§1.2　收敛数列的性质

一、 收敛数列的基本性质

定理2.1（唯一性）若数列收敛，则其极限唯一.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$,

由定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$. 使得

当 $n > N_1$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$; 当 $n > N_2$ 时恒有 $|x_n - b| < \varepsilon$;

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时有

$$|a-b| = |(x_n - b) - (x_n - a)| \le |x_n - b| + |x_n - a| < 2\varepsilon.$$

上式仅当 $a = b$ 时才能成立. 故极限唯一.

定义2.1（数列有界的定义）对数列$\{a_n\}$，

若存在一个实数M，对数列所有的项都满足

$$a_n < M, n = 1,2,3,\cdots$$

则称M是$\{a_n\}$的上界.

相应的，可以给出有界和有下界的定义

一个数列即有上界又有下界，则称为有界数列.

定理2.2（有界性） 若数列$\{a_n\}$收敛，则必有界。

定理2.3 (数列极限的保序性)

1° 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 且$\alpha < a < \beta$, 则$\exists$N,当

$n > N$时,有$\alpha < a_n < \beta$;

2^{o} 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 且$a < b$, 则$\exists$N

当$n > N$时,有$a_n < b_n$;

3^{o} 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 若$\exists$N,当$n > N$时,

有$a_n \le b_n$, 则有$a \le b$.

证明 (1)取$\varepsilon=\dfrac{a-\alpha}{2}$,$\exists N_1$,当$n>N_1$,$|a_n-a|<\varepsilon$

即$a_n>a-\varepsilon=\dfrac{a+\alpha}{2}>\alpha$;

同理，取$\varepsilon=\dfrac{\beta-a}{2}$,$\exists N_2$,当$n>N_2$,$a_n<\beta$,

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$,$\alpha<a_n<\beta$.

(2)令$\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$,则

$\exists N_1$,当$n>N_1$时,$|a_n-a|<\varepsilon$,即$a_n<a+\varepsilon=\dfrac{a+b}{2}$.

$\exists N_2$,当$n>N_2$时,$|b_n-b|<\varepsilon$,即$b_n>b-\varepsilon=\dfrac{a+b}{2}$.

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$,由上得$a_n<b_n$.

(3)用反证法由(2)可得.

注　(3)中即使有$a_n<b_n$,也可有$a=b$.

二、 极限的四则运算

定理2.4 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n \pm b_n] = a \pm b;$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n \cdot b_n] = a \cdot b;$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$ 其中$b \neq 0.$

证 (1)由绝对值的三角不等式可得;

(2) $|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab|$

$$\leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|.$$

由a_n，b_n收敛，可得,b_n有界$|b_n| < M$和

$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N_1, n > N_1, |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)},$

$$\exists N_2, n > N_2, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(a+1)},$$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$,当$n > N$,得$|a_nb_n - ab| < \varepsilon.$

(3) 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b}$

对于 $\frac{|b|}{2}>0,\exists N_1, s.t$ 当 $n>N_1$ 时,

$|b_n-b|<\dfrac{|b|}{2}$, 且此时 $|b_n|>\dfrac{|b|}{2}>0.$

所以当 $n>N_1$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b_n b|}\leq\frac{2}{b^2}|b_n-b|.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}_2, s.t$ 当

$n > \mathrm{N}_2$时, 有 $|b_n - b| < \dfrac{b^2}{2}\varepsilon.$

因此当$n > \max\{N_1, N_2\}$时, 便有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \le \frac{2}{b^2}|b_n - b| < \varepsilon.$$

即证得, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}.$ 再由(2)易见结论成立.

例1: 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+4}{5n^2+4n-1}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{5+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2}{5}$$

例2 设 $|q|<1$, 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}$$

$$=\frac{1}{1-q}-\frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty}q^n=\frac{1}{1-q}.$$

三、 夹逼定理

定理2.5： 若数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$满足：

$$a_n \le b_n \le c_n, n = 1,2,3,\cdots,\text{且}\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,\text{则}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

证　设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$,则

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N_1 > 0,\ N_2 > 0,$ 使得

当$n > N_1$时恒有 $|a_n - a| < \varepsilon$,

当$n > N_2$时恒有 $|c_n - a| < \varepsilon$,

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 上两式同时成立,

即$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$,

当$n > N$时, 恒有

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon,$$

即 $|b_n - a| < \varepsilon$ 成立, $\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = a.$

例3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$, 由夹逼定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

例4　设$a>0$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$

证　先设$a\geq 1$,当$n>a$时,有

$$1\leq a^{\frac{1}{n}}\leq n^{\frac{1}{n}}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$, 由夹逼定理,知

$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$对$a\geq 1$成立.

再设$a\in(0,1)$,这时$a^{-1}>1$,于是

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1}=1.$$

例5. 设$0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$ 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a_k$$

证明： 由不等式

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \le \sqrt[n]{k a_k^n} \to a_k$$

由夹逼定理，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a_k$$

四、子列极限

定义2.2： 在数列 $\{a_n\}$ 中按照先后次序任意抽取无限多项，这样得到的一个数列 $\{a_{n_k}\}$ 称为原数列的子数列，简称子列.

定理2.6 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛于 a .

证　设 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子列，由

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，故对于任意给定的正数 ε

存在着正整数 N，当 $n > N$ 时，

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{成立。}$$

取 $K = N$，则当 $k > K$时，$n_k > n_K = n_N \geq N$.

于是 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$，证得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$.

在一般情况下若一个数列有两子列极限存在且相等，也无法断定该数列是否收敛，但是

例 若两子列$\{a_{2k}\},\{a_{2k+1}\}$收敛且有相同极限，

则$\{a_n\}$收敛.

证明： 不妨设$\{a_{2k}\},\{a_{2k+1}\}$的极限为a，对于任意$\varepsilon > 0$，

$$\exists N_1 \in N^*, \forall n = 2k > N_1, | a_{2k} - a | < \varepsilon,$$

$$\exists N_2 \in N^*, \forall n = 2k+1 > N_2, | a_{2k+1} - a | < \varepsilon.$$

取$N = \mathrm{Max}\{N_1,\ N_2\}$，$\forall n > N$，

不论$n = 2k$还是$n = 2k+1$，有$| a_n - a | < \varepsilon$.

五、 无穷小

定义2.3: 如果收敛数列$\{a_n\}$的极限为0,那么这个数列称为无穷小列,简称无穷小.

定理2.7 1^o $\{a_n\}$为无穷小的充要条件是$\{|a_n|\}$为无穷小;

2^o 两个无穷小之和(或差)仍是无穷小;

3^o 设$\{a_n\}$为无穷小,$\{c_n\}$为有界数列,那么$\{c_n a_n\}$为无穷小;

4^o 设$0 \le a_n \le b_n, n \in N^*$,如果$\{b_n\}$为无穷小,那么$\{a_n\}$也是无穷小;

5^o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$的充要条件是$\{a_n - a\}$为无穷小.

例6. 已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,求证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$

证明: $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a$

$$=\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}$$

令 $\alpha_n = a_n - a$ 则$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, 上式变为

$$=\frac{\left|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N+\cdots+\alpha_n\right|}{n}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, n > N\text{时}, \left|\alpha_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{\left|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N + \cdots + \alpha_n\right|}{n}$$

$$< \frac{|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N|}{n} + \left(\frac{n-N}{n}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N\right|}{n} = 0,$$

$$\exists N_1 > N^*, \text{使} n > N_1\text{时} \quad \frac{|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N|}{n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\therefore \frac{\left|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n\right|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

例7 证明 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)=S$,

$$\text{则} \lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+2a_2+\cdots+na_n)}{n}=0,$$

证明: 令 $s_i=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_i$, 则 $\lim\limits_{i\to\infty}s_i=S$.

$$\frac{(a_1+2a_2+\cdots+na_n)}{n}=\frac{s_n+(a_2+\cdots+(n-1)a_n)}{n}$$

$$=\frac{s_n+(s_n-s_1)+(s_n-s_2)+\cdots+(s_n-s_{n-1})}{n}$$

$$=\frac{ns_n-(s_1+s_2+\cdots+s_{n-1})}{n}=s_n-\frac{(s_1+\cdots+s_{n-1})}{n}=0.$$

由例6

六、小结

1、收敛数列的性质:

唯一性、有界性、不等式性质

2、极限的四则运算

3、夹逼准则（两边夹法则）

4、子列极限

5、无穷小

作业

习题1.2

1. 2， 3， 4（2, 3 ， 5）， 5, 6, 7（在例子中）.