第二章 随机变量及其分布

1．(Ch2-2)一批零件中有 9 个合格品与 3 个废品，安装时从这批零件中任取一个，如果每次取出的废品不再放回，求在取得合格品以前取出的废品数的分布律。

分析：在取得合格品以前取出的废品数是一随机变量，要求其分布律，只需确定随机变量的一切可能取值及相应的概率即可。

解：设 X 表示在取得合格品以前取出的废品数，由题意知 X 的可能取值为 0，1，2，3，而

$P\{X=0\}=3/4$ （$X=0$ 相当于第一次取到的是合格品）

$P\{X=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{9}{11}=\frac{9}{44}$ （$X=0$ 相当于第二次才取到合格品）

$$P\{X=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{220}$$

$$P\{X=3\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}\times 1=\frac{1}{220}$$

所以，随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2	3
p_k	3/4	9/44	9/220	1/220

2．(Ch2-4)已知 $X_i\ (i=1,2)$ 的分布函数为 $F_i(x)$。设 $F(x)=aF_1(x)+\frac{1}{2}F_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，求常数 a。

解：要使 $F(x)=aF_1(x)+\frac{1}{2}F_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，由分布函数的性质知，必有

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(aF_1(x)+\frac{1}{2}F_2(x))=1$$

即 $a+\frac{1}{2}=1$，从而解得 $a=1/2$。

3．(Ch2-5)将3个球随机地放入4个杯子中去，求某杯中有球个数的分布律。

分析：某杯中有球个数只有4种可能：3个球都在该杯中；3个球中的两个球放在该杯中；3个球中的一个球放入该杯中；3个球都不在该杯中。因此某杯中有球个数是一个离散型随机变量，它可能的取值为0，1，2，3。运用第一章的有关知识可求出取相应值的概率。若将每个球随机地放入4个杯子中，它是否落入某杯中看作一次试验，则它是一贝努利试验。随机地将3个球放入4个杯子中去，即是

三重的贝努利试验，因此某杯中有球个数服从二项分布。

解法一：设 X 表示“某杯中有球个数”，则 X 可能取值为：0，1，2，3。而将3个球随机地放入4个杯子中去共有 4^3 种放法，$X=0$ 即3个球随机地放入其它3个杯子中去，共有 3^3 种放法，所以

$$P\{X=0\}=\frac{3^3}{4^3}$$

同理得

$$P\{X=1\}=\frac{C_3^1\cdot 3^2}{4^3}=\frac{3^3}{4^3} \qquad P\{X=2\}=\frac{C_3^2\cdot 3}{4^3}=\frac{3^2}{4^3}$$

$$P\{X=3\}=\frac{C_3^3\cdot}{4^3}=\frac{1}{4^3}$$

故某杯中有球个数 X 的概率分布列为

X	0	1	2	3
p_k	27/64	27/64	9/64	1/64

解法二：设 X 表示“某杯中有球个数”，则 X 服从 $n=3$， $p=1/4$ 的二项分布，即 $X\sim B(3,\ \ 1/4)$，所以 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_3^k(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{3-k} \qquad (k=0,1,2,3)$$

或表示为

X	0	1	2	3
p_k	27/64	27/64	9/64	1/64

4．(Ch2-7)一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号灯显示的时间相等。以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口个数，求 X 的概率分布和分布函数。

解：由题意知 X 的一切可能取值为 0，1，2，3。为计算方便设：

$A_i\,(i=1,2,3)$ 表示：“汽车在第 i 个路口遇到红灯”，则 A_1，A_2，A_3 相互独立，且由条件知 $P(A_i)=P(\overline{A}_i)=\dfrac{1}{2}\ (i=1,2,3)$。所以

$$P\{X=0\}=P(A_1)=\frac{1}{2}\text{；}\ P\{X=1\}=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\text{；}$$

$$P\{X=2\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

即 X 的概率分布列为

X	0	1	2	3
p_k	1/2	1/4	1/8	1/8

X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X<x\}=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1/2, & 0<x\le 1\\ 3/4, & 1<x\le 2\\ 7/8, & 2<x\le 3\\ 1, & 3<x\end{cases}$$

5.(Ch2-11) 设随机变量 X 的分布密度 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

求分布函数 $F(x)$。

解：当 $x\le 0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=0$；

当$0<x\le 1$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_0^x xdx=\frac{1}{2}x^2$ ；

当$1<x\le 2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^x(2-x)dx=2x-\frac{1}{2}x^2-1$；

当 $x>2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2(2-x)dx+\int_2^x 0dx=1$ 。

故随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{2}x^2, & 0<x\le 1\\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

6.(Ch2-13)设随机变量 $X\sim N(10,\ 2^2)$，求 $P\{10<X<13\}$；$P\{X>13\}$；$P\{|X-10|<2\}$；$P\{X<-28\}$；$P\{X>-15\}$。

解：$P\{10<X<13\}=\Phi(\frac{13-10}{2})-\Phi(\frac{10-10}{2})$

$$=\Phi(\frac{3}{2})-0.5=0.9332-0.5=0.4332$$

$$P\{X>13\}=1-P\{X\le 13\}=1-\Phi(\frac{13-10}{2})$$

$$=1-\Phi(\frac{3}{2})=1-0.9332=0.0668$$

$$P\{|X-10|<2\}=P\{8<X<12\}=\Phi(\frac{12-10}{2})-\Phi(\frac{8-10}{2})$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.8413-1=0.6826$$

$$P\{X<-28\}=\Phi(\frac{-28-10}{2})=\Phi(-19)\approx 0$$

$$P\{X>-1.5\}=1-P\{X<-1.5\}=1-\Phi(\frac{-1.5-10}{2})\approx 1$$

7.(CH2-15)在电源电压不超过 200、$200\sim240$ 和超过 240 伏三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1、0.001 和 0.2，假定电源电压 $X\sim N(220,25^2)$，试求：(1) 该电子元件被损坏的概率α；

(2) 电子元件被损坏时，电源电压在 $200\sim240$ 伏内的概率β。

分析：电子元件被损坏时，电源电压只可能是不超过 200、$200\sim240$ 和超过 240 伏三种情况下之一，因此 (1) 属于全概率问题；(2) 属于条件概率问题。

解：设 A_1 ："电源电压不超过 200 伏"；A_2 ："电源电压在 $200\sim240$ 伏"；

A_3 ："电源电压超过 240 伏"；　B ："电子元件被损坏"。

由于 $X\sim N(220,25^2)$，所以

$$P(A_1)=P\{X<200\}=F(200)=\Phi(\frac{200-220}{25})$$
$$=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=1-0.788=0.212$$

$$P(A_2)=P\{200\le X\le 240\}=\Phi(\frac{240-220}{25})-\Phi(\frac{200-220}{25})$$
$$=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=2\Phi(0.8)-1=0.576$$

$$P(A_3)=P\{X>240\}=1-\Phi(\frac{240-220}{25})=1-\Phi(0.8)=1-0.788=0.212$$

或 $\quad P(A_3)=1-P(A_1)-P(A_2)=0.212$

由题设 $P(B|A_1)=0.1$, $P(B|A_2)=0.001$, $P(B|A_3)=0.2$，所以由全概率公式

$$\alpha=P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$$
$$=0.212\times0.1+0.576\times0.001+0.212\times0.2=0.0642$$

由条件概率公式

$$\beta=P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.576\times0.001}{0.0642}\approx0.009$$

8.(Ch2-18)袋中装有标有号码 1，2，2 的三只球，从袋中任取一球后不再放回，然后再从袋中任取一球，以 X、Y 分别表示第一次、第二次取得球上的号码。求 X 和 Y 的联合概率分布。

解：(X，Y) 的所有可能取值为(1，2)、(2，1)、(2，2)，由概率乘法公式得

$$p_{12}=P\{X=1,\ Y=2\}=\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$$

$$p_{21}=P\{X=2, Y=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}=p_{22}$$

此外$\{X=1, Y=1\}$是不可能事件，所以$p_{11}=0$,于是（X，Y）的概率分布表为

$Y \backslash X$	1	2
1	0	1/3
2	1/3	1/3

9.(Ch2-20)设随机向量（X，Y）的分布函数

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3}),\quad (-\infty<x,y<+\infty)$$

求：(1) 系数A、B、C；

(2)（X，Y）的分布密度；

(3) 边缘分布密度。

解：(1) 由分布函数性质

$$\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})=0 \qquad (2)$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1 \qquad (3)$$

由 (1) 得$C=\frac{\pi}{2}$，由 (2) 得$B=\frac{\pi}{2}$，代入 (3) 得$A=\frac{1}{\pi^2}$。故随机向量（X，Y）的分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}),\ (-\infty<x,y<+\infty)$$

(2) 由分布函数性质 (4) 知

$$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\pi^2}\frac{6}{(4+x^2)(9+y^2)},\ (-\infty<x,y<+\infty)$$

(3) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{6}{(4+x^2)(9+y^2)}dy$$

$$=\frac{2}{\pi(4+x^2)},\ (-\infty<x<+\infty)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{6}{(4+x^2)(9+y^2)}dx$$

$$=\frac{3}{\pi(9+y^2)},\ (-\infty<y<+\infty)。$$

更简洁的解法是：

由随机向量（X，Y）的分布函数

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})\ ,(-\infty<x,y<+\infty)。$$

得 $$F_X(x)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}),F_Y(y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}),$$

所以

$$f_X(x)=\frac{2}{\pi(4+x^2)}\ ,(-\infty<x<+\infty)；$$

$$f_Y(y)=\frac{3}{\pi(9+y^2)}\quad ,(-\infty<y<+\infty)。$$

10．(Ch2-21) 设二维随机变量（X，Y）的概率分布为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\le x\le 1,0\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量 X 和 Y 的边缘分布密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$。

分析：利用二维随机变量（X，Y）关于随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度的关系，并考虑到积分区域的特殊性，即可求得。

解：(1) 如图 2-4，由 (2-10) 式知，当 $0\le x\le 1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 4.8y(2-x)dy$$

$$=4.8(2-x)\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^x=2.4(2-x)x^2$$

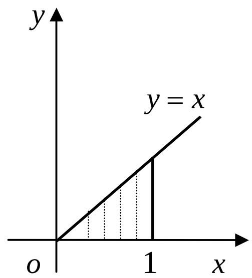


图 2-4

其它情形 $f_X(x)$ 均为零，故 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}2.4(x-2)x^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

同理，当 $0\le y\le 1$ 时

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 4.8y(2-x)dx$$

$$=4.8y[-\frac{1}{2}(2-x)^2]\Big|_y^1=2.4y(3-4y+y^2)$$

其它情形 $f_Y(y)$ 均为零，故 Y 的边缘分布密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

11．(Ch2-22) 设 $(X，Y)$ 的分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(1) 求条件分布密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 及 $f_{Y|X}(y\mid x)$；(2) 判断 $X，Y$ 是否独立。

分析：条件分布密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 及 $f_{Y|X}(y\mid x)$，可由（2-17）及（2-19）式求得，这就需先求关于 X 、Y 的边缘概率分布。

解：(1) $f(x，y)$ 的非零取值区域如图 2-5 阴影部分，由(2-10)式，当 $0<x<1$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-x}^{x}dy=2x$$

其它情况 $f_X(x)$ 均为零，故关于 X 的边缘分布密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由（2-19）式知，当 $0<x<1$ 时，Y 的条件分布密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x\\ 0, & 其它\end{cases}$$

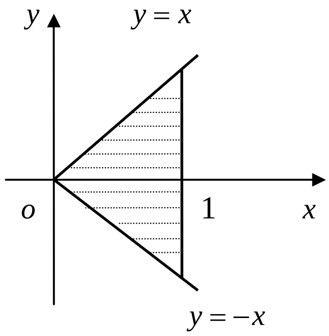


图 2-5

同理，由（2-11）式

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 dx=1-y, & 0<y<1\\ \int_{-y}^1 dx=1+y, & -1<y\le 0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由（2-17）式，$0<y<1$ 时

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & y<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$-1<y\le 0$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+y}, & -y<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(2) X，Y 不独立，因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$。

12.（Ch2-27） 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若x\in[1,8],\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数。求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数。

分析：先求出分布函数 $F(x)$ 的具体形式，从而可确定 $Y=F(X)$ ，然后按定义求 Y 的分布函数即可。注意应先确定 $Y=F(X)$ 的值域范围 $(0\le F(X)\le 1)$，再对 y 分段讨论.

解：易见，当 $x\le 1$ 时，$F(x)=0$ ； 当 $x>8$ 时，$F(x)=1$。

对于 $x\in(1,8]$，有

$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt=\sqrt[3]{x}-1。$$

设 $G(y)$ 是随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数．显然，当 $y\le 0$ 时，$G(y)$=0；当 $y>1$ 时，$G(y)$=1.

对于 $y\in(0,1]$，有

$$\begin{aligned}G(y)&=P\{Y<y\}=P\{F(X)<y\}\\&=P\{\sqrt[3]{X}-1<y\}=P\{X<(y+1)^3\}\\&=F[(y+1)^3]=y。\end{aligned}$$

于是，$Y=F(X)$ 的分布函数为

$$G(y)=\begin{cases}0, & 若y\le 0,\\ y, & 若0<y\le 1,\\ 1, & 若y>1.\end{cases}$$

注：事实上，本题 X 为任意连续型随机变量均可，此时 $Y=F(X)$ 仍服从均匀分布：

当 $y\le 0$ 时，$G(y)$=0；

当 $y>1$ 时，$G(y)$=1；

当 0< $y\le 1$ 时，$G(y)=P\{Y<y\}=P\{F(X)<y\}$

$$=P\{X<F^{-1}(y)\}$$

$$=F(F^{-1}(y))=y。$$

13.（Ch2-30）设 X 和 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量(X ， Y)联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律的部分值，试将其余数值填入表中的空白处。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1		1/8		
x_2	1/8			
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	1/6			1

解：由联合分布律与边缘分布律的关系知 $p_{11}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$ ；由 X 和 Y 相互独立性知 $p_{11}=P\{X=x_1\}P\{Y=y_1\}=p_{1\cdot}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$，即 $p_{1\cdot}=1/4$ ；同理，依此得表中空白处的其它数值见下表：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	**1/24**	1/8	**1/12**	**1/4**
x_2	1/8	**3/8**	**1/4**	**3/4**
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	1/6	**1/2**	**1/3**	1

14.(Ch2-31)设 X，Y 相互独立，其密度函数分别为

$$\varphi_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} \qquad \varphi_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解：当 $z>0$ 时，

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_X(x)\varphi_Y(z-x)dx=\int_0^z(xze^{-z}-x^2e^{-z})dx$$

$$=\frac{1}{2}z^3e^{-z}-\frac{1}{3}z^3e^{-z}=\frac{1}{6}z^3e^{-z} \qquad (z>0)$$

当 $z\le 0$ 时， $f(z)=0$，所以

$$f_Z(z)=\begin{cases} \frac{1}{6}e^{-z}z^3, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

或： $$F(z)=\iint_{X+Y<z}\varphi(x,y)dxdy=\int_0^z\int_0^{z-x}xe^{-x}ye^{-y}dxdy$$

$$=-\frac{1}{6}e^{-z}z^3-\frac{1}{2}z^2e^{-z}-ze^{-z}-e^{-z}+1$$

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{6}e^{-z}z^3, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

15.(Ch2-33)已知 X_1和X_2的概率分布

X_1	-1	0	1
p_k	1/4	1/2	1/4

X_2	0	1
p_k	1/2	1/2

而且$P\{X_1X_2=0\}=1$。求：

（1）随机变量 X_1和 X_2的联合分布；

（2）问 X_1和 X_2是否独立？为什么？

分析：随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布即为随机向量（X_1，X_2）的概率分布。由于 X_1和 X_2 均为离散型随机变量，所以（X_1，X_2）为离散型随机向量，求其概率分布就是求（X_1，X_2）的所有可能取值及其相应的概率。

解：(1) 依题意，(X_1,X_2)所有可能取值：(-1，0)，(0，0)，(1，0)，(-1，1)，(0，1)，(1，1)，由$P\{X_1X_2=0\}=1$。易得

$$P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0$$

又由 X_1和X_2的概率分布与 X_1和 X_2的联合概率分布间的关系知

$$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=1,X_2=0\}=1/4$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=1/2$$

因此由归一性（或由边缘分布与联合概率分布间的关系），必有

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=0$$

于是得 X_1和 X_2的联合概率分布表如下：

P \ X_2 / X_1	0	1
-1	1/4	0
0	0	1/2
1	1/4	0

（2）由联合概率分布表得 X_1和 X_2的分布列分别为

X_1	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

X_2	0	1
P	1/2	1/2

显然 $p_{ij} \neq p_{i\cdot} \times p_{\cdot j}$，故 X_1和 X_2不独立。

16.(Ch2-34). 假设一电路装有三个同种电子元件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间都服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布，当三个电子元件都无故障时电路正常工作，否则整个电路不能正常工作，试求电路正常工作的时间 T 的概率分布。

分析：电路正常工作的时间 T 即三个电子元件无故障工作时间的最小值。

解：设 $T_i \quad (i=1，2，3)$ 表示"第 i 个元件无故障时间"，且 T_i 的分布为

$$f_{T_i}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases} \qquad F_{T_i}(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

而电路正常工作的时间 $T=\min\{T_1，T_2，T_3\}$，即

$$F_{\min}(t)=1-(1-F_{T_i}(t))^3$$

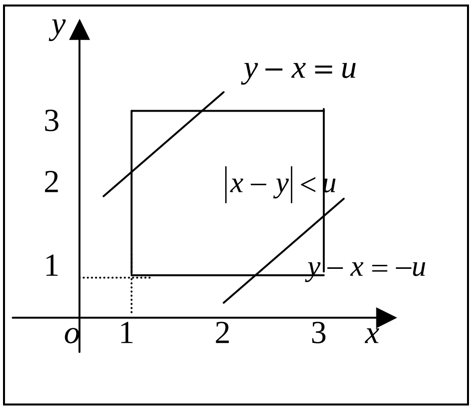
$$f_{\min}(t)=3(1-F_{T_i}(t))^2\cdot f_{T_i}(t)=3\lambda e^{-3\lambda t} \qquad (t>0)$$

故电路正常工作的时间 T 服从指数分布，其概率分布为 $f(t)=\begin{cases}3\lambda e^{-3\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$。

17.(Ch2-35)设 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G=\{(x,y):1\le x\le 3,1\le y\le 3\}$ 上的均匀分布，试求随机变量 $U=|X-Y|$ 的概率密度 $p(u)$。

解：由条件知 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/4, & 1\le x\le 3,1\le y\le 3\\ 0, & 其他\end{cases}$$



以 $F(u)=P\{U<u\}(-\infty<u<+\infty)$ 表示随机变量 $U=|X-Y|$ 的分布函数。显然，当 $u\le 0$ 时，$F(u)=0$；

当 $u>2$，$F(u)=1$。

设 $0<u\le 2$ 时，则

$$F(u)=\iint\limits_{|x-y|<u} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{(|x-y|<u)\cap G}\frac{1}{4}dxdy$$

$$=\frac{1}{4}[4-(2-u)^2]=1-\frac{1}{4}(2-u)^2$$

于是，随机变量 $U=|X-Y|$ 的概率密度为

$$p(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-u), & 0<u\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

18.(Ch2-36)设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的概率分布为

X	0	1
p_k	0.3	0.7

而 Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$。

分析：求二维随机变量函数的分布，一般用分布函数法转化为求相应的概率. 注意 X 只有两个可能的取值，求概率时可用全概率公式进行计算。

解：　设 $F(y)$ 是 Y 的分布函数，则由全概率公式，知 $U=X+Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}G(u)&=P\{X+Y<u\}\\&=0.3P\{X+Y<u|X=0\}+0.7P\{X+Y<u|X=1\}\\&=0.3P\{Y<u|X=0\}+0.7P\{Y<u-1|X=1\}\text{。}\end{aligned}$$

由于 X 和 Y 独立，可见

$$\begin{aligned}G(u)&=0.3P\{Y\le u\}+0.7P\{Y\le u-1\}\\&=0.3F(u)+0.7F(u-1).\end{aligned}$$

由此,得 U 的概率密度

$$\begin{aligned}g(u)&=G'(u)=0.3F'(u)+0.7F'(u-1)\\&=0.3f(u)+0.7f(u-1).\end{aligned}$$

注：　本题属新题型，求两个随机变量和的分布，其中一个是连续型一个是离散型，具有一定的难度和综合性。

19．设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.7 可以直接出厂，以概率 0.3 需要进一步调试，经调试后以概率 0.8 可以出厂，以概率 0.2 定为不合格品不能出厂，现该厂新生产 $n\quad(n\ge 2)$ 台仪器，(假定各台仪器的生产过程相互独立)，求：

（1）全部能出厂的概率 α；

（2）其中恰好有两台不能出厂的概率 β；

（3）其中至少有两台不能出厂的概率 θ。

分析：依题假定，n 台仪器生产过程相互独立知，每台仪器能否出厂可看成一次试验，n 台仪器可看成是 n 重贝努利试验，因此若设 X 表示所生产的 n 台仪器能出厂的台数，则 $X\sim B(n,\ p)$（p 待定，即每台仪器能出厂的概率)。从而以上三个问题依次化为求 $\alpha=P\{X=n\}$、$\beta=P\{X=n-2\}$、$\theta=P\{X\le n-2\}$。为

求以上概率需先求每台仪器能出厂的概率。

解：设 A：“仪器需要进一步调试”，则 $\overline{A}$：“仪器能直接出厂”；

B：“仪器能出厂”，则 AB：“仪器经调试后能出厂”。

由条件知，$P(A)=0.3$，$P(B|A)=0.8$，$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.24$，所以

$$P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB)=P(\overline{A})+P(AB)=0.7+0.24=0.94$$

又设 X 表示所生产的 n 台仪器能出厂的台数，则 $X\sim B(n，0.94)$，从而

$$\alpha=P\{X=n\}=C_n^n p^n q^{n-n}=0.94^n$$

$$\beta=P\{X=n-2\}=C_n^2 p^{n-2}q^2=C_n^2\times 0.94^{n-2}\times 0.06^2$$

$$\theta=P\{X\le n-2\}=1-P(X=n-1)-P(X=n)=1-n\times 0.94^{n-1}\times 0.06-0.94^n$$

或设 X 表示所生产的 n 台仪器不能出厂的台数，则 $X\sim B(n，0.06)$，从而

$\alpha=P\{X=0\}$、$\beta=P\{X=2\}$、$\theta=P\{X\ge 2\}$。

20．假设随机变量 X 的绝对值不大于 1，$P\{X=-1\}=\dfrac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$；在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在（-1，1）内任一子区间上取值的概率与子区间的长度成正比，试求：

（1）X 的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$；（2）X 取负值的概率 p。

分析：要求对分布函数的概念有较好的理解和掌握，从而严格按照分布函数的定义求解。

解：（1）由条件知，当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；$F(-1)=\dfrac{1}{8}$；

$$P\{-1<X<1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

易见在 X 的值属于（-1，1）的条件下，事件 $\{-1<X<x\}(-1<x<1)$ 的条件概率为 $P\{-1<X\le x|-1<X<1\}=\dfrac{x+1}{2}$。于是，对于 $-1<x<1$，有

$$\begin{aligned}P\{-1<X\le x\}&=P\{-1<X\le x，-1<X<1\}\\&=P\{-1<X<1\}\cdot P\{-1<X\le x|-1<X<1\}\\&=\frac{5}{8}\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{5x+5}{16}\end{aligned}$$

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le -1\}+P\{-1<X\le x\}=\frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{5x+7}{16}$$

对于 $x\ge 1$，有 $F(x)=1$。从而

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\(5x+7)/16, & -1\le x<1\\1, & x\ge 1\end{cases}$$

（2） X 取负值的概率 $p=P\{X<0\}=F(0)-P(X=0)=F(0)=\dfrac{7}{16}$。

21.设 X 服从参数为 2 的指数分布，证明 $Y=1-e^{-2X}$ 在(0,1)上服从均匀分布。

解：由题意，X 的概率分布为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\0, & x\le 0\end{cases}$，由 $Y=1-e^{-2X}$ 可解得 $x=-\dfrac{1}{2}\ln(1-y),\quad x'_y=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1-y})$，由定理得

$$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2\times(-1/2)\ln(1-y)}\cdot\dfrac{1}{2(1-y)}, & 0<y<1\\0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}1, & 0<y<1\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

故 $Y=1-e^{-2X}$ 在(0,1)上服从均匀分布。

22.假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，求：(1) 相继两次故障之间间隔时间 T 的概率分布；

(2) 在设备已经无故障工作 8 小时的情况下，再无故障工作 8 小时的概率 θ。

解：(1) 由于 T 是非负变量，可见当 $t\le 0$ 时，$F(t)=P\{T\le t\}=0$；

设 $t>0$，则事件 $\{T>t\}$ 与 $\{N(t)=0\}$ 等价，因此当 $t>0$ 时，有

$$F(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{N(t)=0\}$$

而由条件 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，所以 $P\{N(t)=0\}=e^{-\lambda t}$，即

$$F(t)=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}$$

于是 T 服从参数为 λ 的指数分布，其概率分布为

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0\\0, & t\le 0\end{cases}。$$

（2） $\theta=P\{T\ge 16|T\ge 8\}=\dfrac{P\{T\ge 16，T\ge 8\}}{P\{T\ge 8\}}=\dfrac{P\{T\ge 16\}}{P\{T\ge 8\}}=\dfrac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}}=e^{-8\lambda}$

23.假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布，平均无故障工作的时间（EX）为 5 小时，设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机。试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$。

解：设 X 的分布参数为 λ。则

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}，\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{5}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}，$$

所以$EX=\frac{1}{\lambda}=5$,即$\lambda=\frac{1}{5}$。显然，

$$Y=\min\{X,2\}.$$

对于$y<0$，$F(y)=0$；对于$y\ge 2, F(y)=1$；

设$0\le y<2$,有

$$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{\min\{X,2\}\le y\}$$

$$=1-P\{\min\{X,2\}>y\}=1-P\{X>y\}$$

$$=P\{X\le y\}=1-e^{-\frac{1}{5}y}.$$

于是，Y的分布函数为$F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-y/5}, & 0\le y<2\\ 1, & 2\le y\end{cases}$

24．有 100 个零件，其中 90 个一等品，10 个二等品，随机的取 2 个，安装在一台设备上，若 2 个零件中有 i 个（i=0,1,2）二等品，则该设备的使用寿命服从参数为$\lambda=i+1$的指数分布，试求（1）设备寿命超过 1 的概率；(2) 若已知设备寿命超过 1，则安装在该设备上的 2 个零件均为一等品的概率。

解：设 X 表示设备寿命，A_i 表示“ 2 个零件中有 i 个（i=0,1,2）二等品，则 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$P(A_0)=\frac{C_{90}^2}{C_{100}^2}=\frac{89}{110}，\quad P(A_1)=\frac{C_{90}^1C_{10}^1}{C_{100}^2}=\frac{2}{11}，\quad P(A_1)=\frac{C_{10}^2}{C_{100}^2}=\frac{1}{110}，$$

$$P(X\ge 1\,|\,A_0)=e^{-1}，\quad P(X\ge 1\,|\,A_1)=e^{-2}，\quad P(X\ge 1\,|\,A_2)=e^{-3}$$

（1）由全概率公式

$$P(X\ge 1)=\sum_{i=0}^{2}P(X\ge 1\,|\,A_i)P(A_i)=\frac{89}{110}e^{-1}+\frac{2}{11}e^{-2}+\frac{1}{110}e^{-2}\approx 0.32$$

（2）由贝叶斯公式

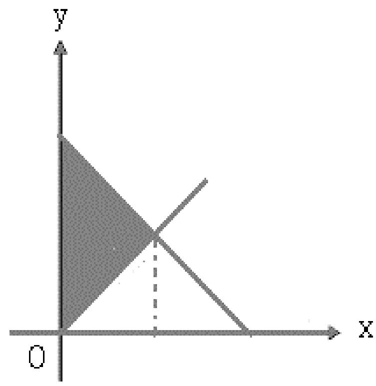
$$P(A_0\,|\,X\ge 1)=\frac{P(X\ge 1\,|\,A_0)P(A_0)}{P(X\ge 1)}=\frac{89}{110}e^{-1}/0.32\approx 0.93$$

24．设二维随机变量（X，Y）的概率分布为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其它 \end{cases}$

求（1）随机变量 X 的密度函数 $f_X(x)$；（2）概率 $P\{X+Y\le 1\}$。

解：（1）$x\le 0$时，$f_X(x)=0$；$x>0$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_x^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-x}$，

故随机变量 X 的密度函数 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<x \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$



（2）$P\{X+Y\le 1\}$

$$=\iint\limits_{X+Y\le 1} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy$$

$$=e^{-1}+1-2e^{-\frac{1}{2}}$$

25．设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立。以 Y 表示中途下车的人数，求：

（1）在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；

（2）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布。

解：（1）$P\{Y=m\mid X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\quad 0\le m\le n, n=0,1,2\cdots$

（2）$P\{X=n,Y=m\}=P\{Y=m\mid X=n\}P\{X=n\}$

$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n,\quad 0\le m\le n, n=0,1,2\cdots$$

26．假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases} 0, & 若Y\le k, \\ 1, & 若Y>k, \end{cases}\quad (k=1，2)$$

求 X_1 和 X_2 的联合概率分布；

分析：X_1 和 X_2 是随机变量 Y 的函数，要求联合概率分布需首先确定随机向量(X_1,X_2)的一切可能取值，然后计每个可能取值的相应概率。

解：由题意，$Y\sim f(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$，从而得

$$P\{Y\le 1\}=\int_{-\infty}^{1} f(y)dy=\int_0^1 e^{-y}dy=1-e^{-1},\qquad P\{Y>1\}=e^{-1};$$

$$P\{Y \le 2\} = \int_{-\infty}^{2} f(y)dy = \int_{0}^{2} e^{-y}dy = 1 - e^{-2}, \qquad P\{Y > 2\} = e^{-2}。$$

又(X_1, X_2)的一切可能取值为(0，0)、(1，0)、(1，1)，并且

$$P\{X_1 = 0，X_2 = 0\} = P\{Y \le 1，Y \le 2\} = P\{Y \le 1\} = 1 - e^{-1}；$$

$$P\{X_1 = 1，X_2 = 0\} = P\{Y > 1，Y \le 2\} = P\{1 < Y \le 2\} = e^{-1} - e^{-2}；$$

$$P\{X_1 = 1，X_2 = 1\} = P\{Y > 1，Y > 2\} = P\{Y > 2\} = e^{-2}。$$

而 $\{X_1 = 0，X_2 = 1\} \Leftrightarrow \{Y \le 1，Y > 2\}$ 为不可能事件，故其概率等于 0，所以 X_1 和 X_2 的联合概率分布为

X_2 \ X_1	0	1
0	$1 - e^{-1}$	$e^{-1} - e^{-2}$
1	0	e^{-2}

27．设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 上服从均匀分布，求

（1）随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；

（2） Y 的概率密度；

（3）概率 $P\{X + Y > 1\}$．

分析：正确理解已知条件，即条件密度是求解本题的关键．

解：（1） X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

在 $X = x(0 < x < 1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

当 $0 < y < x < 1$ 时，随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{1}{x}$$

在其它点 (x, y) 处，有 $f(x, y) = 0$，即

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（2）当$0<y<1$时，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y\ ;$$

当$y\le 0$或$y\ge 1$时，$f_Y(y)=0$．因此

$$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（3）$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{X+Y>1}f(x,y)dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2-\frac{1}{x})dx=1-\ln 2$。

注:本题考查了二维连续型随机变量的边缘概率密度，条件概率密度，联合概率密度的相互关系，以及二维连续型随机变量取值于一个区域的概率的计算，属于综合性题型。

28．设ξ与η独立同分布，已知ξ的概率分布为$P\{\xi=i\}=1/3(i=1，2，3)$，

又设$X=\max\{\xi，\eta\}$，$Y=\min\{\xi，\eta\}$。

求$(X，Y)$的概率分布。

解：$(X，Y)$概率分布为

Y \ X	1	2	3
1	1/9	2/9	2/9
2	0	1/9	2/9
3	0	0	1/9

例如：$P\{X=2，Y=1\}=P\{\xi=2，\eta=1\}+P\{\eta=2，\xi=1\}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

（2）由$(X，Y)$概率分布得X的概率分布为

X	1	2	3
P	1/9	3/9	5/9