Polycopié (non-copié d'ailleurs) du cours de mathématiques appliquées donné à l'Hepia en ISC, S1 & S2.

Mathieu Baillif

Version du 1er mai 2023.

Table des matières

1 Introduction

Ce document contient l'entièreté des sujets qui seront abordés au cours cette année, voire même un peu plus. *Il est en général pensé comme un document d'appoint au cours et ne contient pas tous les détails de ce que nous verrons.* Certaines parties ne sont d'ailleurs rédigées que comme des pense-bêtes et ne contiennent aucune élaboration, alors que d'autres, où la difficulté technique ou conceptuelle est plus importante, sont plus détaillées. Certaines affirmations ou théorèmes seront ainsi donnés sans preuves, nous verrons la démonstration d'une partie d'entre elles pendant le cours, tandis que quelques unes sont démontrées dans ce document.
Vous êtes fortement encouragé à prendre des notes et ne pas uniquement vous baser sur ce texte, qui de plus pourra subir des changements pendant l'année.

2 Notations

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots\}$: ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$: ensemble des nombres rationnels (les fractions).
$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

$<$: strictement plus petit
$\leq$: plus petit ou égal
$>$: strictement plus grand
$\geq$: plus grand ou égal

$\in$: signe d'appartenance, par exemple $a \in \mathbb{Q}$ se lit "a appartient à l'ensemble $\mathbb{Q}$".
$\forall$: pour tout
$\exists$: il existe

$\{x \in A \,|\, x \text{ a la propriété } P\}$: Le sous-ensemble des x de A qui ont la propriété P, par exemple $\{x \in \mathbb{N} \,|\, x/2 \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des nombres pairs.

$\cap$: intersection, $A \cap B$ est l'ensemble des x appartenant à A et à B.
$\cup$: union, $A \cap B$ est l'ensemble des x appartenant à A ou (non exclusif) à B.
$A \backslash B$: différence ensembliste, l'ensemble des x appartenant à A mais pas à B.
$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}$: l'ensemble des paires (ordonnées) d'éléments de A et B.
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$: les listes (ordonnées) d'éléments de $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
$A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, etc.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$, intervalle fermé de a à b.
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$, intervalle ouvert de a à b.
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\}$
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$, de même $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ sont les ensembles de base privés du 0.
$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$: les réels positifs

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot a_1 \cdots a_{n-1} \cdot a_n$$

$e = 2.71828183\ldots$, base de l'exponentielle et du logarithme naturel.
$\pi = 3.1415927\ldots$, le nombre pi, que vous devriez connaître.

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: vecteur de composantes $a, b \in \mathbb{R}$.

Chapitre I

Un tout petit peu de logique

I.1 Deux mots d'introduction

La logique mathématique étudie les systèmes formels dans lesquels des raisonnements mathématiques peuvent être développés. Bien que cela ne soit en général pas connu par le "grand public", il n'y a en effet de loin pas qu'un seul système dans lequel les mathématiques peuvent se formaliser, mais des dizaines, certains étant plus puissants que d'autres et permettant d'exprimer des notions plus complexes. On se contentera ici d'effleurer trois sujets :

1. Le langage formel des propositions (ou logique propositionnelle), avec les notions de syntaxe et de sémantique.
2. Les quantificateurs $\exists$, $\forall$ et leurs relations, de manière plus informelle.
3. L'utilisation informelle des concepts logiques en mathématique (ou même dans la vie de tous les jours).

On commencera en fait par le point 3, en rappelant (assez informellement, donc) ce qu'est une démonstration mathématique, ainsi que certains principes de raisonnement. Puis on verra (partiellement) comment toutes ces choses se formalisent dans les points 1 et 2.

I.2 Démonstrations mathématiques

Au cœur des mathématiques pures se trouve la notion de *démonstration* ou *preuve*, tout ce qui est calcul (comme appris lors de la scolarité) fait partie de la boîte à outil du mathématicien (ou de tout le monde, en fait), mais n'en est pas le centre de l'activité. Par démonstration, on entend une suite déductions logiques, partant de certaines prémices (ou hypothèses), pour arriver pas à pas à la conclusion voulue. (On notera immédiatement le côté flou de cette définition : qu'est-ce qu'une déduction logique, au fond ? Un des buts historiques de la logique mathématique a été de tenter de répondre à cette question.) Un exemple sera plus parlant :

Théorème A. *Si $m \in \mathbb{N}$ est un nombre pair, alors m^2 est aussi un nombre pair.*

Démonstration. Si m est pair, alors $m = 2n$ pour un certain nombre entier n. Donc, $m^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2\cdot(2n^2)$. Donc, m^2 est le nombre entier $2n^2$ multiplié par 2, il est donc pair. □

Cette démonstration est directe : on part de l'hypothèse que m est pair pour montrer pas à pas (certains pas étant des calculs et d'autres des utilisations de la définition de ce qu'est un nombre pair) que m^2 est aussi pair. Le petit carré blanc signifie que la démonstration est finie, il existe d'ailleurs d'autres conventions. Voyons une autre preuve directe, mais qui utilise des cas.

Théorème B. *Si $m \in \mathbb{N}$ n'est pas divisible par 3, alors $m^2 - 1$ est divisible par 3.*

Démonstration. On commence d'abord par remarquer que si $m = 0$, alors m est divisible par 3. Donc le premier cas possible est $m = 1$.
Si m n'est pas divisible par 3, alors m est soit un nombre divisible par 3 auquel on a ajouté 1 (donc $m = 3n+1$), soit un nombre divisible par 3 auquel on a ajouté 2 (donc $m = 3n + 2$).
<u>Cas 1 :</u> $m = 3n + 1$.
Si $m = 3n + 1$ alors $m^2 = (3n + 1)^2 = 9n^2 + 6n + 1$.
Donc, $m^2 - 1 = 9n^2 + 6n = 3 \cdot (3n^2 + 2n)$ est bien divisible par 3.
<u>Cas 2 :</u> $m = 3n + 2$.

Si $m = 3n + 2$ alors $m^2 = (3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4$.
Donc, $m^2 - 1 = 9n^2 + 12n + 3 = 3 \cdot (3n^2 + 4n + 1)$ est bien divisible par 3. □

Ici, la démonstration suit le même principe, mais utilise deux cas pour parvenir à sa conclusion. On remarque aussi qu'on ne dit pas tout : par exemple, l'assertion

si m n'est pas divisible par 3, alors m est soit un nombre divisible par 3 auquel on a ajouté 1, soit un nombre divisible par 3 auquel on a ajouté 2

peut demander un petit temps de réflexion mentale. D'ailleurs on pourrait compléter la démonstration en la commençant par quelque chose comme ceci :

Prenons un nombre m. Si $m = 1$ ou 2, alors $m^2 = 1 = 0 + 1$ ou $m^2 = 4 = 3 + 1$ et ça marche. S'il est plus grand que 2 et divisible par 3, alors $m = 3n$. S'il est plus grand que 2 et n'est pas divisible par 3, alors soit $m - 1$ l'est, soit $m - 2$ l'est, vu qu'il n'y a jamais 3 nombres consécutifs qui ne sont pas divisibles par 3. Donc, soit $m - 1 = 3n$ et $m = 3n + 1$, soit $m - 2 = 3n$ et $m = 3n + 2$, etc ...

Mais on se rend compte assez rapidement que ça devient très lourd à lire. De plus, on peut aussi se demander pourquoi il n'y a jamais 3 nombres consécutifs qui ne sont pas divisibles par 3, et ainsi de suite avec de plus en plus de détails. Cependant, cela rend très rapidement une démonstration carrément illisible car on se perd justement dans ces détails. Par contre, un système de logique formalisé revient exactement à tout détailler jusqu'aux pas les plus petits possibles.

Un autre genre de démonstration est celui par *contraposée* : au lieu de prouver "si A est vrai alors B est vrai", on prouve "si B n'est pas vrai alors A n'est pas vrai". On verra plus tard pourquoi ces deux assertions sont équivalentes (en logique standard).

Théorème C. *Si $m \in \mathbb{N}$ est tel que m^2 est divisible par 3, alors m est aussi divisible par 3.*

Démonstration.
On va donc utiliser la contraposée et montrer :

Si m *n'est pas* divisible par 3, alors m^2 *n'est pas* divisible par 3.

Mais en fait c'est quasiment ce que nous dit directement le Théorème B : si m n'est pas divisible par 3, alors $m^2 - 1$ est divisible par 3, et donc $m^2 - 1 = 3n$ pour un certain nombre entier n, donc $m^2 = 3n + 1$ n'est pas divisible par 3. □
On voit aussi dans cette démonstration une autre spécialité des mathématiques : on réutilise des résultats démontrés auparavant, à l'instar des fonctions utilisées pour définir d'autres fonctions en programmation.

Un autre genre (encore) de démonstration est celui par *l'absurde ou contradiction* : au lieu de prouver "si A est vrai alors B est vrai", on prouve "si A est vrai et que B n'est pas vrai, on aboutit à une contradiction". Autrement dit : "il est impossible que A soit vrai et B ne soit pas vrai en même temps". Le fait que montrer ceci est équivalent à "si A est vrai alors B est vrai" sera aussi vu plus tard.

Théorème D. *On définit $\sqrt{3}$ comme le seul nombre positif dont le carré vaut 3. Alors, $\sqrt{3}$ ne peut pas s'écrire comme une fraction $\frac{a}{b}$, avec a et b des nombres entiers.*

Démonstration.
On démontre donc par l'absurde que si $\sqrt{3}$ est le seul nombre positif dont le carré vaut 3 et que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ avec a et b des nombres entiers, on aboutit à une contradiction. On suppose donc (*par l'absurde*) que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$. Comme il est toujours possible de simplifier une fraction au maximum, on peut supposer que a et b ne sont pas tous les deux divisibles par 3. (Cela n'exclut pas qu'un des deux le soit.) Maintenant, en mettant au carré, on obtient

$$3 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ donc } 3b^2 = a^2.$$

On en conclut que a^2 est divisible par 3. Par le Théorème C, on en déduit que a lui-même est divisible par 3, donc $a = 3n$ pour un nombre entier n. Mais en revenant à l'équation au dessus, on a donc :

$$3b^2 = a^2 = (3n)^2 = 9n^2, \text{ donc } b^2 = 3n^2$$

et b^2 est divisible par 3. On utilise à nouveau le Théorème C pour en déduire que b lui-même est aussi divisible par 3. Cela contredit le fait que a et b ne peuvent pas être tous les deux divisibles par 3. □

Il existe d'autres méthodes de preuves, plus spécifiques à certains sujets, comme par exemple la *preuve par récurrence*, aussi appelée *preuve par induction*. Nous les verrons en temps voulu. (Il y a aussi la *preuve par intimidation*, très utilisée dans l'éducation, mais dont l'étude fait plutôt partie du domaine de la sociologie ou de la psychologie que des mathématiques.)

Ce cours n'est *pas* donné à des étudiants en mathématique, mais bien à des aspirants informaticiens qui pourraient penser que les démonstrations des théorèmes importent peu, ce qui compte c'est de pouvoir utiliser les résultats obtenus, et donc pourquoi se casser la tête ou toute autre partie du corps à comprendre ces démonstrations. Il y a une montagne de réponses possibles à cette question, mais en voici quatre.

1. La compréhension d'une démonstration permet souvent de mieux comprendre les notions étudiées (et réciproquement, d'ailleurs), en tout cas si cette démonstration ne fait pas appel à d'autres notions extérieures et si elle n'est pas trop longue et compliquée, un peu de la même manière que savoir comment une certaine fonction est implémentée dans tel ou tel langage permet de mieux l'utiliser.
2. La compréhension d'une démonstration est souvent source d'une certaine satisfaction intellectuelle.
3. La réflexion sur les rouages des raisonnements logiques a de vraies implications dans la vie de tous les jours et dans le cours de systèmes logiques (pour la partie du calcul des propositions ci-dessous).
4. Votre professeur est un mathématicien donc il a tendance à aimer les démonstrations et vouloir en faire de temps en temps.

I.3 Vers une formalisation de certains raisonnements

Si on regarde de plus près la plupart des pas logiques dans une démonstration, on remarque que quasiment à chaque fois, on se retrouve avec un schéma du genre :

Si l'assertion A est vraie et que l'assertion A implique l'assertion B, alors l'assertion B est aussi vraie.

Exemple dans la preuve du Theorème D : *Si* $3 = \frac{a}{b}$*, avec* a, b *des nombres entiers positifs, alors* $3b^2 = a^2$*.* Dans ce cas, A est l'assertion $3 = \frac{a}{b}$ *avec* a, b *des nombres entiers positifs* et B est $3b^2 = a^2$. Donc, schématiquement, ce qu'on utilise est ce qu'on appelle (de façon semi-barbare) le *Modus Ponens* :

De "$A \to B$" et "A", on peut déduire "B".
En notations de logique mathématique (que l'on utilisera pas) :

$$A \to B, A \vdash B.$$

Cette règle de déduction recouvre tout un tas d'usages de la vie de tous les jours. Une petite liste d'exemples tellement évidents qu'ils en deviennent presque idiots :

1. Si être un aigle implique savoir voler et que Chicou est un aigle, alors Chicou sait voler.
2. Si connaître Franz implique être quelqu'un d'important et que Charles W. connaît Franz, alors Charles W. est quelqu'un d'important.
3. Si tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme, alors Socrate est mortel.

Bien entendu, on ne s'exprime pas naturellement de cette manière car elle est beaucoup trop lourde, et notre raisonnement se permet très souvent de sauter des étapes aussi évidentes, on dira par exemple plus facilement "Tous les hommes sont mortels, comme Socrate est un homme, il sera enterré ou inciné un jour", phrase dans laquelle des prémices *implicites* viennent jouer un rôle, en l'occurrence celle qui dit que l'on enterre ou incinère tous les corps des humains décédés. Un des buts de la logique mathématique est de rendre *explicites* TOUTES les suppositions ou hypothèses que l'on fait et sur lesquelles le raisonnement se base. Cela donne des systèmes formels beaucoup moins flous que la logique sur laquelle se base les raisonnements habituels en mathématiques (ou ceux de la vie de tous les jours), mais beaucoup plus lourds à manipuler et où le moindre petit pas de raisonnement peut prendre plusieurs lignes et rendre le tout extrêmement indigeste. Par contre, il est intéressant de faire quelques pas dans cette direction afin d'être ensuite plus attentif (dans la vraie vie) aux raisonnements fallacieux que l'on rencontre à tous les coins de rue.

I.4 Logique propositionnelle

Le langage logique formel le plus simple est ce qu'on appelle la *logique propositionnelle* (ou langage formel des propositions), qui d'ailleurs est également abordée sous un autre angle dans le cours de systèmes logiques (avec des notations différentes). C'est en gros la logique du "0/1" : les choses sont soit vraies, soit fausses, sans possibilité de pouvoir dire "vrai dans certains cas, faux dans d'autres". Le but de ce système est d'étudier les formules du type

$$\Big((A \vee \neg B) \to C\Big) \to (\neg B \to C) \tag{$\star$}$$

et de comprendre comment certaines formules peuvent se déduire d'autres. Les lettres A, B, C ci-dessus représentent des propositions abstraites (appelées aussi *variables propositionnelles*), à savoir des assertions qui sont soit vraies (auxquelles on donnera la valeur 1) soit fausses (auxquelles on donnera la valeur 0). Par exemple A pourraît être l'assertion "Le nombre 2 est impair", ou alors "Genghis Khan était un empereur Inca". Dans les deux cas, sa valeur serait de 0, car c'est une assertion fausse. Mais A pourrait aussi représenter une formule propositionnelle, du genre $(B \to \neg B) \leftrightarrow B$ (qui est d'ailleurs également une formule toujours fausse). La logique des propositions ne se préocuppe pas du contenu des propositions A, B, C, mais seulement de leurs relations (et de leurs valeurs logiques). Les symboles $\vee, \wedge, \neg, \to, \leftrightarrow$ sont des connecteurs logiques (en l'occurrence "ou, et, non, implique, équivalent") permettant de former des formules à partir d'autres, et la valeur d'une formule dépendra de la valeurs des variables propositionnelles et des connecteurs. *Attention* : les significations de "ou" et "implique" sont plus restrictives que celles qu'on a tendance à utiliser dans la vie de tous les jours, comme on le verra ci-dessous. Certaines formules sont vraies (c'est-à-dire ont valeur 1) quelles que soient les valeurs des variables propositionnelles qui les composent, ces formules sont appelées des *tautologies*. Par exemple, la formule $(\star)$ ci-dessus en est une. Dit d'une autre manière, ces formules sont toujours vraies, quoi qu'on mette dans les variables. Elles représentent donc des genres de vérités logiques universelles que l'on peut appliquer sans danger.

Les formules valides dans ce langage sont celles que l'on peut former ainsi :

- Une variable seule est une formule valide ;
- si φ, ψ sont des formules valides, alors $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ et $(\neg\varphi)$ sont des formules valides.

Par exemple,

$$\Big((\neg A) \vee \big(B \to (\neg C)\big)\Big) \wedge \Big(\big(A \vee (\neg D)\big) \leftrightarrow \big(\neg(A \vee E)\big)\Big)$$

est une formule valide, alors que

$$A \to B\neg C$$

n'en est pas une. Dans la pratique, on enlève souvent certaines parenthèses pour rendre plus lisible, par exemple celles de $(\neg A)$.

Dans un paragraphe au dessus, on a utilisé le mot "valeur". En fait, en logique formelle, on distingue deux niveaux : la *syntaxe* et la *sémantique*. La syntaxe consiste uniquement en des considérations sur le formules elles-mêmes et comment l'on peut déduire certaines formules à partir d'autres formules. La sémantique consiste en donner une interprétation à ces formules, en l'occurrence, pour la logique propositionnelle, les valeurs 0 et 1. Le but du jeu est de tenter de dégager une syntaxe qui permette de formaliser les raisonnements que l'on fait en général au niveau de la sémantique, de manière à ce que les choses restent cohérentes entre elles. Cette distinction syntaxe/sémantique se retrouve d'une certaine manière dans les langages informatiques lorsqu'on traite de fonctions.

Vague analogie

	Logique propositionnelle	**Langage informatique**
Syntaxe	$A \to B \neg C$ Mauvaise construction de formule	`funcon mult(x : int) : int` SYNTAX ERROR

	De $(A \to B)$ et C
	on ne peut pas déduire B
		`function mult(x : int) : int`
		`{ return tau(x)*2 ;}`
		si `tau(x)` n'est pas défini, le compilateur se plaint.

	De $(A \to B)$ et C
	on ne peut pas déduire B
		`function mult(x : int) : float`
		`{ return x/2 ;}`
		Si on donne un `x` qui n'est pas de type `int`,
		on ne peut pas appliquer la fonction.

	De $(A \to B)$ et A,
	on peut déduire B
		`function tau(x : int) : int`
		`{ return x+1 ;}`
		`function mult(x : int) : float`
		`{ return tau(x)/2 ;}`
		Le compilateur sait que l'on peut
		calculer `mult(x)`, même sans savoir la valeur de x
		(et qu'on prend un `int` et on l'envoie sur un `float`).

Sémantique	Si les valeurs de A, B sont 1 et 0,
	la valeur de la formule $(A \to B)$
	peut se calculer (et vaut 0).
		`function tau(x : int) : int`
		`{ return x+1 ;}`
		`function mult(x : int) : float`
		`{ return tau(x)/2 ;}`
		On assigne la valeur `x=2`,
		alors on peut calculer la valeur de `mult(x)`
		(en l'occurrence 6).

I.4.1 Les connecteurs

La négation "$\neg$"

La négation d'une proposition est très simple à comprendre : si une proposition est vraie, sa négation est fausse, et réciproquement. Elle s'écrit $\neg A$ et se lit "non A". On a pour habitude de résumer cela dans un tableau qui résume facilement ce que l'on entend au niveau sémantique :

A	$\neg A$
0	1
1	0

ET "$\wedge$", OU "$\vee$"

Les connecteurs "et" (noté $\wedge$) et "ou" non-exclusif (noté $\vee$) se comprennent aussi de manière instinctive. Leurs tableaux sont donnés ci-dessous.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	1

Attention cependant : comme écrit ci-dessus, le "ou" *n'est pas* un "ou exclusif" (appelé XOR dans le monde informatique). Ce n'est pas le cas, par exemple, dans un menu de restaurant : quand il est écrit

Entrée : Ceviche *ou* Salade de poulpe

il est sous-entendu que vous ne pouvez pas avoir les deux, à savoir que le *ou* est ici exclusif. En fait, c'est le cas dans la plupart des utilisations du *ou* dans la vie de tous les jours, on a tendance à dire "A ou B, ou les deux" pour exprimer la version du *ou* que l'on utilise ici.

L'implication "$\rightarrow$" et l'équivalence "$\leftrightarrow$"

L'implication au sens des propositions est moins facile à comprendre, car elle ne recouvre pas exactement ce que l'on entend par "telle chose implique telle autre" dans la vie courante (encore plus que le *ou*). En effet, on sous-entend en général qu'il y a un certain rapport assez naturel entre les deux choses en question pour que l'on parle d'implication, alors qu'en logique des propositions on peut affirmer que la phrase

"Genghis Khan est un empereur Inca" implique "2 est un nombre impair"

est vraie. L'implication $A \rightarrow B$ s'entend en fait comme "lorsque A est vraie, alors B est vraie aussi", de manière minimale. Du coup, si A est faux, l'implication $A \rightarrow B$ est une relation vraie, quelle que soit la valeur logique de B. Autrement dit, une proposition fausse implique toutes les autres, ce qui peut paraître contre-intuitif à la base. En fait, on peut définir $A \rightarrow B$ comme $(\neg A) \vee B$. C'est un peu ce que l'on entend lorsqu'on utilise des expressions comme "Je t'épouserai quand les poules auront des dents", qui se formalise comme une implication "Les poules ont des dents" $\rightarrow$ "je t'épouse", donc $A \rightarrow B$. On sait bien que A n'arrivera jamais, on peut donc sans souci affirmer cette implication. Une autre manière de comprendre l'idée "faux implique tout" est de se rappeler qu'on veut utiliser $A \rightarrow B$ pour obtenir B en partant de A. Or, si notre système est bien construit, si A est une proposition fausse, on ne l'obtiendra jamais, du coup il n'est pas nécessaire de déclarer fausse la formule $A \rightarrow B$, qui dans un sens n'est pas nocive mais simplement inutile.
L'équivalence $\leftrightarrow$ est plus facile à comprendre, $A \leftrightarrow B$ seulement si A et B sont les deux vraies ou les les deux fausses.

A	B	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	1	1	1

I.4.2 Un peu de syntaxe

En logique des propositions, la règle de déduction (appelée *Modus Ponens* en latin, comme déjà dit au dessus), que l'on résume ainsi :

Des formules "$\Phi \rightarrow \Psi$" et "Φ", on peut déduire la formule "Ψ".
En notations mathématiques (que l'on utilisera presque pas) :

$$\Phi \rightarrow \Psi, \Phi \vdash \Psi.$$

Cela correspond complètement à l'intuition de ce que signifie une déduction, par exemple Si A est la proposition "Il pleut" et B est "Il y a des nuages", alors on a que $A \rightarrow B$ signifie "Il pleut implique qu'il y a des nuages". Si on connaît A et $A \rightarrow B$, on peut alors en déduire B, en français un peu lourd :

S'il pleut et qu'on sait que s'il pleut, alors il y a des nuages, on peut en déduire qu'il y a des nuages.

On remarque que la même déduction exactement sert dans la phrase suivante (un peu lourde également) :

Si je suis Genghis Khan et qu'être Genghis Khan implique être mort, alors je suis mort.

L'intérêt de déduire une formule à partir d'autres est que l'on sait que si les prémices sont vraies, alors la conséquence aussi. Autrement dit, les valeurs de vérité "survivent" à cette règle de déduction, à savoir que si les deux formules "$A \rightarrow B$" et "A" valent 1, alors B vaut 1 aussi. On est donc certain de ne pas faire d'erreur sémantique (obtenir du faux à partir du vrai).

L'autre règle que l'on utilise est celle de substitution, à savoir que si une formule est vraie, alors on peut substituer les variables $A, B, C, \ldots$ qui apparaissent dedans par n'importe quelle autre formule. Par exemple, en partant de la formule (toujours vraie)

$$(\neg A \wedge B) \rightarrow B$$

on peut substituer A par $(C \to D)$ et B par $(C \leftrightarrow \neg(D \vee C))$, par exemple, pour obtenir une autre formule toujours vraie (mais nettement plus difficile à lire)

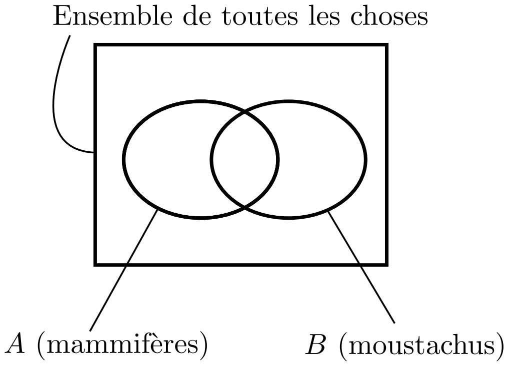
$$\Big(\neg(C \to D) \wedge \big(C \leftrightarrow \neg(D \vee C)\big)\Big) \to \big(C \leftrightarrow \neg(D \vee C)\big)$$

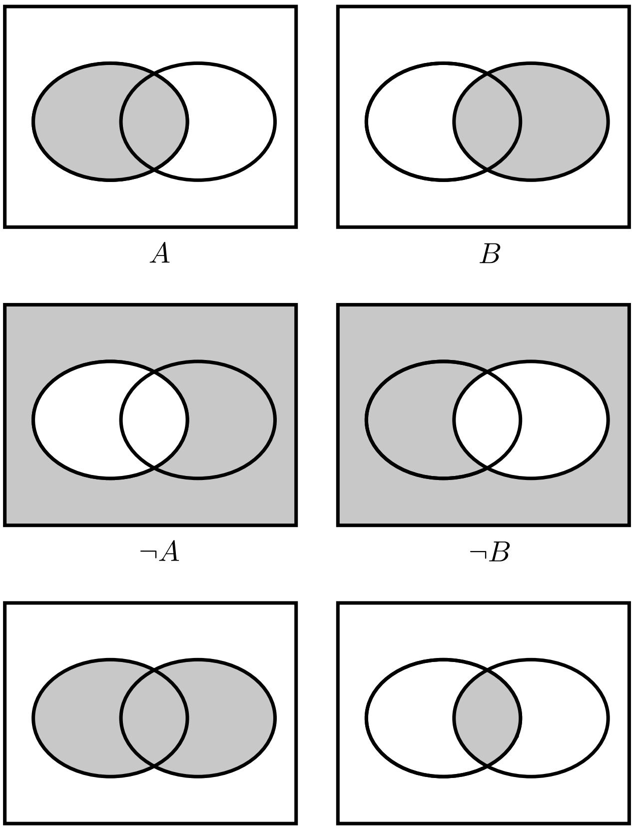
Comme il faut bien partir de quelque chose (car si l'on ne se donne aucune formule au départ, on ne peut absolument rien déduire), il est d'usage de mettre en exergue quelques formules que l'on considère comme des axiômes toujours vrais à partir desquels on tente de voir quelles sont les formules que l'on peut déduire. Suivant l'ensemble d'axiômes considéré au départ, on obtiendra des ensembles de formules déduites qui peuvent être sensiblement différents, mais nous ne rentrerons pas dans les détails et nous conterons de donner des exemples d'axiômes possibles en exercices. Dans les faits, il est très pénible de suivre ces règles à la lettre, en utilisant uniquement des formules et des Modus Ponens. En fait, si on a vu d'une manière ou d'une autre que $\psi \leftrightarrow \varphi$ (c'est-à-dire si on a démontré cette formule ou qu'elle est dans les axiômes), alors on se permet de remplacer φ par ψ (et réciproquement) dans les raisonnements, pour aller plus vite. Cela permet par exemple de directement passer de $(A \to B)$ à $(\neg B \to \neg A)$ (sa contraposée, voir les exercices).

Un thérorème dit de *complétude* dit que si l'on part d'une certaine liste d'axiômes (donnés en exercices), alors on peut en déduire n'importe quelle formule qui est une tautologie (c'est-à-dire dont la valeur de vérité est toujours 1 quelles que soient celles des ses variables propositionnelles). Donc, en gros, nous n'avons pas besoin de distinguer les niveaux sémantiques et syntaxiques pour la logique des propositions. Cela n'est pas du tout vrai pour d'autres logiques, comme le montre (entre autres) le théorème d'incomplétude de Gödel qui énonce (ici informellement) que n'importe quelle théorie formelle suffisamment puissante pour qu'on puisse y faire de l'arithmétique contient des théorèmes qui sont vrais mais qu'on ne peut pas démontrer. Ce résultat est en quelque sorte le cousin du théorème de Turing sur le problème de l'arrêt, qui montre qu'il n'existe pas de programme (dans un langage donné) qui soit capable de dire si n'importe quel (autre) programme arrivera à son terme ou non.

I.4.3 Diagrammes d'ensembles : une autre manière de voir les formules propositionnelles avec les connecteurs $\wedge, \vee, \neg$

On a vu que l'interprétation sémantique des variables $A, B, C, \ldots$ consiste uniquement à leur donner des valeurs $0, 1$. Cela peut être ennuyeux si on s'intéresse un tout petit peu au contenu de ces propositions. Une autre manière de voir les choses est de considérer $A, B, C, \ldots$ comme des *ensembles*. Un exemple sera plus parlant qu'une définition abstraite. On imagine que A représente une certaine propriété et B une autre. Par exemple, A signifie "être un mammifère" et B "être muni de moustaches".
On représente alors (abstraitement) A comme étant l'ensemble des choses qui sont des mammifères, et B celles qui sont moustachues. Alors les ensembles représentant $\neg A$, $\neg B$, $A \vee B$ et $A \wedge B$ se comprennent très simplement :



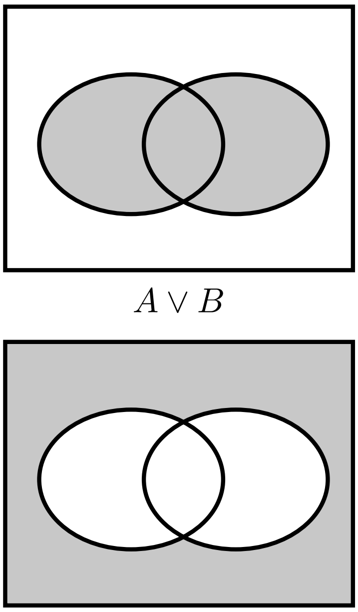


A $\quad$ B

$\neg A$ $\quad$ $\neg B$

$A \vee B$ $\quad$ $A \wedge B$

(On remarque en passant que $A \wedge B$ contient entre autres les chats et les bikers.) On voit alors facilement que les "lois de De Morgan" sont vraies :

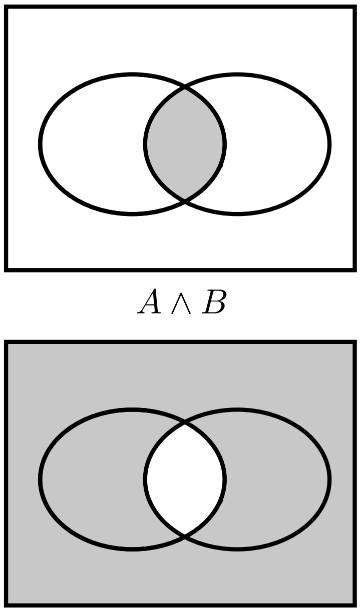


$A \vee B$

$\neg A \wedge \neg B$

Donc:

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$



$A \wedge B$

$\neg A \vee \neg B$

Donc:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

Cependant, cette manière de voir les choses ne convient pas à l'implication et à l'équivalence, où elle ne correspond plus vraiment à notre intuition. De même, à partir de 4 variables différentes, on obtient des diagrammes impossibles à dessiner.

I.5 Quelques mots sur les quantificateurs (logique du premier ordre)

Dans la logique des propositions, on ne peut pas vraiment formaliser des phrases plus élaborées comme

"S'il existe un nombre premier qui soit pair, alors il est faux de dire que tous les nombres premiers sont impairs."

Ce genre de phrases se formalisent dans ce qu'on appelle de manière semi-barbare la *logique des prédicats du premier ordre*, dont le principe est vaguement expliqué comme suit.

• Les objets considérés (exemple, des nombres) sont notés par des variables $x, y, z, a, b, \dots$.

• Les propriétés d'un ou plusieurs objets se notent par $A(x), B(x, y), \dots$. Par exemple, $A(x)$ peut signifier "x est un nombre pair" et $B(x, y)$ "x est plus petit que y".

• Les symboles $\forall, \exists$ signifient "pour tout" et "il existe". Par exemple, si comme au dessus $A(x)$ signifie "x est un nombre pair" et $B(x)$ signifie "x est un nombre premier", la phrase ci-dessus se formalise comme :

$$\Big(\exists x(A(x) \wedge B(x))\Big) \rightarrow \neg\Big(\forall x\big(B(x) \rightarrow \neg A(x)\big)\Big).$$

• La règle de déduction et celle de substitution sont les mêmes que celles de la logique des propositions.

Dans les faits, il est totalement impossible de lire des formules telles que celles ci-dessus dès que la complexité dépasse un seuil assez bas, on se contente en général de faire des phrases en français dans lesquels on ajoute de temps en temps quelques symboles tels $\forall, \exists$, et on effectue les déductions de manière beaucoup plus naturelle, sans utiliser cette syntaxe extrêmenent contraignante.

On verra aux exercices que, en résumé syntaxique, $\forall$ est équivalent à $\neg\exists\neg$, et $\exists$ est équivalent à $\neg\forall\neg$, pour ainsi dire. Donc la négation de $\forall x A(x)$ est $\exists x \neg A(x)$. A savoir : la négation de "Pour tout x, x est bleu" *n'est pas* "aucun x n'est bleu" mais bien "Il y a un x qui n'est pas bleu".

I.6 Quelques remarques supplémentaires sur le délicat passage de l'informel au formel

On a déjà vu que lorsqu'on raisonne (en mathématiques ou dans la vie de tous les jours) en français, on utilise un langage beaucoup moins formel que celui décrit ci-dessus (et tant mieux, car il est d'une infinie lourdeur pour le quotidien). Cependant, la majorité de nos raisonnements sont sous une forme ou l'autre du *Modus Ponens* expliqué ci-dessus, mais camouflé sous des formes équivalentes et des pirouettes grammaticales. Par exemple :

1. Il n'y a pas de fumée sans feu, donc quand je vois de la fumée j'en conclus qu'il y a du feu.
2. Aucune autruche n'est bleue, donc quand je vois un oiseau bleu, je sais que ce n'est pas une autruche.
3. Gustavo ne danse que la cumbia villera, donc si j'entend de la salsa je sais que Gustavo ne danse pas.
4. Paul ne fait jamais d'erreur de programmation, donc si ça bugge, c'est à cause de son laptop.

Aucune de ces phrases n'est exprimée comme une implication, cependant on comprend parfaitement qu'il y a des implications sous-jacentes. Voici par exemple comment on pourrait formaliser les affirmations ci-dessus (il y a plusieurs possibilités équivalentes à chaque fois).

1. $A =$"Il y a de la fumée", $B =$"Il y a du feu".
   $\neg(A \wedge \neg B) =$"Il n'y a pas de fumée sans feu". Or, on peut voir en utilisant les lois de De Morgan que $\neg(A \wedge \neg B)$ est équivalent à $\neg A \vee B$, ce qui est exactement la définition de $A \rightarrow B$. Autrement dit : "Il n'y a pas de fumée sans feu" est équivalent à "Il y a de la fumée implique qu'il y a du feu". Le raisonnement est donc un simple Modus Ponens.
2. $A =$"Etre une autruche", $B =$"Etre bleu".
   $\neg(A \wedge B) =$"Aucune autruche n'est bleue", ce qui est équivalent à toutes les formules suivantes : $\neg A \vee \neg B$, $A \rightarrow \neg B$, $B \rightarrow \neg A$. En présence de B (quelque chose de bleu, donc), on peut en déduire $\neg A$, à savoir que ce n'est pas une autruche. A nouveau, il s'agit d'un simple Modus Ponens.
3. $A =$"Gustavo danse", $B =$"On passe de la cumbia villera".
   $(A \rightarrow B) =$"Gustavo ne danse que la cumbia villera". Comme $A \rightarrow B$ est équivalent à $\neg B \rightarrow \neg A$, Si j'entends de la salsa (donc $\neg B$) je sais que Gustavo ne danse pas ($\neg A$). Modus Ponens all over again.
4. $A =$"Il y a une erreur de programmation", $B =$"Paul est responsable".
   $(A \rightarrow \neg B) =$"Paul ne fait jamais d'erreur de programmation", Si ça bugge (donc, A), tout ce qu'on peut conclure c'est que ce n'est pas de la faute de Paul. En fait, "c'est à cause de son laptop" n'est PAS une manière d'exprimer $\neg B$. Pour cela il faudrait pouvoir exclure toutes les autres causes. *Cette phrase*

(en français) est une erreur logique, à savoir qu'elle conclut quelque chose qui ne suit pas logiquement des prémices. C'est une erreur EXTRÊMEMENT fréquente dans la vie quotidienne, elle est en général absolument anodine mais peut l'être beaucoup moins dans certains contextes (politiques, entre autres).

Il est intéressant de faire quelques fois cet exercice de formalisation pour se rendre plus facilement compte des erreurs logiques que tout le monde fait en permanence, volontairement ou non. Cependant il faut savoir rapidement s'arrêter, car un excès de formalisme rend les choses beaucoup plus opaques (et la compagnie des gens beaucoup moins plaisante). Dans ce cours, hormis dans ce premier chapitre on ne fera PLUS JAMAIS pareil décortiquage.

I.7 Exercices de logique élémentaire

Exercice I.1.
On assigne aux propositions A, B, C respectivement les valeurs logiques $1, 0, 0$. Déterminer si les formules suivantes sont vraies ou fausses (donc, si leurs valeurs sont 0 ou 1).

(a) $A \wedge B$ (b) $(A \wedge B) \vee C$ (c) $A \to C$
(d) $(\neg A \vee B) \to \neg C$ (e) $A \vee \neg A$ (f) $(A \wedge C) \leftrightarrow B$

Exercice I.2.
Quelles sont les formules ci-dessous qui sont des tautologies ?

(a) $A \vee \neg A$ (b) $B \to (A \vee \neg A)$ (c) $(A \to B) \to (A \leftrightarrow B)$
(d) $(A \wedge B) \to A$ (e) $A \to (\neg A \to A)$ (f) $(A \vee B) \to (A \wedge B)$
(g) $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$.

Exercice I.3.
Les formules suivantes sont parfois prises comme axiômes de la logique propositionnelle. Vérifier qu'elles sont des tautologies.
(a) $(A \wedge B) \to A$, et $(A \wedge B) \to B$.
(b) $A \to (A \vee B)$.
(c) $\begin{array}{l} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \\ \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \end{array}$ (lois de De Morgan).
(d) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ (Contraposée).

Exercice I.4.
Dessinez les diagrammes des formules suivantes, et trouvez celles qui sont équivalentes.
(a) $\neg A \vee B$
(b) $\neg(\neg A \wedge B)$
(c) $\neg A \wedge \neg B$
(d) $\neg(A \wedge \neg B)$
(e) $(A \vee \neg B) \vee A$

Exercice I.5.
Trouver des exemples de propositions (informelles, dans la vie de tous les jours) A, B, C telles que les propriétés suivantes soient vraies.
(a) $A \to B$ est vrai, mais $B \to A$ ne l'est pas.
(b) $A \to (B \vee C)$ est vrai.
(c) $A \leftrightarrow \neg B$ est vrai.
(d) $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$ est vrai.

Exercice I.6.
Trouvez les contraposées des formules (écrites en français courant) suivantes :
(a) "Tous les nombres impairs sont des nombres premiers".
(b) "Si tous les programmeurs codaient en Rust il n'y aurait plus de bugs."
(c) "S'il pleut, alors il y a des nuages."
(d) "Si ça ne compile pas, c'est que je suis le pire programmeur de l'univers."

Exercice I.7.
Essayez de formaliser les raisonnements suivants (sans trop vous perdre dans les détails).
(a) Si c'est la fête alors il y a des chips. L'absence de chips montre que ce n'est pas la fête.
(b) Un cuisinier compétent ne met jamais d'eau dans les endives braisées. Donc si le cuistot met de l'eau, soit ce ne sont pas des endives braisées, soit il est incompétent.
(c) Personne n'est indispensable sauf mon chef, qui donc n'est pas une personne.

Exercice I.8.
Essayez d'expliquer pourquoi $\forall x P(x)$ est équivalent à $\neg(\exists x(\neg P(x)))$ avec plusieurs exemples. $P(x)$ peut être une propriété comme "être un nombre pair", "mesurer plus de $2m20$", etc. Puis, écrire les négations des formules (écrites en français courant) suivantes en tentant de passer de "pour tout" à "il existe" (et réciproquement) :
(a) "Tous les programmeurs connaissent l'assembleur.".
(b) "Il existe un langage nommé Cobol."

(c) “Il y a un algorithme permettant de trouver la $1'245'323$ème décimale de π en un milliardième de seconde.”

Exercice I.9.
Dans chaque point ci-dessous, deux phrases sont écrites. Sont-elles équivalentes ?

(a)
1. Il n’y a aucun oiseau qui sache voler sur le dos.
2. Tous les oiseaux sont incabables de voler le ventre en l’air.

(b)
1. Si un mammifère est également ovipare, alors il est originaire d’Australie.
2. Un mammifère originaire du sous-continent indien est vivipare.

(Note : être vivipare est la négation d’être ovipare.)

(c)
1. Si la majorité des spectateurs s’ennuient, alors le spectacle est un échec.
2. Il faut qu’aucun spectateur ne s’ennuie pour que le spectacle ne soit pas un échec.

(d)
1. J’ai raison car tu as tort.
2. Tu as tort, donc j’ai raison.

(e) (plus difficile)
1. Si tous les hommes sont égaux, alors personne n’a plus de droit qu’un autre.
2. Le roi étant de droit divin, les hommes ne sont pas égaux.

Chapitre II

Fonctions élémentaires

II.1 Notions préliminaires

En mathématiques, une fonction est "quelque chose" qui prend un objet x dans un certain ensemble de départ et qui retourne un objet (appelé *image de x*) dans un ensemble d'arrivée. Il ne peut pas y avoir plusieurs images, par contre l'ensemble d'arrivée peut contenir des objets formés de plusieurs sous-objets. Par exemple, on peut définir une fonction $f : H \to Y$ dont l'ensemble de départ H contient les élèves de l'école, l'ensemble d'arrivée Y contient des paires de nombres, et f retourne la taille et le poids de l'élève en question.
La manière de définir la fonction f peut être explicite comme dans l'exemple précédent ou dans le cas où f est donnée par une formule, ou alors implicite, par exemple $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \to \{0, 1\}$ définie comme :

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si le chiffre } n \text{ apparaît seulement un nombre fini de fois dans les décimales de } \pi, \\ 1 & \text{si le chiffre } n \text{ apparaît une infinité de fois dans les décimales de } \pi. \end{cases}$$

On dit qu'une fonction est *injective* si deux objets différents dans l'ensemble de départ ont toujours des images différentes dans l'ensemble d'arrivée. L'intérêt de ce genre de fonction est qu'on peut dans un certain sens "revenir en arrière" : un point de l'ensemble d'arrivée est atteint par un point de l'ensemble de départ au maximum. Si une fonction n'est *pas* injective, cela peut poser problème dans certains cas. Par exemple, on peut avoir une fonction de hash (que vous verrez dans plusieurs autres cours) part d'un texte (une liste) d'une centaine de lettres et retourne une liste de 32 lettres. Il est bien évident qu'une telle fonction ne peut pas être injective, donc plusieurs listes de départ son envoyées sur la même liste à l'arrivée. C'est ennuyeux si cette fonction de hash est utilisée pour un test de sécurité.

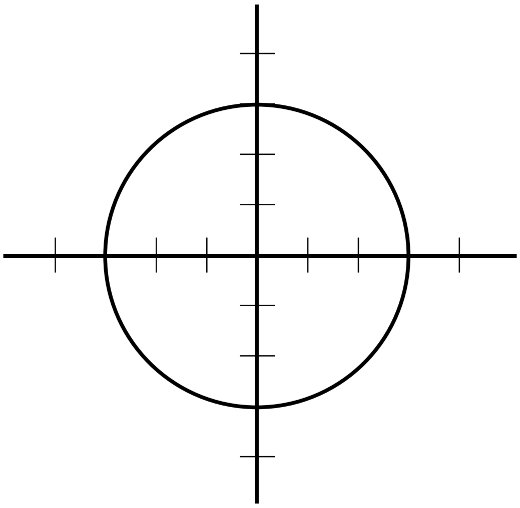
On dit qu'une fonction est *surjective* si tous les points de l'ensemble d'arrivée sont atteints par la fonction. Cela dépend évidemment du choix de l'ensemble d'arrivée.

On dit qu'une fonction est *bijective* si elle est injective et surjective. Une telle fonction procède à un appariement parfait entre l'ensemble de départ et celui d'arrivée. (Note en passant : la notion de bijectivité est au centre de la notion de "cardinalité" – qui est une autre façon de dire "grandeur" ou "taille" – pour les ensembles infinis en mathématiques, mais ceci ne sera presque pas abordé dans ce cours. Elle peut se montrer traître vis-à-vis de l'intuition : on arrive facilement à montrer qu'il y a des fonctions bijectives entre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, par exemple, ou encore pire entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. On glissera sur ce sujet comme si de rien n'était, car dans les cas qui nous intéressent, à savoir les fonctions continues dont on verra la définition plus tard, ce genre de choses n'arrive pas. Ce n'est d'ailleurs pas simple à démontrer.)

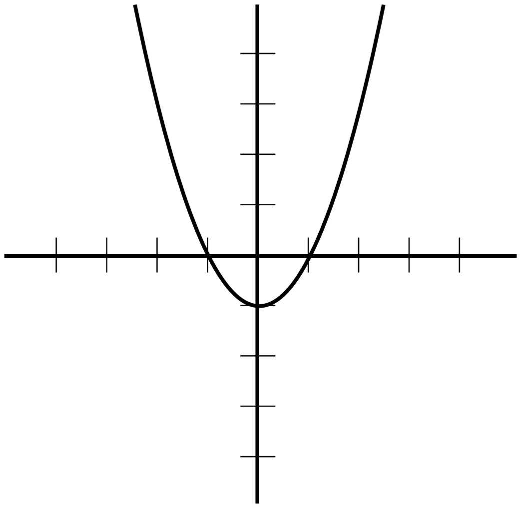
Dans ce cours, on considèrera en grande majorité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donc dont les ensembles de départ et d'arrivée sont les nombres réels.

Rappels : différences entre équations et fonctions
Une équation exprime une relation entre différentes variables, par exemple $x^2 + y^2 = 9$. Le graphe de cette équation comporte tous les couples $(x; y)$ pour lesquels l'équation est vérifiée. Par exemple, les couples $(3; 0)$ et $(1; \sqrt{8})$ en font partie, mais pas le couple $(2; 3)$.
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un 'objet' qui, à chaque valeur $x \in \mathbb{R}$, fait correspondre une *unique* valeur $f(x) \in \mathbb{R}$, par exemple, la fonction $f(x) = x^2 - 1$. Comme dit précédemment, la manière dont f est définie peut être explicite (comme pour $f(x) = x^2 - 1$), implicite, ou carrément abstraite. Le graphe de f comporte tous les

couples $(x; f(x))$, donc $(1;0)$ et $(2;3)$ font partie du graphe, mais pas $(3;4)$. Chaque droite verticale coupe le graphe d'une fonction en un point (au maximum), mais ce n'est pas forcément vrai pour le celui d'une équation.



graphe de l'équation $x^2 + y^2 = 9$.



graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 1$.

Il peut y avoir une certaine ambiguité quant aux nombres de variables d'une équation si l'une d'elle n'apparaît pas. Par exemple, l'équation des deux variables x, y donnée par

$$x = 2$$

est celle d'une droite verticale dans le plan. Mais si les variables sont x, y, z, la même équation définit un plan dans l'espace. Et si la variable est uniquement x, cette équation définit un simple point.
Etant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on lui adjoint très souvent l'équation $y = f(x)$, les deux possèdent le même graphe, et on jongle souvent entre les deux écritures, comme fonction et comme équation.

II.1.1 Exercices préliminaires

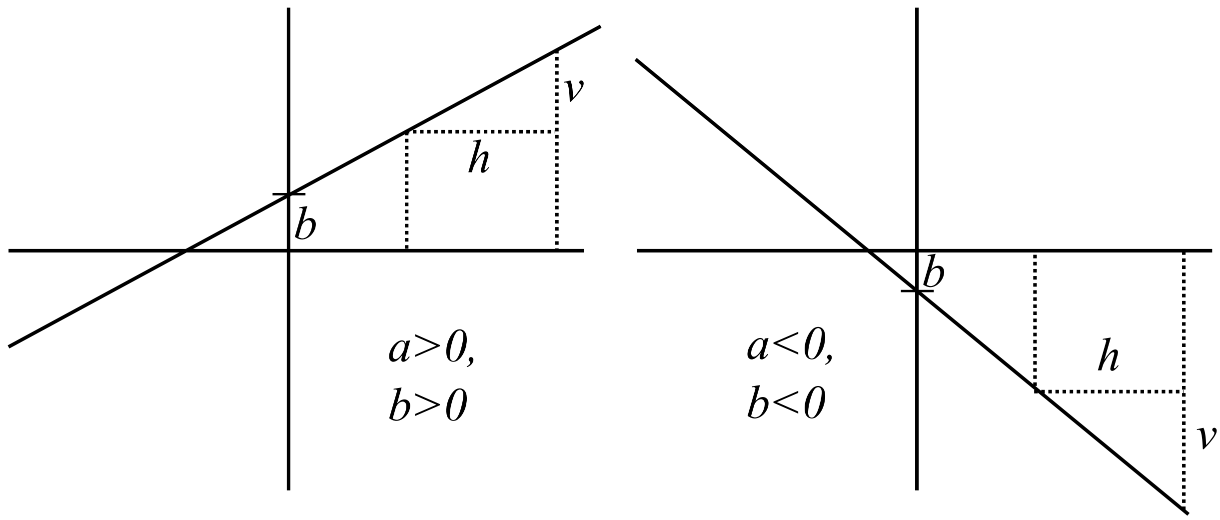
Exercice II.1.1.
Parmi les fonctions ci-dessous, dites lesquelles sont injectives, surjectives et bijectives (lorsqu'il est possible de le décider).
(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$
(4) N'importe quelle fonction $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
(5) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$
(6) N'importe quelle fonction $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{2\}$
(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) =$ partie entière de x
(8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x; x + 1)$

II.2 Droites et équations du premier degré

Equation d'une droite dans le plan
L'équation canonique d'une droite est de la forme :

$$y = a \cdot x + b$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Le nombre a représente la *pente* de la droite, le nombre b est *l'ordonnée à l'origine*.

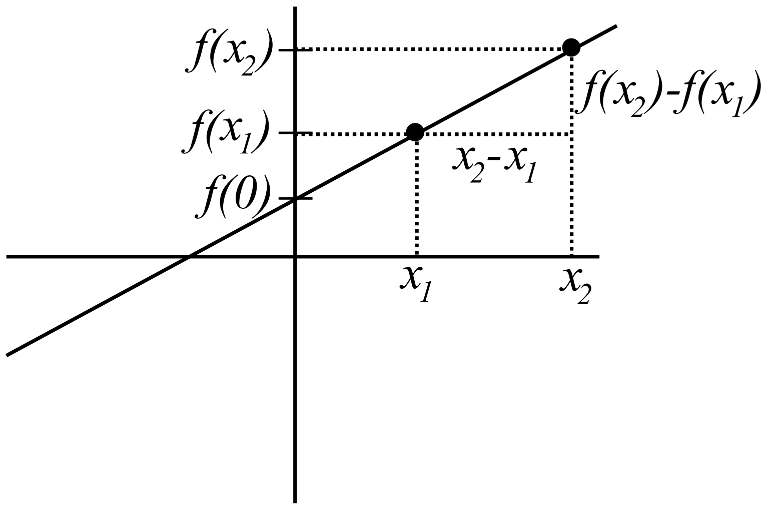


La pente est donnée par $\frac{v}{h}$ (avec un signe). Toute équation pouvant se ramener à la forme canonique est une équation de droite, par exemple $3x + 2y - 3 = 2x - y$.
Cas particulier : la droite horizontale d'équation $y = b$, pour $b \in \mathbb{R}$, et de pente 0.
Exception : la droite verticale d'équation $x = c$, pour $c \in \mathbb{R}$.

Fonctions constantes et du premier degré
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction constante si $f(x) = b$ (b un nombre dans $\mathbb{R}$) pour tout x. C'est une fonction du premier degré si $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
Le graphe $y = f(x)$ d'une fonction constante ou du premier degré est une droite, par extension on dira parfois directement que la fonction elle-même est une droite. Une droite verticale n'est *pas* le graphe d'une fonction.
Etant donnés $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on note $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. La pente de la droite est

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

L'ordonnée à l'origine est l'image de 0 : $b = f(0)$.



Méthodes pour trouver l'équation d'une droite

1. *Si l'on connaît la pente et un point sur la droite.*
   Exemple : la droite passe par le point $(3;5)$ et est de pente 2. On pose : $y = 2x + b$, on remplace x par 3 et y par 5, on obtient donc $5 = 2 \cdot 3 + b$, et donc $b = -1$.

2. *Si l'on connaît l'ordonnée à l'origine et un point sur la droite.*
   Exemple : la droite passe par le point $(-2;4)$ et est d'ordonnée à l'origine 3. On pose : $y = ax + 3$, on remplace x par -2 et y par 4, on obtient donc $4 = a \cdot (-2) + 3$, et donc $-2a = 1$, $a = -\frac{1}{2}$.

3. *Si l'on connaît deux points sur la droite.*
   Exemple : la droite passe par les point $A(-3;2)$ et $B(5;-1)$. On calcule la pente :

$$a = \frac{(-1) - 2}{5 - (-3)} = \frac{-3}{8} = -\frac{3}{8}.$$

   Ensuite, on pose $y = -\frac{3}{8}x + b$, on choisit un des deux points, par exemple le point A, on remplace x par -3 et y par 2, et on résout : $2 = -\frac{3}{8} \cdot (-3) + b$, donc $2 = \frac{9}{8} + b$, et $b = \frac{7}{8}$.
   On peut aussi utiliser la formule générale suivante, lorsque la droite passe par les points $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

   et la transformer pour trouver l'équation canonique.

Autre forme usuelle
On a appelé $f(x) = y = ax + b$ la forme canonique, mais dans certains cas (comme celui de la programmation linéaire ci-après), il est plus naturel d'écrire les équations de droite sous cette forme :

$$u \cdot x + v \cdot y = w, \quad \text{avec } u, v, w \in \mathbb{R}, \text{ et au moins un parmi } u, v \text{ est } \neq 0.$$

Dans le cas où $v \neq 0$, on passe très facilement à l'équation canonique, la pente étant $-\frac{u}{v}$ et l'ordonnée à l'origine $\frac{w}{v}$. Mais cette forme contient également les droites verticales (quand $v = 0$). De plus, elle se généralise plus facilement en plus grande dimension : $3x + 2y - z = 6$ est l'équation d'un plan dans l'espace de dimension 3, comme vous le verrez plus tard (au deuxième semestre ou en deuxième année).

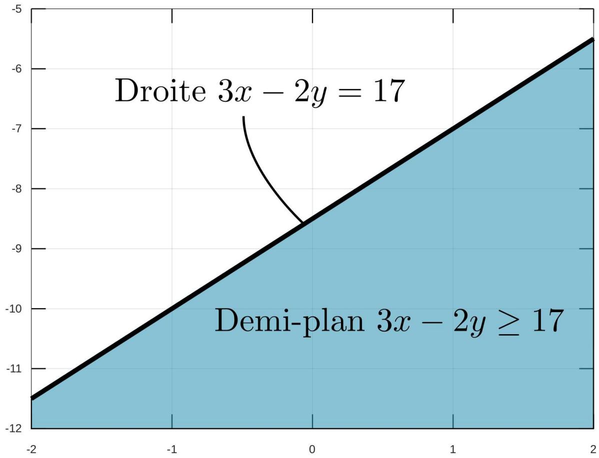
Droites et inéquations
Une *inéquation* est une formule constituée de deux membres séparés par un des symboles $<, \leq, >, \geq$ (dans l'ordre : strictement plus petit, plus petit ou égal, strictement plus grand, plus grand ou égal). Par exemple :

$$3x - 2y \geq 17, \qquad x^2 - 5x + 2 < 0, \quad x \cdot y - z > z \cdot x, \text{ etc...}$$

On peut manipuler les inéquations *presque* comme des équations, la seule différence étant que l'on doit changer le sens de l'inéquation lorsque l'on multiplie ou divise par un nombre négatif. Par exemple :

$$\begin{aligned}
3x - 2y &\geq 17 && |-3x \\
-2y &\geq -3x + 17 && |/(-2), \text{ ce qui inverse le symbole} \\
y &\leq \frac{-3}{-2}x + \frac{17}{-2} && |\text{on simplifie} \\
y &\leq \frac{3}{2}x - \frac{17}{2}
\end{aligned}$$

On voit que la dernière ligne définit un *demi-plan*, en l'occurrence celui en dessous de la droite définie par $3x - 2y = 17$ (ou, de manière équivalente, par $y = \frac{3}{2}x - \frac{17}{2}$) :



En faisant le même calcul que ci dessus, on remarque que les équivalences des inégalités suivantes (avec $u, v, w \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{array}{rcll} ux + vy \geq w & \iff & y \geq -\dfrac{u}{v}x + \dfrac{w}{v} & \text{si } v > 0 \\ ux + vy \geq w & \iff & y \leq -\dfrac{u}{v}x + \dfrac{w}{v} & \text{si } v < 0 \\ ux \geq w & \iff & x \geq \dfrac{w}{v} & \text{si } u > 0 \\ ux \geq w & \iff & x \leq \dfrac{w}{v} & \text{si } u < 0 \end{array}$$

Autrement dit : toute inéquation de la forme $ux + vy \geq w$ (avec au moins u ou v différent de 0) définit un demi-plan, l'ensemble des paires $(x; y)$ qui sont d'un côté ou de l'autre d'une droite. Ceci est vrai également si le symbole est $<, \leq$ ou $>$. Si l'inégalité est stricte, la droite ne fera pas partie du demi-plan, sinon elle en fait partie.

Programme linéaire en dimension 2

Nous allons l'expliquer sur un exemple tiré d'un cours de N. Eggenberg. Supposons que l'on ait un marchand de glace qui veut optimiser son revenu. Il peut produire deux parfums, vanille et chocolat. Les recettes nécessitent (pour un litre de chaque parfum) les quantités suivantes, la dernière colonne indiquant le stock à disposition.

	Vanille	Chocolat	en stock
Sucre	$2kg$	$5kg$	$12kg$
Lait	10ℓ	10ℓ	45ℓ
Vanille	$50g$	$5g$	$150g$
Cacao	$5g$	$50g$	$100g$
Revenu par litre	$8.-$	$9.-$	

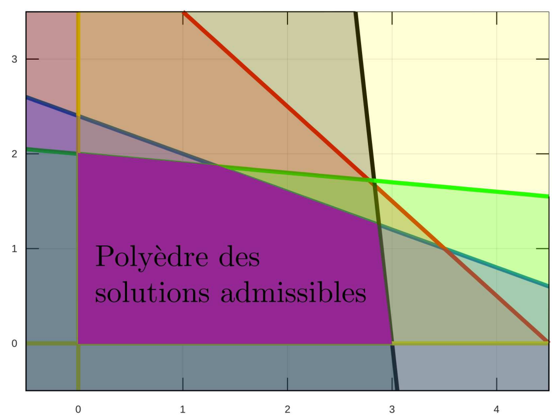
Si on nomme x la quantité (en litre) de glace vanille et par y celle de glace au chocolat produite, la fonction que l'on veut optimiser est

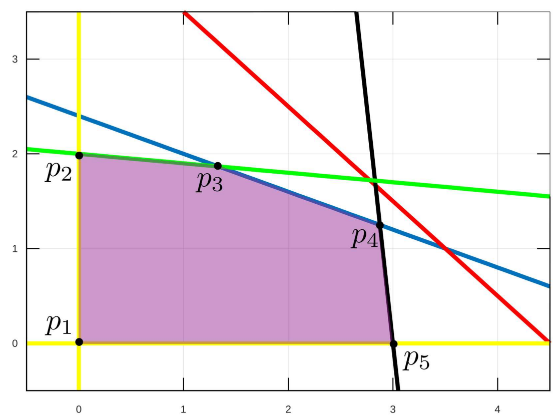
$$f(x, y) = 8x + 9y.$$

Les contraintes du stock (et le fait que l'on ne puisse pas produire un nombre négatif de litre de glace) se traduisent dans les inégalités suivantes (les couleurs sont celles du graphe ci-dessous) :

Sucre	$2x + 5y \leq 12$	bleu
Lait	$10x + 10y \leq 45$	rouge
Vanille	$50x + 5y \leq 150$	noir
Cacao	$5x + 50y \leq 100$	vert
	$x \geq 0$	jaune
	$y \geq 0$	jaune

Toutes ces contraintes définissent des demi-plans, leur intersection est le *polyèdre des solutions admissibles*, représenté ci-dessous (à gauche).





On remarque en passant que l'inégalité $10x + 10y \leq 45$ (en rouge) ne sert finalement à rien, car elle ne touche pas le polyèdre, on pourrait donc s'en passer sans rien changer.

Comme la fonction $f(x, y) = 8x + 9y$ est *affine*, ce qui signifie qu'elle est de la forme [1]

$$f(x, y) = u \cdot x + v \cdot y + w, \qquad \text{pour } u, v, w \in \mathbb{R},$$

on peut démontrer qu'elle prend sa valeur maximale sur un (ou plusieurs) des "coins" du polyèdre (voir l'exercice II.2.10 ci-dessous). Il suffit alors de trouver les coordonnées de ces coins en faisant des intersections de droites puis de calculer les valeurs correspondantes de f. Dans notre cas, il s'agit des points p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 représentés ci-dessus. Calculons-les.

p_1 : $p_1 = (0; 0)$

p_2 : intersection de $x = 0$ et $5x + 50y = 100$,
qui donne $x = 0, y = 2$
$p_2 = (0; 2)$

p_3 : intersection de $2x + 5y = 12$ et $5x + 50y = 100$,
on met sous forme canonique $y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}, \quad y = -\frac{1}{10}x + 2$,
on résoud $-\frac{2}{5}x + \frac{12}{5} = -\frac{1}{10}x + 2 \iff -3x = -4 \iff x = \frac{4}{3}$
$y = -\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{3} + 2 = \frac{28}{15}$
$p_3 = \left(\frac{4}{3}; \frac{28}{15}\right)$

p_4 : intersection de $2x + 5y = 12$ et $50x + 5y = 150$,
on met sous forme canonique $y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}, \quad y = -10x + 30$,
on résoud $-\frac{2}{5}x + \frac{12}{5} = -10x + 30 \iff 48x = 138 \iff x = \frac{138}{48} = \frac{23}{8}$
$y = -10\frac{23}{8} + 30 = \frac{5}{4}$
$p_4 = \left(\frac{23}{8}; \frac{5}{4}\right)$

p_5 : intersection de $y = 0$ et $50x + 5y = 150$,
qui donne $x = 3, y = 0$
$p_2 = (3; 0)$

On teste ensuite les valeurs que prend la fonction f en tous ces points, et on trouve :

$$f(p_1) = 0, \quad f(p_2) = 18, \quad f(p_3) = \frac{412}{15} = 27.467, \quad f(p_4) = \frac{137}{4} = 34.25, \quad f(p_5) = 24$$

1. En fait, elle est même *linéaire* car $w = 0$, et les notions de fonctions affines et linéaires ont des définitions plus générales, mais nous ne les donnons pas ici.

et le maximum est donc obtenu pour le point p_4, à savoir en produisant $\frac{23}{8} = 2.875\ell$ de glace vanille et $\frac{5}{4} = 1.25\ell$ de glace au chocolat, pour un profit de 34.25 francs. C'est à se demander si ça valait la peine de se compliquer la vie pour si peu. Mais en fait, oui : cette méthode se généralise avec plus de 2 variables (donc en plus grande dimension), et un algorithme extrêmement célèbre (ainsi que ses variantes) nommé *l'algorithme du simplexe* permet de résoudre un très grand nombre de cas assez rapidement. Cet algorithme (et/ou ses variantes) sera vu en deuxième année.

Remarques.
(1) On peut également résoudre (en dimension 2) grâce à une approche graphique, voir l'exercice numéro II.2.9.
(2) Si on impose que la solution doit être des nombres entiers, alors la méthode décrite ci-dessus ne permet pas de la trouver directement. De plus, il n'est pas clair que la véritable solution avec des nombres entiers soit "proche" de celle que l'on trouve avec cette méthode. C'est tout de même le cas dans notre exemple, la meilleure solution avec des nombres entiers est $q = (2; 1)$, qui donne un profit de 25, et ce point est un des 4 les plus proches de p_4. Mais ce n'est pas toujours le cas. Vous verrez peut-être ceci en deuxième année également.

II.2.1 Exercices sur les droites

Exercice II.2.1.
Résoudre (lorsque c'est possible) les équations suivantes.
(1) $2x + 3 = 5x - 9$ (2) $4x - 3 = 2 - 2x + 4$
(3) $\frac{1}{2}x + 4 = \frac{5}{2}$ (4) $\frac{3}{4} + \frac{x}{8} = 2x - 1$
(5) $6x - 2 = 3x - 1$ (6) $7x - 1 = 7x + 3$
(7) $\frac{x-1}{3x+2} = 2$ (8) $\frac{x}{4+x} = 3$

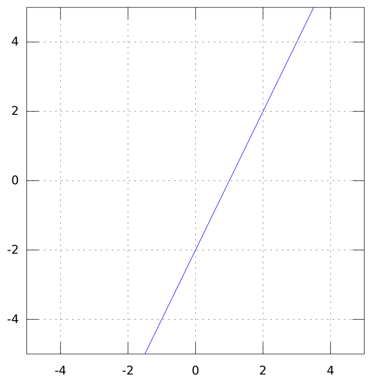
Exercice II.2.2.
Mettre (lorsque c'est possible) sous la forme $y = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
(1) $2x + 3 = 2y - 6$ (2) $2x - 3y = 2 - 3x + 4y$
(3) $2y + 3x - 1 = 7y + 3x + 9$ (4) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{8}y = 2$
(5) $5x + 2y - 1 = \frac{5x}{2} + 2y + 3$ (6) $4x + 4 = y$
(7) $\frac{x-1}{y-1} = 2$ (8) $y = 3 + x + 2y$

Exercice II.2.3.
Tracer les graphes des droites définies par les équations suivantes.
(1) $y = 3x - 2$ (2) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
(3) $y = x$ (4) $y = \frac{5}{2}$
(5) $2y + 4x = 8 - 2x$ (6) $7y + 3x = 2y - 5 + x$

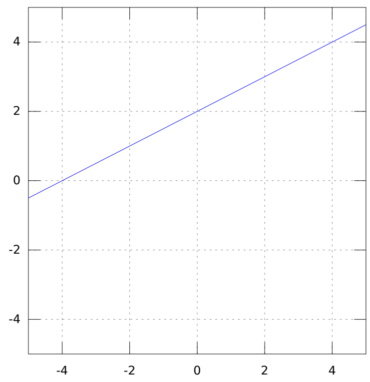
Exercice II.2.4.
Trouver (lorsque c'est possible) les équations canoniques et tracez les graphes des droites suivantes.
(1) Passant par le point $(0; -1)$ et de pente 4. (2) Passant par le point $(3; -4)$ et de pente $\frac{2}{3}$.
(3) Passant par le point $(-2; 0)$ et de pente -2. (4) Passant par les points $(0; 0)$ et $(-2; 1)$.
(5) Passant par les points $(5; 3)$ et $(-1; 9)$. (6) Passant par les points $(-1; 1)$ et $(-2; -\frac{1}{2})$.
(7) Passant par les points $(1; 3)$ et $(5; 3)$. (8) Passant par les points $(-1; 1)$ et $(-1; -3)$.
(9) D'ordonnée à l'origine 3 et passant par le point $(4, 1)$. (10) De pente $-\frac{3}{4}$ et d'ordonnée à l'origine 7.

Exercice II.2.5.
Trouver les équations canoniques des droites représentées ci-dessous.

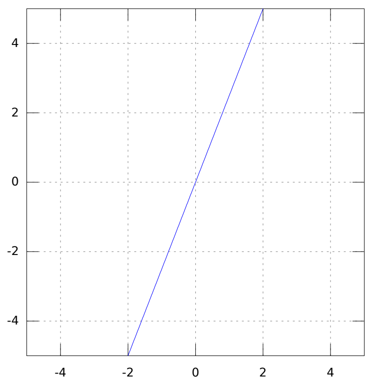
(1)


4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

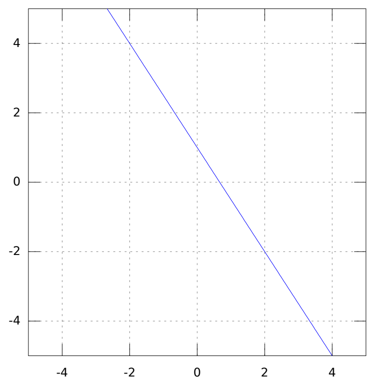
(2)


4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

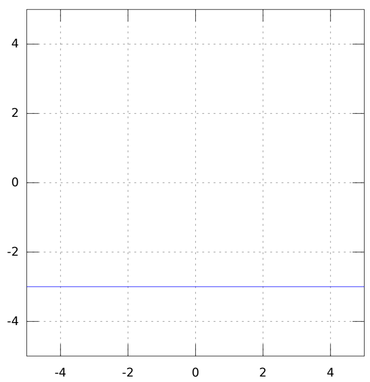
(3)


4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

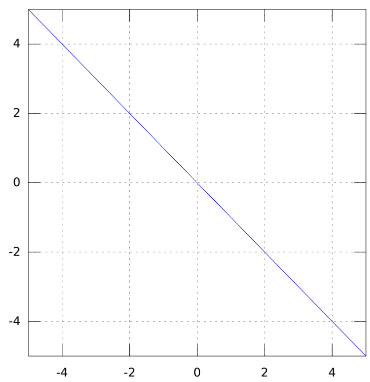
(4)


4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

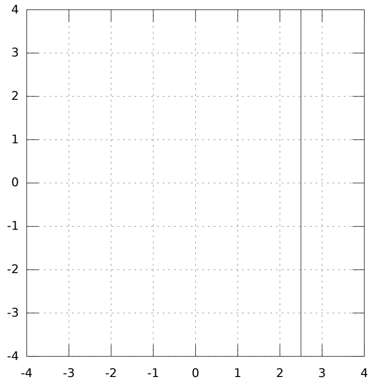
(5)


4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

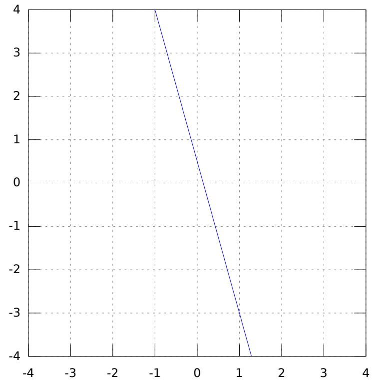
(6)


4
2
0
-2
-4
-4 -2 0 2 4

(7)


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

(8)


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

Exercice II.2.6.
Pour quels a, b la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice II.2.7.
Dessinez les demi-plans correspondant aux inéquations suivantes :

(1) $x + y \geq 0$	(2) $3x - 2y < 3$	(3) $6x - 3y \leq -2x + 4$
(4) $y < 1$	(5) $10x + 10y \geq 20$	(6) $x \leq -2$.

Exercice II.2.8.
Une petite entreprise aimerait fabriquer des machins (nommés M) et des trucs (nommés T). Elle décide d'y consacrer trois employés (nommés comme vous voulez). Comme ces employés ont des capacités différentes qu'on est capable de mesurer très précisément parce qu'on est dans un exercice de mathématiques et non dans la vraie vie, ils prennent divers temps pour produire des machins et des trucs. Cette entreprise est certaine d'écouler tout son stock de trucs et de machins car ce genre de bidule est très en vogue.

	Temps nécessaire pour produire une unité		Temps disponible
	M	T	
Employé 1	4	9	40
Employé 2	5	5	25
Employé 3	10	3	30
Revenu/unité	30.−	40.−	

L'entreprise désire bien entendu maximiser son profit. Il faut donc trouver le nombre de machins et de trucs à produire chaque semaine. On pose donc x et y comme étant respectivement le nombre de machins et de trucs produits.
(1) La fonction à maximiser est-elle $f(x, y) = 40x + 30y$ ou $f(x, y) = 30x + 40y$?
(2) Poser le système d'inéquations correspondant au problème.
(3) Dessiner le polyèdre des solutions admissibles.
(4) Trouver le maximum de $f(x, y)$ dans ce polyèdre.

Exercice II.2.9.
Voici une autre méthode pour le point (4) de l'exercice précédent. On reprend donc la même $f(x, y)$ et le même système d'inéquations.
(a) On pose l'équation $f(x, y) = c$, pour $c \in \mathbb{R}$. Quel genre de graphe a-t-elle ? Y a-t-il un rapport entre les graphes si on prend deux c différents ?
(b) En reprenant le polyèdre des solutions admissibles du point (3) de l'exercice précédent, trouver comment utiliser les informations glânées en (a) pour trouver graphiquement le point du polyèdre où f est maximale.

Exercice II.2.10.
(1) En utilisant les idées de l'exercice précédent, essayez de comprendre pourquoi l'affirmation suivante est vraie :
Si on a une fonction $f(x, y) = ux + vy + w$, avec $u, v, w \in \mathbb{R}$ et un système d'inéquations de la forme

$$\begin{aligned} a_1x + b_2y &\leq c_1 \\ a_2x + b_2y &\leq c_2 \\ a_3x + b_3y &\leq c_3 \\ &\dots \\ a_nx + b_ny &\leq c_n \end{aligned}$$

avec tous les $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, alors soit la fonction $f(x, y)$ sous la contrainte que toutes les inéquations soient satisfaites n'a pas de maximum, soit (si elle en a un) il est donné par la valeur prise sur un "coin" du polynôme des solutions admissibles.
(2) Déduire du point (1) que la même affirmation est vraie si on remplace *maximum* par *minimum* et si certaines inégalités sont avec le symbole $\geq$ plustôt que $\leq$.
(3) Est-ce que le point (2) reste vrai si on remplace certains symboles par $<$ ou $>$?

II.3 Paraboles et équations du second degré

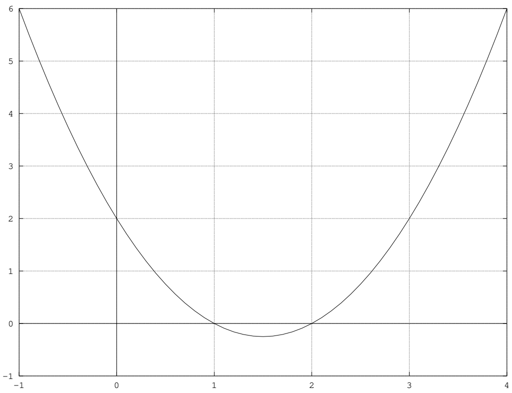
Rappel : quatre identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2 \qquad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\cdot x + a\cdot b$$

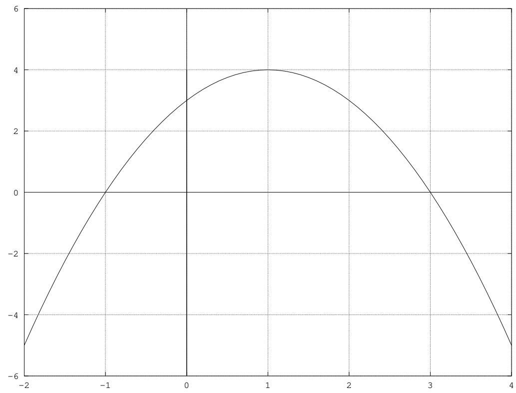
Equation d'une parabole dans le plan
L'équation canonique d'une parabole est de la forme :

$$y = ax^2 + bx + c$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.



La parabole d'équation $y = x^2 - 3x + 2$
Convexe



La parabole d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$
Concave

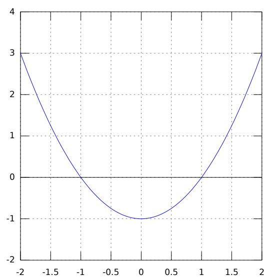
Toute équation pouvant se ramener à la forme canonique est une équation de parabole.
La parabole est *concave* si $a < 0$ et convexe si $a > 0$.
Le *sommet* de la parabole a pour coordonnées

$$(x_s; y_s) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

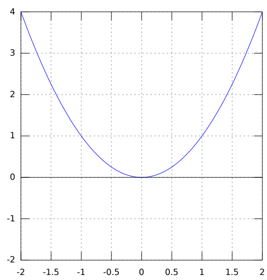
On remarque que l'on a toujours l'égalité suivante :

$$y \;=\; ax^2 + bx + c \;=\; a\cdot(x - x_s)^2 + y_s.$$

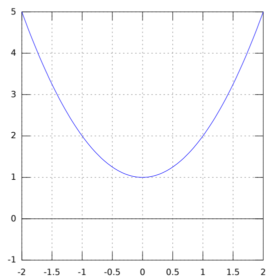
Fonctions du second degré
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction du second degré si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
Le graphe $y = f(x)$ d'une fonction du second degré est une parabole, par extension on dira parfois directement que la fonction elle-même est une parabole, ou une fonction parabolique.
Un point $x \in \mathbb{R}$ est une *racine* de la fonction f si $f(x) = 0$, donc les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Ce sont également les coordonnées en x des points où le graphe de f intersecte l'axe horizontal. Une fonction du second degré peut posséder deux racines, une seule, ou aucune.



Deux racines



Une racine



Aucune racine

Comment trouver les racines d'une fonction du second degré.
Il s'agit donc de trouver toutes les solutions de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

1. *Par factorisation, si c'est possible.*
   Exemple : $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$.
   Donc, $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$. On trouve donc les solutions : $x = 1$ et $x = 2$.
2. *Par la méthode de la complétion du carré.*
   Exemple : $2x^2 + 10x - 4 = 0$.
   Premier pas : on divise par le coefficient de x^2, ici $a = 2$. On obtient :

   $$x^2 + 5x - 2 = 0.$$

   On prend ensuite le coefficient de x (ici, 5), on le divise par deux, et on calcule ceci :

   $$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4}.$$

   On peut donc en déduire :

   $$x^2 + 5x - 2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}.$$

   Il ne reste plus qu'à résoudre :

   $$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{33}{4} \Leftrightarrow x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{33}{4}} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$$

   et on trouve les deux solutions $x = \frac{-5+\sqrt{33}}{2}$ et $x = \frac{-5-\sqrt{33}}{2}$.
3. *En utilisant la formule quadratique.*
   On définit le *discriminant*

   $$\Delta = b^2 - 4ac.$$

   On a ensuite les cas suivants :

$\Delta < 0$	Aucune solution
$\Delta = 0$	Une solution $x = -\dfrac{b}{2a}$.
$\Delta > 0$	Deux solutions $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, que l'on écrit parfois $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

   Exemple : $3x^2 - 4x - 1 = 0$ à résoudre. On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 28$. Les solutions sont donc :

   $$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{7}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Dérivée d'une parabole
Si $p(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole, sa dérivée est la droite $p'(x) = 2ax + b$.

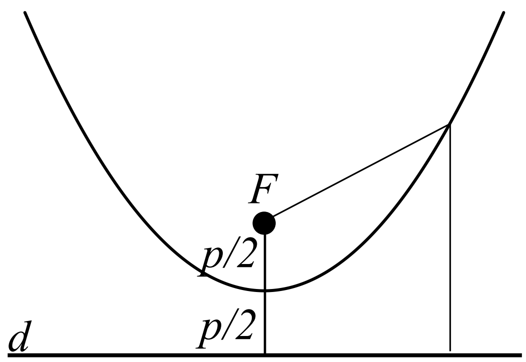
Interpolation : Parabole passant par trois points donnés.
Le théorème suivant sera démontré plus tard :

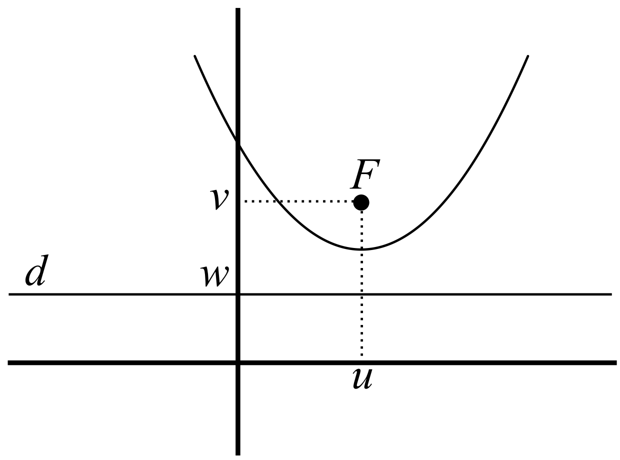
<u>Théorème :</u> Par trois points distincts du plan passe au plus une parabole. Si les points ont des coordonnées horizontales distinctes et ne sont pas alignés, une (et une seule) parabole passe par ces trois points.

Comment trouver l'équation de la parabole.

1. *En résolvant un système d'équations.*
   Exemple : La parabole passe par $A(1;2), B(3;-1)$ et $C(-2;1)$.
   On pose $y = ax^2 + bx + c$, cela nous donne donc le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ -1 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ 1 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2 = a + b + c \\ -1 = 9a + 3b + c \\ 1 = 4a + -2b + c \end{cases}$$
   Et on résout le système pour trouver a, b, c.
2. *Par la formule du polynôme de Lagrange.*
   Si la parabole passe par les points $A(x_0; y_0), B(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$, on pose (en mettant la variable X en majuscule pour plus de clarté) :
   $$f(X) = y_0 \cdot \frac{X - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{X - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \cdot \frac{X - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{X - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{X - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{X - x_1}{x_2 - x_1}$$
   Alors, $y = f(X)$ est une parabole passant par A, B, C. Si A, B, C sont alignés, $f(X)$ sera une droite.

Foyer et directrice d'une parabole.
Une parabole est également le lieu géométrique des points à égale distance d'un point appelé le foyer F et d'une droite appelée la directrice d.



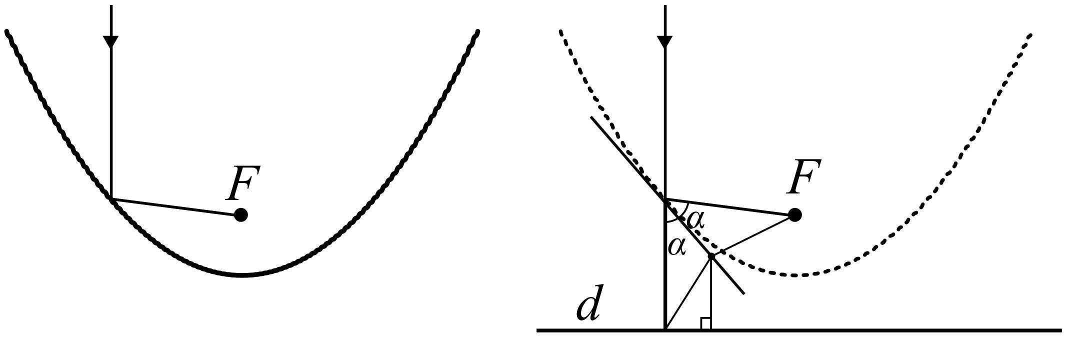


1. *Trouver les foyers et directrices à partir de l'équation canonique $y = ax^2 + bx + c$.*
   Il faut d'abord calculer les coordonnées du sommet $(x_s; y_s)$.
   Coordonnées du Foyer : $F\left(x_s; y_s + \frac{1}{4a}\right)$.
   Equation de la directrice : $y = y_s - \frac{1}{4a}$.
   On utilise souvent la notation $p = \frac{1}{2a}$ pour exprimer la distance entre le foyer et la directrice.
2. *Trouver l'équation canonique $y = ax^2 + bx + c$ à partir du foyer et de la directrice.*
   Etant donnés le foyer $F(u; v)$ et la directrice d'équation $y = w$ (avec $u, v, w \in \mathbb{R}$), on trouve les coefficients a, b, c ainsi :
   $$a = \frac{1}{2(v - w)}, \quad b = \frac{-u}{v - w}, \quad c = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2(v - w)}.$$

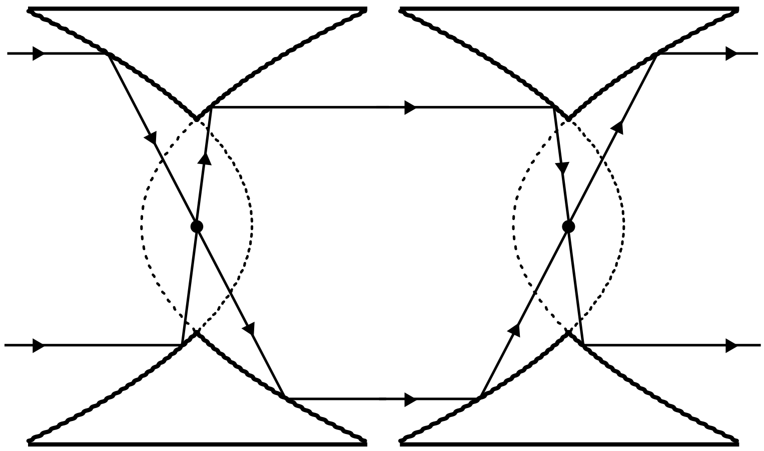
Une propriété des paraboles : concentration des rayons

Une propriété des paraboles explique les nombreuses petites taches blanches de la photo ci-dessous.

En effet, les rayons perpendiculaires à la droite directrice d sont reflétés par la parabole sur le foyer F de celle-ci, permettant d'y placer un capteur qui profitera de cette concentration des rayons.



La démonstration de cette propriété repose sur des considérations géométriques basiques (mais cependant hors du domaine de ce cours). Elle est résumée dans la figure de droite. Cette propriété permet également la fabrication (théorique) d'objets *invisibles dans une direction donnée*, comme celui ci-dessous [2].



2. L'idée est dûe à A. Plakhov et V. Roshchina, *Invisibility in billiards*, Nonlinearity **24**, 847–854 (2011). Le même genre de construction est possible (mais avec des morceaux d'ellipses et d'hyperboles) pour obtenir un objet invisible en un point donné, cf des mêmes auteurs *Bodies invisible from one point*, preprint arXiv :1112.6167.

II.3.1 Exercices sur les paraboles et les équations du second degré

Exercice II.3.1.
Résoudre par factorisation les équations suivantes (lorsque c'est possible).

(1) $x^2 - 4 = 0$	(2) $x^2 - 4x + 4 = 0$
(3) $4x^2 + 12x = -9$	(4) $x^2 - 2 = 0$
(5) $x^2 + 16 = 0$	(6) $x^2 = 15 - 2x$
(7) $x^2 - 5x + 4 = 0$	(8) $9x^2 = 4$

Exercice II.3.2.
Vérifier l'égalité suivante :

$$\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = x^2 - x - 1.$$

Exercice II.3.3.
Résoudre les équations suivantes par la méthode de la complétion du carré.

(1) $x^2 + 4x - 1 = 0$	(2) $x^2 - 6x + 2 = 0$
(3) $x^2 + x - 4 = 0$	(4) $x^2 + 5x = 0$
(5) $2x^2 + 8x - 10 = 0$	(6) $-3x^2 + 6x - 9 = 0$

Exercice II.3.4.
Résoudre (lorsque c'est possible) les équations suivantes par la méthode que vous voulez.

(1) $x^2 - 3x - 1 = 0$	(2) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{4}{3} = 0$
(3) $2x^2 + 2x = 4x - 5$	(4) $-x^2 + 5 = 3$
(5) $-x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0$	(6) $9x^2 + 6x = -1$
(7) $16x^2 - 16x + 4 = 0$	(8) $4x^2 - 2x + 1 = (4x + 1)(x - 2)$

Exercice II.3.5.
Trouver le sommet, les racines (s'il y en a), le foyer et la directrice des paraboles suivantes, et tracer leur graphe.

(1) $f(x) = x^2 - 1$	(2) $f(x) = x^2 - 3x - 10$
(3) $f(x) = x^2 + 2x + 2$	(4) $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$
(5) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	(6) $f(x) = \frac{1}{16}x^2 - x + 1$

Exercice II.3.6.
Trouver l'équation de la parabole passant par les trois points donnés.

(1) $A(0; 1), B(1; 2), C(2; 4)$	(2) $A(3; \frac{1}{2}), B(1; 0), C(-1; 2)$
(3) $A(\frac{1}{2}; -1), B(-2; -2), C(\frac{5}{2}; -1)$	(4) $A(-1; 1), B(1; 2), C(3; 3)$

Exercice II.3.7.
Trouver l'équation décrivant tous les points à égale distance des points $A(1;2)$ et $B(4;-3)$. Rappel : la distance entre deux points $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ dans le plan est donnée par Pythagore :

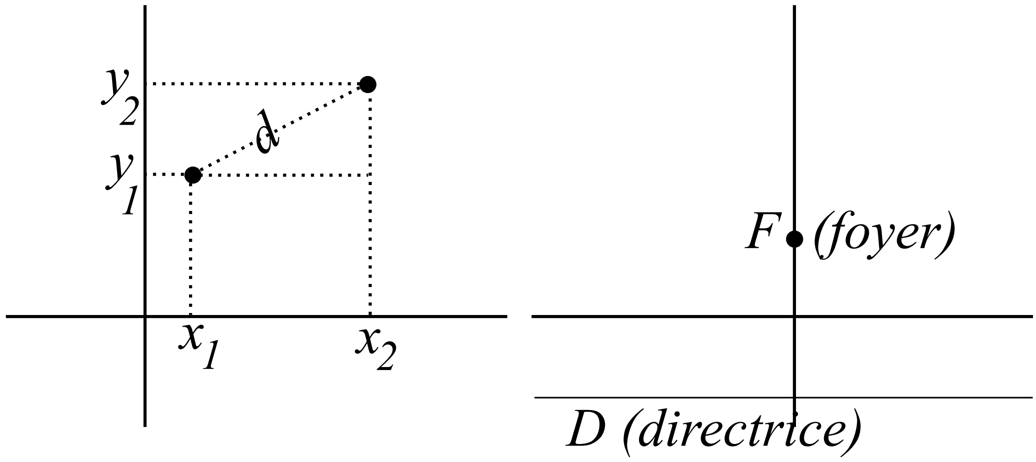
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Exercice II.3.8. Exercice d'introduction aux foyer et directrice

Une *parabole* est définie par une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
Rappel : la distance entre deux points $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ dans le plan est donnée par Pythagore :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

La distance entre un point A et une droite D est la plus petite distance possible entre A et un point de D. (En pratique : on part de A, on se dirige perpendiculairement vers la droite, et on mesure la distance parcourue jusqu'à l'atteindre.)



1. On prend la droite D donnée par l'équation $y = -1$, et le point $F(0;1)$ (voir l'image ci-dessus). Montrer que les points $A(0;0)$, $B(4;4)$ et $C(-2;1)$ sont chacun à distance égale de F et de D.
2. En utilisant la définition de la distance ci-dessus (qui se simplifie grandement lorsqu'on calcule une distance verticale), trouver l'équation des points $(x;y)$ qui sont à distance égale de F et de D donnés au point 1. (Faire un dessin.)
3. Même question que la précédente avec $F(1;-3)$ et D donnée par l'équation $y = 5$. Essayez de repérer un rapport entre le coefficient de x^2 et la distance entre D et F.
4. Soit la parabole P donnée par l'équation $y = \frac{1}{2}x^2$. Essayez de "deviner" les coordonnées de F et l'équation de la droite D pour que P soit le lieu des points à égale distance de F et de D. Idem pour la parabole $y = \frac{1}{8}x^2$.
5. Même question que la précédente pour l'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$.
6. Même question que la précédente pour l'équation $y = x^2 + 4x + 8$.
7. Tenter d'en déduire une formule pour trouver F et D pour l'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Exercice II.3.9.
Calculez les dérivées des paraboles suivantes.
(a) $p(x) = 3x^2 - 2x + 2$
(b) $p(x) = -4x^2 + 3$
(c) $p(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{17}{47}$

Exercice II.3.10.
Émulez le Brahmagupta qui est en vous.
Cet exercice devrait vous permettre de démontrer la formule de Viète-Brahmagupta pour la résolution des équations du second degré.
(a) Résoudre les équations faciles suivantes (ou indiquer quand il n'y a pas de solution) :

1. $(x+1)^2 = 5$
2. $(x-4)^2 - 7 = 0$
3. $(x+2)^2 + 2 = 5$
4. $(x-17)^2 + 14 = 2$

(b) Dans quels cas (donc, pour quels $u, v \in \mathbb{R}$) y a-t-il zéro, une ou deux solutions à l'équation $(x+u)^2 + v = 0$?

(c) Comprendre les égalités suivantes :

1. $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$
2. $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$
3. $x^2 + 5x = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$

(d) Essayez de faire les mêmes manipulations qu'au point (c) :

1. $x^2 + 8x = \dots$
2. $x^2 - 24x = \dots$
3. $x^2 + 7x = \dots$
4. $x^2 + \frac{2}{3}x = \dots$

(e) Voici la résolution de deux équations du deuxième degré par la méthode de la complétion du carré, qui se base sur les points (a), (c) et (d). Comprendre ce qui s'y passe.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 7 &= 0 \\ (x+2)^2 - 4 - 7 &= 0 \\ (x+2)^2 - 11 &= 0 \\ (x+2)^2 &= 11 \\ x + 2 &= \pm\sqrt{11} \\ x &= -2 \pm \sqrt{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x + \frac{1}{2} &= 0 \\ x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6} &= 0 \\ \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{1}{6} &= 0 \\ \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{6}{36} &= 0 \\ \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{19}{36} \\ x + \frac{5}{6} &= \pm\sqrt{\frac{19}{36}} = \frac{\pm\sqrt{19}}{6} \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{19}}{6} \end{aligned}$$

(f) Résoudre les trois équations suivantes par la méthode du point (e).

1. $x^2 - 6x + 3 = 0$
2. $x^2 - 24x - 7 = 0$
3. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

(g) Soyez Brahmagupta : refaites le point (f) de manière littérale :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ (x + \dots)^2 - \dots + \frac{c}{a} &= 0 \\ &\vdots \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(Si } b^2 - 4ac \geq 0\text{, sinon, pas de solution)} \end{aligned}$$

II.4 Polynômes (à une variable) à coefficients dans un anneau

Définition
On se donne un ensemble E de nombres (ou d'autres choses plus g'enérales) dans lequel il est possible d'additionner, soustraire et multiplier sans sortir de cet ensemble. Un tel objet mathématique s'appelle un *anneau*, ou *ring* en anglais. Si de plus il existe une division (sans reste) dans E, on appelle alors cet objet un *corps*, ou *field* en anglais. (Les additions, soustraction, multiplication et division doivent avoir les mêmes propriétés que celles dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, à savoir associativité, commutativité, distributivité, etc.) Par exemple, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}_p$ (les nombres modulo p) lorsque p est un nombre premier sont des corps, tandis que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}_p$ lorsque p n'est pas premier n'en sont pas, mais sont néanmoins un anneau.

Un *polynôme de degré* $n \in \mathbb{N}$ *(ou fonction polynomiale de degré* n*) à coefficients dans* E est une fonction $P : E \to E$ (où E est donc un anneau) de la forme générale suivante :

$$P : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in E$ et $a_n \neq 0$. On remarque que seules des puissances *entières* ≥ 0 de la variable sont autorisées. Le fait que E soit un anneau assure que la fonction P va bien de E dans E.
Le *degré* $deg(P(x))$ du polynôme $P(x)$ défini est n. L'ensembles des polynômes à coefficients dans E est noté par $E[x]$.

Dans ce cours, on ne considèrera presque que le cas où $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{Q}$, mais la plupart des applications (à la théorie des codes, par exemple) utilisent ce qu'on appelle des *corps finis*, comme $\mathbb{Z}_p$ avec p premier.

Cas particuliers

1. Polynômes constants, de degré 0 : $n = 0$, $P(x) = a_0$. Par convention le polynôme constant sur 0, $P(x) = 0$, a degré $-\infty$.
2. Droites ou polynômes de degré $n = 1$: $P(x) = a_1 x + a_0$.
3. Paraboles ou polynômes de degré $n = 2$: $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Opérations algébriques sur les polynômes

Les opérations ci-dessous sont possibles car les coefficients appartiennent tous à un anneau et on n'effectue que des additions, soustractions et multiplications.

	Exemple	**Cas général**
	$P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 9x + 3$ $Q(x) = 3x - 1$	$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ On supposera que $m \leq n$ dans ce tableau (pour simplifier).
Addition	$P(x)+Q(x) = \big(6x^3-11x^2+9x+3\big)+\big(3x-1\big)$ $= 6x^3 - 11x^2 + 12x + 2$	$P(x) + Q(x) = \Big(\sum_i a_i x^i\Big) + \Big(\sum_i b_i x^i\Big)$ $= \sum_{i=0}^{m}(a_i + b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i$
Soustraction	$P(x)-Q(x) = \big(6x^3-11x^2+9x+3\big)-\big(3x-1\big)$ $= 6x^3 - 11x^2 + 6x + 4$	$P(x) - Q(x) = \Big(\sum_i a_i x^i\Big) + \Big(\sum_i b_i x^i\Big)$ $= \sum_{i=0}^{m}(a_i - b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i$
Multiplication	$P(x) \cdot Q(x) = \big(6x^3 - 11x^2 + 9x + 3\big) \cdot \big(3x - 1\big)$ $= 18x^4 - 39x^3 + 38x^2 - 3$	$P(x) \cdot Q(x) = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\Big)$ $= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i \cdot b_j \cdot x^{i+j}$

Notation simplifiée pour les sommes : on note parfois $\sum_i a_i x^i$ à la place de $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, avec la convention que lorsque l'indice i est plus grand que le degré du polynôme, alors $a_i = 0$, ce qui permet de simplifier l'écriture dans certains cas.

Propriétés du degré
Pour $P(x), Q(x)$ polynômes de degrés n et m, respectivement, on a :

1. $deg(P+Q) \leq \max\{deg(P), deg(Q)\}$; $deg(P-Q) \leq \max\{deg(P), deg(Q)\}$,
2. $deg(P \cdot Q) = deg(P) + deg(Q)$.

Racines de Polynômes
L'ensemble des *racines* (aussi appelés *zéros*) dans E d'un polynôme $P(x)$ est $\{x \in E \,|\, P(x) = 0\}$.

II.4.1 Polynômes à une variable réelle $\mathbb{R}[x]$

Les polynômes à une variable réelle sont ceux où on prend les coefficients dans $\mathbb{R}$. Ce sont donc des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le grand avantage de $\mathbb{R}$ sur un anneau général est la possibilité de pouvoir diviser, ce qui permet d'effectuer l'algorithme de division euclidienne et d'utiliser la formule du polynôme de Lagrange, définis ci-dessous.

Division euclidienne de Polynômes (à coefficients réels)
Exemple :

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
4x^4 & +2x^3 & -3x^2 & +6x & -1 & 2x^2 & -x & -1 \\ \cline{6-8}
-(4x^4 & -2x^3 & -2x^2) & & & 2x^2 & & \\ \cline{1-3}
 & 4x^3 & -x^2 & +6x & & & +2x & \\
 & -(4x^3 & -2x^2 & -2x) & & & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2 & +8x & -1 & & & +\frac{1}{2} \\
 & & -(x^2 & -\frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}) & & & \\ \cline{3-5}
 & & & \frac{17}{2}x & -\frac{1}{2} & & &
\end{array}$$

$$2x^2 \cdot (2x^2 - x - 1) = 4x^4 - 2x^3 - 2x^2$$
$$2x \cdot (2x^2 - x - 1) = 4x^3 - 2x^2 - 2x$$
$$\tfrac{1}{2} \cdot (2x^2 - x - 1) = x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

Donc, $4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = (2x^2 - x - 1) \cdot (2x^2 + 2x + \frac{1}{2}) + \frac{17}{2}x - \frac{1}{2}$.

Théorème Pour tout polynômes $A(x)$ et $B(x)$, il existe un unique couple de polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \text{ et } deg(R(x)) < deg(B(x)).$$

Si $R(x) = 0$ (donc $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$), on dit que $B(x)$ divise $A(x)$ (tout comme on dit que 3 divise 12).

Racines de Polynômes (à coefficients réels)
On rappelle que l'ensemble des *racines* (aussi appelés *zéros*) réelles d'un polynôme $P(x)$ est $\{x \in \mathbb{R} \,|\, P(x) = 0\}$.

Théorème. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels et $a \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :
(1) $P(a) = b \iff$ Le reste de la division de $P(x)$ par $(x-a)$ est le polynôme constant b.
(2) $a \in \mathbb{R}$ est une racine de $P(x) \iff$ le polynôme $(x-a)$ divise $P(x)$.

Théorème. Un polynôme à coefficients réels de degré $n \geq 0$ possède *au plus* n racines.

Théorème. Un polynôme à coefficients réels de degré impair possède *au moins* une racine dans $\mathbb{R}$.

Théorème. Soit $P(x)$ un polynôme et $a \in \mathbb{R}$. Alors, le reste $R(x)$ de la division de $P(x)$ par $(x-a)^2$ est la droite tangente à $P(x)$ au point a. On peut donc trouver cette droite sans dériver.

Comment trouver des racines de polynômes de degré > 2.
Il existe des formules similaires à celle de Bramagupta-Viète pour les degrés 3 et 4, mais nous ne les donnerons pas (celle pour le degré 4 est particulièrement infernale). Par contre, il est démontré (Théorème d'Abel-Rufini, 1802 et 1824) qu'aucune formule (n'utilisant que les opérations $+; -; \cdot; /; \sqrt[n]{}$) n'existe en général pour les degrés supérieurs. Par exemple il n'y a pas de telle formule pour le polynôme $x^5 - x + 1$. Cependant, si on connait une racine u de $P(x)$, on peut diviser par $(x-u)$, ce qui a pour effet d'enlever un degré.
Exemple :
$P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$. On voit que 1 est une racine de $P(x)$. On effectue la division par $(x-1)$:

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & -4x^2 & +2x & +1 & x & -1 & \\ \cline{5-6}
-(x^3 & -x^2) & & & x^2 & -3x & -1 \\ \cline{1-2}
 & -3x^2 & +2x & & & & \\
 & -(-3x^2 & +3x) & & & & \\ \cline{2-3}
 & & -x & +1 & & & \\
 & & -(-x & +1) & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Donc, $P(x) = (x-1)(x^2-3x-1)$, et il suffit d'utiliser Bramagupta-Viète pour trouver les deux autres racines $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

Dérivée d'un polynôme.
La dérivée de $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est $p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$.

Interpolation
Théorème. Par $n+1$ points distincts du plan $\mathbb{R}^2$, de coordonnées horizontales distinctes 2 à 2, passe exactement un polynôme (à coefficients réels) de degré $\leq n$.

Ce théorème permet, en un certain sens, d'approximer une fonction par un polynôme.

Polynôme de Lagrange (Waring 1779, Euler 1783, Lagrange 1795)
Etant donné $n+1$ points $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \ldots, (x_n; y_n)$ (avec les x_i distincts), on pose :

$$
\ell_i(x) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n
$$
$$
L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \ell_i(x)
$$

$L(x)$ est un polynôme de degré $\leq n$ qui satisfait bien $L(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

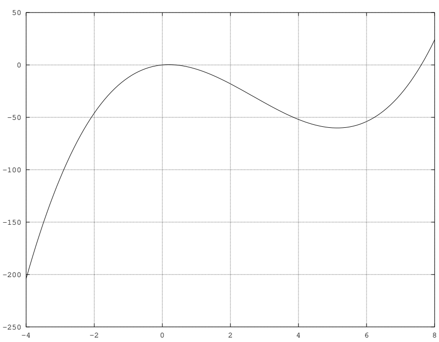
Propriété importante, dont la preuve est donnée dans les exercices : Si les x_i sont des entiers *consécutifs* dans $\mathbb{Z}$ (par exemple $0, 1, 2, 3, \ldots, n$, ou encore $1, 2, 3, \ldots, n+1$) et que les y_i sont également des entiers, alors $L(k)$ est un nombre entier pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par contre, les coefficients de $L(x)$ ne sont pas forcément entiers.

Graphes
Théorème. (Un peu informel.) Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polynôme à ceofficients réels avec $a_n \neq 0$. *Si* $|x|$ *est assez grand*, le signe de $P(x)$ ne dépend que de la parité de n, du signe de a_n et celui de x, suivant le tableau suivant :

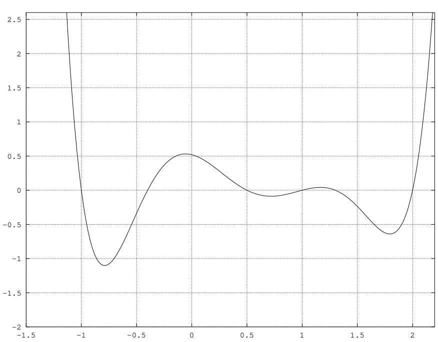
n pair	n impair
$\mathrm{sgn}(P(x)) = \mathrm{sgn}(a_n)$	$\mathrm{sgn}(P(x)) = \mathrm{sgn}(a_n) \cdot \mathrm{sgn}(x)$

Exemple.
$P(x) = -3x^6 + 2x^2 - x + 2$, $Q(x) = 2x^5 - x^3 + 2x$. Si $|x|$ est assez grand, alors $P(x) > 0$, alors que $Q(x) < 0$ lorsque $x < 0$ et $Q(x) > 0$ lorsque $x > 0$ (lorsque $|x|$ est assez grand à nouveau).

Théorème. (Assez informel.) Le graphe d'un polynôme à coefficients réels de degré n possède *au plus* $n-1$ extrêmums locaux, donc au plus $n-1$ "bosses".



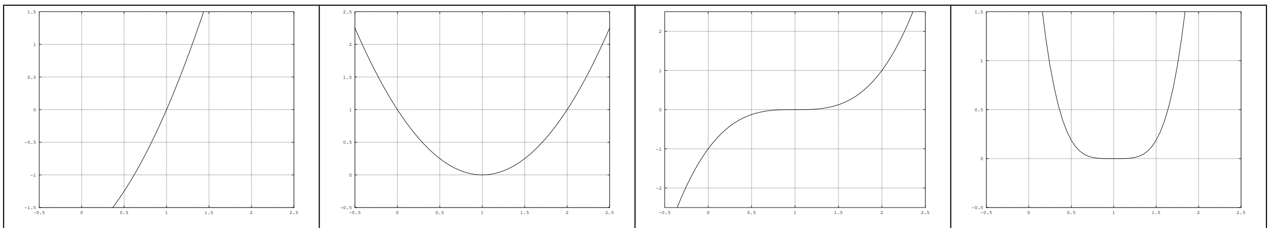
Polynôme de degré 3
2 extremums locaux



Polynôme de degré 6
5 extremums locaux

Multiplicité des racines
Définition. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une *racine de multiplicité* $n \in \mathbb{N}$ de $P(x)$ si $(x-a)^n$ divise $P(x)$ et que $(x-a)^{n+1}$ ne divise pas $P(x)$.

Si a est une racine de multiplicité *impaire*, alors le graphe de $P(x)$ traverse l'axe horizontal en a. Si a est une racine de multiplicité *paire*, alors le graphe de $P(x)$ touche l'axe horizontal en a mais sans le traverser.



Multiplicité 1	Multiplicité 2	Multiplicité 3	Multiplicité 4

II.4.2 Polynômes à coefficients dans un corps

Qu'est-ce que c'est que cette histoire de *corps*, me direz vous. En fait c'est simple : un corps (en anglais : *field*) est un ensemble muni d'une addition, d'une soustraction, d'une multiplication et d'une division qui satisfont les mêmes propriétés que les opérations correspondantes dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$. D'ailleurs, on a déjà parlé de tout ça en début de chapitre. En gros : associativité, commutativité, distributivité et existence d'inverses additifs et multiplicatifs. On note toujours par 1 l'élément neutre de la multiplication et par 0 celui de l'addition.
Les corps les plus usuels (pour ce cours) sont les rationnels $\mathbb{Q}$, les réels $\mathbb{R}$ et les complexes $\mathbb{C}$. $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps, car 2 n'a pas d'inverse multiplicatif ($\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$), $\mathbb{R}_+$ n'est pas un corps car 1 n'a pas d'inverse additif ($-1 \notin \mathbb{R}_+$), entre autres. Les corps les plus utiles en cryptologie sont les entiers modulo un nombre premier, par exemple $F_2 = \{0,1\}, F_3 = \{0,1,2\}, F_5 = \{0,1,2,3,4\}$, etc. Le fait que ces ensembles soient des corps vient de l'identité de Bezout (dans les entiers), que vous voyez dans l'autre cours de mathématiques (et ci-dessous, mais sans preuve).

Si K est un corps, on note par $K[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K. Par exemple, $\mathbb{R}[x]$ sont les polynômes à coefficients réels, $\mathbb{Q}[x]$ ceux à coefficients dans les rationnels, $F_2[x]$ ceux à coefficients binaires, etc. On appelle *unitaire* un polynôme dont le coefficient du plus grand degré est 1 (en anglais : *monic* polynomial, mais en français un polynôme monique, ça sonne étrange). Par exemple, x^2+3x+2 est un polynôme unitaire (dans $\mathbb{R}[x]$ ou $\mathbb{Q}[x]$), mais $2x^3+x^2-x+1$ ne l'est pas. On dit qu'un polynôme est *irréductible* si on ne peut pas l'écrire comme un produit de polyômes de degrés strictement plus petits. Attention : un polynôme peut être irréductible dans un certain $K[x]$ et pas dans un autre. Par exemple, $P(x) = x^2-2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$, mais dans $\mathbb{R}[x]$ on a $P(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.
Il se trouve que $K[x]$ a de nombreuses propriétés très similaires à celles des entiers $\mathbb{Z}$, et d'autres en plus. On a déjà vu (dans les réels) certaines d'entre elles (les numéro 1, 4 et 5), un examen attentif du cas réel montre qu'on a utilisé uniquement le fait de pouvoir additionner, soustraire, multiplier et diviser les coefficients. On donne les autres propriétés sans démonstration. Le degré $\deg(P(x))$ d'un polynôme $P(x)$ est défini comme dans le cas des réels et rationnels.

1. Division Euclidienne : Si $A(x)$ et $B(x)$ sont dans $K[x]$, alors il existe des uniques polynômes $Q(x), R(x)$ dans $K[x]$ tels que $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ et $\deg(R(x)) < \deg(B(x))$.
2. PGCD : Si $A(x)$ et $B(x)$ sont dans $K[x]$, alors il existe un unique polynôme unitaire $D(x)$ qui divise $A(x)$ et $B(x)$ et qui est de degré maximal avec cette propriété. La méthode pour le trouver est presque la même que dans les entiers : on fait une succession de division polynômiales.
3. Identité de Bezout : Si $A(x)$ et $B(x)$ sont dans $K[x]$, alors il existe des uniques polynômes $M(x), N(x)$ dans $K[x]$ tels que $A(x) \cdot M(x) + B(x) \cdot N(x) = D(x)$, où $D(x)$ est le PGCD (unitaire) de $A(x)$ et $B(x)$, et $\deg(M(x)) \leq \deg(A(x)) - \deg(D(x))$, $\deg(N(x)) \leq \deg(B(x)) - \deg(D(x))$. La méthode pour les trouver est presque identique à celle des entiers.
4. Factorisation unique : $A(x) \in K[x]$ s'écrit de manière unique comme un produit d'une constante et de polynômes unitaires irréductibles. Par unique, on entend à l'ordre près, tout comme $6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.
5. Factorisation par une racine : Si $b \in K$, $A(x) \in K[x]$ et $A(b) = 0$, alors $A(x) = (x-b)Q(x)$, avec $Q(x) \in K[x]$.

6. Interpolation : Par $n+1$ points dans K^2, qui ont leur premières coordonnées toutes distinctes, il passe un unique polynôme de $K[x]$ de degré $\leq n$. Ce polynôme peut être calculé avec la formule de Lagrange, en notant bien que lorsqu'on divise par $x_i - x_k$, cela revient à multiplier par l'inverse multiplicatif de $x_i - x_k$, tout comme diviser par 2 revient à multiplier par $\frac{1}{2}$, qui est l'inverse multiplicatif de 2.

Tout cela permet d'utiliser par exemple des polynômes à coefficients binaires en cryptologie, comme dans l'exemple du CRC qui se trouve un peu plus loin dans le cours, ou de faire les procédures de Reed-Solomon ou de Shamir (également ci-après) dans les entiers modulo un premier F_p.

II.4.3 Applications

Application I. Le partage de clef secrète de Shamir

(A. Shamir, 1979)
Supposons que l'on ait une information secrète S codée sous forme de chiffre. On veut partager le secret en n "paquets" de manière à ce que la connaissance de k paquets (avec $k \leq n$) suffise pour retrouver S, mais que la connaissance de $k-1$ paquets ne donne *aucune* information sur S. Ce schéma est appelé schéma seuil $(k; n)$.

Utilité.
– Version romantique : On envoie 6 hommes traverser les lignes ennemies, chacun en possession d'une partie de l'information, en espérant qu'au moins 3 pourront passer les lignes, et qu'au maximum 2 se feront prendre vivants. Avec 3 parts sur 6, on peut reconstituer le secret, mais pas avec 2. La guerre est gagnée, mon commandant.
– Version pragmatique : Un coffre dont l'ouverture nécessite l'accord de plusieurs personnes.

Idée et méthode.
Par exemple, on veut $n = 6$ et $k = 3$. On suppose que le secret et $S = 1234$.

Préparation.
Le secret sera inclus comme coefficient constant dans un polynôme de degré $k-1$, donc, dans le cas $k = 3$, dans un polynôme de degré 2 : $p(x) = a_2x^2 + a_1x + S$. On choisit donc aléatoirement les autres coefficients (entiers), par exemple $a_1 = 166$, $a_2 = 94$, et on pose donc :

$$p(x) = 94x^2 + 166x + 1234.$$

On prend ensuite n points sur ce polynôme, comme ici $n = 6$ on peut par exemple choisir :

$$D_1(1; 1494),\ D_2(2; 1942),\ D_3(3; 2578),\ D_4(4; 3402),\ D_5(5; 4414),\ D_6(6; 5614).$$

Attention : Ne pas prendre le point $(0; 1234)$ car il contient l'information secrète.

L'information privée est constituée de ces 6 points, chacun étant distribué à une personne.
L'information publique est : $k = 3$, $n = 6$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{N}$, $a_0 = S$.

Reconstruction.
Supposons qu'on ait récupéré les points $(x_0; y_0) = (2; 1942)$, $(x_1; y_1) = (4; 3402)$, $(x_2; y_2) = (5; 4414)$. Afin de retrouver $p(x)$ (et donc S), on calcule les polynômes de Lagrange :

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x-4)(x-5)}{(2-4)(2-5)} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{10}{3} \\
\ell_1(x) &= \frac{(x-2)(x-5)}{(4-2)(4-5)} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 5 \\
\ell_2(x) &= \frac{(x-2)(x-4)}{(5-2)(5-4)} = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Donc :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \cdot \ell_i(x) = 1942 \cdot \ell_0(x) + 3402 \cdot \ell_1(x) + 4414 \cdot \ell_2(x) = 94x^2 + 166x + 1234.$$

On a bien retrouvé le polynôme de départ.

Petite subtilité.
La méthode ci-dessus est décrite pour des polynômes à coefficients réels, mais elle fonctionne dans $K[x]$ pour K n'importe quel corps. Afin d'avoir une sécurité (théorique) maximale, on travaille en fait dans les entiers modulo p, pour p un nombre premier plus grand que tous les coefficients, plutôt que dans les réels.

Application II. Les codes de Reed-Solomon (version naïve)

(I.S. Reed et G. Solomon, 1960)
On veut transmettre une certaine information, par exemple la liste de nombres $[2, 34, 121, 3, 54]$, mais la transmission se produit dans un canal bruyant, et des erreurs dans la réception sont à prévoir. On aimerait déterminer une procédure afin que ces erreurs soient automatiquement détectées et corrigées (pour autant qu'il y en ait moins qu'un certain seuil). Nous allons présenter ici une version naïve de la méthode devisée par Reed et Solomon, où le décodage se fait de manière extrêmement laborieuse (mais qui fonctionne). Pour commencer, on décrit la méthode dans $\mathbb{Q}[x]$ (donc : les coefficients seront des fractions).

Procédure
– On considère que la liste de nombres $[2, 34, 121, 3, 54]$ représentent les valeurs d'un polynôme $p(x)$ aux points $[0, 1, 2, 3, 4, 5]$. Il est important de fixer la longueur de la liste, qui correspond au degré $+1$ du polynôme. Pour trouver $p(x)$, on utilise le polynôme de Lagrange pour les points

$$(0; 2),\ (1; 34),\ (2; 121)\ (3; 3),\ (4; 54).$$

On trouve donc (en utilisant le package Lagrange qu'on aura eu l'intelligence de coder au préalable) :

$$p(x) = \frac{317}{12}x^4 - \frac{1211}{6}x^3 + \frac{5377}{12}x^2 - \frac{722}{3}x + 2.$$

– On prend n valeurs supplémentaires (aux entiers consécutifs) sur ce polynôme, par exemple si $n = 2$:

$$(5; 1282),\ (6; 5329).$$

– On transmet la liste $[2, 34, 121, 3, 54, 1282, 5329]$. Certaines erreurs peuvent survenir, et une ou plusieurs entrées de la suite peuvent être reçues de manière erronées, ou même être effacées.
– Supposons que la liste reçue contient une erreur à la troisième place, par exemple on reçoit $[2, 34, 4, 3, 54, 1282, 5329]$. On lui fait correspondre la liste de points

$$[(0; 2), (1; 34), (2; 4), (3; 3), (4; 54), (5; 1282), (6; 5329)]$$

Pour le décodage, on utilise le fait que l'on sait que la liste originale est de longueur 5. On prend donc tous les sous-ensembles de taille 5 de la liste de points :

$$\begin{array}{ll} [(0;2),(1;34),(2;4),(3;3),(4;54)], & [(0;2),(1;34),(2;4),(3;3),(5;1282)], \\ [(0;2),(1;34),(2;4),(3;3),(6;5329)], & [(0;2),(1;34),(2;4),(4;54),(5;1282)], \\ [(0;2),(1;34),(2;4),(4;54),(6;5329)], & \text{etc...} \end{array}$$

Pour chacun de ces sous-ensembles, on calcule le polynôme de Lagrange passant par ces points. On choisit ensuite le polynôme le plus populaire parmi tous ceux qui apparaissent. Dans notre cas, le polynôme

$$q(x) = \frac{317}{12}x^4 - \frac{1211}{6}x^3 + \frac{5377}{12}x^2 - \frac{722}{3}x + 2$$

apparaît 6 fois parmi les 21 possibilités, c'est le maximum, on le choisit donc.
– Pour terminer, on prend les valeurs du polynôme $q(x)$ aux points $[0, 1, 2, 3, 4]$ afin de retrouver l'information que l'on voulait transmettre, et comme $q(x) = p(x)$, on obtient bien la bonne liste.

Notes :

1. Comme le polynôme $p(x)$ est calculé à partir de points dont les coordonnées horizontales sont les entiers consécutifs $0, 1, \ldots, m$, on sait que $p(x)$ est un entier (mais peut-être négatif) lorsque x est entier.

2. La méthode de décodage présentée ici est extrêmement couteuse en temps. Des méthodes bien plus rapides existent dans le cas des véritables codes de RS, en arithmétique modulaire. Ces méthodes utilisent entre autres la division Euclidienne de polynômes.
3. L'arithmétique modulaire permet de se débarrasser des fractions et de ne travailler qu'avec des entiers, voire même des bits $\{0, 1\}$. On rappelle que, lorsqu'on effectue Lagrange, la division par $x_i - x_k$ devient, en arithmétique modulaire (ou dans un corps en général) une multiplication par l'inverse multiplicatif de $x_i - x_k$.
4. Il n'est pas clair a priori que la méthode de décodage donne vraiment le bon polynôme, même si on ajoute 2 données et qu'il n'y a qu'une seule erreur. On peut utiliser le fait que le polynôme qui passe par le plus de points de la liste sera le plus populaire. Dans notre exemple, il y a 7 points transmis, et $p(x)$ passe par 6 de ces points. Tout autre polynôme de la liste (nommons-le $q(x)$) devra passer par le point erroné. Mais il ne pourra passer qu'au maximum par 4 parmi les 6 autres points, car s'il passe par 5 d'entre eux, $q(x)$ et $p(x)$ sont deux polynômes de degré ≤ 4 qui se croisent en 5 points, ils sont donc égaux. Il s'ensuit qu'aucun polynôme sauf le bon, $p(x)$, ne peut apparaître plus d'une fois.
   De manière générale, l'ajout de $2n$ données permet de corriger jusqu'à n erreurs. L'argument est presque le même que dans l'exemple ci-dessus, donnons-le pour information.
   La liste transmise L_T contient les m premiers points qui constituent l'information, et $2n$ points supplémentaires. Notons par $P(x)$ le polynôme correspondant à L_T, de degré $\leq m-1$. Notons L_R la liste reçue et supposons qu'il y a au maximum n erreurs dans la liste transmise. Donc, L_R contient $m+2n$ valeurs en tout, dont au moins $m+2n-n = m+n$ valeurs correctes et au plus n erronées. Notons par PTS_R la liste des points correspondants à L_R (en ajoutant les coordonnées horizontales $0, 1, \ldots, m+2n-1$). $P(x)$ passe donc par au moins $m+n$ points de PTS_R. Etant donné un autre polynôme $Q(x)$ de la liste des polynômes, il devra passer au moins par un point erroné (il pourrait passer par tous), mais il ne pourra pas passer par m points corrects, sinon comme avant il serait égal à $P(x)$. Donc, $Q(x)$ pourra passer par $m-1$ points corrects au maximum, et au maximum par tous les points erronés, au nombre de n. Il passe au maximum par $(m-1)+n$ points de PTS_R. Il s'ensuit que $P(x)$ passe par strictement plus de points de PTS_R que $Q(x)$.
5. On peut utiliser une autre méthode pour décoder (suggérée par une étudiante, d'ailleurs), qui est a priori un peu plus rapide, mais néanmoins toujours "naïve". En reprenant les conventions du point précédent : m est la longueur de la liste originale, on ajoute $2n$ points (et on suppose qu'il y a au plus n erreurs, donc). Au lieu de prendre les sous-ensembles de taille m des points de la liste reçue (de longueur $m+2n$), on prend les sous-ensembles de taille $m+n$. Si un polynôme obtenu (avec Lagrange) par un de ces sous-ensembles est de degré $\leq m-1$, alors on sait que c'est le bon polynôme. En effet, le bon polynôme $P(x)$ (qui est de degré $\leq m-1$) passera par au moins $m+n$ points de la liste et va donc apparaître. Si $Q(x)$ est un polynôme de degré $\leq m-1$ passant par au moins $m+n$ points de la liste, alors (comme avant) $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux sur au moins m points, et donc ils devraient être égaux tout court. Donc, si $Q(x)$ est un mauvais polynôme obtenu avec une famille de $m+n$ points, comme il passe par au moins $m+n$ points par définition, il est de degré $\geq m$.
   Par exemple, si on part d'une liste de $m = 5$ points et qu'on ajoute $2n = 2$ points, on peut prendre tous les sous-ensembles de $m+n = 5+1 = 6$ points parmi les $m+2n = 7$. S'il y a au maximum $n = 1$ erreur, un seul polynôme de degré $\leq m-1 = 4$ apparaît.

Application III. Contrôle de redondance cyclique (Cyclic redundancy check - CRC)

A l'instar des codes de Reed-Solomon, les Contrôles de Redondance Cycliques sont des codes permettant de détecter certaines erreurs (ainsi que d'en corriger également quelques unes) lors d'une transmission. Ils sont utilisés dans de très nombreuses applications (par exemple, Ethernet et les connecteurs USB en font usage) car ils sont très faciles à implémenter directement dans le hardware, ne nécessitant en gros que des registres à décalage et des XOR, et sont efficaces pour détecter les erreurs groupées. On se contentera ici seulement d'une description, sans expliquer quelles erreurs ces codes permettent de détecter et de corriger.

Les messages à transmettre sont des listes de bits d'une certaine longueur ℓ (notée M ci-dessous), que l'on interprète comme les coefficients d'un polynôme de degré $\ell - 1$ à coefficients binaires (noté $M(x)$ ci-dessous). On a le choix quant au sens dans lequel on place les coefficients, le bit de gauche pouvant correspondre au degré 0 ou $\ell - 1$. Ici, on décidera que le bit de gauche correspond à $x^{\ell-1}$. Un exemple avec $\ell = 7$:

$$M = \texttt{'10111001'} \longleftrightarrow M(x) = 1\cdot x^7 + 0\cdot x^6 + 1\cdot x^5 + 1\cdot x^4 + 1\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1 = x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$$

Pour trouver le CRC, on multiplie ce polynôme par x^n, ce qui correspond à ajouter n zéros à droite de la liste de bits. Par exemple, prenons $n = 4$:

$$M + \texttt{'0000'} = \texttt{'101110010000'} \longleftrightarrow M(x) \cdot x^4 = (x^7 + x^5 + x^3 + 1) \cdot x^4 = x^{11} + x^9 + x^8 + x^7 + x^4$$

On choisit ensuite un *polynôme générateur* $G(x)$ de degré n, également avec des coefficients 0 et 1. Les propriétés du code et ses capacités à détecter des erreurs dépendront non seulement de n mais également du polynôme générateur $G(x)$. Ensuite, on effectue la division euclidienne de $M(x) \cdot x^n$ par $G(x)$, *en faisant toutes les opérations modulo* 2. L'unicité du quotient et du reste reste vraie dans ce cas (car les coefficients appartiennent à un corps). Un exemple, en prenant $G(x) = x^4 + x^2 + 1$, et en écrivant toutes les lignes, mêmes celles où l'on soustrait 0 :

$$\begin{array}{ccccccccccccc|ccccc}
 & 1x^{11} & +0x^{10} & +1x^9 & +1x^8 & +1x^7 & +0x^6 & +0x^5 & +1x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +0 & 1x^4 & +0x^3 & +1x^2 & +0x & +1 \\ \cline{14-18}
-(& 1x^{11} & +0x^{10} & +1x^9 & +0x^8 & +1x^7 &) & & & & & & & 1x^7 & & & & \\ \cline{2-7}
 & & +0x^{10} & +0x^9 & +1x^8 & +0x^7 & +0x^6 & & & & & & & & & & & \\
 & -(& +0x^{10} & +0x^9 & +0x^8 & +0x^7 & +0x^6 &) & & & & & & +0x^6 & & & & \\ \cline{3-8}
 & & & +0x^9 & +1x^8 & +0x^7 & +0x^6 & +0x^5 & & & & & & & & & & \\
 & & -(& +0x^9 & +0x^8 & +0x^7 & +0x^6 & +0x^5 &) & & & & & +0x^5 & & & & \\ \cline{4-9}
 & & & & +1x^8 & +0x^7 & +0x^6 & +0x^5 & +1x^4 & & & & & & & & & \\
 & & & -(& 1x^8 & +0x^7 & +1x^6 & +0x^5 & +1x^4 &) & & & & +1x^4 & & & & \\ \cline{5-10}
 & & & & & +0x^7 & +1x^6 & +0x^5 & +0x^4 & +0x^3 & & & & & & & & \\
 & & & & -(& +0x^7 & +0x^6 & +0x^5 & +0x^4 & +0x^3 &) & & & +0x^3 & & & & \\ \cline{6-11}
 & & & & & & +1x^6 & +0x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +0x^2 & & & & & & & \\
 & & & & & -(& +1x^6 & +0x^5 & +1x^4 & +0x^3 & +1x^2 &) & & +1x^2 & & & & \\ \cline{7-12}
 & & & & & & & +0x^5 & +1x^4 & +0x^3 & +1x^2 & +0x & & & & & & \\
 & & & & & & -(& +0x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x &) & +0x & & & & \\ \cline{8-13}
 & & & & & & & & +1x^4 & +0x^3 & +1x^2 & +0x & +0 & & & & & \\
 & & & & & & & -(& 1x^4 & +0x^3 & +1x^2 & +0x & +1) & +1 & & & & \\ \cline{9-13}
 & & & & & & & & & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +1 & & & & &
\end{array}$$

Le reste est donc $R(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$, que l'on écrit bien entendu `'0001'`. En fait, le quotient ne nous intéresse absolument pas ici. La manière d'écrire la division ci-dessus est épouvantable, on préfère de loin ne regarder que les coefficients et ignorer le quotient. *Attention* : ce n'est *pas* une division en base 2 : il n'y a pas de retenue, on travaille colonne par colonne.

```
 101110010000 | 10101
-10101        |------
  00100       |
 -00000       |
   01000      |
  -00000      |
    10001     |
   -10101     |
     01000    |
    -00000    |
      10000   |
     -10101   |
       01010  |
      -00000  |
        10100 |
       -10101 |
         0001 |
```

On obtient bien le même reste R de `'0001'`. On a ainsi procédé qu'à des XOR bit par bit et à des décalages, ce qui est très efficacement implémenté directement en hardware. (*Défi :* fabriquer un CRC dans votre cours de systèmes logiques.)
La division peut s'écrire

$$M(x) \cdot x^n = G(x) \cdot Q(x) + R(x), \qquad (\star)$$

avec $G(x)$ le polynôme générateur et $R(x)$ le reste. On ajoute alors au message M les bits correspondant au reste, et on transmet donc le message

$$\texttt{'10111001'} + \texttt{'0001'} = \texttt{'101110010001'}.$$

Cela revient au niveau des polynômes à transmettre $M(x) \cdot x^n + R(x)$. Comme on fait les calculs modulo 2, les opérations $+$ et $-$ sont égales, donc cela revient à transmettre $M(x) \cdot x^n - R(x)$, qui, par $(\star)$, est égal à $G(x) \cdot Q(x)$.

Du côté receveur, on effectue la division euclidienne du polynôme correspondant au message reçu par $G(x)$. S'il n'y a pas d'erreur de transmission, le reste doit être 0 car le polynôme transmis est égal à $G(x) \cdot Q(x)$. Si ce reste n'est pas 0, on est certain qu'il y a une erreur. Une autre version est de remplacer les n derniers bits du message reçu par des `0`, d'effectuer la division par $G(x)$ et de vérifier que le reste est bien égal au n derniers bits du mot reçu (qui sont donc $R(x)$). Si ce n'est pas le cas, c'est qu'il y a une erreur.

Ces arguments ne *montrent pas* qu'on est certain de repérer une erreur de transmission. Cependant, on peut montrer que pour n'importe quel choix de longueur de message ℓ et n'importe quel polynôme générateur non nul de degré n, on peut toujours repérer lorsqu'il y a une erreur sur un seul bit. Savoir combien d'erreurs sont repérées lorsqu'il y en a sur plus d'un bit est un problème compliqué qui dépend de ℓ, n et aussi crucialement du choix du polynôme générateur $G(x)$. De même, si le polynôme générateur est divisible par $(1x+1)$, il repèrera à coup sûr toutes les erreurs de nombre impair.

<u>Exemples de polynômes générateurs dans des implémentations</u> :

1. `CRC-1` (Bit de parité) : $G(x) = x+1$
2. `CRC-3-GSM` (Réseaux mobiles) : $G(x) = x^3+x+1$
3. `CRC-6-USB` (Clés USB) : $G(x) = x^6+x+1$
4. `CRC-8-Bluetooth` (Wireless Bluetooth) : $G(x) = x^8+x^7+x^5+x^2+x+1$
5. `CRC-32` (Ethernet,...) : $G(x) = x^{32}+x^{26}+x^{23}+x^{22}+x^{16}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^8+x^7+x^5+x^4+x^2+x+1$

II.4.4 Exercices sur les polynômes

Exercice II.4.1.
Effectuer la division (avec reste) de $A(x)$ par $B(x)$.

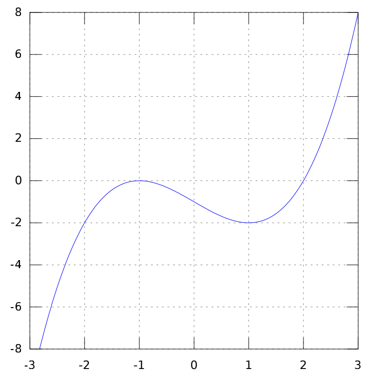
(1) $A(x) = x^2 + 2x + 1$, $B(x) = x + 1$
(2) $A(x) = x^2 + 2x + 2$, $B(x) = x + 1$
(3) $A(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$, $B(x) = x^2 - 1$
(4) $A(x) = x^4$, $B(x) = x - 2$
(5) $A(x) = x^2 - 2x + 1$, $B(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$
(6) $A(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$, $B(x) = x^2 + x + 1$

Exercice II.4.2.
(1) Sachant que 1 est une racine de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$, trouver les autres racines ou montrer qu'il n'y en a pas d'autres.
(2) Trouver (par tâtonnement) une racine de $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$, puis les trouver toutes.
(3) Même question pour $P(x) = x^3 - 2x + 1$.

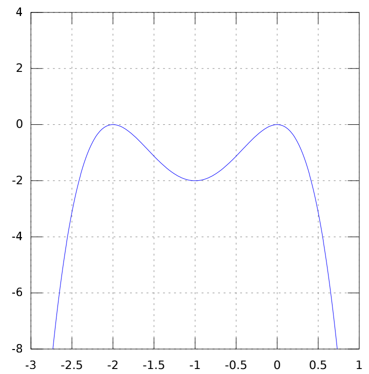
Exercice II.4.3.
Répondre en justifiant (avec le moins de calculs possibles) par vrai ou faux aux affirmations suivantes.
(1) $(x - 3)$ divise $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$.
(2) Le reste de la division de $x^3 + 2x^2 - 1$ par $(x - 2)$ est 15.
(3) Si on divise $A(x) = (x^2 + 3x - 1) \cdot (x + 2)$ et $B(x) = x^2 + 3x - 1$ par $P(x) = x - 5$, on obtient le même reste.
(4) On divise les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ par $P(x)$, dans le premier cas les reste est $3x - 1$ dans le deuxième cas $1 - 3x$. On peut donc en conclure que $P(x)$ divise le polynôme $A(x) + B(x)$.
(5) Si un polynôme $A(x)$ divise un polynôme $B(x)$, alors $A(x)$ n'a pas plus de racines que $B(x)$.
(6) Si un polynôme $A(x)$ divise un polynôme $B(x)$, alors $A(x)$ a strictement moins de racines que $B(x)$.

Exercice II.4.4.
Trouvez les équations des droites tangentes au polynôme $p(x)$ au point a dans les cas ci-dessous. Utilisez deux méthodes : la dérivée et la division par $(x - a)^2$.
(1) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$, $a = 2$.
(2) $p(x) = x^3 + 4$, $a = -1$.
(3) $p(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, $a = 0$.

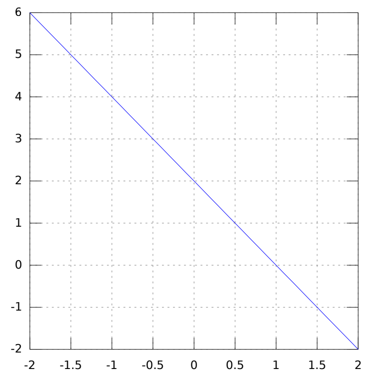
Exercice II.4.5.
Trouver les polynômes de plus petit degré possible correspondant aux graphes suivants.



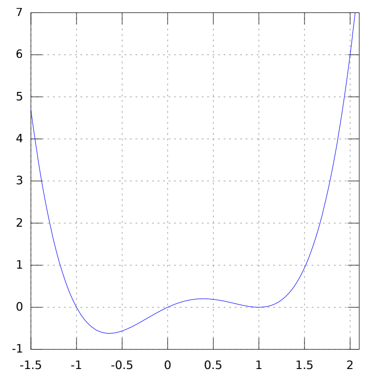
(1)



(2)



(3)



(4)

Exercice II.4.6.
Trouver les polynômes de plus petit degré possible passant par les points suivants.
(1) $A(1;2)$, $B(-1;0)$.
(2) $A(0;1)$, $B(1;3)$, $C(-1;0)$, $D(2;4)$.
(3) $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(3;3)$.

Exercice II.4.7.
Répondre en justifiant (avec le moins de calculs possibles) par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Tous les polynômes sont à coefficients réels et ont ensemble de départ et d'arrivée $\mathbb{R}$.
(1) Si un polynôme de degré 4 possède une racine, alors il en possède au moins une autre, distincte de la première.
(2) Le polynôme $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)^2$ traverse l'axe horizontal en 3 points.
(3) Le graphe de $P(x) = x^2 + x + 1$ traverse celui de $Q(x) = x + 1$.
(4) Un polynôme ne peut pas avoir plus d'extrêmums locaux que de racines.
(5) Si un polynôme $A(x)$ de degré ≤ 3 touche une droite d en 4 points, alors $A(x)$ est en fait la même droite que d.
(6) Si un polynôme $A(x)$ de degré ≤ 3 touche une parabole p en 4 points, alors $A(x)$ est en fait la même parabole que p.
(7) Si un polynôme $A(x)$ de degré ≤ 4 touche une parabole p en 4 points, alors $A(x)$ est en fait la même parabole que p.
(8) Deux polynômes de degré impair s'intersectent toujours.
(9) Deux polynômes de degré différents s'intersectent toujours.

Exercice II.4.8.
On considère un schéma seuil $(k; n)$ donné par la méthode de la clef secrète de Shamir.

1. Information publique : $(k; n) = (2; 5)$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{N}$, $a_0 = S$.
   Information privée récupérée : $(x_0; y_0) = (1; 400)$, $(x_1; y_1) = (3; 500)$, $(x_2; y_2) = (4; 550)$.
   Retrouver (si possible) S.
2. Information publique : $(k; n) = (4; 5)$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{N}$, $a_0 = S$.
   Information privée récupérée : $(x_0; y_0) = (1; 370)$, $(x_1; y_1) = (3; 1110)$, $(x_2; y_2) = (4; 6850)$, $(x_3; y_3) = (5; 13'050)$.
   Retrouver (si possible) S.
3. Information publique : $(k; n) = (4; 8)$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{N}$, $a_0 = S$.
   Information privée récupérée : $(x_0; y_0) = (1; 891)$, $(x_1; y_1) = (3; 110)$, $(x_2; y_2) = (4; 4440)$.
   Retrouver (si possible) S.
4. Secret : $S = 1032$, $(k; n) = (4; 6)$.
   Effectuer la préparation de l'information.

Exercice II.4.9. Polynômes et pseudocode

On utilise un langage de programmation qui peut manier des tableaux. Si T est un tableau, $T[i]$ est son i-ème élément (les indices commencent à 0), len(T) retourne sa taille, et $T[i : j]$ est le tableau de taille $j - i + 1$ contenant les élements de T de la i à j-ème place. Le langage possède toutes les fonctionalités basiques habituelles telles les boucles *for*, les conditions *if*, les comparateurs $\max(a, b)$, etc...

On code un polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ en un tableau $T = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ de taille $n + 1$.

1. Ecrire en pseudocode la fonction qui additionne deux polynômes. *Attention :* La taille d'un tableau doit être cohérente avec le degré du polynôme correspondant.
2. Ecrire en pseudocode la fonction qui soustrait deux polynômes.
3. Ecrire en pseudocode la fonction qui multiplie deux polynômes.
4. Ecrire en pseudocode la fonction qui évalue un polynôme en un point x.
5. Ecrire en pseudocode la fonction qui effectue la division Euclidienne de deux polynômes.

Exercice II.4.10. Polynômes et vrai code
On peut trouver ici quelques fonctions en Python3 répondant aux questions 1–3 de l'exercice précédent :
`https://gitedu.hesge.ch/mathieu.baillif1/polynomes_basic/-/blob/main/poly_basic.py`
(a) Coder en Python3 la fonction qui permet d'évaluer un polynôme en un point.
(b) Coder en Python3 la fonction qui permet de calculer le polynôme de Lagrange (qui prendra en entrée une liste de paires de nombres).

Exercice II.4.11. Polynômes et vrai code, partie II.
Adapter le code de l'exercice précédent afin de faire tous les calculs modulo un nombre premier p. Donc, toutes les additions et multiplications se font modulo p, les divisions (dans le calcul du polynôme de Lagrange) sont remplacées par la multiplication par l'inverse multiplicatif modulo p (qu'on obtient avec l'algorithme de Bachet-Bezout vu dans l'autre cours de mathématiques), et l'évaluation se fait également modulo p.
Vérifier que votre code fonctionne en calculant les Polynômes de Lagrange passant par les listes de points `[x_i,y_i]` suivants, avec le nombre premier p correspondant :
(a) Liste : `[ [1,1] , [2,2] , [3,3] , [4,4] ]`, $p = 11$.
(b) Liste : `[ [0,1] , [2,5] , [4,12] , [8,15] , [11,0] , [12,1] ]`, $p = 13$.
(c) Liste : `[ [0,1] , [1,1] , [2,1] , [3,1] , [4,1] , [5,1] , [6,1] , [7,1] , [8,2] ]`, $p = 19$.

Exercice II.4.12.
Supposons qu'on reçoive une liste codée avec Reed-Solomon (version naïve) de longueur 8. On sait que le message de départ est de longueur 6, on a donc ajouté deux entrées pour le décodage. Lorsqu'on calcule le polynôme de

Lagrange $p(x)$ pour les 6 premiers points, on observe que le graphe de p passe par le 7ème point mais pas par le 8ème.
(a) Peut-on en conclure que la liste reçue contient une erreur ?
(b) Peut-on en conclure que $p(x)$ est le 'bon' polynôme ?
(c) Peut-on alors retrouver la liste de départ ?

Exercice II.4.13.
On veut transmettre la suite de 12 bits `'101001010010'` en utilisant un CRC dont le polynôme générateur est $G(x) = x^4 + x^3 + x$.
(1) Combien de bits ajoutera-t-on à cette suite avant d'effectuer la transmission ?
(2) Quels seront les bits ajoutés ?
(3) Si la suite reçue est `'1010010100101111'`, est-ce qu'on peut en conclure qu'il y a une erreur dans la transmission ?

Exercice II.4.14.
But : démontrer le théorème suivant :
Theorème. Soit $p(x)$ un polynôme de degré $\leq n$ tel que $p(k)$ est un nombre entier pour $n+1$ entiers consécutifs $k = m, m+1, \ldots, m+n$ (pour un certain $m \in \mathbb{Z}$, donc). Alors, $p(k)$ est un nombre entier pour *tout* $k \in \mathbb{Z}$.

1. Comprendre pourquoi ce théorème est une conséquence de :
   Theorème bis. Soit $p(x)$ un polynôme de degré $\leq n$ tel que $p(k)$ est un nombre entier pour $k = 0, 1, \ldots, n$. Alors, $p(k)$ est un nombre entier pour *tout* $k \in \mathbb{Z}$.
   Indication : Si $p(k)$ est entier pour $k = m, m+1, \ldots, m+n$, alors en posant $q(x) = p(x+m)$, on a que $q(k)$ est entier pour $k = 0, 1, \ldots, n$.
2. Démontrer par récurrence sur n le Théorème bis ci-dessus.
   Indication : Si $n = 0$, c'est clair, car $p(x)$ est un polynôme constant. En supposant que ce soit vrai pour n, on prend $p(x)$ de degré $n+1$ qui prend des valeurs entières en $x = 0, 1, \ldots, n$.
   On pose $g(x) = p(x+1) - p(x)$. Voir que c'est un polynôme de degré $n-1$ qui prend des valeurs entières en $x = 0, 1, \ldots, n-1$. Conclure (par récurrence sur n) que $g(k)$ est un entier pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$.
   Puis, montrer que $p(n+1) = g(n) - p(n)$ est un entier, ensuite que $p(n+2) = g(n+1) - p(n+1)$ est un entier, etc. (On peut même écrire une nouvelle récurrence.) En conclure que du coup $p(k)$ est un entier pour tout entier *positif.*
   Trouver ensuite comment faire avec les entiers négatifs.
3. Se rendre compte que quasiment la même démonstration permet de prouver :
   Theorème ter. Soit $p(x)$ un polynôme de degré $\leq n$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que $p(x)$ est un nombre entier pour $x = a, a+b, a+2b, \ldots, a+nb$. Alors, $p(x)$ est un nombre entier si $x = a + kb$ pour *tout* $k \in \mathbb{Z}$.

II.5 Courbes paramétriques $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Définition
Une courbe paramétrique $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction

$$c : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto c(t) = (c_1(t); \ldots ; c_n(t)) \end{array}$$

On s'intéressera uniquement aux cas $n = 2$ et $n = 3$. L'utilisation de la variable t au lieu du x classique vient de l'habitude de considérer ce genre de courbes en fonction du temps. Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, on notera souvent $c(t) = (x(t); y(t))$. Pour des raisons pratiques (et de similitudes avec la théorie des vecteurs), on notera toujours les coordonnées verticalement : $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, et on traîtera $c(t)$ comme un vecteur. (Formellement, si $C(t)$ est la courbe donnée en coordonnées, l'écriture vectorielle correspond à $\overrightarrow{OC}(t)$, mais on ne s'encombrera pas de ces formalités.)

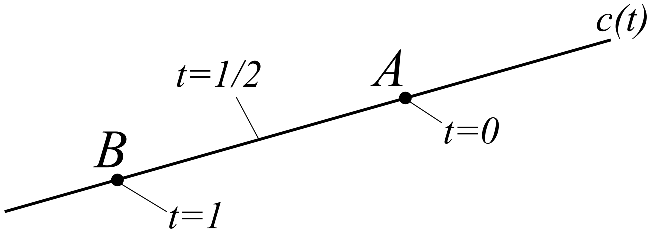
Exemples.

1. A partir d'une équation habituelle $y = 2x^2 + 3x + 1$, on pose $x(t) = t$, et on obtient $y(t) = 2t^2 + 3t + 1$, donc la fonction $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t^2 + 3t + 1 \end{pmatrix}$. Si on pose $x(t) = \frac{1}{2}t$ on obtient une autre courbe $\widetilde{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1 \end{pmatrix}$ qui (informellement) "passe par les mêmes points mais à vitesse différente".
2. La courbe $c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$ trace un cercle.

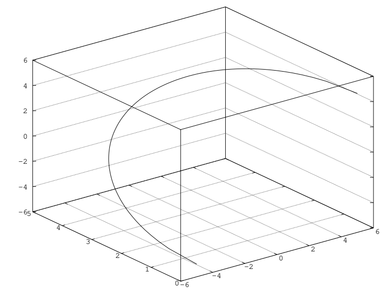
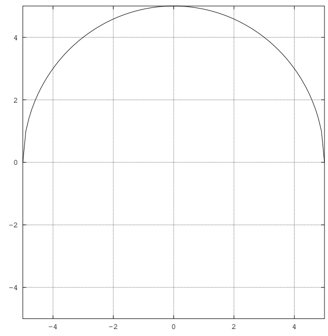
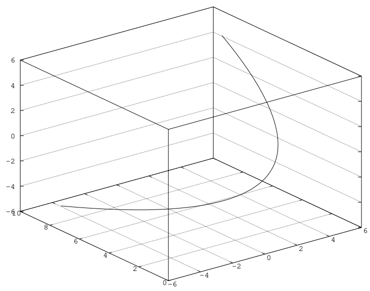
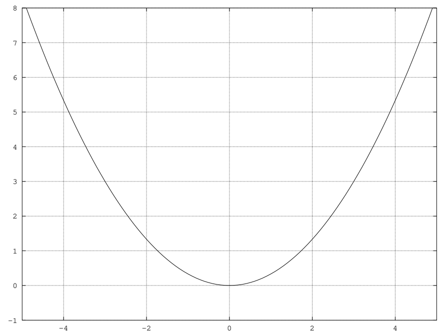
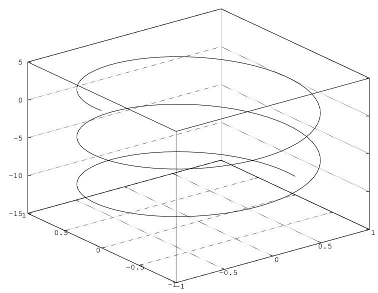
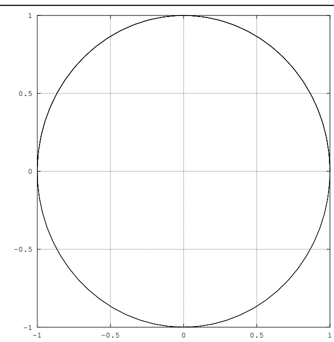
De manière générale, à une équation cartésienne $y = f(x)$ correspond une infinité de courbes paramétriques qui parcourent l'ensemble des solutions (à des vitesses différentes). Mais certaines courbes paramétriques ne correspondent à aucune équation cartésienne 'simple'.

Droites paramétriques
La courbe $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une droite paramétrique si $x(t)$ et $y(t)$ sont tous deux des polynômes de degré 1 en t.
Exemples.

1. $c(t) = \begin{pmatrix} 4t + 1 \\ 2t - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. C'est une droite de pente $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ qui passe par le point $(1; -3)$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est appelé *vecteur directeur* de la droite.
2. Une droite paramétrique passant par les points $A(1; 9)$ et $B(2; -5)$:
$$c(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot (1 - t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -5t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - t \\ 9 - 9t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + 1 - t \\ -5t + 9 - 9t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 1 \\ -14t + 9 \end{pmatrix}.$$
3. En général, avec les coordonnées $A(x_0; y_0)$ et $B(x_1; y_1)$, on pose
$$c(t) = \overrightarrow{OB} \cdot t + \overrightarrow{OA} \cdot (1 - t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot (1 - t) = \overrightarrow{AB} \cdot t + \overrightarrow{OA}.$$
On a bien $c(0) = A$, $c(1) = B$. D'autres choix pour $c(t)$ sont bien entendu possibles, mais plus compliqués en général. $\overrightarrow{AB}$ est donc le vecteur directeur de la droite.



Représentation graphique
Le graphe d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. Cependant, on représente graphiquement une telle courbe paramétrique le plus souvent comme un élément de $\mathbb{R}^2$, en négligeant la 'vitesse' à laquelle la courbe est parcourue. On appelle l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ que la courbe parcourt sera appelé la *trace* de la courbe. (Dans les graphes ci-dessous, t est la coordonnée verticale.)

	Graphe	Trace
$c(x) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{25 - t^2} \end{pmatrix}$		
$c(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3}t^2 \end{pmatrix}$		
$c(x) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$		

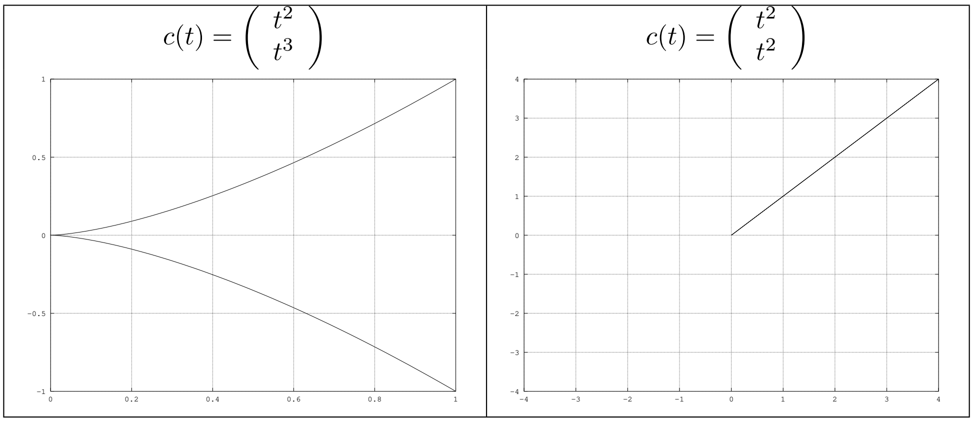
Courbes paramétriques polynomiales
Définition. Une courbe paramétrique $c(t) = (c_1(t); \ldots; c_n(t))$ est polynômiale si tous les $c_i(t)$ sont des polynômes. Le degré de la courbe est le maximum des degrés des $c_i(t)$.

Interpolation
Comme avec les polynômes, étant donné $n+1$ points distincts $(x_0; y_0), (x_1; x_1), \ldots, (x_n; y_n)$, on peut trouver une courbe polynomiale de degré n passant par ces points. Ici, les x_i n'ont pas besoin d'être tous distincts. Par contre, il n'y a pas d'unicité, plusieurs courbes sont possibles. La plus 'simple' à décrire est sans doute celle-ci :

$$\begin{aligned} c(t) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdot \frac{(1-t)(2-t)\cdots(n-t)}{(-1)^0 0! n!} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{(0-t)(2-t)\cdots(n-t)}{(-1)^1 1!(n-1)!} \\ &+ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{(0-t)(1-t)(3-t)\cdots(n-t)}{(-1)^2 2!(n-2)!} + \cdots + \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \frac{(0-t)(1-t)(2-t)\cdots(n-1-t)}{(-1)^n n! 0!} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \frac{1}{(-1)^i \cdot i!(n-i)!} \prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} (k-t) \end{aligned}$$

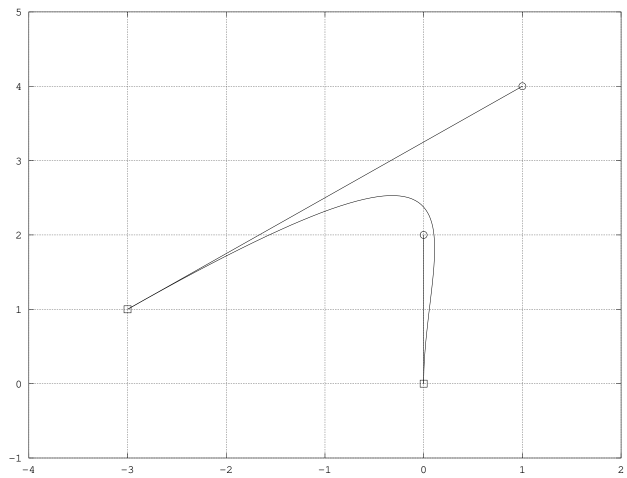
On a bien $c(i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ pour $i = 0, \ldots, n$. Bien entendu, d'autres choix sont possibles.

Bien que les polynômes aient des graphes fort 'lisses', la trace d'une courbe paramétrique polynomiale peut avoir des 'pointes' ou autres comportements un peu inattendus. Ceci est dû au fait que la représentation 2D est une projection du graphe en 3D, qui lui est parfaitement 'lisse'.



Pour éviter ces comportements qui peuvent s'avérer indésirables, on peut décider de définir une courbe *par morceaux*, par exemple relier les points consécutifs par des droites (comme dans n'importe quel programme de dessin vectoriel), ou par des courbes polynômes de degré supérieur, par exemple les courbes de Bézier.

Courbes de Bézier (Pierre Bézier, 1962)



Donnée : 2 points P_0, P_n par lesquels passe la courbe, ainsi que $n-1$ points de contrôle $P_1, \ldots, P_{n-1}$ qui influencent la forme de la courbe, qui ne passera en général pas par eux. La courbe donnée par $n+1$ points est de degré n. Nous verrons en priorité le cas $n = 3$ (donc 4 points) et $n = 2$ (3 points), qui sont implémentés dans la plupart des programmes de dessin vectoriel tels Inkskape ou Illustrator. Il y a plusieurs manières équivalentes de définir ces courbes. Dans toutes les définitions, on considère seulement les cas où $t \in [0, 1]$.

Définition récursive
C'est la définition originale de Pierre Bézier. Etant donné 4 points P_0, P_1, P_2, P_3 et $t \in [0, 1]$, on considère les droites formées par les points consécutifs, et on prend les points de coordonnées barycentriques donnés par t sur chacune de ces droites :

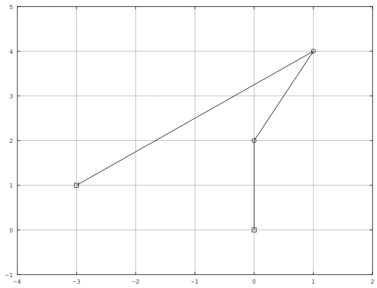
$$Q_0^1(t) = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$
$$Q_1^1(t) = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$
$$Q_2^1(t) = P_2 \cdot (1-t) + P_3 \cdot t$$

Puis, on recommence en partant des ces points, jusqu'à obtenir un seul point :

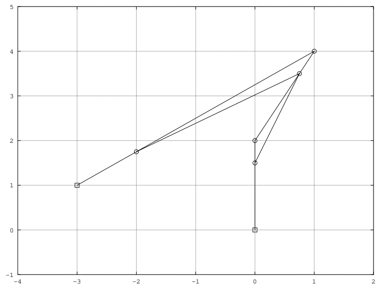
$$Q_0^2(t) = Q_0^1(t) \cdot (1-t) + Q_1^1(t) \cdot t$$
$$Q_1^2(t) = Q_1^1(t) \cdot (1-t) + Q_2^1(t) \cdot t$$

$$Q_0^3(t) = Q_0^2(t) \cdot (1-t) + Q_1^2(t) \cdot t$$

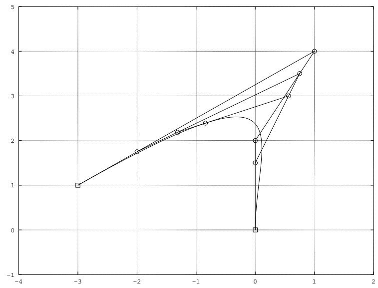
La courbe $B(t)$ est donnée par ces $Q_0^3(t)$ pour chaque t. Le dessin ci-dessous montre la construction de la valeur $t = \frac{1}{4}$, ainsi que la courbe totale (dans la dernière image).



Les 4 points de base

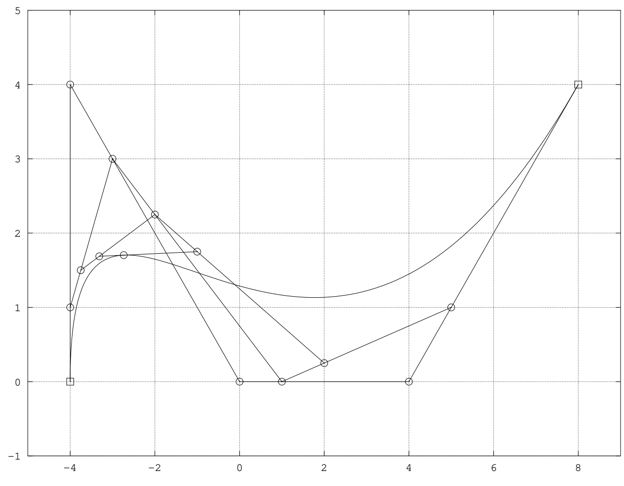


$Q_0^1(\frac{1}{4}), Q_1^1(\frac{1}{4}), Q_2^1(\frac{1}{4})$.



$Q_0^2(\frac{1}{4}), Q_1^2(\frac{1}{4})$ et $Q_0^3(\frac{1}{4})$.

Cette définition se généralise aisément à un nombre de points supérieur (ou inférieur), comme sur la figure ci-dessous où on considère 5 points. La courbe $B(t)$ est entièrement représentée, ainsi que la construction récursive de $B(\frac{1}{4})$.



Définition algébrique
Etant donnés $P_0, P_1, \dots, P_n$, on pose :

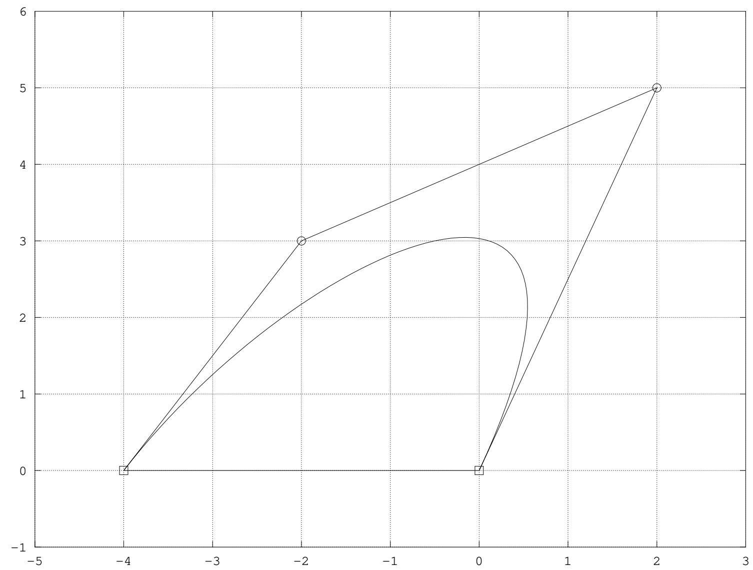
$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot (1-t)^{n-i} t^i \cdot P_i.$$

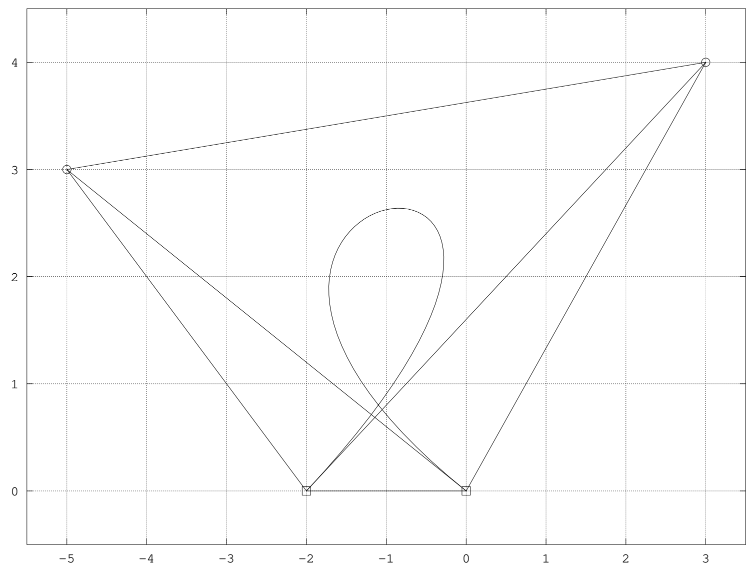
En particulier, les formules pour $n = 2$ et $n = 3$ sont :

$$\begin{aligned} n = 2 \quad &: \quad (1-t)^2 \cdot P_0 + 2t(1-t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2 \\ &\qquad = t^2 \cdot (P_0 - 2 \cdot P_1 + P_2) + t \cdot (-2P_0 + 2P_1) + P_0 \\ n = 3 \quad &: \quad (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3t^2(1-t) \cdot P_2 + t^3 P_3 \\ &\qquad = t^3 \cdot (-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) + t^2 \cdot (3P_0 - 6P_1 + 3P2) + t \cdot (-3P_0 + 3P_1) + P_0 \end{aligned}$$

Propriétés

1. La courbe de Bézier définie par $n+1$ points $P_0, P_1, \ldots, P_n$ est de degré $\leq n$.
2. $B(0) = P_0$, $B(1) = P_n$.
3. La tangente à la courbe en P_0 est parallèle (proportionnelle en fait) au vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$, la tangente à la courbe en P_n est parallèle (proportionnelle en fait) au vecteur $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ (ce qui se voit très bien sur toutes les figures et se prouve facilement en dérivant).
4. La courbe $B(t)$ pour $t \in [0,1]$ est entièrement contenue dans l'enveloppe convexe des points $P_0, \ldots, P_n$ (c'est-à-dire le polygône obtenu en liant 2-à-2 tous les points par des droites puis en gardant les côtés externes), comme sur les figures ci-dessous. Ceci est une conséquence de la définition récursive.

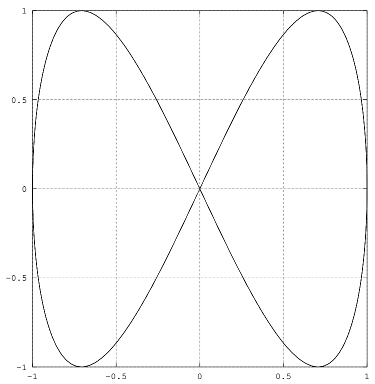




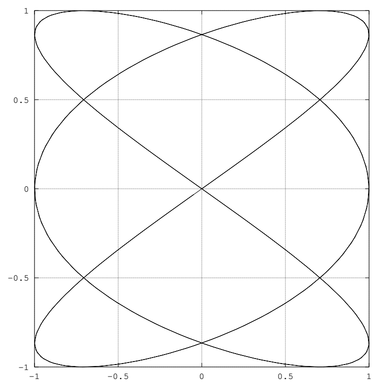
Courbes de Lissajous (Nathaniel Bowditch en 1815, puis Jules Lissajous en 1857)
<u>Définition :</u> Une courbe de Lissajous est défini paramétriquement ainsi :

$$x(t) = a\sin(pt)$$
$$y(t) = b\sin(qt + \phi)$$

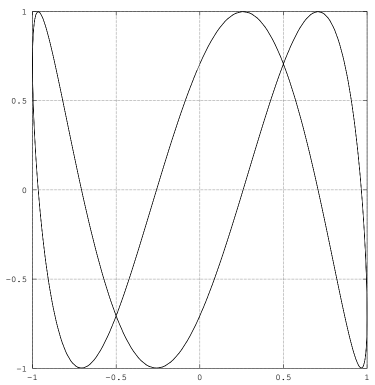
avec $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2p}$ et $p \geq q \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, et . Les cas les plus 'classiques' sont ceux où le décalage de phase ϕ est 0 où $\frac{\pi}{2}$.



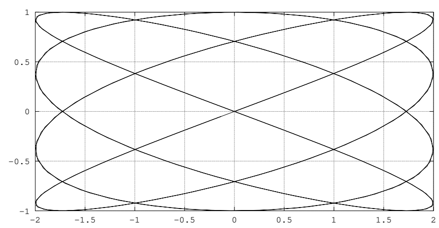
$x(t) = \sin(t)$
$y(t) = \sin(2t)$



$x(t) = \sin(3t)$
$y(t) = \sin(2t)$



$x(t) = \sin(t)$
$y(t) = \sin(3t + \frac{\pi}{4})$



$x(t) = 2\sin(4t)$
$y(t) = \sin(3t + \frac{\pi}{2})$

II.5.1 Exercices sur les courbes paramétriques

Exercice II.5.1.
Représenter la trace des courbes paramétriques suivantes.

(a) $c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$ (b) $c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ (c) $c(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \end{pmatrix}$

(d) $c(t) = \begin{pmatrix} 4t+1 \\ 4t-1 \end{pmatrix}$ (e) $c(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t-1 \end{pmatrix}$ (f) $c(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ t^2 \end{pmatrix}$

(g) $c(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix}$ (h) $c(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ (i) $c(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ \sin^2(t) \end{pmatrix}$

Exercice II.5.2.
Trouver une droite paramétrique correspondant aux équation suivantes.

1. $y = 3x - 2$
2. $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$
3. $2y + 3x = -4$

Exercice II.5.3.
Trouver une droite paramétrique passant par les points suivants.

1. $A(3; 6)$, $B(-2; 7)$.
2. $A(-1; 6)$, $B(-1; -4)$.
3. $A(0; 1)$, $B(-10; 1)$.
4. $A(32; -\frac{1}{4})$, $B(\frac{1}{4}; 32)$.

Exercice II.5.4.
Trouver l'équation cartésienne $y = ax + b$ correspondant aux droites paramétriques suivantes.

1. $c(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. $c(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} (1-t)$.
3. $c(t) = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ -5t-1 \end{pmatrix}$.

Exercice II.5.5.
Le point A est-il sur la courbe paramétrique $c(t)$? Si oui, pour quel(s) t a-t-on $c(t) = A$?

1. $c(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A(5; 7)$.
2. $c(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} (1-t)$, $A(3; -6)$.
3. $c(t) = \begin{pmatrix} t^2+t+1 \\ t-1 \end{pmatrix}$, $A(7; 2)$.
4. $c(t) = \begin{pmatrix} t^2-t-3 \\ t^2+3t+5 \end{pmatrix}$, $A(-2; 3)$.
5. $c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}$, $A(2; 4)$.

Exercice II.5.6.
Trouver une courbe paramétrique polynômiale de degré minimal qui passe par les points suivants.

1. $P_0(1; 0), P_1(4; 1)$.
2. $P_0(1; 1), P_1(1; 2), P_2(2; 2)$.
3. $P_0(0; 1), P_1(1; 1), P_2(1; 0), P_3(0; 1)$.

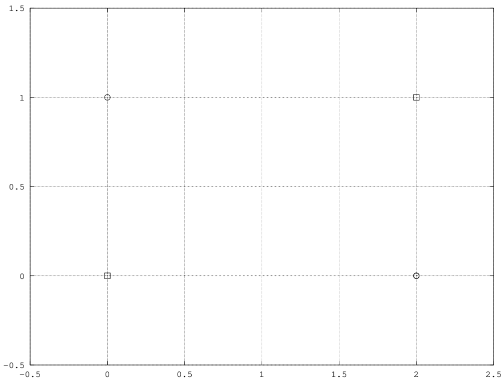
Exercice II.5.7.
Représentez graphiquement le point $B(\frac{3}{4})$ des courbes de Béziers définies par les points suivants.

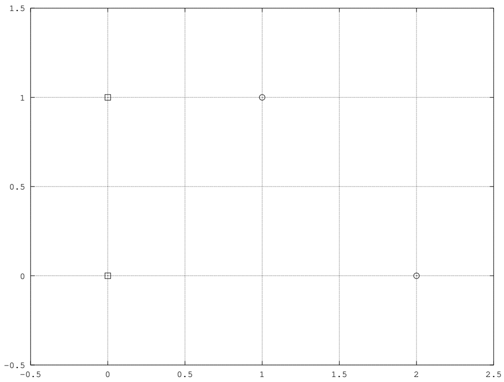
1. $P_0(1;1), P_1(1;2), P_2(2;2)$, degré 2.
2. $P_0(0;1), P_1(1;1), P_2(1;0), P_3(0;1)$, degré 3.
3. $P_0(0;0), P_1(0;2), P_2(3;0)$, degré 2.
4. $P_0(0;0), P_1(0;2), P_2(3;3), P_3(3;0)$, degré 3.

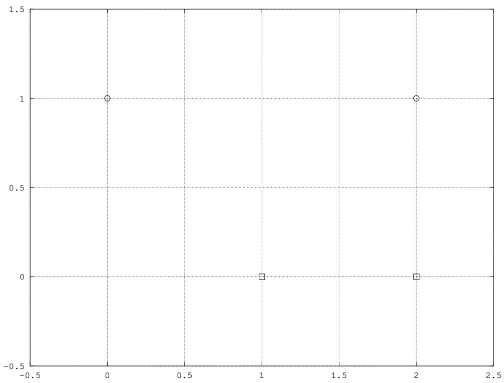
Exercice II.5.8.
Trouver la courbe de Bézier (de degré demandé) définie par les points suivants. Vérifier la compatibilité avec l'exercice précédent.

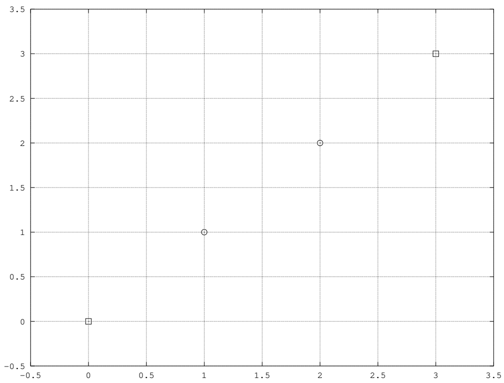
1. $P_0(1;1), P_1(1;2), P_2(2;2)$, degré 2.
2. $P_0(0;1), P_1(1;1), P_2(1;0), P_3(0;1)$, degré 3.
3. $P_0(0;0), P_1(0;2), P_2(3;0)$, degré 2.
4. $P_0(0;0), P_1(0;2), P_2(3;3), P_3(3;0)$, degré 3.

Exercice II.5.9.
Tracer à la main les courbes de Bézier définies par les points suivants.


(1)


(2)


(3)


(4)

II.6 Fonctions rationnelles

Définitions
Une fonction rationnelle est le quotient de deux polynômes :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \tag{II.1}$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. Le *degré* de f est le maximum des degrés des polynômes p et de q.

Domaine de définition de f
Lorsque $q(a) = 0$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$, alors la valeur de $f(a)$ est indéfinie (car il y a division par 0). On doit donc ôter les zéros du polynôme q du domaine de définition de f :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{\text{zéros de } q\}$$

On dit parfois que les points en dehors du domaine de f sont des *pôles* ou des *singularités*.

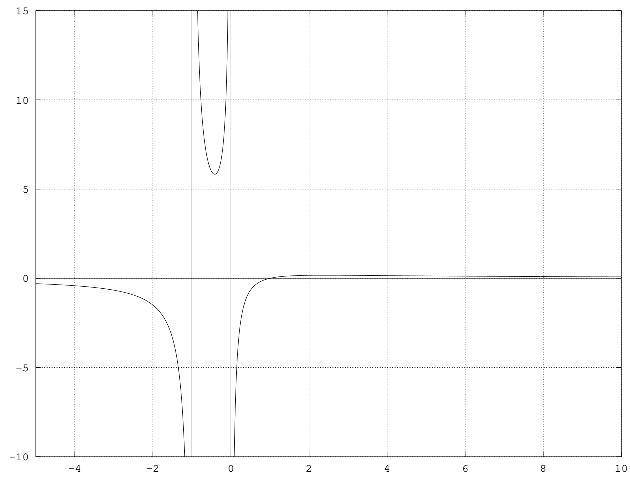
Zéros de f
Les zéros de $f(x)$ sont les zéros du polynôme $p(x)$ *qui sont dans le domaine de définition*.

Asymptotes
Une *asymptote* est une droite de laquelle la fonction $f(x)$ s'approche (sans forcément la toucher) lorsque x s'approche d'une singularité (pour les asymptotes verticales) ou de $\pm\infty$ (pour les asymptotes horizontales ou obliques).

Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x \cdot (x+1)^2}$$

Alors f est de degré 3, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$, et f n'a qu'un zéro, qui est 1, car -1, l'autre zéro de $x^2 - 1$, n'est pas dans le domaine de définition. De plus, f possède deux asymptotes verticales en $x = -1$ et $x = 0$, et une asymptote horizontale en $y = 0$ (voir plus loin pourquoi).



Théorème.
Soient f et g deux fonctions rationnelles. Alors, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, et f/g sont aussi des fonctions rationnelles.

Théorème.
Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, et soit C un nombre réel > 0. Alors, si $|x|$ est assez grand, on a que

$$|a_n x^n| > C \cdot |a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0|.$$

La 'moralité' de ce théorème est que lorsque x est grand, l'ordre de grandeur de $p(x)$ ne dépend que de son terme de degré le plus grand. Ceci entraîne en particulier que si $P(x)$ est de degré strictement plus petit que celui de $Q(x)$, alors $\frac{P(x)}{Q(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$.

Résumé sur les asymptotes

Asymptotes verticales.

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ possède une asymptote verticale d'équation $x = c$ dans les cas suivants :

- c est une racine de $q(x)$ et n'est pas une racine de $p(x)$.
- c est une racine de $q(x)$ de multiplicité r et une racine de $p(x)$ de multiplicité s, et $r > s$.

Autrement dit : si, lorsqu'on simplifie la fraction au maximum, il reste $(x-a)$ au dénominateur, alors il y a une asymptote en $x = a$.

Exemples.

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+1)}, \quad g(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)}, \quad h(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+1)}$$

- f possède deux asymptotes verticales, en $x = -1$ et $x = 1$.
- g possède une asymptote verticale, en $x = -1$.
- h possède deux asymptotes verticales, en $x = -1$ et $x = 2$.

Asymptotes horizontales & obliques par la division Euclidienne.

Le comportement d'une fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ lorsque $|x|$ devient grand peut se comprendre en effectuant la division Euclidienne. En effet, si $p(x) = q(x) \cdot a(x) + r(x)$, alors

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \text{ lorsque } q(x) \neq 0.$$

Comme $deg(r(x)) < deg(q(x))$, le terme $\frac{r(x)}{q(x)}$ tend vers 0 lorsque $|x|$ devient grand. Donc, $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ tend vers le quotient de la division Euclidienne $a(x)$.

Exemples.

— $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x+1}$. On divise : $x^3 - 2x = (x+1)(x^2 - x - 1) + 1$, donc $f(x)$ s'approche de la fonction $y = x^2 - x - 1$ lorsque $|x|$ devient grand.

— $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x+1}$. On divise : $x^2 - 2x + 3 = (x+1)(x-3) + 6$, donc $g(x)$ s'approche de la fonction $y = x + 1$ lorsque $|x|$ devient grand.

— $h(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{2x^2 + 2}$. On divise : $x^2 + x - 1 = (2x^2 + 2) \cdot \frac{1}{2} + x - 2$, donc $h(x)$ s'approche de la fonction $y = \frac{1}{2}$ lorsque $|x|$ devient grand.

— $k(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x}$. On divise : $x^2 - 1 = (x^3 + x) \cdot 0 + x^2 - 1$, donc $k(x)$ s'approche de la fonction $y = 0$ lorsque $|x|$ devient grand.

Cette méthode permet de toujours trouver les équations des asymptotes horizontales ou obliques, cependant il existe des critères parfois plus simples à utiliser.

Asymptotes horizontales : critères simples.

On rappelle la formule (II.1) :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.

f possède une asymptote horizontale d'équation $y = c$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$. Dans le cas des fractions rationnelles, les deux sont équivalents (si l'un est vrai, l'autre aussi), et arrivent dans les cas suivants :

- $n < m$, dans ce cas $c = 0$.
- $n = m$, dans ce cas $c = \frac{a_n}{b_n}$.

Asymptotes obliques : critères (plus ou moins) simples.

f possède une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ ssi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$, ou la même chose avec les limites allant vers $-\infty$. Dans le cas des fractions rationnelles, les deux sont équivalents (si l'un est vrai, l'autre aussi), et on a une asymptote oblique dans le cas suivant :

- $n = m + 1$, et $a = \frac{a_n}{b_m}$. La constante b se trouve en calculant $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$, comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple.

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 3x - 12}$$

On a donc $a = \frac{2}{1} = 2$. On pose le calcul suivant :

$$\begin{aligned} f(x) - ax &= \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 3x - 12} - 2x \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 - 2x(x^2 + 3x - 12)}{x^2 + 3x - 12} \\ &= \frac{-9x^2 + 26x - 1}{x^2 + 3x - 12} \end{aligned}$$

Donc, $b = \frac{-9}{1} = -9$, et l'asymptote oblique a pour équation $y = 2x - 9$.

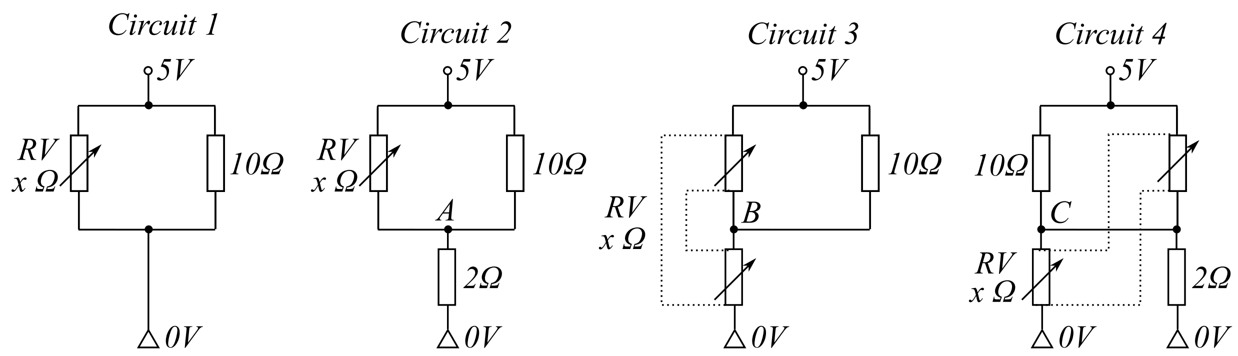
Remarques.

Si $n > m + 1$, alors f ne possède ni asymptote horizontale, ni asymptote oblique. Une fonction rationnelle ne peut posséder qu'une seule asymptote horizontale ou oblique.

II.6.1 exercice sur les fonctions rationnelles

Exercice II.6.1. Exercice d'introduction : Quelques circuits de résistances

On rappelle la loi d'Ohm : $U = R \cdot I$.



1. Dans le circuit 1, RV est une résistance variable de $x\Omega$ en parallèle avec une résistance de 10Ω. Trouver la fonction donnant le courant $I(x)$ à travers RV en foncion de x. $I(x)$ est-il défini pour tout $x \geq 0$?
2. Dans le circuit 2, RV est à nouveau une résistance variable de $x\Omega$. Trouver la fonction $U(x)$ du voltage au point A en fonction de x.

3. Dans le circuit 3, RV est une résistance variable double de $x\Omega$. Trouver la fonction $U(x)$ du voltage au point B en fonction de x. $U(x)$ est-il défini pour tout $x \geq 0$?
4. Dans le circuit 4, RV est une résistance variable double de $x\Omega$. Trouver la fonction $U(x)$ du voltage au point C en fonction de x. $U(x)$ est-il défini pour tout $x \geq 0$?

Exercice II.6.2.
Déterminer le degré, le domaine de définition et les zéros des fonctions rationnelles suivantes.
(1) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$ (2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$,
(3) $f(x) = \frac{2x^3-10x^2+8x}{x^2-1}$ (4) $f(x) = \frac{x^4}{x^4+2}$

Exercice II.6.3.
Déterminer les asymptotes verticales des fonctions rationnelles suivantes.
(1) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$ (2) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}$
(3) $f(x) = \frac{x^2-6x+8}{(x-2)^2(x+1)}$ (4) $f(x) = \frac{(x^2+6)(x-1)^2}{(x-1)^3}$
(5) (plus difficile) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ (6) (encore plus difficile) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x^3-1)^2}$

Exercice II.6.4.
Répondre (*avec le moins de calculs possibles*) par vrai ou faux aux questions suivantes.
(1) Une fonction rationnelle de degré impair possède au moins un zéro.
(2) Si deux fonctions rationnelles f, g ont les mêmes asymptotes, le même domaine et et les mêmes zéros, elles sont égales.
(3) Si une fonction rationnelle a 3 asymptotes verticales, elle est au moins de degré 3.
(4) Si $f(x)$ est une fonction rationnelle, que $f(0) = -1$ et que $f(2) = 1$, alors f possède au moins un zéro.
(5) L'égalité $1 = (x^2-1) \cdot \left(\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x+2}\right)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(6) La fonction $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ est une fonction rationnelle.
(7) La fonction $f(x) = 3x^2 + 2x - \frac{5}{x}$ est une fonction rationnelle.

Exercice II.6.5.
Déterminer (si elles existent) les asymptotes horizontales ou obliques des fonctions rationnelles suivantes.
(1) $f(x) = \frac{4x^2+2x+2}{6x^2+2x+1}$ (2) $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x+1}$
(3) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^4+x^3-2x-1}$ (4) $f(x) = \frac{3x^3-x^2}{x+2}$
(5) $f(x) = \frac{x^3-6x+8}{(x-2)^2(x+1)^3}$ (6) $f(x) = \frac{x+1}{\pi x-1}$

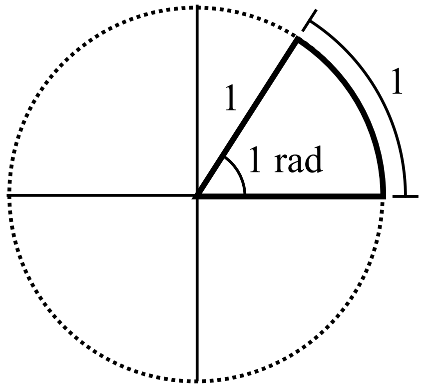
Exercice II.6.6.
Répondre (*avec le moins de calculs possibles*) par vrai ou faux aux questions suivantes.
(1) Il n'existe aucune fonction rationnelle possédant une asymptote horizontale en $y = 3$ et une verticale en $x = 3$.
(2) $f(x) = \frac{2x^2}{4x+1} - \frac{1}{2}x$ possède une asymptote horizontale.
(3) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2x+1}$ possède une asymptote horizontale.
(4) Si $f(x)$ possède une asymptote verticale en $x = 2$ et que $g(x)$ est une fraction rationnelle, alors $f(x) \cdot g(x)$ possède une asymptote verticale en $x = 2$.
(5) La fonction $\frac{3x^2-2x+1}{2x+2} - \frac{6x^3-2x}{4x^2-4x+17}$ possède une asymptote horizontale.

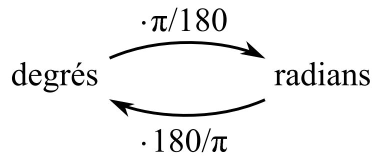
Exercice II.6.7.
Faire l'étude complète (domaine, zéros, asymptotes) de la fonction rationnelle suivante, et tracer son graphe :

$$f(x) = \frac{(4x+5)(x^2+x-2)}{(x^2-4x+3)}$$

II.7 Fonctions circulaires et trigonométrie

La mesure de l'angle en radians est égale à la longueur de l'arc correspondant sur le cercle de rayon 1. Donc, l'angle droit vaut $\pi/2$ radians, l'angle plat π radians et le 'tour complet' 2π radians.

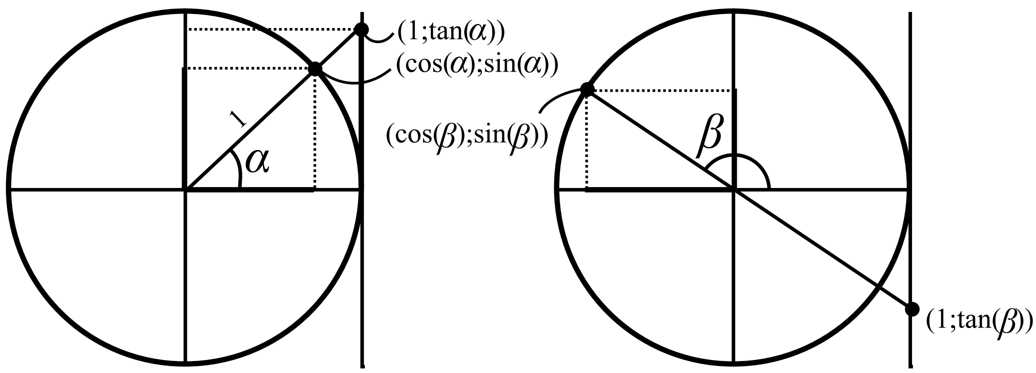




La longueur ℓ d'un arc de cercle de rayon r correspondant à un angle α est donnée par :

$$\ell = r \cdot \alpha, \quad \alpha \text{ en radians}$$
$$\ell = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}, \quad \alpha \text{ en degrés}$$

Les sinus et cosinus de l'angle α sont définis ci-dessous : un point sur le cercle unité dont la droite passant par lui et l'origine fait un angle α avec l'axe horizontal a pour coordonnées $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$. La tangente est la coordonnée verticale du point sur la même droite, mais de coordonnée horizontale égale à 1.



Quelques relations

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \qquad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Les suivantes ne sont valables qu'en radians

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha) \qquad \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin(\alpha) \qquad \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\alpha)$$

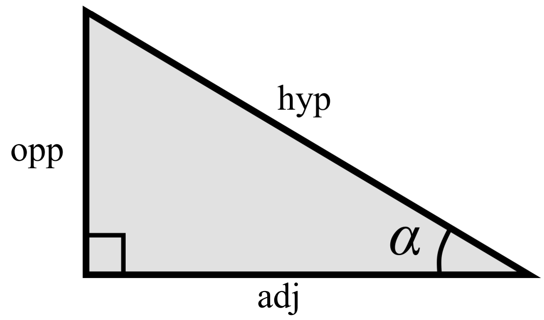
Quelques valeurs

degrés	radians	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
$0°$	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	0	1
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$180°$	π	-1	0
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$225°$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$315°$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$360°$	2π	1	0

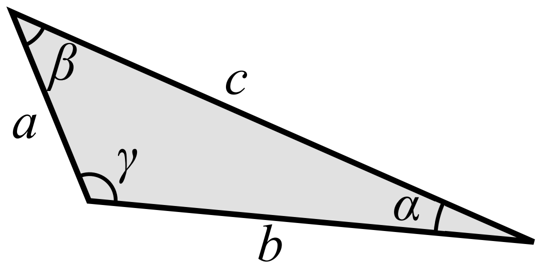
Aspect purement géométrique
Lorsqu'on fait de la géométrie, pour des raisons historiques on aura tendance à utiliser plutôt les degrés que les radians, mais les deux sont possibles. On rappelle que la somme des angles intérieurs dans un triangle du plan vaut $180° = \pi$ Rad.

Dans un triangle rectangle
Dans un triangle rectangle, tous les angles sont au maximum de $90° = \pi/2$ Rad, et on a les relations suivantes :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$



Dans un triangle quelconque
Convention : Les angles α, β, γ sont respectivement opposés aux côtés a, b, c.



Théorème du cosinus
Dans le triangle ci-dessus, on a :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

Théorème du sinus
Dans le triangle ci-dessus, on a :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Aspect analytique

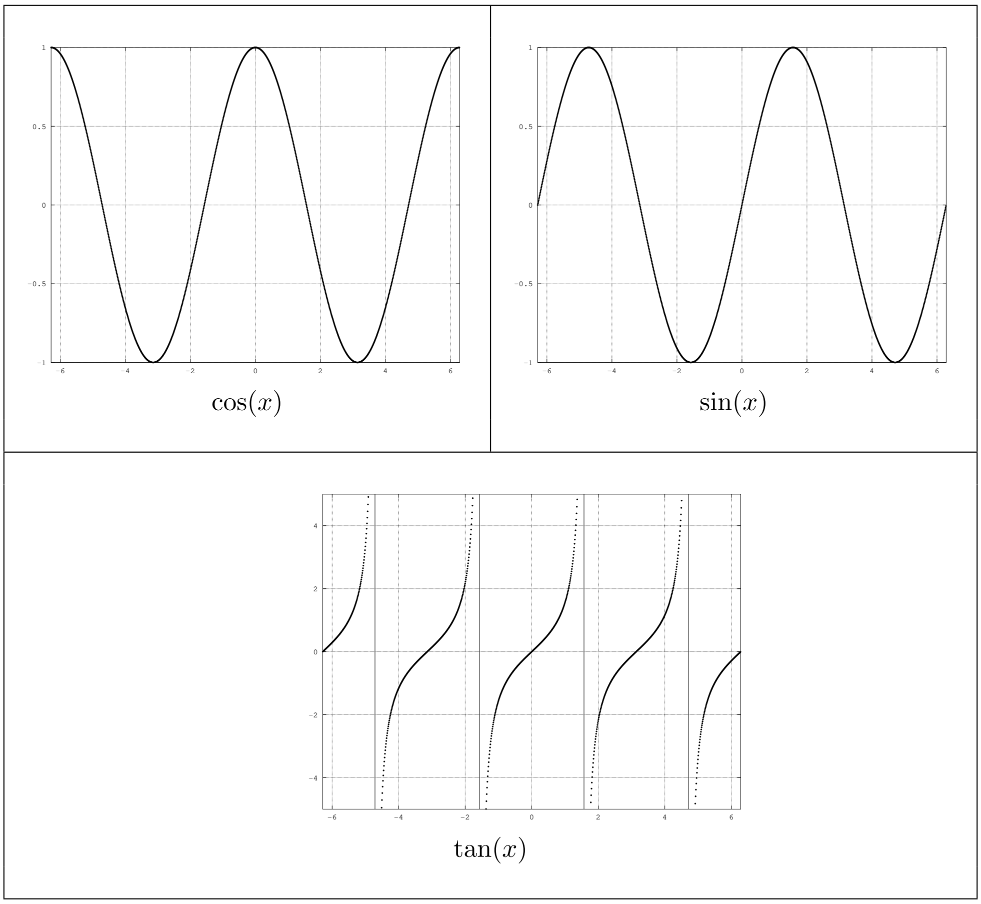
Lorsqu'on fait de l'analyse, les angles sont **toujours** exprimés en radians, pour des raisons que l'on verra lorsqu'on étudiera les limites et la dérivation.

Graphes

Les domaines de définition sont les suivants.

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad \tan : \mathbb{R} \backslash \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

La fonction tangente possède des asymptotes verticales en $k\pi + \frac{\pi}{2}$ pour chaque $k \in \mathbb{Z}$.
Les graphes de ces fonctions entre -2π et 2π sont donnés ci-dessous.



$\cos(x)$ $\sin(x)$

$\tan(x)$

Quelques identités trigonométriques

Formules d'addition

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \quad \sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Formules de division par 2

$$\left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \qquad \left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

Identités 'hétérodyne'

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big)$$

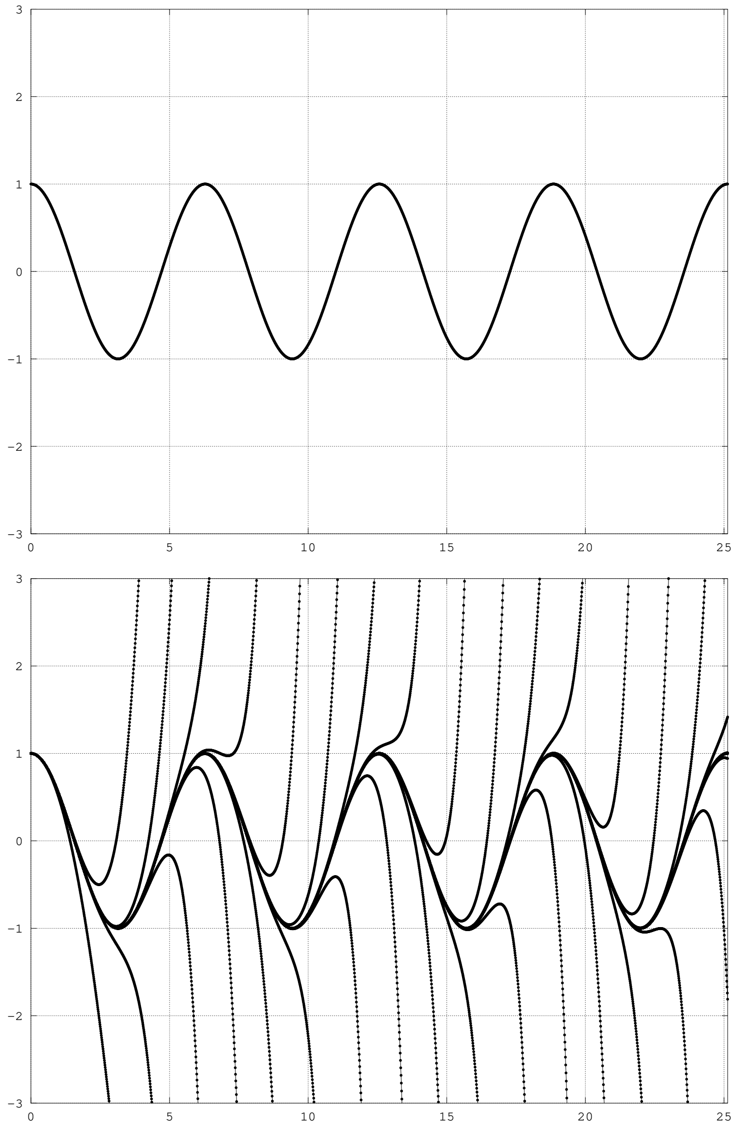
Equations trigonométriques

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \cos(y) &\Leftrightarrow x = y + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \text{ ou } x = -y + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\\
\sin(x) = \sin(y) &\Leftrightarrow x = y + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\\
\tan(x) = \tan(y) &\Leftrightarrow x = y + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Développements en série
Tous les angles sont exprimés en radians.

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

Ci-dessous, un graphique entre 0 et 8π de la fonction $\cos(x)$ et quelques unes de ses premières approximations par la série.


3
2
1
0
−1
−2
−3
0
5
10
15
20
25
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
5
10
15
20
25

II.7.1 Exercices sur les fonctions circulaires

Exercice II.7.1.
Convertir en degrés les angles donnés par leur mesure en radians

$$(1)\quad \tfrac{\pi}{6} \quad (2)\quad \tfrac{2\pi}{3} \quad (3)\quad \tfrac{\pi}{10}$$

$$(4)\quad 4\pi \quad (5)\quad -\tfrac{5\pi}{6} \quad (6)\quad \tfrac{15\pi}{4}$$

$$(7)\quad 1 \quad (8)\quad 0.7 \quad (9)\quad -2$$

$$(10)\quad 3$$

Exercice II.7.2.
Convertir en radians les angles donnés par leur mesure en degrés

$$(1)\quad 45° \quad (2)\quad 60° \quad (3)\quad 75°$$

$$(4)\quad -30° \quad (5)\quad 120° \quad (6)\quad 315°$$

$$(7)\quad 22.7° \quad (8)\quad -107.9° \quad (9)\quad 292.3°$$

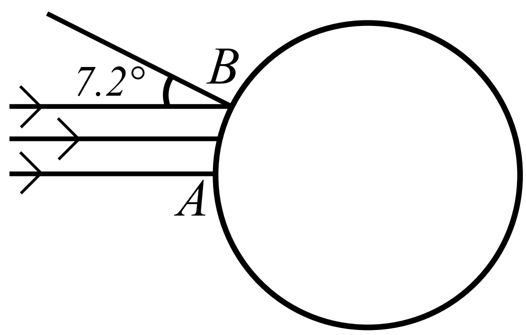
$$(10)\quad 152.5°$$

Exercice II.7.3.
Calculer, à 1 mm près, la longueur d'un arc

1. de 32° sur un cercle de rayon 15 cm.
2. de 2 radians sur un cercle de rayon 7 cm.

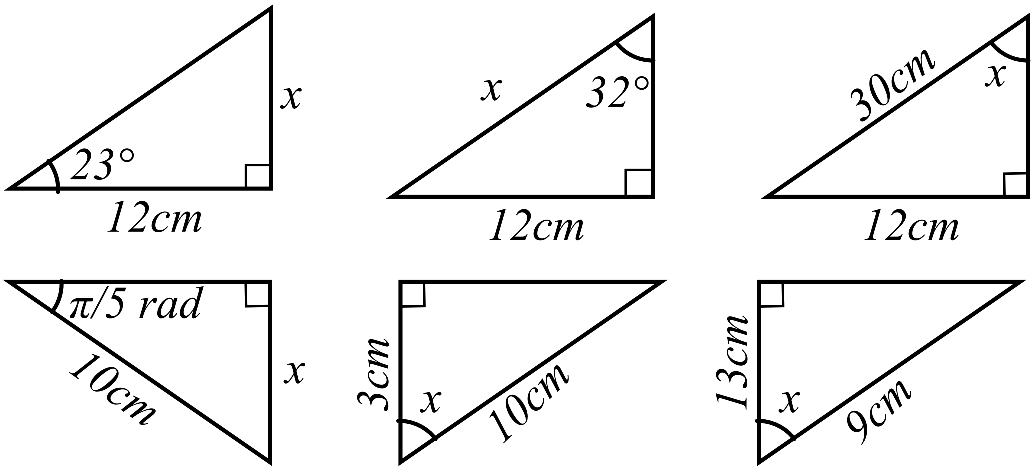
Exercice II.7.4.
Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $\frac{1}{60}$ degré (ou 1 minute d'arc). Quelle est leur distance [3] sachant que le rayon de la Terre est de 6370 km ?
Peut-on poser la même question pour deux points situés sur un même parallèle dont les longitudes diffèrent ?

Exercice II.7.5.
Deux points A et B de la surface terrestre sont situés sur le même méridien et distants de 800 km. Lorsque le Soleil est à la verticale de A, les rayons du Soleil forment avec la verticale un angle de 7.2° en B. En déduire la circonférence et le rayon terrestre [4].

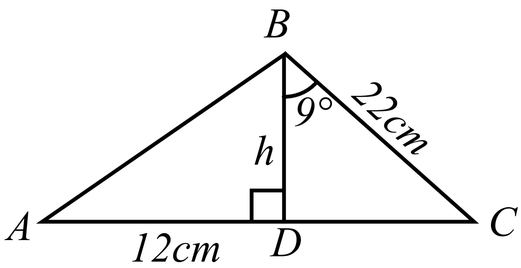


3. Cette distance définit le mille nautique.
4. Cette méthode a été imaginée par Eratosthène (284-195 av. J.-C.) après avoir appris que, un certain jour de l'année à midi, le Soleil se réfléchit verticalement dans un puits profond près de Syène (aujourd'hui Assouan) qui correspondait au point A. Le point B était Alexandrie, située à 800 km au nord de Syène. Pour déterminer l'angle à midi, on mesurait l'ombre d'un pilier vertical.

Exercice II.7.6.
Pour chaque triangle rectangle ci-dessous, déterminer x (indiquez si aucune ou plusieurs solutions sont possibles).



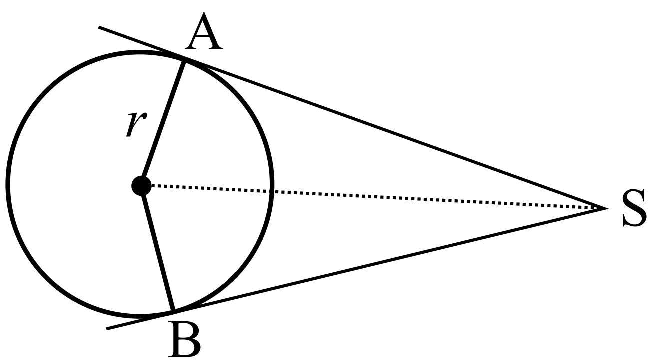
Exercice II.7.7.
Calculer l'aire et le périmètre du triangle ABC ci-dessous.



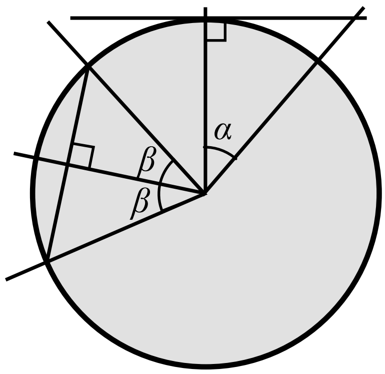
Exercice II.7.8.
Le soleil est à 33° au dessus de l'horizon, je mesure $1m78$, combien mesure mon ombre ?

Exercice II.7.9.
Vous circulez à vélo sur une route droite qui monte avec une pente constante de 10%. Après avoir roulé $8km$ (sur la route, donc), de quelles distances vous êtes-vous déplacé horizontalement et verticalement ?

Exercice II.7.10.
Un satellite S voit une portion de la terre. La distance entre les deux points A et B (mesurée *sur la surface de la terre*) est de $16'045km$. En rappelant que le rayon de la terre est de $6371km$, trouvez à quelle hauteur se trouve le satellite.



Exercice II.7.11. La courbure terrestre à portée de main.
On estime que la terre est une sphère de $6'371$km de rayon (dans la réalité, elle est très légèrement ellipsoïdale, mais ça ne change presque rien aux résultats). La distance entre deux points sur la terre est donnée par la longueur de l'arc de cercle (dont le centre est celui de la sphère) entre ces deux points. L'angle entre deux points est celui déterminé par l'arc de cerlce entre ces deux points. La figure ci-dessous devrait servir d'inspiration pour ce TD :



On considèrera dans cet exercice que les surfaces du lac et de la mer sont totalement lisses et sans vagues.

(1) Compléter le tableau ci–dessous (prenez au moins 6 chiffres après la virgule).

	Distance (km)	*Angle correspondant (radians)*
Lausanne (CH) – Evian (FR)	13	
Zanzibar (TZ) – Dar-es-Salaam (TZ)	72	
Brindisi (IT) – Vlorë (AL)	132	
Bari (IT) – Dubrovnik (HR)	205	

(2) On désire tendre un cable au maximum entre la plage de Lausanne et celle d'Evian. Si les deux extrémités du cable se trouvent juste à la hauteur de la surface du lac, quelle sera la longueur de ce cable et la profondeur maximale qu'il atteindra ?

(3) A quelle hauteur minimum faut-il mettre ses yeux sur la plage de Lausanne pour pouvoir apercevoir le bord du lac à Evian ?

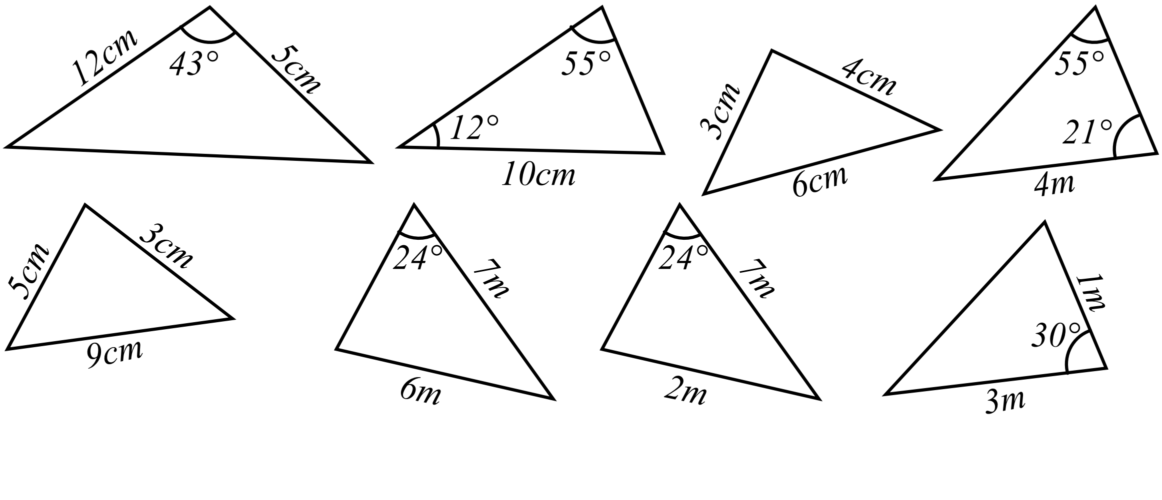
(4) A quelle distance se trouve l'horizon lorsque l'on regarde la mer et que nos yeux sont à 2m au dessus de la surface ?

(5) Si quelqu'un se trouve sur la plage de Lausanne, juste au bord du lac, avec ses yeux à 2m au dessus de la surface, A quelle hauteur minimum faut-il placer les siens pour pouvoir regarder cette personne dans les yeux depuis le bord du lac à Evian ?

(6) Répondre aux points (2), (3) pour les autres paires de villes du tableau.

(7) On veut construire deux tours de même hauteur, une à Bari et une à Dubrovnik, les deux au bord de la mer, de manière à ce qu'elles puissent se voir mutuellement. Quelle hauteur doivent-elle faire au minimum ?

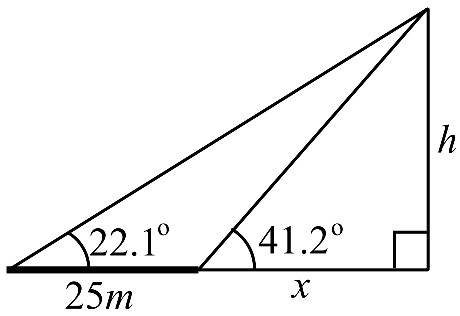
Exercice II.7.12.
Trouver tous les côtés et angles manquants dans les triangles ci-dessous (indiquez si aucune ou plusieurs solutions sont possibles).



Exercice II.7.13.
Résoudre le ou les triangle(s) qui correspond(ent) aux données suivantes (α est opposé à a, β est opposé à b et γ est opposé à c).

(a) $a = 10$, $b = 20$, $\gamma = 30°$ (b) $a = 15$, $\beta = 10°$, $\gamma = 40°$ (c) $a = 5$, $b = 10$, $c = 6$
(d) $a = 4$, $b = 3$, $\beta = 26°$ (e) $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$ (f) $a = 10$, $b = 9$, $\beta = 30°$
(g) $a = 20$, $b = 5$, $\gamma = 60°$ (h) $a = 10$, $c = 8$, $\gamma = 30°$ (i) $a = 10$, $c = 20$, $\beta = 60°$
(j) $a = 12$, $b = 11$, $\beta = 20°$ (k) $a = 5$, $c = 6.8$, $\alpha = 33°$

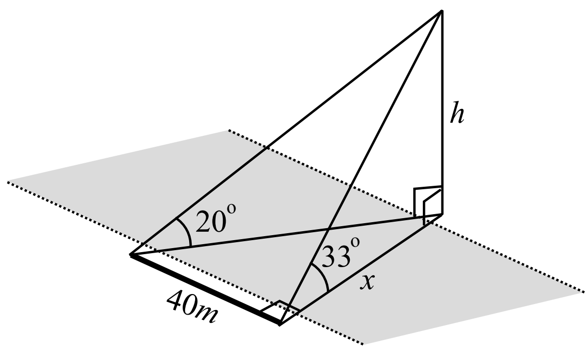
Exercice II.7.14.
Un homme aperçoit un arbre vertical sous un angle de 41.2°. Il recule de 25m et voit l'arbre sous un angle de 22.1° (on admettra que les yeux de l'observateur et le pied de l'arbre sont au même niveau).



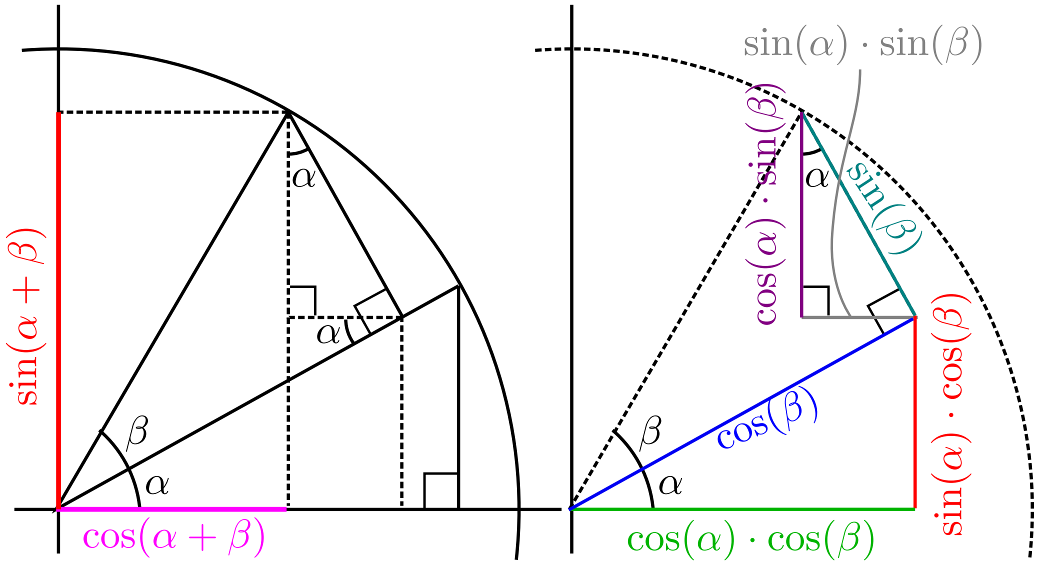
1. A quelle distance x du pied de l'arbre l'observateur se trouvait-il au début ?

2. Quelle est la hauteur h de l'arbre ?

Exercice II.7.15.
Un observateur aperçoit un arbre de l'autre côté d'une rivière, juste en face et sous un angle d'élévation de 33°. Il se déplace de 40 m le long de la rive et voit maintenant l'arbre sous un angle de 20°. Calculer la largeur de la rivière et la hauteur de l'arbre.



Exercice II.7.16.
Observez la figure ci-dessous, et déduisez-en que les formules d'addition écrites en dessous sont valables quand $\alpha + \beta < 90°$ et $0 < \alpha, \beta < 90°$. (En fait, elles sont valables pour tous les angles, mais le dessin ne le montre que dans ce cas-là.)



$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

En déduire que

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

Exercice II.7.17.
A l'aide des formules de duplication, démontrer que

$$1)\quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{(formule de bissection)}$$
$$2)\quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \text{(formule de bissection)}$$

Exercice II.7.18.
A l'aide des formules d'addition, démontrer l'identité 'hétérodyne'

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

II.8 Exponentielles et logarithmes

II.8.1 Introduction

Supposons qu'un bien quelconque augmente de 10% chaque année, et qu'il valait 5000.- en 1975. Après une année, sa valeur sera donc de $5000 + 5000 \cdot 0.1 = 5000 \cdot (1 + 0.1) = 5000 \cdot 1.1$. Si t représente le nombre d'années passées depuis 1975, on obtient donc :

Années écoulées	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Valeur du bien	5000 $= 5000 \cdot 1.1^0$	$5000 \cdot 1.1$ $= 5000 \cdot 1.1^1$	$5000 \cdot 1.1 \cdot 1.1$ $= 5000 \cdot 1.1^2$	$5000 \cdot 1.1 \cdot 1.1 \cdot 1.1$ $= 5000 \cdot 1.1^3$

On en conclut donc que la valeur du bien est donnée par $V(t) = 5000 \cdot 1.1^t$.

En 1975, Gordon E. Moore a fait la prédiction portant le nom de "loi de Moore" que le nombre de transistors sur une puce de silicium de taille standard double tous les deux ans. Donc, si le nombre de départ est de 5000 (environ le nombre de transistors sur une puce à cette époque), on obtient les quantités successives suivantes :

Années écoulées	$t = 0$	$t = 2$	$t = 4$	$t = 6$
Nombre de transistors	5000 $= 5000 \cdot 2^0$	$5000 \cdot 2$ $= 5000 \cdot 2^1$	$5000 \cdot 2 \cdot 2$ $= 5000 \cdot 2^2$	$5000 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $= 5000 \cdot 2^3$

Et donc on peut en conclure que le nombre de transistors est donnée par la fonction $M(t) = 5000 \cdot 2^{t/2}$ où t est le temps en années écoulé depuis 1975. En utilisant les règles rappelées à la page suivante, on peut écrire également

$$M(t) = 5000 \cdot (2^{\frac{1}{2}})^t = 5000 \cdot (\sqrt{2})^t.$$

Les deux fonctions $V(t)$ et $M(t)$ sont des fonctions exponentielles (multipliées par la constante 5000) de bases respectives 1.1 et $\sqrt{2}$. Ces fonctions sont définies pour tous les $t \in \mathbb{R}$, pas seulement les nombres entiers. On peut donc calculer $M(3 + \frac{5}{12})$, qui correspond au temps écoulé de 3 ans et 5 mois.

Pour répondre à la question "combien d'années sont nécessaires (depuis 1975) pour qu'on atteigne 10^{10} transistors ?", il faut résoudre l'équation

$$5000 \cdot (\sqrt{2})^t = 10^{10} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{2})^t = 2'000'000.$$

Pour cela, on doit introduire les logarithmes, qui sont les fonctions réciproques des exponentielles :

$$(\sqrt{2})^t = 2'000'000 \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_{\sqrt{2}}(2'000'000) = 41.86,$$

ce qui correspond environ à la réalité, les 10 milliards de transistors ayant été atteints vers 2016.

Les fonctions exponentielles : un résumé

Règles
Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

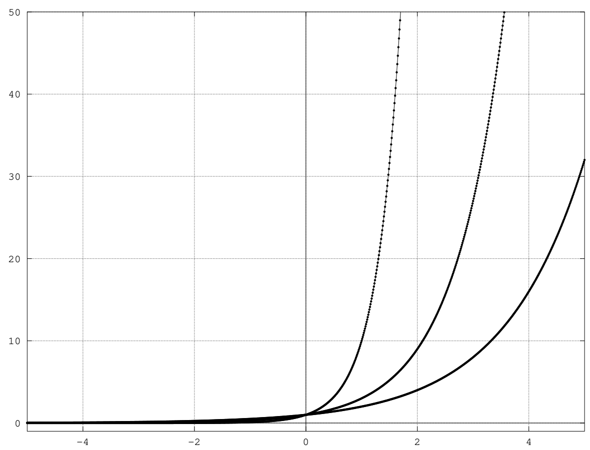
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y} \qquad \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$$
$$\sqrt[x]{a^y} = (\sqrt[x]{a})^y = a^{\frac{y}{x}} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$a^0 = 1$$

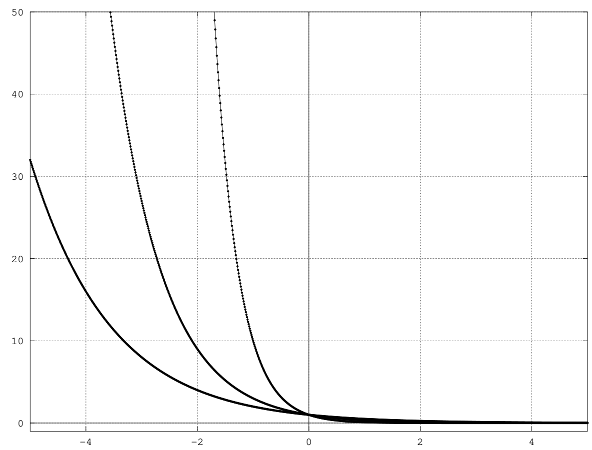
Propriétés
Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $exp_a(x) = a^x$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$exp_a : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x \end{array}$$

Si $a \neq 1$, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe exactement un $x \in \mathbb{R}$ tel que $a^x = y$. Si $a > 1$, a^x est strictement croissante et si $a < 1$, a^x est strictement décroissante.
Une exponentielle de base $a > 1$ croit beaucoup plus vite que n'importe quel polynôme $p(x)$ (lorsque x est assez grand) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{a^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{p(x)} = +\infty$. Si $0 < a < 1$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) \cdot a^x = 0$.

Graphes
Le graphique de gauche montre les fonctions $2^x, 3^x$ et 10^x, celui de droite les fonctions $(\frac{1}{2})^x, (\frac{1}{3})^x$ et $(\frac{1}{10})^x$.





La fonction exponentielle naturelle
La fonction e^x, de base $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828183\ldots$ est appelée fonction exponentielle naturelle. Elle se note parfois par $\exp(x)$. Elle peut se définir par la limite suivante :

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

On peut également la calculer à l'aide de la série :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2\cdot 1} + \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \frac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \cdots$$

Nous verrons plus tard que la dérivée de e^x est elle-même : $[e^x]' = e^x$. De manière générale, $[a^x]' = \ln(a) \cdot a^x$.

Les fonctions logarithmes : un résumé

Le logarithme de base $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ est la fonction réciproque[5] de la fonction exponentielle de base a. (Le logarithme de base 1 n'est pas défini.) On a en effet vu que pour chaque $y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un *unique* $x \in \mathbb{R}$ tel que $a^x = y$. On appelle alors x le logarithme en base a de y :

$$x = \log_a(y) \quad \text{si et seulement si} \quad y = a^x$$

Le logarithme en base a de y est la réponse à la question "à quelle puissance faut-il mettre a pour obtenir y ?" Donc, $\log_2(8) = 3$, par exemple.

Bases particulières
Le logarithme de base 10 est noté simplement par log : $\log(x) = \log_{10}(x)$.
Le logarithme de base e est noté par ln : $\ln(x) = \log_e(x)$.

Règles
Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, on a :

$$\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad a^{\log_a(x)} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,$$
$$\log_a(1) = 0, \qquad \log_a(0) \text{ est indéfini},$$
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,$$
$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y \in \mathbb{R}, \qquad \log_a(a) = 1.$$

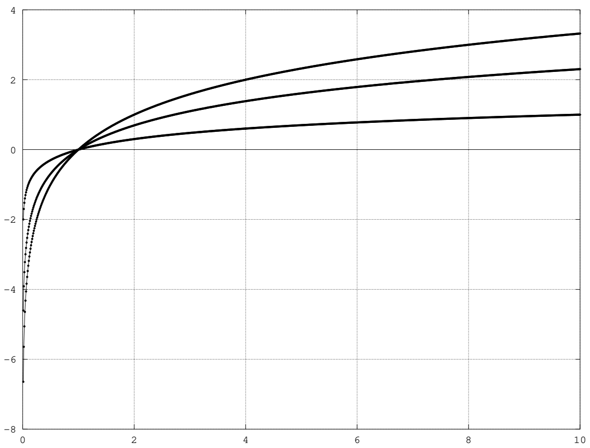
Formule du changement de base
Si $a, b \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, on peut passer du logarithme en base a au logarithme en base b avec la formule suivante :

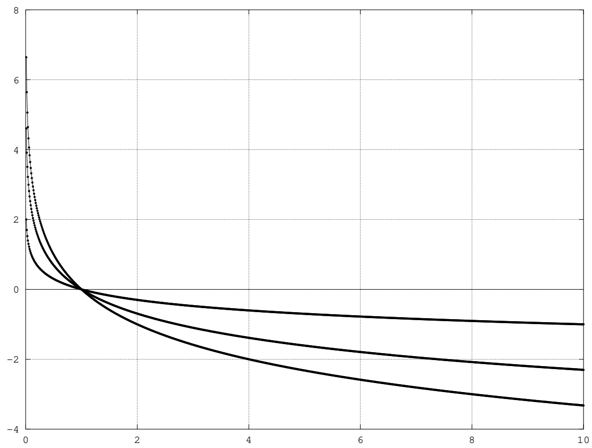
$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \frac{\log(x)}{\log(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

Propriétés
Le domaine de définition du logarithme de base a est $\mathbb{R}_+^*$ et il prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\log_a : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log_a(x) \end{array}$$

La dérivée de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$, en fait si $x \neq 0$ on a même $[\ln(|x|)]' = \frac{1}{x}$. En général, $[\log_a(|x|)]' = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$.
Graphes
Le graphique de gauche montre les fonctions $\log_2(x), \ln(x)$ et $\log(x)$, celui de droite les fonctions $\log_{\frac{1}{2}}(x), \log_{\frac{1}{e}}(x)$ et $\log_{\frac{1}{10}}(x)$.





5. On utilise aussi le terme "fonction inverse", mais cela peut créer une confusion avec l'inverse au sens multiplicatif $x \mapsto 1/x$.

II.8.2 Exercices sur les fonctions exponentielles et logarithmes

Exercice II.8.1.
Une moto perd 12% de sa valeur marchande chaque année. Si sa valeur neuve et de $18'000$CHF, quelle sera sa valeur dans 5 ans ?

Exercice II.8.2.
Quelle sera la valeur acquise par un capital de 5000CHF au bout de 4 ans si le taux *mensuel* est de 1.25%.

Exercice II.8.3.
Quel capital initial faut-il placer au taux annuel de 2.5% durant 3 ans pour que sa valeur acquise soit de 2235.65CHF ?

Exercice II.8.4.
Après 3 baisses successives de 5%, une paire de chaussure coûte 100CHF. Quel était son prix initial ?

Exercice II.8.5.
Quel capital doit-on placer à un taux trimestriel de 2.5% pour qu'il atteigne après 12 ans la même valeur acquise que si on plaçait 4500 francs à 4% l'an pendant 8 ans ?

Exercice II.8.6.
Une forêt s'étend exponentiellement. Elle occupe aujourd'hui $72'342\ m^3$. Il y a 12 ans, elle occupait $48'228\ m^3$.
(1) Quel volume occupait-elle il y a 5 ans ?
(2) Quel volume occupera-t-elle dans 7 ans ?

Exercice II.8.7.
La demi-vie du Carbone 17 $^{17}\mathsf{C}$ est de 0.193 secondes, celle du Carbone 15 $^{15}\mathsf{C}$ de 20 minutes et 20 secondes, et celle du Carbone 14 $^{14}\mathsf{C}$ de 5'400 ans. Note : on considèrre qu'une année contient 365.25 jours.

(1) Ecrire la formule donnant la quantité de $^{17}\mathsf{C}$, $^{15}\mathsf{C}$ et $^{14}\mathsf{C}$ en fonction du temps. Précisez les unités.
(2) Si on possède 1kg de chaque au temps $t = 0$ calculez, à 4 décimales près, la quantité de chaque que l'on a après 1 seconde, 1 minute, 1 jour et 1'000 ans.
(3) Si on a 1kg de $^{17}\mathsf{C}$ et 2^{-20}kg de $^{14}\mathsf{C}$, est-ce que si on attend suffisamment de temps, on se retrouve avec moins de $^{17}\mathsf{C}$ que de $^{14}\mathsf{C}$? Si oui, calculer (un peu approximativement) ce temps.

Exercice II.8.8.
Répondre par vrai ou faux en justifiant avec le minimum de calculs.

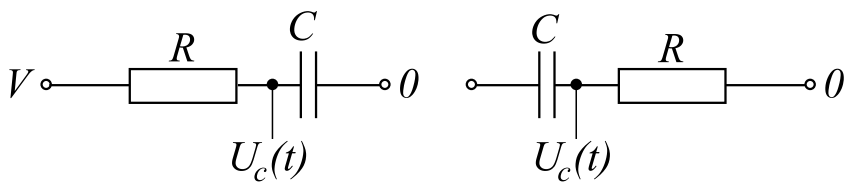
(1) On suppose que le nombre de données traîtées par un algorithme est n. On a deux algorithmes A et B qui calculent la même chose (par exemple, la longueur du chemin le plus court dans un réseau) mais de deux manières différentes. L'algorithme A prend un temps de $1.2^n + n^2 + 2$ nano-secondes pour effectuer son calcul et l'algorithme B prend $10 \cdot 1.02^n + n^4 + 3n^2$ nano-secondes. Il vaut mieux utiliser l'algorithme A.
(2) Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{\sin(x)}{2^x}$ tend vers 0.
(3) Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{\sin(x)}{0.9^x}$ tend vers $+\infty$.
(4) La fonction $f(x) = -3 \cdot 0.7^{2x}$ est strictement croissante.
(5) La fonction $f(x) = -6 \cdot e^{-(x^2-4)}$ est strictement croissante.
(6)
$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$
(7) Pour trouver l'intérêt mensuel correspondant à un intérêt annuel de I%, il suffit de prendre $I/12$.

Exercice II.8.9.
Voici un théorème et sa démonstration. On rappelle qu'un nombre irrationnel est un nombre réel qui ne peut pas s'écrire comme une fraction p/q. On accepte que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Théorème.	Il existe deux nombres irrationnnels a, b tels que a^b est un nombre rationnel.
Démonstration.	On a deux possibilités : 1. Soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est un nombre rationnel, dans ce cas on a fini, on pose $a = b = \sqrt{2}$. 2. Soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ n'est pas un nombre rationnel, dans ce cas on pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Dans ce cas, on a : $$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$ et on a fini.

Répondre aux questions suivantes :
(1) Cette démonstration vous paraît-elle correcte ?
(2) Peut-on faire la même démonstration en remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt{3}$ partout ?
(3) Cette démonstration est-elle "effective", c.-à-d. qu'elle nous permet de dire quels sont les nombres a et b recherchés ?

Exercice II.8.10.



Dans la figure de gauche, on place un condensateur de capacitance C Fahrad et une résistance de R Ohm en série, et on connecte la résistance à un potentiel de V Volts. La charge aux bornes du condensateur varie en fonction du temps et est notée par $U_c(t)$. Au temps $t = 0$, on a $U_c(0) = 0$. On a alors

$$U_c(t) = V \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \text{ où } \tau = R \cdot C \text{ est appelée constante de temps du système.}$$

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes avec le moins de calculs possibles.
(1) Après $t = \tau$ secondes, le condensateur est chargé à environ 63% du voltage maximal V.
(2) Après $t = 5\tau$ secondes, le condensateur est chargé à environ 94% du voltage maximal V.
(3) Pour un certain t, on aura $U_c(t) = V$.
(4) Si on remplace la résistance par une autre de valeur deux fois plus grande, alors le condensateur mettra deux fois moins de temps pour être chargé à 63%.
(5) Si on remplace le condensateur par un autre de valeur deux fois plus grande, alors le condensateur mettra deux fois plus de temps pour être chargé à 99%.

Dans la figure de droite, le condensateur se décharge à travers la résistance, et on suppose que $U_c(0) = V$. On a alors

$$U_c(t) = V \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } \tau = R \cdot C.$$

Répondre à nouveau par vrai ou faux aux questions suivantes avec le moins de calculs possibles.
(6) $U_c(5 \cdot \tau) = 0.01 \cdot V$ (environ).
(7) Le courant dans la résistance croit au cours du temps.
(8) Si $R = 10k\Omega$ et $C = 10nF$ (n signifie 'nano', donc 10^{-9}), le condensateur sera quasiment déchargé après 0.1 millisecondes.
(9) Si $R = 10M\Omega$, $C = 0.01F$, V=1000V et que le condensateur a commencé à se décharger hier, on peut sans problème y toucher.

Exercice II.8.11.
Calculez à la main les expressions suivantes.

(1) $\log_5(1)$	(2) $\log_2(8)$	(3) $\log_3(\sqrt{3})$	(4) $\log_4(\sqrt[5]{64})$
(5) $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$	(6) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$	(7) $\log_{\frac{1}{8}}(64)$	(8) $\log_4(\sqrt{2})$
(9) $\log_{49}(\sqrt[3]{7})$	(10) $\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{8})$	(11) $\log_{0.1}(0.0001)$	(12) $\log_{100}(0.01)$

Exercice II.8.12.
Calculez à la main les expressions suivantes.
(1) $\log_6\left(\frac{1}{36}\right)$ (2) $\log_5\left(\frac{1}{25^3}\right)$ (3) $\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt[5]{256})$

Exercice II.8.13.
Résoudre en x les équations suivantes.

(1) $\log_3(x) = 5$	(2) $\log_8(x) = \dfrac{2}{3}$	(3) $\log_{0.01}(x) = \dfrac{1}{2}$
(4) $\log_x(125) = 3$	(5) $\log_x(32) = \dfrac{5}{3}$	(6) $\log_x(0.0025) = 2$
(7) $3\log_a(x) = 2\log_a(8)$	(8) $\log(9x+5) - \log(x) = 1$	

Exercice II.8.14.
Résoudre en x les équations suivantes.

(1) $\log_{11}(x) = 2$	(2) $\log_8(\sqrt[3]{x}) = \dfrac{1}{9}$	(3) $\log_x(729) = 6$
(4) $\log(2x+4) - 2\log(x) = 2$	(5) $\log_a(x) = 3\log_a(2) - \log_a(3) - 2\log_a(5)$	(6) $\log_x(243) = 5$

Exercice II.8.15.
Résoudre en x les équations suivantes.

(1) $2^x = 100$	(2) $e^{-\ln(x)} = 3$	(3) $e^x = \pi$
(4) $\left(3^{x-1}\right)^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$	(5) $27^{x+2} = 3^{5x+8}$	(6) $e^{\frac{6}{x}} = e^{x-1}$

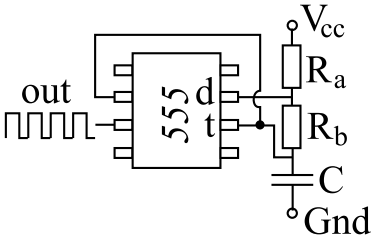
Exercice II.8.16.
Résoudre en x les équations suivantes.
(1) $\log_a(x) = \log_a(16) + 2\log_a(3) - 2\log_a(2) - \dfrac{1}{2}\log_a(9)$
(2) $\log_a(x) = 4\log_a(5) + \log_a(\dfrac{1}{5}) - 3\log_a(3) + \dfrac{1}{3}\log_a(27)$

Exercice II.8.17.
Répondre par vrai ou faux en justifiant avec le minimum de calculs.

(1) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{2^x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\log_2(x)} = 0$
(2) Soient $f(x) = 2^x$ et $g(x) = 3^x$. Alors il existe un $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = C \cdot g(x)$.
(3) $x \mapsto 4^{\log_2(x)}$ peut s'écrire comme $x \mapsto x^r$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$.
(4) $x \mapsto 3^{\log_2(x)}$ peut s'écrire comme $x \mapsto x^r$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$.
(5) L'équation $x = \ln(x)$ n'a aucune solution.
(6) 2^n s'écrit (en base 10) en $\lceil 0.301 \cdot n \rceil$ chiffres, où $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier supérieur à x.
(7) Un nombre entier de 43 chiffres s'écrit en 122, 123 ou 124 bits binaires.

Exercice II.8.18. Le 555 en mode astable.

Le NE555 est un circuit intégré extrêmement populaire, inventé en 1970 par Hans Camenzind et encore utilisé de nos jours (apparemment, un milliard d'unités ont été fabriqueées en 2003). Il peut entre autre servir d'oscillateur lorsqu'on l'utilise en mode 'astable', comme sur la figure ci-contre (seule la partie pertinente du circuit est représentée, quelques autres branchements et un ou deux autres composants sont nécessaires à son fonctionnement). Le principe de cet oscillateur est le suivant.



Lors de la mise sous tension, la patte `d` ('discharge') est 'fermée', c'est-à-dire qu'on peut considérer qu'elle n'est connectée (dans le 555) à rien, donc le condensateur C se charge à travers les résistances R_a et R_b, et la patte 'out' est 'haute', c'est-à-dire à V_{cc}. Lorsque le voltage sur la patte `t` ('threshold') du 555 atteint $\frac{2}{3} \cdot V_{cc}$, la patte `d` s'ouvre vers le Ground (mise à 0 Volts), la patte 'out' est alors 'basse', c'est-à-dire à 0 Volts, et le condensateur se décharge à travers la résistance R_b. Lorsque le voltage sur la patte `t` atteint $\frac{1}{3} \cdot V_{cc}$, la patte `d` se ferme à nouveau, la patte 'out' passe sur 'haut', et le condensateur recommence à se charger (en partant cette fois non de 0 Volts mais de $\frac{1}{3} \cdot V_{cc}$) à travers R_a et R_b, jusqu'à atteindre $\frac{2}{3} \cdot V_{cc}$, etc.

Les formules de charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance sont les suivantes (on a déjà vu une version plus simple dans l'exercice 9 de la série sur les exponentielles) :

$$\text{Charge : } U_c(t) = (V - V_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + V_0,$$

Où V_0 est le voltage du condensateur au temps $t = 0$ et V est le voltage à l'entrée de la résistance ;

$$\text{Décharge : } U_c(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}},$$

Où V_0 est le voltage au temps $t = 0$. Répondre aux questions suivantes en prenant $R_a = R_b = 10k\Omega$ et $C = 2.2\mu F$ (micro-Fahrad).

(1) Calculez en combien de temps le condensateur met pour atteindre $\frac{2}{3} \cdot V_{cc}$ lors de la mise sous tension.
(2) Calculez le temps qu'il faut au condensateur pour passer de $\frac{2}{3} \cdot V_{cc}$ à $\frac{1}{3} \cdot V_{cc}$ lors de la phase de décharge.
(3) Calculez le temps qu'il faut au condensateur pour passer de $\frac{1}{3} \cdot V_{cc}$ à $\frac{2}{3} \cdot V_{cc}$ lors de la phase de charge.
(4) En déduire la fréquence du signal carré sur la patte 'out'.
(5) Le rapport cyclique est défini comme le quotient du temps où le signal de sortie est 'haut' divisé par le temps total d'une oscillation. Calculez-le pour cet oscillateur.

Répondez maintenant aux questions suivantes, en laissant C, R_a, R_b comme des variables.

(6) Calculez le temps qu'il faut au condensateur pour passer de $\frac{2}{3} \cdot V_{cc}$ à $\frac{1}{3} \cdot V_{cc}$ lors de la phase de décharge en fonction de C, R_a, R_b.
(7) Calculez le temps qu'il faut au condensateur pour passer de $\frac{1}{3} \cdot V_{cc}$ à $\frac{2}{3} \cdot V_{cc}$ lors de la phase de charge en fonction de C, R_a, R_b.
(8) En déduire la fréquence du signal carré sur la patte 'out' en fonction de C, R_a, R_b.
(9) Le rapport cyclique peut-il être de 50% ou moins ?

Exercice II.8.19.
(Démontrez des formules sans effort.)
Dans les points suivants, vous ne pouvez pas utiliser la formule pour le changement de base.

(1) En s'inspirant du calcul de la première ligne ci-dessous, essayez de faire celui de la deuxième ligne.

$$\begin{aligned} &2^{\log_3(8)} = \left(3^{\log_3(2)}\right)^{\log_3(8)} = \left(3^{\log_3(8)}\right)^{\log_3(2)} = 8^{\log_3(2)} \\ &4^{\log_7(5)} = \dots \end{aligned}$$

(2) Avec les mêmes genres de calcul qu'au point précédent, montrer que lorsque $a > 0, c > 0$ et $b > 0, b \neq 1$, on a :
$$a^{\log_b(c)} = c^{\log_b(a)}.$$

(3) En s'inspirant du calcul de la première ligne ci-dessous, essayez de compléter celui de la deuxième ligne.

$$\begin{aligned} &2 = 3^{\log_3(2)} = 5^{\log_5(2)} = \left(3^{\log_3(5)}\right)^{\log_5(2)} = 3^{\log_3(5)\cdot\log_5(2)} \\ &7 = 11^{\cdots} = 15^{\cdots} = (11^{\cdots})^{\cdots} = 11^{\cdots\,\cdot\,\cdots} \end{aligned}$$

(4) Avec les mêmes genres de calcul qu'au point précédent, montrer que lorsque $c > 0$ et $a, b > 0,\ a, b \neq 1$, on a :
$$b^{\log_b(c)} = b^{\log_b(a)\cdot\log_a(c)}$$

(5) En prenant le logarithme de base b des deux côtés de l'égalité montrée au point précédent, constater qu'on a démontré :
$$\log_b(c) = \log_b(a) \cdot \log_a(c).$$

En déduire la formule du changement de base :

$$\log_a(c) = \frac{\log_b(c)}{\log_b(a)}$$

Exercice II.8.20.
La factorielle $n!$ d'un nombre entier n se définit comme $0! = 1$, et $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. On rappelle (ou non) les formules suivantes (appelées séries), valables pour tout $x \in \mathbb{R}$, où les fonctions $\sin, \cos$ prennent des angles en radians :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + - \dots \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + - \dots \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

Le but de cet exercice est de constater que ces formules permettent de trouver de très bonnes approximations des valeurs de $e^x, \sin(x), \cos(x)$ en ne prenant que quelques uns des premiers termes de la série. Elles ont été d'ailleurs les premières formules permettant de faire très précisément ces calculs à la main.

(1) Prenons les 15 premiers termes de la série de e^x. Ce qui nous manque pour avoir exactement e^x est donc :
$$\frac{x^{16}}{16!} + \frac{x^{17}}{17!} + \frac{x^{18}}{18!} + \dots$$
Pour avoir une première idée de l'erreur que l'on fait, on peut calculer $\frac{x^{16}}{16!}$ pour diverses valeurs de x. Faites-le pour $x = 0.5, 1, 4, 8$.

(2) Programmez une fonction (en Python 3 ou autre) qui prend en entrée `x,n` et qui vous donne la valeur des n premiers termes de la série de e^x. Faites de même avec celles du cosinus et du sinus. Vous pouvez importer la fonction `factorial` de la librairie `math` si vous le faites en Python 3, ou mieux, la reprogrammer vous-mêmes.

(3) Testez les différences avec les "vraies" valeurs de $e^x, \sin(x), \cos(x)$ (celles que vous donne par exemple Python 3 quand vous importez les fonctions `exp, sin, cos` de la librairie `math` ou `numpy`) pour diverses valeurs de n et de x. Par exemple :
$$n = 1, 2, 4, 8, 20, 50, 100, \quad x = 0, 1, 2, \pi, 10, \text{etc...}$$

(4) A-t-on l'air d'avoir besoin de beaucoup de termes pour avoir une bonne approximation ?

Chapitre III

Nombres Complexes

III.1 Trois manières différentes d'introduire les nombres complexes

III.1.1 En introduisant un nouveau symbole i dont le carré vaut -1 : approche pragmatique

Cette approche permet de manipuler les nombres complexes de manière simple, un peu comme des polynômes. On introduit le symbole i en décidant que $i^2 = -1$, et on espère que tout va fonctionner. On décide alors qu'un nombre complexe est de la forme $a + ib$, pour $a, b \in \mathbb{R}$. Il faut se méfier lorsque l'on introduit ainsi de nouveaux objets, car on peut aboutir à des contradictions, par exemple si on avait choisi d'écrire $\sqrt{-1}$ plutôt que i, on pourrait penser que les propriétés habituelles des racines carrées continuent à être valables, mais on aboutit à ce genre de calculs :

$$-1 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

(Si on veut être précis, l'erreur est dans la troisième égalité, mais de toute façon, ce calcul montre qu'écrire $\sqrt{-1}$ est une mauvaise idée.)

On peut manipuler des expressions comme $1 + i - 3i + (3 - i)^2 + 2(2 - i)$ de la même manière que l'on manipule des expressions contenant des variables, mais en remplaçant i^2 par -1, puis en regroupant les termes contenant la lettre i et les termes sans i. Par exemple :

$$\begin{aligned} (1+i)^2 &= 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \\ (1-i)(1+i) &= 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i \end{aligned}$$

et aussi, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc) \tag{III.1}$$

Comme dit ci-dessus, ayant introduit la règle $i^2 = -1$, il se pourrait que certaines opérations se passent moins bien et que l'on perde certaines propriétés arithmétiques. Heureusement, ce n'est pas le cas, toutes les règles habituelles (commutativité, associativité, distributivité, etc) continuent à être valables. On remarque en particulier :

$$(a + ib) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i\right) = 1, \text{ donc } \quad \frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

ce qui permet de diviser des nombres complexes.

III.1.2 Comme des vecteurs en dimension 2 avec une multiplication étrange : approche géométrique

Si on considère un nombre complexe $a + ib$ comme un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors l'égalité (III.1) au dessus s'écrit :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}$$

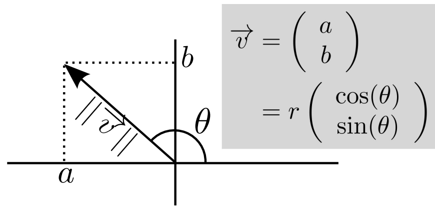
En effet :

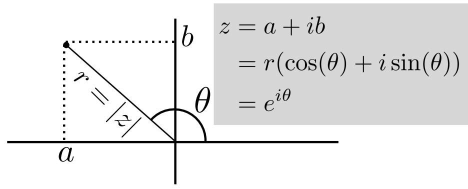
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

ATTENTION : Ici le point $\cdot$ ne représente **PAS** le produit scalaire, mais bien la multiplication de deux nombres complexes vus comme des vecteurs. Dans les faits, on n'écrit jamais un nombre complexe $a+ib$ comme un vecteur, mais les voir comme tels permet de comprendre leur aspect géométrique, en particulier lorsqu'on passe aux coordonnées polaires.

Les coordonnées polaires d'un vecteur dans $\mathbb{R}^2$.

Un vecteur dans $\mathbb{R}^2$ peut être donné par ses composantes $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (dans la base standard), ou par l'angle qu'il forme avec l'axe horizontal θ et son module (longueur) r : $\vec{v} = r\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$. Les deux sont liés par ces formules (comme dans les séries de Fourier au chapitre IV) :





$$\sqrt{a^2+b^2} = r$$
$$\cos(\theta) = \frac{a}{r},$$
$$\sin(\theta) = \frac{b}{r}, \qquad \text{donc } \theta = \text{signe}(b)\arccos\left(\frac{a}{r}\right)$$

Ici, signe(b) est $+$ lorsque $b \geq 0$ et $-$ lorsque $b < 0$.

Avec les notations des nombres complexes, cela devient :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad a + ib = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\cdot i = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\cdot i)$$

Propriété de la multiplication $\cdot$ en coordonnées polaires.

Lorsqu'on applique $\cdot$, les modules se multiplient et les angles s'additionnent :

$$\begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s\cos(\varphi) \\ s\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs\cos(\theta+\varphi) \\ rs\sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

En écriture standard des nombres complexes, cela donne :

$$(r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\cdot i)\cdot(s\cos(\varphi) + s\sin(\varphi)\cdot i) = rs\cos(\theta+\varphi) + rs\sin(\theta+\varphi)\cdot i.$$

III.1.3 Comme des polynômes modulo x^2+1 : approche algébrique

Cette approche permet de rendre l'approche pragmatique présentée au début rigoureuse et de faire des liens avec la théorie des corps finis utilisée entre autres en cryptologie (mais nous n'irons pas loin du tout dans les détails).

On rappelle que dans $\mathbb{Z}$, le théorème de Bezout nous dit que les nombres a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $ma + nb = 1$. Cela permet de démontrer que si p est un nombre premier, alors tous les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire les entiers modulo p) ont un inverse multiplicatif. En effet, si p est premier, il est premier avec tous les nombres plus petits que lui, et donc :

$$(ma + np) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad ma \equiv 1 \mod p \quad \Longleftrightarrow \quad m \text{ est l'inverse multiplicatif de } a$$

Dans le cas des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, le théorème de Bezout reste vrai : deux polynômes $P(x), Q(x)$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux autres polynômes $N(x), M(x)$ tels que $P(x)\cdot N(x) + Q(x)\cdot M(x) = 1$. Ici, des polynômes sont dits premiers entre eux si il n'ont pas un facteur commun non-constant, car un polynôme constant divise toujours tous les autres polynômes. Donc, par exemple, $P(x) = x+1$ et $Q(x) = x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$ sont deux polynômes premiers entre eux, et on a

$$(x+1)\cdot(-\frac{1}{2}x - 2) + (x^2+5x+6)\cdot(\frac{1}{2}) = 1.$$

Les deux polynômes $N(x)$ et $Q(x)$ peuvent se trouver grâce à la division polynomiale et l'algorithme d'Euclide étendu, comme dans le cas des nombres entiers.

On peut donc considérer les polynômes modulo un certain $P(x)$ (et donc ne considérer que les restes de la division par $P(x)$). Si $P(x)$ est un polynôme premier (c'est-à-dire qu'il n'est pas divisible par un polynôme non-constant sauf lui-même), on obtient donc un “groupe”, c'est-à-dire que chaque élément a un inverse multiplicatif.

Donc, par exemple, on peut prendre les polynômes modulo $x^2 + 1$, qui est un polynôme premier de degré 2. On obtient donc par exemple :

$$\begin{aligned}
Q(x)(x^2+1) + ax + b &\equiv ax + b \mod x^2+1 \\
3x^2 + 5x + 2 = 3(x^2+1) + 2x + 2 &\equiv 2x + 2 \mod x^2+1 \\
6x^3 + 2x^2 + x + 1 = (3x+2)(x^2+1) - 2x - 1 &\equiv -2x - 1 \mod x^2+1 \\
x = 0 \cdot (x^2+1) + x &\equiv x \mod x^2+1 \\
x^2 = 1 \cdot (x^2+1) - 1 &\equiv -1 \mod x^2+1
\end{aligned}$$

La dernière ligne nous montre que le polynôme $Q(x) = x$ devient -1 quand on le met au carré, c'est donc le i que l'on utilise dans les nombres complexes.

III.2 Propriétés basiques des nombres complexes

Écriture des nombres complexes.

En reprenant l'approche pragmatique, un nombre complexe est un couple $a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$. On additionne, multiplie, etc, comme pour les nombres réels, en remplaçant i^2 par -1 chaque fois qu'il apparaît. On n'écrit *jamais* un nombre complexe comme un vecteur, mais ces deux mondes ont beaucoup de points communs, qui sont résumés dans le tableau suivant. Notez les différences de notation et de vocabulaire, par exemple entre norme $||\cdot||$ et module $|\cdot|$.

écriture vectorielle (jamais utilisée pour les nombres complexes)	écriture comme nombre complexe
$\cdot$	$\cdot$ (symbole de multiplication standard, ou aucun symbole)
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	1 (le chiffre 1 habituel)
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	i
$\vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$z = a \cdot 1 + b \cdot i = a + ib$
$\lVert\vec{z}\rVert$	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$ (module ou norme de z).
$\vec{z} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$ (coordonnées polaires)	$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r \cdot e^{i\theta}$ (coordonnées polaires, voir ci-dessous pour $e^{i\theta}$). On dit que θ est l'*argument* de z.

Avec $\mathbb{C}$, on achève la suite d'extensions successives d'ensembles de nombres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, on dit que $a = \mathfrak{Re}(z)$ est sa partie réelle et que $b = \mathfrak{Im}(z)$ est sa partie imaginaire. Si $b = 0$, on peut considérer z comme un nombre réel habituel.

L'écriture exponentielle

Les fonctions sinus, cosinus et exponentielles possèdent les développements en série suivants (attention : x est exprimé en radians) :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

On en conclut :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

et en particulier :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

(qui a un jour été votée comme la formule la plus belle de toutes les mathématiques, mais j'avoue que je ne sais plus d'où je tire cette information qui est donc fortement sujette à caution). Cela permet entre autres d'écrire les nombres complexes sous forme polaire de manière beaucoup plus compacte :

$$3 \cdot \big(\cos(\pi/4) + i \cdot \sin(\pi/4)) = 3e^{i\pi/4}.$$

Divisions et multiplications en coordonnées polaires

En coordonnées polaires, la multiplication et la division de deux nombres complexes peut s'écrire ainsi :

$$\boxed{\begin{gathered} r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big) \cdot s\Big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\Big) = rs \cdot \Big(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\Big). \\ \frac{r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)}{s\Big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\Big)} = \frac{r}{s} \cdot \Big(\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi)\Big). \end{gathered}}$$

En écriture exponentielle :

$$\boxed{\begin{gathered} r \cdot e^{i\theta} \cdot s \cdot e^{i\varphi} = r \cdot s \cdot e^{i(\theta+\varphi)}, \\ \frac{r \cdot e^{i\theta}}{s \cdot e^{i\varphi}} = \frac{r}{s} \cdot e^{i(\theta-\varphi)} \end{gathered}}$$

Autrement dit : les modules se multiplient, les angles s'additionnent.
On peut donc définir l'exponentielle d'un nombre complexe : $e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$. Grâce au fait que les angles s'additionnent dans un produit de nombres complexes, la formule $e^c \cdot e^d = e^{c+d}$ reste vraie :

$$e^{a+ib} \cdot e^{a'+ib'} = e^a \cdot e^{ib} \cdot e^{a'} \cdot e^{ib'} = e^a \cdot e^{a'} \cdot e^{ib} \cdot e^{ib} = e^{a+a'} \cdot e^{i(b+b')} = e^{(a+ib)+(a'+ib')}.$$

Conjugué complexe, division en coordonnées cartésiennes

Etant donné un complexe z, on définit son *conjugué* $\overline{z}$ ainsi :

$$z = a + ib \quad \overline{z} = a - ib$$

Donc, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. (Le nombre à l'intérieur de la racine est un nombre réel positif, on ne prendra pas de racine carrée de nombre complexe pour l'instant.)
La division de deux nombres complexes peut s'effectuer ainsi :

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

Autrement dit : $\dfrac{z}{u} = \dfrac{1}{|u|^2} \cdot z \cdot \overline{u}$.

Propriétés de la conjugaison complexe

1. $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\mathfrak{Im}(z)$.
2. Si $z = c \cdot e^{i\theta}$ ($c \in \mathbb{R}$), alors $\overline{z} = c \cdot e^{-i\theta}$.
3. $\overline{z + u} = \overline{z} + \overline{u}$.
4. $\overline{z \cdot u} = \overline{z} \cdot \overline{u}$, donc $|z \cdot u| = |z| \cdot |u|$.
5. $\overline{z/u} = \overline{z}/\overline{u}$.

Nombres complexes et polynômes

Théorème fondamental de l'algèbre.
Soit $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme avec coefficients complexes : $a_i \in \mathbb{C}$. Alors

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ sont les racines de p. En particulier, p possède n racines complexes (comptées avec multiplicité).

Théorème.
Soit $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme avec coefficients réels : $a_i \in \mathbb{R}$. Alors

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_k) \cdot (z^2 + b_{k+1} z + c_{k+1})(z^2 + b_{k+2} z + c_{k+2}) \cdot \cdots \cdot (z^2 + b_n z + c_n),$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ sont les k racines réelles de p et $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ pour $i = k+1, \ldots, n$. Les polynômes $z^2 + b_i z + c_i$ ne possèdent pas de racines réelles. En particulier, p se factorise en polynômes de degrés 1 et 2.

Exemple 1 : Les racines d'un nombre complexe.
Si on veut trouver les n solutions à l'équation

$$z^n = c$$

où c est un nombre complexe, et donc moralement trouver les *racines n-ièmes de c*, le plus simple est de se mettre en coordonnées polaires, et de poser $z = r \cdot e^{i\theta}$, $c = s \cdot e^{i\varphi}$. Du coup, on obtient

$$z^n = \left(r \cdot e^{i\theta}\right)^n = r^n \cdot e^{in\theta},$$

et donc

$$r^n \cdot e^{in\theta} = s \cdot e^{i\varphi} \iff r^n = s \text{ et } e^{in\theta} = e^{i\varphi}.$$

Pour trouver les n solutions, il faut se rappeler que $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + k \cdot 2\pi)}$, pour n'importe quel $k \in \mathbb{Z}$. On doit donc avoir

$$n\theta = \varphi + k \cdot 2\pi \iff \theta = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}.$$

En prenant $k = 0, 1, \ldots, n-1$, on obtient toutes les solutions :

$$z = \sqrt[n]{s} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(Si on prend $k = n$, on retombe sur la même solution que celle avec $k = 0$, si on prend $k = n+1$ on retombe sur celle avec $k = 1$, etc.)
Cas particulier : quand $c = 1$. Dans ce cas, $s = 1$ et $\varphi = 0$, et les solutions s'appellent *racines n-èmes de l'unité* :

$$z = e^{i\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{RU}$$

Exemple 2 : les polynômes de degré 2
Si $p(x) = ax^2 + bx + c$, avec des coefficients complexes, les solutions sont données par la formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ est un nombre complexe (ou un nombre réel négatif), $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ représente en fait les deux solutions de l'équation $z^2 = \Delta$, comme expliqué ci-dessus. Comme $n = 2$, la différence d'angle entre ces deux solutions est de π, et donc si u est une des deux soluions, $-u$ est l'autre solution. En effet, $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$.
Si les coefficients a, b, c sont des nombres *réels* et que $z = u + iv$ est une racine du polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$ telle que la partie imaginaire de z (donc, le nombre réel v) n'est *pas* égal à 0, alors $\overline{z} = u - iv$ est aussi une racine de $p(x)$. Donc, les deux racines de $p(x)$ sont z et $\overline{z}$.

III.3 Itérations de fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

ou : *comment obtenir de jolis dessins à partir d'une formule simple.*

Si on se donne une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et un point $z_0 \in \mathbb{C}$, on peut définir la suite suivante :

$$z_0^f = z_0, \quad z_{n+1}^f = f(z_n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

(Cette suite peut se définir également pour une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ou pour tout autre domaine.) On dit que la suite z_n^f est *bornée* si il existe un $M \in \mathbb{R}$ (la borne) tel que $|z_n^f| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit alors *l'ensemble de Julia rempli de la fonction f* (Gaston Julia, début du 20ième siècle) comme l'ensemble suivant :

$$K(f) = \{z_0 \in \mathbb{C} \,|\, z_n^f \text{ est une suite bornée}\}$$

Exemples :
- Si $f(z) = z + 1$, alors $K(f) = \varnothing$.
- Si $f(z) = 2z$, alors $K(f) = \{0\}$.
- Si $f(z) = z^2$, alors $K(f) = \{z_0 \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 1\}$.
- Si $f(z) = 2z^2$, alors $K(f) = \{z_0 \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq \frac{1}{2}\}$.

A part dans des cas très simples (comme ceux ci-dessus), les ensembles de Julia possèdent une structure très compliquée et sont des exemples très populaires d'ensembles de nature fractale.

L'ensemble de Mandelbrot

On définit la famille de fonctions $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de paramètre $c \in \mathbb{C}$ suivante :

$$f_c(z) = z^2 + c.$$

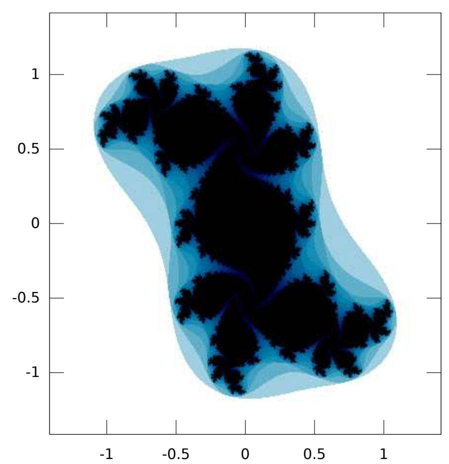
On définit la suite suivante :

$$z_0^c = 0, \quad z_{n+1}^c = f_c(z_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

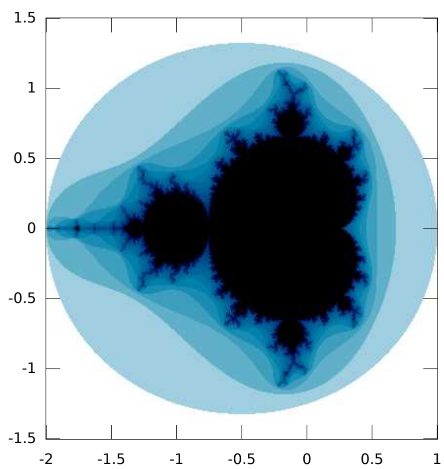
L'ensemble de Mandelbrot est alors défini ainsi :

$$M = \{c \in \mathbb{C} \,|\, z_n^c \text{ est une suite bornée}\}.$$

Tout comme les ensembles (remplis) de Julia, l'ensemble de Mandelbrot possède une structure très compliquée et est encore un sujet de recherche mathématique active de nos jours. Il s'agit probablement de l'ensemble de nature fractale le plus populaire.



L'ensemble de Julia de $f(z) = z^2 + 0.25 + 0.52i$ (en noir).



L'ensemble de Mandelbrot (en noir).

III.4 Exercices sur les nombres complexes

A. Introduction

Exercice III.4.1.
Effectuez les calculs suivants.
(a) $1 + i - (5 + 3i) + 2i$ (b) $(3 - 2i)(3 + 2i)$ (c) $i(1 + 3i)$
(d) $2i(2 - i) - (3 - i)$ (e) $i(1 + i)(1 - i)$ (f) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$

Exercice III.4.2.
Mettez les nombres complexes suivants en coordonnées polaires.

1. $1 + 2i$
2. $-2 + 7i$
3. $-12 - 5i$
4. $-3i$

Exercice III.4.3.
Ecrivez les nombres complexes suivants donnés par leur longueur et leur angle en coordonnées cartésiennes.

1. $r = 3$, $\theta = \pi/3$.
2. $r = 1$, $\theta = \pi$.
3. $r = 0$, $\theta = \pi/7$.
4. $r = 10$, $\theta = 4\pi/5$.

B. Propriétés basiques des nombres complexes.

Exercice III.4.4.
En vous servant de deux identités trigonométriques, prouver la relation suivante :

$$\Big(r\cos(\theta) + i \cdot r\sin(\theta)\Big) \cdot \Big(s\cos(\varphi) + i \cdot s\sin(\varphi)\Big) = rs\cos(\theta + \varphi) + i \cdot rs\sin(\theta + \varphi)$$

On rappelle que cela implique que

$$(r \cdot e^{i\theta}) \cdot (s \cdot e^{i\varphi}) = rs \cdot e^{i(\theta+\varphi)},$$

vu que cela est équivalent.
Indication : Regardez les règles d'addition d'angle qu'on a vu en trigonométrie.

Exercice III.4.5.
Effectuez les multiplications suivantes, et donnez le résultat en coordonnées polaires (ou exponentielles) et cartésiennes.

1. $(2 + 3i) \cdot (4 - i)$.
2. $i \cdot (1 + i)$.
3. $12(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) \cdot 5(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$.
4. $(2e^{i\pi/6}) \cdot (1 + i)$.

Exercice III.4.6.
Effectuez les divisions suivantes.

1. $\dfrac{1}{i}$.
2. $\dfrac{2 + 3i}{4 - i}$.
3. $\dfrac{2i}{1 + i}$.
4. $\dfrac{-2 - 5i}{-i}$.
5. $\dfrac{3e^{i\pi/4}}{5e^{i\pi/4}}$.

6. $\dfrac{2e^{i\pi/6}}{1+i}$.

Exercice III.4.7.
Refaites les deux exercices précédents en utilisant Python 3. La plupart des fonctions nécessaires n'étant pas dans la distribution de base, il faut importer la librairie `numpy` (ou une autre équivalente). Les nombres complexes s'écrivent ainsi :

Notation mathématique	*En Python 3*
$1+2i$	`1 + 2j`
$3-4i$	`3 - 4j`
$2i$	`2j`
i	`1j`

Les fonctions `abs()`, `numpy.angle()`, `numpy.exp()` et la constante `numpy.pi` peuvent servir.

Exercice III.4.8.
En faisant le moins de calculs possibles (mais un petit calcul quand-même au départ), essayez de deviner géométriquement les réponses aux questions suivantes. On part de $z_0 = 1$, puis à chaque itération on multiplie par $1+i$. Donc, par exemple $z_1 = 1 \cdot (1+i) = 1+i$, $z_2 = (1+i)\cdot(1+i) = \ldots$.
(a) Que vaut z_6 ?
(b) Que vaut z_6 si on part de $z_0 = -2i$?

Exercice III.4.9.
Montrer que $|z \cdot u| = |z| \cdot |u|$ en utilisant uniquement $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ et $\overline{z \cdot u} = \overline{z} \cdot \overline{u}$.

C. Polynômes

Exercice III.4.10.
Trouvez *toutes* les solutions dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes :

1. $z^2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.
2. $z^3 = 27 \cdot e^{-i\pi/4}$.
3. $z^{17} = e^{i\pi/3}$.
4. $z^4 = i$.

Exercice III.4.11.
Trouver toutes les racines complexes des polynômes suivants.

1. $z^2 - 2z + 4$.
2. $z^3 - 5z^2 + 10z$.
3. $z^3 + (1-i)z^2 + (2-2i)z - (4+4i)$, sachant que $1+i$ est une racine.
4. $z^2 + (1-i)\cdot z + (2+3i)$.

Exercice III.4.12.
Démontrer le théorème suivant :
Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est un polynôme dont tous les coefficients a_k $(k = 0, \ldots, n)$ sont dans $\mathbb{R}$ et que w est une racine *dans* $\mathbb{C}$ de $P(x)$, alors $\overline{w}$ est aussi une racine de $P(x)$.
Indication : Utilisez les propriétés de la conjugaison complexe.

Exercice III.4.13.
Sachant que $1+i$ est une racine de $z^2 - 2z + 2$, trouver l'autre sans calculer.

D. Ensembles de Julia.

Exercice III.4.14.
Trouver les ensembles de Julia remplis des fonctions suivantes.

1. $f(z) = z + 1$.
2. $f(z) = 2z$.
3. $f(z) = 2i \cdot z$.

4. $f(z) = i \cdot z$.
5. $f(z) = z^2$.
6. $f(z) = 2z^2$.
7. $f(z) = z^2 - 2$ (très difficile).

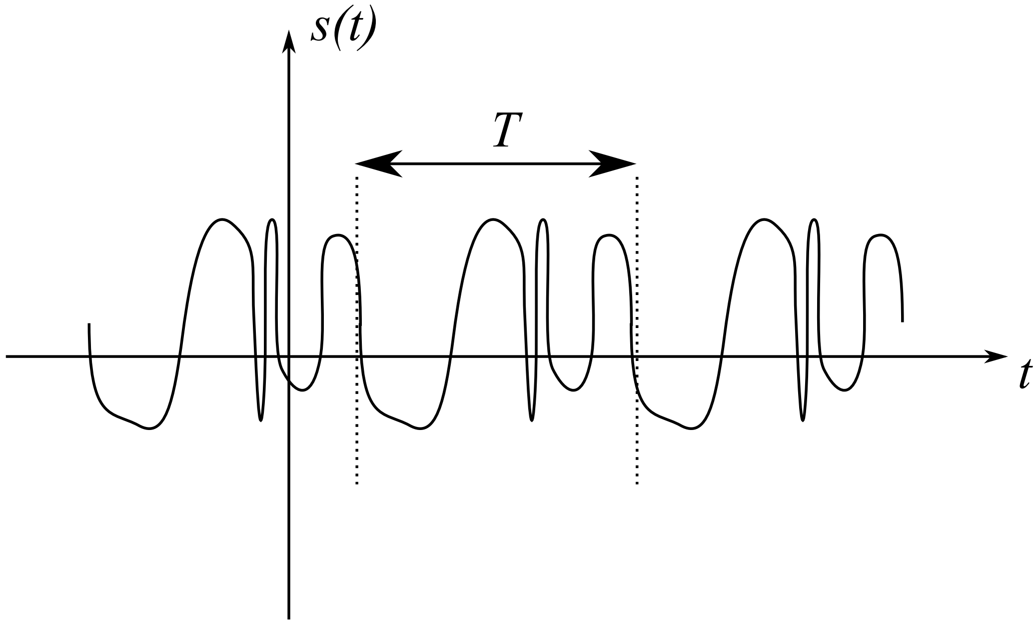
Chapitre IV

Introduction à la théorie du signal et aux séries de Fourier

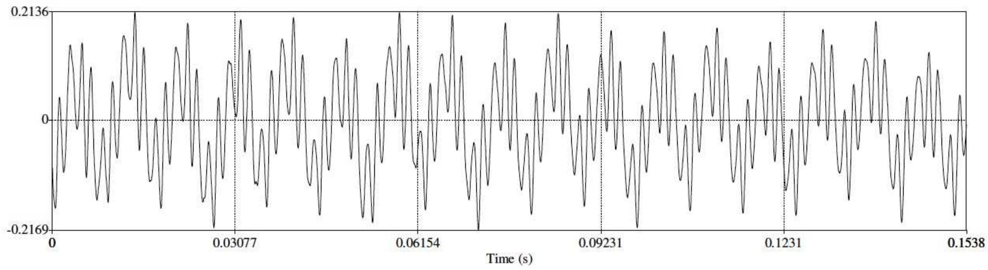
On appelle ici *signal* toute quantité mesurable qui a 'tendance à se répéter' au cours du temps et qui contient une certaine information : vibration sonore, onde herzienne, horloge interne d'un processeur, etc. On notera par $s(t)$ l'amplitude du signal (dans les unités correspondantes) au temps t. (Par exemple, pour un signal analogique, $s(t)$ est mesuré en volts.) Un signal est dit *périodique* si les variations de son amplitude se reproduisent régulièrement pour une période constante T :

$$s(t) = s(t+T) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

L'inverse de la période est appelée la fréquence et est exprimée en Herz (noté Hz) : $f = \frac{1}{T}$. Par exemple, voici une fonction périodique de période T :



Et voici un exemple tiré de la vie réelle, la vibration de la corde 'la' d'une guitare (en mode stationnaire) :



(Bien entendu, le son de la corde de guitare va changer au cours du temps, mais néanmoins on fait comme si elle était périodique 'à jamais'.)

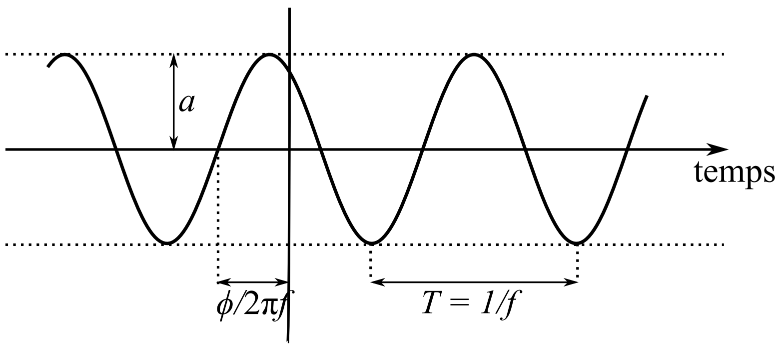
Un signal $s(t)$ peut également prendre des valeurs complexes, ce qui nous sera très rapidement fort utile.

IV.1 Signaux périodiques élémentaires réels et complexes

Signaux élémentaires réels (sinusoïdaux).
On appellera ici *signal élémentaire* (ce n'est pas un nom standard) tout signal pouvant s'écrire ainsi :

$$s(t) = a \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \phi),$$

Où a est l'amplitude, f est la fréquence et ϕ est la phase (ou le déphasage).



Si la fréquence f est égale à 0, on obtient un signal constant égal à a si $\phi = \frac{\pi}{2}$ et $-a$ si $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Les signaux constants sont donc considérés ici (un peu de manière abusive) comme des signaux élémentaires sinusoïdaux. Plus généralement, les signaux de la forme

$$u \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_1) + v \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_2)$$

sont des signaux élementaires (ils peuvent s'écrire comme $a \cdot \sin(2\pi \cdot t + \phi)$).
Les signaux élémentaires *complexes*, parfois appelés un peu abusivement *sinus complexe*, sont ceux-ci :

$$s_+(t) = c \cdot e^{i2\pi \cdot f \cdot t}, \quad s_-(t) = c \cdot e^{-i2\pi \cdot f \cdot t}$$

Comme ci-dessus, s_+ et s_- ont fréquence f. Par contre, cette fois-ci, c est un nombre complexe, l'amplitude est donnée par son module $|c|$ et le déphasage par son angle. Pour les décrire simplement, $s_+(t)$ et $s_-(t)$ tournent autour d'un cercle de rayon $|c|$ à fréquence f, en partant de l'angle $angle(c)$ quand $t = 0$, $s_+(t)$ tournant dans le sens positif (sens inverse des aiguilles d'une montre) et $s_-(t)$ dans le sens négatif (sens des aiguilles d'une montre).

Les séries de Fourier (cf ci-dessous) montrent que (presque) tout signal périodique de période f peut s'écrire comme une somme infinie de signaux élémentaires dont les fréquences sont des multiples de f.

IV.2 Les séries de Fourier (cas continu)

Les séries de Fourier (Joseph Fourier, 1768–1830) permettent de décomposer (sous certaines conditions) une fonction périodique $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période T et fréquence $f = 1/T$ en une somme infinie de signaux élementaires dont les fréquences sont des multiples entiers de f. Le terme *continu* signifie juste que la variable de temps prend toutes les valeurs réelles. On verra rapidement plus tard le cas *discret* des signaux samplés (entre autres), qui est le cas que l'on applique (presque) toujours en informatique. Pourquoi passer par le continu, me direz-vous alors ? Eh bien il se trouve que la version discrète, bien qu'ayant énormément d'applications, est moins facile à comprendre et moins instinctive (à mon humble avis).

IV.2.1 Cas réel

Théorème. *Si la fonction* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfait certaines conditions (de continuité, de dérivabilité, d'intégrabilité suivant les versions et les propriétés recherchées) et est périodique de période* T *et de fréquence* $f = 1/T$*, alors il existe des coefficients* $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) tels que :*

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cdot \cos\Big(2\pi \cdot k \cdot f \cdot t\Big) + b_k \cdot \sin\Big(2\pi \cdot k \cdot f \cdot t\Big)\Big).$$

De plus, les coefficients peuvent être trouvés en utilisant des intégrales :

$$a_0 = f \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t)dt, \qquad b_0 = 0,$$

$$a_k = 2f \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \cos\Big(2k\pi \cdot f \cdot t\Big) \cdot s(t)dt, \qquad b_k = 2f \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \sin\Big(2k\pi \cdot f \cdot t\Big) \cdot s(t)dt.$$

Si $s(t)$ *est une fonction paire, alors* $b_k = 0$ *pour tout* k*, et si* $s(t)$ *est impaire, alors* $a_k = 0$ *pour tout* k*. On peut également calculer des coefficients* χ_k *et des déphasages* ϕ_k *à partir des* a_k *et* b_k *de manière à écrire le signal comme une somme infinie de signaux élémentaires :*

$$s(t) = \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \cdot \sin\Big(2\pi \cdot k \cdot f \cdot t + \phi_k\Big),$$

où

$$\chi_0 = a_0, \qquad \chi_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\cos(\phi_k) = \frac{b_k}{\chi_k}, \quad \sin(\phi_k) = \frac{a_k}{\chi_k}$$

On peut donc trouver ϕ_k *en calculant l'arccosinus de* $\frac{b_k}{\chi_k}$*, ce qui nous donne* ϕ_k *au signe près, et le signe est donné par celui de* a_k*.*

Dans le cas d'une fonction dont la période est 2π, les expressions se simplifient un petit peu :

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cdot \cos(k \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot t)\big) = \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \cdot \sin(k \cdot t + \phi_k),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(t)dt, \qquad b_0 = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \cdot t) \cdot s(t)dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k \cdot t) \cdot s(t)dt.$$

Dans ce cours, nous n'avons pas encore abordé l'intégration, mais même en ignorant ce dont il s'agit, on peut quand-même calculer numériquement des intégrales (voir plus loin). Les exemples ci-dessous utilisent Octave ou Matlab, mais nous utiliserons plutôt Python 3 (et la librairie `numpy.fft`) pour faire les calculs dans le cas discret. On peut donc approcher (presque) n'importe quelle fonction périodique par une somme de fonctions sinus & cosinus. En particulier, n'importe quelle onde sonore (suffisamment régulière) peut être codée en une telle somme et reproduite ensuite (si l'on est capable de produire des ondes sinusoïdales).

Un exemple en Matlab/Octave et en Python 3

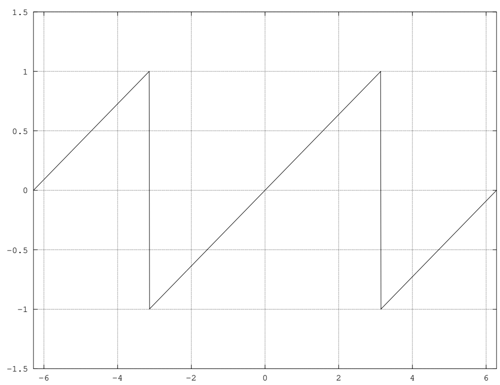
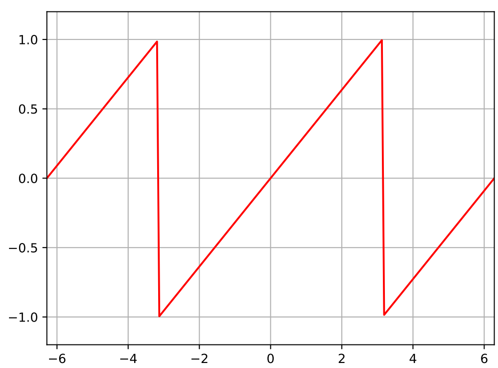
Prenons la fonction “dents de scie” 2π-périodique, qui peut se définir entre $-\pi$ et π par $t \mapsto \frac{t}{\pi}$.
Pour étendre la définition à tout $\mathbb{R}$, on peut poser :

$$t \mapsto \left(t - \left\lfloor \frac{t+\pi}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi \right) / \pi$$

où $\lfloor t \rfloor$ est la partie entière de t quand $x > 0$ et la partie entière -1 quand t est négatif. (C’est la fonction floor.)
Exemples de fonctions faites ”à la main” :

Matlab / Octave	Python 3

`> saw = @(t) (t-floor((t+pi)/2/pi)*2*pi)/pi;`
`> t=-2*pi:0.01:2*pi;`
`> plot(t,saw(t),’-r’);`
`> axis([-2*pi,2*pi,-1.5,1.5]);`
`> grid on;`
	`import matplotlib.pyplot as plt`
	`from numpy import linspace , pi`
	`saw = lambda t: ( (t-pi)%(2*pi) - pi ) / pi`
	`x = linspace(-2*pi,2*pi,200)`
	`plt.plot( x, saw(x) , "r")`
	`plt.grid(visible = 1)`
	`plt.axis([-2*pi , 2*pi , -1.2 , 1.2])`
	`plt.show()`

Pour obtenir les coefficients, on peut utiliser la fonction “quad” qui effectue une intégration numérique, disponible en Matlab/Octave et dans la librairie `scipy.integrate` de Python 3.
Note : Ici la fonction `saw` est *vraiment* une fonction `float -> float` (ou `double -> double`), et non une suite de valeurs. Donc, moralement, on est dans le cas où la variable t est *continue*. C’est pour cela que l’on utilise des fonctions d’intégration numérique, et non les calculs d’intégrales discrètes que l’on fera plus tard.
Par exemple, pour obtenir les 5 premiers, stockés dans les variables `A, B` (en Matlab/Octave, les indices commencent à 1, donc on stocke a_0 à part, et en Python3 la fonction `quad` rend une paire de deux valeurs : l’intégrale et l’erreur maximale, d’où le fait de prendre seulement la première) :

Matlab / Octave	Python 3

`> for k = 1:5;`
`> u = @(t) sin(k*t).*saw(t);`
`> B(k) = quad(u,-pi,pi)/pi;`
`> v = @(t) cos(k*t).*saw(t);`
`> A(k) = quad(u,-pi,pi)/pi;`
`> endfor;`
`> a0 = quad(saw,-pi,pi);`
	`from numpy import sin, cos`
	`from scipy.integrate import quad`
	`A , B = [ quad(saw,-pi,pi)[0]/(2*pi) ] , [0]`
	`for k in range(1,6):`
	`     u = lambda t: saw(t)*sin(k*t)`
	`     v = lambda t: saw(t)*cos(k*t)`
	`     B.append( quad(u, -pi, pi )[0] / pi)`
	`     A.append( quad(v, -pi, pi )[0] / pi)`

Et on obtient les coefficients suivants (notés comme en Python 3) :

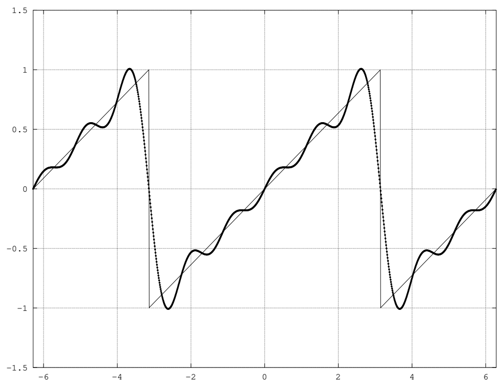
```
A = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
B = [0, 0.6366197723675815, -0.3183098861837907, 0.21220659078919374,
     -0.15915494309189526, 0.1273239544735162]
```

(Il n'est pas étonnant que les coefficients a_k soient tous 0, car la fonction `saw` est impaire.) On peut alors reconstruire une approximation de la fonction ainsi :

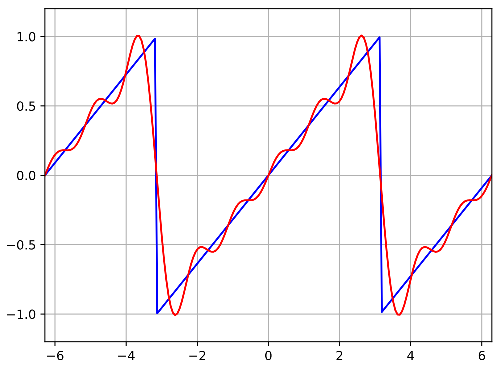
$$\begin{aligned} s(t) = {} & 0.6366197723675815 \cdot \sin(t) - 0.3183098861837907 \cdot \sin(2t) \\ & + 0.21220659078919374 \cdot \sin(3t) - 0.15915494309189526 \cdot \sin(4t) \\ & + 0.1273239544735162 \cdot \sin(5t) \end{aligned}$$

on obtient l'approximation suivante de la courbe (graphiques Matlab/Octave & Python3) :

Matlab / Octave



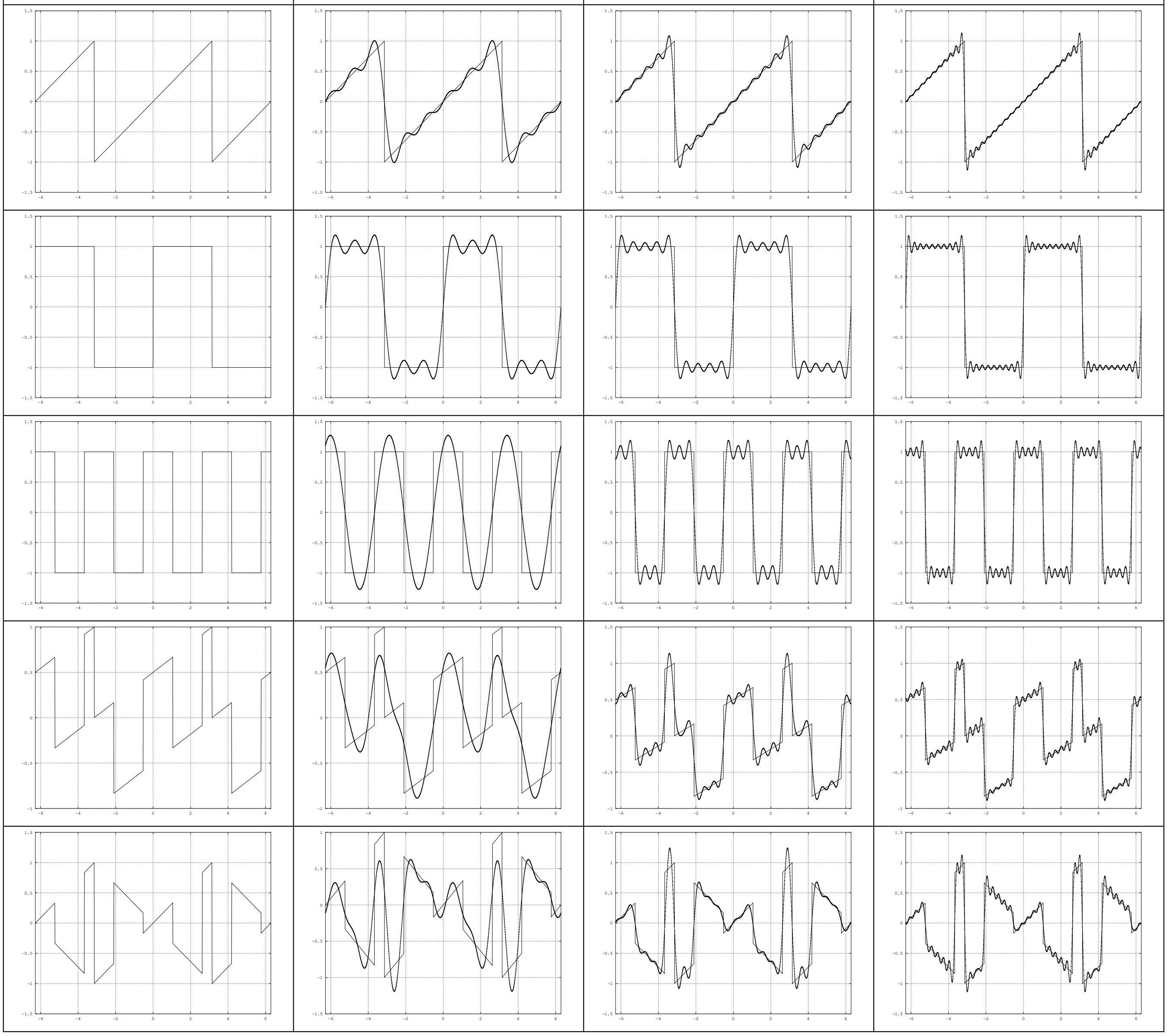
Python3



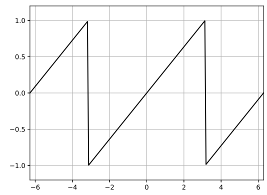
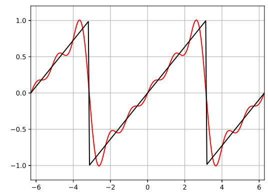
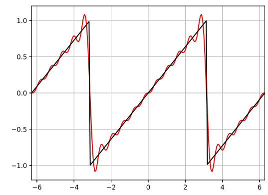
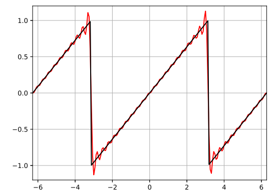
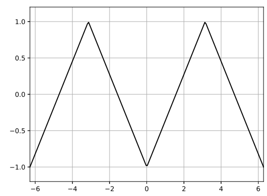
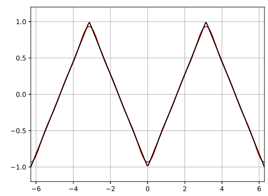
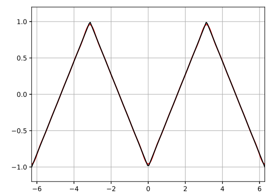
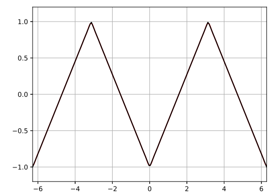
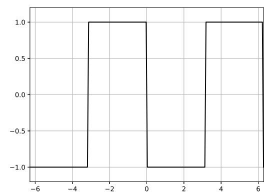
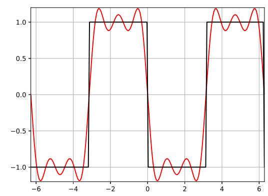
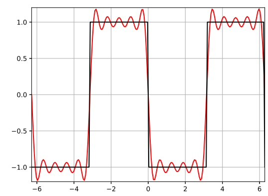
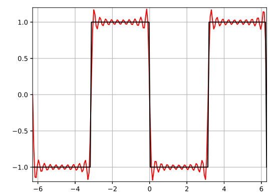
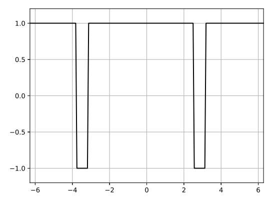
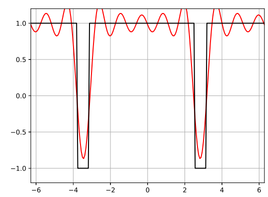
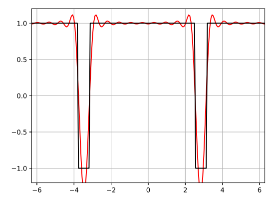
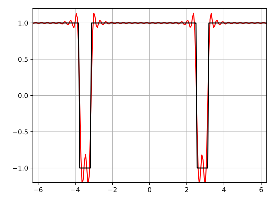
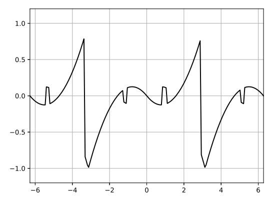
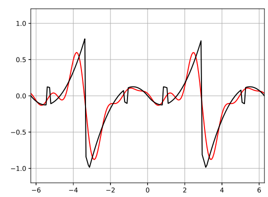
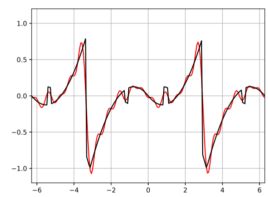
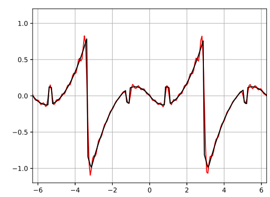
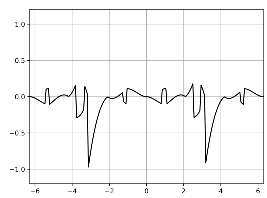
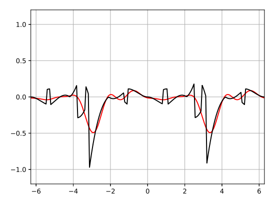
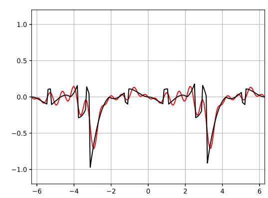
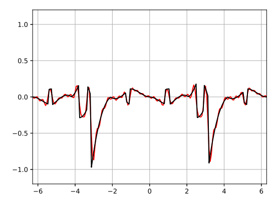
Dans la pratique, il est beaucoup plus habituel de se retrouver avec des signaux échantillonnés (samplés), et donc une liste de valeurs, qu'une véritable fonction (au sens mathématique et/ou informatique). On utilisera alors la version "discrète" des séries de Fourier, qui se trouve en section IV.3. Cette version discrète utilise presque toujours des nombres complexes, dont la version continue est expliquée dans la sous-section IV.2.2 qui suit.

Quelques fonctions 2π-périodiques et leurs séries de Fourier, en Matlab/Octave

$f(x)$	5 termes	10 termes	20 termes



Quelques fonctions 2π-périodiques et leurs séries de Fourier, en Python 3

$f(x)$	5 termes	10 termes	20 termes
			
			
			
			
			
			

IV.2.2 Cas complexe

La relation $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ permet d'écrire les sinus et cosinus en fonction de l'exponentielle :

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin(x) &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{i(e^{-ix}-e^{ix})}{2}\end{aligned}$$

Cela permet de réecrire les séries de Fourier de manière plus compacte (et plus semblable à la transformée de Fourier que vous verrez en deuxième année). On vient de voir que si $s(t)$ est périodique de période T et fréquence $f = 1/T$ et satisfait certaines propriétés de régularité, alors

$$\begin{aligned}s(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(2\pi n\cdot f\cdot t) + b_n\sin(2\pi n\cdot f\cdot t))\\ a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)dt, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi n\cdot f\cdot t)\cdot s(t)dt \quad n\geq 1\\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sin(2\pi n\cdot f\cdot t)\cdot s(t)dt \quad n\geq 1\end{aligned}$$

Si on remplace sin et cos par les formules en haut de page et qu'on regroupe les termes en $e^{i2\pi n\cdot f\cdot t}$ et ceux en $e^{-i2\pi n\cdot f\cdot t}$, on obtient

$$\begin{aligned}s(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\cdot e^{i2\pi n\cdot f\cdot t} + \frac{a_n+ib_n}{2}\cdot e^{-i2\pi n\cdot f\cdot t}\right)\\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{2}\cdot e^{i2\pi n\cdot f\cdot t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+ib_n}{2}\cdot e^{i2\pi\cdot(-n)\cdot f\cdot t}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{i2\pi n\cdot f\cdot t},\end{aligned}$$

où $c_n = \begin{cases}\frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n>0\\ \frac{1}{2}(a_{-n}+ib_{-n}) & n<0\\ a_0 & n=0\end{cases}$. Dans tous les cas, c_n peut en fait se calculer directement avec la formule

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi n\cdot f\cdot t}s(t)dt.$$

Les coefficients correspondant à la n-ième harmonique sont donc distribués entre c_n et c_{-n}. En fait, comme vu précédemment, la "véritable" quantité de la n-ième harmonique dans le signal est donnée par

$$\chi_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2} = 2|c_n| \text{ si } n>0, \quad \chi_0 = |c_0|.$$

On remarque que lorsque $n > 0$, $c_n \cdot e^{i2\pi n\cdot f\cdot t}$ est un signal élementaire tournant dans le sens positif (noté $s_+(t)$ au début du sous-chapitre IV.1) lorsque $n < 0$, $c_n \cdot e^{i2\pi n\cdot f\cdot t}$ est un signal élementaire tournant dans le sens négatif (noté $s_-(t)$ auparavant). Un des intérêts d'utiliser la version complexe des séries de Fourier est que cela permet de considérer des signaux $s(t)$ à valeurs complexes, et non pas seulement réelles.
La commodité de l'écriture des séries de Fourier avec des nombres complexes est une des raisons pour lesquelles en théorie du signal on utilise très souvent la fonction

$$s(t) = c\cdot e^{i2\pi\cdot f\cdot t}$$

(parfois nommée un peu abusivement 'sinus complexe', comme dit ci-dessus) comme signal élémentaire de fréquence f plutôt que l'habituel sinus à valeurs réelles $\sin(2\pi\cdot f\cdot t)$. De plus, le déphasage d'un tel signal peut simplement s'écrire multiplicativement, pour déphaser d'un angle φ, il suffit de multiplier par $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi}\cdot e^{i2\pi\cdot f\cdot t} = e^{i(2\pi\cdot f\cdot t+\varphi)}.$$

Dans la série de Fourier en complexes, on a deux termes de fréquence $n\cdot f$, avec $n > 0$:

$$c_n\cdot e^{i2\pi\cdot nf\cdot t} \quad \text{et} \quad c_{-n}\cdot e^{-i2\pi\cdot nf\cdot t}.$$

Le premier correspond à une fonction tournant autour d'un cercle dans le sens positif de fréquence nf, et le deuxième à quasiment la même fonction, la seule différence est qu'elle tourne dans l'autre sens. Les coefficients c_n et c_{-n} donnent l'amplitude (rayon du cercle) et le déphasage : si $c_n = r \cdot e^{i\theta}$, le déphasage est de θ et l'amplitude de r.

IV.2.3 Résumé de toutes ces formules

Théorème. *Si la fonction* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(à valeurs* réelles, *donc) satisfait certaines conditions (de continuité, de dérivabilité, d'intégrabilité suivant les versions et les propriétés recherchées) et est périodique de période* T *et de fréquence* $f = 1/T$, *alors* $s(t)$ *peut se décomposer de trois manières différentes en une somme infinie de signaux élémentaires dont les fréquences sont des multiples entiers de* f *:*

$$s(t) = \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \cdot \sin\Big(2\pi \cdot k \cdot f \cdot t + \phi_k\Big) \tag{SinDeph}$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cdot \cos\Big(2\pi \cdot k \cdot f \cdot t\Big) + b_k \cdot \sin\Big(2\pi \cdot k \cdot f \cdot t\Big)\Big) \tag{SinCos}$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i2\pi n \cdot f \cdot t}, \tag{Cplx}$$

avec $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $\chi_k \in \mathbb{R}_+$, $\phi_k \in [0, 2\pi]$ *(ou* $[-\pi, \pi]$, *ou tout intervalle de longueur* 2π*), et* $c_n \in \mathbb{C}$. *De plus, on a les égalités suivantes :*

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \textit{ pour } n > 0 \tag{c_n et a_n, b_n}$$

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \overline{c_{-n}} \tag{c_n et c_{-n}}$$

$$\chi_0 = a_0 \tag{χ_0 et a_0}$$

$$\chi_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \tag{ϕ_k et a_k, b_k}$$

$$\phi_k = \pm \arccos\left(\frac{b_k}{\chi_k}\right), \textit{ le signe } \pm \textit{ étant celui de } a_k \tag{ϕ_k et a_k, b_k}$$

$$a_k = \chi_k \cdot \sin(\phi_k) \qquad b_k = \chi_k \cdot \cos(\phi_k) \tag{a_k, b_k et χ_k, ϕ_k}$$

$$\chi_k = 2|c_k| \textit{ si } k > 0 \tag{χ_k et c_k}$$

$$\phi_k = \textit{angle}(c_k) + \frac{\pi}{2} \textit{ si } k > 0 \tag{ϕ_k et c_k}$$

Les coefficients a_k, b_k, c_n *peuvent se calculer de la manière suivante. A chaque fois, l'intégrale peut se faire sur l'intervalle* $[-T/2, T/2]$, $[0, T]$ *ou n'importe quel autre intervalle de longueur* T. *On a choisi ici la version symétrique.*

$$a_0 = f \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t)dt \tag{a_0}$$

$$b_0 = 0$$

$$a_k = 2f \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \cos\Big(2k\pi \cdot f \cdot t\Big) \cdot s(t)dt \tag{a_k}$$

$$b_k = 2f \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \sin\Big(2k\pi \cdot f \cdot t\Big) \cdot s(t)dt \tag{b_k}$$

$$c_n = f \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi n \cdot f \cdot t} s(t)dt \tag{c_n}$$

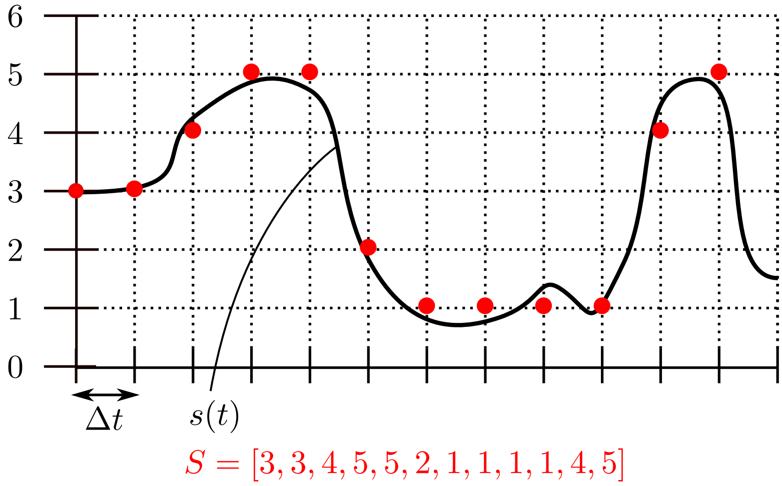
Si le signal $s(t)$ *est à valeurs* complexes *(donc,* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*) mais toujours périodique de période* T, *alors seules les formules (Cplx) et (*c_n*) restent vraies.*

Note : $\phi_k = \text{angle}(c_k) + \frac{\pi}{2}$, car on prend des sinus (avec déphasage) comme signaux élémentaires réels dans (SinDeph), si on prenait des cosinus on aurait pas le $+\frac{\pi}{2}$ (et d'autres choses seraient un petit peu différentes).

IV.3 Les séries de Fourier (cas discret)

IV.3.1 "Discrétisation" du cas continu

Les signaux que l'on considère en informatique logicielle (cela peut être différent si on traîte avec le matériel) ont été digitalisés, ils ont donc subi un *échantillonnage* (en anglais : *sampling*) horizontal et vertical et sont transformés en suite de nombres. Par exemple, sur l'image ci-dessous, l'échantillonnage a une résolution verticale de 7 (valeurs de 0 à 6 possibles) et on prend un échantillon chaque intervalle de temps Δt (résolution horizontale). Le signal $s(t)$ est ainsi transformé en une suite S de 12 valeurs comprises entre 0 et 6. Bien entendu, plus les résolutions horizontales et verticales seront grandes, plus précise sera notre digitalisation. Ce passage d'un signal continu à discret se fait en général à travers un composant dédié appelé ADC (Analog to digital converter).



Le signal ainsi transformé en suite S n'a plus de longueur temporelle fixée, pour connaître sa longueur temporelle réelle il faut connaître son *taux d'échantillonnage*, aussi appelé *fréquence d'échantillonnage* f_s (en anglais *sample rate* ou *sample frequency*), qui se calcule avec

$$f_s = \frac{1}{\Delta t}. \tag{f_s}$$

La longueur temporelle du signal représenté par la suite S sera alors donnée par

$$\ell_t(S) = \frac{\text{len}(S)}{f_s} = \Delta t \cdot \text{len}(S), \tag{ℓ_t}$$

où $\text{len}(S)$ est la longueur de la liste S (ici : 12). Par exemple, dans le cas d'un signal audio, il est habituel de prendre $f_s = 44'100Hz$. Le format `wav` (enfin, une de ses variantes) code les valeurs sur 16 bits, donc $65'536$ valeurs possibles (qui vont de $-32'768$ à $32'767$).
(Note : certains signaux que l'on traîte ne sont pas temporels, comme par exemple les images. Il est plus simple cependant de commencer par comprendre ce qui se passe dans le cas d'un signal qui dépend du temps, à mon avis, pour ensuite revenir sur ces cas-ci.)
On rappelle en passant le *théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon* :

Théorème : La représentation discrète d'un signal exige des échantillons régulièrement espacés à une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal, et celà même si la résolution verticale est aussi bonne que l'on veut.

Dans la pratique, la résolution verticale n'étant pas infinie, il y a de toute façon une perte d'information au moment du passage d'un signal continu à un signal discret. Mais une fois que l'on a posé une résolution verticale suffisante et une fréquence d'échantillonnage assez élevée, on peut procéder à faire une analyse de Fourier en tout point similaire au cas continu, en fait les formules sont quasiment les mêmes.

Bien entendu, lorsqu'on échantillonne un signal $s(t)$, on le fera sur une fenêtre de temps *finie*. On considère alors que cette fenêtre temporelle est la période du signal. Donc, si on échantillonne $1s$ du signal, pour l'analyse on fait comme si cette seconde se répétait à l'infini.

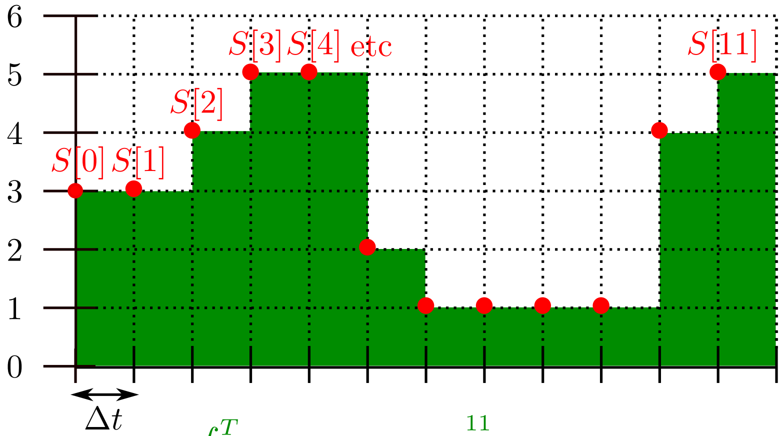
Une des manières de calculer le n-ème coefficient (complexe) de $s(t)$ est :

$$c_n = f \cdot \int_0^T e^{-i2\pi n \cdot f \cdot t} s(t) dt$$

(où T est la période, donc la longueur temporelle du signal, vu qu'on ne le regarde que sur une fenêtre de temps). Essayons de voir ce que cela pourrait donner dans le cas du signal échantillonné donné par la liste S. Tout d'abord, la fréquence f placée au début est égale à $1/T$. La longueur temporelle $T = \ell_t(S)$ de S est donné par la formule (ℓ_t) : $\ell_t(S) = M/f_s$, où $M = \mathrm{len}(S)$. Donc,

$$f = \frac{f_s}{M}.$$

Maintenant, il faut voir ce que l'on fait de l'intégrale. Si on se rappelle que l'intégrale d'une fonction est l'aire sous la courbe, dans le cas d'un signal échantillonné, on se retrouve en fait avec des rectangles qui ont toutes une largeur Δt, et dont la hauteur est donnée par les valeurs de la liste S. Par exemple, si on voulait calculer l'intégrale du signal échantillonné représenté sur la figure précédente (page 100), on se retrouverait avec $\sum_{k=0}^{11} S[k] \cdot \Delta t$.



$$\int_0^T s(t)dt \text{ devient } \sum_{k=0}^{11} S[k] \cdot \Delta t$$

On sait que $\Delta t = 1/f_s$, vu que f_s est la fréquence d'échantillonnage. Dans notre cas, on doit intégrer la fonction $e^{-i2\pi n \cdot f \cdot t} \cdot s(t)$. Comme $s(t)$ est échantillonnée, on doit prendre dans $e^{-i2\pi n \cdot f \cdot t}$ les valeurs du temps $t_0, t_1, \ldots, t_{M-1}$ correspondant, donc tous les multiples entiers de Δt, donc tous les multiples entiers de $1/f_s$: $\frac{1}{f_s}, \frac{2}{f_s}, \ldots, \frac{M-1}{f_s}$. Si on se rappelle que $f = \frac{f_s}{M}$ (où M est la longueur de la liste S), en remettant tout ensemble on se retrouve avec :

$$C[n] = \frac{f_s}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{-2i\pi \cdot n \cdot \frac{f_s}{M} \cdot \frac{k}{f_s}} \cdot S[k] \cdot \frac{1}{f_s}$$

En simplifiant, on a finalement :

$$C[n] = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{-2i\pi \cdot \frac{n \cdot k}{M}} \cdot S[k] \tag{DFT}$$

(DFT signifie *Discrete Fourier Transform*, qui est le petit nom de cette formule.) Maintenant qu'on sait comment calculer $C[n]$, on peut se demander à quelle fréquence correspond ce coefficient. Pour celà, il faut se rappeler que c_n est le coefficient correspondant à $|n|$ fois la fréquence du signal $s(t)$, qui est dans notre cas $f = \frac{f_s}{M}$. (On rappelle qu'a priori, n peut être négatif.) Donc, $C[n]$ est le coefficient de la fréquence $\frac{|n| \cdot f_s}{M}$. Maintenant, une première vraie nouveauté intervient : pour des raisons de symétrie, on voit facilement que $C[-n] = C[M-n]$, donc on n'a pas besoin de traiter des indices négatifs (si on ne le désire pas). D'ailleurs, la plupart des algorithmes calculant (DFT) n'utilisent pas cette formule avec des indices négatifs, ou alors de manière détournée (comme en Python). Il faut alors faire attention : le coefficient $C[M-2]$, par exemple, correspond à la fréquence $\frac{2 \cdot f_s}{M}$ (mais tournant dans le sens négatif), et non à la fréquence $\frac{(M-2) \cdot f_s}{M}$.

Pour aller dans l'autre sens, à savoir retrouver le signal échantillonné S à partir des coefficients de Fourier $C[0], C[1], \ldots, C[M-1]$, il suffit de voir que l'on doit mettre les valeurs discrètes du temps $\frac{1}{f_s}, \frac{2}{f_s}, \ldots, \frac{M-1}{f_s}$ dans l'équation (Cplx) de la page 99 et de se rappeler que $f = \frac{f_s}{M}$ pour obtenir :

$$S[k] = \sum_{n=0}^{M-1} e^{2i\pi\cdot\frac{n\cdot k}{M}} \cdot C[n]. \tag{IDFT}$$

(IDFT signifie évidemment *Inverse Discrete Fourier Transform.*)

Remarques

1. Les formules (DFT) et (IDFT) se ressemblent énormément, elles ne diffèrent que du facteur $\frac{1}{M}$ et du signe dans l'exponentielle.
2. Des algorithmes rapides existent pour calculer (DFT) et (IDFT) : la transformée de Fourier rapide et son inverse, nommés FFT et IFFT (Fast Fourier Transform). Ces algorithmes donnent *exactement* le même résultat que si on calculait (DFT) et (IDFT) en faisant les sommes naïvement, mais sont *beaucoup plus rapides* dès que la longueur de la liste devient importante (selon certaines sources, dès une longueur de 16, ce qui en fait n'est vraiment pas grand). En effet, pour calculer (DFT) naïvement, on doit parcourir M fois la liste de longueur M, alors que la FFT parvient (en exploitant des symmétries de la fonction e^{ix}) à le faire en $\log_2(M)\cdot M$ opérations (environ). L'existence de la FFT est une des raisons pour lesquelles on retrouve de la théorie de Fourier dans énormément d'applications, certaines ayant assez peu de rapport avec la théorie du signal.
3. La FFT est implémentée dans de nombreux langages. Par exemple, (en Python 3) dans la librairie `numpy.fft`, cependant, le facteur $\frac{1}{M}$ apparait dans la (IDFT), et non pas dans la (DFT). Suivant le langage (ou la librairie utilisée), ce facteur peut apparaitre dans la (DFT), dans la (IDFT), voire même être distribué dans les deux, qui se retrouvent chacun avec un facteur de $\frac{1}{\sqrt{M}}$. Il vaut donc mieux lire les informations des librairies avant d'utiliser ces fonctions.
4. On a montré comment "discrétiser" ce qu'on faisait dans le cas continu pour l'appliquer au cas discret. Cependant, ce n'est *pas* parce que la théorie de cas continu fonctionne que celle du cas discret suit automatiquement ! Il se trouve que, dans le cas des séries de Fourier, c'est le cas, et tout fonctionne effectivement de manière quasiment identique.

IV.3.2 Résumé du cas discret

Théorème. *Soit une liste S de longueur M contenant des nombres réels ou complexes, provenant d'un échantillonnage à fréquence f_s. On a alors les formules suivantes.*

longueur temporelle de S $$\ell_t(S) = \frac{M}{f_s} \tag{ℓ_t}$$

fréquence de base $$f = \frac{1}{\ell_t(S)} = \frac{f_s}{M} \tag{f}$$

coefficients de Fourier $$C[n] = \frac{1}{M}\cdot\sum_{k=0}^{M-1} e^{-2i\pi\cdot\frac{n\cdot k}{M}}\cdot S[k], \quad n = 0,\dots,M-1 \tag{DFT}$$

transformée inverse $$S[k] = \sum_{n=0}^{M-1} e^{2i\pi\cdot\frac{n\cdot k}{M}}\cdot C[n], \quad k = 0,\dots,M-1 \tag{IDFT}$$

De plus si $1 \le n \le M/2$, $C[n]$ et $C[M-n]$ correspondent à la fréquence $\frac{n\cdot f_s}{M}$, le premier tournant dans le sens positif et le second dans le sens négatif. Comme dans le cas continu, si S ne contient que des nombres réels, alors $C[n] = \overline{C[M-n]}$ (conjugé complexe) pour $n \le M/2$.

IV.3.3 Un exemple d'application : la compression d'image `jpeg`

Les séries de Fourier (et leurs variantes) peuvent aussi être utilisées avec des signaux non-temporels, par exemple des images. Prenons par exemple une ligne d'une image en niveaux de gris (avec valeurs de 0 à 255) :

```
S = [23,35,12,9,45,100,101,120,207,222,226,224,218,138,127,101]
```

On peut calculer la DFT de cette liste en appliquant la formule (DFT) (ou la version rapide de l'algorithme, à savoir la FFT), qui ne contient *pas* de référence à une quelconque fréquence du signal, si on la regarde attentivement : on fait juste des sommes et multiplications en faisant varier les indices dans la liste. Ce calcul sera entièrement légitime, cependant interpréter le résultat est un petit peu moins facile que dans le cas d'un signal temporel. On se rappelle que (par exemple) le 3ème coefficient de Fourier correspond à la fonction qui "tourne autour du cercle" 3 fois plus vite que la fréquence du signal (dans le sens positif dans notre cas). Une autre manière de le dire est celle-ci : pendant que le signal fait une période, la fonction fait 3 tours du cercle. Dans notre exemple, `S` est une liste de longueur 16, donc notre fonction devra faire 3 tours du cercle en 16 étapes. Cette fonction est représentée dans le cas discret par la liste des valeurs qu'elle prend. Donc, t doit aller de 0 à n en 16 étapes dans la fonction $e^{2i\pi\cdot t}$, on doit donc prendre

$$t = \frac{3\cdot 0}{16}, \frac{3\cdot 1}{16}, \frac{3\cdot 2}{16}, \ldots, \frac{3\cdot 15}{16},$$

et c'est *exactement* ce correspond au coefficient $C[3]$ dans (IDFT) :

$$e^{2i\pi\cdot\frac{3\cdot k}{16}} \cdot C[3], \quad k = 0, 1, \ldots, 15.$$

De même, le coefficient $C[1]$ correspond donc à la liste des valeurs de la fonction qui fait 1 fois le tour du cercle en 16 étapes, $C[2]$ à celle qui fait 2 fois le tour, etc... En fait, on se retrouve avec des racines 16èmes de l'unité (RU) vues en page 85. Pour $n = 1$, on les prend toutes, pour $n = 2$, on en prend une sur deux (et on fait 2 tours), pour $n = 3$, on en prend une sur 3 (et on fait 3 tours), etc... Les premières listes sont donc celles-ci (en arrondissant à 3 chiffres après la virgule) :

$$\begin{aligned}
n = 0 :\quad & [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \\
n = 1 :\quad & [1, 0.924 + 0.383i, 0.707 + 0.707i, 0.383 + 0.924i, i, -0.383 + 0.924i, -0.707 + 0.707i, -0.924 + 0.383i, \\
& -1, -0.924 - 0.383i, -0.707 - 0.707i, -0.383 - 0.924i, -i, 0.383 - 0.924i, 0.707 - 0.707i, 0.924 - 0.383i] \\
n = 2 :\quad & [1, 0.707 + 0.707i, i, -0.707 + 0.707i, -1, -0.707 - 0.707i, -i, 0.707 - 0.707i, \\
& 1, 0.707 + 0.707i, i, -0.707 + 0.707i, -1, -0.707 - 0.707i, -i, 0.707 - 0.707i]
\end{aligned}$$

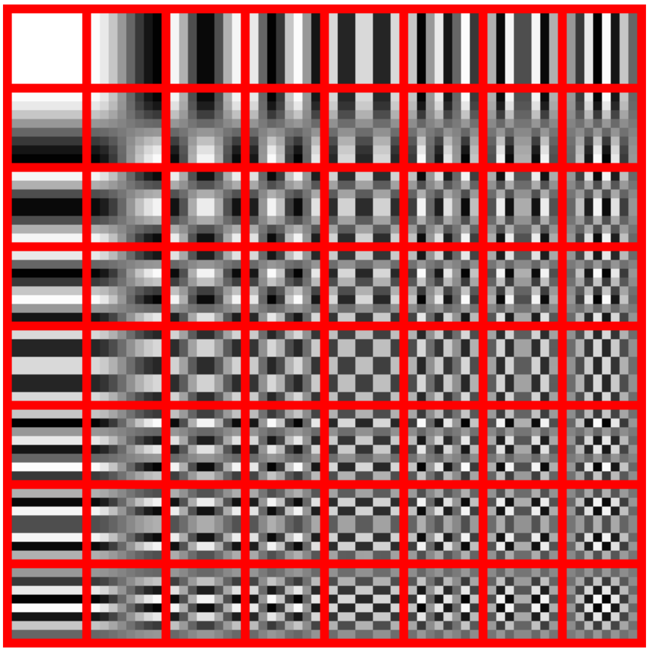
La format d'images (avec compression) `jpeg` utilise une variante de la DFT (et des idées ci-dessus) qui s'appelle la *transformée cosinus discrète DCT*[1]. Celle-ci fonctionne quasiment comme la DFT, mais au lieu d'utiliser les fonctions e^{it} (et les listes de valeurs correspondantes) pour la décomposition, elle utilise des fonctions $\cos(t)$. L'avantage est que du coup on reste entièrement dans les nombres réels. Cepandant, il est possible d'obtenir la DCT à partir de la FFT, ce qui d'ailleurs se fait si on veut l'appliquer à une liste assez grande. Une particularité de la DCT est que le premier coefficient correspond seulement à faire une demi-période du cosinus, et pas une entière. Si on se rappelle qu'en niveaux de gris, la valeur minimale correspond au noir et la maximale au blanc, la liste correspondant au premier coefficient donne donc un dégradé du blanc au noir, car le cos va de 1 à -1 sur une demi-période. De même, le 2ème coefficient correspondra à une période complète, donc un dégradé blanc→noir→blanc, etc.
Pour l'encodade et la compression, `jpeg` procède (dans les grandes lignes) ainsi. On s'occupe d'une image en niveaux de gris, dont les valeurs vont de 0 à 255.

1. Découpage de l'image en morceaux de 8×8 pixels, que l'on traîte individuellement.

2. On ôte 128 à chaque entrée, histoire de "centrer" les valeurs autour de 0.

3. Chaque morceau de 8×8 est en fait un tableau à 2 dimensions (une matrice, en fait), et pas seulement une liste, on applique la DCT d'abord par lignes, puis par colonnes (mais cela peut être fait en un seul calcul, avec double somme). Les coefficients sont entrés dans unmatrice C de taille 8×8, ils correspondent à des "dégradés" horizontaux et verticaux qui se mélangent :

1. En fait, pour encore compliquer le bazar il y a 4 DCT distinctes. Celle de `jpeg` est DCT-II, et son inverse DCT-III. Les détails ne sont pas importants dans le cadre de ce cours.



Source : Public Domain, https ://commons.wikimedia.org/w/index.php ?curid=1599304

Par exemple, $C[0,0]$ correspond à la valeur moyenne (valeur constante horizontalement et verticalement), $C[0,1]$ à un dégradé blanc$\rightarrow$noir horizontal, et constant vertical, $C[2,3]$ à un dégradé dégradé blanc$\rightarrow$noir$\rightarrow$blanc horizontal et blanc$\rightarrow$noir$\rightarrow$blanc$\rightarrow$noir$\rightarrow$ vertical, etc...

4. L'œil humain n'est pas trés efficace pour repérer les transitions très rapides entre pixels très proches, c'est-à-dire ce qui correspond aux morceaux en bas à droite de l'image ci-dessus, donc aux coefficients en bas à droite de la matrice. `Jpeg` tire parti de cela en appliquant une *quantisation* aux entrées de C : on donne une matrice de quantisation Q de taille 8×8 (qui fait partie de l'encodeur de `jpeg`) et on divise $C[k,\ell]$ par $Q[k,\ell]$, puis on arrondit à l'entier le plus proche (ce qui conduit automatiquement à une perte). Un exemple de matrice de quantisation, celle du standard `jpeg` pour une qualité de 50%, est celle-ci :

$$\begin{pmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{pmatrix}$$

Comme les plus grands nombres sont en bas à droite, cela a pour effet de mettre beaucoup de coefficients à 0 dans C, surtout en bas à droite. La matrice Q dépend du choix de la qualité de l'image qui est fixée par l'utilisateur.

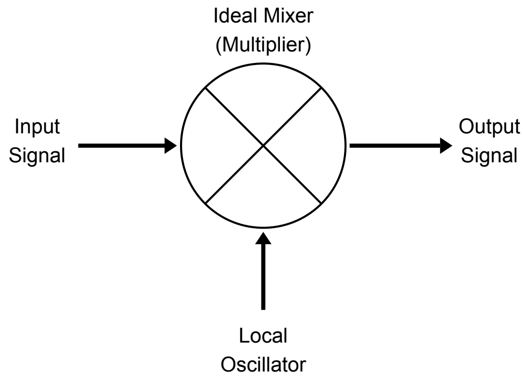
5. `Jpeg` sauve ensuite les coefficients quantisés de chaque morceau 8×8. Comme beaucoup de coefficients sont à 0 en bas à droite, un sauvetage "en zig-zag" permet de gagner une place certaine. (La qualité de l'image est également sauvée dans le fichier, avec sa matrice de quantisation.)

Le décodage fonctionne ainsi :

1. `Jpeg` redéploie chaque morceau compressé en tableau de 8×8.
2. *Déquantisation :* `jpeg` multiplie chaque entrée de la matrice par l'entrée correspondante de la matrice de quantisation. Comme on avait arrondi à l'entier, on ne retrouve pas exactement les valeurs de C.
3. On applique la IDCT bi-dimensionnelle.
4. On ajoute 128 à chaque entrée, et on arrondit à l'entier.

Note : J'ai un doute sur le format exact des données à l'intérieur du fichier jpeg, il se peut que l'explication ci-dessus soit légèrement inexacte sur quelques détails.

IV.4 Le mélangeur hétérodyne



On appelle hétérodyne une méthode de détection ou de traitement d'un signal reposant sur la multiplication de plusieurs signaux. Elle se fait souvent au niveau matériel, donc on est en présence de signaux analogiques, et non numériques. Cela permet par exemple de transposer un signal d'une fréquence (ou plage de fréquence) basse en un signal de fréquence nettement plus élevé, par exemple pour transmettre des signaux de radio ou de télévision. Les deux fréquences sont combinées par un élément habituellement appelé mélangeur, dont on considérera ici un modèle théorique idéal.

Principe de fonctionnement.
Cas simple.
Supposons que l'on reçoive un signal $s(t)$ sinusoïdal de fréquence variable f_1 et d'amplitude 1. Mettons que f_1 varie entre $100kHz$ et $110kHz$ On a également un signal sinusoïdal $r(t)$ de fréquence fixe f_2 et d'amplitude 1, mettons $100kHz$, donnée par un oscillateur local.

$$\text{Premier signal :} s(t) = \sin(2\pi f_1 t)$$
$$\text{Second signal :} r(t) = \sin(2\pi f_2 t)$$

On entre ces deux signaux dans un mélangeur qui (dans l'idéal) nous donne le produit des deux signaux :

$$s(t) \cdot r(t) = \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t).$$

Grâce à l'indentité trigonométrique

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta),$$

on en conclut :

$$s(t) \cdot r(t) = \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi(f_1 - f_2)t) - \frac{1}{2}\cos(2\pi(f_1 + f_2)t).$$

On a donc une somme de deux signaux, un de fréquence $(f_1 - f_2)$, et l'autre de fréquence $f_1 + f_2$. Dans notre exemple, $f_1 - f_2$ varie entre 0 et $10kHz$, et se trouve donc dans le spectre audible, et $f_1 + f_2$ est au delà de $200kHz$, fortement hors de ce spectre. On utilise alors un filtre passe-bas (qui ne passe que les fréquences en dessous d'un certain seuil, ici par exemple $20kHz$) afin de ne garder que le signal de fréquence $f_1 - f_2$.

Cas composé.
Si $s(t)$ et $r(t)$ ne sont pas sinusoïdaux, on peut utiliser les séries de Fourier pour obtenir :

$$s(t) = \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \cdot \sin\Big(2k\pi \cdot f_1 \cdot t + \phi_k\Big),$$
$$r(t) = \chi'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi'_k \cdot \sin\Big(2k\pi \cdot f_2 \cdot t + \phi'_k\Big),$$
$$s(t) \cdot r(t) = \left(\chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \cdot \sin\Big(2k\pi \cdot f_1 \cdot t + \phi_k\Big)\right) \cdot \left(\chi'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi'_k \cdot \sin\Big(2k\pi \cdot f_2 \cdot t + \phi'_k\Big)\right)$$

Ce produit de deux sommes infinies est une somme infinie de termes de formes (et fréquences) suivantes :

terme	fréquence	amplitude
$\chi'_0 \cdot \chi_k \sin\Big(2k\pi \cdot f_1 \cdot t + \phi_k\Big)$	$k \cdot f_1$	$\frac{1}{2} \cdot \chi'_0 \cdot \chi_k$
$\chi_0 \cdot \chi'_k \sin\Big(2k\pi \cdot f_2 \cdot t + \phi'_k\Big)$	$\ell \cdot f_2$	$\frac{1}{2} \cdot \chi_0 \cdot \chi'_\ell$
$\chi_k \cdot \chi'_\ell \sin\Big(2k\pi \cdot f_1 \cdot t + \phi_k\Big) \cdot \sin\Big(2\ell\pi \cdot f_2 \cdot t + \phi'_k\Big)$	mélange entre $kf_1 - \ell f_2$ et $kf_1 + \ell f_2$	$\frac{1}{2} \cdot \chi_k \cdot \chi'_\ell$

Si $k = \ell$, on a donc un mélange de fréquences $k(f_1 - f_2)$ et $k(f_1 + f_2)$, comme dans le cas simple, et le deuxième terme peut être éliminé par un filtre passe-bas.

Dans la pratique.

Dans la pratique, il est difficile d'obtenir un multiplicateur analogique idéal, et on utilise la non-linéarité de certains composants (par exemple, des diodes) pour obtenir un effet approchant. En effet, supposons que la réponse du composant non-linéaire lorsqu'on lui applique un voltage v est donnée par la fonction $F(v)$. En prenant la série de Taylor de F en 0 (notion que l'on verra plus tard dans le cours si le temps le permet), on peut écrire :

$$F(v) = \alpha_0 + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2 + \alpha_2 v^3 + \dots$$

Les coefficients α_i sont des nombres réels, et la somme est a priori infinie, mais converge lorsque v est assez petit, en particulier, les α_i décroissent lorsque i augmente. Faisons passer dans ce composant deux voltages sinusoïdaux $s(t), r(t)$ de fréquences f_1, f_2, comme dans le cas simple.

$$\begin{aligned}
F(s(t) + r(t)) &= F(\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)) \\
&= \alpha_0 + \alpha_1(\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)) + \alpha_2(\sin^2(2\pi f_1 t) + \sin^2(2\pi f_2 t) + \dots \\
&= \alpha_0 + \alpha_1(\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)) + \alpha_2(\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) 2 \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)) + \dots \\
&= \alpha_0 + \alpha_1(\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)) \\
&\quad + \alpha_2(\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi(f_1 - f_2)t) - \cos(2\pi(f_1 + f_2)t)) + \dots
\end{aligned}$$

On retrouve à nouveau des termes de fréquence f_1, f_2 ou leurs multiples, $f_1 + f_2$ et $f_1 - f_2$. Tous sauf le dernier peuvent être filtrés par un passe-bas. Si on développe les $\dots$, on verra que la sortie contient également des termes d'intermodulation $k \cdot f_1 + \ell \cdot f_2$.

Si maintenant les signaux ne sont pas sinusoïdaux et le multiplicateur pas idéal mais seulement non-linéaire, les formules deviennent passablement difficiles à traiter.

IV.5 Exercices sur la théorie du signal

A. Séries de Fourier et signaux réels

Exercice IV.5.1.
Donner la période et la fréquence de chacune des fonctions suivantes.

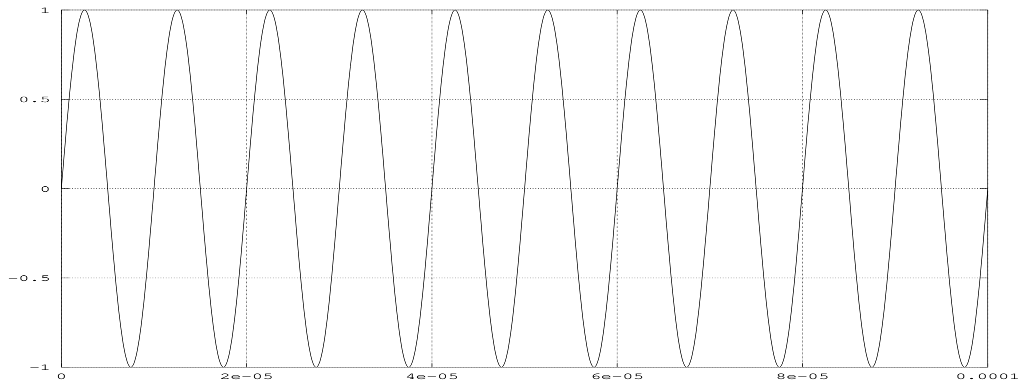
(a) $s(t) = \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t)$ (b) $s(t) = \sin(\frac{\pi \cdot t}{2})$ (c) $s(t) = 5\cos(3t)$
(d) $s(t) = 5\sin(110\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})$ (e) $s(t) = 3\sin(2\pi \cdot t - \frac{\pi}{4})$ (f) $s(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}t - \frac{3\pi}{2})$

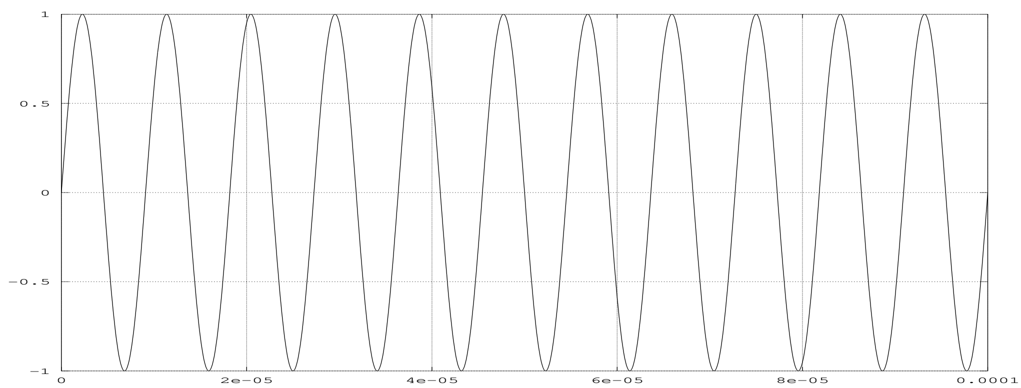
Exercice IV.5.2.

1. On se donne $u, v \in \mathbb{R}$. A l'aide des formules d'addition, trouver χ et ϕ tels que
$$\chi \cdot \sin(\alpha + \phi) = u \cdot \cos(\alpha) + v \cdot \sin(\alpha).$$
2. On se donne $c, d, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Comme ci-dessus, trouver χ et ϕ tels que
$$\chi \cdot \sin(\alpha + \phi) = c \cdot \cos(\alpha + \theta_1) + d \cdot \sin(\alpha + \theta_2).$$
3. En conclure que n'importe quel signal de la forme
$$c \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t + \theta_1) + d \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \theta_2)$$
est un signal élémentaire.

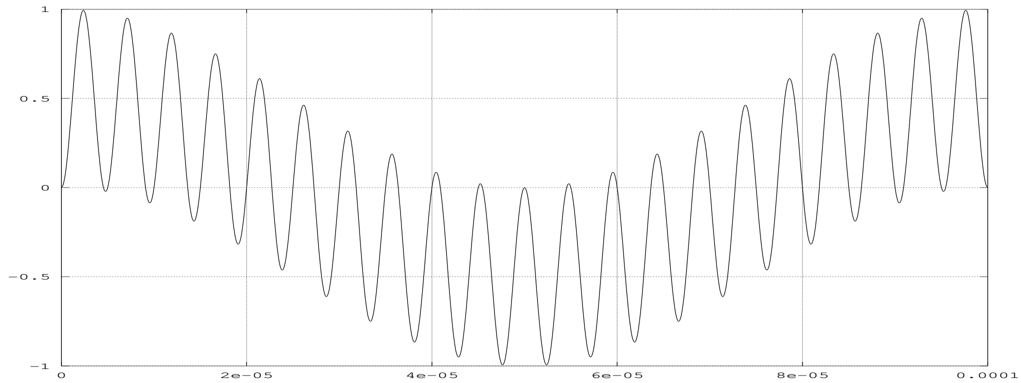
Exercice IV.5.3. Le mélangeur hétérodyne.

(1) Lire la théorie du mélangeur hétérodyne jusqu'à la partie 'cas simple' comprise.
(2) Voici deux signaux $s(t)$ et $r(t)$. Trouver leurs fréquences.

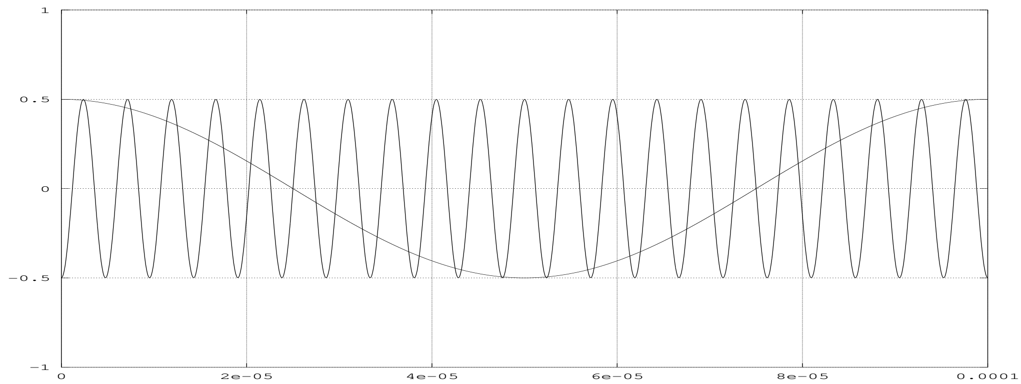




(3) Voici le produit des signaux $s(t) \cdot r(t)$.

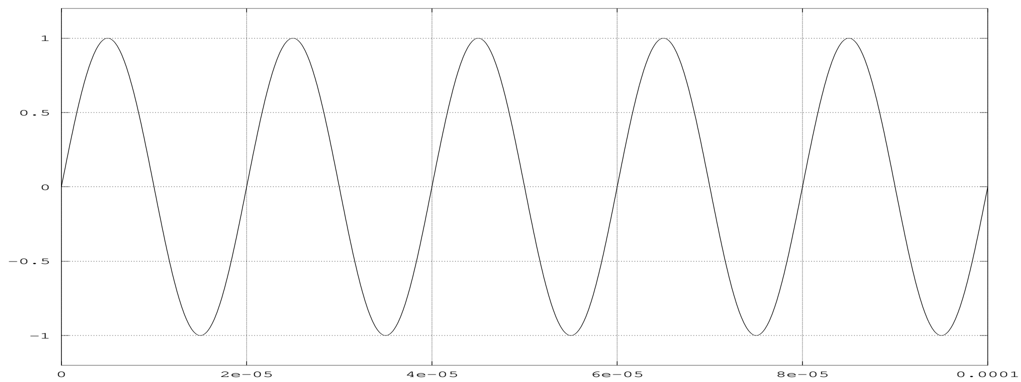


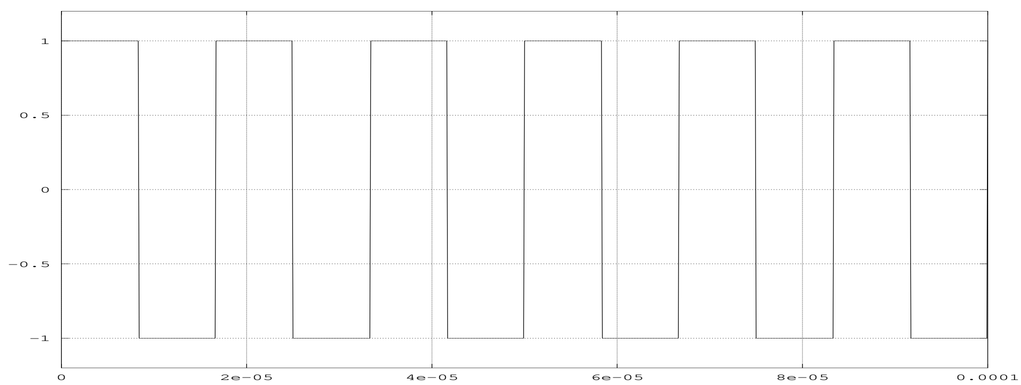
Expliquez grâce à la théorie ce que sont les deux signaux reliés représentés sur le graphique ci-dessous.

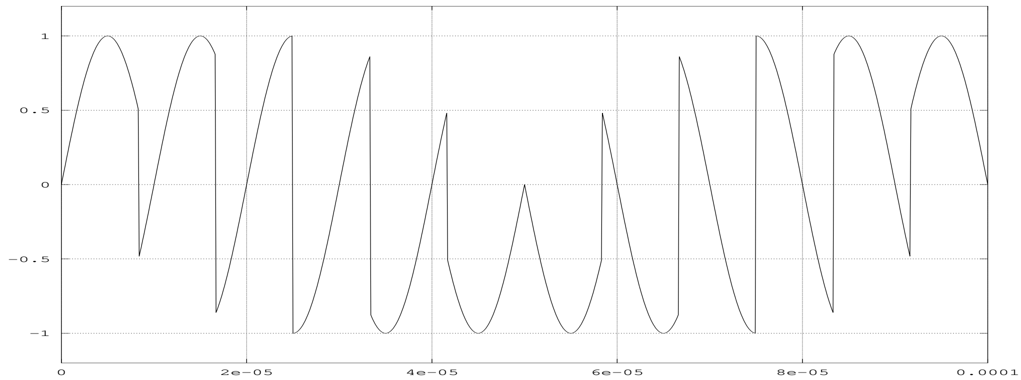


(4) Si on applique un filtre passe-bas de fréquence de coupure $20kHz$ au produit $s(t) \cdot r(t)$, qu'obtient-on ? Même question s'il s'agit d'un filtre passe-haut (de même fréquence de coupure).

(5) Voici deux autres signaux $p(t)$, $q(t)$, ainsi que leur produit. Déterminez leurs fréquences.

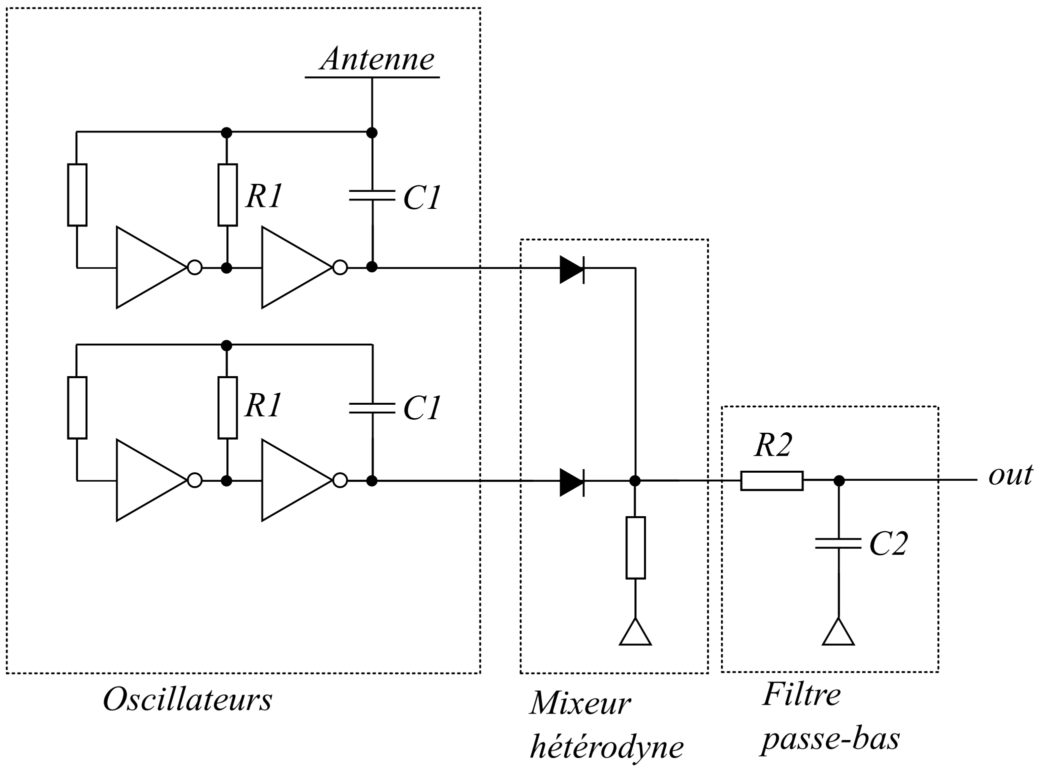






(6) Que se passera-t-il à votre avis si on applique un filtre passe-bas de fréquence de coupure $20kHz$ au produit $p(t) \cdot q(t)$? (Note : on peut regarder la théorie.)

Exercice IV.5.4. Principe de fonctionnement du Theremin.
Le 'cœur' de la version de Richard Harrison du Theremin peut se résumer en la schématique suivante [2]



1. Les deux oscillateurs produisent un signal (ni carré ni sinusoïdal) dont la fréquence est donnée (environ) par

$$f = \frac{0.2}{R1 \cdot C1}$$

   En posant $R1 = 27'000\Omega$ et $C1 = 10^{-10}F$ donnez la fréquence fournie par l'oscillateur du bas. Sachant que l'antenne forme un condensateur de valeur entre 0 et $10^{-12}F$ (suivant la proximité de la main de l'utilisateur) qui s'ajoute à la valeur du condensateur du haut, donnez la plage de fréquences fournies par l'oscillateur du haut.

2. La partie mixeur hétérodyne forme (approximativement) le produit des signaux provenant des deux oscillateurs. Tentez d'analyser ce produit.

3. La fréquence de coupure du filtre passe-bas est donnée par $f_c = \dfrac{1}{2\pi R2 \cdot C2}$. Sachant qu'on prend $R2 = 22'000\Omega$, suggérez une valeur pour $C2$ afin que le Theremin produise un son audible.

2. Pour que cela fonctionne vraiment, il manque en certain nombre de composants, cette figure est une sorte de résumé.

Exercice IV.5.5.
On rappelle (ou non) l'identité trigonométrique suivante (cf page 65 et exercice II.7.18), déjà utilisée dans les exercices précédents :

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$$

(a) Ecrivez un signal élémentaire $s(t)$ (continu) sous forme sinus / déphasage de fréquence $150Hz$, amplitude 3 et déphasage $\pi/4$.
(b) On considère un autre signal $r(t)$ de fréquence $130Hz$, qui ne possède que trois membres non-nuls dans sa série de Fourier sous forme (SinDeph), dont les coefficients sont :

$$\begin{aligned}
&\chi_0 = 0\\
&\chi_1 = 2, \quad \phi_1 = \pi/4\\
&\chi_2 = 4, \quad \phi_2 = -\pi/4\\
&\chi_3 = 1, \quad \phi_1 = 0\\
&\chi_k = 0 \text{ si } k > 4.
\end{aligned}$$

A quelles fréquences correpondent chacun de ces coefficients ?
(c) On effectue la multiplication $r(t)\cdot s(t)$. Grâce à la formule du début de l'exercice et au point (b), voir que l'on obtient une somme de 6 signaux élémentaires. Trouvez leurs fréquences et amplitudes.

B. Séries de Fourier et signaux complexes

Exercice IV.5.6.
En partant de la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, montrer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\
\sin(x) &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{i(e^{-ix}-e^{ix})}{2}
\end{aligned}$$

Exercice IV.5.7.
En utilisant l'exercice précédent, montrer que

$$A\cos(\alpha) + B\sin(\alpha) = \frac{A-iB}{2}\cdot e^{i\alpha} + \frac{A+iB}{2}\cdot e^{-i\alpha}.$$

Indication : Remplacez $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ et regroupez les termes.

Exercice IV.5.8.
Expliquez que lorsqu'on multiplie un signal complexe $w(t) = r\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot f\cdot t}$ par le nombre complexe $z = s\cdot e^{i\varphi}$,avec r, s des nombres réels, cela revient à multiplier l'amplitude par s et introduire un déphasage de φ dans le signal. En conclure que si z est donnée sous forme cartésienne $a+ib$, alors l'amplitude est donnée par $s = \sqrt{a^2+b^2}$ et le déphasage par $\pm\arccos(a/s)$, avec le signe $\pm$ le même que celui de b.

Exercice IV.5.9.
Dans les cas suivants, donnez la fréquence et calculez l'amplitude et le déphasage des signaux complexes suivants. Indiquez si le signal tourne dans le sens positif ou dans le sens négatif.
(1) $(1+i)\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot 100\cdot t}$
(2) $(1-i)\cdot 3\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot 125\cdot t}$
(3) $(-1+\sqrt{3}i)\cdot \frac{1}{2}\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot 10'000\cdot t}$
(4) $2i\cdot 3\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot 2\cdot t}$.

Exercice IV.5.10.
Soit $s(t) = 4\sin(2\pi\cdot 125\cdot t + \pi/6)$.
(a) Ecrivez $s(t)$ comme une somme d'un sinus et d'un cosinus sans déphasage.
(b) Ecrivez $s(t)$ comme une somme de deux fonctions exponentielles complexes (avec coefficients complexes).
Indication : L'exercice IV.5.7 (donc la formule (c_n et a_n, b_n) en page 99) ou le IV.5.6 peuvent servir.

Exercice IV.5.11.
Pourquoi est-ce que lorsqu'on écrit le même signal élémentaire sous forme sinus / déphasage et sous forme complexe, le déphasage diffère de $\pi/2$, comme dans la formule (ϕ_k et c_k) en page 99 ?
Indication : On peut utiliser l'exercice IV.5.6 pour voir qu'il y a une multiplication par i quelque part, ou alors l'exercice IV.5.7.

Exercice IV.5.12.
Dans les cas suivants, écrivez le terme (supposé comme faisant partie d'une série de Fourier) sous la forme $r \cdot e^{i(\cdot 2\pi \cdot f \cdot t+\varphi)} + s \cdot e^{-i(\cdot 2\pi \cdot f \cdot t+\varphi)}$.
(1) $2 \cdot \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t) - 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 100 \cdot t)$
(2) $2 \cdot \cos(2\pi \cdot 125 \cdot t) + 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 125 \cdot t)$
(3) $-4 \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t)$.
Indication : Utiliser l'exercice IV.5.7, puis pour calculer les amplitudes/déphasages en se rendant compte que les calculs sont presque les mêmes que ceux de l'exercice IV.5.9.

Exercice IV.5.13.
Voici un signal dont la série de Fourier (version sinus-déphasage) possède seulement trois termes :

$$s(t) = 5 \cdot \sin(2\pi \cdot 110 \cdot t + \pi/3) + 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 330 \cdot t - \pi/2) + 40 \cdot \sin(2\pi \cdot 880 \cdot t + 2\pi/3)$$

(1) Quelle est la fréquence de ce signal ?
(2) Quels sont les indices des coefficients de Fourier qui ne sont pas égaux à 0 ?
(3) Transformez le membre non-nul de la série de Fourier correspondant à la plus grande fréquence sous forme complexe (en passant si besoin par la version sinus-cosinus).
(4) Quelle est la fréquence que l'on aura tendance à entendre le plus dans ce signal ?
(5) Si on fait subir un filtre passe-bas très violent de fréquence de coupure $500Hz$ à ce signal, que reste-t-il ?

Exercice IV.5.14.
Exercice de manipulation de sommes : montrez (ou comprenez) que les égalités suivantes sont vraies.
(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (k+1) = \sum_{k=0}^{9} (k+2)$.
(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k}{10} + \frac{k+10}{10} \right) = \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{10}$.
(3) $\displaystyle e^0 + \sum_{k=1}^{10} \left(e^k + e^{-k} \right) = \sum_{k=-10}^{10} e^k$.

Exercice IV.5.15.
Les coefficients a_n, b_n sont ceux de la série de Fourier de $s(t)$. Montrer que si on pose $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ pour $n > 0$, alors on peut calculer c_n ainsi :

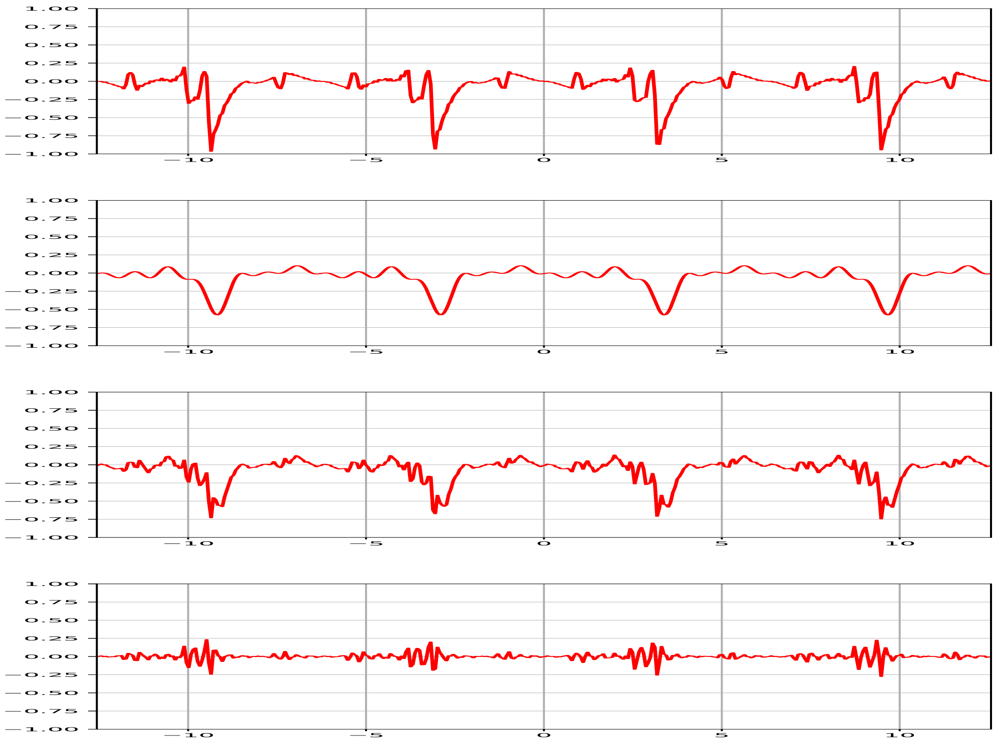
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi n \cdot f \cdot t} s(t) dt.$$

Indication : Ecrire a_n et b_n comme des intégrales et regroupez $a_n - ib_n$ en une seule intégrale.

Exercice IV.5.16.
En utilisant les formules de c_n en fonction de $a_n, b_n \chi_n$ (pour un signal $s(t)$ à valeurs réelles), à savoir les formules (c_n et a_n, b_n) et (ϕ_k et a_k, b_k) de la page 99, montrer que

$$|c_n|^2 = |c_{-n}|^2 = c_n \cdot c_{-n} = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{4}\chi_n^2.$$

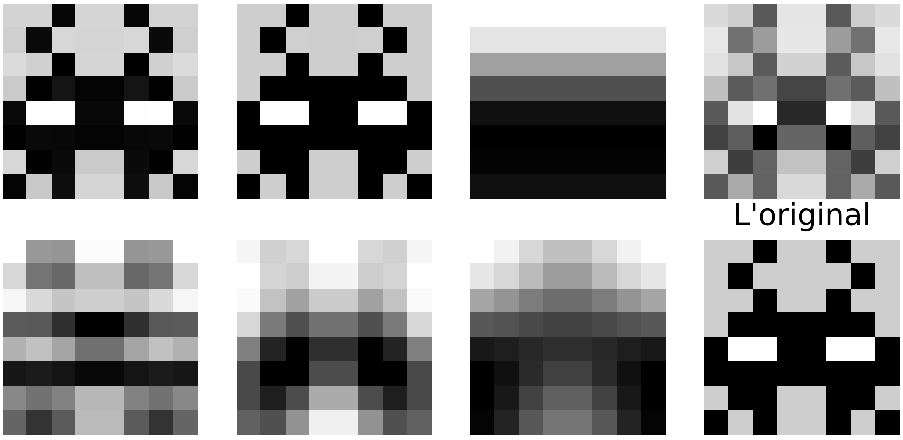
Exercice IV.5.17.
La première image est celle d'un signal de période 2π. Les trois autres sont celles de ce signal après 3 traitements différents. Essayez de deviner lesquels.



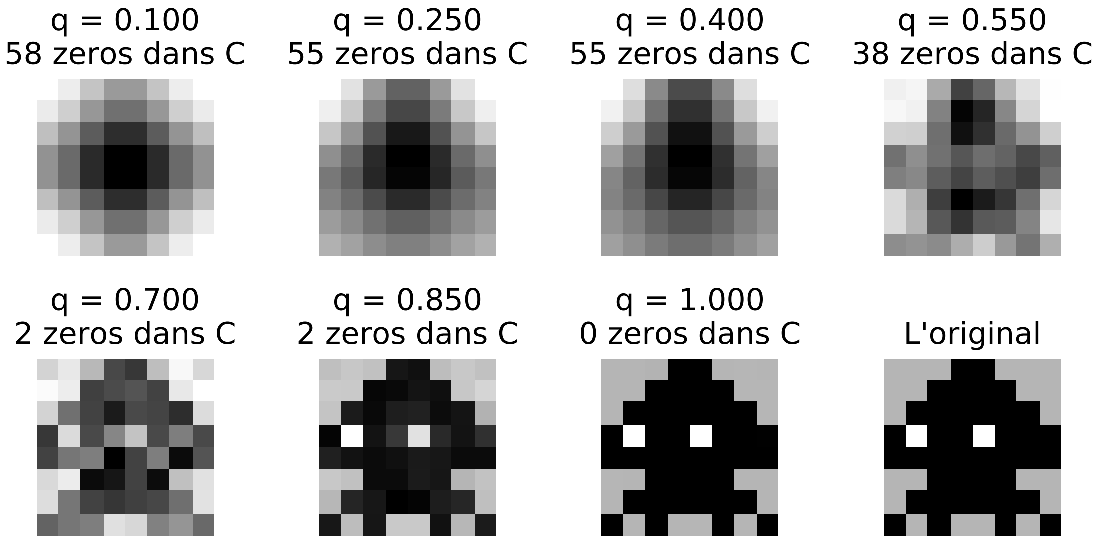
C. Séries de Fourier et signaux discrets

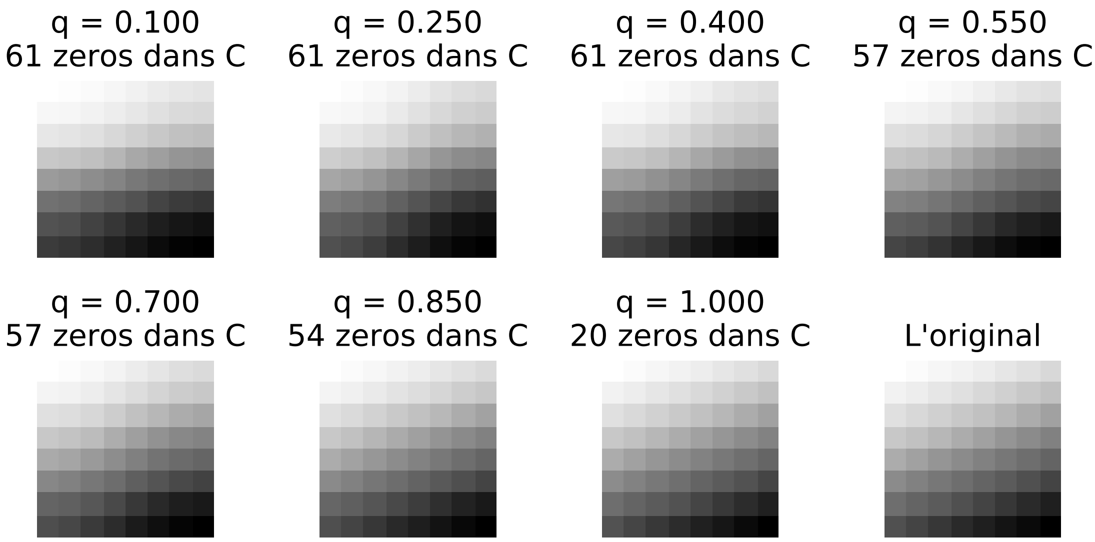
Exercice IV.5.18.
On a un signal sonore que l'on a enregistré pendant 3.7 secondes (un milipoil plus, en fait) à une fréquence d'échantillonnage de $11'025Hz$, obtenant ainsi une liste S. Répondez aux questions suivantes.
(a) Quelle est la longueur de S (que l'on notera M) ?
(b) On calcule les coefficients de Fourier (complexes) en utilisant la FFT (dans un certain langage de programmation), obtenant ainsi la liste C. A quelle fréquence correspond $C[120]$? Et $C[40'012]$?
(c) Quel(s) coefficients correspondent à une fréquence de $150Hz$?
(d) Est-ce qu'il y a un lien (simple) entre $C[20'100]$ et $C[20'693]$?
(e) D'ailleurs, est-ce qu'on pourrait mettre à 0 les deux coefficients du point (d) sans poser de problème ? Ou alors juste un seul des deux ?
(f) Si on prend la liste C et on ajoute au milieu M zéros, que se passe-t-il lorsque l'on effectue la IFFT ensuite ?

Exercice IV.5.19.
Tentez de mettre dans l'ordre "logique" les images 8×8 pixels ci-dessous, qui sont des altérations de l'originale en bas à droite. En quoi consistent ces altérations ?



Exercice IV.5.20.
Voici deux séries d'images 8×8 pixels, avec quelques notations. Essayez de comprendre de quoi il s'agit, puis expliquez pourquoi la deuxième série subit moins de changements drastiques apparents que la première.





Exercice IV.5.21.
Prenez sur Cyberlearn les fichiers `rfft_2023.py` (contenant du code Python 3) et `sound.wav` (qui contient un fichier `.wav` mono échantillonné à $44'100Hz$), et mettez-les dans un dossier à vous. Les fichiers `.wav` contiennent des valeurs entières entre $-32'678$ et $32'667$. Le fichier `rfft_2023.py` contient plusieurs fonctions, en particulier `file_to_lst( name )` qui retourne une liste avec les valeurs contenues dans le fichier, et
`lst_to_file( lst , name , sample_rate = 44100 , norm = 1)` qui sauve un fichier `name` (qui doit contenir `.wav`) depuis la liste `lst` avec fréquence d'échantillonnage donn'ee par `sample_rate` ($44'100Hz$ par défaut), et normalise au maximum du son si `norm == 1` (cas par défaut). Si `norm == 1`, la conversion en entier (depuis des floats ou des doubles) est automatique.
Le fichier `rfft_2023.py` contient aussi les fonctions `Exercice1()` à `Exercice4()` qui prennent ce fichier audio et en créent à chaque fois un autre qui contient du "bruit" en plus (sauvé dans le même répertoire), et retourne la liste correspondante (non normalisée, en floats) à ce fichier. Lors de l'exécution, quelque chose s'affiche qui explique le genre de bruit ajouté.
Le fichier importe aussi la librairie `numpy` comme `np`.

(1) Exécutez la fonction `Exercice1()`, écoutez ce que ça donne, et tentez, en utilisant les fonctions `np.fft.rfft` et `np.fft.irfft` (et ce que la fonction affiche), d'enlever le "bruit" ajouté.
(2) Pareil que (1), mais avec la fonction `Exercice2()`. A quelles fréquences correspondent les coefficients de Fourier que vous avez changé ?
(3) Pareil que (1), mais avec la fonction `Exercice3()`. Quels sont les indices des coefficients altérés ?
(4) Pareil que (1), mais avec la fonction `Exercice4()`.
(5) Que se passerait-il (i.e. comment devrait-on adapter ce qu'on fait) dans les points précédents si la fréquence d'échantillonnage était en fait de $22'050Hz$ ou de $11'025Hz$?
(6) Que se passerait-il (i.e. comment devrait-on adapter ce qu'on fait) si le fichier audio était 2 fois plus court ?
(6) Essayez avec votre propre fichier audio MONO (d'au moins 5 secondes). Y a-t-il des altérations sonores auxquelles on peut s'attendre quand on résoud les points (1) à (4) ?

Note : `rfft_2023.py` contient aussi des fonctions qui ajoutent le bruit en question, on peut évidemment tricher en les transformant pour enlever le bruit, mais l'idée est de les utiliser comme boîtes noires.

Exercice IV.5.22.
Prenez sur Cyberlearn les fichiers :
`preparation_test.py` et `solutions.py` (Python 3), et
`entrainement_A.wav, entrainement_B.wav, entrainement_C.wav` (fichiers `.wav` mono échantillonné à diverses fréquences),
et mettez-les dans un dossier à vous. Les fichiers `.wav` contiennent des valeurs entières entre $-32'678$ et $32'667$.
Le fichier `preparation_test.py` contient plusieurs fonctions, (note : `file_to_lst( name )` est un peu différente que dans l'exercice précédent, c'est malin : elle retourne une paire ; le premier membre est une liste avec les valeurs contenues dans le fichier, le deuxième est la fréquence d'échantillonnage).
Le fichier `solutions.py` contient du code avec plein de trous. Le but est de remplir ces trous pour enlever trois genres de "bruit" ajoutés sur le fichier sonore dont le nom est dans la variable `nom` (tiens donc).

(a) Lancez solutions.py tel quel et lisez ce qui s'affiche. Trois nouveaux fichiers sonores sont alors créés, les versions bruitées du fichier de base.
Pour chacun des trois, coder (dans les trous) ce qu'il faut pour ôter le bruit en question. Ecoutez au casque ce que cela donne.
(b) Dé-commentez la ligne `nom = "entrainement_B.wav"`, et essayez de voir si ce que vous avez codé au point (a) fonctionne toujours avec ce fichier.
Indication : Les Exemples 2 et 3 devraient toujours fonctionner si vous vous y êtes pris comme il faut, par contre l'Exemple 1 devrait ne pas vraiment fonctionner, ou alors pas tout le temps.
(c) Dé-commentez la ligne 55 de `preparation_test.py` (celle avec `frequencies = [ k + k%2 for k in frequencies]`). Si vous avez codé correctement, cette-fois ci l'Exemple 1 devrait également fonctionner.
(d) Dé-commentez la ligne `nom = "entrainement_C.wav"`, et essayez de voir si ce que vous avez codé au(x) point(s) précédents fonctionne toujours avec ce fichier.
Indication : Les Exemples 2 et 3 devraient toujours fonctionner si vous vous y êtes pris comme il faut, par contre l'Exemple 1 devrait ne plus du tout fonctionner.
(e) Tentez d'expliquer pourquoi les choses fonctionnent ou pas dans les points précédents.

Chapitre V

Limites – Continuité – Dérivées

V.1 Limites

Limites de suites

Suites tendant vers $a \in \mathbb{R}$.
Etant donné une suite a_n dont chaque élément est dans $\mathbb{R}$, on dit que $a \in \mathbb{R}$ est la limite de la suite a_n si on est aussi proche que l'on veut de a lorsque n est assez grand. Plus précisément : pour une échelle de précision donnée, par exemple 10^{-20}, on doit pouvoir montrer qu'il y a un certain indice $m \in \mathbb{N}$ tel que la différence entre la limite a et a_n est plus petite que 10^{-20} lorsque $n \geq m$: $|a_n - a| < 10^{-20}$ dès que $n \geq m$. Naturellement, on doit aussi pouvoir trouver un tel m pour une précision de 10^{-30}, 10^{-1000}, etc, en fait pour n'importe quelle précision de 10^{-k} avec $k \in \mathbb{N}$. Mathématiquement, on peut l'écrire ainsi :

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } |a_n - a| \leq 10^{-k} \text{ lorsque } n \geq m.$$

Suites tendant vers $\pm\infty$.
On dit que la suite a_n tend vers $+\infty$, que l'on note $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, si la valeur de la suite est aussi grande que désiré lorsque n est assez grand : pour un k donné, par exemple $k = 20$, on doit pouvoir montrer qu'il y a un certain indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| \geq 10^k$ dès que $n \geq m$. Mathématiquement :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \geq 10^k \text{ lorsque } n \geq m.$$

Les suites tendant vers $-\infty$ sont définies de manières similaires.

> Attention : une suite peut ne pas avoir plusieurs limites, et une suite peut ne pas avoir de limite du tout, on dit alors que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ est indéfini.

Par exemple, la suite $a_n = (-1)^n$, qui peut sembler avoir deux limites -1 et 1, n'en a en fait aucune.

En pratique, on n'utilise quasiment jamais la définition officielle qui demande d'être capable de produire l'indice m en fonction de l'échelle de précision, mais on "devine" la valeur de la limite, souvent en la comparant avec des limites de suites simples que l'on connaît, et en utilisant (implicitement ou non) des théorèmes du genre :

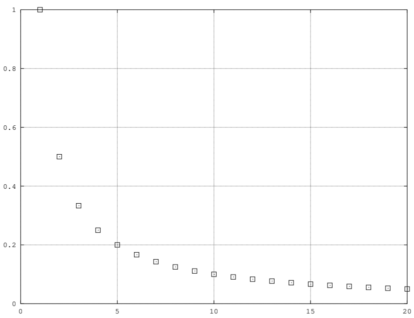
Théorème
Soient a_n, b_n, c_n des suites.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = d$, et que à partir d'un certain n, $a_n \leq b_n \leq c_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = d$ (en particulier, la limite existe).
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et que à partir d'un certain n, $a_n \leq b_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ (en particulier, la limite existe).
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ et que à partir d'un certain n, $b_n \leq a_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ (en particulier, la limite existe).

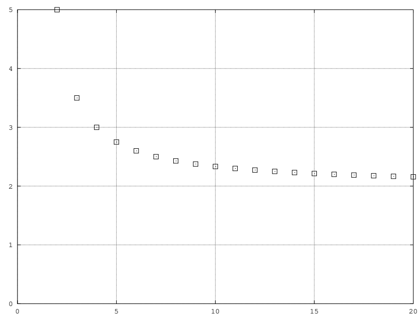
Note : Certains auteurs considèrent que la limite n'existe pas lorsqu'elle est $\pm\infty$.

Exemples

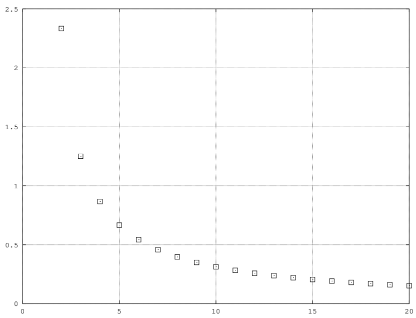
$a_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.



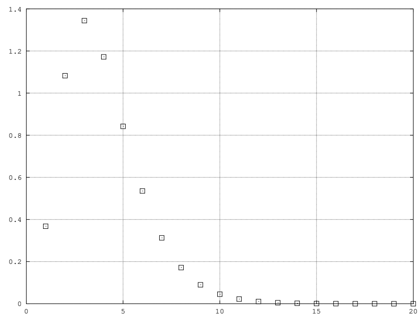
$a_n = \frac{2n+1}{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.



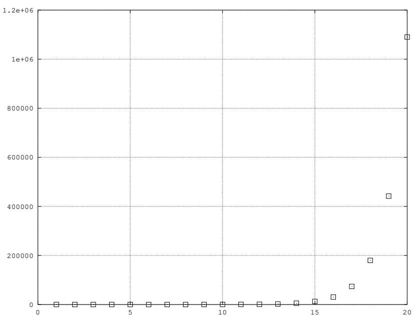
$a_n = \frac{3n+1}{n^2-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.



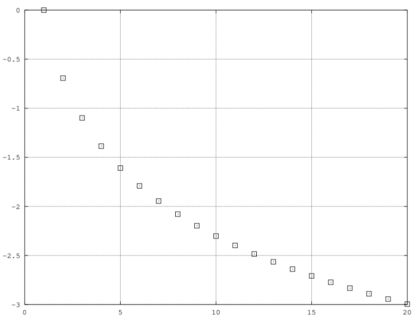
$a_n = \frac{n^3}{e^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.



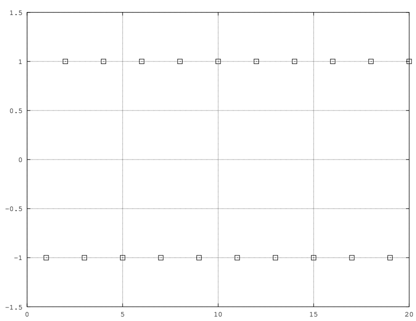
$a_n = \frac{e^n}{n^2+2n+5}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.



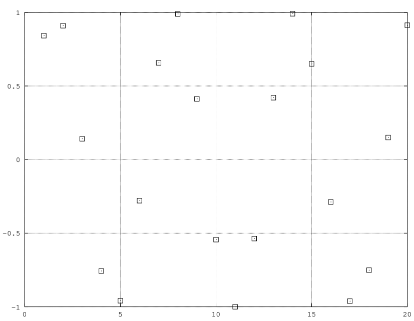
$a_n = \ln(1/n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.



$a_n = (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas : la suite alterne entre -1 et 1.



$a_n = \sin(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas : la suite oscille entre -1 et 1.



Limites de fonctions en un point

Limites en un point $b \in \mathbb{R}$.
Etant donné une fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{b\} \to \mathbb{R}$, la *limite de $f(x)$ lorsque x tend vers b* est (si elle existe) le nombre réel a tel que "$f(x)$ est aussi proche de a que l'on veut lorsque x est proche de b". Plus précisément : pour une échelle de précision donnée, par exemple 10^{-20}, on doit pouvoir montrer que si on se place assez près de b, donc que $|x-b| < 10^{-\ell}$ pour un certain ℓ qu'il faut trouver, alors $|f(x)-a| < 10^{-20}$. Comme pour les suites, on doit aussi pouvoir trouver un tel ℓ pour une précision de 10^{-30}, 10^{-1000}, etc, en fait pour n'importe quelle précision de 10^{-k} avec $k \in \mathbb{N}$. Mathématiquement, on peut l'écrire ainsi :

$$a = \lim_{x\to b} f(x) \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\, \exists \ell \in \mathbb{N} \text{ tel que } |f(x)-a| \leq 10^{-k} \text{ lorsque } |x-b| \leq 10^{-\ell}.$$

Il est souvent pratique de commencer par définir la limite à gauche $\lim_{x\to b^-} f(x)$ et la limite à droite $\lim_{x\to b^+} f(x)$, où dans le premier cas ne regarde la fonction qu'en dessous de b, c'est-à-dire qu'on ne prend que des $x < b$, et dans le deuxième cas que des $x > b$.

Attention : une fonction peut ne pas avoir de limite au point b. Si $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)$ sont toutes les deux définies et égales, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^+} f(x)$.

Fonctions tendant vers $\pm\infty$.
Comme pour les suites, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers b, noté $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$, si la valeur de $f(x)$ aussi grande que désiré lorsque x est assez proche de b. Mathématiquement :

$$\lim_{x\to b} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\, \exists \ell \in \mathbb{N} \text{ tel que } f(x) \geq 10^{k} \text{ lorsque } |x-b| \leq 10^{-\ell}.$$

Les limites vers $-\infty$ sont définies de manières similaires, ainsi que les limites à gauche et à droite.

Limites pour $x \to \pm\infty$.
On définit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ de la même manière que les suites : $a = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ssi pour tout $k \in \mathbb{N}$, il y a un certain $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x)-a| \leq 10^{-k}$ lorsque $x > 10^{\ell}$. Idem pour $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Attention : Si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = a$, cela signifie que la valeur de $f(x)$ s'approche de *a quel que soit la manière dont on s'approche de b* (pour le dire informellement). Si on prend la fonction $f(x) = \sin(1/x)$ (pour $x > 0$), alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ n'existe pas, car par exemple $f(\frac{1}{n\pi}) = 0$, mais $f(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, les suites $\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ tendent toutes les deux vers 0. Donc, informellement, on arrive à deux limites différentes lorsqu'on choisit deux manières différentes de tendre vers 0^+.

Théorème
Soient f, g, h des fonctions $D \to \mathbb{R}$ (avec $D \subset \mathbb{R}$) et $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

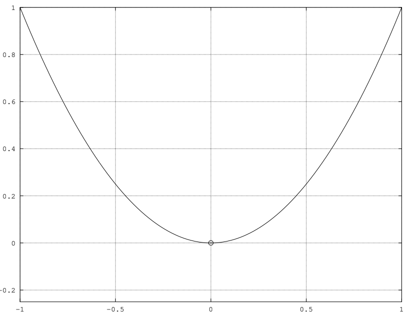
- Si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} h(x) = d$, et que près de b, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, alors $\lim\limits_{x\to b} g(x) = d$ (en particulier, la limite existe).
- Si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$ et que près de b, $f(x) \leq g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to b} g(x) = +\infty$ (en particulier, la limite existe).
- Si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$ et que près de b, $g(x) \leq f(x)$, alors $\lim\limits_{x\to b} g(x) = -\infty$ (en particulier, la limite existe).

Une limite particulière
Si x est exprimé en *radians*, alors

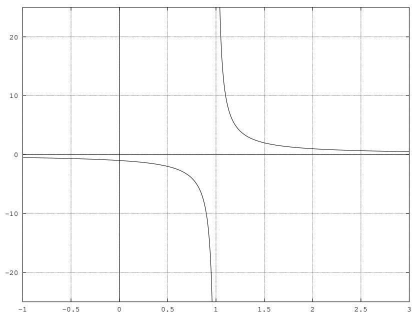
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Exemples

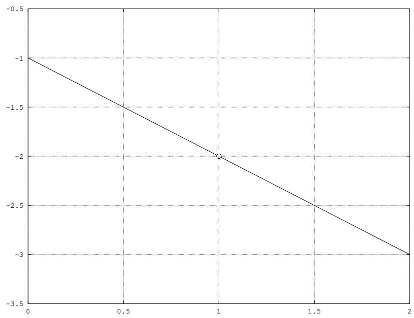
$f(x) = x^2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0.$



$f(x) = \frac{1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$

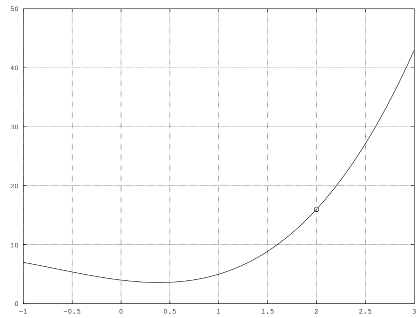


$f(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2.$

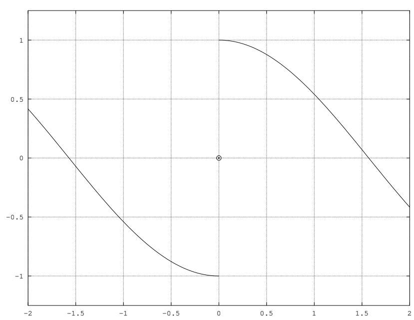


$f(x) = \frac{(x^3+2x^2-2x+4)(2-x)}{2-x}$,

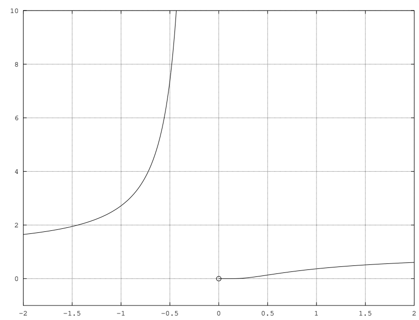
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 16.$



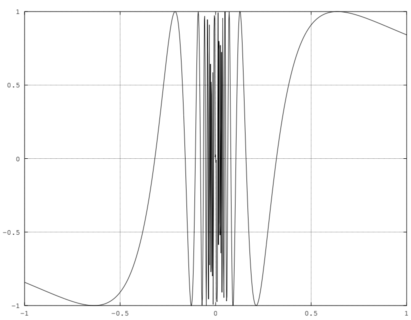
$f(x) = \mathrm{sgn}(x)\cdot\cos(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$



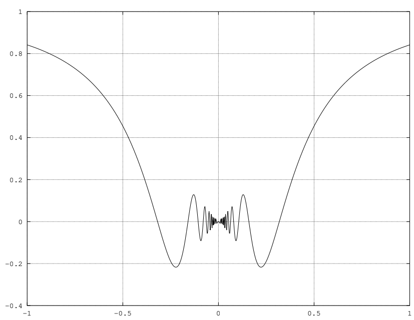
$f(x) = e^{-1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.$



$f(x) = \sin(1/x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ n'existent pas.



$f(x) = x\cdot\sin(1/x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0.$



Comportement asymptotique d'une fonction

Il arrive fréquemment que l'on désire connaître le comportement d'une fonction $f(x)$ lorsque x devient grand (dans les positifs ou les négatifs) en la comparant avec des fonctions "simples". Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ se comporte comme $x+2$ lorsque x devient grand. En effet, lorsque $x \neq 2$ on a :

$$\frac{x^2+1}{x-2} \quad = \quad \frac{(x+2)(x-2)+5}{x-2} \quad = \quad x+2+\frac{5}{x-2}$$

(on a utilisé la division euclidienne de polynômes pour la première égalité). Donc,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}-(x+2)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x-2} = 0.$$

Cela signifie bien que la fonction $f(x)$ se rapproche de plus en plus de la fonction $x+2$ lorsque $x \to +\infty$ (et également lorsque $x \to -\infty$). Nous obtenons ainsi plus d'informations sur $f(x)$ que simplement observer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: on connait également la *vitesse* à laquelle la fonction croit.
De manière génerale, on dit que le *comportement asymptotique* de $f(x)$ est le même que celui de $g(x)$ lorsque la différence entre ces deux fonctions tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big) = 0.$$

On considère parfois aussi le cas où $x \to -\infty$.

Si la fonction $f(x)$ a le comportement asymptotique d'une droite $g(x) = ax+b$, on dit que cette droite est une *asymptote* de f, comme déjà vu dans le cas des fonctions rationnelles. Si la $g(x)$ est une fonction constante (lorsque $a = 0$), c'est une *asymptote horizontale*, sinon (lorsque $a \neq 0$) il s'agit d'une *asymptote oblique*. Par extension, on appelle *asymptote verticale* de f la droite verticale $x = b$ lorsque $\lim_{x\to b^+} f(x) = \pm\infty$, ou $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ (l'idée est que la fonction f s'approche de la droite verticale lorsque x tend vers b d'un côté ou de l'autre).

V.2 Continuité et dérivabilité

V.2.1 Fonctions continues

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ (où D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$) est dite *continue au point* $a \in D$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

La fonction f est *continue sur* D (ou *continue* tout court si le domaine D est sous-entendu) si elle est continue en tout point de D. Le graphe d'une fonction continue peut se tracer "sans lever le stylo".
Exemples graphiques : Les fonctions 2, 5, 6 et 7 de la page 120 ne sont *pas* continues. Les autres sont continues (pour autant qu'on choisisse correctement la valeur au point indéterminé lorsqu'il y en a un).

Quelques fonctions continues
Presque toutes les fonctions considérées jusque là sont continues. *Attention :* cela n'est pas immédiat, et devrait en fait être démontré, mais correspond assez bien à l'intuition qu'on peut avoir à leur sujet.

- Si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme, alors P est une fonction continue. En particulier, les fonctions constantes, les droites, les paraboles.
- La fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^a$, pour $a \in \mathbb{R}$, est continue. En particulier, $\sqrt{x}$ est continue.
- La fonction exponentielle de base $a > 0$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De même, si $a \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}$, la fonction

$$\log_a : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log_a(x) \end{array}$$

  est continue.
- Les fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$ sont continues. Par contre, $\tan(x)$ n'est pas continue en $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ pour chaque $k \in \mathbb{Z}$.

Quelques règles
On se donne deux fonctions f, g continues au point $a \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions $f + g$, $f \cdot g$ sont continues en a. En particulier, $-f$ et $-g$ sont continues (car la fonction constante sur -1 l'est).
- Si $g(a) \neq 0$, alors f/g est continue en a. (Si $g(a) = 0$, f/g est a priori indéfinie en a.)
- Si f est continue au point $g(a)$ et g est continue au point a, alors La composition $f \circ g$ est continue en a.

Ces règles se démontrent en utilisant des propriétés similaires sur les limites. Certaines fonctions fort utiles ne sont en fait pas continues, comme par exemple celle du signe, qui vaut -1 quand $x < 0$, 0 quand x vaut 0 et 1 quand $x > 0$.

Principe un peu vague mais important : *Seules les fonctions continues peuvent être calculées en* `float` *sans prendre de précautions a priori.*
En effet, tout calcul effectué en `float` sans précautions part du principe que de petites approximations sur la valeur de x ne conduisent quà de petites erreurs sur la valeur de la fonction. Mais celà n'est vrai que si la fonction en question est *continue au point* x. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

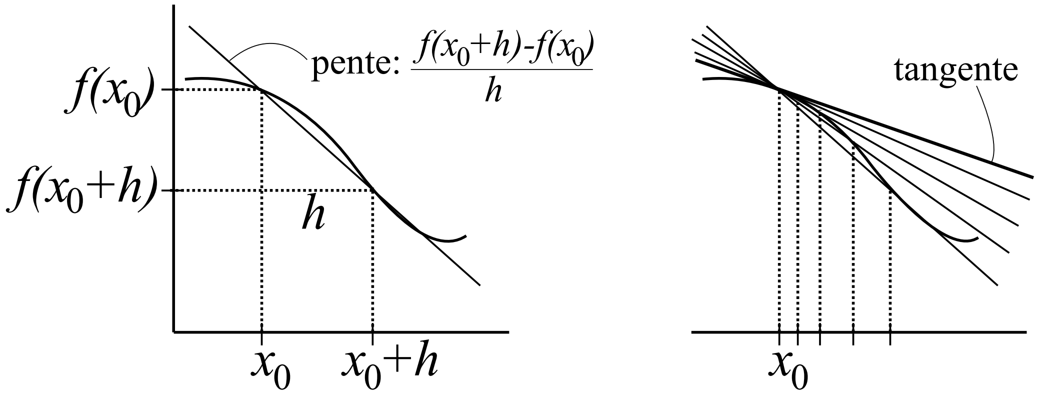
n'est *pas* continues en $x = 1$. Si on a effectué des calculs précédents sur x qui devraient aboutir à 1 mais sont approximatifs, on ne peut pas assurer d'obtenir une bonne approximation de $f(x)$. C'est encore pire si on prend la fonction "$x == \sqrt{2}$" ou "$x == 0.1$", car $\sqrt{2}$ et 0.1 n'ont pas de représentation exacte en `float`, comme vu dans l'autre cours de mathématiques, et on ne tombera jamais sur la bonne valeur.
Par ailleurs, même si une fonction est continue en x, il se peut également qu'elle pose des problèmes lors de son calcul avec des `float`, voir par exemple l'exercice V.6 en page 130, mais cela arrive beaucoup moins systématiquement qu'avec des fonctions non-continues.

V.2.2 Dérivée d'une fonction

Etant donné une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in D$, on considère la limite suivante :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si cette limite existe et est finie, elle représente la pente de la tangente au graphe de f au point x_0, et la valeur de la dérivée de f au point x_0. On dit alors que f est dérivable en x_0.



La fonction dérivée $f'(x)$ est définie de la même manière par la limite :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

et donc, $f'(x)$ existe lorsque la limite existe. Si $f' : D \to \mathbb{R}$ est définie et continue, on dit que f est *continument dérivable* sur le domaine D de dérivée $f' : D \to \mathbb{R}$.
Note : Il se peut que la dérivée soit définie partout mais pas continue.

Quelques règles
On se donne deux fonctions f, g continument dérivables (sur un certain domaine).

- Les fonctions $f+g$, $f-g$ sont continument dérivables et $(f+g)' = f'+g'$, $(f-g)' = f'-g'$.
- Si $a \in \mathbb{R}$, alors $a \cdot f$ est continument dérivable et $(a \cdot f)' = af'$.
- $f \cdot g$ est continument dérivable et $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
- Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$, alors $\frac{f}{g}$ est continument dérivable sur D et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

En particulier,

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

- La composition $f \circ g$ est continument dérivable et $(f \circ g)' = g' \cdot f' \circ g$, autrement dit :

$$(f(g(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x)).$$

Quelques fonctions continument dérivables et leurs dérivées

- $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. En particulier, la dérivée d'une fonction constante est toujours 0.
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(x))' = \cos(x)$ lorsque x est exprimé en radians.
- $(e^x)' = e^x$.
- $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$.

Autre notation
Il arrive fréquemment que l'on utilise plutôt la notation $\dfrac{df}{dx}(x)$ au lieu de $f'(x)$, qui a l'avantage de rendre explicite la variable sur laquelle la dérivée se fait. Le désavantage est que celà ressemble à une fraction, et qu'on peut être tenté dans certains cas de faire des simplifications "par dx", ce qui interdit si on veut être vraiment rigoureux. (Cela se fait quand-même dans certains cas, lorsqu'on sait que l'on n'introduit pas d'erreur.) Cette notation ne sera pas utilisée dans ce cours.

Petit résumé d'optimisation

On se donne une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continûment dérivable sur son domaine $]a, b[$.
Vocabulaire : Lorsqu'on dit que f est croissante *près de* x_0, cela signifie qu'il y a un intervalle $]c, d[$ auquel appartient x_0 dans lequel la fonction est croissante.

Hypothèse	**Conséquence**	**Ecriture symbolique**
$f'(x_0) > 0$	f est strictement croissante près de x_0	$\nearrow$
$f'(x_0) < 0$	f est strictement décroissante près de x_0	$\searrow$
$f''(x_0) > 0$	f est convexe près de x_0	$\smile$
$f''(x_0) < 0$	f est concave près de x_0	$\frown$

On dit que x_0 est un *maximum local* si il y a un intervalle $]c, d[$ auquel appartient x_0 pour lequel

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ pour tout } x \in]c, d[\setminus \{x_0\}$$

Si l'inégalité est stricte, donc $f(x_0) > f(x)$ pour tout $x \in]c, d[\setminus \{x_0\}$, on dit que x_0 est un maximum local strict.
Un maximum est *global* si $f(x_0) \geq f(x)$ sur tout le domaine de définition de f. On définit de la même manière un minimum local (strict ou non).

Hypothèse	**Conséquence**
x_0 est un maximum local	$f'(x_0) = 0$
x_0 est un minimum local	$f'(x_0) = 0$
$f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$	x_0 est maximum local strict
$f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$	x_0 est minimum local strict

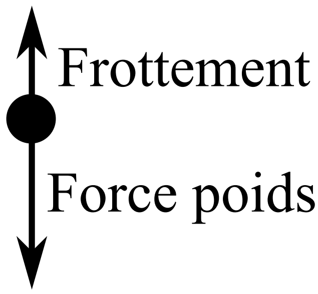
Attention : Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien conclure, il peut s'agir d'un maximum local, d'un minimum local ou de ce qu'on appelle un "point selle".
Exemples :
$f(x) = x^3$ possède un point selle en $x_0 = 0$.
$f(x) = x^4$ possède minimum global en $x_0 = 0$.
$f(x) = -x^4$ possède maximum global en $x_0 = 0$.

On peut encore compléter les tableaux ci-dessus par celui-ci :

f' change de signe en $x_0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$ et x_0 est un maximum ou un minimum local.
f'' change de signe en $x_0 \Longleftrightarrow f''(x_0) = 0$ et x_0 est un point d'inflexion.

Quelques exemples d'équations différentielles

Premier exemple : un corps en chute libre.
Un objet de masse m en chute libre verticale est soumis à deux forces : la force poids $\overrightarrow{P}$ de valeur $g \cdot m$, où g est une constante qui vaut environ 9.81 à Genève et la force de frottement $\overrightarrow{F}$, opposée à la vitesse de l'objet. On se mettra sur l'axe vertical et on peut donc se passer de la notation vectorielle. On peut donc poser $P = -g \cdot m$ (comme la force est vers le bas, on la prend avec un signe négatif), et on notera la position de l'objet au temps t par $p(t)$, sa vitesse par $v(t)$ et son accélération par $a(t)$. La force de frottement dépend de la vitesse et on la note par $F(t)$. On a donc $p''(t) = v'(t) = a(t)$. La loi de Newton donne donc



$$F(t) - g \cdot m = m \cdot a(t).$$

Cas sans frottement : $F(t) = 0$
Si le frottement vaut 0, on a donc l'équation $-g = a(t)$, donc

$$-g = p''(t).$$

La solution de cette équation est donc de la forme : $-g \cdot t^2 + a \cdot t + b$. Les constantes a, b représentent respectivement la vitesse et la position l'objet au temps $t = 0$.

Cas avec frottement proportionnel (mais opposé) à la vitesse : $F(t) = -k \cdot v(t)$
Ce cas est relativement réaliste si la vitesse est faible. Le coefficient k est une constante qui dépend de la nature du fluide dans lequel il tombe (exemple : l'air) et des caractéristiques de l'objet. On a donc l'équation :

$$-k \cdot v(t) - g \cdot m = m \cdot a(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad v'(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = -g \tag{V.1}$$

Vous verrez en deuxième année que l'ensemble des solutions de ce genre d'équation est donné par la somme de toutes les solutions $f(t)$ de l'équation dite homogène

$$f'(t) + \frac{k}{m} \cdot f(t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(t) = -\frac{k}{m} \cdot f(t) \tag{V.2}$$

et d'une seule solution (dite particulière) de l'équation (V.1) elle même. L'équation (V.2) indique que $f'(t)$ est égal à $f(t)$ à une constante (négative) multiplicative près. Les solutions de cette équation sont toutes de la forme $a \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$, pour a une constante.
Trouver une solution particulière de l'équation (V.1) est facile : il suffit de prendre la fonction constante $h(t) = -\frac{m}{k} \cdot g = -\frac{mg}{k}$.
L'ensemble des solutions de l'équation (V.1) est donc donné par :

$$v(t) = a \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{mg}{k}.$$

La constante a dépend des conditions initiales, mais si par exemple $v(0) = 0$, on en conclut :

$$0 = v(0) = a \cdot e^0 - \frac{m}{k} \cdot g \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{mg}{k}$$

et donc

$$v(t) = \frac{mg}{k} \cdot \left(e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - 1\right).$$

Pour trouver la position $p(t)$, il suffit de prendre "l'antidérivée" (ou primitive), et on trouve :

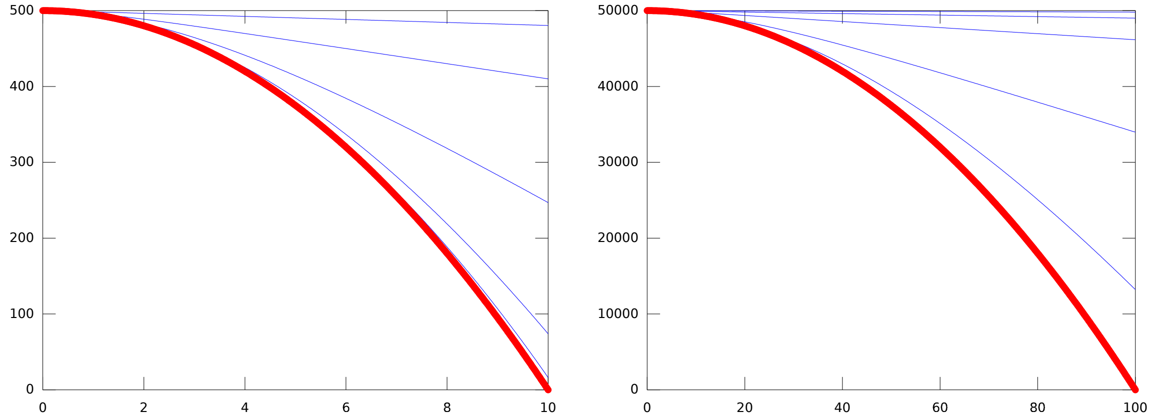
$$p(t) \quad = \quad \frac{mg}{k} \cdot \left(-\frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m} \cdot t}\right) - \frac{mg}{k} \cdot t + c \quad = \quad -\frac{m^2 g}{k^2} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{mg}{k} \cdot t + c$$

pour une constante c, qui dépend de la position au temps $t = 0$. Si cette position est h, on obtient :

$$h = p(0) = \frac{mg}{k} \left(-\frac{m}{k} \cdot e^0 - 0\right) + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = h + \frac{m^2 g}{k^2}$$

et en remettant tout ensemble, on obtient (enfin !) :

$$p(t) = \frac{m^2 g}{k^2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right) - \frac{mg}{k} t + h$$



Trajectoires de chute libre de $500m$ et $50'000m$ d'altitude, en prenant $g = 10$, avec frottement linéaire, masse $m = 1$, coefficient $k \in \{0.01, 0.05, 0.25, 1, 5\}$. En gras : sans frottement. (Le cas où $h = 50'000m$ n'est pas très réaliste car g n'est pas constant dans ce cas.)

Cas avec frottement proportionnel au carré de la vitesse : $F(t) = k \cdot (v(t))^2$

Ce cas-ci est réaliste lorsque la vitesse est plus importante. Il n'y a pas de signe négatif devant k car la force de frottement va dans le sens positif. L'équation à résoudre est donc :

$$k \cdot (v(t))^2 - g \cdot m = m \cdot a(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad v'(t) - \frac{k}{m} \cdot (v(t))^2 = -g. \tag{V.3}$$

Ce genre d'équation non-linéaire en $v(t)$ (à cause du $(v(t))^2$) ne se résoud pas facilement, mais on peut utiliser la méthode de la séparation des variables (que vous verrez en deuxième année, probablement) afin d'obtenir la solution suivante :

$$v(t) = -C \cdot \tanh\left(\frac{gt}{C}\right), \text{ où } C = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

et $\tanh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est la tangente hyperbolique (que nous n'avons pas vue au cours). On peut également trouver une formule pour $p(t)$, mais je ne la donnerai pas ici. Une autre possibilité est d'utiliser des méthodes numériques (dont vous verrez quelques exemples en deuxième année) afin de trouver des solutions approchées pour $v(t)$.

Deuxième exemple : charge et décharge d'un condensateur.

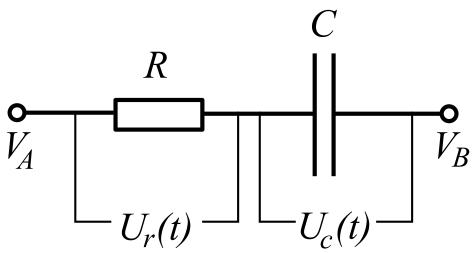
Dans un condensateur, le courant $I_c(t)$ et la tension $U_c(t)$ entre ses bornes sont reliées par l'équation différentielle suivante :

$$I_c(t) = C \cdot U_c'(t)$$

où C est la capacité du condensateur.

Sur le circuit RC ci-contre, V_A et V_B représentent les potentiels aux deux bornes du circuit, et $U_r(t), U_c(t)$ les différences de potentiel aux bornes de la résistance et du condensateur.
Notons $V = V_A - V_B$. Donc,

$$V = V_A - V_B = U_r(t) + U_c(t).$$



Comme ils sont en série, le courant dans la résistance est égal à celui dans le condensateur, donc $U_r(t) = R \cdot I_c(t) = RC \cdot U_c'(t)$ et on a l'équation suivante :

$$V = RC \cdot U_c'(t) + U_c(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad U_c'(t) + \frac{1}{RC} U_c(t) = \frac{V}{RC}.$$

Cette équation est du même genre que (V.1) et se résoud de la même manière, sa solution générale est

$$U_c(t) = a \cdot e^{-t/RC} + V$$

où a est une constante qui dépend de $U_c(0)$. Si $U_c(0) = V_0$, on obtient donc :

$$V_0 = a \cdot e^0 + V \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = V_0 - V$$

et on retrouve finalement la formule pour la charge/décharge d'un condensateur déjà vue auparavant :

$$U_c(t) = (V_0 - V) \cdot e^{-t/RC} + V \qquad \Longleftrightarrow \qquad U_c(t) - V_0 = (V - V_0) \cdot (1 - e^{-t/RC}).$$

Troisième exemple : la croissance logistique.

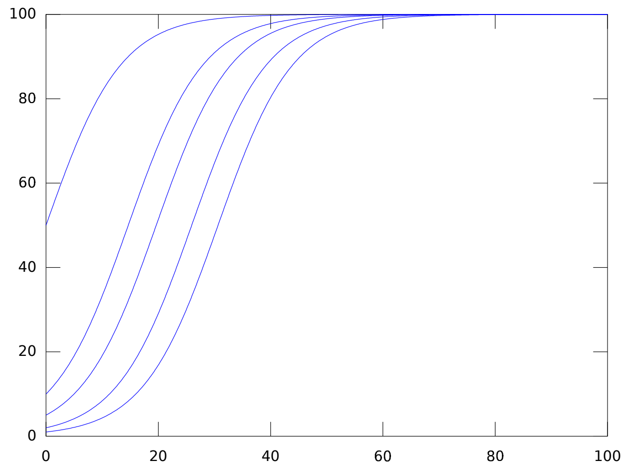
Supposons que $N(t)$ donne la quantité (continue) d'individus dans une certaine population qui suit la loi heuristique suivante : la croissance de $N(t)$ commence par augmenter avec le nombre d'individus lorsqu'il y en a peu, mais elle faiblit lorsque $N(t)$ s'approche d'une valeur limite K, dite "limite biotique". Par exemple, $N(t)$ peut représenter le nombre d'éléphants dans une réserve : plus il y a d'individus, plus ils ont des chances de se reproduire, mais la réserve contenant une quantité finie de nourriture, la croissance finira par faiblir. Ou alors $N(t)$ peut représenter un objet de consommation lié à une certaine hype : plus il y d'acheteurs, plus la visibilité du produit (et donc les potentielles ventes futures) augmente, mais si tout le monde l'a le niveau de hype baisse et l'attrait faiblit.
Cette loi heuristique peut s'exprimer avec cette équation différentielle :

$$N'(t) = rN(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \tag{V.4}$$

où r est un coefficient de croissance et K la valeur limite. S'il n'yavait pas le facteur $\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$, la solution à l'équation $N'(t) = rN(t)$ est simplement de la forme $N(t) = a \cdot e^{rt}$, et la population croit exponentiellement (avec un facteur r). Trouver la solution de l'équation (V.4) n'est pas facile, mais cela peut se faire par la méthode de séparation des variables et la solution générale est

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot K}{N_0 + e^{-rt} \cdot (K - N_0)},$$

où N_0 est la quantité au temps 0.

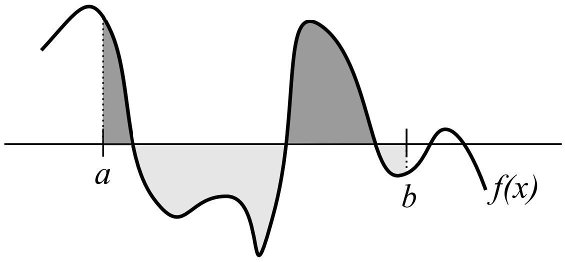


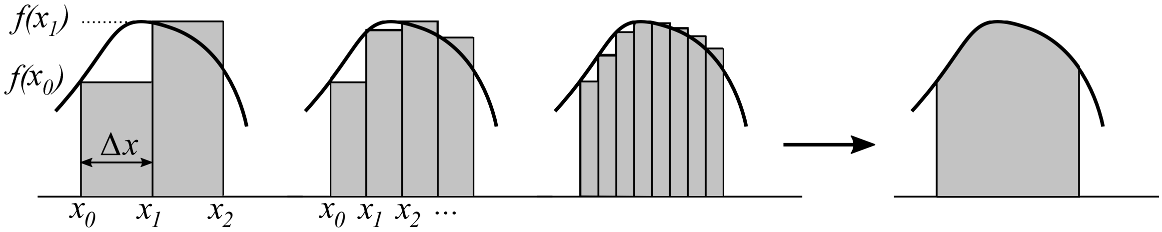
Les courbes logistiques $N(t)$ pour $r = 0.15$, $K = 100$ et $N_0 \in \{1, 2, 5, 10, 50\}$.

Note : Les trois exemples ci-dessus peuvent donner l'impression qu'il est fréquent de trouver des solutions explicites à des équations différentielles. Cela est en fait assez rarement le cas, et très souvent il est impossible d'exprimer la (ou les) solution(s) d'une équation différentielle de manière explicite, bien qu'on puisse souvent montrer qu'une solution existe (dans une certaine mesure).

V.2.3 Quelques notions sur les intégrales

1. Intégrales définies.





Etant donné une fonction $f(x)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, l'intégrale de f entre a et b, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, est définie comme la somme des aires entre le graphe de f entre a et b et l'axe horizontal, les parties où f est en dessous de l'axe étant prises avec un signe négatif. Ceci pour autant que ces surfaces soient bien définies, ce qui est le cas si par exemple la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ (mais pas seulement). Nous nous contenterons de ce cas ici, donc on suppose toujours f continue. Dans la figure en haut, on prend la somme des surfaces en gris foncé à laquelle on soustrait la somme de celles en gris clair.
Ces surfaces peuvent être approximées en prenant des points équidistants x_i $(0 \leq i \leq n)$ avec $x_0 = a$, $x_n = b$ et en considérant les rectangles de base $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ et de hauteur $f(x_i)$ (voir la figure ci-dessus). La somme des surfaces de ces rectangles (avec le bon signe) vaut donc :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x. \tag{V.5}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est alors la limite lorsque $\Delta x \to 0$ de ce processus. (Formellement, les diverses définitions de l'intégrale sont plus compliquées.) Ceci explique aussi (en partie) le choix de la notation : $\int$ représente un grand S pour “somme”, et le Δx devient dx.

Note importante : la lettre x et le dx dans l'intégrale ne sont *pas* des variables, elles font simplement partie de la notation. A l'instar de la somme (V.5), on peut les imaginer comme des variables internes à la fonction (au sens de la programmation) `integral` qui prend les trois paramètres a, b, f et retourne la valeur $\int_a^b f(x)dx$. Donc, on peut remplacer x par n'importe quelle autre lettre :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(w)dw = \dots$$

Par convention,

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^a f(x)dx = 0,$$

ce qui permet de définir l'intégrale pour n'importe quelle paire $a, b \in \mathbb{R}$. Une propriété fondamentale de l'intégrale est :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \tag{V.6}$$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$. De même,

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,\\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx,\end{aligned}$$

pour autant que ces limites existent. Toutes ces intégrales sont des intégrales définies, à savoir que ce sont simplement des nombres réels (qui peuvent être difficiles à calculer, néanmoins).
Au niveau des notations, $\int$ et dx font office de parenthèses, et on notera

$$3\int_a^b f(x)dx + 4 \qquad \text{plutôt que} \qquad 3\left(\int_a^b f(x)dx\right) + 4.$$

2. Intégrales indéfinies.

Une intégrale indéfinie est une fonction de la forme

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

où C est une constante.

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

1. Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$ et $C \in \mathbb{R}$ une constante quelconque. On pose
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C,$$
où x est une variable appartenant à I. Alors $F'(x) = f(x)$. De plus, si une autre fonction $G(x)$ satisfait $G'(x) = f(x)$, alors $F(x) - G(x)$ est une constante.
2. Si $G'(x) = f(x)$ et $b \in I$, alors
$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Idée de la démonstration

1. Calculons $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt + C - \int_a^x f(t)dt - C}{h} = \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Mais si h est très petit, par continuité de f les valeurs de $f(t)$ entre x et $x+h$ seront très près de celle de $f(x)$. Donc, $\int_x^{x+h} f(t)dt$ sera très près de $h \cdot f(x)$ (largeur de l'intervalle d'intégration multipliée par une hauteur presque constante). Donc, la fraction sera très proche de $f(x)$, et à la limite quand $h \to 0$, on obtient bien $f(x)$. Si G est comme dans l'énoncé, alors $F(x) - G(x)$ a une dérivée nulle, c'est donc une fonction constante.

2. Si on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a) = G(b) - C - (G(a) - C) = G(b) - G(a).$$

Moralité : pour trouver l'intégrale (définie) d'une fonction, il suffit de trouver une *primitive*, c'est à dire une "antidérivée", de celle-ci.

V.3 Exercices sur les limites, la continuité et les dérivées

Exercice V.1.
Trouver (si elles existent) les limites des suites suivantes.

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n}$
3. $\lim_{n\to+\infty} \cos(1/n)$
4 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2+\cos(n)}$
5. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^2+100'000}$
6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n}$

Exercice V.2.
Trouver (si elles existent) les limites des suites suivantes.

1. $\lim_{n\to+\infty} n\cdot e^{-n}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \sin(n)\cdot 2^n$
3. $\lim_{n\to+\infty} n^2-2^n$
4. (plus difficile) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

Exercice V.3.
On définit les deux suites suivantes :

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Tenter de calculer les premiers termes de ces suites et devinez vers quel(s) nombre(s) elles tendent. Une des deux suite converge-t-elle plus rapidement que l'autre ?

Exercice V.4.
Trouver (si elles existent) les limites suivantes.

(a) $\lim_{x\to2^+} \frac{x-3}{x-2}$ (b) $\lim_{x\to2^-} \frac{x-3}{x-2}$ (c) $\lim_{x\to3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$
(d) $\lim_{x\to3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$ (e) $\lim_{x\to3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$ (f) $\lim_{x\to0^+} \frac{e^x}{x}$
(g) $\lim_{x\to-\infty} e^x\cdot x$ (h) (plus difficile) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$

Exercice V.5.
Vrai ou faux ?

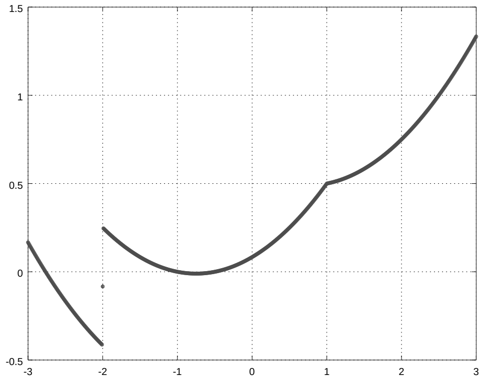
1. Si $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ est strictement croissante et positive, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
2. Si $\lim_{x\to a} f(x)=b\in\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=+\infty$.
3. Si $\lim_{x\to a} g(x)=0$, alors si on est suffisemment près de a les valeurs de g ont toutes le même signe.
4. Si $\lim_{x\to a} g(x)=-1$, alors si on est suffisemment près de a les valeurs de g ont toutes le même signe.
5. Si $\lim_{x\to a} g(x)=10^{-100}$, alors si on est suffisemment près de a les valeurs de g ont toutes le même signe.

Exercice V.6.
On pose $f(x)=\frac{(50+x^{20})^2-2'500}{x^{20}}$. Calculer les valeurs de f en $x=1, x=0.5, x=0.3, x=0.2, x=0.1$. Tenter de deviner la limite lorsque $x\to0^+$ de cette fonction. Puis, calculer la limite en développant le numérateur. Est-ce que quelque chose ne va pas ?

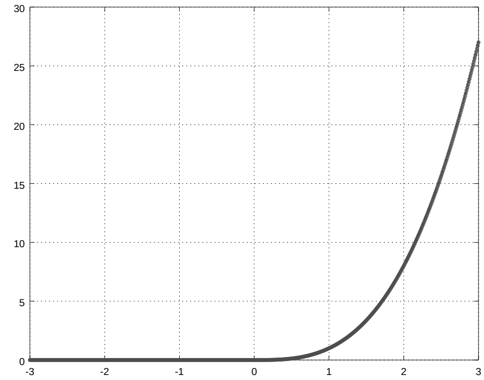
Exercice V.7.
Déterminer les asymptotes verticales, horizontales et obliques des fonctions suivantes.

(a) $\frac{x^2+4}{x+1}$ (b) $\frac{(x+2)(x-3)}{(2x-3)(x+6)}$ (c) $\frac{x}{x^2+7}$ (d) $\frac{4x+\sin(x)}{x-2}$ (e) $\frac{x^3+2}{3}$.

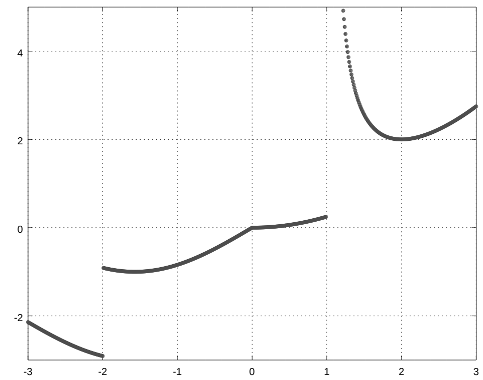
Exercice V.8.
Voici les graphes de six fonctions. Pour chacune, on donne ensemble de points E. Pour chaque $a \in E$, déterminez si $\lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existent, et si elles sont égales. Donnez également leurs valeurs (approximatives).



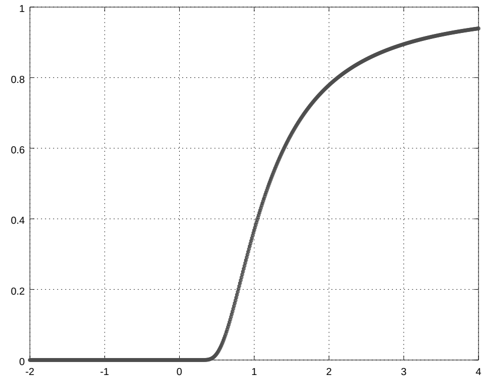
$E = \{-2; 0; 1\}$.



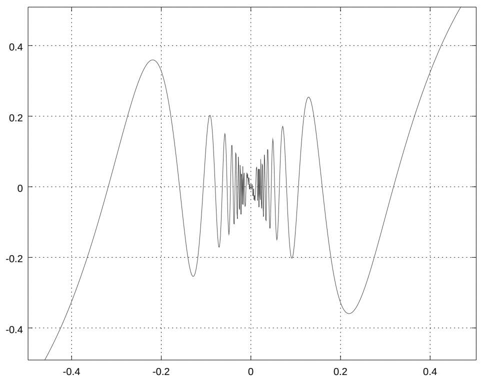
$E = \{0; 2\}$.



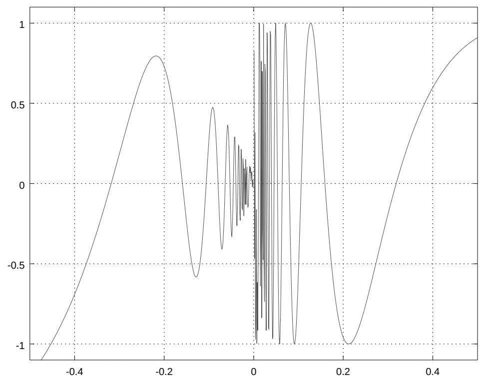
$E = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.



$E = \{-1; 0.5\}$.



$E = \{0; 0.4\}$.



$E = \{-0.4; 0; 0.4\}$.

Exercice V.9.
Déterminez, pour chacune des fonctions de l'exercice précédent, les lieux où elle est continue.

Exercice V.10.
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez les lieux où elle est continue.

1. $f(x) = sign(x)$
2. $g(x) = \begin{cases} x^2 \text{ lorsque } x \geq 0 \\ 0 \text{ lorsque } x \leq 0. \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} x^2 \text{ lorsque } x \geq 0 \\ x^3 \text{ lorsque } x \leq 0. \end{cases}$
4. $j(x) = \begin{cases} x^2 \text{ lorsque } x \geq 0 \\ -2 - x^3 \text{ lorsque } x < 0. \end{cases}$
5. (plus difficile)
   $k(x) = \begin{cases} 1 \text{ lorsque } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ lorsque } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$
6. (encore plus difficile)
   $\ell(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ lorsque } x = \frac{p}{q}, \text{ fraction réduite au maximum} \\ 0 \text{ lorsque } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$

Exercice V.11.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

1. Si $a \in \mathbb{R}$ et que $f(x)$ est une fonction continue en a, alors $\lim_{x \to a} f(x) \neq +\infty$.
2. Si $f(x)$ est continue partout sauf en $x = a$, que $g(x)$ est continue partout avec $g(a) = 0$, alors $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ est continue partout.
3. Si on ne connaît la valeur de a qu'approximativement, on pourra tout de même calculer la valeur approximative de $f(x)$ en $x = a$, pour autant que la fonction f soit continue au point a.
4. Il n'existe aucune fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue seulement en un seul point.
5. Il n'existe aucune fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue seulement en 17 points.

Exercice V.12.
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ (b) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 4$ (c) $f(x) = 3x^5 - \dfrac{7}{6}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - x + 17$
(d) $f(x) = \dfrac{4 - 3x}{2x - 1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ (f) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 4}{5x^2 - 8x - 10}$
(g) $f(x) = \dfrac{3x + 5}{x^3 + 2x^2 + x - 10}$ (h) $f(x) = \frac{5}{2x^2 - 1}$ (i) $f(x) = \tan(x) \cdot \cos(x)$
(j) $f(x) = \tan(x) \cdot \cos(x)$ (k) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$ (l) $f(x) = \dfrac{\sin(x) - 1}{2\sin(x) + 1}$
(m) $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{\cos(x) + x\sin(x)}$ (n) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x) \cdot \sin(x)}$ (o) $f(x) = (2\cos(x) - 3) \cdot (4\sin(x) - 1)$

Exercice V.13.
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (dont la variable est x).

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ (c) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$
(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
(g) $f(x) = \sqrt{8x^2 - 2x + 3}$ (h) $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$ (i) $f(x) = \sqrt{(4x^2 - 2x)^3}$
(j) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ (k) $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}$ (l) $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3$
(m) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x - 2}{x + 1}}$ (n) $f(x) = (a + x)\sqrt{a - x}$ (o) $f(x) = \sqrt{4\sin(x) \cdot \cos(x)}$
(p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ (q) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$ (r) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1 + x^2}}$

Exercice V.14.
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes. (Ne développez pas au maximum.)

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x) \cdot \sin(x)}$ (b) $f(x) = (2x^2 + 3x + 4)^3$ (c) $f(x) = \tan^2(5x)$

(d) $f(x) = \sin\left(\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2\right)$ (e) $f(x) = \sqrt{(4x^2 - 2x)^3}$ (f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

(g) $f(x) = 2x^5 - \dfrac{5}{6}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + x - 17$ (h) $f(x) = \dfrac{2-3x}{4x-1}$ (i) $f(x) = (7-x)^5$

(j) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$ (k) $f(x) = \cos(x) \cdot x^3$ (l) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(2x)}$

(m) $f(x) = 7\cos(-2x)$

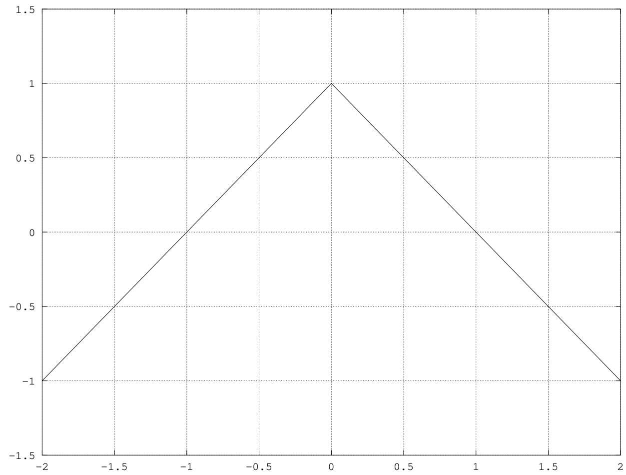
Exercice V.15.
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (dont la variable est x).

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ (b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
(c) $f(x) = \sin(2x)$ (d) $f(x) = \tan(3x+2)$
(e) $f(x) = \exp(-x^2 + 2x - 5)$ (f) $f(x) = (2x-3)^5$
(g) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (h) $f(x) = \exp(a\ln(x))$

Exercice V.16. Un exemple tremblottant de fonction continue.

On définit la fonction suivante :

$$g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-2,0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0,2] \end{cases}$$

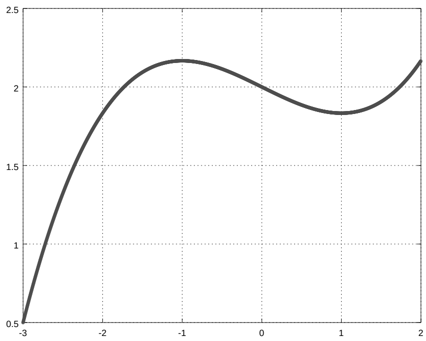


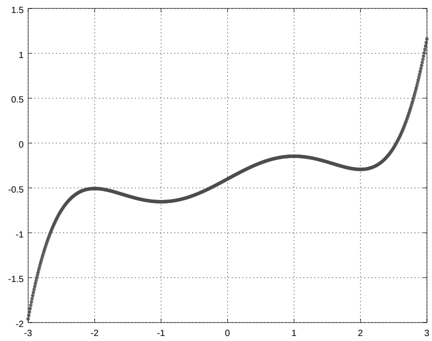
On étend la définition de manière périodique à tout $\mathbb{R}$ en posant $g(x+4) = g(x)$. Puis on pose :

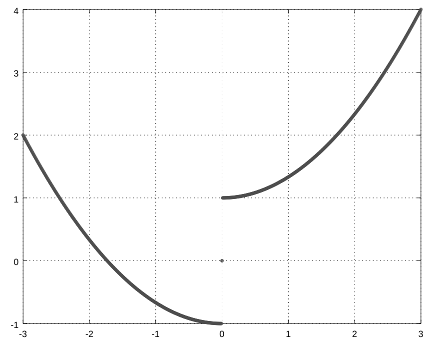
$$f_n(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} g(2^{2^k} \cdot x)$$

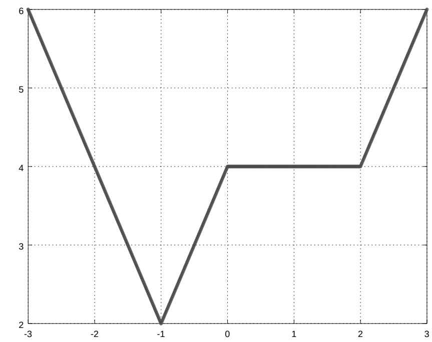
1. Tenter de tracer le graphe des fonctions $g(2 \cdot x)$, $g(2^2 \cdot x)$ et imaginer à quoi ressemble $g(2^4 \cdot x)$.
2. Tenter de tracer le graphe des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ et imaginer à quoi ressemble $f_3(x)$.
3. Posons $f_\infty(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} g(2^{2^k} \cdot x)$. Pensez-vous que cette définition a un sens ?
4. Pensez-vous que $f_\infty(x)$ est une fonction continue ?
5. Pensez-vous qu'on puisse dessiner le graphe de $f_\infty(x)$?

Exercice V.17.
Tracer (approximativement) les graphes des dérivées des fonctions données ci-dessous. Si la dérivée n'est pas définie en un point, notez-le par un petit rond.

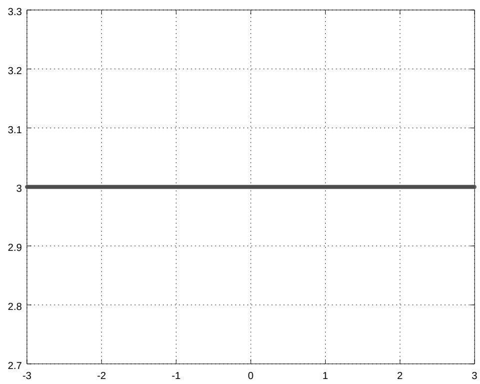


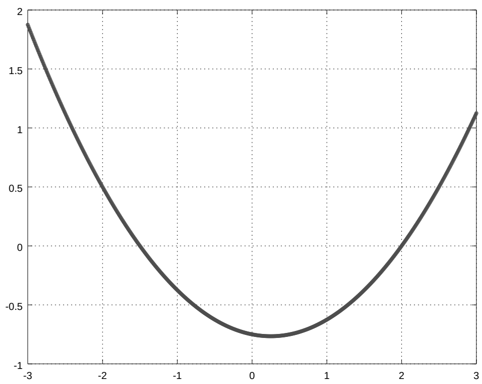


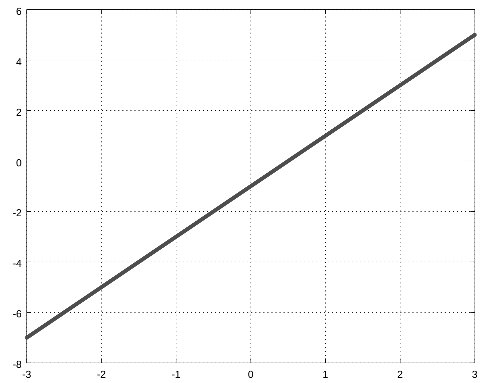


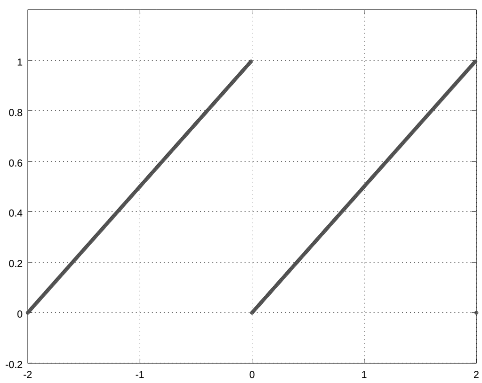


Exercice V.18.
Les graphes suivants sont ceux des dérivées f', g', h', j' des fonctions f, g, h, j. Tracer (approximativement) les graphes de f, g, h, j (il y a plusieurs possibilités).









Exercice V.19.
Trouvez les extremas locaux de la fonction $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$.

Exercice V.20.
Trouvez les points d'inflexion de la fonction $f(x) = (x-2)^3 + 2x$.

Exercice V.21.
On pose $f(x) = (-x^2 + x - 1) \cdot e^{-x}$.

1. Montrer que $f'(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$.
2. Trouver les points pour lesquels $f'(x) = 0$.
3. Trouver les points pour lesquels $f''(x) = 0$.
4. Faites un tableau de signes pour f, f', f''.
5. Dessinez un graphe approximatif de $f(x)$.

Exercice V.22.
On pose $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x > 0$.

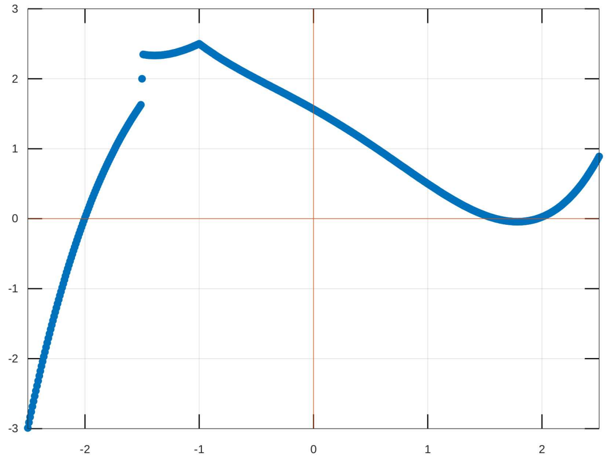
1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
2. Calculez $f'(x)$.
3. Montrez que $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.
4. Calculez $f''(x)$.
5. Montrez que $\lim_{x\to 0} f''(x) = 0$.
6. A votre avis, aura-t-on également $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$, où $f^{(n)}$ est la n-ième dérivée ?
7. Est-il vrai que si on pose $f(x) = 0$ lorsque $x \leq 0$, on a alors que f est continûment dérivable autant de fois que l'on veut ?

Exercice V.23.
Pour chaque point, vérifiez si les fonctions proposées satisfont les équations différentielles données. (Les dérivées sont par rapport à la variable x, les lettres C et D sont des constantes.)

(a) équation : $f''(x) = -f(x)$,
fonction proposée : $f(x) = C \cdot \cos(x) + D \cdot \sin(x)$.
(b) équation : $\frac{1}{2}f'(x) - x \cdot f(x) = x - x^3$,
fonction proposée : $f(x) = C \cdot e^{x^2} + x^2$.
(c) équation : $f'''(x) = f(x)$,
fonction proposée : $f(x) = C \cdot e^x + D \cdot x^3$.
(d) équation : $f''(x) + \frac{2}{3}f'(x) = -10$,
fonction : $f(x) = \frac{45}{2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2}{3}x}\right) - 15x + C$.

Exercice V.24.
– Bonjour, monsieur, j'aimerais un exercice de révision sur ce chapitre.
– Avec tout ?
– Avec tout, mais si possible pas trop de sauce piquante.
– Et comme boisson ?

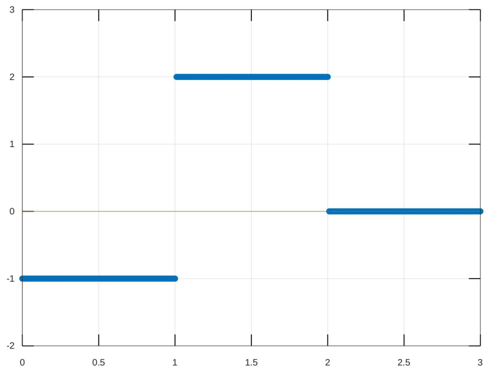
1. Que valent les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x^2) + x^3}{2^{x/10}}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}$
2. Est-ce que la fonction $f(x) = \mathrm{sign}(x) \cdot x^2$ est continue partout sur $\mathbb{R}$, où $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
3. Voici le graphique d'une fonction, nommons-la g.

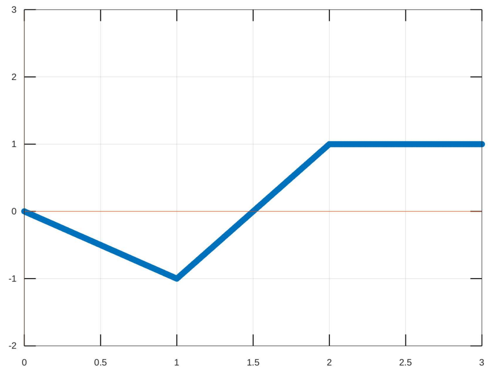


(a) D'après le graphique, quel est l'ensemble sur lequel g est continue ?

(b) Tracez (pour les lieux où il est possible de le faire) le graphe approximatif de la dérivée de g.

4. Les fonctions données par ces deux graphiques ont-elle un rapport l'une avec l'autre ?





5. La fonction $N(t) = \dfrac{3}{1+2\cdot e^{-0.5t}}$ est-elle une solution de l'équation différentielle

$$N'(t) = 0.5 \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{3}\right) \ ?$$

6. Calculez $h'(x)$ et $h''(x)$ pour $h(x) = \sin(x^2)$.

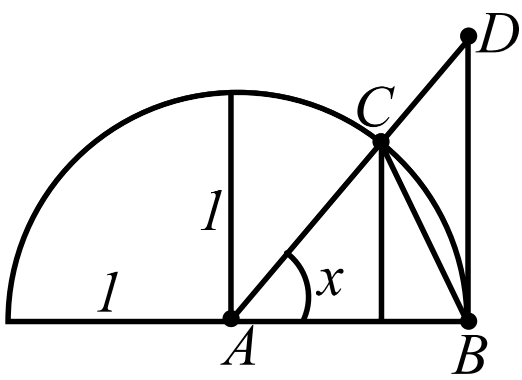
7. En utilisant le théorème fondamental du calcul intégral, calculez

$$\int_0^4 \frac{1}{2}x^3 dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \cos(4x)dx$$

Exercice V.25.

Dans cet exercice, tous les angles sont exprimés en radians.

a.



Sur la figure ci-dessus, exprimer les surfaces des figures suivantes en fonction de $x, \sin(x), \tan(x)$. $S_1(x) =$ aire du *triangle* ABC, $S_2(x) =$ aire du *secteur* ABC, $S_3(x) =$ aire du *triangle* ABD.

b. En utilisant $S_1(x) \leq S_2(x) \leq S_3(x)$, montrer que, lorsque x est exprimé en radians, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} = 1.$$

c. La limite lorsque $x \to 0^-$ vaut-elle également 1 ? Peut-on en déduire également que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$?

d. Comprendre les égalités suivantes, et en déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x} = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos(x)}{x} &= \frac{1-\sqrt{1-\sin^2(x)}}{x} \\
&= \frac{1-\sqrt{1-\sin^2(x)}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-\sin^2(x)}}{1+\sqrt{1-\sin^2(x)}} \\
&= \frac{1-(1-\sin^2(x))}{x} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2(x)}} \\
&= \frac{\sin^2(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2(x)}} \\
&= \sin(x) \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2(x)}}.
\end{aligned}$$

e. On rappelle que

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Prouver que $[\sin(x)]' = \cos(x)$, et que $[\cos(x)]' = -\sin(x)]$.

f. Trouver $[2\sin(x) + \cos(x)]''$ et $[2\sin(x) - 5\cos(x)]''''$ sans calculer (ou presque).

Chapitre VI

Annexes

VI.1 Solutions de certains exercices

Exercice I.1.
Les valeurs de A, B, C sont respectivement $1, 0, 0$.
(a) 0 (b) 0 (c) 0
(d) 1 (e) 1 (f) 1

Exercice I.2.
(a) $A \vee \neg A$ est une tautologie
(b) $B \rightarrow (A \vee \neg A)$ est une tautologie
(c) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ n'est pas une tautologie, comme le montre la deuxième ligne du tableau ci-dessous.

A	B	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

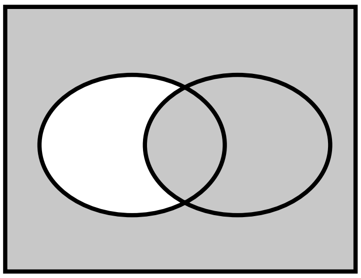
En fait, en y réfléchissant un peu, il serait étonnant qu'une implication entraîne une équivalence, et il est facile de trouver le cas qui ne fonctionne pas.
(d) $(A \wedge B) \rightarrow A$ est une tautologie (ce qui est assez logique).
(e) $A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ est une tautologie, pour s'en convaincre il est difficile de se passer du tableau :

A	$\neg A \rightarrow A$	$A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$
0	0	1
1	1	1

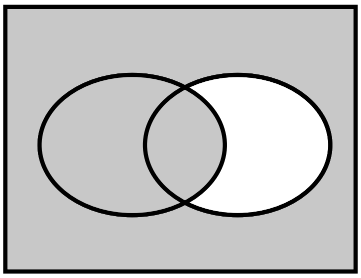
(f) $(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$ n'est bien sûr pas une tautologie, il suffit de prendre $A = 0$ et $B = 1$ ou le contraire pour s'en convaincre.
(g) $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$ est une tautologie.

Exercice I.3.
Comme il s'agit d'une vérification, il n'est point besoin de corrigé.

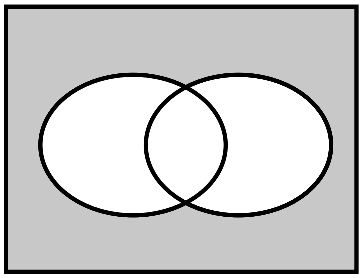
Exercice I.4.



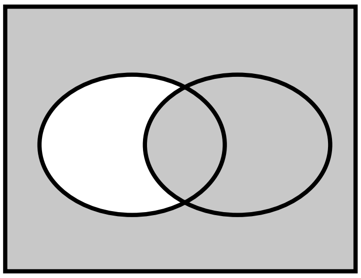
(a) $\neg A \vee B$



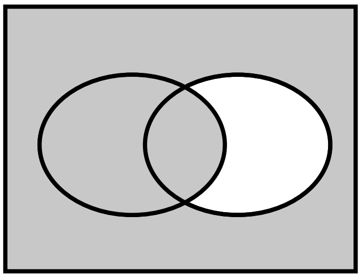
(b) $\neg(\neg A \wedge B)$



(c) $\neg A \wedge \neg B$



(d) $\neg(A \wedge \neg B)$



(e) $(A \vee \neg B) \vee A$

Donc, (a) et (d) sont équivalentes, ainsi que (b) et (e).

Exercice I.5.
Ce seront des “propositions” dans un sens très approximatif, on donne plutôt des exemples de propriétés.
(a) $A =$“Il pleut” et $B =$“Il y a des nuages”, ou encore $A =$“Le nombre n est divisible par 4” et $B =$“Le nombre n est divisible par 2”.
(b) $A =$“x est un nombre entier”, $B =$“x est pair” et $C =$“x est impair”.
(c) $A =$“La porte est ouverte”, $B =$“La porte est fermée”.
(d) Comme il s’agit d’une tautologie, on peut mettre n’importes quelles propositions (ou propriétés) dans A et B.

Exercice I.6.
(a) “Tous les nombres non-premiers sont des nombres pairs”.
(b) “S’il il existe encore des bugs c’est qu’il y a (au moins) un programmeur qui ne code pas en Rust.”
(c) “S’il n’y a pas de nuages, alors il ne pleut pas.”
(d) “Si je ne suis pas le pire programmeur de l’univers, ça devrait compiler.”

Exercice I.7.

(a) $A =$“c’est la fête”, $B =$“il y a des chips”. “Si c’est la fête alors il y a des chips” est tout simplement $A \to B$. L’absence de chips est alors $\neg B$, qui grâce à la contraposée implique $\neg A$: ce n’est pas la fête.
(b) $A =$“C’est un cuistot compétent”, $B =$“le cuistot met de l’eau”, $C =$“ce sont des endives braisées”,
“Un cuisinier compétent ne met jamais d’eau dans les endives braisées” $= (A \to (C \to \neg B))$.
“Si le cuistot met de l’eau, soit ce ne sont pas des endives braisées, soit il est incompétent” $= (B \to (\neg A \vee \neg C)$.
Voir que cette dernière formule est équivalente à celle d’avant est en fait bien plus pénible que de comprendre le raisonnement informel, mais on peut le faire.
(c) $A =$“Etre une personne”, $B =$“Etre mon chef”, $C =$“Etre indispensable”.
“Personne n’est indispensable”$= (A \to \neg B)$,
“Mon mon chef est indispensable”$= (B \to B)$. Comme $(A \to \neg B)$ est équivalent à $(B \to \neg A)$, on en conclut avec deux Modus Ponens que B implique $\neg A$.

Exercice I.8.
Nous donnons les négations sous plusieurs formes, en tentant à chaque fois d’échanger les $\forall$ en $\exists$ et réciproquement dans au moins une version.
(a) “Tous les programmeurs connaissent l’assembleur.”
Négation simple : “Ce n’est pas vrai que tous les programmeurs connaissent l’assembleur.”
Négation équivalente : “Il y a (au moins) un programmeur qui ne connaît pas l’assembleur.”
(b) “Il existe un langage nommé Cobol.”
Négation simple : “Ce n’est pas vrai qu’il existe un langage nommé Cobol.”

Négation équivalente : “Etant donné un langage de programmation, il ne s’appelle pas Cobol.”
En meilleur français :“Aucun langage de programmation ne s’appelle Cobol.”
(c) “Il y a un algorithme permettant de trouver la $1'245'323$ème décimale de π en un milliardième de seconde.”
Tout de suite la négation en bon français :“Aucun algorithme ne permet de trouver la $1'245'323$ème décimale de π en un milliardième de seconde.”

Exercice I.9.
Pour chacune des phrases, on va essayer d’écrire un genre de formalisation. *Ce n’est pas forcément la manière la plus facile de comprendre ces (in)équivalences*, donc on écrira aussi un petit argument plus informel.
(a) $A(x)$ est “x est un oiseau”, $B(x)$ est “x sait voler sur le dos” (ou “x est capable de voler le ventre en l’air”).

1. Il n’y a aucun oiseau qui sache voler sur le dos : $\forall x\,(A(x) \to \neg B(x))$
2. Tous les oiseaux sont incabables de voler le ventre en l’air : $\forall x\,(A(x) \to \neg B(x))$

Il s’agit en fait de la même affirmation, tournée différemment.
(b) $A(x)$ est “x est un mammifère”, $B(x)$ est “x est ovipare”, $C(x)$ est “x est originaire d’Australie”, $D(x)$ est “x est originaire du sous-continent indien”.
On remarque que “ne pas être ovipare” est équivalent à être vivipare.

1. Si un mammifère est également ovipare, alors il est originaire d’Australie : $A(x) \wedge B(x) \to C(x)$.
2. Un mammifère originaire du sous-continent indien est vivipare : $A(x) \wedge D(x) \to \neg B(x)$.

Les deux phrases ne sont pas équivalentes, car $D(x)$ n’est pas équivalent à $\neg C(x)$. On peut très bien ne pas être originaire d’Australie et non plus du sous-continent indien. Par contre, la phrase 1 implique la phrase 2 : si un mammifère est originaire du sous-continent indien, alors il n’est pas originaire d’Australie, donc (par la contraposée de la phrase 1 et une des lois de Morgan) n’est soit pas un mammifère, soit pas ovipare, et donc il n’est pas ovipare, et donc vivipare.
(c) Ici, une formalisation est plus difficile à écrire naturellement, à cause du terme ‘la majorité’, et du fait qu’une partie de la phrase concerne le spectacle et l’autre les spectateurs (donc pas le même x, si on veut). Le plus simple (pour formaliser) est de dire que A est “la majorité des spectateurs s’ennuient”, B est “le spectacle est un échec” et C est “aucun spectateur ne s’ennuie”.

1. Si la majorité des spectateurs s’ennuient, alors le spectacle est un échec : $A \to B$
2. Il faut qu’aucun spectateur ne s’ennuie pour que le spectacle ne soit pas un échec : $\neg B \to C$.

Les deux phrases ne sont *pas* équivalentes, car C *n’est pas* équivalent à $\neg A$: la négation de “la majorité des spectateurs s’ennuient” est “une minorité de spectateurs s’ennuient”, pas “aucun spectateur ne s’ennuie”. Par contre, $C \to A$, donc la phrase 2 implique la phrase 1.
(d) A est “tu as tort”, B est “j’ai raison”.

1. J’ai raison car tu as tort : $A \to B$.
2. Tu as tort, donc j’ai raison : $A \to B$.

Toute la difficulté ici est de voir que “car” est une implication, mais écrite dans l’autre sens. (Il y a de subtiles différences d’intensions entre “car”, “parce que”, “étant donné que”, “vu que”, mais au niveau simple de la logique, ce sont toutes des implications écrites dans l’autre sens.)
(e) Celui-ci est plus difficile, on va tenter une explication informelle.

1. Si tous les hommes sont égaux, alors personne n’a plus de droit qu’un autre.
2. Le roi étant de droit divin, les hommes ne sont pas égaux.

En gros, les deux phrases ne sont pas équivalentes, mais c’est subtil. La contraposée de la phrase 1 est : *Si il existe deux hommes x, y tels que x a plus de droits que y, alors les hommes ne sont pas égaux.* Or, un roi a plus de droits que *tous* les autres hommes, ce qui est une propriété plus forte. La contraposée de la phrase 2 est donc : “si tous les hommes sont égaux, alors il n’existe pas un homme qui ait plus de droits que tous les autres”. Mais cela n’exclut pas qu’un homme ait plus de droits qu’un seul autre, ou qu’un homme ait moins de droits que tous les autres, par exemple. Donc la phrase 1 implique la phrase 2, mais elles ne sont pas équivalentes.
On peut tenter de formaliser tout cela en décidant que :
$A(x,y)$ est “x a plus de droits que y”, $B(x,y)$ est “x est égal à y”, alors on peut formaliser (après quelques simplifications) les deux phrases ainsi :

1. Si tous les hommes sont égaux, alors personne n’a plus de droit qu’un autre : $\forall x, y\, B(x,y) \to \neg(\exists x, y\, A(x,y))$.
2. Le roi étant de droit divin, les hommes ne sont pas égaux : $(\exists x \forall y A(x,y)) \to \neg(\forall x, y\, B(x,y))$

Exercice II.1.1.
(1) f est bijective.
(2) f n’est pas injective, car par exemple 1 et -1 ont la même image (en l’occurrence, 1), et f n’est pas non plus surjective, car par exemple -1 n’a pas de préimage (c’est-à-dire qu’il n’y a pas de x tel que $f(x) = -1$).

(3) f n'est pas injective comme au point (2), par contre f est surjective.
(4) Comme on ne sait pas de quelle fonction il s'agit, on ne peut rien dire sur l'injectivité. Par contre on est certain que f ne sera pas surjective : comme un point de l'ensemble de départ ne peut pas avoir plus qu'une image, au maximum 4 points de l'ensemble d'arrivée seront "atteints", donc au moins 3 ne le seront pas.
(5) f est injective mais pas surjective, car 0 n'a pas de préimage.
(6) Comme l'ensemble d'arrivée ne contient qu'un seul point, la fonction sera forcément surjective. Comme il y a plus de points dans l'ensemble de départ que dans celui d'arrivée, la fonction ne sera pas injective.
(7) f n'est pas injective, car par exemple 1.5 et 1.6 ont la même image, par contre elle est surjective.
(8) f est injective : si $x \neq y$, alors $(x; x+1) \neq (y; y+1)$. Par contre f n'est pas surjective, car par exemple le point $(0; 0)$ n'a pas de préimage.

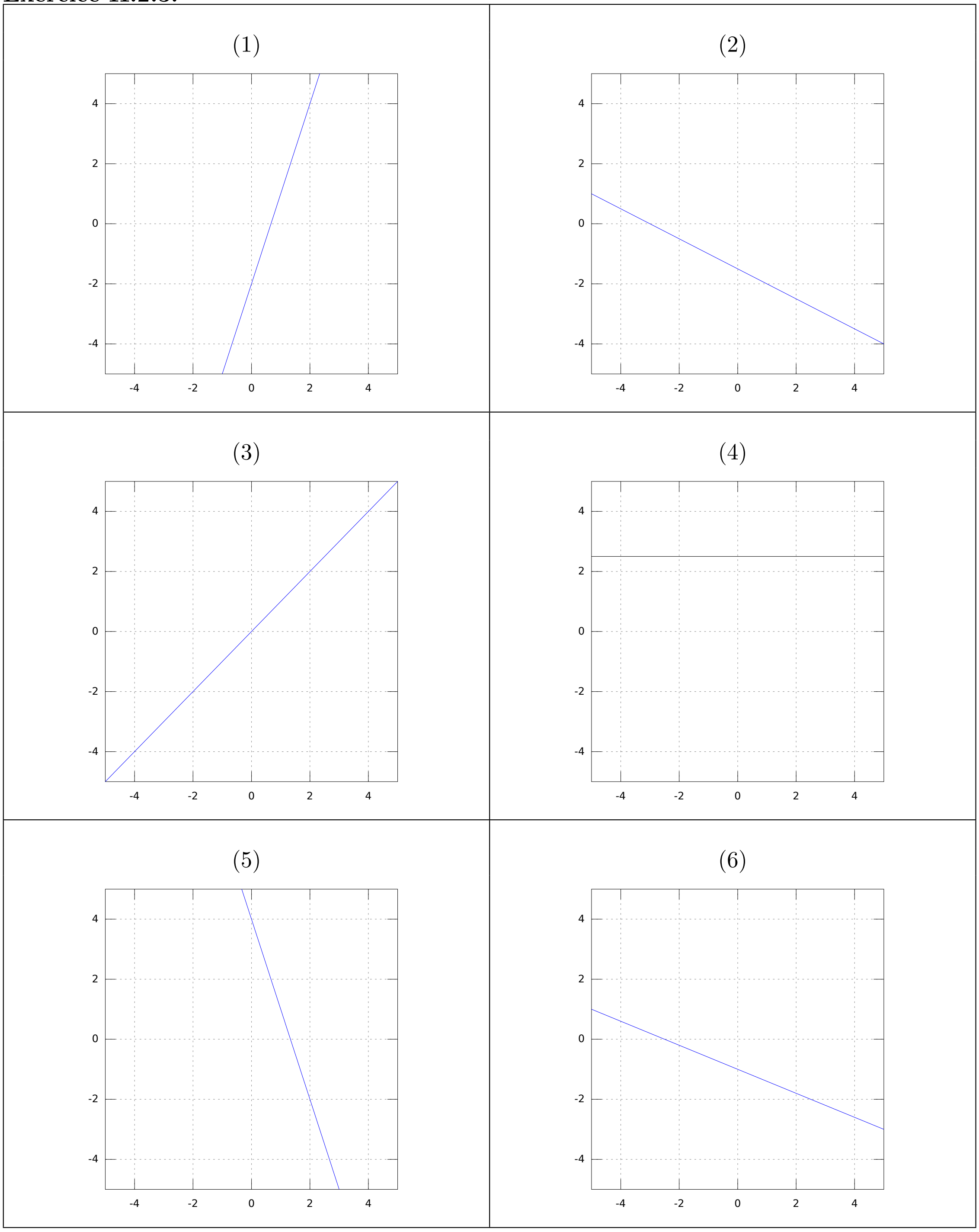
Exercice II.2.1.

(1) $x = 4$	(2) $x = \frac{3}{2}$
(3) $x = -3$	(4) $x = \frac{14}{15}$
(5) $x = \frac{1}{3}$	(6) aucune solution
(7) $x = -1$	(8) $x = -6$

Exercice II.2.2.

(1) $y = x + \frac{9}{2}$	(2) $y = \frac{5}{7}x - \frac{2}{7}$
(3) $y = 0x - 2$, ou plus simplement $y = -2$	(4) $y = -6x + 16$
(5) $x = \frac{8}{5}$ (y disparait)	(6) $y = 4x + 4$
(7) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	(8) $y = -x - 3$

Exercice II.2.3.



Exercice II.2.4.

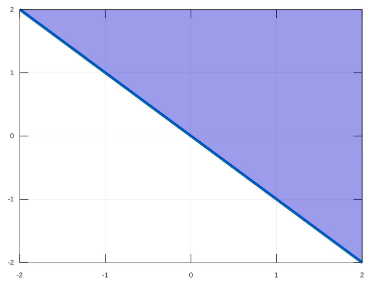
(1) $y = 4x - 1$. (2) $y = \frac{2}{3}x - 6$.
(3) $y = -2x - 4$. (4) $y = -\frac{1}{2}x$.
(5) $y = -x + 8$. (6) $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.
(7) $y = 3$. (8) $x = -1$.
(9) $y = -\frac{1}{2}x + 3$. (10) $y = -\frac{3}{4}x + 7$.

Exercice II.2.5.
(1) $y = 2x - 2$ (2) $y = \frac{1}{2}x + 2$
(3) $y = \frac{5}{2}x$ (4) $y = -\frac{3}{2}x + 1$
(5) $y = -3$ (6) $y = -x$
(7) $x = 2.5$ (8) $y = -\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}$

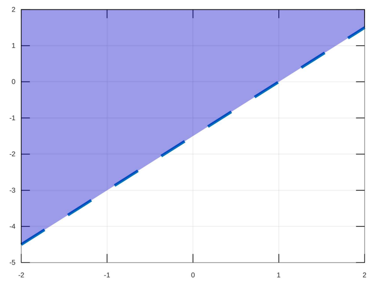
Exercice II.2.6.
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est bijective dès que $a \neq 0$ (son inverse est $f^{-1}(y) = \frac{1}{a} \cdot y - \frac{b}{a}$, qui est aussi une droite, d'ailleurs), et elle n'est ni injective ni surjective si $a = 0$ car c'est une fonction constante.

Exercice II.2.7.
Les lignes en traitillé ne font pas partie du demi-plan.

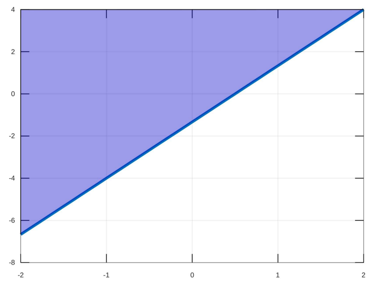
(1) $x + y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x$



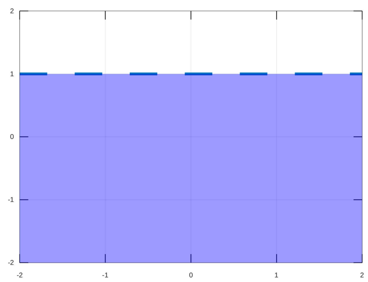
(2) $3x - 2y < 3 \Leftrightarrow y > \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$



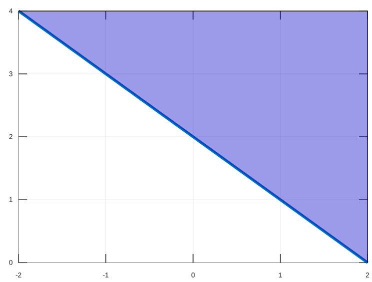
(3) $6x - 3y \leq -2x + 4 \Leftrightarrow y \geq \frac{8}{3}x - \frac{4}{3}$



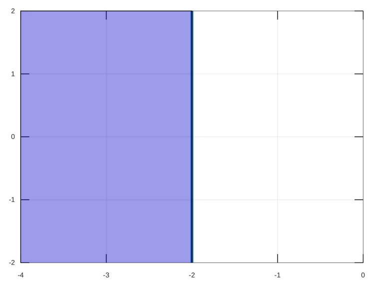
(4) $y < 1$



(5) $10x + 10y \geq 20 \Leftrightarrow y \geq -x + 2$



(6) $x \leq -2$.



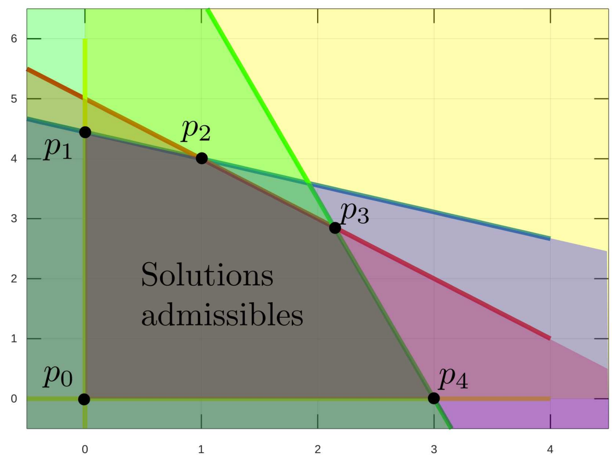
Exercice II.2.8.

	Temps nécessaire pour produire une unité		Temps disponible
	M	T	
Employé 1	4	9	40
Employé 2	5	5	25
Employé 3	10	3	30
Revenu/unité	30.–	40.–	

(1) La fonction à maximiser est $f(x, y) = 30x + 40y$.
(2) On obtient donc (les couleurs sont celles du graphe du point (3)) :

$$\begin{array}{rll} 4x + 9y & \leq 40 & \text{Bleu} \\ 5x + 5y & \leq 25 & \text{Rouge} \\ 10x + 3y & \leq 30 & \text{Vert} \\ x & \geq 0 & \text{Jaune} \\ y & \geq 0 & \text{Jaune} \end{array}$$

(Il ne faut pas oublier les deux dernières inégalités, sinon on peut théoriquement se retrouver dans une situation sans solution. Ce n'est pas le cas ici, ceci dit.)
(3)



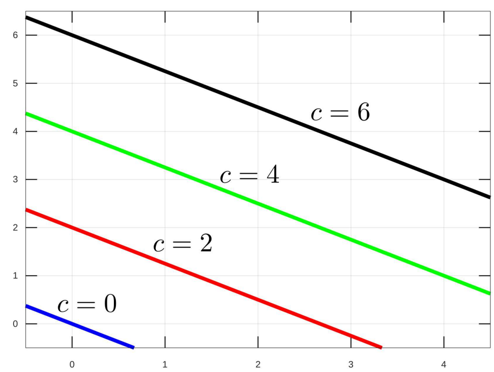
(4) On trouve les intersections suivantes :

$$\begin{aligned} p_0 &= (0;0) \\ p_1 &= \left(0;\frac{40}{9}\right) \\ p_2 &= (1;4) \\ p_3 &= \left(\frac{15}{7};\frac{20}{7}\right) \\ p_4 &= (3;0) \end{aligned}$$

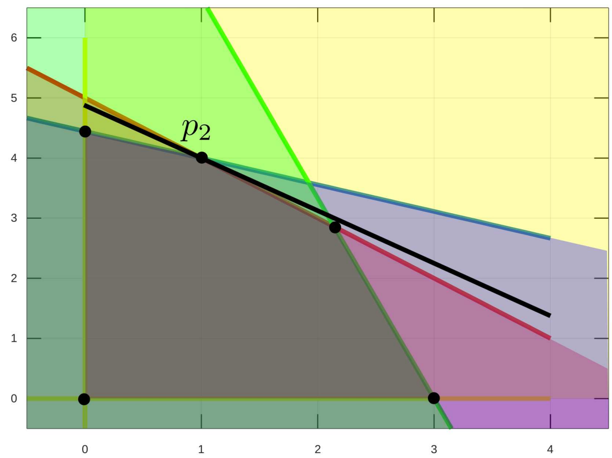
La valeur maximale de $f(x,y)$ est prise au point p_2 et vaut $f(1,4) = 30\cdot 1 + 40 \cdot 4 = 190.-$. Il faudra donc produire 1 machin et 4 trucs par semaine. Notons que les employés 1 et 2 rempliront toutes leurs heures alors que le troisième ne travaillera sur cette production que $22h$:

$$\begin{aligned} &\text{Employé 1} : 4\cdot 1 + 9\cdot 4 = 40h \\ &\text{Employé 2} : 5\cdot 1 + 5\cdot 4 = 25h \\ &\text{Employé 3} : 10\cdot 1 + 3\cdot 4 = 22h < 30h \end{aligned}$$

Exercice II.2.9.
On reprend donc $f(x,y) = 30x + 40y$ et le même système d'inéquations.
(a) L'équation $f(x,y) = 30x + 40y = c$ (pour $c \in \mathbb{R}$) est celle d'une droite. En changeant c, on ne change pas la pente, donc on a une famille de droites parallèles. Quand c augmente, la droite "monte" (ce n'est pas forcément le cas si les signes de x et/ou y sont négatifs).



(b) Par le point (a), on prend la droite "la plus haute" qui touche le polyèdre des solutions admissibles :



On voit bien qu'elle passe par le point p_2, qui nous permet de trouver le maximum de $f(x, y)$.

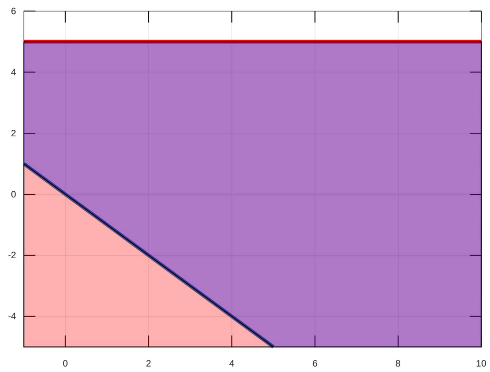
Exercice II.2.10.
(1) L'exercice précédent montre que les équations $f(x, y) = d$ définissent des droites, toutes parallèles, et que la droite se déplace d'un côté ou de l'autre (suivant les signes devant x, y dans f) quand d augmente. Donc, pour trouver le maximum de la fonction, il suffit de prendre la droite qui touche le polyèdre des solutions admissibles et qui soit le plus “du bon côté”. Si le polyèdre est fermé, comme dans l'exercice ci-dessus, cette droite touchera au moins un coin (peut-être deux, si elle se confond avec un des bords du polyèdre, dans ce cas il y a une infinité de points pour lesquels la fonction est maximale). Si le polyèdre n'est pas fermé, il se peut que f augmente autant qu'on veut. Par exemple, si on prend la fonction

$$f(x, y) = 3x$$

et le système d'inéquations

$$\begin{aligned} y &\leq 5 \\ -x - y &\leq 0 \end{aligned}$$

alors la fonction f est aussi grande qu'on veut (vu que le polyèdre n'en est en fait pas un, il est infini du côté droit).



(2) Si on cherche le minimum, il suffit de remplacer $f(x, y)$ par $-f(x, y)$ et de chercher le maximum. De même, si on a une inéquation

$$ax + by \geq c,$$

en multipliant par -1 on obtient

$$-ax - by \leq -c,$$

donc on peut toujours tout mettre sous la forme du point (1).
(3) Si une inégalité est stricte, il peut ne pas y avoir de solution. Exemple simple : la fonction $f(x, y) = x$ sous la contrainte $x < 2$ n'a *pas* de maximum, car celui-ci “devrait être” atteint quand $x = 2$ (et y vaut ce qu'on veut vu qu'il n'apparaît pas dans f), mais celà ne fait pas partie des solutions admissibles.

Exercice II.3.1.
Les factorisations sont :

(1) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ (2) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
(3) $4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$ (4) $x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
(5) $x^2 + 16$ ne se factorise pas (6) $x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$
(7) $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$ (8) $9x^2 - 4 = (3x-2)(3x+2)$

Exercice II.3.2.

Exercice II.3.3.
Les carrés complétés sont :

(1) $x^2 + 4x - 1 = (x+2)^2 - 5$ (2) $x^2 - 6x + 2 = (x-3)^2 - 7$
(3) $x^2 + x - 4 = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{17}{4}$ (4) $x^2 + 5x = (x+\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$
(5) $2x^2 + 8x - 10 = 2\Big((x+2)^2 - 9\Big)$ (6) $-3x^2 + 6x - 9 = -3\Big((x-1)^2 + 2\Big)$

Exercice II.3.4.

(1) $x^2 - 3x - 1 = 0$. Par Viète : $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.
(2) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{4}{3} = 0 \iff x^2 - 6x + 4 = 0$, on complète le carré :$(x-3)^2 - 5 = 0$, $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$.
(3) $2x^2 + 2x = 4x - 5 \iff 2x^2 - 2x + 5 = 0$, $\Delta < 0$, pas de solution.
(4) $-x^2 + 5 = 3 \iff x^2 = 2$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.
(5) $-x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0 \iff x^2 + 4x - \frac{1}{2} = 0$, Viète : $x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{18}}{2} = \frac{-4\pm3\sqrt{2}}{2}$.
(6) $9x^2 + 6x = -1 \iff 9x^2 + 6x + 1 = 0 \iff (3x+1)^2 = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$
(7) $16x^2 - 16x + 4 = 0 \iff (4x-2)^2 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$
(8) $4x^2 - 2x + 1 = (4x+1)(x-2)$, on développe et on tombe sur $5x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{5}$.

Exercice II.3.5.
TRACER LES GRAPHES.

(1) $f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.
$S(0;-1)$, racines : ±1, $d : y = -\frac{5}{4}$, $F(0;-\frac{3}{4})$.
(2) $f(x) = x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2) = (x-\frac{3}{2})^2 - \frac{49}{4}$.
$S(\frac{3}{2};-\frac{49}{4})$, racines : -2 et 5, $d : y = -\frac{50}{4} = -\frac{25}{2}$, $F(\frac{3}{2};-\frac{48}{4}) = (\frac{3}{2};-12)$.
(3) $f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$.
$S(-1;1)$, pas de racines, $d : y = \frac{3}{4}$, $F(-1;\frac{5}{4})$.
(4) $f(x) = -2x^2 - 5x + 1 = -2\big((x+\frac{5}{4})^2 - \frac{33}{16}\big)$.
$S(-\frac{5}{4};\frac{33}{8})$, racines $\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$, $d : y = \frac{34}{8} = \frac{17}{4}$ $F(-\frac{5}{4};\frac{32}{8}) = (-\frac{5}{4};4)$.
(5) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}\big((x-1)^2 - 7\big)$.
$S(1;\frac{7}{4})$, racines $1 \pm \sqrt{7}$, $d : y = \frac{11}{4}$, $F(1;\frac{3}{4})$.
(6) $f(x) = \frac{1}{16}x^2 - x + 1 = \frac{1}{16}((x-8)^2 - 48)$.
$S(8;-3)$, racines $8 \pm 4\sqrt{3}$, $d : y = -7$, $F(8,1)$.

Exercice II.3.6.
(1) $A(0;1), B(1;2), C(2;4)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(0-1)\cdot(0-2)}\cdot 1 + \frac{(x-0)\cdot(x-2)}{(1-0)\cdot(1-2)}\cdot 2 + \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(2-0)\cdot(2-1)}\cdot 4 \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.
\end{aligned}$$

(2) $A(3;\frac{1}{2}), B(1;0), C(-1;2)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(3-1)\cdot(3+1)}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(x-3)\cdot(x+1)}{(1-3)\cdot(1+1)}\cdot 0 + \frac{(x-3)\cdot(x-1)}{(-1-3)\cdot(-1-1)}\cdot 2 \\
&= \frac{5}{16}x^2 - x + \frac{11}{16}.
\end{aligned}$$

(3) $A(\frac{1}{2};-1), B(-2;-2), C(\frac{5}{2};-1)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+2)\cdot(x-\frac{5}{2})}{(\frac{1}{2}+2)\cdot(\frac{1}{2}-\frac{5}{2})}\cdot(-1) + \frac{(x-\frac{1}{2})\cdot(x-\frac{5}{2})}{(-2-\frac{1}{2})\cdot(-2-\frac{5}{2})}\cdot(-2) + \frac{(x-\frac{1}{2})\cdot(x+2)}{(\frac{5}{2}-\frac{1}{2})\cdot(\frac{5}{2}+2)}\cdot(-1) \\ &= -\frac{4}{45}x^2 + \frac{4}{15}x - \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

(4) $A(-1;1), B(1;2), C(3;3)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)\cdot(x-3)}{(-1-1)\cdot(-1-3)}\cdot 1 + \frac{(x+1)\cdot(x-3)}{(1+1)\cdot(1-3)}\cdot 2 + \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(3+1)\cdot(3-1)}\cdot 3 \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

les points étant alignés il s'agit d'une droite.

Exercice II.3.7.
Première méthode : en calculant la distance.
Soit le point $(x;y)$.

$$\text{Distance à } A: \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} \qquad \text{Distance à } B: \sqrt{(x-4)^2+(y-(-3))^2}$$

En posant que les deux sont égaux :

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2} \\ &(x-1)^2+(y-2)^2 = (x-4)^2+(y+3)^2 \\ &x^2-2x+1+y^2-4y+4 = x^2-8x+16+y^2+6y+9 \\ &6x-20 = 10y \\ &y = \frac{3}{5}x-2. \end{aligned}$$

Deuxième méthode : trouver la médiatrice. Si une droite a pente a, alors la droite de pente $-\frac{1}{a}$ lui est perpendiculaire (faites un dessin). Donc, la droite cherchée a une pente de $-\dfrac{4-1}{-3-2} = \dfrac{3}{5}$, et passe par le point au milieu de A et B, qui peut se trouver en faisant la moyenne des données : $(\frac{1+4}{2}; \frac{2+(-3)}{2}) = (\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$. En remettant dans l'équation $y = \frac{3}{5}x + b$ on trouve bien $b = 2$.

Exercice II.3.8. Exercice d'introduction aux foyer et directrice

1. Pour A et C, ça se voit directement sur un croquis. Faisons B.
   Distance à F : $\sqrt{(4-0)^2+(4-1)^2} = 5$,
   Distance à d : $|4-(-1)| = 5$.
   Les deux sont bien égales.
2. On fixe le point $(x;y)$.
   Distance à F : $\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$,
   Distance à d : $|y-(-1)|$.

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2+(y-1)^2} = |y+1| \\ &x^2+(y-1)^2 = (y+1)^2 \\ &x^2+y^2-2y+1 = y^2+2y+1 \\ &x^2 = 4y \\ &y = \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2} = |y-5| \\
&(x-1)^2+(y+3)^2 = (y-5)^2 \\
&x^2-2x+1+y^2+6y+9 = y^2+-10y+25 \\
&x^2-2x-15 = -16y \\
&y = -\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{15}{16}
\end{aligned}$$

Apparemment, on doit diviser par la distance entre F et d multipliée par 2 pour obtenir a.

4. Essayons de suivre l'idée précédente. Le coefficient est de $\frac{1}{2}$, donc la distance entre F et d devrait être de 1. Comme la parabole a son sommet en 0, on doit avoir les coordonnées suivantes : $F(0;\frac{1}{2})$ et $d : y = -\frac{1}{2}$. On vérifie :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{1}{2})^2} = |y+\frac{1}{2}| \\
&(x-0)^2+(y-\frac{1}{2})^2 = (y+\frac{1}{2})^2 \\
&x^2+y^2-y+\frac{1}{4} = y^2+y+\frac{1}{4} \\
&x^2 = 2y \\
&y = \frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

C'est bien ça. Pour la parabole $y = \frac{1}{8}x^2$, on aurait donc $F(0;2)$ et $d : y = -2$, et ça marche.

5. Pour l'équation $y = \frac{1}{2}x^2+4$, tout fonctionne comme pour $y = \frac{1}{2}x^2$, sauf qu'on monte le tout de 4, donc on a $F(0;4+\frac{1}{2})$ et $d : y = 4-\frac{1}{2}$.
6. L'équation $y = x^2+4x+8$ peut s'écrire $y = (x+2)^2+4$, donc on s'est déplaçé de 4 vers le haut et de 2 vers la gauche par rapport à l'équation $y = x^2$. Le foyer est donc en $(-2;4+\frac{1}{4})$ et la directrice en $d : y = 4-\frac{1}{4}$.
7. De manière générale, l'équation d'une parabole peut s'écrire comme

$$ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_s)^2+y_s$$

où $(x_s;y_s)$ sont les coordonnées du sommet. Pour obtenir le foyer, il faut monter depuis le sommet et pour la directrice descendre (si la parabole est convexe, sinon, c'est le contraire). On doit monter de manière à ce que 1 divisé par deux fois la distance entre F et d donne a. Donc, les coordonnées sont $F(x_s;y_s+\frac{1}{4a})$, $d : y = y_s-\frac{1}{4a}$.

Exercice II.3.9.
Émulez le Brahmagupta qui est en vous.
(a)

1. $(x+1)^2 = 5 \Leftrightarrow x = -1\pm\sqrt{5}$
2. $(x-4)^2-7 = 0 \Leftrightarrow x = 4\pm\sqrt{7}$
3. $(x+2)^2+2 = 5 \Leftrightarrow x = -2\pm\sqrt{3}$
4. $(x-17)^2+14 = 2 \Leftrightarrow (x-17)^2 = -12$, qui n'a pas de solution.

(b) L'équation $(x+u)^2+v = 0$ a deux solutions lorsque $v < 0$, une seule lorsque $v = 0$ et aucune lorsque $v > 0$. La valeur de u n'a pas d'importance.
(c) Voici plus de détails :

1. $(x+2)^2-4 = (x^2+4x+4)-4 = x^2+4x$
2. $(x-3)^2-9 = (x^2-6x+9)-9 = x^2-6x$
3. $(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4} = (x^2+5x+\frac{25}{4})-\frac{25}{4} = x^2+5x$

(d)

1. $x^2+8x = (x+4)^2-16$
2. $x^2-24x = (x-12)^2-144$

3. $x^2+7x=(x+\frac{7}{2})^2-\frac{49}{4}$
4. $x^2+\frac{2}{3}x=(x+\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}$

(e) Voyez vous-même.
(f)

1. $x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-9+3=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=6 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{6}$
2. $x^2-24x-7=0 \Leftrightarrow (x-12)^2-144-7=0 \Leftrightarrow (x-12)^2=151 \Leftrightarrow x=12\pm\sqrt{151}$
3.

$$\begin{aligned}
2x^2+5x-3=0 &\Leftrightarrow x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-\frac{3}{2}=0\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16}\\
&\Leftrightarrow x+\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4}\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}=\frac{1}{2}\text{ ou }-3
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=0\\
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}&=0\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}&=0\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}&=0\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
x+\frac{b}{2a}&=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
x&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{(Si } b^2-4ac\geq 0\text{, sinon, pas de solution)}
\end{aligned}$$

Exercice II.4.1.
(1) $x^2+2x+1=(x+1)\cdot(x+1)$, donc $A(x)=B(x)\cdot(x+1)+0$.
(2) $x^2+2x+2=(x+1)\cdot(x+1)+1$.
(3) $x^3-2x^2+x+2=(x^2-1)\cdot(x-2)+2x$.
(4) $x^4=(x-2)\cdot(x^3+2x^2+4x+8)+16$.
(5) $x^2-2x-1=(4x^3-2x^2+5x-2)\cdot 0+x^2-2x-1$.
(6) $4x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)\cdot(4x-1)-x+2$.

Exercice II.4.2.

(1) Comme 1 est une racine de $P(x)$, on effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-1)$:
$x^3-2x^2+4x-3=(x-1)\cdot(x^2-x+3)$, pour trouver les éventuelles racines de x^2-x+3, on utilise Viète, comme $\Delta<0$, il n'y en a pas. $P(x)$ n'a donc qu'une seule racine en $x=1$.
(2) Par tâtonnement, on trouve que -2 est une racine, on divise donc par $(x+2)$:
$2x^3+3x^2+4=(x+2)\cdot(2x^2-x+2)$. A nouveau, $2x^2-x+2$ n'a pas de racines (en calculant Δ, par exemple). $P(x)$ n'a donc qu'une seule racine en $x=-2$.
(3) On trouve que 1 est une racine de x^3-2x+1, on divise par $(x-1)$:
$x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$. Les racines de x^2+x-1 sont (par Viète ou complétion du carré) $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. $P(x)$ a donc 3 racines.

Exercice II.4.3.

(1) $(x-3)$ divise $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$: non, car $3^4 - 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 - 1 \neq 0$.
(2) Le reste de la division de $x^3 + 2x^2 - 1$ par $(x-2)$ est 15 : Oui car $2^3 + 2 \cdot 2^2 - 1 = 15$.
(3) Si on divise $A(x) = (x^2 + 3x - 1) \cdot (x+2)$ et $B(x) = x^2 + 3x - 1$ par $P(x) = x - 5$, on obtient le même reste : Non, car $A(5) \neq B(5)$.
(4) Si le reste de la division de $A(x)$ par $P(x)$ est $3x - 1$, et que le reste de la division de $B(x)$ par $P(x)$ est $1 - 3x$, alors $P(x)$ divise le polynôme $A(x) + B(x)$: oui, car

$$A(x) + B(x) = P(x) \cdot Q(x) + 3x - 1 + P(x) \cdot \widetilde{Q}(x) + 1 - 3x = P(x) \cdot (Q(x) + \widetilde{Q}(x)) + 0.$$

(5) Si un polynôme $P(x)$ divise un polynôme $Q(x)$, $P(x)$ a strictement moins de racines que $Q(x)$: Non, pas forcément : le polynôme $x - 1$ divise le polynôme $x - 1$, par exemple.
(6) Si un polynôme $P(x)$ divise un polynôme $Q(x)$, $P(x)$ n'a pas plus de racines que $Q(x)$: Oui, car $Q(x) = P(x) \cdot \widetilde{Q}(x)$, donc si a est une racine de $P(x)$, a est aussi une racine de $Q(x)$.

Exercice II.4.4.
(1) $y = 19x - 25$.
(2) $y = -3x + 6$.
(3) $y = -x + 1$.

Exercice II.4.5.
(1) $-\frac{1}{2}(x+1)^2(x-2)$
(2) $-2x^2(x+2)^2$
(3) $-2x + 2$
(4) $x(x+1)(x-1)^2$

Exercice II.4.6.
Trouver un polynôme (de plus petit degré possible) passant par les points donnés.
(1) $A(1;2)$, $B(-1;0)$: $P(x) = x + 1$.
(2) $A(0;1)$, $B(1;3)$, $C(-1;0)$, $D(2;4)$: $P(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x + 1$.
(3) $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(3;3)$: $P(x) = x$.

Exercice II.4.7.
(1) Si un polynôme de degré 4 possède une racine, alors il en possède au moins deux : Non, par exemple $P(x) = x^4$ n'en possède qu'une seule.
(2) Le polynôme $(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2)^2$ traverse l'axe des x en 3 points : Non, il le touche en trois points mais ne le traverse qu'en $x = -2$ et $x = 1$.
(3) Le graphe du polynôme $P(x) = x^2+x+1$ traverse celui du polynôme $Q(x) = x+1$: Non, car $P(x)-Q(x) = x^2$ ne traverse pas l'axe horizontal.
(4) Un polynôme ne peut pas avoir plus d'extrêmums locaux que de racines : Non, par exemple $P(x) = x^2 + 1$ a un extrêmum local et aucune racine.
(5) Si un polynôme $P(x)$ de degré ≤ 3 touche une droite en 4 points, alors $P(x)$ est en fait une droite : Oui.
(6) Si un polynôme $P(x)$ de degré ≤ 3 touche une parabole en 4 points, alors $P(x)$ est en fait une parabole : Oui.
(7) Si un polynôme $P(x)$ de degré ≤ 4 touche une parabole en 4 points, alors $P(x)$ est en fait une parabole : Non, par exemple le polynôme $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x^2$ touche la parabole $Q(x) = x^2$ aux points $x = 1, 2, 3, 4$.
(8) Deux polynômes de degré impair s'intersectent toujours : Non, par exemple $P(x) = x$ et $Q(x) = x + 1$ ne s'intersectent jamais.
(9) Deux polynômes de degrés différents s'intersectent toujours : Non, par exemple $P(x) = x^2$ et $Q(x) = -1$.
(10) Un polynôme de degré 0 est un peu décevant : Ça dépend.

Exercice II.4.8.

a. Information publique : $(k;n) = (2;5)$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{N}$, $a_0 = S$.
Information privée récupérée : $(x_0; y_0) = (1; 400)$, $(x_1; y_1) = (3; 500)$, $(x_2; y_2) = (4; 550)$.
Le polynôme est de degré 1, on le calcule avec deux points pour trouver $p(x) = 50x + 350$.

b. Information publique : $(k;n) = (4;5)$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{N}$, $a_0 = S$.
Information privée récupérée : $(x_0;y_0) = (1;370)$, $(x_1;y_1) = (3;1110)$, $(x_2;y_2) = (4;6850)$, $(x_3;y_3) = (5;13050)$.
On doit utiliser les 4 points (car $k = 4$), en appliquant Lagrange on obtient :

$$p(x) = -390x^3 + 4910x^2 - 14200x + 10050.$$

c. Information publique : $(k;n) = (4;8)$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{N}$, $a_0 = S$.
Information privée récupérée : $(x_0;y_0) = (1;891)$, $(x_1;y_1) = (2;110)$, $(x_2;y_2) = (4;4440)$.
On ne peut pas retrouver le polynôme car on n'a que trois points et $k = 4$.

d. Secret : $S = 1032$, $(k;n) = (4;6)$. On doit prendre un polynôme de degré 3, par exemple $10x^3 + 20x^2 + 30x + 1032$. On doit ensuite prendre 6 points sur ce polynôme, par exemple

$$(1,1092), \quad (2,1252), \quad (3,1572), \quad (4,2112), \quad (5,2932), \quad (6,4092).$$

Exercice II.4.9.
Sans corrigé

Exercice II.4.10.
Sans corrigé

Exercice II.4.11. Polynômes et vrai code, partie II.
Les polynômes trouvés sont les suivants :
(a) Liste : `[ [1,1] , [2,2] , [3,3] , [4,4] ]`, $p = 11$: $L(x) = x$.
(b) Liste : `[ [0,1] , [2,5] , [4,12] , [8,15] , [11,0] , [12,1] ]`, $p = 13$:
$L(x) = 1 + 5x + 11x^2 + 11x^3 + x^4 + 9x^5$.
(c) Liste : `[ [0,1] , [1,1] , [2,1] , [3,1] , [4,1] , [5,1] , [6,1] , [7,1] , [8,2] ]`, $p = 19$:
$L(x) = 1 + 7x + 17x^2 + 8x^3 + 12x^4 + 8x^5 + 9x^6 + 5x^7 + 10x^8$.

On peut à chaque fois vérifier que le polynôme est le bon en l'évaluant sur les points correspondants.

Exercice II.4.12.
(a) S'il n'y a pas d'erreur, n'importe quel polynôme passant par 6 des 8 points est égal au polynôme de codage, donc passe par les 8 points. Comme ici ce polynôme passe par 7 points et non 8, il y a bien une erreur.
(b) Si un autre polynôme $q(x)$ passe par 7 points de la liste, alors $p(x)$ et $q(x)$ prennent la même valeur en au moins 6 points. Ils doivent donc être égaux, car de degré ≤ 5. Donc $p(x)$ est effectivement le bon polynôme *si la liste reçue contient une seule erreur*. Si elle en contient plus qu'une, le polynôme $p(x)$ passe au moins par un point erroné, donc il ne peut pas être égal au polynôme de codage.
(c) Pour retrouver la liste de départ *si la liste reçue contient une seule erreur*, il suffit de calculer les images de $0,1,2,3,4,5$ par $p(x)$, ici en l'occurrence comme le polynôme passe par les 6 premiers points on n'a pas besoin de les recalculer, on sait que ce sont les bons. En supposant, bien entendu, que l'on ait pas plus qu'une erreur dans la liste reçue. Sinon, on ne peut rien faire.

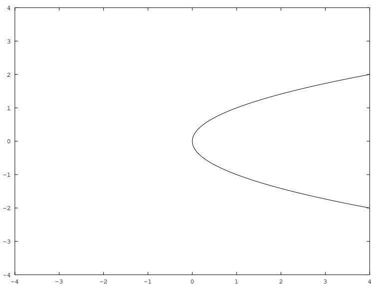
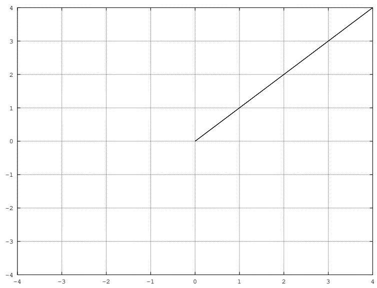
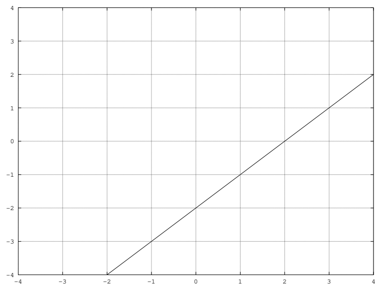
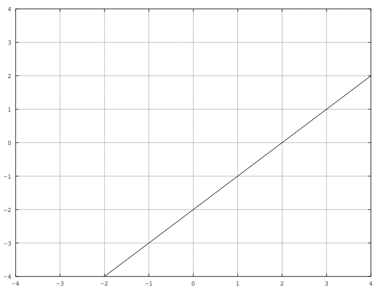
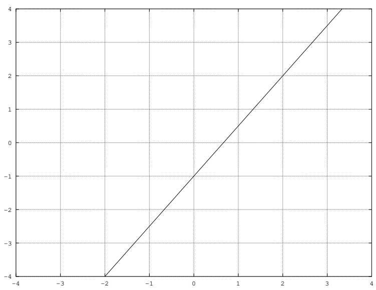
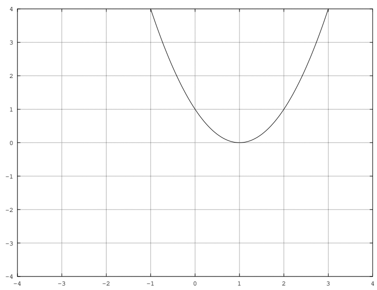
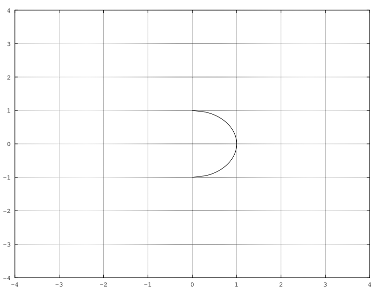
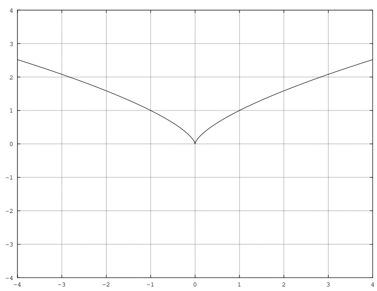
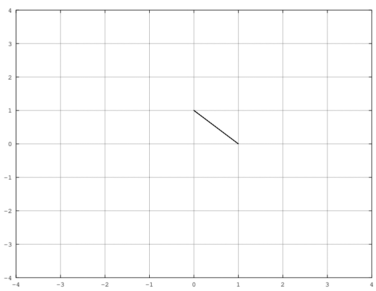
Exercice II.4.13.
On veut donc transmettre la suite de 12 bits `'101001010010'` en utilisant un CRC dont le polynôme générateur est $G(x) = x^4 + x^3 + x$.
(1) Comme $G(x)$ est de degré 4, on doit ajouter 4 bits.
(2) La division Euclidienne (modulo 2) de $M(x) \cdot x^4$ par $G(x)$ donne un reste de 0. Donc, on doit ajouter les bits `'0000'` à la liste, et transmettre `'101001010010`**`0000`**`'`.
(3) Si la suite reçue est `'1010010100101111'`, il y a une erreur, car les 4 derniers bits ne sont pas égaux à `'0000'`. On peut aussi s'en convaincre en effectuant la division du polynôme correspondant par $G(x)$, et on trouve un reste de `'1111'` (correspondant au polynôme $x^3 + x^2 + x + 1$), qui n'est pas `'0000'`, donc il y a au minimum une erreur (en fait, 4, les 4 derniers bits). .

Exercice II.4.14.

1. On pose donc $q(x) = p(x+m)$, alors $q(0) = p(m)$ est un entier, tout comme $q(1), q(2), \ldots, q(n-1)$. Donc par le théorème bis, $q(k)$ est un entier pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $p(k) = q(k-m)$ est entier.

2. On suppose que le théorème bis est vrai pour n, on veut montrer qu'il reste vrai pour $n+1$.
Si $p(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, alors $p(x+1) = a_{n+1}(x+1)^{n+1} + a_n(x+1)^n + \cdots + a_1(x+1) + a_0$.
On voit facilement (en distribuant) que $(x+1)^{n+1} = x^{n+1} + b(x)$, où $b(x)$ est de degré n. Donc, $g(x) = p(x+1) - p(x)$ est un polynôme de degré $\leq n$, car le terme en x^{n+1} disparaît.
Maintenant, $g(0) = p(1) - p(0)$, qui sont tous les deux des entiers, donc $g(0)$ est un entier. De même pour $g(1), g(2), \ldots, g(n-1)$, vu que $p(0), p(1), \ldots, p(n)$ sont des entiers. Comme le théorème bis est vrai pour n, alors $g(k)$ est un entier pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$. En particulier, $g(n)$ est un entier.
Comme $g(n) = p(n+1) - p(n)$, on a que $p(n+1) = g(n) - p(n)$, et donc $p(n+1)$ est un entier aussi. Mais maintenant, comme $p(n+2) = g(n+1) - p(n+1)$, alors $p(n+2)$ est également entier. Du coup $p(n+3)$ est entier, $p(n+4)$ aussi, etc, en fait on pourrait même réecrire une récurrence ici. On en conclut que $p(k)$ est un entier pour tous les entiers *positifs*.
Pour les entiers négatifs, on procède presque de la même manière : $p(-1) = p(0) - g(0)$ et donc c'est un entier, $p(-2) = p(-1) - g(-1)$ et donc c'est un entier, etc...
3. En fait, c'est quasiment exactement la même démonstration, si on regarde de près.

Exercice II.5.1.
Pour chaque courbe, les axes vont de -4 à 4.

(a) 
(b) 
(c) 
(d) 
(e) 
(f) 
(g) 
(h) 
(i) 

Exercice II.5.2.
Il y a évidemment une infinité de possibilités à chaque fois, on en donne une ici.

1. $y = 3x - 2$: $\begin{pmatrix} t \\ 3t-2 \end{pmatrix}$.
2. $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$: $\begin{pmatrix} 2t \\ t + \frac{7}{4} \end{pmatrix}$.
3. $2y + 3x = -4$: $\begin{pmatrix} -t - \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2}t \end{pmatrix}$.

Exercice II.5.3.
On a choisi la courbe la plus simple parmi l'infinité de possibilités. A chaque fois, on a écrit la droite d'abord sous forme $(1-t) \cdot \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{OB}$, puis sous forme $t \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$, puis comme un seul vecteur.

1. $A(3;6)$, $B(-2;7)$: $(1-t)\cdot\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5t+3\\t+6\end{pmatrix}$.
2. $A(-1;6)$, $B(-1;-4)$: $(1-t)\cdot\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-10t+6\end{pmatrix}$.
3. $A(0;1)$, $B(-10;1)$: $(1-t)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-10\\1\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-10\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10t\\1\end{pmatrix}$.
4. $A(32;-\frac{1}{4})$, $B(\frac{1}{4};32)$: $(1-t)\cdot\begin{pmatrix}32\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\32\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}-32\\\frac{1}{4}+32\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}32\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\frac{1}{4}-32)t+32\\(\frac{1}{4}+32)t+-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

Exercice II.5.4.

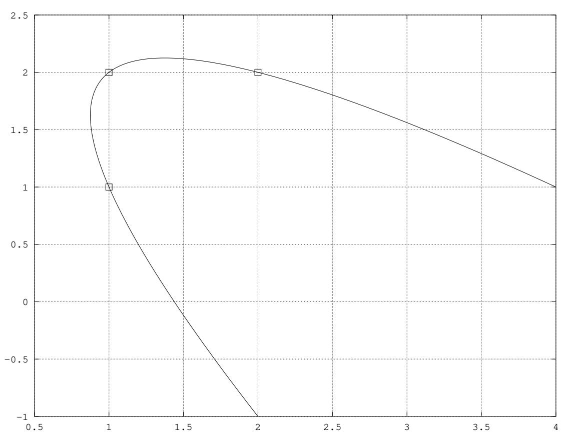
1. $c(t)=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$.
2. $c(t)=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}(1-t)$ $\qquad x=-1$.
3. $c(t)=\begin{pmatrix}3t+2\\-5t-1\end{pmatrix}$ $\qquad y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}$.

Exercice II.5.5.

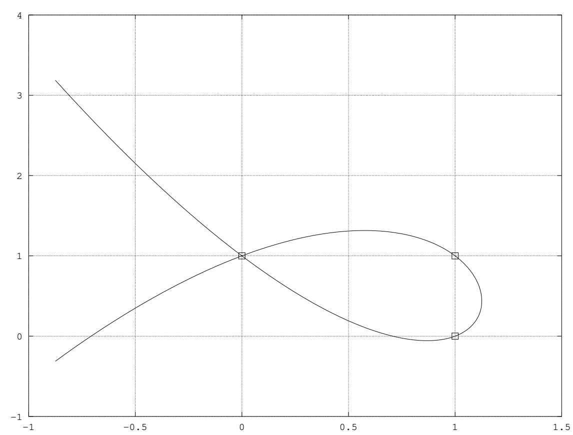
1. $c(t)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $A(5;7)$: Oui, pour $t=4$.
2. $c(t)=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}(1-t)$, $A(3;-6)$: Oui, pour $t=-\frac{3}{5}$.
3. $c(t)=\begin{pmatrix}t^2+t+1\\t-1\end{pmatrix}$, $A(7;2)$: Non, car la deuxième composante impose $t=3$, mais $3^2+3+1\neq 7$.
4. $c(t)=\begin{pmatrix}t^2-t-3\\t^2+3t+5\end{pmatrix}$, $A(-2;3)$: Non, car les solutions de $t^2-t-3=-2$ sont $t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ et celles de $t^2+3t+5=3$ sont $t=-2,-1$.
5. $c(t)=\begin{pmatrix}t^2\\t^4\end{pmatrix}$, $A(2;4)$: Oui, pour $t=\sqrt{2}$ et $t=-\sqrt{2}$.

Exercice II.5.6.
Des exemples possibles de degré minimal.

1. $P_0(1;0), P_1(4;1)$: $\begin{pmatrix}3t+1\\t\end{pmatrix}$.
2. $P_0(1;1), P_1(1;2), P_2(2;2)$: $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+1\\-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+1\end{pmatrix}$.
3. $P_0(0;1), P_1(1;1), P_2(1;0), P_3(0;1)$: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t\\\frac{1}{2}t^3-2t^2+\frac{3}{2}t+1\end{pmatrix}$.

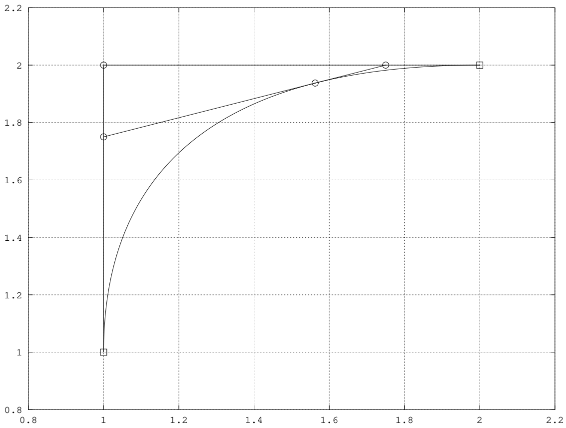


2.

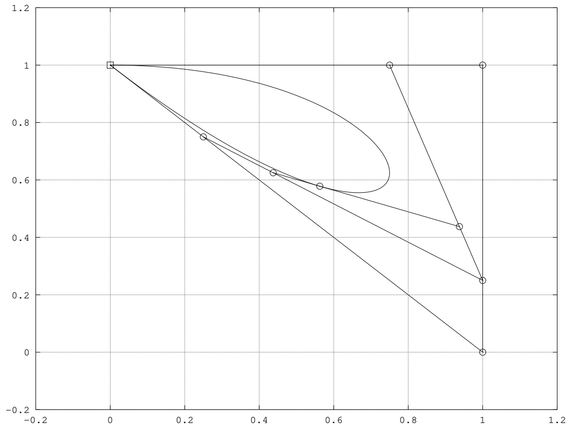


3.

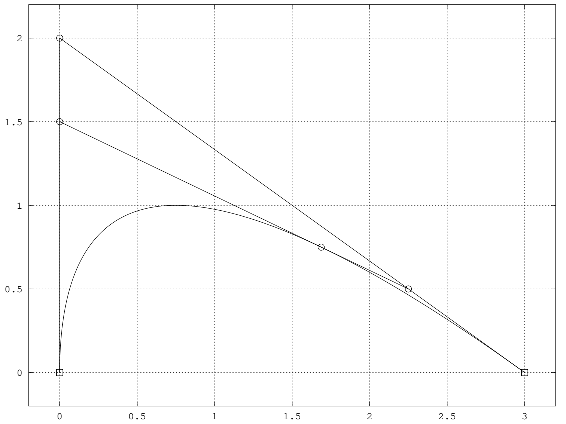
Exercice II.5.7.



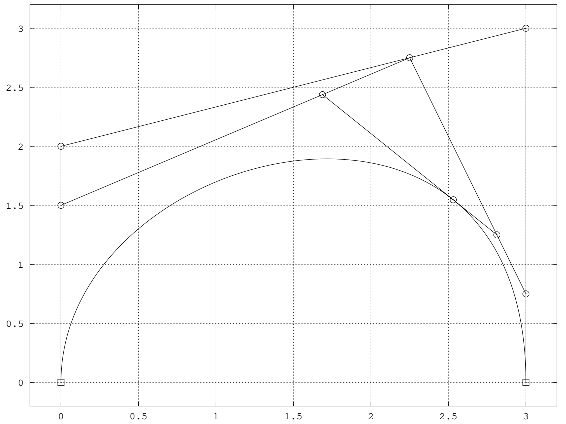
1.



2.



3.



4.

Exercice II.5.8.

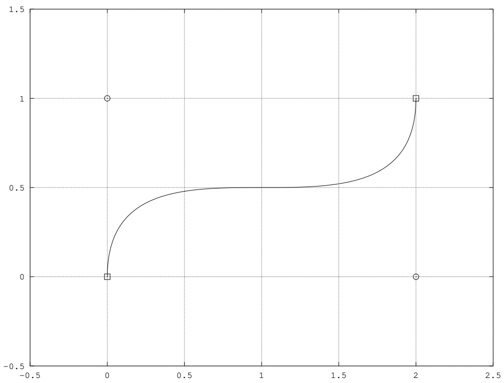
1. $\begin{pmatrix} t^2+1 \\ -t^2+2t+1 \end{pmatrix}$.

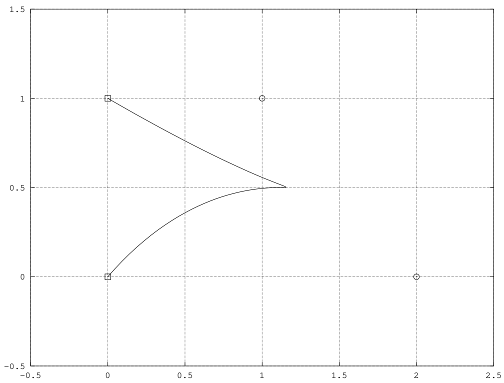
2. $\begin{pmatrix} -3t^2+3t \\ 3t^3-3t^2+1 \end{pmatrix}$.

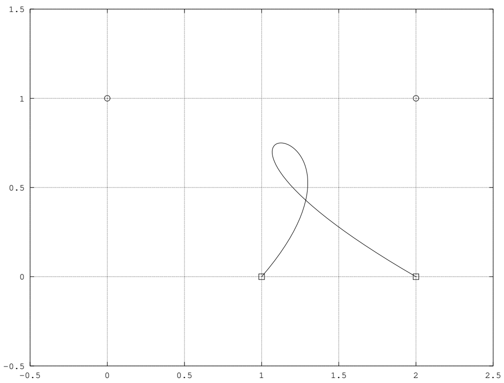
3. $\begin{pmatrix} 3t^2 \\ -4t^2+4t \end{pmatrix}$.

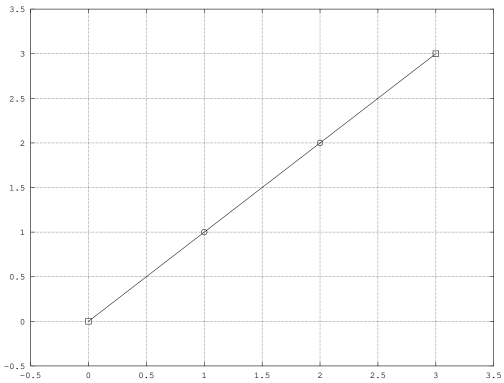
4. $\begin{pmatrix} -6t^3+9t^2 \\ -3t^3-3t^2+6t \end{pmatrix}$.

Exercice II.5.9.


(1)


(2)


(3)


(4)

Exercice II.6.1.

Exercice II.6.2.

(1) degré 2, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, zéros : $\varnothing$.
(2) degré 2, $D_f = \mathbb{R}$, zéros : $\{-1\}$.
(3) degré 3, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$, zéros : $\{0; 4\}$.
(4) degré 4, $D_f = \mathbb{R}$, zéros : $\{0\}$.

Exercice II.6.3.

(1) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x+1}$, aucune a.v.
(2) $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^2}$, a.v. en $x = -1$.
(3) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)^2(x+1)}$, a.v. en $x = -1$ et en $x = 2$.
(4) A.v. en $x = 1$.
(5) $x^3 - 1$ est divisible par $(x-1)$, donc $(x-1)$ apparaît au moins une fois au numérateur, donc il n'y a pas d'a.v.
(6) En effectuant la division de $x^3 - 1$ par $x - 1$ on obtient $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Le dénominateur peut donc s'écrire comme $(x-1)^2(x^2+x+1)^2$. Comme x^2+x+1 n'a aucune racine et que le numérateur est $(x-1)^3$, $f(x)$ ne possède pas d'a.v.

Exercice II.6.4.

(1) Une fonction rationnelle de degré impair possède au moins un zéro : Non, exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$.
(2) Si deux fonctions rationnelles f, g ont les mêmes asymptotes, le même domaine et et les mêmes zéros, elles sont égales : Non, exemple : $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = x^2$.
(3) Si une fonction rationnelle a 3 asymptotes verticales, elle est au moins de degré 3 : Oui, car le dénominateur doit avoir au moins 3 zéros, donc être de degré au moins 3.
(4) Si $f(x)$ est une fonction rationnelle, que $f(0) = -1$ et que $f(2) = 1$, alors f possède au moins un zéro : Non, exemple $f(x) = \frac{1}{x}$.
(5) L'égalité $1 = (x^2-1) \cdot \left(\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x+2}\right)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$: Non, la partie à droite de l'égalité n'a pas de sens pour $x = 1$ et $x = -1$. Par contre elle est vraie pour tous les autres x.
(6) La fonction $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ est une fonction rationnelle : Oui.
(7) La fonction $f(x) = 3x^2 + 2x - \frac{5}{x}$ est une fonction rationnelle : Oui.

Exercice II.6.5.

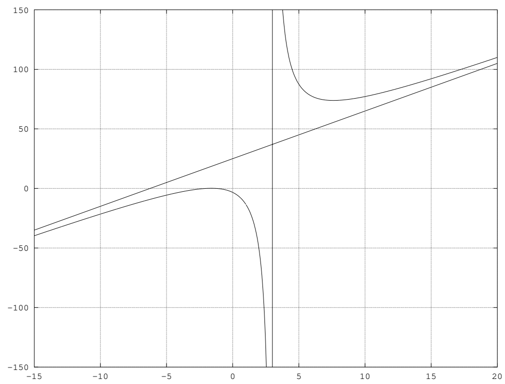
(1) a.h. en $y = \frac{2}{3}$.

(2) Première méthode : on effectue la division avec reste : $(2x^2+x+1) = (x+1)(2x-1)+2$, donc lorsque x est loin des racines du dénominateur on peut écrire : $f(x) = 2x-1+\frac{2}{x+1}$, et la fraction tend vers 0. Donc, a.o. en $y = 2x-1$.
Deuxième méthode : On a une a.o. de pente 2, ensuite $\frac{2x^2+x+1}{x+1} - 2x = \frac{-x+1}{x+1}$, donc l'ordonnée à l'origine vaut -1 : $y = 2x-1$.
(3) a.h. en $y = 0$.
(4) ni a.h. ni a.o.
(5) $f(x) = \frac{\text{degré3}}{\text{degré5}}$, donc a.h. en $y = 0$.
(6) a.h. en $y = \frac{1}{\pi}$.

Exercice II.6.6.
(1) Il n'existe aucune fonction rationnelle possédant une asymptote horizontale en $y = 3$ et une verticale en $x = 3$: Faux, par exemple $f(x) = \frac{3x}{x-3}$.
(2) $f(x) = \frac{2x^2}{4x+1} - \frac{1}{2}x$ possède une asymptote horizontale : Vrai. Pour le voir en calculant peu, on constate que $\frac{2x^2}{4x+1}$ s'approche d'une asymptote oblique de pente $\frac{1}{2}$, donc d'équation $\frac{1}{2}x+b$. Quand on lui enlève $-\frac{1}{2}x$, il ne restera asymptotiquement plus que b, donc une asymptote horizontale.
(3) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2x+1}$ possède une asymptote horizontale : Faux : $\frac{1}{x}$ s'approche de la droite horizontale 0, mais $\frac{x^2}{2x+1}$ d'une asymptote oblique de pente $\frac{1}{2}$. Donc l'addition des deux s'approchera d'une asymptote oblique de pente $\frac{1}{2}$.
(4) Si $f(x)$ possède une asymptote verticale en $x = 2$ et que $g(x)$ est une fraction rationnelle, alors $f(x)\cdot g(x)$ possède une asymptote verticale en $x = 2$: Faux, exemple $f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $g(x) = x-2$.
(5) La fonction $\frac{3x^2-2x+1}{2x+2} - \frac{6x^3-2x}{4x^2-4x+17}$ possède une asymptote horizontale : Vrai, $\frac{3x^2-2x+1}{2x+2}$ et $\frac{6x^3-2x}{4x^2-4x+17}$ s'approchent toutes les deux d'une asymptote oblique de pente $\frac{3}{2}$, quand on les soustrait il ne restera asymptotiquement que la différence des ordonnées à l'origine des deux asymptotes, donc une constante.

Exercice II.6.7.

$$f(x) = \frac{(4x+5)(x^2+x-2)}{(x^2-4x+3)} = \frac{(4x+5)(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(4x+5)(x+2)}{(x-3)} \text{ lorsque } x \notin \{1;3\}$$



On a une seule a.v. en $x = 3$ et deux zéros en $x = -2$ et $x = -\frac{5}{4}$. Il y a une a.o. car le numérateur est de degré 3 et le dénominateur de degré 2. Pour la calculer, on peut d'abord simplifier les $x+1$ (car on est loin de 1 et 3), puis on multiplie $(4x+5)(x+2) = 4x^2+13x+10$, puis on effectue la division Euclidienne :

$$4x^2+13x+1 = (x-3)(4x+25)+76$$

L'a.o. est donc d'équation $y = 4x+25$.

Exercice II.7.1.

(1)	$30°$	(2)	$120°$	(3)	$18°$
(4)	$720°$	(5)	$-150°$	(6)	$675°$
(7)	$\sim 57.3°$	(8)	$\sim 40.1°$	(9)	$\sim -114.6°$
(10)	$\sim 171.9°$				

Exercice II.7.2.

(1)	$\frac{\pi}{4}$		(2)	$\frac{\pi}{3}$		(3)	$\frac{5\pi}{12}$	
(4)	$-\frac{\pi}{6}$		(5)	$\frac{2\pi}{3}$		(6)	$\frac{7\pi}{4}$	
(7)	$\sim 0.40 =$	$\sim 0.13\pi$	(8)	$\sim -1.88 =$	$\sim 0.60\pi$	(9)	$\sim 5.10 =$	$\sim 1.62\pi$
(10)	$\sim 2.66 =$	$\sim 0.85\pi$						

Exercice II.7.3.

1. 84mm.
2. 140mm.

Exercice II.7.4.
1853m, Non.

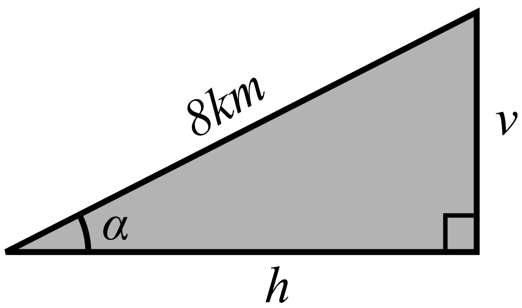
Exercice II.7.5.
Circonférence : $40'000$km, Rayon : 6370km.

Exercice II.7.6.
Dans l'ordre :
$x = 5.09$cm, $x = 22.64$cm, $x = 0.41$rad $= 23.58°$, $x = 5.88$cm, $x = 1.27$rad $= 72.54°$, impossible.

Exercice II.7.7.
On trouve d'abord $h = 22 \cdot \cos(9°) = 21.73$cm. De même, $\overline{CD} = 22 \cdot \sin(9°) = 3.44$cm. Par Pythagore, $\overline{AB} = 24.82$cm. Donc, le périmètre vaut $22+3.44+12+24.82 = 62.26$cm et l'aire $\frac{1}{2}\cdot(12+3.44)\cdot 21.73 = 167.76\text{cm}^2$.

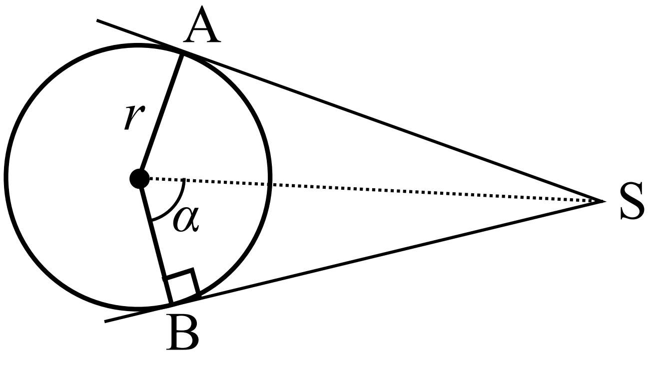
Exercice II.7.8.
$\tan(33°) = \dfrac{1.78}{x}$, donc $x = \dfrac{1.78}{\tan(33°)} = 2.74m$.

Exercice II.7.9.



La pente de 10% = 0.1 correspond à la distance verticale sur la distance horizontale, donc $\frac{v}{h} = 0.1 = \tan(\alpha)$. Donc, $\alpha = \arctan(0.1) = 5.71°$. On trouve donc $v = 8 \cdot \sin(5.71) = 0.796km$ et $h = 7.96km$.
Autre méthode, sans trouver l'angle : On sait qu'une pente de 10% correspond à un triangle rectangle de côtés 10 et 1, par Pythagore l'hypothénuse vaut donc 10.05, et on utilise Thalès pour obtenir par exemple $v = \frac{8\cdot 1}{10.05} = 0.796$.

Exercice II.7.10.



La première chose est de remarquer qu'il y a un angle droit en B. Pour trouver l'angle α, on remarque qu'il correspond à une longueur d'arc de $16'045/2 = 8022.5km$ sur un cercle de rayon $6371km$, donc $\alpha = \dfrac{8022.5}{6371} = 1.259$ radians. (On utilise $\ell = \alpha \cdot r$ en radians.) Donc, la distance de S au centre de la terre est donnée par $d = \dfrac{6371}{\cos(1.259)} = 20'768.08km$ Depuis la surface, il suffit d'ôter $6371km$.

Exercice II.7.11.
Rayon de la terre : $r = 6'371$km.

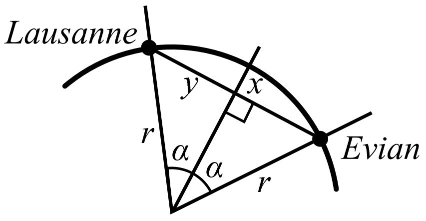


Figure 1

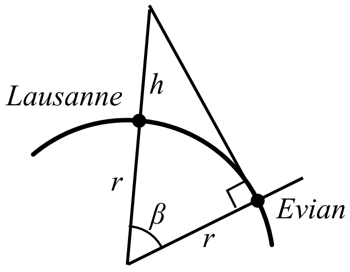


Figure 2

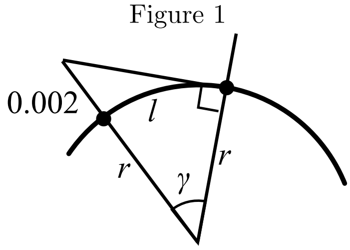


Figure 3

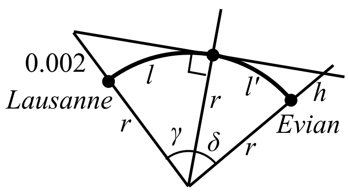


Figure 4

(1) En radians, si ℓ est la longueur d'arc et β l'angle, on a : $\ell = \beta \cdot r$, donc $\beta = \ell/r$.

	Distance (km)	*Angle β correspondant (radians)*
Lausanne (CH) – Evian (FR)	13	0.002040
Zanzibar (TZ) – Dar-es-Salaam (TZ)	72	0.011301
Brindisi (IT) – Vlorë (AL)	132	0.020719
Bari (IT) – Dubrovnik (HR)	205	0.032177

(2) Figure 1 : $\alpha = \beta/2 = 0.001020$ rad. Donc, $y = \sin(\alpha) \cdot r = 6.49999887235$km, donc la longueur du cable est de $2y = 12.9999977447$km.
Pour trouver x, on utilise $\cos(\alpha) = \dfrac{r - x}{r}$, donc $x = r(1 - \cos(\alpha)) = 0.0033158057$km, donc environ 3.32m.

(3) Figure 2 : $\cos(\beta) = \frac{r}{r+h}$, donc $h = \frac{r(1-\cos(\beta))}{\cos(\beta)}$, avec β donné par le tableau. Donc $h = 0.01326324699$km= 13.26m.

(4) Figure 3 : $\ell = \gamma \cdot r$, et $\cos(\gamma) = \frac{r}{r+0.002}$, donc $\gamma = \arccos 6371/6371.002 = 0.000792366555$ rad, donc $\ell = 5.04816732$km.

(5) Figure 4 : par le point (4) on sait que $\delta = 0.002040 - 0.000792366555$, et que $\cos(\delta) = \frac{r}{r+h}$, donc $h = \frac{r(1-\cos(\delta))}{\cos(\delta)} = 0.00496246146$km= 4.96m.

(6) Le tableau suivant donne les réponses aux questions (2) et (3) pour toutes les paires de villes.

	Point (2)	Point (3)
Lausanne (CH) – Evian (FR)	$x = 3.32$m $2y = 12.9999977447$km	$h = 13.26$m
Zanzibar (TZ) – Dar-es-Salaam (TZ)	$x = 101.71$m $2y = 71.9996168487$km	$h = 406.87$m
Brindisi (IT) – Vlorë (AL)	$x = 341.86$m $2y = 131.997639016$km	$h = 1'367.69$m
Bari (IT) – Dubrovnik (HR)	$x = 824.52$m $2y = 204.991156391$km	$h = 3'299.57$m

(7)

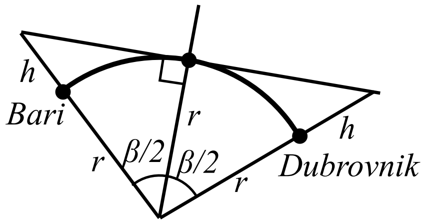
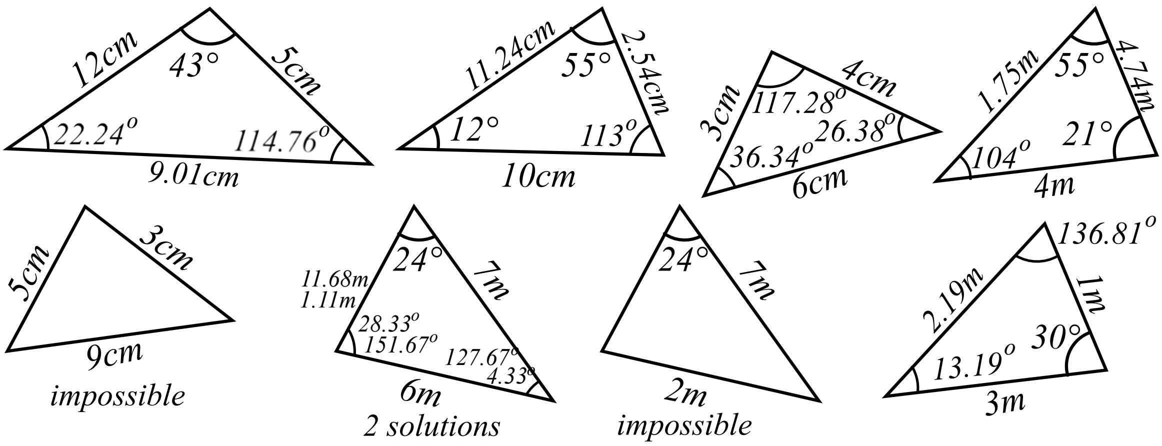


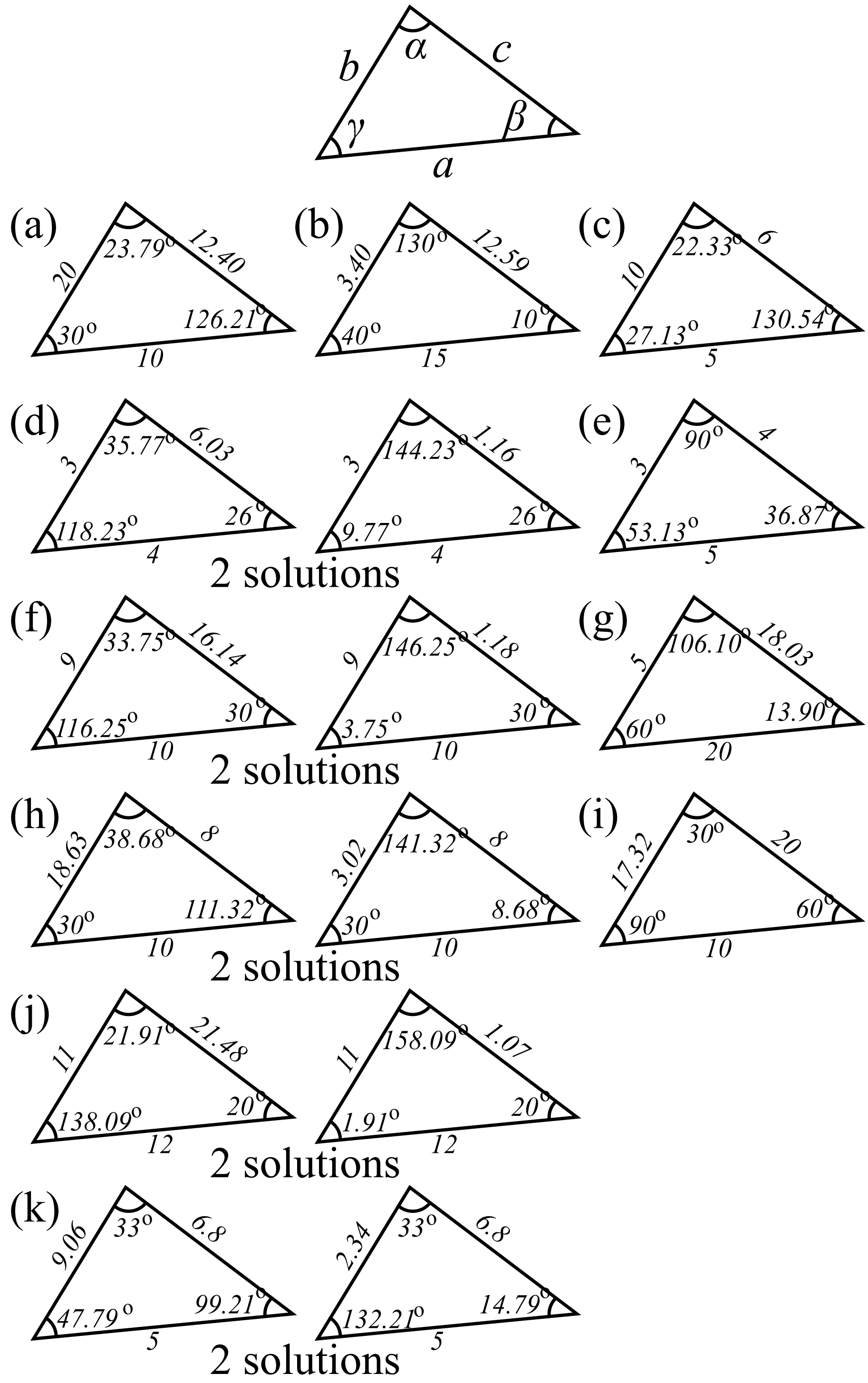
Figure 5

Figure 5 : $\cos(\beta/2) = \frac{r}{r+h}$, donc $h = \frac{r\cdot(1-\cos(\beta/2))}{\cos(\beta/2)} = 0.82462$km= 824.62m. Ça fait quand même beaucoup.

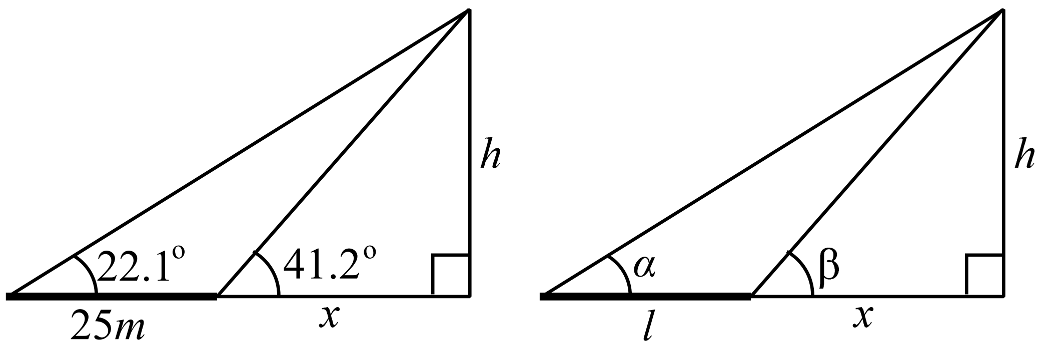
Exercice II.7.12.



Exercice II.7.13.



Exercice II.7.14.



(Version n'utilisant que les formules du triangle rectangle, on peut aussi utiliser le théorême du sinus.)
On a $\tan(41.2°) = \dfrac{h}{x}$, donc $h = x\tan(41.2°)$. Dans l'autre triangle, on a $\tan(22.1°) = \dfrac{h}{x+25}$. En remplaçant h, on obtient

$$\begin{aligned}
&\tan(22.1°) = \frac{x\tan(41.2°)}{x+25}, \text{ donc}\\
&x \cdot \tan(22.1°) + 25 \cdot \tan(22.1°) = x\tan(41.2°), \text{ donc}\\
&x\big(\tan(41.2°) - \tan(22.1°)\big) = 25 \cdot \tan(22.1°), \text{ et finalement}\\
&x = \frac{25 \cdot \tan(22.1°)}{\tan(41.2°) - \tan(22.1°)} = 21.62m, \text{ et}\\
&h = \frac{25 \cdot \tan(22.1°) \cdot \tan(41.2°)}{\tan(41.2°) - \tan(22.1°)} = 18.93m
\end{aligned}$$

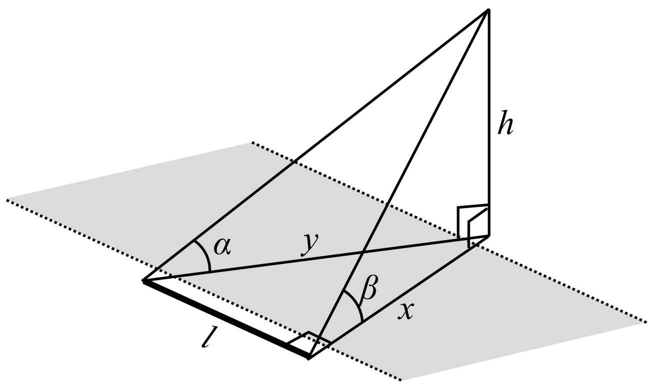
De manière générale, on peut obtenir une formule pour h, x en fonction de α, β et ℓ :

$$x = \frac{\ell \cdot \tan(\alpha)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)} \text{ et } h = \frac{\ell \cdot \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}.$$

On peut ensuite montrer que cette égalité se simplifie en

$$h = \frac{\ell \sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Exercice II.7.15.



(A nouveau, version n'utilisant que les formules du triangle rectangle, on peut aussi utiliser le théorême du sinus.) Faisons le calcul de manière littérale : on se donne ℓ, α et β et on veut trouver h et x. On a $\tan(\beta) = \dfrac{h}{x}$, donc $h = x\tan(\beta)$. Dans l'autre triangle, on a $\tan(\alpha) = \dfrac{h}{y}$. On a aussi $\ell^2 + x^2 = y^2$. En mettant au carré les deux premières égalités, on a :

$$h^2 = x^2\tan^2(\beta), \quad \tan^2(\alpha) = \frac{h^2}{y^2} = \frac{h^2}{x^2+\ell^2} = \frac{x^2\tan^2(\beta)}{x^2+\ell^2}.$$

Quelqu'un d'observateur remarquera alors qu'en faisant les mêmes calculs que dans l'exercice précédent (mais avec des carrés partout), on obtient :

$$x^2 = \frac{\ell^2 \cdot \tan^2(\alpha)}{\tan^2(\beta) - \tan^2(\alpha)} \text{ et } h^2 = \frac{\ell^2 \cdot \tan^2(\alpha) \cdot \tan^2(\beta)}{\tan^2(\beta) - \tan^2(\alpha)}.$$

Il suffit alors de prendre les racines pour obtenir :

$$x = \frac{\ell \cdot \tan(\alpha)}{\sqrt{\tan^2(\beta) - \tan^2(\alpha)}} \text{ et } h = \frac{\ell \cdot \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}{\sqrt{\tan^2(\beta) - \tan^2(\alpha)}}.$$

Dans notre cas, on trouve $h = 17.58m$ et $x = 27.07m$. Similairement à l'exercice précédent, la formule pour h peut s'écrire

$$h = \frac{\ell \sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}$$

Exercice II.7.16.
Il suffit de bien regarder, voyons.

Exercice II.7.17.
1)

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1-\cos^2(x))\\ &= 2\cos^2(x) - 1\\ \text{Donc, } \frac{\cos(2x)+1}{2} &= \cos^2(x)\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = (1-\sin^2(x)) - \sin^2(x)\\ &= 1 - 2\sin^2(x)\\ \text{Donc, } \frac{1-\cos(2x)}{2} &= \sin^2(x)\end{aligned}$$

Exercice II.7.18.
En se rappelant que $\cos(\beta) = \cos(-\beta)$ et $\sin(\beta) = -\sin(-\beta)$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) &= \big(\cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta)\big) - \big(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\big)\\ &= \big(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\big) - \big(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\big)\\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ &= 2\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

On en déduit la formule en divisant tout par 2.

Exercice II.8.1.
$18'000 \cdot (1-0.12)^5 = 9499.17$ (arrondi à 9499.15).

Exercice II.8.2.
Il y a 48 mois en 4 ans, donc $5000 \cdot (1+0.0125)^{48} = 9076.77$ (arrondi à 9076.75).

Exercice II.8.3.
$x \cdot (1+0.025)^3 = 2235.65$, donc $x = 2235.65 \cdot (1+0.025)^{-3} = 2076.02$ (arrondi à 2076).

Exercice II.8.4.
$x \cdot (1-0.05)^3 = 100$, donc $x = 100 \cdot (1-0.05)^{-3} = 116.64$ (arrondi à 116.65).

Exercice II.8.5.
Il y a 48 trimestres en 12 ans, donc $x \cdot (1+0.025)^{48} = 4500 \cdot (1+0.04)^8$, donc $x = 4500 \cdot (1+0.04)^8 \cdot (1+0.025)^{-48} = 1882.49$ (arrondi à 1882.50).

Exercice II.8.6.
Notons par a la base de l'exponentielle, et plaçons le temps 0 il y a 12 ans. Donc, la surface $S(t)$ est donnée par $S(t) = 48'228 \cdot a^t$. On a : $S(12) = 48'228 \cdot a^{12} = 72'342$ donc $a^{12} = \frac{72'342}{48'228}$, donc $a = \sqrt[12]{\frac{72'342}{48'228}}$.
(1) “Il y a 5 ans” correspond au temps $t = 7$, donc : $48'228 \cdot a^7 = 61'096.90$.

(2) “Dans 7 ans” correspond au temps $t = 19$, donc : $48'228 \cdot a^{19} = 91'645.355$.
Autre méthode :

$$S(t) = S(0) \cdot a^t = S(0) \cdot \left(\left(\frac{S(12)}{S(0)} \right)^{\frac{1}{12}} \right)^t = S(0) \cdot \left(\frac{S(12)}{S(0)} \right)^{\frac{t}{12}} = \frac{S(12)^{\frac{t}{12}}}{S(0)^{\frac{t}{12}-1}},$$

et donc :

$$S(t) = \frac{72'342^{\frac{t}{12}}}{48'228^{\frac{t}{12}-1}}.$$

Exercice II.8.7.
Notons par ${}^{17}\mathsf{C}(t)$ la quantité de Carbone 17 en fonction du temps (on précisera les unités plus loin), et idem pour le Carbone 15 et 14. Il y a $525'960$ minutes ou $31'557'600$ secondes dans une année.

(1)

	t en secondes	t en minutes	t en années
${}^{17}\mathsf{C}(t)$	${}^{17}\mathsf{C}(0) \cdot 2^{-\frac{t}{0.193}}$	${}^{17}\mathsf{C}(0) \cdot 2^{-\frac{60t}{0.193}}$	${}^{17}\mathsf{C}(0) \cdot 2^{-\frac{31'557'600t}{0.193}}$
${}^{15}\mathsf{C}(t)$	${}^{15}\mathsf{C}(0) \cdot 2^{-\frac{t}{1220}}$	${}^{15}\mathsf{C}(0) \cdot 2^{-\frac{t}{20.3}}$	${}^{15}\mathsf{C}(0) \cdot 2^{-\frac{525'960t}{20.3}}$
${}^{14}\mathsf{C}(t)$	${}^{14}\mathsf{C}(0) \cdot 2^{-\frac{t}{5'400 \cdot 31'557'600}}$	${}^{14}\mathsf{C}(0) \cdot 2^{-\frac{t}{5'400 \cdot 525'960}}$	${}^{14}\mathsf{C}(0) \cdot 2^{-\frac{t}{5'400}}$

(2)

	1 seconde	1 minute	1 jour	1000 ans
${}^{17}\mathsf{C}$	$0.0276kg$	$0kg$	$0kg$	$0kg$
${}^{15}\mathsf{C}$	$0.9994kg$	$0.9665kg$	$0kg$	$0kg$
${}^{14}\mathsf{C}$	$1kg$	$1kg$	$1kg$	$0.8795kg$

(3) Si on prend t en secondes, il faut résoudre

$$\begin{aligned} 2^{-\frac{t}{0.193}} &= 2^{-20} \cdot 2^{-\frac{t}{5'400 \cdot 31'557'600}} \\ 2^{-\frac{t}{0.193}} &= 2^{-20-\frac{t}{5'400 \cdot 31'557'600}} \\ -\frac{t}{0.193} &= -20 - \frac{t}{5'400 \cdot 31'557'600} \end{aligned}$$

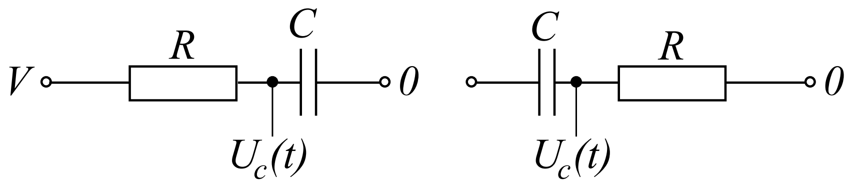
Dont la solution est environ $t = 20 \cdot 0.193 = 3.86$ secondes.

Exercice II.8.8.
Répondre par vrai ou faux en justifiant avec le minimum de calculs.

(1) Comme 1.2^n croit plus vite que 1.02^n lorsque n devient grand, il vaut théoriquement mieux utiliser l'algorithme B.
(2) Vrai (car le sinus reste borné).
(3) Faux : la limite n'existe pas, ça oscille de plus en plus.
(4) Vrai (car l'exponentielle de base < 1 est strictement décroissante, mais on la change de signe, ce qui la rend strictement croissante.
(5) Faux : $f(2) = f(-2) \neq f(0)$, donc elle ne peut pas croître partout.
(6) Vrai. Par contre, si on remplace x^2 par x, ça sera faux : $\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$, mais $\lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$.
(7) Faux : Si l'intérêt annuel est de 1200%, prendre 12 fois un intérêt de 100% revient à multiplier par 2^12, pas à multiplier par $1 + 12 \cdot 1 = 13$.

Exercice II.8.9.
(1) Un peu mon neveu.
(2) Ça ne marche pas : on se retrouve dans le deuxième cas avec $\sqrt{2}^3 = 2^{\frac{2}{3}}$
(3) On n'a a priori aucun moyen de savoir si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou non, donc quel cas nous donne la réponse : la démonstration est purement existentielle mais ne donne pas d'exemple.

Exercice II.8.10.



Rappel :

$$U_c(t) = V \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \text{ où } \tau = R \cdot C \text{ est appelée constante de temps du système.}$$

(1) Après $t = \tau$ secondes : $U_c(t) = V \cdot (1 - e^{-\tau/\tau}) = V \cdot (1 - e^{-1}) = 0.6321 \cdot V$, on a donc bien environ 63% de la charge maximale.
(2) Après $t = 5\tau$ secondes : $U_c(t) = V \cdot (1 - e^{-5\tau/\tau}) = V \cdot (1 - e^{-5}) = 0.9933 \cdot V$, donc il sera chargé à 99%.
(3) Faux : $U_c(t) \neq V$, mais cependant on arrive très proche de V assez rapidement.
(4) Si on remplace la résistance par une autre de valeur deux fois plus grande, alors le condensateur mettra deux fois **plus** de temps pour être chargé à 63%, c'est donc faux.
(5) Si on remplace le condensateur par un autre de valeur deux fois plus grande, alors le condensateur mettra deux fois plus de temps pour être chargé à 99%, en effet.

Pour la décharge avec $U_c(0) = V$, on rappelle :

$$U_c(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } \tau = R \cdot C.$$

(6) $U_c(5 \cdot \tau) = 0.0067 \cdot V$, pour être plus précis.
(7) Le courant dans la résistance **décroit** au cours du temps.
(8) Avec $R = 10k\Omega$ et $C = 10nF$, on a $\tau = 10^4 \cdot 10^{-8} = 10^{-4}$, donc après 0.1 millisecondes (donc $10^{-4}s$) le condensateur sera encore chargé à 36.79%.
(9) Avec $R = 10M\Omega = 10^7\Omega$ et $C = 0.01F = 10^{-2}F$ $\tau = 10^7 \cdot 10^{-2} = 10^5 s$. Or il y a $86'400 = 8.46 \cdot 10^4$ secondes dans une journée, le condensateur sera donc chargé encore à plus de $370V$ après $24h$, il est possible que ce ne soit pas très raisonnable de mettre les mains dessus.

Exercice II.8.11.

(1) 0	(2) 3	(3) $\frac{1}{2}$	(4) $\frac{3}{5}$
(5) $-\frac{2}{3}$	(6) -4	(7) -2	(8) $\frac{1}{4}$
(9) $\frac{1}{6}$	(10) $-\frac{3}{4}$	(11) 4	(12) -1

Exercice II.8.12.
(1) $\log_6\left(\frac{1}{36}\right) = -2$
(2) -6
(3) $-\frac{4}{5}$

Exercice II.8.13.
(1) $\log_3(x) = 5 \Leftrightarrow 3^5 = x \Leftrightarrow x = 243$
(2) $\log_8(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 8^{\frac{2}{3}} = x \Leftrightarrow x = 4$
(3) $\log_{0.01}(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0.01^{\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x = 0.1$
(4) $\log_x(125) = 3 \Leftrightarrow x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5$
(5) $\log_x(32) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x^{\frac{5}{3}} = 32 \Leftrightarrow x = 32^{\frac{3}{5}} = 8$
(6) $\log_x(0.0025) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 0.0025 \Leftrightarrow x = 0.05$
(7) $3\log_a(x) = 2\log_a(8) \Leftrightarrow \log_a(x^3) = \log_a(8^2)$
$\Leftrightarrow x^3 = 8^2 \Leftrightarrow x = 4$
(8) $\log(9x+5) - \log(x) = 1 \Leftrightarrow \log(\frac{9x+5}{x}) = \log(10)$
$\Leftrightarrow \frac{9x+5}{x} = 10 \Leftrightarrow 9x + 5 = 10x \Leftrightarrow x = 5.$

Exercice II.8.14.
(1) $\log_{11}(x) = 2 \Leftrightarrow 11^2 = x \Leftrightarrow x = 121$
(2) $\log_8(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 8^{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = 8^{\frac{1}{3}} = 2$
(3) $\log_x(729) = 6 \Leftrightarrow x^6 = 729 \Leftrightarrow x = 3$
(4) $\log(2x+4) - 2\log(x) = 2 \Leftrightarrow \log(\frac{2x+4}{x^2}) = \log(100) \Leftrightarrow 2x + 4 = 100x^2 \Leftrightarrow 100x^2 - 2x - 4 = 0$, ce qui est une équation du deuxième degré dont les solutions sont $x = \frac{1 \pm \sqrt{401}}{100}$. Mais $\frac{1-\sqrt{401}}{100}$ étant négatif, son log n'est pas défini, et donc ce n'est pas une solution de l'équation de base.
(5) $\log_a(x) = 3\log_a(2) - \log_a(3) - 2\log_a(5) \Leftrightarrow \log_a(x) = \log_a(\frac{2^3}{3 \cdot 5^2}) \Leftrightarrow x = \frac{2^3}{3 \cdot 5^2}$.
(6) $\log_x(243) = 5 \Leftrightarrow x^5 = 243 \Leftrightarrow x = 3.$

Exercice II.8.15.
(1) $2^x = 100 \Leftrightarrow x = \log_2(100) = \frac{\log(100)}{\log(2)} = 6.6439.$ (2) $e^{-\ln(x)} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\ln(x)}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.
(3) $e^x = \pi \Leftrightarrow x = \ln(\pi) = 1.1447.$ (4) $(3^{x-1})^3 = 9 \cdot 3^{x-2} \Leftrightarrow 3^{3x-3} = 3^{2+(x-2)} \Leftrightarrow 3x - 3 = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

(5) $27^{x+2} = 3^{5x+8} \Leftrightarrow 3^{3(x+2)} = 3^{5x+8} \Leftrightarrow 3x+6 = 5x+8 \Leftrightarrow x = -1$.
(6) $e^{\frac{6}{x}} = e^{x-1} \Leftrightarrow \frac{6}{x} = x-1 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}$.

Exercice II.8.16.
(1) $\log_a(x) = \log_a(16) + 2\log_a(3) - 2\log_a(2) - \dfrac{1}{2}\log_a(9) \Leftrightarrow \log_a(x) = \log_a\Big(\dfrac{16 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 9^{1/2}}\Big) \Leftrightarrow x = 12$
(2) $\log_a(x) = 4\log_a(5) + \log_a\Big(\dfrac{1}{5}\Big) - 3\log_a(3) + \dfrac{1}{3}\log_a(27) \Leftrightarrow \log_a(x) = \log_a\Big(\dfrac{5^4 \cdot \frac{1}{5} \cdot 27^{1/3}}{3^3}\Big) \Leftrightarrow x = \dfrac{5^3}{3^2} = \dfrac{125}{9}$.

Exercice II.8.17.
(1) Faux, c'est même le contraire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{\log_2(x)} = +\infty$.
(2) Faux : $2^x = (3^{\log_2(3)})^x = 3^{C\cdot x}$ pour $C = \log_2(3)$, mais ce n'est pas vrai que $2^x = C \cdot 3^x$, car la valeur en $x = 0$ entrainerait que $C = 1$, et c'est évidemment impossible.
(3) Vrai : $4^{\log_2(x)} = (2^{\log_2(x)})^2 = x^2$.
(4) Vrai : $3^{\log_2(x)} = (2^{\log_2(x)})^{\log_3(2)} = x^{\log_3(2)}$.
(5) Vrai. Pour s'en convaincre, on sait que $\ln(x) < 0$ lorsque $0 < x < 1$, donc le graphe de $\ln(x)$ commence en dessous de celui de $f(x) = x$, et le logarithme croit beaucoup plus lentement que cette fonction linéaire, donc il restera en dessous. (Il y a d'autres manières de procéder, évidemment.)
(6) Vrai : $2^n = 10^{\log(2)\cdot n} = 10^{0.301\cdot n}$. Or, il faut exactement $\lceil x \rceil$ chiffres pour écrire 10^x (si c'est un entier).
(7) Faux : un nombre de 43 chiffres est dans l'intervalle $[10^{42}, 10^{43}[$. Or, $10^{42} = 2^{\log_2(10)\cdot 42} = 2^{139.5}$, et $10^{43} = 2^{\log_2(10)\cdot 43} = 2^{142.8}$. Il faudra donc entre 140 et 143 bits pour écrire ce nombre.

Exercice II.8.18.
(1) Le voltage du condensateur au temps $t = 0$ est $V_0 = 0$, le condensateur se charge à travers $R_a + R_b$, donc $RC = 20 \cdot 10^3 \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} = 0.044$. On doit alors résoudre :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} \cdot V_{cc} &= (V_{cc} - 0) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{4.4\cdot 10^{-2}}}) + 0 = V_{cc} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{0.044}}), \qquad \text{donc} \\
\frac{2}{3} &= (1 - e^{-\frac{t}{0.044}}), \\
\frac{1}{3} &= e^{-\frac{t}{0.044}}, \\
-\ln(3) &= -\frac{t}{0.044}, \\
t &= 0.044 \cdot \ln(3) = 0.0483s
\end{aligned}$$

(2) Le condensateur se décharge à travers R_b, donc $RC = 10 \cdot 10^3 \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} = 0.022$, et $V_0 = \frac{2}{3} \cdot V_{cc}$. On doit alors résoudre :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \cdot V_{cc} &= \frac{2}{3} \cdot V_{cc} \cdot e^{-\frac{t}{0.022}}, \\
1 &= 2 \cdot e^{-\frac{t}{0.022}}, \\
-\ln(2) &= -\frac{t}{0.022}, \\
t &= 0.022 \cdot \ln(2) = 0.0152s
\end{aligned}$$

(3) Le voltage du condensateur au temps $t = 0$ est $V_0 = \frac{1}{3} \cdot V_{cc}$, le condensateur se charge à travers $R_a + R_b$, donc $RC = 20 \cdot 10^3 \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} = 0.044$. On doit alors résoudre :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} \cdot V_{cc} &= (V_{cc} - \frac{1}{3} \cdot V_{cc}) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{0.044}}) + \frac{1}{3} \cdot V_{cc}, \\
\frac{1}{3} \cdot V_{cc} &= \frac{2}{3} \cdot V_{cc} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{0.044}}), \\
\frac{1}{2} &= 1 - e^{-\frac{t}{0.044}}, \\
-\ln(2) &= -\frac{t}{0.044}, \\
t &= 0.044 \cdot \ln(2) = 0.0305s
\end{aligned}$$

(4) Après la première charge, le signal aura une période de $0.0305 + 0.0152 = 0.0457s$, donc une fréquence de $21.8818Hz$.

(5) Le rapport cyclique est de $0.0305/0.0457 = 66.6\%$.
(6) Avec les mêmes calculs qu'au point (2), mais avec R_bC à la place de 0.022, on arrive à l'équation :

$$t = R_bC \cdot \ln(2).$$

(7) Avec les mêmes calculs qu'au point (3) mais $(R_a + R_b)C$ à la place de 0.044, on arrive à l'équation :

$$t = (R_a + R_b)C \cdot \ln(2).$$

(8) La période sera de $(R_a + 2R_b)C \cdot \ln(2)$, donc la fréquence de $\dfrac{1}{\ln(2)} \cdot \dfrac{1}{(R_a + 2R_b)C} = \dfrac{1.44}{(R_a + 2R_b)C}$.
(9) Non, car le rapport cyclique est de $\frac{R_a+R_b}{R_a+2R_b}$, qui est toujours plus grand que 0.5.

Exercice III.4.1.

(a) -4	(b) 13	(c) $-3+i$
(d) $-1+5i$	(e) $2i$	(f) 1

Exercice III.4.2.
Les angles sont donnés en radians, bien entendu.

1. $1 + 2i = \sqrt{5}(\cos(1.11) + i\sin(1.11))$.
2. $-2 + 7i = \sqrt{53}(\cos(1.85) + i\sin(1.85))$.
3. $-12 - 5i = 13(\cos(-2.75) + i\sin(-2.75))$.
4. $-3i = 3(cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))$.

Exercice III.4.3.

1. $3 \cdot \Big(\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3)\Big) = \frac{3}{2} + i \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. $1 \cdot \Big(\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)\Big) = -1$.
3. $0 \cdot \Big(\cos(\pi/7) + i \cdot \sin(\pi/7)\Big) = 0$.
4. $10 \cdot \Big(\cos(4\pi/5) + i \cdot \sin(4\pi/5)\Big) = -8.09 + i \cdot 5.88$.

Exercice III.4.4.

$$\begin{aligned}
&\Big(r \cdot \Big(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)\Big)\Big) \cdot \Big(s \cdot \Big(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\Big)\Big) \\
&= r\cos(\theta) \cdot s\cos(\varphi) + r\cos(\theta) \cdot s \cdot i \cdot \sin(\varphi) + r \cdot i \cdot \sin(\theta) \cdot s\cos(\varphi) + r \cdot i \cdot \sin(\theta) \cdot s \cdot i \cdot \sin(\varphi) \\
&= rs\cos(\theta)\cos(\varphi) + i \cdot rs\cos(\theta)\sin(\varphi) + i \cdot rs\sin(\theta)\cos(\varphi) + i^2 \cdot rs\sin(\theta)\sin(\varphi) \\
&= rs \cdot \Big[\Big(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\Big) + i \cdot \Big(\cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi)\Big)\Big] \\
&= rs \cdot \Big[\cos(\theta + \varphi) + i \cdot \sin(\theta + \varphi)\Big]
\end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtient en utilisant les formules d'addition d'angles pour $\cos(\theta + \varphi)$ et $\sin(\theta + \varphi)$ vues en page 65 de ce polycopié.

Exercice III.4.5.
Les angles des coordonnées polaires sont donnés en radians. Je jongle un petit peu entre les notations avec cos, sin et l'exponentielle pour les coordonnées polaires.

1. $(2 + 3i) \cdot (4 - i) = 11 + 10i = \sqrt{221} \cdot \Big(\cos(0.74) + i \cdot \sin(0.74)\Big) = \sqrt{221}e^{0.74i}$.
2. $i \cdot (1 + i) = -1 + i = \sqrt{2} \cdot \Big(\cos\big(\frac{3\pi}{4}\big) + i \cdot \sin\big(\frac{3\pi}{4}\big)\Big) = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.

3.
$$\begin{aligned}
12\cdot\Big(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big)\cdot 5\cdot\Big(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Big) &= 12\cdot 5\cdot\Big(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big)\\
&= 60\cdot\Big(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\Big)\\
&= 60e^{i\pi/4}\\
&= \frac{60}{\sqrt{2}}+\frac{60}{\sqrt{2}}\cdot i.
\end{aligned}$$

(Notons en passant que $12\cdot\Big(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big)=12i$.)

4. Pour celui-ci, j'ai choisi de d'abord convertir $(1+i)$ en coordonnées polaires : $(1+i)=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Donc :
$$\begin{aligned}
\Big(2e^{i\pi/6}\Big)\cdot(1+i) &= 2e^{i\pi/6}\cdot\sqrt{2}e^{i\pi/4}\\
&= 2\sqrt{2}e^{i(\pi/6+\pi/4)}\\
&= 2\sqrt{2}e^{i\cdot 5\pi/12}\\
&= 0.73+2.73i=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i
\end{aligned}$$
La dernière égalité se trouve si on est capable de se rappeler ou de montrer que
$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4},\qquad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Exercice III.4.6.
A nouveau, les angles en coordonnées polaires sont en radians. Je jongle un petit peu entre les notations avec $\cos,\sin$ et l'exponentielle pour les coordonnées polaires.

1. $\dfrac{1}{i}=-i=1\cdot(1\cdot\Big(\cos(-\pi/2)+i\cdot\sin(-\pi/2)\Big))=e^{i(-\pi/2)}=e^{-i\pi/2}$.
2. $\dfrac{2+3i}{4-i}=\dfrac{5}{17}+\dfrac{14}{17}i=\dfrac{\sqrt{221}}{17}\cdot\Big(\cos(1.23)+i\cdot\sin(1.23)\Big)=\dfrac{\sqrt{221}}{17}\cdot e^{1.23i}$.
3. $\dfrac{2i}{1+i}=1+i=\sqrt{2}\cdot\Big(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\Big)=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
4. $\dfrac{-2-5i}{-i}=5-2i=\sqrt{29}\cdot\Big(\cos(-0.38)+i\cdot\sin(-0.38)\Big)=\sqrt{29}\cdot e^{-0.38i}$.
5. $\dfrac{3e^{i\pi/4}}{5e^{i\pi/4}}=\dfrac{3}{5}\cdot e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})}=\dfrac{3}{5}\cdot e^{0}=\dfrac{3}{5}$.
6.
$$\begin{aligned}
\frac{2(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))}{1+i} &= \frac{2(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))}{\sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))}\\
&= \sqrt{2}\cdot\Big(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\Big)=\sqrt{2}\cdot\Big(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\Big)\\
&= 1.37-0.37i=\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot i.
\end{aligned}$$
La dernière égalité se trouve si on est capable de se rappeler ou de montrer (en utilisant l'exercice II.7.17 de trigonométrie, par exemple) que
$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}},\qquad \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}.$$
Exercice bonus : montrer que $\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=1+\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$.

Exercice III.4.7.
Sans correction, voyons.

Exercice III.4.8.
Quand on multiplie par $1+i$, le module est multiplié par $\sqrt{2}$ et on ajoute $\pi/4$ à l'angle, car $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Donc, si on le fait 6 fois, on multiplie le module par $(\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$ et on ajoute $6\cdot\pi/4 = 3\pi/2$ à l'angle. (Ce qui revient à multiplier par $8e^{3\pi/2} = -8i$). Donc :
(a) $8e^{3\pi/2} = -8i$.
(b) $-2i\cdot(-8i) = -16$.

Exercice III.4.9.
$|z\cdot u| = \sqrt{(z\cdot u)\cdot(\overline{z\cdot u})} = \sqrt{z\cdot u\cdot\overline{z}\cdot\overline{u}} = \sqrt{z\cdot\overline{z}\cdot u\cdot\overline{u}} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}\cdot\sqrt{u\cdot\overline{u}} = |z|\cdot|u|$.

Exercice III.4.10.

1. $z^2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$. On met $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ en coordonnées polaires : $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i = 2e^{-i\cdot 3\pi/4}$. Donc :
$$z^2 = 2e^{-i\cdot 3\pi/4} \quad\Leftrightarrow\quad z=\sqrt{2}e^{i\cdot(-3\pi/8)} \text{ ou } z=\sqrt{2}e^{i\cdot(-3\pi/8+\pi)}$$
ce qui donne les deux solutions : $z_1=\sqrt{2}e^{-i\cdot 3\pi/8}$ et $z_2=\sqrt{2}e^{i\cdot 5\pi/8}$.
2. $z^3 = 27\cdot e^{-i\pi/4}$. Ici, il commence à devenir fastidieux d'écrire individuellement chaque solution, notons-les en groupe ainsi :
$$z_k = 3\cdot e^{i\cdot(\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{2\pi}{3})},\quad k=0,1,2.$$
3. $z^{17} = e^{i\pi/3}$. Comme avant :
$$z_k = e^{i\cdot(\frac{\pi}{51}+k\cdot\frac{2\pi}{17})},\quad k=0,1,2,\ldots,16.$$
4. Comme $i=e^{i\pi/2}$ et $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, les solutions sont :
$$z_k = e^{i\cdot(\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2})},\quad k=0,1,2,3.$$

Exercice III.4.11.

1. z^2-2z+4 : $\Delta=-12$, donc les deux solutions de $w^2=\Delta$ sont $2\sqrt{3}\cdot i$ et $-2\sqrt{3}\cdot i$. On a donc
$$z=\frac{2\pm 2\sqrt{3}\cdot i}{2} = 1\pm\sqrt{3}\cdot i.$$
2. $z^3-5z^2+10z = z(z^2-5z+10)$. La première solution est $z=0$. Pour les autres, $\Delta=-15$, donc de la même manière qu'au point précédent, on obtient
$$z=\frac{5\pm\sqrt{15}\cdot i}{2}.$$
3. $z^3+(1-i)z^2+(2-2i)z-(4+4i)$, sachant que $1+i$ est une racine : On divise le polynôme par $(z-(1+i))$, et on obtient
$$z^3+(1-i)z^2+(2-2i)z-(4+4i) = (z-(1+i))(z^2+2z+4).$$
Pour z^2+2z+4, $\Delta=-12$, et comme avant on obtient donc les solutions $z=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{3}\cdot i}{2} = -1\pm\sqrt{3}\cdot i$.
4. $\Delta = (1-i)^2-4\cdot 1\cdot(2+3i) = -2i-8-12i = -8-14i = 16.12\cdot e^{-2.09i}$ (en coordonnées polaires). Donc, les deux "racines" de Δ sont $\sqrt{16.12}\cdot e^{-1.04i} = 2.02-3.47i$ et $\sqrt{16.12}\cdot e^{(-1.04+\pi)i} = -2.02+3.47i$. Nos deux solutions de l'équation sont donc :
$$z_1=\frac{-(1-i)+(2.02-3.47i)}{2} = 0.51-1.24i \qquad z_2=\frac{-(1-i)+(-2.02+3.47i)}{2} = 1.51-2.24i.$$

Exercice III.4.12.
On veut donc démontrer :
Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est un polynôme dont tous les coefficients a_k $(k = 0, \ldots, n)$ sont dans $\mathbb{R}$ et que $w = a + ib$ est une racine *dans* $\mathbb{C}$ de $P(x)$, alors $\overline{w}$ est aussi une racine de $P(x)$.

On sait que w est une racine de $P(x)$, donc :

$$P(w) = a_n w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \cdots + a_1 w + a_0 = 0.$$

Mais comme les coefficients sont réels, on a $\overline{a_k} = a_k$ pour chaque $k = 0, 1, \ldots, n$. Comme la conjugaison complexe commute avec l'addition et la multiplication, on a que

$$\overline{a_k \cdot w^k} = \overline{a_k} \cdot \overline{w^k} \ = a_k \overline{w}^k,$$

et donc :

$$\begin{aligned} P(\overline{w}) &= a_n \overline{w}^n + a_{n-1}\overline{w}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{w} + a_0 \\ &= a_n \overline{w^n} + a_{n-1}\overline{w^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{w} + a_0 \\ &= \overline{a_n w^n} + \overline{a_{n-1}w^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 w} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \cdots + a_1 w + a_0} \\ &= \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

En fait, on a même montré mieux : si tous les coefficients sont réels, alors $P(\overline{w}) = \overline{P(w)}$.

Exercice III.4.13.
Comme $1 + i$ est une racine de $z^2 - 2z + 2$ qui est un polynôme à coefficients réels, l'autre solution est son conjugué complexe $1 - i$..

Exercice III.4.14.

1. $f(z) = z + 1$, $K(f) = \varnothing$.
2. $f(z) = 2z$, $K(f) = \{0\}$.
3. $f(z) = 2i \cdot z$, $K(f) = \{0\}$.
4. $f(z) = i \cdot z$, $K(f) = \mathbb{C}$.
5. $f(z) = z^2$, $K(f) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 1\}$.
6. $f(z) = 2z^2$, $K(f) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq \frac{1}{2}\}$.
7. $f(z) = z^2 - 2$, $K(f) = \{a + ib \in \mathbb{C} \,:\, a \in [-2, 2],\, b = 0\}$, mais pour le voir il faut connaître la théorie des changements de coordonnées conformes.

A. Séries de Fourier et signaux réels.

Exercice IV.5.1.

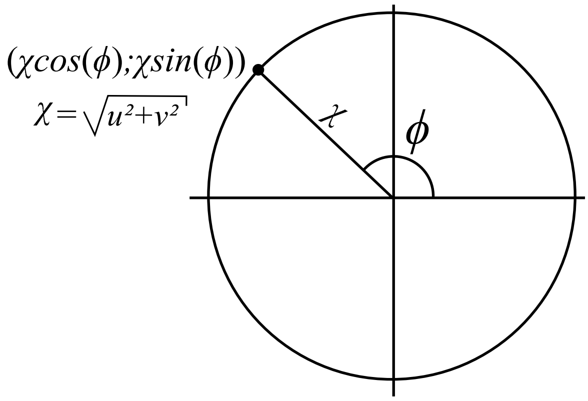
(a) $s(t) = \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t) : T = \frac{1}{10}s, \quad f = 10Hz.$
(b) $s(t) = \sin(\frac{\pi \cdot t}{2}) : T = 4s, \quad f = \frac{1}{4}Hz.$
(c) $s(t) = 5\cos(3t) : T = \frac{2\pi}{3}s, \quad f = \frac{3}{2\pi}Hz.$
(d) $s(t) = 5\sin(110\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}) : T = \frac{1}{55}s, \quad f = 55Hz.$
(e) $s(t) = 3\sin(2\pi \cdot t - \frac{\pi}{4}) : T = 1s, \quad f = 1Hz.$
(f) $s(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}t - \frac{3\pi}{2}) : T = 6s, \quad f = \frac{1}{6}Hz.$

Exercice IV.5.2.

1.

$$\begin{aligned} \chi \cdot \sin(\alpha + \phi) &= \chi \cos(\alpha)\sin(\phi) + \chi\cos(\phi)\sin(\alpha) \\ &= u \cdot \cos(\alpha) + v \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

On doit donc avoir $\chi \cdot \sin(\phi) = u$ et $\chi \cdot \cos(\phi) = v$. En se rappelant les formules trigonométriques basiques, on en conclut que si on pose $\chi = \sqrt{u^2+v^2}$ et on choisit ϕ tel que $\cos(\phi) = \frac{v}{\chi}$ et $\sin(\phi) = \frac{u}{\chi}$, on a bien ce qu'on veut. (En gros : on prend $\phi = \pm\arccos(\frac{v}{\chi})$, en choisissant le même signe que u.)



2.

$$\begin{aligned} c\cdot\cos(\alpha+\theta_1) + d\cdot\sin(\alpha+\theta_2) &= c\cdot\big(\cos(\alpha)\cos(\theta_1) - \sin(\alpha)\sin(\theta_1)\big) + d\cdot\big(\cos(\alpha)\sin(\theta_2) + \sin(\alpha)\cos(\theta_2)\big) \\ &= \big(c\cos(\theta_1) + d\sin(\theta_2)\big)\cdot\cos(\alpha) + \big(d\cos(\theta_2) - c\sin(\theta_1)\big)\cdot\cos(\alpha) \end{aligned}$$

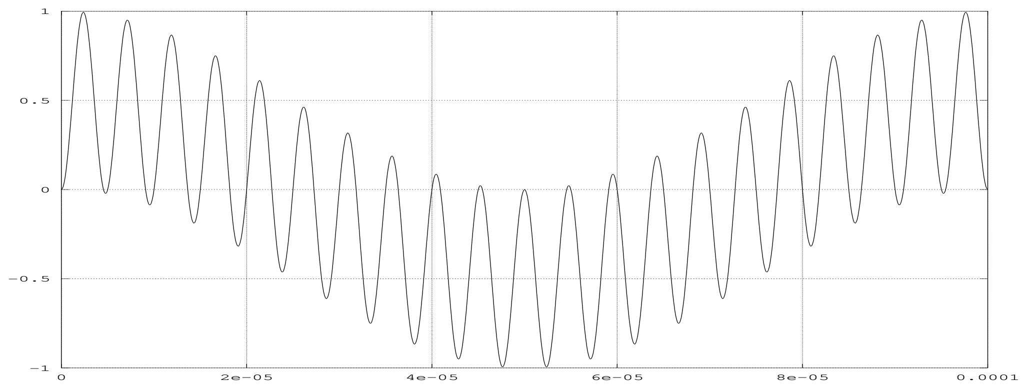
En prenant $u = c\cos(\theta_1) + d\sin(\theta_2)$ et $v = d\cos(\theta_2) - c\sin(\theta_1)$, on trouve χ et ϕ comme dans le point précédent.

3. Un signal de la forme $u\cdot\cos(2\pi\cdot f\cdot t+\varphi_1) + v\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t+\varphi_2)$ peut s'écrire selon le point précédent comme $\chi\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t+\phi)$, c'est donc un signal élémentaire.

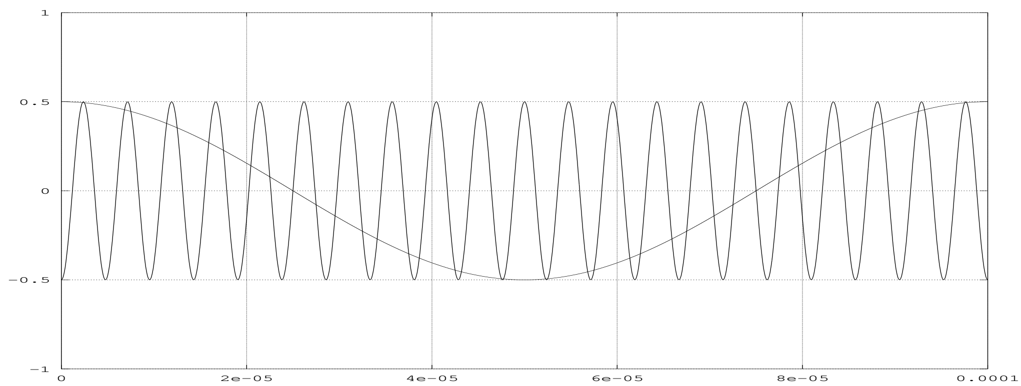
Exercice IV.5.3. Le mélangeur hétérodyne.

(2) $100kHz$ et $110kHz$

(3) Le signal produit ci dessous



est la 'superposition' des signaux à $110-100 = 10kHz$ et à $110+100 = 210kHz$ représentés ensemble ici :



Plus précisément, c'est la somme (enfin, différence) suivante :

$$\frac{1}{2}\Big(\cos(2\pi\cdot 10'000\cdot t) - \cos(2\pi\cdot 210'000\cdot t)\Big).$$

(4) Avec un filtre passe-bas de fréquence de coupure $20kHz$, la composante à $210kHz$ disparaît, et on se retrouve uniquement avec la composante sinusoïdale à $10kHz$. Avec un filtre passe-haut de même fréquence de coupure, c'est exactement le contraire.
(5) Signal sinusoïdal : $50kHz$, signal carré : $60kHz$.
(6) Le signal carré peut se décomposer en somme de Fourier

$$q(t) = \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \cdot \sin(2\pi \cdot k \cdot 60'000 \cdot t + \phi_k).$$

Lorsqu'on fait le produit avec le signal sinusoïdal à $50kHz$, chaque terme de la somme se décomposera en la superposition d'un signal (co)sinusoïdal à $k \cdot 60'000 - 50'000$ Herz et d'un autre à $k \cdot 60'000 + 50'000$ Herz, pour $k \geq 0$. Si on applique un filtre passe-bas de fréquence de coupure $20kHz$ à ce produit $p(t) \cdot q(t)$, on n'aura que la composante correspondant à $1 \cdot 60'000 - 50'000 = 10'000Hz$ qui restera. On obtiendra donc un signal (co)sinusoïdal à $10kHz$.

Exercice IV.5.4. Principe de fonctionnement du Theremin

1. L'oscillateur du bas aura une fréquence de $74'074Hz$, celui du haut variera entre $73'340$ et $74'074$ Herz.
2. Notons par f_{haut} la fréquence de l'oscillateur du haut. Comme vu au cours, les fréquences apparaissant dans le produit sont
– $k \cdot 74'074$ pour $k \in \mathbb{N}$.
– $\ell \cdot f_{haut}$ pour $\ell \in \mathbb{N}$.
– $|k \cdot 74'074 - \ell \cdot f_{haut}|$, pour $k, \ell \geq 1$.
– $k \cdot 74'074 + \ell \cdot f_{haut}$, pour $k, \ell \geq 1$.
De manière générale, plus k et ℓ sont grands, plus l'amplitude de la fréquence correspondante est petite. Si on cherche des fréquences assez petites, les plus simples à trouver sont de la forme $|k \cdot 74'074 - \ell \cdot f_{haut}|$ lorsque $k = \ell$. Si f_{haut} est minimal, donc de $73'340Hz$, alors on obtiendra tous les multiples entiers de $74'074 - 73'340 = 734Hz$. Cependant, des "produits d'intermodulation" de fréquence assez basse peuvent apparaître aussi, par exemple $|100 \cdot 74'074 - 101 \cdot 73'340| = 60Hz$. Mais comme k et ℓ sont assez grands, on espère que l'amplitude de cette composante (et des autres produits d'intermodulation) sera négligeable.
3. Le Theremin produit donc un son compliqué contenant de multiples fréquences, mais la composante principale aura entre 0 et $734Hz$. Il faut donc un filtre passe bas au delà de $734Hz$, et en déçà de $20Khz$. Suivant le choix, le son sera différent. Donc, $C2$ devrait être pris entre $9.86 \cdot 10^{-9}F = 9.86nF$ et $3.62 \cdot 10^{-7}F = 362nF$.

Exercice IV.5.5.
On a donc :

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\big) \qquad (\star)$$

(a) $s(t) = 3 \cdot \sin(2\pi \cdot 150 \cdot t + \pi/4)$.
(b) Les coefficients des trois premiers termes de la série correspondent à $130 \cdot 1 = 130Hz$, $130 \cdot 2 = 260Hz$ et $130 \cdot 3 = 390Hz$. On a donc :

$$r(t) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 130 \cdot t + \pi/4) + 4 \cdot \sin(2\pi \cdot 260 \cdot t - \pi/4) + 1 \cdot \sin(2\pi \cdot 390 \cdot t).$$

(c) On effectue la multiplication $r(t) \cdot s(t)$. En distribuant, grâce à $(\star)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
r(t) \cdot s(t) = \; & 6 \cdot \sin(2\pi \cdot 130 \cdot t + \pi/4) \cdot \sin(2\pi \cdot 150 \cdot t + \pi/4) \\
& + 12 \cdot \sin(2\pi \cdot 260 \cdot t - \pi/4) \cdot \sin(2\pi \cdot 150 \cdot t + \pi/4) \\
& + 3 \cdot \sin(2\pi \cdot 390 \cdot t) \cdot \sin(2\pi \cdot 150 \cdot t + \pi/4) \\
= \; & 3\big(\cos(2\pi \cdot (130 - 150) \cdot t + \pi/4 - \pi/4) - \cos(2\pi \cdot (130 + 150) \cdot t + \pi/4 + \pi/4)\big) \\
& + 6\big(\cos(2\pi \cdot (260 - 150) \cdot t - \pi/4 - \pi/4) - \cos(2\pi \cdot (260 + 150) \cdot t - \pi/4 + \pi/4)\big) \\
& + \frac{3}{2}\big(\cos(2\pi \cdot (390 - 150) \cdot t - \pi/4) - \cos(2\pi \cdot (390 + 150) \cdot t + \pi/4)\big) \\
= \; & 3\big(\cos(2\pi \cdot 20 \cdot t) - \cos(2\pi \cdot 280 \cdot t + \pi/2)\big) \\
& + 6\big(\cos(2\pi \cdot 110 \cdot t - \pi/2) - \cos(2\pi \cdot 410 \cdot t)\big) \\
& + \frac{3}{2}\big(\cos(2\pi \cdot 240 \cdot t - \pi/4) - \cos(2\pi \cdot 540 \cdot t + \pi/4)\big)
\end{aligned}$$

(On a utilisé $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ pour transformer $\cos(2\pi \cdot (-20) \cdot t)$ en $\cos(2\pi \cdot 20 \cdot t)$.) On a donc des signaux élémentaires (ici, des cosinus) dont les fréquences et amplitudes sont, dans l'ordre croissant des féquences :

$$20Hz, 3; \quad 110Hz, 6; \quad 240Hz, \frac{3}{2}; \quad 280Hz, 3; \quad 410Hz, 6; \quad 540Hz, \frac{3}{2}.$$

B. Séries de Fourier et signaux complexes.

Exercice IV.5.6.
Notons que $e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(x) - i \cdot \sin(x)$. Donc, $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$ et $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \cdot \sin(x)$. Les deux égalités demandées s'ensuivent (si on se rappelle que $1/i = -i$).

Exercice IV.5.7.

$$\begin{aligned} A\cos(\alpha) + B\sin(\alpha) &= A \cdot \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) + B \cdot \left(\frac{i(e^{-ix} - e^{ix})}{2}\right) \\ &= \frac{A}{2} \cdot e^{ix} + \frac{A}{2} \cdot e^{-ix} + \frac{iB}{2} \cdot e^{-ix} - \frac{iB}{2} \cdot e^{ix} \\ &= \frac{A - iB}{2} \cdot e^{i\alpha} + \frac{A + iB}{2} \cdot e^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

Exercice IV.5.8.

$$\begin{aligned} z \cdot w(t) &= s \cdot e^{i\varphi} \cdot r \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \\ &= s \cdot r \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} \\ &= s \cdot r \cdot e^{i \cdot (2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)}. \end{aligned}$$

Cela revient à avoir un angle de φ au temps $t = 0$, donc bien un déphasage de φ. L'amplitude est bien sûr multipliée par s.
Si z est donnée sous forme cartésienne $a + ib$, on a vu précédemment que le module de z est donnée par $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ et son angle par $\pm \arccos(a/s)$, avec le signe $\pm$ le même que celui de b. On a donc bien une amplitude de multipliée par $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ et un déphasage de $\pm \arccos(a/s)$.

Exercice IV.5.9.
(1) $(1 + i) \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot 100 \cdot t} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot 100 \cdot t} = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot (2\pi \cdot 100 \cdot t + \pi/4)}$:
Fréquence $100Hz$, amplitude $\sqrt{2}$, déphasage $\pi/4$, sens positif.
(2) $(1 - i) \cdot 3 \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot 125 \cdot t} = \sqrt{2} \cdot e^{-i\pi/4} \cdot 3 \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot 125 \cdot t} = 3\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot (2\pi \cdot 125 \cdot t - \pi/4)}$:
Fréquence $125Hz$, amplitude $3\sqrt{2}$, déphasage $-\pi/4$, sens positif.
(3) $(-1 + \sqrt{3}i) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot 10'000 \cdot t} = 2 \cdot e^{i \cdot 2\pi/3} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot 10'000 \cdot t} = e^{-i(\cdot 2\pi \cdot 10'000 \cdot t - 2\pi/3)}$:
Fréquence $10'000Hz = 10kHz$, amplitude 1, déphasage $2\pi/3$, sens négatif.
(4) $2i \cdot 3 \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot t} = 2e^{i\pi/2} \cdot 3 \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot t} = 6 \cdot e^{-i(\cdot 2\pi \cdot 2 \cdot t - \pi/2)}$:
Fréquence $2Hz$, amplitude 6, déphasage $\pi/2$, sens négatif.

Exercice IV.5.10.
Soit $s(t) = 4\sin(2\pi \cdot 125 \cdot t + \pi/6)$.
(a) Grâce à la formule $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$ (ou à celles du théorème en page 93), on a :

$$\begin{aligned} s(t) =& 4 \cdot \sin(\pi/6) \cdot \cos(2\pi \cdot 125 \cdot t) + 4 \cdot \cos(\pi/6) \cdot \sin(2\pi \cdot 125 \cdot t) \\ =& 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot 125 \cdot t) + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(2\pi \cdot 125 \cdot t) \\ =& 2 \cdot \cos(2\pi \cdot 125 \cdot t) + 2\sqrt{3} \cdot \sin(2\pi \cdot 125 \cdot t). \end{aligned}$$

(b) En utilisant l'exercice IV.5.7 ou l'équation (c_n et a_n, b_n) page 99 et en partant de (a) :

$$\begin{aligned} s(t) = 2\cdot\cos(2\pi\cdot 125\cdot t) + 2\sqrt{3}\cdot\sin(2\pi\cdot 125\cdot t) &= \frac{2-2\sqrt{3}\cdot i}{2}\cdot e^{i2\pi\cdot 125\cdot t} + \frac{2+2\sqrt{3}\cdot i}{2}\cdot e^{-i2\pi\cdot 125\cdot t} \\ &= (1-\sqrt{3}i)e^{i2\pi\cdot 125\cdot t} + (1+\sqrt{3}i)e^{-i2\pi\cdot 125\cdot t}. \end{aligned}$$

En utilisant l'exercice IV.5.6 et la définition de $s(t)$:

$$\begin{aligned} 4\sin(2\pi\cdot 125\cdot t+\pi/6) =& 4\cdot\left(\frac{i\left(e^{-i(2\pi\cdot 125\cdot t+\pi/6)} - e^{i(2\pi\cdot 125\cdot t+\pi/6)}\right)}{2}\right) \\ =& \quad 2i\cdot e^{-i(2\pi\cdot 125\cdot t+\pi/6)} - 2i\cdot e^{i(2\pi\cdot 125\cdot t+\pi/6)} \\ =& \quad 2i\cdot e^{-i\pi/6}e^{-i2\pi\cdot 125\cdot t} - 2i\cdot e^{i\pi/6}e^{i2\pi\cdot 125\cdot t} \\ =& \quad 2i(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)e^{-i2\pi\cdot 125\cdot t} - 2i(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)e^{i2\pi\cdot 125\cdot t} \\ =& \quad (1+\sqrt{3})e^{-i2\pi\cdot 125\cdot t} + (1-\sqrt{3})e^{i2\pi\cdot 125\cdot t}. \end{aligned}$$

et le miracle est que l'on ne se soit pas planté dans les calculs en trouvant les deux fois la même chose. Ou alors on a fait deux fois la même erreur.

Exercice IV.5.11.
Par l'exercice IV.5.6, on a que

$$\sin(2\pi\cdot f\cdot t+\phi) = \frac{1}{2}\cdot(i\cdot e^{-i(2\pi\cdot f\cdot t+\phi)} - i\cdot e^{i(2\pi\cdot f\cdot t+\phi)})$$

Pour connaître le déphasage, la fraction $\frac{1}{2}$ n'a pas d'importance, on peut donc l'ôter, et on a :

$$\begin{aligned} i\cdot e^{-i(2\pi\cdot f\cdot t+\phi)} - i\cdot e^{i(2\pi\cdot f\cdot t+\phi)} &= e^{i\pi/2}\cdot e^{-i(2\pi\cdot f\cdot t+\phi)} + e^{-i\pi/2}\cdot e^{i(2\pi\cdot f\cdot t+\phi)} \\ &= e^{i\pi/2}e^{-i\phi}\cdot e^{-i(2\pi\cdot f\cdot t)} + e^{-i\pi/2}e^{i\phi}\cdot e^{i(2\pi\cdot f\cdot t)} \quad = e^{i(\pi/2-\phi)}\cdot e^{-i(2\pi\cdot f\cdot t)} + e^{-i(\pi/2-\phi)}\cdot e^{i(2\pi\cdot f\cdot t} \end{aligned}$$

On voit donc bien que l'angle des coefficients complexes est le déphasage de la forme sinus / déphasage $-\pi/2$.

Exercice IV.5.12.
On utilise la formule de l'exercice IV.5.8 pour tout transformer, et on se rend compte qu'on retombe *quasiment exactement* sur les choses demandées dans les points (1) (2) (4) points de l'exercice IV.5.9.
(1)

$$\begin{aligned} (2\cdot\cos(2\pi\cdot 100\cdot t) - 2\cdot\sin(2\pi\cdot 100\cdot t) &= \frac{(2+2i)}{2}\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot 100\cdot t} + \frac{(2-2i)}{2}\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot 100\cdot t} \\ &= (1+i)\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot 100\cdot t} + (1-i)\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot 100\cdot t} \\ &= \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot(2\pi\cdot 100\cdot t+\pi/4)} + \sqrt{2}\cdot e^{-i\cdot(2\pi\cdot 100\cdot t+\pi/4)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (2\cdot\cos(2\pi\cdot 125\cdot t) + 2\cdot\sin(2\pi\cdot 125\cdot t) &= \frac{(2-2i)}{2}\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot 125\cdot t} + \frac{(2+2i)}{2}\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot 125\cdot t} \\ &= (1-i)\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot 125\cdot t} + (1+i)\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot 125\cdot t} \\ &= \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot(2\pi\cdot 125\cdot t-\pi/4)} + \sqrt{2}\cdot e^{-i\cdot(2\pi\cdot 125\cdot t-\pi/4)} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} -4\sin(2\pi\cdot 2\cdot t) &= \frac{0+4i}{2}\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot 2\cdot t} + \frac{0-4i}{2}\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot 2\cdot t} \\ &= 2i\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot 2\cdot t} - 2i\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot 2\cdot t} \\ &= 2\cdot e^{i(\cdot 2\pi\cdot 2\cdot t+\pi/2)} + 2\cdot e^{-i(\cdot 2\pi\cdot 2\cdot t+\pi/2)} \end{aligned}$$

Exercice IV.5.13.
On rappelle :

$$s(t) = 5\cdot\sin(2\pi\cdot 110\cdot t+\pi/3) + 2\cdot\sin(2\pi\cdot 330\cdot t-\pi/2) + 40\cdot\sin(2\pi\cdot 880\cdot t+2\pi/3)$$

(1) $s(t)$ est de fréquence $110Hz$, comme le premier membre de la liste, car les deux autres sont des multiples entiers.
(2) Les indices des coefficients de Fourier qui ne sont pas égaux à 0 sont 1, 3 et 8. (car $\frac{330}{110} = 3$, $\frac{880}{110} = 8$).
(3) Il s'agit du terme

$$\underbrace{40}_{\chi_8} \cdot \sin(2\pi \cdot 880 \cdot t + \underbrace{2\pi/3}_{\phi_8}).$$

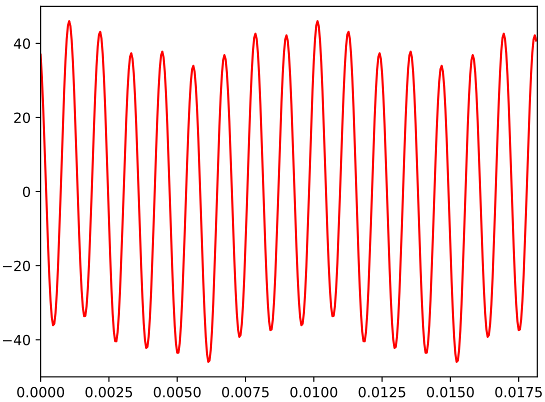
On peut passer par la version cosinus-sinus, en utilisant la formule (a_k, b_k et χ_k, ϕ_k) en page 99, par exemple : $a_8 = 40 \cdot \sin(2\pi/3) = 20\sqrt{3}$, $b_8 = 40 \cdot \cos(2\pi/3) = -20$, puis on utilise ($c_n$ et a_n, b_n) sur la même page pour en conclure que

$$c_8 = \frac{1}{2} \cdot (20\sqrt{3} + 20i) = 10\sqrt{3} + 10i, \quad c_{-8} = \frac{1}{2} \cdot (20\sqrt{3} - 20i) = 10\sqrt{3} - 10i,$$

donc

$$40 \cdot \sin(2\pi \cdot 880 \cdot t + 2\pi/3) = (10\sqrt{3} + 10i) \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot 880 \cdot t} + (10\sqrt{3} - 10i) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot 880 \cdot t}.$$

(4) La fréquence que l'on aura tendance à entendre le plus dans ce signal est celle à $880Hz$, car elle est bien plus forte que les autres à $110Hz$ et à $330Hz$. Cela se voit assez bien sur le graphique suivant, qui représente le signal sur deux périodes :



(5) Si on fait subir un filtre passe-bas très violent de fréquence de coupure $500Hz$ à ce signal, il ne reste plus que les deux premiers termes, à $110Hz$ et $330Hz$.

Exercice IV.5.14.
(1) $\sum_{k=1}^{10} (k+1) = \sum_{k=0}^{9} (k+2)$: Si on va de 0 à 9 il faudra ajouter 1 de plus à k que lorsqu'on va de 1 à 10.
(2) $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k}{10} + \frac{k+10}{10} \right) = \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{10}$: Quand k va de 1 à 10, alors $k+10$ va de 11 à 20. On peut donc couper en deux sommes :
$\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{10} + \sum_{k=11}^{20} \frac{k}{10}$
que l'on peut alors regrouper en une seule qui va de 1 à 20.
(3) $e^0 + \sum_{k=1}^{10} \left(e^k + e^{-k}\right) = \sum_{k=-10}^{10} e^k$: La somme qui va de -10 à -1 chope tous les k négatifs, lorsque $k = 0$ on chope e^0, et quand k va de 1 à 10 on chope le reste.

Exercice IV.5.15.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi n \cdot f \cdot t) s(t) dt - i \cdot \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi n \cdot f \cdot t) s(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \cdot \left(\int_{-T/2}^{T/2} \left(\cos(2\pi n \cdot f \cdot t) - i \sin(2\pi n \cdot f \cdot t) \right) s(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi n \cdot f \cdot t} s(t) dt
\end{aligned}$$

Exercice IV.5.16.
Cas $n > 0$, donc $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$. On a alors :

$$|c_n|^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2) = |c_{-n}|^2, \quad c_n \cdot c_{-n} = c_n \cdot \overline{c_n} = |c_n|^2.$$

Cas $n < 0$: idem.
Cas $n = 0$: Dans ce cas, $c_0 = a_0$, donc on a en fait $|c_0|^2 = |a_0|^2$.

Exercice IV.5.17.
Le deuxième a subi un filtre passe-bas, le troisième un filtre passe-bande, et le troisième un filtre passe-haut.

C. Séries de Fourier et signaux discrets

Exercice IV.5.18.
On a un donc signal sonore que l'on a enregistré pendant 3.7 secondes (un milipoil plus, en fait) à une fréquence d'échantillonnage de $11'025Hz$, obtenant ainsi une liste S.
(a) $3.7 * 11'025 = 40'792.5$, que l'on arrondit à $40'793$, vu qu'il y a un tout petit peu plus que $3.7s$.
(b) Comme on a enregistré $3.7s$, le n-ème coefficient de Fourier correspond à une fréquence de $n/3.7Hz$. Donc, $C[120]$ correspond à $32.43Hz$. Comme $C[40'012]$ est au delà de la moitié de la liste (qui se trouve à 20396.5), il est égal à $C[40'012 - 40'793] = C[-781]$, donc il correspond à $781/3.7 = 211.08Hz$.
(c) Le coefficient correspondant à $150Hz$ est celui qui donne 150 losrqu'on le divise par 3.7. Comme $150 \cdot 3.7 = 555$, il s'agit des coefficients $C[555]$ et $C[40'793 - 555] = C[40'238]$.
(d) Comme $20'693 - 40'793 = -20'100$, $C[20'693] = C[-20'100]$. Vu qu'il s'agit d'un signal sonore, il doit être à valeurs réelles, donc $C[n] = \overline{C[-n]}$ pour tous les n, donc $C[20'100]$ et $C[20'693]$ sont le conjusgué complexe l'un de l'autre.
(e) $C[20'100]$ correspond à une fréquence de $20'100/3.7 = 5432.43Hz$, c'est donc dans le spectre audible. On risque d'altérer (très légèrement) le signal si on le met à 0. De plus, si on ne met que $C[20'100]$ à 0 et *pas* $C[20'693] = C[-20'100]$, ces deux coefficients ne seront plus les conjugués complexes l'un de l'autre, et on obtiendra des valeurs *complexes* lorsque l'on effectuera la IFFT. Celà pourrait s'avérer problématique (même si les parties imaginaires seraient sans doute fort petites, car amenées par un seul coefficient).
(f) Si on prend la liste C et on ajoute au milieu M zéros et que l'on effectue la IFFT ensuite, on obtiendra une liste temporelle deux fois plus longue, donc un son de $7.4s$. Le n-ème coefficient de Fourier, qui correspondait auparavant à la fréquence $n/3.7Hz$, correspond maintenant à la fréquence 2 fois plus petite $n/7.4Hz$. Donc, c'est comme si on avait faisait passer le message deux fois plus lentement, toutes les fréquences sont divisées par 2, et le signal est deux fois plus long.

Exercice V.1.
(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$ (c) $\lim_{n\to+\infty} \cos(1/n) = 1$
(d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2 + \cos(n)} = \frac{1}{2}$ (e) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^2 + 100'000} = +\infty$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0$

Exercice V.2.
(a) $\lim_{n\to+\infty} n \cdot e^{-n} = 0$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \sin(n) \cdot 2^n$ n'existe pas.
(c) $\lim_{n\to+\infty} n^2 - 2^n = -\infty$ (d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{n^2} = \frac{1}{2}$

Exercice V.3.
Les deux ont e pour limite, mais la première converge très lentement, alors que la deuxième beaucoup plus vite.

Exercice V.4.
(a) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$ (b) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x-2} = +\infty$ (c) $\lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6$
(d) $\lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6$ (e) $\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6$ (f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$
(g) $\lim_{x\to -\infty} e^x \cdot x = \lim_{x\to +\infty} e^{-x} \cdot (-x) = 0$
(h)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = 0.\end{aligned}$$

Exercice V.5.
Vrai ou faux ?

1. Faux : $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ est strictement croissante et positive dans $[0, +\infty[$ mais $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
2. Vrai si $b > 0$, mais pas forcément si $b = 0$: prendre $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$. On a bien $\lim_{x\to 0} f(x) = b = 0$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$, mais $\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = 1 \neq +\infty$.
3. Faux : avec $f(x) = x \cdot \cos(1/x)$ on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, mais pour $f(\frac{1}{2k\pi}) > 0$ et $f(\frac{1}{(2k+1)\pi} < 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Vrai.
5. Vrai.

Exercice V.6.
$f(x) = \frac{(50+x^{20})^2 - 2'500}{x^{20}} = \frac{100x^{20}+x^{40}}{x^{20}}$, qui se simplifie en $100 + x^{20}$ *lorsque* $x \neq 0$. Pourtant, lorsqu'on calcule avec certaines calculatrices, on obtient le résultat 0 lorsque x est très petit. Cela vient du fait que si x est de l'ordre de 10^{-1} (par exemple), alors x^{20} est de l'ordre de 10^{-20}, $50 + x^{20}$ sera arrondi à 50 en simple précision, et le numérateur sera donc arrondi à 0.

Exercice V.7.
(a) a.v. en $x = -1$, a.o. $y = x - 1$.
(b) a.v. en $x = \frac{3}{2}$ et $x = -6$, a.h. en $y = \frac{1}{2}$.
(c) Pas d'a.v., a.h. en $y = 0$.
(d) a.v. en $x = 2$, a.h. en $y = 4$.
(e) Aucune asymptote.

Exercice V.8.

1. $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0.25$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) \simeq -0.4$, $\lim_{x\to -2} f(x)$ n'existe pas.
   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) \simeq 0.1$.
   $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) \simeq 0.5$.
2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
   $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) \simeq 7.5$.
3. $\lim_{x\to -2^+} f(x) \simeq -1$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) \simeq -3$, $\lim_{x\to -2} f(x)$ n'existe pas.
   $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) \simeq -1$.
   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) \simeq 0$.
   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) \simeq 0.1$.
   $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) \simeq 0.25$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.
   $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) \simeq 2$.

4. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) = 0.$
$\lim_{x\to 0.5^+} f(x) = \lim_{x\to 0.5^-} f(x) = \lim_{x\to 0.5} f(x) = 0.$
5. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$
$\lim_{x\to 0.4^+} f(x) = \lim_{x\to 0.4^-} f(x) = \lim_{x\to 0.4} f(x) \simeq 0.3.$
6. $\lim_{x\to -0.4^+} f(x) = \lim_{x\to -0.4^-} f(x) = \lim_{x\to 0.4} f(x) \simeq -0.7.$
$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ n'existe pas, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$
$\lim_{x\to 0.4^+} f(x) = \lim_{x\to 0.4^-} f(x) = \lim_{x\to 0.4} f(x) \simeq 0.6.$

Exercice V.9.
(a) $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. (b) $\mathbb{R}$. (c) $\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$. (d) $\mathbb{R}$. (e) $\mathbb{R}$ (si on définit $f(0)=0$). (f) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Exercice V.10.
(a) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. (b) $\mathbb{R}$. (c) $\mathbb{R}$. (d) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. (e) $\varnothing$. (f) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exercice V.11.
(a) Vrai, car $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \neq \pm\infty$.
(b) Pas forcément : si $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = x$ et $a = 0$, la fonction $f(x)\cdot g(x)$ n'est pas continue en 0. Par contre, si près de a, les valeurs de f sont bornées (c.-à-d. comprises entre deux nombres réels $a, b : a < f(x) < b$), ça sera vrai, car $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$ dans ce cas.
(c) Vrai, car $f(x)$ sera aussi près de $f(a)$ que désiré si x est suffisamment près de a.
(d) Faux : par exemple la fonction $x \cdot k(x)$, pour $k(x)$ donné par le point (f) de l'exercice précédent.
(e) Faux : il suffit de prendre un polynôme qui s'annule en 17 points exactement, et de le multiplier par $k(x)$, comme au point (d).

Exercice V.12.
(a) $\left[2x^2-4x+3\right]' = 2\left[x^2\right]' - 4\left[x\right]' + 3\left[1\right]' = 2\left[2x^1\right] - 4\left[1\right] + 3\left[0\right] = 4x-4.$
(b) $\left[x^3+5x^2-2x+4\right]' = \left[x^3\right]' + 5\left[x^2\right]' - 2\left[x\right]' = \left[3x^2\right] + 5\left[2x\right] - 2 = 3x^2+10x-2.$
(c)

$$\begin{aligned}\left[3x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x + 17\right]' &= 3\left[x^5\right]' - \frac{7}{6}\left[x^3\right]' + \frac{3}{4}\left[x^2\right]' - \left[x\right]' \\ &= 3\left[5x^4\right] - \frac{7}{6}\left[3x^2\right] + \frac{3}{4}\left[2x^1\right] - 1 = 15x^4 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\left[\frac{4-3x}{2x-1}\right]' &= \frac{\left[4-3x\right]'(2x-1) - (4-3x)\left[2x-1\right]'}{(2x-1)^2} = \frac{\left[-3\right](2x-1) - (4-3x)\left[2\right]}{(2x-1)^2} = \frac{-6x+3-8+6x}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{-5}{(2x-1)^2}\end{aligned}$$

(e) $\left[\dfrac{x}{x^2+1}\right]' = \dfrac{[x]'(x^2+1) - x\left[x^2+1\right]'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1) - x\left[2x\right]}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$
(f)

$$\begin{aligned}\left[\frac{2x^2-5x+4}{5x^2-8x-10}\right]' &= \frac{\left[2x^2-5x+4\right]'(5x^2-8x-10) - (2x^2-5x+4)\left[5x^2-8x-10\right]'}{(5x^2-8x-10)^2} \\ &= \frac{\left[4x-5\right](5x^2-8x-10) - (2x^2-5x+4)\left[10x-8\right]}{(5x^2-8x-10)^2} \\ &= \frac{20x^3-32x^2-40x-25x^2+40x+50-\left\{20x^3-50x^2+40x-16x^2+40x-32\right\}}{(5x^2-8x-10)^2} \\ &= \frac{20x^3-57x^2+50-20x^3+66x^2-80x+32}{(5x^2-8x-10)^2} \\ &= \frac{9x^2-80x+82}{(5x^2-8x-10)^2}\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{3x+5}{x^3+2x^2+x-10}\right]' &= \frac{[3x+5]'(x^3+2x^2+x-10)-(3x+5)\left[x^3+2x^2+x-10\right]'}{(x^3+2x^2+x-10)^2}\\
&= \frac{3(x^3+2x^2+x-10)-(3x+5)\left[3x^2+4x+1\right]}{(x^3+2x^2+x-10)^2}\\
&= \frac{3x^3+6x^2+3x-30-\left\{9x^3+12x^2+3x+15x^2+20x+5\right\}}{(x^3+2x^2+x-10)^2}\\
&= \frac{3x^3+6x^2+3x-30-9x^3-27x^2-23x-5}{(x^3+2x^2+x-10)^2} = \frac{-6x^3-21x^2-20x-35}{(x^3+2x^2+x-10)^2}
\end{aligned}$$

(h) $\left[\dfrac{5}{2x^2-1}\right]' = 5\left(\dfrac{-\left[2x^2-1\right]'}{\left(2x^2-1\right)^2}\right) = 5\left(\dfrac{-4x}{\left(2x^2-1\right)^2}\right) = \dfrac{-20x}{\left(2x^2-1\right)^2}$.

(i) Version simple : $\tan(x)\cdot\cos(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\cos(x) = \sin(x)$. Donc, la dérivée vaut $\cos(x)$.

Version compliquée :

$$\begin{aligned}
[\tan(x)\cdot\cos(x)]' = \tan'(x)\cdot\cos(x)+\tan(x)\cdot\cos'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}\cos(x)+\tan(x)(-\sin(x))\\
= \frac{1}{\cos(x)}-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\sin(x) = \frac{1-\sin^2(x)}{\cos(x)} &= \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)} = \cos(x)
\end{aligned}$$

(j) Faute de frappe : c'est le même que le (i).

(k)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right] &= \frac{\sin'(x)(1+\cos(x))-\sin(x)\left[1+\cos(x)\right]'}{(1+\cos(x))^2}\\
&= \frac{\cos(x)(1+\cos(x))-\sin(x)(-\sin(x))}{(1+\cos(x))^2}\\
&= \frac{\cos(x)+\cos^2(x))+\sin^2(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{\cos(x)+1}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1}{1+\cos(x)}
\end{aligned}$$

(l)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\sin(x)-1}{2\sin(x)+1}\right]' &= \frac{[\sin(x)-1]'(2\sin(x)+1)-(\sin(x)-1)\left[2\sin(x)+1\right]'}{\left(2\sin(x)+1\right)^2}\\
&= \frac{\cos(x)(2\sin(x)+1)-(\sin(x)-1)2\cos(x)}{\left(2\sin(x)+1\right)^2}\\
&= \frac{2\cos(x)\sin(x)+\cos(x)-2\sin(x)\cos(x)+2\cos(x)}{\left(2\sin(x)+1\right)^2} = \frac{3\cos(x)}{\left(2\sin(x)+1\right)^2}
\end{aligned}$$

(m)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\cos(x)+x\sin(x)}\right]' &= \frac{[\sin(x)-x\cos(x)]'(\cos(x)+x\sin(x))-(\sin(x)-x\cos(x))\left[\cos(x)+x\sin(x)\right]'}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}\\
&= \frac{\left[\cos(x)-[x\cos(x)]'\right](\cos(x)+x\sin(x))-(\sin(x)-x\cos(x))\left[-\sin(x)+[x\sin(x)]'\right]}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}\\
&= \frac{\left[\cos(x)-\cos(x)-x(-\sin(x))\right](\cos(x)+x\sin(x))}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}\\
&\quad - \frac{(\sin(x)-x\cos(x))\left[-\sin(x)+\sin(x)+x\cos(x)\right]}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}\\
&= \frac{x\sin(x)(\cos(x)+x\sin(x))-(\sin(x)-x\cos(x))x\cos(x)}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}\\
&= \frac{x\sin(x)\cos(x)+x^2\sin^2(x))-\sin(x)x\cos(x)+x^2\cos^2(x))}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}\\
&= \frac{x^2\sin^2(x)+x^2\cos^2(x)}{(\cos(x)+x\sin(x))^2} = \frac{x^2(\sin^2(x)+\cos^2(x))}{(\cos(x)+x\sin(x))^2} = \frac{x^2}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}.
\end{aligned}$$

(n)

$$\left[\frac{1}{\cos(x)\cdot\sin(x)}\right]' = \frac{-\left[\cos(x)\sin(x)\right]'}{(\cos(x)\sin(x))^2} = \frac{-\left(-\sin(x)\sin(x)+\cos(x)\cos(x)\right)}{(\cos(x)\sin(x))^2}$$
$$= \frac{\sin^2(x)-\cos^2(x)}{(\cos(x)\sin(x))^2} = \frac{-\cos(2x)}{\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2} = \frac{-4\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$$

(Les deux dernières égalités utilisent des identités trigonométriques, je ne suppose pas que vous sachiez les faire telles telles quelles.)
(o)

$$\begin{aligned}\left[(2\cos(x)-3)\cdot(4\sin(x)-1)\right]' &= \left[2\cos(x)-3\right]'(4\sin(x)-1)+(2\cos(x)-3)\left[4\sin(x)-1\right]' \\ &= -2\sin(x)(4\sin(x)-1)+(2\cos(x)-3)4\cos(x) \\ &= -8\sin^2(x)+2\sin(x)+8\cos^2(x)-12\cos(x) \\ &= 8\cos^2(x)-8\sin^2(x)-12\cos(x)+2\sin(x)\end{aligned}$$

Exercice V.13.
(a) $\frac{1}{3}x^{-2/3}$ (b) $\frac{1}{5}x^{-4/5}$ (c) $\frac{4}{7}x^{-3/7}$ (d) $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ (e) $-\frac{1}{4}x^{-5/4}$ (f) $-\frac{2}{3}x^{-5/3}$.
(g) $\left[\left(8x^2-2x+3\right)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}\left(8x^2-2x+3\right)^{-1/2}\cdot\left[8x^2-2x+3\right]' = \frac{1}{2}\left(8x^2-2x+3\right)^{-1/2}\cdot(16x-2)$.
(h) $\left[\left(x^2+a^2\right)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}\cdot\left[x^2+a^2\right]' = \frac{1}{2}\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}\cdot(2x) = x\cdot\left(x^2+a^1\right)^{-1/2}$.
(i) $\left[\left(4x^2-2x\right)^{3/2}\right]' = \frac{3}{2}\left(4x^2-2x\right)^{1/2}\cdot\left[4x^2-2x\right]' = \frac{3}{2}\left(4x^2-2x\right)^{1/2}\cdot(8x-2)$.
(j) $\left[\left(x^2+x+1\right)^{1/3}\right]' = \frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-2/3}\cdot\left[x^2+x+1\right]' = \frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-2/3}\cdot(2x+1)$.
(k) $\left[\left(1-x^2\right)^{2/3}\right]' = \frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{-1/3}\cdot\left[1-x^2\right]' = \frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{-1/3}\cdot(-2x)$.
(l) $\left[\left(1+x^{1/3}\right)^3\right]' = 3\left(1+x^{1/3}\right)^2\cdot\left[1+x^{1/3}\right]' = 3\left(1+x^{1/3}\right)^2\cdot(\frac{1}{3}x^{-2/3}) = \left(1+x^{1/3}\right)^2\cdot x^{-2/3}$.
(m)

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{1/2}\right]' &= \frac{1}{2}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{-1/2}\left[\frac{3x-2}{x+1}\right]' \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{-1/2}\left[\frac{\left[3x-2\right]'(x+1)-(3x-2)\left[x+1\right]'}{(x+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{-1/2}\left[\frac{\left[3\right](x+1)-(3x-2)\left[1\right]}{(x+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{-1/2}\left[\frac{3x+3-3x+2}{(x+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{-1/2}\left[\frac{5}{(x+1)^2}\right]\end{aligned}$$

(n) $\left[(a+x)(a-x)^{1/2}\right]' = 1\cdot(a-x)^{1/2}-(a+x)\cdot\frac{1}{2}(a-x)^{-1/2}$.
(o)

$$\begin{aligned}\left[(4\sin(x)\cos(x))^{1/2}\right]' &= 2\left[(\sin(x)\cos(x))^{1/2}\right]' = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin(x)\cos(x)\right)^{-1/2}\cdot\left[\sin(x)\cos(x)\right]' \\ &= (\sin(x)\cos(x))^{-1/2}\cdot(\cos(x)\cos(x)+\sin(x)(-\sin(x))) \\ &= (\sin(x)\cos(x))^{-1/2}\cdot\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)\end{aligned}$$

(p)

$$\begin{aligned}\left[\left((x^2+1)^{1/2}+x\right)^{-1}\right]' &= -\left((x^2+1)^{1/2}+x\right)^{-2}\cdot\left[(x^2+1)^{1/2}+x\right]' \\ &= -\left((x^2+1)^{1/2}+x\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x+1\right) \\ &= \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2} = \frac{-\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}\end{aligned}$$

(Les deux dernières lignes de simplifications ne sont pas forcément simples à deviner.)
(q) Plusieurs méthodes sont possibles, comme souvent. On peut également pousser le calcul un peu plus loin, mais bon.

$$\begin{aligned}\left[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right]' = \left[\frac{(1+x)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}}\right]' &= \frac{[(1+x)^{1/2}]'\cdot(1-x)^{1/2}-(1+x)^{1/2}\cdot[(1-x)^{1/2}]'}{1-x} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\cdot(1-x)^{1/2}-(1+x)^{1/2}\cdot\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}\cdot(-1)}{1-x} = \frac{\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}+\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}\end{aligned}$$

(r) Note : pour celui-ci, on a utilisé $[\sqrt{x}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (qui est juste une autre manière d'écrire $\left[x^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$). A nouveau, les simplifications des dernières lignes ne sont pas vraiment au cœur du problème.

$$\begin{aligned}\left[\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}\right] &= \frac{\left[2x^2-1\right]'\left(x\sqrt{1+x^2}\right)-\left(2x^2-1\right)\left[x\sqrt{1+x^2}\right]'}{\left(x\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{[4x]\left(x\sqrt{1+x^2}\right)-\left(2x^2-1\right)\left\{[x]'\sqrt{1+x^2}+x\left[\sqrt{1+x^2}\right]'\right\}}{\left(x\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{4x^2\sqrt{1+x^2}-\left(2x^2-1\right)\left\{\sqrt{1+x^2}+x\left[\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left[1+x^2\right]'\right]\right\}}{\left(x\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &\overset{[\mathbf{x^n}]'}{=} \frac{4x^2\sqrt{1+x^2}-\left(2x^2-1\right)\left\{\sqrt{1+x^2}+x\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}[2x]\right\}}{\left(x\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{4x^2\sqrt{1+x^2}-\left(2x^2-1\right)\left\{\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right\}}{\left(x\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{4x^2\sqrt{1+x^2}+\left(1-2x^2\right)\left\{\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right\}}{\left(x\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{4x^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1^2-\left(2x^2\right)^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(x\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\frac{4x^2\left(1+x^2\right)+1-4x^4}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(x\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{4x^2+4x^4+1-4x^4}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \frac{4x^2+1}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}\end{aligned}$$

Exercice V.14.
Moins de détails pour cet exercice-ci.
(a) $\left[\dfrac{1}{\cos(x)\sin(x)}\right]' = \dfrac{\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\cos^2(x)\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - \dfrac{1}{\sin^2(x)}$.
(b) $\left[(2x^2+3x+4)^3\right]' = 3(2x^2+3x+4)^2\cdot(4x+3)$.
(c) On calcule d'abord $[\tan(x)]' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, puis $[\tan^2(5x)]' = \frac{10\tan(5x)}{\cos^2(5x)}$.

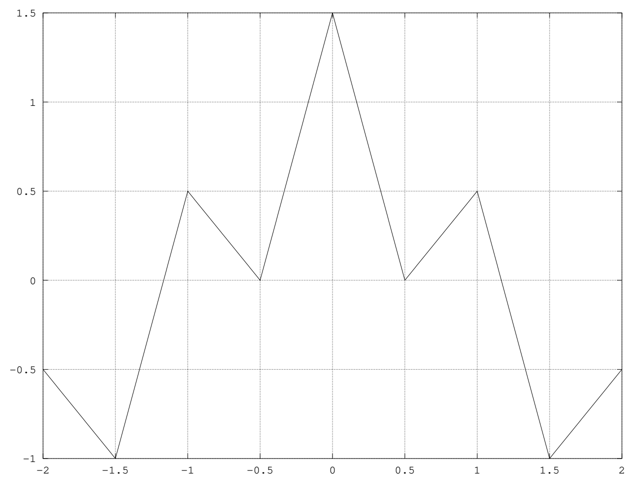
(d) $\left[\sin\left(\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right)\right]' = \cos\left(\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right) \cdot 2 \cdot \frac{2x-1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \cos\left(\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right) \cdot \frac{4x-2}{x^3}$.
(e) $[(4x^2-2x)^{3/2}]' = \frac{3}{2}(4x^2-2x)^{1/2} \cdot (8x-2) = (4x^2-2x)^{1/2} \cdot (12x-3)$.
(f) Voir 12 (j).
(g) Solution : $10x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$.
(h) Solution : $\frac{-5}{(4x-1)^2}$.
(i) Solution : $-5(7-x)^4$.
(j) Solution : $\frac{4}{7}x^{-3/7}$.
(k) Solution : $x^2\,(-x\sin(x) + 3\cos(x))$.
(l) Solution : $\frac{-2\cos(x)}{\sin^2(x)}$.
(m) Solution : $14\sin(-2x)$.

Exercice V.15.
Solutions :
(a) $\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$. (b) $\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$. (c) $2\cos(2x)$. (d) $\frac{3}{\cos^2(3x+2)}$.
(e) $(-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x-5}$. (f) $10(2x-3)^4$. (g) $\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$.
(h) $\left[e^{a\ln(x)}\right]' = \frac{ae^{a\ln(x)}}{x}$, autrement dit, si on remarque que $e^{a\ln(x)} = x^a$, on obtient la relation connue $[x^a]' = a\cdot x^{a-1}$ (pour tout $a \in \mathbb{R}$).

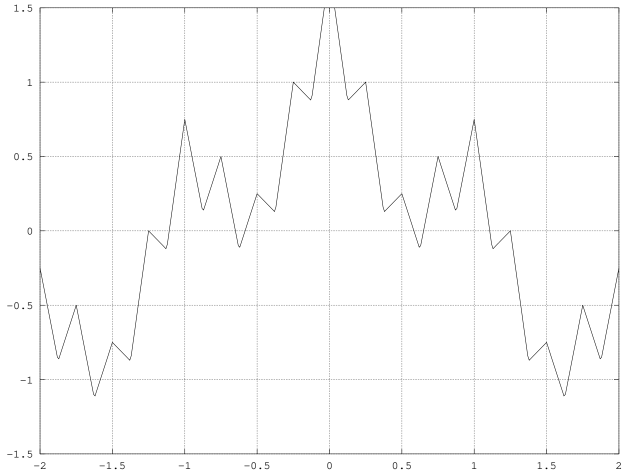
Exercice V.16.

1. Voir directement le point suivant.

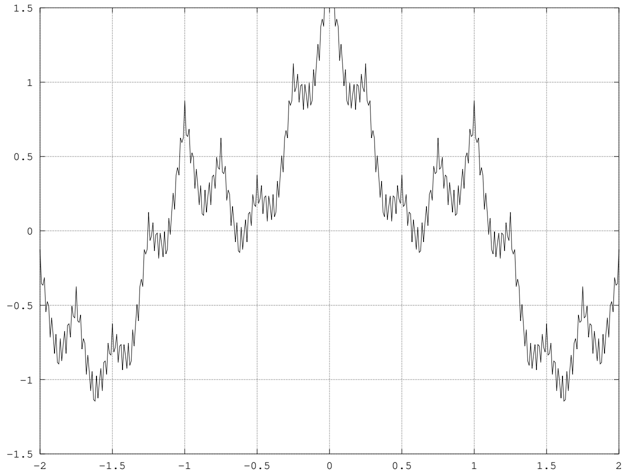
2.



$f_1(x)$.



$f_2(x)$.



$f_3(x)$.

3. Cette définition a un sens, mais il faudrait pour le prouver connaître quelques notions sur les séries infinies.
4. $f_\infty(x)$ est une fonction continue, grâce à un théorème qu'on n'a pas vu au cours, et qui dit que la la limite uniforme (une notion non définie au cours) de fonctions continues est effectivement continue.
5. Bonne chance.

Exercice V.17.
Sans corrigé.

Exercice V.18.
Sans corrigé.

Exercice V.19.
$f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$.
$f'(x) = x^3 - 4x,\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 2\}$.

x		-2		0		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\rightarrow$ min	$\nearrow$	$\rightarrow$ max	$\searrow$	$\rightarrow$ min	$\nearrow$

Exercice V.20.
$f(x) = (x-2)^3 + 2x,\ f'(x) = 3(x-2)^2 + 2,\ f''(x) = 6(x-2)$. Donc, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

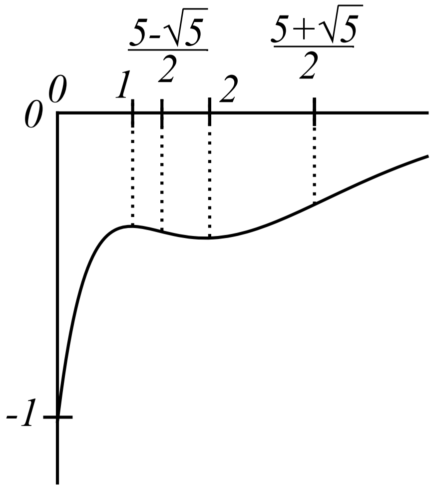
x		2	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	inflexion	$\smile$

Exercice V.21.
$f(x) = (-x^2 + x - 1) \cdot e^{-x}$.

1. $f'(x) = \left[-x^2 + x - 1\right]' \cdot e^{-x} + (-x^2 + x - 1) \cdot \left[e^{-x}\right]' = (-2x + 1) \cdot e^{-x} + (-x^2 + x - 1) \cdot \left(-e^{-x}\right) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$.
2. $f'(x) = (x - 1)(x - 2)e^{-x}$, donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$.
3. $f''(x) = \left[x^2 - 3x + 2\right]' \cdot e^{-x} + (x^2 - 3x + 2) \cdot \left[e^{-x}\right]' = (2x - 3)e^{-x} + (x^2 - 3x + 2) \cdot \left(-e^{-x}\right) = (-x^2 + 5x - 5)e^{-x}$.
   Donc, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.
4.

x		1		$\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$		2		$\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$ $\frown$	$\rightarrow$ $\frown$ max	$\searrow$ $\frown$	$\searrow$ inflexion	$\searrow$ $\smile$	$\rightarrow$ $\smile$ min	$\nearrow$ $\smile$	$\nearrow$ inflexion	$\nearrow$ $\frown$

5. Une esquisse de graphe de $f(x)$ pourrait ressembler à ceci :



Exercice V.22.
$f(x) = e^{-1/x^2}$, $x > 0$.

1. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$, on a $\lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0$.
2. $f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \left[-\dfrac{1}{x^2}\right]' = \dfrac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$.
3. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x \cdot p(x) = 0$ pour n'importe quel polynôme $p(x)$. Notons $y = \frac{1}{x}$. On peut alors réecrire $\dfrac{2e^{-1/x^2}}{x^3} = 2e^{-y^2} \cdot y^3$, et quand x tend vers 0^+, alors y tend vers $+\infty$ et $-y^2$ vers $-\infty$, donc la limite est de 0. De même, lorsque x tend vers 0^-, y tend vers $+\infty$ et $-y^2$ vers $-\infty$, donc la limite est de 0. On peut résumer ceci en la phrase (assez imprécise) : "L'exponentielle s'approche plus vite de sa limite que n'importe quel polynôme, et compense la limite de celui-ci lors de situations ambigües du genre $0 \cdot \infty$."
   Donc, $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$.
4. $f''(x) = \dfrac{(-6x^2 + 4) \cdot e^{-1/x^2}}{x^6}$.
5. $f''(x)$ est de la forme $\dfrac{q(x) \cdot e^{-1/x^2}}{x^6}$. Le même raisonnement qu'avant montre que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^6} = 0$, et cela reste vrai quand on multiplie par un polynôme, car il suffira de multiplier par sa valeur en $x = 0$, et on obtiendra forcément encore 0.
6. En appliquant les règles du quotient, du produit et de composition, on voit que les dérivées de f seront toujours de la forme $\dfrac{Q(x) \cdot e^{-1/x^2}}{x^m}$, pour un certain polynôme $Q(x)$ et degré m. Donc, comme avant, $\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

7. Si on pose $f(x) = 0$ lorsque $x \leq 0$, alors f et toutes ses dérivées sont constantes sur 0 pour $x \leq 0$ par ce qu'on a montré auparavant, elle a donc toutes ses dérivées continues.

Exercice V.23.

(a) équation : $f''(x) = -f(x)$,
fonction proposée : $f(x) = C \cdot \cos(x) + D \cdot \sin(x)$.
On calcule $f'(x) = -C \cdot \sin(x) + D \cdot \cos(x)$, $f''(x) = -C \cdot \cos(x) - D \cdot \sin(x)$, donc ça fonctionne.

(b) équation : $\frac{1}{2} f'(x) - x \cdot f(x) = x - x^3$,
fonction proposée : $f(x) = C \cdot e^{x^2} + x^2$.
On calcule $f'(x) = C \cdot e^{x^2} \cdot 2x + 2x$, donc

$$\frac{1}{2} f'(x) - x \cdot f(x) = C \cdot e^{x^2} \cdot x + x - x \cdot \left(C \cdot e^{x^2} + x^2\right) = C \cdot e^{x^2} \cdot x + x - C \cdot e^{x^2} \cdot x - x^3 = x - x^3,$$

donc ça fonctionne à nouveau.

(c) équation : $f'''(x) = f(x)$,
fonction proposée : $f(x) = C \cdot e^x + D \cdot x^3$.
On calcule : $[C \cdot e^x]''' = C \cdot e^x$, et $[D \cdot x^3]''' = D \cdot [x^3]''' = D \cdot [3x^2]'' = D \cdot [6x]' = 6D$, donc $f'''(x) = Ce^x + 6D \neq f(x)$, cette fois ça ne fonctionne pas.

(d) équation : $f''(x) + \frac{2}{3} f'(x) = -10$,
fonction : $f(x) = \frac{45}{2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2}{3}x}\right) - 15x + C$.
En fait, il s'agit de l'équation (V.1) en page 125, où on a pris $k = 2, m = 3, g = 10$, et on a écrit $f(x)$ au lieu de $p(t)$. Donc, c'est l'équation de la chute libre avec frottement proportionnel à la vitesse. Vérifions que ça fonctionne.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{45}{2} \cdot \left[1 - e^{-\frac{2}{3}x}\right]' - [15x]' \\
&= -\frac{45}{2} \cdot \left[e^{-\frac{2}{3}x}\right]' - 15 \\
&= -\frac{45}{2} \cdot \left(e^{-\frac{2}{3}x} \cdot \left[-\frac{2}{3}x\right]'\right) - 15 \\
&= -\frac{45}{2} \cdot \left(e^{-\frac{2}{3}x} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\right) - 15 \\
&= 15 \cdot e^{-\frac{2}{3}x} - 15 \\
f''(x) &= \left[15 \cdot e^{-\frac{2}{3}x} - 15\right]' \\
&= 15 \cdot e^{-\frac{2}{3}x} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 0 \\
&= -10 \cdot e^{-\frac{2}{3}x}
\end{aligned}$$

Donc :

$$f''(x) + \frac{2}{3} f'(x) = -10 \cdot e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{2}{3}\left(15 \cdot e^{-\frac{2}{3}x} - 15\right) = -10 \cdot e^{-\frac{2}{3}x} + 10 \cdot e^{-\frac{2}{3}x} - 10 = -10,$$

ça fonctionne donc à fond les biellons.

Exercice V.24.

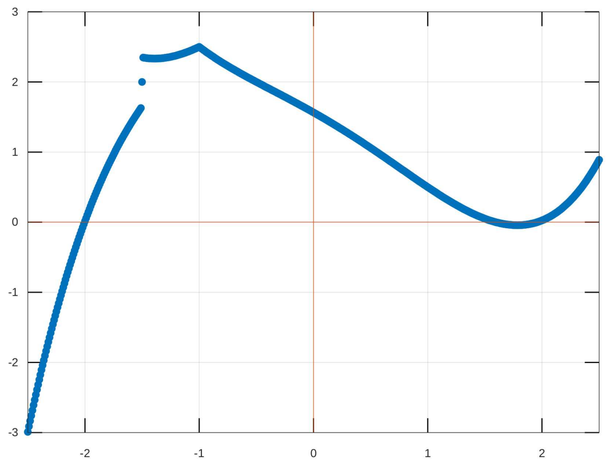
1. Vamos :
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x^2) + x^3}{2^{x/10}} = 0$, car on peut réecrire $2^{x/10} = (2^{1/10})^x$, ce qui est une exponentielle de base > 1, qui écrase donc n'importe quel polynôme, même si on lui ajoute un sinus qui de toute façon est toujours entre -1 et 1.
   (b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x+2)}{(x-3)} = \dfrac{4}{-1} = -4.$

2. La fonction $f(x) = \operatorname{sign}(x) \cdot x^2$ est continue partout sur $\mathbb{R}$, car c'est un produit de deux fonctions qui sont continues partout SAUF (pour le signe) en $x = 0$. Pour ce point, on vérifie qu'on a bien :

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sign}(x) \cdot x^2 = \lim_{x \to 0^+} 1 \cdot x^2 = 0$$
$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x) \cdot x^2 = \lim_{x \to 0^+} (-1) \cdot x^2 = 0$$

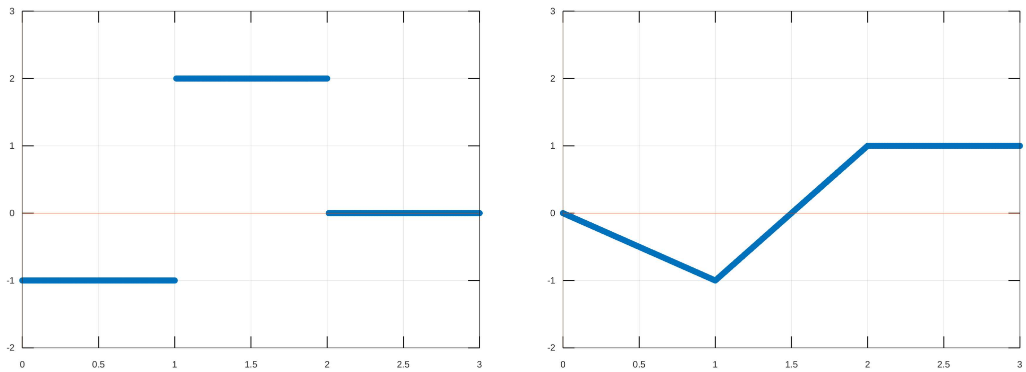
donc $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, la fonction est bien continue en $x = 0$.

3.



(a) D'après le graphique, g semble continue sur tous les points de $[-2.5, 2.5]$ sauf en $x = -1.5$. Donc, la réponse est $[-2.5, -1.5[\cup] - 1.5, 2.5] = [-2.5, 2.5]\backslash\{-1.5\}$.
(b) Sans corrigé, mais notez que g n'est pas dérivable en $x = -1.5$ et $x = -1$.

4.



La fonction du graphique de droite représente l'intégrale de 0 à x de celle de gauche, c'est-à-dire : Si ces fonctions sont $G(x), D(x)$, alors

$$D(x) = \int_0^x G(x) dx.$$

Réciproquement, $D'(x) = G(x)$, sauf aux points où elle n'est pas dérivable (en $x = 1$, $x = 2$), où la dérivée n'est pas définie.

5.

$$\begin{aligned}
N(t) &= \frac{3}{1+2\cdot e^{-0.5t}} \\
N'(t) &= \frac{[3]'\cdot(1+2\cdot e^{-0.5t}) - 3\cdot[1+2\cdot e^{-0.5t}]'}{(1+2\cdot e^{-0.5t})^2} \\
&= \frac{0-3\cdot 2\cdot [e^{-0.5t}]'}{(1+2\cdot e^{-0.5t})^2} \\
&= \frac{3\cdot 2\cdot 0.5\cdot e^{-0.5t}}{(1+2\cdot e^{-0.5t})^2} \\
&= \frac{3e^{-0.5t}}{(1+2\cdot e^{-0.5t})^2} \\
0.5\cdot N(t)\cdot\left(1-\frac{N(t)}{3}\right) &= 0.5\cdot\frac{3}{1+2\cdot e^{-0.5t}}\cdot\left(1-\frac{1}{1+2\cdot e^{-0.5t}}\right) \\
&= \frac{1.5}{1+2\cdot e^{-0.5t}}\cdot\left(\frac{1+2\cdot e^{-0.5t}}{1+2\cdot e^{-0.5t}} - \frac{1}{1+2\cdot e^{-0.5t}}\right) \\
&= \frac{1.5}{1+2\cdot e^{-0.5t}}\cdot\left(\frac{1+2\cdot e^{-0.5t}-1}{1+2\cdot e^{-0.5t}}\right) \\
&= \frac{1.5}{1+2\cdot e^{-0.5t}}\cdot\left(\frac{2\cdot e^{-0.5t}}{1+2\cdot e^{-0.5t}}\right) \\
&= \frac{1.5\cdot 2\cdot e^{-0.5t}}{(1+2\cdot e^{-0.5t})^2} \\
&= \frac{3\cdot e^{-0.5t}}{(1+2\cdot e^{-0.5t})^2} \qquad = N'(t)
\end{aligned}$$

Donc, $N(t)$ satisfait bien

$$N'(t) = 0.5\cdot N(t)\cdot\left(1-\frac{N(t)}{3}\right).$$

Soit dit en passant, il s'agit de l'équation (V.4) en page 127 avec $r = 0.5, N_0 = 1, K = 3$, et effectivement, le calcul est un peu infernal.

6.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \sin(x^2) \\
h'(x) &= \cos(x^2)\cdot[x^2]' = \cos(x^2)\cdot 2x \\
h''(x) &= [\cos(x^2)\cdot 2x]' \\
&= [\cos(x^2)]'\cdot 2x + \cos(x^2)\cdot[2x]' \\
&= (-\sin(x^2)\cdot 2x)\cdot 2x + \cos(x^2)\cdot 2 \\
&= -4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2)
\end{aligned}$$

7. Pour calculer $\int_0^4 \frac{1}{2}x^3dx$, on doit trouver une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = \frac{1}{2}x^3$, mais c'est assez facile : pour obtenir x^3, on doit partir de x^4, mais si on dérive x^4 on obtient $4x^3$, donc on doit poser : $F(x) = \frac{1}{8}x^4$. Du coup :

$$\int_0^4 \frac{1}{2}x^3dx = F(4) - F(0) = \frac{1}{8}\cdot 4^4 - \frac{1}{8}\cdot 0^4 = 32 - 0 = 32.$$

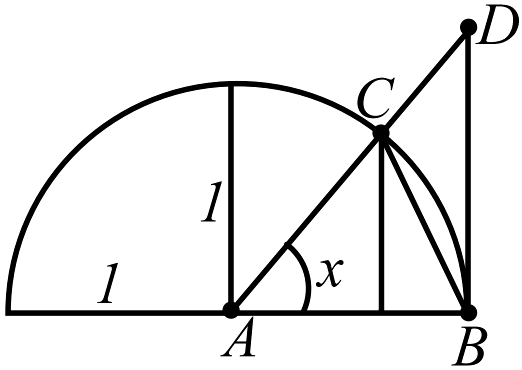
De même pour $\int_0^{\pi/2} \cos(4x)dx$, on doit prendre $G(x) = \frac{1}{4}\sin(4x)$ (la dérivée interne vaut 4, donc on divise par 4), et on obtient :

$$\int_0^{\pi/2} \cos(4x)dx = G(\pi/2) - G(0) = \frac{1}{4}\sin(4\pi/2) - \frac{1}{4}\sin(4\cdot 0) = 0 - 0 = 0.$$

(Ce qui n'est pas très étonnant si on regarde le graphe de la fonction $\cos(4x)$ entre 0 et $\pi/2$.)

Exercice V.25.

a.



$$S_1(x) = \text{aire du } \textit{triangle } ABC = \frac{\sin(x)\cdot 1}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$$
$$S_2(x) = \text{aire du } \textit{secteur } ABC = \frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{x}{2}$$
$$S_3(x) = \text{aire du } \textit{triangle } ABD = \frac{1\cdot\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}.$$

b.

$$\begin{aligned} S_1(x) \le S_2(x) \le S_3(x) &\Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\sin(x)}{2\cos(x)} \\ &\Leftrightarrow \sin(x) \le x \le \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &\Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{\sin(x)} \le \frac{1}{\cos(x)} \text{ (si } x > 0) \end{aligned}$$

comme $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos(x)} = 1$, on a que $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} = 1$

c. Comme $\frac{-x}{\sin(-x)} = \frac{x}{\sin(x)}$, la fonction $\frac{x}{\sin(x)}$ est paire, donc $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} = 1$, et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$.
Comme $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\sin(x)}}$, on a aussi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

d. Grâce aux égalités données, $\frac{1-\cos(x)}{x} = \sin(x)\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2(x)}}$. Or, $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{2}$, donc leur produit tend vers 0.

e.

$$
\begin{aligned}
[\sin(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\sin(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\cdot\frac{\sin(h)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos(x)\cdot\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1 \\
&= \cos(x), \\
[\cos(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\cos(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\cdot\frac{\sin(h)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \cos(x)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h}-\lim_{h\to 0}\sin(x)\cdot\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)\cdot 0-\sin(x)\cdot 1 \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}
$$

f. $[2\sin(x)+\cos(x)]'' = -2\sin(x)-\cos(x)$, $[2\sin(x)-5\cos(x)]'''' = 2\sin(x)-5\cos(x)$.