第七章 随机过程习题参考答案与提示

1．利用抛掷一枚硬币的试验定义一随机过程

$$X(t)=\begin{cases}2\cos\pi t, & \text{当出现H时}\\ -2\cos\pi t, & \text{当出现T时}\end{cases},\qquad t\in R.$$

且 $P(H)=\frac{2}{3},P(T)=\frac{1}{3}$，求 1）一维分布函数 $F(x,0)$ 和 $F(x,\frac{1}{4})$；2）二维分布函数 $F(x,y,0,\frac{1}{4})$；3）求该过程的均值函数,方差函数,相关函数,协方差函数.

答案与提示：本题是一个常规题型，只要注意求 $X(t)$ 的概率分布，进而求出 $X(0)$，$X(\frac{1}{4})$，$\left(X(0),X(\frac{1}{4})\right)$ 的概率分布以及 $\left(X(t),X(s)\right)$ 的联合概率分布，从而求出一维、二维分布函数及其数字特征。

$$F(x,0)=\begin{cases}0 & x<-2\\ \frac{1}{3} & -2\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases},\quad F(x,\frac{1}{4})=\begin{cases}0 & x<-\sqrt{2}\\ \frac{1}{3} & -\sqrt{2}\le x<\sqrt{2}\\ 1 & x\ge\sqrt{2}\end{cases}$$

$$F(x,y;0,\frac{1}{4})=\begin{cases}0, & x<-2,-\infty<y<+\infty\\ 0, & -2\le x<+\infty,y<-\sqrt{2}\\ \frac{1}{3} & -2\le x<2,y\ge-\sqrt{2}\\ \frac{1}{3} & x\ge 2,-\sqrt{2}\le y<\sqrt{2}\\ 1 & x\ge 2,y\ge\sqrt{2}\end{cases}$$

$\mu_X(t)=\frac{2}{3}\cos\pi t;\ D_X(t)=\frac{32}{9}\cos^2\pi t$。

$R_X(s,t)=4\cos\pi t\cos\pi s$；　$C_X(s,t)=\frac{32}{9}\cos\pi t\cos\pi s$。

2．设 $X(t)=A\cos(\omega t),\ (-\infty<t<\infty)$，其中ω是常数，$A$ 服从标准正态分布，试写出 $X(t)$ 的一维分布函数族，并求出 $X(t)$ 的协方差函数。

答案与提示：注意到 $\forall t\in T, A\cos(\omega t)$ 仍服从正态分布，求出 $E[X(t)]=0$，$D[X(t)]=\cos^2(\omega t)$。即知 $X(t)$ 的一维分布函数族为 $N(0,\cos^2(\omega t))$，$C_X(s,t)=\cos(\omega t)\cos(\omega s)$。

3．设$\{X(t), t\geq 0\}$是一个实的均值为零，二阶矩存在的随机过程，其相关函数为$E\{X(s)X(t)\}=B(t-s), s\leq t$，且是一个周期为$T$的函数，即$B(\tau+T)=B(\tau), \tau\geq 0$，试求方差函数$D[X(t)-X(t+T)]$。

答案与提示：0

4．设随机过程$X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$，$t\in T=(-\infty,+\infty)$，其中$A,B$是相互独立且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$的随机变量，$\omega$是实常数，求$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的一，二维概率密度。

答案与提示：由于A,B是相互独立且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$的随机变量，

$EA=EB=0, DA=DB=EA^2=EB^2=\sigma^2$，$\forall t\in T$，由正态分布的性质并计算自相关函数，知$X(t)$的一维概率密度为：$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

二维概率密度为：

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2|\sin\omega(t_1-t_2)|}\exp\left(\frac{-1}{2\sin^2(\omega(t_1-t_2))}\left[\frac{x_1^2}{\sigma^2}-2\cos\omega(t_1-t_2)\frac{x_1x_2}{\sigma^2}+\frac{x_2^2}{\sigma^2}\right]\right)$$

5．设$Z(t)=X+Yt,-\infty<t<\infty$.若已知二维随机变量$(X,Y)$的协方差阵为

$$\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

试求$Z(t)$的协方差函数。

答案与提示：$\sigma_1^2+st\sigma_2^2+(s+t)\rho\sigma_1\sigma_2$

6．设粒子按平均率为每分钟4个的泊松过程到达某记数器，$N(t)$表示在[0，t)内到达计数器的粒子个数，试求：

(1) $N(t)$的均值函数、方差函数、自相关函数与自协方差函数；

(2) 在第3分钟到第5分钟之间到达计数器的粒子个数的概率分布；

(3) 在2分钟内至少有4个粒子到达计数器的概率.

答案与提示： 依题意$N(t)$服从强度为4的泊松分布，即$N(t)\sim P(4t)$，所以有

(1) $\mu_N(t)=4t$，$D_N(t)=4t$，$C_N(s,t)=4\min(s,t)$，$R_N(t,s)=16ts+4\min(s,t)$

(2) $P(N(3,5)=k)=P(N(2)=k)=\frac{8^k e^{-8}}{k!},k=0,1,2,\cdots$

(3) $P(N(2)\geq 4)=1-e^{-8}(1+8+\frac{8^2}{2}+\frac{8^3}{6})=0.95762$

7．设$N_1(t)$和$N_2(t)$分别是强度为λ_1和λ_2的相互独立的泊松过程，令$X(t)=N_1(t)-N_2(t),t>0,$ ，求$X(t)$的均值函数和相关函数.

答案与提示：利用强度为λ的泊松过程$N(t)$的数字特征：

$$\mu_N(t)=\lambda t,\ D_N(t)=\lambda t,\ C_N(s,t)=\lambda\min(s,t), R_N(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$$

得到 $\mu_X(t)=(\lambda_1-\lambda_2)t$，$R_X(s,t)=(\lambda_1-\lambda_2)^2 st+(\lambda_1+\lambda_2)\min(s,t)$。

8．设$\{W(t),\ t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，
求下列过程的均值函数和相关函数.

1） $X(t)=W^2(t), t\geq 0;$

2) $X(t)=tW(\frac{1}{t}),\quad t>0.$

答案与提示：利用参数为σ^2的维纳过程$\{W(t),\ t\geq 0\}$的师资特征：

$$\mu_W(t)=0,\ D_W(t)=\sigma^2 t,\ C_W(s,t)=R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$$

得到： 1） $\mu_X(t)=\sigma^2 t$，$R_X(s,t)=\sigma^4(st+2\min^2(s,t))$

2) $\mu_X(t)=0,\quad t>0$，$R_X(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$。

9．设$\{X(t)\}$是强度为λ的泊松过程，定义$Y(t)=X(t+L)-X(t)$，其中$L>0$为常数，求$\mu_Y(t), R_Y(s,t)$。

答案与提示：利用强度为λ的泊松过程$N(t)$的数字特征：

$$\mu_N(t)=\lambda t,\ D_N(t)=\lambda t,\ C_N(s,t)=\lambda\min(s,t), R_N(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$$

得到 $\mu_Y(t)=E[Y(t)]=E[X(t+L)-X(t)]=\lambda(t+L)-\lambda t=\lambda L$

因为 $R_Y(s,t)=E[Y(s)Y(t)]=C_Y(s,t)+\mu_Y(s)\mu_Y(t)$

对任意$0\leq s<t$有

$$\begin{aligned}C_Y(s,t)&=Cov(Y(s),Y(t))=Cov(X(s+L)-X(s),X(t+L)-X(t))\\&=Cov(X(s+L),X(t+L))-Cov(X(s),X(t+L))\\&\quad-Cov(X(s+L),X(t))+Cov(X(s),X(t))\\&=\lambda\left[\min\{s+L,t+L\}-\min\{s,t+L\}-\min\{s+L,t\}+\min\{s,t\}\right]\\&=\lambda\left[L+2\min\{s,t\}-\min\{s,t+L\}-\min\{s+L,t\}\right]\\&=\lambda\left[L+2s-s-\min\{s+L,t\}\right]\\&=\lambda\left[\boldsymbol{L+s-\frac{s+t+L-|s+L-t|}{2}}\right]=\boldsymbol{\frac{s+L-t}{2}}\lambda+\lambda\boldsymbol{\frac{|t-s-L|}{2}}\end{aligned}$$

当$t-s>L$时

$$C_Y(s,t)=\frac{s+L-t}{2}\lambda+\lambda\frac{|t-s-L|}{2}=\lambda(\frac{s+L-t}{2}+\frac{t-s-L}{2})=0$$

当$t-s\leq L$时

$$C_Y(s,t)=\frac{s+L-t}{2}\lambda+\lambda\frac{|t-s-L|}{2}=\lambda(\frac{s+L-t}{2}+\frac{L-t+s}{2})=\lambda(L+s-t)$$

所以 $C_Y(s,t)=\begin{cases}\boldsymbol{\lambda(L+s-t)} & \boldsymbol{t-s\le L}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{t-s>L}\end{cases}$

同理，对任意的$0\le t<s$

$C_Y(s,t)=\begin{cases}\boldsymbol{\lambda(L+t-s)} & \boldsymbol{s-t\le L}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s-t>L}\end{cases}$

综之得$C_Y(s,t)=\begin{cases}\boldsymbol{\lambda(L-|s-t|)} & \boldsymbol{|s-t|\le L}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{|s-t|>L}\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{R_X(s,t)}=\begin{cases}\boldsymbol{\lambda^2L^2+\lambda L-\lambda|s-t|} & \boldsymbol{|s-t|\le L}\\ \boldsymbol{\lambda^2L^2} & \boldsymbol{|s-t|>L}\end{cases}$

10．如果正弦波随机过程为 $X(t)=A\cos(\omega t+\theta)$
其中振幅A取常数，角频率ω取常数，而相位θ是一个随机变量，它均匀分布于$(-\pi,\pi)$间，即：

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi\le x\le\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求在t时刻$X(t)$的概率密度。

答案与提示：固定时刻t，则随机变量$X(t)=A\cos(\omega t+\theta)$是随机变量$\theta$的函数。先求出分布函数，然后求导。$X(t)$的概率密度为：

$$f_{X(t)}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2-y^2}}, & -A\le y\le +A\\ 0, & \text{其 它}\end{cases}$$

11．从数$1,2,\cdots,N$中任取一数，记为X_1；再从$1,2,\cdots,X_1$中任取一数，记为X_2；如此继续，从$1,2,\cdots,X_{n-1}$中任取一数，记为X_n．说明$\{X_n,n\ge1\}$构成一齐次马氏链，并写出它的状态空间和一步转移概率矩阵。

答案与提示：状态空间为$I=\{1,2,\cdots,N\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/N & 1/N & \cdots & 1/N\end{pmatrix}$$

12．一个老鼠“学习”过程的模型如下：如果老鼠“学到”某种技巧（如取得一颗花生或者避开一次电休克等），那么说它处于状态 1；如果它还没有学会，那么说它处于状态 2，假定它一旦学会了就将一直记住，而如果它还没有学会，它在一次

试验中“学会”的概率是α，写出 1 步，2 步转移概率矩阵；如果初始分布为 $P\{X_0=1\}=0, P\{X_0=2\}=1$，求$P\{X_2=1\}$。

答案与提示：先根据题意写出一步转移概率矩阵，求出二步转移概率矩阵，进而求出$P\{X_2=1\}=2\alpha-\alpha^2$

13．设任意相继的两天中，雨天转晴天的概率为$\frac{1}{3}$，晴天转雨天的概率为$\frac{1}{2}$，任一天晴或雨是互为逆事件。以 0 表示晴天状态，以 1 表示雨天状态，X_n表示第n天的状态（0 或 1）。试写出马氏链$\{X_n, n\geq 1\}$的一步转移概率矩阵。又若已知 5 月 1 日为青天，问 5 月 3 日为晴天的概率是多少？

答案与提示：$\{X_n, n\geq 1\}$的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \;\;1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array},$$

5 月 1 日为晴天，则 5 月 3 日为晴天的概率$P_{00}(2)=\frac{5}{12}=0.4167$．

14．考虑状态 0，1，2 上的一个 Markov 链$X_n, n\geq 0$，它有转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

初始分布为$p_0=0.3, p_1=0.4, p_2=0.3,$试求概率$P\{X_0=0, X_1=1, X_2=2\}.$

答案与提示：0

15．设马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间为$I=\{1,2,3\}$，初始分布为

$p_1(0)=\frac{1}{4}, p_2(0)=\frac{1}{2}, p_3(0)=\frac{1}{4},$一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

(1) 计算 $P\{X_0=1, X_1=2, X_2=2\}$;(2) 证明 $P\{X_1=2, X_2=2 \mid X_0=1\}=p_{12}\cdot p_{22}$;(3) 计算 $P_{12}(2)=P\{X_2=2 \mid X_0=1\}$;(4) 计算 $p_2(2)=P\{X_2=2\}$.

答案与提示：利用二步转移概率矩阵具体计算

(1) $P\{X_0=1, X_1=2, X_2=2\}=\frac{1}{16}$

（2） $P\{X_1=2,X_2=2\mid X_0=1\}=\dfrac{P\{X_1=2,X_2=2,X_0=1\}}{P\{X_0=1\}}$

$$=P\{X_1=2\mid X_0=1\}P\{X_2=2\mid X_0=1,X_1=2\}=p_{12}(1)p_{22}(1)$$

（3） $P_{12}(2)=P\{X_2=2\mid X_0=1\}=\dfrac{7}{16}$

（4） $p_2(2)=P\{X_2=2\}==\dfrac{115}{288}\approx 0.3993$

16．设 $S=\{1,2\}$，且一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}3/4 & 1/4\\ 5/8 & 3/8\end{pmatrix}$$

求平稳分布

答案与提示： $\pi=(5/7,2/7)$

17．在直线上带有反射壁的随机游动，只考虑质点取 1、2、3 三个点，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}q & p & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & q & p\end{pmatrix}$$

讨论它是否为遍历链。

答案与提示：

计算得：

$$P^2=\begin{pmatrix}q^2+pq & pq & p^2\\ q^2 & 2pq & p^2\\ q^2 & pq & p^2+pq\end{pmatrix}$$

可以看出其中得元素都大于零，因此可知是遍历的。

18．设马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

试证此链不是遍历的。

答案与提示： 直接计算可知 $P^2=P$，故此链不是遍历的。

19．设有随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta),-\infty<t<\infty,$ 其中 A 是服从瑞利分布的随机变量，其概率密度为

$$f(a)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, a>0,\\ 0, \qquad a\le 0;\end{cases}$$

Θ是在$(0,2\pi)$上服从均匀分布且与A相互独立的随机变量，ω是一常数。问$X(t)$是不是平稳过程？

答案与提示：(A,Θ)的联合概率密度为

$$f(a,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, a>0, 0\le\theta\le\pi,\\ 0, \qquad 其他;\end{cases}$$

$$R_X(t,s) == \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}a^2\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega s+\theta)dad\theta=\sigma^2\cos\omega(t-s)$$

所以$X(t)$是平稳过程。

20．设$X(t)$与$Y(t)$是相互独立的平稳过程。试证$Z(t)=X(t)Y(t)$是平稳过程，而且$Z(t)$的自相关函数等于$X(t)$、$Y(t)$的自相关函数之积。

答案与提示：$\mu_Z(t)=E[X(t)Y(t)]=E[X(t)]E[Y(t)]=\mu_X\mu_Y$；

$R_Z(s,t)=E[Z(s)Z(t)]=E[X(s)X(t)Y(s)Y(t)]=E[X(s)X(t)]E[Y(s)Y(t)]=R_X(t-s)R_Y(t-s)$

21．设平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的自相关函数为$R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}(1+a|\tau|)$，其中常数$a>0$，而$E[X(t)]=0$。试问$X(t)$的均值是否具有各态历经性？为什么？

答案与提示：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_X(\tau)-\mu_X^2]d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})e^{-a|\tau|}(1+a|\tau|)d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})e^{-a\tau}(1+a\tau)d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})(-\frac{1}{a})(1+a\tau)de^{-a\tau}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[e^{-a\tau}(1-\frac{\tau}{2T})(-\frac{1}{a})(1+a\tau)|_0^{2T}-\int_0^{2T}e^{-a\tau}d(1-\frac{\tau}{2T})(-\frac{1}{a})(1+a\tau)]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[-\frac{1}{a}+\int_0^{2T}\frac{1}{a}e^{-a\tau}[a(1-\frac{\tau}{2T})-\frac{1}{2T}(1+a\tau)]d\tau]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[-\frac{3}{2a^2T}+\frac{3+2aT}{2a^2T}e^{-2aT}]=0$$

则$X(t)$的均值否具有各态历经性。

22．设$s(t)$是一个周期为L的函数，Φ是在$[0,L]$上均匀分布的随机变量，那么$X(t)=s(t+\Phi)$，称为随机相位过程。如果$s(t)$具体给出如下：

$$s(t)=\begin{cases}\frac{8A}{L}t, & 0\le t\le\frac{L}{8},\\ -\frac{8A}{L}(t-\frac{L}{4}), & \frac{L}{8}<t\le\frac{L}{4},\\ 0, & \frac{L}{4}<t\le L.\end{cases}$$

试计算$EX(t),<X(t)>$，并验证均值函数的各态历经性。

答案与提示：由$s(t)$的周期性，分别计算$EX(t)$和$<X(t)>$，可知

$$EX(t)=<X(t)>=\frac{A}{8}$$

故均值函数具有各态历经性。

23．设有随机过程$X(t)=\cos(\eta t+\theta),(-\infty<t<+\infty)$其中，$\eta,\theta$为相互独立的随机变量，$\theta$在$(0,2\pi)$上服从均匀分布，$\eta$的密度为$f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，试证：$X(t)$是平稳过程，并求出它的自相关函数和谱密度。

答案与提示：先$EX(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\cos(xt+\theta)\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}dxd\theta=0$，再利用留数法求积分$EX(t)X(s)=\dfrac{1}{2}e^{-|\tau|}$，即$X(t)$是平稳过程。

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\omega)e^{-i\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-|\tau|}e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{1+\omega^2}.$$

24．平稳过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的自相关函数为

$$R_X(\tau)=4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos3\pi\tau,$$

求（1） $X(t)$的均方值；(2） $X(t)$的谱密度。

答案与提示：$\Psi_X^2=R_X(0)=5;$

$$S_X(\omega)=\pi[\delta(\omega-3\pi)+\delta(\omega+3\pi)]+\frac{4}{1+(\omega-\pi)^2}+\frac{4}{1+(\omega+\pi)^2}.$$

25．已知平稳过程$X(t)$的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\begin{cases}1-\frac{|\tau|}{T}, & |\tau|\le T,\\ 0, & |\tau|>T.\end{cases}$$

求谱密度$S_X(\omega)$。

答案与提示：

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\omega)e^{-i\omega\tau}d\tau=\int_{-T}^{T}(1-\frac{|\tau|}{T})e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{2}{\omega^2T}(1-\cos\omega T)=\frac{4}{\omega^2T}\cos^2\frac{\omega T}{2}$$

26．已知平稳过程$X(t)$的谱密度为

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2},$$

求 $X(t)$ 的均方值。

答案与提示：由维纳-辛钦公式可得自相关函数

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}e^{i\omega\tau}d\omega$$

利用留数定理，整理可得

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\{\frac{z^2}{z^4+3z^2+2}e^{i|\tau|z}\text{在}z=i,\sqrt{2}i\text{处的留数和}\}=-\frac{e^{-|\tau|}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

27．已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为

$$S_X(\omega)=\begin{cases}8\delta(\omega)+20(1-\frac{|\omega|}{10}), & |\omega|<10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $X(t)$ 的自相关函数。

答案与提示：由维纳-辛钦公式可得自相关函数

$R_X(\tau)=\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\tau^2}(1-\cos 10\tau)$。