第四章 大数定律与中心极限定理习题参考答案与提示

1. 试利用切比雪夫不等式证明：能以 0.97 的概率断言，将一枚均匀硬币连续抛 1000 次，其出现正面 H 的次数在 400 至 600 次之间。

答案与提示 将一枚均匀硬币连续抛 1000 次可看成是 1000 重贝努利试验，因此 1000 次试验中出现正面 H 的次数服从二项分布。设 X 表示 1000 次试验中出现正面 H 的次数，则 X 是一个随机变量，而所求的概率为

$$P\{400 < X < 600\} = 0.975$$

2. 已知随机变量 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

试利用切比雪夫不等式估计事件 $\{|X - E(X)| < 1.5\}$ 的概率。

答案与提示：要利用切比雪夫不等式，需先根据给出的随机变量分布列求得相应的期望和方差。

$$P\{|X - EX| < 1.5\} \geq 1 - \frac{DX}{1.5^2} \approx 0.729。$$

3. 设 X 为非负随机变量，试证；当 $t > 0$ 时，

$$P(X < t) \geq 1 - \frac{EX}{t}。$$

答案与提示：$P\{X < t\} = F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$，而 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$，代入要证的不等式的两侧比较，会发现证明实质上是对积分限的放大或缩小，以及变量间暗含的大小关系，很容易就联系到对切比雪夫不等式的证明技巧。

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为一列独立同分布的随机变量，且 k 阶原点矩存在，记作 $EX^k = \mu_k$，。试证明：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{p} \mu_k$。

答案与提示：由题设条件 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为一列独立同分布的随机变量，以及 $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i^k = \frac{1}{n}\cdot n\mu_k = \mu_k$，可见所证结论与辛钦大数定律的结论非常类似，即知证明应用独立同分布的辛钦大数定律。

5. 在一家保险公司里 10000 个人参加保险，每人每年付 12 元保险费，在一年内一个人死亡的概率为 0.006，死亡者家属可向保险公司领得 1000 元。问：

（1）保险公司亏本的概率多大？

（2）保险公司一年的利润不少于 40000 元的概率多大？

答案与提示：对于每个人，在一年内要么死亡，要么不死亡，只有这两种可能性，

因此考虑 10000 个人在一年中是否死亡可看成 10000 重贝努利试验，故死亡人数服从二项分布。因此应用棣莫弗-拉普拉斯极限定理解决该问题。

若设一年中死亡的人数为 X ，每人的死亡概率就为 $p=0.006$ ，从而

$$X \sim B(10000,\quad 0.006),$$

保险公司每年收入$10000\times 12=120000$元，需支付$1000X$ 元。

（1）保险公司亏本的概率近似为零。

（2）一年中保险公司以近 99.52%的概率获利 40000 元以上。

6.100 道单项选择题，每题 1 分，考生每次从四个答案中选一个正确答案。若一考生全为乱猜，试用切比雪夫不等式和正态逼近两种方法计算其成绩 15 分至 35 分之间的概率约为多少？

答案与提示：设 X 表示考生成绩（选对个数），则 X 服从二项分布 $B(100,1/4)$ ，由切比雪夫不等式可得

$$P\{15<X<35\}=0.8125\text{；}$$

正态逼近法可得

$$P\{15<X<35\}=0.9792\text{。}$$

7．某厂有 400 台同类机器，各台机器发生故障的概率均为 0.02，假设各台机器工作是相互独立的，试求机器发生故障的台数不小于 2 的概率。

答案与提示：设 X 为机器发生故障的台数，则由题意知 $X\sim B(400,\ 0.02)$ ，问题化为求 $P\{X\geq 2\}$。以下用三种方法来求解：

（1）利用二项分布， $P\{X\geq 2\}\approx 0.9972$

（2）用泊松分布作近似计算，$P\{X\geq 2\}\approx 0.9970$

（3）用正态分布作近似计算（利用定理 4-5 及 4-4 的推论 1），$P\{X\geq 2\}\approx 0.8958$。

8．假设 X_1，X_2，$\cdots$，X_n 是来自总体 X 的简单随机抽样，已知 $EX^k=\alpha_k$ $(k=1，2，3，4)$，证明当n充分大时，随机变量 $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布，并指出其分布参数。

答案与提示：由假设条件可知， ${X_1}^2$，${X_2}^2$，$\cdots$，${X_n}^2$ 为来自总体 X^2 的简单随机抽样，则 ${X_1}^2$，${X_2}^2$，$\cdots$，${X_n}^2$ 相互独立且与 X^2 同分布，即 $EX_i^2=\alpha_2(i=1,2,\cdots,n)$，$DX_i^2=E(X_i^2)^2-(EX_i^2)^2=\alpha_4-\alpha_2^2$，则由独立同分布的中心极限定理证明之。