导数

常用导数公式整理：

$c'=0(c为任意常数)$

$(x^a)'=ax^{a-1}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(e^x)'=e^x$

$(\log_a^x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arc\cos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\sinh x)'=\cosh x$

$(\cosh x)'=\sinh x$

$(\tanh x)'=\sec h^2 x$

$(\coth x)'=-\csc h^2 x$

$(\arcsin hx)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\arccos hx)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}(x>1)$

$(\arctan hx)'=\dfrac{1}{1-x^2}(|x|<1)$

$(arc\coth x)'=\dfrac{1}{1-x^2}(|x|>1)$

$(u(x)\pm v(x))'=u(x)'\pm v(x)'$

$(u(x)\cdot v(x))'=u(x)\cdot v(x)'+u(x)'\cdot v(x)$

$(\dfrac{v(x)}{u(x)})'=\dfrac{u(x)v'(x)-u(x)'v(x)}{[u(x)]^2}$

题型一：函数可导条件

定理 3.2.1： $f(x)$ 在 x_0 处导数存在的充分必要条件是 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

例 1：（2009 年第五题）

五、 讨论下面问题(10 分)

$$设\ f(x)=\begin{cases} a+e^{\frac{-1}{x}} & x>0 \\ b & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{e^x-1} & x<0 \end{cases}，试问$$

1） a, b 为何值时 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续;

2） f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否可导.

解：1）、当 $x\neq 0$ 时 f (x) 显然连续，再由

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} a+e^{\frac{-1}{x}}=a，\quad \lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{e^x-1}=1，$$

知当 $a=b=1$ 时 f (x) 连续。 （5 分）

2）当 $x\neq 0$ 时 f (x) 显然可导，

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{1+e^{\frac{-1}{x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}=0$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{\sin x}{e^x-1}-1}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{\cos x-e^x}{(e^x-1)+xe^x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{-\sin x-e^x}{2e^x+xe^x}=-\frac{1}{2}$$

所以当 $x=0$ 时 f (x) 不可导，即 f (x) 不可导。 （10 分）

题型二：导数几何性质（切线斜率）

例 1：（2005 年第一题（1））

1． 设曲线 $y=f(x)$ 在原点与曲线 $y=\sin x$ 相切，则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}=$ $\sqrt{2}$

例 2:（2013 年（2）第一题（7））

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x>0, \\ ax^2, & x\le 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解：$\because \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} xe^x=0, \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} ax^2=0,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0=f(0),$ 从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$\because f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta xe^{\Delta x}}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{a\Delta x^2}{\Delta x}=0,$$

$\therefore f'_+(0)\ne f'_-(0),$ 从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

题型三：基本初等函数及复合函数求导:

例 1:（2005 年第三题（2））

（2） $y=x^x$， 求 y'

$$y'=x^x(\ln x+1)$$

例 2:（2007 年第一题（4））

4、设 $f(x)=\arccos x$，$|x|<1$， 则有 $f''(x)=$ _ $-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ __ ；

解 $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$， $f''(x)=-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

例 3:（2007 年第四题（1））

（1）设 $f(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}$， $x\ne 0$，（ a 为常数， $a>0$ 且 $a\ne 1$），求 $f'(x)$

解 $f(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+a^x)}$， $f'(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(1+a^x)}[\frac{1}{x}\ln(1+a^x)]'$

$$=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}\frac{x\cdot\frac{1}{1+a^x}a^x\ln a-\ln(1+a^x)}{x^2},$$

$$f'(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}\frac{a^x\ln a^x-(1+a^x)\ln(1+a^x)}{(1+a^x)x^2};$$

或者令 $y=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}$， $\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+a^x)$，

$$\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{x^2}\ln(1+a^x)+\frac{1}{x}\frac{1}{1+a^x}a^x\ln a,$$

$$y'=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}[-\frac{1}{x^2}\ln(1+a^x)+\frac{1}{x}\frac{1}{1+a^x}a^x\ln a]$$

例 4：（2009 年第三题（5））

5） $y(x)=x^x+\ln(\ln\frac{1}{x})+\arctan(1+5x^2)$，求 $\frac{dy}{dx}$

$$(x^x)'=x^x(\ln x+1)$$

$$(\ln(\ln\frac{1}{x}))'=\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot x\cdot(-\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x\ln x}$$

$$\arctan(1+5x^2)'=\frac{10x}{1+(1+5x^2)^2}.$$

全对 5 分，每对一个给 2 分

例 5：（2010 年第一题（3））

3) 假设 $f=(\sin x)^{\cos x}\ (0<x<\pi)$ 求 $f'(x)$.

解：$f=(\sin x)^{\cos x}=e^{\cos x\ln\sin x}$ ………………… (2 分)

$$f'=\left(e^{\cos x\ln\sin x}\right)'=e^{\cos x\ln\sin x}\left(-\sin x\ln\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$ ………(3 分)

$$=\sin x^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

例 6:（2011 年第一题（2））

2) 设 $f(x)=\left(x^3+x^2+1\right)x^x$ 求 $f'(x)$.

解: $f'(x)=\left(3x^2+2x\right)x^x+\left(x^3+x^2+1\right)(\ln x\cdot x^x+x^x)$

例 7:（2012 年第一题（3））

3) 假设 $f=x^{x^a}+a^{x^x}$ 求 $f'(x)$.

解: $x^{x^a}=e^{x^a\ln x}$，因此 $(x^{x^a})'=(e^{x^a\ln x})'=x^{x^a}(x^{a-1}+ax^{a-1}\ln x)$，

$x^x=e^{x\ln x}$，因此 $(x^x)'=x^x(1+\ln x)$，

因此 $(a^{x^x})=a^{x^x}\ln a+x^x(1+\ln x)$

原式 $=a^{x^x}\ln a+x^x(1+\ln x)+x^{x^a}(x^{a-1}+ax^{a-1}\ln x)$

例 8:（2013（1）第一题（4））

4、设 $y=x^{\cos x}$， $x>0$， 则 $y'=$ $\underline{(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x})\cdot x^{\cos x}}$

例 9:（2013（2）第一题（6））

6. 求函数 $y=x\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 的微分 dy.

解: $\because y'=\sqrt{x+\sqrt{x}}+x\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$,

$$\therefore dy=(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}})dx$$

题型三：利用导数证明不等式

例 1：（2009 年第六题（2））

2） 若 $x>0$ 证明 $x^2+\ln(1+x)^2>2x$

证：令 $f(x)=x^2+\ln(1+x)^2-2x$，显然 $f(0)=0$，

$$f'(x)=2x+\frac{1}{(1+x)^2}+2(1+x)-2=4x+\frac{1}{(1+x)^2}>0,$$

所以 $f(x)>f(0)>0$，即 $x^2+\ln(1+x)^2>2x$

例 2：（2011 年第二题（1））

1） $\sin x>x-\frac{x^3}{6}(x>0)$；

证明：构造函数 $F(x)=\sin x-(x-\frac{x^3}{6})$，则 $F'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$，$F''(x)=-\sin x+x$．当 $x>0$ 时，$F''(x)=-\sin x+x>0$，因此 $F'(x)$ 严格单调递增，因此 $F'(x)>F'(0)=0$，因此 $F(x)$ 严格单调递增，因此 $F(x)>0$ 在 $x>0$ 时成立，因此 $\sin x>x-\frac{x^3}{6}(x>0)$。

建议评分标准：构造函数 $F(x)$ 得 2 分，判断 $F'(x)$ 单调性 3 分，判断 $F(x)$ 单调性 3 分

例 3：（2013 年（1）第六题）

六、（10 分）证明不等式 $\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},(x\ge 0)$，当 $x=0$ 时等号成立.

例 4：（2013 年（2）第二题（1））

（1）证明：$\ln(1+x)<x\ (x>0)$;

题型四：参数方程求导

例 1：（2005 年第三题（3））

（3）设 $x=1+t^2$, $y=\cos t$, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin t}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-t\cos t+\sin t}{2t^2}\times\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$$

例 2：（2007 年第四题（2））

（2）设 $x=t+e^t$，$y=e^{-t^2}\sin(\cos t)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ ；

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{-2te^{-t^2}\sin(\cos t)+e^{-t^2}\cos(\cos t)\cdot(-\sin t)}{1+e^t}$ ；

例 3：（2010 年第一题（4））

4) 假设 $\begin{cases}x=t\sin t,\\ y=t\cos t.\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解: $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}$ (2 分)

$=\dfrac{\cos t+t\sin t}{\cos t-t\sin t}$ (3 分)

例 4:（2011 年第一题（5））

5） 设 $\begin{cases}x=a(\cos t+\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解: $\dfrac{dy}{dt}=at\sin t$, $\dfrac{dx}{dt}=a(-\sin t+\cos t)$, 因此 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\sin t}{-\sin t+\cos t}$

建议评分标准： $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ 各 2 分，答案 1 分。

例 5:（2013 年（2）第一题（3））

3. 设$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d(2t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=2\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{\frac{1}{1+t^2}}=2(1+t^2).$$

题型五：隐函数求导

例 1:（2005 年第一题（5））

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+2xy=e$ 确定，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{2}{e}$

题型六：求 n 阶导数

例 1:（2005 年第三题（4））

（4） $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$

$$y^{(50)}=2^{50}x^2\sin\left(2x+\frac{50}{2}\pi\right)+2^{49}\cdot 50\cdot 2x\sin\left(2x+\frac{49}{2}\pi\right)+2^{48}\cdot 50\cdot 49\sin\left(2x+\frac{48}{2}\pi\right)$$

例 2:（2009 年第三题（4））

4）$y(x)=e^{ax}\sin bx$，求$\frac{d^ny}{dx^n}$

解：$y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx=e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi)$ $\quad(\varphi=\arctan\frac{b}{a})$，

$$y''=\sqrt{a^2+b^2}\cdot[ae^{ax}\sin(bx+\varphi)+be^{ax}\cos(bx+\varphi)]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\sin(bx+n\varphi)\ (\varphi=\arctan\frac{b}{a})$$ （5 分）

例 3：（2010 年第一题（5））

5) 假设 $f(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$，求 $f^{(n)}(x)$.

解：

$$f^{(n)}(x)=\left[(x^2+2x+3)e^{-x}\right]^{(n)}$$

$$=C_n^0\left((x^2+2x+3)\right)(e^{-x})^{(n)}+C_n^1\left((x^2+2x+3)'\right)(e^{-x})^{(n-1)} \quad (3\text{ 分})$$

$$+C_n^2\left((x^2+2x+3)''\right)(e^{-x})^{(n-2)}$$

$$=(-1)^n(x^2+2x+3)e^{-x}+$$

$$(-1)^{n-1}n(2x+2)e^{-x}+(-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x} \quad (2\text{ 分})$$

$$=(-1)^n e^{-x}\left[x^2-2(n-1)x+n^2-3n+3\right]$$

例 4：（2011 年第二题（:2））

2） 设函数 $y=x^{n-1}\ln x$（n为正整数），证明 $y^{(n)}=\dfrac{(n-1)!}{x}$.

证明：用数学归纳法，$n=1$时，$y=\ln x$，$y'=\dfrac{1}{x}$，命题成立。

假设当$n=k$时命题成立，则当$n=k+1$时，$y=x^k\ln x$，$y'=kx^{k-1}\ln x+x^{k-2}$。易得

$y^{(k+1)}=(kx^{k-1}\ln x+x^{k-2})^{(k)}=k(x^{k-1}\ln x)^{(k)}=k\dfrac{(k-1)!}{x}=\dfrac{k!}{x}$。

命题对$n=k+1$也成立，所以该命题对所有正整数n都成立。

建议评分标准： $n=1$的证明 2 分，对$n=k+1$时，求出y'得 2 分，归纳过程 3 分。

例 5：（2012 年第一题（5））

5) 假设 $f(x)=(x^2+2x+3)\sin 2x$，求 $f^{(n)}(x)$.

例 6：（2013 年（2）第一题（4））

4. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$.

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-3}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+3})=\dfrac{1}{4}(-1)^n n![\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+3)^{n+1}}]$

题型七：函数图像性质

例 1：（2009 年第六题（3））——凹凸性

3) 判断函数凹凸性 $f(x)=x\ln x$

解：$f'(x)=\ln x+1$ ，$f''(x)=\dfrac{1}{x}$, 当 $x>0$ 时有 $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$ 是凸函数。（5 分）

例 2：（2009 年第六题（4））——最值极值

4) 求 $y=x\ln x$ 在（0,e]的最大值和最小值

解：$y'=\ln x+1$, 令 $y'=0$, 得 $x=\dfrac{1}{e}$.

当 $x\in(0,\dfrac{1}{e})$ 时, $y'<0$, 当 $x\in(\dfrac{1}{e},e)$ 时, $y'>0$.

$y(\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e}$, $y(e)=e$. 故最大值为 e, 最小值为 $-\dfrac{1}{e}$。

（5 分）

例 3：（2010 年第一题（7））——凹凸性

7) 假设函数 $f(x)=e^x$，判断函数的凹凸性

解 $f''(x)=(e^x)''=e^x$ （4 分）

凸函数 （1 分）

例 4：（2011 年第一题（6））——拐点

4） 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\left(x^2-4x\right)$的拐点.

解：$f''(x)=\dfrac{40}{9}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)$，解方程 $f''(x)=0$ 得 $x=1$，再注意到 $f''(x)$在 $x=0$ 之外的点都有定义，因此 $f(x)$的可能拐点只能是 0或者1，当 x ? (1, ?)时，$f''(x)>0$，函数 $f(x)$为严格凸，当 x Î (0,1)时，$f''(x)<0$，函数 $f(x)$为严格凹，当 x ? (? ,0)时，$f''(x)>0$，函数 $f(x)$为严格凸。因此0和1都是拐点。

建议评分标准：求出二阶导数 2 分，凹凸性判断 3 分。

例 5：（2011 年第一题（6））——最值极值

6） 求函数 $f(x)=x\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最值.

解：$f'(x)=\ln x+1$，由方程 $f'(x)=0$ 可解得 $x=e^{-1}$。因此 $x=e^{-1}$ 是 $f(x)$ 的唯一驻点。

易见当 $0<x<e^{-1}$ 时，$f'(x)<0$，因此 $f(x)$ 在 $0<x<e^{-1}$ 时严格单减。在 $x>e^{-1}$ 时，$f'(x)>0$，因此此时 $f(x)$ 严格单增。由此可得 $f(x)$ 在 $x=e^{-1}$ 取得最小值 $-e^{-1}$。又因为如果 $f(x)$ 有最大值，则该最大值点也应为驻点，因此 $f(x)$ 没有最大值。

建议评分标准：求出一阶导数 1 分，求出驻点 1 分，判断最小值点 2 分，最大值点 1

例 6：（2012 年第一题（7））——凹凸性

7) 假设函数 $f(x)=x\ln x\ (x>0)$，判断函数的凹凸性.

解： $x>0$ 时，$f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$，因此 $f(x)$为凸函数.

建议评分标准：二阶导数 3 分，凹凸性判断 2 分

例 7：（2013 年（2）第一题（8））——零点问题

8.求证:方程 $x+3+\dfrac{1}{2}\cos x=0$ 有且只有一个实根.

证明：设 $f(x)=x+3+\frac{1}{2}\cos x$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，

且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$

又因为在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$f'(x)=1-\frac{1}{2}\sin x>0$, 即函数 $f(x)$ 严格单调递增,

所以方程 $x+3+\frac{1}{2}\cos x=0$ 有且只有一个实根.

例 8:（2013 年（2）第四题）——凹凸性

四（本题 10 分）

假设函数 $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$,

(1) 讨论函数的凹凸性;（2）证明函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证明:（1）因为 $y'=\frac{1}{1+x^2}$, $y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$,

当 $x\geq 0$ 时， $y''\leq 0$, 那么函数在 $[0,+\infty)$ 上凹;

当 $x\leq 0$ 时， $y''\geq 0$, 那么函数在 $[0,+\infty)$ 上凸。

（2）根据中值定理，$\forall x_1,x_2,x_1<x_2$, 在 $[x_1,x_2]\in(-\infty,+\infty)$ 上,

$$\arctan x_2-\arctan x_1=\frac{1}{1+\xi^2}(x_2-x_1), \quad \exists\xi\in(x_1,x_2)$$

$$\text{由于} 0<\frac{1}{1+\xi^2}<1, \quad \therefore|\arctan x_2-\arctan x_1|\leq|x_2-x_1|$$

$$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon, \text{当}|x_2-x_1|<\delta \text{时}, |\arctan x_2-\arctan x_1|<\varepsilon$$

题型八：综合题

例 1:（2007 年第三题）

三、(本题共 16 分)。得分[　　]

设 $p>1$，函数 $g(x)=\dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$，$x\in[0,+\infty)$，

求（1）$g(0),g(1)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$；（2）$g'(x)$；

（3）求函数 $g(x)$ 的单调区间；（4）求数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值和最小值。

解（1）$g(0)=1,g(1)=2^{p-1}$，　$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{x})^p}{1+(\frac{1}{x})^p}=1$；

（2）$g'(x)=\dfrac{p(1+x)^{p-1}(1+x^p)-(1+x)^p px^{p-1}}{(1+x^p)^2}=\dfrac{(1+x)^{p-1}p(1-x^{p-1})}{(1+x^p)^2}$；

$g'(1)=0$，

（3）由 $g'(x)=\dfrac{(1+x)^{p-1}p(1-x^{p-1})}{(1+x^p)^2}$ 可知，$g'(1)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，g 在 $[0,1]$ 上严格递增，$g(0)<g(x)<g(1)$；

当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，g 在 $[1,+\infty)$ 上严格递减，

（4）由（3）得，当 $0<x<1$ 时，有 $g(0)<g(x)<g(1)$；

由（3）和（1）得，当 $x>1$ 时，　g 在 $[1,+\infty)$ 上严格递减，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$，

所以 $1<g(x)<g(1)$；

故　$g(0)\le g(x)\le g(1)$，$x\ge 0$，

从而得 $g(0)=1$ 是最小值，$g(1)=2^{p-1}$ 是最大值。

例 2：（2012 年第八题）

八．（10 分）附加题（下面任选一题，只能选作一题）

1) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且在 $x=0$ 的某个邻域内成立 $f(e^x)-2f(e^{-x})=9x+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小量。求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程。

解：记 $F(x)=f(e^x)-2f(e^{-x})$，则由 $F(x)=9x+\alpha(x)$ 知 $F(0)=0$，$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x+\alpha(x)}{x}=9$．又由 $F(x)=f(e^x)-2f(e^{-x})$ 知 $F(0)=f(1)-2f(1)=-f(1)$．因此 $f(1)=0$，$F'(0)=f'(1)+2f'(1)$，因此 $f'(1)=3$，$y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=3(x-1)$．

建议评分标准：$f(1)$ 的计算 2 分，$f'(1)$ 的计算 4 分，切线公式 4 分。

2） 用有限覆盖定理证明若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并且对任何一点 $x\in[a,b], f(x)>0$，则一定存在 $c>0$, 当 $x\in[a,b], f(x)>c$。

证明：任取 $x\in[a,b]$，存在 $\delta_x>0$，使得 $|y-x|<\delta_x$ 时，$|f(y)-f(x)|<\dfrac{f(x)}{2}$，此时有 $f(y)>\dfrac{f(x)}{2}$。易知 $\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$ 构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖，由有限覆盖定理，存在有限个数 $x_1,x_2,\cdots x_n$，使得 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})$，取 $c=\min\{\dfrac{f(x_1)}{2},\dfrac{f(x_2)}{2},\cdots\dfrac{f(x_n)}{2}\}$，则有任取 $x\in[a,b], f(x)>c$.

建议评分标准：δ_x 的取法 3 分，构造开覆盖 4 分，c 的取法 3 分.

例 3：（2013 年（1）第八题）

八、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(a)>0, f'(a)<0,$ 而当 $x>a$ 时，$f''(x)\le 0,$ 证明在 $(a,+\infty)$ 内，方程 $f(x)=0$ **有且仅有**一个实根.