Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M 10

13 grudnia 2016 r.

M10.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $D^{(k)} = \{x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \ldots, x_{n+1}^{(k)}\} \subset [a,b]$ będzie ciągiem zbiorów konstruowanych w algorytmie Remeza. Udowodnić, że kolejne dwa elementy w tych zbiorach, nie mogą być zbyt bliskie, tzn. że istnieje taka liczba $\eta > 0$, dla której

$$x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} \geqslant \eta \qquad (0 \leqslant i \leqslant n, \quad k \geqslant 0).$$

M10.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć pierwszy wielomian optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[0,1]$.

M10.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $f(x) = x^{n+1} + a_1x^n + \ldots + a_nx + a_{n+1}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1;\ a_1, \ldots, a_{n+1}$ – dane stałe) i niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$, leżących w przedziale $[-1,1]$. Jak należy wybrać te węzły, żeby wyrażenie $\|f - L_n\|_\infty^{[-1,1]}$ było możliwie najmniejsze? Uzasadnić odpowiedź.

M10.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dla $f \in C[a,b]$ istnieją wszystkie pochodne i niech $|f^{(k)}(x)| > 0$ dla każdego $x \in [a,b]$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 0$ zachodzi wówczas nierówność $E_n(f) > E_{n+1}(f)$.

M10.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć trzeci wielomian optymalny w sensie normy jednostajnej na zbiorze $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ dla funkcji o wartościach

x_k	0	1	2	4	6
$f(x_k)$	1	9	23	93	259

M10.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wyznaczyć z dokładnością do 6 miejsc po przecinku współczynniki wielomianu $w_2(x) = ax^2 + bx + c$, będącego drugim wielomianem optymalnym w sensie normy jednostajnej dla funkcji $\sin(x)$ w przedziale $[0, 2\pi]$.
Wskazówka: $a + b + c \approx 0.465...$

M10.7. $\boxed{\text{2 punkty, Włącz komputer!}}$ Rozważyć aproksymację fukncji Rungego $f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$ w przedziale $[-1,1]$ za pomocą wielomianu $w \in \Pi_9$. Dla każdego z poniższych wielomianów podać wartość błędu $\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - w(x)|$ (wartość tę można przybliżyć obliczając $|f(x_k) - w(x_k)|$ dla $x_k = -1 + 2k/N$, gdzie N jest bardzo duże, np. $N = 1000$). Rozważyć następujące wielomiany:

a) wielomian interpolujący funkcję f w węzłach równoodległych,

b) wielomian interpolujący funkcję f w zerach wielomianu T_{10},

c) wielomian interpolujący funkcję f w punktach ekstremalnych wielomianu T_9,

d) 9-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową Legendre'a $p(x) \equiv 1$,

e) 9-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową Czebyszewa $p(x) \equiv 1$.

8 grudnia 2016

Rafał Nowak