Tema 5: Métodos de simplificación

Objetivo:

- Método de las tablas de Karnaugh.
- Método de Quine-McCluskey

INTRODUCCIÓN

- En este capítulo se tratarán las formas de simplificar un circuito digital, es decir, conseguir implementar una función lógica con el mínimo número de puertas
- En todo caso, siempre debemos tener en cuenta que la respuesta del circuito simplificado ante cualquier combinación de las variables de entrada, debe ser la misma que la del circuito sin simplificar.
- Al método de simplificación algebraico ya visto, añadiremos el método de las tablas o mapas de Karnaugh y el de Quine-McCluskey
- El método algebraico, es un método matemático, y el nivel de simplificación dependerá de la experiencia de la persona que realice la simplificación, los otros dos métodos son más mecánicos, aunque también dejan parte de su utilidad a la pericia de la persona que los aplica.

INTRODUCCIÓN

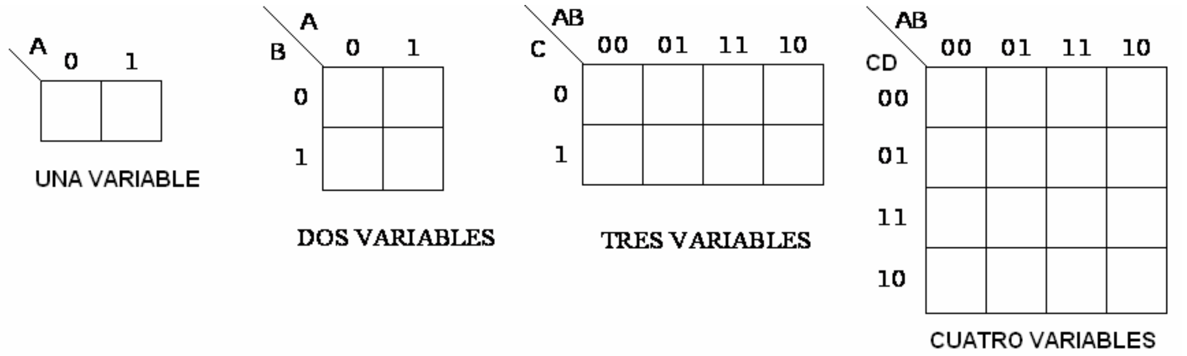
- VENTAJAS DE LA SIMPLIFICACIÓN:
- Reducir el número de puertas utilizadas.
- Reducción de costes.
- Disminuir la posibilidad de tener fallos en la respuesta del circuito.
- Facilita el seguimiento posterior del funcionamiento del circuito y la búsqueda de posible fallos.

KARNAUGH : Introducción

- El método de las tablas de Karnaugh es un método gráfico que utilizaremos para la simplificación de funciones lógicas.
- Aunque el método de las tablas de Karnaugh se puede utilizar para simplificar ecuaciones con cualquier número de variables de entrada, nos limitaremos a ecuaciones de hasta cuatro entradas, ya que para más entradas el método se vuelve engorroso.
- Una tabla de Karnaugh, al igual que las tablas de verdad es un medio para demostrar la relación entre las variables de entrada de un circuito lógico y la salida del mismo.

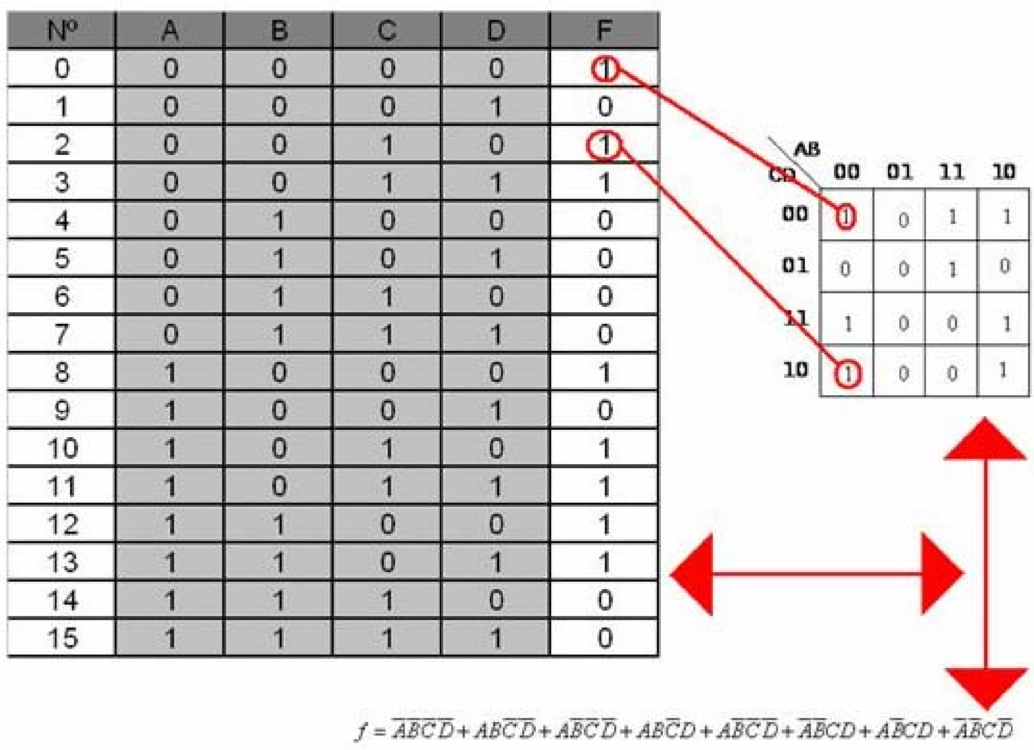
TABLAS DE KARNAUGH

- Externamente, un mapa de Karnaugh consiste de una serie de cuadrados, cada uno de los cuales representa una línea de la tabla de verdad. Puesto que la tabla de verdad de una función de N variables posee 2^N filas, el mapa K correspondiente debe poseer también 2^N cuadrados. Cada cuadrado alberga un 0 ó un 1, dependiendo del valor que toma la función en cada fila.



TABLAS DE KARNAUGH

- En el interior de cada casilla se pone el valor de la función correspondiente, este valor lo puedo obtener de la tabla de verdad o directamente de la función.



Nº	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$$

- Cada una de las filas te la tabla de verdad corresponde a una casilla.
- Dos casillas adyacentes sólo se diferencian en el estado de una sola variable, así como la primera y última fila y columna

Agrupamientos en tablas de karnaugh

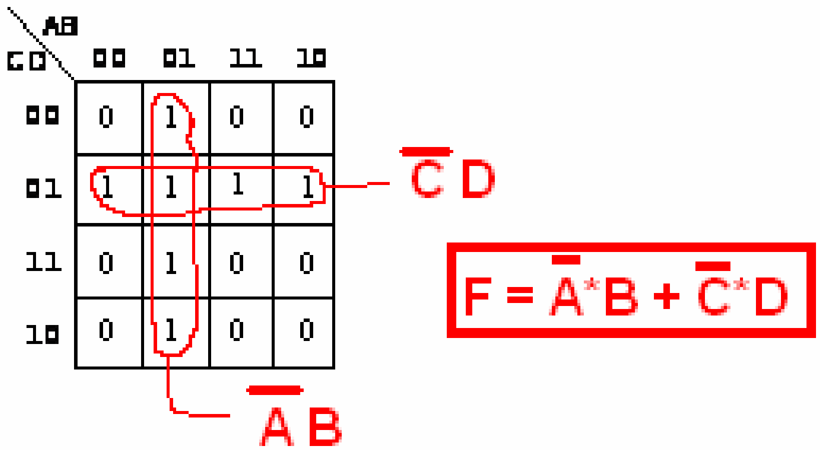
- La simplificación usando mapas de karnaugh se puede hacer de dos formas:
  - Agrupando UNOS.
  - Agrupando CEROS.
- Ambos métodos son similares y consisten en hacer grupos de ceros o unos siguiendo unas reglas muy simples.
- Agrupando unos se obtiene una función simplificada en forma de suma de productos.
- Agrupando ceros se obtiene una función simplificada en forma de producto de sumas.

Agrupamientos en tablas de karnaugh (1/4)

- Simplificación agrupando **UNOS**. REGLAS:
  - Los grupos que creemos deben de tener un número de elementos que sea potencia de 2, es decir, podrán ser grupos de 2, 4, 8 o 16 elementos, y deben ser de casillas adyacentes.
  - Debemos hacer los grupos lo más grandes posibles, con el objetivo de simplificar la función al máximo. Para ello comenzaremos buscando grupos de 16, luego de 8 ..etc.
  - No debe quedar ningún uno sin agrupar, en el caso de no poder agrupar algún uno, este se cogerá sólo.
  - Como ya se ha comentado, las primera y últimas filas y columnas se consideran adyacentes.
  - Los agrupamientos pueden solaparse, es decir, un mismo uno puede pertenecer a varios grupos a la vez
  - Siempre intentaremos hacer el mínimo número de grupos posible y cada grupo lo mayor posible..

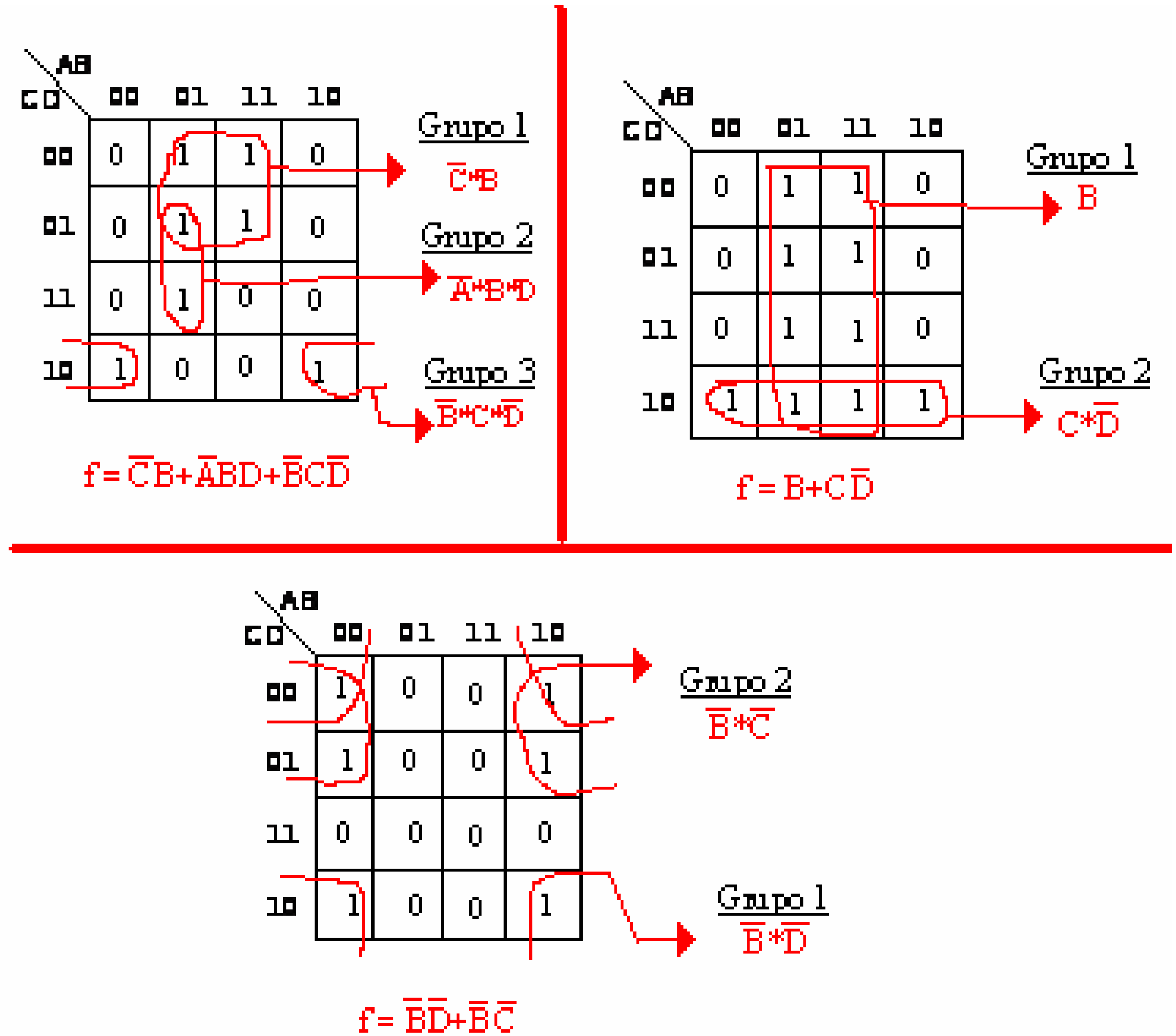
Agrupamientos en tablas de karnaugh(2/4)

- Simplificación agrupando unos. REGLAS:
  - Obtención de la función simplificada:
    - De cada grupo obtendremos un término producto (AND) que se sumará al del resto de los grupos.
    - El término AND de cada agrupamiento se obtendrá de las variables que no varíen en ese grupo, tomando la variable sin negar en el caso de que se mantenga constante a uno en todos los elementos del grupo, y negada en el caso de que se mantenga ig



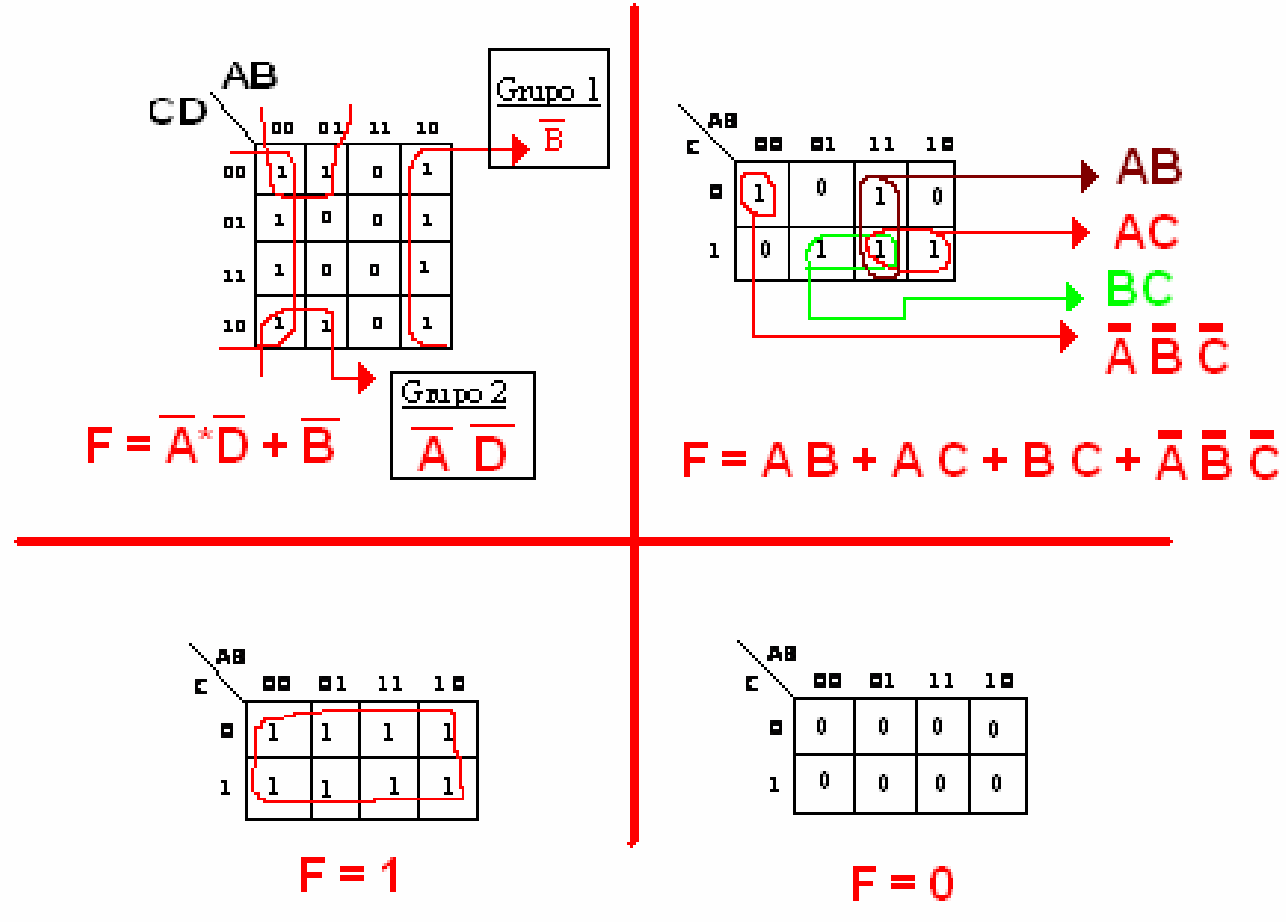
Agrupamientos en tablas de karnaugh(3/4)

- Simplificación agrupando unos. Ejemplos:



Agrupamientos en tablas de karnaugh(4/4)

- Simplificación agrupando unos. Ejemplos:

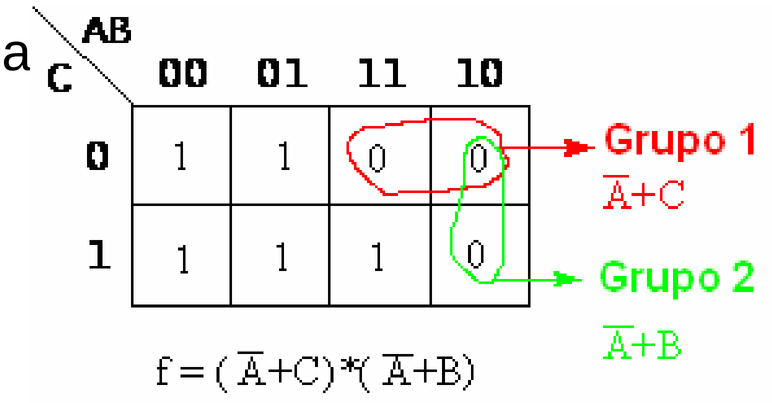


Agrupamientos en tablas de karnaugh (1/2)

- Simplificación agrupando **<u>CEROS</u>**. REGLAS:
  - Los grupos que creemos deben de tener un número de elementos que sea potencia de 2, es decir, podrán ser grupos de 2, 4, 8 o 16 elementos, y deben ser de casillas adyacentes.
  - Debemos hacer los grupos lo más grandes posibles, con el objetivo de simplificar la función al máximo. Para ello comenzaremos buscando grupos de 16, luego de 8 ..etc.
  - No debe quedar ningún cero sin agrupar, en el caso de no poder agrupar algún cero, este se cogerá sólo.
  - Como ya se ha comentado, las primera y últimas filas y columnas se consideran adyacentes.
  - Los agrupamientos pueden solaparse, es decir, un mismo cero puede pertenecer a varios grupos a la vez
  - Siempre intentaremos hacer el mínimo número de grupos posible y cada grupo lo mayor posible..

Agrupamientos en tablas de karnaugh(2/2)

- Simplificación agrupando ceros. REGLAS:
  - Obtención de la función simplificada:
    - De cada grupo obtendremos un término suma (OR) que se multiplicará con el resto de los grupos.
    - El término OR de cada agrupamiento se obtendrá de las variables que no varíen en ese grupo, tomando la variable negada en el caso de que se mantenga constante a uno en todos los elementos del grupo, y sin negar en el caso de que se mantenga igual a



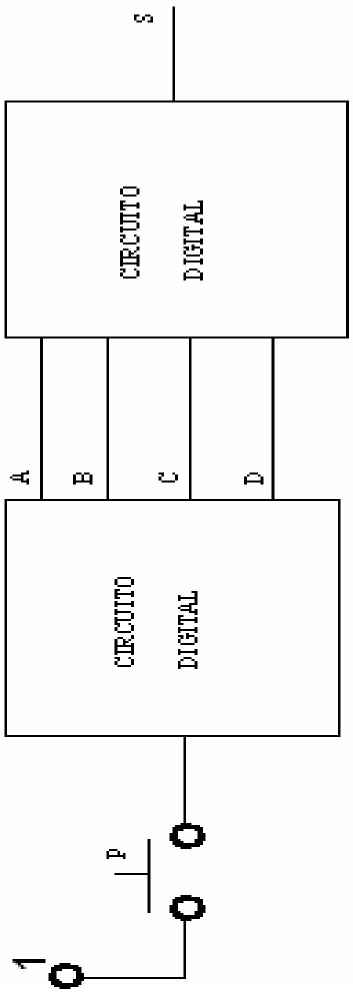
Simplificación conKarnaugh :Términos “NO IMPORTA”

- Términos “No Importa”:
  - **Algunos circuitos lógicos pueden definirse de tal forma que existan ciertas condiciones de entrada para los que no se especifique el nivel lógico deseado a su salida,**
  - **Generalmente esto ocurre cuando dichas condiciones de entrada son imposibles .**
  - **En estos casos, en la celda correspondiente a dicha combinación de entrada colocaremos una “X “.**
  - **A efectos de agrupamientos, estas “X” se tomarán como “0” o como “1” dependiendo en cada caso de lo que mas nos interese para conseguir una mayor simplificación**

Simplificación con Karnaugh :Términos “NO IMPORTA”

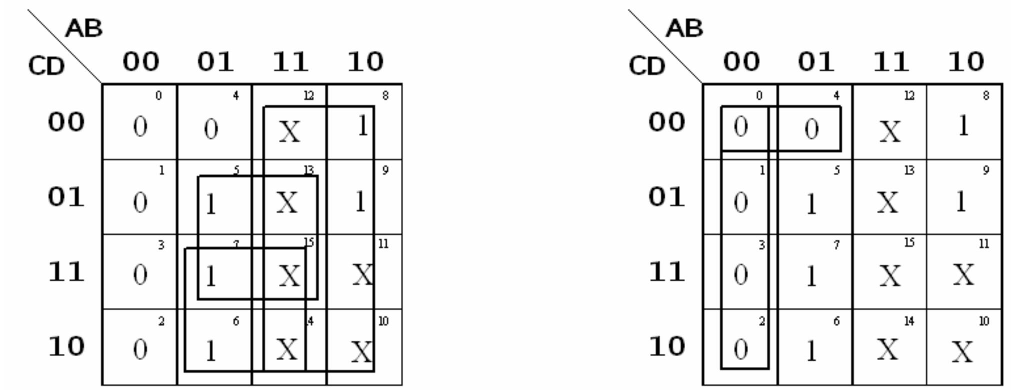
- Ejemplo
  - Disponemos de un circuito contador digital cuya única entrada está conectada a un interruptor P que nosotros podemos pulsar, este circuito posee cuatro líneas de salida (A, B, C, D), el estado lógico de estas salidas será en todo momento el código BCD correspondiente al número de veces que se ha pulsado P, es decir, al principio (A = B = C = D = 0), si pulsamos una vez P, tendremos (ABCD = 0001), una segunda pulsación de P pondría (ABCD = 0010) y así hasta llegar al 9 (ABCD = 1001), en este momento si volvemos a pulsar P, las salidas pasarían a (0000) y comienza de nuevo la cuenta.
  - Diseñar un circuito digital cuya única salida se ponga a uno en el caso de que el código que tengamos en ABCD sea mayor o igual a cinco, y en caso contrario la salida será cero

Simplificación con Karnaugh :Términos "NO IMPORTA"



Nº	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

Simplificación con Karnaugh :Términos “NO IMPORTA”



A continuación haremos la Tabla de Karnaugh.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	X	1
01	0	1	X	1
11	0	1	X	X
10	0	1	X	X

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	X	1
01	0	1	X	1
11	0	1	X	X
10	0	1	X	X

- **Sólo es necesario hacer una de las dos tablas.**
- **En cada una de las dos tablas debemos decidir por separado si cada “x” la tomamos como cero o como uno con el objetivo de hacer el mínimo número de grupos y que cada uno de ellos sea lo mas grande posible.**

Simplificación con Karnaugh :Función Inversa

- **En algunos casos es más fácil implementar el inverso de una función y negar su salida para obtener un circuito más simplificado,**
- **Esta función inversa la podemos obtener también a partir la las tablas de Karnaugh agrupando ceros, pero a diferencia del método comentado para la agrupación de ceros, en este caso la función la obtendremos como suma de productos, y tomando las variables sin negar en el caso de que valgan uno, y negadas en el caso de que valgan cero.**

Simplificación con Karnaugh :Función Inversa

CD \ AB	00	01	11	10
00	^{0} 0	^{4} 0	^{12} X	^{8} 1
01	^{1} 0	^{5} 1	^{13} X	^{9} 1
11	^{3} 0	^{7} 1	^{15} X	^{11} X
10	^{2} 0	^{6} 1	^{14} X	^{10} X

$\overline{f} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$

La ecuación obtenida mediante este método es la complementaria,

para obtener la función debemos negar la salida obteniendo así la expresión de f

$$\overline{f} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} \rightarrow f = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}}$$

$$f = (A + B)(A + C + D)$$

Quine-McCluskey : Introducción

- **Cuando las ecuaciones tienen 5 ó más variables es complicado utilizar mapas de Karnaugh siendo el método de Quine-McCluskey el más idóneo.**
- **La simplificación por este método se lleva a cabo a través de una serie de operaciones mecánicas para lo que vamos a coger un ejemplo.**

$$f = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d + \overline{a}\cdot b\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot b\cdot c\cdot d +$$

$$+ a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot d + a\cdot\overline{b}\cdot c + a\cdot b\cdot\overline{c} + a\cdot b\cdot c\cdot d$$

Quine-McCluskey

- **1º Paso: Todos los términos de la ecuación lógica deben de contener todas las variables; por ello examinaremos la ecuación y en aquellos términos en los que falte alguna variable lo multiplicaremos por el término , donde es dicha variable; esta operación no afecta a la función ya que realmente estoy multiplicando por 1 (A*1=A)**

$$f = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d +$$

$$+\overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}\cdot\color{red}{(d+\overline{d})}\color{black}{} + \overline{a}\cdot b\cdot c\cdot d + a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot d +$$

$$+a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\color{red}{(d+\overline{d})}\color{black}{} + a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot\color{red}{(d+\overline{d})}\color{black}{} + a\cdot b\cdot c\cdot d$$

$$f = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\overline{d} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d} + \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d + \overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}\cdot d + \overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}\cdot\overline{d} + \overline{a}\cdot b\cdot c\cdot d + a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot d +$$

$$a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot d + a\cdot\overline{b}\cdot c\cdot\overline{d} + a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot d + a\cdot b\cdot\overline{c}\cdot\overline{d} + a\cdot b\cdot c\cdot d$$

Quine-McCluskey

- **2º Paso:** Realizaremos la tabla de verdad para aquellas combinaciones de entrada para los que la función vale 1, y a esta tabla de verdad le añadimos un par de columnas en las que indicaremos el valor decimal de la combinación de entrada y el índice, entendiendo por índice un número que indicará la cantidad de unos que posee cada combinación de entrada (p.ej, el índice de 1010 será 2 porque tenemos dos unos).
- Posteriormente ordenamos la tabla por orden de índices

Quine-McCluskey Tabla 1

Indice	A	B	C	D	F	Nº
0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	2
2	0	0	1	1	1	3
2	0	1	0	1	1	5
1	0	1	0	0	1	4
3	0	1	1	1	1	7
2	1	0	0	1	1	9
3	1	0	1	1	1	11
2	1	0	1	0	1	10
3	1	1	0	1	1	13
2	1	1	0	0	1	12
4	1	1	1	1	1	15

Quine McCluskey Tabla2

Nº	A	B	C	D	Indice	Marcador
0	0	0	0	0	0	*
2	0	0	1	0	1	*
4	0	1	0	0	1	*
3	0	0	1	1	2	*
5	0	1	0	1	2	*
9	1	0	0	1	2	*
10	1	0	1	0	2	*
12	1	1	0	0	2	*
7	0	1	1	1	3	*
11	1	0	1	1	3	*
13	1	1	0	1	3	*
15	1	1	1	1	4	*

Quine-McCluskey

<u>3º Paso:</u> Se forma otra lista combinando los términos de la lista anterior, regla:

"Los términos a combinar no deben diferir entre sí más que en el estado de una de las variables, dicha variable se sustituirá por un guión"

En esta nueva tabla rellenamos de nuevo la columna de índice, y ya podemos rellenar la columna marcador de la tabla anterior marcando aquellas casillas cuyos elementos han sido cogidos en alguno de la actual tabla

Términos Combinados (Valor decimal)	Combinación A B C D	Indice	Marcador
(0,2)	0 0 - 0	0	
(0,4)	0 - 0 0	0	
(2,3)	0 0 1 -	1	*
(2,10)	- 0 1 0	1	*
(4,5)	0 1 0 -	1	*
(4,12)	- 1 0 0	1	*
(3,7)	0 - 1 1	2	*
(3,11)	- 0 1 1	2	*
(5,7)	0 1 - 1	2	*
(5,13)	- 1 0 1	2	*
(9,11)	1 0 - 1	2	*
(9,13)	1 - 0 1	2	*
(10,11)	1 0 1 -	2	*
(12,13)	1 1 0 -	2	*
(7,15)	- 1 1 1	3	*
(11,15)	1 - 1 1	3	*
(13,15)	1 1 - 1	3	*

- En aquellas filas cuya combinación de entrada se repita, podemos quedarnos con un solo representante de dicha combinación

Quine-McCluskey

<u>4º Paso:</u> Se repetirá el paso anterior mientras sea posible combinar elementos, en nuestro caso la nueva tabla quedaría de la siguiente forma:

Términos Combinados (Valor decimal)	Combinación				Indice	Marcador
	A	B	C	D		
(2,3),(10,11)	-	0	1	-	1	
(2,10),(3,11)	-	0	1	-	1	
(4,5),(12,13)	-	1	0	-	1	
(4,12),(5,13)	-	1	0	-	1	
(3,7),(11,15)	-	-	1	1	2	
(3,11),(7,15)	-	-	1	1	2	
(5,7),(13,15)	-	1	-	1	2	
(5,13),(7,15)	-	1	-	1	2	
(9,11),(13,15)	1	-	-	1	2	
(9,13),(11,15)	1	-	-	1	2	

Quine-McCluskey

<u>4º Paso:</u> Se repetirá el paso anterior mientras sea posible combinar elementos, en nuestro caso la nueva tabla quedaría de la siguiente forma:

Términos Combinados (Valor decimal)	Combinación A	B	C	D	Indice	Marcador
(2,3),(10,11)	-	0	1	-	1	
(2,10),(3,11)	-	0	1	-	1	
(4,5),(12,13)	-	1	0	-	1	
(4,12),(5,13)	-	1	0	-	1	
(3,7),(11,15)	-	-	1	1	2	
(3,11),(7,15)	-	-	1	1	2	
(5,7),(13,15)	-	1	-	1	2	
(5,13),(7,15)	-	1	-	1	2	
(9,11),(13,15)	1	-	-	1	2	
(9,13),(11,15)	1	-	-	1	2	

Términos Combinados (Valor decimal)	Combinación A	B	C	D	Indice	Marcador
(2,3),(10,11)	-	0	1	-	1	
(4,5),(12,13)	-	1	0	-	1	
(3,7),(11,15)	-	-	1	1	2	
(5,7),(13,15)	-	1	-	1	2	
(9,11),(13,15)	1	-	-	1	2	

Quine-McCluskey

<u>5º Paso:</u> Seguiremos con este proceso hasta que no sea posible hacer mas combinaciones, en nuestros caso.

<u>6º Paso:</u> Una vez obtenida una tabla que no puedo simplificar, diseñaremos una nueva tabla con los elementos que no tienen marcador en todas las tablas de las que disp

Términos Combinados (Valor decimal)	Combinación				Indice
	A	B	C	D	
(0,2)	0	0	-	0	0
(0,4)	0	-	0	0	0
(2,3),(10,11)	-	0	1	-	1
(4,5),(12,13)	-	1	0	-	1
(3,7),(11,15)	-	-	1	1	2
(5,7),(13,15)	-	1	-	1	2
(9,11),(13,15)	1	-	-	1	2

Quine-McCluskey

7º Paso: A partir de la tabla obtenida en el punto 6 haremos la tabla de implicantes primos, como se muestra a continuación para nuestro ejemplo:

TABLA DE IMPLICANTES PRIMOS

Combinación	0	2	3	4	5	7	9	10	11	12	13	15
0 0 - 0	X	X										
0 - 0 0	X			X								
- 0 1 -		X	X					X	X			
- 1 0 -				X	X					X	X	
- - 1 1			X			X			X			X
- 1 - 1					X	X					X	X
1 - - 1							X		X		X	X

Quine-McCluskey

- Observando la tabla resultante por columnas, debemos buscar aquellas columnas en las que tenemos una sola X, por ejemplo en nuestro caso serán las correspondientes a los valores 9, 10, 12.
- Tomando las “x” el punto anterior, crearemos grupos con el resto de X de sus mismas filas.
- Rellenamos la última fila con * de aquellas columnas en las que ya hemos agrupado alguna

Combinación	0	2	3	4	5	7	9	10	11	12	13	15
0 0 - 0	X	X										
0 - 0 0	X			X								
- 0 1 -		X	X					X	X			
- 1 0 -				X	X					X	X	
- - 1 1			X			X			X			X
- 1 - 1					X	X					X	X
1 - - 1							X		X		X	X
		*	*	*	*		*	*	*	*	*	*

Quine-McCluskey

- Podemos observa fácilmente que aún no hemos cogido ninguna X de los valores 0 y 7, así que deberemos cogerlos en otros grupos, siempre intentando que sea en el mínimo número de grupos posibles.

Combinación	0	2	3	4	5	7	9	10	11	12	13	15
0 0 - 0	X	X										
0 - 0 0	X			X								
- 0 1 -		X	X					X	X			
- 1 0 -				X	X					X	X	
- - 1 1			X			X			X			X
- 1 - 1					X	X					X	X
1 - - 1							X		X		X	X
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Quine-McCluskey

- Resumiendo los grupos que cogemos:

A	B	C	D
1	-	-	1
-	0	1	-
-	1	0	-
0	0	-	0
-	-	1	1

Por lo que la función simplificada quedará de la siguiente forma:

$$f = a \cdot d + \overline{b} \cdot c + b \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{d} + c \cdot d$$