

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M5

9 listopada 2016 r.

**M5.1.** 1 punkt Zaproponować schemat Hornera (podobny do tego z zadania **M4.3**) do obliczania wartości  $p(z_0)$ ,  $p'(z_0)$  i  $p''(z_0)$ , gdzie  $p(z)$  jest danym wielomianem o współczynnikach  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

**M5.2.** 1 punkt Niech  $\alpha$  będzie punktem stałym przekształcenia  $\phi \in C^{p+1}(\mathcal{J})$ , gdzie  $\mathcal{J} := (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$  jest pewnym otoczeniem punktu  $\alpha$  oraz  $p \geq 1$ . Udowodnić, że jeśli  $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, p$  oraz  $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ , to metoda iteracyjna

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

jest metodą rzędu  $p + 1$  oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}.$$

**M5.3.** 1,5 punktu Udowodnij, że metoda iteracyjna:

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3R)}{3x_n^2 + R}$$

jest zbieżna sześciennie do  $\sqrt{R}$ .

**M5.4.** 1 punkt Metoda *Halleya* rozwiązywania równania  $f(x) = 0$  korzysta ze wzoru iteracyjnego

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - (f(x_n) f''(x_n))/2}.$$

Wykazać, że jest to metoda równoważna metodzie Newtona zastosowanej do funkcji  $f/\sqrt{f'}$ .

**M5.5.** 1,5 punktu Rozważmy wielomian  $p(z)$  o współczynnikach rzeczywistych  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Niech pierwiastki czynnika kwadratowego  $z^2 - uz - v$  będą pojedynczymi pierwiastkami wielomianu  $p$ . Udowodnić, że wówczas w metodzie Bairstowa jakobian w punkcie  $(u, v)$  jest różny od zera.

**M5.6.** 1,5 punktu Włącz komputer Rozważmy wielomian

$$w(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4.$$

Zastosować metodę Bairstowa do znalezienia wszystkich pierwiastków wielomianu  $w$ . Za przybliżenia początkowe należy przyjąć  $u = 0.1$  i  $v = 0.1$ , a następnie wykonać maksymalnie 10 iteracji w arytmetyce 128 bitowej. Podać uzyskane czynniki kwadratowe, w postaci  $z^2 - uz - v$ , przez które dzieli się wielomian  $w$ . Podać przybliżenia otrzymanych pierwiastków z dokładnością do 16 cyfr dziesiętnych. Porównać otrzymane wyniki z tym, co daje metoda `roots` z pakietu `Polynomials` albo z metodami z pakietu `PolynomialRoots`.

**M5.7.** 1,5 punktu Rozważmy wielokrotne stosowanie metody Newtona do znajdowania pierwiastków wielomianu

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0.$$

Uzasadnić, że proces ten można wykonać bez wykonywania dzielenia syntetycznego — za pomocą tzw. metody Newtona-Maehly'ego. Mianowicie, jeśli znane są przybliżenia  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j$  pierwiastków  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j$ , to kolejne przybliżenia uzyskiwane w metodzie Newtona można obliczać za pomocą następującego wzoru:

$$z_{k+1} = z_k - p(z_k) / \left[ p'(z_k) - p(z_k) \sum_{i=1}^j \frac{1}{z_k - \xi_i} \right].$$

**M5.8.** 1 punkt Rozważyć uogólnienie metody siecznych, w którym do wyznaczenia przybliżenia  $x_{k+1}$  korzysta się z trzech poprzednich przybliżeń  $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}$ . Wyprowadzić wzory na metodę iteracyjną korzystającą z odwrotnej interpolacji (wielomianem st.  $\leq 2$ ).

*Wskazówka:* odwrotna interpolacja oznacza tyle, że zmienia się znaczenie osi  $Ox \leftrightarrow Oy$ .

2 listopada 2016  
Rafał Nowak