TEMA 2.-SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1. Hallar los límites de las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes

- $\sqrt{n^2+an+b}-n$
- $\dfrac{1-\sqrt{\cos 1/n}}{1/n^2}$
- $\dfrac{1+1/2+.......+1/n}{\ln n}$
- $\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$
- $n\left[\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}-1\right]$
- $\left[\dfrac{n^n+ae^n}{n^n}\right]^{(n-1)!\sqrt{n}}$
- $n\left(1-\sqrt[n]{a}\right)$ con $a\neq 0$
- $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+2\ln(1/n)}}$
- $\sqrt[n]{n}$
- $\left(\dfrac{3+2n^2}{3n+n^2}\right)^{\frac{n^3+2n}{n^2-5}}$
- $\dfrac{1+2\sqrt{2}+.......n\sqrt{n}}{n^2}$
- $\dfrac{10^{1/n}-1}{100^{1/n}-1}$

2. Calcular a de modo que valga la unidad el límite de las sucesiones con los siguientes términos generales:

- $5a\ -\ \dfrac{\ln n}{n}$
- $\left(\dfrac{n+a}{n+1}\right)^{2n+3}$
- $n^2\,\mathrm{sen}\dfrac{4a}{n^2+1}$

3. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3+12n^2}-2n\right)$

4. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left[\dfrac{\left(\sqrt{a^2}\right)^{1/n}+\left(\sqrt{ab}\right)^{1/n}+\left(\sqrt{b^2}\right)^{1/n}}{3}\right]^n$

5. Calcular $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5..........}}}}$.

6. Hallar $\lim_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^3+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^3+6}}+.....+\dfrac{1}{\sqrt{n^3+3n}}\right]$

7. Calcular $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{\ln n}$

8. Demostrar que la sucesión definida por el término general $a_n=\dfrac{n}{2n+1}$ es convergente <u>sin calcular su límite</u>.

9. Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n \quad \forall n\geq 1$

¿Es $\{a_n\}$ monótona?, ¿está acotada? , ¿es convergente?

10. Sea $a_1\in R^+\text{-}\{0\}$ y $a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{(a_{n-1})^2} \quad \forall n\geq 2$.

a) ¿Es $\{a_n\}$ monótona?, ¿es convergente?.

b) Demostrar, sin hallar su límite, que $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ es convergente.

11. Calcular $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(a+1)}}$, con a $\in$ R

12. Calcular $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\tan\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\cos n}{\ln(1+\dfrac{1}{n})\ (e^{\frac{1}{n}}+4)}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar los límites de las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes:

- $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}$
- $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...........+\dfrac{n-1}{n^2}$
- $\left(\ln(1+\dfrac{1}{n})\right)^n$
- $\left(a^n+b^n\right)^{1/n}\quad / \quad 0<a\le b$
- $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+.........+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
- $\dfrac{n\,\mathrm{sen}\,n!}{n^2+1}$
- $\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{an^2+7}\qquad \forall\ a>0$

2. Hallar los límites de las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes:

- $n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$
- $\dfrac{\mathrm{sen}(\frac{3}{n})\ln(1+\mathrm{tg}\frac{3}{n})}{\mathrm{arcsen}(\frac{1}{n})\cos\frac{2}{n}}$
- $\dfrac{1^2+2^2+........+n^2}{n^3}$
- $\left(\dfrac{n+3}{n+2}-1\right)^{\frac{kn-1}{3}}\qquad \forall\ k\in\mathbf{R}$
- $n\left(\sqrt{\dfrac{2n-1}{n-1}}-\sqrt{2}\right)$
- $\left(\sqrt{\dfrac{1-n}{1-2n}}\right)^{\frac{2n-1}{1+3n}}$
- $\cos\dfrac{a}{n}\quad \forall\ a\in\mathbf{R}$
- $\dfrac{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+.........+\frac{a_n}{n}}{\ln n}$ siendo $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$
- $\dfrac{(3n^2+1)(1-\cos 1/n)}{(n^2-2)\,\ln(1+(1/n^2))}$
- $n\left(\ln(n+1)-\ln\,n\right)$
- $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
- $n^{\ln\frac{1}{n}}$

3. Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$, siendo:

- $a_n = \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$

- $a_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{i}{i+1}$

4. Calcular $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2..........}}}}$.

5. Hallar a y b tales que $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+a}{n+1}\right)^{2n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{bn+4}$

6. Hallar $\lim_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4}}+.....+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right]$

7. Calcular el siguiente límite $\lim_{n\to\infty}\left[\dfrac{3n^2+4n-7}{5n+3}\right]^{\frac{1}{2n}}$

8. Dada la sucesión de término general $a_n = \sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{n+p}$, ¿es monótona?, ¿está acotada?, ¿es convergente? Justifica las respuestas.

9. Demostrar, sin calcular su límite, que la sucesión cuyo término general es $n\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, es convergente

10. El producto de una sucesión divergente por una acotada es siempre:

a) convergente, b) divergente, c) oscilante, d) convergente o divergente,

e) convergente, divergente u oscilante. Razona la respuesta.

11. Calcula $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{27+\dfrac{2}{n^2}}-3\right)$

12. Sea la sucesión $\{x_n\}$ siendo $x_n = \sqrt{n^2+n^\alpha}-n$, con $n\in N$ y $\alpha\in R$. Calcular los valores de α que hacen que: a) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ b) $\lim_{n\to\infty} x_n$ sea finito.