

第14章 综合评价与决策方法

评价方法大体上可分为两类，其主要区别在确定权重的方法上。一类是主观赋权法，多数采取综合咨询评分确定权重，如综合指数法、模糊综合评判法、层次分析法、功效系数法等。另一类是客观赋权，根据各指标间相关关系或各指标值变异程度来确定权重，如主成分分析法、因子分析法、理想解法（也称TOPSIS法）等。

**目前国内外综合评价方法有数十种之多,其中主要使用的
评价方法有主成分分析法、因子分析、TOPSIS、秩和比法、
灰色关联法、熵权法、层次分析法、模糊评价法、物元分析
法、聚类分析法、价值工程法、神经网络法等。**

14.1 理想解法

目前已有许多解决多属性决策的排序法，如理想点法、简单线性加权法、加权平方和法、主成分分析法、功效系数法、可能满意度法、交叉增援矩阵法等。本节介绍多属性决策问题的理想解法，**理想解法亦称为TOPSIS法，是一种有效的多指标评价方法。**这种方法通过构造评价问题的正理想解和负理想解，即各指标的最优解和最劣解，通过计算每个方案到理想方案的相对贴近度，即靠近正理想解和远离负理想解的程度，来对方案进行排序，从而选出最优方案。

14.1.1 方法和原理

设多属性决策方案集为 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, 衡量方案优劣的属性变量为 x_1, \dots, x_n , 这时方案集 D 中的每个方案 d_i ($i = 1, \dots, m$) 的 n 个属性值构成的向量是 $[a_{i1}, \dots, a_{in}]$, 它作为 n 维空间中的一个点, 能唯一地表征方案 d_i 。

正理想解 C^* 是一个方案集 D 中并不存在的虚拟的最佳方案，它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最好值；而负理想解 C^0 则是虚拟的最差方案，它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最差值。在 n 维空间中，将方案集 D 中的各备选方案 d_i 与正理想解 C^* 和负理想解 C^0 的距离进行比较，既靠近正理想解又远离负理想解的方案就是方案集 D 中的最佳方案；并可以据此排定方案集 D 中各备选方案的优先序。

用理想解法求解多属性决策问题的概念简单，只要在属性空间定义适当的距离测度就能计算备选方案与理想解的距离。TOPSIS 法所用的是欧氏距离。至于既用正理想解又用负理想解是因为在仅仅使用正理想解时有时会出现某两个备选方案与正理想解的距离相同的情况，为了区分这两个方案的优劣，引入负理想解并计算这两个方案与负理想解的距离，与正理想解的距离相同的方案离负理想解远者为优。

14.1.2 TOPSIS法的算法步骤

TOPSIS 法的具体算法如下

(1) 用向量规划化的方法求得规范决策矩阵

设多属性决策问题的决策矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，规范化决策矩阵 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ ，其中

$$b_{ij} = a_{ij} / \sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2} , \quad i = 1, 2, \dots, m , \quad j = 1, 2, \dots, n .$$

(14.1)

(2) 构造加权规范阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$

设由决策人给定各属性的权重向量为 $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$, 则

$$c_{ij} = w_j \cdot b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14.2)$$

(3) 确定正理想解 C^* 和负理想解 C^0

设正理想解 C^* 的第 j 个属性值为 c_j^* , 负理想解 C^0 第 j 个属性值为 c_j^0 , 则

正理想解

$$c_j^* = \begin{cases} \max_i c_{ij}, & j \text{ 为效益型属性,} \\ \min_i c_{ij}, & j \text{ 为成本型属性,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14.3)$$

负理想解

$$c_j^0 = \begin{cases} \min_i c_{ij}, & j \text{ 为效益型属性,} \\ \max_i c_{ij}, & j \text{ 为成本型属性,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14.4)$$

(4) 计算各方案到正理想解与负理想解的距离

备选方案 d_i 到正理想解的距离为

$$s_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{ij} - c_j^*)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (14.5)$$

备选方案 d_i 到负理想解的距离为

$$s_i^0 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{ij} - c_j^0)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (14.6)$$

(5) 计算各方案的排序指标值（即综合评价指数）

$$f_i^* = s_i^0 / (s_i^0 + s_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (14.7)$$

(6) 按 f_i^* 由大到小排列方案的优劣次序。

14.1.3 示例

例 14.1 研究生院试评估。

为了客观地评价我国研究生教育的实际状况和各研究生院的教学质量，国务院学位委员会办公室组织过一次研究生院的评估。为了取得经验，先选 5 所研究生院，收集有关数据资料进行了试评估，表 14.1 是所给出的部分数据。

表 14.1 研究生院试评估的部分数据

| $\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$ | 人均专著 x_1 (本/人) | 生师 比 x_2 | 科研经费 x_3 (万元/年) | 逾期毕业率 x_4 (%) |
|--------------------------------------|---------------------|---------------|----------------------|--------------------|
| 1 | 0.1 | 5 | 5000 | 4.7 |
| 2 | 0.2 | 6 | 6000 | 5.6 |
| 3 | 0.4 | 7 | 7000 | 6.7 |
| 4 | 0.9 | 10 | 10000 | 2.3 |
| 5 | 1.2 | 2 | 400 | 1.8 |

解 第一步，数据预处理

数据的预处理又称属性值的规范化。

属性值具有多种类型，包括效益型、成本型和区间型等。这三种属性，效益型属性越大越好，成本型属性越小越好，区间型属性是在某个区间最佳。

在进行决策时，一般要进行属性值的规范化，主要有如下三个作用：（1）属性值有多种类型，上述三种属性放在同一个表中不便于直接从数值大小判断方案的优劣，因此需要对数据进行预处理，使得表中任一属性下性能越优的方案变换后的属性值越大。

(2) 非量纲化，多属性决策与评估的困难之一是属性间的不可公度性，即在属性值表中的每一列数具有不同的单位（量纲）。即使对同一属性，采用不同的计量单位，表中的数值也就不同。在用各种多属性决策方法进行分析评价时，需要排除量纲的选用对决策或评估结果的影响，这就是非量纲化。

(3) 归一化，属性值表中不同指标的属性值的数值大小差别很大，为了直观，更为了便于采用各种多属性决策与评估方法进行评价，需要把属性值表中的数值归一化，即把表中数值均变换到 $[0, 1]$ 区间上。

此外，还可在属性规范时用非线性变换或其它办法，来解决或部分解决某些目标的达到程度与属性值之间的非线性关系，以及目标间的不完全补偿性。

常用的属性规范化方法有以下几种。

(1) 线性变换

原始的决策矩阵为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，变换后的决策矩阵记为 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ ， $i = 1, \dots, m$ ， $j = 1, \dots, n$ 。设 a_j^{\max} 是决策矩阵第 j 列中的最大值， a_j^{\min} 是决策矩阵第 j 列中的最小值。若 x_j 为效益型属性，则

$$b_{ij} = a_{ij} / a_j^{\max}. \quad (14.8)$$

采用上式进行属性规范化时，经过变换的最差属性值不一定为 0，最佳属性值为 1。

若 x_j 为成本型属性，则

$$b_{ij} = 1 - a_{ij} / a_j^{\max} \quad (14.9)$$

采用上式进行属性规范时，经过变换的最佳属性值不一定为 1，最差属性值为 0。

(2) 标准 0—1 变换

为了使每个属性变换后的最优值为 1 且最差值为 0，可以进行标准 0—1 变换。对效益型属性 x_j ，令

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^{\min}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}, \quad (14.10)$$

对成本型属性 x_j ，令

$$b_{ij} = \frac{a_j^{\max} - a_{ij}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}. \quad (14.11)$$

由上式可知，当燃料耗尽，结构质量抛弃完时，便只剩卫星质量 m_p ，从而最终速度的数学模型为

$$v(t) = (1 - \alpha)u \ln \frac{m_0}{m_p}. \quad (6.12)$$

(6.12) 式表明，当 m_0 足够大时，便可使卫星达到我们所希望它具有的任意速度。例如，考虑到空气阻力和重力等因素，估计要使 $v = 10.5 \text{ km/s}$ 才行，如果取 $u = 3 \text{ km/s}$ ， $\alpha = 0.1$ ，则可推出 $m_0 / m_p = 50$ ，即发射 1 吨重的卫星大约需 50 吨重的理想火箭。

(3) 区间型属性的变换

有些属性既非效益型又非成本型，如生师比。显然这种属性不能采用前面介绍的两种方法处理。

设给定的最优属性区间为 $[a_j^0, a_j^*]$, a_j' 为无法容忍下限, a_j'' 为无法容忍上限, 则

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 - (a_j^0 - a_{ij}) / (a_j^0 - a_j'), & \text{若 } a_j' \leq a_{ij} < a_j^0, \\ 1, & \text{若 } a_j^0 \leq a_{ij} \leq a_j^*, \\ 1 - (a_{ij} - a_j^*) / (a_j'' - a_j^*), & \text{若 } a_j^* < a_{ij} \leq a_j'', \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(14.12)

变换后的属性值 b_{ij} 与原属性值 a_{ij} 之间的函数图形为一般梯形。当属性值最优区间的上下限相等时, 最优区间退化为一个点时, 函数图形退化为三角形。

设研究生院的生师比最佳区间为 $[5,6]$ ， $a_2' = 2$ ， $a_2'' = 12$ 。表 14.1 的属性 2 的数据处理见表 14.2(程序略)。

表 14.2 表 14.1 的属性 2 的数据处理

| $j \backslash i$ | 生师比 x_2 | 处理后的生师比 |
|------------------|-----------|---------------|
| 1 | 5 | 1 |
| 2 | 6 | 1 |
| 3 | 7 | 0.8333 |
| 4 | 10 | 0.3333 |
| 5 | 2 | 0 |

(4) 向量规范化

无论成本型属性还是效益型属性，向量规范化均用下式进行变换

$$b_{ij} = a_{ij} / \sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \quad (14.13)$$

它与前面介绍的几种变换不同，从变换后属性值的大小上无法分辨属性值的优劣。它的最大特点是，规范化后，各方案的同一属性值的平方和为 1，因此常用于计算各方案与某种虚拟方案（如理想点或负理想点）的欧氏距离的场合。

(5) 标准化处理

在实际问题中，不同变量的测量单位往往是不一样的。为了消除变量的量纲效应，使每个变量都具有同等的表现力，数据分析中常对数据进行标准化处理，即

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - \bar{a}_j}{s_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (14.14)$$

其 中 $\bar{a}_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{ij}$, $s_j = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (a_{ij} - \bar{a}_j)^2}$,
 $j = 1, 2, \dots, n$ 。

表 14.1 中的数据经标准化处理后的结果见表 14.3 (程序略)。

表 14.3 表 14.1 数据经标准化的属性值表

| $j \backslash i$ | 人均专著 x_1 | 生师比 x_2 | 科研经费 x_3 | 逾期毕业 率 x_4 |
|------------------|---------------|-----------|---------------|-----------------|
| 1 | -0.9741 | -0.3430 | -0.1946 | 0.2274 |
| 2 | -0.7623 | 0 | 0.0916 | 0.6537 |
| 3 | -0.3388 | 0.3430 | 0.3777 | 1.1747 |
| 4 | 0.7200 | 1.3720 | 1.2362 | -0.9095 |
| 5 | 1.3553 | -1.3720 | -1.5109 | -1.1463 |

我们首先对表 14.1 中属性 2 的数据进行最优值为给定区间的变换。然后对属性值进行向量规范化，计算结果见表 14.4（程序略）。

表 14.4 表 14.1 的数据经规范化后的属性值

| $\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$ | 人均专著 x_1 | 生师比 x_2 | 科研经费 x_3 | 逾期毕业 率 x_4 |
|--------------------------------------|------------|-----------|---------------|-----------------|
| 1 | 0.0638 | 0.597 | 0.3449 | 0.4546 |
| 2 | 0.1275 | 0.597 | 0.4139 | 0.5417 |
| 3 | 0.2550 | 0.4975 | 0.4829 | 0.6481 |
| 4 | 0.5738 | 0.199 | 0.6898 | 0.2225 |
| 5 | 0.7651 | 0 | 0.0276 | 0.1741 |

第二步，设权向量为 $w = [0.2, 0.3, 0.4, 0.1]$ ，得加权的向量规范化属性矩阵见表 14.5。

表 14.5 表 14.1 的数据经规范化后的加权属性值

| $\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$ | 人均专著 x_1 | 生师比 x_2 | 科研经费 x_3 | 逾期毕业 率 x_4 |
|--------------------------------------|---------------|-----------|---------------|-----------------|
| 1 | 0.0128 | 0.1791 | 0.1380 | 0.0455 |
| 2 | 0.0255 | 0.1791 | 0.1656 | 0.0542 |
| 3 | 0.0510 | 0.1493 | 0.1931 | 0.0648 |
| 4 | 0.1148 | 0.0597 | 0.2759 | 0.0222 |
| 5 | 0.1530 | 0 | 0.0110 | 0.0174 |

第三步，由表 14.5 和式 (14.3) 和式 (14.4)，得
正理想解 $C^* = [0.1530, 0.1791, 0.2759, 0.0174]$;
负理想解 $C^0 = [0.0128, 0, 0.0110, 0.0648]$ 。

第四步，分别用式 (14.5) 和式 (14.6) 求各方案到正理想解的距离 s_i^* 和负理想解的距离 s_i^0 ，列于表 14.6。

表 14.6 距离值及综合指标值

| | s_i^* | s_i^0 | f_i^* |
|---|---------|---------|---------|
| 1 | 0.1987 | 0.2204 | 0.5258 |
| 2 | 0.1726 | 0.2371 | 0.5787 |
| 3 | 0.1428 | 0.2385 | 0.6255 |
| 4 | 0.1255 | 0.2932 | 0.7003 |
| 5 | 0.3198 | 0.1481 | 0.3165 |

第五步，计算排序指标值 f_i^* （见表 14.6），由 f_i^* 值的大小可确定各方案的从优到劣的次序为 4，3，2，1，5(程序略)。

14.5 主成分分析法

例 14.6 表 14.14 是我国 1984—2000 年宏观投资的一些数据，试利用主成分分析对投资效益进行分析和排序。

表14.14 1984—2000年宏观投资效益主要指标

| 年份 | 投资效果 系数 (无时滞) | 投资效果 系数 (时滞一 年) | 全社会固 定资产交 付使用率 | 建设项目 投产率 | 基建房屋 竣工率 |
|-------------|------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|---------------------|---------------------|
| 1984 | 0.71 | 0.49 | 0.41 | 0.51 | 0.46 |
| 1985 | 0.40 | 0.49 | 0.44 | 0.57 | 0.50 |
| 1986 | 0.55 | 0.56 | 0.48 | 0.53 | 0.49 |
| 1987 | 0.62 | 0.93 | 0.38 | 0.53 | 0.47 |
| 1988 | 0.45 | 0.42 | 0.41 | 0.54 | 0.47 |
| 1989 | 0.36 | 0.37 | 0.46 | 0.54 | 0.48 |
| 1990 | 0.55 | 0.68 | 0.42 | 0.54 | 0.46 |
| 1991 | 0.62 | 0.90 | 0.38 | 0.56 | 0.46 |
| 1992 | 0.61 | 0.99 | 0.33 | 0.57 | 0.43 |
| 1993 | 0.71 | 0.93 | 0.35 | 0.66 | 0.44 |
| 1994 | 0.59 | 0.69 | 0.36 | 0.57 | 0.48 |
| 1995 | 0.41 | 0.47 | 0.40 | 0.54 | 0.48 |
| 1996 | 0.26 | 0.29 | 0.43 | 0.57 | 0.48 |
| 1997 | 0.14 | 0.16 | 0.43 | 0.55 | 0.47 |

解 用 x_1, x_2, \dots, x_5 分别表示投资效果系数（无时滞），投资效果系数（时滞一年），全社会固定资产投资交付使用率，建设项目投产率，基建房屋竣工率。用 $i = 1, 2, \dots, 17$ 分别表示 1984 年, 1985 年, ..., 2000 年，第 i 年 x_1, x_2, \dots, x_5 的取值分别记作 $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i5}]$ ，构造矩阵 $A = (a_{ij})_{17 \times 5}$ 。

基于主成分分析法的评价步骤如下

(1) 对原始数据进行标准化处理

将各指标值 a_{ij} 转换成标准化指标 \tilde{a}_{ij} ,

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - \mu_j}{s_j}, \quad (i = 1, 2, \dots, 17, \quad j = 1, 2, \dots, 5) ,$$

$$\text{其中 } \mu_j = \frac{1}{17} \sum_{i=1}^{17} a_{ij}, \quad s_j = \sqrt{\frac{1}{17-1} \sum_{i=1}^{17} (a_{ij} - \mu_j)^2},$$

$(j = 1, 2, \dots, 5)$, 即 μ_j, s_j 为第 j 个指标的样本均值和样本标准差。对应地, 称

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j - \mu_j}{s_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$$

为标准化指标变量。

(2) 计算相关系数矩阵 R

相关系数矩阵 $R = (r_{ij})_{5 \times 5}$

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{17} \tilde{a}_{ki} \cdot \tilde{a}_{kj}}{17-1}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 5),$$

式中 $r_{ii} = 1$, $r_{ij} = r_{ji}$, r_{ij} 是第 i 个指标与第 j 个指标的相关系数。

(3) 计算特征值和特征向量

计算相关系数矩阵 R 的特征值

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_5 \geq 0$ ，及对应的标准化特征向量

u_1, u_2, \cdots, u_5 ，其中 $u_j = [u_{1j}, u_{2j}, \cdots, u_{5j}]^T$ ，由特征向量组成5个新的指标变量

$$y_1 = u_{11}\tilde{x}_1 + u_{21}\tilde{x}_2 + \cdots + u_{51}\tilde{x}_5,$$

$$y_2 = u_{12}\tilde{x}_1 + u_{22}\tilde{x}_2 + \cdots + u_{52}\tilde{x}_5,$$

.....,

$$y_5 = u_{15}\tilde{x}_1 + u_{25}\tilde{x}_2 + \cdots + u_{55}\tilde{x}_5,$$

式中 y_1 是第1主成分， y_2 是第2主成分， \cdots ， y_5 是第5主成分。

(4) 选择 p ($p \leq 5$) 个主成分，计算综合评价值

i) 计算特征值 λ_j ($j = 1, 2, \dots, 5$) 的信息贡献率和累积贡献率。称

$$b_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^5 \lambda_k} \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$$

为主成分 y_j 的信息贡献率；

$$\alpha_p = \frac{\sum_{k=1}^p \lambda_k}{\sum_{k=1}^5 \lambda_k}$$

为主成分 y_1, y_2, \dots, y_p 的累积贡献率，当 α_p 接近于1
（ $\alpha_p = 0.85, 0.90, 0.95$ ）时，则选择前 p 个指标变量
 y_1, y_2, \dots, y_p 作为 p 个主成分，代替原来5个指标变量，从
而可对 p 个主成分进行综合分析。

ii) 计算综合得分

$$Z = \sum_{j=1}^p b_j y_j ,$$

其中 b_j 为第 j 个主成分的信息贡献率，根据综合得分值就可进行评价。

利用Matlab软件求得相关系数矩阵的前5个特征根及其贡献率如表14.15。

表14.15 主成分分析结果

| 序号 | 特征根 | 贡献率 | 累计贡献率 |
|-----------|---------------|----------------|-----------------|
| 1 | 3.1343 | 62.6866 | 62.6866 |
| 2 | 1.1683 | 23.3670 | 86.0536 |
| 3 | 0.3502 | 7.0036 | 93.0572 |
| 4 | 0.2258 | 4.5162 | 97.5734 |
| 5 | 0.1213 | 2.4266 | 100.0000 |

可以看出，前三个特征根的累计贡献率就达到93%以上，主成分分析效果很好。下面选取前三个主成分进行综合评价。前三个特征根对应的特征向量见表 14.16。

**表14.16 标准化变量的前4个
主成分对应的特征向量**

| | \tilde{x}_1 | \tilde{x}_2 | \tilde{x}_3 | \tilde{x}_4 | \tilde{x}_5 |
|---------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 第1特征向量 | 0.490 542 | 0.5253 51 | -0.48 706 | 0.067 054 | -0.49 158 |
| 第2特征向量 | -0.293 44 | 0.0489 88 | -0.28 12 | 0.898 117 | 0.16 0648 |
| 第3特征向量 | 0.510 897 | 0.4336 6 | 0.371 351 | 0.147 658 | 0.62 5475 |

由此可得三个主成分分别为

$$y_1 = 0.491\tilde{x}_1 + 0.525\tilde{x}_2 - 0.487\tilde{x}_3 + 0.067\tilde{x}_5 - 0.492\tilde{x}_5,$$

$$y_2 = -0.293\tilde{x}_1 + 0.049\tilde{x}_2 - 0.281\tilde{x}_3 + 0.898\tilde{x}_4 + 0.161\tilde{x}_5,$$

$$y_3 = 0.511\tilde{x}_1 + 0.434\tilde{x}_2 + 0.371\tilde{x}_3 + 0.148\tilde{x}_4 + 0.625\tilde{x}_5,$$

分别以三个主成分的贡献率为权重,构建主成分综合评价模型

$$Z = 0.6269y_1 + 0.2337y_2 + 0.076y_3.$$

把各年度的三个主成分值代入上式,可以得到各年度的综合评价价值以及排序结果如表 14.17 所示(程序略)。

表14.17 排名和综合评价结果

| | | | | | | | | | |
|-----------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 年代 | 1993 | 1992 | 1991 | 1994 | 1987 | 1990 | 1984 | 2000 | 1995 |
| 名次 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 评价 值 | 2.446 4 | 1.976 8 | 1.112 3 | 0.860 4 | 0.845 6 | 0.225 8 | 0.053 1 | 0.053 1 | -0.25 34 |
| 年代 | 1988 | 1985 | 1996 | 1986 | 1989 | 1997 | 1999 | 1998 | 1986 |
| 名次 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | |
| 评价 值 | 0.266 2 | 0.529 2 | 0.740 5 | 0.778 9 | 0.971 5 | 1.147 6 | -1.20 15 | -1.68 48 | |