

一. 填空题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 设 A, B 为随机事件, $P(AB) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(B) = 0.4$, 则 $P(A) =$ _____.
2. 随机变量 $X \sim N(4, \sigma^2)$, 且 $P\{4 < X < 6\} = 0.3$, 则 $P\{X < 2\} =$ _____.
3. 已知随机变量 $X \sim P(3)$ (泊松分布), 则 $Z = 4X + 3$ 的方差 $DZ =$ _____.
4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -3 和 3 , 方差分别为 1 和 4 , 而相关系数为 0 , 则由切比雪夫不等式, 有 $P\{|X + Y| \geq 6\} \leq$ _____.
5. 总体 $X \sim N(0, 1)$, 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 是来自 X 的随机样本, 则统计量 $U = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2}$ 服从 _____ 分布 (写出自由度).
6. 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程, 且 $X(0) = 0$, 在方差函数 $D_X(t)$ 已知的条件下, 则协方差函数 $C_X(s, t) =$ _____.

二. 选择题 (每题 2 分, 共 12 分):

1. 设事件 A, B 互不相容且概率不为零, 则下列结论肯定正确是 _____
(A) \bar{A} 与 \bar{B} 互不相容 (B) \bar{A} 与 \bar{B} 相容
(C) $P(AB) = P(A)P(B)$ (D) $P(B-A) = P(B)$
2. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则随着参数 σ 的减小, 概率 $P\{|X - \mu| < 3\sigma\}$ _____
(A) 单调增加 (B) 单调减少
(C) 保持不变 (D) 增减不定
3. 设随机变量 X, Y 相互独立且同分布: $P\{X = -2\} = P\{Y = -2\} = 1/2$, $P\{X = 2\} = P\{Y = 2\} = 1/2$, 则 _____
(A) $P\{X = Y\} = 1/4$ (B) $P\{X = Y\} = 1$
(C) $P\{X + Y = 0\} = 1/4$ (D) $P\{XY = 4\} = 1/2$
4. 设随机变量 X, Y 的方差存在且不为零, 若 $EXY = EX \cdot EY$, 则 X, Y 必然 _____
(A) 独立 (B) 相关系数为零
(C) 不独立 (D) 相关系数不为零
5. 在假设检验中, 记 H_0 为待检验假设, 则所谓犯第二类错误指的是 _____

- (A) H_0 为真时, 接受 H_0 (B) H_0 为真时, 拒绝 H_0
 (C) H_0 为假时, 接受 H_0 (D) H_0 为假时, 拒绝 H_0

6. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的随机样本, \bar{X} 为样本均值, EX 未知, 则总体方差的无偏估计量为_____

- (A) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
 (C) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - EX)^2$ (D) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX)^2$

三. 计算题 (共 8 个题目, 共 76 分)

1. (10 分) 一机床有 $\frac{1}{3}$ 的时间加工零件 A, 其余时间加工零件 B, 加工零件 A 时, 停机的概率是 $\frac{3}{10}$, 加工零件 B 时, 停机的概率是 $\frac{4}{10}$, 求: (1) 这台机床停机的概率;
 (2) 若已知这台机床停机, 则停机时加工零件 A 的概率.

2. (10 分) 设随机变量 X 的分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} A \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x \in \text{其他} \end{cases}$$

求: (1) 系数 A ; (2) X 的分布函数;
 (3) X 落在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 的概率.

3. (8 分) 设随机变量 X 的概率分布为

X	-2	-1	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

求: (1) $Y = X^2 + 1$ 的概率分布;
 (2) $Y = X^3 + 2$ 的概率分布.

4. (15 分) 设二维随机变量 (X, Y) 在矩形区域 $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上

服从均匀分布. 记 $U = \begin{cases} 0, & \text{若 } X \leq Y \\ 1, & \text{若 } X > Y \end{cases}$; $V = \begin{cases} 0, & \text{若 } X \leq 2Y \\ 1, & \text{若 } X > 2Y \end{cases}$.

(U, V)

求: (1) (U, V) 的联合概率分布; (2) (U, V) 关于 U 和 V 的边缘概率分布;
(3) U 和 V 的相关系数.

5. (5 分) 设由来自总体 $X \sim N(\mu, 0.09)$ 的长度为 4 的样本, 得样本均值 $\bar{X} = 13$
求未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

区间估计 $\bar{X} \sim N$
 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{0.09/n}}$

6. (10 分) 设总体 X 的分布函数为

$$F(x, \theta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\theta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中 $\theta > 1$ 为未知参数, 且 X_1, \dots, X_n 是来自总体 X 的随机样本,

求: (1) 参数 θ 的矩估计量;

(2) 参数 θ 的极大似然估计量.

$E X = \dots$
 $\hat{\theta} = \dots$

7. (8 分) 设 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别是强度为 λ_1 和 λ_2 的相互独立的泊松过程, 令
 $X(t) = N_1(t) + N_2(t)$, $t > 0$, 求 $X(t)$ 的均值函数、方差函数、自相关函数和自协方差函数.

8. (10 分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间为 $I = \{1, 2, 3\}$, 它有一步转移概

率矩阵 $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$, 初始分布为 $P\{X_0 = 1\} = 0.3$, $P\{X_0 = 2\} = 0.4$,

$P\{X_0 = 3\} = 0.3$, 求:

(1) 计算 $P\{X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3\}$;

(2) 计算 $P_{12}(2) = P\{X_2 = 2 | X_0 = 1\}$;

(3) 计算 $P_2(2) = P\{X_2 = 2\}$.