La presencia de Lie en la geometria diferencial

Alberto Centelles

1 Variedades diferenciables

Las variedades diferenciables son espacios que "localmente se parecen" a un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y sobre el que uno puede aplicar conceptos del analisis matematico. Las variedades mas simples son las variedades topológicas, que son espacios topologicos con ciertas propiedades que expresan con exactitud lo que refererimos como "localmente se parecen" a $\mathbb{R}^n$. La nocion de "suave" es intuitiva cuando nos referimos a variedades que son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, llamamos a una curva "suave" si es posible definir una recta tangente que varia de punto a punto de forma continua y llamamos a una superficie "suave" si existe un plano tangente que tambien varia de forma continua. Para variedades diferenciables mas complejas resulta innecesario embeberlas como subconjuntos de un espacio euclideo ambiente. Por esa razon, es necesario pensar en variedades diferenciables como espacios topologicos abstractos sin la necesidad de que sean subconjuntos de espacios mas grandes. No es dificil ver que no hay forma de definir una propiedad puramente topologica que nos sirva como criterio de "suavidad" porque esta propiedad no puede ser invariantes bajo homeomorfismos. Por ejemplo, un cuadrado y un circulo en el plano son espacios topologicos homeomorfos pero el circulo es "suave" mientras que el cuadrado no lo es. Por tanto, las variedades topologicas no son suficientes; debemos pensar en una variedad diferenciable como un conjunto con dos estructuras adicionales: una topologia y una estructura suave.

1.1 Estructura topologica

Dado un espacio topologico M, decimos que M es una variedad topologica de dimension n si tiene las siguientes propiedades:

- M es un espacio de Hausdorff: para cada par de puntos distintos $p, q \in M$ existen conjuntos abiertos disjuntos $U, V \subseteq M$ tales que $p \in U$ y $q \in V$ - M es segundo contable: existe una base contable para la topologia de M. - M es localmente euclideo de dimension n: cada punto de M tiene un entorno que es homeomorfico a un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Como ejemplo de una variedad topologica podemos tomar un n-toro para n positivo, es decir, el espacio producto $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$. Sabemos que toda n-esfera, incluida la circunferencia $\mathbb{S}^1$, es una variedad topologica. Es un espacio de Hausdorff pues cualquier producto finito de espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff. De la misma forma deducimos que es un espacio segundo contable. Veamos que es localmente euclideo: para todo punto $(p_1, ..., p_k) \in \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$, podemos elegir una carta de coordenadas (U_i, φ_i) para cada $\mathbb{S}^1$ con $p_i \in U_i$. La aplicacion producto $\varphi_1 \times ... \times \varphi_k : U_1 \times ... \times U_k \to \mathbb{R}^{n_1+...+n_k}$ es un homeomorfismo sobre su imagen, que es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k}$. Por tanto, el n-torus $\mathbb{T}^n$ es una variedad topologica.

1.2 Estructura suave

Con la estructura topologica expuesta en el apartado anterior, se pueden estudiar propiedades topologicas de las variedades como la compacidad, conectividad y cualquier problema de clasificacion de variedades topologicamente equivalentes. Sin embargo, la teoria de las variedades topologicas no hace mencion del analisis matematico. Esto se debe a que las derivadas de funciones sobre variedades no son invariantes bajo homeomorfismo.

Para dar sentido a las derivadas de aplicaciones entre variedades es necesario tratar con variedades diferenciables. Dados $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$, una funcion $F : U \to V$ se dice que que es suave (C^∞ o infinitamente diferenciable) si cada una de sus funciones componente tiene derivadas parciales continuas de todo orden. Si ademas F es biyectiva y tiene una aplicacion inversa suave, se le llama difeomorfismo. Un difeomorfismo es, en particular, un homeomorfismo.

El reto es ver como podemos extender la estructura de una variedad topologica para discernir que aplicaciones son diferenciables (C^∞). Dada una n-variedad topologica M, cada punto $p \in M$ es el dominio de una aplicacion $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}$. Podemos decir que $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable si y solo si la composicion $f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ es suave en el sentido ordinario del calculo. Sin embargo, esta definicion solo tiene sentido si esta propiedad es independiente de la eleccion de la carta. Para garantizar esta independencia, debemos de hablar de "cartas suaves" y considerar la coleccion de todas las cartas suaves como una estructura adicional sobre M.

Si (U, φ), (V, ψ) son dos cartas tales que $U \cap V \neq \varnothing$, a la composicion $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ se le denomina funcion de transicion de φ a ψ. Dos cartas (U, φ) y (V, ψ) son (diferenciablemente) compatibles si la funcion de transicion $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo o $U \cap V = \varnothing$.

Un atlas de M es una coleccion de cartas cuyos dominios cubren M. Un atlas A es suave si dos cartas cualesquiera en A son diferenciablemente compatibles. Dado que, en general, existen varios atlas que proporcionan la misma estructura diferenciable, se elige por conveniencia el atlas maximal.

1.3 Variedades diferenciables

Si M es una variedad topologica, una estructura suave sobre M es una atlas maximal suave. Una variedad diferenciable es un par (M, A).

El espacio de matrices sirve como ejemplo de variedad diferenciable. Sea $M(m \times n, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices $m \times n$ de componentes reales. Debido a que es un espacio vectorial real de dimension mn bajo la adicion de matrices y multiplicacion por escalares, $M(n \times n, \mathbb{R})$ es una variedad mn-diferenciable. De la misma forma, el espacio $M(m \times n, \mathbb{C})$ de $m \times n$ matrices complejas es un espacio vectorial de dimension $2mn$ sobre $\mathbb{R}$ y, por tanto, una variedad $2mn$-dimensional.

El ejemplo del espacio de matrices ira apareciendo en cada una de las siguientes secciones para ilustrar los distintos conceptos de Lie.

2 Grupos de Lie

Estamos ahora en disposicion de entender los grupos de Lie. Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G (sin frontera) que es tambien un grupo en el sentido algebraico, con la propiedad que la aplicacion multiplicacion $m : G \times G \to G$ y la aplicacion inversion $i : G \to G$, dadas por $m(g, h) = gh$ y $i(g) = g^{-1}$ son ambas suaves. Un grupo de Lie es, en particular, un grupo topologico (esto es, un espacio topologico con una estructura de grupo tal que las aplicaciones multiplicacion e inversion son continuas).

Destacan dos aplicaciones sobre los grupos de Lie: la traslacion por la izquierda $L_g(h) = gh$ y la traslacion por la derecha $R_g(h) = hg$, donde G es un grupo de Lie y $g, h \in G$.

Un ejemplo de grupo de Lie es el grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$ definido como el conjunto de matrices $n \times n$ invertibles con componentes reales. Se trata de un grupo bajo la multiplicacion de matrices y es un subgrupo del espacio vectorial $M(n, \mathbb{R})$, mostrado en el ejemplo anterior. La multiplicacion es suave porque las componentes de la matriz producto AB son polinomios en las entradas de A y B. La inversion es suave por la regla de Cramer.

2.1 Homomorfismos de grupos de Lie

Si G y H son grupos de Lie, definimos homomorfismo de grupos de Lie de G a H como una aplicacion suave $F : G \to H$ que es tambien un homomorfismo de grupos. Se dice que es isomorfismo de grupos de Lie si es tambien un difeomorfismo, lo que implica que tiene una inversa que es tambien un homomorfismo de grupos de Lie. En este caso decimos que G y H son grupos de Lie isomorficos.

Un ejemplo de homomorfismo de grupos de Lie es el de la funcion determinante $det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$. Es una aplicacion suave porque $detA$ es un polinomio en las entradas de las matrices de A. Es un homomorfismo de grupos de Lie porque $det(AB) = (detA)(detB)$. De la misma forma, $det : GL(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

3 Subgrupos de Lie

Para entender los subgrupos de Lie es necesario estudiar con especial atencion cierto tipo de aplicaciones diferenciales: aquellas cuyas diferenciales tienen rango constante.

3.1 La diferencial de una aplicacion

Para relacionar los espacios tangentes abstractos definidos en variedades con espacios tangentes geometricos en $\mathbb{R}^n$, debemos explorar la forma en la que las aplicaciones diferenciales modifican los vectores tangentes. En el caso de una aplicacion diferenciable entre espacios euclideos, la derivada total de una aplicacion en un punto (representada por su matriz jacobiana) es una aplicacion lineal que representa "la mejor aproximacion" de una aplicacion en el entorno de un punto. En el caso de las variedades diferenciales, no tiene sentido hablar de una aplicacion lineal entre variedades diferenciales. En su lugar, tiene sentido hablar de una aplicacion lineal entre espacios tangentes.

Si M y N son variedades diferenciales y $F : M \to N$ es una aplicacion diferenciable, para cada $p \in M$ decimos que la diferencial de F en p es una aplicacion $dF_p : T_pM \to T_{F(p)N}$ definida como $dF_p(v)(f) = v(f \circ F)$, donde $v \in T_pM$ y $dF_p(v)$ es la derivada en $F(p)$ que actua sobre $f \in C^\infty$.

3.2 Inmersiones, encajes y sumersiones

El rango es la unica propiedad de la diferencial que puede ser definida con independencia de la eleccion de las bases. Dada una aplicacion diferenciable $F : M \to N$ y un punto $p \in M$, el rango de F en p se define como el rango de la aplicacion lineal $dF_p : T_pM \to T_{F(p)N}$, esto es, la dimension de $Im(dF_p) \subseteq T_{F_p}N$. Si F tiene el mismo rango en cada punto se dice que tiene rango constante.

El valor del rango de una aplicacion lineal nunca puede ser mayor que la dimension del dominio o el codominio, luego esta acotado. Si el rango de la diferencial dF_p es igual a su cota superior, se dice que F tiene rango completo en p. Si F tiene rango completo en todo punto de M, entonces F tiene rango completo.

Las aplicaciones de rango constante mas importante son las de rango completo. Una aplicacion diferenciable $F : M \to N$ se dice que es una sumersion suave si su diferencial es sobreyectiva en cada punto (o equivalentemente, si si el rango de F es igual $dimN$). Se dice que es una inmersion suave si su diferencial es inyectiva en cada punto (equivalentemente, $rangoF = dimM$).

De todas las inmersiones, los encajes son de particular importancia. Un encaje suave es una inmersion suave que ademas es un encaje topologico, esto es, un homeomorfismo sobre sus imagenes $F(M) \subseteq N$ en la topologia inducida. Se trata de una aplicacion que es a la vez un encaje topologico y una inmersion suave.

Existen varias proposiciones y teoremas que analizan las propiedades de las aplicaciones suaves entre variedades diferenciables, entre ellos el teorema de la funcion inversa para variedades diferenciables o su corolario, el teorema del rango constante. Ponemos a continuacion una de estas proposiciones como ilustracion:

Sea $F : M \to N$ una aplicacion suave y $p \in M$. Si dF_p es sobreyectiva, entonces p tiene un entorno U tal que $F|_U$ es una sumersion. Si dF_p es inyectiva, entonces p tiene un entorno U tal que $F|_U$ es una inmersion.

Estas juegan un papel destacado en la teoria de las variedades diferenciales y, como veremos, en los subgrupos de Lie. Como ejemplo de sumersion destacamos la proyeccion $\pi : TM \to M$, donde M es una variedad diferencial y TM su fibrado tangente. Para verificar que es una sumersion, basta ver que con respecto a cualquier sistema de coordenadas local (x^i) en un abierto $U \subseteq M$ y las correspondientes coordenadas naturales (x^i, v^i) en $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$, la representacion de las coordenads de π es $\pi(x, v) = x$.

Un ejemplo de inmersion suave de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ es el dado por la aplicacion suave $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = ((2 + cos2\pi u)cos2\pi v, (2 + cos2\pi u)sen2\pi v, sen2\pi u)$, cuya imagen es un toro de revolucion en $\mathbb{R}^3$ obtenido a partir del circulo $(y - 2)^2 + z^2 = 1$. Otro ejemplo destacado de inmersion es el de una curva suave $\gamma : J \to M$: se dice que γ es una inmersion suave si y solo si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$.

Un ejemplo ilustrativo de encaje suave es el de la aplicacion inclusion $X : U \to M$, donde U es una subvariedad abierta de una variedad diferencial M. Otro ejemplo de encaje suave es el dado por cada uno de las aplicaciones $\iota_j : M_j \to M_1 \times ... \times M_k$, $\iota_j(q) = (p_1, ..., , p_{j-1}, q, p_{p+1}, ..., p_k)$. En particular, la aplicacion inclusion de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{n+k}$ que manda $(x_1, ..., x^n)$ a $(x^1, ..., x^n, 0, ..., 0)$ es un encaje suave.

Otro ejemplo caracteristico que ilustra la diferencia entre encaje e inmersion es el de la lemniscata de Bernoulli. Esta es la curva en $\mathbb{R}^2$ cuya trayectoria obedece la ecuacion polinomial de cuarto grado:$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$,donde $a > 0$ es un parametro. Esta curva se puede parametrizar por las funciones $x(t) := \dfrac{a\sqrt{2}cos(t)}{1 + sen^2 t}$, $y(t) = \dfrac{a\sqrt{2}cost(t)sen(t)}{1 + sen^2(t)}$, En otras palabras, la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ recorre la trayectoria dada (infinitas veces); para obtener un solo recorrido hay que restringir γ a un intervalo de longitud 2π, por ejemplo $[0, 2\pi)$. Esta parametrizacion es regular porque $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces el vector tangente $\gamma_*(t) : v \to \gamma'(t)v$ no se anula en el punto $\gamma(t)$ de la curva. Luego cada $\gamma_*(t)$ es inyectiva, asi que γ es una inmersion de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, la curva γ no es un encaje. Aun cuando se considera la restriccion de γ a una funcion suave del intervalo abierto $(0, 2\pi)$ al abierto $\mathbb{R}^2/(a\sqrt{2}, 0)$ en el plano, esta tampoco es un encaje porque no es inyectiva, como evidencia el punto doble $(0, 0) = \gamma(\pi/2) = \gamma(3\pi/2)$.

Como contraejemplo, la aplicacion diferencial $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t^3, 0)$ es una aplicacion diferencial y una encaje topologico, pero no es un encaje suave porque $\gamma'(0) = 0$.

Los encajes diferenciales dan lugar a las subvariedades encajadas en una variedad diferencial M. Una subvariedad encajada en M es un subconjunto $S \subseteq M$ que es una variedad en la topologia inducida, dotado de una estructura diferencial respecto a la cual la aplicacion inclusion $S \to M$ es un encaje suave.

3.3 Subgrupos de Lie

Dado un grupo de Lie G, $H \subseteq G$ es un subgrupo de Lie de G si es un subgrupo de G y esta dotado de una topologia y una estructura suave que lo convierten en un grupo de Lie y en una subvariedad diferencial inmersa en G. Todo subgrupo que ademas es una subvariedad encajada en G es automaticamente un subgrupo de Lie. El reciproco no es siempre cierto. Por ejemplo, sea $H \subseteq \mathbb{T}^2$ una subvariedad densa del toro que es imagen de la inmersion $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ definida por $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{e\pi i\alpha t})$. Es una inmersion suave porque $\gamma'(t)$ nunca se anula. Tambien es inyectiva, pues $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ implica que ambos $t_1 - t_2$ y $\alpha t_1 - \alpha t_2$ son enteros, lo cual es imposible. Es facil ver que γ es un homomorfismo de grupos inyectivo y, por tanto, H es un subgrupo de Lie inmerso en $\mathbb{T}^2$.

Siguiendo la linea de ejemplos sobre matrices, el grupo especial lineal $SL(n, \mathbb{R})$ de $n \times n$ matrices reales con determinante igual a 1 es un ejemplo de subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$, ya que $SL(n, \mathbb{R})$ es el nucleo del homomorfismo de grupos de Lie $det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ y det es una funcion sobreyectiva, luego es una sumersion suave por el teorema del rango global. La dimension de $SL(n, \mathbb{R})$ es $n^2 - 1$.

4 Algebra de Lie

4.1 Campos vectoriales

Para entender el algebra de Lie es necesario familiarizarse con el concepto de campo vectorial. En el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ puede visualizarse poniendo una "flecha" en cada punto de un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Esta visualizacion no es tan util cuando extendemos el concepto a una variedad diferencial abstracta. Debemos pensar en un campo vectorial en una variedad diferencial M como una aplicacion continua de M a su fibrado tangente TM, es decir, una aplicacion que asigna a cada punto $p \in M$ su vector tangente $X_p \in T_pM$. Formalmente, es una seccion de la aplicacion $\pi : TM \to M$, esto es, una aplicacion $X : M \to TM$ con la propiedad $\pi \circ X = Id_M$, o equivalentemente, $X_p \in T_pM$ para cada $p \in M$.

Una de las propiedades mas importantes de los campos vectoriales es que definen operadores en el espacio de las funciones reales suaves. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y f es una funcion real suave definida en un abierto $U \in M$, obtenemos una nueva funcion $Xf : U \to \mathbb{R}$, definida por $(Xf)(p) = X_p f$. Dado que la accion de un vector tangente en una funcion esta determinada por los valores de una funcion un entorno arbitrariamente pequeño, se sigue que Xf esta localmente determinado. En particular, para todo abierto $V \subseteq U$, $(Xf)|_V = X(f|_V)$.

No todos los campos vectoriales son suaves (ni continuos), pero nosotros nos centramos en los campos vectoriales suaves. Un campo vectorial suave $X \in \mathfrak{X}(M)$ define una aplicacion de C^∞ a si misma, que es lineal sobre $\mathbb{R}$. Ademas, podemos trasladar la regla del producto de vectores tangente a la regla del producto de campos vectoriales $X(fg) = fXg + gXf$. En general, una aplicacion de este tipo, $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ se llama derivacion si es lineal sobre $\mathbb{R}$ y satisface $X(fg) = fXg + gXf$ para todo $f, g \in C^\infty$. Por tanto, las derivaciones en C^∞ se pueden identificar con los campos vectoriales suaves.

Si $F : M \to N$ es una aplicacion diferencial y X es un campo vectorial en M, entonces para cada punto $p \in M$, obtenemos un vector $dF_p(X_p) \in T_{F(p)}N$ evaluando la diferencial de F sobre X_p. Sin embargo, esto en general no define un campo vectorial en N. Por ejemplo, si F no es sobreyectiva, no hay forma de decidir que vector asignar a un punto $q \in N$ tal que $q \neq F(M)$. Si F no es inyectiva, para algunos puntos de N habra varios vectores obtenidos al evaluar dF sobre X en diferentes puntos de M.

Cuando $dF(X)$ representa un campo vectorial Y sobre N, decimos que X e Y estan F-relacionados si y solo si para toda funcion real suave f definida en un abierto de N, $X(f \circ F) = (Yf) \circ F$. Por ejemplo, dada la aplicacion suave de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ dada por $F(t) = (\cos t, \sin t)$, los campos vectoriales $d/dt \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ e $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definido por $Y = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$ estan F-relacionados.

A veces no existe ningun campo vectorial en N que esta F-relacionado con un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, dada una aplicacion $F : M \to N$. Pero cuando F es un difeomorfismo, se tiene que existe un campo vectorial suave en N y que ademas es unico. Este campo vectorial suave y unico se llama *pushforward* de X por F y se puede definir explicitamente por la formula $(F_*X)_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$. Ademas, si F es un difeomorfismo, podemos reescribir la F-relacion de dos campos vectoriales del parrafo anterior por $((F_*X)f) \circ F = X(f \circ F)$.

El siguiente ejemplo muestra como calcular el *pushforward* de un campo vectorial: Sean

$M = \{(x,y) : y > 0, x+y > 0\}$ y $N = \{(u,v) : u > 0, v > 0\}$ dos variedades diferenciales. Definimos $F : M \to N$ como $F(x,y) = (x+y, x/y+1)$, que es un difeomorfismo cuya inversa $F^{-1}(u,v) = (u - u/v, u/v)$ es tambien continua para $v > 0$. El campo vectorial dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ es $X_{(x,y)} = y^2 \frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)}$. La diferencial de F en el punto $(x,y) \in M$ se representa por su matriz jacobiana

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

luego $dF_{F^{-1}(u,v)}$ se representa por la matriz

$$DF(u - \frac{u}{v}, \frac{u}{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{v}{u} & -\frac{v - v^2}{u} \end{pmatrix}$$

para todo $(u,v) \in N$, $X_{F^{-1}(u,v)} = \frac{u^2}{v^2}\frac{\partial}{\partial x}|_{F^{-1}(u,v)}$ y aplicando la formula $(F_*X)_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$ con $q = (u,v)$ tenemos que $(F_*X)(u,v) = \frac{u^2}{v^2}\frac{\partial}{\partial u}|_{(u,v)} + \frac{u}{v}\frac{\partial}{\partial v}|_{(u,v)}$.

4.2 Corchete de Lie

No todas las combinaciones de campos vectoriales dan lugar a otro campo vectorial. Uno podria pensar que dados dos campos vectoriales X e Y en una variedad diferencial M y dada una funcion $f : M \to \mathbb{R}$, la funcion $YXf = Y(Xf)$ es un campo vectorial. Sin embargo, la operacion $f \mapsto YXf$ no satisface en general la regla del producto y, por tanto, no puede ser un campo vectorial. Por ejemplo, sean los campos vectoriales $X = \partial/\partial x$ e $Y = x\partial/\partial y$ en $\mathbb{R}^2$ y $f(x,y) = x, g(x,y) = y$. Entonces $XY(fg) = 2x$ mientras que $fXYg + gXYf = x$, por lo que XY no es una derivacion en $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. El corchete de Lie, $[X,Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, es una manera especial de combinar dos campos vectoriales suaves para dar lugar a un campo vectorial tambien suave. Esta definido por:

$$[X,Y]f = XYf - YXf$$

El valor del campo vectorial $[X,Y]$ en un punto $p \in M$ es la derivacion de p dada por la formula $[X,Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$. Desafortunadamente, esta formula es de escasa utilidad para los calculos, pues requiere hallar los terminos de las segundas derivadas de f que siempre se cancelaran. En su lugar es mas comun utilizar la formula de las coordenadas del corchete de Lie, que dice asi:

Sean X, Y campos vectoriales diferenciales en una variedad diferencial M y sean $X = X^i\partial/\partial x^i$ y $Y = Y^i\partial/\partial x^j$ las expresiones de X e Y en terminos de unas coordenadas locales (x^i) dadas en M. El corchete de Lie se puede escribir entonces como:

$$[X,Y] = (X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j}$$

que de forma mas concisa se puede escribir como $[X,Y] = (XY^j - YX^j)\frac{\partial}{\partial x^j}$.

Para todo $f, g \in C^\infty(M)$, $[fX, gY] = fg[X,Y] + (fXg)Y - (gYf)X$.

Una de las aplicaciones mas importantes del corchete de Lie ocurre en el contexto de los grupos de Lie. Sea G un grupo de Lie. G actua suave y transitivamente sobre si misma por traslacion por la izquierda: $L_g(h) = gh$. Un campo vectorial X en G se dice que es invariante por la izquierda si es invariante bajo toda traslacion por la izquierda. Mas explicitamente, $d(L_g)_{g'}(X_{g'}) = X_{gg'}$.

Dado que $(L_g)_*(aX + bY) = a(L_g)_*X + b(L_g)_*Y$, el conjunto de todos los campos vectoriales invariantes en G forman un subespacio lineal en $\mathfrak{X}(G)$. Lo interesante de este resultado es que la propiedad de invarianza se conserva bajo la accion del corchete de Lie.

4.3 Algebra de Lie de un grupo de Lie

Una algebra de Lie (sobre $\mathbb{R}$) es un espacio vectorial real $\mathfrak{g}$ dotado de una aplicacion llamada corchete de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}$, normalmente denotada por $(X, Y) \to [X, Y]$, que satisface las siguientes propiedades:

- Bilinealidad: Para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$$

- Antisimetria: $[X, Y] = -[Y, X]$
- Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son algebras de Lie, una aplicacion lineal $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ se llama homomorfismo de algebras de Lie si conserva corchetes: $A[X, Y] = [AX, AY]$. Si el homomorfismo de algebras de Lie es invertible se le llama isomorfismo de algebras de Lie.

Un ejemplo de algebra de Lie es el espacio vectorial $M(n, \mathbb{R})$ de $n \times n$ matrices reales junto con el corchete commutador $[A, B] = AB - BA$. Se trata de un algebra de Lie n^2-dimensional. Es facil comprobar las propiedades de bilinealidad, antisimetria y la identidad de Jacobi. Este algebra de Lie comunmente se denota por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

De entre todas las algebras de Lie, en la teoria de variedades diferenciales destaca el algebra de Lie de un grupo de Lie. Esta se define como el algebra de Lie de todos los campos vectoriales diferenciales invariantes por la izquierda sobre un grupo de Lie G, que es una subalgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$ y, por tanto, un algebra de Lie. Se denota por $Lie(G)$.

De forma similar a como vemos el espacio tangente como un "modelo lineal" de una variedad diferencial cerca de un punto, el algebra de Lie de un grupo de Lie proporciona un "modelo lineal" de un grupo, que refleja muchas de las propiedades del grupo. Debido a que los grupos de Lie tienen mas estructura que las variedades diferenciales, es de esperar que sus modelos lineales tengan mas estructura que los espacios vectoriales ordinarios. Dado que un algebra de Lie de dimension finita es un objeto algebraico lineal, es en muchos aspectos mas facil de entender que el mismo grupo.

Tomamos como ejemplo de un algebra de un algebra de Lie de un grupo de Lie el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$: Si consideramos $\mathbb{R}^n$ como un grupo de Lie bajo la suma, la traslacion por la izquierda por un elemento $b \in \mathbb{R}^n$ viene dada por la aplicacion afin $L_b(x) = b + x$, cuya diferencial $d(L_b)$ se representa por la matriz identidad en las coordenadas estandares. Por tanto, el campo vectorial $X^i \partial/\partial x^i$ es invariante por la izquierda si y solo si sus coeficientes son constantes. Dado que el corchete de Lie de dos campos vectoriales de coeficientes constantes es cero, el algebra de Lie de $\mathbb{R}^n$ es abeliana e isomorfa a $\mathbb{R}^n$ por el corchete trivial. En resumen, $Lie(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$. El hecho de que el algebra de $\mathbb{R}^n$, que es un grupo de Lie abeliano, sea un algebra de Lie abeliana no es un accidente: todo grupo de Lie abeliano tiene un algebra de Lie abeliana. El opuesto solo es cierto en caso de que el grupo sea conexo.

4.4 Algebra de Lie de un subgrupo de Lie

Si G es un grupo de Lie y $H \subseteq G$ es un subgrupo de Lie, uno desearia que el algebra de Lie de H fuese una subalgebra de Lie de G. Sin embargo, los elementos de $Lie(H)$ son campos vectoriales en H, no en G y, por tanto, no son elementos de $Lie(G)$, esto es, no son campos vectoriales invariantes por la izquierda en G. Podemos salvar este obstaculo observando que cada elemento de $Lie(H)$ corresponde con un unico elemento de $Lie(G)$, determinado por su valor identidad y por la inyeccion de $Lie(H)$ en $Lie(H)$. Este isomorfismo se caracteriza por $\mathfrak{h} = \iota_*(Lie(H)) = X \in Lie(G) : X_e \in T_e H$, donde ι_* denota el homomorfismo inducido de algebras de Lie.

Esta identificacion entre una subalgebra de G y el algebra de Lie de H se hace visible tomando el algebra de de Lie del grupo ortogonal $O(n)$ ejemplo. El grupo ortogonal $O(n)$ es un subgrupo de Lie de $G(n, \mathbb{R})$. $O(n)$ es igual al conjunto de nivel $\theta^{-1}(I_n)$, donde $\theta : GL(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$ es la aplicacion $\theta(A) = A^T A$. El espacio tangente $T_{I_n} O(n)$ es igual al nucleo de la diferencial $d\theta_{I_n} : T_{I_n} GL(n, \mathbb{R}) \to T_{I_n} M(n, \mathbb{R})$. Calculando la diferencial, vemos que $d\theta_{I_n}(B) = B^T + B$, luego $T_{I_n} O(n) = B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : B^T + B = 0$, que es el conjunto de matrices antisimetricas de dimension $n \times n$. Denotamos este subespacio de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ por $\mathfrak{o}(n)$. Por el homomorfismo inducido de algebras de Lie expuesto en el parrafo anterior, $\mathfrak{o}(n)$ is una subalgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ que es isomorfo a $Lie(O(n))$.

5 Derivada de Lie

La derivada de Lie nos permite calcular la velocidad de cambio de un campo vectorial a traves del flujo de otro cambio vectorial de una forma que no depende de las coordenadas elegidas.

5.1 Curvas integrales y flujos

Las curvas integrales son curvas suaves cuya velocidad en cada punto es igual al valor del campo vectorial en ese punto. Es decir, si X es un campo vectorial en M, la integral de curva de X es una curva diferencial $\gamma : J \to M$ tal que $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ para todo $t \in J$. Por ejemplo, si $X = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$ y $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una curva suave tal que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, entonces la condicion $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ se traduce en la ecuacion $x'(t)\dfrac{\partial}{\partial x}|_{\gamma(t)} + y'(t)\dfrac{\partial}{\partial y}|_{\gamma(t)} = x(t)\dfrac{\partial}{\partial y}|_{\gamma(t)} - y(t)\dfrac{\partial}{\partial x}|_{\gamma(t)}$ de soluciones $x(t) = a\cos t - b\sin t$, $y(t) = a\sin t + b\cos t$. Luego toda curva de la forma $\gamma(t) = (a\cos t - b\sin t, a\sin t + b\cos t)$ es una curva integral de X.

La coleccion de todas las curvas integrales de un campo vectorial dado en una variedad diferencial determina una familia de difeomorfismos de abiertos de una variedad diferencial que llamos flujo.

5.2 Derivada de Lie de un campo vectorial

La motivacion en la definicion de las derivadas de Lie radica en la dificultad de definir la derivada direccional de un campo vectorial en una variedad diferencial cualquiera.

En el espacio euclideo, tiene sentido definir la derivada direccional de un campo vectorial en la direccion de un vector $v \in T_p\mathbb{R}^n$ como:

$$D_vW(p) = \frac{d}{dt} |_{t=0} W_{p+tv} = \lim_{x\to 0} \frac{W_{p+tv} - W_p}{t}$$

Se puede ver con facilidad que $D_vW(p)$ puede ser evaluado aplicando D_v a cada componente de W por separado, esto es, $D_vW(p) = D_vW^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Sin embargo, esta definicion depende del hecho que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial, luego los vectores tangente W_{p+tv} y W_p pueden ser vistos como elementos de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, este procedimiento no se puede extrapolar a una variedad diferencial arbitraria. Solo con reemplazar $p + tv$ por una curva $\gamma(t)$ que empieza en p y cuya velocidad inicial es v nos damos cuenta que $W_{\gamma(t)}$ y $W_{\gamma(0)}$ son elementos de dos espacios tangente differentes ($T_{\gamma(t)}M$ y $T_{\gamma(0)M}$ respectivamente), luego la diferencia $W_{p+tv} - W_p$ no tiene sentido. No hay ninguna forma que independiente de las coordenadas elegidas que de sentido a la derivada direccional de W en la direccion de un vector v.

El problema se soluciona si reemplazamos el vector $v \in T_pM$ con un campo vectorial $V \in \mathfrak{X}(M)$, con lo que podemos usar el flujo de V para convertir valores de W de nuevo en p y asi poder operar con los distintos elementos.

Sea M una variedad diferenciable, V un campo vectorial suave en M y θ el flujo de V. Para todo campo vectorial suave W en M se define un campo vectorial en M, denotado por $\mathfrak{L}_VW$ que llamamos la derivada de Lie de W con respecto a V y viene definida por:

$$(\mathfrak{L}_VW)_p = \frac{d}{dt}|_{t=0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = \lim_{t\to 0} \frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) - W_p}{t}$$

siempre que la derivada exista. Para valores de $t \neq 0$ el limite anterior tiene sentido: θ_t esta definida en un entorno de p y θ_{-t} es la inversa de θ_t, luego ambos $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)})$ y W_p son elementos de T_pM.

Al igual que vimos con la primera formula introducida en el corchete de Lie, esta definicion de $\mathfrak{L}_VW)$ es de poca utilidad para el calculo, pues por lo general el flujo es un objeto matematico dificil de manipular en los calculos. Por suerte, el corchete de Lie nos proporciona una forma de hallar la derivada de Lie sin necesidad de hallar explicitamente el flujo.

Para dos campos vectoriales suaves V, W en una variedad diferenciable M, la derivada de Lie de W con respecto de V se puede escribir como $\mathfrak{L}_VW) = [V, W]$.

Enunciamos a continuacion algunas de las propiedades de la derivada de Lie de un campo vectorial:

1. $\mathfrak{L}_VW = -\mathfrak{L}_WV$

2. $\mathfrak{L}_V[W,X] = [\mathfrak{L}_V W, X] + [W, \mathfrak{L}_V X]$

3. $\mathfrak{L}_{[V,W]} = \mathfrak{L}_V \mathfrak{L}_W X - \mathfrak{L}_W \mathfrak{L}_V X$

4. Si $g \in C^\infty(M)$, entonces $\mathfrak{L}_V(gW) = (Vg)W + g\mathfrak{L}_V W$

5.3 Derivada de Lie de un campo tensiorial

El lenguaje de los tensores nos permite hablar de aplicaciones multilineales en el contexto de las variedades diferenciables. En su forma mas simple, los tensores son funciones multilineales reales de una o mas variables, como son el producto escalar y los determinantes.

Los tensores puedes covariantes, contravariantes o mixtos. Un k-tensor covariante en un espacio vectoral real de dimension finita V es un elemento del producto tensorial $\underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{\text{b veces}}$, el cual podemos ver como una funcion real multilineal de b elementos de V; esto es $\alpha : V \times ... \times V \to \mathbb{R}$. Denotamos el espacio vectorial de todos los b-tensores covariantes en V por $T^{(0,b)}(V^*) = \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{\text{b veces}}$. El determinante, entendido como una funcion de n vectores, es un ejempo de un n-tensor covariante. De la misma forma, un tensor contravariante es aquel dado por $T^{(a,0)}(V) = \underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{\text{a veces}}$ y un tensor mixto viene definido por $T^{(a,b)}(V) = \underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{\text{a veces}}\underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{\text{b veces}}$. Los tensores mas importantes en la teoria de las variedades diferenciables son los tensores covariantes.

Ahora, si en vez de un espacio vectorial real tomamos una variedad diferencial M, llamamos fibrado de k-tensores covariantes en M a $T^kT^*M = \coprod_{p \in M} T^k(T_p^*M)$. Un campo tensorial suave es una seccion que es suave de $\pi : T^kM \to M$. Un campo tensorial simetrico en una variedad diferencial es simplemente un campo tensorial covariante cuyos valores en cada punto es un tensor simetrico. Los campos tensorials alternos se llaman formas diferenciales y los veremos mas adelante.

Antes de introducir la derivada de Lie en el contexto de campos tensoriales es necesario definir el concepto de retroaccion o *pullback*. Sea $F : M \to N$ una aplicacion diferenciable. Para cada punto $p \in M$ y cada k-tensor $\alpha \in T^k(T^*_{F(p)}N)$, definimos un tensor $dF_p^*(\alpha) \in T^k(T_p^*M)$ dado por $dF_p^*(\alpha)(v_1, ..., v_k) = \alpha(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_k))$ para todo $v_1, ..., v_k \in T_pM$. Si A es un campo de k-tensores en N, entonces el *pullback* de A por F es otro campo k-tensorial $F * A$ en M y se denota por $(F^*A)_p = dF_p^*(A_{F(p)})$. Este campo tensorial actua sobre vectores $v_1, ..., v_k \in T_pM$ de esta forma: $(F^*A)_p(v_1, ..., v_k) = A_{F(p)}(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_k))$

La operacion de la derivada de Lie se puede extender a campos tensoriales de cualquier rango. Sea M una variedad diferenciable, V un campo vectorial suave en M y θ su flujo. Para todo $p \in M$, si t esta suficientemente cerca de 0, entonces θ_t es un difeomorfismo de un entorno de p a un entorno de $\theta_t(p)$, luego el *pullback* $d(\theta_t)i_p^*$ convierte tensores en $\theta_t(p)$ en tensores en p por la formula $d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)})(v_1, ..., v_k) = A_{\theta_t(p)}(d(\theta_t)_p(v_1), ..., d(\theta_t)_p(v_k)$. Podemos ver que $d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)})$ es el valor del *pullback* del campo tensorial θ_t^*A en p.

Estamos ya en disposicion de definir la derivada de Lie de un campo tensorial A de tensores covariantes en M con respecto a campo vectorial V como:

$$(\mathfrak{L}_V A)_p = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\theta_t^* A)_p = \lim_{t\to 0} \frac{d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)}) - A_p}{t}$$

Esta expresion que derivamos pertenece a $T^k(T_p^* M)$ para todo t, luego $\mathfrak{L}_V A$ tiene sentido como elemento de $T^k(T_p^* M)$.

Destacamos sin demostrar varias propiedades de la derivada de Lie en campos de tensores covariantes dados M una variedad diferencial suave, $V \in \mathfrak{X}(M)$, f una funcion suave real (entendida como un campo 0-tensorial) en M, y A y B campos de tensores covariantes en M:

- $\mathfrak{L}_V f = Vf$
- $\mathfrak{L}_V(fA) = (\mathfrak{L}_V f)A + f\mathfrak{L}_V A$
- $\mathfrak{L}_V(A \otimes B) = (\mathfrak{L}_V A) \otimes B + A \otimes \mathfrak{L}_V B$
- Si $X_1, ..., X_k$ son campos vectoriales suaves y A es un campo k-tensorial tambien suave, entonces $\mathfrak{L}_V(A(X_1, ..., X_k)) = (\mathfrak{L}_V A)(X_1, ..., X_k) + A(\mathfrak{L}_V X_1, ..., X_k) + ... + A(X_1, ..., \mathfrak{L}_V X_k)$

Una de las consecuencias de estas propiedades es que nos permiten expresar la derivada de Lie de cualquier campo tensorial covariante suave en terminos del corchete de Lie y derivadas direccionales de funciones, lo que nos vuelve a permitir calcular derivadas de Lie sin tener que primero calcular el flujo. La siguiente formula es de gran utilidad para los calculos:

Si V es un campo vectorial suave y A es campo de k-tensores covariantes suave, entonces para cada conjunto de campos vectoriales $X_1, ..., X_k$,

$$(\mathfrak{L}_V A)(X_1, ..., X_k) = V(A(X_1, ..., X_k)) - A([V, X_1], X_2, ..., X_k) - ... - A(X_1, ..., X_{k-1}, [V, X_k])$$

Hacemos uso de estas formulas para calcular la derivada de Lie en coordenadas locales (x^i) de un campo de 2-tensores covariantes arbitrario. Observamos que $\mathfrak{L}_V dx^i = d(\mathfrak{L}_V x^i) = d(Vx^i) = dV^i$, luego

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_V A &= \mathfrak{L}_V(A_{ij} dx^i) \otimes dx^j \\
&= \mathfrak{L}_V(A_{ij}) dx^i \otimes dx^j + A_{ij}(\mathfrak{L}_V dx^i) \otimes dx^j + A_{ij} dx^i \otimes (\mathfrak{L} dx^j) \\
&= VA_{ij} dx^i \otimes dx^j + A_{ij} dV^i \otimes dx^j + A_{ij} dx^i \otimes dV^j \\
&= (VA_{ij} + A_{kj}\frac{\partial V^k}{\partial x^i} + A_{ik}\frac{\partial V^k}{\partial x^j}) dx^i \otimes dx^j
\end{aligned}$$

Al igual que la derivada de Lie de un campo vectorial W con respecto a V es cero si y solo si W es invariante bajo el flujo de V, un campo tensorial suave A en M es invariante bajo un flujo θ en M si para cada t, $d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)}) = A_p$.

5.4 Derivada de Lie de una forma diferencial

Las formas diferenciales son campos tensoriales alternos en variedades diferenciales. Gran parte de la teoria de formas diferenciales puede verse como una generalizacion de la teoria de los campos de vectores covariantes, que son los ejemplos mas basicos de formas diferenciales. A los k-tensores covariantes alternos se les llama tambien formas exteriores o k-covectores. El espacio de todas los k-covectores se denota por $\Lambda^k(V^*)$.

Si M es una variedad diferenciable, recordemos que T^kT^*M es el fibrado de k-tensores covariantes en M. El subconjunto de T^kT^*M de los tensores alternos se denota por Λ^kT^*M:

$$\Lambda^kT^*M = \coprod_{p\in M} \Lambda^k(T_p^*M)$$

Una seccion de Λ^kT^*M se llama k-forma diferencial si es un campo tensorial continuo cuyo valor en cada punto es un tensor alterno. El espacio vectorial de k-formas suaves se define como $\omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^kT^*M)$. El producto exterior de una k-forma con otra l-forma es una (k+l)-forma. El operador natural de las formas diferenciales se llama derivada exterior y es una generalizacion de la diferencial de una funcion.

Las formulas utilizadas en la seccion anterior para los campos tensioriales tambien son aplicables a las formas diferenciales. Sin embargo, en el caso de las formas diferenciales, la derivada exterior nos proporciona una formula mas eficaz para calcular la derivada de Lie. Esto conlleva ademas otras consecuencias teoricas.

La derivada de Lie satisface la regla del producto con respecto al producto exterior. Si M es una variedad diferenciable, $V \in \mathfrak{X}(M)$ y ω, η son formas diferenciales en $\Omega^*(M)$, entonces $\mathfrak{L}_V(\omega \wedge \eta) = (\mathfrak{L}_V\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathfrak{L}_V\eta)$.

La formula mas destacada para hallar la derivada de Lie de una forma diferencial es la llamada formula magica de Cartan:

$$\mathfrak{L}_V\omega = V\lrcorner(d\omega) + d(V\lrcorner\omega)$$

donde $\lrcorner$ es una aplicacion lineal $\lrcorner_v : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{[k-1]}(V^*)$ llamada multiplicacion interior y definida como $\lrcorner_v : \omega(w_1, ..., w_{k-1}) = \omega(v, w1, ..., v_{k-1})$ para todo v, w en un espacio vectorial de dimension finita V.

6 Cohomologia

Introducimos a continuacion algunos conceptos esenciales para entender la cohomologia de De Rham y la cohomologia del algebra de Lie.

Sea R un anillo conmutativo y sea $A^* = ... \to A^{p-1} \to^d A^p \to^d A^{p+1} \to ...$ una sucesion de R-modulos y R-aplicaciones lineas. En la mayoria de casos, el anillo sera $\mathbb{Z}$, en cuyo caso estaremos tratando con grupos abelianos y homomorfismos, o $\mathbb{R}$, en cuyo caso tenemos espacios vectoriales y aplicaciones lineales. La terminologia de modulos es conveniente para combinar ambos casos. Esta sucesion se dice que es un *complejo* si la composicion de dos aplicaciones sucesivas de d es la aplicacion nula $d \cdot d = 0 : A^p \to A^{p+2}$ para cada p. Como en el caso de los espacios vectoriales, tal secuencia de modulos se llama exacta si la imagen de cada d es igual al nucleo de la siguiente. Claramente, toda sucesion exacta es un complejo, pero el reciproco no es siempre cierto.

Llamamos p-esimo grupo cohomologico de una sucesion A^* al cociente

$$H^p(A^*) = \frac{Ker(d : A^p \to A^{p+1})}{Im(d : A^{p-1} \to A^p)}$$

Intuitivamente, se puede ver pensar en este grupo cohomologico como una medida de la "falta de exactitud" en A^p. Un ejemplo de un complejo es el complejo de De Rham de una n-variedad diferenciable M:

$$0 \to \Omega^0(M) \to^d ... \to^d \Omega^p(M) \to^d \Omega^{p+1}(M) \to^d ... \to^d \Omega^n(M) \to 0$$

6.1 Cohomologia de De Rham

La cohomologia de De Rham nace del estudio de las formas cerradas y exactas. Una forma es cerrada si su derivada $d\omega = 0$; es exacta si se puede escribir como $\omega = d\eta$. Debido a que $d \cdot d = 0$, toda forma exacta es cerrada. Sin embargo, no toda forma cerrada es exacta. La propiedad de las formas cerradas que tambien son exactas esta ligada a la existencia de "agujeros" en la variedad diferenciable, que se hace medible gracias a un nuevo conjunto de invariantes de las variedades diferenciables llamado grupo de cohomologia de De Rham.

Un ejemplo de una forma cerrada que no es exacta en $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ es la 1-forma $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$. Sin embargo, esta forma es exacta en dominios mas reducidos como el semiplano $H = \{(x, y) : x > 0\}$. Este comportamiento es caracteristico de las formas cerradas: toda forma cerrada es siempre localmente exacta.

Dado que $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ es lineal, su imagen y nucleo son subespacios lineales. Definimos al conjunto de p-formas cerradas en M como $Z^p(M) = Ker(d : \Omega^p(M \to \Omega^{p+1}(M))$ y al conjunto de p-formas exactas como $B^p(M) = Im(d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$, tambien en M.

El hecho de que toda forma exacta es cerrada implica que $B^p(M) \subseteq Z^p(M)$. Por tanto, tiene sentido definir el grupo de cohomologia de De Rham de grado p de M como el espacio vectorial cociente $H^p_{dR}(M) = \dfrac{Z^p(M)}{B^p(M)}$. Un termino mas apropiado seria "espacio de cohomologia de De Rham", ya que estos grupos son, en realidad, espacios vectoriales.

Para $p < 0$ o $p > \dim M$ tenemos que $H^p_{dR}(M) = 0$, pues $\Omega^p(M) = 0$ en esos casos. Para $0 \leq p \leq n$, la definicion implica que $H^p_{dR}(M)$ es igual a 0 si y solo si toda p-forma cerrada en M es exacta. Por ejemplo, en el caso anterior, el hecho de que exista una 1-forma cerrada en $\mathbb{R}^1 \backslash \{0\}$ que no es exacta significa que $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 - \{0\})$. Por otra parte, el lema de Poincare para 1-formas implica que $H^1_{dR}(U) = 0$ para todo subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ estrellado.

Los grupos de De Rham son invariantes por difeomorfismos. Para cada p-forma cerrada ω en M, denotamos $[\omega]$ a la clase de equivalencia de ω en $H^p_{dR}(M)$ llamada clase cohomologia de ω. Si $[\omega] = [\omega']$, esto es, si ω y ω' difieren por una forma exacta, decimos que ω y ω' son cohomologicas. Dos variedades diferenciables difeomorficas tienen grupos de cohomologia de De Rham isomorficos.

Ademas, los grupos cohomologicos de De Rham son invariantes homotopicos: dos variedades diferenciables homotopicamente equivalentes tienen grupos de De Rham isomorficos.

Esto se debe a que aplicaciones diferenciables homotopicas inducen la misma aplicacion cohomologica. Una aplicacion cohomologica es una aplicacion lineal $F^* : H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$, con M y N variedades diferenciables y F una aplicacion suave de M a N, con las siguientes propiedades:

1. Si $G : N \to P$ es otra aplicacion suave, entonces $(G{\cdot}F)^* = F^*{\cdot}G^* : H^p_{dR}(P) \to H^p_{dR}(M)$
2. Si Id es la aplicacion identidad en M, entonces Id^* es la aplicacion identidad en $H^p_{dR}(M)$.

Dado que todo homeomorfismo es una equivalencia homotopica, los grupos cohomologicos de De Rham son invariantes topologicos: si dos variedades diferenciables son homeomorfas, entonces sus grupos de cohomologia de De Rham son isomorficos.

6.2 Cohomologia del algebra de Lie

La cohomologia del algebra de Lie nace del estudio de la topologia de los grupos de Lie y los espacios homogeneos relacionando metodos cohomologicos de De Rham a propiedades del algebra de Lie.

Si G es un grupo de Lie compacto simplemente conxexo, entonces esta determinado por su algebra de Lie, por lo que es posible calcular su cohomologia a partir del algebra de Lie. Su cohomologia es la cohomologia de De Rham del complejo de las formas diferenciales en G. Este complejo se puede reemplazar por un complejo de formas diferenciales invariantes por la izquierda. El espacio de las formas invariantes por la izquierda se pueden identificar con el algebra exterior del algebra de Lie, dotada de una diferencial apropiada.

La construccion de esta diferencial en un algebra exterior tiene sentido para cualquier algebra de Lie, por lo que se usa para definir la cohomologia del algebra de Lie para todas las algebras de Lie.

Si G es un grupo de Lie simplemente conexo y no compacto, la cohomologia del algebra de Lie del algebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$ no reproduce necesariamente la cohomologia de De Rham de G. De forma mas general, una construccion similar sirve para definir la cohomologia de un algebra de Lie con coeficientes en un modulo.

Definimos entonces la cohomologia de un algebra de Lie $\mathfrak{g}$ con coeficientes en un $\mathfrak{g}$-modulo M por la izquierda como $H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M) = Ext^*_{U_\mathfrak{g}}(k, M)$ donde k es el modulo trivial sobre el algebra universal evolvente $U_\mathfrak{g}$, esto es, el algebra mas general que contiene todas las representacion de un algebra de Lie.

Por ejemplo, para toda suma directa de algebras de Lie simples o algebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$, existe una forma de Killing $\langle -, - \rangle$. La correspondiente cadena cerrada de tres elementos (3-cociclo) es $\mu = \langle -, [-, -] \rangle : CE(\mathfrak{g})$; es una funcion que manda tres elementos del algebra de Lie x, y, z al numero $\mu(x, y, z) = \langle x, [y, z] \rangle$.

Algunos resultados importantes de la cohomologia de las algebras de Lie incluyen los lemas de Whitehead, el teorema de Weil y el teorema de decomposicion de Levi.