Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 2: lista M 6

16 listopada 2016 r.

M6.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wielomian interpolujący funkcję f w parami różnych $n+1$ węzłach $x_0, \ldots, x_n$ można podać wzorem

(1) $$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k(x),$$

gdzie

(2) $$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, 1, ..., n).$$

Wykazać, że wielomiany (2) spełniają równości

a) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$

b) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0)x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$

M6.2. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać poprawność algorytmu Wernera obliczania stałych

(3) $$\sigma_k \equiv \sigma_k^{(n)} := 1/p'_{n+1}(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Algorytm 1 (Werner, 1984)**.**

a) Obliczamy pomocnicze wielkości $a_k^{(i)}$ *wg wzorów*

$$a_0^{(0)} := 1, \quad a_k^{(0)} := 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\left.\begin{array}{l} a_k^{(i)} := a_k^{(i-1)}/(x_k - x_i), \\ a_i^{(k+1)} := a_i^{(k)} - a_k^{(i)} \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, i-1),$$

b) Wówczas

$$\sigma_k := a_k^{(n)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

M6.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że zachodzi wzór rekurencyjny

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

przy czym $f[x_j] = f(x_j)$.

M6.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dowieść, że jeśli p jest wielomianem stopnia n, to $q(x) := p[x, x_1, \ldots, x_k]$ jest wielomianem stopnia $n-k$, z takim współczynnikiem przy x^{n-k}, jaki stoi w p przy x^n.

M6.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć wielomian p o następujących wartościach:

x	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	31	5	1	1	11	61

Korzystając z tego wyniku podać wielomian q, który ma następujące wartości:

x	-2	-1	0	1	2	3
$q(x)$	31	5	1	1	11	30

M6.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że $x_i = a + ih$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$ i że $h = (b - a)/n > 0$. Wykazać, że dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leqslant \tfrac{1}{4} n! h^{n+1}.$$

M6.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dla $n \in \mathbb{N}$ dane będą punkty $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ oraz taka funkcja f, że pochodna $f^{(n+1)}$ jest ciągła i ma stały znak w przedziale $[x_0, x_{n+1}]$. Niech L i M będą takimi wielomianami stopnia $\leqslant n$, że

$$L(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$$M(x_j) = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n + 1).$$

Wykazać, że dla dowolnego $x \in [x_0, x_{n+1}]$ wartość $f(x)$ leży pomiędzy $L(x)$ i $M(x)$.

M6.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $L_1 \in \Pi_1$ interpoluje funkcję f w puntach x_0 i x_1. Wykazać, że dla każdego $x \in [x_0, x_1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - L_1(x)| \leqslant \frac{1}{8}(x_1 - x_0)^2 M_2,$$

gdzie $M_2 := \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |f''(x)|$.

M6.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech L_n będzie wielomianem interpolującym funkcję $f(x) = \exp x$ w zerach wielomianu Czebyszewa T_{n+1}. Jaka wartość n gwarantuje, że zachodzi nierówność

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| \leqslant 10^{-5}\,?$$

M6.10. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że dysponujemy programem do obliczania dyskretnej transformaty Fouriera, tzn. $DFT(\boldsymbol{x})$ dla $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]$ daje ciąg $\boldsymbol{y} = [y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}]$, gdzie

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{2\pi \mathrm{i} jk/N} \qquad (0 \leqslant k < N).$$

Pokazać, jak można użyć programu $DFT(...)$ w celu wyznaczenia współczynników α_k i β_k dla wielomianów I_n, J_n, tj. wielomianów interpolacyjnych dla węzłów Czebyszewa $t_{n+1,k}$ (zera T_{n+1}) oraz $u_{n,k}$ (punkty ekstremalne T_n).
Wskazówka: oprócz DFT dozwolone jest użycie funkcji `real(...)` zwracającej część rzeczywistą liczb(y) zespolon(ych)(ej).

8 listopada 2016
Rafał Nowak