0(3,4,5)$ 的切线方程为：$\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{0}$ -------------1 分

曲线在 $P_0(3,4,5)$ 处的法平面方程为：$-4(x-3)+3(y-4)=0,$

即 $4x-3y=0.$ -------------1 分

另解： 将 y,z 看做 x 的隐函数，则在 $P_0(3,4,5)$ 点处的切向量为 $\vec{\tau}=\left(1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_{P_0}$，其中

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 利用隐函数组求导的方法计算即可（方程组两边关于 x 求导）

----------------（**算出切向量 4 分，方程各 1 分，共 6 分**）.

5）设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 $f(u,v),g(t)$ 有连续二阶导数或偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1+\dfrac{1}{y}f_2-\dfrac{y}{x^2}g'$，

-----------------------2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[f_1+y(xf_{11}-\frac{x}{y^2}f_{12})\right]+\left[-\frac{1}{y^2}f_2+\frac{1}{y}(xf_{21}-\frac{x}{y^2}f_{22})\right]+\left[-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^2}g''\cdot\frac{1}{x}\right]$$

----------------每个中括号 1 分，**共 3 分**

$$=f_1-\frac{1}{y^2}f_2+xyf_{11}-\frac{x}{y^3}f_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

-------------------1 分

6）计算级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，收敛区间$(-\infty,+\infty)$。

解：因为 $\quad e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$ ------------2 分

$e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$ ------------2 分

所以 $\quad \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\quad(-\infty,+\infty).$ ------------2 分

7）方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$，确定了一组隐函数 $y=y(x)$ 与 $z=z(x)$，求 $\dfrac{dz}{dx},\dfrac{dy}{dx}$.

解：方程组两边关于 x 求导，得 $\begin{cases}1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0\\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$，---每个方程 2 分，共 4 分

解方程组可得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-z}{z-y},\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y-x}{z-y}.$ -------------------------2 分

（注意：也可以按照隐函数组求导公式来做，此处略）

8）求 $z=xye^{-(x^2+y^2)}$ 在点 (0,0) 的泰勒公式（到四阶为止）。

解：由于 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ -------------1 分

从而 $e^{-(x^2+y^2)}=1-(x^2+y^2)+\frac{(x^2+y^2)^2}{2!}+o((x^2+y^2)^2)$ -------------3 分

所以 $z=xye^{-(x^2+y^2)}=xy-xy(x^2+y^2)+o(\rho^4)$， 其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.----2 分

（**注意，也可以按照二元函数 Taylor 公式来做，写出如下公式即给 2 分**）

$$f(x,y)=f(0,0)+(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})f(0,0)+\frac{(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2}{2!}f(0,0)+\cdots\frac{(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^n}{n!}f(0,0)+o(\rho^n)$$

$$\text{其中}\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

二、（本题满分 12 分）判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 是否收敛，若收敛，判别它是绝对收敛还是条件收敛。

解：

因为 $\left|\sum_{k=1}^{n}\cos 3k\right|\le\frac{1}{\sin\frac{3}{2}}$，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos 3n$ 的部分和有界，而 $\frac{1}{n}$ 单调 $n\to\infty$ 时

趋近于 0，由 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}$ 收敛；

又 $(1+\frac{1}{n})^n$ 单调有界，由 Abel 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛。

而 $\left|\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n\right|\ge\frac{\cos^2 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{1-\cos 6n}{2n}(1+\frac{1}{n})^n$,

对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 6n}{2n}(1+\frac{1}{n})^n$，同样由 Dirichlet 判别法知其收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n\right|$ 发散，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 条件收敛。

三、（本题满分 12 分）

讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cos\dfrac{1}{x^2+2y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性、可偏导性和可微性。

1) 解：由于 $\left|xy\cos\dfrac{1}{x^2+2y^2}\right|\le|x||y|$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$ 从而函数

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

2) 由偏导数的定义

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

即函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点偏导数存在，且值为 0.

3) 记 $z=f(x,y)$，则 $\Delta z-dz=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot\Delta x-f_y(0,0)\cdot\Delta y$

$$\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\frac{\Delta x\Delta y\cos\dfrac{1}{\Delta x^2+2\Delta y^2}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\cos\frac{1}{\Delta x^2+2\Delta y^2}$$

而 $\left|\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\cos\dfrac{1}{\Delta x^2+2\Delta y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\le|\Delta x|+|\Delta y|$

所以 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-dz}{\rho}=0$，所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

-

三. 证明和函数$S(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln\ln n}\right)^n$在$(-\infty,+\infty)$上连续。

证明： 因为

函数$S(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln\ln n}\right)^n$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛。**---------2 分**

但对于

$\forall[-M,M]\subset(-\infty,+\infty)$ 有

$(\frac{|x|}{\ln\ln n})^n \le (\frac{M}{\ln\ln n})^n$, --------2 分

由 Cauchy 判别法 $\sum_{n=3}^{\infty}(\frac{M}{\ln\ln n})^n$ 收敛， ---------2 分

所以由维斯托拉斯判别法，$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln\ln n}\right)^n$在$[-M,M]$上一致收敛。 ----1 分

于是函数$S(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln\ln n}\right)^n$在$[-M,M]$上连续。

又由于$[-M,M]$的任意性，和函数$S(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln\ln n}\right)^n$在$(-\infty,+\infty)$上连续。**----3 分**

四、（本题满分 10 分） 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$的收敛区间和其和函数。

解：（1）由于$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)}=1$, $R=1$, 且$x=\pm1$, 收敛，收敛域为$[-1,1]$; **-------2 分**

（2）设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$， 则$x^2S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$, 于是

$$[x^2S(x)]''=\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}\}''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\quad -1\le x<1.$$ --------3 分

所以

$$[x^2S(x)]'=-\int_0^x\ln(1-t)dt=(1-x)\ln(1-x)+x,$$

$$x^2S(x)=\int_0^x[(1-x)\ln(1-x)+x]dx$$

$$=-\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^2$$

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2x}+(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2})\ln(1-x)\left(x\neq 0,x\neq 1\right) \\ \dfrac{1}{4} \quad x=1 \\ 0 \quad x=0\end{cases}$$ --------------5 分

五、(本题满分 10 分) 求在n个正数的和为定值（$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$）的条件下，这n个正数的乘积$x_1x_2\cdots x_n$的最大值，并由此证明以下不等式：

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}。$$

解： 构造辅助函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=x_1x_2\cdots x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a)$$ --------1 分

令

$$\begin{cases}L_{x_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=x_2x_3\cdots x_n+\lambda=0 \\ L_{x_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=x_1x_3x_4\cdots x_n+\lambda=0 \\ \vdots \\ L_{x_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=x_1x_2\cdots x_{n-1}+\lambda=0 \\ L_{\lambda}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=x_1+x_2+\cdots+x_n-a=0\end{cases}$$ ------------------------------3 分

解得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{a}{n}$.唯一稳定点。 -------------------2 分

由于$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$在有界闭集$x_1+x_2+\cdots+x_n=a,x_i\ge 0,i=1,2,\cdots,n$上必有最大值与最小值，又显然在边界（某个$x_i=0$时）上$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$取最小值$0$.所以唯一的稳定点为最大值点，且最大值为$(\dfrac{a}{n})^n$. ------------------2 分

于是

$$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n\le(\frac{a}{n})^n=(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n})^n,$$

即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}。$$ ------------2 分