TEMA 2: SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1. SUCESIONES Y SUBSUCESIONES

Informalmente una sucesión es una lista ordenada de números reales o dicho de otra manera, una agrupación de números reales en la que se establece un orden en el sentido de que hay uno que es el primero, otro el segundo, y así sucesivamente.

1.1. Definiciones

***Sucesión de elementos de* R**. Una sucesión de elementos de **R** viene definida por una aplicación f del conjunto **N** en **R**:

$f: \mathbf{N} \to \mathbf{R} \ / \ \forall\, n \in \mathbf{N} \ \exists\, f(n) \in \mathbf{R}$

f(1) = primer término de la sucesión.

f(2) = segundo término de la sucesión.

……

f(n) = n-ésimo término de la sucesión o TÉRMINO GENERAL.

La notación que se utiliza para representar el término general es: $f(n) = a_n$

Dar el término general de una sucesión equivale a dar la ley que permite calcular un término cualquiera de dicha sucesión.

La notación que se utiliza para representar la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty} \equiv$ sucesión de término general a_n o bien por comodidad (a_n) o $\{a_n\}$.

Ejemplos de sucesiones:

- $a_n = \dfrac{1}{n} \ \Rightarrow \ (a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\ldots\right\}$
- $a_n = 4 \ \Rightarrow \ (a_n)_{n=1}^{\infty} = \{4, 4, 4, \ldots, 4, \ldots\ldots\}$
- $a_n = (-1)^n \ \Rightarrow \ (a_n)_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\ldots\}$
- $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si n es impar} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si n es par} \end{cases} \ \Rightarrow \ (a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{4}, 1, \dfrac{1}{6}, \ldots\ldots\right\}$

Rango de la sucesión son los valores que toman sus elementos. El rango puede ser FINITO o INFINITO.

Subsucesión. Si los términos de una sucesión aparecen en el mismo orden en otra sucesión, decimos que la primera es una subsucesión de la segunda.

Ejemplos

- los términos de orden par forman una subsucesión de la sucesión de partida.
- $\left(a_{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$
- $\left(a_n\right)_{n=7}^{\infty}$ es una subsucesión de $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$

1.2. Tipos de sucesiones

Sucesiones Monótonas

$$\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty} \text{ es una sucesión } \begin{cases} \text{monótona creciente} \Leftrightarrow \forall n \quad a_n \leq a_{n+1} \\ \text{estrictamente creciente} \Leftrightarrow \forall n \quad a_n < a_{n+1} \\ \text{monotona decreciente} \Leftrightarrow \forall n \quad a_n \geq a_{n+1} \\ \text{estrictamente decreciente} \Leftrightarrow \forall n \quad a_n > a_{n+1} \end{cases}$$

Sucesiones Acotadas

$\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada superiormente si $\exists K \in \mathbf{R} \,/\, \forall n \in \mathbf{N} \;\; a_n \leq K$

$\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada inferiormente si $\exists H \in \mathbf{R} \,/\, \forall n \in \mathbf{N} \;\; a_n \geq H$

$\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada si lo está inferior y superiormente $\exists M \in \mathbf{R} \,/\, \forall n \in \mathbf{N} \;\; \left|a_n\right| \leq M$

Atendiendo al valor del límite

Una sucesión cualquiera $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ será clasificada necesariamente como convergente, divergente u oscilante, según las definiciones que vamos a ver a continuación.

2. SUCESIONES CONVERGENTES. LÍMITES FINITOS. INFINITÉSIMOS

Decimos que una sucesión de números reales es **CONVERGENTE** $\Leftrightarrow$ existe un $a \in \mathbf{R}$ tal que cualquier entorno abierto $B(a, \varepsilon) = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ de centro a y radio ε, contiene a todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a partir de uno dado en adelante.

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ CONVERGE} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n^*(\varepsilon) \ / \forall n > n^* \Rightarrow a_n \in B(a, \varepsilon)$$

$$a_n \in B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow d(a, a_n) < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

El elemento $a \in \mathbf{R}$ en la definición anterior recibe el nombre de ***límite de la sucesión*** de término general a_n y se representa por: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Cuando **a = 0**, las sucesiones de término general a_n reciben el nombre de ***INFINITÉSIMOS.***

Ejemplos: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left(\frac{n}{n^2-1}\right)_{n=2}^{\infty}$ $\left(e^{-n}\right)_{n=1}^{\infty}$

3. SUCESIONES DIVERGENTES. LÍMITES INFINITOS. INFINITOS

Decimos que una sucesión de números reales es ***DIVERGENTE*** $\Leftrightarrow$ para cualquier bola abierta de 0 se verifica la condición de que todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a partir de uno dado en adelante, son exteriores a la bola.

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{DIVERGE} \Leftrightarrow \forall A \in \mathbf{R} : \exists n^*(A) \ / \forall n > n^* \Rightarrow |a_n| > A$$

Podemos distinguir dos tipos :

$$\forall n > n^* : a_n > 0 \Rightarrow \forall A > 0 : \exists n^* \ / \forall n > n^* \Rightarrow a_n > A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

$$\forall n > n^* : a_n < 0 \Rightarrow \forall A > 0 : \exists n^* \ / \forall n > n^* \Rightarrow a_n < -A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Las sucesiones que verifiquen cualquiera de estas condiciones reciben el nombre de ***INFINITOS.***

Ejemplos: $(2n)_{n=1}^{\infty}$ $(2n^4)_{n=1}^{\infty}$ $\left(\frac{n^3}{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

4. SUCESIONES OSCILANTES

A las sucesiones que no son convergentes ni divergentes las llamamos **OSCILANTES**. A dichas sucesiones puede ocurrirles cualquier cosa, es decir, hay sucesiones oscilantes:

- Acotadas y no acotadas.
- Con subsucesiones que son convergentes.
- Con subsucesiones oscilantes.
- Con subsucesiones divergentes.

5. PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES

1. El límite de una sucesión, si existe, es único.

2. Si una sucesión converge está acotada

3. Si una sucesión diverge no está acotada

4. Cualquier subsucesión de una sucesión convergente (divergente) es también convergente (divergente) y tiene el mismo límite que la sucesión de la que procede.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff$ fuera de cualquier bola abierta de centro a $\in$**R**, como mucho hay un número finito de términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

6. Si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces todos los términos de la sucesión, a partir de uno dado en adelante, tienen el mismo signo que el límite.

7. Regla del sandwich.

Toda sucesión comprendida entre dos sucesiones que tienen el mismo límite, tiene dicho límite.

$$\left.\begin{array}{l} \forall n : a_n \leq b_n \leq c_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$$

8. Toda sucesión monótona tiene límite (converge o diverge)

9. Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente.

10. Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

11. Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es un infinitésimo y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada, entonces la sucesión $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ es otro infinitésimo.

6. CÁLCULO DE LÍMITES

El estudio de límites sería muy pesado si tuviésemos que responder al estudio de la convergencia aplicando la definición. Vamos a establecer una REGLA y un álgebra de límites que resuelva en la medida de lo posible, el cálculo del límite de una sucesión.

6.1. Algebra de Límites. Indeterminaciones.

Regla: $\underbrace{\text{LÍMITE (OPERACIÓN)}}_{\text{en } \mathbf{R}} = \underbrace{\text{OPERACIÓN (LÍMITES)}}_{\text{op. nueva (NUEVA ARITMÉTICA)}}$

Ejemplos

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 3+0 = 3$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(3+n) = \lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} n = 3 + (+\infty) = ??$ ESTO ES NUEVO, sabemos operar solo en **R**
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n^2 - 2n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 3n^2 - \lim\limits_{n\to\infty} 2n = (+\infty) - (+\infty) = ??$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2+0 = 2$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n} = \operatorname{sen}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}} = \frac{1}{0} = ??$ en **R** no está definida
- $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen} n = \pm$ SABEMOS EL RESULTADO
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{sen}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = (+\infty)\cdot 0 = ¿?$ NUEVO

Tenemos que hacer las tablas de esta nueva aritmética, en la que aparezcan las soluciones de los casos nuevos vistos en la aplicación de la regla anterior.

Suponiendo conocidos los límites $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, resultan las siguientes tablas de operaciones, en las que existen situaciones de <u>indeterminación</u> que están señaladas con ¿?.

<u>SUMA:</u> $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$. Ind.: $(+\infty - \infty)$

$\oplus$		$\lim_{n\to\infty} a_n$		
		a	**+∞**	**–∞**
$\lim_{n\to\infty} b_n$	**b**	a+b	+∞	–∞
	+∞	+∞	+∞	¿?
	–∞	–∞	¿?	–∞

<u>PRODUCTO:</u> $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$. Ind.: $(0 \cdot (+\infty))$ y $(0 \cdot (-\infty))$.

		$\lim_{n\to\infty} a_n$				
		a>0	**a=0**	**a<0**	**+∞**	**–∞**
$\lim_{n\to\infty} b_n$	**b>0**	a·b>0	0	a·b<0	+∞	–∞
	b=0	0	0	0	¿?	¿?
	b<0	a·b<0	0	a·b>0	–∞	+∞
	+∞	+∞	¿?	–∞	+∞	–∞
	–∞	–∞	¿?	+∞	–∞	+∞

<u>COCIENTE:</u> $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n)$. Ind.: (∞ / ∞) y $(0 / 0)$.

		$\lim_{n\to\infty} a_n$				
		a>0	**a=0**	**a<0**	**+∞**	**–∞**
$\lim_{n\to\infty} b_n$	**b>0**	a / b>0	0	a / b<0	+∞	–∞
	b=0	±∞	¿?	±∞	±∞	±∞
	b<0	a / b<0	0	a / b>0	–∞	+∞
	+∞	0	0	0	¿?	¿?
	–∞	0	0	0	¿?	¿?

LOGARITMO: $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{Ln} a_n)$

$\lim_{n\to\infty} a_n$	$-\infty$	$a<0$	$a=0$	$a>0$	$+\infty$
$\lim_{n\to\infty}(\operatorname{Ln} a_n)$			$-\infty$	$\operatorname{Ln} a$	$+\infty$

El contenido de las casillas se deduce por el comportamiento de la función Ln x.

EXPONENCIAL: $\lim_{n\to\infty} k^{a_n} \quad /k>0$

k^{a_n}	$0<k<1$	$k=1$	$k>1$
$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$	$+\infty$	1	0
$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$	k^a	1	k^a
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$	0	1	$+\infty$

POTENCIA $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} \quad /a_n>0$. Ind.: 0^0, 1^∞ y $(+\infty)^0$.

		$\lim_{n\to\infty} a_n$				
		a=0	**0<a<1**	**a=1**	**a>1**	$+\infty$
$\lim_{n\to\infty} b_n$	**b>0**	0	a^b	1	a^b	$+\infty$
	b=0	¿?	1	1	1	¿?
	b<0	$+\infty$	a^b	1	a^b	0
	$+\infty$	0	0	¿?	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	¿?	0	0

Conociendo $\left\{\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} a_n \quad /a_n>0 \\ \lim_{n\to\infty} b_n\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A$.

• Para calcular A: aplicamos logaritmo $\operatorname{Ln}\left(\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}\right) = \operatorname{Ln} A$, si conocemos Ln A tendremos que:

$$\begin{cases} \text{si } \operatorname{Ln} A = -\infty \Rightarrow A = e^{-\infty} = 0 \\ \text{si } \operatorname{Ln} A \in \mathbf{R} \Rightarrow A = e^{\operatorname{Ln} A} \\ \text{si } \operatorname{Ln} A = +\infty \Rightarrow A = e^{+\infty} = +\infty \end{cases}$$

• Cálculo de Ln A:

$$\operatorname{Ln}\left(\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{Ln} a_n^{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(b_n \cdot \operatorname{Ln} a_n\right) \equiv \text{Límite de un producto}$$

Aparecen las indeterminaciones que existen al aplicar el producto de límites:

$(0 \cdot (+\infty))$ y $(0 \cdot (-\infty))$

1. $\left.\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Ln} a_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{Ind.}: (+\infty)^0$

2. $\left.\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Ln} a_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{Ind.}: 0^0$

3. $\left.\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Ln} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{Ind.}: 1^{+\infty}$

4. $\left.\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Ln} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{Ind.}: 1^{-\infty}$

6.2. Órdenes de infinitos.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, entonces se establece el siguiente orden de infinitos:

$$\left\{ \underset{q>0}{(\operatorname{Ln} a_n)^q} \right\} <<< \left\{ \underset{q>0}{a_n^q} \right\} <<< \left\{ \underset{K>1}{K^{a_n}} \right\} <<< \left\{ \underset{q>0}{a_n^{q a_n}} \right\}$$

6.3. Criterio de Stolz

Si se cumplen las siguientes condiciones :

1. $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es ESTRICTAMENTE MONÓTONA
2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$
3. Alguna de las siguientes :
   - 3.1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
   - 3.2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$
   - 3.3. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$

Entonces el criterio de Stolz establece que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

6.4. Equivalencias. Principio de sustitución.

Se dice que las sucesiones $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ son *equivalentes*:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \approx (b_n)_{n=1}^{\infty} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 .$$

Principio de sustitución.

"En la expresión del término general de una sucesión, se puede sustituir un número finito de veces un factor o un divisor por otro equivalente, resultando el término general de una sucesión con el mismo límite que la primera".

6.5. Infinitésimos equivalentes

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces:

- $a_n \approx \operatorname{sen} a_n \approx \operatorname{tg} a_n \approx \operatorname{arcsen} a_n \approx \operatorname{arctg} a_n$
- $1 - \cos a_n \approx \dfrac{a_n^2}{2}$
- $\operatorname{Ln}(1 + a_n) \approx a_n$
- Efectuando el cambio $1 + a_n = b_n$ nos queda la equivalencia :

  Si $\lim_{n\to\infty} b_n = 1 \Rightarrow \operatorname{Ln} b_n \approx b_n - 1$
- $a^{a_n} - 1 \approx a_n \ln a \qquad (a > 0)$
- $e^{a_n} - 1 \approx a_n$

6.6. Infinitos equivalentes:

- Polinomio en n $\approx$ Término de mayor grado

  $3n^4 - 2n + 5 \approx 3n^4$
- $\operatorname{Ln}(\text{Polinomio en n}) \approx \operatorname{Ln}(\text{Término de mayor grado})$
- Expresión algebraica en n $\approx$ Término de mayor grado

  $\sqrt[3]{5n^4 - 2n^2 + 5} \approx \sqrt[3]{5n^4}$
- $\operatorname{Ln}(\text{Expresión algebraica en n}) \approx \operatorname{Ln}(\text{Término de mayor grado})$
- Equivalencia de STIRLING :

  $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$