

### Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 4

1. Zaproponuj szybką metodę obliczania  $\text{lcm}(m, n)$ , gdzie  $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , która wyznacza poprawną wartość w każdym przypadku, gdy tylko liczba  $\text{lcm}(m, n)$  mieści się w określonym zakresie liczb całkowitych (np. integer w Pascalu).
2. Opisz szybką metodę obliczania  $\text{gcd}(m_1, m_2, \dots, m_k)$ , gdzie  $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  i analogiczną dla  $\text{lcm}$ .
3. Zaproponuj szybką metodę obliczania dla danych liczb całkowitych  $m_1, m_2, \dots, m_k$  takich współczynników całkowitych  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , że

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_k m_k = \text{gcd}(m_1, m_2, \dots, m_k).$$

4. (Binarny algorytm  $\text{gcd}$ ) Opisz algorytm obliczający  $\text{gcd}(a, b)$  z zależności:

- $\text{gcd}(a, b) = \text{gcd}(a/2, b)$  gdy  $a$  parzyste i  $b$  nieparzyste,
- $\text{gcd}(a, b) = \text{gcd}(a - b, b)$  gdy  $a > b$  i obie nieparzyste.

Co powinien zrobić algorytm, gdy na początku  $a$  i  $b$  są parzyste? Jaka jest złożoność tego algorytmu?

5. Pokaż jak zmodyfikować algorytm z poprzedniego zadania, żeby wyliczał również  $x, y$ , takie że  $xa + yb = \text{gcd}(a, b)$ .

Wsk.: Skorzystaj z równości  $xa + yb = (x - b)a + (y + a)b$ .

6. Udowodnij, że jeśli  $(m_1, m_2, \dots)_p$  i  $(n_1, n_2, \dots)_p$  są reprezentacjami liczb naturalnych  $m$  i  $n$  względem układu kolejnych liczb pierwszych, to:

- (a)  $k = \text{gcd}(m, n) \Leftrightarrow k_i = \min\{m_i, n_i\}$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots$
- (b)  $k = \text{lcm}(m, n) \Leftrightarrow k_i = \max\{m_i, n_i\}$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots$ ,

gdzie  $(k_1, k_2, \dots)_p$  jest rozkładem liczby  $k$ . Korzystając z powyższych równości pokaż, że  $mn = \text{gcd}(m, n)\text{lcm}(m, n)$

7. Wykaż zależności:

- (a)  $xz \equiv yz \pmod{mz} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{m}$ , dla  $z \neq 0$
- (b)  $xz \equiv yz \pmod{m} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{\frac{m}{\text{gcd}(z, m)}}$ ,  $x, y, z, m \in \mathbb{Z}$
- (c)  $x \equiv y \pmod{mz} \Rightarrow x \equiv y \pmod{m}$

8. Udowodnij, że

- (a) jeśli  $2^n - 1$  jest liczbą pierwszą, to  $n$  jest liczbą pierwszą.
- (b) jeśli  $a^n - 1$  jest liczbą pierwszą, to  $a = 2$ .
- (c) jeśli  $2^n + 1$  jest liczbą pierwszą, to  $n$  jest potęgą liczby 2.

Wsk.: Skorzystaj z wzoru:  $a^n - b^n = (a - b)(\sum a^i b^{n-i-1})$ .

9. (Twierdzenie Wilsona) Udowodnij, że jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to  $p$  dzieli  $((p - 1)! + 1)$ .

Wsk.: Wykaż najpierw, że  $(p - 2)! \equiv 1 \pmod{p}$ .

10. Jaka jest liczba reszt modulo  $p^\alpha$  spełniających równanie:  $x^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ ?

Wsk.: Jak muszą być  $x - 1$  i  $x + 1$ , żeby  $p^\alpha | (x + 1)(x - 1)$ ? Osobno rozważ przypadek  $p = 2$ .

11. Jak znając rozkład  $n$  można wyznaczyć liczbę rozwiązań równania  $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$ ?
12. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną  $x$ , dla której

$$\begin{cases} x \equiv 11 \pmod{27}, \\ x \equiv 12 \pmod{64}, \\ x \equiv 13 \pmod{25}. \end{cases}$$

13. Ile wynosi najmniejsze takie  $n \in \mathbb{N}$ , że  $2^n \equiv 1 \pmod{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}$ .
14. Powtarzając dowód Euklidesa pokaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych w postaci  $3k + 2$  i  $4k + 3$ .
15. Niech  $d(k)$  będzie liczbą dzielników  $k$ . Pokaż, że  $\sum_{k=1}^n d(k) = n \ln n + O(n)$ .