第三章 随机变量的数字特征习题参考答案与提示

1．设随机变量 X 的概率分布为

X	-3	0	1	5
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

试求 EX 。

答案与提示： $EX=2$ 。

2．已知随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P_k	0.1	p	0.4	0.2

求：（1）常数 p ；（2）数学期望 EX ；（3）方差 DX 。

答案与提示：（1）由归一性， $p=0.3$ ；

（2） $EX=1.7$ ；

（3） $DX=0.81$

3．已知随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
p_k	0.3	p	0.5

求：（1）数学期望 $E(X-1)^2$ ；（2）方差 $D(X-1)^2$ 。

答案与提示：由归一性， $p=0.2$ ；

（1） $E(X-1)^2=0.8$ ；

（2） $D(X-1)^2=0.16$

4．已知连续型随机变量 X 的概率分布为

$$f(x)=\begin{cases}1/8, & 0<x<8\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 X 的数学期望。

答案与提示： $EX=4$

5．设随机变量 X 服从拉普拉斯分布，其分布密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\alpha}e^{-|x-\beta|/\alpha}，\ \alpha>0\ （-\infty<x<+\infty）。$$

求 X 的数学期望。

答案与提示：该题要求熟练掌握计算连续型随机变量的数学期望的公式。

$EX=\beta$ 。

6．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0\\ A-x, & 0<x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases},$$

求：（1）常数 A；（2）数学期望 EX；（3）方差 DX。

答案与提示：（1）由归一性得，$A=1$；

（2）$EX=0$；（3）$DX=\dfrac{1}{6}$。

7．设 X 的概率分布为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ $(-\infty<x<+\infty)$，求 EX、DX。

答案与提示： $EX=0$， $DX=2$。

8．设 X 的概率分布为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & 当|x|<1,\\ 0, & 当|x|\ge 1,\end{cases}$$

求 X 的数学期望 EX 和方差 DX。

答案与提示：该题考察计算连续型随机变量的数学期望和方差的公式。

$EX=0$， $DX=1/2$

9．设用 A、B 两测量仪器测量某一产品的直径多次，结果如下表：

X_A	118	119	120	121	122
p_k	0.06	0.14	0.60	0.15	0.05

X_B	118	119	120	121	122
p_k	0.09	0.15	0.52	0.16	0.08

试比较两种仪器的优劣。

答案与提示：由于题设中没有给出所测产品直径的真实值，故要比较两种仪器的优劣，就是要比较这两种仪器哪个的测量精度更高一些，即要比较两种仪器测量的方差哪个更小一些。由题设，得

$EX_A=120.99$，$EX_B=119.99$；$DX_A=1.104$，$DX_B=0.6552$。

显然有 $DX_A>DX_B$，可见 A 仪器的测量误差要比 B 仪器的测量误差大，故 B 仪器要优良些。

10．设 X 的概率分布为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求：（1） $Y=2X$ 的数学期望；（2） $Y=e^{-2X}$ 的数学期望。

答案与提示：（1） $EY=E2X=2$ ；（2） $EY=Ee^{-2X}=1/3$。

11．试证明事件在一次试验中发生的次数的方差不超过$\frac{1}{4}$。

答案与提示：事件在n次独立重复试验中发生的次数服从参数为n，p的二项分布$B(n, p)$，当然在一次试验中发生的次数应服从$B(1, p)$，即为(0-1)分布。

可令 $X=\begin{cases}1，事件A在试验中发生， \\ 0，事件A在试验中不发生.\end{cases}$

得$DX\le\frac{1}{4}$，即事件在一次试验中发生的次数的方差不超过$\frac{1}{4}$。

12．设X、Y的概率分布分别为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

求：$E(X+Y)$和$E(2X-3Y^2)$。

答案与提示：可利用由数学期望性质及常用分布随机变量的数学期望和方差来计算$E(X+Y)$和$E(2X-3Y^2)$，关键是计算EX 、EY 、EY^2。

$$E(X+Y)=\frac{3}{4}；\quad E(2X-3Y^2)=\frac{5}{8}。$$

13．设X、Y是两个相互独立的随机变量，其概率分布分别为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其它\end{cases}\quad ；\quad f(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)}, & y>5 \\ 0, & 其它\end{cases}$$

求EXY。

答案与提示： $EXY=4$

14．设随机变量X服从正态分布，其数学期望$EX=1.7$，方差$DX=3$。试求：

（1） X 的概率密度；

（2） $Y=1-2X$ 的概率密度。

答案与提示：考查服从正态分布随机变量的概率密度的一般表达形式、参数的几何意义及正态分布随机变量的性质。

（1） $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-(x-1.7)^2/6}\quad(-\infty<x<+\infty)$

（2） $f(y)=\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-(y+2.4)^2/24}\quad(-\infty<y<+\infty)$。

15．设随机变量$X\sim N(1,\ 2^2)$、$Y\sim N(0,\ 1)$，且相互独立，求：

（1） $Z=2X+Y$ 的期望和方差；

（2） $Z=2X-Y$ 的期望和方差。

答案与提示：由于两个独立的正态随机变量的线性函数也服从正态分布，即可得相应分布，进而求得其期望和方差。

（1） $EZ=2,\quad DZ=17$。

（2） $EZ=2,\quad DZ=17$。

16．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，求 λ。

答案与提示： λ=1。

17．设二维随机变量(X ， Y)的联合概率分布律为

X \ Y	0	1
0	0.1	0.2
1	0.3	0.4

求：（1） EX ， EY ， DX ， DY ；

（2）(X ， Y)的协方差，相关系数，协方差阵，相关阵。

答案与提示： （1） $EX=0.7$ ， $DX=0.21$， $EY=0.6$， $DY=0.24$。

（2） $EXY=0.4$ ； $\mathrm{Cov}(X,Y)=-0.02$ ， $\rho_{XY}=0.089$ ；

协方差阵为 $\begin{pmatrix} 0.21 & -0.02 \\ -0.02 & 0.24 \end{pmatrix}$，

相关阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -0.089 \\ -0.089 & 1 \end{pmatrix}$。

18．设随机变量 $(X，Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求相关系数 ρ_{XY}。

答案与提示：欲求相关系数，需先求 DX、DY、EX、EY 、$\mathrm{Cov}(X，Y)$。

$\rho_{XY}=-\dfrac{1}{11}$。

19．设两个随机变量 X、Y 的方差分别为 25 及 36，相关系数为 0.4，求 $D(X+Y)$ 及 $D(X-Y)$。

答案与提示：由方差的性质知

$D(X+Y)=85$， $D(X-Y)=37$

20．设 X 与 Y 方差分别为 4 和 1，协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0.8$，求：

（1） X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} ；（2） $D(2X+3Y)$ 及 $D(2X-3Y)$。

答案与提示：（1）$\rho_{XY}=0.4$；（2）$D(2X+3Y)=34.6$，$D(2X-3Y)=15.4$。

21．设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，若每次命中目标的概率为 0.4，则 X^2 的数学期望 EX^2　。

答案与提示：由题意，$X\sim B(10,0.4)$，所以 $EX^2=18.4$

22．已知 X、Y 分别服从正态分布 $N(0,3^2)$ 和 $N(1,4^2)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-1/2$，设 $Z=X/3+Y/2$，求：

（1）求数学期望 EZ，方差 DZ；

（2）Y 与 Z 的相关系数 ρ_{YZ}；

答案与提示：本题要求熟悉数学期望、方差、协方差的性质、计算及有关正态分布的性质。

解：（1）由数学期望、方差的性质及相关系数的定义($\rho_{XY}=\dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$)得

$$EZ=\frac{1}{2},\quad DZ=3；$$

（2）由协方差的性质 3 及相关系数定义得

$$\rho_{YZ}=\frac{\text{Cov}(Y,Z)}{\sqrt{DY}\sqrt{DZ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad；$$

23．设 X 和 Y 的相关系数为 0.5，$EX=EY=0$，$EX^2=EY^2=2$，求 $E(X+Y)^2$。

答案与提示：　$E(X+Y)^2=6$。

24．假设一部机器一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日里无故障可获利 10 万元，发生一次故障仍获利 5 万元，发生二次故障获利 0 元，发生三次或三次以上要亏损 2 万元，求一周内期望利润。

答案与提示：一部机器在一周 5 个工作日可视为 5 重贝努利试验，因此一周 5 个工作日里机器发生故障的次数（记为 X）服从二项分布。若以 Y 表示生产利润，则 Y 是 X 的函数，因此问题化为求随机变量函数的数学期望。

一周内期望利润近似为 5.21 万元。

25．设随机变量 X、Y 独立同服从正态分布 $N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$，求 $D|X-Y|$。

答案与提示：由于随机变量 X、Y 相互独立同分布，故可求得联合概率分布，应用定理可得 $D|X-Y|$，但计算比较繁。也可应用正态分布的性质得

$Z=X-Y\sim N(0+0,\ \sigma_1^2+(-1)^2\sigma_2^2)=N(0,1)$，计算得

$$D|X-Y|=1-\frac{2}{\pi}。$$

26．设灯管使用寿命 X 服从指数分布，已知其平均使用寿命为 3000 小时，现有

10 只这样的灯管（并联）每天工作 4 小时，求 150 天内这 10 只灯管（1）需要换管的概率；（2）平均有几只需要更换；（3）需要更换灯管数的方差。

答案与提示：若设 Y 表示 150 天内这 10 只灯管需要更换的只数，则 Y 服从二项分布，即 $Y \sim B(10，P\{X<600\})$，所以问题（1）即是求 $P\{Y\geq 1\}$；问题（2）即是求 EY；问题（3）即是求 DY。

（1）$P\{Y\geq 1\}=1-e^{-2}$；

（2）$EY=10-10e^{-0.2}$；

（3）$DY=10(1-e^{-0.2})e^{-0.2}$。

27．设 ξ 与 η 独立同分布，已知 ξ 的概率分布为 $P\{\xi=i\}=1/3(i=1,2,3)$，又设 $X=\max\{\xi，\eta\}$，$Y=\min\{\xi，\eta\}$。求：

（1）EX、EY；

（2）随机变量 $X，Y$ 的协方差。

答案与提示：欲求 EX、EY 及 $\mathrm{Cov}(X，Y)$，需先求 $(X，Y)$ 的概率分布及 EXY。

$(X，Y)$ 概率分布为

$Y \backslash X$	1	2	3
1	1/9	2/9	2/9
2	0	1/9	2/9
3	0	0	1/9

（1）$EX=\dfrac{22}{9}$，　$EY=\dfrac{14}{9}$。

（2）$EXY=\dfrac{36}{9}$，　$\mathrm{Cov}(X，Y)=\dfrac{16}{81}$。

28．设某种商品每周的需求量 X 是服从区间[10，30]上均匀分布的随机变量，而经销商店进货数量为区间[10，30]中的某一整数，商店每售出一单位商品可得利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理一单位商品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每单位商品仅获利 300 元，为使商店所获利润期望值不小于 9280 元，试确定最小进货量。

答案与提示：依题意，需求量 X 服从[10，30]上的均匀分布，因此其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & 10\leq x\leq 30\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

而此商店经销该种商品每周所得利润是与 X 和进货数量 n 有关的，所以该问题化为求利润函数的数学期望。最小进货量应不少于 21 个单位。

29．设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]，\quad (-\infty<x,y<+\infty)$$

其中$\varphi_1(x,y)$和$\varphi_2(x,y)$都是二维正态密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 1/3 和-1/3，它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是 0，方差都是 1。

（1）求X和Y的概率密度$f_1(x)$和$f_2(y)$，及X和Y的相关系数ρ。

（2）问X和Y是否独立？为什么？

答案与提示：（1）由于二维正态密度函数的两个边缘密度正态密度函数，因此$\varphi_1(x,y)$和$\varphi_2(x,y)$的两个边缘密度为标准正态密度函数，故

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}，\quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}\quad (-\infty<y<+\infty)$$

$$\rho=EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=0。$$

（2）X与Y不独立。

30．设X和Y的联合分布在以点（0，1），（1，0），（1，1）为三角形区域上服从均匀分布，试求随机变量$U=X+Y$的方差。

答案与提示：$DU=\frac{1}{18}$。

随机变量$U=X+Y$可看作（X，Y）的函数，因此该题的解法较多，可应用公式$DU=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y)$求解；也可应用公式

$$DU=D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2。$$

31．对于任意二事件A和B，$0<P(A)<1,0<P(B)<1$，

$$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$$

称为事件A和B的相关系数。

（1）证明事件A和B独立的充分必要条件是其相关系数等于零；

（2）利用随机变量相关系数的基本性质，证明$|\rho|\le 1$。

答案与提示：（1）利用事件A和B独立的定义$P(AB)=P(A)P(B)$即可；

（2）随机变量X和Y的相关系数为$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，而需将

$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$转化为用随机变量表示，显然，若有

$EXY = P(AB), EX = P(A), EY = P(B)$ 以及 $\sqrt{DX} = \sqrt{P(A)P(\overline{A})}$，$\sqrt{DY} = \sqrt{P(B)P(\overline{B})}$ 即可，这只需定义

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若}A\text{出现} \\ 0, & \text{若}A\text{不出现} \end{cases}；\quad Y = \begin{cases} 1, & \text{若}B\text{出现} \\ 0, & \text{若}B\text{不出现} \end{cases}。$$