ACHILLE
CANNAVALE

APPUNTI

ONDE ELETTROMAGNETICHE

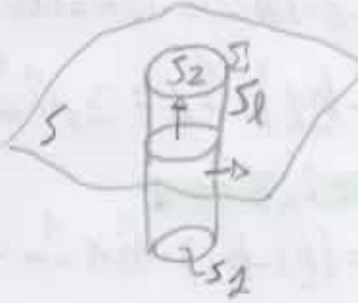
2023

CIAO! QUESTI APPUNTI SONO FRUTTO DEL MIO STUDIO E DELLA MIA INTERPRETAZIONE, QUINDI POTREBBERO CONTENERE ERRORI, SVISTE O COSE MIGLIORABILI. BUONO STUDIO📚✍️

CONSIDERIAMO LE EQ. DI MAXWELL IN FORMA INTEGRALE:

$$\begin{cases} \int_{\partial S} \underline{e} \cdot \hat{i}_l \, dl = -\int_S \frac{\partial \underline{b}}{\partial t} \cdot \hat{i}_m \, dS \\ \int_{\partial S} \underline{h} \cdot \hat{i}_l \, dl = \int_S \left(\frac{\partial \underline{d}}{\partial t} + \underline{J} \right) \cdot \hat{i}_m \, dS \\ \int_{\partial V} \underline{d} \cdot \hat{i}_m \, dS = \int_V \rho \, dV \\ \int_{\partial V} \underline{b} \cdot \hat{i}_m \, dS = 0 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO COME VOLUME QUELLO DI UN CILINDRO CON UNA SUPERFICIE CHE LO DIVIDE.



$$\Delta q = \oint_{\Sigma} \underline{d} \cdot \hat{i}_m \, dS$$

$$= \iint_{S_1} \underline{d}_1 \cdot \hat{i}_m \, dS + \iint_{S_2} \underline{d}_2 \cdot \hat{i}_m \, dS + \iint_{S_l} \underline{d} \cdot \hat{i}_m \, dS$$

→ FACCIAMO TENDERE Δl A 0

COSÌ L'INTEGRALE DELLA SUPERFICIE LATERALE VA A ZERO, COME LA CARICA Δq A MENO CHE NON SIA PRESENTE UNA CARICA SUPERFICIALE Δq_S.

IN QUESTO CASO APPLICHIAMO IL TEOREMA DELLA MEDIA:

$$\underline{d}_2(\underline{\xi}_2, t) \cdot \hat{i}_m \Delta S_2 - \underline{d}_1(\underline{\xi}_1, t) \cdot \hat{i}_m \Delta S_1 = (\underline{d}_2(\underline{\xi}_2, t) - \underline{d}_1(\underline{\xi}_1, t)) \cdot \hat{i}_m \Delta S = \Delta q_S$$

DATO CHE $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$.

FACCIO TENDERE A ZERO ΔS E OTTENGO:

$$\boxed{(\underline{d}_2 - \underline{d}_1) \cdot \hat{i}_m = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q_S}{\Delta S} = \rho_S}$$

DENSITÀ DI CARICA SUP.

IN MODO ANALOGO OTTENGO:

$$\boxed{(\underline{b}_2 - \underline{b}_1) \cdot \hat{i}_m = 0}$$

CONSIDERIAMO ORA L'EQ. DI AMPERE-MAXWELL:

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma_m} \underline{d} \cdot \hat{m} \, dS + \iint_{\Sigma_m} \underline{J} \cdot \hat{m} \, dS = \oint_{\Pi} \underline{h} \cdot \hat{i}_l \, dl =$$

$$= \int_{l_1} \underline{h}_1 \cdot \hat{i}_l \, dl + \int_{l_2} \underline{h}_2 \cdot \hat{i}_l \, dl + \int_{d_1} \underline{h} \cdot \hat{i}_l \, dl + \int_{d_2} \underline{h} \cdot \hat{i}_l \, dl$$

FACENDO TENDERE d A ZERO, L'INTEGRALE SU d_1 E d_2 VA A ZERO, COME ANCHE IL FLUSSO DI $\underline{d}$ ATTRAVERSO S.

IL FLUSSO DI $\underline{J}$ INVECE TENDE A ZERO SE C'È SOLO CORRENTE DI VOLUME, MENTRE DA UN CONTRIBUTO NON NULLO SE C'È UNA DENSITÀ DI CORRENTE SUP.

$\underline{J}_s = \Delta q \cdot \underline{v}$

APPLICHIAMO IL TH DELLA MEDIA:

$$\underline{h}_2(\underline{\xi}_2,t)\cdot\hat{i}_t\Delta l_2-\underline{h}_1(\underline{\xi}_1,t)\cdot\hat{i}_t\Delta l_1=(\underline{h}_2-\underline{h}_1)\cdot\hat{i}_t\Delta l=\underline{J}_s\,\hat{m}\,\Delta l$$

DIVIDO PER Δl E FACCIO TENDERE A ZERO:

$$(\underline{h}_2-\underline{h}_1)\cdot\hat{i}_t=\underline{J}_s\cdot\hat{m}$$

DATO CHE $\hat{i}_t=\hat{m}\times\hat{i}_m$:

$$\underline{J}_s\cdot\hat{m}=(\underline{h}_2-\underline{h}_1)\cdot\hat{m}\times\hat{i}_m=\hat{m}\cdot\hat{i}_m\times(\underline{h}_2-\underline{h}_1)=\hat{i}_m\times(\underline{h}_2-\underline{h}_1)\cdot\hat{m}$$

DATO CHE $\hat{m}$ È ARBITRARIO HO CHE:

$$\boxed{\underline{J}_s=\hat{i}_m\times(\underline{h}_2-\underline{h}_1)}$$

CHE CI DICE CHE IN PRESENZA DI DISCONTINUITÀ LE COMPONENTI TANGENTI DEL CAMPO MAGNETICO SONO CONTINUE A MENO DI UNA DENSITÀ DI CORRENTE SUPERFICIALE.

IN MODO ANALOGO RICAVO DA FARADAY-LENZ:

$$\boxed{\hat{i}_m\times(\underline{e}_2-\underline{e}_1)=0}$$

$\rightarrow$ OVVERO LE COMPONENTI TANGENZIALI DEL CAMPO ELETTRICO SONO SEMPRE CONTINUE

Achille Cannavale

POYNTING NEL TEMPO

DEFINIAMO LA FORZA DI LORENTZ COME LA FORZA ESERCITATA SU UNA CARICA UNITARIA:

$$\underline{F} = q(\overbrace{\underline{e}}^{\text{COULOMB}} + \underline{v} \times \underline{b})$$

LORENTZ

POSSIAMO POI INTRODURRE LA DENSITÀ DI CARICA VOLUMETRICA ρ: $\underline{F} = \rho\, \delta w (\underline{e} + \underline{v} \times \underline{b})$

VOLUME

1 SE UNITARIO

CONSIDERANDO CHE $\rho \cdot \underline{v} = \underline{J} \Rightarrow \underline{f} = \rho\underline{e} + \underline{J} \times \underline{b}$

SE ORA CONSIDERIAMO QUESTA FORZA $\underline{F}$ IN UN INTERVALLO dt, COMPIRÀ UN LAVORO:

$$dL = \underline{F} \cdot \underline{v}\, dt = \rho\, \delta w (\underline{e} + \underbrace{\underline{v} \times \underline{b}) \cdot \underline{v}}_{0}\, dt$$

$$dL = \rho\, \delta w\, \underline{e} \cdot \underline{v}\, dt \Rightarrow dL = \delta w\, \underline{e} \cdot \underline{J}\, dt \xrightarrow{\text{UNITARIO}} \frac{dL}{dt} = \underline{e} \cdot \underline{J}$$

ORA STUDIAMO IL CASO IN CUI $\underline{J}$ SIA UNA CORRENTE DI CONDUZIONE:

$$\underline{J} = \underline{J}_c = \sigma \underline{e} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \underline{e} \cdot \underline{J}_c = \sigma |\underline{e}|^2$$

IL SECONDO CASO È QUELLO IN CUI LE CARICHE SONO MANTENUTE IN MOTO DA FORZE ESTERNE: $\underline{J} = \underline{J}_0 \Rightarrow -\frac{dL}{dt} = -\underline{e} \cdot \underline{J}_0$

CONSIDERIAMO LE EQ. DI MAXWELL IN UN MEZZO LINEARE, ISOTROPO, OMOGENEO NEL TEMPO E NON DISPERSIVO CON SORGENTI IMPRESSE $\underline{J}_0$:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{e} = -\mu \dfrac{\partial \underline{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{h} = \varepsilon \dfrac{\partial \underline{e}}{\partial t} + \sigma \underline{e} + \underline{J}_0 \\ \nabla \cdot \varepsilon \underline{e} = \rho \\ \nabla \cdot \mu \underline{h} = 0 \end{cases}$$

VETTORE DI POYNTING

$$\boxed{\underline{S} = \underline{e} \times \underline{h}}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \cdot \underline{S} = \underline{h} \cdot \nabla \times \underline{e} - \underline{e} \cdot \nabla \times \underline{h}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{h} \cdot \left(-\mu \frac{\partial \underline{h}}{\partial t}\right) - \underline{e} \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial \underline{e}}{\partial t} + \sigma \underline{e} + \underline{J}_0\right)$$

$$\rightarrow -\mu \frac{1}{2} \frac{\partial |\underline{h}|^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial |\underline{e}|^2}{\partial t} - \sigma |\underline{e}|^2 - \underline{e} \cdot \underline{J}_0$$ → INTEGRO IN UN VOLUME

$$\rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \mu |\underline{h}|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon |\underline{e}|^2 \, dV - \underbrace{\int_V \sigma |\underline{e}|^2 \, dV}_{\text{POT. DISSIPATA}} - \underbrace{\int_V \underline{e} \cdot \underline{J}_0 \, dV}_{\text{POT. GENERATA}}$$

→ APPLICO L'INTEGRALE A ∞

$$\rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\infty} \frac{1}{2} \mu |\underline{h}|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon |\underline{e}|^2 \, dV - \int_{V_\infty} \sigma |\underline{e}|^2 \, dV - \int_{V_\infty} \underline{e} \cdot \underline{J} \, dV = 0$$

ALL'INFINITO IL CAMPO È NULLO

NON C'È POTENZA SCAMBIATA CON L'ESTERNO Φ_p.

$$\rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\infty} \frac{1}{2} \mu |\underline{h}|^2 + \varepsilon |\underline{e}|^2 \, dV}_{\text{VARIAZIONE DELL'ENERGIA INTERNA IN UN ISTANTE DI TEMPO}} = P_G - P_D = \frac{dW}{dt}$$

VARIAZIONE DELL'ENERGIA INTERNA IN UN ISTANTE DI TEMPO → $W_e = \frac{1}{2} \varepsilon |\underline{e}|^2$, $W_m = \frac{1}{2} \mu |\underline{h}|^2$

W_e → DENSITÀ DI ENERGIA ELETTRICA

W_m → DENSITÀ DI ENERGIA MAGNETICA

SE TORNIAMO AL GENERICO VOLUME V OTTENIAMO:

$$\boxed{\int_{\partial V} \underline{S} \cdot \hat{i}_n \, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V W_e + W_m \, dV - P_D + P_G = \Phi_p}$$

→ QUINDI IL FLUSSO DI $\underline{S}$ ATTRAVERSO LA FRONTIERA DI ∂V È UGUALE ALLA DIFFERENZA DI POTENZA GENERATA E DISSIPATA E LA VARIAZIONE DI ENERGIA NEL VOLUME IN UN ISTANTE DI TEMPO, OVVERO LO SCABIO DI POTENZA CON L'ESTERNO Φ_p.

POTENZA NEI FASORI

SIANO:

$$v(t) = v_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$
$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \psi)$$
$$\Rightarrow p(t) = v(t) \cdot i(t) = v_0 i_0 \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \psi)$$

POSTO $\varphi = \psi - \alpha \Rightarrow p(t) = v_0 i_0 \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \varphi + \alpha)$

$$\Rightarrow = v_0 i_0 \cos(\omega t + \alpha)\left[\cos(\omega t + \alpha)\cos(\varphi) - \sin(\omega t + \alpha)\sin(\varphi)\right] =$$

$$\Rightarrow = v_0 i_0 \left[\cos^2(\omega t + \alpha)\cos(\varphi) - \cos(\omega t + \alpha)\sin(\omega t + \alpha)\sin(\varphi)\right] =$$

$\Rightarrow$ DATO CHE: $\left| \begin{array}{l} \sin(\gamma)\cos(\gamma) = \frac{1}{2}\sin(2\gamma) \\ \cos^2(\gamma) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\gamma)) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{2} v_0 i_0 \cos(\varphi)\left[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)\right] - \frac{1}{2} v_0 i_0 \sin(\varphi)\sin(2\omega t + 2\alpha)$

$\Rightarrow$ IL PRIMO TERMINE È LA POTENZA CEDUTA ALL'IMPEDENZA, MENTRE IL SECONDO È UN TERMINE OSCILLANTE CHE VARIA DI SEGNO E RAPPRESENTA UNA ENERGIA PER UNITÀ DI TEMPO CHE VIENE SCAMBIATA TRA IL GENERATORE E L'IMPEDENZA.

PASSIAMO ORA AL DOMINIO DEI FASORI:

$$V = v_0 e^{j\alpha} \longleftrightarrow v(t) = Re\{V e^{j\omega t}\}$$
$$I = i_0 e^{j\psi} \longleftrightarrow i(t) = Re\{I e^{j\omega t}\}$$
$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} v_0 e^{j\alpha} i_0 e^{-j\psi} =$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2} v_0 i_0 e^{j(\alpha - \psi)} = \frac{1}{2} v_0 i_0 e^{j\varphi} = \underbrace{\frac{1}{2} v_0 i_0 \cos(\varphi)}_{\text{POT. ATTIVA}} + j\underbrace{\frac{1}{2} v_0 i_0 \sin(\varphi)}_{\text{POT. REATTIVA}}$$

CONSIDERIAMO ORA LE EQ. DI MAXWELL PER MEZZI LINEARI, ISOTROPI, INVARIANTI NEL TEMPO, MA SOLO SPAZIALMENTE NON DISPERSIVI:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon \underline{E} + \sigma \underline{E} + \underline{J}_0 \\ \nabla \cdot \varepsilon \underline{E} = \rho \\ \nabla \cdot \mu \underline{H} = 0 \end{cases}$$

DOVE μ E ε DIPENDONO DA ω E SONO COMPLESSI.

COME GIÀ VISTO NEL TEMPO;

$$p_G(t) = -\underline{e} \cdot \underline{j}_0 \Rightarrow \underline{P}_G = -\frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{J}_0^*$$
$$p_d(t) = \sigma |\underline{e}|^2 \Rightarrow \underline{P}_d = \frac{1}{2} \sigma |\underline{E}|^2$$

DEFINIAMO ANCHE: $\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \Rightarrow$ CALCOLIAMONE $\nabla \cdot \underline{S}$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H}^*)=\frac{1}{2}\underline{H}^*\cdot(\nabla\times\underline{E})-\frac{1}{2}\underline{E}\cdot(\nabla\times\underline{H}^*)=$$

$$\varepsilon=\varepsilon_R-j\varepsilon_I$$
$$\mu=\mu_R-j\mu_I$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\underline{H}^*\cdot(-j\omega\mu\underline{H}^*)-\frac{1}{2}\underline{E}\cdot(j\omega\varepsilon\underline{E}+\sigma\underline{E}+\underline{J}_0)^*=$$

$$\rightarrow -\frac{j\omega}{2}(\mu_R-j\mu_I)|\underline{H}|^2+\frac{j\omega}{2}(\varepsilon_R+j\varepsilon_I)|\underline{E}|^2-\frac{1}{2}\sigma|\underline{E}|^2-\frac{1}{2}\underline{E}\cdot\underline{J}_0^*=$$

SEPARIAMO ORA PARTE REALE E PARTE IMMAGINARIA;

- REALE

$$-\frac{1}{2}\omega\mu_I|\underline{H}|^2-\frac{1}{2}\omega\varepsilon_I|\underline{E}|^2-\frac{1}{2}\sigma|\underline{E}|^2-\frac{1}{2}Re\{\underline{E}\cdot\underline{J}_0^*\}$$

- IMMAGINARIA

$$-\frac{1}{2}\omega\mu_R|\underline{H}|^2+\frac{1}{2}\omega\varepsilon_R|\underline{E}|^2-\frac{1}{2}Im\{\underline{E}\cdot\underline{J}_0^*\}$$

$$\int_V\nabla\cdot\underline{S}_R\,dV=\int_{\partial V}\underline{S}_R\cdot\hat{i}_n\,dS$$

ORA INTEGRIAMO LA PRIMA IN UN VOLUME $\rightarrow -\int_V\frac{1}{2}(\omega\mu_I|\underline{H}|^2+\omega\varepsilon_I|\underline{E}|^2+\sigma|\underline{E}|^2+Re\{\underline{E}\cdot\underline{J}_0^*\})dV$

$$\rightarrow -\int_V\frac{1}{2}Re\{\underline{E}\cdot\underline{J}_0^*\}dV=\int_V\frac{1}{2}(\omega\mu_I|\underline{H}|^2+\omega\varepsilon_I|\underline{E}|^2+\sigma|\underline{E}|^2)dV+\int_{\partial V}\underline{S}_R\cdot\hat{i}_n\,dS$$

OLTRE AL TERMINE $\frac{1}{2}\sigma|\underline{E}|^2$, ABBIAMO ANCHE $\frac{1}{2}\omega\varepsilon_I|\underline{E}|^2$, E $\frac{1}{2}\omega\mu_I|\underline{H}|^2$ CHE RAPPRESENTANO LA POTENZA DISSIPATA, CHE DOVENDO ESSERE POSITIVA IMPLICA CHE $\Rightarrow \begin{cases}\varepsilon_I\geq 0\\ \mu_I\geq 0\end{cases}$

ORA INTEGRIAMO LA PARTE IMMAGINARIA $\rightarrow \int_{\partial V}\underline{S}_I\cdot\hat{i}_n\,dS=-\int_V\frac{1}{2}(\omega\mu_R|\underline{H}|^2-\omega\varepsilon_R|\underline{E}|^2+Im\{\underline{E}\cdot\underline{J}_0^*\})dV$

$$\rightarrow -\int_V\frac{1}{2}Im\{\underline{E}\cdot\underline{J}_0^*\}dV=\int_V\frac{1}{2}(\omega\mu_R|\underline{H}|^2-\omega\varepsilon_R|\underline{E}|^2)dV+\int_{\partial V}\underline{S}_I\cdot\hat{i}_n\,dS \rightarrow$$ CHE POSSIAMO RISCRIVERE

$$\rightarrow 2\omega\int_V\underbrace{\frac{1}{4}\mu_R|\underline{H}|^2-\frac{1}{4}\varepsilon_R|\underline{E}|^2}_{\text{DENSITÀ DI ENERGIA EM.}}dV+\int_{\partial V}\underline{S}_I\cdot\hat{i}_n\,dS=-\int_V\frac{1}{2}Im\{\underline{E}\cdot\underline{J}_0^*\}dV$$

ONDE PIANE NEL TEMPO

CONSIDERIAMO LE EQ. DI MAXWELL IN UN MEZZO LINEARE, ISOTROPO, OMOGENEO, INVARIANTE E NON DISPERSIVO SIA NEL TEMPO E SIA NELLO SPAZIO E SENZA PERDITE.

$$\begin{cases} \underline{d} = \varepsilon \underline{e} \\ \underline{b} = \mu \underline{h} \\ \underline{J}_c = 0 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO SOLUZIONI CHE DIPENDONO SOLO DA t E DALLA COORDINATA z.

↳ QUESTE SOLUZIONI NON VARIANO SE CI MUOVIAMO LUNGO PIANI ORTOGONALI A z → LE CHIAMIAMO ONDE PIANE.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{e} = -\mu \dfrac{\partial \underline{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{h} = \varepsilon \dfrac{\partial \underline{e}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \varepsilon \underline{e} = 0 \\ \nabla \cdot \mu \underline{h} = 0 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO LE EQ. AI ROTORI:

$$\nabla \times \underline{e} = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial e_y}{\partial z}\hat{i}_x + \frac{\partial e_x}{\partial z}\hat{i}_y = -\mu \frac{\partial \underline{h}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{h} = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial h_y}{\partial z}\hat{i}_x + \frac{\partial h_x}{\partial z}\hat{i}_y = \varepsilon \frac{\partial \underline{e}}{\partial t}$$

DA CUI SI OTTIENE:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e_x}{\partial z} = -\mu \dfrac{\partial h_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial h_y}{\partial z} = -\varepsilon \dfrac{\partial e_x}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial e_y}{\partial z} = \mu \dfrac{\partial h_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial h_x}{\partial z} = \varepsilon \dfrac{\partial e_y}{\partial t} \end{cases}$$

DATO CHE h_y È DIFFERENZIALE POSSO SOSTITUIRE UNA DENTRO L'ALTRA.

↳ DERIVO PRIMA RISPETTO A z E POI RISPETTO A t →

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = -\mu \dfrac{\partial^2 h_y}{\partial z \partial t} \\ \dfrac{\partial^2 h_y}{\partial t \partial z} = -\varepsilon \dfrac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2}}$$

EQ. D'ALAMBERT

$$\varepsilon\mu = \frac{1}{c^2}$$

→ LA CUI SOLUZIONE È:

$$e_x(z,t) = e_{x+}(ct - z) + e_{x-}(ct + z)$$

ORA DERIVIAMO PRIMA RISPETTO A t E POI A z:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 e_x}{\partial t \partial z} = -\mu \dfrac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} = -\varepsilon \dfrac{\partial^2 e_x}{\partial z \partial t} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2}} \rightarrow h_y(z,t) = h_{y+}(\overbrace{ct - z}^{s^+}) + h_{y-}(\overbrace{ct + z}^{s^-})$$

MA $\underline{e}$ E $\underline{h}$ DEVONO ANCHE RISPETTARE →

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e_x}{\partial z} = -\mu \dfrac{\partial h_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial h_y}{\partial z} = -\varepsilon \dfrac{\partial e_x}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial z} = -\frac{\partial e^+_x}{\partial s^+} = -\mu \frac{\partial h_y}{\partial t} \quad \text{e} \quad \varepsilon \frac{\partial e_x}{\partial t} = \varepsilon c \frac{\partial e^+_x}{\partial s^+} = -\frac{\partial h_y}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial e^+_x}{\partial s^+} = \mu \frac{\partial h_y}{\partial t} = \mu \left(c \frac{\partial h_y}{\partial s^+} \right) \rightsquigarrow \text{CON } \mu c = \frac{\mu}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \xi$$

INTEGRANDO RISPETTO A s^+ OTTENIAMO:

$$\boxed{e_{x+} = \xi h_{y+} + C} \qquad C = 0.$$

RIMUOVIAMO L'IPOTESI DI MEZZO NON DISPERSIVO NEL TEMPO.
ANDIAMO QUINDI A CONSIDERARE LE EQ. DI MAXWELL NEL REGIME SINUSOIDALE:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon \underline{E} \\ \nabla \cdot \varepsilon \underline{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mu \underline{H} = 0 \end{cases}$$

→ STUDIAMO I ROTORI:

$$\nabla \times \underline{E} = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & 0 & d/dz \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{dE_y}{dz}\hat{i}_x + \frac{dE_x}{dz}\hat{i}_y = -j\omega\mu\underline{H}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & 0 & d/dz \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\frac{dH_y}{dz}\hat{i}_x + \frac{dH_x}{dz}\hat{i}_y = j\omega\varepsilon\underline{E}$$

OTTENIAMO COSÌ DUE SISTEMI:

$$\begin{cases} \frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y \\ \frac{dH_y}{dz} = -j\omega\varepsilon E_x \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dE_y}{dz} = j\omega\mu H_x \\ \frac{dH_x}{dz} = j\omega\varepsilon E_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -\omega^2 \varepsilon\mu E_x}$$ OSCILLATORE ARMONICO

→ CHE HA PER SOLUZIONI

$$\underline{E}_{x^+} = E_{0x}^{+} e^{-jkz}$$
$$\underline{E}_{x^-} = E_{0x}^{-} e^{jkz}$$

ANALOGAMENTE OTTENIAMO:

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} = -\omega^2 \varepsilon\mu H_y \rightarrow \begin{cases} H_{y^+} = H_{0y}^{+} e^{-jkz} \\ H_{y^-} = H_{0y}^{-} e^{jkz} \end{cases}$$

APPLICHIAMO LA SOVR. DEGLI EFFETTI ⇒ $\frac{d}{dz}\left(E_{0x^+} e^{-jkz}\right) = -j\omega\mu H_{0y}^{+} e^{-jkz}$

$$\Rightarrow \cancel{-}jk E_{0x^+} \cancel{e^{-jkz}} = \cancel{-}j\omega\mu H_{0y}^{+} \cancel{e^{-jkz}} \Rightarrow E_{0x^+} = \frac{\omega\mu}{k} H_{0y}^{+}, \text{ CON } k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{0x^+} = \zeta H_{0y}^{+}}$$ NELLA DIREZIONE $\hat{i}_z$.

ANALOGAMENTE SI OTTIENE:

$$\Rightarrow \boxed{E_{0x^-} = -\zeta H_{0y^-}}$$ NELLA DIREZIONE $-\hat{i}_z$

POLARIZZAZIONE

CONSIDERIAMO IL CAMPO ELETTRICO CON TUTTE LE SUE COMPONENTI CARTESIANE CHE VARIANO NEL TEMPO:

$$\begin{cases} \underline{e}_x(t) = e_{0x}\cos(\omega_0 t + \varphi_{0x})\,\hat{i}_x \\ \underline{e}_y(t) = e_{0y}\cos(\omega_0 t + \varphi_{0y})\,\hat{i}_y \\ \underline{e}_z(t) = e_{0z}\cos(\omega_0 t + \varphi_{0z})\,\hat{i}_z \end{cases}$$

SE $\varphi_i = \varphi_0$

$$\Rightarrow \underline{e}(t) = (e_{0x}\hat{i}_x + e_{0y}\hat{i}_y + e_{0z}\hat{i}_z)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\downarrow$$

$$\underline{e}(t) = \underline{e}_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\downarrow$$

QUINDI IL CAMPO ELETTRICO NEL TEMPO SI MUOVE LUNGO $\underline{e}_0$ E SI DICE POLARIZZATO LINEARMENTE.

POSSIAMO SCOMPORRE $\underline{e}(t)$ COME SOMMA DI DUE VETTORI POLARIZZATI LINEARMENTE:

PARTI DA QUI $\underline{e}_x(t) = e_{0x}\cos(\omega_0 t + \varphi_{0x})$

$$\underline{e}_x(t) = e_{0x}[\cos(\omega_0 t)\cos(\varphi_{0x}) - \sin(\omega_0 t)\sin(\varphi_{0x})]\,\hat{i}_x$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \underline{e}(t) = [e_{0x}\cos(\varphi_{0x})\hat{i}_x + e_{0y}\cos(\varphi_{0y})\hat{i}_y + e_{0z}\cos(\varphi_{0z})\hat{i}_z]\cdot\cos(\omega_0 t) - [e_{0x}\sin(\varphi_{0x})\hat{i}_x + e_{0y}\sin(\varphi_{0y})\hat{i}_y + e_{0z}\sin(\varphi_{0z})\hat{i}_z]\cdot\sin(\omega_0 t)$$

$$\boxed{\underline{e}(t) = \underline{e}_{0c}\cos(\omega_0 t) + \underline{e}_{0s}\sin(\omega_0 t)}$$

QUINDI IN OGNI ISTANTE t, IL VETTORE $\underline{e}(t)$ GIACE SEMPRE SUL PIANO INDIVIDUATO DAI VETTORI $\underline{e}_{0c}$ E $\underline{e}_{0s}$.

PASSIAMO AL DOMINIO DEI FASORI: $\underline{E} = Re\{\underline{E}\} + j\,Im\{\underline{E}\}$

QUINDI NEL TEMPO SARÀ: $\underline{e}(t) = Re\{Re\{\underline{E}\}e^{j\omega_0 t}\} + Re\{j\,Im\{\underline{E}\}e^{j\omega_0 t}\} =$

$$= Re\{\underline{E}\}\cos(\omega_0 t) - Im\{\underline{E}\}\sin(\omega_0 t)$$

PARALLELI

NEL CASO IN CUI $\underline{E}_R$ E $\underline{E}_I$ SIANO PARALLELI AL GENERICO VERSORE $\hat{i}_E$:

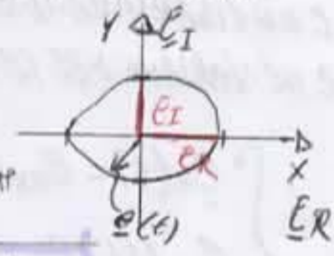
$$\begin{cases} \underline{E}_R = E_R\,\hat{i}_E \\ \underline{E}_I = E_I\,\hat{i}_E \end{cases}$$

DATO CHE $E = \sqrt{E_R^2 + E_I^2} \Rightarrow \begin{cases} E_R = E\cos(\alpha) \\ E_I = E\sin(\alpha) \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{e}(t) = E\cos(\alpha)\cos(\omega_0 t)\,\hat{i}_E - E\sin(\alpha)\sin(\omega_0 t)\,\hat{i}_E = E\cos(\omega_0 t + \alpha)\,\hat{i}_E$$

QUESTO CI DICE CHE $\underline{e}(t)$ RIMANE SEMPRE PARALLELO AD $\hat{i}_E$.

NEL CASO IN CUI $\underline{E}_R$ E $\underline{E}_I$ SIANO ORTOGONALI, COMINCIAMO PONENDO L'ASSE X LUNGO $\underline{E}_R$ E L'ASSE Y LUNGO $\underline{E}_I$: $\underline{E} = \underline{E}_R + j\underline{E}_I = \underline{E}_X + j\underline{E}_Y$



NEL TEMPO AVREMO $\Rightarrow \underline{e}(t) = E_X \cos(\omega_0 t)\hat{i}_X - E_Y \sin(\omega_0 t)\hat{i}_Y$

PONIAMO ORA:

$$\begin{cases} X(t) = E_X \cos(\omega_0 t) \\ Y(t) = -E_Y \sin(\omega_0 t) \end{cases} \xrightarrow[/E_Y]{/E_X} \begin{cases} \dfrac{X(t)}{E_X} = \cos(\omega_0 t) \\ \dfrac{Y(t)}{E_Y} = -\sin(\omega_0 t) \end{cases} \xrightarrow[(\cdot)+(\cdot)]{(\cdot)^2} \boxed{\frac{X^2}{E_X^2} + \frac{Y^2}{E_Y^2} = 1}$$

NÉ PARALLELI NÉ ORTOGONALI

CALCOLIAMO: $\underline{E} \cdot \underline{E} = (\underline{E}_R + j\underline{E}_I) \cdot (\underline{E}_R + j\underline{E}_I) = |\underline{E}_R|^2 - |\underline{E}_I|^2 + 2j\underline{E}_R \cdot \underline{E}_I$

CHE POSSIAMO RISCRIVERE COME: $\underline{E} \cdot \underline{E} = |\underline{E} \cdot \underline{E}| e^{j2\alpha} \xrightarrow{\cdot e^{-2j\alpha}} \underline{E} \cdot \underline{E} \cdot e^{-2j\alpha} = |\underline{E} \cdot \underline{E}|$ ⌋ 1

$\Rightarrow \underbrace{\underline{E} e^{-j\alpha}}_{\underline{E}'} \cdot \underbrace{\underline{E} e^{-j\alpha}}_{\underline{E}'} = |\underline{E} \cdot \underline{E}|$ ⌋ 1

$\therefore$

$\Rightarrow \underline{E}' \cdot \underline{E}' = |\underline{E} \cdot \underline{E}|$ $\rightsquigarrow$ PER QUANTO RIGUARDA LA POLARIZZAZIONE È INDIFFERENTE STUDIARE $\underline{E}$ O $\underline{E}'$.

QUINDI:

- SE $\underline{E}_R' = 0$ O $\underline{E}_I' = 0$ POL. LIN.
- SE $E_R' = E_I'$ POL. CIRC.
- SE $E_R' \neq E_I'$ POL. ELL.

POSSIAMO TORNARE AL VETTORE ORIGINALE MOLTIPLICANDO PER $e^{j\alpha}$

$\underline{E} = \underline{E}' e^{j\alpha} = (\underline{E}_R' + j\underline{E}_I') e^{j\alpha}$

DISTINGUIAMO QUINDI:

- SE $\underline{E}$

… A RADIAZIONE

SE ASSUMIAMO CHE LOCALMENTE IL VETTORE DI POYNTING SI COMPORTA COME UN'ONDA PIANA, POSSIAMO DIRE CHE NELL'INTORNO DI UN PUNTO $\underline{r}$ POSTO A GRANDE DISTANZA DALLE SORGENTI AVREMO:

$$\begin{cases} \underline{E} \approx \underline{F}_0 \dfrac{e^{-jkr}}{r} \\ \underline{H} \approx \dfrac{1}{\zeta} \hat{i}_r \times \underline{E} \rightarrow \underline{E} \approx \zeta \underline{H} \times \hat{i}_r \end{cases} \rightsquigarrow$$

METTENDOLE INSIEME ALL'∞ HO $\rightarrow \lim_{r\to\infty} (\underline{E} - \zeta \underline{H} \times \hat{i}_r) = 0$

CONDIZIONE DI RADIAZIONE ALL'INFINITO.

POTENZIALE VETTORE E SCALARE

CONSIDERIAMO LE EQ. DI MAXWELL NEL DOMINIO DEI FASORI PER UN MEZZO NORMALE SENZA PERDITE E CON SORGENTI ELETTRICHE:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon \underline{E} + \underline{J} \\ \nabla \cdot \varepsilon \underline{E} = \rho \\ \nabla \cdot \mu \underline{H} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ QUESTA SARÀ SODDISFATTA SE PONGO:

$\mu \underline{H} = \nabla \times \underline{A}$ POT. VETTORE. $\rightarrow$ SOSTITUIAMO NELLA ①:

$$\rightarrow \nabla \times \underline{E} + j\omega \nabla \times \underline{A} \rightarrow \nabla \times (\underline{E} + j\omega \underline{A}) = 0$$

$$\rightarrow \underline{E} + j\omega \underline{A} = -\nabla \varphi \Rightarrow \underline{E} = -j\omega \underline{A} - \nabla \varphi$$

φ: POT. SCALARE

SOSTITUIAMO ORA NELLA ②:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \underline{A} = -j\omega\varepsilon(j\omega \underline{A} + \nabla\varphi) + \underline{J} \rightarrow \nabla \times \nabla \times \underline{A} = -j\omega\varepsilon\mu\nabla\varphi + \underbrace{\omega^2 \varepsilon\mu}_{k^2} \underline{A} + \mu \underline{J}$$

DATO CHE: $\nabla \times \nabla \times \underline{A} = \nabla\nabla A - \nabla^2 A$:

$$\nabla\nabla \underline{A} - \nabla^2 A = -j\omega\varepsilon\mu \nabla\varphi + k^2 \underline{A} + \mu \underline{J} \rightarrow \nabla^2 A + k^2 \underline{A} = \nabla\nabla \underline{A} + j\omega\varepsilon\mu \nabla\varphi - \mu \underline{J}$$

$\rightarrow$ RACCOLGO ∇ A SECONDO MEMBRO $\rightarrow \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = \nabla(\nabla \underline{A} + j\omega\varepsilon\mu\varphi) - \mu \underline{J}$

ORA SOSTITUIAMO $\underline{E} = -j\omega \underline{A} - \nabla\varphi$ IN GAUSS ELETTRICO:

$$\nabla \cdot (-j\omega \underline{A} - \nabla\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow -j\omega \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \varphi = \rho/\varepsilon \Rightarrow \nabla^2 \varphi = -j\omega \nabla \cdot \underline{A} - \rho/\varepsilon$$

SOLITAMENTE VIENE IMPOSTA LA GAUGE DI LORENTZ: $\nabla \cdot \underline{A} = -j\omega\mu\varepsilon\varphi = -j\dfrac{k^2}{\omega}\varphi$

$$\Rightarrow \varphi = j\frac{\omega}{k^2} \nabla \cdot \underline{A} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu \underline{J} \\ \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\rho/\varepsilon \end{cases}$$

Achille Cannavale ELEMENTARE

CONSIDERIAMO LE EQ. DI PRIMA:

$$\begin{cases} \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu \underline{J} \\ \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\rho/\varepsilon \end{cases}$$

LA DENSITÀ DI CORRENTE DI UN DIPOLO LUNGO L'ASSE Z DI LUNGHEZZA Δz È: $\underline{J} = I_0 \Delta z \delta(\underline{r}) \underline{i}_z$

PROIETTIAMO LA PRIMA SUGLI ASSI

$$\begin{cases} \nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu I_0 \Delta z \delta(\underline{r}) \\ \nabla^2 A_y + k^2 A_y = 0 \\ \nabla^2 A_x + k^2 A_x = 0 \end{cases}$$

QUESTE TRE EQ. SONO LE EQ. DI HELMOTZ.

DATO CHE LA PRIMA HA SORGENTI CHE DIPENDONO SOLO DA $\underline{r}$ POSSIAMO CERCARE SOLUZIONI DIPENDENTI SOLO DA $\underline{r}$.

NOTIAMO CHE: $\nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0 \quad \forall \underline{r} \neq 0$

$\Rightarrow$ QUINDI PONIAMO $\forall \underline{r} \neq 0$ $A_z(\underline{r}) = \frac{h(r)}{r}$ $\rightarrow$ $\nabla^2 A_z(\underline{r}) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr} A_z\right) \Rightarrow$

$\forall \underline{r} \neq 0$ $\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr} \cdot \frac{h(r)}{r}\right)$

$$\Rightarrow r^2 \frac{d}{dr} \frac{h(r)}{r} = r^2\left(-\frac{h}{r^2} + \frac{h'}{r}\right) = h'r - h$$

$$\rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{h(r)}{r}\right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(h'r - h)$$ $\rightsquigarrow$ SOSTITUISCO NELLA PRIMA EQ

$$\rightarrow \forall r \neq 0 \quad \frac{h''(r)}{r} + k^2 \frac{h(r)}{r} = 0 \Rightarrow \boxed{h''(r) + k^2 h(r) = 0}$$ OSCILLATORE ARMONICO

SOL.

$$\rightarrow h(r) = C e^{-jkr} + D e^{jkr} \Rightarrow \boxed{A_z(r) = C \frac{e^{-jkr}}{r} + D \frac{e^{jkr}}{r}}$$ $\Rightarrow$ DOBBIAMO QUINDI TROVARE C E D

FISSIAMO $D = 0$ PERCHÉ È UN'ONDA CHE VA DALL'INFINITO VERSO L'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO.

TROVIAMO C INTEGRANDO LA PRIMA EQ. IN UN VOLUME:

$$\int_V (\nabla^2 A_z + k^2 A_z) dV = -\mu I_0 \Delta z$$ CHE FACCIAMO TENDERE A ZERO

$$\rightarrow = \int_{\partial V} \nabla A_z \cdot \underline{i}_r \, dS + \int_V k^2 A_z \, dV = \int_{\partial V} \frac{\partial A_z}{\partial r} dS + \int_V k^2 A_z dV = -C \int_{\partial V} \frac{e^{-jkr}}{r^2} dS -$$

$$-jkC \int_{\partial V} \frac{e^{-jkr}}{r} dS + k^2 C \int_V \frac{e^{-jkr}}{r} dV = -\mu I_0 \Delta z$$

FACCIAMO TENDERE I 3 INTEGRALI PER $V \rightarrow 0$: $\lim_{V\to 0} \int_{\partial V} \frac{e^{-jkr}}{r^2} dS = \lim_{r \to 0} 4\pi r^2 \frac{e^{-jkr}}{r^2} = 4\pi$

$$\lim_{V\to 0} \int_{\partial V} \frac{e^{-jkr}}{r} dS = \lim_{V \to 0} 4\pi r^2 \frac{e^{-jkr}}{r} = 0$$

$$\lim_{V\to 0} \int_V \frac{e^{-jkr}}{r} dV = \lim_{V\to 0} \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{e^{-jkr}}{r} = 0$$

QUINDI IL CONFRONTIAMO:

$$\cancel{-}C4\pi = \cancel{-}\mu I_0 \Delta_z \Rightarrow C = \frac{\mu I_0 \Delta_z}{4\pi}$$

$\rightarrow$ QUINDI IL POTENZIALE DI UN DIPOLO ELEMENTARE ELETTRICO È:

$$\boxed{\underline{A}_0 = \frac{\mu I_0 \Delta_z}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{i}_z}$$

CAMPO DI UNA SPIRA

LA DENSITÀ DI UNA SPIRA ELEMENTARE ATTRAVERSATA DA CORRENTE È:

$$\underline{J}_s = I_0 S \nabla \times \delta(r) \hat{i}_z$$

MENTRE IL POTENZIALE DELLA SPIRA SARÀ IL ROTORE DEL POTENZIALE DEL DIPOLO:

$$\underline{A}_s = \nabla \times \underline{A}_0 = \frac{\mu I_0 S}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \hat{i}_z \right)$$

CAMPI LONTANI

DATO CHE: $\nabla \cdot \underline{A} = \left(-jkr C \underbrace{\frac{e^{-jkr}}{r}}_{A} - C \frac{e^{-jkr}}{r^2} \right) \hat{i}_r \xrightarrow{r \to \infty} -jk\underline{A}\, \hat{i}_r$

CAMPO MAGNETICO

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \left(C \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{i}_z \right) = \frac{C}{\mu} (-jk) \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{i}_r \times \hat{i}_z =$$

$$= \frac{I_0 \Delta_z}{4\pi} (-jk) \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{i}_r \times \hat{i}_z$$

$$\underline{H} = \frac{I_0 \Delta_z}{2\lambda r} j e^{-jkr} \sin(\theta) \hat{i}_\varphi$$

$$\underline{E} = \frac{j\zeta}{2\lambda r} I_0 \Delta_z e^{-jkr} \sin(\theta) \hat{i}_\theta$$

CAMPO LONTANO DA SORGENTI ELEMENTARI

IL POTENZIALE VETTORE E I CAMPI PER UN DIPOLO ELETTRICO ELEMENTARE SONO:

$$\underline{J} = I_0 \Delta z\, \delta(r)\, \hat{i}_z$$

$$\underline{A} = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r}\, \hat{i}_z$$

$$E_r = \zeta \frac{I_0 \Delta z}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\cos(\theta)$$

$$E_\theta = j\zeta \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \cdot k\left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\sin(\theta)$$

$$H_\phi = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} jk\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\sin(\theta)$$

SE FACCIAMO TENDERE $r \to \infty$ NELLE EQ. DEI CAMPI ELETTRICO E MAGNETICO, I TERMINI CHE DECADONO PIÙ LENTAMENTE SONO QUELLI CON $\left(\frac{1}{r}\right)$:

$$E_\theta = j\zeta I_0 \Delta z \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\sin(\theta)$$

$$H_\phi = j I_0 \Delta z \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\sin(\theta)$$

LE COMPONENTI CHE DECADONO PIÙ VELOCEMENTE VENGONO DETTE REATTIVE PERCHÈ CONTRIBUISCONO AL SOLO FLUSSO DI POT. REATTIVA.

IN PARTICOLARE, IN CAMPO LONTANO, PER OGNI DIPOLO ABBIAMO CHE:

$$\underline{E} = j\zeta I_0 \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}\underline{h}(\theta,\phi)$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\zeta}\hat{i}_r \times \underline{E}$$

$\underline{h}$ È UN VETTORE COMPLESSO E PER UN DIPOLO ELEMENTARE VALE:

$$\underline{h}(\theta,\phi) = \Delta z \sin(\theta)\, \hat{i}_\theta$$

RADIAZIONE E ALTEZZA EFFICACE

UN PRIMO PARAMETRO È L'ESPRESSIONE DEL CAMPO IRRADIATO DALL'ANTENNA A GRANDE DISTANZA: $\underline{E}(r \to \infty, \theta, \varphi) = \underline{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi)$

ALTEZZA EFFICACE

SI MISURA IN METRI

$$\underline{E} = \frac{j \zeta I_0}{2\lambda r} e^{-jkr} \underline{h}(\theta, \phi) \quad , \quad \underline{H} = \frac{1}{\zeta} \hat{i}_r \times \underline{E}$$

$\to$ QUESTA FUNZIONE È L'ALTEZZA EFFICACE ED È UN VETTORE COMPLESSO FUNZIONE DELLA DIREZIONE DI OSSERVAZIONE.

SOLIDO DI RADIAZIONE

IL SOLIDO DI RADIAZIONE PERMETTE DI VISUALIZZARE IN QUALE DIREZIONE L'ANTENNA TRASMETTE MEGLIO:

$$\underline{E} = \frac{j \zeta I_0}{2\lambda r} e^{-jkr} \underline{h}(\theta, \phi) \Rightarrow \underline{E} \cdot 2\lambda r = j \zeta I_0 e^{-jkr} \underline{h}(\theta, \phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2\lambda r \underline{E}| = |\zeta I_0 \underline{h}| \Rightarrow \frac{|\underline{E} \cdot 2\lambda r|}{|E \cdot 2\lambda r|_{MAX}} = \frac{\cancel{|\zeta I_0|} |\underline{h}|}{\cancel{|\zeta I_0|} |\underline{h}_{MAX}|} = \frac{|\underline{h}|}{|\underline{h}_{MAX}|}$$

QUESTO RAPPORTO CONFRONTA IL VALORE DELL'ALTEZZA EFFICACE RISPETTO AL VALORE MASSIMO DELL'ALTEZZA EFFICACE.

PER IL DIPOLO ELEMENTARE:

$$\underline{h}(\theta, \phi) = \Delta \sin(\theta) \hat{i}_\theta \Rightarrow |\underline{h}_{MAX}| = \Delta \; ; \; |\underline{h}| = \Delta |\sin(\theta)|$$

$$\Rightarrow \frac{|\underline{h}|}{|\underline{h}_{MAX}|} = \frac{\cancel{\Delta} |\sin(\theta)|}{\cancel{\Delta}} = |\sin(\theta)|$$

RESISTENZA DI RADIAZIONE

VALUTIAMO UN VOLUME CHE CONTENGA UN DIPOLO ELEMENTARE E APPLICHIAMO POYNTING

$$\nabla\cdot\underline{S} = -j\frac{1}{2}\omega\mu_0|\underline{H}|^2 + \frac{1}{2}j\omega\varepsilon_0|\underline{E}|^2 - \frac{1}{2}\underline{E}\cdot\underline{J}_0^*$$

DOVE:

$$P_G = \underbrace{\int_V -\frac{1}{2}\underline{E}\cdot\underline{J}_0^*\,dV}_{\text{POTENZA FORNITA DAI GEN. ALL'ANTENNA}} = \int_{\partial V}\underline{S}\cdot\hat{i}_m\,dS + j2\omega\int_V \frac{1}{4}\mu_0|\underline{H}|^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_0|\underline{E}|^2\,dV$$

-PARTO DA QUI

IN PARTICOLARE POSSO SCRIVERE $P_G = P_R + jP_X = \frac{1}{2}V_0 I_0^* = \frac{1}{2}|I_0|^2 Z_A$

$$Z_A = R_A + jX_A = \frac{2P_R}{|I_0|^2} + j\frac{2P_X}{|I_0|^2}$$

*RESISTENZA DI RADIAZIONE

ORA CALCOLIAMO IL FLUSSO DI POTENZA ATTRAVERSO UNA SFERA:

$$\int_{\partial V}\frac{1}{2}\underline{E}\times\underline{H}^*\cdot\hat{i}_m\,dS$$

$\hat{i}_r\times\hat{i}_\theta = \hat{i}_\phi$

$\hat{i}_\theta\times\hat{i}_\phi = \hat{i}_r$

$\hat{i}_\phi\times\hat{i}_r = \hat{i}_\theta$

$$E_r = \zeta\frac{I_0\Delta z}{2\pi}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{jkr^2}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\cos(\theta)$$

$$E_\theta = j\zeta\frac{I_0\Delta z}{4\pi}k\left(1+\frac{1}{jkr}-\frac{1}{k^2r^2}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\sin(\theta)$$

$$H_\phi = \frac{I_0\Delta z}{4\pi}jk\left(1+\frac{1}{jkr}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\sin(\theta)$$

$\left(k=\frac{2\pi}{\lambda}\right)$

$$\Rightarrow \underline{S} = \frac{1}{2}\left(E_r\hat{i}_r + E_\theta\hat{i}_\theta\right)\left(H_\phi\hat{i}_\phi\right)^* = \frac{1}{2}\left(-E_rH_\phi^*\hat{i}_\theta + E_\theta H_\phi^*\hat{i}_r\right)$$

DATO CHE V È UNA SFERA: $\hat{i}_m = \hat{i}_r$

$$\underline{S}\cdot\hat{i}_m = \underline{S}\cdot\hat{i}_r = \frac{1}{2}\left(-E_rH_\phi^*\hat{i}_\theta + E_\theta H_\phi^*\hat{i}_r\right)\cdot\hat{i}_r = \frac{1}{2}E_\theta H_\phi^* =$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2}\left[j\zeta\frac{I_0\Delta z}{4\pi}k\left(1+\frac{1}{jkr}-\frac{1}{k^2r^2}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\sin(\theta)\right]\left[\frac{I_0\Delta z}{4\pi}jk\left(1+\frac{1}{jkr}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\sin(\theta)\right]^* =$$

$$= \zeta\frac{|I_0\Delta z|^2}{32\pi^2}\cdot\frac{k^2}{r^2}\left(1+\frac{1}{jkr}-\frac{1}{k^2r^2}\right)\left(1-\frac{1}{jkr}\right)\sin^2(\theta) = \zeta\frac{|I_0\Delta z|^2}{32\pi^2}\cdot\frac{k^2}{r^2}\left(1+\frac{1}{jk^3r^3}\right)\sin^2(\theta) =$$

$$= \zeta\frac{|I_0|^2}{8\lambda^2r^2}\left(1+\frac{1}{jk^3r^3}\right)\Delta z^2\sin^2(\theta)$$

→ POSSIAMO METTERLO NELL'INTEGRALE

$dS = r\,d\theta\,r\sin(\theta)\,d\phi$

$$\Rightarrow \int_{\partial V}\underline{S}\cdot\hat{i}_m\,dS = \int_{\partial V}\zeta\frac{|I_0|^2}{8\lambda^2r^2}\left(1+\frac{1}{jk^3r^3}\right)\Delta z^2\sin^2(\theta)\,dS$$

Achille Cannavale

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \frac{\zeta |I_0|^2}{8\lambda^2 r^2}\left(1+\frac{1}{j k^3 r^3}\right)\Delta_z^2 \sin^2(\theta)\, r^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \zeta \frac{|I_0|^2}{8\lambda^2}\left(1+\frac{1}{j k^3 r^3}\right)\Delta_z^2 \underbrace{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\sin(\theta)\, d\theta\, d\phi}$$

L'INTEGRALE IN $d\phi$ VALE 2π

$$2\pi\int_0^{\pi} \sin^2(\theta)\sin(\theta)\, d\theta =$$

$t = \cos(\theta)$

$dt = -\sin(\theta)\, d\theta$

$$2\pi\int(1-\cos(\theta))\sin(\theta)\, d\theta = -\int(1-t^2)\, dt = \int t^2-1\, dt = \left[\frac{t^3}{3} - t\right] \Rightarrow \left[\frac{\cos^3(\theta)}{3} - \cos(\theta)\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

QUINDI:

$$\int_{\partial V} \frac{1}{2}\, \underline{E}\times \underline{H}^* \cdot \underline{i}_m\, dS = \overset{120\pi}{\zeta}\frac{|I_0|^2}{\cancel{8}\lambda^2}\left(1+\frac{1}{j k^3 r^3}\right)\Delta_z^2 \cdot \frac{\cancel{8}}{3}\pi =$$

$$= 40\pi^2\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2 |I_0|^2 - j\,40\pi^2\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{k^3 r^3}\,|I_0|^2$$

ABBIAMO TROVATO QUINDI LA RESISTENZA DI RADIAZIONE R_A:

$$\boxed{R_A = \frac{2P_R}{|I_0|^2} = 80\pi^2\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2}$$

Achille Cannavale

RENDIMENTO

QUANDO ALIMENTIAMO UN'ANTENNA, NON TUTTA LA POTENZA ATTIVA TRASFERITA VIENE IRRADIATA, UNA PARTE VIENE DISSIPATA, INTRODUCIAMO QUINDI:

$$\boxed{\eta = \frac{P_{irr}}{P_{ING}} = \frac{\frac{1}{2} R_r |I_0|^2}{\frac{1}{2} R_{ING} |I_0|^2} = \frac{R_r}{R_{ING}}}$$

MA POSSIAMO SCRIVERE: $P_{ING} = P_{IRR} + P_{LOSS} = \frac{1}{2} R_r |I_0|^2 + \frac{1}{2} R_{LOSS} |I_0|^2$

QUINDI:

$$\eta = \frac{P_{IRR}}{P_{ING}} = \frac{R_r}{R_{ING}} = \frac{R_r}{R_r + R_{LOSS}} < 1$$

$\eta \simeq 1$ CON PERDITE TRASC.

DIRETTIVITÀ

È UNA QUANTITÀ CHE CI PERMETTE DI MISURARE QUANTO MEGLIO IRRADIA UN'ANTENNA RISPETTO ALLE ALTRE:

$$\boxed{D(\theta,\phi) = \lim_{r\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{|E|^2}{\zeta}}{\frac{P_{IRR}}{4\pi r^2}}}$$

DENSITÀ MEDIA DI POTENZA IRRADIATA

PIÙ È ELEVATA IN UNA DIREZIONE, E MEGLIO IRRADIA IN QUELLA DIREZIONE.

POSSIAMO ANCHE ESPRIMERLA INTRODUCENDO L'ALTEZZA EFFICACE:

$$D(\theta,\phi) = \lim_{r\to\infty} \frac{\frac{\zeta |h(\theta,\phi)|^2 |I_0|^2}{8\lambda^2 r^2}}{\frac{P_{IRR}}{4\pi r^2}} = \frac{\pi\zeta}{2\lambda^2} \cancel{|I_0|^2} \frac{|\underline{h}(\theta,\phi)|^2}{\frac{1}{2} R_r \cancel{|I_0|^2}} = \frac{\pi\zeta}{\lambda^2} \cdot \frac{|\underline{h}(\theta,\phi)|^2}{R_r}$$

QUINDI $D_{MAX} = \frac{\pi\zeta}{\lambda^2} \cdot \frac{|\underline{h}_{MAX}|^2}{R_r}$

- PER UN DIPOLO ELETTRICO ELEMENTARE HO: $|\underline{h}_{MAX}| = \Delta z$, $R_r = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2$

$$\Rightarrow D_{MAX} = \frac{\pi\zeta}{\lambda^2} \cdot \frac{|\Delta z|^2}{80\pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

- PER UN DIPOLO CORTO HO: $h_{MAX} = l/2 \Rightarrow D_{MAX} = \frac{3}{2}$
- PER UN DIPOLO A $\lambda/2$ HO: $h_{MAX} = \frac{\lambda}{\pi}$, $R_r = 75\Omega \Rightarrow D_{MAX} \approx \frac{8}{5}$

Achille Cannavale

GUADAGNO

LO DEFINIAMO COME:

$$\boxed{G(\theta,\phi)=\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{|E|^2}{2\zeta}}{\frac{P_{ING}}{4\pi r^2}}}$$

, RICORDIAMO CHE $P_{ING}=P_{IRR}+P_{LOSS}=\frac{1}{\eta}P_{IRR}$

$$\Rightarrow G(\theta,\phi)=\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{|E|^2}{2\zeta}}{\frac{P_{IRR}+P_{LOSS}}{4\pi r^2}}=\eta\, D(\theta,\phi)<D(\theta,\phi)$$

ANCHE IL GUADAGNO SI PUÒ ESPRIMERE CON L'ALTEZZA EFFICACE:

$$\boxed{G(\theta,\phi)=\frac{\pi\zeta}{\lambda^2}\cdot\frac{|h(\theta,\phi)|^2}{R_{ING}}}$$

TEOREMA DI RECIPROCITÀ

CONSIDERIAMO UN MEZZO LINEARE, ISOTROPO, SPAZIALMENTE NON DISPERSIVO E OMOGENEO NEL TEMPO, CONSIDERANDO SORGENTI ELETTRICHE E MAGNETICHE:

$$\begin{cases} \nabla\times\underline{E} = -j\omega\mu\underline{H} - \underline{J}_m \\ \nabla\times\underline{H} = j\omega\varepsilon\underline{E} + \underline{J} \end{cases}$$

CONSIDERIAMO DUE INSIEMI DI SORGENTI:

$$\begin{cases} (\underline{J}_1, \underline{J}_{m,1}) \rightarrow (\underline{E}_1, \underline{H}_1) \\ (\underline{J}_2, \underline{J}_{m,2}) \rightarrow (\underline{E}_2, \underline{H}_2) \end{cases}$$

DEFINIAMO:

$$\underline{F} = \underline{E}_1\times\underline{H}_2 - \underline{E}_2\times\underline{H}_1 \rightarrow \nabla\cdot(\cdot) \rightarrow \nabla\cdot(\underline{E}_1\times\underline{H}_2) - \nabla\cdot(\underline{E}_2\times\underline{H}_1) =$$

$$\rightarrow = \nabla\times\underline{E}_1\cdot\underline{H}_2 - \nabla\times\underline{H}_2\cdot\underline{E}_1 - \nabla\times\underline{E}_2\cdot\underline{H}_1 + \nabla\times\underline{H}_1\cdot\underline{E}_2$$

ORA INSERIAMO LE EQ. DI MAXWELL AI ROTORI:

$$(-j\omega\mu\underline{H}_1 - \underline{J}_{m1})\cdot\underline{H}_2 - (j\omega\varepsilon\underline{E}_2 + \underline{J}_2)\cdot\underline{E}_1 - (-j\omega\mu\underline{H}_2 - \underline{J}_{m2})\cdot\underline{H}_1 + (j\omega\varepsilon\underline{E}_1 + \underline{J}_1)\cdot\underline{E}_2$$

$$= -\underline{J}_{m1}\cdot\underline{H}_2 - \underline{J}_2\underline{E}_1 + \underline{J}_{m2}\underline{H}_1 + \underline{J}_1\cdot\underline{E}_2$$ → ORA INTEGRIAMO SU UN VOLUME

$$\rightarrow \boxed{\int_V \nabla\cdot\underline{F}\,dV = \int_V \underline{J}_1\cdot\underline{E}_2 - \underline{J}_2\underline{E}_1\,dV + \int_V \underline{J}_{m2}\underline{H}_1 - \underline{J}_{m1}\underline{H}_2\,dV}$$ TEOREMA DI RECIPROCITÀ

ASSENZA DI SORGENTI

IN ASSENZA DI SORGENTI $\Rightarrow \underline{J}_1 = \underline{J}_2 = \underline{J}_{m1} = \underline{J}_{m2} = 0 \Rightarrow \int_V \nabla\cdot\underline{F}\,dV = \int_{\partial V} \underline{F}\cdot\hat{i}_n\,dS = 0$

$$\rightarrow \int_{\partial V} (\underline{E}_1\times\underline{H}_2 - \underline{E}_2\times\underline{H}_1)\cdot\hat{i}_n\,dS = 0$$

APPLICAZIONE ~~DI~~ UN CEP

SE TUTTO IL VOLUME È RACCHIUSO DA UN CEP, L'INTEGRALE DI SUPERFICIE È NULLO:

$$\int_{\partial V} (\underline{E}_1\times\underline{H}_2 - \underline{E}_2\times\underline{H}_1)\cdot\hat{i}_n\,dS = \int_{\partial V} (\hat{i}_n\times\underline{E}_1\underline{H}_2 - \hat{i}_n\times\underline{E}_2\cdot\underline{H}_1)\,dS = 0$$

QUESTO INTEGRALE COINVOLGE TUTTE LE COMPONENTI TANGENTI DEI CAMPI ELETTRICI, MA SUL CEP SONO NULLE, QUINDI L'INTEGRALE FA 0.

TUTTO LO SPAZIO

APPLICHIAMO IL TEOREMA A TUTTO LO SPAZIO:

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\partial V} \underline{F}\cdot\hat{i}_r\,dS = \lim_{r\to\infty}\int_{\partial V} (\underline{E}_1\times\underline{H}_2 - \underline{E}_2\times\underline{H}_1)\cdot\hat{i}_r\,dS = \lim_{r\to\infty}\int_{\partial V} (\hat{i}_r\times\underline{E}_1\underline{H}_2 - \hat{i}_r\times\underline{E}_2\underline{H}_1)\,dS$$

MA DEVE VALERE LA CONDIZIONE DI RADIAZIONE ALL'INFINITO:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\underline{E} - \zeta \underline{H}\times \hat{i}_r\right) = 0 \Rightarrow \underline{E} = \zeta \underline{H}\times \hat{i}_r + o\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow \hat{i}_r \times \underline{E} = \zeta \underline{H} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

QUINDI SOSTITUENDO ABBIAMO:

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\partial V} \left(\zeta \underline{H}_1 + o\left(\frac{1}{r}\right)\right)\cdot \underline{H}_2 - \left(\zeta \underline{H}_2 + o\left(\frac{1}{r}\right)\right)\cdot \underline{H}_1 \, dS =$$

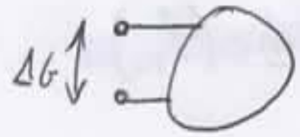
$$= \lim_{r\to\infty}\int_{\partial V} o\left(\frac{1}{r}\right) \underline{H}_2 - o\left(\frac{1}{r}\right) \underline{H}_1 \, dS$$ $\rightarrow$ CHE DECRESCE PER $\frac{1}{r^2}$ $\lrcorner$

$$\rightarrow \int_V \nabla\cdot \underline{F} \, dV = \int_V \underline{J}_1 \cdot \underline{E}_2 - \underline{J}_2 \, \underline{E}_1 \, dV + \int_V \underline{J}_{m_2} \, \underline{H}_1 - \underline{J}_{m_1} \, \underline{H}_2 \, dV = 0$$

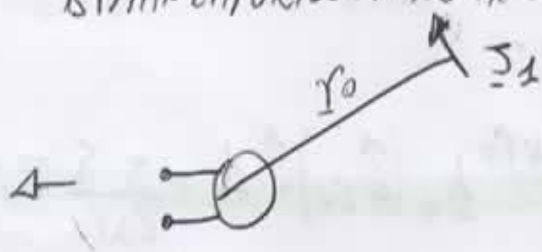
Achille Cannavale

QUESTA UGUAGLIANZA DISCENDE DAL TEOREMA DI RECIPROCITÀ.

CONSIDERIAMO UN'ANTENNA REALIZZATA CON CONDUTTORI E DIELETTRICI ISOTROPI:



① APPLICHIAMO IL TEOREMA PRIMA PER UN DIPOLO ELEMENTARE POSTO A GRANDE DISTANZA, ORTOGONALE AL RAGGIO $\underline{r}_0$:

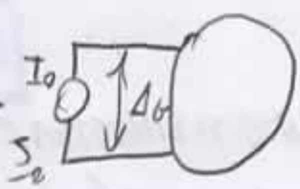


A CUI CORRISPONDE:

$$\underline{J}_1 = \Delta I_\Delta \, \delta(|\underline{r}-\underline{r}_0|)\,\hat{i}$$

$\underline{r}_0 \cdot \hat{i} = 0$ DATO CHE SONO ORTOGONALI.

② ORA ALIMENTIAMO L'ANTENNA CON UNA CORRENTE I_0



DOVE $\underline{J}_2 = \Delta_G I_0 \delta(\underline{r})\,\hat{i}_G$

APPLICHIAMO ORA IL TH. ALLE DUE SITUAZIONI:

① $\underline{J}_1 = \Delta I_\Delta \delta(|\underline{r}-\underline{r}_0|)\,\hat{i}$ GENERA $\underline{E}_1(\underline{r})$

② $\underline{J}_2 = \Delta_G I_0 \delta(\underline{r})\,\hat{i}_G$ GENERA $\underline{E}_2(\underline{r})$

$$\Rightarrow \int_V \underline{J}_1 \cdot \underline{E}_2 - \underline{J}_2 \cdot \underline{E}_1 \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \int_V \underline{J}_1 \cdot \underline{E}_2 \, dV = \int_V \underline{J}_2 \cdot \underline{E}_1 \, dV$$

IN PARTICOLARE, NEL SECONDO INTEGRALE: (PER IL ζ) VEDI QUI

$$\underline{E}_2(\underline{r}_0) = \frac{j\zeta I_0}{2\lambda r_0} e^{-jkr_0}\,\underline{h}_t(\hat{i}_{r_0})$$

QUINDI:

$$\int_V \underline{J}_1 \cdot \underline{E}_2 dV = \int_V \Delta I_\Delta \delta(|\underline{r}-\underline{r}_0|)\cdot\hat{i}\cdot\frac{j\zeta}{2\lambda r} I_0 e^{-jkr}\,\underline{h}_t(\hat{i}_r)\,dV =$$

$$= \frac{j\zeta}{2\lambda r_0} I_0 e^{-jkr_0}\,\underline{h}_t(\hat{i}_{r_0})\,\hat{i}\,\Delta I_\Delta$$

CALCOLIAMO IL SECONDO INTEGRALE:

$$\int_V \underline{J}_2 \cdot \underline{E}_1 dV = \int_V \Delta_G I_0 \delta(\underline{r})\cdot\hat{i}_G\cdot\underline{E}_1 \, dV = \Delta_G I_0 \hat{i}_G \underline{E}_1(0)$$

È IL CAMPO ELETTRICO TRA I DUE MORSETTI NEL PRIMO CASO

$\Downarrow$

$$\Delta_G \hat{i}_G \cdot \underline{E}_1(0) = -V_0$$

$$\Rightarrow \int_V \underline{J}_2 \cdot \underline{E}_1 \, dV = \Delta_G I_0 \hat{i}_G \cdot \underline{E}_1(0) = -I_0 V_0$$

QUESTA TENSIONE A VUOTO PUÒ ESSERE VALUTATA MEDIANTE $\underline{h}_r$:

$$V_0 = \underline{E}_i \cdot \underline{h}_r(\hat{i}_{r_0})$$

DOVE $\underline{E}_i$ È IL CAMPO PRODOTTO DAL DIPOLO $\underline{J}_1$ IN ASSENZA DELL'ANTENNA.

... VALUTATO SUL GAP, QUINDI DOVE $r=0$, QUINDI:

$$\underline{E}_i = \underline{E}_\Delta = \frac{j\zeta I_\Delta}{2\lambda r_0} e^{-jkr_0} \Delta (-\hat{i}) \Rightarrow V_0 = \underline{E}_i \cdot \underline{h}_r(\hat{i} r_0) = -\frac{j\zeta}{2\lambda r_0} I_\Delta e^{-jkr_0} \Delta \hat{i} \cdot \underline{h}_r(\hat{i}$$

QUINDI SOSTITUENDO NELL'INTEGRALE:

$$\int_V \underline{J}_2 \cdot \underline{E}_1 \, dV = -I_0 V_0 = \frac{j\zeta}{2\lambda r_0} I_0 I_\Delta e^{-jkr_0} \Delta \hat{i} \cdot \underline{h}_r(\hat{i} r_0)$$

APPLICHIAMO IL TH:

$$\frac{j\zeta}{2\lambda r_0} I_0 I_\Delta e^{-jkr_0} \underline{h}_t(\hat{i} r_0) \cdot \hat{i} \Delta = \frac{j\zeta}{2\lambda r_0} I_0 I_\Delta e^{-jkr_0} \Delta \hat{i} \cdot \underline{h}_r(\hat{i} r_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{h}_t(\hat{i} r_0) \cdot \hat{i} = \underline{h}_r(\hat{i} r_0) \cdot \hat{i}}$$

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE:

$$\underline{h}_t(\hat{i} r_0) = \underline{h}_r(\hat{i} r_0)$$

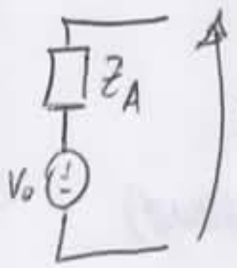
ALTEZZA EFFICACE IN RICEZIONE

SE IMMERGO UN'ANTENNA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO, LE CARICHE DELL'ANTENNA RISENTONO DI QUESTO CAMPO.

SE L'ANTENNA È COLLEGATA AD UN CARICO, LE CARICHE FARANNO CIRCOLARE UNA CORRENTE NEL CARICO.

SE INVECE È LASCIATA CON I MORSETTI APERTI, CI SARÀ UNA TENSIONE A VUOTO AI CAPI DEI MORSETTI.

PER CARATTERIZZARE UN'ANTENNA IN RICEZIONE USO THEVENIN:



IL LEGAME PIÙ GENERALE TRA UN VETTORE E UNO SCALARE È: $V_0 = \underline{E} \cdot \underline{l}$, DOVE $\underline{l}$ È UN VETTORE [m].
INOLTRE PER "CAMPO IN CUI È IMMERSA L'ANTENNA" INTENDIAMO IL CAMPO INCIDENTE.

ASSUMIAMO CHE IL CAMPO INCIDENTE SIA GENERATO DA UNA SORGENTE LONTANA E QUINDI CHE IL CAMPO INCIDENTE SIA UN'ONDA PIANA O ALMENO LOCALMENTE PIANA, COSÌ CHE:

$$\boxed{V_0 = \underline{E} \cdot \underline{h}_r}$$

DOVE $\underline{h}_r$ È L'ALTEZZA EFFICACE IN RICEZIONE, CHE DIPENDE DALLA DIREZIONE DA CUI PROVIENE L'ONDA PIANA INCIDENTE.

PER VALUTARE Z_A, CORTOCIRCUITO IL GENERATORE, PONGO UNA TENSIONE V_0 AI CAPI DEL DIPOLO.
LA TENSIONE APPLICATA DIVISO LA CORRENTE PRODOTTA MI DÀ Z_A.

MA CORTOCIRCUITARE V_0 SIGNIFICA ANNULLARE IL CAMPO INCIDENTE.
FACENDO COSÌ PERÒ OTTENGO UN'ANTENNA TRASMITTENTE, QUINDI LA Z_A È LA STESSA DEL CASO TRASMITTENTE.

AREA EFFICACE

DETERMINIAMO UN PARAMETRO CHE LEGA LA POTENZA TRASFERITA AL CARICO DI UN'ANTENNA IN RICEZIONE CON LA DENSITÀ DI POTENZA INCIDENTE. $\frac{[W]}{[W]/[m^2]} = [m^2]$
CHE CHIAMEREMO AREA EFFICACE.

COME CON L'ALTEZZA EFFICACE CONSIDERIAMO UN CAMPO LOCALMENTE PIANO.

... UN CARICO PARI AL CONIUGATO DELL'IMPEDENZA DI INGRESSO DELL'ANTENNA.

ADATT. IN POT.

DETTA P_L LA POTENZA ATTIVA TRASFERITA AL CARICO:

$$P_L = \frac{1}{2} V_L I_L^* = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{|Z_A + Z_L|^2} \cancel{Z_L} \underset{Z_L = Z_A^*}{\rightarrow} \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{4R_A^2} \cdot \cancel{R_A} = \frac{1}{8} \frac{|V_0|^2}{R_A}$$

DOVE $V_0 = \underline{E}_i \cdot \underline{h}_r$ → DIPENDE SIA DALLA DIREZIONE DA CUI PROVIENE L'ONDA INCIDENTE, MA ANCHE DALLA POLARIZZAZIONE DEL CAMPO INCIDENTE.

QUINDI FISSIAMO LA POLARIZZAZIONE DI $\underline{E}_i$ IN MODO DA MASSIMIZZARE V_0:

$$|V_0|^2 = |(\underline{E}_{iR} + j\underline{E}_{iI}) \cdot (\underline{h}_{rR} + j\underline{h}_{rI})|^2 \Rightarrow \text{MAX SE } \underline{E}_i = \alpha \underline{h}_r^* \quad \alpha \text{ COMP.}$$

$$\Rightarrow V_0 = \alpha(\underline{h}_{rR} + j\underline{h}_{rI}) \cdot (\underline{h}_{rR} + j\underline{h}_{rI})^* = \alpha(h_{rR}^2 + h_{rI}^2)$$

$$\Rightarrow |V_0|^2 = |\alpha|^2 (h_{rR}^2 + h_{rI}^2)^2 = |E_i|^2 |h_r|^2$$ (ADATTAMENTO IN POLARIZZAZIONE)

→ MAX VALORE POSSIBILE

POSSIAMO SCRIVERE L'AREA EFFICACE COME:

$$\boxed{A_{EFF} = \frac{P_L}{S_i}} \; ; \quad P_L = \frac{1}{8} \frac{|V_0|^2}{R_A} = \frac{1}{8} \frac{|h_r|^2 |E_i|^2}{R_A}$$

→ DATO CHE $S_i = \frac{1}{2} \frac{|E_i|^2}{\xi}$

$$E \quad P_L = \frac{1}{8} \cdot \frac{2|h_r|^2 \xi S_i}{R_A}$$

$$\Rightarrow A_{EFF} = \frac{P_L}{S_i} = \frac{1}{4} \frac{|h_r|^2 \xi}{R_A}$$

CONFRONTIAMO QUESTA ESPRESSIONE CON QUELLA DEL GUADAGNO:

$$\boxed{G(\theta,\phi) = \frac{\pi \xi}{\lambda^2} \cdot \frac{|h(\theta,\phi)|^2}{R_{ING}}} \; ,$$

CONSIDERANDO CHE:

$$R_{ING} = R_A$$
$$\underline{h}_r = \underline{h}_t$$
$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{A_{EFF}(\theta,\phi)}{G(\theta,\phi)} = \frac{\lambda^2}{4\pi}}$$

FORMULA DEL COLLEGAMENTO

SUPPONIAMO DI AVERE DUE ANTENNE, UNA TRASMITTENTE ED UNA RICEVENTE,
SE L'ANTENNA TRASMITTENTE HA IL GUADAGNO MASSIMO:

$$G_T = \lim_{r \to \infty} \frac{S_{IRR}}{\frac{P_{ING}}{4\pi r^2}}$$

A DISTANZA d VALUTO S_{IRR}:

$$S_{IRR} = G_T \cdot \frac{P_{ING}}{4\pi d^2}$$

CHE È LA DENSITÀ DI POTENZA GENERATA DALL'ANTENNA TRASMITTENTE NELLA DIR. DI MASSIMA RADIAZ.

SE PONIAMO L'ANTENNA RICEVENTE IN TALE DIREZIONE; ADATTANDOLA IN POLARIZZAZIONE E IN POTENZA, POSSIAMO VALUTARE LA POTENZA MASSIMA RICEVIBILE IN RELAZIONE ALL'AREA EFFICACE:

$$A_{EFF} = \frac{P_L}{S_i} \Rightarrow P_L = A_{EFF} \cdot S_i \underset{S_i = S_{IRR}}{\Rightarrow} \boxed{P_L = A_{EFF} \cdot G_T \cdot \frac{P_{ING}}{4\pi d^2}}$$

FORMULA DEL COLLEGAMENTO

SE SCRIVIAMO A_{EFF} IN FUNZIONE DEL GUADAGNO:

$$A_{EFF} = G_R \frac{\lambda^2}{4\pi}, \Rightarrow \boxed{P_L = G_R G_T \lambda^2 \frac{P_{ING}}{(4\pi d)^2}}$$

Achille Cannavale

TEOREMA DELLE IMMAGINI

• DIPOLO ELETTRICO VERTICALE SU UN CEP (I)

IN QUESTO CASO IL TH AFFERMA CHE IL CAMPO PRODOTTO DA TALE DIPOLO AL DI SOPRA DEL PIANO È LO STESSO CHE PRODURREBBE, IN ASSENZA DEL PIANO, IL DIPOLO PIU' UN ALTRO DIPOLO IDENTICO AL PRIMO, ALIMENTATO DALLA STESSA CORRENTE E POSTO IN POSIZIONE SIMMETRICA, LUNGO LO STESSO ASSE.

PER DIMOSTRARLO VERIFICHIAMO CHE LA SOMMA DEL CAMPO PRODOTTO DAL DIPOLO E DALLA SUA IMMAGINE ABBIA COMPONENTE TANGENTE AL CEP NULLA.

$$E_r = \frac{\zeta I_0 \Delta z}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\cos(\theta) = I_0\, g(r)\cos(\theta)$$

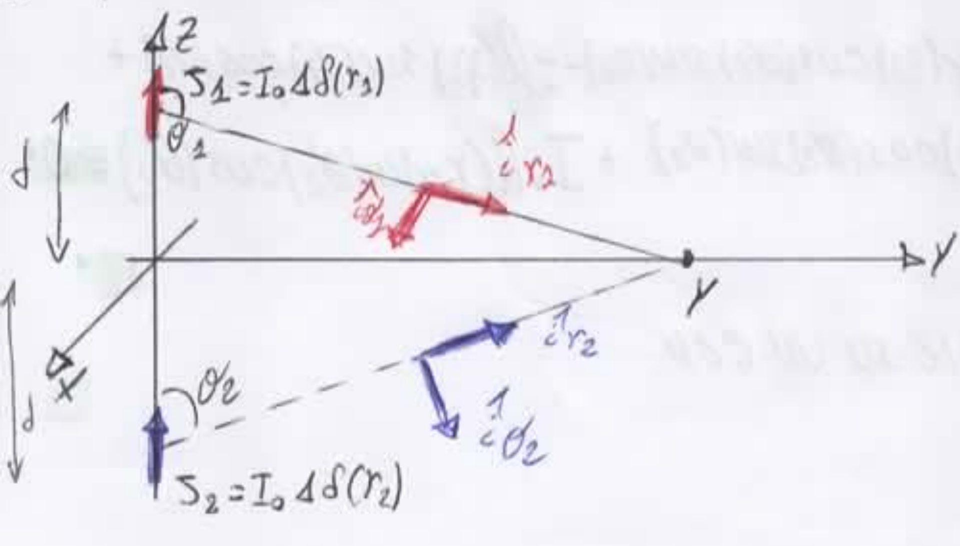
$$E_\theta = j\frac{\zeta I_0 \Delta z}{4\pi} k\left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2r^2}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\sin(\theta) = I_0\, h(r)\sin(\theta)$$

$$H_\phi = j\frac{I_0 \Delta z}{4\pi} k\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\sin(\theta) = I_0\, \ell(r)\sin(\theta)$$

$$\underline{E} = E_r \hat{i}_r + E_\theta \hat{i}_\theta = I_0\left[g(r)\cos(\theta)\,\hat{i}_r + h(r)\sin(\theta)\,\hat{i}_\theta\right]$$

$$\underline{H} = H_\phi \hat{i}_\phi = I_0\, \ell(r)\sin(\theta)\,\hat{i}_\phi$$

CONSIDERIAMO UN GENERICO PUNTO SUL CEP E FISSIAMO IL SISTEMA DI RIF. CON Y PASSANTE PER TALE PUNTO:



Achille Cannavale ... DEI DIPOLI SEPARATAMENTE:

$$r_1 = \sqrt{d^2+y^2}$$
$$\theta_1 = \pi - \theta_2$$
$$\hat{i}_{\theta_1} = \cos(\theta_1)\hat{i}_y - \sin(\theta_2)\hat{i}_z =$$
$$= -\cos(\theta_2)\hat{i}_y - \sin(\theta_2)\hat{i}_z$$
$$\hat{i}_{r_1} = \sin(\theta_1)\hat{i}_y + \cos(\theta_1)\hat{i}_z =$$
$$= \sin(\theta_2)\hat{i}_y - \cos(\theta_2)\hat{i}_z$$

$$r_2 = \sqrt{d^2+y^2} = r_1$$
$$\theta_2 = \pi - \theta_1$$
$$\hat{i}_{\theta_2} = \cos(\theta_2)\hat{i}_y - \sin(\theta_2)\hat{i}_z$$
$$\hat{i}_{r_2} = \sin(\theta_2)\hat{i}_y + \cos(\theta_2)\hat{i}_z$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{E}_1 &= I_0\left(g(r_1)\cos(\theta_1)\hat{i}_{r_1} + h(r_1)\sin(\theta_1)\hat{i}_{\theta_1}\right) \\ \underline{E}_2 &= I_0\left(g(r_2)\cos(\theta_2)\hat{i}_{r_2} + h(r_2)\sin(\theta_2)\hat{i}_{\theta_2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2$$

$$\underline{E} = I_0\Big[\Big(g(r_2)\cos(\theta_1)\cdot\sin(\theta_2) - h(r_2)\sin(\theta_2)\cos(\theta_2) +$$
$$+ g(r_2)\cos(\theta_2)\sin(\theta_2) + h(r_2)\sin(\theta_2)\cdot\cos(\theta_2)\Big)\hat{i}_y +$$
$$+ (\dots)\,\hat{i}_z\Big]$$

QUINDI LUNGO $\hat{i}_y$ HO: $-I_0 g(r)\cos(\theta_2)\sin(\theta_2) - I_0 h(r)\sin(\theta_2)\cos(\theta_2) +$
$+ I_0 g(r)\cos(\theta_2)\sin(\theta_2) + I_0 h(r)\sin(\theta_2)\cos(\theta_2) = 0$

$\square$

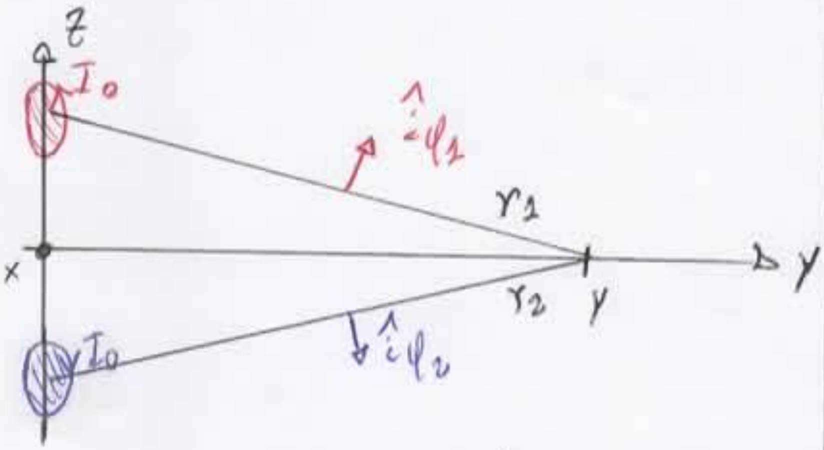
o) DIPOLO ELETTRICO ORIZZONTALE SU UN CEP.

ANALOGA.

$\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$

o) DIPOLO MAGNETICO VERTICALE SU UN CEP

IL CAMPO ELETTRICO PRODOTTO DA TALE DIPOLO È QUELLO CHE PRODURREBBE, IN ASSENZA DEL PIANO, IL DIPOLO PIÙ LA SUA IMMAGINE ALIMENTATA DA UNA CORRENTE CON SEGNO OPPOSTO.



PER UN DIPOLO MAGNETICO HO:

$$\underline{J}_m = I_{m_0} \Delta_z \delta(r)\, \hat{i}_z$$

CHE GENERA:

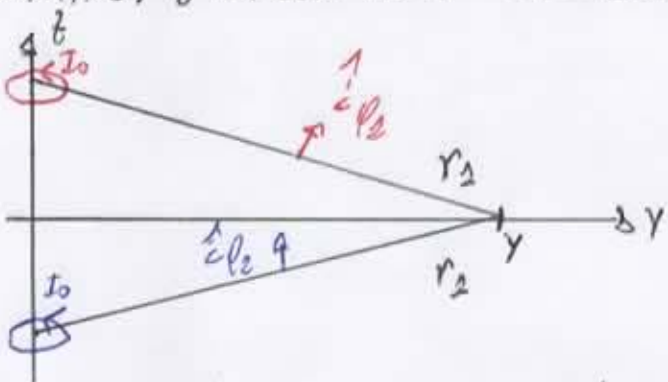
$$\underline{E}_\phi = \frac{I_0(-jks)}{4\pi} jk\left(1+\frac{1}{jkr}\right)\frac{e^{-jkr}}{r} \sin\ldots$$

$$= I_0\, \ell(r) \sin(\theta)\, \hat{i}_\phi$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{J}_{m_1} &= I_{m_0} \Delta_z \delta(|\underline{r} - d\hat{i}_z|)\, \hat{i}_z \\ \underline{J}_{m_2} &= -I_{m_0} \Delta_z \delta(|\underline{r} + d\hat{i}_z|)\, \hat{i}_z \end{aligned}\right\} \text{SONO OPPOSTI} \quad \square$$

o) DIPOLO MAGNETICO ORIZZONTALE SU UN CEP.

IL CAMPO PRODOTTO DA TALE DIPOLO È QUELLO CHE PRODURREBBE, IN ASSENZA DEL PIANO, IL DIPOLO PIÙ LA SUA IMMAGINE ALIMENTATO DALLA STESSA CORRENTE.



$$\hat{i}_{\varphi_1} = \sin(\varphi)\,\hat{i}_y + \cos(\varphi)\,\hat{i}_z$$

$$\hat{i}_{\varphi_2} = -\sin(\varphi)\,\hat{i}_y + \cos(\varphi)\,\hat{i}_z$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{E}_1 &= I_{m_0}\, \ell(r) \sin(\theta)\left(\sin(\varphi)\,\hat{i}_y + \cos(\varphi)\,\hat{i}_z\right) \\ \underline{E}_2 &= I_{m_0}\, \ell(r) \sin(\theta)\left(-\sin(\varphi)\,\hat{i}_y + \cos(\varphi)\,\hat{i}_z\right) \end{aligned}\right\} (\underline{E}_1 + \underline{E}_2)\cdot \hat{i}_y = 0 \quad \square$$

ONDE PIANE INCIDENTI SU UN CEP

SUPPONIAMO DI AVERE UN MEZZO LINEARE, OMOGENEO, ISOTROPO E SENZA PERDITE CON DELLE SORGENTI, CHE GENERANO ONDE PIANE:

$$\begin{cases} \underline{E}_i = \underline{E}^+ e^{-jkz} \\ \underline{H}_i = \underline{H}^+ e^{-jkz} \\ \underline{E}_i = \zeta \underline{H}_i \times \hat{i}_z \\ \underline{E}_i \cdot \hat{i}_z = \underline{H}_i \cdot \hat{i}_z = 0 \end{cases}$$

INSERIAMO ORA UN CEP IN $z>0$, E DICO CHE:

- NEL CEP IL CAMPO ELETTRICO È NULLO E SULLA FRONTIERA IL CAMPO MAGNETICO È DISCONTINUO.
- NON C'È CONTINUITÀ DEI CAMPI.

DOBBIAMO FAR IN MODO DI AVERE:

- COMPONENTE TANGENTE DI $\underline{E}$ NULLA PER $z<0$
- COMPONENTE TANGENTE DI $\underline{H}$ DISCONTINUA PER $z=0$

QUINDI COSTRUIAMO LA SOLUZIONE COME SOMMA DI DUE ONDE, INCIDENTE E RIF.:

$$\begin{cases} \underline{E}_r = \underline{E}^- e^{jkz} \\ \underline{H}_r = \underline{H}^- e^{jkz} \\ \underline{E}_r = \zeta \underline{H}_r \times \hat{i}_z \\ \underline{E}_r \cdot \hat{i}_z = \underline{H}_r \cdot \hat{i}_z = 0 \end{cases}$$

LA SOMMA DI QUESTE DUE ONDE È COSTANTE E TANGENTE SU $z=0$:

$$\underline{E} = \underline{E}_i + \underline{E}_r \Rightarrow \underline{E}(z=0) = \underline{E}^+ + \underline{E}^- \Rightarrow \underline{E}^+ = -\underline{E}^-$$

ORA SAPENDO CHE:

$$\underline{H}^+ = \frac{1}{\zeta} \hat{i}_z \times \underline{E}^+ \Rightarrow \underline{H}^- = \frac{1}{\zeta}(-\hat{i}_z) \times (-\underline{E}^+) = \underline{H}^+$$

INFINE HO:

$$\underline{E} = \underline{E}^+ e^{-jkz} - \underline{E}^+ e^{jkz} = 2j\underline{E}^+ \sin(kz)$$

$$\underline{H} = \underline{H}^+ e^{-jkz} + \underline{H}^+ e^{jkz} = 2\underline{H}^+ \cos(kz)$$

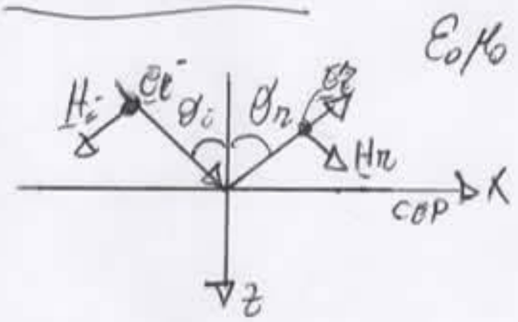
$\Rightarrow$

- $\underline{E}(z=0) = 0$
- $\underline{H}(z=0) = 2\underline{H}^+ \neq 0$

$\Downarrow$

IN $z=0$ HO UNA CORRENTE SUPERFICIALE: $\underline{J}_s = 2\underline{H}^+ \times \hat{i}_z$

INCIDENZA OBLIQUA



DOVE:

$$\underline{k}_i = k_{ix}\hat{i}_x + k_{iz}\hat{i}_z = k \sin(\theta_i)\hat{i}_x + k\cos(\theta_i)\hat{i}_z$$

IN QUESTO CASO L'ONDA INCIDENTE È:

$$\begin{cases} \underline{E}_i = \underline{E}^+ e^{-j\underline{k}_i \cdot \underline{r}} \\ \underline{H}_i = \underline{H}^+ e^{-j\underline{k}_i \cdot \underline{r}} \\ \underline{E}_i = \zeta \underline{H}_i \times \hat{i}_{k_i} \\ \underline{E}_i \cdot \hat{i}_{k_i} = \underline{H}_i \cdot \hat{i}_{k_i} = 0 \end{cases}$$

IN QUESTO CASO CERCHIAMO DI SODDISFARE LE CONDIZIONI A CONTORNO INTRODUCENDO UN'ONDA RIFLESSA;

$$\begin{cases} \underline{E}_r = \underline{E}^- e^{-j\underline{k}_r \cdot \underline{r}} \\ \underline{H}_r = \underline{H}^- e^{-j\underline{k}_r \cdot \underline{r}} \\ \underline{E}_r = \zeta \underline{H}_r \times \hat{i}_{k_r} \\ \underline{E} \cdot \hat{i}_{k_r} = \underline{H} \cdot \hat{i}_{k_r} = 0 \end{cases}$$

DOVE $\underline{k}_r = k_{rx}\hat{i}_x + k_{rz}\hat{i}_z = k\sin(\theta)\hat{i}_x - k\cos(\theta)\hat{i}_z$

IMPONGO ORA LA SOMMA DELL'ONDA INCIDENTE E L'ONDA RIFLESSA CON COMPONENTE TANGENTE DEL CAMPO ELETTRICO NULLA SU $z=0$.

$$\underline{E}_i(x, z=0) = \underline{E}^+ e^{-j\underline{k}_{ix} \cdot x} \quad , \quad \underline{E}_r(x, z=0) = \underline{E}^- e^{-j\underline{k}_{rx} \cdot x}$$

$$\Rightarrow \hat{i}_z \times \left(\underline{E}_i(x,z=0) + \underline{E}_r(x,z=0)\right) = \hat{i}_z \times \left(\underline{E}^+ e^{-j\underline{k}_{ix} \cdot x} + \underline{E}^- e^{-j\underline{k}_{rx} \cdot x}\right) = 0$$

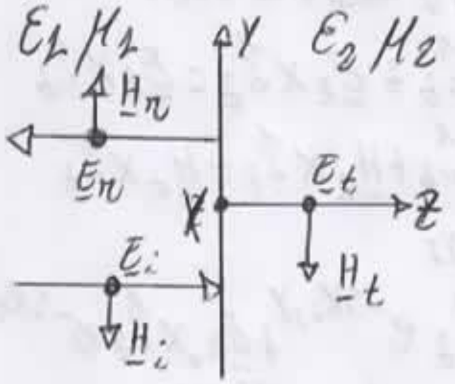
QUINDI DOBBIAMO IMPORRE $\rightarrow e^{-j\underline{k}_{ix} \cdot x} = e^{-j\underline{k}_{rx} \cdot x} \rightarrow$ CHE AVVIENE

$$\Leftrightarrow k_{ix} = k\sin(\theta) = k_{rx} = k\sin(\theta_r) \Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r = \theta}$$

INOLTRE DOBBIAMO IMPORRE;

$$\hat{i}_z \times \underline{E}^+ = -\hat{i}_z \times \underline{E}^- \rightarrow \text{CHE VUOL DIRE} \rightarrow \begin{cases} E_x^+ = -E_x^- \\ E_y^+ = -E_y^- \end{cases}$$

DISCONTINUITÀ



$$\underline{E}_i = \underline{E}_{0i}\, e^{-jk_1 \cdot z}$$
$$\underline{H}_i = \underline{H}_{0i}\, e^{-jk_1 \cdot z}$$
$$\underline{E}_i = \xi_1\, \underline{H}_i \times \hat{i}_z$$

DOVE:

$$k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$$
$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$$

$$\underline{E}_t = \underline{E}_{0t}\, e^{-jk_2 \cdot z}$$
$$\underline{H}_t = \underline{H}_{0t}\, e^{-jk_2 \cdot z}$$
$$\underline{E}_t = \xi_1\, \underline{H}_t \times \hat{i}_z$$

DOVE:

$$k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$$
$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$$

$$\underline{E}_r = \underline{E}_{0r}\, e^{jk_1 \cdot z}$$
$$\underline{H}_r = \underline{H}_{0r}\, e^{jk_1 \cdot z}$$
$$\underline{E}_r = \xi_1\, \underline{H}_i \times (-\hat{i}_z)$$

→ COSÌ ABBIAMO CHE A $z=0$:

$$\begin{cases} \underline{E}_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t} \\ \underline{H}_{0i} + \underline{H}_{0r} = \underline{H}_{0t} \end{cases}$$

→ CHE POSSIAMO SCRIVERE IN TERMINI SCALARI.

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \\ H_{0i} + H_{0r} = H_{0t} \end{cases}$$

PONIAMO ORA:

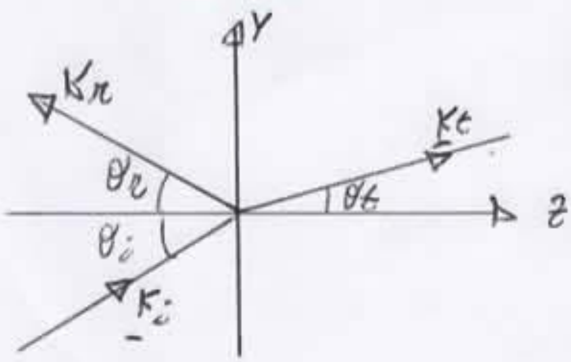
$$\Gamma = \frac{E_{0r}}{E_{0i}}, \quad \tau = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}$$

$$\begin{cases} 1 + \Gamma = \tau \\ \frac{1}{\xi_1} - \frac{\Gamma}{\xi_1} = \frac{\tau}{\xi_2} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \\ \frac{E_{0i}}{\xi_1} - \frac{E_{0r}}{\xi_1} = \frac{E_{0t}}{\xi_2} \end{cases}$$

↳ RISOLVO →

$$\begin{cases} \Gamma = \tau - 1 \\ \frac{\tau}{\xi_2} = \frac{2}{\xi_1} - \frac{\tau}{\xi_1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Gamma = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_1 + \xi_2} \\ \tau = \frac{2}{\xi_1}\left(\frac{\xi_2 + \xi_1}{\xi_1 \xi_2}\right)^{-1} = \frac{2\xi_2}{\xi_1 + \xi_2} \end{cases}$$

ONDE INCIDENTI OBLIQUE SU DISCONTINUITÀ



$$\underline{E}_i = \underline{E}_{i0}\, e^{-j\underline{K}_i \cdot \underline{r}} = \underline{E}_{i0}\, e^{-j(K_{iy} \cdot y + K_{iz} \cdot z)}$$
$$\underline{H}_i = \underline{H}_{i0}\, e^{-j(K_{iy} \cdot y + K_{iz} \cdot z)}$$
$$\underline{E}_i = \xi_1\, \underline{H}_i \times \hat{i}_{K_i} = \xi_1\, \underline{H}_i \times \frac{\underline{K}_i}{|\underline{K}_i|} = \xi_1\, \underline{H}_i \times \frac{\underline{K}_i}{\omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} =$$
$$= \underline{H}_i \times \frac{\underline{K}_i}{\omega \varepsilon_1}$$
$$\underline{H}_i = \frac{1}{\xi_1}\, \hat{i}_{K_i} \times \underline{E}_i = \frac{\underline{K}_i}{\omega \mu_1} \times \underline{E}_i$$

$$\underline{E}_r = \underline{E}_{r0}\, e^{-j\underline{k}_r\cdot\underline{r}} = \underline{E}_{r0}\, e^{-j(k_{ry}y + k_{rz}z)}$$

$$\underline{H}_r = \underline{H}_{r0}\, e^{-j\underline{k}_r\cdot\underline{r}} = \underline{H}_{r0}\, e^{-j(k_{ry}y + k_{rz}z)}$$

$$\underline{E}_r = \zeta_1\, \underline{H}_r \times \hat{i}_{kr} = \underline{H}_r \times \frac{\underline{k}_r}{\omega\varepsilon_1}$$

$$\underline{H}_r = \frac{1}{\zeta_1}\, \hat{i}_{kr} \times \underline{E}_r = \frac{\underline{k}_r}{\omega\mu_1} \times \underline{E}_r$$

ONDA TRASMESSA

$$\underline{E}_t = \underline{E}_{t0}\, e^{-j\underline{k}_t\cdot\underline{r}} = \underline{E}_{t0}\, e^{-j(k_{ty}y + k_{tz}z)}$$

$$\underline{H}_t = \underline{H}_{t0}\, e^{-j\underline{k}_t\cdot\underline{r}} = \underline{H}_{t0}\, e^{-j(k_{ty}y + k_{tz}z)}$$

$$\underline{E}_t = \zeta_2\, \underline{H}_t \times \hat{i}_{kt} = \underline{H}_t \times \frac{\underline{k}_t}{\omega\varepsilon_2}$$

$$\underline{H}_t = \frac{1}{\zeta_2}\, \hat{i}_{kt} \times \underline{E}_t = \frac{\underline{k}_t}{\omega\mu_2} \times \underline{E}_t$$

A $z=0$ ABBIAMO CHE:

$$\underline{E}_i \times \hat{i}_z + \underline{E}_r \times \hat{i}_z = \underline{E}_t \times \hat{i}_z$$

$$\underline{H}_i \times \hat{i}_z + \underline{H}_r \times \hat{i}_z = \underline{H}_t \times \hat{i}_z$$

OVVERO:

$$\underline{E}_{i0} \times \hat{i}_z\, e^{-jk_{iy}y} + \underline{E}_{r0} \times \hat{i}_z\, e^{-jk_{ry}y} = \underline{E}_{t0} \times \hat{i}_z\, e^{-jk_{ty}y}$$

$$\underline{H}_{i0} \times \hat{i}_z\, e^{-jk_{iy}y} + \underline{H}_{r0} \times \hat{i}_z\, e^{-jk_{ry}y} = \underline{H}_{t0}\, e^{-jk_{ty}y}$$

QUESTE DEVONO VALERE $\forall y$, QUINDI:

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

CHE POSSIAMO RISCRIVERE COME:

$$k_1 \sin(\theta_i) = k_1 \sin(\theta_r) = k_2 \sin(\theta_t)$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\, \sin(\theta_i) = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\, \sin(\theta_t) \rightarrow$$

INTRODUCENDO L'INDICE DI RIFRAZIONE:

$$n_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_0\mu_0}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_0\mu_0}}$$

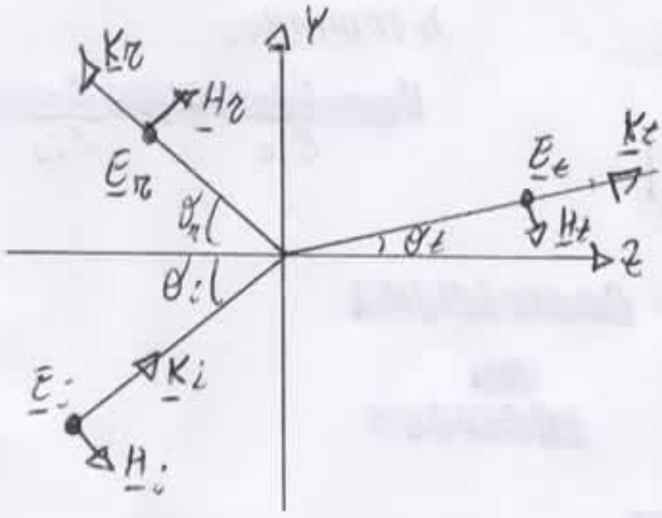
$$\rightarrow \boxed{n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t)} \text{ SNELL}$$

VERIFICHIAMO LA CONTINUITÀ DELLE COMPONENTI TANGENTI NELL'ORIGINE:

$$\underline{E}_{i0} \times \hat{i}_z + \underline{E}_{r0} \times \hat{i}_z = \underline{E}_{t0} \times \hat{i}_z$$

$$\underline{H}_{i0} \times \hat{i}_z + \underline{H}_{r0} \times \hat{i}_z = \underline{H}_{t0} \times \hat{i}_z$$

È PIÙ FACILE STUDIARLA DIVIDENDO L'ONDA INCIDENTE IN DUE ONDE PIANE, UNA TE E UNA TM.



ONDA INCIDENTE

$$\underline{E}_i = E_{i0}\, e^{-j\underline{k}_i\cdot\underline{r}}\,\hat{i}_x = E_{i0}\, e^{-j(k_{iy}y+k_{iz}z)}\,\hat{i}_x$$

$$\underline{H}_i = \underline{H}_{i0}\, e^{-j(k_{iy}y+k_{iz}z)}$$

$$\underline{H}_{i0} = \frac{1}{\zeta_1}\hat{i}_{k_i}\times E_{i0}\hat{i}_x = \frac{E_{i0}}{\omega\mu_1}\underline{k}_i\times\hat{i}_x = \frac{E_{i0}}{\omega\mu_1}(k_{iy}\hat{i}_y + k_{iz}\hat{i}_z)\times\hat{i}_x = \underbrace{\boxed{\frac{k_{iz}}{\omega\mu_1}E_{i0}}}_{H_{i0y}}\hat{i}_y - \frac{k_{iy}}{\omega\mu_1}E_{i0}\hat{i}_z$$

$$\underline{H}_{i0y} = E_{i0}\frac{k_1\cos(\theta_i)}{\omega\mu_1} = \frac{E_{i0}}{Z_{TE1}}$$

ONDA RIFLESSA

$$\underline{E}_r = E_{r0}\, e^{-j\underline{k}_r\cdot\underline{r}}\,\hat{i}_x$$

$$\underline{H}_r = \underline{H}_{r0}\, e^{-j\underline{k}_r\cdot\underline{r}}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{H}_{r0} = \frac{1}{\zeta_1}\hat{i}_{k_r}\times E_{r0}\hat{i}_x = \frac{E_{r0}}{\omega\mu_1}\cdot\underline{k}_r\times\hat{i}_x = \frac{E_{r0}}{\omega\mu_1}(k_{ry}\hat{i}_y + k_{rz}\hat{i}_z)\times\hat{i}_x =$$

$$= \boxed{\frac{k_{rz}}{\omega\mu_1}E_{r0}}\hat{i}_y - \frac{k_{ry}}{\omega\mu_1}E_{r0}\hat{i}_z$$

$$H_{r0y} \to = -\frac{k_1\cos(\theta_i)}{\omega\mu_1}E_{r0} = -\frac{E_{r0}}{Z_{TE1}}$$

ONDA TRASMESSA

$$\underline{E}_t = E_{t0}\, e^{-j\underline{k}_t\cdot\underline{r}}\,\hat{i}_x$$

$$\underline{H}_t = \underline{H}_{t0}\, e^{-j\underline{k}_t\cdot\underline{r}}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{H}_{t0} = \frac{1}{\zeta_2}\hat{i}_{k_t}\times E_{t0}\hat{i}_x = \frac{E_{t0}}{\omega\mu_2}\underline{k}_t\times\hat{i}_x = \frac{E_{t0}}{\omega\mu_2}(k_{ty}\hat{i}_y + k_{tz}\hat{i}_z)\times\hat{i}_x =$$

$$= \boxed{\frac{k_{tz}}{\omega\mu_2}E_{t0}}\hat{i}_y + \frac{k_{ty}}{\omega\mu_2}E_{t0}\hat{i}_z$$

$$H_{t0y} \to = \frac{k_2\cos(\theta_t)}{\omega\mu_2}E_{t0} = \frac{E_{t0}}{Z_{TE2}}$$

[illegible] LA CONTINUITÀ DEI CAMPI, PONIAMOCI ALL'ORIGINE PER SEMPLICITÀ;

$$\begin{cases} E_{io} + E_{ro} = E_{to} \\ H_{ioy} + H_{roy} = H_{toy} \end{cases} \rightarrow \frac{E_{io}}{Z_{TE1}} - \frac{E_{ro}}{Z_{TE1}} = \frac{E_{to}}{Z_{TE2}}$$

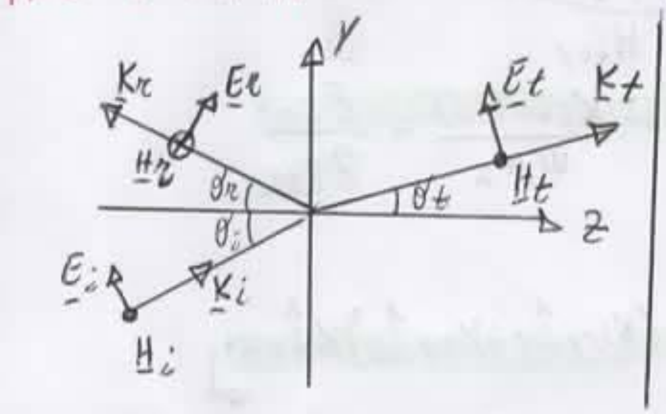
DEFINIAMO:

$$\Gamma_{TE} = \frac{E_{ro}}{E_{io}}, \quad \tau_{TE} = \frac{E_{to}}{E_{io}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \Gamma_{TE} = \tau_{TE} \\ \dfrac{1}{Z_{TE1}} + \dfrac{\Gamma_{TE}}{Z_{TE1}} = \dfrac{\tau_{TE}}{Z_{TE2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{TE} = \dfrac{Z_{TE2} - Z_{TE1}}{Z_{TE2} + Z_{TE1}} \\ \tau_{TE} = \dfrac{2 Z_{TE2}}{Z_{TE2} + Z_{TE1}} \end{cases}$$

COEFFICIENTI DI FRESNEL

INCIDENZA TM



ONDA INCIDENTE

$$\underline{H}_i = H_{io} e^{-j\underline{k}_i \cdot \underline{r}} \hat{i}_x$$

$$\underline{E}_i = \underline{E}_{io} e^{-j\underline{k}_i \cdot \underline{r}}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{E}_{io} = \zeta_1 H_{io} \hat{i}_x \times \hat{i}_{k_i} =$$

$$= \frac{H_{io}}{\omega \varepsilon_1} \hat{i}_x \times \underline{k}_i = \frac{H_{io}}{\omega \varepsilon_1} \hat{i}_x \times (k_{iy} \hat{i}_y + k_{iz} \hat{i}_z) =$$

$$= \frac{k_{iy}}{\omega \varepsilon_1} H_{io} \hat{i}_z \boxed{- \frac{k_{iz}}{\omega \varepsilon_1} H_{io}} \hat{i}_y$$

$$E_{ioy} = \underbrace{\frac{-k_1 \cos(\vartheta_i)}{\omega \varepsilon_1}}_{Z_{TM1}} H_{io}$$

ONDA RIFLESSA

$$\underline{H}_r = H_{ro} e^{-j\underline{k}_r \cdot \underline{r}} \hat{i}_x$$

$$\underline{E}_r = \underline{E}_{ro} e^{-j\underline{k}_r \cdot \underline{r}}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{E}_{ro} = \zeta_1 H_{ro} \hat{i}_x \times \hat{i}_{k_r} = \frac{H_{ro}}{\omega \varepsilon_1} \hat{i}_x \times \underline{k}_r =$$

$$= \frac{H_{ro}}{\omega \varepsilon_1} \hat{i}_x \times (k_{ry} \hat{i}_y + k_{rz} \hat{i}_z) = \frac{k_{ry}}{\omega \varepsilon_1} H_{ro} \hat{i}_z \boxed{- \frac{k_{rz}}{\omega \varepsilon_1} H_{ro}} \hat{i}_y$$

$$E_{roy} = \underbrace{\frac{k_1 \cos(\vartheta_i)}{\omega \varepsilon_1}}_{-Z_{TM1}} H_{ro}$$

ONDA TRASMESSA

$$\underline{H}_t = H_{to} e^{-j\underline{k}_t \cdot \underline{r}} \hat{i}_x$$

$$\underline{E}_t = E_{to} e^{-j\underline{k}_t \cdot \underline{r}}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{E}_{to} = \zeta_2 H_{to} \hat{i}_x \times \hat{i}_{k_t} = \frac{H_{to}}{\omega \varepsilon_2} \hat{i}_x \times \underline{k}_t = \frac{H_{to}}{\omega \varepsilon_2} \hat{i}_x \times (k_{ty} \hat{i}_y + k_{tz} \hat{i}_z) =$$

$$= \frac{k_{ty}}{\omega \varepsilon_2} H_{to} \hat{i}_z \boxed{- \frac{k_{tz}}{\omega \varepsilon_2} H_{to}} \hat{i}_y$$

$$E_{toy} = \underbrace{\frac{-k_2 \cos(\vartheta_t)}{\omega \varepsilon_2}}_{Z_{TM2}} H_{to}$$

Achille Cannavale

... CONTINUITÀ:

$$\begin{cases} E_{i0y} + E_{r0y} = E_{t0y} \\ H_{i0} + H_{r0} = H_{t0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{i0y} + E_{r0y} = E_{t0y} \\ \dfrac{E_{i0y}}{Z_{TM1}} - \dfrac{E_{r0y}}{Z_{TM1}} = \dfrac{E_{t0y}}{Z_{TM2}} \end{cases} \Rightarrow \text{DEFINISCO: } \Gamma_{TM} = \frac{E_{0ry}}{E_{0iy}} \quad \tau_{TM} = \frac{E_{0ty}}{E_{0iy}} \Rightarrow \text{SOSTITUISCO}$$

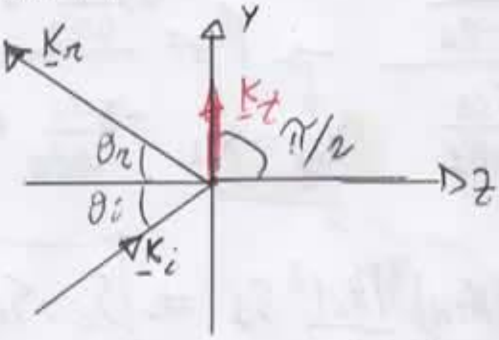
$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \Gamma_{TM} = \tau_{TM} \\ \dfrac{1}{Z_{TM1}} - \dfrac{\Gamma_{TM}}{Z_{TM1}} = \dfrac{\tau_{TM}}{Z_{TM2}} \end{cases} \Rightarrow \text{RISOLVO} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{TM} = \dfrac{Z_{TM2} - Z_{TM1}}{Z_{TM2} + Z_{TM1}} \\ \tau_{TM} = \dfrac{2 Z_{TM1}}{Z_{TM2} + Z_{TM1}} \end{cases}$$

COEFFICIENTI DI FRESNELL

RIFLESSIONE TOTALE

NEL CASO IN CUI:

$\sin(\theta_i) = \frac{n_2}{n_1} < 1$ ABBIAMO UNA RIFLESSIONE TOTALE: $\Rightarrow \theta_t = \frac{\pi}{2}$



MA NULLA CI IMPEDISCE DI SCEGLIERE $\sin(\theta_i) > \frac{n_2}{n_1} < 1$, IN QUESTO CASO NON TROVIAMO ALCUN ANGOLO REALE CHE SODDISFI LA LEGGE DI SNELL.

SAPPIAMO CHE:

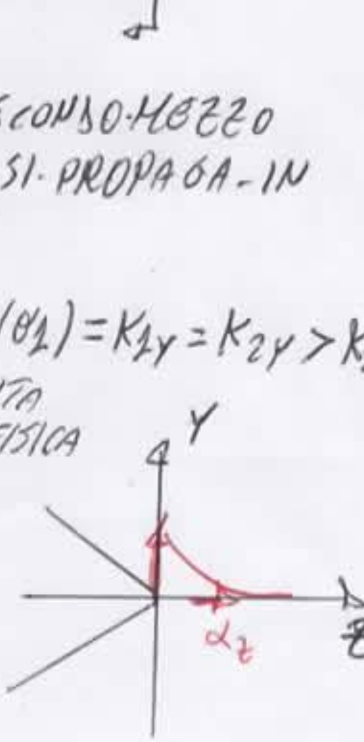
$K_1 \sin(\theta_1) = K_{1y} = K_{2y}$ $\rightsquigarrow$ MA SE θ = UN CERTO ANGOLO θ_ℓ

$\Rightarrow K_{1y} = K_1 \sin(\theta_\ell) = K_2 = K_{2y}$ SE $K_{2z} = 0$ $\Rightarrow$ QUINDI NEL SECONDO MEZZO TUTTA L'ONDA SI PROPAGA IN DIREZIONE $\hat{i}_y$

a) $\theta_1 > \theta_\ell$:

$K_{1y} = K_1 \sin(\theta_1) > K_1 \sin(\theta_\ell) = K_2$ $\Rightarrow$ E PER SNELL $\Rightarrow$ $K_1 \sin(\theta_1) = K_{1y} = K_{2y} > K_2$

$\Rightarrow K_{2z}^2 = K_2^2 - K_{2y}^2 < 0$ $\Rightarrow K_{2z} = \sqrt{K_2^2 - K_{2y}^2} = -j\alpha_z$ SCELTA FISICA



QUINDI:

$$\underline{E}_t = \underline{E}_{t0} e^{-j(K_{2y}Y - j\alpha_z z)} = \underline{E}_{t0} e^{-\alpha_z z} e^{-jK_{2y}Y}$$

$$\underline{H}_t = \underline{H}_{t0} e^{-j(K_{2y}Y - j\alpha_z z)} = \underline{H}_{t0} e^{-\alpha_z z} e^{-jK_{2y}Y}$$

[illegible] ORA IL CAMPO·EM·NEL·PRIMO·MEZZO, SCOMPONENDO·L'ONDA·INCIDENTE NELLA·SOMMA·DI·UN'ONDA·PIANA·TE·E·UNA·TM.

$$\Gamma_{TE} = \frac{Z_{TE_2} - Z_{TE_1}}{Z_{TE_2} + Z_{TE_1}} = \frac{\frac{\omega\mu_2}{k_{2z}} - \frac{\omega\mu_1}{k_{1z}}}{\frac{\omega\mu_2}{k_{2z}} + \frac{\omega\mu_1}{k_{1z}}} \xrightarrow[k_{2z} = -j\alpha_z]{} \Gamma_{TE} = \frac{j\frac{\omega\mu_2}{\alpha_z} - \frac{\omega\mu_1}{k_{1z}}}{j\frac{\omega\mu_2}{\alpha_z} + \frac{\omega\mu_1}{k_{1z}}}$$

NOTIAMO·CHE·IL·NUM·È·L'OPPOSTO·DEL·CONIUGATO·DEL·DEN. QUINDI:

$|\Gamma_{TE}| = 1$

… CAMPO EM NEL PRIMO MEZZO, SCOMPONENDO L'ONDA INCIDENTE NELLA SOMMA DI UN'ONDA PIANA TE E UNA TM.

$$\Gamma_{TE} = \frac{Z_{TE_2} - Z_{TE_1}}{Z_{TE_2} + Z_{TE_1}} = \frac{\frac{\omega\mu_2}{k_{2z}} - \frac{\omega\mu_1}{k_{1z}}}{\frac{\omega\mu_2}{k_{2z}} + \frac{\omega\mu_1}{k_{1z}}} \xrightarrow[k_{2z} = -j\alpha_z]{} \Gamma_{TE} = \frac{\frac{j\omega\mu_2}{\alpha_z} - \frac{\omega\mu_1}{k_{1z}}}{\frac{j\omega\mu_2}{\alpha_z} + \frac{\omega\mu_1}{k_{1z}}}$$

NOTIAMO CHE IL NUM È L'OPPOSTO DEL CONIUGATO DEL DEN. QUINDI:

$$|\Gamma_{TE}| = 1$$

$$\Rightarrow S_i = \frac{|E_i|^2}{2\zeta_1}, \quad S_r = \frac{|E_r|^2}{2\zeta_1} = \overbrace{|\Gamma_{TE}|^2}^{1} \frac{|E_i|^2}{2\zeta_1} \Rightarrow \boxed{S_i = S_r}$$

CONSIDERIAMO L'ONDA TM:

$$\Gamma_{TM} = \frac{Z_{TM_2} - Z_{TM_1}}{Z_{TM_2} - Z_{TM_1}} = \frac{\frac{k_{2z}}{\omega\varepsilon_2} - \frac{k_{1z}}{\omega\varepsilon_1}}{\frac{k_{2z}}{\omega\varepsilon_2} - \frac{k_{1z}}{\omega\varepsilon_1}} \xrightarrow[k_{2z} = -j\alpha_z]{} \Gamma_{TM} = \frac{-j\frac{\alpha_z}{\omega\varepsilon_2} - \frac{k_{1z}}{\omega\varepsilon_1}}{-j\frac{\alpha_z}{\omega\varepsilon_2} + \frac{k_1}{\omega\varepsilon_1}}$$

$$|\Gamma_{TM}| = 1$$

$$\Rightarrow S_i = \zeta_1\frac{|H_i|^2}{2}, \quad S_r = \zeta_1\frac{|H_r|^2}{2} = \overbrace{|\Gamma_{TM}|^2}^{1} \frac{|H_i|^2}{2} \zeta_1 \Rightarrow \boxed{S_i = S_r}$$