TEMA 3: SERIES NUMÉRICAS

1. DEFINICIÓN DE SERIE NUMÉRICA

Dada una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales. Consideremos la sucesión $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ formada por:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

....

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ suma parcial n-ésima.

Siendo $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ la *sucesión de sumas parciales.*

Se denomina ***serie numérica de término general*** $\mathbf{a_n}$, al límite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, y se denota $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$$

Dada la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$: $\begin{cases} a_n : \text{término general} \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n : \text{suma parcial n-ésima} \\ R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots. : \text{resto de orden n} \end{cases}$

Entonces, podemos escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_k + R_k = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + ...)$$

1.1. Definición de carácter de una serie.

Se define el carácter de una serie, según sea el límite de la sucesión $(S_n)_{n=1}^{\infty}$

* Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ y es finito, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

* Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

* Si no existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es oscilante.

Para estudiar una serie debemos en primer lugar estudiar su carácter, y si nos sale convergente tendremos que calcular su suma, esto es:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2. RESULTADOS RESPECTO AL CARÁCTER DE UNA SERIE

2.1. Propiedades

- El carácter de una serie no se altera si suprimimos un número finito de términos.
- El carácter de una serie no se altera si se multiplican todos sus términos por una constante no nula.
- Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes con sumas a y b respectivamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ son convergentes, y sus sumas son (a+b) y (a-b) respectivamente.
- La condición necesaria para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- La condición necesaria y suficiente para que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente, es que el resto de orden k: R_k tienda a cero cuando k tiende a infinito.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente } \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} R_k = 0$$

3. SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

3.1. Definición

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice de *términos positivos* si $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Si todos los términos de la serie de uno en adelante tienen el mismo signo, se puede considerar para su estudio como una serie de términos positivos, sin más que tener en cuenta propiedades de las que hemos visto.

3.2. Propiedades

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos, entonces $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente o divergente pero nunca oscilante.

- Propiedad asociativa. El carácter de una serie de términos positivos no se altera, ni su suma si es convergente, al sustituir un grupo de términos consecutivos por su correspondiente suma.
- Propiedad conmutativa. Cualquier reordenación de una serie de términos positivos no altera su carácter, ni su suma si es convergente.

3.3. Criterios de convergencia para series de términos positivos

3.3.1. Definición

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de términos positivos. Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es $\left\{\begin{matrix}\text{mayorante}\\ \text{minorante}\end{matrix}\right\}$ de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si $\exists\, n_0 \in N \ / \ \forall\, n > n_0$ se verifica $\left\{\begin{matrix} b_n \geq a_n \\ b_n \leq a_n \end{matrix}\right\}$.

3.3.2. Primer criterio de comparación o criterio de Gauss.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos es $\left\{\begin{matrix}\text{convergente}\\ \text{divergente}\end{matrix}\right\}$ si existe otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\left\{\begin{matrix}\text{mayorante}\\ \text{minorante}\end{matrix}\right\}$ que es $\left\{\begin{matrix}\text{convergente}\\ \text{divergente}\end{matrix}\right\}$.

3.3.3. Segundo criterio de comparación. Paso al límite

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ verifican que, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in R^{+} - \{0\}$, entonces tienen el mismo carácter.

3.3.3.1. Consecuencias:

- Dos series cuyos términos generales son equivalentes tienen el mismo carácter.
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es divergente, entonces } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ es divergente} \\ \text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ es convergente, entonces } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente} \end{matrix}\right.$

- Si $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente, entonces } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ es convergente} \\ \text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ es divergente, entonces } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es divergente} \end{cases}$

Para poder utilizar el criterio de Gauss y el del paso al límite, debemos conocer el comportamiento de unas series tipo. Estas son la geométrica y la armónica.

3.3.4. Serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} \quad a \in \mathbf{R}^+, \; r > 0 \begin{cases} \text{converge si } 0 < r < 1, \text{ y su suma es } S = \dfrac{a}{1-r} \\ \text{diverge si } r \geq 1 \end{cases}$$

3.3.5. Serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad n \in \mathbf{N}, \; \alpha \in \mathbf{R} \begin{cases} \text{converge si } \alpha > 1 \\ \text{diverge si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

3.3.6. Criterio del producto (Pringsheim)

Dada la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Si existe $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = \lambda \neq 0$, entonces: $\begin{cases} \text{Si } \alpha \leq 1, \; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.} \\ \text{Si } \alpha > 1, \; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.} \end{cases}$

3.3.8. Criterio de la raíz. (Cauchy)

Dada la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ entonces:

* Si $\lambda < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

* Si $\lambda > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

* Si $\lambda = 1$, no se puede asegurar, salvo que:

$$\forall n > n_0, \; \sqrt[n]{a_n} \geq 1, \text{ en cuyo caso } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es divergente.}$$

3.3.7. Criterio del cociente (D'Alembert)

Dada la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ entonces:

* Si $\lambda < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

* Si $\lambda > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

* Si $\lambda = 1$, no se puede asegurar, salvo que:

$\forall\, n > n_0 , \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ en cuyo caso $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

3.3.9. Criterio de Raabe

A este criterio se suele recurrir cuando el del cociente lleva al caso dudoso.

Dada la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si existe $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lambda$, entonces:

* Si $\lambda > 1$,entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
* Si $\lambda < 1$,entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge
* Si $\lambda = 1$, no se puede asegurar, salvo que:

$$\forall n > n_0 , n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1 \text{ en cuyo caso } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

4. SERIES ALTERNADAS

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es ***alternada***, cuando sus términos son alternativamente positivos y negativos. Si empiezan a alternarse a partir de un lugar en adelante, puede estudiarse la serie como alternada sin más que tener en cuenta que el carácter de una serie no varía al suprimir un número finito de términos.

Ejemplos: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+1}$.

Para estudiar el carácter de una serie alternada haremos uso de la siguiente propiedad:

4.1. Condición suficiente: Criterio de Leibniz.

La condición suficiente para que una serie alternada sea convergente es que:

$$|a_n| > |a_{n+1}| \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

5. SERIES DE TÉRMINOS ARBITRARIOS

5.1. Definiciones.

Una serie de términos arbitrarios $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Una serie de términos arbitrarios $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *condicionalmente convergente* si es convergente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente.

5.2. Propiedad

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente}$$

El reciproco no es cierto.

6.-SUMA DE SERIES NUMÉRICAS

Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, se llama **suma** de dicha serie al límite de la sucesión de sus sumas parciales; si la serie diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, se dice que su suma es $+\infty$ o a $-\infty$, respectivamente.

El cálculo de la suma de la serie se puede realizar de manera directa en algunos casos como los de las series geométricas, aritmético-geométricas, hipergeométricas, telescópicas, etc., debido a que es posible encontrar una expresión del término general de la sucesión de sumas parciales del que podamos calcular con facilidad su límite.

En otros casos nos tendremos que conformar con hacer un cálculo aproximado de la suma de la serie apoyándonos en que $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = 0$ cuando $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y en que

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_k + R_k$.

Tomaremos como valor aproximado de la suma de la serie a S_n para un cierto valor de n, cometiendo con ello un error igual a R_n que podremos hacer tan pequeño como queramos.

Veamos a continuación algunos métodos directos.

6.1 Series geométricas

Una serie de la forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1}$ con $a \in \mathbf{R^*}$ y $r \in \mathbf{R}$ es una serie geométrica. Se tiene que:

$$\begin{cases} \text{converge si } |r| < 1, \text{ y su suma es } S = \dfrac{a}{1-r} \\ \text{diverge si } r \geq 1 \\ \text{Si } r \leq -1 \text{ la serie es oscilante} \end{cases}$$

6.2 Series aritmético-geométricas

Son series de la forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, donde $a_n = a_1 + (n-1)d$ (progresión aritmética) y $b_n = b_1 r^{n-1}$ (progresión geométrica).

Convergen si $|r|<1$ y divergen en los demás casos.

Veamos que ocurre con la sucesión de sumas parciales cuando la serie es convergente $|r|<1$.

$$S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n$$

$$r.S_n = a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_4 + \ldots + a_{n-1} b_n + a_n b_{n+1}$$

$$S_n(1-r) = a_1 b_1 + b_2(a_2 - a_1) + b_3(a_3 - a_2) + \ldots + b_n(a_n - a_{n-1}) - a_n b_{n+1} = a_1 b_1 - a_n b_{n+1} + d(b_2 + \ldots + b_n)$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que al ser la serie convergente $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} a_n b_n = 0$, tenemos que

$$S(1-r) = a_1 b_1 - 0 + d\frac{b_2}{1-r} = a_1 b_1 - 0 + d\frac{b_1 r}{1-r} \text{ y por tanto } \boxed{S = \frac{b_1}{(1-r)}\left(a_1 + d\frac{r}{1-r}\right)}$$

6.3 Series hipergeométricas

Son las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en las que se verifica que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$ y son convergentes si $\frac{\gamma-\beta}{\alpha} > 1$.

La suma de una serie hipergeométrica convergente viene dada por $\boxed{S = \frac{-\gamma a_1}{\alpha+\beta-\gamma}}$

6.4 Series telescópicas

Se llama serie telescópica a cualquier serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde $a_n = b_n - b_{n+1}$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Leftrightarrow$ la sucesión $\{b_n\}$ es convergente.

La sucesión de sumas parciales de esta serie es de la forma

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots. + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Si la sucesión $\{b_n\}$ es convergente, verifica que $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, y por tanto la suma de la serie será $\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 - L}$

6.5 Series sumables por descomposición en fracciones simples

Son series convergentes cuyo término general es una fracción racional que puede descomponerse en suma de fracciones simples con factores reales en los denominadores.

De esta forma el término general de la sucesión de sumas parciales puede quedar simplificado y ser muy sencillo el cálculo de su límite.