



# Nonlinear Systems 非线性系统

## 第四讲



## 2.2 多重平衡点

隧道二极管电路：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0.5[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= 0.2[-x_1 - 1.5x_2 + 1.2]\end{aligned}$$

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$$

平衡点： (0.063, 0.758), (0.285, 0.61), (0.884, 0.21)

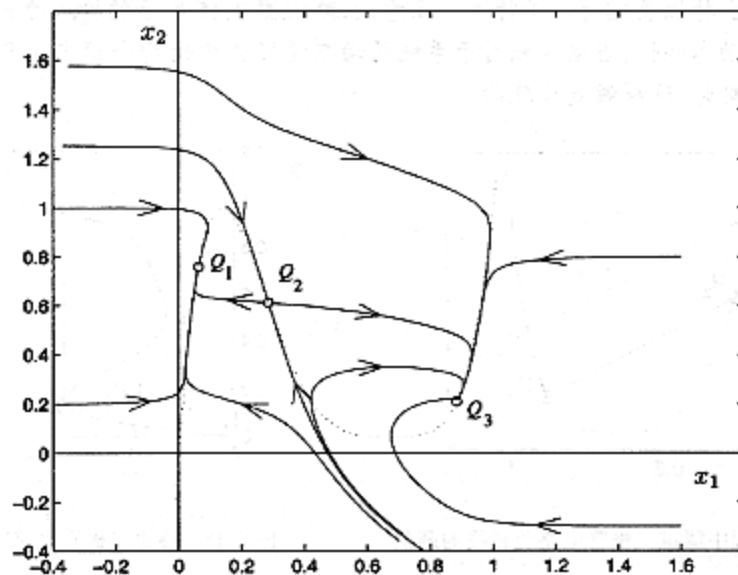


图 2.13 例 2.1 中的隧道二极管电路的相图

## 有摩擦力的单摆：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -10\sin x_1 - x_2$$

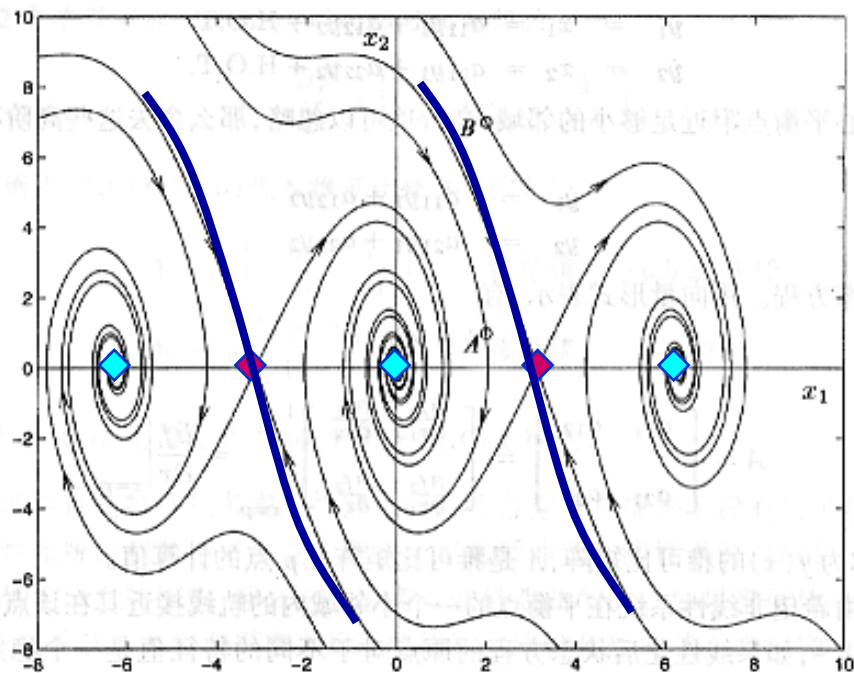


图 2.16 例 2.2 中的单摆方程的相图

## 2.3 平衡点附近的特性

非线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

设 $p=(p_1, p_2)$ 是非线性系统的平衡点, 并假设 $f_1, f_2$ 连续可微。

在 $(p_1, p_2)$ 处按泰勒级数展开:

$$\dot{x}_1 = f_1(p_1, p_2) + a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) + \text{H.O.T}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(p_1, p_2) + a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) + \text{H.O.T}$$

$$a_{11} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}, \quad a_{12} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}, \quad a_{22} = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}$$

$$f_1(p_1, p_2) = f_2(p_1, p_2) = 0$$

定义:  $y_1 = x_1 - p_1 \quad y_2 = x_2 - p_2$

状态方程改写为:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \text{H.O.T} \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \text{H.O.T}\end{aligned}$$

忽略高阶项:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dot{y}_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2\end{aligned}$$

向量形式表示:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

雅可比矩阵在 $\mathbf{p}$ 点的  
计算值

称为 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的雅可  
比矩阵

$$\text{其中: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right] \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}}$$

如果线性化后状态方程的原点对于不同的特征值是一个稳定（或非稳定）结点、一个稳定（或非稳定）焦点或一个鞍点，那么在平衡点的一个小邻域内，非线性状态方程的轨线就会具有一个稳定（或非稳定）结点、一个稳定（或非稳定）焦点或一个鞍点的特性。

如果线性化后的状态方程在平衡点附近具有同样的特性，就把非线性状态方程的平衡点称为稳定（或非稳定）结点、稳定（或非稳定）焦点或鞍点。



### 例2.3 隧道二极管电路

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u]$$

$$\dot{x}_1 = 0.5[-h(x_1) + x_2]$$

$$\dot{x}_2 = 0.2[-x_1 - 1.5x_2 + 1.2]$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0.5h'(x_1) & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$h'(x_1) = \frac{dh}{dx_1} = 17.76 - 207.58x_1 + 688.86x_1^2 - 905.24x_1^3 + 418.6x_1^4$$

解得三个平衡  
点分别为：

(0.063, 0.758), (0.285, 0.61), (0.884, 0.21)



得到三个雅可比矩阵:

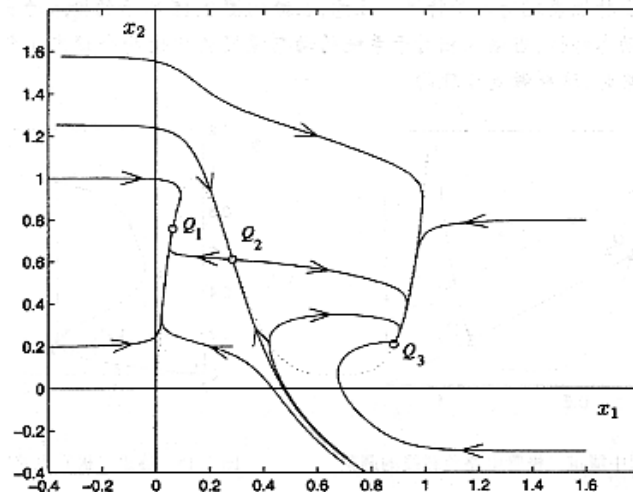


图 2.13 例 2.1 中的隧道二极管电路的相图

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -3.598 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

特征值: **-3.57, -0.33**

稳定结点

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1.82 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

特征值: **1.77, -0.25**

鞍点

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1.427 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

特征值: **-1.33, -0.4**

稳定结点

## 例2.4 单摆

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -10\sin x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

平衡点分别为：  $(0,0)$  和  $(\pi,0)$

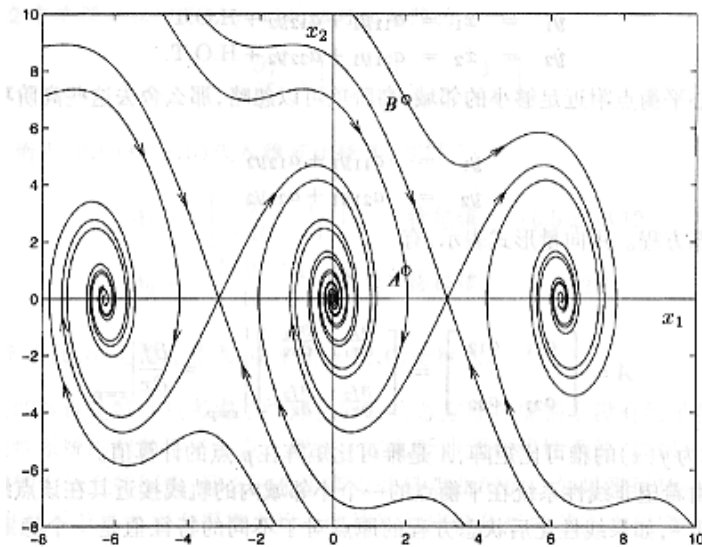


图 2.16 例 2.2 中的单摆方程的相图

得到两个雅可比矩阵：

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{特征值: } -0.5 \pm j3.12 \quad \text{稳定焦点}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{特征值: } -3.7, \quad 2.7 \quad \text{鞍点}$$

如果一个平衡点的雅可比矩阵在虚轴上没有特征值，那么这个平衡点就是双曲型的。

如果雅可比矩阵在虚轴上有特征值，那么非线性状态方程在平衡点附近的特性与线性化后的状态方程完全不同。

## 例2.5

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

(0, 0) 是该系统的一个平衡点

在 origin 线性化后，雅可比矩阵的特征值为：

特征值： $\pm j$

中心

用极坐标表示系统：

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{r} &= -\mu r^3 \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

$\mu > 0$  时，轨线类似稳定焦点的轨线。

$\mu < 0$  时，轨线类似非稳定焦点的轨线。

以上例子说明，在线性化状态方程中描述的中心特性在非线性状态方程中不一定成立。

如果 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在平衡点的邻域内是解析函数，那么以下论述成立：对于线性化状态方程，如果原点是稳定（或非稳定）结点，那么，无论线性化后的特征值是否相同，在平衡点的一个小邻域内，非线性状态方程的轨线都将表现出类似稳定（或非稳定）结点的特性。

## 2.4 极限环

当系统具有非平凡周期解 时就会振荡。

$$x(t+T) = x(t), \quad \forall t \geq 0$$

在相图中，周期解的图形是一条闭合的曲线，通常称为周期轨道或闭轨道。

线性系统振荡的例子

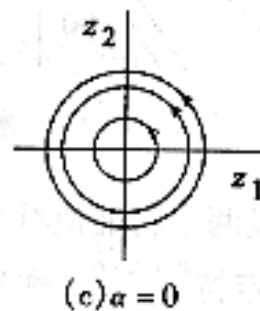


## 线性系统振荡器有两个基本问题：

1. 鲁棒性问题
2. 振荡的幅度取决于初始条件

## 非线性系统振荡器的两个特点：

- 非线性振荡器是结构稳定的（鲁棒性好）
- 振荡幅度（稳态时）与初始条件无关



# 负阻振荡器

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - \varepsilon h'(x_1)x_2$$

$h(\bullet)$  满足以下条件:

$$h(0) = 0, \quad h'(0) < 0$$

$$h(v) \rightarrow \infty \quad \text{当 } v \rightarrow \infty, \quad h(v) \rightarrow -\infty \quad \text{当 } v \rightarrow -\infty$$

系统的惟一平衡点  $(0, 0)$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon h'(0) \end{bmatrix}$$

由于  $h'(0) < 0$  平衡点是非稳定结点或非稳定焦点。

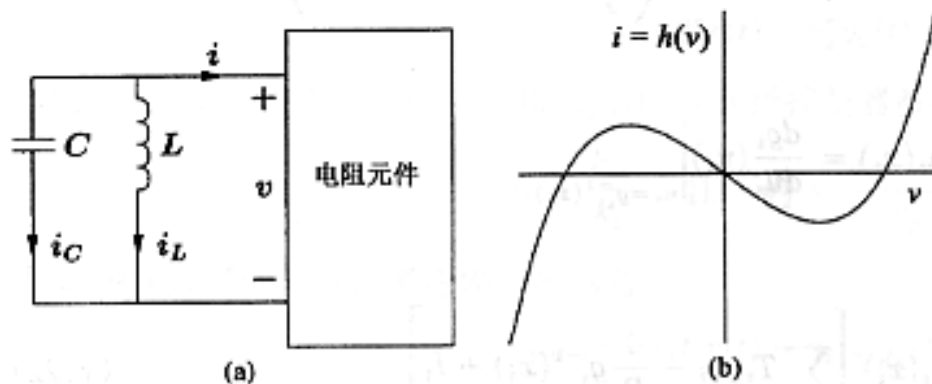


图 1.6 (a) 基本振荡电路; (b) 典型的驱动点特性

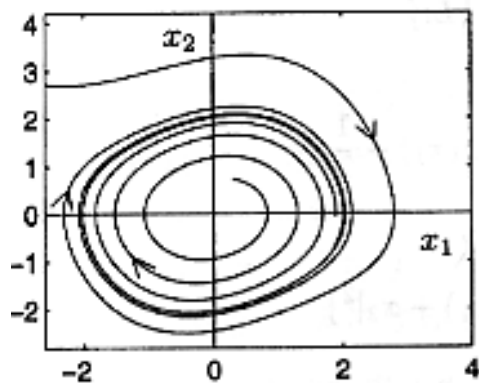
## 例2.6

$$h(v) = -v - \frac{1}{3}v^3$$

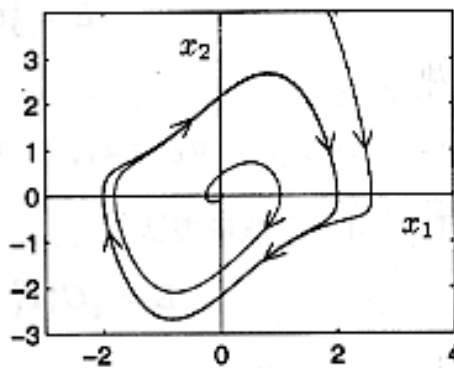
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2$$

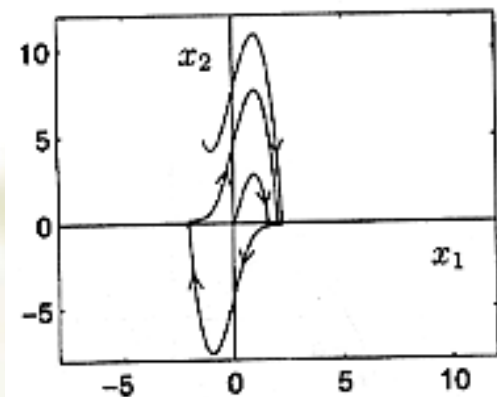
$\varepsilon$  取三个不同值时的相图:



(a)  
 $\varepsilon = 0.2$



(b)  
 $\varepsilon = 1.0$



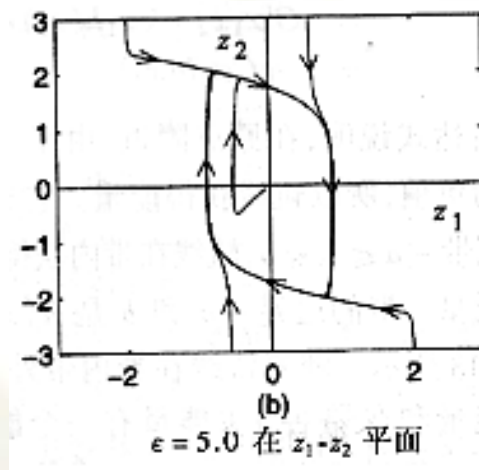
(a)  
 $\varepsilon = 5.0$  在  $x_1$ - $x_2$  平面

$\epsilon=5$ 时选择状态变量:

$$z_1 = i_L, z_2 = v_C$$

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{\epsilon} z_2$$

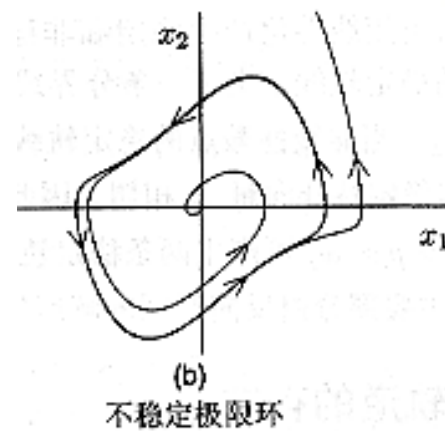
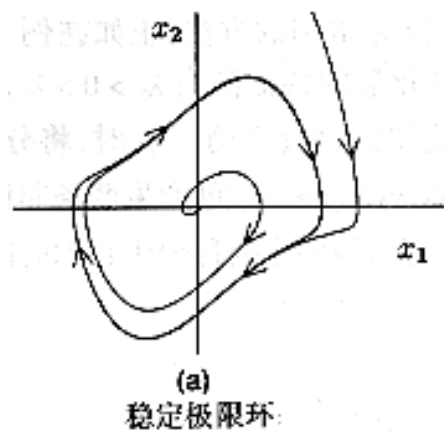
$$\dot{z}_2 = -\epsilon(z_1 - z_2 + \frac{1}{3} z_2^3)$$



发生跳跃现象的振荡通常称为**张弛振荡**。

**稳定极限环**的性质：当 $t \rightarrow \infty$ 时，极限环邻域内的所有轨线最终都趋于极限环。

**非稳定极限环**的性质：当 $t \rightarrow \infty$ 时，所有始于接近极限环的任意一点的轨线都将远离极限环。



$$\dot{x}_1 = -x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)x_2$$

## 2.6 周期轨道的存在

Poincaré-Bendixson定理

Bendixson准则

指数法

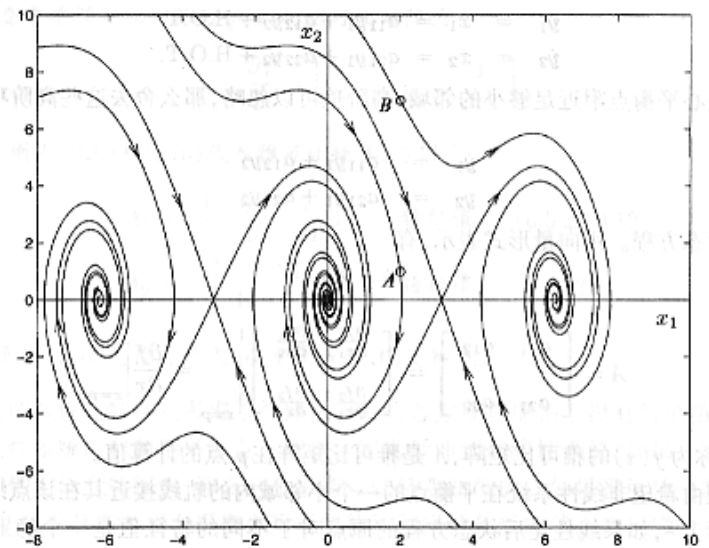


图 2.16 例 2.2 中的单摆方程的相图

二阶自治系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{。 。 。 。 。 。 。 。 (2.7)}$$

引理2.1（Poincaré-Bendixson准则）考虑系统（2.7），设M是平面内的一个有界闭子集,使

●M不包含平衡点，或只包含一个平衡点，使雅可比矩阵 $[\partial f / \partial \mathbf{x}]$ 在该点有实部为正的 eigenvalue（因此特征值是非稳定焦点或非稳定结点）

●每条始于M的轨线在将来所有时刻都保持在M内

那么，M包含系统（2.7）的一个周期轨道。

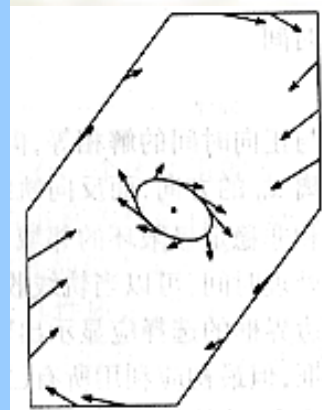


图 2.22 重新定义的集合 M 排除了非稳定焦点或结点的邻域



闭合曲线  $V(\mathbf{x}) = c$        $V(\mathbf{x})$ 连续可微

内积  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x}) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) < 0$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla V(\mathbf{x}) < 0$       向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 方向向内

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla V(\mathbf{x}) > 0$       向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 方向向外

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla V(\mathbf{x}) = 0$       向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 与曲线相切

定义集合:  $M = \{V(\mathbf{x}) \leq c\}, c > 0$

如果在边界  $V(x) = c$  上  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla V(\mathbf{x}) \leq 0$ , 那么轨线就在  $M$  内。

定义集合:  $M = \{W(\mathbf{x}) \geq c_1, V(\mathbf{x}) \leq c_2\}, c_1 > 0, c_2 > 0$

如果在  $V(x) = c_2$  上  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla V(\mathbf{x}) \leq 0$ , 且在  $W(x) = c_1$  上  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla W(\mathbf{x}) \geq 0$ , 则轨线在  $M$  内。

## 例2.7 谐振器

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

集合:  $M = \{c_1 \leq V(\mathbf{x}) \leq c_2\}$

其中:  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2, c_2 > c_1 > 0$

系统的平衡点为  $(0, 0)$

集合**M**不包含平衡点

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla V(\mathbf{x}) = 2x_2x_1 - 2x_1x_2 = 0$$

轨线在**M**内。

## 例2. 8

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

平衡点 (0, 0)

$$M = \{V(\mathbf{x}) \leq c\} \quad \text{其中: } V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2, c > 0$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1-3x_1^2-x_2^2 & 1-2x_1x_2 \\ -2-2x_1x_2 & 1-x_1^2-3x_2^2 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

特征值:  $1 \pm j\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 &= 2x_1 [x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2 [-2x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\&= 2(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1x_2 \\&\leq 2(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_2^2)^2 + (x_1^2 + x_2^2) \\&= 3c - 2c^2\end{aligned}$$

$c \geq 1.5$  可以保证所有轨线包含在  $\mathbf{M}$  内, 即  $\mathbf{M}$  内有一个周期轨道。

引理2.2 (Bendixson准则) 如果在平面上的简单连通区域D内, 表达式 $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2$ 不总是为零, 且符号不变, 那么系统(2.7)在D内没有周期闭轨道。

### 例2.10:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 - x_1^2x_2 - x_1^3$$

D为整个平面

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = b - x_1^2$$

如果**b<0**, 就不可能有闭轨道

极限环的存在性：

对于系统：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

定理2(Bendixson-Dulac)：设 $D$ 是相平面上的一个由简单闭曲线围成的区域，如果存在分段连续可微函数 $B(x_1, x_2)$ ，在其中：

$$\frac{\partial(Bf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Bf_2)}{\partial x_2}$$

不改变符号，且在其中的任一子域上不恒为零，则系统在 $D$ 内无闭轨线(不限于极限环)。

例：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$
 由于 
$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = a_{11} + a_{22}$$

若 $a_{11} + a_{22} \neq 0$ ，则不可能存在闭的相轨线---周期运动。



定理3(Poincare-Bendixson): 设 $D$ 是相平面上的一个区域, 系统的某一轨线当  $t > t_0$  时完全位于其中, 则该轨线或者是一闭轨, 或者趋于一闭轨, 或者趋于一平衡点.

原因: 由于定常系统的相轨线不能相交.

推论: 如果在某环域的边界上, 系统的相轨线全部都是由外入内(或由内出外), 且该区域内无平衡点, 则该环域内至少有一个稳定(或不稳定)的极限环.

定义：对于给定的二阶系统（2.7），设 $C$ 是不通过系统（2.7）的任何平衡点的一条简单闭合曲线，考虑向量场 $f(x)$ 在点 $p$ 的方向， $p$ 为 $C$ 上的点。设 $p$ 以逆时针方向遍历 $C$ ，向量 $f(x)$ 连续旋转，且在返回到初始位置上时，已经旋转了一个角度 $2k\pi$ ， $k$ 为整数，这里角度是逆时针测量的。整数 $k$ 称为闭合曲线 $C$ 的指数。如果 $C$ 为围绕孤立平衡点 $\otimes$ ，那么 $k$ 就称为 $\otimes$ 的指数。

### 引理2.3

- (a) 结点、焦点、或中心的指数是+1。
- (b) （双曲）鞍点的指数是-1。
- (c) 闭轨道的指数是+1。
- (d) 不包含任何平衡点的闭合曲线的指数是0。
- (e) 闭合曲线的指数等于曲线内所有平衡点的指数之和。

**推论2.1** 在任何闭轨道 $\gamma$ 内，一定至少有一个平衡点。假设 $\gamma$ 内的平衡点是双曲型的，那么如果 $N$ 是结点数， $S$ 是鞍点数，必有 $N-S=1$ 。

**例2.11:**

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 - 2x_1 x_2$$


平衡点： **(0, 0)** 和 **(1, 1)**

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

特征值： **1, -1**      鞍点

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

特征值： **-0.5 ± j0.866**      稳定焦点



作业：习题2.1， 2.5， 2.8， 2.17 (1),(2)， 2.20  
(2), (3)