ANÁLISIS MATEMÁTICO Curso 2013-2014

TEMA 1.-NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

1.- Demostrar por inducción:

1.1 $n! > 2^{n-1} \quad \forall\, n>2$

1.2 $2 + 4 + 6 + ... + 2n = (n+1)\, n \quad \forall\, n$

1.3 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

2.- Resolver las siguientes desigualdades:

2.1 $|x-1| < 3$

2.2 $|x^2 - x| + x > 1$

2.3 $x^2 - 1 < 0$

2.4 $x + \dfrac{1}{x} > 1$

3.- Escribir de todas las formas posibles y representar los siguientes números complejos:

a) $z = 1-i$, b) $z = 1_{-\pi/2}$, c) $z = 2(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)$, d) $z = 2+3i$

4.- Calcular:

a) $(-1+i)^2 + \overline{(3+i)} - \dfrac{1+i}{1-i}$ b) $(1+\sqrt{3}\, i)^9$

5.- Calcular las raíces cuadradas de los complejos $z_1 = 2+i\sqrt{12}$, $z_2 = 8+6i$.

6.- Escribir los lugares geométricos en el plano de los afijos de los números complejos z tales que: a) $|z| \geq 1$, b) $\operatorname{Im}(z^2) = 4$, c) $z + \overline{z} = 1$, d) $4 < |z-1|$

7.- Hallar los números complejos z que verifiquen $(z^3\, \overline{z}) = -1$

8.- Dado un complejo z, interpretar geométricamente el producto $z.e^{i\theta}$ siendo θ un número real

9.- Un triángulo equilátero tiene dos de sus vértices en (0,0) y (4,1). Halla las coordenadas del tercer vértice sabiendo que está en el primer cuadrante.

10.- Resolver la ecuación $2e^{i/x} = \sqrt{-2 + i2\sqrt{3}}$.

11.- Calcular x , y $\in \mathbf{R}$ tales que $\dfrac{x+2i}{3+yi} = \sqrt{2}_{-\pi/4}$

12.- Hallar el complejo a+bi tal que $e^{a+bi} = 1-i\sqrt{3}$

13.- Hallar el valor principal de:

a) $z = \ln\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ b) $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^i$

14.- Dado $z = \frac{1-i}{1+i}$, calcular z^{10}, z^i y los valores de x para que $z = e^{i2x}$.

15.- Resolver la ecuación $(1+i)\, z^3 - 2i = 0$.

16.- Sean z_1 y z_2 dos raíces de la ecuación $z^2 + (1-i)z + (2-2i) = 0$, siendo z_1 la solución con menor parte real. Hallar:

a) $\ln z_1$ b) z_2^{10}

17.- Calcular $\ln\sqrt{w}$ sabiendo que $\frac{w}{1+i\sqrt{3}}$ es un número real y que $|w| = 1$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Demostrar por inducción:

1.1 $a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - a}{a-1}$ / $a \neq 1$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$

1.2 $3 + 2.3 + 2.3^2 + \ldots + 2.3^n = 3^{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$

1.3 $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$

1.4 $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$

2.- Resolver las siguientes desigualdades:

2.1 $|x+1| > 3$

2.2 $2 + 3x < 5$

2.3 $x > \frac{1}{x}$

2.4 $|x^2 - x + 1| > 1$

2.5 $0 < |x-3| < 8$

3.- Escribir las siguientes expresiones sin el signo del valor absoluto:

3.1 $|a+b|-|b|$

3.2 $||x|-1|$

3.3 $|x|-|x^2|$

4.- Escribir de todas las formas posibles y representar los siguientes números complejos:

a)$z = 1+ i\sqrt{3}$, b) $z = 1_{\pi/2}$, c) $z = 4(\cos 3\pi/4 + i \operatorname{sen} 3\pi/4)$, d) $z = 3+4i$

5.- Calcular: a) $(1-i)^2 + \overline{(4-8i)} - \dfrac{2+i}{1+i}$ b) $(1+i)^7$ c) $z = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^i$

6.- Calcular las raíces cuadradas del complejo $z = -3+4i$

7.- Dados los complejos z y w tales que $z = \dfrac{(3+i)(1-2i)}{2+i}$ y $w = \dfrac{1+i^3}{(1-i)^3}$. Calcular ln (z+4w)

y $\sqrt[3]{z+4w}$.

8.- Escribir los lugares geométricos en el plano de los afijos de los números complejos z tales que : a) $|z| = 1$ b) $|z| < 1$ c) $z-\overline{z} = i$ d) $z+\overline{z} = |z|^2$

9.- Hallar $x \in \mathbf{R}$ tal que $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^4 = \dfrac{1+i\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-i\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$, siendo α conocido.

10.- Hallar los complejos z tales que su cubo sea igual a su conjugado.

11.- Hallar los números complejos z que verifiquen la ecuación: $z^5 - (1+i)^5 = 0$.

12.- El afijo del complejo $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ es un vértice de un cuadrado inscrito en una circunferencia centrado en el origen, ¿Cuáles son los otros tres vértices?

13.- Dado el número complejo $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$, calcula $\sqrt[3]{z}$ y el valor principal de $\ln z$.

14.- Hallar los valores de x e y que satisfacen las siguientes relaciones:

a) $x+iy = x\,e^{iy}$ b) $\dfrac{1+i}{1-i} = x\,e^{iy}$

15.- Hallar el valor principal de $z = \ln\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^i$

16.- Siendo $z = 12\,e^{i\pi/6}$, calcular $\left|e^{iz}\right|$.