CÁLCULO Curso 2013-2014

TEMA1.- CÁLCULO INTEGRAL DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

INTEGRALES INDEFINIDAS

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

1.- $\int \sin x \cos 2x \cos 3x \, dx$

2.- $\int \mathrm{sh}^3 x \, dx$

3.- $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$

4.- $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

5.- $\int x \sin x \, dx$

6.- $\int e^x \cos x \, dx$

7.- $\int \ln x \, dx$

8.- $\int x^3 \cos x \, dx$

9.- $\int \arccos x \, dx$

10.- $\int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

11.- $\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$

12.- $\int \frac{dx}{x^3+1}$

13.- $\int \frac{x^4}{(x^2+4)(x-1)^2} dx$

14.- $\int \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\sin x} dx$

15.- $\int \cos^2 x \, dx$

16.- $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

17.- $\int \frac{dx}{4+5\cos x}$

18.- $\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$

19.- $\int \frac{e^x}{2e^{2x}+2e^x+1} dx$

20.- $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$

21.- $\int \sqrt{4+x^2} \, dx$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $\int \sqrt{x^3}\,dx$

2. $\int \frac{3x^2-2x}{x^3-x^2+3}\,dx$

3. $\int \cos 2x\,dx$

4. $\int (x-2\tan x)\,dx$

5. $\int x\,e^{x^2}\,dx$

6. $\int e^x \cos x\,dx$

7. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

8. $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

9. $\int \frac{1}{4+3x^2}\,dx$

10. $\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $\int (2x+1)(x^2+x+1)\,dx$

13. $\int \sin^4 x \cos x\,dx$

14. $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

15. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

16. $\int \frac{x+1}{x-5}\,dx$

17. $\int 5^x\,dx$

18. $\int \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx$

19. $\int (3-\sin x)\,dx$

20. $\int e^x \sin e^x\,dx$

21. $\int \sin^3 x\,dx$

22. $\int (x+1)\cos(x^2+2x+1)\,dx$

23. $\int \cos^3 3x\,dx$

24. $\int \sec^2(5x+3)\,dx$

25. $\int \tan^2 x\,dx$

26. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

27. $\int \frac{5}{x^2-4x+8}\,dx$

28. $\int \frac{x}{\sqrt{9-2x^4}}\,dx$

29. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$

31. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$

32. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

33. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

34. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

35. $\int 2x\cos(x^2+1)\,dx$

36. $\int \cos^2(x+5)\,dx$

37. $\int \frac{1}{2x+7}dx$

38. $\int x\ln x\,dx$

39. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

40. $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$

41. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

42. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

43. $\int \cos^2 x\,\sin^3 x\,dx$

44. $\int \frac{dx}{\sin x\,\cos x}$

45. $\int \frac{1}{x^2\sqrt[5]{x^2}}dx$

46. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+7}}dx$

47. $\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx$

48. $\int \operatorname{th} x\,dx$

49. $\int \frac{1}{\cos^2 x\tan x}dx$

50. $\int \frac{3x^3+5x}{x^2+1}dx$

51. $\int 2^x 5^x\,dx$

52. $\int \sin(3x+5)\,dx$

53. $\int \operatorname{sh} 2x\,dx$

54. $\int (2x+\cos x)\,dx$

55. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

56. $\int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

57. $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$

58. $\int \sec^4 x\,dx$

59. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$

60. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx$

61. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$

62. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}}dx$

63. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

64 $\int x\,2^{-x}\,dx$

65. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

66. $\int \frac{e^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}dx$

67. $\int 2^{x-5}\,dx$

68. $\int \sin x\cos x\,dx$

69. $\int \frac{1}{2+x^2}dx$

70. $\int 5\cos(3x+1)\,dx$

71. $\int \frac{2x}{1+x^4}dx$

72. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

73. $\int \frac{1}{2+2x+x^2}dx$

74. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

75. $\int \frac{x^3-4x-4}{x^2-x-2}dx$

76. $\int \arctan x\,dx$

77. $\int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

78. $\int (x+2)^3\,dx$

79. $\int \sin 2x\cos 2x\,dx$

80. $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

81. $\int \frac{5^{3x}}{5^{3x}+7}dx$

82. $\int \frac{x+1}{x}dx$

83. $\int e^{2x+2}\,dx$

84. $\int 8^{3x+1}\,dx$

85. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

86. $\int (x+1)\sin(x^2+2x+3)\,dx$

87. $\int \sin^2 2x\,dx$

88. $\int \cos(2x+5)\,dx$

89. $\int \sin^2 x\,dx$

90. $\int (3+3\tan^2 x)\,dx$

91. $\int (3+3\cot^2 x)\,dx$

92. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

93. $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$

94. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$

95. $\int \frac{x^2+3\cos x}{x^3+9\sin x}dx$

96. $\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4}$

97. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

98. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

99. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$

INTEGRALES DEFINIDAS

1.- Verificar que se cumple $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x\, f(x)\,dx$, $a > 0$.

2.- Sea f(x) una función continua. Demostrar que $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$. ¿Qué se puede decir si f(x) es par? ¿Y si f(x) es impar?

3.- Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_5^x \sqrt{e^t + 1}\,dt, \qquad G(x) = \int_{x^2}^{\sin x} \left(1 + \sqrt{t}\right) dt, \qquad H(x) = \int_{-sh(x^3)}^4 \frac{1}{\ln t}dt$$

4.- Sea $f(x)$ una función tal que $f'(x) = \frac{\cos x}{x}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$. Calcular $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)dx$

5.- Sea f(x) definida por $f(x) = 3 + \int_0^x x\frac{1+\sin t}{2+t^2}dt$. Hallar el polinomio P(x) de Taylor de segundo grado en $a = 0$.

6.- Decir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.

i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$

ii) $\frac{d}{dx}\int_{-1}^5 \frac{x^2\,dx}{\ln(x^2+2)} = \frac{x^2}{\ln(x^2+2)}$

iii) $\frac{d}{dx}\int_{-1}^{5x} \frac{t^2}{\ln(t^2+2)}dt = 5\frac{x^2}{\ln(x^2+2)}$

iv) $\frac{d}{dx}\int_{-1}^{\ln x} \frac{t^2}{\ln(t^2+2)}dt = \frac{(\ln x)^2}{\ln((\ln x)^2+2)}$

7.- Estudiar para los diferentes valores de α, la convergencia de las integrales:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{con } a > 0 \qquad\qquad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

8.- Calcular las siguientes integrales:

i) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ii) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ iii) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$

9.- Calcular un valor de $a \in \mathbb{R}$ con a>0 para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 (\ln x + 2x)dx$$

10.- Calcular, justificando todos los pasos las integrales:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2x}}{e^{x}+3e^{-x}}dx$ b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x-x^{2}}$

11.- Calcular el área comprendida entre la curva $y^2 = 2x+1$ y la recta $x-y-1=0$.

12.- Calcular la longitud del arco de la catenaria $y = \operatorname{ch} x$ en el intervalo $[0,2]$.

13.- Hallar el área limitada por la curva $y = x^2$ y su recta normal en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.

14.- Calcular el volumen de un paraboloide originado al rotar en torno al eje OX el arco de la parábola $y^2= 8x$ cuando x se mueve desde x=0 hasta x=4. ¿Qué sucede si gira alrededor del eje OY?

15.- Hallar el volumen del toro engendrado por el círculo $x^2+(y-3)^2 \le 4$ cuando gira alrededor del eje OX.

16.- El recinto limitado por $f(x) = 2-x^2$ y g(x)=1 gira alrededor de la recta y=1. Calcular el volumen del cuerpo así obtenido.

17.- La base de un sólido está limitada por las curvas $x = y^2$ y $x = 3-2y^2$. Calcular su volumen, sabiendo que todas las secciones perpendiculares al eje X son cuadrados.

18.- Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ y su asíntota.

19.- Comprobar que la ecuación $F(x,y,z)=\displaystyle\int_{xy}^{y+z} g(t)\,dt = 0$, donde g es una función real derivable con g(0)=4, define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(0,1,-1)$ y calcular dz en el punto (0,1).

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Sea la función y=f(x) integrable en $\left[a,b\right]$ y que verifica la igualdad f(a+b-x)=f(x). Probar que $\int_a^b x\,f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

2.- Calcular $F'(x)$, en los dos casos: a) $F(x)=\int_x^0 xf(t)dt$ y b) $F(x)=\int_{\ln x}^{2x^2} e^{-t^2}\sin t\,dt$.

3.- Sea $F(x)=\int_0^x \ln^{20}(2+t)\,dt$ definida para todo x $\in\left[0,\infty\right)$. Analizar las siguientes afirmaciones y decir si son verdaderas o falsas razonando las respuestas:

a) $F(0)=\ln^{20}2$

b) $F'(x)=\frac{20}{2+x}\quad x\geq 0$

c) F (x) es creciente en su dominio de definición

4.- Sea $f\colon\left[-1,1\right]\to\mathbb{R}$ una función derivable tal que $\int_{-1}^0 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)dx$. Demostrar que existe un $x_0\in\left(-1,1\right)/\ f'(x_0)=0$.

5.- Sea g(x) una función con derivada segunda continua en [a,b]. Las tangentes a la curva y=g(x) en los puntos de abscisas a y b forman con OX ángulos cuyos valores son π/3 y π/4 respectivamente. Calcular $\int_a^b g''(x)dx$ y $\int_a^b g'(x)\,g''(x)dx$.

6.- Dos hermanas quieren dividir en dos partes iguales un terreno que han heredado. El terreno es el comprendido entre las curvas y=1 e $y=x^2$. Para dividirlo van a utilizar la recta y=a paralela a y=1. Calcular el valor de a.

7.- Existe una función f(x) definida y continua para todo número real x que satisface una ecuación de la forma $\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 t^2 f(t)dt+\frac{x^{16}}{8}+\frac{x^{18}}{9}+C$ con C constante. Encontrar una forma explícita para f(x) y hallar la constante C.

8.- Calcular las derivadas siguientes:

i) $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2\,dx$; ii) $\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2\,dx$; iii) $\frac{d}{dx}\int \sin x^2\,dx$; **iv)** $\frac{d}{da}\int \sin x^2\,dx$

9.- Calcular las siguientes integrales impropias:

$$\text{i) } \int_1^{\infty} (1-x)e^{-x}\,dx \quad \text{ii) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \quad \text{iii) } \int_0^2 \frac{dx}{x^3} \quad \text{iv) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

10.- Se quiere construir un contenedor de papel con forma de tronco de pirámide. Las bases superior e inferior son cuadrados de lados 60cm y 100 cm respectivamente. Calcular la altura que debe tener para que su volumen sea de $1m^3$.

11.- Hallar el volumen de un cono recto si su altura es h y su base una elipse de semiejes a y b.

12.- Utilizando integrales definidas calcular las áreas de los dos recintos en que la parábola $x^2 = 12(y-1)$ divide al círculo $x^2 + y^2 \leq 16$.

13.- a) Calcular el área comprendida entre los recintos:

$$y \leq x^2 + 1,\ y \geq x^2 - 9,\ y \leq 3 - x\ .$$

b) Calcular el área comprendida entre las curvas $4x = 4y - y^2$, $4x - y = 0$

c) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^3$, $y = -x$, $y = 1$

14.- Dada la función $f(x) = 3 - \left|2x - |3-2x|\right|$:

a) Calcular, si es posible, el área del recinto limitado por f(x), $y = 0$ y $x = -1$.

b) Calcular, si es posible, el volumen del cuerpo engendrado al girar el recinto del apartado anterior alrededor de la recta $y = 0$.

15.- Calcular el volumen generado al girar entorno al eje X el recinto limitado por las curvas y=1/x, $x = y^2$, x=4.

16.- El recinto A está limitado por $y = \dfrac{1}{x^2}$ e y=0 para $x \geq 1$.

(i) Calcular el área del recinto A.

(ii) Calcular el volumen del cuerpo obtenido al girar A en torno a OX.

(iii) Calcular el volumen del cuerpo obtenido al girar A en torno a OY.

17.- Encontrar la longitud del arco de la curva $y = \left(r^2 - x^2\right)^{1/2}$ entre $x = 0$ y $x = r$.

18.- Determinar el volumen de una cuña, cortada de un cilindro circular por un plano que, pasando por el diámetro de la base, está inclinado respecto a ella formando un ángulo α, siendo el radio de la base igual a R.

19.- Encontrar el polinomio de orden 1 que mejor aproxime en un entono de 0 a la función

$F(x) = \int_x^{\sin x^2} e^t \sqrt{1-t}\,dt$.

20.- (i) Calcular el área del recinto limitado por las curvas $x = 3 - y^2$ e $y = x - 1$.

(ii) Calcular el área del recinto limitado por $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

21.- a) Calcular el área limitada por $y = x\,e^{-x^2}$, el eje x, la recta $x = 0$ y la recta $x = a$, donde a es la abscisa del punto en el que la función $f(x) = x\,e^{-x^2}$ alcanza el máximo.

b) Hallar el volumen de un sólido sabiendo que su base es un círculo de radio r y que las secciones transversales perpendiculares a la base, son cuadrados.

22.- a) Hallar el área encerrada por la gráfica de $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ entre x=0 y x=4.

b) Se desea construir un polideportivo cuya base sea una elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ y cuyas secciones perpendiculares al eje OX sean triángulos equiláteros. Calcular el volumen que encierra para diseñar la calefacción.

23.- Calcular el volumen de un sólido tal que su base es el recinto limitado por $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2}$, $g(x) = -1 + \dfrac{x}{2}$ y x=0 y cualquier sección perpendicular al eje X es un triángulo equilátero.