第四章插值与拟合

计算机科学系

目 录

§4.4三次样条插值

龙格

•一. 计算中的Runge现象

•插值问题中，通常我们会觉得当节点越来越密时，插值函数越来越接近于原函数；

•但是结果并非如此，虽然节点越多，可保证插值函数有更多的点与被插值函数相等，但在两个节点之间不一定能很好地逼近，有时误差相当大；

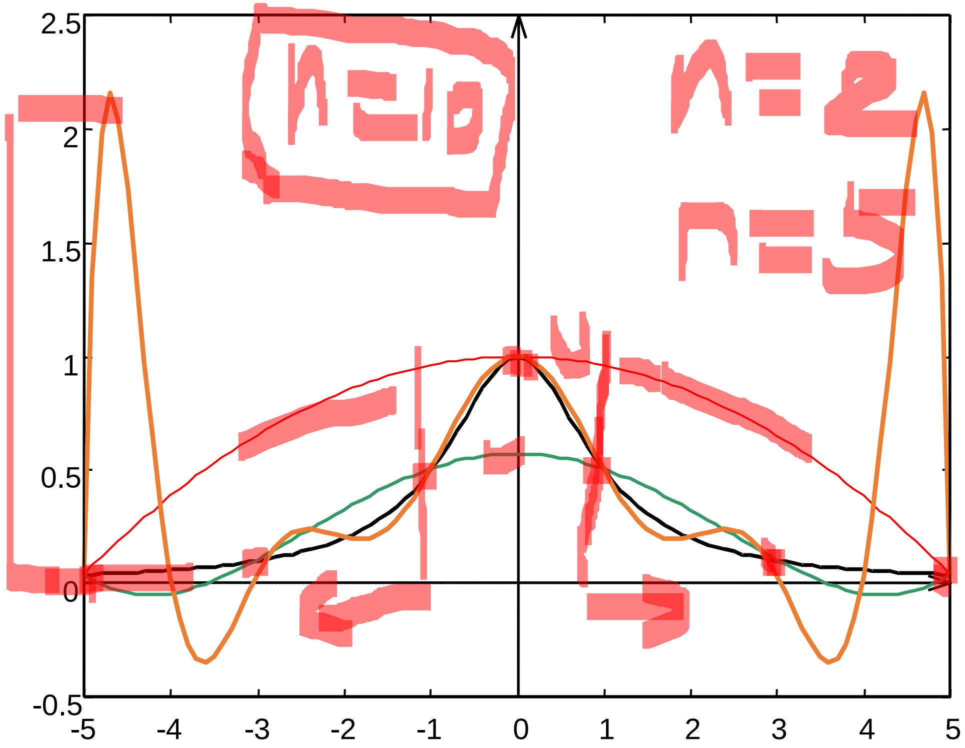
•因为多项式是上下震荡的，震荡的幅度不尽相同，不同区段的震荡密度也不一样。由此导致，利用较高阶的插值多项式所计算的结果，与原来的函数值相差甚远；

•结果表明，并不是插值多项式的次数越高，插值效果越好，精度也不一定是随次数的提高而升高，这种现象在上个世纪初由Runge发现，故称为Runge现象。

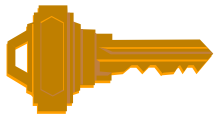
§4.4三次样条插值

n+1点

- 例：在$[-5,5]$考察$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$的$L_n(x)$，取$x_i=-5+\frac{10}{n}i$，$(i=0,\cdots,n)$



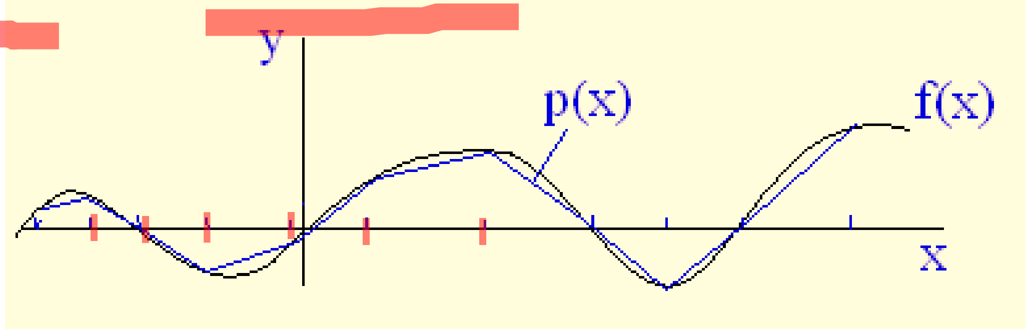
- **Runge现象** 插值多项式在插值区间上发生剧烈的震荡。它揭示了高次插值多项式存在的缺陷。
- **产生的原因** 误差由截断误差和舍入误差两部分组成，而在插值的计算过程中，舍入误差可能会扩散或放大。



分段低次插值

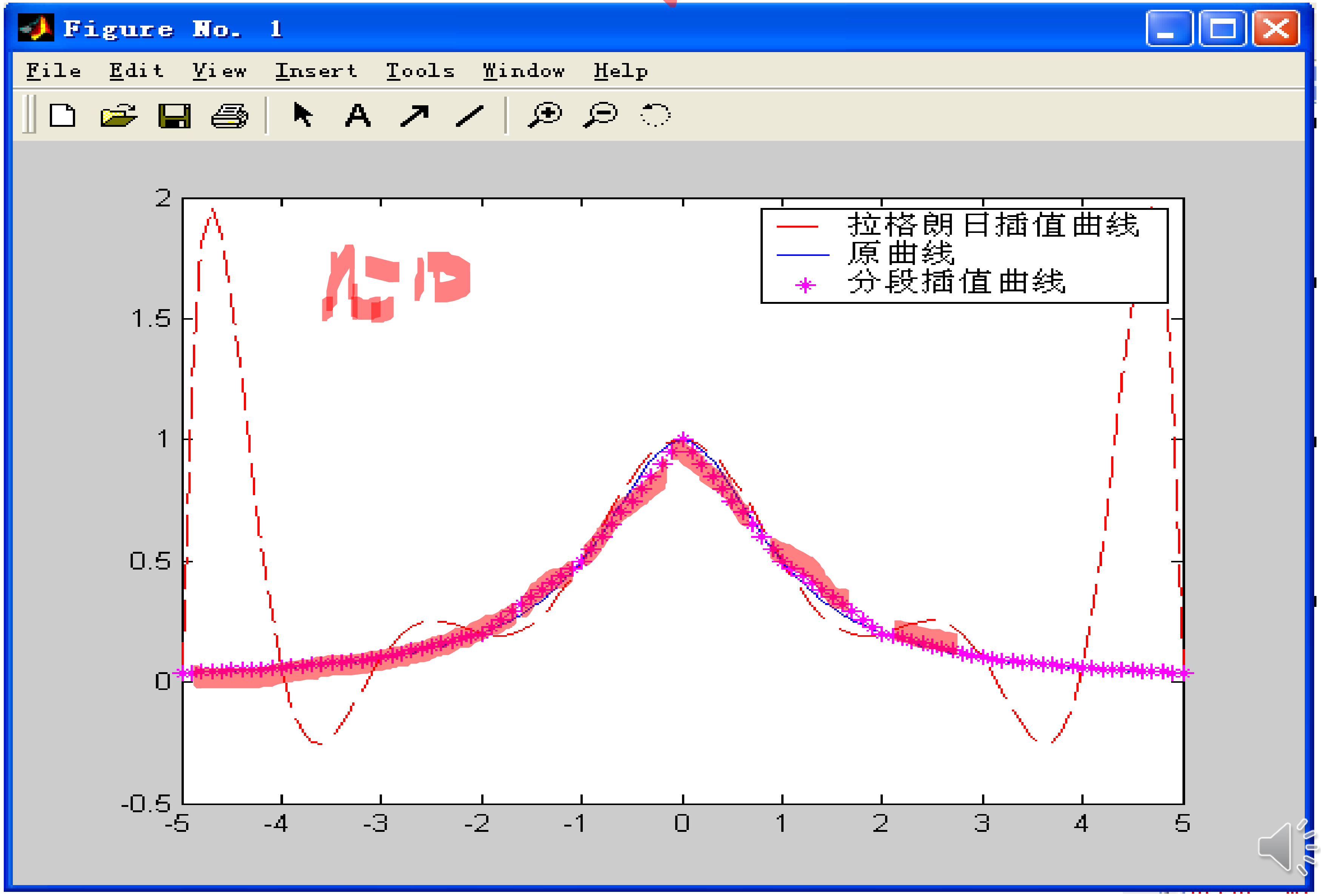
§ 4.4三次样条插值

- 分段线性插值/* piecewise linear interpolation */
- 在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$上，用一阶多项式(直线)逼近$f(x)$：
- $f(x) \approx P_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1}$，其中，$x \in [x_i, x_{i+1}]$
- 记$h = max|x_{i+1} - x_i|$，当$h \to 0$时，$P_1^h(x) \xrightarrow{Uniform\ approximation} f(x)$
- 区间$[a, b]$上的分段线性插值$p(x)$，是将每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上的线性插值$p_i(x)$连接起来
- 所以，$p(x)$的图形是一条以$(x_i, f(x_i))$为节点的折线。



§4.4三次样条插值

- 一阶分段线性插值解决Lagrange插值的Runge现象



§ 4.4三次样条插值

•例1　已知$x_0=-3$，$x_1=-1$，$x_2=2$，$x_3=3$，$x_4=9$，$f(x_0)=12$，$f(x_1)=5$，$f(x_2)=1$，$f(x_3)=6$，$f(x_4)=12$
用分段线性插值计算$f(1.2)$，$f(3.3)$.

• 解：

$$p(x)=p_i(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1}),x\in[x_i,x_{i+1}].$$

$$\because\quad 1.2\in[-1,2]=[x_1,x_2],\ p_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),$$

$$\therefore\quad f(1.2)\approx p(1.2)=p_1(1.2)=\frac{1.2-2}{-1-2}\times5+\frac{1.2+1}{2+1}\times1=2.0667;$$

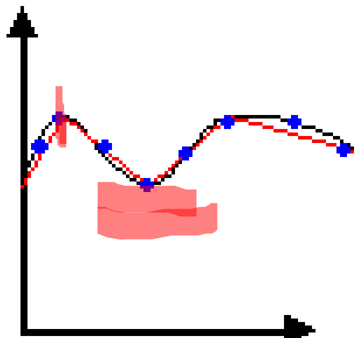
$$\because\quad 3.3\in[3,9]=[x_3,x_4],\ p_3(x)=\frac{x-x_4}{x_3-x_4}f(x_3)+\frac{x-x_3}{x_4-x_3}f(x_4),$$

$$\therefore\quad f(3.3)\approx p(3.3)=p_3(3.3)=\frac{3.3-9}{3-9}\times6+\frac{3.3-3}{9-3}\times12=6.3.$$

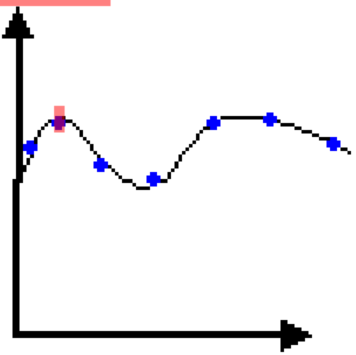
§ 4.4三次样条插值

• 分段低次插值方法的特点

- 用低次多项式“装配”插值函数
- 它只能保证各段曲线在连接点的连续性，不能保证整个曲线在连接点的光滑性
  - 分段线性插值函数只能保证连续性，不能保证一阶光滑性
  - 分段二次最多能达到一次连续，不能保证二阶光滑性。



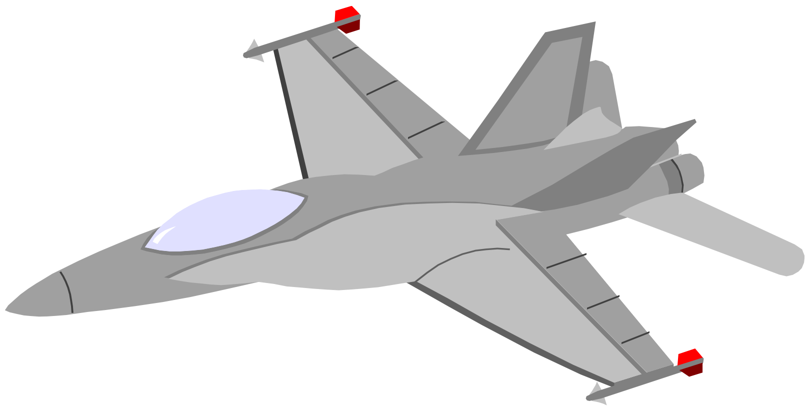
分段线性插值

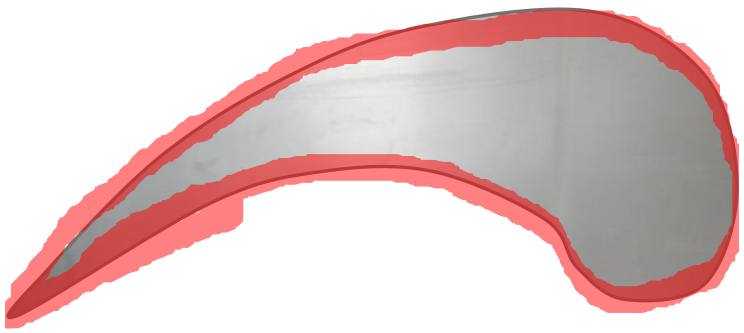


分段二次插值

§4.4 三次样条插值

- 实际应用
  - 机械设计





§4.4 三次样条插值

- 实际应用
  - 建筑设计

§4.4 三次样条插值

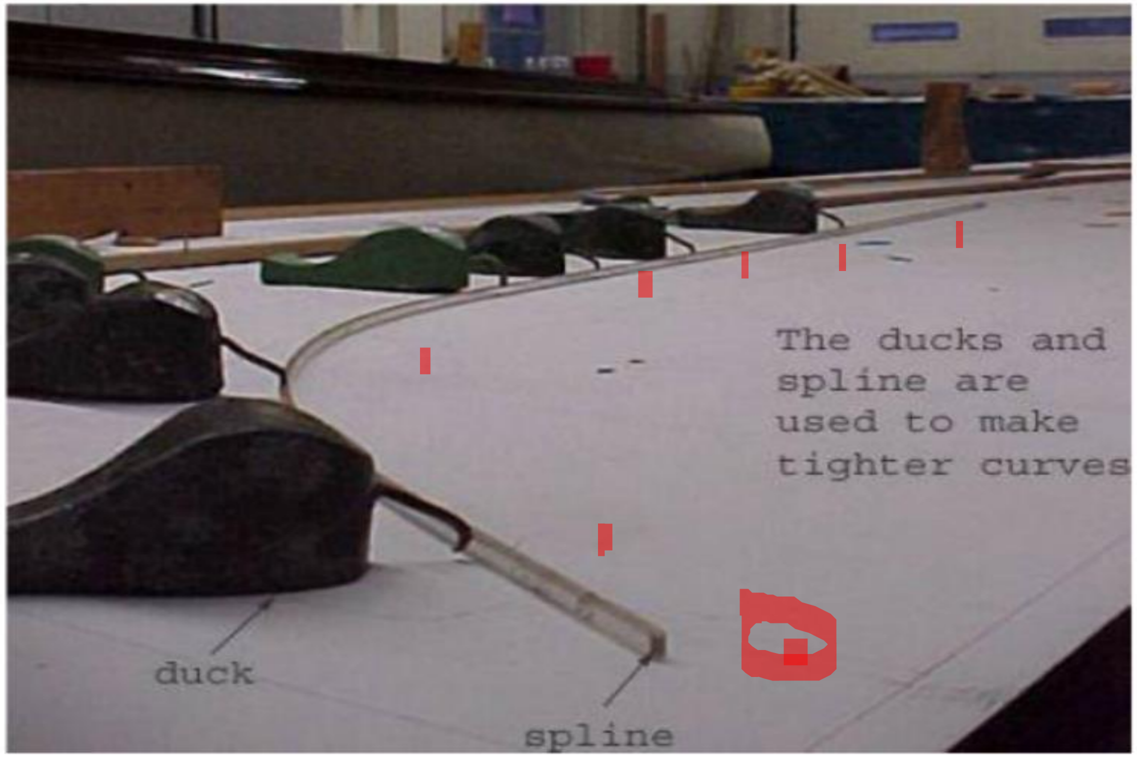
- 二. 三次样条插值 (Cubic Spline)
- 分段低次插值可以得到整体连续函数，但在连接点处一般不光滑。
- 目标：既可以分段插值，又可以在节点处保持光滑，甚至二阶光滑

  —— 三次样条插值。

§4.4 三次样条插值

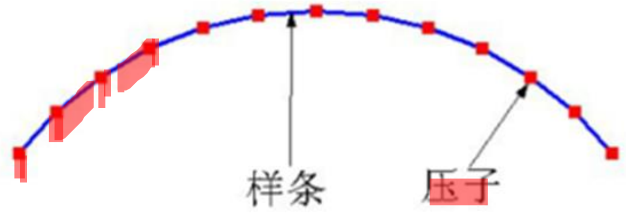
- 什么是样条：
- 是指飞机或轮船等的制造过程中为描绘出光滑的外形曲线（放样）所用的工具

放样现场



§4.4 三次样条插值

- 什么是样条：
- 1946年，Schoenberg将样条引入数学，即所谓的样条函数。

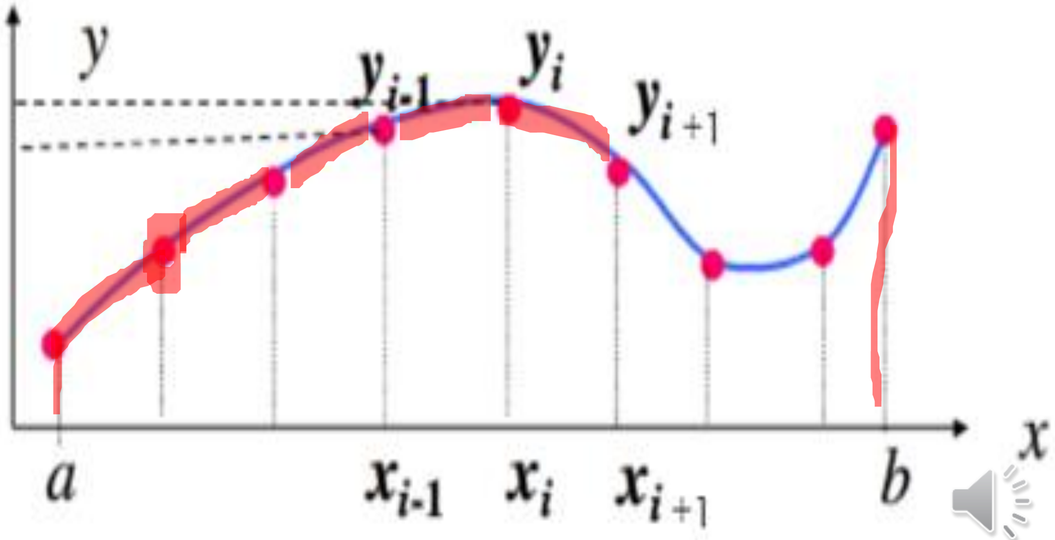


- 分段：两个“压子”之间可以认为是一段。数学本质是每两个“压子”之间曲线的表达式不同
- 光滑：不象每两点之间连线那样有明显的棱角。数学本质是整条曲线具有连续的导函数

- 三次样条本质上是一段一段的三次多项式拼合而成的曲线；
- 在拼接处，不仅函数是连续的，且一阶和二阶导数也是连续的；

§ 4.4 三次样条插值

- 三. 三次样条插值函数
- 定义：在$[a, b]$上取$n + 1$个点$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- 若函数$S(x)$满足：
  - (1) $S(x_i) = y_i$；
  - (2)在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上是三次多项式；
  - (3)在内节点具有二阶连续导数。
- 则称$S(x)$为$f(x)$的三次样条插值函数。



§4.4 三次样条插值

- 四. 边界条件
  - $S(x)$在区间$[x_{i-1}, x_i]$上是三次多项式, $S(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$, 有4个待定系数, 要确定$S(x)$共要$4n$个待定系数。
  - 现有条件

    1)$S(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, 有n+1个条件。

    2)$S(x_i - 0) = S(x_i + 0), i = 1, 2 \ldots, n-1$, 有$n$-1个条件

    3)$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0), i = 1, 2 \ldots, n-1$, 有$n$-1个条件

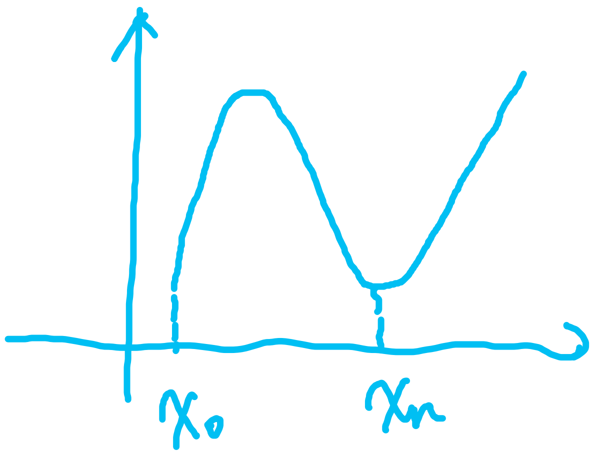
    4)$S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), i = 1, 2 \ldots, n-1$, 有$n$-1个条件

    共有$4n - 2$个条件。还缺少两个条件。
  - 为得到唯一的三次样条函数, 通常可在区间$[a, b]$的端点$x_0 = a, x_n = b$上各加一个条件, 称为边界条件。

§ 4.4 三次样条插值

- 常用的边界条件有
  - 1. $S'(x_0) = y'_0$, $S'(x_n) = y'_n$; (夹持条件)
  - 2. $S''(x_0) = y''_0$, $S''(x_n) = y''_n$;
  - 当 $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (自然边界条件)
  - 3. 假设 $f(x)$ 是以 b-a 为周期的周期函数, 这时要求
    - $S(x_0 + 0) = S(x_n - 0)$
    - $S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0)$
    - $S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0)$

    这样确定的 $S(x)$ 为周期样条函数。(周期性条件)



§ 4.4 三次样条插值

- 五.构造三次样条插值
- $s(x)$是分段三次的（条件3），$s''(x)$是一次的。所以对每个子区间，将$s''(x)$构造为线性插值函数，然后对$s''(x)$积分两次得$s(x)$；
- $s(x)$内节点函数值相等，是该点的y_i；
- $s(x)$内节点上具有二阶连续导数，相邻两个分段在交点处二阶导数相等。
- 根据共点和导数连续条件求出所有的常数。

§ 4.4 三次样条插值

- 设在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 $s(x) = s_i(x) \quad i = 1, 2, \cdots, n$
- 因 $s_i(x)$是三次的，故 $s_i''(x)$是一次的；对$s_i''(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$ 线性插值
- 设$s_i''(x_{i-1}) = M_{i-1}$，$s_i''(x_i) = M_i$
- $s_i''(x) = \frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} M_{i-1} + \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} M_i$ 记 $h_i = x_i - x_{i-1}$
- 两边积分
- $s_i'(x) = -\frac{(x_i-x)^2}{2h_i} M_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i} M_i + C_1$
- $s_i(x) = \frac{(x_i-x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + C_1 x + C_2$

§ 4.4 三次样条插值

$$s_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + C_1 x + C_2$$

- 因为 $s(x_{i-1}) = y_{i-1}$　$s(x_i) = y_i$ (条件1) 得
- $\frac{{h_i}^2}{6} M_{i-1} + C_1 x_{i-1} + C_2 = y_{i-1}$
- $\frac{{h_i}^2}{6} M_i + C_1 x_i + C_2 = y_i$
- 解出
- $C_1 = (y_i - y_{i-1})/h_i + h_i(M_{i-1} - M_i)/6$
- $C_2 = (y_{i-1} x_i - y_i x_{i-1})/h_i + h_i(M_i x_{i-1} - M_{i-1} x_i)/6$

§ 4.4 三次样条插值

$$s_i'(x) = -\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} M_i + C_1$$

$$s_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + C_1 x + C_2$$

- 将其带入代入原函数和一阶导数公式，整理得
- $s_i'(x) = -\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} M_i + \frac{(y_i - y_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i(M_i - M_{i-1})}{6}$
- $s_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + \left(y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i\right)\frac{(x - x_{i-1})}{h_i} + \left(y_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1}\right)\frac{(x_i - x)}{h_i}$
- 只要计算出 M_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，即可求出 $s_i(x)$

n+1个

§ 4.4 三次样条插值

- 为了求M_i，可利用一阶导数连续的条件(条件2)
- 区间$[x_{i-1}, x_i]$
- $s_i'(x) = -\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}M_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}M_i + \frac{(y_i-y_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i(M_i-M_{i-1})}{6}$
- 区间$[x_i, x_{i+1}]$
- $s_{i+1}'(x) = -\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_{i+1}}M_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_{i+1}}M_{i+1} + \frac{(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}(M_{i+1}-M_i)}{6}$
- 区间$[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$，左右两个导数相等

§ 4.4 三次样条插值

$$s'_{i+1}(x) = -\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_{i+1}}M_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_{i+1}}M_{i+1} + \frac{(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}(M_{i+1}-M_i)}{6}$$

$$s'_i(x) = -\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}M_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}M_i + \frac{(y_i-y_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i(M_i-M_{i-1})}{6}$$

- 用$s'_{i+1}(x_i+)$表示$s_{i+1}(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$端点x_i处的一阶导数，则有：
- $s'_{i+1}(x_i+) = -\frac{h_{i+1}}{2}M_i + \frac{(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}(M_{i+1}-M_i)}{6}$
- 用$s'_i(x_i-)$表示$s_i(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$端点x_i处的一阶导数，则有：
- $s'_i(x_i-) = \frac{h_i}{2}M_i + \frac{(y_i-y_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i(M_i-M_{i-1})}{6}$
- 据 $s'_{i+1}(x_i+) = s'_i(x_i-)$得：
- $-\frac{h_{i+1}}{2}M_i + \frac{(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}(M_{i+1}-M_i)}{6} = \frac{h_i}{2}M_i + \frac{(y_i-y_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i(M_i-M_{i-1})}{6}$

§ 4.4 三次样条插值

$h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$

$h_i = x_i - x_{i-1}$

$x_{i+1} - x_{i-1}$

- 整理得：
- $\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$
- 其中
- $\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$ ，$\mu_i = 1 - \lambda_i = 1 - \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$
- $d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$

§ 4.4 三次样条插值

- 展开得

$$
\begin{cases}
\mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 \\
\mu_2 M_1 + 2M_2 + \lambda_2 M_3 = d_2 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n = d_{n-1}
\end{cases}
$$

- 共$n-1$个方程，$n+1$个变量，利用边界条件补充两个方程

§ 4.4 三次样条插值

$$s_1'(x) = -\frac{(x_1-x)^2}{2h_1}M_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2h_1}M_1 + \frac{(y_1-y_0)}{h_1} - \frac{h_1(M_1-M_0)}{6}$$

- 第一类问题：已知端点的一阶导数
- $s'(x_0) = y'(x_0)$
- $s'(x_n) = y'(x_n)$
- 补充两个方程

- $2M_0 + M_1 = d_0$
- $M_{n-1} + 2M_n = d_n$

其中：$d_0 = \frac{6}{h_1}(f[x_0,x_1] - y_0') = 6f[x_0,x_1,x_0]$ (?)

$$d_n = \frac{6}{h_n}(y_n' - f[x_{n-1},x_n]) = 6f[x_n,x_{n-1},x_n]$$

§4.4 三次样条插值

- 第二类问题：已知端点的二阶导数

$$s''(x_0) = y''(x_0)$$
$$s''(x_n) = y''(x_n)$$

- 补充两个方程

$$M_0 = y''(x_0)$$
$$M_n = y''(x_n)$$

§ 4.4 三次样条插值

$$2M_0 + M_1 = d_0$$
$$M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

$$M_0 = y''(x_0)$$
$$M_n = y''(x_n)$$

- 统一写成

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0$$
$$\mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

对第一类问题

$$\lambda_0 = \mu_n = 1$$

$$d_0 = 6f[x_0, x_1, x_0]\text{，}\quad d_n = 6f[x_n, x_{n-1}, x_n]$$

对第二类问题

$$\lambda_0 = \mu_n = 0$$

$$d_0 = 2y''(x_0)\text{，}\quad d_n = 2y''(x_n)$$

§ 4.4 三次样条插值

合在一起可写成:

$$\begin{cases} 2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0 \\ \mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 \\ \mu_2 M_1 + 2M_2 + \lambda_2 M_3 = d_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n = d_{n-1} \\ \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{cases}$$

§ 4.4 三次样条插值

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$$

$$u_i + \lambda_i = 1$$

- 矩阵形式
- $$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \cdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$
- 解之得M_i，代入得出分段样条函数$s_i(x)$
- $s_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + \left(y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i\right) \frac{(x - x_{i-1})}{h_i} + \left(y_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1}\right) \frac{(x_i - x)}{h_i}$

§ 4.4 三次样条插值

例1：求满足下面函数表所给出的插值条件的自然样条函数，

并计算$f(3), f(4.5)$的值 (要求会做该类型的题目）

x	1	2	4	5
y	1	3	4	2

解：第二类边界条件，$M_0 = M_n = 0$利用M关系式，可得M的方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 \\ & & \mu_3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

§ 4.4 三次样条插值

因为： $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$

所以： $M_0 = M_n = M_3 = 0$， $\lambda_0 = \mu_n = \mu_3 = 0$， $d_0 = d_3 = 0$

还要求： $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, d_1, d_2$

先求 $h_1 = x_1 - x_0 = 2 - 1 = 1$， $h_2 = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2$

$h_3 = x_3 - x_2 = 5 - 4 = 1$

所以： $\lambda_1 = h_2/(h_1 + h_2) = 2/3$ $\mu_1 = 1 - \lambda_1 = 1/3$

$\lambda_2 = h_3/(h_3 + h_2) = 1/3$ $\mu_2 = 1 - \lambda_2 = 2/3$

$d_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = -3$

$d_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = -5$

§ 4.4 三次样条插值

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & & \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{2}{3} & \\ & \frac{2}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ & & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **解之得: $M_0 = M_3 = 0$** $M_1 = -\dfrac{3}{4}$ $M_2 = -\dfrac{9}{4}$

§4.4 三次样条插值

- 按公式可得到：

- $$s_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i +$$
$$(y_{i-1} - M_{i-1} h_i^2 / 6) \frac{x_i - x}{h_i} + (y_i - M_i / 6h_i^2) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$$

- 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $\quad i = 1, 2, 3$

- $[1, 2, 4, 5]$

§4.4 三次样条插值

- 在［1,2］上的样条插值函数为

$$s_1(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 14x + 8)$$

- 在［2,4］上的样条插值函数为

$$s_2(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 14x + 8)$$

- 在［4,5］上的样条插值函数为

$$s_3(x) = \frac{1}{8}(3x^3 - 45x^2 - 206x - 264)$$

§ 4.4 三次样条插值

- 所以

- $$s(x)=\begin{cases}-0.125\left(x^3-3x^2-14x+8\right)\\-0.125\left(x^3-3x^2-14x+8\right)\\0.125\left(3x^3-45x^2-206x-264\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-0.125[(x-3)x-14]x-1 & 1\le x\le 2\\-0.125[(x-3)x-14]x-1 & 2\le x\le 4\\0.125[(3x-45)x-206]x-33 & 4\le x\le 5\end{cases}$$

- $f(3)=\ s_2(3)=4.25$
- $f(4.5)=\ s_3(4.5)=3.1406$

§ 4.4 三次样条插值

例2 设f为定义在区间[0,3]上的函数

x	0	1	2	3
y	0	0.5	2.0	1.5

且满足$f'(x_0)=0.2$，$f'(x_3)=-1$的值，求三次样条插值函数。

利用M关系式求三次样条函数S

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 \\ & & \mu_3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

§ 4.4 三次样条插值

- 第一类边界条件

$\lambda_0 = \mu_3 = 1$

$d_0 = 6f[x_0, x_1, x_0] = 1.8$ ， $d_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = 3$

$d_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = -6$ ， $d_3 = 6f[x_3, x_2, x_3] = -3$

$h_1 = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1$

$h_2 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$

$h_3 = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1$

所以: $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1/2$

§ 4.4 三次样条插值

- $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \\ & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 3 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

解得:

$M_0 = 0.36$ ， $M_1 = 2.52$

$M_2 = -3.72$ ， $M_3 = 0.36$

§ 4.4 三次样条插值

将M代入三次样条函数表达式(4-46)得

$$s(x)=\begin{cases} 0.48x^3-0.18x^2+0.2x & 0\le x\le 1 \\ -1.04(x-1)^3+1.26(x-1)^2+1.28(x-1)+0.5 & 1\le x\le 2 \\ 0.68(x-2)^3-1.86(x-2)^2+0.68(x-2)+2.0 & 2\le x\le 3 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} ((0.48x-0.18)x+0.2)x & 0\le x\le 1 \\ ((-1.04(x-1)+1.26)(x-1)+1.28)(x-1)+0.5 & 1\le x\le 2 \\ ((0.68(x-2)-1.86)(x-2)+0.68)(x-2)+2.0 & 2\le x\le 3 \end{cases}$$

§ 4.4 三次样条插值

例3：　已知：

$$s(x)=\begin{cases} x^3+x^2 & 0\le x\le 1 \\ 2x^3+bx^2+cx-1 & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

是以 0,1,2为节点的三次样条函数，请计算b，c的值

§ 4.4 三次样条插值

解： $s_1(x) = x^3 + x^2$， $s_1'(x) = 3x^2 + 2x$， $s_1'(1-) = 5$

$s_2(x) = 2x^3 + bx^2 + cx - 1$， $s_2'(x) = 6x^2 + 2bx + c$

$s_2'(1+) = 6 + 2b + c$

因为 $s_1'(1-) = s_2'(1+)$

所以： $6 + 2b + c = 5$

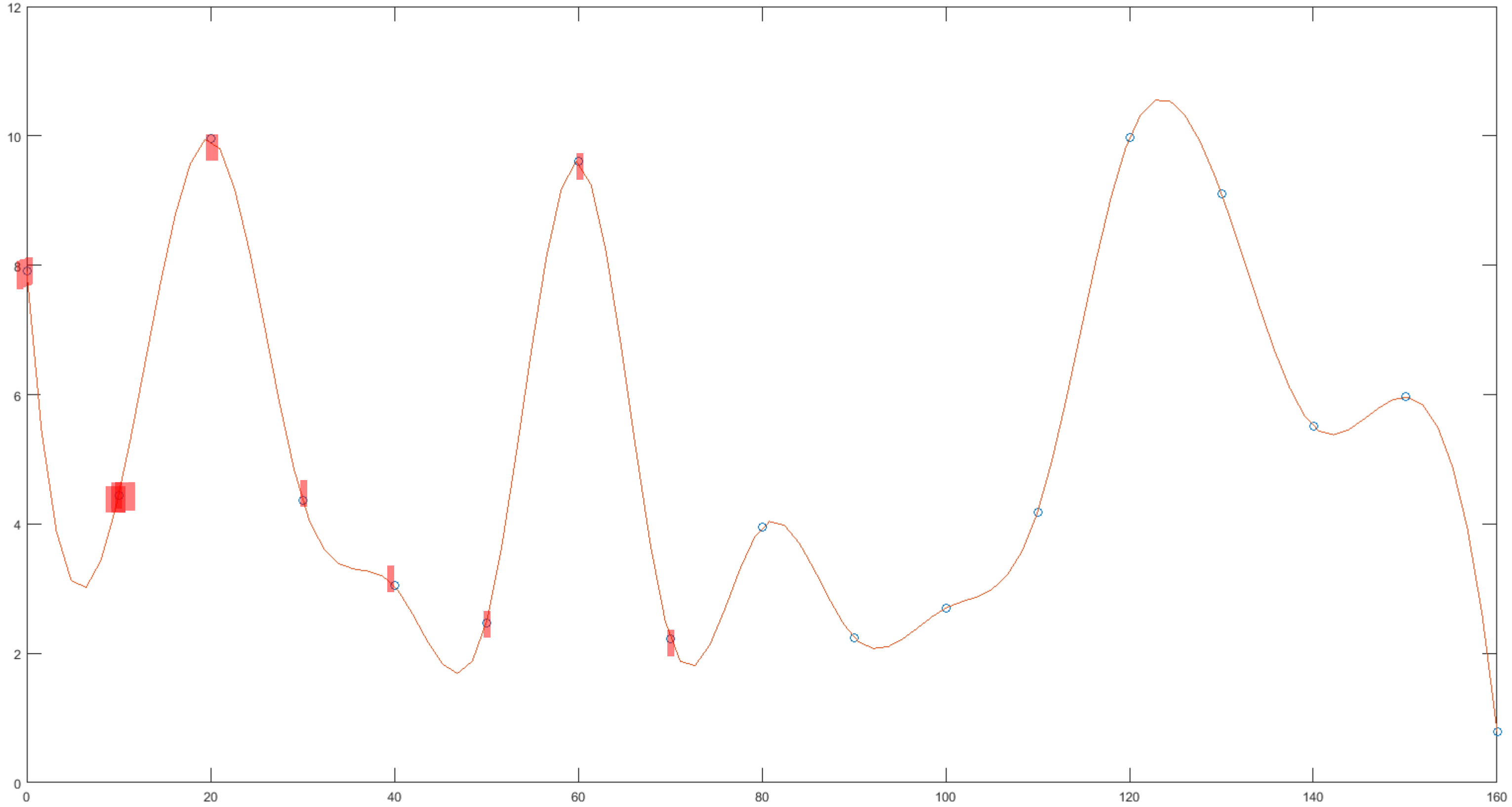
同理： 利用 $s_1''(1-) = s_2''(1+)$得：

$12 + 2b = 8$

解之得： $b = -2$ ， $c = 3$

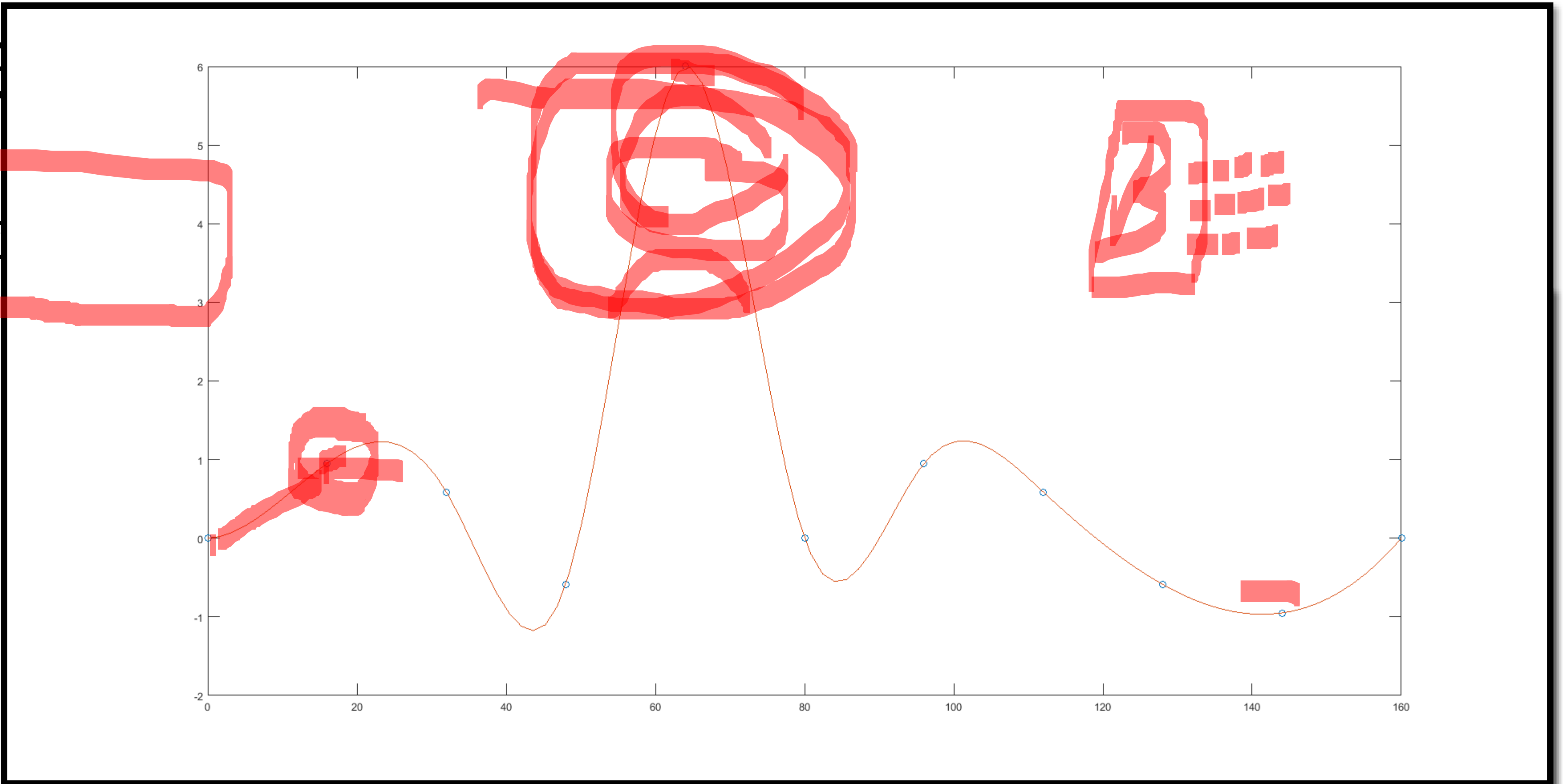
§4.4 三次样条插值

三次样条插值曲线

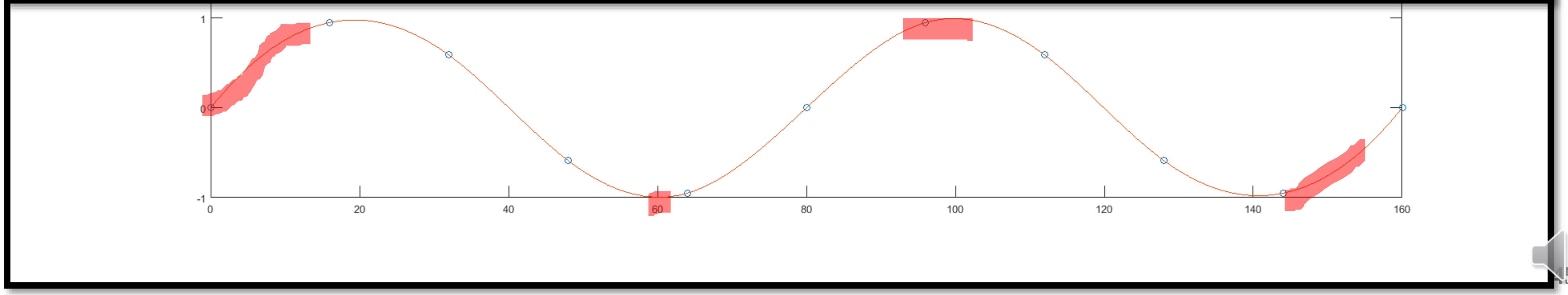


§ 4.4 三

三次样条插值



6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
0
20
40
60
80
100
120
140
160



1
0
-1
0
20
40
60
80
100
120
140
160

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 一. 引言
- 设一组观测数据为

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

- 其中$x_i \neq x_j \ (i \neq j)$

- 根据这一系列数据找出函数关系$y = f(x)$。

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

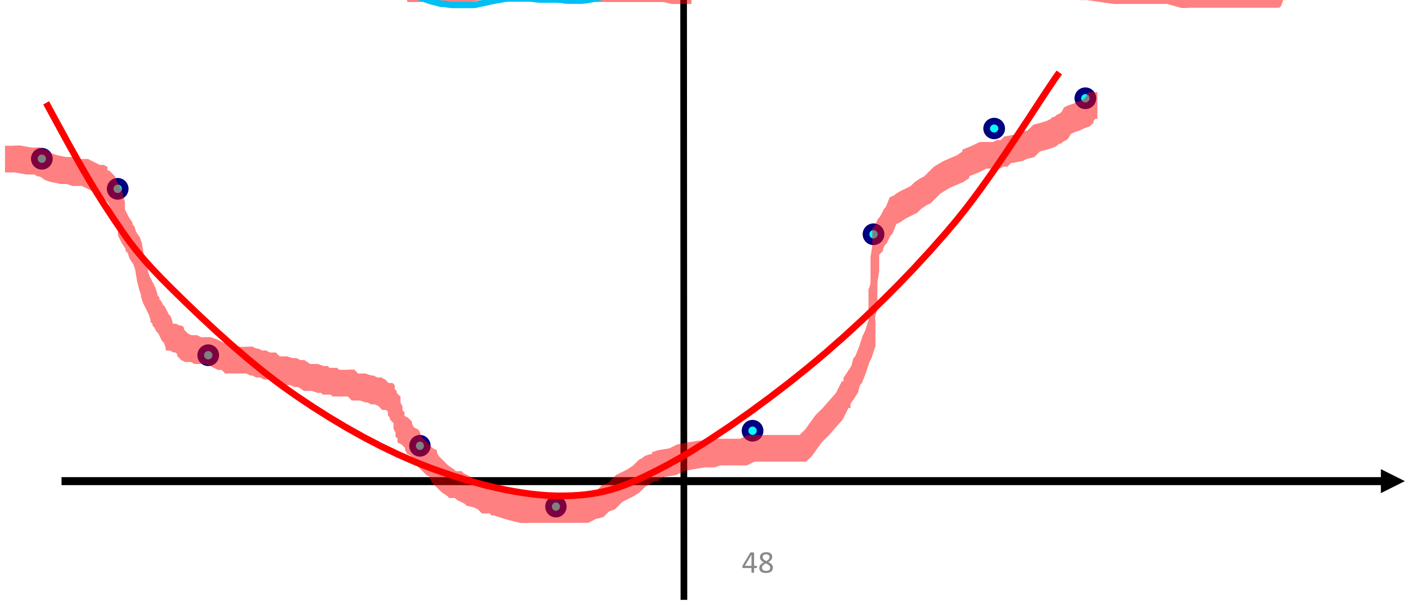
- 若用插值函数 $p(x)$代替函数关系$f(x)$，要求满足插值原则

$$p(x_i) = f(x_i) = y_i \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

- 当数据量特别大时一般不用插值法
  - 数据量很大时所求插值曲线中的未知参数就很多；
  - 数据量大，多项式插值:高次插值，效果不理想；分段低次插值，精度不高；
  - 由于观测点和观测数据本身就有误差，则插值函数就会保留这些误差，而影响逼近函数的精度。
- 所以，使插值曲线刻意经过这些点也不必要。

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 构造函数$f(x)$，使求得的函数$f(x)$与准确函数(表格函数)从总体上来说与所有数据点最为接近，所求的曲线叫拟合曲线
  - 不要求函数曲线完全通过所有的数据点
  - 函数曲线跟所有样本点的整体最接近，要求该近似曲线能够反映数据的基本变化趋势.



§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 应用实例：
- 已知某地近6年的房价，预测今后几年的房价。

x：年份	1	2	3	4	5	6
y：房价	1	1.6	2.1	2.4	3.2	3.4

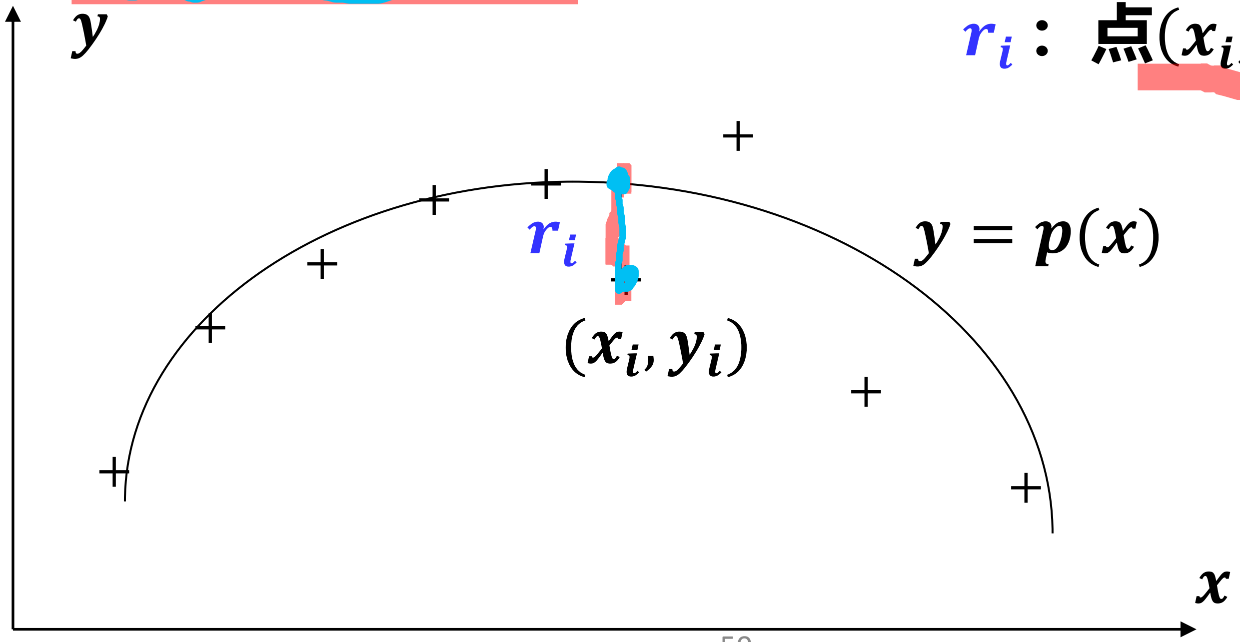
- 近似函数

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x = 1 + 0.5x$$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 曲线拟合问题的**提法**
- 已知一组（二维）数据，即平面上n个点(x_i, y_i)，$i = 1, \dots n$，寻求一个函数（曲线）$y = p(x)$，使$p(x)$总体上来说，其偏差在某种准则下度量能达到最小，即曲线拟合的最好。

r_i：**点**(x_i, y_i)**与曲线**$y = p(x)$**距离**



§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 记所求的拟合曲线为$\varphi(x)$

在节点$x_1, x_2, \dots, x_n$上$\varphi(x)$与$f(x)$的误差为：

$$r_i = y_i - \varphi(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

也称r_i为用$\varphi(x)$拟合$f(x)$的偏差。

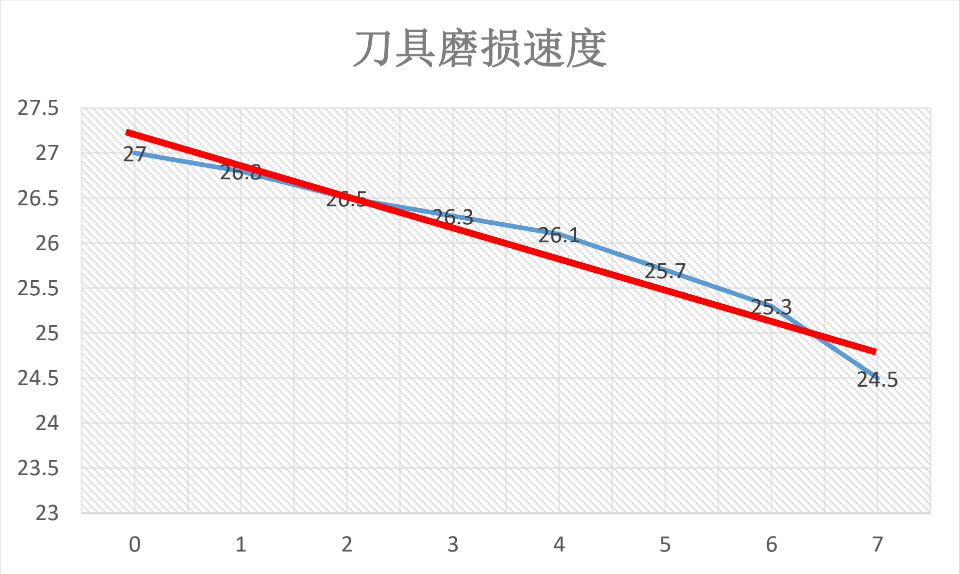
§4.5 曲线拟合的最小二乘法

二、最小二乘原理

1.引例

为测机床刀具的磨损速度，经一定时间t，测一下刀具厚度y，得到如下数据：

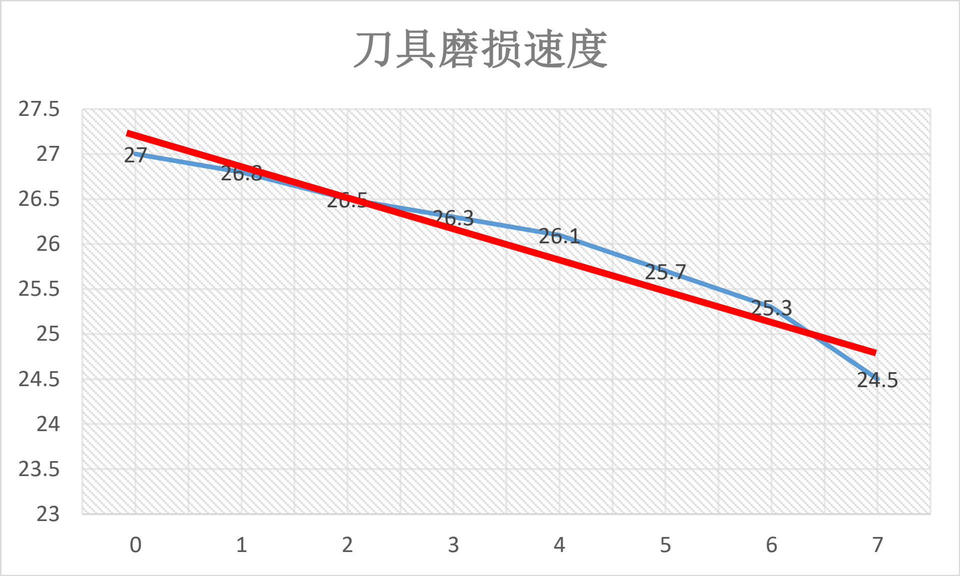
时间t	0	1	2	3	4	5	6	7
厚度y	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.4



从图可看出y与t近似直线

$$y = a + bt$$

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法



- 如果能按某种方法确定a, b，
- 则对任意的t_i就能求出y_i^*，完成模型构建；
- 因a, b是近似的，所以y_i^*也是近似的，存在误差；
- 误差

$$r_i = y_i - y_i^* = y_i - (a + bt_i)$$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

r_i　$\xi = \max|r_i|$

- 逼近标准

要使y_i^*逼近y_i，可采取以下三个标准

(1)误差的最大绝对值为最小

$A = \sum |r_i|$

(2)误差的绝对值之和为最小

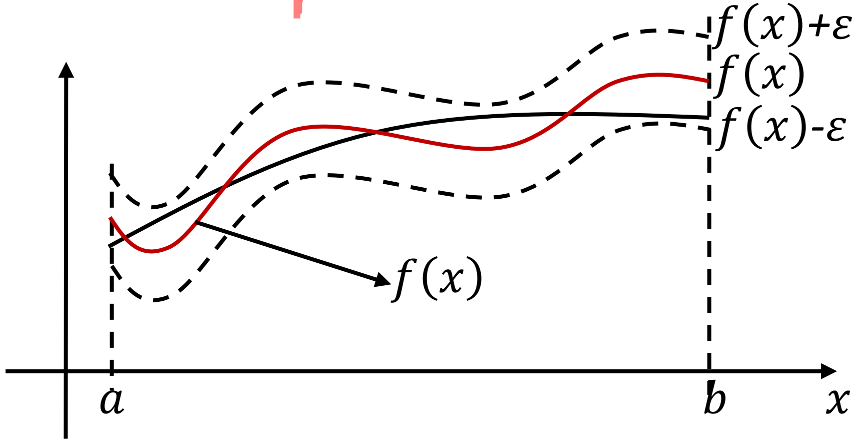
- A为两条曲线间区域的面积
- 区间上“平均”误差尽量小

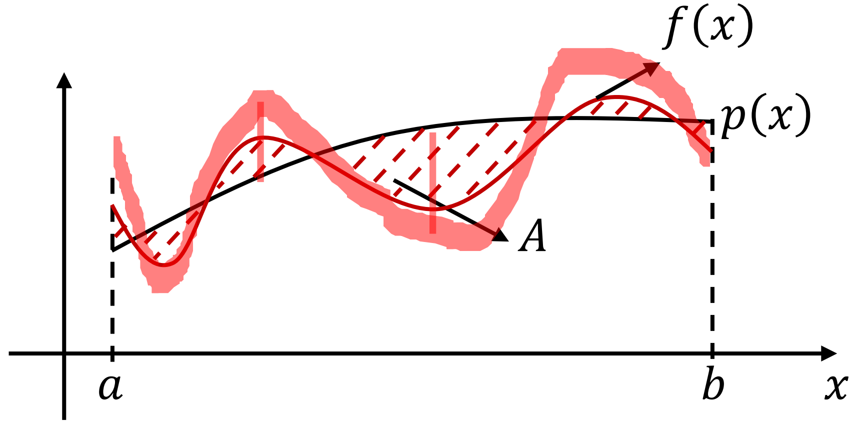
(3) 误差的平方和为最小

$G = \sum r_i^2$

- 有类似意义

- 易于求解，称为最佳平方(最小二乘)逼近





§4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 最小二乘法

以(3)误差的平方和为最小为标准

求拟合曲线的方法为最小二乘法

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 2.线性拟合
- 目标曲线是直线$y = a + bt$，用线性方程来进行拟合
- 误差的平方和(也称为均方误差)最小
- 即$R = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (a + bt_i)\right)^2$
- 根据极值理论，要使得R达到极小，必有：
- $\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial b} = 0 \end{cases}$

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

$$R=\sum_{i=1}^{n} r_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(a+bt_i)\right)^2$$

- $\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bt_i)]=0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bt_i)]t_i=0 \end{cases}$

- $\begin{cases} na+b\sum_{i=1}^{n}[t_i]=\sum_{i=1}^{n}[y_i] \\ a\sum_{i=1}^{n}[t_i]+b\sum_{i=1}^{n}[t_i^2]=\sum_{i=1}^{n}[t_iy_i] \end{cases}$

- 法方程组

- 矩阵形式 $\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}[t_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[t_i] & \sum_{i=1}^{n}[t_i^2] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}[y_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[t_iy_i] \end{bmatrix}$

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 机床刀具的磨损数据

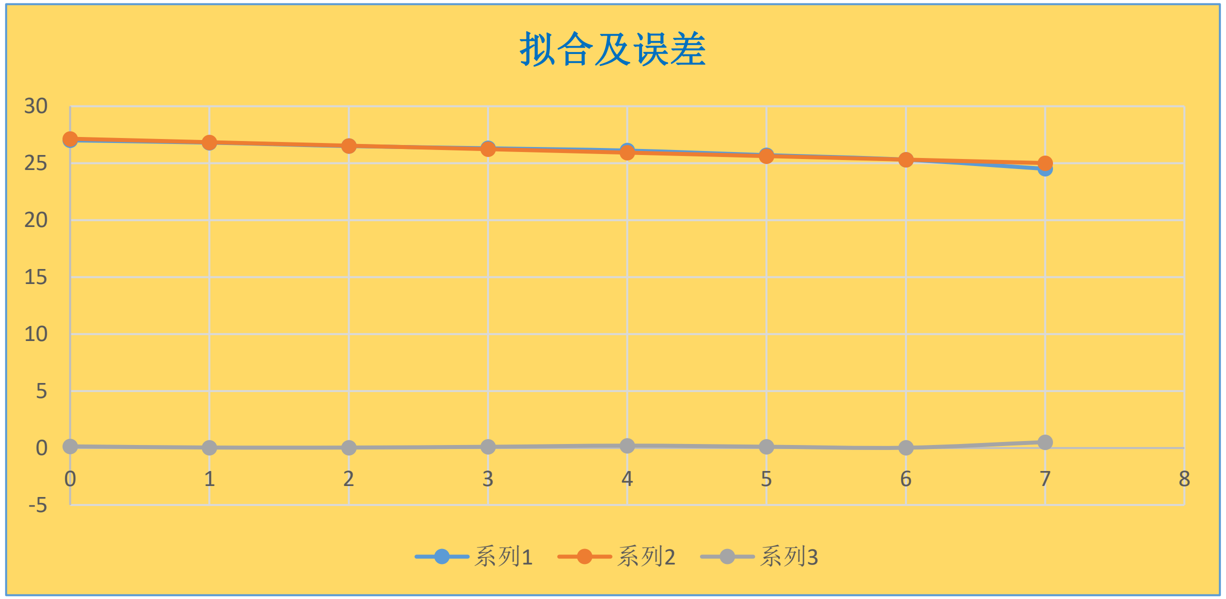
时间t	0	1	2	3	4	5	6	7
厚度y	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.4

- $\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}[t_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[t_i] & \sum_{i=1}^{n}[t_i^2] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}[y_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[t_i y_i] \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 28 & 140 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208.2 \\ 714.9 \end{bmatrix}$
- 解得$a = 27.125 \qquad b = -0.3036$
- 求得的拟合曲线为：$y^* = 27.125 - 0.3036t$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 求得的拟合曲线为：$y^* = 27.125 - 0.3036t$
- 误差计算

时间t	0	1	2	3	4	5	6	7
厚度y	**27.0**	**26.8**	**26.5**	**26.3**	**26.1**	**25.7**	**25.3**	**24.4**
拟合y^*	27.125	26.821	26.518	26.214	25.911	25.607	25.303	24.999
误差r_i	0.125	0.021	0.018	0.086	0.189	0.093	0.003	0.499



§4.5 曲线拟合的最小二乘法

3.最小二乘法步骤

- 1)据已知点，画草图，确定函数的近似关系
- 2)写出近似函数的表达式------经验公式
- 3)通过最小二乘原理，确定函数中未知数

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

$y = a + bx$

3.线性拟合最小二乘法计算步骤

- 1)样本点(x_i, y_i)，$(i = 1, 2, \cdots, n)$计算如下和式$\sum_{i=1}^{n}[x_i]$，$\sum_{i=1}^{n}[x_i^2]$，$\sum_{i=1}^{n}[y_i]$，$\sum_{i=1}^{n}[x_i y_i]$；
- 2)写出确定a，b的方程组

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}[x_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[x_i] & \sum_{i=1}^{n}[x_i^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}[y_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[x_i y_i] \end{bmatrix}$$

- 3)解出a，b，从而得到拟合函数$\varphi(x) = a + bx$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

$m>n$
$m=n$
$m<n$

- **4.求解矛盾方程组**
- 矛盾方程组
- 设有如下方程组$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$，其中$n>m$，即方程的个数大于未知数的个数，通常情况，方程组无解，称之为矛盾方程组
- 最小二乘法是用来解矛盾方程组的一个常用方法

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 最小二乘法解矛盾方程组的思路：
- 求$x_1, x_2, \cdots, x_m$，使方程组两端近似相等
- 令$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j - b_i\right]^2$，选择$x_1, x_2, \cdots, x_m$，使得$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$达到最小
- 对每个分量x_k，求偏导，令其为零，得到法方程组
- $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j - b_i\right] a_{ik} = 0$，$(k = 1, 2, \cdots, m)$
- **整理得**
- $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a_{ik}\right)x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i a_{ik}$，$(k = 1, 2, \cdots, m)$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 最小二乘法解矛盾方程组的思路：$\boldsymbol{Ax = b}$
- 其中，$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$，$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$
- 左右两侧左乘A^T，得法方程组（也称正规方程组）
- $A^TAx = A^Tb$
- 若A^TA可逆，则法方程组有唯一解x，也是最小二乘解

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 例2：用最小二乘法解下列方程组

- $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+y=2 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

- $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\therefore A^TA=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$, $A^Tb=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 21 \end{bmatrix}$

- ∴法方程组为：$\begin{cases} 9x+9y=20 \\ 9x+11y=21 \end{cases}$

- 解得$\begin{cases} x=31/18 \\ y=1/2 \end{cases}$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 三.可化为线形拟合的情况
- 线性拟合使用方便
- 但有时变量之间的关系不是线性关系，呈现较复杂非线性关系
  - 直接采用最小二乘原理来确定未知数参数，得一个非线性方程组，不易求解
- 对于这样的情况，通过变量替换，把非线性关系转换为线性关系

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 1.双曲线
- $1/y = a + b/x$

令$y' = 1/y \quad x' = 1/x$

则有 $\quad y' = a + bx'$

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

2.指数函数(1)

$$y = ae^{bx}$$

变换： 两边取对数

$$\ln y = \ln a + bx$$

令　$y' = \ln y$　　$x' = x$　　$a' = \ln a$

则有　$y' = a' + bx'$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

3.指数函数(2)

$y = ae^{\frac{b}{x}}$

变换：两边取对数

$$\ln y = \ln a + b/x$$

令 $y' = \ln y \quad x' = 1/x \quad a' = \ln a$

则有 $y' = a' + bx'$

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

4.对数函数

$$y = a + b\,lg\,x$$

变换： 令 $y' = y$

$x' = lgx$

则有 $y' = a + bx'$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

5.幂函数

$$y = ax^b$$

变换：两边取对数

$$lny = lna + blnx$$

令 $y' = lny \quad x' = lnx \quad a' = lna$

则有 $y' = a' + bx'$

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

6.S曲线

$$y = \frac{1}{(a + be^{-x})}$$

变换： 两边取倒数

$$\frac{1}{y} = (a + be^{-x})$$

令 $y' = \frac{1}{y}$ $x' = e^{-x}$

则有 $y' = a + bx'$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

- 部分可化为线性拟合问题的常见函数类型

部分可化为线性拟合问题的常见函数类型

拟合函数类型	变量代换	化成的拟合函数
$y=ae^{b/x}(a>0)$	设 $\bar{y}=\ln y, \bar{x}=1/x\,(\bar{a}=\ln a)$	$\bar{y}=\bar{a}+b\bar{x}$
$y=\dfrac{1}{a+be^{-x}}(a>0)$	设 $\bar{x}=e^{-x}, \bar{y}=1/y$	$\bar{y}=a+b\bar{x}$
$y=\dfrac{1}{ax+b}$	设 $\bar{y}=1/y$	$\bar{y}=b+a\bar{x}$
$y=\dfrac{x}{ax+b}$	设 $\bar{y}=1/y, \bar{x}=1/x$	$\bar{y}=a+b\bar{x}$
$y^2=ax^2+bx+c$	设 $\bar{y}=y^2$	$\bar{y}=ax^2+bx+c$
$y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$	设 $\bar{y}=1/y$	$\bar{y}=ax^2+bx+c$
$y=\dfrac{x}{ax^2+bx+c}$	设 $\bar{y}=x/y$	$\bar{y}=ax^2+bx+c$
$y=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$	设 $\bar{x}=1/x$	$y=a+b\bar{x}+c\bar{x}^2$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

例:求一个经验函数 $\varphi(x) = ae^{mx}$ $(a, m$为常数),使它能和下面给出的数据相拟合。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6

解 对经验公式两边取对数得

$$ln\varphi(x) = lna + mx$$

令

$$A = lna, \quad y' = ln\varphi(x)$$

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6
$ln(\varphi(x))$	2.728	3.020	3.311	3.600	3.894	4.184	4.475	4.567

则化为线性情况

$$y' = A + mx$$

可算得

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 36 \qquad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 204$$

$$\sum_{i=1}^{8} y_i' = \sum_{i=1}^{8} \ln \varphi(x_i) = 29.9787 \qquad \sum_{i=1}^{8} x_i y_i' = 147.1948$$

于是得到法方程组

$$\begin{cases} 8A + 36m = 29.9787 \\ 36A + 204m = 147.1948 \end{cases}$$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

$$\begin{cases} 8A + 36m = 29.9787 \\ 36A + 204m = 147.1948 \end{cases}$$

解得 $$A = 2.4305$$

$$m = 0.2926$$

得：$y' = 2.4305 + 0.2926x$

由 $y' = ln\varphi(x)$

经验公式为：$\varphi(x) = e^{0.2926x+2.4305} = 11.36e^{0.2926x}$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

四.多项式拟合

设函数关系$y = f(x)$的一组观测数据为(x_i, y_i)，$(i = 1, 2, \dots, n)$，欲求一个$m(m<n-1)$次多项式

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

采用均方误差，则偏差平方和为

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [p_m(x_i) - y_i]^2$$

根据最小二乘思想，求R关于a_k的偏导，令其为零，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial a_2} = 0 \\ \quad \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial R}{\partial a_m} = 0 \end{cases}$$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

对于$\boldsymbol{P_m(x)}$ 得到$\boldsymbol{m+1}$阶法方程组

$$
\begin{aligned}
&a_0 n + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
&a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
&\cdots\cdots \\
&a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m} + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m+1} + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2m} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,m} y_i
\end{aligned}
$$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

矩阵形式

$$
\begin{bmatrix}
n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \vdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} \\
\sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \vdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^{m} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \vdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} y_i
\end{bmatrix}
$$

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

例：用二次多项式函数拟合如下数据：

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	4	2	3	0	-1	-2	-5

解　二次多项式拟合，则$m=2$，法方程组如下：

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

例：用二次多项式函数拟合如下数据：

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	4	2	3	0	-1	-2	-5

解 $n=7$，经计算有：

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 0,\ \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 28,\ \sum_{i=1}^{7} x_i^3 = 0,\ \sum_{i=1}^{7} x_i^4 = 196,$$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i = 1,\ \sum_{i=1}^{7} x_i y_i = -39, \sum_{i=1}^{7} x_i^2 y_i = -7.$$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

得到法方程：

$$\begin{cases} 7a_0 + 0a_1 + 28a_2 = 1 \\ 0a_0 + 28a_1 + 0a_2 = -39 \\ 28a_0 + 0a_1 + 196a_2 = -7 \end{cases}$$

解得$a_0 = 0.66667, a_1 = -1.39286, a_2 = -0.13095$

所以$p(x) = 0.66667 - 1.39286x - 0.13095x^2$

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

例：设有一组数据表

x_i	1	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	7	8	10	11	11	10	9	8

试用二次多项式来拟合这组数据。 m=2

解：首先算出

$$\sum_{i=1}^{9} x_i,\ \sum_{i=1}^{9} y_i,\ \sum_{i=1}^{9} x_i y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^{\,2},$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^{\,2} y_i,\ \sum_{i=1}^{9} x_i^{\,3},\ \sum_{i=1}^{9} x_i^{\,4}$$

§ 4.5 曲线拟合的最小二乘法

解： 首先算出

$\sum_{i=1}^{9} x_i = 53$，$\sum_{i=1}^{9} y_i = 76$，$\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 489$，$\sum_{i=1}^{9} {x_i}^2 = 381$，

$\sum_{i=1}^{9} {x_i}^2 y_i = 3547$，$\sum_{i=1}^{9} {x_i}^3 = 3017$，$\sum_{i=1}^{9} {x_i}^4 = 25317$

得正则方程组

$$\begin{cases} 9a_0 + 53a_1 + 381a_2 = 76 \\ 53a_0 + 381a_1 + 3017a_2 = 489 \\ 381a_0 + 3017a_1 + 25317a_2 = 3547 \end{cases}$$

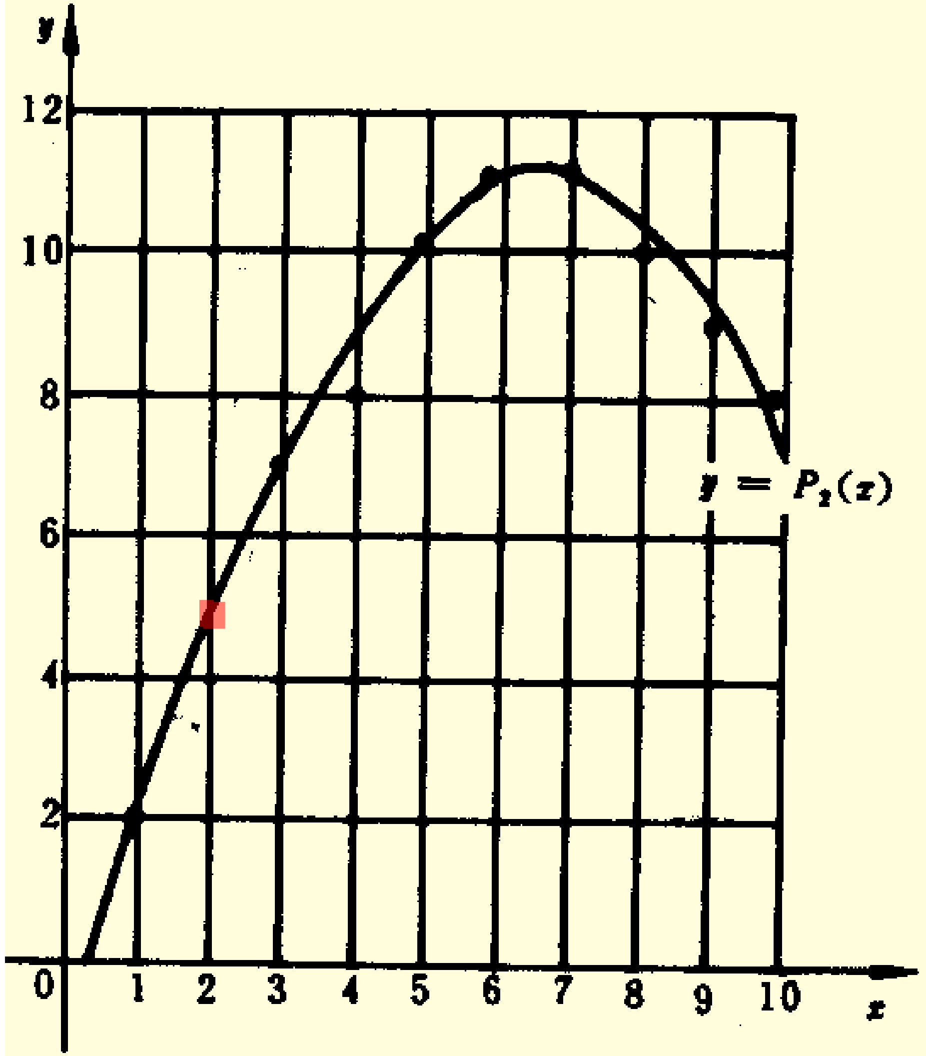
解得 $a_0 = -1.4597, a_1 = 3.6053, a_2 = -0.2676$

因此所求的二次多项式

$$P_2(x) = -1.4597 + 3.6053x + 0.2676x^2$$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

对应曲线为



§4.5 曲线拟合的最小二乘法

注意：在实际问题中,近似函数$\varphi(x)$的选取只能凭经验得到。例

(1)加速度与时间的关系是线性关系,可选取

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

(2) 炮弹在空中的高度与时间的关系近似于抛物线,可选取

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

§4.5 曲线拟合的最小二乘法

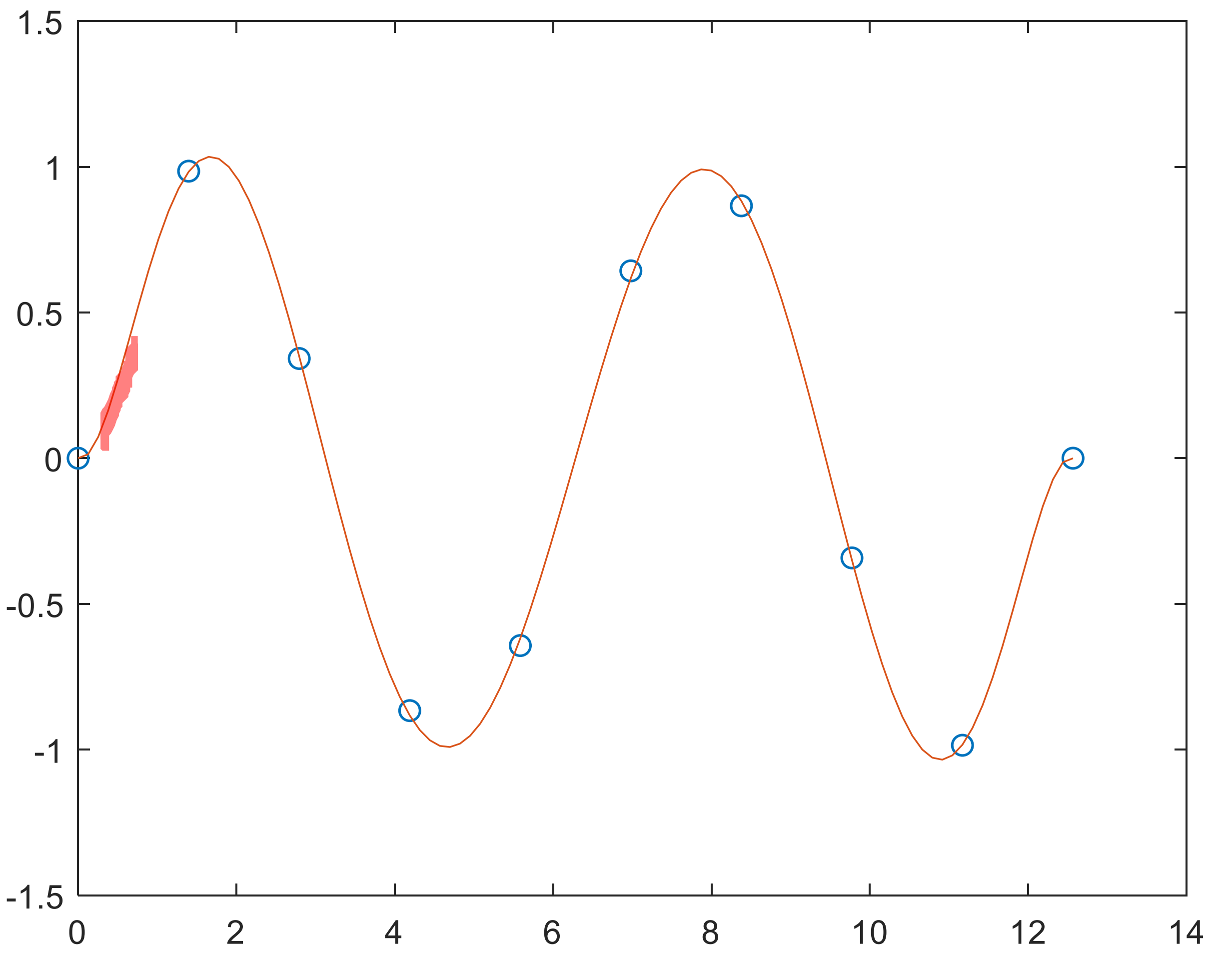
- 插值与拟合的比较
- 相同点
  - 都需要根据已知数据构造函数。
  - 可使用得到函数计算未知点的函数值。
- 不同点
  - 插值需要构造的函数正好通过各插值点，拟合则不要求，只要均方差最小即可。
  - 对实验数据进行拟合时，函数形式通常已知，仅需要拟合参数值。

§4.8 插值与拟合工具

- Polyfit
- p = polyfit(x,y,n)
- 返回阶数为 n 的多项式 p(x) 的系数，该阶数是 y 中数据的最佳拟合（在最小二乘方式中）。p 中的系数按降幂排列，p 的长度为n+1
- y = polyval(p,x) 返回在 x 处计算的 n 次多项式的值。输入参数 p 是长度为 n+1 的矢量，其元素是按要计算的多项式降幂排序的系数。

插值与拟合工具

- **例8.1**
- x = linspace(0,4*pi,10);
- y = sin(x);
- p = polyfit(x,y,7);
- x1 = linspace(0,4*pi);
- y1 = polyval(p,x1);
- figure
- plot(x,y,'o')
- hold on
- plot(x1,y1)
- hold off

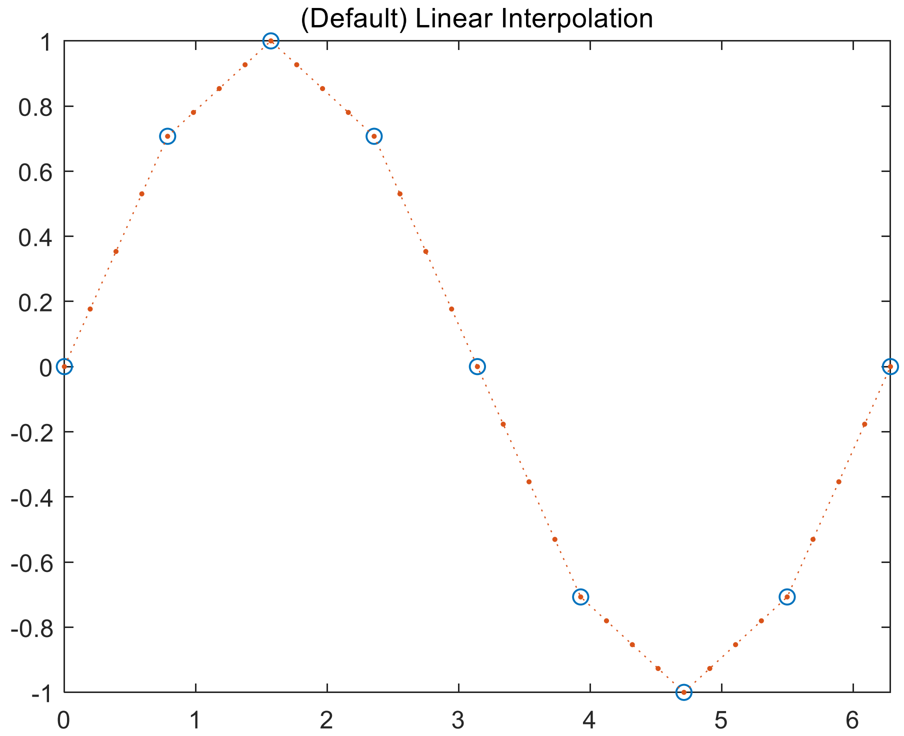


插值与拟合工具

- Interp1（1,2,3的1）
- vq = interp1(x,v,xq)
- 使用线性插值返回一维函数在特定查询点的插入值。矢量 x 包含样本点，v 包含对应值 v(x)。矢量 xq 包含查询点的坐标。
- vq = interp1(x,v,xq,method)
- 指定备选插值方法：'nearest'、'next'、'previous'、'linear'、'spline'、'pchip' 或 'cubic'。默认方法为 'linear'。

插值与拟合工具

- 例8.2
- x = 0:pi/4:2*pi;
- v = sin(x);
- xq = 0:pi/16:2*pi;
- figure
- vq1 = interp1(x,v,xq);
- plot(x,v,'o',xq,vq1,':.');
- xlim([0 2*pi]);
- title('(Default) Linear Interpolation');



作业与实验

- 作业（书面作业）：
- **P109：2,**
- **4,6,9**
- **12,**
- **16,17**

END