2. Прямые многократные измерения. Свойства выборочного среднего. Построение доверительных интервалов. Контроль изделий на основе прямых многократных измерений

Краткие теоретические сведения

Выборочное среднее как оценка параметра нормального распределения. Если независимые одинаково распределённые случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ наблюдаются в измерительном эксперименте, а их общее математическое ожидание неизвестно, то их среднее арифметическое

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

часто используется для оценивания неизвестного математического ожидания:

$$\hat{\mu}^{(n)} = \bar{X}_n$$

(читается «оценка ″мю″ по выборке объёма n есть ″икс-с-чертой-эн″). Величина $\bar{X}_n$, рассматриваемая как функция наблюдаемых величин, при этом является ***статистикой*** и называется ***выборочным средним***.

Любая оценка зависит от случайных наблюдаемых величин, а потому и сама является случайной величиной, а значит, в частности, имеет некоторое распределение вероятностей. Из двух оценок имеет смысл предпочесть ту, распределение которой при одних и тех же входных данных сосредоточено ближе к значению оцениваемой величины.

Как показано в разделе 1, математическое ожидание выборочного среднего совпадает со значением неизвестной величины:

$$M\,\hat{\mu}^{(n)} = M\bar{X}_n = \mu\,.$$

Такие оценки называются ***несмещёнными***. Таким образом, выборочное среднее служит несмещённой оценкой математического ожидания.

Если дисперсия наблюдений конечна и равна σ^2, то, как показано в разделе 1, дисперсия выборочного среднего

$$D\hat{\mu}^{(n)} = D\bar{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

При росте количества наблюдений n дисперсия выборочного среднего всё более уменьшается, в пределе стремясь к нулю. Это означает, что распределение оценки всё более сосредотачивается около её среднего значения, которое, как мы видели, совпадает со значением оцениваемой величины. Такие оценки называются ***состоятельными***.

Если наблюдения $X_1, X_2, ..., X_n$ распределены нормально, то их сумма, как сказано в предыдущем разделе, тоже распределена нормально. Умножение на константу не меняет вида распределения, поэтому и выборочное среднее в этом случае также распределено нормально.

Суммировать перечисленные свойства можно следующим образом: если наблюдения $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы и имеют закон распределения $N(\mu, \sigma^2)$, то их выборочное среднее $\bar{X}_n$ имеет распределение $N(\mu, \sigma^2 / n)$. Кроме того, выборочное среднее в такой ситуации является вообще наилучшей оценкой неизвестного математического ожидания, то есть не существует оценки, которая бы имела меньшую дисперсию.

Отметим здесь, что при обработке измерительной информации часто можно считать, что случайная погрешность измерения распределена приблизительно по нормальному закону, поэтому указанные теоретические свойства выборочного среднего следует знать и использовать. Однако следует знать и другое: даже после исключения систематической погрешности некоторая её часть остаётся, так что математическое ожидание наблюдений не точно равно измеряемой величине. Сама по себе нормальность распределения наблюдений тоже никогда не гарантирована.

Пользуясь тем, что $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$, можно записать неравенство, выполняющееся с заданной доверительной вероятностью P_∂:

$$\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \le \bar{X}_n \le \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2},$$

где $\alpha = 1 - P_\partial$ и учтено свойство квантилей нормального распределения $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$. Отсюда видно, что при известной дисперсии случайной погрешности доверительный интервал для неизвестной величины μ имеет вид

$$\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \le \mu \le \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, \text{ или } \bar{x}_n \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2},$$

где $\bar{x}_n$ – значение $\bar{X}_n$, полученное при конкретных значениях наблюдений.

Однако дисперсия наблюдений обычно неизвестна, поэтому её приходится оценивать по той же самой выборке. Для этого используется статистика

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n \right)^2,$$

которая служит несмещённой оценкой дисперсии σ^2, причём отношение $(n-1)S_n^2/\sigma^2$ при нормально распределённых наблюдениях имеет так называемое распределение χ_{n-1}^2 (хи-квадрат с числом степеней свободы $n-1$).

Важно также, что оценки $\bar{X}_n$ и S_n^2 представляют собой **независимые** случайные величины. Это позволяет построить доверительный интервал для результата измерения следующим образом. Ещё раз напомним, что выборочное среднее $\bar{X}_n$ имеет распределение $N(\mu,\sigma^2/n)$, поэтому величина

$$\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}=\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

распределена по закону $N(0,1)$ (стандартное нормальное распределение). Если построить отношение

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sqrt{S_n^2}},$$

то несложными преобразованиями его можно привести к виду

$$\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n-\mu\right)}{\sqrt{S_n^2}}=\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n-\mu\right)}{\sqrt{\sigma^2\cdot\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\left(\bar{X}_n-\mu\right)\Big/\left(\sigma/\sqrt{n}\right)}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}.$$

Числитель последней дроби имеет стандартное нормальное распределение, в знаменателе первая величина под корнем распределена по закону χ_{n-1}^2, причём величины в числителе и в знаменателе независимы. Поэтому вся дробь в целом имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $n-1$. Следовательно, при заданной доверительной вероятностью P_∂ выполняются неравенства

$$-t_{n-1;1-\alpha/2}\le\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sqrt{S_n^2}}\le t_{n-1;1-\alpha/2},$$

где $\alpha=1-P_\partial$ и учтена симметричность распределения Стьюдента, приводящая к равенству $t_{n-1;\alpha/2}=-t_{n-1;1-\alpha/2}$.

Итак, доверительный интервал для измеряемой величины при неизвестной дисперсии наблюдений записывается в виде

$$\overline{x}_n \pm \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\alpha/2},$$

где s_n – корень квадратный из значения статистики S_n^2, $t_{n-1;1-\alpha/2}$ – квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы $n-1$ уровня $1-\alpha/2$. При записи результата измерения обязательно указывается доверительная вероятность.

То, что для измеряемой величины строится интервал, содержащий её значение с заданной вероятностью, не означает, что измеряемая величина является случайной; наоборот, построенный интервал является случайным, поскольку его центр, а при неизвестной дисперсии – и длина, являются случайными величинами.

Длина доверительного интервала при фиксированной доверительной вероятности, как видим, убывает пропорционально корню квадратному из объёма выборки. Однако при любом объёме выборки невозможно указать конечного интервала, который бы накрывал значение измеряемой величины с вероятностью 1.

Методы теории проверки гипотез в задачах контроля. С учётом сказанного выше должны решаться и задачи контроля, использующие прямые измерения. Предположим, деталь имеет размер, значение которого входит в поле допуска, однако близко к его границе. Вследствие наличия случайной составляющей в наблюдениях, результат измерения, найденный как выборочное среднее, может оказаться как в пределах, так и за пределами поля допуска. Если сравнивать результат сравнения именно с границами поля допуска, то во втором случае произойдёт так называемая ошибка контроля первого рода – неправильное отклонение изделия, соответствующего заданным требованиям (далее будем говорить для краткости просто «соответствующего изделия»).

Математической основой операций контроля служит аппарат проверки статистических гипотез. Под статистической гипотезой подразумевается утверждение о вероятностной модели наблюдений, например, о виде распределения, о значении или значениях определённых параметров распределения, о независимости наблюдений и т.д., проверка которого осуществляется на основе полученных в эксперименте наблюдений.

Гипотезы бывают простые и сложные. Гипотеза называется простой, если ей соответствует одно-единственное распределение; в противном случае гипотеза называется сложной.

Гипотезы бывают параметрические и непараметрические. Параметрическая гипотеза касается лишь значений одного или нескольких параметров распределения, вид же распределения считается известным. К непараметрическим гипотезам относится остальные гипотезы. Например, гипотеза о том, что распределение наблюдений нормально, является непараметрической.

Для корректной постановки задачи проверки гипотез требуется помимо основной гипотезы, которую принято обозначать H_0, указать ещё хотя бы одну альтернативную, или конкурирующую, гипотезу H_1. Альтернативная гипотеза может являться просто отрицанием основной, а может быть и иным содержательным утверждением. Например, при контроле мы можем проверять в качестве основной гипотезу, что измеряемая величина имеет некоторое определённое значение (простая основная гипотеза). Альтернативой может выступать утверждение, что величина имеет другое определённое значение (простая альтернатива), или что величина не равна значению, предполагаемому в основной гипотезе значению (сложная двусторонняя альтернатива), или что она строго больше (сложная односторонняя альтернатива).

Процедуру проверки статистических гипотез, в которой сформулированы и основная, и альтернативная гипотезы, называют статистическим критерием. Любой критерий предусматривает разбиение множества всех возможных значений выборки наблюдений $\mathbf{x}^{(n)} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ на две части. Одна из них называется критической областью CR_n, и основная гипотеза отвергается, когда выборка попадает в неё. Собственно говоря, критическая область и определяет статистический критерий.

В результате применения статистического критерия основная гипотеза не может быть «доказана» или «опровергнута», но может быть принята или отклонена, причём с указанием вероятностей соответствующих ошибок.

Ошибкой первого рода называется ситуация, когда основная гипотеза верна, однако она отвергается. Вероятность ошибки первого рода обычно обозначают α:

$$\alpha = \mathbf{P}\left(\mathbf{X}^{(n)} \in CR_n \mid H_0\right).$$

Ошибка второго рода, вероятность которой обычно обозначают β, возникает в случае принятия основной гипотезы, когда она неверна:

$$\beta = \mathbf{P}\left(\mathbf{X}^{(n)} \notin CR_n \mid H_1\right),$$

а величина $1-\beta$ называется мощностью критерия.

Вероятности ошибок первого и второго рода, или уровень значимости и мощность, являются важнейшими характеристиками статистического критерия. Типичной математико-статистической задачей является поиск наиболее мощного критерия при заданном уровне значимости.

В задачах контроля, как правило, в качестве основной гипотезы рассматривается соответствие объекта контроля заданным требованиям, поэтому вероятность ошибки первого рода – забраковать изделие, хотя оно годное – называют риском производителя (или поставщика). Ошибка второго рода означает приёмку негодного изделия как годного, поэтому её вероятность называют риском потребителя.

Если основная или альтернативная гипотеза является сложной, то соответствующая вероятность ошибки будет, вообще говоря, различной и зависеть от конкретного варианта, имеющего место в эксперименте. Для параметрических гипотез вводится функция мощности, зависящая от конкретного значения параметра и равная вероятности того, что основная гипотеза будет отвергнута при этом значении:

$$G(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\left(\mathbf{X}^{(n)} \in CR_n \mid \boldsymbol{\theta}\right).$$

Можно рассматривать также функцию, равную вероятности того, что основная гипотеза будет принята при конкретном значении параметра – оперативную характеристику

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\left(\mathbf{X}^{(n)} \notin CR_n \mid \boldsymbol{\theta}\right).$$

Очевидно, между этими функциями имеется простое соотношение:

$$G(\boldsymbol{\theta}) = 1 - L(\boldsymbol{\theta}),$$

так что, как правило, пользуются какой-нибудь одной из них.

Если теперь обозначить через Θ_0 и Θ_1 множества значений параметра, означающих выполнение, соответственно, основной и альтернативной гипотез, то есть $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$, $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$, то риски производителя и можно записать в виде верхних граней функции мощности на соответствующих множествах:

$$\alpha = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} G(\boldsymbol{\theta}),\ \beta = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} L(\boldsymbol{\theta}).$$

Именно эти «наибольшие» значения рисков имеются в виду при предъявлении требований к процедурам контроля.

В большинстве критериев проверка того, попадает ли выборка в критическую область, производится не по самой выборке, а по значению некоторой функции $T_n\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$, называемой статистикой критерия, которая является либо скалярной, либо векторной, но малой размерности (2-3). Если статистика критерия скалярна, то правило отклонения основной гипотезы может формулироваться, например, одним из соотношений

$$T_n\left(\mathbf{x}^{(n)}\right) < t',\ \text{или}\ T_n\left(\mathbf{x}^{(n)}\right) > t',\ \text{или}\ T_n\left(\mathbf{x}^{(n)}\right) \notin \left[t', t''\right],$$

что значительно удобнее, чем проверять попадание выборки в многомерную область. Критическая область в явном виде при этом выписывать и не требуется.

При контроле на основе прямых измерений статистикой критерия обычно служит выборочное среднее.

Пример 2.1. Производится контроль размера, номинальное значение которого равно 15 мм, при помощи усреднения прямых многократных измерений с объёмом выборки $n=10$. Систематическая погрешность считается полностью исключённой, а случайная погрешность распределена нормально со среднеквадратическим отклонением $\sigma=0{,}002$ мм и независима для различных наблюдений.

Построить функцию мощности и оперативную характеристику процедуры контроля, найти риск производителя в следующих ситуациях:

а) задано одностороннее поле допуска с нижним предельным отклонением $-0{,}015$ мм, деталь бракуется, когда усреднённое значение оказывается меньше, чем (15,000 – 0,015) мм;

б) задано одностороннее поле допуска с нижним предельным отклонением $-0{,}015$ мм, деталь бракуется, когда усреднённое значение оказывается меньше, чем (15,000 – 0,016) мм;

в) задано двустороннее поле допуска с верхним предельным отклонением 0,000 мм и нижним предельным отклонением $-0{,}015$ мм, деталь бракуется, когда усреднённое значение оказывается меньше, чем (15,000 – 0,016) мм или больше, чем (15,000 + 0,001) мм.

Решение

Функция мощности, по определению, представляет собой зависимость вероятности отвергнуть основную гипотезу от истинного значения параметра. В рассматриваемой задаче параметром является размер детали, основная гипотеза состоит в том, что значение размера находится в поле допуска, а альтернативная – в том, что оно выходит за пределы поля допуска, но конкретное неравенство, выражающее альтернативную гипотезу, будет зависеть от варианта условия. Систематическую погрешность считаем полностью исключённой, поэтому значение размера совпадает с математическим ожиданием наблюдений, и можно обозначить его через μ. Статистикой критерия служит выборочное среднее.

Рассмотрим сначала контроль по одностороннему полю допуска. Основная гипотеза при этом выражается неравенством $\mu \geq$(15,000 – 0,015) мм=14,985 мм, а альтернативная – неравенством $\mu < 14{,}985$ мм. Обозначим через b границу, значение выборочного среднего меньше которой приводит к тому, что деталь бракуется, так что в варианте а) b=(15,000 – 0,015) мм=14,985 мм, а в варианте б) b=14,984 мм. Критическая область определяется неравенством $\overline{x}_n < b$, а функция мощности – соотношением

$$G(\mu) = \mathbf{P}\left(\bar{X}_n < b \mid \mu\right).$$

Поскольку распределение случайной погрешности нормально, то, пользуясь свойствами выборочного среднего, можно записать

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \sigma^2 / n\right), \ \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

поэтому

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n < b \mid \mu\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < \frac{b - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \mid \mu\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right).$$

Итак, функция мощности имеет вид

$$G(\mu) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right),$$

а оперативная характеристика –

$$L(\mu) = 1 - G(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right).$$

Понятно, что, поскольку $\Phi(0) = ½$, при $\mu = b$ выполняется равенство $L(b) = G(b) = 1/2$. Следовательно, в варианте а), в котором граница контроля совпадает с границей поля допуска, риски производителя и потребителя будут равны по ½.

В варианте б) оперативная характеристика и функция мощности имеют вид, показанный на рис. 1. Риск производителя равен наибольшей вероятности забраковать деталь, хотя её размер укладывается в поле допуска, то есть достигается на границе поля допуска, и

$$\alpha = 1 - L(14,985) = \Phi\left(\frac{-0,001}{0,002} \cdot \sqrt{10}\right) = 0,057.$$

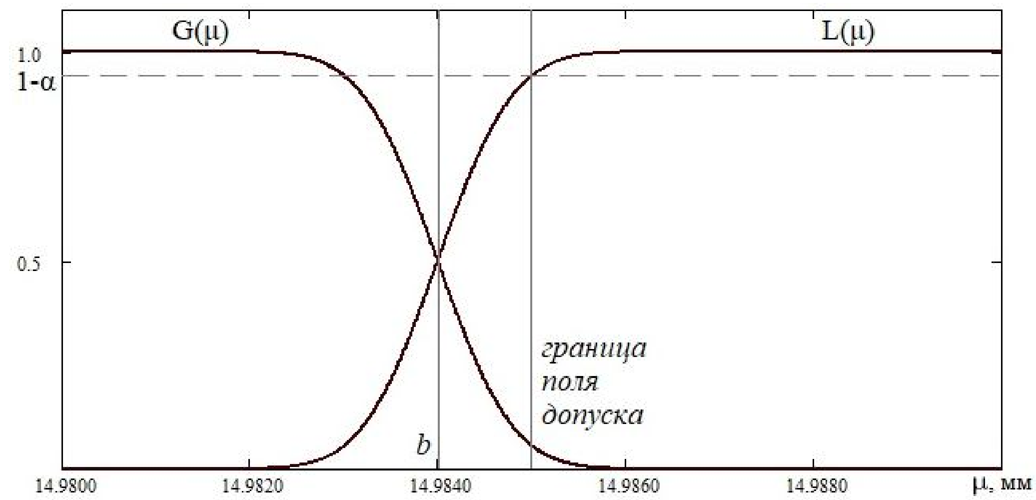

Рис. 2.1. Функция мощности и оперативная характеристика процедуры контроля при границе контроля b, лежащей за пределами поля допуска.

При контроле по двустороннему полю допуска основная гипотеза определяется условием $H_0 : 14{,}985$ мм $\le \mu \le 15{,}000$ мм, а альтернативная – $H_0 : \mu < 14{,}985$ мм или $\mu > 15{,}000$ мм. Согласно условию, основная гипотеза отвергается, когда происходит событие

$$\left\{\bar{X}_n < b_L\right\} \cup \left\{\bar{X}_n > b_H\right\},$$

где введены обозначения границ контроля b_L = (15,000 – 0,016) мм = 14,984 мм, b_H = (15,000 + 0,001) мм = 15,001 мм. Вероятность указанного события при заданном значении размера и представляет собой функцию мощности:

$$G(\mu) = \mathbf{P}\left(\left\{\bar{X}_n < b_L\right\} \cup \left\{\bar{X}_n > b_H\right\} \mid \mu\right) = \Phi\left(\frac{b_L - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{b_H - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{b_L - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) + \Phi\left(\frac{\mu - b_H}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

Оперативная характеристика такой процедуры контроля есть

$$L(\mu) = 1 - G(\mu) = \mathbf{P}\left(b_L \le \bar{X}_n \le b_H \mid \mu\right) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{b_L - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) + \Phi\left(\frac{\mu - b_H}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right).$$

Её график приведён на рис. 2.2.

Чтобы найти риск производителя, нужно найти значения оперативной характеристики на границах поля допуска:

$$\alpha = 1 - L(14{,}985) = 1 - L(15{,}000) = 0{,}057.$$

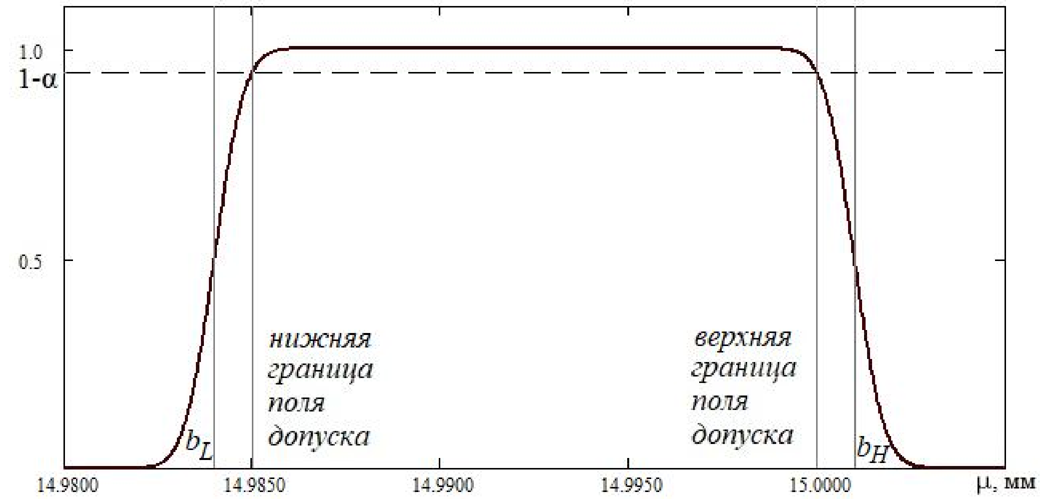

Рис. 2.2. Оперативная характеристика процедуры контроля по двустороннему допуску при границах контроля b_L, b_H, лежащих за пределами поля допуска.

Полученное значение совпадает с результатом варианта б). Это происходит потому, что при заданной ширине поля допуска оперативная характеристика состоит из двух слагаемых, каждое из которых даёт заметный вклад лишь вблизи соответствующей границы контроля: при значениях μ, близких к нижней границе,

$$\Phi\left(\frac{\mu - b_H}{\sigma}\sqrt{n}\right) \approx 0, \text{ и } L(\mu) \approx 1 - \Phi\left(\frac{b_L - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right),$$

а при значениях μ, близких к верхней границе,

$$\Phi\left(\frac{b_L - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) \approx 0, \text{ и } L(\mu) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\mu - b_H}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

Равенства тем точнее, чем дальше границы контроля одна от другой. Этим обстоятельством можно пользоваться при решении обратной задачи – нахождении границ контроля по заданному риску производителя.

Пример 2.2. При измерении размера детали действует нормальная случайная погрешность с нулевым средним и дисперсией 900 мкм^2. Производится несколько наблюдений, причем считается, что случайные погрешности различных наблюдений независимы, и что систематическая погрешность равна нулю либо исключена. Следует убедиться в том, что деталь имеет размер, не превосходящий 15,62 мм, а в противном случае ее забраковать. Допускается неправильно забраковать деталь не более чем в 2 случаях из 100. Предложите процедуру обработки наблюдений, решающую поставленную задачу.

Решение

Сформулированная задача может быть решена методами проверки статистических гипотез. Пользуясь терминологией из этой области, можно сказать, что требуется проверить гипотезу о том, что математическое ожидание μ в независимой нормальной выборке не превосходит заданной величины, то есть основная гипотеза $H_0 : \mu \le \mu_0$. Наблюдения записываются в виде $X_i = \mu + \varepsilon_i$, $i = 1,...,n$, где ε_i, $i = 1,...,n$ – независимые случайные погрешности, распределенные по закону $N(0,\sigma^2)$, так что $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$, $i = 1,...,n$.

Решение о принятии или отклонении основной гипотезы будет приниматься на основании значения выборочного среднего

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Вследствие наличия погрешности измерений может получиться так, что значение измеряемой величины не превосходит заданного значения μ_0, а значение $\bar{X}_n$ – превосходит, поэтому отвергать основную гипотезу следует при выполнении неравенства $\bar{x}_n > b$ с некоторым $b > \mu_0$.

«Неправильно забраковать деталь» означает совершить ошибку первого рода: отвергнуть основную гипотезу, когда она на самом деле верна. Вероятность этого равна $\alpha = \mathbf{P}\left(\bar{X}_n > b \mid \mu \le \mu_0\right)$; она возрастает, когда значение μ приближается к μ_0, поэтому достаточно обеспечить неравенство $\alpha_{\max} = \mathbf{P}\left(\bar{X}_n > b \mid \mu = \mu_0\right) \le \alpha^*$, где α^*– заданная в условии допустимая вероятность ошибки: «в двух случаях из ста» означает $\alpha^* = 0{,}02$.

Таким образом, можем записать:

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n > b \mid \mu = \mu_0\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Big| \mu = \mu_0\right) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \le \alpha^*,$$

откуда

$$\Phi\left(\frac{b-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \ge 1 - \alpha^* . \qquad (2.1)$$

Описанная процедура контроля пока содержит две неизвестные величины: границу b и объем выборки n, которые связаны только одним условием (2.1), поэтому их значения не могут быть найдены однозначно. Для того, чтобы добиться однозначности, требуется привлечь какое-нибудь дополнительное условие. Часто задают допустимую вероятность ошибки второго рода, то есть вероятность того, что значение величины, при котором деталь должна быть забракована, ошибочно признается удовлетворяющей поставленному условию.

Вероятность ошибки второго рода равна $\beta = \mathbf{P}\left(\bar{X}_n \le b \mid \mu > \mu_0\right)$, максимального значения нигде не достигает, однако стремится к своей верхней грани при $\mu \to \mu_0$, причем эта верхняя грань равна $1 - \alpha_{\max}$.

Таким образом, приходится задать вероятность ошибки второго рода с дополнительным условием, при каком именно значении μ она должна достигаться. Введем такое условие: ошибочно принять основную гипотезу при $\mu = \mu_1$=15,64 мм допускается не более чем в 3 случаях из 100 (β^*=0,03).

Запишем введенное условие:

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n \le b \mid \mu = \mu_1\right) \le \beta^*,$$

или

$$\mathbf{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \le \frac{b - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_1\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right) \le \beta^* \qquad (2.2)$$

Теперь, комбинируя условия (2.1) и (2.2), можно найти значения b и n. Применяя к обеим частям последних неравенств в (2.1) и (2.2) квантильную функцию стандартного нормального распределения, находим:

$$\frac{b - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \ge z_{1-\alpha^*}, \qquad \frac{b - \mu_1}{\sigma}\sqrt{n} \le z_{\beta^*}. \qquad (2.3)$$

Для нашей цели достаточно пойти упрощенным путем, заменив в (2.3) неравенства на равенства, разрешив полученную систему уравнений и в дальнейшем взяв полученное значение b и ближайшее большее целое значение n.

Разделим первое из полученных уравнений на второе: $\dfrac{b-\mu_0}{b-\mu_1}=\dfrac{z_{1-\alpha^*}}{z_{\beta^*}}$, откуда $b=\dfrac{\mu_1 z_{1-\alpha^*}-\mu_0 z_{\beta^*}}{z_{1-\alpha^*}-z_{\beta^*}}$. Подставив теперь это выражение в одно из неравенств (2.3), находим $n\ge\left(\sigma\dfrac{z_{1-\alpha^*}-z_{\beta^*}}{\mu_1-\mu_0}\right)^2$.

Используя числовые данные из условия задачи и принятого дополнительного условия, получаем

$$\boldsymbol{b}=\frac{\mathbf{15{,}64\cdot 2{,}0537-15{,}62\cdot(-1{,}8808)}}{\mathbf{2{,}0537-(-1{,}8808)}}\,\textbf{\textit{мм}}\approx\mathbf{15{,}63}\,\textbf{\textit{мм}}$$

$$\boldsymbol{n}\ge\left(\mathbf{0{,}030}\cdot\frac{\mathbf{2{,}0537-(-1{,}8808)}}{\mathbf{15{,}64-15{,}62}}\right)^{\mathbf{2}}\approx\mathbf{34{,}83}$$, и окончательно $\boldsymbol{n}\ge\mathbf{35}$.

Отметим, что полученный объем выборки не вполне реалистичен, и на практике этот результат может свидетельствовать о том, что задача либо некорректно поставлена, либо решается не теми средствами (например, требуется выбрать метод и/или средство измерения с меньшим рассеиванием наблюдений, то есть дисперсией случайной погрешности).

Задача 2.1. При измерении размера детали получены следующие значения (в мм):

27,5042
27,5147
27,5034
27,5132
27,5121
27,5101
27,5193
27,5318
27,4973
27,5406
27,5110
27,5208

Считая, что систематическая погрешность измерения равна 0,0115 мм, найдите оценку измеряемого размера, постройте 0,95-доверительные интервалы и запишите результат измерения
а) если известно, что СКО случайной погрешности равно 0,012 мм;

б) если СКО случайной погрешности неизвестно.

Задача 2.2. При измерении размера детали получены следующие значения (в мм):

35,2059
35,2038
35,2178
35,2139
35,2162
35,2289
35,2126
35,2032
35,2046

Можно ли с вероятностью 0,95 утверждать, что истинное значение размера не равно 35,1900 мм, считая, что систематическая погрешность исключена, а случайная погрешность распределена по нормальному закону?

Задача 2.3. При каком наибольшем значении СКО случайной погрешности в Примере 2.2 получится разумный объем выборки в 10-15 наблюдений?

Задача 2.4. Имеется 20 наблюдений одной и той же физической величины, «зашумленных» независимыми случайными погрешностями с нулевым средним и СКО 0,025 мм. На какое наибольшее значение может отличаться среднее, взятое по этим наблюдениям, от истинного значения величины, с вероятностью 0,98?

Задача 2.5. При измерении размера действует случайная погрешность с дисперсией 0,0016 мм^2, систематическая погрешность считается полностью исключённой, а значения погрешности при последовательных измерениях – независимыми. Какой объём выборки нужно взять, чтобы достаточно уверенно отличать размер 30,05 мм от больших значений, а именно: при истинном размере 30,07 мм делать ошибку второго рода с вероятностью не более 0,2, а при истинном размере 30,09 мм – не более 0,01?

Задача 2.6. От некоторого устройства по электрической линии может поступать постоянный сигнал, напряжение которого равно либо нулю (назовём это состояние «сигнал отсутствует»), либо 0,1 В («сигнал присутствует»). На линии также наблюдается гауссовский белый шум с дисперсией 0,04 В^2.
Построить процедуру обнаружения сигнала на основе усреднения напряжения на линии, обеспечивающую вероятность пропуска 0,05, а вероятность ложного обнаружения 0,02.