第6章 微分方程建模

微分方程
(动态模型)

- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程
- 分析对象特征的变化规律
- 预报对象特征的未来性态
- 研究控制对象特征的手段

微分
方程
建模

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程

列方程常见的方法有

（1）按规律直接列方程

在数学、力学、物理、化学等学科中许多自然现象所满足的规律已为人们所熟悉,并直接由微分方程所描述。如牛顿第二定律、放射性物质的放射性规律等。我们常利用这些规律对某些实际问题列出微分方程。

（2）微元分析法与任意区域上取积分的方法

自然界中也有许多现象所满足的规律是通过变量的微元之间的关系式来表达的。对于这类问题，我们不能直接列出自变量和未知函数及其变化率之间的关系式，而是通过微元分析法，利用已知的规律建立一些变量（自变量与未知函数）的微元之间的关系式，然后再通过取极限的方法得到微分方程，或等价地通过任意区域上取积分的方法来建立微分方程。

（3）模拟近似法

在生物、经济等学科中，许多现象所满足的规律并不很清楚而且相当复杂，因而需要根据实际资料或大量的实验数据，提出各种假设。在一定的假设下，给出实际现象所满足的规律，然后利用适当的数学方法列出微分方程。

在实际的微分方程建模过程中，也往往是上述方法的综合应用。不论应用哪种方法，通常要根据实际情况，做出一定的假设与简化，并要把模型的理论或计算结果与实际情况进行对照验证，以修改模型使之更准确地描述实际问题并进而达到预测预报的目的。

6.1 发射卫星为什么用三级火箭

采用运载火箭把人造卫星发射到高空轨道上运行，为什么不能用一级火箭而必须用多级火箭系统?

下面通过建立运载火箭有关的数学模型来回答上述问题。

火箭是一个复杂的系统，为了使问题简单明了，只从动力系统和整体结构上分析，并且假设引擎是足够强大的。

6.1.1 为什么不能用一级火箭发射人造卫星

1 卫星进入600km 高空轨道时，火箭必须的最低速度

首先将问题理想化，假设

（1）卫星轨道是以地球中心为圆心的某个平面上的圆周，卫星在此轨道上以地球引力作为向心力绕地球作平面匀速圆周运动；

（2）地球是固定于空间中的一个均匀球体，其质量集中于球心；

（3）其它星球对卫星的引力忽略不计。

建模与求解

设地球半径为R，质量为M；卫星轨道半径为r，卫星质量为m。

根据假设（2）和（3），卫星只受到地球的引力，由牛顿万有引力定律可知其引力大小为

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \tag{6.1}$$

其中G为引力常数。

为消去常数G，把卫星放在地球表面，则由（6.1）式得

$$mg=\frac{GMm}{R^2}\quad\text{或}\quad GM=R^2g\,,$$

再代入（6.1）式，得

$$F=mg\left(\frac{R}{r}\right)^2,\qquad(6.2)$$

其中$g=9.81(\mathrm{m/s^2})$为重力加速度。

根据假设（1），若卫星围绕地球作匀速圆周运动的速度为v，则其向心力为mv^2/r，因为卫星所受的地球引力就是它作匀速运动的向心力，故有

$$mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{mv^2}{r},$$

由此便推得卫星距地面为$(r-R)$km，必须的最低速度的数学模型为

$$v = R\sqrt{\frac{g}{r}}, \qquad (6.3)$$

取 $R=6400\text{km}$，$r-R=600\text{km}$，代入上式，得

$$v\approx 7.6\text{km/s},$$

即要把卫星送入离地面 600km 高的轨道，火箭的末速度最低应为 7.6km/s。

2 火箭推进力及升空速度

火箭的简单模型是由一台发动机和一个燃料仓组成。燃料燃烧产生大量气体从火箭末端喷出，给火箭一个向前的推力。火箭飞行要受地球引力、空气阻力、地球自转与公转等的影响，使火箭升空后作曲线运动。为使问题简化，假设

（1）火箭在喷气推动下作直线运动，火箭所受的重力和空气阻力忽略不计。

（2）在t时刻火箭质量为$m(t)$，速度为$v(t)$，且均为时间t的连续可微函数；

（3）从火箭末端喷出气体的速度（相对火箭本身）为常数u。

建模与分析

由于火箭在运动过程中不断喷出气体，使其质量不断减少，在$(t, t+\Delta t)$内的减少量可由泰勒展开式表示为

$$m(t+\Delta t)-m(t)=\frac{dm}{dt}\Delta t+o(\Delta t). \qquad (6.4)$$

因为喷出的气体相对于地球的速度为$v(t)-u$，则由动量守恒定律有

$$m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)-\left[\frac{dm}{dt}\Delta t+o(\Delta t)\right](v(t)-u) \qquad (6.5)$$

从（6.4）式和（6.5）式可得火箭推进力的数学模型为

$$m\frac{dv}{dt}=-u\frac{dm}{dt}. \qquad (6.6)$$

令$t=0$时，$v(0)=v_0$，$m(0)=m_0$，求解上式，得火箭升空速度模型

$$v(t)=v_0+u\ln\frac{m_0}{m(t)}. \qquad (6.7)$$

（6.6）式表明火箭所受推力等于燃料消耗速度与喷气速度（相对火箭）的乘积。（6.7）式表明，在v_0, m_0一定的条件下，升空速度$v(t)$由喷气速度（相对火箭）u及质量比$m_0 / m(t)$决定。

这为提高火箭速度找到了正确途径：

---从燃料上设法提高u值；

---从结构上设法减少$m(t)$。

3 一级火箭末速度上限

火箭—卫星系统的质量可分为三部分：m_p（有效负载，如卫星），m_F（燃料质量），m_s（结构质量，如外壳、燃料容器及推进器）。一级火箭末速度上限主要是受目前技术条件的限制，假设

（1）目前技术条件为：相对火箭的喷气速度 $u = 3\text{km/s}$ 及

$$\frac{m_s}{m_F + m_s} \geq \frac{1}{9}.$$

（2）初速度v_0忽略不计，即$v_0 = 0$。

建模与求解

因为升空火箭的最终（燃料耗尽）质量为m_p+m_s，由（6.7）式及假设（2）得到末速度为

$$v=u\ln\frac{m_0}{m_p+m_s}, \qquad (6.8)$$

令$m_s=\lambda(m_F+m_s)=\lambda(m_0-m_p)$，代入上式，得

$$v=u\ln\frac{m_0}{\lambda m_0+(1-\lambda)m_p}, \qquad (6.9)$$

于是，当卫星脱离火箭，即$m_p = 0$时，便得火箭末速度上限的数学模型为

$$v^0 = u\ln\frac{1}{\lambda}.$$

由假设（1），取$u = 3\text{km}$，$\lambda = \frac{1}{9}$，便得火箭速度上限

$$v^0 = 3\ln 9 \approx 6.6\text{km/s}.$$

因此，用一级火箭发射卫星，在目前技术条件下无法达到相应高度所需的速度。

6.1.2 理想火箭模型

从前面对问题的假设和分析可以看出，火箭推进力自始至终在加速整个火箭，然而随着燃料的不断消耗，所出现的无用结构质量也在随之不断加速，作了无用功，因而效益低，浪费大。

所谓理想火箭，就是能够随着燃料的燃烧不断抛弃火箭的无用结构。下面建立它的数学模型。

假设在$(t,t+\Delta t)$时段丢弃的结构质量与烧掉的燃料质量以α与$1-\alpha$的比例同时进行。

建模与分析

由动量守恒定律，有

$$m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)-\alpha\frac{dm}{dt}\Delta t\cdot v(t)$$

$$-(1-\alpha)\frac{dm}{dt}\Delta t\cdot(v(t)-u)+o(\Delta t),$$

由上式可得理想火箭的数学模型为

$$-m(t)\frac{dv(t)}{dt}=(1-\alpha)\frac{dm}{dt}\cdot u, \tag{6.10}$$

及

$$v(0)=0,\ m(0)=m_0,$$

解之得

$$v(t)=(1-\alpha)u\ln\frac{m_0}{m(t)}. \tag{6.11}$$

由上式可知，当燃料耗尽，结构质量抛弃完时，便只剩卫星质量m_p，从而最终速度的数学模型为

$$v(t)=(1-\alpha)u\ln\frac{m_0}{m_p}. \tag{6.12}$$

（6.12）式表明，当m_0足够大时，便可使卫星达到我们所希望它具有的任意速度。例如，考虑到空气阻力和重力等因素，估计要使$v=10.5\ \mathrm{km/s}$ 才行，如果取$u=3\mathrm{km/s}$，$\alpha=0.1$，则可推出$m_0/m_p=50$，即发射 1 吨重的卫星大约需 50 吨重的理想火箭。

6.1.3 多级火箭卫星系统

理想火箭是设想把无用结构质量连续抛弃以达到最佳的升空速度，虽然这在目前的技术条件下办不到，但它确为发展火箭技术指明了奋斗目标。目前已商业化的多级火箭卫星系统便是朝着这种目标迈进的第一步。多级火箭是自末级开始，逐级燃烧，当第i级燃料烧尽时，第$i+1$级火箭立即自动点火，并抛弃已经无用的第i级。用m_i表示第i级火箭质量，m_p表示有效负载。

为了简单起见，先作如下假设

（1）设各级火箭具有相同的λ，λm_i表示第i级的结构质量，$(1-\lambda)m_i$表示第i级的燃料质量。

（2）喷气相对火箭的速度u相同，燃烧级的初始质量与其负载质量之比保持不变，该比值记为k。

先考虑二级火箭。由（6.7）式，当第一级火箭燃烧完时，其速度为

$$v_1 = u\ln\frac{m_1+m_2+m_p}{\lambda m_1+m_2+m_p} = u\ln\frac{k+1}{\lambda k+1},$$

在第二级火箭燃烧完时，其速度为

$$v_2 = v_1 + u\ln\frac{m_2+m_p}{\lambda m_2+m_p} = 2u\ln\frac{k+1}{\lambda k+1}. \tag{6.13}$$

仍取$u=3\text{km/s}$，$\lambda=0.1$，考虑到阻力等因素，为了达到第一宇宙速度 7.9km/s，对于二级火箭，欲使$v_2=10.5\text{km/s}$，由（6.13）式得

$$6\ln\frac{k+1}{0.1k+1}=10.5,$$

解之得

$$k=11.2,$$

这时$\dfrac{m_0}{m_p}=\dfrac{m_1+m_2+m_p}{m_p}=(k+1)^2\approx149.$

同理，可推出三级火箭

$$v_3 = 3u\ln\frac{k+1}{\lambda k+1},$$

欲使$v_3 = 10.5\text{km/s}$，应该$k \approx 3.25$，从而$m_0 / m_p \approx 77$。与二级火箭相比，在达到相同效果的情况下，三级火箭的质量几乎节省了一半。

现记n级火箭的总质量（包括有效负载m_p）为m_0，在相同假设下（$u=3\text{km/s}$，$v_{末}=10.5\text{km/s}$，$\lambda=0.1$），可以算出相应的m_0/m_p值，现将计算结果列于表 6.1 中。

表 6.1　质量比数据

n（级数）	1	2	3	4	5	…	∞
m_0/m_p	×	149	77	65	60	…	50

实际上，由于受技术条件的限制，采用四级或四级以上的火箭，经济效益是不合算的，因此采用三级火箭是最好的方案。

6.2 人口模型

6.2.1 Malthus 模型

1789 年，英国神父 Malthus 在分析了一百多年人口统计资料之后，提出了 Malthus 模型。

模型假设

（1）设 $x(t)$ 表示 t 时刻的人口数，且 $x(t)$ 连续可微。

（2）人口的增长率 r 是常数（增长率=出生率-死亡率）。

（3）人口数量的变化是封闭的，即人口数量的增加与减少只取决于人口中个体的生育和死亡,且每一个体都具有同样的生育能力与死亡率。

建模与求解

由假设，t时刻到$t+\Delta t$时刻人口的增量为

$$x(t+\Delta t)-x(t)=rx(t)\Delta t\,,$$

于是得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=rx, \\ x(0)=x_0, \end{cases} \tag{6.14}$$

其解为

$$x(t)=x_0e^{rt}. \tag{6.15}$$

模型评价

考虑二百多年来人口增长的实际情况，1961 年世界人口总数为3.06×10^9，在 1961～1970 年这段时间内，每年平均的人口自然增长率为 2%，则（6.15）式可写为

$$x(t)=3.06\times10^9\cdot e^{0.02(t-1961)}. \qquad (6.16)$$

根据 1700～1961 年间世界人口统计数据，发现这些数据与（6.16）式的计算结果相当符合。因为在这期间地球上人口大约每 35 年增加 1 倍，而（6.16）式算出每 34.6 年增加 1 倍。

但是，利用（6.16）式对世界人口进行预测，也会得出惊异的结论，当$t=2670$年时，$x(t)=4.4\times10^{15}$，即 4400 万亿，这相当于地球上每平方米要容纳至少 20 人。

显然，用这一模型进行预测的结果远高于实际人口增长，误差的原因是对增长率r的估计过高。由此，可以对r是常数的假设提出疑问。

6.2.2 阻滞增长模型（Logistic模型）

如何对增长率r进行修正呢？我们知道，地球上的资源是有限的，它只能提供一定数量的生命生存所需的条件。随着人口数量的增加，自然资源、环境条件等对人口再增长的限制作用将越来越显著。如果在人口较少时，可以把增长率r看成常数，那么当人口增加到一定数量之后，就应当视r为一个随着人口的增加而减小的量，即将增长率r表示为人口$x(t)$的函数$r(x)$，且$r(x)$为x的减函数。

模型假设

（1）设$r(x)$为x的线性函数，$r(x)=r-sx$（工程师原则，首先用线性）。

（2）自然资源与环境条件所能容纳的最大人口数为x_m，即当$x=x_m$时，增长率$r(x_m)=0$。

建模与求解

由假设（1），（2）可得$r(x)=r(1-\frac{x}{x_m})$，则有

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=r(1-\dfrac{x}{x_m})x, \\ x(t_0)=x_0, \end{cases} \tag{6.17}$$

（6.17）式是一个可分离变量的方程，其解为

$$x(t)=\frac{x_m}{1+(\frac{x_m}{x_0}-1)e^{-r(t-t_0)}}. \tag{6.18}$$

模型检验

由（6.17）式，计算可得

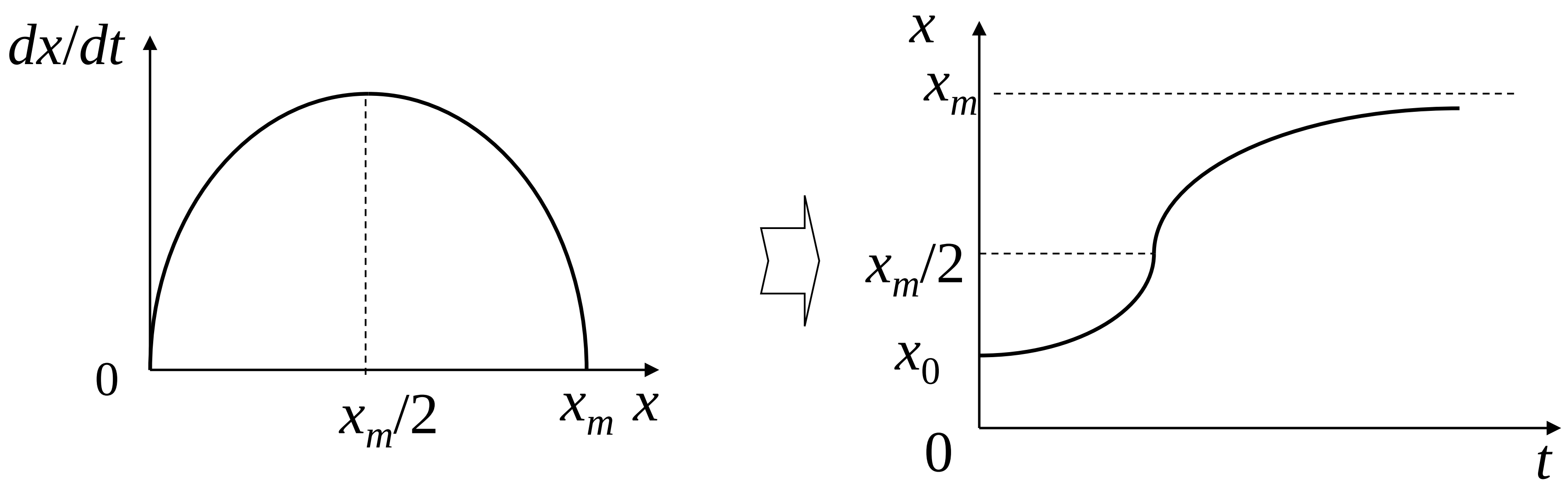
$$\frac{d^2x}{dt^2}=r^2\left(1-\frac{x}{x_m}\right)\left(1-\frac{2x}{x_m}\right)x. \qquad (6.19)$$

人口总数$x(t)$有如下规律

（1） $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=x_m$，即无论人口初值$x_0$如何，人口总数以$x_m$为极限。

(2) 当$0 < x_0 < x_m$时，$\dfrac{dx}{dt} = r(1-\dfrac{x}{x_m})x > 0$，这说明$x(t)$是单调增加的，又由（6.19）式知，当$x < \dfrac{x_m}{2}$时，$\dfrac{d^2x}{dt^2} > 0$，$x = x(t)$为凹函数，当$x > \dfrac{x_m}{2}$时，$\dfrac{d^2x}{dt^2} < 0$，$x = x(t)$为凸函数。

（3）人口变化率$\dfrac{dx}{dt}$在$x=\dfrac{x_m}{2}$时取到最大值，即人口总数达到极限值一半以前是加速生长时期，经过这一点之后，生长速率会逐渐变小，最终达到零。



6.2.3 模型推广

可以从另一个角度导出阻滞增长模型，在 Malthus 模型上增加一个竞争项$-bx^2(b>0)$，它的作用是使纯增长率减少。如果一个国家工业化程度较高，食品供应较充足，能够提供更多的人生存，此时b较小；反之b较大，故建立方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x(a-bx) \qquad (a,b>0), \\ x(t_0)=x_0, \end{cases} \tag{6.20}$$

其解为

$$x(t)=\frac{ax_0}{bx_0+(a-bx_0)e^{-a(t-t_0)}}, \tag{6.21}$$

由（6.21）式，得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=(a-2bx)(a-bx)x. \tag{6.22}$$

对(6.20)-(6.22)式进行分析，有

（1）对任意$t > t_0$，有$x(t) > 0$，且$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \dfrac{a}{b}$.

（2）当$0 < x < \dfrac{a}{b}$时，$\dfrac{dx}{dt} > 0$，$x(t)$递增；当$x = \dfrac{a}{b}$时，$\dfrac{dx}{dt} = 0$；当$x(t) > \dfrac{a}{b}$时，$\dfrac{dx}{dt} < 0$，$x(t)$递减。

（3）当$0 < x < \dfrac{a}{2b}$时，$\dfrac{d^2x}{dt^2} > 0$，$x(t)$为凹函数，当$\dfrac{a}{2b} < x < \dfrac{a}{b}$时，$\dfrac{d^2x}{dt^2} < 0$，$x(t)$为凸函数。

令（6.20）式第一个方程的右边为 0，得 $x_1 = 0$，$x_2 = \frac{a}{b}$，称它们是微分方程（6.20）的平衡解。易知 $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \frac{a}{b}$，故又称 $\frac{a}{b}$ 是（6.20）式的稳定平衡解。可预测不论人口开始的数量 x_0 为多少，经过相当长的时间后，人口总数将稳定在 $\frac{a}{b}$。

6.2.4 美国人口的预报模型

认识人口数量的变化规律，建立人口模型，做出较准确的预报，是有效控制人口增长的前提。利用表 6.2 给出的近两个世纪的美国人口统计数据（以百万为单位），建立人口预测模型，最后用它预报 2010 年美国的人口。

表 6.2　美国人口统计数据

年	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
人口	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4
年	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940
人口	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5	123.2	131.7
年	1950	1960	1970	1980	1990	2000		
人口	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4	281.4		

1. 建模与求解

记$x(t)$为第t年的人口数量，设人口年增长率$r(x)$为x的线性函数，$r(x)=r-sx$。自然资源与环境条件所能容纳的最大人口数为x_m，即当$x=x_m$时，增长率$r(x_m)=0$，可得$r(x)=r(1-\frac{x}{x_m})$，建立 Logistic 人口模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=r(1-\frac{x}{x_m})x, \\ x(t_0)=x_0, \end{cases}$$

其解为

$$x(t)=\frac{x_m}{1+(\frac{x_m}{x_0}-1)e^{-r(t-t_0)}}. \tag{6.23}$$

2. 参数估计

（1）非线性最小二乘估计

求得$x_m = 342.4368$，$r = 0.0274$，2010 年人口的预测值为 282.68 百万。

（2）线性最小二乘法

为了利用简单的线性最小二乘法估计这个模型的参数r和x_m，把 Logistic 方程表示为

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=r-sx\,,\quad s=\frac{r}{x_m}\,, \qquad (6.24)$$

利用向后差分，得到差分方程

$$\frac{x(k)-x(k-1)}{\Delta t}\frac{1}{x(k)}=r-sx(k),\quad k=2,3,\cdots,22, \qquad (6.25)$$

其中步长$\Delta t=10$，下面拟合其中的参数r和s。

求得$x_m=373.5135$，$r=0.0247$。

也可以利用向前差分，得到差分方程

$$\frac{x(k+1)-x(k)}{\Delta t}\frac{1}{x(k)}=r-sx(k)，k=1,2,\cdots,21，$$

再进行拟合。

求得 $x_m=294.386$，$r=0.0325$。

从上面的三种拟合方法可以看出，拟合同样的参数，方法不同可能结果相差很大。

6.3 Matlab求微分方程的符号解

用 Matlab 求解常微分方程的符号解，首先定义符号变量，然后调用命令 dsolve。dsolve 的调用格式如下

[y1,⋯,yN] = dsolve(eqns,conds,Name,Value)

其中 eqns 是符号微分方程或符号微分方程组，conds 是初值条件或边值条件，Name 和 Value 是可选的成对参数。

6.3.1 求解常微分方程的通解

例 6.1 试解常微分方程

$$x^2+y+(x-2y)y'=0$$

6.3.2 求解常微分方程的初边值问题

例 6.2 **试求微分方程**

$$y'''-y''=x,\quad y(1)=8, y'(1)=7, y''(2)=4$$

的解。

6.3.3 求解常微分方程组

例 6.3 试求常微分方程组

$$\begin{cases} f''+3g=\sin x \\ g'+f'=\cos x \end{cases}$$

的通解和在初边值条件为 $f'(2)=0, f(3)=3, g(5)=1$ 的解。

6.3.4 求解线性常微分方程组

1. 一阶齐次线性微分方程组

$$X' = AX,\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

其中：'表示对t求导数。e^{At}是它的基解矩阵，解为

$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0$。

dsolve 也可以直接求解齐次线性微分方程组

$X' = AX$，其中X, A是适当维数的矩阵。

例 6.4　试解初值问题

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. 非齐次线性方程组

由参数变易法可求得初值问题

$$X' = AX + f(t)，\quad X(t_0) = X_0$$

的解为

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} f(s)ds.$$

例 6.5　试解初值问题

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{t}\cos 2t \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5.1 传染病模型（姜启源教材）

问题

- 描述传染病的传播过程
- 分析受感染人数的变化规律
- 预报传染病高峰到来的时刻
- 控制传染病蔓延的手段

按照传播过程的一般规律，用机理分析方法建立传染病问题的微分方程模型

模型1　已感染人数 (病人) $i(t)$

假设

- 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt}=\lambda i, \quad i(0)=i_0$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t)=i_0 e^{\lambda t}}$$

$$\Rightarrow t\to\infty \Rightarrow i\to\infty \quad ?$$

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 $\Rightarrow$ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

$i(t) = \frac{I(t)}{N}$ $s(t) = \frac{S(t)}{N}$

模型2 区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$

SI 模型

2）每个病人每天有效接触人数为λ, 且使接触的健康人致病

λ~ 日接触率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

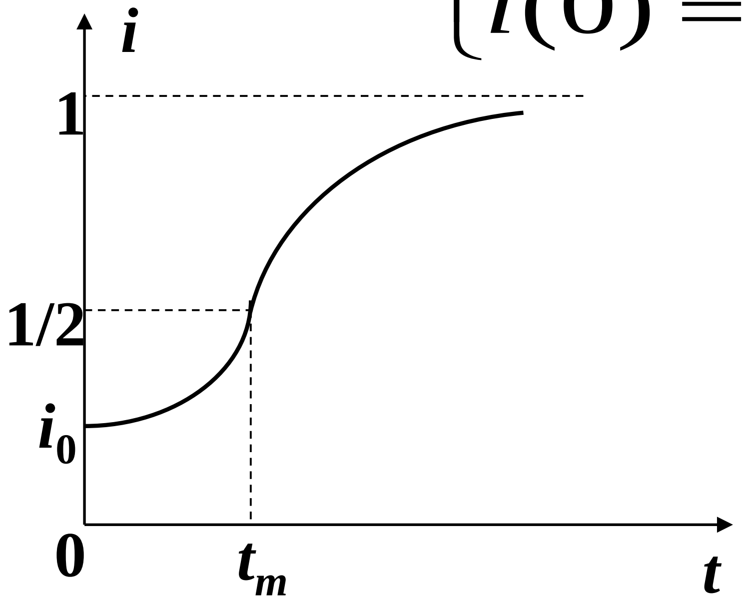
$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logistic 模型}$$



$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

令 $i(t)=\frac{1}{2}$

$t=t_m$, di/dt 最大

t_m~传染病高峰到来时刻

λ(日接触率)↓ → t_m↑

$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$ ？

病人可以治愈！

模型3 传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染 **SIS 模型**

增加假设 3）病人每天治愈的比例为μ μ~日治愈率

建模 $N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$

λsi $-\mu i$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

λ~ 日接触率

$1/\mu$~感染期

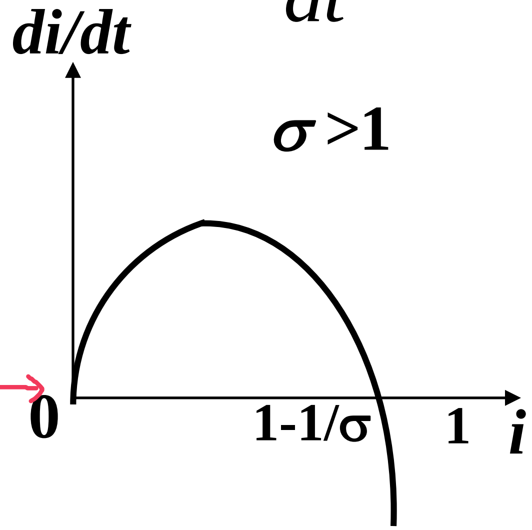
$\sigma=\lambda/\mu$

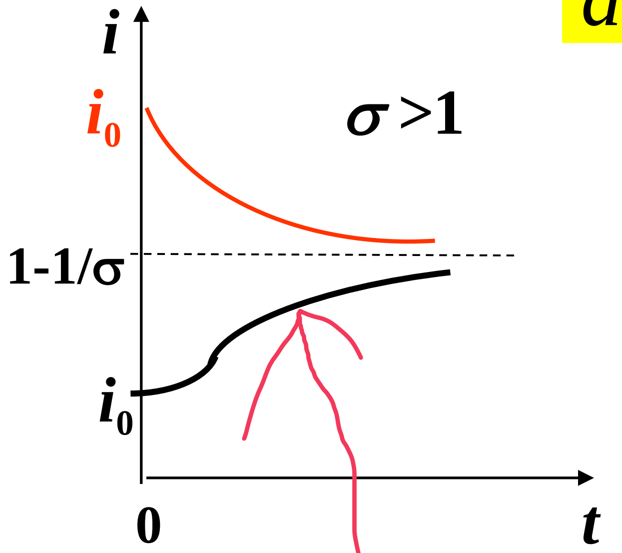
σ ~ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为**接触数**。

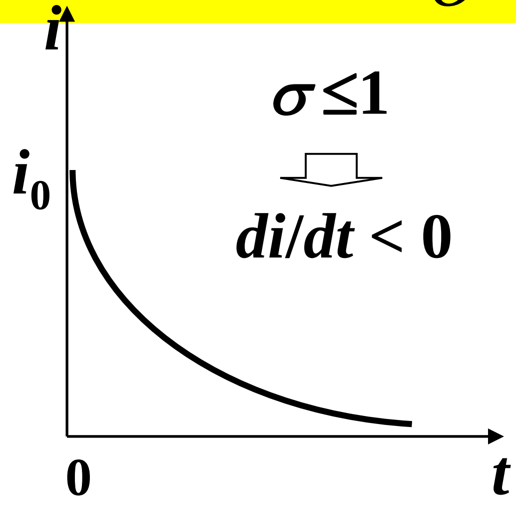
模型3 $\frac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i$

$\sigma=\lambda/\mu$

$$\frac{di}{dt}=-\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$







$$i(\infty)=\begin{cases}1-\frac{1}{\sigma}, & \sigma>1\\ 0, & \sigma\le 1\end{cases}$$

接触数σ=1 ~ 阈值

$\sigma\le 1\Rightarrow i(t)\downarrow$

$\left.\begin{array}{l}\sigma>1\\ i_0\text{小}\end{array}\right\}\Rightarrow i(t)$按S形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

(不考虑治愈)

α

模型4 传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称**移出者** **SIR模型**

假设 1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ，日治愈率μ，接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模 $s(t) + i(t) + r(t) = 1$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

模型4 **SIR模型**

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$N[r(t+\Delta t)-r(t)]=uNi(t)\Delta t$

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\\ \dfrac{dr}{dt}=ui\end{cases}$$

无法求出 $i(t),s(t)$ 的解析解

在相平面 $s\sim i$ 上研究解的性质

不考虑 r

$i_0+s_0\approx 1$（通常$r(0)=r_0$很小）

模型4

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去dt

$\sigma = \lambda / \mu$

$\Rightarrow$

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

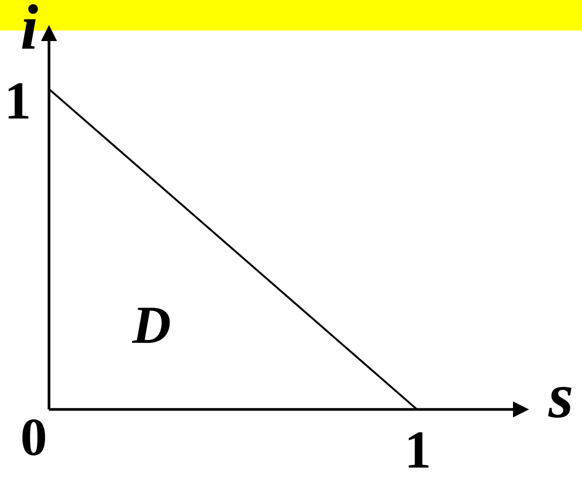
相轨线 $\Downarrow$

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s,i) \mid s \geq 0,\ i \geq 0,\ s + i \leq 1\}$$

在D内作相轨线$i(s)$的图形，进行分析



模型4　　相轨线 $i(s)$ 及其分析　　SIR模型

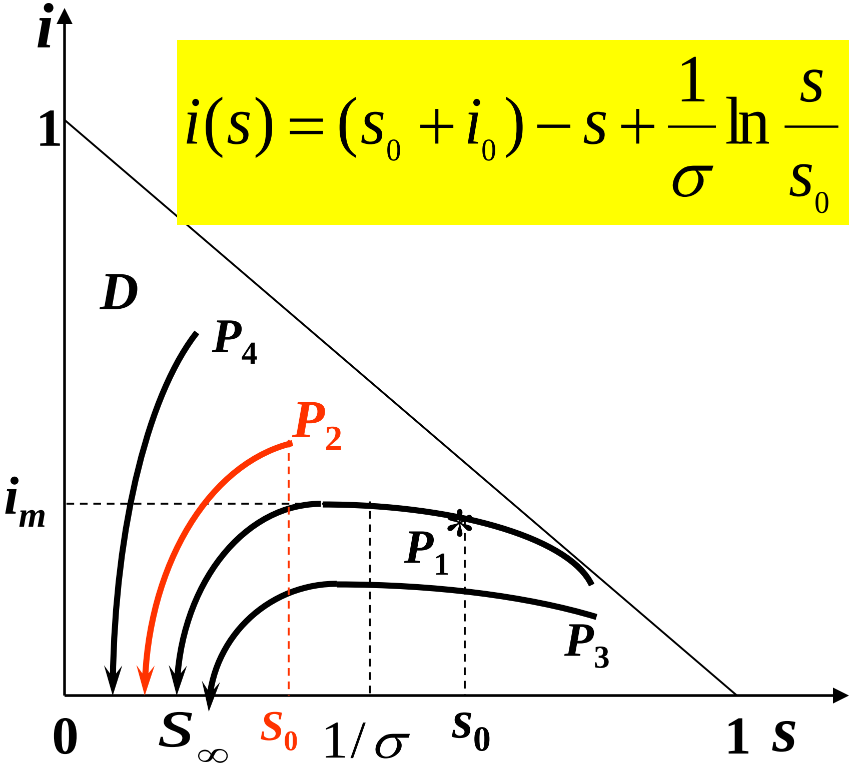
$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i \\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si \\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}$$

$=\lambda i(s-\frac{1}{\sigma})$

$=(\lambda s-\mu)i$

$$\begin{cases}\dfrac{di}{ds}=\dfrac{1}{\sigma s}-1 \\ i\big|_{s=s_0}=i_0\end{cases}$$

$$i(s)=(s_0+i_0)-s+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$



$s(t)$单调减→相轨线的方向

$$s=1/\sigma,\ i=i_m \quad t\to\infty,\ i\to 0$$

s_∞满足 $s_0+i_0-s_\infty+\dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0}=0$

P_1: $s_0>1/\sigma\to i(t)$先升后降至0 ⇨ 传染病蔓延

P_2: $s_0<1/\sigma\to i(t)$单调降至0 ⇨ 传染病不蔓延

$1/\sigma$~阈值

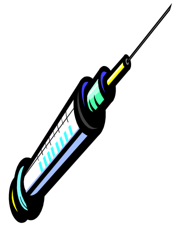
模型4　预防传染病蔓延的手段　SIR模型

传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ ⇨ 降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$ ⇨ $\lambda\downarrow$, $\mu\uparrow$

λ(日接触率)↓ ⇒ 卫生水平↑

μ(日治愈率)↑ ⇒ 医疗水平↑



- 降低 s_0 ⇨ 提高 r_0 ⇨ 群体免疫疫苗

$$s_0+i_0+r_0=1$$

σ 的估计

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$$

忽略i_0

$$\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$$

5.1 传染病模型总结

模型1

$$\frac{di}{dt} = \lambda i \qquad \Rightarrow \quad i(t) = i_0 e^{\lambda t}$$

$$i(0) = i_0 \qquad \Rightarrow \quad t \to \infty \Rightarrow i \to \infty$$

指数模型

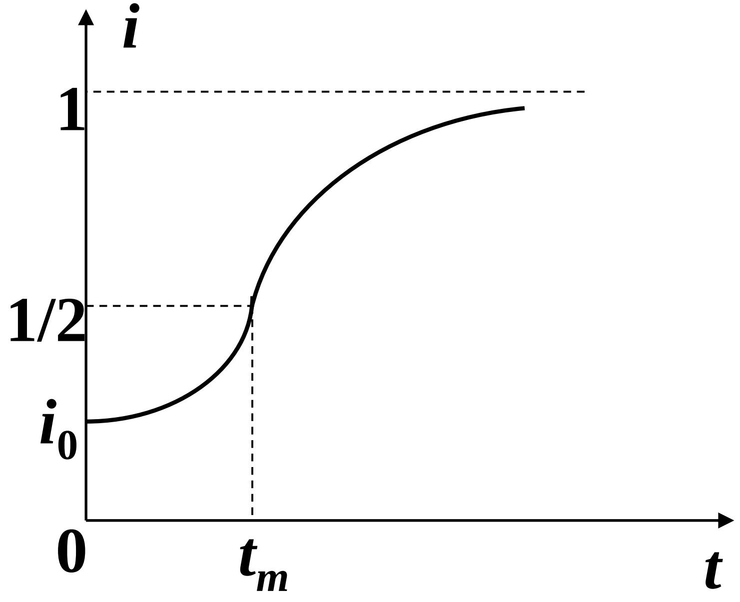
M

模型2 (SI 模型)

区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

L

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Logistic 模型}$$



$$i(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m=\lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t=t_m$, di/dt 最大

$t\to\infty \Rightarrow i\to 1$

t_m~传染病高潮到来时刻

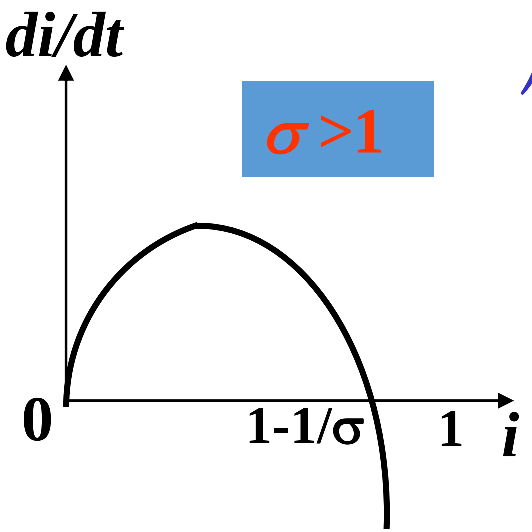
病人可以治愈！

模型3 传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染 **SIS 模型**

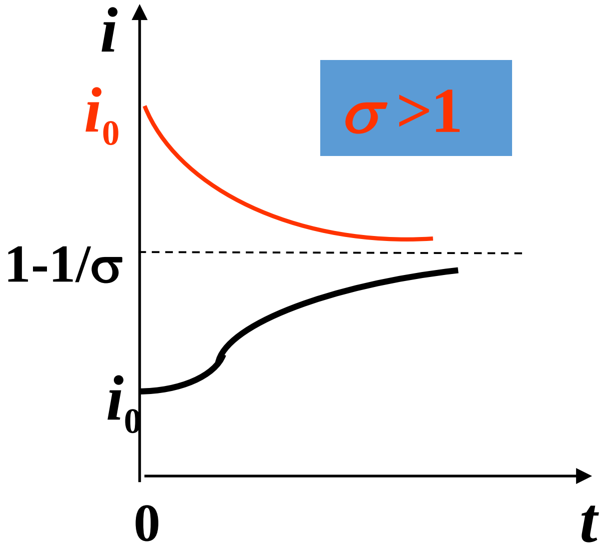
$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

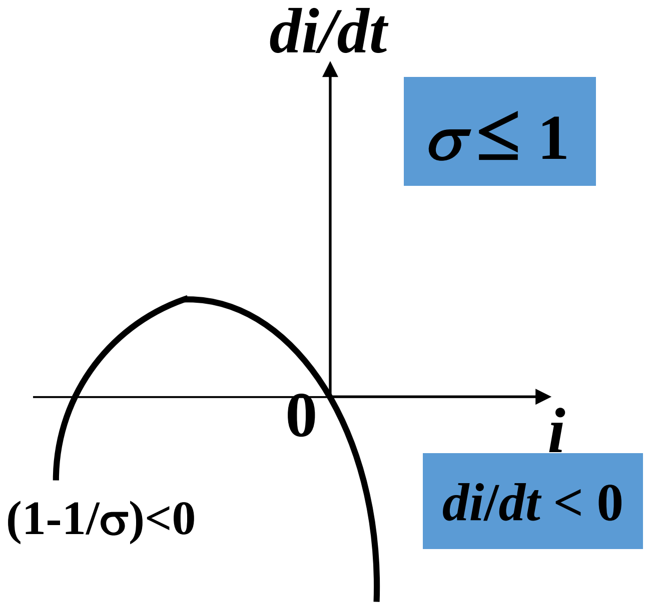
$\sigma = \lambda / \mu$

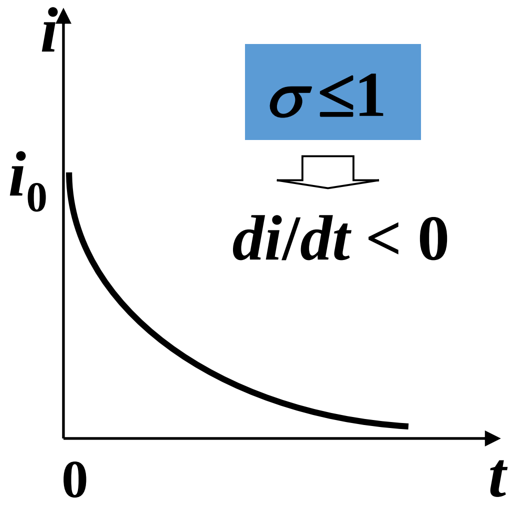
$$\frac{di}{dt} = -\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$



伤风，痢疾







$$i(\infty) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \le 1 \end{cases}$$

接触数σ=1 ~ 阈值

$\sigma \le 1 \Rightarrow i(t) \downarrow$

模型4 传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称**移出者**

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去dt

$\sigma = \lambda / \mu$

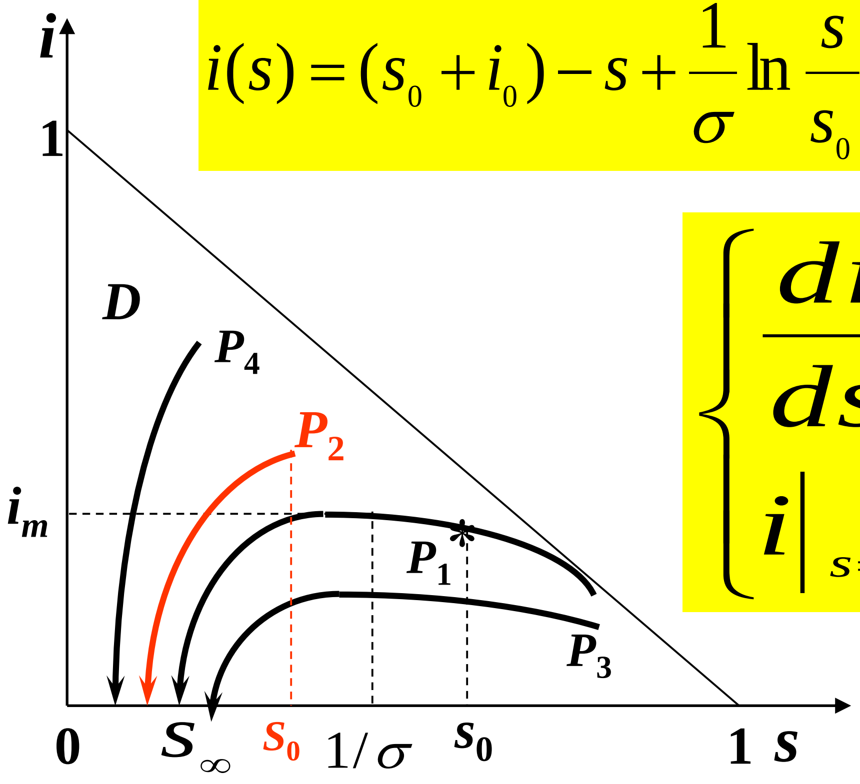
$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

相轨线

天花，肝炎，麻疹

在相平面 $s \sim i$ 上研究解的性质

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$



$$i(s)=(s_0+i_0)-s+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$

$$\begin{cases}\dfrac{di}{ds}=\dfrac{1}{\sigma s}-1\\ i\big|_{s=s_0}=i_0\end{cases}$$

P_1: $s_0>1/\sigma \rightarrow i(t)$先升后降至0 ⇨ 传染病蔓延

P_2: $s_0<1/\sigma \rightarrow i(t)$单调降至0 ⇨ 传染病不蔓延

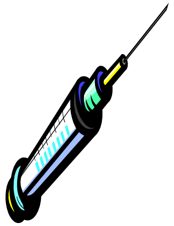
$1/\sigma$~阈值

传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ ⇨ 降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$ ⇨ $\lambda\downarrow,\ \mu\uparrow$

λ(日接触率)$\downarrow \Rightarrow$ 卫生水平↑

μ(日治愈率)$\uparrow \Rightarrow$ 医疗水平↑



- 降低 s_0 ⇨ 提高 r_0 ⇨ 群体免疫

$$s_0 + i_0 + r_0 = 1$$

6.5 初值问题的Matlab数值解

Matlab 的工具箱提供了几个解常微分方程的功能函数，如 ode45，ode23，ode113，其中 **ode45** 采用四五阶龙格库塔方法（以下简称 RK 方法），是解**非刚性常微分方程**的首选方法，ode23 采用二三阶 RK 方法，ode113 采用的是多步法，效率一般比 ode45 高。

在化学工程及自动控制等领域中，所涉及的常微分方程组初值问题常常是所谓的“刚性”问题。具体地说，对一阶线性微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = Ay + \Phi(x), \qquad (6.35)$$

其中$y, \Phi \in R^m$，A为m阶方阵。

若矩阵A的特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$满足关系

$$\underbrace{\mathrm{Re}\,\lambda_i}_{实部}<0 \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

$$\max_{1\le i\le m}|\mathrm{Re}\lambda_i| >> \min_{1\le i\le m}|\mathrm{Re}\lambda_i|,$$

则称方程组（6.35）为**刚性方程组或 Stiff 方程组**，

称数

$$s=\max_{1\le i\le m}|\mathrm{Re}\lambda_i|/\min_{1\le i\le m}|\mathrm{Re}\lambda_i|$$

为刚性比。理论上的分析表明，求解刚性问题所选用的数值方法最好是对步长h不作任何限制。

Matlab的工具箱提供了几个解刚性常微分方程的功能函数，如ode15s，ode23s，ode23t，ode23tb。

6.5.1 ode23，ode45，ode113的使用

对简单的一阶方程的初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Matlab的函数形式是

[t,y]=solver('F',tspan，y0)

这里 solver 为 ode45, ode23, ode113, 输入参数 F 是用 M 文件定义的微分方程 $y' = f(x,y)$ 右端的函数。tspan=[t0,tfinal]是求解区间，y0 是初值。

注意函数 solver('F',tspan，y0)也可以返回一个值，返回一个值时，返回的是结构数组，利用 Matlab 命令 deval 和返回的结构数组，我们可以计算我们感兴趣的任意点的函数值。

例6.7　用RK方法求解

$$y' = -2y + 2x^2 + 2x\text{，}\ (0 \le x \le 0.5)\text{，}\quad y(0) = 1.$$

6.5.2　高阶微分方程$y^{(n)}=f(t,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$和一阶微分方程组的解法

高阶常微分方程，必须做变量替换，化成一阶微分方程组，才能使用 Matlab 求数值解。

一阶微分方程组的解法和简单的一阶方程解法是一样的。

例 6.8　考虑初值问题

$$y''' - 3y'' - y'y = 0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1,$$

$y''(0) = -1.$

解　（1）设$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y''$，则有

$$\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0)=0, \\ y'_2 = y_3, & y_2(0)=1, \\ y'_3 = 3y_3 + y_2 y_1, & y_3(0)=-1. \end{cases}$$

初值问题可以写成$Y' = F(t,Y)$，$Y(0)=Y_0$的形式，

其中$Y = [y_1, y_2, y_3]^T$。

（2）把一阶方程组写成接受两个参数 t 和 y，返回一个列向量的 M 文件 F.m：

```
function dy=F(t,y);
dy=[y(2);y(3);3*y(3)+y(2)*y(1)];
```

注意：尽管不一定用到参数 t，M 文件必须接受此两参数。这里向量 dy 必须是列向量。

（3）用 Matlab 解决此问题的函数形式为

[T,Y]=solver('F',tspan,y0)

这里 solver 为 ode45、ode23、ode113，输入参数 F 是用 M 文件定义的常微分方程组，tspan=[t0 tfinal]是求解区间，y0 是初值列向量。在 Matlab 命令窗口输入

[T,Y]=ode45('F',[0 1],[0;1;-1])

就得到上述常微分方程的数值解。这里 Y 和时刻 T 是一一对应的，Y(:,1)是初值问题的解，Y(:,2)是解的导数，Y(:,3)是解的二阶导数。

例 6.9 求 van der Pol 方程

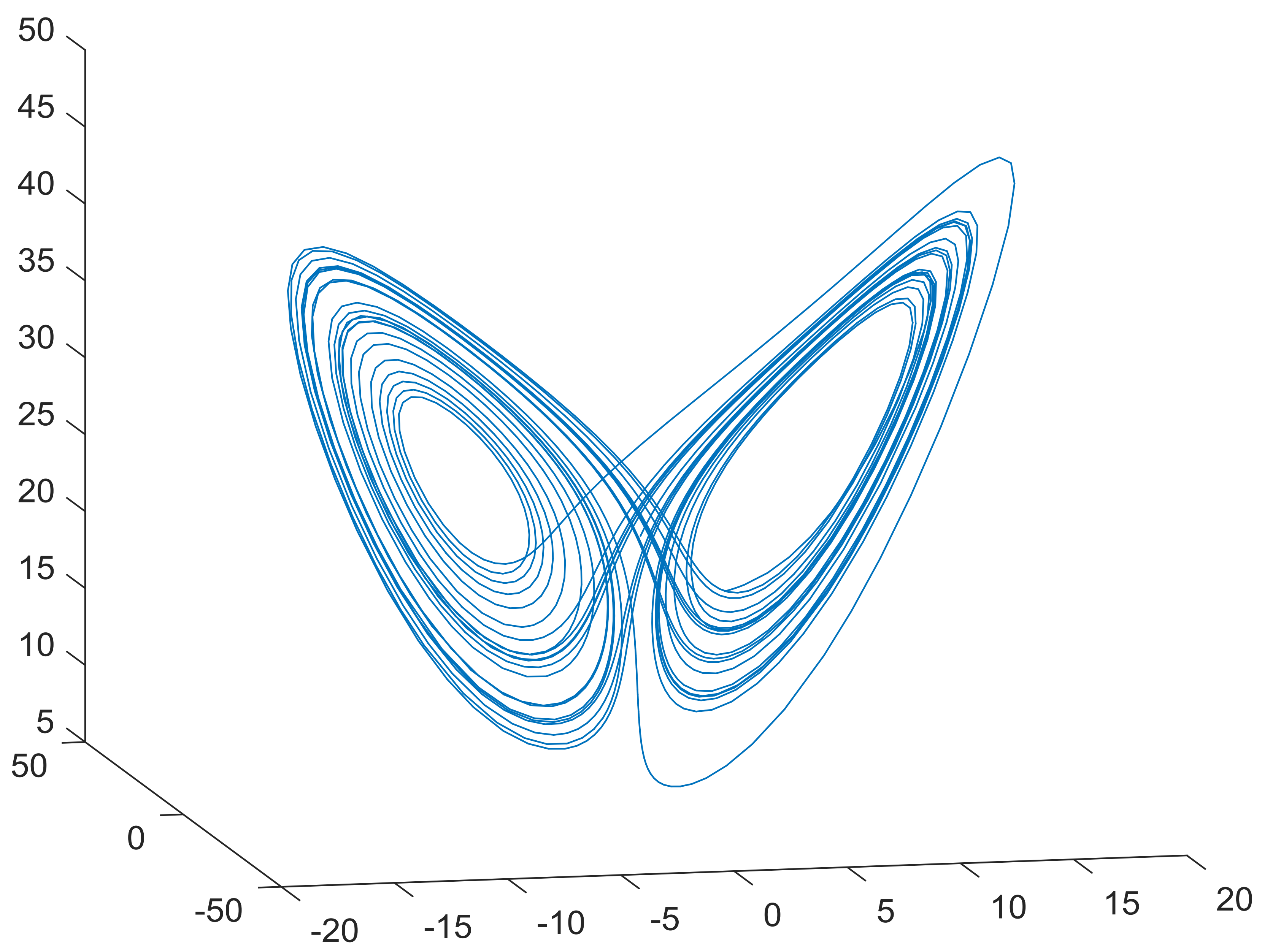
$$\begin{cases} y'' - 1000(1-y^2)y' + y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

的数值解，这里是刚性微分方程。

例6.10 Lorenz方程是一个三阶的非线性系统，它是由描述大气动力系统的Navier-Stokes偏微分方程演化而来的。自由系统如下

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \beta x - y - xz, \\ \dot{z} = -\lambda z + xy. \end{cases}$$

当系统参数σ, β, λ在一定范围内，系统就出现混沌，如$\sigma = 10$，$\beta = 28$，$\lambda = 8/3$时，出现混沌现象。求在初始条件$[x(0), y(0), z(0)] = [5, 13, 17]$时，方程组的数值解，并画出解的图形。


50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
50
0
-50
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20