第 三 章 随机变量的数字特征

1.(Ch3-5)设随机变量 X 服从拉普拉斯分布，其分布密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\alpha}e^{-|x-\beta|/\alpha}，\ \alpha>0\ （-\infty<x<+\infty）。$$

求 X 的数学期望。

分析：该题要求熟练掌握计算连续型随机变量的数学期望的公式。

解：由数学期望的定义，有

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2\alpha}e^{-\frac{|x-\beta|}{\alpha}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\beta}\frac{x}{2\alpha}e^{\frac{x-\beta}{\alpha}}dx+\int_{\beta}^{+\infty}\frac{x}{2\alpha}e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}}dx$$

令 $\frac{x-\beta}{\alpha}=t$，则

$$EX=\int_{-\infty}^{0}\frac{\alpha t+\beta}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{+\infty}\frac{\alpha t+\beta}{2}e^{-t}dt$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left(\int_{-\infty}^{0}te^{t}dt+\int_{0}^{+\infty}te^{-t}dt\right)+\frac{\beta}{2}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-t}dt\right)$$

$$=0+\frac{\beta}{2}\times 2$$

$$=\beta。$$

2.(Ch3-6) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x， & -1\le x\le 0\\ A-x， & 0<x\le 1\\ 0， & 其它\end{cases}，$$

求：（1）常数 A；（2）数学期望 EX；（3）方差 DX 。

解：（1）由归一性， $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{1}(A-x)dx=A=1$

从而得，$A=1$；

（2） $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x\cdot(1-x)dx=0$；

（3）由于

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}；$$

于是 $$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{6}。$$

3.(Ch3-7) 设 X 的概率分布为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

求 EX 、 DX 。

解： $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}xe^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-x}dx=0$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}x^2e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-x}dx=2$$

4.(Ch3-9) 设用 A、B 两测量仪器测量某一产品的直径多次，结果如下表：

X_A	118	119	120	121	122
p_k	0.06	0.14	0.60	0.15	0.05

X_B	118	119	120	121	122
p_k	0.09	0.15	0.52	0.16	0.08

试比较两种仪器的优劣。

分析：由于题设中没有给出所测产品直径的真实值，故要比较两种仪器的优劣，就是要比较这两种仪器哪个的测量精度更高一些，即要比较两种仪器测量的方差哪个更小一些。

解：由题设，得

$$EX_A=118\times0.06+119\times0.14+120\times0.60+121\times0.15+122\times0.05=120.99,$$

$$EX_B=118\times0.09+119\times0.15+120\times0.52+121\times0.16+122\times0.08=119.99。$$

而 $DX_A=E(X_A-EX_A)^2=(118-120.99)^2\times0.06+(119-120.99)^2\times0.14$

$$+(120-120.99)^2\times0.60+(121-120.99)^2\times0.15+(122-120.99)^2\times0.05$$

$=1.104$。

$$DX_B=(118-119.99)^2\times0.09+(119-119.99)^2\times0.15+(120-119.99)^2\times0.52$$

$$+(121-119.99)^2\times0.16+(122-119.99)^2\times0.08$$

$=0.6552$。

显然有 $DX_A>DX_B$，可见 A 仪器的测量误差要比 B 仪器的测量误差大，故 B 仪器要优良些。

5.(Ch3-11) 试证明事件在一次试验中发生的次数的方差不超过 $\frac{1}{4}$。

分析：事件在 n 次独立重复试验中发生的次数服从参数为 n， p 的二项分布

$B(n, p)$，当然在一次试验中发生的次数应服从$B(1, p)$，即为(0-1)分布。

证明：令 $X=\begin{cases}1，事件A在试验中发生，\\ 0，事件A在试验中不发生.\end{cases}$

显然，$X \sim B(1,\quad p)$ 其中 p 表示每次试验中事件发生的概率。

则 $EX=p$，$DX=p(1-p)=p-p^2$。

而 $p-p^2 \le \dfrac{1}{4}$，故有 $DX \le \dfrac{1}{4}$，

即事件在一次试验中发生的次数的方差不超过$\dfrac{1}{4}$。

6.(Ch3-15) 设随机变量 $X \sim N(1,\quad 2^2)$、$Y \sim N(0,\quad 1)$，且相互独立，求：

（1） $Z=2X+Y$ 的期望和方差；

（2） $Z=2X-Y$ 的期望和方差。

分析：由两个独立的正态随机变量的线性函数也服从正态分布即可得到相应分布，进而求得其期望和方差。

解：（1）由 $X \sim N(1,\quad 2^2)$、$Y \sim N(0,\quad 1)$，且相互独立知，

$$Z=2X+Y \sim N(2,\quad 17)$$

从而得 $EZ=2,\quad DZ=17.$

（2）同样由 $X \sim N(1,\quad 2^2)$、$Y \sim N(0,\quad 1)$，且相互独立知，

$$Z=2X-Y \sim N(2,\quad 17)$$

从而得 $EZ=2,\quad DZ=17.$

7.(Ch3-16) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，求λ。

解：$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=EX^2-3EX+2$

$$=\lambda+\lambda^2-3\lambda+2=1$$

即$\lambda^2-2\lambda+1=0$，解得λ=1。

8.(Ch3-17) 设二维随机变量(X，Y)的联合概率分布律为

X \ Y	0	1
0	0.1	0.2
1	0.3	0.4

求：（1） EX，EY，DX，DY；

（2）(X，Y)的协方差，相关系数，协方差阵，相关阵。

解：（1）关于 X 和 Y 的边缘分布律分别为

X	0	1
P	0.3	0.7

Y	0	1
P	0.4	0.6

所以 $EX = 0.7 \qquad DX = EX^2 - (EX)^2 = 0.7 - 0.49 = 0.21$

$EY = 0.6 \qquad DY = EY^2 - (EY)^2 = 0.6 - 0.36 = 0.24$

（2）$EXY = 0.4$； $\text{Cov}(X,Y) = EXY - EXEY = 0.4 - 0.7 \times 0.6 = -0.02$

$$\rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{-0.02}{\sqrt{0.21}\sqrt{0.24}} = 0.089$$

协方差阵为 $\begin{pmatrix} 0.21 & -0.02 \\ -0.02 & 0.24 \end{pmatrix}$

相关阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -0.089 \\ -0.089 & 1 \end{pmatrix}$

9.(Ch3-18) 设随机变量$(X，Y)$的概率密度为

$$f(x，y) = \begin{cases} (x+y)/8， & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 \\ 0， & \text{其它} \end{cases}$$

求 X，Y 的相关系数 ρ_{XY}。

分析：欲求相关系数，需先求DX、DY、EX、EY、$\text{Cov}(X，Y)$。

解：$EX = \iint\limits_G xf(x,y)dxdy = \frac{1}{8}\int_0^2 xdx\int_0^2 (x+y)dy = \frac{1}{8}\int_0^2 x(2x+2)dx = \frac{7}{6}$

$$EY = \iint\limits_G yf(x,y)dxdy = \frac{1}{8}\int_0^2 ydy\int_0^2 (x+y)dx = \frac{1}{8}\int_0^2 y(2+2y)dy = \frac{7}{6}$$

$$EXY = \iint\limits_G xyf(x,y)dxdy = \frac{1}{8}\int_0^2 xdx\int_0^2 y(x+y)dy = \frac{4}{3}$$

$$EX^2 = \iint\limits_G x^2 f(x,y)dxdy = \frac{1}{8}\int_0^2 x^2dx\int_0^2 (x+y)dy = \frac{5}{3}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{5}{3} - (\frac{7}{6})^2 = \frac{11}{36}$$

同理得$DY = 11/36$，进而得

$$\text{Cov}(X,Y) = EXY - EX \cdot EY = \frac{4}{3} - \frac{49}{36} = -\frac{1}{36}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{11}{36}}\sqrt{\frac{11}{36}}} = -\frac{1}{11}$$

10.(Ch3-21) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，若每次命中目标的概率为 0.4，求 X^2 的数学期望 EX^2 。

解：由题意，$X \sim B(10,0.4)$，由于 $DX = EX^2 - (EX)^2$，所以

$EX^2 = DX + (EX)^2$，而

$$EX = np = 10 \times 0.4 = 4$$
$$DX = np(1-p) = 10 \times 0.4 \times 0.6 = 2.4$$

故　$EX^2 = 2.4 + 4^2 = 18.4$

11.(Ch3-22) 已知 X、Y 分别服从正态分布 $N(0,3^2)$ 和 $N(1,4^2)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = -1/2$，设 $Z = X/3 + Y/2$，求：

(1) 求数学期望 EZ，方差 DZ；

(2) Y 与 Z 的相关系数 ρ_{YZ}；

分析：本题要求熟悉数学期望、方差、协方差的性质、计算及有关正态分布的性质。

解：(1) 由数学期望、方差的性质及相关系数的定义得

$$EZ = E(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}) = E(\frac{X}{3}) + E(\frac{Y}{2}) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$DZ = D(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}) = D(\frac{X}{3}) + D(\frac{Y}{2}) + 2\mathrm{Cov}(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}) \quad (\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}})$$

$$= \frac{1}{3^2} DX + \frac{1}{2^2} DY + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \rho_{XY} \sqrt{DX}\sqrt{DY}$$

$$= \frac{1}{3^2} \times 3^2 + \frac{1}{2^2} \times 4^2 + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times 3 \times 4 = 1 + 4 - 2 = 3\text{；}$$

(2) 由协方差的性质 3 得

$$\mathrm{Cov}(Y，Z) = \mathrm{Cov}(Y, \frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y) = \frac{1}{3}\mathrm{Cov}(Y,X) + \frac{1}{2}\mathrm{Cov}(Y,Y)$$

$$= \frac{1}{3} \rho_{YX} \sqrt{DY}\sqrt{DX} + \frac{1}{2} DY = 6$$

从而有 X 与 Z 的相关系数 $\rho_{YZ} = \dfrac{\mathrm{Cov}(Y,Z)}{\sqrt{DY}\sqrt{DZ}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　；

12.(Ch3-24) 假设一部机器一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日里无故障可获利 10 万元，发生一次故障仍获利 5 万元，发生二次故障获利 0 元，发生三次或三次以上要亏损 2 万元，求一周内期望利润。

分析：一部机器在一周 5 个工作日可视为 5 重贝努利试验，因此一周 5 个工作日里机器发生故障的次数（记为 X）服从二项分布。若以 Y 表示生产利润，则 Y 是 X 的函数，因此问题化为求随机变量函数的数学期望。

解：设 Y 表示生产利润，X 表示每周发生故障的次数，则 $X \sim B(5,0.2)$，其

概率分布为 $P\{X=k\}=C_5^k 0.2^k \times 0.8^{5-k}$，又 Y 是 X 的函数，其可能取值为－2，0，5，10。所以

$$P\{Y=10\}=P\{X=0\}=0.8^5=4^5/5^5=1024/3125$$

$$P\{Y=5\}=P\{X=1\}=C_5^1\times 0.2\times 0.8^4=5\times 4^4/5^5=1280/3125$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=2\}=C_5^2\times 0.2^2\times 0.8^3=10\times 4^3/5^5=640/3125$$

$$P\{Y=-2\}=P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}=181/5^5=181/3125$$

$$EY=10\times\frac{1024}{3125}+5\times\frac{1280}{3125}+0\times\frac{640}{3125}+(-2)\times\frac{181}{3125}=\frac{16278}{3125}\approx 5.20896$$

故一周内期望利润为 5.21 万元。

13.(Ch3-25) 设随机变量 X 、Y 独立同服从正态分布 $N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$，求 $D|X-Y|$。

分析：由于随机变量 X 、Y 相互独立同分布，故联合概率分布为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\times\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(2x^2+2y^2)}=\frac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)}\quad(-\infty<x,y<+\infty)$$

解法一：$E|X-Y|=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|f(x,y)dxdy$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}(x-y)e^{-(x^2+y^2)}dy+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}(y-x)e^{-(x^2+y^2)}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}(x-y)e^{-(x^2+y^2)}dy$$

$$=\frac{2}{\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}xe^{-(x^2+y^2)}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}ye^{-(x^2+y^2)}dy]$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2y^2}dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2\times\frac{1}{4}}}dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

解法二：设 $Z=X-Y$，由 X 、Y 独立同服从正态分布知，X 、Y 的线性函数也服从正态分布，且 $Z=X-Y\sim N(0+0,\ \sigma_1^2+(-1)^2\sigma_2^2)=N(0,1)$，所以

$$E|X-Y|=E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\varphi(z)dz=\int_{-\infty}^{0}-z\varphi(z)dz+\int_{0}^{+\infty}z\varphi(z)dz$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}z\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\cdots=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

又 $E|Z|^2=EZ^2=DZ+(EZ)^2=1$，所以 $D|X-Y|=1-\frac{2}{\pi}$。

14.(Ch3-27) 设 ξ 与 η 独立同分布，已知 ξ 的概率分布为 $P\{\xi=i\}=1/3(i=1,2,3)$，又设 $X=\max\{\xi，\eta\}$，$Y=\min\{\xi，\eta\}$。求：

（1）EX、EY；

（2）随机变量 X，Y 的协方差。

分析：欲求 EX、EY 及 $\mathrm{Cov}(X，Y)$，需先求 $(X，Y)$ 的概率分布及 EXY。

解：由条件 ξ 与 η 仅取 1、2、3 知 X、Y 也仅取 1、2、3，故 $(X，Y)$ 的可能取值为（1，1）、（2，1）、（2，2）、（3，1）（3，2）、（3，3）,而

$$P\{X=2，Y=1\}=P\{\xi=2，\eta=1\}+P\{\eta=2，\xi=1\}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

同理得

$$P\{X=3，Y=1\}=P\{X=3，Y=2\}=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=1，Y=1\}=P\{X=2，Y=2\}=P\{X=3，Y=3\}=\frac{1}{9}$$

又 $\{X=1,Y=2\}$、$\{X=1,Y=3\}$、$\{X=2,Y=3\}$ 均为不可能事件，所以其概率均为零，故 $(X，Y)$ 概率分布为

Y \ X	1	2	3
1	1/9	2/9	2/9
2	0	1/9	2/9
3	0	0	1/9

关于 X 的边缘概率分布为

X	1	2	3
P	1/9	3/9	5/9

关于 Y 的边缘概率分布为

Y	1	2	3
P	5/9	3/9	1/9

（1）$EX=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{3}{9}+3\times\frac{5}{9}=\frac{22}{9}$

$EY=1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{3}{9}+3\times\frac{1}{9}=\frac{14}{9}$

（2）$EXY=1\times1\times\frac{1}{9}+2\times1\times\frac{2}{9}+2\times2\times\frac{1}{9}+3\times1\times\frac{2}{9}+3\times2\times\frac{2}{9}+3\times3\times\frac{1}{9}=\frac{36}{9}$

$\mathrm{Cov}(X，Y)=EXY-EXEY=\frac{36}{9}-\frac{22}{9}\times\frac{14}{9}=\frac{16}{81}$

15.(Ch3-28) 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间[10，30]上均匀分布的随机变量，而经销商店进货数量为区间[10，30]中的某一整数，商店每售出一单位商品可得利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理一单位商品亏损 100 元；

若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每单位商品仅获利 300 元，为使商店所获利润期望值不小于 9280 元，试确定最小进货量。

分析：依题意，需求量 X 服从[10，30]上的均匀分布，因此其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{20}, & 10\le x\le 30\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

而此商店经销该种商品每周所得利润是与 X 和进货数量 n 有关的，所以该问题化为求利润函数的数学期望。

解：依题意，设利润函数为 $Z(X)$，且有

$$Z=\begin{cases}500n+300(x-n), & x>n\\ 500x-100(n-x), & x<n\end{cases}$$

$$EZ=EZ(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}Z(x)f(x)dx=\frac{1}{20}\int_{10}^{30}Z(x)dx$$

$$=\frac{1}{20}\int_{10}^{n}(600x-100n)dx+\frac{1}{20}\int_{n}^{30}(200n+300x)dx$$

$$=\frac{1}{20}(7000n+105000-150n^2)=350n+5250-7.5n^2$$

为使商店所获利润期望值不小于 9280 元，需

$$350n+5250-7.5n^2\ge 9280$$

由此解得 $20.67<n\le 26$。故最小进货量应不少于 21 个单位。

16.(Ch3-29) 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)],$$

其中 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 1/3 和-1/3，它们的边缘密度函数所对应的随机变量的数学期望都是 0，方差都是 1。

（1）求 X 和 Y 的概率密度 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$，及 X 和 Y 的相关系数 ρ。

（2）问 X 和 Y 是否独立？为什么？

解：（1）由于二维正态密度函数的两个边缘密度正态密度函数，因此 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 的两个边缘密度为标准正态密度函数，故

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x,y)dy]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

同理，

$$f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$$

由于 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，可见 $EX=EY=0$，$DX=DY=1$。所以 X和 Y的相关系数

$$\rho=EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi_1(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi_2(x,y)dxdy]=\frac{1}{2}[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}]=0$$

（2）由题设

$$f(x,y)=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}[e^{-9(x^2-2xy/3+y^2)/16}+e^{-9(x^2+2xy/3+y^2)/16}]$$

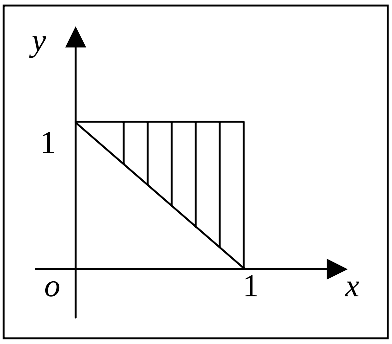
$$f_1(x)f_2(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}\cdot e^{-y^2/2}=\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$$

$$f_1(x)f_2(y)\neq f(x,y)$$

所以 X 与 Y 不独立。

17.(Ch3-30) 设 X 和 Y 的联合分布在以点（0，1），（1，0），（1，1）为三角形区域上服从均匀分布，试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差。

解法一：三角形区域为 $G=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y\ge 1\}$；随机变量 X 和 Y 的联合分布密度为



$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 若(x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$$

以 $f_X(x)$ 表示 X 的概率密度，则

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $0<x<1$ 时，有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{1-x}^{1}2dy=2x,$$

因此

$$EX=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}；EX^2=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}；DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{18},$$

同理可得 $EY=\dfrac{2}{3}$；$DY=\dfrac{1}{18}$。

$$EXY=\iint_G 2xydxdy=\int_0^1 2xdx\int_{1-x}^{1}ydy=\frac{5}{12},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36},$$

于是 $$DU=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}。$$

解法二：三角形区域为$G=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y\ge 1\}$；随机变量$X$和$Y$的联合分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 若(x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases},$$

以$f(u)$表示$U=X+Y$的概率密度，当$u<1$或$u>2$时，$f(u)=0$；

设$1\le u\le 2$，当$0\le x\le 1$且$0\le u-x\le 1$时，$f(x,u-x)=2$，否则$f(x,u-x)=0$。由随机变量之和的概率密度公式，有

$$f(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u-x)dx=\int_{u-1}^{1}2dx=2(2-u)；$$

因此 $$E(X+Y)=EU=\int_{-\infty}^{+\infty}uf(u)du=2\int_1^2u(2-u)du=4/3；$$

$$E(X+Y)^2=EU^2=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2f(u)du=2\int_1^2u^2(2-u)du=11/6；$$

$$DU=D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}。$$

解法三：三角形区域为$G=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y\ge 1\}$；随机变量$X$和$Y$的联合分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 若(x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$E(X+Y)=\iint_G(x+y)f(x,y)dxdy=2\int_0^1dx\int_{1-x}^1(x+y)dy=\cdots=\frac{4}{3}；$$

$$E(X+Y)^2=\iint_G(x+y)^2f(x,y)dxdy=2\int_0^1dx\int_{1-x}^1(x+y)^2dy=\cdots=\frac{11}{6}；$$

$$DU=D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}。$$

解法四：三角形区域为$G=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y\ge 1\}$；随机变量$X$和$Y$的联合分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 若(x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$EX=\iint_G xf(x,y)dxdy=2\int_0^1xdx\int_{1-x}^1dy=\cdots=\frac{2}{3}$$

$$EX^2=\iint_G x^2f(x,y)dxdy=2\int_0^1x^2dx\int_{1-x}^1dy=\cdots=\frac{1}{2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=1/18$$

同理可得 $EY=\dfrac{2}{3}$；$DY=\dfrac{1}{18}$。

$$EXY=\iint_G 2xydxdy=\int_0^1 2xdx\int_{1-x}^1 ydy=\frac{5}{12}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}$$

于是

$$DU=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}。$$

18.(Ch3-31) 对于任意二事件A和B，$0<P(A)<1,0<P(B)<1$，

$$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\overline{A})P(\overline{B})}}$$

称为事件A和B的相关系数。

(1) 证明事件A和B独立的充分必要条件是其相关系数等于零；

(2) 利用随机变量相关系数的基本性质，证明$|\rho|\le 1$。

分析：(1) 利用事件A和B独立的定义$P(AB)=P(A)P(B)$即可；(2) 随机变量X和Y的相关系数为$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，而需将$\rho=\dfrac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\overline{A})P(\overline{B})}}$转化为用随机变量表示，显然，若有

$EXY=P(AB),EX=P(A),EY=P(B)$以及$\sqrt{DX}=\sqrt{P(A)P(\overline{A})}$，$\sqrt{DY}=\sqrt{P(B)P(\overline{B})}$即可，这只需定义

$$X=\begin{cases}1, & 若A出现,\\ 0, & 若A不出现,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & 若B出现,\\ 0, & 若B不出现,\end{cases}$$

解：(1) 由ρ的定义，可见$\rho=0$当且仅当

$$P(AB)-P(A)P(B)=0$$

而这恰好是二事件A和B独立的定义，即$\rho=0$是A和B独立的充分必要条件.

(2) 考虑随机变量X和Y：

$$X=\begin{cases}1, & 若A出现,\\ 0, & 若A不出现,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & 若B出现,\\ 0, & 若B不出现,\end{cases}$$

由条件知，X和Y都服从 0—1 分布：

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ P(\overline{A}) & P(A)\end{pmatrix},\quad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ P(\overline{B}) & P(B)\end{pmatrix}。$$

易见

$$EX=P(A),\quad EY=P(B)\ ;$$

$$DX=P(A)P(\overline{A}),\qquad DY=P(B)P(\overline{B})\ ;$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=P(AB)-P(A)P(B)。$$

因此，事件A和B的相关系数就是随机变量X和Y的相关系数。于是由二随机变量相关系数的基本性质，可见 $|\rho|\le 1$。

19．设随机变量 U 在区间[-2，2]上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & 若U\le -1\\ 1, & 若U>-1\end{cases};\ Y=\begin{cases}-1, & 若U\le 1\\ 1, & 若U>1\end{cases}$$

试求（1） X 和Y 的联合概率分布；（2） $D(X+Y)$。

解　（1）随机向量（X，Y）有四个可能值：（-1，-1），（-1，1），（1，-1），（1，1）。

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1,U\le 1\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1,U>1\}=0;$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\le 1\}=\frac{1}{2};$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=\frac{1}{4}.$$

于是，得X和Y的联合概率分布为

Y \ X	-1	1
-1	1/4	1/2
1	0	1/4

（2） $X+Y$和$(X+Y)^2$的概率分布为

$$X+Y\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix},\qquad (X+Y)^2\sim\begin{pmatrix}0 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

由此可见

$$E(X+Y)=-\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=0\qquad D(X+Y)=E(X+Y)^2=2$$

20．两台同样自动记录仪，每台无故障工作时间服从参数为 5 的指数分布；首先开动一台，当其发生故障时停用而另一台自行开动。试求两台记录仪无故障工作的总时间T的概率分布$f(t)$、数学期望和方差。

解：设X_1、X_2表示先后开动的记录仪无故障工作时间，则$T=X_1+X_2$，由条件知$X_i(i=1，2)$的概率密度为$p_i(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，显然$X_1$、$X_2$独立。

利用两独立随机变量和的概率密度卷积公式可求$T=X_1+X_2$的概率密度，当$t\le 0$时，显然$f(t)=0$；当$t>0$时，

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x)p_2(t-x)dx=25\int_0^t e^{-5x}e^{-5(t-x)}dx=25e^{-5t}\int_0^t dx=25te^{-5t}$$

于是 $f(t)=\begin{cases}25te^{-5t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$。由条件知 $EX_i=1/5$，$DX_i=1/25(i=1，2)$，因此 $ET=E(X_1+X_2)=2/5$， $DT=D(X_1+X_2)=2/25$。

21．某箱装有 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件，现在从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若抽到}i\text{等品}\\ 0, & \text{其　　它}\end{cases}\quad (i=1，2，3)$$

求：(1)随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布；(2)随机变量 X_1 与 X_2 的相关系数 ρ。

分析：随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布即为随机向量（X_1，X_2）的概率分布。由于 X_1 和 X_2 均为离散型随机变量，所以（X_1， X_2）为离散型随机向量，求其概率分布就是求（X_1， X_2）的所有可能取值及其相应的概率。

解：依题意，(X_1 , X_2)所有可能取值：(0，0)，(0，1)，(1，0)，易得

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=P(X_1=0)P(X_2=1|X_1=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}\ ;$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}\ ;\qquad P\{X_1=1,X_2=0\}=\frac{4}{5}\times 1=\frac{4}{5}\ ;$$

而（X_1=1，X_2=1）是不可能事件，故 $P\{X_1=1,X_2=1\}=0$。于是得 X_1 和 X_2 的联合概率分布表如下：

X_2 \ X_1	0	1
0	1/10	4/5
1	1/10	0

(2) 易得 X_1 和 X_2 的分布列分别为

X_1	0	1
P	1/5	4/5

X_2	0	1
P	9/10	1/10

从而解得

$EX_1=4/5$， $EX_2=1/10$， $E(X_1)^2=4/5$， $E(X_2)=1/10$， $E(X_1X_2)=0$

$$DX_1=E(X_1)^2-(EX_1)^2=\frac{4}{5}-(\frac{4}{5})^2=\frac{4}{25}$$

$$DX_2=E(X_2)^2-(EX_2)^2=\frac{1}{10}-(\frac{1}{10})^2=\frac{9}{100}$$

Cov(X_1 , X_2)= $E(X_1X_2)-EX_1\,EX_2=-2/25$

$$\rho=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=-\frac{2/25}{(2/5)\times(3/10)}=-\frac{2}{3}$$

22．在线段[0，1]上任取 n 个点，试求其中最远两点的距离的数学期望。

解：设 X_i 为在[0，1]上任取的第 i 个点的坐标，$i=1,2,\cdots,n$。则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且其分布为[0，1]上的均匀分布，即其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

令 $X_{(1)}=\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$，$X_{(n)}=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$，则最远两点的距离为 $X=X_{(n)}-X_{(1)}$，从而 $EX=EX_{(n)}-EX_{(1)}$

因为 $F_{X_{(n)}}(x)=[F\ (x)]^n=\begin{cases}0, & x<0\\ x^n, & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

$$F_{X_{(1)}}(x)=1-[F\ (x)]^n=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-(1-x)^n, & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

所以 $f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$f_{X_{(1)}}(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，从而

$$EX_{(n)}=\int_0^1 nx^n dx=\frac{n}{n+1}\qquad EX_{(1)}=\int_0^1 nx(1-x)^{n-1}dx=\frac{1}{n+1}$$

故 $EX=\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n-1}{n+1}$ 为所求。

23．向平面区域 G：$0\le y\le 4-x^2, x\ge 0$ 内随机等可能地投掷一点。求：（1）该点到 y 轴距离的分布密度；

（2）过该点作 y 轴的平行线与 x 轴，y 轴及曲线所围成的曲边梯形面积的数学期望及方差。

解：如图 2-8 所示，G 的面积为

$$A=\int_0^2(4-x^2)dx=\frac{16}{3}$$

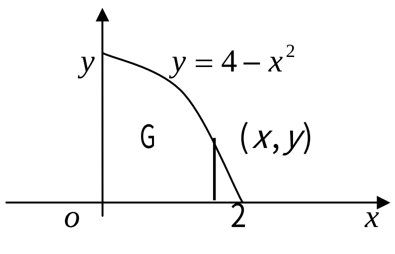


图 2-8

因此由得 X、Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3/16, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

而

（1）随机点到 y 轴的距离（即随机变量 X 的概率密度）由于

$$f_X(x)=\int_0^{4-x^2}3/16dy=\frac{3(4-x^2)}{16},\quad (0\le x\le 2)$$

故 $$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3(4-x^2)}{16}, & 0\le x\le 2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（2）由题设所围成的曲边梯形面积为 $Z=\int_0^X(4-x^2)dx=4X-\frac{1}{3}X^3$

$$EZ=E(4X-\frac{1}{3}X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}(4x-\frac{1}{3}x^3)f_X(x)dx=\int_0^2(4x-\frac{x^3}{3})\frac{3(4-x^2)}{16}dx=\frac{8}{3}$$

$$DZ=EZ^2-(EZ)^2=\int_0^2(4x-\frac{x^3}{3})^2\frac{3(4-x^2)}{16}dx-(\frac{8}{3})^2=\frac{64}{27}$$

24．将 n 只球（$1\sim n$ 号）随机地放入 n 只盒子（$1\sim n$ 号）中去，一只盒子装一只球，将一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对，记 X 为配对的个数，球 EX 和 DX。

解：引入随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & 第i号球恰好装入第i号盒子,\\ 0, & 第i号球不是装入第i号盒子,\end{cases}$ 则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，X_i 服从（0—1）分布，$EX_i=1/n(i=1,2,\cdots,n)$，于是 $EX=\sum_{i=1}^{n}EX_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1$，又

$DX_i=\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})$，而由于 $\{X_i\}$ 之间不独立，所以

$$DX=D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}DX_i+2\sum_{i<j}Cov(X_i,X_j)$$

又 $X_iX_j=\begin{cases}1, & 第i号球与第j号球均配上对\\ 0, & 其它情况\end{cases}$，所以 $X_iX_j\sim(0—1)$ 分布，于是

$$E(X_iX_j)=P(X_iX_j=1)=P(X_i=1,X_j=1)=P(X_i=1)P(X_j=1\mid X_i=1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$$

所以，$Cov(X_i,X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n-1)}$

$$2\sum_{i<j}Cov(X_i,X_j)=2\times\frac{C_n^2}{n^2(n-1)}=\frac{1}{n}$$

故 $$DX=n\times\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{n}=1$$