2011—2012 学年第二学期
《概率论与数理统计》期末试卷答案

一． 填空题

1、 0.7　　2、 0.2　　3、 5　　4、1/4 或 0.25　　5、 $\chi^2(2)$

二．选择题

1、D　　2、A　　3、D　　4、C　　5、C

三．解: (1) 设事件 A 表示“取到的产品是次品”，A_i 表示“取到的产品是第 i 个车间生产”， $(i=1,2,3)$，则 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$，且 $P(A_i) > 0$，又由于 A_1, A_2, A_3 两两互不相容，

由全概率公式知

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(A | A_i)$$

由题设知

$P(A_1) = 25\%$，$P(A | A_1) = 5\%$；$P(A_2) = 35\%$，$P(A | A_2) = 4\%$；

$P(A_3) = 40\%$，$P(A | A_3) = 2\%$，

故

$$P(A) = 0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.4 \times 0.02 = 0.0345 \text{ 或} 69/2000$$

(2) 由 $Bayes$ 公式知
$$P(A_i | A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A | A_i)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(A | A_i)}$$

从而得

$$P(A_1 | A) = \frac{P(A_1) \cdot P(A | A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(A | A_i)} = \frac{0.25 \times 0.05}{0.0345} = \frac{25}{69}$$

四

解: (1) $p = P\{|X| > 19.6\} = 1 - P\{-19.6 \le X \le 19.6\}$

$$= 1 - \Phi(\frac{19.6-0}{10}) + \Phi(\frac{-19.6-0}{10}) = 1 - \Phi(1.96) + \Phi(-1.96)$$

$$= 2 - 2\Phi(1.96)$$

$$= 2 - 2\times 0.975 = 0.05$$

(2) 设 Y 表示 3 次独立重复测量中事件 $\{|X| > 19.6\}$ 出现的次数，则 Y 服从二项分布，即 $Y \sim B(3,\ 0.05)$

$$\alpha = P\{Y \ge 1\} = 1 - P\{Y < 1\} = 1 - P\{Y = 0\}$$

$$= 1 - C_3^0 (0.05)^0 (1-0.05)^3$$

$$= 0.1426$$

五.

解:（1）由归一性，

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = A\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = A/2$$

解得 $A = 2$

（2）当 $x \le 0$ 时，$f_X(x) = 0$

当 $x > 0$时， $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} 2e^{-(x+2y)}dy = e^{-x}$,

故 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$

同理

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, y > 0 \\ 0, \quad\quad y \le 0 \end{cases},$$

当 $x > 0, y > 0$ 时，有 $f_X(x) f_Y(y) = e^{-x} \times e^{-2y} = f(x,y)$

其他情况类似有 $f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$,故 X 和 Y 相互独立

（3）当 $z\le 0$ 时， $F_Z(z)=0;$

当 $z>0$ 时，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)=\iint_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=2\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{(z-x)/2}e^{-2y}dy=1-e^{-z}-ze^{-z}$$

故 $Z=X+2Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z}, z>0\\ 0, \qquad\qquad z\le 0\end{cases}$$

$Z=X+2Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z}, z>0\\ 0, \quad z\le 0\end{cases}$

六.

解：（1）由题意知 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	**1**	**2**	**3**	$P(X=i)=p_{i\cdot}$
1	**0**	**1/6**	**1/12**	**1/4**
2	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/2**
3	**1/12**	**1/6**	**0**	**1/4**
$P(Y=j)=p_{\cdot j}$	**1/4**	**1/2**	**1/4**	

（2）由定义知 $\rho=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

由关于 X、Y 的边缘知

$$E(XY)=23/6,\ EX=2=EY\ \ DX=DY=9/2$$

故 $\rho=-\dfrac{1}{27}$.

七.（10 分）设 X,Y 相互独立，且概率分布分别为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}\ \ (-\infty<x<+\infty),\qquad \varphi(y)=\begin{cases}1/2,\ 0\le y\le 2\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$$

求：(1) $E(X+Y)$、 (2) $D(2X+Y)$、 (3) $E(2X-3Y^2)$.

解：由 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-(x-1)^2}$

可知 $X\sim N(1,\frac{1}{2})$.

且 $\mathrm{Y}\sim\mathrm{U}(0,2)$.

(1) $E(X+Y)=EX+EY=1+\frac{0+2}{2}=2$

(2) $D(2X+Y)=4DX+DY=4\times\frac{1}{2}+\frac{(2-0)^2}{12}=\frac{7}{3}$

(3) $E(2X-3Y^2)=2EX-3EY^2=2EX-3[DY+(EY)^2]$

$$=2\times1-3\times[\frac{1}{3}+1^2]=-2$$

八.

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}axe^{-x^2/\lambda}dx=a\lambda/2=1$，解得 $a=2/\lambda$。

（2）设 $x_1,x_2,...x_n$ 是样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 的观察值，则极大似然函数

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\lambda}x_ie^{-x_i^2/\lambda}=(\prod_{i=1}^{n}x_i)\frac{2^n}{\lambda^n}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2/\lambda}$$

对 $L(\lambda)$ 取自然对数

$$\ln L(\lambda)=\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i)+n\ln2-n\ln\lambda-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

令 $$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$$

得 $$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

故 λ 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.

（3）$E\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX^2$

$$EX^2=\int_0^{+\infty}x^2\frac{2}{\lambda}xe^{-x^2/\lambda}dx=\cdots=\lambda$$

则 $E\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda=\lambda$，

所以$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2$是$\lambda$的无偏估计量。

（4） $f(x,\lambda)=\begin{cases}\frac{2}{\lambda}xe^{-x^2/\lambda}, & 0<x\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,

建立矩和未知参数的方程

$$\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\lambda}x^2e^{-x^2/\lambda}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x^2/\lambda}dx=\frac{\sqrt{\lambda\pi}}{2}$$

故$\lambda=\frac{4}{\pi}\mu_1^2$

即知λ的矩估计量$\lambda=\frac{4}{\pi}\overline{X}^2$，其中$\overline{X}$是样本均值