

ACHILLE
CANNAVALE

APPUNTI
CONTROLLO
AUTOMATICI
2024

CIAO! QUESTI APPUNTI SONO
FRUTTO DEL MIO STUDIO E
DELLA MIA INTERPRETAZIONE,
QUINDI POTREBBERO
CONTENERE ERRORI, SVISTE O
COSE MIGLIORABILI. BUONO
STUDIO 

LDR



$$F(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^m (s - p_i)} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)} \quad m \leq M$$

FZ · DI · M+M+1 · PARAMETRI

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} = \frac{N_F(s)}{D_F(s) + N_F(s)}$$

VOGLIAMO STUDIARE COME VARIANO I POLI DI W(s)
AL VARIARE DI K', NOTI z_i, p_i

→ CONSIDERIAMO: $P_c(s, K') = D_F(s) + N_F(s) = \prod_{i=1}^m (s - p_i) + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i)$

POLINOMIO

CARATT. DI

CICLO CHIUSO

IL LDR È IL LUOGO GEOMETRICO NEL PIANO COMPLESSO DESCRITTO DA LE RADICI

DI $P_c(s, K') = 0$ · AL VARIARE DI $K' \in \mathbb{R}$.

IMPORTANTE

Ciao! Questi appunti sono frutto
del mio studio e della mia
interpretazione, quindi potrebbero
contenere errori, sviste o cose
migliorabili. Buono studio!

$$\mathcal{X} \triangleq \left\{ s \in \mathbb{C}, \exists K' \in \mathbb{R} : P_c(s, K') = 0 \right\}$$

AD ESEMPIO SELEZIONO UN \bar{K}' . SI AVRANNO M RADICI. DI $P_c(s, \bar{K}') = 0$.

SCHEGLIENDO UNA DI QUESTE RADICI, LA COPPIA (\bar{s}, K') È DETTA COPPIA SOLUZIONE.

LUOGO POSITIVO $K' > 0$

LUOGO NEGATIVO $K' < 0$

IL LUOGO GEOMETRICO DESCRITTO DA $P_c(s, K') = 0$ · AL VARIARE DI K' È DETTO RAYCO.

⇒ IL LDR HA UN NUMERO DI RAMI PARI AL NUMERO DI POLI DELLA $F(s)$.

Ex

$$F(s) = \frac{K'}{s - p}, \quad P_c(s, K') = s - p + K' = 0 \Rightarrow s = p - K'$$

Ex

$$F(s) = \frac{K'}{s(s+p)}, \quad P_c(s, K') = s^2 + sp + K' = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{p}{2} \sqrt{\frac{p^2}{4} - K'^2}$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} \text{REALI E DISTINTI} & \text{SE } K' < p^2/4 \\ \text{REALI E COINCIDENTI} & \text{SE } K' = p^2/4 \\ \text{COMPLESSI E CONJUGATI} & \text{SE } K' > p^2/4 \end{cases}$$

NEL CASO IN CUI $M = 3$ · NON SI PUÒ PIÙ ESPRIMERE IL LEGAME TRA s E K' · IN
MANIERA SPPLICITA. → DOBBIAMO TROVARE ALTRE RELAZIONI

$$\frac{m}{\prod} (s - p_i) = -k' \frac{m}{\prod} (s - z_i) \rightsquigarrow \text{C' UN'EQUAZIONE NEL PIANO COMPLISSO}$$

$$\rightsquigarrow \text{SPLITTAIAMO} \rightsquigarrow \left| \frac{m}{\prod} (s - p_i) \right| = |k'| \cdot \left| \frac{m}{\prod} (s - z_i) \right| \quad \begin{array}{l} \text{CONDIZIONE DI} \\ \text{MODULO} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{j=1}^m \angle(s - p_j) = \pi + \angle k' + \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) \quad \begin{array}{l} \text{CONDIZIONE DI} \\ \text{FATTO} \end{array} \quad \begin{array}{l} k' \text{ VENNE CONSIDERATO} \\ \text{SOLITO COL SUO} \\ \text{SEGNATO} \end{array}$$

LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ

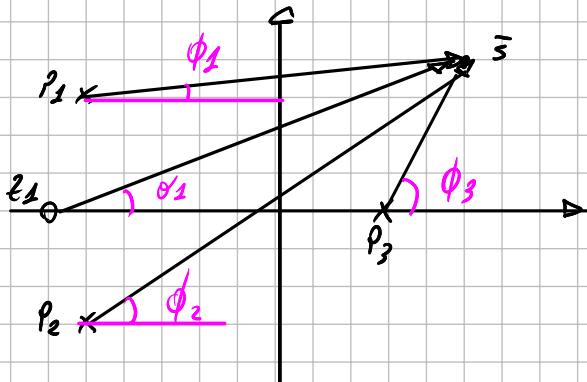
$s \in \mathcal{L} \cdot \sigma$. CHE SOAISI LA CONDIZIONE DI FATO.

$$\begin{cases} k' > 0 & \angle k' = 0 \\ k' < 0 & \angle k' = \pi \end{cases}$$

Ex

$$s \in \mathcal{L} \iff$$

$$\begin{cases} \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \theta_2 + (2h+1)\pi \\ \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \theta_1 + 2\pi \end{cases}$$



UNA VOLTA APPURATO CHE $\bar{s} \in \mathbb{R}$, IL VALORE DI k' SI RICAVA DALLA

CONDIZIONE DI MODULO:

$$|k'| = \frac{\prod_{i=1}^m |\bar{s} - p_i|}{\prod_{i=1}^m |\bar{s} - z_i|}$$

QUESTA ESPRESSIONE CI FA CAPIRE CHE SE \bar{s} È VICINA AD UNO ZERO

$\Rightarrow k'$ È MOLTO GRANDE

MENTRE SE \bar{s} È VICINA AD UN POLO $\Rightarrow k'$ È MOLTO PICCOLO.

REGOLE PER IL TRACCIAMENTO

• IL LDR È COSTITUITO DA M RAMI.

• IL LDR È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE REALE:

$$\forall s \in \mathcal{L} : P_c(s, k') = 0 \Rightarrow \bar{s} \in \mathcal{L}, P_c(\bar{s}, k') = 0$$

• PUNTI SINGOLARI: SONO PUNTI DEL LUOGO CORRISPONDENTI A RADICI MULTIPLE DI $P_c(s, k') = 0$.

LA F.E. $P_c(s, k') = 0$ È ESPPLICABILE NELL'INTORNO DELLA COPPIA SOLUZIONE $(\bar{s}, \bar{k'})$, CON:

$$\left. \frac{\partial P_c(s, k')}{\partial s} \right|_{(\bar{s}, \bar{k'})} \neq 0 \quad \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{CURVA} \\ \text{REGOLARE} \end{array}$$

NEL CASO IN CUI NON VALGA LA FZ. Q VI SOPRA, SIAMO IN PRESUNZA DI UN PUNTO SINGOLARE.

IN UN PUNTO SINGOLARE SI INTERSECANO UN NUMERO DI RAMI APPARTENENTI ALLO STESSO LUOGO, pari alla MOLTEPLICITA'. DI S.

QUINDI I PUNTI SINGOLARI SONO:

$$\begin{cases} P_c(s, k') = 0 \\ \frac{d P_c(s, k')}{ds} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{ds} \left[T^m(s - p_i) + k' \frac{d}{ds} T^m(s - z_i) \right] = 0$$

$$k' = - \frac{\frac{d}{ds} T^m(s - p_i)}{\frac{d}{ds} T^m(s - z_i)}$$

Ecco ai punti singolari

Quindi i punti singolari sono al più $m + m - 1$

•) IL LUOGO PER $|k'| \rightarrow \infty$

▷ PER $k' \rightarrow \infty$ M RAMI CONVERGONO SOGLIE ZERI AL FINITO DI $F(s)$.

IN PARTICOLARE, IN UN NUMERO PARI ALLA MOLTEPLICITA' DELLO ZERO STESO.

I RESTANTI $(m-m)$ RAMI CONVERGONO AL PUNTO IMPROPRI $s = \infty$

SEGUENDO GLI ASINTOTI CHE FORMANO I SEGUENTI ANGOLI CON L'ASSE REALE:

$$\theta_i = \frac{(2v_i + 1)\pi}{m-m}, \quad v_i = 0, 1, \dots, m-m-1$$

▷ PER $k' \rightarrow -\infty$ DA OGNI ZERO AL FINITO DIVERGONO UN NUMERO DI RAMI PARI ALLA MOLTEPLICITA' DELLO ZERO STESO.

I RESTANTI $(m-m)$ RAMI DIVERGONO DAL PUNTO IMPROPRI CON:

$$\theta_i = \frac{2v_i \pi}{m-m}, \quad v_i = 0, 1, \dots, m-m-1$$

IL CENTRO. DEGLI ASINTOTI. SI TROVA SULL'ASSE REALE;

$$\sigma_B = \frac{\sum_{i=1}^m p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{m-m}$$

-) LUOGO. PER. $k' \rightarrow 0$

ANALOGO

-) PUNTI. SULL'ASSE REALE

▷ PER. $k' > 0$. APPARTENGONO AL LUOGO. TUTTI I PUNTI. SULL'ASSE REALE CHE LASCIAMO A DESTRA UN NUMERO DISPARI DI ZERI. E POI CIASCUNO CONTATO CON LA PROPRIA MOLTA.

▷ PER. $k' < 0$ ANALOGO

QUINDI. TUTTO L'ASSE REALE APPARTIENE AL LDR.

STABILIZZAZIONE LDR

CONSIDERANDO IL CASO IN CUI $P(s)$ ABBIA SOLO POCHI A PARTE REALE POSITIVA, CON LA TECNICA DEL LDR È POSSIBILE PROGETTARE $C(s)$ TALE CHE:

$$F(s) = C(s) \cdot P(s) = K_c \cdot K_p \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i^p)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i^r)}$$

APPARTENGA, ALMENO PER OPPORTUNI VALORI DI K_c , AL SEMIPIANO APERTO SINISTRO.

HYP: z_i^p TUTTI A PARTE REALE NEGATIVA.

CASO $M_p - M_p = 1$ SI TRACCIA IL LDR POSITIVO DI:

$$K_c P(s) = K_c K_p \frac{\prod_{i=1}^{M_p} (s - z_i^p)}{\prod_{i=1}^{M_p} (s - p_i^r)} \text{ AL VARIARE DI } 0 < K_c < \infty$$

IL LUOGO POSITIVO HA UN SOLO ASINTOTO COINCIDENTE CON IL SEMIASSE REALE NEGATIVO.

PER AVERE TUTTE LE RADICI DI CICLO CHIUSO A PARTE REALE NEGATIVA È SUFFICIENTE ATTRIBUIRE A K_c VALORI ELEVATI.

INDICHINO CON K_c^m I VALORI DI K_c DOPO IL VALORE TUTTE LE RADICI DI CICLO CHIUSO SONO A PARTE REALE NEGATIVA.

$$C(s) = K_c \quad \text{CON } K_c > K_c^m$$

CASO $M_p - M_p = 2$

IN QUESTO CASO IL LDR POSITIVO DI $K_c P(s)$, HA DUE ASINTOTTI VERTICALI PASSANTI PER σ_B .

CASO $\sigma_B < 0$ 1. DUE ASINTOTTI APPARTENGONO AL DOMINIO. SI STABILITA'.

È SUFFICIENTE ATTRIBUIRE A K_c VALORI ELEVATI, COME NEL CASO PRECEDENTE.

CASO $\sigma_B > 0$ 1. DUE ASINTOTTI APPARTENGONO AL DOMINIO. SI INSTABILITA'. QUINDI DOBBIAMO SPOSTARE IL BARICENTRO NEL SEMIPIANO SINISTRO \Rightarrow SI UTILIZZA UNA COPPIA POLO-ZERO $(-p_6, -z_6)$. E SI SPOSTA IL BARICENTRO NELLA POSIZIONE DESIDERATA. σ_B' :

$$\sigma_B' = \sigma_B - \frac{(p_6 - z_6)}{2}$$

CASO $M_p - M_{p'} \geq 3$ \Rightarrow DOBBIANO RICONSIDERI AL CASO 2.

SI AGGIUNGONO $(M_p - M_{p'} - 2)$ ZERI A PARTE REALE NEGATIVA TALI DA NON CANCELLARE NESSUN POLO DI $C(s)$.

\Rightarrow COSÌ OTTENIAMO UNA F2 DI GRADO RELATIVO UGUALE A 2.

\Rightarrow IL BARICENTRO SI È SPOSTATO A DESTRA.

\Rightarrow SI CALCOLA UN NUOVO \bar{K}_c'

\Rightarrow SI TROVA UN OPPORTUNO \bar{K}_c' DOPO IL quale TUTTE LE RADICI DI CICLO CHIUSO SIANO A PARTE REALE NEGATIVA.

LA $C(s)$ OTTENUTA NON È FISICAMENTE REALIZZABILE.

\hookrightarrow BISOGNA AGGIUNGERE ALMENO $(M_p - M_{p'} - 2)$ POLI AD ALTA FREQU. DEL TIPO $(1 + ST)$.

SI TRACCIA INFINE IL LUOGO POSITIVO E SI RICAVA UN NUOVO \bar{K}_c' .

Alla fine il controllore avrà grado nullo.

CONTORNO DELLE RADICI

IL LUOGO DEI PUNTI DESCRITTO NEL PIANO COMPLESSO DALL'EQ. CARATT. DI CICLO CHIUSO. AL VARIARE DI UN POLO O DI UNO ZERO DELLA $F(s)$ PRENDE IL NOME DI CONTORNO DELLE RADICI.

VARIAZIONE POLO

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI VARI UN POLO P_s :

$$F(s) = K' \frac{\prod_{i \neq s}^m (s - z_i)}{(s - P_s) \prod_{i \neq s}^m (s - p_i)}, \quad P_c(s, K') = \Delta_F(s) + N_F(s) = 0$$

$$(s - P_s) \prod_{i \neq s}^m (s - p_i) + K' \prod_{i \neq s}^m (s - z_i) = 0$$

$$(s - P_s^{NOM}) \prod_{i \neq s}^m (s - p_i) + K' \prod_{i \neq s}^m (s - z_i) + \Delta P_s \prod_{i \neq s}^m (s - p_i) = 0$$

MOTO

DIVISO PER IL TERMINE NOTO

$$P_s = P_s^{NOM} + \Delta P_s$$

QUINDI LA DIPENDENZA DELLE RADICI. DI $P_c(s, K') = 0$. DALLA VARIAZIONE DEL POLO P_s . DI $F(s)$. SI PUO STUDIARE TRACCIANDO IL LDR (CDR). DI $F_p(s)$. AI VARIARE DI ΔP_s .

$$1 + \Delta P_s \frac{\prod_{i \neq s}^m (s - P_i)}{(s - P_s^{NOM}) \prod_{i \neq s}^m (s - p_i) + K' \prod_{i \neq s}^m (s - z_i)} = 1 + F_p(s) = 0$$

VARIAZIONE ZERO

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI VARI UNO ZERO z_s :

$$F(s) = K' \frac{(s - z_s) \prod_{i \neq s}^m (s - z_i)}{\prod_{i \neq s}^m (s - p_i)}, \quad P_c(s, K') = \Delta_F(s) + N_F(s) = 0$$

$$\prod_{i \neq s}^m (s - p_i) + K'(s - z_s) \prod_{i \neq s}^m (s - z_i) = 0$$

$$\prod_{i \neq s}^m (s - p_i) + K'(s - z_s^{NOM}) \prod_{i \neq s}^m (s - z_i) + K' \Delta z_s \prod_{i \neq s}^m (s - z_i) = 0$$

MOTO

DIVISO PER IL TERMINE NOTO

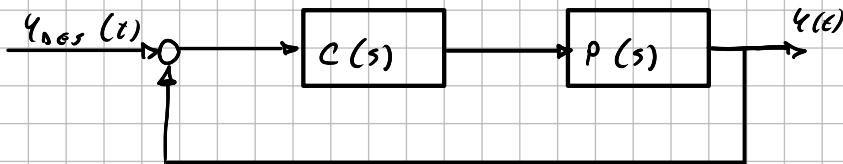
$$z_s = z_s^{NOM} + \Delta z_s$$

QUINDI LA DIPENDENZA DELLE RADICI. DI $P_c(s, K') = 0$. DALLA VARIAZIONE DELLO ZERO z_s . DI $F(s)$. SI PUO STUDIARE TRACCIANDO IL LDR (CDR). DI $F_z(s)$. AI VARIARE DI Δz_s .

$$1 + \Delta z_s \frac{K' \prod_{i \neq s}^m (s - z_i)}{\prod_{i \neq s}^m (s - p_i) + K'(s - z_s^{NOM}) \prod_{i \neq s}^m (s - z_i)} = 1 + F_z(s) = 0$$

ASSEGNAZIONE DEI POLI

$N_p \cdot E \cdot D_p$ SONO COPRIMI TRA LORO.



$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$\text{ROOTS} \left\{ 1 + C(s) \cdot P(s) \right\} = \Gamma = \left\{ \lambda_1, \dots, \lambda_{n+l} \right\} \in \mathbb{C} \rightsquigarrow D_{des}(s) = \prod^{m+l} (s - \lambda_i)$$

POLINOMIO DESIDERATO
DI CICLO CHIUSO

$$1 + C(s) \cdot P(s) = 0 \Leftrightarrow N_p(s)N_c(s) + D_p(s)D_c(s) = 0$$

$$\Rightarrow N_p(s)N_c(s) + D_p(s) + D_c(s) = D_{des}(s) \quad (\star)$$

INCognite

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} = \frac{b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^m + d_{m-1}s^{m-1} + \dots + d_1s + d_0}$$

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{c_ls^l + \dots + c_1s + c_0}{s^l + g_{l-1}s^{l-1} + \dots + g_1s + g_0}$$

$$D_{des}(s) = \prod^{m+l} (s - \lambda_i)$$

POLINOMIO DESIDERATO
DI CICLO CHIUSO

SUSSISTE IL SEGUENTE TH. (A) AMMESTTE

SE E SOLO SE IL MCD DI $N_p(s)$ E Δ

$D_p(s)$ E DIVISORE DI $D_{des}(s)$ E INOLTRE:

(N_p, D_p) COPRIMI $\Leftrightarrow (N_p, D_c)$ COPRIMI

(D_p, D_c) COPRIMI $\Leftrightarrow (D_p, N_c)$ COPRIMI

SE D_p E COPRIMO SIA DI N_p E SIA DI D_p NON SI AVRANNO CANCELLAZIONI TRA I POLI E GLI ZERI. DI C(S) E P(S).

MENTRE SE SI VOGLIONO CANCELLARE POLI O ZERI CANCELLABILI; OCCORRE CHE SIANO POLI O ZERI DI $D_{des}(s) = 0$.

RISCRIVIAMO. (A):

$$(b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0) \cdot$$

$$\cdot (c_ls^l + \dots + c_1s + c_0) +$$

$$+ (s^m + \dots + d_1s + d_0) \cdot$$

$$\cdot (s^l + \dots + g_1s + g_0) = s^{m+l} + d_{m+l-1}s^{m+l-1} + \dots + d_1s + d_0$$

CHE RAPPRESENTA UN SISTEMA DI $(m+l)$ EQ. LIN. NELLO $(2l+1)$ INCognITE.

QUINDI IMPONENDO UN NUMERO DI EQ. UGUALE AL NUMERO DI INCognITE:

$$l = m-1$$

IL SISTEMA DI $(2m-1)$ EQ. IN $(2m-1)$ INCognITE E' ESPRIMIBILE IN FORMA MATRICIALE:

$$M = \begin{matrix} x \\ \vdots \\ x \end{matrix} = Y$$

SE VE ESSERE NON SINGOLARE

PRINCIPIO MODELLO INTERNO

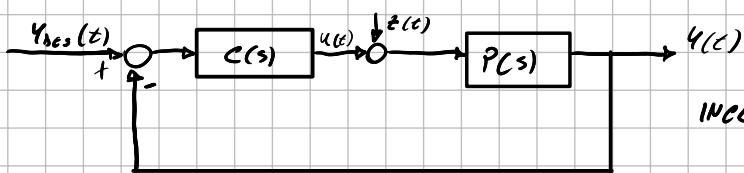
IL PRINCIPIO DEL MODELLO INTERNO FORNISCE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA REIEZIONE DEI SEGNALI DESIDERATI. IN PARTICOLARE SI CONSIDERANO QUELLA CLASSE DI SEGNALI AVVENTI TRASFORMATE DI LAPLACE DI FRATTIONALI, IL CUI POLINOMIO A DEN. È DETTO POLINOMIO GENERATORE ($Q(s)$):

$$Q(s) = s \quad \text{GRADINO}$$

$$Q(s) = s^2 \quad \text{RAMPA}$$

$$Q(s) = s^2 + \omega^2 \quad \text{SINUSOIDA}$$

REIEZIONE AL DISTURBO ($Y_{des} = 0$)



$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad Z(s) = \frac{N_t(s)}{D_t(s)}$$

INCUDIAMO $Q_e(s)$ A DEN. DI $C(s)$:

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s) Q_e(s)}$$

$$\Rightarrow W_e(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s) P(s)} =$$

$$= \frac{N_p(s) D_c(s) Q_e(s)}{N_p(s) N_c(s) + D_p(s) D_c(s) Q_e(s)}$$

QUINDI LA TRASF. DI LAPLACE DEL' USCITA SARÀ:

$$Y_e(s) = W_e(s) \cdot Z(s) = \frac{N_p(s) D_c(s) N_t(s)}{N_p(s) N_c(s) + D_p(s) D_c(s) Q_e(s)}$$

DOBBIAMO IMPORRE CHE TUTTE LE RADICI DI QUESTO POLINOMIO ABBIANO PARTE REALE NEGATIVA.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_e(t) = 0$$

INSEGUIMENTO SEGNALE ($Z(t) = 0$)

$$Y_{des}(s) = \frac{N_{des}(s)}{Q_{des}(s)}, \quad E(s) = Y_{des}(s) - Y(s) =$$

$$= Y_{des}(s) - W(s) Y_{des}(s) = Y_{des}(s) - \frac{C(s) P(s)}{1 + C(s) P(s)} Y_{des}(s) =$$

$$= \frac{N_{des}(s)}{Q_{des}(s)} - \frac{N_c(s) N_p(s)}{D_c(s) D_p(s) + N_c(s) N_p(s)} \cdot \frac{N_{des}(s)}{Q_{des}(s)} =$$

$$= \frac{N_{des}(s)}{Q_{des}(s)} - \frac{N_c(s) N_p(s) N_{des}(s)}{(D_c(s) D_p(s) + N_c(s) N_p(s)) Q_{des}(s)} = \frac{N_{des}(s) D_p(s) D_c(s)}{(Y_d(s) N_c(s) + D_p(s) D_c(s)) Q_{des}(s)}$$

PROCESSO ESTESO

$$P_e(s) = \frac{P(s)}{Q_{des}(s)}$$

SUPPOSIAMO CHE $Q_{des}(s)$ NON COMPAIA IN $D_p(s)$
POSSIA MO. RISCRIVERE IL CONTRONUCLEO:

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s) Q_{des}(s)}$$

$$E(s) = \frac{N_{des}(s) D_p(s) D_c(s)}{N_p(s) N_c(s) + D_p(s) D_c(s) Q_{des}(s)}$$

PER AVERE ERRORE NUOVO REGIME: $Q_{des}(s)$ DEVE ESSERE FATTORE DI $D_p(s)$ E $D_c(s)$ A NUM.

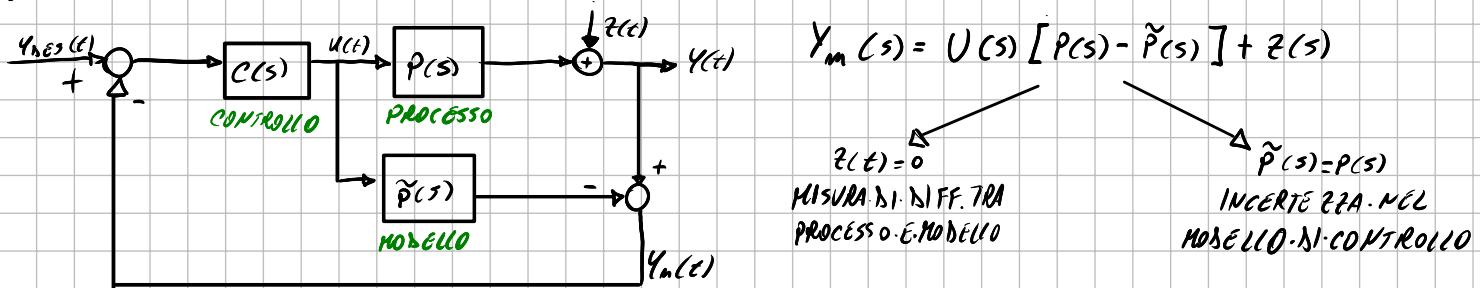
SE $Q_{des}(s)$ È FATTORE DI $D_p(s)$ ALLORA
1. PROGETTO DI $C(s)$ DEVE GARANTIRE STABILITÀ A $P(s) \rightarrow CDR$, POLE-PLACE.

SE QUESTO POLINOMIO HA TUTTE LE RADICI A PARTE REALE NEGATIVA $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

CONTROLLO A MODELLO INTERNO (VALLE)

QUESTA TECNICA È USATA PER INSEGUIRE UNA TRAIETTORIA DESIDERATA. È LA REIEZIONE DEI DATI DI MISURA NELLA PRESENZA DI INCERTEZZE NEL MODELLO.

(ASSUMO I. POLO NEL P(S). TUTTI A PARTE REALE NEGATIVA E UN POLO IN ZERO, PRESENTE ANCHE NEL $\tilde{P}(S)$)



$$U(s) = \frac{C(s)(Y_{des}(s) - Z(s))}{1 + C(s)(P(s) - \tilde{P}(s))}, \quad Y(s) = P(s) \cdot U(s) + Z(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)(P(s) - \tilde{P}(s))} Y_{des}(s) + \frac{1 - C(s)P(s)}{1 + C(s)(P(s) - \tilde{P}(s))} Z(s) = W(s) Y_{des}(s) + W_Z(s) Z(s)$$

L'ESPRESSIONE DEL CONTROLLORE A MODELLO INTERNO SI RICAVA COSÌ:

$$C(s) = \tilde{P}^{-1}(s) \Rightarrow \begin{cases} W(s) = 1 \\ W_Z(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y(t) = Y_{des}(t) \\ Y_Z(t) = 0 \end{cases} \forall t \geq 0$$

TUTTAVIA L'ESPRESSIONE DI $\tilde{P}(s)$ HA ALCUNI PROBLEMI:

2) SE $\tilde{P}(s)$ HA GRADO RELATIVO POSITIVO $\Rightarrow C(s)$ NON È REALIZZABILE

3) SE $\tilde{P}(s)$ PRESENTA RITARDI O ZERI A PARTE REALE POSITIVA $\Rightarrow C(s)$ È INSTABILE

CASO 2

VIENE INTRODOTTO UN FILTRO PASSA-BASSO $G_R(s)$ CON $G_R(0) = 1$:

$$G_R(s) = \frac{1}{(1 + s\lambda)^q} \Rightarrow C(s) = \tilde{P}^{-1}(s) \cdot G_R(s)$$

► L'ORDINE q VIENE SCELTO IN MODO TALE CHE $C(s)$ ABbia GRADO RELATIVO ALMENO NUOLO.

► IL PARAMETRO λ INFUENZA LA RAPIDITÀ DI RISPOSTA DEL SISTEMA DI CICLO CHIUSO. LA SUA SCELTA RAPPRESENTA UN COMPROMESSO TRA PRONTITÀ (PICCOLO) E ROBUSTEZZA (ELEVATO).

$$\rightsquigarrow Y(s) = W(s) Y_{des}(s) + W_Z(s) Y_Z(s) \rightsquigarrow \begin{cases} W(s) = 1 \\ W_Z(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_{des}(t) = C \cdot Z(t) \\ SONO SEGNALI COSTANTI \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0 \end{cases}$$

CASO b

SI FA IL RITZIA $\tilde{P}(s) = \tilde{P}_+(s) \cdot \tilde{P}_-(s)$

COMPONENTE INVERTIBILE CON TUTTI ZERI A PARTE REALE NEGATIVA

$$\Rightarrow C(s) = G_R(s) \cdot \tilde{P}_-(s)$$

(MONTE) (HYP: $P(s)$ HA UN POLO IN $s=0$, VESSUNO ZERO POSITIVO. E GRADO RELATIVO UNITARIO)

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{s^{\Delta_p(s)}}, \quad \tilde{P}(s) = \frac{N_{\tilde{P}}(s)}{s^{\Delta_{\tilde{P}}(s)}}$$

\rightsquigarrow SE LO FA LUI.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:

NEL NUOVO SISTEMA LA $W_t(s)$ SARÀ:

$$W_t(s) = \frac{P(s)(1 - C(s) \cdot \tilde{P}(s))}{1 + (P(s) - \tilde{P}(s))C(s)}$$

UGUALE A PRIORI SOLO CHE HA $P(s)$ A NUM.

$$W_t(0) = \frac{N_{\tilde{P}}(0)}{\Delta_{\tilde{P}}(0)} \neq 0 \text{ CHE DIFFERISCE DAL CASO A VALLE}$$

$$\Rightarrow \lim_t Y_t(t) = Y_t(\infty) = \lambda_2 W_t(0) \quad \text{AMPIETTA COSTANTE}$$

QUINDI NON SI PUÒ REIETTARE IL DISTURBO.

TUTTA VIA SCEGLIEVSO VALORI DI λ MOLTO PICCOLI POSSIAMO REIETTARE GRAN PARTE DEL DISTURBO, MA DOBBIAMO SCEGGERE UN λ COERENTE CON L'ESIGENZA DELLA STABILITÀ DEL SISTEMA.

N.B. NEL CASO IN CUI $q > 1$:

$$Y_t(\infty) = \lambda_2 \tilde{P}(0) q \lambda$$

CASO IN CUI $\tilde{P}(s)$ HA UN RITARDO

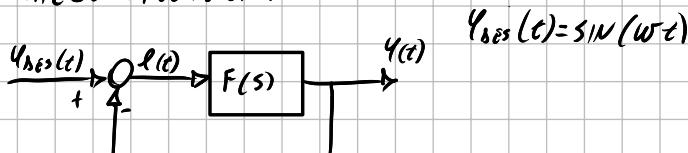
$$\text{UTILIZZO PASE} \rightarrow e^{-s\tilde{\tau}} \approx \frac{1 - s^{\tilde{\tau}/2}}{1 + s^{\tilde{\tau}/2}} \Rightarrow \tilde{P}(s) = \frac{N_{\tilde{P}}(s)}{s^{\Delta_{\tilde{P}}(s)}} \cdot \frac{1 - s^{\tilde{\tau}/2}}{1 + s^{\tilde{\tau}/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(0) = \frac{N_p(0)}{\Delta_p(0)} (q\lambda + \tilde{\tau}/2) \Rightarrow W_t(0) = \frac{N_{\tilde{P}}(0)}{\Delta_{\tilde{P}}(0)} (q\lambda + \tilde{\tau}/2) \Rightarrow Y_t(\infty) = \lambda_2 \tilde{P}(0) (q\lambda + \tilde{\tau}/2)$$

PRECISIONE INGRESSI SINUSOIDALI

IL PRINCIPIO A MODELLO INTERNO FORNISCE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'INSEGUIMENTO ASINTOTICO CON ERRORE NULLO DI UN SEGNALE SINUSOIDALE DI PULSAZIONE w .

MA È UNA CONDIZIONE PUNTUALE \Rightarrow POSSIAMO ALMENO OTTENERE L'INSEGUIMENTO CON PICCOLO ERRORE IN UN INTERVALLO DI PULSAZIONI.



DEFINIAMO "FUNZIONE DI SENSIBILITÀ": $S(jw) = \frac{1}{1 + F(jw)}$

\Rightarrow POSSIAMO SERVIRE L'ERRORE CONCERNENTE $l(t) = \frac{1}{1 + F(jw)} \sin(wt + \arg\left\{\frac{1}{1 + F(jw)}\right\})$

\Rightarrow DATO CHE SIAMO INTERESSATI ALL'AMPIETTA DEL'ERRORE:

$$|l(t)| \leq \left| \frac{1}{1 + F(jw)} \right| \quad \text{piccolo} \rightarrow \text{precisione}$$

imprima

A FREQUENZE ELEVATE NON POSSIAMO PIÙ RENDERE $S(jw)$ PICCOLO. \Rightarrow AD ALTE FREQUENZE $F(jw)$ ATTENUA, RENDENDO $y(t) \approx 0 \Rightarrow l(t) \approx y_{des}(t)$, QUINDI NON POSSIAMO ASSEGNAME UNA SPECIFICA DEL TIPO:

$$\lim_{w \rightarrow \infty} |F(jw)| = 0 \Rightarrow \lim_{w \rightarrow \infty} |S(jw)| = 1$$

$|S(jw)| \leq 0.2 \quad \forall w$

QUINDI ASSEGNAME UNA SPECIFICA DEL TIPO:

$$|S(jw)| \leq M(w) \quad \forall w$$

$\Rightarrow M(w)$ RAPPRESENTA UNA "MASCHERA" SOTTO LA QUALE DEVE ESSERE COLLOCATA $|S(jw)|$.

UN SUO POSSIBILE ANDAMENTO POTREBBE ESSERE VALORI PICCOLI A BASSA FREQUENZA E VALORI CHE TENDONO AD 1 IN ALTA FREQUENZA.

IN ALTERNATIVA POSSIAMO USARE LA SEGUENTE FR:

$$|S(jw) Q(jw)| \leq 1 \quad \forall w \text{ con } Q(w) = M^{-1}(w)$$

QUINDI $Q(jw)$ PESA LA FR. DI SENSIBILITÀ.

PER AVERE UN'INTERPRETAZIONE GRAFICA NOTIAMO CHE:

$$|S(jw) Q(jw)| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{Q(w)}{1 + F(jw)} \right| \leq 1 \quad \forall w \Rightarrow |Q(jw)| \leq |1 + F(jw)| \quad \forall w$$

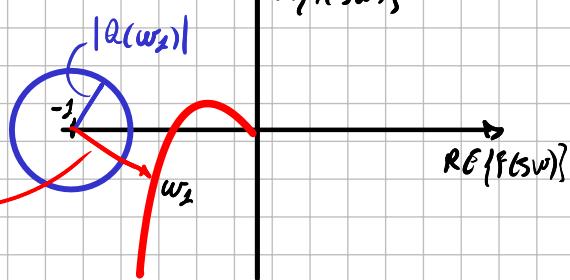
$|M(jw)|$

TRACCIANO ORA IL DIAGRAMMA NI NYQUIST DI $F(jw)$,

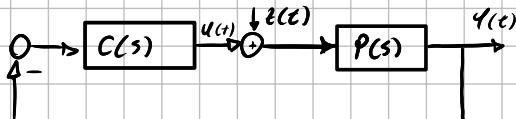
LA QUANTITÀ $|1 + F(jw)|$ È IL VETTORE CHE CONGIUNGE

PER OGNI w IL PUNTO -1 CON UN PUNTO SULLA CURVA. $|1 + F(jw)|$

QUINDI $|Q(w)| \leq |1 + F(jw)|$ IMpone CHE IL VETTORE $|1 + F(jw)|$ NON ENTRI NEL CERCHIO.



REIEZIONE AI DISTURBI SINUSOIDALI



$$e(t) = \sin(\omega t)$$

DOBBIAMO ATTENUARE IL DISTURBO SULL'USCITA IN UN INTERVALLO DI

PULSAZIONE Ω . $\Rightarrow y(t) \leq \alpha \quad \forall \omega \in \Omega$

$$y(t) = |W_2(j\omega)| \sin(\omega t + \arg[W_2(j\omega)])$$

$$W_2(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{1 + C(j\omega)P(j\omega)} \quad \text{IMPOSSO CHE: } |W_2(j\omega)| \leq \alpha \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\text{MA SE } |C(j\omega)P(j\omega)| \geq 1 \Rightarrow |1 + C(j\omega)P(j\omega)| \geq |C(j\omega)P(j\omega)| - 1$$

$$|1 + C(j\omega)P(j\omega)| \geq \frac{|P(j\omega)|}{\alpha}$$

CHE È SOINSFATTA PER L'INTERVALLO $[0, \omega_c]$

$$\text{QUINDI } |C(j\omega)P(j\omega)| \geq 1 + \frac{|P(j\omega)|}{\alpha} \quad (\star)$$

VUOL DIRE CHE IL DIAGRAMMA DI BOSE DI $|F(j\omega)|$ NON DEVE MAI ATTRAVERSARE QUELLO DI $1 + \frac{|P(j\omega)|}{\alpha}$

NELLA PRIMA ESPRESSIONE CAPIAMO CHE PER RIDURRE $|W_2(j\omega)|$,

$|C(j\omega)P(j\omega)|$ DEVE ESSERE ALTO \Rightarrow SONO QUINDI PIÙ ATTENUTATI I DISTURBI SINUSOIDALI A BASSA FREQUENZA

O PER QUELLA PULSAZIONE ω_d PER LA QUALE $|C(j\omega_d)P(j\omega_d)|$ RISULTA GRANDE.

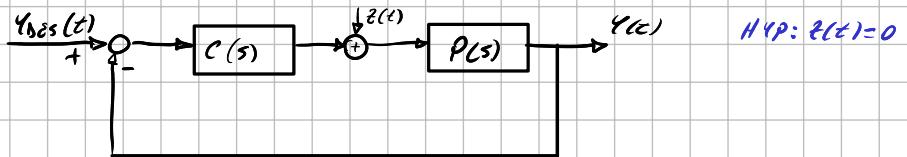
$$\text{NEL CASO IN CUI } e(t) \text{ AGISCA A VALLE DI } P(s) \Rightarrow W_2(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)}$$

$$\text{QUINDI } (\star) \text{ DIVENTA } |C(j\omega)P(j\omega)| \geq 1 + \frac{1}{\alpha}$$

QUINDI IL DOMINIO INTERDETTO ALLA $|F(j\omega)|$ È UN RETTANGOLO.

SINTESI DIRETTA

QUESTA TECNICA HA COME OBBIETTIVO DI COSTRUIRE UN CONTROLLORE $C(s)$ IN MODO TALE CHE LA $W(s)$ SIA UGUALE AD UNA TF DESIDERATA $W_{des}(s)$ CHE SOBBISFA OPPORTUNE SPECIFICHE.



$$W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \rightsquigarrow W(s) = W_{des}(s) \rightsquigarrow \text{RISOLVO PER } C(s) \rightsquigarrow C(s) = \frac{W_{des}(s)}{P(s)(1 - W_{des}(s))}$$

\Rightarrow DATO CHE $C(s)$ È PROPORTIONALE AL RECIPROCO DI $P(s)$, VUOL DIRE CHE IL CONTROLLORE CANCELLA I POLI E

GLI ZERI DEL PROCESSO SOSTITUITI CON I PROPRI.

LA $W_{des}(s)$ DEVE GARANTIRE:

- CAUSALITÀ DEL CONTROLLORE: $gr\{C(s)\} \geq 0 \Rightarrow M_c \geq M_p$
- STABILITÀ INTERNA ANELLO

CAUSALITÀ CONTROLLORE

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)}, \quad P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad W_{des}(s) = \frac{M_{des}(s)}{D_{des}(s)}$$

$$C(s) = \frac{N_{des}(s) D_p(s)}{N_p(s) (D_{des}(s) - N_{des}(s))} \Rightarrow M_c - M_p = M_p + M_{des} - (M_{des} + M_p)$$

$$M_{des} - M_{des} \geq M_p - M_p$$

$$\Rightarrow gr\{W_{des}(s)\} \geq gr\{P(s)\}$$

STABILITÀ INTERNA D'ANELLO

PER QUESTA PROPRIETÀ OCCHIO CHE I POLI E GLI ZERI

DI $P(s)$ CHE $C(s)$ CANCELLA SIANO QUELLI A PARTE REALE

NEGATIVA.

$$\left. \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} W_{des}(s) \right|_{s=z_i} = 0$$

$$\left. \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} (1 - W_{des}(s)) \right|_{s=p_i} = 0$$

$$\forall s=1, \dots, M:$$

$$\forall s=1, \dots, V.$$

PER QUANTO RIGUARDA LE SPECIFICHE DI REGIME DEVE RISULTARE IN BASE AL PRINCIPIO DEL MODELLO INTERNO,

CHE LA TF DI ANELLO APERTO $F(s)$ ABbia TRA I SUOI POLI, I POLI DEL SEGNALE DESIDERATO SA INSEGUIRE:

$$Q(s) = s \quad \text{GRANIVO} \Rightarrow 1 - W_{des}(0) = 0$$

$$Q(s) = s^2 \quad \text{RAHPA} \Rightarrow 1 - W_{des}(0) = 0, - \left. \frac{d}{ds} W_{des}(s) \right|_{s=0} = 0$$

$$Q(s) = s^2 + w^2 \quad \text{SINUSOIDAE} \Rightarrow 1 - W_{des}(\pm jw) = 0$$

E' IMPORTANTE NOTARE CHE PER AVERE UN ERRORE A GRADINO NUCCO SI PODE: $W_{des}(0) = 1$, CHE E' LA STESSA CONDIZIONE PER NON CANCELLARE UN POLO SEMPLICE IN $S=0 \Rightarrow$ QUESTA CONDIZIONE, IN SEGUIMENTO ANDRA' CONTATA UNA SOLA VOLTA.

PER QUANTO RIGUARDA LA CONDIZIONE DI ERRORE FINITO E' NON NUCCO PER LA RAMPA LINEARE SI IMPONE:

$$C_1 = -\frac{d}{ds} W_{des}(s) \Big|_{s=0} = \sum_{i=1}^{m_{des}} \frac{1}{z_{w_i}} - \sum_{i=1}^{m_{des}} \frac{1}{p_{w_i}} \leq C_{1,\max}$$

QUINDI LA $W_{des}(s)$ AVRA' LA SEGUENTE FORMA:

$$W_{des}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m_p^+} (s - z_i)^{l_i} (s - p_i)^{k_i}}{D_{W_{des}}(s)}$$

DOVE:

- m_p^+ E' IL NUMERO DI ZERI NON CANCELLABILI DI $P(s)$
- $l_1 = l_1 + l_2$
- l_2 E' IL NUMERO DI CONDIZIONI DA IMPORRE PER EVITARE LA CANCELLAZIONE DEI POLI NON NEGATIVI DI $P(s)$.
- l_2 E' IL NUMERO DI CONDIZIONI DA IMPORRE PER LE SPECIFICHE DI REGIME.
- $D_{W_{des}}(s)$ E' UN QUASIASI POLINOMIO STABILE CHE HA IL COMITO DI SOBBISSARE LE SPECIFICHE NEL TRANSITORIO, IL CUI GRADO:

DOVE m_p^- E' IL NUMERO DI ZERI DISINTI DI $P(s)$ A PARTE REALE NEGATIVA

$$m_{des} \geq m_p^- + l_1 + l_2 - 1$$

FORMA STANDARIS

NEL CASO IN CUI IL GRADO RELATIVO DI $P(s)$ NON SIA SUPERIORE A 2 E PRESENTI TUTTI POLI E PERIA PARTE REALE NEGATIVA, AD ECCEZIONE DI UN POLO SEMPLICE IN 0, LA $W_{des}(s)$ PUO' ESSERE ASSEGNAIA NELLA SEGUENTE FORMA STANDARIS, CARATTERIZZATA DA DUE POLI COMPLESSI CONIUGATI:

$$W_{des_2}(s) = \frac{1}{1 + 2 \frac{\zeta s}{w_m} + \frac{s^2}{w_m^2}}, \quad 0 < \zeta < 1$$

IN QUESTA FORMA, LE SPECIFICHE VENGONO ASSEGNAME IN TERMINI DI PRECISIONE DINAMICA (ζ) E DI RAPIDITA' DI RISPOSTA (w_m).

INFATTI ζ E w_m SONO ESPRIMIBILI IN FORMA CHIUSA IN FZ. DI ζ E DI w_m :

$$\zeta = e^{-\frac{\pi i}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad , \quad w_m = \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{1-4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

LE SPECIFICHE SI ASSEGNAANO QUI SÌ COSÌ:

$$\tilde{s} \leq \tilde{s}_{\max}$$

$$w_{-3} = w_{3,des} \quad \text{CON} \quad w_{-3,des} \in [w_{-3,des}^m, w_{-3,des}^M]$$

$$e_0=0$$

PER QUANTO RIGUARDA LE SPECIFICHE A REGIME, LA FORMA STANDARD GARantisce ERRORE NULLO A GRADINO

ESE. ERRORE FINITO E NON NULLO ALLA RAMPA LINEARE:

$$e_{1,2} = -\frac{d}{ds} W_{des,2}(s) \Big|_{s=0} = \frac{2\tilde{s}}{w_m} \leq e_{1,\max}$$

SE I VALORI DI \tilde{s} E DI w_{-3} SOBISFANNO QUESTA CONDIZIONE, IL PROGETTO È CONCLUSO, ALTRIMENTI È POSSIBILE

ABOTTARE QUEST'ALTRA FORMA:

$$W_{des,2}(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\tilde{s}s}{w_m} + \frac{s^2}{w_m^2}} \cdot \frac{M(s+2)}{(s+mz)} = W_{des,2}(s) \cdot T(s)$$

$\rightarrow m > 1$

$\rightarrow T(s)$

PER PRIMA COSA NOTIAMO CHE $W_{des}(0)=1$

$$\Leftrightarrow e_0=0$$

MENTRE PER QUANTO RIGUARDA LA RAMPA LINEARE:

$$e_{1,2} = -\frac{d}{ds} W_{des,2}(s) = \frac{2\tilde{s}}{w_m} \cdot \frac{m-1}{mz} \leq e_{1,\max}$$

PER LE SPECIFICHE TRANSITORIE È POSSIBILE DIMOSTRARE:

$$\tilde{s}_2 \leq \frac{1}{m} (\tilde{s}_{\max} - (m-1))$$

PASSI PROGETTUALI

1) SI SCEGLIE $m > 1$

2) SI RICAVA $\tilde{s}_2 \cdot \Delta A \cdot \tilde{s}_2 \leq \frac{1}{m} (\tilde{s}_{\max} - (m-1))$

3) SI SOSTITUISCE $\tilde{s}_2 \cdot \ln \tilde{s} = e^{-\frac{\pi s}{\sqrt{z-z^2}}} RICAVANDO \tilde{s}$

4) $\Delta A \cdot W_{des,2}(s) = W_{des,2}(s) \cdot T(s)$, IMPONGO CHE $W_{des,2}(jw)$ ABbia LA BANDA PASSANTE DESIDERATA E CHE

$|W_{des}(0)|=1 \Rightarrow |W_{des,2}(jw_{-3,des})| = |W_{des,2}(jw_{-3,des}) \cdot T(jw_{-3,des})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ \rightsquigarrow SE ASSUMO $|T(jw_{-3,des})| \propto m$

$$\rightsquigarrow \frac{m}{\left| 1 + j2 \frac{3w_{-3,des}}{w_m} - \frac{w_{-3,des}^2}{w_m^2} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2m^2-1)w_m^4 + 2w_{-3,des}^2(1-2\tilde{s}^2)w_m^2 - w_{-3,des}^4 = 0$$

5) NOTI \tilde{s} , w_m E m . SI RICAVA ΔA : $e_{1,2} = \frac{2\tilde{s}}{w_m} \cdot \frac{m-1}{mz} \leq e_{1,\max}$

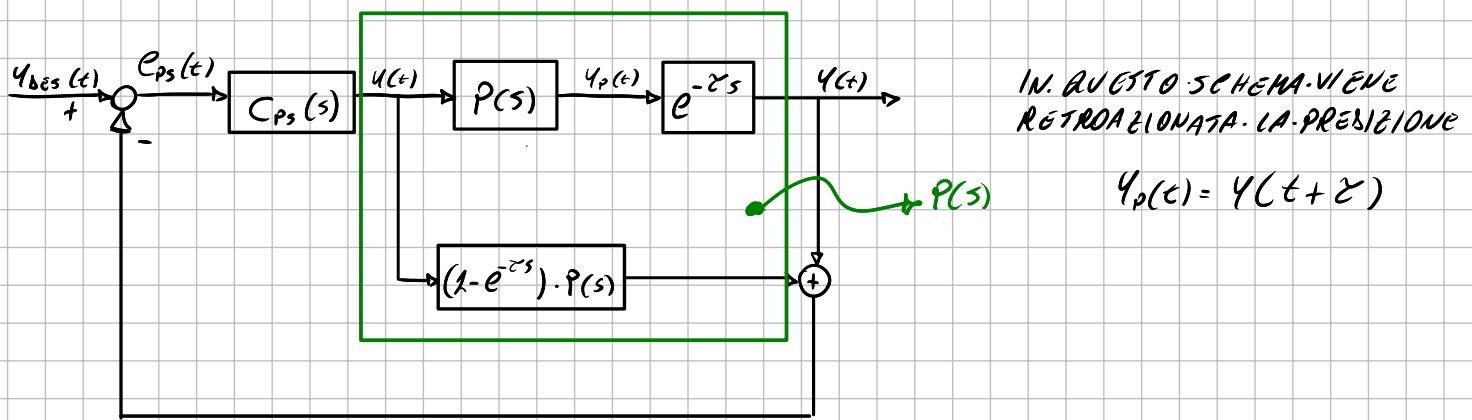
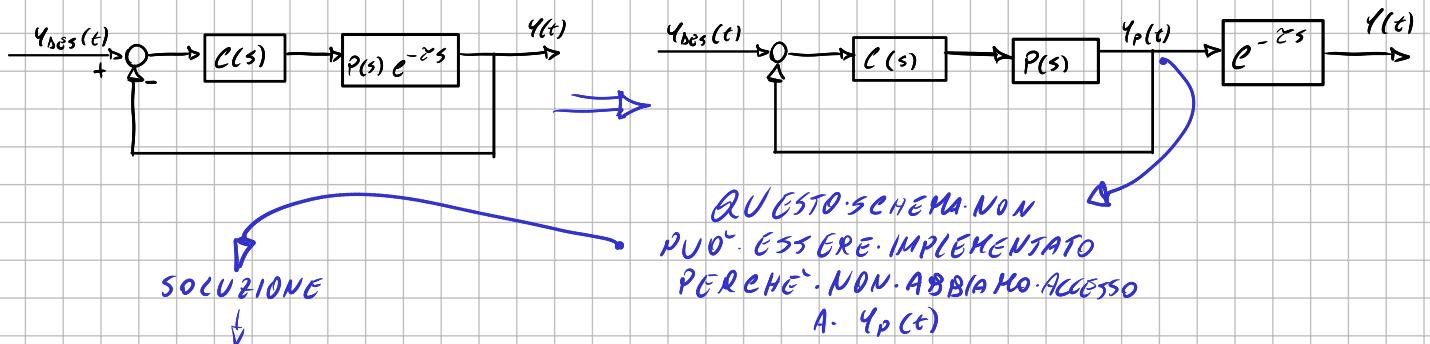
w_m È LA SOLUZIONE REALE POSITIVA

LE 4 RADICI SONO IN SIMMETRIA QUADRANTALE

PREDITTORE DI SMITH

LO SCHEMA A PREDITTORE DI SMITH HA COME OBBIETTIVO IL MIGLIORAMENTO DELLE PRESTAZIONI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO

IN CUI È PRESENTE UN RITARDO TEMPORALE.

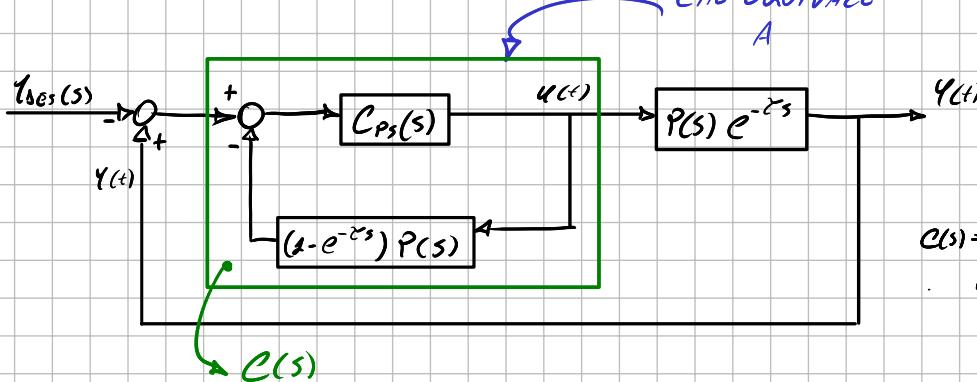


$$W_{ps}(s) = \frac{C_{ps}(s) \cdot P(s) e^{-\tau s}}{1 + C_{ps}(s) \cdot P(s)} \quad \text{SMITH}$$

POSSIAMO AVERE $W_{ps}(s) = W_{ru}(s)$ SE:

$$W_{ru}(s) = \frac{C(s) \cdot P(s) \cdot e^{-\tau s}}{1 + C(s) P(s) e^{-\tau s}} \quad \text{RETR. UNIT.}$$

$$C(s) = \frac{C_{ps}(s)}{1 + C_{ps}(s) (1 - e^{-\tau s}) P(s)}$$



$$C(s) = \frac{N_{ps}(s) \cdot D_p(s)}{D_{C_{ps}}(s) b_p(s) + N_p(s) u_{C_p}(s) - N_p(s) u_{C_{ps}}(s) \cdot e^{-\tau s}}$$

COME È POSSIBILE NOTARE TRA GLI ZERI DI C(s) CI SONO ANCHE I POLI DEL PROCESSO.

→ QUINDI IL CONTROLLORE EFFETTUA CANCELLAZIONI

→ ALLORA È OPPORTUNO CHE P(s) SIA ASINTOTICAMENTE STABILE.

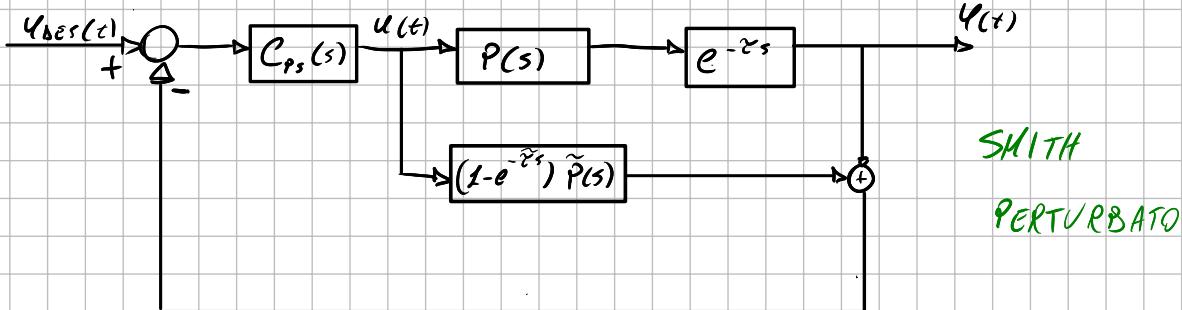
INOLTRE, LA TF DI C(s) È NON RAZIONALE A CAUSA DEL TERMINE $(e^{-\tau s}) \Rightarrow$ SI APPROSSIMA CON PARTE

IN GENERALE SI PUO' AFFERMARE CHE LE CONSIDERAZIONI DA FARE SUL CONTROLLORE PER DELLE SPECIFICHE DESIDERATE, SI RIFLETTONO IN $C_{ps}(s)$.

INOLTRE, NOTIAMO COME: $W(s) = \tilde{W}_{ps}(s) e^{-\tilde{\tau}s}$, QUINDI, NONOSTANTE L'IMPiego DI SMITH, IL RITARDO INFUENZA LO STESSO IL SISTEMA.

PERTURBAZIONI

DEFINIMO $\tilde{P}(s)$ E $\tilde{\tau}$. LE STIME DI $P(s)$ E τ , LO SCHEMA DIVENTA:



$$W_{ps}^P(s) = \frac{C_{ps}(s) P(s) e^{-\tau s}}{1 + C_{ps}(s) P(s) e^{-\tau s} + C_{ps}(s) (1 - e^{-\tilde{\tau}s}) \tilde{P}(s)} = W_{ps}(s) \Big|_{\substack{\tilde{\tau} = \tau \\ \tilde{P} = P}}$$

E' DA NOTARE CHE NEL CASO NON PERTURBATO, I POLE DELLA $W_{ps}(s)$ ERANO FINITI, MENTRE QUI LO SONO PUO' QUINDI ACCADERE CHE VI SIA STABILITA' BIBO SOLO SENZA PERTURBAZIONI.

DEFINIAMO:

$$\mathcal{S} = \left\{ \sigma_i : \sigma_i = \operatorname{Re}\{z_i\}, \Delta_{W_{ps}}^P(s) = 0 \right\}$$

SE S HA UN ESTREMO SUPERIORE NEGATIVO ALLORA IL SISTEMA AL ANELLO CHIUSO E' ASINTOTICAMENTE STABILE.

UN PREDITTORE DI SMITH E' DETTO PRATICAMENTE STABILE QUANDO E' IN grado di far fronte a perturbazioni infinitesime nella dinamica del processo.

IN PARTICOLARE, SIANO $\varepsilon_\tau, \varepsilon_p, \bar{w}$ VALORI PICCOLI, UN PREDITTORE DI SMITH E' PRATICAMENTE STABILE SE:

$$|\tilde{\tau} - \tau| \leq \varepsilon_\tau, \quad \left| \frac{P(sw)}{\tilde{P}(sw)} - 1 \right| \leq \varepsilon_p \quad \forall 0 < w < \bar{w}$$

MODELLO DI INCERTEZZA

LE INCERTEZZE POSSONO ESSERE CLASSIFICATE IN:

-) INCERTEZZE STRUTTURATE

-) INCERTEZZE NON STRUTTURATE

SUPPONIAMO DI AVERE UN MODELLO NOMINALE DEL SISTEMA FISICO.

PER OGNI VALORE DI w CHE VARIA IN UN CERTO INTERVALLO, SI POSSONO DEFINIRE DEI LIMITI AI VALORI DI MODELLO E FASE DANDO LUOGO AD UNA REGIONE DI INCERTEZZA NEL PIANO COMPLESSO, CHE PERO' E' DIFFICILE A RAPPRESENTARE MATEMATICAMENTE, QUI VEDI SI DEFINISCE UN DISCO CHE LA RACCHIUSA.

QUESTO DISCO HA RAGGIO $\gamma(w)$ CHE RAPPRESENTA UN MAGGIORANTE DELL'INCERTEZZA. (ALLA VM. DI w . AVVI. IL DISCO).

POSSIAMO QUINDI DEFINIRE L'INSIEME DEI PROCESSI PERTURBATI:

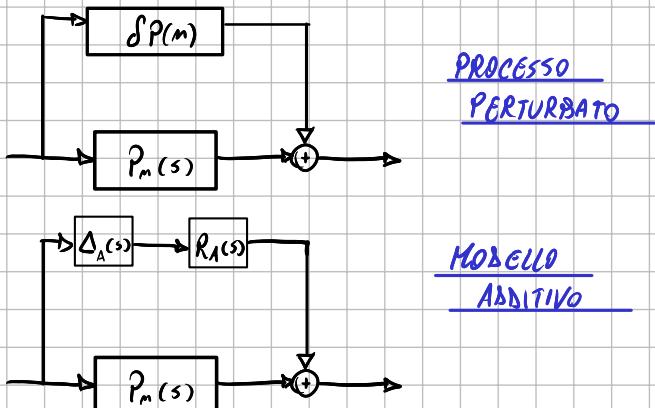
$$\mathcal{P} = \left\{ p(s_w) : \left| p(s_w) - p_m(s_w) \right| \leq \gamma(w) \right\}$$

PROCESSO PERTURBATO
PROCESSO NOMINALE

MODELLO ADDITIVO

$$p(s_w) = p_m(s_w) + \delta p(s_w) \quad \xrightarrow{\text{INCERTEZZA ADDITIVA NON NOTA}} |\delta p(s_w)| \leq \gamma_A(w)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = \left\{ p(s) : p(s) = p_m(s) + R_A(s) \Delta_A(s) \right\} \quad \text{CON: } \begin{aligned} \bullet) \Delta_A(s) &\text{ TF. ASINTOTICAMENTE STABILE} \Rightarrow |R_A(s_w)| < 1 \forall w \\ &\text{ARBITRARIA} \\ &\text{NON NOTA} \end{aligned}$$

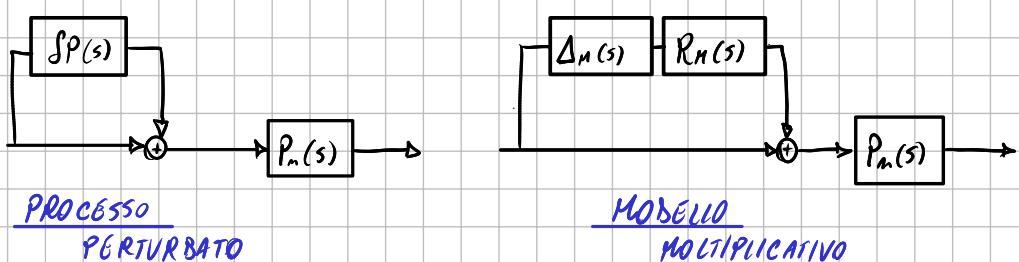


MODELLO MOLTIPLICATIVO

$$\frac{|p(s_w) - p_m(s_w)|}{|p_m(s_w)|} \leq \gamma_M(s_w), \quad p(s_w) = p_m(s_w) \left(1 + \delta p(s_w) \right) \quad \xrightarrow{\text{INCERTEZZA MOLTIPLICATIVA}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = \left\{ p(s) : p(s) = p_m(s) \left(1 + R_M(s) \Delta_M(s) \right) \right\}, \quad \text{CON } |\Delta_M(s_w)| \leq 1 \forall w$$

$$|\delta p(s_w)| \leq \gamma_M(s_w)$$



SE VALUTIAMO IL MODELLO MOLTIPLICATIVO IN $s = sw \cdot e$ RICORDANZO CHE $|\Delta_m(sw)| < 1 \quad \forall w :$

$$\left| \frac{P(sw) - P_m(sw)}{P_m(sw)} \right| \leq |R_m(sw)| \quad \text{QUASI } \forall w. \quad |R_m(sw)| \text{ RAPPRESENTA LA MASSIMA DISTANZA RELATIVA TRA PROCESSO NOMINALE E QUELLO REALE NOTO.}$$

$$\left| \frac{P(sw)}{P_m(sw)} - 1 \right| \leq |R_m(sw)| \quad \forall w$$

ROBUSTEZZA

ASSUMIAMO. $P(s) \in P$. FAMIGLIA DI PROCESSI DISTURBATI.

SI CONSIDERA UNA CERTA PROPRIETÀ, AD ESEMPIO LA STABILITÀ. BIBIO.

→ UN CONTROLLORE $C(s)$. SI CONSIDERA ROBUSTO RISPETTO A QUESTA PROPRIETÀ SE ESSA SI CONSERVA PER OGNI PROCESSO PERTURBATO APPARTENENTE ALLA FAMIGLIA P .

STABILITÀ ROBUSTA

NO BESO

MOLTI

$$P = \left\{ P(s_w) : P(s_w) = P_m(s_w) \left(1 + \Delta R(s_w) \right) \right\}$$

PROCESSO NOMINALE

F. POSO MOTA

COSTANTE ΔR

ESISTE IL SEGUENTE TH:

"ESISTE UN CONTROLCORE $C(s)$ CHE PERMETTE DI STABILIZZARE ROBUSTAMENTE A CICLO CHIUSO OGNI PROCESSO DELLA FAMIGLIA P SE E SOLO SE VALGONO:

1. $C(s)$ STABILIZZA $P_m(s)$ ($\Delta = 0$)

2. $C(s)$ DEVE ESSERE TALE CHE $|W_m(s_w) \cdot R(s_w)| < 1 \quad \forall w$

DOVE: $W_m(s_w) = \frac{C(s) P_m(s)}{1 + C(s) P_m(s)}$

DIMOSTRAZIONE

SE VALE LA ① $\Rightarrow 1 + C(s) P_m(s)$ HA SOLO RADICI A PARTE REALE NEGATIVA.

$$\Rightarrow 1 + C(s) P(s) = 1 + C(s) P_m(s) (1 + \Delta R(s)) = 1 + C(s) P_m(s) + C(s) P_m(s) \Delta R(s) =$$

$$= 1 + C(s) P_m(s) + C(s) P_m(s) \Delta R(s) \cdot \frac{1 + C(s) P_m(s)}{1 + C(s) P_m(s)} =$$

$$= 1 + C(s) P_m(s) + W_m(s) \Delta R(s) \cdot (1 + C(s) P_m(s)) =$$

$$= (1 + C(s) P_m(s)) (1 + W_m(s) \Delta R(s))$$

$$\Rightarrow 1 + C(s) P(s) = (1 + C(s) P_m(s)) (1 + W_m(s) \Delta R(s))$$

$$\frac{1 + C(s) P(s)}{1 + C(s) P_m(s)} = 1 + W_m(s) \Delta R(s)$$

RICORDA SUBITO CHE VALE:

$$1 + C(s) P(s) = \frac{P_{CH}(s)}{P_{AD}(s)}$$

$$1 + C(s) P_m(s) = \frac{P_{CH_m}(s)}{P_{AD_m}(s)}$$

$$\frac{P_{CH}(s)}{P_{AD}(s)} \cdot \frac{P_{AD_m}(s)}{P_{CH_m}(s)} = 1 + W_m(s) \Delta R(s)$$

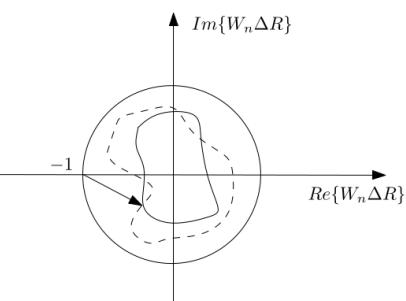
DATO CHE $|\Delta| \leq 1$

DOBBIA MO VERIFICARE CHE $P_{CH}(s)$ ABbia TUTTE RADICI A PARTE REALE NEGATIVA.

SE È VERA LA ② $\Rightarrow |W_m(s) \Delta R(s)| < 1 \quad \forall w$

→ ALLORA IL DIAGRAMMA NYQUIST DI $|W_m(s) \Delta R(s)|$ SARÀ CONTENUTO NELLA CIRCONFERENZA UNITARIA

QUALSIASI SIA IL VALORE DI Δ .



IL VETTORE $1 + W_m(s) \Delta R(s)$ QUINDI NON COMPIE ROTAZIONI ATTORNO AL SUO PUNTO. SI APPLICA LAZIORE. $\Rightarrow N=0$

SI PUÒ DIMOSTRARE:

DOVE E È IL NUMERO DI RADICI A PARTE REALE POSITIVA.

$$N = z_{AP} + z_{CH_m} - (z_{CH} + z_{AP_m})$$

$$\text{MA } z_{CH_m} = 0 \text{ PER LA } \textcircled{1} \Rightarrow z_{AP} - (z_{CH} + z_{AP_m}) = 0$$

ORA SI AGGIUNGE UNA IPOTESI "TECNICA" $\Rightarrow (z_{AP_m} = z_{AP}) \Rightarrow z_{CH} = 0$

QUESTA IPOTESI IMPONE CHE LE PERTURBAZIONI NON SIANO D'ENTITÀ TALE DA FAR OLTREPASSARE L'ASSE IMMAGINARIO AI POLI. SI $W(s)$.

RADICI A PARTE REALE NULLA

$$\frac{P_{CH}(s)}{P_{AP}(s)} \cdot \frac{P_{AP_m}(s)}{P_{CH_m}(s)} = 1 + W_m(s) \Delta R(s)$$

MA DOVE STANNO? \Rightarrow IN $P_{CH_m}(s)$. NO PER CA. $\textcircled{1}$

SE STANNO IN $P_{AP}(s)$. ALLORA SI DEVONO CANCELLARO CON $(P_{CH}(s) \cdot P_{AP_m}(s))$ A NUM.

MA CHI TRA $P_{CH}(s)$ E $P_{AP_m}(s)$ HA LE RADICI A PARTE REALE NULLA CHE SI CANCELLANO CON QUELLE DI $P_{AP}(s)$?

\Rightarrow SI ESTENDE L'IPOTESI TECNICA ALLE RADICI A PARTE REALE NULLA ($z_{AP_m} = z_{AP}$)

\Rightarrow QUI NEL SI TROVANO IN $P_{AP_m}(s)$



PRECISIONE ROBUSTA (STABILITÀ E PRECISIONE SI VERIFICANO INSIEME)

SI È VISTO CHE UN MODO PER CARATTERIZZARE LA PRECISIONE AB INGRESSI SINUSOIDALI SI IMPONE:

$$|S_m(j\omega) \cdot Q(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$$

MENTRE POCO FA Abbiamo visto un teorema che verifica la stabilità robusta; imponeva come seconda cond.:

$$|W_m(j\omega) R(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega$$

ESISTE IL SEGUENTE TH:

ESISTE UN CONTROLLORE $C(s)$ CHE GARANTISCE STABILITÀ ROBUSTA E PRECISIONE ROBUSTA. $\forall P(s) \in \mathcal{P}$

$$(\star) \quad |W_m(j\omega) R(j\omega)| + |S_m(j\omega) Q(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega$$

DIMOSTRAZIONE

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE SE VALE $(\star) \Rightarrow |S(j\omega) \cdot Q(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega$

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + CP_m(j\omega)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1 + CP_m(1 + \Delta R)} = \frac{1}{1 + CP_m + CP_m \Delta R \cdot \frac{1 + CP_m}{1 + CP_m}} = \frac{1}{1 + CP_m + W_m \Delta R (1 + CP_m)} = \frac{1}{(1 + CP_m)(1 + W_m \Delta R)}$$

$$= \frac{S_m}{1 + \Delta W_m R} = S$$

QUIASI LA CONSIERZIONE DEL TH. DIVENTA:

$$\left| \frac{s_m Q}{1 + \Delta w_m R} \right| < 1 \quad \forall \omega$$

RISCRIVIAMO ORA LA $(*)$. COSÌ $\Rightarrow |s_m Q| < 1 - |w_m R|$

MA: $|1 - \Delta w_m R - \Delta w_m R| = |1 + \Delta w_m R - \Delta w_m R| \leq |1 + \Delta w_m R| + |\Delta w_m R| \leq |1 + \Delta w_m R| + |w_m R|$

QUINDI:

$$1 - |w_m R| \leq |1 + \Delta w_m R| \Rightarrow |s_m Q| < 1 - |w_m R| \text{ DIVENTA } \rightsquigarrow |s_m Q| < |1 + \Delta w_m R|$$

 $\left| \frac{s_m Q}{1 + \Delta w_m R} \right| < 1$ ← DIVISO PER $|1 + \Delta w_m R|$

SISTEMA A TEMPO DISCRETO

TRASFORMATA ZETA

DATI UNA F. REALE. DI. VARIABILE K, SI. DEFINISCE. TRASFORMATTA ZETA. DI. f(k). LA. F2. COMPLESSA

F. DI. VARIABILE COMPLESSA. z:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}, \text{ CHE DEVE CONVERGERE PER ALMENO ALCUNI VALORI DI } z.$$

IMPULSO $f(k) = \delta(k)$ $F(z) = 1$

GRADINO $f(k) = 1(k)$ $F(z) = \frac{z}{(z-1)}$

RAMPÀ $f(k) = k$ $F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

SINUSOIDA $f(k) = \sin(\omega_0 k)$ $F(z) = \frac{\sin(\omega_0)}{z^2 - 2\cos(\omega_0)z + 1}$
 $f(k) = 0 \quad \forall k < 0$

ANALISI DEI SISTEMI A TD.

EQ. ALLE DIFF. $\sum_{i=0}^m a_i Y(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i U(k-i), \text{ con } m \leq n$

APPLICO LA TRASF. ZETA:

$$\begin{aligned} & a_0 Y(z) + a_1 Y(z) z^{-1} + \dots + a_m Y(z) z^{-m} = \\ & b_0 U(z) + b_1 U(z) z^{-1} + \dots + b_m U(z) z^{-m} \\ & \Delta Y(z) (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}) = U(z) (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) \\ & Y(z) (a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m) = U(z) (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m z^{m-m}) \end{aligned}$$

SI DEFINISCE F2. DI TRASFERIMENTO A TEMPO DISCRETO LA SEGUENTE F2:

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m z^{m-m}}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}$$

SI DEFINISCE TEMPO DI LATENZA IL g(z) G(z), OVVERO IL NUMERO DI PASSI DA ASPETTARE PER VEDERE IL PRIMO VALORE DELL'USCITA DIVERSO DA ZERO.

SE GLI M. POLI DI G(z) SONO TALI CHE: $|P_i| < 1 \quad \forall i \Rightarrow$ IL SISTEMA È STABILE BIBO.

INOLTRE $\lim_{k \rightarrow \infty} P_i^k = 0 \Rightarrow$ IL MONDO DI EVOLUZIONE P_i^k PUÒ ASSUMERSI ESTINTO PER $K_{\text{ass}} = (4 \div 5) K_2$

$$\hookrightarrow K_2 \geq -\frac{1}{\ln(P_i)}$$

PER RICAVARE $Y(K)$ · FACCIA MO L'ANTI TRASFORMATA, USANDO QUESTA ASSUNZIONE:

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{z}{(z-p)} \right\} = p^k \rightsquigarrow \text{PER UTILIZZARLA DOBBIANO SCOMPORRE } \frac{Y(z)}{z} \text{ IN FRATTI SEMPLICI.}$$

(HYP: $U(k) = I(k)$, $P_i \cdot \delta_i \cdot G(z)$ · REALI E SEMPLICI)

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{G(z)U(z)}{z} = \frac{G(z)}{z} \cdot \frac{z}{(z-L)} = \frac{G(z)}{(z-L)} = \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{(z-P_i)} + \frac{r_{m+1}}{(z-L)}$$

$$Y(z) = \sum_{i=1}^m r_i \frac{z}{(z-P_i)} + G(z) \frac{z}{(z-L)} \rightsquigarrow \text{UNA VOLTA CALCOLATI GLI } r_i \text{ POSSO APPLICARE LA (*) :}$$

SE VALGONO LE COND.

DI PRIMA.

$$\Rightarrow \lim_{K \rightarrow \infty} Y(K) = G(L)$$

$$Y(K) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ Y(z) \right\} = \sum_{i=1}^m r_i P_i^K + G(L) \cdot L^K$$

ANALISI IN FREQUENZA DELLO ZOH E SCELTA DI T

LA T.F. DELLO ZOH È:

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-st}}{s} \rightsquigarrow G_{ZOH}(j\omega) = \frac{1 - e^{-s\omega T}}{\omega} = \frac{e^{-s\omega T/2}}{\omega} \left(\frac{e^{s\omega T/2} - e^{-s\omega T/2}}{2s} \right) =$$

$$\rightsquigarrow \cdot \frac{T/2}{T/2} = T \frac{e^{-s\omega T/2}}{\omega T/2} \left(\frac{e^{s\omega T/2} - e^{-s\omega T/2}}{2s} \right) \rightsquigarrow \text{SIN}(\omega T/2)$$

$$= TS \text{SINC}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-s\omega T/2}$$

MODULO $|G_{ZOH}(s)| = T \left| \text{SINC}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right| = T \left| \text{SINC}\left(\frac{\pi \omega}{\omega_s}\right) \right|$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s} \rightarrow \text{PULSAZIONE} \text{ di CAMPIONAMENTO}$$

FASE $\angle G_{ZOH}(s) = -\frac{\omega T}{2} + \theta$

$\theta = 0 \quad \text{SE } \sin\left(\frac{\pi \omega}{\omega_s}\right) > 0$

$\theta = \pi \quad \text{SE } \sin\left(\frac{\pi \omega}{\omega_s}\right) < 0$

LA F.Z. DEL MODULO SI ANNULLA PER $\omega = k\omega_s$, CON K INTERO, OVVIERO PER LE PULSAZIONI MULTIPLE DELLA PULSAZIONE DI CAMPIONAMENTO.

MENTRE LA F.Z. DELLA FASE AVRA' DELLE DISCONTINUITA' DI π NEI PUNTI $\omega = k\omega_s$.

METODO 1

$$\omega_s = \alpha \omega_3 \quad \text{CON } \alpha \gg 1$$

SI HA CHE $\forall \omega \in [0, \omega_3] \Rightarrow \left| \text{SINC}\left(\frac{\pi \omega}{\omega_s}\right) \right| \approx 1 \Rightarrow |G_{ZOH}(s)| \approx T$

\Rightarrow QUINDI IN QUESTO INTERVALLO POSSIAMO APPROSSIMARE:

$$G_{ZOH}(s\omega) \approx T e^{-s\omega T/2}$$

METODO 2

INSICHIAMO CON $-\Delta\varphi$ IL MASSIMO DECREMENTO TOLERABILE, IN GRADI, DEL PULSINGE DI FASE $m\varphi$:

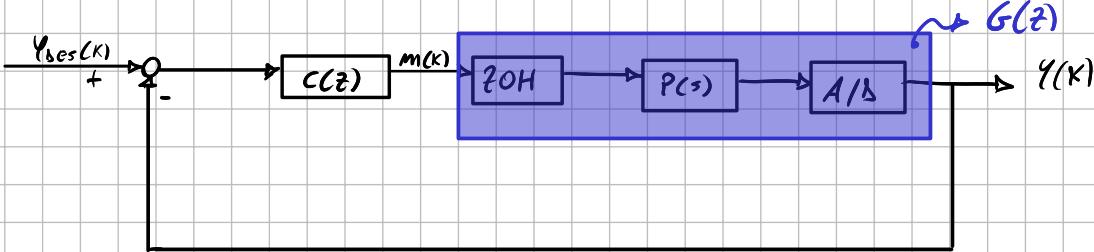
$$m\varphi - \Delta\varphi > 0$$

RICORDIAMO CHE: $\angle G_{ZOH}(s\omega_t) = -\omega_t \frac{T}{2} \rightsquigarrow$ ALLORA T DOVRÀ SOBBISSARE:

$$-\omega_t \frac{T}{2} \geq -\Delta\varphi \frac{\pi}{180}$$

$$T \leq \frac{2\pi}{180} \frac{\Delta\varphi}{\omega_t}$$

CONTROLLO A TEMPO DI RISPOSTA FINITO



SE $W(z)$ È STABILE BIBO LA RISPOSTA SI UN SEGNALE CANONICO $y_{des}(k)$ PUÒ CONVERGERE IN UN TEMPO FINITO.

CONSIDERIAMO IL GRADINO CAMPIOMATO $y_{des}(k) = l(k) \quad \forall k \geq 0$.

VOGLIAMO CAPIRE QUANDO $e(k) = y_{des}(k) - y(k) \rightarrow$ ASSUME UN VALORE COSTANTE ($e_0 \neq 0$) O NULLO ($e_0 = 0$) IN UN NUMERO FINITO DI PASSI.

$$\begin{aligned} \exists l: \forall k \geq l \Rightarrow e(k) = e_0 \Rightarrow E(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{l-1} e(k) z^{-k} + \sum_{k=l}^{\infty} e_0 z^{-k} + \sum_{k=0}^{l-1} e_0 z^{-k} - \sum_{k=0}^{l-1} e_0 z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} (e(k) - e_0) z^{-k} + \sum_{k=l}^{\infty} e_0 z^{-k} = \frac{Q(z)}{z^{l-1}} + e_0 \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{(z-l) Q(z) + e_0 z^l}{(z-1) z^{l-1}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow E(z) = Y_{des}(z) - Y(z) =$

$$= (1 - W(z)) Y_{des}(z) =$$

$$W_e(z) = \frac{(z-1) Q(z) + e_0 z^l}{z^l} \Leftarrow = W_e(z) \frac{z}{z-1}$$

• L'ERRORE VA A $e_0 \neq 0$ IN TEMPO FINITO SE E SOLO SE $W_e(z)$ HA TUTTI I POLE COINCIDENTI CON $z=0$

• L'ERRORE VA A $e_0 = 0$ IN TEMPO FINITO SE E SOLO SE $W_e(z)$ HA TUTTI I POLE IN $z=0$ E UNO ZERO IN $z=1$.

DALL'0 SCHEMA SI RICAVA CHE: $W(z) = \frac{C(z) G(z)}{1 + C(z) G(z)} \rightsquigarrow W_e(z) = 1 - W(z) = \frac{1}{1 - F(z)}$

SE SI RICHIESTE $e_0 = 0 \Rightarrow W_e(z) = \frac{(z-1) Q(z)}{z^l}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + F(z)} = \frac{(z-1) Q(z)}{z^l}$$

RISOLVO RISPETTO $C(z)$

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \left[\frac{z^l - (z-1) Q(z)}{(z-1) Q(z)} \right]$$

$Q(z)$ HA GRADO $l-1$ CHE MINIMIZZA IL GRADO DEL NUMERATORIO:

$$C(z) =$$

$$Q(z) = z^{l-1} + \dots + z + 1 \Rightarrow (z-1) Q(z) = z^l - 1 \quad \text{DEN}$$

$$z^l - (z-1) Q(z) = 1 \quad \text{NUM}$$

$$\Rightarrow C(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{1}{z^l - 1}$$

ORA LO SOSTITUISCO IN $W(z)$ E PONGO $W_{des}(z) = W(z)$ OTTENENDO:

$\Rightarrow W_{des}(z) = \frac{1}{z^l} \rightsquigarrow$ PER RENDERE IL CONTROLLO FISICAMENTE REALIZZABILE:

$$l_{\min} = m_G - m_H \Rightarrow C(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{1}{z^{(m_G - m_H)} - 1}$$