2012—2013 学年第一学期
《概率论与数理统计》期末试卷答案

一． 填空题（每题 3 分，共 15 分）

1、 0.4 2、 5/9 3、 12 4、 10 5、$t(4)$

二．选择题(每题 3 分，共 15 分)：

1、A 2、D 3、B 4、B 5、C

三．

解: (1) 由全概率公式知

$$P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+(1-\frac{3}{4})\times\frac{3}{8}=\frac{21}{32}\text{或}0.656$$

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{27}{32}$$

(2) 由条件概率公式知 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{6}{7}$

四. (10 分)

解: (1) X 的所有可能取值：3、4、5，

$$P\{X=3\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10},\quad P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10},\quad P\{X=5\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5},$$

或

X	3	4	5
P_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

(2) 当 $x<3$ 时， $F(x)=0$，

当 $3\le x<4$ 时， $F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}=\dfrac{1}{10}$，

当 $4\le x<5$ 时， $F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}=\dfrac{2}{5}$，

当 $x\ge 5$ 时， $F(x)=1$，

终上所述： $F(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ \dfrac{1}{10}, & 3\le x<4\\ \dfrac{2}{5}, & 4\le x<5\\ 1, & x\ge 5.\end{cases}$

(3)

Y	0	1
P_k	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

五

解：（1）当 $0<x<1$ 时， $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^2\dfrac{1}{3}(x+y)dy=\dfrac{2}{3}(x+1)$，

当 $x\in$ 其它 时， $f_X(x)=0$

故

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}(x+1), & 0<x<1,\\ 0, & x\in\text{其它}.\end{cases}$$

同理

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}(2y+1), & 0<y<2\\ 0, & y\in\text{其它}.\end{cases}$$

（2）当$0<z\le 1$时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_0^z\frac{z}{3}dx=\frac{z^2}{3}$，

当$1<z\le 2$时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_0^1\frac{z}{3}dx=\frac{z}{3}$

当$2<z\le 3$时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{z-2}^1\frac{z}{3}dx=z-\frac{z^2}{3}$

当$z\in$其它 时，$f_Z(z)=0$

故$Z=X+Y$的概率分布为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z^2}{3}, & 0<z\le 1\\ \frac{z}{3}, & 1<z\le 2\\ z-\frac{z^2}{3}, & 2<z\le 3\\ 0, & z\in\text{其它}.\end{cases}$$

六． 解:（1）由题意知(X,Y)的可能取值为$(-1,-1)$，$(-1,1)$，$(1,-1)$，$(1,1)$

其相应概率分别为

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1,U\le 1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1,U>1\}=0,$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\le 1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=\frac{1}{4}.$$

或(X,Y)的联合概率分布为

Y \ X	**-1**	**1**
-1	**1/4**	**1/2**
1	**0**	**1/4**

（2） $X+Y$ 和 $(X+Y)^2$ 的概率分布分别为

$X+Y$	-2	0	2
P_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$(X+Y)^2$	0	4
P_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

故 $E(X+Y)^2 = 0\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}=2$

七. 解：$EZ = E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{4}) = \frac{1}{3}EX+\frac{1}{4}EY = \frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$

$$DZ = D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{4}) = D(\frac{X}{3})+D(\frac{Y}{4})+2Cov(\frac{X}{3},\frac{Y}{4})$$

$$=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{16}DY+\frac{1}{6}\rho_{XY}\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}$$

$$=\frac{1}{9}\times 3^2+\frac{1}{16}\times 4^2+\frac{1}{6}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=1$$

(2) $$Cov(Y,Z)=Cov(Y,\frac{X}{3}+\frac{Y}{4})=\frac{1}{3}Cov(Y,X)+\frac{1}{4}Cov(Y,Y)$$

$$=\frac{1}{3}\rho_{XY}\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}+\frac{1}{4}DY$$

$$=\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4+\frac{1}{4}\times 4^2=2$$

$$\rho_{YZ}=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DZ}}=\frac{2}{4\times 1}=\frac{1}{2}$$

八.

解：（1） $\mu_1 = EX = \int_0^1 x\cdot\sqrt{\theta}\cdot x^{\sqrt{\theta}-1}dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，

令 $\hat{\mu}_1=\bar{X}$，即 $\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\bar{X}$，　　从而 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}^2}{(1-\bar{X})^2}$

（2）设 $x_1,x_2,...x_n$ 是样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 的观察值，则极大似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}\cdot x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\cdot(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\sqrt{\theta}-1}$$

对 $L(\theta)$ 取自然对数

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\cdot(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)$$

令 $$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

得 $$\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$$

故 λ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)^2}$.

九.

解：（1）取 $U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1)$，

由 $P\{U<\lambda\}=0.975$，　得 λ=1.96

又 $\bar{X}-\lambda\sqrt{\sigma^2/n}=5-1.96\sqrt{1/9}=4.347$

$\bar{X}+\lambda\sqrt{\sigma^2/n}=5+1.96\sqrt{1/9}=5.653$

故 μ 的置信度为0.95的置信区间为(4.347, 5.653)

（2）　取 $T=\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}\sim t(8)$，

由 $P\{T>\lambda\}=0.025$，　得 λ=2.306

又 $\bar{X}-\lambda\sqrt{S^2/n}=5-1.96\sqrt{1.21/9}=4.281$

$\bar{X}+\lambda\sqrt{S^2/n}=5+1.96\sqrt{1.21/9}=5.719$

故 μ 的置信度为0.95的置信区间为(4.281, 5.719)