滑模控制

滑模控制是一种针对（输入匹配）不确定非线性系统的控制器综合设计方法。

滑模控制器设计的其基本思路：

1）寻找滑动面 $s(x)=0$，使得函数 $s(x)$ 的一阶导数表达式中出现控制输入，并且系统在滑动面上的运动渐近稳定；

2）设计控制律使得系统的轨线在有限时间内到达

滑动面$s(x)=0$。

以下简要讨论几类典型非线性系统的滑模控制器设计问题。

1. 一阶非线性系统滑模控制器设计

考虑一阶标量非线性系统

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u$$

其中 $f(x),g(x)$ 为不确定非线性函数，满足

$\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq F(x), \left|g(x)\right| \geq g_0 > 0$，其中$F(x)$为已知函数，$g_0$为已知或未知正常数，此外假定$g(x)$的符号已知。

设计滑动面$s = x = 0$，此时滑动面为系统原点，因此渐近稳定。

对x求导得到：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} + u\right)$$

设计控制律

$$u = -sign(g(x))\left(F(x) + \varepsilon\right)sign(x), \varepsilon > 0$$

可以得到闭环系统

$$\dot{x} = g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \mathrm{sign}(g(x))\left(F(x) + \varepsilon\right)sign(x)\right)$$

构造备选 Lyapunov 函数$V = 0.5x^2$**，沿闭环方程求导得到：**

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= xg(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \mathrm{sign}(g(x))\left(F(x)+\varepsilon\right) sign(x)\right) \\
&= xf(x) - |g(x)|\left(F(x)+\varepsilon\right)|x| \\
&\le |x||f(x)| - |g(x)|\left(F(x)+\varepsilon\right)|x| \\
&\le |g(x)|F(x)|x| - |g(x)|\left(F(x)+\varepsilon\right)|x| \\
&= -\varepsilon|g(x)||x| \\
&\le -g_0\varepsilon|x| < 0, \left(\forall x \ne 0\right)
\end{aligned}
$$

所以闭环系统渐近稳定。

以下进一步分析状态的收敛速度。

令 $w = \sqrt{2V} = \sqrt{x^2} = |x|$，则可得到：

$$D^{+}w \le \frac{2\dot{V}}{2w} = \frac{\dot{V}}{w} \le -g_0\varepsilon$$

根据比较原理可知，$w = |x|$ 在有限时间 $t_1 \le T = \dfrac{|x(0)|}{g_0\varepsilon}$ 内收敛到零。

2. 二阶非线性系统滑模控制器设计

考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = f(x) + g(x)u$$

其中 $f(x), g(x)$ 为不确定非线性函数。

设计滑动面 $s = x_2 + kx_1 = 0(k > 0)$，系统在滑动面上的运动 $\dot{x}_1 = x_2 = -kx_1$ 是渐近稳定的。

对 s 求导得到：

$$\dot{s} = f(x) + g(x)u + kx_2 = g(x)\left(\frac{f(x) + kx_2}{g(x)} + u\right)$$

假定$\left|\dfrac{f(x)+kx_2}{g(x)}\right| \le F(x)$，$F(x)$为已知函数。再假定

$g(x)$的符号已知，且$|g(x)| \ge g_0 > 0$，则可以设计控制律

$$u = -sign(g(x))\left(F(x)+\varepsilon\right)sign(\mathrm{s})$$

代入$\dot{s}$的表达式可以得到

$$\dot{s} = g(x)\left(\frac{f(x)+kx_2}{g(x)} - \mathrm{sign}(g(x))\left(F(x)+\varepsilon\right)sign(\mathrm{s})\right)$$

构造非负函数$V = 0.5s^2$，沿方程求导得到：

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= sg(x)\left(\frac{f(x)+kx_2}{g(x)} - \mathrm{sign}(g(x))\big(F(x)+\varepsilon\big)sign(\mathrm{s})\right) \\
&= s(f(x)+kx_2) - |g(x)|\big(F(x)+\varepsilon\big)|s| \\
&\le |f(x)+kx_2||s| - |g(x)|\big(F(x)+\varepsilon\big)|s| \\
&\le |g(x)|F(x)|s| - |g(x)|\big(F(x)+\varepsilon\big)|s| \\
&= -\varepsilon|g(x)||s| \\
&\le -g_0\varepsilon|s| \le 0
\end{aligned}
$$

根据比较原理可以证明s有限时间趋于零，因此闭环系统渐近稳定。

3. 高阶非线性系统的滑模控制

考虑非线性系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= x_3, \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n, \\
\dot{x}_n &= f(x) + g(x)u
\end{aligned}
$$

其中 $f(x), g(x)$ 为不确定非线性函数。

设计滑动面 $s = x_n + k_{n-1}x_{n-1} + \cdots + k_1 x_1 = 0$，其中选择

k_i 使得 $h(p)=p^{n-1}+k_{n-1}p^{n-2}+\cdots+k_2p+k_1$ 为 **Hurwitz** 多项式。

系统在滑动面 $s=0$ 上的运动为：

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1=x_2,\\
&\dot{x}_2=x_3,\\
&\vdots\\
&\dot{x}_{n-1}=x_n=-k_{n-1}x_{n-1}-\cdots-k_1x_1
\end{aligned}$$

由于 $h(p)$ 为 **Hurwitz** 多项式，因此以上系统渐近稳定。

对 s 求导得到：

$$\dot{s} = f(x) + g(x)u + k_{n-1}x_n + \cdots + k_1 x_2$$
$$= g(x)\left(\frac{f(x) + k_{n-1}x_n + \cdots + k_1 x_2}{g(x)} + u \right)$$

假定 $\left| \frac{f(x) + k_{n-1}x_n + \cdots + k_1 x_2}{g(x)} \right| \le F(x)$，$F(x)$ 为已知函数，

再假定 $g(x)$ 的符号已知，且 $\left| g(x) \right| \ge g_0 > 0$，则可以设计

控制律

$$u = -sign(g(x))\left(F(x) + \varepsilon\right)sign(\mathrm{s})$$

由此可以得到

$$\dot{s}=s\ g(x)\left(\frac{f(x)+k_{n-1}x_n+\cdots+k_1x_2}{g(x)}-\mathrm{sign}(g(x))\big(F(x)+\varepsilon\big)sign(\mathrm{s})\right)$$

构造非负函数：$V=0.5s^2$,求导得到：

$$\begin{aligned}\dot{V}&=s\ g(x)\left(\frac{f(x)+k_{n-1}x_n+\cdots+k_1x_2}{g(x)}-\mathrm{sign}(g(x))\big(F(x)+\varepsilon\big)sign(\mathrm{s})\right)\\&=s(f(x)+k_{n-1}x_n+\cdots+k_1x_2)-|g(x)|\big(F(x)+\varepsilon\big)|s|\\&\le|f(x)+k_{n-1}x_n+\cdots+k_1x_2|\ \ |s|-|g(x)|\big(F(x)+\varepsilon\big)|s|\\&\le|g(x)|F(x)|s|-|g(x)|\big(F(x)+\varepsilon\big)|s|\\&=-\varepsilon|g(x)||s|\\&\le-g_0\varepsilon|s|\le0\end{aligned}$$

根据比较原理可以证明 s 有限时间趋于零，因此闭环系统渐近稳定。

4. 一般非线性系统的滑动面设计

例 1. $\dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2, \dot{x}_2 = f(x) + g(x)u$ 。

解：首先构造滑动面：$s = x_2 + \sin x_1 + x_1 = 0$，滑动面上的动态为：$\dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2 = -x_1$，该动态渐近稳定。

对 s 求导得到：

$$\dot{s} = f + gu + (1 + \cos x_1)(\sin x_1 + x_2)$$

设计控制律：

$$u = -sign(g(x))(F(x) + \varepsilon)sign(s)$$

其中 $\left|\dfrac{f + (1 + \cos x_1)(\sin x_1 + x_2)}{g}\right| \le F(x),\quad \varepsilon > 0$。

该控制律可以保证：$\dfrac{d}{dt}(0.5\,\mathrm{s}^2) \le -g_0 \varepsilon |s|$，因此闭环系统渐近稳定。

例 2. 考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = u_1 + d_1(t,x), \dot{x}_2 = u_2 + d_2(t,x), \dot{x}_3 = x_1 x_2$$

其中 $(d_1(t,x), d_2(t,x))$ 未知，但有确定已知的上界 $(D_1(t,x), D_2(t,x)$，即 $|d_1(\mathrm{t},x)| \le D_1(t,x), |d_2(t,x)| \le D_2(t,x)$。试设计滑模控制律使得 $(x_1, x_2, x_3) \to (0,0,0)$.

解：构造滑动面：$s_1 = x_1 - x_3 = 0, s_2 = x_1 + x_3^2 = 0$，则滑

动面上系统的动态 $\dot{x}_3 = -x_3^3$ 渐近稳定。

对 (s_1, s_2) 求导可得：

$$\dot{s}_1 = u_1 + d_1(x) - x_1x_2, \dot{s}_2 = u_2 + d_2(x) + 2x_3x_1x_2$$

设计滑模控制律：

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1x_2 - (D_1(x) + \varepsilon_1)sign(s_1), \varepsilon_1 > 0, \\ u_2 &= -2x_1x_2x_3 - (D_2(x) + \varepsilon_2)sign(s_2), \varepsilon_2 > 0 \end{aligned}$$

以上控制律可以保证：

$$\frac{d}{dt}(0.5s_1^2) \le -\varepsilon_1 \left|s_1\right|, \frac{d}{dt}(0.5s_2^2) \le -\varepsilon_2 \left|s_2\right|$$

因此(s_1, s_2)有限时间内趋于零。整个系统渐近稳定。

习题 18.1：考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = a\sin x_1 + b + u$$

其中(a,b)为未知常参数，满足$a_1 \le a \le a_2$， $b_1 \le b \le b_2$， 参数的界(a_1, a_2, b_1, b_2) 已知。试设计滑模控制器使得系统状态(x_1, x_2)趋于零。

习题 18.2：考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = u_1 + d_1(x), \dot{x}_2 = u_2 + d_2(x), \dot{x}_3 = x_1 x_2^2$$

其中 $|d_1(x)| \le D_1(x), |d_2(x)| \le D_2(x)$， $(d_1(x), d_2(x))$ 未知，$\left(D_1(x), D_2(x)\right)$ 已知。试设计滑模控制器使得状态 (x_1, x_2, x_3) 趋于零。

习题 18.3：考虑非线性系统

$$\dot{x}_1 = u_1 + d_1(x), \dot{x}_2 = u_2 + d_2(x), \dot{x}_3 = x_1 x_2 + x_3^2$$

其中 $|d_1(x)| \le D_1(x), |d_2(x)| \le D_2(x)$， $(d_1(x), d_2(x))$ 未知，

$\left(D_1(x), D_2(x)\right)$ 已知。试设计滑模控制器使得状态 (x_1, x_2, x_3) 趋于零。