第一章 随机事件与概率

1.(Ch1-4) 设对于事件 A、B、C 有 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AC)=1/8$，$P(AB)=P(BC)=0$，求 A、B、C 至少出现一个的概率。

分析：A、B、C 至少出现一个的概率即为求 $P(A\cup B\cup C)$，因此可应用概率的加法公式，这就需要先求 $P(ABC)$。

解：由于 $ABC\subset AB$，从而由性质 4 知，$P(ABC)\le P(AB)=0$，又由概率定义知 $P(ABC)\ge 0$，所以 $P(ABC)=0$。从而由概率的加法公式得

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=\frac{1}{4}\times 3-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

2.(Ch1-6)已知事件 A、B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$ 且 $P(A)=1/3$，求 $P(B)$。

解法一：由性质（5）知

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB) \qquad \text{（性质 5）}$$

$$=1-P(\overline{A\cup B})-P(A)+P(AB) \qquad \text{（性质 3）}$$

$$=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(A)+P(AB) \qquad \text{（对偶原理）}$$

$$=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \qquad \text{（已知条件）}$$

解法二：由于

$$P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-\frac{1}{3}-P(B)+P(AB)$$

从而得 $\frac{2}{3}-P(B)=0$，即

$$P(B)=\frac{2}{3}$$

3.(Ch1-8)一批产品有 8 个正品 2 个次品，从中任取两次，每次取一个（不放回）。求：(1) 两次都取到正品的概率；

(2) 第一次取到正品，第二次取到次品的概率；

(3) 第二次取到次品的概率；

(4) 恰有一次取到次品的概率。

解：设 A_i 表示："第 i 次取出的是次品"（i=1，2），则所求概率依次化为

$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)$、$P(\overline{A}_1A_2)$、$P(A_2)=P(A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2)$、$P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)$。

由于无放回地从 10 个产品中任取两次，每次取一个，第一次有 10 个可取，第二次有 9 个可取，因此 $n(\Omega)=10\times 9$。

（1）由于 $n(\overline{A}_1\overline{A}_2)=8\times7$，所以

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{8\times 7}{10\times 9}=\frac{28}{45}$$

（2）$n(\overline{A}_1A_2)=8\times2$，所以

$$P(\overline{A}_1A_2)=\frac{8\times 2}{10\times 9}=\frac{8}{45}$$

或直接用乘法公式

$$P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{8}{45}$$

（3）由于 $n(A_1A_2)=2\times1$，$n(\overline{A}_1A_2)=8\times2$，且 $A_1A_2\cap\overline{A}_1A_2=\phi$，所以

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)=\frac{2}{10\times 9}+\frac{8\times 2}{10\times 9}=\frac{1}{5}\text{。}$$

或直接用乘法公式

$$P(A_2)=P(A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)$$

$$=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{5}$$

（4）由于 $A_1\overline{A}_2$、$\overline{A}_1A_2$ 互不相容，

$$P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)$$

$$=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)$$

$$=\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{16}{45}\text{。}$$

4.(ch1-10)从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求 4 只鞋子至少有 2 只配成一双的概率。

分析：直接求 4 只鞋子至少有 2 只配成一双的概率不易得到正确的结果，这是由于所考虑事件比较复杂，解决此类问题的方法通常是利用概率性质 3，即先求逆事件的概率。该题的解法较多，现分述如下：

解：设事件 A 表示："取出的 4 只鞋子至少有 2 只配成一双"，则事件 $\overline{A}$ 表示：

取出的 4 只鞋任意两只均不能配成一双”。

方法一．若取鞋子是一只一只地取（不放回），则共有取法 10×9×8×7 种，而取出的 4 只鞋任意两只均不能配成一双的取法共有 10×8×6×4 种，所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}$$

方法二、从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，共有 C_{10}^{4}=210 种取法。取出的 4 只鞋任意两只均不能配成一双共有 $C_5^4\times2^4$=80 种取法(先从 5 双中任取 4 双共 C_5^4 种取法，然后从每双鞋子中任取一只，每双鞋子有 2 种取法，故共有 2^4 种取法)。所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{80}{210}=\frac{13}{21}$$

方法三、为了使取出的 4 只鞋子任意两只均不能配成一双，故可考虑 4 只鞋子中取左脚 k （$k=0$，1，2，3，4) 只，右脚 $4-k$ 只（这 $4-k$ 只右脚只能从剩余的 $5-k$ 双鞋子中任取）其共有 $\sum_{k=0}^{4}C_5^kC_{5-k}^{4-k}=80$ 种取法，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{80}{210}=\frac{13}{21}$$

方法四、(直接法）设事件 A_i 表示：“取出的 4 只鞋子恰有 i 双配对”（i=1，2)，则 $A=A_1\cup A_2$，且 $A_1\cap A_2=\phi$。A_1 包含基本事件数为从 5 双鞋子中任取一双，同时在另外 4 双鞋子中任取不能配对的两只的不同取法共有 $C_5^1(C_8^2-C_4^1)$ 种（$C_5^1(C_4^2\times2^2)$）；A_2 包含基本事件数为从 5 双鞋子中任取 2 双，不同取法共有 C_5^2 种。故

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{C_5^1(C_8^2-C_4^1)}{C_{10}^4}+\frac{C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$$

5.(ch1-11)假设每个人的生日在一年 365 天都是等可能的，那么随机选取 $n(\le365)$ 个人，求他们的生日各不相同的概率及这 n 个人至少有两个人生日在同一天的概率；若 $n=40$，求上述两个事件的概率。

分析：此问题属于占位问题。

解：设 A 表示事件：“n 个人的生日各不相同”；B 表示事件：“这 n 个人至少有两个人生日在同一天”。由于每个人的生日在一年 365 天都是等可能的，所以

$n(\Omega)=365^n$，$n(A)=A_{365}^n$，从而 $P(A)=\dfrac{A_{365}^n}{365^n}$。

由于 B 事件是 A 事件的对立事件，所以

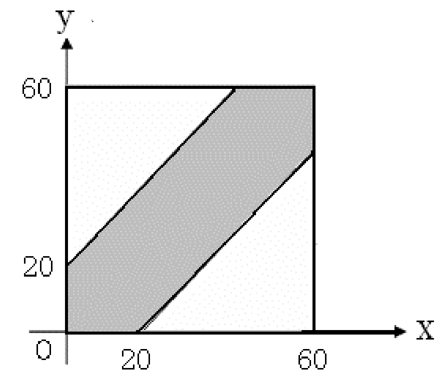
$$P(B)=1-P(A)=1-\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}$$

若取 $n=40$，则

$$P(A)=\frac{A_{365}^{40}}{365^{40}}\approx 0.109$$

$$P(B)=1-P(A)\approx 1-0.109=0.891$$

6.(ch1-12)两人相约某天 8 点到 9 点在预定地点会面，先到者要等候另一个人 20 分钟，过时就离去，若每人在这指定的一个小时内任一时刻到达是等可能的，求事件 A={两人能会面}的概率。



解：设 x、y 分别表示两人到达预定地点的时刻，那么两人到达时间的一切可能结果对应边长为 60 的正方形里所有点（如图），这个正方形就是样本空间 Ω，而两人能会面的充要条件是 $|x-y|\le 20$，即 $x-y\le 20$ 且 $x-y\ge -20$，所以，事件 A 对应图中阴影部分里的所有点。因此，所求概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$

7.(ch1-13)设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时被打破的概率为 3/10，第二次落下时被打破的概率为 1/2，第三次落下时被打破的概率为 9/10，试求透镜落下三次未打破的概率。

分析：解决此问题的关键在于正确理解题意，弄清概率 1/2、9/10 的具体含义。依题意“第二次落下时被打破的概率为 1/2”指的是第一次落下未被打破的情况下，第二次落下时被打破的概率；概率 9/10 的含义类似。

解：设 A_i 表示“第 i 次落下时未被打破”$(i=1,2,3)$，A 表示“落下三次未被打破”，则 $A=A_1A_2A_3$，

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)$$

$$=(1-\frac{3}{10})\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{9}{10})=\frac{7}{200}$$

8.(Ch1-20)三个人独立地破译一个密码，他们能单独译出的概率分别为 1/5、1/3、1/4，求此密码被译出的概率。

解：设事件 A 表示："此密码被译出"；事件 B_i 表示："第 i 个人破译出密码"（$i=1$，2，3），则 $A=B_1\cup B_2\cup B_3$。

方法一、$P(A)=P(B_1\cup B_2\cup B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)$

$$-P(B_1B_2)-P(B_1B_3)-P(B_2B_3)+P(B_1B_2B_3)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{5}$$

方法二、由 B_1、B_2、B_3 相互独立知，$\overline{B}_1$、$\overline{B}_2$、$\overline{B}_3$ 也相互独立，所以

$$P(A)=P(B_1\cup B_2\cup B_3)=1-P(\overline{B_1\cup B_2\cup B_3})$$

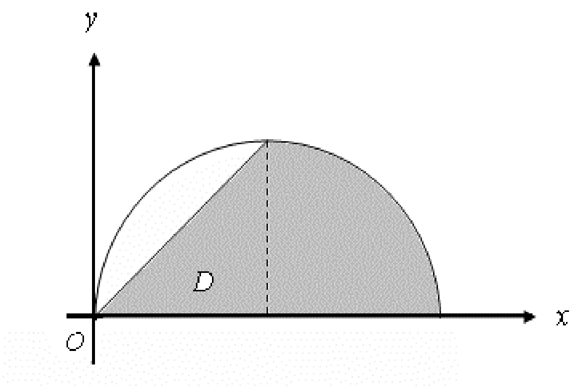
$$=1-P(\overline{B}_1\cap\overline{B}_2\cap\overline{B}_3)=1-P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3)$$

$$=1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{5}。$$

9.(ch1-25)随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，若该点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率。

解：设事件 A："表示掷的点和原点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$"；这是一个几何概型的概率计算问题。由几何概率公式（如图）

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{S_D}{S_{半圆}}$$



而

$$S_{半圆}=\frac{1}{2}\pi a^2$$

$$S_D=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2$$

故

$$P(A)=\frac{a^2/2+\pi a^2/4}{\pi a^2/4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

10.（Ch1-26）设有来自三个地区的各 10 名、15 名、25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份、5 份。随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份，求：

（1）先抽到的一份是女生表的概率 p；

（2）已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q。

分析：依题意，所有报名表来自三个地区，因此随机地取一个地区的报名表，

抽到各个地区的报名表的概率应是相等的；若从中先后抽出两份，则（1）可用全概率公式求得；(2）是一个条件概率。

解：设 B_i （$i=1,2$）表示“第 i 次抽到的一份是女生表”；

A_i （$i=1,2,3$）表示“抽到的报名表来自第 i 个地区”。

（1） $P(B_1)=P(B_1A_1\cup B_1A_2\cup B_1A_3)$

$$=P(A_1)P(B_1\mid A_1)+P(A_2)P(B_1\mid A_2)+P(A_3)P(B_1\mid A_3)$$

$$=\frac{1}{3}\times(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{1}{5})=\frac{29}{90}$$

（2） $P(\overline{B}_2)=P(A_1B_1\overline{B}_2\cup A_1\overline{B}_1\overline{B}_2\cup A_2B_1\overline{B}_2\cup A_2\overline{B}_1\overline{B}_2\cup A_3B_1\overline{B}_2\cup A_3\overline{B}_1\overline{B}_2)$

$$=\frac{1}{3}(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}+\frac{8}{15}\times\frac{7}{14}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}+\frac{4}{5}\times\frac{19}{24})=\frac{61}{90}$$

$$P(B_1\mid\overline{B}_2)=\frac{P((A_1\cup A_2\cup A_3)B_1\overline{B}_2)}{P(\overline{B}_2)}=\frac{\frac{1}{3}\times(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{6})}{61/90}=\frac{20}{61}$$

11．设两两相互独立的三个事件 A，B，C 满足条件：$ABC=\phi$，$P(A)=P(B)=P(C)<1/2$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=9/16$，求 $P(A)$。

解：$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)=9/16$

即 $3P(A)-3(P(A))^2-9/16=0$，亦即 $P(A)-(P(A))^2-3/16=0$，解得 $P(A)=1/4$ 及 $P(A)=3/4$（舍去）。

12．设两个相互独立的事件 A和B 都不发生的概率为 1/9，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，求 $P(A)$。

解：由于 $P(A)P(\overline{B})=P(\overline{A})P(B)$，所以

$$P(A)-P(A)P(B)=P(B)-P(A)P(B)$$

故 $P(A)=P(B)$

$$P(A)=P(A\cup B)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=1-P(\overline{A}\overline{B})-P(A)+P(A)P(A)$$

$$=1-\frac{1}{9}-P(A)+P(A)P(A)$$

即$1-2P(A)+(P(A))^2=1/9$，亦即$1-P(A)=\pm 1/3$，解得$P(A)=2/3$。

13．设M件产品中有n件次品，从中任取两件，已知所取两件中有一件不是次品，求另一件是次品的概率。

解：设A表示："恰有一件是次品"；B表示："两件中至少有一件不是次品"，则$\overline{B}$表示都是次品。则所求概率为$P(A|B)$，利用条件概率定义，需要先求出$P(AB)$、$P(B)$及$P(A)$。由所设事件易得 $P(A)=C_n^1\cdot C_{M-n}^1\Big/C_M^2=\dfrac{2n(M-n)}{M(M-1)}$

$$P(B)=1-C_n^2\Big/C_M^2=\frac{M(M-1)-n(n-1)}{M(M-1)}$$

显然，$A\subset B$，故$P(AB)=P(A)$，所以

$$P(A|B)=P(AB)/P(B)=\frac{2n}{M+n-1},$$

或在缩小的样本空间中有 $P(A|B)=\dfrac{C_n^1\cdot C_{M-n}^1}{C_n^1\cdot C_{M-n}^1+C_{M-n}^2}=\dfrac{2n}{M+n-1}$