ACHILLE
CANNAVALE

APPUNTI
PROPAGAZIONE GUIDATA

2023

CIAO! QUESTI APPUNTI SONO FRUTTO DEL MIO STUDIO E DELLA MIA INTERPRETAZIONE, QUINDI POTREBBERO CONTENERE ERRORI, SVISTE O COSE MIGLIORABILI. BUONO STUDIO📚✍️

Propagazione Guidata

Riassunto da

Achille Cannavale

Indice

Capitolo 1

Linee di trasmissione

1 Introduzione

In termini generici possiamo dire che una **linea di trasmissione** è il supporto fisico che permette di collegare due punti.

Alcuni esempi possono essere:

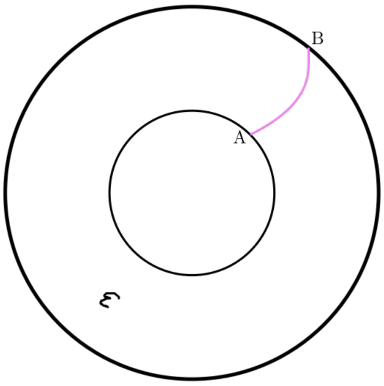
- **Cavo Coassiale**
- **Doppino Telefonico**
- **Fibra Ottica**
- **Microstriscia**
- **Guida d'Onda Metallica**

Tutte queste strutture condividono una **simmetria traslazionale**, nel senso che si individua una **direzione longitudinale** e **ortogonale** a tale direzione, le sezioni trasversali tutte uguali tra di loro.

Il segnale si propaga nella direzione longitudinale su distanze che sono generalmente **grandi rispetto alle lunghezze d'onda** associate al segnale, mentre la sezione trasversale ha sempre la stessa dimensione indipendentemente da dove essa venga misurata, **spesso piccola rispetto alla lunghezza d'onda**, e possiamo chiederci se sia possibile introdurre una **differenza di potenziale** e una **corrente** con caratteristiche analoghe alle tensioni e correnti a bassa frequenza, consentendoci così di descrivere la propagazione con riferimento a sole quantità scalari.

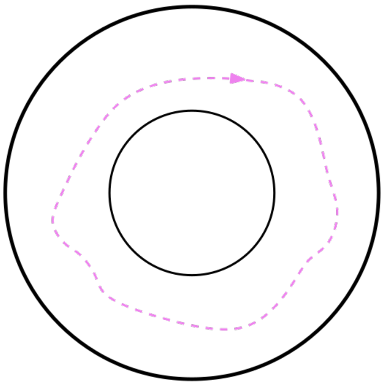
1.1 Tensione

Prendiamo ad esempio una struttura guidante costituita da due **conduttori elettrici paralleli** separati da un **dielettrico lineare omogeneo** e **non dispersivo**.
Affinché l'integrale curvilineo che va da A a B lungo un qualsiasi percorso, giacente in una sezione trasversale, dipenda dai soli estremi di integrazione (campo conservativo), si deve avere che:



$$\int_{C(A,B)} \bar{E}\cdot\hat{i}_l\, dl = \varphi(A) - \varphi(B) = v(z,t)$$

Quindi deve accadere che per ogni curva chiusa appartenente alla sezione trasversa valga:



$$\oint_{\partial S} \bar{E}\cdot\hat{i}_l\, dl = 0$$

Da **Maxwell** sappiamo che:

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} \qquad \text{(Faraday-Lenz)}$$

Che integreremo sulla superficie S:

$$\int_S \bar{\nabla}\times\bar{E}\cdot\hat{i}_z\, dS = \underbrace{\oint_{\partial S} \bar{E}\cdot\hat{i}_l\, dl}_{0} = -\frac{d}{dt}\int_s \mu\bar{H}\cdot\hat{i}_z\, dS$$

Quindi ne consegue che $\boxed{\bar{H}\cdot\hat{i}_z = \bar{H}_z = 0\ \forall\ S\ trasversa}$

1.2 Corrente

Analogamente a quanto fatto prima per la tensione, per introdurre una **corrente** si deve avere:

$$\oint_{\partial S} \bar{H} \cdot \bar{l}\ dl = i(z,t)$$

Da **Maxwell** sappiamo che:

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{J} \qquad \text{(Ampere-Maxwell)}$$

Dove $\bar{J}$ è la **corrente che circola sui conduttori**.
Integriamola sulla superficie S:

$$\int_S \bar{\nabla} \times \bar{H} \cdot \hat{i}_z\ dS = \oint_{\partial S} \bar{H} \cdot \bar{l}\ dl =$$
$$= \epsilon \frac{d}{dt} \int_s \bar{E} \cdot \hat{i}_z\ dS + \int_s \bar{J}\ dS = \underbrace{\epsilon \frac{d}{dt} \int_s \bar{E} \cdot \hat{i}_z\ dS}_{\textbf{deve fare 0}} + i(z,t)$$

Quindi vuol dire che:

$$\boxed{\bar{E} \cdot \hat{i}_z = E_z = 0 \quad \forall\ S\ trasversa}$$

1.3 Campo elettrico e magnetico

Definiamo ora il **Nabla Trasverso**:

$$\bar{\nabla}_t = \nabla - \frac{\partial}{\partial z} \cdot \hat{i}_z$$

Che ci porta queste equazioni:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t = 0 & \bar{\nabla}_t \times \bar{H}_t = J_z \hat{i}_z \\ \bar{\nabla}_t \cdot \bar{E}_t = \frac{\rho}{\epsilon} & \bar{\nabla}_t \cdot \bar{H}_t = 0 \end{cases}$$

Quindi sostituiamo nelle Equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E} = \left(\bar{\nabla}_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{i}_z \right) \times \bar{E}_t = -\mu \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial t} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H} = \left(\bar{\nabla}_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{i}_z \right) \times \bar{H}_t = \epsilon \frac{\partial \bar{E}_t}{\partial t} \end{cases}$$

[1] Proietto ora nel **Piano Longitudinale**:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t = 0 \\ \bar{\nabla}_t \times \bar{H}_t = 0 \end{cases} \tag{*}$$

Queste equazioni stabiliscono l'**andamento dei campi rispetto alle coordinate del piano trasverso** in qualsiasi sezione danno lo stesso andamento a meno di un'**ampiezza moltiplicativa**, che ci viene data, proiettando le **Equazioni di Maxwell ridefinite** nel **Piano trasverso**:

$$\begin{cases} \hat{i}_z \times \dfrac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} = -\mu \dfrac{\partial \bar{H}_t}{\partial t} \\ \hat{i}_z \times \dfrac{\partial \bar{H}_t}{\partial z} = \epsilon \dfrac{\partial \bar{E}_t}{\partial t} \end{cases} \tag{o}$$

Quindi se valgono le (*) possiamo valutare indipendentemente il **Campo Elettrico** e il **Campo Magnetico**:
Integrando $\bar{E}_t$ tra A e B otteniamo:

$$v(z,t) = \int_A^B \bar{E}_t(x,y,z,t) \cdot \hat{i}_l \, dl$$

Poniamo:

$$\bar{E}_t(x,y,z) = v(z,t) \cdot \bar{e}_t(x,y)$$

dove:

$$\int_A^B \bar{e}_t(x,y,z,t) \cdot \hat{i}_l \, dl = 1$$

Un discorso analogo lo faremo con $\bar{H}_t$:

$$\oint_{\partial S} \bar{H}_t(x,y,z,t) \cdot \hat{i}_l \, dl = i(z,t)$$

$$\bar{H}_t(x,y,z,t) = i(z,t) \cdot \bar{h}_t(x,y)$$

dove:

$$\oint_{\partial S} \bar{h}_t(x,y) \cdot \hat{i}_l dl = 1$$

[1] Manca J perchè circola sui conduttori verso z

Sostituendo tutto nelle (o) otteniamo:

$$\begin{cases} \hat{i}_z \times \bar{e}_t \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -\mu \bar{h}_t \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \hat{i}_z \times \bar{h}_t \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial z} = \epsilon \bar{e}_t \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Che riscriviamo come:

$$\begin{cases} \hat{i}_z \times \bar{e}_t \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -\mu \bar{h}_t \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \bar{h}_t \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -\epsilon \hat{i}_z \times \bar{e}_t \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Poniamo:

$$\hat{i}_z \times \bar{e}_t = -\mu \bar{h}_t \frac{\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}}{\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}} = A \cdot \bar{h}_t$$

Quindi le due equazioni diventano:

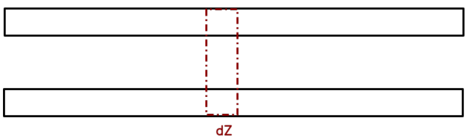
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -\dfrac{\mu}{A} \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -\epsilon A \dfrac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases}} \qquad \text{(x)}$$

dove:

- $-\frac{\mu}{A}$ è un'**induttanza**
- $-\epsilon A$ è una **capacità**

2 Caso senza Perdite

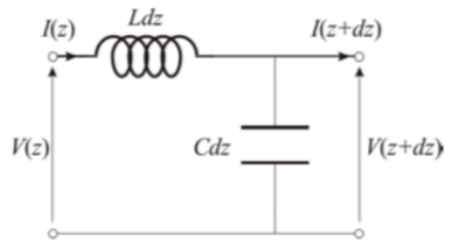
Consideriamo ora una "fettina" **dZ** della linea e valutiamo l'**Energia** che vi si **accumula**:



$$W_e = dz \cdot \int_S \frac{1}{2} \epsilon |\bar{E}_t|^2 dS = \frac{1}{2} dz \epsilon (v(z,t))^2 \int_{s_t} |\bar{e}_t|^2 dS =$$
$$= \frac{1}{2} C v^2 dz \implies C = \epsilon \int_{s_t} |\bar{e}_t|^2 dS$$

$$W_m = dz \cdot \int_S \frac{1}{2}\mu|\bar{H}_t|^2 dS = \frac{1}{2}dz\mu(i(z,t))^2 \int_{s_t} |\bar{h}_t|^2 dS =$$
$$= \frac{1}{2}Li^2 dz \implies L = \mu \int_{s_t} |\bar{h}_t|^2 dS$$

Possiamo quindi costruire un **circuito equivalente** a questa "fettina", permettendoci di individuare facilmente le equazioni che legano **tensioni** e **correnti**:



Analizziamo la **maglia**:

$$\begin{cases} V(z) = j\omega L dz I(z) + V(z+dz) \\ V(z+dz) - V(z) = -j\omega L dz I(z) \end{cases}$$

Divido per dz:

$$\frac{V(z+dz)-V(z)}{dz} \longrightarrow dz->0 \longrightarrow \frac{dV}{dz} = -j\omega L I$$

Analogamente analizziamo il **nodo**:

$$\begin{cases} I(z) = I(z+dz) + j\omega C dz V(z+dz) \\ I(z+dz) - I(z) = -j\omega C dz V(z+dz) \end{cases}$$

Divido per dz:

$$\frac{I(z+dz)-I(z)}{dz} \longrightarrow dz->0 \longrightarrow \frac{dI}{dz} = -j\omega C V$$

Confrontiamo le (x) e le equazioni appena ottenute e portiamo tutto nel dominio dei **Fasori**:

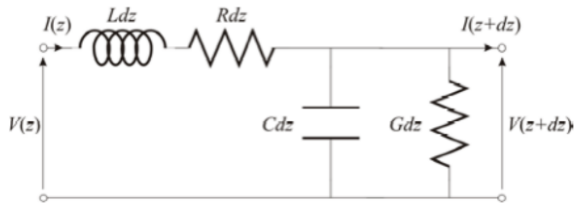
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dV(z)}{dz} = -j\omega \dfrac{\mu}{A} I(z) \\ \dfrac{dI(z)}{dz} = -j\omega \epsilon A V(z) \end{cases}} \qquad \text{(Equazioni delle Linee)}$$

Dove:

$$LC = \epsilon\mu$$

3 Caso con Perdite

Analizzando il caso in cui sono presenti **Perdite**, il circuito diventa:



Che possiamo sintetizzare in queste equazioni:

$$\begin{cases} Z_{RL}dZ = Rdz + j\omega Ldz \\ Y_{GC}dZ = Gdz + j\omega Cdz \end{cases}$$

Analizzando la **maglia** otteniamo:

$$V(z) = Z_{RL}dZI(z) + V(z+dZ)$$

Che riscriviamo in questo modo per far uscire un **rapporto incrementale**:

$$V(z+dZ) - V(z) = -Z_{RL}dzI(z)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{dV}{dz} = -Z_{RL}I(Z)$$

Mentre analizzando il **nodo** otteniamo:

$$I(z+dZ) - I(z) = -Y_{GC}dzV(z)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{dI}{dz} = -Y_{GC}V(Z)$$

Per rendere queste equazioni simili al caso **Senza Perdite** si pone:

- $L_{EQ} = L - j\frac{R}{\omega}$
- $C_{EQ} = C - j\frac{G}{\omega}$

Con cui otteniamo:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dV(z)}{dz} = -j\omega L_{EQ}I(z) \\ \dfrac{dI(z)}{dz} = -j\omega C_{EQ}V(z) \end{cases}} \qquad \text{(Equazioni delle Linee)}$$

Queste equazioni sono analoghe a quelle che legano campo elettrico e magnetico per un'**Onda Piana** che si propaga nella direzione z, quindi hanno delle **soluzioni analoghe**:

$$I = \frac{1}{-j\omega L}\frac{dV(z)}{dz}$$

Che se sostituiamo nella **seconda equazione delle Linee** ci restituisce:

$$\boxed{\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -\omega^2 LCV} \qquad \text{(Equazione di Helmotz)}$$

Che è un'**equazione Differenziale** del **Secondo ordine** e che quindi ha per soluzione:

$$\begin{cases} V^+e^{-jkz} \\ V^-e^{jkz} \end{cases}, \; con \; k = \omega\sqrt{LC}$$

$$V(z) = V^+e^{-jkz} + V^-e^{jkz}$$

Con $V^+ = |V^+|e^{j\varphi^+}$ e $V^- = |V^-|e^{j\varphi^-}$ **Complesse**

Nel **dominio del Tempo** le due soluzioni diventano:

$$\begin{aligned} v^+(z,t) &= Re\left\{V^+e^{-jkz}e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{|V^+|e^{j\varphi^+}e^{-jkz}e^{j\omega t}\right\} = \\ &= |V^+|cos\left(\omega\left(t+\frac{\varphi^+}{\omega}\right)-kz\right) = \\ &= |V^+|cos\left(\omega\left(t-t_0^+\right)-kz\right) = \\ &= |V^+|cos(k(vt-vt_0^+-z)) \end{aligned}$$

Dove:

- $t_0^+ = -\frac{\varphi^+}{\omega}$
- $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Analogamente per la **soluzione negativa** faremo:

$$
\begin{aligned}
v^{-}(z,t) = Re\left\{V^{-}e^{jkz}e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{|V^{-}|e^{j\varphi^{+}}e^{jkz}e^{j\omega t}\right\} = \\
= |V^{-}|cos\left(\omega\left(t+\frac{\varphi^{-}}{\omega}\right)+kz\right) = \\
= |V^{-}|cos\left(\omega\left(t-t_0^{-}\right)+kz\right) = \\
= |V^{-}|cos(k(vt-vt_0^{-}+z))
\end{aligned}
$$

Dove:

- $t_0^{-} = -\frac{\varphi^{-}}{\omega}$
- $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Possiamo fare un procedimento del tutto analogo con l'**equazione di Helmotz della corrente**, per questo capiamo che tensione e corrente sono soluzioni del **sistema omogeneo di equazioni differenziali**.

Cominciamo quindi a sostituire la tensione nella prima equazione:

$$
\frac{dV}{dz} = -jkV^{+}e^{-jkz} = -j\omega LI
$$

$$
\Longrightarrow I = \underbrace{\underbrace{\frac{k}{\omega L}}_{\frac{1}{Z_0}} V^{+}e^{-jkz}}_{I^{+}}
$$

Questo vuol dire che se è presente un'**onda progressiva di tensione** $\left(V^{+}e^{-jkz}\right)$ è anche presente un'**onda progressiva di corrente** $\left(I^{+}e^{-jkz}\right)$.[2]

[2]Un discorso analogo vale per l'onda di tensione che va nel verso opposto.

Capitolo 2

V e I, Trasporto di Impedenza, Coefficiente di Riflessione, ROS

1 Soluzione dell'Equazione delle Linee

1.1 Soluzione per Onde Viaggianti

Abbiamo quindi ricavato nel capitolo precedente le **Equazioni delle Linee**, dette anche **Soluzioni per Onde Viaggianti**:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dV(z)}{dz} = -j\omega L I(z) \\ \dfrac{dI(z)}{dz} = -j\omega C V(z) \end{cases}} \qquad \text{(Onde Viaggianti)}$$

1.2 Soluzione per Onde Stazionarie

Un'altra possibile soluzione è costituita dalla combinazione lineare di due **funzioni circolari indipendenti**:

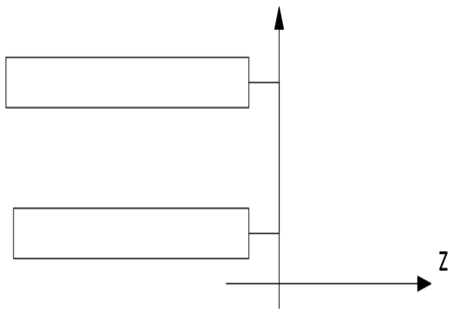
$$\boxed{\begin{cases} V(z) = A\ cos(kz) + B\ sin(kz) \\ I(z) = C\ cos(kz) + D\ sin(kz) \end{cases}} \qquad \text{(Onde Stazionarie)}$$

Facilmente è possibile dimostrare che:

- $A = V(0)$
- $C = I(0)$
- $B = V(\frac{\lambda}{4}) = -jZ_0 I(0)$
- $D = I(\frac{\lambda}{4}) = -j\frac{V(0)}{Z_0}$

(Per ricavarsi B sostituire V(z) nell'equazione delle linee e valutare in 0, analogo discorso per D).

Poniamoci ora nella seguente situazione:



$$V(z) = -jI(0)Z_0 sin(kz)$$

E cerchiamo di disegnare il **modulo** di $|V(z)|$ cercando di capire per prima cosa dove ha gli **zeri**, ovvero quando si annulla $sin(kz)$:

$$kz = n\pi$$

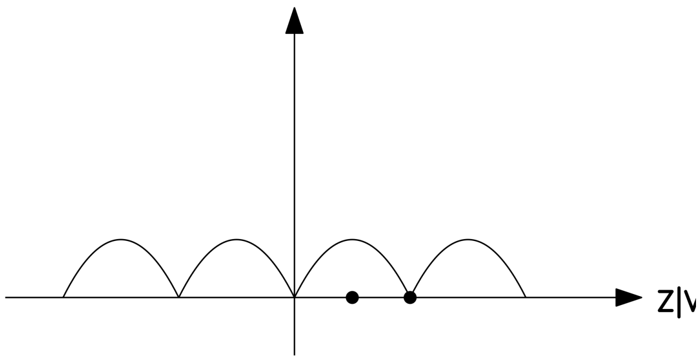
Ricordando che:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \; e \; che \; \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\Longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} z = n\pi \Longrightarrow z = n \frac{\lambda}{2}$$

Mentre assumerà valori massimi per:

$$z = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$$

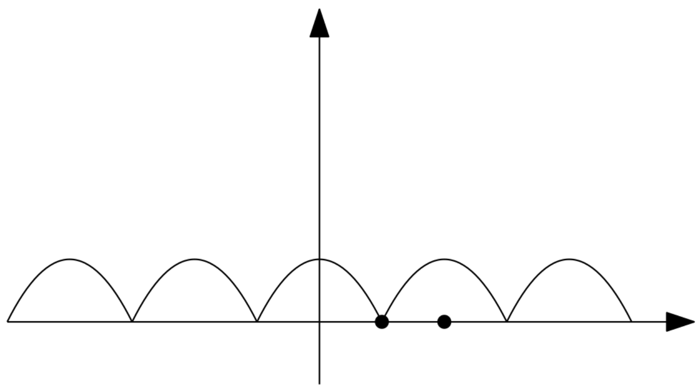


Analizziamo analogamente la corrente:

$$I(z) = I(0)cos(kz)$$

Il coseno si annulla per:

$$kz = \frac{\pi}{2} + n\pi \Longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} z = \frac{\pi}{2} + n\pi \Longrightarrow z = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$$

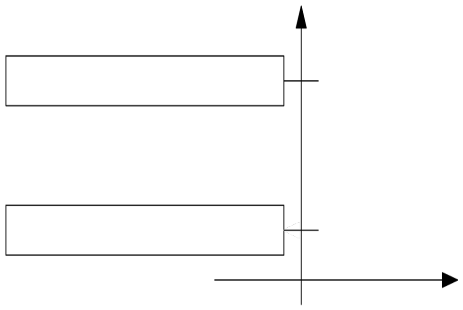


2 Trasporto dell'Impedenza

Definiamo ora l'**impedenza** associata alla generica ascissa z dalla linea come:

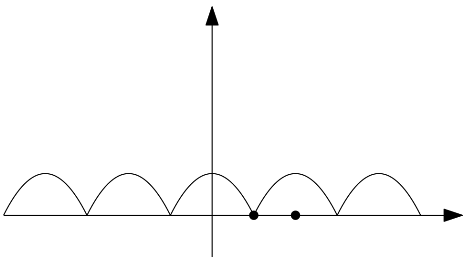
$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{-j\cancel{I(0)}Z_0 sin(kz)}{\cancel{I(0)}cos(kz)} = -jZ_0\ tan(kz)$$

Analizziamo ora il seguente esempio di una linea chiusa su un **aperto**:

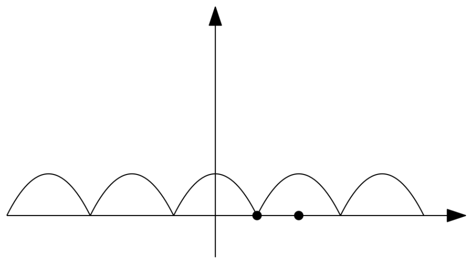


$$\begin{cases} V(z) = V(0)cos(kz) \\ I(z) = -j\dfrac{V(0)}{Z_0}sin(kz) \end{cases}$$

In questo caso avremo i grafici invertiti:



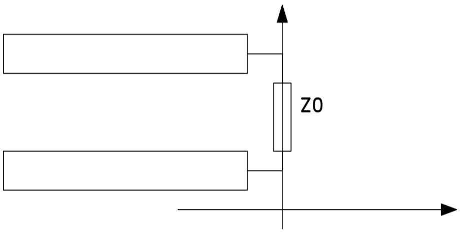
(a) $|V(z)|$



(b) $|I(z)|$

2.1 Caso Carico uguale a Impedenza della Linea

Poniamoci nella seguente situazione:



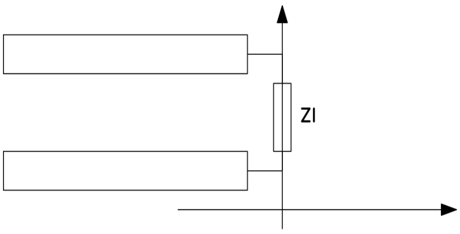
$$\begin{cases} V(z) = V(0)cos(kz) - jZ_0 I(0)sin(kz) \\ I(z) = I(0)cos(kz) - j\dfrac{V(0)}{Z_0}sin(kz) \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{V(0)}{I(0)} \implies V(0) = Z_0 I(0)$$

Quindi sostituendo otteniamo:

$$\begin{cases} V(z) &= Z_0 I(0)cos(kz) - jZ_0 I(0)sin(kz) \\ &= Z_0 I(0)(cos(kz) - jsin(kz)) = Z_0 I(0)e^{-jkz} \\ I(z) &= I(0)cos(kz) - jI(0)sin(kz) = I(0)e^{-jkz} \end{cases}$$

2.2 Caso Impedenza Generica



$$\begin{cases} V(z) = Z_l I(0)cos(kz) - jZ_0 I(0)sin(kz) \\ I(z) = I(0)cos(kz) - j\dfrac{Z_l}{Z_0}I(0)sin(kz) \end{cases}$$

Ora calcoliamo l'**impedenza** sulla linea:

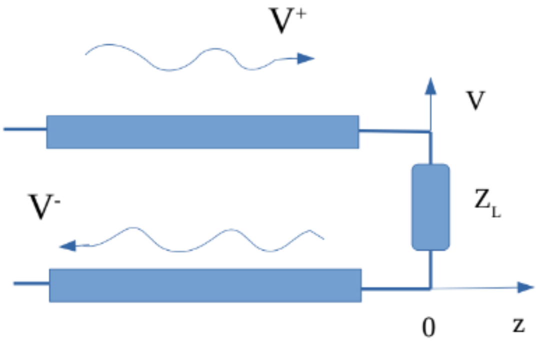
$$\begin{aligned} Z(z) = &\frac{Z_l \cancel{I(0)}cos(kz) - jZ_0\cancel{I(0)}sin(kz)}{\cancel{I(0)}cos(kz) - j\frac{Z_l}{Z_0}\cancel{I(0)}sin(kz)} = \\ &= Z_0\frac{Z_l cos(kz) - jZ_0 sin(kz)}{Z_0 cos(kz) - jZ_l sin(kz)} = \\ &\text{raccolgo sopra e sotto cos(kz)} \\ &= Z_0\frac{Z_l - jZ_0 tan(kz)}{Z_0 - jZ_l tan(kz)} = Z_0\frac{Z_l - jZ_0 tan(l)}{Z_0 - jZ_l tan(l)} \end{aligned}$$

Quindi definiamo Formula del Trasporto di Impedenza:

$$\boxed{Z(z) = Z_0\frac{Z_l - jZ_0 tan(kz)}{Z_0 - jZ_l tan(kz)} = Z_0\frac{Z_l - jZ_0 tan(l)}{Z_0 - jZ_l tan(l)}}$$

3 Coefficiente di Riflessione

Consideriamo nuovamente questo caso:



Scriviamo la tensione sottoforma di **onde viaggianti**:

$$V(z) = V^{+}e^{-jkz} + V^{-}e^{jkz} =$$
$$= V^{+}e^{-jkz}[1+\Gamma(z)]$$

Dove:

$$\Gamma(z) = \frac{V^{-}}{V^{+}}e^{2jkz} = \Gamma(0)e^{2jkz}$$

Discorso analogo vale per la corrente:

$$I(z) = \frac{V^{+}}{Z_0}e^{-jkz}[1-\Gamma(z)]$$

Mentre:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}$$
$$Z(0) = \frac{V(0)}{I(0)} = Z_0\frac{1+\Gamma(0)}{1-\Gamma(0)}$$

Possiamo inoltre definire:

$$\Gamma(0) = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}$$

3.1 Caratteristiche del Coefficiente di Riflessione

Lungo una linea **senza perdite** abbiamo che:

$$\Gamma(z) = \frac{V^{-}}{V^{+}}e^{2jkz} = \Gamma(0)e^{2jkz}$$

Allora se facciamo il **modulo**:

$$|\Gamma(z)| = |\Gamma(0)e^{2jkz}| = |\Gamma(0)||e^{2jkz}| = |\Gamma(0)|$$

Vuol dire che il **modulo del Coefficiente di Riflessione non varia lungo una linea uniforme**.

Ora scriviamo:

$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} = \frac{R_l + jX_l - Z_0}{R_l + jX_l + Z_0}$$

Facciamo il modulo quadro:

$$|\Gamma_l|^2 = \frac{(R_l - Z_0)^2 + X_l^2}{(R_l + Z_0)^2 + X_l^2} \begin{cases} = 0 \leftrightarrow Z_l = Z_0 \\ = 1 \leftrightarrow Z_l = jX_l \\ < 1\, altrimenti \end{cases}$$

4 Rapporto d'Onda Stazionario

Si definisce il **Rapporto d'Onda Stazionario** (ROS) lungo una linea omogenea il rapporto:

$$\boxed{ROS = \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}}}$$

Possiamo metterlo in relazione con il modulo del **Coefficiente di Riflessione**:

$$V(z) = V^+e^{-jkz} + V^-e^{jkz} = V^+e^{-jkz}\left(1 + \Gamma(0)e^{2jkz}\right)$$

$$|V(z)| = |V^+e^{-jkz} + V^-e^{jkz}| = |V^+e^{-jkz}|\,|\left(1 + \Gamma(0)e^{2jkz}\right)| =$$
$$= |V^+|\,|\left(1 + \Gamma(0)e^{2jkz}\right)|$$

Quindi il ROS lo scriveremo come:

$$ROS = \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}} = \frac{(\cancel{|V^+|}\,|\left(1 + \Gamma(0)e^{2jkz}\right)|)_{max}}{(\cancel{|V^+|}\,|\left(1 + \Gamma(0)e^{2jkz}\right)|)_{min}} =$$
$$= \frac{|\left(1 + \Gamma(0)e^{2jkz}\right)|_{max}}{|\left(1 + \Gamma(0)e^{2jkz}\right)|_{min}}$$

Possiamo riscrivere:

$$\Gamma(0) = |\Gamma(0)|e^{j\Phi_0}$$

Quindi:

$$\Gamma(z) = \Gamma(0)e^{2jkz} = |\Gamma(0)|e^{j\Phi_0}e^{2jkz} = |\Gamma(0)|e^{j(2jkz+\Phi_0)}$$

Quindi $\Gamma(z)$ ha:

- $|\Gamma(z)| = |\Gamma(0)|$
- $ARG(\Gamma(z)) = (2kz + \Phi_0)$

Inoltre notiamo che $\Gamma(z)$ è **periodica**:

$$2kz = 2\pi \implies 2\,\frac{2\pi}{\lambda}z = 2\pi \implies z = \frac{\lambda}{2}$$

Quindi il numeratore del ROS è massimo quando:

$$2kz + \Phi_0 = 2n\pi$$

Possiamo allora definire una serie di ascisse z_n in corrispondenza delle quali la **tensione è massima**:

$$z_n = \frac{n\pi}{k} - \frac{\Phi_0}{2k} = n\,\frac{\lambda}{2} - \frac{\Phi_0}{2\pi}\frac{\lambda}{2} = \left(n - \frac{\Phi_0}{2\pi}\right)\frac{\lambda}{2}$$

$$\begin{aligned}|V|_{max} &= |V^+|\ |1 + |\Gamma(0)e^{j(2kz_n+\Phi_0)}| = \\ &= |V^+|\ (1 + |\Gamma(0)|) = |V^+|\ (1 + |\Gamma(z)|)\end{aligned}$$

Un discorso analogo può essere fatto per minimizzare il denominatore del ROS:

$$2kz + \Phi_0 = \pi + 2n\pi = (2n+1)\pi$$

$$z'_n = \frac{n\pi}{k} + \frac{\pi}{2k} - \frac{\Phi_0}{2k} = n\,\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\Phi_0}{2\pi}\frac{\lambda}{2} = \left(n + \frac{1}{2} - \frac{\Phi_0}{2\pi}\right)\frac{\lambda}{2}$$

$$\begin{aligned}|V|_{min} &= |V^+|\ |1 + |\Gamma(0)e^{j(2kz'_n+\Phi_0)}| = \\ &= |V^+|\ (1 - |\Gamma(0)|) = |V^+|\ (1 - |\Gamma(z)|)\end{aligned}$$

Quindi in conclusione:

$$\boxed{ROS = \frac{1 + |\Gamma(z)|}{1 - |\Gamma(z)|}}$$

Quindi al variare del carico Z_l il ROS varia per:

$$1 \leq ROS \leq \infty$$

In particolare:

- $ROS = 1$ se $\Gamma = 0$ ovvero se $Z_l = Z_0$
- $ROS = \infty$ se $|\Gamma| = 1$ ovvero se $Z_l = jX_l$

Calcoliamo ora l'impedenza in z_n:

$$Z(z_n) = \frac{V(z_n)}{I(z_n)} = Z_0 \frac{\cancel{V^+}(1 + |\Gamma|)}{\cancel{V^+}(1 - |\Gamma|)} = Z_0\ ROS$$

Facciamo un analogo calcolo per z'_n:

$$Z(z'_n) = \frac{V(z'_n)}{I(z'_n)} = Z_0 \frac{\cancel{V^+}(1 - |\Gamma|)}{\cancel{V^+}(1 + |\Gamma|)} = \frac{Z_0}{ROS}$$

Quindi $|Z|$ assume valori:

$$\frac{Z_0}{ROS} \leq |Z(z)| \leq Z_0\ ROS$$

Ora definiamo la parte reale dell'impedenza lungo la linea come:

$$R(z) = Re\{Z(z)\} = Z_0 Re\left\{\frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}\right\}$$

$$\begin{aligned} Re\left\{\frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}\right\} &= Re\left\{\frac{(1 + \Gamma(z))\,(1 - \Gamma^*(z))}{|1 - \Gamma(z)|^2}\right\} = \\ &= Re\left\{\frac{1 - |\Gamma(z)|^2 + 2jIm\{\Gamma(z)\}}{|1 - \Gamma(z)|^2}\right\} = \frac{1 - |\Gamma(z)|^2}{|1 - \Gamma(z)|^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$R(z) = Z_0 \frac{1 - |\Gamma(z)|^2}{|1 - \Gamma(z)|^2}$$

Dove $|\Gamma(z)|^2$ è costante per qualsiasi z, quindi varierà solo il suo denominatore:

$$Z_0 \frac{1 - |\Gamma(z)|^2}{[1 + |\Gamma(z)|]^2} \leq R(z) \leq Z_0 \frac{1 + |\Gamma(z)|^2}{[1 - |\Gamma(z)|]^2}$$

Ovvero

$$\frac{Z_0}{ROS} \leq R(z) \leq Z_0 ROS$$

Capitolo 3

Potenza lungo una Linea senza Perdite

1 Linea indefinita

Lungo questa **linea senza perdite** si propaga la sola onda:

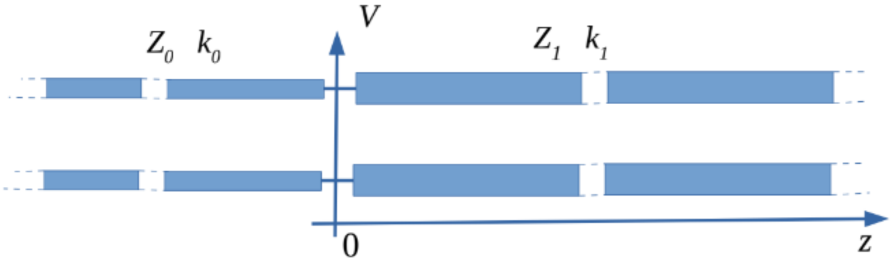
$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-jkz} \\ I(z) = \dfrac{V^+}{Z_0} e^{-jkz} \end{cases}$$

Valutiamo ora la potenza su un'ascissa generica:

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} V^+ e^{-jkz} \frac{V^{+*}}{Z_0} e^{jkz} = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0}$$

2 Due Linee Indefinite

Consideriamo ora il seguente schema:



$$\begin{cases} V_0(z) = V_0^+ e^{-jk_0z} + V_0^- e^{jk_0z} = V_0^+ e^{-jk_0z} + V_0^+ \Gamma(0) e^{jk_0z} \\ I_0(z) = \dfrac{V_0^+}{Z_0} e^{-jk_0z} - \dfrac{V_0^-}{Z_0} e^{jk_0z} = \dfrac{V_0^+}{Z_0} e^{-jk_0z} - \dfrac{V_0^+}{Z_0} \Gamma(0) e^{jk_0z} \end{cases} \quad \text{(Prima Linea)}$$

Dove:

$$\Gamma(0) = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \begin{cases} Positivo\ se\ Z_1 > Z_0 \\ Negativo\ se\ Z_1 < Z_0 \end{cases}$$

Mentre nella **seconda linea**:

$$\begin{cases} V_1(z) = V_1^+ e^{-jk_1z} \\ I_1(z) = \dfrac{V_1^+}{Z_1} e^{-jk_1z} \end{cases} \qquad \text{(Seconda Linea)}$$

Per la **Continuità della Tensione** possiamo dire che:

$$V_0(0) = V_1(0)$$

Quindi:

$$V_0^+ + V_0^- = V_1^+$$

Possiamo quindi riscrivere V_1^+ come:

$$V_1^+ = V_0^+(1 + \Gamma(0)) = V_0^+ \left(1 + \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}\right) = V_0^+ \left(\frac{2\ Z_1}{Z_1 + Z_0}\right)$$

La **Potenza della seconda linea** è:

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \frac{1}{2} V_1(z) I_1^*(z) = \frac{1}{2} V_1^+ e^{-jk_1z} \frac{V_1^*}{Z_1} e^{jk_1z} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_1^+|^2}{Z_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\ Z_1}{Z_1 + Z_0}\right)^2 \frac{|V_0^+|^2}{Z_1} = \\ &= \frac{2\ Z_1}{(Z_1 + Z_0)^2} |V_0^+|^2 \end{aligned}$$

Mentre la **Potenza nella prima linea** è:

$$P_0(z) = \frac{1}{2} V_0(z) I_0^*(z) = \frac{1}{2}\left(V_0^+ e^{-jk_0 z} + V_0^+ \Gamma(0) e^{jk_0 z}\right)$$
$$\left(\frac{V_0^+}{Z_0} e^{-jk_0 z} - \frac{V_0^+}{Z_0}\Gamma(0) e^{jk_0 z}\right)^* =$$
$$= \frac{1}{2}\left(V_0^+ e^{-jk_0 z} + V_0^+ \Gamma(0) e^{jk_0 z}\right)\left(\frac{V_0^{+*}}{Z_0} e^{jk_0 z} - \frac{V_0^{+*}}{Z_0}\Gamma(0) e^{-jk_0 z}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0} - \Gamma(0)^2 \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0} + \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\Gamma(0) e^{2jk_0 z} -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\Gamma(0) e^{-2jk_0 z}$$

Quindi:[1]

$$P_0(z) = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0} - \Gamma(0)^2 \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0} + j\frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\Gamma(0) sin(2jk_0 z)$$

Quindi la Potenza nella sezione generica z è costituita da una **Potenza Attiva** indipendente da z:

$$Re\{P_0(z)\} = \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0} - \Gamma(0)^2 \frac{1}{2}\frac{|V_0^+|^2}{Z_0} \qquad \text{(Potenza Attiva)}$$

E da una **Potenza Reattiva**:

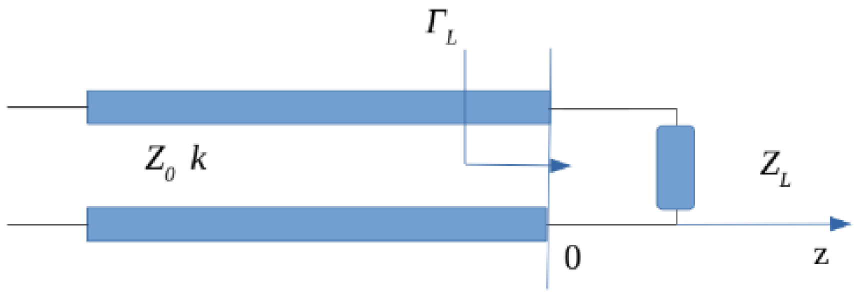
$$Im\{P_0(z)\} = \frac{|V_0^+|^2}{Z_0}\Gamma(0) sin(2jk_0 z) \qquad \text{(Potenza Reattiva)}$$

Questa potenza si **annulla** per $z = 0$, cioè se si calcola proprio sul **carico**, essendo resistivo, all'aumentare di z aumenta anche il **modulo della potenza reattiva**, raggiungendo il suo **massimo** in $z = -\frac{\lambda}{8}$ per poi diminuire ed **annullarsi** in $z = -\frac{\lambda}{4}$.
(ripetendosi con periodo $\frac{\lambda}{2}$)

[1] $\frac{1}{2}e^a - \frac{1}{2}e^{-a} = jsin(a)$

3 Linea con Carico

Prendiamo ora il seguente caso:



Dove avremo i seguenti andamenti di tensione e corrente lungo la linea:

$$\begin{cases} V(z) = V^+e^{-jkz}V^-e^{jkz} = V^+e^{-jkz} + V^+\Gamma(0)e^{jkz} = \\ \quad = V^+e^{-jkz} + V^+|\Gamma(0)|e^{j(kz+\Phi_0)} \\ I(z) = \dfrac{V^+}{Z_0} + e^{-jkz} - \dfrac{V^-}{Z_0}e^{jkz} = \dfrac{V^+}{Z_0}e^{-jkz} - \dfrac{V^+}{Z_0}|\Gamma(0)|e^{j(kz+\Phi_0)} \end{cases}$$

E in generale la potenza vale:

$$P(z) = \frac{1}{2}V(z)I^*(z) = \frac{1}{2}\left(V^+e^{-jkz} + V^+|\Gamma(0)|e^{j(kz+\Phi_0)}\right)$$
$$\left(\frac{V^+}{Z_0}e^{-jkz} - \frac{V^+}{Z_0}|\Gamma(0)|e^{j(kz+\Phi_0)}\right)^* =$$
$$= \frac{1}{2}\left(V^+e^{-jkz} + V^+|\Gamma(0)|e^{j(kz+\Phi_0)}\right)$$
$$\left(\frac{V^{+*}}{Z_0}e^{jkz} - \frac{V^{+*}}{Z_0}|\Gamma(0)|e^{-j(kz+\Phi_0)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0} - |\Gamma(0)|^2\frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0} + \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0}|\Gamma(0)|e^{j(kz+\Phi_0)} -$$
$$- \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0}|\Gamma(0)|e^{-j(kz+\Phi_0)}$$

Quindi:

$$P(z) = \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0} - |\Gamma(0)|^2\frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0} + j\frac{|V^+|^2}{Z_0}|\Gamma(0)|sin(2kz + \Phi_0)$$

Anche in questo caso la potenza alla sezione z è costituita da una **Potenza Attiva** indipendente da z:

$$Re\{P(z)\} = \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0} - |\Gamma(0)|^2\frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0} \qquad \text{(Potenza Attiva)}$$

E da una **Potenza Reattiva**:

$$Im\{P(z)\} = \frac{|V^+|^2}{Z_0}|\Gamma(0)|sin(2kz + \Phi_0) \quad \text{(Potenza Reattiva)}$$

Che si **annulla** per $2kz + \Phi_0 = n\pi$, quindi **non si annulla** per $z = 0$ come nel caso di un carico **puramente resistivo**.

Infatti nel caso di un carico con una **parte reattiva non nulla** ($Z_l = R_l + jX_l$), è associata la **potenza reattiva**:

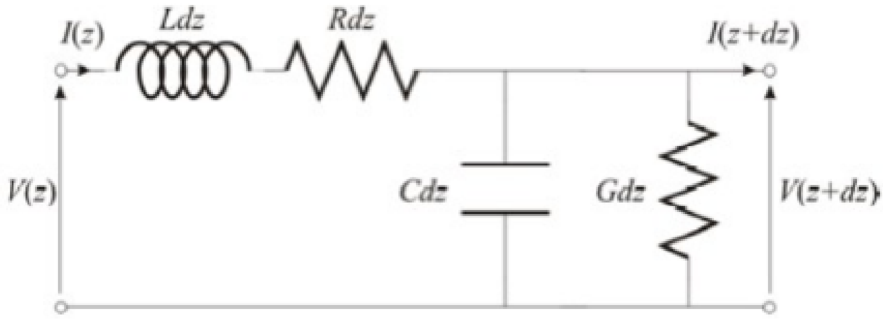
$$Im\{P(0)\} = \frac{1}{2}|I(0)|^2 X_l = \frac{|V^+|^2}{Z_0}|\Gamma(0)|sin(\Phi_0) = 2\omega(w_m^l - w_e^l)$$

Dove w_m^l e w_e^l sommo le **energie pseudo magnetiche e pseudo elettriche immagazzinate nel carico**.

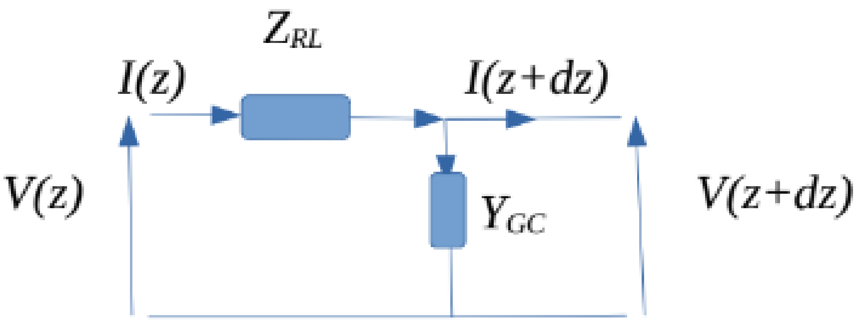
Capitolo 4

Potenza lungo la Linea con Perdite

Consideriamo il **circuito equivalente** associato ad una **fettina dz** di **linea con perdite**:



Che possiamo sintetizzare nel seguente modo:



Dove:

- $Z_{RL} = j\omega L_{eq} = j\omega\left(L - j\frac{R}{\omega}\right) = j\omega L + R$
- $Y_{GC} = j\omega C_{eq} = j\omega\left(C - j\frac{G}{\omega}\right) = j\omega C + G$

Risolvendo il circuito ottengo:

$$V(z+dz) - V(z) = -Z_{RL}dzI = -j\omega L_{eq}dzI \qquad \text{(Tensione)}$$

Quindi:

$$\frac{dV}{dz} = -j\omega L_{eq}I$$

$$I(z+dz)-I(z) = -Y_{GC}dzV = -j\omega C_{eq}dzV \qquad \text{(Corrente)}$$

Quindi:

$$\frac{dI}{dz} = -j\omega C_{eq}V$$

1 Linea Indefinita

In particolare valutiamo la seguente situazione:

Dove avremo il seguente andamento di **tensione** e **corrente**:

$$\begin{cases} V(z) = V^+e^{-jkz} + V^-e^{jkz} \\ I(z) = \dfrac{V^+}{Z_0}e^{-jkz} + \dfrac{V^-}{Z_0}e^{jkz} \end{cases}$$

Dove:

$$k = \omega\sqrt{L_{eq}C_{eq}} = \omega\sqrt{\left(L - j\frac{R}{\omega}\right)\left(C - j\frac{G}{\omega}\right)} = ^{[1]}$$

$$= \omega\sqrt{\left(LC - \frac{RG}{\omega^2}\right) - j\left(\frac{LG}{\omega} + \frac{RC}{\omega}\right)}$$

Quindi:

$$k = \beta - j\alpha$$

E consideriamo il solo **caso fisico**:

$$\beta > 0\ , \quad \alpha > 0$$

$$V(z) = V^+e^{-jkz} = V^+e^{-j(\beta - j\alpha)z} = |V^+|e^{j\alpha_+}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$

E passiamo nel **dominio del tempo**:

$$v(z,t) = |V^+|e^{-\alpha z}cos(\omega t + \alpha_+ - \beta z)$$

Che con $\beta > 0$ e $\alpha > 0$ rappresenta **un'onda** che si propaga con **velocità** $v = \frac{\omega}{\beta}$ nelle z positive **attenuandosi**.

[1] fai la moltiplicazione e poi separa Re e Im

Complessivamente la **tensione** sarà:

$$V(z) = V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz} = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V^- e^{-\alpha z} e^{j\beta z}$$

Calcoliamoci Z_0:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \sqrt{\frac{L - j\frac{R}{\omega}}{C - j\frac{G}{\omega}}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{1 - j\frac{R}{\omega L}}{1 - j\frac{G}{\omega C}}}$$

Z_0 sarà sempre **reale** e **positivo** se vale:

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{G}{\omega C} \qquad \text{(HEAVISIDE)}$$

In tal caso:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Se L, C, R e G **non dipendono dalla frequenza** allora:

- $\beta = \omega\sqrt{LC}$
- $\alpha = -\sqrt{\frac{L}{C}}G$

Tuttavia la condizione di **HEAVISIDE** è difficile da verificarsi, quindi nel caso in cui non si verifichi, la scelta **corretta** è quella di $Re\{Z_0\} > 0$:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-j(\beta - j\alpha)z} \\ I(z) = \dfrac{V^+}{Z_0} e^{-j(\beta - j\alpha)z} \end{cases}$$

Calcolo la **Potenza**:

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0^*} e^{-2\alpha z}$$

Suddivido in **potenza attiva** e **potenza reattiva**:

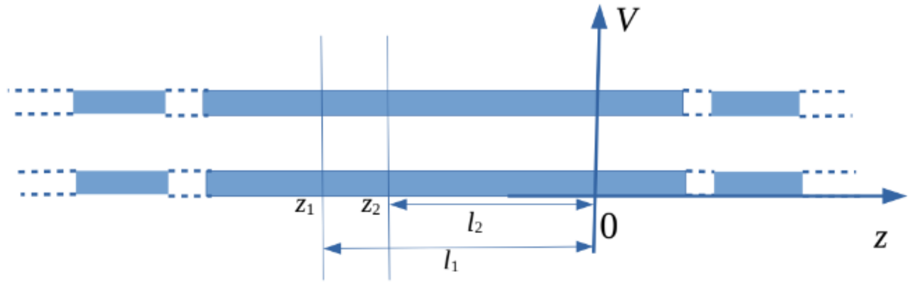
$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{\left(\frac{|Z_0|^2}{Z_0}\right)} e^{-2\alpha z} = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0^2 + X_0^2} (R_0 + jX_0) e^{-2\alpha z}$$

$$P_R(z) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0^2 + X_0^2} R_0 e^{-2\alpha z}$$

Che è una **potenza positiva** e **diminuisce** al **crescere di z**.

2 Potenza tra due ascisse

Per capire meglio analizziamo il seguente caso:



Dove avremo le seguenti **potenze**:

$$\begin{cases} P_R(z_1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z_1} \\ P_R(z_2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z_2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_R(z_1) - P_R(z_2) &= \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z_1} - \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z_2} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} R_0 \left(e^{2\alpha l_1} - e^{2\alpha l_2}\right) \end{aligned}$$

La **differenza delle due potenze attive** rappresenta la **potenza dissipata dalla linea tra le due sezioni** ed è positiva (quindi $R_0 > 0$, $\alpha > 0$).

Ripetiamo il calcolo per P_x:

$$\begin{cases} P_X(z_1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} X_0 e^{-2\alpha z_1} \\ P_X(z_2) = \dfrac{1}{2}\dfrac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} X_0 e^{-2\alpha z_2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_X(z_1) - P_X(z_2) &= \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} X_0 e^{-2\alpha z_1} - \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} X_0 e^{-2\alpha z_2} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} X_0 \left(e^{2\alpha l_1} - e^{2\alpha l_2}\right) \end{aligned}$$

La **differenza tra le potenze reattive** è **proporzionale alla differenza delle pseudo energie elettriche e magnetiche medie immagazzinate nel tratto di linea**.

Tale **potenza** è **positiva** o **negativa** in base al segno di X_0 (discorso analogo per V^-).

Consideriamo ora:

$$k = \omega\sqrt{\left(LC - \frac{RG}{\omega^2}\right) - j\left(\frac{LG}{\omega} + \frac{RC}{\omega}\right)} =$$
$$= \omega\sqrt{LC}\sqrt{1 - \frac{RG}{\omega^2 LC} - j\left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)}$$

Avere **piccole perdite** vuol dire:

- $\frac{R}{\omega L} << 1 \Longrightarrow \frac{RG}{\omega^2 LC} << \frac{R}{\omega L}$

- $\frac{G}{\omega C} << 1 \Longrightarrow \frac{RG}{\omega^2 LC} << \frac{G}{\omega C}$

Queste approssimazioni ci **semplificano** l'espressione di k:

$$k \approx \omega\sqrt{LC}\left(1 - j\frac{1}{2}\left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)\right) = \beta - j\alpha$$

Quindi β ha lo steso valore di **k** in **assenza di perdite**, ma esse danno luogo ad un'**attenuazione** che cresce **linearmente** con le **perdite**.

Calcoliamo ora l'**impedenza caratteristica**:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \sqrt{\frac{L - j\frac{R}{\omega}}{C - j\frac{G}{\omega}}} = \sqrt{\frac{L}{C}\frac{1 - j\frac{R}{\omega L}}{1 - j\frac{G}{\omega C}}} =$$
$$= \sqrt{\frac{L}{C}}\left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right)^{1/2}\left(1 - j\frac{G}{\omega C}\right)^{-1/2}$$

Nel caso di **piccole perdite**:

$$\frac{R}{\omega L} << 1 \Longrightarrow \left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right)^{1/2} \approx 1 - j\frac{1}{2}\frac{R}{\omega L}$$

E dato che:

$$\frac{G}{\omega C} << 1 \Longrightarrow \left(1 - j\frac{G}{\omega C}\right)^{1/2} \approx 1 + j\frac{1}{2}\frac{G}{\omega C}$$

Quindi sostituendo:[2]

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} + j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}\right) = R_0 + jX_0$$

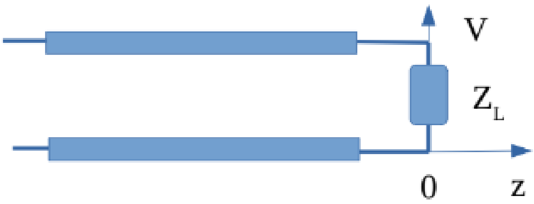
Dove:

- $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$
- $X_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}\right)$

Quindi ha la **parte reale** uguale a come sarebbe Z_0 in **mancanza di perdite**, o nel caso in cui valga la **condizione di Heaviside**.

3 Linea con Carico

Infine consideriamo la seguente situazione:



Dove:

$$\begin{cases} k = \beta - j\alpha \\ Z_0 = R_0 + jX_0 \end{cases}$$

$$V(z) = V^+e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} + V^-e^{\alpha z}e^{j\beta z} =$$

$$= V^+e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\left(1 + \frac{V^-}{V^+}e^{2\alpha z}e^{2j\beta z}\right) = V^+e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}(1+\Gamma(z))$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}(1-\Gamma(z))$$

$$\Gamma(0) = \Gamma_l = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}$$

Nel caso di piccole perdite $X_0 << R_0$, quindi:

$$\Gamma(0) = \frac{Z_l - R_0 - jX_0}{Z_l + R_0 + jX_0} \approx \frac{Z_l - R_0}{Z_l + R_0} - j\underbrace{\frac{X_0}{R_0}\frac{1}{\frac{Z_l}{R_0}+1}}_{trascurare}$$

[2]Trascuro il termine con il coefficiente $\frac{1}{4}$

La differenza maggiore dal caso **senza perdite** è che $|\Gamma(z)| = |\Gamma(0)|e^{2\alpha z}$ **non è costante** lungo la linea, ma allontanandosi dal **carico**, il modulo **diminuisce**.

Calcoliamo ora la generica potenza lungo la linea:[3] [4]

$$P(z) = \frac{1}{2}V(z)I^*(z) = \frac{1}{2}V^+e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}(1+\Gamma(z))\frac{V^{+*}}{Z_0^*}e^{-\alpha z}e^{j\beta z}\left(1-\Gamma(z)^*\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0^*}e^{-2\alpha z}\left(1-|\Gamma(z)|^2+\Gamma(z)-\Gamma(z)^*\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0^*}e^{-2\alpha z}\left(1-|\Gamma(z)|^2+2jIm\{\Gamma(z)\}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0^*}e^{-2\alpha z}\left(1-|\Gamma_l|^2e^{4\alpha z}\right)+j\frac{|V^+|^2}{Z_0^*}e^{-2\alpha z}e^{2\alpha z}Im\{\Gamma_l e^{2j\beta z}\} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{|V^+|^2}{Z_0^*}e^{-2\alpha z}\left(1-|\Gamma_l|^2e^{4\alpha z}\right)}_{\text{P. onda dir. meno P. onda rifl.}}+j\frac{|V^+|^2}{Z_0^*}Im\{\Gamma_l e^{2j\beta z}\}$$

Allontanandosi dal carico la **potenza dell'onda riflessa** sarà sempre più **piccola** di quella dell'**onda incidente**.

[3] $|\Gamma(z)| = |\Gamma_L|e^{2\alpha z}$
[4] $\Gamma(z) = \Gamma_L e^{2\alpha z}e^{2j\beta z}$

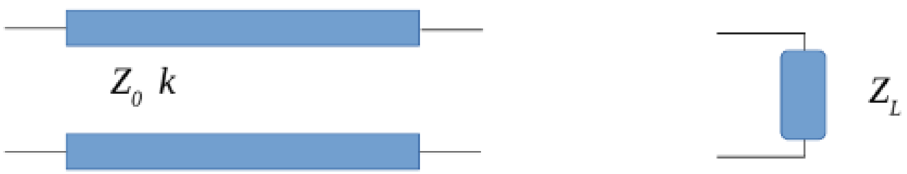
Capitolo 5

Adattamenti

1 Adattamento con Stub Serie

1.1 Metodo 1

Poniamoci nella situazione in cui vogliamo collegare il carico Z_l sulla linea **senza perdite**, con **impedenza caratteristica** Z_0:



Se la colleghiamo direttamente, avremo un **coefficiente di riflessione** non nullo:

$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}$$

E un **ROS** pari a:

$$ROS = \frac{1 + |\Gamma_l|}{1 - |\Gamma_l|}$$

Spostandosi lungo la linea, $|\Gamma|$ rimane **costante**, mentre il **modulo dell'impedenza** cambia sezione per sezione:

$$\frac{Z_0}{ROS} \leq |Z(z)| \leq Z_0\, ROS$$

E analogamente la **parte reale dell'impedenza** varia tra:

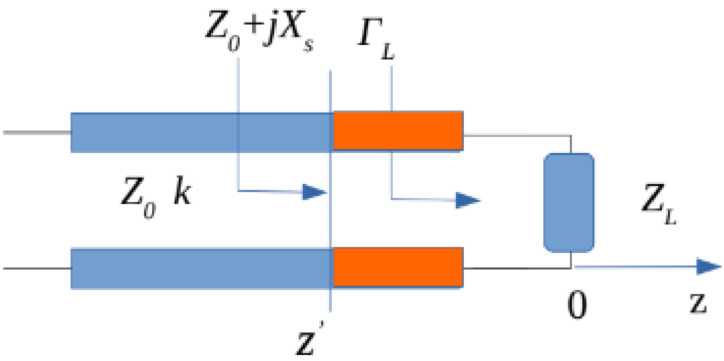
$$\frac{Z_0}{ROS} \leq R(z) \leq Z_0\, ROS$$

In particolare esiste una coordinata z' tale che:

$$R(z') = Z_0$$

E allo stesso tempo:

$$Z(z') = Z_0 + j\underbrace{X(z')}_{X_s}$$



Ma come posso individuare questa sezione z'?

Ricordiamo che:

$$Z(z') = Z_0 \frac{1+\Gamma(z')}{1-\Gamma(z')} = Z_0 \frac{[1+\Gamma(z')][1-\Gamma(z')^*]}{|1-\Gamma(z')|^2} =$$
$$= Z_0 \frac{1-|\Gamma|^2 + 2jIm\{\Gamma(z')\}}{|1-\Gamma(z')|^2} =$$
$$= Z_0 \frac{1-|\Gamma|^2}{|1-\Gamma(z')|^2} + jZ_0 2\frac{Im\{\Gamma(z')\}}{|1-\Gamma(z')|^2}$$

Quindi affinchè:

$$R(z') = Z_0 \leftrightarrow \frac{1-|\Gamma|^2}{|1-\Gamma(z')|^2} = 1$$

(se $|\Gamma| = 1$ la linea è chiusa su una pura reattanza)

Se $|\Gamma| < 1$:

$$1-|\Gamma|^2 = |1-\Gamma(z')|^2 = [1-\Gamma(z')][1-\Gamma(z')^*] =$$
$$= 1-\Gamma(z')^* - \Gamma(z') + |\Gamma|^2 = 1-2Re\{\Gamma(z')\} + |\Gamma|^2$$

Quindi:

$$Re\{\Gamma(z')\} = |\Gamma|^2 = |\Gamma_l|^2$$

Ricordando che:

$$\Gamma(z) = \Gamma(0)e^{2jkz} = \Gamma_l e^{2jkz} = |\Gamma_l|e^{j\varphi_l}e^{2jkz} = |\Gamma_l|e^{j(2kz+\varphi_l)} =$$
$$= |\Gamma_l|cos(2kz+\varphi_l) + j|\Gamma_l|sin(2kz+\varphi_l)$$

Quindi sostituendo otterremo:

$$Re\{\Gamma(z')\} = |\Gamma_l| cos(2kz' + \varphi_l) = |\Gamma|^2 \implies cos(2kz' + \varphi_l) = |\Gamma|$$

Che ha come soluzioni:

$$2kz'_n = \frac{4\pi}{\lambda} \pm arcos(|\Gamma_n|) - \varphi_l + 2n\pi$$

$$\implies z'_n = \pm \frac{arcos(|\Gamma_n|)}{2\pi}\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi_l}{2\pi}\frac{\lambda}{2} + n\frac{\lambda}{2} \ \forall n \ : \ z'_n < 0$$

Quindi abbiamo trovato le ascisse z'_n in corrispondenza delle quali:

$$Z(z'_n) = Z_0 + jZ_0 2\frac{Im\{\Gamma(z'_n)\}}{|1-\Gamma(z'_n)|^2}$$

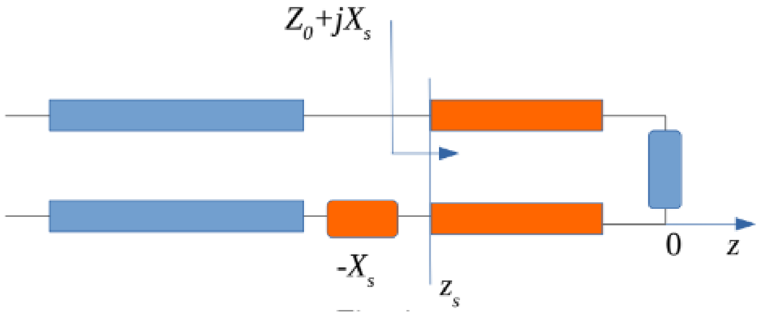
Ricordando anche che:

- $1 - |\Gamma_l|^2 = |1 - \Gamma(z'_n)|^2$
- $Im\{\Gamma(z'_n)\} = |\Gamma_l| sin(2kz'_n + \varphi_l) = \pm\sqrt{1-|\Gamma_l|^2}$

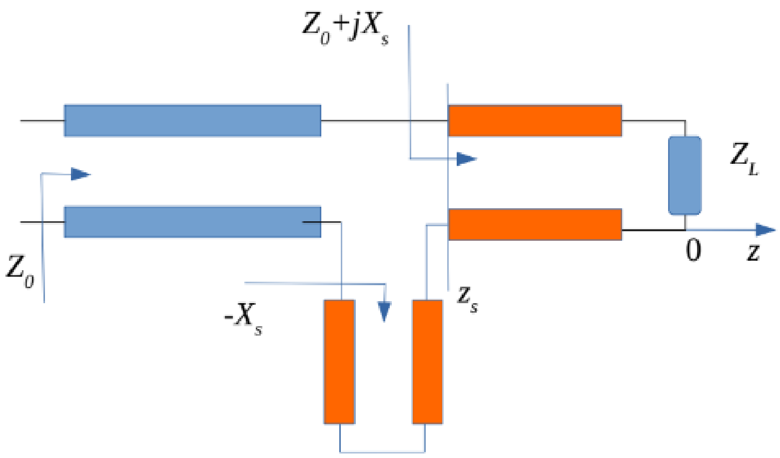
Quindi:

$$X_s = Im\{Z(z'_n)\} = Z_0 2\frac{Im\{\Gamma(z'_n)\}}{|1-\Gamma(z'_n)|^2} = \pm Z_0 \underbrace{\frac{\sqrt{1-|\Gamma_l|^2}}{1-|\Gamma_l|^2}}_{\frac{\sqrt{X}}{X}=\frac{1}{\sqrt{X}}} = \frac{\pm Z_0}{\sqrt{1-|\Gamma_l|^2}}$$

Quindi per ottenere l'adattamento dobbiamo **compensare** la X_s inserendo a z'_n una X_s **uguale** ed **opposta**:



La **reattanza** X_s può essere realizzata con uno **stub in corto** o con **uno stub aperto** (es. corto):



Ma a che distanza devo mettere lo stub??

$$Z(l) = jZ_0 tan(kl)$$

Quindi pongo:[1]

$$Z_0 tan(kl_{stub}) = -X_s$$
$$\implies l_{stub} = -atan\left(\frac{X_s}{Z_0}\right)\frac{\lambda}{2\pi} + n\frac{\lambda}{2} \geq 0$$

1.2 Metodo 2

Gli stessi risultati li possiamo ottenere con il **trasporto di impedenza**:

Voglio trovare tutte le sezioni in cui **l'impedenza di carico trasportata ha parte reale** Z_0.

$$Z(l) = Z_0 \frac{R_l + jZ_0 tan(kl)}{Z_0 + jR_l tan(kl)} = Z_0 + jX_s$$

Divido primo e secondo membro per Z_0 e numeratore e denominatore per Z_0:

$$Z'(l) = \frac{R'_l + jt}{1 + jR'_l t} = 1 + jX'_s$$

Dove:

- $Z'(l) = \frac{Z(l)}{Z_0}$

[1] La tangente si annulla ogni $n\pi$

- $R'(l) = \frac{R_l}{Z_0}$
- $X'_s = \frac{X_s}{Z_0}$
- $t = tan(kl)$

In particolare:

$$\begin{cases} Re\{Z'(l)\} = 1 \\ Im\{Z'(l)\} = X'_s \end{cases}$$

Cerchiamo ora di separare **parte reale** e **parte immaginaria**:

$$Z'(l) = \frac{(R'_l + jt)(1 - jR'_l t)}{1 + R'^2_l t^2} = \frac{R'_l - jR'^2_l + jt + R'_l t^2}{1 + R'^2_l t^2} = 1 + jX'_s$$

Quindi:

$$\frac{R'_l + R'_l t^2}{1 + R'^2_l t^2} = 1$$

$$\frac{-R'^2_l t + t}{1 + R'^2_l t^2} = X'_s$$

Risolviamo la prima in t:

Ricordiamoci però che la vera incognita è l!!

Quindi per prima cosa verifichiamo se $t = \infty$, ovvero $l = \frac{\lambda}{4}$ è **soluzione del problema**:

$$t = \infty \implies Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) \approx \frac{1}{R'_l} = 1$$

Ma questo può accadere solo se $R'_l = 1$, quindi **NON è soluzione.**

Procediamo quindi moltiplicando per $1 + R'^2_l t^2$:

$$R'_l + R'_l t^2 = 1 + R'^2_l t^2 \implies (R'^2_l - R'_l)t^2 = R'_l - 1$$

$$\implies t^2 = \frac{R'_l - 1}{R'^2_l - R'_l} \implies t^2 = \frac{\cancel{R'_l - 1}}{R'_l \cancel{(R'_l - 1)}} = \frac{1}{R'_l} \implies t = \frac{1}{\sqrt{R'_l}}$$

$$\implies tan(kl) = t = \pm\sqrt{\frac{1}{R'_l}} = \pm\sqrt{\frac{Z_0}{R_l}}$$

Da questa espressione valuto la l in corrispondenza della quale:

$$Z(l) = Z_0 + jX_s$$

Ovvero:

$$l = arctan\left(\sqrt{\frac{Z_0}{R_l}}\right)\frac{\lambda}{2\pi} + n\frac{\lambda}{2} \geq 0$$

Una volta calcolata la l alla quale vogliamo fare l'adattamento mi ricavo X_s:

$$X'_s = \frac{-R'^2_l t + t}{1 + R'^2_l t^2} = \frac{\pm(1 - R'^2_l)\sqrt{\frac{1}{R'_l}}}{1 + R'_l} = \pm\frac{\frac{1 - R'^2_l}{\sqrt{R'_l}}}{1 + R'_l} =$$
$$= \pm\frac{1 - R'^2_l}{\sqrt{R'_l}(1 + R'_l)} = \pm\frac{(1 - R'_l)\cancel{(1 + R'_l)}}{\sqrt{R'_l}\cancel{(1 + R'_l)}} = \pm\frac{1 - R'_l}{\sqrt{R'_l}}$$

Quindi:

$$X_s = X'_s \cdot \underbrace{Z_0}_{R_0} = \pm\frac{1 - \frac{R_l}{Z_0}}{\sqrt{\frac{R_l}{Z_0}}} \cdot Z_0 = \pm\frac{Z_0 - R_l}{\sqrt{R_l}/\sqrt{Z_0}} = \pm(R_0 - R_l)\cdot\sqrt{\frac{R_0}{R_l}}$$

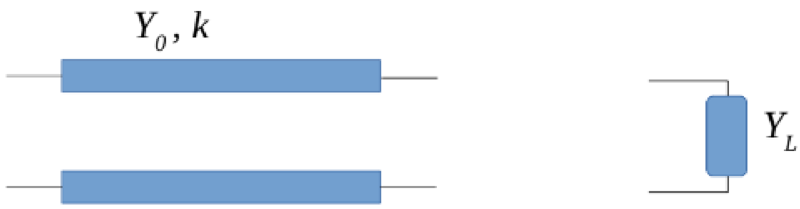
Questa **reattanza** va compensata con una **reattanza uguale** e **opposta** attraverso uno **stub serie**:

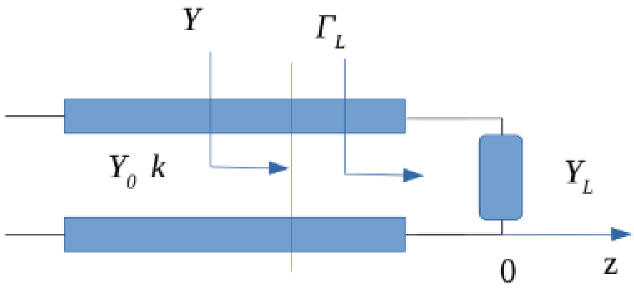
$$X_{stub} = Z_0 tan(kl_{stub}) = -X_s$$
$$kl_{stub} = -arctan\left(\frac{X_s}{Z_0}\right) + n\pi$$
$$\Longrightarrow l_{stub} = -arctan\left(\frac{X_s}{Z_0}\right)\frac{\lambda}{2\pi} + n\frac{\lambda}{2} \geq 0$$

2 Adattamento con Stub Parallelo

2.1 Metodo 1

Nel caso di un **adattamento** mediante **stub parallelo** conviene lavorare con le **ammettenze**.
Consideriamo quindi una linea **senza perdite** con un'**ammettenza caratteristica** $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ che vogliamo collegare ad un carico di **ammettenza** $Y_l = \frac{1}{Z_l}$:





Ricordiamo che:

$$Y(z') = Y_0\,\frac{1-\Gamma(z')}{1+\Gamma(z')} = Y_0\,\frac{[1-\Gamma(z')][1+\Gamma(z')^*]}{|1+\Gamma(z')|^2} =$$
$$= Y_0\,\frac{1-|\Gamma|^2-2jIm\{\Gamma(z')\}}{|1+\Gamma(z')|^2} =$$
$$= Y_0\,\frac{1-|\Gamma|^2}{|1+\Gamma(z')|^2} - jY_0 2\frac{Im\{\Gamma(z')\}}{|1+\Gamma(z')|^2}$$

Quindi affinchè:

$$Y(z') = G(z') + jB(z') = Y_0 + jB_p \leftrightarrow Y_0\frac{1-|\Gamma|^2}{|1+\Gamma(z')|^2} = Y_0$$

(se $|\Gamma| = 1$ la linea è chiusa su una pura reattanza) Se $|\Gamma| < 1$:

$$1-|\Gamma|^2 = |1+\Gamma(z')|^2 = [1+\Gamma(z')][1+\Gamma(z')^*] =$$
$$= 1+\Gamma(z')^* + \Gamma(z') + |\Gamma|^2 = 1 + 2Re\{\Gamma(z')\} + |\Gamma|^2$$

Quindi:

$$Re\{\Gamma(z')\} = -|\Gamma|^2 = -|\Gamma_l|^2$$

Ricordando che:

$$\Gamma(z) = \Gamma(0)e^{2jkz} = \Gamma_l e^{2jkz} = |\Gamma_l|e^{j\varphi_l}e^{2jkz} = |\Gamma_l|e^{j(2kz+\varphi_l)} =$$
$$= |\Gamma_l|cos(2kz+\varphi_l) + j|\Gamma_l|sin(2kz+\varphi_l)$$

Quindi sostituendo otterremo:

$$Re\{\Gamma(z')\} = |\Gamma_l|cos(2kz'+\varphi_l) = -|\Gamma|^2 \implies cos(2kz'+\varphi_l) = -|\Gamma|$$

Che ha come **soluzioni**:

$$2kz'_n = \frac{4\pi}{\lambda} \pm arcos(-|\Gamma_n|) - \varphi_l + 2n\pi$$

$$\implies z'_n = \pm\frac{arcos(-|\Gamma_n|)}{2\pi}\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi_l}{2\pi}\frac{\lambda}{2} + n\frac{\lambda}{2}\ \forall n\ :\ z'_n < 0$$

Che sono le **ascisse** in cui $G = Y_0$.

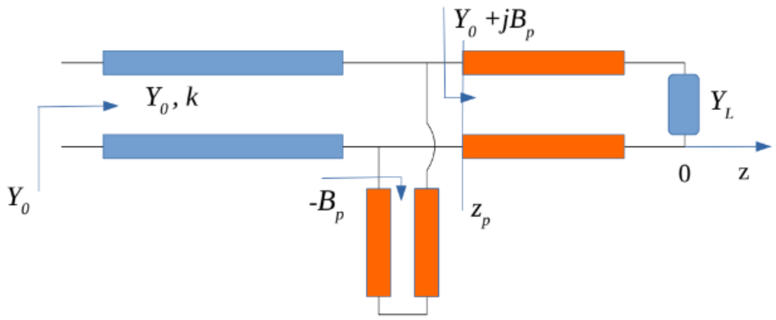
Ripetendo calcoli analoghi:

$$Im\{\Gamma(z'_n)\} = |\Gamma_l|sin(2kz'_n + \varphi_l) = \pm\sqrt{1-|\Gamma_l|^2}$$

Quindi:

$$B_p = Im\{Y(z'_n)\} = Y_0 2\frac{Im\{\Gamma(z'_n)\}}{|1+\Gamma(z'_n)|^2} = \pm Y_0\frac{\sqrt{1-|\Gamma_l|^2}}{1-|\Gamma_l|^2} = \frac{\pm Y_0}{\sqrt{1-|\Gamma_l|^2}}$$

Quindi ora per ottenere l'**adattamento** devo compensare la **suscettanza** B_p con una **suscettanza uguale** ed **opposta**, attraverso per esempio uno **stub parallelo** in corto:



2.2 Metodo 2

Gli stessi risultati li possiamo ottenere con il **trasporto di ammettenza**:

Voglio trovare tutte le sezioni in cui l'**ammettenza** di carico **trasportata** ha **parte reale** G_L.

$$Y(l) = Y_0\frac{Y_l + jY_0tan(kl)}{Y_0 + jY_ltan(kl)} = Y_0 + jB_p$$

Divido primo e secondo membro per Y_0 e numeratore e denominatore per Y_0:

$$Y'(l) = \frac{G'_l + jt}{1 + jG'_l t} = 1 + jB_p$$

Dove:

- $Y'(l) = \frac{Y(l)}{Y_0}$
- $G'_l = \frac{G_l}{Y_0}$
- $B'_p = \frac{B_p}{Y_0}$
- $t = tan(kl)$

In particolare:

$$\begin{cases} Re\{Y'(l)\} = 1 \\ Im\{Y'(l)\} = B'_P \end{cases}$$

Cerchiamo ora di separare **parte reale** e **parte immaginaria**:

$$Y'(l) = \frac{(G'_l + jt)(1 - jG'_l t)}{1 + jG'^2_l t^2} = \frac{G'_l - jG'^2_l + jt + G'_l t^2}{1 + jG'^2_l t^2} = 1 + jB'_P$$

Quindi:

$$\frac{G'_l + G'_l t^2}{1 + jG'^2_l t^2} = 1$$

$$\frac{-G'^2_l t + t}{1 + G'^2_l t^2}$$

Risolviamo la prima in t:

Procediamo quindi moltiplicando per $1 + G'^2_l t^2$:

$$G'_l + G'^2_l = 1 + G'^2_l t^2 \implies (G'^2_l - G'_l)t^2 = G'_l - 1$$

$$\implies t^2 = \frac{G'_l - 1}{G'^2_l - G'_l} \implies t^2 = \frac{G'_l - 1}{G'_l \cancel{(G'_l - 1)}} = \frac{1}{G'_l} \implies t = \frac{1}{\sqrt{G'_l}}$$

$$\implies tan(kl) = t = \pm\sqrt{\frac{1}{G'_l}} = \pm\sqrt{\frac{Y_0}{G_l}}$$

Da questa espressione valuto la l in corrispondenza della quale:

$$Y(l) = Y_0 + jB_p$$

Ovvero:

$$l = arctan\left(\frac{Y_0}{G_l}\right)\frac{\lambda}{2\pi} + n\frac{\lambda}{2} \geq 0$$

Una volta calcolata la l alla quale vogliamo fare l'**adattamento** mi ricavo B_p:

$$B'_p = \frac{-G_l'^2 t + t}{1 + G_l'^2 t^2} = \frac{\pm(1 - G_l'^2)\sqrt{\frac{1}{G'_l}}}{1 + G'_l} = \pm\frac{\frac{1 - G_l'^2}{\sqrt{G'_l}}}{1 + G'_l} =$$

$$= \pm\frac{1 - G_l'^2}{\sqrt{G'_l}(1 + G'_l)} = \pm\frac{(1 - G'_l)\cancel{(1 + G'_l)}}{\sqrt{G'_l}\cancel{(1 + G'_l)}} = \pm\frac{1 - G'_l}{\sqrt{G'_l}}$$

Quindi:

$$B_p = B'_p \cdot Y_0 = \pm\frac{1 - \frac{G_l}{Y_0}}{\sqrt{\frac{G_l}{Y_0}}} \cdot Y_0 = \pm\frac{Y_0 - G_l}{\sqrt{G_l}/\sqrt{Y_0}} = \pm(Y_0 - G_l) \cdot \sqrt{\frac{Y_0}{G_l}}$$

Questa **reattanza** va **compensata** con una **reattanza uguale** e **opposta** attraverso uno **stub parallelo**:

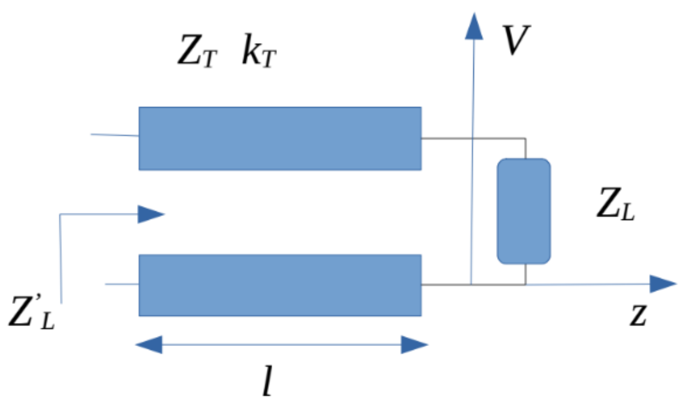
$$B_{stub} = Y_0 cotan(kl_{stub}) = -B_p$$

$$kl_{stub} = -arcotan\left(\frac{B_p}{Y_0}\right) + n\pi$$

$$\implies l_{stub} = -arcotan\left(\frac{B_p}{Y_0}\right)\frac{\lambda}{2\pi} + n\frac{\lambda}{2} \geq 0$$

3 Adattamento Tramite Inverter

Consideriamo la seguente **linea senza perdite chiusa su un carico**:



L'impedenza Z'_L sarà:

$$Z'_L = Z_T \frac{Z_L + jZ_T tan(k_T l)}{Z_T + jZ_L tan(k_T l)}$$

Nel caso in cui:

$$k_T l = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow l = \frac{\lambda_T}{4}$$

Allora:

$$k_T l = tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \infty$$

Quindi va calcolata con il limite:

$$Z'_L = \lim_{tan(k_T l) \longrightarrow \infty} Z_T \frac{Z_L + jZ_T tan(k_T l)}{Z_T + jZ_L tan(k_T l)} = \frac{Z_T^2}{Z_L} = Z_T^2 Y_L$$

Quindi possiamo dire che il trasporto di un'impedenza di un quarto di lunghezza d'onda lungo una linea da luogo ad un'impedenza proporzionale al reciproco dell'impedenza originale.

Capitolo 6

Propagazione di un Segnale a Banda Stretta

Analizziamo la **propagazione** di un segnale a **banda stretta**.

Facciamo prima alcune considerazioni sulla **Trasformata di Fourier**:

$$\boxed{S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt} \qquad \text{(Trasformata)}$$

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(2\pi f)e^{j2\pi f t}} \qquad \text{(Antitrasformata)}$$

E considerando un segnale $s(t)$ **reale**, possiamo dire che:

$$s(t) = s^*(t) \leftrightarrow S^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{j\omega t}dt = S(-\omega)$$

Questo ci fa capire che per rappresentare un segnale ci basta considerare le **sole pulsazioni positive**, infatti:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \\
&\boxed{\omega' = -\omega \quad d\omega' = -d\omega} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(-\omega')e^{-j\omega' t}d\omega'
\end{aligned}$$

Quindi sfruttando quanto detto:

$$\int_{0}^{\infty} S(-\omega')e^{-j\omega' t}d\omega' = \int_{0}^{\infty} S(\omega')^* e^{-j\omega' t}d\omega' = \left[\int_{0}^{\infty} S(\omega')e^{j\omega' t}d\omega'\right]^*$$

Che possiamo sostituire sopra, ottenendo:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(-\omega')e^{j\omega' t}d\omega' =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\infty} S(\omega')e^{j\omega' t}d\omega'\right]^* =$$
$$= 2Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right\} = Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} 2S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right\}$$

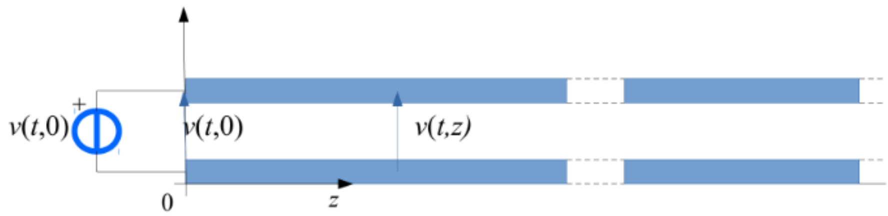
Definisco ora:

$$\begin{cases} \hat{S}(\omega) = 2S(\omega) \quad per \quad \omega > 0 \\ \hat{S}(\omega) = 0 \quad per \quad \omega < 0 \end{cases} \leftrightarrow \hat{s}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

In particolare:

$$s(t) = Re\{\hat{s}(t)\} \quad \hat{s}(t) \text{ \textbf{è detto segnale analitico}}$$

Analizziamo ora la **propagazione** di un segnale a **banda stretta** lungo la seguente linea:



Scriviamo $v(t,0)$ così:

$$v(t,0) = s(t)cos(\omega_0 t)$$

In particolare:

- $s(t) = s_0$ per $|t| < \frac{\tau}{2}$
- $s(t) = 0$ per $|t| > \frac{\tau}{2}$
- $\omega_0 >> \frac{2\pi}{\tau}$

Il segnale $v(t,0)$ è **reale** e a **banda stretta**, quindi procediamo associandogli il suo **analogo nella frequenza** e il suo **segale analitico**:

$$V(\omega,0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t,0)e^{-j\omega t}dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)e^{-j\omega t}dt$$

(Analogo in Frequenza)

$$\hat{V}(\omega,0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = S(\omega-\omega_0)$$

(Segnale Analitico)

Quindi ora possiamo analizzare il problema nel dominio della frequenza:

Fissato ω:

$$\hat{V}(\omega,z) = \hat{V}(\omega,0)e^{-j\beta z}$$

Passiamo nel **dominio del tempo**:

$$\hat{v}(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega,0)e^{j\omega t}e^{-j\beta z}d\omega$$

Distinguiamo ora i casi di **linea non dispersiva** e **linea dispersiva**.

1 Linea Non Dispersiva

$$\beta(\omega) = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{c}$$

dove $c = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{\omega}{\beta}$.

Facciamo la **sostituzione** in $\hat{v}(t,z)$:

$$
\begin{aligned}
\hat{v}(t,z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega,0)e^{j\omega t}e^{-j\frac{\omega}{c}z}d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega,0)e^{j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)}d\omega \\
t_R &= t-\frac{z}{c} \\
\implies &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega,0)e^{j\omega t_R}d\omega = \\
&= \hat{v}(t_R,0) = \hat{v}\left(t-\frac{z}{c},0\right) = s\left(t-\frac{z}{c}\right)e^{j\omega_0\left(t-\frac{z}{c}\right)}
\end{aligned}
$$

Mentre $v(t,z)$ sarà:

$$
v(t,z) = Re\{\hat{v}(t,z)\} = s\left(t-\frac{z}{c}\right)cos\left(\omega_0\left(t-\frac{z}{c}\right)\right)
$$

Quindi se la linea non è dispersiva, **il segnale si propaga senza dispersione**.

2 Linea Dispersiva

In questo caso ϵ e μ sono **funzioni** di ω, o siamo in una situazione **NON TEM** (β non è una funzione lineare di ω).

Detta $\Delta\omega$ la **banda del segnale** centrato in ω_0:

$$
\begin{aligned}
\hat{v}(t,z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega,0)e^{j\omega t}e^{-j\beta z}d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \hat{V}(\omega,0)e^{j\omega t}e^{-j\beta z}d\omega
\end{aligned}
$$

Questo ci fa capire che per calcolare $\hat{v}(t,z)$ ci servono i valori di β solo **intorno** a ω_0.

Quindi svilupperemo β in **serie di Taylor** centrato in ω_0:

$$
\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_0'(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\beta_0''(\omega-\omega_0)^2 + \ldots
$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\hat{v}(t,z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{V}(\omega,0)e^{j\omega t}e^{-j\beta z}d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{V}(\omega,0)e^{j\omega t}e^{-j(\beta_0+\beta_0'(\omega-\omega_0))z}d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{V}(\omega,0)e^{j(\omega t-\beta_0 z-\beta_0'(\omega-\omega_0)z)}d\omega \\
\Omega &= \omega-\omega_0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{V}(\Omega+\omega_0,0)e^{j(\Omega t+\omega_0 t-\beta_0 z-\beta_0'\Omega z)}d\omega = \\
&= e^{(j(\omega_0 t-\beta_0 z))}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{V}(\Omega+\omega_0,0)e^{j(\Omega t-\beta_0'\Omega z)}d\omega
\end{aligned}$$

Dove:

$$\hat{V}(\Omega+\omega_0,0)=S(\Omega)$$

Dato che:

$$\hat{V}(\omega,0)=S(\omega-\omega_0)$$

Poniamo:

$$t_R=t-\beta_0'z$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\hat{v}(t,z) &= e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\Omega,0)e^{j\Omega t_R}d\Omega = \\
&= e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z)}s(t_R)=e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z)}s(t-\beta_0'z)
\end{aligned}$$

Definiamo:

- **Velocità di Fase**: $v_F=\frac{\omega_0}{\beta_0}$ alla pulsazione ω_0
- **Velocità di Gruppo**: $v_G=\frac{1}{\beta_0'}$ alla pulsazione ω_0

Sostituiamo:

$$\boxed{\hat{v}(t,z)=\underbrace{e^{j\omega_0\left(t-\frac{z}{v_F}\right)}}_{Portante}\underbrace{s\left(t-\frac{z}{v_G}\right)}_{Inviluppo}}$$

Dove l'**Inviluppo** è l'**energia del segnale che si propaga lungo la linea a velocità** v_G.

Quindi è identico al caso non dispersivo, tuttavia solo per brevi distanze, dato che per distanze più lunghe bisogna considerare ordini superiori dello sviluppo di Taylor di $\beta(\omega)$.

2.1 Grado di Correttezza

Per **quantificare il grado di correttezza dell'approssimazione** dobbiamo controllare se:

$$\frac{e^{-j\beta z}}{e^{-j(\beta_0+\beta_0'(\omega-\omega_0))z}} = e^{-j(\beta-\beta_0-\beta_0'(\omega-\omega_0))} \approx 1$$

Quindi possiamo procedere sviluppando β:

$$(\beta_0+\beta_0'(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\beta_0''(\omega-\omega_0)^2+\ldots-\beta_0-\beta_0'(\omega-\omega_0))z =$$
$$=(\frac{1}{2}\beta_0''(\omega-\omega_0)^2+\ldots)z$$

Ora sostituendo:

$$e^{-j(\beta-\beta_0-\beta_0'(\omega-\omega_0))z} = e^{-j(\frac{1}{2}\beta_0''(\omega-\omega_0)^2+\ldots)z} \approx 1$$

Che è verificata se e solo se:

$$\left|\left(\frac{1}{2}\beta_0''(\omega-\omega_0)^2+\ldots\right)z\right| << 1$$

Quindi è evidente che **al crescere della distanza** (z) **questa disuguaglianza non sarà più verificata**.

Possiamo avere una **stima della distanza** prima della quale è verificata se vale:

$$\left|\frac{1}{2}\beta_0''(\omega-\omega_0)^2 z\right| << 1$$

Ovvero:

$$|z| << \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\beta_0''(\Delta\omega)^2\right|} = L_0$$

Capitolo 7

Risuonatori

1 Circuito Risonante Serie

L'**impedenza** di un **circuito LC** è la seguente:

$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

dove $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ viene detta **pulsazione di risonanza**, mentre $\sqrt{\frac{L}{C}}$ è il **parametro di pendenza**.

Alla **pulsazione di risonanza**, **l'energia elettrica immagazzinata nella capacità eguaglia l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore**, quindi:

$$Z(\omega_0) = 0$$

Invece per pulsazioni prossime a ω_0, usando l'approssimazione di **Taylor**, vale:

$$Z \approx j\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0}, \quad \omega \approx \omega_0$$

2 Circuito Risonante Parallelo

Nel caso del **parallelo** si ragiona con le **ammettenze**:

$$Y = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Dove $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, in corrispondenza della quale vale che $W_E = W_M$.

3 Circuito Risonante con Perdite

In un **circuito risonante reale** vi è una **resistenza** (conduttanza) che tiene conto delle **perdite**.

Facciamo l'esempio del **circuito serie**:

$$Z = j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) + R_L$$

Definiamo il **fattore di merito del circuito** come:

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot W_{EM}}{P_{diss}} = \frac{2\omega_0 L \frac{|I|^2}{4}}{\frac{1}{2}R_L|I|^2} = \frac{\omega_0 L}{R_L}$$

Così l'**impedenza** diventa:

$$Z = j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) + \frac{\omega_0 L}{Q} = j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ}\right)$$

Analogo discorso per il **parallelo**:

$$Y = j\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) + G = j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ}\right)$$

4 Capacità Filtranti di un Risuonatore

Se colleghiamo un **risuonatore serie** ad un **generatore ideale di tensione** a pulsazione ω, avremo questa **corrente**:

$$\boxed{I(\omega) = \frac{V_0}{j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ}\right)}}$$

Per $\omega = \omega_0$ la corrente avrà il suo **massimo**:

$$I(\omega_0) = V_0 Q\sqrt{\frac{C}{L}}$$

A quali pulsazioni il modulo della corrente diminuirà di 3dB??

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm\frac{1}{jQ}$$

Che ha per soluzioni:

$$\omega = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\frac{{\omega_0}^2}{Q^2} + 4{\omega_0}^2}\right) = \left(\omega_0\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\right)$$

Che per $Q >> 1$ fornisce $\omega = \pm\left(\omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2Q}\right)$

Analizziamo ora il **caso di un generatore reale**, con una sua **resistenza interna** R_0:

$$Z = j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ}\right) + R_0 = j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ} + \frac{1}{jQ_{ext}}\right) =$$
$$= j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ_{tot}}\right)$$

Dove:

$$Q_{ext} = R_0\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Dunque:

$$Q_{tot} = \frac{QQ_{ext}}{Q+Q_{ext}} = \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ext}}\right)^{-1}$$

Quindi si avrà:

$$\boxed{I(\omega) = \frac{V_0}{j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ_{tot}}\right)}}$$

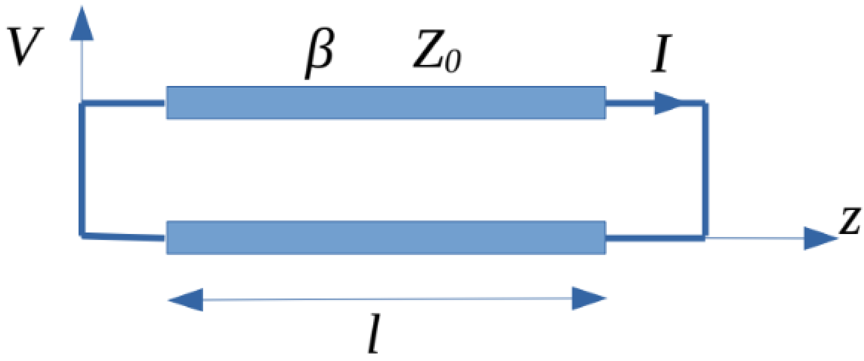
$$I(\omega_0) = V_0 Q_{tot}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

E analogamente a prima, **la pulsazione a 3dB sarà**:

$$\omega_{3dB} = \pm\frac{\omega_0}{2Q_{tot}}$$

5 Risuonatori a Parametri Distribuiti

Consideriamo la seguente situazione e poniamo l'origine su uno dei due corti:



Avremo i seguenti andamenti di **tensione** e **correnti**:

$$\begin{cases} V(z) = -jZ_0 I(0) sin(kz) \\ I(z) = I(0) cos(kz) \end{cases}$$

Mentre l'**impedenza** sarà:

$$Z(z) = -jZ_0 tan(kz) \implies Z(l) = -jZ_0 tan(kl) = Z_R$$

La **pulsazione di risonanza** è quella in cui $Z = 0$, quindi:

$$Z(l) = -jZ_0 tan(kl) = 0 \implies tan(\beta l - j\alpha l) \approx$$
$$\approx tan(\beta l) + \frac{1}{cos^2(\beta l)(-j\alpha l)}$$

Se le perdite sono piccole allora:

$$\alpha l << 1$$

Quindi:

$$Z_R = jZ_0 tan(kl) \approx jZ_0 tan(\beta l) + \frac{Z_0}{cos^2(\beta l)} \alpha l$$

Quindi le **pulsazioni di risonanza** sono:

$$\omega_n : \quad \beta(\omega_n) l = (n+1)\pi, \quad n \in N_0$$

In corrispondenza delle quali:

$$Z_R = Z_0 \alpha l$$

Quindi ci sono estreme differenze tra **risuonatori** a **parametri concentrati** e quelli **distribuiti**.

In un **risuonatore a parametri concentrati** si ha **un solo valore di pulsazione di risonanza**, mentre nei **risuonatori a parametri distribuiti** se ne hanno **infiniti**.

In comune hanno che **entrambe le impedenze si annullano in risonanza**.

Altre analogie le possiamo trovare se analizziamo il comportamento dei due risuonatori in un intorno di $\omega_{0(n)}$.
Assumiamo che entrambi i **risuonatori** risuonino a:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\beta(\omega_0)l}$$

Sviluppiamo le due impedenze al primo ordine di **Taylor**:[1]

$$Z_R' \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\omega_0} - j\frac{1}{Q}\right)$$

$$Z_R \approx jZ_0 l\left[\frac{d\beta}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0) + \underbrace{Z_0\alpha l}_{f(x_0)}$$

Che coincidono se:

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \omega_0\frac{Z_0 l}{2}\left[\frac{d\beta}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_0}$$

E se:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}\left(\left[\frac{d\beta}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_0}\right)^{-1}$$

5.1 Metodo Perturbativo

Un altro metodo di valutazione è **l'analisi delle perturbazioni**.

Consideriamo una linea **non dispersiva**, ovvero con i parametri L, R, C, G **indipendenti** dalla frequenza:

$$Z_R = jZ_0 tan(\beta l)$$

[1] $f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)$

$$\beta(\omega_0)l = (n+1)\pi, \quad n \in N_0$$

Sviluppiamo Z_R al **primo ordine** in $(\omega - \omega_0)$ e valutiamone il **fattore di pendenza**:

$$\omega_0 \frac{Z_0 l}{2} \left[\frac{d\beta}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 Z_0 l \sqrt{LC}}{2}$$

Per valutare Q scriviamo **tensione** e **corrente** lungo la linea:

$$\begin{cases} V(z) = V(0)cos(\beta z) = V(0)cos(\pi/lz) \\ I(z) = -j\dfrac{V(0)}{Z_0}sin(\beta z) = -j\dfrac{V(0)}{Z_0}sin(\pi/lz) \end{cases}$$

Essendo la linea **non dispersiva**, calcoliamo W_E e W_M come:

$$\begin{cases} W_E = \dfrac{1}{4}C\displaystyle\int_l |V(z)|^2 dz \\ W_M = \dfrac{1}{4}L\displaystyle\int_l |I(z)|^2 dz \end{cases}$$

E le **potenze dissipate** come:

$$\begin{cases} P_R = \dfrac{1}{2}R\displaystyle\int_l |I(z)|^2 dz \\ P_G = \dfrac{1}{2}G\displaystyle\int_l |V(z)|^2 dz \end{cases}$$

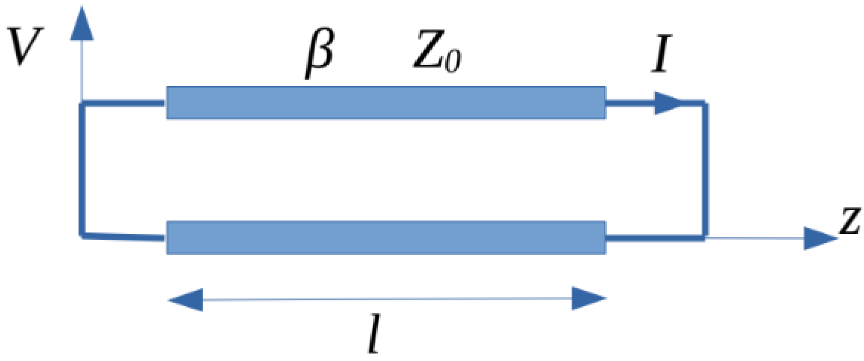
E infine calcolo Q:

$$Q = \frac{\omega_0(W_E + W_M)}{P_R + P_G} = \frac{\omega_0 \omega_{EM}}{P_R + P_G} = \left(\frac{P_R}{\omega_0 \omega_{EM}} + \frac{P_G}{\omega_0 \omega_{EM}}\right)^{-1} =$$
$$= \left(\frac{R}{\omega_0 L} + \frac{G}{\omega_0 C}\right)^{-1}$$

6 Esempi di Calcolo di Q in circuiti a parametri Distribuiti

6.1 Esempio 1

Consideriamo la seguente **linea con piccole perdite** chiusa in **corto** su entrambe le porte:



La linea avrà **piccole perdite** se:

- $\frac{R}{\omega L} << 1$

- $\frac{G}{\omega C} << 1$

Calcoliamo la **pulsazione di risonanza fondamentale** e il **Q** corrispondente:

$$\begin{cases} V(z) = -jI(0)Z_0 sin(\beta z) \\ I(z) = I(0)cos(\beta z) \end{cases}$$

Dove:

- $\beta = \omega\sqrt{LC}$

- $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Quindi:

$$\omega_0\sqrt{LC}l = \pi \implies \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{LC}l}$$

Mentre Q sarà:

$$Q = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P_{diss}} = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P^R_{diss} + P^G_{diss}} \implies Q = \left(\frac{1}{Q_R} + \frac{1}{Q_G}\right)^{-1}$$

In particolare:

$$Q_R = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P^R_{diss}}, \quad Q_G = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P^G_{diss}}$$

Dove:

$$P^R_{diss} = \frac{1}{2}\int_0^l |I(z)|^2 dz, \quad P^G_{diss} = \frac{1}{2}\int_0^l |V(z)|^2 dz$$

. Quindi:

$$W_{EM} = W_M + W_E = \frac{1}{4}L\int_0^l |I(z)|^2 dz + \frac{1}{4}C\int_0^l |V(z)|^2 dz$$

In risonanza $W_E = W_M$, quindi:

$$W_{EM} = 2W_M = \frac{1}{2}L\int_0^l |I(z)|^2 dz = \frac{1}{2}C\int_0^l |V(z)|^2 dz = 2W_E$$

Quindi ci **semplifichiamo il calcoli** facendo scelte opportune:

$$Q_R = \frac{\omega_0 \frac{1}{2}L\int_0^l |I(z)|^2 dz}{\frac{1}{2}R\int_0^l |I(z)|^2 dz} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

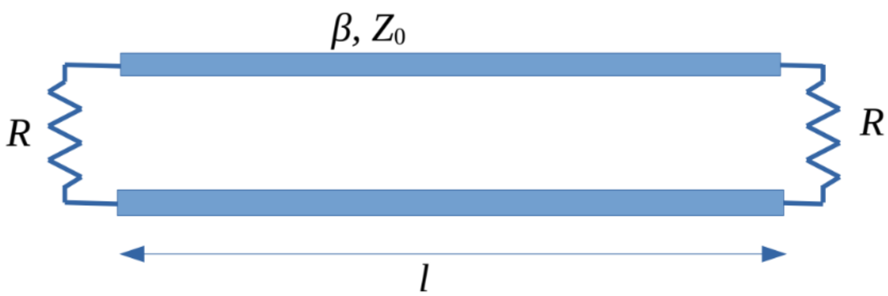
$$Q_G = \frac{\omega_0 \frac{1}{2}C\int_0^l |V(z)|^2 dz}{\frac{1}{2}G\int_0^l |V(z)|^2 dz} = \frac{\omega_0 C}{G}$$

Quindi avremo:

$$Q = \left(\frac{R}{\omega_0 L} + \frac{G}{\omega_0 C}\right)^{-1} = \frac{\omega_0 LC}{RC + LG}$$

6.2 Esempio 2

Consideriamo la seguente **linea chiusa su due resistenze, senza perdite**:



Supponggo **R piccole** in modo tale da **non variare tensioni e correnti sulla linea rispetto al caso 1**.

$$\begin{cases} V(z) = -jI(0)Z_0 cos(\beta z) \\ I(z) = I(0)cos(\beta z) \end{cases}$$

E la **pulsazione di risonanza** è:

$$\omega_0\sqrt{LC}l = \pi \implies \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{LC}l}$$

Per calcolare Q ci occorrono l'**energia immagazzinata e la potenza dissipata**:

$$P_{diss} = \frac{1}{2}R|I(0)|^2 + \frac{1}{2}R|I(l)|^2 = R|I(0)|^2$$

$$W_{EM} = 2W_M = \frac{1}{2}L|I(0)|^2\int_0^l cos^2(\beta z)dz$$

$$(\theta = \beta z \implies dz = \frac{1}{\beta}d\theta)$$

$$\implies \frac{1}{\beta}\int_0^\pi cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{\beta}\int_0^\pi \frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos(2\theta)d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\pi}{2\omega_0\sqrt{LC}} = \frac{\lambda}{4}$$

Per cui:

$$W_{EM} = \frac{1}{2}L|I(0)|^2\frac{\pi}{2\omega_0\sqrt{LC}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{L}{C}}|I(0)|^2\frac{\pi}{\omega_0}$$

Quindi:

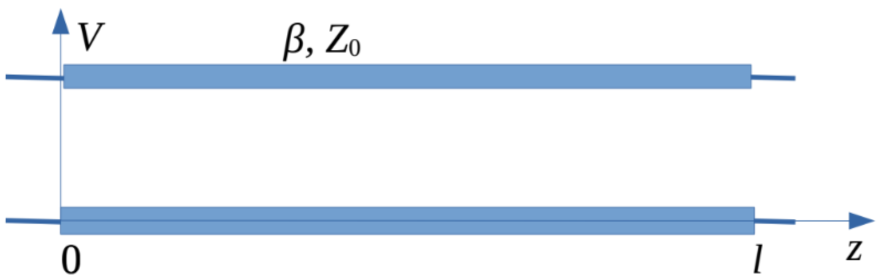
$$Q = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P_{diss}} = \frac{\omega_0\frac{1}{4}\sqrt{\frac{L}{C}}|I(0)|^2\frac{\pi}{\omega_0}}{R^2|I(0)|^2} = \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\pi}{4R} = \frac{\pi}{4}\frac{Z_0}{R}$$

Di conseguenza:

$$Q >> 1 \quad se \quad Z_0 >> R$$

6.3 Esempio 3

Nel caso in cui $Z_0 << R$, gli andamenti di V e I, sono gli stessi di una **linea aperta**:



$$\begin{cases} V(z) = V(0)cos(\beta z) \\ I(z) = -j\dfrac{V(0)}{Z_0}sin(\beta z) \end{cases}$$

$$\omega_0\sqrt{LC}l = \pi \implies \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{LC}l}$$

$$P_{diss} = \frac{1}{2}\frac{|V(0)|^2}{R} + \frac{1}{2}\frac{|V(l)|^2}{R} = G|V(0)|^2$$

$$W_{EM} = 2W_E = \frac{1}{2}C|V(0)|^2\int_0^l cos^2(\beta l)dz = \frac{1}{2}C|V(0)|^2\frac{\pi}{2\omega_0\sqrt{LC}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{C}{L}}|V(0)|^2\frac{\pi}{\omega_0}$$

Infine:

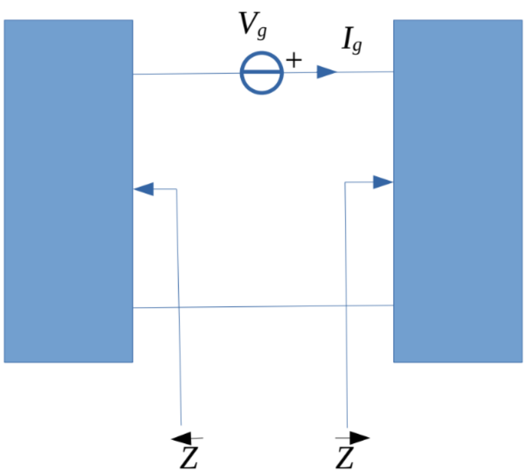
$$Q = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P_{diss}} = \frac{\omega_0\frac{1}{4}\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\pi}{\omega_0}}{G|V(0)|^2} = \sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\pi}{4G} = \frac{\pi}{4}\frac{R}{Z_0}$$

Quindi:

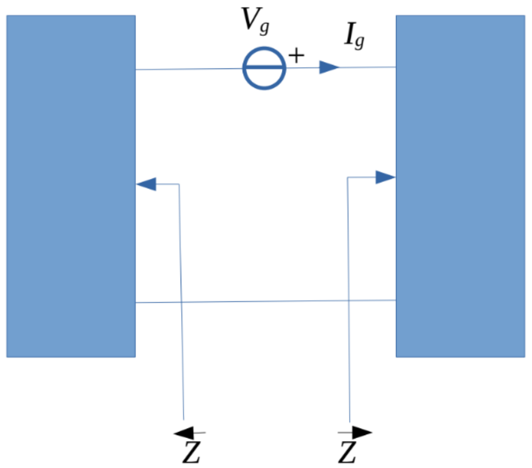
$$Q >> 1 \quad se \quad Z_0 << R$$

7 Condizioni di Risonanza su una Rete Complessa

Consideriamo una rete di **elementi concentrati** e **distribuiti senza perdite** e **senza generatori** e individuiamo una sezione che la divide in due, e alla quale posso inserire un **generatore di tensione**:



O di corrente:



Nel primo caso:

$$I = \frac{V_G}{\overleftarrow{Z}\,\overrightarrow{Z}}$$

Dove le due impedenze sono pure **reattanze**.

Può accadere che a qualche frequenza $\overleftarrow{Z} + \overrightarrow{Z} = 0$ e nel caso in cui anche V_G fosse 0, queste frequenze vengono dette di **risonanza**.

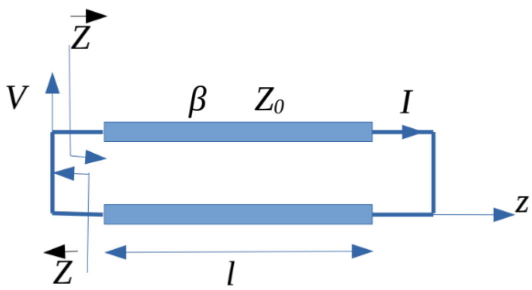
In modo analogo:

$$V = \frac{I_G}{\overleftarrow{Y}\,\overrightarrow{Y}}$$

Se $\overleftarrow{Y} + \overrightarrow{Y} = 0$ e $I_G = 0$ sono dette **frequenze di risonanza**.

Devono valere entrambe.

7.1 Esempio 1



$$\overleftarrow{Z} + \overrightarrow{Z} = 0 + jZ_0 tan(\beta l) = 0$$

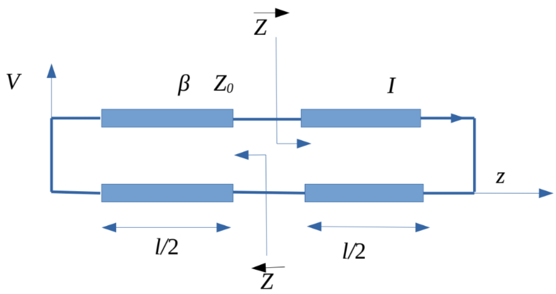
$$\implies \beta l = n\pi$$

Ma in questo caso:

$$\overleftarrow{Y} \longrightarrow \infty$$

Quindi non va bene.

7.2 Esempio 2



$$\overleftarrow{Z} + \overrightarrow{Z} = jZ_0 tan(\beta l/2) + jZ_0 tan(\beta l/2) = 2jZ_0 tan(\beta l/2) = 0$$

Le cui soluzioni sono:

$$\beta \frac{l}{2} = \frac{n}{\pi} \leftrightarrow \beta l = 2n\pi \implies l = 2n\frac{\lambda}{2} = n\lambda$$

Mentre per le **ammettenze**:

$$\overleftarrow{Y} + \overrightarrow{Y} = -jY_0 tan(\beta l/2) - jY_0 cotan(\beta l/2) = -2jY_0 cotan(\beta l/2) = 0$$

Le cui soluzioni sono:

$$\beta \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \leftrightarrow \beta l = (2n+1)\pi \implies l = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

Quindi va bene!!

Capitolo 8

Teorema di Reciprocità

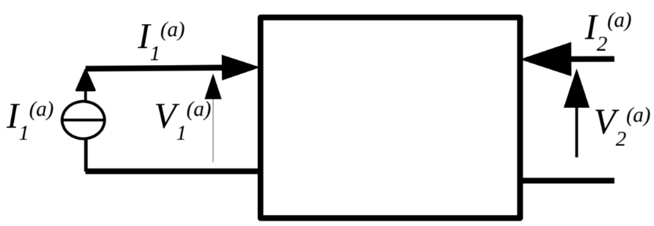
In un mezzo **lineare** e **isotropo**, i campi dovuti a sorgenti diverse sono legati dalla relazione:

$$\int_{V_s} \bar{J}_1 \cdot \bar{E}_2 - \bar{J}_2 \cdot \bar{E}_1 dV + \int_{V_s} \bar{J}_{m2} \cdot \bar{H}_1 - \bar{J}_{m1} \cdot \bar{H}_2 dV = 0$$

Applichiamo il **teorema** a un dispositivo con una porta in posizione $\bar{r}_1$ e l'altra in posizione $\bar{r}_2$:

Dividiamo ora **due situazioni**:

(a)

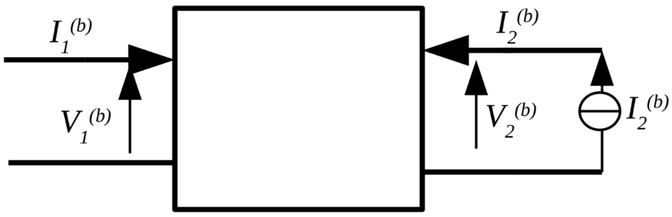


$$\bar{J}_1 = I_1^a \Delta\delta(|\bar{r} - \bar{r}_1|)\hat{i}_1$$

che produce:

$$\bar{E}_1 \quad e \quad \bar{H}_1$$

(b)



$$\bar{J}_2 = I_2^b \Delta \delta(|\bar{r} - \bar{r}_2|)\hat{i}_2$$

che produce:

$$\bar{E}_2 \quad e \quad \bar{H}_2$$

Sostituiamo nella **tesi**

$$\int_{V_s} I_1^a \Delta \delta(|\bar{r} - \bar{r}_1|)\hat{i}_1 \cdot \bar{E}_2 - I_2^b \Delta \delta(|\bar{r} - \bar{r}_2|)\hat{i}_2 dV = 0$$

Ovvero:

$$I_1^a \Delta \int_{V_s} \delta(|\bar{r} - \bar{r}_1|)\hat{i}_1 \cdot \bar{E}_2 dV = I_2^b \Delta \int_{V_s} \delta(|\bar{r} - \bar{r}_2|)\hat{i}_2 dV = 0$$

Che sfruttando la **proprietà della delta di Dirac** diventa:

$$I_1^a \Delta \hat{i}_1 \bar{E}_2(\bar{r}_1) = I_2^b \Delta \hat{i}_2 \bar{E}_1(\bar{r}_2) \qquad \textbf{(x)}$$

Possiamo assumere Δ **piccola** rispetto a λ, quindi possiamo considerare i **campi costanti** lungo Δ, quindi:

$$V_1^b = -\int_{l_1} \bar{E}_2 \cdot \hat{i}_1 dl = -\bar{E}_2(\bar{r}_1) \cdot \hat{i}_1 \Delta$$

che rappresenta la tensione alla porta 1 dovuta alla corrente I_2^b alla porta 2.

Analogamente:

$$V_2^a = -\int_{l_2} \bar{E}_1 \cdot \hat{i}_2 dl = -\bar{E}_1(\bar{r}_2) \cdot \hat{i}_2 \Delta$$

Sostituendo in (x) otteniamo:

$$\boxed{I_1^a V_1^b = I_2^b V_2^a}$$

Capitolo 9

Parametri Z di un Doppio Bipolo

In prima analisi consideriamo le **correnti indipendenti** e usiamo su ogni porta la **convenzione dell'utilizzatore**:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \Longrightarrow \underline{V} = \underline{\underline{Z}}\ \underline{I}$$

- Z_{11} e Z_{22} sono dette autoimpedenze
- Z_{12} e Z_{21} sono dette mutueimpedeze

1 Reciprocità

Un'importante proprietà è la **Reciprocità**.

Un doppio bipolo si dice **reciproco** se vale il **teorema di reciprocità**, che per un **sistema elettromagnetico vale sempre** purchè il sistema **non sia costituito da mezzi** che risentono di un **campo magnetico di polarizzazione**.

Se un **doppio bipolo** è **reciproco** allora $\underline{\underline{Z}}$ è **simmetrica**:

$$\boxed{Z_{12} = Z_{21}}$$

Applichiamo il **teorema di reciprocità**:

$$I_1^a V_1^b = I_2^b V_2^a$$

E sostituiamo:

$$\begin{cases} V_1^b = \cancel{Z_{11} I_1^b} + Z_{12} I_2^b \\ V_2^a = Z_{21} I_1^a + \cancel{Z_{22} I_2^a} \end{cases} \longrightarrow \cancel{I_1^a} Z_{12} \cancel{I_2^b} = \cancel{I_2^b} Z_{21} \cancel{I_1^a} \Longrightarrow Z_{12} = Z_{21}$$

2 Simmetria

Un'altra proprietà dei **doppi bipoli reciproci** è la **simmetria**, ovvero che se si scambia la porta 1 con la porta 2 il funzionamento del bipolo non cambia:

$$\boxed{Z_{11} = Z_{22}}$$

3 Dissipamento Potenza

L'ultima proprietà dei **bipoli reciproci** è **l'assenza di perdite** che si avvera se al suo interno **non si dissipa potenza**:

$$Re\left\{\frac{1}{2}V_1 I_1^* + \frac{1}{2}V_2 I_2^*\right\} = 0 \quad \forall I_1, I_2$$

$$Re\left\{\frac{1}{2}(Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2)I_1^* + \frac{1}{2}(Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2)I_2^*\right\} =$$
$$= Re\left\{\frac{1}{2}(Z_{11}|I_1|^2 + Z_{12}I_1I_2 + Z_{21}I_1I_2^* + Z_{22}|I_2|^2)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(Re\{(Z_{11}\}|I_1|^2 + 2Re\{Z_{12}\} * Re\left\{I_2I_1^*\right\} + Re\{Z_{22}\}|I_2|^2)\right) = 0$$
$\forall I_1, I_2$

Quindi possiamo imporre $I_2 = 0$:

$$\Longrightarrow Re\{Z_{11}\} = 0$$

Mentre se imponiamo $I_1 = 0$:

$$\Longrightarrow Re\{Z_{22}\} = 0$$

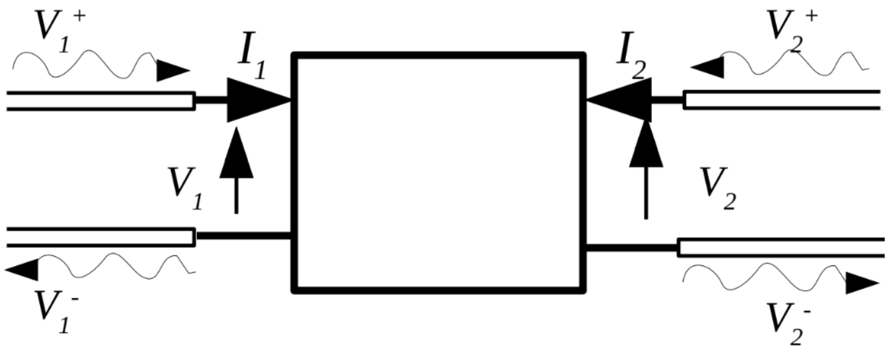
Ma se devono valere entrambe, sostituendo ottengo:

$$\boxed{Re\{Z_{12}\} = 0 = Re\{Z_{21}\}}$$

Quindi la **matrice delle impedenze** di un **doppio bipolo reciproco**, **simmetrico** e **senza perdite** è **puramente immaginaria**.

Capitolo 10

Parametri S di un Doppio Bipolo



Scegliamo le **ampiezze delle onde incidenti** come **variabili indipendenti**:

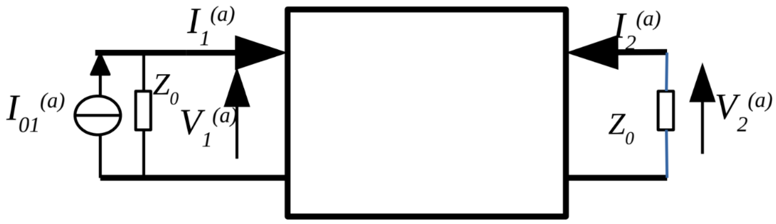
$$\begin{cases} V_1^- = S_{11}V_1^+ + S_{12}V_2^+ \\ V_2^- = S_{21}V_1^+ + S_{22}V_2^+ \end{cases} \implies \underline{V}^- = \underline{\underline{S}}\,\underline{V}^+$$

I coefficienti $S_{i,j}$ sono **adimensionali** e detti **parametri di Scattering**.

1 Reciprocità

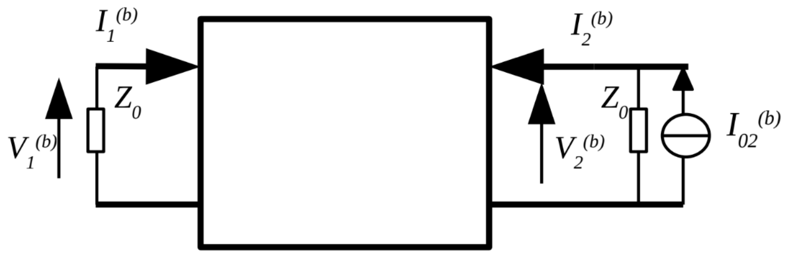
Dividiamo due casi:

(a)



$$I_{01}^{a} = 2I_1^a = 2\frac{V_1^{a+}}{Z_0}$$

(b)



$$I_{02}^{b} = 2I_1^b = 2\frac{V_2^{b+}}{Z_0}$$

Il **teorema di reciprocità** applicato in questo caso ci da:

$$I_{01}^{a}V_1^b = I_{02}^{b}V_2^a$$

Che sostituendo le **correnti** diventa:

$$V_1^{a+}V_1^b = V_2^{b+}V_2^a \qquad \textbf{(x)}$$

Calcoliamo V_2^a:

$$V_2^a = \cancel{V_2^{a+}} + V_2^{a-} = V_2^{a-} = S_{21}V_1^{a+} + \cancel{S_{22}V_2^{a+}}$$
$$\Longrightarrow V_2^a = S_{21}V_1^{a+}$$

Calcoliamo V_1^b:

$$V_1^b = \cancel{V_1^{b+}} + V_1^{b-} = V_1^{b-} = \cancel{S_{12}V_1^{b+}} + S_{12}V_2^{b+}$$
$$\Longrightarrow V_1^b = S_{12}V_2^{b+}$$

Sostituiamo in (x):

$$\cancel{V_1^{a+}}S_{12}\cancel{V_2^{b+}} = \cancel{V_2^{b+}}S_{21}\cancel{V_1^{a+}}$$

$$\boxed{\Longrightarrow S_{12} = S_{21} \Longrightarrow \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^T}$$

2 Senza Perdite

Assenza di perdite vuol dire che la **somma delle potenze attive alle due porte è nulla**.

Possiamo calcolare la potenza alle due porte tramite la **differenza della potenza incidente e quella riflessa**, quindi:

$$P_{diss} = \frac{1}{2}\frac{|V_1^+|^2}{Z_0} - \frac{1}{2}\frac{|V_1^-|^2}{Z_0} + \frac{1}{2}\frac{|V_2^+|^2}{Z_0} - \frac{1}{2}\frac{|V_2^-|^2}{Z_0} = 0$$

$$\implies \cancel{\frac{1}{2}}\frac{|V_1^+|^2}{\cancel{Z_0}} + \cancel{\frac{1}{2}}\frac{|V_2^+|^2}{\cancel{Z_0}} = \cancel{\frac{1}{2}}\frac{|V_1^-|^2}{\cancel{Z_0}} + \cancel{\frac{1}{2}}\frac{|V_2^-|^2}{\cancel{Z_0}}$$

$$\implies |V_1^+|^2 + |V_2^+|^2 = |V_1^-|^2 + |V_2^-|^2$$

In **forma matriciale** sarebbe:

$$[V_1^{+^*}, V_2^{+^*}] \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{bmatrix} = [V_1^{-^*}, V_2^{-^*}] \begin{bmatrix} V_1^- \\ V_2^- \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}^{+^H}\underline{V}^+ = \underline{V}^{-^H}\underline{V}^-$$

$$\underline{V}^{+^H}\underline{V}^+ = \left(\underline{\underline{S}}\underline{V}^+\right)^H \left(\underline{\underline{S}}\underline{V}^+\right)$$

$$\implies \underline{V}^{+^H}\underline{V}^+ = \underline{V}^{+^H}\left(\underline{\underline{S}}^H\underline{\underline{S}}\right)\underline{V}^+$$

Dato che deve valere che $\forall\ \underline{V}^+$

$$\implies \underline{\underline{S}}^H\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{I}}$$

Analizziamo ora elemento per elemento $\underline{\underline{S}}$ per **verificare se rispetta la condizione**:

$$\begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \\ S_{12}^*S_{11} + S_{22}^*S_{12} = 0 \\ S_{11}^*S_{12} + S_{12}^*S_{22} = 0 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \end{cases}$$

Ricordando che $S_{12} = S_{21}$:

$$|S_{22}|^2 = 1 - |S_{12}|^2, \quad |S_{21}|^2 = 1 - |S_{22}|^2 \implies |S_{22}|^2 = |S_{11}|^2 = s^2$$

Da cui:

$$\boxed{\begin{cases} S_{11} = se^{j\varphi_{11}} \\ S_{22} = se^{j\varphi_{22}} \\ S_{12} = S_{21} = \sqrt{1-s^2}e^{j\varphi_{12}} \end{cases}}$$

Sostituiamo in $S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} = 0$:

$$se^{-j\varphi_{11}}\sqrt{1-s^2}e^{-j\varphi_{12}} + \sqrt{1-s^2}e^{-j\varphi_{12}}se^{-j\varphi_{22}} = 0$$

Da cui:

$$e^{-j\varphi_{11}}e^{j\varphi_{12}} + e^{-j\varphi_{12}}e^{j\varphi_{22}} = 0$$

Ovvero:

$$e^{j(\varphi_{12}-\varphi_{11})} = -e^{j(\varphi_{22}-\varphi_{12})}$$

$$e^{j(\varphi_{12}-\varphi_{11})} = e^{j(\varphi_{22}-\varphi_{12}+\pi)}$$

$$\varphi_{12} - \varphi_{11} = \varphi_{22} + \varphi_{12} + \pi + 2n\pi$$

$$2\varphi_{12} = \varphi_{22} + \varphi_{11} + \pi + 2n\pi$$

$$\boxed{\varphi_{12} = \frac{\varphi_{22} + \varphi_{11}}{2} \pm \frac{\pi}{2}}$$

Capitolo 11

Parametri ABCD di un Doppio Bipolo

Per l'analisi di **bipoli** in **cascata** è conveniente che la **tensione** e la **corrente** in **uscita dal primo doppio bipolo** risultino **l'ingresso al secondo**:

$$\boxed{\begin{cases} V_1 = AV_2 + BI_2 \\ I_1 = CV_2 + DI_2 \end{cases}}$$

Dove:

- $A = \frac{V_1}{V_2}\big|_{I_2=0}$ **Adimensionale** Inverso di un **Guadagno** di **tensione** a **vuoto**
- $B = \frac{V_1}{I_2}\big|_{V_2=0}$ **Transimpedenza** tra ingresso e uscita **cortocircuitata**
- $C = \frac{I_1}{V_2}\big|_{I_2=0}$ **Transimpedenza** tra ingresso e uscita **aperta**
- $D = \frac{I_1}{I_2}\big|_{V_2=0}$ **Adimensionale** Inverso di un **Guadagno** di **corrente** di **cortocircuito**

Un **doppio bipolo lineare** può essere descritto anche dai **parametri Z**:

$$\begin{cases} V_1' = Z_{11}I_1' + Z_{12}I_2' \\ V_2' = Z_{21}I_1' + Z_{22}I_2' \end{cases}$$

Manipoliamo il sistema **ABCD** per ricondurci al **sistema dei parametri Z**:

$$V_2 = \frac{1}{C}I_1 - \frac{D}{C}I_2$$

Che sostituiamo nella prima:

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{A}{C}I_1 - \frac{AD}{C}I_2 + BI_2 = \\ &= \frac{A}{C}I_1 - \frac{(AD-BC)}{C}I_2\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{A}{C}I_1 - \frac{(AD-BC)}{C}I_2 \\ V_2 = \frac{1}{C}I_1 - \frac{D}{C}I_2 \end{cases}$$

Notando le seguenti uguaglianze tra i due sistemi:

$$\begin{cases} V_1 = V_1' \\ I_1 = I_1' \\ V_2 = V_2' \\ I_2 = -I_2' \end{cases}$$

Che sostituiamo nel sistema appena ottenuto:

$$\begin{cases} V_1' = \frac{A}{C}I_1' + \frac{(AD-BC)}{C}I_2' \\ V_2' = \frac{1}{C}I_1' + \frac{D}{C}I_2' \end{cases}$$

Quindi identifichiamo:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} = \frac{A}{C} & Z_{12} = \frac{AD-BC}{C} \\ Z_{21} = \frac{1}{C} & Z_{22} = \frac{D}{C} \end{bmatrix}$$

Quindi possiamo **sfruttare le proprietà dimostrate nel capitolo dei parametri Z**, come la **reciprocità**:

$$Z_{12} = Z_{21} \implies \frac{1}{C} = \frac{AD-BC}{C} \implies AD-BC = 1$$

E **l'assenza di perdite**:

$$Re\{Z_{11}\} = Re\left\{\frac{A}{C}\right\} = 0$$

$$Re\{Z_{22}\} = Re\left\{\frac{D}{C}\right\} = 0$$

$$Re\{Z_{12}\} = Re\{Z_{21}\} = Re\left\{\frac{1}{C}\right\} = 0$$

Che si verificano se:

- $Re\{C\} = 0$
- $Im\{A\} = 0$
- $Im\{D\} = 0$
- $Re\{B\} = 0$

Capitolo 12

Parametri di un Cavo Coassiale

Le **equazioni** che descrivono il **campo elettrico** in un **cavo coassiale** sono:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{e}_t = 0 \\ \nabla_t \cdot \underline{e}_t = \dfrac{\rho}{v\epsilon} \end{cases}$$

Dove ρ è la **carica sui conduttori**, in particolare:

$$\int_{P_1}^{P_2} \underline{e}_t \cdot \hat{i}_r dr = 1$$

Mentre le **equazioni** che regolano il **campo magnetico**:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{h}_t = \dfrac{j_z}{I} \hat{i}_z \\ \nabla_t \cdot \underline{h}_t = 0 \end{cases}$$

Dove j_z è la **densità di corrente**, indotta dal **campo magnetico**, che **circola sui conduttori**, tale che:

$$\int_{\partial S} \underline{h}_t \cdot \hat{i}_l dl = 1$$

1 Campo Elettrico e Capacità

1.1 Campo Elettrico

La **prima equazione del campo elettrico in un cavo coassiale** è soddisfatta se:

$$\underline{e}_t = -\nabla\Phi$$

Che sostituita nella seconda ci restituisce:

$$\bar{\nabla} \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{v\epsilon}$$

Analizziamo ora questa equazione tra i due **conduttori**, dove ovviamente ρ è **nullo**:

$$\nabla^2\Phi = 0$$

Ricordiamo che sui **CEP** la **componente tangente** del **campo elettrico** deve essere **nulla**:

$$\underline{e}_t \cdot \hat{i}_\varphi \quad \forall \, Punto \in C$$

Dove C è la **frontiera** della zona che stiamo considerando, ovvero quella tra i due "tubi" conduttori.

Ma questo contorno è formato da **due curve non connesse tra loro**.

Sostituiamo ora al **campo elettrico** la sua versione **potenziale**:

$$\nabla_t\Phi \cdot \hat{i}_\varphi = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right]_C = 0$$

Quindi la **derivata** qui sopra **deve fare zero**, ma questo non vuol dire che Φ deve avere lo stesso valore su entrambe le curve, basta che sia **costante su entrambe**.

$$\begin{cases} \Phi(P) = \Phi_1 = 1 \ \forall P \in C_1 \\ \Phi(P) = \Phi_2 = 0 \ \forall P \in C_2 \end{cases}$$

Assumiamo ora Φ **funzione solo di r** :

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0$$

Poniamo:

$$r\frac{d\Phi}{dr} = A_1, \quad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{A_1}{r}$$

Quindi facendo integrale da ambo le parti ottengo:

$$\Phi(r) = A_1 ln(r) + A_2$$

Quindi possiamo particolarizzare questa espressione definendo r_1 come il **raggio del tubo interno**, ed r_2 il **raggio di quello esterno**:

$$\Phi(r_2) = A_1 ln(r_2) + A_2 = \Phi_2 = 0$$

quindi da questa ricaviamo che:

$$A_2 = -A_1 ln(r_2)$$

Mentre:

$$\Phi(r_1) = A_1 ln(r_1) + A_2 = A_1 ln(r_1) \quad \underbrace{-A_1 ln(r_2)}_{A_2} = \Phi_1 = 1$$

Da quest'ultima raccogliamo A_1:

$$A_1(ln(r_1) - ln(r_2)) = A_1 ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 1$$

Quindi possiamo riscriverci:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \\ A_2 = -\dfrac{1}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} ln(r_2) \end{cases}$$

Allora possiamo riscrivere Φ:

$$\Phi = \underbrace{\frac{1}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}}_{A_1} ln(r) - \underbrace{\frac{1}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} ln(r_2)}_{A_2} =$$

$$= \frac{1}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \underbrace{(ln(r) - ln(r_2))}_{ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}$$

Possiamo sostituire questa espressione nel **campo elettrico**:

$$\underline{e}_t = -\nabla_t \Phi = -\underbrace{\frac{d\Phi}{dr}}_{\frac{A_1}{r}} \hat{i}_r = -\frac{1}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \frac{1}{r} \hat{i}_r = \frac{1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \frac{1}{r} \hat{i}_r$$

1.2 Capacità

Sappiamo che:

$$W_e = \frac{1}{2} C V^2$$

Ma abbiamo imposto V = 1, quindi diventa:

$$W_e = \frac{1}{2}C$$

Ma come calcolo W_e?

$$W_e = \frac{1}{2}\epsilon \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} |\underline{e}|^2 r \, d\varphi \, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right]^2 \frac{1}{r^2} r \, d\varphi \, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right]^2 \frac{1}{r} \, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon 2\pi \left[\frac{1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right]^2 \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr}_{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon 2\pi \left[\frac{1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\right]^{\cancel{2}} \cdot \cancel{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Quindi la **capacità** sarà:

$$C = \epsilon 2\pi \frac{1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

2 Campo Magnetico e Induttanza

2.1 Campo Magnetico

Per il **campo magnetico** analizziamo la **seconda equazione**:

$$\nabla_t \cdot \mu \underline{h}_t = 0$$

Ma ricordiamo che possiamo esprimere il **campo magnetico** attraverso il suo **potenziale scalare**:

$$\mu \underline{h}_t = \nabla_t \times (\psi \hat{i}_z) = (\nabla_t \psi) \times \hat{i}_z$$

quindi considerando **lo spazio tra i due conduttori**, le **equazioni** da risolvere saranno:

$$\begin{cases} \mu \underline{h}_t = \nabla_t \times (\psi \hat{i}_z) = (\nabla_t \psi) \times \hat{i}_z \\ \nabla_t \cdot \mu \underline{h}_t = 0 \end{cases}$$

Con la **condizione al contorno** che la **componente normale** di $\underline{b}$ deve essere **nulla**:

$$\mu \underline{h}_t \cdot \hat{i}_n = 0 \ \forall \ P \ \in \ C$$

Ovvero:

$$\mu \underline{h}_t \cdot \hat{i}_n = (\nabla_t \psi) \times \hat{i}_z \cdot \hat{i}_n = \frac{\partial \psi}{\partial c} = 0 \ \forall \ P \ \in \ C$$

$$\begin{cases} \psi(r) = \psi(r_1) = \psi_1 \ \forall P \in C_1 \\ \psi(r) = \psi(r_2) = \psi_2 \ \forall P \in C_2 \end{cases}$$

Con calcoli analoghi al caso del **campo elettrico** otteniamo l'espressione:

$$\psi(r) = B_1 ln(r) + B_2$$

Quindi:

$$\mu \underline{h}_t = (\nabla_t \psi) \times \hat{i}_z = B_1 \frac{1}{r} \hat{i}_r \times \hat{i}_z = -B_1 \frac{1}{r} \hat{i}_\varphi$$

Calcoliamone l'integrale sul **bordo di una superficie che sta tra i due conduttori**:

$$\int_{\partial S} \underline{h}_t \cdot \hat{i}_\varphi r d\varphi = \int_{[0,2\pi]} -\frac{B_1}{\mu} d\varphi = -2\pi \frac{B_1}{\mu} = I = 1$$

Dove possiamo calcolare:

$$B_1 = \frac{-\mu}{2\pi}$$

E:

$$\underline{h}_t = \frac{1}{2\pi r} \hat{i}_\varphi$$

2.2 Induttanza

Sappiamo che:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

Ma abbiamo imposto I = 1, quindi diventa:

$$W_m = \frac{1}{2}L$$

Ma come calcolo W_m?

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2}\mu\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} |\underline{h}|^2 r \, d\varphi \, dr = \\
&= \frac{1}{2}\mu\underbrace{\int_0^{2\pi}}_{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(2\pi r)^2} r \, d\varphi \, dr = \\
&= \frac{1}{2}\mu\cancel{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(2\pi r)^{\cancel{2}}} \cancel{r} \, dr = \\
&= \frac{1}{2}\mu\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(2\pi r)} dr = \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mu}{2\pi} ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)
\end{aligned}$$

Quindi l'**induttanza** sarà:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

In conclusione:

$$\boxed{\begin{cases} L = \frac{\mu}{2\pi} ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \\ C = \epsilon 2\pi \frac{1}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \end{cases}}$$

In particolare:

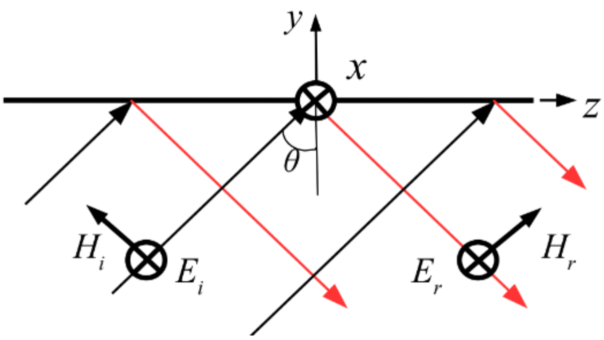
$$LC = \epsilon\mu$$

Capitolo 13

Guida a Piatti Paralleli e Guida a Sezione Rettangolare

1 Caso TE

Consideriamo, in un **mezzo omogeneo nel tempo** e nello **spazio**, **isotropo**, **spazialmente non dispersivo** e **senza perdite**, un'**onda piana incidente** su un piano **CEP**, con un angolo $\theta_i = \theta$ e **Incidenza TE**:



Il **campo elettrico** ha la sola componente **x**, **ortogonale** al piano (y,z):

$$\underline{E}_i^+ = E_i^+ \hat{i}_x = \hat{i}_x E_{i_0}^+ e^{-j\underline{k}_i \cdot \underline{r}} = \hat{i}_x E_{i_0}^+ e^{-j(k_y y + k_z z)}$$

Da notare che;

$$\underline{k}_i = k_y \hat{i}_y + k_z \hat{i}_z$$
$$k_i^2 = k^2 = \omega^2 \epsilon \mu = k_y^2 + k_z^2$$
$$k_y = k cos(\theta)$$
$$k_z = k sin(\theta)$$

Per quanto riguarda l'**onda riflessa**:

$$\underline{E}_r^+ = E_r^+ \hat{i}_x = \hat{i}_x E_{r_0}^+ e^{-j\underline{k}_r \cdot \underline{r}} = \hat{i}_x E_{r_0}^+ e^{-j(-k_y y + k_z z)}$$

Dove:

$$\underline{k}_r = -k_y\hat{i}_y + k_z\hat{i}_z$$
$$k_r^2 = k^2 = \omega^2\epsilon\mu = k_y^2 + k_z^2$$
$$k_y = kcos(\theta)$$
$$k_z = ksin(\theta)$$

Le **condizioni al contorno** del **CEP**, che si trova a coordinate (y=0) sono che la **componente tangente al piano del campo elettrico sia nulla**, ma nel caso in esame abbiamo che:

$$\underline{E}^+(x,y,z) = \underline{E}_i^+ + \underline{E}_r^+ = \hat{i}_x(E_i^+ + E_r^+)$$

è **tangente** al piano...

Bisogna **imporre** che $\underline{E}_i^+ + \underline{E}_r^+ = 0$ in y = 0:

$$\underline{E}^+(x,0,z) = \hat{i}_x\left(E_{i_0}^+ e^{-jk_z z} + E_{r_0}^+ e^{-jk_z z}\right) = 0$$

Che è **verificata** se e solo se $E_{r_0}^+ = -E_{i_0}^+$, quindi scriviamo in forma compatta:

$$\boxed{\underline{E}^+ = E^+\hat{i}_x = -2jE_{i_0}^+ sin(k_y y)e^{-jk_z z}\hat{i}_x} \qquad \text{(X)}$$

Quindi $\underline{E}^+$ si **annulla** per y = 0, ma anche **ogni**:

$$y = y_n : \quad k_y y_n = n\pi$$

Questa espressione ci dice che se poniamo **un altro CEP** ad una distanza $a = y_n$ dal piano y=0, questo piano **non perturba** il campo (X), o in altri termini se cerchiamo le **soluzioni delle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti**, tra due **CEP** distanti a (e supponiamo campo TE) ottengo l'espressione (X) che tra i due piani **rispetta le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti**.

Fissando ora a:

$$k_y a = n\pi \implies k_y = k_n = n\frac{\pi}{a}$$

Cioè per angoli:

$$\theta = \theta^{(n)} = acos\left(\frac{k_n}{k}\right) = acos\left(\frac{n\pi}{ak}\right) = n\frac{\lambda}{2a}$$

Calcoliamo ora il **campo magnetico** partendo da **Faraday-Lenz**:

$$\bar{\nabla} \times \underline{E} = -j\omega\mu\underline{H} \implies \left(\nabla_t - jk_z\hat{i}_z\right) \times \underline{E}_t = -j\omega\mu\underline{H}_t - j\omega\mu H_z\hat{i}_z$$

Da cui:

$$\begin{cases} k_z\hat{i}_z \times \underline{E}_t = \omega\mu\underline{H}_t \\ \nabla_t \times \underline{E}_t = -j\omega\mu H_z\hat{i}_z \end{cases}$$

La prima ci mostra che $\underline{H}_t$ è **proporzionale** ad $\underline{E}_t$ **ruotato** di $\pi/2$.

Ora sostituiamo (X):

$$k_z \underbrace{\hat{i}_z \times \hat{i}_x}_{\hat{i}_y} E^+ = k_z\hat{i}_y E^+ = -2jk_z E^+_{i_0} sin(k_y y)e^{-jk_z z}\hat{i}_y = \omega\mu\underline{H}_t$$

Quindi:

$$\underline{H}_t = H_y\hat{i}_y = -2j\frac{k_z}{\omega\mu}E^+_{i_0} sin(k_y y)e^{-jk_z z}\hat{i}_y$$

Dalla seconda invece, calcoliamo la **componente longitudinale** di $\underline{H}$:

$$-j\omega\mu H_z\hat{i}_z = \nabla_t \times \underline{E}_t$$

$$-j\omega\mu H_z = \hat{i}_z \cdot \nabla_t \times \underline{E}_t = \nabla_t \cdot (\underline{E}_t \times \hat{i}_z)$$

Sostituiamo (X):

$$\begin{aligned} &\nabla_t \cdot \left(2jE^+_{i_0} sin(k_y y)e^{-jk_z z}\hat{i}_y\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2jE^+_{i_0} sin(k_y y)e^{-jk_z z}\right) = \\ &= 2jk_y E^+_{i_0} cos(k_y y)e^{-jk_z z} = -j\omega\mu H_z \end{aligned}$$

Quindi:

$$H_z = -2\frac{k_y}{\omega\mu}E^+_{i_0} cos(k_y y)e^{-jk_z z}$$

Quindi **tra due CEP paralleli**, in **assenza di sorgenti**, si può **propagare un campo elettromagnetico**.

Definiamo:

$$\begin{cases} A^+_E = -2jE^+_{i_0} \\ A^+_H = -2j\frac{k_z}{\omega\mu}E^+_{i_0} = -2j\frac{k_z}{\omega\mu}\zeta H^+_{i_0} = -2j\frac{k_z}{k}H^+_{i_0} \end{cases}$$

Dato che:

$$\begin{cases} k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \\ \zeta = \dfrac{\mu}{\sqrt{\epsilon\mu}} \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere il **campo elettrico tra i due CEP** come:

$$\begin{cases} \underline{E}^+ = A_E^+ sin(k_y y)e^{-jk_z z}\hat{i}_x \\ \underline{H}_t^+ = \dfrac{k_z}{\omega\mu}\hat{i}_z \times \underline{E}_t^+ = \dfrac{k_z}{\omega\mu}A_E^+ e^{-jk_z z} sin(k_y y)\hat{i}_y = A_H^+ e^{-jk_z z} sin(k_y y)\hat{i}_y \\ H_z^+ = -j\dfrac{k_y}{\omega\mu}A_E^+ cos(k_y y)e^{-jk_z z} = -j\dfrac{k_y}{k_z}A_H^+ cos(k_y y)e^{-jk_z z} \end{cases}$$

Dove:

$$k_y = k_n = n\frac{\pi}{a}, \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_n^2} = \sqrt{k^2 - \left(n\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Diciamo però che questo campo **è possibile solo per alcuni valori** di k_y e k_z, dove:

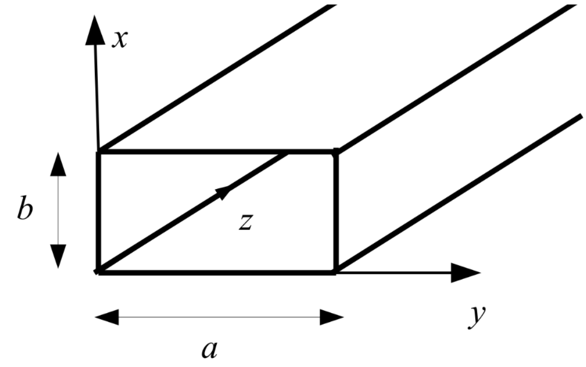
- k_y **autovalore trasverso**
- k_z **autovalore longitudinale**

Questo campo è **confinato nei due CEP** e si propaga verso Z, longitudinalmente al piano (x,y), **ma questo piano è infinito!!**

Quindi **non è realizzabile**...

Infatti se calcoliamo il **flusso di potenza** per una generica z **otterremo un flusso di potenza infinito!** Anche se la **densità di potenza** è **finita**...

Osservando le **equazioni dei campi** che abbiamo ricavato notiamo che il **campo elettrico** è tutto nella direzione x.
Quindi possiamo mettere **altri due CEP paralleli all'asse y**, separati da una distanza **b** in modo tale da **non perturbare le equazioni ottenute**:



Possiamo anche considerare il **campo nullo all'esterno di questo "tubo"**.
Mentre il **campo all'interno rispetta le condizioni a contorno**, ovvero **componenti tangenti del campo elettrico nulle sui conduttori**.

Se ora calcolassimo il **flusso di potenza** attraverso una qualsiasi sezione trasversa, sarebbe **finito**.

Questa **guida metallica NON TEM** prende il nome di **guida metallica rettangolare**.

Possiamo scomporre il **campo elettrico** nella guida come:

$$\begin{cases} \underline{E}_i^+ = E_{ix}^+ \hat{i}_x = E_{i0}^+ e^{-j(k_y y + k_z z)} \hat{i}_x \\ \underline{E}_r^+ = E_{rx}^+ \hat{i}_x = E_{r0}^+ e^{-j(-k_y y + k_z z)} \hat{i}_x \end{cases}$$

Possiamo però considerare anche:

$$\begin{cases} \underline{E}_i^- = E_{ix}^- \hat{i}_x = E_{i0}^- e^{j(-k_y y + k_z z)} \hat{i}_x \\ \underline{E}_r^- = E_{rx}^- \hat{i}_x = E_{r0}^- e^{j(k_y y + k_z z)} \hat{i}_x \end{cases}$$

Sia quelle sopra che queste sotto, sommandosi **verificano le condizioni a contorno sui CEP**:

$$\underline{E}^- = \underline{E}_i^- + \underline{E}_r^- = \underline{E}^- \hat{i}_x = -2jE_{i0}^- sin(k_y y) e^{jk_z z} \hat{i}_x = A_E^- sin(k_y y) e^{jk_z z} \hat{i}_x$$

Discorso analogo per $\underline{H}^-$, ma si può notare che basta cambiare di segno k_z:

$$\begin{cases} \underline{H}_t^- = A_H^- sin(k_y y) e^{jk_z z} \hat{i}_y \\ H_z^- = j\frac{k_y}{k_z} A_H^- cos(k_y y) e^{jk_z z} \end{cases}$$

Riassumendo, nella **guida**, in **assenza di sorgenti**, per ogni k_n troviamo un **campo TE** (E_0):

$$\begin{cases} \underline{E}^+ = \left(A_E^+ e^{-jk_z z} + A_E^- e^{jk_z z}\right) sin(k_y y)\hat{i}_x \\ \underline{H}_t^+ = \left(A_E^+ e^{-jk_z z} + A_E^- e^{jk_z z}\right) \frac{k_z}{\omega\mu} sin(k_y y)\hat{i}_y \\ H_z^+ = -j\frac{k_y}{\omega\mu}\left(A_E^+ e^{-jk_z z} + A_E^- e^{jk_z z}\right) cos(k_y y) \end{cases}$$

Possiamo ora notare che $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ sono costituite dal prodotto di una **ampiezza scalare dipendente da z**, per una **funzione vettoriale che dipende solo da y in questo caso**, ma come vedremo può dipendere anche da x e y:

$$\begin{cases} \underline{E} = \left(V^+ e^{-jk_z z} + V^- e^{jk_z z}\right) \underline{e}(x,y) = V(z)\underline{e}(x,y) \\ \underline{H}_t = \left(I^+ e^{-jk_z z} + I^- e^{jk_z z}\right) \underline{h}_t(x,y) = I(z)\underline{h}_t(x,y) \end{cases}$$

Questa **fattorizzazione non è univoca**, possiamo infatti moltiplicare $V(z)$ (o $I(z)$) e dividere $\underline{e}_t$ (o $\underline{h}_t$) per una stessa **costante** chiamate **costanti di separazione**, ed ottenere lo stesso campo.

Una di queste costanti può essere scelta imponendo:

$$\underline{e}_t = \underline{h}_t \times \hat{i}_z$$

Quindi:

$$\begin{cases} V^+ = I^+ Z_{TE} \\ V^- = -I^- Z_{TE} \\ Z_{TE} = \frac{V^+}{I^+} = \frac{A_E^+}{A_E^+ \cdot \frac{k_z}{\omega\mu}} = \frac{\omega\mu}{k_z} \end{cases}$$

Notiamo in particolar modo che l'**ampiezza del campo elettrico trasverso** ($V(z)$) e del **campo magnetico trasverso** ($I(z)$) variano lungo la guida allo stesso modo della **tensione** e della **corrente** lungo una **linea di trasmissione**:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-jk_z z} + V^- e^{jk_z z} \\ I(z) = \dfrac{V^+}{Z_{TE}} e^{-jk_z z} - \dfrac{V^-}{Z_{TE}} e^{jk_z z} \end{cases}$$

Con: $Z_{TE} = \frac{k_z}{\omega\mu}$, $\quad k_z = \sqrt{k^2 - \left(n - \frac{\pi}{a}\right)^2}$

Queste **ampiezze** rispettano le **equazioni delle linee**:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dZ} = -j\omega\mu I = -j\omega L_{eq} I \\ \dfrac{dI}{dZ} = -j\omega \dfrac{k_z^2}{\omega^2\mu} V = -j\omega C_{eq} V \end{cases}$$

Possiamo quindi **associare** alla **propagazione in guida d'onda metallica**, per un fissato k_n, **la linea TEM sopra descritta**.
Da ricordare però che in questo caso **V non è una vera tensione** e **I non è una vera corrente**.

Possiamo però creare un'altra analogia fissando la **seconda costante di separazione**, imponendo:

$$\int_S \underline{e}_t \times \underline{h}_t \cdot \hat{i}_z dS = 1$$

Dove S è la sezione trasversa della guida.

La **potenza** in una generica sezione z sarà:

$$P(z) = \int_S \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \cdot \hat{i}_z dS = \int_S \frac{1}{2} \underline{E}_t \times \underline{H}_t^* \cdot \hat{i}_z dS =$$
$$= \int_S V(z)\underline{h}_t \times I^*(z)\underline{h}_t \cdot \hat{i}_z dS = \frac{1}{2} V(z) I^*(z)$$

Notiamo che la **normalizzazione** può anche essere riscritta come:

$$\int_S \underline{e}_t \times \underline{h}_t \cdot \hat{i}_z dS = \int_S \underbrace{\underline{h}_t \times \hat{i}_z}_{\underline{e}_t} \cdot \underline{e}_t dS = \int_S \underline{e}_t \cdot \underline{e}_t dS = 1$$

Analogamente:

$$\int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t dS = 1$$

Quindi possiamo ricavare:

$$\begin{cases} \underline{e}_t = \sqrt{\dfrac{2}{ab}} sin\left(n\dfrac{\pi}{a}y\right)\hat{i}_x \\ \underline{h}_t = \sqrt{\dfrac{2}{ab}} sin\left(n\dfrac{\pi}{a}y\right)\hat{i}_y \\ h_z = -j\dfrac{k_y}{k_z}\sqrt{\dfrac{2}{ab}} cos\left(n\dfrac{\pi}{a}y\right) \end{cases}$$

Infine notiamo una **relazione** tra questi campi:

$$\nabla_t h_z = j\frac{k_y}{k_z}k_y \underbrace{\sqrt{\frac{2}{ab}} sin\left(k_y y\right)\hat{i}_y}_{\underline{h}_t} = j\frac{k_y^2}{k_z}\underline{h}_t = j\frac{k_y^2}{k_z}\hat{i}_z \times \underline{e}_t$$

Ragionando possiamo dire che è possibile fare dei calcoli del tutto analoghi ruotando la guida e considerando un'onda che incide sul piano (y,z), anzichè sul piano (x,z).

Facendo le stesse **considerazioni** e **normalizzazioni** avremo:

$$\nabla_t h_z = -j\sqrt{\frac{2}{ab}}\frac{k_x}{k_z}\left(m\frac{\pi}{b}\right) sin\left(m\frac{\pi}{b}\right)\hat{i}_x = j\frac{k_x^2}{k_z}\underline{h}_t = j\frac{k_x^2}{k_z}\hat{i}_z \times \underline{e}_t$$

Questa espressione, come quella del primo caso, ci dice che le **componenti dei campi trasversi** possono essere ricavati mediante le **componenti longitudinali** a patto che esse **rispettino le condizioni al contorno** che per h_z sarebbero **derivata nulla sui conduttori**.

Assumiamo per h_z una forma generale:

$$h_z = jacos\left(n\frac{\pi}{a}y\right)cos\left(m\frac{\pi}{b}x\right)$$

E valutiamone il gradiente:

$$\nabla_t h_z = -jA\left[\left(n\frac{\pi}{a}\right) sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right)cos\left(m\frac{\pi}{b}x\right)\hat{i}_y + \right.$$
$$\left. + \left(m\frac{\pi}{b}\right)cos\left(n\frac{\pi}{a}y\right) sin\left(m\frac{\pi}{b}x\right)\hat{i}_x\right]$$

Confrontandola con le altre possiamo asserire che $\hat{i}_z \times \nabla_t h_z$ **soddisfa le condizioni a contorno**:[1]

$$\underline{e}_t = jC\hat{i}_z \times \nabla_t h_z = B\left[sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right)cos\left(m\frac{\pi}{b}x\right)\hat{i}_x - cos\left(n\frac{\pi}{a}y\right)sin\left(m\frac{\pi}{b}x\right)\hat{i}_y\right]$$

Perchè così le **componenti tangenti del campo elettrico** si **annullano sulle pareti** del conduttore!! Infatti:

$$\begin{cases} e_x(x,0) = e_x(x,a) = 0 \\ e_y(0,y) = e_y(b,y) = 0 \end{cases}$$

Ce ne sono due perchè l'onda incide su tutti e 4 i piani, quindi vuol dire che $\underline{k}$ avrà 3 componenti:

$$\underline{k} = k_x\hat{i}_x + k_y\hat{i}_y + k_z\hat{i}_z = \underline{k}_{t_{nm}} + k_z\hat{i}_z$$

Dove:

$$\begin{cases} k_x = m\dfrac{\pi}{b} \\ k_y = n\dfrac{\pi}{a} \\ k_{z_{nm}} = \sqrt{k^2 - k_{t_{nm}}^2} = \sqrt{k^2 - \left(m\dfrac{\pi}{b}\right)^2 - \left(n\dfrac{\pi}{a}\right)^2} \end{cases}$$

Quindi in una **guida metallica rettangolare** si possono propagare una **doppia infinità numerabile di modi ad ogn'uno dei quali possiamo associare una linea di trasmissione equivalente** con i seguenti parametri:

$$L_{eq} = \mu, \quad C_{eq} = \frac{k_{z_{nm}}^2}{\omega^2\mu}$$

In particolare il modo che si propaga con il k_z più grande è detto modo fondamentale.

1.1 Il Fenomeno del Cut-Off nelle Guide Metalliche

Consideriamo il seguente **modo (n,m)** costituito dalle seguenti **onde di tensione** e di **corrente** equivalenti che si propagano in una

[1] A e B sono costanti di normalizzazione

guida a sezione rettangolare con **costante di propagazione** $K_{z_{n,m}}$ (consideriamo per semplicità solo quelle nella direzione positiva di z):

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-jK_{z_{n,m}} z} \\ I(z) = \dfrac{V^+}{Z_{TE}^{n,m}} e^{-jK_{z_{n,m}} z} \end{cases}$$

Dove:

$$K_{z_{n,m}} = \sqrt{K^2 - K_{t_{n,m}}^2}$$

In particolare:

$$K^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

Che è **funzione** di ω, mentre $K_{t_{n,m}}^2$ è **indipendente** da ω, quindi possiamo calcolare la particolare **pulsazione** $\omega_{t_{n,m}}$ che **annulla** $K_{z_{n,m}}$:

$$\omega_{t_{n,m}} = \frac{K_{t_{n,m}}}{\epsilon \mu}$$

Per **pulsazioni maggiori** di $\omega_{t_{n,m}}$ il radicando è **positivo** e quindi la radice ammette una **determinazione reale positiva**.
Tuttavia per **pulsazioni minori** di $\omega_{t_{n,m}}$ il radicando è **negativo** e quindi la radice ammette **due determinazioni immaginarie**, dove:

- La determinazione **immaginaria positiva** corrisponde ad un **campo che cresce nella direzione positiva delle z**, ma il mezzo è **passivo** quindi **non è una soluzione fisica**;
- La determinazione **immaginaria negativa** corrisponde ad un **campo che si attenua lungo le z positive**, ma questa attenuazione è di tipo **reattivo**.

Possiamo quindi dire che:

$$\begin{cases} K_{z_{n,m}} = \sqrt{K^2 - K_{z_{n,m}}^2} = \beta_{n,m},\ sse\ \omega > \omega_{t_{n,m}} \\ K_{z_{n,m}} = \sqrt{K^2 - K_{z_{n,m}}^2} = -j\alpha_{n,m},\ sse\ \omega < \omega_{t_{n,m}} \end{cases}$$

Quindi **ogni modo si propaga solo per pulsazioni superiori alla pulsazione** $\omega_{t_{n,m}}$ detta **pulsazione di taglio del modo**.

Il modo che la **pulsazione di taglio più bassa** (che quindi si propaga prima) è il **modo fondamentale**.

Per esempio, considerando una **guida rettangolare metallica** con $a > b$, il **modo fondamentale** è il TE_{10}:

$$K_{t_{10}} = \frac{\pi}{a}$$

$$\omega_{t_{10}} = \frac{\pi}{a\epsilon\mu}$$

$$K_{z_{10}} = \sqrt{K^{-}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Una cosa interessante che possiamo elaborare da queste informazioni è che una **guida metallica semplicemente connessa** si comporta come un **filtro passa alto** dato che al di sotto della **pulsazione di taglio** non lascia propagare nulla.

Valutiamo ora il **flusso di potenza** ad una qualsiasi sezione della **guida**:

$$P(z) = \int_S \frac{1}{2}\underline{E} \times \underline{H}^* \cdot \hat{i}_z dS = \int_S \frac{1}{2}\underline{E}_t \times \underline{H}_t^* \cdot \hat{i}_z dS =$$
$$= \int_S V(z)\underline{e}_t \times I^*(z)\underline{h}_t \cdot \hat{i}_z = \frac{1}{2}V(z)I^*(z)$$

dove per $\omega > \omega_{t_{n,m}} \implies K_{z_{n,m}} = \beta_{n,m}$:

$$P = \frac{1}{2}V^+ e^{-jK_{z_{n,m}}z} \; \frac{V^{+^*}}{Z_{TE}^{n,m^*}} e^{jK^*_{z_{n,m}}z} = \frac{1}{2}|V^+|^2 \frac{\beta_{n,m}}{\omega\mu}$$ [2]

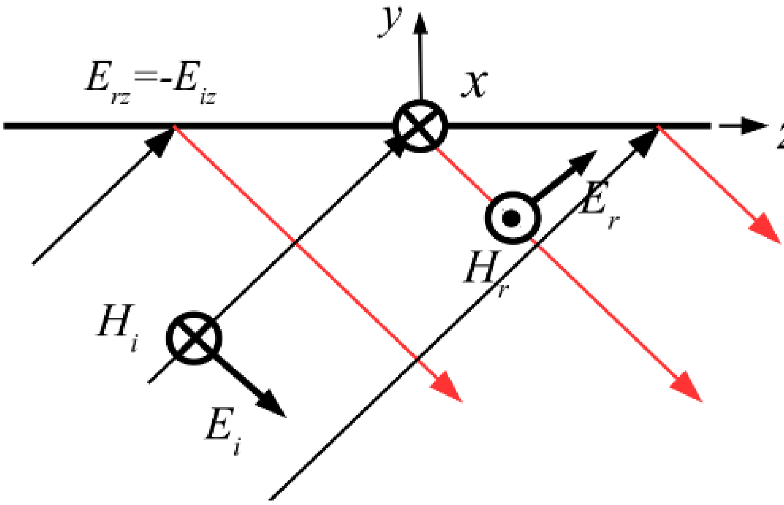
Quindi in questo caso abbiamo una **potenza attiva**, mentre nel caso contrario $\omega < \omega_{t_{n,m}} \implies K_{z_{n,m}} = -j\alpha_{n,m}$:

$$P = \frac{1}{2}V^+ e^{-jK_{z_{n,m}}z} \; \frac{V^{+^*}}{Z_{TE}^{n,m^*}} e^{jK^*_{z_{n,m}}z} = \frac{1}{2}j\frac{\alpha_{n,m}}{\omega\mu}|V^+|^2 e^{-2\alpha_{n,m}z}$$

Quindi in questo caso abbiamo una **potenza alla generica sezione puramente reattiva** e diminuisce con z.

[2] dove $Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{K_z}$

2 Caso TM



$$\begin{cases} \underline{E}_i = E_{i_0} e^{-j(k_y y - k_z z)} \\ E_{i_z} = E_{i_{0_z}} e^{-(jk_y y - k_z z)} \\ \underline{E}_z = E_{i_{0_z}} e^{-jk_z z}\left(e^{-jk_y y} - e^{jk_y y}\right) = -E_{i_{0_z}} e^{-jk_z z} 2jsin(k_y y) \end{cases}$$

Mentre il campo elettrico riflesso sarà:

$$\begin{cases} \underline{E}_r = E_{r_0} e^{j(k_y y - k_z z)} \\ E_{r_z} = \underbrace{E_{r_{0_z}}}_{-E_{i_{0_z}}} e^{j(k_y y - k_z z)} \end{cases}$$

Possiamo fare questa sostituzione perchè sul contorno la somma:

$$E_{i_z} + E_{r_z} = 0$$

Quindi se $k_y = \frac{n\pi}{a}$ posso mettere un altro piano rispettando le condizioni.

Capitolo 14

Diagramma di Dispersione - Velocità di Fase e Velocità di Gruppo

Consideriamo ora un **generico modo** con **pulsazione di taglio** ω_t e valutiamo per $\omega > \omega_t$ la funzione:

$$\omega = \omega(\beta_z)$$

Che ci viene data in forma implicita da:

$$\beta_z^2 = K^2 - K_t^2$$

Ovvero:

$$\beta_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - K_t^2$$

Dividendo ora entrambi i membri per K_t^2 otteniamo:

$$\frac{\omega^2}{K_t^2 c^2} - \frac{\beta_z^2}{K_t^2} = 1$$

E ricordando che $\omega_t = \frac{K_t}{\sqrt{\epsilon\mu}}$:

$$\frac{\omega^2}{\omega_t^2} - \frac{\beta_z^2}{K_t^2} = 1$$

Che non è altro che l'**equazione di un'iperbole**, i cui **asintoti** si calcolano facendo tendere $\beta_z \longrightarrow \infty$:

$$\frac{\omega^2}{\omega_t^2} - \frac{\beta_z^2}{K_t^2} = 1$$

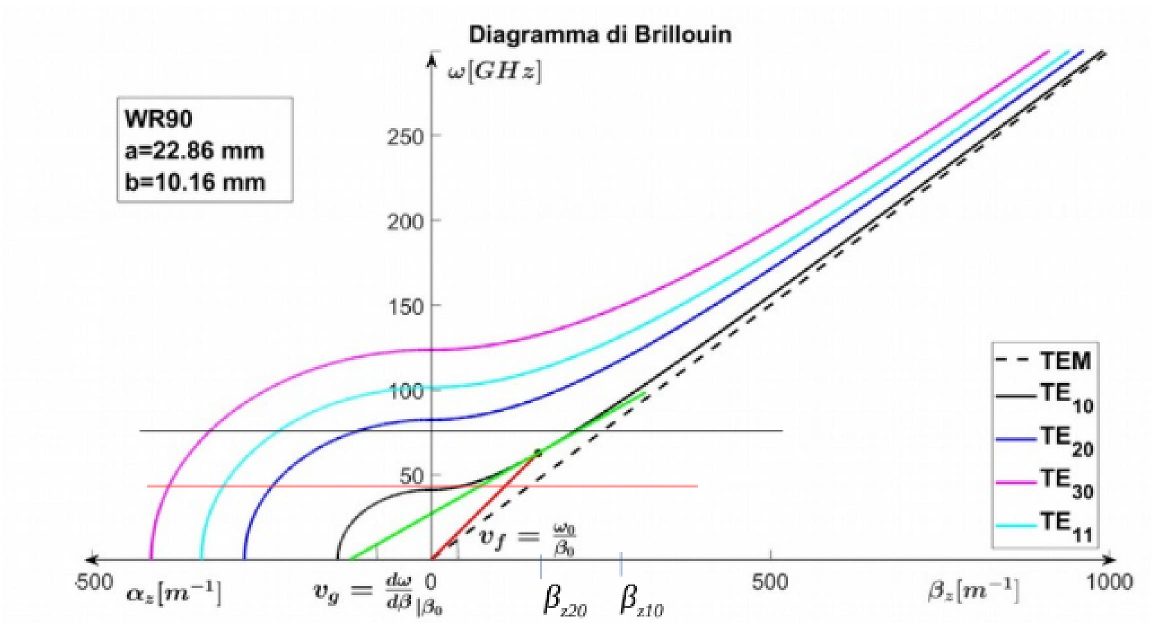
$$\frac{\omega^2}{\omega_t^2} = 1 + \frac{\beta_z^2}{K_t^2}$$

Faccio tendere β_z all'infinito

$$\frac{\omega^2}{\omega_t^2} = \frac{\beta_z^2}{K_t^2}$$

Da cui ci possiamo ricavare l'equazione dell'**asintoto obliquo**:

$$\omega = \frac{\omega_t}{K_t}\beta_z = c\ \beta_z$$



Consideriamo **un punto su un ramo di iperbole**, ad esempio quella nera, relativa al **modo fondamentale** TE_{10}, chiamandolo (ω_0, β_0) e tracciamo la **secante** a questo punto passante per l'origine (la retta rossa), che ha come equazione:

$$\omega = v_{fase}\beta_z$$

Dove il **coefficiente angolare** è:

$$v_{fase} = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

E che dovrebbe rappresentare la **velocità di propagazione di un segnale di pulsazione** ω_0 sul **modo fondamentale**.
Tuttavia come si evince dal disegno $v_f > c$ ma questo è **impossibile**!!

Per questo la **vera velocità** con cui viene trasportata l'informazione non è v_{fase} ma:

$$v_{gruppo} = \frac{d\omega}{d\beta_z}(\omega_0)$$

Che non è altro che il **coefficiente angolare della retta tangente al punto** (linea verde) che è **più piccolo della velocità della luce**.

Ritorniamo ora a questa relazione:

$$\frac{\omega^2}{\omega_t^2} = 1 + \frac{K_z^2}{K_t^2}$$

$$\omega^2 = \omega_t^2 + \omega_t^2 \frac{K_z^2}{K_t^2}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_t^2 + c^2 K_z^2}$$

Ed ora differenziamola:

$$\frac{d\omega}{dK_z} = \frac{1}{2} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\omega_t^2 + c^2 K_z^2}}_{\omega}} 2c^2 K_z = \frac{c^2 K_z}{\omega} = v_{gruppo} = c^2 \cdot \frac{1}{v_f}$$