Integração numérica

Prof. Luiz T. F. Eleno

Departamento de Engenharia de Materiais
Escola de Engenharia de Lorena
Universidade de São Paulo

2019

Plano de aula

1. Regra dos trapézios

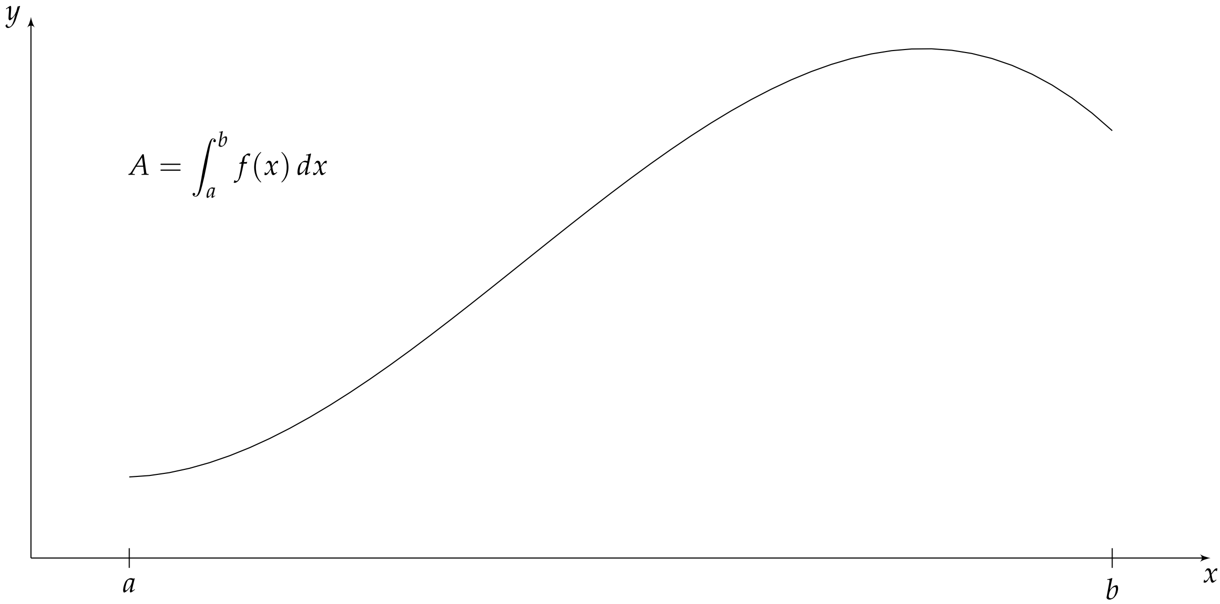
2. Regra de Simpson

3. `scipy.integrate`

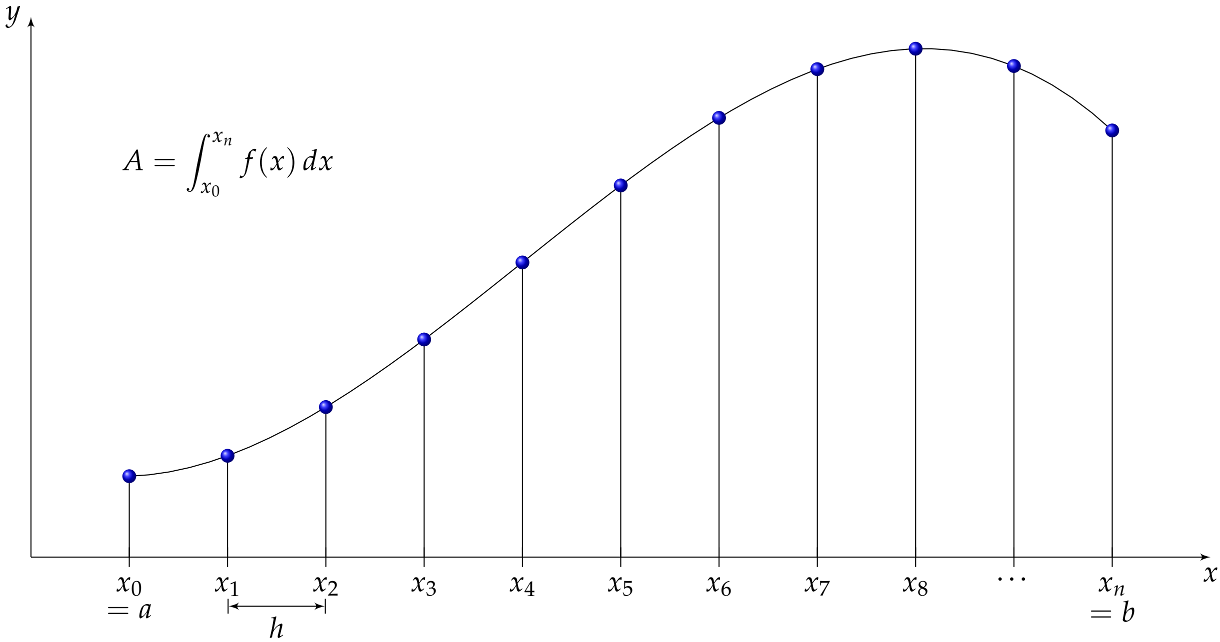
Plano de aula

1. Regra dos trapézios
2. Regra de Simpson
3. `scipy.integrate`

Regra dos trapézios

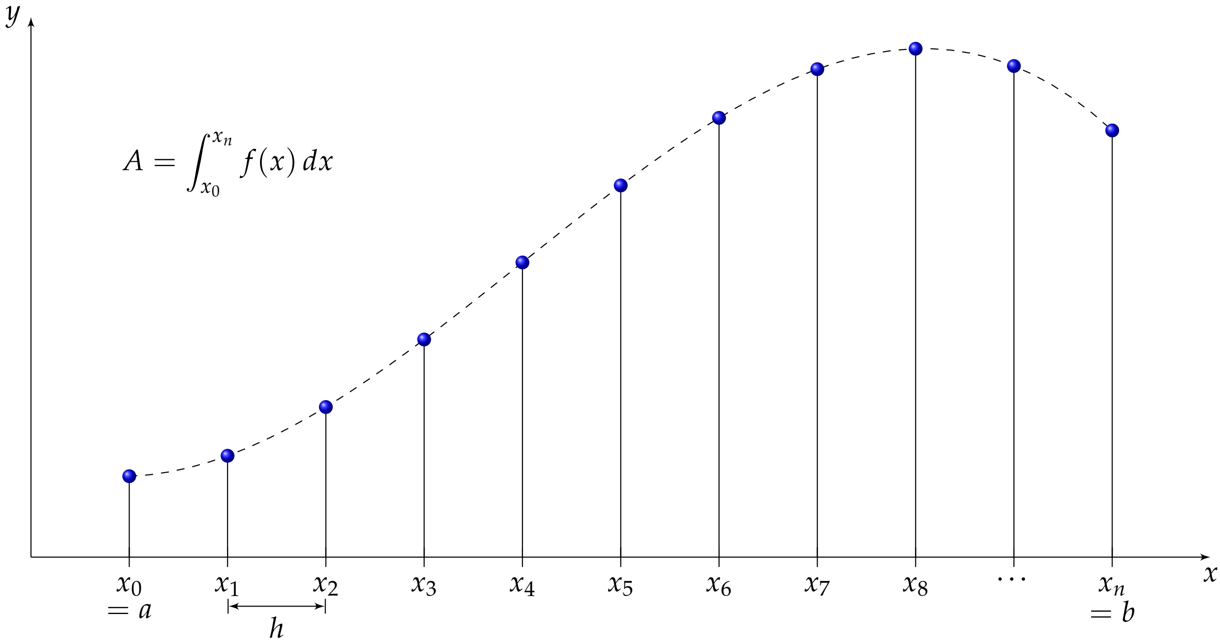


Regra dos trapézios



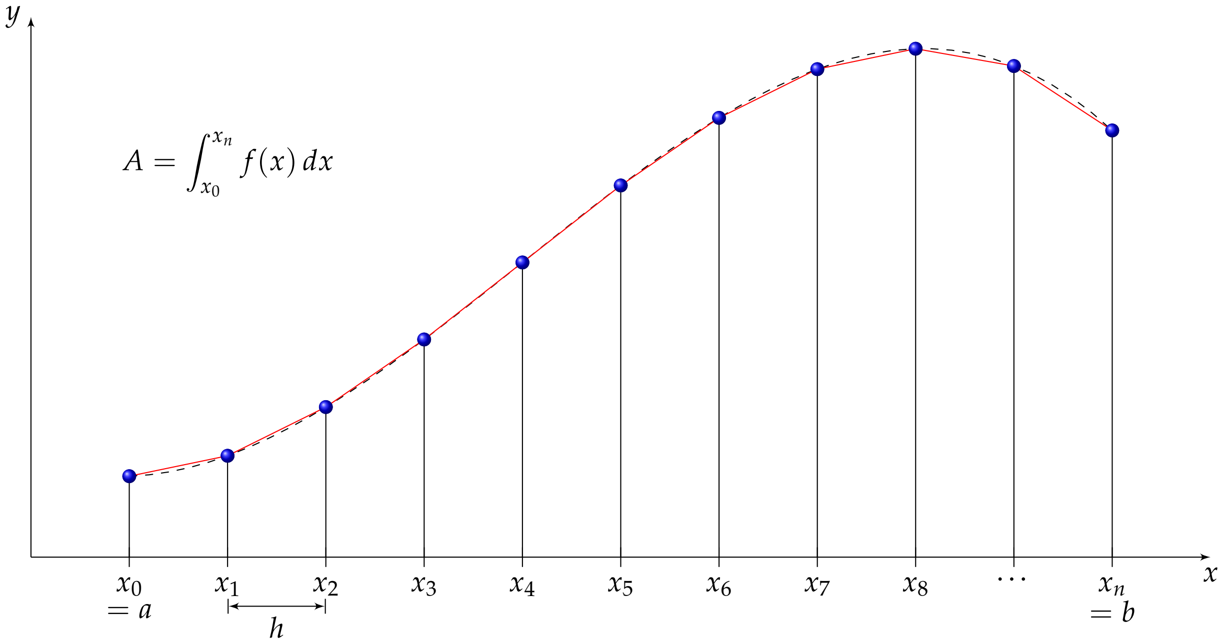
$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = x_{i-1} + h$$

Regra dos trapézios



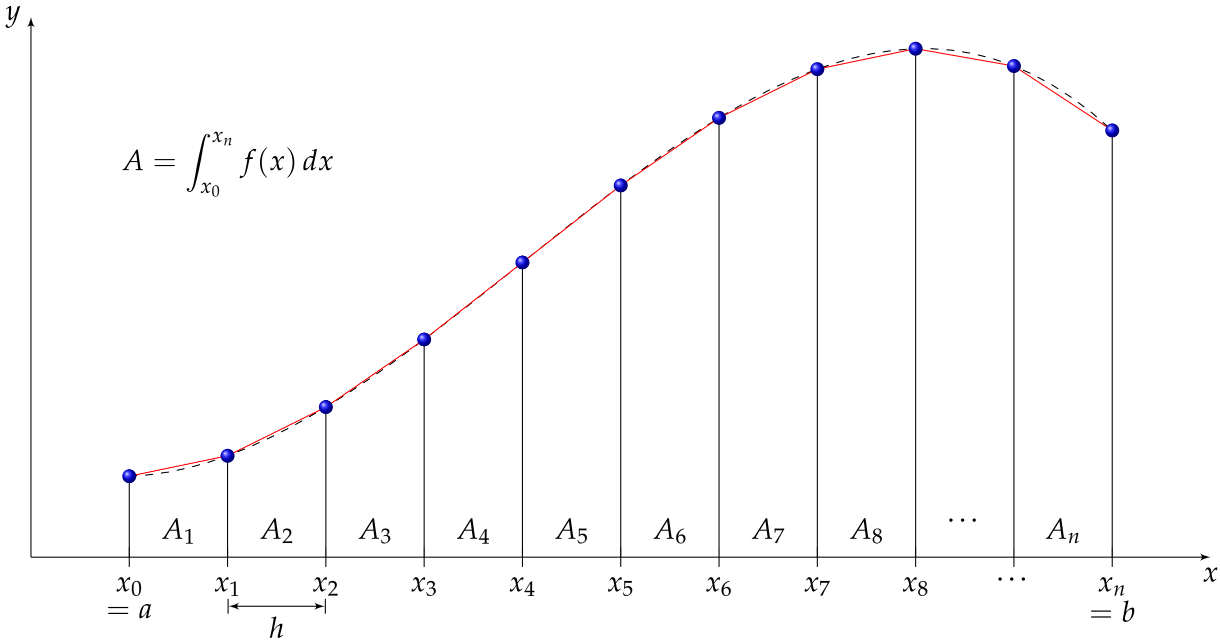
$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = x_{i-1} + h$$

Regra dos trapézios



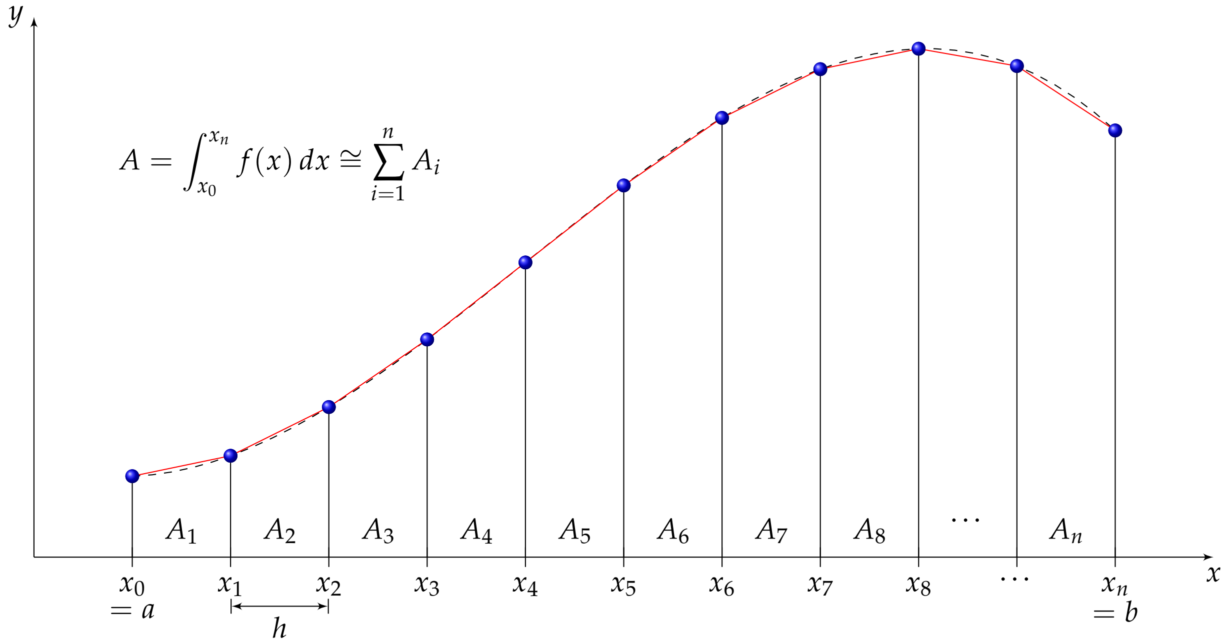
$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = x_{i-1} + h$$

Regra dos trapézios



$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = x_{i-1} + h$$

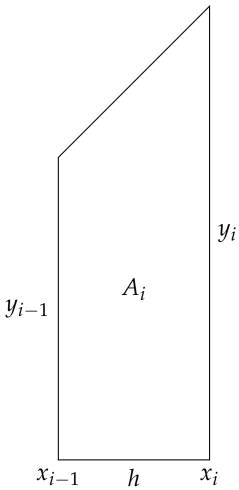
Regra dos trapézios



$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = x_{i-1} + h$$

Regra dos trapézios

área de um trapézio:



Da geometria euclidiana:

$$A_i = h \cdot \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$$

- Veja que também podemos achar A_i interpolando uma reta entre x_{i-1} e $x_i = x_{i-1} + h$:

$$A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_1(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f(x_{i-1}) + (x - x_{i-1}) \frac{\Delta f_i}{h} \right] dx$$

$$A_i = f(x_{i-1})h + \Delta f_i \frac{h}{2}$$

$$A_i = f(x_{i-1})h + (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{h}{2}$$

$$A_i = h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = h \cdot \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$$

Regra dos trapézios

- A área completa é então

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} h \cdot \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$$

$$A \cong \frac{h}{2} \left[\sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) \right]$$

- Ou seja:

$$A \cong \frac{h}{2} (y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n)$$

$$\boxed{A \cong \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)}$$

- Podemos reescrever a área aproximada na forma

$$A \cong h (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + y_n) - \frac{h}{2} (y_0 + y_n)$$

ou ainda

$$\boxed{A \cong h \sum_{i=0}^{n} y_i - \frac{h}{2} (y_0 + y_n)}$$

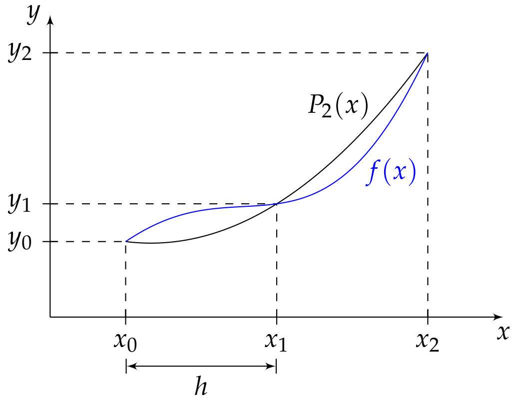
Análise de erros

- $\Rightarrow$ o erro é delimitado da seguinte forma:

$$\boxed{|E_1| \leq \frac{|b-a|^3}{12n^2} \max \left| f''(x) \right|}$$

Plano de aula

Regra de Simpson



- E se, ao invés de interpolar linearmente, usarmos uma interpolação quadrática?
- Dividindo o intervalo de integração em duas partes usando x_0, x_1 e x_2, aproximamos $f(x)$ por $P_2(x)$:

$$f(x) \approx P_2(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta f_0}{h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta_2 f_0}{2h^2}$$

  com

$$\Delta f_0 = y_1 - y_0$$

  e

$$\Delta_2 f_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

- Aproximamos então a integral de $f(x)$ por

$$A = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx$$

Regra de Simpson

- A área é aproximada por

$$A \approx \int_{x_0}^{x_2} \left[y_0 + (x - x_0) \frac{\Delta f_0}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta_2 f_0}{2h^2} \right] dx$$

que fornece

$$A \approx 2hy_0 + 2h\Delta f_0 + \frac{h}{3}\Delta_2 f_0$$

- Mas, como

$$\Delta f_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta_2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

- segue que

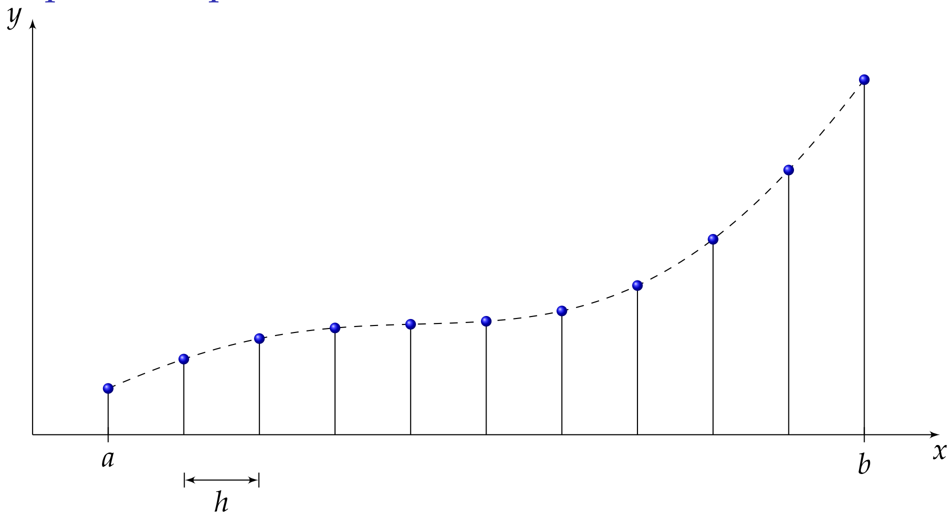
$$A \approx 2hy_0 + 2h\,(y_1 - y_0) + \frac{h}{3}\,(y_2 - 2y_1 + y_0)$$

ou, finalmente,

$$\boxed{A \approx \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)}$$

- Essa fórmula é conhecida como **Regra de Simpson simples** — simples porque usamos apenas um polinômio em todo o intervalo de interpolação

Regra de Simpson composta



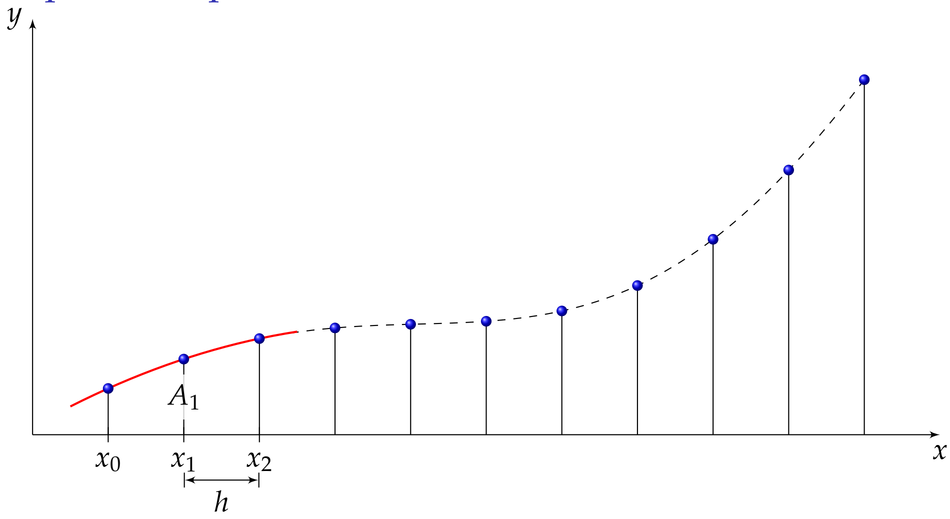
- Para aumentar a precisão, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais de largura

$$h = \frac{b-a}{n}$$

  - n **precisa necessariamente ser par!**
- Encontramos a parábola interpoladora em cada intervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ ($i = 1, 2, \ldots, n/2$)
- As áreas A_i, como já vimos, são dadas por

$$A_i = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

Regra de Simpson composta



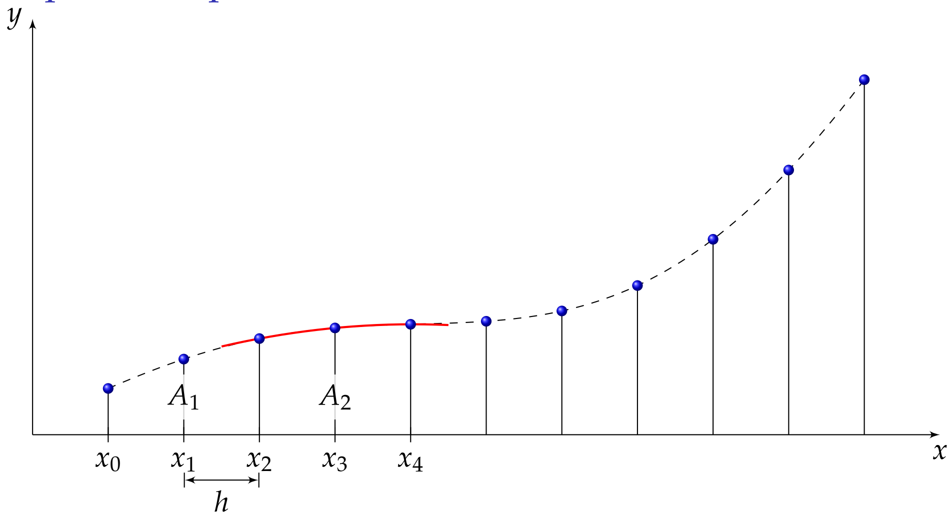
- Para aumentar a precisão, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais de largura

$$h = \frac{b - a}{n}$$

  - n **precisa necessariamente ser par!**
- Encontramos a parábola interpoladora em cada intervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n/2)$
- As áreas A_i, como já vimos, são dadas por

$$A_i = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

Regra de Simpson composta



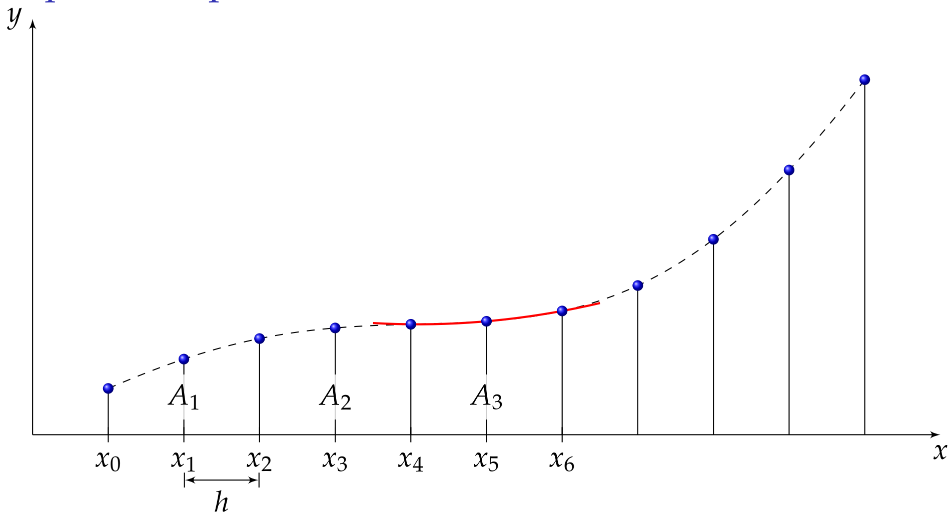
- Para aumentar a precisão, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais de largura

$$h = \frac{b-a}{n}$$

  - n **precisa necessariamente ser par!**
- Encontramos a parábola interpoladora em cada intervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n/2)$
- As áreas A_i, como já vimos, são dadas por

$$A_i = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

Regra de Simpson composta



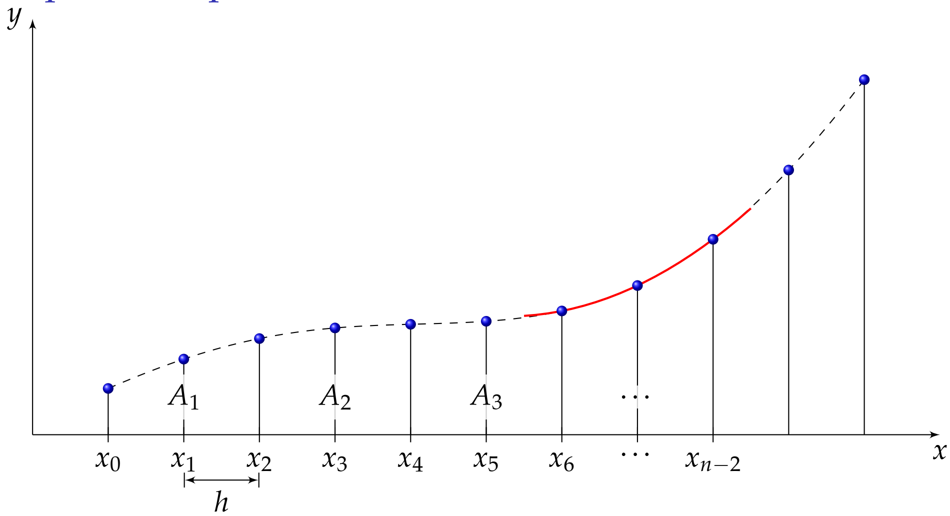
- Para aumentar a precisão, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais de largura

$$h = \frac{b - a}{n}$$

  - n **precisa necessariamente ser par!**
- Encontramos a parábola interpoladora em cada intervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ ($i = 1, 2, \ldots, n/2$)
- As áreas A_i, como já vimos, são dadas por

$$A_i = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

Regra de Simpson composta



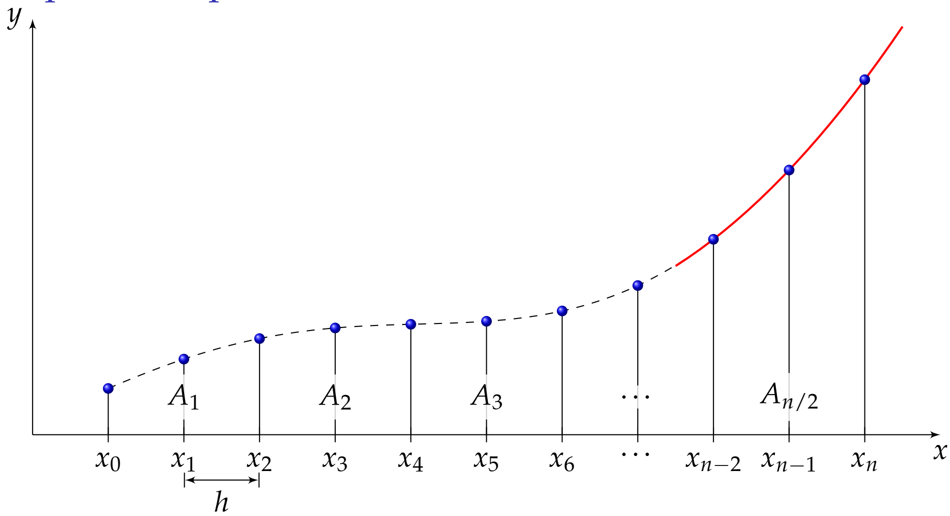
- Para aumentar a precisão, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais de largura

$$h = \frac{b-a}{n}$$

  - n **precisa necessariamente ser par!**
- Encontramos a parábola interpoladora em cada intervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n/2)$
- As áreas A_i, como já vimos, são dadas por

$$A_i = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

Regra de Simpson composta



- Para aumentar a precisão, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos iguais de largura

$$h = \frac{b-a}{n}$$

  - n **precisa necessariamente ser par!**
- Encontramos a parábola interpoladora em cada intervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n/2)$
- As áreas A_i, como já vimos, são dadas por

$$A_i = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

Regra de Simpson composta

- A regra de Simpson composta então fornece

$$A \approx \sum_{i=1}^{n/2} A_i = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

ou seja,

$$A \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6 + \ldots + y_{n-4} + 4y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

isto é,

$$\boxed{A \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)}$$

- Essa última equação pode ainda ser colocada na forma

$$\boxed{A \approx \frac{h}{3}\left[2\sum_{i\text{ par}} y_i + 4\sum_{i\text{ ímpar}} y_i\right] - \frac{h}{3}(y_0 + y_n)}$$

Análise de erros

- O erro cometido na integração de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ usando n intervalos (sendo n um número par!) é delimitado por:

$$\boxed{|E| = \frac{|b-a|^5}{180n^4} \max \left| f^{iv}(x) \right|}$$

Plano de aula

1. Regra dos trapézios
2. Regra de Simpson
3. `scipy.integrate`

Funções da biblioteca `scipy.integrate`

- A função `quad`, da biblioteca `scipy.integrate`, calcula uma integral definida usando métodos mais sofisticados do que os vistos anteriormente
- Ajuda completa em https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/integrate.html
- Exemplo de uso:

Exemplo de aplicação da função `scipy.integrate.quad`

```python
import numpy as np
import scipy.integrate as spi

f = lambda x: np.sin(x)
# Construção lambda: equivalente a
#def f(x):
#    return np.sin(x)

valor, erro = spi.quad(f, 0, np.pi)
print(valor, erro) # erro é uma estimativa!

# scipy.integrate.quad pode retornar mais opções:
valor, erro, relatorio = spi.quad(f, 0, np.pi, full_output=True)
#print(valor, erro, relatorio)
```

- Repare no uso da construção `lambda` como alternativa para definir uma função!
  - é muito usada para criar funções simples