

2012—2013 学年第一学期

《概率论与数理统计》期末试卷

一. 填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 设 A, B 为随机事件, $P(B)=0.4$, $P(B|A)=0.2$, $P(A|B)=0.2$, 则 $P(A)=$ _____.
2. 随机变量 $X \sim B(2, p)$, $Y \sim B(3, p)$ (二项分布), 且 $P\{Y \geq 1\}=19/27$, 则 $P\{X \geq 1\}=$ _____.
3. 已知随机变量 $X \sim P(3)$ (泊松分布), 则 $Z = X^2$ 的期望 $EZ =$ _____.
4. 设随机变量 X 的数学期望 $EX = 75$, 方差 $DX = 5$ 且由切比雪夫不等式, 有 $P\{|X - 75| \geq k\} \leq 0.05$, 则 $k =$ _____.
5. 设 X 和 Y 独立同分布 $N(0, 2^2)$, X_1, X_2, X_3, X_4 和 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 是分别来自 X 和 Y 的随机样本, 则统计量 $U = \frac{X_1 + \cdots + X_4}{\sqrt{Y_1^2 + \cdots + Y_4^2}}$ 服从 _____ 分布.

二. 选择题 (每题 3 分, 共 15 分):

1. 设事件 A, B, C 两两独立, 则 A, B, C 相互独立的充要条件是 _____.
(A) A 与 BC 独立 (B) AB 与 $A \cup C$ 独立
(C) AB 与 AC 独立 (D) $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 独立
2. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且服从正态分布 $X \sim N(0, 3^2)$, $Y \sim N(-1, 5^2)$, 则 _____.
(A) $P\{X + Y \leq 0\} = 1/2$ (B) $P\{X + Y \leq 1\} = 1/2$
(C) $P\{X - Y \leq 0\} = 1/2$ (D) $P\{X - Y \leq 1\} = 1/2$
3. 设随机变量 X_1, X_2 的分布函数为 $F_1(x), F_2(x)$, 若 $F(x) = aF_1(x) + bF_2(x)$ 为某一随机变量的分布函数, 则 _____.
(A) $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$ (B) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$
(C) $a = \frac{3}{5}, b = \frac{1}{5}$ (D) $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{5}$
4. 设随机变量 X, Y 的方差存在且不为零, 若 $D(X + Y) = DX + DY$, 则 X, Y 必然 _____.
(A) 独立 (B) 相关系数为零
(C) 不独立 (D) 相关系数不为零

5. 在假设检验中, 记 H_0 为待检验假设, 则所谓犯第二类错误指的是_____.

- (A) H_0 为真时, 接受 H_0 (B) H_0 为真时, 拒绝 H_0
(C) H_0 为假时, 接受 H_0 (D) H_0 为假时, 拒绝 H_0

三. (10 分) 已知 $P(A) = 3/4, P(B|A) = 3/4, P(B|\bar{A}) = 3/8$,
求: (1) $P(A \cup B)$; (2) $P(A|B)$.

四. (10 分) 一袋中装有 5 只球, 编号为 1, 2, 3, 4, 5, 在袋中同时取 3 只, 以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码,
求: (1) X 的分布律;
(2) X 的分布函数;
(3) $Y = (X - 4)^2$ 的分布律.

五. (10 分) 设随机变量 (X, Y) 的分布密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+y), & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求: (1) X, Y 的边缘分布密度;
(2) $Z = X + Y$ 的概率分布.

六. (10 分) 设随机变量 Z 在区间 $[-2, 2]$ 上服从均匀分布, 随机变量

$$X = \begin{cases} -1, & \text{若 } Z \leq -1, \\ 1, & \text{若 } Z > -1, \end{cases} \quad ; \quad Y = \begin{cases} -1, & \text{若 } Z \leq 1, \\ 1, & \text{若 } Z > 1, \end{cases} .$$

求: (1) X 和 Y 的联合概率分布;

(2) $E(X + Y)^2$.

七. (10 分) 已知 X, Y 分别服从正态分布 $X \sim N(0, 3^2), Y \sim N(1, 4^2)$, 且 X 与 Y 相关系数 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$, 设 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{4}$

求: (1) 数学期望 EZ , 方差 DZ ;

(2) Y 与 Z 的相关系数 ρ_{YZ} .

八. (10 分) 设总体 X 的分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad (\theta > 1),$$

θ 为未知参数, 且 X_1, \dots, X_n 是来自总体的简单随机样本,

求: (1) 参数 θ 的矩估计量;

(2) 参数 θ 的极大似然估计量.

九. (10 分) 设由来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的长度为 9 的样本得样本均值 $\bar{X} = 5$, 样本标准差 $S = 1.21$,

求: (1) 若已知 $\sigma = 1$, 求未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间;

(2) 若 σ 未知, 求未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

($\Phi(1.645) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $P(t(8) > 1.8595) = 0.05$,

$P(t(8) > 2.306) = 0.025$, $P(t(9) > 1.8331) = 0.05$, $P(t(9) > 2.2622) = 0.025$,)