

Introdução à Otimização

Trabalho Final



Professor: Afonso Celso del Nero

Alunos:
Cayo Valsamis
Gabriel Pelielo
Rafael Accácio
Rodrigo Moysés

Universidade Federal do Rio de Janeiro

01 de Dezembro, 2015

2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

Introdução à Otimização
Trabalho Final



Professor: Afonso Celso del Nero

Alunos:
Cayo Valsamis
Gabriel Pelielo
Rafael Accácio
Rodrigo Moysés

Universidade Federal do Rio de Janeiro

01 de Dezembro, 2015

Sumário

1 Mínimos Quadrados

2 Algoritmo Genético

3 Simplex

4 Conclusão



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Sumário

Sumário

- 1 Mínimos Quadrados
- 2 Algoritmo Genético
- 3 Simplex
- 4 Conclusão

Sumário

1 Mínimos Quadrados

2 Algoritmo Genético

3 Simplex

4 Conclusão



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└─ Mínimos Quadrados

└─ Sumário

Sumário

■ Mínimos Quadrados

■ Algoritmo Genético

■ Simplex

■ Conclusão

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Mínimos Quadrados

└ Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min\left(\sum^n (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)\right) \quad (1)$$



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Mínimos Quadrados

└ Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min\left(\sum^n (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)\right) \quad (1)$$

- n é o número de amostras.



Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min\left(\sum^n (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)\right) \quad (1)$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.



Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min\left(\sum^n (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)\right) \quad (1)$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k .



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Mínimos Quadrados

└ Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min\left(\sum^n (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)\right) \quad (1)$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k .

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min\left(\sum^n (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)\right) \quad (1)$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k .
- t_k é o instante de tempo da k -ésima amostra.



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Mínimos Quadrados

└ Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min\left(\sum^n (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)\right) \quad (1)$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k .
- t_k é o instante de tempo da k -ésima amostra.

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min\left(\sum^n (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)\right) \quad (1)$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k .
- t_k é o instante de tempo da k -ésima amostra.
- \mathbf{y}_k é o valor medido na amostra k .



Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min\left(\sum^n (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)\right) \quad (1)$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k .
- t_k é o instante de tempo da k -ésima amostra.
- \mathbf{y}_k é o valor medido na amostra k .
- ω_n e ζ são os parâmetros do sistema.



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Mínimos Quadrados

└ Mínimos Quadrados

ZETA

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min\left(\sum^n (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)\right) \quad (1)$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k .
- t_k é o instante de tempo da k -ésima amostra.
- \mathbf{y}_k é o valor medido na amostra k .
- ω_n e ζ são os parâmetros do sistema.

"Dividir e Conquistar"

Iremos dividir em duas partes

1. Calcular a expressão $\sum_{i=1}^k (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)$



Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Mínimos Quadrados

└ "Dividir e Conquistar"

2016-03-10

"Dividir e Conquistar"

Iremos dividir em duas partes

1. Calcular a expressão $\sum_{i=1}^k (\mathbf{f}(t_i, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_i)$

"Dividir e Conquistar"

Iremos dividir em duas partes

1. Calcular a expressão $\sum_{i=1}^k (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)$
2. Minimizar a expressão através de algum método.



"Dividir e Conquistar"

Quais métodos?



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Mínimos Quadrados

└ "Dividir e Conquistar"

"Dividir e Conquistar"

Quais métodos?

"Dividir e Conquistar"

Métodos Antigos?



"Dividir e Conquistar"

Métodos Antigos?

Métodos Novos?



"Dividir e Conquistar"

Métodos Antigos?

Métodos Novos?

Veremos...



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Mínimos Quadrados

└ "Dividir e Conquistar"

"Dividir e Conquistar"

Métodos Antigos?

Métodos Novos?

Veremos...

Sumário

1 Mínimos Quadrados

2 Algoritmo Genético

3 Simplex

4 Conclusão



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Algoritmo Genético

└ Sumário

Sumário

■ Mínimos Quadrados

■ Algoritmo Genético

■ Simplex

■ Conclusão

Algoritmo Genético

O algoritmo genético é inspirado pelo evolucionismo, que se baseia em gerações de indivíduos, em que os mais aptos prevalecem e constroem a geração futura.



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Algoritmo Genético

└ Algoritmo Genético

Algoritmo Genético

O algoritmo genético é inspirado pelo evolucionismo, que se baseia em gerações de indivíduos, em que os mais aptos prevalecem e constroem a geração futura.



Algoritmo Genético

O primeiro passo para a construção do algoritmo genético é a criação de uma **primeira geração**, feita aleatoriamente, com quantidade de indivíduos e limites definidos.



Algoritmo Genético

O segundo passo é criar a **população intermediária**. O método escolhido para tal foi o canônico, com aptidão definida como

$$\phi_i = \frac{\bar{f}}{f_i}$$

Sendo

- ϕ_i a aptidão do indivíduo i .
- f_i a função objetivo avaliada no ponto do indivíduo i .
- \bar{f} a média do valor da função para toda a população.



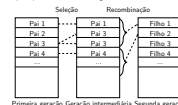
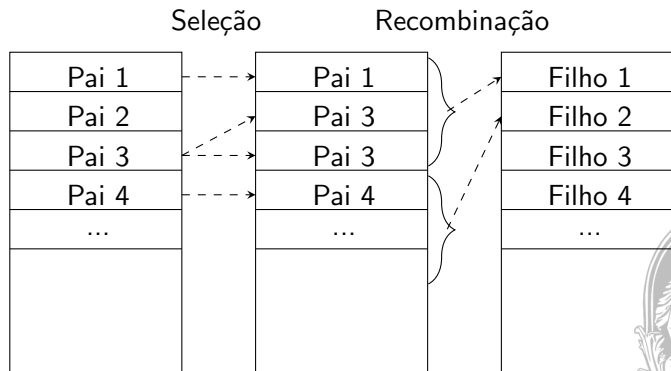
$$\phi_i = \frac{\bar{f}}{f_i}$$

Sendo

- ϕ_i a aptidão do indivíduo i .
- f_i a função objetivo avaliada no ponto do indivíduo i .
- \bar{f} a média do valor da função para toda a população.

Algoritmo Genético

O terceiro passo é a recombinação, processo necessário para construir a **segunda geração**. O tipo de recombinação escolhido foi a média de três pais, para acelerar a convergência.



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

Algoritmo Genético

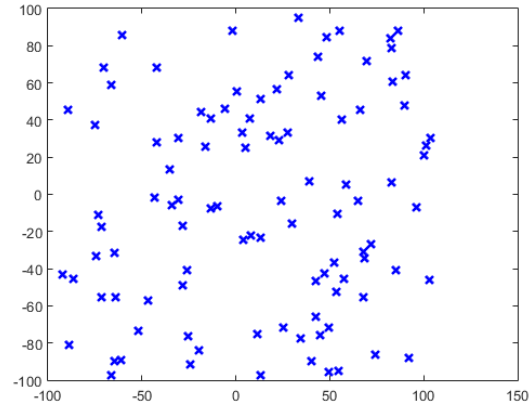


Figura: Exemplo de primeira iteração

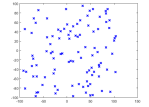


Figura: Exemplo de primeira iteração

2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

Algoritmo Genético

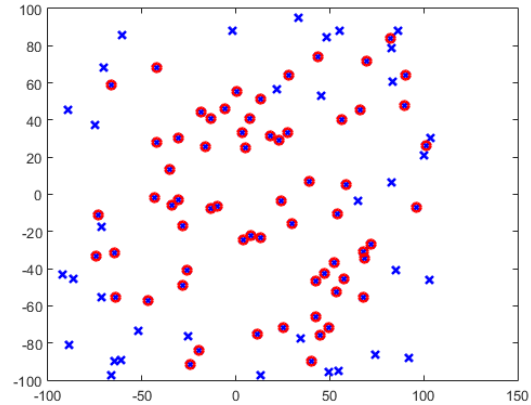


Figura: Exemplo de primeira iteração

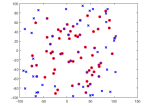


Figura: Exemplo de primeira iteração

2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

Algoritmo Genético

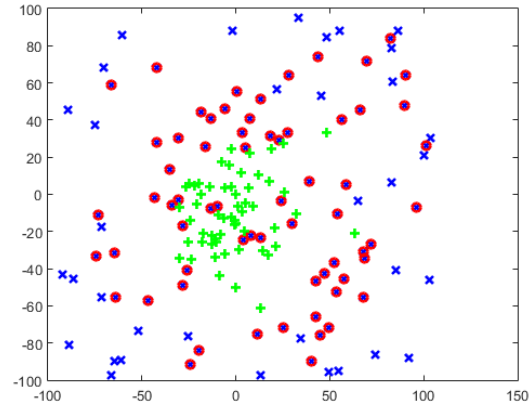


Figura: Exemplo de primeira iteração

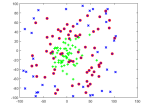


Figura: Exemplo de primeira iteração

Sumário

1 Mínimos Quadrados

2 Algoritmo Genético

3 Simplex

4 Conclusão



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Sumário

Sumário

■ Mínimos Quadrados

■ Algoritmo Genético

■ Simplex

■ Conclusão

Simplex

- Método de minimização multidimensional sem restrições
- John A. Nelder e Roger Mead, 1965 “The Computer Journal”.
- Utiliza um Simplex para minimizar uma função de n variáveis.



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Simplex

Também chamado de método Nelder-Mead

Simplex

- Método de minimização multidimensional sem restrições
- John A. Nelder e Roger Mead, 1965 “The Computer Journal”.
- Utiliza um Simplex para minimizar uma função de n variáveis.

Simplex



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Simplex

Simplex

Mas a pergunta que não quer calar? O que é um simplex?

Simplex

- O que é um Simplex?



Um Simplex é o menor politopo possível para um espaço de n variáveis. Como exemplo, vemos a figura 4. Para \mathbb{R}^2 o menor politopo é um Triângulo, e para \mathbb{R}^3 é um Tetraedro.

Simplex

- O que é um Simplex?

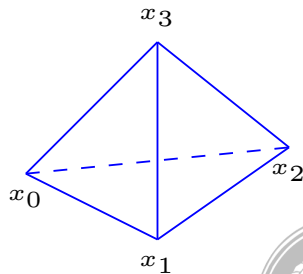
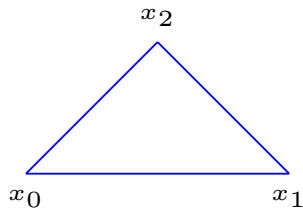
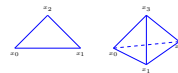


Figura: Exemplos de Simplex para \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .



Simplex

- Método Generalista



Este é um método bem generalista que serve para diversos problemas pela sua facilidade, e por não necessitar de Gradientes e Hessianas, como veremos a seguir, é considerado um método de ordem 0.

Simplex

- Método Generalista
- Não Precisa de cálculos complexos



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Simplex

Este é um método bem generalista que serve para diversos problemas pela sua facilidade, e por não necessitar de Gradientes e Hessianas, como veremos a seguir, é considerado um método de ordem 0.

Simplex

- Método Generalista
- Não Precisa de cálculos complexos

Simplex

- Método Generalista
- Não Precisa de cálculos complexos
- Considerado método de ordem 0



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Simplex

Então para facilitar a visualização, representação e entendimento, será explicado o método para \mathbb{R}^2

Simplex

- Método Generalista
- Não Precisa de cálculos complexos
- Considerado método de ordem 0

Divisão do Método



Divisão do Método

1. Ordenação



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Divisão do Método

Divisão do Método

1. Ordenação

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Divisão do Método

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Divisão do Método

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão
4. Expansão



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Divisão do Método

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão
4. Expansão

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão
4. Expansão
5. Contração



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Divisão do Método

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão
4. Expansão
5. Contração

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão
4. Expansão
5. Contração
6. Encolhimento



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Divisão do Método

Serão explicados nos próximos slides

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão
4. Expansão
5. Contração
6. Encolhimento

Ordenação

$$x_l = \min(f(x_i)) \quad (2)$$

$$x_h = \max(f(x_i)), x_i \neq x_l \quad (3)$$

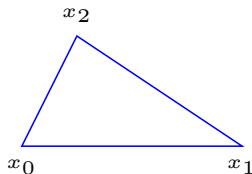


Figura: Pontos antes da ordenação



- x_h high
- x_l low
- outro x_s arbitrariamente

$$x_l = \min(f(x_i)) \quad (2)$$

$$x_h = \max(f(x_i)), x_i \neq x_l \quad (3)$$



Figura: Pontos antes da ordenação

Ordenação

$$x_l = \min(f(x_i)) \quad (2)$$

$$x_h = \max(f(x_i)), x_i \neq x_l \quad (3)$$

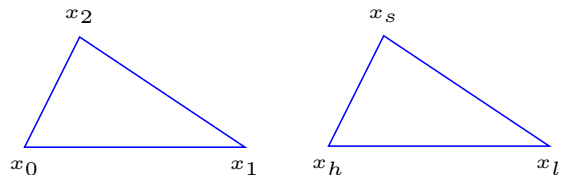


Figura: Pontos após ordenação



- x_h high
- x_l low
- outro x_s arbitrariamente

$$x_l = \min(f(x_i)) \quad (2)$$

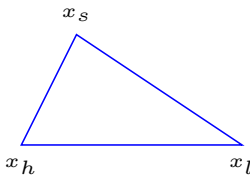
$$x_h = \max(f(x_i)), x_i \neq x_l \quad (3)$$



Figura: Pontos após ordenação

Busca do Centróide

$$c = \frac{x_l + x_s}{2} \quad (4)$$



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Busca do Centróide

encontra-se o centróide entre todos os pontos excluindo o x_h

Busca do Centróide

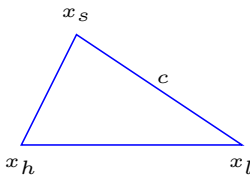
$$c = \frac{x_l + x_s}{2}$$

(4)



Busca do Centróide

$$c = \frac{x_l + x_s}{2} \quad (4)$$



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Busca do Centróide

encontra-se o centróide entre todos os pontos excluindo o x_h

Busca do Centróide

$$c = \frac{x_l + x_s}{2}$$

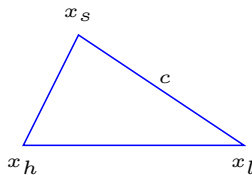
(4)



Reflexão

$$x_r = c + \alpha(c - x_h) \quad (5)$$

- $\alpha=1$



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Reflexão

Reflexão

$$x_r = c + \alpha(c - x_h)$$

(5)

- $\alpha=1$



Reflexão

$$x_r = c + \alpha(c - x_h) \quad (5)$$

- $\alpha=1$

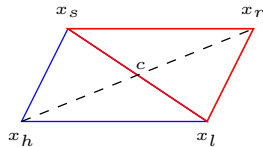


Figura: Reflexão



Reflexão

- Se $f(x_l) < f(x_r) < f(x_s)$, $x_h := x_c$



Reflexão

- Se $f(x_l) < f(x_r) < f(x_s)$, $x_h := x_c$
- Caso contrário, realizar alguma das próximas transformações



Expansão

- Se $f(x_r) < f(x_l)$

$$x_e = c + \gamma(x_r - c) \quad (6)$$

- $\gamma=2$

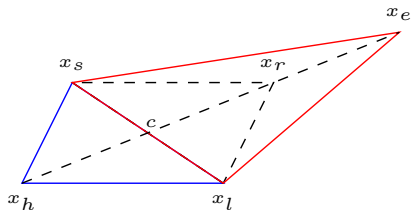
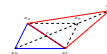


Figura: Expansão.



Expansão

- Se $f(x_r) < f(x_e)$, $x_h := x_r$
- Se $f(x_e) < f(x_r)$, $x_h := x_e$



pega o menor entre eles

Contração

- Se $f(x_r) \geq f(x_l)$

$$x_c = \begin{cases} c + \beta(x_r - c) & \text{Se } f(x_s) \leq f(x_r) < f(x_h) \end{cases} \quad (7a)$$

$$\begin{cases} c + \beta(x_h - c) & \text{Se } f(x_r) > f(x_h) \end{cases} \quad (7b)$$

- $\beta = \frac{1}{2}$

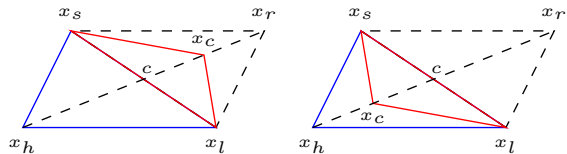


Figura: Representação das Contrações.



Contração

Contração para fora $\begin{cases} \text{Substituir } x_h \text{ por } x_c & \text{Se } f(x_c) \leq f(x_r) \\ \text{Realizar encolhimento} & \text{Se } f(x_c) > f(x_r) \end{cases}$

Contração para dentro $\begin{cases} \text{Substituir } x_h \text{ por } x_c & \text{Se } f(x_c) < f(x_h) \\ \text{Realizar encolhimento} & \text{Se } f(x_c) \geq f(x_h) \end{cases}$



Encolhimento

$$x_s := x_s + \delta(x_s - x_l) \quad (8a)$$

$$x_h := x_h + \delta(x_h - x_l) \quad (8b)$$

- $\delta = \frac{1}{2}$

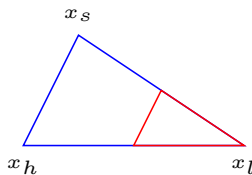


Figura: Encolhimento.



$$x_s := x_s + \delta(x_s - x_l) \quad (8a)$$

$$x_h := x_h + \delta(x_h - x_l) \quad (8b)$$

- $\delta = \frac{1}{2}$



Figura: Encolhimento.

O encolhimento é muito raro de acontecer e é usado para quando todas as outras transformações anteriores resultam em pontos cujo valor correspondente na função é pior que os anteriores. O que só acontece em casos específicos. Exemplo de caso pode ser visto um extrato da publicação original de 1965

Encolhimento

"A failed contraction is much rarer, but can occur when a valley is curved and one point of the simplex is much farther from the valley bottom than the others; contraction may then cause the reflected point to move away from the valley bottom instead of towards it. Further contractions are then useless. The action proposed contracts the simplex towards the lowest point, and will eventually bring all points into the valley."



Critérios de Parada



Foram utilizados 3 critérios de parada nesse método

Critérios de Parada

1. Iterações



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└ Simplex

└ Critérios de Parada

Critérios de Parada

1. Iterações

Critérios de Parada

1. Iterações
2. Raio da circunferência circunscrita

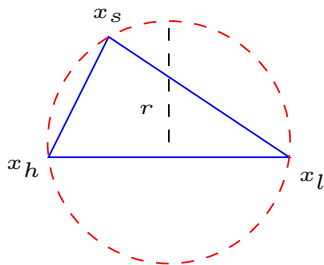


Figura: Circunferência circunscrita ao simplex.



Critérios de Parada

1. Iterações
2. Raio da circunferência circunscrita
3. Desvio Padrão dos $f(x)$

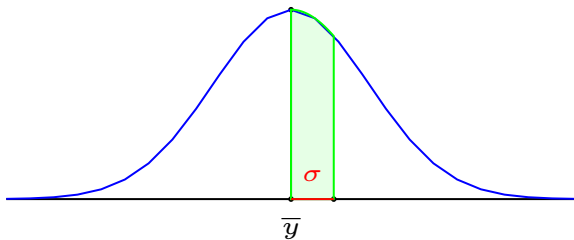


Figura: Desvio padrão

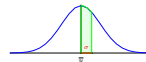
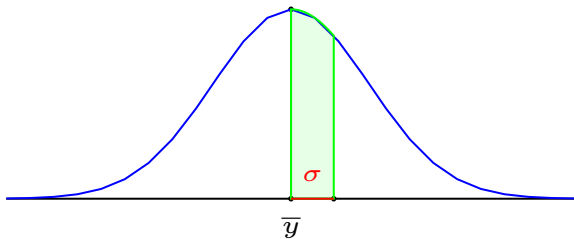


Figura: Desvio padrão

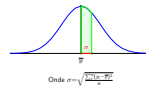
Cálculo do desvio utilizando três dados por vez. Cada vértice do triângulo a partir da fórmula a seguir

Critérios de Parada

1. Iterações
2. Raio da circunferência circunscrita
3. Desvio Padrão dos $f(x)$



$$\text{Onde } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}$$



Quando o desvio chega a zero significa que a superfície se comporta como um plano que não possui mínimo.

Sumário

1 Mínimos Quadrados

2 Algoritmo Genético

3 Simplex

4 Conclusão



2016-03-10

Introdução à Otimização

Trabalho Final

└─ Conclusão

└─ Sumário

Sumário

■ Mínimos Quadrados

■ Algoritmo Genético

■ Simplex

■ Conclusão

Conclusão

