第一章 随机事件与概率习题参考答案与提示

1． 设 A、B、C 为三个事件，试用 A、B、C 表示下列事件，并指出其中哪两个事件是互逆事件：

（1）仅有一个事件发生；　　（2）至少有两个事件发生；

（3）三个事件都发生；　　（4）至多有两个事件发生；

（5）三个事件都不发生；　　（6）恰好两个事件发生。

分析：依题意，即利用事件之间的运算关系，将所给事件通过事件 A、B、C 表示出来。

解：（1）仅有一个事件发生相当于事件 $\overline{A}\overline{B}C$、$A\overline{B}\overline{C}$、$\overline{A}B\overline{C}$ 有一个发生，即可表示成 $\overline{A}\overline{B}C\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}$；

类似地其余事件可分别表为

（2） $AB\cup BC\cup AC$ 或 $AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup ABC$；（3） ABC；（4） $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；（5） $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；（6） $AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$ 或 $AB\cup BC\cup AC-ABC$。

由上讨论知，（3）与（4）所表示的事件是互逆的。

2．如果 x 表示一个沿着数轴随机运动的质点位置，试说明下列事件的包含、互不相容等关系：

$A=\{x\mid x\le 20\}$　　$B=\{x\mid x>3\}$　　$C=\{x\mid x<9\}$

$D=\{x\mid x<-5\}$　　$E=\{x\mid x\ge 9\}$

解：（1）包含关系：$D\subset C\subset A$ 、 $E\subset B$ 。

（2）互不相容关系：C 与 E （也互逆）、B 与 D、E 与 D。

3．写出下列随机事件的样本空间：

（1）将一枚硬币掷三次，观察出现 H （正面）和 T （反面）的情况；

（2）连续掷三颗骰子，直到 6 点出现时停止，记录掷骰子的次数；

（3）连续掷三颗骰子，记录三颗骰子点数之和；

（4）生产产品直到有 10 件正品时停止，记录生产产品的总数。

提示与答案：（1） $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$；

（2） $\Omega=\{1,2,\cdots\}$；

（3） $\Omega=\{3,4,\cdots,18\}$；

（4） $\Omega=\{10,11,\cdots\}$。

4．设对于事件 A、B、C 有 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AC)=1/8$，

$P(AB)=P(BC)=0$，求 A、B、C 至少出现一个的概率。

提示与答案：A、B、C 至少出现一个的概率即为求 $P(A\cup B\cup C)$，可应用性质 4 及性质 5 得 $P(A\cup B\cup C)=5/8$

5．设 A、B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$。

提示与答案：欲求 $P(\overline{AB})$，由概率性质 3 可先计算 $P(AB)$，由于 $A=AB\cup(A-B)$，且 $AB\cap(A-B)=\phi$。解得 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$。

6．已知事件 A、B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$ 且 $P(A)=1/3$，求 $P(B)$。

解法一：由性质（5）知

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB) \qquad \text{（性质 5）}$$

$$=1-P(\overline{A\cup B})-P(A)+P(AB) \qquad \text{（性质 3）}$$

$$=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(A)+P(AB) \qquad \text{（对偶原理）}$$

$$=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \qquad \text{（已知条件）}$$

解法二：由于

$$P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-\frac{1}{3}-P(B)+P(AB)$$

从而得 $\frac{2}{3}-P(B)=0$，即

$$P(B)=\frac{2}{3}$$

7．一个袋中有 5 个红球 2 个白球，从中任取一球，看过颜色后就放回袋中，然后再从袋中任取一球。求：(1) 第一次和第二次都取到红球的概率；

(2) 第一次取到红球，第二次取到白球的概率。

提示与答案：设 A 表示：“第一次和第二次都取到红球”；

B 表示：“第一次取到红球，第二次取到白球“。

(1) $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{25}{49}$

(2) $P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{10}{49}$

8．一批产品有 8 个正品 2 个次品，从中任取两次，每次取一个（不放回）。求：(1) 两次都取到正品的概率；

(2) 第一次取到正品，第二次取到次品的概率；

（3）第二次取到次品的概率；

（4）恰有一次取到次品的概率。

提示与答案：设 A_i 表示："第 i 次取出的是次品"（i=1，2），则所求概率依次化为 $P(\overline{A}_1\overline{A}_2)$、$P(\overline{A}_1 A_2)$、$P(A_2)=P(A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2)$、$P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)$。

（1）$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\dfrac{28}{45}$

（2）$P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{8}{45}$

（3）$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{1}{5}$。

（4）$P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{16}{45}$。

9．设有 80 件产品，其中有 3 件次品，从中任取 5 件检查。求所取 5 件中至少有 3 件为正品的概率。

提示与答案：设 A："所取 5 件中至少有 3 件为正品"；则 A 的对立事件为至多有 2 件为正品，即："恰有 2 件为正品"（最多有 3 件次品）。

$$P(A)=\frac{8215}{8216}$$

10．从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求 4 只鞋子至少有 2 只配成一双的概率。

提示与答案：直接求 4 只鞋子至少有 2 只配成一双的概率不易得到正确的结果，这是由于所考虑事件比较复杂，解决此类问题的方法通常是利用概率性质 3，即先求逆事件的概率。

$$P(A)=\frac{13}{21}$$

11．假设每个人的生日在一年 365 天都是等可能的，那么随机选取 $n(\le 365)$ 个人，求他们的生日各不相同的概率及这 n 个人至少有两个人生日在同一天的概率；若 $n=40$，求上述两个事件的概率。

提示与答案：此问题属于占位问题。可设 A 表示事件："n 个人的生日各不相同"；B 表示事件："这 n 个人至少有两个人生日在同一天"。$P(A)=\dfrac{A_{365}^n}{365^n}$，$P(B)=1-\dfrac{A_{365}^n}{365^n}$。

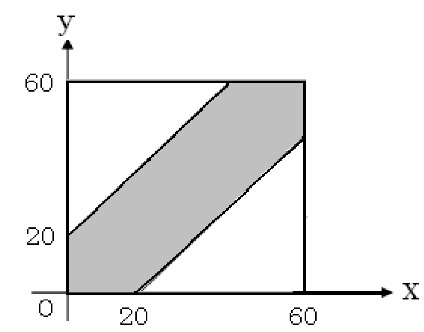
若取 $n=40$，则 $P(A)\approx 0.109$，$P(B)=0.891$

12．某进出口公司外销员与外商约谈，两人相约某天 8 点到 9 点在预定地点

会面，先到者要等候另一个人 20 分钟，过时就离去，若每人在这指定的一个小时内任一时刻到达是等可能的，求事件 A={两人能会面}的概率。

提示与答案：设 x、y 分别表示两人到达预定地点的时刻，那么两人到达时间的可能结果对应边长为 60 的正方形里所有点，如图，

$$P(A)=\frac{5}{9}$$



13．设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时被打破的概率为 3/10，第二次落下时被打破的概率为 1/2，第三次落下时被打破的概率为 9/10，试求透镜落下三次未打破的概率。

提示与答案：解决此问题的关键在于正确理解题意，弄清概率 1/2、9/10 的具体含义。依题意“ 第二次落下时被打破的概率为 1/2 ” 指的是第一次落下未被打破的情况下，第二次落下时被打破的概率；概率 9/10 的含义类似。可设 A 表示“ 落下三次未被打破 ”，$P(A)=\dfrac{7}{200}$

14．由长期统计资料得知，某一地区在 4 月份下雨（记作事件 A）的概率为 4/15，刮风（记作事件 B）的概率为 7/15，刮风又下雨（记作事件 C）的概率为 1/10。求 $P(A|B)$，$P(B|A)$，$P(A\cup B)$。

提示与答案：$P(A|B)=\dfrac{3}{14}$，$P(B|A)=\dfrac{3}{8}$，　$P(A\cup B)=\dfrac{19}{30}$。

15．设 A、B 为随机事件，若 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B|A)=0.8$，求：

（1） $P(AB)$；（2） $P(A\cup B)$ 。

提示与答案：该题主要是考查条件概率公式、乘法公式及概率性质的应用。

（1） $P(AB)=0.4$；　　（2） $P(A\cup B)=0.7$。

16．一机床有 1/3 的时间加工零件 A，其余时间加工零件 B，加工零件 A 时，停机的概率是 3/10，加工零件 B 时，停机的概率是 4/10，求这台机床停机的概率。

提示与答案：依题意，这是一全概率问题。若设 A 事件表示：“ 加工零件 A ”；B 事件表示：“ 加工零件 B；C 事件表示：“ 机床停机 ”。 则 $P(C)=11/30$。

17．有两个口袋，甲袋中盛有 2 个白球 1 个黑球；乙袋中盛有 1 个白球 2 个黑球。由甲袋任取一球放入乙袋，再从乙袋中取出一球，求取到白球的概率。

提示与答案：依题意，这是一全概率问题，因为从乙袋中取出一球是白球有两个前提，即由甲袋任取一球放入乙袋有两种可能（由甲袋任取出的球可能是白球，也可能是黑球），并且也只有这两种可能。因此若把这两种可能看成两个事件，这两个事件的和事件便构成了一个必然事件。

若设 A 表示："由甲袋取出的球是白球"；B 表示："由甲袋取出的球是黑球"；C 表示："从乙袋取出的球是白球"。则 $P(C)=5/12$。

18．设有一箱同类产品是由三家工厂生产的，其中 $\frac{1}{2}$ 是第一家工厂生产的，其余两家各生产 $\frac{1}{4}$，又知第一、二家工厂生产的产品有 2%的次品，第三家工厂生产的产品有 4%的次品，现从箱中任取一只，求：

（1）取到的是次品的概率；

（2）若已知取到的是次品，它是第三家工厂生产的概率。

提示与答案：设事件 A 表示："取到的产品是次品"；事件 A_i 表示："取到的产品是第 i 家工厂生产的"（$i=1$，2，3）。则

（1） $P(A)=0.025$ ；

（2） $P(A_3\,|\,A)=0.4$。

19．某专门化医院平均接待 K 型病患者 50%，L 型病患者 30%，M 型病患者 20%，而治愈率分别为 7/10、8/10、9/10。今有一患者已治愈，问此患者是 K 型病的概率是多少？

提示与答案：依题意，这是一全概率公式及贝叶斯公式的应用问题，解决问题的关键是找出一组两两互斥事件。

解：设事件 A 表示："一患者已治愈"；事件 A_i（$i=1,2,3$）表示："患者是 K、L 、M 型病的"。则得

$P(A)=\frac{77}{100}$ ； $P(A_1\,|\,A)=\frac{5}{11}$ 。

20．三个人独立地破译一个密码，他们能单独译出的概率分别为 1/5、1/3、1/4，求此密码被译出的概率。

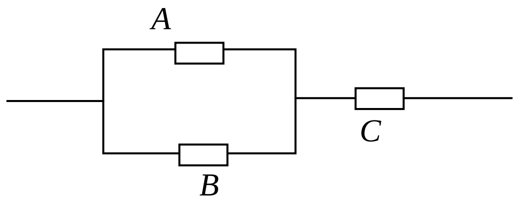
提示与答案：设事件 A 表示："此密码被译出"；应用概率性质 3 及事件独立性得 $P(A)=\frac{3}{5}$

21．若 $P(A\,|\,B)=P(A\,|\,\overline{B})$，证明事件 A 与事件 B 相互独立。

提示与答案：应用 $A=AB\cup A\overline{B}$，且 $AB\cap A\overline{B}=\phi$。

22．一个系统由三个元件按图所示方式连接而成，设每个元件能正常工作的

概率（即元件的可靠性）均为 $r\ (0<r<1)$；求系统的可靠性。（设三个元件能否正常工作是相互独立的）。



提示与答案：此问题是考查事件间的关系及独立性的应用。

$$P(AC\cup BC)=r^2(2-r)$$

23．设事件 A 与 B 相互独立，已知 $P(A)=0.5$，$P(A\cup B)=0.8$，求 $P(A\overline{B})$，$P(\overline{A}\cup\overline{B})$。

提示与答案：考查概率性质与事件的独立性的应用

$P(A\overline{B})=0.2$；　$P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.7$。

24．已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B\,|\,(A\cup\overline{B}))$。

提示与答案：由 $P(B\,|\,(A\cup\overline{B}))=\dfrac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}$，因此转化为计算概率 $P(B(A\cup\overline{B}))$ 及 $P(A\cup\overline{B})$，进而解得 $P(B\,|\,(A\cup\overline{B}))=\dfrac{1}{4}$。

25．随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，若该点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率。

提示与答案：这是一个几何概型的概率计算问题，如图所示。若设事件 A：“表示掷的点和原点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$”；　$P(A)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$

26．设有来自三个地区的各 10 名、15 名、25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份、5 份。随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份，求：(1) 先抽到的一份是女生表的概率 p；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q。

提示与答案：依题意，所有报名表来自三个地区，因此随机地取一个地区的报名表，抽到各个地区的报名表的概率应是相等的；若从中先后抽出两份，则 (1) 可用全概率公式求得；(2) 是一个条件概率。若设设 B_i（$i=1,2$）表示“第 i 次抽到的一份是女生表”；A_i（$i=1,2,3$）表示“抽到的报名表来自第 i 个地区”。得

(1) $P(B_1)=\dfrac{29}{90}$)；

(2) $P(\overline{B}_2)=\dfrac{61}{90}$，　$P(B_1\,|\,\overline{B}_2)=\dfrac{20}{61}$。