ANN

02-1 矩陣概念介紹

矩陣(Matrix)表示式

- $A_{m\times n}$稱為 **m 列 n 行** 矩陣
- 大寫表示矩陣，小寫表示元素
- 矩陣大小：m×n

$$A_{m\times n} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc} \text{第一行}\downarrow & \text{第二行}\downarrow & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{第一列}\rightarrow \\ \text{第二列}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

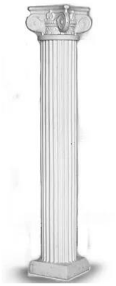
向量(Vector)表示式

- 第 *i* 個**列**向量 (**row** vector)

$$r_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

- 列矩陣 (row matrix)

- 第 *j* 個**行**向量 (**column** vector)



$$c_j = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix}$$

- 行矩陣 (column matrix)

矩陣 vs 向量 - 範例

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\end{bmatrix} \Rightarrow r_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix},\ r_2=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix} \Rightarrow c_1=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix},\ c_2=\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix},\ c_3=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$$

矩陣加法

- 設 A、B 都是二階矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$

則 $A + B = \begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}$

- 注意：兩個矩陣必須要有相同的列數與行數才可相加！

矩陣加法 – 範例

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0-1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ -3+3 \\ -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

矩陣係數(純量)積

- 設 A 是二階方陣，r 是任意實數
- 注意：矩陣A每一個元素都要乘以 r

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

則 $$r\times A=\begin{bmatrix} r\times a & r\times b \\ r\times c & r\times d \end{bmatrix}$$

加法與係數(純量)積的性質

- 設 A、B、C 都是二階矩陣，則

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $A+0=0+A=A$
4. $A+(-A)=(-A)+A=0$

- 設 A、B 都是二階矩陣，h、k 是任意實數，則

1. $k(A+B)=kA+kB$
2. $(hk)A=hkA$
3. $(h+k)A=hA+kA$
4. $1A=A$

加法與係數(純量)積 – 範例

- 設 A、B 兩矩陣，求 (a) 3A, (b) -B, (c) 3A-B

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$3A-B=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

矩陣乘法

- 設 A、B 都是二階矩陣

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} a\times p+b\times r & a\times q+b\times s \\ c\times p+d\times r & c\times q+d\times s \end{bmatrix}$$

矩陣乘法

- 設 A、B 都是二階矩陣

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \vdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \end{bmatrix}$$

- 注意：A+B = B+A, 但是 $\boldsymbol{A \times B \neq B \times A}$

矩陣乘法特殊之處

- 問：怎麼樣的矩陣才可以相乘？
- 答：前面矩陣的行數 = 後面矩陣的列數，兩矩陣才可以相乘

- 問：相乘之後的矩陣是幾列幾行？
- 答：

$$A_{m\times p} \times B_{p\times n} = (AB)_{m\times n} = C_{m\times n}$$

矩陣乘法 – 範例

- 求 A 與 B 兩矩陣的乘積

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$