

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M3
19 października 2016 r.

- M3.1.** 1 punkt Załóżmy, że x, y są liczbami maszynowymi, tzn. $\text{rd}(x) = x, \text{rd}(y) = y$, takimi, że $0 < y < x$. Wykazać, że jeśli

$$2^{-q} \leq 1 - \frac{y}{x} \leq 2^{-p}$$

(p i q są całkowite), to

$$p \leq \text{liczba bitów straconych przy odejmowaniu } x - y \leq q.$$

- M3.2.** 1 punkt Wartość wielomianu $L(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ w punkcie x można obliczyć według następującego *schematu Hornera*:

— Oblicz wielkości pomocnicze w_0, w_1, \dots, w_n za pomocą wzorów

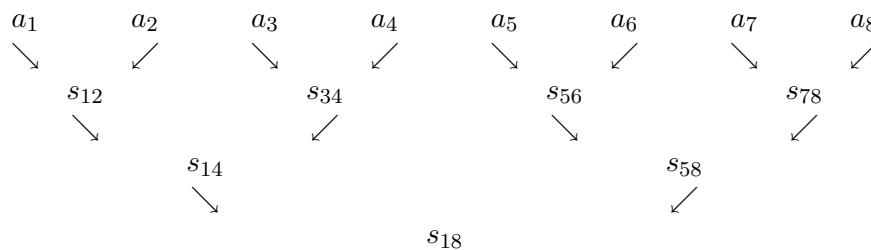
a) $w_n := a_n,$

b) $w_k := w_{k+1} \times x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \dots, 0).$

— Wynik: $L(x) = w_0.$

Zakładając, że a_0, a_1, \dots, a_n oraz x są liczbami zmiennopozycyjnymi wykazać, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

- M3.3.** 1 punkt Wartość sumy $\sum_{k=1}^n a_k$, gdzie $n := 2^m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, można wyznaczyć stosując strategię *dziel i zwyciężaj*. Np. dla $m = 3$ obliczenia wykonywane są wówczas zgodnie z następującym diagramem:



gdzie $s_{ij} := a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$. Wykazać, że ten algorytm jest numerycznie poprawny i — dla dużych wartości n — dokładniejszy niż zwykły algorytm sumowania.

- M3.4.** 1 punkt Pole n -kąta foremnego ($n \geq 4$) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$P_n = \frac{1}{2}n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Wartość P_n jest przybliżeniem liczby π — tym lepszym, im większe jest n . Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno P_4, P_8, P_{16}, \dots :

$$s_2 := 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2;$$

$$s_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1} s_k \quad (k = 3, 4, \dots).$$

- Uzasadnić powyższy algorytm.
- Stosując wybraną arytmetykę t -cyfrową ($t \geq 128$) obliczyć P_{2^k} dla $k = 2, 3, \dots, 2t$.
- Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

M3.5. 1,5 punktu Załóżmy, że $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto, niech α będzie pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Wykazać, że jest to jedyny pierwiastek, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego x_0 .

M3.6. 1,5 punktu Uzasadnić, że odwrotność liczby c można obliczać bez wykonywania dzielenia, za pomocą wzoru $x_{n+1} := x_n(2 - cx_n)$ ($n = 0, 1, \dots$). Uzasadnić (lokalną?) zbieżność tej metody. Dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna?

M3.7. 1 punkt Podać przykład funkcji $f \in C^2[a, b]$ oraz przybliżenia początkowego $x_0 \in [a, b]$, dla którego ciąg przybliżeń otrzymany za pomocą metody Newtona jest zbieżny liniowo do pierwiastka funkcji f .

M3.8. 1 punkt Zaprogramować w języku Julia metodę Steffensena

$$c_{n+1} = c_n - \frac{[f(c_n)]^2}{f[c_n + f(c_n)] - f(c_n)},$$

a następnie zastosować ją do znalezienia pierwiastka równania

$$e^{-x} - \sin x = 0.$$

Zastosować arytmetykę wysokiej precyzji (np. $t \geq 128$), aby móc podać eksperymentalną wartość wykładnika zbieżności (lokalnej?) tej metody.

13 października 2016

Rafał Nowak