Tema 6: Aritmética Binaria

Objetivo:

- Introducción
- Suma Binaria
- Resta Binaria.
- Representación en signo y magnitud.
- Aritmética en signo y magnitud.
- Representación en complemento A1.
- Representación en complemento A2.
- Suma en complemento A2
- Resta en complemento A2
- Suma en complemento A1.
- Multiplicación binaria
- División binaria
- Aritmética BCD

Introducción

- En las representaciones de cifras vistas en los primeros capítulos, solamente se trató de números positivos.
- Este enfoque es irreal y se hace necesaria la representación en binario de cifras tanto positivas como negativas
- En este capítulo comenzaremos por estudiar la aritmética aplicada a números sin signo, para luego introducir las cifras con signo y su aritmética.

Suma Binaria

- Se trata de sumar cifras representadas en el sistema binario de numeración.
- Es importante no confundir suma lógica y suma aritmética.
- Tabla de verdad de la suma aritmética de dos bits.

Primer Bit	**Segundo Bit**	**Suma**	**Acarreo**
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Suma Binaria

- Para realizar la suma de varios bits se sigue el mismo método que para las sumas decimales:
  - Primero sumamos los bits de menor peso.
  - Posteriormente vamos sumando el resto de los pesos con las llevadas (acarreos) de las sumas anteriores.
- Ejemplo con cifras :

$$\boxed{1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \rightarrow \mathit{Acarreos}}$$

$$\begin{array}{rrrrrrll}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \rightarrow \text{Primera cifra} & \rightarrow \quad 27 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \rightarrow \text{Segunda Cifra} & \rightarrow \quad 13 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \qquad\ \ 40
\end{array}$$

Suma Binaria

En otro ejemplo sumaremos los valores 27 + 9 = 36:

$27_{10} = 11011_2$

$9_{10} = \ 01001_2$

$$
\begin{array}{rrrrrrlrr}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \rightarrow \text{Acarreos} & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \rightarrow \text{Primera cifra} & \rightarrow & 27 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \rightarrow \text{Segunda Cifra} & \rightarrow & 09 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & 36
\end{array}
$$

Resta Binaria

- Se trata de restar cifras representadas en el sistema binario de numeración.
- Tabla de verdad de la resta de dos bits.

Primer Bit	**Segundo Bit**	**Resta**	**“Préstamo”**
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Resta Binaria

Ejemplo 1:

1 - 1 =0

$$
\begin{array}{r}
9 \\
-\;5 \\
\hline
4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\;0\;0\;1 \\
-\;0\;1\;0\;1 \\
\hline
0\;1\;0\;0
\end{array}
$$

Ejemplo 2:

1 - 1 =0

1 - 1 =0

$$
\begin{array}{r}
10 \\
-\;5 \\
\hline
5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\;0\;1\;0 \\
-\;0\;1\;0\;1 \\
\hline
0\;1\;0\;1
\end{array}
$$

Ejemplo 3:

1 - 1 =0

0 - 1 = 1 debo 1

0 - 1 = 1 debo 1

$$
\begin{array}{r}
8 \\
-\;7 \\
\hline
1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\boxed{1}\;\boxed{0}\;\boxed{0}\;0 \\
-\;0\;1\;1\;1 \\
\hline
0\;0\;0\;1
\end{array}
$$

Ejemplo 4:

1 - 1 =0

0 - 1 = 1 debo 1

0 - 1 = 1 debo 1

0 - 1 = 1 debo 1

$$
\begin{array}{r}
37 \\
-\;10 \\
\hline
27
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\;0\;0\;1\;0\;1 \\
-\;0\;0\;1\;0\;1\;0 \\
\hline
0\;1\;1\;0\;1\;1
\end{array}
$$

REPRESENTACIÓN BINARIA

- La forma habitual de representar las cifras negativas es haciendo uso del símbolo “-”.
- En el sistema binario empleado en la electrónica, esto supone usar tres niveles lógicos de tensión.
- Para evitarlo, utilizaremos un bit para indicar el signo del número tratado.
- Las formas más usuales de representar números con signo son:
  - MAGNITUD Y SIGNO
  - COMPLEMENTO A 1
  - COMPLEMENTO A 2

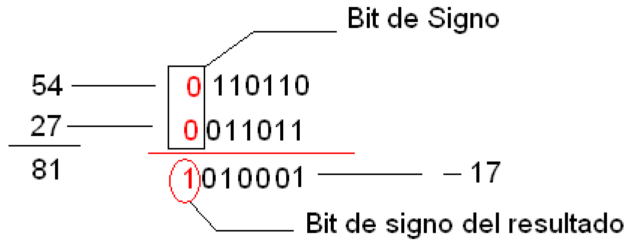
Representación SIGNO Y MAGNITUD

- En esta forma de representación, se reserva el bit situado más a la izquierda para indicar el signo (1=Negativo 0=positivo), el resto de bits representaran la magnitud de la cifra de la misma forma en positivo y en negativo

  - 111010_2 es el número negativo 11010_2
  - 0110102 es el número negativo 110102

BIT DE SIGNO

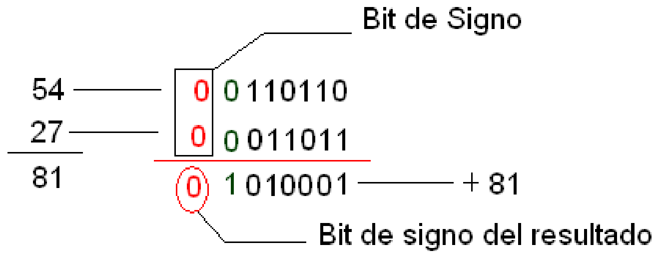
Suma Binaria en signo magnitud



¿¿¿¿ 54 + 27 = -17 ?????

<u>ERROR DE OVERFLOW O DESBORDAMIENTO</u>: Cuando el resultado de una operación no cabe en el registro destino o el bit de signo se modifica de forma incorrecta da lugar a un error de overflow.

Para evitarlo añadimos un bit a cero entre el bit de signo y el MSB de Magnitud



54 + 27 = + 81

ARITMÉTICA EN SIGNO MAGNITUD

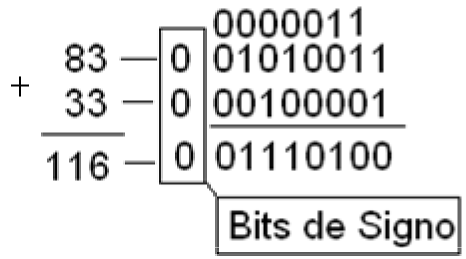
•Se van a analizar los diferentes casos que se pueden presentar por separado,

- Suma de números del mismo signo.
- Suma de números de diferente signo.
- Resta de números del mismo signo.
- Resta de números de diferente signo

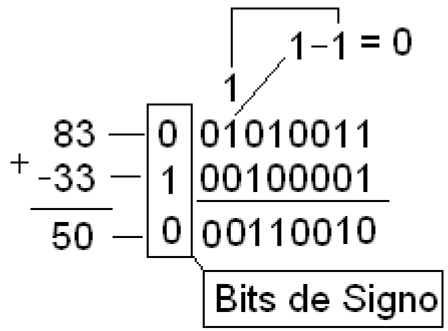
ARITMÉTICA EN SIGNO MAGNITUD

SUMA EN SIGNO MAGNITUD

I- Cuando ambos números tienen el mismo signo, se toman los dígitos correspondientes a la magnitud y se suman siguiendo la tabla indicada anteriormente. En este caso el resultado tiene el mismo signo que ambos sumandos



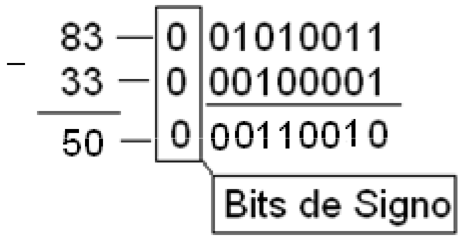
II- Cuando ambos números tienen diferente signo, la suma se convierte en una resta. Se resta al mayor (en valor absoluto) el menor y al resultado se le pone el signo del mayor.



ARITMÉTICA EN SIGNO MAGNITUD

RESTA EN SIGNO MAGNITUD

I- Cuando ambos números tienen el mismo signo, SI SON POSITIVOS, se restan los bits correspondientes a la magnitud, y el bit de signo dependerá de si el minuendo es mayor o menor que el sustraendo, SI SON NEGATIVOS la resta se convierte en una suma de dos números de diferente signo ya visto anteriormente.



II- Cuando ambos números tienen diferente signo, la resta se convierte en una suma de las magnitudes de los números, respecto del bit de signo del resultado, éste será positivo si el minuendo es negativo, y será negativo si dicho minuendo es positivo.

ARITMÉTICA EN SIGNO MAGNITUD

- Como se ha visto, en el sistema de representación de magnitud signo, las operaciones aritméticas de la suma y de la resta atienden a reglas diferentes.
- Esto implica utilizar circuitería diferente para ambas operaciones.
- Es posible evitar esto usando otras alternativas a la representación en signo magnitud, como son las representaciones en complemento a 1 y complemento a 2

Representación en complemento A1

- COMPLEMENTO A UNO
  - El complemento a uno de un número binario es el que resulta cuando se complementa cada uno de los bits de la cifra inicial, es decir, se cambian los unos por ceros y los ceros por unos.
  - Ejemplo: El complemento a uno de 1001010 será 0110101.
  - La representación de números positivos será igual que en el caso de signo magnitud:
    - El bit de signo será 0
    - La magnitud vendrá representada por la cifra manejada en sistema binario natural.
  - La representación de números negativos será de la siguiente forma:
    - El bit de signo será 1
    - La magnitud vendrá representada por la cifra manejada en sistema binario natural pero en complemento a 1.

Representación en complemento A2

- COMPLEMENTO A DOS
  - El complemento a dos de cifra una binaria se obtiene de sumar una unidad a su representación en complemento a uno.
  - Ejemplo: El complemento a dos de 1001010 será 0110101+1=0110110.
  - Otra forma de obtener el complemento a dos de una cifra consiste en copiar la cifra original de derecha a izquierda hasta encontrarse con el primer uno, copiando también dicho uno y complementando el resto de bits.
  - La representación de números positivos será igual que en el caso de signo magnitud:
    - El bit de signo será 0
    - La magnitud vendrá representada por la cifra manejada en sistema binario natural.
  - La representación de números negativos será de la siguiente forma:
    - El bit de signo será 1
    - La magnitud vendrá representada por la cifra manejada en sistema binario natural pero en complemento a 2.

Representación en complemento A1 y A2

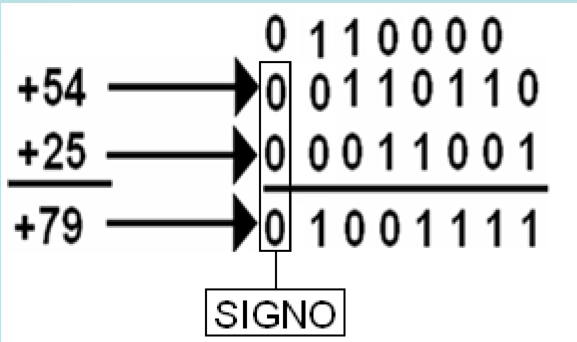
- Ejemplos

	Signo Magnitud	Complemento a 1	complemento a 2
5	**0** 101	**0** 101	**0** 101
-5	**1** 101	**1** 010	**1** 011
27	**0** 11011	**0** 11011	**0** 11011
-27	**1** 11011	**1** 00100	**1** 00101
569	**0** 1000111001	**0** 1000111001	**0** 1000111001
-569	**1** 1000111001	**1** 0111000110	**1** 0111000111

SUMA EN COMPLEMENTO A DOS

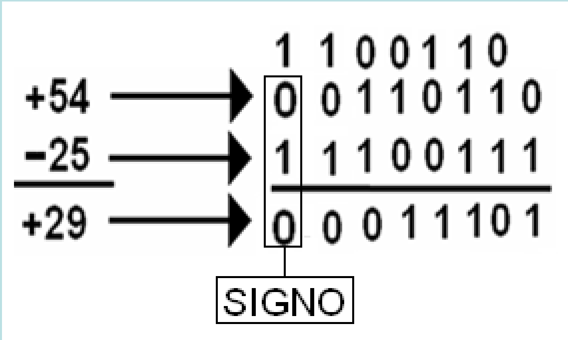
- **Sumar usando el complementa a dos:**
  - **Cuatro posibles casos:**
    - **Caso 1** : Sumar dos número positivos (Resultado positivo).
    - **Caso 2** : Sumar un positivo y un negativo menor en valor absoluto al positivo (Resultado positivo).
    - **Caso 3** : Sumar un positivo y un negativo mayor en valor absoluto al positivo (Resultado negativo).
    - **Caso 4** : Sumar dos números negativos(Resultado negativo).

CASO 1 : SUMA DE DOS NÚMEROS POSITIVOS



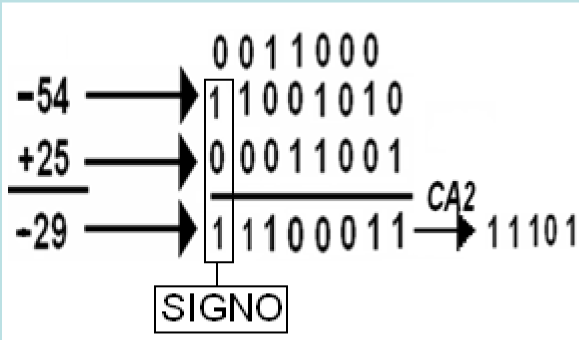
SUMA EN COMPLEMENTO A DOS

CASO 2: Sumar un positivo y un negativo menor en valor absoluto al positivo (Resultado positivo).



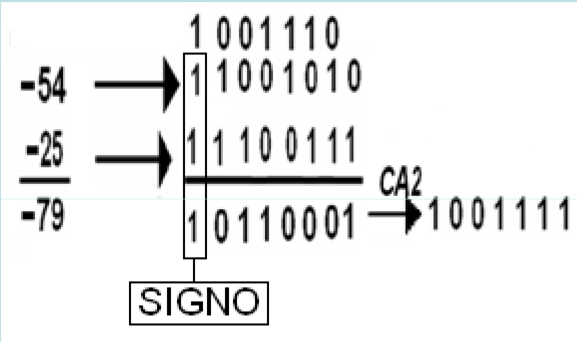
El último acarreo se desprecia

CASO 3 : Sumar un positivo y un negativo mayor en valor absoluto al positivo (Resultado negativo).



SUMA EN COMPLEMENTO A DOS

CASO 4 : Sumar dos números negativos (Resultado negativo).



El último acarreo se desprecia

SUMA EN COMPLEMENTO A DOS

- **Sumar usando el complementa a dos:**

Ejemplo A

+12	0	0 1 1 0 0
+8	0	0 1 0 0 0
20	0	1 0 1 0 0

Ejemplo B

-12	1	1 0 1 0 0
-8	1	1 1 0 0 0
-20	1	0 1 1 0 0

Ejemplo C

+12	0	0 1 1 0 0
-8	1	1 1 0 0 0
4	0	0 0 1 0 0

Ejemplo D

-12	1	1 0 1 0 0
+8	0	0 1 0 0 0
- 4	1	1 1 1 0 0

RESTA EN COMPLEMENTO A DOS

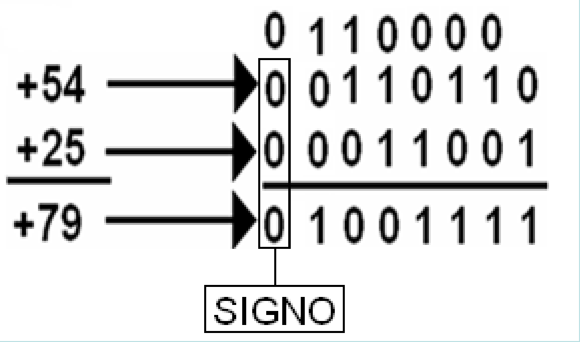
• LA RESTA, COMO SE SABE, CONSISTE EN UNA SUMA ARITMÉTICA DONDE SE LE SUMA AL MINUENDO EL OPUESTO DEL SUSTRAENDO, ES DECIR, A – B = A + (-B) Y ESTE CASO YA ESTÁ ESTUDIADO EN LA SUMA EN COMPLEMENTO A 2.

• OBSERVAR QUE HEMOS LLEGADO A LA REALIZACIÓN DE SUMAS Y RESTAS EMPLEANDO ÚNICAMENTE LAS REGLAS DE LA SUMA BINARIA PRESENTADAS AL PRINCIPIO DE ESTE CAPÍTULO, LO CUAL SIMPLIFICA BASTANTE LA CIRCUITERÍA A EMPLEAR FRENTE A LA QUE NECESITARÍAMOS CON EL FORMATO SIGNO MAGNITUD.

SUMA EN COMPLEMENTO A UNO

- **Sumar usando el complementa a uno:**
  - **Cuatro posibles casos:**
    - **<u>Caso 1</u>** : Sumar dos número positivos (Resultado positivo).
    - **<u>Caso 2</u>** : Sumar un positivo y un negativo menor en valor absoluto al positivo (Resultado positivo).
    - **<u>Caso 3</u>** : Sumar un positivo y un negativo mayor en valor absoluto al positivo (Resultado negativo).
    - **<u>Caso 4</u>** : Sumar dos números negativos(Resultado negativo).

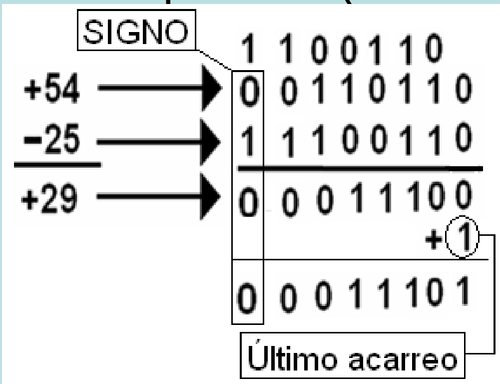
CASO 1 : SUMA DE DOS NÚMEROS POSITIVOS



Observar que este caso es idéntico al del complemento a dos al no existri números negativos

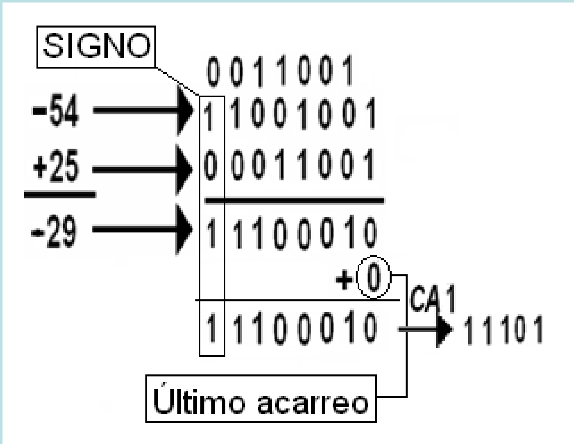
SUMA EN COMPLEMENTO A UNO

CASO 2: Sumar un positivo y un negativo menor en valor absoluto al positivo (Resultado positivo).



El último acarreo no se desprecia

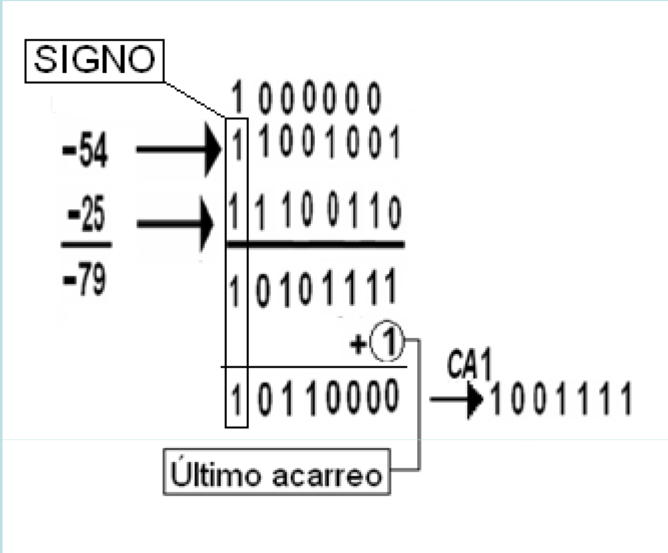
CASO 3 : Sumar un positivo y un negativo mayor en valor absoluto al positivo (Resultado negativo).



El último acarreo no se desprecia

SUMA EN COMPLEMENTO A UNO

CASO 4 : Sumar dos números negativos (Resultado negativo).



El último acarreo no se desprecia

• Las consideraciones finales hecha para la aritmética en CA2 son igual de válidas para el CA!, aunque en este último caso se debe realizar la tarea adicional de sumar el último acarreo al resultado de la suma, por ello el método más empleado de los vistos es el de complemento a dos.

MULTIPLICACIÓN BINARIA

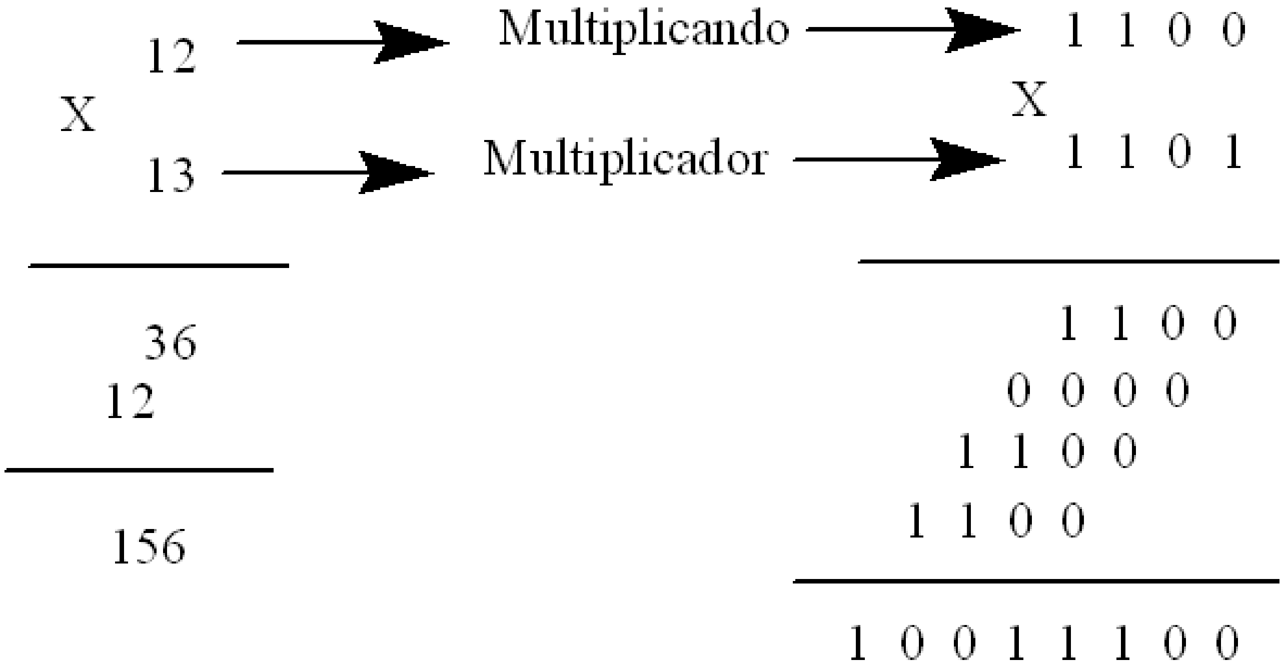
- Se trata de MULTIPLICAR cifras representadas en el sistema binario de numeración.
- Es importante no confundir producto lógico y producto aritmético.
- Tabla de verdad del producto lógico de dos bits.

A	B	Producto aritmético
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

MULTIPLICACION BINARIA

- Las reglas para las multiplicación binaria son idénticas a la de la multiplicación decimal**.**
- El tratamiento de la magnitud y del signo se hace por separado.
- En el producto de magnitudes, cuando empleamos el sistema de complemento a dos el producto se realiza colocando tanto el multiplicando como el multiplicador en sus formas sin complementar.
- El signo del resultado será positivo si ambos operandos tiene el mismo signo, y será negativo si estos son diferentes (XOR)

MULTIPLICACION BINARIA



El desplazamiento de los bits de un número binario una posición a la izquierda equivale a multiplicarlo por 2, igual que en decimal equivale a multiplicarlo por 10.

DIVISIÓN BINARIA

• Se trata de DIVIDIR cifras representadas en el sistema binario de numeración.

- El tratamiento de la magnitud y del signo se hace por separado.
- En el cociente de magnitudes, cuando empleamos el sistema de complemento a dos el producto se realiza colocando tanto el dividendo como el divisor en sus formas sin complementar.
- El signo del resultado será positivo si ambos operandos tiene el mismo signo, y será negativo si estos son diferentes (XOR)

```
1 1 0 1 1 0 1 | 1 0 1
1 0 1         |_______
-----           1 0 1 0 1
0 0 1 1 1
    1 0 1
    -----
    0 1 0 0 1
      1 0 1
      -----
     0 1 0 0
```

ARITMÉTICA BCD

- Se suman las cifras BCD por separado siguiendo las mismas reglas que las del binario natural.
- Cada pareja de sumandos dará como resultado un grupo de cuatro bits que deberemos analizar si corresponde o no a una cifra BCD de la siguiente forma:
  - Si el grupo de 4 bits es menor o igual que 9 no haremos nada.
  - Si el grupo de 4 bits es mayor que 9 sumaremos 6 al valor obtenido de esa suma.
  - Si en el ajuste comentado en el apartado anterior se produce acarreo, dicho acarreo se le suma al resultado de la suma inmediatamente superior.
- Éste procedimiento se lleva a cabo con todas las cifras operadas.

ARITMÉTICA BCD