Introdução à Otimização Trabalho Final



Professor: Afonso Celso del Nero

Alunos:

Cayo Valsamis Gabriel Pelielo Rafael Accácio Rodrigo Moysés

Universidade Federal do Rio de Janeiro

01 de Dezembro, 2015

Introdução à Otimização

Trabalho Final





Sumário

- Introdução à Otimização Trabalho Final

- Sumário Minimos Quadrados
- 3 Simplex
- Conclusão
- -Sumário

- 1 Mínimos Quadrados
- 2 Algoritmo Genético
- 3 Simplex
- 4 Conclusão





Sumário

- 1 Mínimos Quadrados



Introdução à Otimização

Trabalho Final -Mínimos Quadrados

-Sumário

Minimos Quadrados

Sumário

3 / 31

• Minimizar Quadrado dos Resíduos



Introdução à Otimização

Trabalho Final

-Mínimos Quadrados

└─Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

· Minimizar Quadrado dos Residuos

• Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum_{k=0}^{n} (\mathbf{f}(t_{k}, \omega_{n}, \zeta) - \mathbf{y}_{k}))$$
 (1)



Introdução à Otimização

 $min(\sum_{n}^{n}(\mathbf{f}(t_{k}, \omega_{n}, \zeta) - \mathbf{y}_{k}))$

Trabalho Final -Mínimos Quadrados

└─Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

4 / 31

• Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum_{k=0}^{n}(\mathbf{f}(t_{k},\omega_{n},\zeta)-\mathbf{y}_{k})) \tag{1}$$

• *n* é o número de amostras.



Introdução à Otimização

Trabalho Final
Mínimos Quadrados

└─Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

* Minimizar Quadrado dos Residuos $\min(\sum_{n}^{n}(\mathbf{f}(\mathbf{r}_{k},\omega_{n},\zeta)-\mathbf{y}_{k}))$

n é o número de amostras.

Fk.))

• Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum_{k=0}^{n} (\mathbf{f}(t_{k}, \omega_{n}, \zeta) - \mathbf{y}_{k}))$$
 (1)

- *n* é o número de amostras.
- *k* é uma amostra.



Introdução à Otimização

Trabalho Final

-Mínimos Quadrados

└─Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

 Minimizar Quadrado dos Residuos $min(\sum_{n}^{n}(\mathbf{f}(t_{k}, \omega_{n}, \zeta) - \mathbf{y}_{k}))$

n é o número de amostras.

k é uma amostra.

• Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$\min(\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{f}(t_{k},\omega_{n},\zeta)-\mathbf{y}_{k}))\tag{1}$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.

4 / 31

• $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k.



Introdução à Otimização

Trabalho Final

-Mínimos Quadrados

└─Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

 $min(\sum_{i}^{n} (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k))$

• n é o número de amostras.

• $\mathbf{f}(t_k, \omega_k, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k

• Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum_{k=0}^{n} (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)) \tag{1}$$

- n é o número de amostras.
- *k* é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k.
- t_k é o instante de tempo da k-ésima amostra.



Introdução à Otimização

-Mínimos Quadrados

Trabalho Final

-Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

Minimizar Quadrado dos Residuos

 $min(\sum_{i}^{n}(\mathbf{f}(\mathbf{f}_{k},\omega_{n},\zeta)-\mathbf{y}_{k}))$

• n é o número de amostras.

k é uma amostra.
 f(t_k, ω_k, ζ) é a expressão da função de resposta no tempo

t_k é o instante de tempo da k-ésima amostra.

• Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum_{k=0}^{n}(\mathbf{f}(t_{k},\omega_{n},\zeta)-\mathbf{y}_{k}))$$
 (1)

- n é o número de amostras.
- *k* é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k.
- t_k é o instante de tempo da k-ésima amostra.
- \mathbf{y}_k é o valor medido na amostra k.



Introdução à Otimização

Trabalho Final

-Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

 $min(\sum (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k))$

* n é o número de amostras.

k é uma amostra.
 f(t_k, ω_k, ζ) é a expressão da função de resposta no tempo

* t_k é o instante de tempo da k-ésima amostra.

* \mathbf{y}_k é o valor medido na amostra k.

–Mínimos Quadrados

Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum_{k=0}^{n}(\mathbf{f}(t_{k},\omega_{n},\zeta)-\mathbf{y}_{k})) \tag{1}$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.

4 / 31

- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k.
- t_k é o instante de tempo da k-ésima amostra.
- \mathbf{y}_k é o valor medido na amostra k.
- ω_n e ζ são os parâmetros do sistema.



Introdução à Otimização

Trabalho Final

-Mínimos Quadrados f(t_k, ω_k, ζ) é a expressão da função de resposta no tempo

-Mínimos Quadrados

ZETA

Mínimos Quadrados

· Minimizar Quadrado dos Residuos

 $min(\sum (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k))$

• n é o número de amostras.

• y_k é o valor medido na amostra k

ω_ν e ζ são os parâmetros do sistema

Iremos dividir em duas partes

1. Calcular a expressão $\sum_{i=1}^{k} (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)$



Introdução à Otimização

Trabalho Final

Mínimos Quadrados

└─" Dividir e Conquistar"

"Dividir e Conquistar"

Iremos dividir em duas partes 1. Calcular a expressão $\sum_{i=1}^{k} (\mathbf{f}(t_k, \omega_e, \zeta) - \mathbf{y}_k)$

Iremos dividir em duas partes

- 1. Calcular a expressão $\sum_{i=1}^{k} (\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) \mathbf{y}_k)$
- 2. Minimizar a expressão através de algum método.



Introdução à Otimização

Trabalho Final

-Mínimos Quadrados

└─" Dividir e Conquistar"

"Dividir e Conquistar"

Iremos dividir em duas partes

1. Calcular a expressão $\sum_{i=1}^{k} (\mathbf{f}(\mathbf{t}_k, \omega_o, \zeta) - \mathbf{y}_k)$ 2. Minimizar a expressão através de algum método

Quais métodos?



Introdução à Otimização

Trabalho Final
Mínimos Quadrados

└─" Dividir e Conquistar"

"Dividir e Conquistar"

Quais métodos?

5 / 31

Métodos Antigos?



Introdução à Otimização

Trabalho Final

Mínimos Quadrados

└─" Dividir e Conquistar"

"Dividir e Conquistar"

Métodos Antigos?

Métodos Antigos?

Métodos Novos?



Introdução à Otimização

Trabalho Final—Mínimos Quadrados

└─" Dividir e Conquistar"

"Dividir e Conquistar"

ntigos?

Métodos Novos?

Métodos Antigos?

Métodos Novos?

Veremos...



Introdução à Otimização

Trabalho Final

Minimos Quadrados

Minimos Quidrados

Minimos Quidrados

Voienna.

Sumário

- 2 Algoritmo Genético

6 / 31



Introdução à Otimização

Trabalho Final -Algoritmo Genético

-Sumário

Sumário

O algoritmo genético é inspirado pelo evolucionismo, que se baseia em gerações de indivíduos, em que os mais aptos prevalecem e constroem a geração futura.





Introdução à Otimização

Trabalho Final

–Algoritmo Genético

Algoritmo Genético

Algoritmo Genético

O algoritmo genético é inspirado pelo evolucionismo, que se baseia em gerações de indivíduos, em que os mais aptos prevalecem e constroem a geração futura.



O primeiro passo para a construção do algoritmo genético é a criação de uma **primeira geração**, feita aleatoriamente, com quantidade de indivíduos e limites definidos.



Introdução à Otimização

Trabalho Final

–Algoritmo Genético

└─Algoritmo Genético

Algoritmo Genético

O primeiro passo para a construção do algoritmo genético é a criação de uma **primeira geração**, feita aleatoriamente, com quantidade de individuos e limites definidos.

O segundo passo é criar a **população intermediária**. O método escolhido para tal foi o canônico, com aptidão definida como

$$\phi_i = \frac{i}{t}$$

Sendo

- ϕ_i a aptidão do indivíduo i.
- f_i a função objetivo avaliada no ponto do indivíduo i.
- \bar{f} a média do valor da função para toda a população.



Introdução à Otimização

Trabalho Final

-Algoritmo Genético

-Algoritmo Genético

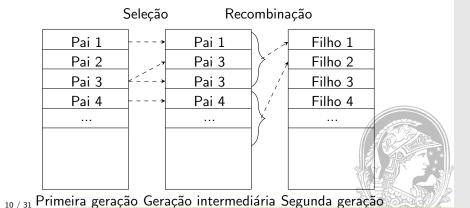
Algoritmo Genético

O segundo passo é criar a população intermediária. O método

· f; a função objetivo avaliada no ponto do indivíduo :
 \vec{f} a média do valor da funcão para toda a população

9 / 31

O terceiro passo é a recombinação, processo necessário para construir a **segunda geração**. O tipo de recombinação escolhido foi a média de três pais, para acelerar a convergência.



Introdução à Otimização

Trabalho Final

-Algoritmo Genético

LAlgoritmo Genético

Algoritmo Genético

O terceiro passo é a recombinação, processo necessário para construi a segunda geração. O tipo de recombinação escolhido foi a média de três pais, para acelerar a convergência.

	Seleção	Recombinação				
Pai 1	□ [Pai 1	JE	Filho 1		
Pai 2		Pai 3	⊒⊁'≀	Filho 2		
Pai 3		Pai 3	ו/ ע_	Filho 3		
Pai 4		Pai 4	_n∵ L	Filho 4		
			⊒۶ L			
			VΙ	- 1		
			1 1	- 1		
			L			
Primeira geração Geração intermediária Segunda geração						

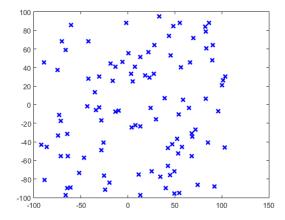


Figura: Exemplo de primeira iteração



Introdução à Otimização

Trabalho Final—Algoritmo Genético



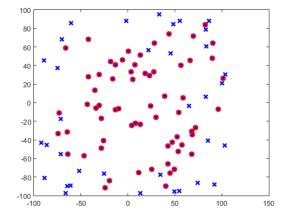


Figura: Exemplo de primeira iteração



Introdução à Otimização

Trabalho Final—Algoritmo Genético



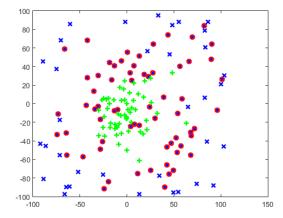


Figura: Exemplo de primeira iteração



Introdução à Otimização

Trabalho Final

—Algoritmo Genético



$Sum\'{a}rio$

- 1 Mínimos Quadrao
- 2 Algoritmo Genétic
- 3 Simplex
- 4 Conclusão



Introdução à Otimização Trabalho Final

Simplex

└─Sumário

inimos Quadrados goritmo Genético

Sumário

Algoritmo Genético
Simplex
Conclusão

CELLIA DO

- Método de minimização multidimensional sem restrições
- John A. Nelder e Roger Mead, 1965 "The Computer Journal".
- Utiliza um Simplex para minimizar uma função de *n* variáveis.



Introdução à Otimização

Trabalho Final Simplex

Simplex

Também chamado de método Nelder-Mead

plex

- Método de minimização multidimensional sem restrições
- John A. Nelder e Roger Mead, 1965 "The Computer Journal"
 Utiliza um Simplex para minimizar uma função de n variáveis



0	Introdução à Otimização	Simplex
\vdash	Trabalho Final Simplex	
ŏ	└─Simplex	

Mas a pergunta que não quer calar? O que é um simplex?

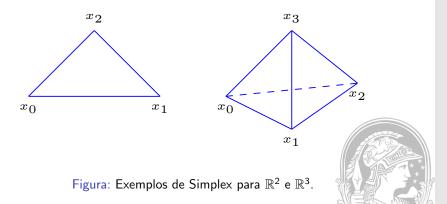
• O que é um Simplex?



Introdução à Otimização	Simplex
Trabalho Final Simplex	• O que é um Simplec?
Simplex	

Um Simplex é o menor politopo possível para um espaço de n variáveis. Como exemplo, vemos a figura 4. Para \mathbb{R}^2 o menor politopo é um Triângulo, e para \mathbb{R}^3 é um Tetraedro.

• O que é um Simplex?



Introdução à Otimização

Trabalho Final
Simplex

__Simplex

Exemplos de simplex

Método Generalista



Introdução à Otimização Trabalho Final —Simplex —Simplex

Simplex

* Mitado Generalista

Este é um método bem generalista que serve para diversos problemas pela sua facilidade, e por não necessitar de Gradientes e Hessianas, como veremos a seguir, é considerado um método de ordem 0.

- Método Generalista
- Não Precisa de cálculos complexos



Introdução à Otimização Trabalho Final —Simplex

-Simplex

Simplex

* Mitodo Generalista

* Não Precisa de cilicidos completos

Este é um método bem generalista que serve para diversos problemas pela sua facilidade, e por não necessitar de Gradientes e Hessianas, como veremos a seguir, é considerado um método de ordem 0.

- Método Generalista
- Não Precisa de cálculos complexos
- Considerado método de ordem 0



Introdução à Otimização

Trabalho Final

Não Precisa de cálculos complexos
 Considerado método de ordem 0

· Método Generalista

Simplex

Então para facilitar a visualização, representação e entendimento, será explicado o método para \mathbb{R}^2

Divisão do Método



Introdução à Otimização Trabalho Final Simplex Divisão do Método

Divisão do Método

Divisão do Método

1. Ordenação



Introdução à Otimização Trabalho Final Simplex Divisão do Método

Divisão do Método

Ordenação

18 / 31

Divisão do Método

- 1. Ordenação
- 2. Busca do Centróide



Introdução à Otimização Trabalho Final Simplex Divisão do Método

Divisão do Método

Ordenação
 Busca do Centróide

- 1. Ordenação
- 2. Busca do Centróide
- 3. Reflexão



Introdução à Otimização

Trabalho Final
Simplex

└─Divisão do Método

Divisão do Método

Ordenação
 Busca do Centróide
 Política a

- 1. Ordenação
- 2. Busca do Centróide
- 3. Reflexão
- 4. Expansão



Introdução à Otimização

Trabalho Final —Simplex

└─Divisão do Método

Divisão do Método

1. Ordenação 2. Busca do Centróide

4. Expansão

- 1. Ordenação
- 2. Busca do Centróide
- 3. Reflexão
- 4. Expansão
- 5. Contração



Introdução à Otimização

Trabalho Final

Simplex

└─Divisão do Método

Divisão do Método

Ordenação
 Busca do Centróide

Reflexão
 Expansão
 Contração

....

- 1. Ordenação
- 2. Busca do Centróide
- 3. Reflexão
- 4. Expansão
- 5. Contração
- 6. Encolhimento



Introdução à Otimização

Trabalho Final
Simplex

6 Excel

└─Divisão do Método

Serão explicados nos próximos slides

Divisão do Método

1. Ordenação

3. Reflecão 4. Evnanção

Expansão
 Contração
 Encolhimento

Ordenação

$$x_I = \min(f(x_i)) \tag{2}$$

$$x_{l} = min(f(x_{i}))$$

$$x_{h} = max(f(x_{i})), x_{i} \neq x_{l}$$
(3)

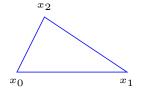


Figura: Pontos antes da ordenação



Introdução à Otimização

Trabalho Final -Simplex

-Ordenação



- x_h high
- x₁ low
- outro x_s arbitrariamente

Ordenação

$$x_I = \min(f(x_i)) \tag{2}$$

$$x_{l} = min(f(x_{i}))$$

$$x_{h} = max(f(x_{i})), x_{i} \neq x_{l}$$
(3)

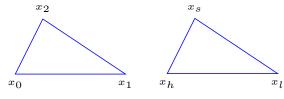


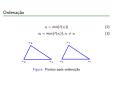
Figura: Pontos após ordenação



Introdução à Otimização

Trabalho Final -Simplex

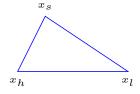
-Ordenação



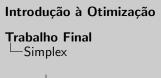
- x_h high
- x_I low
- outro x_s arbitrariamente

Busca do Centróide

$$c = \frac{x_l + x_s}{2} \tag{4}$$







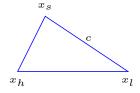


∟Busca do Centróide

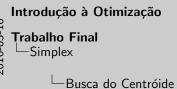
encontra-se o centróide entre todos os pontos excluindo o x_h

Busca do Centróide

$$c = \frac{x_l + x_s}{2} \tag{4}$$



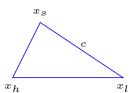






encontra-se o centróide entre todos os pontos excluindo o x_h

$$x_r = c + \alpha(c - x_h) \tag{5}$$





Introdução à Otimização Trabalho Final Simplex Reflexão

$$x_r = c + \alpha(c - x_h) \tag{5}$$

α=1

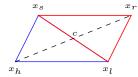


Figura: Reflexão



Introdução à Otimização Trabalho Final Simplex Reflexão

• Se $f(x_l) < f(x_r) < f(x_s), x_h := x_c$



Introdução à Otimização

Trabalho Final —Simplex

Reflexão

Coeficiente de reflexão

• Se $f(x_i) < f(x_i) < f(x_i), x_k = x_c$

- Se $f(x_l) < f(x_r) < f(x_s), x_h := x_c$
- Caso contrário, realizar alguma das próximas transformações



Introdução à Otimização

Trabalho Final

∟Reflexão

Reflexão

Se f(x₁) < f(x₂) < f(x₄), x₈:=x₅
 Caso contrário, realizar alguma das próximas transformações

Expansão

• Se $f(x_r) < f(x_l)$

$$x_e = c + \gamma(x_r - c) \tag{6}$$

γ=2

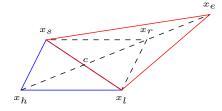


Figura: Expansão.



Introdução à Otimização Trabalho Final Simplex Expansão Figure Expansão

Coeficiente de expansão

Expansão

- Se f(x_r) < f(x_e), x_h:=x_r
 Se f(x_e) < f(x_r), x_h:=x_e



Introdução à Otimização

Trabalho Final —Simplex

└─Expansão

pega o menor entre eles

Expansão

Se f(x_r) < f(x_a), x_h:=x_r
 Se f(x_a) < f(x_r), x_h:=x_a

Contração

• Se
$$f(x_r) \geq f(x_l)$$

$$x_c = \begin{cases} c + \beta(x_r - c) & \text{Se } f(x_s) \le f(x_r) < f(x_h) \\ c + \beta(x_h - c) & \text{Se } f(x_r) > f(x_h) \end{cases}$$
(7a)

• $\beta = \frac{1}{2}$

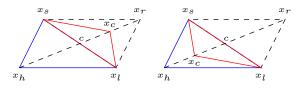
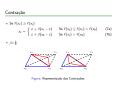


Figura: Representação das Contrações.

Introdução à Otimização Trabalho Final —Simplex —Contração



Coeficiente de contração

Contração

Contração para fora $\begin{cases} \text{Substituir } x_h \text{ por } x_c & \text{Se } f(x_c) \leq f(x_r) \\ \text{Realizar encolhimento} & \text{Se } f(x_c) > f(x_r) \end{cases}$

Contração para dentro $\begin{cases} \text{Substituir } x_h \text{ por } x_c & \text{Se } f(x_c) < f(x_h) \\ \text{Realizar encolhimento} & \text{Se } f(x_c) \ge f(x_h) \end{cases}$



Introdução à Otimização

Trabalho Final -Simplex

-Contração

Encolhimento

$$x_s := x_s + \delta(x_s - x_l)$$

$$x_h := x_h + \delta(x_h - x_l)$$

$$+\delta(x_h-x_l)$$

•
$$\delta = \frac{1}{2}$$

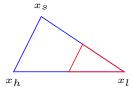


Figura: Encolhimento.



Introdução à Otimização

Trabalho Final -Simplex

δ−1

 $x_4 := x_4 + \delta(x_4 - x_1)$ $x_h := x_h + \delta(x_h - x_l)$

Encolhimento

-Encolhimento

O encolhimento é muito raro de acontecer e é usado para quando todas as outras transformações anteriores resultam em pontos cujo valor correspondente na função é pior que os anteriores. O que só acontece em casos específicos. Exemplo de caso pode ser visto um extrato da publicação original de 1965

Encolhimento

"A failed contraction is much rarer, but can occur when a valley is curved and one point of the simplex is much farther from the valley bottom than the others; contraction may then cause the reflected point to move away from the valley bottom instead of towards it. Further contractions are then useless. The action proposed contracts the simplex towards the lowest point, and will eventually bring all points into the valley."



Introdução à Otimização

Trabalho Final

Simplex

-Encolhimento

blablablabla....

lhimento

"A failed contraction is much news, but can occur where a vailing curved and one point of the simplex is much farther from the valley bottom than the others; contraction may then cause the reflected point to move away from the valley bottom instead of towards it. Further contractions are then useless. The action proposed contracts the simplex towards the leavest point, and will swrettable being all orients onto the valley."



Introdução à Otimização
Trabalho Final
Simplex
Critérios de Parada

Foram utilizados 3 critérios de parada nesse método

Critérios de Parada

1. Iterações

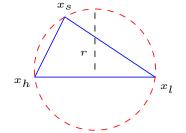


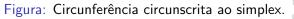
Introdução à Otimização Trabalho Final —Simplex —Critérios de Parada

Critérios de Parada

1. Iterações

- 1. Iterações
- 2. Raio da circunferência circunscrita







Introdução à Otimização

Trabalho Final

−Simplex └─Critérios de Parada Critérios de Parada

Iterações
 Raio da circunferência circunscrita



- 1. Iterações
- 2. Raio da circunferência circunscrita
- 3. Desvio Padrão dos f(x)

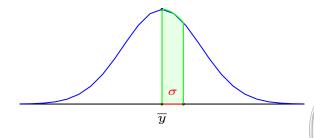
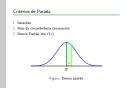


Figura: Desvio padrão

Introdução à Otimização

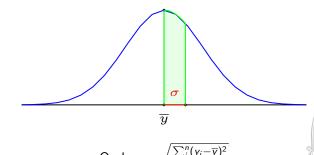
Trabalho Final Simplex

-Critérios de Parada



Cálculo do desvio utilizando três dados por vez. Cada vértice do triângulo a partir da fórmula a seguir

- 1. Iterações
- 2. Raio da circunferência circunscrita
- 3. Desvio Padrão dos f(x)



Introdução à Otimização

Trabalho Final
Simplex

Critérios de Parada

1. Intereples
2. Rais de circenteriecia circunscrita
3. Desoire Parlete des f(x)

T

Onde en vol.

Onde en

-Critérios de Parada

Quando o desvio chega a zero significa que a superfície se comporta como um plano que não possui mínimo.

Sumário

- 2 Algoritmo Genétic
- 3 Simple
- 4 Conclusão



Introdução à Otimização Trabalho Final

Conclusão

Sumário

nimos Quadrados

Algoritmo Genético Simplex

Conclusão

Sumário

30 / 31

Conclusão



Introdução à Otimização **Trabalho Final**

Conclusão

—Conclusão

Conclusão