IFT2125-A24 Devoir 2

Problème 1 Diviser pour régner : taille des blocs

Soit $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une récurrence Akra-Bazzi avec son ensemble de paramètres comme dans les diapos, mais où $a_i = 1$ pour tout i, i.e. la récurrence est

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\ell-1} T(r_i(n)) + g(n)$$

où $|r_i(n) - b_i| \in o(n/\ln^2 n)$. Rappelons aussi que l'*exposant* de la récurrence et l'unique p tel que $\sum_i b_i^p = 1$. Le but de cet exercice est de considérer les cas où les appels récursifs se font sur des blocs de tailles différentes. Est-ce plus payant de faire des appels récursifs sur des blocs de taille $\frac{n}{3}$ et $\frac{2n}{3}$ que de diviser le problème de façon symétrique avec $n/2$ et $n/2$?

(a) (*1 point*) Supposons que $\sum_{i=0}^{\ell-1} b_i = 1$, i.e. le total des tailles de tous les blocs est environ égal à la taille de l'instance originale, comme dans mergesort. Démontrez que l'exposant p de la récurrence est 1. (Autrement dit, on obtient le même temps de calcul asymptotique si on divise en $n/3$ vs $2n/3$ qui si on divise en $n/2$ et $n/2$.)

(b) (*3 points*) Supposons maintenant que $\sum_{i=0}^{\ell-1} b_i = t > 1$, i.e. le total des tailles de tous les blocs est plus grand que la taille de l'instance originale, comme dans l'algorithme de Karatsuba. L'exposant p est-il toujours indépendant du choix des b_i pour t fixe ? Si ce n'est pas le cas, déterminez les b_i optimaux (c'est-à-dire ceux qui donnent le meilleur exposant p pour la récurrence).

(c) (*3 points*) Supposons maintenant que $\sum_{i=0}^{\ell-1} b_i = t < 1$, i.e. le total des tailles de tous les blocs est plus petit que la taille de l'instance originale, comme dans la recherche dichotomique. Posons encore la même question : l'exposant p est-il indépendant du choix des b_i pour t fixe ? Si ce n'est pas le cas, déterminez les b_i optimaux. Que se passe-t-il dans ce cas-ci si $\ell = 1$?

(d) (*3 points*) Revenons maintenant au cas où $t > 1$, et supposons que tous les blocs sont de la même taille (i.e. $\forall i, b_i = b$). L'exposant p dépend-il du *nombre* de blocs ℓ ? Trouvez p en fonction de ℓ et t, et déterminez si on obtient un meilleur exposant avec plusieurs petits blocs ou non.

Indice : Pour certaines de ces questions, l'inégalité de Jensen pourrait vous être utile. Celle-ci affirme que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors $\sum_i q_i f(x_i) \geq f\left(\sum_i q_i x_i\right)$ où les q_i sont des probabilités, et donc $\sum_i q_i = 1$, et les $x_i \in \mathbb{R}$ sont des réels quelconques.

Problème 2 Du filage à revendre

En tant que grand chef du crime organisé, vous êtes toujours à l'affut de nouvelles occasions d'« affaires ». Vous venez de vous rendre compte que le réseau électrique contient une quantité effroyable de câbles superflus : on pourrait en enlever des kilomètres sans déconnecter le réseau ! Pourquoi ne pas vous approprier ces câbles superflus qui ne servent clairement à rien, et les revendre à des gens qui sauront sûrement en faire bon usage ? Avec un peu de chance, personne ne s'en rendra compte.

Pour maximiser vos profits, il faudrait identifier un ensemble optimal (c'est-à-dire de longueur totale maximale) de câbles superflus qui pourraient être retirés du réseau sans le déconnecter.

(a) (*1 point*) Démontrez que ce problème peut être modélisé par un matroïde.

(b) (*4 points*) Finalement, vous avez décidé que la prison, ce n'est pas trop votre truc, et qu'il vaudrait mieux diminuer votre prise de risque. Vous avez donc décidé de vous approprier l'ensemble maximal de câbles qui laissent *exactement un cycle* dans le réseau. Démontrez que ce problème peut *aussi* être modélisé par un matroïde.

(c) (*3 points*) Donnez un algorithme vorace (en pseudocode) pour ce problème.

Problème 3 MaxStable

Au tout début du cours, nous avons (très) brièvement parlé de *stables* dans les graphes :

Définition 1 (Stable)**.** *Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un* stable *dans G est un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ tel qu'il n'existe aucune arête (u, v) dans E telle que u et v sont dans S.*

Considérons maintenant le problème suivant :

Problème 2 (MaxStable)**.** ***Données :*** *Un graphe non-orienté (V, E) et un fonction de pondération des sommets $w : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$.*

Problème : *Retourner un stable $S \subseteq V$ qui maximise $\sum_{v \in S} w(v)$.*

(a) (*5 points*) Donnez un algorithme vorace (en Python) pour ce problème. Cet algorithme doit fonctionner en temps polynomial, mais ne doit pas nécessairement donner une réponse optimale.

(b) (*2 points*) Donnez un exemple d'input sur lequel votre algorithme ne donne pas une réponse optimale.

Pour remettre votre code pour cette question, utilisez le gabarit disponible sur Studium et suivez les instructions qui s'y trouvent.