DATE

(1) 用高斯消去法求解下列方程组的根

$$\begin{cases} 2x+y+z=4 & ① \\ x+3y+2z=6 & ② \\ x+2y+2z=5 & ③ \end{cases}$$

解：其增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

及其乘数为 $\frac{1}{2}$

则以 ② − ①×$\frac{1}{2}$ 且 ③ − ①×$\frac{1}{2}$ 则有

$$\begin{cases} 2x+y+z=4 & ④ \\ 2.5y+1.5z=4 & ⑤ \\ 1.5y+1.5z=3. & ⑥ \end{cases}$$

其增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2.5 & 1.5 & 4 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 3 \end{pmatrix}$

由⑤⑥确定其乘数为 $\frac{1.5}{2.5} = \frac{3}{5}$

∴为 ⑥ − ⑤×$\frac{3}{5}$ 则有

$$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 2.5y+1.5z=4 \\ 0.6z=0.6 \end{cases}$$

其增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2.5 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$

由此求出 $x=1 \quad y=1 \quad z=1$

(2) 用列主元高斯消去法求解下列方程组的根：

$$\begin{cases} y+z=4 \\ x+3y+2z=6 \\ x+2y+2z=5 \end{cases}$$

解：用方程组的增广矩阵并选取主元

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{交换}]{①③\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

DATE

$$\xrightarrow{\text{消元}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

回代可解得 $x=-3 \quad y=1 \quad z=3$

(3) 用高斯—约当消去法求解方程组的根：

$$\begin{cases} 4x+3y+z=11 \\ 2x+y+2z=6 \\ 6x+y+5z=13. \end{cases}$$

解：其方程组的增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 11 \\ 0 & -0.5 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & -3.5 & 3.5 & 6.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & -0.5 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{消元}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & \frac{128}{7} \\ 0 & -0.5 & 0 & \frac{8}{7} \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{可求出 } x=\frac{32}{7} \quad y=-\frac{16}{7} \quad z=-\frac{3}{7}$$

(4). 用归一化的高斯—约当消去法求下列矩阵的逆矩阵

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

解：由题可知，对其进行消元

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}$$

DATE

~~解：由题可知~~

$$\cancel{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{交换}]{①②} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{归一消元}} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & -1.5 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\cancel{\xrightarrow{\text{归一消元}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{归一消元}}}$$

解：由题可知

对矩阵 A 增为一个同维的单位矩阵 I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{归一消元}]{①②\text{交换}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{归一消元}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -1 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{归一消元}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{归一消元}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

∴其逆矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

实验五.

(1) 对下列矩阵进行 LU 分解，并用矩阵形式输出结果

1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 2) $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 3) $C=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 24 & 64 \\ 6 & 16 & 51 & 100 \end{bmatrix}$

要求：1) 用杜利特尔分解 2) 用克洛特分解，3) 两种方法任选一种.

DATE

1) 解：由题可知

则有对于 $r=1$： $u_{11}=2, u_{12}=2, u_{13}=3$

$l_{21}=\frac{4}{2}=2 \quad l_{31}=\frac{-2}{2}=-1$

对于 $r=2$：

$u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=3$

$u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=1$

$l_{32}=\frac{a_{32}-l_{31}u_{12}}{u_{22}}=2.$

对于 $r=3$：

$u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=6$

∴ $L=\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ & 3 & 1 \\ & & 6 \end{bmatrix}$

∴ A、L、U 写在一起时

(2)	2	(2)	2	(3)	3
(4)	2	(7)	3	(7)	1
(−2)	−1	(4)	2	(5)	6

2) 解. 由题可知

则其 $l_{11}=2 \quad l_{21}=4 \quad l_{31}=6$

$u_{12}=\frac{b_{12}}{l_{11}}=\frac{1}{2} \quad u_{13}=\frac{b_{13}}{l_{11}}=\frac{2}{2}=1$

对于 $r=2$, $i=2$ $\quad l_{22}=b_{22}-b_{21}u_{12}=3-4\times\frac{1}{2}=1$

$i=3$ $\quad l_{32}=b_{32}-l_{31}u_{12}=1-6\times\frac{1}{2}=-2$

$i=3$ $\quad u_{23}=\frac{1}{l_{22}}(b_{23}-l_{21}u_{13})=1-4\times1=-3$

$r=3, i=3 \quad l_{33}=b_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=5-6\times1-(-2)\times(-3)$

$=-7$

∴ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 4 & 1 & \\ 6 & -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ & 1 & -7 \\ & & 1 \end{bmatrix}$

3)解：由题可知

对于 $r=1$ 时.

$u_{11}=2 \quad u_{12}=2 \quad u_{13}=3 \quad u_{14}=4$

$l_{21}=\frac{2}{2}=1 \quad l_{31}=\frac{4}{2}=2 \quad l_{41}=\frac{6}{2}=3$

对于 $r=2$ 时.

$u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=4-1\times 2=2$

$u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=4-1\times 3=6$

$u_{24}=a_{24}-l_{21}u_{14}=16-1\times 4=12$

$l_{32}=\frac{1}{u_{22}}(a_{32}-l_{31}u_{12})=\frac{1}{2}\times(8-2\times 2)=2$

$l_{42}=\frac{1}{u_{22}}(a_{42}-l_{41}u_{12})=\frac{1}{2}(16-3\times 2)=5.$

$u_{33}=a_{33}-l_{32}u_{23}-l_{31}u_{13}=24-2\times 6-2\times 3=6$

$l_{23}=\frac{1}{u_{33}}(a_{23}-l_{21}\times u_{13})=\frac{1}{6}(4-1\times 3)=1$

对于 $r=3$ 时.

$l_{33}=\frac{1}{u_{33}}(a_{33}-l_{32}u_{13}-l_{31}u_{13})=\frac{1}{6}(24-2\times 3-2\times 3)=2$

$l_{43}=\frac{1}{u_{33}}(a_{43}-l_{42}u_{23}-l_{41}u_{13})=\frac{1}{6}(51-5\times 3-3\times 3)=\frac{9}{2}$

$u_{34}=a_{34}-l_{32}u_{24}-l_{31}u_{14}=64-2\times 12-2\times 4=32.$

对于 $r=4$ 时.

$u_{44}=a_{44}-l_{43}u_{34}-l_{42}u_{24}-l_{41}u_{14}=100-5\times 12-\frac{9}{2}\times 32$
$-3\times 4=-116$

∴ (2)	2	(2)	2	(3)	3	(4)	4
(2)	1	(4)	2	(4)	1	(16)	12
(4)	2	(8)	2	(24)	2	(64)	32
(6)	3	(16)	5	(51)	$\frac{9}{2}$	(100)	−36.

(2) 用LU分解来解下列方程组

1) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-2z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y-2z=1 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y-2z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$

1)解：由题可知

则可转化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对其系数矩阵进行杜利特尔分解.

则对其 $r=1$ 时.

$u_{11}=1 \quad u_{12}=1 \quad u_{13}=-1$

$l_{21}=\frac{1}{1}=1 \quad l_{31}=\frac{-2}{1}=-2.$

对其 $r=2$ 时

$u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=2-1\times 1=1$

$u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=-2-1\times(-1)=-1$

$l_{32}=\frac{1}{u_{22}}(a_{32}-l_{31}u_{12})=1-(-2)\times 1=3$

对其 $r=3$ 时

$u_{33}=a_{33}-l_{32}u_{23}-l_{31}u_{13}=1-3\times(-1)-(-2)\times(-1)$
$=2.$

$$\therefore L=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

由方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

有 $y_1=3 \quad y_2=-2 \quad y_3=5.$

再由方程组有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

可得 $x=5$
$y=\frac{1}{2}$
$z=\frac{5}{2}$

2)解：由题可知.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵进行分解

$r=1$： $u_{11}=1 \quad u_{12}=1 \quad u_{13}=-1$

$l_{21}=1 \quad l_{31}=-2.$

$r=2$： $u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=2-1\times 1=1$

$u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=-2-1\times(-1)=-1$

$l_{32}=\frac{1}{u_{22}}(a_{32}-l_{31}\cdot u_{12})=1-(-2)\times 1=3$

$r=3$： $u_{33}=a_{33}-l_{32}u_{23}-l_{31}u_{13}=1-3\times(-1)-(-2)\times(-1)$
$=2.$

$$\therefore L=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

∴由方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 可得. $y_1=0 \quad y_2=1 \quad y_3=-3$

再由方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$ 可得 $x=-1$
$y=-\frac{1}{2}$
$z=-\frac{3}{2}$

3)解：由题可知.

则可改为 $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对其系数方程分解

$r=1$： $u_{11}=1 \quad u_{12}=1 \quad u_{13}=-1$

$l_{21}=1 \quad l_{31}=-2$

$r=2$： $u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=2-1\times 1=1$

$u_{23}=a_{23}-l_{21}\cdot u_{13}=-2-1\times(-1)=-1$

$l_{32}=\frac{1}{u_{22}}(a_{32}-l_{31}u_{12})=1-(-2)\times 1=3$

$r=3$： $u_{33}=a_{33}-l_{32}u_{23}-l_{31}u_{13}=1-3\times(-1)-(-2)\times(-1)=2.$

$$\therefore L=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

∴由方程组.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 可得 $y_1=0 \quad y_2=0 \quad y_3=1$

再由方程组.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 可得 $x=0. \quad y=\frac{1}{2}, \quad z=\frac{1}{2}$