

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M14

25 stycznia 2017 r.

M14.1. 1 punkt Niech $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spełnia nierówność $\|E\| < 1$. Wykazać, że $I - E$ jest macierzą nieosobliwą, a jej odwrotność spełnia nierówność

$$(1) \quad \|(I - E)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|E\|}.$$

M14.2. 1 punkt Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie macierzą dominującą przekątniowo, tj. taką, że

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Wykazać, że metoda eliminacji Gaussa bez wyboru elementów głównych zachowuje tę własność, tzn. że wszystkie macierze $A^{(k)}$ są dominujące przekątniowo. Wywnioskować stąd, że każda macierz dominująca przekątniowo jest nieosobliwa i posiada rozkład LU .

M14.3. 1 punkt Niech $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie macierzą o elementach

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ b_{ij} &= -1 & (i < j), \\ b_{ij} &= 0 & (i > j). \end{aligned}$$

Sprawdzić, że $\det B \ll \text{cond}_{\infty}(B)$, gdzie $\text{cond}_{\infty}(B) := \|B\|_{\infty} \|B^{-1}\|_{\infty}$. Jaki stąd wniosek?

M14.4. 1 punkt Jak ocenimy uwarunkowanie układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} & 1 & 1 + \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & & 1 \end{bmatrix},$$

dla $0 < \varepsilon \leq 0.01$?

M14.5. 1 punkt Niech $\tilde{\mathbf{x}}$ będzie przybliżonym rozwiązaniem układu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdzie $\det A \neq 0$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Niech $\mathbf{r} := \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$ oznacza resztę. Wykazać, że wówczas zachodzą nierówności

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \text{cond}(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|A\|}, \quad \frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|},$$

gdzie $\mathbf{x} := A^{-1}\mathbf{b}$ jest dokładnym rozwiązaniem.

M14.6. 1 punkt Załóżmy, że wszystkie wartości własne λ_i macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ są rzeczywiste i spełniają nierówności

$$0 < \alpha \leq \lambda_i \leq \beta \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Wykazać, że metoda iteracyjna Richardsona

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \tau A)\mathbf{x}^{(k)} + \tau \mathbf{b} \quad (k \geq 0),$$

zastosowana do rozwiązania układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jest zbieżna, jeśli $0 < \tau < 2/\beta$.

M14.7. 1 punkt Wykazać, że jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

to $\|B_J\|_\infty < 1$ i metoda Jacobiego jest zbieżna.

M14.8. 1 punkt Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spełnia warunki

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

(Mówimy, że A jest macierzą z dominującą przekątną kolumnowo.)

Pokazać, że metoda iteracyjna Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy A , jest zbieżna.

M14.9. 1 punkt Wykazać, że jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, to $\|B_S\|_\infty < 1$, a więc metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna.