

第5章

微分方程模型

当我们描述实际对象的某些特性随时间(或空间)而演变的过程、分析它的变化规律、预测它的未来性态、研究它的控制手段时,通常要建立对象的动态模型.建模时首先要根据建模目的和对问题的具体分析作出简化假设,然后按照对象内在的或可以类比的其他对象的规律列出微分方程,求出方程的解并将结果翻译回实际对象,就可以进行描述、分析、预测或控制了.我们在1.5节建立的胃肠道和血液中药量变化的模型,大致就是这个过程.

事实上,在微分方程课程中,解所谓应用题时我们已经遇到简单的建立动态模型问题,例如“一质量为 m 的物体自高 h 处自由下落,初速是0,设阻力与下落速度的平方成正比,比例系数为 k ,求下落速度随时间的变化规律”,又如“容器内有盐水100 l,内含盐10 kg,今以3 l/min的速度从一管放进净水,以2 l/min的速度从另一管抽出盐水,设容器内盐水浓度始终是均匀的,求容器内含盐量随时间变化的规律”.本章讨论的动态模型与这些问题的主要区别是,所谓微分方程应用题大多是物理或几何方面的典型问题,假设条件已经给出,只需用数学符号将已知规律表示出来,即可列出方程,求解的结果就是问题的答案,答案是惟一的,已经确定的.而本章的模型主要是非物理领域的实际问题,要分析具体情况或进行类比才能给出假设条件.作出不同的假设,就得到不同的方程,所以是事先没有答案的.求解结果还要用来解释实际现象并接受检验.

5.1 传染病模型

随着卫生设施的改善、医疗水平的提高以及人类文明的不断发展,诸如霍乱、天花等曾经肆虐全球的传染性疾疾病已经得到有效的控制.但是一些新的、不断变异着的传染病病毒却悄悄向人类袭来.20世纪80年代,十分险恶的艾滋病毒开始肆虐全球,至今仍在蔓延;2003年春来历不明的SARS病毒突袭人间,给人们的生命财产带来极大的危害,长期以来,建立传染病的数学模型来描述传染病的传播过程,分析受感染人数的变化规律,探索制止传染病蔓延的手段等,一直是各国有关专家和官员关注的课题.

不同类型传染病的传播过程有其各自不同的特点,弄清这些特点需要相当多的病理知识,这里不可能从医学的角度——分析各种传染病的传播,而只是按照一般的传播机理建立几种模型^[15,16,46].

模型 1 在这个最简单的模型中,设时刻 t 的病人人数 $x(t)$ 是连续、可微函数,并且每天每个病人有效接触(足以使人致病的接触)的人数为常数 λ ,考察 t 到 $t + \Delta t$ 病人人数的增加,就有

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \lambda x(t) \Delta t$$

再设 $t=0$ 时有 x_0 个病人,即得微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

方程(1)的解为

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} \quad (2)$$

结果表明,随着 t 的增加,病人人数 $x(t)$ 无限增长,这显然是不符合实际的.

建模失败的原因在于:在病人有效接触的人群中,有健康人也有病人,而其中只有健康人才可以被传染为病人,所以在改进的模型中必须区别这两种人.

模型 2 (SI 模型) 假设条件为

1. 在疾病传播期内所考察地区的总人数 N 不变,既不考虑生死,也不考虑迁移.人群分为易感染者 (Susceptible) 和已感染者 (Infective) 两类(取两个词的第 1 个字母,称之为 SI 模型),以下简称健康者和病人.时刻 t 这两类人在总人数中所占的比例分别记作 $s(t)$ 和 $i(t)$.

2. 每个病人每天有效接触的平均人数是常数 λ , λ 称为日接触率.当病人与健康者有效接触时,使健康者受感染变为病人.

根据假设,每个病人每天可使 $\lambda s(t)$ 个健康者变为病人,因为病人数为 $Ni(t)$,所以每天共有 $\lambda N s(t) i(t)$ 个健康者被感染,于是 $\lambda N s i$ 就是病人数 Ni 的增加率,即有

$$N \frac{di}{dt} = \lambda N s i \quad (3)$$

又因为

$$s(t) + i(t) = 1 \quad (4)$$

再记初始时刻($t=0$)病人的比例为 i_0 ,则

$$\frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i), \quad i(0) = i_0 \quad (5)$$

方程(5)是 logistic 模型(详细描述参见 5.6 节).它的解为

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1\right)e^{-\lambda t}} \quad (6)$$

$i(t) \sim t$ 和 $\frac{di}{dt} \sim i$ 的图形如图 1 和图 2 所示。

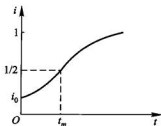


图 1 SI 模型的 $i \sim t$ 曲线

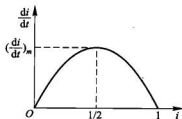


图 2 SI 模型的 $\frac{di}{dt} \sim i$ 曲线

由(5),(6)式及图 1、图 2 可知,第一,当 $i = 1/2$ 时 $\frac{di}{dt}$ 达到最大值 $\left(\frac{di}{dt}\right)_m$, 这个时刻为

$$t_m = \lambda^{-1} \ln \left(\frac{1}{i_0} - 1 \right) \quad (7)$$

这时病人增加得最快,可以认为是医院的门诊量最大的一天,预示着传染病高潮的到来,是医疗卫生部门关注的时刻。 t_m 与 λ 成反比,因为日接触率 λ 表示该地区的卫生水平, λ 越小卫生水平越高。所以改善保健设施、提高卫生水平可以推迟传染病高潮的到来。第二,当 $t \rightarrow \infty$ 时 $i \rightarrow 1$,即所有人终将被传染,全变为病人,这显然不符合实际情况。其原因是模型中没有考虑到病人可以治愈,人群中的健康者只能变成病人,病人不会再变成健康者。

为了修正上述结果,必须重新考虑模型的假设,下面两个模型中我们讨论病人可以治愈的情况。

模型 3(SIS 模型) 有些传染病如伤风、痢疾等愈后免疫力很低,可以假定无免疫性,于是病人被治愈后变成健康者,健康者还可以被感染再变成病人,所以这个模型称 SIS 模型。

SIS 模型的假设条件 1,2 与 SI 模型相同,增加的条件为

3. 每天被治愈的病人数占病人总数的比例为常数 μ ,称为日治愈率。病人治愈后成为仍可被感染的健康者。显然 $1/\mu$ 是这种传染病的平均传染期。

不难看出,考虑到假设 3,SI 模型的(3)式应修正为

$$N \frac{di}{dt} = \lambda N s i - \mu N i \quad (8)$$

(4) 式不变, 于是(5)式应改为

$$\frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i, \quad i(0) = i_0 \quad (9)$$

我们不去求解方程(9) (虽然它的解可以解析地表出), 而是通过图形分析 $i(t)$ 的变化规律. 定义

$$\sigma = \lambda/\mu \quad (10)$$

注意到 λ 和 $1/\mu$ 的含义, 可知 σ 是整个传染期内每个病人有效接触的平均人数, 称为接触数.

利用 σ , 方程(9)可以改写作

$$\frac{di}{dt} = -\lambda i \left[i - \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right] \quad (11)$$

由方程(11)容易先画出 $\frac{di}{dt} \sim i$ 的图形 (图3, 图5), 再画出 $i \sim t$ 的图形 (图4, 图6).

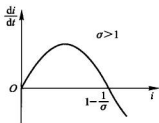


图3 SIS模型的 $\frac{di}{dt} \sim i$ 曲线 ($\sigma > 1$)

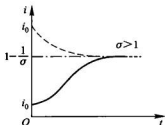


图4 SIS模型的 $i \sim t$ 曲线 ($\sigma > 1$),
其中虚线是 $i_0 > 1 - \frac{1}{\sigma}$ 的情况

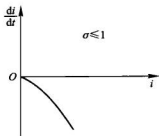


图5 SIS模型的 $\frac{di}{dt} \sim i$ 曲线 ($\sigma \leq 1$)

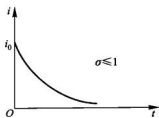


图6 SIS模型的 $i \sim t$ 曲线 ($\sigma \leq 1$)

不难看出, 接触数 $\sigma = 1$ 是一个阈值. 当 $\sigma > 1$ 时 $i(t)$ 的增减性取决于 i_0 的大小 (见图4), 但其极限值 $i(\infty) = 1 - \frac{1}{\sigma}$ 随 σ 的增加而增加 (试从 σ 的含义给

予解释);当 $\sigma \leq 1$ 时病人比例 $i(t)$ 越来越小,最终趋于 0,这是由于传染期内经有效接触从而使健康者变成的病人数不超过原来病人数的缘故。

SI 模型可视为本模型的特例,请读者考虑它相当于本模型中 μ 或 σ 取何值的情况。

模型 4(SIR 模型) 大多数传染病如天花、流感、肝炎、麻疹等治愈后均有很强的免疫力,所以病愈的人既非健康者(易感染者),也非病人(已感染者),他们已经退出传染系统.这种情况比较复杂,下面将详细分析建模过程。

模型假设

1. 总人数 N 不变. 人群分为健康者、病人和病愈免疫的移出者(Removed)三类,称 SIR 模型. 时刻 t 三类人在总人数 N 中占的比例分别记作 $s(t)$, $i(t)$ 和 $r(t)$ 。

2. 病人的日接触率为 λ , 日治愈率为 μ (与 SI 模型相同), 传染期接触数为 $\sigma = \lambda/\mu$ 。

模型构成

由假设 1 显然有

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1 \quad (12)$$

根据条件 2 方程(8)仍成立. 对于病愈免疫的移出者而言应有

$$N \frac{dr}{dt} = \mu Ni \quad (13)$$

再记初始时刻的健康者和病人的比例分别是 s_0 ($s_0 > 0$) 和 i_0 ($i_0 > 0$) (不妨设移出者的初始值 $r_0 = 0$), 则由(8), (12), (13)式, SIR 模型的方程可以写作

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i, & i(0) = i_0 \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si, & s(0) = s_0 \end{cases} \quad (14)$$

方程(14)无法求出 $s(t)$ 和 $i(t)$ 的解析解,我们先作数值计算。

数值计算 在方程(14)中设 $\lambda = 1, \mu = 0.3, i(0) = 0.02, s(0) = 0.98$, 用 MATLAB 软件编程:

```
function y = ill(t,x)
a = 1; b = 0.3;
y = [a * x(1) * x(2) - b * x(1), -a * x(1) * x(2)]';

ts = 0:50;
x0 = [0.02, 0.98];
[t,x] = ode45('ill',ts,x0); [t,x]
```

```
plot(t,x(:,1),t,x(:,2)),grid,pause
plot(x(:,2),x(:,1)),grid,
```

输出的简明计算结果列入表 1, $i(t), s(t)$ 的图形见图 7, 图 8 是 $i-s$ 的图形, 称为相轨线, 初值 $i(0) = 0.02, s(0) = 0.98$ 相当于图 8 中的 P_0 点, 随着 t 的增加, (s, i) 沿轨线自右向左运动. 由表 1、图 7、图 8 可以看出, $i(t)$ 由初值增长至约 $t = 7$ 时达到最大值, 然后减少, $t \rightarrow \infty, i \rightarrow 0; s(t)$ 则单调减少, $t \rightarrow \infty, s \rightarrow 0.0398$.

表 1 $i(t), s(t)$ 的数值计算结果

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$i(t)$	0.020 0	0.039 0	0.073 2	0.128 5	0.203 3	0.279 5	0.331 2	0.344 4	0.324 7
$s(t)$	0.980 0	0.952 5	0.901 9	0.816 9	0.692 7	0.543 8	0.399 5	0.283 9	0.202 7
t	9	10	15	20	25	30	35	40	45
$i(t)$	0.286 3	0.241 8	0.078 7	0.022 3	0.006 1	0.001 7	0.000 5	0.000 1	0
$s(t)$	0.149 3	0.114 5	0.054 3	0.043 4	0.040 8	0.040 1	0.039 9	0.039 9	0.039 8

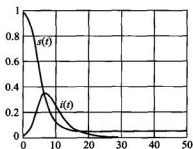


图 7 $i(t), s(t)$ 图形

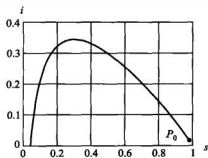


图 8 $i-s$ 图形(相轨线)

为了分析 $i(t), s(t)$ 的一般变化规律, 需要进行相轨线分析.

相轨线分析 我们在数值计算和图形观察的基础上, 利用相轨线讨论解 $i(t), s(t)$ 的性质.

$s-i$ 平面称为相平面, 相轨线在相平面上的定义域 $(s, i) \in D$ 为

$$D = \{ (s, i) \mid s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1 \} \quad (15)$$

在方程(14)中消去 dt , 并注意到 σ 的定义(10), 可得

$$\frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1, \quad i|_{s=s_0} = i_0 \quad (16)$$

容易求出方程(16)的解为

$$i = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0} \quad (17)$$

在定义域 D 内, (17) 式表示的曲线即为相轨线, 如图 9 所示, 其中箭头表示了随着时间 t 的增加 $s(t)$ 和 $i(t)$ 的变化趋向.

下面根据 (14), (17) 式和图 9 分析 $s(t)$, $i(t)$ 和 $r(t)$ 的变化情况 ($t \rightarrow \infty$ 时它们的极限值分别记作 s_* , i_* 和 r_*).

1. 不论初始条件 s_0, i_0 如何, 病人终将消失, 即

$$i_* = 0 \quad (18)$$

其证明如下.

首先, 由 (14), $\frac{ds}{dt} \leq 0$, 而 $s(t) \geq 0$, 故 s_* 存

在; 由 (13), $\frac{dr}{dt} \geq 0$, 而 $r(t) \leq 1$, 故 r_* 存在; 再

由 (12) 知 i_* 存在.

其次, 若 $i_* = \varepsilon > 0$, 则由 (12), 对于充分大的 t 有 $\frac{dr}{dt} > \mu \frac{\varepsilon}{2}$, 这将导致 $r_* = \infty$, 与 r_* 存在相矛盾.

从图形上看, 不论相轨线从 P_1 或从 P_2 点出发, 它最终将与 s 轴相交 (t 充分大).

2. 最终未被感染的健康者的比例是 s_* , 在 (17) 式中令 $i = 0$ 得到, s_* 是方程

$$s_0 + i_0 - s_* + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_*}{s_0} = 0 \quad (19)$$

在 $(0, 1/\sigma)$ 内的根. 在图形上, s_* 是相轨线与 s 轴在 $(0, 1/\sigma)$ 内交点的横坐标.

3. 若 $s_0 > 1/\sigma$, 则 $i(t)$ 先增加, 当 $s = 1/\sigma$ 时, $i(t)$ 达到最大值

$$i_m = s_0 + i_0 - \frac{1}{\sigma} (1 + \ln \sigma s_0) \quad (20)$$

然后 $i(t)$ 减小且趋于 0, $s(t)$ 则单调减小至 s_* , 如图 9 中由 $P_1(s_0, i_0)$ 出发的轨线.

4. 若 $s_0 \leq 1/\sigma$, 则 $i(t)$ 单调减小至零, $s(t)$ 单调减小至 s_* , 如图 9 中由 $P_2(s_0, i_0)$ 出发的轨线. (3, 4 的证明留作习题 1)

可以看出, 如果仅当病人比例 $i(t)$ 有一段增长的时期才认为传染病在蔓延, 那么 $1/\sigma$ 是一个阈值, 当 $s_0 > 1/\sigma$ (即 $\sigma > 1/s_0$) 时传染病就会蔓延. 而减小传染期接触数 σ , 即提高阈值 $1/\sigma$, 使得 $s_0 \leq 1/\sigma$ (即 $\sigma \leq 1/s_0$), 传染病就不会蔓延 (健康者比例的初始值 s_0 是一定的, 通常可认为 s_0 接近 1).

并且, 即使 $s_0 > 1/\sigma$, 从 (19), (20) 式可以看出, σ 减小时, s_* 增加 (通过作图分析), i_m 降低, 也控制了蔓延的程度. 我们注意到, 在 $\sigma = \lambda/\mu$ 中, 人们的卫生水

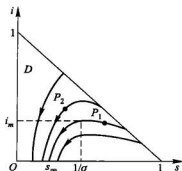


图 9 SIR 模型的相轨线

平越高,日接触率 λ 越小;医疗水平越高,日治愈率 μ 越大,于是 σ 越小,所以提高卫生水平和医疗水平有助于控制传染病的蔓延。

从另一方面看, $\sigma s = \lambda s \cdot 1/\mu$ 是传染期内一个病人传染的健康者的平均数,称为交换数,其含义是一个病人被 σs 个健康者交换。所以当 $s_0 \leq 1/\sigma$, 即 $\sigma s_0 \leq 1$ 时,必有 $\sigma s \leq 1$ 。既然交换数不超过 1,病人比例 $i(t)$ 绝不会增加,传染病不会蔓延。

群体免疫和预防 根据对 SIR 模型的分析,当 $s_0 \leq 1/\sigma$ 时传染病不会蔓延。所以为制止蔓延,除了提高卫生和医疗水平,使阈值 $1/\sigma$ 变大以外,另一个途径是降低 s_0 ,这可以通过比如预防接种使群体免疫的办法做到。

忽略病人比例的初始值 i_0 ,有 $s_0 = 1 - r_0$ 。于是传染病不会蔓延的条件 $s_0 \leq 1/\sigma$ 可以表为

$$r_0 \geq 1 - \frac{1}{\sigma} \quad (21)$$

这就是说,只要通过群体免疫使初始时刻的移出者比例(即免疫者比例) r_0 满足(21)式,就可以制止传染病的蔓延。

这种办法生效的前提条件是免疫者要均匀分布在全体人口中,实际上这是很难做到的。据估计,当时印度等国天花传染病的接触数 $\sigma = 5$,由(21)式至少要有 80% 的人接受免疫才行。据世界卫生组织报告,即使花费大量资金提高 r_0 ,也因很难做到免疫者的均匀分布,使得天花直到 1977 年才在全世界根除。而有些传染病的 σ 更高,根除就更加困难。

数值验证与估量 根据上面的分析,制止传染病蔓延有两种手段,一是提高卫生水平和医疗水平,即降低日接触率 λ ,提高日治愈率 μ ;二是群体免疫,即提高移出者比例的初值 r_0 (相当于降低健康者比例的初值 s_0)。下面作一点数值计算,验证并估量这两种办法的效果。不妨用最终未感染的健康者的比例 s_∞ 和病人比例的最大值 i_m ,作为传染病蔓延程度的度量指标。

给定不同的 λ, μ, s_0, i_0 ,用(19)式计算 s_∞ ,用(20)式计算 i_m (当 $s_0 > 1/\sigma$),结果列入表 2。

表 2 s_∞ 和 i_m 的计算结果

λ	μ	$1/\sigma$	s_0	i_0	s_∞	i_m
1.0	0.3	0.3	0.98	0.02	0.039 8	0.344 9
0.6	0.3	0.5	0.98	0.02	0.196 5	0.163 5
0.5	0.5	1.0	0.98	0.02	0.812 2	0.020 0
0.4	0.5	1.25	0.98	0.02	0.917 2	0.020 0

λ	μ	$1/\sigma$	s_0	i_0	s_∞	i_∞
1.0	0.3	0.3	0.70	0.02	0.084 0	0.168 5
0.6	0.3	0.5	0.70	0.02	0.305 6	0.051 8
0.5	0.5	1.0	0.70	0.02	0.652 8	0.020 0
0.4	0.5	1.25	0.70	0.02	0.675 5	0.020 0

可以看出,对于一定的 s_0 ,降低 λ ,提高 μ ,会使 s_∞ 变大, i_∞ 变小;对于一定的 λ, μ ,降低 s_0 (即提高 r_0),也会使 s_∞ 变大(但是 $s_0 \leq 1/\sigma$ 时 s_∞ 反而小了,你能解释吗?), i_∞ 变小. 当然, $s_0 \leq 1/\sigma$ 时, i_∞ 始终等于 i_0 ,即传染病不会蔓延.

我们看到在 SIR 模型中, $\sigma = \lambda/\mu$ 是一个重要参数,实际上 λ, μ 很难估计,而当一次传染病结束以后,可以获得 s_0 和 s_∞ ,在(19)式中略去很小的 i_0 ,即有

$$\sigma = \frac{\ln s_0 - \ln s_\infty}{s_0 - s_\infty} \quad (22)$$

当同样的传染病到来时,如果估计 λ, μ 没有多大变化,那么就可以用上面得到的 σ 分析这次传染病的蔓延过程.

模型验证 上世纪初在印度孟买发生的一次瘟疫中几乎所有病人都死亡了. 死亡相当于移出传染系统,有关部门记录了每天移出者的人数,即有了 $\frac{dr}{dt}$ 的实际数据, Kermack 等人用这组数据对 SIR 模型作了验证.

首先,由方程(12), (14)可以得到(习题2)

$$s(t) = s_0 e^{-\sigma r(t)} \quad (23)$$

$$\frac{dr}{dt} = \mu(1 - r - s_0 e^{-\sigma r}) \quad (24)$$

当 $r \leq 1/\sigma$ 时,取(24)式右端 $e^{-\sigma r}$ 的 Taylor 展开的前3项,在初始值 $r_0 = 0$ 下的解为

$$r(t) = \frac{1}{s_0 \sigma^2} \left[(s_0 \sigma - 1) + \alpha \tanh \left(\frac{\alpha \mu t}{2} - \varphi \right) \right] \quad (25)$$

其中 $\alpha^2 = (s_0 \sigma - 1)^2 + 2s_0 i_0 \sigma^2$, $\tanh \varphi = \frac{s_0 \sigma - 1}{\alpha}$. 从(25)式容易算出

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha^2 \mu}{2s_0 \sigma^2 \coth^2 \left(\frac{\alpha \mu t}{2} - \varphi \right)} \quad (26)$$

然后取定参数 s_0, σ 等,画出(26)式的图形,如图10中的曲线,实际数据在图中用圆点表示,可以看出,理论曲线与实际数据吻合得相当不错.

被传染比例的估计 在一次传染病的传播过程中,被传染人数的比例是健康者人数比例的初始值 s_0 与 s_∞ 之差,记作 x ,即

$$x = s_0 - s_\infty \quad (27)$$

当 i_0 很小, s_0 接近于 1 时,由 (19) 式可得

$$x + \frac{1}{\sigma} \ln \left(1 - \frac{x}{s_0} \right) \approx 0 \quad (28)$$

取对数函数 Taylor 展开的前 2 项,有

$$x \left(1 - \frac{1}{s_0 \sigma} - \frac{x}{2s_0^2 \sigma} \right) \approx 0 \quad (29)$$

记 $s_0 = \frac{1}{\sigma} + \delta$, δ 可视为该地区人口比例超过阈值 $1/\sigma$ 的部分. 当 $\delta \ll 1/\sigma$ 时, (29) 式给出

$$x \approx 2s_0 \sigma \left(s_0 - \frac{1}{\sigma} \right) \approx 2\delta \quad (30)$$

这个结果表明,被传染人数比例约为 δ 的 2 倍. 对一种传染病,当该地区的卫生和医疗水平不变,即 σ 不变时,这个比例就不会改变. 而当阈值 $1/\sigma$ 提高时, δ 减小,于是这个比例就会降低.

评注 本节介绍的传染病模型从几个方面很好地体现了模型的改进,建模的目的性,以及方法的配合.

第一,最初建立的模型 1 基本上不能用,修改假设后得到的模型 2 虽有所改进,但仍不符合实际. 进一步修改假设,并针对不同情况建立的模型 3,4 才是比较成功的.

第二,模型 3,4 的可取之处在于它们比较全面地达到了建模的目的,即描述传播过程,分析感染人数的变化规律,预测传染病高潮到来时刻,度量传染病蔓延的程度并探索制止蔓延的手段.

第三,对于比较复杂的模型 4,采用了数值计算、图形观察与理论分析相结合的方法,先有感性认识(表 1,图 7,图 8),再用相轨线作理论分析,最后进行数值验证和估算. 可以看作计算机技术与建模方法的巧妙配合.

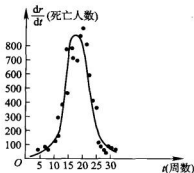


图 10 SIR 模型的理论曲线
与实际数据

5.2 经济增长模型

发展经济、提高生产力主要有以下手段:增加投资、增加劳动力、技术革新. 这里暂不考虑技术革新的作用,一是因为在经济发展的初期(如资本主义早期社会)或者在不太长的时期内,技术相对稳定,二是由于技术革新量化比较困难.