Mathématiques appliquées – Contrôle continu numéro 1 du jeudi 10 novembre 2022

Tous matériel autorisé. Communication proscrite.
Réponses écrites à la main au stylo sur des feuilles. Vos noms et prénoms doivent apparaître sur chaque feuille rendue.

Exercice 1 (/ 5.5 pts)
Un certain polynôme $P(x)$ de degré 3 passe par les points $(0; 60), (-2; 0), (3; 0), (4; -12)$.
(a) Poser (sans le terminer) le calcul permettant de trouver $P(x)$. N'écrivez que les termes que l'on doit vraiment calculer, et ne développez pas le calcul.
(b) Vérifier avec le moins de calcul possibles que $P(x) = 60 - 2x - 12x^2 + 2x^3$. *Indication:* On n'a pas forcément besoin de finir le calcul du point (a).
(c) Un certain polynôme $A(x)$ passe par les mêmes quatre points. On n'a pas d'autre information sur $A(x)$, mais est-il possible (sans oublier les points précédents) qu'il soit de degré 2 ? Qu'il soit de degré 4 ? Justifier vos réponses.
(d) Quel est le reste de la division polynomiale de $P(x)$ par le polynôme $B(x) = x - 4$?
(e) (Bonus) Le polynôme $A(x)$ est-il divisible (sans reste) par le polynôme $C(x) = x - 3$?

Exercice 2 (/ 2 pts)
Effectuez la division euclidienne de $x^5 - x^3 + x - 1$ par $x^2 + x - 1$.

Exercice 3 (/ 3.5 pts)
On se donne la parabole (polynôme de degré 2) $f(x) = x^2 + 6x - 1$.
(a) Montrer par un petit calcul que $f(x) = (x + 3)^2 - 10$.
(b) Trouvez les racines de $f(x)$ par la méthode de complétion du carré vue au cours (en utilisant le point (a)).
(c) En utilisant (a), trouvez des ensembles B, C tels que
$f : \mathbb{R} \to B$ soit surjective (et bien définie),
$f : C \to \mathbb{R}$ soit injective (et bien définie).

Exercice 4 (/ 10 pts)
Dans un browser, allez sur la page (atteignable *seulement* depuis le wi-fi interne HES-GE):

`http://10.136.142.203:8000/controle?name=votre_nom_ici`

où vous remplacerez `votre_nom_ici` par (devinez) votre nom (incroyable non ?). Un certain nombre de contraintes ainsi qu'une fonction à maximiser et une à minimiser vont alors s'afficher.
Répondez aux questions suivantes.

(a) Le point $(4, 7)$ est-il dans le polyèdre des valeurs admissibles ?

(b) Y a-t-il deux contraintes qui ne donnent lieu à aucune intersection (entre elles, donc) ? Si non, pourquoi ? Si oui, lesquelles, et pourquoi n'y a-t-il pas d'intersection ?

(c) A l'aide du TP (et plus si besoin), résolvez les deux problèmes d'optimisation (maximiser f et minimiser g sous les contraintes données), en fournissant les indications suivantes.

1. Quel nom avez-vous utilisé ?
   ATTENTION: Certaines données dépendent de ce que vous avez entré comme nom mais ne sont pas aléatoires. Il est donc important que vous écriviez exactement le nom vous avez utilisé.
2. Quelle est la liste des points admissibles ? (Précision: 4 chiffres après la virgule.)
3. Pour quel point f est-elle maximale ? Quelle est la valeur maximale de f (sous les contraintes) ?
4. Pour quel point g est-elle minimale ? Quelle est la valeur minimale de g (sous les contraintes) ?

(d) On ôte maintenant l'avant-dernière contrainte $x \leq \ldots$, et on regarde le même problème d'optimisation de f et g.

1. Est-ce que cela change le point où g est minimale ?
2. Est-ce que cela change le point où f est maximale ? D'ailleurs, est-ce que f est vraiment maximale au point (nouveau ou non) donné par notre méthode ?
   Indication: Considérer (par exemple) les points $(3, 2), (6, 4), (9, 6), \ldots, (3n, 2n)$ (pour $n \geq 1$ entier). Vérifier qu'ils satisfont toutes les contraintes (sauf celle que l'on a ôtée). Quelles valeurs prend f sur ces points ?