计算方法

Numerical Computational Methods

第四章插值与拟合

§4.1 引言

一. 问题提出

表示两个变量x，y内在关系一般由函数式 $y = f(x)$表达。但在实际问题中，有两种情况：

1. 由实验观测一组离散数据(函数表），并且自变量x和因变量y之间存在一一对应的函数关系，但函数表达式$y = f(x)$未知；2. 函数的解析表达式已知，但计算复杂，不便使用，通常也造函数表。如：$y = sin(x)$ ，$y = lg(x)$。同时又要计算一个不在表上的函数值，或者计算这个函数的导数值或者积分值，我们该怎么办？

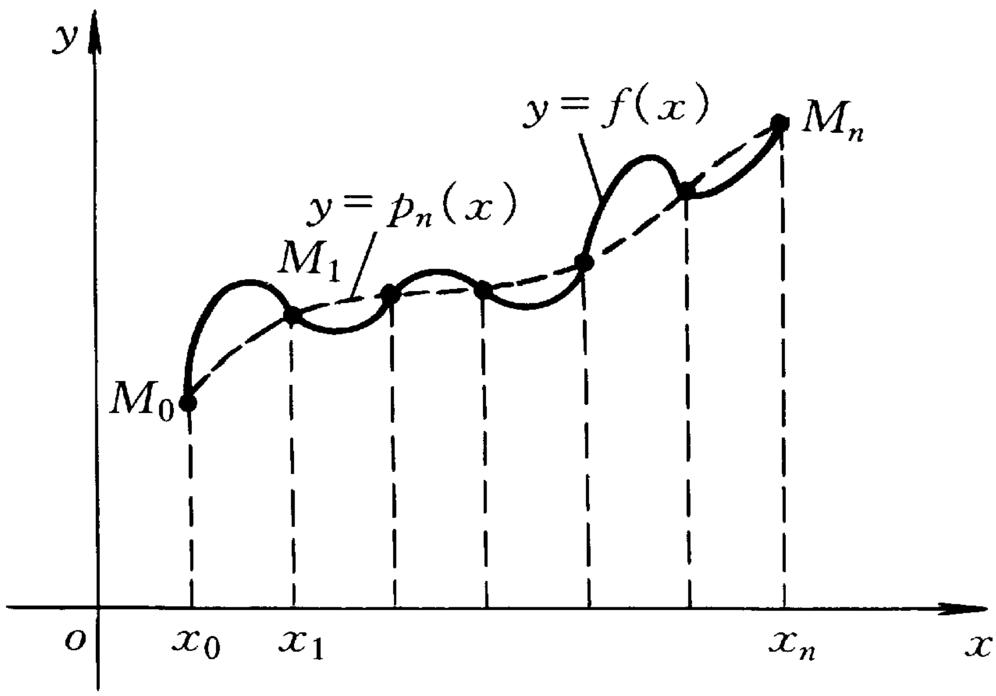
解决这个问题的基本思路是寻找一个计算方便且表达简单的函数来近似代替原函数，这就是函数数值逼近（插值和拟合）问题。

定义：函数$y = f(x)$在区间$[a, b]$上连续存在，但未知，只知道离散数据(x_i, y_i) $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，其中，$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，若存在简单函数$P(x)$，满足$P(x_i) = f(x_i) = y_i$ ，$(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，则称$P(x)$是$f(x)$的插值函数，$f(x)$是被插值函数，$[a, b]$为插值区间，x_i是插值节点， $R(x) = f(x) - P(x)$叫截断误差或者插值余项，该过程称为函数插值。

通常取$P(x)$为多项式函数，即$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$，则该插值称为代数插值(多项式插值)

二. 插值的几何意义

从几何上看，插值是已知平面上 n+1 个不同的点(x_i, y_i) $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$ ， 要寻找一条过这些点的不超过 n 次的多项式曲线。



为了解决插值任务，需要回答下面问题：

（1）满足插值条件的插值多项式 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ 是否存在？应该是几次多项式？是 n 次吗？
（2）如果满足插值条件的多项式 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ 存在，应如何构造？
（3）用插值多项式$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$近似代替 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，误差如何？

三. 插值多项式的存在唯一性

定理 1.1：在$\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}$个互异节点$\boldsymbol{x_i}$处满足插值条件$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_i})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})\quad(\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\cdots,\boldsymbol{n})$的次数不超过$\boldsymbol{n}$的多项式$\boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{x})$存在且唯一。

证明：设$\boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a_0x^0}+\boldsymbol{a_1x^1}+\cdots+\boldsymbol{a_nx^n}$

代入插入条件得：

$$\boldsymbol{a_0}+\boldsymbol{a_1x_0}+\cdots+\boldsymbol{a_nx_0^n}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$$
$$\boldsymbol{a_0}+\boldsymbol{a_1x_1}+\cdots+\boldsymbol{a_nx_1^n}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{a_0}+\boldsymbol{a_1x_n}+\cdots+\boldsymbol{a_nx_n^n}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_n})$$

该方程的系数行列式为范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$\boldsymbol{D_{n+1}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_0} & \cdots & \boldsymbol{x_0^n}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_1} & \cdots & \boldsymbol{x_1^n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_n} & \cdots & \boldsymbol{x_n^n}\end{vmatrix}=\prod_{\boldsymbol{0\le j\le i\le n}}\left(\boldsymbol{x_i}-\boldsymbol{x_j}\right)\neq\boldsymbol{0}$$

故由 Cramer 法则知，该方程组解存在且唯一，即多项式(系数)存在唯一。

§4.2 Lagrange 插值多项式

十八世纪法国数学家 Lagrange 对以往的插值算法进行研究与整理，提出了易于掌握和计算的统一公式，称为 Lagrange 插值公式。特例是线性插值公式和抛物线插值公式。

一. 线性插值

已知两个插值点及其函数值：

x	x_0	x_1
$f(x)$	y_0	y_1

求一次多项式$\boldsymbol{P_1}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bx}$，使得下式成立。

$$\begin{cases}\boldsymbol{P_1}(x_0)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}x_0=y_0\\ \boldsymbol{P_1}(x_1)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}x_1=y_1\end{cases}$$

由于方程组的系数行列式$\begin{vmatrix}\boldsymbol{1} & x_0\\ \boldsymbol{1} & x_1\end{vmatrix}=x_1-x_0\neq 0$

所以，按 Cramer 法则，有唯一解$\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}y_0 & x_0\\ y_1 & x_1\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}\boldsymbol{1} & x_0\\ \boldsymbol{1} & x_1\end{vmatrix}=$

$(x_1y_0-x_0y_1)/(x_1-x_0)$，$\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}1 & y_0\\ 1 & y_1\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}\boldsymbol{1} & x_0\\ \boldsymbol{1} & x_1\end{vmatrix}=(y_1-y_0)/(x_1-x_0)$

于是$\boldsymbol{P_1}(\boldsymbol{x})=(x_1y_0-x_0y_1)/(x_1-x_0)+[(y_1-y_0)/(x_1-x_0)]\boldsymbol{x}$

或$\boldsymbol{P_1}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{\boldsymbol{x}-x_0}{x_1-x_0}y_1$

插值基函数

插值公式中y_0的系数多项式为$\boldsymbol{l_0(x)}=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$ ，y_1的系数多项式为$\boldsymbol{l_1(x)}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ ，称之为插值基函数。

插值基函数具有如下性质：

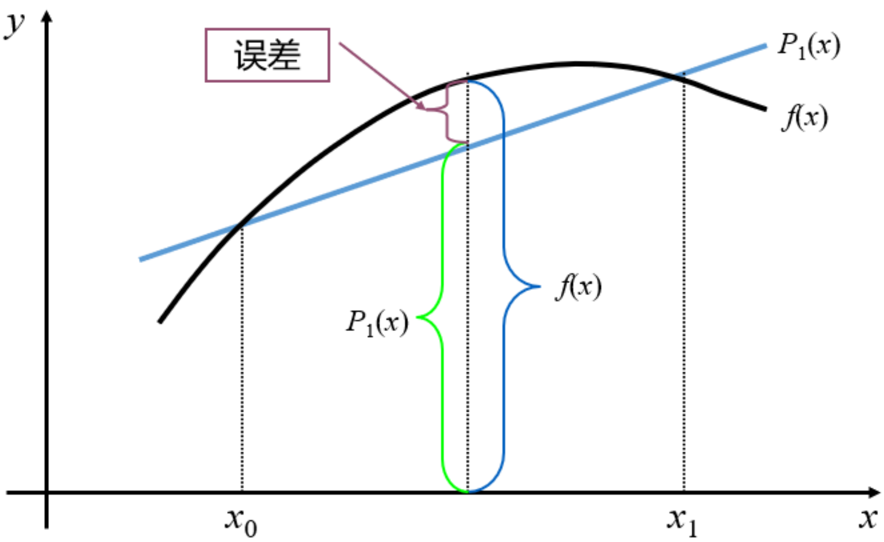
$l_0(x_0)=1$　　$l_0(x_1)=0$ ；$l_1(x_0)=0$　　$l_1(x_1)=1$ ；即与下标对应的插值点上取 1，在另外插值点取 0

故可统一表示成：$l_i(x_k)=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}\quad (i,k=0,1)$

这样一次 Lagrange 插值多项式表示为：$L_1(x)=\sum_{i=0}^{1} l_i(x)y_i$

一次 Lagrange 插值多项式的**插值余项：**$R_1(x)=f(x)-L_1(x)$

容易验证，一次 Lagrange 插值多项式就是**过点(x_0,y_0)与(x_1,y_1)的直线的直线方程。如下图所示。**



例 2.1：已知

x	3.1	3.2
lnx	1.1314	1.1632

求$\boldsymbol{ln(3.16)}$的近似值(保留 4 为小数，保留 4 位有效数字，误差为0.5×10^{-3}之间的区别？统一要求)。

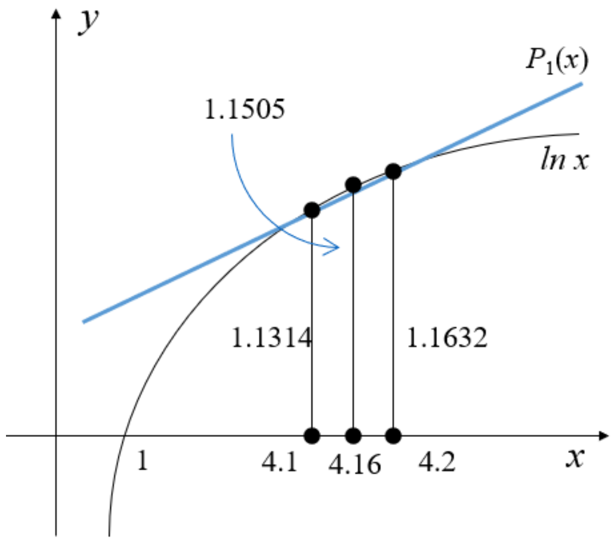
　　解：用线性插值公式，计算得到

$\boldsymbol{P_1(x)}=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1=\frac{x-3.2}{3.1-3.2}\times\boldsymbol{1.1314}+\frac{x-3.1}{3.2-3.1}\times1.1632=11.632x-11.632\times3.1-11.314x+11.314\times3.2=0.318x+0.1456$

所以 $\boldsymbol{ln(3.16)\approx1.1505}$

线性插值在待插值曲线连续光滑，并且两个插值节点很近并且所求的函数值也很近时使用，通常这种情况是可以保证精度的。

如例 2.1 中，对于$\boldsymbol{y=ln\ x}$这样连续光滑的曲线



二. 抛物线插值

已知三个插值节点及其函数值：

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	y_0	y_1	y_2

求二次多项式$P_2(x) = a + bx + cx^2$，使得下式成立。

$$\begin{cases} P_2(x_0) = a + bx_0 + cx_0{}^2 = y_0 \\ P_2(x_1) = a + bx_1 + cx_1{}^2 = y_1 \\ P_2(x_2) = a + bx_2 + cx_2{}^2 = y_2 \end{cases}$$

二. 抛物线插值

利用插值基函数来构造二次插值

$$L_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$$

$l_i(x)$，$(i = 0, 1, 2)$是二次多项式，且满足条件

$l_0(x_0)$ =1，$l_0(x_1)$ =0，$l_0(x_2)$ =0

$l_1(x_0)$ =0，$l_1(x_1)$ =1，$l_1(x_2)$ =0

$l_2(x_0)$ =0，$l_2(x_1)$ =0，$l_2(x_2)$ =1

即$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, 2)$

求插值基函数

$l_0(x)$是二次多项式，且满足条件$l_0(x_0)$ =1，$l_0(x_1)$ =0，$l_0(x_2)$ =0

则可写成

$l_0(x) = A(x - x_1)(x - x_2)$

其中， A是待定参数

∵ $l_0(x_0)$ =1

∴ $l_0(x_0) = A(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 1$

∴ $A = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$

代入得 $l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

插值基函数

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

同理可得

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

抛物线插值多项式

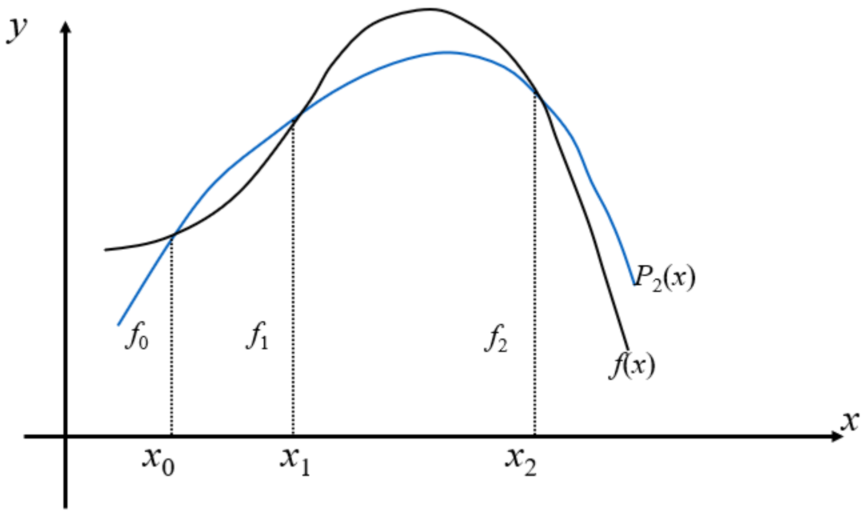
$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \times y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \times y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \times y_2$$
$$= \sum_{i=0}^{2} l_i(x) y_i$$

插值余项

$$R2(x) = f(x) - L2(x)$$

问题：$L_2(x)$和前面提到的$P_2(x)$的关系如何？根据插值多项式的存在唯一性定理，$L_2(x)$就是$P_2(x)$，即$L_2(x) = P_2(x)$

容易验证，$P_2(x)$是过点(x_0, f_0)、（x_1, f_1）与（x_2, f_2)三点的抛物线，如下图所示。



例 2.2：已知

x	$x_0 = -1$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$
$f(x)$	$y_0 = -3$	$y_1 = 0$	$y_2 = 4$

用抛物线插值公式求$f(1.2)$的近似值。

解：用（公式 2），计算得到

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-2)}{(1-(-1))(1-2)}$$

$$\boldsymbol{l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{\big(x-(-1)\big)(x-1)}{\big(2-(-1)\big)(2-1)}}$$

解：用（公式 2），计算得到

$$\boldsymbol{L_2(x)=-3\times\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+0\times\frac{\big(x-(-1)\big)(x-2)}{\big(1-(-1)\big)(1-2)}}$$

$$\boldsymbol{+4\times\frac{\big(x-(-1)\big)(x-1)}{\big(2-(-1)\big)(2-1)}}$$

$$\boldsymbol{f(1.2)\approx L_2(1.2)}$$

$$\boldsymbol{=-3\times\frac{(1.2-1)(1.2-2)}{(-1-1)(-1-2)}+0\times\frac{\big(1.2-(-1)\big)(1.2-2)}{\big(1-(-1)\big)(1-2)}}$$

$$\boldsymbol{+4\times\frac{\big(1.2-(-1)\big)(1.2-1)}{\big(2-(-1)\big)(2-1)}=0.6667}$$

计算机计算应该

$$\boldsymbol{L_2(x)=-3\times\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}+0\times\frac{\big(x-(-1)\big)(x-2)}{\big(1-(-1)\big)(1-2)}}$$

$$\boldsymbol{+4\times\frac{\big(x-(-1)\big)(x-1)}{\big(2-(-1)\big)(2-1)}=-0.5\times(x^2-3x+2)+\frac{4}{3}\times(x^2-1)}$$

$$\boldsymbol{=0.8333x^2+1.5x-2.3333}$$

$$\boldsymbol{f(1.2)\approx L_2(1.2)=0.8333\times(1.2)^2+1.5\times1.2-2.3333=0.6667}$$

例 2.3：已知

x	$x_0=11$	$x_1=12$	$x_2=13$
$f(x)$	$y_0=2.3979$	$y_1=2.4849$	$y_2=2.5649$

用抛物线插值公式求$\boldsymbol{f(11.75)}$的近似值。

解：

$$\boldsymbol{f(11.75)\approx L_2(11.75)=2.4638}$$

当待插值函数是连续光滑曲线，当三个插值节点很近但所求的函数值相差较大时，用抛物线插值方法仍旧可以保证精度。

三. Lagrange 插值

已知 $\boldsymbol{n+1}$ 个插值节点及其函数值：

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

求次数不超过$\boldsymbol{n}$的多项式$\boldsymbol{P_n(x)}$：$\boldsymbol{P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}$，

使得$\begin{cases} P_n(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ P_n(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ P_n(x_2)=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_2^n=y_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n(x_n)=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$

求插值基函数

$l_0(x)$是n次多项式，且满足条件$l_0(x_0)$ =1，$l_0(x_1)$ =0，…，$l_0(x_n)$ =0

则可写成

$l_0(x)=A(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

其中， A是待定参数

$\because\quad l_0(x_0)$ =1

$\therefore\ l_0(x_0)=A(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)=1$

$\therefore\ A=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$

代入得 $l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq 0}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}$

说明：为了跟其他插值基函数保持形式上的一致性，没有将$l_0(x)$写成$\prod_{j=1}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}$，而是写成$\prod_{j=0,j\neq 0}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}$。

同理可得

$l_i(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$

Lagrange 插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)y_i=\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}y_i$$

令：$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

$$\begin{aligned}\omega_{n+1}'(x)=&(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)+(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\&+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)\\&+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_n)\\&+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})\\&=\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x-x_j)\end{aligned}$$

所以，将x_i代入$\omega_{n+1}(x)$，其中包含$(x-x_i)$的项为零，故得到$\omega_{n+1}'(x_i)=(x_i-x_0)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)$。

所以，Lagrange 插值公式可以写成：

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega_{n+1}'(x_i)}y_i$$

插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$$

五. 截断误差：

定理 3　Lagrange 插值多项式截断误差有如下表示形式

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中，$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$，$\xi\in(a,b)$
证明：$\because R_n(x_i)=0\quad(i=0,1,2,\cdots,n)\quad\therefore$ 有形式$R_n(x)=k(x)(x-x_0)\cdots(x-x_n)$，其中$k(x)=\frac{f(x)-L_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}$
引入$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-k(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$
显然$\varphi(t)$在$x_0,x_1,\cdots,x_n,x$为零
故，由罗尔(Rolle)定理

有$\xi\in(x_0,x_n)$，使得$\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$

即$f^{(n+1)}(\xi)-k(x)(n+1)!=0$

故$k(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，代入(式 1)即得$R_n(x)=k(x)(x-x_0)\cdots(x-x_n)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

设$M_{n+1}=\max\limits_{x_0\le x\le x_n}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$，则截断误差限为

$$|R(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}y_i$$

插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

说明
插值多项式本身只与插值基点及$f(x)$在这些基点上的函数值有关,而与函数$f(x)$无关；但余项$R_n(x)$却与$f(x)$关系密切，是通过函数$f(x)$的$n+1$阶导数

$f^{(n+1)}(\xi)$建立联系的。

若$f(x)$为次数不超过n的多项式,那么以$n+1$个点为节点的插值多项式就一定是其本身,即$L_n(x)\equiv f(x)$。这是因为此时$R_n(x)=0$。
特别地，取 $f(x)=x^k$ ， $k=0,1,2,\ldots,n$, 则$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)y_i=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)\,{x_i}^k=f(x)=x^k$， $k=0,1,2,\ldots,n$。
当$k=0$时，可得：$\sum_{i=0}^{n}l_i(x)y_i=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)\,{x_i}^k==\sum_{i=0}^{n}l_i(x)=x^k=1$。
例 2.4：已知$f(x)$满足$f(144)=12$， $f(169)=13$， $f(225)=15$。作$f(x)$的二次 Lagrange 插值多项式，并求$f(175)$的近似值。
解：设$x_0=144$，$x_1=169$，$x_2=225$，$y_0=12$，$y_1=13$，$y_2=15$，
则$f(x)$的二次 Lagrange 插值基函数为：

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-169)(x-225)}{(144-169)(144-225)}=\frac{(x-169)(x-225)}{2025}$$
$$=\frac{1}{2025}x^2-\frac{394}{2025}x+\frac{169\times 225}{2025}$$
$$=0.0004938x^2+0.1946x+18.7778$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-144)(x-225)}{(169-144)(169-225)}=\frac{(x-144)(x-225)}{-1400}$$
$$=-\frac{1}{1400}x^2+\frac{369}{1400}x-\frac{144\times 225}{1400}$$
$$=-0.0007143x^2+0.2636x-23.1429$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-144)(x-169)}{(225-144)(225-169)}=\frac{(x-144)(x-169)}{4536}$$
$$=\frac{1}{4536}x^2-\frac{313}{4536}x+\frac{144\times 169}{4536}$$
$$=0.0002205x^2+0.069x+5.365$$

$f(x)$的二次 Lagrange 插值多项式$L_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)=12\times(0.0004938x^2+0.1946x+18.7778)+13\times(-0.0007143x^2+0.2636x-23.1429)+15\times(0.0002205x^2+0.069x+5.365)=-0.00528x^2+6.797x+4.9509$
且$f(175)\approx L_2(175)=13.23015873$
说明：
例中如果只给出两个节点 169 和 225，也可以作插值多项式，即 1 次 Lagrange 插值多项式，也就是 Lagrange 线性插值；
也可以在 n+1 个节点中取相邻的两个节点作 Lagrange 线性插值。

例 2.5：已知若$f(x)=\sqrt{x}$，满足$f(144)=12$， $f(169)=13$， $f(225)=15$。用 Lagrange 线性插值多项式求$f(175)$近似值。
由于插值点$x=175$在 $x_1=169$与x_2 =225 之间
因此取$x_1=169$与x_2 =225 为插值节点
Lagrange 插值基函数为
$$l_0(x)=\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}=\frac{(x-225)}{(169-225)}=\frac{(x-225)}{-56}$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}=\frac{(x-169)}{(225-169)}=\frac{(x-169)}{56}$$
Lagrange 线性插值多项式为$L_1(x)=y_1l_1(x)+y_2l_2(x)=13\times\frac{(x-225)}{-56}+15\times\frac{(x-169)}{56}=\frac{1}{56}(15x-15\times 169-13x+13\times 225)=0.03571x+6.964$
所以
$$f(175)\approx L_1(175)=13.2133$$
对比手算结果：
$$f(175)\approx 13\times\frac{175-225}{-56}+15\times\frac{175-169}{56}=13.21428571$$

例 2.6：已知若$\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$，满足$\boldsymbol{f(144)=12}$， $\boldsymbol{f(169)=13}$， $\boldsymbol{f(225)=15}$。试估计用 Lagrange 线性和二次插值做$\boldsymbol{f(175)}$近似值的截断误差。
解：设$\boldsymbol{R_1(x)}$为 Lagrange 线性插值的余项，$\boldsymbol{R_2(x)}$为 Lagrange 线性插值的余项，

$$\boldsymbol{R_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f^{(1+1)}(\xi)}{(1+1)!}\omega_{1+1}(x)=\frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\omega_2(x)}$$

$$\boldsymbol{R_2(x)=f(x)-L_2(x)=\frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}\omega_{2+1}(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}\omega_3(x)}$$

$\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$ ，$\boldsymbol{f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$ ，$\boldsymbol{f^{(2)}(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}$ ，$\boldsymbol{f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}}$

令，$\boldsymbol{M_2=\max_{169\le x\le 225}\left|f^{(2)}(x)\right|=\left|f^{(2)}(169)\right|\le 1.14\times 10^{-4}}$ ，$\boldsymbol{M_3=\max_{144\le x\le 225}\left|f^{(3)}(x)\right|=\left|f^{(3)}(144)\right|\le 1.51\times 10^{-6}}$

令，$N_2(175)=|\omega_2(175)|=|(175-169)(175-225)|=300$ ，$N_3(175)=|\omega_3(175)|=|(175-144)(175-169)(175-225)|=9300$

所以，$|R_1(175)|=\left|\frac{f^{(2)}(\xi)}{(2)!}\boldsymbol{\omega_2(x)}\right|\le\frac{1}{(2)!}\times\boldsymbol{M_2}\times N_2(175)\le\frac{1}{(2)!}\times\boldsymbol{1.14\times 10^{-4}}\times\boldsymbol{300\le 1.71\times 10^{-2}}$ ，$|R_2(175)|=\left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{(3)!}\boldsymbol{\omega_3(x)}\right|\le\frac{1}{6}\times\boldsymbol{M_3}\times N_3(175)\le\frac{1}{6}\times\boldsymbol{1.51\times 10^{-6}\times 9300\le 2.35\times 10^{-3}}$

说明：从本例得，在求$\boldsymbol{\sqrt{175}}$时，用 Lagrange 二次插值比线性插值的误差更小。
例 2.7：设$\boldsymbol{f(x)=ln(x)}$且给出函数表

x	0.40	0.50	0.70	0.80
$ln(x)$	−0.916291	−0.693147	−0.356675	−0.223144

试计算$\boldsymbol{f(0.6)=ln(0.6)}$的近似值，并估计误差。
解(1)选取插值节点为$\boldsymbol{x_1=0.50}$，$\boldsymbol{x_2=0.70}$作为线性插值

$$\boldsymbol{f(0.6)=ln(0.6)\approx L_1(0.6)=y_1\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}=-0.524911}$$

误差 $\boldsymbol{R_1(0.6)=f(0.6)-L_1(0.6)=\frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-x_1)(x-x_2)=\frac{-\frac{1}{\xi^2}}{2}(0.6-0.5)(0.6-0.7)=\frac{0.01}{2}\frac{1}{\xi^2}}$， $\boldsymbol{0.50<\xi<0.70}$

由于$\boldsymbol{\frac{10^2}{49}<\frac{1}{\xi^2}<\frac{10^2}{25}}$，所以有$\boldsymbol{0.01<R_1(x)<0.02}$
(2)选取插值节点$\boldsymbol{x_1=0.50}$，$\boldsymbol{x_2=0.70}$，$\boldsymbol{x_3=0.80}$作抛物线插值

$$\boldsymbol{f(0.6)=ln(0.6)\approx L_2(0.6)=y_1l_1(x)+y_2l_2(x)+y_3l_3(x)=-0.513343}$$

误差

$$R_2(0.6)=f(0.6)-L_2(0.6)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$=\frac{2}{3}\frac{1}{\xi^3}(0.6-0.5)(0.6-0.7)(0.6-0.8)=\frac{0.002}{3}\frac{1}{\xi^3}$, $0.50<\xi<0.80$

$$1.3\times10^{-3}<R_2(0.6)<5.34\times10^{-3}$$

$f(0.6)=ln(0.6)$ 真值为：$ln(0.6)=-0.510826$

思考题

1. $x_i \quad (i=0,1,2,3,4)$为互异点，$l_i(x)$为对应的 4 次插值基函数，则

(1)求$\sum_{i=0}^{4}x_i^4 l_i(0)$

(2)求$\sum_{i=0}^{4}\left(x_i^4+2\right)l_i(x)$

思考题

2. $x_i \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$为插值节点，$l_i(x)$为对应的插值基函数。

证明: (1) $\sum_{j=0}^{n}l_j(x)=1$

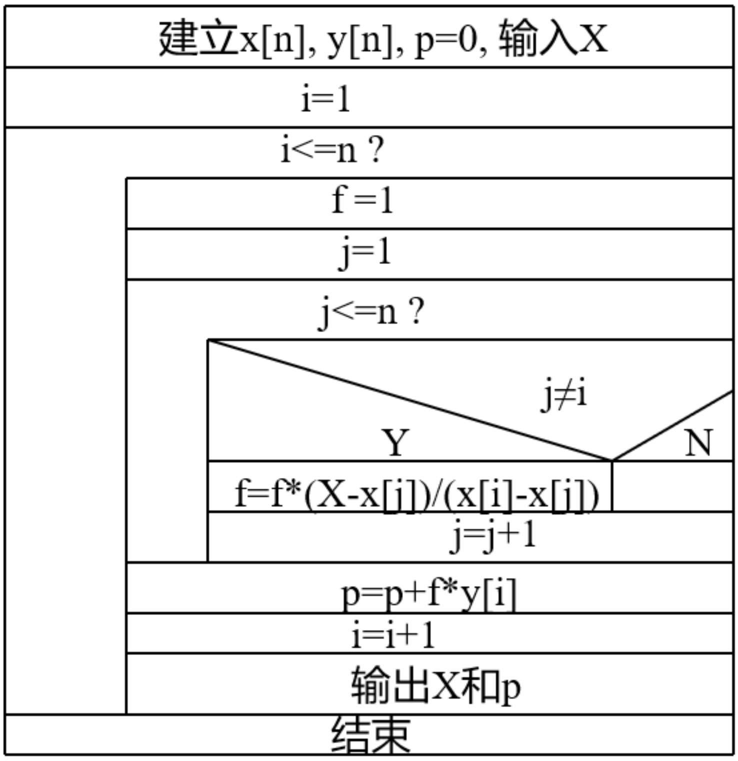
$$(2)\ \sum_{j=0}^{n}l_j(0)\,x_j^k=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k=1,2,\cdots n\\ (-1)^n x_0x_1\cdots x_n & k=n+1\end{cases}$$

Lagrange 插值多项式具有直观、对称和容易编程上机等优点，但是也同时有插值基函数计算复杂，每增加一个节点，插值多项式的所有系数都得重算，计算上浪费的缺点。

尤其是每增加一个节点，所有的插值多项式系数都需要重新计算的问题，存在巨大的计算开销，而 Newton 插值则不同，是能够解决这个问题的。

六. 算法

拉格朗插值法 N-S 图：



§4.3 Newton 插值多项式(Newton’s Interpolation)

将$L_n(x)$改写成$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(\cdots x-x_n)$的形式，希望每加一个节点时，只附加一项，这样的插值称为 Newton 插值

根据节点的是不是等距的，可以将 Newton 插值分成两类，不等距节点的 Newton 插值和等距节点的 Newton 插值。

一.差商(也称均差，divided difference)

差商是数值方法中的一个重要概念，它可以反映出表格函数(列表函数)的两相邻节点之间平均变化的情况。

在 Newton 插值多项式构造过程中，起到重要的作用。

定义，函数$f(x)$在x_i的函数值定义为$f(x)$在x_i的零阶差商，记为$f[x_i]=f(x_i)$；$f(x)$在x_i,x_{i+1}的一阶差商记为$f[x_i,x_{i+1}]$，定义为$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=\frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}$；$f(x)$在$x_i,x_{i+1},x_{i+2}$的二阶差商记为$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$，定义为$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}$；… …；$f(x)$在$x_i,x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+k}$的$k$阶差商记为$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+k}]$，定义为$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+k}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+k}]-f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$。

如：

$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$称为$f(x)$在$x_0,x_1$的一阶差商；$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$称为$f(x)$在$x_1,x_2$的一阶差商；$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}$称为$f(x)$在$x_0,x_1,x_2$的二

阶差商，二阶差商是一阶差商的差商；$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0,x_1\cdots,x_{k-1}]-f[x_1,x_2\cdots,x_k]}{x_0-x_k}$
称为f在$x_0, x_1 \cdots, x_k$的k阶差商，k阶差商是$k-1$阶差商的差商。
二. 差商的性质

(1)差商是函数值$f(x_j)$的线性组合

$n = 1$时

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

$n = 2$时

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} - \left(\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}\right)}{x_2 - x_0}$$
$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

一般地，n阶差商

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$$

可以使用数学归纳法证明这个性质。
(2) 对称性

在n阶差商中，任意调换x_i，x_j的顺序，其值不变，称为差商的对称性。

由性质(1)知

$$f[x_0, x_1, \cdots x_i, \cdots x_j, \cdots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)}$$

$$f[x_0, x_1, \cdots x_j, \cdots x_i, \cdots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)}$$

$\therefore \quad f[x_0, x_1, \cdots x_i, \cdots x_j, \cdots, x_n] = f[x_0, x_1, \cdots x_j, \cdots x_i, \cdots, x_n]$

在n阶差商中，任意调换x_i，x_j的顺序，其值不变，称为差商的对称性。

(3) 多项式次数关系
如果 $f(x)$ 的 k阶差商$f[x, x_0, \cdots, x_{k-1}]$ 是关于x 的 m次多项式，则$f(x)$的 $k+1$阶差商$f[x, x_0, \cdots, x_{k-1}, x_k]$是 x 的 $m-1$ 次多项式
(4)差商与导数的关系

若 $f(x)$在$[a,b]$ 存在 $n+1$阶导数，$x_i \in [a,b]$， $i = 0,1,\dots,n,$ $x \in [a,b]$，则 $n+1$ 阶差商与导数存在如下关系：

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad , \xi \in (a,b)$$

(5)差商与微商

差商是微商的离散形式$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} f[x,x_0] = f'(x_0)$

例 3.2：设 $f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ ，证明：对任意x有 $f\,[x_0,x_1,\dots.x_n,x\,] = 1$

证明(1)：利用差商函数表示

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n] = \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$\therefore \quad f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x] = \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x)\omega_{n+1}'(x_i)} + \frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

$\because\ f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

$\therefore\ \ f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$

$\therefore\ \ f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x] = 0 + \frac{f(x)}{f(x)} = 1$

证明(2)：利用差商与导数关系

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad , \xi \in (a,b)$$

$\because\ f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

$\therefore\ \ f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$

$\therefore\ \ f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1$

例 3.3：设 $f(x) = x^7 - x^4 + 3x + 1$，计算$f\,[2^0,2^1]$ ， $f\,[x,2^0,2^1,\cdots,2^6]$ ，$f\,[x,2^0,2^1,\cdots,2^7]$

解： $f\,[2^0,2^1] = \frac{f(1)-f(2)}{1-2} = \frac{4-119}{1-2} = 115$

而$f^{(7)}(x) = 7!$， $f^{(8)}(x) = 0$，由性质 4 得

$$f\,[x,2^0,2^1,\cdots,2^6] = \frac{f^{(6+1)}(\xi)}{(6+1)!} = 1$$

$$f\,[x,2^0,2^1,\cdots,2^7] = \frac{f^{(7+1)}(\xi)}{(7+1)!} = 0$$

三. Newton 基本插值公式

设给定$n+1$个插值节点$(x_0,x_1,\ \dots,x_n)$，再给另一点$x \neq x_i$，据差商定义

由$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，得$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$。这个式子左边是待插值函数$f(x)$，右边是函数$f(x)$在$x_0$处的零阶差商加上$f(x)$在节点$x,x_0$上的一阶差商乘以$(x-x_0)$。

增加一个节点，根据二阶差商的定义，由$f[x,\ x_0,x_1]=\frac{f[x,x_0\ ]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$，得

$f[x,x_0\ ]=f[x_0,x_1]+f[x,\ x_0,x_1](x-x_1)$。这个式子左边是$f(x)$在节点$x,x_0$上的一阶差商，右边是函数$f(x)$在$x_0,x_1$处的一阶差商加上$f(x)$在节点$x,\ x_0,x_1$上的二阶差商乘以$(x-x_1)$。

再增加一个节点，根据三阶差商的定义，由$f[x,\ x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x,x_0,x_1]-f[x_0,x_1,x_2]}{x-x_2}$，得 $f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+f[x,\ x_0,x_1,x_2](x-x_2)$。这个式子左边是$f(x)$在节点$x,x_0,x_1$上的二阶差商，右边是函数$f(x)$在$x_0,x_1,x_2$处的二阶差商加上$f(x)$在节点$x,\ x_0,x_1,x_2$上的三阶差商乘以$(x-x_2)$。如此依次增加一个节点，由$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{n-2}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]+f[x,\ x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}](x-x_{n-1})$，

得$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x,\ x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_n)$

然后依次把后式代入前式得:

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})+f\ [x,x_0,x_1,,\ldots.\ ,x_n](x-x_0\ )(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

记$P_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$
$$+f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$R_n(x)=f\ [x,x_0,x_1,\ldots.\ ,x_n](x-x_0\ )(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)$

则有$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

注意：$P_n(x)$的式子中最后一项是$f(x)$在节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$上的n阶差商$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$和$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$的乘积，也是$n$个一次项，最后一项是$(x-x_{n-1})$。

而，$R_n(x)$式子是$f(x)$在节点$x,x_0,x_1,\ldots,x_n$上的$n+1$阶差商$f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n]$和$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)$的乘积，是$n+1$个一次项，最后一项是$(x-x_n)$。

$P_n(x)$为关于x的n次多项式且$P_n(x_i)=f(x_i)$

说明：将x_i代入$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

有：$f(x_i)=N_n(x_i)+R_n(x_i)$

由$R_n(x)$表达式，知$R_n(x_i)=0\quad (i=0,1,\cdots,n)$

所以$P_n(x_i)=f(x_i)$

所以$P_n(x)$为插值多项式

称$P_n(x)$为牛顿插值多项式，记为$N_n(x)$

即 $N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$
$$+f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

插值余项$R_n(x)=f\ [x,x_0,x_1,\ldots.\ ,x_n]\omega_{n+1}(x)$

牛顿差商插值多项式的计算极为方便, 且当增加一个插值基点时, 只要在后面多计算一项，$N_n(x)$的各项系数恰好是各阶差商值。

各阶差商值可按差商表

差商表

x_i	$f(xi)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差	…
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$				
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$			
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$	
…	…	…	…	…	…	…

Newton 插值的几点说明
牛顿插值的误差不要求函数的高阶导数存在，所以更具有一般性。
对$f(x)$是由离散点给出的函数情形或$f(x)$的导数不存在的情形均适用。

四、Newton 插值基函数及 Newton 插值基公式
引入记号
$f[x_0]=f(x_0)$，$t_0(x)=1$，$t_1(x)=x-x_0$，$t_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)$，$\cdots$，$t_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$，
则n次 Newton 插值公式可表为

$$N_n(x)=t_0(x)f[x_0]+t_1(x)f[x_0,x_1]+\cdots+t_n(x)f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$
$$=\sum_{i=0}^{n}t_i(x)f[x_0,x_1,\cdots,x_i]$$

称$t_0(x)$，$t_1(x)$，$t_2(x)$，$\cdots$，$t_n(x)$ 为 Newton 插值的基函数。
Newton 插值基函数满足关系：

$$t_i(x)=t_{i-1}(x)(x-x_{i-1})\qquad i=1,2,\ldots,n$$

$$\begin{cases}t_i(x_j)=0, j<i\\ t_i(x_j)\neq 0, j\geq i\end{cases}$$

Newton 插值公式的承袭性

$$N_{n-1}(x)=t_0(x)f[x_0]+t_1(x)f[x_0,x_1]+\cdots+t_{n-1}(x)f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]$$
$$N_n(x)=t_0(x)f[x_0]+t_1(x)f[x_0,x_1]+\cdots+t_{n-1}(x)f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]+t_n(x)f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$
$$N_n(x)=N_{n-1}(x)+t_n(x)f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

例 3.4. 给定四个插值点$(-2,17)$，$(0,1)$，$(1,2)$，$(2,19)$，计算$N_2(0.9)$，$N_2(0.9)$。
解：$x_0=-2$，$x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=2$，
$f(x_0)=17$，$f(x_1)=1$，$f(x_2)=2$，$f(x_3)=19$
$f[x_0,x_1]=-8$，$f[x_0,x_1,x_2]=3$，$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=5/4$，

$$N_2(x) = t_0(x)f[x_0] + t_1(x)f[x_0,x_1] + t_2(x)f[x_0,x_1,\ x_2]$$
$$= 17 - 8(x+2) + 3(x+2)x$$
$$N_2(0.9) = 17 - 8(0.9+2) + 3(0.9+2)\times 0.9 = 1.63$$
$$N_2(x) = t_0(x)f[x_0] + t_1(x)f[x_0,x_1] + t_2(x)f[x_0,x_1,\ x_2]$$
$$= 17 - 8(x+2) + 3(x+2)x = 3x^2 - 2x + 1$$
$$N_2(0.9) = 3\times 0.9\times 0.9 - 2\times 0.9 + 1 = 1.63$$
$$N_2(x) = t_0(x)f[x_0] + t_1(x)f[x_0,x_1] + t_2(x)f[x_0,x_1,\ x_2]$$
$$= 17 - 8(x+2) + 3(x+2)x = 3x^2 - 2x + 1 = (3x-2)x + 1$$
$$N_2(0.9) = (3\times 0.9 - 2)\times 0.9 + 1 = 1.63$$

$$N_3(x) = N_2(x) + t_3(x)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$
$$= 17 - 8(x+2) + 3(x+2)x + (5/4)(x+2)x(x-1)$$
$$= (3x-2)x + 1 + (5/4)[(x+1)x - 2]x$$
$$= N_2(x) + (5/4)[(x+1)x - 2]x$$
$$N_3(0.9) = N_2(0.9) + \quad (5/4)\times[(0.9+1)\times 0.9 - 2]\times 0.9 = 1.30375$$

插值多项式的余项

根据$p_n\ (x)$的唯一性知：$L_n(x) = p_n(x)$

则两个插值多项式的余项也相等。

则$R_n(x) = f[x,x_0,x_1,\ldots.,x_n]\omega_{(n+1)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{(n+1)}(x)$

例 3.5：用 Newton 插值多项式$N_1(x)$，求$ln\,(11.75)$，估计误差。

x	11	12	13
y	2.3979	2.4849	2.5649

$$N_1(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) = 2.3979 + \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}(x - x_0)$$
$$= 2.3979 + \frac{2.3979 - 2.4849}{11 - 12}(x - x_0)$$
$$= 2.3979 + 0.087(x - x_0)$$
$$ln(11.75) \approx N1(11.75) = 2.4632$$

误差估计

$|R_1(x)| \le \frac{M}{2!}|(x-x_0)(x-x_1)|$ ，其中$|f''(x)| \le M$

$\because \quad f(x) = ln(x) \quad ,\ f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = \frac{-1}{x^2}\ ,\ x_0 \le x \le x_1$

$\therefore \quad |f''(x)| = \left|\frac{-1}{x^2}\right| \le \frac{1}{11^2},\ 11 \le x \le 12$

$\therefore\ |R_1(x)| \le \frac{1}{2!}\frac{1}{11^2}|(x-x_0)(x-x_1)|$

代入 11.75 得

$|\boldsymbol{R_1(11.75)}| \le \frac{1}{2!}\frac{1}{11^2}|\boldsymbol{(11.75-11)(11.75-12)}|$ =0.0007748

例 3.6.　构造$\boldsymbol{f(x)}$的牛顿插值多项式。

x	1	2	3	4
y	0	−5	−6	3

解： 给定 4 个节点，写出三次 Newton 插值多项式

$$\boldsymbol{N_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

解： 构造差商表

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{f(x_i)}$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	0			
2	−5	−5		
3	−6	−1	2	
4	3	9	5	1

所以，

$\boldsymbol{N_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = 0 + (-5)(x-1) + 2(x-1)(x-2) + 1\ (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 4x^2 + 3 = x^2(x-4) + 3}$

例 3.7. 已知数据表，试求$\boldsymbol{f(x)}$的牛顿插值多项式。

x	1	2	3	5	6
y	0	2	6	20	90

解： 给定 5 个节点，写出四次 Newton 插值多项式

$$\boldsymbol{N_4(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$$

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{f(x_i)}$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶差商
1	**0**				
2	2	**2**			
3	6	4	**1**		
5	20	7	1	**0**	

6	90	70	21	5	1

构造差商表

$$\begin{aligned} N_4(x) &= 0 + 2(x-1) + 1(x-1)(x-2) + 0(x-1)(x-2)(x-3) \\ &\quad + 1(x-1)(x-2)(x-3)(x-5) \\ &= x^4 - 11x^3 + 42x^2 - 62x + 30 \\ &= x(x(x(x-11)+42)-62)+30 \end{aligned}$$

五. Newton 插值计算步骤

1. 计算差商

(1)令$f_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$

(2)对于$i = 1, 2, \cdots, n \qquad j = n, n-1, \cdots, i$

令$f_j = (f_j - f_{j-1})/(x_i - x_{j-i})$（此时$f_j = f[x_0, x_1, \cdots, x_j]$）

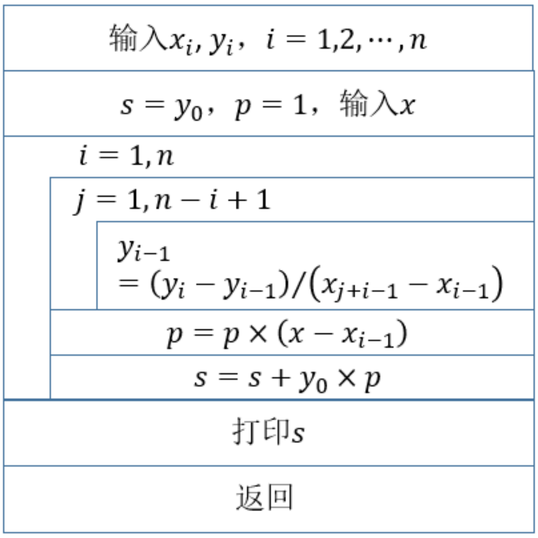
2. 计算插值

(1)设$p = f_n$

(2)对$i = n-1, \cdots, 1, 0$ 设$p = f_1 + (x - x_i)p$

(3)输出$f(x) \approx p$

六. Newton 插值 N-S 图



§4.4 等距节点的 Newton 插值多项式

一. 差分

1、定义：向前差分：设$f(x)$在等距节点$x_k = x_0 + kh$处的函数值为$f(x_k) = y_k$，$(k = 0, 1, \cdots, n)$，$h = \frac{x_k - x_0}{k}$称为步长，则函数在区间$[x_k, x_{k+1}]$ 上增量$y_{k+1} - y_k$称为$f(x)$在x_k处的一阶向前差分，记为Δy_k ，即$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$。

如$\Delta y_0 = y_1 - y_0$ ，$\Delta y_1 = y_2 - y_1$

一阶差分的差分叫二阶差分$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$；$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1$；$\cdots$；$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$。
依次类推，定义$f(x)$在x_k处的 n 阶差分为$\Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$

向后差分：用∇表示向后差分算子，一阶向后差分 $\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$；二阶向后差分$\nabla^2 y_k = \nabla y_k - \nabla y_{k-1}$；一般地，$m$阶向后差分$\nabla^m y_k = \nabla^{m-1} y_k - \nabla^{m-1} y_{k-1}$

二、差分的性质
性质 1：差分可以用函数表示$\Delta^n y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i y_{k+n-i}$。可以使用数学归纳法来证明本性质。
性质 2：差分与差商

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}$$
$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}$$

性质 3：差分与导数的关系：$\Delta^n y_i = h^n f^{(n)}(\xi)$，$\xi \in (x_i, x_n)$

证明：

$$\Delta^n y_i = n!\,h^n f[x_i, \cdots, x_{i+n}] = n!\,h^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = h^n f^{(n)}(\xi)$$

性质 4：向前和向后差分的关系：$\Delta^m f_k = \nabla^m f_{k+m}$
如：$\Delta f_k = \nabla f_{k+1}$；$\Delta^2 f_k = \nabla^2 f_{k+2}$；$\Delta^3 f_k = \nabla^3 f_{k+3}$

性质 5：差商，向前差分和向后差分的关系：$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{\nabla y_{i+1}}{h}$；$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_i}{2h^2} = \frac{\nabla y_{i+2} - \nabla y_{i+1}}{2h^2} = \frac{\nabla^2 y_{i+2}}{2h^2}$；$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i} = \frac{\Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i}{3\times 2h^3} = \frac{\Delta^3 y_i}{3!h^3} = \frac{\nabla^2 y_{i+3} - \nabla^2 y_{i+2}}{3\times 2h^3} = \frac{\nabla^3 y_{i+3}}{3!h^2}$;

典型题目:
例 3.9： 已知 $f(x) = x^5 + 1$ ，$x_i = 0.5i$，其中 $i = 0, 1, 2, \cdots$, 计算$\Delta^5 f_0$ 和$\Delta^2 f_2$。
解：使用差分与导数关

$$\Delta^5 f_0 = h^5 f^{(5)}(\xi) = (0.5)^5 \times \left(x^5 + 1\right)^{(5)} = (0.5)^5 \times 5! = \frac{1}{32} \times 120 = \frac{15}{4}$$
$$\Delta^2 f_2 = f4 - 2f3 + f2 = f(x4) - 2f(x3) + f(x2) = 17.8125$$

三.Newton 向前插值公式

设节点 $x_i\ (i=0,1,\cdots,k)$由小到大排列，即$x_k=x_0+kh$ （$k\ =\ 0,1\ldots n$），$x=x_0+th$ ，$(x-x_k)=(t-k)\cdot h$

$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y_0}{h}$，$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$ ，$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$

将差商与差分关系式代入牛顿插值多项式:

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$
$$+f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$N_n(x)=f(x_0)+\frac{\Delta y_0}{h}th+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}th(t-1)h+\cdots+\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}th(t-1)h\cdots(t-n+1)h$$

所以，整理得到 Newton 向前插值公式：

$$\begin{aligned}N_n(x)&=f(x_0)+\frac{\Delta y_0}{h}th+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}th(t-1)h+\cdots\\&\quad+\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}th(t-1)h\cdots(t-n+1)h\\&=y_0+t\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_0}{2}t(t-1)+\cdots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\cdots(t-n+1)\\&=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0\end{aligned}$$

其中，$x=x_0+th$ ， $t=\frac{(x-x_0)}{h}$

误差为：

$$R_n(x)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{n+1}(\xi)$$

由于牛顿向前插值公式$N(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$，$x$在$x_0$附近$(0<t<1)$时，舍入误差较小，适合求待插点位于表头附近的函数近似值

四、差分表

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$\Delta f(x_0)$			
x_2	$f(x_2)$	$\Delta f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_0)$		
x_3	$f(x_3)$	$\Delta f(x_2)$	$\Delta^2 f(x_1)$	$\Delta^3 f(x_0)$	
x_4	$f(x_4)$	$\Delta f(x_3)$	$\Delta^2 f(x_2)$	$\Delta^3 f(x_1)$	$\Delta^4 f(x_0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

五、典型题目

例 3.10: 设$y=f(x)=e^x$，插值节点为$x=1,1.5,2,2.5,3$，相应的函数值如下表，求$f(2.2)$。

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$

1	2.71828				
1.5	4.48169	1.76341			
2	7.38905	2.90737	1.14396		
2.5	12.18247	4.79343	1.88606	0.74210	
3	20.08554	7.90305	3.10962	1.22356	0.48146

$\boldsymbol{h = 0.5}$，$\boldsymbol{x = x_0 + th}$，$\boldsymbol{2.2 = 1 + 0.5t}$，$\boldsymbol{t = 2.4}$

$$N(x_0+th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$N_2(2.2) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

$$= 2.71828 + 2.4 \times 1.76341 + \frac{2.4(2.4-1)}{2} \times 1.14396$$

$$= 8.87232$$

$$N_3(2.2) = N_2(2.2) + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$= 8.87232 + \frac{2.4(2.4-1)(2.4-2)}{3!} \times 1.14396 = 9.12855$$

$$N_4(2.2) = N_3(2.2) + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$= 9.12855 + \frac{2.4(2.4-1)(2.4-2)(2.4-3)}{4!} \times 0.7421$$

$$= 9.10362$$

误差$\boldsymbol{R_2 = 0.15269}$，$\boldsymbol{R_3 = -0.01354}$，$\boldsymbol{R_4 = 0.00264}$

由题目结果和误差知道随着使用信息增加，即 Newton 插值多项式的项数增加，误差随之减少，计算结果就更精确。

六、Newton 向后插值公式

插值节点由大到小顺序排列x_0，x_{-1}，x_{-2},⋯，x_{-n} ，$x_{-n} = x_0 - nh$，**对应的函数值分别为**y_0，y_{-1}，y_{-2},⋯，y_{-n}， 则 Newton 插值多项式为$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_{-1}](x - x_0) + f[x_0, x_{-1}, x_{-2}](x - x_0)(x - x_{-1}) + \cdots + f[x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}](x - x_0)(x - x_{-1})\cdots(x - x_{-n+1})$

根据**向后差商与差分的关系，有**$f[x_0, x_{-1}] = \frac{f(x_0)-f(x_{-1})}{x_0-x_{-1}} = \frac{\Delta y_{-1}}{h}$,

$f[x_0, x_{-1}, x_{-2}] = \frac{\Delta^2 y_{-2}}{2!h^2}$，⋯，$f[x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}] = \frac{\Delta^n y_{-n}}{n!h^n}$

代入 Newton 插值多项式，得 Newton 向后插值公式

令$x = x_0 + th$ ，**则**$x - x_0 = th$ ， $x - x_{-1} = x_0 + th - (x0 - h) = (t+1)h$ ， $x - x_{-k} = x_0 + th - (x_0 - kh) = (t+k)h$

$$
\begin{aligned}
N_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_{-1}](x - x_0) + f[x_0, x_{-1}, x_{-2}](x - x_0)(x - x_{-1}) + \cdots \\
&\quad + f[x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}](x - x_0)(x - x_{-1}) \cdots (x - x_{-n+1}) \\
&= y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-2} + \cdots \\
&\quad + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_{-n}
\end{aligned}
$$

Newton 向后插值公式，适合求待插点位于表尾附近的函数近似值，其插值余项

$R_n(x) = \frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{n+1}(\xi)$

典型题目：

例 3.11：已知 :$\sqrt{x}$的函数表从 x=1.00 到 x=1.30，h=0.05。

x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
y_i	1.0000	1.0247	1.0488	1.0724	1.0955	1.1180	1.1402

求$\sqrt{1.01}$及$\sqrt{1.28}$的值。

解：构造差分表

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
1.0	1.0000			
1.05	1.0247	0.02470		
1.10	1.0488	0.02411	0.00059	0.00005
1.15	1.0724	⋯	⋯	0.00004
1.20	1.0955	⋯	−0.00043	0.0006
1.25	1.1180	0.02215		
1.30	1.1402			

因为$x = 1.01$在表头，利用向前插值多项式，因为三阶差分已经接近 0，所以使用二阶插值多项式。$n = 2$，$x_0 = 1.00$，$x = 1.01$，$h = 0.05$，$t = (x - x_0)/h = \frac{1}{5}$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1.01} &= f(x_0) + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 \\
&= 1.0 + 0.2 \times 0.247 + \frac{0.2 \times (0.2 - 1)}{2!} \times 0.00059 = 1.0494
\end{aligned}
$$

因为$x = 1.28$ 接近 1.30，利用向后插值多项式，同理使用二阶插值多项式。

$n = 2$，$x_0 = 1.30$，$x = 1.28$，$h = 0.05$，$t = (x - x_0)/h = -\frac{2}{5}$

$\sqrt{1.28} = f(x_0) + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-2} = 1.14015 + (-0.4) \times 0.02215 +$

$\frac{-0.4 \times (-0.4+1)}{2!} \times (-0.00043)$ =1.1313416

作业与实验

作业（书面作业）：

P109：

2．若x_j是互异节点$(j = 0, 1, 2, \cdots, n)$，$l_j(x)$是 n 次 Lagrange 基函数。证明：

1) $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = x^k$，$(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$；

2) $\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) = x^k$，$(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$

4. 证明 n 次差商有下列性质
1) 若$F(x) = Cf(x)$，则$F[x_0, x_1, \cdots, x_n] = Cf[x_0, x_1, \cdots, x_n]$；
2) 若$F(x) = f(x) + g(x)$，则$F[x_0, x_1, \cdots, x_n] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + g[x_0, x_1, \cdots, x_n]$

6. 若$f(x) = x^7 + x^3 + 1$，计算$f[2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^7]$和$f[2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^8]$

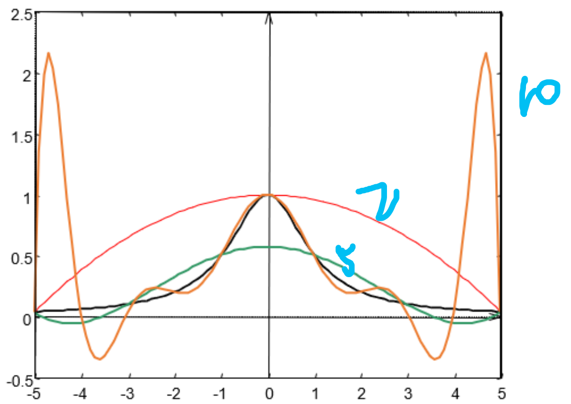
9. 已知$y_n = 2^n$，计算$\Delta^4 y_n$。

§4.5 分段线性插值

一、计算中的 Runge 现象

由插值问题的提出，通常我们会觉得当节点越来越密时，插值函数越来越接近于原函数；但是结果并非如此，虽然节点越多，可保证插值函数有更多的点与被插值函数相等，但在两个节点之间不一定能很好地逼近，有时误差相当大；因为多项式是上下震荡的，震荡的幅度不尽相同，不同区段的震荡密度也不一样。由此导致，利用较高阶的插值多项式所计算的结果，与原来的函数值相差甚远；结果表明，并不是插值多项式的次数越高，插值效果越好，精度也不一定是随次数的提高而升高，这种现象在上个世纪初由 Runge 发现，故称为 Runge 现象。

引例：在$[-5, 5]$考察$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$的$L_n(x)$，取$x_i = -5 + \frac{10}{n} i$，$(i = 0, \cdots, n)$



Runge 现象：插值多项式在插值区间上发生剧烈的震荡。它揭示了高次插值多项式存在的缺陷。
产生的原因是误差有截断误差和舍入误差两部分组成，而在插值的计算过程中，舍入误差可能会扩散或放大。
解决思路是采用分段低次插值方法。

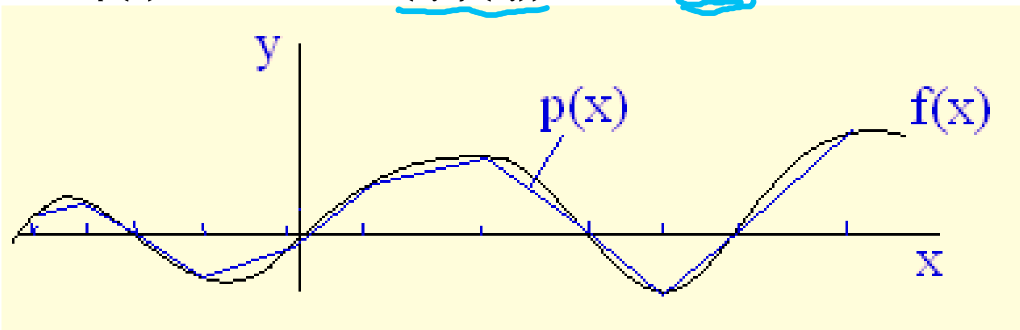
二、分段线性插值（piecewise linear interpolation）

在每个区间$[\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_{i+1}}]$上，用一阶多项式(直线)逼近$\boldsymbol{f(x)}$ $\boldsymbol{f(x) \approx P_i(x) =}$ $\boldsymbol{\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} y_i + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}} y_{i+1}$ ，其中，$\boldsymbol{x} \in [x_i, x_{i+1}]$

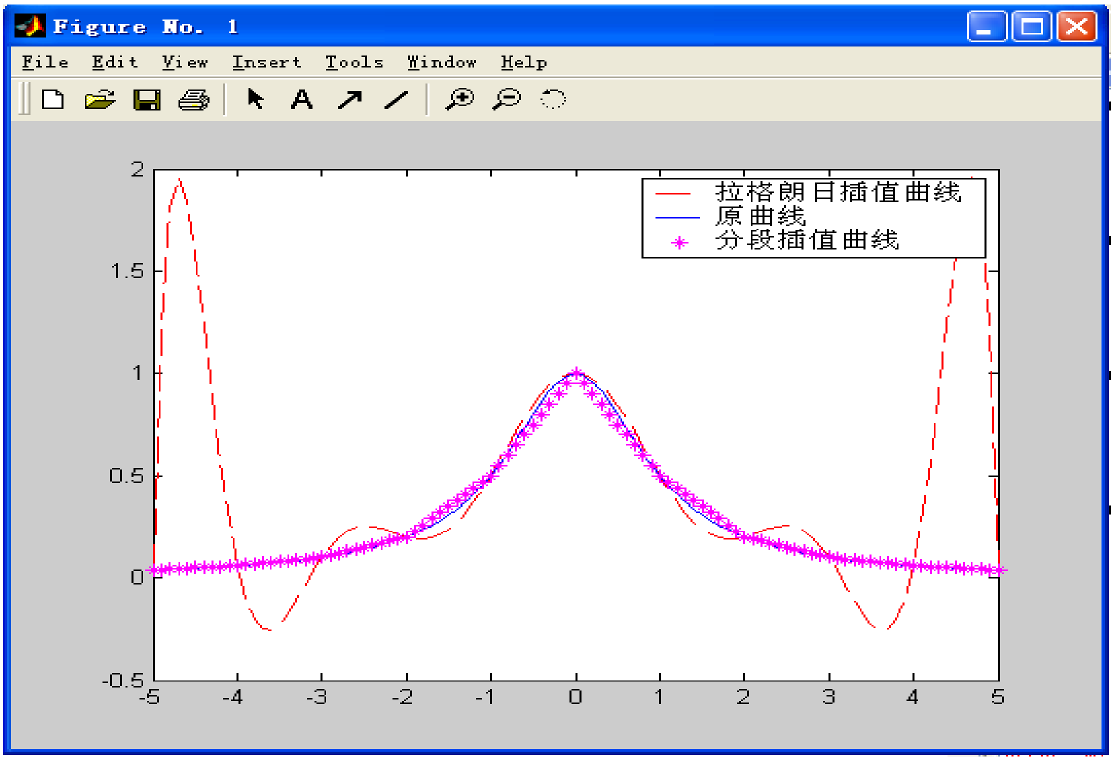
记$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{max}|x_{i+1} - x_i|$，当$\boldsymbol{h \to 0}$时，$\boldsymbol{P_1^h(x)} \xrightarrow{Uniform\ approximation} \boldsymbol{f}(x)$

区间$[a, b]$上的分段线性插值 $p(x)$ ，是将每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上的线性插值$p_i(x)$ 连接起来

所以，$p(x)$的图形是一条以 $(x_i, f(x_i))$为节点的折线。



一阶分段线性插值解决 Lagrange 插值的 Runge 现象



其中，蓝色曲线是原函数曲线，红色间断线是 Lagrange 插值曲线，在$[-5,-\mathbf{3}]$和$[3,\mathbf{5}]$部分明显跟原函数曲线存在巨大误差；粉色星号是分段线性插值结果，总体上跟原函数曲线相一致，产生较好的插值效果。

例 6. 已知$x_0=-3$，$x_1=-1$，$x_2=2$， $x_3=3$，$x_4=9$，$f(x_0)=12$ ，$f(x_1)=5$ ， $f(x_2)=1$ ， $f(x_3)=6$ ， $f(x_4)=12$用分段线性插值计算$f(1.2)$ ， $f(3.3)$.

解：$f(x)=p_i(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1})$，$x\in[x_i,x_{i+1}]$

由于$1.2\in[-1,2]=[x_1,x_2]$，所以使用$p_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$

$$f(1.2)=p_1(1.2)=\frac{1.2-2}{-1-2}\times 5+\frac{1.2-(-1)}{2-(-1)}\times 1=2.0667$$

由于$3.3\in[3,9]=[x_3,x_4]$，所以使用$p_3(x)=\frac{x-x_4}{x_3-x_4}f(x_3)+\frac{x-x_3}{x_4-x_3}f(x_4)$

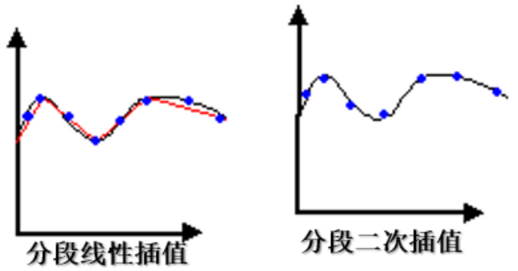
$$f(3.3)=p_3(3.3)=\frac{3.3-9}{3-9}\times 6+\frac{3.3-3}{9-3}\times 12=6.3$$

分段低次插值方法，是用低次多项式“装配”插值函数；它只能保证各段曲线在连接点的连续性，但是不能保证整个曲线在连接点的光滑性。
而在实际工程应用中，曲线的光滑性是曲线应用的一个重要的性质，很多应用都需要曲线具有一定程度的光滑性，以保证一些物理性质。

§4.6 三次样条插值

一、分段插值法：

多节点高次的插值函数会有 Runge 现象，也就是多节点高次插值往往在局部误差非常大，所以通常采用分段低次插值，包括分段线性插值和分段二次插值。从几何上讲，就是使用折线或者低次曲线近似原来的函数曲线。但是分段线性插值和分段二次插值也有不足，分段线性插值函数只能保证连续性，分段二次最多能达到一次连续，不能保证二阶光滑性。



二、三次样条插值 (Cubic Spline interpolation)

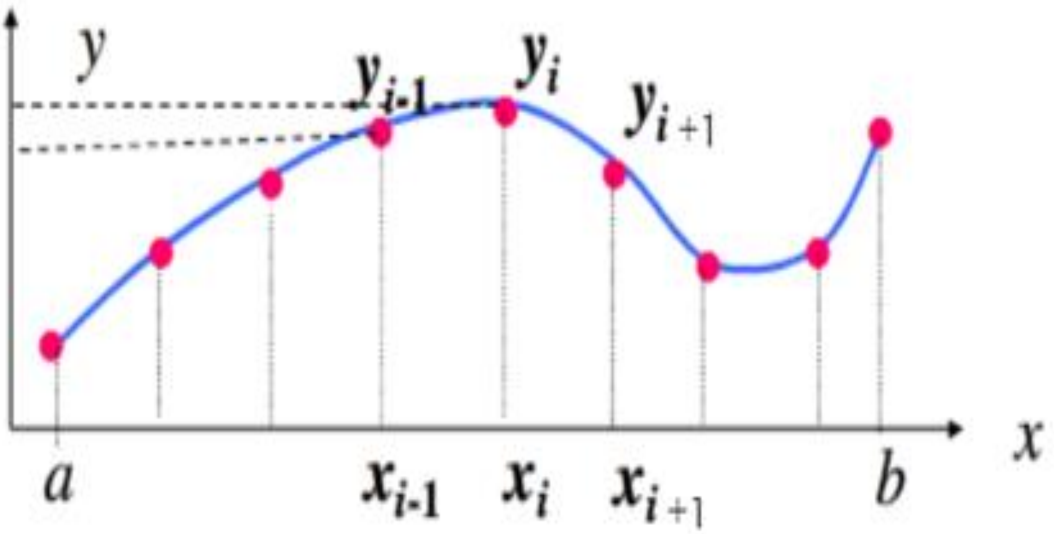
分段低次插值可以得到整体连续函数，但在连接点处一般不光滑。三次样条插值的目标就是既可以保证是分段插值函数，又可以在节点处保持光滑，甚至二阶光滑。

在制造船体和汽车外形等工艺中传统的设计方法是，首先由设计人员按外形要求，给出外形曲线的一组离散点值 ，施工人员准备好有弹性的样条，一般用竹条或有弹性的钢条和压铁，将压铁放在离散点的位置上，调整样条的形状，使

其自然光滑，这时竹条表示一条插值曲线，称之为样条函数。所以样条的本意是指飞机或轮船等的制造过程中为描绘出光滑的外形曲线（放样）所用的工具。1946 年，Schoenberg 将样条引入数学，即所谓的样条函数，此时样条的含义扩展了，是一段一段的三次多项式拼合而成的曲线；在拼接处，不仅函数是连续的，且一阶和二阶导数也是连续的。

三、三次样条插值函数

定义：在$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$上取$\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}$个点$\boldsymbol{a}=x_0<x_{\boldsymbol{1}}<\cdots<x_{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{b}$，若函数$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$满足：(1)$S(x_i)=\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}$；(2)在每个小区间$[\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1}},x_i]$上是三次多项式；(3)在内节点具有二阶连续导数。则称$S(x)$为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的三次样条插值函数。



四、边界条件

$S(x)$在区间 $[\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{1}},\ x_i]$ 上是三次多项式，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})=a_i\boldsymbol{x3}+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{x2}+\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_i$，有 4 个待定系数，要确定$S(x)$共要$\boldsymbol{4n}$个待定系数。现有条件包括：(1)$S(x_i)=$

y_i，$i=0,1,\dots,n$，有$n+1$个条件；(2)$S(x_i-0)=S(x_i+0),\ i=1,2\dots,n-1$，

有$n-1$个条件；(3)$S'(x_i-0)=S'(x_i+0),\ i=1,2\dots,n-1$，有$n-1$个条件；(4)$S''(x_i-0)=S''(x_i+0),\ i=1,2\dots,n-1$，有$n-1$个条件。共有$\boldsymbol{4n}-\boldsymbol{2}$个条件。要想唯一确定曲线，还缺少两个条件。

为得到唯一的三次样条函数，通常可在区间$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$的端点$x_0=\boldsymbol{a}$，$x_n=\boldsymbol{b}$上各加一个条件，称为边界条件。

常用的边界条件有三种：

(1)给出端点处的一阶导数值：$\boldsymbol{S}'(x_0)=\boldsymbol{y}'_{\boldsymbol{0}}$，$\boldsymbol{S}'(x_{\boldsymbol{n}})=\boldsymbol{y}'_{\boldsymbol{n}}$，也称为夹持条件；

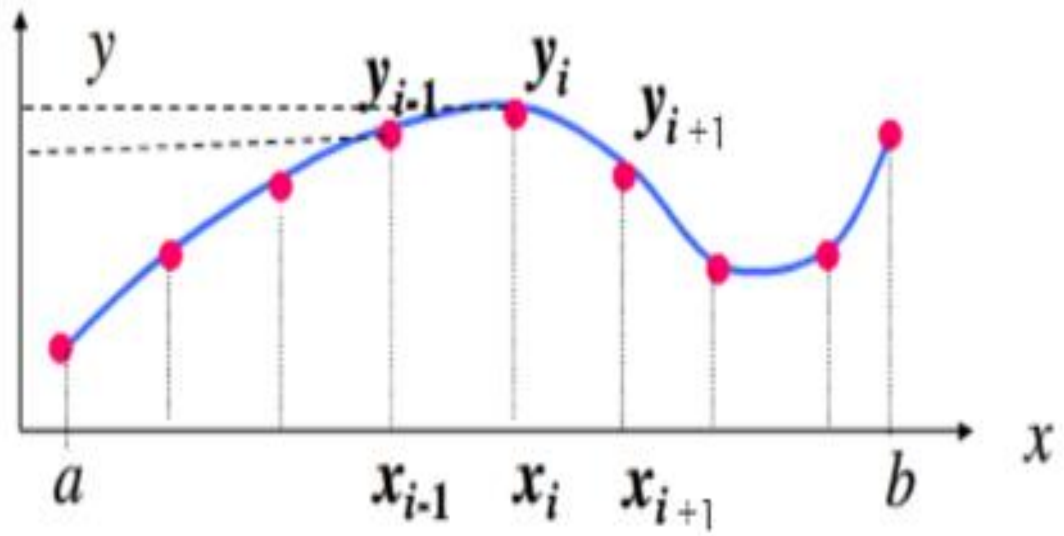
(2)给出端点处的二阶导数值：$\boldsymbol{S}''(x_0)=\boldsymbol{y}''_{\boldsymbol{0}}$，$\boldsymbol{S}''(x_{\boldsymbol{n}})=\boldsymbol{y}''_{\boldsymbol{n}}$；其中，当$S''(x_0)=S''(x_n)=\boldsymbol{0}$时，称之为自然边界条件；

(3)假设$S(x)$是以$b-a$为周期的周期函数，这时得到条件为：$\boldsymbol{S}(x_0+\boldsymbol{0})=\boldsymbol{S}(x_{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{S}'(x_0+\boldsymbol{0})=\boldsymbol{S}'(x_{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{S}''(x_0+\boldsymbol{0})=\boldsymbol{S}''(x_{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{0})$。这样确定的$S(x)$为周期样条函数, 条件称为周期性条件。

五、构造三次样条插值

构造的基本思路

由条件 2，知$\boldsymbol{s(x)}$是分段三次的，所以$\boldsymbol{s''(x)}$是一次的。对每个子区间，将$s''(x)$构造为线性插值函数，然后对$s''(x)$积分两次得$s(x)$；根据条件 1 和 3，$s(x)$内节点函数值相等，是该点的$\boldsymbol{y_i}$；根据条件 3，$s(x)$内节点上具有二阶连续导数，相邻两个分段在交点处二阶导数相等。这样，根据共点和导数连续条件求出所有的常数。



构造过程

设在小区间 $[\boldsymbol{x_{i-1}}, x_i]$ 上，令$\boldsymbol{s(x) = s_i(x)}$，$\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots, n}$。

因 $s_i(x)$是三次的，故 $s_i''(x)$是一次的； 对$s_i''(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$线性插值，设$s_i''(x)$在区间端点的值分别是M_{i-1}和M_i，M_{i-1}和M_i是构造过程的一个中间变量，先假设知道它，后面再求解。

假设$s_i''(x_{\boldsymbol{i-1}}) = M_{i-1}$，$s_i''(x_i) = M_i$，

则$[x_{i-1}, x_i]$线性插值为$s_i''(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\boldsymbol{M_{i-1}} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}M_i$，记$\boldsymbol{h_i = x_i - x_{i-1}}$

对该线性函数两边积分得其一阶导数公式：

$$s_i'(x) = -\frac{(x_i - x)^2}{\boldsymbol{2h_i}}M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{\boldsymbol{2h_i}}M_i + \boldsymbol{C_1}$$

对其再两边积分，得其函数公式为：

$$\boldsymbol{s_i}(x) = \frac{(x_i - x)^3}{\boldsymbol{6h_i}}M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{\boldsymbol{6h_i}}M_i + \boldsymbol{C_1 x + C_2}$$

现求解$\boldsymbol{C_1}$和$\boldsymbol{C_2}$，利用函数在节点的函数值，即条件 1

因为 $s(x_{\boldsymbol{i-1}}) = \boldsymbol{y}_{i-1}$ ， $s(x_i) = y_i$ 得

$$\frac{h_i^{\boldsymbol{2}}}{6}M_{i-1} + C_1 x_{i-1} + C_2 = y_{i-1}$$

$$\frac{{h_i}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{6}}M_i+\boldsymbol{C}_{\mathbf{1}}x_i+\boldsymbol{C}_{\mathbf{2}}=y_i$$

解出

$$C_1=(y_i-y_{i-1})/h_i+h_i(M_{i-1}-M_i)/\mathbf{6}$$
$$C_{\mathbf{2}}=(y_{i-\mathbf{1}}x_i-y_ix_{i-\mathbf{1}})/h_i+h_i(M_ix_{i-1}-M_{i-1}x_i)/6$$

将其带入代入原函数和一阶导数公式，整理得

$$s_i'(x)=-\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}M_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}M_i+\frac{(y_i-y_{i-1})}{h_i}-\frac{h_i(M_i-M_{i-1})}{\mathbf{6}}$$

$$s_i(x)=\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}M_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i+\left(y_i-\frac{{h_i}^2}{6}M_i\right)\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i-1}})}{h_i}$$

$$+\left(y_{i-\mathbf{1}}-\frac{{h_i}^2}{6}M_{i-\mathbf{1}}\right)\frac{(x_i-x)}{h_i}$$

公式中的M_i是未知的，需要计算出M_i $(\boldsymbol{i}=\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,\boldsymbol{n})$，才能得出$s_i(x)$。
为了求$M_{\boldsymbol{i}}$，可利用一阶导数连续的条件，即条件 3
在区间$[\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i-1}},x_i]$中，函数一阶导数为

$$s_i'(x)=-\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}M_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}M_i+\frac{(y_i-y_{i-1})}{h_i}-\frac{h_i(M_i-M_{i-1})}{\mathbf{6}}$$

在区间$[x_i,x_{i+1}]$中，函数的一阶导数为

$$s_{i+\mathbf{1}}'(x)=-\frac{(x_{i+\mathbf{1}}-x)^2}{2h_{i+\mathbf{1}}}M_i+\frac{(x-x_i)^2}{2h_{i+\mathbf{1}}}M_{i+\mathbf{1}}+\frac{(y_{i+\mathbf{1}}-y_i)}{h_{i+\mathbf{1}}}-\frac{h_{i+\mathbf{1}}(M_{i+\mathbf{1}}-M_i)}{6}$$

由条件 3 知区间$[\boldsymbol{x}_{i-\mathbf{1}},x_i]$和$[x_i,x_{i+1}]$的交点$x_i$，左右两侧一阶导数相等。用$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{i+1}}'(x_i+)$表示$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{i+1}}(\boldsymbol{x})$在$[\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}},x_{i+1}]$端点$x_i$处的一阶导数，则有：

$$s_{i+\mathbf{1}}'(xi+)=-\frac{h_{i+\mathbf{1}}}{2}M_i+\frac{(y_{i+\mathbf{1}}-y_i)}{h_{i+\mathbf{1}}}-\frac{h_{i+\mathbf{1}}(M_{i+\mathbf{1}}-M_i)}{6}$$

用$s_i'(x_i-)$表示$s_i(x)$在$[x_{i-\mathbf{1}},x_i]$端点x_i处的一阶导数，则有：

$$s_i'(xi-)=\frac{h_i}{2}M_i+\frac{(y_i-y_{i-1})}{h_i}-\frac{h_i(M_i-M_{i-\mathbf{1}})}{6}$$

据 $s_{i+1}'(x_i+)=s_i'(x_i-)$得：

$$-\frac{h_{i+1}}{2}M_i+\frac{(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}(M_{i+1}-M_i)}{6}=\frac{h_i}{2}M_i+\frac{(y_i-y_{i-1})}{h_i}-\frac{h_i(M_i-M_{i-1})}{6}$$

整理得：

$\mu_{\boldsymbol{i}}M_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=d_i$，$\boldsymbol{i}=\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,\boldsymbol{n}-\mathbf{1}$

其中

$\lambda_{\boldsymbol{i}}=\frac{\boldsymbol{h}_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$ ，$\mu_{\boldsymbol{i}}=\mathbf{1}-\lambda_i=\mathbf{1}-\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$

$$\boldsymbol{d}_i=\frac{\mathbf{6}}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{\boldsymbol{y}_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-\mathbf{1}}}{h_i}\right)=\mathbf{6}\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}_{i-\mathbf{1}},x_i,x_{i+1}]$$

展开得

$$\begin{cases} \mu_1 M_0 & +2M_1 & +\lambda_1 M_2 & & & = d_1 \\ & \mu_2 M_1 & +2M_2 & +\lambda_2 M_3 & & = d_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & \mu_{n-1}M_{n-2} & +2M_{n-1} & +\lambda_{n-1}M_n & = d_{n-1} \end{cases}$$

共$\boldsymbol{n-1}$个方程，$\boldsymbol{n+1}$个变量，还是多解。利用边界条件补充两个方程。

第一类问题：已知端点的一阶导数

$$\boldsymbol{s}'(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{y}'(x_0)$$
$$s'(x_{\boldsymbol{n}}) = y'(x_{\boldsymbol{n}})$$

补充两个方程

$$\mathbf{2}M_0 + M_1 = \boldsymbol{d_0}$$
$$M_{\boldsymbol{n-1}} + 2M_{\boldsymbol{n}} = d_{\boldsymbol{n}}$$

其中：$\boldsymbol{d_0} = \frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{h_1}}(\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}] - \boldsymbol{y_0'}) = 6f[x_0, x_1, x_{\boldsymbol{0}}]$ （？）

$$d_{\boldsymbol{n}} = \frac{6}{h_{\boldsymbol{n}}}(y_{\boldsymbol{n}}' - f[x_{\boldsymbol{n-1}}, x_{\boldsymbol{n}}]) = 6f[x_{\boldsymbol{n}}, x_{\boldsymbol{n}-1}, x_{\boldsymbol{n}}]$$

第二类问题：已知端点的二阶导数

$$\boldsymbol{s}''(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{y}''(x_0)$$
$$s''(x_{\boldsymbol{n}}) = y''(x_{\boldsymbol{n}})$$

补充两个方程

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{y}''(x_0)$$
$$M_{\boldsymbol{n}} = y''(x_{\boldsymbol{n}})$$

统一写成

$$\mathbf{2}\boldsymbol{M_0} + \lambda_0 M_1 = d_{\boldsymbol{0}}$$
$$\mu_{\boldsymbol{n}} M_{\boldsymbol{n-1}} + \mathbf{2}M_{\boldsymbol{n}} = d_{\boldsymbol{n}}$$

对第一类问题

$\boldsymbol{\lambda_0} = \boldsymbol{\mu_n} = \mathbf{1}$，$d_0 = 6f[x_0, x_1, x_0]$ ，$d_n = 6f[x_n, x_{n-1}, x_n]$

对第二类问题

$\lambda_0 = \mu_n = \mathbf{0}$，$d_0 = 2y''(x_0)$ ，$d_n = 2y''(x_n)$

合在一起可写成:

$$\begin{cases} 2M_0 & +\lambda_0 M_1 & & & & = d_0 \\ \mu_1 M_0 & +2M_1 & +\lambda_1 M_2 & & & = d_1 \\ & \mu_2 M_1 & +2M_2 & +\lambda_2 M_3 & & = d_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & \mu_{n-1}M_{n-2} & +2M_{n-1} & +\lambda_{n-1}M_n & = d_{n-1} \\ & & & \mu_n M_{n-1} & +2M_n & = d_n \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & \mathbf{2} & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & \mathbf{2} & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \mu_{n-1} & \mathbf{2} & \lambda_{n-1} \\ & & & & \mu_n & \mathbf{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M_0} \\ M_1 \\ M_2 \\ \cdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

解之得M_i，代入得出分段样条函数$\boldsymbol{s_i(x)}$

$$s_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + \left(y_i - \frac{{h_i}^2}{6} M_i\right) \frac{(x - x_{i-1})}{h_i}$$

$$+ \left(y_{i-1} - \frac{{h_i}^2}{6} M_{i-1}\right) \frac{(x_i - x)}{h_i}$$

例 1：求满足下面函数表所给出的插值条件的自然样条函数，并计算$\boldsymbol{f(3)}, \boldsymbol{f(4.5)}$的值（要求会做该类型的题目）

x	1	2	4	5
y	1	3	4	2

解：由于要求计算自然样条函数，所以知道是给定第二类边界条件，并且是自然条件，即$\boldsymbol{M_0} = M_n = \mathbf{0}$利用 M 关系式，可得 M 的方程组

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & \mathbf{2} & \lambda_1 & \\ & \mu_2 & \mathbf{2} & \lambda_2 \\ & & \mu_3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M_0} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

因为： $\boldsymbol{s''(x_0)} = s''(x_n) = \mathbf{0}$

所以： $\boldsymbol{M_0} = M_n = M_3 = \mathbf{0}$ ，$\lambda_0 = \mu_n = \mu_3 = \mathbf{0}$ ，$\boldsymbol{d_0} = d_3 = \mathbf{0}$

还要求： $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \boldsymbol{d_1}, d_2$

先求 $\boldsymbol{h_1} = \boldsymbol{x_1} - x_0 = \mathbf{2} - \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ， $h_2 = x_2 - x_1 = \mathbf{4} - \mathbf{2} = \mathbf{2}$，$h_3 = x_3 - x_2 = \mathbf{5} - \mathbf{4} = 1$

所以： $\lambda_1 = \boldsymbol{h_2}/(\boldsymbol{h_1} + h_2) = \mathbf{2/3}$， $\mu_1 = \mathbf{1} - \lambda_1 = \mathbf{1/3}$ ，$\lambda_2 = h_3/(h_3 + h_2) = \mathbf{1}/3$ ， $\mu_2 = \mathbf{1} - \lambda_2 = \mathbf{2/3}$

$\boldsymbol{d_1} = \mathbf{6}\boldsymbol{f}[x_0, x_1, x_2] = \mathbf{-3}$

$d_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = -5$

方程组为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & & \\ \mathbf{1/3} & \mathbf{2} & \mathbf{2/3} & \\ & \mathbf{2/3} & \mathbf{2} & \mathbf{1/3} \\ & & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M_0} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解之得：$\boldsymbol{M_0} = M_3 = \mathbf{0}$ $\boldsymbol{M_1} = -\frac{3}{4}$ $\boldsymbol{M}_2 = -\frac{9}{4}$

按公式可得到：

$$s_i(\boldsymbol{x}) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + \left(y_i - \frac{{h_i}^2}{6} M_i\right) \frac{(x - x_{i-1})}{h_i}$$

$$+ \left(y_{i-1} - \frac{{h_i}^2}{6} M_{i-1}\right) \frac{(x_i - x)}{h_i}$$

在区间 $[\boldsymbol{x_{i-1}}, \boldsymbol{x_i}]$ $\quad \boldsymbol{i = 1, 2, 3}$

$$[\mathbf{1}\ , \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\ ]$$

在［1,2］上的样条插值函数为：$s_1(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{8}(\boldsymbol{x^3} - \boldsymbol{3x^2} - \boldsymbol{14x} + \boldsymbol{8})$

在［2,4］上的样条插值函数为：$s_2(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{8}(\boldsymbol{x^3} - \boldsymbol{3x^2} - \boldsymbol{14x} + \boldsymbol{8})$

在［4,5］上的样条插值函数为：$s_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{8}(\boldsymbol{3x^3} - \boldsymbol{45} - \boldsymbol{206x} - \boldsymbol{264})$

所以

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -0.125(\boldsymbol{x^3} - \boldsymbol{3}x^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{14x} + \boldsymbol{8}) \\ -0.125(x^3 - 3x^2 - 14x + 8) \\ 0.125(\boldsymbol{3}x^3 - \boldsymbol{45}x^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{206x} - \boldsymbol{264}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \boldsymbol{-0.125}[(x-3)x - 14]\boldsymbol{x - 1} & \boldsymbol{1 \le x \le 2} \\ -0.125[(x-3)x - 14]x - 1 & \boldsymbol{2 \le x \le 4} \\ 0.125[(3x - 45)x \boldsymbol{- 206}]x \boldsymbol{- 33} & \boldsymbol{4 \le x \le 5} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f(3) = \ s2(3) = 4.25}$$

$$\boldsymbol{f(4.5) = \ s3(4.5) = 3.1406}$$

例 2 设$\boldsymbol{f}$为定义在区间[0,3]上的函数

x	0	1	2	3
y	0	0.5	2.0	1.5

且满足$f'(x_0) = 0.2$，$f'(x_3) = -1$的值

利用 M 关系式求三次样条函数 S

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 \\ & & \mu_3 & \mathbf{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

第一类边界条件

$\lambda_0 = \ \mu_3 = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{d_0 = 6f[x_0, x_1, x_0] = 1.8}$ ， $\boldsymbol{d_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = 3}$

$\boldsymbol{d_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = -6}$ ， $\boldsymbol{d_3 = 6f[x_3, x_2, x_3] = -3}$

$\boldsymbol{h_1 = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1}$

$\boldsymbol{h_2 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1}$

$\boldsymbol{h_3 = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1}$

所以：$\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = \mathbf{1/2}$

故方程组为:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \\ & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 3 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

解得:

$M_0 = \mathbf{0.36}$ ，$M_1 = \mathbf{2.52}$

$M_2 = \mathbf{-3.72}$ ，$M_3 = \mathbf{0.36}$

将$\boldsymbol{M}$代入三次样条函数表达式(4-46)得

$$\boldsymbol{s(x)} = \begin{cases} 0.48x^3 - 0.18x^2 + 0.2x \\ -1.04(x-1)^3 + 1.26(x-1)^2 + 1.28(x-1) + 0.5 \\ 0.68(x-1)^3 - 1.86(x-1)^2 + 0.68(x-2) + 2.0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ((0.48x - 0.18)x + 0.2)x \\ ((-1.04(x-1) + 1.26)(x-1) + 1.28)(x-1) + 0.5 \\ ((0.68(x-2) - 1.86)(x-2) + 0.68)(x-2) + 2.0 \end{cases}$$

例 3： 已知：

$$\boldsymbol{s(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^3 + x^2} & \boldsymbol{0 \le x \le 1} \\ \boldsymbol{2x^3 + bx^2 + cx - 1} & \boldsymbol{1 \le x \le 2} \end{cases}$$

是以 0,1,2 为节点的三次样条函数，请计算b，c的值.

解： $\boldsymbol{s_1(x) = x^3 + x^2}$， $s_1'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{3x^2 + 2x}$， $s_1'(\boldsymbol{1-}) = \boldsymbol{5}$

$\boldsymbol{s_2(x) = 2x^3 + bx^2 + cx - 1}$ ， $s_2'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{6x^2 + 2bx + c}$

$$s_2'(\boldsymbol{1+}) = \boldsymbol{6 + 2b + c}$$

因为 $s_1{}'(\boldsymbol{1-}) = s_2{}'(\boldsymbol{1+})$

所以： $\boldsymbol{6 + 2b + c = 5}$

同理： 利用 $s_1''(\boldsymbol{1-}) = s_2''(\boldsymbol{1+})$得：$\boldsymbol{12 + 2b = 8}$

解之得： $\boldsymbol{b = -2}$ ， $\boldsymbol{c = 3}$

§4.7 曲线拟合的最小二乘法

一、引言

设一组观测数据为

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

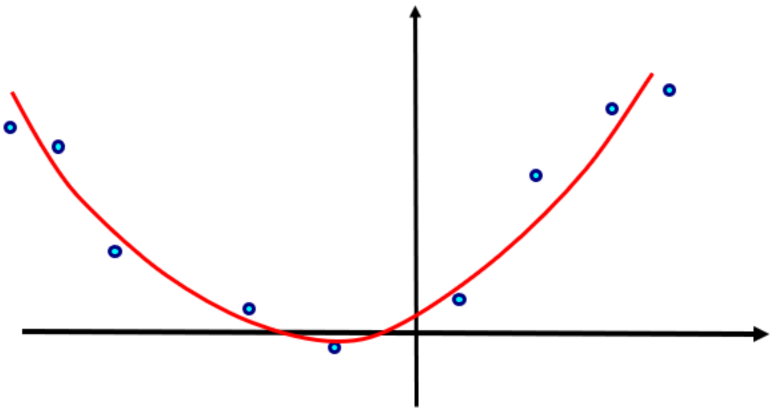
其中$\boldsymbol{x_i \ne x_j}$ $(\boldsymbol{i \ne j})$ ，根据这一系列数据找出函数关系$\boldsymbol{y = f(x)}$。

若用插值函数 $\boldsymbol{p(x)}$代替函数关系$\boldsymbol{f(x)}$，要求满足插值原则$\boldsymbol{p}(x_i) = \boldsymbol{f}(x_i) = \boldsymbol{y_i}$ ，$\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots, n}$，**但是插值存在如下问题。**

数据量很大时所求插值曲线中的未知参数就很多，计算效率不高；数据量大时，两个思路，1)直接多项式插值是高次插值，会有 runge 效应，效果不理

想；2)分段低次插值，精度不高，还需要注意分段插值曲线之间的连接情况；此外，由于观测点和观测数据本身就有误差，则插值函数就会保留这些误差，反而影响逼近函数的精度。所以，当数据量特别大时一般不用插值法，也就是使逼近的函数曲线刻意经过这些点也不必要。

构造函数$\boldsymbol{f(x)}$，使求得的函数$f(x)$与准确函数(表格函数)从总体上来说与所有数据点最为接近，所求的曲线叫拟合曲线。拟合曲线不要求函数曲线完全通过所有的数据点，而是要求函数曲线跟所有样本点的整体最接近，要求该近似曲线能够反映数据的基本变化趋势。如下图。这样得到的曲线描述了数据点的总体变化趋势，可以用于预测等应用。

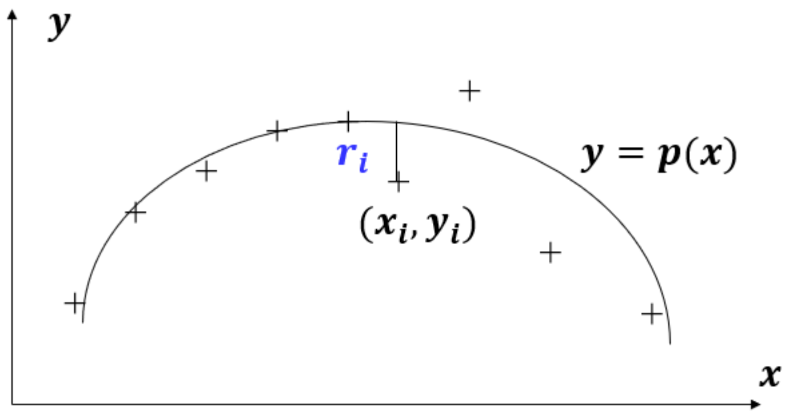


引例：
已知某地近 6 年的房价，预测今后几年的房价。

$\boldsymbol{x}$：年份	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{y}$：房价	1	1.6	2.1	2.4	3.2	3.4

通过拟合，得到近似函数$\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_0} + a_1\boldsymbol{x} = \mathbf{1} + \mathbf{0.5}\boldsymbol{x}$，**就可以使用这个近似函数预测后续的房价发展情况。**

曲线拟合问题的提法
已知一组（二维）数据，即平面上 $\boldsymbol{n}$个点$(x_i, \boldsymbol{y}_i)$，$\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \dots \boldsymbol{n}$， 寻求一个函数（曲线）$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$， 使 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 总体上来说其偏差在某种准则下度量能达到最小，即曲线拟合的最好。**即：并不要求近似函数$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$所表示的曲线通过这些观测点，而只要求由已知数据$(x_i, \boldsymbol{y}_i)$ $(\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \dots \boldsymbol{n})$找出$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$之间的依赖关系，使得近似函数$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$能充分地反映函数$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的大致面目，也即与$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$有最好的拟合(或逼近)。**

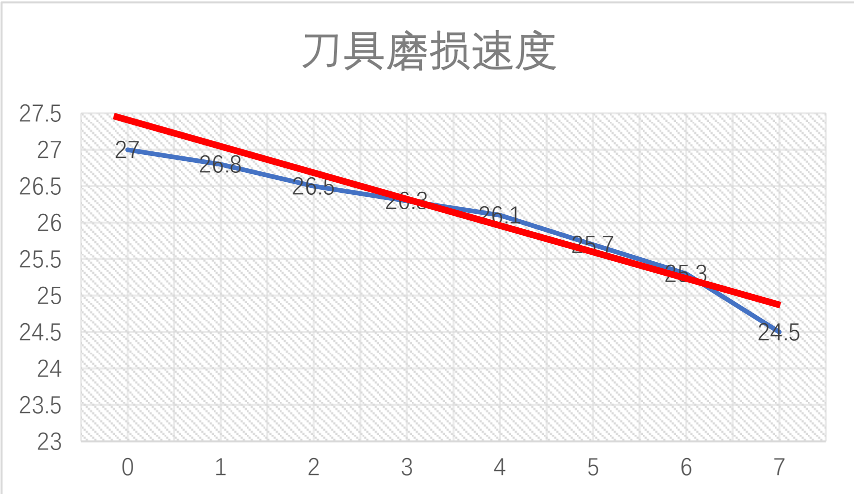


记所求的拟合曲线为$\varphi(x)$，在基点$x_1, x_2, \dots, x_n$上$\boldsymbol{\varphi(x)}$与$\boldsymbol{f(x)}$有误差：
$\boldsymbol{r_i = y_i - \varphi(x_i)}$， $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$
称r_i为用$\varphi(x)$拟合$f(x)$的偏差。

二、最小二乘原理
1. 引例
为测机床刀具的磨损速度，经一定时间$\boldsymbol{t}$，测一下刀具厚度$\boldsymbol{y}$，得到如下数据：

时间$\boldsymbol{t}$	0	1	2	3	4	5	6	7
厚度$\boldsymbol{y}$	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.5

把这些观测数据描到坐标系中



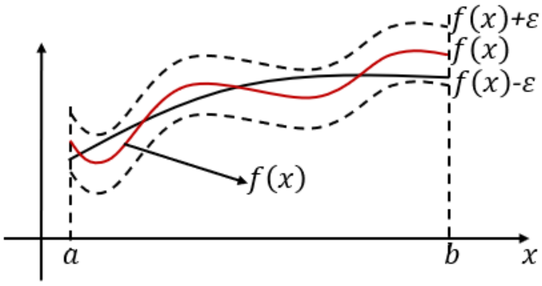
从图可看出$\boldsymbol{y}$与$\boldsymbol{t}$近似直线

$$\boldsymbol{y = a + bt}$$

如果能按某种方法确定$\boldsymbol{a, b}$，则对任意的$\boldsymbol{t_i}$就能求出$\boldsymbol{y_i^*}$，完成模型构建；
因a, b是近似的，所以 y_i^*也是近似的，存在误差；
误差为：

$$\boldsymbol{r_i} = y_i - y_i^* = y_i - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bt}_i)$$

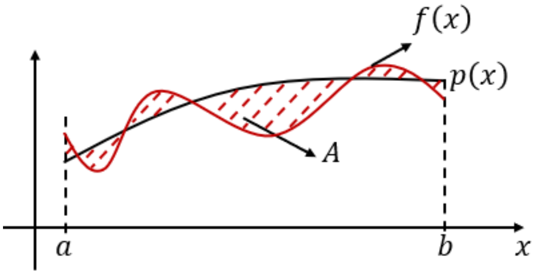
现在，要做的就是找到参数$\boldsymbol{a, b}$，**使得误差最小。**
2. 逼近标准
要使$\boldsymbol{y_i^*}$逼近$\boldsymbol{y_i}$，使误差最小，可采取以下三个标准：
1) 误差的最大绝对值为最小



2)误差的绝对值之和为最小

误差的绝对值之和A为两条曲线间区域的面积。

误差的绝对值之和为最小就是区间上“平均”误差，就是面积最小。



3)误差的平方和为最小

误差的平方和跟 2)有类似意义，对于每个点上的误差，求其平方，然后累加到一起，也表示两条曲线之间包围的“平方面积”。

并且误差的平方和易于问题求解,经常使用。使用误差的平方和为最小标准的方法称为最佳平方(最小二乘)逼近。以(3)误差的平方和为最小为标准求拟合曲线的方法为最小二乘法。

3.线性拟合

目标曲线是直线$\boldsymbol{y = a + bt}$，即用线性方程来进行拟合观测数据。

使用的误差控制标准为误差的平方和(也称为均方误差)最小。

即$\boldsymbol{R = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (a + bt_i)\right)^2}$

根据极值理论，要使得$\boldsymbol{R}$达到极小，必有：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

计算偏导数，展开得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{-2}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}[y_i - (a + bt_i)] = \boldsymbol{0} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{b}} = -2\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{n}[y_i - (a + bt_i)]t_i = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

所以，有方程组：

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{t}_i] = \sum_{i=1}^{n}[y_i] \\ a\sum_{i=1}^{n}[t_i] + b\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{t}_i^2] = \sum_{i=1}^{n}[t_i y_i] \end{cases}$$

该方程组也常称为法方程组或正规方程组。

法方程组矩阵形式$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \sum_{i=1}^{n}[t_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[t_i] & \sum_{i=1}^{n}[t_i^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}[y_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[t_i y_i] \end{bmatrix}$

例：机床刀具的磨损数据

时间$\boldsymbol{t}$	0	1	2	3	4	5	6	7
厚度$\boldsymbol{y}$	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.5

得法方程组：

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}[t_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[t_i] & \sum_{i=1}^{n}[t_i^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}[y_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[t_i y_i] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{28} \\ \mathbf{28} & \mathbf{140} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{208.2} \\ \mathbf{714.9} \end{bmatrix}$$

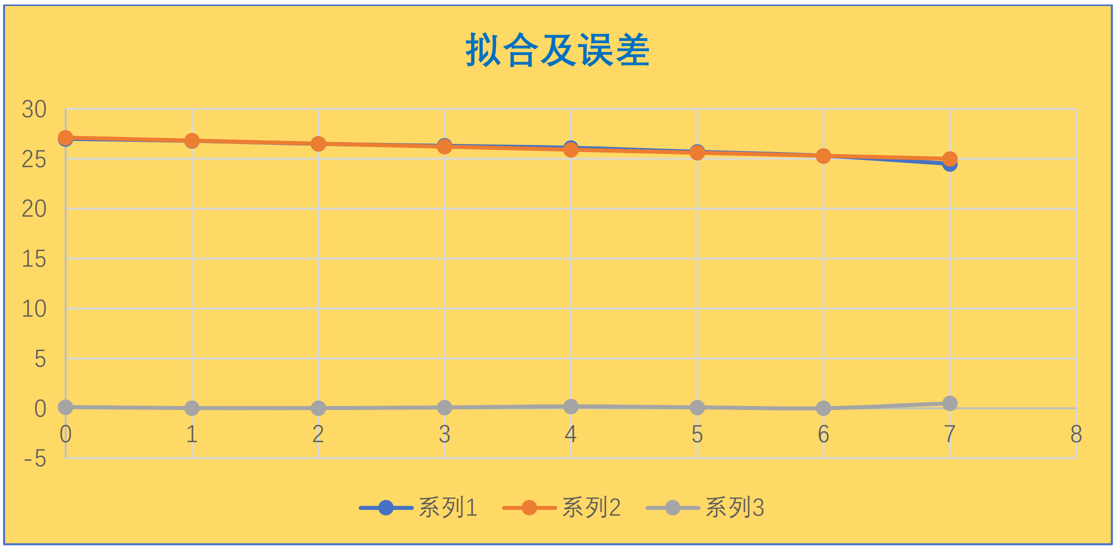
解得$\boldsymbol{a} = \mathbf{27.125}$ $\boldsymbol{b} = -\mathbf{0.3036}$

求得的拟合曲线为： $\boldsymbol{y}^* = \mathbf{27.125} - \mathbf{0.3036}\boldsymbol{t}$

误差计算

时间$\boldsymbol{t}$	0	1	2	3	4	5	6	7
厚度$\boldsymbol{y}$	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.5
拟合$\boldsymbol{y}^*$	27.125	26.821	26.518	26.214	25.911	25.607	25.303	24.999
误差$\boldsymbol{r}_i$	0.125	0.021	0.018	0.086	0.189	0.093	0.003	0.499

绘制拟合直线及误差曲线：



4.最小二乘法步骤
1)据已知点，画草图，确定函数的近似关系
2)写出近似函数的表达式------经验公式
3)通过最小二乘原理， 确定函数中未知数

5.线性拟合最小二乘法计算步骤
1)样本点(x_i,y_i)，$(\boldsymbol{i}=\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,\boldsymbol{n})$计算如下和式$\sum_{i=1}^{n}[x_i]$，$\sum_{i=1}^{n}[x_i^2]$，$\sum_{i=1}^{n}[y_i]$，$\sum_{i=1}^{n}[x_i y_i]$；
2)写出确定$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的法方程组

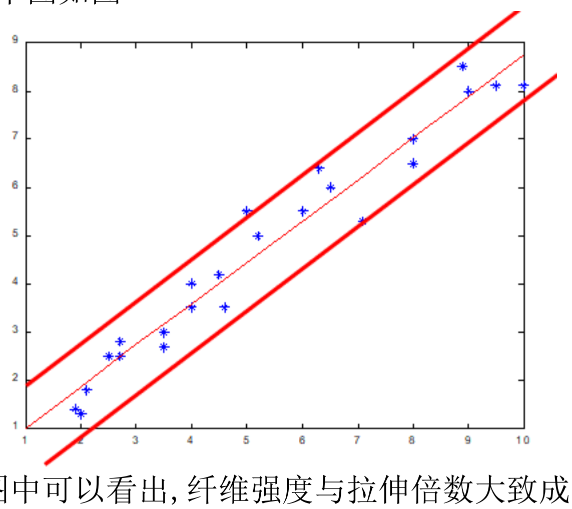
$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{x}_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{x}_i] & \sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{x}_i^2] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}[y_i] \\ \sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{x}_i y_i] \end{bmatrix}$$

3)解出a，b，从而得到拟合函数$\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}$

例：某种合成纤维的强度与其拉伸倍数有直接关系，下表是实际测定的 24 个纤维样品的强度与相应拉伸倍数的记录。
将拉伸倍数作为 x，强度作为 y

编号	拉伸倍数	强度 kg/mm^2	编号	拉伸倍数	强度 kg/mm^2
1	1.9	1.4	13	5.0	5.5
2	2.0	1.3	14	5.2	5.0
3	2.1	1.8	15	6.0	5.5
4	2.5	2.5	16	6.3	6.4
5	2.7	2.8	17	6.5	6.0
6	2.7	2.5	18	7.1	5.3
7	3.5	3.0	19	8.0	6.5
8	3.5	2.7	20	8.0	7.0
9	4.0	4.0	21	8.9	8.5
10	4.0	3.5	22	9.0	8.0
11	4.5	4.2	23	9.5	8.1
12	4.6	3.5	24	10.0	8.1

1) 草图如图



从图中可以看出,纤维强度与拉伸倍数大致成线形关系, 24 个点大致分布在一条直线附近, 可用一条直线来表示两者之间的关系。
2)设 $y^*=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}$

希望$y^* = a + bx$与所有的数据点(样本点)— $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$越接近越好。即令$\delta_{\boldsymbol{i}} = y_i - \boldsymbol{y_i^*}$最小
3)求解

6.求解矛盾方程组

定义：设有如下方程组$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{a_{ij} x_j = b_i}$，$(\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots, n})$，其中$\boldsymbol{n > m}$，即方程的个数大于未知数的个数，通常情况，方程组无解，称之为矛盾方程组。最小二乘法是用来解矛盾方程组的一个常用方法。

最小二乘法解矛盾方程组的思路：
求$x_1, x_2, \cdots, x_m$，使方程组两端近似相等；

令$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i\right]^2$，选择$x_1, x_2, \cdots, x_m$，使得$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_m)$达到最小
对每个分量x_k，求偏导，令其为零，得到法方程组

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \boldsymbol{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i\right] a_{ik} = \boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{k} = 1,2, \cdots, \boldsymbol{m})$
整理得

$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik}\right) x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i a_{ik}$，$(k = 1,2, \cdots, m)$

等价的矩阵形式：最小二乘法解矛盾方程组的思路：$\boldsymbol{Ax = b}$

其中，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$，$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$
左右两侧左乘$\boldsymbol{A^T}$，得正规方程组

$$A^T A x = A^T b$$

若$A^T A$可逆，则正规方程组有唯一解x，也是最小二乘解。

例：用最小二乘法解下列方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x + 3y = 5} \\ \boldsymbol{x + y = 2} \\ \boldsymbol{2x + y = 4} \end{cases}$$

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{4} \end{bmatrix}$，$\therefore$ $\boldsymbol{A^T A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{9} & \boldsymbol{9} \\ \boldsymbol{9} & \boldsymbol{11} \end{bmatrix}$，$A^T \boldsymbol{b} =$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{20} \\ \boldsymbol{21} \end{bmatrix}$

$\therefore$正规方程组为：$\begin{cases} \boldsymbol{9x + 9y = 20} \\ \boldsymbol{9x + 11y = 21} \end{cases}$

解得$\begin{cases} x = 31/18 \\ y = 1/2 \end{cases}$

三. 可化为线形拟合的情况

线性拟合由于变量之间的关系简单，待定参数数量只有两个，计算简单，使用方便。但有时变量之间的关系不是线性关系，而是呈现较复杂非线性关系。直接采用最小二乘原理来确定未知数参数，会得到一个非线性方程组，非线性方程组不易求解，计算复杂，精度不高。所以如果能够将变量之间的非线性关系转变成线性关系，就可以避免复杂的非线性方程组求解的问题。

对于这样的情况，可以通过变量替换，把非线性关系转换为线性关系。这就是这小节要说明的可以化为线性拟合的情况。

1) 双曲线

$$1/y = a + b/x$$

令$y' = 1/y$，$x' = 1/x$

则有 $y' = a + bx'$

2) 指数函数(1)

$$y = ae^{bx}$$

变换：两边取对数

$$lny = lna + bx$$

令 $y' = lny$，$x' = x$，$a' = lna$

则有 $y' = a' + bx'$

3) 指数函数(2)

$$y = ae^{\frac{b}{x}}$$

变换：两边取对数

$$lny = lna + b/x$$

令 $y' = lny$，$x' = 1/x$，$a' = lna$

则有 $y' = a' + bx'$

4) 对数函数

$$y = a + b\,lg\ x$$

变换： 令 $y' = y$，$x' = lgx$

则有 $y' = a + bx'$

5) 幂函数

$$y = ax^b$$

变换：两边取对数

$$lny = lna + blnx$$

令 $y' = lny$，$x' = lnx$，$a' = lna$

则有 $y' = a' + bx'$

6)S 曲线

$$y = \frac{1}{(a + be^{-x})}$$

变换：两边取倒数

$$\frac{1}{y} = (a + be^{-x})$$

令 $y' = \frac{1}{y}$, $x' = e^{-x}$

则有 $y' = a + bx'$

部分可化为线性拟合问题的常见函数类型

部分可化为线性拟合问题的常见函数类型

拟合函数类型	变量代换	化成的拟合函数
$y = ae^{b/x}(a>0)$	设$\bar{y}=\ln y, \bar{x}=1/x\ (\bar{a}=\ln a)$	$\bar{y}=\bar{a}+b\bar{x}$
$y=\dfrac{1}{a+be^{-x}}(a>0)$	设$\bar{x}=e^{-x}, \bar{y}=1/y$	$\bar{y}=a+b\bar{x}$
$y=\dfrac{1}{ax+b}$	设$\bar{y}=1/y$	$\bar{y}=b+a\bar{x}$
$y=\dfrac{x}{ax+b}$	设$\bar{y}=1/y, \bar{x}=1/x$	$\bar{y}=a+b\bar{x}$
$y^2=ax^2+bx+c$	设$\bar{y}=y^2$	$\bar{y}=ax^2+bx+c$
$y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$	设$\bar{y}=1/y$	$\bar{y}=ax^2+bx+c$
$y=\dfrac{x}{ax^2+bx+c}$	设$\bar{y}=x/y$	$\bar{y}=ax^2+bx+c$
$y=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$	设$\bar{x}=1/x$	$y=a+b\bar{x}+c\bar{x}^2$

例:求一个经验函数 $\varphi(x) = ae^{mx}$ （a, m为常数），使它能和下面给出的数据相拟合。

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6

解：对经验公式两边取对数得

$$\ln\varphi(x) = \ln a + mx$$

令

$$A = \ln a, \quad y' = \ln\varphi(x)$$

则化为线性情况

$$y' = A + mx$$

可算得：$\sum_{i=1}^{8} x_i = 36$，$\sum_{i=1}^{8} {x_i}^2 = 204$，
$\sum_{i=1}^{8} y_i' = \sum_{i=1}^{8} ln\varphi(x_i) = 29.9787$，$\sum_{i=1}^{8} x_i y_i' = \sum_{i=1}^{8} x_i ln\varphi(x_i) = 147.1948$
代入得到正规方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{8A + 36m = 29.9787} \\ \boldsymbol{36A + 204m = 147.1948} \end{cases}$$

解得：$\boldsymbol{A = 2.4305}$，$\boldsymbol{m = 0.2926}$
得：$y' = \boldsymbol{2.4305 + 0.2926x}$
由 $y' = ln\varphi(x)$
经验公式为：$\boldsymbol{\varphi(x) = e^{0.2926x+2.4305}} = \boldsymbol{11.36}e^{0.2926x}$

四．多项式拟合
设函数关系$\boldsymbol{y = f(x)}$的一组观测数据为$(\boldsymbol{x_i, y_i})$，$(\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n})$， 欲求一个

$\boldsymbol{m(m < n - 1)}$次多项式

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

采用均方误差，则偏差平方和为

$$\boldsymbol{R = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [p_m(x_i) - y_i]^2}$$

根据最小二乘思想，求R关于$\boldsymbol{a_k}$的偏导，令其为零，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial a_2} = 0 \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial R}{\partial a_m} = 0 \end{cases}$$

对于$P_m(x)$得到$\boldsymbol{m + 1}$阶正则方程组

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} {x_i}^m = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} {x_i}^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^{m+1} + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} {x_i}^{2m} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^m y_i \end{cases}$$

矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{m} y_i \end{bmatrix}$$

例：用二次多项式函数拟合如下数据：

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	4	2	3	0	-1	-2	-5

解　二次多项式拟合，则$m = 2$，正规方程组如下：

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{3} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{3} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{2} y_i \end{bmatrix}$$

$n = 7$，经计算有：$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} = 28$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^{3} = 0$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^{4} = 196$

$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$，$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = -39$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} y_i = -7$

得到正则方程：

$$\begin{cases} 7a_0 + 0a_1 + 28a_2 = 1 \\ 0a_0 + 28a_1 + 0a_2 = -39 \\ 28a_0 + 0a_1 + 196a_2 = -7 \end{cases}$$

解得$a_0 = 0.66667$，$a_1 = -1.39286$，$a_2 = -0.13095$

所以$p(x) = 0.66667 - 1.39286x - 0.13095x^2$

拟合曲线的均方误差：$\delta = \sum_{i=1}^{7} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{7} (p(x_i) - y_i)^2 = 3.09524$

例：设有一组数据表

x_i	1	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	7	8	10	11	11	10	9	8

试用二次多项式来拟合这组数据。

解：首先算出

$\sum_{i=1}^{9} x_i = 53$，$\sum_{i=1}^{9} y_i = 76$，$\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 489$，$\sum_{i=1}^{9} x_i^{2} = 381$，$\sum_{i=1}^{9} x_i^{2} y_i = 3547$，$\sum_{i=1}^{9} x_i^{3} = 3017$，$\sum_{i=1}^{9} x_i^{4} = 25317$

得正则方程组

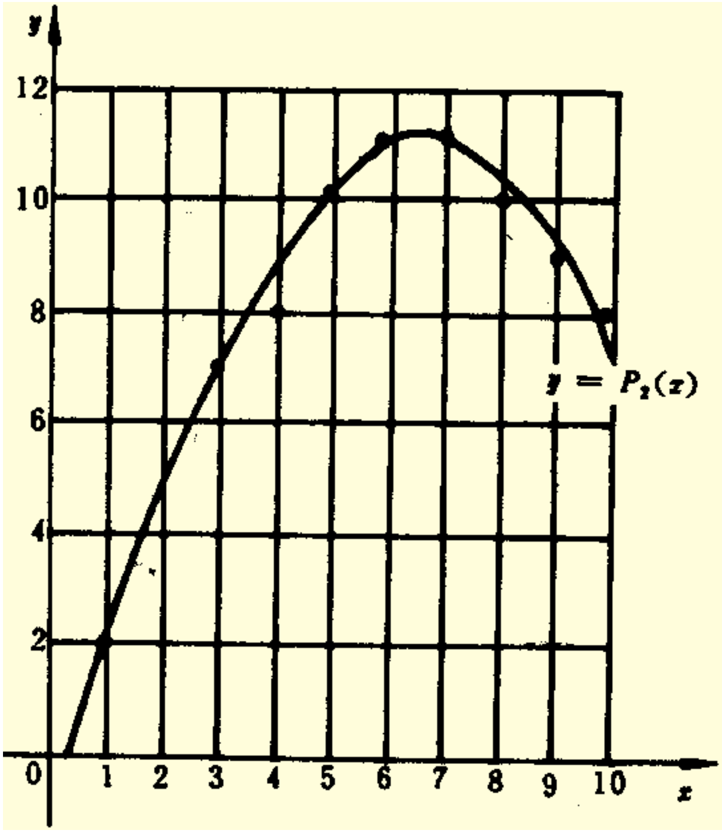
$$\begin{cases} 9a_0 + 53a_1 + 381a_2 = 76 \\ 53a_0 + 381a_1 + 3017a_2 = 489 \\ 381a_0 + 3017a_1 + 25317a_2 = 3547 \end{cases}$$

解得　$a_0 = -1.4597$，$a_1 = 3.6053$，$a_2 = -0.2676$

因此所求的二次多项式

$$P_2(x) = -1.4597 + 3.6053x + 0.2676x2$$

对应曲线为



注意：　在实际问题中，近似函数$\boldsymbol{\varphi(x)}$的选取只能凭经验得到。例

加速度与时间的关系是线性关系，可选取

$$\boldsymbol{\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x}$$

炮弹在空中的高度与时间的关系近似于抛物线，可选取

$$\boldsymbol{\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2}$$

§4.7 加权最小二乘法

对于一组给定的数据点$(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y}_i)$ $(\boldsymbol{i = 0, 1, \cdots, m})$各点的重要性可能是不一样的，在拟合的数据点$(x_i, y_i)$ $(i = 0,1,\cdots,m)$中假设$\omega_{\boldsymbol{i}}$表示数据点(x_i, y_i)的重度$i = 0,1,\cdots,m$。这里的重度指的是权重或者密度，统称为权系数。它的大小反映了数据(x_i, y_i)地位的强弱。

定义加权平方误差为：$\|\delta\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \omega_i (\varphi(x_i) - y_i)^2$

如果选用的拟合曲线为

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

那么相应的法方程组为：

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}\omega_i & \sum_{i=1}^{m}\omega_i x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{m}\omega_i {x_i}^n \\ \sum_{i=1}^{m}\omega_i x_i & \sum_{i=1}^{m}\omega_i {x_i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{m}\omega_i {x_i}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m}\omega_i {x_i}^n & \sum_{i=1}^{m}\omega_i {x_i}^{n+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{m}\omega_i {x_i}^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}\omega_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m}\omega_i x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m}\omega_i {x_i}^n y_i \end{bmatrix}$$

例：已知一组实验数据(x_i, y_i)及权 ω_i 如表所示。

i	1	2	3	4
ω_i	14	27	12	1
$\boldsymbol{x_i}$	2	4	6	8
$\boldsymbol{y}_i$	2	11	28	40

若 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间有线性关系$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bx}$，试用最小二乘法确定系数 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$。

解:因拟合曲线为一次多项式曲线（直线）$\boldsymbol{\varphi(x)}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bx}$，故相应的法方程组形式如式

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}\omega_i & \sum_{i=1}^{m}\omega_i x_i \\ \sum_{i=1}^{m}\omega_i x_i & \sum_{i=1}^{m}\omega_i {x_i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}\omega_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m}\omega_i x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 54 & 216 \\ 216 & 984 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 701 \\ 3580 \end{bmatrix}$$

解之得: $\boldsymbol{a}=-\mathbf{12.885}$，$\boldsymbol{b}=\mathbf{6.467}$。
拟合曲线为：$\boldsymbol{\varphi(x)}=\mathbf{6.467}\boldsymbol{x}-\mathbf{12.885}$

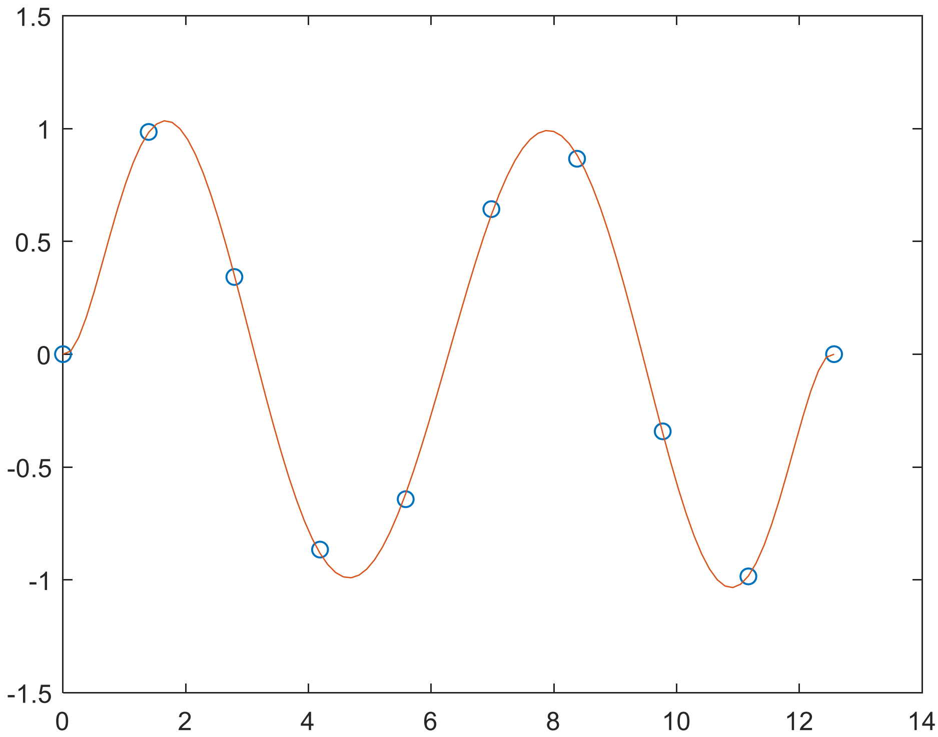
最后对比插值与拟合
二者的相同点
都需要根据已知数据构造函数；可使用得到函数计算未知点的函数值。
二者的不同点
插值需要构造的函数正好通过各插值点，拟合则不要求，只要均方差最小即可。对实验数据进行拟合时，函数形式通常已知，仅需要拟合参数值。

§4.8 插值与拟合工具
1.Polyfit
p = polyfit(x,y,n)
返回阶数为 n 的多项式 p(x) 的系数，该阶数是 y 中数据的最佳拟合（在最小二乘方式中）。p 中的系数按降幂排列，p 的长度为 n+1

y = polyval(p,x) 返回在 x 处计算的 n 次多项式的值。输入参数 p 是长度为 n+1 的矢量，其元素是按要计算的多项式降幂排序的系数。

例 8.1

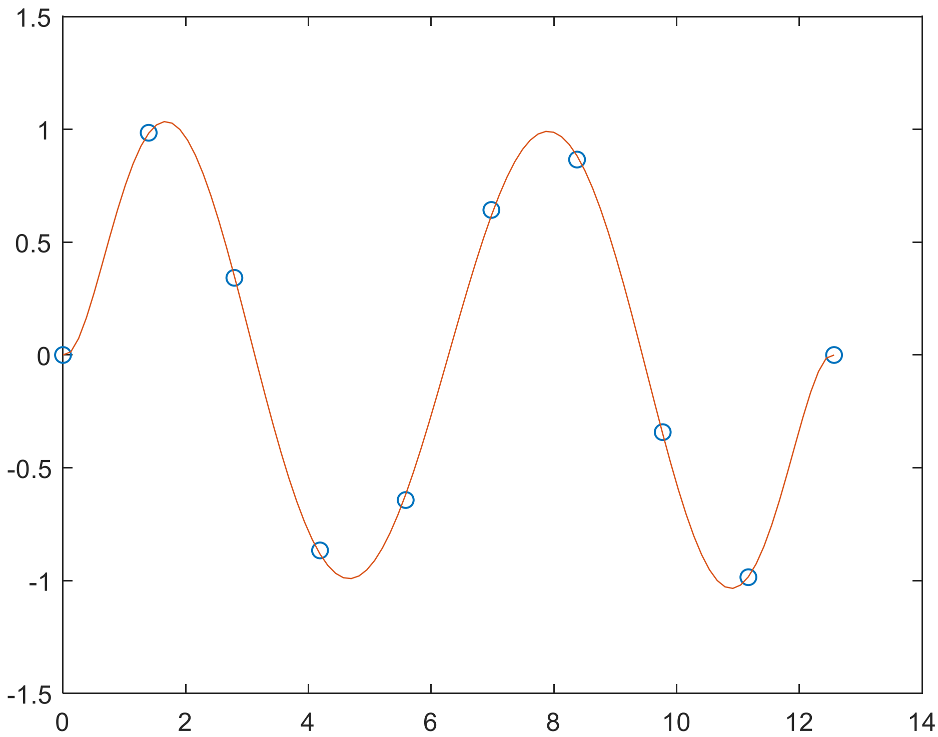
```
x = linspace(0,4*pi,10);
y = sin(x);
p = polyfit(x,y,7);
x1 = linspace(0,4*pi);
y1 = polyval(p,x1);
figure
plot(x,y,'o')
hold on
plot(x1,y1)
hold off
```



例 8.1

```
x = linspace(0,1,5);
y = 1./(1+x);
p = polyfit(x,y,4);
x1 = linspace(0,2);
y1 = 1./(1+x1);
f1 = polyval(p,x1);
figure
plot(x,y,'o')
hold on
plot(x1,y1)
```

```
plot(x1,f1,'r--')
legend('y','y1','f1')
```



2. Interp1（1,2,3 的 1）

vq = interp1(x,v,xq)

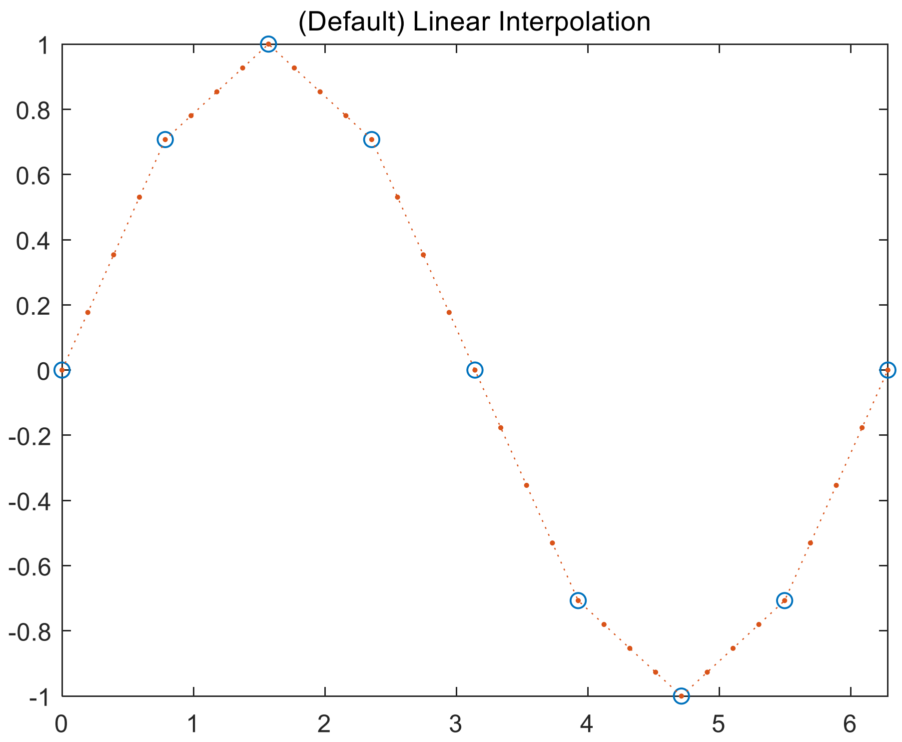
使用线性插值返回一维函数在特定查询点的插入值。矢量 x 包含样本点，v 包含对应值 v(x)。矢量 xq 包含查询点的坐标。

vq = interp1(x,v,xq,method)

指定备选插值方法：'nearest'、'next'、'previous'、'linear'、'spline'、'pchip' 或 'cubic'。默认方法为 'linear'。

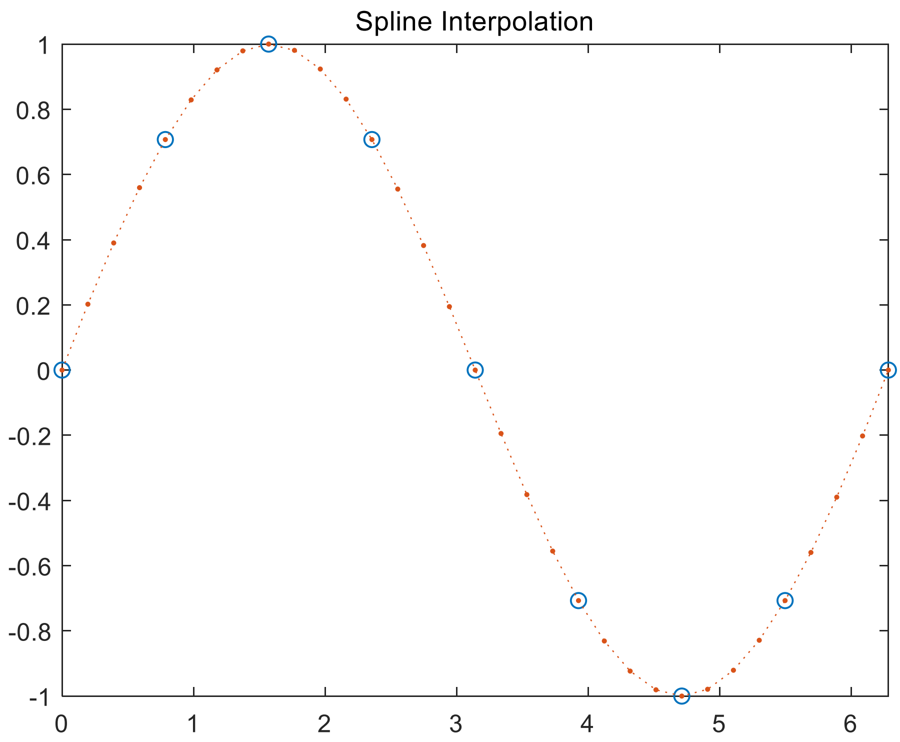
例 8.2

```
x = 0:pi/4:2*pi;
v = sin(x);
xq = 0:pi/16:2*pi;
figure
vq1 = interp1(x,v,xq);
plot(x,v,'o',xq,vq1,':.');
xlim([0 2*pi]);
title('(Default) Linear Interpolation');
```



例 8.3

```
x = 0:pi/4:2*pi;
v = sin(x);
xq = 0:pi/16:2*pi;
figure
vq2 = interp1(x,v,xq,'spline');
plot(x,v,'o',xq,vq2,':.');
xlim([0 2*pi]);
title('Spline Interpolation');
```



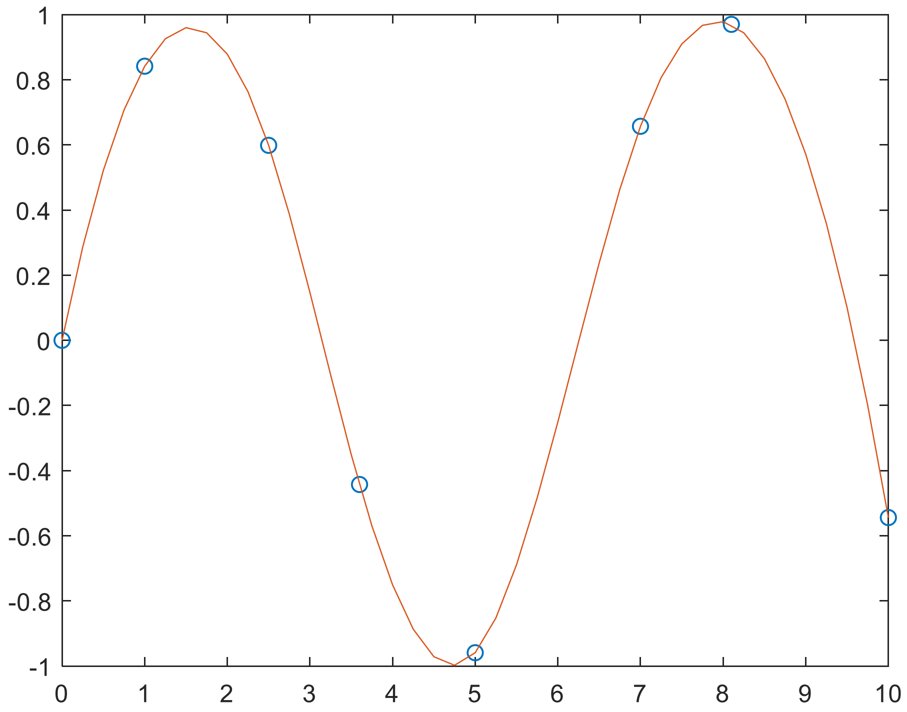
3.spline

s = spline(x,y,xq)

s = spline(x,y,xq) 返回与 xq 中的查询点对应的插值 s 的矢量。s 的值由 x 和 y 的三次样条插值确定

例 8.4 正弦数据

```
x = [0 1 2.5 3.6 5 7 8.1 10];
y = sin(x);
xx = 0:.25:10;
yy = spline(x,y,xx);
plot(x,y,'o',xx,yy)
```



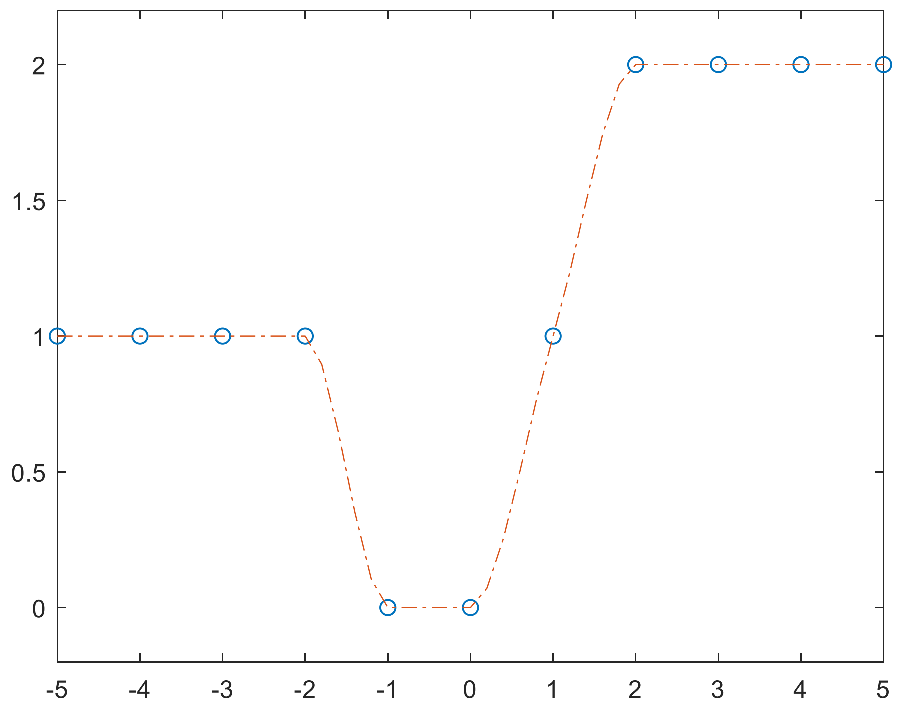
4.Pchip：保形分段三次插值

p = pchip(x,y,xq)

返回与 xq 中的查询点对应的插值 p 的矢量。p 的值由 x 和 y 的保形分段三次插值确定。

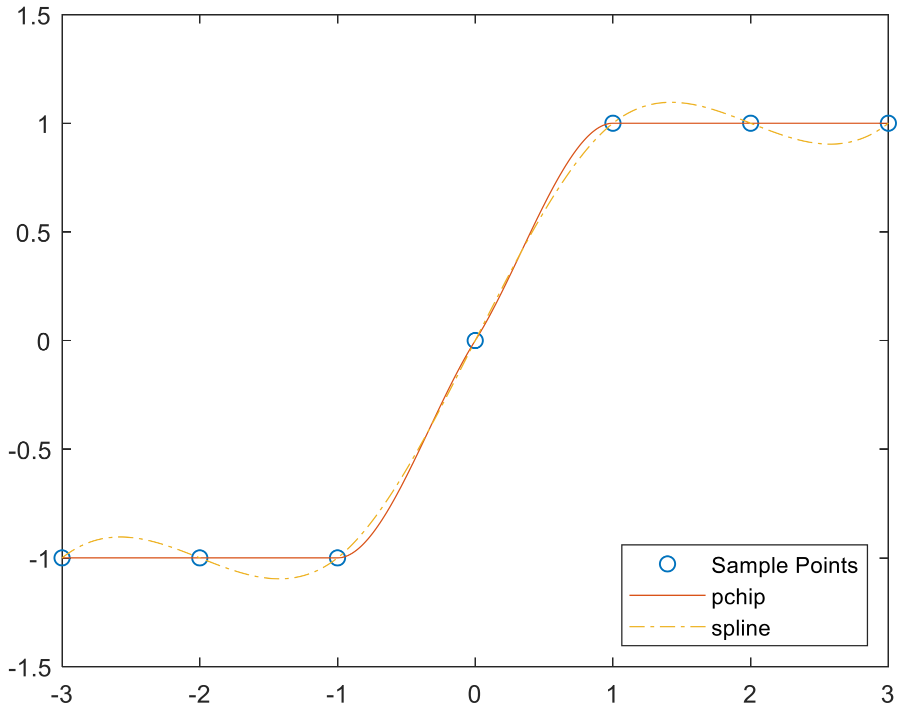
例 8.5

```
x = -5:5;
y = [1 1 1 1 0 0 1 2 2 2 2];
p = pchip(x,y);
xq = -5:0.2:5;
pp = ppval(p,xq);
plot(x,y,'o',xq,pp,'-.')
ylim([-0.2 2.2])
```



例 8.6 对比

```
x = -3:3;
y = [-1 -1 -1 0 1 1 1];
xq1 = -3:.01:3;
p = pchip(x,y,xq1);
s = spline(x,y,xq1);
plot(x,y,'o',xq1,p,'-',xq1,s,'-.')
legend('Sample Points','pchip','spline','Location','SouthEast')
```



作业（书面作业）：

P109：12，

已知$\boldsymbol{f(0.1)=2}$，$\boldsymbol{f(0.2)=4}$，$\boldsymbol{f(0.3)=6}$，求函数$\boldsymbol{f(x)}$在所给节点上的三次样条插值函数$\boldsymbol{s(x)}$，使其满足下面边界条件。

(1) $\boldsymbol{s'(0.1)=1}$，$\boldsymbol{s'(0.3)=-1}$

(2) $\boldsymbol{s''(0.1)=0}$，$\boldsymbol{s''(0.3)=1}$

16, 求出一个形如$\boldsymbol{y=ae^{bx}}$（$\boldsymbol{a,b}$为常数）的经验公式，使它能和下面表格给出的数据拟合。

$\boldsymbol{x}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{y}$	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6

17, 求下列矛盾方程组的最小二乘解。

$$\begin{cases} 2x+4y=11 \\ 3x-5y=3 \\ x+2y=6 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$$