# Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M 2

12 października 2016 r.

**M2.1.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla danych: naturalnej liczby $t$ oraz niezerowej liczby rzeczywistej $x = s\,m\,2^c$, gdzie $s$ jest znakiem liczby $x$, $c$ – liczbą całkowitą, a $m$ – liczbą z przedziału $[1,\ 2)$, o rozwinięciu dwójkowym $m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k}2^{-k}$, w którym $e_{-k} \in \{0, 1\}$ dla $k \geqslant 1$, definiujemy *zaokrąglenie liczby* $x$ do $t+1$ cyfr za pomocą wzoru

$$\operatorname{rd}(x) := s\,\bar{m}\,2^c,$$

gdzie $\bar{m} = 1 + \sum_{k=1}^{t} e_{-k}2^{-k} + e_{-t-1}2^{-t}$.

Wykazać, że

$$|\operatorname{rd}(x) - x| \leqslant 2^c \mathsf{u},$$

gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$ jest *precyzją arytmetyki*.

Wywnioskować stąd, że błąd względny zaokrąglenia liczby $x$ nie przekracza precyzji arytmetyki $\mathsf{u}$.

**M2.2.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ i $\rho_j \in \{-1, +1\}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz że $n\mathsf{u} < 1$, gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j)^{\rho_j} = 1 + \theta_n,$$

gdzie $\theta_n$ jest wielkością spełniającą nierówność $|\theta_n| \leqslant \gamma_n$, gdzie z kolei

$$\gamma_n := \frac{n\mathsf{u}}{1 - n\mathsf{u}}.$$

**M2.3.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz że $n\mathsf{u} < 0.01$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j) = 1 + \eta_n,$$

gdzie

$$|\eta_n| \leqslant 1.01 n\mathsf{u}.$$

**M2.4.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli $x, y$ są liczbami maszynowymi takimi, że $|y| \leqslant \frac{1}{2}\mathsf{u}|x|$, to $\operatorname{fl}(x + y) = x$.

**M2.5.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć liczbę maszynową $x$ (`double`, w standardzie IEEE 754) z przedziału $(1, 2)$, dla której $\operatorname{fl}(x \cdot \operatorname{fl}(1/x)) \neq 1$.

**M2.6.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaproponować sposób uniknięcia utraty cyfr znaczących wyniku w związku z obliczaniem wartości wyrażeń

$$(\mathbf{a})\ e^x - e^{-2x}; \qquad (\mathbf{c})\ \cos^2 x - 1.$$

**M2.7.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji $f$, podanej wzorem
(**a**) $f(x) = 1/(x^2 + c)$, gdzie $c$ jest stałą; (**b**) $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$ dla $x \neq 0$.

7 października 2016,

*Rafał Nowak*