用Matlab进行数据拟合

实验目的：

1. 了解多项式和非线性曲线拟合命令。

2. 掌握用数学软件求解拟合问题。

用Matlab进行数据拟合

1. 多项式曲线拟合：polyfit.

p=polyfit(x,y,m)

其中, **x, y**为已知数据点向量, 分别表示横,纵坐标, **m**为拟合多项式的次数, 结果返回**m**次拟合多项式系数, 从高次到低次存放在向量**p**中.

y0=polyval(p,x0)

可求得多项式在**x0**处的值**y0.**

例1 已知观测数据点如表所示

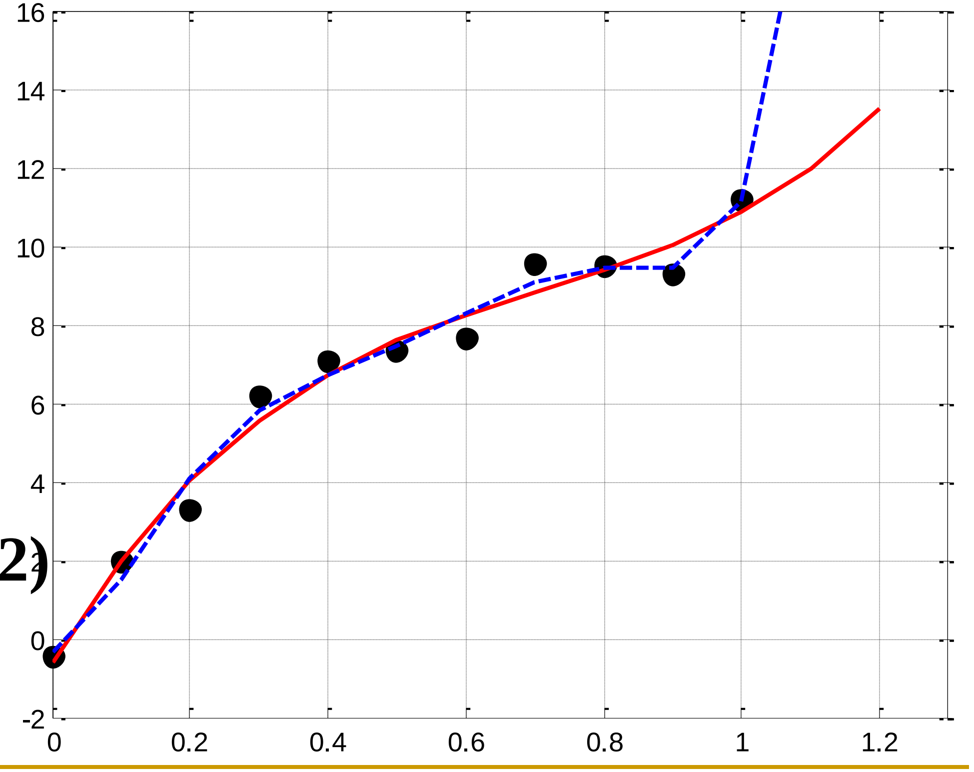
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	-0.447	1.978	3.28	6.16	7.08	7.34	7.66	9.56	9.48	9.3	11.2

分别用3次和6次多项式曲线拟合这些数据点.

编写Matlab程序如下:

```
x=0:0.1:1
y=[-0.447,1.978,3.28,6.16,7.08,7.34,7.66,9.56,9.48,9.3,11.2]
plot(x,y,'k.','markersize',25)
axis([0 1.3 -2 16])
p3=polyfit(x,y,3)
p6=polyfit(x,y,6)
```

```
x=0:0.1:1
y=[-0.447,1.978,3.28,6.16,7.08,7.34,7.66,9.56,9.48,9.3,11.2]
plot(x,y,'k.','markersize',25)
axis([0 1.3 -2 16])
p3=polyfit(x,y,3)
p6=polyfit(x,y,6)

t=0:0.1:1.2
s=polyval(p3,t)
s1=polyval(p6,t)
hold on
plot(t,s,'r-','linewidth',2)
plot(t,s1,'b--','linewidth',2)
grid on
```



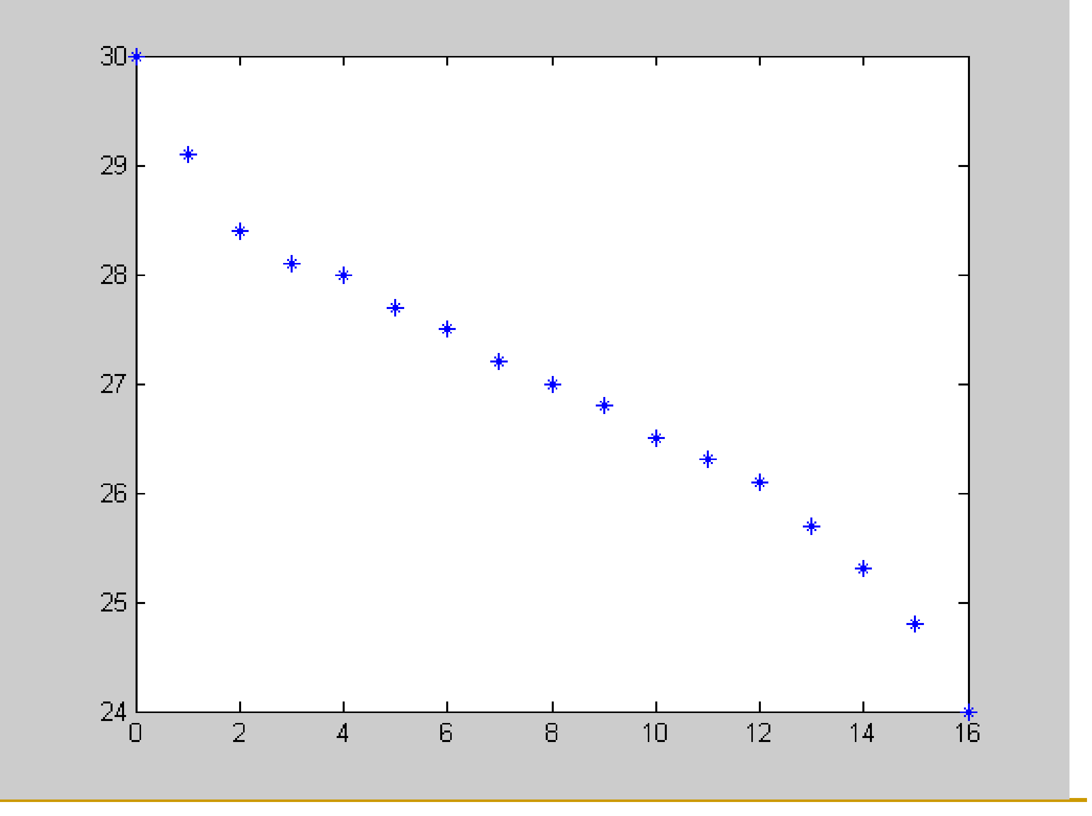
例2 用切削机床进行金属品加工时, 为了适当地调整机床, 需要测定刀具的磨损速度. 在一定的时间测量刀具的厚度, 得数据如表所示:

切削时间 t/h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
刀具厚度 y/cm	30.0	29.1	28.4	28.1	28.0	27.7	27.5	27.2	27.0

切削时间 t/h	9	10	11	12	13	14	15	16
刀具厚度 y/cm	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8	24.0

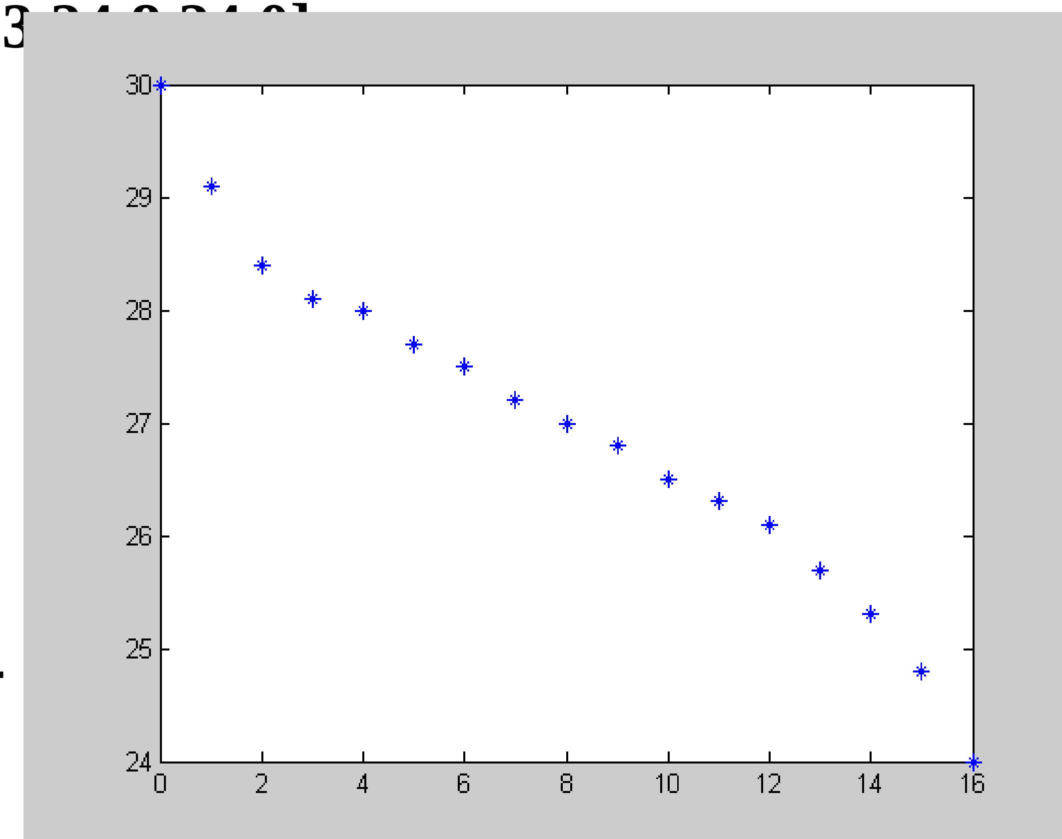
解: 描出散点图, 在命令窗口输入:

```
t=[0:1:16]
y=[30.0 29.1 28.4 28.1 28.0 27.7 27.5 27.2 27.0 26.8
26.5 26.3 26.1 25.7 25.3 24.8 24.0]
plot(t,y,'*')
```



解：描出散点图, 在命令窗口输入:

```
t=[0:1:16]
y=[30.0 29.1 28.4 28.1 28.0 27.7 27.5 27.2 27.0 26.8
26.5 26.3 26.1 25.7 25.3 24.8 24.0]
plot(t,y,'*')

a=polyfit(t,y,1)

a =
  -0.3012   29.3804

hold on

y1=-0.3012*t+29.3804

plot(t, y1), hold off
```



例2 用切削机床进行金属品加工时, 为了适当地调整机床, 需要测定刀具的磨损速度. 在一定的时间测量刀具的厚度, 得数据如表所示:

切削时间 t/h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
刀具厚度 y/cm	30.0	29.1	28.4	28.1	28.0	27.7	27.5	27.2	27.0

切削时间 t/h	9	10	11	12	13	14	15	16
刀具厚度 y/cm	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8	24.0

拟合曲线为: $y=-0.3012t+29.3804$

例3 一个15.4cm×30.48cm的混凝土柱在加压实验中的应力-应变关系测试点的数据如表所示

$\sigma/(\mathrm{N/m^2})$	1.55	2.47	2. 93	3. 03	2.89
ε	500×10^{-6}	1000×10^{-6}	1500×10^{-6}	2000×10^{-6}	2375×10^{-6}
$\sigma/\varepsilon/(\mathrm{N/m^2})$	3.103×10^{3}	2.465×10^{3}	1.953×10^{3}	1.517×10^{3}	1.219×10^{3}

已知应力-应变关系可以用一条指数曲线来描述, 即假设

$$\sigma = k_1 \varepsilon e^{-k_2\varepsilon}$$

式中, σ 表示应力, 单位是 $\mathrm{N/m^2}$; ε表示应变.

已知应力-应变关系可以用一条指数曲线来描述, 即假设

$$\sigma = k_1 \varepsilon e^{-k_2 \varepsilon}$$

式中, σ 表示应力, 单位是 N/m²; ε表示应变.

解 选取**指数函数**作拟合时, 在拟合前需作变量代换,

化为 k_1, k_2 的线性函数.

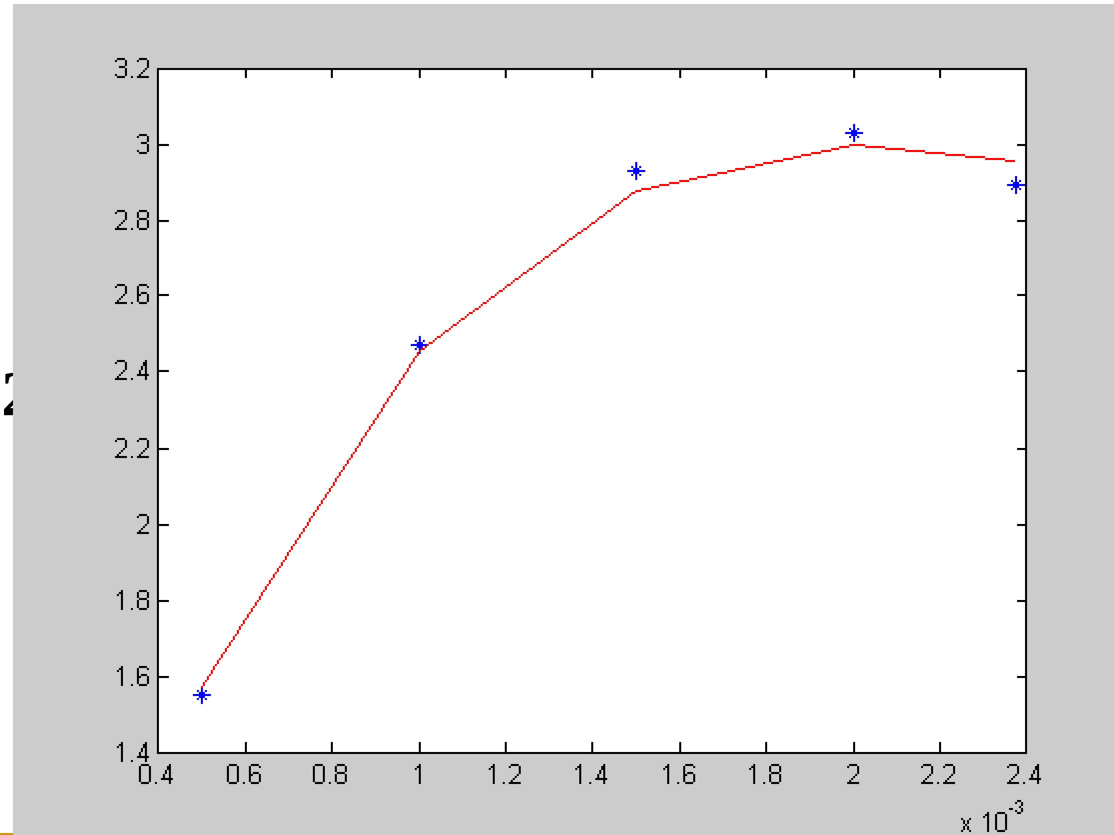
于是, $$\ln\frac{\sigma}{\varepsilon} = \ln k_1 - k_2 \varepsilon$$

令 $$z = \ln\frac{\sigma}{\varepsilon},\ a_0 = -k_2,\ a_1 = \ln k_1$$

即 $$z = a_0 \varepsilon + a_1$$

在命令窗口输入:

```
x=[500*1.0e-6 1000*1.0e-6 1500*1.0e-6 2000*1.0e-6 2375*1.0e-6];
y=[3.103*1.0e+3 2.465*1.0e+3 1.953*1.0e+3 1.517*1.0e+3
1.219*1.0e+3];
z=log(y);
a=polyfit(x,z,1);
a0=a(1,1);
k1=exp(a(1,2));
w=[1.55 2.47 2.93 3.03 2
plot(x,w,'*')
hold on
y1=k1*x.*exp( a0*x);
plot(x,y1,'r-')
```



已知应力-应变关系可以用一条指数曲线来描述, 即假设

$$\sigma = k_1 \varepsilon e^{-k_2 \varepsilon}$$

式中, σ 表示应力, 单位是 N/m²; ε表示应变.

令 $z = \ln\dfrac{\sigma}{\varepsilon}$, $a_0 = -k_2$, $a_1 = \ln k_1$, 则 $z = a_0 \varepsilon + a_1$

求得 $a_0 = -k_2 = -494.5209$, $a_1 = \ln k_1 = 8.3009$,

于是 $k_1 = 4.0275 \times 10^3$, $k_2 = 494.5209$

拟合曲线为: $\sigma = 4.0275 \times 10^3 \varepsilon e^{-494.5209\varepsilon}$

在实际应用中常见的拟合曲线有:

直线 $$y = a_0 x + a_1$$

多项式 $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 一般 n=2, 3, 不宜过高.

双曲线(一支) $$y = \frac{a_0}{x} + a_1$$

指数曲线 $$y = ae^{bx}$$

2. 非线性曲线拟合：lsqcurvefit.

x=lsqcurvefit(fun, x0, xdata, ydata)

[x, resnorm]=lsqcurvefit(fun, x0, xdata, ydata)

功能: 根据给定的数据 xdata, ydata (对应点的横, 纵坐标), 按函数文件 fun 给定的函数, 以x0为初值作最小二乘拟合, 返回函数 fun中的系数向量x和残差的平方和resnorm.

例4 已知观测数据点如表所示

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	3.1	3.27	3.81	4.5	5.18	6	7.05	8.56	9.69	11.25	13.17

求三个参数 a, b, c的值, 使得曲线 $f(x)=ae^{x}+bx^{2}+cx^{3}$ 与已知数据点在最小二乘意义上充分接近.

首先编写存储拟合函数的函数文件.

```
function  f=nihehanshu(x,xdata)
f=x(1)*exp(xdata)+x(2)*xdata.^2+x(3)*xdata.^3
```

保存为文件 nihehanshu.m

例4 已知观测数据点如表所示

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	3.1	3.27	3.81	4.5	5.18	6	7.05	8.56	9.69	11.25	13.17

求三个参数 a, b, c的值, 使得曲线 $f(x)=ae^x+bx^2+cx^3$ 与已知数据点在最小二乘意义上充分接近.

编写下面的程序调用拟合函数.

```
xdata=0:0.1:1;
ydata=[3.1,3.27,3.81,4.5,5.18,6,7.05,8.56,9.69,11.25,13.17];
x0=[0,0,0];
[x,resnorm]=lsqcurvefit(@nihehanshu,x0,xdata,ydata)
```

编写下面的程序调用拟合函数.

```
xdata=0:0.1:1;
ydata=[3.1,3.27,3.81,4.5,5.18,6,7.05,8.56,9.69,11.25,13.17];
x0=[0,0,0];
[x,resnorm]=lsqcurvefit(@nihehanshu,x0,xdata,ydata)
```

程序运行后显示

```
x =
    3.0022    4.0304    0.9404

resnorm =
    0.0912
```

例4 已知观测数据点如表所示

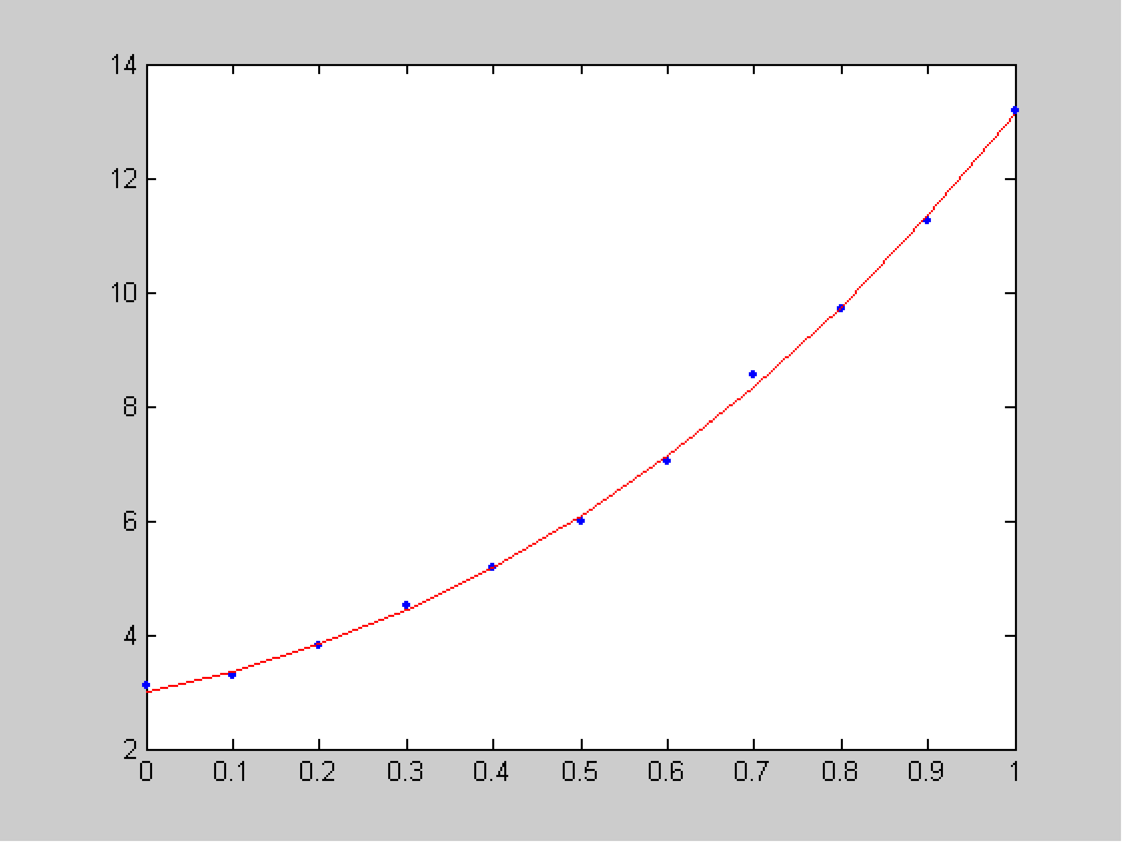
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	3.1	3.27	3.81	4.5	5.18	6	7.05	8.56	9.69	11.25	13.17

求三个参数 a, b, c的值, 使得曲线 $f(x)=ae^x+bx^2+cx^3$ 与已知数据点在最小二乘意义上充分接近.

说明: 最小二乘意义上的最佳拟合函数为

$$f(x)= 3e^x+ 4.03x^2 + 0.94\, x^3.$$

此时的残差是: 0.0912.



拟合函数为：$f(x)= 3e^x+ 4.03x^2 + 0.94\, x^3$.

作业:

1. 已知观测数据点如表所示

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	3.1	3.27	3.81	4.5	5.18	6	7.05	8.56	9.69	11.25	13.17

求用三次多项式进行拟合的曲线方程.

2. 已知观测数据点如表所示

x	1.6	2.7	1.3	4.1	3.6	2.3	0.6	4.9	3	2.4
y	17.7	49	13.1	189.4	110.8	34.5	4	409.1	65	36.9

求a, b, c的值, 使得曲线 $f(x)=ae^x+b\sin x+c\ln x$ 与已知数据点在最小二乘意义上充分接近.

例5 给药方案

一种新药用于临床之前, 必须设计给药方案. 在快速静脉注射的给药方式下, 所谓给药方案是指, 每次注射剂量多大, 间隔时间多长.
药物进入机体后随血液输送到全身, 在这个过程中不断地被吸收, 分布, 代谢, 最终排除体外. 药物在血液中的浓度, 即单位体积血液中的药物含量, 称血药浓度. 在最简单的一室模型中, 将整个机体看作一个房室, 称中心室, 室内的血药浓度是均匀的. 快速静脉注射后, 浓度立即上升; 然后逐渐下降. 当浓度太低时, 达不到预期的治疗效果; 血药浓度太高, 又可能导致药物中毒或副作用太强. 临床上, 每种药物有一个最小有效浓度 c_1 和一个最大治疗浓度 c_2. 设计给药方案时, 要使血药浓度保持在 c_1-c_2 之间. 设本题所研究药物的最小有效浓度 c_1=10, 最大治疗浓度 c_2=25 $(\mu g/ml)$

例5 给药方案

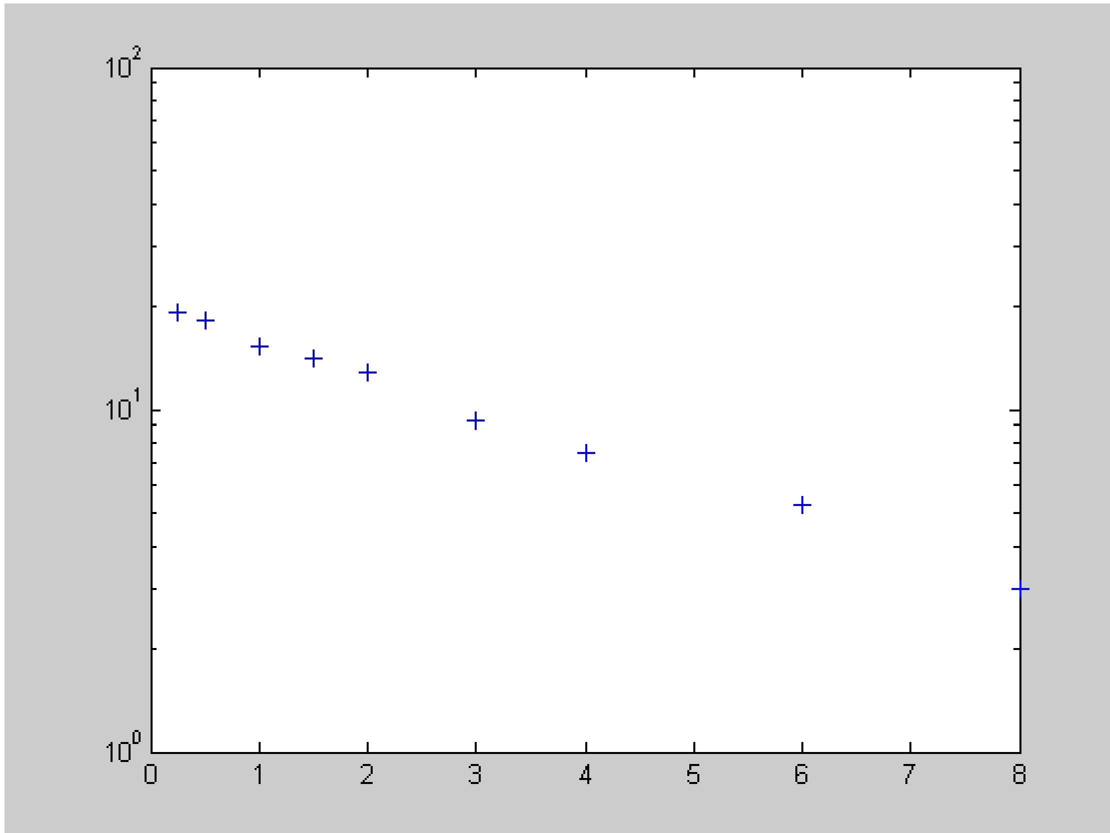
显然, 要设计给药方案, 必须知道给药后血药浓度随时间变化的规律. 为此, 从实验和理论两方面着手.

在实验方面, 对某人用快速静脉注射方式一次注入该药物300mg后, 在一定时刻 *t* (小时)采集血样, 测得血药浓度c

如表: 血药浓度c(t) 的测试数据

t	0.25	0.5	1	1.5	2	3	4	6	8
c	19.21	18.15	15.36	14.10	12.89	9.32	7.45	5.24	3.01

例5 给药方案



$t \sim \log c$ 近似直线关系, 即 $c(t)$ 有按负指数规律减少的趋势.

例5 给药方案

1. 确定血药浓度的变化规律

假设: *a*) 药物向体外排除的速率与中心室的血药浓度成正比, 比例系数为 $k(>0)$, 称排除速率.

***b*) 中心室血液容积为常数 V, $t=0$ 瞬时注入药物的剂量为 d, 血药浓度立即为 $\frac{d}{V}$.**

由假设 *a*), 中心室的血药浓度 $c(t)$应满足微分方程 $\frac{dc}{dt}=-kc$

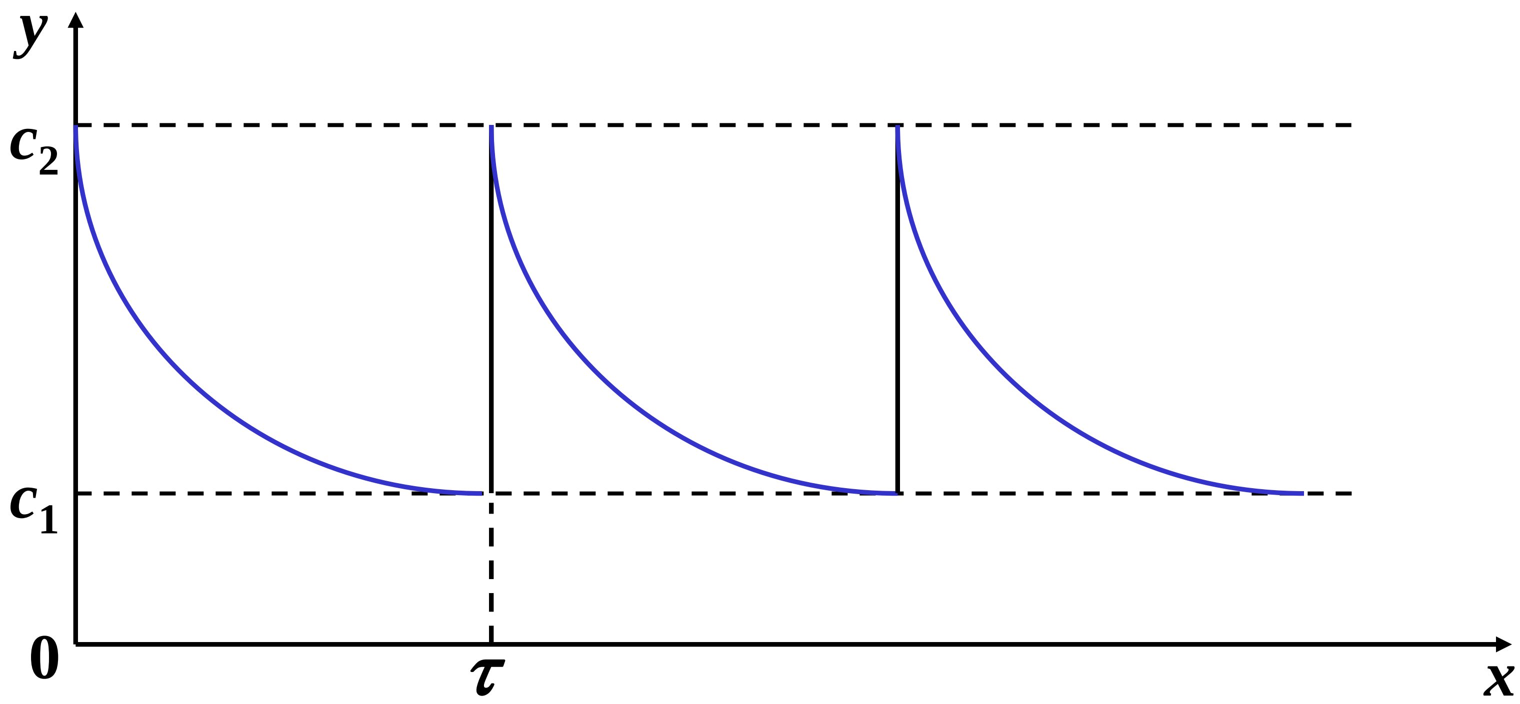
由假设 *b*), 方程的初始条件为: $c(0)=\frac{d}{V}$.

求解得: $c(t)=\frac{d}{V}e^{-kt}$. 即血药浓度$c(t)$按指数规律下降.

2. 给药方案设计

简单实用的给药方案是:

每隔一定时间 τ , 重复注入固定剂量 D, 使血药浓度 $c(t)$ 呈周期性变化, 并保持在 c_1-c_2 之间.



2. 给药方案设计

简单实用的给药方案是:

每隔一定时间 τ , 重复注入固定剂量 D, 使血药浓度 $c(t)$ 呈周期性变化, 并保持在 c_1-c_2 之间.

为此, 初次剂量需加大到 D_0.

由式 $c(t)=\dfrac{d}{V}e^{-kt}$ 得到:

$$D_0=Vc_2,\ \ D=V\left(c_2-c_1\right),\ \ \tau=\frac{1}{k}\ln\frac{c_2}{c_1}$$

显然, 当 c_1, c_2 给定后, 要确定给药方案 $\left\{D_0, D, \tau\right\}$,

必须知道参数 V 和 k.

2. 由实验数据作曲线拟合以确定参数

为了用线性最小二乘法拟合 $c(t)=\frac{d}{V}e^{-kt}$ 的系数 V 和 k, 先取对数得

$$\ln c=\ln\frac{d}{V}-kt$$

记 $$y=\ln c,\ a_1=-k,\ a_2=\ln\frac{d}{V}$$

问题化为由数据 t_i, y_i (i=1,⋯,8) 拟合直线

$$y=a_1t+a_2$$

用Matlab作线性最小二乘法拟合, 得到

$$a_1=-0.2347,\ a_2=2.9943.$$

为了用线性最小二乘法拟合 $c(t)=\frac{d}{V}e^{-kt}$ 的系数 V 和 k, 先取对数得

$$\ln c=\ln\frac{d}{V}-kt$$

记 $y=\ln c,\ a_1=-k,\ a_2=\ln\frac{d}{V}$

问题化为由数据 $t_i,\ y_i\ (i=1,\cdots,8)$ 拟合直线

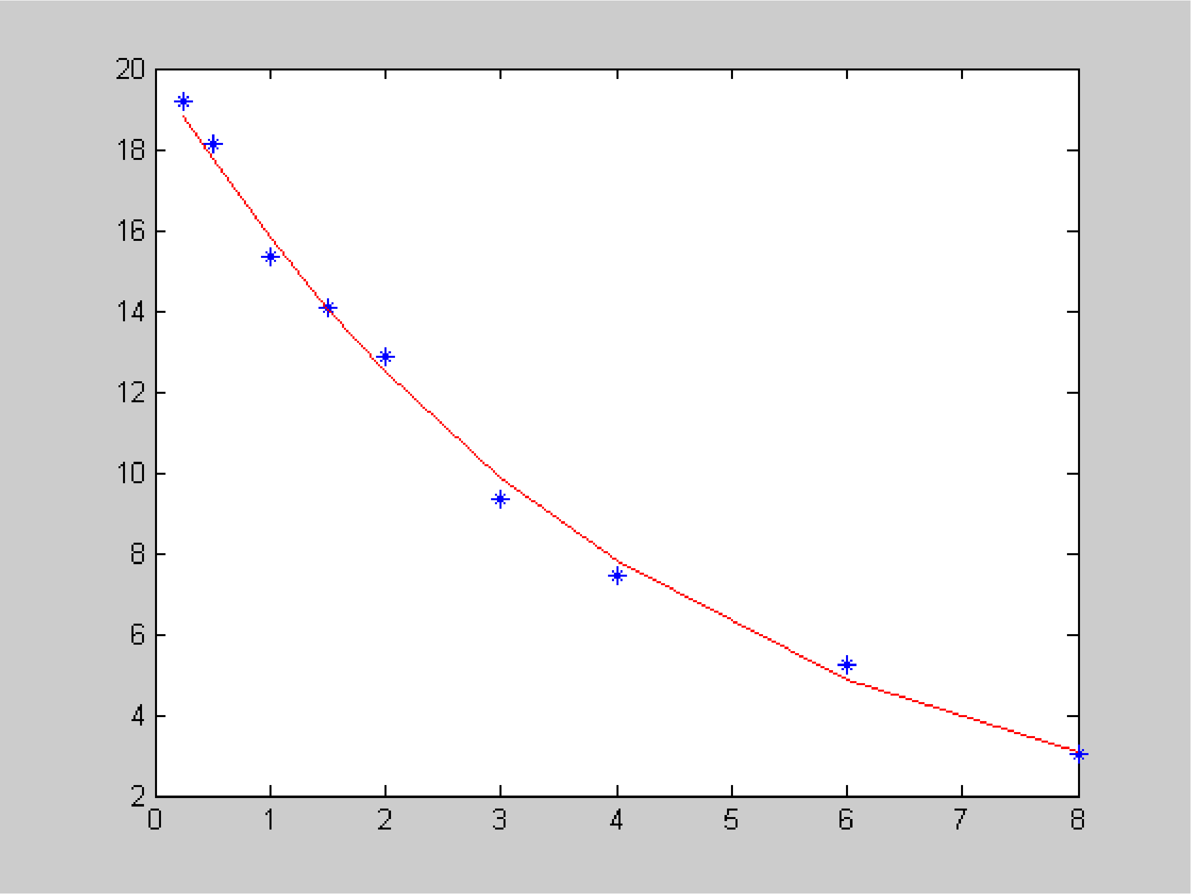
$$y=a_1t+a_2$$

用Matlab作线性最小二乘法拟合, 得到

$$a_1=-0.2347,\ a_2=2.9943.$$

由实验数据 d=300 (mg) 算出: $k=0.2347,\ V=15.02.$

拟合曲线为：$c(t)=\frac{300}{15.02}e^{-0.2347t}$



3. 结论

将 k, V 和给出的 $c_1=10$, $c_2=25$ 代入

$$\ln c = \ln \frac{d}{V} - kt$$

得: $D_0=375.5$, $D=225.3$, $\tau = 3.9$.

给药方案不妨定为:

$D_0=375$ mg , $D=225$ mg , $\tau = 4$ 小时.