

数学建模算法与应用

第2章 整数规划





2.1 概论

1. 整数规划的定义

数学规划中的变量（部分或全部）限制为整数时，称为整数规划。若在线性规划模型中，变量限制为整数，则称为整数线性规划。目前所流行的求解整数规划的方法，往往只适用于整数线性规划。目前还没有一种方法能有效地求解一切整数规划。





2. 整数规划的分类

如不加特殊说明，一般指整数线性规划。对于整数线性规划模型大致可分为两类

- (1) 变量全限制为整数时，称**纯（完全）整数规划**。
- (2) 变量部分限制为整数的，称**混合整数规划**。





3. 整数规划特点

(1) 原线性规划有最优解，当自变量限制为整数后，其整数规划解出现下述情况

i) 原线性规划最优解全是整数，则整数规划最优解与线性规划最优解一致。

ii) 整数规划无可行解。





例 2.1 原线性规划为

$$\min \quad z = x_1 + x_2,$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 4x_2 = 5, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

其最优实数解为 $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{4}, \min z = \frac{5}{4}$, 而对应的
整数规划无可行解。



iii) 有可行解（当然就存在最优解），但最优解值变差。

例 2.2 原线性规划为

$$\min \quad z = x_1 + x_2,$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 4x_2 = 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

其最优实数解为 $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}, \min z = \frac{3}{2}$ 。

若限制为整数得 $x_1 = 1, x_2 = 1, \min z = 2$ 。





3. 整数规划特点

(2) 整数规划最优解不能按照实数最优解简单取整而获得。





4. 求解方法分类

- (1) 分枝定界法—可求纯或混合整数线性规划。
- (2) 割平面法—可求纯或混合整数线性规划。
- (3) 隐枚举法—求解“0-1”整数规划。
 - i) 过滤隐枚举法；
 - ii) 分枝隐枚举法。
- (4) 匈牙利法—解决指派问题（“0-1”规划特殊情形）。
- (5) 蒙特卡洛法—求解各种类型规划。





2.2 0-1型整数规划

0-1型整数规划是整数规划中的特殊情形，它的变量 x_j 仅取值0或1。这时 x_j 称为0-1变量，或称二进制变量。 x_j 仅取值0或1这个条件可由下述约束条件

$$0 \leq x_j \leq 1, \text{ 且为整数,}$$

所代替，是和一般整数规划的约束条件形式一致的。





2.2.1 相互排斥的约束条件

有两种运输方式可供选择,但只能选择一种运输方式,或者用车运输,或者用船运输。用车运输的约束条件为 $5x_1 + 4x_2 \leq 24$, 用船运输的约束条件为 $7x_1 + 3x_2 \leq 45$ 。即有两个相互排斥的约束条件

$$5x_1 + 4x_2 \leq 24 \text{ 或 } 7x_1 + 3x_2 \leq 45,$$





为了统一在一个问题中，引入0-1变量

$$y = \begin{cases} 1, & \text{当采取船运方式时} \\ 0, & \text{当采取车运方式时} \end{cases},$$

则上述约束条件可改写为

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 + yM, \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 45 + (1 - y)M, \\ y = 0 \text{或} 1. \end{cases}$$

其中 M 是充分大的数。





把相互排斥的约束条件改成普通的约束条件，未必需要引进充分大的正实数，例如相互排斥的约束条件

$$x_1 = 0 \quad \text{或} \quad 500 \leq x_1 \leq 800,$$

可改写为

$$\begin{cases} 500y \leq x_1 \leq 800y, \\ y = 0 \text{或} 1. \end{cases}$$





如果有 m 个互相排斥的约束条件

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, i = 1, 2, \cdots, m.$$

为了保证这 m 个约束条件只有一个起作用，我们引入 m 个0-1变量

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个约束起作用} \\ 0, & \text{第}i\text{个约束不起作用} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

和一个充分大的常数 M ，



则 $m + 1$ 个约束条件

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i + (1 - y_i)M, \\ i = 1, 2, \cdots, m, \quad (2.1)$$

$$y_1 + \cdots + y_m = 1, \quad (2.2)$$

就合于上述的要求。这是因为，由于 (2.2)， m 个 y_i 中只有一个能取 1 值，设 $y_{i^*} = 1$ ，代入 (2.1)，就只有 $i = i^*$ 的约束条件起作用，而别的式子都是多余的。





2.2.2 关于固定费用的问题 (Fixed Cost Problem)

在讨论线性规划时，有些问题是要求使成本为最小。那时总设固定成本为常数，并在线性规划的模型中不必明显列出。但有些固定费用（固定成本）的问题不能用一般线性规划来描述，但可改变为混合整数规划来解决，见下例。





例 2.3 某工厂为了生产某种产品，有几种不同的生产方式可供选择，如选定的生产方式投资高（选购自动化程度高的设备），由于产量大，因而分配到每件产品的变动成本就降低；反之，如选定的生产方式投资低，将来分配到每件产品的变动成本可能增加。所以必须全面考虑。





今设有三种方式可供选择，令

$j = 1, 2, 3$ 分别表示三种方式；

x_j 表示采用第 j 种方式时的产量；

c_j 表示采用第 j 种方式时每件产品的变动成本；

k_j 表示采用第 j 种方式时的固定成本。

为了说明成本的特点，暂不考虑其它约束条件。采用各种生产方式的总成本分别为

$$P_j = \begin{cases} k_j + c_j x_j, & \text{当 } x_j > 0 \\ 0, & \text{当 } x_j = 0 \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3.$$





在构成目标函数时，为了统一在一个问题中讨论，现引入0-1变量 y_j ，

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{当采用第}j\text{种生产方式, 即}x_j > 0\text{时,} \\ 0, & \text{当不采用第}j\text{种生产方式, 即}x_j = 0\text{时.} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

于是目标函数

$$\min z = (k_1 y_1 + c_1 x_1) + (k_2 y_2 + c_2 x_2) + (k_3 y_3 + c_3 x_3),$$

可表为下述3个线性约束条件

$$y_j \varepsilon \leq x_j \leq y_j M, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

其中 ε 是一个充分小的正常数， M 是个充分大的正常数。



(2.4) 式说明, 当 $x_j > 0$ 时 y_j 必须为 1; 当 $x_j = 0$ 时只有 y_j 为 0 时才有意义, 所以(2.4)式完全可以代替(2.3)式。





2.2.3 指派问题的数学模型

例 2.4 拟分配 n 人去干 n 项工作, 每人干且仅干一项工作, 若分配第 i 人去干第 j 项工作, 需花费 c_{ij} 单位时间, 问应如何分配工作才能使工人花费的总时间最少?





引入0-1变量

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{第} i \text{人干第} j \text{项工作} \\ 0, & \text{第} i \text{人不干第} j \text{项工作} \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

上述指派问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, & i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, & j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, & i, j = 1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned}$$





上述指派问题的可行解可以用一个矩阵表示，其每行每列均有且只有一个元素为 1，其余元素均为 0；还可以用 $1, \dots, n$ 中的一个置换表示。

指派问题的求解可以使用匈牙利算法，或拍卖算法等算法。





2.3 蒙特卡洛法（随机取样法）

蒙特卡洛方法也称为计算机随机模拟方法，它源于世界著名的赌城—摩纳哥的 Monte Carlo（蒙特卡洛）。它是基于对大量事件的统计结果来实现一些确定性问题的计算。

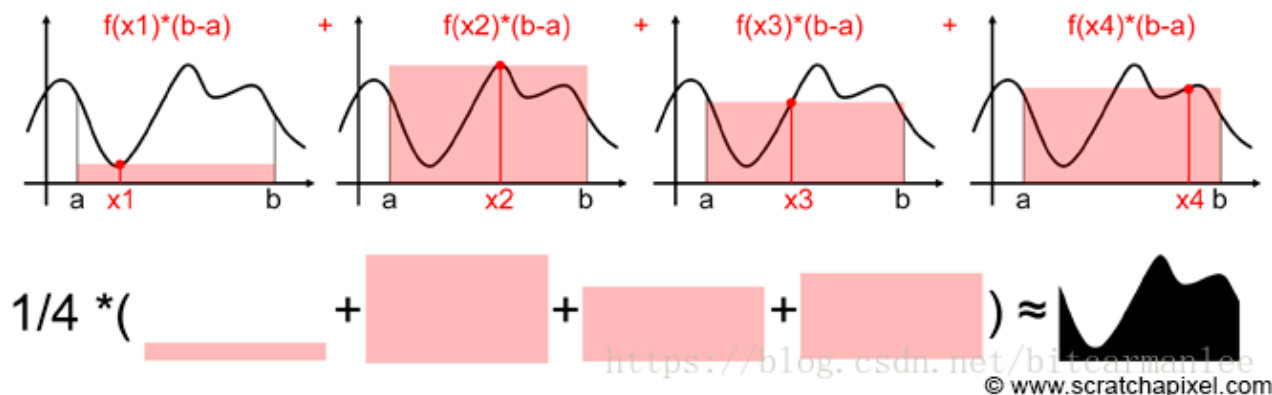
蒙特卡洛方法可分为两类：

- 所求解的问题本身具有内在的随机性，借助计算机的运算能力可以直接模拟这种随机的过程。
- 所求解问题可以转化为某种随机分布的特征数，比如随机事件出现的概率，或者随机变量的期望值。用于求解复杂的多维积分问题。



使用蒙特卡洛方法必须使用计算机生成相关分布的随机数，Matlab 给出了生成各种随机数的命令。

当我们在 $[a,b]$ 之间随机取一点 x 时，它对应的函数值就是 $f(x)$ 。接下来我们就可以用 $f(x) * (b - a)$ 来粗略估计曲线下方的面积，也就是我们要求的积分值，当然这种估计（或近似）是非常粗略的。



在此图中，做了四次随机采样，得到了四个随机样本 x_1, x_2, x_3, x_4 ，并且得到了这四个样本的 $f(x_i)$ 的值分别为 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$ 。对于这四个样本，每个样本能求一个近似的面积值，大小为 $f(x_i) * (b - a)$ 。为什么能这么干？对照图下面那部分很容易理解，每个样本都是对原函数 f 的近似，所以我们认为 $f(x)$ 的值一直都等于 $f(x_i)$ 。

按照图中的提示，求出上述面积的数学期望，就完成了蒙特卡洛积分。



例 2.5 $y = x^2$, $y = 12 - x$ 与 x 轴在第一象限围成一个曲边三角形。设计一个随机实验，求该图形面积的近似值。

解 设计的随机试验的思想如下，在矩形区域 $[0, 12] \times [0, 9]$ 上产生服从均匀分布的 10^7 个随机点，统计随机点落在曲边三角形的频数，则曲边三角形的面积近似为上述矩形的面积乘以频率。





计算的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
```

```
x=unifrnd(0,12,[1,10000000]);
```

```
y=unifrnd(0,9,[1,10000000]);
```

```
pinshu=sum(y<x.^2 & x<=3)+sum(y<12-x & x>=3);
```

```
area_appr=12*9*pinshu/10^7
```

运行结果在 49.5 附近，由于是随机模拟，每次的结果都是不一样的。



尽管整数规划由于限制变量为整数而增加了难度；然而又由于整数解是有限个，于是为枚举法提供了方便。当然，当自变量维数很大和取值范围很宽情况下，企图用显枚举法（即穷举法）计算出最优值是不现实的，但是应用概率理论可以证明，在一定计算量的情况下，用蒙特卡洛法完全可以得出一个满意解。





例 2.6 已知非线性整数规划为

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_5^2 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0 \leq x_i \leq 99, & (i = 1, \dots, 5), \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 400, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \leq 800, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 200, \\ x_3 + x_4 + 5x_5 \leq 200. \end{cases} \end{aligned}$$





下面就分析随机取样采集 10^6 个点计算时,应用概率理论来估计一下可信度。不失一般性,假定一个整数规划的最优点不是孤立的奇点。

假设目标函数落在高值区的概率分别为 0.01, 0.00001, 则当计算 10^6 个点后,有任一个点能落在高值区的概率分别为

$$1 - 0.99^{1000000} \approx 0.99 \dots 99 (100_{\text{多位}}),$$

$$1 - 0.99999^{1000000} \approx 0.999954602.$$





解 (1) 首先编写 M 文件 mente.m 定义目标函数 f 和约束向量函数 g, 程序如下

```
function [f,g]=mengte(x);
```

```
f=x(1)^2+x(2)^2+3*x(3)^2+4*x(4)^2+2*x(5)-8*x(1)-2*x(2)-  
3*x(3)-...
```

```
x(4)-2*x(5);
```

```
g=[sum(x)-400
```

```
x(1)+2*x(2)+2*x(3)+x(4)+6*x(5)-800
```

```
2*x(1)+x(2)+6*x(3)-200
```

```
x(3)+x(4)+5*x(5)-200];
```





(2) 编写如下Matlab程序求问题的解。

```
p0=0;rand('state',sum(clock)); %初始化随机数发生器
tic %计时开始
for i=1:10^6
    x=randi([0,99],1,5);
    [f,g]=mengte(x);
    if all(g<=0)
        if p0<f
            x0=x; p0=f; %记录下当前较好的解
        end
    end
end
x0,p0
toc %计时结束
```





本题可以使用LINGO软件求得精确的全局最优解，程序如下

```
model:
sets:
row/1..4/:b;
col/1..5/:c1,c2,x;
link(row,col):a;
endsets
data:
c1=1,1,3,4,2;
c2=-8,-2,-3,-1,-2;
a=1 1 1 1 1
   1 2 2 1 6
   2 1 6 0 0
   0 0 1 1 5;
b=400,800,200,200;
enddata
max=@sum(col:c1*x^2+c2*x);
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))<b(i));
@for(col:@gin(x));
@for(col:@bnd(0,x,99));
end
```





求得的全局最优解为 $x_1 = 50$, $x_2 = 99$, $x_3 = 0$,
 $x_4 = 99$, $x_5 = 20$, 最优值 $z = 51568$ 。





2.4 整数线性规划的计算机求解

整数规划问题的求解使用 Lingo 等专用软件比较方便。对于整数线性规划问题，也可以使用 **Matlab 的 intlinprog 函数求解**，但使用 Matlab 软件求解数学规划问题有一个缺陷，必须把所有的决策变量化成一维决策向量，实际上对于多维变量的数学规划问题，用 Matlab 软件求解，需要做一个变量替换把多维变量化成一维决策向量，变量替换后，约束条件是很难写出的，而使用 Lingo 软件求解数学规划问题是不需要做变换的，使用起来相对比较容易。





Matlab 求解混合整数线性规划命令

$[x, fval] = \text{intlinprog}(f, \text{intcon}, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$

数学模型

$$\begin{aligned} & \min f^T x \\ & s. t. \begin{cases} x(\text{intcon}) \text{ are integers} \\ A \cdot x \leq b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \end{aligned}$$

$f, x, b, beq, lb, ub, \text{intcon}$ 是向量； A 和 Aeq 是矩阵

注 x_1 和 x_3 是整数变量

则有, $\text{intcon} = [1, 3]$





例 2.8 求解如下的混合整数规划问题

$$\begin{aligned} \min z &= -3x_1 - 2x_2 - x_3, \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12, \\ x_1, x_2 \geq 0, \\ x_3 = 0 \text{ 或 } 1. \end{cases} \end{aligned}$$





解 求解的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
```

```
f=[-3;-2;-1]; intcon=3; %整数变量的地址
```

```
a=ones(1,3); b=7;
```

```
aeq=[4 2 1]; beq=12;
```

```
lb=zeros(3,1); ub=[inf;inf;1]; %x(3)为 0-1 变量
```

```
x=intlinprog(f,intcon,a,b,aeq,beq,lb,ub)
```

求得的最优解为 $x_1 = 0$, $x_2 = 5.5$, $x_3 = 1$; 目标函数的最优值 $z = -12$ 。



例 2.7 求解下列指派问题，已知指派矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, & i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, & j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, & i, j = 1, \dots, n. \end{cases}$$





解 这里需要把二维决策变量 x_{ij} ($i, j = 1, \dots, 5$) 变成一维决策变量 y_k ($k = 1, \dots, 25$), 编写的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
c=[3 8 2 10 3;8 7 2 9 7;6 4 2 7 5
   8 4 2 3 5;9 10 6 9 10];
c=c(:); a=zeros(10,25); intcon=1:25;
for i=1:5
    a(i,(i-1)*5+1:5*i)=1;
    a(5+i,i:5:25)=1;
end
b=ones(10,1); lb=zeros(25,1); ub=ones(25,1);
x=intlinprog(c,intcon,[],[],a,b,lb,ub);
x=reshape(x,[5,5])
```





求得最优指派方案为 $x_{15} = x_{23} = x_{32} = x_{44} = x_{51} = 1$
最优值为 21。

