# Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

## Lista nr 3

Początek zapisów: **12 grudnia 2016 r.**

Termin realizacji: **29 stycznia 2017 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): ***8–12 punktów***

***Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez trzy osoby (trzy zespoły dwuosobowe — w wypadku zadania P3.20) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.***

**P3.1.** $\boxed{\text{10 punktów}}$ Liniowe zadanie najmniejszych kwadratów, tzn. minimalizacji

$$||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||,$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, przy czym $||\cdot||$ jest normą euklidesową, można sprowadzić do rozwiązywania układu równań liniowych z macierzą kwadratową układu (układ równań normalnych). Inna metoda polega na postawieniu dwóch układów równań liniowych,

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}, \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{r} = \mathbf{0},$$

gdzie $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$, zapisaniu ich w postaci macierzowej jednego układu typu

$$\mathbf{B}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix} = \mathbf{c},$$

gdzie $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n+m}$, i rozwiązaniu takiego układu. Jaki jest koszt tej metody w porównaniu z metodą układu równań normalnych? Porównaj obie metody na podstawie wybranych testów. W jakich szczególnych wypadkach warto stosować przedstawioną w treści metodę?

**P3.2.** $\boxed{\text{11 punktów}}$ Zaproponuj algorytm przybliżający zadany łuk okręgu,

$$c(\alpha;\, t) = (r\cos t,\, r\sin t) \qquad (-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha),$$

gdzie $\alpha$, $r > 0$, krzywą wielomianową w wybranej postaci. Uogólnij opracowane podejście, aby rozwiązać problem przybliżania zadanej helisy,

$$h(\alpha;\, t) = (r\cos t,\, r\sin t,\, pt) \qquad (-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha),$$

gdzie $\alpha$, $r$, $p > 0$, krzywą wielomianową w wybranej postaci. Jakie cechy powinny posiadać dobre rozwiązania tych problemów? Przetestuj opracowane algorytmy. Zobacz [1] i artykuły tam cytowane.

**Literatura:**

[1] L. Lu, On polynomial approximation of circular arcs and helices, Computers and Mathematics with Applications 63 (2012), 1192–1196.

**P3.3.** $\boxed{\text{9 punktów}}$ Zrealizować i porównać na przykładach dwie poznane metody konstrukcji wielomianów ortogonalnych $P_0, P_1, \ldots, P_r$ na danym zbiorze $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$ z wagą $p$:

a) metodę Grama-Schmidta ortogonalizacji układu $1, x, \ldots, x^r$;

b) sposób korzystający ze związku rekurencyjnego, spełnianego przez $P_0, P_1, \ldots, P_r$.

Wykonać obliczenia i zinterpretować wyniki **między innymi** dla zbioru punktów $\{u_0,\, u_1,\, \ldots,\, u_r\}$, gdzie $u_k := \cos\frac{k\pi}{r}$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$, oraz takiej wagi $p$, że

$$p(u_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0, r),\\ 1 & (1 < k < r).\end{cases}$$

**P3.4.** $\boxed{\text{10 punktów}}$ Węzły równoodległe używane w kwadraturach Newtona-Cotesa bywają użyteczne dla wielomianów niskich stopni, ale mogą się okazać złym wyborem, gdy stopień jest wysoki. Należy rozważyć kwadratury dla całek postaci

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

z węzłami interpolacyjnymi będącymi:

a) zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

b) zerami wielomianu Czebyszewa drugiego rodzaju $U_{n-1}(x)$, które są punktami ekstremalnymi $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1); \tag{1}$$

c) wartościami danymi wzorem (1) wraz z $x_0 = 1$ i $x_n = -1$.

Podaj jawne wzory na wagi kwadratur w każdym z wymienionych wypadków. Przetestuj uzyskane kwadratury dla kilku wybranych funkcji $f$.

**Literatura:**

[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

**P3.5.** 11 punktów W kontekście rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu istotne są następujące wzory Adamsa-Bashfortha i Adamsa-Moultona:

a) $$\int_t^{t+h} g(s)\mathrm{d}s \approx \frac{h}{24}\left[55g(t) - 59g(t-h) + 37g(t-2h) - 9g(t-3h)\right],$$

b) $$\int_t^{t+h} g(s)\mathrm{d}s \approx \frac{h}{24}\left[9g(t+h) + 19g(t) - 5g(t-h) + g(t-2h)\right].$$

Jak wyprowadzić te wzory? Jaki jest rząd tych kwadratur? Przeprowadź eksperymenty dla wybranych całek. Więcej informacji można znaleźć w [1, §10.3].

**Literatura**

[1] W.Cheney, D. Kincaid, *Numerical mathematics and computing*, sixth edition, Brooks/Cole: Cengage Learning, 2007.

**P3.6.** 12 punktów Zrealizować następującą metodę obliczania przybliżonej wartości całki

$$I := \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dla danego $n$ parzystego, funkcję $f$ przybliżamy za pomocą wielomianu $J_n = \sum_{j=0}^{n}{}' a_j\,T_j$, gdzie

$$a_j := \frac{\epsilon_j}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' f(u_{n-1,k})T_k(u_{n-1,j}) \quad (j = 0, 1, \ldots, n;\ \epsilon_j = 2,\ \text{gdy } j < n,\ \epsilon_n = 1),$$

$$u_{n-1,k} = \cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

a następnie za przybliżenie całki $I$ przyjmujemy liczbę

$$I_n := \int_{-1}^{1} J_n(x)\,\mathrm{d}x = 2(b_1 + b_3 + \ldots + b_{n-1}), \qquad \text{gdzie} \quad b_{2k-1} := \frac{a_{2k-2} - a_{2k}}{4k-2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n/2).$$

Wartość ta powinna być wyznaczona tak, by $|I_n - I_{n-1}| < \varepsilon|I_n|$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest dane. (Dla bezpieczeństwa warto podać ograniczenie z góry wartości $n$). Przykładowe całki podano w zadaniu **P3.7**.

**P3.7.** 8 punktów Zadanie polega na realizacji metody Romberga obliczania całki $I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Dla danych $a$, $b$, $f$ i $\varepsilon > 0$ należy skonstruować $K$ początkowych wierszy tablicy Romberga $\{T_{mk}\}$, gdzie $K$ jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$|T_{K0} - T_{K-1,0}| < \varepsilon|T_{K0}|.$$

Zapewnić możliwość drukowania pełnej tablicy błędów $\{|I - T_{mk}|/|I|\}$. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla następujących całek:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{1}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{2}{2 + \sin(10\pi x)}\,\mathrm{d}x.$$

**P3.8.** 10 punktów Wyprowadź wzory na współczynniki kawadratury Newtona-Cotesa

a) z dwoma węzłami (*wzór trapezów*),

b) z trzema węzłami (*wzór Simpsona*),

c) z czterema węzłami itd.

Następnie wykorzystaj otrzymane wzory do skonstruowania odpowiednich kwadratur złożonych. Przeprowadź eksperymenty numeryczne m.in. dla całek typu

$$\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,$$

gdzie $P$ i $Q$ są wielomianami, a $R$ – funkcją wymierną dwu zmiennych. Wyciągnij wnioski.

**P3.9.** 8 punktów Korzystając z rozkładu danej macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ na iloczyn czynników trójkątnych, wyznaczyć macierz $A^{-1}$. Wykonać obliczenia dla macierzy Hilberta i dla macierzy Pei (zob. zadanie **P3.10**) stopnia $n$, przyjmując wartości $n = 3, 6, 9, 12$ (lub zbliżone do nich) oraz różne wartości parametru $d$ (dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!). Dla kontroli obliczyć element o maksymalnej wartości bezwzględnej macierzy $AB - I$, gdzie $B = fl(A^{-1})$.

**P3.10.** 8 punktów Wyznaczyć rozkład danej macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ na iloczyn czynników trójkątnych. Korzystając z powyższego wyniku rozwiązać układ równań $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Wykonać obliczenia m. in. dla ***macierzy Hilberta*** $A = [a_{ij}]$, gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad (i,\, j = 1, 2, \ldots, n)$$

i ***macierzy Pei***

$$A := \begin{bmatrix} d & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & d & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & d \end{bmatrix}$$

(Zauważmy, że dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!) Omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

**P3.11.** 10 punktów Zaproponować warianty metody eliminacji

a) bez wyboru elementów głównych,

b) z wyborem częściowym elementów głównych,

rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ o macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \ldots & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

**P3.12.** 12 punktów Niech $A$ będzie macierzą nieosobliwą oraz niech $\{X_k\}$ dla $k = 0, 1, \ldots$ będzie ciągiem macierzy spełniających

$$X_{k+1} := X_k + X_k\,(I - AX_k)\,,$$

gdzie $I$ jest macierzą jednostkową. Udowodnij, że:

a) przy założeniu $||I - AX_0|| < 1$, gdzie $||\cdot||$ jest normą macierzową indukowaną przez normę wektorową, zachodzi zbieżność $\{X_k\}$ do $A^{-1}$. Ponadto, dla $E_k := I - AX_k$, pokaż że $E_{k+1} = E_kE_k$;

b) powyższa metoda jest lokalnie zbieżna kwadratowo;

c) przy założeniu $AX_0 = X_0A$ zachodzi $AX_k = X_kA$ dla $k \geqslant 0$.

Na podstawie wybranych macierzy $A$, sprawdź działanie powyższej metody iteracyjnej Schulza w praktyce. W jaki sposób wybrać $X_0$? Czy metoda jest szybsza niż znane metody bezpośrednie odwracania macierzy?

**Literatura:**

[1] A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Dover Publications Inc., New York, 2006.

**P3.13.** 10 punktów Stosując metodę eliminacji z wyborem częściowym elementów głównych obliczyć wyznacznik macierzy $A$. Zauważyć, że dla uniknięcia nadmiaru lub niedomiaru warto informację o $\det A$ podać w postaci:

$$\sigma, \quad \log|\det A|,$$

gdzie $\sigma := \operatorname{sgn}\,\det A$. Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla macierzy Pei i Hilberta oraz omówić wyniki, przyjmując różne wartości parametrów $n$ i $d$ (w tym – $d \approx 1$).

**P3.14**. 8 punktów Zaproponować algorytm rozwiązania układu równań postaci

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & & \\ a_1 & d_2 & c_2 & & & \\ & a_2 & d_3 & c_3 & & \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ & & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Czy uprości sprawę (jak?) założenie, że stałe $a_i$, $c_i$, $d_i$ spełniają nierówności

$$|a_{i-1}| - |d_i| + |c_i| < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ a_0 := c_n := 0)?$$

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

**P3.15**. 10 punktów Opracować oszczędny algorytm wyznaczający rozkład trójkątny *LU niemal trójprzekątniowej* macierzy

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & c_2 & & & b_1 \\ b_2 & a_2 & c_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_n \\ c_1 & & & b_n & a_n \end{bmatrix},$$

która różni się od trójprzekątniowej tylko obecnością narożnych elementów $b_1$ i $c_1$. Warto wykorzystać to pokrewieństwo i algorytm rozkładu *LU* macierzy trójprzekątniowej. Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki.

**P3.16**. 10 punktów Ważnym z punktu widzenia zastosowań jest zadanie rozwiązywania *wielkich* układów równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną. Jedną z często stosowanych metod jest tzw. *metoda Czebyszewa*, której zwięzły opis można znaleźć np. w [2, §6.8.3] (porównaj też z [1, str. 215]). Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności powyższą metodę. Porównaj ją z innymi omówionymi na wykładzie sposobami iteracyjnego rozwiązywania układów równań liniowych.

**Literatura:**

[1] W. Cheney, D. Kincaid, *Analiza numeryczna*, WNT, 2006.

[2] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.

**P3.17**. 10 punktów Zrealizować następujący ***algorytm Banachiewicza-Choleskiego***. Dla danej macierzy symetrycznej dodatnio określonej $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wyznaczyć macierz trójkątną dolną $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o dodatnich elementach na głównej przekątnej i taką, że $LL^T = A$. Wykorzystać powyższy wynik do rozwiązania układu równań $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Wykonać obliczenia m. in. dla macierzy Hilberta i dla macierzy Pei (zob. zadanie **P3.10**) stopnia $n$, przyjmując wartości $n = 3, 6, 9, 12$ (lub zbliżone do nich) oraz różne wartości parametru $d$ (dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!); wektor $\boldsymbol{b}$ można np. dobrać tak, by wektor $\boldsymbol{x}^T = [1, 1, \ldots, 1]$ był rozwiązaniem układu. Dla każdego zestawu danych podać wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

**P3.18**. 10 punktów Jak wiadomo, rzędem macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ nazywamy maksymalą liczbę jej liniowo niezależnych kolumn. Wykorzystując wiadomości podane na wykładzie z algebry liniowej, opracuj efektywny sposób wyznaczania rzędu macierzy. Następnie, wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności zaproponowaną metodę.

**P3.19**. 12 punktów *Pseudoodwrotnością* macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ nazywamy macierz $A^+ \in \mathbb{R}^{m\times n}$ spełniającą następujące warunki:

$$AA^+A = A, \qquad A^+AA^+ = A^+, \qquad (AA^+)^T = AA^+, \qquad (A^+A)^T = A^+A$$

(patrz np. [1, str. 261]; jakie może być zastosowanie macierzy $A^+$?). Załóżmy, że rząd $r$ macierzy $A$ jest równy jednej z liczb $m$, $n$. Opracuj efektywny pod względem numerycznym sposób wyznaczania pseudoodwrotności danej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

**Literatura**

[1] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1992.

**P3.20**. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Macierz kwadratową $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ można przedstawić w postaci iloczynu *macierzy ortogonalnej* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełniającej warunek $QQ^T = I_n$ ($I_n$ – macierz jednostkowa stopnia $n$) i macierzy trójkątnej górnej $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tzn. $A = QR$. Opracuj metodę wyznaczającą *rozkład* $QR$ danej macierzy kwadratowej $A$, a następnie wykorzystaj go do opracowania efektywnej metody znajdowania macierzy $A^{-1}$. Porównaj, pod względem złożoności obliczeniowej i skuteczności numerycznej, zaproponowaną metodę ze sposobem znajdowania macierzy odwrotnej wykorzystującej rozkład $LU$ macierzy.