

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 11

4 stycznia 2017 r.

M11.1. 1,5 punktu Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ stosując *kwadraturę Newtona-Cotesa*, czyli kwadraturę interpolacyjną z węzłami równoodległymi $x_k := a + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n$), gdzie $h := (b - a)/n$:

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(x_k).$$

Wykazać, że

$$(1) \quad A_k = h(-1)^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t-j) dt \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Niech będzie $B_k := A_k/(b-a)$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Sprawdzić, że

a) wielkości B_k są liczbami wymiernymi;

b) $B_k = B_{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$)

M11.2. 1 punkt Obliczyć $Q_n^{NC}(f)$ dla $n = 2, 4, 6, 8, 10$ dla całki

$$\int_{-4}^4 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \arctan 4.$$

Który wynik jest najdokładniejszy? Jak to skomentować?

M11.3. 1,5 punktu Niech $f \in C^4[a, b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ za pomocą kwadratury *Newtona-Cotesa* dla $n = 3$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\xi \in [a, b]$, dla której

$$I(f) - Q_3^{NC}(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5 \quad (h := (b-a)/3).$$

M11.4. 1 punkt Wykazać, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x) dx$, gdy $n \rightarrow \infty$.

M11.5. 1 punkt

a) Stosując złożony wzór Simpsona S_n z odpowiednio dobranym n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^\pi \sin x dx$ z błędem $\leq 2 \cdot 10^{-5}$.

b) Jaka wartość n gwarantuje uzyskanie tak dokładnego wyniku, jeśli zamiast wzoru S_n użyjemy złożonego wzoru trapezów T_n ?

M11.6. 1 punkt Sprawdzić, że

$$S_n(f) = \frac{1}{3}[4T_n(f) - T_{n/2}(f)] \quad (n = 2, 4, \dots),$$

gdzie $S_n(f)$ jest złożonym wzorem Simpsona, a $T_n(f)$ – złożonym wzorem trapezów. Jaki jest związek tej obserwacji z metodą Romberga?

M11.7. 1 punkt Wykazać, że dla każdej funkcji $f \in C[a, b]$ ciąg kwadratur Gaussa $\{G_n(f)\}$ jest przy $n \rightarrow \infty$ zbieżny do całki $\int_a^b p(x)f(x) dx$.

M11.8. 1 punkt Niech będzie $w_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x)$, gdzie T_k jest k -tym wielomianem Czebyszewa. Wykazać, że

$$\int_{-1}^1 w_n(x) dx = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2i}}{1 - 4i^2}.$$

M11.9. 1 punkt Znaleźć, o ile to możliwe, takie węzły x_0, x_1 i współczynniki A_0, A_1 , żeby dla każdego wielomianu f stopnia ≤ 3 zachodziła równość $\int_0^1 (1+x^2)f(x) dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

M11.10. 2 punkty Uzasadnić poprawność poniższej procedury, zapisanej w języku Julia, do obliczania całki $\int_{-1}^1 f(x) dx$ za pomocą kwadratury Clenshawa-Curtisa.

```
function ClenshawCurtis3(f,n)
    # Chebyshev extreme points
    x = cos(pi*(0:n)/n)
    fx = f(x)/(2n)
    # Fast Fourier transform
    g = real(fft(vcat(fx,fx[n:-1:2])))
    # Chebyshev coefficients
    a = vcat( g[1], g[2:n]+g[2*n:-1:n+2], g[n+1] )
    w = zeros(a)
    w[1:2:end] = 2./(1-(0:2:n).^2)
    dot(w,a)
end
```

Jaka jest złożoność tej procedury?

Wesołych Świąt!!!



21 grudnia 2016
Rafał Nowak