Общие указания

Примеры приведены с подробными решениями. При их разборе следует иметь под рукой конспекты лекций по соответствующим разделам курса.

Задачи даются для самостоятельного решения на тему, аналогичную разобранным примерам. Как правило, задачи для самостоятельного решения менее сложны, чем примеры, решения которых приводятся.

В задачах обычно приведены численные значения участвующих в формулировке физических величин и иных параметров. Несмотря на это, решение должно проводиться вначале в общем виде, для чего всем величинам должны быть приданы буквенные обозначения. Соответственно, ответ должен даваться сначала в виде формулы, а затем – в виде числа с указанием единиц измерения (если соответствующая величина не безразмерная).

1. Вероятностное описание измеряемых и контролируемых величин. Функции распределения и числовые характеристики непрерывных случайных величин

Краткие теоретические сведения

Как при производстве изделий, так и при измерении их параметров (размеров, массы и т.д.) действует огромное количество факторов, изменяющихся непредсказуемым образом. По этой причине для получаемых результатов используется теоретико-вероятностное описание, а параметры изделий рассматриваются как случайные величины.

Далее мы будем обозначать случайные величины заглавными латинскими буквами X, Y и т.д., а строчными буквами x, y и т.д. – численные значения этих величин.

Функция и плотность распределения. Фундаментальной характеристикой непрерывной случайной величины служит функция распределения. Если X – случайная величина, то её функция распределения $F_X(x)$ определяется следующим образом:

$$F_X(x) = \mathbf{P}\left(X \le x\right)$$

Для любой функции распределения справедливо следующее:

это функция неубывающая, то есть из $x_1 \le x_2$ обязательно следует $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$, однако, не строго возрастающая, на некоторых участках числовой прямой может быть постоянной;

$\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, и это означает, что вероятность значения, меньшего минус бесконечности, равна нулю;

$\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$, то есть какое-нибудь значение принимается с вероятностью 1.

Вероятность того, что значение случайной величины попадает в полуинтервал $\left(a;b\right]$, то есть вероятность случайного события $\left\{a < X \le b\right\}$, при помощи функции распределения находится следующим образом:

$$\mathbf{P}\left(a < X \le b\right) = F_X(b) - F_X(a)$$

Таким образом, если функция распределения постоянна на $\left(a;b\right]$, то вероятность того, что случайная величина примет значение из этого полуинтервала, равна нулю.

Если функция распределения непрерывна, то при любых a, b события $\left\{a \le X < b\right\}$, $\left\{a \le X \le b\right\}$, $\left\{a < X < b\right\}$ имеют равные вероятности:

$$\mathbf{P}\left(a \le X < b\right) = \mathbf{P}\left(a \le X \le b\right) = \mathbf{P}\left(a < X < b\right) = \mathbf{P}\left(a < X \le b\right) = F_X(b) - F_X(a)\,.$$

Кроме того, при непрерывной функции распределения вероятность принятия случайной величиной любого конкретного значения равна нулю:

$$\mathbf{P}\left(X = a\right) = F_X(a) - \lim_{t \to +0} F_X(a - t) = 0$$

В большинстве практически важных случаев функция распределения дифференцируема, и её производная

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

называется плотностью распределения, или плотностью вероятности. Соответственно, функция распределения восстанавливается по плотности при помощи интегрирования:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')dx'$$

Приведённые соотношения верны и тогда, когда функция распределения имеет разрывы первого рода (скачки), если в точках разрыва рассматривать плотность как дельта-функцию.

Для плотности распределения любой случайной величины обязательно должны выполняться два условия:

1) неотрицательность, то есть $f_X(x) \ge 0$ для всех x;
2) нормировка, что означает равенство единице интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$$

Последнее соотношение, в частности, означает, что любая плотность вероятности стремится к нулю на бесконечности:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_X(x) = 0\,.$$

Вероятности событий вида $\left\{a < X \le b\right\}$ при помощи плотности вероятности находятся путём интегрирования:

$$\mathbf{P}\left(a < X \le b\right) = \int_a^b f_X(x)dx .$$

Если плотность является непрерывной функцией, то функция распределения тем более непрерывна, и такова же будет вероятность событий $\{a \le X < b\}$, $\{a \le X \le b\}$, $\{a < X < b\}$. Если плотность имеет разрывы первого рода, то функция распределения всё равно непрерывна, и вероятности указанных событий опять одинаковы. Ситуация меняется лишь тогда, когда плотность распределения содержит дельта-функции.

Математическое ожидание и дисперсия. С помощью плотности распределения определяется математическое ожидание, или среднее значение, случайной величины:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx ,$$

а также дисперсия:

$$DX = M\left(X - MX\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f_X(x)dx .$$

Квадратный корень из дисперсии носит название среднеквадратического отклонения:

$$\sigma_X = \sqrt{DX} .$$

При решении задач также часто полезно другое выражение для дисперсии, получаемое простыми преобразованиями:

$$DX = M\left(X - MX\right)^2 = M\left(X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2\right) =$$
$$= MX^2 - 2MX \cdot MX + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$$

Если случайная величина умножается на число, то и её математическое ожидание умножается на то же самое число:

$$M\left(a \cdot X\right) = a \cdot MX .$$

Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий всегда, когда оба математических ожидания существуют:

$$M\left(X+Y\right)=MX+MY\ .$$

Дисперсия при аналогичных операциях изменяется иначе. При умножении случайной величины на число дисперсия умножается на квадрат этого числа:

$$D\left(a\cdot X\right)=a^2\cdot DX\ .$$

Это, в частности, означает, что среднеквадратическое отклонение при такой операции умножается на модуль множителя:

$$\sigma\left(a\cdot X\right)=|a|\cdot\sigma\left(X\right),$$

а также, что

$$D\left(-X\right)=DX$$

$$\sigma\left(-X\right)=\sigma\left(X\right).$$

Дисперсия суммы случайных величин в общем случае не сводится к дисперсиям слагаемых:

$$\begin{aligned}D\left(X+Y\right)&=M\left(X+Y-M(X+Y)\right)^2=M\left(X-MX+Y-MY\right)^2=\\&=M\left(X-MX\right)^2+2M\left(X-MX\right)\left(Y-MY\right)+M\left(Y-MY\right)^2=\\&=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y),\end{aligned}$$

где $\operatorname{cov}(X,Y)=M\left(X-MX\right)\left(Y-MY\right)$ – ковариация величин X и Y, которая может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Если ковариация случайных величин равна нулю, то они называются некоррелированными, и тогда

$$D\left(X+Y\right)=DX+DY\ .$$

Некоррелированными являются, в частности, независимые случайные величины, то есть такие, совместная функция распределения которых, определяемая соотношением

$$F_{X,Y}(x,y)=\mathbf{P}\left(X\le x,Y\le y\right),$$

равна произведению функций распределения каждой из величин в отдельности:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Обратное, вообще говоря, неверно: некоррелированные величины не обязаны быть независимыми.

Отметим также следующие свойства математического ожидания и дисперсии:

$$M(a+X) = a + MX,$$

$$D(a+X) = DX,$$

где a – число (неслучайная величина).

Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы, одинаково распределены, имеют математическое ожидание

$$\mu = MX_1 = XM_2 = ... = MX_n$$

и дисперсию

$$\sigma^2 = DX_1 = DM_2 = ... = DX_n,$$

то их среднее арифметическое

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

имеет то же самое математическое ожидание:

$$M\bar{X}_n = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n} n \cdot \mu = \mu,$$

а его дисперсия, в силу независимости, равна

$$D\bar{X}_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2} n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

то есть меньше в n раз, чем у каждой отдельной величины. Соответственно, среднеквадратическое отклонение среднего арифметического в $\sqrt{n}$ раз меньше, чем СКО каждого слагаемого.

Квантили и доверительные интервалы. Квантиль распределения уровня α – это такое число x_α, что выполняется равенство

$$F_X(x_\alpha) = \alpha \text{, или же } \mathbf{P}\left(X \le x_\alpha\right) = \alpha .$$

Если функция распределения не строго монотонна, то следует брать верхнюю грань множества таких чисел.

С точки зрения плотности распределения квантиль определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{x_\alpha} f_X(x)dx = \alpha$$

Некоторые квантили имеют специальные названия. Так, квантиль уровня 0,5 называется медианой. Эта точка делит всю область значений случайной величины на две части с одинаковыми вероятностями (по 0,5).

Другие часто используемые, особенно для симметричных распределений, квантили – это квартили (пара квантилей уровней 0,25 и 0,75) и квинтили (пара квантилей уровней 0,2 и 0,8).

Если известна пара квантилей x_α и x_β, $\alpha < \beta$, то с вероятностью $\beta - \alpha$ случайная величина принимает значение, заключённое между этими квантилями:

$$\mathbf{P}\left(x_\alpha < X \le x_\beta\right) = \beta - \alpha .$$

Таким образом, полуинтервал $\left(x_\alpha; x_\beta\right]$ является доверительным с доверительной вероятностью $P_\partial = \beta - \alpha$. Если функция распределения непрерывна, то можно говорить о доверительном интервале, заключённом между этими же квантилями.

Если, наоборот, задана доверительная вероятность P_∂, то, очевидно, можно многими способами подобрать такие $\alpha < \beta$, что $P_\partial = \beta - \alpha$, и, соответственно, можно построить много разных доверительных интервалов, отвечающих одной и той же доверительной вероятности.

Однако если распределение симметрично, то есть плотность является чётной функцией: $f_X(x) = f_X(-x) \quad \forall x$, то, как правило, представляют интерес только симметричные доверительные интервалы, границы которых противоположны: $x_\alpha = -x_\beta$. Кроме того, для симметричных распределений имеет место следующее соотношение между квантилями: $x_\alpha = -x_{1-\alpha}$. Таким образом, симметричный интервал $(x_\alpha; x_{1-\alpha})$ соответствует доверительной вероятности $P_\partial = 1 - 2\alpha$.

Отсюда понятно, что по заданной доверительной вероятности для случайной величины, распределение которой симметрично относительно некоторой точки, можно построить ***центральный*** доверительный интервал, симметричный относительно центра распределения.

Нормальное распределение. В теории вероятностей и её приложениях большую роль играет нормальное, или гауссово, распределение вероятностей. Его плотность определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \ \sigma > 0.$$

Если случайная величина X имеет распределение с такой плотностью, то

$$MX = \mu, \ DX = \sigma^2,$$

так что параметры распределения так и называют: μ – математическое ожидание, σ – среднеквадратическое отклонение. Запись $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ читается «случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (или средним значением) μ и дисперсией σ^2.

Функция нормального распределения не может быть найдена по плотности в явном виде. Для нахождения её значений используют специальные таблицы или компьютерные программы. При этом важную роль играет понятие стандартного нормального распределения, то есть распределения $N(0,1)$ с плотностью

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

Именно для функции стандартного нормального распределения

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)dt$$

и приводятся таблицы в справочниках. Общий случай сводится к стандартному посредством несложных преобразований. Если случайная величина Z имеет распределение $N(0,1)$, то величина $X = \mu + \sigma Z$ распределена по закону $N(\mu, \sigma^2)$. Обратно, величина

$$\frac{X-\mu}{\sigma}$$

имеет распределение $N(0,1)$. Поэтому, подвергая одинаковым преобразованиям все части двойного неравенства, получаем:

$$\mathbf{P}(a \le X \le b) = \mathbf{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Квантили стандартного нормального распределения находятся при помощи справочных таблиц и компьютерных программ. При этом надо иметь в виду, что в таблицах приведены значения квантилей z_α для значений α>0,5 (значение $z_{0,5}$, очевидно, равно нулю). Если же требуется найти квантиль уровня α<0,5, то нужно воспользоваться симметрией нормального распределения, благодаря которой имеет место равенство

$$z_\alpha = -z_{1-\alpha}.$$

Плотность нормального распределения при удалении от центра убывает очень быстро. В частности, случайная величина со стандартным нормальным распределением с вероятностью 0,997 заключена в пределах от –3 до 3, а величина, распределённая по закону $N(\mu,\sigma^2)$ – в пределах $\mu \pm 3\sigma$ (так называемое «правило трёх сигма» или, считая длину отрезка, «шести сигма»).

Следует помнить также следующие важные свойства нормального распределения.

1) Для нормально распределённых случайных величин некоррелированность означает также и независимость.
2) Сумма двух (и более) нормально распределённых случайных величин также нормально распределена.
3) Нормальное распределение является предельным для сумм независимых случайных величин, обладающих конечными дисперсиями. На практике это значит, что если в системе действует большое количество независимых случайных воздействий примерно одинаковой интенсивности, то суммарное воздействие будет иметь приблизительно нормальное распределение.

Пример 1.1. Известно, что размеры деталей, изготавливаемых в ходе технологического процесса, распределены по нормальному закону, причём поле допуска $\begin{pmatrix} 0 \\ -0,052\text{мм} \end{pmatrix}$ является 95-процентным центральным доверительным интервалом. Номинальный размер равен 28,0 мм.

Найти вероятности того, что размер отверстия

1) больше, чем номинальный;
2) меньше, чем 27,974 мм;
3) находится между 27,970 мм и 27,990 мм.

Решение

1) Для ответа на этот вопрос закон распределения не имеет значения, достаточно сведений о том, что поле допуска является 95-процентным центральным доверительным интервалом, а верхнее предельное отклонение равно нулю. При этих условиях размер окажется большим номинального, если он выходит за верхнюю границу поля допуска, а это происходит в половине тех 5% случаев, когда размер в допуск не попадает (остальная половина случаев – выход за нижнюю границу). Поэтому искомая вероятность равна 2,5%, или 0,025.

2) Если обратить внимание на то, что заданное значение 27,974 мм равно (28,0 – 0,026) мм = (28,0 – 0,052/2) мм, то сразу становится понятно: речь идёт о доле деталей, размеры которых меньше, чем середина поля допуска. Поскольку нормальное распределение симметрично, а середина поля допуска, по условию, совпадает с центром распределения размеров, то вероятности того, что размер как меньше, так и больше указанного в задании значения, одинаковы и равны 0,5.

3) В этом пункте требуется уже полноценное решение. Первым делом, определим, чему равны параметры распределения размера, который, как случайную величину, обозначим через X. Параметр μ, равный математическому ожиданию, равен, как указано выше, 27,974 мм.

Для того, чтобы найти параметр σ, запишем в виде уравнения условие о том, что вероятность выхода размера за нижнюю границу поля допуска, равную a=(28,0 – 0,052) мм=27,948 мм, составляет 0,025:

$$0{,}025 = \mathbf{P}\left(X < b\right) = \mathbf{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Применяя к обеим частям уравнения функцию, обратную функции стандартного нормального распределения (квантильную функцию), получаем:

$$z_{0{,}025} = \frac{a-\mu}{\sigma},$$

откуда уже легко найти σ:

$$\sigma = \frac{a-\mu}{z_{0{,}025}}$$

Квантиль стандартного нормального распределения $z_{0{,}025}$ можно найти при помощи таблицы, если использовать равенство

$$z_{0,025} = -z_{0,975}.$$

Таким образом, $z_{0,025} = -1{,}96$. Разность $a - \mu$ есть половина ширины поля допуска, взятая со знаком «минус», так что значение σ получается, разумеется, положительным и равным

$$\sigma = \frac{-0{,}026}{-1{,}96} = 0{,}013 \text{ мм}.$$

Теперь можно находить вероятности попадания размера деталей в любые интервалы, в том числе в заданный в задаче:

$$\mathbf{P}(27{,}970 \le X \le 27{,}990) = \mathbf{P}\left(\frac{27{,}970-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{27{,}990-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{27{,}990-27{,}974}{0{,}013}\right) - \Phi\left(\frac{27{,}970-27{,}974}{0{,}013}\right) = 0{,}89 - 0{,}38 = 0{,}51.$$

Пример 1.2. В технологическом процессе производятся изделия, размеры которых подчиняются нормальному распределению с дисперсией 0,0009 мм^2. При отсутствии смещения уровня настройки доля брака (выход за пределы технологического допуска) составляет 0,02. Пусть известно, что при смещении уровня настройки процесса вверх доля брака составила 0,10, причем рассеивание осталось неизменным. Найти смещение уровня настройки.

Решение

Введем обозначения: σ^2 – дисперсия размеров деталей, T – ширина поля технологического допуска, $p_б^0$ и $p_б^1$ – вероятности появления брака при нулевом и искомом смещениях уровня настройки, соответственно.

Смещение уровня настройки процесса – это разность между центром технологического поля допуска и центром рассеивания размеров, то есть, в случае нормального распределения, математическим ожиданием. Для удобства будем измерять математическое ожидание от центра поля допуска, тогда смещение уровня настройки совпадет с математическим ожиданием размеров деталей.

При нулевом смещении уровня настройки брак образуется за счет выхода размеров как за нижнюю, так и за верхнюю границы поля допуска, поэтому долю (вероятность) брака записывается следующим образом:

$$p_б^0 = \mathbf{P}\left(X < -T/2\right) + \mathbf{P}\left(X > T/2\right) = \mathbf{P}\left(\frac{X}{\sigma} < -\frac{T}{2\sigma}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{X}{\sigma} > \frac{T}{2\sigma}\right) =$$
$$= \Phi\left(-\frac{T}{2\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{T}{2\sigma}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{T}{2\sigma}\right)\right). \qquad (1.1)$$

Здесь использован тот факт, что стандартное нормальное распределение симметрично относительно нуля, и для его функции распределения в силу этого верно соотношение $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Из (1.1) легко найти ширину поля допуска:

$$T = 2\sigma\Phi^{-1}(1 - p_б^0 / 2). \qquad (1.2)$$

При искомом уровне смещения настройки μ вероятность брака составляет

$$p_б^1 = \mathbf{P}\left(X < -T/2 \mid \mu\right) + \mathbf{P}\left(X > T/2 \mid \mu\right), \qquad (1.3)$$

однако первым слагаемым можно пренебречь: небольшая доля выхода за нижнюю границу поля допуска при нулевом математическом ожидании становится исчезающе малой при смещении настройки процесса вверх. Поэтому будем рассматривать только второе слагаемое в (1.3) и преобразуем его так:

$$p_б^1 = \mathbf{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{T/2-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{T/2-\mu}{\sigma}\right). \qquad (1.4)$$

Отсюда, используя (1.2), получаем для смещения уровня настройки выражение

$$\mu = T/2 - \sigma\Phi^{-1}\left(1 - p_б^1\right) = \sigma\left(\Phi^{-1}\left(1 - p_б^0/2\right) - \Phi^{-1}\left(1 - p_б^1\right)\right)$$

Подставляя численные значения входящих сюда величин, находим:

$$\mu = 0{,}03\left(\Phi^{-1}\left(1 - 0{,}02/2\right) - \Phi^{-1}\left(1 - 0{,}10\right)\right) мм = 0{,}03 \cdot (2{,}3263 - 1{,}2816) мм \approx 0{,}03 мм$$

Пример 1.3. Считается, что размеры деталей, производимых в ходе технологического процесса, подчиняются нормальному распределению со средним значением (именуемом также уровнем настройки) μ и дисперсией 1600 мкм^2. Для наблюдения за уровнем настройки время от времени берутся выборки объемом n деталей, по которым вычисляется среднее значение размера. Какое наименьшее значение n следует взять, чтобы при номинальном значении уровня настройки $m=$ 50,10 мм вероятность получить средний по выборке размер 50,14 мм и более не превышала бы 0,01?

Решение

Прежде всего, введём обозначения для величин, упомянутых в условии задачи. Дисперсию размеров деталей обозначим σ^2, а пороговое значение 50,14 мм, о превышении которого выборочным средним идёт речь – b.

Выборочное среднее, вычисленное по независимой нормальной выборке объема n, распределено по нормальному закону с тем же средним и в n раз меньшей дисперсией: $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$. Поэтому вероятность события $\bar{X}_n \ge b$ легко записать:

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \ge b\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \ge \frac{b-\mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < \frac{b-\mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

Здесь Φ – функция стандартного нормального распределения. Таким образом, для определения необходимого значения объема выборки требуется разрешить относительно n неравенство

$$1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right) \le \alpha \text{, или } \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right) \ge 1 - \alpha$$

Применяя к обеим частям последнего неравенства функцию, обратную функции Φ (*квантильную* функцию), получим

$$\frac{b-\mu}{\sigma / \sqrt{n}} \ge z_{1-\alpha} \text{, откуда } n \ge \left(\frac{\sigma \cdot z_{1-\alpha}}{b-\mu}\right)^2$$

где $z_{1-\alpha}$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня $1-\alpha$.

Подставляя заданные значения μ=50,10 мм, $b=50{,}14$ мм, $\alpha=0{,}01$, $\sigma=0{,}040$ мм, получаем:

$$n \ge \left(\frac{0{,}040 \cdot 2{,}3263}{50{,}14 - 50{,}10}\right)^2 \approx 5{,}43$$

Первым целым числом, удовлетворяющим этому неравенству, является 6, что и служит ответом в задаче.

Задача 1.1. В условиях Примера 1.3 положим объем выборки n=4. Найти вероятность того, что среднее значение по выборке такого объема превзойдет текущий уровень настройки μ не менее, чем на 0,04 мм.

Задача 1.2. Производственный процесс обеспечивает возможность получения изделий с нормально распределенным признаком качества, значения которого с вероятностью в 95% укладываются в поле допуска. Найдите, во сколько раз следует уменьшить технологическое рассеивание процесса (стандартное отклонение), чтобы поле допуска стало 99%-ным доверительным интервалом для признака качества.

Задача 1.3. Найдите 95-процентный доверительный интервал, в котором может находиться зазор в соединении вала (допустимые отклонения -0,02; -0,04 мм) со втулкой (допустимые отклонения +0,02 мм), если их размеры распределены равномерно в пределах полей допусков.

Решите задачу при нормальном распределении размеров соединяемых элементов с учетом того, что допуски являются 99-процентными центральными доверительными интервалами для соответствующих размеров.

Указание. Сумма двух независимых случайных величин с равномерным распределением имеет «треугольное» распределение: его плотность симметрична относительно центра, совпадающего с математическим ожиданием; линейно возрастает от нижней границы до центра и линейно убывает от центра до верхней границы; верхняя и нижняя границы определяются минимальными и максимальными значениями слагаемых.

Задача 1.4. Номинальные размеры вала и втулки равны 36,200 мм и 36,220 мм, соответственно. При изготовлении производственные процессы удалось настроить в среднем в точности на номинальные размеры, при этом СКО размера вала равно 0,002 мм, а СКО размера втулки – 0,003 мм. Распределения обоих размеров близки к нормальным.

Оцените 99%-доверительный интервал для зазора в соединении вала и втулки, если и валы, и втулки отбираются наудачу.

Задача 1.5. Из очень большой совокупности деталей, размеры которых распределены нормально со средним 20,05 мм, выбирают наудачу 10 штук и вычисляют их средний размер. Пусть известно, что при этом в среднем в 1 случае из 100 получается значение, превосходящее 20,10 мм. Оценить дисперсию распределения размеров деталей совокупности.

Указание. При решении обратите внимание на обоснование применимости формул!

Задача 1.6. Проверить, могут ли быть плотностями распределения следующие функции:

1) $f(x) = xe^{-x}$, $x \ge 0$
2) $f(x) = \sin x$, $-\pi \le x \le \pi$
3) $f(x) = 1/x$, $x \ge 1$
4) $f(x) = 1/x^2$, $x \ge 1$.

Задача 1.7. Предприятие выпускает холодильники, для которых среднее время безотказной работы составляет 10 лет при экспоненциальном распределении срока службы. Найдите вероятности отказа холодильника на 6-м и на 12-м году его эксплуатации. Определите вероятность того, что холодильник проработает, не выходя из строя, больше 15 лет, и вероятность того, что он сломается уже в течение первых двух лет.

Указание. Экспоненциальное распределение имеет плотность

$$f(t) = \frac{1}{t_{cp}} e^{-t/t_{cp}}$$

где t_{cp} – среднее значение (математическое ожидание) времени работы.

Вероятности «проработает больше заданного» и «проработает меньше заданного» определяются с помощью интегрирования, соответственно, от заданного значения до бесконечности и от нуля до заданного значения. Вероятность отказа на 6-м году эксплуатации – это вероятность того, что холодильник проработает от 5 до 6 лет.

Задача 1.8. Пусть в условиях Примера 1.2 доля брака изменяется не за счет смещения уровня настройки, а за счет увеличения технологического рассеивания. Найти новое значение СКО размеров деталей, приводящее к такому увеличению.

Задача 1.9. Пусть в условиях Примера 1.2 происходит одновременное смещение уровня настройки на 0,01 мм и увеличение дисперсии до 0,12 мм^2. Найти долю брака, которая получается в результате этих изменений процесса.