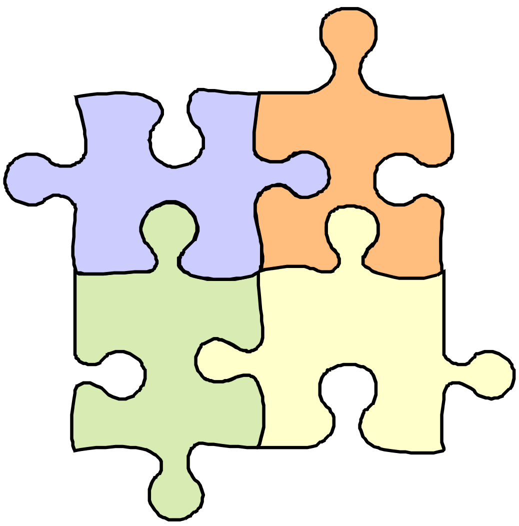
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
VITORIA-GASTEIZ
MATEMATIKA APLIKATUA SAILA

Cálculo

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

TEORÍA



Mª Rosario Resano

TEMARIO

Tema 1. Cálculo integral de funciones reales de variable real

Tema 2. Ecuaciones diferenciales

Tema 3. Transformada de Laplace

Tema 4. Series de Fourier

“No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real”. Nikolay Lobachevsky

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- DE BURGOS, J.”Cálculo Infinitesimal de una variable”.Ed. Mc Graw-Hill.
- DE BURGOS, J. “Cálculo infinitesimal de varias variables” Ed. Mc Graw-Hill.
- LARSON-HOSTETLER “Cálculo y Geometría Analítica” Ed. Mc Graw-Hill.
- PISKUNOV. “Cálculo diferencial e integral” Ed. Reverté.
- GRANERO,F. “Cálculo” Ed. Mc. Graw-Hill
- AYRES “Cálculo diferencial e integral”. Serie Schaum. Ed. Mc Graw-Hill.
- AYRES “Ecuaciones diferenciales” Serie Schaum Ed. Mc Graw-Hill.
- DEMIDOVICH “5000 problemas de Análisis Matemático”.Ed. Thomson
- BERMAN “Problemas y ejercicios de Análisis Matemático”.Ed. Mir
- TEBAR FLORES “Problemas de Cálculo Infinitesimal” Tomos I y II. Ed. Tebar Flores
- SAGARZAZU. “Ecuaciones diferenciales y cálculo integral. Aplicaciones y ejercicios”. Servicio Editorial Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea.
- SAN MARTÍN Y OTROS. “Métodos Matemáticos. Ampliación de Matemáticas para Ciencias e Ingeniería” Thomson Editores.
- KISELIOV, KRASNOV, MAKARENKO. “Problemas de Ecuaciones Diferenciales”. Ed. Mir.
- SPIEGEL. “Transformada de Laplace”. Serie Schaum Ed. Mc Graw-Hill.

BIBLIOGRAFÍA DE PROFUNDIZACIÓN

- SPIVAK “Calculus” Ed. Reverté.
- LINES, E. “Principios de Análisis Matemático”Ed. Reverté
- FERNÁNDEZ VIÑA J.”Ejercicios y complementos de Análisis Matemático”Ed.Tecnos
- SIMMONS, F.”Ecuaciones Diferenciales”. Ed. Mc Graw-Hill.

TEMA 1.- CÁLCULO INTEGRAL DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1. INTEGRAL INDEFINIDA

En este tema nos vamos a plantear el siguiente problema: Dada f(x) tratamos de calcular una función F(x), cuya derivada sea f(x) es decir: F'(x)=f(x)

1.1 Función primitiva e integral indefinida

Definición Se dice que F(x), definida y derivable en el intervalo [a,b], es una *primitiva* de la función f(x) en [a,b], si $\forall x \in [a,b]$ se verifica que F'(x)=f(x).

Si F(x) es una primitiva de f(x) entonces F(x)+K, cualquiera que sea la constante K, es también una primitiva de f. Por tanto, f tiene infinitas primitivas.

Definición. Dada una función f, al conjunto F(x)+K de todas sus primitivas le llamamos *integral indefinida* de f(x) y escribimos

$$\int f(x)dx = F(x) + K$$

A K le llamamos *constante de integración.*

1.2 Propiedades de la integral indefinida

i) $d\left(\int f(x)\ dx\right) = f(x)\ dx$

ii) $\int d\ F(x) = F(x) + K$

iii) $\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\ dx$

iv) $\int k\ f(x)\ dx = k\int f(x)\, dx\ ,\ k \in \mathbf{R}$

Teniendo en cuenta que la diferenciación y la integración son inversas, a partir de las reglas de derivación podemos deducir la siguiente tabla de integrales.

TABLA DE INTEGRALES

Funciones	Simples	Compuestas
Potenciales	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K\ ,\ n \neq -1$	$\int (f(x))^n f'(x) dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + K\ ,\ n \neq -1$
Logarítmicas	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + K$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\lvert f(x)\rvert + K$
Exponenciales	$\int e^x dx = e^x + K$	$\int e^{f(x)} f'(x)\ dx = e^{f(x)} + K$
	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$	$\int a^{f(x)} f'(x)\ dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + K,\ \ a > 0, a \neq -1$
Senos	$\int \cos x = \sin x + K$	$\int f'(x)\ \cos(f(x))\ dx = \sin(f(x)) + K$
Cosenos	$\int \sin\ x = -\cos x + K$	$\int f'(x)\ \sin(f(x))\ dx = -\cos(f(x)) + K$
Tangentes	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx = \tan(f(x)) + K$
	$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + K$	$\int (1 + \tan^2 f(x)) f'(x) dx = \tan f(x) + K$
Cotangentes	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotan} x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))} dx = -\operatorname{cotan}(f(x)) + K$
	$\int (1 + \operatorname{cotan}^2 x) dx = -\operatorname{cotan} x + K$	$\int (1 + \operatorname{cotan}^2 f(x)) f'(x) dx = \operatorname{cotan} f(x) + K$
Arco senos	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \arcsin\ f(x) + K$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + K$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - f^2(x)}} dx = \arcsin \frac{f(x)}{a} + K$
Arco cosenos	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arccos \frac{x}{a} + K$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{a^2 - f^2(x)}} dx = \arccos \frac{f(x)}{a} + K$
Arco tangentes	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + K$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arc}\ \tan(f(x)) + K$
	$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + K$	$\int \frac{f'(x)}{a^2 + f^2(x)} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc}\ \tan(\frac{f(x)}{a}) + K$
Hiperbólicas	$\int \operatorname{sh} x\ dx = \operatorname{ch} x + K$	$\int \operatorname{sh}(f(x)) f'(x)\ dx = \operatorname{ch}(f(x)) + K$
	$\int \operatorname{ch} x\ dx = \operatorname{sh} x + K$	$\int \operatorname{ch}(f(x)) f'(x)\ dx = \operatorname{sh}(f(x)) + K$
	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} dx = \operatorname{th} x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{ch}^2(f(x))} dx = \operatorname{th}(f(x)) + K$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \arg \operatorname{sh} x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \arg \operatorname{sh}(f(x)) + K$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \arg \operatorname{ch} x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}} dx = \arg \operatorname{ch}(f(x)) + K$
	$\int \frac{f'(x)}{1-x^2} dx = \arg\ \operatorname{th} x + K$	$\int \frac{f'(x)}{1-f^2(x)} dx = \arg\ \operatorname{th}(f(x)) + K$

1.3 Métodos de integración

Veamos ahora algunos métodos para el cálculo de integrales indefinidas.

1.3.1 Integración por descomposición

Este método de integración consiste en descomponer, gracias a fórmulas conocidas o deducidas, la integral a resolver en otras más sencillas. Se basa en el carácter lineal de la integral definida.

Integrales que se resuelven por descomposición son por ejemplo:

$$\int \sin ax \ \cos bx \ dx \quad , \quad \int \sin ax \sin bx \ dx \quad , \quad \int \cos ax \cos bx \ dx$$

para lo que se utilizan las siguientes fórmulas:

2 sin A sin B = cos(A-B) - cos(A+B)

2 cos A cos B = cos(A-B) + cos(A+B)

2 sin A cos B = sin(A-B) + sin (A+B)

1.3.2 Integración por cambio de variable

Supongamos que debemos hallar $\int f(x)\,dx$, pero no sabemos obtener de forma inmediata una primitiva de f(x) aunque sabemos que existe. Realizamos un cambio de variable x=g(t), siendo g(t) una función con derivada continua y que tiene función inversa.

Entonces:

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{matrix} \right\} = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

La función x=g(t), hay que elegirla de modo que la integral indefinida a la que da lugar sea de fácil cálculo.

Después de la integración la variable t será sustituida por su expresión en función de x.

1.3.3 Integración por partes

Sean u y v dos funciones diferenciables de la variable x.

Se tiene que d(uv)=u dv + v du, e integrando a ambos lados obtenemos:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

fórmula que se conoce como de *integración por partes*.

En general si f(x) y g(x) son funciones con derivadas continuas, tenemos:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

1.4 Integración de funciones racionales

Llamamos integrales racionales a las de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, siendo P(x) y Q(x) dos funciones polinómicas.

Para estudiar sus métodos de integración supondremos que grado de P(x)<grado de Q(x). Si no fuera así, efectuaríamos la división obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

siendo ahora grado de R(x)< grado de Q(x).

Para integrar funciones racionales tenemos dos métodos fundamentales, el de descomposición en fracciones simples y el de Hermite.

El primer método resulta de mejor aplicación que el segundo, cuando Q(x) no tiene raíces complejas múltiples y tiene pocas raíces reales múltiples. El de Hermite deberá aplicarse cuando Q(x) tenga raíces complejas múltiples e incluso si hay muchas reales múltiples. Veamos aquí el método de descomposición en fracciones simples:

1.4.1 Descomposición en fracciones simples

Si Q(x) tiene raíces reales simples, múltiples y raíces complejas. Su descomposición factorial será:

$$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)^{\alpha} \ldots (x-x_p)^{\beta} \left((x-a_1)^2+b_1^2\right) \ldots \left((x-a_q)^2+b_q^2\right)$$

Entonces la descomposición en fracciones simples se hará:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_\alpha}{(x-x_2)^\alpha} + \ldots +$$
$$+ \frac{D_1}{(x-x_p)} + \frac{D_2}{(x-x_p)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} + \frac{M_1 x + N_1}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \ldots + \frac{M_q x + N_q}{(x-a_q)^2 + b_q^2}$$

donde A, B_1, … B_α, D_1, …, D_β, M_1,…, M_q eta N_1, …,N_q son coeficientes que debemos calcular.

Con esto descomponemos $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ en suma de otras integrales más sencillas, de los tipos:

- $$\int \frac{A}{(x-x_1)} dx = A \ln|x-x_1| + K$$

- $$\int \frac{B}{(x-x_2)^r} dx = \frac{B}{1-r} \frac{1}{(x-x_2)^{r-1}} + K$$

- $$\int \frac{M\ x+N}{(x-a)^2+b^2}\ dx = \int \frac{M(x-a)+Ma+N}{(x-a)^2+b^2} dx = \frac{M}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\ dx\ +$$
  $$+\frac{Ma+N}{b}\int \frac{(1/b)\ dx}{1+\left((x-a)/b\right)^2} = \frac{M}{2}\ \ln\left|(x-a)^2+b^2\right| + \frac{Ma+N}{b}\ \arctan\frac{x-a}{b} + K$$

1.5 Integración de funciones trigonométricas

Son integrales del tipo $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ donde R representa una función racional. En general se resuelven haciendo un cambio de variable:

1) Si R(sin x, cos x) es una función impar en seno.

Si R(-sin x, cos x)=-R(sin x, cos x) el cambio que debemos hacer para resolver la integral es **cos x = t** .

$$\cos x = t \qquad \sin x = \sqrt{1-t^2} \qquad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

2) Si R(sin x, cos x) es una función impar en coseno.

Si R(sin x,-cos x)=-R(sin x, cos x) el cambio adecuado es **sin x = t**.

$$\sin\ x = t \qquad \cos x = \sqrt{1-t^2} \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

3) Si R(sin x, cos x) es par en seno y coseno

Si R(-sin x,-cos x)=R(sin x, cos x) haremos el cambio **tan x = t.**

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos\ x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

4) En cualquier otro caso el cambio adecuado es **tan x/2 = t**.

$$\sin x = \frac{2\ t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2\ dt}{1+t^2}$$

1.6 Integración de funciones racionales en e^x

Son de la forma $\int R(e^x) dx$ donde R representa una función racional.

Haciendo el cambio e^x=t , x=ln t , $dx = \frac{dt}{t}$ la transformamos en una racional.

1.7 Integración de funciones irracionales

No siempre es posible expresar la integral de una función irracional mediante funciones elementales. Estudiemos dos tipos cuyas integrales se pueden reducir, mediante sustituciones adecuadas, a integrales de funciones racionales o trigonométricas que ya sabemos resolver.

1.7.1 Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Este tipo de integrales se reducen a las de funciones racionales mediante los siguientes cambios:

1.) Si a>0 hacemos $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t$. esto es

$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t2 \Rightarrow x = \dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t} \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,\dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}+t$

y por tanto dx también será una función racional de t.

2.) Si a<0 y c<0 haremos $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t$, siendo α una de las raíces reales del trinomio ax^2+bx+c

3.) Si a<0 y c>0 haremos $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\,t + \sqrt{c}$.

1.7.2 Otras integrales irracionales

1) Si son del tipo $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ haremos:

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\sin t \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a\cos t$$

2) Si son del tipo $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ hacemos:

$$\sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos\,t} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a\tan t$$

3) Si son del tipo $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ haremos:

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\ \tan\ t \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a\sec t$$

2. INTEGRAL DEFINIDA

El cálculo infinitesimal nos permite estudiar dos importantes problemas geométricos: encontrar la recta tangente a una curva en un punto y calcular el área limitada por una curva. El primero lo hemos resuelto con anterioridad mediante un paso al límite, conocido como derivación, y el segundo lo vamos a resolver con otro paso al límite, la integración.

Veremos también como estos dos procesos están íntimamente relacionados lo que nos facilitará el cálculo práctico de integrales.

2.1 Integral definida. Definición

Sea f(x) una función continua en [a,b] , y sean m y M el mínimo y máximo que toma la función en dicho intervalo. Efectuamos una partición del intervalo mediante los puntos

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ que verifican $a=x_0<x_1< \ldots <x_n=b$ y llamamos

$\Delta x_1=x_1-x_0$, $\Delta x_2=x_2-x_1$, … , $\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$ designando por m_i y M_i a los valores mínimos y máximos de f en los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ con $i=1,\ldots,n$.

Definimos la *suma inferior*: $s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ y *la suma superior* $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

Ambas sumas dependen de f y de la partición realizada..Además verifican:

$m(b-a) \le s_n \le S_n \le M(b-a)$ por ser $m \le m_i \le M_i \le M$

Si consideramos $\lambda_i \in [x_{i-1},x_i]$ i=1, … ,n y calculamos $f(\lambda_i)$ podemos construir la suma $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i$ que cumple $s_n \le \sigma_n \le S_n$ ya que $m_i \le f(\lambda_i) \le M_i$. Además σ_n depende de la partición elegida y de los puntos λ_i

Designamos por $\max(\Delta x_i)$ a la mayor longitud de los intervalos $[x_{i-1},x_i]$ y consideremos diferentes particiones del intervalo [a,b] de forma que $\max(\Delta x_i) \to 0$.

Entonces, si para cualquier partición de [a,b] tal que $\max(\Delta x_i) \to 0$ cualesquiera que sean los puntos λ_i , la suma $\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i$ tiende a un mismo límite I, se dice que la función f es integrable Riemann en [a,b] y escribimos:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x_i$$

A $I=\int_a^b f(x)\,dx$ se le llama integral definida de f(x) en [a,b] .

Si f(x)>0 y a<b, la integral definida en [a,b] de f(x) mide el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva y=f(x), las rectas x=a y x=b y el eje OX.

<u>Teorema</u>

a) Si f(x) es continua en [a,b] entonces f(x) es integrable en [a,b] .
b) Si $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ es una función monótona, es integrable.
c) Si f(x) está acotada en [a,b] y tiene en ese intervalo un número finito de discontinuidades, entonces es integrable en [a,b].

2.2 Propiedades

1. $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$
2. $\int_a^a f(x)\,dx=0$
3. $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ si existen estas integrales.
4. $\int_a^b K\,f(x)\,dx=K\int_a^b f(x)\,dx \quad , \quad \forall K\in\mathbf{R}$
5. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$
6. Si $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$
7. Si $f(x)\leq g(x)\ \forall x\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$
8. Si M y m son el valor máximo y mínimo respectivamente que toma f(x) en [a,b], entonces
$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$$

2.3 Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow.

<u>Teorema de la media</u>

Si f(x) es continua en [a,b] , entonces existe $c\in[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\,(b-a)$

Geométricamente este teorema nos dice que el área del trapecio curvilíneo coincide con el área de un rectángulo que tiene como base $[a,b]$ y como altura $f(c)$ para un cierto $c\in[a,b]$.

Teorema fundamental del Cálculo Integral

Sea f:[a,b]$\to$**R** integrable y sea $\Phi(x)$ una función definida por:

$$\Phi(x) : [a,b] \to R$$
$$x \quad \mapsto \Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Se verifica:

a) $\Phi(x)$ es continua en [a,b].

b) Si f(x) es continua en [a,b] , entonces $\Phi(x)$ es derivable y $\Phi'(x) = f(x)$ en [a,b].

Este teorema nos asegura que toda función continua admite una primitiva, es decir, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es una primitiva de f(x).

Este teorema se puede generalizar teniendo en cuenta la regla de la cadena:

Si f(x) es continua y h(x) y g(x) son derivables, entonces $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\, dt$ es derivable y su derivada es F'(x)=f(g(x)) g'(x) - f(h(x)) h'(x) .

Regla de Barrow

Si f(x) es continua en [a,b] y F(x) es una función primitiva de f(x) entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big]_a^b$$

El teorema fundamental del cálculo integral relaciona los dos conceptos más importantes del Cálculo: la derivación y la integración.

2.4 Métodos de sustitución y de integración por partes en la integral definida

Cambio de variable

Si f(x) es continua en [a,b] y g(t)$\in C^1[\alpha,\beta]$(g(t) es continua y admite derivada continua en $[\alpha,\beta]$) tal que g(α)=a , g(β)=b y g[α,β]=[a,b] , entonces $\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\, dt$

Integración por partes

Si f(x) y g(x) $\in C^1$[a,b] , entonces $\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx$.

2.5 Integrales impropias

A continuación generalizaremos el concepto de integral a las llamadas impropias.

Diremos que $\int_a^b f(x)\,dx$ es una integral impropia si el intervalo (a,b) no está acotado y/o f(x) no es continua en [a,b] .

2.5.1. Integrales en intervalos no acotados

Son de los tipos: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Supuesta f(x) continua se definen de la siguiente forma:

- $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, si dicho límite existe. Si el límite es finito se dice que la integral *converge* y si es infinito que *diverge*.
- $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, si dicho límite existe. Si el límite es finito se dice que la integral *converge* y si es infinito que *diverge*
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx + \lim\limits_{c\to\infty} \int_b^c f(x)\,dx$, b∈**R**. La integral del primer

miembro se dice convergente si existen y son finitos ambos límites y será divergente si al menos uno de ellos es infinito. En otro caso, se dice que no existe la integral.

2.5.2 Integrales de funciones no acotadas

Sea f(x) una función que tiene alguna discontinuidad en [a,b]. Consideremos los casos siguientes:

* Si f(x) es discontinua en a, la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \text{, si el límite existe.}$$

Si es finito se dice que es *convergente* y si es infinito *divergente*. Si el límite no existe, la integral no existe.

* Si f(x) es discontinua en el extremo superior de integración b, la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se define:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \text{, si este límite existe.}$$

Si es finito se dice que es *convergente* y si es infinito *divergente*. Si el límite no existe, la integral no existe.

* Si f(x) es discontinua en $c \in (a,b)$, entonces la integral impropia se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

Si existen y son finitos ambos límites la integral se dice convergente, si uno al menos es infinito será divergente y en otro caso se dice que no existe la integral.

* Si la función f(x) presenta en [a,b] un número finito de discontinuidades en a_1, a_2, … ,a_n la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se descompone:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx$$

La integral será convergente si converge cada integral impropia del segundo miembro.

Criterios de comparación.

Estos criterios nos permitirán saber si una integral tiene un valor finito o no aunque no sea posible determinar su valor.

1. Si $\forall\ x \geq a$ se verifica que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces la integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente y se verifica que $\int_a^{\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{\infty} g(x)\,dx$.
2. Si $\forall\ x \geq a$ se verifica que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces la integral $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ también diverge.

También se podrían enunciar criterios de comparación para integrales del tipo $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ o de los tipos $\int_a^b f(x)\,dx$ .En todos los casos el integrando debe ser positivo.

2.6 Aplicaciones geométricas

2.6.1 Área de una región plana

* Si la región está limitada por el eje OX las rectas x=a y x=b y la gráfica de una función f(x) continua y positiva en [a,b], entonces su área viene dada por:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

* En las mismas condiciones pero siendo $f(x) \leq 0$ en [a,b] $f(x) \leq 0$, entonces el área es:

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx$$

* Si f(x) cambia de signo una número finito de veces en [a,b], descomponemos la integral en suma de integrales en los intervalos parciales donde la función mantiene el signo. La integral será positiva donde $f(x) \geq 0$ y negativa en los que $f(x) \leq 0$. Para obtener el área total es preciso hallar la suma de los valores absolutos de las integrales en los intervalos parciales indicados o bien calcular:

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

* Si en [a,b] $g(x) \leq f(x)$ entonces, el área limitada por las curvas f(x) y g(x) y las rectas x=a y x=b viene dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

* Si f(x) y g(x) se cortan, el área limitada por ellas será:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

* El área del trapecio curvilíneo limitado por el eje OY las rectas, y=c e y=d y la curva x=g(y) viene dado por:

$$A = \int_c^d |g(y)|\, dy$$

2.6.2 Longitud de un arco de curva

Sea la curva y=f(x) derivable y con derivada continua en [a,b]. La longitud del arco AB de dicha curva, limitado por los puntos A(a,f(a)) y B(b,f(b)) viene dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$$

2.6.3 Cálculo de volúmenes

* <u>Volumen de un cuerpo por secciones planas.</u> Consideremos un cuerpo que al ser cortado por un plano perpendicular al eje OX da lugar, en cada punto de abscisa x, a una sección de área A(x) , siendo A(x) una función continua. El volumen de dicho cuerpo es:

$$V_x = \int_a^b A(x)\ dx$$

Del mismo modo se puede calcular el volumen a partir de secciones perpendiculares al eje OY o al eje OZ:

$$V_y = \int_c^d A(y)\ dy \qquad , \qquad V_z = \int_e^f A(z)\ dz$$

*<u>Volumen de un cuerpo de revolución.</u> Si se hace girar una arco de la curva y=f(x) limitado por las rectas x=a y x=b alrededor del OX, con f(x) continua en [a,b] , se genera un sólido de revolución cuyas secciones perpendiculares al eje OX son círculos de radio $|f(x)|$, cuya área es A(x) = $\pi\ f^2(x)$. Por tanto el volumen del sólido es:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\ dx$$

Si la curva x=g(y) gira en [c,d] alrededor de OY, el volumen del sólido generado viene dado por:

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2\ dy$$

2.6.4 Área de un cuerpo de revolución

Sea y=f(x) con f(x) derivable y con derivada continua en [a,b]. El área de la superficie de revolución generada al girar la curva alrededor de OX viene dada por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\ dx$$

Si la curva x=g(y) con g(y) derivable, con derivada continua en [c,d] gira alrededor de OY, el área del sólido de revolución generado viene dada por:

$$A = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\ dy$$

NOTA

En las integrales definidas que aparecen en todas las aplicaciones geométricas, suponemos que las funciones integrando deben ser todas positivas ya que las magnitudes que estamos calculando son positivas o nulas.

TEMA 2.- ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1. Introducción

Hasta ahora hemos estado encontrándonos con ecuaciones que, en su mayoría, surgían de la necesidad de obtener valores numéricos concretos para ciertas magnitudes. Buscábamos raíces de polinomios, máximos de funciones y en general nos preocupaban los problemas a los que encontrar soluciones numéricas. Pero, aquí no terminan las necesidades en la aplicación de las matemáticas. Así, por ejemplo, si queremos calcular la trayectoria de los proyectiles o el curso de reacciones químicas, vamos en busca de funciones que son ahora nuestras incógnitas. Si podemos plantear ecuaciones de las que deducir las funciones desconocidas, a estas ecuaciones las llamaremos <u>ecuaciones funcionales</u>.

Podemos encontrarnos muchos tipos de ecuaciones funcionales, pero en este momento nos dedicaremos a una importante clase de éstas, <u>las ecuaciones diferenciales</u>.

Se llama ecuación diferencial a una ecuación funcional en la que, además de la función desconocida, aparecen también sus derivadas de diferentes órdenes.

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales son:

$$\frac{dy}{dx} = 3x + 2 \ ; \ (y''')^2 + 3(y'')^3 + y = 2 \ ; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy; \ \operatorname{tg} y' = \frac{y}{(y')^2}$$

Es fácil comprender la enorme importancia que han alcanzado las ecuaciones diferenciales si se tiene en cuenta que la investigación de muchos de los problemas de la física y de la tecnología se reducen a la solución de este tipo de ecuaciones, y que con ellas se han conseguido grandes progresos en la mecánica, astronomía, etc...

Cualquier ecuación diferencial define no una, sino un número infinito de funciones que la satisfacen. El problema fundamental, al que vamos a dedicar nuestro estudio, es el buscar las funciones que satisfacen a una ecuación diferencial.

Dentro de las ecuaciones diferenciales podemos distinguir dos grandes bloques:

Si la función desconocida depende de una única variable, la ecuación se denomina <u>ecuación diferencial ordinaria</u>. Si la función desconocida depende de dos o más variables y la ecuación contiene derivadas respecto a alguna o a todas las variables, la ecuación recibe el nombre de ecuación en derivadas parciales.

Ahora, centraremos nuestro estudio en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. Definiciones

Llamaremos **ecuación diferencial ordinaria** a una relación del tipo $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$, es decir una ecuación en la que interviene una variable independiente x, una función incógnita y, y varias derivadas de una respecto de la otra.

Ejemplos:

· $\frac{dy}{dx} = 3x + 2$ (1)

· $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ (2)

· $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3y = x + 1$ (3)

Se llama **orden** de la ecuación diferencial al orden de la derivada superior que interviene en la ecuación. Así las ecuaciones (1) y (3) son de primer orden y la (2) es de tercer orden.

Llamaremos **grado** de una ecuación diferencial, que puede escribirse como un polinomio respecto a las derivadas, al grado de la derivada de mayor orden que interviene en ella. Las ecuaciones (1) y (2) son de grado uno y la (3) de grado dos.

Toda función $y = f(x)$ que sustituida en la ecuación, la transforma en una identidad, se llama **solución o integral** de la ecuación diferencial.

El problema fundamental en las ecuaciones diferenciales consiste en encontrar su **primitiva**, esto es, encontrar una relación entre las variables conteniendo n constantes arbitrarias, si n es el orden de la ecuación diferencial, que, junto con sus derivadas satisfaga la ecuación.

A la primitiva se le llama **solución general o integral general** de la ecuación diferencial.

Las funciones que se obtienen de la solución general, dando valores definidos a las constantes arbitrarias, se denominan **soluciones particulares**.

Desde el punto de vista geométrico, la solución general representa una familia de curvas y una solución particular es la ecuación de una de esas curvas. Estas curvas se llaman **curvas integrales**.

A veces hay soluciones de la ecuación diferencial que no se pueden obtener de la solución general dando valores a las constantes arbitrarias, estas soluciones se llaman **soluciones singulares**.

Ejemplo: Dada la ecuación diferencial $y^2\left(1+\left(y'\right)^2\right)=r^2$, su solución general o primitiva es $(x-C)^2+y^2=r^2$, que representa la familia de circunferencias cuyos centros están sobre el eje de abscisas y su radio vale r.

Una solución particular sería $(x-2)^2+y^2=r^2$, que se obtiene de la primitiva dando a la constante arbitraria el valor 2.

Las funciones $y=\pm r$ también satisfacen la ecuación diferencial, pero no se pueden obtener de la primitiva. Son soluciones singulares.

3. Ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado

Una ecuación diferencial de primer orden tiene la forma general $f(x,y,y')=0$.

Toda ecuación de primer orden y primer grado se puede escribir de la forma
M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0.

Ejemplo: Dada la ecuación diferencial $y'+\dfrac{y+x}{y-2x}=0$, se puede escribir de la forma $(y+x)\,dx+(y-2x)\,dy=0$.

· Puede ocurrir que M(x,y) dx + N(x,y) dy = dμ(x,y) esto es, que sea la diferencial de una función μ(x,y), entonces la ecuación diferencial se llama **ecuación diferencial exacta** y μ(x,y) = C es su primitiva.

Ejemplo: La ecuación diferencial $3x^2y^4dx+4x^3y^3dy=0$ es exacta ya que se cumple que $3x^2y^4dx+4x^3y^3dy=d(x^3y^4)$, y por tanto su primitiva es $x^3y^4=C$.

· Si M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 no es exacta, pero existe una función $f(x,y)$tal que $f(x,y).\left[M(x,y)\,dx\ +\ N(x,y)\,dy\right]$ = 0 es exacta, se dice que $f(x,y)$es un **factor integrante** de la ecuación diferencial.

Y además, si se satisface la igualdad

$f(x,y).\left[\ M(x,y)\ dx\ +\ N(x,y)\ dy\ \right] = d\mu(x,y)$, la primitiva de la ecuación diferencial dada es $\mu(x,y) = C$.

Ejemplo: La ecuación $3xy^2dx + 4x^2ydy = 0$ no es exacta, pero si la multiplicamos por xy^2 se obtiene $3x^2y^4dx + 4x^3y^3dy = 0$ que si es exacta. Su primitiva es $x^3y^4 = C$.

· Si la ecuación no es exacta y no se puede encontrar un factor integrante, es posible que realizando algún cambio de variable se obtenga una ecuación de la que se pueda hallar un factor integrante.

Ejemplo: Dada la ecuación $(2x + 2y - 3)\ dx + (3x + 3y + 2)\ dy = 0$, si hacemos el cambio $x + y = t \Leftrightarrow y = t - x\ ;\ dy = dt - dx$, nos queda la ecuación

$-(t + 5)\ dx + (3t + 2)\ dt = 0$ que admite como factor integrante la expresión F.I.=$\frac{1}{t+5}$.

Después de comentar estos tipos generales, pasemos a estudiar tipos concretos de ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado.

3.1 **Ecuaciones diferenciales de variables separadas y separables**

La ecuación M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 es de variables separables si es posible escribirla de la forma $f_1(x)\ .g_2(y)\ dx+f_2(x).g_1(y)\ dy = 0$.

En este caso se halla fácilmente el factor integrante, que será F.I. = $\frac{1}{f_2(x)g_2(y)}$ y multiplicando a la ecuación diferencial por él, obtenemos $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0$ ecuación en la que las variables están ya separadas.

Para calcular su primitiva basta integrar término a término, obteniendo

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = C$$

Como no siempre se puede dar una regla general para obtener un factor integrante en una ecuación diferencial de primer orden y primer grado, estudiaremos los casos más importantes.

3.2 **Ecuaciones homogéneas**

Sabemos que una función f(x,y) es homogénea de grado n si se verifica que $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

Una ecuación diferencial M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 se dice homogénea si M(x,y) y N(x,y) son homogéneas y del mismo grado.

Ejemplo: $x \ln\frac{y}{x}dx + \frac{y^2}{x}\text{arc sen}\frac{y}{x}dy = 0$ es una ecuación diferencial homogénea ya que M(x,y) y N(x,y) son homogéneas de grado 1.

La transformación $y = v \cdot x$; $dy = v \cdot dx + x \cdot dv$ reduce cualquier ecuación homogénea a la forma P(x,v) dx + Q(x,v) dv = 0 en la que las variables se pueden separar. Después de resolver esta última, se deshace el cambio para volver a las variables originales.

3.3 **Ecuaciones donde M(x,y) y N(x,y) son lineales , pero no homogéneas**

Son ecuaciones de la forma $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$.

Tendremos que distinguir dos casos:

a) Si $a_1b_2-a_2b_1 = 0$, por la transformación a
1x+b1y =t , se reduce a una ecuación diferencial en la que las variables son separables.

b) Si $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$, se reduce a una ecuación homogénea haciendo los cambios x = x' + h e y = y' + k, siendo x = h e y = k soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

3.4 **Ecuaciones de la forma** $\mathbf{y \cdot f(x.y)dx + x.g(x.y)dy = 0}$

La transformación x.y = z ; $y = \frac{z}{x}$; $dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$ reduce una ecuación de este tipo a la forma P(x,z) dx + Q(x,z) dz = 0 de variables separables.

Hay ecuaciones que no pertenecen a ninguno de los tipos que se acaban de ver y que mediante una transformación adecuada se reducen a ecuaciones de variables separadas, pero no es posible dar una regla general para las mismas.

3.5 Ecuaciones diferenciales exactas

Definición

Dada la ecuación diferencial M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 decimos que es exacta si M(x,y) dx + N(x,y) dy = $d\mu(x, y)$

A simple vista no siempre se puede saber si una ecuación diferencial es exacta o no, por ello vamos a ver una caracterización de estas ecuaciones diferenciales.

Teorema

La condición necesaria y suficiente para que la ecuación M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 sea exacta es que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 exacta $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Resolución

A veces dada una ecuación diferencial exacta, una reordenación de sus términos nos sirve para calcular su primitiva.

Ejemplo: Sea $(x^2\text{-}y)$ dx + $(y^2\text{-}x)$ dy = 0, una ecuación diferencial exacta ya que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ = -1.

Si reordenamos sus términos, tenemos x^2 dx + y^2 dy - (y dx + x dy) =0 ,o lo que es lo mismo $d\left(\frac{x^3}{3}\right) + d\left(\frac{y^3}{3}\right) - d(xy) = 0$. Por tanto, integrando término a término obtenemos su primitiva $\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - xy = C$.

Como esto no es siempre posible, veamos un método general para resolver ecuaciones diferenciales exactas.

Si M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 es la diferencial exacta de $\mu(x,y) = C$, se tiene que $d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

Entonces $\frac{\partial \mu}{\partial x}dx = M(x,y)dx$ y $\mu(x,y) = \int_x M(x,y)dx + \Phi(y)$.

Además $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_x M(x,y)dx\right) + \frac{d\Phi}{dy} = N(x,y)$, de donde podemos calcular $\Phi'(y)$ y por tanto $\Phi(y)$, con lo que tendremos $\mu(x,y)$ y en consecuencia la primitiva de la ecuación diferencial.

3.6 **Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas**

Si M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 no es exacta, pero se le puede encontrar un factor integrante decimos que es reducible a exacta.

Veamos ahora algunos factores integrantes:

a) * Si $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$, $e^{\int f(x)dx}$ es un factor integrante .

* Si $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = -g(y)$, $e^{\int g(y)dy}$ es un factor integrante.

b) A veces, después de agrupar convenientemente los términos de la ecuación, se halla un factor integrante al reconocer un cierto grupo de términos formando parte de la ecuación diferencial. Veamos ahora algunos de éstos

Grupo de términos	Factor integrante	Diferencial exacta
x dy - y dx	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
x dy - y dx	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right)$
x dy - y dx	$\frac{1}{xy}$	$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = d\left(\ln\frac{y}{x}\right)$
x dy - y dx	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d(\text{arc tg}\,\frac{y}{x})$
x dy + y dx	$\frac{1}{(xy)^n}$	$\begin{cases} \frac{xdy + ydx}{(xy)^n} = d\left(\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right) & \text{si } n \neq 1 \\ \frac{xdy + ydx}{xy} = d(\ln xy) & \end{cases}$
x dx + y dy	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$	$\begin{cases} \frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)^n} = d\left(\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}}\right) & n \neq 1 \\ \frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)} = d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right) & \end{cases}$

3.7 **Ecuaciones lineales**

La ecuación $\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$, cuyo miembro de la izquierda es lineal tanto en la función como en su derivada, se llama *ecuación lineal de primer orden*.

Ejemplo: $\frac{dy}{dx} + 3xy = \text{sen}\,x$

Dada una ecuación lineal, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right) = \frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}\left[\frac{dy}{dx} + yP(x)\right]$$

y por tanto $e^{\int P(x)dx}$ es un factor integrante y la primitiva de la ecuación es

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

3.8 **Ecuación de Bernouilli**

Llamamos ecuación de Bernouilli a una de la forma $\frac{dy}{dx}+yP(x)=y^nQ(x)$ o también $y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{-n+1}P(x)=Q(x)$.

Esta ecuación se reduce a una lineal de primer orden mediante la transformación

$$\left.\begin{array}{l} y^{-n+1}=v \\ y^{-n}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{-n+1}\dfrac{dv}{dx} \end{array}\right\},\quad \text{quedando}\quad \frac{dv}{dx}+v\,(1-n)\,P(x)=(1-n)\,Q(x)$$

3.9 **Ecuación de Riccati**

Se llama así toda ecuación de la forma $y'=X(x)+X_1(x)y+X_2(x)y^2$.

En general no se reduce a una conocida, aunque si $X(x) = 0$ se nos transforma en una ecuación de Bernouilli.

Ahora bien, si se conoce una integral particular de la ecuación de Ricatti y_1 y haciendo el cambio $y=y_1+\frac{1}{u}$, utilizando u como la nueva variable dependiente y teniendo en cuenta que $y'=y_1'-\frac{u'}{u^2}$ la ecuación se transforma en una lineal de primer orden $u'+\left[X_1(x)+2X_2(x)y_1\right]u+X_2(x)=0$.

4. **Ecuaciones de primer orden y grado superior**

Una ecuación diferencial de primer orden tiene la forma $f(x,y,y')=0$ o bien $f(x,y,p)=0$, donde se ha sustituido y' por p. Si el grado de p es mayor que uno, la ecuación es de primer orden y grado superior.

Una ecuación de primer orden y grado superior se puede escribir de la forma
$p^n + P_1(x,y)\,p^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x,y)\,p + P_n(x,y) = 0$ (1)

A veces estas ecuaciones se pueden resolver por uno o varios de los métodos que vamos a ver. En cada caso el problema se reduce a resolver una o varias ecuaciones de primer orden y primer grado.

4.1 Ecuaciones que se pueden resolver respecto de p

En este caso el miembro de la izquierda de la ecuación (1) , considerado como un polinomio en p, se puede descomponer en n factores reales lineales, es decir , la ecuación se puede poner de la forma

$(p - F_1)(p - F_2)\cdots(p - F_n) = 0$, siendo F_i $i = 1,2, \dots , n$ funciones de x y de y.

Entonces se iguala a cero cada factor y se resuelven las n ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado.

$$
\begin{array}{lcl}
\dfrac{dy}{dx} = F_1(x,y) & \Rightarrow & f_1(x,y,C) = 0 \\
\dfrac{dy}{dx} = F_2(x,y) & \Rightarrow & f_2(x,y,C) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{dy}{dx} = F_n(x,y) & \Rightarrow & f_n(x,y,C) = 0
\end{array}
$$

La primitiva de la ecuación de partida será

$$f_1(x,y,C)\cdot f_2(x,y,C)\cdots f_n(x,y,C) = 0$$

4.2 Ecuaciones que se pueden resolver respecto de y

Si la ecuación puede escribirse $y = f(x,p)$, derivando respecto de x se obtiene

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = F(x,p,\frac{dp}{dx})$$

que es una ecuación de primer orden y primer grado.

Resolviendo ésta última obtenemos su primitiva $\Phi(x,p,C) = 0$.

Para conseguir la primitiva de la ecuación inicial, eliminamos p entre las ecuaciones $y = f(x, p)$ y $\Phi(x, p, C) = 0$.

Si no es posible eliminar p, se pueden dar las ecuaciones paramétricas de la solución expresando x e y, separadamente como funciones del parámetro p.

4.3 **Ecuaciones que se pueden resolver respecto de x**

Si la ecuación puede escribirse $x = f(y, p)$, derivando respecto de y se obtiene

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} = F(y, p, \frac{dp}{dy})$$

que es una ecuación de primer orden y primer grado.

Resolviendo ésta última obtenemos su primitiva $\Phi(y, p, C) = 0$.

Para conseguir la primitiva de la ecuación inicial, eliminamos p entre las ecuaciones $x = f(y, p)$ y $\Phi(y, p, C) = 0$.

Si no es posible eliminar p, se pueden dar las ecuaciones paramétricas de la solución expresando x e y, separadamente como funciones del parámetro p.

4.4 **Ecuación de Clairaut**

Se llama así a una ecuación de la forma $y = px + f(p)$.

Su primitiva es $y = Cx + f(C)$.

Podemos también encontrar una solución singular sin más que eliminar el parámetro p entre las ecuaciones $y = px + f(p)$ y $x = -f'(p)$.

5. Ecuaciones lineales de orden n

Una ecuación lineal de orden n tiene la forma general

$P_0\dfrac{d^ny}{dx^n}+P_1\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}\dfrac{dy}{dx}+P_ny=Q$, donde $P_0\neq 0,\ P_1,\ldots,\ P_n$ y Q son funciones de x o constantes.

Si Q = 0, la ecuación se llama *homogénea*.

Si $y=y_1(x),\ \ y=y_2(x),\ldots.y=y_n(x)$ son n soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación homogénea, $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ \cdots+C_ny_n(x)$ es su primitiva, a la que llamaremos *función complementaria*.

Si $y=R(x)$ es una solución particular de la ecuación de partida (no homogénea), entonces $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ \cdots+C_ny_n(x)+R(x)$ es la primitiva de dicha ecuación.

5.1 **Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes**

En general tienen la forma $P_0\dfrac{d^ny}{dx^n}+P_1\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}\dfrac{dy}{dx}+P_ny=0$ donde $P_0\neq 0,\ P_1,\ldots,\ P_n$ son constantes.

Utilizaremos un cambio de notación,

$$\frac{dy}{dx}=Dy;\ \frac{d^2y}{dx^2}=D\cdot Dy=D^2y\ ;\ \cdots;\frac{d^ny}{dx^n}=D^ny$$

siendo D un operador que actúa sobre y. Entonces $P_0D^n+P_1D^{n-1}+\cdots+P_{n-1}D+P_n$ será un operador más complejo. Sin embargo, a veces será muy conveniente utilizarlo como un polinomio en D, expresándolo como F(D), con lo que la ecuación puede escribirse como

F(D)y = 0

Se puede demostrar que si F(D) se trata como un polinomio, al que denominaremos polinomio característico, y se descompone en factores de la forma

$F(D) = P_0(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)$ entonces la ecuación de partida es equivalente a $F(D)y = P_0(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)\,y = 0$

Para obtener la primitiva de la ecuación distinguiremos los siguientes casos:

a) Si $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \cdots \neq m_n$, $y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + \cdots + C_ne^{m_nx}$ es la primitiva ya que e^{m_1x}, e^{m_2x},.....,e^{m_nx} son soluciones particulares linealmente independientes de nuestra ecuación.

b) Si $m_1 = m_2 \neq m_3 \neq \cdots \neq m_n$ entonces

$y = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_2x} + C_3e^{m_3x} + \cdots + C_ne^{m_nx}$ es la primitiva. En general, si una raíz m se repite r veces, la parte correspondiente en la primitiva a esas r raíces será

$y = C_1e^{mx} + C_2xe^{m\,x} + C_3x^2e^{mx} + \cdots + C_rx^{r-1}e^{mx}$

c) Si los coeficientes de F(D) son reales y a+bi es una raíz compleja de F(D) = 0, también lo es a-bi y los términos que les corresponden en la primitiva son:

$e^{ax}\left(C_1\cos bx + C_2 \operatorname{sen} bx\right)$

5.2 Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

La primitiva de $F(D)y = \left(P_0D^n + P_1D^{n-1} + \cdots + P_{n-1}D + P_n\right)y = Q(x)$ donde $P_0 \neq 0,\ P_1,\ldots,\ P_n$ son constantes, es suma de la función complementaria y de una integral particular cualquiera de F(D)y = Q(x).

A veces, se puede encontrar una integral particular por simple observación: Dada la ecuación $(D^3 - 3D^2 + 2)y = x$, $y = \frac{1}{2}x$ es una integral particular ya que $D^3y = D^2y = 0$.

Sin embargo, esto no suele ocurrir con frecuencia así que a continuación veremos métodos para calcular integrales particulares.

5.2.1 <u>Primer método</u>

En este método utilizamos el operador $\frac{1}{F(D)}$definido por $\frac{1}{F(D)}F(D)y = y$.

Entonces, si aplicamos este operador a la ecuación tenemos

$\frac{1}{F(D)}F(D)y = y = \frac{1}{F(D)}Q(x)$, esto es

$y = \frac{1}{P_0}\cdot\frac{1}{D-m_1}\cdot\frac{1}{D-m_2}\cdot\frac{1}{D-m_3}\cdots\frac{1}{D-m_n}Q(x)$ y el método consiste en ir aplicando sucesivamente cada factor, esto es:

$$u = \frac{1}{D-m_n}Q \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} - m_n u = Q \quad \Rightarrow \quad u = e^{m_n x}\int Qe^{-m_n x}dx$$

$$v = \frac{1}{D-m_{n-1}}u \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} - m_{n-1}v = u \quad \Rightarrow \quad v = e^{m_{n-1}x}\int ue^{-m_{n-1}x}dx$$

. . . .

$$y = \frac{1}{D-m_1}w \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} - m_1 y = w \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{P_0}e^{m_1 x}\int we^{-m_1 x}dx$$

5.2.2 ***Segundo método***

En este método también utilizamos el operador $\frac{1}{F(D)}$, pero ahora lo descomponemos en suma de fracciones simples

$\frac{1}{F(D)} = \frac{1}{P_0}\left(\frac{N_1}{D-m_1} + \frac{N_2}{D-m_2} + \frac{N_3}{D-m_3} + \cdots + \frac{N_n}{D-m_n}\right)$ y la solución particular viene dada por

$$y = \frac{1}{P_0}\left(\frac{N_1}{D-m_1}Q + \frac{N_2}{D-m_2}Q + \frac{N_3}{D-m_3}Q + \cdots + \frac{N_n}{D-m_n}Q\right)$$

5.2.3 ***Métodos abreviados***

Dada $F(D)y = Q(x)$, sabemos que una solución particular puede obtenerse como $y = \frac{1}{F(D)}Q(x)$. Para ciertas formas de $Q(x)$ se puede abreviar notablemente el cálculo de la solución particular, como se indica a continuación:

a) Si $Q(x)$ es de la forma e^{ax} ,

$$y = \frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{1}{F(a)}e^{ax}, \quad \text{si} \quad F(a) \neq 0.$$

b) Si Q(x) es de la forma sen(ax+b) o cos(ax+b)

$$y = \frac{1}{F(D^2)} \operatorname{sen}(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)} \operatorname{sen}(ax+b), \quad \text{si} \quad F(-a^2) \neq 0.$$

c) Si Q(x) es de la forma x^m.

$$y = \frac{1}{F(D)} x^m = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_m D^m) x^m \quad \text{con} \quad a_0 \neq 0$$

d) Si Q(x) es de la forma $e^{ax} V(x)$.

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{ax} V(x) = e^{ax} \frac{1}{F(D+a)} V(x).$$

e) Si Q(x) es de la forma $xV(x)$.

$$y = \frac{1}{F(D)} xV(x) = x \frac{1}{F(D)} V(x) - \frac{F'(D)}{[F(D)]^2} V(x).$$

6. **Ecuaciones de segundo orden que se reducen a de primer orden.**

6.1 **Ecuaciones que no contienen la función y**

Son ecuaciones de la forma $\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$. Se resuelven tomando $\frac{dy}{dx} = p$, con lo que la ecuación nos queda $\frac{dp}{dx} = F(x, p)$ que es de primer orden en la función desconocida p de la variable x.

Al integrar esta ecuación encontramos su primitiva p = g (x,C_1) y después con la relación $\frac{dy}{dx} = p$, obtenemos la primitiva de la ecuación inicial.

Análogamente se pueden resolver ecuaciones del tipo $y^{(n}=f(x,y^{(n-1})$. Haciendo el cambio $y^{(n-1}=p$ se obtiene una ecuación de primer orden para después obtener y de la relación $y^{(n-1}=p$.

6.2 **Ecuaciones que no contienen la variable x**

Son ecuaciones de la forma $\frac{d^2y}{dx^2}=F\left(y,\frac{dy}{dx}\right)$. Se resuelven haciendo $\frac{dy}{dx}=p$ y considerando p como función de y (no de x, como en el caso anterior). Entonces la ecuación nos queda $\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p=F(y,p)$ de primer orden en la función desconocida p de la variable y.

Integrando obtenemos p = g (y,C_1) y después con la relación $\frac{dy}{dx}=p$ obtenemos la primitiva de la ecuación de partida.

TEMA 3.- TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Definiciones

1.1 ***Transformada directa***

Sea F(t) una función real de variable real definida para todo $t \geq 0$, y consideremos $\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$, donde s es un parámetro, en general complejo, independiente de t. En la región donde converja dicha integral queda definida una función de s a la que llamamos *transformada de Laplace de la función* F(t) y denotaremos: $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$.

Ejemplo: Sea F(t) = 1.

$$\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st}1\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{s}e^{-st}\Big]_0^b = \frac{1}{s} \text{ si } s>0.$$

1.2 ***Transformada inversa***

Dada una función f(s), se llama transformada inversa de Laplace de f(s) a una función F(t) tal que $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = f(s)$ y se denota $\mathcal{L}^{-1}\left\{f(s)\right\} = F(t)$.

No todas las funciones f(s) tienen transformada inversa de Laplace. De hecho, es condición necesaria para que f(s) sea transformada de Laplace de una función F(t) que $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$.

Para el cálculo de la transformada inversa también existe una expresión integral compleja pero, dada su dificultad de evaluación, nosotros recurriremos al uso de tablas de transformadas y al manejo de sus propiedades.

2. Existencia y unicidad de la transformada de Laplace

La existencia de la transformada está condicionada a la convergencia de la integral que la define. Veamos alguna condición que nos garantiza esa convergencia.

2.1 ***Continuidad seccional***

Se llama función seccionalmente continua o continua a tramos en $[a,b]$, a una función F(t) definida en dicho intervalo y tal que:

- F(t) es continua en todos los puntos excepto quizás en un número finito de ellos.

- Para todo $t \in (a,b)$ existen y son finitos $\lim_{h\to 0^+} F(t+h)$ y $\lim_{h\to 0^-} F(t+h)$ y también

$\lim_{h\to 0^+} F(a+h)$ y $\lim_{h\to 0^-} F(b+h)$.

** Sabemos que una función seccionalmente continua en un intervalo finito es integrable en dicho intervalo.

2.2 ***Orden exponencial***

Dada una función F(t), decimos que es de orden exponencial α en $[0,\infty)$, si existen constantes α y C (>0) de modo que $|F(t)| \le C\, e^{\alpha t}$ para todo $t \ge 0$.

2.3 ***Condiciones suficientes para la existencia de transformada***

Si F(t) es una función seccionalmente continua en todo intervalo finito $[0,T]$ y de orden exponencial α para todo $t \ge T$, existe la transformada de Laplace f(s) para todo $s>\alpha$.

Es necesario insistir en que las condiciones son suficientes pero no necesarias, ya que hay funciones que no cumplen estas condiciones y en cambio tienen transformada de Laplace. Ejemplo: $F(t) = t^{-1/2}$.

2.4 ***Consideraciones sobre la unicidad de la transformada***

Si N(t) es una función nula, tal que $\int_0^t N(u)\, du = 0$ para todo t, sabemos que $\mathcal{L}\{N(t)\} = 0$ y por tanto si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ también $\mathcal{L}\{F(t) + N(t)\} = f(s)$.

De esto se deduce que puede haber funciones diferentes con la misma transformada de Laplace.

2.4.1 Teorema de Lerch

Si $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = f(s) = \mathcal{L}\left\{G(t)\right\}$, entonces F(t) - G(t) = N(t).

** En cuanto a la existencia y unicidad de la *transformada inversa* diremos, que si F(t) cumple las condiciones enunciadas en el teorema sobre la existencia de su transformada f(s) y es una función no nula, entonces la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\left\{f(s)\right\}$ es única.

3. Transformada de Laplace de algunas funciones elementales

F(t)	**f(s)**
1	$\frac{1}{s}$ $si\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $si\ s > a$
sen at	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $si\ s > 0$
cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $si\ s > 0$
t^n n=1,2,...	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $si\ s > 0$
$t^{-½}$	$\left(\frac{\pi}{s}\right)^{½}$ $si\ s > 0$
sh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $si\ s > \lvert a\rvert$
ch at	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $si\ s > \lvert a\rvert$

4. **Propiedades de la transformada directa de Laplace**

4.1 ***Linealidad***

Si $F_1(t)$, $F_2(t)$,..., $F_n(t)$ tienen como transformadas de Laplace las funciones $f_1(s)$, $f_2(s)$, ..., $f_n(s)$ cuando $s>\alpha_i$, $i=1,2, \dots , n$. Dadas n constantes $a_1, a_2, \dots , a_n$ se verifica que:

$\mathcal{L}\left\{a_1F_1(t)+a_2F_2(t)+\dots+a_nF_n(t)\right\} = a_1f_1(s)+a_2f_2(s)+\dots+a_nf_n(s)$ para $s>$máx α_i.

4.2 *Primera propiedad de traslación*

Si $\mathcal{L}\left\{F\ (t)\right\} = f(s)$ para $s>\alpha$, entonces $\mathcal{L}\left\{e^{-at}F\ (t)\right\} = f(s+a)$ para $s>\alpha$-a siendo a $\in\mathbf{R}$.

4.3 ***Segunda propiedad de traslación***

Si $\mathcal{L}\left\{F\ (t)\right\} = f(s)$ para $s>\alpha$ y $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{si } t\geq a \\ 0 & \text{si } t<a \end{cases}$, se tiene para $s>\alpha$ y $a>0$, que

$\mathcal{L}\left\{G\ (t)\right\} = e^{-as}\ f(s)$.

4.4 ***Propiedad de cambio de escala***

Si $a>0$ y $\mathcal{L}\left\{F\ (t)\right\} = f(s)$ para $s>\alpha$, $\mathcal{L}\left\{F\ (at)\right\} = \dfrac{1}{a}f(\dfrac{s}{a})$ para $s>a\alpha$.

4.5 ***Propiedad de multiplicación por t^n***

Si $\mathcal{L}\left\{F\ (t)\right\} = f(s)$ para $s>\alpha$, entonces $\mathcal{L}\left\{t^nF\ (t)\right\} = (-1)^n\dfrac{d^nf(s)}{ds^n}$ para $s>\alpha$.

Ejemplo: Sabiendo que $\mathcal{L}\left\{\text{sen } at\right\} = \dfrac{a}{a^2+s^2}$, calcular $\mathcal{L}\left\{t\text{ sen } at\right\}$.

Por el resultado que acabamos de ver tenemos que:

$$\mathcal{L}\left\{t\text{ sen } at\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\ \mathcal{L}\left\{\text{ sen } at\right\}\ \right] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}\ .$$

4.6 ***Propiedad de división por t***

Si $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = f(s)$ para s>α, entonces $\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du$, siempre que exista y sea finito $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t}$.

4.7 ***Transformada de Laplace de las funciones periódicas***

Si F(t) es una función periódica de periodo T>0, se tiene que $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$.

4.8 ***Transformada de Laplace de las derivadas***

Si F(t) y F'(t) son funciones continuas y de orden exponencial, con $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = F(0^+)$, entonces $\mathcal{L}\left\{F'(t)\right\} = s\ \mathcal{L}\left\{F(t)\right\} - F(0^+)$.

Para la derivada segunda $\mathcal{L}\left\{F''(t)\right\} = s^2\ \mathcal{L}\left\{F(t)\right\} - sF(0^+) - F'(0^+)$.

En general podemos demostrar que

$$\mathcal{L}\left\{F^n(t)\right\} = s^n\ \mathcal{L}\left\{F(t)\right\} - s^{n-1}F(0^+) - s^{n-2}F'(0^+) - \ldots - sF^{(n-2}(0^+) - F^{(n-1}(0^+).$$

4.9 ***Transformada de Laplace de integrales***

Si $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = f(s)$ para s>α, entonces $\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{f(s)}{s}$.

Generalizando podemos escribir: Si $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = f(s)$ para s>α y $a \in R^+$, se tiene que $\mathcal{L}\left\{\int_a^t F(u)\,du\right\} = \frac{f(s)}{s} - \frac{1}{s}\int_0^a F(u)\,du$.

4.10 ***Propiedad de convolución***

Se define la *convolución* de dos funciones F(t) y G(t) , mediante la ley $F*G = \int_0^t F(x)\, G(t-x)\, dx$. Se puede ver fácilmente que $F*G = G*F$.

La transformada de Laplace *de la convolución* de dos funciones es igual al producto de sus transformadas. $\mathcal{L}\left\{F(t)*G(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{F(t)\right\} \cdot \mathcal{L}\left\{G(t)\right\}$.

4.11 ***Teorema del valor inicial***

Si $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = f(s)$, $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sf(s)$.

4.12 ***Teorema del valor final***

Si $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = f(s)$, $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \lim\limits_{s\to 0^+} sf(s)$.

5. Transformada inversa de Laplace. Propiedades

5.1 ***Linealidad***

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(s)\right\} = \sum_{i=1}^{n} a_i \; \mathcal{L}^{-1}\left\{f_i(s)\right\}$$

5.2 ***Primera propiedad de traslación***

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{f(s+a)\right\} = e^{-at}\; \mathcal{L}^{-1}\left\{f(s)\right\}$$

5.3 ***Propiedad de cambio de escala***

Si $\mathcal{L}^{-1}\left\{f(s)\right\} = F(t)$ y a>0, $\mathcal{L}^{-1}\left\{f(as)\right\} = \frac{1}{a} F(\frac{t}{a})$.

5.4 ***Transformada inversa de derivadas***

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n f}{ds^n}\right\} = (-1)^n t^n\ F(t)$, para n=1,2,... .

5.5 ***Transformada inversa de las integrales***

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)du\right\} = \frac{F(t)}{t}$.

5.6 ***Multiplicación por s***

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y F(0) = 0, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{sf(s)\} = F'(t)$.

5.7 ***División por s***

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\, du$.

5.8 ***Propiedad de convolución***

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = F * G$.

6. Aplicaciones de la transformada de Laplace

6.1 ***Evaluación de integrales definidas***

Teniendo en cuenta que la integral que define a la transformada de Laplace $\mathcal{L}\ \{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$ es convergente para todo s>α, al particularizar en esta integral el parámetro s, se obtienen resultados para un gran número de integrales definidas.

Ejemplo: Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Sea F(t) = sen t, con $f(s) = \frac{1}{s^2+1}$, por la propiedad de división por t sabemos que $\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_s^{\infty} f(u)\,du$.

Pasando al límite cuando $s \to 0^+$ y suponiendo la convergencia de las integrales, se obtiene $\int_0^{\infty}\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty} f(u)\,du$ .Haciendo uso del resultado en este caso obtenemos

$$\int_0^{\infty}\frac{\text{sen } t}{t}\,dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{\pi}{2} \ .$$

6.2 ***Resolución de ecuaciones diferenciales lineales***

La transformada de Laplace es de gran utilidad para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes que están asociadas a condiciones iniciales. Para ello se busca la transformada de Laplace de la ecuación diferencial, usando las condiciones iniciales. De esta forma obtenemos una ecuación algebraica en la función transformada que resolveremos y tomando después transformada inversa obtenemos la solución que buscamos.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $Y''(t) - 3Y' + 2Y = 2e^{-t}$ con las condiciones iniciales Y(0)=2 e Y'(0)= -1.

Tomando transformada de Laplace y considerando $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$ tenemos

$s^2y - sY(0) - Y'(0) - 3(sy - Y(0)) + 2y = \mathcal{L}\{2e^{-t}\} = \frac{2}{s+1}$. Considerando ahora las condiciones iniciales, nos queda $y(s^2-3s+2)-2s+7 = \frac{2}{s+1}$, de donde, $y=\frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)}$.

Si descomponemos y en fracciones simples obtenemos

$y=\frac{1/3}{s+1}+\frac{4}{s-1}+\frac{-7/3}{s-2}$ y tomando transformada inversa de Laplace conseguimos la solución pedida $Y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + 4e^{t} - \frac{7}{3}e^{2t}$.

** Para hallar la solución general de la ecuación diferencial anterior, tomaríamos las condiciones iniciales arbitrarias Y(0)=A e Y'(0)=B. Realizando un proceso análogo al anterior obtendríamos

$y(s^2-3s+2)-sA+3A-B = \dfrac{2}{s+1} \Rightarrow y = \dfrac{A's^2+B's+C}{(s+1)(s-1)(s-2)}$.

Si descomponemos ahora en fracciones simples, los numeradores son también arbitrarios y podemos escribir $y = \dfrac{C_1}{s+1}+\dfrac{C_2}{s-1}+\dfrac{C_3}{s-2}$, de donde la solución general será $Y = C_1e^{-t}+C_2e^{t}+C_3e^{2t}$, donde teniendo en cuenta la ecuación C_1=1/3.

Por otra parte, la transformada de Laplace también puede aplicarse para resolver algunos tipos de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables de tipo potencial, usando la propiedad de multiplicación por t^n: $\mathcal{L}\left\{t^nF(t)\right\} = (-1)^n\dfrac{d^nf(s)}{ds^n}$, siendo $\mathcal{L}\left\{F(t)\right\}=f(s)$.

6.3 ***Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales***

El proceso expuesto para las ecuaciones diferenciales puede ser aplicado a los sistemas de ecuaciones diferenciales, proporcionando las soluciones convenientes a las condiciones iniciales, pudiéndose además calcular aisladamente unas de otras.

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} X' = 2X-3Y \\ Y' = Y-2X \end{cases}$ sujeto a las condiciones iniciales X(0)=8,Y(0)=3.

Tomando transformada de Laplace, y considerando $\mathcal{L}\left\{X(t)\right\}=x(s)$ y $\mathcal{L}\left\{Y(t)\right\}=y(s)$, tenemos $\begin{cases} sx-X(0) = 2x-3y \\ sy-Y(0) = y-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-2)x+3y = 8 \\ 2x+(s-1)y = 3 \end{cases}$ de donde

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{5}{s+1}-\frac{2}{s-4}.$$

Si tomamos ahora transformada inversa de Laplace obtenemos las soluciones del sistema $X=5e^{-t}+3e^{4t}$ e $Y=5e^{-t}-2e^{4t}$.

6.4 ***Resolución de ecuaciones integrales y ecuaciones integro-diferenciales***

Una *ecuación integral* es la que tiene la forma $Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u,t)Y(u)du$ donde F(t) y K(u,t) son conocidas, a y b son constantes o funciones de t, y la función Y(t) que aparece bajo el signo integral es la función desconocida.

Una ecuación integral muy importante por sus aplicaciones es la *ecuación de tipo convolutivo* $Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du$.

Una *ecuación integro-diferencial* es aquella en la que aparecen derivadas de la función desconocida Y(t) y ésta aparece también bajo el signo integral.

La transformada de Laplace puede ser utilizada para resolver ecuaciones de los tipos anteriores . Como en los casos previos, se toma transformada de la ecuación, se resuelve la ecuación resultante en la función transformada y finalmente se aplica el operador inverso.

Ejemplo: Resolver la ecuación integral $Y(t) = t^2 + \int_0^t Y(u)\,\text{sen}(t-u)du$.

Esta ecuación integral puede escribirse como $Y(t) = t^2+Y(t)*\text{sent}$

Tomando transformada de Laplace, y usando la propiedad de convolución tenemos que, si $\mathcal{L}\left\{Y(t)\right\} = y(s)$, $y = \frac{2}{s^3} + \frac{y}{s^2+1}$, de donde, $y = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$.

Tomando transformada inversa obtenemos $Y = t^2 + \frac{1}{12}t^4$

ANEXO A LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En ingeniería es muy común encontrar funciones que corresponden a estados de sí o no, o bien activo o inactivo. Por ejemplo, una fuerza externa que actúa sobre un sistema mecánico o una tensión eléctrica aplicada a un circuito, puede tener que suspenderse después de cierto tiempo. Para tratar de forma efectiva con estas funciones discontinuas conviene introducir una función especial llamada función escalón unitario o **función de Heavisade**.

Definición

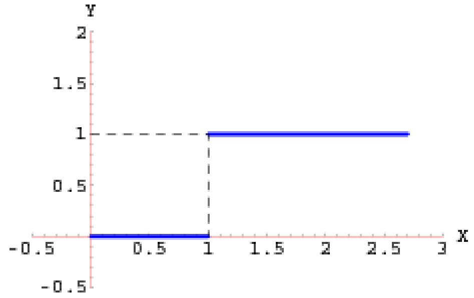
La función escalón unitario o función de Heaviside se define como

$$H(t-a)=\begin{cases}0 & \text{Si } 0\le t<a\\ 1 & \text{Si } t\ge a\end{cases}$$

Ejemplo

Trazar la gráfica de la función $F(t)=H(t-1)$

La función está dada por $F(t)=H(t-1)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\le t\le 1\\ 1 & \text{si } t\ge 1\end{cases}$ y su gráfica es:



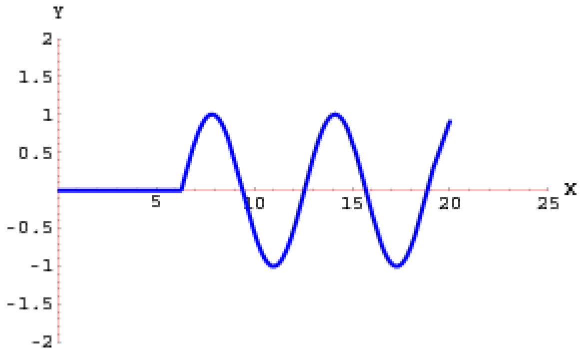
- Cuando la función de Heaviside $H(t-a)$ se multiplica por una función $F(t)$, definida para $t\ge 0$, esta función se desactiva en el intervalo $[0,a]$, como muestra en siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Dibujar la gráfica de la función $F(t)=\text{sen}(t)\,H(t-2\pi)$

.

La función está dada por $F(t)=\text{sen}(t)\,H(t-2\pi)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\le t<2\pi\\ \text{sen}\,t & t\ge 2\pi\end{cases}$ y su gráfica es:



- La función de Heaviside puede utilizarse para expresar funciones continuas a trozos de una manera compacta, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Use la función de Heaviside para reescribir la función $F(t)=\begin{cases} g(t) & \text{si } 0 \le t < a \\ h(t) & \text{si } t \ge a \end{cases}$

Para reescribir la función basta usar la definición de la función Heaviside

$$F(t)=\begin{cases} g(t)-g(t)\cdot 0+h(t)\cdot 0 & \text{si } 0 \le t < a \\ g(t)-g(t).1+h(t)\cdot 1 & \text{si } t \ge a \end{cases} \Rightarrow F(t)=g(t)-g(t)\cdot H(t-a)+h(t)\cdot H(t-a)$$

En general, tenemos que una función dada por:

$$f(t)=\begin{cases} p(t) & \text{Si } 0 \le t < a \\ q(t) & \text{Si } a \le t < b \\ r(t) & \text{Si } t \ge b \end{cases}$$

se puede escribe usando la función de Heaviside de la forma

$$f(t)=p(t)+(q(t)-p(t))H(t-a)+(r(t)-q(t))H(t-b)$$

Transformada de Laplace de la función de Heaviside

La transformada de Laplace de la función de Heaviside es

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\}=\frac{e^{-sa}}{s}$$

La primera propiedad de traslación nos permite calcular la transformada de una función al ser multiplicada por una función exponencial e^{kt},la segunda propiedad de traslación nos permitirá calcular la trasformada de una función que es multiplicada por una función escalón o de Heaviside.

Segunda propiedad de traslación utilizando la función de Heaviside

Si $\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$ y $a > 0$, entonces $\mathcal{L}\{F(t-a)H(t-a)\}=e^{-as}f(s)$

Ejemplo

Calcular
$\mathcal{L}\{tH(t-2)\}$

Para poder usar el segundo teorema de traslación debemos completar t a t-2

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{tH(t-a)\} &= \mathcal{L}\{(t-2+2)H(t-2)\}\\ &= \mathcal{L}\{(t-2)H(t-2)\}+2\mathcal{L}\{H(t-2)\}\\ &= \frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{2e^{-2s}}{s}\end{aligned}$$

Ejemplo de cómo se puede usar la función de Heaviside y esta propiedad para calcular transformadas de Laplace de funciones continuas a trozos

Calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$, donde

$$f(t)=\begin{cases}-t+1 & \text{Si } 0\le t<1\\ 1 & \text{Si } 1\le t<2\\ t-2 & \text{Si } t\ge 2\end{cases}$$

Observe que la función f(t) puede reescribirse como

$$f(t) = 1-t+tH(t-1)+(t-3)H(t-2)$$

$$f(t) = 1-t+(t-1)H(t-1)+(t-2)H(t-2)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{(t-1)\,H(t-1)\} + \mathcal{L}\{(t-2)\,H(t-2)\} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}\end{aligned}$$

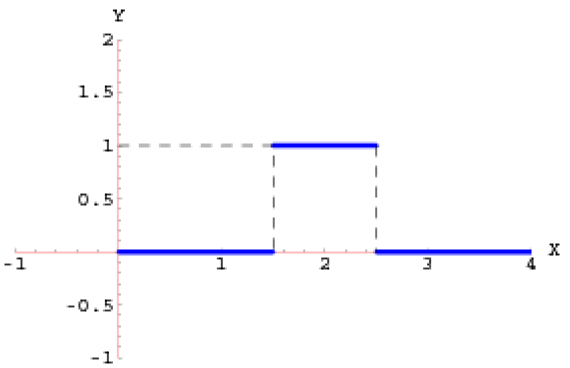
Función impulso unitario

Algunos sistemas mecánicos suelen estar sometidos a una fuerza externa, o a una tensión eléctrica en el caso de los circuitos eléctricos, de gran magnitud, que solamente actúa durante un tiempo muy corto. Por ejemplo, una descarga eléctrica podría caer sobre el ala vibrante de un avión; a un cuerpo sujeto a un resorte podría dársele un fuerte golpe con un martillo, una pelota (de béisbol, de golf o de tenis) inicialmente en reposo, podría ser enviada velozmente por los aires al ser golpeada con violencia con un objeto como una bate de béisbol, un bastón de golf o una raqueta de tenis. La función impulso unitario puede servir como un modelo para tal fuerza.

Llamamos función impulso unitario a la función $\delta_\alpha : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{Si } 0 \le t \le t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & \text{Si } t_0 - a \le t \le t_0 + a \\ 0 & \text{Si } t \ge t \end{cases}$$

con $\alpha > 0$ y $t_0 > 0$



(gráfica para $\alpha = 0{,}5$ y $t_0 = 2$)

Esta función debe su nombre a que satisface que

$$\int_0^{\infty} \delta_a(t-t_0)dt = 1$$

En la práctica se suele trabajar con otro tipo de impulso llamado función de Dirac

Dado por

$$\lim_{a \to 0} \delta_a(t-t_0) = \delta(t-t_0)$$

Observación: la *función* delta de Dirac, no es una función, realmente es lo que se conoce como una función generalizada (o distribución).

Esta función satisface las siguientes propiedades:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & \text{Si } t = t_0 \\ 0 & \text{Si } t \neq t_0 \end{cases} \qquad \int_0^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1$$

Transformada de Laplace de la función delta de Dirac.

Si $t_0 > 0$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$$

De esto podemos deducir que si $t_0 = 0$

$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

Esto reafirma el hecho de que la función delta de Dirac no es una función ordinaria,

ya que no satisface la condición de que $\mathcal{L}\{F(t)\} \to 0$, cuando $s \to \infty$

TEMA 4.-SERIES DE FOURIER

1. Introducción: Resultados previos.

$f(x)$ es periódica si $\exists\ T>0\ /\ f(x+T) = f(x) \quad \forall\ x \in \mathrm{Dom}\, f$

$f(x)$ es par si $f(x) = f(-x) \quad \forall\ x \in \mathrm{Dom}\, f$ (simetría respecto del eje 0Y)

$f(x)$ es impar si $f(x) = -f(-x) \quad \forall\ x \in \mathrm{Dom}\, f$ (simetría respecto del origen)

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\,[\ \cos(A+B) + \cos(A-B)\ ]$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\,[\ \cos(A-B) - \cos(A+B)\ ]$$

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\,[\ \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\ ]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq n \\ \pi & si \quad m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq n \\ \pi & si \quad m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0 \quad \forall \quad m, n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0 \quad \forall \quad n \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx = 0 \quad \forall \quad n$$

Si $f(x)$ es periódica de periodo 2π, entonces: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\, dx \quad \forall\ \lambda$

2. Definición

Una serie de funciones del tipo $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx\right]$ (1) se llama serie trigonométrica y los coeficientes a_0, a_n , b_n , (n = 1, 2,....) se llaman coeficientes de la serie trigonométrica.

Puesto que los términos de la serie trigonométrica son periódicos con periodo 2π, entonces, en el caso de que la serie converja, su suma S(x) será una función periódica de periodo 2π

<u>Serie de Fourier para funciones periódicas de periodo 2π</u>

Supongamos que *f*(x), función periódica de periodo 2π sea la suma de la serie trigonométrica (1). Calculemos ahora los coeficientes a_0, a_n y b_n :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n\operatorname{sen} nx\,dx\right]$$ Por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{a_0}{2}2\pi \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

$$f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx\cos kx+b_n\operatorname{sen} nx\cos kx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k\cos kx\cos kx\,dx = \pi a_k \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx}$$

$$f(x)\operatorname{sen} kx=\frac{a_0}{2}\operatorname{sen} kx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx\operatorname{sen} kx+b_n\operatorname{sen} nx\operatorname{sen} kx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_k\operatorname{sen} kx\operatorname{sen} kx\,dx = \pi b_k \quad\Rightarrow\quad \boxed{b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx}$$

La serie trigonométrica (1) con estos coeficientes se llama **<u>serie de Fourier de la función *f*(x).</u>**

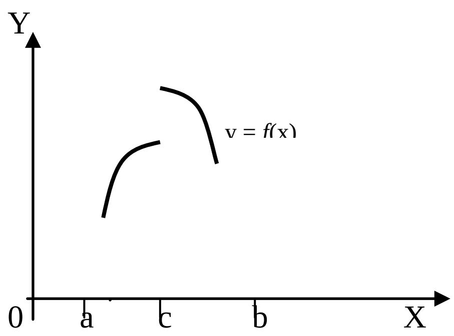
3. Problema

¿Qué propiedades ha de poseer $f(x)$ para que su **serie de Fourier** converja y para que su suma sea igual a los valores de la función en los puntos correspondientes?

Antes de dar el teorema que resuelva este problema, definiremos función monótona a tramos en [a , b]: " Diremos que $f(x)$ es **monótona a tramos en [a , b]** si dicho intervalo se puede dividir mediante los puntos x_1 , x_2 , x_3 , ...x_{n-1} en un número finito de intervalos (a , x_1), (x_1 , x_2),............., (x_{n-1} , b) de modo que la función $f(x)$ sea monótona en cada uno de dichos intervalos.

Si $f(x)$ es **monótona a tramos y acotada en [a , b]** sólo puede tener a lo más puntos de discontinuidad de primera especie finita o evitable. Sea x = c un punto de discontinuidad, en virtud de que $f(x)$ es monótona a tramos y que está acotada los límites $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

ó $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) \neq f(c)$ son finitos.



A continuación vamos a ver el teorema que nos va a resolver el problema que tratamos de solucionar, siendo éste una condición suficiente.

<u>Teorema</u>

Sea f(x) de periodo 2π, monótona a tramos y acotada en (-π, π), entonces su serie de Fourier converge en todos los puntos. La suma de la serie obtenida es igual al valor de la función en sus puntos de continuidad. En los puntos de discontinuidad de f(x) la suma de la serie es igual a la media aritmética de los límites de f(x) a la derecha y a la izquierda. Así si "c" es un punto de discontinuidad de f(x) se tiene:

$$\mathrm{S(c)} = \frac{\lim\limits_{x \to c^{+}} f(x) + \lim\limits_{x \to c^{-}} f(x)}{2}$$

4. Series de Fourier de funciones pares e impares.

<u>Propiedad</u>

Sea f(x) una función par, entonces: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx$

Sea g(x) una función impar, entonces: $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\ dx = 0$

<u>Teorema</u>

"La serie de Fourier de una **función impar** contiene solamente **senos**".(El término independiente es igual a cero).

"La serie de Fourier de una **función par** contiene solamente **cosenos**".(El término independiente puede ser cero ó distinto de cero).

<u>Demostración:</u>

Si f(x) es una función impar, también lo será *f(x)*cos*kx* y será par el producto *f(x)*sen*kx* con lo cual el desarrollo de f(x) en serie de Fourier tendrá los siguientes coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \mathbf{0} \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{x}) \cos kx\, \mathrm{dx} = \mathbf{0}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{x}) \mathrm{sen} k\mathrm{x}\, \mathrm{dx} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\mathrm{x}) \mathrm{sen} k\mathrm{x}\, \mathrm{dx}$$

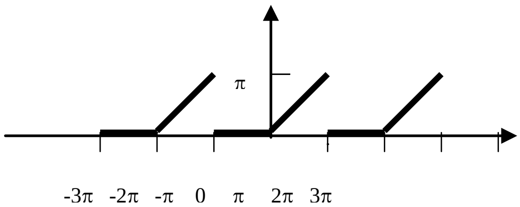
Si f(x) es una función par, también lo será f(x)cos$k$x y será impar el producto f(x)sen$k$x con lo cual el desarrollo de f(x) en serie de Fourier tendrá los siguientes coeficientes:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx \qquad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\mathrm{x}) \cos k\mathrm{x}\, \mathrm{dx}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{x}) \operatorname{sen} k\mathrm{x}\, \mathrm{dx} = \mathbf{0}$$

Evidentemente no toda función periódica es par o impar por ejemplo:

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le 0 \\ x & 0 < x \le \pi \end{cases}$$



5. Series de Fourier de funciones periódicas de periodo "2ℓ"

Sea f(x) una función periódica de periodo 2ℓ, para desarrollarla en serie de Fourier realizamos el cambio de variable x $= \frac{\ell}{\pi} t$, obteniendo una función periódica de periodo 2π:

$f(\mathrm{x}) = f(\frac{\ell}{\pi} t) = F(t)$ .Vamos a comprobarlo:

$$F(t+2\pi) = f(\frac{\ell}{\pi}(t+2\pi)) = f(\frac{\ell t}{\pi} + 2\ell) = f(\frac{\ell t}{\pi}) = F(t) \quad \forall\ t$$

Entonces $F(t)$ podemos desarrollarla en serie de Fourier en el intervalo (-π,π) de la forma:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt\right]$$

y como $f(\frac{\ell t}{\pi}) = F(t)$ igualando obtenemos:

$$f(\frac{\ell t}{\pi}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt\right]$$

donde a_0 , a_k , b_k se definen como:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\ dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{\ell t}{\pi})\ dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos ktdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{\ell t}{\pi}) \mathrm{cosktdt}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \operatorname{sen} kt\ dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{\ell t}{\pi}) \operatorname{sen} kt\ dt$$

Si deshacemos el cambio tendremos: $x = \frac{\ell t}{\pi} \Rightarrow t = \frac{x\pi}{\ell} \Rightarrow dt = \frac{\pi}{\ell} dx$ quedándonos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{\ell t}{\pi})\ dt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\ dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{\ell t}{\pi}) \cos ktdt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos k \frac{\pi}{\ell} x\ dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{\ell t}{\pi}) \operatorname{sen} kt\ dt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen} k \frac{\pi}{\ell} x\ dx$$

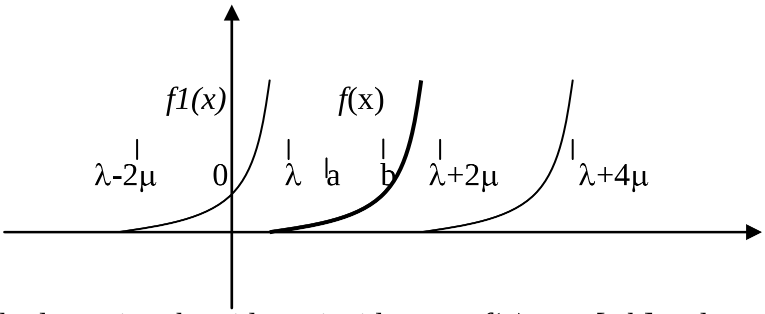
Teniendo en cuenta que el desarrollo con el cambio es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \right]$$

Todos los teoremas dados para las series de Fourier de las funciones periódicas de periodo 2π son válidos también para las series de Fourier de las funciones periódicas de cualquier otro periodo 2ℓ, es decir, el criterio para el desarrollo de una función en serie de Fourier vista al principio, así como la propiedad de las funciones periódicas e igualmente la posibilidad de simplificar el cálculo de los coeficientes cuando la función es par o impar.

6. Desarrollo de una función no periódica en series de Fourier.

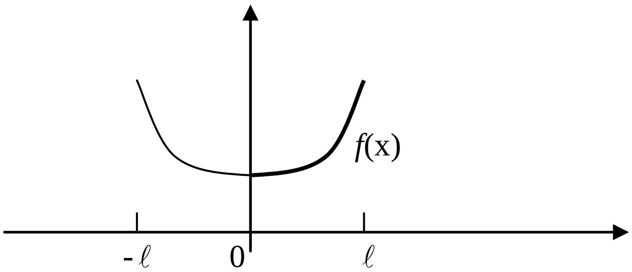
Supongamos que en [a,b] está definida una función monótona a tramos $f(x)$.Veremos que esta función se puede representar por una serie de Fourier en sus puntos de continuidad. Para ello, consideremos una función $f_1(x)$ periódica, monótona a tramos y de periodo $2\mu \geq |b-a|$ que coincide con $f(x)$ en [a,b] ,entonces $f_1(x)$ la desarrollaremos en serie de Fourier.



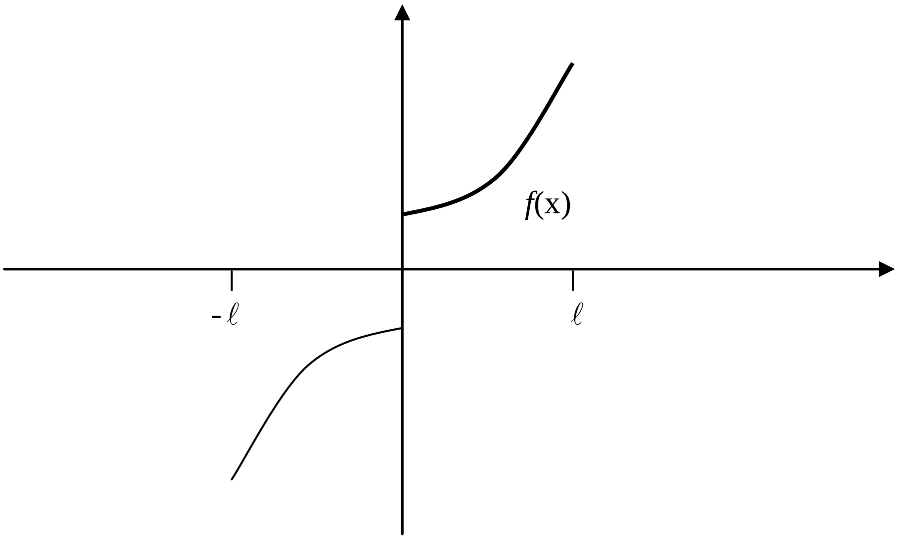
La suma de la serie obtenida coincide con $f(x)$ en [a,b] salvo en los puntos de discontinuidad, lo que quiere decir que hemos desarrollado la función $f(x)$ en serie de Fourier en [a , b]. Veamos ahora dos casos particulares:

Sea $f(x)$ definida en $[0,\ell]$, para desarrollarla en serie de Fourier completamos la función $f(x)$ en $[-\ell,0]$ conservando la monotonía a tramos de dos formas:

Primera forma: Si en $-\ell \leq x < 0$ $\quad f(x) = f(-x)$,obteniendo una función par, se dice en este caso que $f(x)$ es prolongada de manera **par**, al desarrollar esta función en serie de Fourier solamente contiene cosenos, así $f(x)$ definida en $[0,\ell]$ la hemos desarrollado en serie de cosenos.



Segunda forma: Si en $-\ell \leq x < 0$ f(x) = - f(-x), obteniendo una función impar, se dice en este caso que f(x) es prolongada de manera **impar**, al desarrollar esta función en serie de Fourier solamente contiene senos, así f(x) definida en $[0, \ell]$ la hemos desarrollado en serie de senos.



Así podemos concluir diciendo que si en $[0, \ell]$ está definida una cierta función monótona a tramos f(x), podemos desarrollarla tanto en serie de Fourier de cosenos como de senos.