

## 1 ANALIZA BŁĘDÓW

### 1.1 Reprezentacja liczb

$x = smB^c$ ,  $s$  - znak,  $1 \leq m < B$  - mantysa,  $c$  - cecha

**Def.**  $t$  - długość mantysy,  $u = 2^{-t-1}$  - precyzja arytmetyki

Błąd zaokrąglenia w górę:  $|rd(x) - x| \leq 2^{-t-1}2^c$ ,

$$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leq \frac{u}{1+u} < u$$

Zbiór reprezentacji arytmetyki:  $X_{fl} = rd(X) = \{rd(x) : x \in X\}$

**Tw.** Jeśli  $|\alpha_i| \leq u$ ,  $\rho_i = \pm 1$ ,  $nu < 1$ , to  $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)^{\rho_i} = 1 + \theta_n$ ,

gdzie  $|\theta_n| \leq \frac{nu}{1 - nu}$ .

**Tw.** Jeśli  $|\alpha_i| \leq u$ ,  $nu < 0.01$ , to  $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i) = 1 + \theta_n$ , gdzie  $|\theta_n| \leq 1.01nu$ .

**Def.** Zadanie jest **źle uwarunkowane**, jeśli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany wyniku. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzenie wyniku to **wskaźniki uwarunkowania**:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} \right| \approx \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| \left| \frac{h}{x} \right|$$

**Def.** Niech  $\tilde{y}$  - wynik algorytmu obliczającego  $f(x)$ . Jeśli dla małych  $\Delta x, \Delta y$  mamy  $\tilde{y} + \Delta y = f(x + \Delta x)$ , tzn. wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych, to algorytm jest **numerycznie poprawny**.

Jeśli  $\tilde{y} = f(x + \Delta x)$  (wynik dokładny dla lekko zaburzonych danych), to algorytm jest **numerycznie bardzo poprawny**.

## 2 INTERPOLACJA

### 2.1 Postacie wielomianów interpolacyjnych

Lagrange'a:  $L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda_k$ , gdzie  $\lambda_k = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x_k - x_j)}$

Barycentryczna:  $\sigma_k = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j}$

$$L_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} y_k / \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} & \text{gdy } x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ y_k & \text{wpp.} \end{cases}$$

### 2.2 Reszta wielomianu interpolacyjnego

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x)$$

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \max_{-1 \leq x \leq 1} |p_{n+1}(x)|$$

### 2.3 Spline

naturalna:  $s''(a) = 0 \wedge s''(b) = 0$

zupelna:  $s'(a) = f'(a) \wedge s'(b) = f'(b)$

okresowa:  $s'(a) = s'(b) \wedge s''(a) = s''(b)$

$$\text{Fakt: } \int_a^b (s''(x))^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) s''(x_k)$$

$$\lambda_k M_k + 2M_k + (1 - \lambda_k) M_{k-1} = 6 * f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

( $k = 1, \dots, n-2$ ) oraz  $\lambda_k = h_k / (h_k + h_{k+1})$  oraz  $h_k = x_k - x_{k-1}$

## 3 WIELOMIANY BERNSTEINA

$Def: B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$  Własności:

$$1) \sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1$$

$$2) B_i^n(u) > 0$$

$$3) B_i^n(u) = (1-u) * B_{i-1}^{n-1}(u) + u B_{i+1}^{n-1}(u)$$

$$4) B_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1} B_{i-1}^{n+1}(u)$$

$$5) (B_i^n(u))' = n (B_{i-1}^{n-1} - B_i^{n-1})$$

## 4 WIELOMIANY ORTOGONALNE

### 4.1 Czebyszew I rodzaju

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), x \in [-1, 1]$$

$$\text{zera } T_{n+1} (k = 0, 1, \dots, n): t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$$

$$\text{ekstrema } T_n : u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$

$$\text{waga: } p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$\int_{-1}^1 p(x) T_k(x) T_l(x) dx = 0 \quad (k \neq l)$$

$$\int_{-1}^1 p(x) (T_k(x))^2 dx = \begin{cases} \pi & \text{gdy } k = 0 \\ \pi/2 & \text{gdy } k \geq 1 \end{cases}$$

## 5 NORMY

### 5.1 Wektorowe

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j|\}$$

Norma musi spełniać 3 warunki:

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0; \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

### 5.2 Macierzowe

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_i |a_{ij}|, \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_j |a_{ij}|,$$

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}.$$

## 6 APROKSYMACJA

### 6.1 Normy, iloczyn skalarny, błąd

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx}$$

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx, \quad \sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2$$

$$E_n(f) := \inf_{W \in \Pi_n} \|f - W_n\|_\infty^T$$

### 6.2 Wielomian optymalny

$$w_n^* = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, \quad \|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}$$

### 6.3 Wielomiany ortogonalne

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - c_1, \quad P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)$$

$$c_k = \frac{\langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}, \quad d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle},$$

## 7 KWADRATURY INTERPOLACYJNE

$$I_p(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad \text{wiel. węzłowy } \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

### 7.1 Kwadratury Newtona-Cotesa

$$h = (b - a)/n, \quad x_k = a + kh$$

$$\text{Wzór trapezów, } n = 1, A_0 = A_1 = h/2, R_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$\text{Wzór Simpsona, } n = 2, A_0 = A_2 = h/3, A_1 = 4h/3, R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$\text{Zł. wzór trapezów: } T_n = h \sum_{k=0}^n f(x_k), R_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi)$$

$$\text{Zł. wzór Simpsona, } n = 2m, S_n(f) = (4T_n - T_m)/3$$

$$R_n^S(f) = -(b - a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

$$\text{Metoda Romberga: } h_k = (b - a)/2^k$$

$$x_i^k = a + i h_k, (i = 0, 1, \dots, 2^k), \quad T_{0k} = T_{2^k}(f)$$

$$T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$$

$$\text{Reszta Newtona-Cotesa:}$$

$$I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx & \text{gdy } n = 1, 3, \dots \\ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \omega(x) dx & \text{gdy } n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

$$\text{gdzie } \xi \in (a, b).$$

### 7.2 Kwadratury Gaussa

$$x_k - \text{zera wiel. orto. } P_{n+1}(x), c_k \text{ wsp. wiod. } P_k$$

$$\lambda_k(x) = \omega(x)/[\omega'(x_k)(x - x_k)].$$

$$0 < A_k = \int_a^b p(x) \lambda_k(x) dx = \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{\|P_n\|^2}{P'_{n+1}(x_k) P_n(x_k)}.$$

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)! c_{n+1}^2} \int_a^b p(x) [P_{n+1}(x)]^2 dx$$

### 7.3 Gauss-Czebyszew

$$\int_{-1}^1 p(x) f(x) dx \approx \int_{-1}^1 p(x) I_n(x) dx$$

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T_i(x), \alpha_i = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f(t_k) T_i(t_k)$$

$$Q_n^{QC}(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(t_k), A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

### 7.4 Gauss-Lobatto

$$x_k = u_k = \cos\left(\frac{k}{n} \pi\right)$$

$$\int_{-1}^1 p(x) f(x) dx \approx \int_{-1}^1 p(x) J_n(x) dx$$

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^n \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n (u_k) T_j(u_k)$$

$$Q_n^L(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}.$$

## 8 ALGEBRA NUMERYCZNA

### 8.1 Metody iteracyjne

$$x^{(k+1)} = B_\tau x^{(k)} + c \quad (k \geq 0)$$

**Tw.** Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego  $x^{(0)}$ , jeśli  $\rho(B) < 1$ , gdzie  $\rho(B) := \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)$  to promień spektralny macierzy B.

$$B_\tau = I - \tau A, \quad c = \tau b \quad (\text{Metoda Richardsona})$$

**Tw.** Załóżmy, że wszystkie  $\lambda_i$  spełniają:  $0 < \alpha \leq \lambda_i \leq \beta$ .

Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla  $0 < \tau < \frac{2}{\beta}$ .

$$B_J = -D^{-1}(L + U) \quad (\text{Metoda Jacobiego})$$

**Tw.** Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \text{ to wtedy } \|B_J\|_\infty < 1 \text{ i } \|B_S\|_\infty < 1.$$

$$B_S = -(D + L)^{-1} U \quad (\text{Metoda Gaussa-Seidela})$$

**Tw.** Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to  $\|B_S\|_\infty < 1$ .

$$B_\omega = (I - \omega M)^{-1}(\omega N + (1 - \omega)I), \quad M = -D^{-1}L, N = -D^{-1}U$$

## 9 TEORETYCZNIE PRZYDATNE WZORY

$$\text{Nierówność Schwarz} \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

$$\text{Inaczej: } \langle v, w \rangle \leq \|v\|_2 \cdot \|w\|_2$$

$$\text{Bairstowa: } p(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \text{ związek: } b_k = a_k + u b_{k+1} + v b_{k+2}$$

Niech ciąg  $a_k$  będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C (C > 0), że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C$ , to p jest wykładnikiem zbieżności ciągu, a C – stałą asymptotyczną błędu. Dla p = 1 oraz 0 < C < 1 zbieżność jest liniowa, dla p = 2 – kwadratowa, dla p = 3 – sześcienna. gdy p = 1 i C = 1 – zbieżność podliniowa, jeśli p = 1, C = 0 – nadliniowa.

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$