CÁLCULO Curso 2013-2014

TEMA3.- TRANSFORMADA DE LAPLACE

1.- Si $\mathcal{L}\left\{t^n\right\}= \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ para s>0, $\mathcal{L}\{\sin t\}= \dfrac{1}{s^2+1}$ para s>0 y $\mathcal{L}\{\cos t\}= \dfrac{s}{s^2+1}$ para s>0, calcular la transformada de Laplace de F(t)= $e^{-2t}\left(\sin 5t+3t^2\right)$.

2.- Si $\mathcal{L}\{1\}=\dfrac{1}{s}$ para s>0, $\mathcal{L}\{\sin t\}= \dfrac{1}{s^2+1}$ para s>0 y $\mathcal{L}\{\cos t\}= \dfrac{s}{s^2+1}$ para s>0, calcular $\mathcal{L}\left\{\sin^2 3t\right\}$.

3.- Si $\mathcal{L}\{\sin t\}= \dfrac{1}{s^2+1}$ para s>0 y $\mathcal{L}\{\cos t\}= \dfrac{s}{s^2+1}$ para s>0, calcular $\mathcal{L}\left\{t^2 \sin t\right\}$.

4.- Calcular la transformada de Laplace de la función de onda dentada definida por:

F(t)= $\dfrac{t}{a}$ si $0 < t \leq a$ y extendida periódicamente con periodo a.

5.- Si $\mathcal{L}\ \{tF(t)\}=\dfrac{1}{s(s^2+1)}$, calcular la transformada de Laplace de G(t)=e^{-t}F(2t).

6.- Si $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}= \dfrac{1}{s-a}$, calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt$.

7.- Sabiendo que $\mathcal{L}\{\ \sin t\}= \dfrac{1}{s^2+1}$, calcular $\displaystyle\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} \sin t\, dt$.

8.- Sabiendo que $\mathcal{L}\{\sin t\}= \dfrac{1}{s^2+1}$, Calcular la transformada de Laplace de la función

$F(t) = e^{-at}\displaystyle\int_0^t u \sin(bu)\, du$

9.- Calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(s) = \dfrac{3s-5}{4s^2-4s+37}$; b) $f(s) = \ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)$; c) $f(s) = \dfrac{1}{s^2\left(s^2+1\right)}$

10.- Utilizando transformada de Laplace, y sabiendo que $\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}$ **;** $\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$ y $\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$**,** resolver la ecuación diferencial $Y''-4Y'+4Y=t^3\, e^{2t}$ sujeta a las condiciones iniciales $Y(0)=Y'(0)=0$.

11.- Sabiendo que $\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$ para $s>0$, calcular la función Y(t) que satisface la ecuación $\int_0^t Y'(u)\,Y(t-u)\,du=2t^2$ y la condición $Y(0)=0$.

NOTA: $\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$,$\mathcal{L}\{\text{sen}\, at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$ y $\mathcal{L}\{\cos\, at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$

12.- Resolver Y”(t)+tY´(t)-Y(t)=0 con Y(0)=0 e Y´(0)=1.

13.- Resolver $tY''+2Y'+tY=0$ con $Y(0^+)=1$.

14.- Resolver, utilizando transformada de Laplace, la ecuación integro-diferencial

$Y''(t)+\int_0^t Y(t)dt=2Y'(t)-1$ con Y(0) =Y´(0)=1,

15.- Resolver la ecuación $Y''+Y=2\cos t$**,** con las condiciones iniciales $Y(0)=0;\quad Y'(0)=0$**,** sabiendo que $\mathcal{L}\{\sin\, t\}=\frac{1}{s^2+1}$, $\mathcal{L}\{\cos\, t\}=\frac{s}{s^2+1}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Si $\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$ para s>0, $\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}$ para s>0 y $\mathcal{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}$ para s>0, calcular la transformada de Laplace de $F(t)=e^{2t}\cos 3t+2te^{-5t}$.

2.- Si, $\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}$ para s>0 y $\mathcal{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}$ para s>0, calcular $\mathcal{L}\{\cos^2 4t\}$.

3.- Sabiendo que $\mathcal{L}\{\cos t\}=\dfrac{s}{s^2+1}$, calcular $\mathcal{L}\{t\cos 2t\}$.

4.-Si $\mathcal{L}\left\{e^t F(t)\right\}=\dfrac{1}{s^2-2s+2}$, calcular la transformada de Laplace de las funciones siguientes: $e^{3t}F(t)$; $\dfrac{e^{3t}F(t)}{t}$; $\dfrac{F(t)}{t}$ y $\displaystyle\int_0^\infty \frac{F(t)}{t}dt$.

5.- Sabiendo que $\mathcal{L}\{\cos t\}=\dfrac{s}{s^2+1}$, calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-\cos t)}{t}dt$ **.**

6.- Sabiendo que $\mathcal{L}\{\sin t\}=\dfrac{1}{s^2+1}$, calcular $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\,dt$.

7.- Calcular la transformada de Laplace de la función $\displaystyle\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du$.

8.- Calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones

a) $f(s)=\dfrac{1-4s}{4s^2+1}$; b) $f(s)=\arctan(a/s)$; c) $f(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}$

9.- Resolver la ecuación $Y'''-Y''+Y'-Y=-6$, con Y(0)=0; Y´(0)=1 e Y”(0)=0.

10.- Resolver tY”(t)+(1-2t)Y´-2Y(t)=0 con Y(0)=1 e Y´(0)=2 .

11.- Sabiendo que $\mathcal{L}\left\{t^n\right\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ y $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}=\dfrac{1}{s-a}$**,** resolver la ecuación integro diferencial $Y'(t)-4\displaystyle\int_0^t Y(u)\,du=3-2t^2$, con $Y(0)=1$

12.- Resolver la ecuación diferencial $Y''-3Y'+2Y=e^t$ sujeta a las condiciones iniciales $Y(0)=0$ e $Y'(0)=0$.

13.- Integrar Y”-Y´= t^2 siendo Y(0)=1 e Y´(0)=0.

14.- Sabiendo que $\mathcal{L}\{\sin at\}=\dfrac{a}{s^2+a^2}$ y $\mathcal{L}\{\cos at\}=\dfrac{s}{s^2+a^2}$ para s>0, resolver la ecuación $Y'(t)+Y(t)-\displaystyle\int_0^t Y(x)\sin(t-x)\,dx=-\sin t$, con $Y(0)=1$.