A 卷

2012—2013 学年第二学期
《概率论与随机过程》期末试卷

专业班级 ____________________

姓　　名____________________

学　　号____________________

开课系室　　应用数学系

考试日期　　2013 年 6 月 29 日

页　号	一	二	三	四	五	总分
本页满分	30	20	20	20	10	
本页得分						
阅卷人						

注意事项：

1．封面及试卷背面为草稿纸，附加页为答题纸，背面答题一律无效；

2．答案必须写在该题下方空白处，不得写在草稿纸上，否则该题答案无效；

3．本试卷正文共 5 页，满分 100 分；

4. 必须保持试卷本完整，拆页的作废。

一. 填空题（每空 3 分，共 18 分）

1. 设事件 A 与 B 相互独立，已知 $P(A)=0.5, P(A\bigcup B)=0.8$，

   则 $P(A\overline{B})=$__________.

2. 设随机变量 X （服从参数为 λ 的泊松分布，且已知

   $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$__________.

3. 已知随机变量 X 的分布列：

X	-1	0	1
P_k	0.2	0.3	0.5

   则： $DX=$__________.

4. 设随机过程 $X(t)=Y^2t, t>0,$ 其中 Y 是在区间 $(0,a)$ 上服从均匀分布的随机变量，

   则 $X(t)$ 的均值函数为 __$a^2t/3$__，自相关函数为__$a^4ts/5$__.

5. 设随机变量 X 的方差为 1，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-EX|<2\}\geq$__3/4__.

二. 选择题(每题 3 分，共 12 分)

1. 设 X 的概率分布为 $f(x)=\begin{cases}Ax, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则 $A=$__D__.

   (A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) $\frac{1}{2}$

2. 设 X 与 Y 相互独立且同分布：$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=1/2$，$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=1/2$，

   则下列各式中成立的是__A__.

   $(A)P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　　$(B)P\{X=Y\}=1$

   $(C)P\{X+Y=0\}=1/4$　　$(D)P\{XY=1\}=\frac{1}{4}$

3. 设 X 与 Y 独立同分布，记 $U=X-Y$，$V=X+Y$，则 U、V 必然__C__.

   (A)不独立　　(B)独立

   (C)相关系数为零　　(D)相关系数不为零

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且分别服从 $N(1,\ \ 2^2)$ 和 $N(1,\ \ 1)$，则__C__.

(A) $P\{X+Y\leq 1\}=1/2$　　(B) $P\{X+Y\leq 0\}=1/2$

(C) $P\{X-Y\leq 0\}=1/2$　　(D) $P\{X-Y\leq 1\}=1/2$

三．计算和综合题（共 8 个小题 70 分）

1.（6 分）已知 $P(A)=1/3, P(B|A)=1/5, P(A|B)=1/2$，求 $P(A\cup B)$.

解：因为　$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{15}$　……………………….2 分

所以　$P(B)=P(AB)/P(A\mid B)=\dfrac{1/15}{1/2}=\dfrac{2}{15}$　……………………….. 4 分

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{15}=\dfrac{2}{3}$　……………………….. 6 分

2.（6 分）设随机变量 $X\sim B(10,0.5)$（二项分布），$Y\sim e(1/4)$（指数分布）. 求 $E(3X-2Y)$ 和 $E(X^2-Y^2)$

解：由常用分布知 $EX=5, EY=4$；$DX=2.5, DY=16$；　……………………….2 分

所以　$E(3X-2Y)=15-8=7$；　……………………….3 分

$EX^2=DX+(EX)^2=27.5$；　……………………….4 分

$EY^2=DY+(EY)^2=32$；　……………………….5 分

$E(X^2-Y^2)=27.5-32=-4.5$　……………………….6 分

3.（8 分）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若 x\in[1,8],\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

求（1）X 的分布函数 $F(x)$；（2）随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.

解：易见，当 $x<1$ 时，$F(x)$=0；当 $x\ge 8$ 时，$F(x)$=1。

对于 $x\in[1,8)$，有

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt=\sqrt[3]{x}-1。$$　……………………….3 分

即 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \sqrt[3]{x}-1, & 1\le x<8\\ 1, & x\ge 8\end{cases}$$　……………………….4 分

设 $G(y)$ 是随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.

显然，当 $y<0$ 时，$G(y)$=0；当 $y\ge 1$ 时，$G(y)$=1。

对于 $y \in [0,1)$，有

$$G(y) = P\{Y \le y\} = P\{F(X) \le y\}$$

$$= P\{\sqrt[3]{X} - 1 \le y\} = P\{X \le (y+1)^3\}$$

$$= F[(y+1)^3] = y \text{。}$$ ……………………….7 分

于是，$Y = F(X)$ 的分布函数为

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \le y < 1, \\ 1, & y \ge 1. \end{cases}$$ ……………………….8 分

4.（8 分）已知总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，今从总体中抽取一个长度为 7 的样本，测得样本均值为 52.2，样本标准差为 2.7，试检验假设 $H: \mu = 52$ 是否成立？$(\alpha = 0.05)$.

（注意：可能用到的数据 $t_{\alpha=0.05}(7) = 1.895, \quad t_{\alpha=0.05}(6) = 1.943$

$t_{\alpha=0.025}(7) = 2.365, \quad t_{\alpha=0.025}(6) = 2.447$）

解：取样本函数 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(6)$ ……………………….3 分

对于给定的 α=0.05，由

$$P\{T > \lambda\} = \alpha/2 = 0.025$$ ……………………….4 分

查表得 λ=2.447，又 $n = 7$，$S = 2.7$，$\bar{X} = 52.2$，于是

$$t = \frac{52.2 - 52}{2.7\sqrt{1/7}} = 0.19598$$ ……………………….6 分

由 $t = 0.19598 < \lambda = 2.447$

所以 假设 $H: \mu = 52$ 成立 ……………………….8 分

5.（12 分）已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量.

（1）矩估计：由于

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 \theta x^\theta dx = \frac{\theta}{\theta+1}$$ ……………………….3 分

设 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 为样本均值，令 $\dfrac{\theta}{\theta+1} = \bar{X}$， ……………………….4 分

解得未知参数θ的矩估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$。 ……………………….5 分

（2）极大似然估计：设x_1，$x_2,\cdots$，x_n为X_1，$X_2,\cdots$，X_n观测值，构造似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}$$ ……………………….4 分

$$\ln L=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$ ……………………….5 分

令 $$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$ ……………………….6 分

解得θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。 ……………………….7 分

6. (10 分) 设有一箱同类产品是由三家工厂生产的，其中 50%是第一家工厂生产的，其余两家各生产 25%，又知第一、二家工厂生产的产品有 5%的次品，第三家工厂生产的产品有 4%的次品，现从箱中任取一件，求： （1）取到的是次品的概率；

（2）若已知取到的是次品，它是第一家工厂生产的概率.

解：设事件A表示：“取到的产品是次品”；事件A_i表示：“取到的产品是第i家工厂生产的”（$i=1,2,3$）。则$A_1\bigcup A_2\bigcup A_3=\Omega$，且$P(A_i)>0$。 …………2 分

（1）又由于A_1、A_2、A_3两两互不相容，由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\cdot P(A|A_i)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{4}\times\frac{5}{100}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{100}=0.0475$$ …………4 分

（2）由条件概率定义、乘法公式、全概率公式得

$$P(A_1|A)=\frac{P(A_3A)}{P(A)}=\frac{P(A_1)P(A|A_1)}{\sum_{j=1}^{3}P(A_j)P(A|A_j)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}}{0.0475}=0.526316$$ 。 ………10 分

7. （10 分） 设马氏链$\{X_n,n\geq 0\}$的状态空间为$I=\{1,2,3,4\}$，初始分布为

$p_i(0)=1/4, i=1,2,3,4$ 一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）计算 $P\{X_0=1, X_1=2, X_2=2\}$.（2）计算 $P_{32}(2), P_{32}(4)$.

解：

（1）$P\{X_0=1, X_1=2, X_2=2\}=P\{X_0=1\}P\{X_1=2|X_0=1\}P\{X_2=2|X_1=2\}$

$$=p_1(0)p_{12}(1)p_{22}(1)=\frac{1}{4}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

（2） $$P^2=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $p_{32}(2)$=1/2

由 C-K 方程， $$\boldsymbol{P_{32}(4)=P_{32}(2+2)=\sum_{r=1}^{4}P_{3r}(2)P_{r2}(2)}$$

$$\boldsymbol{=P_{31}(2)P_{12}(2)+P_{32}(2)P_{22}(2)+P_{33}(2)P_{32}(2)+P_{34}(2)P_{42}(2)}$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}}$$

或者：

$$P^4=\begin{pmatrix} 3/8 & 5/8 & 0 & 0 \\ 5/16 & 11/16 & 0 & 0 \\ 5/16 & 5/8 & 1/16 & 0 \\ 1/4 & 5/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}$$

显然 $p_{32}(4)=5/8$

8.（10 分）设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cye^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

（1）确定常数 c；

（2）求边缘分布密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

（3）求 (X,Y) 的联合分布函数；

（4）求 $P\{0<X\le 1, 0<Y\le 1\}$.

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = c\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy = c,\quad \therefore c=1$ ………2 分

（2）$f_X(x)=e^{-x}\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy=e^{-x}$, 同理，$f_Y(y)=ye^{-y}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=ye^{-y}$,

即 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$, $\quad f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y} & y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$, ………5 分

（3）$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=\int_0^x e^{-x}dx\int_0^y ye^{-y}dy=(1-e^{-x})(1-(y+1)e^{-y})$

即，$F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-x})(1-(y+1)e^{-y}) & x>0, y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$ ………8 分

（4）$P\{0<X\le 1, 0<Y\le 1\}=F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)=F(1,1)$

$$=(1-\frac{1}{e})(1-\frac{2}{e})=\frac{(e-1)(e-2)}{e^2}$$

…………………………………………………………10 分

或者

$P\{0<X\le 1, 0<Y\le 1\}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy=\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^1 ye^{-y}dy=(1-\frac{1}{e})(1-\frac{2}{e})$ ……………10 分