A卷

# 2011—2012 学年第一学期
# 《概率论与数理统计》试卷

专业班级 ________________________

姓　　名________________________

学　　号________________________

开课系室　　　基础数学系　　　

考试日期　　　2012 年 1 月 3 号　　

| 页 码 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满 分 | 20 | 15 | 10 | 20 | 12 | 13 | 10 | 100 |
| 得 分 | | | | | | | | |
| 阅卷人 | | | | | | | | |

备注：1．本试卷正文共 7 页；

2．封面及题目所在页背面和附页为草稿纸；

3．答案必须写在该题后的横线上或指定的括号内，解的过程写在下方空白处，不得写在草稿纸中，否则答案无效；

4．最后附页不得私自撕下，否则作废.

5．可能用到的数值 $\Phi(1.645)=0.95$， $\Phi(1.96)=0.975$

## 一、填空题（每空 1 分，共 10 分）

| 本页共 20 分 | |
|---|---|
| 得分 | |

1. 设 $P(A)=0.4,\ P(A\cup B)=0.7$，那么若 $A,B$ 互不相容，则 $P(B)=$____0.3____；若 $A,B$ 相互独立，则 $P(B)=$____0.5____.

2.设事件 $A,B$ 满足：$P(B\mid A)=P(\bar{B}\mid\bar{A})=1/3$，$P(A)=1/3$，则 $P(B)=$__5/9___.

3.某盒中有 10 件产品，其中 4 件次品，今从盒中取三次产品，一次取一件，不放回，则第三次取得正品的概率为___0.6____；第三次才取得正品的概率为__0.1____.

4. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，且都服从区间 [0,3] 上的均匀分布，则 $P\{\max(X,Y)\le 2\}=$__4/9______.

5.一批产品的次品率为 0.1，从中任取 5 件产品，则所取产品中的次品数的数学期望为____0.5____，均方差为___$\sqrt{0.45}$____.

6.设总体 $X\sim P(\lambda),X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 $X$ 的一个简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则 $E\bar{X}=$____$\lambda$____，$D\bar{X}=$____$\frac{\lambda}{n}$________.

## 二、选择题(每题 2 分，共 10 分)

1.设 $P(A)=a,P(B)=b,P(A\cup B)=c$，则 $P(A\bar{B})$ 等于( B ).

(A) $a-b$　　(B) $c-b$　　(C) $a(1-b)$　　(D) $b-a$

2.设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$ 是 $X$ 的分布函数，则对任意实数 $a$ 有( B ).

(A) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$　　(B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$

(C) $F(-a)=F(a)$　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$

3.设 $X\sim N(2,9),\ Y\sim N(2,1),\ E(XY)=6$，则 $D(X-Y)$ 之值为( B ).

(A) 14　　(B) 6　　(C) 12　　(D) 4

4.设随机变量 $X$ 的方差为 25，则根据切比雪夫不等式，有 $P(|X-EX|<10)$ ( C ).

(A) $\le 0.25$　　(B) $\le 0.75$　　(C) $\ge 0.75$　　(D) $\ge 0.25$

5.维纳过程是( A ).

(A)连续型随机过程　　(B)连续型随机序列

(C)离散型随机过程　　(D)离散型随机序列

## 三、计算题(共 6 个题目，共 45 分)

| 本页共 15 分 | |
|---|---|
| 得分 | |

**1. (10 分)** 设有相同的甲、乙两箱装有同类产品. 甲箱装 50 只其中 10 只正品；乙箱装 20 只，10 只正品. 今随机选一箱，从中抽取 1 只产品，求：(1)取到的产品是次品的概率；(2)若已知取到的产品是正品，它来自甲箱的概率是多少？

解：设 $A_1;A_2$ 分为来自甲乙箱；$B$ 为正品

（1） $P(\bar{B})=\frac{1}{2}(\frac{4}{5}+\frac{1}{2})=\frac{13}{20}$ （5 分）

（2） $P(A_1|B)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}{7/20}=2/7$ （10 分）

**2. (5 分)** 已知某种电子元件的寿命 $X$（以小时计）服从参数为1/1000的指数分布. 某台电子仪器内装有 5 只这种元件，这 5 只元件中任一只损坏时仪器即停止工作，则仪器能正常工作 1000 小时以上的概率为多少？

解： $P\{X\geq 1000\}=\int_{1000}^{+\infty}\frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x}dx=e^{-1}$ （4 分）

于是，由独立性仪器正常 1000 小时以上的概率为

$e^{-5}$ （5 分）

| 本页共 10 分 | |
|---|---|
| 得分 | |

**3.(5 分)** 设粒子按平均率为每分钟 4 个的泊松过程到达某计数数器, $\boldsymbol{N(t)}$ 表示在 $\boldsymbol{[0,t]}$ 内到达计数器的粒子个数,试求:

(1) $\boldsymbol{N(t)}$ 的均值、方差、自相关函数;

(2) 相邻的两个粒子到达计数器的平均时间间隔.

解: $EN(t)=4t; DN(t)=4t; EN(s)N(t)=16st+4\min\{s,t\}$ （各一分，共三分）

（2）平均间隔为 1/4 分钟 （5 分）

**4. (5 分)** 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的方差为 1，根据来自 $X$ 的容量为 100 的样本，测得样本均值 $\overline{X}$ 为 5，求 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间(写出过程).

解：由题知 $\dfrac{\left|\bar{X}-\mu\right|}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ （2 分）

于是由 $U_{0.975}=1.96$ 知置信区间为（4.804, 5.196） （5 分）

| 本页共 20 分 | |
| --- | --- |
| 得分 | |

**5. (10 分)** 一质点在 1、2、3 三个点上做随机游动，其中 1、3 是两个反射壁，当质点位于 2 时，下一时刻处于 1、2、3 是等可能的. 规定每个时刻质点只走一步，用 $X_n, n \ge 0$ 表示第 $n$ 个时刻质点所处的位置，初始分布为

$$P\left(X(0)=i\right)=1/3, i=1,2,3.$$

求：(1) 一步转移概率矩阵和二步转移概率矩阵；

(2) $P\left\{X(0)=1, X(1)=2, X(2)=3\right\}$；

(3) $P\left\{X(2)=2\right\}$.

解：（1）一步转移阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；二步转移阵 $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/9 & 7/9 & 1/1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ （4 分）

（2）原式=$\frac{1}{3}\times 1\times \frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ （7 分）

（3）原式=$\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+\frac{7}{9}+\frac{1}{3})=\frac{13}{27}$ （10 分）

**6. (10 分)** 设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x, & a<x<b \\ 0, & 其他 \end{cases}$，且 $EX^2=1$.

求：(1) $a,b$ 的值；(2) $P\{|X|<1\}$.

解：由 $1=\int_a^b 2xdx=b^2-a^2$；$1=EX^2=\int_a^b 2x^3dx=\frac{1}{2}(b^4-a^4)$

解得 $a=\sqrt{\frac{1}{2}}; b=\sqrt{\frac{3}{2}}$ （6 分）

（2）原式=$\int_{\sqrt{1/2}}^{1} 2xdx=1/2$ （10 分）

| 本页共 12 分 | |
|---|---|
| 得分 | |

**四、（12 分）** 设随机向量 $(X, Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(x+2y)}, x>0, y>0\\ 0,其他\end{cases}$$

求: (1) 常数 $A$；

(2) 关于 $X$、$Y$ 的边缘概率密度，并判断 $X$ 与 $Y$ 是否相互独立；

(3) $Z=X+2Y$ 的概率密度.

解：（1）$1=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-(x+2y)}=A/2;\therefore A=2$ （2 分）

（2）
$$f_X(x)=2\int_0^{+\infty}e^{-(x+2y)}dy=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$
$$f_Y(y)=2\int_0^{+\infty}e^{-(x+2y)}dx=\begin{cases}2e^{-2y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$
（7 分）

显然，独立 （8 分）

（3）
$$F_Z(z)=2\iint_{x+2y\le z}e^{-(x+2y)}dxdy=\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z} & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$
$$f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z} & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$
（12 分）

| 本页共 13 分 | |
|---|---|
| 得分 | |

**五、（13 分）**已知分子运动的速度 $X$ 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-(\frac{x}{\alpha})^2}, & x>0,\quad \alpha>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$ 为 $X$ 的简单随机样本,求：

(1)未知参数 $\alpha$ 的矩估计和极大似然估计；

(2)验证所求得的矩估计是否为 $\alpha$ 的无偏估计.

解：（1） $EX=\int_0^{+\infty}\dfrac{4x^3}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-(\frac{x}{\alpha})^2}dx=\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}=\bar{X}$

$\therefore \hat{\alpha}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\bar{X}$ （5 分）

$$L(\alpha)=\Pi f(x_i,\alpha)=(4\pi^{-\frac{1}{2}})^n\Pi x_i^2\alpha^{-3n}e^{-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

$$\ln L=-3n\ln\alpha-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^n X_i^2+\ln(\wedge\wedge\wedge\text{不含}\alpha)$$

$$d\ln L/d\alpha=-\frac{3n}{\alpha}+\frac{2}{\alpha^3}\sum_{i=1}^n X_i^2=0$$

$\hat{\alpha}_{MLE}=\sqrt{\dfrac{2}{3n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$ (10 分)

（2） $E\hat{\alpha}=E\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\bar{X}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\alpha=\alpha$ 无偏 （13 分）

**六、（10 分）**从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 2/5. 设 $X$ 为途中遇到红灯的次数.求 $X$ 的分布律、分布函数、数学期望和方差.

| 本页共 10 分 | |
|---|---|
| 得分 | |

解：由题知， $X \sim B(3,\frac{2}{5})$

分布律 $P\{X=k\}=C_3^k(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{3-k};;;;k=0,1,2,3$ （4 分）

分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{27}{125} & 0\le x<1 \\ \frac{81}{125} & 1\le x<2 \\ \frac{117}{125} & 2\le x<3 \\ 1 & 3\le x \end{cases}$$ （6 分）

$EX=np=6/5;DX=npq=18/25$ （10 分）