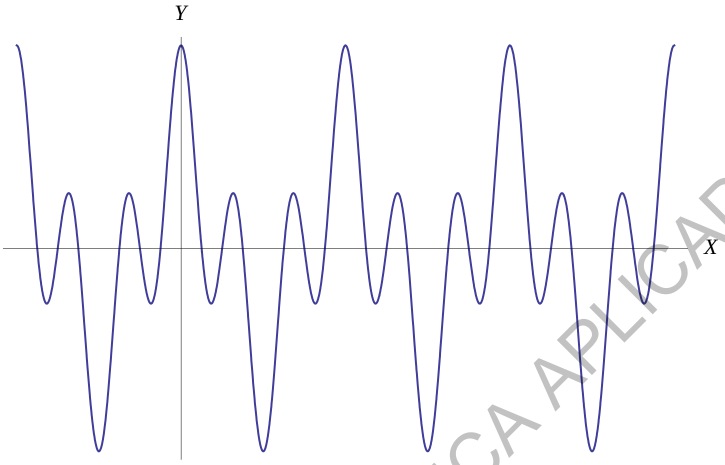
Funciones periódicas

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es periódica, de periodo T>0, si $f(x) = f(x+T)\ \forall x \in A$, siendo T el mínimo valor que lo verifica. La siguiente figura muestra una función de este tipo.



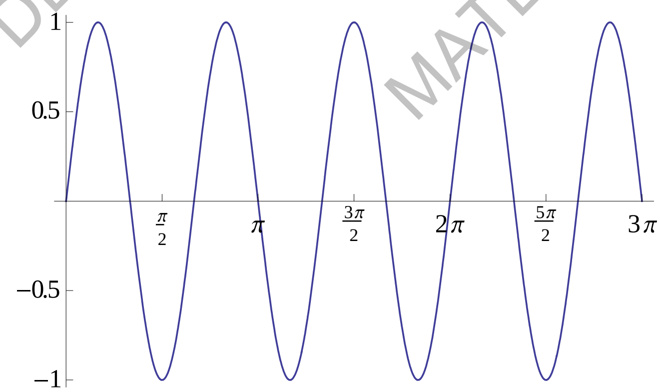
Unas funciones periódicas bien conocidas, ambas de periodo $T = 2\pi$, son la función seno y la función coseno, de las que hablaremos más adelante. Otra función periódica, esta vez de periodo π, es la función tangente.

Propiedades de las funciones periódicas

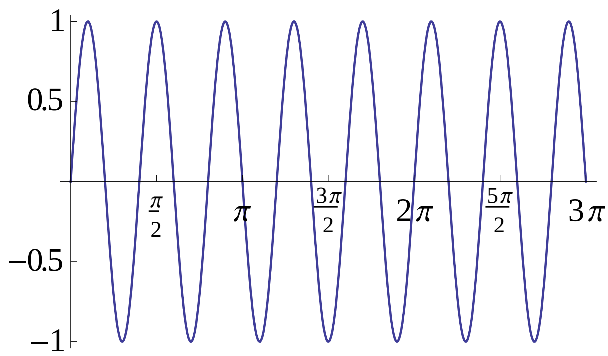
- Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos funciones periódicas, de periodos T_1 y T_2, y $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, la función suma de ambas también es periódica.

Veamos un ejemplo:

Consideremos las funciones



$f_1(x) = \sin 3x$

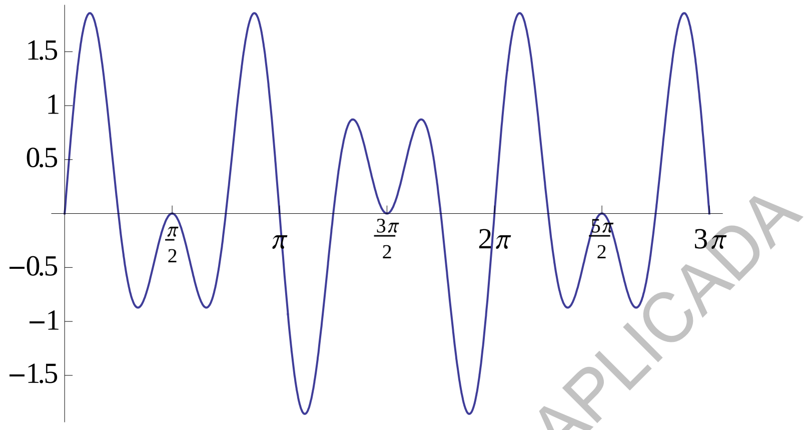


$f_2(x) = \sin 5x$

El periodo de la primera es $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ y el de la segunda $T_2 = \frac{2\pi}{5}$ cumpliendo que $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$,

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
VITORIA-GASTEIZ
MATEMATIKA APLIKATUA SAILA

Si ahora se representa gráficamente la función suma de ambas $y = \sin 3x + \sin 5x$ tenemos:

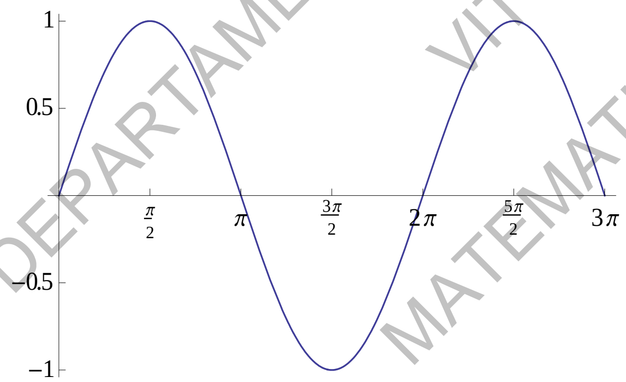


que también es una función periódica y su periodo vale 2π.

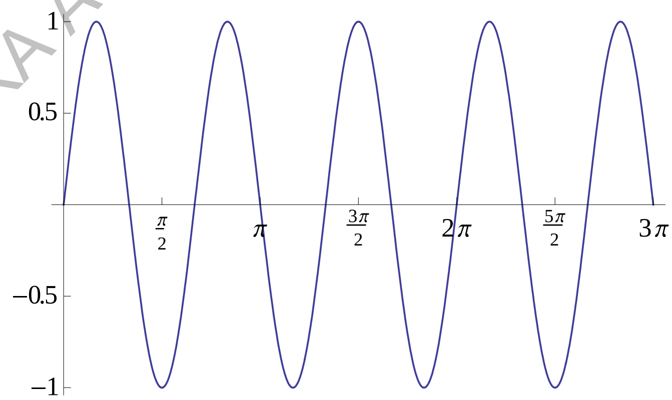
- Si a una función periódica de periodo T_1 se le suma (o resta) otra función periódica cuyo periodo T_2 cumple que $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{N}$, entonces el periodo de la función suma (o resta) de ambas también es T_1.

Veámoslo con un ejemplo;

Consideremos las funciones $y = \sin x$ e $y = \sin 3x$, cuyas gráficas son:



$y = \sin x$

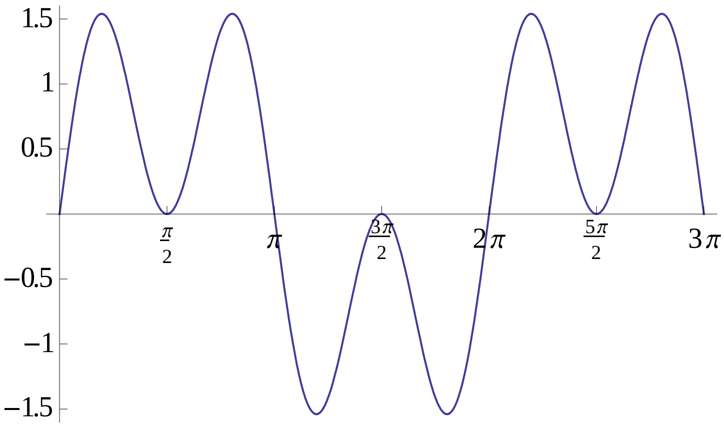


$y = \sin 3x$

La primera, $y = \sin x$ tiene un periodo $T_1 = 2\pi$ y el periodo de la segunda, $y = \sin 3x$, es $T_2 = \frac{2\pi}{3}$. Se cumple, por tanto que $\frac{T_1}{T_2} = 3 \in \mathbb{N}$.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
VITORIA-GASTEIZ
MATEMATIKA APLIKATUA SAILA

Si consideramos la función suma de ambas $y = \sin x + \sin 3x$ su gráfica es



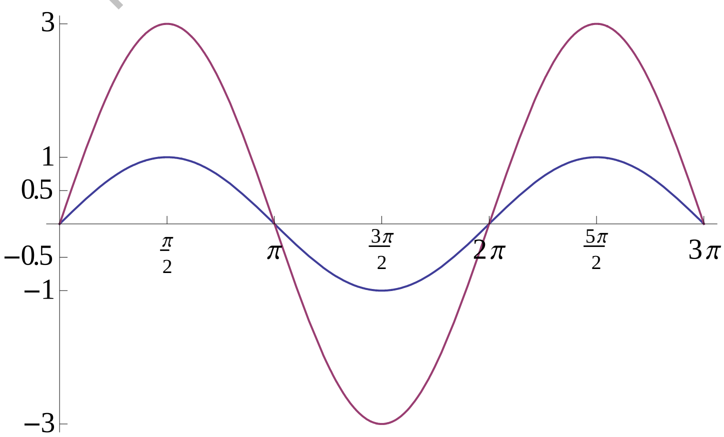
y su periodo es el mismo que el de la primera función, $T_1 = 2\pi$.

Las funciones sinusoidales.

La forma más general de una función sinusoidal es $y = A\sin(kx + \varphi)$ en la que aparecen tres parámetros:

- La amplitud *A*.
- El factor multiplicativo del argumento, *k*, que se denomina pulsación, y se denota ω ,en el caso en que la variable independiente sea el tiempo.
- El desfase φ

- La amplitud *A* determina los valores mínimo y máximo que puede adquirir la función. Puesto que la función seno oscila entre -1 y +1, al multiplicarla por un factor *A* oscilará entre –*A* y +*A* tal como se ve la figura en la que hemos representado $y = \sin x$ e $y = 3\sin x$



DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
VITORIA-GASTEIZ
MATEMATIKA APLIKATUA SAILA

- El parámetro *k* está relacionado con el valor del periodo de la función sinusoidal T, puesto que se cumple:

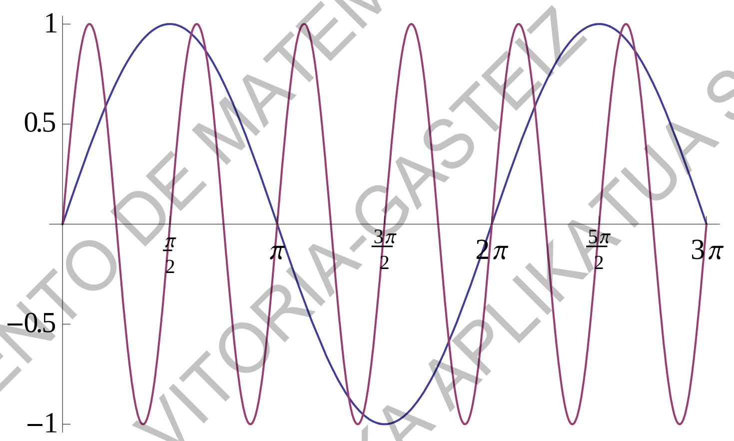
$$T = \frac{2\pi}{k} \qquad \Leftrightarrow \qquad k = \frac{2\pi}{T}$$

En el caso en que la variable independiente sea el tiempo, puesto que entonces se suele escribir $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, se tendrá:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

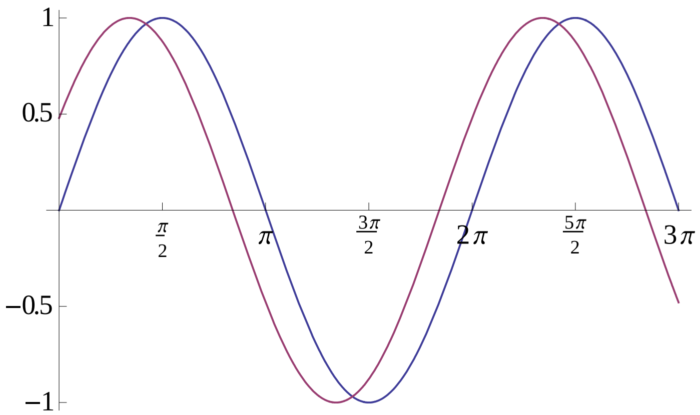
La siguiente figura es la representación gráfica simultánea de dos funciones que sólo difieren en este parámetro: $y = \sin x$ e $y = \sin 4x$

Se observa perfectamente que la única diferencia entre ellas es el periodo: la primera tiene un periodo $T_1 = 2\pi$ y el de la segunda es $T_2 = \frac{\pi}{2}$



- Finalmente, el desfase φ modifica la posición horizontal de la curva: al aumentar su valor la sinusoide se desplaza hacia la izquierda.

Esta propiedad se puede comprobar en la siguiente figura donde se representan simultáneamente las funciones $y = \sin x$ e $y = \sin(x + 0{,}5)$

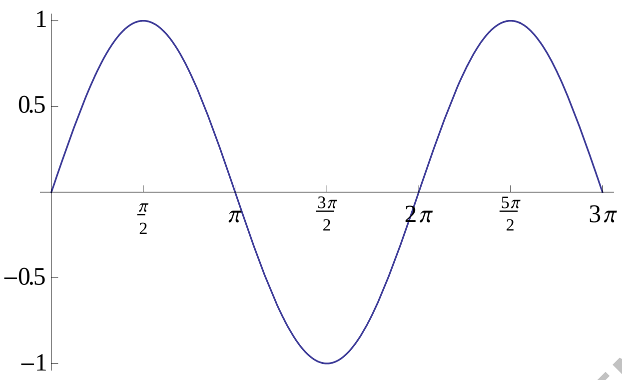


DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
VITORIA-GASTEIZ
MATEMATIKA APLIKATUA SAILA

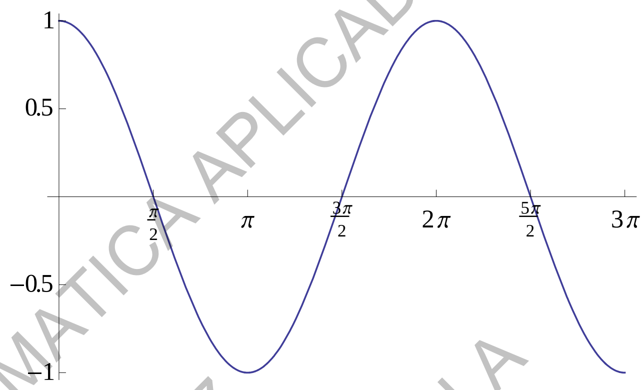
Obviamente, si el desfase fuese negativo la curva quedaría desplazada hacia la derecha.

Puesto que las funciones seno y coseno tienen la misma forma, estando desplazadas horizontalmente una con respecto de la otra, tal como indica la figura, resulta evidente que sólo difieren entre sí en un desfase.

$y = \sin x$



$y = \cos x$



Para obtener la función coseno a partir de la función seno basta con desplazar esta última $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda, de donde:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Este hecho permite representar cualquier función sinusoidal en forma de un seno o bien en forma de un coseno.

Por ejemplo, si se tiene una función en representación seno $y = A\sin(kx + \varphi)$, se puede escribir también como $y = A\cos(kx + \Phi)$, donde $\Phi = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Análogamente, si se tiene una función en representación coseno $y = A\cos(kx + \varphi)$, puede escribirse en representación seno en la forma $y = A\sin(kx + \Phi)$, donde $\Phi = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

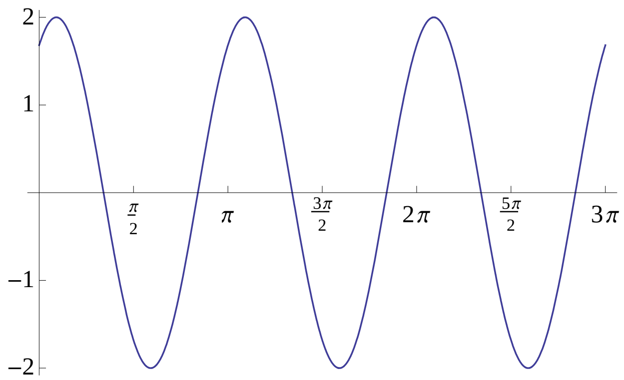
- Otra propiedad interesante de las funciones sinusoidales es que la suma de dos de ellas del mismo periodo, difiriendo sólo en la amplitud y en el desfase, es también una función sinusoidal del mismo periodo:

$$A_1 \sin(kx + \varphi_1) + A_2 \sin(kx + \varphi_2) = A\sin(kx + \varphi)$$

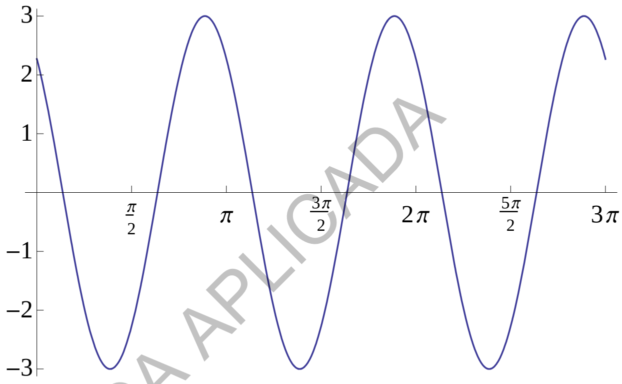
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
VITORIA-GASTEIZ
MATEMATIKA APLIKATUA SAILA

Por ejemplo, sean las funciones $y=2\sin(2x+1)$ e $y=3\sin(2x-4)$ que tienen el mismo periodo $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ y distintas amplitudes y desfases, cuyas gráficas son:

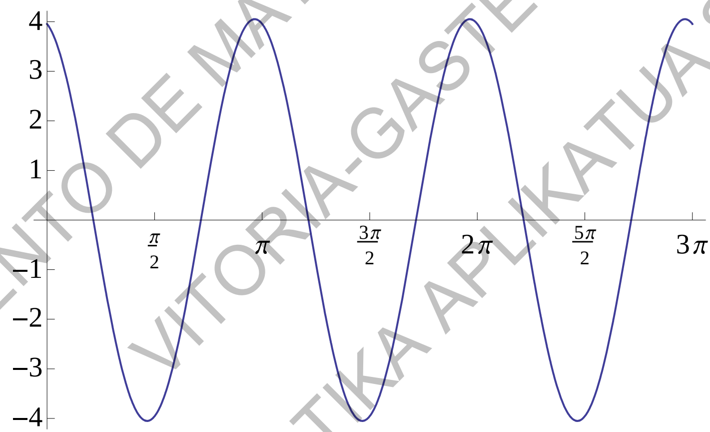
$y=2\sin(2x+1)$



$y=3\sin(2x-4)$



Y consideremos la función suma de ambas $y=2\sin(2x+1)+3\sin(2x-4)$, cuya gráfica es



Vemos que ésta es una función sinusoidal del mismo periodo que las otras dos $T=\pi$, pero de amplitud y desfase diferentes.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
VITORIA-GASTEIZ
MATEMATIKA APLIKATUA SAILA