7. จงพิจารณาว่าเซตในข้อใดต่อไปนี้แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$

7.5 $\{(2,-1,3),(4,1,2),(8,-1,8)\}$

วิธีทำ ให้ $\underline{v}=(x,y,z)$ เป็นเวกเตอร์ใดๆใน R^3

พิจารณา $\underline{v}=a_1\underline{v_1}+a_2v_2+a_3v_3$

$(x,y,z)=a_1(2,-1,3)+a_2(4,1,2)+a_3(8,-1,8)$

$(x,y,z)=(2a_1+4a_2+8a_3,\ -a_1+a_2-a_3,\ 3a_1+2a_2+8a_3)$

$2a_1+4a_2+8a_3=x$

$-a_1+a_2-a_3=y$

$3a_1+2a_2+8a_3=z$

$$[A|B]=\begin{bmatrix}2&4&8&x\\-1&1&-1&y\\3&2&8&z\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}\begin{bmatrix}-1&1&-1&y\\2&4&8&x\\3&2&8&z\end{bmatrix}\xrightarrow{-R_1}\begin{bmatrix}1&-1&1&-y\\2&4&8&x\\3&2&8&z\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&-1&1&-y\\0&6&6&x+2y\\0&5&5&z+2y\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_2}{6}}\begin{bmatrix}1&-1&1&-y\\0&1&1&\frac{x+2y}{6}\\0&5&5&z+y\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-5R_2}\begin{bmatrix}1&-1&1&-y\\0&1&1&\frac{x+2y}{6}\\0&0&0&z+y-\frac{5x+10y}{6}\end{bmatrix}$$

rank $A=2$

rank$[A|B]=3$

$n=3$

$\therefore$ ระบบสมการไม่มีผลเฉลยหา a_1,a_2,a_3 ไม่ได้

ดังนั้น $\underline{v}$ ไม่แผ่ทั่ว R^3 #

7.9 $\{(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)\}$

วิธีทำ ให้ $\underline{v}=(x,y,z)$ เป็นเวกเตอร์ใดๆใน R^3

พิจารณา $\underline{v}=a_1\underline{v_1}+a_2\underline{v_2}+a_3v_3$

$(x,y,z)=a_1(4,2,1)+a_2(2,6,-5)+a_3(1,-2,3)$

$(x,y,z)=(4a_1+2a_2+a_3,\ 2a_1+6a_2-2a_3,\ a_1-5a_2+3a_3)$

$4a_1+2a_2+a_3=x$

$2a_1+6a_2-2a_3=y$

$a_1-5a_2+3a_3=z$

$$[A|B]=\begin{bmatrix}4&2&1&x\\2&6&-2&y\\1&-5&3&z\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}1&-5&3&z\\2&6&-2&y\\4&2&1&x\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&-5&3&z\\0&16&-8&y-2z\\0&22&-11&x-4z\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_2}{8}}\begin{bmatrix}1&-5&3&z\\0&2&-1&\frac{y-2z}{8}\\0&22&-11&x-4z\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-11R_2}\begin{bmatrix}1&-5&3&z\\0&2&-1&y-2z\\0&0&0&x-4z-\frac{11y-22z}{11}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_2}{2}}\begin{bmatrix}1&-5&3&z\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{y-2z}{16}\\0&0&0&x-4z-\frac{11y-22z}{11}\end{bmatrix}$$

rank $A=2$

rank$[A|B]=3$

$n=3$

$\therefore$ ระบบสมการไม่มีผลเฉลย หา a_1,a_2,a_3 ไม่ได้

ดังนั้น $\underline{v}$ ไม่แผ่ทั่ว R^3 #

12. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน P_2 ที่กำหนดให้ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

12.7 $\{3t^2+t-5,\ 2t^2+t+1,\ t+13\}$

พิจารณา $a_1\underline{v_1}+a_2\underline{v_2}+a_3\underline{v_3}=\underline{0}$

$a_1(3t^2+t-5)+a_2(2t^2+t+1)+a_3(t+13)=0+0x+0x^2$

$3t^2a_1+ta_1-5a_1+2t^2a_2+ta_2+a_2+ta_3+13a_3=0+0x+0x^2$

$(3a_1+2a_2)t^2+(a_1+a_2+a_3)t+(-5a_1+a_2+13a_3)=0+0x+0x^2$

เทียบ ส.ป.ส. ของ x^2; $3a_1+2a_2=0$

〃 x; $a_1+a_2+a_3=0$

〃 ค่าคงที่; $-5a_1+a_2+13a_3=0$

$$[A]=\begin{bmatrix}3&2&0\\1&1&1\\-5&1&13\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\3&2&0\\-5&1&13\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3+5R_1]{R_2-3R_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-3\\0&6&18\end{bmatrix}\xrightarrow{-R_2}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&6&18\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_3}{6}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

rank $A=2$

rank$[A|B]=2$

$n=3$

$\therefore$ ระบบสมการมีผลเฉลยมากมาย

ดังนั้น P^2 ไม่อิสระเชิงเส้น #

8. จงพิจารณาว่าเซตในข้อใดต่อไปนี้แผ่ทั่ว P_2

8.3 $\{2+3x-4x^2,-8-12x+16x^2\}$

ให้ $\underline{v}=a+bx+cx^2$ เป็นเวกเตอร์ใดๆใน P_2 (a,b,c เป็นจำนวนจริงใดๆ)

พิจารณา $\underline{v}=a_1\underline{v_1}+a_2\underline{v_2}$

$a+bx+cx^2=a_1(2+3x-4x^2)+a_2(-8-12x+16x^2)$

$a+bx+cx^2=2a_1+3a_1x-4a_1x^2-8a_2-12a_2x+16a_2x^2$

$a+bx+cx^2=(-4a_1+16a_2)x^2+(3a_1-12a_2)x+2a_1-8a_2$

เทียบ ส.ป.ส. ของ x

ส.ป.ส. ของ x^2; $c=-4a_1+16a_2$

〃 x; $b=3a_1-12a_2$

〃 ค่าคงที่; $a=2a_1-8a_2$

$$[A|B]=\begin{bmatrix}-4&16&c\\3&-12&b\\2&-8&a\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}-4&16&c\\2&-8&a\\3&-12&b\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}\begin{bmatrix}2&-8&a\\-4&16&c\\3&-12&b\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+2R_1}\begin{bmatrix}2&-8&a\\0&0&a+c\\3&-12&b\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_1}{2}}\begin{bmatrix}1&-4&\frac{a}{2}\\0&0&a+c\\3&-12&b\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-3R_1}\begin{bmatrix}1&-4&\frac{a}{2}\\0&0&a+c\\0&0&d-\frac{a}{2}\end{bmatrix}$$

rank $A=1$

rank$[A|B]=3$

$n=3$

$\therefore$ ระบบสมการไม่มีผลเฉลยหา a_1,a_2,a_3 ไม่ได้

ดังนั้น $\underline{v}$ ไม่แผ่ทั่ว P_2 #

10. จงพิจารณาว่า เซตของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

10.5 $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(3,6,6)\}$

วิธีทำ พิจารณา $a_1\underline{v_1}+a_2\underline{v_2}+a_3\underline{v_3}+a_4\underline{v_4}=\underline{0}$

$a_1(1,1,0)+a_2(0,2,3)+a_3(1,2,3)+a_4(3,6,6)=(0,0,0)$

$(a_1+a_3+3a_4,\ a_1+2a_2+2a_3+6a_4,\ 3a_2+3a_3+6a_4)=(0,0,0)$

$$[A]=\begin{bmatrix}1&0&1&3\\1&2&2&6\\0&3&3&6\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&2&1&3\\0&3&3&6\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&3&3&6\\0&2&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_2}{3}}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&2\\0&2&1&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&2\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{-R_3}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

rank $A=3$

rank$[A|B]=3$

$n=4$

$\therefore$ ระบบสมการมีผลเฉลยมากมาย

ดังนั้นจึงไม่เป็นอิสระเชิงเส้น #

13. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน P_3 ที่กำหนดให้ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

13.1 $\{t^3-4t^2+2t+3,\ t^3+2t^2+4t-1,\ 2t^3-t^2-3t+5\}$

วิธีทำ พิจารณา $a_1\underline{v_1}+a_2v_2+a_3(v_3)=\underline{0}$

$a_1(t^3-4t^2+2t+3)+a_2(t^3+2t^2+4t-1)+a_3(2t^3-t^2-3t+5)=0+0x+0x^2+0x^3$

$t^3a_1-4t^2a_1+2ta_1+3a_1+t^3a_2+2t^2a_2+4ta_2-a_2+2t^3a_3-t^2a_3-3ta_3+5a_3=0+0x+0x^2+0x^3$

$(a_1+a_2+2a_3)t^3+(-4a_1+2a_2-a_3)t^2+(2a_1+4a_2-3a_3)t+(3a_1-a_2+5a_3)=0+0x+0x^2+0x^3$

เทียบ ส.ป.ส.ของ t

ส.ป.ส. ของ t^3; $a_1+a_2+2a_3=0$

〃 t^2; $-4a_1+2a_2-a_3=0$

〃 t; $2a_1+4a_2-3a_3=0$

〃 ค่าคงที่; $3a_1-a_2+5a_3=0$

$$[A]=\begin{bmatrix}1&1&2\\-4&2&-1\\2&4&-3\\3&-1&5\end{bmatrix}$$

$$\underset{R_4-3R_1}{\underset{R_3-2R_1}{\overset{R_2+4R_1}{\sim}}}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&6&7\\0&2&-7\\0&-4&-1\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&-7\\0&6&7\\0&-4&-1\end{bmatrix}$$

$$\underset{R_4+2R_2}{\overset{R_3-3R_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&-7\\0&0&28\\0&0&-15\end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{R_2}{2}}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-\frac{7}{2}\\0&0&28\\0&0&-15\end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{R_3}{28}}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-\frac{7}{2}\\0&0&1\\0&0&-15\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_4+15R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-\frac{7}{2}\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

rank $A=2$

rank$[A|b]=3$

$n=3$

∴ มีผลเฉลยมากมาย

ดังนั้นเป็นอิสระเชิงเส้น