Ecuaciones diferenciales

1.1 Modelos en los que aparecen ecuaciones diferenciales

1) **Ley del resorte.** (2^a ley de Newton+Ley de Hooke) La ley del resorte nos da siguiente ecuación

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = f(t)$$

donde $x(t)$ representa la altura del cuerpo que cuelga del muelle, $x'(t)$ nos el término de amortiguación, $x''(t)$ nos da la aceleración del muelle y $f(t)$ las fuerzas externas al muelle que actúan sobre él. Tenemos una ecuación lineal, de segundo orden si $m \neq 0$, no homogénea si $f \not\equiv 0$ y con coeficientes constantes. La ley del resorte no amortiguado nos da la siguiente ecuación

$$mx''(t) + kx(t) = f(t)$$

lineal, de orden 2, no homogénea y con coeficientes constantes. La ley del resorte libre no anortiguado nos da la siguiente ecuación

$$mx''(t) + kx(t) = 0$$

lineal, de orden 2, homogénea y con coeficientes constantes.

2) **Ley de los resortes acoplados.** Esta ley nos la siguiente ecuación

$$mx^{(iv)}(t) + ax''(t) + bx(t) = 0,$$

lineal, de orden 4 si $m \neq 0$, homogénea y con coeficientes constantes.

3) **Teoría de circuitos eléctricos.** Sea un circuito RLC con una resistencia de R Omhios, una inductancia de L Henrios y una capacitancia de F Faradays. Sea $i(t)$ la intensidad de la corriente que circula por el circuito, $v(t)$ el voltaje en bornes de la fuente de alimentación y $q(t)$ la carga que circula por el mismo. Si todos estos componentes pasivos están dispuestos en serie la ecuación que modela este circuito es cualquiera de las siguientes.

$$\begin{aligned} Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)ds &= v(t) \\ Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) &= \frac{dv}{dt}(t) \\ Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) &= v(t) \end{aligned}$$

Observar que la primera ecuación no es exactamente una ED pues aparece una integral pero derivando toda la expresión eliminamos la integral y obtenemos la segunda ecuación. Obtenemos así una EDO, lineal, de orden 2.

4) **Modelo de aprendizaje.** El proceso de aprendizaje de un individuo viene modelado por la ED

$$\frac{y'(t)}{y^{3/2}(t)(1-y(t))^{3/2}} = \frac{2\rho}{\sqrt{\nu}}$$

donde $y = y(t)$ representa la evolución del aprendizaje en función del tiempo, y donde ρ y ν son constantes asociadas a cada individuo. La ecuación se puede escribir en forma normal como sigue

$$y'(t) = \frac{2\rho}{\sqrt{\nu}} y^{3/2}(t)(1-y)^{3/2}(t).$$

En este caso tenemos que la ecuación es una EDO, no lineal, de orden 1.

5) **Modelo de caida libre.** Si lanzamos hacia arriba un cuerpo desde una altura h_0 y denotamos por $h = h(t)$ la altura a la que se encuentra el cuerpo en el instante t, la ecuación que verifica h es la siguiente

$$h''(t) = -g,$$

donde $g = 9.8m/s^2$ y donde tomamos $-g$ porque hemos lanzado el cuerpo hacia arriba y por tanto la aceleración es negativa. Tenemos así una EDO, lineal, de orden 2.

6) **Modelos de crecimiento de la población.** El modelo más sencillo de población es el *modelo Malthusiano* en el que sin contar con factores externos a la propia población, el ritmo de crecimiento es proporcional a la población existente en cada momento. Según esto se plantea que si $P = P(t)$ es la población el instante t, la evolución de la población cumple la siguiente ecuación.

$$P'(t) = KP(t)$$

cuya solución conocemos y es $P(t) = P_0 e^{(t-t_0)K}$. Aquí tenemos una EDO, lineal, y de orden 1.

El tiempo demostró que este modelo no es del todo correcto y no respondía a los datos reales de población, por lo que hubo que modificarle introduciendo algún término que tuviese en cuenta los asesinatos, epidemias, muertes no naturales, emigraciones, especies en competencia,...De esta manera se planteó el **modelo logístico**, no lineal, desarrollado por Verhulst sobre 1840, y en el que plantea que la evolución de la población cumple la siguiente ecuación.

$$P'(t) = aP(t) - bP^2(t)$$

y cuya solución es de la forma

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a-b)e^{-at}}.$$

Aquí tenemos una EDO, no lineal, y de orden 1.

7) **Problema del péndulo.** Vamos a formular un modelo que nos permita describir el movimiento de un péndulo. Para ello, sea $s = l\theta$, donde l es la longitud del péndulo, y $\theta = \theta(t)$ el ángulo que describe en la oscilación. La aceleración angular vendrá dada por $a(t) = l\theta''(t)$, quedando la ecuación que describe el movimiento de la siguiente forma

$$\theta(t) = -\frac{g}{l}\sin(\theta(t)),$$

EDO no lineal, y de orden 2.

Pero esta ecuación no es lineal. En general estos modelos son más complicados de estudiar y de resolver por lo que suponiendo que la oscilación es suficientemente pequeña, podemos tomar un infinitésimo equivalente para el $\sin(\theta)$, que puede ser θ, quedando una EDO, lineal, y de orden 1, de la siguiente forma

$$\theta(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0.$$

8) **Astronomía.** En el estudio del equlibrio de gravitacional de una estrella, la ley de Newton y de Stefan-Boltzman (para gases), se plantea la siguiente ecuación

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}(r)\right)\right) = 4\pi\rho G,$$

donde r representa la distancia del centro a la superficie de la estrella, $P = P(r)$ la presión cinética del gas más la presión de radiación, ρ la densidad de la materia, y G la constante de gravitación universal.

Tenemos una EDO, lineal, de segundo orden.

9) **Modelos físicos.** Las siguientes ecuaciones representan diferentes modelos físicos muy utilizados.

- La ecuación de Laplace:

$$a^2\Delta u = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0,$$

donde $u = u(t, x, y, z)$, es una EDP, de orden 2. A la expresión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

se le llama **Laplaciano** de u y se le denota por Δu.

- La ecuación que modela la difusión del calor en un cuerpo es la siguiente

$$a^2\Delta u = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t},$$

donde $u = u(t, x, y, z)$ representa la temperatura del cuerpo en el punto (x, y, z) en el instante t. Tenemos así una EDP, de orden 2.

- La ecuación de ondas tridimensional: El comportamiento de una onda que se transmite enun cuerpo viene modelado por la ecuación

$$a^2\Delta u = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde $u = u(t, x, y, z)$ representa la amplitud de la onda en el punto (x, y, z) en el instante t. Tenemos así una EDP, de orden 2.