CÁLCULO Curso 2013-2014

TEMA2.- ECUACIONES DIFERENCIALES

1.- Escribir la ecuación diferencial de las líneas definidas por las siguientes condiciones:

a) La pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos es n veces más grande que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.

b) La longitud del segmento de tangente a la curva, comprendida entre el punto de tangencia y el eje de ordenadas, coincide con la del segmento interceptado por la recta en dicho eje.

c) La familia de elipses centradas en el origen.

2.- Escribir mediante ecuaciones diferenciales cada uno de los siguientes principios físicos:

- El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad Q de radio presente.
- La velocidad a la que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire (Ley de Newton)

3.- Obtener las ecuaciones diferenciales asociadas con las primitivas siguientes, siendo A, B y C constantes arbitrarias:

a) $y = \sin(x + A)$ c) $y = Ax^2 + Bx + C$

b) $\ln(Ay) = Bx^3 + C$ d) $y = Ae^x + Be^{2x} + x^2e^x$

4.- Comprobar que cada una de las siguientes expresiones es una solución de la correspondiente ecuación diferencial y clasificar cada una como solución particular o solución general:

a) $y^2(1-x) = x^3$ $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$

b) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x^2e^x$ $y'' - 3y' + 2y = 2e^x(1-x)$

c) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + x - 4$ $y'' - y = 4 - x$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

5.- $3ydx + 2xdy = 0$

6.- $(3x^2y - xy)dx + (2x^3y^2 + x^3y^4)dy = 0$

7.- $3e^x \operatorname{tg} y dx + (2 - e^x)\sec^2 y dy = 0$

8.- $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$

9.- $\left(1+2e^{\frac{x}{y}}\right)dx+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$

10.- $(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$

11.- $(x+2y+7)dx+(2x+4y-5)dy=0$

12.- $y\left(x^2y^2+2\right)dx+x\left(2-2x^2y^2\right)dy=0$

13.- $\left(y+x^2\cos x\right)dx-x\,dy=0$

14.- $(\sin(xy)+xy\cos(xy))dx+x^2\cos(xy)\,dy=0$

15.- $\left(y-xy^2\right)dx-\left(x+x^2y\right)dy=0$

16.- $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{y^2+xy-x^2}$

17.- $\left(xy^2e^{x^2}-y+2\cos x\right)dx-\left(2\operatorname{sen}y+x-ye^{x^2}\right)dy=0$

18.- Consideremos la ecuación diferencial $(x^2+y^2+1)dx-2xy\,dy=0$.

a) Calcular la curva integral que pasa por el punto (1,1)...

b) Encontrar un factor integrante de la forma $f(x^2-y^2)$.

19.- Resolver la ecuación diferencial $\left(5x^2-4xy-y\right)dx+\left(3y-x^2-2x\right)dy=0$, sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu=f(x^2-y)$.

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

20.- $xy'+y=y^2\ln x$

21.- $\sin y\dfrac{dy}{dx}=\cos x\left(2\cos y-\sin^2 x\right)$

22.- $\dfrac{dy}{dx}+2xy+xy^4=0$.

23.- Resolver la ecuación diferencial $\left(1+x^3\right)y'+2xy^2+x^2y+1=0$ sabiendo que admite una solución particular de la forma $y=Kx$.

24.- Sea la ecuación diferencial $y'=\dfrac{2y}{x}+xy^2-x^5$. Calcular una solución particular de la forma $y_1=Kx^2$ y resolver la ecuación haciendo el cambio $z=y-y_1$.

25.- Entre el alumnado de segundo curso se ha difundido el rumor (falso) de que el examen de Ampliación es difícil. Si el número de alumnos/as de segundo es 200 y en dos días se han enterado del rumor 160, ¿cuánto tardarán en enterarse 190 estudiantes, si el rumor se difunde a una velocidad proporcional al número de alumnos/as que NO lo conocen?

26.- Calcular la curva que pasa por el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y tal que para cualquier intervalo [1,x] el área del trapecio curvilíneo limitado por el arco de curva es igual a la razón entre la abscisa x del extremo del intervalo y la ordenada correspondiente.

27.- Resolver la ecuación, $y' = \dfrac{y}{x^2 \ln y - x}$ tomando a y como variable independiente.

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

28.- $(y')^2 - 2xy' + y = 0$

29.- $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 - t\dfrac{dy}{dt} + y = 0$

30.- $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 - (x + 2y + 1)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + (x + 2y + 2xy)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

31.- $y' = \ln(xy' - y)$

32.- $y'' + y' - 6y = 0$

33.- $(D^3 - 4D^2 + 8D)y = 0$

34.- $\left(\dfrac{d^4y}{dx^4} + 5\dfrac{d^2y}{dx^2} - 36\right)y = 0$

35.- ¿Cual debe ser el orden mínimo de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes, para que admita las soluciones x^2e^{3x}, cos 2x, x, e^{3x}?

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

36.- ($D^2 - 3D + 2$)$y = e^x$

37.- $(D^2 + 2D - 3)\, y = x\,(e^{2x} + 1)$

38.- $(D^2 - 2D)\, y = e^x \sin x$

39.- $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+3y=2x^2e^{4x}$

40.- $y''-4y'+13y=e^{-x}-\cos(3x+5)$

41.- $y''-5y'+25y=\sin 3x+2x+3$.

42.- $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{a}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

43.- $y'yy''=(y')^3+(y'')^2$

44.- $y''=\dfrac{1}{2y'}$

45.- Dada la ecuación $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=\dfrac{1}{x}$

a) Efectuar el cambio de variable $x=e^t$.

b) Obtener la primitiva de la ecuación del enunciado.

46.- Dada la ecuación diferencial $y''+4x(y')^3-4e^{-2y}(y')^3=0$

a) Transformarla tomando y como argumento.

b) Integrar la ecuación diferencial del enunciado.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Escribir la ecuación diferencial de cada una de las líneas definidas por las siguientes condiciones:

a) La longitud del segmento de tangente a la curva, comprendida entre el punto de tangencia y el eje de ordenadas, coincide con la del segmento interceptado por la recta en dicho eje

b) La familia de circunferencias de radio fijo r cuyos centros están en el eje de abscisas.

2.- Obtener las ecuaciones diferenciales asociadas con las primitivas siguientes, siendo A, B C y D constantes arbitrarias:

a) $Cy^2=A-x^2$ b) $y=C-\ln(\cos(x+D))$ c) $y=\ln(Ax)+B$

3.- Comprobar que cada una de las siguientes expresiones es una solución de la correspondiente ecuación diferencial y clasificar cada una como solución particular o solución general:

a) $y = 2\sin x$ $\qquad$ $y''+y=0$

b) $y' = 2xy$ $\qquad$ $y = Ce^{x^2}$

c) $\left\{\begin{matrix} C(x-2)y=(x-1)(y+1) \\ y=-1 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ $\qquad$ $y(y+1)+(x-1)(x-2)\dfrac{dy}{dx}=0$

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

4.- $(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$

5.- $x\,dy-y\,dx-(1-x^2)dx=0$

6.- $\left(2x\,\mathrm{sh}\dfrac{y}{x}+3y\,\mathrm{ch}\dfrac{y}{x}\right)dx-3x\,\mathrm{ch}\dfrac{y}{x}dy=0$

7.- $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$

8.- $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0$

9.- $(x+2y+7)dx+(2x+4y-5)dy=0$

10.- $(2x^3+3y)dx+(3x+y-1)dy=0$

11.- $x\,dx+y\,dy+4y^3(x^2+y^2)dy=0$

12.-Resolver la ecuación diferencial $(x^2+y^2+1)dx-(xy+y)dy=0$, sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu=f(x+1)$.

13.- Integrar $(x^2y+y^3-xy)dx+x^2dy=0$, sabiendo que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=x^{-3}f(y/x)$.

14.- Consideremos la ecuación $(x+y^{2x}\ln y)dx+nxy^{2x-1}dy=0$, siendo $n\in\mathbf{N}$.

a) Efectuar el cambio $y=e^z$

b) Calcular el valor de $n\in\mathbf{N}$ para el que la ecuación es exacta y resolverla en este caso.

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

15.- $y'+2xy=2xe^{-x^2}$

16.- $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$

17.- $\dfrac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$

18.- $(x-y-1)\,dx+(4y+x-1)\,dy=0$

19.- $y(2xy+1)dx+x(1+2xy-x^3y^3)dy=0$

20.- $(x\cos(x+y)+\sin(x+y))dx+x\cos(x+y)\,dy=0$, $y(1)=\pi/2-1$

21.- $y\,dx+(2x-ye^y)dy=0$

22.- $x\,dx+y\,dy=(x^2+y^2)dx$

23.- $(2xy+e^y)dx+(x^2+xe^y)dy=0$

24.- La ecuación $P(x,y)dx+\left(x^2+\dfrac{x}{y}\right)dy=0$ admite el factor integrante $\mu=x$. Se sabe además que $\dfrac{\partial P}{\partial x}=3y$ y que $P(0,1)=0$. Se pide: a) Hallar $P(x,y)$ y b) Obtener la curva integral que pasa por $(1,1)$.

25.- Obtener la curva integral de la ecuación $xy'y''-(y')^2-x^3=0$ tal que la recta y=4(x-2) le sea tangente en el punto (2,0).

26.- Resolver la ecuación diferencial $y'=\operatorname{cosec}^2 x+y\operatorname{cotan}x+y^2$ sabiendo que $y=-\operatorname{cotan}x$ es una solución particular

27.- Resolver <u>por dos métodos diferentes</u> la ecuación diferencial $2x^3\,y'=y(y^2+3x^2)$

28.- Dada la ecuación $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}-x$, se pide:

a) Obtener un factor integrante de la forma $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

b) Resolver dicha ecuación, utilizando el factor integrante obtenido en el apartado a)

c) Encontrar un factor integrante distinto del obtenido en el primer apartado.

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

29.- $xy(y')^2-(y^2-x^2)y'-xy=0$

30.- $2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)x+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 x^2=y$

31.- $\tan\ y'=\dfrac{y}{(y')^2}$

32.- $(D^4+6D^3+5D^2-24D-36)y = 0$

33.- $(D^2+3D+2)y = x \sin 2x$

34.- $y''+y'+\dfrac{1}{4}y=e^{-\frac{3}{2}x}(3x-\sin 3x)$

35.- $y''-2y'+5y=2e^{-x}+e^{x}\cos 2x$

36.- $y''+2y'+y=e^{-x}\ln x+\sin 2x$.

37.- Dada la ecuación diferencial $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}+6y=x$

a) Efectuar el cambio de variable $x = e^z$.

b) Obtener la primitiva, y(x), de la ecuación diferencial del enunciado.

38.- Resolver la ecuación diferencial $(xy+x)dx-(x^2+y^2+1)dy=0$ sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu=f(y+1)$.

39.- Resolver $\left(y-x\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

40.- a) Demostrar que la ecuación diferencial asociada a todas las circunferencias de radio R que tienen sus centros sobre la recta y = x es $y=x\pm\dfrac{1+y'}{\sqrt{1+(y')^2}}R$

b) Resolver la ecuación diferencial del apartado anterior dando la solución en forma paramétrica.

41.- Los puntos medios de los segmentos de tangente a una curva comprendidos entre el punto de contacto y el eje OX, describen la parábola $y^2=2x$. Hallar la curva sabiendo que pasa por el punto $(1,2)$.

42.- Resolver $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{3}y=\dfrac{1}{3}(1-2x)y^4$

43.- Hallar la curva que pasa por el punto $(2,-1)$ y es tal que en cada punto (x,y) la pendiente de la tangente vale $\frac{y}{x}(1+xy)$.

44.- Dada la ecuación $x^2(1-x^2)\,dy = \left(-6 + x(x^2+4)y - x^2y^2\right)dx$, se pide:

a) Calcular una solución particular de la forma $y = \frac{k}{x}$

b) Calcular la primitiva.

c) La solución obtenida en el apartado a), ¿es solución singular de la ecuación diferencial?

45.- Resolver la ecuación diferencial $y''' - a\,y'' + y' - a\,y = e^x$ según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

46.- Resolver la ecuación $(1+x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$ si tiene una solución particular de la forma $y = ax + b$

47.- Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = e^{3x} + e^{2x}\sin x$.

48.- Dada la ecuación $(y^3 + Kxy^4 - 2x)\,dx + (3xy^2 + 20x^2y^3 + e^y \operatorname{sen} y)\,dy = 0$ Calcular el valor de K para que la ecuación diferencial sea exacta y encontrar la solución particular que pasa por el punto $Q(1,0)$.

49.- Dada la ecuación $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = \frac{1}{x}$

a) Efectuar el cambio de variable $x = e^t$.

b) Obtener la primitiva de la ecuación del enunciado.

50.- Resolver la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x} + x^2 - 1$.

51.- Resolver la ecuación diferencial $x^2yy'' = (y - xy')^2$ utilizando el cambio de variable $y = e^{\int z(x)dx}$

52.- Emplear la sustitución $y = ue^{\frac{-ax^2}{2}}$ para transformar la ecuación $y'' + 2axy' + a^2x^2y = 0$ y obtener su solución general para los distintos valores de a.

53.- Resolver la ecuación diferencial $y\,y'' + (y')^2 - (y')^3 \ln y = 0$.