A 卷

2010—2011 学年第二学期
《概率论与随机过程》期末试卷
答案及评分标准

专业班级 ____________________________

姓　　名____________________________

学　　号____________________________

开课系室 理学院基础数学系

考试日期 2011 年 7 月 2 日

页　号	一	二	三	四	五	总分
本页满分	30	22	16	20	12	
本页得分						
阅卷人						

注意事项：

1．请在试卷正面答题，反面及附页可作草稿纸；
2．答题时请注意书写清楚，保持卷面清洁；
3．本试卷共六七道大题，满分 100 分；试卷本请勿撕开，否则作废；
4．本试卷正文共 5 页。

本页满分 33 分	
本页得分	

一．填空题（共 7 小题，每空 3 分，共计 21 分）

1. 一个袋子装有 4 个白球 2 个黑球，另一个袋子装有 3 个白球 5 个黑球，如果从每一袋中抽一个球，则两球都是白球的概率为__1/4_____。

2. 设事件 A,B 相互独立，已知 $P(A)=0.5, P(A\bigcup B)=0.6$，则 $P(A\overline{B})=$__0.4____。

3. 在区间[0,1]内随机地选两个点，则它们的平方和不超过 1 的概率为__$\pi/4$__。

4. 设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是一强度为 3 的泊松过程，则 $\{X(t),t\geq 0\}$ 的，自协方差函数为_3min(s,t)_。

5. 设随机变量 X 服从参数为 0.5 的指数分布，随机变量 Y 服从参数为 10 和 0.1 的二项分布，且 X,Y 相互独立，则 $D(X-10Y)=$__94__。

6. 设相互独立的随机变量 X 和 Y 的数学期望分别是-2 和 2，方差分别为 1 和 3，则根据切比雪夫不等式 $P\left\{\left|X+Y\right|\geq \mathbf{6}\right\}\leq$__5/18____。

7. 已知一批产品的重量 $X\sim N(\mu,2)$，随机抽取 16 个，测得平均重量为 $\overline{x}=50$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为__(49.307,50.693)________。

二．选择题（共 5 小题，每小题 3 分，共计 15 分）

1．设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$___D___。

A. 单调增大　　B. 单调减小　　C. 增减不定　　D. 保持不变

2．设 X 与 Y 相互独立且同分布：$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=1/2$，

$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=1/2$，则下列各式中成立的是___D___。

A. $P\{XY=1\}=1/4$　　B. $P\{X=Y\}=1$

C. $P\{X+Y=0\}=1/4$　　D. $P\{X=Y\}=1/2$

3. 设 $X_1\sim N(0,\frac{1}{4})$, $X_2\sim N(0,\frac{1}{9})$ 相互独立，$X=aX_1{}^2+bX_2{}^2$，且 $X\sim\chi^2(2)$，则___B___。

A. $a=2,b=\sqrt{3}$　　B. $a=4,b=9$

C. $a=2,b=3$　　D. $a=1,b=1$

4. 设随机变量 $X\sim t(10), Y=\frac{1}{X^2}$，则（　A　）。

A. $Y\sim F(10,1)$　　B. $Y\sim F(1,10)$

C. $Y \sim \chi^2(10)$　　　　　　D. $Y \sim \chi^2(9)$

5. 设一齐次马氏链的一步转移概率矩阵为：$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则该马氏链___C___。

A.具有遍历性，存在平稳分布；　　　B.具有遍历性，不存在平稳分布；
C.不具有遍历性，但存在平稳分布；　D.不具有遍历性，也不存在平稳分布 。

.三．计算题（共 4 小题，每小题 8 分，共计 32 分）

1．已知 $P(A)=\frac{1}{4}$， $P(B|A)=\frac{1}{3}$， $P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(B)$ 和 $P(\bar{A}\bar{B})$ 。

解：$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$　　　………2 分

$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$　　　………4 分

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$　　　………6 分

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$　　　………8 分

2．已知随机变量的分布列为

X	0	1	2
p_k	0.2	p	0.5

求：（1） p；（2） $E(2X-3)^2$； （3） $D(X-1)$。

解：（1） $p=0.3$；　　　………2 分

（2） $E(2X-3)^2=(0-3)^2\times 0.2+(2-3)^2\times 0.3+(4-3)^2\times 0.5=2.6$ ……4 分

（3） $EX=0.3+1=1.3, EX^2=0.3+2=2.3$　　　………6 分

$D(X-1)=DX=EX^2-(EX)^2=2.3-1.69=0.61$　　　………8 分

3. 设随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

求：$EX, DY, Cov(X,Y)$.

解： X 的边缘分布密度为 $f_X(x)$，

当 $x \ge 0$ 时　　$f_X(x)=\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy=e^{-x}$，

当 $x<0$ 时　　$f_X(x)=0$

即　　$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$，$X \sim e(1)$

同理　　$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & y\ge 0 \\ 0 & y<0 \end{cases}$，$Y \sim e(1)$　　……….4 分

$\therefore$　$EX=1,\quad EY=1,\quad DY=1$　　……….6 分

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xye^{-(x+y)}dxdy-1=\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy-1=0$$　……….8 分

或注意到 X、Y 的独立性，　X、Y 不相关，　得 $Cov(X,Y)=0$　…….8 分

4. 设有随机相位正弦波随机过程 $X(t)=\cos(6t+\Theta)$，$t\in(-\infty,+\infty)$ 其中 Θ 是在 $(0,2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量，求该随机过程的均值函数、方差函数和自相关函数。

解：Θ 的概率密度为

$$f(\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \theta\in(0,2\pi) \\ 0 & \theta\notin(0,2\pi) \end{cases}$$

其均值函数为

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E[\cos(t+\Theta)]$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos(t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$　………2 分

其自相关函数为

$$\boldsymbol{R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]}$$

$$\boldsymbol{=E\left\{[\cos(6s+\Theta)\cos(6t+\Theta)]\right\}}$$　………4 分

$$=\int_0^{2\pi}\cos(6s+\theta)\cdot\cos(6t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos(6s+6t+2\theta)+\cos 6(t-s)]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cos 6(t-s)$$ ………6 分

方差函数为：$\sigma_X^2(t)=R_X(t,t)-\mu_X^2(t)=\frac{1}{2}.$ ………8 分

四.（本题满分 10 分）一台机床加工了甲、乙、丙三种型号的产品，甲、乙、丙三种型号的数量分别占总数的 40%，50%和 10%，产品的合格率分别为 97%，99%和 98%，现从该机床加工的产品中任取一件，求：

（1）取到的是不合格品的概率；

（2）若已知取到的是不合格品，它是甲型号的概率。

解：设事件 A 表示："取到的产品是不合格品"；事件 A_1,A_2,A_3 分别表示取到甲、乙、丙型号的产品。 … …………… 1 分

则 $A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$，且 $P(A_i)>0$，A_1、A_2、A_3 两两互不相容，由全概率公式得

（1） $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\cdot P(A|A_i)$ … …………… 3 分

$$=\frac{40}{100}\times(1-\frac{97}{100})+\frac{50}{100}\times(1-\frac{99}{100})+\frac{10}{100}\times(1-\frac{98}{100})=\frac{19}{1000}$$，（或 0.019）…… 5 分

（2） $P(A_1|A)=\frac{P(A_1)P(A|A_1)}{\sum_{j=1}^{3}P(A_j)P(A|A_j)}$ … …………… 8 分

$$=\frac{\frac{40}{100}\times\frac{3}{100}}{\frac{19}{1000}}=\frac{12}{19}$$ （或≈0.63158） …………… 10 分

五.（本题满分 10 分）

已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{-\theta-1} & x>1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中 $\theta>1$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，求 θ 的矩估计量和极大似然估计量。

解：矩估计：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_1^{+\infty}\theta x^{-\theta}dx=\frac{\theta}{\theta-1}$， ……… 2 分

令 $\overline{X}=\frac{\theta}{\theta-1}$ 解得

$$\theta = \frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$$ ……… 4 分

极大似然估计

似然函数为：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{-\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{-\theta-1}$ ……… 7 分

$$\therefore LnL(\theta)=nLn\theta+(-\theta-1)\sum_{i=1}^{n}Lnx_i$$

$$\frac{dLnL(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}Lnx_i=0$$ ……… 9 分

$$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}Lnx_i}$$ …… 10 分

六.（本题满分 6 分） 设$\{X_n,n\geq 0\}$ $\{X_n,n\geq 0\}$是具有三个状态 0，1，2 的齐次马氏链，一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.4 & 0.2\\0.4 & 0.2 & 0.4\\0.2 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}$$

初始分布 $p_j(0)=P\{X_0=j\}=1/3, j=0,1,2.$ 试求

(1) $P\{X_0=0,X_2=1\}$；(2) $P\{X_2=1\}$；（3）极限分布。

解：先求出二步转移概率矩阵

$$P(2)=P^2=\begin{bmatrix}0.36 & 0.32 & 0.32\\0.32 & 0.36 & 0.32\\0.32 & 0.32 & 0.36\end{bmatrix}$$

(1) $P\{X_0=0,X_2=1\}=P\{X_0=0\}P\{X_2=1\mid X_0=0\}$

$$=p_0(0)P_{01}(2)=\frac{1}{3}\times 0.32=0.11$$ …………2 分

(2) $P\{X_2=1\}=p_0(0)P_{01}(2)+p_1(0)P_{11}(2)+p_2(0)P_{21}(2)$

$$=\frac{1}{3}\times(0.32+0.36+0.32)=\frac{1}{3}$$ …………4 分

（3）设平稳分布$\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$，由于 $p_{ij}>0$，平稳分布即极限分布，满足

$$\begin{cases}\pi_1=0.4\pi_1+0.4\pi_2+0.2\pi_3\\\pi_2=0.4\pi_1+0.2\pi_2+0.4\pi_3\\\pi_3=0.2\pi_1+0.4\pi_2+0.4\pi_3\end{cases}$$

解得极限分布为 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ………6 分

七.（本题满分 6 分） 设 $X_1,X_2,\cdots$，X_9 是来自正态总体 $N(10,9)$ 的一个简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$，令 $Y=X_1-\overline{X}$，求随机变量 Y 的分布密度。

解：由于 $X_1,X_2,\cdots$，X_9 是来自正态总体 $N(10,9)$ 的一个简单随机样本，所以

$X_1,X_2,\cdots$，X_9 相互独立，且

$$EX_i=10,DX_i=9,(i=1,2,\cdots,9)$$

$$Y=X_1-\overline{X}=X_1-\frac{1}{9}(X_1+X_2+\cdots X_9)=\frac{8}{9}X_1-\frac{1}{9}(X_2+X_3+\cdots X_9)$$

$$EY=\frac{8}{9}EX_1-\frac{1}{9}(EX_2+EX_3+\cdots+EX_9)=0$$ …………2 分

$$DY=(\frac{8}{9})^2EX_1+(\frac{1}{9})^2(DX_2+DX_3+\cdots+DX_9)=\frac{8}{9}\times 9=8$$ …………4 分

由 $X_1,X_2,\cdots$，X_9 相互独立同分布，所以 $Y\sim N(0,8)$

得 Y 的分布密度为

$$f(y)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{16}}$$ …………6 分