Nonlinear Systems 非线性系统

第十三讲

应用中心流形定理判断系统原点稳定性例子

定理 8.3 如果可以找到一个连续可微的函数 $\phi(y)$，且 $\phi(0)=0$，$[\partial\phi/\partial y](0)=0$，使得对于 $p>1$，有 $N(\phi(y))=O(\|y\|^p)$，则对于足够小的 $\|y\|$，有

$$h(y)-\phi(y)=O(\|y\|^p)$$

且降阶系统可表示为

$$\dot{y}=A_1y+g_1(y,\phi(y))+O(\|y\|^{p+1})$$

下面通过几个例题介绍中心流形定理的应用。

标量状态方程

$$\dot{y} = ay^p + O(|y|^{p+1})$$

其中p为正整数。如果p是奇数且 $a<0$，则原点是渐近稳定的；如果 p是奇数且$a>0$，或者p是偶数且 $a \neq 0$，则原点是不稳定的(见习题4.2)。

例8.1 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + ax_1^2 + bx_1x_2$$

$a \neq 0$**系统在原点有唯一的平衡点。在原点对系统线性化可得矩阵**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

其特征值是0和-1。构造一个矩阵M，其列为A的特征向量，即 $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

取 $T = M^{-1}$**,则有** $TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$**。应用变量代换** $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = T^{-1}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+z \\ -z \end{bmatrix}$$

系统变为：

$$\dot{y} = a(y+z)^2 - b(yz + z^2)$$

$$\dot{z} = -z - a(y+z)^2 + b(yz + z^2)$$

边界条件为式(8.12)的中心流形方程(8.11)变为

$$N(h(y)) = h'(y)\left[a(y+h(y))^2 - b(yh(y) + h^2(y))\right]$$
$$+h(y) + a(y+h(y))^2 - b(yh(y) + h^2(y)) = 0$$

$$h(0) = h'(0) = 0$$

令 $h(y)=h_2y^2+h_3y^3+\cdots$ ，将该级数代入中心流形方程，通过比较y的同次幂的系数求解未知系数*h*2，*h*3 等。由于事先不清楚该级数需要多少项，所以从最简单的近似解 $h(y)\approx 0, or, h(y)=O(|y|^2)$ 开始。

将 $h(y)=O(|y|^2)$ 代入降阶系统并研究其原点的稳定性。如果可以确定原点的稳定性质，则运算结束。否则需要求解系数*h*2，将 $h(y)=h_2y^2+O(|y|^3)$ 代入降阶系统，研究其原点的稳定性。如果仍然不能求解，则继续取 $h(y)=h_2y^2+h_3y^3+O(|y|^4)$ 依此类推。

先研究近似解 $h(y)\approx 0$ ，得到降阶系统为 $\dot{y}=ay^2+O(|y|^3)$

ay^2 一项是降阶系统方程右边的主项。当 $a\neq 0$ 时，降阶系统的原点是不稳定的。所以由定理8.2可知整个系统的原点也是不稳定的。如果 $a=0$，则 $h(y)=0$ 精确满足中心流形方程，此时降阶系统为 $\dot{y}=0$，因此整个系统Lyapunov稳定但不是渐近稳定的。

例8.2 考虑以(y,z)坐标表示的系统
$$\dot{y} = yz$$
$$\dot{z} = -z + ay^2$$

其中心流形方程(8.11)和边界条件(8.12)为

$$h'(y)[yh(y)] + h(y) - ay^2 = 0, h(0) = h'(0) = 0$$

首先设 $z = h(y) = O(|y|^2)$ ，则降阶系统为 $\dot{y} = O(|y|^3)$ 显然不可能确定原点的稳定性。因此将 $h(y) = h_2 y^2 + O(|y|^3)$ 代入中心流形方程并计算*h*2，通过匹配y^2的系数可得 $h_2 = a$ 。降阶系统为 $\dot{y} = ay^3 + O(|y|^4)$

因此，如果a<0，原点就是渐近稳定的；反之，如果a>0，原点就是非稳定的。因而由定理8.2可知，如果a<0，整个系统的原点就是渐近稳定的；反之，如果a>0，整个系统的原点就是非稳定的。如果a=0，中心流形方程(8.11)和边界条件(8.12)就简化为 $h'(y)[yh(y)] + h(y) = 0, h(0) = h'(0) = 0$ 该方程具有精确解*h*(*y*)=0.降阶系统$\dot{y} = 0$具有稳定的原点，其Lyapunov函数为$V(y) = y^2$。由推论8.1可知，若a=0，则整个系统的原点是稳定的。

例 8.3 考虑系统(8.2)～(8.3)，其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, g_1 = \begin{bmatrix} -y_1^3 \\ -y_2^3 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = -1, g_2 = y_1^3 - 3y_1^5 + 3y_1^2 y_2$$

令 $z = h(y) = O(\|y\|^2)$ 得到降阶系统方程：

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_1 - y_2^3 \end{bmatrix} + O(\|y\|_2^4)$$

取 $V(y) = (y_1^2 + y_2^2)/2$ 作为备选Lyapunov函数，则在原点的一个邻域内，有

$$\dot{V} = -y_1^4 - y_2^4 + y^T O(\|y\|_2^4) \le -\frac{1}{2}\|y\|_2^4 + k\|y\|_2^5 \le -\frac{1}{4}\|y\|_2^4 + \left(k\|y\|_2^5 - \frac{1}{4}\|y\|_2^4\right)$$

由 ***k*>0**, 因此当 $\|y\|_2 \le \frac{1}{4k}$ 时，有 $\dot{V} \le -\frac{1}{4}\|y\|_2^4 < 0$

可见降阶系统的原点是渐近稳定的，因而整个系统的原点是渐近稳定的。

例 8.4 考虑系统(8.2)～(8.3)，其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, g_1 = \begin{bmatrix} -y_1^3 \\ -y_2^3 + z^2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = -1, g_2 = y_1^3 - 3y_1^5 + 3y_1^2 y_2$$

令 $z = h(y) = O(\|y\|^2)$ 得到降阶系统方程：

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ -y_2^3 \end{bmatrix} + O(\|y\|_2^4)$$

若忽略高阶扰动项，则基于同样的Lyapunov函数和不变原理可证明原点是渐近稳定的（y_1子系统输入状态稳定，y_2子系统全局渐近稳定）

当存在扰动项时，若试图找到一个Lyapunov函数以证明渐近稳定性，这是不可能的。事实上，可以验证边界条件为式(8.12)的中心流形方程(8.11)有精确解 $h(y) = y_1^3$ 降阶系统为 $\dot{y} = \begin{bmatrix} -y_1^3 + y_2 \\ y_1^6 - y_2^3 \end{bmatrix}$

可见降阶系统的原点是不稳定的（习题4.13）。

作业：P226， 8.3； 8.6： （2）、（4）、（6）、（8）； 8.9；

吸引区的估计：渐近稳定平衡点吸引区

吸引区的估计：

吸引区的意义：

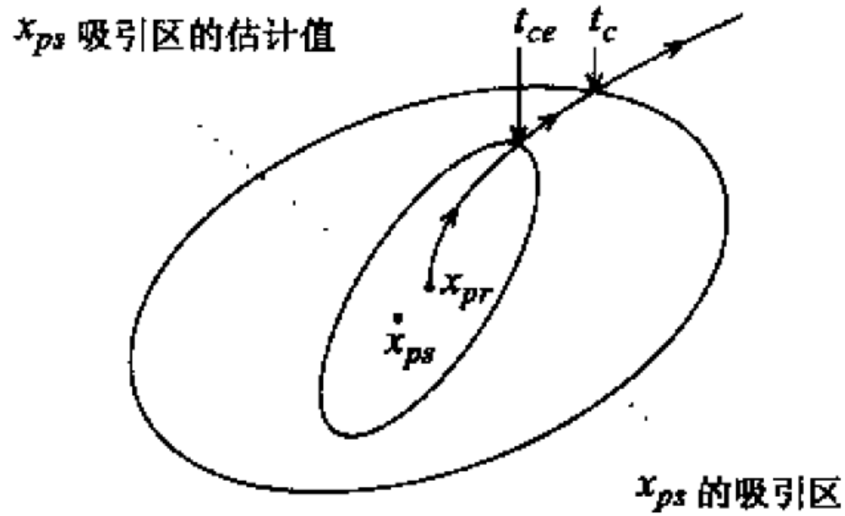


图 8.1 临界清除时间

考虑原点渐近稳定的自治系统

$$\dot{x} = f(x)$$

吸引区的定义：

$$R_A = \{x \in D \mid \phi(t;x), \forall t \geq 0, \phi(t;x) \to 0 \text{当} t \to \infty\}$$

结论：原点是系统的渐近稳定平衡点，则其吸引区是一个连通开的不变集，且其边界由系统的轨线形成。

教材上的三个例子给出了渐近稳定平衡点的吸引区典型情况：

第一个例子8.5，吸引区边界是一个极限环；

第二个例子8.6，吸引区的边界则由鞍点的稳定轨线形成。

第二个例子8.7，吸引区的边界是一条由平衡点组成的闭合曲线。

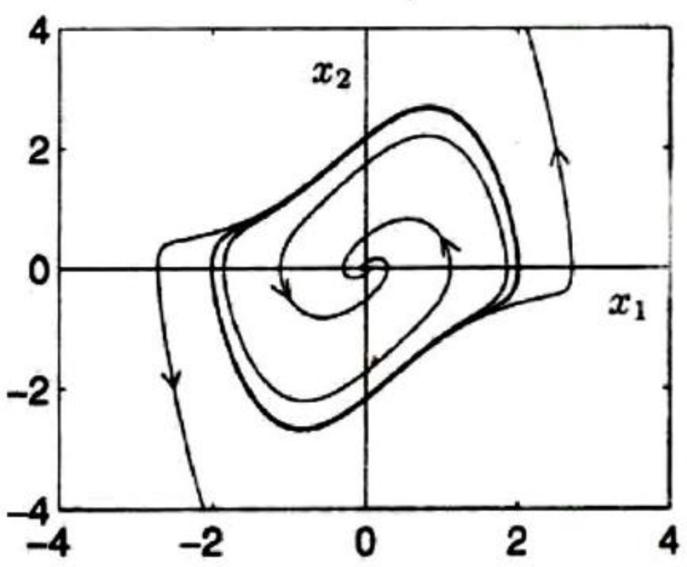
例子8.5 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2$$

线性化系统为 $A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

特征值为 $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$

系统相图:



例子8.6 考虑系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2$$

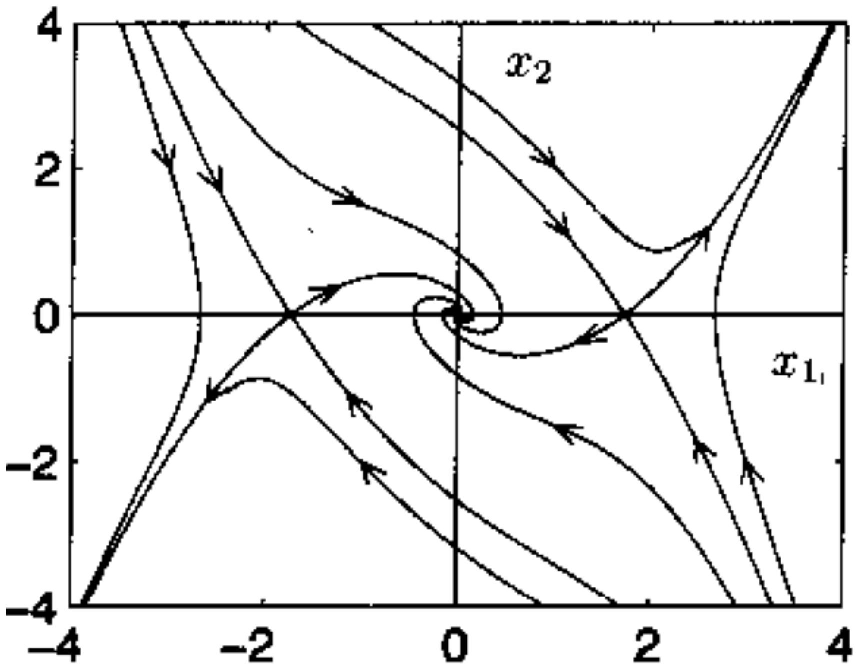
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -h(x_1) - x_2 \end{bmatrix}, h(0) = 0.$$

$$h(x_1) = x_1 - \tfrac{1}{3}x_1^3$$

系统平衡点：

$$(0,0),(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$$

系统相图:



例子8.7考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

系统平衡点：在原点有一个孤立平衡点，且在单位圆上的点均为平衡点，即单位圆是连续统的平衡点集.

引入变量代换 $x_1 = \rho\cos\theta, x_2 = \rho\sin\theta$ 得到

$$\dot{\rho} = -\rho(1 - \rho^2), \dot{\theta} = 0$$

所有始于 $\rho < 1$ 的轨线在时间趋向于无穷时都趋向原点，因此吸引区在单位圆内。

例子8.8，重新考虑 例8.6 系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2$$

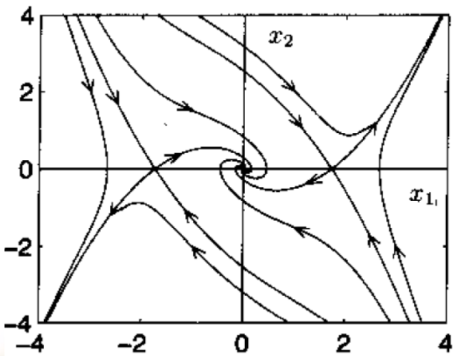
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -h(x_1) - x_2 \end{bmatrix}, h(0) = 0.$$

$$h(x_1) = x_1 - \tfrac{1}{3}x_1^3$$

取Lyapunov函数：
$$V(x) = \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + \int_0^{x_1} \left(y - \tfrac{1}{3}y^3\right) dy$$
$$= \tfrac{3}{4}x_1^2 - \tfrac{1}{12}x_1^4 + \tfrac{1}{2}x_1x_2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

导数：
$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x_1^2\left(1 - \frac{1}{3}x_1^2\right) - \frac{1}{2}x_2^2$$

系统定义域：
$$D = \left\{x \in R^2 \middle| -\sqrt{3} < x_1 < \sqrt{3}\right\}$$



很容易看出，在*D* \{0}内，有V>0,其导数小于0. 但是从相图看*D*不是吸引区的子集。
若吸引区是由*D* 的一个正不变紧子集估算时，就不会出现这一问题，即*D*的紧子集，始于其内的轨线在所有未来时刻都会保持在其内。最简单的估计

$$\Omega_c = \{x \in R^n \,|\, V(x) \le c\} \subset D$$

对于二次Lyapunov函数 $V(x) = x^T P x$，当 $D = \{\|x\|_2 < r\}$，可通过选择

$$c < \min_{\|x\|_2 = r} x^T P x = \lambda_{\min}(P) r^2$$ 保证 $\Omega_c \subset D$

当 $D = \{|b_i^T x| < r_i, i = 1,2,\cdots,p\}$ 时

$$\min_{|b_i^T x| = r_i} x^T P x = \frac{r_i^2}{b_i^T P^{-1} b_i}$$

$L(x,\lambda) = x^T P x + \lambda[(b^T x)^2 - r^2]$。一阶的必要条件是 $2Px + 2\lambda(b^T x)b = 0$ 和 $(b^T x)^2 - r^2 = 0$。可以验证解 $\lambda = -1/(b^T P^{-1} b)$ 和 $x = \pm r P^{-1} b/(b^T P^{-1} b)$ 得到极小值 $r^2/(b^T P^{-1} b)$。

因此如果选取 $$c < \min_{1 \le i \le p} \left\{ \frac{r_i^2}{b_i^T P^{-1} b_i}, i = 1,2,\cdots,p \right\}$$

则 $\{x : x^T P x \le c\}$ 是 $D = \left\{x, |b_i^T x| < r_i, i = 1,\cdots,p\right\}$ 的一个子集。

线性化结果，估算吸引区的方法，雅可比矩阵*A* 是**Hurwitz** 的，则通过对任意正定矩阵**Q** 求解**Lyapunov**，就可以估算原点的吸引区。

例子8.9 考虑系统

$$\dot{x}_1 = -x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2$$

线性化系统为

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

解Lyapunov方程 $PA + A^T P = -I$ **得到：** $P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$ **，最小特征值大于0.69**

Lyapunov函数 $V(x) = x^T P x$ **，其沿系统解的导数：**

$$\dot{V}(x) = -(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 x_2 - 2x_1^2 x_2^2)$$
$$\dot{V}(x) \le -\|x\|_2^2 + |x_1|\ |x_1 x_2|\ |x_1 - 2x_2| \le -\|x\|_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\|x\|_2^4$$

用到 $|x_1| \le \|x\|_2$，$|x_1 x_2| \le \|x\|_2^2 / 2$ 和 $|x_1 - 2x_2| \le \sqrt{5}\|x\|_2$

在 $D = \{x \in R^2 \mid \|x\|_2 < r\}$ 内负定，其中 $r^2 = 2/\sqrt{5} = 0.8944$；取

$$c < \min_{\|x\|_2 = r} x^T P x = \lambda_{\min}(P) r^2$$ **c=0.617** 保证 $\Omega_c \subset D$

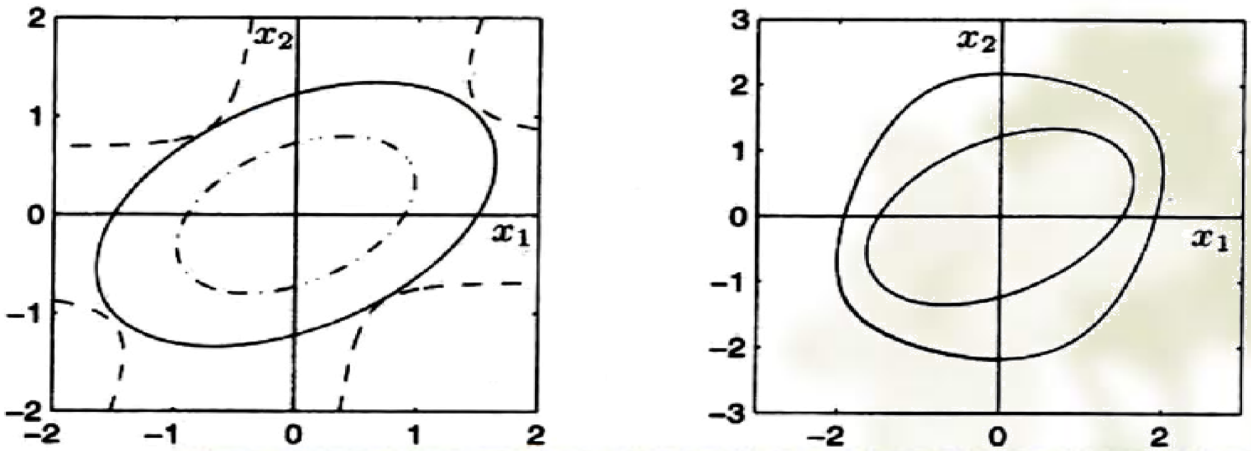
给出不太保守吸引区的估计值，为此取 $x_1=\rho\cos\theta, x_2=\rho\sin\theta$

$$V(x)=x^T P x = 1.5x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = -(x_1^2+x_2^2)-(x_1^3 x_2 - 2x_1^2 x_2^2)$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\rho^2+\rho^4\cos^2\theta\sin\theta(2\sin\theta-\cos\theta)\\ &\le -\rho^2+\rho^4\left|\cos^2\theta\sin\theta\right|\cdot\left|2\sin\theta-\cos\theta\right|\\ &\le -\rho^2+\rho^4\times 0.3849\times 2.2361\\ &\le -\rho^2+0.861\rho^4<0,\ \rho^2<\frac{1}{0.861}\end{aligned}$$

取 $c=0.8<\dfrac{0.69}{0.861}=0.801$ 保证 $\Omega_c\subset D$



(a) (b)

作业：P226， 8.3；

8.6：（2）、（4）、（6）、（8）；

8.9；8.14；8.16.