第二章
非线性方程的数值解法

计算机科学系

本章内容

- § 2.1 引言
- § 2.2 二分法
- § 2.3 迭代法
- § 2.4迭代法收敛速度及加速收敛方法
- § 2.5牛顿迭代法
- § 2.6割线法
- § 2.7实用工具
- 小结
- 作业与实验

本章要求

- ■1. 理解方程有根的判别定理;
- ■2. 掌握二分法（Bisection Method）基本原理，掌握二分法（Bisection Method）的算法流程;
- ■3. 掌握理解单点迭代的基本思想，掌握迭代的收敛条件;
- ■4. 掌握Newton迭代的建立及几何意义，了解Newton迭代的收敛性;
- ■2. 掌握Newton下上法，掌握割线法，了解抛物线法。

§2.1 引言

■在科学研究中，常常会遇到非线性方程或非线性方程组的问题。例如解方程

$$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$$

或

$$e^{-x}-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0$$

一般的，记非线性方程为

$$f(x)=0$$

§2.1 引言

■一. 非线性方程相关定义

□方程 $f(x)=0$,

当 $f(x)$ 是一次多项式时，称 $f(x)=0$ 为线性方程;

否则称之为非线性方程。

- 若 $f(x)$ 是 n 次多项式，则称之为n次多项式方程或者代数方程
- 若 $f(x)$ 是超越函数，则称之为超越方程

指数 正余弦

§2.1 引言

■例

■代数方程

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0=0 \qquad n>1$$

■超越方程

$$f(x)=e^x+\sin x=0$$

§2.1 引言

- 方程
  - 单个方程
    - 线性的（一个解）
    - 非线性
      - 多项式（n个解）
      - 超越的（解的数目不定）
  - 方程组
    - 线性（一组解）
    - 非线性（多组解）

§ 2.1 引言

■(1)求解$f(x)=0$，就是找使得左右两侧相等的x，即方程的解x^*，也称为方程的根，也是$f(x)$的零点。

■(2)若$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，$g(x)\neq 0$，m为正整数，则称x^*为$f(x)=0$的m重根，或为$f(x)$的m重零点。

□$m=1$时，称x^*为$f(x)=0$的单根。

■(3)理论上已经证明

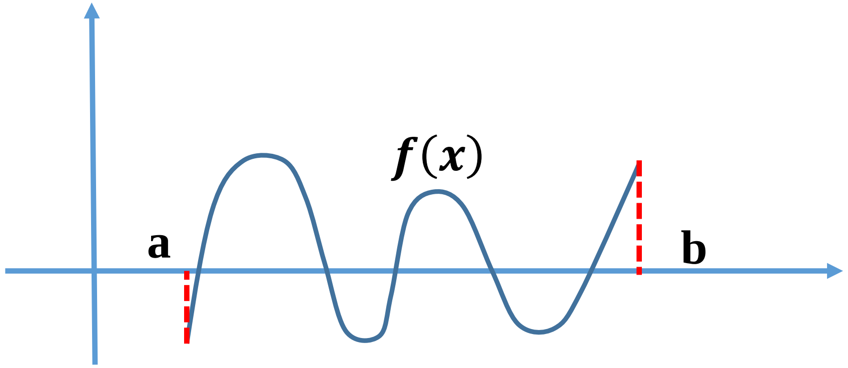
□次数$n\leq 4$的多项式方程，有根解析表达式；

□次数$n\geq 5$的多项式方程，根一般不能用解析表达式表示。

§2.1 引言

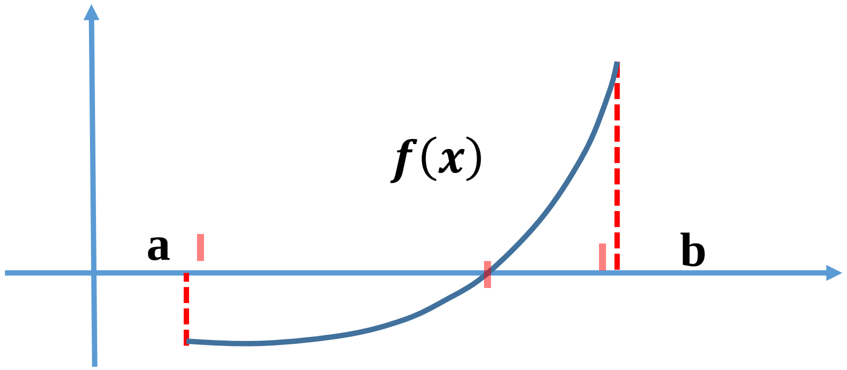
■有根区间

□若$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则$f(x)=0$在$[a,b]$上一定有根，区间$[a,b]$称为有根区间。



■隔根区间

□若再有$f(x)$在$[a,b]$上严格单调，则$f(x)=0$在$[a,b]$仅有一个实根，区间$[a,b]$称为隔根区间



§2.2 二分法（Bisection Method）

■二分法，又叫对分法

■一. 前提条件

设 $f(x) = 0$ 满足

（1）$f(x)$在$[a, b]$上连续

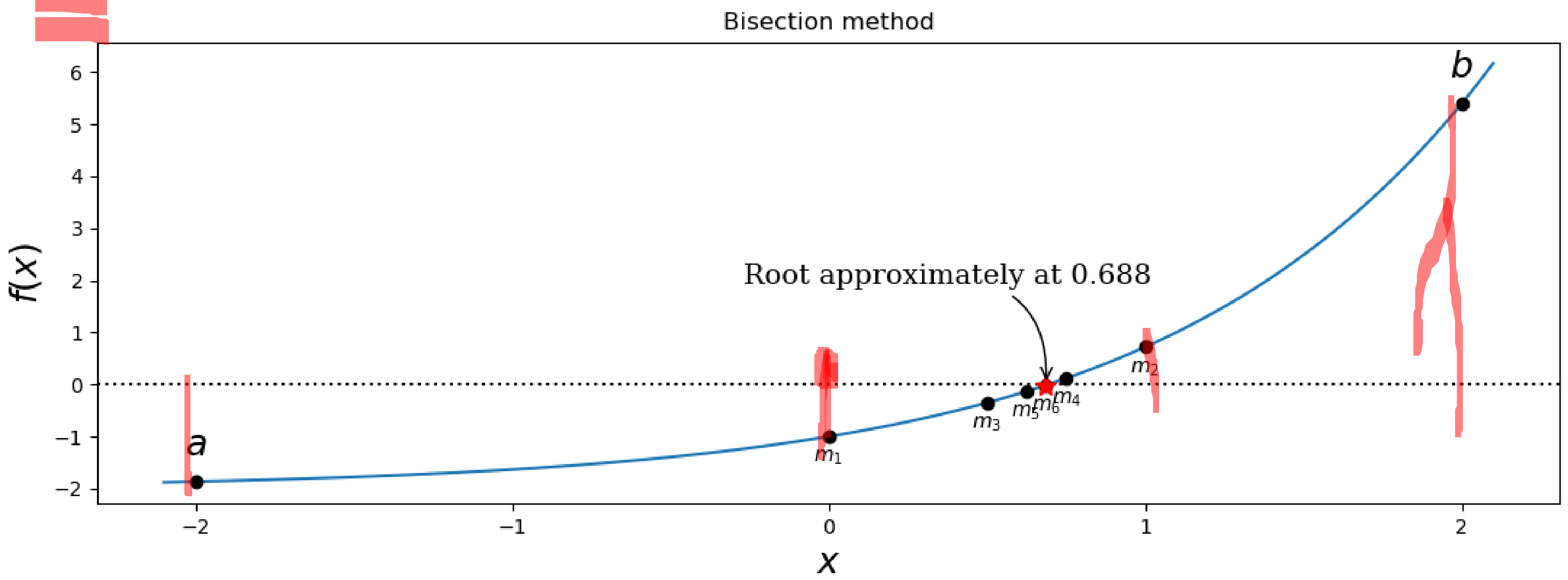
（2）$f(a) \times f(b) < 0$

（3）$f(x)$在$[a, b]$上严格单调，即$f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$

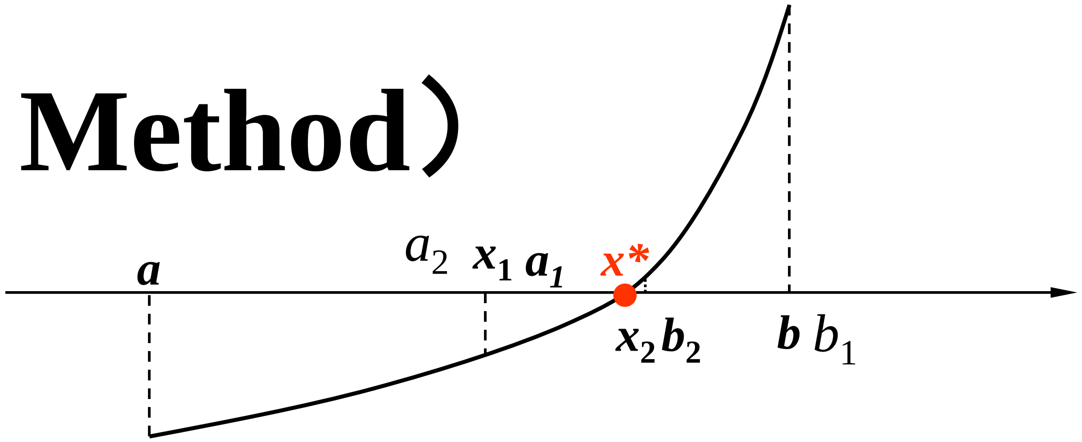
§2.2 二分法（Bisection Method）

■二. 基本思想

□通过计算隔根区间的中点，逐步将隔根区间缩小，从而得到方程的近似根数列$\{x_n\}$。



§ 2.2 二分法（Bisection Method）



■ 三. 方法

■ (1)取$[a, b]$中点记为$x_1 = (a+b)/2$，计算函数值$f(x_1)$

■ 若$f(x_1) = 0$，则$x^* = x_1$，计算结束；

■ 若$f(x_1) \neq 0$,

- □ 若$f(a)f(x_1) < 0$，则$x^* \in (a, x_1)$，此时令$a_1 = a, b_1 = x_1$;
- □ 否则，$f(a)f(x_1) > 0$，$x^* \in (x_1, b)$，此时令$a_1 = x_1, b_1 = b$。

■ 得到x^*所在的新区间$[a_1, b_1]$，其长度为$[a, b]$的一半，$(b-a)/2$。

■ (2)取$[a_1, b_1]$中点记为$x_2 = (a_1 + b_1)/2$，计算函数值$f(x_2)$

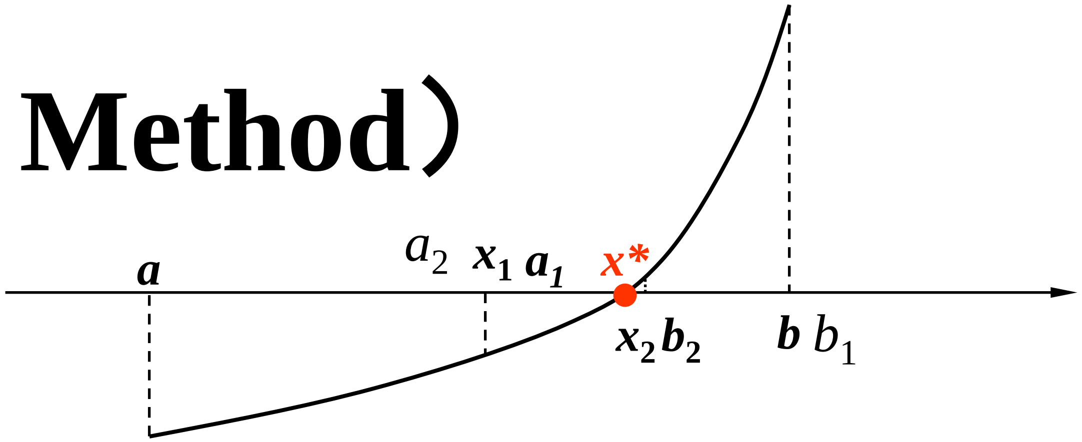
■ 若$f(x_2) = 0$，则$x^* = x_2$，计算结束；

■ 若$f(x_2) \neq 0$,

- □ 若$f(a_1)f(x_2) < 0$，则$x^* \in (a_1, x_2)$，此时令$a_2 = a_1$，$b_2 = x_2$;
- □ 否则，$f(a_1)f(x_2) > 0$，$x^* \in (x_2, b_1)$，此时令$a_2 = x_2$，$b_2 = b_1$。

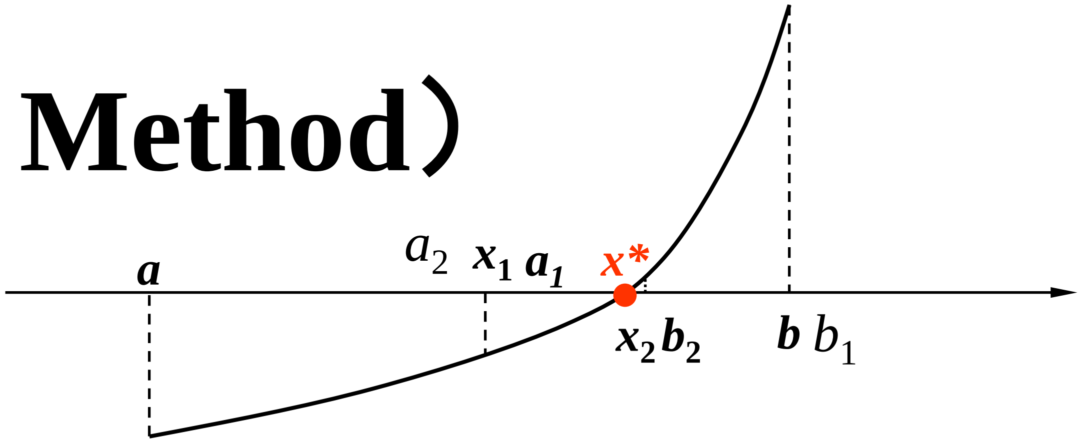
■ 得到x^*所在的新区间$[a_2, b_2]$，其长度为$[a_1, b_1]$的一半，$(b-a)/2^2$。

§ 2.2 二分法（Bisection Method）



- ………如此，直到第$n-1$步
- (3)取$[a_{n-1}, b_{n-1}]$中点记为$x_n = (\mathrm{a}_{n-1} + \mathrm{b}_{n-1})/2$，计算函数值$f(x_n)$
- 若$f(x_n) = 0$，则$x^* = x_n$，计算结束；
- 若$f(x_n) \neq 0$，
  - 若$f(a_{n-1})f(x_n) < 0$，则$x^* \in (a_{n-1}, x_n)$，此时令$a_n = a_{n-1}$，$b_n = x_n$;
  - 否则，$f(a_{n-1})f(x_n) > 0$，$x^* \in (x_n, b_{n-1})$，此时令$a_n = x_n$，$b_n = b_{n-1}$。
- 得到x^*所在的新区间$[a_n, b_n]$，其长度为$[a_{n-1}, b_{n-1}]$的一半，$(b-a)/2^n$。
- 则得一系列有根区间：
- $[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_k, b_k], \ldots, [a_n, b_n]$

§2.2 二分法（Bisection Method）

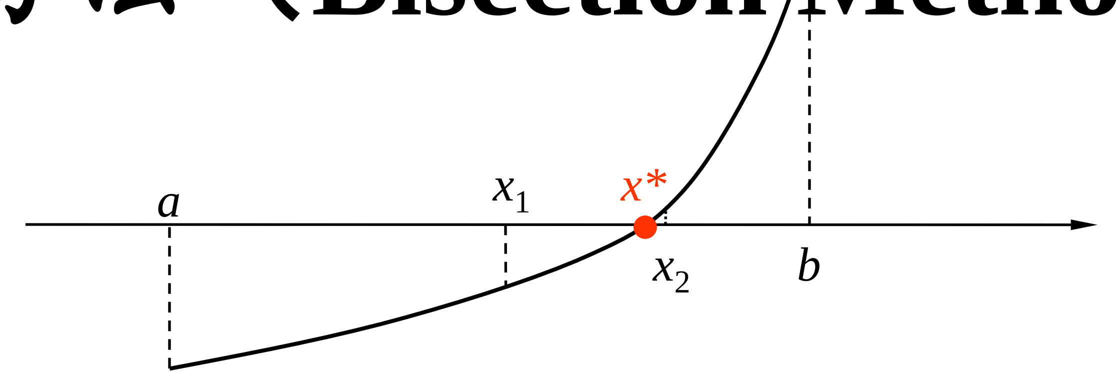


■把每次二分后的有根区间$[a_k, b_k]$的中点$x_{k+1} = (a_k + b_k)/2$作为根x^*的近似值, 则可得一个根的近似值序列

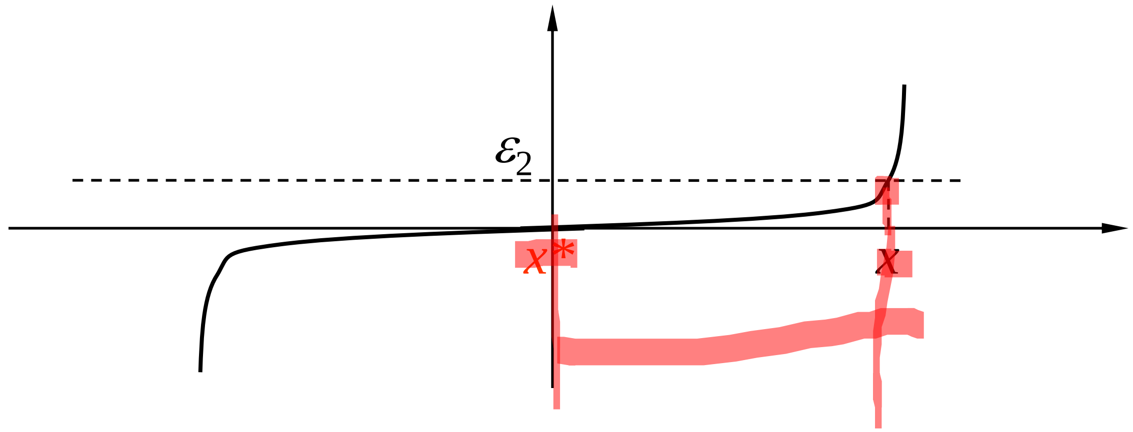
■ $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots$

■该序列的极限即为方程的根x^*，$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$.

§ 2.2 二分法（Bisection Method）



- 中止条件
- $\left|x_{k+1} - x_k\right| < \varepsilon_1$
- $\left|f(x)\right| < \varepsilon_2$
- 不能保证 x 的精度



§2.2 二分法（Bisection Method）

■四. 二分法（Bisection Method）收敛性

■设x^*是 $f(x)=0$在$[a,b]$上的唯一根, 且 $f(a)f(b)<0$, 则二分法计算过程中, 各隔根区间的中点数列： $x_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$（$n=1,2,\cdots$）

■满足: $|x_{n+1}-x*|\le(b_n-a_n)/2=(b-a)/2^{n+1}$

■设$\varepsilon>0$为给定精度要求，试确定二分次数k使得$|x^*-x_k|<\varepsilon$

■即$|x^*-x_k|\le\frac{b-a}{2^k}<\varepsilon$

k=n+1

k=1

■得： $k>\frac{ln(b-a)-ln(\varepsilon)}{ln(2)}$

§2.2 二分法（Bisection Method）

■五. 二分法（Bisection Method）计算过程

■用二分法求根，先给出 $f(x)$ 草图以确定根的初始位置；

■或用搜索程序，将$[a, b]$分为若干小区间，找出隔根区间；

□满足 $f(a^k) * f(b^k) < 0$ 的区间

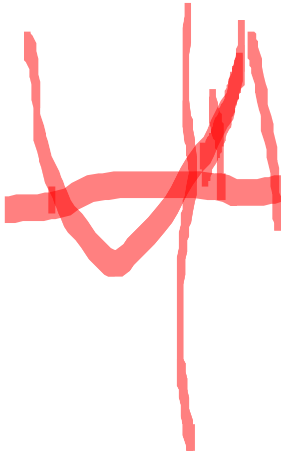
■对每一个隔根区间调用二分法，可找出区间内的根。

§2.2 二分法（Bisection Method）

■例2.1：用二分法求$x^3+4x^2-10=0$在$[1,2]$上的根，要求绝对误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-2}$。

■解：$f(1)=-5$，$f(2)=14$，$\therefore[1,2]$为有根区间

■$f'(x)=3x^2+8x$，根据导函数特点，知$[1,2]$为隔根区间



k	有根区间	中点	$f(x)$
1	[1,2]	1.5	$f(1.5)=2.375>0$
2	[1,1.5]	1.25	$f(1.25)=-1.796875<0$
3	[1.25,1.5]	1.375	$f(1.375)=0.162109>0$
4	[1.25,1.375]	1.313	$f(1.313)=-0.840553<0$
5	[1.313,1.375]	1.344	$f(1.344)=-0.346940<0$
6	[1.344,1.375]	1.360	$f(1.360)=-0.086144<0$
7	[1.360,1.375]	1.368	$f(1.368)=0.045804>0$
8	[1.360,1.368]	1.364	$f(1.364)=-0.020299<0$

0.005

§2.2 二分法（Bisection Method）

■事后估计：

■若取近似根$x^* = x_8 = 1.364$，则

■$|x - x^*| \le \frac{1}{2}(1.368 - 1.360) = 0.004 < \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \varepsilon$

■可取：$k \ge 8$

■事先估计：

■$k > [ln(b-a) - ln\varepsilon]/ln2 = \left[ln(2-1) - ln\left(\frac{1}{2} \times 10^{-2}\right)\right]/ln2$

■解得：$k \ge 8$

§2.2 二分法（Bisection Method）

$6x^2-1$

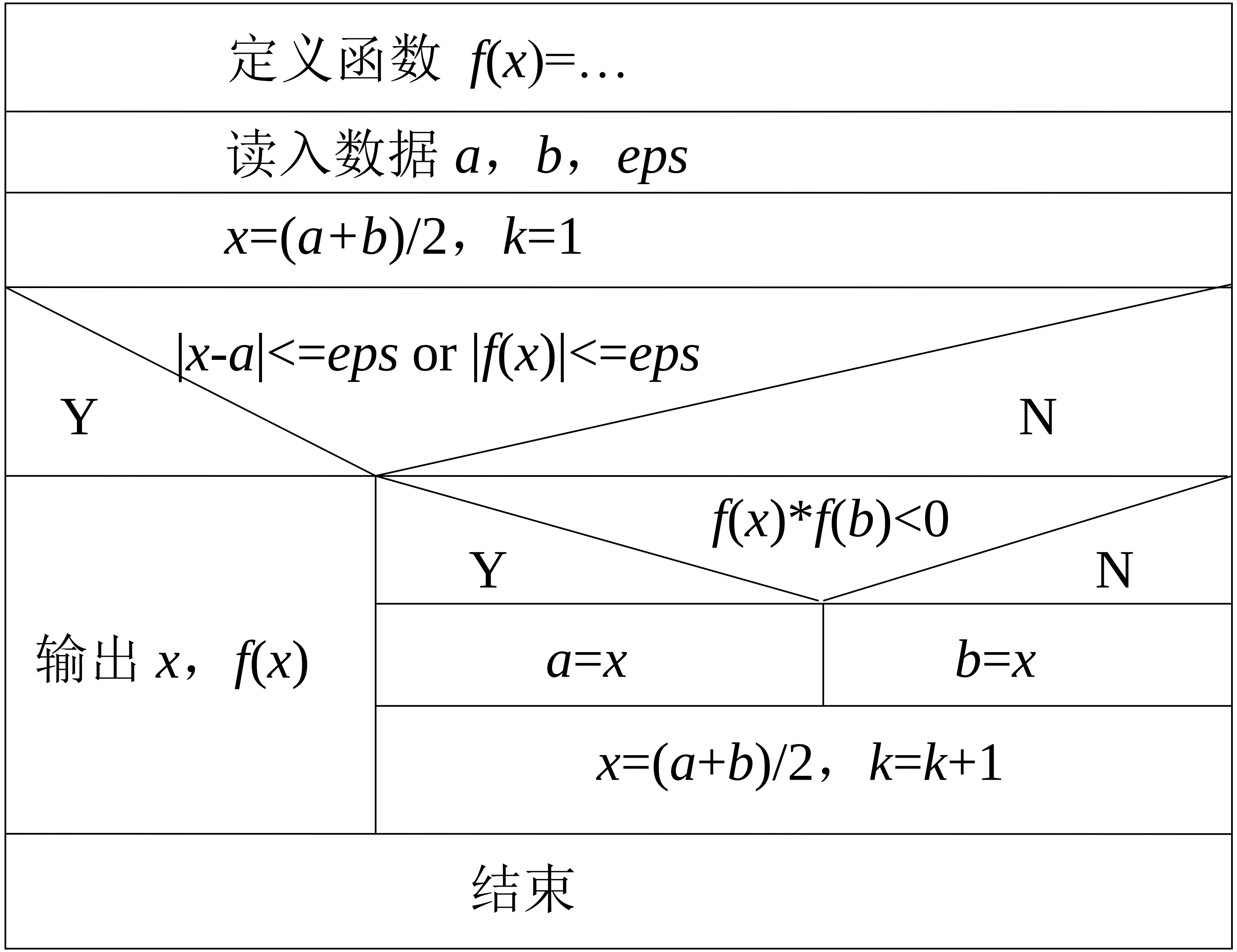
例2.3：用二分法求$f(x) = x^6 - x - 1 = 0$于$[1,2]$上的一个实根，且要求精确到小数后第3位（即要求$|x^* - x_k| < 1/2 \times 10^{-3}$）。

解：由$\varepsilon = 0.5 \times 10^{-3}$，由$k > [ln(b-a) - ln\varepsilon]/ln2$可确定所需分半次数$k = 11$。

即结果是$x_{11} = 1.134277$

§2.2 二分法（Bisection Method）

■六. 二分法的N—S图



§ 2.2 二分法（Bisection Method）

$\frac{b+a}{2}$ 溢出

算法2.1：二分法

输入：a, b, 函数f(x) ; **输出**：x.

While $(b-a) > \varepsilon$ **do**

$x := a + (b-a)/2$;

If $\mathrm{sign}(f(x)) = \mathrm{sign}(f(a))$ **then**

$a := x$;

Else

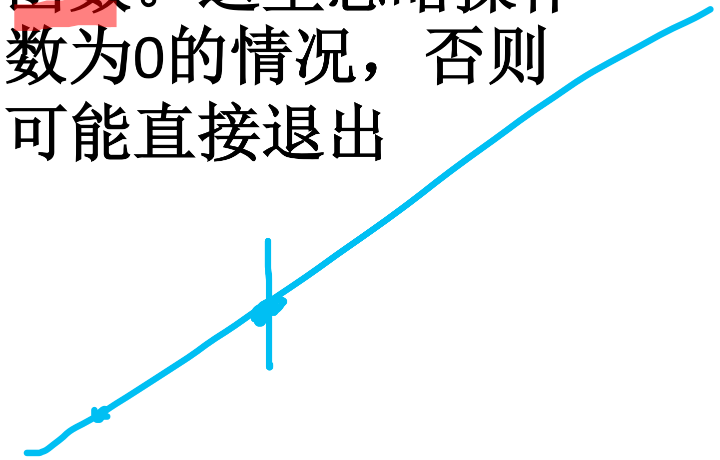
$b := x$;

End

End

$x := a + (b-a)/2$.

sign()表示取符号的函数。这里忽略操作数为0的情况，否则可能直接退出



■ 算法稳定性：运算简单，误差逐渐缩小，因此稳定

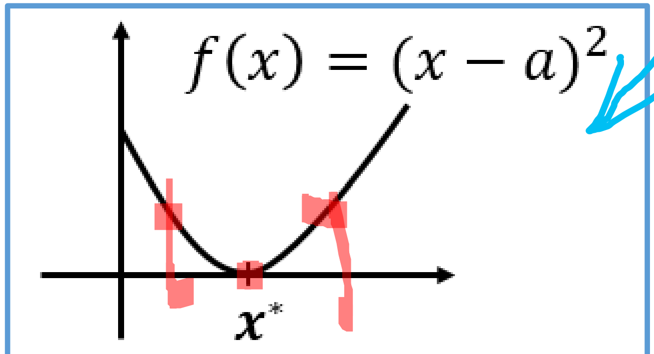
§ 2.2 二分法（Bisection Method）

0.5×10^{0}

$m=1$ $m=0$ $n=2$

■七. 二分法（Bisection Method）优缺点

- □优点：计算简单，方法可靠，只要求$f(x)$连续，在两个点上异号。
- □缺点：①不能求偶数重根，也不能求复根；
- □ ②收敛速度较慢；
- □ ③初始有根区间的位置（两端点）通常难以合适地确定；
- □ ④可能从多个根中随机得一个
- □因此，一般在求方程近似根时，不单独使用，常用来为其它方法提供好的初值。
- □对于方程求根，最常用方法是迭代法。



§ 2.3 迭代法(Iteration)

■迭代法是一种逐次逼近的方法

- □首先给定一个粗糙的初始值，
- □然后使用一个固定的迭代公式反复校正这个值，
- □直到满足预先给定的精度为止 控制

§2.3 迭代法(Iteration)

■不动点迭代法(Fixed-Point Iteration)

□若函数$h(x)$的定义域包含值域，则存在一个x使得$h(x) = x$，称之为**不动点**

□使用$h(x)$的不动点思想构建的迭代法，称**不动点迭代法**，也称简单迭代法

§2.3 迭代法(Iteration)

■**不动点迭代法(Fixed-Point Iteration)**

$$f(x) = 0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x = \varphi(x)$$

$f(x)$ 的根 $\longleftrightarrow$ φ(x) 的不动点

根 $\longrightarrow$ 不动点

§2.3 迭代法(Iteration)

■一. 迭代格式的构造

- □改写方程$f(x)=0$为$x=\varphi(x)$，要求$\varphi(x)$连续；
- □建立迭代公式：$x_{n+1}=\varphi(x_n)$；
- □利用迭代公式计算得到序列$\{x_n\}$；
- □若$\{x_n\}$收敛，必然收敛到$f(x)=0$的根：
  - ■ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$
- □即$x^*=\varphi(x^*)$，得到$f(x^*)=0$，则方程得解

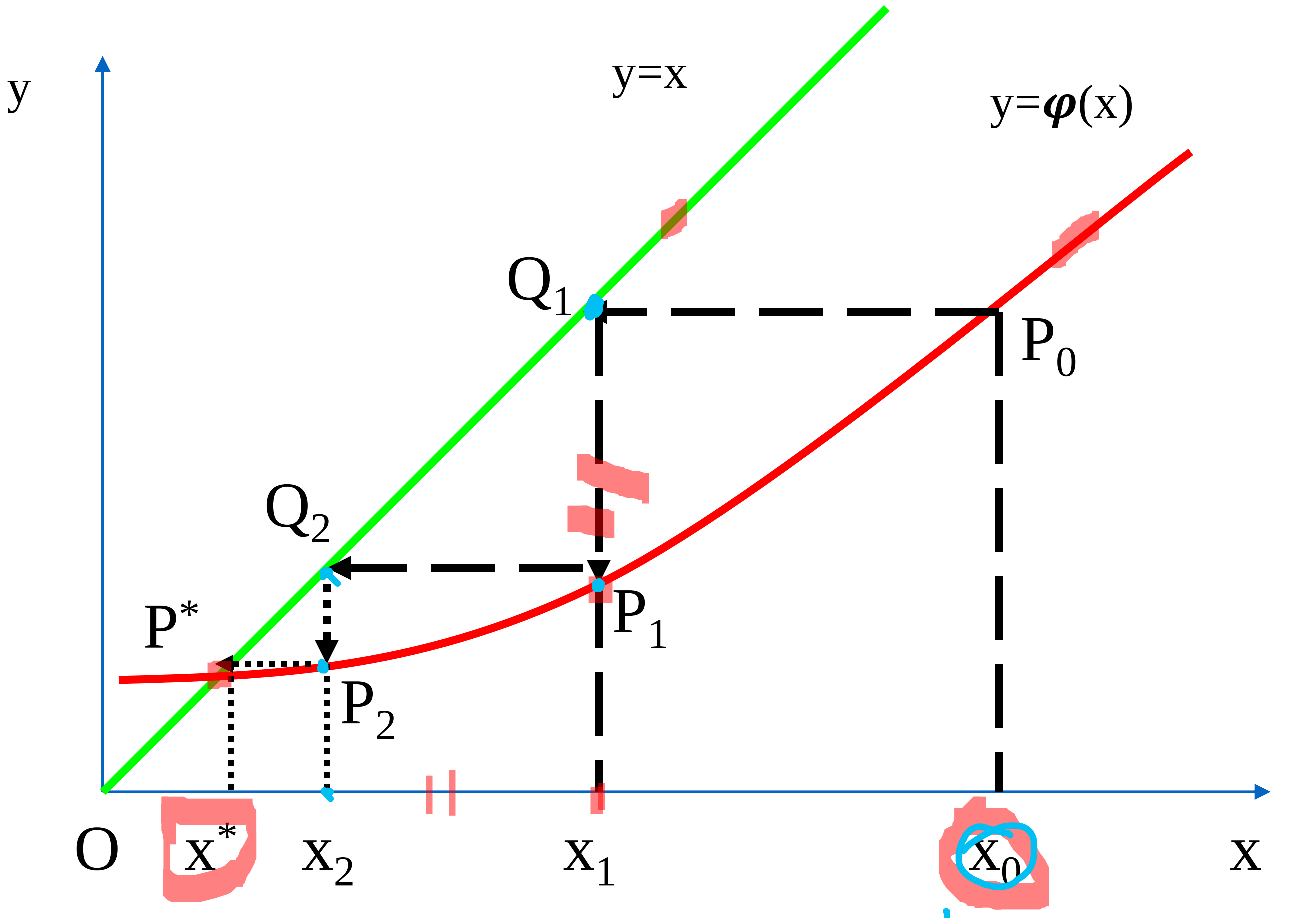
§ 2.3 迭代法(Iteration)

二. 迭代过程的几何表示

- $x = \varphi(x)$ 等价于 $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ y = x \end{cases}$
- 交点即为所求的根

$y_0 = \varphi(x_0)$

$y_1 = \varphi(x_1 = y_0)$



§ 2.3 迭代法(Iteration)

■例3.1：用迭代法求方程$f(x)=x^2-2x-3=0$的根（$x_1=3$，$x_2=-1$）

7

解：(1)方程改写成 $x=(2x+3)^{1/2}$

6

建立迭代公式 $x_{k+1}=(2x_k+3)^{1/2}$ $(k=0,1,2\ldots)$，

取$x_0=4$，$x_1=3.316$，$x_2=3.104$，$x_3=3.034$，$x_4=3.011$，$x_5=3.004$

当$k\to\infty$，$x_k\to 3$，收敛；

3.00133

(2)方程改写成 $x=1/2*(x^2-3)$

3.0000

建立迭代公式 $x_{k+1}=1/2*(x_k^{\,2}-3)$ $(k=0,1,2\ldots)$，

3

0

取$x_0=4$，$x_1=6.5$，$x_2=19.625$，$x_3=191.0$

9.008

当$k\to\infty$，$x_k\to\infty$，发散。

§ 2.3 迭代法(Iteration)

■例3.2：对$f(x)=x^3+4x^2-10=0$（此方程在[1,2]中有唯一根）用不同方法化成等价方程。

解：可化成很多不同等价方程，例如

$$\text{(a)}\,x=g_1(x)=x-x^3-4x^2+10,\quad \text{(b)}\,x=g_2(x)=\left(\frac{10}{x}-4x\right)^{1/2}$$

$$\text{(c)}\,x=g_3(x)=\frac{1}{2}\left(10-x^3\right)^{1/2},\quad \text{(d)}\,x=g_4(x)=\left(\frac{10}{x+4}\right)^{1/2}$$

$$\text{(e)}\ x=g_5(x)=x-\frac{x^3+4x^2-10}{3x^2-8x}$$

□取初始近似值$x_0=1.5$；

□迭代过程(a)、(b)不收敛，(c)、(d)、(e)都收敛，但收敛速度相差很大。

§ 2.3 迭代法(Iteration)

■三. 迭代法的基本问题

- □$\varphi(x)$如何构造?
- □$\{x_k\}$的收敛性
  - ■初值如何选择?
  - ■收敛否?
  - ■如何加速?
- □误差估计

§

■从几

■何上

■考察

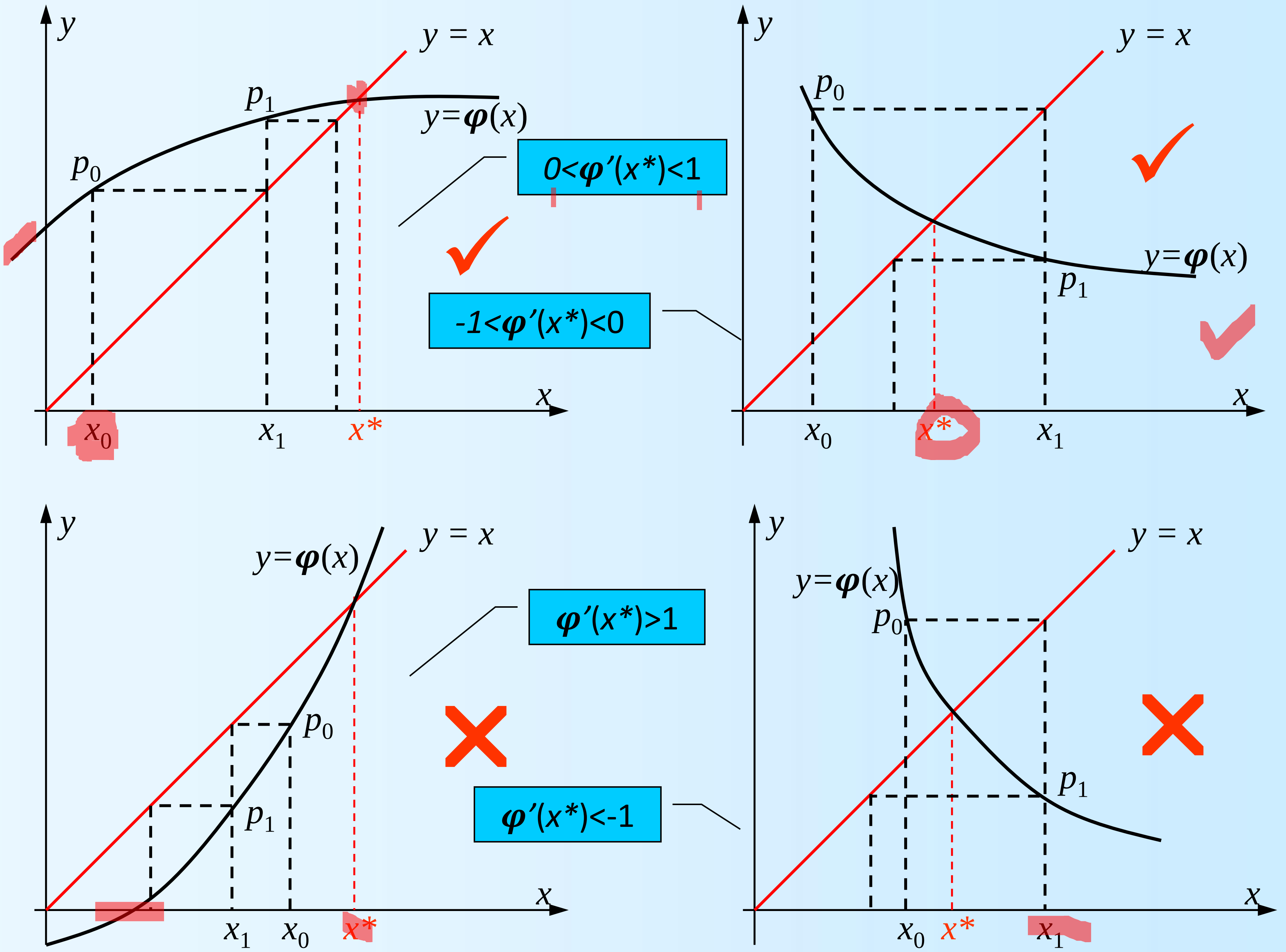
■迭代

■法的

■收

■敛

■性



§ 2.3 迭代法(Iteration)

$$f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

四. 全局收敛性

存在性

■ **定理2.1** $\varphi(x)\in C[a,b]$，若

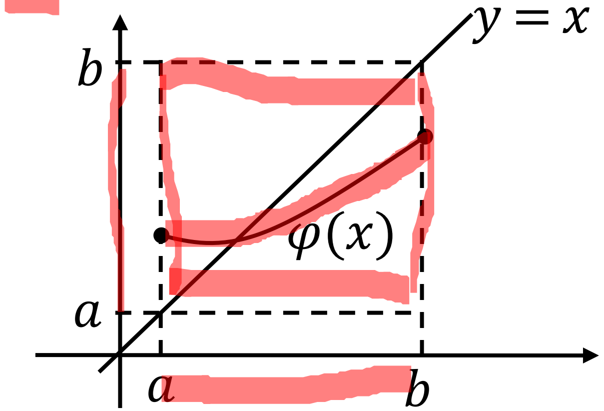
(1) 对$\forall x\in[a,b]$，有$a\le\varphi(x)\le b$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上存在不动点x^*，满足$x^*=\varphi(x^*)$

(2)若 $\exists L\in(0,1)$， $\forall x_1,x_2\in[a,b]$再有$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\le L|x_1-x_2|$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上存在不动点x^*，$\boxed{\text{且唯一}}$，其中 L称为Lipschitz条件。

唯一性



§ 2.3 迭代法(Iteration)

■证明：

■(1)$\varphi(x)$在$[a,b]$上存在不动点。

■令$f(x)=\varphi(x)-x$，$\because$ $\mathrm{a}\le\varphi(x)\le b$

■$\therefore$ $f(a)=\varphi(a)-a\ge 0$， $f(b)=\varphi(b)-b\le 0$

■$\because$ $\varphi(x)$连续， $\therefore$ $f(x)$连续 $\therefore$ $f(x)$在$[a,b]$上有零点

■$\therefore$ 必有$x^*\in[a,b]$，使得$f(x^*)=\varphi(x^*)-x^*=0$成立

■即$\varphi(x^*)=x^*$

■x^*就是$\varphi(x)$在$[a,b]$上的不动点。

§ 2.3 迭代法(Iteration)

■证明：

■(2) 不动点唯一吗？

■反证：设不动点不唯一，则还有$\overline{x} \in [a, b]$，使得$\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$，

■则$\overline{x} - x^* = \varphi(\overline{x}) - \varphi(x^*)$

■由已知$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2$

■得出$|\overline{x} - x^*| = |\varphi(\overline{x}) - \varphi(x^*)| \le L|\overline{x} - x^*| < |\overline{x} - x^*|$

$L \in (0,1)$

■产生矛盾$|\overline{x} - x^*| < |\overline{x} - x^*|$

■所以，不动点唯一

§ 2.3 迭代法(Iteration)

■定理2.2 (充分条件) 若$\varphi(x)$满足定理2.1中的两个条件

(1) 对$\forall x \in [a,b]$，有$a \le \varphi(x) \le b$

(2) $\exists$常数$L \in (0,\ 1)$，使得对 $\forall x \in [a,b]$有 $|\varphi'(x)| \le L$

则对$\forall x_0 \in [a,b]$

① 不动点迭代法$x_{k+1} = \varphi(x_k)$产生序列$\{x_n\}$都收敛到不动点x^*；

② $|x^* - x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$；

③ $|x^* - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$，$k = 1, 2, \cdots$

绝对误差限

§ 2.3 迭代法(Iteration)

$x^* = \varphi(x^*)$

■证明

■(1)当$k \to \infty$时，$\boxed{x_k\text{收敛到}x^*?}$

■$|x^* - x_k| = |\varphi(x^*) - \varphi(x_{k-1})| = |\varphi'(\xi_{k-1})| \cdot |x^* - x_{k-1}|$

■$\leq L \cdot |x^* - x_{k-1}| \leq L^2 \cdot |x^* - x_{k-2}| \leq \cdots \leq L^k|x^* - x_0|$

■$\because L \in (0,\ 1)$

■$\therefore$ 当$k \to \infty$时，$L^k \to 0$

■$\therefore \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$

Lagrange

在[a,b]连续

在(a,b)可导

在(a,b)至少有一点ξ (a<ξ<b)使

f(b)-f(a)=f'(ξ)(b-a) 成立

§ 2.3 迭代法(Iteration)

- 证明
- (2) $|x^* - x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$?
- $|x^* - x_k| = |\varphi(x^*) - \varphi(x_{k-1})|$
- $\quad = |\varphi(x^*) - \varphi(x_k) + \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})|$
- $\quad \le L \cdot |x_k - x_{k-1}| + L \cdot |x^* - x_k|$
- $\therefore \quad |x^* - x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$

§ 2.3 迭代法(Iteration)

■证明

(3) $|x^* - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$, $k = 1, 2, \cdots$ Lagrange

$\because\ |x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x_{k-2})| \le L|x_{k-1} - x_{k-2}|$

$\therefore\ |x^* - x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{L^2}{1-L}|x_{k-1} - x_{k-2}|$

$$\le \cdots \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

§ 2.3 迭代法(Iteration)

■由上面的定理知

■(1)L越小，收敛越快

■(2)迭代过程是一个求极限的过程，实际计算不能无限次计算，可按事先给定的精度求出迭代次数，根据

$$|x^* - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|,\ k = 1, 2, \cdots$$

$$\because \quad |x^* - x_k| \le \varepsilon \qquad \therefore \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \le \varepsilon$$

得$k \ge ln\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1-x_0|}\right)/ln(L)$

§2.3 迭代法(Iteration)

- 例3.3 用简单迭代法求方程 $f(x)=x^2-2x-3=0$ 在 $[2,4]$ 的一个实根，保留4位有效数字
- 解：因为 $f(2)=-3<0$，$f(4)=5>0$ 得出 $[2,4]$ 为有根区间
- (1)$x=\sqrt{2x+3}=\varphi_1(x)\because 2<\sqrt{2*2+3}\le\varphi_1(x)\le\sqrt{2*4+3}<4$
- 且 $|\varphi_1'(x)|=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\le\frac{1}{\sqrt{2*2+3}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\approx\frac{1}{2.64}<1$
- 根据定理，任取 $x_0\in[2,4]$，由等价方程所构造的简单迭代方法收敛。
- 迭代公式为：$x_{k+1}=\varphi_1(x_k)=\sqrt{2x_k+3}$
- 取初始值 $x_0=4$

1.0

i	1	2	3	4	5
x_i	3.316	3.014	3.034	3.011	3.004

$\frac{1}{2}\times10^{-4}=0.5\times10^{-4}=5\times10^{-5}$

0.007

§ 2.3 迭代法(Iteration)

■例3.3 用简单迭代法求方程$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$在$[2,4]$的一个实根

■解：因为$f(2) = -3 < 0, f(4) = 5 > 0$ 得出$[2,4]$为有根区间

■(2)$x = \frac{x^2-3}{2} = \varphi_2(x) \because 2 \nless 0.5 \le \varphi_2(x) \le 7.5 \nless 4$

■且$|\varphi_2'(x)| = x$，在$[2,4]$，$2 \le |\varphi_2'(x)| \le 4$

■根据定理，由$\varphi_2(x)$所构造的简单迭代方法不收敛，发散。

§ 2.3 迭代法(Iteration)

■五. 计算步骤

■(1)确定方程$f(x)=0$的等价形式$x=\varphi(x)$，为确保迭代过程的收敛，要求$\varphi(x)$在给定区间，满足值域条件和李普希茨条件(或$|\varphi'(x)|\le L<1$);

■(2)选取初始值x_0，按公式

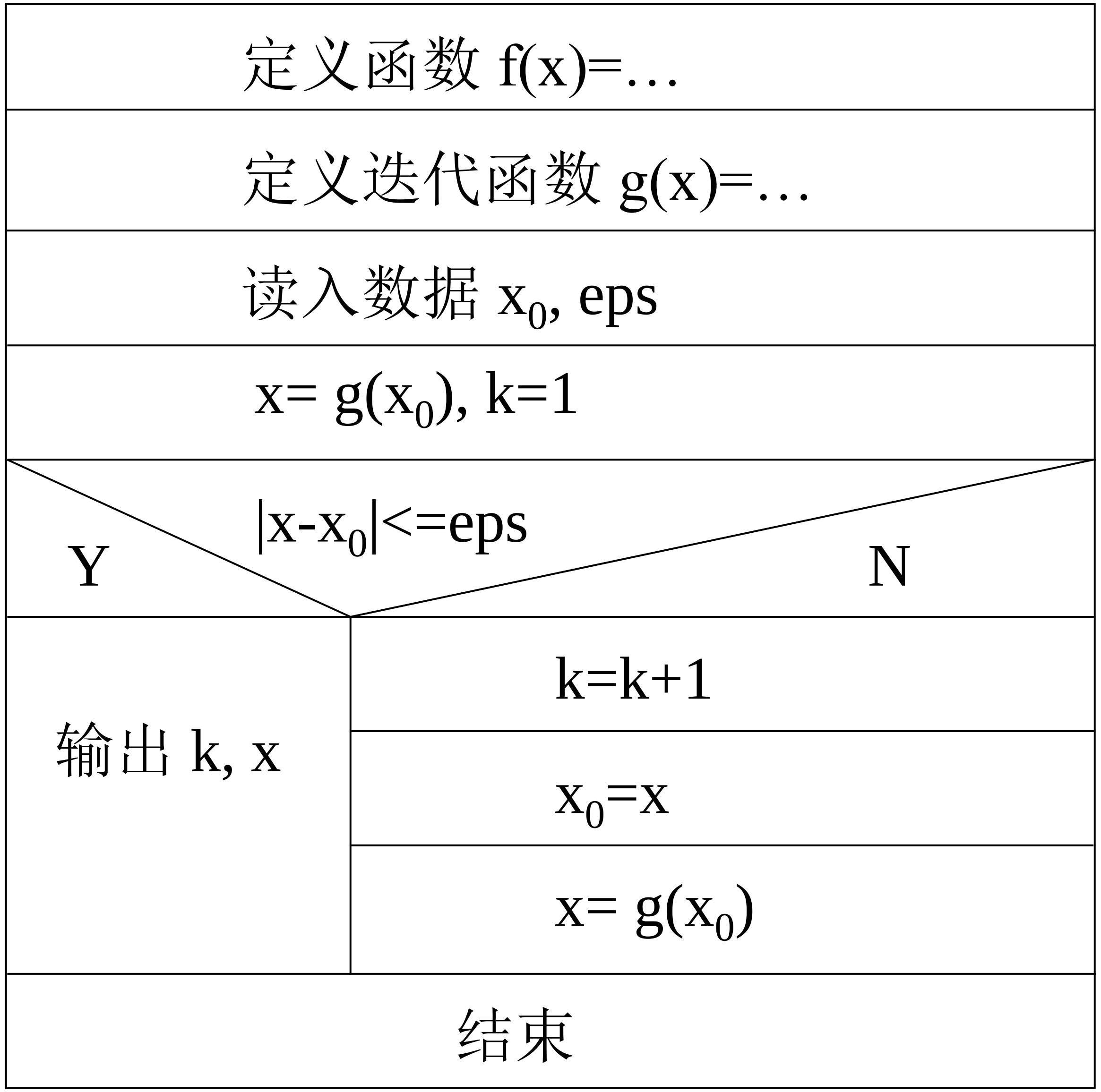
■ $$x_{k+1}=\varphi(x_k)\,,\quad k=0,1,2,\ldots$$

■ 进行迭代;

■(3)若$|x_{k+1}-x_k|\le\varepsilon$，则停止计算，$x^*=x_{k+1}$。

§ 2.3 迭代法(Iteration)

■六. 迭代法N-S图



§2.4 迭代法收敛速度及加速收敛方法

一. 迭代法的局部收敛性

■定义：若$\varphi(x)$有不动点x^*，$\exists$ x^*的邻域D: $[x^*-\delta, x^*+\delta]$ $(\delta>0)$，使$\forall x_0 \in$D，迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}$都收敛到x^*，则称该方法局部收敛。

■定理2.3：设x^*为$\varphi(x)$的不动点，在x^*的某个邻域内$\varphi'(x)$连续，且满足$|\varphi'(x^*)| \le L < 1$，则迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$局部收敛。

§2.4 迭代法收敛速度及加速收敛方法

$f(x)=0 \Rightarrow x_{k+1}=\varphi(x_k)$

■二. 迭代法的收敛速度

■定义2.3: 设迭代解序列$\{x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots\}$收敛。若各步误差$e(x_k)=x_k-x^*$满足$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|e(x_{k+1})|}{|e(x_k)|^p}=c$, $(c\neq 0)$, 则称p阶收敛 (收敛阶为p)。

■注意: 对一个收敛的迭代法(过程), 上述数值p是唯一的

根,函数

迭代法

§2.4 迭代法收敛速度及加速收敛方法

■定理2.4 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，若$\varphi^{(p)}(x)$在x^*邻近连续，$p\geq 2$，则该迭代法在邻域上p阶收敛，等价于

■$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$，且$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$.

■特别地：

■(1)当$\varphi'(x^*)\neq 0$，则称为线性收敛

■(2)当$\varphi'(x^*)=0$，$\varphi''(x^*)\neq 0$ ，则称为平方收敛

§2.4 迭代法收敛速度及加速收敛方法

$x_{k+1}^* = \varphi(x_k)$

■四.加速收敛法

■设x_{k+1}^*为近似值x_k迭代后的结果，x^*为$x=\varphi(x)$的根

■则$x^*-x_{k+1}^*=\varphi(x^*)-\varphi(x_k)=\varphi'(\xi)(x^*-x_k)$ L定理

■设$\varphi'(x)$在求根范围变化不大，即$\varphi'(x)\approx L$，且$|L|<1$

■所以，$x^*-x_{k+1}^*\approx L(x^*-x_k)$

■$x^*-Lx^*-x_{k+1}^*\approx -Lx_k$

■$x^*-Lx^*-x_{k+1}^*+Lx_{k+1}^*\approx -Lx_k+Lx_{k+1}^*$

■$(1-L)x^*-(1-L)x_{k+1}^*\approx L(x_{k+1}^*-x_k)$

■$x^*-x_{k+1}^*\approx\frac{L}{(1-L)}(x_{k+1}^*-x_k)$

§2.4 迭代法收敛速度及加速收敛方法

■取第k+1次近似值为：$x_{k+1} \approx x_{k+1}^* + \frac{L}{(1-L)}(x_{k+1}^* - x_k)$

■得迭代加速公式：

■(1)迭代$x_{k+1}^* = \varphi(x_k)$

■(2)改进迭代$x_{k+1} = x_{k+1}^* + \frac{L}{(1-L)}(x_{k+1}^* - x_k)$

§2.4 迭代法收敛速度及加速收敛方法

■例4.1：用加速收敛算法求方程$x = e^{-x}$在$x_0 = 0.5$附近的根。取4位有效数字。

■解：取$\varphi(x) = e^{-x}$，$\varphi'(x) = -e^{-x}$

■在$x_0 = 0.5$附近，$\varphi'(x) = -e^{-x} \approx -0.6$，所以，$|\varphi'(x)| \doteq 0.6 < 1$

■取$L = -0.6$　　$L = \varphi'(x) \approx -0.6$

■则加速公式为：$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = e^{-x_k} \\ x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \dfrac{0.6}{1.6}(\bar{x}_{k+1} - x_k) \end{cases}$

■取初值$x_0 = 0.5$

§2.4 迭代法收敛速度及加速收敛方法

■结果如下

k	x_k
0	0.50000
1	0.56658
2	0.56712
3	0.56714
4	0.56714

■方程解为： $x \approx 0.5671$

§2.4 迭代法收敛速度及加速收敛方法

- 不动点迭代法特点：
- 优点：
  - 算法的逻辑结构简单；
  - 在计算时中间结果若有扰动，也不会影响计算结果。
    - 舍入误差不会放大
- 缺点：
  - 对迭代公式有收敛性要求

§2.5 牛顿迭代法(Newton-Raphson Method)

■牛顿迭代法

□是一种迭代法，且迭代函数有固定的形式。

■优点

■1.减少不动点迭代法构造的盲目性, 固定公式

■2.较好的收敛性 (收敛阶)

■在单根附近具有较高的收敛速度

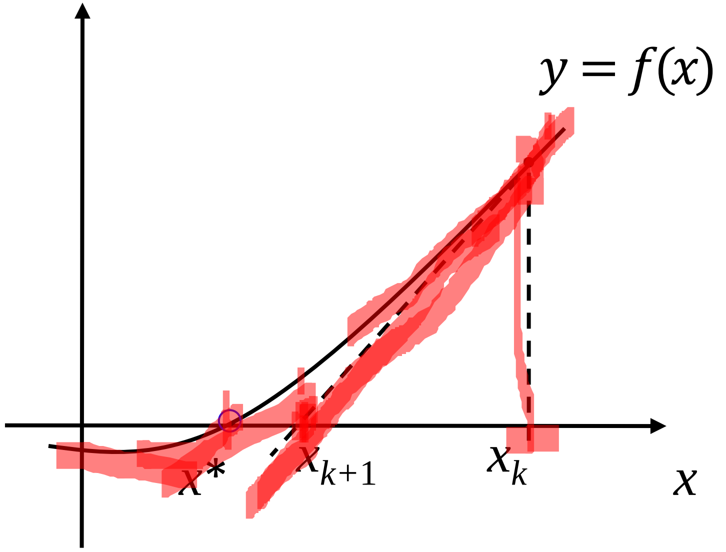
§2.5 牛顿迭代法

■一. Newton迭代格式的构造

■1. 原理

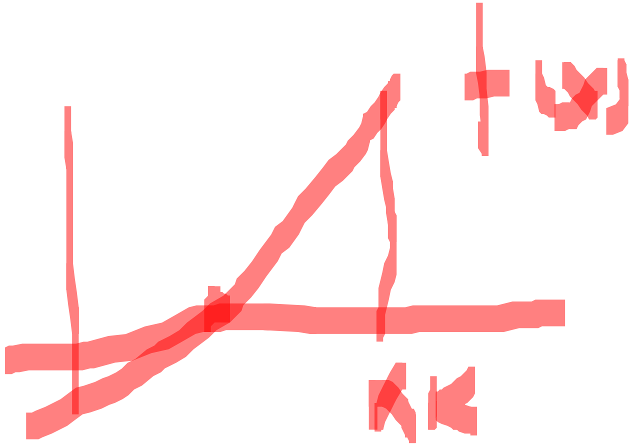
□构造迭代函数$\varphi(x)$的重要思路：

- ■用近似方程代替原方程求根；
- ■Newton法是将非线形方程线性化；
- ■Newton用切线近似曲线$f(x)$；



§2.5 牛顿迭代法

■二. 方法

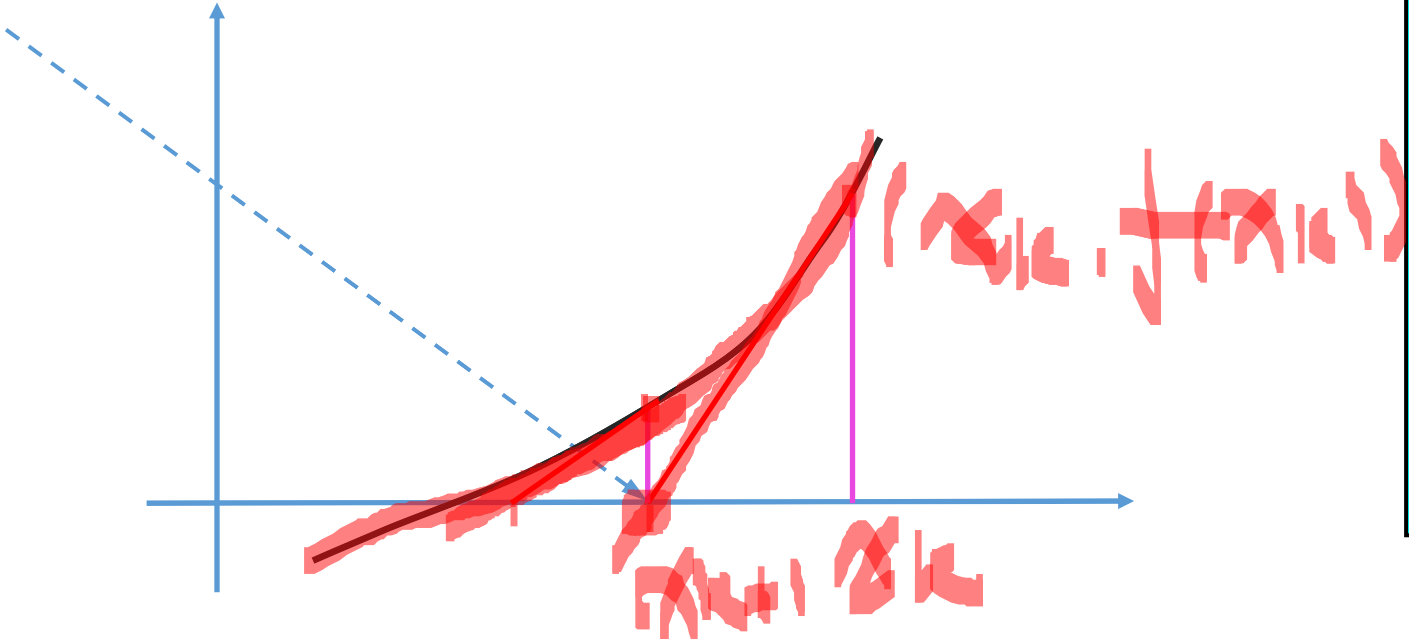


- □设x_k是$f(x)=0$的一个近似根
- □将$f(x)$在x_k处做一阶Taylor展开：$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(x_k)}{2!}(x-x_k)^2+\cdots$
- □取其线性部分近似$f(x)$：$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$
- □求$f(x)=0$：近似为$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$
- □设$f'(x)\neq 0$，解出x记为x_{k+1}，则牛顿迭代公式为
  - ■$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad(k=0,1,2,\cdots)$
- □牛顿迭代函数为$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

§2.5 牛顿迭代法

■二. Newton迭代法的几何意义

- □求过$(x_k, f(x_k))$的切线：$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$与$y = 0$求交点
- □交点为：$x = x_{k+1}$
- □$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$



- 实际上牛顿迭代公式是曲线在x_k点上的切线与x轴交点的横坐标
- 即用切线与x轴交点的坐标近似代替曲线与x轴的交点坐标
- 故也称**切线法**。

§ 2.5 牛顿迭代法

■三. Newton迭代法收敛定理

■1. 大范围收敛定理

■设 $f \in C^2[a,b]$，若

- □(1)$f(a)f(b) < 0$；
- □(2) 在整个$[a,b]$上$f'(x) \neq 0$;
- □(3) 在整个$[a,b]$上$f''(x)$ 不变号;
- □(4) 选取$\boxed{x_0} \in [a,b]$使得$f(x_0)f''(x_0) > 0$

■则牛顿迭代法产生的序列$\{x_k\}$收敛到$f(x)$在$[a,b]$的唯一根。

§ 2.5 牛顿迭代法

■三. Newton迭代法收敛定理

■2. 局部收敛定理

■设$f'(x)$存在，且$f'(x)$在方程$f(x)=0$的根x^*附近不为零，若有

$$\frac{|f(x)f''(x)|}{[f'(x)]^2}\le L<1,$$ 则牛顿迭代格式收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

§ 2.5 牛顿迭代法

三. Newton迭代法收敛定理

■说明：

■牛顿迭代法中，牛顿迭代函数为$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

■则$\varphi'(x) = \frac{|f(x)f''(x)|}{[f'(x)]^2}$

■设$f'(x)$存在，且$f'(x)$在方程$f(x) = 0$的根x^*附近不为零，若有$\frac{|f(x)f''(x)|}{[f'(x)]^2} \leq L < 1$

■则$|\varphi'(x)| \leq L < 1$，根据迭代法收敛定理知：

■牛顿迭代格式$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

§2.5 牛顿迭代法

■三. Newton迭代法收敛定理

■3. x_0的对收敛性的影响：

■牛顿迭代法的收敛性依赖于x_0的选取

- □取 x_0 使$f(x_0)f''(x_0) > 0$，
- □并且离解较近，
- □则有较好收敛速度。
- □常用二分法获取初值 x_0， 再进行迭代求解。

§ 2.5 牛顿迭代法

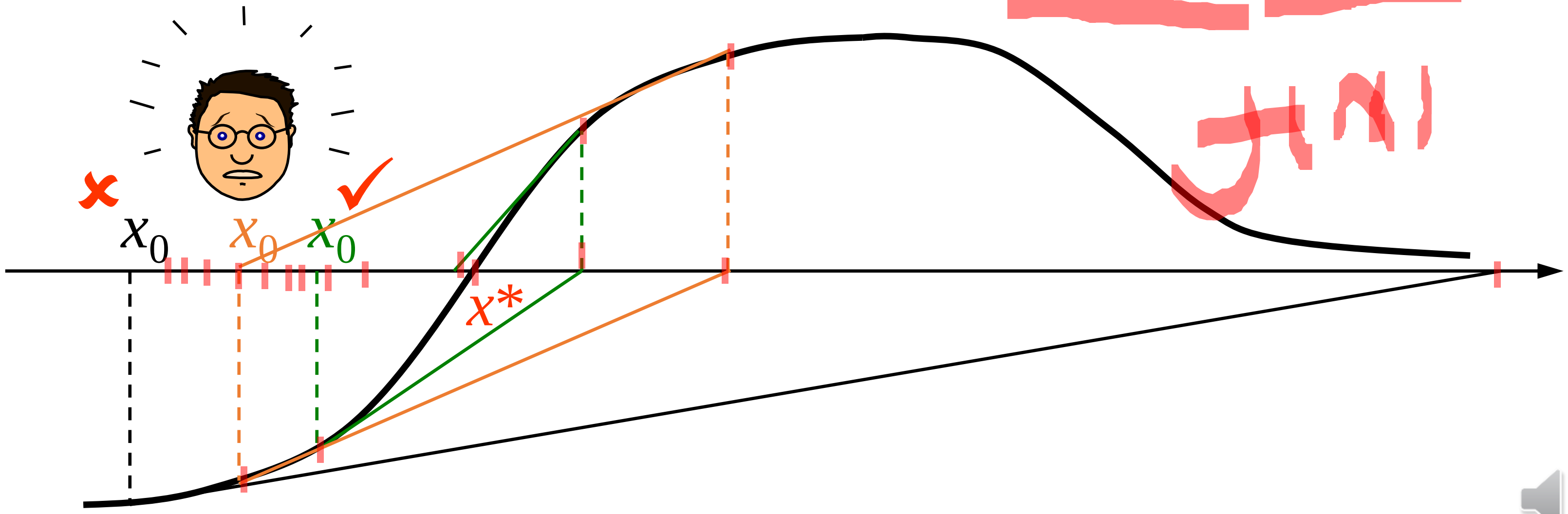
■四. Newton迭代法不足

■当 $f(x)$ 不具有连续的二阶导数

■或，初始值不足够靠近准确解

■则Newton迭代法收敛得很慢，甚至不收敛

初始值不足够靠近准确解



§2.5 牛顿迭代法

■例5.1：用牛顿迭代法求$f(x)=e^{-\frac{x}{4}}(2-x)-1=0$的根，准确到6位有效数字。

■解：显然，$f(0)\cdot f(2)<0$，方程在$[0,2]$上有一根。

■求导，$f'(x)=e^{-\frac{x}{4}}\frac{(x-6)}{4}\neq 0$，在$[0,2]$

■牛顿迭代法计算公式是：

■$$x_{k+1}=x_k-\frac{e^{-\frac{x_k}{4}}(2-x_k)-1}{e^{-\frac{x_k}{4}}\frac{(x_k-6)}{4}}$$

■取$x_0=0.5$，计算结果见下页左表；

■取$x_0=8.0$，计算结果见下页右表

§2.5 牛顿迭代法

$x_0=0.5$

k	x_k
0	0.5
1	0.76680112
2	0.78353388
3	0.78359596
4	0.78359596
5	

$x_0=8$

k	x_k
0	8.0
1	34.77811219
2	869.152842
3	
4	
5	发散

■求得近似根$x^* \approx 0.783596$

■说明当初值x_0选取靠近根x^*时，牛顿迭代法收敛且收敛较快，当初值x_0不是靠近方程根x^*时，牛顿迭代法可能会给出发散的结果。

§ 2.5 牛顿迭代法

■例5.2：用牛顿迭代法求$x = \sqrt{c}\ (c > 0)$，写出迭代格式。

■解：设$x = \sqrt{c}$，则$x^2 - c = 0$，

■ 取$f(x) = x^2 - c$

■ 则牛顿迭代公式得

■ $$x_{k+1} = x_k - \frac{{x_k}^2 - c}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{c}{x_k}\right)$$

§ 2.5 牛顿迭代法

■例5.3：用牛顿迭代法$x-sin\,x=0.5$的根，精确到0.0001。

■解：$f(x)=x-sin\,x-0.5$

■$\because f(1)=-0.34<0\quad f(2)=0.591>0$ $\therefore$方程在[1,2]内有一根。

■求导，$f'(x)=1-\cos x$ 和 $f''(x)=\sin x$ 保号

■∴牛顿迭代法计算公式是：

■$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x)}{f'(x)}=x_k-\frac{x_k-\sin x_k-0.5}{(1-\cos x_k)}$

■$f(2)=2-sin\,2-0.5>0\quad f''(2)=\sin 2>0\ \therefore f(2)f''(2)>0$，选择$x_0=2$

■$x_1=x_0-\frac{x_0-\sin x_0-0.5}{(1-\cos x_0)}=1.5829$，$x_2=1.5009$，$x_3=1.4973$，$x_4=1.4973$

■$|x_4-x_3|=0<0.0001$，故取$x=x_4=1.4973$为方程近似解

§2.5 牛顿迭代法

■四. 牛顿迭代法N-S图

<table>
<tr><td colspan="2">定义函数 f(x)=….</td></tr>
<tr><td colspan="2">定义导数函数 f1(x)=….</td></tr>
<tr><td colspan="2">读入数据 x0,eps</td></tr>
<tr><td colspan="2">x= x0-f(x0)/f1(x0), k=1</td></tr>
<tr><td colspan="2">|x-x0|>=eps</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>输出 k, x</td></tr>
<tr><td>k=k+1</td></tr>
<tr><td>x0=x</td></tr>
<tr><td>x= x0-f(x0)/f1(x0)</td></tr>
<tr><td colspan="2">结束</td></tr>
</table>

§ 2.5 牛顿迭代法

■五. 简化牛顿迭代法

■牛顿迭代法需计算$f'(x_k)$，若用一个给定常数值C代$f'(x)$，

■则 $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/C$

■要使该式收敛，则

■ $\varphi(x) = x - f(x)/C$, $\varphi'(x) = 1 - f'(x)/C$

■ $|\varphi'(x)| = |1 - f'(x)/C| < 1$

■即$0 < f'(x)/C < 2$

■取C与$f'(x)$同号，且$f'(x)/C < 2$即可

■这个切线可以看成是固定斜率的切线方程。

§2.6 割线法(弦截法)

■一. 引入意义

□牛顿迭代法虽然具有收敛速度快的优点，但每迭代一次都要计算导数$f'(x_k)$；

■当$f(x)$比较复杂时，每次计算$f'(x)$计算量较大；

■通常，用不计算导数的迭代方法，只能达到线性收敛的速度。

□割线法使用差商来代替导数运算的求根方法。

□割线法在迭代过程中使用前一步x_{k-1}处和当前步x_k处函数值，构造迭代函数

■提高迭代的收敛速度

■只算函数值不算导数值，简化计算

§ 2.6 割线法

■二. 割线法基本思想

■为了避免计算函数的导数$f'(x_k)$，使用差商

■$f[x_{k-1},x_k]=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$

■代替牛顿迭代法公式中的导数$f'(x_k)$，得到迭代公式

■$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})\ (k=1,2,\cdots)$

■称为割线法迭代公式

■相应的迭代法称为割线法

$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

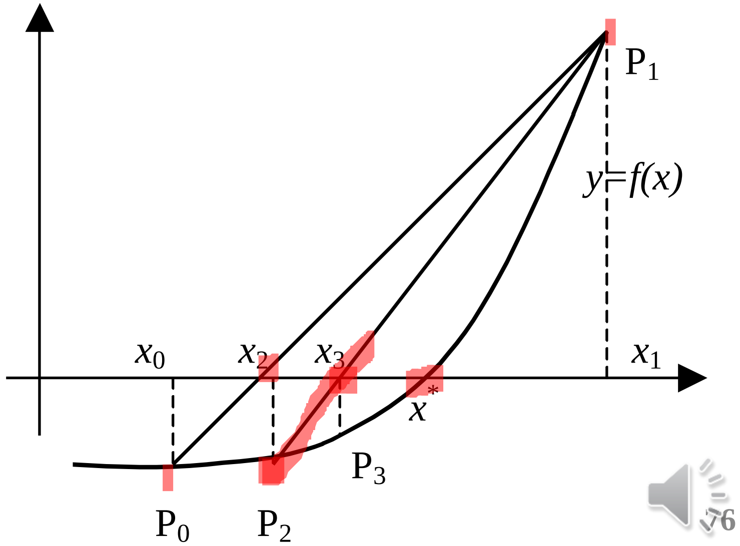
§ 2.6 割线法

■三. 割线法几何意义

■用割线斜率代替切线斜率，即$f'(x_k) = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$

■需要两个初值x_0，x_1

- □用过曲线上两点$P_0(x_0, f(x_0))$，$P_1(x_1, f(x_1))$的割线来代替曲线，用割线与x轴交点的横坐标作为方程的近似根x_2；
- □再过点$P_1(x_1, f(x_1))$，$P_2(x_2, f(x_2))$做割线求出x_3；
- □再过点$P_2(x_2, f(x_2))$，$P_3(x_3, f(x_3))$做割线求出x_4；
- □以此类推，当收敛时可求出满足精度要求的x_k



§ 2.6 割线法

■例6.1：用割线法解方程的根

■ $$x^3-3x+1=0$$

■解：设$f(x)=x^3-3x+1$

■由割线法

■$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

■取初值$x_0=0.5$，得

$x_0=0.5;$

$x_1=0.4;$

$x_2=0.3430962343$

$x_3=0.3473897274$

$x_4=0.3472965093$

$x_5=0.3472963553$

$x_6=0.3472963553$

割线法迭代5次

达到精度10^{-10}

§2.6 割线法

■例6.2： 用割线法求方程$x = e^{-x}$在$x_0 = 0.5$初始值邻近的一个根。

■要求$|x_{k+1} - x_k| < 0.0001$

■解：取$x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$，令$f(x) = x - e^{-x}$

■ 迭代公式：

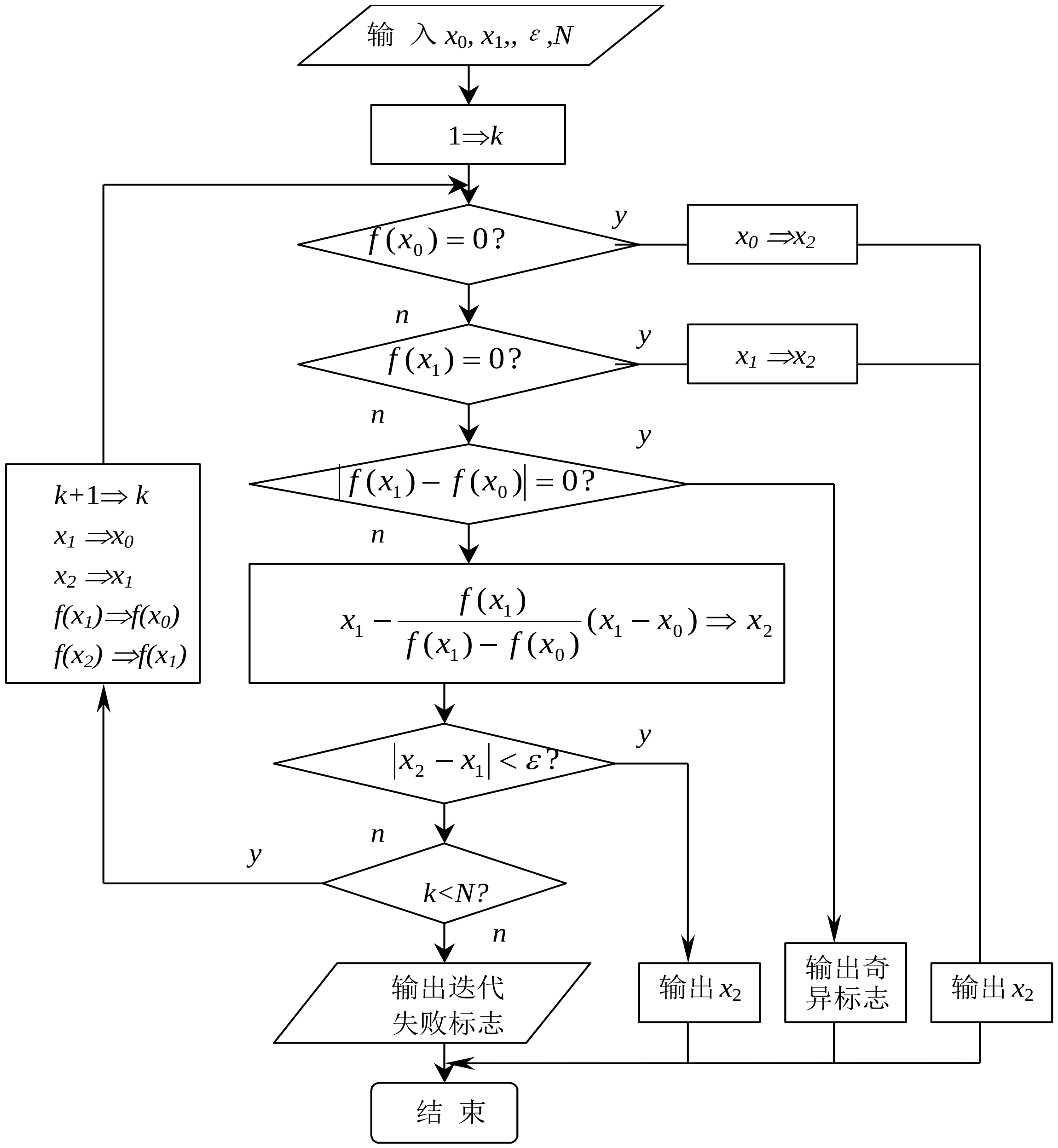
■$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - e^{-x_k})}{(x_k - x_{k-1}) - (e^{-x_k} - e^{-x_{k-1}})}(x_k - x_{k-1})$

■ 计算过程略，取近似根$x_4 \approx 0.56714$

■ 则可满足精度要求。

§2.6 割线法

■四. 割线法算法实现

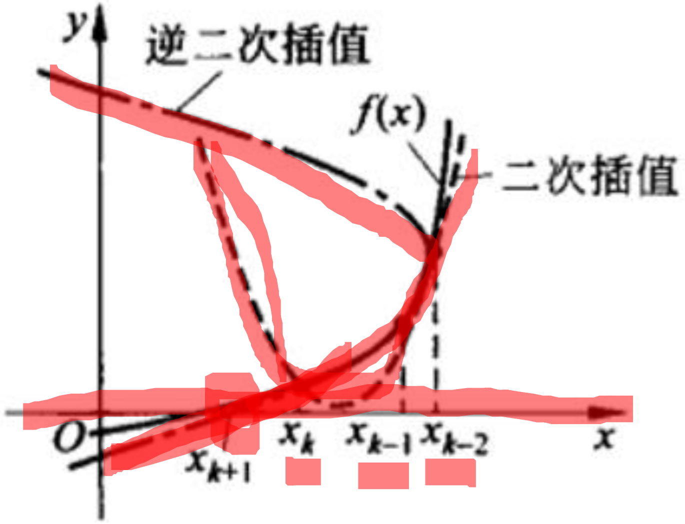


§ 2.6 割线法

- 五.割线法改进
- 割线法使用根的前两个近似解构造一条直线，求直线与x轴交点得到下一个解

$y(x) = ax^2+bx+c$

- 扩展思路：
- 利用根的前三个近似解，构造二次曲线，求与x轴交点得到下一个解
  - 抛物线法
  - 逆抛物线法



§2.7 实用工具

■fzero:单变量非线性方程求根

■roots: 求多项式方程的所有根

■定义函数*f*(*x*), 并作为输入参数的方法:

■匿名函数”@”

■复杂的函数需要用.m文件定义

§ 2.7 实用工具

■用法

■x = fzero(fun,x0)

函数

初值

■x = fzero(fun,x0,options)

参数

■例7.1

■fun = @sin;

■x0 = 3;

■x = fzero(fun,x0)

■结果：x = 3.1416

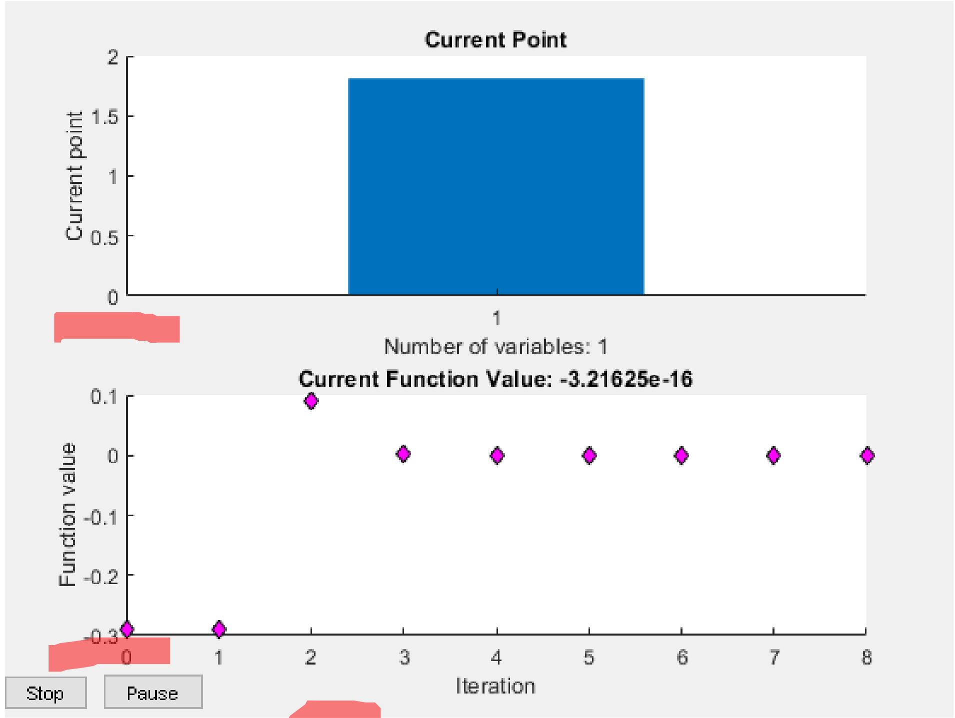
§ 2.7 实用工具

- **例7.2**
- fun = @cos;
- x0 = [1 2]; → 区间
- x = fzero(fun,x0)
- **结果：** x = 1.5708

§2.7 实用工具

- **例7.3**
- **定义函数$f(x) = x^3 - 2x - 5$**
- function y = f(x)
- y = x.^3-2*x-5;
- 保存成f.m
- fun = @f;
- x0 = 2;
- z = fzero(fun,x0)
- **结果：** x = 2.0946

§ 2.7 实用工具



- **例7.4**
- **设置option选项**
- fun = @(x)sin(cos(x));
- x0 = 1;
- options = optimset('PlotFcns',{@optimplotx,@optimplotfval});
- x = fzero(fun,x0,options)
- **结果：**
- x = 1.5708

fzero
roots

作业与实验

- 书面作业：
- P26:1,4,
-     5,6,8,10

- 上机：
- 牛顿迭代法及推广算法

小结

- ■方程
- ■二分法
- ■不动点迭代法
- ■牛顿迭代法
- ■割线法
- ■Matlab解方程工具

二选一

END