

Radiação de corpo negro

5.1 O que é um corpo negro?

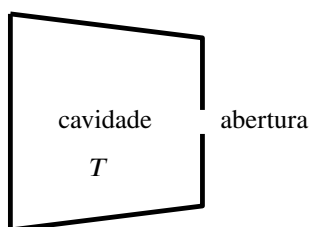


Figura 5.1: A radiação emitida por uma abertura numa cavidade a uma temperatura T é uma boa aproximação para a radiação de um corpo negro.

Todo objeto absorve e emite radiação, em frequências características, definindo seus espectros de absorção e emissão, que são funções da composição, da temperatura e do acabamento superficial do objeto. Um *corpo negro* é um objeto que absorve *toda* a radiação incidente, seja qual for a frequência da radiação. Por outro lado, assim como qualquer objeto, o corpo negro também emite energia por radiação na forma de ondas eletromagnéticas. Deste modo, há um equilíbrio entre a energia absorvida e a emitida. O espectro de emissão de um corpo negro é característico, e depende apenas da temperatura. Em outras palavras, a intensidade da radiação emitida em função do seu comprimento de onda (ou seja, o seu *espectro*) será função apenas da temperatura, não importando o material de que um corpo negro específico seja feito.

Deve ficar claro que um corpo perfeitamente negro é uma idealização. No entanto, uma boa aproximação para a radiação de corpo negro pode ser obtida considerando um objeto oco (ver a Figura 5.1), cujas paredes, sendo isolantes, não permitem grandes perdas de calor por condução para o meio externo. Se, neste objeto oco (que chamamos de *cavidade*), fizermos uma pequena abertura, pela qual a radiação da cavidade possa escapar, teremos uma boa aproximação de um corpo negro.

O nome “corpo negro” vem do fato de que, em baixas temperaturas, alguém olhando de fora para a abertura na cavidade veria apenas a cor preta, apesar de possivelmente sentir o calor emanando da abertura. Ou seja, nenhuma radiação com comprimento de onda visível escapa do corpo negro, ainda que ele esteja emitindo radiação infravermelha. Mas isso só vale em baixas temperaturas. Em temperaturas mais altas, parte da radiação emitida será no espectro visível, e o termo “corpo negro” já não faz mais juz ao fenômeno, porque, observando a abertura, veremos diferentes cores em função da temperatura no interior do objeto — vermelho, para temperaturas não tão altas, passando pelo laranja, amarelo, verde, azul, violeta e branco com o aumento da temperatura na cavidade. No entanto, por razões históricas, o nome corpo negro continua a ser usado mesmo nestes casos, em qualquer temperatura.

Um bom exemplo é o sol, que é, em boa aproximação, um corpo negro (apesar de não ser negro!) a aproximadamente 5250 °C, valor bem próximo à temperatura média de sua superfície (ver a Figura 5.2).

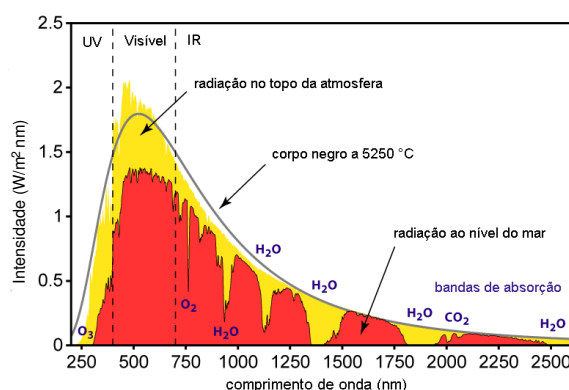


Figura 5.2: Espectro solar, medido em diferentes altitudes no planeta Terra. Fonte: Robert A. Rohde/Global Warming Art (adaptado).

As variações no espectro no topo da atmosfera vêm do fato de que o sol não é um corpo negro perfeito e de que a temperatura na superfície do sol não é constante, fato ilustrado pela presença de manchas solares. As lacunas no espectro solar medido ao nível do mar são causadas por algumas moléculas da atmosfera, como O_2 , H_2O e CO_2 , que absorvem parte da radiação incidente em comprimentos de onda característicos de cada molécula (as bandas de absorção da molécula). Fica também evidente da Figura 5.2 que grande parte da radiação emitida pelo sol tem comprimento de onda dentro do espectro de luz visível, entre 400 e 700 nm, aproximadamente. Ainda assim boa parte da radiação solar tem comprimento de onda na região do infravermelho (IR). Há também, finalmente, uma pequena parcela de radiação ultravioleta (UV), responsável pela formação de vitamina D nas células da pele, mas agente causador de câncer de pele quando da exposição em excesso.

5.2 Teoria clássica da radiação de corpo negro

Os físicos ingleses John Strutt (Lord Rayleigh) e James Jeans tentaram determinar teoricamente o espectro de radiação de um corpo negro usando a Física Clássica, ou seja, as equações de Maxwell e a Física Estatística Clássica. O raciocínio empregado é perfeitamente válido, com exceção de um ponto, como veremos.

Vamos considerar um corpo negro como um cubo oco de lado L (uma cavidade cúbica), cujas paredes absorvem 100% de qualquer radiação incidente, e emitem radiação cuja intensidade é função da temperatura e da frequência — a intensidade em função da frequência (ou do comprimento de onda) é o *espectro de emissão* de radiação de um corpo negro que Rayleigh e Jeans se propuseram a determinar teoricamente, usando os conceitos da Física Clássica. Eles pensaram na cavidade em equilíbrio a uma temperatura constante T , emitindo e absorvendo radiação. Uma observação importante neste ponto é que todas as ondas eletromagnéticas dentro da cavidade, oriundas da radiação do corpo negro, devem ser estacionárias, já que o corpo está em equilíbrio.

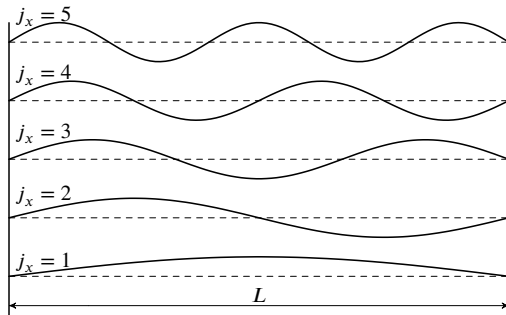


Figura 5.3: Ondas estacionárias se propagando ao longo da direção x . Os inteiros j_x indicam o número de meio-comprimentos de onda ($\lambda/2$).

A Figura 5.3 ilustra alguns exemplos de ondas transversais estacionárias se propagando paralelamente a uma das dimensões do cubo de lado L (no caso, ao longo do eixo x). Para que uma onda seja estacionária, o seu comprimento de onda λ deve ser tal que $2L/\lambda$ seja um número inteiro. Quer dizer, L deve ser um múltiplo inteiro de $\lambda/2$, e portanto $j_x = 2L/\lambda$ é o número de meio-comprimentos de onda (isto é, $\lambda/2$) na direção x . O mesmo vale para ondas se propagando ao longo das direções y e z , de modo que teremos, ao longo dos eixos x , y e z , os inteiros j_x , j_y e j_z , respectivamente, tais que

$$j_x = 2L/\lambda = 1, 2, 3, \dots$$

$$j_y = 2L/\lambda = 1, 2, 3, \dots$$

$$j_z = 2L/\lambda = 1, 2, 3, \dots$$

sendo que j_x , j_y e j_z fornecem o número de meio-comprimentos de onda para uma onda que se propaga na direção x , y ou z , respectivamente. Para uma onda estacionária que se propaga numa direção arbitrária dentro da cavidade, deve ser verdade então que

$$j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 \quad (5.1)$$

sendo que, agora, podemos ter $j_x = 0, 1, 2, \dots$, valendo o mesmo para j_y e j_z . Obviamente, se $j_x = j_y = j_z = 0$ não há onda alguma, mas podemos ter $j_x = j_y = 0$ e $j_z \neq 0$, por exemplo. Apenas assim a onda pode ser estacionária em três dimensões.

A questão agora é saber quantas ondas de comprimento de onda λ existem na cavidade. Em outras palavras, queremos determinar a *função de distribuição* de comprimentos de onda, $g(\lambda)$, tal que $g(\lambda)d\lambda$ fornece o número de ondas com comprimento de onda entre λ e $\lambda + d\lambda$.

Temos que lembrar de dois fatos. Primeiramente, comprimento de onda (λ) e frequência (ν) estão relacionados pela equação

$$c = \lambda\nu \quad (5.2)$$

sendo c a velocidade de propagação da onda — neste caso, c é a velocidade da luz. Em segundo lugar, toda onda eletromagnética tem duas direções perpendiculares de polarização, e podemos considerar então que, a cada frequência, estão associadas duas ondas.

Agora precisamos pensar na Eq. (5.1). A Figura 5.4 nos mostra a sua interpretação geométrica: a Eq. (5.1) é a equação de uma esfera de raio $2L/\lambda$ no espaço das variáveis j_x, j_y e j_z . Há uma diferença importante, porém. Os valores de j_x, j_y e j_z só podem ser números inteiros não-negativos (ou seja, zero ou positivos), ao passo que qualquer trinca de números reais que satisfaça a Eq. (5.1) estará na superfície da esfera. Portanto, nem todos os pontos da esfera correspondem a situações fisicamente possíveis. Mesmo assim, a aproximação da esfera é excelente porque o raio da esfera ($2L/\lambda$) é enorme — lembre que L é muito maior do que λ — e os possíveis pontos (j_x, j_y, j_z) na superfície da esfera estão muito próximos uns dos outros, *relativamente* ao raio da esfera. Em outras palavras, este raciocínio nos leva a concluir que podemos aproximar o número de pontos (j_x, j_y, j_z) , com j_x, j_y e j_z inteiros, pelo volume da esfera.

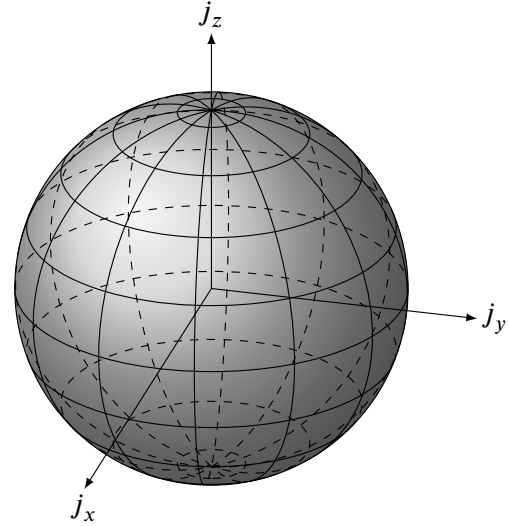


Figura 5.4: Interpretação geométrica da Eq. (5.1): uma esfera de raio $j = 2L/\lambda$ no espaço definido por j_x, j_y e j_z .

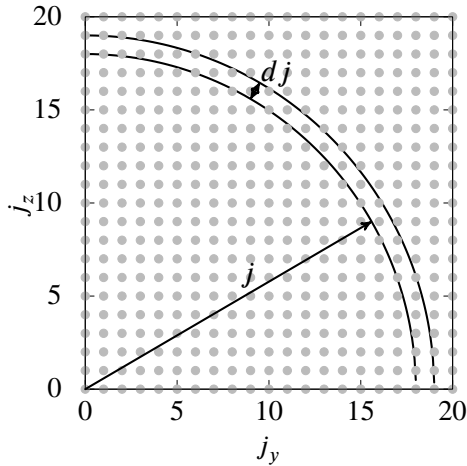


Figura 5.5: Projeção da casca esférica entre j e $j + dj$ no plano $j_y j_z$. Os pontos são os valores aceitáveis de j_y e j_z .

Podemos também pensar que preenchemos a esfera com pequenos cubos de aresta unitária. O ajuste não será perfeito, mas a aproximação será tanto melhor quanto maior for o raio da esfera. Mas devemos levar em conta que os pontos de interesse são apenas aqueles na superfície da esfera, onde a Eq. (5.1) é válida! Portanto, os cubinhos de interesse são aqueles recobrindo a casca esférica representada em projeção no plano $j_y j_z$ na Figura 5.5. Repare que apenas os valores no primeiro octante são fisicamente relevantes, porque j_x, j_y e j_z devem ser inteiros positivos. Ou seja, o volume da casca esférica no primeiro octante (onde $j_x \geq 0, j_y \geq 0$ e $j_z \geq 0$) nos fornece o número aproximado de valores (j_x, j_y, j_z) factíveis. Se o raio da casca esférica mostrada na Figura 5.5 é

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} \quad (5.3)$$

e a sua espessura é dj , o volume da casca esférica completa é $4\pi j^2 dj$, mas apenas $1/8$ deste valor está no primeiro octante.

O número de pontos no espaço (j_x, j_y, j_z) com j entre j e $j + dj$ é então dado por

$$g(j)dj = \frac{1}{8} \times 4\pi j^2 dj. \quad (5.4)$$

Esta é a primeira *função de distribuição* que encontramos. Ela nos fornece um modo de calcular o número de pontos (j_x, j_y, j_z) tal que $\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}$ está entre j e $j + dj$.

Voltemos ao nosso objetivo, que é determinar o número de ondas com frequência entre ν e $\nu + d\nu$ dentro da cavidade. Vamos então lembrar que o raio da esfera é

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2L\nu}{c}, \quad (5.5)$$

usando a Eq. (5.1) e a Eq. (5.2). O que a Eq. (5.5) nos diz é que há uma relação entre j e ν , ou entre j e λ . Assim, se contarmos o número de pontos (j_x, j_y, j_z) na casca esférica descrita anteriormente e ilustrada na Figura 5.5, estaremos também contando o número de ondas com frequência entre ν e $\nu + d\nu$ ou com comprimento de onda entre λ e $\lambda + d\lambda$ — ou seja, também determinamos as funções de distribuição para ν e λ . A partir da Eq. (5.5), sabemos que $j = 2L\nu/c$, e portanto

$$dj = \frac{2L}{c} d\nu \quad (5.6)$$

Precisamos lembrar ainda que cada onda tem duas direções perpendiculares de polarização, de forma que chegamos, usando a Eq. (5.4) e a Eq. (5.6), a

$$g(\nu)d\nu = \frac{1}{8} \times 4\pi \left(\frac{2L\nu}{c} \right)^2 \times \frac{2L}{c} d\nu \times 2 \quad (5.7)$$

que simplificamos para obter a expressão final para $g(\nu)$:

$$g(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} L^3 \nu^2 d\nu. \quad (5.8)$$

Para obter a função de distribuição de comprimentos de onda, pensamos na Eq. (5.2), ou seja, $c = \lambda\nu$, e portanto

$$|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda. \quad (5.9)$$

Apenas o valor absoluto de $d\nu$ interessa para o cálculo da função de distribuição para λ , já que esta função, que fornece o número de comprimentos de onda entre λ e $\lambda + d\lambda$, é estritamente positiva. O sinal negativo apenas indica que, aumentando λ , ν diminui, como vemos da Eq. (5.2), com c constante. Teremos então

$$g(\lambda)d\lambda = 8\pi L^3 \frac{d\lambda}{\lambda^4} \quad (5.10)$$

Percebendo que, nas Eqs. (5.8) e (5.10), L^3 é o volume da cavidade do corpo negro, construímos outras funções de distribuição *por unidade de volume*:

$$G(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu, \quad (5.11)$$

que fornece o número de ondas com frequência entre ν e $\nu + d\nu$ por unidade de volume da cavidade, e

$$G(\lambda)d\lambda = 8\pi \frac{d\lambda}{\lambda^4}, \quad (5.12)$$

que fornece o número de ondas com comprimento de onda entre λ e $\lambda + d\lambda$ por unidade de volume.

O que precisamos agora é saber qual a energia média de cada onda estacionária, de forma que podemos calcular a distribuição de energia em função do comprimento de onda — ou seja, exatamente o espectro da radiação, como na Figura 5.2. Para isso, temos que lançar mão de conceitos de Física Estatística Clássica, a teoria disponível para Rayleigh e Jeans no início do século XX. Segundo esta teoria, especificamente o *Teorema da Equipartição da Energia*, a energia média por grau de liberdade de um elemento de um conjunto formado por vários elementos é dada por $\frac{1}{2} kT$, sendo k a constante de Boltzmann: $k = 1,381 \times 10^{-23}$ J/K (consultar o apêndice 5.5.4 para esta e outras constantes) e T a temperatura. Na cavidade do corpo negro, cada onda tem dois graus de liberdade, correspondendo essencialmente aos campos elétrico e magnético associados à onda. Portanto, cada onda carrega uma energia média $\bar{\epsilon}$ dada por

$$\bar{\epsilon} = kT. \quad (5.13)$$

Repare que $\bar{\epsilon}$ não depende do comprimento de onda, segundo a Física Clássica, mas apenas da temperatura. Usando a Eq. (5.11), calculamos finalmente a distribuição de energia do corpo negro em função de ν e de T :

$$E(\nu)d\nu = \bar{\epsilon} G(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} kT \nu^2 d\nu, \quad (5.14)$$

que é a *fórmula de Rayleigh-Jeans* e fornece o *espectro de energia* do corpo negro, ou seja, $E(\nu)d\nu$ é a contribuição das ondas com frequência entre ν e $\nu + d\nu$ para a energia total do corpo negro.

A Eq. (5.14) está claramente errada, e nem são precisos dados experimentais de comparação para perceber. Repare que, para calcular a energia total da radiação de corpo negro numa dada temperatura (por unidade de volume da cavidade), temos que integrar o espectro de energia:

$$E_{\text{total}} = \int_0^{\nu_{\text{max}}} E(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} kT \frac{\nu_{\text{max}}^3}{3}. \quad (5.15)$$

No entanto, escrever ν_{max} nesta equação não faz sentido, porque não há um limite superior para ν . Em princípio, o corpo pode irradiar ondas em qualquer frequência, ou seja, $\nu_{\text{max}} \rightarrow \infty$. Assim Rayleigh e Jeans chegaram à chamada *catástrofe do ultravioleta*: a energia de um corpo negro é infinita, segundo a Física Clássica!

Mesmo que não houvéssimos percebido este problema enorme, os dados experimentais para o espectro de energia em função de ν ou de λ são completamente diferentes do previsto pela Eq. (5.14). Observe novamente a Figura 5.2: a energia emitida tende a zero quando o comprimento de onda tende a zero (ou seja, quando a frequência tende ao infinito), mas a fórmula de Rayleigh-Jeans prediz que a intensidade deveria tender ao infinito!

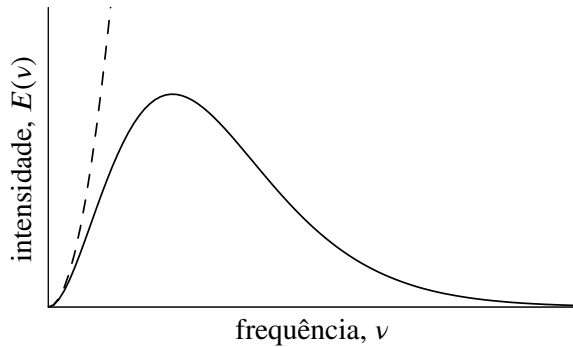


Figura 5.6: Espectro da energia de um corpo negro em função da frequência de onda para uma dada temperatura. A linha tracejada é o limite de baixas frequências, ou seja, a fórmula de Rayleigh-Jeans.

Por outro lado, observe agora a Figura 5.6, que é outra maneira de representar o espectro de corpo negro, agora em função da frequência, ao contrário da Figura 5.2, que a trazia em função do comprimento de onda λ (lembre que λ e ν estão relacionados pela a Eq. 5.2). Note que a fórmula de Rayleigh-Jeans é muito boa na região de altos comprimentos de onda, ou seja, de baixa frequência. Este fato indica duas coisas: (1) a energia média por onda, $\bar{\epsilon}$, não pode ser dada apenas por kT . Ela também deve depender de ν de alguma forma; e (2) qualquer correção à energia média por onda $\bar{\epsilon}$ deve ter a Eq. (5.14) como caso limite na região de baixas frequências. Foi pensando nesses dois pontos que o físico alemão Max Planck (Prêmio Nobel de 1918) desenvolveu uma proposta alternativa para a função de distribuição $E(\nu)$, ou

seja, para o espectro de energia do corpo negro, como veremos a seguir. Antes, contudo, cabe aqui uma ressalva: a Figura 5.2 mostra, em função do comprimento de onda, o *espectro de radiação*, ou seja, a intensidade da energia irradiada (ou potência emissiva) por metro quadrado — ou seja, o fluxo de calor *para fora da cavidade*. Já a Eq. (5.14) fornece a *densidade de energia* (energia por metro cúbico) em função da frequência da radiação *dentro* da cavidade. Como veremos mais adiante, as duas grandezas são diretamente proporcionais: quanto maior a energia da cavidade, maior a potência emissiva do corpo negro.

5.3 Fórmula de Planck para a radiação de corpo negro

Com base nos dados experimentais disponíveis e considerando a fórmula de Rayleigh-Jeans como um caso limite, Max Planck propôs (um “palpite de sorte”, como ele mesmo viria a dizer [10]) a seguinte expressão para a energia média $\bar{\epsilon}$ de uma onda estacionária de frequência ν em equilíbrio no corpo negro a temperatura

T :

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (5.16)$$

Uma justificativa para esta expressão (mas não uma demonstração completa) é encontrada no apêndice 5.5.1.

Usando a Eq. (5.16) e dados experimentais, Planck chegou a um valor para h igual a, aproximadamente, $6,626 \times 10^{-34}$ J s. Esta constante h , que viria a ser chamada de *constante de Planck* e é uma das constantes fundamentais da natureza, era originalmente apenas um parâmetro ajustável na Eq. (5.16), de forma que o espectro de radiação de corpo negro, usando a primeira parte da Eq. (5.14), é

$$E(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (5.17)$$

Esta equação, como Planck verificou, se ajusta perfeitamente aos dados experimentais, mas ainda faltava a sua interpretação física: qual o significado da Eq. (5.16) e da constante h ?

Em 1900, “depois de semanas de trabalho mais árduas da minha vida”, como ele disse no seu discurso de agradecimento ao receber o prêmio Nobel de Física [10], Max Planck descobriu, pelo menos, parte da resposta. A energia $\bar{\epsilon}$ dada pela Eq. (5.16), que é a energia média transportada pelas ondas estacionárias na cavidade do corpo negro, vem da energia média dos *osciladores* (ou seja, dos átomos) das paredes do corpo negro. A vibração destes osciladores é o que gera a emissão de ondas eletromagnéticas que, em equilíbrio térmico, são emitidas e absorvidas em igual quantidade.

Mas o que é estarecedor é que a energia de um oscilador, como Planck constatou, deve ser um múltiplo inteiro de $h\nu$, ou seja, só pode assumir os valores $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$. Nenhum valor intermediário é possível. Mais ainda: o corpo negro está em equilíbrio, e portanto as ondas eletromagnéticas na cavidade são estacionárias, com vimos. Portanto, elas devem ter o mesmo espectro de frequências que os osciladores das paredes do corpo negro. Ou seja, além de serem estacionárias, as ondas são *quantizadas*: a energia de uma onda, assim como a de um oscilador, pode apenas ser um múltiplo inteiro de $h\nu$. Esta conclusão estava em total desacordo com a Mecânica Clássica e com as Leis de Maxwell do Eletromagnetismo, segundo as quais o espectro de energia de qualquer oscilador e de qualquer onda eletromagnética deve ser contínuo. Mas esta foi a única explicação encontrada por Planck para justificar o espectro de radiação de corpo negro. Segundo o próprio Planck, no entanto, ele estava disposto a sacrificar quase tudo pela sua conclusão: “eu precisava encontrar uma solução a qualquer custo, exceto a inviolabilidade das duas Leis da Termodinâmica” [10]. E, de fato, a Termodinâmica permanece intacta até hoje.

Antes de continuar, vamos calcular os limites para alta e baixa frequência da energia média da radiação de corpo negro, a partir da Eq. (5.16). No limite de altas frequências, quando $\nu \rightarrow \infty$, o denominador cresce arbitrariamente, de forma que $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$. Este fato evita a catástrofe do ultravioleta prevista pela Física Clássica, ou seja, evita que o cálculo da energia da radiação de corpo negro forneça um resultado infinito, como previsto pela fórmula de Rayleigh-Jeans. De fato, a densidade de energia do corpo negro (ou seja, a sua energia por unidade de volume) é obtida pela integração da função de distribuição de energia de Planck (Eq. 5.17) para todas as frequências, de maneira similar ao que fizemos com a fórmula de Rayleigh-Jeans para obter a Eq. (5.15). Assim, segundo Planck, a densidade de energia da radiação de corpo negro será

$$E_{\text{total}} = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu. \quad (5.18)$$

Esta integral é trabalhosa, mas é possível obter analiticamente o seu valor (ver apêndice 5.5.2). O resultado é

$$E_{\text{total}} = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} T^4. \quad (5.19)$$

Repare a dependência com a quarta potência da temperatura absoluta, como na lei de Stefan-Boltzmann para a radiação de corpo negro.

Agora, para calcular o limite de baixas frequências, podemos expandir a função exponencial em série de Taylor:

$$e^{h\nu/kT} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2!} \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^3 + \dots \quad (5.20)$$

Quando mantemos apenas os dois primeiros termos da expansão, percebemos que

$$e^{h\nu/kT} \cong 1 + \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow e^{h\nu/kT} - 1 \cong \frac{h\nu}{kT} \quad (5.21)$$

e recuperamos o teorema da equipartição da energia quando substituímos a Eq. (5.21) na Eq. (5.16):

$$\bar{\epsilon} \cong kT \quad \text{para} \quad \nu \rightarrow 0. \quad (5.22)$$

Assim, a teoria criada por Planck prevê a equação de Rayleigh-Jeans como o limite do espectro de corpo negro para a região de baixas frequências, como evidenciado experimentalmente na Figura 5.6.

5.4 Fluxo de calor de corpo negro

Na seção anterior, descrevemos o resultado de Planck para a densidade de energia no interior de uma cavidade em equilíbrio, cujas superfícies internas absorvem toda a radiação incidente, mas emitem energia na forma de radiação — ou seja, descrevemos a densidade de energia no interior da cavidade. Agora, estamos interessados em descrever a energia emitida pela abertura na cavidade para o exterior, ou seja, o *fluxo de calor* que deixa a cavidade por uma pequena abertura na parede do corpo negro, como descrito na seção 5.1. Intuitivamente, esperamos que o fluxo de radiação emitido pela abertura seja proporcional à densidade de energia na cavidade. Mas qual é a constante de proporcionalidade?

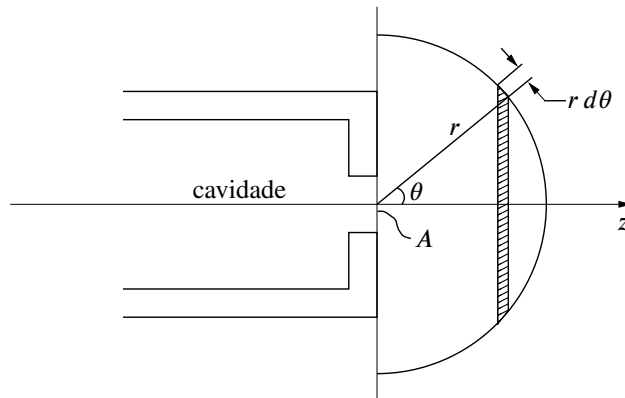


Figura 5.7: A cavidade emite radiação de corpo negro através da abertura de área A . Para determinar a relação da radiação com a energia dentro da cavidade, consideramos o hemisfério de raio r (ver detalhes no texto). Fonte: [9] (adaptado).

Pensemos então na situação em que o fluxo é emitido por uma abertura de área A na cavidade. A Figura 5.7 esquematiza o fenômeno. A abertura tem uma área A . Vamos supor que o calor deixa a cavidade de maneira isotrópica, ou seja, o calor se espalha uniformemente em todas as direções. Vamos supor também que há um sensor pontual de calor, localizado a uma distância r da abertura seguindo a direção dada pelo ângulo θ . Neste caso, a área da abertura, do ponto de vista do sensor, é dada por

$$A_c = A \cos \theta \quad (5.23)$$

A energia recebida pelo sensor por unidade de tempo (a *taxa de transferência de calor*, q) será proporcional à área da abertura A_c , à área do sensor A_s , e inversamente proporcional ao quadrado da distância r do sensor à abertura. Ou seja,

$$q(r, \theta) = B \frac{A_c A_s}{r^2} \quad (5.24)$$

A constante de proporcionalidade B é chamada de *brilho* da fonte de calor. Esta é a grandeza que queremos determinar, considerando que a origem do calor é a radiação no interior da cavidade. Tente se convencer intuitivamente da validade da Eq. (5.24), pensando na conservação da energia e no fato de que ela se propaga isotropicamente.

Usando a Eq. (5.24), vamos agora acompanhar o que acontece com a radiação que deixa a abertura. Vamos tentar determinar quanto calor chega a um hemisfério de raio r por unidade de tempo. Considerando novamente a Figura 5.7, vamos primeiramente pensar num elemento de área como o hachurado: um anel de raio $r \sin \theta$ e espessura $r d\theta$. Usando estes valores, a área deste elemento será

$$A_s = (2\pi r \sin \theta) (r d\theta) = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (5.25)$$

O calor dq recebido por este elemento de área na unidade de tempo, usando as Eqs. (5.23–5.25) será

$$dq = B \frac{(A \cos \theta)(2\pi r^2 \sin \theta d\theta)}{r^2} = 2\pi BA \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (5.26)$$

Agora podemos calcular o calor total recebido pelo hemisfério, integrando a Eq. (5.26) em relação a θ :

$$q = 2\pi BA \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad (5.27)$$

que nos fornece (depois de resolvida a integral) a taxa de transferência de calor a uma distância r da abertura:

$$q = \pi BA \quad (5.28)$$

Como esperado, o resultado é independente do raio (por que este é um resultado previsível?). Podemos, finalmente, calcular o fluxo de calor, q'' , que é igual à taxa de transferência de calor dividida pela área da abertura:

$$q'' = \frac{q}{A} = \pi B \quad (5.29)$$

Por outro lado, a Eq. (5.19) nos diz qual é a densidade total de energia no interior da cavidade. Esta é a energia que, ao chegar à abertura vista na Figura 5.7, gera a emissão de radiação de corpo negro. Vamos então pensar no que acontece com a energia que parte de algum ponto no interior da cavidade. Dada a isotropia da radiação, tal energia se espalha para todas as direções. A energia que consegue deixar a cavidade vem daqueles fótons que se propagam com um componente da velocidade na direção positiva do eixo z . Em média, metade dos fótons se enquadram nesta condição. Ao deixar a abertura, os fótons se espalham isotropicamente e, portanto, destes fótons, os que se propagam exatamente na direção positiva do eixo z é, em média, o valor médio de $\cos \theta$ de 0 a $\pi/2$, pois a componente da velocidade na direção z é proporcional a $\cos \theta$ (ver novamente a Figura 5.7). Deste modo:

$$n_{z+} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta} = \frac{1}{4} \quad (5.30)$$

onde o fator $1/2$ antes da integral dá conta do fato de que apenas metade dos fótons se propaga com uma componente da velocidade na direção positiva do eixo z . Estes n_{z+} fótons carregam uma energia $n_{z+} \times E_{\text{total}}$ e se propagam à velocidade da luz c . Portanto, o fluxo de calor na direção $+z$ será

$$q'' = \frac{1}{4} c E_{\text{total}} \quad (5.31)$$

Comparando as equações (5.29) e (5.31) descobrimos que

$$B = \frac{c}{4\pi} E_{\text{total}} \quad (5.32)$$

e conseguimos escrever o brilho do corpo negro, B , em termos de sua densidade de energia total. Finalmente, substituindo na Eq. (5.31) o valor de E_{total} fornecido pela Eq. (5.19), chegamos ao resultado final para o fluxo de calor de corpo negro:

$$q'' = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4, \quad (5.33)$$

que é a *Lei de Stefan-Boltzmann* para o fluxo de calor por radiação de um corpo negro. A constante σ , dada por

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \quad (5.34)$$

não passa de um aglomerado de outras grandezas físicas, como indicado na Eq. (5.34) e é conhecida como *constante de Stefan* (ou de Stefan-Boltzmann). Repare que, como σ depende da constante de Planck h , seu valor não poderia ser calculado teoricamente usando a Física Clássica. A constante de Stefan, no entanto, era conhecida experimentalmente, e o valor de σ calculado por Planck se ajusta perfeitamente aos dados empíricos conhecidos nos primeiros anos do século XX.

5.5 Apêndices

5.5.1 A energia média $\bar{\epsilon}$ segundo Planck

A energia média por oscilador (ou por fóton), que Planck determinou ser dada pela Eq. (5.16), não saiu do nada. Ao contrário, Planck era um grande conhecedor da Termodinâmica Clássica e, como mencionamos na seção 5.3, as duas leis da Termodinâmica (ou seja, conservação da energia e maximização da entropia) deveriam ser as bases do estudo do equilíbrio da radiação de corpo negro. Então, aplicando considerações termodinâmicas aos dados experimentais sobre o fenômeno, Planck derivou heurísticamente sua expressão para a energia média por oscilador.

Por outro lado, para tentar entender fisicamente o que estava acontecendo, Planck teve que se debruçar sobre os trabalhos de Boltzmann (entre outros) sobre Mecânica Estatística, porque muito do assunto ainda era território inexplorado. Em retrospecto, não precisamos seguir o mesmo caminho que Planck para entender a radiação de corpo negro. Podemos partir diretamente da formulação de Boltzmann da Mecânica Estatística e deduzir a Eq. (5.16) a partir destes conceitos.

Vamos então considerar que cada fóton (ou seja, cada onda eletromagnética) dentro da cavidade tem uma energia dada por um múltiplo inteiro de $h\nu$, sendo ν a frequência do fóton e h uma constante, por enquanto indeterminada. Assim, a energia do fóton só pode assumir valores discretos (*quantizados*), ao passo que a sua frequência pode assumir valores dentro de um espectro contínuo. De acordo com a Mecânica Estatística na formulação de Boltzmann, a probabilidade de cada uma das energias não é igual. A probabilidade de que um fóton tenha uma energia ϵ_n igual a

$$\epsilon_n = nh\nu \quad (5.35)$$

(n é um inteiro não-negativo) é dada pelo *fator de Boltzmann*, $\text{Pr}(n)$:

$$\text{Pr}(n) = C e^{-nh\nu/kT} \quad (5.36)$$

sendo k a constante de Boltzmann, T a temperatura e C uma constante, determinada a partir da normalização das probabilidades:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{Pr}(n) = C (1 + e^{-h\nu/kT} + e^{-2h\nu/kT} + e^{-3h\nu/kT} + \dots) = 1 \quad (5.37)$$

Não daremos maiores justificativas para a Eq. (5.36); são necessários alguns (poucos) conhecimentos de Mecânica Estatística que podem ser adquiridos em algumas referências introdutórias (por exemplo, [4]). Por enquanto, os interessados estão convidados a aceitar a validade da Eq. (5.36) e seguir acompanhando o raciocínio, por mais frustrante que isto possa parecer num primeiro momento. De qualquer modo, e reiterando o que já dissemos, a Eq. (5.36) diz que existem níveis discretos de energia, ou seja, não há um espectro contínuo para a energia de um fóton. Planck inicialmente achava que isso era apenas um artifício matemático e que chegaria um instante em que, de alguma maneira, a constante h se cancelaria e todos ficariam contentes. Mas ele teve de reconsiderar e aceitar sua estranha teoria, porque o instante nunca chegou.

Continuando, a soma na Eq. (5.37) é uma progressão geométrica, que podemos simplificar:

$$1 + e^{-h\nu/kT} + e^{-2h\nu/kT} + e^{-3h\nu/kT} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-h\nu/kT}} \quad (5.38)$$

De forma que a constante C é

$$C = 1 - e^{-h\nu/kT}. \quad (5.39)$$

Analisando a Eq. (5.36), percebemos que, quanto maior a energia de um fóton (ou seja, quanto maior n), menor é a probabilidade de existir um fóton com tal energia. Tal fato é promissor, pois, como vimos, o espectro deve tender a zero para $\nu \rightarrow \infty$ (Figura 5.6). Vemos também imediatamente que o resultado clássico $\bar{\epsilon} = kT = \text{const.}$ da Eq. (5.13) não pode ser válido e será corrigido de algum modo pelo método de Planck, o que já vimos na seção 5.3.

Para calcular a energia média por fóton, $\bar{\epsilon}$, usamos as probabilidades da Eq. (5.37) como fatores de ponderação das energias da Eq. (5.35):

$$\bar{\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \Pr(n) = \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu (1 - e^{-h\nu/kT}) e^{-nh\nu/kT} \quad (5.40)$$

Esta última equação pode ser simplificada para

$$\bar{\epsilon} = h\nu (1 - e^{-h\nu/kT}) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nh\nu/kT} \quad (5.41)$$

Vamos nos concentrar na soma que aparece na Eq. (5.41):

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nz}, \quad (5.42)$$

na qual definimos

$$z = h\nu/kT \quad (5.43)$$

O truque é perceber que podemos escrever s como

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d}{dz} (-e^{-nz}) \right] \quad (5.44)$$

e inverter a ordem da soma e da derivação:

$$s = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} -e^{-nz} \right) \quad (5.45)$$

De novo, a soma entre parênteses é uma série geométrica e podemos substituir seu valor já conhecido:

$$s = \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{1 - e^{-z}} \right) = \frac{e^{-z}}{(1 - e^{-z})^2} \quad (5.46)$$

Substituindo o valor de s da Eq. (5.46) na Eq. (5.41), lembrando ainda que $z = h\nu/kT$:

$$\bar{\epsilon} = h\nu (1 - e^{-z}) \frac{e^{-z}}{(1 - e^{-z})^2} = h\nu \frac{1}{e^z - 1} \quad (5.47)$$

Ou seja, chegamos por fim à expressão de Planck para a energia média por fóton (ou por oscilador):

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (5.48)$$

5.5.2 Cálculo da densidade de energia da radiação de corpo negro

Um bom engenheiro deve ser capaz de entender como chegar à Eq. (5.19), ou seja, como resolver a integral na Eq. (5.18), mesmo que nunca tenha a necessidade de tais cálculos em sua vida profissional. Nenhum conceito mais avançado do que o visto em aulas de Cálculo será necessário. Por outro lado, é recomendável deixar o estudo deste apêndice para uma segunda leitura, porque o material aqui apresentado não é essencial ao entendimento dos conceitos físicos do texto. Ele tem um caráter essencialmente matemático.

Queremos então resolver a integral na Eq. (5.18), repetida aqui para maior conveniência:

$$E_{\text{total}} = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu. \quad (5.49)$$

A mudança de variáveis

$$u = \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow du = \frac{h}{kT} d\nu \quad (5.50)$$

nos leva a reescrever a Eq. (5.49) como

$$E_{\text{total}} = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty u^3 \frac{1}{e^u - 1} du. \quad (5.51)$$

Veja que podemos reescrever o termo envolvendo a exponencial como a soma de uma série geométrica:

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} = e^{-u} + e^{-2u} + e^{-3u} + e^{-4u} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu} \quad (5.52)$$

A Eq. (5.51) é então reescrita como

$$E_{\text{total}} = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty u^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu} du. \quad (5.53)$$

O truque agora é inverter a ordem das operações: primeiro integrar e depois somar a série resultante — ao contrário do que é feito na Eq. (5.53). Ou seja, reescrevemos a Eq. (5.53) como

$$E_{\text{total}} = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty u^3 e^{-nu} du. \quad (5.54)$$

Procedemos agora a uma segunda mudança de variáveis:

$$w = nu \Rightarrow dw = n du \quad (5.55)$$

o que leva a

$$E_{\text{total}} = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{1}{n^4} w^3 e^{-w} dw. \quad (5.56)$$

Nesta expressão, a integral e a soma são independentes (n pode sair da integral), de modo que reescrevemos a Eq. (5.56) como

$$E_{\text{total}} = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right) \left(\int_0^\infty w^3 e^{-w} dw \right). \quad (5.57)$$

A integral na Eq. (5.57) pode ser resolvida aplicando o método de integração por partes (que deixamos como exercício aos interessados), resultando em

$$\int_0^\infty w^3 e^{-w} dw = 3! = 6. \quad (5.58)$$

Já a soma na Eq. (5.57) não é tão facilmente simplificada. No entanto, a identificamos com a *função zeta de Riemann*:

$$\zeta(p) = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{z^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots \quad (5.59)$$

Para $p = 4$, o valor da função zeta de Riemann é

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}. \quad (5.60)$$

Para chegar a este valor, precisamos de um apêndice maior do que este, utilizando conceitos de séries de Fourier ou de variáveis complexas. Os interessados devem consultar o apêndice 5.5.3.

Finalmente, usando os resultados obtidos acima, a Eq. (5.57) é simplificada para

$$E_{\text{total}} = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} T^4, \quad (5.61)$$

que é o resultado obtido por Planck, como indicado na Eq. (5.19).

5.5.3 A função zeta de Riemann para $p = 2$ e $p = 4$

No apêndice 5.5.2, utilizamos a seguinte expressão:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (5.62)$$

Trata-se de um caso especial da *função zeta de Riemann*, dada por

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \quad (5.63)$$

Aos interessados, vamos calcular $\zeta(2)$ e $\zeta(4)$ usando expansões em séries de Fourier, um dos muitos possíveis métodos de resolução deste problema.

A expansão em série de Fourier de uma função $f(x)$ qualquer é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad (5.64)$$

sendo que a_0 , a_n e b_n são dados por

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (5.65a)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (5.65b)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (5.65c)$$

Para séries de Fourier em outros intervalos diferentes de $[-\pi, +\pi]$, devemos adaptar as equações. Para isso, consulte a literatura — por exemplo, Nearing [7].

Vamos começar expandindo a função $f(x) = x^2$. As equações para a_0 , a_n e b_n , neste caso, fornecem

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \quad (5.66a)$$

$$a_n = \frac{4}{n^2} \cos(n\pi) \quad (5.66b)$$

$$b_n = 0 \quad (5.66c)$$

De modo que escrevemos $f(x) = x^2$ em série de Fourier como

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} \cos(nx) \quad (5.67)$$

Em particular, fazendo $x = \pi$ na equação acima, teremos

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos^2(n\pi). \quad (5.68)$$

Mas $\cos^2(n\pi) = 1$ (lembrando que n é um número inteiro), e então

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (5.69)$$

Por fim, identificando o somatório na equação acima com a função zeta de Riemann para $p = 2$, chegamos ao primeiro resultado:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (5.70)$$

Queremos calcular agora $\zeta(4)$. Vamos então expandir a função $f(x) = x^4$ e ver o que acontece. Utilizando as definições dos coeficientes da série de Fourier, teremos

$$a_0 = \frac{2\pi^4}{5} \quad (5.71a)$$

$$a_n = \frac{8}{n^2} \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2} \right) \quad (5.71b)$$

$$b_n = 0 \quad (5.71c)$$

e a série de Fourier para a função $f(x) = x^4$ é

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2} \right) \cos(n\pi) \cos(nx). \quad (5.72)$$

Em particular, para $x = \pi$:

$$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2} \right) \cos^2(n\pi). \quad (5.73)$$

Novamente, como $\cos^2(n\pi) = 1$, simplificamos a equação acima para

$$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2} \right), \quad (5.74)$$

que pode ser escrita de modo ainda mais simples:

$$\frac{4\pi^4}{5} = 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad (5.75)$$

ou seja,

$$\frac{\pi^4}{5} = 2\pi^2 \zeta(2) - 12\zeta(4), \quad (5.76)$$

Usando o resultado anterior para $\zeta(2)$ da Eq. (5.70), chegamos finalmente ao resultado esperado para $\zeta(4)$:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (5.77)$$

5.5.4 Constantes físicas

Constante de Boltzmann	$k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 2,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante de Stefan	$\sigma = 5,669 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Bibliografia

- [1] L. Darken. “Diffusion, mobility and their interrelation through free energy in binary metallic systems”. *Trans. Met. Soc. AIME* 175 (1948), 184–201.
- [2] S. J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. New York: Wiley, 1982.
- [3] A. G. Guy. *Introduction to Materials Science*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1972.
- [4] E. A. Jackson. *Equilibrium Statistical Mechanics*. New Jersey: Prentice-Hall, 1968.
- [5] J. H. Lienhard V e J. H. Lienhard IV. *A Heat Transfer Textbook*. New York: Dover, 2011.
- [6] T. N. Narasimhan. “Fourier’s heat conduction equation: history, influence, and connections”. *Reviews of Geophysics* 37 (1999), 151–172.
- [7] J. Nearing. *Mathematical Tools for Physics*. New York: Dover, 2010. URL: <http://www.physics.miami.edu/~nearing/mathmethods>.
- [8] T. Nishiyama. “Uphill diffusion and a new nonlinear diffusion equation in ternary non-electrolyte system”. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 107 (1998), 33–51.
- [9] R. D. Reed e R. R. Roy. *Statistical Physics for Students of Science and Engineering*. New York: Dover, 1995.
- [10] E. Segrè. *From X-Rays to Quarks — Modern Physicists and their discoveries*. New York: Freeman, 1980.
- [11] R. P. Smith. “The diffusivity of carbon in iron by the steady state method”. *Acta Metallurgica* 1 (1953), 578–587.
- [12] C. Wert. “Diffusion coefficient of C in α -Iron”. *Physical Review* 79 (1950), p. 601.
- [13] C. Wert e C. Zener. “Interstitial Atomic Diffusion Coefficients”. *Physical Review* 76 (1949), p. 1169.
- [14] Y. Zhang. “A modified effective binary diffusion model”. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 98.B7 (1993), 11901–11920.