

§ 5 黄河小浪底调水调沙问题

5.1 问题的提出

2004 年 6 月至 7 月黄河进行了第三次调水调沙试验，特别是首次由小浪底、三门峡和万家寨三大水库联合调度，采用接力式防洪预泄放水，形成人造洪峰进行调沙试验获得成功。整个试验期为 20 多天，小浪底从 6 月 19 日开始预泄放水，直到 7 月 13 日恢复正常供水结束。小浪底水利工程按设计拦沙量为 75.5 亿  $\text{m}^3$ ，在这之前，小浪底共积泥沙达 14.15 亿 t。这次调水调沙试验一个重要目的就是由小浪底上游的三门峡和万家寨水库泄洪，在小浪底形成人造洪峰，冲刷小浪底库区沉积的泥沙，在小浪底水库开闸泄洪以后，从 6 月 27 日开始三门峡水库和万家寨水库陆续开闸放水，人造洪峰于 29 日先后到达小浪底，7 月 3 日达到最大流量 2700 $\text{m}^3/\text{s}$ ，使小浪底水库的排沙量也不断地增加。表 7 是由小浪底观测站从 6 月 29 日到 7 月 10 检测到的试验数据。

表 7 观测数据

日期	6.29		6.30		7.1		7.2		7.3		7.4	
时间	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00
水流量	1800	1900	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2650	2700	2720	2650
含沙量	32	60	75	85	90	98	100	102	108	112	115	116
日期	7.5		7.6		7.7		7.8		7.9		7.10	
时间	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00
水流量	2600	2500	2300	2200	2000	1850	1820	1800	1750	1500	1000	900
含沙量	118	120	118	105	80	60	50	30	26	20	8	5

现在，根据试验数据建立数学模型研究下面的问题：

- (1) 给出估计任意时刻的排沙量及总排沙量的方法；
- (2) 确定排沙量与水流量的关系。

5.2 模型的建立与求解

已知给定的观测时刻是等间距的，以 6 月 29 日零时刻开始计时，则各次观测时刻（离开始时刻 6 月 29 日零时刻的时间）分别为

$$t_i = 3600(12i - 4), \quad i = 1, 2, \dots, 24,$$

其中计时单位为秒。第 1 次观测的时刻  $t_1 = 28800$ ，最后一次观测的时刻  $t_{24} = 1022400$ 。

记第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 24$ ) 次观测时水流量为  $v_i$ ，含沙量为  $c_i$ ，则第  $i$  次观测时的排沙量为  $y_i = c_i v_i$ 。有关的数据见表 8。

表 8 插值数据对应关系

单位：排沙量为 kg

节点	1	2	3	4	5	6	7	8
时刻	28800	72000	115200	158400	201600	244800	288000	331200
排沙量	57600	114000	157500	187000	207000	235200	250000	265200

节点	9	10	11	12	13	14	15	16
时刻	374400	417600	460800	504000	547200	590400	633600	676800
排沙量	286200	302400	312800	307400	306800	300000	271400	231000
节点	17	18	19	20	21	22	23	24
时刻	720000	763200	806400	849600	892800	936000	979200	1022400
排沙量	160000	111000	91000	54000	45500	30000	8000	4500

对于问题（1），根据所给问题的试验数据，要计算任意时刻的排沙量，就要确定出排沙量随时间变化的规律，可以通过插值来实现。考虑到实际中的排沙量应该是时间的连续函数，为了提高模型的精度，我们采用三次样条函数进行插值。

利用 MATLAB 函数，求出三次样条函数，得到排沙量  $y = y(t)$  与时间的关系，然后进行积分，就可以得到总的排沙量

$$z = \int_{t_1}^{t_{24}} y(t) dt$$

最后求得总的排沙量为  $1.844 \times 10^9$  t，计算的 Matlab 程序如下：

```
clc,clear
load data.txt      %data.txt 按照原始数据格式把水流量和排沙量排成 4 行，12 列
liu=data([1,3],:);
liu=liu';liu=liu(:);
sha=data([2,4],:);
sha=sha';sha=sha(:);
y=sha.*liu;y=y';
i=1:24;
t=(12*i-4)*3600;
t1=t(1);t2=t(end);
pp=csape(t,y);
xsh=pp.coefs      %求得插值多项式的系数矩阵，每一行是一个区间上多项式的系数。
TL=quadl(@(tt)ppval(pp,tt),t1,t2)
```

也可以利用 3 次 B 样条函数进行插值，求得总的排沙量也为  $1.844 \times 10^9$  t，，计算的 Matlab 程序如下：

```
clc,clear
load data.txt      %data.txt 按照原始数据格式把水流量和排沙量排成 4 行，12 列
liu=data([1,3],:);
liu=liu';liu=liu(:);
sha=data([2,4],:);
sha=sha';sha=sha(:);
y=sha.*liu;y=y';
i=1:24;
t=(12*i-4)*3600;
t1=t(1);t2=t(end);
pp=spapi(4,t,y)    %三次 B 样条
pp2=fn2fm(pp,'pp') %把 B 样条函数转化为 pp 格式
TL=quadl(@(tt)fnval(pp,tt),t1,t2)
```

对于问题（2），研究排沙量与水量的关系，从试验数据可以看出，开始排沙量是随

着水流量的增加而增长，而后是随着水流量的减少而减少。显然，变化规律并非是线性的关系，为此，把问题分为两部分，从开始水流量增加到最大值  $2720\text{m}^3/\text{s}$ （即增长的过程）为第一阶段，从水流量的最大值到结束为第二阶段，分别来研究水流量与排沙量的关系。

画出排沙量与水流量的散点图（见图 2）。

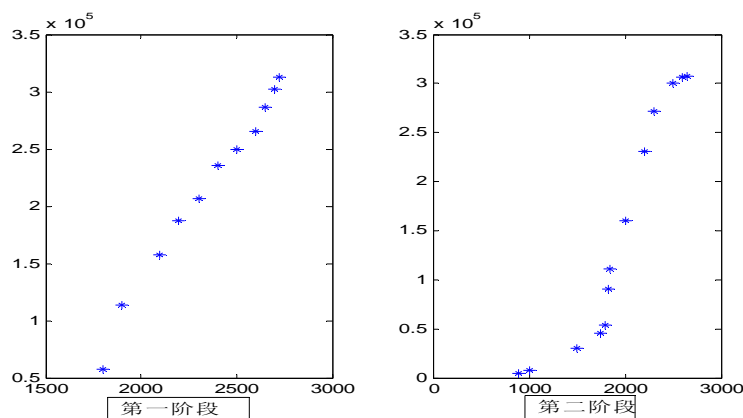


图 2 散点图

画散点图的程序如下：

```
load data.txt
liu=data([1,3],:);
liu=liu';liu=liu(:);
sha=data([2,4],:);
sha=sha';sha=sha(:);
y=sha.*liu;
subplot(1,2,1), plot(liu(1:11),y(1:11),'*')
subplot(1,2,2), plot(liu(12:24),y(12:24),'*')
```

从散点图可以看出，第一阶段基本上是线性关系，第二阶段准备依次用二次、三次、四次曲线来拟合，看哪一个模型的剩余标准差小就选取哪一个模型。最后求得第一阶段排沙量  $y$  与水流量  $v$  之间的预测模型为

$$y = 250.5655v - 373384.4661$$

第二阶段的预测模型为一个四次多项式。

$$y = -2.7693 \times 10^{-7} v^4 + 0.0018v^3 - 4.092v^2 + 3891.0441v - 1.32262749668 \times 10^6$$

计算的 Matlab 程序如下：

```
clc, clear
load data.txt %data.txt 按照原始数据格式把水流量和排沙量排成 4 行，12 列
liu=data([1,3],:); liu=liu'; liu=liu(:);
sha=data([2,4],:); sha=sha'; sha=sha(:);
y=sha.*liu;
%以下是第一阶段的拟合
format long e
nihe1_1=polyfit(liu(1:11),y(1:11),1) %拟合一次多项式，系数排列从高次幂到低次幂
nihe1_2=polyfit(liu(1:11),y(1:11),2)
```

```

yhat1_1=polyval(nihe1_1,liu(1:11)); %求预测值
yhat1_2=polyval(nihe1_2,liu(1:11));
%以下求误差平方和与剩余标准差
cha1_1=sum((y(1:11)-yhat1_1).^2); rmse1_1=sqrt(cha1_1/9)
cha1_2=sum((y(1:11)-yhat1_2).^2); rmse1_2=sqrt(cha1_2/8)
%以下是第二阶段的拟合
for j=1:3
    str1=char(['nihe2_' int2str(j) '=polyfit(liu(12:24),y(12:24),' int2str(j+1) ')]);
    eval(str1)
    str2=char(['yhat2_' int2str(j) '=polyval(nihe2_' int2str(j) ',liu(12:24));']);
    eval(str2)
    str3=char(['cha2_' int2str(j) '=sum((y(12:24)-yhat2_' int2str(j) ').^2);'...
        'rmse2_' int2str(j) '=sqrt(cha2_' int2str(j) ')/(11-j)'));
    eval(str3)
end
format

```

### 习 题 九

1. 用给定的多项式，如  $y = x^3 - 6x^2 + 5x - 3$ ，产生一组数据  $(x_i, y_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ ，再在  $y_i$  上添加随机干扰（可用 rand 产生  $(0, 1)$  均匀分布随机数，或用 randn 产生  $N(0,1)$  分布随机数），然后用  $x_i$  和添加了随机干扰的  $y_i$  作 3 次多项式拟合，与原系数比较。如果作 2 或 4 次多项式拟合，结果如何？

2. 已知平面区域  $0 \leq x \leq 5600$ ， $0 \leq y \leq 4800$  的高程数据见 9 表（单位：m）。

表 9

4800	1350	1370	1390	1400	1410	960	940	880	800	690	570	430	290	210	150
4400	1370	1390	1410	1430	1440	1140	1110	1050	950	820	690	540	380	300	210
4000	1380	1410	1430	1450	1470	1320	1280	1200	1080	940	780	620	460	370	350
3600	1420	1430	1450	1480	1500	1550	1510	1430	1300	1200	980	850	750	550	500
3200	1430	1450	1460	1500	1550	1600	1550	1600	1600	1600	1550	1500	1500	1550	1550
2800	950	1190	1370	1500	1200	1100	1550	1600	1550	1380	1070	900	1050	1150	1200
2400	910	1090	1270	1500	1200	1100	1350	1450	1200	1150	1010	880	1000	1050	1100
2000	880	1060	1230	1390	1500	1500	1400	900	1100	1060	950	870	900	936	950
1600	830	980	1180	1320	1450	1420	400	1300	700	900	850	810	380	780	750
1200	740	880	1080	1130	1250	1280	1230	1040	900	500	700	780	750	650	550
800	650	760	880	970	1020	1050	1020	830	800	700	300	500	550	480	350
400	510	620	730	800	850	870	850	780	720	650	500	200	300	350	320
0	370	470	550	600	670	690	670	620	580	450	400	300	100	150	250
Y / X	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600	4000	4400	4800	5200	5600

试用二维插值求  $x, y$  方向间隔都为 50 的高程，并画出该区域的等高线。

3. 用最小二乘法求一形如  $y = ae^{bx}$  的经验公式拟合表 10 中的数据。

表 10

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i$	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.87	117.6

4. （水箱水流量问题）许多供水单位由于没有测量流入或流出水箱流量的设备，而只能测量水箱中的水位。试通过测得的某时刻水箱中水位的数据，估计在任意时刻（包