第2章 整数规划

2.1 概论

1. 整数规划的定义

数学规划中的变量（部分或全部）限制为整数时，称为整数规划。若在线性规划模型中，变量限制为整数，则称为整数线性规划。目前所流行的求解整数规划的方法，往往只适用于整数线性规划。目前还没有一种方法能有效地求解一切整数规划。

2. 整数规划的分类

如不加特殊说明，一般指整数线性规划。对于整数线性规划模型大致可分为两类

（1）变量全限制为整数时，称**纯（完全）整数规划**。

（2）变量部分限制为整数的，称**混合整数规划**。

3. 整数规划特点

（1） 原线性规划有最优解，当自变量限制为整数后，其整数规划解出现下述情况

ⅰ）原线性规划最优解全是整数，则整数规划最优解与线性规划最优解一致。

ⅱ）整数规划无可行解。

例 2.1 原线性规划为

$$\min \quad z = x_1 + x_2,$$
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 4x_2 = 5, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

其最优实数解为 $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{4}, \min z = \frac{5}{4}$，而对应的整数规划无可行解。

ⅲ）有可行解（当然就存在最优解），但最优解值变差。

例 2.2 原线性规划为

$$\min \quad z = x_1 + x_2,$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 4x_2 = 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

其最优实数解为 $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{3}{2}, \min z = \dfrac{3}{2}$。

若限制为整数得 $x_1 = 1, x_2 = 1, \min z = 2$。

3. 整数规划特点

（2） 整数规划最优解不能按照实数最优解简单取整而获得。

4. 求解方法分类

（1）分枝定界法—可求纯或混合整数线性规划。

（2）割平面法—可求纯或混合整数线性规划。

（3）隐枚举法—求解"0-1"整数规划。

i）过滤隐枚举法；

ii）分枝隐枚举法。

（4）匈牙利法—解决指派问题（"0-1"规划特殊情形）。

（5）蒙特卡洛法—求解各种类型规划。

2.2 $0-1$型整数规划

$0-1$型整数规划是整数规划中的特殊情形，它的变量x_j仅取值 0 或 1。这时x_j称为$0-1$变量，或称二进制变量。x_j仅取值 0 或 1 这个条件可由下述约束条件

$$0 \le x_j \le 1，且为整数，$$

所代替，是和一般整数规划的约束条件形式一致的。

2.2.1 相互排斥的约束条件

有两种运输方式可供选择，但只能选择一种运输方式，或者用车运输，或者用船运输。用车运输的约束条件为 $5x_1+4x_2\le 24$，用船运输的约束条件为 $7x_1+3x_2\le 45$。即有两个相互排斥的约束条件

$$5x_1+4x_2\le 24 \text{ 或 } 7x_1+3x_2\le 45,$$

为了统一在一个问题中，引入0－1变量

$$y=\begin{cases}1,\text{当采取船运方式时}\\0,\text{当采取车运方式时}\end{cases},$$

则上述约束条件可改写为

$$\begin{cases}5x_1+4x_2\le 24+yM,\\7x_1+3x_2\le 45+(1-y)M,\\y=0\text{或}1.\end{cases}$$

其中M是充分大的数。

把相互排斥的约束条件改成普通的约束条件，未必需要引进充分大的正实数，例如相互排斥的约束条件

$$x_1 = 0 \text{ 或 } 500 \le x_1 \le 800,$$

可改写为

$$\begin{cases} 500y \le x_1 \le 800y, \\ y = 0\text{或}1. \end{cases}$$

如果有m个互相排斥的约束条件

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n\le b_i,\ i=1,2,\cdots,m.$$

为了保证这m个约束条件只有一个起作用，我们引入m个$0-1$变量

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个约束起作用}\\ 0, & \text{第}i\text{个约束不起作用}\end{cases},\quad i=1,2,\cdots,m,$$

和一个充分大的常数M,

则$m+1$个约束条件

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \le b_i+(1-y_i)M,$$

$$i=1,2,\cdots,m, \qquad (2.1)$$

$$y_1+\cdots+y_m=1, \qquad (2.2)$$

就合于上述的要求。这是因为，由于（2.2），m个y_i中只有一个能取 1 值，设$y_{i^*}=1$，代入（2.1），就只有$i=i^*$的约束条件起作用，而别的式子都是多余的。

2.2.2 关于固定费用的问题（Fixed Cost Problem）

在讨论线性规划时，有些问题是要求使成本为最小。那时总设固定成本为常数，并在线性规划的模型中不必明显列出。但有些固定费用（固定成本）的问题不能用一般线性规划来描述，但可改变为混合整数规划来解决，见下例。

例 2.3 某工厂为了生产某种产品，有几种不同的生产方式可供选择，如选定的生产方式投资高（选购自动化程度高的设备），由于产量大，因而分配到每件产品的变动成本就降低；反之，如选定的生产方式投资低，将来分配到每件产品的变动成本可能增加。所以必须全面考虑。

今设有三种方式可供选择，令

$j=1,2,3$分别表示三种方式；

x_j表示采用第j种方式时的产量；

c_j表示采用第j种方式时每件产品的变动成本；

k_j表示采用第j种方式时的固定成本。

为了说明成本的特点，暂不考虑其它约束条件。采用各种生产方式的总成本分别为

$$P_j=\begin{cases} k_j+c_jx_j, & \text{当} x_j>0 \\ 0, & \text{当} x_j=0 \end{cases}，\quad j=1,2,3.$$

在构成目标函数时，为了统一在一个问题中讨论，现引入$0-1$变量y_j，

$$y_j=\begin{cases}1, & \text{当采用第}j\text{种生产方式，即}x_j>0\text{时，}\\ 0, & \text{当不采用第}j\text{种生产方式，即}x_j=0\text{时.}\end{cases}\quad j=1,2,3 \qquad (2.3)$$

于是目标函数

$$\min z=(k_1y_1+c_1x_1)+(k_2y_2+c_2x_2)+(k_3y_3+c_3x_3),$$

可表为下述 3 个线性约束条件

$$y_j\varepsilon\le x_j\le y_jM,\quad j=1,2,3, \qquad (2.4)$$

其中ε是一个充分小的正常数，M是个充分大的正常数。

（2.4）式说明，当 $x_j > 0$ 时 y_j 必须为 1；当 $x_j = 0$ 时只有 y_j 为 0 时才有意义，所以(2.4)式完全可以代替(2.3)式。

2.2.3 指派问题的数学模型

例 2.4 拟分配n人去干n项工作，每人干且仅干一项工作，若分配第i人去干第j项工作，需花费c_{ij}单位时间，问应如何分配工作才能使工人花费的总时间最少?

引入0－1变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{人干第}j\text{项工作}\\ 0, & \text{第}i\text{人不干第}j\text{项工作}\end{cases},\quad i,j=1,\cdots,n.$$

上述指派问题的数学模型为

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1, & i=1,\cdots,n,\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1, & j=1,\cdots,n,\\ x_{ij}=0\text{ 或 }1, & i,j=1,\cdots,n.\end{cases}$$

上述指派问题的可行解可以用一个矩阵表示，其每行每列均有且只有一个元素为 1，其余元素均为 0；还可以用$1,\cdots,n$中的一个置换表示。

指派问题的求解可以使用匈牙利算法，或拍卖算法等算法。

2.3 蒙特卡洛法（随机取样法）

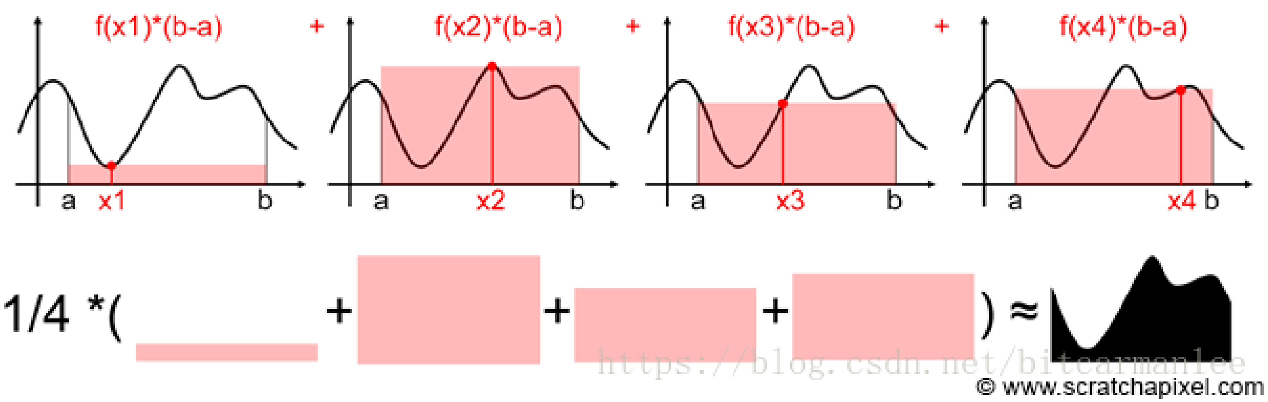
蒙特卡洛方法也称为计算机随机模拟方法，它源于世界著名的赌城—摩纳哥的 Monte Carlo（蒙特卡洛）。它是基于对大量事件的统计结果来实现一些确定性问题的计算。

蒙特卡洛方法可分为两类：

- 所求解的问题本身具有内在的随机性，借助计算机的运算能力可以直接模拟这种随机的过程。
- 所求解问题可以转化为某种随机分布的特征数，比如随机事件出现的概率，或者随机变量的期望值。用于求解复杂的多维积分问题。

使用蒙特卡洛方法必须使用计算机生成相关分布的随机数，Matlab 给出了生成各种随机数的命令。

当我们在[a,b]之间随机取一点x时，它对应的函数值就是f(x)。接下来我们就可以用f(x) * (b - a)来粗略估计曲线下方的面积，也就是我们需要求的积分值，当然这种估计（或近似）是非常粗略的。



在此图中，做了四次随机采样，得到了四个随机样本x_1, x_2, x_3, x_4，并且得到了这四个样本的$f(x_i)$的值分别为$f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$。对于这四个样本，每个样本能求一个近似的面积值，大小为$f(x_i) * (b-a)$。为什么能这么干么？对照图下面那部分很容易理解，每个样本都是对原函数f的近似，所以我们认为$f(x)$的值一直都等于$f(x_i)$。

按照图中的提示，求出上述面积的数学期望，就完成了蒙特卡洛积分。

例 2.5 $y=x^2$，$y=12-x$与x轴在第一象限围成一个曲边三角形。设计一个随机实验，求该图形面积的近似值。

解 设计的随机试验的思想如下，在矩形区域$[0,12]\times[0,9]$上产生服从均匀分布的10^7个随机点，统计随机点落在曲边三角形的频数，则曲边三角形的面积近似为上述矩形的面积乘以频率。

计算的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
```

均匀分布

```
x=unifrnd(0,12,[1,10000000]);
y=unifrnd(0,9,[1,10000000]);
pinshu=sum(y<x.^2 & x<=3)+sum(y<12-x & x>=3);
area_appr=12*9*pinshu/10^7
```

运行结果在 49.5 附近，由于是随机模拟，每次的结果都是不一样的。

尽管整数规划由于限制变量为整数而增加了难度；然而又由于整数解是有限个，于是为枚举法提供了方便。当然，当自变量维数很大和取值范围很宽情况下，企图用显枚举法（即穷举法）计算出最优值是不现实的，但是应用概率理论可以证明，在一定计算量的情况下，用蒙特卡洛法完全可以得出一个满意解。

例 2.6　已知非线性整数规划为

$$\max \quad z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_5^2 - 8x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 0 \le x_i \le 99, \quad (i = 1, \cdots, 5), \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 400, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 \le 800, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 200, \\ x_3 + x_4 + 5x_5 \le 200. \end{cases}$$

下面就分析随机取样采集10^6个点计算时，应用概率理论来估计一下可信度。不失一般性，假定一个整数规划的最优点不是孤立的奇点。

假设目标函数落在高值区的概率分别为 0.01，0.00001，则当计算10^6个点后，有任一个点能落在高值区的概率分别为

$$1-0.99^{1000000}\approx 0.99\cdots 99(100_{\text{多位}}),$$

$$1-0.99999^{1000000}\approx 0.999954602.$$

解 （1）首先编写 M 文件 mente.m 定义目标函数 f 和约束向量函数 g，程序如下

```
function [f,g]=mengte(x);
f=x(1)^2+x(2)^2+3*x(3)^2+4*x(4)^2+2*x(5)-8*x(1)-2*x(2)-
3*x(3)-...
x(4)-2*x(5);
g=[sum(x)-400
x(1)+2*x(2)+2*x(3)+x(4)+6*x(5)-800
2*x(1)+x(2)+6*x(3)-200
x(3)+x(4)+5*x(5)-200];
```

（2）编写如下Matlab程序求问题的解。

```
p0=0;rand('state',sum(clock));   %初始化随机数发生器
tic      %计时开始
for i=1:10^6
     x=randi([0,99],1,5);
     [f,g]=mengte(x);
     if all(g<=0)
          if p0<f
               x0=x; p0=f; %记录下当前较好的解
          end
     end
end
x0,p0
toc      %计时结束
```

1行5列 0~99之间

本题可以使用LINGO软件求得精确的全局最优解，程序如下

```
model:
sets:
row/1..4/:b;
col/1..5/:c1,c2,x;
link(row,col):a;
endsets
data:
c1=1,1,3,4,2;
c2=-8,-2,-3,-1,-2;
a=1 1 1 1 1
   1 2 2 1 6
   2 1 6 0 0
   0 0 1 1 5;
b=400,800,200,200;
enddata
max=@sum(col:c1*x^2+c2*x);
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))<b(i));
@for(col:@gin(x));
@for(col:@bnd(0,x,99));
end
```

求得的全局最优解为 $x_1 = 50$，$x_2 = 99$，$x_3 = 0$，$x_4 = 99$，$x_5 = 20$，最优值 $z = 51568$。

2.4 整数线性规划的计算机求解

整数规划问题的求解使用 Lingo 等专用软件比较方便。对于整数线性规划问题，也可以使用 Matlab 的 intlinprog 函数求解，但使用 Matlab 软件求解数学规划问题有一个缺陷，必须把所有的决策变量化成一维决策向量，实际上对于多维变量的数学规划问题，用 Matlab 软件求解，需要做一个变量替换把多维变量化成一维决策向量，变量替换后，约束条件是很难写出的，而使用 Lingo 软件求解数学规划问题是不需要做变换的，使用起来相对比较容易。

例 2.7　求解下列指派问题，已知指派矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

解　这里需要把二维决策变量 x_{ij}（$i,j=1,\cdots,5$）变成一维决策变量 y_k（$k=1,\cdots,25$），编写的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
c=[3 8 2 10 3;8 7 2 9 7;6 4 2 7 5
    8 4 2 3 5;9 10 6 9 10];
c=c(:); a=zeros(10,25); intcon=1:25;
for i=1:5
    a(i,(i-1)*5+1:5*i)=1;
    a(5+i,i:5:25)=1;
end
b=ones(10,1); lb=zeros(25,1); ub=ones(25,1);
x=intlinprog(c,intcon,[],[],a,b,lb,ub);
x=reshape(x,[5,5])
```

列向量

整数变量

求得最优指派方案为$x_{15}=x_{23}=x_{32}=x_{44}=x_{51}=1$
最优值为 21。

例 2.8 求解如下的混合整数规划问题

$$\min z = -3x_1 - 2x_2 - x_3,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_3 = 0 \text{或} 1. \end{cases}$$

解　求解的 Matlab 程序如下

```
clc, clear
f=[-3;-2;-1]; intcon=3; %整数变量的地址
a=ones(1,3); b=7;
aeq=[4 2 1]; beq=12;
lb=zeros(3,1); ub=[inf;inf;1]; %x(3)为 0-1 变量
x=intlinprog(f,intcon,a,b,aeq,beq,lb,ub)
```

求得的最优解为 $x_1=0$，$x_2=5.5$，$x_3=1$；目标函数的最优值 $z=-12$。