Tema 3 : Algebra de Boole

Objetivo:

Introducción al Algebra de Boole

INTRODUCCIÓN

- George Boole creó el álgebra que lleva su nombre en el primer cuarto del siglo XIX. Pretendía explicar las leyes fundamentales de aquellas operaciones de la mente humana por las que se rigen los razonamientos
- . Las variables con las que opera son las binarias 1 y 0 (verdadero o falso). Los signos 1 y 0 no expresan cantidades, sino estados de las variables.
- Podemos decir, que el sistema de numeración binario y el álgebra de Boole constituyen la base matemática para el diseño y construcción de sistemas digitales.

ALGEBRA DE BOOLE

- Un conjunto B dotado con dos operaciones algebraicas internas (+ , * **)** es un álgebra de Boole, sí y sólo sí se verifican los postulados:
  1. Las operaciones + y * son conmutativas.
  2. Existen en B dos elementos distintos representados por los símbolos 0 y 1, respectivamente, tal que :

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad \forall\ a \in B$$
$$a * 1 = 1 * a = a$$

El símbolo 0 es el elemento identidad para la operación **"+"** y el símbolo 1 es el elemento identidad para la operación **" * "**

  3. Cada operación es distributiva para la otra, esto es:

$$a + (b \mathbin{.} c) = (a + b) \mathbin{.} (a + c) \qquad \forall\ a,b,c \in B$$
$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

  4. Para todo elemento a, existe un elemento $\bar{a}$ también perteneciente a B tal que:

$$a + \bar{a} = 1$$
$$a * \bar{a} = 0$$

Variables y Funciones Booleanas

- Las **variables booleanas** podrán tomar valores entre los dos posibles estados contemplados en el algebra de boole (0 y 1).
- Se define **Función Lógica** a toda variable binaria cuyo valor depende de una expresión formada por otras variables binarias relacionadas mediante las operaciones + y *.
  - Por ejemplo F=(a+b)*(c+d)
- **Tabla de verdad** mediante esta tabla conoceremos el estado de la función lógica para todas las posibles combinaciones de las variables de entrada

Operaciones Booleanas

- Operaciones Booleanas: En el álgebra booleana sólo existen tres operaciones básicas:
  - **Adición o suma lógica:** También llamada operación "OR" u operación "O". Normalmente se utilizará el símbolo "+" para referenciar esta operación.
  - **Multiplicación o producto lógico:** También llamada operación "AND" u operación "Y". Normalmente se utilizará el símbolo "." para referenciar esta operación.
  - **Complementación o inversión lógica:** También llamada operación NOT.

    Normalmente se utilizará el símbolo " $\overline{x}$ " para referenciar esta operación siendo x la variable o función afectada por la operación de complementación.

Operaciones Booleanas

- **Adición o suma lógica**: Supongamos que tenemos dos variables booleanas “a” y “b”, cuando se combinan con la operación lógica OR, el resultado se expresa de la siguiente forma:

$$F = a + b.$$

- La tabla de verdad de la función suma lógica será:

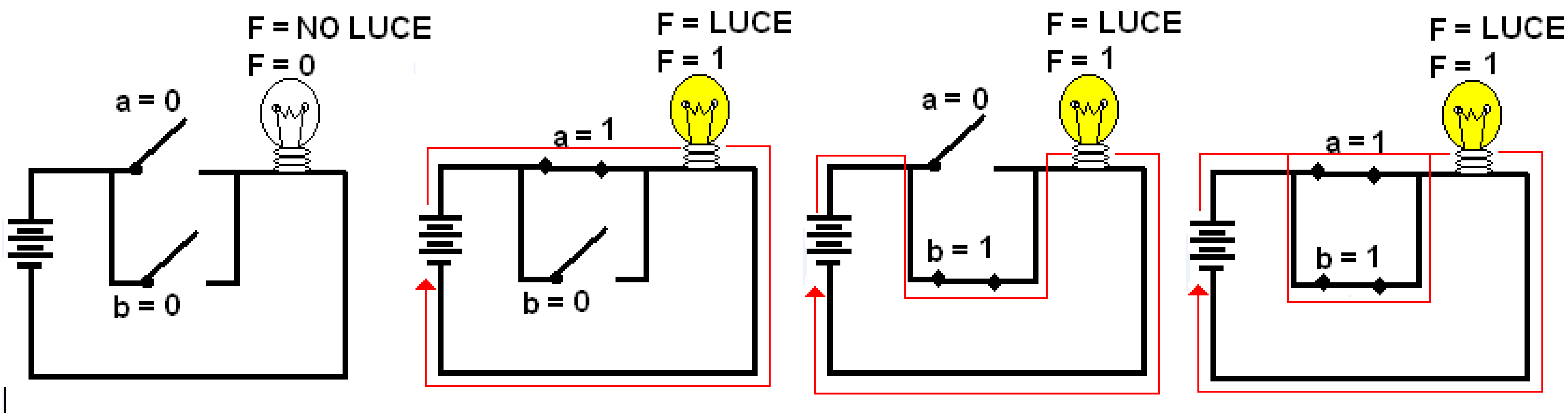
a	b	F (OR)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Operaciones Booleanas

– Es decir la función a + b es 1 cuando al menos una de las dos variables es uno

– Generalizando para N variables: $F=a_1+a_2+\ldots a_N$ es igual a uno cuando al menos una de la a_i es uno, o dicho de otra forma, para que F=0 tienen que ser todas las a_i cero al mismo tiempo.

– Símil eléctrico (Función OR de dos variables):



Operaciones Booleanas

- **<u>Multiplicación o producto lógico</u>**: Supongamos que tenemos dos variables booleanas “a” y “b”, cuando se combinan con la operación lógica AND, el resultado se expresa de la siguiente forma:

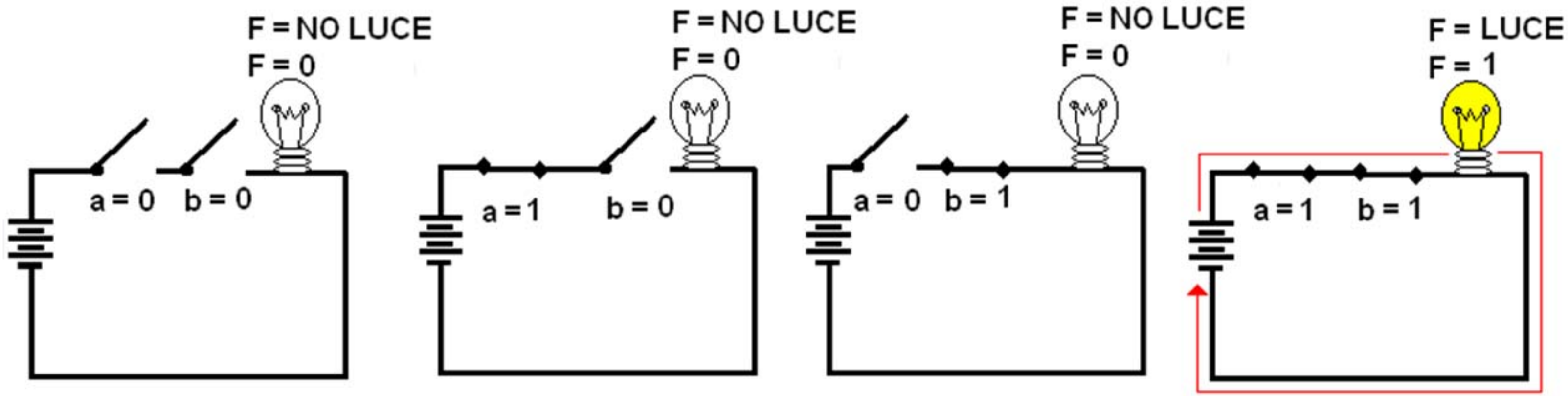
  F = a * b.

- La tabla de verdad de la función AND será:

a	b	F (AND)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Operaciones Booleanas

- Es decir la función a * b es 1 cuando ambas variables son uno a la vez.
- Generalizando para N variables: $F=a_1*a_2*\ldots*a_N$ es igual a uno cuando todas las variables (a_i) son uno.
- Símil eléctrico (Función AND de dos variables):



Operaciones Booleanas

- **Complementación o Inversión lógica**: Dada una variable booleana cualquiera, complementarla o invertirla significa definir una función que valga 0 cuando dicha variable vale 1, y que valga 1 cuando dicha variable valga cero

$$F = \overline{a}.$$

La tabla de verdad de la función NOT será:

A	F
0	1
1	0

PROPIEDADES

- **<u>Teorema de Idempotencia</u>**: La suma o producto de una variable con ella misma es siempre igual a dicha variable.
    1. **A + A = A**
    2. **A * A = A**
- **<u>Teorema de redundancia o absorción</u>**
    1. **A+A*B = A**
    2. **A*(A+B) = A**
- **<u>Propiedad Conmutativa de la suma y del producto</u>**
    1. **A + B = B + A**
    2. **A * B = B * A**
- **<u>Propiedad distributiva de la suma respecto del producto y del producto respecto de la suma</u>**
    1. **A*(B+C)=A*B+A*C**
    2. **A+(B*C)=(A+B)*(A+C)**

RESUMEN PROPIEDADES

$A * 1 = A$	$A+\overline{A}=1$
$A + A = A$	$A * \overline{A} = 0$
$A * 0 = 0$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A + 0 = A$	SI $A = B \longrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
$A * A = A$	$1 * 1 = 1$
$A + A = A$	$0 * 1 = 0$
$A * B = B * A$	$0 * 0 = 0$
$A + B = B + A$	$0 + 0 = 0$
$A+B+C =A+(B+C)=(A+B)+C$	$1 + 1 = 1$
$A*B*C =A*(B*C)=(A*B)*C$	$\overline{0} = 1$
$A*(B+C)=AB+AC$	$\overline{1} = 0$
$A+BC=(A+B)(A+C)$	

PROPIEDADES

- **<u>Teoremas de Morgan :</u>** Los teoremas de Morgan sirven para transformar sumas en productos y productos en sumas.

1. La inversa de una suma lógica de 2 o más variables equivale al producto lógico de los inversos de cada una de dichas variables.

$$\overline{A_1 + A_2 + ... + A_n} = \overline{A_1} \bullet \overline{A_2} \bullet ... \bullet \overline{A_n}$$

2. La inversa del producto lógico de 2 o más variables equivale a la suma lógica de los inversos de cada una de dichas variables.

$$\overline{A_1 \bullet A_2 \bullet ... \bullet A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + ... + \overline{A_n}$$

Clasificación de las funciones Booleanas

- **Función expresada como suma de productos:** Una función se dice que está expresada como suma de productos cuando está formada por varios términos producto de sus variables sumados entre sí.

Ejemplo: $F = (a \bullet \overline{b} \bullet c)+(d \bullet c)+(\overline{a} \bullet b)$

- **Función expresada como producto de sumas:** Una función se dice que está expresada como producto de sumas cuando está formada por varios términos suma de sus variables multiplicados entre sí.

Ejemplo: $F = (a+\overline{b}+c) \bullet (d+c) \bullet (\overline{a}+b)$

- **Función completa :** Una función algebraica se dice que es completa cuando está enteramente definida, sea cual sea la combinación de estados lógicos que se presenten a su entrada.

$$F = (a \bullet \overline{b} \bullet c \bullet \overline{d})+(\overline{a} \bullet b \bullet d \bullet c)+(\overline{a} \bullet b \bullet c \bullet \overline{d})$$

$$F = (a+\overline{b}+c+\overline{d}) \bullet (\overline{a}+b+d+c) \bullet (\overline{a}+b+c+\overline{d})$$

Clasificación de las funciones Booleanas

- **<u>Función complementaria:</u>** Es aquella función cuyos resultados son los complementarios de la función inicial

$$F = (a \bullet \overline{b} \bullet c) + (d \bullet c) + (\overline{a} \bullet b)$$

$$\overline{F} = \overline{(a \bullet \overline{b} \bullet c) + (d \bullet c) + (\overline{a} \bullet b)} =$$

$$\overline{F} = \overline{(a \bullet \overline{b} \bullet c)} \bullet \overline{(d \bullet c)} \bullet \overline{(\overline{a} \bullet b)} =$$

$$\overline{F} = (\overline{a} + \overline{\overline{b}} + \overline{c}) \bullet (\overline{c} + \overline{d}) \bullet (\overline{\overline{a}} + \overline{b}) =$$

$$\overline{F} = (\overline{a} + b + \overline{c}) \bullet (\overline{c} + \overline{d}) \bullet (a + \overline{b}) =$$

Clasificación de las funciones Booleanas

- **Función Dual:** La función dual de una función dada es la que se obtiene de intercambiar las operaciones "*" y "+" entre sí.

$$F = (a \bullet \overline{b} \bullet c) + (d \bullet c) + (\overline{a} \bullet b)$$

$$F_d = (a + \overline{b} + c) \bullet (d + c) \bullet (\overline{a} + b)$$

- La función complementaria de una función también se puede obtener a partir de la Dual, reemplazando cada variable de ésta última por su complementario

$$F = (a \bullet \overline{b} \bullet c) + (d \bullet c) + (\overline{a} \bullet b)$$

$$F_d = (a + \overline{b} + c) \bullet (d + c) \bullet (\overline{a} + b)$$

$$\overline{F} = (\overline{a} + b + \overline{c}) \bullet (\overline{d} + \overline{c}) \bullet (a + \overline{b})$$

Clasificación de las funciones Booleanas

- **Términos canónicos :** de una función algebraica son aquellos en los que aparecen todas las variables o sus complementos en cada uno de sus términos en forma de suma de productos o producto de sumas.

$$F_1 = (a \bullet \overline{b} \bullet c \bullet d) + (d \bullet c) + (\overline{a} \bullet b)$$

$$F_2 = (a + \overline{b} + c) \bullet (d + c + a + b) \bullet (\overline{a} + b)$$

Ambas funciones F1 (suma de productos) y F2 (producto de sumas), están formadas por 4 términos (a, b, c, d), en F1sólo el primer término es canónico, y en F2sólo el segundo término es canónico

- **Formas canónicas :**Cuando una función se expresa como suma de productos canónicos o como producto de sumas canónicas, se dice que dicha función se en encuentra expresada en su forma canónica.

$$F_1 = (a \bullet \overline{b} \bullet c \bullet d) + (a \bullet b \bullet d \bullet c) + (\overline{a} \bullet b \bullet c \bullet d)$$

$$F_2 = (a + \overline{b} + c + d) \bullet (d + c + a + b) \bullet (\overline{a} + b + c + d)$$

Clasificación de las funciones Booleanas

- **Formas equivalentes:** Dos expresiones booleanas, F1 y F2, son equivalentes, es decir F1=F2, sí y sólo sí describen la misma función de conmutación, es decir, si tienen el mismo valor de salida para cada una de las combinaciones de entrada.

- **Tabla de verdad:** La tabla de verdad de una función lógica es una forma de representación de la misma, en la que se indica el valor 0 ó 1 que toma la función para cada una de las combinaciones de valores de las variables de dicha función .

a	b	c	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

- A partir de la tabla de verdad podemos obtener la función lógica en forma de suma de productos o producto de sumas .

Clasificación de las funciones Booleanas

- **Suma de productos** Lo haremos mediante los siguientes pasos:
  - Tomaremos las filas de la tabla para los que la función vale 1
  - De cada una de dichas filas obtendremos un término producto tomando las entradas sin negar en el caso de que valgan 1 y negadas si vales 0
  - La función de salida será la suma de todos los productos obtenidos.
- **Producto de Sumas** Lo haremos mediante los siguientes pasos:
  - Tomaremos las filas de la tabla para los que la función vale 0
  - De cada una de dichas filas obtendremos un término suma tomando las entradas sin negar en el caso de que valgan 0 y negadas si valen 1
  - La función de salida será el producto de todos los términos suma obtenidos.