第四章插值与拟合

计算机科学系

目 录

本章要求

- 1. 熟悉插值法的含义及其几何意义；
- 2. 熟悉 Lagrange 插值公式及其余项的使用。
- 4. 熟悉差分的定义, 会造差分表；
- 4. 会造差商表, 并熟悉 Newton 插值公式的使用；
- 5. 熟悉差商与导数的关系式;
- 6. 熟悉简单的带导数条件的插值;
- 7. 熟悉分段插值法的含义。

§4.1 引言

- 一. 问题提出：
- 表示两个变量x, y内在关系一般由函数式 $y = f(x)$表达。
- 但在工程实际中，经常遇到两种情况：
  - 1. 由实验观测一组离散数据(函数表)，这种函数关系式 $y = f(x)$ 是存在的，但未知。
  - 2. 函数解析表达式已知，但计算复杂，不便使用如: $y = sin(x)$，$y = lg(x)$，通常也造函数表。
- 要求：
  - 求一个不在表上的函数值，怎么办？
  - 求这个函数的导数值或者积分值，怎么办？

§4.1 引言

- 解决思路：
- 寻找一个：
- 计算方便且表达简单的函数来近似代替原函数
- 这就是函数数值逼近（插值和拟合）问题。

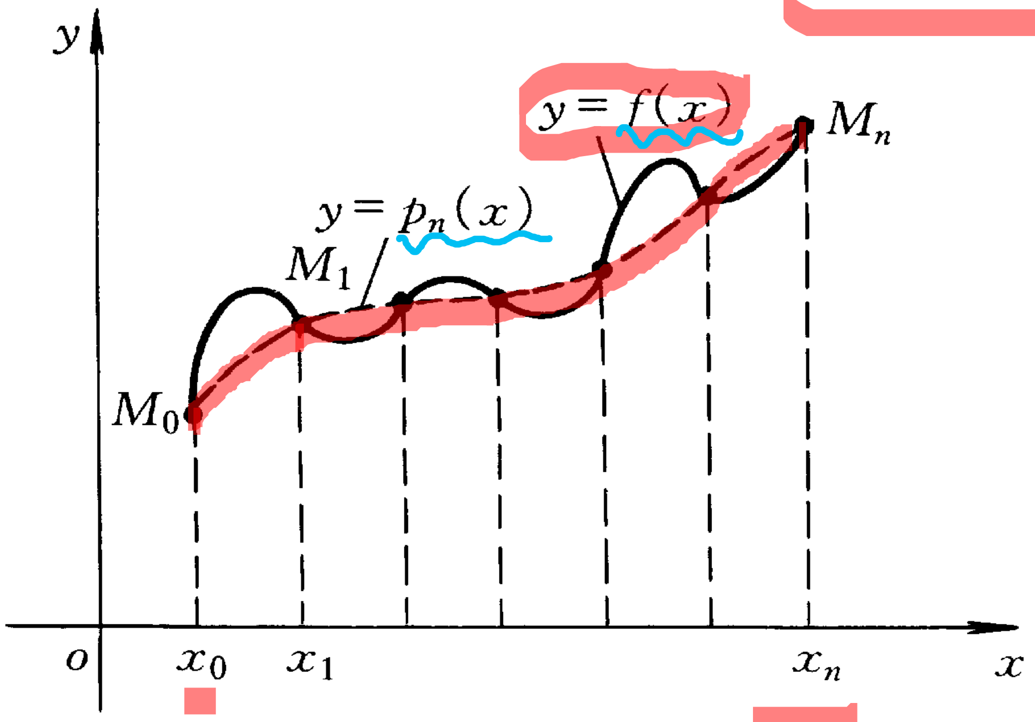
§ 4.1 引言

不包含端点

- 定义：函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续存在，但未知，只知道离散数据(x_i,y_i) $(i=0,1,2,\cdots,n)$，其中，$a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$，若存在简单函数$P(x)$，满足$P(x_i)=f(x_i)=y_i$，$(i=0,1,2,\cdots,n)$，则称$P(x)$是$f(x)$的插值函数，$f(x)$是被插值函数，$[a,b]$为插值区间，$x_i$是插值节点，$R(x)=f(x)-P(x)$叫截断误差或者插值余项，该过程称为函数插值。
- 通常取$P(x)$为多项式函数，即$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则该插值称为代数插值(多项式插值)

§4.1 引言

- 二. 几何意义：
- 从几何上看，插值是已知平面上n+1个不同的点(x_i, y_i) ($i = 0, 1, 2, \ldots n$)，要寻找一条过这些点的多项式曲线。（不超过n次）



§4.1 引言

- 问题：
- （1）满足插值条件的插值多项式 $P(x)$ 是否存在？应该是几次多项式？（n 次）
- （2）如果满足插值条件的多项式 $P(x)$ 存在，应如何构造？
- （3）用插值多项式$P(x)$近似代替 $f(x)$，误差如何？

§4.1 引言

- 三. 插值多项式的存在唯一性
- 定理1.1：在$n+1$个互异节点x_i处满足插值条件$P(x_i)=f(x_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$的次数不超过n的多项式$P_n(x)$存在且唯一。
- 证明：设$P_n(x)=a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_nx^n$
- 代入插入条件得：
- $a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=f(x_0)$
- $a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=f(x_1)$
- $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- $a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=f(x_n)$

§4.1 引言

- 该方程的系数行列式为范德蒙(Vandermonde) 行列式
- $$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\le j\le i\le n}(x_i - x_j) \neq 0$$
- 故由Cramer法则知，该方程组解存在且唯一，即多项式(系数)存在唯一。

§4.2 Lagrange 插值多项式

- 十八世纪法国数学家*Lagrange*对以往的插值算法进行研究与整理，提出了易于掌握和计算的统一公式，称为*Lagrange*插值公式。特例是线性插值公式和抛物线插值公式。
- 线性插值
- 抛物线插值
- *Lagrange*插值
- 插值多项式的余项——误差估计

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 一. 线性插值
- 已知两个插值点及其函数值：

x	x_0	x_1
$f(x)$	f_0	f_1

插值节点

对应的函数值

- 求一次多项式，使得 $P_1(x)=a+bx,$

$$\begin{cases} P_1(x_0)=a+bx_0=f_0 \\ P_1(x_1)=a+bx_1=f_1 \end{cases}$$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 由于方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \neq 0$
- 所以，按 Cramer 法则，有唯一解

$$a = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0 \\ f_1 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}} = \frac{x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f_0 \\ 1 & f_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

- 于是

$$P_1(x) = \frac{x_1 f_0 - x_0 f_1}{x_1 - x_0} + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} x,$$

（公式1）

- 或

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1$$

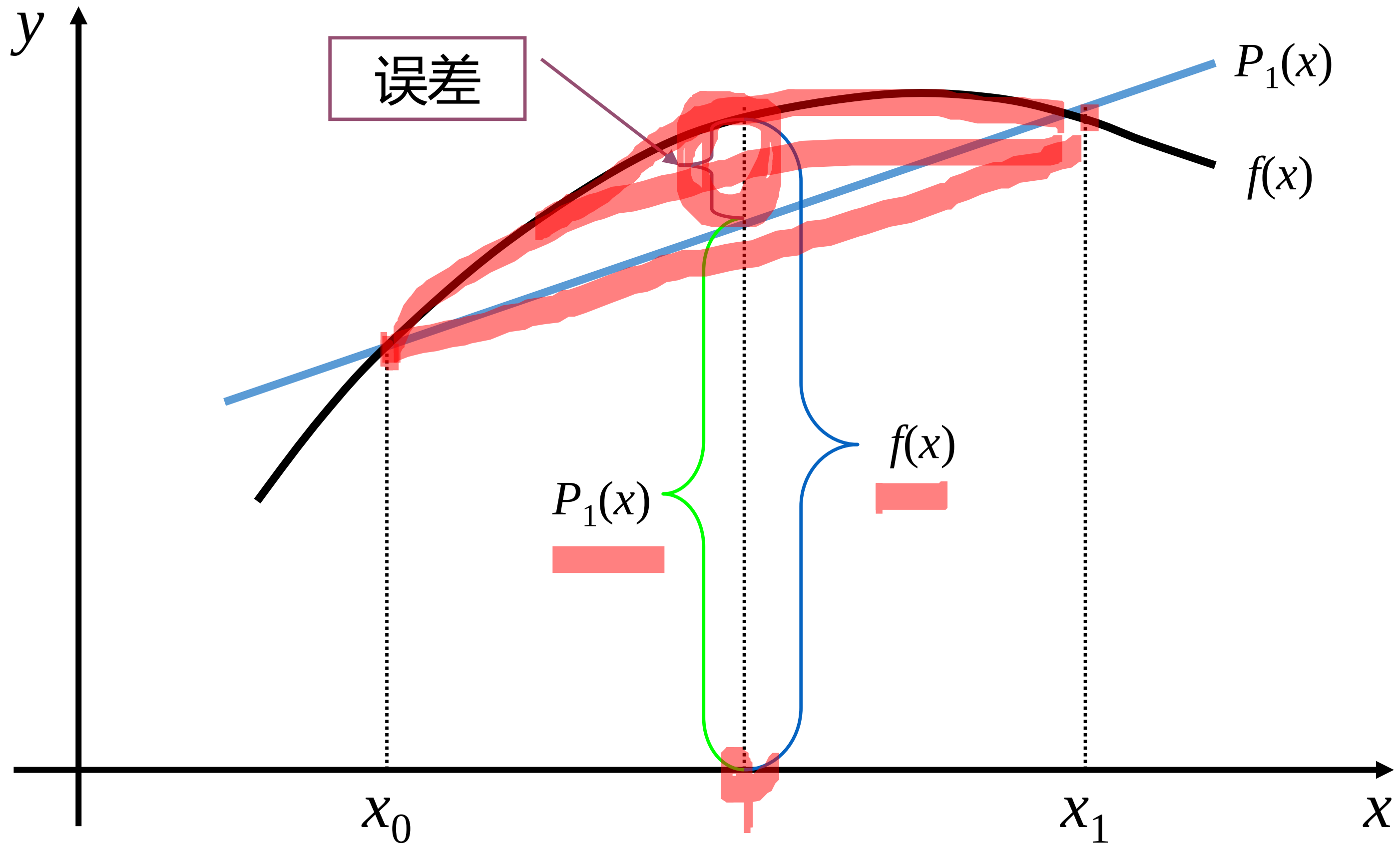
§ 4.2 Lagrange 插值多项式

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f_1$$

- 插值基函数
- 令$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$，$l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$，称之为插值基函数
- 性质：
  - $l_0(x_0)=1$　$l_0(x_1)=0$；$l_1(x_0)=0$　$l_1(x_1)=1$；
  - 即与下标对应的插值点上取1，在另外插值点取0
  - 故可统一表示成：$l_i(x_k)=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}\quad(i,k=0,1)$
- $L_1(x)=\sum_{i=0}^{1}l_i(x)y_i$
- 插值余项：$R_1(x)=f(x)-L_1(x)$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 容易验证，过点(x_0, y_0)与(x_1, y_1) 直线方程就是上式 (公式1)，如下图所示。



§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 例2.1：已知

x	3.1	3.2
$\ln x$	1.1314	1.1632

P(x)

- 求$ln(3.16)$的近似值，精确到小数点后4位。
- 解：用线性插值公式 (公式1)，计算得到

$$P_1(3.16) = \frac{3.16-3.2}{3.1-3.2}\times 1.1314 + \frac{3.16-3.1}{3.2-3.1}\times 1.1632$$
$$= 1.15048 \approx 1.1505$$

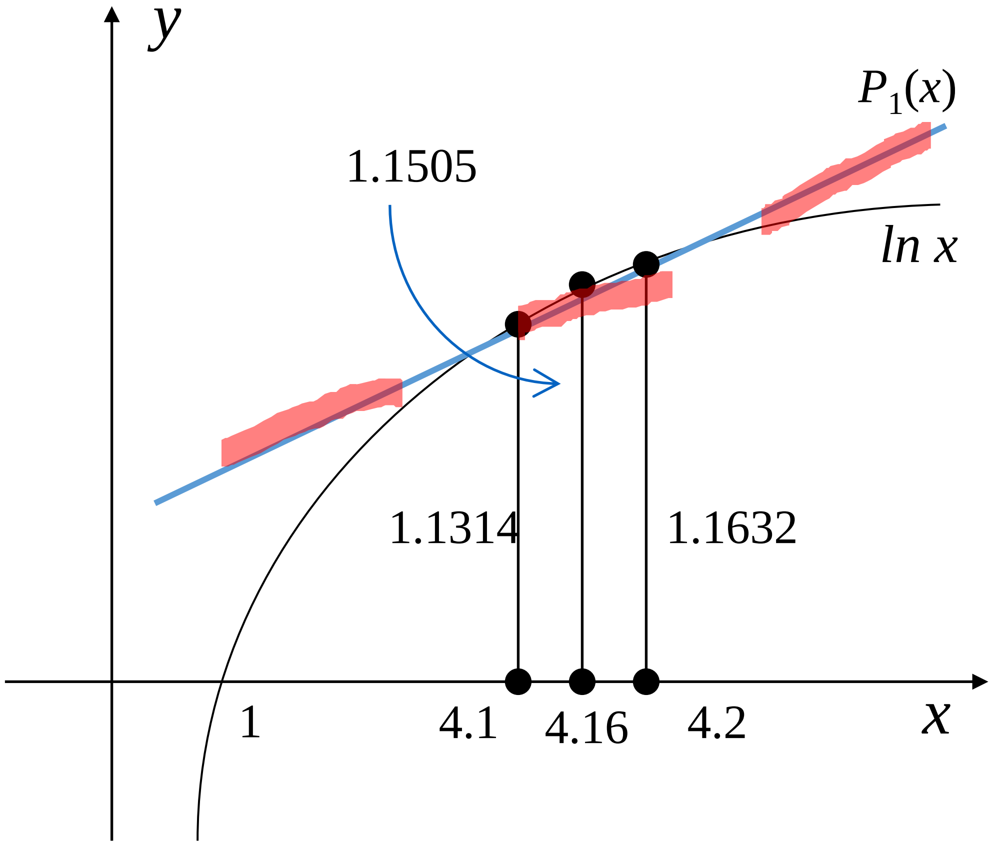
- 所以 $ln(3.16) \approx 1.1505$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

•[应用条件]:

•如图表明，对于象$y = \ln x$这样连续光滑的曲线；

•当两个插值节点很近并且所求的函数值也很近时，用线性插值方法是可以保证精度的。



§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 二. 抛物线插值
- 已知三个插值节点及其函数值：

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	f_0	f_1	f_2

插值节点

对应的函数值

- 求二次多项式 $P_2(x) = a + bx + cx^2$

- 使得

$$\begin{cases} P_2(x_0) = a + bx_0 + cx_0^2 = f_0 \\ P_2(x_1) = a + bx_1 + cx_1^2 = f_1 \\ P_2(x_2) = a + bx_2 + cx_2^2 = f_2 \end{cases}$$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 二. 抛物线插值
- 利用插值基函数来构造二次插值
- $L_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$
- $l_i(x)$，$(i = 0, 1, 2)$是二次多项式，且满足条件
- $l_0(x_0)$ =1，$l_0(x_1)$ =0，$l_0(x_2)$ =0
- $l_1(x_0)$ =0，$l_1(x_1)$ =1，$l_1(x_2)$ =0
- $l_2(x_0)$ =0，$l_2(x_1)$ =0，$l_2(x_2)$ =1
- 即$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$ $(i, k = 0, 1, 2)$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 求插值基函数
- $l_0(x)$是二次多项式，且满足条件$l_0(x_0)$ =1，$l_0(x_1)$ =0，$l_0(x_2)$ =0
- 则可写成
- $l_0(x) = A(x-x_1)(x-x_2)$
- 其中， A是待定参数
- $\because$ $l_0(x_0)$ =1
- $\therefore l_0(x_0) = A(x_0-x_1)(x_0-x_2) = 1$
- $\therefore A = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$
- 代入得 $l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

§4.2 Lagrange 插值多项式

- 插值基函数
- $l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$
- 同理可得
- $l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$
- $l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

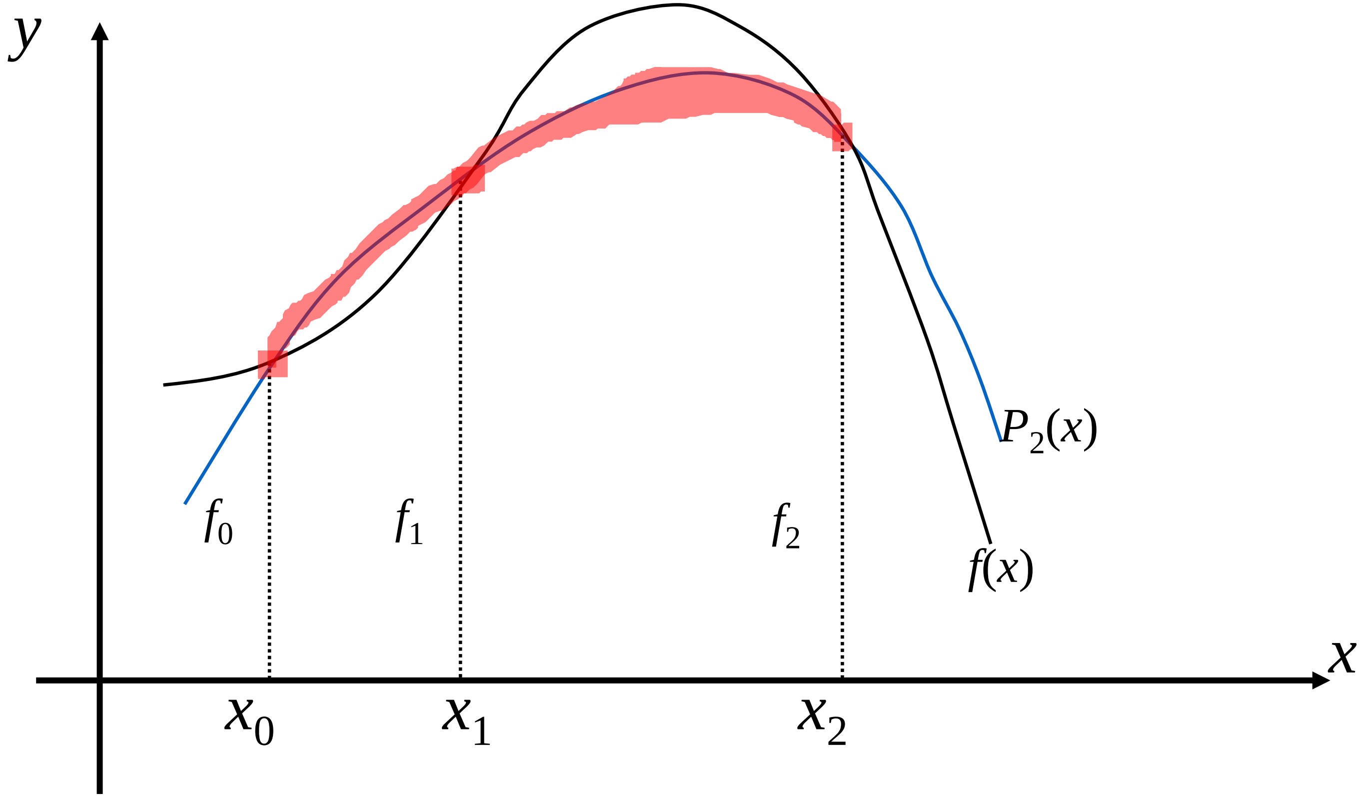
§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 抛物线插值多项式
- $L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \times y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \times y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \times y_2$
- $= \sum_{i=0}^{2} l_i(x) y_i$
- 插值余项
- $R_2(x) = f(x) - L_2(x)$

- 问题：$L_2(x)$和前面提到的$P_2(x)$的关系如何？

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

• 容易验证，$P_2(x)$是过点(x_0, f_0)、(x_1, f_1)与(x_2, f_2)三点的抛物线，如下图所示。



§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 例2.2：已知

x	-1	1	2
$f(x)$	-3	0	4

- 用抛物线插值公式求$f(1.2)$的近似值。
- 解：用 (公式2)，计算得到
- $l_0(x)=\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}$
- $l_1(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\dfrac{\left(x-(-1)\right)(x-2)}{\left(1-(-1)\right)(1-2)}$
- $l_2(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\dfrac{\left(x-(-1)\right)(x-1)}{\left(2-(-1)\right)(2-1)}$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

x	-1	1	2
$f(x)$	-3	0	4

- 解：用 (公式2)，计算得到

- $$L_2(x) = -3 \times \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 0 \times \frac{\big(x-(-1)\big)(x-2)}{\big(1-(-1)\big)(1-2)} + 4 \times \frac{\big(x-(-1)\big)(x-1)}{\big(2-(-1)\big)(2-1)}$$

- $$f(1.2) \approx L_2(1.2) = -3 \times \frac{(1.2-1)(1.2-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 0 \times \frac{\big(1.2-(-1)\big)(1.2-2)}{\big(1-(-1)\big)(1-2)} + 4 \times \frac{\big(1.2-(-1)\big)(1.2-1)}{\big(2-(-1)\big)(2-1)} = 0.6667$$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 例2.3：已知

x	11	12	13
y	2.3979	2.4849	2.5649

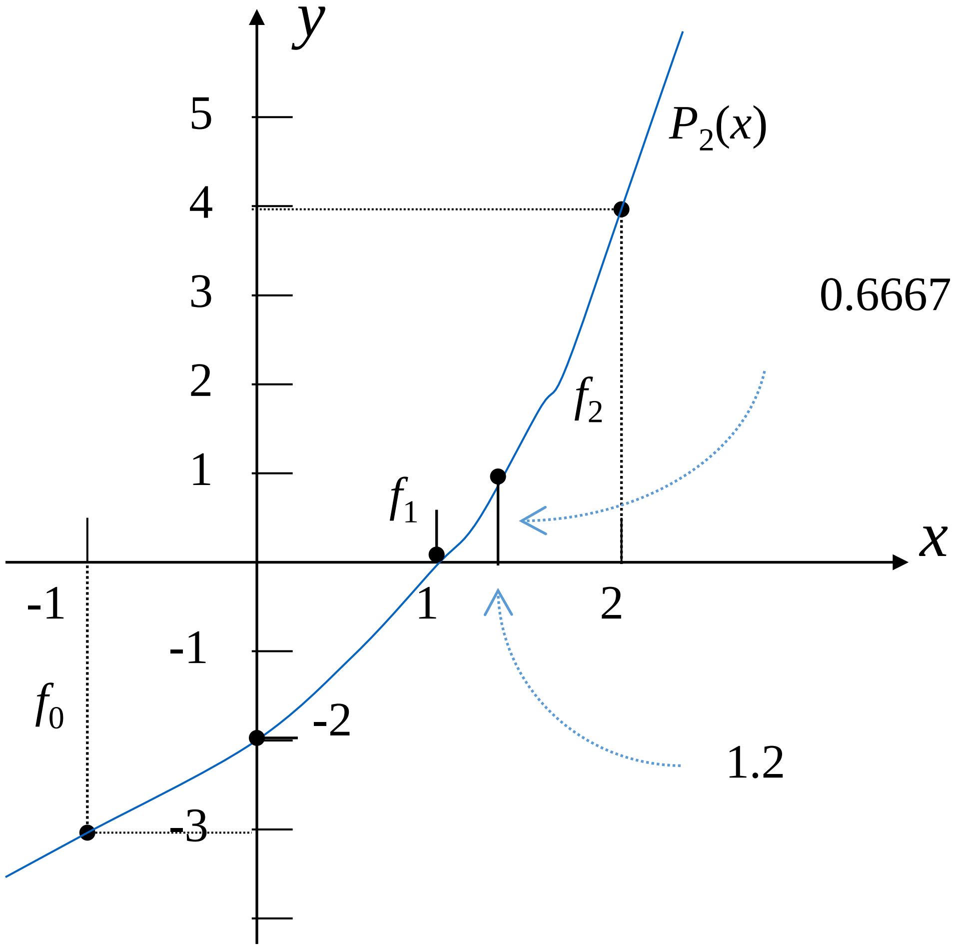
- 用抛物线插值公式求$f(11.75)$的近似值。
- 解：（解法略）
- $f(11.75) \approx L_2(11.75) = 2.4638$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

•[应用条件]:

•如图表明，对于象$y = f(x)$为连续光滑的曲线

•当三个插值节点相差较大，所求的函数值相差也较大时，用抛物线插值方法是可以保证精度的。



§4.2 Lagrange 插值多项式

- 三. Lagrange插值
- 已知 $n+1$ 个插值节点及其函数值：

插值节点

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

对应的函数值

- 求次数不超过n的多项式$P_n(x)$　$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,
- 使得

$$\begin{cases} P_n(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n = f_0 \\ P_n(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n = f_1 \\ P_n(x_2)=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_2^n = f_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n(x_n)=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n = f_n \end{cases}$$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 求插值基函数
- $l_0(x)$是n次多项式，且满足条件$l_0(x_0)=1$，$l_0(x_1)=0$，…，$l_0(x_n)=0$
- 则可写成
- $l_0(x) = A(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$
- 其中，A是待定参数
- $\because\ l_0(x_0)=1$
- $\therefore\ l_0(x_0) = A(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n) = 1$
- $\therefore\ A = \dfrac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$
- 代入得 $l_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} = \prod_{j=0,j\neq 0}^{n} \dfrac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 同理可得
- $l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$
- 插值基函数

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 插值多项式

- $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} y_i$
- 令：$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$
- 则：

- $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} y_i$
- 插值余项
- $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 五. 截断误差：
- 定理3 Lagrange插值多项式截断误差有如下表示形式
- $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$
- 其中，$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$
- $\xi \in (a, b)$

Lagrange插值多项式的余项

§ 4.2 Lagrange 插值多项式 $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$

• 证明：$\because R_n(x_i) = 0 \ (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ $\therefore$ 有形式 $R_n(x) = k(x)(x - x_0)\cdots(x - x_n)$，其中 $k(x) = \dfrac{f(x) - L_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}$

$t = x_0$ $t = x$

• 引入 $\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - k(x)(t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n)$

$f(t) - L_n(t) = 0$ $\omega_{n+1}(x)$

• 显然 $\varphi(t)$ 在 $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$ 为零

• 故，由罗尔(Rolle)定理 $n+2$

§

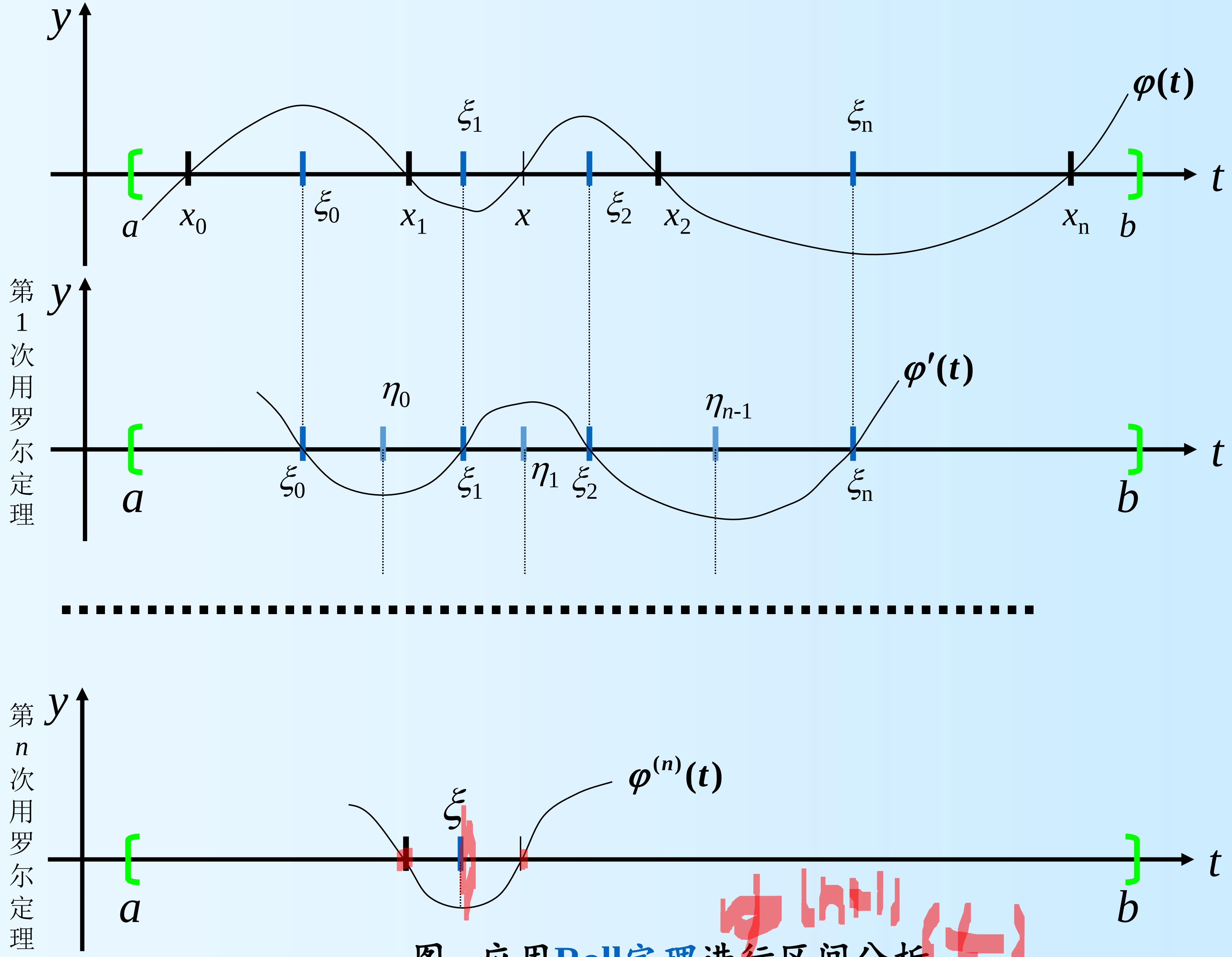


图 应用Roll定理进行区间分析

n+2

n+1

2

1

$\varphi^{(n+1)}(t)$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 反复应用Rolle定理：

n+2个

$\varphi(t)$ 的零点	$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x, \cdots, x_{n-1}, x_n$
$\varphi'(t)$ 的零点	$\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \cdots\cdots\cdots\cdots, \xi_n^{(1)}$
$\varphi''(t)$ 的零点	$\xi_0^{(2)}, \xi_1^{(2)}, \cdots\cdots\cdots\cdots, \xi_{n-1}^{(2)}$
………	………
$\varphi^{(n)}(t)$ 的零点	$\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}$
$\varphi^{(n+1)}(t)$ 的零点	ξ

n+2

n+1

2

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

$n+2$

$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - k(x)(t-x_0)\cdots(t-x_n)$

$(n+1)!$

- 显然$\varphi(t)$在$x_0, x_1, \cdots, x_n, x$为零
- 故，由罗尔(Rolle)定理
- 有$\xi \in (x_0, x_n)$，使得$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$
- 即$f^{(n+1)}(\xi) - k(x)(n+1)! = 0$
- 故$k(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，代入(式1)即得$R_n(x) = k(x)(x-x_0)\cdots(x-x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$
- 设$M_{n+1} = \max\limits_{x_0 \le x \le x_n}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$，则截断误差限为
- $|R(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 插值多项式
- $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} y_i$
- 插值余项
- $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 说明

(1)插值多项式本身只与插值节点及$f(x)$在这些基点上的函数值有关,而与函数$f(x)$无关，但余项$R_n(x)$却与$f(x)$联系很紧。

(2)若$f(x)$为次数不超过n的多项式,那么以$n+1$个点为节点的插值多项式就一定是其本身,即$L_n(x) \equiv f(x)$。

这是因为此时$R_n(x) = 0$。

(3)特别地，取 $f(x) = x^k$， $k = 0, 1, 2, \dots, n$, 则

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) x_i^k = f(x) = x^k, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

当k=0时，可得： $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1.$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 例2.7：设$f(x) = ln(x)$且给出函数表

x	0.40	0.50	0.70	0.80
$ln(x)$	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

- 试计算$f(0.6) = ln(0.6)$的近似值，并估计误差。

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

0.6

- 解(1)选取插值节点为$x_1 = 0.50$，$x_2 = 0.70$作为线性插值
- $f(0.6) = ln(0.6) \approx L_1(0.6) = y_1 \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} = -0.524911$
- 误差 $R_1(0.6) = f(0.6) - L_1(0.6) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-x_1)(x-x_2) = \frac{-\frac{1}{\xi^2}}{2}(0.6 - 0.5)(0.6-0.7) = \frac{0.01}{2}\frac{1}{\xi^2}$，$0.50 < \xi < 0.70$
- 由于$\frac{10^2}{49} < \frac{1}{\xi^2} < \frac{10^2}{25}$，所以有$0.01 < R_1(x) < 0.02$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 解：(2)选取插值节点$x_1 = 0.50$，$x_2 = 0.70$，$x_3 = 0.80$作抛物线插值
- $f(0.6) = ln(0.6) \approx L_2(0.6) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) = -0.513343$
- 误差
- $R_2(0.6) = f(0.6) - L_2(0.6) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
- $= \frac{2}{3}\frac{1}{\xi^3}(0.6 - 0.5)(0.6 - 0.7)(0.6 - 0.8) = \frac{0.002}{3}\frac{1}{\xi^3}, \quad 0.50 < \xi < 0.80$
- $1.3 \times 10^{-3} < R_2(0.6) < 5.34 \times 10^{-3}$

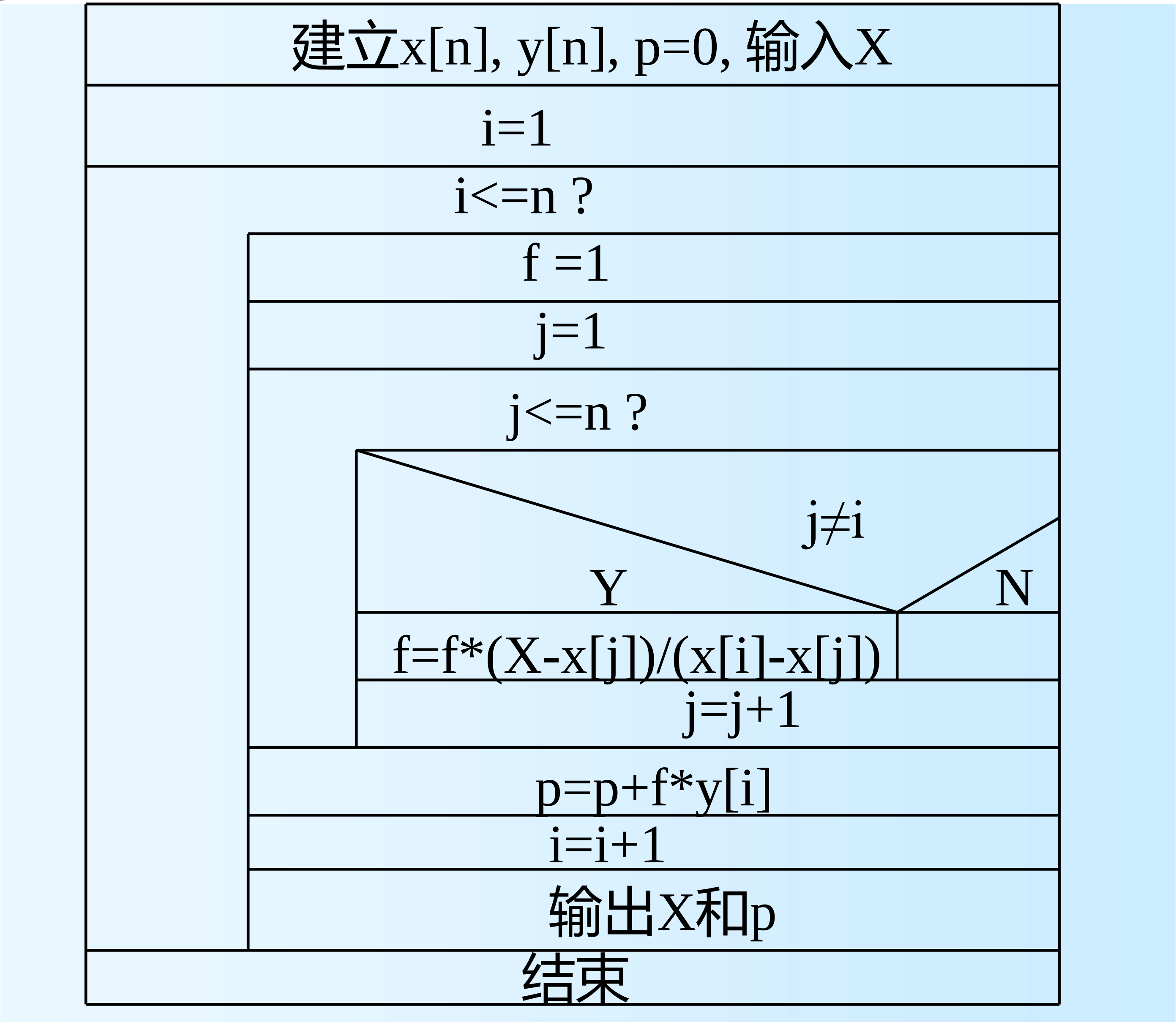
- $f(0.6) = ln(0.6)$ 真值为：$ln(0.6) = -0.510826$

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- Lagrange插值多项式的优点是：
  - 直观;
  - 对称;
  - 容易编程上机等。
- 缺点是：
  - 插值基函数计算复杂;
  - 每增加一个节点，插值多项式的所有系数都得重算;
  - 计算上浪费。
- Newton插值就是克服了以上缺点。

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 六. 算法
- 拉格朗插值法N-S图：



§ 4.3 Newton插值多项式(Newton’s Interpolation)

- **Newton插值**
  - 将$L_n(x)$ 改写成$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(\cdots x - x_n)$的形式，每加一个节点时，只附加一项，这样的插值称为Newton插值
- **Newton插值**
  - 不等距节点(差商)的牛顿插值
  - 等距节点(差分)的牛顿插值

§4.3 Newton插值多项式

- 一.差商(也称均差， divided difference)
- 差商是数值方法中的一个重要概念，
- 它可以描述表格函数的性质-两相邻节点之间平均变化
- 并能对 Lagrange 插值公式给出新的表达形式，就是 Newton 插值。

§ 4.3 Newton插值多项式

2个点、一阶差商

- 定义
- $f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$称为$f$在$x_0,x_1$的一阶差商
- $f[x_1,x_2]=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$称为$f$在$x_1,x_2$的一阶差商
- … … … … … … … … …
- $f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}$称为$f$在$x_0,x_1,x_2$的二阶差商(一阶差商的差商)
- … … … … … … … … …
- $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,x_1\cdots,x_{k-1}]-f[x_1,x_2\cdots,x_k]}{x_0-x_k}$称为$f$在$x_0,x_1\cdots,x_k$的$k$阶差商(一般地n-1阶差商的差商叫$f(x)$的n 阶差商)

§4.3 Newton插值多项式

- 二.差商的性质
- (1)差商是函数值$f\left(x_j\right)$的线性组合
- $n=1$时
- $f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$
- $f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}+\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 二.差商的性质
- (1)差商是函数值$f(x_j)$的线性组合
- $n=2$时
- $f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\dfrac{\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}+\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}-\left(\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}\right)}{x_2-x_0}$
- $=\dfrac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\dfrac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\dfrac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 二.差商的性质
- (1)差商是函数值$f(x_j)$的线性组合
- 一般地，n阶差商
- $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} =$

$\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 二.差商的性质
- (2) 对称性
- 在n阶差商中，任意调换x_i，x_j的顺序，其值不变，称为差商的对称性。
- 由性质(1)知
- $f[x_0, x_1, \cdots x_i, \cdots x_j, \cdots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)}$
- $f[x_0, x_1, \cdots x_j, \cdots x_i, \cdots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)}$
- $\therefore\ f[x_0, x_1, \cdots x_i, \cdots x_j, \cdots, x_n] = f[x_0, x_1, \cdots x_j, \cdots x_i, \cdots, x_n]$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 二.差商的性质

$k+1$　　$+1$

(3)如果 $f(x)$ 的 k阶差商$f[x,x_0,\cdots,x_{k-1}]$ 是关于x 的 m次多项式,

则$f(x)$的 $k+1$阶差商$f[x,x_0,\cdots,x_{k-1},x_k]$是 x 的 $m-1$ 次多项式

§ 4.3 Newton插值多项式

•二.差商的性质

•(4)差商与导数

•若 $f(x)$在$[a, b]$ 存在 $n+1$阶导数， $x_i \in [a, b]$， $i= 0,1,\cdots,n$， $x \in [a, b]$, 则 $n+1$ 阶差商与导数存在如下关系：

• $$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (a, b)$$

§ 4.3 Newton插值多项式

dy / dx

- 二.差商的性质
- (5)差商与微商
- 差商是微商的离散形式
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \boxed{f[x, x_0]} = f'(x_0)$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 例3.2：设 $f(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ ，证明：对任意x有 $f[x_0,x_1,\dots.x_n,x]=1$
- 证明(1)：利用差商函数表示
- $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$
- $\therefore\ f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x)\omega'_{n+1}(x_i)}+\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$
- $\because f(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$
- $\therefore\ f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)=0$
- $\therefore\ f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]=0+\frac{f(x)}{f(x)}=1$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 例3.1：设 $f(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ ，证明：对任意x有 $f\,[x_0,x_1,\ldots.x_n,x\,]=1$
- 证明(2)：利用差商与导数关系
- $f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ ，$\xi\in(a,b)$
- $\because\ f(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$
- $\therefore\ f^{(n+1)}(x)=(n+1)!$
- $\therefore\ f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!}=1$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 例3.3：设 $f(x)=x^7-x^4+3x+1$，计算$f\,[2^0,2^1]$，$f\,[x,2^0,2^1,\cdots,2^6]$，$f\,[x,2^0,2^1,\cdots,2^7]$
- 解：$f\,[2^0,2^1]=\dfrac{f(1)-f(2)}{1-2}=\dfrac{4-119}{1-2}=115$
- 而 $f^{(7)}(x)=7!$，$f^{(8)}(x)=0$，由性质4得
- $f\,[x,2^0,2^1,\cdots,2^6]=\dfrac{f^{(6+1)}(\xi)}{(6+1)!}=1$
- $f\,[x,2^0,2^1,\cdots,2^7]=\dfrac{f^{(7+1)}(\xi)}{(7+1)!}=0$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 四. Newton 基本插值公式
- 设给定$n+1$个插值结点$(x_0, x_1, \ldots, x_n)$，再给另一点$x \neq x_i$，据差商定义
- $f[x, x_0] = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- $\therefore\ f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$ 式(1)
- 增加一个节点：
- $f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$
- $\therefore f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$ 式(2)

§ 4.3 Newton插值多项式

- 四. Newton 基本插值公式
- 增加一个节点：
- $f[x,x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x,x_0,x_1]-f[x_0,x_1,x_2]}{x-x_2}$
- $\therefore f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)$ 式(3)
- … … … … … … …
- $f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{n-2}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}](x-x_{n-1})$ 式(n)
- $f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_n)$ 式(n+1)

§ 4.3 Newton插值多项式

- 依次把后式代入前式得:

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) + f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

- 记$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$

$$+ f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

n次Newton插值公式

- 则有$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

§4.3 Newton插值多项式

$P_n(x)$为关于x的n次多项式且$P_n(x_i) = f(x_i)$

说明：将x_i代入$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

有：$f(x_i) = P_n(x_i) + R_n(x_i)$

由$R_n(x)$表达式，知$R_n(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$

所以$P_n(x_i) = f(x_i)$

所以$P_n(x)$为插值多项式

称$P_n(x)$为牛顿插值多项式，记为$\boxed{N_n(x)}$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 即 $N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$
$$+f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$
- 插值余项
- $R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]\,\omega_{n+1}(x)$
- 牛顿插值多项式的计算极为方便,且当增加一个插值节点时,只要在后面多计算一项,$N_n(x)$的各项系数恰好是各阶差商值。
- 各阶差商值可按差商表

§ 4.3 Newton插值多项式

- 差商表的构造

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商	…
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$				
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$			
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$	
…	…	…	…	…	…	…

§ 4.3 Newton插值多项式

- Newton插值的说明
- 牛顿插值多项式不要求函数的高阶导数存在，所以更具有一般性。
- 对 $f(x)$是由离散点给出的函数情形或 $f(x)$的导数不存在的情形均适用。

§ 4.3 Newton插值多项式

- 引入记号
- $f[x_0] = f(x_0)$
- $t_0(x) = 1,$
- $t_1(x) = x - x_0,$
- $t_2(x) = (x - x_0)(x - x_1), \cdots,$
- $t_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$
- 则n次Newton插值公式可表为
- $N_n(x) = t_0(x)f[x_0] + t_1(x)f[x_0, x_1] + \cdots + t_n(x)f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} t_i(x)f[x_0, x_1, \cdots, x_i]$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 则n次Newton插值公式可表为
- $N_n(x) = t_0(x)f[x_0] + t_1(x)f[x_0,x_1] + \cdots + t_n(x)f[x_0,x_1,\cdots,x_n] = \sum_{i=0}^{n} t_i(x)f[x_0,x_1,\cdots,x_i]$
- 称$t_0(x), t_1(x), t_2(x), \cdots, t_n(x)$ 为Newton插值的基函数，而且满足关系：

$t_i(x) = t_{i-1}(x)(x - x_{i-1})$ $\quad i = 1,2,\cdots, n$

$t_i(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})$

- $\begin{cases} t_i(x_j) = 0, j < i \\ t_i(x_j) \neq 0, j \geq i \end{cases}$

第i个节点以后非零

$x = x_j$

§ 4.3 Newton插值多项式

- Newton插值公式具有承袭性
- $N_{n-1}(x) = t_0(x)f[x_0] + t_1(x)f[x_0, x_1] + \cdots + t_{n-1}(x)f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]$
- $N_n(x) = t_0(x)f[x_0] + t_1(x)f[x_0, x_1] + \cdots + t_{n-1}(x)f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] + t_n(x)f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$
- $N_n(x) = N_{n-1}(x) + \boxed{t_n(x)f[x_0, x_1, \cdots, x_n]}$

§4.3 Newton插值多项式

- 例 3.4. 给定四个插值点(−2,17), (0,1), (1,2), (2,19), 计算$N_2(0.9)$, $N_3(0.9)$。
- 解：$x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2,$
- $f(x_0) = 17, f(x_1) = 1, f(x_2) = 2, f(x_3) = 19$
- $f[x_0, x_1] = -8, f[x_0, x_1, x_2] = 3, f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 5/4,$

Horner

- $N_2(x) = t_0(x)f[x_0] + t_1(x)f[x_0, x_1] + t_2(x)f[x_0, x_1, x_2] = 17 - 8(x+2) + 3(x+2)x$
- $N_2(x) = t_0(x)f[x_0] + t_1(x)f[x_0, x_1] + t_2(x)f[x_0, x_1, x_2] = 17 - 8(x+2) + 3(x+2)x = 3x^2 - 2x + 1$
- $N_2(x) = t_0(x)f[x_0] + t_1(x)f[x_0, x_1] + t_2(x)f[x_0, x_1, x_2] = 17 - 8(x+2) + 3(x+2)x = 3x^2 - 2x + 1 = (3x-2)x + 1$
- $N_2(0.9) = (3 \times 0.9 - 2) \times 0.9 + 1 = 1.63$

§4.3 Newton插值多项式

- 例 3.4. 给定四个插值点$(-2,17)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,19)$, 计算$N_2(0.9)$, $N_3(0.9)$。
- 解：$N_3(x)=N_2(x)+t_3(x)f[x_0,x_1,x_2,x_3]=17-8(x+2)+3(x+2)x+(5/4)(x+2)x(x-1)=(3x-2)x+1+(5/4)[(x+1)x-2]x=N_2(x)+(5/4)[(x+1)x-2]x$

- $N_3(0.9)=N_2(0.9)+\ (5/4)\times[(0.9+1)\times 0.9-2]\times 0.9=1.30375$

§ 4.3 Newton插值多项式

$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$

$= f(x) - N_n(x)$

- 插值多项式的余项

根据 $p_n(x)$ 的唯一性知：$L_n(x) = N_n(x)$

则两个插值多项式的余项也相等。

$$\text{则} R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_{(n+1)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{(n+1)}(x)$$

$(n+1)$

$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$

$= f(x) - N_n(x)$

§ 4.3 Newton插值多项式

• 例3.5: 用Newton插值多项式$N_1(x)$，求$ln(11.75)$，估计误差。

x	11	12	13
y	2.3979	2.4849	2.5649

• $N_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) = 2.3979 + \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}(x - x_0) = 2.3979 + \frac{2.3979-2.4849}{11-12}(x - x_0) = 2.3979 + 0.087(x - x_0)$

• $ln(11.75) \approx N_1(11.75) = 2.4632$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 误差估计
- $|R_1(x)| \le \frac{M}{2!}|(x-x_0)(x-x_1)|$，其中$|f''(x)| \le M$
- $\because\ f(x) = ln(x)$，$f'(x) = \frac{1}{x}$，$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$，$x_0 \le x \le x_1$
- $\therefore\ |f''(x)| = \left|\frac{-1}{x^2}\right| \le \frac{1}{11^2}$，$11 \le x \le 12$
- $\therefore |R_1(x)| \le \frac{1}{2!}\frac{1}{11^2}|(x-x_0)(x-x_1)|$
- 代入11.75得
- $|R_1(11.75)| \le \frac{1}{2!}\frac{1}{11^2}|(11.75-11)(11.75-12)| =$0.0007748

§ 4.3 Newton插值多项式

- 例3.6. 构造$f(x)$的三次Newton插值多项式。

x	1	2	3	4
y	0	-5	-6	3

- 解：给定4个节点，写出三次Newton插值多项式
- $N_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

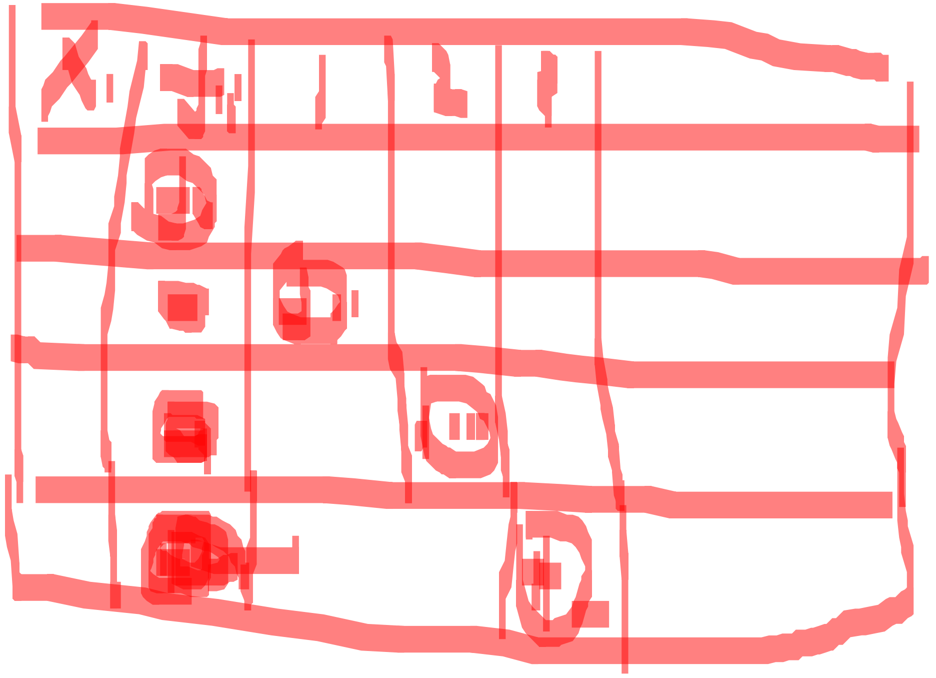
§4.3 Newton插值多项式

- 解：构造差商表（均差表）

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	0			
2	-5	-5		
3	-6	-1	2	
4	3	9	5	1

- 所以，
- $N_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = 0 + (-5)(x - 1) + 2(x - 1)(x - 2) + 1\,(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 4x^2 + 3 = x^2(x - 4) + 3$

§ 4.3 Newton插值多项式



- 五. Newton插值计算步骤
- 1. 计算差商
- (1)令$f_i = f(x_i)\ \ i = 0, 1, 2, \cdots, n$
- (2)对于$i = 1, 2, \cdots, n\ \ \ j = n, n-1, \cdots, i$
- 令$f_j = (f_j - f_{j-1})/(x_i - x_{j-i})$ (此时$f_j = f[x_0, x_1, \cdots, x_j]$)
- 2. 计算插值
- (1)设$p = f_n$
- (2)对$i = n-1, \cdots, 1, 0$ 设$p = f_1 + \boxed{(x - x_i)p}$
- (3)输出$f(x) \approx p$

§4.3 Newton插值多项式

- 六. Newton插值N-S图

输入x_i, y_i，$i = 1,2,\cdots,n$

$s = y_0$，$p = 1$，输入x

$i = 1, n$

$j = 1, n - i + 1$

$y_{i-1} = (y_i - y_{i-1})/(x_{j+i-1} - x_{i-1})$

$p = p \times (x - x_{i-1})$

$s = s + y_0 \times p$

打印s

返回

§4.3 Newton插值多项式

- 七. 差分
- 1、定义：设$f(x)$在等距节点$x_k = x_0 + kh$处的函数值为$f(x_k) = y_k$, $(k = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{x_k - x_0}{k}$称为步长，则函数在区间$[x_k, x_{k+1}]$上增量$y_{k+1} - y_k$称为$f(x)$在x_k处的一阶向前差分，记为Δy_k，即$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$
- 如$\Delta y_0 = y_1 - y_0$，$\Delta y_1 = y_2 - y_1$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 七. 差分
- 一阶差分的差分叫二阶差分
- $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$；
- $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1$
- …
- $\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$
- 一般地，定义$f(x)$在x_k处的n阶差分为
- $\Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 向后差分
- ∇表示向后差分算子
- 一阶向后差分 $\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$
- 二阶向后差分$\nabla^2 y_k = \nabla y_k - \nabla y_{k-1}$
- 一般地
- m阶向后差分$\nabla^m y_k = \nabla^{m-1} y_k - \nabla^{m-1} y_{k-1}$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 八.差分的性质
- 性质1：差分可以用函数表示$\Delta^n y_k = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i y_{k+n-i}$
- 性质2：差分与差商
- $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$
- $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$
- $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 八.差分的性质
- 性质3：差分与导数的关系
- $\Delta^n y_i = h^n f^{(n)}(\xi)$，$\xi \in (x_i, x_n)$
- 证明：
- $\Delta^n y_i = n!\, h^n f[x_i, \cdots, x_{i+n}] = n!\, h^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = h^n f^{(n)}(\xi)$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 八.差分的性质
- 性质4：向前和向后差分的关系
- $\Delta^m f_k = \nabla^m f_{k+m}$
- 如
- $\Delta f_k = \nabla f_{k+1}$
- $\Delta^2 f_k = \nabla^2 f_{k+2}$
- $\Delta^3 f_k = \nabla^3 f_{k+3}$

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \nabla y_{k+1}$

$y_{k+1} - y_k$

§4.3 Newton插值多项式

- 例3.9： 已知 $f(x) = x^5 + 1$ ，$x_i = 0.5i$, 其中 $i = 0, 1, 2, \cdots$
- 计算$\Delta^5 f_0$ ，$\Delta^2 f_2$
- 解：使用差分与导数关
- $\Delta^5 f_0 = h^5 f^{(5)}(\xi) = \dfrac{15}{4}$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^5 5!$
- $\Delta^2 f_2 = \underline{f_4 - 2f_3 + f_2} = f(x_4) - 2f(x_3) + f(x_2) = 17.8125$

§ 4.3 Newton插值多项式

- **九.Newton向前插值公式**

设节点 x_k 由小到大排列，即$x_k = x_0 + kh\ (k = 0, 1 \dots n)$，

$x = x_0 + th$，$(x - x_k) = (t - k) \cdot h$

- $f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{\Delta y_0}{h}$，$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$，$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \dfrac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$

将差商与差分关系式代入牛顿插值多项式:

- $$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

- $$N_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta y_0}{h} th + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} th(t-1)h + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} th(t-1)h \cdots (t-n+1)h$$

§ 4.3 Newton插值多项式

- $N_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta y_0}{h} th + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} th(t-1)h + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} th(t-1)h \cdots (t-n+1)h = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2} t(t-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)\cdots(t-n+1) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$
- 其中，$x = x_0 + th$，$t = \frac{(x-x_0)}{h}$
- 误差
- $R_n(x) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{n+1}(\xi)$

§ 4.3 Newton插值多项式

• 牛顿向前插值公式

•$N(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$

•x在x_0附近$(0<t<1)$时，误差较小

•适合求待插点位于表头附近的函数近似值

§ 4.3 Newton插值多项式

- 差分表

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
	y_0	$\triangle y_0$	$\triangle^2 y_0$	$\triangle^3 y_0$	$\triangle^4 y_0$
x_0	$f(x_0)$	$\Delta f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$	$\Delta^4 f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$	$\Delta f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_1)$	$\Delta^3 f(x_1)$	$\vdots$
x_2	$f(x_2)$	$\Delta f(x_2)$	$\Delta^2 f(x_2)$	$\vdots$	
x_3	$f(x_3)$	$\Delta f(x_3)$	$\vdots$		
x_4	$f(x_4)$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$				

§ 4.3 Newton插值多项式

- 例3.10： 设$y = f(x) = e^x$，插值节点为$x = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$，相应的函数值如下表，求$f(2.2)$。

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
1	2.71828				
1.5	4.48169	1.76341			
2	7.38905	2.90737	1.14396		
1.5	12.18247	4.79343	1.88606	0.74210	
3	20.08554	7.90305	3.10962	1.22356	0.48146

- $h = 0.5$
- $x = x_0 + th \quad 2.2 = 1 + 0.5t \qquad t = 2.4$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 例3.10：设$y = f(x) = e^x$，插值节点为$x = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$，相应的函数值如下表，求$f(2.2)$。

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
1	2.71828				
1.5	4.48169	1.76341			
2	7.38905	2.90737	1.14396		
1.5	12.18247	4.79343	1.88606	0.74210	
3	20.08554	7.90305	3.10962	1.22356	0.48146

- $N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$
- $N_2(2.2) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 = 2.71828 + 2.4 \times 1.76341 + \frac{2.4(2.4-1)}{2} \times 1.14396 = 8.87232$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 例3.10：设$y = f(x) = e^x$，插值节点为$x = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$，相应的函数值如下表，求$f(2.2)$。
- $N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$
- $N_2(2.2) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 = 2.71828 + 2.4 \times 1.76341 + \frac{2.4(2.4-1)}{2} \times 1.14396 = 8.87232$
- $N_3(2.2) = N_2(2.2) + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 = 8.87232 + \frac{2.4(2.4-1)(2.4-2)}{3!} \times 1.14396 = 9.12855$
- $N_4(2.2) = N_3(2.2) + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 = 9.12855 + \frac{2.4(2.4-1)(2.4-2)(2.4-3)}{4!} \times 0.7421 = 9.10362$
- 误差 $R_2 = 0.15269$，$R_3 = -0.01354$，$R_4 = 0.00264$

精确值$f(2.2)$=e^2.2=9.025011

§ 4.3 Newton插值多项式

$x_k \leftarrow x_{k+1}$

x_{k-1} x_k

最小

- 十.Newton向后插值公式
- 插值节点由大到小顺序排列$x_0, x_{-1}, x_{-2}, \cdots, x_{-n}$， $x_{-n} = x_0 - nh$
- 对应的函数值分别为$y_0, y_{-1}, y_{-2}, \cdots, y_{-n}$
- 则，Newton插值多项式为
- $N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_{-1}](x - x_0) + f[x_0, x_{-1}, x_{-2}](x - x_0)(x - x_{-1}) + \cdots + f[x_0, x_{-1}, \dots, x_{-n}](x - x_0)(x - x_{-1}) \cdots (x - x_{-n+1})$

§ 4.3 Newton插值多项式

- 向后差商与差分

- $N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_{-1}](x - x_0) + f[x_0, x_{-1}, x_{-2}](x - x_0)(x - x_{-1}) + \cdots + f[x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}](x - x_0)(x - x_{-1}) \cdots (x - x_{-n+1})$

- $f[x_0, x_{-1}] = \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{x_0 - x_{-1}} = \frac{\Delta y_{-1}}{h}$

- $f[x_0, x_{-1}, x_{-2}] = \frac{\Delta^2 y_{-2}}{2!h^2}$

- $f[x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}] = \frac{\Delta^n y_{-n}}{n!h^n}$

§ 4.3 Newton插值多项式

- Newton向后插值公式

令$x = x_0 + th$，则$x - x_0 = th$， $x - x_{-1} = x_0 + th - (x_0 - h) = (t+1)h$，$x - x_{-k} = x_0 + th - (x_0 - kh) = (t+k)h$

- $N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_{-1}](x - x_0) + f[x_0, x_{-1}, x_{-2}](x - x_0)(x - x_{-1}) + \cdots + f[x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}](x - x_0)(x - x_{-1}) \cdots (x - x_{-n+1}) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-2} + \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_{-n}$
- 牛顿向后插值公式，适合求待插点位于表尾附近的函数近似值
- 插值余项$R_n(x) = \frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{n+1}(\xi)$

§ 4.3 Newton插值多项式

例3.11：已知 :$\sqrt{x}$的函数表x=1.00到x=1.30，h=0.05。求$\sqrt{1.01}$及$\sqrt{1.28}$的值。

x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$f(x_i)=\sqrt{x_i}$	1.0000	1.0247	1.0488	1.0724	1.0955	1.1180	1.1402

- 差分表

X_i	$f(x_i)$	$\triangle y_i$	$\triangle^2 y_i$	$\triangle^3 y_i$
1.0	1.0000			
1.05	1.02470	0.02470		
1.10	1.04881	0.02411	0.00059	0.00005
1.15	1.07238	…	…	0.00004
1.20	1.09545	…	-0.00043	0.0006
1.25	1.11803	0.02215		
1.30	1.14015			

§ 4.3 Newton插值多项式

例3.11：已知 :$\sqrt{x}$的函数表x=1.00到x=1.30，h=0.05。求$\sqrt{1.01}$及$\sqrt{1.28}$的值。

x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$f(x_i)=\sqrt{x_i}$	1.0000	1.0247	1.0488	1.0724	1.0955	1.1180	1.1402

- 差分表
- 因为$x=1.01$在表头，利用向前插值多项式，因为三阶差分已经接近0，所以使用二阶插值多项式
- $n=2$，$x_0=1.00$，$x=1.01$，$h=0.05$，$t=(x-x_0)/h=\frac{1}{5}$
- $\sqrt{1.01}=f(x_0)+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0=1.0+0.2\times 0.247+\frac{0.2\times(0.2-1)}{2!}\times 0.00059=1.0494$

§4.3 Newton插值多项式

例3.11：已知 :$\sqrt{x}$的函数表x=1.00到x=1.30，h=0.05。求$\sqrt{1.01}$及$\sqrt{1.28}$的值。

x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$f(x_i)=\sqrt{x_i}$	1.0000	1.0247	1.0488	1.0724	1.0955	1.1180	1.1402

- 差分表
- 因为$x=1.28$接近1.30，利用向后插值多项式，同理使用二阶插值多项式
- $n=2$，$x_0=1.30$，$x=1.28$，$h=0.05$，$t=(x-x_0)/h=-\frac{2}{5}$
- $\sqrt{1.28}=f(x_0)+t\Delta y_{-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-2}=1.14015+(-0.4)\times 0.02215+\frac{-0.4\times(-0.4+1)}{2!}\times(-0.00043)=1.1313416$

作业与实验

- 作业（书面作业）：
- **P109：2,** 4(1)
- **4,6,9**
-

END/2

§ 4.2 Lagrange 插值多项式

- 补充：
- 罗尔(Rolle)定理：
  - 如果$f(x)$满足
    - (1)在$[a, b]$连续；
    - (2)在(a, b)可导；
    - (3)$f(a) = f(b)$。
  - 则至少存在一个点$\xi \in (a, b)$
  - 使得$f'(\xi) = 0$