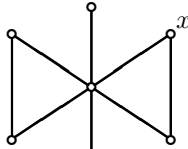
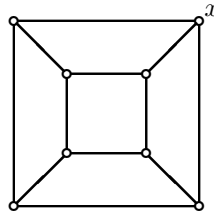


Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 9

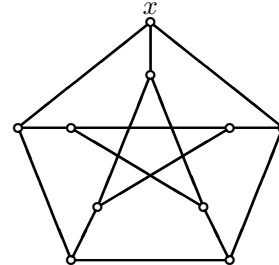
1. *Problem przewoźnika.* Przewoźnikowi powierzono przewiezienie przez rzekę wilka, kozy i kosza z kapustą. Oprócz przewoźnika łódka może pomieścić tylko jeden z tych przedmiotów. Jak musi postąpić przewoźnik, jeżeli nie może pozostawić samych ani wilka z kozą, ani kozy z kapustą? Narysuj graf ilustrujący rozwiązanie tego problemu.
2. Oblicz rzędy grup automorfizmów (izomorfizmów na siebie) G grafu z Rys. 1 i grafu kostki 3-wymiarowej (Rys. 2). W tym celu oblicz dla każdego z nich $|G_x|$ i $|O_x|$.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

3. Wykonaj polecenie z poprzedniego zadania dla grafu Petersena (Rys. 3).
4. Wykaż, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieją dokładnie cztery grafy z trzema wierzchołkami i jednaście z czterema wierzchołkami.
5. Narysuj wszystkie nieizomorficzne sześciowierzchołkowe grafy 3-regularne.
6. Przez Q_k oznaczamy graf k -wymiarowej kostki, tj. wierzchołkami w Q_k są wszystkie k -elementowe ciągi zer i jedynek, oraz dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że $n(Q_k) = 2^k$ i $m(Q_k) = k2^{k-1}$. Udowodnij, że Q_k jest grafem dwudzielnym.
7. Niech $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Określ liczbę nieidentycznych
 - (a) grafów prostych o zbiorze wierzchołków V .
 - (b) grafów o zbiorze wierzchołków V i m krawędziach, jeśli dopuszczamy pętle i krawędzie wielokrotne.
 - (c) digrafów jak w poprzednim podpunkcie.
8. Udowodnij, że w dwudzielnym grafie o n wierzchołkach, liczba krawędzi jest równa co najwyżej $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.
9. Udowodnij, że przynajmniej jeden z grafów G, \bar{G} jest spójny (\bar{G} to dopełnienie G).
10. Udowodnij, że graf prosty $G = (V, E)$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy G_v , będące wynikiem usunięcia z G wierzchołka v z przyległymi krawędziami, są spójne ($n(G) > 2$).
11. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe drogi proste mają wspólny wierzchołek.
12. Udowodnij, że graf prosty o n wierzchołkach ma co najwyżej $\frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ krawędzi, gdzie p jest liczbą składowych spójności. Ile ma on co najmniej krawędzi przy p składowych spójności?
13. Każdą cząsteczkę węglowodoru o wzorze sumarycznym $C_k H_{2k+2}$ można przedstawić w postaci grafu (spójnego). W grafie tym krawędzie oznaczają wiązania chemiczne. Każdy atom wodoru (H) związany jest z jednym innym atomem, a każdy atom węgla (C) związany jest z czterema innymi atomami. Pokaż, że graf ten dla węglowodoru $C_k H_{2k+2}$ jest drzewem. Każde dwa nieizomorficzne grafy tego typu wyznaczają różne izomery. Ile jest różnych izomerów $C_5 H_{12}$?
14. Niech d_1, d_2, \dots, d_n będzie ciągiem liczb naturalnych (dodatnich). Pokaż, że d_i jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa **wtedy i tylko wtedy**, gdy

$$\sum d_i = 2(n-1).$$

15. Niech l_1 oznacza liczbę wierzchołków wiszących drzewa, a l_2 liczbę wierzchołków stopnia większego niż dwa. Pokaż, że $l_1 \geq l_2 + 2$. Opisz drzewa dla których zachodzi równość.