Aplicaciones reales de la transformada de Laplace

Ing. Elvira Niño
Departamento de Mecatrónica y Automatización
enino@itesm.mx

Control de Procesos

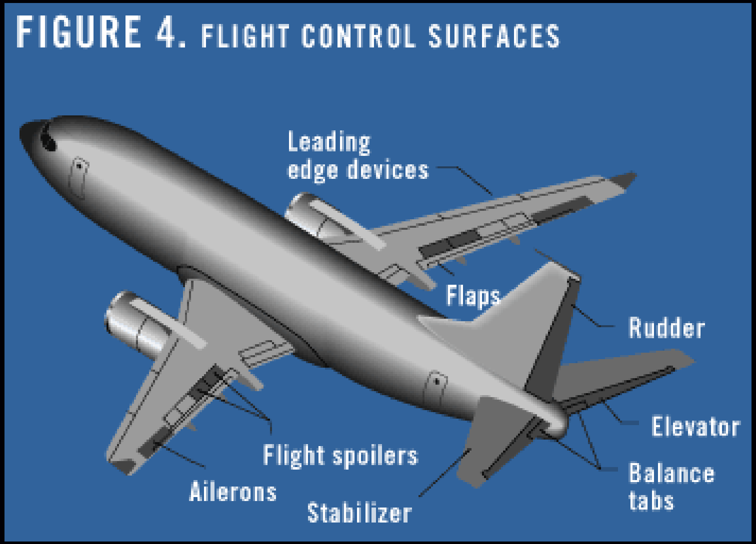
- ¿Qué es un sistema de control ?
  - En nuestra vida diaria existen numerosos objetivos que necesitan cumplirse.
- En el ámbito doméstico
  - Controlar la temperatura y humedad de casas y edificios
- En transportación
  - Controlar que un auto o avión se muevan de un lugar a otro en forma segura y exacta
- En la industria
  - Controlar un sinnúmero de variables en los procesos de manufactura

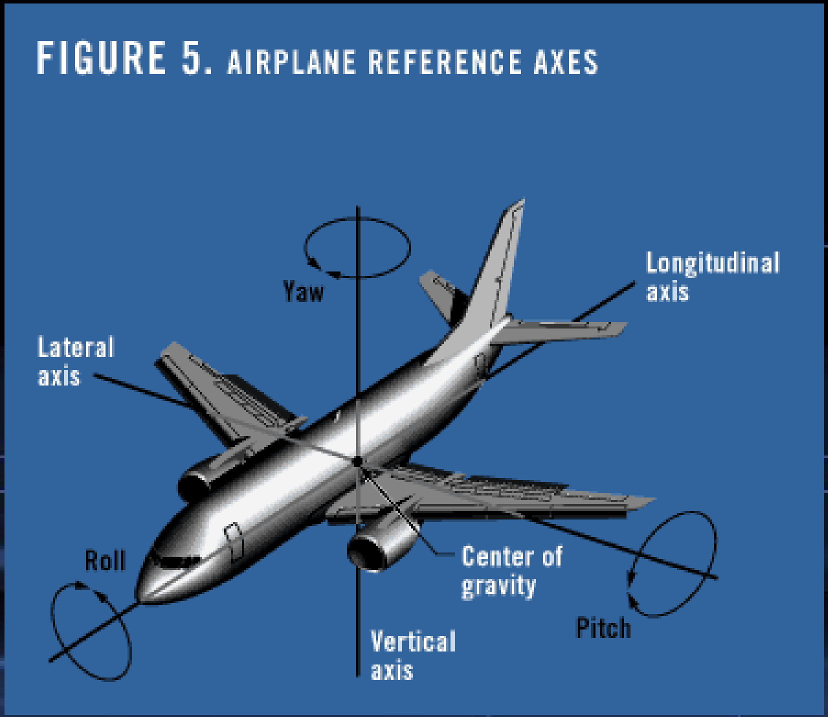
Control de Procesos

- En años recientes, los sistemas de control han asumido un papel cada vez más importante en el desarrollo y avance de la civilización moderna y la tecnología.
- Los sistemas de control se encuentran en gran cantidad en todos los sectores de la industria:
  - tales como control de calidad de los productos manufacturados, líneas de ensa,ble automático, control de máquinas-herramienta, tecnología espacial y sistemas de armas, control por computadora, sistemas de transporte, sistemas de potencia, robótica y muchos otros

Ejemplos de procesos automatizados

- Un moderno avión comercial





Ejemplos de procesos automatizados

- Satélites

Ejemplos de procesos automatizados

- Control de la concentración de un producto en un reactor químico

Ejemplos de procesos automatizados

- Control en automóvil

¿ Por que es necesario controlar un proceso ?

- **Incremento de la productividad**
- **Alto costo de mano de obra**
- **Seguridad**
- **Alto costo de materiales**
- **Mejorar la calidad**
- **Reducción de tiempo de manufactura**
- **Reducción de inventario en proceso**
- **Certificación (mercados internacionales)**
- **Protección del medio ambiente (desarrollo sustentable)**

Control de Procesos

- El campo de aplicación de los sistemas de control es muy amplia.
- Y una herramienta que se utiliza en el diseño de control clásico es precisamente:

La transformada de Laplace

¿Por qué Transformada de Laplace?

- En el estudio de los procesos es necesario considerar **modelos dinámicos**, es decir, modelos de comportamiento variable respecto al tiempo.
- Esto trae como consecuencia el uso de **ecuaciones diferenciales respecto al tiempo** para representar matemáticamente el comportamiento de un proceso.

¿Por qué Transformada de Laplace?

- El comportamiento dinámico de los procesos en la naturaleza puede representarse de manera aproximada por el siguiente **modelo general de comportamiento dinámico lineal**:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n - 1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \ldots\ldots + a_0 y(t) = x(t)$$

- La transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil para el análisis de sistemas dinámicos lineales.

¿Por qué Transformada de Laplace?

- De hecho, la transformada de Laplace permite resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas con lo cual se facilita su estudio.

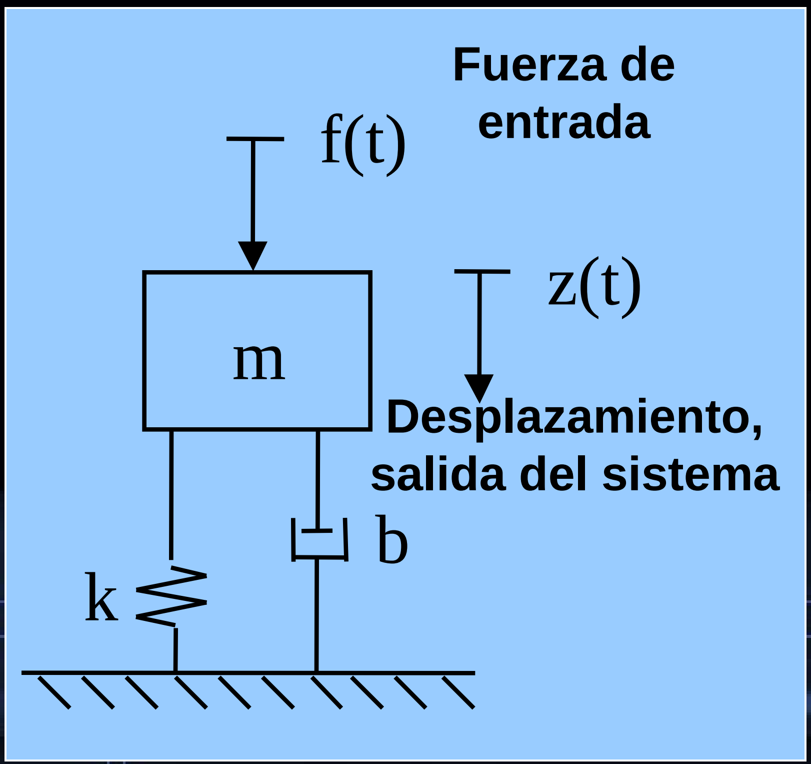
- Una vez que se ha estudiado el comportamiento de los sistemas dinámicos, se puede proceder a diseñar y analizar los sistemas de control de manera simple.

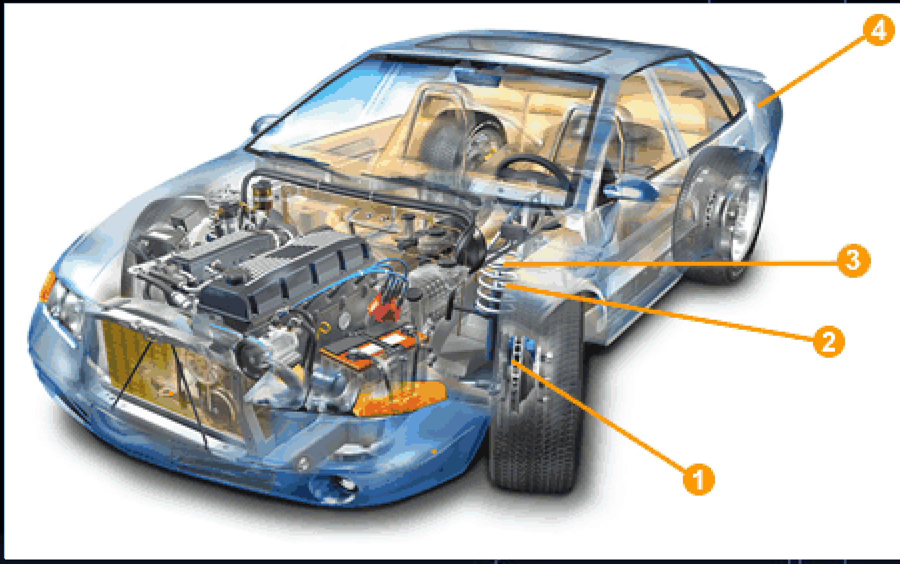
El proceso de diseño del sistema de control

- Para poder diseñar un sistema de control automático, se requiere
  - Conocer el proceso que se desea controlar, es decir, conocer la ecuación diferencial que describe su comportamiento, utilizando las leyes físicas, químicas y/o eléctricas.
  - A esta ecuación diferencial se le llama modelo del proceso.
  - Una vez que se tiene el modelo, se puede diseñar el controlador.

Conociendo el proceso ...

- MODELACIÓN MATEMÁTICA
  Suspensión de un automóvil





$$\sum F = ma$$

$$f(t) - kz(t) - b\frac{dz(t)}{dt} = m\frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

El rol de la transformada de Laplace

Conviertiendo ecs. diferenciales a ecs. algebráicas

Suspensión de un automóvil

$$f(t) - kz(t) - b\frac{dz(t)}{dt} = m\frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada término (considerando condiciones iniciales igual a cero)

$$F(s) - kZ(s) - bsZ(s) = ms^2 Z(s)$$

$$F(s) = Z(s)\left[ms^2 + bs + k\right]$$

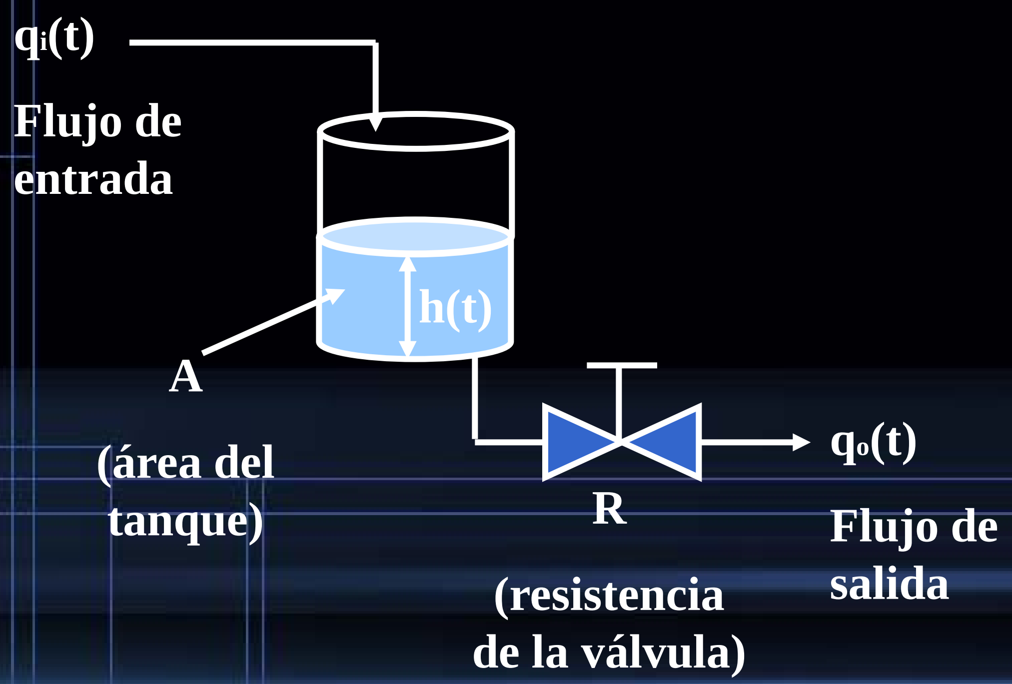
$$\frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Función de transferencia

Conociendo el proceso...

- MODELACIÓN MATEMÁTICA
  Nivel en un tanque

Flujo que entra – Flujo que sale = Acumulamiento



$$q_i(t) - q_o(t) = A\frac{dh(t)}{dt}$$

$$R = \frac{h(t)}{q_o(t)}$$

$$q_i(t) - \frac{1}{R}h(t) = A\frac{dh(t)}{dt}$$

El rol de la transformada de Laplace

Conviertiendo ecs. diferenciales a ecs. algebráicas

Nivel en un tanque

$$q_i(t) - \frac{1}{R}h(t) = A\frac{dh(t)}{dt}$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$Qi(s) - \frac{1}{R}H(s) = AsH(s)$$

$$Qi(s) = H(s)(As + \frac{1}{R})$$

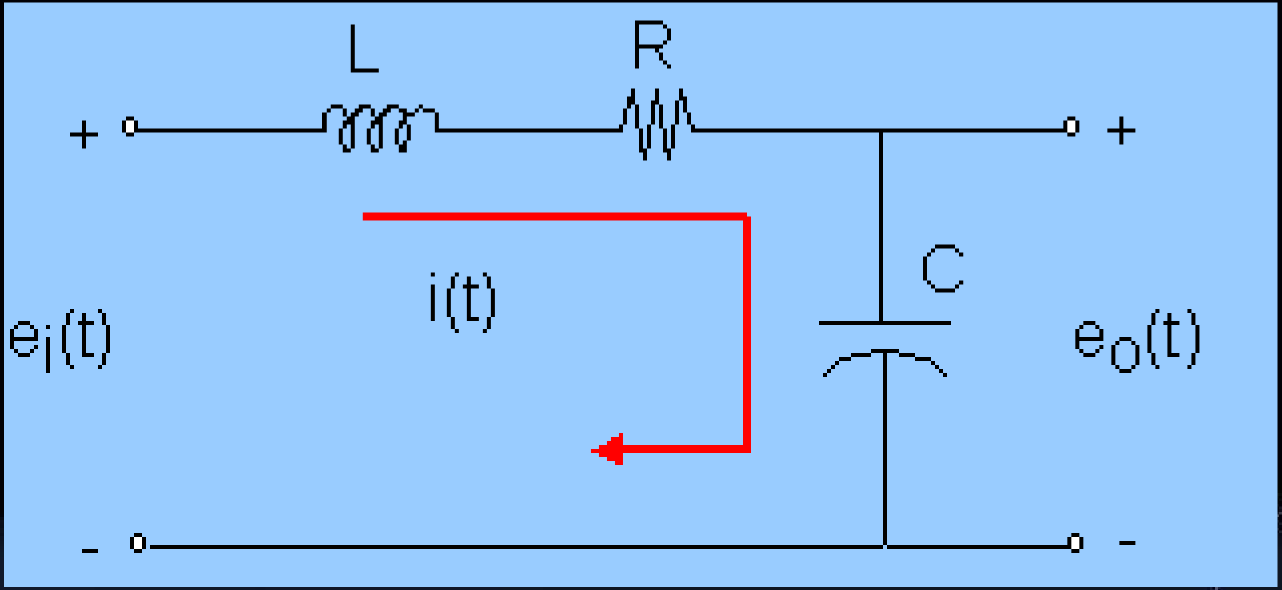
$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{As + \frac{1}{R}} = \frac{R}{ARs+1}$$

Función de transferencia

Conociendo el proceso...

- MODELACIÓN MATEMÁTICA

Circuito eléctrico



$$e_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$\frac{1}{C}\int i(t)dt = e_o(t)$$

El rol de la transformada de Laplace

Conviertiendo ecs. diferenciales a ecs. algebráicas

Circuito eléctrico

$$e_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad \frac{1}{C}\int i(t)dt = e_o(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathrm{E_i}(s) = LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) \qquad \frac{1}{Cs}I(s) = E_o(s)$$

Combinando las ecuaciones (despejando para I(s))

$$\mathrm{E_i}(s) = Ls\left[CsE_o(s)\right] + R\left[CsE_o(s)\right] + \frac{1}{Cs}\left[CsE_o(s)\right]$$

$$\mathrm{E_i}(s) = E_o(s)\left[LCs^2 + RCs + 1\right]$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Función de transferencia

La función de transferencia

- Representa el comportamiento dinámico del proceso
- Nos indica como cambia la salida de un proceso ante un cambio en la entrada

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{Cambio en la salida del proceso}}{\text{Cambio en la entrada del proceso}}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{Respuesta del proceso}}{\text{Función forzante}}$$

- Diagrama de bloques

Entrada del proceso (función forzante o estímulo) → **Proceso** → **Salida del proceso (respuesta al estímulo)**

La función de transferencia

Diagrama de bloques

- Suspensión de un automóvil

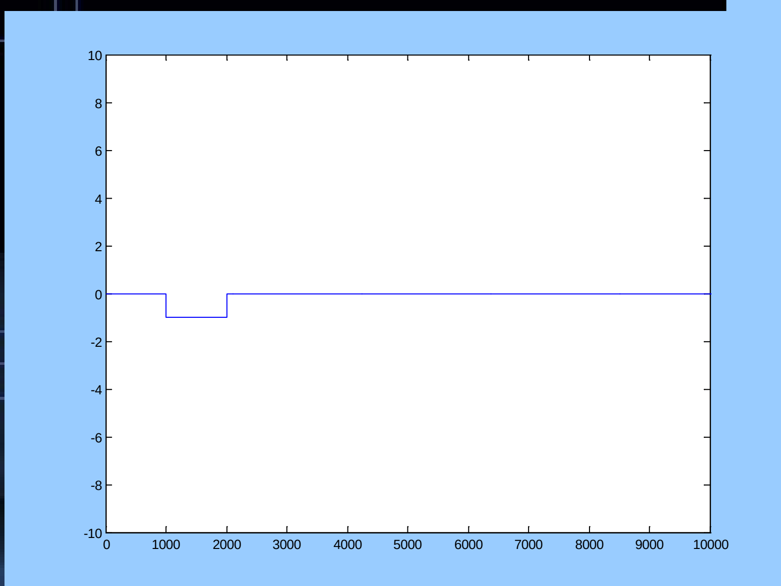
Entrada

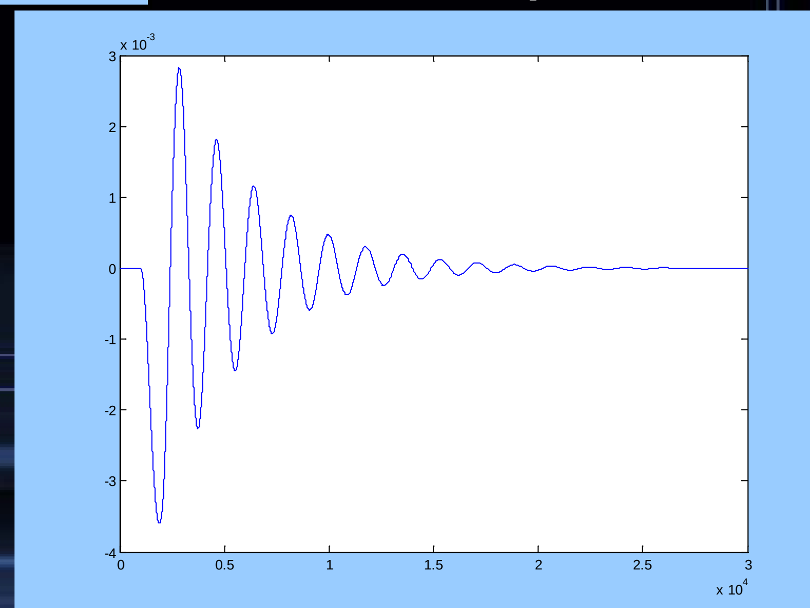
(Bache)

$$\frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Salida

(Desplazamiento del coche)





La función de transferencia

Diagrama de bloques

- Nivel en un tanque

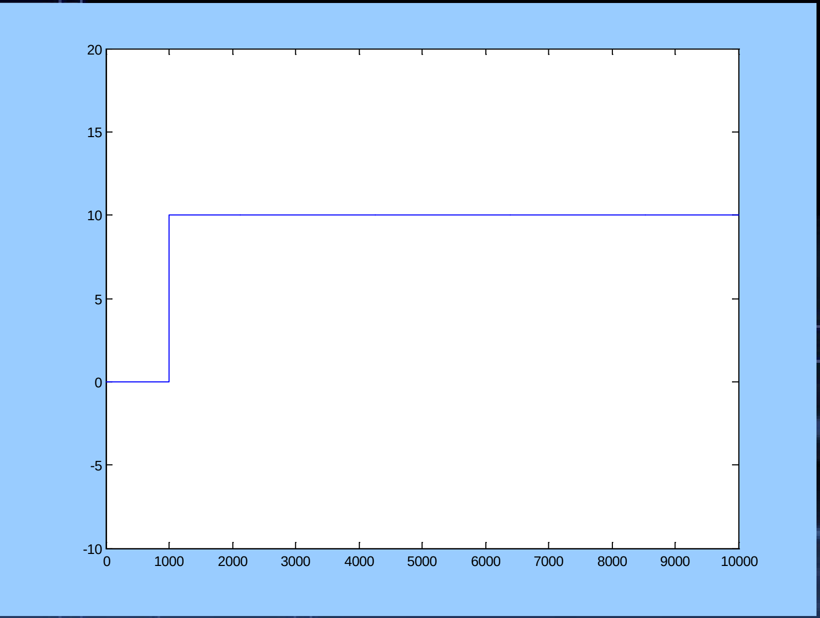
Qi(s)

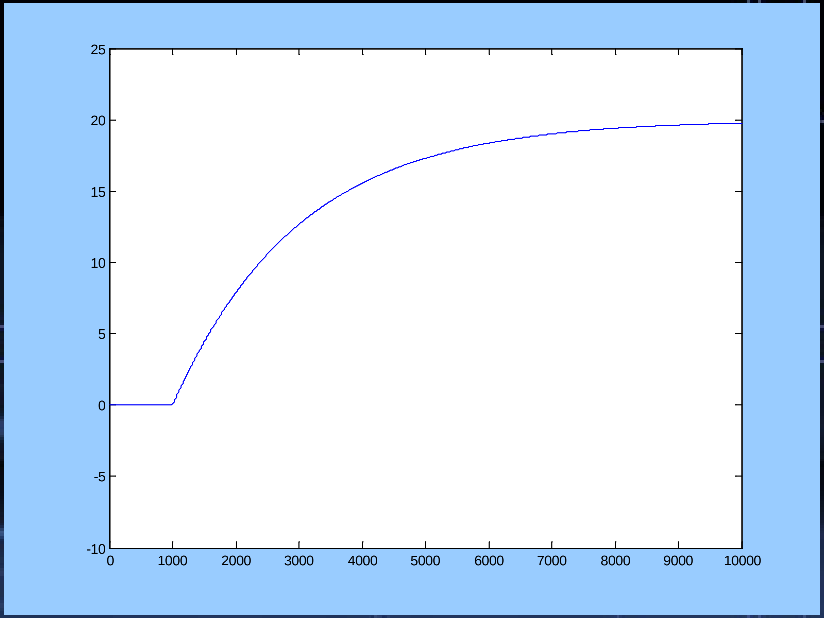
(Aumento del flujo de entrada repentinamente)

$$\frac{R}{ARs+1}$$

H(s)

(Altura del nivel en el tanque





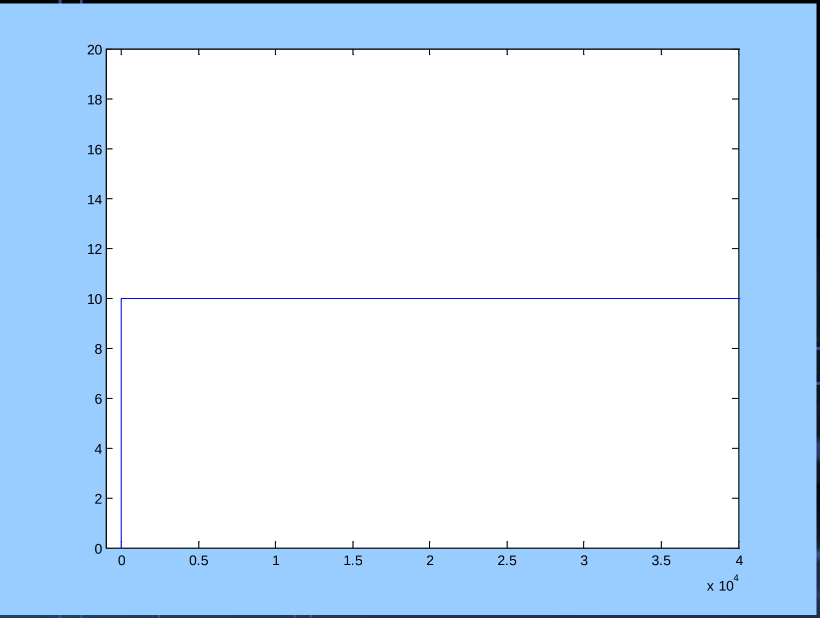
La función de transferencia

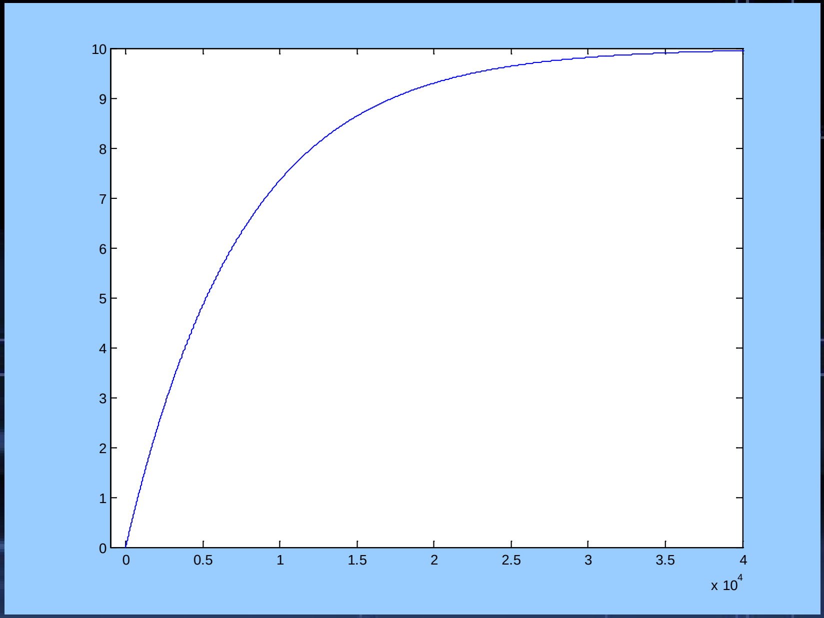
Diagrama de bloques

- Circuito eléctrico

Ei(s) → $$\frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$ → **Eo(s)**

(Voltaje de entrada) **(Voltaje de salida)**





Propiedades y teoremas de la transformada de Laplace más utilizados en al ámbito de control

- TEOREMA DE TRASLACIÓN DE UNA FUNCIÓN

  (Nos indica cuando el proceso tiene un retraso en el tiempo)

$$\mathcal{L}\{f(t-\alpha)\,1(t-\alpha)\} = e^{-\alpha s}F(s); \quad \text{para } \alpha \geq 0$$

- TEOREMA DE DIFERENCIACIÓN REAL

  (Es uno de los más utilizados para transformar las ecuaciones diferenciales)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

Propiedades y teoremas de la transformada de Laplace más utilizados en al ámbito de control

- TEOREMA DE VALOR FINAL

(Nos indica el valor en el cual se estabilizará la respuesta)

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

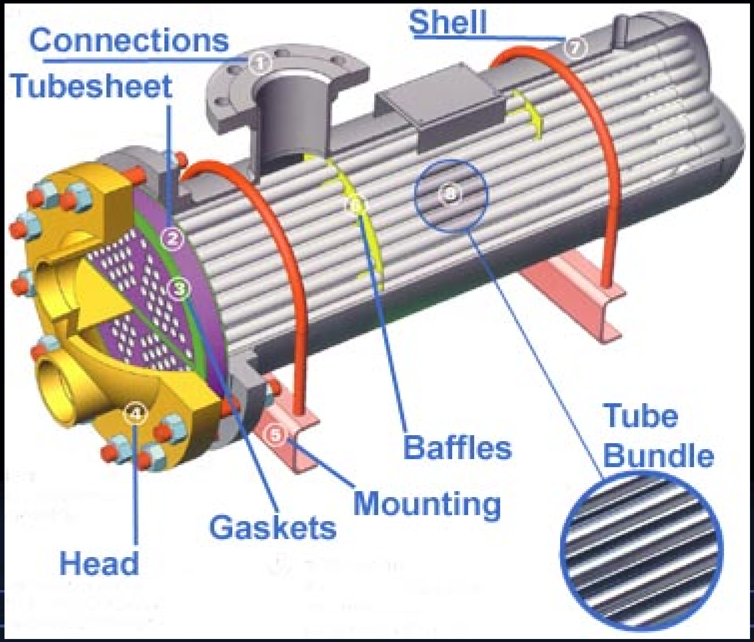
- TEOREMA DE VALOR INICIAL

(Nos indica las condiciones iniciales)

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Ejemplo aplicado: Intercambiador de calor

- Se tiene un intercambiador de calor 1-1, de tubos y coraza. En condiciones estables, este intercambiador calienta 224 gal/min de agua de 80°F a 185°F por dentro de tubos mediante un vapor saturado a 150 psia.



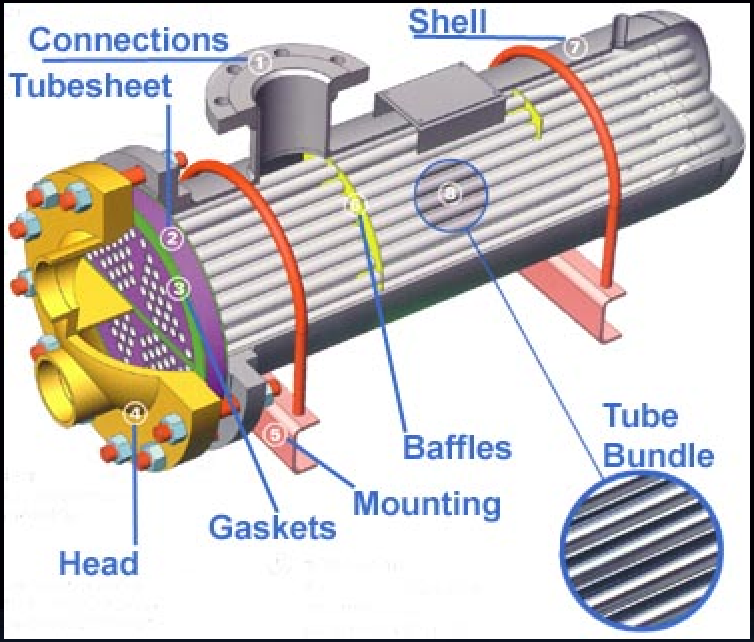
- En un instante dado, la temperatura del vapor y el flujo de agua cambian, produciéndose una perturbación en el intercambiador.

Ejemplo aplicado: Intercambiador de calor

- a) Obtenga la función de transferencia del cambio de la temperatura de salida del agua con respecto a un cambio en la temperatura del vapor y un cambio en el flujo de agua, suponiendo que la temperatura de entrada del agua al intercambiador se mantiene constante en 80°F.
- b) Determine el valor final de la temperatura de salida del agua ante un cambio tipo escalón de +20°F en la temperatura del vapor, y un cambio de +10 gal/min en el flujo de agua.
- c) Grafique la variación de la temperatura de salida del agua con respecto al tiempo.

Ejemplo aplicado: Intercambiador de calor

- Ecuación diferencial que modela el intercambiador de calor



$$U_{d0}A_{TC0}\left(t_v-\frac{t_e}{2}-\frac{t_s}{2}\right)+wCpt_e-wCpt_s=\frac{1}{2}mCp\frac{d}{dt}t_s$$

Intercambiador de calor

- Ecuación diferencial

$$U_{d0}A_{TC0}\left(t_v-\frac{t_e}{2}-\frac{t_s}{2}\right)+wCpt_e-wCpt_s=\frac{1}{2}mCp\frac{d}{dt}t_s$$

- Donde:
- *Ud0*: Coeficiente global de transferencia de calor referido al diámetro exterior
- (BTU/h °F ft2)
- *ATC0*: Área de transferencia de calor referida al diámetro exterior (ft2)
- *Cp* : Capacidad calorífica (BTU/lb °F)
- *tv* : Temperatura del vapor (°F)
- *te* : Temperatura del agua a la entrada (°F)
- *ts* : Temperatura del agua a la salida (°F)
- *(te+ ts) /* 2 :Temperatura del agua dentro de tubos (°F)
- *tref* : Temperatura de referencia (°F)
- *w* : Flujo de agua (lb/h)
- *m* : Cantidad de agua dentro de tubos (lb)
- $\overline{tv},\overline{ts},\overline{tw}$: Valores en condiciones estables
- *Tv* , *Ts* , *W* Variables de desviación

Intercambiador de calor

- Linealizando

$$wCp\cdot t_S = \overline{w}Cp\overline{t}_s + Cp\overline{t}_s\left(w-\overline{w}\right)+\overline{w}Cp\left(t_s-\overline{t}_s\right) = wCp\overline{t}_s + \overline{w}Cp\left(t_s-\overline{t}_s\right) \qquad 1$$

$$U_{d0}A_{TC0}\left(t_v-\frac{t_e}{2}-\frac{t_s}{2}\right)+wCpt_e-\left[wCp\overline{t}_s+\overline{w}Cp\left(t_s-\overline{t}_s\right)\right]=\frac{1}{2}mCp\frac{d}{dt}t_s \qquad 2$$

- Evaluando en condiciones iniciales estables

$$U_{d0}A_{TC0}\left(\overline{t}_v-\frac{t_e}{2}-\frac{\overline{t}_s}{2}\right)+\overline{w}Cpt_e-\overline{w}Cp\overline{t}_s=0 \qquad 3$$

- Restando (2) de (3)

$$U_{d0}A_{TC0}\left(t_v-\overline{t}_v\right)-\frac{1}{2}U_{d0}A_{TC0}\left(t_s-\overline{t}_s\right)+\left(w-\overline{w}\right)Cpt_e-\left(w-\overline{w}\right)Cp\overline{t}_s-\overline{w}Cp\left(t_s-\overline{t}_s\right)=\frac{1}{2}mCp\frac{d}{dt}t_s$$

Intercambiador de calor

- Utilizando variables de desviación

$$U_{d0}A_{TC0}T_v - \frac{1}{2}U_{d0}A_{TC0}T_s + Cpt_eW - Cp\overline{t_s}W - \overline{w}CpT_s = \frac{1}{2}mCp\frac{dT_s}{dt}$$

- Aplicando la transformada con Laplace

$$U_{d0}A_{TC0}T_v(s) - \left(\frac{1}{2}U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp\right)T_s(s) + \left(Cpt_e - Cp\overline{t_s}\right)W(s) = \frac{1}{2}mCpsT(s)$$

$$U_{d0}A_{TC0}T_v(s) - \left(\frac{1}{2}U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp + \frac{1}{2}mCps\right)T_s(s) + Cp\left(t_e - \overline{t_s}\right)W(s) = 0$$

Intercambiador de calor

- Simplificando

$$T(s) = \frac{U_{d0}A_{TC0}}{\frac{1}{2}mCps + \frac{1}{2}U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp}T_v(s) + \frac{Cp\left(t_e - \overline{t_s}\right)}{\frac{1}{2}mCps + \frac{1}{2}U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp}W(s)$$

$$T(s) = \frac{U_{d0}A_{TC0} \Big/ \left(0.5U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp\right)}{\frac{0.5mCp}{0.5U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp}s + 1}Tv(s) + \frac{Cp\left(t_e - \overline{t_s}\right) \Big/ \left(0.5U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp\right)}{\frac{0.5mCp}{0.5U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp}s + 1}W(s)$$

- Datos físicos
  - Largo del intercambiador = 9 ft
  - Diámetro de coraza = 17 ¼''
  - Flujo = 224 gal/min
  - Temperatura de entrada =80°F
  - Temperatura de salida = 185°F
  - Presión de vapor =150psia.
  - Número de tubos= 112
  - Diámetro exterior de tubo = ¾ '' de diámetro y BWG 16, disposición cuadrada a 90°, con un claro entre tubos de 0.63''.
  - Conductividad térmica de los tubos = 26 BTU/hft°F,
  - Factor de obstrucción interno = 0.0012 hft2°F/BTU; externo = 0.001 hft2°F/BTU
  - Coeficiente global de transferencia de calor = 650 BTU/hft2°F

Intercambiador de calor

- Calculando las constantes

w = 224 gal/min = 112162.3 lb/h; Cp= 1 BTU/lb °F

$$U_{d0} = \left[\frac{1}{U_0} + \sum R\right]^{-1} = \left[\frac{1}{650} + 0.001 + 0.0012\right]^{-1} = 267.4897 \text{ BTU/h °F ft}^2$$

$$A_{TC0} = 112\ \pi D_0 L = 112\pi\left[\frac{3}{4(12)}\text{ft}\right][9\text{ ft}] = 197.92034\text{ ft}^2$$

$$m = 112\frac{\pi}{4}\text{Di}^2\text{L}\rho = 112\frac{\pi}{4}\left(\frac{0.62}{12}\text{ft}^2\right)(9\text{ ft})(62.428\text{ lb/ft}^3) = 131.932175\text{ lb}$$

$$t_e = 80\ °\text{F}$$

$$K_1 = \frac{U_{d0}A_{TC0}}{0.5U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp} = 0.381883131$$

$$K_2 = \frac{Cp\left(t_e - \overline{t_s}\right)}{0.5U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp} = -7.573947 * 10^{-4}\ \frac{°\text{F}}{\text{lb/h}}$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{0.5mCp}{0.5U_{d0}A_{TC0} + \overline{w}Cp} = 4.758320707 * 10^{-4}\text{ h} = 0.02855\text{ min}$$

$$= 1.712995\text{ seg}$$

Intercambiador de calor

- Función de transferencia

$$T_S(s) = \frac{0.381883131}{(1.712995 \cdot \text{seg})s + 1} Tv(s) + \frac{-7.573947 * 10^{-4} \dfrac{°F}{lb/h}}{(1.712995 \cdot \text{seg})s + 1} W(s)$$

- Determine el valor final de la temperatura de salida del agua ante un cambio tipo escalón de +20°F en la temperatura del vapor, y un cambio de +10 gal/min en el flujo de agua.

$$T_V(s) = \frac{20}{s}$$

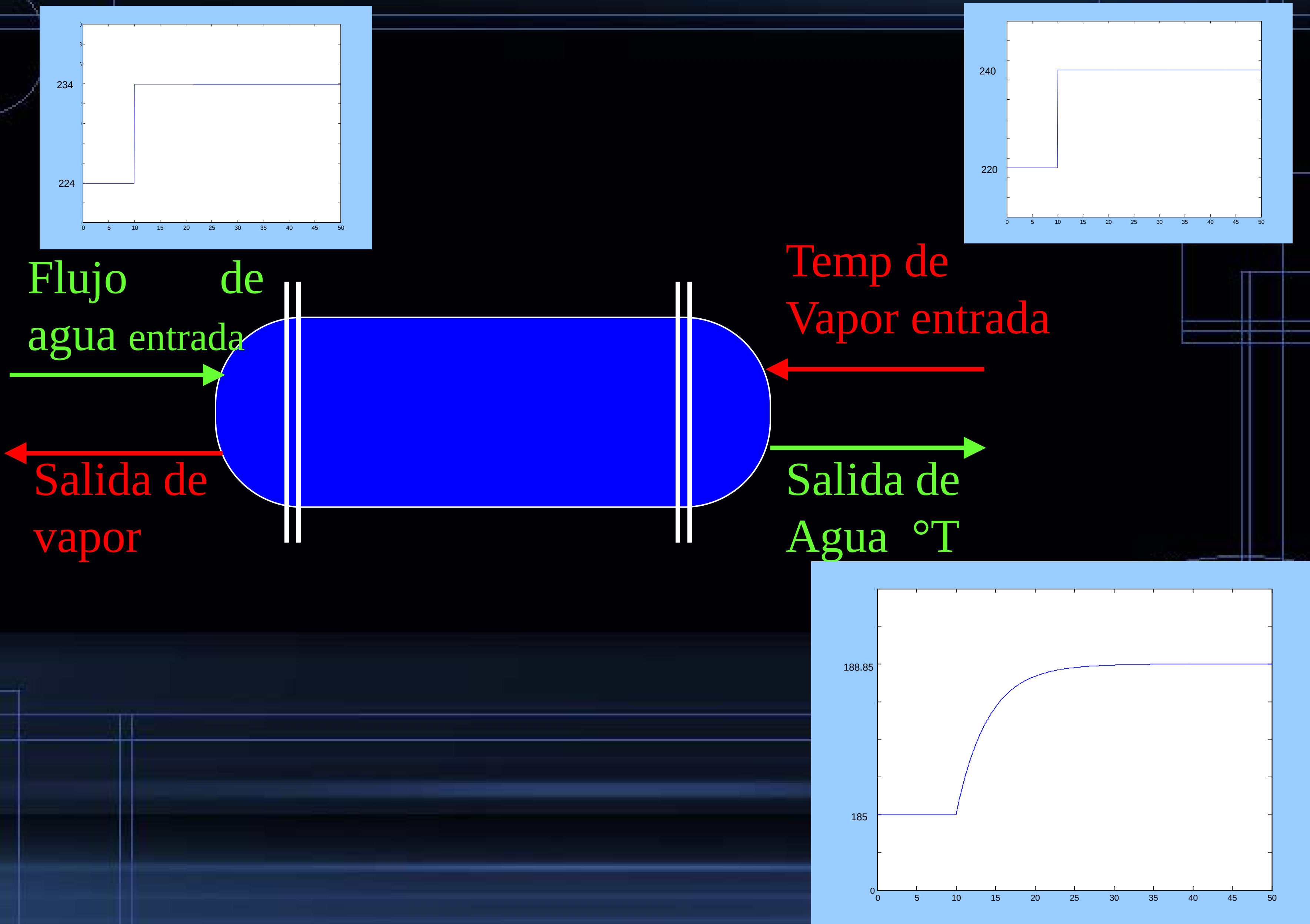
$$W(t) = 10 \text{ gpm} \cdot \frac{112162.3 lb/h}{224 gpm} U(t) = 5007.245536 \text{ lb/h } U(t) \text{ ; W } (s) = \frac{5007.245536}{s}$$

$$Ts(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} sTs(s) = \lim_{s \to 0} \frac{20(0.381883131)}{1.712995s + 1} + \frac{5007.245536(-7.573947 * 10^{-4})}{1.712995s + 1}$$

$$Ts(t \to \infty) = 7.63766262 - 3.79246123 = 3.84520139°F$$

$$t_S(t \to \infty) = \overline{t_S} + T_S(t \to \infty) = 185°F + 3.84520139°F = 188.8452014°F$$

Intercambiador de calor



La respuesta del proceso en el tiempo

Transformada Inversa De Laplace

$$T_s(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} T_v(s) + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} W(s) \qquad T_v(s) = \frac{20}{s} \qquad W(s) = \frac{5007.25}{s}$$

$$T_s(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}\left(\frac{20}{s}\right) + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}\left(\frac{5007.25}{s}\right) =$$

$$T_s(s) = \frac{0.381883}{1.712995s + 1}\left(\frac{20}{s}\right) + \frac{-7.573947x10^{-4}}{1.712995s + 1}\left(\frac{5007.25}{s}\right) = \frac{7.63766}{(1.712995s + 1)s} - \frac{3.792464}{(1.712995s + 1)s}$$

Expansión en fracciones parciales

$$T_s(s) = \frac{4.458658}{(s + 0.583772)s} - \frac{2.213928}{(s + 0.583772)s} = \frac{a_1}{(s + 0.583772)} + \frac{a_2}{s} - \frac{b_1}{(s + 0.583772)} - \frac{b_2}{s}$$

La respuesta del proceso en el tiempo

Transformada Inversa De Laplace

$$a_1 = (s+0.583772)\left(\frac{4.458658}{(s+0.583772)s}\right)_{s=-0.583772} = \frac{4.458658}{-0.583772} = -7.6376$$

$$a_2 = (s)\left(\frac{4.458658}{(s+0.583772)s}\right)_{s=0} = \frac{4.458658}{0.583772} = 7.6376$$

$$b_1 = (s+0.583772)\left(\frac{2.213928}{(s+0.583772)s}\right)_{s=-0.583772} = -\frac{2.213928}{-0.583772} = 3.792453$$

$$b_2 = (s)\left(\frac{2.213928}{(s+0.583772)s}\right)_{s=0} = -\frac{2.213928}{0.583772} = -3.792453$$

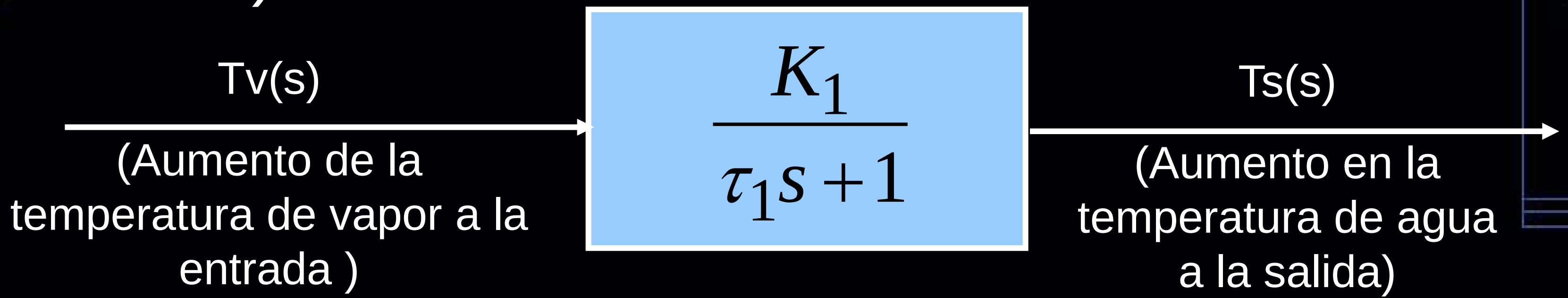
$$T_s(s) = -\frac{7.637670}{(s+0.583772)} + \frac{7.637670}{s} + \frac{3.792453}{(s+0.583772)} - \frac{3.792453}{s}$$

$$T_s(t) = -7.637670e^{-0.583772t} + 7.637670 + 3.792453e^{-0.583772t} - 3.792453 + Tss \qquad (\mathrm{Tss} = temperatura \text{ inicial de salida})$$

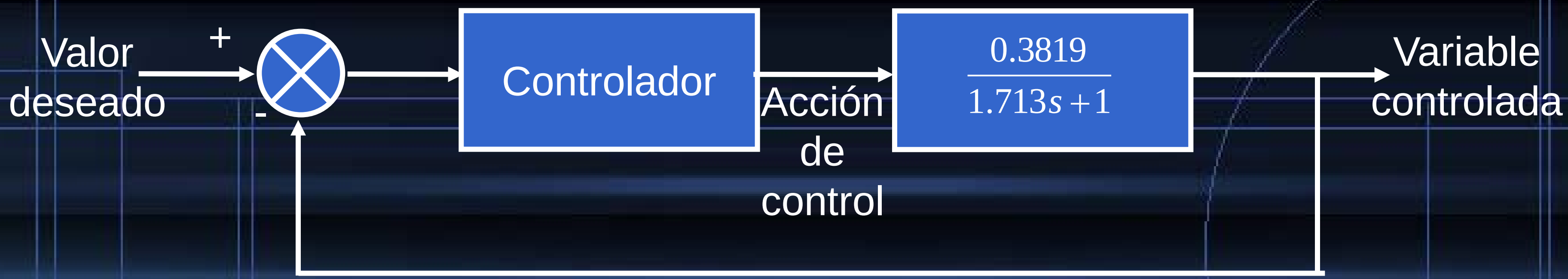
$$T_s(t) = 7.637670\left(1-e^{-0.583772t}\right) - 3.792453\left(1-e^{-0.583772t}\right) + Tss$$

El sistema de control automático

Temperatura del agua de salida – Lazo abierto (sin control)



Temperatura del agua de salida – Lazo cerrado (con control)



La ecuación del controlador

- ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN CONTROLADOR PID

$$m(t) = Kc\left[e(t) + \frac{1}{\tau_i}\int e(t)dt + \tau_d \frac{de(t)}{dt}\right]$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathrm{M(s)} = \mathrm{Kc}\left[\mathrm{E(s)} + \frac{1}{\tau_i s}E(s) + \tau_d sE(s)\right]$$

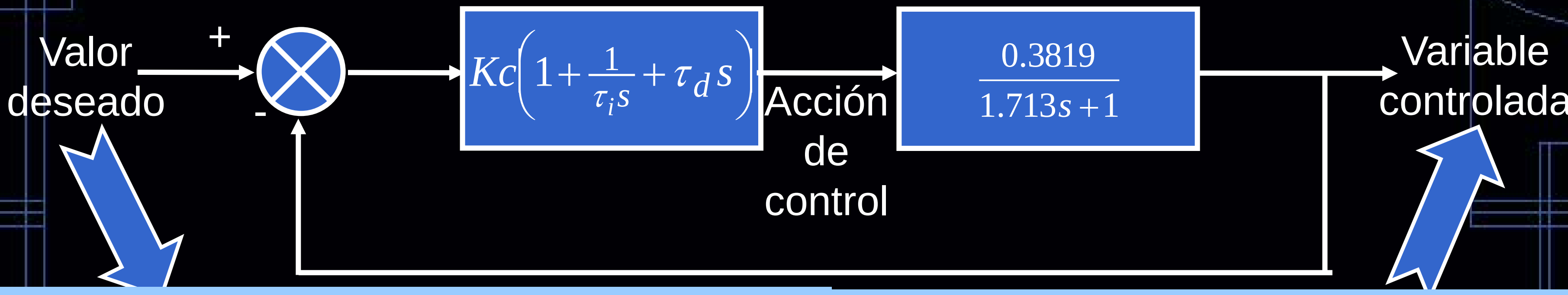
$$\frac{M(s)}{E(s)} = \mathrm{Kc}\left[\mathrm{E(s)} + \frac{1}{\tau_i s}E(s) + \tau_d sE(s)\right]$$

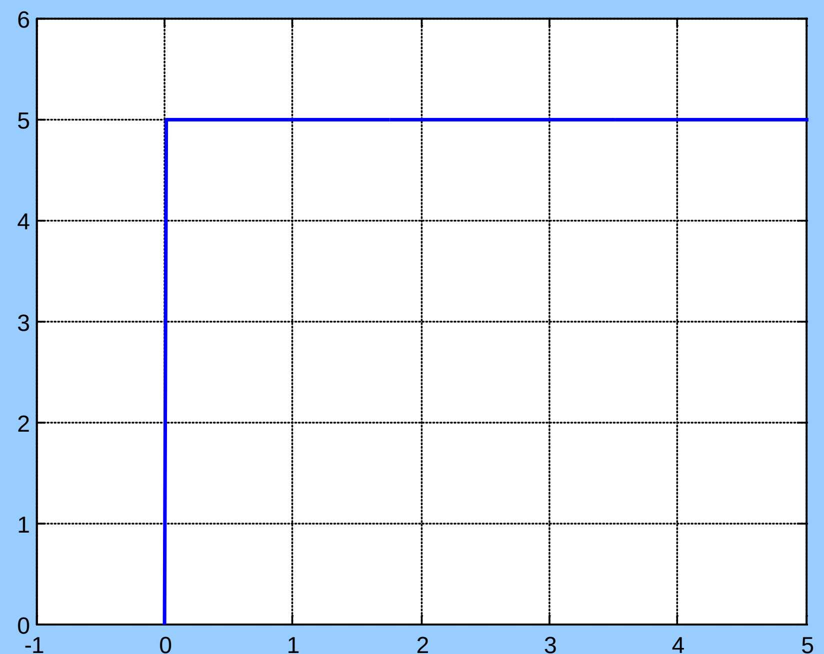
$$\frac{M(s)}{E(s)} = \mathrm{Kc}\left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right]$$

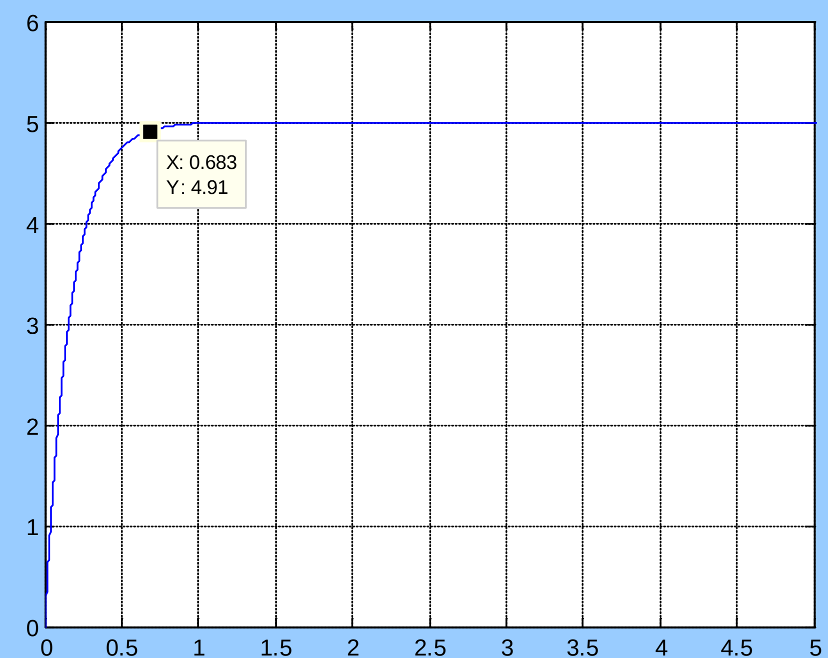
Donde E(s) es la diferencia entre el valor deseado y el valor medido

El sistema de control automático

Temperatura de agua a la salida – Lazo cerrado (con control)

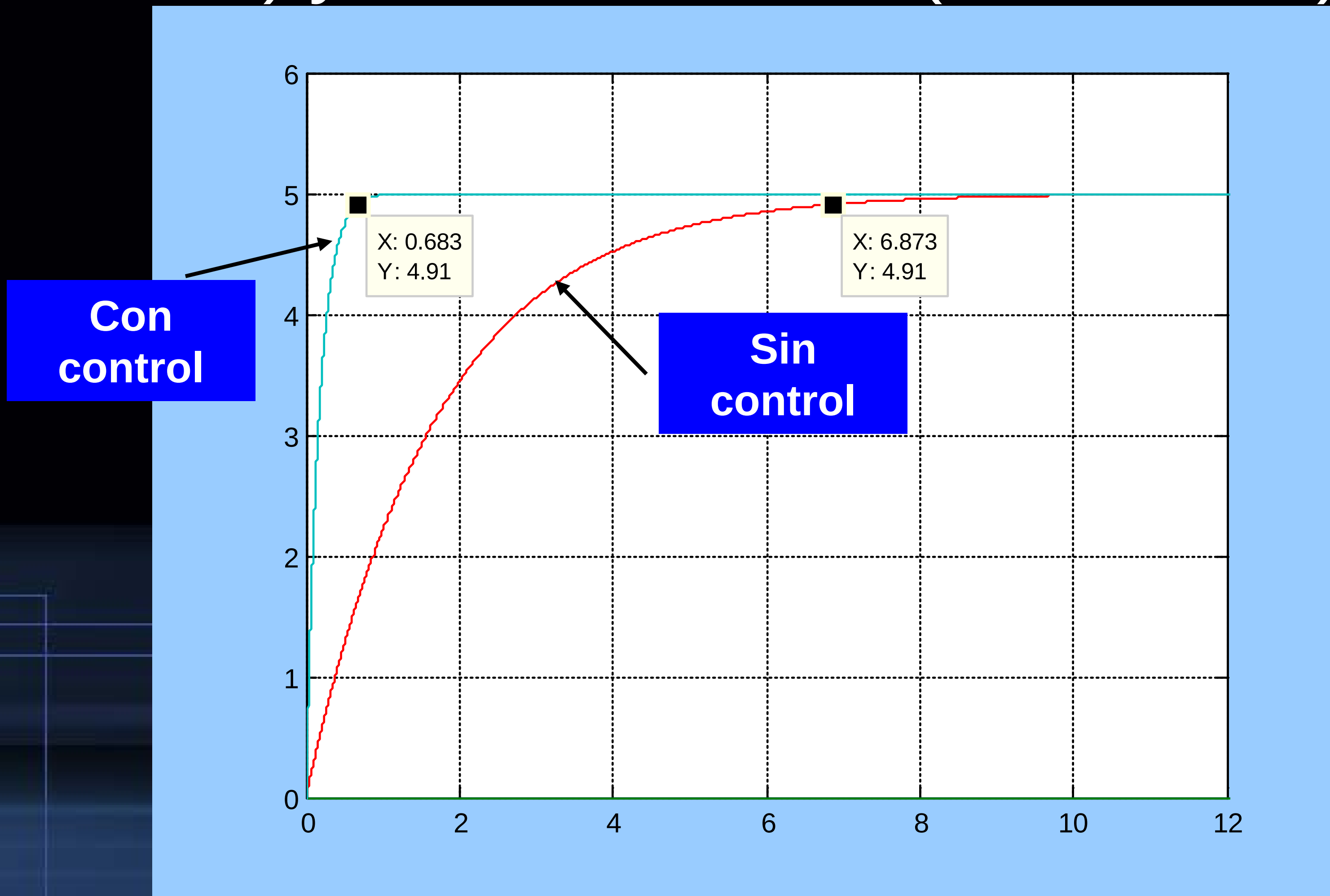






La respuesta del sistema de control de nivel

- Comparación del sistema en lazo abierto (sin control) y en lazo cerrado (con control)



¿ Preguntas ?

Ing. Elvira Niño
Departamento de Mecatrónica y Automatización
enino@itesm.mx
Aulas 7, 3er piso -- LD - 306 - H