ANÁLISIS MATEMÁTICO Curso 2013-2014

TEMA 4.-FUNCIONES REALES DE UNA Y VARIAS VARIABLES REALES

1. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{\cos x}$ b) $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)e^{1/x}}{x^2+x+1}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{(x-a)(x^2+x+1)}}{\ln(x+1)}$ d) $f(x)=\tan 2x$.

e) $f\circ g$ y $g\circ f$, siendo $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=x^2$

2. Representa aproximadamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x| - 2$ b) $f(x) = |x + 5|$ c) $f(x) = |\cos x/2|$ d) $f(x) = - E(x)$

e) $f(x)=-e^{-x}$ f) $f(x) = |\ln x| +1$ g) $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x+1}$ h) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+1}$

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{\sin(x^2-3)}$

b) $f(x)=e^{\cos x}+\arctan\dfrac{1}{x^3}$

c) c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+3x}{e^{\sin x}-1}\right)$

4. Calcular la derivada n-ésima de $y=3x\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)$ en el punto (2,18).

5. Calcular $y^{n)}$ siendo $y=\ln(1-x)$.

6. Hallar los ángulos bajo los que se cortan las líneas siguientes:

a) La recta $y = 4-x$ y la parábola $y=4-\dfrac{x^2}{2}$.

b) Las parábolas $y=x^2$ y $x=y^2$.

7. Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de la curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y que es paralela a la recta $x + 2y - 6 = 0$.

8. Calcular la recta tangente a la curva $y = \left(x^2 + 2\right)^{\frac{1}{1+\sin x}}$ en el punto de abscisa x=0.

9. Calcular $\lim\limits_{x \to e^+} (\ln x - 1)\ln(x - e)$.

10. Calcular $\lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{\sin(\sin x) - \sin x}{\arcsin x^3}\right]$.

11. Hallar los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1 + x)}$ ii) $\lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{\tan(\sin x) - \sin x}{\ln(1 + \sin x) . \tan x^2}\right]$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-1/x}}{x^2}$ iv) $\lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{\tan x}{x}\right]^{1/\arcsin x^2}$

12. Escribir el desarrollo de McLaurin de la función $f(x) = \sin x$.

13. Se quiere construir un cilindro circular recto que contenga 1,5 litros de zumo. Calcular sus dimensiones para que el material utilizado sea el mínimo posible.

14. Dada la función $y = x\sqrt{4x - x^2}$, se pide: campo de existencia, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos absolutos y relativos.

15. Un rectángulo en el primer cuadrante está limitado por el eje X, el eje Y y la recta $y = \dfrac{6 - x}{2}$. Calcular sus dimensiones para que tenga área máxima.

16. Determinar el paralelepípedo de volumen máximo cuya base es un cuadrado y que está inscrito en una semiesfera de radio R.

17. Determinar un triángulo isósceles inscrito en la elipse $x^2+3y^2-12=0$, siendo el punto (0,-2) uno de sus vértices, el lado desigual paralelo al eje OX y de tal forma que su área sea máxima.

18. Representar gráficamente la función $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

19. Decir RAZONADAMENTE si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

a) Una función continua en un intervalo acotado es acotada.

b) Si $f'(a) = f''(a) = 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x=a.

c) Si f es continua en $[a,b]$ y $f'>0$ en (a,b), entonces $f(a)<f(b)$.

d) Si $f(a)<0<f(b)$ entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

e) Si f tiene un máximo relativo (local) en x=a, entonces $f'(a)=0$.

f) Una función no puede tener dos asíntotas oblicuas en $x\to+\infty$.

20. Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $y = 3x + \dfrac{3x}{x-1}$.

21. Hallar y representar los campos de existencia de las funciones:

a) $z = x + \arc\cos y$

b) $z = \ln(x\cdot y)$

c) $\ln\left[\left(9-x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2-1\right)\right]$

d) $f(x,y) = \dfrac{(y-1)\ln(1+y+x)}{x^2-x+xy-y}$

e) $u = \arc\sin x + \arc\sin y + \arc\sin z$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-2x+3y^2}{2x+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 2 \quad , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

22. Hallar y representar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

a) $z = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$

b) $z = 6-x^2-y$

23. Dada la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ K & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Calcular el valor de K para el que f(x,y) es continua en todo su dominio.

b) Con el valor de K obtenido en el apartado anterior, calcular f'_x y f'_y.

24. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}|y|\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} & , \text{ si } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & , \text{ si } x^2+y^2=0\end{cases}$$

Se pide:

a)Calcular y representar gráficamente su dominio..

b) Estudiar la continuidad en dicho dominio.

c) Calcular, según la definición, las derivadas parciales en el punto (0,0).

25. Calcular las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones:

a) $z=x^2y^3+\operatorname{arc}\cos y$

b) $z=\ln\left(x+y^2\right)+e^{\sin(xy)}$

26. Sea $w=f(u,v)$, con $u=x^2+2yz$ y $v=y^2+2zx$ .Calcular, de la forma más simplificada posible, la expresión

$$F=(y^2-xz)\frac{\partial w}{\partial x}+(x^2-yz)\frac{\partial w}{\partial y}+(z^2-xy)\frac{\partial w}{\partial z}$$

27. Sea $W=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Comprobar:

a) Que $W=xy+z$ si $z=xy+xe^{y/x}$

a) Que $W=0$ si $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ en la que f representa una función cualquiera.

28. Demostrar que la función $u = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$ donde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ llamada ecuación de LAPLACE.

29. Calcular dz si $z = x^y$ siendo:

a) x e y variables independientes.

b) x = au e y = bv

30. Demostrar que la ecuación $z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} + x + y^2 - \cos(x-y+z) = 0$ define en un entorno del punto (0,0,0) a "z" como función implícita de "x" e "y". Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ eta $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

31. La función z(x,y) está definida por la ecuación $\frac{x-a}{z-c} = f\left(\frac{y-b}{z-c}\right)$, hallar en forma simplificada la relación $(x-a)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial z}{\partial y}$.

32. Transformar $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$, tomando *y* como argumento

33. Dada la ecuación $e^z = (1 + x e^z)(1 + y e^z)$ comprobar si define a z como función implícita de x y de y en un entorno del punto P(0,0,0). En caso afirmativo calcular la diferencial de z en el punto P.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla el dominio de las funciones definidas por:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ b) $f(x) = \arcsin\frac{x+1}{2}$ c) $y = \sqrt[3]{x+1}$

d) $f(x) = \begin{cases} (1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2} & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x > 1 \end{cases}$ e) $y = \sqrt{x^2 - \left(1/x^2\right)}$

2. Representa aproximadamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x| + 3$ b) $f(x) = |x - 3|$ c) $f(x) = |\sin 2x|$ d) $f(x) = x - E(x)$

e) $f(x) = -2^{x}$ f) $f(x) = -(x-1)^2$ g) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ h) $f(x) = e^{|x|}$

3. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$; b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$; c) $f(x) = e^{3-x^2}$; d) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\cos x}\right)$;

4. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$, en el punto de abscisa x=1

5. Calcular la derivada n-sima de la función $y = \frac{3x-5}{x^2-3x+2}$

6. Hallar los ángulos bajo los que se cortan las curvas $y = x^2$ y $3x - y - 2 = 0$.

7. Hallar "a" para que $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{e^{ax}-e^{x}-x}{x^2}\right]$ tenga un valor finito. Calcularlo.

8. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{a}{1-x^a}-\frac{b}{1-x^b}\right]$, sien a y b números reales positivos.

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x + \cos x)^{1/x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x - x}{1-x-\ln x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}[\operatorname{tn} x - \sin x]^{\frac{\cos x}{\ln\left(e^{2x}-1\right)}}$

9. Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$, se pide:

a) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Determinar los extremos relativos.

c) Calcular sus asíntotas.

10. Se debe construir un depósito cilíndrico cerrado de volumen $12\pi\ m^3$ que será enterrado en el suelo de manera que la tapa superior quede al nivel del terreno. La parte enterrada estará sometida a mayores presiones y efectos de corrosión, por lo que se utilizará un material cuyo precio (por m^2 de chapa) es el doble que el del material utilizado para la tapa cuyo precio es de 3 €/m^2. Determinar las dimensiones del depósito para que el coste sea mínimo.

11. Estudiar el crecimiento, los extremos y asíntotas de la función $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

12. En un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es 100 m, se inscribe un rectángulo cuyos lados son paralelos a los catetos del triángulo. Hallar el <u>área máxima de dicho rectángulo.</u>

13. Dada la función $f(x) = xe^x$, estudiar su crecimiento y decrecimiento y calcular sus extremos. ¿Tiene puntos de inflexión?

14. Una ventana está formada por un rectángulo y un triángulo isósceles cuya base es el lado superior del rectángulo, y cuya altura es 3/8 de la longitud de la base. Si el perímetro de la ventana es de 9m, determinar los lados de la misma para que el flujo de luz sea máximo.

15. Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

16. a) Escribir la fórmula de Taylor en $x = 0$ para la función $y = e^x \operatorname{sh} x$.

b) Desarrollar la función: $y = \dfrac{e^x \operatorname{sh} x - x}{x^2}$.

17. Hallar y representar los campos de existencias de las siguientes funciones:

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

b) $z = \ln(x + y)$

c) $z = \dfrac{y}{x} + \arccos \dfrac{y}{4}$

d) $f(x, y) = \sqrt{64 - 4x^2 - y^2}$

e) $z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x - y} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$

18. Hallar y representar las líneas de nivel de las siguientes funciones:

a) $z = x + y$ b) f(x,y)=sen xy

19. Calcular el límite de $z = \dfrac{xy - 2x^3}{3x^2\sqrt{y}}$ en el punto $(0,0)$, a) Según la dirección de la parábola $y = 3x^2$; b) Según la dirección de la recta $2y = x$; c) ¿Qué podríamos decir del límite de la función en $(0,0)$? d) ¿Tendría sentido calcular el límite en $(0,0)$ según la dirección de la recta $x = 2y + 1$? ¿Por qué?

20. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} /\ f(0,0) = 0$ y $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$

a) Estudiar la continuidad.

b) Estudiar la derivabilidad de f respecto de x e y.

c) Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. ¿Es este resultado compatible con el teorema de Schwarz?

21. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2 \sin y + (3x + y^2)\cos y$

b) $f(x,y) = e^{x^2+y} - x\ln(x - y^2)$

c) $f(x,y,z) = x^2 y z^3 + \sin(x - y + yz)$

22. Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, estudia la continuidad y calcula las derivadas parciales en su dominio.

23. Calcular las derivadas parciales segundas de las funciones:

a) $f(x,y) = y^x + x$

b) $f(x,y) = x^2 y + e^{xy}$

24. Demostrar que la función $z = f(x + g(y))$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

25. Calcular: a) $zx\dfrac{\partial z}{\partial x}+zy\dfrac{\partial z}{\partial y}$ siendo $z=\sqrt{xy+\text{arc tg}\dfrac{y}{x}}$

b) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ con $z=\sqrt{x^2+y^2}$

c) $\cos x\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\cos y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\text{sen}\, y\dfrac{\partial z}{\partial x}$ siendo $z=\text{sen}\, x+f(\text{sen}\, y-\text{sen}\, x)$

26. Utilizando derivación de funciones compuestas, transformar la ecuación diferencial $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}-z=0$ a las nuevas variables independientes u y v si $u=x$, $v=\dfrac{y}{x}$.

27. Hallar dz si $z=e^{\frac{y}{x}}$ siendo:

a) x e y variables independientes.

b) $x=\cos t$ e $y=\text{sen}\, t$.

28. Comprobar que toda función implícita z definida por una ecuación de la forma $f(x+\cos z, y-\cos z)=0$, cualquiera que sea la expresión analítica de la función f, satisface la igualdad $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\text{sen} z}$.

29. Transformar la ecuación $\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{d^3y}{dx^3}-3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0$ tomando a y como argumento.

30. Dada la ecuación $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, cambiar las variables independientes x e y por las variables u y v, estando relacionadas entre sí por las expresiones: $\begin{cases} u=2x-3y \\ v=3x+2y \end{cases}$.

31. Se considera la función F: $\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}$ definida por: $F(x,y,z)$=xy+2xz+yz+x+y+az+1, siendo “a” un parámetro real.

a) Calcular para que valores de “a”, la ecuación $F(x,y,z)$=0 define a “z” como función implícita de “x” y de “y” en un entorno del punto $(0,1,-1)$.

b) ¿Define la ecuación $F(x,y,z)$=0 a “x” como función implícita de “y” y de “z” en un entorno del punto $(0,1,-1)$ para algún valor de “a”?