



A 卷

2019—2020 学年第 2 学期
《计算方法》期末试卷

专业班级 _____

姓 名 _____

学 号 _____

开课系室 _____ 计算机科学系

考试日期 _____ 2020-06-16

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、 填空题（每空 1 分，共 30 分）

1、已知 $\pi=3.1415926\cdots$ ，用 $y^*=3.1416$ 表示其近似值，则该近似数有几位有效数字_____？其相对误差限为_____？其绝对误差限为_____？

2、对于充分小的 x ，为不损失有效数字，应对公式 $e^x - 1$ 做何变化 _____？

3、写出用牛顿法求 $\sqrt{117}$ 的近似值的迭代公式_____？

4、用对分法求方程 $f(x)=x^3+x-4=0$ 在区间 $[0, 3]$ 的一个实根，要求误差不大于 10^{-3} ，问对分次数 $n=$ _____？

5、迭代格式 $x_{k+1} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{x_k^2}$ 收敛于 $x^* = \sqrt[3]{3}$ ，此迭代序列是几阶收敛的_____？

6、解方程组 $Ax=b$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，当 $a=$ _____时，可用平方根法解此方程组，此时，对 A 可做 $L L^T$ 分解，若分解唯一， L 的元素应满足_____？分解后 $L = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ ？

7、若

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

则 A 行范数为：_____，列范数为：_____，2 范数为：_____，谱半径为：_____，条件数 $\text{Cond}(A)$ 为：_____？

8、向量 $X=(x_1, x_2, x_3)^T$ ，则 $|x_1+2x_2|+|3x_3|$ 是不是一种向量范数_____？

为什么_____？

9、写出三次样条函数 $s(x)$ 定义的三个要点：

(1) _____

(2) _____

(3) _____

10、设 x_i ($i=0,1,2,3,4$) 为互异结点, $l_i(x)$ 为对应的插值基函数

则: $\sum_{i=0}^4 l_i(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sum_{i=0}^4 (x_i^3 + 6x_i + 2)l_i(x) = \underline{\hspace{2cm}}?$

11、对于 $n+1$ 个节点的求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

至少具有 n 次代数精度的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}?$

含有 3 个插值节点($n=2$)的 Newton-Cotes 公式具有几次代数精度 $\underline{\hspace{2cm}}?$

12、线性方程组的解法可分为两大类, 分别为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 和 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

13、常微分方程初值问题的数值解法分为单步和多步, 显式和隐式, 下列方法属于哪一类?

Adams 内插法: $\underline{\hspace{2cm}}$ 步, $\underline{\hspace{2cm}}$ 式?

Runge—Kutta 法: $\underline{\hspace{2cm}}$ 步, $\underline{\hspace{2cm}}$ 式?

二、证明题 (本题共 12 分)

1、已知方程组 $Ax=b$, 系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$

试证明:

当 $-\frac{1}{2} < a < 1$ 时, Gauss-Seidel 法收敛, 而 Jacobi 方法只对 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时收敛。

(8 分)

2、试证明:

求积公式 $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(-1) + 2f(0) + f(1)]$ 不是插值型求积公式。(4 分)

三、 计算题（本题共 33 分）

1、积分公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(\frac{1}{4}) + A_1 f(\frac{1}{2}) + A_2 f(\frac{3}{4})$ 是插值型的，试确定参数 A_0, A_1, A_2 ，并指出它是否高斯型求积公式？（5 分）

2、若利用复化梯形公式求解积分 $\int_0^{1.5} e^{-x} dx$ ，要使误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ ，问区间 $[0, 1.5]$ 至少要分为多少等份？写出相应的复化梯形公式。（5 分）

3、用 Euler 法和预报-校正法求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = -y (0 \leq x \leq 0.2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取步长 $h=0.1$ ，计算 $y(0.1)$ 和 $y(0.2)$ （写出计算过程），并说明 Euler 法的几何意义。（8 分）

4、已知方程组 $Ax=b$ ，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

分别写出解此方程组的 Jacobi 迭代公式和 Gauss-Seidel 迭代公式。（6 分）

5、已知 $s(x)$ 为区间 $[1,4]$ 上以 1, 2, 4 为节点的三次样条函数，

$$\text{若 } s(x) = \begin{cases} s_1(x) \\ s_2(x) \end{cases}$$

其中

$$s_1(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{4}x - 1, \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$s_2(x) = -\frac{1}{8}x^3 + ax^2 + bx - \frac{17}{4}, \quad 2 \leq x \leq 4$$

试求参数 a 和 b 的值。（9 分）

四、 构造插值多项式（本题共 15 分）

已知严格单调增加函数 $f(x)$ 的函数值如下表：

x	-2	-1	1	2	3
y=f(x)	-10	-5	1	11	18

- 1、写出 Lagrange 插值多项式及余项（不需整理）。（5 分）
- 2、构造差商表，写出 Newton 插值多项式（不需整理）。（5 分）
- 3、求方程 $f(x)=0$ 根的近似值（保留小数点后 3 位）。（5 分）

五、 解常微分方程（本题共 10 分）

公式 $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}[f(x_i, y_i) + 2f(x_{i+1}, y_{i+1})]$

是解常微分方程初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的单步法

- 1、求其局部截断误差主项，并回答是几阶的？（5 分）
- 2、证明该方法是无条件稳定的。（5 分）