TEMA 1: LOS NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

1. LOS NÚMEROS NATURALES: N

Definimos en primer lugar el conjunto de los números naturales, esto es, la sucesión ilimitada 1, 2, 3........., con la que se puede realizar la operación elemental de contar o numerar, y lo denotamos como **N** = {1, 2,.....}. (Algunos autores incluyen el 0 como número natural, pero nosotros aquí no lo vamos a reconocer como tal)

Como característica fundamental resaltaremos que es un conjunto INFINITO NUMERABLE.

1.1. Principio de buena ordenación de N

"Todo conjunto, no vacío, de números naturales tiene un elemento mínimo"

1.2. Relaciones y operaciones

1) Relaciones de igualdad y de orden (=,>,<).
2) Operaciones internas suma(+) y producto (·)

Suma: $\forall a, b \in \mathbf{N}, \quad a + b \in \mathbf{N}$

Producto: $\forall a, b \in \mathbf{N}, \quad a.b \in \mathbf{N}$

Con respecto a las operaciones (+) y (·) verifica las siguientes propiedades de simplificación y monotonía:

$\forall a, b, x \in \mathbf{N}$ se verifica $a+x = b+x \iff a = b$

$\forall a, b \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{N}$ se verifica $a \cdot x = b \cdot x \iff a = b$

$\forall a, b, x \in \mathbf{N}$ se verifica $a+x > b+x \iff a > b$

$\forall a, b, x \in \mathbf{N}$ se verifica $a \cdot x > b \cdot x \iff a > b$

1.3. Principio de inducción completa

"Si una determinada propiedad de los números naturales se verifica para los k primeros y, si admitiendo que se verifica para un número natural $n \geq k$, se verifica también para n+1 , entonces dicha propiedad se verifica para todos los números naturales posteriores a k"

2. LOS NÚMEROS ENTEROS: Z

Si en el conjunto de los naturales tratamos de realizar la operación inversa de la suma, la sustracción, vemos que ésta no se puede llevar a cabo en el caso de que el minuendo sea menor que el sustraendo, lo que implica la necesidad de introducir los números negativos -1, -2, -3,…… Incluimos también el 0.

De esta forma ampliamos el conjunto de números al de los números enteros, y escribiremos

Z = {....,-2, -1, 0,1, 2,.....}, $\mathbf{Z}^*$ = **Z** -{0}.

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$$

2.1. Relaciones y operaciones

1) Relación de igualdad y de orden (=, <, >)

2) Operaciones internas suma (+) y producto (·)

Suma: $\forall a, b \in \mathbf{Z}, a + b \in \mathbf{Z}$

Producto: $\forall a, b \in \mathbf{Z}, \ a.b \in \mathbf{Z}$

Con respecto a las operaciones (+) y (·) verifica las siguientes propiedades de simplificación:

$$\forall a, b \in \mathbf{Z} \quad \begin{cases} a + x = b + x \Leftrightarrow a = b \\ \forall x \neq 0; \ \ a \cdot x = b \cdot x \Leftrightarrow a = b \end{cases}$$

2.2. Z es un conjunto ordenado.

En **Z** se define una relación de orden < > de la siguiente forma: $a > b \Leftrightarrow (a - b) \in \mathbf{N}$

$$\forall a, b \in \mathbf{Z} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a > b \\ a < b \end{cases}$$

Con respecto a las operaciones (+) y (·) verifica las siguientes propiedades de monotonía:

$\forall a, b, x \in \mathbf{Z}$ se verifica $a + x > b + x \Leftrightarrow a > b$

$$\forall a, b, x \in \mathbf{Z} \text{ y } \begin{cases} x > 0 \text{ se verifica } a \cdot x > b \cdot x \Leftrightarrow a > b \\ x < 0 \text{ se verifica } a \cdot x < b \cdot x \Leftrightarrow a > b \end{cases}$$

3. LOS NÚMEROS RACIONALES: Q

La operación inversa de la multiplicación, la división, solo se puede realizar en el conjunto de los números enteros si el dividendo es múltiplo del divisor. Para resolver este problema ampliamos el conjunto de números, creando el conjunto de los números racionales **Q**

"Un número racional es un par ordenado de números enteros, llamados numerador y denominador, siendo este ultimo necesariamente distinto de cero".

$$\mathbf{Q} = \{ \frac{p}{q} \ / \ p, q \in \mathbf{Z},\ q \neq 0\},\ \mathbf{Q}^{*} = \mathbf{Q}\text{-}\{0\}$$

Como características importantes resaltamos que todo número racional admite una expresión decimal periódica y que **Q** es un conjunto numerable.

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$

3.1. Relaciones y operaciones.

1) Relación de igualdad y de orden (=, <, >)

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow b \cdot d = a \cdot c$$

$$\frac{b}{a} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow b \cdot d < a \cdot c \ \text{ siendo } b \cdot d,\ a \cdot c \in \mathbf{Z} \ \text{ y } \ a>0,\ d>0$$

2) En los racionales no habrá nunca un elemento que sea siguiente del otro. Entre dos racionales cualesquiera hay infinitos racionales.

3) Operaciones internas (+) y producto (·)

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{d} = \frac{bd + ac}{ad}$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d}$$

4. LOS NÚMEROS REALES: R

De igual manera que introducíamos los números enteros y los racionales como una necesidad de operar, al extraer raíces cuadradas nos encontramos con que no existe un número racional igual, por ejemplo, a $\sqrt{2}$, lo que nos lleva a la necesidad de ampliar el conjunto de números con los llamados números irracionales.

El conjunto de los números irracionales está formado por los números cuya expresión decimal es infinita no periódica. Se denota por **I**

El conjunto de los números reales está formado por los números irracionales unión los racionales. Se denota por $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$ siendo $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$

4.1. Propiedades:

- Entre dos racionales hay infinitos racionales
- Entre dos racionales existen infinitos irracionales.
- Entre dos irracionales existen infinitos racionales.
- Entre dos irracionales existen infinitos irracionales.
- Entre un racional y un irracional existen infinitos racionales e infinitos irracionales.

4.2. Operador Módulo o valor absoluto (|·|) de un número real

$$|a| = \begin{cases} -a & a < 0 \\ 0 & a = 0 \\ a & a > 0 \end{cases} \qquad \text{o bien: } |a| = \sqrt{a^2} \geq 0 \text{ siendo } a \in \mathbf{R}$$

Las propiedades que verifica son:

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \geq |a| - |b|$
- $m \geq 0,\ |a| \leq m \Leftrightarrow -m \leq a \leq m$

4.3. Tipos especiales de conjuntos de números reales

INTERVALOS:

$I \subset \mathbf{R}$, es un intervalo $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x < x_2 \Rightarrow x \in I$

Un intervalo es un subconjunto de la recta real que contiene al menos dos puntos y contiene a todos los números reales entre dos cualquiera de sus elementos. Son los conjuntos representados por líneas continuas en **R**. Para indicar que no están acotados se utiliza la notación de $(+\infty)$ y $(-\infty)$

- abierto y acotado $(a,b)=\{x\in \mathrm{R} \,/\, a<x<b\}$
- cerrado y acotado $[a,b]=\{x\in \mathrm{R} \,/\, a\le x\le b\}$

  $(-\infty,+\infty)=\mathrm{R}$
- abierto no acotado superiormente $(a,+\infty)=\{x\in \mathrm{R} \,/\, x>a\}$
- cerrado no acotado superiormente $[a,+\infty)=\{x\in \mathrm{R} \,/\, x\ge a\}$
- abierto no acotado inferiormente $(-\infty,a)=\{x\in \mathrm{R} \,/\, x<a\}$
- cerrado no acotado inferiormente $(-\infty,a]=\{x\in \mathrm{R} \,/\, x\le a\}$

ENTORNOS.

Sean a, $\delta\in$ **R** con $\delta>0$. Llamamos entorno de centro a y radio δ al conjunto:

$$B(a,\delta)=\{\,x\in\mathbf{R} \,/\, a-\delta< x <a+\delta\,\}=(\,a-\delta\,,\,a+\delta\,)$$

Entorno reducido de centro a y radio δ al conjunto:

$$B^{*}(a,\delta)=\{\,x\in\mathbf{R} \,/\, a-\delta< x <a \text{ ó } a< x <a+\delta\,\}=(\,a-\delta\,,\,a+\delta\,)-\{a\}$$

Entorno de ∞ al conjunto $(\,a,\ \infty\,)=\{\,x\in\mathbf{R} \,/\, a< x\,\}$

Entorno de $-\infty$ al conjunto $(\,-\infty,b)=\{\,x\in\mathbf{R} \,/\, x< b\,\}$

4.4. Conjuntos acotados. Supremo e ínfimo. Máximo y mínimo.

a $\in$ **R** es *cota superior* del conjunto B $\subset$ **R** $\Leftrightarrow \forall\, x \in$ B: $x \le a$.

a $\in$ **R** es *cota inferior* del conjunto B $\subset$ **R** $\Leftrightarrow \forall\, x \in$ B: $x \ge a$.

B es un *conjunto acotado superiormente* $\Leftrightarrow$ tiene cotas superiores

$\exists\, a \in \mathbf{R} \,/\, \forall\, x \in B:\ x \le a$

B es un *conjunto acotado inferiormente* $\Leftrightarrow$ tiene cotas inferiores

$\exists\, a \in \mathbf{R} \,/\, \forall\, x \in B:\ x \ge a$

Llamamos *supremo*(B) a la <u>menor</u> de sus cotas superiores.

Llamamos *ínfimo*(B) a la <u>mayor</u> de sus cotas inferiores.

máximo(B)= *supremo*(B) $\Leftrightarrow$ *supremo*(B) $\in$ B.

mínimo(B)= *ínfimo*(B) $\Leftrightarrow$ *ínfimo*(B) $\in$ B.

5. LOS NÚMEROS COMPLEJOS: C

En el conjunto de los números reales carecen de solución operaciones como

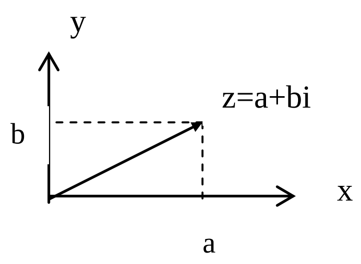
$$\sqrt{-1} \qquad \mathrm{Ln}(-8) \qquad -2^{\pi}$$

Para resolver esta situación efectuaremos otra ampliación del conjunto de los números, introduciendo los números complejos.

5.1 Definición

Un número complejo z $\in$**C**, viene dado por z=a+bi siendo a,b $\in$**R**.

Geométricamente:



C $\longleftrightarrow$ $\mathbf{R}^2$

z=a+bi $\longleftrightarrow$ P(a,b) *afijo del complejo*

A la primera componente a se le denomina *parte real del complejo z* y se denota a =*Re*(z) y a la segunda componente b se le denomina *parte imaginaria del complejo z* denotándose como b= *Im*(z).

* Si b=0 $\Rightarrow$ z=a $\in$**R**, siendo su afijo (a,0) . Por tanto se deduce que **R**$\subset$**C**.

* Si a=0 $\Rightarrow$ z=bi y se denomina *imaginario puro*, con afijo el punto (0,b), en particular:

Si b=1$\Rightarrow$ z=i al que denominamos *unidad imaginaria*, su afijo es (0,1).

A la expresión z=a+bi se denomina forma *binómica* del complejo.

5.2 Módulo y argumento de un número complejo.

Sea z=a+bi, y P(a,b) su afijo.

Llamaremos *módulo del complejo* z y lo denotaremos como $|z| = \rho$ a la longitud del segmento que une el punto (0,0) y el punto P(a,b) :

$$\rho = \overline{OP} \text{ , es decir } \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

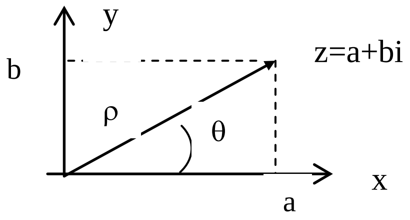
Llamamos *argumento* de z y escribimos arg(z) = ϑ al ángulo que forma el segmento $\overline{OP}$ con la dirección positiva del eje OX :

$$\operatorname{tg}\vartheta = b/a \Rightarrow \vartheta = \operatorname{arctg} b/a \quad \text{siendo} \quad \operatorname{sig}(b) = \operatorname{sig}(\vartheta)$$

Argumento principal: El ángulo ϑ lo tomaremos siempre en $(-\pi, \pi]$ $(-\pi < \arg(z) = \vartheta \leq \pi)$.

Teniendo en cuenta la representación geométrica, se tiene

a=*Re*(z) = $\rho \cos\vartheta$, b= *Im*(z) = ρ senϑ



5.3 Otras formas de expresar un complejo

Dado el complejo z=a+bi, de módulo ρ y argumento ϑ, podemos escribir z= ρ_ϑ . Esta se llama forma *polar o módulo-argumental* del complejo.

Basándonos en resultados anteriores tenemos que,

z= a+bi = $\rho \cos\vartheta + i\,\rho$ senϑ = $\rho(\cos\vartheta + i$ sen$\vartheta)$ a la que llamamos forma *trigonométrica* del complejo.

Teniendo en cuenta la expresión

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \text{ sen } \vartheta \quad \text{com} \quad \vartheta \in \mathbf{R} \quad \text{(Fórmula de Euler)}$$

se puede escribir que z = $\rho\, e^{i\vartheta}$, resultado que se conoce por forma *exponencial* del complejo.

5.4 Definiciones

* Dados z = a+bi = ρ_ϑ, z'=a'+i b' = $\rho'_{\vartheta'}$

z= z' $\Leftrightarrow$ a=a' y b=b' $\Leftrightarrow$ $\rho = \rho'$ y $\vartheta = \vartheta' + 2k\pi$, k $\in$ **Z** (sus argumentos difieren en múltiplos de 2π) .

* Dado z = a+bi = ρ_ϑ llamamos *complejo conjugado* de z, y denotamos $\bar{z}$, al complejo $\bar{z}$ = a-bi = $\rho_{-\vartheta}$, sus módulos son iguales y sus argumentos opuestos.

* Dado z = a+bi = ρ_ϑ , llamamos *opuesto* de z, y denotamos por -z, al complejo

-z = -a-bi = $\rho_{\vartheta+\pi}$.

5.5 Operaciones fundamentales con números complejos

Consideremos los complejos z = a+bi = ρ_ϑ = ρ (cos ϑ + i sen ϑ) = ρ $e^{i\vartheta}$ y

z'=a'+i b' = $\rho'_{\vartheta'}$ = ρ' (cos ϑ' + i sen ϑ') = ρ' $e^{i\vartheta'}$

* **Suma**: z+z' = (a+bi)+(a'+b'i) = (a+a') + i(b+b')

* **Producto**: z.z' = (ρ_ϑ) ($\rho'_{\vartheta'}$) = $(\rho\ \rho')_{\vartheta+\vartheta'}$

El producto de dos números complejos es otro complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos. Teniendo en cuenta esto se deduce que las únicas potencias diferentes de la unidad imaginaria son $i^1 = i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$.

En forma binómica:

z.z' = (a+bi).(a'+b'i) = aa'+bb'i^2+(ab'+ba')i = (aa'-bb') + i(ab'+a'b)

* **Cociente**: siendo z' $\neq 0$, $\frac{z}{z'} = \frac{\rho_\vartheta}{\rho'_{\vartheta'}} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\vartheta-\vartheta'}$

El cociente de dos números complejos es otro complejo que tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos.

En forma binómica:

$$\frac{z}{z'} = \frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)} = \frac{(aa'+bb')+(ba'-ab')i}{(a'^2+b'^2)}$$

* **Potencia**: $z^n = (\rho_\vartheta)^n = \rho^n{}_{n\vartheta}$, esto es

$(\rho\ (\cos\vartheta + i\ \mathrm{sen}\,\vartheta))^n = \rho^n\ (\cos n\vartheta + i\ \mathrm{sen}\,n\vartheta)$ **Fórmula de Moivre**

* **Raíz**: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho_\vartheta} = (\sqrt[n]{\rho})_{\frac{\vartheta+2k\pi}{n}}$, $k = 0,1,2,\dots,n-1$.

La raíz n-ésima de un complejo z tiene n soluciones, todas de módulo $\sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{|z|}$ y argumentos dados por la expresión $\frac{\vartheta+2k\pi}{n} = \frac{\arg(z)+2k\pi}{n}$ con k = 0,1,..., n-1. Sus afijos se encuentran en una circunferencia de centro (0,0) y radio $\sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{|z|}$.

* **Logaritmos**: ln z = $\ln|z|$ + i (arg(z) +2kπ), k $\in$**Z**

Un número complejo tiene infinitos logaritmos, todos con la misma parte real $\ln|z|$, y con partes imaginarias que difieren entre sí en múltiplos de 2π, (arg(z) +2kπ), k $\in$**Z .** Por tanto sus afijos se disponen en la recta x = $\ln|z|$ paralela al eje imaginario.

Si tomamos k=0, obtenemos ln z = $\ln|z|$ + i arg(z) que se conoce como *valor principal* del logaritmo del número complejo z.

El logaritmo neperiano de los números reales que conocemos es el valor principal del logaritmo neperiano de esos números considerados como complejos.

Definimos también: $\log_w(z) = \dfrac{\ln z}{\ln w}$.

* **Potencia compleja**: Sean z_1 y z_2 $\in$**C**, definimos $(z_1)^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}$. Como ln z_1 toma infinitos valores, también los toma la potencia compleja $(z_1)^{z_2}$, entre los cuales tomaremos como principal el correspondiente al valor principal de $\ln z_1$.