Ćwiczenia z analizy numerycznej (M)

Blok 2: lista M 7

23 listopada 2016 r.

M7.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Określmy wielomian $H_{2n+1} \in \Pi_n$ za pomocą wzoru

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, h_k(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k)\, \bar{h}_k(x),$$

gdzie węzły $x_0, \ldots, x_n$ są parami różne, ponadto

$$\left.\begin{aligned} h_k(x) &:= [1 - 2(x - x_k)\lambda'{}_k(x_k)]\lambda_k^2(x), \\ \bar{h}_k(x) &:= (x - x_k)\lambda_k^2(x), \\ \lambda_k(x) &:= \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_k)p'_{n+1}(x_k)}, \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

oraz $p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Wykazać, że H_{2n+1} spełnia warunki

$$(1) \qquad H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

M7.2. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech będzie $f \in C^{2n+2}[a, b]$ i niech wielomian $H_{2n+1}(x) \in \Pi_{2n+1}$ spełnia warunki (1) dla parami różnych węzłów $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$. Udowodnić, że dla każdego $x \in [a, b]$ istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) p_{n+1}^2(x).$$

M7.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć wielomian $H_5 \in \Pi_5$, spełniający warunki $H_5(x_i) = y_i$, $H'_5(x_i) = y'_i$ $(i = 0, 1, 2)$, gdzie x_i, y_i, y'_i mają następujące wartości:

i	x_i	y_i	y'_i
0	-1	7	-1
1	0	6	0
2	2	22	56

M7.4. $\boxed{\text{1 punkt, Włącz komputer!}}$ Niech $f(x) = e^{\arctan(x)}$. Rozważyć interpolację w przedziale $[a, b] := [-5, 5]$ w $n + 1$ równoodległych węzłach. Znaleźć postać potęgową wielomianu interpolacyjnego $L_n(x)$ oraz naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia $s(x)$. Rozważyć $n = 10, 20, 30$ i podać wartości całek

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx, \qquad \int_a^b [L''_n(x)]^2 dx, \qquad \int_a^b [s''(x)]^2 dx.$$

Wyniki należy przedstawić z dokładnością do 8 cyfr dziesiętnych.

M7.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli s jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia, interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$, to

$$\int_a^b [s''(x)]^2\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right) M_k,$$

gdzie $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

M7.6. 1 punkt Wielomiany Bernsteina n-tego stopnia definiujemy następująco

$$B_i^{(n)}(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \quad n \geqslant 0.$$

Udowodnić następujące własności:

a) $\sum_{i=0}^{n} B_i^{(n)}(t) \equiv 1$.

b) $B_i^{(n)}(t) \geqslant 0$ dla $t \in [0, 1]$.

c) $B_i^{(n)}(t) = (1-t) B_i^{(n-1)}(t) + t B_{i-1}^{(n-1)}(t)$.

d) $\left[B_i^{(n)}(t)\right]' = n\left(B_{i-1}^{(n-1)}(t) - B_i^{(n-1)}(t)\right)$.

e) $B_i^{(n)}(t) = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{(n+1)}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{(n+1)}(t)$.

M7.7. 1 punkt Niech $B_i^{(n)}(t)$ oznaczają wielomiany Bernsteina n-tego stopnia. Wyprowadzić wzory na współczynniki $a_k^{(n,i)}$, $b_k^{(n,i)}$, dla których

$$B_i^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n,i)} t^k, \qquad t^i = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n,i)} B_k^{(n)}(t).$$

M7.8. 1 punkt Niech wielomian $p \in \Pi_n$ będzie dany w *postaci Béziera*

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \, B_i^n(t). \tag{2}$$

Wykazać, że

$$p^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} (\Delta^r \beta_i) \, B_i^{n-r}(t) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

gdzie $\Delta^0 \beta_i = \beta_i$ oraz $\Delta^r \beta_i = \Delta^{r-1} \beta_{i+1} - \Delta^{r-1} \beta_i$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Wywnioskować stąd, że

$$p^{(r)}(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \beta_0, \qquad p^{(r)}(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \beta_{n-r}.$$

M7.9. 1,5 punktu Niech będą dane $n+1$ parami różne punkty $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$. Opracować algorytm, który dla danych współczynników $c_0, c_1, \ldots, c_n$ postaci Newtona

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (t - t_i)$$

wielomianu $L_n \in \Pi_n$ oblicza współczynniki $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ jego postaci Béziera

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \, B_k^n(t).$$

17 listopada 2016

Rafał Nowak