数学建模算法与应用

第1章 线性规划

1.1 线性规划问题

在人们的生产实践中，经常会遇到如何利用现有资源来安排生产，以取得最大经济效益的问题。此类问题构成了运筹学的一个重要分支—数学规划，而线性规划(Linear Programming 简记 LP)则是数学规划的一个重要分支。自从 1947 年 G. B. Dantzig 提出求解线性规划的单纯形方法以来，线性规划在理论上趋向成熟，在实用中日益广泛与深入。特别是在计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后，线性规划的适用领域更为广泛了，已成为现代管理中经常采用的基本方法之一。

1.1.1 线性规划的实例与定义

例 1.1 某机床厂生产甲、乙两种机床，每台销售后的利润分别为 4 千元与 3 千元。生产甲机床需用A、B机器加工，加工时间分别为每台 2 小时和 1 小时；生产乙机床需用A、B、C三种机器加工，加工时间为每台各一小时。若每天可用于加工的机器时数分别为A机器 10 小时、B机器 8 小时和C机器 7 小时，问该厂应生产甲、乙机床各几台，才能使总利润最大?

数学建模

上述问题的数学模型：设该厂生产x_1台甲机床和x_2乙机床时总利润z最大，则x_1, x_2应满足

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2, \qquad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 7, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

变量x_1, x_2称之为**决策变量**，（1.1）式被称为问题的**目标函数**，（1.2）中的几个不等式是问题的**约束条件**，记为s.t.(即 subject to)。

目标函数及约束条件均为线性函数，故被称为线性规划问题。线性规划问题是在一组线性约束条件的限制下，求一线性目标函数最大或最小的问题。

在解决实际问题时，把问题归结成一个线性规划数学模型是很重要的一步，往往也是很困难的一步，模型建立得是否恰当，直接影响到求解。而选适当的决策变量，是我们建立有效模型的关键之一。

1.1.2 线性规划问题的解的概念

一般线性规划问题的（数学）标准型为

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,,$$

(1.3)

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i=1,2,\cdots,m, \\ x_j \geq 0 & j=1,2,\cdots,n. \end{cases} \qquad (1.4)$$

其中$b_i \geq 0$，$i=1,2,\cdots,m$。

可行解　满足约束条件 (1.4) 的解 $x=[x_1,\cdots,x_n]^T$，称为线性规划问题的可行解，而使目标函数（1.3）达到最大值的可行解叫最优解。

可行域　所有可行解构成的集合称为问题的可行域，记为 R。

数学建模

1.1.3 线性规划的Matlab标准形式及软件求解

线性规划的目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值，约束条件的不等号可以是小于号也可以是大于号。为了避免这种形式多样性带来的不便，**Matlab 中规定线性规划的标准形式**为

$$\min_{x} f^{T}x,$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} A\cdot x\le b, \\ Aeq\cdot x=beq, \\ lb\le x\le ub. \end{cases}$$

其中 f, x, b, beq, lb, ub 为列向量，f 称为价值向量，b 称为资源向量，A, Aeq 为矩阵。

Matlab 中求解线性规划的命令为

[x,fval] = linprog(f,A,b)

[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq)

[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)

其中 x 返回的是决策向量的取值, fval 返回的是目标函数的最优值, f 为价值向量，A，b 对应的是线性不等式约束，Aeq，beq 对应的是线性等式约束，lb 和 ub 分别对应的是决策向量的下界向量和上界向量。

例 1.2 求解下列线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3, \\
\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\
2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10, \\
x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12, \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

解　（1）化成 Matlab 标准型

$$\min w = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3,$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} -10 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$[1,1,1]\cdot[x_1, x_2, x_3]^T = 7.$$

（2）求解的 Matlab 程序如下

```
f=[-2; -3; 5];
a=[-2,5,-1;1,3,1]; b=[-10;12];
aeq=[1,1,1];
beq=7;
[x,y]=linprog(f,a,b,aeq,beq,zeros(3,1));
x, y=-y
```

（3）求解的Lingo程序如下

```
model:
sets:
row/1..2/:b;
col/1..3/:c,x;
links(row,col):a;
endsets
data:
c=2 3 -5;
a=-2 5 -1 1 3 1;
b=-10 12;
enddata
max=@sum(col:c*x);
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))<b(i));
@sum(col:x)=7;
end
```

例 1.2　求解下列线性规划问题

$$
\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3,
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}
$$

求得的最优解为 $x_1 = 6.4286, x_2 = 0.5714$，$x_3 = 0$，对应的最优值 $z = 14.5714$。

例1.3 求解线性规划问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

解　编写Matlab程序如下

```
c=[2;3;1];
a=[1,4,2;3,2,0];
b=[8;6];
[x,y]=linprog(c,-a,-b,[],[],zeros(3,1))    %这里没有等式约束，对应的矩阵为空矩阵
```

求得的最优解为$x_1 = 0.8066$, $x_2 = 1.7900$, $x_3 = 0.0166$，对应的最优值$z = 7.0000$。

1.1.4 可以转化为线性规划的问题

例1.4 数学规划问题

$$\min \quad |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$

$$\text{s. t.} \qquad Ax \le b.$$

其中$x=[x_1,\cdots,x_n]^T$，A和b为相应维数的矩阵和向量。

对任意的x_i，存在$u_i,v_i \ge 0$满足

$$x_i = u_i - v_i,\quad |x_i| = u_i + v_i,$$

事实上，只要取$u_i = \dfrac{x_i+|x_i|}{2}$，$v_i = \dfrac{|x_i|-x_i}{2}$就可以满足上面的条件。

数学建模

记$u=[u_1,\cdots,u_n]^T$，$v=[v_1,\cdots,v_n]^T$，从而可以把上面的问题变成

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i),$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} A(u-v)\le b, \\ u,v\ge 0. \end{cases}$$

这里$u\ge 0$表示向量u的每个分量大于等于 0。

进一步把模型改写成

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i),$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} [A,-A]\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\le b, \\ u,v\ge 0. \end{cases}$$

例1.5（续例1.4类型的实例）　求解下列数学规划问题

$$\min \quad z = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3| + 4|x_4|,$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \le -1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$u_1 + v_1 + 2u_2 + 2v_1 + 3u_3 + 3v_3 + 4u_4 + 4v_4$

解　做变量变换 $u_i=\dfrac{x_i+|x_i|}{2}$，$v_i=\dfrac{|x_i|-x_i}{2}$，$i=1,2,3,4$，并把新变量重新排序成一维向量 $y=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=[u_1,\cdots,u_4,v_1,\cdots,v_4]^T$，则可把模型变换为线性规划模型

$$\min \quad c^T y,$$

$$\text{s. t.}\quad \begin{cases}[A,-A]\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\le b,\\ y\ge 0.\end{cases}$$

数学建模

其中$c=[1,2,3,4,1,2,3,4]^T$，$b=[-2,-1,-\frac{1}{2}]^T$，

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}。$$

数学建模

计算的Matlab程序如下

```
clc, clear
c=1:4; c=[c,c]'; %构造价值列向量
a=[1 -1 -1 1; 1 -1 1 -3; 1 -1 -2 3];
a=[a,-a]; %构造变换后新的系数矩阵
b=[-2 -1 -1/2]';
[y,z]=linprog(c,a,b,[],[],zeros(8,1))  %这里没有等式约束，对应的矩阵为空矩阵
x=y(1:4)-y(5:end)   %变换到原问题的解，x=u-v
```

求得最优解$x_1=-2$，$x_2=x_3=x_4=0$，最优值$z=2$。

Lingo程序如下

```
model:
sets:
col/1..4/:c,x;
row/1..3/:b;
links(row,col):a;
endsets
data:
c=1 2 3 4;
b=-2 -1 -0.5;
a=1 -1 -1 1    1 -1 1 -3    1 -1 -2 3;
enddata
min=@sum(col:c*@abs(x));
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))<b(i));
@for(col:@free(x));    !x的分量可正可负;
end
```

例 1.6 $\min\limits_{x_i}\{\max\limits_{y_i}|\varepsilon_i|\}$，其中$\varepsilon_i = x_i - y_i$。

取$v = \max\limits_{y_i}|\varepsilon_i|$，这样，上面的问题就变换成

$$\min \quad v,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - y_1 \le v, \cdots, x_n - y_n \le v, \\ y_1 - x_1 \le v, \cdots, y_n - x_n \le v. \end{cases}$$

1.2 投资的收益和风险

1.2.1 问题提出

市场上有n种资产s_i（$i=1,2,\cdots,n$）可以选择，现用数额为M的相当大的资金作一个时期的投资。这n种资产在这一时期内购买s_i的平均收益率为r_i，风险损失率为q_i，投资越分散，总的风险越少，总体风险可用投资的s_i中最大的一个风险来度量。

购买s_i时要付交易费，费率为p_i，当购买额不超过给定值u_i时，交易费按购买u_i计算。另外，假定同期银行存款利率是r_0，既无交易费又无风险（$r_0=5\%$）。

已知$n=4$时相关数据如表 1.1。

表 1.1　投资的相关数据

s_i	$r_i(\%)$	$q_i(\%)$	$p_i(\%)$	u_i(元)
s_1	28	2.5	1	103
s_2	21	1.5	2	198
s_3	23	5.5	4.5	52
s_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案，即用给定资金 M，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，使总体风险尽可能小。

1.2.2 符号规定和基本假设

符号规定

s_i表示第i种投资项目，如股票，债券等，$i=0,1,\cdots,n$，其中s_0指存入银行；

r_i,p_i,q_i分别表示s_i的平均收益率，交易费率，风险损失率,$i=0,\cdots,n$，其中$p_0=0$，$q_0=0$；

u_i表示s_i的交易定额，$i=1,\cdots,n$；

x_i表示投资项目s_i的资金，$i=0,1,\cdots,n$；

a表示投资风险度；

Q表示总体收益；

基本假设

(1) 投资数额M相当大, 为了便于计算, 假设$M=1$;

(2) 投资越分散，总的风险越小;

(3) 总体风险用投资项目s_i中最大的一个风险来度量;

(4) $n+1$种资产s_i之间是相互独立的;

(5) 在投资的这一时期内，r_i, p_i, q_i为定值，不受意外因素影响;

(6) 净收益和总体风险只受r_i, p_i, q_i影响，不受其它因素干扰。

1.2.3 模型的分析与建立

1． 总体风险用所投资的s_i中最大的一个风险来衡量，即

$$\max\{q_i x_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}.$$

M

2．购买$s_i (i = 1,\cdots,n)$所付交易费是一个分段函数，即

$$\text{交易费}=\begin{cases} p_i x_i, & x_i > u_i, \\ p_i u_i, & x_i \le u_i. \end{cases}$$

而题目所给的定值u_i（单位：元）相对总投资M很少，$p_i u_i$更小，这样购买s_i的净收益可以简化为$(r_i - p_i)x_i$。

3．要使净收益尽可能大，总体风险尽可能小，这是一个多目标规划模型。

目标函数为

$$\begin{cases} \max \sum_{i=0}^{n} (r_i - p_i) x_i, \\ \min \max_{1 \le i \le n} \{q_i x_i\} . \end{cases}$$

约束条件为

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (1 + p_i) x_i = M, \\ x_i \ge 0, \quad i = 0,1,\cdots,n. \end{cases}$$

数学建模

4. 模型简化

i）在实际投资中，投资者承受风险的程度不一样，若给定风险一个界限a，使最大的一个风险率为a，即$\frac{q_i x_i}{M} \le a$（$i=1,\cdots,n$），可找到相应的投资方案。这样把多目标规划变成一个目标的线性规划。

模型一　固定风险水平，优化收益

$$\max \sum_{i=0}^{n} (r_i - p_i) x_i ,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dfrac{q_i x_i}{M} \le a, i = 1,\cdots,n, \\ \sum\limits_{i=0}^{n} (1+p_i) x_i = M, \quad x_i \ge 0, \quad i = 0,1,\cdots,n. \end{cases}$$

ii）若投资者希望总盈利至少达到水平k以上，在风险最小的情况下寻求相应的投资组合。

模型二　固定盈利水平，极小化风险

$$\min \max_{1\le i\le n}\{q_i x_i\} \ ,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i \ge k, \\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M, \quad x_i \ge 0, \quad i = 0,1,\cdots,n. \end{cases}$$

ⅲ）投资者在权衡资产风险和预期收益两方面时，希望选择一个令自己满意的投资组合。因此对风险、收益分别赋予**权重** s（$0 < s \le 1$）和$(1-s)$，s称为投资偏好系数。

模型三 $\min s \max\limits_{1\le i\le n}\{q_i x_i\} - (1-s)\sum\limits_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i$，

$$\text{s.t.} \ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M, \quad x_i \ge 0, \quad i = 0,1,2,\cdots,n.$$

1.2.4 模型一的求解

模型一为

$$\min f = [-0.05, -0.27, -0.19, -0.185, -0.185] \cdot [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_0 + 1.01x_1 + 1.02x_2 + 1.045x_3 + 1.065x_4 = 1, \\ 0.025x_1 \le a, \\ 0.015x_2 \le a, \\ 0.055x_3 \le a, \\ 0.026x_4 \le a, \\ x_i \ge 0 \ (i = 0, 1, \cdots, 4). \end{cases}$$

由于a是任意给定的风险度，到底怎样没有一个准则，不同的投资者有不同的风险度。我们从$a=0$开始，以步长$\Delta a = 0.001$进行循环搜索，编制程序如下

```
clc,clear
a=0;hold on
while a<0.05
    c=[-0.05,-0.27,-0.19,-0.185,-0.185];
    A=[zeros(4,1),diag([0.025,0.015,0.055,0.026])];
    b=a*ones(4,1);
    Aeq=[1,1.01,1.02,1.045,1.065];
    beq=1; LB=zeros(5,1);
    [x,Q]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,LB);
    Q=-Q; plot(a,Q,'*k');
    a=a+0.001;
end
xlabel('a'),ylabel('Q')
```

1.2.5 结果分析

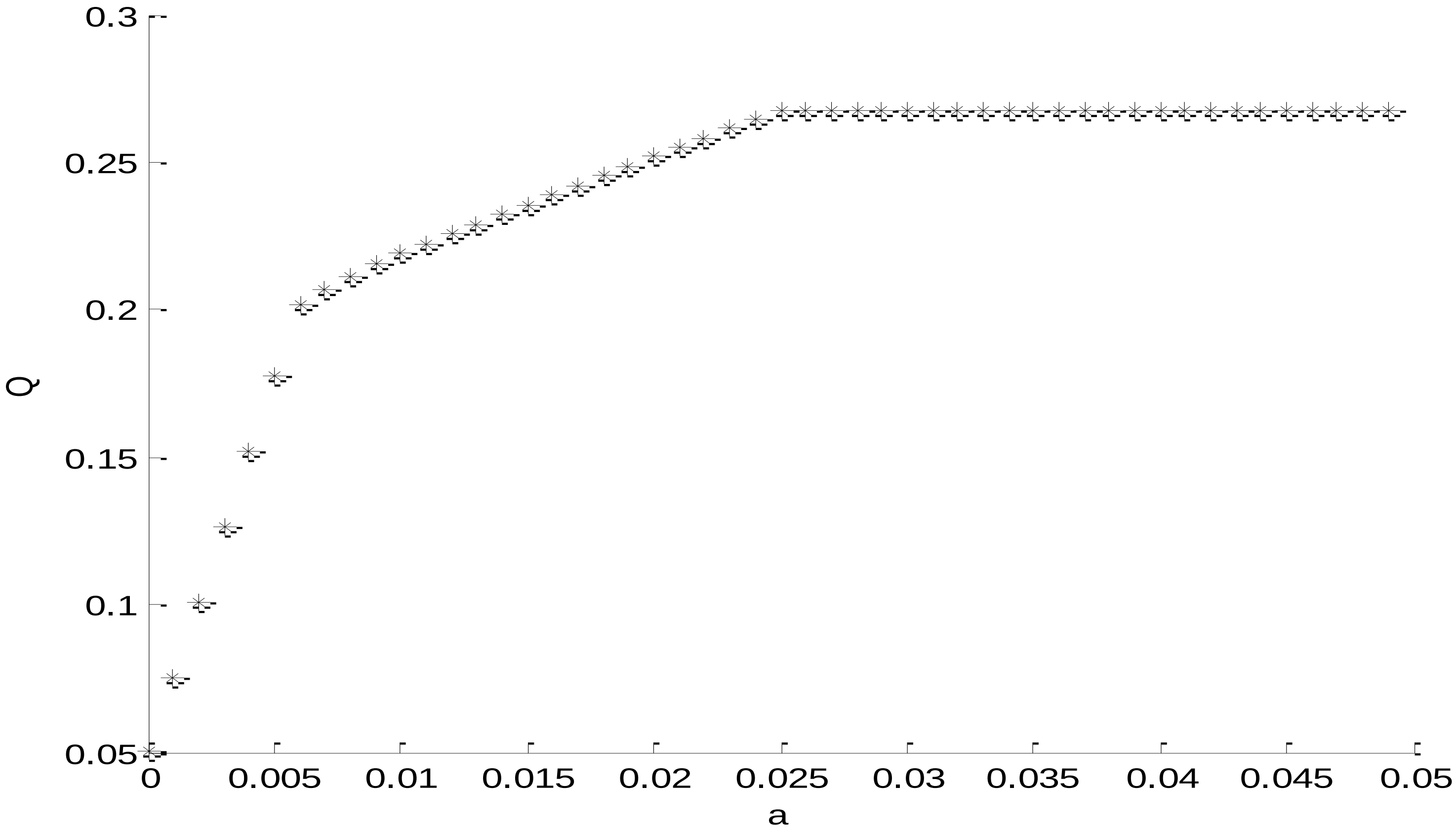

图 1.1　风险与收益的关系图

从图 1.1 可以看出

（1）风险大，收益也大。

（2）当投资越分散时，投资者承担的风险越小，这与题意一致。冒险的投资者会出现集中投资的情况，保守的投资者则尽量分散投资。

（3）在$a=0.006$附近有一个转折点，在这一点左边，风险增加很少时，利润增长很快。在这一点右边，风险增加很大时，利润增长很缓慢，所以对于风险和收益没有特殊偏好的投资者来说，应该选择曲线的转折点作为最优投资组合，大约是$a=0.6\%$，$Q=20\%$，所对应投资方案为风险度$a=0.006$，收益$Q=0.2019$，$x_0=0$，$x_1=0.24$，$x_2=0.4$，$x_3=0.1091$，$x_4=0.2212$。