Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M 9

6 grudnia 2016 r.

M9.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Wykazać, że wielomiany Czebyszewa $T_0, T_1, \ldots, T_n$ tworzą układ wielomianów ortogonalnych w sensie dyskretnego iloczynu skalarnego

$$\langle f, g\rangle := \sum_{k=0}^{n} f(t_k)g(t_k),$$

gdzie $t_0, t_1, \ldots, t_n$ są zerami wielomianu T_{n+1}.

M9.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wielomian $I_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w węzłach

$$t_k \equiv t_{n+1,k} = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

(zerach wielomianu T_{n+1}) można zapisać w postaci

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{n}{}' \alpha_i\, T_i(x),$$

gdzie

$$\alpha_i := \frac{2}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(t_j)T_i(t_j) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

M9.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $p_n, q_n \in \Pi_n$ będą wielomianami optymalnymi dla funkcji ciągłej f na odcinku $[a, b]$ w sensie normy jednostajnej. Udowodnić, że $p_n \equiv q_n$. Co z tego wynika?

M9.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ (Część twierdzenia Czebyszewa o alternansie) Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$, a w_n — wielomianem stopnia nie wyższego niż n. Udowodnić, że jeśli istnieją takie $n + 2$ punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a, b]$, że $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ i że

(i) $f(x_j) - w_n(x_j) = -[f(x_{j-1}) - w_n(x_{j-1})] \quad (j = 1, 2, \ldots, n + 1)$,

(ii) $|f(x_k) - w_n(x_k)| = ||f - w_n||_\infty^{[a,b]} \quad (k = 0, 1, \ldots, n + 1)$,

to w_n jest n-tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f.

M9.5. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ (Charles Jean de la Vallée-Poussin) Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$, a p_n — wielomianem stopnia nie wyższego niż n. Udowodnić, że jeśli istnieją takie $n + 2$ punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a, b]$, że $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ i że

$$\operatorname{sign}(f(x_j) - p_n(x_j)) = \lambda(-1)^j \quad (j = 1, 2, \ldots, n + 1),$$

gdzie $\lambda \in \{-1, 1\}$ jest ustaloną liczbą, to dla dowolnego wielomianu $w_n \in \Pi_n$ zachodzi nierówność

$$\min_{0\leqslant j\leqslant n+1} |f(x_j) - p_n(x_j)| \leqslant \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]}.$$

Wywnioskować, stąd, że

$$\min_{0\leqslant j\leqslant n+1} |f(x_j) - p_n(x_j)| \leqslant \inf_{w_n\in\Pi_n} \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]}.$$

M9.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\bar{T}_k(x)$ będą standardowymi wielomianami ortogonalnymi w przedziale $[-1, 1]$, z wagą $(1 - x^2)^{-1/2}$. Znaleźć związek rekurencyjny spełniany przez te wielomiany.

M9.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jakim wzorem wyraża się n-ty wielomian optymalny dla funkcji f w sensie normy

$$||f||_2 := \sqrt{\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-1/2} f^2(x)\, dx}?$$

M9.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Normę jednostajną funkcji $f \in C[a, b]$ podaje wzór $\|f\|_\infty \equiv \|f\|_\infty^{[a,b]} := \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$. Sprawdzić, że n-ty błąd aproksymacji optymalnej funkcji f z przestrzeni $C[a, b]$, określony wzorem

$$E_n(f) \equiv E_n(f; [a, b]) := \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_\infty^{[a,b]},$$

ma następujące własności:

a) $E_n(\alpha f) = |\alpha| E_n(f)$;

b) $E_n(f + g) \leqslant E_n(f) + E_n(g)$;

c) $E_n(f + w) = E_n(f)$;

d) $E_n(f) \leqslant \|f\|_\infty$,

gdzie f, g są dowolnymi funkcjami z $C[a, b]$, w jest dowolnym wielomianem stopnia $\leqslant n$, natomiast α – dowolną liczbą rzeczywistą.

M9.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Wykazać, że dla dowolnego podprzedziału $[c, d]$ tego przedziału zachodzi nierówność $E_n(f; [c, d]) \leqslant E_n(f; [a, b])$.

M9.10. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć 5-ty wielomian optymalny dla funkcji $f(x) := 2016x^7 + 12x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ w sensie normy jednostajnej na przedziale $[-1, 1]$.

1 grudnia 2016
Rafał Nowak