Introdução à Otimização
Trabalho Final

Alunos:
Cayo Valsamis
Gabriel Pelielo
Rafael Accácio
Rodrigo Moysés

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Professor: Afonso Celso del Nero

01 de Dezembro, 2015

Sumário

Sumário

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum^{n}(\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)) \tag{1}$$

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum^{n}(\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)) \tag{1}$$

- n é o número de amostras.

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum^{n}(\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)) \tag{1}$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum^{n}(\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)) \tag{1}$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k.

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum^{n}(\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)) \quad (1)$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k.
- t_k é o instante de tempo da k-ésima amostra.

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum^{n}(\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)) \tag{1}$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k.
- t_k é o instante de tempo da k-ésima amostra.
- $\mathbf{y}_k$ é o valor medido na amostra k.

Mínimos Quadrados

- Minimizar Quadrado dos Resíduos

$$min(\sum^{n}(\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)) \tag{1}$$

- n é o número de amostras.
- k é uma amostra.
- $\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta)$ é a expressão da função de resposta no tempo k.
- t_k é o instante de tempo da k-ésima amostra.
- $\mathbf{y}_k$ é o valor medido na amostra k.
- ω_n e ζ são os parâmetros do sistema.

"Dividir e Conquistar"

Iremos dividir em duas partes

1. Calcular a expressão $\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)$

"Dividir e Conquistar"

Iremos dividir em duas partes

1. Calcular a expressão $\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{f}(t_k, \omega_n, \zeta) - \mathbf{y}_k)$
2. Minimizar a expressão através de algum método.

"Dividir e Conquistar"

Quais métodos?

"Dividir e Conquistar"

Métodos Antigos?

"Dividir e Conquistar"

Métodos Antigos?

Métodos Novos?

"Dividir e Conquistar"

Métodos Antigos?

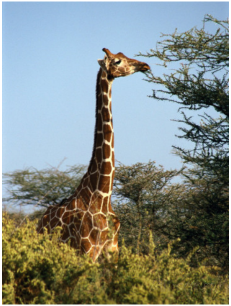
Métodos Novos?

Veremos...

Sumário

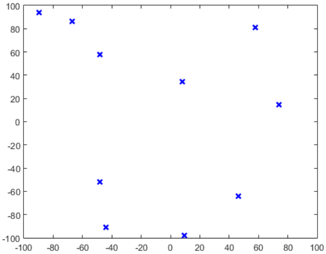
Algoritmo Genético

O algoritmo genético é inspirado pelo evolucionismo, que se baseia em gerações de indivíduos, em que os mais aptos prevalecem e constroem a geração futura.



Algoritmo Genético

O primeiro passo para a construção do algoritmo genético é a criação de uma **primeira geração**, feita aleatoriamente, com quantidade de indivíduos e limites definidos.



Algoritmo Genético

O segundo passo é criar a **população intermediária**. O método escolhido para tal foi o canônico, com aptidão definida como

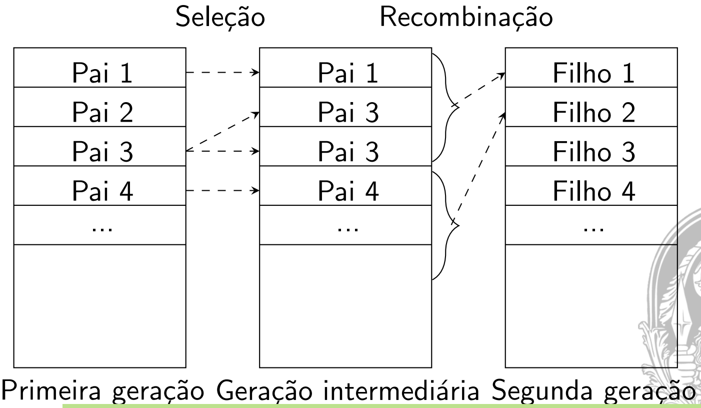
$$\phi_i = \frac{\bar{f}}{f_i}$$

Sendo

- ϕ_i a aptidão do indivíduo i.
- f_i a função objetivo avaliada no ponto do indivíduo i.
- $\bar{f}$ a média do valor da função para toda a população.

Algoritmo Genético

O terceiro passo é a recombinação, processo necessário para construir a **segunda geração**. O tipo de recombinação escolhido foi a média de três pais, para acelerar a convergência.



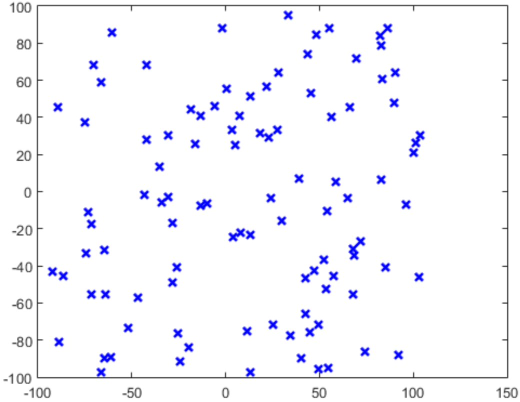


Figura: Exemplo de primeira iteração

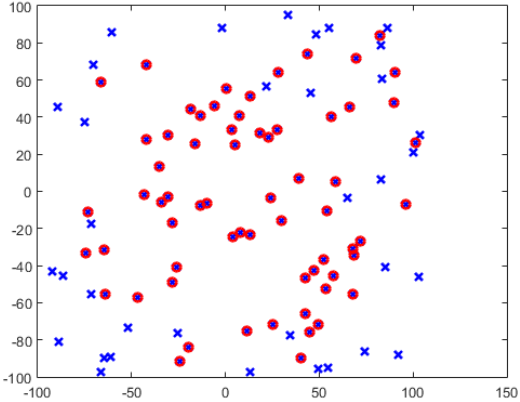


Figura: Exemplo de primeira iteração

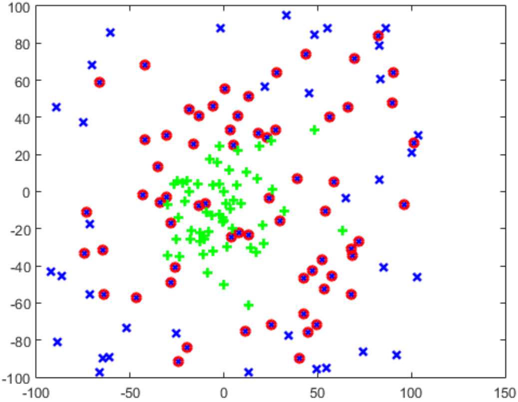


Figura: Exemplo de primeira iteração

Sumário

Simplex

- Método de minimização multidimensional sem restrições
- John A. Nelder e Roger Mead, 1965 “The Computer Journal”.
- Utiliza um Simplex para minimizar uma função de n variáveis.

Simplex

Simplex

- O que é um Simplex?

Simplex

- O que é um Simplex?

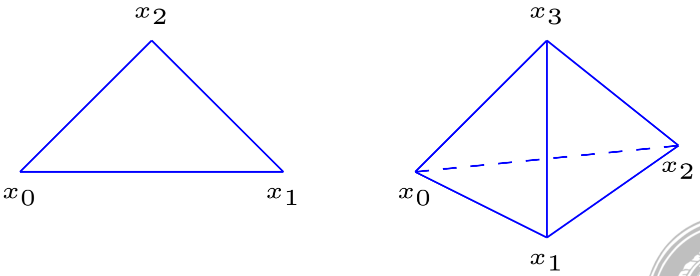


Figura: Exemplos de Simplex para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Simplex

- Método Generalista

Simplex

- Método Generalista
- Não Precisa de cálculos complexos

Simplex

- Método Generalista
- Não Precisa de cálculos complexos
- Considerado método de ordem 0

Divisão do Método

Divisão do Método

1. Ordenação

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão
4. Expansão

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão
4. Expansão
5. Contração

Divisão do Método

1. Ordenação
2. Busca do Centróide
3. Reflexão
4. Expansão
5. Contração
6. Encolhimento

Ordenação

$$x_l = min(f(x_i)) \tag{2}$$

$$x_h = max(f(x_i)), x_i \neq x_l \tag{3}$$

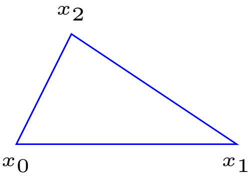


Figura: Pontos antes da ordenação

Ordenação

$$x_l = min(f(x_i)) \tag{2}$$

$$x_h = max(f(x_i)), x_i \neq x_l \tag{3}$$

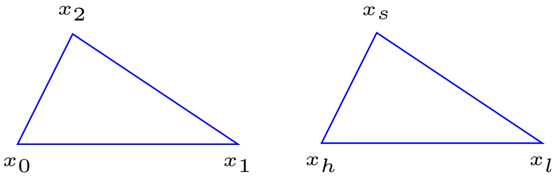
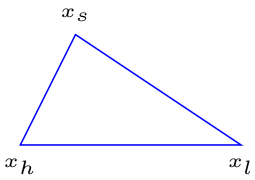


Figura: Pontos após ordenação

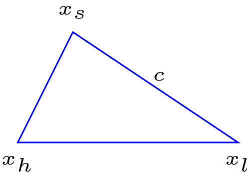
Busca do Centróide

$$c = \frac{x_l + x_s}{2} \tag{4}$$



Busca do Centróide

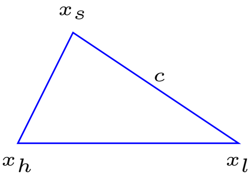
$$c = \frac{x_l + x_s}{2} \tag{4}$$



Reflexão

$$x_r = c + \alpha(c - x_h) \tag{5}$$

- α=1



Reflexão

$$x_r = c + \alpha(c - x_h) \tag{5}$$

- α=1

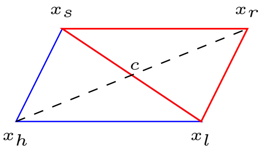


Figura: Reflexão

Reflexão

- Se $f(x_l) < f(x_r) < f(x_s)$, $x_h := x_c$

Reflexão

- Se $f(x_l) < f(x_r) < f(x_s)$, $x_h := x_c$
- Caso contrário, realizar alguma das próximas transformações

Expansão

- Se $f(x_r) < f(x_l)$

$$x_e = c + \gamma(x_r - c) \tag{6}$$

- γ=2

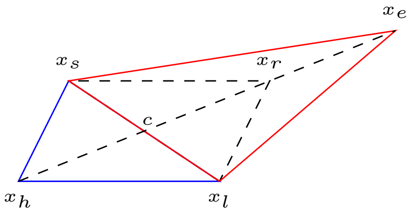


Figura: Expansão.

Expansão

- Se $f(x_r) < f(x_e)$, $x_h{:=}x_r$
- Se $f(x_e) < f(x_r)$, $x_h{:=}x_e$

Contração

- Se $f(x_r) \geq f(x_l)$

$$x_c = \begin{cases} c + \beta(x_r - c) & \text{Se } f(x_s) \leq f(x_r) < f(x_h) \quad (7a) \\ c + \beta(x_h - c) & \text{Se } f(x_r) > f(x_h) \quad (7b) \end{cases}$$

- $\beta = \frac{1}{2}$

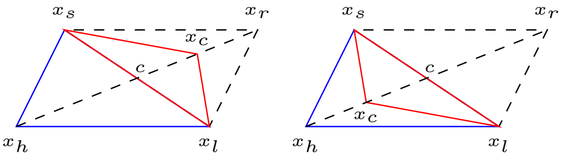


Figura: Representação das Contrações.

Contração

$$\text{Contração para fora}\begin{cases}\text{Substituir } x_h \text{ por } x_c & \text{Se } f(x_c) \leq f(x_r)\\ \text{Realizar encolhimento} & \text{Se } f(x_c) > f(x_r)\end{cases}$$

$$\text{Contração para dentro}\begin{cases}\text{Substituir } x_h \text{ por } x_c & \text{Se } f(x_c) < f(x_h)\\ \text{Realizar encolhimento} & \text{Se } f(x_c) \geq f(x_h)\end{cases}$$

Encolhimento

$$x_s := x_s + \delta(x_s - x_l) \tag{8a}$$
$$x_h := x_h + \delta(x_h - x_l) \tag{8b}$$

- $\delta = \frac{1}{2}$

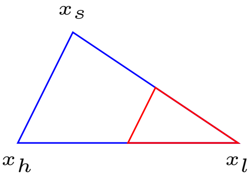


Figura: Encolhimento.

Encolhimento

"A failed contraction is much rarer, but can occur when a valley is curved and one point of the simplex is much farther from the valley bottom than the others; contraction may then cause the reflected point to move away from the valley bottom instead of towards it. Further contractions are then useless. The action proposed contracts the simplex towards the lowest point, and will eventually bring all points into the valley."

Critérios de Parada

Critérios de Parada

1. Iterações

Critérios de Parada

1. Iterações
2. Raio da circunferência circunscrita

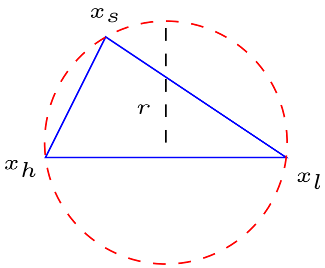


Figura: Circunferência circunscrita ao simplex.

Critérios de Parada

1. Iterações
2. Raio da circunferência circunscrita
3. Desvio Padrão dos $f(x)$

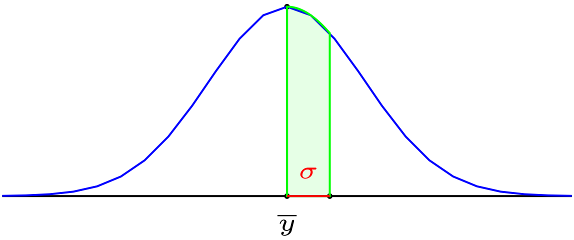
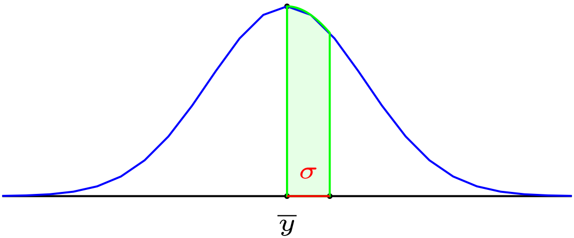


Figura: Desvio padrão

Critérios de Parada

1. Iterações
2. Raio da circunferência circunscrita
3. Desvio Padrão dos $f(x)$



Onde $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i^n (y_i - \overline{y})^2}{n}}$

Sumário

Conclusão