

Sistemas de equações lineares

Prof. Luiz T. F. Eleno

Departamento de Engenharia de Materiais
Escola de Engenharia de Lorena
Universidade de São Paulo



2019

Plano de aula

1 Introdução

- Introdução
- Representação matricial
- Solução de um sistema linear
- Regra de Cramer

2 Método da eliminação de Gauss

- Sistemas triangulares
- Propriedades de sistemas lineares
- Matriz ampliada
- Determinantes
- Número de operações

3 Códigos

- Código caseiro
- `scipy.linalg`

Plano de aula

- 1 Introdução
 - Introdução
 - Representação matricial
 - Solução de um sistema linear
 - Regra de Cramer
- 2 Método da eliminação de Gauss
 - Sistemas triangulares
 - Propriedades de sistemas lineares
 - Matriz ampliada
 - Determinantes
 - Número de operações
- 3 Códigos
 - Código caseiro
 - `scipy.linalg`

Sistemas lineares

- Um sistema linear é um conjunto de m equações lineares em n incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n
- Vamos considerar apenas sistemas definidos, ou seja, quando o número de equações é igual ao de incógnitas ($m = n$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Exemplo:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 5z = 8 \\ 6x - y - 2z = 8 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

- solução (verifique!): $x = 2, y = -4, z = 4$

Representação matricial

- O sistema genérico do último slide pode ser representado de **forma matricial**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Vamos indicar o **vetor solução** por

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T$$

- **b** é o **vetor de termos independentes**:

$$\mathbf{b} = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)^T$$

- o sobrescrito T indica transposição, ou seja, troca das linhas por colunas

- **A** é a **matriz de coeficientes**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- veja que **A** é uma **matriz quadrada de ordem n**
- Com isso, o sistema pode ser escrito de forma compacta como:

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

Solução de um sistema linear

- Em Álgebra Linear, você aprende que o sistema com n equações e n incógnitas

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

admite solução dependendo de \mathbf{b} e do **determinante** de \mathbf{A} , indicado por $\det \mathbf{A}$:

- se $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$:
 - ★ solução única existe se $\det \mathbf{A} \neq 0$
 - ★ não existe solução se $\det \mathbf{A} = 0$
 - se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (sistema homogêneo):
 - ★ apenas a solução trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se $\det \mathbf{A} \neq 0$
 - ★ múltiplas soluções se $\det \mathbf{A} = 0$
- Você aprende também que, se $\det \mathbf{A} \neq 0$, existe a **matriz inversa** de \mathbf{A} , indicada por \mathbf{A}^{-1} , com a seguinte propriedade:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

sendo \mathbf{I} a **matriz identidade** de mesma ordem que \mathbf{A} , ou seja, de ordem n :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ou seja, \mathbf{I} tem a **diagonal principal** preenchida por “1”s e todos os outros elementos nulos.

Representação da solução

- Vamos pensar num **sistema bem-definido**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

em que $\det \mathbf{A} \neq 0$ e $\mathbf{b} \neq 0$, ou seja, com uma única solução

- Sabemos que \mathbf{A}^{-1} existe e, portanto, podemos multiplicar os dois lados do sistema por \mathbf{A}^{-1} sem alterar a igualdade:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Mas sabemos também que

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

e, portanto,

$$\mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Mas a matriz identidade tem a seguinte propriedade: seja qual for a matriz \mathbf{M} (desde que o número de colunas de \mathbf{I} seja igual ao número de linhas de \mathbf{M}):

$$\mathbf{IM} = \mathbf{M}$$

- \Rightarrow A solução do sistema pode ser representada então por

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}$$

- Essa forma da solução é útil para manipulações e teoremas, mas não serve na prática, pois calcular a matriz inversa não é nada fácil!
 - ▶ precisamos encontrar outras maneiras de resolver o sistema!

Regra de Cramer

- A **Regra de Cramer** vale para qualquer sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ bem-definido
- Segundo a regra de Cramer, a solução $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é dada por

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

em que \mathbf{A}_i é a matriz obtida substituindo a i -ésima coluna de \mathbf{A} por \mathbf{b}

Exemplo

- Por exemplo, para o sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

temos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Assim,

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Com isso:

$$\det \mathbf{A} = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2$$

$$\det \mathbf{A}_x = 4 \times (-1) - 1 \times 2 = -6$$

$$\det \mathbf{A}_y = 1 \times 2 - 4 \times 1 = -2$$

e portanto

$$x = \frac{-6}{-2} \rightarrow x = 3$$

e

$$y = \frac{-2}{-2} \rightarrow y = 1$$

- A Regra de Cramer é uma maneira interessante de se resolver sistemas lineares pequenos, de ordem 2 ou 3
 - ▶ mas, como veremos, é um desastre computacional!

Número de operações para calcular um determinante

- Para entender o pesadelo computacional da regra de Cramer, vamos calcular o número de operações envolvidas no cálculo de um determinante
- Da **definição de determinante** (ver algum livro de Álgebra Linear):

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det \tilde{\mathbf{A}}_{ij}$$

em que

- ▶ i é qualquer uma das linhas de \mathbf{A} , uma matriz quadrada de ordem n
- ▶ A_{ij} é o elemento de \mathbf{A} encontrado na linha i e coluna j
- ▶ $\tilde{\mathbf{A}}_{ij}$ é a **submatriz menor** obtida a partir de \mathbf{A} eliminando a linha i e a coluna j
 - ★ $(-1)^{i+j} \det \tilde{\mathbf{A}}_{ij}$ é chamado **cofator** do elemento A_{ij}
- Da expressão acima, o número de somas/subtrações (S_n) e de multiplicações (M_n) para o cálculo de um determinante podem ser escritos recursivamente como

$$S_n = nS_{n-1} + n - 1$$

$$M_n = nM_{n-1} + n$$

- O número total de operações (D_n) para o cálculo de um determinante é $D_n = S_n + M_n$
- Percebendo que $S_1 = M_1 = 0$, podemos calcular qualquer S_n , M_n e D_n , um a um

Número de operações da regra de Cramer

- O número de operações envolvidas no uso da regra de Cramer (C_n) é dado por:

$$C_n = (n + 1)D_n + n$$

- Podemos então montar a seguinte tabela:

n	S_n	M_n	D_n	C_n
1	0	0	0	1
2	1	2	3	11
3	5	9	14	59
4	23	40	63	319
5	119	205	324	1949
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
17	355687428095999	611171244308689	966858672404688	1.74E+16
18	6.40E+15	1.10E+16	1.74E+16	3.31E+17
19	1.22E+17	2.09E+17	3.31E+17	6.61E+18
20	2.43E+18	4.18E+18	6.61E+18	1.39E+20

- \Rightarrow se cada operação leva aproximadamente $10^{-1} \mu s$, a solução de um sistema de ordem 20 demoraria mais de 400 000 anos!
- mas, na prática, podem aparecer sistemas com milhares de equações!!!
- \Rightarrow obviamente precisamos de algum outro método...

Plano de aula

1 Introdução

- Introdução
- Representação matricial
- Solução de um sistema linear
- Regra de Cramer

2 Método da eliminação de Gauss

- Sistemas triangulares
- Propriedades de sistemas lineares
- Matriz ampliada
- Determinantes
- Número de operações

3 Códigos

- Código caseiro
- `scipy.linalg`

Sistemas triangulares

- Um **sistema triangular superior** é um sistema linear escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ & & \vdots \\ & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ & & a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

- Em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

- A solução do sistema, supondo $a_{ii} \neq 0$ ($1 \leq i \leq n$), é

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_n & = & b_n/a_{nn} \\ x_{n-1} & = & (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1} \\ & \vdots & \\ x_1 & = & (b_1 - a_{1n}x_n - \dots - a_{13}x_3 - a_{12}x_2)/a_{11} \end{array} \right.$$

- Infelizmente, nem todo sistema é triangular...
 - mas podem ser transformados (quase sempre) em triangulares!

Propriedades de sistemas lineares

- **Propriedade:** a solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ não se altera se o submetemos a uma sequência de operações do tipo:
 1. multiplicação de uma equação por uma constante não-nula;
 2. soma do múltiplo de uma equação a outra;
 3. permutar as equações (ou seja, trocar a sua ordem).

Matriz ampliada

- O **Método da eliminação de Gauss** faz uso sistemático da propriedade do slide anterior para transformar o problema original num **sistema triangular superior**
 - ▶ que conseguimos resolver facilmente!
- Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -5x_1 \quad \quad + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

- Ele pode ser representado em forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -9 & 12 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 51 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- A **matriz ampliada** do sistema é obtida anexando \mathbf{b} à matriz \mathbf{A} :

$$A_a = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Trabalhamos com a matriz ampliada, zerando, ou seja, eliminando termos (daí o nome)
 - ▶ a cada linha, escolhemos um elemento **pivô** que nos ajuda na eliminação
 - ▶ é mais fácil de entender usando um exemplo

→

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji} , com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- **Matriz ampliada original:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1 \rightarrow troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- \Rightarrow adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- \Rightarrow os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)

- Pivô 2 \rightarrow troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji} , com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1 \rightarrow troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- \Rightarrow adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- \Rightarrow os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)

- Pivô 2 \rightarrow troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji} , com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1 \rightarrow troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- \Rightarrow adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- \Rightarrow os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)

- Pivô 2 \rightarrow troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji} , com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1 \rightarrow troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- \Rightarrow adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- \Rightarrow os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)

- Pivô 2 \rightarrow troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji} , com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1 \rightarrow troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- \Rightarrow adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- \Rightarrow os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)

- **Pivô 2 \rightarrow troca linhas 2 e 3:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji} , com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1 \rightarrow troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- \Rightarrow adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- \Rightarrow os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)

- Pivô 2 \rightarrow troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Solução do sistema

- Do slide anterior, chegamos a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- A matriz está agora na **forma triangular superior** \Rightarrow o sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -5x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -7.5x_2 + 12x_3 = 43.5 \\ 3x_3 = 9 \end{cases}$$

- A solução é obtida facilmente, começando pela última equação:

$$\begin{cases} x_3 = 9/3 & \rightarrow x_3 = 3 \\ x_2 = \frac{43.5 - 12 \times 3}{-7.5} & \rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 = \frac{51 - 12 \times 3 - (-9) \times (-1)}{6} & \rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

- Verifique que a solução vale também para o sistema na forma original!

Bônus: determinantes

- O método da eliminação de Gauss tem outra utilidade: o cálculo de determinantes
- Exemplo: encontrar o determinante da matriz \mathbf{A} abaixo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -9 & 12 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Basta usar o método da eliminação de Gauss:

$$\mathbf{A}^{(r)} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ 0 & -7.5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{A}^{(r)}$ é chamada de **forma reduzida** de \mathbf{A}
 - ▶ ou, como já vimos, forma triangular superior
- Propriedades dos determinantes:
 1. adicionar um múltiplo de uma linha a outra não altera o valor do determinante
 2. multiplicar uma linha por a multiplica também o valor do determinante por a
 3. permutar duas linhas troca o sinal do determinante
- Com isso, não é difícil de ver que

$$\det \mathbf{A} = (-1)^t \prod_{i=1}^n A_{ii}^{(r)} = (-1)^t A_{11}^{(r)} \times A_{22}^{(r)} \times \dots \times A_{nn}^{(r)}$$

- ▶ t é o número de vezes em que permutamos linhas
- \Rightarrow o módulo do determinante de \mathbf{A} é o produto dos elementos da diagonal principal de $\mathbf{A}^{(r)}$

Número de operações do método da eliminação de Gauss

- Não é difícil fazer a contabilidade do número de operações envolvidas na redução da matriz ampliada:

$$R_n = \frac{n(n-1)(4n+7)}{6}$$

- (não consideramos a permutação de linhas como uma operação)
- Já na solução de um sistema triangular superior, o número de operações é

$$T_n = n^2$$

- \Rightarrow O número total de operações no método da eliminação de Gauss é

$$G_n = R_n + T_n = \mathcal{O}\left(\frac{2}{3}n^3\right)$$

n	R_n	T_n	G_n	$2n^3/3$
1	0	1	1	0.7
2	5	4	9	5.3
3	19	9	28	18.0
4	46	16	62	42.7
5	90	25	115	83.3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
18	4029	324	4353	3888.0
19	4731	361	5092	4572.7
20	5510	400	5910	5333.3

- Um sistema com 20 equações levaria $\approx 0,6$ ms para ser resolvido
 - ▶ 1000 equações levariam em torno de 7 segundos

Plano de aula

1 Introdução

- Introdução
- Representação matricial
- Solução de um sistema linear
- Regra de Cramer

2 Método da eliminação de Gauss

- Sistemas triangulares
- Propriedades de sistemas lineares
- Matriz ampliada
- Determinantes
- Número de operações

3 Códigos

- Código caseiro
- `scipy.linalg`

Um código caseiro em python usando numpy

Solução de sistemas lineares pelo método da eliminação de Gauss

```
import numpy as np

def gauss(A, b):

    A = np.column_stack( (A, b) ).astype(float) # matriz ampliada
    N = len(A) # no. de equacoes do sistema

    # Obtendo a forma triangular superior:
    for i in range(N): # loop sobre as linhas
        k = np.argmax(np.abs(A[i:,i])) # buscando o maior pivo
        if k > 0 :
            A[i+k, :] = np.copy(A[i+k, :]) - np.copy(A[i, :]) * A[i+k, i] / A[i, i] # trocando linhas
        for j in range(i+1, N): # reduzindo as linhas abaixo da linha i
            A[j, i:] -= A[j, i] * A[i, i:] / A[i, i]
            A[j, i] = 0.

    # Resolvendo o sistema triangular superior:
    for i in range(N-1, -1, -1): # loop sobre as linhas
        for j in range(i+1, N): # loop sobre as colunas
            A[i, j] -= A[i, j] * A[j, N-1] / A[j, j]
        A[i, N-1] /= A[i, i] # ultima coluna de A tem a solucao

    return A[:, -1]
```

- `numpy.argmax(v)` retorna o índice do maior elemento do array `v`

Biblioteca `scipy.linalg`

- A biblioteca `scipy.linalg` tem uma função pronta para resolver sistemas lineares:

Solução de sistemas lineares usando a biblioteca `scipy.linalg`

```
import scipy.linalg as la
'''
scipy.linalg.solve(A, b) retorna x, solucao do sistema A x = b
A -> matriz quadrada de coeficientes
b -> vetor de termos independentes
por exemplo, A = [ [ 1, 1 ], [ 1, -1 ] ], b = [ 4, 2 ]
'''
x = la.solve(A, b)
```