Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 12

11 stycznia 2017 r.

M12.1. 1 punkt Znaleźć liczby c_j, dla których *wielomian trygonometryczny* $w_n(x) := \sum_{j=0}^{n} c_j \cos(jx)$ daje najmniejszą wartość całki

$$\int_0^\pi (\pi - x^2 - w_n(x))^2 \, dx.$$

M12.2. 1,5 punktu Udowodnić, że współczynniki $A_k^{(n)}$ kwadratury Gaussa-Czebyszewa spełniają równość

$$A_k^{(n)} = -\frac{\pi}{T'_{n+1}(t_k)\, T_{n+2}(t_k)},$$

gdzie T_j oznaczają wielomiany Czebyszewa, a t_k — zera wielomianu T_{n+1}.

M12.3. 1 punkt Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$T_{n+j}(u_k) = T_n(u_k) \cdot T_j(u_k)$$

gdzie u_k oznaczają punkty ekstremalne wielomianu T_n.

M12.4. 1 punkt Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \text{ nieparzyste}, \\ \dfrac{2}{1-n^2}, & n \text{ parzyste}. \end{cases}$$

M12.5. 1,5 punktu Udowodnić, że wzór

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{n} {\sum_{k=0}^{n}}'' f(\cos(k\pi/n)) \tag{1}$$

jest dokładny dla $f \in \Pi_{2n-1}$.

M12.6. 1 punkt Podać przykład wielomianu $f \in \Pi_{2n}$, dla którego wzór (1) jest niedokładny. Co z tego wynika?

M12.7. 1 punkt Wyznaczyć, o ile to możliwe, takie wartości stałych A, B, C, żeby równość

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\, dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

zachodziła dla dowolnego wielomianu f stopnia $\leqslant 5$. Podać także przykład wielomianu stopnia 6, dla którego powyższa równość nie zachodzi.

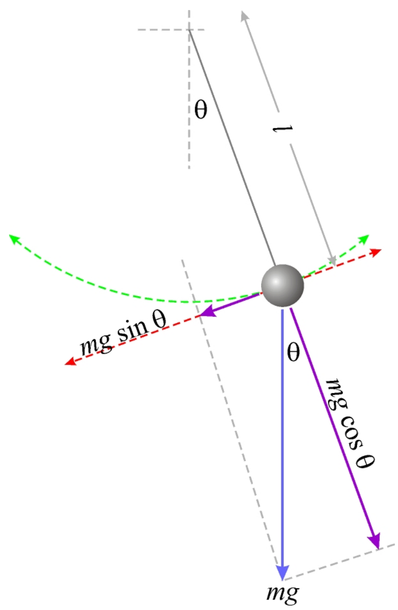
M12.8. 1 punkt Poeksperymentować z metodą adaptacyjną Simpsona

```
function AdaptiveSimpson(f,a,b; abstol=1.0e-8)
  nf = 3;
  ff = f([a, (a+b)/2, b]);
  nf = 3; # Initial Simpson approximation
  I1 = (b-a)*dot([1, 4, 1], ff)/6;
  function adaptrec(f,a,b,ff,I1,tol,nf)
    h = (b-a)/2;
    fm = f([a+h/2, b-h/2]);
    nf = nf + 2;
    # Simpson approximations for left and right subinterval
    fR = [ff[2], fm[2], ff[3]];
    fL = [ff[1], fm[1], ff[2]];
    IL = h*dot([1, 4, 1],fL)/6;
    IR = h*dot([1, 4, 1],fR)/6;
    I2 = IL + IR;
    I = I2 + (I2 - I1)/15;
    # Extrapolated approximation
    if (abs(I-I2) > tol)
      IL,nf = adaptrec(f,a,a+h,fL,IL,tol/2,nf);
      IR,nf = adaptrec(f,b-h,b,fR,IR,tol/2,nf);
      I = IL + IR;
    end
    return I,nf;
  end
  return adaptrec(f,a,b,ff,I1,abstol,nf);
end;
```

Podać przykład funkcji $f \in C^\infty[-1,1]$, dla której obliczanie całki $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, z dokładnością `abstol`$=10^{-6}$, wymaga co najmniej 1000 wywołań funkcji f.

M12.9. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Rozważyć równanie wahadła (zob. `https://pl.wikipedia.org/wiki/Wahad%C5%82o`)

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\sin(\theta(t)) = 0.$$



Zastosować metodę Rungego-Kutty do symulacji ruchu wahadła (trwającego np. 10 sekund) z następującymi warunkami początkowymi

$$\begin{cases} \theta(0) & = \frac{\pi}{3}, \\ \theta'(0) & = 0. \end{cases}$$

6 stycznia 2017

Rafał Nowak