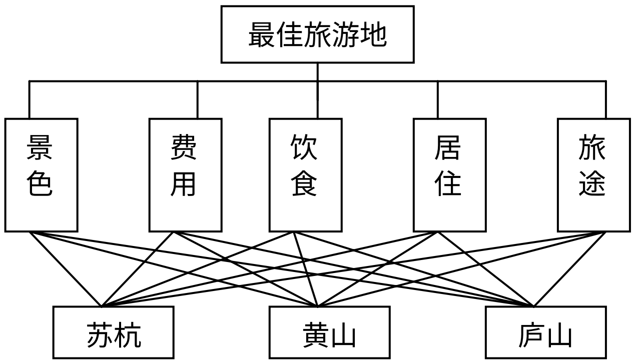
快乐的假期旅游

悄悄地，山绿了，水绿了，树、草全绿了；几回春雨浇过，那漫山遍野的杜鹃、桃花、梨花都张开了笑脸。春天来了，张勇、李雨、王刚、赵宇四位大学生相约，去寻找那生机勃勃盎然向上的春天，去呼吸那沁人心肺春天的气息。“ 五一 ” 的长假终于来到了，但他们却发生了争执。原来张勇想到风光绮丽的苏杭去看园林的春色，李雨却想到风景迷人的黄山去看巍峨挺拔的黄山松，王刚则想到风光秀丽的庐山去寻找庐山的真面目。三个人争得面红而赤，只有赵宇坐在一边，手里拿着笔，不停地写着。最后站起来说：“ 别吵了，我计算过了，去苏杭是明智的选择。” 说着他拿起粉笔在纸上画一张分析图，并讲解起来：



这是一个递阶层次结构，它分三个层次。第一层（选择最佳旅游地）我们称之为目标层，第二层（旅游的倾向）我们称之为准则层，第三层（旅游地点）我们称之为方案层。各层之间的联系用相连的直线表示。要依据我们的喜好对这三个层次进行相互比较判断，进行综合，在三个旅游地中确定哪一个作为最佳地点。

具体的做法是通过相互比较确定各准则对于目标的权重和各方案对于每一准则的权重。首先在我们在准则层对方案层进行赋权。我们认为费用应占最大的比重（因为我们是学生），其次是风景（我们主要是旅游），再着是旅途，至于吃住对我们年轻人来说就不太重要。我们采用两两比较判断法：

旅游决策准则层对目标层的两两比较表

	景色	费用	饮食	居住	旅途
景色	1	1/2	5	5	3
费用	2	1	7	7	5
饮食	1/5	1/7	1	1/2	1/3
居住	1/5	1/7	2	1	1/2
旅途	1/3	1/5	3	2	1

在这张表中，$a_{12}=1/2$，它表示景色与费用对选择旅游地这个目标来说的重要之比为 1/2（景色比费用稍微不重要），而 $a_{21}=2$ 则表示费用与景色对选择旅游地这个目标来说的重要之比为 2（费用比景色稍微重要）；$a_{13}=5$ 表示景色与饮食对选择旅游地这个目标来说

的重要之比为 5（景色比饮食明显重要），而 $a_{31}=1/5$ 则表示饮食与景色对选择旅游地这个目标来说的重要之比为 1/5（饮食比景色明显不重要）；$a_{23}=7$ 表示费用与饮食对选择旅游地这个目标来说的重要之比为 7（费用比饮食强烈重要），而 $a_{32}=1/7$ 则表示饮食与费用对选择旅游地这个目标来说的重要之比为 1/7（饮食比景色强烈不重要）。由此可见，在进行两两比较时，我们只需要进行 1+2+3+4=10 次比较即可。

由表 1 我们得到一个比较判断矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 7 & 5 \\ 1/5 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/5 & 1/7 & 2 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

并称之为正互反矩阵。n 阶正互反矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特点是

$$a_{ij}>0,\quad a_{ji}=1/a_{ij},\quad a_{ii}=1;\qquad (i，j=1，2，\cdots，n)$$

现在的问题是怎样由正互反矩阵确定诸因素对目标层的权重？由于 A 是正矩阵，由佩罗（*Perron*）定理知，正互反矩阵一定存在一个最大的正特征值 $\lambda_{\max}$，并且 $\lambda_{\max}$ 所对应的特征向量 X 为正向量。即 $AX=\lambda_{\max}X$，将 X 归一化（各个分量之和等于 1）作为权向量 W，即 W 满足 $AW=\lambda_{\max}W$。

```
A=[1,1/2,5,5,3;2,1,7,7,5;1/5,1/7,1,1/2,1/3;1/5,1/7,2,1,1/2;1/3,1/5,3,2,1]
[X,Q]=eig(A)
```

可以求出最大特征值 $\lambda_{\max}=5.0976$，对应的特征向量经过归一化得，$W=(0.2863,0.4810,0.0485,0.0685,0.1157)^T$ 就是准则层对目标层的排序向量。用同样的方法，给出第三层（方案层）对第二层（准则层）的每一准则比较判断矩阵，由此求出各排序向量（最大特征值所对应的特征向量并归一化）：

$$B_1(\text{景色})=\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 1/2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},P_1=\begin{pmatrix} 0.1677 \\ 0.3487 \\ 0.4836 \end{pmatrix};$$

$$B_2(\text{费用})=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix} 0.5472 \\ 0.2631 \\ 0.1897 \end{pmatrix};$$

$$B_3(\text{饮食})=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1/4 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix} 0.6301 \\ 0.2184 \\ 0.1515 \end{pmatrix};$$

$$B_4(\text{居住})=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},P_4=\begin{pmatrix} 0.5472 \\ 0.2631 \\ 0.1897 \end{pmatrix};$$

$$B_5(\text{旅途})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{pmatrix},P_5=\begin{pmatrix} 0.5472 \\ 0.1897 \\ 0.2631 \end{pmatrix}$$

最后，我们将由各准则对目标的权向量 W 和各方案对每一准则的权向量，计算各方案对目标的权向量，称为组合权向量。对于方案 1（苏杭），它在景色等 5 个准则中的权重都用第一个分量表示，即 0.1677、0.5472、0.6301、0.5472、0.5472,而 5 个准则对于目标的权重用权向量 $W=(0.2863,0.4809,0.0485,0.0685,0.1157)^T$ 表示，因此方案 1（苏杭）在目标中的组合权重等于它们相对应项的乘积之和。即

$$0.2863\times0.1677+0.4810\times0.5472+0.0485\times0.6301+0.0685\times0.5472+0.1157\times0.5472$$
$$=0.4425\text{ 。}$$

同样可计算出方案 2 (黄山)、方案 3 (庐山)在目标中的组合权重分别为 0.2769 与 0.2806 。于是组合权向量为 $(0.4425,0.2769,0.2806)^T$

若记 $P=\begin{pmatrix}0.1677 & 0.5472 & 0.6301 & 0.5472 & 0.5472\\ 0.3487 & 0.2631 & 0.2184 & 0.2631 & 0.1897\\ 0.4836 & 0.1897 & 0.1515 & 0.1897 & 0.2631\end{pmatrix}$ $\quad W=\begin{pmatrix}0.2863\\0.4810\\0.0485\\0.0685\\0.1157\end{pmatrix}$

则根据矩阵的乘法，可得 $\quad K=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=PW=\begin{pmatrix}0.4425\\0.2769\\0.2806\end{pmatrix}$

上述结果表明。方案 1 （苏杭）在旅游选择中占的权重为 0.4425 接近 1/2，远大于方案 2（黄山权重 0.2769）、方案 3（庐山权重 0.2806），因此我们应该去苏杭。

听了赵宇的分析，大家都拍手称快。王刚说，“ 这个方法挺不错的，这叫什么方法？ ” 赵宇笑着说：“ 这叫 ‘ 层次分析法（*AHP —Analytic Hierarchy Process*）’，是一种现代管理决策的方法。它的应用比较广泛，比如大学生的择业决策；科技人员要选择研究课题；医生要为疑难病确定治疗方案；经理要从若干个应试者中挑选秘书等等，都可用这种方法。当然这里面的学问很大呢。正好今天晚上有讲座，专门介绍《层次分析法》，我们一起去听课。后天我们就去苏州、杭州旅游去。”