CÁLCULO Curso 2013-2014

TEMA4.- SERIES DE FOURIER

1.- a) Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de periodo 2π definida por $f(x)=|x|$, si $-\pi \le x \le \pi$.

b) Calcular la suma de la serie de Fourier obtenida para $x = 5\pi$.

2.- a) Demostrar que la función $f(x) = x - E(x)$, donde $E(x)$ representa la parte entera de x, es periódica de periodo $T = 1$.

b) Calcular el desarrollo en serie de Fourier de f(x), estudiando la convergencia de la serie obtenida.

3.- Desarrollar en serie de Fourier la función periódica de periodo π definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

4.- Desarrollar en serie de Fourier la función $f(x)=|\operatorname{sen} x|$.

5.- Desarrollar $f(x) = x$ en $[0, \pi]$ en serie de Fourier de:

a) Senos

b) Cosenos.

6.- ¿Cómo es la serie de Fourier de una función periódica de periodo $\frac{\pi}{6}$?, ¿y los coeficientes de la misma?

7.- Dada la función $y = \operatorname{sen} x \, u(\cos x)$, siendo $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \ge 0 \end{cases}$

a) desarrollarla en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, en caso de ser posible, de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{4n}{3} x$.

b) desarrollarla en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, en caso de ser posible, de la forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{4n}{3} x$.

<u>NOTA</u>: Expresar los posibles coeficientes en función de integrales definidas, sin calcularlas.

8.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1, & x \in [0, \pi) \end{cases}$, periódica de periodo $T = 2\pi$. Obtener su serie de Fourier y analizar su convergencia.

9.- Obtener un desarrollo en serie de senos, en el intervalo $(0, \pi)$, de la función $f(x) = 1$. Analizar la convergencia de la serie.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Desarrollar en serie de Fourier la función periódica, de periodo 2π, definida como $g(x) = x^2$ si $-\pi \le x \le \pi$ y calcular su suma para $x = \pi$.

2.- Desarrollar en serie de Fourier la función periódica, de periodo 2ℓ, definida en $[-\ell,\ell]$ por la expresión $f(x) = |x|$.

3.-Dada la función $f(x)$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{K}{2} \\ K - x & \text{si} \quad \frac{K}{2} \le x \le K \end{cases}$. Se pide:

a) Desarrollarla en $[0, K]$, en caso de ser posible, en serie de senos.

b) Desarrollarla en $[0, K]$ de la forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(7nx)$, indicando los valores de K para los que es posible un desarrollo de esa forma.

NOTA: Expresar los posibles coeficientes, en función de integrales definidas sin calcularlas.

4.- Sea $0 < \delta < \pi$ y f la función periódica de periodo 2π que en el intervalo $(-\pi, \pi]$ está definida como f(x)=1 si $|x| \le \delta$ y f(x)=0 si $|x| > \delta$.

Calcular el desarrollo en serie de Fourier de la función f.

5.- Dada la función $f(x) = e^{-x^2}$:

a) ¿Es posible desarrollarla en serie de Fourier de la forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 3nx$, en el intervalo (-1,2)?

b) ¿Es posible desarrollarla en serie de Fourier de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{nx}{2}$, en el intervalo (0,1)?

6.- Desarrollar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, en el intervalo $(0,\pi)$, en una serie de cosenos.

7.- Desarrollar en serie de Fourier la función $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ periódica de periodo T=2 .Calcular S(3) , S(7,5).

8.- Sea $f(x) = (x)$ donde (x) es la distancia de x al número entero más próximo. Hallar su desarrollo en serie de Fourier.

9.- Desarrollar en serie de senos la función $\cos x$ en $(0, \pi)$.