TEMA 4: FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES

1. RESUMEN DE FUNCIONES ELEMENTALES

1.1. Funciones polinómicas

Son de la forma $\mathbf{y=P_n(x)= a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n}$, con a_0, a_1, …, a_n constantes reales.

Dom(y)=**R**.

Son continuas y derivables $\forall x \in \mathbf{R}$

- Cuando n=1 tenemos una función lineal: *rectas*

  - Ecuación general : a x+by+c=0
  - Ecuación de una recta que pasa por dos puntos $P(x_0,y_0)$, $Q(x_1,y_1)$:

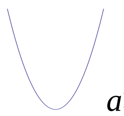
$$\frac{x-x_0}{x_0-x_1}=\frac{y-y_0}{y_0-y_1}$$

  - Ecuación que pasa por el punto $P(x_0,y_0)$ y tiene pendiente finita *m:*

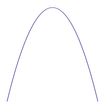
$$y-y_0=m(x-x_0)$$

- Cuando n=2 tenemos una función cuadrática : *parábolas*

  Ecuación general: $a\,x^2+b\,x+c=y,\ a \neq 0$



$a>0$



$a<0$

1.2. Funciones racionales

Son de la forma

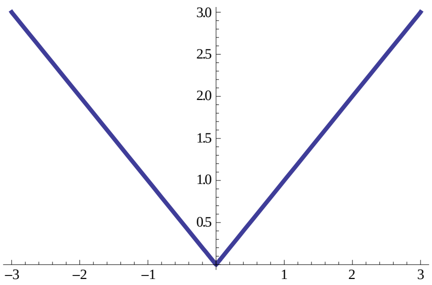
$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\ldots+a_n\,x^n}{b_0+b_1\,x+b_2\,x^2+\ldots+b_m\,x^m}$$ con $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ polinomios

Dom(y)={ $x \in \mathbf{R}$ / $Q_m(x) \neq 0$ }

Son continuas y derivables $\forall x \in$ Dom(y)

1.3. Función valor absoluto

$$|x| : R \rightarrow [0, \infty)$$

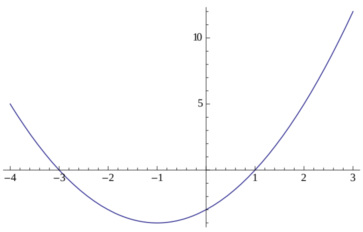


$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

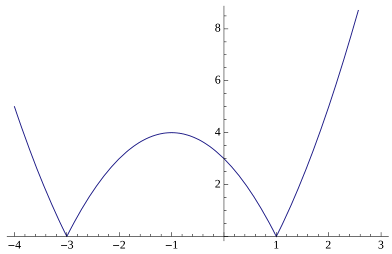
- Dom(y)=**R**
- Es continua $\forall x \in$ **R** y derivable $\forall x \in$ **R**-$\{0\}$

En general:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

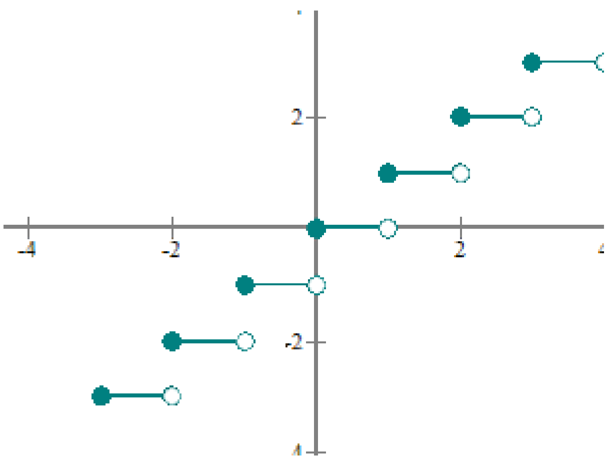


$f(x) \quad \rightarrow \quad |f(x)|$



1.4. Función parte entera E(x)

$\forall x \in$ **R** definimos E(x), como el entero menor más próximo a x. $\quad E(x) : R \rightarrow Z$

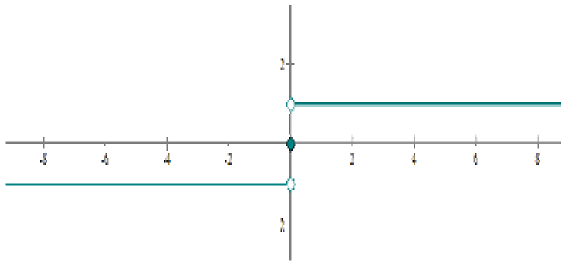


- Dom(y)=**R** ; Im(y)= **Z**
- La función es continua $\forall x \in$ **R-Z,** y en los enteros presenta discontinuidades de primera especie finita de salto 1

1.5. Función signo sg(x)

$$sg(x): R \to \{-1,0,1\}$$

$$y = sg(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

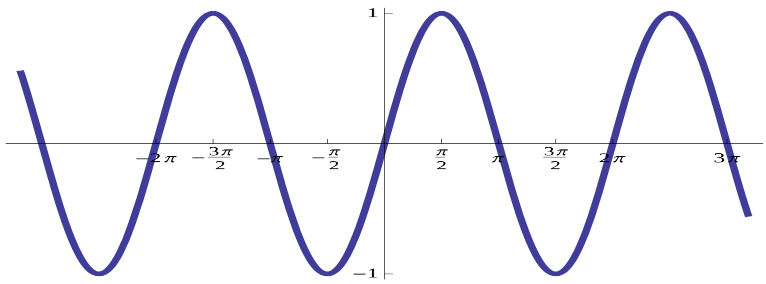


- Dom(y)=**R**; Im(y)= {-1,0,1}
- Es continua $\forall x \in$ **R**-{0} y en el punto x=0 presenta una discontinuidad de primera especia finita de salto 2.

1.6. Funciones trigonométricas

- **Función seno**

$$\sin(x): R \to [-1,1]$$

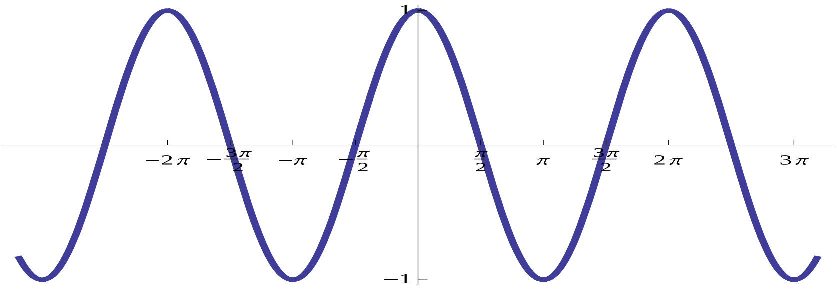


- Dom(y)=**R**; Im(y)=$[-1,1]$
- Tener en cuenta que en y=sin x , al tratarse de una función real de variable real, el argumento siempre debe darse en radianes.
- Continua y derivable $\forall x \in$ **R**
- *y=sin x* es una función acotada ya que $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Periódica, de periodo T=2π : sin (x+2π)=sin(x) $\forall x \in$ **R**
- Impar
- $\sin(x) = 0 \iff x = k\pi , k \in Z$; $\sin(x) = 1 \iff x = (2k+1)\frac{\pi}{2} , k = 0,2,4,$

  $\sin(x) = -1 \iff x = (2k+1)\frac{\pi}{2} , k = 1,3,5, \ldots$

- **Función coseno**

$$\cos(x): R \to [-1,1]$$

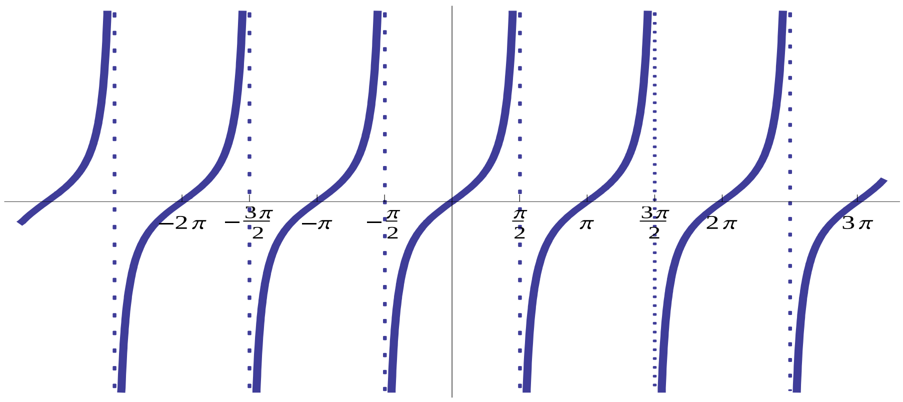


- Dom(y)=**R**; Im(y)=$[-1,1]$
- Tener en cuenta que en y=cos x, al tratarse de una función real de variable real, el argumento siempre debe darse en radianes.
- Continua y derivable $\forall x \in \mathbf{R}$
- *y=cos x* es una función acotada ya que $-1 \leq \cos x \leq 1$
- Periódica, de periodo T=2π: cos (x+2π)=cos(x) $\forall x \in \mathbf{R}$
- Par
- $\cos(x) = 0 \iff x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$; $\cos(x) = 1 \iff x = 2k\pi, k \in Z$

  $\cos(x) = -1 \iff x = (2k+1)\pi, k \in Z$

- **Función tangente** *y*= tan x=$\frac{\sin x}{\cos x}$

$$\tan(x): R - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\} \to R$$



- y= tan x no está definida en todo **R** . Si y=cos x=0, tan *x* no está definida.

  Dom(y)={ $x \in \mathbf{R}$ / $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in Z$}

  Tener en cuenta que en y=tan x, al tratarse de una función real de variable real, el argumento siempre debe darse en radianes.

- Continua y derivable $\forall x \in Dom(y)$
- $y=\tan\ x$ no es una función acotada e $Im(y) = R$
- Periódica, de periodo $T=\pi$: $\tan(x+\pi)=\tan(x)\ \forall x \in Dom(y)$
- Impar
- $\tan(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in Z$; $\tan(x) \to \infty \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

- **Otras funciones trigonométricas:**

- $\mathbf{cosec(x)} = \frac{1}{\sin(x)}$ **(Cosecante)**
- $\mathbf{sec(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ **(Secante)**
- $\mathbf{cotan(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$ **(Cotangente)**

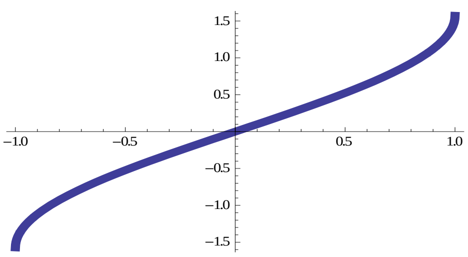
1.7. Funciones trigonométricas inversas

Para que exista (f^{-1}), la función $f(x)$ debe ser biyectiva. Además las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, ya que si el punto $(x,f(x))$ está en la gráfica de f, el punto $(f(x),x)$ está en la gráfica de f^{-1}.

Las funciones trigonométricas al ser periódicas no son biyectivas en todo su dominio. Para definir sus funciones inversas restringimos las funciones trigonométricas a un intervalo en el que si sean biyectivas.

- **Función arco seno y= arcsin x**

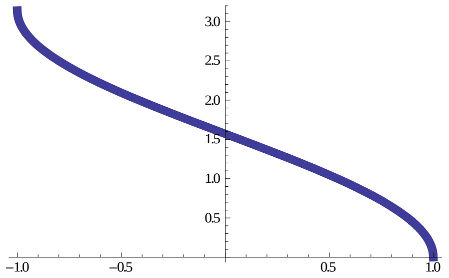
La función seno es biyectiva y continua en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $\sin(x)$: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$, entonces podemos definir su función inversa $\arcsin(x)$: $[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



- $Dom(y)=[-1,1]$; $Im(y) =[-\pi/2, \pi/2]$
- Continua $\forall x \in [-1,1]$

- **Función arco coseno y= arccos x**

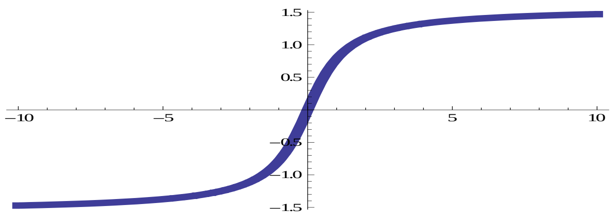
La función coseno es biyectiva y continua en $[0,\pi]$; $\cos(x):[0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$, podemos definir su función inversa $\arccos(x): [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$



- Dom(y)=[-1,1]; Im(y) =[0, π]
- Continua $\forall x \in [-1,1]$

- **Función arco tangente y= arctan x**

La función tangente es biyectiva y continua en $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$; $\tan(x):(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos su función inversa, $\arctan(x): \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



- Dom(y)= **R**; Im(y) =(-π/2, π/2)
- Continua $\forall x \in$ **R**

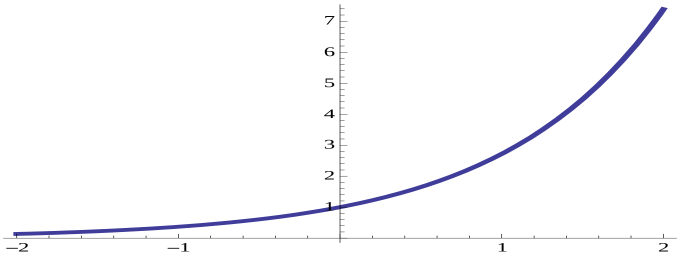
1.8. Función exponencial: y=a^x, $a > 0$

$$a^x : R \to (0,\infty)$$

- Siempre es positiva

- Dom(y)= **R**.
- Continua y derivable $\forall x \in \mathbf{R}$

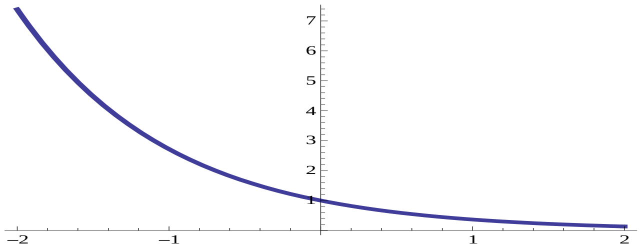
- **Si a>1**



- Im(y) =(0,∞)

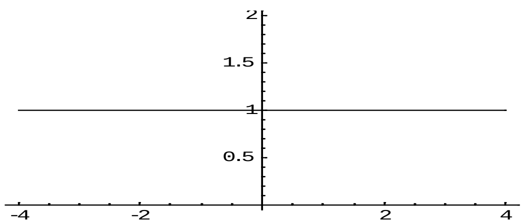
Un importante caso particular es $y=e^x$ (e=2.7182…>1)

- **Si 0<a<1**



- Im(y) =(0,∞)

- **Si a=1**



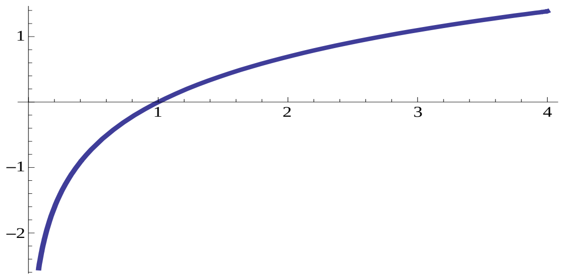
- Im(y) ={1}

1.9. Función logaritmo: $\log_a x$, a>0, a ≠ 1

La función exponencial $a^x: \mathrm{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ con a>0, a ≠ 1 es biyectiva y tiene función inversa $\log_a x$
$\log_a x: (0,+\infty) \longrightarrow \mathrm{R}$.

- Dom(y)= $(0,\infty)$
- Es continua y derivable $\forall x \in (0,\infty)$
- Im(y) =**R**

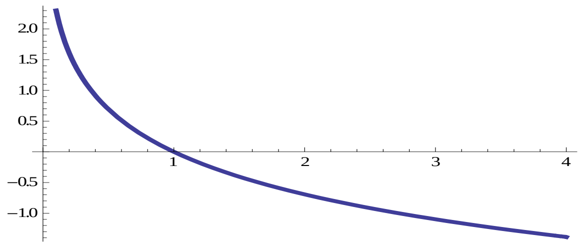
- **Si a>1**



Cuando a=e tenemos logaritmo neperiano: ln(x)

- $\ln(1) = 0$; $x \longrightarrow 0^{+}$ $\ln(x) \rightarrow -\infty$

- **Si *0 < a <1***

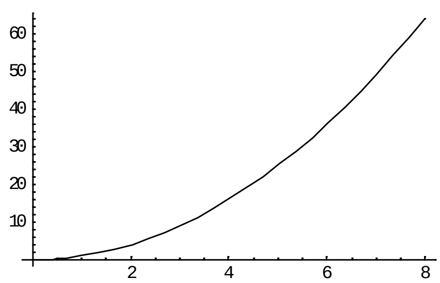


1.10. Función potencial: Es de la forma $y=x^{\alpha}$ con $\alpha \in$ R.

El domínio depende del valor de α. Ahora bien, cualquiera que sea α, la función está al menos definida para x >0.

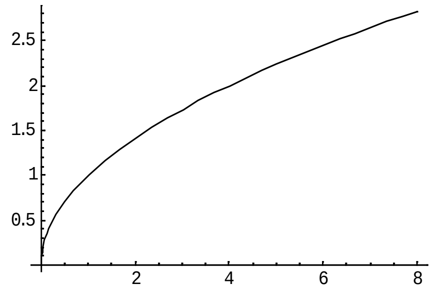
Veamos cómo son sus gráficas para x >0, según los diferentes valores de α:

- **Si α >1**



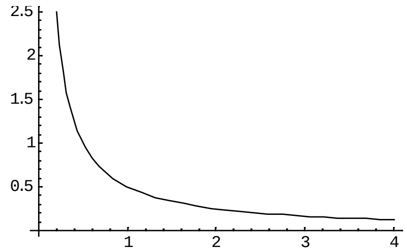
Por ejemplo: $y= x^2$, $y=x^{3/2}$

- **Si $0 < \alpha < 1$**



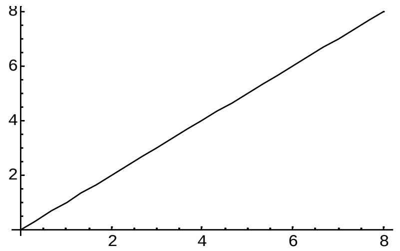
Por ejemplo: $y = \sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x^3}$

- **Si $\alpha < 0$**

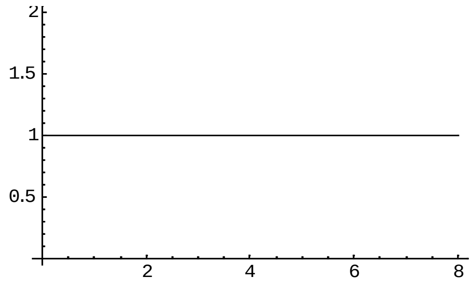


Por ejemplo: $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

- **Si $\alpha = 1$**



- **Si $\alpha = 0$**



2. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

2.1 Teoremas de funciones derivables (Teoremas del Valor medio)

Teorema de Rolle

Si f(x) es una función continua en [a,b], derivable en (a,b) y tal que f(a)=f(b) , entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que f´(c)=0.

Teorema de Cauchy

Sean f y g dos funciones reales continuas en [a,b] y derivables en (a,b), entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que [f(b)-f(a)] g'(c) = [g(b)-g(a)] f´(c).

Teorema de los incrementos finitos o de Lagrange

Si f es una función continua en [a,b] y derivable en (a,b), existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que f(b)-f(a) = f´(c) (b-a).

Consecuencias:

1. Si f es continua en [a,b] y derivable en (a,b), entonces $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$ si y sólo si f es constante en [a,b].
2. Si f y g tienen la misma derivada en todos los puntos de (a,b), entonces difieren en una constante
3. **Regla de L´Hôpital.** Si f y g son derivables en un entorno reducido de a con $g'(x) \neq 0$ en $\varepsilon^{*}(a)$ y $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito), entonces también existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ verificándose que: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
   - Este resultado también es cierto si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$
   - Para las indeterminaciones de la forma $0.\infty$ podemos escribir:

   $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) / [1/g(x)]$ con lo que se transforma en 0/0 o ∞/∞ .

   El resto de indeterminaciones: 0^0 , ∞^0 y 1^∞ también pueden transformarse en alguna de las anteriores sin más que tomar logaritmos

Observaciones:

- Puede ocurrir que no exista $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ y sin embargo si exista $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

- Puede ocurrir que un límite no se pueda resolver utilizando solo la regla de L´Hôpital.

2.2 Fórmula de Taylor

La aproximación de funciones es uno de los temas fundamentales de las Matemáticas siendo además de suma utilidad. Se trata de sustituir una función por otra de manejo más sencillo o de propiedades mejor conocidas. Es importante en esta situación la elección del tipo de funciones para efectuar la aproximación y el estudio del error cometido al efectuarla.

Teniendo en cuenta las características de los polinomios vamos a pasar a estudiar la fórmula de Taylor que nos permitirá aproximar muchas funciones por polinomios en el entorno de un punto.

Se trata de encontrar un polinomio que coincida con una función f (x) y alguna de sus derivadas en un punto dado.

Sea $P_n(x)$ un polinomio de grado n, escrito en potencias de (x-a):

$$P_n(x)= c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots + c_n (x-a)^n \qquad [1]$$

<u>Teorema.</u> Sea f una función con derivadas hasta el orden n en el punto a, entonces existe un polinomio $P_n(x)$ y sólo uno, de grado menor o igual que n que satisface:

$$P_n(a)=f(a) \text{ , } P_n'(a)=f'(a) \text{ , } \dots \text{ , } P_n^{n)}(a)=f^{n)}(a)$$

Y teniendo en cuenta [1], dicho polinomio viene dado por:

$$P_n(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

A este polinomio de le denomina **polinomio de Taylor** de orden n de la función f en el punto a. A la diferencia $(f(x)-P_n(x))$ se le denomina ***resto de orden n*** de f en a y se denota $R_n(f,a)(x)$ o $R_n(x)$. Escribimos $f(x)-P_n(x)=R_n(x)$

Además si f(x) es a n+1 veces derivable en un entorno de a dicho resto puede expresarse como

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad , \ c \in (a,x) \ \text{ o } \ c \in (x,a)$$

Por lo que la función f(x) podrá expresarse como:

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

con $c \in (a,x)$ o $c \in (x,a)$

A esta expresión se le denomina ***fórmula de Taylor de orden n***

El polinomio de Taylor de orden n es el polinomio de grado menor o igual que n que mejor aproxima a la función en un entorno de a. Se trata de una aproximación local.

Si a=0 a la fórmula de Taylor se le denomina **fórmula de McLaurin,** esto es:

$$f(x) = f(0)+f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + ... + \frac{f^{n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1} \text{ , con } c \in (0,x) \text{ o } c \in (x,0)$$

Los desarrollos de McLaurin de funciones como e^x, sin x, cos x, ln(1+x) son fáciles de obtener y tienen gran utilidad en la evaluación de estas funciones, en el cálculo de límites, de integrales , etc.

2.3. Crecimiento y Decrecimiento. Extremos

Una consecuencia directa de los teoremas del valor medio nos permite determinar el crecimiento o decrecimiento de una función si ésta es derivable.

Teorema. Sea f(x) derivable en un intervalo I, entonces:

i) f es creciente en I si y sólo si $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

ii) f es decreciente en I si y sólo si $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

iii)Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ entonces f es estrictamente creciente en I.

iv)Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ entonces f es estrictamente decreciente en I.

El recíproco de las dos últimas afirmaciones no es cierto. Por ejemplo la función $y=x^3$ es estrictamente creciente en **R** y su derivada en x=0 es nula.

Definición. **Extremos relativos** (Propiedad local)

La función f tiene un máximo relativo en a si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.

La función f tiene un mínimo relativo en a si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Definición. **Extremos absolutos**. (Propiedad global)

La función f tiene un máximo absoluto en a si $f(x) \leq f(a)$ para todo x de su dominio.

La función f tiene un mínimo absoluto en a si $f(x) \geq f(a)$ para todo x de su dominio.

- **Extremos relativos**

El uso de las derivadas nos da una condición necesaria para la existencia de extremos relativos.

Proposición.

Sea f derivable en a. Si en a f(x) tiene un extremo relativo, entonces f'(a)=0.

El reciproco no es cierto, ya que existen funciones con derivada nula en un punto a y que no tienen ni máximo ni mínimo relativo en el.

Ej: La función $y=x^3$ en a=0.

Teorema. Condiciones suficientes para la existencia de extremo relativo

Sea f(x) continua en a. Entonces:

i) Si existe $\delta > 0$ tal que $\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x \in (a-\delta, a) \\ f'(x) < 0 & \forall x \in (a, a+\delta) \end{cases}$ entonces f tiene un máximo relativo en a (la función pasa de creciente a decreciente)

ii) Si existe $\delta > 0$ tal que $\begin{cases} f'(x) < 0 & \forall x \in (a-\delta, a) \\ f'(x) > 0 & \forall x \in (a, a+\delta) \end{cases}$ entonces f tiene un mínimo relativo en a (la función pasa de decreciente a creciente)

Teorema. Condiciones suficientes para la existencia de extremo relativo

Supongamos que f tiene n derivadas continuas en a y además $f'(a) = ... = f^{n-1)}(a) = 0$, $f^{n)}(a) \neq 0$.

i) Si n es par y $\begin{cases} f^{n)}(a) > 0 & \Rightarrow \text{f tiene un mínimo relativo en a} \\ f^{n)}(a) < 0 & \Rightarrow \text{f tiene un máximo relativo en a} \end{cases}$

ii) Si n es impar, f no tiene extremo en a.

- **Extremos absolutos (Cálculo en intervalos cerrados)**

Según el teorema de Weierstrass si una función f es continua en un intervalo $[\alpha, \beta]$ alcanza sus extremos absolutos en ese intervalo; para encontrar los puntos en los que f toma esos valores deben estudiarse:

i) Los puntos de no derivabilidad de f

ii) Los valores $x_i \in (\alpha, \beta)$ tales que $f'(x_i) = 0$ (puntos críticos)

iii)Los extremos del intervalo x=α, x=β

2.4. Curvatura. Puntos de Inflexión

Definición. Sea f una función derivable en a. Se dice que la gráfica de f es **cóncava o tiene curvatura positiva** en a si la tangente en a (y=f(a)+f'(a) (x-a)) se encuentra por debajo de la función en un entorno reducido del punto (a,f(a)).

Definición. Se dice que la gráfica de f es **convexa o tiene curvatura negativa** en a si la tangente en a (y=f(a)+f'(a) (x-a)) se encuentra por encima de la función en un entorno reducido del punto (a,f(a)).

Definición. Los puntos donde la gráfica cambia su curvatura se llaman **puntos de inflexión.**

Teorema. Si f admite n derivadas continuas en a, con

$f'(a)$ cualquier valor, $f''(a) = ... = f^{n-1)}(a) = 0$, $f^{n)}(a) \neq 0$ entonces:

i) Si n es impar (n>1), la curva tiene un punto de inflexión en a
ii) Si n es par y $f^{n)}(a)>0$, la curva tiene curvatura positiva (es cóncava) en a
iii) Si n es par y $f^{n)}(a)<0$, la curva tiene curvatura negativa (es convexa) en a.

2.5. Representación gráfica de funciones explicitas

Dada una función f su representación gráfica es el estudio detallado de cada uno de los siguientes puntos:

1. Dominio. (Puntos de Discontinuidad)
2. Simetrías
   - Si f(x)=f(-x)la función es par y su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas
   - Si f(-x)=-f(x) la función es impar y su gráfica será simétrica respecto del origen (0,0).
3. Periodicidad Si f(x+T)=f(x) $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$, T>0 la función es periódica de periodo T.
4. Puntos de corte con los ejes
5. Asíntotas. Se dice que una recta r es asíntota de una curva C, si la distancia de un punto P de la curva a la recta tiende a 0 cuando P tiende a ∞, es decir, cuando una o las dos coordenadas de P tienden a infinito.

   Dada la curva y=f(x):

   -Asíntota horizontal. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ diremos que la recta y=b es una asíntota horizontal

   -Asíntota vertical. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ diremos que la recta x=a es una asíntota vertical

- Asíntota oblicua

Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ la curva puede tener una asíntota oblicua cuya ecuación será de la forma y=mx+b, donde, m,b$\in$**R** y se determinan por:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \;\; y \;\; b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right]$$

Si uno de estos límites no existe la curva no tiene asíntota oblicua

6. Crecimiento y Decrecimiento. Extremos
7. Curvatura y puntos de inflexión
8. Cuadro de valores (resumen de todos los resultados obtenidos)

3. FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

Hasta este momento hemos trabajado con funciones de una variable independiente, pero hay muchas magnitudes que son funciones de dos o más variables independientes, por ejemplo el volumen de un cilindro circular recto $V = \pi r^2 h$, es una función de dos variables, el radio y la altura.

3.1. Conceptos Topológicos

Si en el plano $\mathbb{R}^2$ consideramos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares y dibujamos una línea cerrada C, dicha línea delimitará una región S a la que llamaremos *recinto*.

Un caso particular de recinto es el *intervalo rectangular cerrado* definido como $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b \wedge c \le y \le d \right\}$. Si excluimos los signos iguales en la anterior definición, obtenemos un *intervalo rectangular abierto.*

Veamos otros tipos importantes de recintos:

Llamamos *entorno rectangular del punto* P(a,b) al conjunto dado por $\left\{(x,y) \in R^2 / |x-a| < \delta_1, |y-b| < \delta_2 \right\}$siendo δ_1 y $\delta_2 > 0$. Si $\delta_1 = \delta_2$ el *entorno* se denomina *cuadrangular*.

Llamamos *entorno circular de centro* P(a,b) y radio δ al conjunto dado por $\left\{(x,y) \in R^2 / \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \right\}$.

Si en estos entornos excluimos el punto P(a,b) tenemos los llamados *entornos reducidos*.

3.2. Funciones reales de varias variables. Definiciones

Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, llamamos *función real de dos variables reales* a toda aplicación $f: AxB \to \mathbb{R}$, que a cada par (x,y)$\in$AxB le hace corresponder un número real f(x,y).

Generalizando: Dados $A_1,A_2,..., A_n$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, llamamos *función real de n variables reales*, a toda aplicación $f: A_1 x A_2 x \ldots x A_n \to \mathbb{R}$, que hace corresponder a cada $(x_1,x_2,...,x_n) \in A_1xA_2x...xA_n$ un número real $f(x_1,x_2,...,x_n)$.

En lo sucesivo estudiaremos el caso n=2, pero todos los resultados obtenidos podrán generalizarse para cualquier valor de n.

A las funciones reales de dos variables reales se las suele representar usualmente en la forma z=f(x,y), donde x e y son las variables independientes y z la variable dependiente o función.

Al conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ de los puntos en los que está definida la función se le denomina *dominio* de la función y al conjunto $\{f(x,y) / (x,y) \in D\}$ *recorrido o imagen* de la función.

El lugar geométrico de todas las ternas $\{(x,y,z) / z = f(x,y)\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ a cuya representación gráfica en el espacio tridimensional denominamos *gráfica* de la función z=f(x,y), que es una superficie.

Se llama *curva de nivel* de valor C, de una función z=f(x,y), al conjunto $\{(x,y) \in R^2 / f(x,y) = C\}$.

3.3. Límite de una función de dos variables

3.3.1. Límite bidimensional, doble o simultáneo.

<u>Definición</u>: Sea z=f(x,y) una función definida en un dominio D. Se dice que L es el límite de esta función en el punto $P_o(a,b)$ y representamos $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ si se cumple:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall (x,y) \in D \text{ con } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ entonces } |f(x,y) - L| < \varepsilon .$$

<u>Observaciones</u>:

i) la función z=f(x,y) no tiene por qué estar definida en el punto $P_0(a,b)$ pero si debe estarlo en un cierto entorno de P_0. Por este motivo se utilizan entornos reducidos ya que $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} > 0$.

ii) En la definición se han tomado como entornos círculos de centro P_0 y radio δ, pero también podrían haber servido entornos rectangulares o cuadrangulares:

$$\left\{(x,y) \in R^2 / |x-a| < \delta_1, |y-b| < \delta_2\right\}, \quad \left\{(x,y) \in R^2 / |x-a| < \delta \;, |y-b| < \delta\right\} \quad \text{respectivamente.}$$

iii) En la definición de límite no se indica la forma en que el punto P tiende a P_0, es decir, la existencia del límite es independiente del camino seguido por P al acercarse a P_0. Se puede acercar a través de cualquier línea, curva o recta, o por cualquier conjunto de puntos.

iv) Igual que en el caso de una variable se puede generalizar la definición a los casos: $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = L$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \infty$.

3.3.2. Límites direccionales.

Hasta ahora hemos supuesto que las variables x e y no tenían relación entre sí, es decir, el punto P(x,y) tiende a P_0(a,b) a través de cualquier subconjunto de puntos.

Supongamos ahora que P(x,y) tiende a P_0(a,b) siguiendo una curva o camino
$y = \phi(x)$ perteneciente al dominio de definición de z=f(x,y). Llamamos *límite de la función* z=f(x,y) *en el punto* P_0(a,b) *en la dirección* $y = \phi(x)$ a:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ y=\phi(x)}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x,\phi(x)) = \lim_{x\to a} F(x)$$

Para que exista el límite doble de z=f(x,y) en el punto P_0 es preciso que existan y coincidan los límites en dicho punto según todas las direcciones y a lo largo de todas las curvas.

3.3.3. Límites sucesivos o reiterados.

Dada la función f(x,y) si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = \phi(y)$ definida en un entorno de b y existe $\lim\limits_{y\to b} \phi(y)$ diremos que existe el límite $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = \lim\limits_{y\to b}\left[\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right] = \lim\limits_{y\to b}\phi(y)$.
Análogamente si existe $\rho(x) = \lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ definida en un entorno de a y existe $\lim\limits_{x\to a} \rho(x)$ diremos que existe el límite $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = \lim\limits_{x\to a}\left[\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right] = \lim\limits_{x\to a}\rho(x)$.

Estos límites se denominan *límites reiterados o sucesivos* y su existencia no nos permite asegurar la existencia del límite doble: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, dado que únicamente son algunos caminos de los múltiples que habría que comprobar. Únicamente en el caso de que existan y no coincidan, se podrá asegurar la no existencia de límite doble.

3.3.4. Cálculo de límites dobles

En primer lugar se estudian los límites reiterados. Si como en el caso de la función $z = \begin{cases} \dfrac{xy - x + y}{x + y} & \text{si} \quad x + y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x + y = 0 \end{cases}$ no coinciden estos límites sucesivos en el punto (0,0), podemos asegurar que no existe el límite doble: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} z$.

En el caso de que coincidan los límites reiterados tendríamos que estudiar los límites direccionales, tomando por ejemplo todas las rectas y=mx que se acercan a (0,0). Si el resultado depende de m nos indicará que el límite cambia al variar la dirección por lo que el límite doble tampoco existirá. Lo mismo podría hacerse acercándonos a (0,0) por cualquier otra dirección que pase por dicho punto, como parábolas, circunferencias, etc.

Otra forma de resolver un límite de una función de dos variables $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ sería haciendo el cambio a polares: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$. Es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \iff \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = L \,, \forall\theta \in [0,2\pi].$$

En el caso general $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ el cambio será $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$.

3.4. Continuidad de funciones de dos variables

Dada una función f(x,y) y un punto P(a,b), se dice que la función es continua en P si:

i) $\exists\, f(a,b)$

ii) $\exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

iii) Ambos coinciden.

Es decir, una función f(x,y) es continua en un punto P(a,b) si:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

En el caso de que la función no cumpla alguna de las condiciones anteriores, se dirá *discontinua* en P(a,b).

Una función es continua en un dominio D, cuando lo es en todos los puntos del mismo.

Análogamente a lo que ocurre en funciones de una variable, la suma, diferencia, producto y cociente de funciones continuas es una función continua, salvo en el caso del cociente en los puntos que anulan el denominador.

3.5. Derivadas parciales

3.5.1. Definiciones

Sea z=f(x,y) una función definida en $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Se llama *derivada parcial de z respecto a la variable x*, y se representa por: $z'_x,\ f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ D_x f(x,y)$, al siguiente límite si existe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

Análogamente se define la *derivada parcial de z respecto a la variable y*, y se representa por $z'_y,\ f'_y(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ D_y f(x,y)$, al límite : $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$.

En general, tanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ como $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones de x e y. Para hallar las derivadas parciales en un punto $P(x_0,y_0)$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$$

El concepto de derivada parcial puede extenderse a funciones de tres o más variables, fijando todas las variables menos una, para encontrar la derivada parcial respecto de dicha variable.

3.5.2. Derivadas parciales sucesivas

Como las derivadas parciales son a su vez funciones de dos variables podemos derivarlas de nuevo obteniendo las llamadas *derivadas parciales segundas:*

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x,y) = z''_{x^2}$ derivada parcial segunda de la función z con respecto a la variable x dos veces.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y) = z''_{yx}$ derivada parcial segunda de la función z con respecto a y, y con respecto a x.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y) = z''_{xy}$ derivada parcial segunda de la función z con respecto a x, y con respecto a y.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{y^2}(x,y)=z''_{y^2}$ derivada parcial segunda de la función z con respecto a la variable y dos veces.

Estas derivadas, en general, serán funciones de x e y por lo que se podrán derivar de nuevo obteniendo las *derivadas parciales sucesivas* de ordenes 3º, 4º,....

3.5.3. Teorema de Schwarz

Si la función z=f(x,y) admite derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en un entorno de un punto $P(x_0,y_0)$ siendo $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ continua en dicho punto, entonces existe $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ en P y se cumple: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$.

Este teorema puede generalizarse para derivadas parciales de cualquier orden con $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ o $\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-p} \partial x^p}$ continua, entonces $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}=\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-p} \partial x^p}$.

3.6. Derivación de funciones compuestas

Cuando en funciones de una variable teníamos $\left.\begin{array}{l} z=f(y) \\ y=g(x) \end{array}\right\}$, para derivar la función compuesta z=f(g(x))=F(x) aplicábamos la Regla de la Cadena:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=f'(y)\cdot g'(x)$$

En funciones de varias variables pueden darse los siguientes casos:

a) Derivada de una función de varias variables cada una de las cuales son a su vez funciones de una sola variable independiente:

$$\left.\begin{array}{l} z=f(x,y) \\ x=g(t) \\ y=h(t) \end{array}\right\} \Rightarrow z=f\left[g(t),h(t)\right]=F(t)$$

$$F'(t)=\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Esta expresión sería válida para cualquier función con las mismas características de z, así podemos escribir $\frac{d\bullet}{dt}=\frac{\partial\bullet}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\bullet}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ donde $\bullet$ representa una función de x y de y.

Si queremos calcular $\frac{d^2z}{dt^2}$ tenemos,

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d\left(\frac{dz}{dt}\right)}{dt}=\frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}+\frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt}.$$

Por ser $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ funciones de x e y, utilizando el resultado anterior se tiene:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right]\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right]\cdot\frac{dy}{dt}+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial^2z}{\partial x^2}\cdot\left[\frac{dx}{dt}\right]^2+2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\cdot\left[\frac{dy}{dt}\right]^2+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}.$$

A partir de esta podríamos calcular $\frac{d^3z}{dt^3}$, $\frac{d^4z}{dt^4}$, etc.

b) Derivada de una función de varias variables cada una de las cuales son a su vez funciones de otras variables.

$$\left.\begin{array}{r}z=f(x,y)\\ x=g(s,t)\\ y=h(s,t)\end{array}\right\}\Rightarrow z=f\big[g(s,t),h(s,t)\big]=F(s,t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\quad\text{y}\quad\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

Análogamente al caso a) se podrían calcular $\frac{\partial^2z}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^3z}{\partial s\partial t^2}$, etc.

c) Derivada de una función de una variable, la cual es a su vez función de varias:

$$\left.\begin{array}{r}z=f(u)\\ u=g(x,y,t)\end{array}\right\}\Rightarrow\quad z=f(g(x,y,t))=F(x,y,t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\quad\text{y}\quad\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Al igual que en los casos anteriores, podríamos calcular derivadas parciales de órdenes superiores.

3.7. Diferencial de una función de dos variables

Vimos que para una función de una variable y = f(x) su diferencial es $dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$

Esta diferencial podíamos usarla, cuando Δx era pequeño, para aproximar el valor de $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Para una función de dos variables z = f(x,y) utilizaremos una terminología similar, para lo cual llamaremos Δx e Δy a los *incrementos de* x *y de* y, y Δz al *incremento* de z que viene dado por $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Llamamos *diferencial total de* z a $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

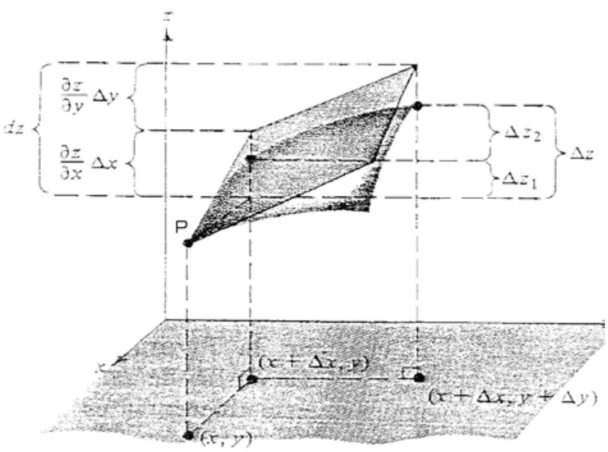
Si tomamos z = f(x,y) = x entonces dz = dx = Δx y, haciendo z = f(x,y) = y, tendremos dz = dy = Δy por lo que podemos reescribir dz como:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

De forma análoga se puede generalizar este concepto para funciones de más variables

Interpretación geométrica de la diferencial

La diferencial total de una función de dos variables, z = f(x,y), representa el incremento que experimenta z cuando x e y son modificados por los incrementos Δx e Δy al sustituir la superficie por el plano tangente a la misma en el punto P(x,y,f(x,y)).



$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

En general $\Delta z \neq dz$, pero si Δx e Δy son pequeños, podemos considerar $\Delta z \approx dz$ lo que nos permitirá obtener estimaciones del valor de la función en puntos cercanos a uno dado.

3.8. Derivación de funciones implícitas

3.8.1. Función definida por una ecuación con dos incógnitas.

Definición .- Se dice que la ecuación F(x,y) = 0 define en un conjunto A a y como función implícita de x si $\forall x \in A$ existe una función $y = \varphi(x)$ tal que si se sustituye en la ecuación , esta se transforma en una identidad en x, es decir $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$.

Teorema.- La ecuación F(x,y) = 0 define en un entorno del punto P(a,b) a y como función implícita de x $\left(y=\varphi(x)\right)$ si:

a) F(a,b)=0

b) F'_x y F'_y son funciones continuas en un entorno del punto P.

c) $F'_y(a,b) \neq 0$

Derivada.- Supongamos que F(x,y) = 0 nos define a y como función implícita de x $\left(y=\varphi(x)\right)$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} z = F(x,y) = 0 \\ x = x \\ y = \varphi(x) \end{array}\right\} \Rightarrow z = F(x,\varphi(x)) = G(x) = 0$$

Utilizando la derivación de funciones compuestas tendremos:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{, de donde}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

A partir de ésta, se calcularían las derivadas de órdenes superiores.

3.8.2. Función definida por una ecuación con más de dos incógnitas.

Definición.- Se dice que la ecuación F(x,y,z) = 0 define en un conjunto A a z como función implícita de las variables x e y, si $\forall (x,y) \in A$ existe una función $z=\varphi(x,y)$ tal que $F(x,y,\varphi(x,y)) \equiv 0$.

Teorema.- La ecuación F(x,y,z) = 0 define en un entorno del punto P(a,b,c) a z como función implícita de x e y $\left(z=\varphi(x,y)\right)$ si:

a) F(a,b,c) = 0

b) F'_x, F'_y y F'_z son funciones continuas en un entorno del punto P.

c) $F'_z(a,b,c) \neq 0$.

Derivada.- Supongamos que la ecuación F(x,y,z) = 0 nos define z como función implícita de las variables x e y $(z=\varphi(x,y))$, por lo que:

$$\left.\begin{array}{r} u = F(x,y,z) = 0 \\ x = x \\ y = y \\ z = \varphi(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow u = F(x,y,\varphi(x,y)) = G(x,y) = 0$$

Derivando, según las reglas de la derivación de funciones compuestas, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot 1 + \dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot 0 + \dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot 0 + \dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot 1 + \dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{array}\right\}$$

de donde,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

A partir de aquí, como en el caso anterior, podríamos obtener las derivadas parciales segundas, terceras, etc

TABLA DE DERIVADAS

Funciones	Derivadas	Funciones	Derivadas
$y = k,\ k \in R$	$y' = 0$		
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$	$y = [f(x)]^n$	$y' = n[f(x)]^{n-1}\ f'(x)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{1}{\ln a}\frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}\ f'(x) \ln a$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin[f(x)]$	$y' = \cos[f(x)]\ f'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos[f(x)]$	$y' = -\sin[f(x)]\ f'(x)$
$y = \tan x$	$y' = 1/\cos^2 x$	$y = \tan[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$
$y = \sec x$	$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$y = \sec[f(x)]$	$y' = \frac{\sin[f(x)]}{\cos^2[f(x)]}f'(x)$
$y = \csc x$	$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$y = \csc[f(x)]$	$y' = -\frac{\cos[f(x)]}{\sin^2[f(x)]}f'(x)$
$y = \text{cotan}\ x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \text{cotan}[f(x)]$	$y' = -\frac{1}{\sin^2[f(x)]}f'(x)$
$y = \text{arc sin}\ x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arc sin}[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = \text{arc cos}\ x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arc cos}[f(x)]$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = \text{arc tan}\ x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \text{arc tan}[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
$y = \text{sh}\ x$	$y' = \text{ch}\ x$	$y = \text{sh}[f(x)]$	$y' = \text{ch}[f(x)]\ f'(x)$
$y = \text{ch}\ x$	$y' = \text{sh}\ x$	$y = \text{ch}[f(x)]$	$y' = \text{sh}[f(x)]\ f'(x)$
$y = \text{th}\ x$	$y' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$	$y = \text{th}[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{\text{ch}^2[f(x)]}$
$y = \text{arg sh}\ x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$y = \text{arg sh}[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$
$y = \text{arg ch}\ x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$y = \text{arg ch}[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}$
$y = \text{arg th}\ x$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$	$y = \text{arg th}[f(x)]$	$y' = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$