第六章常微分方程的数值解法

§6.1 引言

零. 基础知识回顾

1.微分方程

有一个或多个导数及其函数的方程式称为微分方程，微分方程中含有参数，未知函数和未知函数的导数。微分方程分为两类，常微分方程和偏微分方程。未知函数是一元函数的是常微分方程，只有一个自变量参数；未知函数是多元函数的微分方程称为偏微分方程，偏微分方程有一个以上自变量参数。微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶。微分方程的解是满足微分方程的函数。微分方程求解分为求通解和特解。通解是满足微分方程的函数表达式，通解中存在一些待定的常数，特解是通过初值条件确定了常数值得到的微分方程的解。

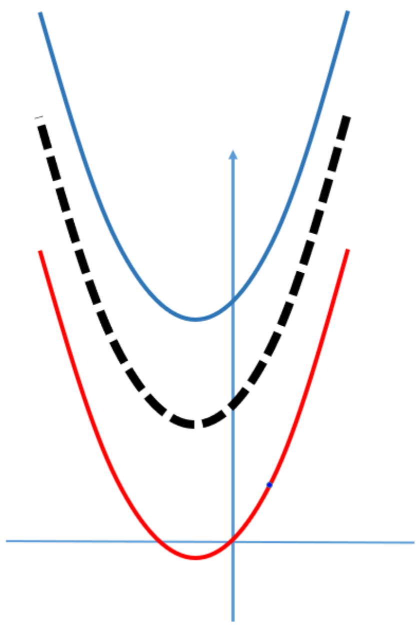
例

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1$$

通解：$y = x^2 + x + c$

结合其他条件，可以解除特解。如有条件说要求微分方程满足$\int_0^1 ydy = 4$的解，把通解代入得 $y = x^2 + x + \frac{35}{12}$；或者要满足通过点(1,2)，把通解代入得 $y = x^2 + x$。

一阶微分方程的通解，是xy空间上的一簇曲线，称之为微分方程的积分曲线簇。一阶微分方程的特解，是xy空间上的一条曲线，称之为微分方程的积分曲线。本课程只讨论一阶常微分方程数值解法。



2. 两类求定解问题

定解指因变量和/或其导数在某些点上是已知的，称为约束条件。实际中求解常微分方程的所谓定解问题有两类:初值问题和边值问题

1） 边解问题

已知区间端点边界约束条件，在自变量的任一非初值上，已知函数值和/或其导数值，如

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y(a)=\alpha, y(b)=\beta \end{cases} \quad 求解y$$

2）初值问题

约束条件：在自变量的初值上已知函数值，如

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

解常微分方程的初值问题，求函数$y(x)$满足下列常微分方程

$$y'(x)=f(x,y)$$

和初值条件

$$y(x_0)=y_0$$

或者$\begin{cases} y'(x)=f(x,y) & (6-1) \\ y(x_0)=y_0 & (6-2) \end{cases}$

就是求一条过(x_0,y_0)点的积分曲线。

例：方程$xy'-2y=4x \Rightarrow y'=\frac{2y}{x}+4$

令：$f(x,y)=\frac{2y}{x}+4$

且给出初值$y(1)=-3$

就是一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y)=\dfrac{2y}{x}+4 \\ y(1)=-3 \end{cases}$$

一阶微分方程的边值问题通常是转换成初值问题来求解。所以本课程只讨论一阶微分方程的初值问题的数值解法。

3.解存在定理

定理 6.1　对初值问题(6-1)(6-2)，若$f(x,y)$在区域

$$G=\{a<x<b,\ |y|<\infty\}$$

内连续，且关于y满足李普希兹(Lipschitz)条件，即存在常数L，

使 $$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2| \qquad (6\text{-}3)$$

对G中任意两个y_1,y_2均成立，其中L是与x,y无关的常数，则初值问题(6-1)(6-2)在(a,b)内存在唯一解，且解是连续可微的，其中L称为 Lipschitz 常数

一. 问题提出

由于很多微分方程的解不能用初等函数来表示；并且有时即使能够用解析式表示其解，由于表达式过于复杂，所以计算量太大而不实用。所以微分方程求解析解是比较困难的。解决这个问题的基本思路就是近似，有两种方法，一种是近似解析解，就是满足精度要求的解的简单的近似表达式；另一种方法就是数值方法来求解，一般只要求得到若干个点上的解函数的近似值，也就是得到解函数的表格函数形式，也称之为数值解，数值解法适于计算机进行求解。

求解常微分方程初值问题的数值解，采用离散化思想，在解区间$[a,b]$上离散采样 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，然后通过算法计算出对应点准确解$y(x_i)$的近似值y_0，y_1，y_2，$\cdots$，y_n。通常取离散点为等距的，即$x_{i+1}-x_i=h$，$i=0,1,2,\cdots,n-1$，h称为步长。

四. 数值解法含义

常微分方程数值求解就是将常微分方程离散化，建立差分方程，给出解在一些离散点上的近似值。首先是区间是$[a,b]$离散化：取 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$h_k=x_{k+1}-x_k$，等距时$h=(b-a)/n$，h称为步长。数值方法求得$y(x)$在每个节点x_k上$y(x_k)$的近似值，用y_k表示，则$y_0,y_1,\cdots,y_n$称为微分方程的数值解。

通常采用递推公式由y_0，y_1，$\cdots$，y_i推出y_{i+1}。所以常微分方程的各种方法的本质是构造递推公式。

初值问题的常见解法按照使用之前求得的解元素的个数，分为两类：单步法和多步法。单步法是利用前一个单步的信息(一个点)，在$y=f(x)$找下一点y_i， 包括 Euler 法，Runge-Kutta 法等。多步法利用一个以上的前面离散点信息，求$y=f(x)$的下一点y_i，常用迭代法，如改进 Euler 法，Adams 法。

§6.2 Euler 方法

一. Euler 方法

设区间$[a,b]$上给定$n+1$个等距节点$x_i=a+ih$ $(i=0,1,\cdots,n)$，其中$h=\frac{b-a}{n}$。

由差分公式$\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}\approx y'(x_i)=f(x_i,y_i)$导出$y(x_{i+1})\approx y(x_i)+hf(x_i,y_i)$

用x_i处近似值y_i代替$y(x_i)$，则得到初值问题(6-1)(6-2)递推公式

$$\begin{cases} y_0=y(x_0) \\ y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i) \end{cases} \qquad i=0,1,2,\cdots,n$$

称为微分方程解初值问题的 Euler 方法。

Euler 方法计算过程如下：

$x=x_0$ ： $y(x_0)=y_0$

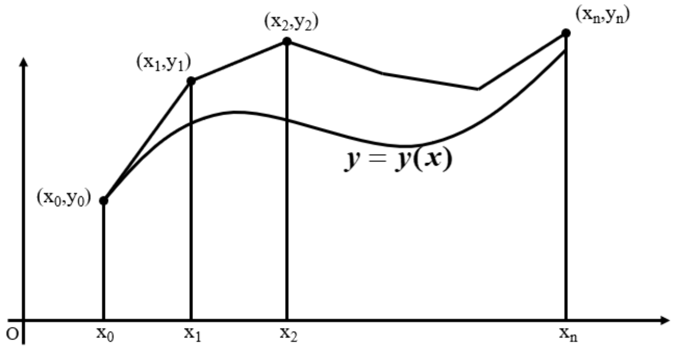
$x=x_1$ ： $y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$； $y(x_1)=y_1$

$x=x_2$ ： $y_2=y_1+hf(x_1,y_1)$； $y(x_2)=y_2$

…………………

$x=x_n$ ： $y_n=y_{n-1}+hf(x_{n-1},y_{n-1})$； $y(x_n)=y_n$

Euler 方法的几何意义



从$p_0(x_0,y_0)$出发，以$f(x_0,y_0)$为斜率做一条直线与直线$x=x_1$交于点$p_1(x_1,y_1)$，即$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$；
从$p_1(x_1,y_1)$出发，以$f(x_1,y_1)$为斜率做一条直线与直线$x=x_2$交于点$p_2(x_2,y_2)$，即$y_2=y_1+hf(x_1,y_1)$；
… … … … … …
从$p_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$出发，以$f(x_{n-1},y_{n-1})$为斜率做一条直线与直线$x=x_n$交于点$p_n(x_n,y_n)$，即$y_n=y_{n-1}+hf(x_{n-1},y_{n-1})$；
得到解曲线的一条近似曲线，是一条折线$p_0p_1p_2\cdots\ \cdots p_n$。故 Euler 法也称 Euler 折线法

Euler 法是单步法
Euler 法是用y_i通过递推公式$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$，计算y_{i+1}的；所以在计算y_{i+1}时，只使用了y_i的函数值y_i和导数值$f(x_i,y_i)$，故为 Euler 方法是一种单步法。

例 1：用 Euler 法求解方程$\begin{cases} y'=-2xy \\ y(0)=1 \end{cases}$，$0\le x\le 1.2$，$h=0.2$

解：由题意知：
$f(x\,,\,y)\;=\;-2xy$，$h=0.2$
$x_0=0,x_1=0.2,x_2=0.4,x_3=0.6,x_4=0.8,x_5=1.0,x_6=1.2$
Euler 法的递推公式为:

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)=y_i+0.2(-2x_i\times y_i)=(1-0.4x_i)y_i$$

所以：$y_1=y_0+\,h\,f(x_0,y_0)\;=(1-0.4x_0)y_0=1$ ，

$y(x_1)\approx y_1=1$
$y_2=y_1+\,h\,f(x_1,y_1)=(1-0.4x_1)y_1=0.920000$
$y(x_2)\approx y_2=0.920000$

所求值用下表列出,并与精确值对比

x_i	y_i	$y(x_i)$
0	1	1
0.2	1	0.960789
0.4	0.920000	0.852144
0.6	0.772800	0.697676
0.8	0.587322	0.527792
1.0	0.399383	0.367879
1.2	0.239630	0.236938

例 2：用 Euler 法解初值问题$\begin{cases} y'=-y-xy^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ $(0\le x\le 0.6)$
取步长$h=0.2$,计算过程保留 4 位小数
解： $f(x,y)=-y-xy^2$， $h=0.2$
Euler 递推公式：
$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)=y_i+0.2(-y_i-x_i\times {y_i}^2)=0.2(4-x_i\times y_i)y_i$
$i=0$ ，$x_0=0$，$y_0=1$

$y(x_1)=y(0.2)\approx y_1=0.2(4-x_0\times y_0)y_0=0.2\times\left(4-0\times 1\right)=0.8$

$i=1$ ，$x_1=0.2$，$y_1=0.8$

$$y(x_2)=\ y(0.4)\approx y_2\ =0.2\times0.8\times(4-0.2\times0.8)=0.6144$$

$i=2\ ,x_2=0.4\ ,y_2=0.6144,$

$$y(x_3)\ =y(0.6)\ \approx y_3=0.2\times0.6144\times(4-0.4\times0.6144)=0.4613$$

隐式 Euler 法 （implicit Euler method）

使用向后差分来近似导数

$y'(x_{i+1})=\dfrac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$

$y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_{i+1})=y(x_i)+hf(x_{i+1},y_{i+1})$

$y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1})\qquad(i=0,1,2,\cdots,n-1)$

由于未知数 y_{i+1} 同时出现在等式的两边，所以从公式中不能直接计算出y_{i+1}，需要解这个方程，解出y_{i+1}。可以用迭代法来求解这个方程；迭代法一般需要给定一个初值，所以通常先用显式公式计算一个初值，再迭代法通过解方程得到更精确的y_{i+1}。

显式(explicit)与隐式(implicit)

显式 ：递推公式中，从由y_i组成的公式中直接得到y_{i+1}；

显式 Euler 方法 ：递推公式$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$，直接计算得到y_{i+1}，称为显式 Euler 公式；

隐式 ：从由包含y_{i+1}组成的方程中，求得到y_{i+1}；

隐式 Euler 方法 ：递推公式$y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1})$，由于未知数 y_{i+1}同时出现在等式的两边，不能直接得到。是一个方程，通过求解方程得到y_{i+1}，故称为隐式 Euler 公式。

例：用 Euler 法解初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=1-xy\\ y(0)=0\end{cases}\qquad(0<x<1)$

取步长$h=0.2$，计算过程保留 4 位小数

解：因为$f(x,y)=1-xy$

Euler 公式为$y(x_{i+1})\approx y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)=y_i+0.2(1-x_i\times y_i)$

$$(i=0,1,2,3,4,5)$$

当$i=0$，即$x_0=0.0$时，$y_1=0+0.2(1-0\times0)=0.2$

当$i=1$，即$x_1=0.2$时，$y_2=0.2+0.2(1-0.2\times0.2)=0.3920$

当$i=2$，即$x_2=0.4$时，$y_3=0.392+0.2(1-0.4\times0.392)=0.56064$

当$i=3$，即$x_3=0.6$时，$y_4=056064+0.2(1-0.6\times0.56064)=0.6933632$

当$i=4$，即$x_4=0.8$时，$y_5=0.6933632+0.2(1-0.8\times0.6933632)=0.782425088$

列表计算如下：

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	0.0000	0.200	0.3920	0.5606	0.6934	0.7824

例：利用 Euler 方法求解初值问题$\begin{cases} y' = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$　$(0 \le x \le 2)$的数值解。此问题的精确

解是$y(x) = \frac{x}{1+x^2}$

解：Euler 公式为$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + h\left(\frac{1}{1+{x_i}^2} - 2{y_i}^2\right)$

递推初值为$y_0 = y(0) = 0$

分别取步长$h = 0.2, 0.1, 0.05$　，计算结果如下表

h	*x*i	*y*i	*y*(*x*i)	*y*(*x*i)-*y*i
h=0.2	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	0.40	0.37631	0.34483	-0.03148
	0.80	0.54228	0.48780	-0.05448
	1.20	0.52709	0.49180	-0.03529
	1.60	0.46632	0.44944	-0.01689
	2.00	0.40682	0.40000	-0.00682
h=0.1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	0.40	0.36085	0.34483	-0.01603
	0.80	0.51371	0.48780	-0.02590
	1.20	0.50961	0.49180	-0.01781
	1.60	0.45872	0.44944	-0.00928
	2.00	0.40419	0.40000	-0.00419
h=0.05	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
	0.40	0.35287	0.34483	-0.00804
	0.80	0.50049	0.48780	-0.01268
	1.20	0.50073	0.49180	-0.00892
	1.60	0.45425	0.44944	-0.00481
	2.00	0.40227	0.40000	-0.00227

二. 梯形公式

对初值问题中的$y' = f(x, y)$ 两边在(x_i, x_{i+1})上求积分

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\big(x, y(x)\big) dx$$

对右侧积分采用梯形求积公式，则有

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{2}\left[f\big(x_i, y(x_i)\big) + f\big(x_{i+1}, y(x_{i+1})\big)\right]$$

得出，常微分方程初值问题的梯形公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

由于梯形公式左右两侧都有y_{i+1}，所以要通过求解该方程，得出y_{i+1}。故梯形公式是隐式公式。通过迭代法解方程求解y_{i+1}，迭代的初值通过 Euler 显式公式确定，迭代次数由计算误差决定。

三 Euler 预报校正法(/* predictor-corrector method */)

前面介绍了显式 Euler 公式，隐式 Euler 公式和梯形公式。这三个方法中，显式 Euler 公式简洁，计算也简单，但是结果的精度低；隐式 Euler 公式和梯形公式都需要解方程才能得到函数值，所以计算相对复杂；但是计算量较大，并且隐式 Euler 公式的精度也比较低。所以对这几个方法进行综合，将 Euler 公式和梯形公式综合使用可得到改进的 Euler 公式。

改进 Euler 法(modified Euler's method)

Step 1: 先用显式 Euler 公式作预测，算出$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

Step 2: 再将$\bar{y}_{i+1}$代入隐式梯形公式的右边作校正，得到

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f\big(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\big)\right]$$

$$(i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

故改进 Euler 法为：

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

$$(i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

当y_i已知时，通过第一式算出初值$\bar{y}_{i+1}$，再代入第二式进行方程求解，可以进行一次校正；也可以反复校正，迭代求解得到更精确解；

可以证明当$1 < \frac{n}{2}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 2$时，改进 Euler 法迭代收敛。

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

将$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})]$中的$f(x_i, y_i)$定义为$K_1$;公式中的$f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$是在$(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$处的导数值，而$x_{i+1} = x_i + h$，$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \overset{K_1 = f(x_i, y_i)}{=\!=\!=} y_i + hK_1$，令$K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1)$所以$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] = y_i + \frac{h}{2}[K_1 + K_2]$。

通过这样的代换，改进 Euler 方法也可以写成：

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[K_1 + K_2] \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

$$(i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

例：求初值问题$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$　$(0 \le x \le 1)$的数值解，取步长$h = 0.1$　(精确解为$y(x) = \sqrt{1 + 2x}$)

解：(1)利用 Euler 公式$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + 0.1\left(y_i - \frac{2x_i}{y_i}\right) \\ y_0 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y_{i+1} = 1.1y_i + 0.2\frac{x_i}{y_i} \\ y_0 = 1 \end{cases} \qquad i = 0, 1, \cdots, 9$$

(2)利用改进 Euler 公式$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[K_1 + K_2] \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[K_1 + K_2] \\ K_1 = y_i - \frac{2x_i}{y_i} \\ K_2 = y_i + 0.1K_1 - \frac{2(x_i + 0.1)}{y_i + 0.1K_1} \\ y_0 = 1 \end{cases} \qquad i = 0, 1, \cdots, 9$$

计算结果如下:

i	x_i	Euler 方法y_i	改进 Euler 法y_i	精确解$y_i(x_i)$
0	0.0	1	1	1
1	0.1	1.1	1.095909	1.905445
2	0.2	1.191818	1.184096	1.183216
3	0.3	1.277438	1.266201	1.264991
4	0.4	1.358213	1.343360	1.344641
5	0.5	1.435133	1.416402	1.414214
6	0.6	1.508966	1.485956	1.483240
7	0.7	1.580338	1.552515	1.549193
8	0.8	1. 649783	1.616476	1.612452
9	0.9	1.717779	1.678168	1.673320
10	1.0	1.784770	1.737869	1.732051

四、数值解法的误差估计、收敛性和稳定性

1.定义 1

(1)局部截断误差：假设$y_i = y(x_i)$，按某方法由y_i严格算出y_{i+1}一步的误差，称为局部截断误差，记为$R_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$。

(2)整体截断误差：去掉假设$y_i = y(x_i)$，由y_0逐步严格计算出y_{i+1}的误差，称为整体截断误差，记为$\varepsilon_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$。

定义 2

若某种方法的局部截断误差为$R_{i+1} = O(h^{P+1})$，则称该方法为p阶方法。

p越大说明该方法的精确度越高。

2.Euler 方法的误差分析

对于初值问题，当假设y_i是准确时，用某种方法求y_{i+1}时所产生的截断误差，就是该方法的局部截断误差。在第$i+1$步使用 Euler 方法所得y_{i+1}的局部截断误差$y(x_{i+1})-y_{i+1}$。

假定y_i是准确的：就是$y_i=y(x_i)$

因为由$y(x_{i+1})=y(x_i+h)=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(\xi)$

而$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)=y(x_i)+hf(x_i,y_i)=y(x_i)+h\,y'(x_i)$

两式相减得$y(x_{i+1})-y_{i+1}=\frac{h^2}{2}y''(\xi)=O(h^2)$，即 Euler 法的截断误差为$O(h^2)$。$\frac{h^2}{2}y''(\xi)$称为局部截断误差的主项。

设y_i是用某种方法计算初值问题(6-1)(6-2)在x_i点的近似解，而$y(x_i)$是它的精确解，则$\varepsilon_i=y(x_i)-y_i$就是该方法的整体截断误差，也称为该方法的精度。若某方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$，则该方法的精度为p阶的。通过分析知道 Euler 方法的局部截断误差为$O(h^2)$，因此 Euler 方法的精度为一阶。

3.收敛性，

定义：对于某方法，任意固定$x_i=x_0+ih$，当$h\to 0$ (同时$i\to\infty$)时，若有$\varepsilon_i=[y(x_i)-y_i]\to 0$，则称该方法收敛。

例：就初值问题$\begin{cases} y'=\lambda y \\ y(0)=y_0 \end{cases}$考察 Euler 显式公式的收敛性。

解：该问题的精确解为$y(x)=y_0e^{\lambda x}$

Euler 公式为$y_{i+1}=y_i+h\lambda y_i=(1+h\lambda)y_i \quad \Rightarrow y_i=(1+h\lambda)^i y_0$

对任意固定的$x=x_i=ih$，有

$$y_i=y_0(1+h\lambda)^{(x_i/h)}=y_0\left[(1+h\lambda)^{(1/\lambda h)}\right]^{\lambda x_i}$$

$\Rightarrow\ y_0e^{\lambda x_i}=y(x_i)$

4.稳定性

定义：用某方法固定步长h作计算，由初值y_0严格得出y_i，现假设初值有微小误差δ_0，即实际初值是$y_0+\delta_0$，则引起第i步计算值有误差δ_i，即实际计算值为$y_i+\delta_i$。若$|\delta_i|\le|\delta_0|$ $(i=1,2,\cdots)$，则称该方法为关于步长h 绝对稳定，即$|\delta_i|$不随着i无限扩大。

稳定性比较复杂，所以一般分析时为简单起见，只考虑试验方程（test equation)，即$y'=\lambda y$。

例：对于 Euler 法

$$y_{i+1}=y_i+h(\lambda y_i)=(1+\lambda h)y_i=(1+\lambda h)(1+\lambda h)y_{i-1}=\cdots=(1+\lambda h)^{i+1}y_0$$

设初值有小扰动δ_0，则

$$y_{i+1}+\delta_{i+1}=(1+\lambda h)^{i+1}(y_0+\delta_0)$$

两式相减得

$$\delta_{i+1}=(1+\lambda h)^{i+1}(\delta_0)$$

则，Euler 法绝对稳定$\Leftrightarrow$ $|1+\lambda h|\le 1$，即$h\le-\frac{1}{\lambda}$时，Euler 方法绝对稳定。

§6.3 Runge-Kutta 方法

一、基本思想

根据 Lagrange 中值定理，知差商$\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}=y'(x_i+\theta h)=f\big(x_i+\theta h, y(x_i+\theta h)\big)$ $(0\le\theta\le1)$，转换得到解常微分方程的数值计算公式的一般形式$y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i+\theta h)=y(x_i)+hf\big(x_i+\theta h, y(x_i+\theta h)\big)$

其中，$f\big(x_i+\theta h, y(x_i+\theta h)\big)$称为在区间$[x_i,x_{i+1}]$上的平均变化率，记为$K^*=f\ (x_i+\theta h, y(x_i+\theta h))$则，微分方程数值计算一般形式为：$y(x_{i+1})=\ y(x_i)+\ hK^*$。

如果令$K^*=f(x_i,y_i)$，得到 Euler 公式$y(x_{i+1})=\ y(x_i)+\ hf(x_i,y_i)$。而令$k_1^*=f(x_i,y_i)$, $k_2^*=f(x_{i+1},y_{i+1})$ $K^*=\frac{1}{2}(k_1^*+k_2^*)$，梯形公式$(x_{i+1})=\ y(x_i)+\ h\big((x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})\big)$。

由于使用的信息更多，所以梯形公式的精度就更高。

从这个对比，可以考虑如果设法在$[x_i,x_{i+1}]$上多找几个点的斜率值，将其加权平均，作为平均变化率K^*的值，可以构造出精度更高的计算公式，这种方法就是 Runge-Kutta 方法。

二、 Runge-Kutta 方法基本思想

递推公式采用一般形式：

$$y(x_{i+1})=\ y(x_i)+\ hK^*$$

在$[x_i,x_{i+1}]$上多找几个点的斜率值，加权平均作为平均变化率K^*，

$$K^*=\sum_{j=1}^{r}\omega_j f\big(x_i+\alpha_j h, y_i+\beta_j h\big)$$

其中，ω_j为权函数， r是选取点的数量，α_j,β_j是系数

Runge-Kutta 递推公式：

$$y(x_{i+1})=\ y(x\ i\ )+\ h\sum_{j=1}^{r}\omega_j f\big(x_i+\alpha_j h, y_i+\beta_j h\big)$$

r指定之后， $\omega_j,\alpha_j,\beta_j$是待定的系数

二、 2 阶 Runge-Kutta 公式

2 阶 Runge-Kutta 公式就是使用两个点的信息来做加权平均得到平均变化率K^*。根据 Runge-Kutta 方法递推公式

$$y_{i+1}=y_i+\ h\sum_{j=1}^{r}\omega_j f\big(x_i+\alpha_j h, y_i+\beta_j h\big)$$

取r=2，得到：

$$\begin{aligned}y_{i+1}&=y_i+\ h\omega_1 f(x_i+\alpha_1 h, y_i+\beta_1 h)+h\omega_2 f(x_i+\alpha_2 h, y_i+\beta_2 h)\\&=y_i+\ h\omega_1 f(x_i,y_i)+h\omega_2 f(x_i+\alpha h, y_i+\beta h)\end{aligned}$$

通过转换，可以写成：

$$\begin{cases}y_{i+1}=y_i+\ \omega_1 k_1^*+\omega_2 k_2^*\\ k_1^*=hf(x_i,y_i)\\ k_2^*=hf(x_i+\alpha h, y_i+\beta k_1^*)\end{cases}$$

其中$\omega 1$，$\omega 2$，α，β为待定参数。

用二元函数 Taylor 展开式展开
$\boldsymbol{k_2^* = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1^*) = h\left[f(x_i, y_i) + \alpha h f_x(x_i, y_i) + \beta k_1^* f_y(x_i, y_i) + O(h^2)\right] =}$
$\boldsymbol{hf(x_i, y_i) + h^2\left[\alpha f_x(x_i, y_i) + \beta f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)\right] + O(h^3)}$
代入上式，得到
$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + h(\omega_1 + \omega_2) f(x_i, y_i) + h^2\left[\alpha\omega_2 f_x(x_i, y_i) + \beta\omega_2 f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)\right] + O(h^3)}$

其中$\omega 1$，$\omega 2$，α，β为待定参数

将待计算y_{i+1}对应的函数值$y(x_{i+1})$进行 Taylor 展开

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + O(h^3)$$

因为$y'(x) = f(x, y)$ ，$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) y'(x)$

所 以 $y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + O(h^3) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}\left[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) y'(x_i)\right] + O(h^3)$

比较两个式子
$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + h(\omega_1 + \omega_2) f(x_i, y_i) + h^2\left[\alpha\omega_2 f_x(x_i, y_i) + \beta\omega_2 f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)\right] + O(h^3)}$
$\boldsymbol{y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}\left[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) y'(x_i)\right] + O(h^3)}$
对应项相等，y_i和$y(x_i)$对应；$f(x_i, y_i)$跟$y'(x_i)$对应，有$h(\omega_1 + \omega_2) = h$；$f_x(x_i, y_i)$和$f_x(x_i, y_i)$对应，得$h^2\alpha\omega_2 = \frac{h^2}{2}$；$f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)$跟$f_y(x_i, y_i) y'(x_i)$对应，得$h^2\beta\omega_2 = \frac{h^2}{2}$。

所以，得$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ \alpha\omega_2 = \frac{1}{2} \\ \beta\omega_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

当$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ \alpha\omega_2 = \frac{1}{2} \\ \beta\omega_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ **成立时，$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = O(h^3)$**

满足等式的解有无穷多，对应于两点情况的 Runge-Kutta 公式均具有二阶精度，统称为二阶 Runge-Kutta 公式。

如：取α =1，β =1，$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$是 Euler 预报-校正公式

如：取$\alpha = \beta$ =1，$\omega_1 = 0$，$\omega_2 = 1$，则得到如下 Runge-Kutta 公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + k_2^* \\ k_1^* = hf(x_i, y_i) \\ k_2^* = hf(x_i + h, y_i + k_1^*) \end{cases}$$

三、3 阶 Runge-Kutta 公式

使用跟两点情况相同的推导方法，得

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2) \end{cases}$$

局部截断误差为$O(h^4)$

四、4 阶 Runge-Kutta 公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \end{cases}$$

此公式又称为经典的 Runge-Kutta 公式

局部截断误差为$O(h^5)$

例 6 用经典的 Runge-Kutta 法计算$\begin{cases} y' = y - 2x/y \\ y(0) = 1 \end{cases}, x \in [0, 0.9]$

取步长$h = 0.2$

解：由$x_0 = 0$，$y_0 = 1$，$h = 0.2$，利用 4 阶 Runge-Kutta 公式可计算出

$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2(1 - (2 \times 0)/1) = 0.2$

$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.2f(0.1, 1.1) = 0.18364$

$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.2f(0.1, 1.09182) = 0.18173$

$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2f(0.2, 1.18173) = 0.16965$

得到：$y_1 = y_0 + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)/4 = 1.18323$

Runge-Kutta 法的主要运算在于计算 K_i 的值，即计算f的值。Butcher 于 1965 年给出了计算量与可达到的最高精度阶数的关系：由于 Runge-Kutta 法的导出基于泰勒展开，故精度主要受解函数的光滑性影响。对于光滑性不太好的解，最好采用低阶算法而将步长h 取比较小的值。

§6.4　Adams 方法

一. 一般线性多步法

由于在计算y_{n+1}时，已经知道y_n，y_{n-1}，⋯ ，及$f(x_n, y_n)$，$f(x_{n-1}, y_{n-1})$，⋯ ，利用多于一个节点的这些值构造出精度高、计算量小的差分公式就是线性多步法。即用若干节点处的 y 及 y' 值的线性组合来近似$y(x_{i+1})$。

其通式可写为：

$$y_{i+1} = \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i-1} + \cdots + \alpha_k y_{i-k} + h(\beta_{-1} f_{i+1} + \beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} + \cdots + \beta_k f_{i-k})$$

当 $\beta_{-1} \neq 0$ 时，为隐式公式；$\beta_{-1} = 0$ 则为显式公式。

基于数值积分的构造法

将$y' = f(x,y)$在$[x_i, x_{i+1}]$上积分，得到$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\big(x, y(x)\big)\, dx$

只要近似地算出右边的积分$I_k = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\big(x, y(x)\big)\, dx$，则可通过$y_{i+1} = y_i + I_k$近似$y(x_{i+1})$。

而选用不同近似式 I_k，可得到不同的计算公式。

二. Adams 显式公式 （Adams explicit formule）

利用$k+1$个节点上的被积函数值f_i，f_{i-1}，⋯，f_{i-k}构造 k 阶牛顿后插多项式$N_k(x_i + th)$,$t \in [0,1]$ 有

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\big(x, y(x)\big) dx = \int_0^1 N_k(x_i + th) h dt + \int_0^1 R_k(x_i + th) h dt$$

$\Rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + h\int_0^1 N_k(x_i + th) dt$

局部截断误差为:

$$R_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = h\int_0^1 R_k(x_i + th) dt$$

例：$k = 1$ 时有

$$N_1(x_i + th) = f_i + t\nabla f_i = f_i + t(f_i - f_{i-1})$$

导出

$$y_{i+1} = y_i + h\int_0^1 [f_i + t(f_i - f_{i-1})] dt = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

所以

$$R_i = h\int_0^1 \frac{d^2 f\big(\xi_x, y(\xi_x)\big)}{dx^2} \frac{1}{2} t(t+1) h dt = \frac{5}{12} h^3 y'''(\xi_i)$$

注：一般有$R_i = B_k h^{k+2} y^{(k+2)}(\xi_i)$，其中$B_k$与$y_{i+1}$ 计算公式中 f_i ,⋯, f_{i-k}各项的系数均可查表得到 。

k	f_i	f_{i-1}	f_{i-2}	f_{i-3}	⋯	B_k
0	1					$\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$				$\frac{5}{12}$
2	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$			$\frac{3}{8}$
3	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$		$\frac{251}{720}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

常用的是 $k = 3$ 的 4 阶 Adams 显式公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

三. Adams 隐式公式(Adams implicit formule)

利用$k+1$ 个节点上的被积函数值f_{i+1}，f_i，f_{i-1}，⋯，f_{i-k+1}构造 k阶牛顿前插多项式。与显式多项式完全类似地可得到一系列隐式公式，并有$R_i = B_k h^{k+2} y^{(k+2)}(\eta_i)$，其中$B_k$与$f_{i+1}$，$f_i$，⋯，$f_{i-k+1}$的系数亦可查表得到。

k	f_{i+1}	f_i	f_{i-1}	f_{i-2}	…	$\widetilde{B}_k$
0	1					$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{12}$
2	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$			$-\frac{1}{24}$
3	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$		$-\frac{19}{720}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

常用的是 $k = 3$ 的 4 阶 Adams 隐式公式

三. Adams 预测-校正系统(Adams predictor-corrector system)
Step 1: 用 Runge-Kutta 法计算前k个初值；
Step 2: 用 Adams 显式计算预测值；
Step 3: 用同阶 Adams 隐式计算校正值。
注意：三步所用公式的精度必须相同。通常用经典 Runge-Kutta 法配合 4 阶 Adams 公式

§6.5 实用工具
ode23, ode45, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb

函数	ODE类型	特点	说明
ode45	非刚性	单步法；4，5 阶 R-K 方法；累计截断误差为 $(\triangle x)^3$	大部分场合的首选方法
ode23	非刚性	单步法；2，3 阶 R-K 方法；累计截断误差为 $(\triangle x)^3$	使用于精度较低的情形
ode113	非刚性	多步法；Adams算法；高低精度均可到 10^{-3}～10^{-6}	计算时间比 ode45 短
ode23t	适度刚性	采用梯形算法	适度刚性情形
ode15s	刚性	多步法；Gear’s 反向数值微分；精度中等	若 ode45 失效时，可尝试使用
ode23s	刚性	单步法；2 阶Rosebrock 算法；低精度	当精度较低时，计算时间比 ode15s 短
ode23tb	刚性	梯形算法；低精度	当精度较低时，计算时间比ode15s短

采用自动的变步长方法
命令格式
[T, Y, TE, YE, IE] = solver(odefun, tspan, y_0, options)
odefun: $f(t, y)$, 可以是列向量 (方程组)

tspan: 区间端点$[t_0, t_f]$，或值递增/递减的向量$[t_0，t_1，\cdots，t_f]$
若不设返回值，自动进入绘图模式，绘出解函数
T: 时间点向量; Y: 这些点上的函数近似值
相关命令: odeset (用于设置 options)
§6.5 实用工具
例 5.1 当点燃一根火柴时，火焰迅速增大直到一个临界体积，然后维持这一体积不变，此时火焰内部燃烧耗费的氧气和其表面现存的氧气达到了一种平衡.
火焰(近似为球)半径 y 满足 ODE

$\begin{cases} y' = y^2 - y^3 \\ y(0) = \eta \end{cases}$，$\eta$是初始半径，设为$\eta$=0.0001

```
>> f= @(t,y) y^2-y^3;
>> ode23(f, [0, 2.0e4], 1e-4)
```

§6.5 实用工具
例 5.2
求解 n=2 的一阶常微分方程组$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 6t \end{cases}$，$y_1(0) = 0$，$y_2(0) = 1$
定义函数

```
>>ode23(@myode2, [0, 1],   [0; 1]);
```

作业：
P164：1
用 Euler 法、预报-校正法求$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $x \in [0, 1.0]$的数值解，取$h = 0.1$，结果保留四位小数。

3. 用预报-校正法求$\begin{cases} y' = x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, $x \in [0, 2]$的数值解，取$h = 0.5$，结果保留四位小数；并与精确解$y = \frac{1}{3}x^3$作比较。

参考文献：

1. 李庆扬，王能超，易大义，数值分析，第 4 版，华中科技大学出版社，武汉，2006
2. 关治，陈景良，数值计算方法，清华大学出版社，北京，1990
3. 喻文健，数值分析与算法，第 2 版，清华大学出版社，北京，2015