Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M **15**

1 lutego 2017 r.

M15.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Macierz B_ω, związana z metodą nadrelaksacji (SOR), określona jest wzorem

$$B_\omega := (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U],$$

gdzie ω jest parametrem. Wykazać, że promień spektralny macierzy B_ω spełnia nierówność

$$\varrho(B_\omega) \geqslant |\omega - 1|.$$

M15.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\boldsymbol{q}_j \in \mathbb{R}^m$ oznaczają wektory uzyskiwane w metodzie ortogonalizacji Gramma-Schmidta, dla danego układu liniowo niezależnych wektorów $\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^m$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Udowodnić, że zachodzi równość

$$I - P_k = (I - \boldsymbol{q}_k\boldsymbol{q}_k^T) \cdots (I - \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^T)(I - \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^T),$$

gdzie P_k jest macierzą rzutu prostopadłego:

$$P_k := \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{q}_j\boldsymbol{q}_j^T.$$

M15.3. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Uzasadnić poprawność następującej *zmodyfikowanej metody ortogonalizacji Gramma-Schmidta* macierzy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ na iloczyn QR $(Q \in \mathbb{R}^{m\times n}, R \in \mathbb{R}^{n\times n})$

for $k = 1, 2 \ldots n$ **do**
  $\boldsymbol{q}_k := \boldsymbol{a}_k$
  for $j = 1, 2, \ldots, k-1$ **do**
    $r_{jk} := \boldsymbol{q}_j^T \boldsymbol{q}_k$
    $\boldsymbol{q}_k := \boldsymbol{q}_k - r_{jk}\boldsymbol{q}_j$
  end for
  $r_{kk} := \|\boldsymbol{q}_k\|$
  $\boldsymbol{q}_k := \boldsymbol{q}_k / r_{kk}$
end for

Zachodzą równości

$$A = QR, \qquad Q^TQ = I, \tag{1}$$

gdzie R jest macierzą trójkątną górną.
Uwaga: wektory $\boldsymbol{a}_k$ oznaczają kolumny macierzy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

M15.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Rozważmy *zadanie najmniejszych kwadratów*, w którym dla danych: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(\operatorname{rank}(A) = n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, szukamy takiego wektora $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, że wartość

$$\|Ax - b\|_2^2$$

jest najmniejsza. Wykazać, że rozwiązaniem takiego zadania jest wektor $\boldsymbol{x}$ taki, że $A^{\mathrm{T}}(Ax - b) = 0$.

M15.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć rozkład QR macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

za pomocą metody Householdera. Wskazać kolejne wektory $v_1, v_2, \ldots$ określające odbicia Householdera.
Uwaga: chodzi o rozkład, w którym $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

M15.6. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$[**Włącz komputer**] Wykorzystać pakiet LAPACK do rozwiązania układu $Ax = b$, gdzie A jest symetryczną macierzą trójprzekątniową dodatnio określoną (rozmiaru $\geqslant 5000$). Należy napisać program w C/C++ (z wykorzystaniem interfejsu LAPACKE) oraz przedstawić jego działanie.

26 stycznia 2017
Rafał Nowak