

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 7

1. Ile jest takich rozłożeń (dowolnej liczby) pionków na szachownicy $n \times n$, że dla każdych dwóch pionków jeden z nich jest na lewo i niżej od drugiego?
2. Pokaż, że $F_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i}$. Pokaż też, że $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} F_{i+m}$ jest liczbą Fibonacciego (którą?).
3. Znajdź wzór na liczbę ciągów długości $2n$, w których każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ występuje dokładnie dwa razy i takich, że sąsiednie liczby są różne.
4. Znajdź zwartą postać ciągu a_n określonego wzorem:

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

5. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą metody anihilatorów:

(a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$

(b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$

(c) $a_{n+2} = 2^{n+1} - a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$

Rozwiąż jedno z nich do końca.

6. Rozwiązując zależność $a_n = a_{n-3}$ metodą anihilatorów wyraż $n \bmod 3$ jako kombinację liniową pierwiastków trzeciego stopnia z 1. Korzystając z tego wzoru znajdź analogiczny wzór na $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.
7. Ile jest ciągów n liter należących do 26-literowego alfabetu łacińskiego zawierających parzystą liczbę liter 'a' (zero też jest parzyste).

Wsk.: Ułóż zależność rekurencyjną opisującą tę liczbę i rozwiąż ją np. za pomocą metody anihilatorów

8. Za pomocą metody anihilatorów oblicz $s_n = \sum_{i=1}^n i2^i$ rozwiązując zależność $s_n = s_{n-1} + n2^n$.
9. Niech c_n oznacza liczbę ciągów n znaków ze zbioru $\{0, 1, 2\}$ nie zawierających dwóch sąsiednich jedynek ani dwóch sąsiednich dwójek. Ułóż zależność rekurencyjną i rozwiąż ją wyznaczając jawny wzór na c_n .
10. Przez linię komunikacyjną przesyłamy 0 lub 1. Prawdopodobieństwo, że adresat dostanie oryginalną wiadomość wynosi $1-p$ a prawdopodobieństwo że dostanie jej negację wynosi p . Niech p_n będzie prawdopodobieństwem otrzymania 0 po przesłaniu 0 przez n kolejnych linii komunikacyjnych. Znajdź zależność rekurencyjną na p_n i rozwiąż ją za pomocą metody anihilatorów.
11. (Problem ruiny gracza). Gracz A ma k złotych a gracz B ma $n-k$ złotych. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez gracza A wynosi p (przegrywający przekazuje wygrywającemu złotówkę). Gra kończy się w momencie gdy któryś z graczy pozostanie bez pieniędzy. Napisz zależność rekurencyjną na prawdopodobieństwo p_k wygranej gracza A i rozwiąż ją za pomocą metody anihilatorów.
12. Policz sumę

$$(a) \sum_{k=1}^n k(k-1)2^k \quad (b) \sum_{k=1}^n k^2(-1)^k \quad (c) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

13. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciąg a_n . Wylicz funkcje tworzące ciągów:

(a) $b_n = na_n$

(b) $c_n = a_n/n, c_0 = 0$

(c) $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

(d) $d_n = \begin{cases} a_n & \text{gdy } n = 2k \\ 0 & \text{gdy } n = 2k+1 \end{cases}$

Wsk.: W (c) skorzystaj ze wzoru na iloczyn szeregów potęgowych dla $A(x)$ i $1+x+x^2+\dots$

14. Wylicz funkcje tworzące ciągów

$$(a) a_n = n^2 \quad (b) a_n = n^3 \quad (c) a_n = \binom{n+k}{k}$$

15. Oblicz funkcje tworzące ciągów

(a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n .

(b) $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ ($H_0 = 0$)