Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 1

Początek zapisów: **10 października 2016 r.**

Termin realizacji: **13 listopada 2016 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): ***8–12 punktów***

Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez trzy osoby (trzy zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P1.12, P1.21) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P1.1. $\boxed{\text{9 punktów}}$ Rozważmy zadanie obliczania wartości funkcji

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3} \tag{1}$$

dla x bliskich 0.

a) Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Zaprogramuj funkcję $f(x)$ według wzoru (1) (możesz wykorzystać biblioteczną funkcję $\sin x$). Wywołaj ją dla $x := 10^{-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, 15)$. Skomentuj wyniki i porównaj z wcześniej obliczoną granicą.

c) Opracuj metodę obliczania $f(x)$, która jest lepsza niż wzór (1). Zaproponowana metoda powinna dobrze działać dla dowolnego $x \neq 0$.

P1.2. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Liczba e jest następującą granicą:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2}$$

Korzystając ze wzoru (2), oblicz kolejne przybliżenia liczby e podstawiając $n = 8^k$ dla $k = 1, 2, \ldots, 10$. Oceń jakość uzyskanych wyników. Podaj lepszy sposób obliczania wartości e.

P1.3. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Wartości funkcji $f(x) = (x - 1)^8$ można obliczać na różne sposoby, np:

a) $x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$,

b) $(((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1$,

c) $(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)$,

d) $\left\{\left[(x - 1)^2\right]^2\right\}^2$,

e) $\begin{cases} e^{8 \ln |x-1|} & : \ (x \neq 1), \\ 0 & : \ (x = 1). \end{cases}$

Porównaj podane wyżej metody obliczania $f(x)$ dla $x \in [0.99, 1.01]$ (np. w N równoodległych punktach tego przedziału). Wyniki eksperymentu przedstaw na odpowiednich wykresach, przeanalizuj je i skomentuj.

P1.4. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Wykorzystując jedynie podstawowe działania arytmetyczne $(+, -, *, /)$, zaproponuj efektywne sposoby wyznaczania wartości funkcji $f(x) = \mathrm{arctg}x$ i $g(x) = \mathrm{arcctg}x$ z dokładnością bliską dokładności maszynowej. Opracowane algorytmy porównaj z funkcjami bibliotecznymi.

P1.5. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Wykorzystując jedynie podstawowe działania arytmetyczne $(+, -, *, /)$, zaproponuj efektywny sposób wyznaczania wartości funkcji sinus i cosinus z dokładnością bliską dokładności maszynowej. Opracowany algorytm porównaj z funkcjami bibliotecznymi.

P1.6. $\boxed{\text{11 punktów}}$ Niech $\{s_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do granicy s. Algorytm ε konstruuje tablicę wielkości $\varepsilon_n^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{-1}^{(n)} &= 0, && n \in \mathbb{N}_0,\\
\varepsilon_{0}^{(n)} &= s_n, && n \in \mathbb{N}_0,\\
\varepsilon_{k+1}^{(n)} &= \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + \frac{1}{\varepsilon_{k}^{(n+1)} - \varepsilon_{k}^{(n)}}, && k, n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

W wielu wypadkach parzyste kolumny są zbieżne do s szybciej niż $\{s_n\}$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{2k}^{(n)} - s}{s_n - s} = 0.$$

a) Obliczyć 20 początkowych wyrazów ciągów $\{s_n\}$ i $\{\varepsilon_2^{(n)}\}$ oraz $\{e_n := s_n - s\}$ i $\{d_n := \varepsilon_2^{(n)} - s\}$ w wypadku

i. $s_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (2j+1)^{-1}$, $s = \pi/4$;

iii. $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-3/2}$, $s \approx 2.612375348685488$;

ii. $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^j (j+1)^{-1}$, $s = \ln 2$;

iv. $s_n = \sum_{k=0}^{n} (j+1)^{-2}$, $s = \pi^2/6$;

Czy mamy do czynienia z istotnym przyspieszeniem zbieżności? Powtórzyć doświadczenie dla **innych** danych.

b) Przedstawić przyspieszenie zbieżności uzyskiwane przez algorytm ε w kolejnych (parzystych) kolumnach.

P1.7. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Ciąg *funkcji Bessela* J_n określamy wzorem

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt)\, \mathrm{d}t \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Łatwo zauważyć, że $|J_n(x)| \leqslant 1$. Wiadomo, że zachodzi związek

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

a) i. Wykorzystać ten związek oraz znane wartości $J_0(1) \approx 0.7651976866$, $J_1(1) \approx 0.4400505857$ do obliczenia w arytmetyce z pojedynczą precyzją wartości

$$J_0(1),\ J_1(1),\ \ldots,\ J_{20}(1).$$

Co można powiedzieć o wiarygodności wyników?

ii. Rozważyć następujący algorytm.

— Wybrać $N > 20$ i określić pomocnicze wartości

$$\begin{aligned}
c_{N+1}^{(N)} &:= 0; \qquad c_N^{(N)} := 1.0,\\
c_{k-1}^{(N)} &:= \frac{2k}{x} c_k^{(N)} - c_{k+1}^{(N)} \quad (k = N, N-1, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

— Następnie obliczyć stałą $\lambda := J_0(x)/c_0^{(N)}$ oraz wielkości

$$j_k^{(N)} := \lambda c_k^{(N)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N).$$

— Wówczas jest $j_k^{(N)} \approx J_k(x)$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$.

Wykonać obliczenia w arytmetyce z pojedynczą precyzją dla $x = 1$ oraz dla $N = 25$ i $N = 30$. Przedyskutować wyniki.

b) Powtórzyć obliczenia z punktu a) w arytmetykach z podwyższoną precyzją. Przedyskutować wyniki.

P1.8. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Sprawdź doświadczalnie, jak dobrym przybliżeniem wartości e^x jest dla $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ następujące wyrażenie wymierne:

$$\frac{\sum_{k=0}^{3} a_{2k} \left(\frac{x}{3}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{3} b_{2k} \left(\frac{x}{3}\right)^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{3} a_{2k} \left(\frac{x}{3}\right)^{2k} - \sum_{k=0}^{3} b_{2k} \left(\frac{x}{3}\right)^{2k+1}}, \tag{3}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &:= 0.864864, & b_0 &:= 1.297296,\\ a_2 &:= 0.898128, & b_2 &:= 0.37422,\\ a_4 &:= 0.10206, & b_4 &:= 0.0183708,\\ a_6 &:= 0.0020412, & b_6 &:= 0.00010935. \end{aligned}$$

Następnie, wykorzystując wzór (3), zaproponuj efektywny sposób obliczania z dużą dokładnością wartości e^x dla $x \in \mathbb{R}$. Opracowaną metodę porównaj z funkcją biblioteczną.

P1.9. $\boxed{\text{9 punktów}}$ Opracować i sprawdzić na przykładach procedury funkcyjne, obliczające z dokładnością bliską dokładności maszynowej wartości następujących funkcji matematycznych:

$$g_1(x) := x + e^x - e^{3x}, \quad g_2(x) := \log x - 1, \quad g_3(x) := \sqrt{x^2+1} - 1.$$

W każdym wypadku zbadać, czy istnieje groźba utraty cyfr znaczących wyniku i – w razie potrzeby – zaproponować sposób uniknięcia groźby.

P1.10. $\boxed{\text{12 punktów}}$ Zaproponuj efektywny numerycznie program wyznaczający rozwiązania równania algebraicznego postaci

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

gdzie a, b, c i d są liczbami rzeczywistymi.

P1.11. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Sprawdzić, że dla dowolnych stałych A i B ciąg

$$x_k = A\,(1+\sqrt{3})^k + B\,(1-\sqrt{3})^k$$

spełnia związek rekurencyjny

$$x_k = 2\,(x_{k-1} + x_{k-2}) \qquad (k = 3, 4, \ldots).$$

Sprawdzić, że jeśli $x_1 = 1$ i $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ są początkowymi dwoma wyrazami ciągu, to $A = 0$ i $B = (1-\sqrt{3})^{-1}$. Obliczyć (w arytmetykach z pojedynczą i podwyższoną precyzją) 100 początkowych wyrazów ciągu następującymi trzema sposobami, a następnie porównać wyniki:

a) za pomocą związku rekurencyjnego,
b) za pomocą wzoru $x_k = B\,(1-\sqrt{3})^k$,
c) za pomocą wzoru $x_k = \tilde{A}\,(1+\sqrt{3})^k + B\,(1-\sqrt{3})^k$, gdzie $\tilde{A} := 2^{-t}$ (błąd reprezentacji liczb rzeczywistych w arytmetyce maszynowej).

P1.12. $\boxed{\text{Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów}}$ Jak wiadomo, liczba π określa stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. Można próbować ją wyznaczyć stosując np. wzór

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

chociaż nie jest to zbyt dobry pomysł (*dlaczego?*). Korzystając z odpowiedniej literatury, zaproponuj przynajmniej trzy sposoby wyznaczania wartości liczby π z dużą dokładnością, np. kilkunastu tysięcy cyfr po przecinku. Opisane metody porównaj pod względem szybkości i efektywności numerycznej.

P1.13. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Zrealizować następujący ***wariant metody Newtona z nadzorem***. Niech f będzie daną funkcją i niech będą dane takie dwa przybliżenia a i b jej pierwiastka, że $f(a)f(b) < 0$. Jeśli $|f(a)| < |f(b)|$, połóżmy $c := a$; w przeciwnym razie $c := b$. Jeśli jeden krok metody Newtona dla $x_0 := c$ daje wartość x_1 leżącą w przedziale $[a, b]$, przyjmujemy $c := x_1$, w przeciwnym razie kładziemy $c := a + (b-a)/2$ (*co to oznacza?*). Następnie przyjmujemy

$$[a,\, b] := \begin{cases} [a,\, c], & \text{jeśli} \quad f(a)f(c) < 0,\\ [c,\, b], & \text{jeśli} \quad f(a)f(c) \geqslant 0 \end{cases}$$

i powtarzamy wszystkie opisane wyżej czynności dla aktualnych wartości a i b. Proces kończymy wówczas, gdy $|b-a| < \epsilon$ lub gdy $|f(c)| < \delta$, gdzie ϵ i δ są zadanymi z góry małymi liczbami. Proszę pamiętać o ograniczeniu liczby iteracji, żeby wykluczyć bardzo długie obliczenia!

P1.14. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Korzystając z omówionych metod iteracyjnych zaproponować sposób wyznaczania ***ekstremum lokalnego*** funkcji $f \in C^1[a,b]$. Wykonać eksperymenty m.in. dla $f(x) = \sin(2\pi x)$, $x \in [0,1]$; $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in [-1,1]$; $f(x) = x(1+x^2)^{-1}$, $x \in [0,10]$; $f(x) = x^2 + x - 1$, $x \in [-2,2]$.

P1.15. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Na podstawie (udokumentowanych) obliczeń dla wybranych równań nieliniowych postaci $f(x) = 0$ wyznaczyć w przybliżeniu (inaczej mówiąc – odgadnąć) rząd każdej z poniższych metod iteracyjnych:

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{\sqrt{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}}, \tag{4}$$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}\left[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right]^2 \qquad (\textbf{\textit{metoda Olvera}}), \tag{5}$$

$$x_{k+1} := x_k - 1\Big/\left[\frac{f'(x_k)}{f(x_k)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}\right] \qquad (\textbf{\textit{metoda Halleya}}). \tag{6}$$

P1.16. $\boxed{\text{12 punktów}}$ Układ równań nieliniowych,

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

można rozwiązać uogólnieniem metody Newtona. Zapiszmy układ (7) w postaci wektorowej,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

gdzie $\mathbf{f}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że wektor $\mathbf{x}_k$ jest bieżącym przybliżeniem rozwiązania układu (7). Wówczas, kolejne przybliżenie $\mathbf{x}_{k+1}$ jest rozwiązaniem następującego układu równań liniowych:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)\,(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k),$$

gdzie

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

nazywamy Jakobianem funkcji $\mathbf{f}$. Należy zaprogramować powyższą metodę i wykorzystać ją do rozwiązania przykładowych układów równań nieliniowych. Jaki jest koszt pojedynczej iteracji algorytmu? Jakie problemy możemy napotkać? Jak wybrać dobre przybliżenie startowe?

P1.17. $\boxed{\text{10 punktów}}$ ***Metoda Steffensena*** jest następującą metodą iteracyjną rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} := x_k - f(x_k)/g(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

gdzie

$$g(x) := [f(x + f(x)) - f(x)]/f(x).$$

Przy pewnych założeniach jest ona zbieżna kwadratowo.
Zaprogramować powyższą metodę i wykonać obliczenia m. in. dla $f(x) = x - \operatorname{tg} x$ (zera leżące w pobliżu 4.5 i 7.7) oraz $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ i $x_0 = 5$.

P1.18. $\boxed{\text{11 punktów}}$ Zrealizować następujący ***wariant metody siecznych***. Niech f będzie daną funkcją i niech a i b będą takie, że $f(a)f(b) < 0$. Połóżmy $c := a$. W kolejnych krokach metody niech b oznacza *ostatnie przybliżenie* zera α funkcji f, a – *przedostatnie przybliżenie*, a c – *najbardziej aktualne przybliżenie* (tj. otrzymane najpóźniej) o własności

$$f(c)f(b) < 0. \tag{8}$$

W każdym kroku aktualizujemy wartości a, b, c zastępując je odpowiednio wartościami a', b', c'. Jeśli $f(a)f(b) < 0$, to obliczamy b' stosując jeden krok metody siecznych dla przybliżeń a i b (symbolicznie $b' := MS(a,b)$). Jeśli $f(a)f(b) > 0$, to sprawdzamy najpierw, czy punkt $MS(a,b)$ będzie leżał w przedziale o końcach b i c. Jeśli TAK, to kładziemy $b' := MS(a,b)$; w przeciwnym razie przyjmujemy $b' := (b+c)/2$.

Wreszcie definiujemy $a' := b$, potem $c' := c$ albo $c' := a'$, aby zachodziła własność analogiczna do własności (8), a następnie powtarzamy wszystkie wyżej opisane czynności dla aktualnych wartości a, b i c. Proces kończymy wówczas, gdy $|b - a| < \epsilon$ i/lub gdy $|f(b)| < \delta$, gdzie ϵ i δ są zadanymi z góry małymi liczbami. Proszę pamiętać o ograniczeniu liczby iteracji, żeby wykluczyć bardzo długie obliczenia!

P1.19. 12 punktów Metodę Newtona można stosować także do znajdowania rozwiązań równania nieliniowego $f(z) = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Np. dla $f(z) := z^4 + 1$ i $z_0 := 0.5 + 0.5i$ otrzymujemy $z_{10} = 0.7071067812 + 0.7071067812i$ – czyli bardzo dobre przybliżenie liczby $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, będącej jednym z rozwiązań równania $z^4 + 1 = 0$.
Niech c_{n+1} oznacza kolor czarny. Niech $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ będą rozwiązaniami równania $z^n + 1 = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Przypiszmy każdemu z tych rozwiązań inny, ale różny od czarnego, kolor; powiedźmy odpowiednio $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Niech M będzie liczbą parzystą, a W_M następującym zbiorem punktów płaszczyzny zespolonej:

$$W_M := \left\{ -1 + 2\frac{k}{M} + \left(-1 + 2\frac{l}{M}\right) i \ : \ k, l = 0, 1 \ldots, M \right\}.$$

Dla wybranych n i M (np. $n = 3, 4, 5, 6$; $M = 400, 800$), wykonaj rysunek, na którym każdy z punktów w zbioru W_M zostanie narysowany kolorem $c(w)$ ustalonym na podstawie poniższej procedury:

a) $z_0 := w; \qquad z_{k+1} := z_k - \dfrac{f(z_k)}{f'(z_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N - 1;$ np. $N = 10, 20, 35)$;

b) jeśli istnieje takie k, że z_N jest *blisko* liczby ζ_k (jak należy to rozumieć w wypadku liczb zespolonych?), to przyjmujemy $c(w) := c_k$, w przeciwnym razie $c(w) := c_{n+1}$.

Jaki charakter ma otrzymamy w ten sposób obraz? Spróbuj przeanalizować zaobserwowane zjawisko i wyciągnąć wnioski. Następnie przeprowadź podobny eksperyment dla *metody Halleya*, która wyraża się wzorem

$$z_{k+1} := z_k - 1 \Big/ \left[\frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z_k)}{f'(z_k)} \right].$$

Czy metoda ta zachowuje się podobnie?

P1.20. 10 punktów Niech α będzie rozwiązaniem równania nieliniowego $f(x) = 0$. Załóżmy, że dysponujemy metodami iteracyjnymi postaci

$$x_{n+1} := F(x_n), \qquad x_{n+1} := G(x_n),$$

gdzie F i G są funkcjami spełniającymi warunek $F(\alpha) = G(\alpha) = \alpha$ (np. w wypadku metody Newtona mamy $F(x) = x - f(x)/f'(x)$). Załóżmy, że metody te są rzędu p i q, odpowiednio. Można wykazać, że metody postaci

$$x_{n+1} := F(G(x_n)), \qquad x_{n+1} := G(F(x_n))$$

są rzędu $p \cdot q$. Wykorzystaj powyższą obserwację do zaproponowania metod iteracyjnych wysokiego rzędu rozwiązywania równań nieliniowych. Przeprowadź odpowiednie eksperyment numeryczne i wyciągnij wnioski.

P1.21. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Rozważmy następującą metodę iteracyjną wyznaczania pierwiastka α równania nieliniowego $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + h(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

gdzie x_0 jest dane, a h jest pewną funkcją. Oczywiście przy $h(x) \equiv 0$ mamy do czynienia z klasyczną metodą Newtona, o której wiadomo, że jest zbieżna kwadratowo, jeśli α jest pierwiastkiem pojedynczym. Zbadać możliwość takiego doboru funkcji h, aby wykładnik zbieżności powyższej metody wynosił więcej niż 2, np. 3, 4 albo 5. Wyniki teoretyczne poprzeć odpowiednimi testami numerycznymi. Czy w podobny sposób można zmodyfikować inne metody, np. metodę Halleya (patrz zadanie **P1.15.**)?
Wskazówki: 1^o Jakie warunki musi spełniać funkcja h? 2^o Zapoznaj się z rozdziałem 8.4. książki A. Ralstona, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.