A 卷

2019—2020 学年第 2 学期
《计算方法》试卷

专业班级 计算 1802

姓　　名 张世琛 张世琛

学　　号 1804030401

开课系室 计算机科学系

考试日期 2020.06.20

题　号	一	二	三	四	总分
得　分					
阅卷人					

说明：（1）本试卷答案中考题共 10 页

（2）试题本禁止撕开，否则成绩为 0 分

得分	

一、方程与方程组（共 30 分）

1.用 Newton-Raphson 法求$x^4-3x^2+x-2=0$的根，计算三次迭代过程，给出每次迭代过程根的近似值，结果保留 4 位小数。（本小题 10 分）

1.答（张世琛）

令 $f(x)=x^4-3x^2+x-2$

$f(1)=-3 \quad f(2)=4 \quad \therefore f(x)$在$[1,2]$上有一根

$f'(x)=4x^3-6x+1\neq 0 \quad f''(x)=12x^2-6$不变号

$f(2)f''(2)>0 \quad \therefore$ 初值 $x_0=2$

迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^4-3x_k^2+x_k-2}{4x_k^3-6x_k+1}$

$x_0=2.0000 \quad x_1=1.8095 \quad x_2=1.7584 \quad x_3=1.7549$

2.追赶法解下列三对角线方程组，要求给出分解步骤，以及中间结果和方程组解，结果保留 4 位小数。（本小题 10 分）

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & & \\ 0.35 & 0.8 & 0.4 & \\ & 0.25 & 1.0 & 0.5 \\ & & 1.0 & -2.0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.77 \\ -0.5 \\ -2.25 \end{bmatrix}$$

2.答:(张世琛)

$$A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1.0 & -2.0 \end{pmatrix} = \underset{L}{\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ & \beta_3 & \gamma_3 & 0 \\ & & \beta_4 & \gamma_4 \end{pmatrix}} \underset{U}{\begin{pmatrix} 1 & \delta_1 & & \\ 0 & 1 & \delta_2 & \\ 0 & 0 & 1 & \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\cancel{a_{11} = L_{11} U_{11}}$ $\quad \cancel{\therefore L_{11} = 0.5}$

$$\begin{cases} \gamma_1 = b_1 \quad \delta_1 = \dfrac{c_1}{\gamma_1} \\ \beta_i = a_i \quad \gamma_i = b_i - \beta_i \delta_{i-1} \quad (i=2,3,4\cdots n) \\ \delta_i = \dfrac{c_i}{\gamma_i} \quad (i=2,3,4\cdots n-1) \end{cases}$$

$\gamma_1 = b_1 = 0.5 \qquad \delta_1 = \dfrac{c_1}{\gamma_1} = \dfrac{0.25}{0.5} = 0.5$

$\beta_2 = a_2 = 0.35 \qquad \gamma_2 = b_2 - \beta_2 \delta_1 = 0.8 - 0.35 \times 0.5 = 0.625 \qquad \delta_2 = \dfrac{c_2}{\gamma_2} = \dfrac{0.4}{0.625} = 0.64$

$\beta_3 = a_3 = 0.25 \qquad \gamma_3 = b_3 - \beta_3 \delta_2 = 0.84 \qquad \delta_3 = \dfrac{c_3}{\gamma_3} = 0.595238$

$\beta_4 = 1 \qquad \gamma_4 = -2.595238$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1.0 & -2.0 \end{pmatrix} = \underset{L}{\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.595238 \end{pmatrix}} \underset{U}{\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & & \\ & 1 & 0.64 & \\ & & 1 & 0.595238 \\ & & & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & & & \\ 0.35 & 0.625 & & \\ & 0.25 & 0.84 & \\ & & 1 & -2.59238 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.77 \\ -0.5 \\ -2.25 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.84 \\ \cancel{0.84} \\ -2.1411 \\ \cancel{0.54} \\ 0.042 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & & \\ & 1 & 0.64 & \\ & & 1 & 0.595238 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.84 \\ \cancel{-2.1411} \\ \cancel{0.54} \\ 0.042 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{x=} \begin{pmatrix} \cancel{-0.0949} \\ 1.5897 \\ \cancel{-1.1714} \\ \cancel{0.5400} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} -0.094 \\ 1.5872 \\ -1.1674 \\ 0.5413 \end{pmatrix} \quad \cancel{x} \begin{pmatrix} \cancel{-0.0949} \\ \cancel{1.5872} \\ \cancel{-1.1674} \\ 0.5413 \end{pmatrix}$$

3.使用 Gauss-Seidel 迭代法解下面线性方程组，要求分析其收敛性，然后给出迭代格式，并计算方程组的解，初值为$x^{(\mathbf{0})}=(\mathbf{0.0},\mathbf{0.0},\mathbf{0.0},\mathbf{0.0})^T$，要求相对误差小于 0.001.（本小题 10 分）

$$\begin{cases}-x_1+11x_2-x_3+3x_4=25\\2x_1-x_2+10x_3-x_4=-11\\10x_1-x_2+2x_3=6\\3x_2-x_3+8x_4=15\end{cases}$$

3、答（张世探）

$$\begin{pmatrix}-1 & 11 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 10 & -1\\ 10 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 2 & 0 & & \\ 10 & -1 & 0 & \\ 0 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 11 & -1 & 3\\ & 0 & 10 & -1\\ & & 0 & 0\\ & & & 0\end{pmatrix}$$

$$G=-(D+L)^{-1}U=\begin{pmatrix}0 & 11 & -1 & 3\\ 0 & 22 & 8 & 5\\ 0 & -44 & 9 & -\frac{25}{2}\\ 0 & -\frac{55}{4} & -\frac{15}{8} & -\frac{55}{16}\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=\lambda_2=0$

$\lambda_3=\lambda_4=13.7812$

$\rho(G)=13.7812>1$ ∴ G发散

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=11x_2^{(k)}-x_3^{(k)}+3x_4^{(k)}-25\\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{+11+2x_1^{(k+1)}+10x_3^{(k)}-x_4^{(k)}}{1}\\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{6-10x_1^{(k+1)}+x_2^{(k+1)}}{2}\\ x_4^{(k+1)}=\dfrac{15+x_3^{(k+1)}-3x_2^{(k+1)}}{8}\end{cases}$$

得分	

二、插值与拟合（共 40 分）

1.已知$sin(0.32)=0.315$，$sin(0.34)=0.333$，$sin(0.36)=0.352$，使用二次 Lagrange 插值多项式，计算$sin(0.3367)$，并估计截断误差，结果保留 3 位小数。（本小题 10 分）

1、答：(张世琛)

x_i	0.32	0.34	0.36
y_i	0.315	0.333	0.352

$$l_0(x)=\frac{(x-0.34)(x-0.36)}{(0.32-0.34)(0.32-0.36)}=0.09611$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0.32)(x-0.36)}{(0.34-0.32)(0.34-0.36)}=0.97278$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0.32)(x-0.34)}{(0.36-0.32)(0.36-0.32)}=-0.06889$$

$$\sin(0.3367)=L_2(0.3367)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$$

$$=0.329961=0.330$$

$$R_2(x)=\frac{f^3(\xi)}{3!}(x-0.32)(x-0.34)(x-0.36)\leq\frac{\cos(0.32)}{3!}\max|(x-0.32)(x-0.34)(x-$$

$$=$$

$$f(x)\overset{\triangle}{=}(x-0.32)(x-0.34)(x-0.36)=x^3-\frac{51}{50}x^2+\frac{433}{125}x-\frac{612}{15625}$$

$$f'(x)=0\qquad x=\frac{\sqrt{3}}{150}+\frac{17}{50}\text{ 或 }\frac{17}{50}-\frac{\sqrt{3}}{150}\text{ 即 }x_1=0.35154$$

$$x_2=0.328453$$

当 $x=0.328453$ $f(x)$取最大 $f(x)_{max}=0.000003$

$$\text{即 }R_2(x)=\frac{f^3(\xi)}{3!}(x-0.32)(x-0.34)(x-0.36)$$

$$=\frac{\cos(0.32)}{6}\times0.000003=4.7\times10^{-7}$$

2.已知某函数$f(x)$的四个离散点为：$f(0.4)=0.411$，$f(0.55)=0.578$，$f(0.65)=0.697$，$f(0.8)=0.888$，使用三次 Newton 插值多项式，计算$f(0.596)$，结果保留 3 位小数。（本小题 10 分）

2.答：(张世琛)

x_i	$f(x_i)$	一次	二次	三次
0.4	0.4111			
0.55	0.578	1.11267		
0.65	0.697	1.11900	0.30933	
0.8	0.888	1.27333	0.33333	0.06

$$N_3(0.596) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= \cancel{0.629} = 0.411 + 1.11267(0.596-0.4) + 0.30933(0.596-0.4)(0.596-0.55)$$

$$+ 0.06(0.596-0.4)(0.596-0.55)(0.596-0.65)$$

$$= 0.629$$

3．某实验获得实验数据如下表，呈指数形式，经验函数为 $\varphi(x)=ae^{mx}$ (a,m为常数)，请使用线性最小二乘法拟合该数据，写出拟合函数表达式，结果保留 3 位小数。 （本小题 10 分）

x_i	**1.2**	**2.8**	**4.3**	**5.4**	**6.8**	**7.9**
$\varphi(x_i)$	**7.5**	**16.1**	**38.9**	**67.0**	**146.6**	**266.2**

3答：(张世琛)

$$\varphi(x)=ae^{mx}$$

$$\ln\varphi(x)=\ln a+mx$$

$$y'=a'+mx$$

x_i	1.2	2.8	4.3	5.4	6.8	7.9
$\varphi(x)$	7.5	16.1	38.9	67	146.6	266.2.
$\ln\varphi(x_i)$	2.01490	2.77882	3.66099	4.20469	4.98771	5.88625

$\sum_{i=1}^{6}x_i=28.4$ $\sum_{i=1}^{6}x_i^2=165.58$ $\sum_{i=1}^{6}y_i=23.231365$

$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=126.678164$

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{6}x_i \\ \sum_{i=1}^{6}x_i & \sum_{i=1}^{6}x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{6}y_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 28.4 \\ 28.4 & 165.58 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23.231365 \\ 126.678164 \end{pmatrix}$$

$\cancel{a'=0.3025 \quad m=0.7541}$ $a'=1.332 \quad m=0.537$

$\cancel{\varphi(x)=e^{0.3025+0.7541x}}$ $\varphi(x)=e^{1.332+0.537x}$

$=3.789e^{0.537x}$

4.已知$s(x)=\begin{cases} ax^3+bx^2+cx+2 & 0\le x\le 1 \\ 5x+3 & 1\le x\le 2 \end{cases}$，是以 0,1,2 为节点的三次样条插值函数，请计算 a,b 和 c 的值，结果保留 3 位小数。（本小题 10 分）

4、答：(张世深)

$$\begin{cases} S(1^-)=S(1^+) \Rightarrow a+b+c+2=5+3 \\ S'(1^-)=S'(1^+) \Rightarrow 3a+2b+c=5 \\ S''(1^-)=S''(1^+) \Rightarrow 6a+2b=0 \end{cases}$$

~~$c=5.000$~~: $a=1.000$ ~~$b=$~~

$b=-3.000$

$c=8.000$

得分	

三、数值积分与数值微分。（共 20 分）

1. 说明数值微分的两种解决思路及其优缺点。（本小题 10 分）

1、答：(张世琛)

1. 利用插~~值~~值多项式求数值导数

缺点：~~繁琐~~、复杂、麻烦，高次可能出现龙格现象，效果误差大

优点：精确度相比之下要高

2. 用差商近似代替导数

缺点：误差可能比较大，

优点：简单，好化简，

2.已知某函数$f(x)$在区间$[0,1]$进行采样，获得数据表如下

x_k	0.0000	0.1250	0.2500	0.3750	0.5000	0.6250	0.7500	0.8750	1.0000
$f(x_k)$	0.0000	0.1247	0.2474	0.3663	0.4794	0.5851	0.6816	0.7675	0.8415

用复化 Simpson 公式求积分$\int_0^1 f(x)dx$，结果保留 3 位小数。（本小题 10 分）

2、答：(张世探)

复化 Simpson 公式

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)\right]$$

$$= \frac{0.25}{6}\Big(0+4(0.1247+0.3663+0.5851+0.7675)+ \quad \cancel{0.8415}$$

$$2(0.2474+0.4794+0.6816+0.8415)\Big)$$

$$=0.460$$

得分	

四、常微分方程（共 10 分）

3.用 Euler 预报校正法解$\begin{cases} y' = y - 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$，取步长$h = 0.1$。要求给出计算$y(0.3)$的详细步骤和结果，结果保留 3 位小数。（本小题 10 分）

3、答：(张世深)

$$\begin{cases} y'' = y - 2X \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[k_1 + k_2] \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = y_i - 2x_i \\ k_2 = y_i + hk_1 - 2(x_i + h) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[k_1 + k_2] \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

x_i	y_i	k_1	k_2	x_{i+1}	y_{i+1}
0	1	1	0.9	0.1	1.095
0.1	1.095	0.895	0.7845	0.2	1.17897
0.2	1.17897	0.77897	0.65687	0.3	1.25077

$y(0.3) = 1.25077 \approx 1.251$