Rozwiązanie zadania 3

Wojciech Balik

29 kwietnia 2017

Załóżmy że mamy dane ciągi:

$$A = a_1 < a_2 < ... < a_n$$
$$B = b_1 < b_2 < ... < b_n$$

Zdefiniujmy $2n$ ciągów w następujący sposób:

$$C_1 = a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < ... < a_n < b_n$$

(Czyli innymi słowy: $a_i < b_j \iff i \leq j$)
Pozostałe ciągi są tworzone poprzez zamiane miejscami elementów a_i i b_i, lub b_i oraz a_{i+1}
Przez zamiane miejscami mam na myśli zamiene razem z relacją mniejszości, tzn.

$$C_2 = b_1 < a_1 < a_2 < b_2 < ... < a_n < b_n$$
$$C_3 = a_1 < a_2 < b_1 < b_2 < ... < a_n < b_n$$
$$\text{itd.}$$

Na początku, algorytm ma wiedzę tylko o relacjach w ciągach A oraz B, więc potencjalnym rozwiązaniem może być każdy ciąg C_i.
Gdyby algorytm zadał pytanie $a_2 <_? b_1$ a adwersarz odpowiedziałby "tak", to zostałoby jedno potencjalne rozwiązanie - C_3, jednak my przyjmiemy inną strategię. Na pytanie $a_i <_? b_j$ odpowiadamy "tak" $\iff i \leq j$.

Lemat 1. *Niech L_k oznacza ilość potencjalnych rozwiązań po k porównaniach. Wówczas:*

$$L_k \geq 2n - k$$

Dowód. Dowód przez indukcję względem k.
Teza jest przwdziwa dla $k = 0$ (mamy $L_0 = 2n$).
Załóżmy że $T_{k-1} \geq 2n - k + 1$ i rozważmy przypadki(zakładam że algorytm nie pyta o coś co już wie):

1. Algorytm porównuje a_i i b_i lub b_i i a_{i+1}, odpowiadamy zgodnie ze strategią. Jest to prawda dla wszystkich ciągów C_i oprócz tego w którym zamieniliśmy te elementy miejscami, wówczas ten ciąg nie będzie więcej potencjalnym rozwiązaniem, a więc $T_k = T_{k-1} - 1 \geq 2n - k$

2. Algorytm porównuje a_i i b_j, gdzie $i \neq j$ oraz $i \neq j + 1$ - odpowiadamy zgodnie ze strategią. Jest to prawda dla każdego ciągu C_i a więc $T_k = T_{k-1} \geq 2n - k$.

□

Na końcu działania algorytmu $L_k = 1 \geq 2n - k$, a więc $k \geq 2n - 1$.