



中國石油大學 (华东)
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

《数学建模》中期大作业

基于 SIR 模型对武汉新型冠状病毒疫情分析

姓名	张世琛	李选	曹佳慧	张子锜
学号	1804030401	1808010202	1808010203	1808010201
班级	计科 1802	计科 1802	计科 1802	计科 1802

2020 年 4 月 3 日

基于 SIR 模型对武汉新型冠状病毒疫情分析

摘要

本文首先采用抽样检测法对 2019-nCoV 早期的模型的合理性及实用性进行了评价, 然后我们通过对传染病的共性及 2019-nCoV 的特性的分析。得出三个基本假设并且把人群理想化为三类 (S 类, I 类, R 类), 建立起基本的 SIR 模型, 再对 SIR 模型中的三类人群间的相互转化关系的分析, 由于 2019-nCoV 的特性, 可知 SIR 模型中的两个参数 $a(t)$, $b(t)$ 是以时间为变量的函数。我们根据武汉疫情的数据, 通过多现实的数据拟合法分别得到 $a(t)$, $b(t)$ 及 T 结合, 从而建立起模型。由于医疗条件的逐步改善, 一定会制定出一套有效的治疗方案, 甚至到后期的 2019-nCoV 疫苗的研发。

本文利用数学软件 (MATLAB) 很好的实现了模型运算, 并结合实际数据得出了人群与实践的关系图。从图中可以很好的反映出各类人群的变化规律, 他们的变化规律与实际变化相吻合, 从而证明了我们的模型基本符合要求。

1 问题重述

2019 年底湖北省武汉市出现不明原因肺炎, 于 2020 年初被世界卫生组织命名为新型冠状病毒, 同期在全国范围内大面积爆发, 对全国人民的日常生活造成巨大干扰, 目前疫情在国内还未完全控制。基于此情况, 我们认为有必要根据该病的特点, 建立合适的数学模型, 分析合理的控制策略, 预测疾病未来一段时间的发展趋势。

2 问题的分析

主要通过分析湖北 (武汉) 地区的受感染人数的变化规律, 我们对该地区预测流行病的变化趋势提出以下模型假设:

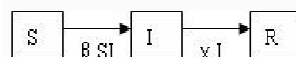
1. 将人群分为三类:

(a) 易感染人数 (疑似病例): 用 S 表示;

(b) 病人数 (已受感染者, 即确诊者): 用 I 表示;

(c) 移出者人数 (包括“被治愈者”和“死亡者”), 这部分人不再参与感染和被感染过程: 用 R 表示。

在 SIR 模型中以上三类人群之间存在两个转换的关系:



S: 易感者 **I:** 感染者 **R:** 隔离者

β : 感染系数

γ : 隔离 (恢复) 系数

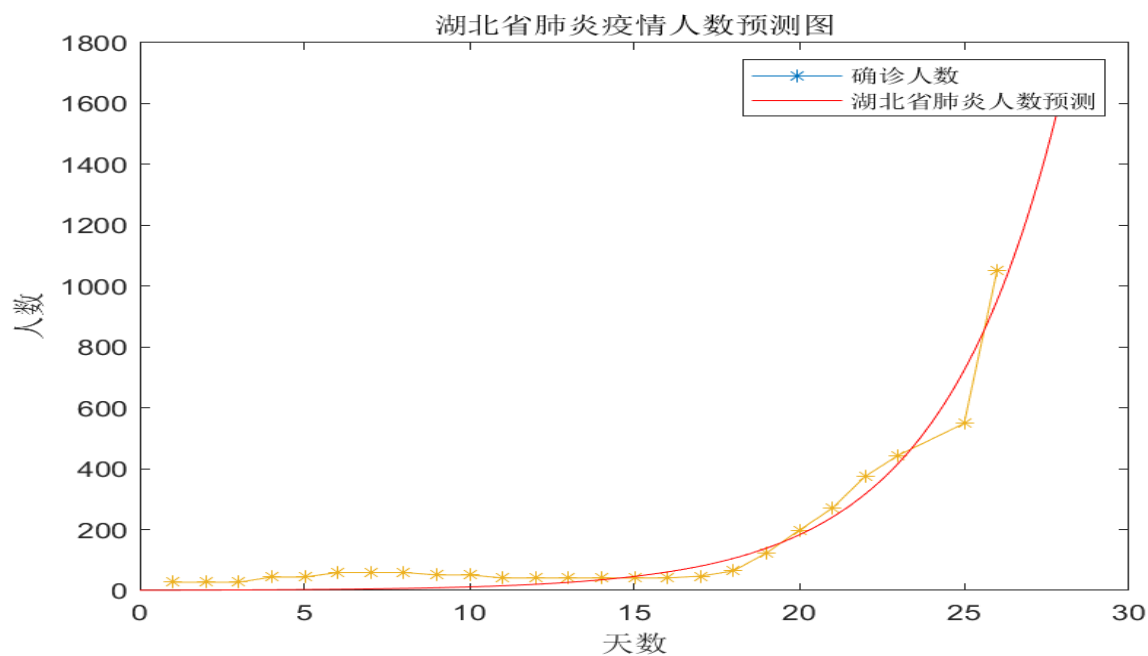
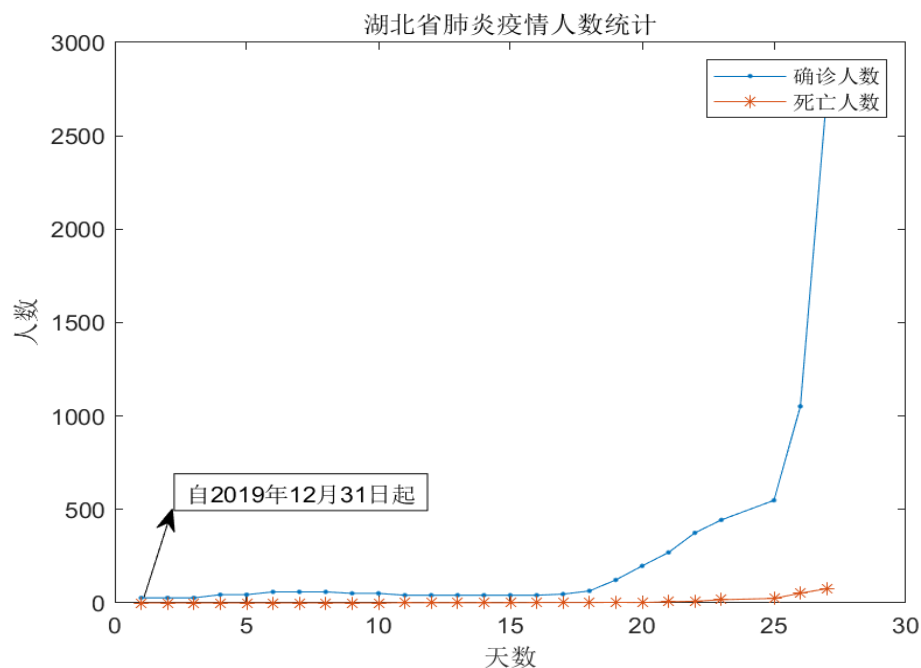
2. 该地区人口不流动 (考虑到武汉已经封城, 该假设是合理的), 设最初易感染人数为 N 此时 I R 均为 0.
3. 被隔离人群完全断绝与外界接触, 不再具有传染性 (考虑到现有的医疗条件, 该假设也是合理的)。

3 模型的分析与建立

3.1 初期数据的模拟

传染病早期可以采用指数模型进行模拟: $N(t) = N_0(1 + k)^t$, 当然, 此情况是在社会来不及防备以及群众不重视的基础上导致的。由于前期武汉市政府的不重视、人民对本次疫情的忽视以及春节带来的附加作用, 我们可以认为, 新型冠状病毒前期是可以满足该指数模型的。 1

	确诊人数	死亡
12月31日	27	
1月1日	27	
1月2日	27	
1月3日	44	
1月4日	44	
1月5日	59	
1月6日	59	
1月7日	59	
1月8日	51	
1月9日	51	
1月10日	41	1
1月11日	41	1
1月12日	41	1
1月13日	41	1
1月14日	41	1
1月15日	41	2
1月16日	47	2
1月17日	64	2
1月18日	123	3
1月19日	198	2
1月20日	270	6
1月21日	375	9
1月22日	444	17
1月23日		
1月24日	549	24
1月25日	1052	52
1月26日	2714	76



由 MATLAB 拟合出的人数曲线如上所示。武汉未在 23 日提供确诊人数，故将该点去除后拟合。此外,MATLAB 给出的拟合结果如下:

增长模型: $f(x) = a(1 + b)^x$

```
x =
    0.7421    0.3169

resnorm =
    6.7711e+04
```

显然，此模型只能适用于早期的预测。

4 模型的建立、求解

建立 SIR 模型

易感染者, 感染者, 移出者之和是个恒量即 $N = S + I + R$. 假设病人康复后具有免疫力, 人与人之间有相同的接触率. 最终由如下两种假设决定状态之间的转变率:

1. 感染者的增长率是和感染者 I 与易感染者 S 的乘积成正比的
2. 感染者 I 到移出者 R 的变化率是与感染者 I 成正比。

基于以上两条得出模型的微分方程

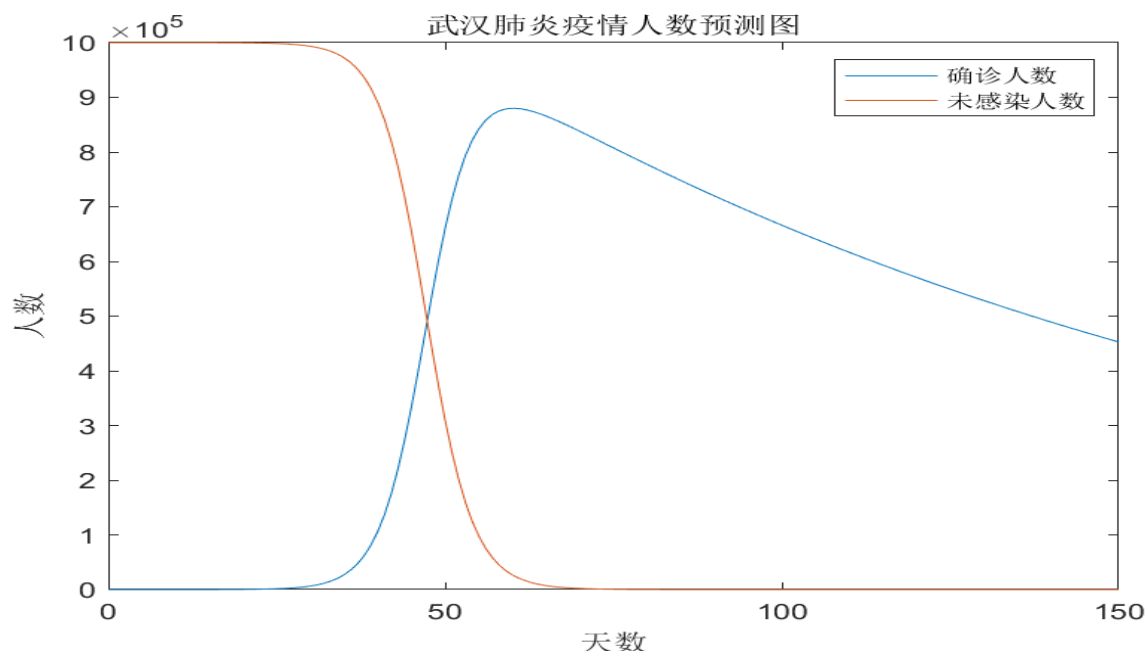
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (1)$$

其中, α , γ , 都是以时间为变量的参数, $\alpha(t)$ 为日感染率, $\gamma(t)$ 为日移出率. 但是因为此疫情目前仍处于上升期, 且相关数据较少, 故按照以上微分方程组无法求出 $\alpha(t), \gamma(t)$ 的解析解, 因此我们先作数值计算. 参考多方资料后, 我们设 $\alpha=0.0000003, \gamma=0.0077266, I(0)=1, S(0)=1000000$ (其中感染率 α 和移出率 γ 都是根据官方所提供的数据估算出; 武汉市人口共有一千万, 我们假设十分之一受到此次疫情的影响)

用 MATLAB 进行编程:

```
function y = ill(t,x)
a=0.0000003;
b=0.0077266;
y=[a*x(1)*x(2)-b*x(1),-a*x(1)*x(2)]';
end

ts=[0:150];
x0=[1,1000000];
[t,x]=ode45('ill',ts,x0);
plot(t,x(:,1),t,x(:,2));
xlabel('天数')
ylabel('人数')
title('武汉省肺炎疫情人数预测图')
```



上图是由 MATLAB 求解微分方程后得出的结果。可以看到，21 天到 25 天的数据，也就是截止到 1 月 26 日 24 时，预测的数据都是符合实际情况的。

武汉疫情数据									
数 据时间	新增确诊数	新增疑似数	累计确诊数	现有确诊数	现有疑似数	累计死亡数	累计治愈数	死亡率	治愈率
1.18			45	28		2	15		
1.19			62	41		2	19		
1.2			198	169		4	25		
1.21			258	227		6	25		
1.22			425	380		17	28		
1.23			495	441		23	31		
1.24			572	502		38	32		
1.25			618	533		45	40		
1.26			698	593		63	42		

但是，预测数据给出的结果显然是不符合实际情况的，随着疫情的扩张，感染率势必降低，移出率势必提高。因此，感染率 α 和移出率 γ 不会是一个常数，该模型仍然有需要改进的地方。

5 模型检验与分析

5.1 相轨线分析

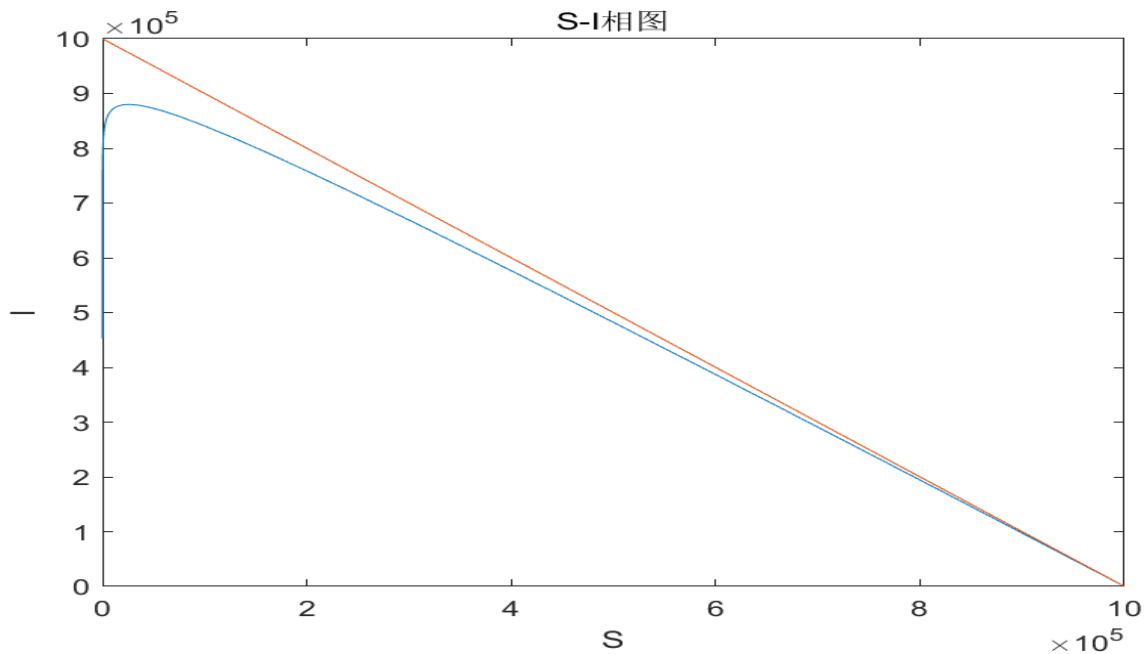
定义 $\sigma = \frac{\alpha}{\gamma}$ 将原微分方程组化简：

$$\frac{dI}{dS} = \frac{1}{\sigma S} - 1, I_{S=S_0} = I_0$$

容易求出此微分方程的解为：

$$I = (S_0 + I_0) - S + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{S}{S_0}$$

显然当 $S = \frac{1}{\sigma}$ 时 I 最大。对于基本模型来说，其 $\frac{1}{\sigma} = \frac{0.0077266}{0.0000003} = 25755$



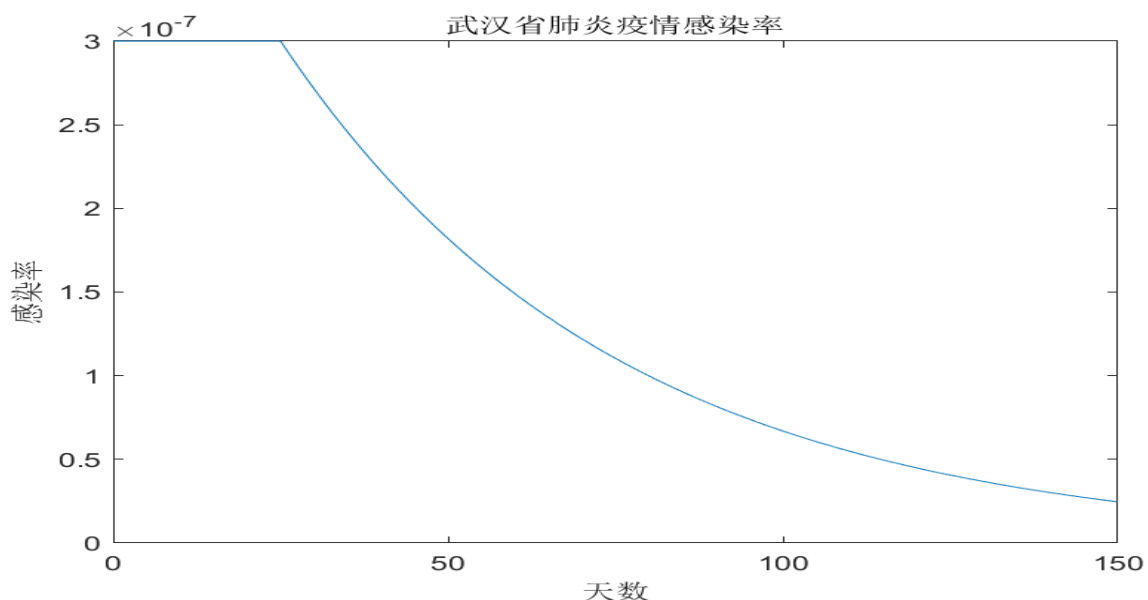
由相图可知， I 所代表的是一个阈值，当 $S > \frac{1}{\alpha}$ 时，传染病在蔓延；当 $S < \frac{1}{\alpha}$ 时，传染病则不会蔓延。

5.2 模型的改进

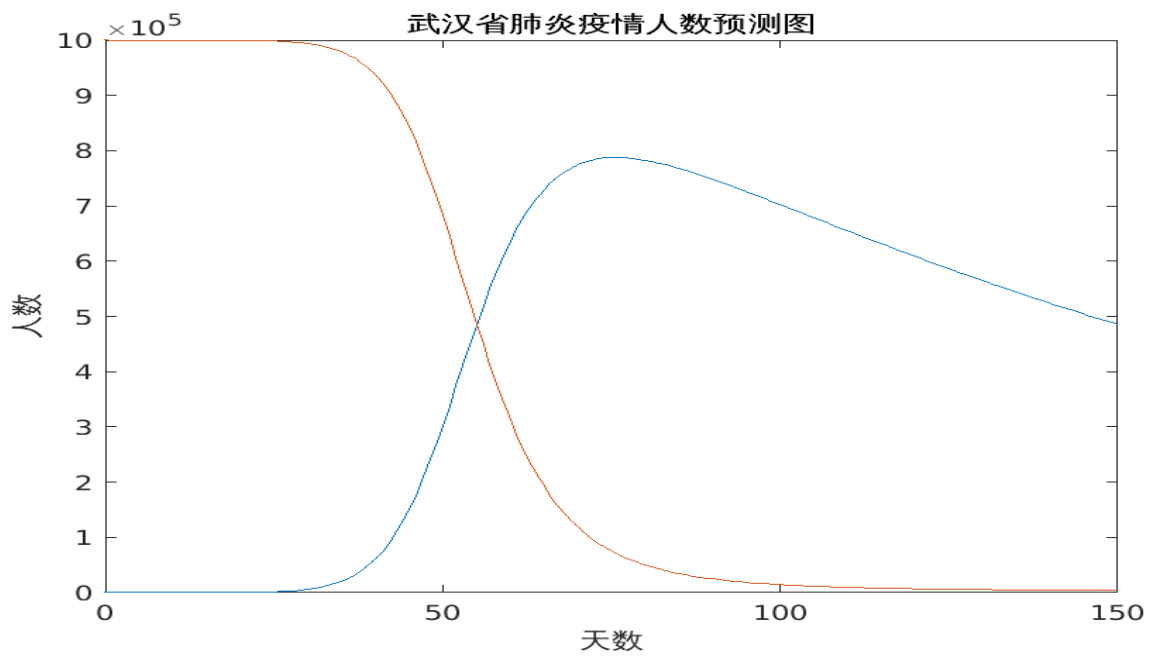
由前面分析可知，此模型对于前期疫情的预测比较准确，但是对于后期疫情的发展则显然不符合实际结果。其原因是因为感染率 α 和移出率 γ 不会是一个常数。后期传染率应呈指数型下降。并将移出率用 sigmoid 函数进行优化。

1. 首先保持移出率不变，优化感染率函数

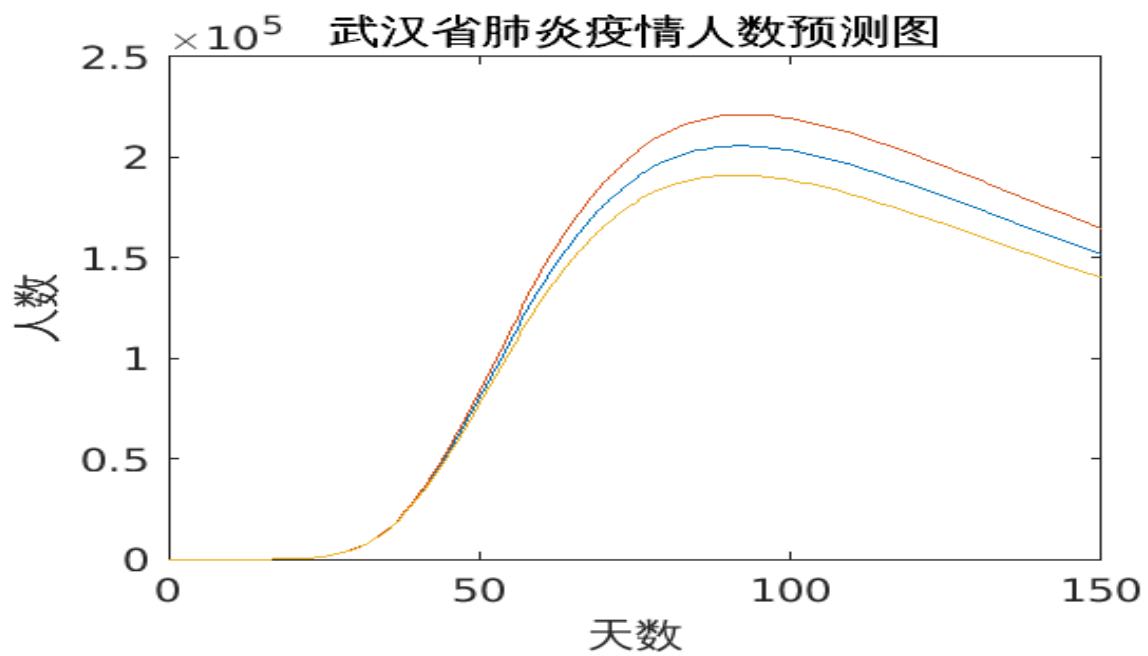
$$\alpha = 0.0000003 * ((\text{stepfun}(t, 0) - \text{stepfun}(t, 25)) + \text{stepfun}(t, 25) * e^{-0.02 * (t - 25)})$$



感染率曲线 (第 25 天时武汉市采取响应措施，故从该日起感染率下降) 由改进后的模型建立的预测图，前期预测仍然符合预期，且大大缓解了高峰时期患病的人数。



下面改变感染率函数下降的斜率，由 MATLAB 拟合出结果：

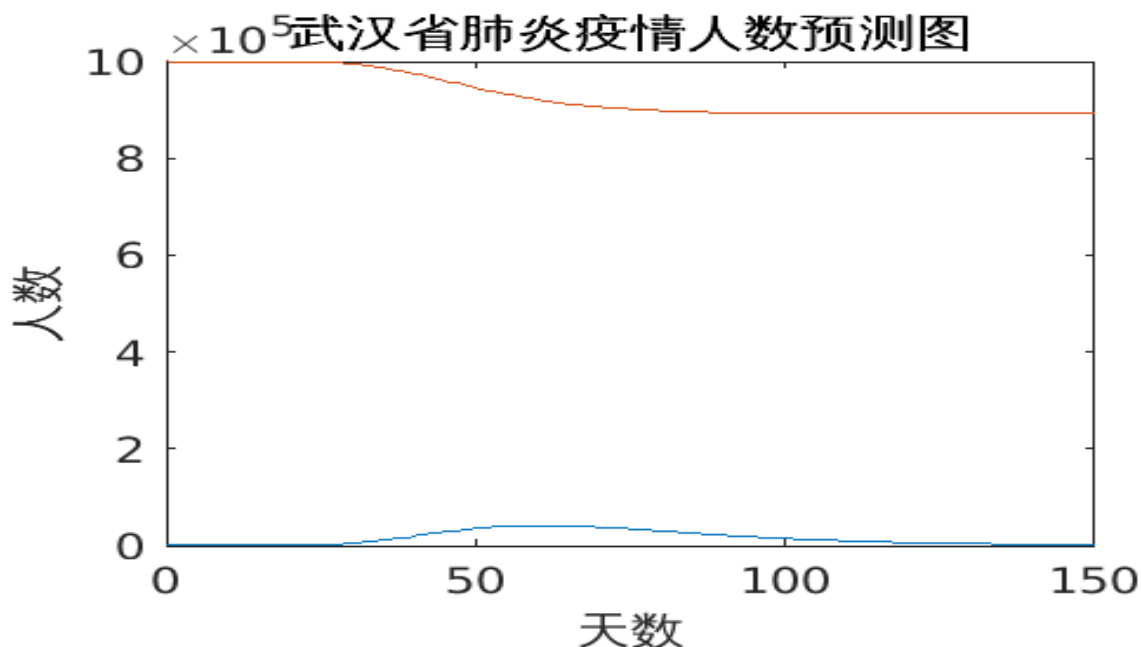


增大感染率下降的梯度，可以有效的降低感染人数。

2. 在 (1) 的基础上改进移出率函数

$$\alpha = 0.0000003 * ((\text{stepfun}(t, 0) - \text{stepfun}(t, 25)) + \text{stepfun}(t, 25) * e^{-0.05 * (t - 25)})$$

$$\gamma = 0.0077266 * (\text{stepfun}(t, 0) + \text{stepfun}(t, 25) * (\frac{5}{1 + e^{-(t - 28)}}))$$



在改进模型的情况下，我们发现，相比于 (1) 的结果，肺炎疫情在 60 天左右即得到了有效的控制，且感染人数呈数十倍的下降。当然，预测的数据仍然具有一定的问题。

3. 灵敏度分析

(a) 对 α 做灵敏度分析

$$\alpha_1 = 0.0000003 * ((stepfun(t, 0) - stepfun(t, 25)) + stepfun(t, 25) * e^{-0.05*(t-25)})$$

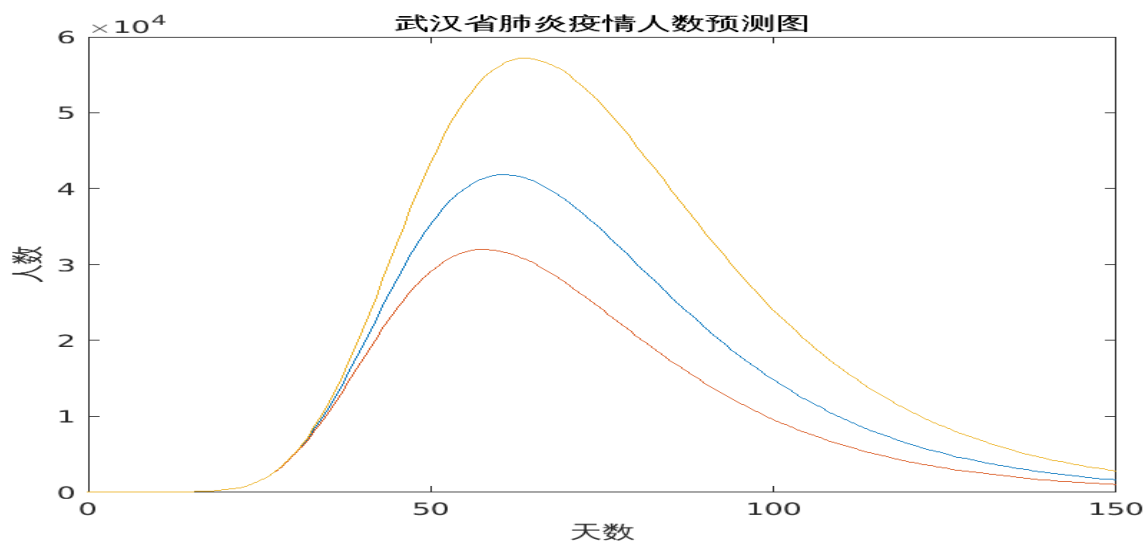
$$\gamma_1 = 0.0077266 * (stepfun(t, 0) + stepfun(t, 25) * (\frac{5}{1 + e^{-(t-28)}}))$$

$$\alpha_2 = 0.0000003 * ((stepfun(t, 0) - stepfun(t, 25)) + stepfun(t, 25) * e^{-0.045*(t-25)})$$

$$\gamma_2 = 0.0077266 * (stepfun(t, 0) + stepfun(t, 25) * (\frac{5}{1 + e^{-(t-28)}}))$$

$$\alpha_3 = 0.0000003 * ((stepfun(t, 0) - stepfun(t, 25)) + stepfun(t, 25) * e^{-0.055*(t-25)})$$

$$\gamma_3 = 0.0077266 * (stepfun(t, 0) + stepfun(t, 25) * (\frac{5}{1 + e^{-(t-28)}}))$$



如图可见，感染人数对 a 的变化还是比较灵敏的。这对于现实中的疫情防控具有很好的指导作用，尤其是控后，如何快速的降低感染率以便快速的控制疫情是防止疫情蔓延的重点。

(b) 对 γ 做灵敏度分析

$$\alpha_1 = 0.0000003 * ((stepfun(t, 0) - stepfun(t, 25)) + stepfun(t, 25) * e^{-0.05 * (t - 25)})$$

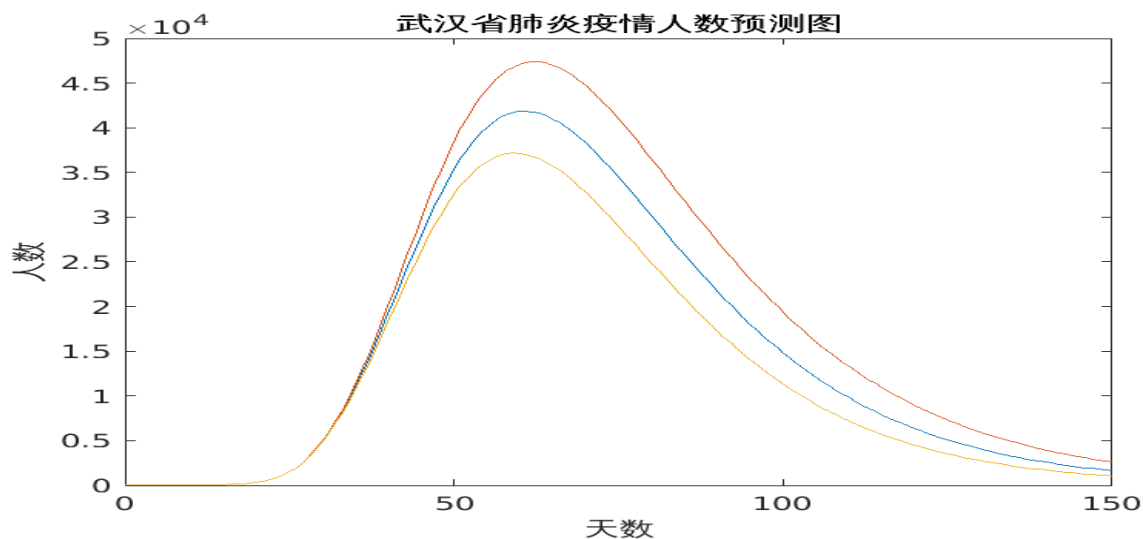
$$\gamma_1 = 0.0077266 * (stepfun(t, 0) + stepfun(t, 25) * (\frac{5}{1 + e^{-(t - 28)}}))$$

$$\alpha_2 = 0.0000003 * ((stepfun(t, 0) - stepfun(t, 25)) + stepfun(t, 25) * e^{-0.05 * (t - 25)})$$

$$\gamma_2 = 0.0077266 * (stepfun(t, 0) + stepfun(t, 25) * (\frac{4.5}{1 + e^{-(t - 28)}}))$$

$$\alpha_3 = 0.0000003 * ((stepfun(t, 0) - stepfun(t, 25)) + stepfun(t, 25) * e^{-0.05 * (t - 25)})$$

$$\gamma_3 = 0.0077266 * (stepfun(t, 0) + stepfun(t, 25) * (\frac{5.5}{1 + e^{-(t - 28)}}))$$



同样，如何提高移出率 (主要是指治愈率) 也是疫情防控后的重点。

5.3 模型分析

虽然改进后的模型能够对疫情做出比较理想的趋势分析，但是对于疫情后期的处理仍然与真实情况有所偏差。主要是由三个原因导致的，

1. SIR 模型过于精简，将真实情况过度理想化。本次疫情的感染不光是由感染者传染的，对于一部分易感人群，只要携带病原体，均可以作为传染源，但是该部分人群在模型的建立当中并没有体现出来。
2. 本次疫情仍处于上升期，且真实数据不足，加上湖北省政府前期的怠慢导致的数据异常，我们没有办法对控前做一个很好的拟合，同样，对控后亦无从而知。
3. 武汉市人口基数众多，且正逢春节按照官方的说法，在武汉封城之前，有约 500 万人离开武汉。这对于模型的建立是一个极大的挑战，因为一般的模型都要求人口固定且无人口交流。

6 参考文献

1. 姜启源谢金星叶俊，《数学模型》（第三版），北京：高等教育出版社
2. 基于 SIR 模型和基本再生数的浙江省新型冠状病毒肺炎防控效果分析 [J]. 李承倬, 武文韬, 潘振宇, 邓玉皎, 李筱, 代志军, 吕军. 浙江医学.
3. 传染病传播模型综述 [J]. 张发, 李璐, 宣慧玉. 系统工程理论与实践.
4. SARS 流行病的 SEIR 动力学模型及其参数辨识 [J]. 徐恭贤, 冯恩民, 王宗涛, 谭欣欣, 修志龙. 黑龙江大学自然科学学报. 2005(04)
5. 传染病传播模型研究 [J]. 余雷, 薛惠锋, 李刚. 计算机仿真. 2007(04)

7 工作分工情况

姓名	分工	打分
张世琛	编程 + 写作	9.9
李选	建模	9.9
曹佳慧	写作 + 搜集数据	9.9
张子锜	写作 + 搜集数据	9.9