

数字逻辑

- 3-4学时

A. 今天去邦盛

B. 今天天气好

则 C. 今天不上课

条件(因)

结论(果)

逻辑运算

A. 今天去郊游

B. 今天天气好

C. 今天不上课

概念

B. 今天天气好

并且

C. 今天不上课

则

A. 今天去郊游

条件(因)

结论(果)

逻辑运算

B. 今天天气好

并且

C. 今天不上课

则

A. 今天去郊游

逻辑变量

逻辑代数

2.1 概念

逻辑运算

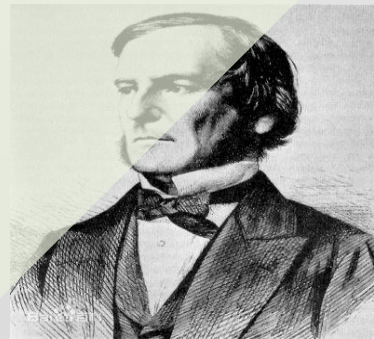
- 是指条件与结论之间的关系，对因果关系进行分析的一种运算
- 结果不表示数制大小，而表示逻辑概念成立还是不成立

逻辑变量

- 逻辑代数是通过逻辑变量表示命题的。

逻辑代数

- 实现逻辑运算的数学工具。
- 英国人乔治·布尔创立，又称布尔代数



2.2 逻辑运算

◆ 基本逻辑关系（三种）

- 逻辑与 \bullet AND

- 逻辑或 $+$ OR

- 逻辑非 \overline{A} NOT

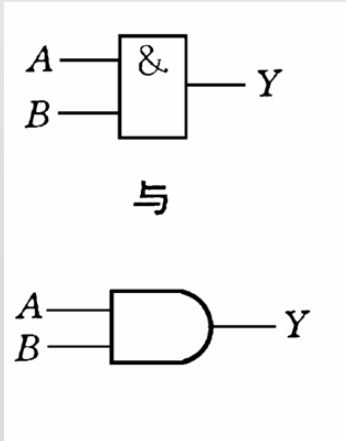
- 逻辑异或 \oplus XOR

基本逻辑运算

与 AND •

- 条件同时具备，结果发生
- $Y = A \text{ AND } B = A \& B = A \cdot B = AB$

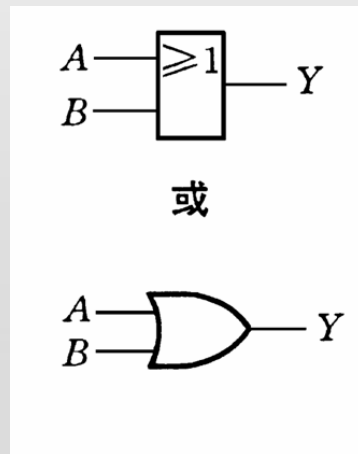
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



或 OR +

- 条件之一具备，结果发生
- $Y = A \text{ OR } B = A + B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



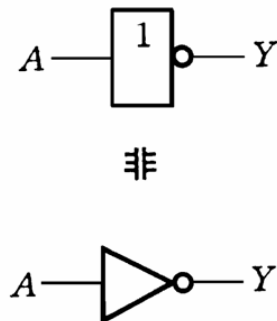
基本逻辑运算

非 NOT '

- 条件不具备，结果发生

$$Y = A' = \text{NOT } A$$

A	Y
0	1
1	0



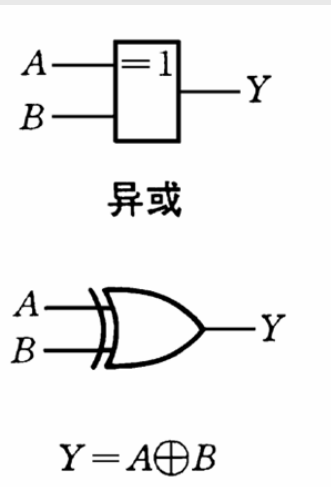
- 矩阵轮廓符号
- 特定外形符合

基本逻辑运算

异或

- $Y = A \oplus B = A' B + A B'$

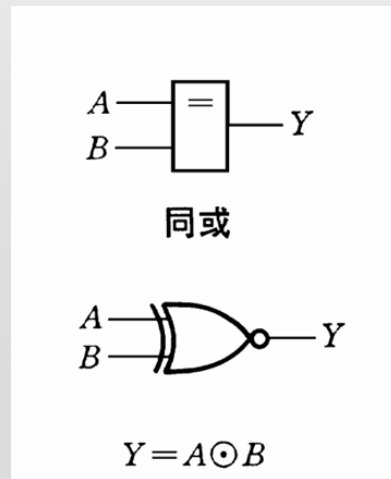
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



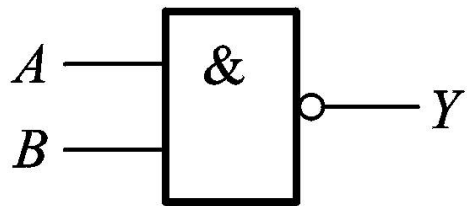
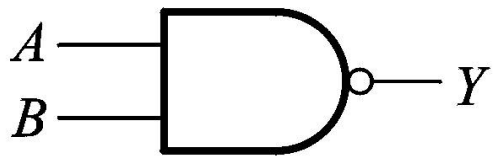
同或

- $Y = A \odot B = A' B' + A B$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

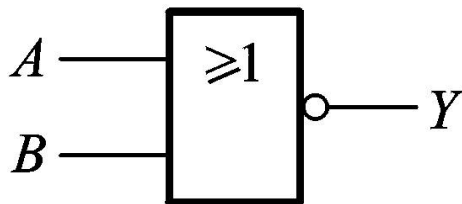
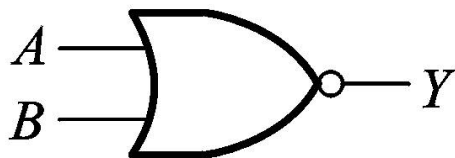


几种常用的复合逻辑运算



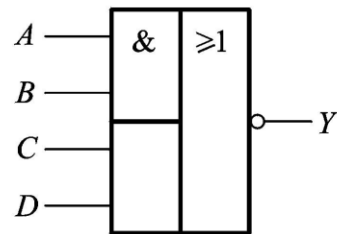
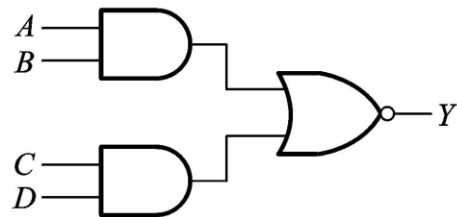
与非

$$Y=(A \cdot B)'$$



或非

$$Y=(A+B)'$$



与或非

$$Y=(A \cdot B + C \cdot D)'$$

2.3 逻辑代数公式

● 基本公式-----证明方法：推演 真值表

序号	公 式	序号	公 式
1	$0 A = 0$	10	$1' = 0; 0' = 1$
2	$1 A = A$	11	$1 + A = 1$
3	$A A = A$	12	$0 + A = A$
4	$A A' = 0$	13	$A + A = A$
5	$A B = B A$	14	$A + A' = 1$
6	$A (B C) = (A B) C$	15	$A + B = B + A$
7	$A (B + C) = A B + A C$	16	$A + (B + C) = (A + B) + C$
8	$(A B)' = A' + B'$	17	$A + B C = (A + B)(A + C)$
9	$(A')' = A$	18	$(A + B)' = A' B'$

变量与常量

重叠律

互补律

交换律

结合律

分配律

反演律/德·摩根

还原律

表2.3.1的布尔恒等式

公式证明方法

- 证明: $A + B C = (A + B)(A + C)$

真值表法

$$\begin{aligned}\text{右} &= (A+B)(A+C) \\ &= A + AB + AC + BC \\ &= A(1+B+C) + BC \\ &= A + BC = \text{左}\end{aligned}$$

公式推演法

ABC	BC	$A+BC$	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$
000	0	0	0	0	0
001	0	0	0	1	0
010	0	0	1	0	0
011	1	1	1	1	1
100	0	1	1	1	1
101	0	1	1	1	1
110	0	1	1	1	1
111	1	1	1	1	1

若干常用公式

序 号	公 式	
21	$A + AB = A$	$A(1 + B) = A$
22	$A + A'B = A + B$	$A + A'B = (A + A')(A + B) = A + B$ 两项加, 某项反为另一项因子, 可消除
23	$AB + AB' = A$	$A(A + B) = A + AB = A$ 与包含该变量的和相乘, 结果为该变量
24	$A(A + B) = A$	
25	$AB + A'C + BC = AB + A'C$ $AB + A'C + BCD = AB + A'C$	$AB + A'C + BC = AB + A'C + (A + A')BC$ $= AB + A'C + ABC + A'BC$ $= AB + A'C$ 两项包含A和A'因子, 则剩余因子构成的项多余
26	$A(AB)' = AB'; A'(AB)' = A'$	

逻辑代数基本定理

● 代入定理

- 在任何一个包含A的逻辑等式中，若以另外一个逻辑式代入式中A的位置，则等式依然成立。

● 举例：

$$A + BC = (A + B)(A + C)$$

$$\begin{aligned} A + B(CD) &= (A + B)(A + CD) \\ &= (A + B)(A + C)(A + D) \end{aligned}$$

$(A \cdot B)' = A' + B'$ 以 $B \cdot C$ 代入 B 则

$$\begin{aligned} (A \cdot B \cdot C)' &= A' + (BC)' \\ &= A' + B' + C' \end{aligned}$$

变换顺序 先括号, 然后乘, 最后加

● 反演定理

■ 对任一逻辑式 $Y \Rightarrow Y'$

● \Rightarrow +, + \Rightarrow ●,

0 \Rightarrow 1, 1 \Rightarrow 0,

原变量 \Rightarrow 反变量

反变量 \Rightarrow 原变量

$$Y = A(B + C) + CD$$

$$Y' = (A' + B'C')(C' + D')$$

$$= A'C' + B'C' + A'D' + B'C'D'$$

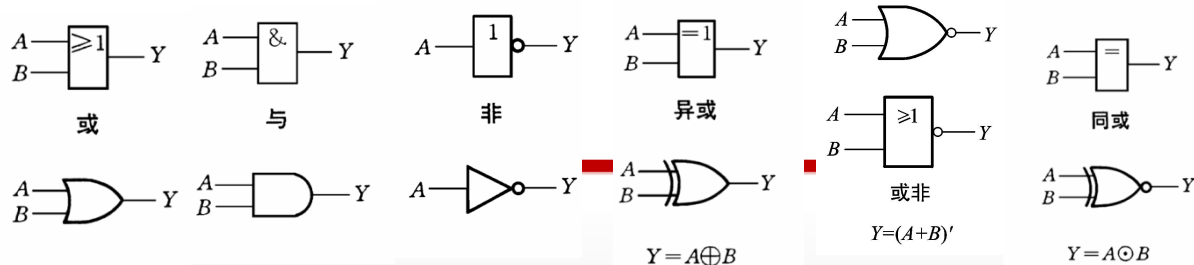
$$= A'C' + B'C' + A'D'$$

不属于单个变量的上的反号保留不变

$$Y = ((AB' + C)' + D)' + C$$

$$Y' = ((A' + B)C')'D')'C'$$

复习



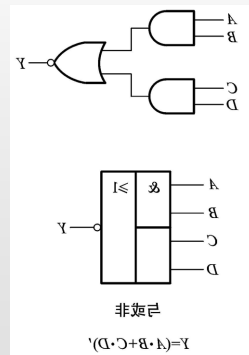
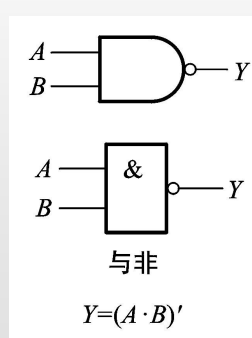
1、基本逻辑运算及符号

2、逻辑代数公式：

3、逻辑代数定理

代入、反演、对偶

序 号	公 式
21	$A + A B = A$
22	$A + A' B = A + B$
23	$A B + A B' = A$
24	$A (A + B) = A$
25	$A B + A' C + B C = A B + A' C$ $A B + A' C + B C D = A B + A' C$
26	$A (A B)' = A B'$; $A' (A B)' = A'$



序号	公 式	序号	公 式
		10	$1' = 0; 0' = 1$
1	$0 A = 0$	11	$1 + A = 1$
2	$1 A = A$	12	$0 + A = A$
3	$A A = A$	13	$A + A = A$
4	$A A' = 0$	14	$A + A' = 1$
5	$A B = B A$	15	$A + B = B + A$
6	$A (B C) = (A B) C$	16	$A + (B + C) = (A + B) + C$
7	$A (B + C) = A B + A C$	17	$A + B C = (A + B)(A + C)$
8	$(A B)' = A' + B'$	18	$(A + B)' = A' B'$
9	$(A')' = A$		

作业:

- $Y = ABC + DA' + BC(C + D)D$; 化简Y
- $Y = A + (BC' + D)'$, 求Y' 以及(Y)''

- 5-6学时

2.5 逻辑函数及其表示方法

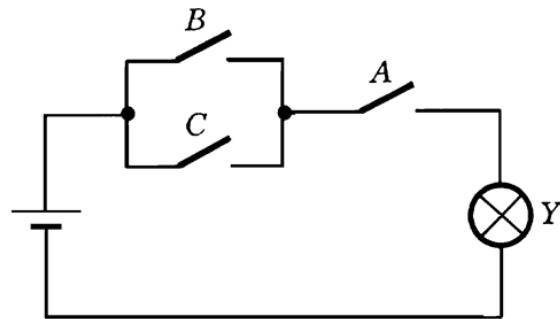
● 逻辑函数

- 若以逻辑变量为**输入**，运算结果为**输出**，则输入变量值确定以后，输出的取值也随之而定。输入/输出之间是一种函数关系。

- $Y = F(A, B, C, \dots)$

● 注：在二值逻辑中，

- 输入/输出都只有两种取值0/1。



$$Y = A \cdot (B + C)$$

逻辑函数的表示方法

真值表

逻辑式

逻辑图

波形图

卡诺图

其他

● 问题：裁判电路

- 比赛规则，一名主裁判，两名副裁判，每个裁判判定运动员动作合格或不合格。要求必须两人以上（且必须包含主裁判）判定运动员合格，最后结果才为成功，否则为失败。



分析

- 输出Y：1 合格；0为不合格
- 输入
 - 主裁：A；副裁：B、C。
 - ABC取值：1 合格；0 不合格

逻辑函数的表示方法

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

真值表

1. 找出真值表中使 $Y=1$ 的输入变量取值组合。
2. 每组输入变量取值对应一个乘积项，其中取值为1的写原变量，取值为0的写反变量。
3. 将这些变量相加即得 Y 。

$AB'C$

ABC'

ABC



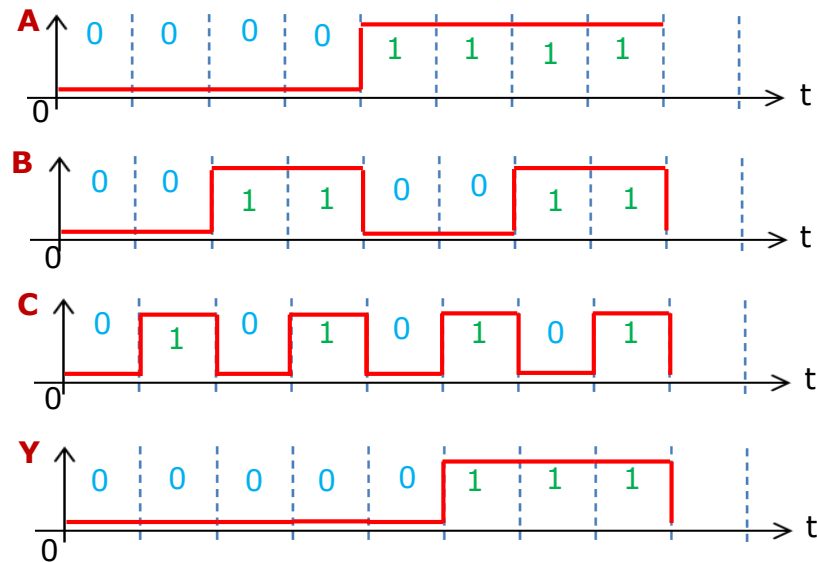
$$Y = AB'C + ABC' + ABC$$
$$= A(B + C)$$

逻辑式

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

真值表

波形图

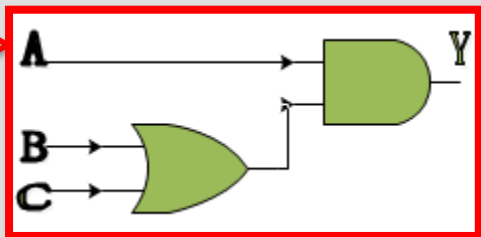


相互转换

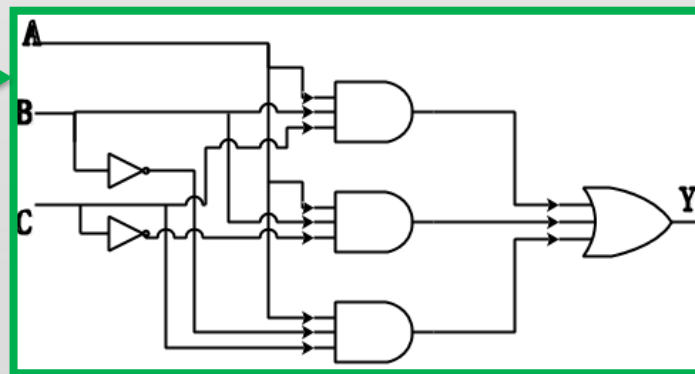
$$Y = AB'C + ABC' + ABC$$

$$= A(B + C)$$

逻辑图



逻辑式



逻辑函数的表示形式（续）---标准逻辑式

最小项之和

- 最小项m
 - m是**乘积项**
 - 包含**n个**因子
 - n个变量均以原变量和反变量的形式在m中**出现一次**
 - 对于n变量函数有 **2^n 个最小项**

$A'B'C', A'B'C, A'BC', A'BC$
 $AB'C', AB'C, ABC', ABC$ ($2^3 = 8$ 个)

最大项之积

- 最大项M
 - M是**相加项**;
 - 包含**n个**因子。
 - n个变量均以原变量和反变量的形式在M中**出现一次**
 - 对于n变量函数有 **2^n 个最大项**

$A' + B' + C', A' + B' + C, A' + B + C',$
 $A' + B + C, A + B' + C', A + B' + C,$
 $A + B + C', A + B + C$ ($2^3 = 8$ 个)

最小项的编号

最小项	取值	对应	编号
	$A B C$	十进制数	
$A'B'C'$	0 0 0	0	m_0
$A'B'C$	0 0 1	1	m_1
$A'BC'$	0 1 0	2	m_2
$A'BC$	0 1 1	3	m_3
$AB'C'$	1 0 0	4	m_4
$AB'C$	1 0 1	5	m_5
ABC'	1 1 0	6	m_6
ABC	1 1 1	7	m_7

- 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最小项的值为**1**。
(下标那一项为1)
- 全体最小项之和为**1**。
- 任何两个最小项之积为**0**。
- 两个**相邻**的最小项之和可以**合并**，消去一对因子，只留下公共因子。
(逻辑相邻)

最小项的性质

- 相邻：仅一个变量不同的最小项

如

$A'BC'$ 与 $A'BC$

。

$$A'BC' + A'BC = A'B(C' + C) = A'B$$

逻辑函数最小项和的形式

● 例;

$$\begin{aligned} Y(A, B, C) &= ABC' + BC \\ &= ABC' + BC(A + A') \\ &= \overset{110}{ABC'} + \overset{111}{ABC} + \overset{011}{A'BC} \\ &= \sum m(3, 6, 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(A, B, C, D) &= AB'C'D + BCD' + B'C \\ &= AB'C'D + (A + A')BCD' + B'C(D + D') \\ &= AB'C'D + ABCD' + A'BCD' + B'CD + B'CD' \\ &= AB'C'D + ABCD' + A'BCD' + (A + A')B'CD + (A + A')B'CD' \\ &= AB'C'D + ABCD' + A'BCD' + AB'CD + A'B'CD + AB'CD' + A'B'CD' \\ &= \sum m(2, 3, 6, 9, 10, 11, 14) \end{aligned}$$

逻辑函数形式的变换

与 - 或

$$Y = AC + B'C$$



yu -- fei

$$Y'' = (AC + B'C)'' = ((AC)'(B'C)')'$$

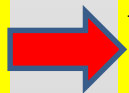


与 - 或 - 非

$$Y = AC + B'C = \sum m(2,5,6,7)$$

$$Y' = \sum m(0,1,3,4) = m_0 + m_1 + m_3 + m_4$$

$$\begin{aligned} Y &= (Y')' = (m_0 + m_1 + m_3 + m_4)' \\ &= (B'C' + A'C)' \end{aligned}$$



或 - 非

$$\begin{aligned} Y &= (B'C' + A'C)' \\ &= ((B + C)' + (A + C')')' \end{aligned}$$

复习

- 真值表、逻辑式、逻辑图、波形图含义及关系
- 逻辑函数标准形式：最小项 Σm 、最大项 ΠM
- 逻辑式间转化
 - 与或 \rightarrow 与非 $(Y')'$
 - 与或 \rightarrow 与或非 $Y = \Sigma m \rightarrow Y' = \Sigma m \rightarrow (Y')'$
 - 与或 \rightarrow 与或非 \rightarrow 与非 $Y = (AB + BC)' = ((A' + B')' + (B' + C')')'$

2.6 逻辑函数的化简

- 公式化简
 - 包含的乘积项已经最少，每个乘积项的因子也最少，称为**最简**的与-或逻辑式。
- 卡诺图
- Q-M法（略）

公式化简

- 反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子。

$$\begin{aligned} Y &= AC + B'C + BD' + CD' + A(B + C') + A'BCD' + AB'DE \\ &= \textcircled{AC} + B'C + \textcircled{BD'} + CD' + AB + \textcircled{AC'} + \textcircled{A'BCD'} + AB'DE \\ &= \underline{AC + AC'} + \textcircled{A'BCD' + BD'} + B'C + CD' + \underline{AB} + \underline{AB'DE} \\ &= \textcircled{A} + \textcircled{BD' + B'C + CD'} + \textcircled{AB'DE} \\ &= A + B'C + BD' \end{aligned}$$

卡诺图化简

- **实质**：将逻辑函数的最小项之和的以图形的方式表示出来
- 以 2^n 个小方块分别代表 n 变量的所有最小项，并将它们排列成矩阵，而且使几何位置相邻的两个最小项在逻辑上也
是相邻的（只有一个变量不同），就得到表示 n 变量全部最小项的卡诺图。

● 二变量卡诺图

		B	
		0	1
A	0	$A'B'$ m_0	$A'B$ m_1
	1	AB' m_2	AB m_3

三变量的卡诺图

		BC			
		00	01	11	10
A	0	m_0	m_1	m_3	m_2
	1	m_4	m_5	m_7	m_6

● 4变量的卡诺图

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	m_0	m_1	m_3	m_2
	01	m_4	m_5	m_7	m_6
	11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
	10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

卷纸

● 五变量的卡诺图

$AB \backslash CDE$									
		000	001	011	010	110	111	101	100
00		m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01		m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11		m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10		m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

如何使用卡诺图表示逻辑函数

1. 将函数表示为最小项之和的形式 $\sum m_i$ 。
2. 在卡诺图上与这些最小项对应的位置上添入**1**，其余地方添**0**。

$$Y(A, B, C, D) = A'B'C'D + A'BD' + AB' \\ = \sum m(1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 15)$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	0	0
	01	1	0	0	1
	11	0	1	1	0
	10	1	1	1	1

如何利用卡诺图化简

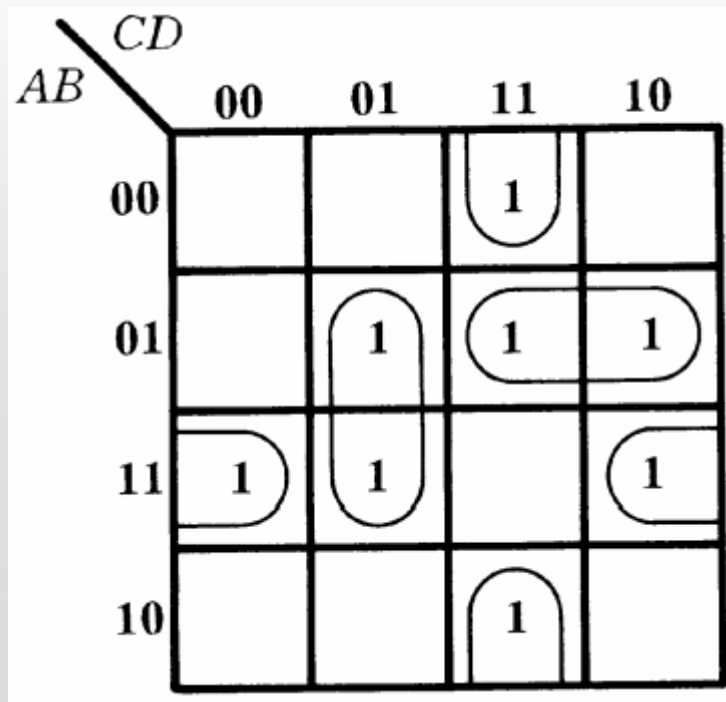
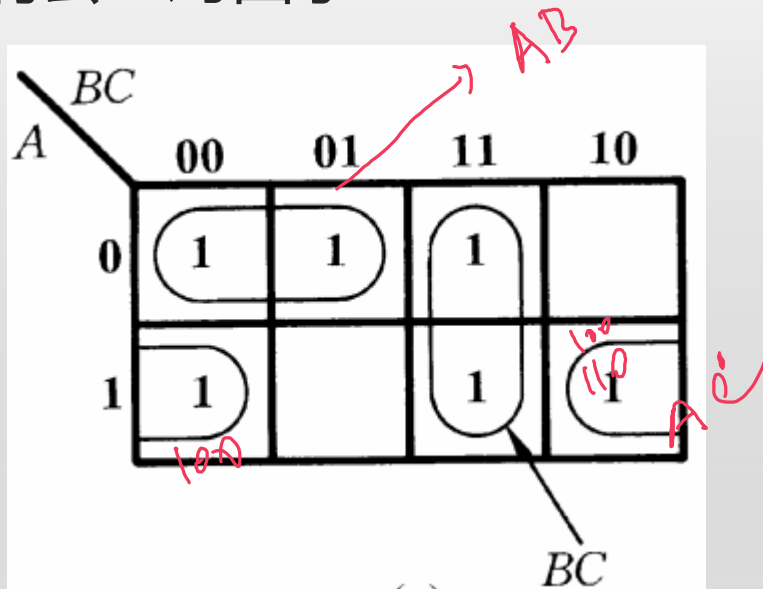
- **依据**：具有**相邻性**的最小项可**合并**，消去不同因子。
 - 在卡诺图中，最小项的相邻性可以从图形中直观地反映出来。
- **合并最小项的原则**：
 - **两个**相邻最小项可合并为一项，消去一对因子
 - **四个**排成矩形的相邻最小项可合并为一项，消去两对因子
 - **八个**相邻最小项可合并为一项，消去三对因子
 - 一般规则： 2^n 个最小项相邻，并排列成矩形，可以合并，消去 n 个因子

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	1
11	0	0	1	0
10	1	1	1	1

1 可以重复用

所有1都要圈出，形成个唯一
圈 1 2 4 8 16

- 两个相邻最小项可合并为一项，
消去一对因子



卡诺图化简的步骤和原则

- 用卡诺图化简函数步骤：

- 用卡诺图表示逻辑函数
- 找出可合并的最小项
- 化简后的乘积项相加
 - (项数最少，每项因子最少)

- 卡诺图化简的原则：

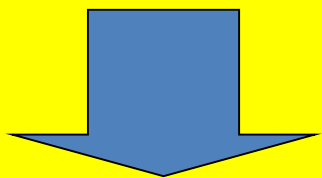
- 化简后的乘积项应包含函数式的所有最小项，即覆盖图中所有的1。
- 乘积项的数目最少，即圈成的矩形最少。
- 每个乘积项因子最少，即圈成的矩形最大。

例题

$$Y(A,B,C) = AC' + A'C + \underline{B'C} + BC'$$

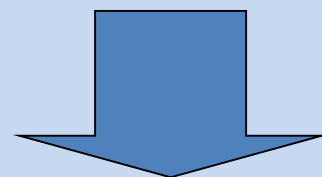
A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1



$$AB' + A'C + BC'$$

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1



$$AC' + A'B + B'C$$

化简结果不唯一

$$Y = ABC + ABD + AC'D + C' \cdot D' + AB'C + A'CD'$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

$$Y = ABC + ABD + AC'D + C' \cdot D' + AB'C + A'CD'$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

$$A + D'$$

2.7 具有无关项的逻辑函数及其化简



- **约束项**

- 在逻辑函数中，对输入变量取值不是任意的，而有所限制。当限制某些输入变量的取值不能出现时，可以用他们对应的最小项恒等于0来表示。

- **任意项**

- 在输入变量某些取值下，函数值为1或为0不影响逻辑电路的功能，在这些取值下为1的最小项称为任意项



逻辑函数中的无关项：约束项和任意项可以写入函数式，也可不包含在函数式中，因此统称为**无关项**。

无关项的用途

- 合理地利用无关项，可得更简单的化简结果。
- 加入（或去掉）无关项，应使化简后的项数最少，每项因子最少……
- 从卡诺图上直观地看，加入无关项的目的是为矩形圈最大，矩形组合数最少。

例: $Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C'D'$

给定约束条件为:

$$A'B'CD + A'BC'D + ABC'D' + AB'C'D + ABCD + ABCD' + AB'CD' = 0$$

或者 $Y = \sum m(1,7,8) + d(3,5,9,10,12,14,15)$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	X	0
01	0	X	1	0
11	X	0	X	X
10	1	X	0	X

Annotations: $A'D$ points to the circle around (0,1) and (1,1). AD' points to the vertical line around (0,0) and (0,1). The constraint terms are circled: (1,0), (1,1), (0,1), (1,0), (0,1), (1,0), and (1,1).

例: $Y(A, B, C, D) = \sum m(2, 4, 6, 8)$

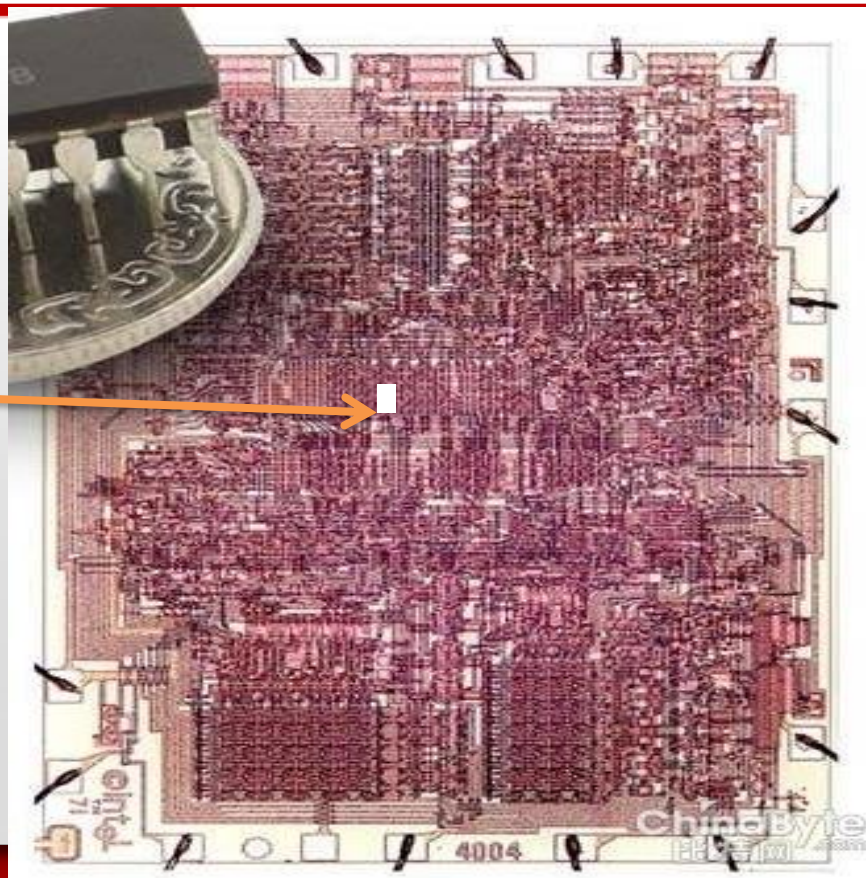
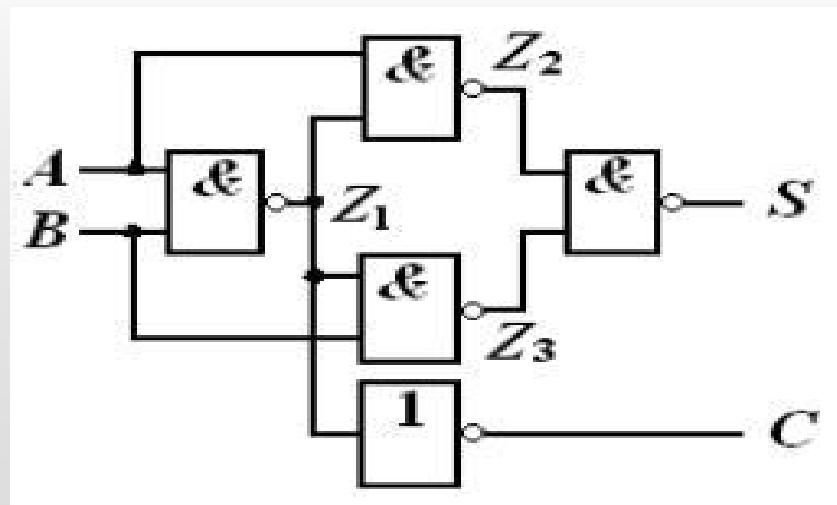
约束条项: $m_5 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{15} = 0$

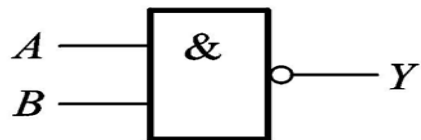
AB \ CD				
	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	x	0	1
11	x	x	x	x
10	1	0	x	x

$$Y = AD' + BD' + CD'$$

总结

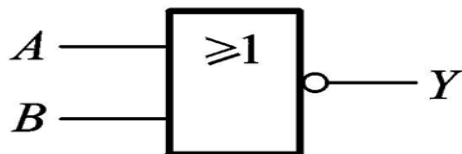
- **(工具)** 逻辑代数基础
 - 与、或、非、异或、同或、与或非、与非、或非的运算及符号
 - 逻辑代数的基本公式、常用公式和代入、反演定理
- **(建模)** 逻辑函数的表示方法
 - 真值表、逻辑图、逻辑式、波形图 及其相互转化
- **(实现和优化)** 逻辑函数变换和化简
 - 逻辑函数变换 与-或 \rightarrow 与或非、与非、或非变换
 - 最小项表达、卡诺图的化简、无关项卡诺图化简





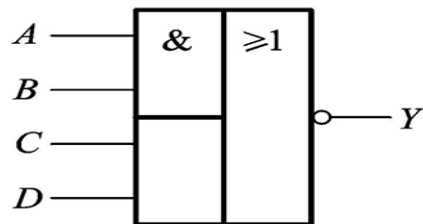
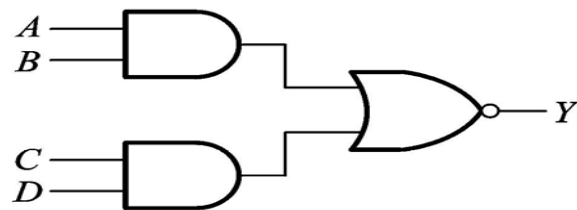
与非

$$Y=(A \cdot B)'$$



或非

$$Y=(A+B)'$$



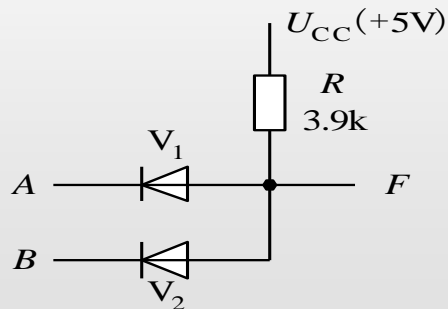
与或非

$$Y=(A \cdot B + C \cdot D)'$$

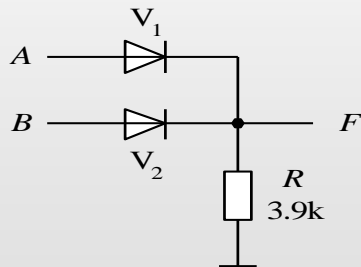
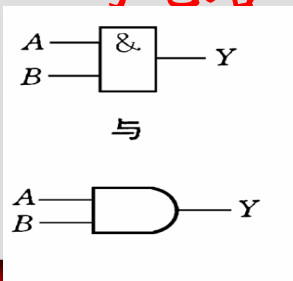
二进制逻辑运算的电路实现

上述运算可通过电子元器件实现

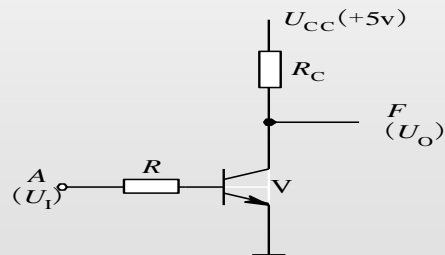
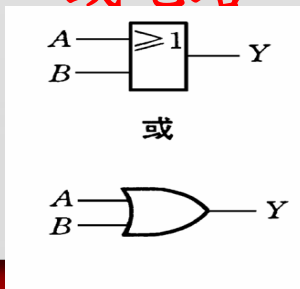
常用的电子元器件：二极管、三极管、电阻等



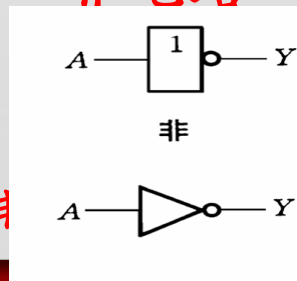
与电路



或电路



非电路



本节结束，谢谢学习

