第六章常微分方程的数值解法

计算机科学系

内容

本章要求

- 1. 熟悉Euler显公式,梯形法及Euler预校法;
- 2. 熟悉局部截断误差及绝对稳定性;
- 3. 掌握龙格—库塔法。

§6.1 引言

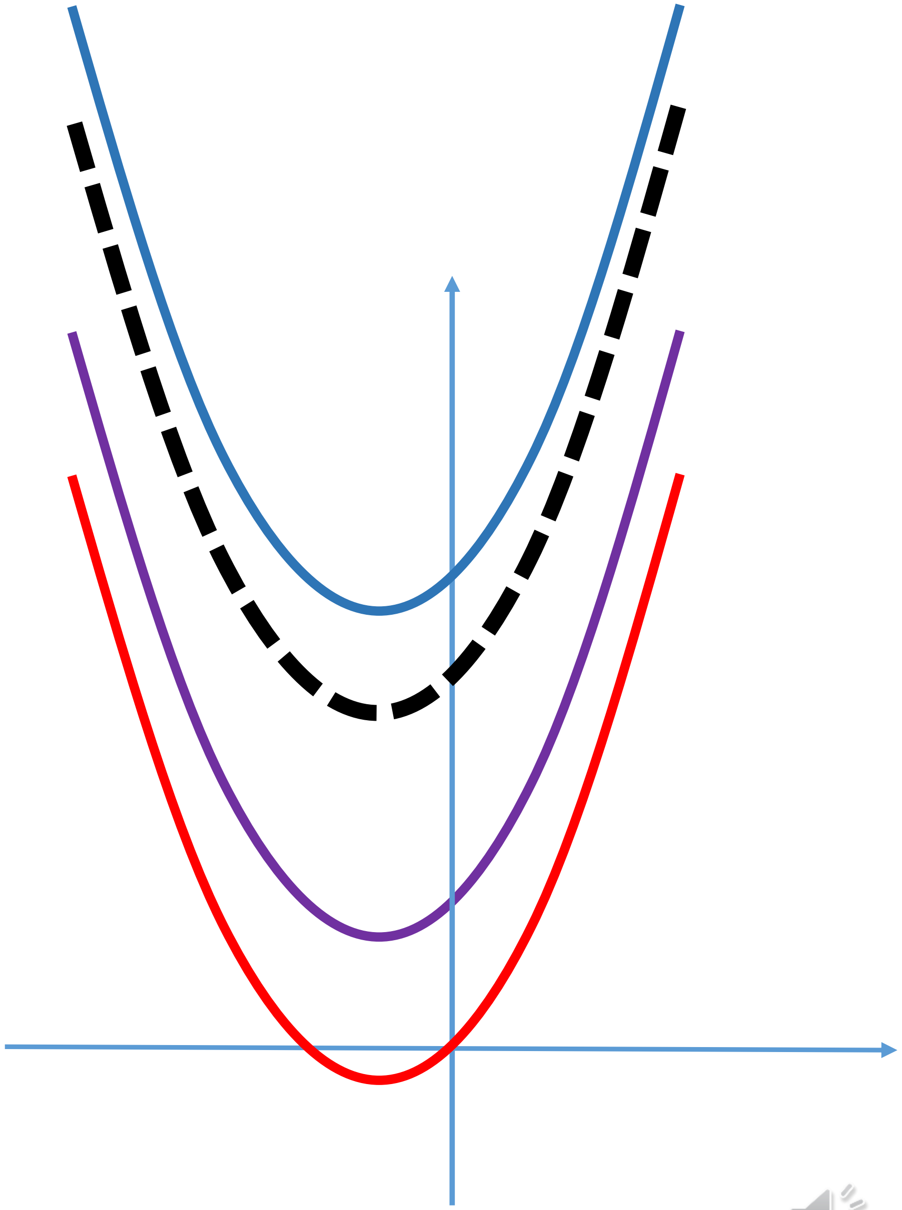
- 本节内容
  - 一. 问题提出
  - 二. 两类求定解问题
  - 三.解存在定理
  - 四.数值解法含义
  - 返回章节目录

§6.1 引言

- 零. 基础知识回顾
- 1.微分方程
- 有一个或多个导数及其函数的方程式称为微分方程
- 微分方程分为：
  - 常微分方程：一个自变量
  - 偏微分方程：一个以上自变量

§6.1 引言

- 积分曲线
- 一阶微分方程的通解，是xy空间上的一簇曲线，称之为微分方程的积分曲线簇。
- 一阶微分方程的特解，是xy空间上的一条曲线，称之为微分方程的积分曲线。



§6.1 引言

- 解常微分方程的初值问题
- 求函数$y(x)$满足下列常微分方程
- $y'(x) = f(x,y)$ （6-1）
- 和初值条件
- $y(x_0) = y_0$ （6-2）

- 或者$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
- 就是求一条过(x_0, y_0)点的积分曲线

§6.1 引言

3.解存在定理

定理6.1 对初值问题(6-1)(6-2)，若$f(x,y)$在区域

$$G=\{a<x<b,\ |y|<\infty\}$$

内连续，且关于y满足李普希兹(Lipschitz)条件，即存在常数L，使

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2| \qquad （6\text{-}3）$$

对G中任意两个y_1,y_2均成立，其中L是与x,y无关的常数，则初值问题(6-1)(6-2)在(a,b)内存在唯一解，且解是连续可微的，其中L称为Lipschitz常数

§6.1 引言

- 一. 微分方程数值计算问题提出
- 微分方程求解析解比较困难
  - 很多微分方程的解不能用初等函数来表示，
  - 有时即使能够用解析式表示其解，由于表达式过于复杂，所以计算量太大而不实用。
- 解决思路：
  - 近似解析解
    - 满足精度要求的解的简单的近似表达式，
  - 数值方法来求解
    - 一般只要求得到若干个点上的近似值，数值解(适于计算机)

$\sin x \sim x$

§6.1 引言

- 二. 数值解法含义
  - 数值解法：将常微分方程离散化，建立差分方程，给出解在一些离散点上的近似值。
  - 区间是$[a,b]$离散化：取$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，$h_k = x_{k+1} - x_k$，等距时$h = (b-a)/n$，$h$称为步长。

    不相等

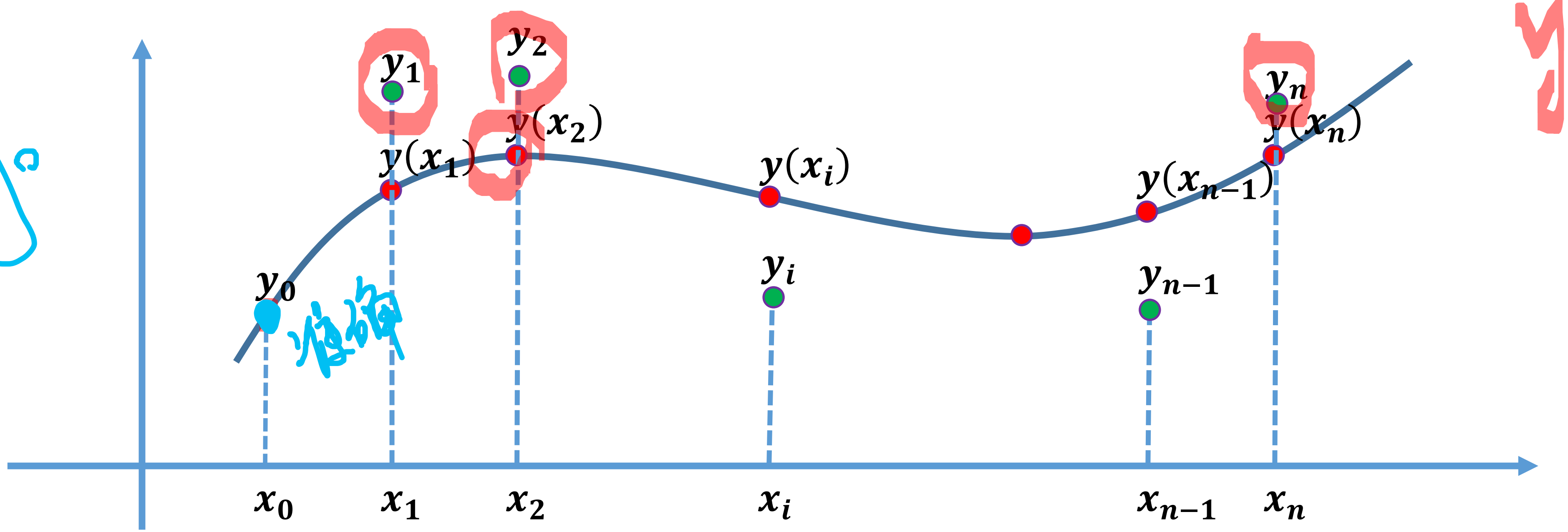
    准　　　近
  - 数值方法求得$y(x)$在每个节点x_k上$y(x_k)$的近似值，用y_k表示，则$y_0, y_1, \cdots, y_n$称为微分方程的数值解。
  - 通常采用递推公式由y_0，y_1，$\cdots$，y_i推出y_{i+1}。
    - 各种方法的本质是构造递推公式。

§6.1 引言

三.初值问题的数值解法

- 采用离散化思想，从(x_0, y_0)开始，计算在离散点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 上的准确解$y(x_i)$的近似值y_0，y_1，y_2，$\cdots$，y_n

$y(x_0)=y_0$



§6.1 引言

- 四.初值问题的常见解法
- 单步法:
- 利用前一个单步的信息(一个点)，在$y = f(x)$找下一点y_i，
- 有欧拉法，龙格—库格法。

- 多步法，包括预测校正法:
- 利用一个以上的前面离散点信息，求$y = f(x)$的下一点y_i，
- 常用迭代法，如改进欧拉法，阿当姆斯法。

y_{i-1} y_i y_{i-1} y_{i+1} y_{i-1} y_{i+1} y_i y_{i+1}

y_0 - - - - y_{i-1} y_i $\to y_i$

§6.2 欧拉方法

- 本节内容
  - 一. 欧拉方法
  - 二. 梯形方法
  - 三. Euler预估—校正法
  - 四. 误差估计、收敛性和稳定性
  - 返回章节目录

§6.2 欧拉方法

- 一. 欧拉（Euler）方法
- 设区间$[a,b]$上给定$n+1$个等距节点$x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$，其中$h = \frac{b-a}{n}$。
- 由差分公式$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \approx y'(x_i) = f(x_i, y_i)$导出
- $y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y_i)$
- 用x_i处近似值y_i代替$y(x_i)$，则得到初值问题(6-1)(6-2)递推公式
- $\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$
- 称为微分方程解初值问题的欧拉方法

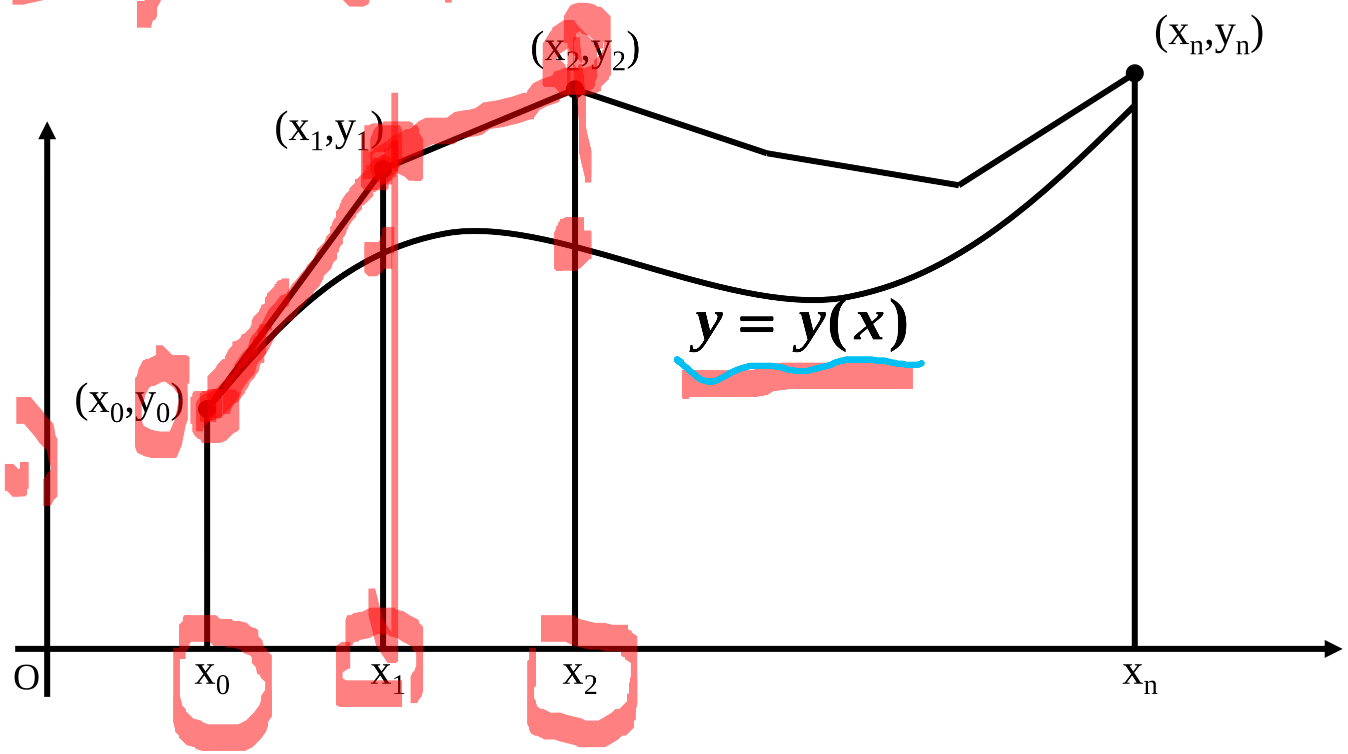
§ 6.2 欧拉方法

- 一. 欧拉（Euler）方法
- $x = x_0$： $y(x_0) = y_0$
- $x = x_1$： $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$； $y(x_1) = y_1$
- $x = x_2$： $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$； $y(x_2) = y_2$
- ………………
- $x = x_n$： $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$； $y(x_n) = y_n$

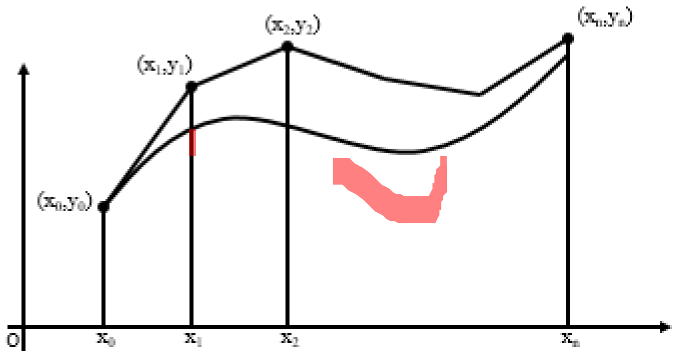
§6.2 欧拉方法

- 几何意义

y(x₁) = y(x₀) ...



§6.2 欧拉方法



- 几何计算过程
- 从$p_0(x_0,y_0)$出发，以$f(x_0,y_0)$为斜率做一条直线与直线$x=x_1$交于点$p_1(x_1,y_1)$，即$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$；
- 从$p_1(x_1,y_1)$出发，以$f(x_1,y_1)$为斜率做一条直线与直线$x=x_2$交于点$p_2(x_2,y_2)$，即$y_2=y_1+hf(x_1,y_1)$；
- …… …… …… …… …… ……
- 从$p_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$出发，以$f(x_{n-1},y_{n-1})$为斜率做一条直线与直线$x=x_n$交于点$p_n(x_n,y_n)$，即$y_n=y_{n-1}+hf(x_{n-1},y_{n-1})$；
- 得到解曲线的一条近似曲线，是一条折线$p_0p_1p_2\cdots\ \cdots p_n$。
- 故欧拉法也称欧拉折线法

§6.2 欧拉方法

- 欧拉法是单步法
- 欧拉法是用y_i通过递推公式$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$，计算$y_{i+1}$
- 计算y_{i+1}时，只使用了y_i的函数值y_i和导数值$f(x_i, y_i)$
- 故为单步法。

§6.2 欧拉方法

- 例1：用欧拉法解初值问题$\begin{cases} y' = -y - xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $(0 \le x \le 0.6)$
- 取步长$h = 0.2$,计算过程保留4位小数
- 解：$f(x, y) = -y - xy^2$, $h = 0.2$
- 欧拉递推公式：
- $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + 0.2(-y_i - x_i \times {y_i}^2) = 0.2(4 - x_i \times y_i)y_i$
- $i = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$
- $y(x_1) = y(0.2) \approx y_1 = 0.2(4 - x_0 \times y_0)y_0 = 0.2 \times (4 - 0 \times 1) = 0.8$
- $i = 1$, $x_1 = 0.2$, $y_1 = 0.8$
- $y(x_2) = y(0.4) \approx y_2 = 0.2 \times 0.8 \times (4 - 0.2 \times 0.8) = 0.6144$
- $i = 2$, $x_2 = 0.4$, $y_2 = 0.6144$,
- $y(x_3) = y(0.6) \approx y_3 = 0.2 \times 0.6144 \times (4 - 0.4 \times 0.6144) = 0.4613$

§6.2 欧拉方法

- 隐式欧拉法 /* implicit Euler method */
- 用向后差分近似导数
- $y'(x_{i+1}) = \frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$
- $y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$
- $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$
- 由于未知数 y_{i+1} 同时出现在等式的两边，不能直接得到，需要解方程；
- 可以用迭代法解方程；
- 一般先用显式计算一个初值，再迭代求解。

§6.2 欧拉方法

- 显式 /* explicit */ 与隐式 /* implicit */
- 显式：递推公式中，从由y_i组成的公式中直接得到y_{i+1}；
  - 显式欧拉方法：递推公式$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$，直接计算得到$y_{i+1}$，称为显式欧拉公式；
- 隐式：从由包含y_{i+1}组成的方程中，求得到y_{i+1}；
  - 隐式欧拉方法：递推公式$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$，由于未知数 y_{i+1}同时出现在等式的两边，不能直接得到。通过求解方程得到y_{i+1}，故称为隐式欧拉公式。

§6.2 欧拉方法

- 二. 梯形公式
- 对初值问题中的$y' = f(x,y)$两边在(x_i, x_{i+1})上求积分
- $y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx$
- $y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))dx$
- 对右侧积分采用梯形求积公式，则有
- $y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\right]$

§ 6.2 欧拉方法

- 二. 梯形公式
- $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$
- $(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$
- 梯形公式是隐式公式
- 通过求解该方程，得出y_{i+1}

- 通过迭代法求解y_{i+1}，初值用Euler显式公式确定

§6.2 欧拉方法

- 三 Euler预报校正法(/* predictor-corrector method */)

方法	优点	缺点
显式欧拉	简单	精度低
梯形公式	精度高	计算量大

- 将Euler公式和梯形公式综合使用可得到改进的Euler公式。

§6.2 欧拉方法

- 改进欧拉法 /* modified Euler's method */
- Step 1: 先用显式欧拉公式作预测，算出 $\overline{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$
- Step 2: 再将 $\overline{y}_{i+1}$ 代入隐式梯形公式的右边作校正，得到
- $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \overline{y}_{i+1})]$
- $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\right)\right]$
- $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$

§6.2 欧拉方法

- 通过代换，改进Euler方法也可以写成：

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\
y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] \\
y_0 = \alpha
\end{array}
\right.
\Rightarrow
\boxed{
\left\{
\begin{array}{c}
y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[K_1 + K_2] \\
K_1 = f(x_i, y_i) \\
K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \\
y_0 = \alpha
\end{array}
\right.
}
$$

- $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$

$x_{i+1} = x_i + h$

$\bar{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$

$= y_i + h K_1$

§6.2 欧拉方法

- 例：求初值问题$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $(0 \le x \le 1)$的数值解，取步长$h = 0.1$

(精确解为$y(x) = \sqrt{1 + 2x}$)

- 解：(1)利用Euler公式$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + 0.1\left(y_i - \dfrac{2x_i}{y_i}\right) \\ y_0 = 1 \end{cases}$

- $\begin{cases} y_{i+1} = 1.1y_i + 0.2\dfrac{x_i}{y_i} \\ y_0 = 1 \end{cases}$ $i = 0, 1, \cdots, 9$

§ 6.2 欧拉方法

$$\begin{cases} y' = f(x,y) = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$h = 0.1$

- 解：(2)利用改进Euler公式 $\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[K_1 + K_2] \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$

- $\begin{cases} K_1 = y_i - \frac{2x_i}{y_i} \\ K_2 = (y_i + hK_1) - \frac{2(x_i+h)}{y_i+hK_1} = y_i + 0.1K_1 - \frac{2(x_i+0.1)}{y_i+0.1K_1} \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[K_1 + K_2] = y_i + \frac{0.1}{2}[K_1 + K_2] \\ y_0 = 1 \end{cases}$ $\quad i = 0, 1, \cdots, 9$

§6.2 欧拉方法

- 解：

- $$\begin{cases} K_1 = y_i - \dfrac{2x_i}{y_i} \\ K_2 = y_i + 0.1K_1 - \dfrac{2(x_i+0.1)}{y_i+0.1K_1} = y_i + 0.1K_1 - \dfrac{2x_i+0.2}{y_i+0.1K_1} \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}[K_1 + K_2] = y_i + 0.05[K_1 + K_2] \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

§6.2 欧拉方法

- 计算结果如下:

i	x_i	Euler方法y_i	改进Euler法y_i	精确解$y(x_i)$
0	0	1	1	1
1	0.1	1.1	1.095909	1.095445
2	0.2	1.191818	1.184096	1.183216
3	0.3	1.277438	1.266201	1.264991
4	0.4	1.358213	1.343360	1.341641
5	0.5	1.435133	1.416402	1.414214
6	0.6	1.508966	1.485956	1.483240
7	0.7	1.580338	1.552515	1.549193
8	0.8	1.649783	1.616476	1.612452
9	0.9	1.717779	1.678168	1.673320
10	1	1.784770	1.737869	1.732051

§6.2 欧拉方法

- 四、欧拉方法的误差分析
- 定义6.1 对于初值问题，当假设y_i是准确时，用某种方法求y_{i+1}时所产生的截断误差称为该方法的局部截断误差
- 在第$i+1$步使用欧拉方法所得y_{i+1}的局部截断误差$y(x_{i+1})-y_{i+1}$
- 假定y_i是准确的： 即$y_i=y(x_i)$
- 因为由$y(x_{i+1})=y(x_i+h)=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(\xi)$
- 而$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)=y(x_i)+hf(x_i,y_i)=y(x_i)+h\,y'(x_i)$

§6.2 欧拉方法

- 二、欧拉方法的误差分析
- 因为由$y(x_{i+1})=y(x_i+h)=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(\xi)$
- 而$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)=y(x_i)+hf(x_i,y_i)=y(x_i)+h\,y'(x_i)$
- 两式相减得$y(x_{i+1})-y_{i+1}=\frac{h^2}{2}y''(\xi)=\boxed{O(h^2)}$
- 即欧拉法的截断误差为$O(h^2)$
- $\frac{h^2}{2}y''(\xi)$称为局部截断误差的主项

§6.2 欧拉方法

- 二、欧拉方法的误差分析

定义6.2设y_i是用某种方法计算初值问题(6-1)(6-2)在x_i点的近似解，而$y(x_i)$是它的精确解，则称$\varepsilon_i = y(x_i) - y_i$为该方法的整体截断误差，也称为该方法的精度。

若某方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$，则该方法的精度为p阶的

欧拉方法的局部截断误差为$O(h^2)$

因此，欧拉方法的精度为一阶

§6.2 欧拉方法

- 定义：用某方法固定步长h作计算，由初值y_0严格得出y_i，现假设初值有微小误差δ_0，即实际初值是$y_0+\delta_0$，则引起第i步计算值有误差δ_i，即实际计算值为$y_i+\delta_i$。
- 若$|\delta_i| \le |\delta_0|$（$i=1,2,\cdots$）
- 则称该方法为关于步长h绝对稳定，即$|\delta_i|$不随着i无限扩大。
- 稳定性比较复杂
- 所以，一般分析时为简单起见，只考虑试验方程 /* test equation */
- 即$y' = \lambda y$

§6.2 欧拉方法

$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$

- 例：对于Euler法
- $y_{i+1} = y_i + h(\lambda y_i) = (1 + \lambda h) y_i = (1 + \lambda h)(1 + \lambda h) y_{i-1} = \cdots = (1 + \lambda h)^{i+1} y_0$
- 设初值有小扰动δ_0，则
- $y_{i+1} + \delta_{i+1} = (1 + \lambda h)^{i+1}(y_0 + \delta_0)$
- 两式相减得
- $\delta_{i+1} = (1 + \lambda h)^{i+1}(\delta_0)$
- 则，Euler法绝对稳定$\Leftrightarrow |1 + \lambda h| \le 1$，即$h \le -\frac{1}{\lambda}$时，Euler方法是稳定的

§6.3 龙格—库塔方法

- 本节内容
  - 一. 引言
  - 二. 2阶龙格—库塔公式
  - 三. 高阶龙格—库塔公式
  - 返回章节目录

§6.3 龙格—库塔方法

- 一、基本思想
- 对初值问题
- $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
- 求$y(x)$在一些给定点上的值$y(x_1),\ldots,y(x_n)$

§6.3 龙格—库塔方法

- 一、基本思想
- 差商$\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}=y'(x_i+\theta h)=f\big(x_i+\theta h,y(x_i+\theta h)\big)\quad(0\le\theta\le1)$
- $y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i+\theta h)=y(x_i)+hf\big(x_i+\theta h,y(x_i+\theta h)\big)$
- 得到解常微分方程的数值计算公式的一般形式

§6.3 龙格—库塔方法

- 平均变化率
- $f\big(x_i+\theta h, y(x_i+\theta h)\big)$称为在区间$[x_i, x_{i+1}]$上的平均变化率
- 记为$K^* = f\,(x_i+\theta h, y(x_i+\theta h))$
- 一般形式:
- $y(x_{i+1}) = \ y(x_i) + \ hK^*$

§6.3 龙格—库塔方法

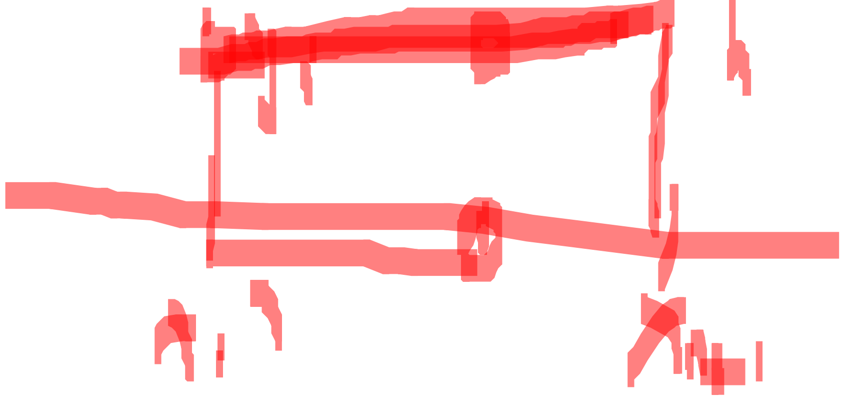
- 一、基本思想
- 一般形式：
- $y(x_{i+1}) = y(x_i) + hK^*$
- 令$K^* = f(x_i, y_i)$是欧拉公式
- 令$k_1^* = f(x_i, y_i), k_2^* = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ $K^* = \frac{1}{2}(k_1^* + k_2^*)$，得梯形公式
- 由于使用的信息更多，梯形公式精度更高

- 设想：如果设法在$[x_i, x_{i+1}]$上多找几个点的斜率值，将其加权平均，作为K^*(平均变化率)，可以构造出精度更高的计算公式，就是Runge-Kutta方法

§ 6.3 龙格—库塔方法

- 一、 Runge-Kutta方法基本思想
- $y(x_{i+1}) = y(x_i) + hK^*$
- 在$[x_i, x_{i+1}]$上多找几个点的斜率值，加权平均作为K^*(平均变化率)
- $K^* = \sum_{j=1}^{r} \omega_j f(x_i + \alpha_j h, y_i + \beta_j h)$
- 其中，ω_j为权函数，r是选取点的数量，α_j, β_j是系数
- Runge-Kutta递推公式：
- $y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\sum_{j=1}^{r} \omega_j f(x_i + \alpha_j h, y_i + \beta_j h)$
- r指定之后，$\omega_j, \alpha_j, \beta_j$是待定的系数

§6.3 龙格—库塔方法



- 二、 **Runge-Kutta公式(两点情况)**
- $y_{i+1} = {\color{red}y_i} + h\sum_{j=1}^{r}\omega_j f\left(x_i+\alpha_j h, y_i+\beta_j h\right)$
- r=2时
- $y_{i+1} = {\color{red}y_i} + h\omega_1 f(x_i+\alpha_1 h, y_i+\beta_1 h) + h\omega_2 f(x_i+\alpha_2 h, y_i+\beta_2 h) = {\color{red}y_i} + h\omega_1 f(x_i, y_i) + h\omega_2 f(x_i+\alpha h, y_i+\beta h)$
- $\begin{cases} y_{i+1} = {\color{red}y_i} + \omega_1 k_1^* + \omega_2 k_2^* \\ k_1^* = hf(x_i, y_i) \\ k_2^* = hf(x_i+\alpha h, y_i+\beta k_1^*) \end{cases}$ (6-15)
- 其中ω_1，ω_2，α，β为待定参数

§6.3 龙格—库塔方法

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \omega_1 k_1^* + \omega_2 k_2^* \\ k_1^* = hf(x_i, y_i) \\ k_2^* = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1^*) \end{cases}$$

- 二、 Runge-Kutta公式(两点情况)
- 用二元函数Taylor展开式展开
- $k_2^* = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1^*) = h\left[f(x_i, y_i) + \alpha h f_x(x_i, y_i) + \beta k_1^* f_y(x_i, y_i) + O(h^2)\right] = hf(x_i, y_i) + h^2\left[\alpha f_x(x_i, y_i) + \beta f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)\right] + O(h^3)$
- 代入(6-15)，得到
- $y_{i+1} = y_i + h(\omega_1 + \omega_2) f(x_i, y_i) + h^2\left[\alpha\omega_2 f_x(x_i, y_i) + \beta\omega_2 f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)\right] + O(h^3)$ (6-16)
- 其中ω_1，ω_2，α，β为待定参数

§6.3 龙格—库塔方法

- 二、 Runge-Kutta公式(两点情况)
- 将待计算y_{i+1}对应的函数值$y(x_{i+1})$进行Taylor展开
- $y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3)$
- 因为$y'(x) = f(x, y)$， $y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'(x)$
- 所以$\boxed{y(x_{i+1})} = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)y'(x_i)] + O(h^3)$

§6.3 龙格—库塔方法

- 二、 Runge-Kutta公式(两点情况)
- 比较
  - $y_{i+1} = y_i + h(\omega_1 + \omega_2)f(x_i, y_i) + h^2[\alpha\omega_2 f_x(x_i, y_i) + \beta\omega_2 f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)] + O(h^3)$
  - $y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)y'(x_i)] + O(h^3)$

- 得 $\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ \alpha\omega_2 = \frac{1}{2} \\ \beta\omega_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

§ 6.3 龙格 —库塔方法

- 二、 Runge-Kutta公式(两点情况)
- 当 $\begin{cases} \omega_1+\omega_2=1 \\ \alpha\omega_2=\dfrac{1}{2} \\ \beta\omega_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (6-17)
- $y(x_{i+1})-y_{i+1}=O(h^3)$
- 满足(6-17)式的解有无穷多，对应于(6-15)的公式均具有二阶精度，统称为二阶龙格-库塔公式。

§6.3 龙格—库塔方法

- 二、 Runge-Kutta公式(两点情况)

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ \alpha\omega_2 = \dfrac{1}{2} \\ \beta\omega_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (6\text{-}17)$$

- 如：取α =1，β =1，$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$是欧拉预报-校正公式
- 如：取$\alpha = \beta$ =1，$\omega_1 = 0$，$\omega_2 = 1$，则得到如下Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + k_2^* \\ k_1^* = hf(x_i, y_i) \\ k_2^* = hf(x_i + h, y_i + k_1^*) \end{cases} \qquad (6\text{-}18)$$

§6.3 龙格—库塔方法

$r=3$

- 3阶Runge-Kutta公式
- 例
- $$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2) \end{cases} \qquad (6\text{-}19)$$
- 局部截断误差为$O(h^4)$ 3

§6.3 龙格—库塔方法

r=4

- 4阶Runge-Kutta公式
- 例

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \end{cases} \quad (6\text{-}20)$$

- 此公式又称为经典的龙格-库塔公式
- 局部截断误差为$O(h^5)$

4

§6.3 龙格—库塔方法4

- 例 6用经典的龙格-库塔法计算$\begin{cases} y' = y - 2x/y \\ y(0) = 1 \end{cases}, x \in [0, 0.9]$
- 取步长h=0.2
- 解：由$x_0=0$，$y_0=1$，h=0.2，利用公式(6-20)可计算出
- $k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2(1 - (2 \times 0)/1) = 0.2$
- $k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.2f(0.1, 1.1) = 0.18364$
- $k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.2f(0.1, 1.09182) = 0.18173$
- $k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2f(0.2, 1.18173) = 0.16965$
- 得到：$y_1 = y_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 1.18323$

§ 6.3 龙格 —库塔方法

- 例 6用经典的龙格-库塔法计算$\begin{cases} y' = y - 2x/y \\ y(0) = 1 \end{cases}, x \in [0, 0.9]$
- 取步长h=0.2

§6.4 阿达姆斯方法

- 本节内容
  - 一. 一般线性多步法
  - 二. 阿达姆斯显式公式
  - 三. 阿达姆斯隐式公式
  - 四. 阿达姆斯预测—校正系统
  - 返回章节目录

§6.4 阿达姆斯方法

一. 一般线性多步法

- 由于在计算y_{n+1}时，已经知道$y_n, y_{n-1}, \dots,$ 及$f(x_n, y_n)$, $f(x_{n-1}, y_{n-1}), \dots,$ 利用这些值构造出精度高、计算量小的差分公式就是线性多步法。
- 即用若干节点处的 y 及 y' 值的线性组合来近似$y(x_{i+1})$。

$f_j = f(x_j, y_j)$

$f(x_{i+1}, y_{i+1})$

- **其通式可写为：**
- $y_{i+1} = \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i-1} + \cdots + \alpha_k y_{i-k} + h(\beta_{-1} f_{i+1} + \beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} + \cdots + \beta_k f_{i-k})$

当 $\beta_{-1} \neq 0$ 时，为隐式公式；$\beta_{-1} = 0$ 则为显式公式。

§6.4 阿达姆斯方法

- 基于数值积分的构造法
- **将$y' = f(x,y)$在$[x_i, x_{i+1}]$上积分，得到$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx$**
- 只要近似地算出右边的积分$I_k = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx$，则可通过$y_{i+1} = y_i + I_k$近似$y(x_{i+1})$。
- 而选用不同近似式I_k，可得到不同的计算公式。

§ 6.4 阿达姆斯方法

- 二.阿达姆斯显式公式 /* Adams explicit formulae */
- 利用k+1 个节点上的被积函数值f_i，f_{i-1}，…，f_{i-k}构造 k 阶牛顿后插多项式$N_k(x_i+th)$,$t\in[0,1]$ 有

Newton插值余项

- $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))dx = \int_0^1 N_k(x_i+th)hdt + \int_0^1 R_k(x_i+th)hdt$
- $\Rightarrow\ y_{i+1} = y_i + h\int_0^1 N_k(x_i+th)dt$ /* 显式计算公式 */
- 局部截断误差为：
- $R_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = h\int_0^1 R_k(x_i+th)dt$

§6.4 阿达姆斯方法

- 例：$k = 1$ 时有
- $N_1(x_i + th) = f_i + t\nabla f_i = f_i + t(f_i - f_{i-1})$
- 导出
- $y_{i+1} = y_i + h\int_0^1 [f_i + t(f_i - f_{i-1})]dt = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$
- 所以
- $R_i = h\int_0^1 \frac{d^2 f(\xi_x, y(\xi_x))}{dx^2} \frac{1}{2} th(t+1)hdt = \frac{5}{12} h^3 y'''(\xi_i)$

§6.4 阿达姆斯方法

- 注：一般有$R_i = B_k h^{k+2} y^{(k+2)}(\xi_i)$，其中$B_k$与$y_{i+1}$计算公式中$f_i, \ldots,$ f_{i-k}各项的系数均可查表得到。

k	f_i	f_{i-1}	f_{i-2}	f_{i-3}	$\cdots$	B_k
0	1					$\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$				$\frac{5}{12}$
2	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$			$\frac{3}{8}$
3	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$		$\frac{251}{720}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

§ 6.4 阿达姆斯方法

- 常用的是 k = 3 的4阶阿达姆斯显式公式

- $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$

§6.4 阿达姆斯方法

- 三. 阿达姆斯隐式公式 /* Adams implicit formulae */

•利用$k+1$ 个节点上的被积函数值 f_{i+1}, f_i, …, f_{i-k+1} 构造 k 阶牛顿前插多项式。

•与显式多项式完全类似地可得到一系列隐式公式，并有$R_i =$
$B_k h^{k+2} y^{(k+2)}(\eta_i)$，其中$B_k$与 f_{i+1}, f_i, …, f_{i-k+1} 的系数亦可查表得到。

§6.4 阿达姆斯方法

k	f_{i+1}	f_i	f_{i-1}	f_{i-2}	…	$\tilde{B}_k$
0	1					$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{12}$
2	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$			$-\frac{1}{24}$
3	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$		$-\frac{19}{720}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- 常用的是 k = 3 的4阶阿达姆斯隐式公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$$

§6.4 阿达姆斯方法

- 三. 阿达姆斯预测-校正系统/* Adams predictor-corrector system */
- *Step 1*: 用*Runge-Kutta* 法计算前 *k* 个初值;
- *Step 2*: 用*Adams* 显式计算预测值;
- *Step 3*: 用同阶*Adams* 隐式计算校正值。

§ 6.5 实用工具

- ode23, ode45, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb

函数	ODE类型	特点	说明
ode45	非刚性	单步法；4，5 阶 R-K 方法；累计截断误差为 $(\Delta x)^3$	大部分场合的首选方法
ode23	非刚性	单步法；2，3 阶 R-K 方法；累计截断误差为 $(\Delta x)^3$	使用于精度较低的情形
ode113	非刚性	多步法；Adams算法；高低精度均可到 $10^{-3}\sim10^{-6}$	计算时间比 ode45 短
ode23t	适度刚性	采用梯形算法	适度刚性情形
ode15s	刚性	多步法；Gear's 反向数值微分；精度中等	若 ode45 失效时，可尝试使用
ode23s	刚性	单步法；2 阶Rosebrock 算法；低精度	当精度较低时，计算时间比 ode15s 短
ode23tb	刚性	梯形算法；低精度	当精度较低时，计算时间比ode15s短

§6.5 实用工具

- ode23, ode45, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb
- 命令格式
- [T, Y] = solver(odefun, tspan, y0, options)
- odefun: $f(t, y)$, 可以是列向量 (方程组)
- tspan: 区间端点[t_0, t_f]
- 若不设返回值, 自动进入绘图模式, 绘出解函数
- T: 时间点向量; Y: 这些点上的函数近似值
- 相关命令: odeset (用于设置options)

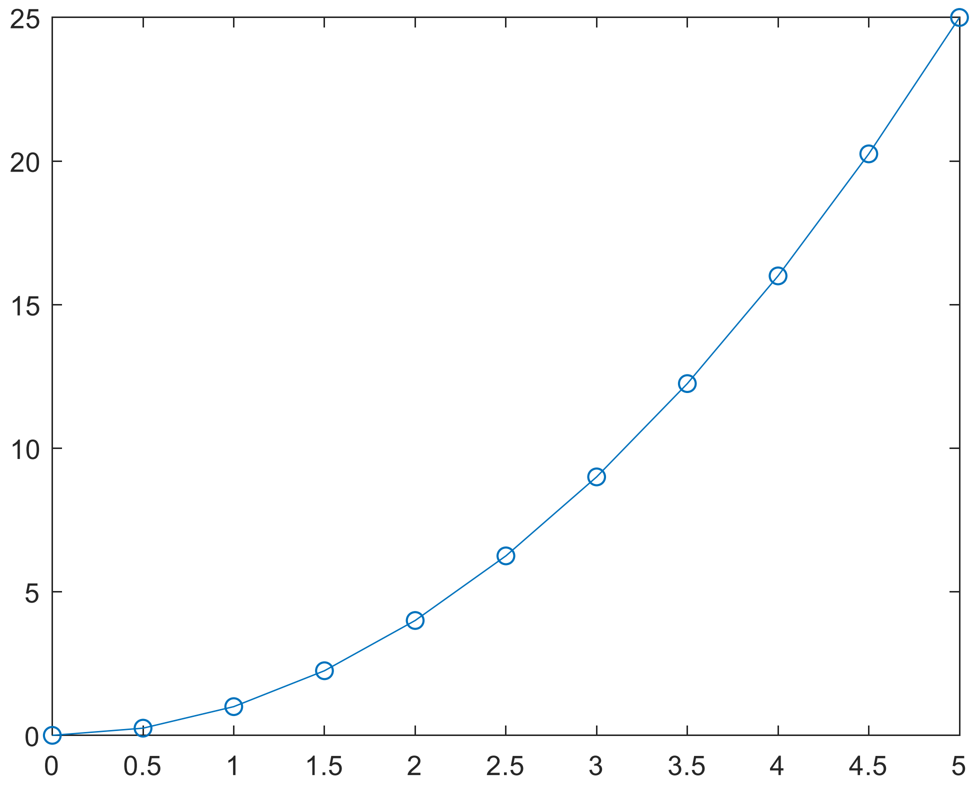
§ 6.5 实用工具

- 方程
- $\begin{cases} y' = 2t \\ y(0) = 0 \end{cases}$， $t \in [0, 5]$

- tspan = [0 5];
- y0 = 0;
- [t,y] = ode23(@(t,y) 2*t, tspan, y0);

§6.5 实用工具

- T 0　0.5000　1.0000　1.5000　2.0000　2.5000　3.0000　3.5000　4.0000　4.5000　5.0000
- Y 0　0.2500　1.0000　2.2500　4.0000　6.2500　9.0000　12.2500　16.0000　20.2500　25.0000
- plot(t,y,'-o')



小结

- §6.1 引言
- §6.2 欧拉方法
- §6.3 龙格—库塔方法
- §6.4 阿达姆斯方法

matlab

作业与实验

- 作业
- 习题6（P164）：1、3