ACHILLE
CANNAVALE

APPUNTI

FISICA

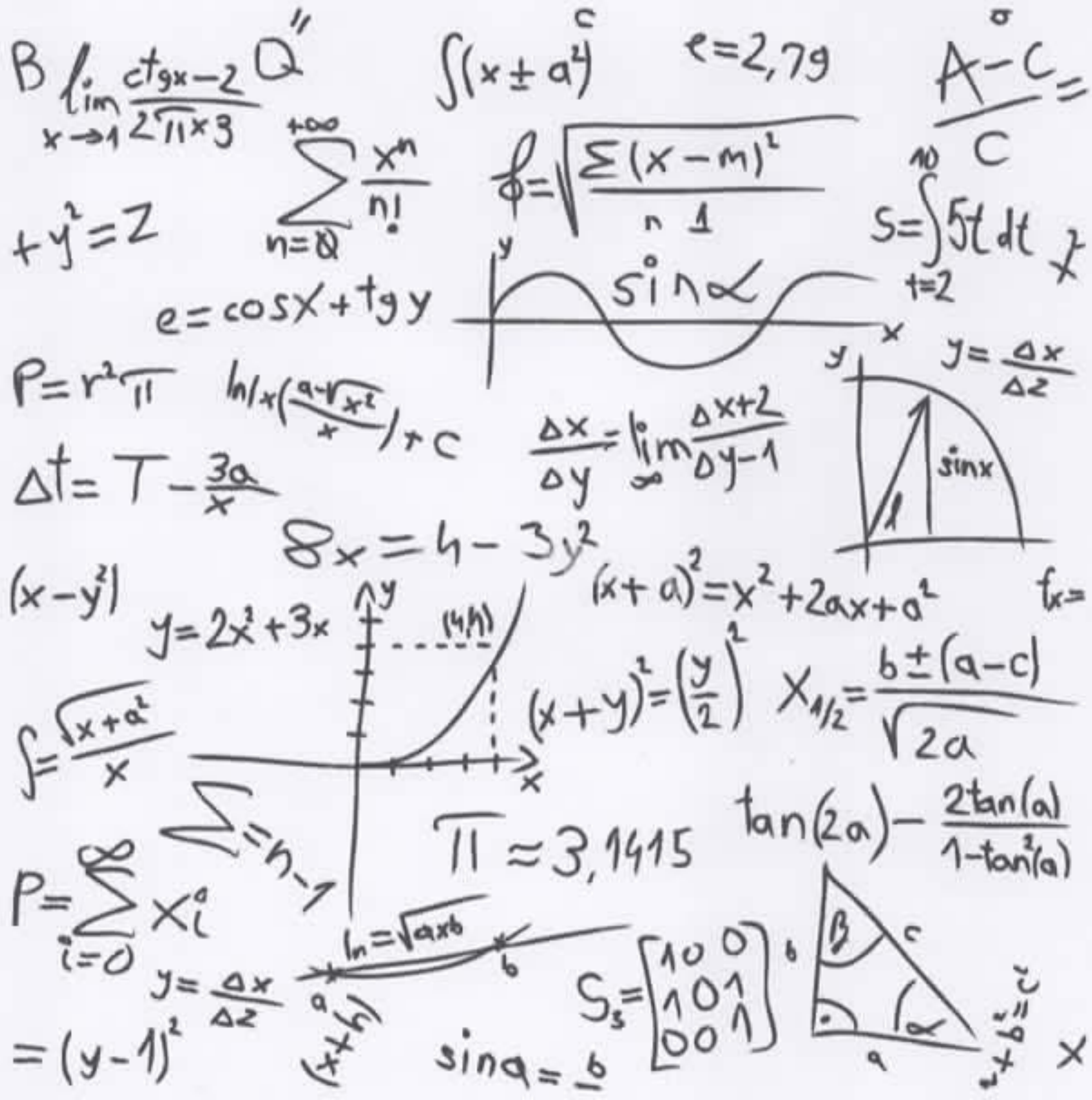
2020

CIAO! QUESTI APPUNTI SONO FRUTTO DEL MIO STUDIO E DELLA MIA INTERPRETAZIONE, QUINDI POTREBBERO CONTENERE ERRORI, SVISTE O COSE MIGLIORABILI. BUONO STUDIO📚✍️

Achille Cannavale

FISICA
APPUNTI

Cannavale Achille



Achille Cannavale

VALORI DA RICORDARE

c = VELOCITÀ DELLA LUCE NEL VUOTO = 3×10^8 m/s (299.792.458)

π = PI-GRECO = 3,14159...

$m^3 / T^3 Kg^2$

e = NUMERO DI NEPERO = 2,7182...

G = COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE = $6,67 \times 10^{-11}$ N m^2/Kg^2

g = ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ = 9,81 m/s^2

e = CARICA ELEMENTARE = $1,60 \times 10^{-19}$ C

ε_0 = COSTANTE DIELETTRICA = $8,85 \times 10^{-12}$ F/m

μ_0 = PERMEABILITÀ MAGNETICA = $4\pi \times 10^{-7}$ H/m

σ = COSTANTE DI STEFAN-BOLTZMANN = $5,6 \times 10^{-8}$ $W/(m^2 \cdot K^4)$

K_b = COSTANTE DI BOLTZMANN = $1,38 \times 10^{-23}$ J/K

DIMENSIONI FISICHE

$[x]$ = POSIZIONE = L

$[v]$ = $\dot{x}$ = VELOCITÀ = L/T

$[a]$ = $\ddot{x}$ = ACCELERAZIONE = L/T^2

$[m]$ = MASSA = M

$[p]$ = $m \cdot v$ = QUANTITÀ DI MOTO = $M \cdot L/T$

$[F]$ = $m \cdot a$ = FORZA = N = $m \cdot L/T^2$

$[K]$ = $1/2 \cdot m \cdot v^2$ = ENERGIA CINETICA = $M \cdot L^2/T^2$

$[I]$ = L/ω = MOMENTO DI INERZIA = $(m L^2/T) / (RAD/T)$

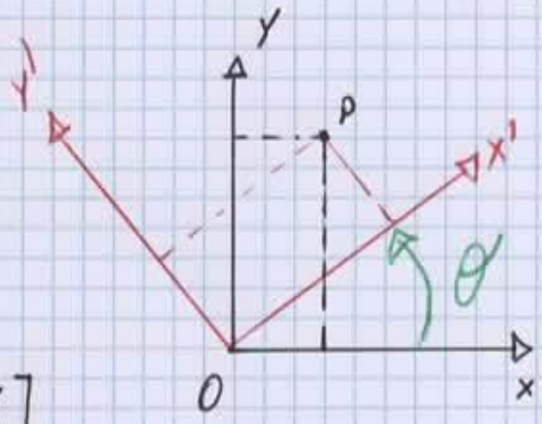
$[L]$ = $m \cdot v \cdot r$ = MOMENTO ANGOLARE = $M \cdot L^2/T$

$[\tau]$ = $r \wedge F$ = MOMENTO TORCENTE = $M L^2/T^2$

Achille Cannavale

ROTAZIONE

FISSATA UN'ORIGINE TRASLIAMO RIGIDAMENTE GLI ASSI.

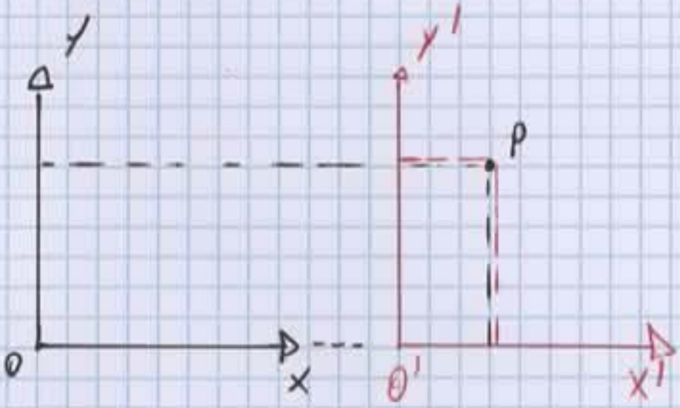


$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ y' = y\cos(\theta) - x\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

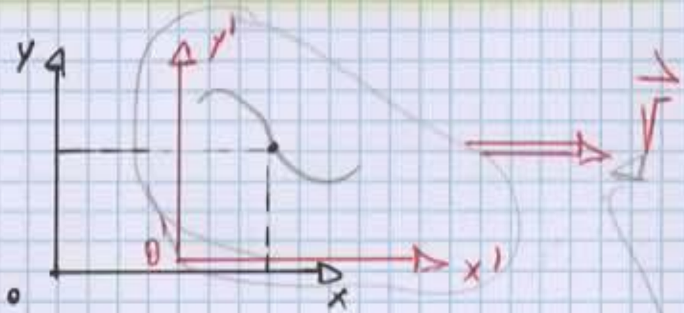
TRASLAZIONE

TRASLAZIONE DELL'ORIGINE LUNGO UNA DIREZIONE COMUNE.



$$\begin{cases} x' = x - d(OO') \\ y' = y \end{cases}$$

TRASFORMAZIONI DI GALILEO



$x' = x - d(OO')$ (PER NEWTON $t = t$)

$y' = y$

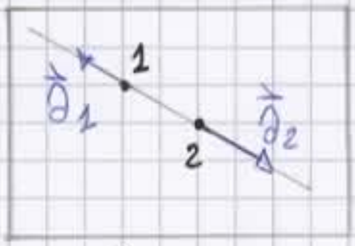
$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x - d(OO')\right] = \frac{dx}{dt} - \frac{d}{dt}\left(d(OO')\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \vec{V} \Rightarrow v_x' = v_x - \vec{V} \Rightarrow a_x = a_x - \vec{A}$$

BOOST!!

LEGGI DI NEWTON (MACH)

1) OSSERVAZIONE · SPERIMENTALE   1ª LEGGE · DI · NEWTON



"SI · DEFINISCE · SISTEMA · DI · RIFERIMENTO INERZIALE · IL · LUOGO · IN · CUI · UNA · PARTICELLA SI · MUOVE · DI · MOTO · RETTILINEO · UNIFORME."

$\vec{a}_1 \,/\!/\, \vec{a}_2$ ANTIPARALLELE · IN · SENSO · STRETTO

2) DEFINIZIONE

IN · GENERALE · $|\vec{a}_1| \neq |\vec{a}_2|$,

MA · NEL · CASO · IN · CUI $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$ · DIREMO · CHE · I · CORPI · HANNO · LA · STESSA MASSA.

DEFINIAMO · IL · RAPPORTO · DI · MASSA $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}$, QUINDI:

- SE · $|\vec{a}_1| > |\vec{a}_2| \Rightarrow m_2 > m_1$,
- SE · $|\vec{a}_1| < |\vec{a}_2| \Rightarrow m_2 < m_1$;

3) OSSERVAZIONE

IN · ENTRAMBI · I · CASI · LE · ACCELERAZIONI SONO · ANTIPARALLELE · E · I · RAPPORTI · DI · MASSA NON · CAMBIA · MAI.

PRODOTTO SCALARE

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$$
$$\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z) \cdot (B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z) =$$

$$= A_x \vec{u}_x \cdot B_x \vec{u}_x + A_x \vec{u}_x \cdot B_y \vec{u}_y + A_x \vec{u}_x \cdot B_z \vec{u}_z +$$
$$+ A_y \vec{u}_y \cdot B_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y \cdot B_y \vec{u}_y + A_y \vec{u}_y \cdot B_z \vec{u}_z +$$
$$+ A_z \vec{u}_z \cdot B_x \vec{u}_x + A_z \vec{u}_z \cdot B_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z \cdot B_z \vec{u}_z =$$

RACCOLGO I VERSORI

$$= \boxed{A_x B_x (\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x)} + A_x B_y (\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y) + A_x B_z (\vec{u}_x \cdot \vec{u}_z) +$$
$$+ A_y B_x (\vec{u}_y \cdot \vec{u}_x) + \boxed{A_y B_y (\vec{u}_y \cdot \vec{u}_y)} + A_y B_z (\vec{u}_y \cdot \vec{u}_z) +$$
$$+ A_z B_x (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_x) + A_z B_y (\vec{u}_z \cdot B_y) + \boxed{A_z B_z (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z)} =$$

SE ABBIAMO A CHE FARE CON UN SISTEMA ORTOGONALE:

$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1$ MENTRE I PRODOTTI SCALARI DI VERSORI

$\vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = 1$ A $90°$ GRADI TRA LORO FANNO 0.

$\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

OSSERVAZIONE ①

$$|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

OSSERVAZIONE ②

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\theta)$, DATO CHE $\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \cos(\alpha) \vec{u}_x + |\vec{A}| \cdot \sin(\alpha) \vec{u}_y$

$\vec{B} = |\vec{B}| \cos(\beta) \vec{u}_x + |\vec{B}| \sin(\beta) \vec{u}_y$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \left(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\right) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos(\theta)$$

PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$$
$$\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z) \wedge (B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z) =$$

$$= A_x \vec{u}_x \wedge B_x \vec{u}_x + A_x \vec{u}_x \wedge B_y \vec{u}_y + A_x \vec{u}_x \wedge B_z \vec{u}_z +$$
$$+ A_y \vec{u}_y \wedge B_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y \wedge B_y \vec{u}_y + A_y \vec{u}_y \wedge B_z \vec{u}_z +$$
$$+ A_z \vec{u}_z \wedge B_x \vec{u}_x + A_z \vec{u}_z \wedge B_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z \wedge B_z \vec{u}_z =$$

RACCOLGO I VERSORI

$$= \cancel{A_x B_x (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_x)} + A_x B_y (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y) + A_x B_z (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) +$$
$$+ A_y B_x (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x) + \cancel{A_y B_y (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_y)} + A_y B_z (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z) +$$
$$+ A_z B_x (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x) + A_z B_y (\vec{u}_z \wedge B_y) + \cancel{A_z B_z (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_z)}$$

ESSENDO IL PRODOTTO VETTORIALE UN VETTORE ORTOGONALE AL PIANO GENERATO DA $\vec{A}$ E $\vec{B}$, IL PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VERSORI CON LO STESSO PEDICE È $= \vec{0}$.

UN MODO PER RISOLVERE IL PRODOTTO VETTORIALE È TROVARE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE:

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} \boxed{\begin{aligned} &= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{u}_x + \\ &+ (A_z B_x - A_x B_z) \vec{u}_y + \\ &+ (A_x B_y - A_y B_x) \vec{u}_z \end{aligned}}$$

TEOREMA

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \frac{d(|\vec{v}|^2)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right] = *$$

$$\frac{d}{dt}(v_x^2) = \frac{d v_x^2}{d x} \cdot \frac{d v_x}{d t} = 2 v_x \cdot a_x$$

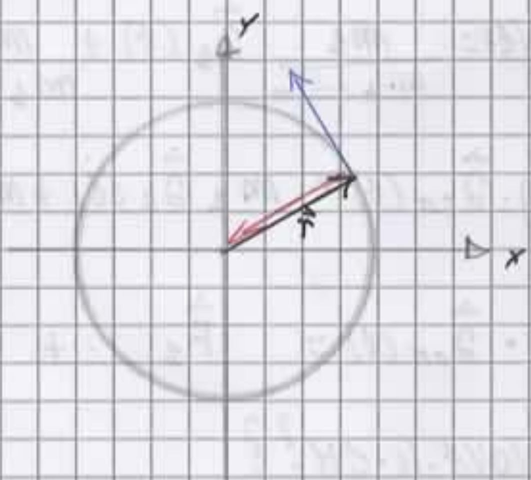
$$\frac{d}{dt}(v_y^2) = \frac{d v_y^2}{d y} \cdot \frac{d v_y}{d t} = 2 v_y \cdot a_y$$

$$\frac{d}{dt}(v_z^2) = \frac{d v_z^2}{d z} \cdot \frac{d v_z}{d t} = 2 v_z \cdot a_z$$

$$* = 2\left(v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z\right) = \boxed{2 \vec{v} \cdot \vec{a}} \qquad \blacksquare$$

OSSERVAZIONE

$\frac{d}{dt}|\vec{v}|^2 = 0$ SE $\vec{a} \perp \vec{v}$, E QUESTO ACCADE PER ESEMPIO NEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME:



Achille Cannavale

TEOREMINO

$$\int a(x)\,dx = \int \frac{dv}{dt}\,dx = \int dv\,\frac{dx}{dt} = \int v\,dv = \frac{1}{2}v^2 + c$$

CON GLI ESTREMI $\Rightarrow \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2$

QUINDI POSSIAMO APPLICARE LO STESSO RAGIONAMENTO CON $F = m \cdot a$

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2 = K_2 - K_1 \qquad \blacksquare$$

TEOREMA MOTO CENTRO DI MASSA

$$\vec{r}_{CM}(t) = \mu_1 \vec{r}_1(t) + \mu_2 \vec{r}_2(t)$$

$$\dot{r}_{CM}(t) = \vec{v}_{CM}(t) = \mu_1 \vec{v}_1(t) + \mu_2 \vec{v}_2(t)$$

$$\ddot{r}_{CM}(t) = \vec{a}_{CM}(t) = \mu_1 \vec{a}_1(t) + \mu_2 \vec{a}_2(t)$$

QUINDI: $\vec{a}_{CM}(t) = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{a}_1(t) + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{a}_2(t)$

$$(m_1+m_2)\cdot\vec{a}_{CM}(t) = m_1\vec{a}_1(t) + m_2\vec{a}_2(t)$$

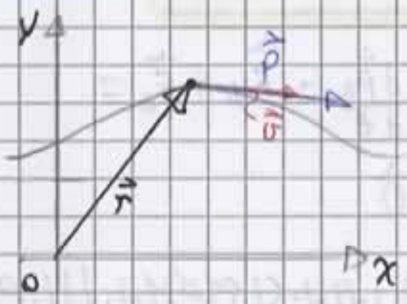
$$\Downarrow$$

$$M_s \cdot \vec{a}_{CM}(t) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{EXT}$$

QUINDI COME SI MUOVE IL CM??

SI MUOVE SEGUENDO LA LEGGE: $\boxed{M_s \cdot \vec{a}_{CM} = \vec{F}_{EXT}}$

QUANTITÀ DI MOTO

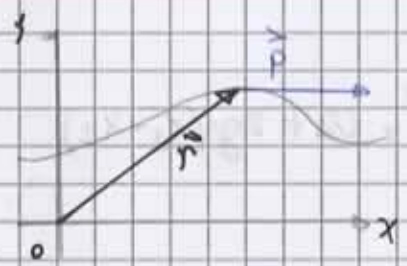


$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$[p] = M \frac{L}{T}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO



$$\vec{L} \overset{d}{=} \vec{r} \wedge \vec{p} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$$

$$[L] = M \frac{L^2}{T}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} =$$

$$= \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{p}}_{= 0} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \text{"MOMENTO TORCENTE DI } \vec{F} \text{ RISPETTO ALL'ORIGINE"} = \tau$$

$$[\tau] = [F]\,[r] = M \frac{L^2}{T^2}$$

QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA (ISOLATO)

$$\vec{P}_s = \sum_{i \in s} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \text{(NEL CASO DI DUE CORPI)}$$

$$\frac{d\vec{P}_s}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \overset{\text{ISOLATO}}{=} \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{COST}$$

"LA QUANTITÀ DI MOTO DI UN SISTEMA ISOLATO È CONSERVATIVA"

QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA (NON ISOLATO)

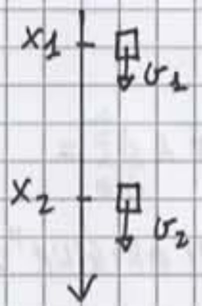
$\vec{P}_s = \sum_{i \in s} \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $\frac{d\vec{P}_s}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 =$

$= \cancel{\vec{F}_{12}} + \vec{F}_{13} + \cancel{\vec{F}_{21}} + \vec{F}_{23} = \vec{F}_{1,EXT} + \vec{F}_{2,EXT} \neq \vec{0}$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

"LA QUANTITÀ DI MOTO DI UN SISTEMA IN CUI CI SONO FORZE ESTERNE NON È COST."

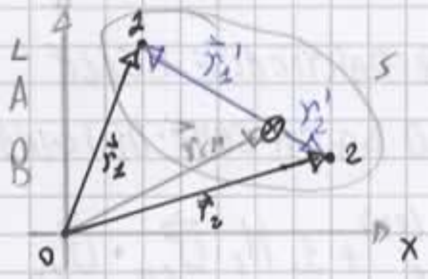
TEOREMA CADUTA GRAVE VELOCITÀ



$a = g$ ENUNCIATO: $v_2^2 = v_1 + 2g(x_2 - x_1)$

DIMOSTRAZIONE

TEOREMI DEL CM (L)



$\vec{r}_1'$ E $\vec{r}_2'$ SONO I VETTORI POSIZIONE DELLE PARTICELLE PARTENDO DA CM COME ORIGINE.

ENUNCIATO: $\boxed{\vec{L}_s^{(LAB)} = \vec{L}_s^{(cm)} + M_s \cdot \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm}}$

DIMOSTRAZIONE

$$* \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_1' \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_2' \end{cases} \xrightarrow{\frac{d(\cdot)}{dt}} \begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} + \frac{d\vec{r}_1'}{dt} \\ \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} + \frac{d\vec{r}_2'}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_1' \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_2' \end{cases}$$

ORA RICORDIAMO LA FORMULA: $\vec{L}_s = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{P}_2 =$

$= m_1 \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2$

ORA SOSTITUIAMO (*) IN $\vec{L}_s$:

$$\vec{L}_s = m_1(\vec{r}_{cm} + \vec{r}_1') \wedge (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_1') + m_2(\vec{r}_{cm} + \vec{r}_2') \wedge (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_2') =$$

$$= \underbrace{\boxed{\begin{matrix} m_1 \cdot \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} \\ + m_2 \cdot \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} \end{matrix}}}_{\divideontimes 1} + \underbrace{\boxed{\begin{matrix} m_1 \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_1' \\ + m_2 \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_2' \end{matrix}}}_{\divideontimes 2} + \underbrace{\boxed{\begin{matrix} m_1 \cdot \vec{r}_1' \wedge \vec{v}_{cm} \\ + m_2 \cdot \vec{r}_2' \wedge \vec{v}_{cm} \end{matrix}}}_{\divideontimes 3} + \underbrace{\boxed{\begin{matrix} m_1 \cdot \vec{r}_1' \wedge \vec{v}_1' \\ + m_2 \cdot \vec{r}_2' \wedge \vec{v}_2' \end{matrix}}}_{\divideontimes 4} =$$

$$\divideontimes 1 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} = M_s \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm}$$

$$\divideontimes 2 = \begin{matrix} m_1 \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_1' + \\ m_2 \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_2' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_1' m_1 + \\ \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_2' m_2 \end{matrix} \Rightarrow \vec{r}_{cm} \wedge \underbrace{(m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2')}_{0} \equiv \vec{0}$$

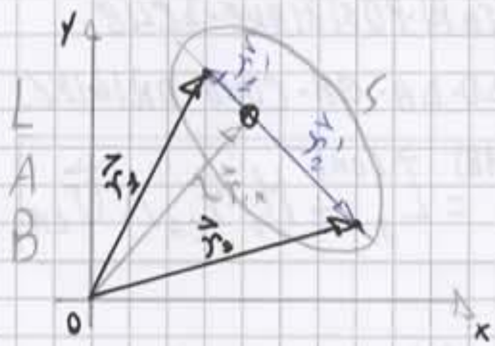
$$\divideontimes 3 = \begin{matrix} m_1 \cdot \vec{r}_1' \wedge \vec{v}_{cm} + \\ m_2 \vec{r}_2' \wedge \vec{v}_{cm} \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{(m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2')}_{0} \wedge \vec{v}_{cm} \equiv \vec{0}$$

$$\divideontimes 4 = \begin{matrix} m_1 \vec{r}_1' \wedge \vec{v}_1' + \\ m_2 \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{r}_1' \wedge \vec{P}_1' + \\ \vec{r}_2' \wedge \vec{P}_2' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{L}_1^{(cm)} + \\ \vec{L}_2^{(cm)} \end{matrix} \Rightarrow \vec{L}_s^{(cm)}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s^{(LAB)} = \vec{L}_s^{(cm)} + M_s \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} \quad \blacksquare$$

Achille Cannavale

TEOREMI DEL CM (K)



$\vec{r}_1'$ E $\vec{r}_2'$ SONO I VETTORI POSIZIONE DELLE PARTICELLE PARTENDO DA CM COME ORIGINE.

ENUNCIATO: $K_s^{(LAB)} = K_s^{(CM)} + \frac{1}{2} M_s \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm}$

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_1' \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_2' \end{cases} \Rightarrow \text{SOSTITUIAMO IN} \Rightarrow K_s^{(LAB)} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$K_s^{(LAB)} = \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_1') \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_1') + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_2') \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_2') =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm}}_{\divideontimes 1} + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_1' + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_2'}_{\divideontimes 2} + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_{cm} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2' \cdot \vec{v}_{cm}}_{\divideontimes 3} + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_1' + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2' \cdot \vec{v}_2'}_{\divideontimes 4} =$$

$$\divideontimes 1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} = \frac{1}{2} M_s \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm}$$

$$\divideontimes 2 = \frac{1}{2} \vec{v}_{cm} \underbrace{(m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2')}_{0} \equiv 0$$

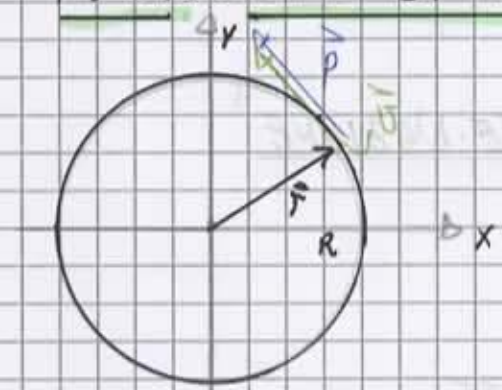
$$\divideontimes 3 = \frac{1}{2} \underbrace{(m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2')}_{0} \cdot \vec{v}_{cm} \equiv 0$$

$$\divideontimes 4 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_1' + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2' \cdot \vec{v}_2' = K_1^{CM} + K_2^{CM} = K_s^{CM}$$

$$\Rightarrow K_s^{LAB} = K_s^{CM} + \frac{1}{2} M_s \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm}$$

$\blacksquare$

MOMENTO DI INERZIA



RICORDIAMO CHE: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m \vec{r} \wedge \vec{v}$

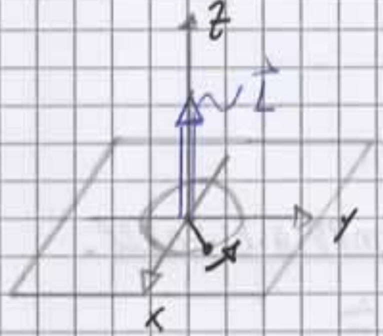
QUINDI: $\vec{L} = m R v \vec{u}_z$

MA DATO CHE SIAMO IN UN MOTO CIRCOLARE UNIFORME:

$$v = R \omega_0 \quad , \quad \omega_0 = \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = m R^2 \omega_0 \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{L} = m R^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$



DOVE $|\vec{L}| = m R^2 |\dot{\theta}|$

ORA DEFINIAMO IL <u>MOMENTO DI INERZIA</u>:

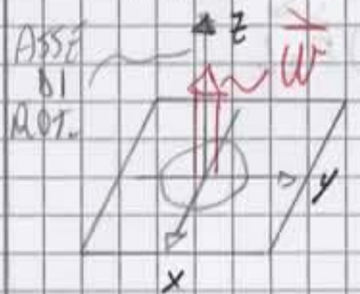
$$I = m R^2$$

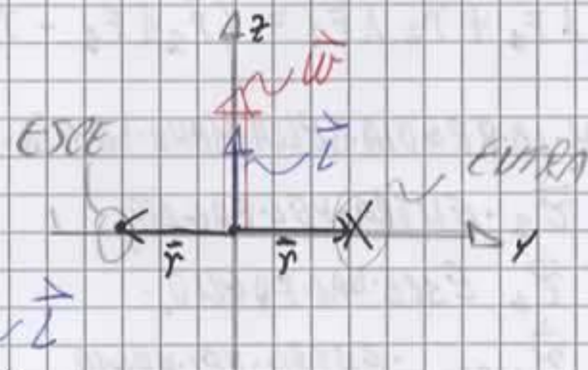
CHE POSSIAMO SOSTITUIRE NEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO:

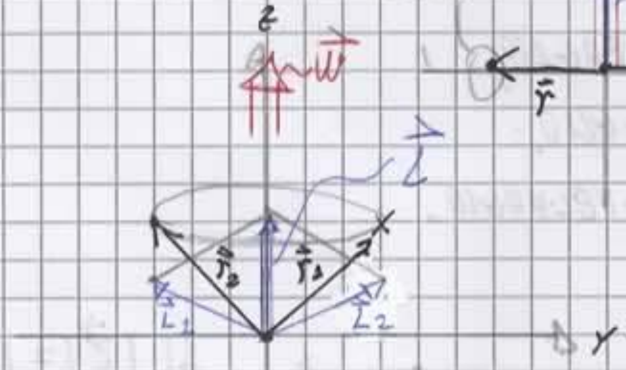
$$\vec{L} = I \cdot \dot{\theta} \vec{u}_z$$

E CHIAMIAMO ORA $\dot{\theta} \vec{u}_z$ LA <u>VELOCITÀ ANGOLARE VETTORIALE</u> $\vec{\omega}$:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$







QUINDI CONCLUDIAMO CHE SE IL SISTEMA È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE DI ROTAZIONE $\vec{L}$ È <u>PARALLELO</u> A $\vec{\omega}$.

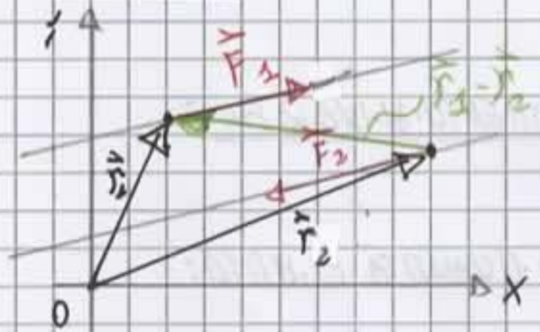
COPPIA DI FORZE

ESEMPIO DI COPPIA DI FORZE

"LINEE D'AZIONE"

LA DISTANZA TRA LE LINEE D'AZIONE È DETTA "BRACCIO DI LEVA".

ESEMPIO



$\vec{F}_1$ E $\vec{F}_2$ SONO UNA COPPIA DI FORZE.

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \quad , \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_2 \quad , \quad \vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$$

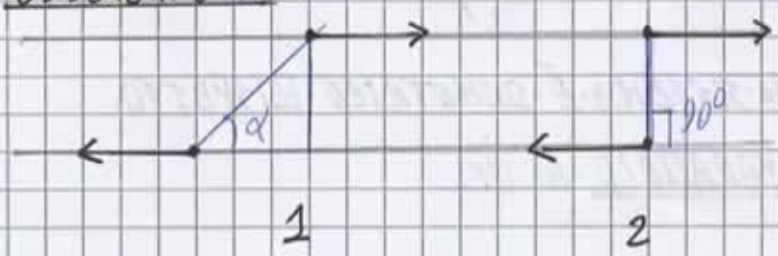
$$\vec{\tau}_{COPPIA} = \vec{\tau}_1 \wedge \vec{\tau}_2 =$$

$$= \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}_1$$

CON LA REGOLA DELLA MANO DESTRA NOTIAMO CHE:

- $\vec{\tau}_1$ ENTRA NEL FOGLIO,
- $\vec{\tau}_2$ ESCE DAL FOGLIO,
- $\vec{\tau}_{COPPIA}$ ENTRA NEL FOGIO.

OSSERVAZIONE

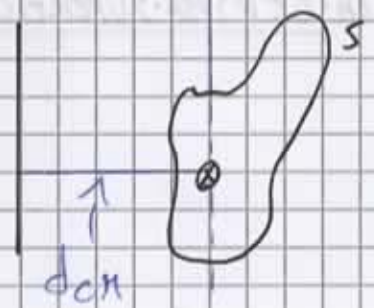


1) $|\vec{\tau}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_2| \cdot |\vec{F}_1| \cdot \sin(\alpha)$

2) $|\vec{\tau}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \cdot |\vec{F}_1| \sin(90°)$

N.B. L'ORIGINE NON HA ALCUNA UTILITÀ NELLA DETERMINAZIONE DEL

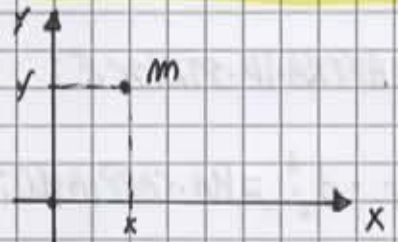
TEOREMA ASSI PARALLELI



$$I_i = m_i \, d_i^2$$

ENUNCIATO: $I_S = I_S^{(CM)} + M_S \cdot d_{CM}^2$

TEOREMA ASSI PERPENDICOLARI



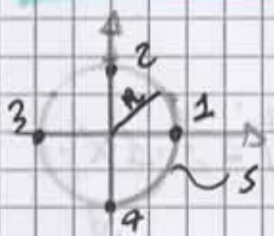
Z USCENTE

$$I_x = m\,x^2$$

$$I_y = m\,y^2$$

$$I_z = m\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = m\,x^2 + m\,y^2 = \underline{I_x + I_y}$$

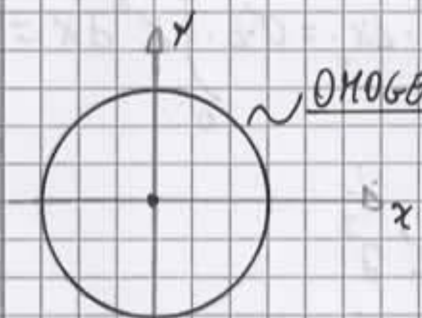
ANELLO OMOGENEO



$$I_S = \sum_i I_i = m_1 R^2 + m_2 R^2 + m_3 R^2 + m_4 R^2 =$$

$$= (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) R^2 =$$

$$= M_S \cdot R^2$$



OMOGENEO: "LA MATERIA È DISTRIBUITA IN MANIERA SIMMETRICA"

DAL TEOREMA DEGLI ASSI PERPENDICOLARI SAPPIAMO CHE $I_z = I_x + I_y$.

Z ESCE

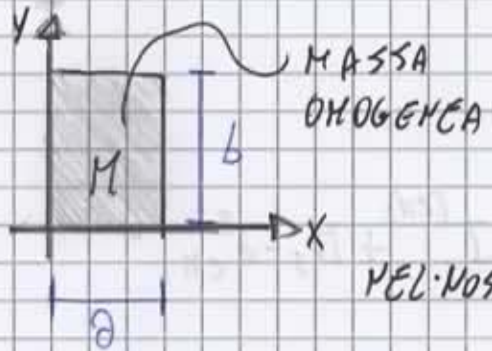
MA NEL NOSTRO CASO, ESSENDO UNA CIRCONFERENZA:

$$I_x = I_y$$

QUINDI $I_z = 2 I_x = m R^2$

$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{2} m R^2$$

LASTRA OMOGENEA



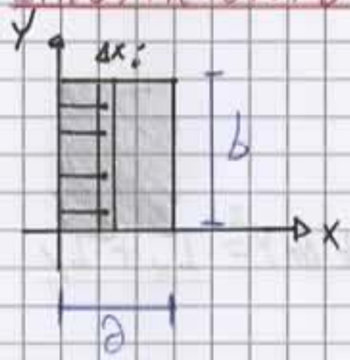
DEFINIAMO σ LA "DENSITÀ SUPERFICIALE"

$$\frac{MASSA}{AREA} = \sigma$$

NEL NOSTRO CASO $M = \sigma \cdot (a \cdot b)$

ALLORA DICIAMO CHE $I_X = \frac{1}{3} M b^2$ E $I_Y = \frac{1}{3} M a^2$

DIMOSTRAZIONE



$$I = \sum_i I_i$$

DIVIDIAMO LA LASTRA IN STRISCE;

$I_{STRISCIA-i} = m_i \cdot d_i^2$, MA SAPPIAMO:

$$m_i = \sigma \cdot (\Delta x_i \cdot b);$$

$$d_i = x_i.$$

$$\Rightarrow I_{STRISCIA-i} = \sigma(\Delta x_i \cdot b) \cdot x_i^2$$

$$\Rightarrow I_{STIMA} = \sum_i^N I_{STRISCIA-i} = \sum_i^N \sigma(\Delta x_i \cdot b) \cdot x_i^2 = \sigma \cdot b \sum_i^N x_i^2 \cdot \Delta x_i$$

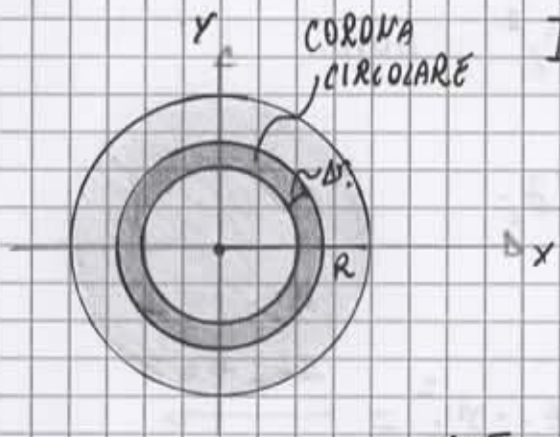
ORA PONIAMO IL LIMITE IN CUI LE STRISCE SONO SEMPRE PIÙ PICCOLE E PIÙ NUMEROSE $\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ N \to \infty}} \sigma \cdot b \sum_i^N x_i^2 \cdot \Delta x_i = \sigma \cdot b \cdot \int_0^a x^2 dx =$

$$= \sigma \cdot b \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \sigma \cdot b \left(\frac{a^3}{3}\right) = \overbrace{\sigma \cdot b \cdot a}^{M} \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3} M a^2 \quad ▨$$

DIMOSTRAZIONE ANALOGA PER I_Y.

Achille Cannavale

DISCO OMOGENEO



$I_{STIMA} = \sum_i I_i$

$I_{CORONA-i} = m_i \cdot d_i^2$, MA SAPPIAMO CHE:

$m_i = \sigma (2\pi r_i \cdot \Delta r_i)$; (CIRCONF.)

$d_i = r_i$.

$\Rightarrow I_{CORONA-i} = \sigma(2\pi r_i \cdot \Delta r_i) \cdot r_i^2$

QUINDI:

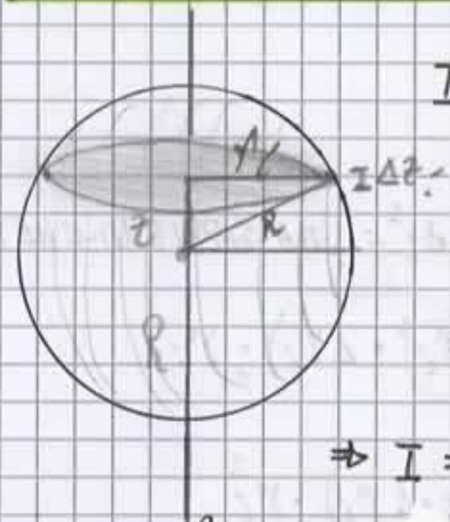
$$I_{STIMA} = \sum_i^N I_{CORONA-i} = \sum_i^N \sigma(2\pi r_i \cdot \Delta r_i) \cdot r_i^2 = \sum_i^N \sigma 2\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i =$$

$$= \sigma 2\pi \sum_i^N r_i^3 \Delta r_i \xrightarrow[N \to \infty]{\Delta r_i \to 0} \sigma 2\pi \int_0^R r^3 \, dr = \sigma 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R =$$

$$= \sigma 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \sigma 2\pi R^2 \frac{R^2}{4} = M \cdot 2 \cdot \frac{R^2}{4} = \boxed{\frac{1}{2} M R^2}$$

Achille Cannavale

SFERA OMOGENEA



$$I_{DISCO_i} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \quad , \text{ DOVE:}$$

$$m_i = \rho \pi r_i^2 \cdot \Delta z_i$$

$$r_i^2 = R^2 - z^2$$

$$\Rightarrow I = \sum \frac{1}{2} \rho \pi r_i^2 \Delta z_i \cdot r_i^2 = \xrightarrow[N \to \infty]{\Delta z_i \to 0}$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 \, dz = \frac{1}{2} \rho \pi \left[\int_{-R}^{R} R^4 \, dz + \int_{-R}^{R} z^4 \, dz - 2R^2 \int_{-R}^{R} z^2 \, dz \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi \left[2 R^5 + \frac{2}{5} R^5 - \frac{4}{3} R^5 \right] = \frac{1}{2} \rho \pi R^3 \left[\frac{16}{15} R^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi R^3 \frac{4}{3} \left[\frac{4}{5} R^2 \right] = \boxed{\frac{2}{5} M R^2}$$

Achille Cannavale

URTI ANELASTICI

DATO CHE IL TAVOLO È LUBRIFICATO, LE FORZE ESTERNE NON CI SONO.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_s}{dt} = \vec{F}_{EXT} = \vec{0}$$, QUESTO VUOL DIRE CHE:

$\vec{P}$ È COSTANTE NEL TEMPO:

P(PRIMA) = P(DURANTE) = P(DOPO)

"QUINDI LA QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA"

$$P_s(PRIMA) = m_1 \cdot \vec{v}_i$$
$$P_s(DOPO) = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_F$$

$$m_1 \vec{v}_i = (m_1 + m_2) \vec{v}_F$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{v}_F = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_i$$

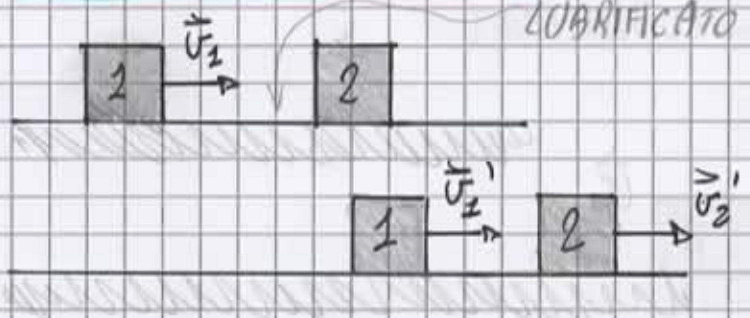
ANALIZZIAMO ORA L'ENERGIA CINETICA:

$$K_s(PRIMA) = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_i^{\,2}$$
$$K_s(DOPO) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \vec{v}_F^{\,2} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \vec{v}_i^{\,2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \vec{v}_i^{\,2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{2} m_1 \cdot \vec{v}_i^{\,2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot K_s(PRIMA)$$

$K_s(DOPO) < K_s(PRIMA) \Rightarrow$ "L'ENERGIA CINETICA NON SI CONSERVA".

URTI ELASTICI



ESSENDO IL TAVOLO LUBRIFICATO NON CI SONO FORZE ESTERNE:

$$\frac{d\vec{P}_s}{dt} = \vec{F}_{EXT} = \vec{0}$$

QUINDI $\vec{P}_s(t) = \overrightarrow{cost}$

$\Rightarrow \vec{P}_s(PRIMA) = \vec{P}_s(DURANTE) = \vec{P}_s(DOPO)$

$P_s(PRIMA) = m_1 \vec{v}_1$

$P_s(DOPO) = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$

"QUINDI ANCHE IN QUESTO CASO LA QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA!!"

E DATO CHE PARLIAMO DI URTI ELASTICI DIREMO CHE ANCHE "L'ENERGIA CINETICA SI CONSERVA."

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

(1/2 NON SERVE)

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_2' & (1) \\ m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 = m_2 v_2'^2 & (2) \end{cases}$$

DIVIDO $\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \boxed{v_2' = v_1 + v_1'}$ (*)

$$\Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_1 + m_2 v_1' \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_1 = (m_1 + m_2) v_1'$$

QUINDI $\boxed{v_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1}$

$$(*) \Rightarrow v_2' = v_1 + \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1 = \left(1 + \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\right) v_1 = \boxed{\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1}$$

OSSERVAZIONE

- $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow \begin{cases} \text{SE } m_1 = m_2 \Rightarrow v_1' = 0 \\ \text{SE } m_1 < m_2 \Rightarrow v_1' < 0 \end{cases}$

- $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow$ SARÀ SICURAMENTE POSITIVA (O NULLA)

CASI PARTICOLARI

- SE $m_1 \ll m_2$, $\frac{m_1}{m_2} << 1$ CHE SUCCEDE?!

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)}{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)} v_1 \xrightarrow[\frac{m_1}{m_2} \to 0]{} -1 \cdot v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)} v_1 \xrightarrow[\frac{m_1}{m_2} \to 0]{} 0$$

"QUINDI SE IL CORPO 1 HA UNA MASSA MOLTO PIÙ PICCOLA RISPETTO AL CORPO 2, DOPO L'URTO IL CORPO 1 TORNERÀ INDIETRO, MENTRE IL CORPO 2 NON AVVERTIRÀ NESSUN SPOSTAMENTO".

- SE $m_1 >> m_2$, $\frac{m_2}{m_1} << 1$ CHE SUCCEDE?!

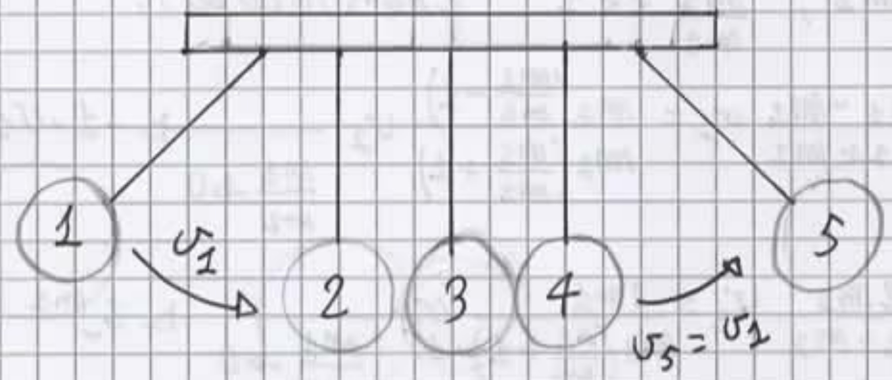
$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)}{m_1\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} v_1 \xrightarrow[\frac{m_2}{m_1} \to 0]{} v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} v_1 \xrightarrow[\frac{m_2}{m_1} \to 0]{} 2v_1$$

"QUINDI NEL CASO IN CUI IL CORPO 1 ABBIA UNA MASSA MOLTO PIÙ GRANDE RISPETTO AL CORPO 2, DOPO L'URTO IL CORPO 1 CONTINUERÀ A MUOVERSI CON LA VELOCITÀ INIZIALE, MENTRE IL CORPO 2 SCHIZZERÀ VIA AL DOPPIO DELLA VELOCITÀ INIZIALE DEL CORPO 1."

Achille Cannavale

CULLA DI NEWTON



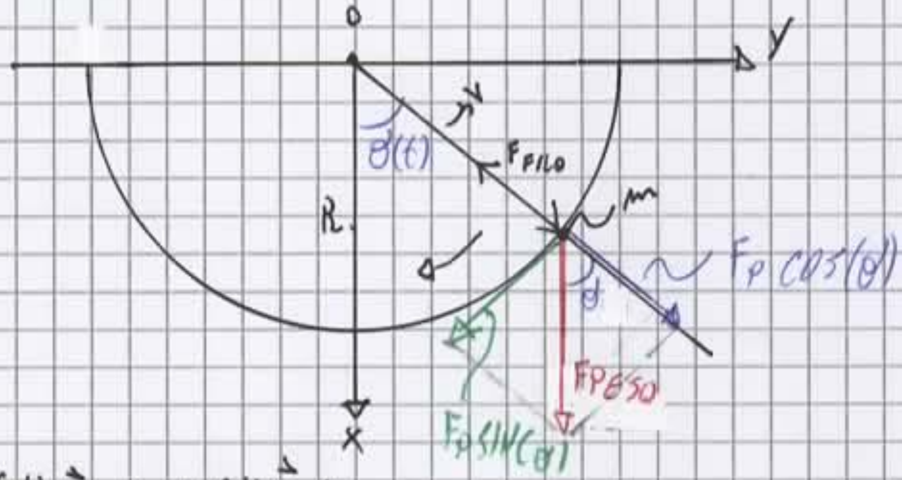
SE LA BIGLIA 1 URTA ELASTICAMENTE LA BIGLIA 2, L'ENERGIA CINETICA SI CONSERVA, MA PERCHÉ SE LE BIGLIE 1 2 URTANO LA 3 SI MUOVONO 4 E 5 ?!

SE PER ASSURDO:

$$1 \xrightarrow[v_0]{} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \rightarrow 1\ 2\ 3\ (4\ 5) \rightarrow \frac{v_0}{2}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} 2m \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m v_0^2\right)$$

PENDOLO SEMPLICE



$$\vec{r} = R\left(\cos(\theta)\,\vec{u}_x + \sin(\theta)\,\vec{u}_y\right)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{u}_x + R\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{u}_y$$

$$\vec{L}(t) = m\left(\vec{r} \wedge \vec{v}\right) = m \cdot \begin{bmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \\ -R\dot{\theta}\sin\theta & R\dot{\theta}\cos\theta & 0 \end{bmatrix} = 0\,\vec{u}_x + 0\,\vec{u}_y + \left(\dot{\theta} m R^2 \cos^2\theta + \dot{\theta} m R^2 \sin^2\theta\right)\vec{u}_z$$

$$= \left(m R^2 \dot{\theta}(t)\right)\vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{TOT} = \vec{r} \wedge \left(\vec{F}_{PESO} + \vec{F}_{FILO}\right) = \vec{r} \wedge \vec{F}_{PESO} + \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{F}_{FILO}}_{//} = \vec{\tau}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ R\cos(\theta) & R\sin(\theta) & 0 \\ \vec{F}_p \sin(\theta) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(-\vec{F}_p R \sin\theta\right)\vec{u}_z$$

ATTRITO VISCOSO

LINEARE

$F_{visc} = -bv \Rightarrow m \cdot a = F$

$\Downarrow$

$m \cdot a = -bv$

$m \dfrac{dv}{dt} = -bv \rightarrow \boxed{m\, dv = -b\, v\, dt}$, DEVO TROVARE UNA $v(t)$ CHE SODDISFI L'EQUAZIONE.

SPOSTO A SX TUTTO CIÒ CHE DIPENDE DA v:

$-\dfrac{m}{b} \cdot \dfrac{dv}{v} = dt \rightarrow$ INTEGRO AMBO LE PARTI: $\displaystyle\int_0^t dt = -\frac{m}{b}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} \longrightarrow$

$\rightarrow t = -\dfrac{m}{b}\Big[\ln(v)\Big]_{v_0}^{v} = -\dfrac{m}{b}\Big(\ln(v) - \ln(v_0)\Big) = -\dfrac{m}{b}\ln\left(\dfrac{v}{v_0}\right) \rightarrow$

$\rightarrow t = -\dfrac{m}{b}\ln\left(\dfrac{v}{v_0}\right)$ MA IO VOGLIO $v(t)$, QUINDI: $-\dfrac{b}{m}t = \ln\left(\dfrac{v}{v_0}\right) \rightarrow$

$\longrightarrow e^{-\frac{b}{m}t} = \dfrac{v}{v_0} \Rightarrow v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{b}{m}t}$, CHE RISCRIVIAMO:

$$\boxed{v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ DOVE } \tau = \frac{m}{b}}$$

ANALIZZIAMO L'ANDAMENTO DI $v(t)$ IN FUNZIONE DI τ:

ANDAMENTO ESPONENZIALE DECRESCENTE

t IN τ	$v(t)$
0	v_0
1τ	$v_0 \cdot 1/e$
2τ	$v_0 \cdot 1/e \cdot 1/e$
3τ	$v_0 \cdot 1/e \cdot 1/e \cdot 1/e$

QUADRATICO

$F_{visc} = -cv^2 \Rightarrow m \cdot a = -cv^2$

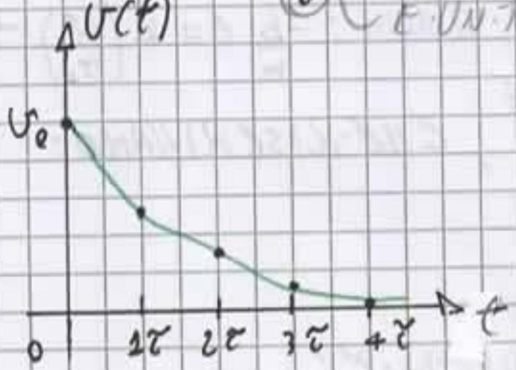
$m \cdot \frac{dv}{dt} = -cv^2 \rightarrow -\frac{m}{c} dv = v^2 dt \rightarrow$ SPOSTO A SX TUTTO CIÒ CHE DIPENDE DA $v \rightarrow dt = -\frac{m}{c}\frac{dv}{v^2} \rightarrow$ INTEGRO AMBO I LATI $\longrightarrow \int_0^t dt = -\frac{m}{c}\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^2} dv$

$\rightarrow t = -\frac{m}{c}\left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = -\frac{m}{c}\left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0}\right) =$ ESTRAGGO $v(t) \rightarrow$

$\rightarrow -\frac{c}{m} t - \frac{1}{v_0} = -\frac{1}{v} = \frac{m + ctv_0}{mv_0}$, $\quad v(t) = \frac{mv_0}{m + ctv_0} = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{cv_0}{m}t\right)}$

$\Rightarrow v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{t}{\tau}}$, DOVE $\tau = \frac{m}{cv_0}$

È UN TEMPO

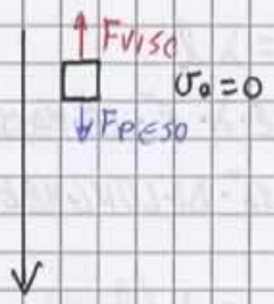


(NON È UN ESPONENZIALE)

t IN τ	$v(t)$
0	v_0
1τ	$v_0/2$
2τ	$v_0/3$
3τ	$v_0/4$

Achille Cannavale

CADUTA GRAVE NEL FLUIDO



$$\Rightarrow F_{TOT} = m\cdot a = F_{peso} + F_{visc}$$

$$= m\cdot a = mg - bv$$

TROVIAMO LA $v(t)$ SOLUZIONE!!

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv \to m\,dv = (-bv + mg)\,dt \to dv = \left(g - \frac{b}{m}v\right)dt$$

$$\to \frac{dv}{g-\frac{b}{m}v} = dt \to \text{INTEGRO} \to \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{g-\frac{b}{m}v}\,dv \to$$

$$\to t = \int_g^{g-b/m\,v} \frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{m}{b}\right)dz = -\frac{m}{b}\left[\ln(z)\right]_g^{g-b/m\,v} =$$

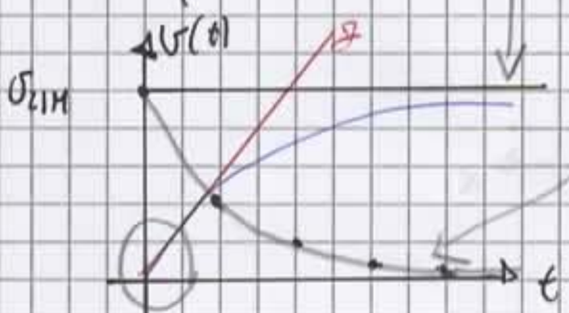
$$\boxed{\begin{array}{l} g - \frac{b}{m}v = z \\ dv = -\frac{m}{b}\,dz \\ 0 \to g \\ v \to g - \frac{b}{m}v \end{array}}$$

$$= -\frac{m}{b}\left(\ln\left(g-\frac{b}{m}v\right) - \ln(g)\right) = -\frac{m}{b}\left(\ln\left(\frac{g-\frac{b}{m}v}{g}\right)\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{m}t = \ln\left(\frac{g-\frac{b}{m}v}{g}\right) \Rightarrow e^{-\frac{b}{m}t} = \frac{g-\frac{b}{m}v}{g}$$

QUINDI $v(t) = \frac{mg}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right) = \frac{mg}{b}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) =$

$$= v_{LIM}\left(1-e^{-t/\tau}\right) = v_{LIM} - v_{LIM}\,e^{-t/\tau}$$

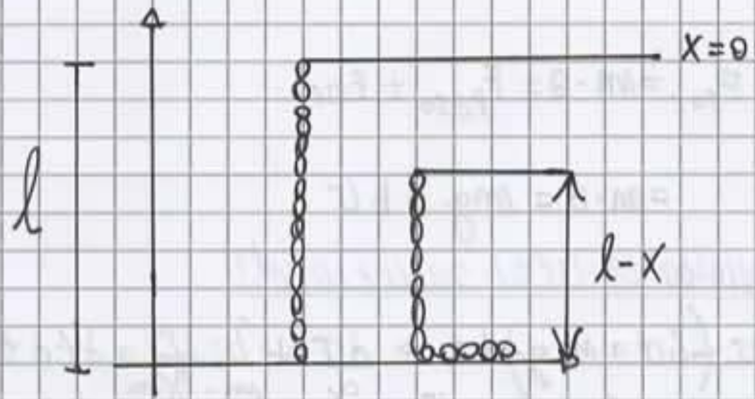


QUANDO t È MOLTO PICCOLO, L'ESPONENZIALE PUÒ ESSERE APPROX. $1 + x + \frac{x^2}{2!}$ ----

QUINDI $\Rightarrow v(t) = \frac{mg}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right) \Rightarrow \frac{mg}{b}\left(1-\left(1-\frac{b}{m}t\right)\right) = g\cdot t$

QUESTO VUOL DIRE CHE NEI POCHI ISTANTI SUBITO DOPO AVER MOLLATO LA PRESA, IL CORPO AVRÀ UNA VELOCITÀ COME SE STESSE NEL VUOTO. CON IL TEMPO PERÒ $v(t)$ SI ACCORGERÀ DELL'ATTRITO E CURVERÀ

CATENA



$M = \lambda l$

DOVE λ È LA MASSA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA.

$m_{mov.} = \lambda(l-x)$

$P_s(t) = m \cdot v = m_{mov.} \cdot \dot{x}$

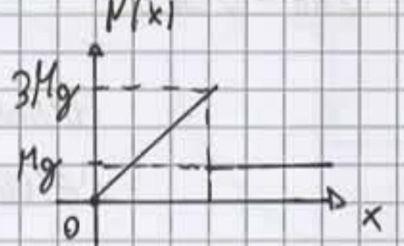
$$\frac{dP_s}{dt} = \vec{F}_{ext} = F_{peso} + F_{tavolo} = Mg + N = \lambda l g + N$$

$$\frac{dP_s}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\lambda(l-x)\cdot\dot{x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\lambda l \dot{x} - \lambda x \dot{x}\right) = \lambda l \ddot{x} - \lambda \dot{x}^2 - \lambda x \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \lambda l g + N = \lambda l \ddot{x} - \lambda \dot{x}^2 - \lambda x \cdot \ddot{x} \Rightarrow N = -\lambda \dot{x}^2 - \lambda x \ddot{x}$$

$$\Rightarrow N = -\lambda(\dot{x}^2 + xg) = -\lambda(2gx + xg) \Rightarrow \boxed{N = -\lambda 3 g x}$$

"VUOL DIRE CHE IN UN MOTO DINAMICO, IL TAVOLO DEVE USARE UNA FORZA CHE È 3 VOLTE MAGGIORE RISPETTO ALLA FORZA PESO DELLA CATENA".



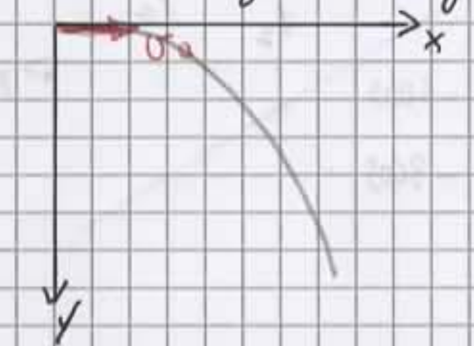
ΔK

RICORDIAMO CHE $K \stackrel{\partial}{=} \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ E $\frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$

POSSIAMO SCRIVERE DUNQUE: $\boxed{\int_{t_1}^{t_2} F \cdot v \, dt = K_2 - K_1}$

ESEMPIO

$\vec{F} = m\vec{a} = m g \Rightarrow \vec{a} = g$



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_{x_0} \\ v_y = v_{y_0} + g t \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(t) = x_0 + v_{x_0} t \\ Y(t) = Y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

QUINDI IN QUESTO CASO: $K_2 - K_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} m g \cdot g t \, dt =$

$= m g \left(\underbrace{\frac{1}{2} g t_2^2}_{*2} - \underbrace{\frac{1}{2} g t_1^2}_{*1} \right)$

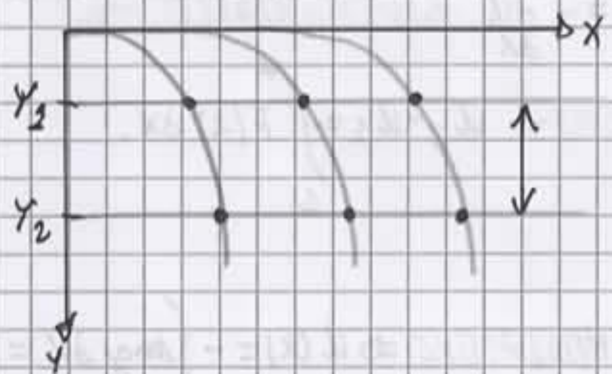
NOTIAMO CHE LA:

$*1)$ È LA POSIZIONE $Y(t_1)$

$*2)$ È LA POSIZIONE $Y(t_2)$

$\Rightarrow K_2 - K_1 = m g \underbrace{(Y_2 - Y_1)}_{\text{DISLIVELLO}}$

IN GENERALE:



HANNO TUTTE LA STESSA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA!!!

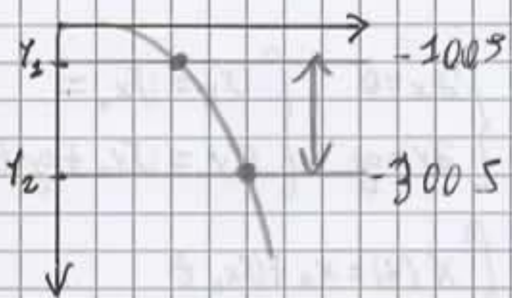
QUINDI ABBIAMO: $K_2 - K_1 = mg\,Y_2 - mg\,Y_1$

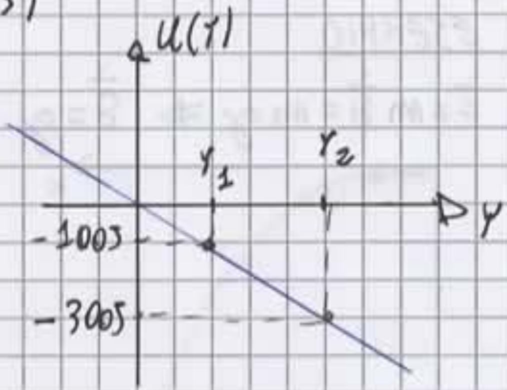
"VOGLIAMO TROVARE UN'OPPORTUNA FUNZIONE $U(Y)$, CHE ABBIA LE STESSE DIMENSIONI DI K E CHE ABBIA QUESTA PROPRIETÀ:

$$\boxed{K_2 + U_2 = K_1 + U_1}$$

$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow U(Y) = -mg\,Y + COST$

ESEMPIO:





$\Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2$

$\Rightarrow -100\,J - (-300\,J) = 200\,J$

ESEMPIO MOLLA

$F = -Kx$ (LEGGE DI HOOKE)

CERCHIAMO UNA $U(Y)$ TALE CHE: $K + U = COST$

OVVERO $\frac{d}{dt}(K+U) = 0$

QUINDI: $\frac{d}{dt}K = -\frac{d}{dt}U \Rightarrow$

$\Rightarrow F \cdot v = -\frac{d}{dt}U \rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dx}\cdot v \Rightarrow F\cdot v = -\frac{dU}{dx}\cdot v$

$\Rightarrow F = -\frac{dU}{dx}$. NEL NOSTRO CASO $\Rightarrow -Kx = -\frac{dU}{dx} \rightarrow$ INTEGRIAMO $\rightarrow$

$\Rightarrow U = -\int F(x)\,dx \Rightarrow$ USIAMO GLI ESTREMI $\rightarrow U_2 - U_1 = -\int_1^2 F(x)\,dx$.

QUINDI:

- $F(x) = mg = F_{PESO}$ NON DIPENDE DALLA POSIZIONE $\Rightarrow U(x) = -\int mg\,dx = -mg\,x + C$

- $F(x) = -Kx = F_{MOLLA}$ DIPENDE DALLA POSIZIONE $\Rightarrow U(x) = -\int -Kx\,dx = K\frac{x^2}{2} + C$

Achille Cannavale

ENERGIA MECCANICA

METTIAMO IL CASO IN CUI IL NOSTRO CORPO SIA SOGGETTO A DUE FORZE:

$$\vec{F}_{TOT} = F_{MOLLA} + F_{VISC} = -Kx - b v$$

QUINDI IMPOSTIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZA DI ENERGIA CINETICA:

$$K_2 - K_1 = \int_1^2 F_1(x) \cdot \underbrace{v\, dt}_{dx} + \int_1^2 F_2(v) \cdot v\, dt = \int_1^2 F_1(x) \cdot dx + \int_1^2 F_2(v)\, v\, dt =$$

$$= \int_1^2 -Kx\, dx - b \int_1^2 v^2 dt = -\int_1^2 Kx\, dx - b \int_1^2 v^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} K x_1^2 - \frac{1}{2} K x_2^2 - b \int_1^2 v^2\, dt = K_2 - K_1 =$$

$$= -b \int_1^2 v^2 dt = K_2 + \underbrace{\frac{1}{2} K x_2^2}_{U_2} - \Big(K_1 + \underbrace{\frac{1}{2} K x_1^2}_{U_1} \Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(K_2 + U_2)}_{\mathcal{E}_2} - \underbrace{(K_1 + U_1)}_{\mathcal{E}_1} = -b \int_1^2 v^2 dt$$

$\mathcal{E}$ VIENE CHIAMATA ENERGIA MECCANICA.

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = -b \int_1^2 v^2\, dt$$

AL PASSARE DEL TEMPO: $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1 \Rightarrow$ L'ENERGIA MECCANICA NON SI CONSERVA!!

DA NOTARE CHE SE CI FOSSE STATA SOLO LA FORZA DELLA MOLLA: $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$
$\Rightarrow$ QUESTO TIPO DI FORZE VENGONO CHIAMATE FORZE CONSERVATIVE
MENTRE FORZE COME QUELLE DI ATTRITO VENGONO CHIAMATE FORZE DISSIPATIVE PERCHÉ DISSIPANO L'ENERGIA MECCANICA.

TABELLA

$F(x)$	$U(x)$
$m \cdot g$	$U(x) = -mgx + C$
$-Kx$	$U(x) = K\frac{1}{2}x^2 + C$
$-G\frac{Mm}{x^2}$	$U(x) = -G\frac{Mm}{x} + C$
$K_e\frac{Qq}{x^2}$	$U(x) = K_e\frac{Qq}{x} + C$

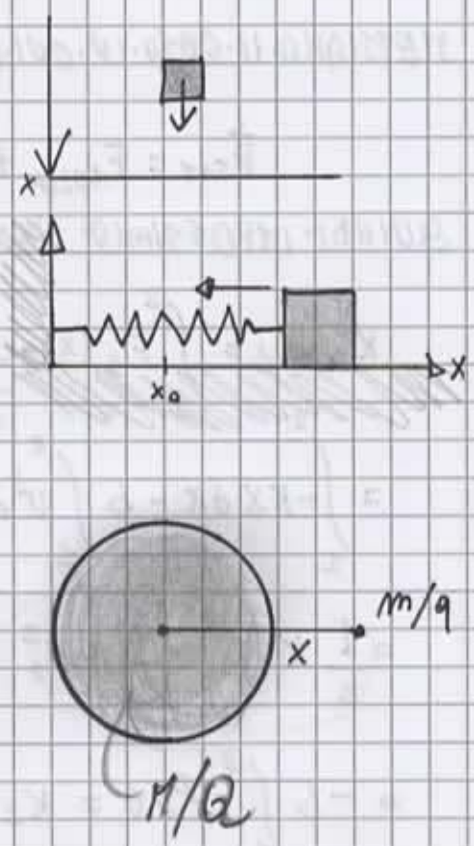
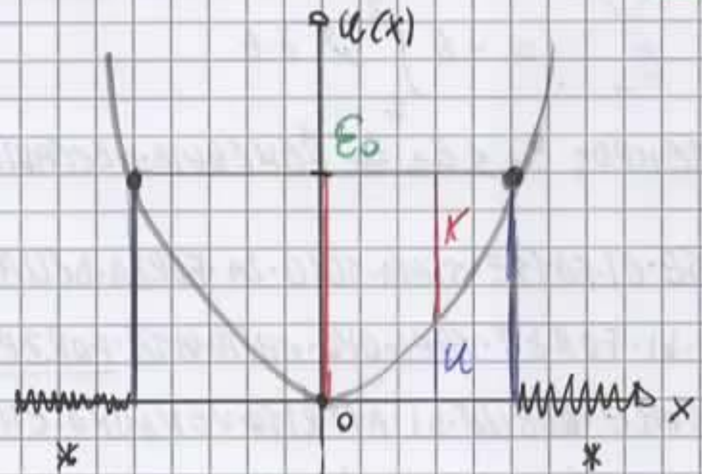


GRAFICO MOLLA

$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 + C$, DATO CHE È UNA FORZA CONSERVATIVA ⇒

⇒ L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA ⇒ $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \boxed{\mathcal{E}_0}$



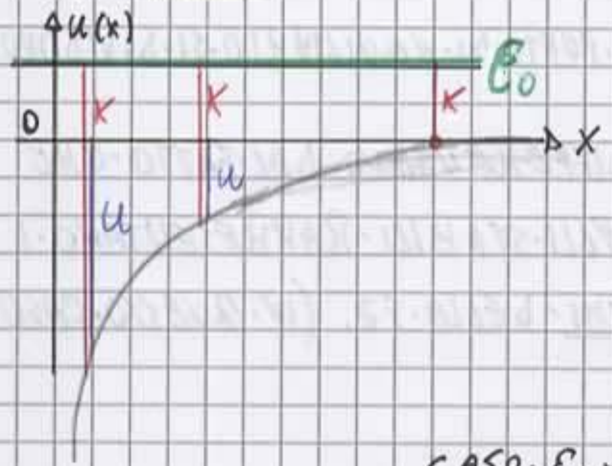
* QUESTE ZONE RICHIEDONO UNA K NEGATIVA, IL CHE È IMPOSSIBILE.

Achille Cannavale

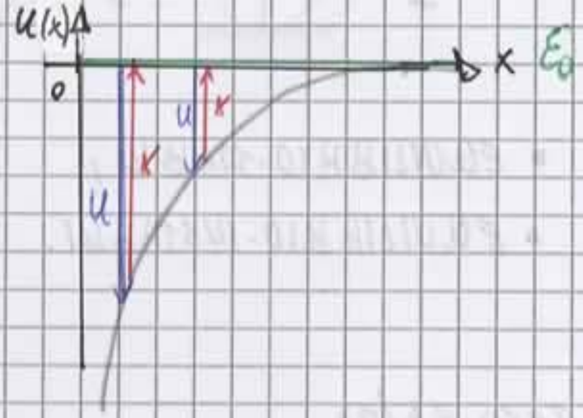
GRAFICO: GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$$U(x) = -G\,\frac{Mm}{x} + C$$

CASO · $\mathcal{E}_0 > 0$



CASO · $\mathcal{E}_0 = 0$



CASO · $\mathcal{E}_0 < 0$

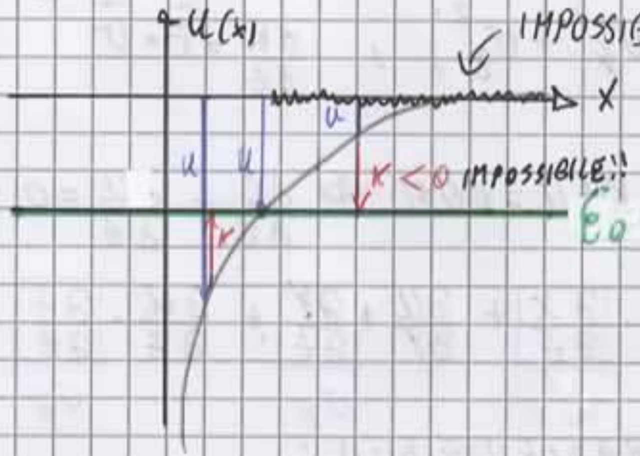


GRAFICO: COULOMB

$$U(x) = K_e\,\frac{Qq}{x} + C$$

RICORDIAMO...

U | K + U = COST

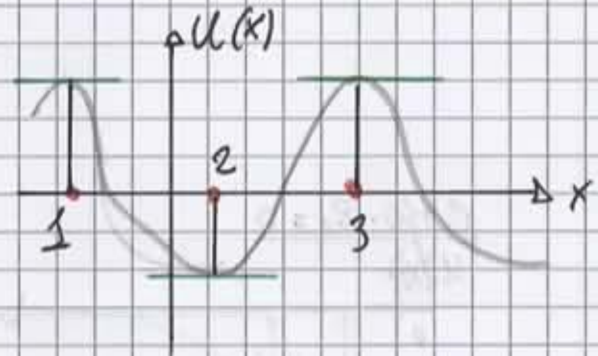
$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

$$F \cdot v = -\frac{dU}{dx} \cdot \boxed{\frac{dx}{dt}}$$

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Achille Cannavale

ORA PRENDIAMO AD ESEMPIO QUESTO GRAFICO:



I PUNTI SEGNATI VENGONO CHIAMATI PUNTI DI EQUILIBRIO.

I PUNTI DI EQUILIBRIO SI DIVIDONO IN:

- EQUILIBRIO STABILI;
- EQUILIBRIO INSTABILI.

SI DIFFERENZIANO DAL FATTO CHE QUELLI STABILI RAPPRESENTANO I MINIMI DELLA FZ. (IN QUESTO CASO 2).

CASO 2D/3D

$$K = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) \quad , \quad \frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$U(x, y, z) \Big| K + U = COST \Rightarrow \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \rightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{dU}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\partial x}{\partial t}}}_{v_x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\partial y}{\partial t}}}_{v_y} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\partial z}{\partial t}}}_{v_z}$$

DEFINIAMO GRADIENTE DI U:

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla} U \cdot \vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$$

Achille Cannavale

ROTORE

SIA $\vec{w}$ UN CAMPO VETTORIALE.
SI DEFINISCE ROTORE DEL CAMPO $\vec{w}$:

$$ROT(\vec{w}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\partial_y w_z - \partial_z w_y) - (\partial_x w_z - \partial_z w_x)\vec{u}_y + (\partial_x w_y - \partial_y w_x)\vec{u}_z$$

VEDIAMO ALCUNI ESEMPI:

① $$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} h) = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ \partial h_x & \partial h_y & \partial h_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y, \partial z} - \frac{\partial^2 h}{\partial z, \partial y}\right)\vec{u}_x - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x, \partial z} - \frac{\partial^2 h}{\partial z, \partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x, \partial y} - \frac{\partial^2 h}{\partial y, \partial x}\right)\vec{u}_z$$

MA PER SCHWARTZ SAPPIAMO:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial_i, \partial_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial_j, \partial_i}$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} h) = \vec{0}$$

SI DICE CHE, SE $\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w}$ È UN CAMPO IRROTAZIONALE
E INOLTRE QUESTO TIPO DI CAMPO:

$$\exists\, h \text{ SCALARE} \mid \vec{w} = \vec{\nabla} h$$

OSSERVAZIONE

LE FORZE CONSERVATIVE SI DICONO IRROTAZIONALI:

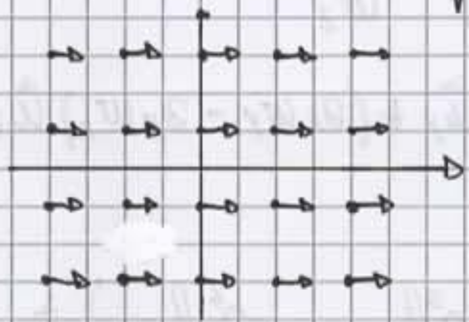
$$\vec{F} = -\frac{d\vec{u}}{dt} \quad , \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} u$$

② $\vec{w} = x^2 y^3 z^2 \vec{u}_x + x y^2 \vec{u}_y + z^3 \vec{u}_z$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ x^2 y^3 z^2 & x y^2 & z^3 \end{vmatrix} = 0\vec{u}_x - \left(-2x^2y^3z\right)\vec{u}_y + \left(y^2 - 3x^2y^2z^2\right)\vec{u}_z \neq \vec{0}$$

QUINDI · QUESTO · CAMPO · NON · È · IRROTAZIONALE !!

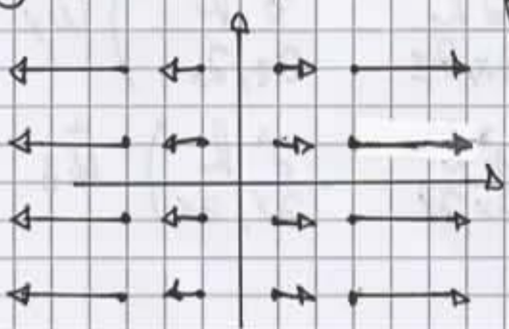
③ $\vec{w} = w_0 \vec{u}_x$



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ w_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{u}_x + 0\vec{u}_y + 0\vec{u}_z = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ UN · CAMPO · UNIFORME · È IRROTAZIONALE !!!

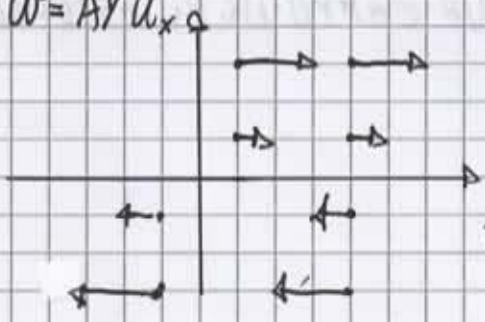
④ $\vec{w} = Ax \vec{u}_x$



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ Ax & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{u}_x + 0\vec{u}_y + 0\vec{u}_z = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ È · IRROTAZIONALE

⑤ $\vec{w} = Ay \vec{u}_x$



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & Ay & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{u}_x + 0\vec{u}_y + 0\vec{u}_z = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ È · IRROTAZIONALE

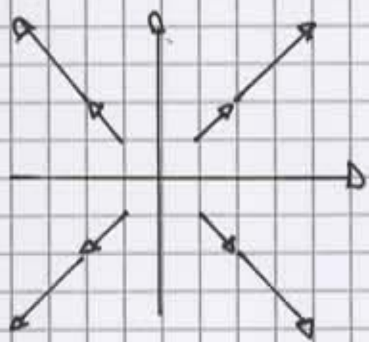
⑥ $\vec{w} = Bx\,\vec{u}_y$

$\boxed{N.B.}$ DA NOTARE COME POTREMMO IMMAGINARE QUESTE FRECCE COME FORZE E DI CONSEGUENZA ACCOPPIARLE PER CAPIRE IN CHE VERSO SARÀ IL MOVIMENTO ROTAZIONALE.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & By & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{u}_x + 0\vec{u}_y + B\vec{u}_z \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow$ <u>NON</u> È IRROTAZIONALE.

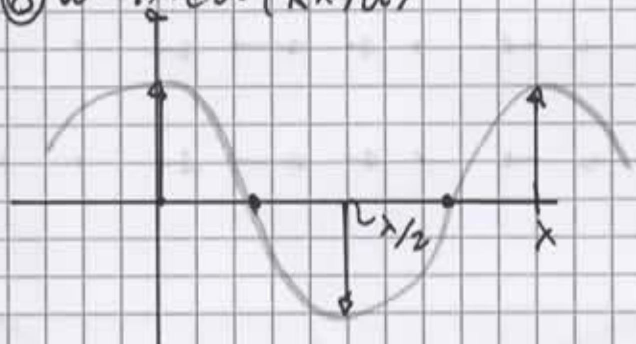
⑦ $\vec{w} = Ay\,\vec{u}_x + Bx\,\vec{u}_y$

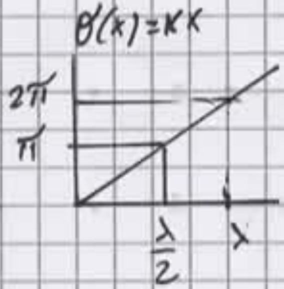


$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ Ay & Bx & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{u}_x + 0\vec{u}_y + (B-A)\vec{u}_z$$

$\Rightarrow$ <u>NON</u> È IRROTAZIONALE.

⑧ $\vec{w} = A \cdot \cos(kx)\,\vec{u}_y$





$2\pi = k\lambda$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & A\cos(kx) & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{u}_x + 0\vec{u}_y - Ak\sin(kx)\vec{u}_z$$

Achille Cannavale

DIVERGENZA

DEFINIAMO DIVERGENZA DEL CAMPO VETTORIALE $\vec{w}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{w}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right)\cdot\left(w_x\vec{u}_x+w_y\vec{u}_y+w_z\vec{u}_z\right)=$$

$$=\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}$$

ESEMPIO 1

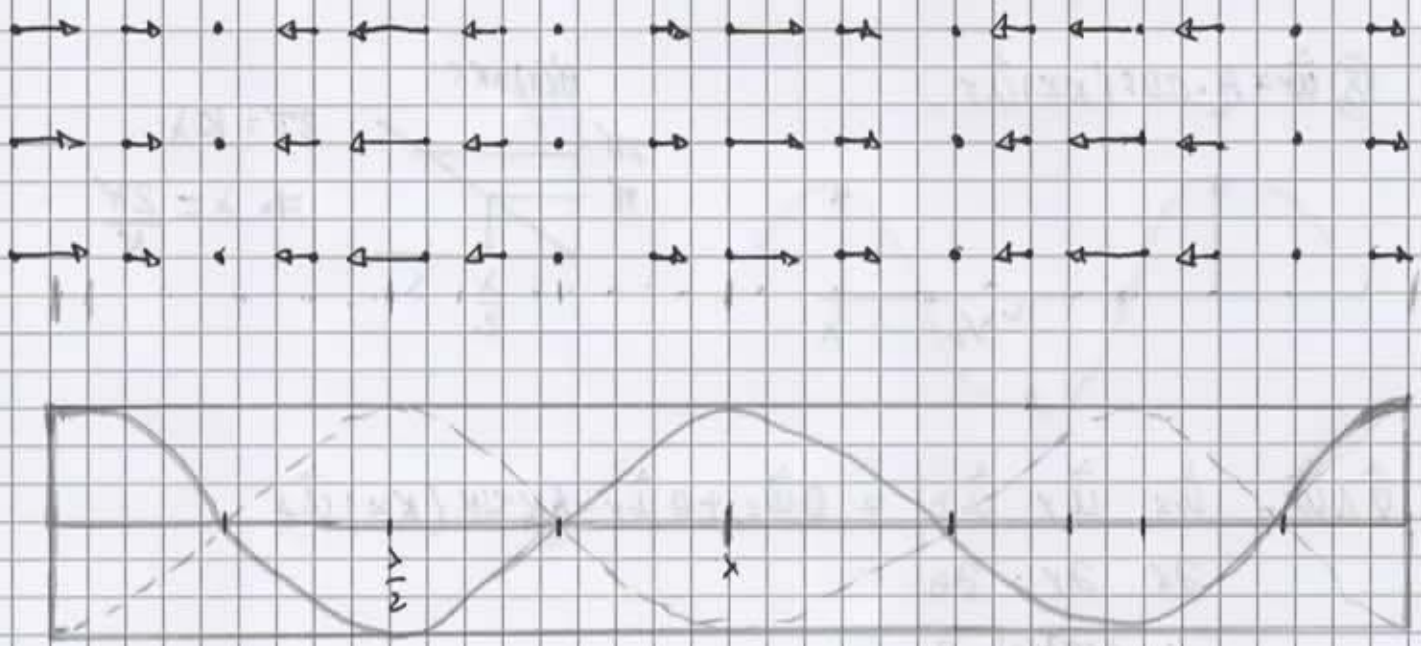
$\vec{w}=w_0\vec{u}_x$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{w}=0$

ESEMPIO 2

$\vec{w}=A\cos(kx)\vec{u}_y$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{w}=0$

ESEMPIO 3

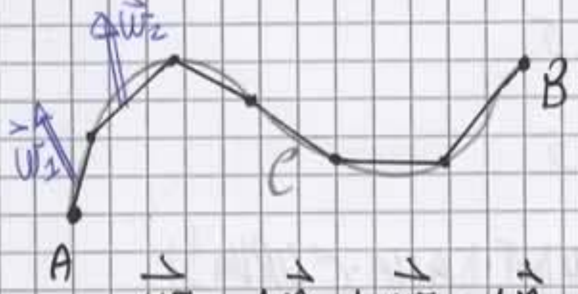
$\vec{w}=A\cos(kx)\vec{u}_x$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{w}=-Ak\sin(kx)$



Achille Cannavale

INTEGRALE CURVILINEO

SIA $\vec{w}$ UN CAMPO VETTORIALE.



APPROSSIMIAMO LA CURVA CON UNA SPEZZATA.

$$\vec{w}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{w}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \ldots + \vec{w}_i \cdot \Delta\vec{r}_i + \ldots =$$

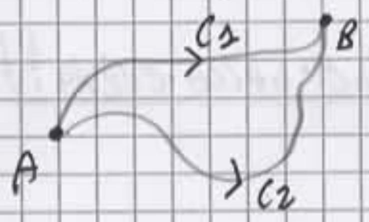
$$= \sum_i^N \vec{w}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \xrightarrow[|\Delta\vec{r}_i| \to 0]{N \to \infty} \int_A^B \vec{w} \cdot d\vec{r}$$ INTEGRALE CURVILINEO

OSSERVAZIONE

IN GENERALE: $\int_{A\,(C_1)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} \neq \int_{A\,(C_2)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r}$

TUTTAVIA ESISTONO CAMPI VETTORIALI MOLTO SPECIALI:

$\forall$ COPPIA DI PUNTI A E B

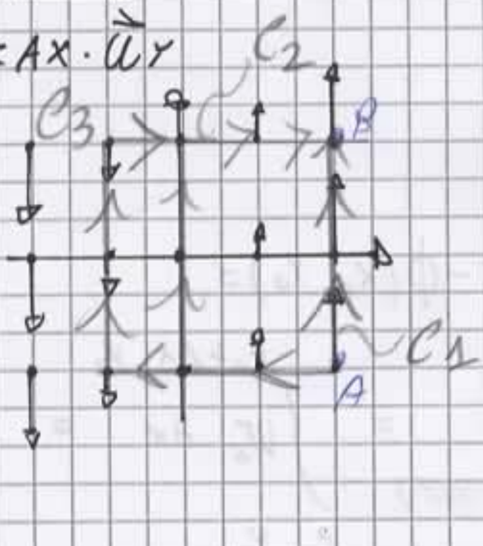


$$\int_{A\,(C_1)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} = \int_{A\,(C_2)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r}$$

NON DIPENDE DALLA CURVA SCELTA!!!

ESEMPIO ①

$\vec{w} = Ax \cdot \vec{u}_y$



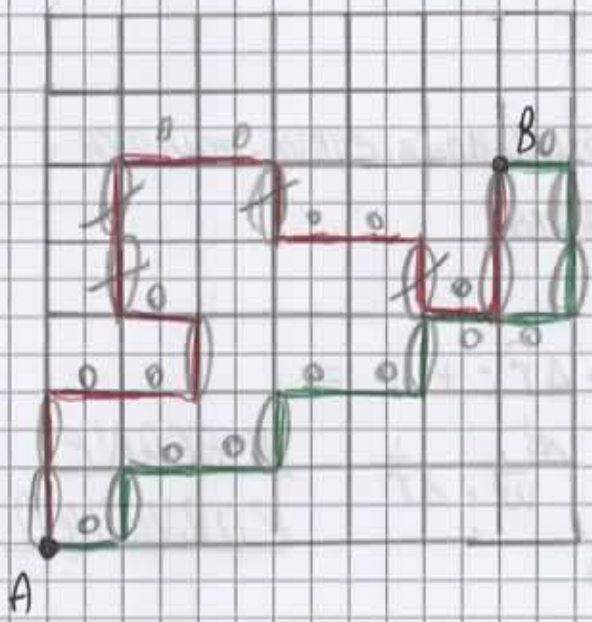
$$\int_{A\,(C_1)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} > 0, \quad \int_{A\,(C_2)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\int_{A\,(C_3)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} < 0$$

Achille Cannavale

ESEMPIO · ②

$$\vec{w} = w_0 \vec{u}_y$$



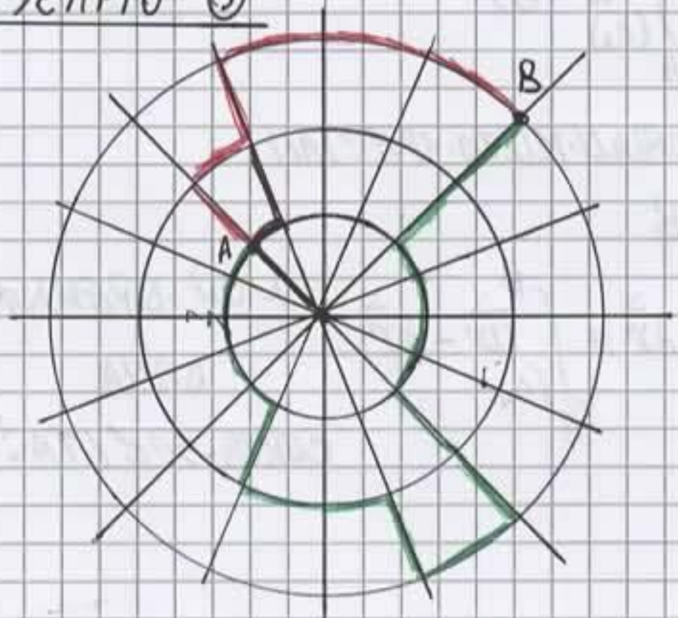
C_1 5

C_2 5

NON · DIPENDE · DALLA · CURVA!!

ESEMPIO · ③

$$\vec{w} = w_0 \vec{u}_r$$



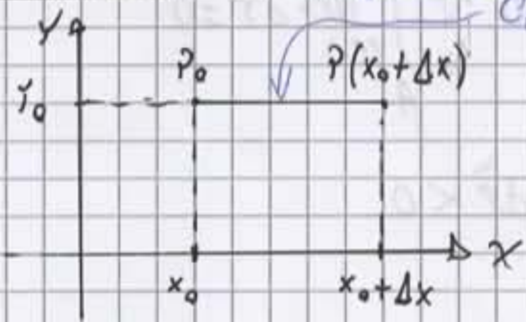
C_1 2

C_2 2

NON · DIPENDE · DALLA · CURVA!!

OSSERVAZIONE (1 → 3)

CURVA · SPECIALE



$$\phi(x_0+\Delta x, y_0) - \phi(x_0, y_0) =$$

$$= \int_{P_0}^{P} \vec{w} \cdot d\vec{r} \ \text{(CURVA SPECIALE)} = \int_{x_0, y_0}^{x_0+\Delta x, y_0} w_x \, dx =$$

TEOREMA INTEGRALE

$$= \int^{x_0+\Delta x} w_x(x, y_0)\, dx = w_x(\xi, y_0) \cdot \Delta x$$

QUINDI, DATO CHE: $\Delta\phi = w_x(\xi, y_0)\Delta x$ ALLORA:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = w_x(\xi, y_0),$$

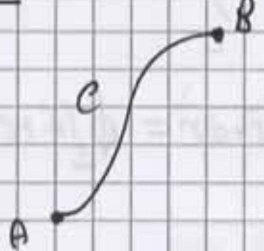
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x_0+\Delta x, y_0) - \phi(x_0, y_0)}{\Delta x} = w_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$\boxed{\vec{w} = \vec{\nabla}\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x}}_{w_x}\vec{u}_x + \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial y}}_{w_y}\vec{u}_y + \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial z}}_{w_z}\vec{u}_z$$

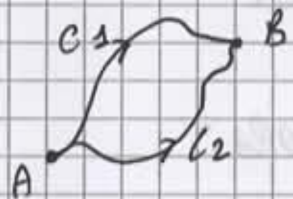
QUINDI UN CAMPO CHE HA UN INTEGRALE CURVILINEO CHE NON DIPENDE DALLA CURVA, PUÒ ESSERE RISCRITTO COME GRADIENTE DI UNA FUNZIONE SCALARE.

LEMMA



$$\int_{A,\,C}^{B} \vec{w}\cdot d\vec{r} = -\int_{B,\,C}^{A} \vec{w}\cdot d\vec{r}$$

APPLICAZIONE $(1 \to 2)$



$$\int_{A,\,C_1}^{B} \vec{w}\cdot d\vec{r} = \int_{A,\,C_2}^{B} \vec{w}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{A,\,C_1}^{B} \vec{w}\cdot d\vec{r} = -\int_{A,\,C_2}^{B} \vec{w}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{A,\,C_1}^{B} \vec{w}\cdot d\vec{r} - \int_{A,\,C_2}^{B} \vec{w}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{A,\,C_1}^{B} \vec{w}\cdot d\vec{r} + \int_{B,\,C_2}^{A} \vec{w}\cdot d\vec{r} = 0$$

QUESTO VUOL DIRE CHE PRESI DUE PUNTI QUALSIASI A E B, ABBIAMO:

$\int_A^B \vec{w} \cdot d\vec{r}$ NON DIPENDE DALLA CURVA $\Rightarrow$ PER OGNI CURVA C CHIUSA DEFINIAMO:

$$\boxed{\oint \vec{w} \cdot d\vec{r} = 0}$$

CIRCUITAZIONE DI $\vec{w}$

PROPOSIZIONI

1) $\forall A, B$ $\int_A^B \vec{w} \cdot d\vec{r}$ NON DIPENDE DALLA CURVA.

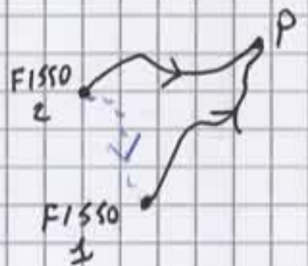
2) $\oint \vec{w} \cdot d\vec{r} \equiv 0$

3) $\exists$ UN CAMPO SCALARE $\phi : \vec{\nabla} \phi = \vec{w}$

4) $\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow$ IRROTAZIONALE

TEOREMA DI STOKES

OSSERVAZIONE



$$\phi_1(P) = \int_1^P \vec{w} \cdot d\vec{r}, \quad \phi_2(P) = \int_2^P \vec{w} \cdot d\vec{r}$$

MA ANCHE: $\phi_2(P) = \underbrace{\int_2^1 \vec{w} \cdot d\vec{r}}_{COST} + \underbrace{\int_1^P \vec{w} \cdot d\vec{r}}_{\phi_1(P)} = \phi_1(P) + COST$

QUINDI CAMBIANDO IL PUNTO FISSO, IL RISULTATO DIFFERISCE DI UNA COSTANTE.

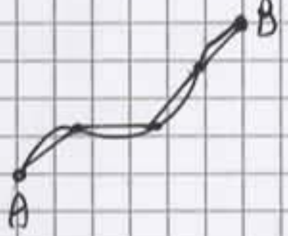
$$\Rightarrow \phi(A) = \int_1^A \vec{w} \cdot d\vec{r}, \quad \phi(B) = \int_1^B \vec{w} \cdot d\vec{r}, \quad \text{ALLORA:}$$

$$\int_A^B \vec{w} \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

INDIPENDENTE DAL PUNTO 1 SCELTO

APPLICAZIONE INTEGRALI CURVILINEI

DATO CHE: $\frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow K_2 - K_1 = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt$



$$\downarrow$$

$$\sum_i^N \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{v}_i \cdot \Delta t_i$$

PER $\Delta t \to 0$

$$\sum_i^N \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$$

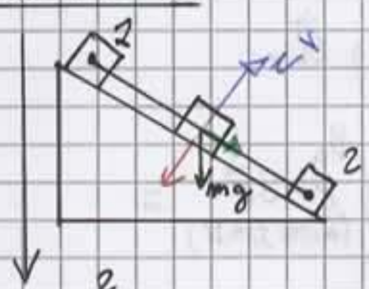
DA CIÒ CAPIAMO CHE:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt = \int_{1\ (\text{TRAIETTORIA})}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

SUPPONIAMO ORA CHE LA FORZA SIA <u>IRROTAZIONALE</u>

$$\Rightarrow \int_{1\ (\text{TRAIETTORIA})}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1\ (\text{QUALSIASI TRAIETTORIA})}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

<u>ESEMPIO 1</u>



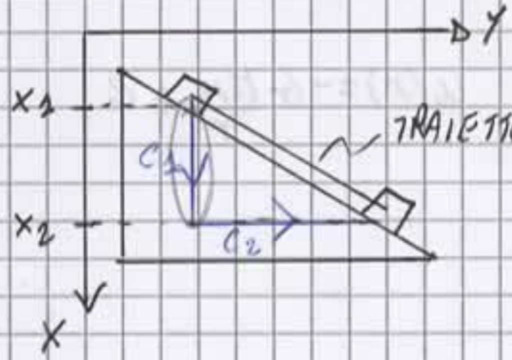
$$K_2 - K_1 = \int_{1\ (\text{TRAIETT.})}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1\ (\text{TRAIETT.})}^{2} m g \cdot d\vec{r} + \int_{1\ (\text{TRAIETT.})}^{2} \vec{N} \cdot d\vec{r} =$$

$\downarrow$ 0

NON FA LAVORO

$$= \int_{1\ (\text{QUALSIASI})}^{2} m g \cdot d\vec{r}$$

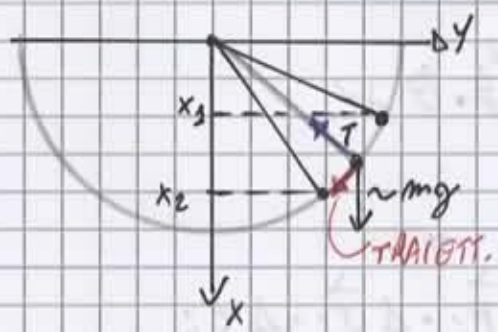
ALLORA SCEGLIAMO UNA CURVA SEMPLICE!!!



MA SAPPIAMO CHE mg VA SOLO NELLA DIREZIONE Y, QUINDI C_2 NON CONTRIB.

$$\Rightarrow \int_{1\ C_1}^{2} m g \cdot d\vec{r} = \int_{1\ C_1}^{2} m g \cdot dx =$$

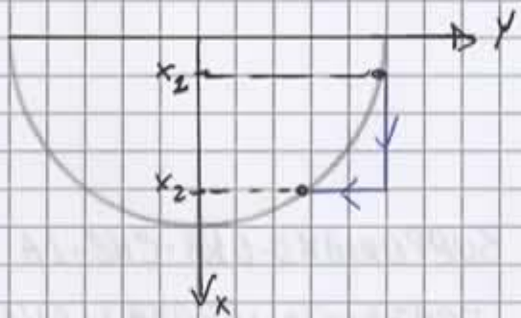
ESEMPIO ②



$$K_2 - K_1 = \int_{1\,(\text{TRAIETT.})}^{2} m\vec{g}\cdot d\vec{r} + \int_{1\,(\text{TRAIETT.})}^{2} \vec{T}\cdot d\vec{r} =$$

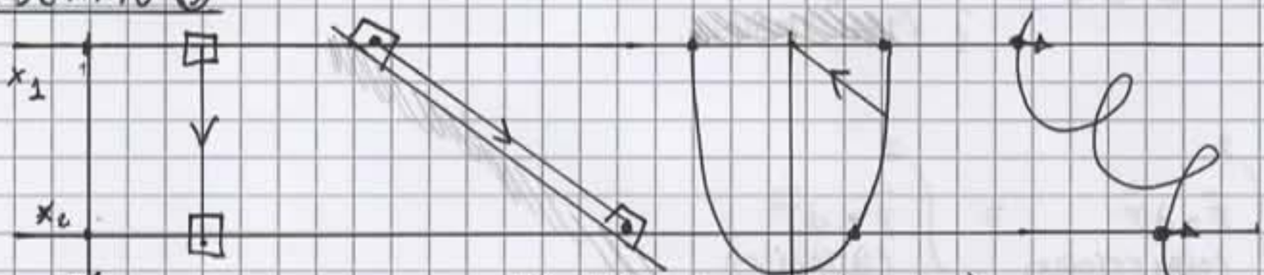
$$\int_{1\,(\text{TRAIETT.})}^{2} \vec{T}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$= \int_{1\,(\text{QUALSIASI})}^{2} m\vec{g}\cdot d\vec{r}$$



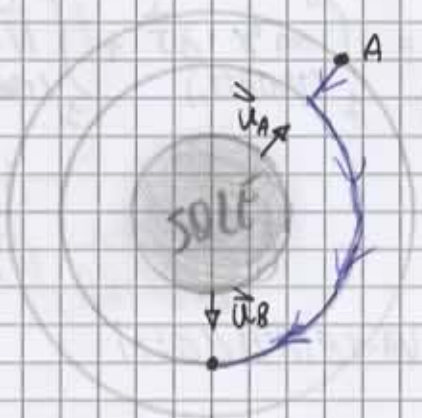
$$K_2 - K_1 = mg(x_2 - x_1)$$

ESEMPIO ③



$$K_2 - K_1 = mg\,(x_2 - x_1)$$

ESEMPIO ④



$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r = F(r)\,\vec{u}_r$$

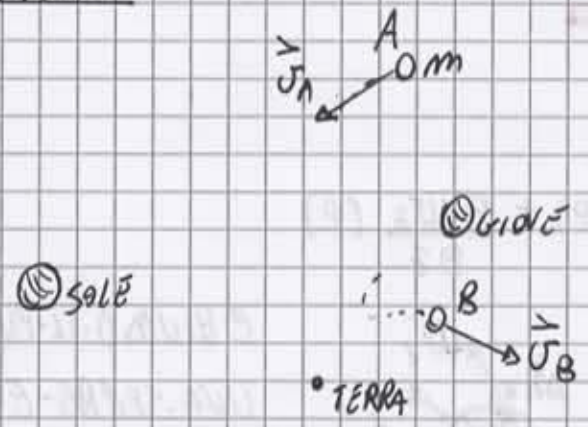
$$K_B - K_A = \int_{A\,(\text{TRAIETT.})}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\,(\text{QUALSIASI})}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{Mm}{r^2}\,d\vec{r} = U_A - U_B \text{, DOVE:}$$

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} + C$$

Achille Cannavale

ESEMPIO 5



$$K_B - K_A = U_A - U_B$$

$$U(P) = U_{SOLE}(P) + U_{GIOVE}(P) + U_{TERRA}(P)$$

$$U_{SOLE} = -G\frac{M_S m}{r_{SOLE}}$$

$$U_{GIOVE} = -G\frac{M m}{r_{GIOVE}}$$

$$U_{TERRA} = -G\frac{M m}{r_{TERRA}}$$

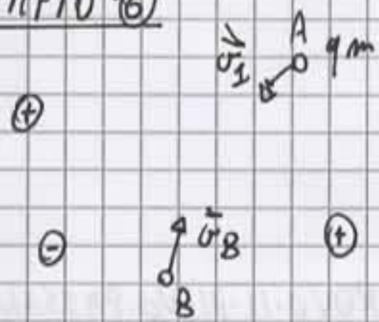
$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_S + \vec{F}_G + \vec{F}_T$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U_S - \vec{\nabla} U_G - \vec{\nabla} U_T$$

$$\vec{F} = -\nabla(U_S + U_G + U_T)$$

$$\Rightarrow U_{TOT} = m\left[-G\frac{M_S}{r_S} - G\frac{M_G}{r_G} - G\frac{M_T}{r_T}\right] = m \cdot \phi(P)$$

ESEMPIO 6



$$K_B - K_A$$

$$\vec{F}_{SONDA}(A) = q\vec{E}(A)$$

$$\vec{F}_{SONDA}(P) = q\vec{E}(P)$$

DOVE $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, QUINDI: $\vec{F}_{SONDA}(P) = q(-\vec{\nabla} V) = -\vec{\nabla} U$, DOVE:

$$U = q \cdot V(P)$$

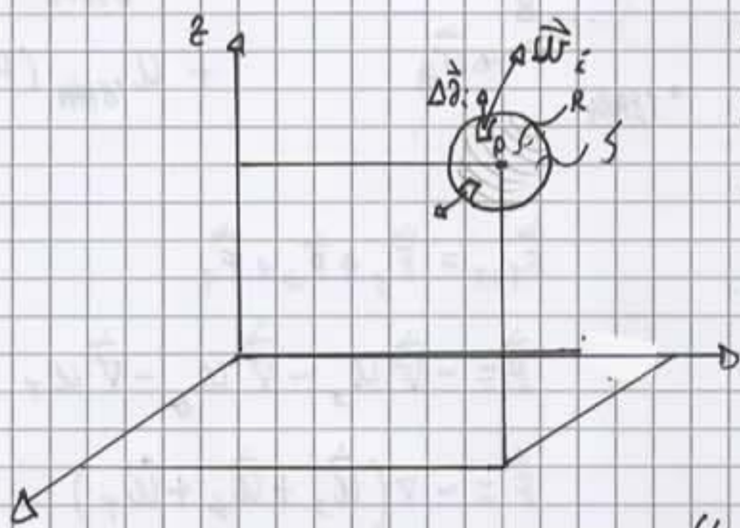
$$U_{TOT} = q \cdot V(P)$$

$$\Rightarrow K_B - K_A = U_A - U_B = q(V_A - V_B)$$

DIVERGENZA IN UN PUNTO

$$\vec{w}(P) = w_x \vec{u}_x + w_y \vec{u}_y + w_z \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w}(P) = \frac{\partial w_x}{\partial x}(P) + \frac{\partial w_y}{\partial y}(P) + \frac{\partial w_z}{\partial z}(P)$$



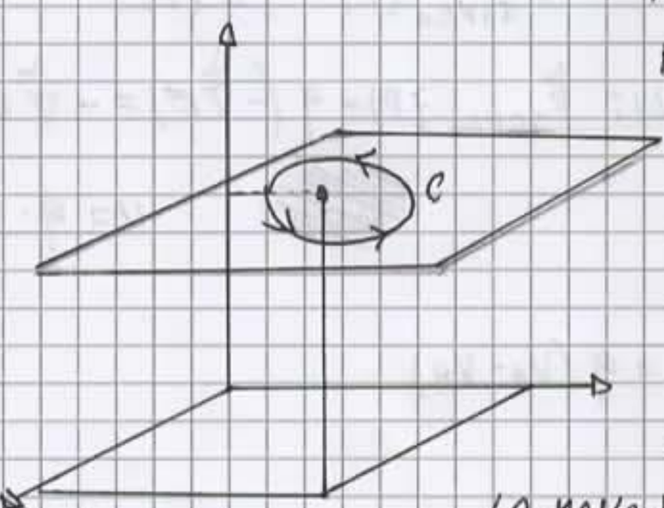
CHIUDO IL PUNTO IN UNA SFERA E SFRUTTO LA CONVENZIONE DI PORRE I VETTORI D'AREA ALL'ESTERNO.

$$\sum_i^N \vec{w}_i \cdot \Delta\vec{\partial}_i \xrightarrow[\Delta\vec{\partial}_i \to 0]{N \to \infty} \oint_S \vec{w} \cdot d\vec{\partial} \xrightarrow[\text{VOL}(S)]{\text{FRATTO}} \frac{\oint_S \vec{w} \cdot d\vec{\partial}}{\text{VOL}(S)} \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ FACCIO COLLASSARE LA SFERA SUL PUNTO P $(R \to 0)$ $\longrightarrow$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{w}(P)$

ROTORE IN UN PUNTO

ESEMPIO IN Z



TROVO IL PIANO PASSANTE PER QUEL PUNTO E ORTOG. ALLA DIREZIONE IN CUI VOGLIAMO LA COMPONENTE DEL ROTORE.

POI RACCHIUDO IL PUNTO CON UN CERCHIO E CON LA MANO DESTRA TROVO IL VERSO DI PERCORRENZA.

$$\oint_C \vec{w} \cdot d\vec{r} \xrightarrow[\text{COLLASS.}]{\text{FACCIO}} \vec{\nabla} \wedge \vec{w}(P)$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

PER QUALSIASI SUPERFICIE CHIUSA, IL FLUSSO DEL CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO LA SUPERFICIE È:

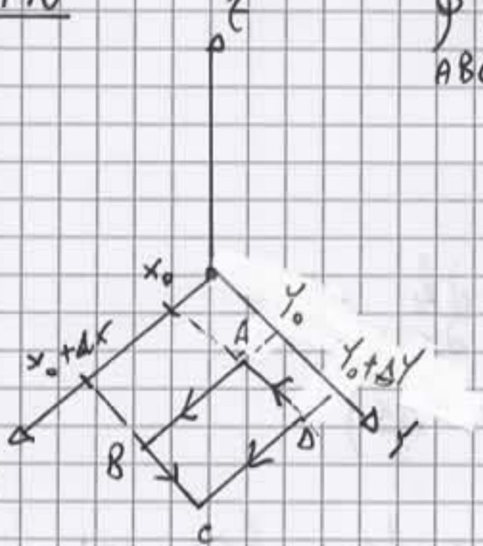
$$\oint_S \vec{w}\cdot d\vec{a} = \iiint_{VOL(S)} (\vec{\nabla}\cdot\vec{w})\cdot dVOL(S)$$

TEOREMA DEL ROTORE (4→2)

PER QUALSIASI CURVA CHIUSA C E QUALSIASI SUPERFICIE S CHE ABBIA C COME ORLO, LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO VETTORIALE LUNGO LA CURVA C È:

$$\oint_C \vec{w}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{w})\cdot d\vec{a}$$

ESEMPIO



$$\oint_{ABCD} \vec{w}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{w}\cdot d\vec{r} + \int_B^C \vec{w}\cdot d\vec{r} +$$

$$+ \int_C^D \vec{w}\cdot d\vec{r} + \int_D^A \vec{w}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} w_x(x', y_0)\, dx' + \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} w_y(x_0+\Delta x, y')\, dy'$$

$$- \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} w_x(x', y_0+\Delta y)\, dx' - \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} w_y(x_0, y')\, dy' =$$

SCHEDA MATEMATICA

TEOREMA MEDIA

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$$

TEOREMA DI TAYLOR

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}\cdot\Delta x \dots$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) \cong \frac{df}{dx}\cdot\Delta x$$

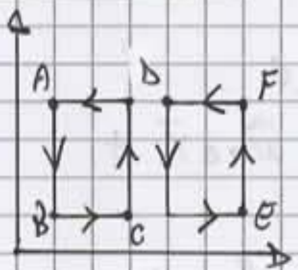
$$\overset{*}{=} \boxed{w_x(x^*, y_0)\cdot\Delta x - w_x(\bar{x}, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x} +$$

$$+ \boxed{w_y(x_0+\Delta x, y^*)\cdot\Delta y - w_y(x_0, \bar{y})\cdot\Delta y} =$$

$$\overset{*}{=} -\frac{\partial w_x}{\partial y}\cdot\Delta y\cdot\Delta x + \frac{\partial w_y}{\partial x}\cdot\Delta x\cdot\Delta y = \underbrace{\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)}_{\text{COMPONENTE Z DEL ROTORE}}\cdot\underbrace{\Delta x\cdot\Delta y}_{\text{AREA}} =$$

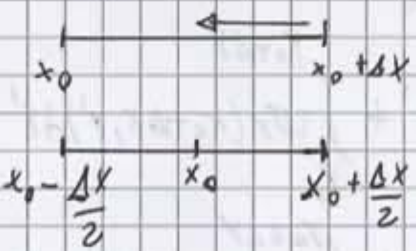
$$= (\vec{\nabla}\wedge\vec{w})\cdot\Delta\vec{a}$$

OSSERVAZIONE



$$\oint_{ABFE} \vec{w}\cdot d\vec{s} = \oint_{ABCD} \vec{w}\cdot d\vec{s} + \oint_{DCEF} \vec{w}\cdot d\vec{s}$$

LEMMA



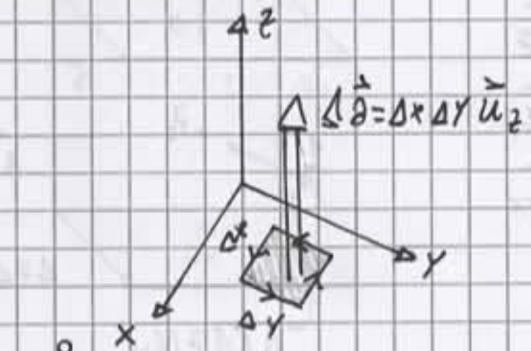
$$f(x_0+\Delta x) - f(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\cdot\Delta x$$

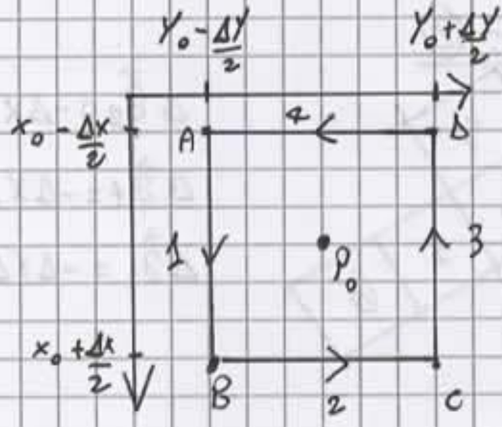
$$f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) - f(x_0) + f(x_0) - f\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\cdot\frac{\Delta x}{2} - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\frac{(-\Delta x)}{2} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\cdot\Delta x$$

APPLICAZIONE ①





$$\int_{A\,(1)}^{B} \vec{w} \cdot \partial \vec{r} = w_x\left(x', y_0 - \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot \Delta x$$

$$\int_{B\,(2)}^{C} \vec{w} \cdot \partial \vec{r} = w_y\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y'\right) \cdot \Delta y$$

$$\int_{C\,(3)}^{D} \vec{w} \cdot \partial \vec{r} = -w_x\left(x'', y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot \Delta x$$

$$\int_{D\,(4)}^{A} \vec{w} \cdot \partial \vec{r} = -w_y\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y''\right) \cdot \Delta y$$

USANDO IL LEMMA...

$$\begin{cases} \Delta x \to 0 & \int_2 \vec{w} \cdot \partial \vec{r} + \int_4 \vec{w} \cdot \partial \vec{r} \sim \left[\left.\frac{\partial w_y}{\partial x}\right|_{P_0} \cdot \Delta x \right] \cdot \Delta y \\ \Delta y \to 0 & \int_1 \vec{w} \cdot \partial \vec{r} + \int_3 \vec{w} \cdot \partial \vec{r} \sim \left[\left.\frac{\partial w_x}{\partial y}\right|_{P_0} \cdot \Delta y \right] \cdot \Delta x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{w} \cdot \partial \vec{r} \sim (\vec{\nabla} \wedge \vec{w})_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \equiv (\vec{\nabla} \wedge \vec{w})_{P_0} \cdot \Delta \vec{\partial}$$

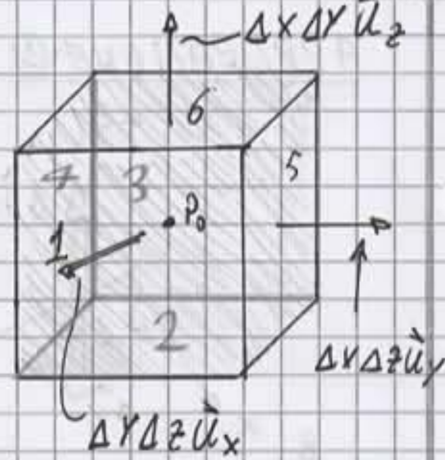
Achille Cannavale

APPLICAZIONE ②

$$\Delta \vec{\partial}_2 = -\Delta x \Delta y \vec{u}_z$$

$$\Delta \vec{\partial}_4 = -\Delta x \Delta z \vec{u}_y$$

$$\Delta \vec{\partial}_3 = -\Delta y \Delta z \vec{u}_x$$



$$\iint_1 \vec{w} \cdot d\vec{\partial} + \iint_3 \vec{w} \cdot d\vec{\partial} = w_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z - w_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z =$$

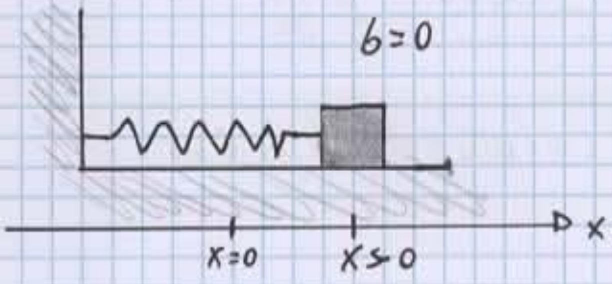
$$= \Delta y \Delta z \left(w_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - w_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)\right) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\sim} \left[\left.\frac{\partial w_x}{\partial x}\right|_{P_0} \cdot \Delta x \right] \Delta y \Delta z$$

$\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow$ VOL

$$\Rightarrow \oiint_{BOX} \vec{w} \cdot d\vec{\partial} \sim (\vec{\nabla} \cdot \vec{w})_{P_0} \cdot \Delta Vol$$

Achille Cannavale

MOLLA



$$\vec{F} = m \cdot a = \cancel{F_{TAVOLO}} + \cancel{F_{FLUIDO}} + \cancel{F_{PESO}} + F_{MOLLA}$$

$$\Rightarrow F_{MOLLA} = -K \cdot X$$ HOOKE

DEFORMAZIONE

QUINDI: $m \cdot a = -KX \rightarrow m\ddot{X} = -KX$ STIAMO CERCANDO UNA $X(t)$ SOLUZIONE.

$$\ddot{X} = -\frac{K}{m}X \rightarrow \boxed{\ddot{X} + \frac{K}{m}X = 0 \Rightarrow \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0, \text{ DOVE } \omega_0^2 = \frac{K}{m}}$$

PROVIAMO $X(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0$

$$\dot{x}(t) = 3At^2 + 2Bt + C = 0$$

$$\ddot{x}(t) = 6At + 2B = 0$$

NO!!

PROVIAMO $x(t) = e^{\alpha t}$

OK!!!

$$\dot{x}(t) = \alpha e^{\alpha t}$$

$$\ddot{x}(t) = \alpha^2 e^{\alpha t} \ldots \overset{N}{x}(t) = N\alpha e^{\alpha t}$$

PIU' PRECISAMENTE:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\alpha t} \\ \dot{x}(t) &= A\alpha e^{\alpha t} \\ \ddot{x}(t) &= A\alpha^2 e^{\alpha t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{METTIAMO NELL'EQUAZIONE.}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 A e^{\alpha t} + \frac{K}{m} A e^{\alpha t} = 0 \rightarrow \alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{K}{m} e^{\alpha t} \rightarrow \boxed{\alpha^2 + \frac{K}{m} = 0}$$

$$\alpha_\pm = \pm\sqrt{-\frac{K}{m}} = \pm\sqrt{(-1)\frac{K}{m}} = \pm\sqrt{\frac{K}{m}}\, i$$, RISCRIVO:

$$\alpha_\pm = \pm\, \omega_0 \cdot i, \text{ DOVE } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE $= A \cdot e^{\pm i\omega_0 t}$, CHE IN GENERALE SARÀ:

$$X(t) = C_+ e^{+i\omega_0 t} + C_- e^{-i\omega_0 t}$$

NUMERI

SE VOGLIAMO UNA $X(t)$ APPARTENENTE AI REALI, DOBBIAMO IMPORRE:

$$X(t) = C e^{i\omega_0 t} + \bar{C} e^{-i\omega_0 t} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t),\ A,B \in \mathbb{R}}$$

NOTIAMO CHE:

$$X(t=0) = A = x_0$$

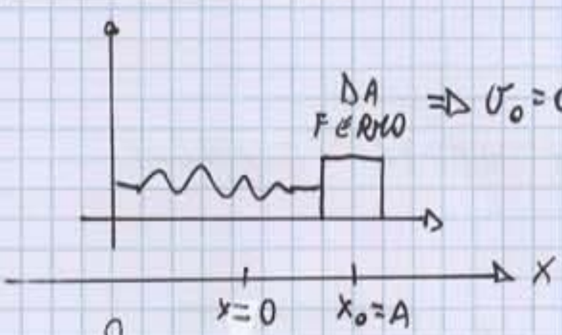
$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t=0) = B\omega_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

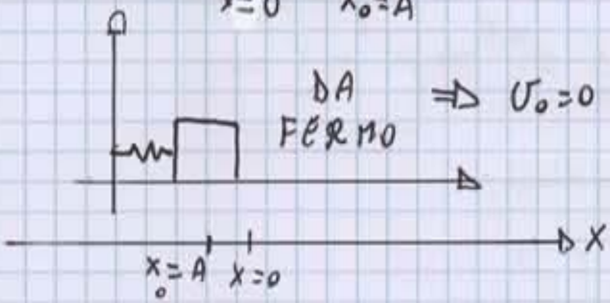
QUINDI PUO' ESSERE RISCRITTA:

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

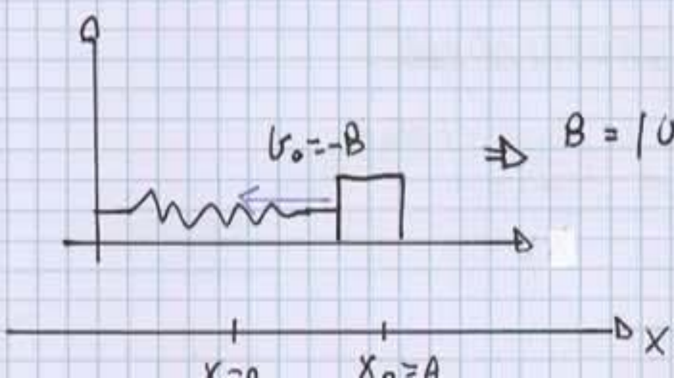
CASI PARTICOLARI



$\Rightarrow v_0=0 \Longrightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t)$

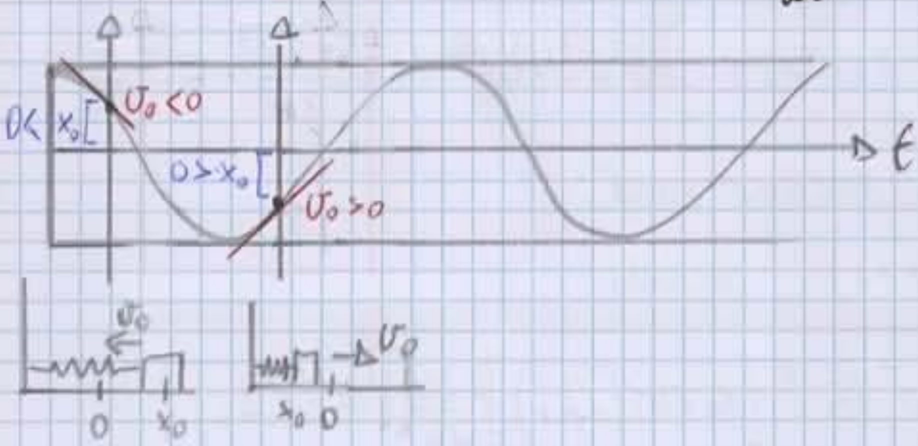


$\Rightarrow v_0=0 \Rightarrow x(t) = -A\cos(\omega_0 t)$

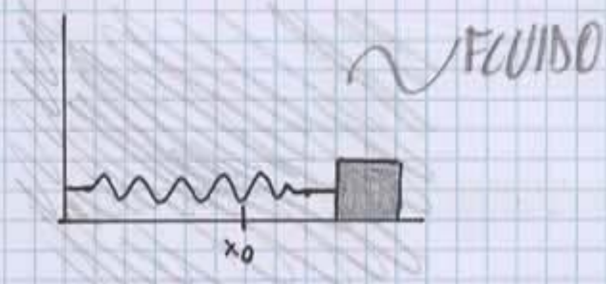


$\Rightarrow B = |v_0| \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t) - \frac{B}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

GRAFICAMENTE: $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$



MOLLA CON FLUIDO



$$m \cdot a = F_{FLUIDO} + F_{MOLLA}$$

$$ma = -bv - Kx$$

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - Kx$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0$$

CERCHIAMO $x(t)$ SOLUZIONE!!!

$$x_{PROVA} = Ae^{\alpha t}$$

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{K}{m}Ae^{\alpha t} + \frac{b}{m}A\alpha e^{\alpha t} \to \alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{K}{m}e^{\alpha t} + \frac{b}{m}\alpha e^{\alpha t} \to$$

$$\to \alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \frac{K}{m} = 0$$

RISOLVIAMO!! $\Rightarrow \alpha_{\pm} = \dfrac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{K}{m}\right)}}{2}$

PORTIAMO IL 2 NELLA RADICE

$$\Rightarrow \alpha_{\pm} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{b}{m}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot 4\left(\frac{K}{m}\right)}$$

$$= -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{K}{m}}$$

NOTIAMO ORA CHE:

- $\frac{b^2}{4m^2} > \frac{K}{m}$ 2 SOLUZIONI REALI
- $\frac{b^2}{4m^2} = \frac{K}{m}$ 1 SOLUZIONE REALE
- $\frac{b^2}{4m^2} < \frac{K}{m}$ SOLUZIONI COMPLESSE

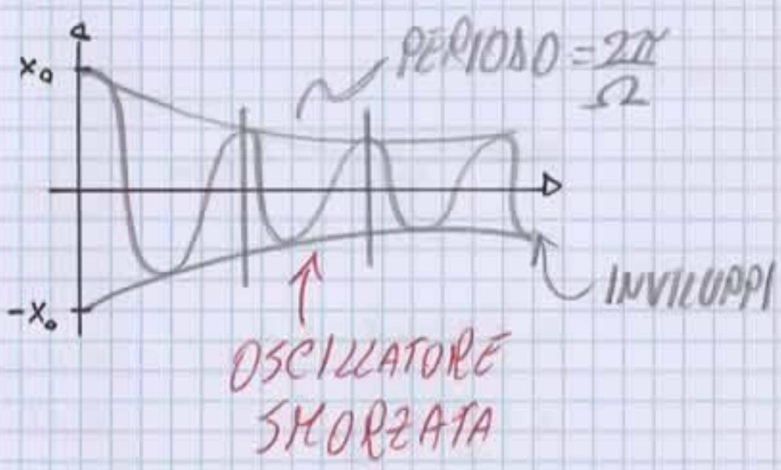
$\underbrace{\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)}_{>0} \Rightarrow \alpha_\pm = -\frac{b}{2m} \pm i\Omega$, DOVE $\Omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$

(N.B. IN ASSENZA DI FLUIDO $\alpha_\pm = i\sqrt{\frac{K}{m}} = \pm i\omega_0$)

QUINDI LA SOLUZIONE GENERALE SARÀ:

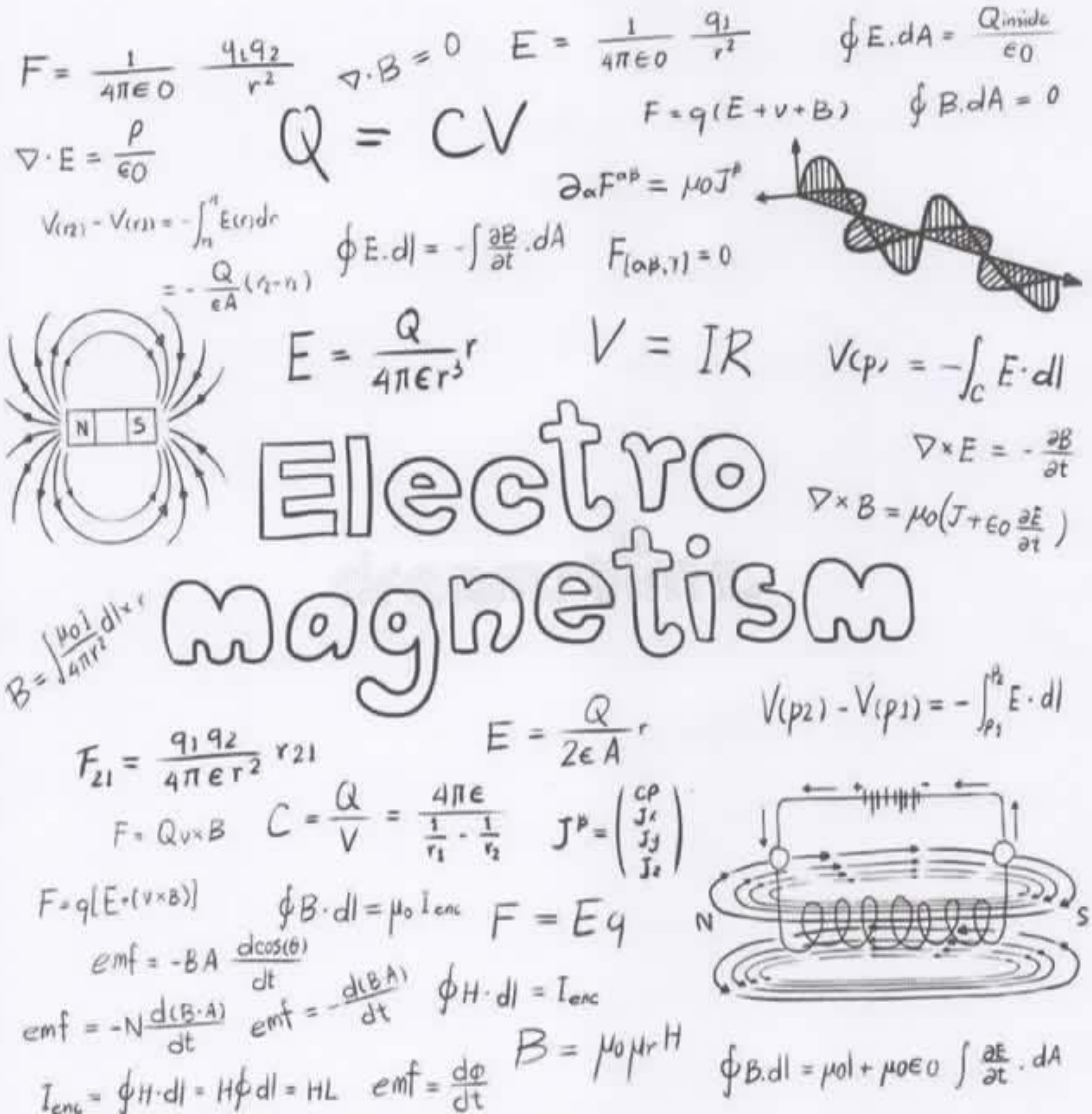
$e^{\left(-\frac{b}{2m}t \pm i\Omega_t\right)}$, QUINDI:

$$\boxed{X(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left[X_0 \cos(\Omega_t) + \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega_t)\right]}$$



FISICA
APPUNTI

Cannavale Achille



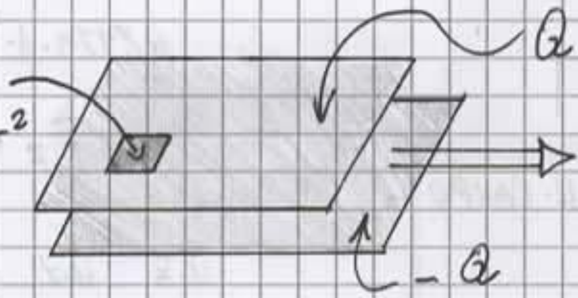
CAMPO ELETTRICO VETTORIALE UNIFORME

PRIMA DI TUTTO RICORDIAMO CHE:

$$q_{ELETTRONE} = 1.602 \times 10^{-19}\ COULOMB$$

DETTO QUESTO, COME SI CREA UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME??

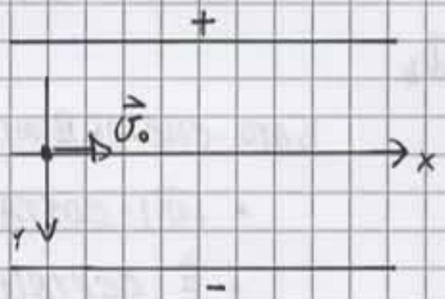
DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA $[\sigma] = Q L^{-2}$



UNA PARTICELLA CON CARICA q CHE SI TROVA TRA LE DUE LASTRE SARÀ SOGGETTA A QUESTA FORZA: $\vec{F} = q\vec{E}$

$$m \cdot a = \vec{F} = q\vec{E}$$

$$\Rightarrow a = \frac{q}{m}\vec{E}$$



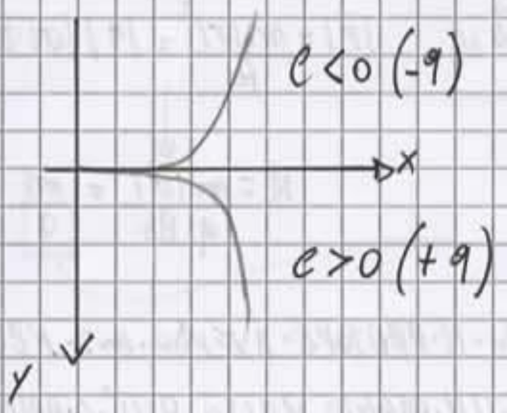
SUPPONIAMO $\vec{E} = 0\vec{u}_x + E_0\vec{u}_y$

ALLORA: $\begin{cases} a_x = \frac{q}{m} E_x = 0 \\ a_y = \frac{q}{m} E_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = \frac{q}{m} E_0 t \end{cases} \to \left.\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2}\frac{q}{m} E_0 t^2 \end{cases}\right\} \text{COMBINIAMOLE ASSIEME} \to$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{E_0}{v_0^2}x^2, \text{ OPPURE } y(x) = c\,x^2 \quad \text{DOVE } c = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{E_0}{v_0^2}$$

GRAFICAMENTE AVREMO:



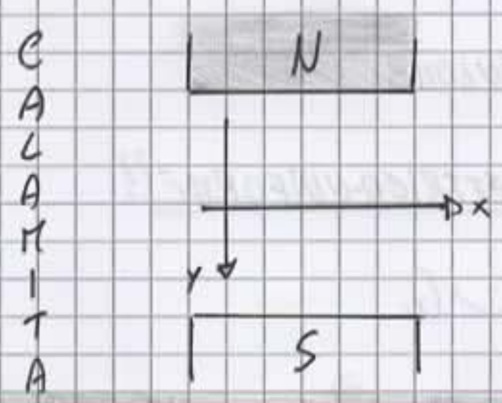
N.B. CHE DIMENSIONI HA IL CAMPO VETTORIALE ELETTRICO???

$$[\vec{E}] = M L T^{-2} Q^{-1} \quad \frac{N}{COULOMB}$$

Achille Cannavale

CAMPO MAGNETICO VETTORIALE UNIFORME

COME POSSIAMO CREARE UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME???



$\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$

UNA PARTICELLA CON CARICA q, TRA LE ESTREMITÀ DELLA CALAMITA SARÀ SOGGETTA A QUESTA FORZA:

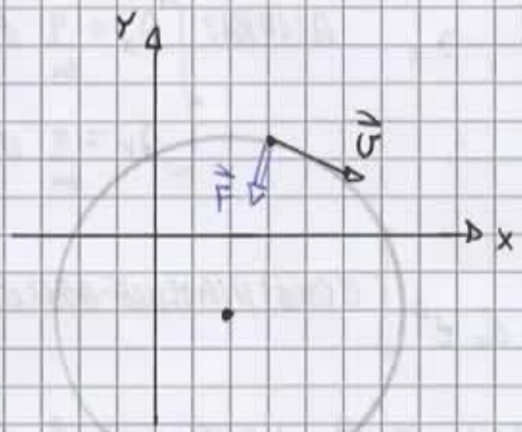
$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

N.B. CHE DIMENSIONI HA IL CAMPO MAGNETICO???

$$\boxed{[\vec{B}] = \frac{[\vec{F}]}{[q\vec{v}]} = \frac{M}{TQ} = TESLA}$$

$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} =$$

$$= q v_y B_0 \vec{u}_x - q v_x B_0 \vec{u}_y + 0\vec{u}_z$$



DATO CHE ABBIAMO:

- $|\vec{v}|$ COSTANTE;
- $\vec{F}$ CENTRIPETA.

$\Rightarrow$ MOTO CIRCOLARE UNIFORME

QUINDI UN CAMPO MAGNETICO HA:

$$\vec{a} = m \cdot \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_T + \boxed{m\frac{|\vec{v}|^2}{R}\vec{u}_N}$$

IL CAMPO MAGNETICO NON FA LAVORO

QUESTA È LA $\vec{F}$ NECESSARIA PER TENERE LA PARTICELLA SULL'ORBITA. È VALE:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$|\vec{F}| = \frac{m|\vec{v}|^2}{R} = |q||v| \cdot B_0$$

$$\Downarrow$$

$$R = \frac{m|\vec{v}|}{qB_0} = \boxed{\frac{m}{q}} \frac{|\vec{v}|}{B_0}$$

QUINDI IL PROTONE AVENDO $m >$ NEUTRONE AVRÀ UN RAGGIO MOLTO PIÙ GRANDE.

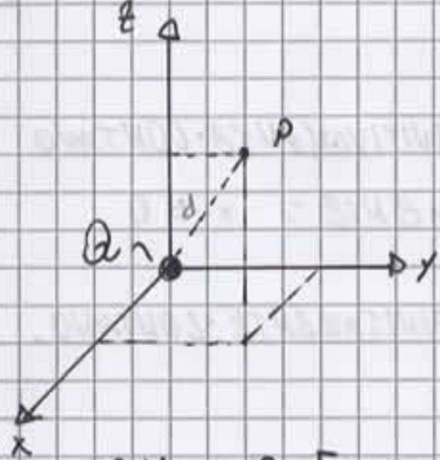
POTENZIALE ELETTROSTATICO

IL CAMPO ELETTROSTATICO PUÒ ESSERE SCRITTO COME:

$$\vec{E}_{STATICO} = -\vec{\nabla} V$$

POTENZIALE SCALARE ELETTROSTATICO

ESSENDO V UNO SCALARE, PER OGNI PUNTO DELLO SPAZIO AVRÀ UN VALORE.



$$\underbrace{V(x,y,z)}_{P} = K_e \cdot \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C$$

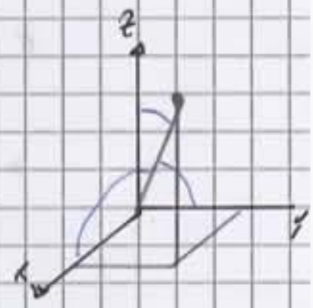
QUINDI $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z$

IN PARTICOLARE $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_e \frac{Q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + C\right] =$$

$$= K_e Q \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+\partial}}\right] = K_e Q \frac{\frac{1}{-2\sqrt{x^2+\partial}} \cdot 2x}{x^2+\partial} =$$

$$= -K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$ QUINDI:



- $E_x = K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} \cdot \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$ $\cos(\theta_x)$
- $E_y = K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} \cdot \boxed{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$ $\cos(\theta_y)$
- $E_z = K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} \cdot \boxed{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$ $\cos(\theta_z)$

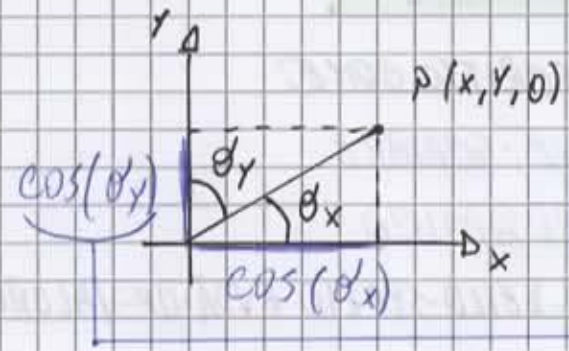
COSENI DIRETTORI

PROPOSIZIONE

$$\cos^2(\theta_x) + \cos^2(\theta_y) + \cos^2(\theta_z) = 1$$

Achille Cannavale

DIMOSTRAZIONE (2D)



$\Rightarrow \sin(\vartheta_X) \Rightarrow \cos^2(\vartheta_Y) + \cos^2(\vartheta_X) =$

$= \sin^2(\vartheta_X) + \cos^2(\vartheta_X) = 1$

OSSERVAZIONE

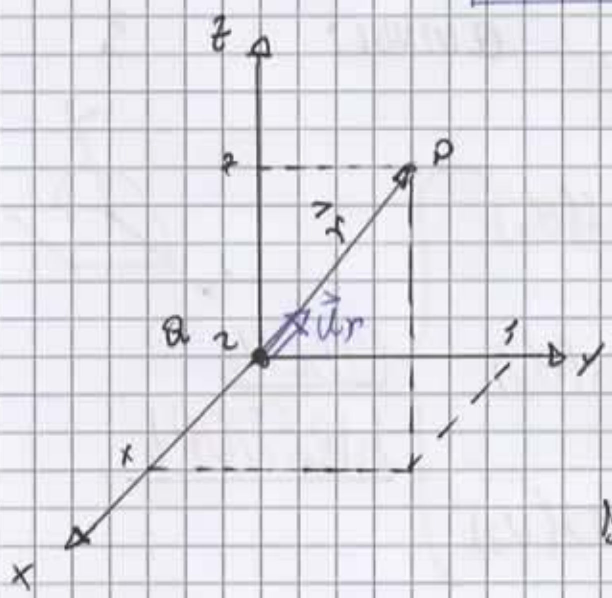
$$V(x, y, z) = \boxed{K_e \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}^{*} + C$$

SE P È INFINITAMENTE LONTANO DALLA SORGENTE: $* \to 0$

QUINDI SI SCEGLIE DI PORRE $C=0$ PER P INFINITAMENTE LONTANO.

È POSSIBILE INOLTRE UTILIZZARE UNA DIVERSA NOTAZIONE PER IL CAMPO ELETTROSTATICO.

$$\vec{E} = K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} \Big[\underbrace{\cos(\vartheta_x)\vec{u}_x + \cos(\vartheta_y)\vec{u}_y + \cos(\vartheta_z)\vec{u}_z}_{\vec{u}_r} \Big]$$



$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

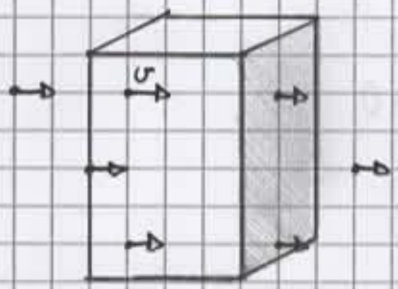
$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \text{ DOVE } |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

QUINDI $\vec{E}(P) = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{u}_r$

DOVE $E(r) = K_e \dfrac{Q}{x^2+y^2+z^2} = K_e \dfrac{Q}{|\vec{r}|^2}$

PORTATORI·DI·CARICA

ORA·DEFINIAMO·ALCUNI·VALORI·RIGUARDANTI·I·PORTATORI·DI·CARICA.



DEFINIAMO·<u>DENSITÀ·VOLUMETRICA·DI·NUMERO</u>
IL·NUMERO·DI·PORTATORI·IN·UN·VOLUME·MATEMATICO
E·LO·INDICHIAMO·CON

$$n$$

ORA·CI·CHIEDIAMO: QUANTE·PARTICELLE·NEL·VOLUME·COLPIRANNO·LA SUPERFICIE·IN·Δt·SECONDI?

$$n \cdot AREA \cdot v \cdot \Delta t$$

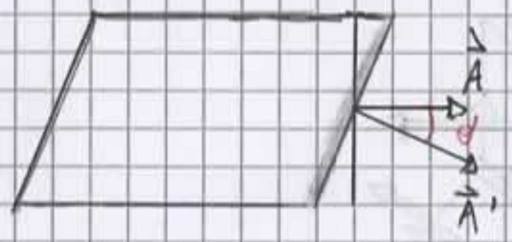
TUTTAVIA·SONO·PORTATORI·DI·CARICA, QUINDI·TENIAMONE·CONTO:

$$n \cdot q \cdot AREA \cdot v \cdot \Delta t = \Delta Q \quad \text{COULOMB}$$

COSÌ·POSSIAMO·DEFINIRE·LA·CARICA·CHE·ATTRAVERSA·LA·SUPERFICIE·PER UNITÀ·DI·TEMPO:

$$n\, q\, AREA\, v = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \frac{\text{COULOMB}}{\text{TEMPO}}$$

<u>SUPERFICIE·INCLINATA</u>



QUINDI·I·NUOVI·VALORI·SARANNO:

$$\Delta Q = n\, q\, AREA \cdot v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta)$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = n\, q\, AREA \cdot v \cdot \cos(\theta)$$

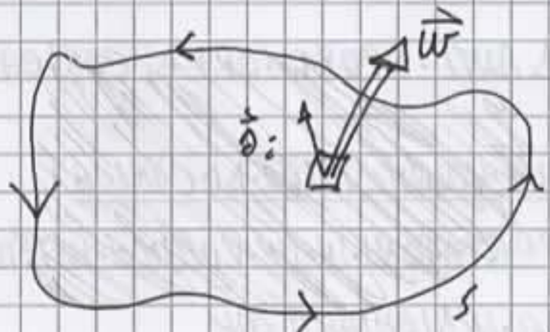
È·POI·POSSIBILE·RISCRIVERE·$\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, COSÌ:

$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \vec{J} \cdot \vec{A}$, DOVE·$\vec{J} = n\, q\, \vec{v}$·ED·È·LA·<u>DENSITÀ·SUPERFICIALE</u>

$$[\vec{J}] = [n][q][\vec{v}] = \frac{Q}{T} \cdot \frac{1}{L^2} = A/m^2$$

Achille Cannavale

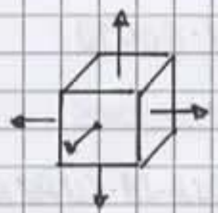
E SE, IN ULTIMA ANALISI LA SUPERFICIE FOSSE ONDULATA???



$$\sum_{i}^{N} \vec{w}_i \cdot \Delta \vec{a}_i \xrightarrow[\Delta \vec{a}_i \to 0]{N \to \infty} \boxed{\iint_S \vec{w} \cdot d\vec{a}}$$

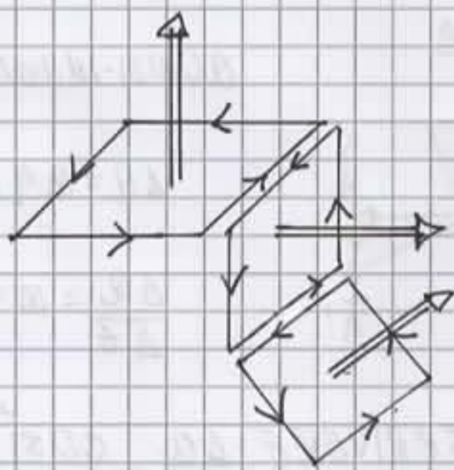
<u>FLUSSO DI $\vec{w}$ ATTRAVERSO $\vec{S}$</u>

PER SUPERFICI <u>CHIUSE</u> SI UTILIZZA LA CONVENZIONE CHE I VETTORI D'AREA VANNO VERSO L'ESTERNO.



$$\sum_{i}^{N} \vec{w}_i \cdot \Delta \vec{a}_i \longrightarrow \oiint \vec{w} \cdot d\vec{a}$$

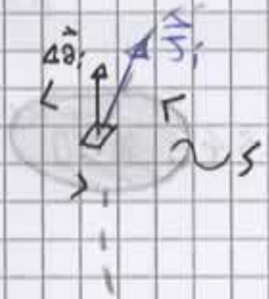
VICEVERSA CON UNA SUPERFICIE APERTA SI UTILIZZA LA MANO DESTRA.



CORRENTE ELETTRICA

COME ABBIAMO VISTO, DEFINIAMO LA DENSITÀ SUPERFICIALE DI CORRENTE ELETTRICA: $\vec{J} = q \cdot n \vec{v}$ $\left([J] = \frac{Q}{L^2} \cdot \frac{1}{T}\right)$

ORA POSSIAMO DEFINIRE LA CORRENTE ELETTRICA, COME LA QUANTITÀ DI CARICA ELETTRICA CHE ATTRAVERSA LA SUPERFICIE S IN UN'UNITÀ DI TEMPO.



$$\sum_i^N \vec{J}_i \cdot \Delta\vec{a}_i \xrightarrow[\Delta\vec{a}_i \to 0]{N \to \infty} \iint_S \underbrace{\vec{J}_i}_{A/m^2} \cdot \underbrace{d\vec{a}}_{m^2} = I$$

$\hookrightarrow A = \frac{COUL}{SECONDO}$

DEFINIAMO INOLTRE LA DENSITÀ VOLUMETRICA DI CARICA ELETTRICA

$$\rho = q n \qquad [\rho] = Q\, L^{-3}$$

SE ABBIAMO UN INSIEME DI VOLUMI, LA CARICA TOTALE SARÀ:

$$Q = \sum_i^N \rho_i \, \Delta VOL_i \xrightarrow[\Delta VOL_i \to 0]{N \to \infty} \iiint \rho \, dVOL$$

TEOREMA DI HELMHOLTZ

QUESTO TEOREMA AFFERMA CHE UN CAMPO VETTORIALE È COMPLETAMENTE DETERMINATO QUANDO SONO NOTI LA SUA

EQUAZIONI DI MAXWELL

LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

EQUAZIONE DI FARADAY-LENZ

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

EQUAZIONE DI AMPERE-MAXWELL

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

DOVE: ε_0 = COSTANTE DIELETTRICA NEL VUOTO $= 8,854 \ldots \times 10^{-12}$ (F/m)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)

NEL VUOTO LE EQUAZIONI DIVENTERANNO:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

DIVERGENZA

RICORDIAMO CHE IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA DICE:

$$\iiint_{VOL} \vec{\nabla} \cdot \vec{w} \, dVOL = \oint\!\!\oint_S \vec{w} \cdot d\vec{\partial}$$

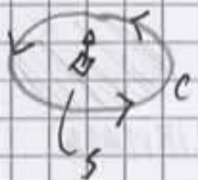
ED ORA APPLICHIAMOLO ALLE LEGGI DI GAUSS!!!

$$\iiint_{VOL} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dVOL = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\partial} = \iiint_{VOL} \rho/\varepsilon_0 \, dVOL$$

$$\iiint_{VOL} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dVOL = \oint\!\!\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{\partial} = 0$$

Achille Cannavale

ROTORE



IL TEOREMA DEL ROTORE AFFERMA CHE:

$$\iint_S \vec{\nabla}\wedge\vec{w} = \oint_C \vec{w}\cdot d\vec{r}$$

ORA APPLICHIAMOLO ALLE ULTIME DUE EQUAZIONI!!!

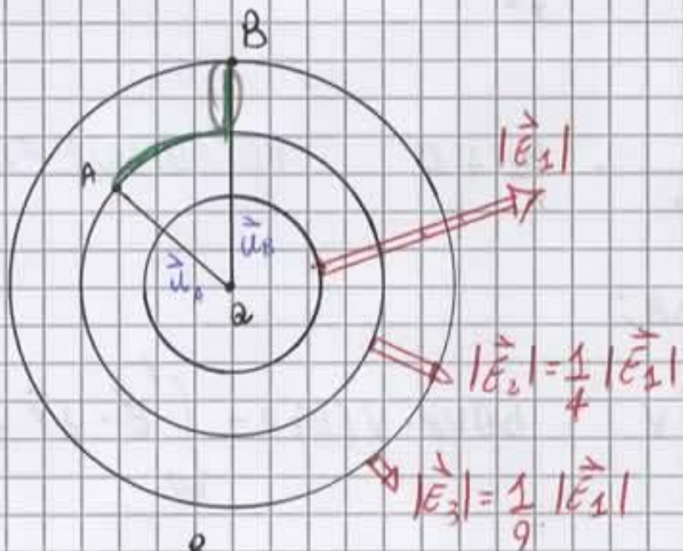
$$\iint_S \vec{\nabla}\wedge\vec{E}\, d\vec{a} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}\right)$$

$$\iint_S \vec{\nabla}\wedge\vec{B}\cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint \vec{J}\cdot d\vec{a} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{a}\right]$$

CARICA PUNTIFORME

CERCHIAMO DI CALCOLARE IL CAMPO ELETTROSTATICO DI UNA CARICA PUNTIFORME STAZIONARIA.

COME SAPPIAMO $\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}_r$, QUINDI DIPENDE DA r^2:



INOLTRE SAPPIAMO CHE $\int_{A\ (\text{QUALSIASI})}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{r} = V_A - V_B$, DOVE $V(P) = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r} + C$

Achille Cannavale

$$\int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(P) - V(\infty) \Rightarrow V(P) = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(\infty)$$

PER CONVENZIONE, QUANDO SI HA UNA CARICA IN UNA ZONA LIMITATA DELLO SPAZIO, SI PONE $V(\infty) = 0$ VOLT

$$\Rightarrow V(P) = \int_r^{\infty} E(r)\, d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} = V(P)$$

TRASFORMO L'INTEGRALE DA CURVILINEO A ORDINARIO:

$$\underset{\text{(QUALSIASI)}}{\int_A^B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} E(r) \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} =$$

$$= V_A - V_B \text{ , DOVE } V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} + C$$

QUINDI:

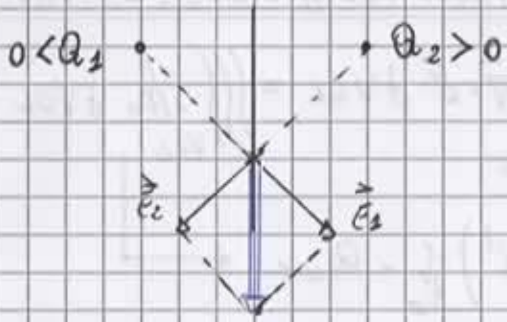
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$ CAMPO ELETTRICO

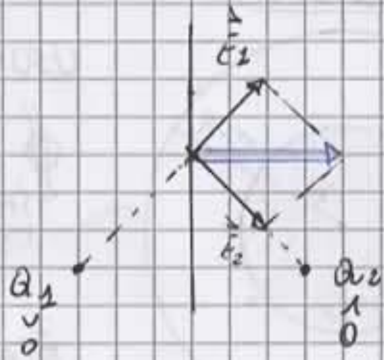
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + C$$ POTENZIALE ELETTROSTATICO

E SONO LEGATI DA:

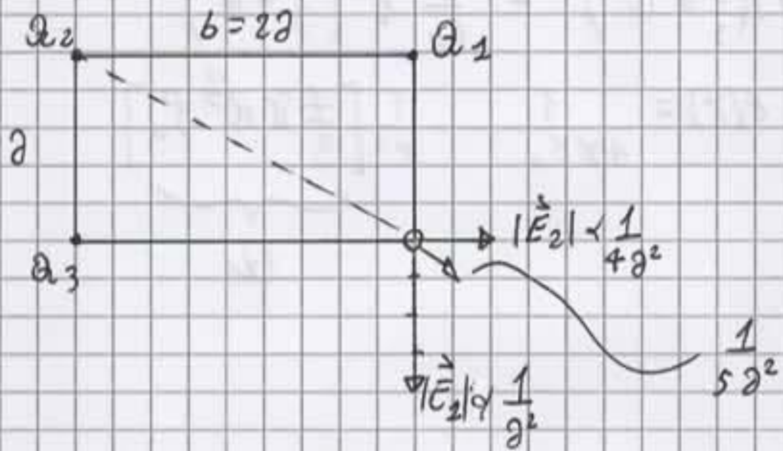
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \text{ , DOVE } V(P) = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(\infty)$$

ESEMPI



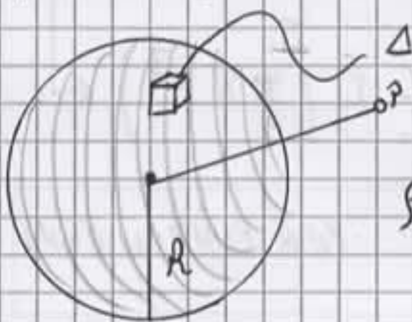


ESEMPIO · ESERCIZIO · ESAME



SFERA CARICA

CERCHIAMO DI CALCOLARE IL CAMPO ELETTRICO DI UNA SFERA CARICA:



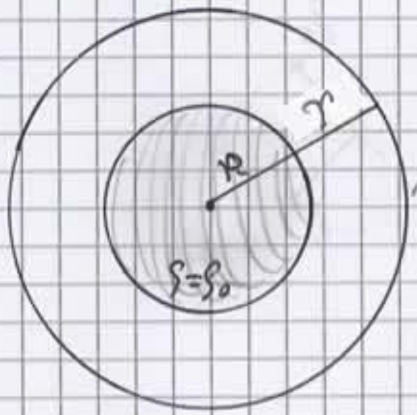
$\Delta q = \rho_0 \cdot \Delta VOL_i$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & r \leq R \\ 0, & r > 0 \end{cases}$$

LO SPAZIO SI DIVIDE QUINDI IN DUE ZONE:

- PUNTI DENTRO LA SFERA $(r \leq R)$
- PUNTI FUORI DALLA SFERA $(r \geq R)$

PUNTI ESTERNI



USO LA LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO:

$$\oiint_{SFERA} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iiint_{VOL} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dVOL = \iiint_{VOL} \rho/\varepsilon_0 \, dVOL =$$

$$E(r)\cdot(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot Q_{INT}$$

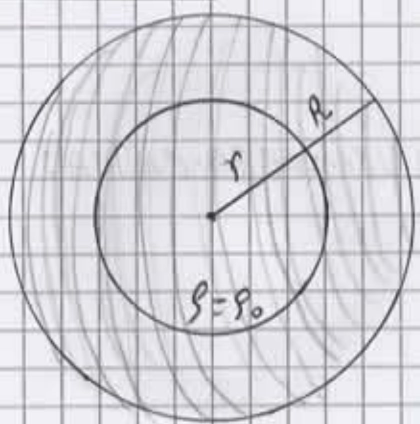
$$E(r)(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0\cdot\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\right]}_{Q}$$

QUINDI:

$$\boxed{\vec{E}(PUNTI\ ESTERNI) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r}$$

PUNTI INTERNI



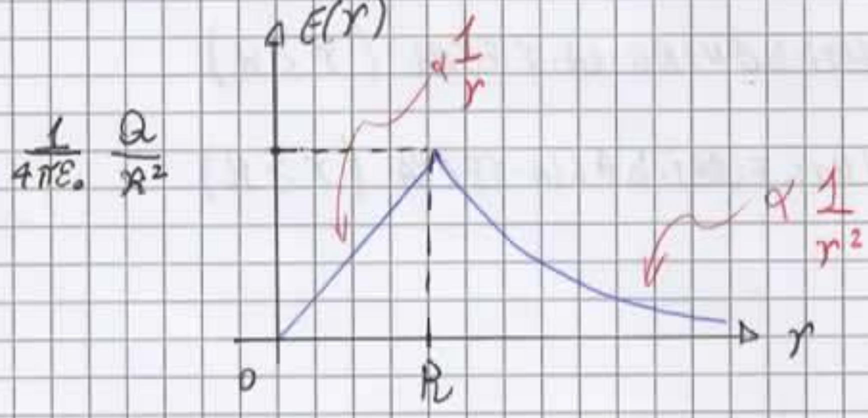
USO LA LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO:

$$\oiint_{SFERA} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iiint_{VOL} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dVOL = \iiint_{VOL} \rho/\varepsilon_0 \, dVOL$$

$$E(r)(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\boxed{E(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho_0 r \quad \text{PER PUNTI INTERNI}}$$

GRAFICO

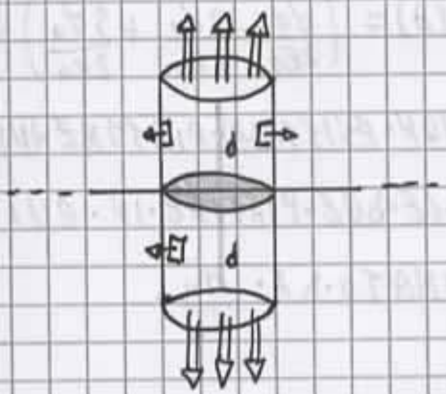


PIANO UNIFORMEMENTE CARICO

DISTRIBUZIONE SUPERFICIALE DI CARICA UNIFORME σ_0

$[\sigma] = Q L^{-2}$ $\quad \frac{\text{COULOMB}}{m^2}$

RACCHIUDIAMO UNA PORZIONE DEL PIANO IN UNA SUPERFICIE DI GAUSS:



E USO LA LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO:

$$\oiint_{LATTINA} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{INT} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sigma_0 A =$$

$\Rightarrow$ DIVIDIAMO IN 3 CONTRIBUTI

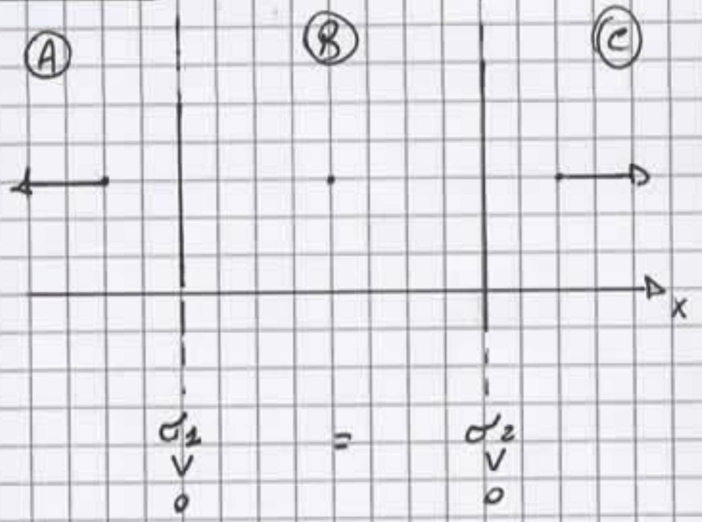
$$\iint_{TOP} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \iint_{BOTTOM} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \iint_{SUPERFICIE} \vec{E} \cdot d\vec{a} =$$

$$= E(d) \cdot A + E(d) \cdot A + 0 =$$

$$= 2E(d) \cdot A = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_0 A \Rightarrow \boxed{E(d) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}}$$

<u>NON DIPENDE DALLA DISTANZA!!!</u>

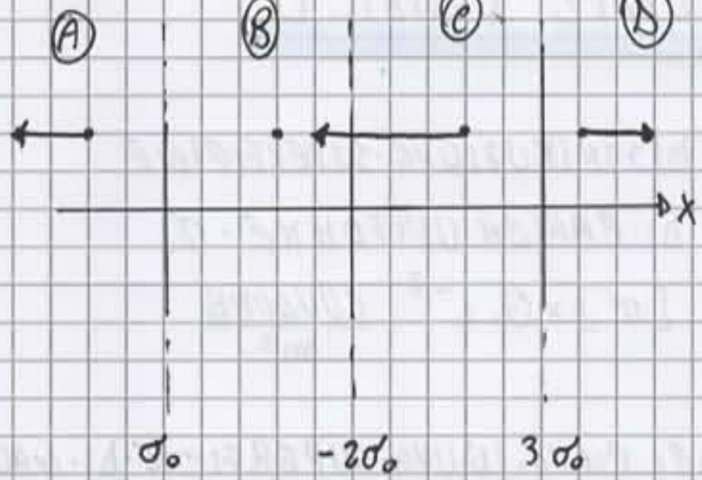
ESEMPIO 1



$$\vec{E}(A) = \left(-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$

$$\vec{E}(B) = \left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$

$$\vec{E}(C) = \left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$



$$\vec{E}(A) = \left(-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{2\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$

$$\vec{E}(B) = \left(\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{2\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$

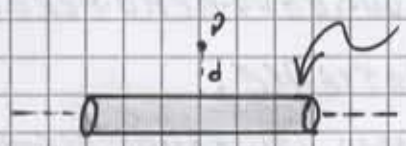
$$\vec{E}(C) = \left(\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{2\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$

$$\vec{E}(D) = \left(\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{2\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$

TUTTAVIA È DA SAPERE CHE NELLA REALTÀ NON ESISTONO PIASTRE INFINITE QUINDI CI SARÀ UNA ZONA FIDUCIALE TRA LE DUE PIASTRE IN CUI IL CAMPO ELETTRICO PUÒ ESSERE APPROSSIMATO DA $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$.

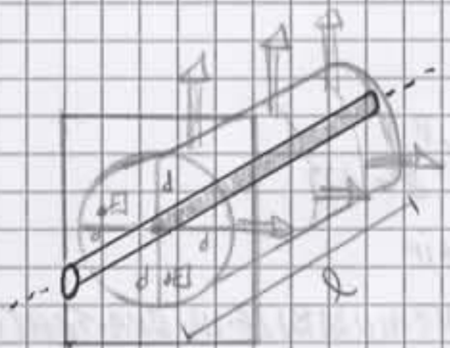
MENTRE VERSO LA FINE DELLE PIASTRE QUELL'APPROSSIMAZIONE NON VALE PIÙ, E QUESTI "DISTURBI" VENGONO CHIAMATI EFFETTI DI BORDO.

BASTONE CARICATO UNIFORMEMENTE



DENSITÀ LINEARE UNIFORME λ_0

$[\lambda] = \frac{Q}{L}$ $\frac{\text{COULOMB}}{\text{METRO}}$



RACCHIUDIAMO IL FILO CON UN CILINDRO COASSIALE E USIAMO LA LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO:

$$\oint\!\!\oint_{\text{CILINDRO}} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{INT} = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda_0 \cdot l$$

$\parallel$ ← DIVIDO IN 3 CONTRIBUTI

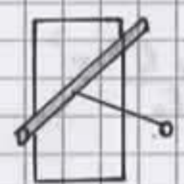
$$\iint_{\text{ANTER.}} \vec{E}\cdot d\vec{a} + \iint_{\text{POSTER.}} \vec{E}\cdot d\vec{a} + \iint_{\text{SUPERFICIE}} \vec{E}\cdot d\vec{a} =$$

$$0 + 0 + E(d)\cdot\overbrace{(2\pi d\cdot l)}^{\text{SUPERF. LATERALE}} =$$

$$= \boxed{E(d) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 d}}$$

QUINDI RIASSUMENDO:

$|\vec{E}| \propto \frac{1}{r^2}$



$|\vec{E}| \propto \frac{1}{r}$

$|\vec{E}| = \text{UNIFORME} = \sigma_0$

RICORDIAMO CHE:

$$\int_{RIF}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -U(P)$$ E SCEGLIAMO DI METTERE UN SEGNO MENO PERCHÉ VOGLIAMO CHE $K + U = $ COSTANTE.

DATA QUESTA CONSIDERAZIONE LA RIUTILIZZIAMO NEL CAMPO ELETTRICO:

$$\int_{RIF}^{P} F_{SONDA} \cdot d\vec{r} = -U_{SONDA}(P) \quad , \text{ DOVE } U_{SONDA} = q_{SONDA} \cdot V$$

ORA AFFRONTIAMO QUESTO CASO:

$$\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_A - V_B \quad , \text{ DOVE } V(P) = V_{RIF} - \int_{RIF}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

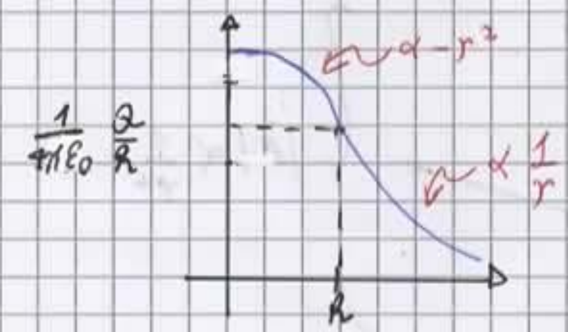
PER CONVENZIONE, QUANDO SI HA UNA CARICA RINCHIUDIBILE IN UNA SCATOLA SI PONE $V(RIF) = 0$. $\Rightarrow V(P) = +\int_{P}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r}^{\infty} E(r')\,dr' =$

$$= \int_{r}^{R} E(r')\,dr' + \int_{R}^{\infty} E(r')\,dr' =$$

$$= \int_{r}^{R} \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r'\,dr' + \int_{R}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r'^2}\,dr' =$$

$$= \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r}^{R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R}^{\infty} = \frac{\rho_0 R^2 - \rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} r^2$$



EQ. DI MAXWELL FORMA INTEGRALE

∀ S CHIUSA:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{INT} \qquad\qquad \oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

∀ C CHIUSA

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\left[\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}\right] \qquad \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{COND.} + \mu_0 I_{SPOST} = \mu_0 I_{CONCATENATA}$$

DOVE:

$$\underline{I_{CONDUZIONE}} = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} \quad , \quad \underline{I_{SPOSTAMENTO}} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{a}\right]$$

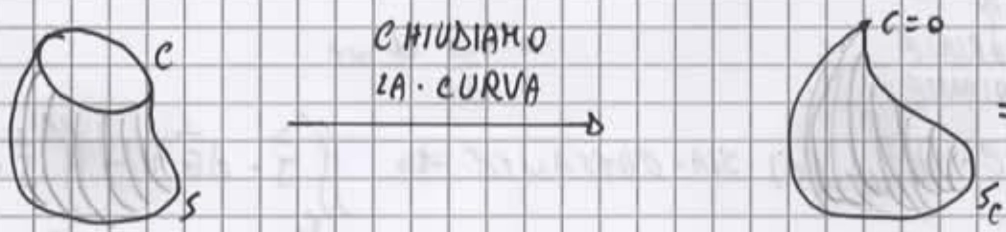
COSA VUOL DIRE <u>CORRENTE CONCATENATA</u>?!

NON CONCATENATI

CONCATENATI

RIPRENDIAMO LA LEGGE DI AMPERE-MAXWELL:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{a}\right]$$



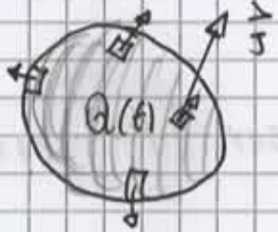
$$\Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \oint\!\!\!\oint_{S_C} \vec{J}\cdot d\vec{a} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\underbrace{\oint\!\!\!\oint_{S_C} \vec{E}\cdot d\vec{a}}\right] \equiv 0$$

$$\boxed{= \oint_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{a} + \cancel{\varepsilon_0} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}} Q_{INT}\right] \equiv 0 \quad \text{OPPURE} \quad \oint_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt}\left[Q_{INT}\right]}$$

QUESTA EQUAZIONE PRENDE IL NOME DI <u>LEGGE DELLA CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA</u>.

<u>ESEMPIO</u>



SE LA DERIVATA DI $Q_{INT}(t)$ È NEGATIVA:
VUOL DIRE CHE STANNO USCENDO PORTATORI.
MENTRE SE LA DERIVATA DI $Q_{INT}(t)$ È POSITIVA:
VUOL DIRE CHE STANNO ENTRANDO PORTATORI.

<u>CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA (OPERATORI DIFFERENZIALI)</u>

$$\oint_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt}\left[Q_{INT}\right] = \underbrace{\oint_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{a}} + \frac{d}{dt}\left[\iiint_{VOL} \rho \, dVOL\right]$$

PER IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$\iiint_{VOL} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dVOL \equiv 0$$

QUINDI $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

<u>OSSERVAZIONE</u>

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{a} + \iint_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{a} + \underbrace{\boxed{\iint_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{a}}}_{* = 0} = -\frac{d}{dt} Q_{INT}$$

VOGLIAMO CHE $Q_{INT}(t)$ SIA COSTANTE $\Rightarrow$ $\iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{a} = -\iint_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{a}$

TEOREMA POTENZIALE VETTORE MAGNETICO

UN TEOREMA VISTO IN PRECEDENZA DICEVA:

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \iff \exists$ UN CAMPO SCALARE V CHIAMATO POTENZIALE SCALARE TALE CHE $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.

ANALOGAMENTE DIREMO CHE:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \iff \exists$ UN CAMPO VETTORE $\vec{A}$ CHIAMATO POTENZIALE VETTORE TALE CHE $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

DIMOSTRAZIONE

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\vec{u}_x - (\partial_x A_z - \partial_z A_x)\vec{u}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \partial_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \partial_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \partial_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x) =$$

$$= \text{PER SHWARTZ} = \cancel{\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}} = 0$$

$\blacksquare$

DIMOSTRAZIONE LEGGE CONSERVAZIONE CARICA

SCRIVIAMO LA LEGGE DI AMPERE-MAXWELL:

$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ → RISOLVIAMOLA PER $\vec{J}$

$\Rightarrow \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ → FACCIAMO LA DIVERGENZA AMBO I LATI

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})}_{\text{PER TEOREMA DI SOPRA} \; = 0} - \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \xrightarrow{\text{PER SHWARTZ}} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \Big(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{\text{GAUSS} \; \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \Big) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$$

Achille Cannavale

LEGGE DI POISSON

PRENDIAMO LE EQUAZIONI DEL CAMPO ELETTROSTATICO:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}V) = \rho/\varepsilon_0 =$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V \qquad = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V) = -\rho/\varepsilon_0 =$$

$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ · LAPLACIANO$)$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\rho/\varepsilon_0 =$$

$$= \boxed{\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ LEGGE DI POISSON

TEOREMA

PRENDIAMO L'EQ. DI AMPERE-MAXWELL:

$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}$, MA SAPPIAMO CHE $\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \mu_0\vec{J} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

DIMOSTRAZIONE PER x

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\hat{u}_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\hat{u}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\hat{u}_z$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ // & // & // \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} =$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial x\partial z} - \cancel{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} =$$

ELETTROSTATICA

$$\vec{E}: \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 & (1) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} & (2) \end{cases} \iff \vec{E} = -\vec{\nabla} V \; *$$

DALLA LEGGE DI LORENZ $\left(\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \right)$ SAPPIAMO CHE:

$$[\vec{E}] = M L T^{-2} Q^{-1} \quad \frac{Volt}{m}$$

METTENDO $(*)$ IN (1) $\Rightarrow \nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ POISSON

METTENDO $(*)$ IN (2) $\Rightarrow \nabla^2 V = 0$ LAPLACE (VUOTO)

MAGNETOSTATICA

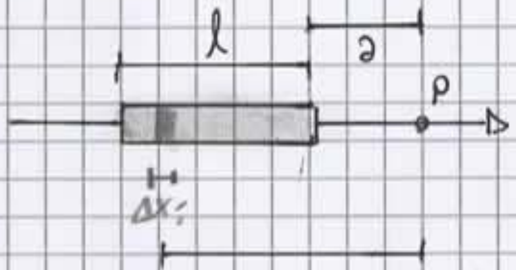
$$\vec{B}: \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (1) \iff \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \; * \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & (2) \end{cases}$$

(UN CAMPO CON DIVERGENZA NULLA SI DICE SOLENOIDALE)

METTENDO $(*)$ IN (2) $\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ POSSIAMO QUINDI INVOCARE IL TEOREMA DELLA GAUGE DI COULOMB, CHE ASSERISCE CHE SI HA LA LIBERTÀ DI IMPORRE $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$



$$\Delta E_i = K_e \frac{\Delta q_i}{x_i^2}\ , \quad \Delta V_i = K_e \frac{\Delta q_i}{x_i} + C$$

$$E_{STIMA} = \sum \Delta E_i = K_e \lambda_0 \sum \frac{\Delta x_i}{x_i^2} \xrightarrow[\Delta x_i \to 0]{N \to \infty} K_e \lambda_0 \int_a^{a+l} \frac{1}{x^2}\, dx =$$

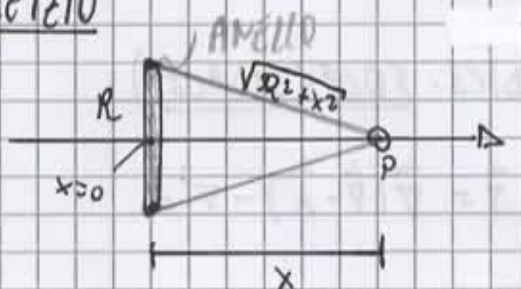
$$\vec{E} = K_e \lambda_0 \left(-\frac{1}{l+a} + \frac{1}{a} \right)$$

$$V_{STIMA} = \sum \Delta V_i = K_e \lambda_0 \sum \frac{\Delta x_i}{x_i} \xrightarrow[\Delta x_i \to 0]{N \to \infty} K_e \lambda_0 \int_a^{l+a} \frac{1}{x}\, dx =$$

$$V = K_e \lambda_0 \left(\ln(l+a) - \ln(a) \right), \quad \text{VERIFICHIAMO CHE } \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$-\frac{d}{dt}\left[\ln(l+a) - \ln(a) \right] = -\frac{1}{l+a} + \frac{1}{a} = \vec{E}$$

ESERCIZIO



$$\Delta q_i = \lambda_0 \cdot \Delta s_i$$

$$Q = \lambda_0 \cdot 2\pi R$$

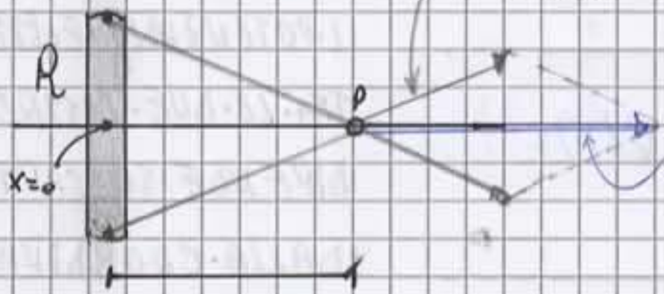
$$V(P) = V(x) = K_e \frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}} + C$$

$$V(x) = \sum V_i = \sum K_e \frac{\Delta q_i}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{K_e \lambda_0}{\sqrt{R^2+x^2}} \sum \Delta s_i \xrightarrow[N \to \infty]{\Delta s_i \to 0}$$

$$\longrightarrow \frac{K_e \lambda_0}{\sqrt{R^2+x^2}} \int ds = \frac{K_e \lambda_0}{\sqrt{R^2+x^2}} \cdot 2\pi R = \boxed{K_e \frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}}$$

Achille Cannavale

$$\frac{K_e \lambda_0 \Delta s}{R^2+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

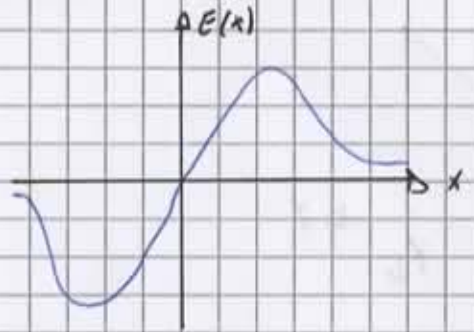


$$2 K_e \frac{\lambda_0 \Delta s}{R^2+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$\vec{E}(P) = \vec{E}(x) = 2 K_e \frac{\lambda_0 x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} \sum \Delta s \xrightarrow[N \to \infty]{\Delta s \to 0} \boxed{K_e \frac{\lambda_0 x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R \quad \text{OPPURE} \quad K_e \frac{Q}{(R^2+x^2)^{3/2}} \cdot x}$$

DOBBIAMO FARE MEZZO CERCHIO

RAPPRESENTIAMO LA FUNZIONE:



PER $x >> R$

$$\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\left[x^2\left(\frac{R^2}{x^2}+1\right)\right]^{3/2}} \approx \frac{1}{x^2}$$

ANDAMENTO COULOMBIANO

PER $x << R$

$$\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\left[R^2\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)\right]^{3/2}} = \frac{x}{R^3}$$

QUINDI $\vec{E}(x << R) = K_e Q \dfrac{x}{R^3} = Kx$

K

METTENDO UNA CARICA SONDA SENTIRÀ UNA FORZA: $\vec{F} = -C\vec{E}$

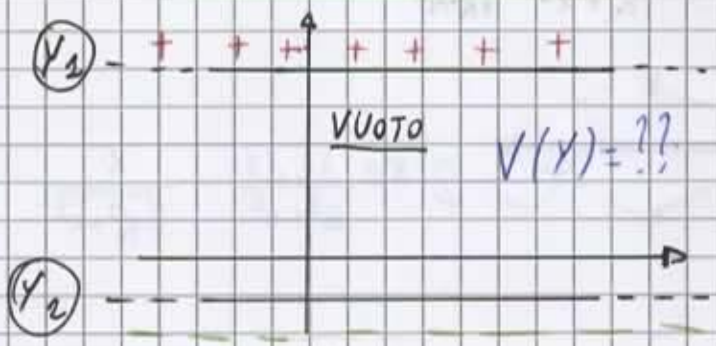
$$F(\text{MOLTO VICINO}) = -C K_e Q \frac{x}{R^3} = -Kx$$

RICORDIAMO CHE:

$$m\ddot{x} = -Kx \to \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \to \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ DOVE } \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow$ LA SONDA, MESSA VICINO ALL'ANELLO

POTENZIALE·ELETTRICO·TRA·DUE·PIANI



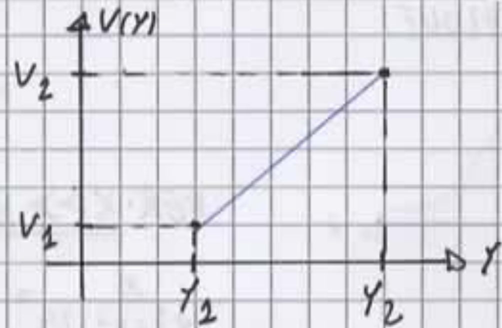
IL·POTENZIALE·ELETTRICO TRA·LE·DUE·LASTRE DIPENDE·SOLTANTO DALLA·COORDINATA Y.

RICORDANDO·LA·LEGGE·DI·LAPLACE:

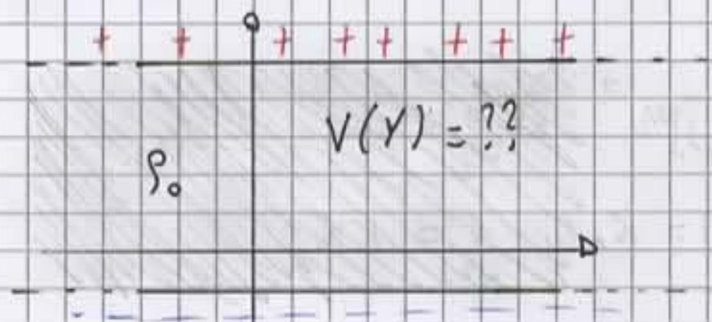
$$\nabla^2 V = 0 \rightarrow \text{IN·QUESTO·CASO} \rightarrow \frac{d^2}{dY^2} V = 0$$

QUALE·FUNZIONE·HA·COME·DERIVATA·SECONDA·0??? UNA·RETTA!!!

$$\left.\begin{aligned} & V(Y) = AY \\ & \frac{dV}{dY} = A \\ & \frac{dV}{dY} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



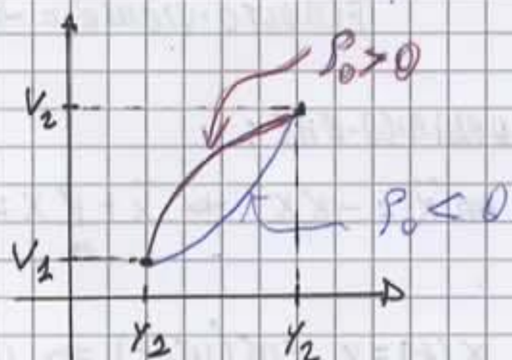
CON·CARICA·UNIFORME



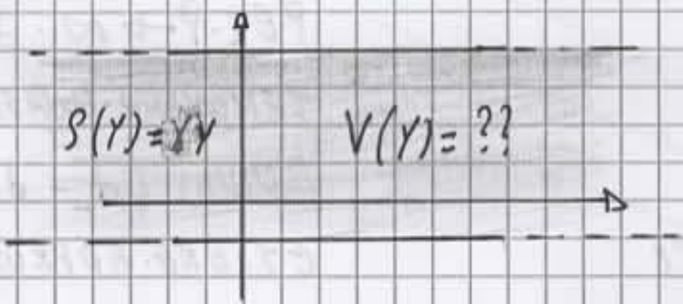
IN·QUESTO·CASO NON·VALE·PIÙ LAPLACE, QUINDI DOBBIAMO·USARE POISSON!!!

$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, OVVERO:

$$\left.\begin{aligned} & V(Y) = \frac{1}{2} A Y^2 + BY + C \\ & \frac{dV(Y)}{dt} = AY + B \\ & \frac{d^2V}{dt^2} = A \text{, DOVE·A·VALE·} -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



CON·CARICA·NON·UNIFORME



USIAMO·POISSON:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\, y$$

OVVERO:

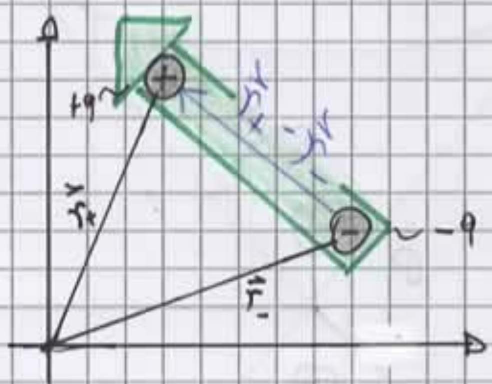
$$V(y) = \frac{1}{6} A y^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} A y^2$$

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = A y \text{, DOVE } A = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0}$$

DIPOLI

IL·DIPOLO·ELETTRICO·È·UN·SISTEMA·FORMATO·DA·DUE·CARICHE·UGUALI·MA OPPOSTE.



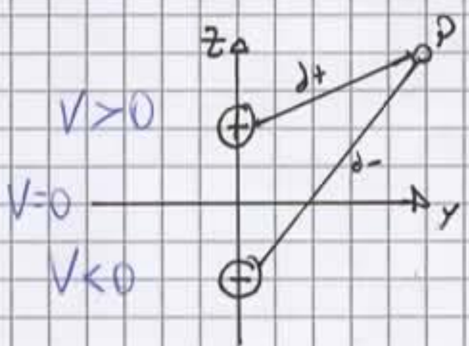
DEFINIAMO·CON· $\vec{p}$

IL·MOMENTO·DI·DIPOLO

$$= q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

$$[\vec{p}] = Q\,L$$

ESEMPIO·V·IN·UN·PUNTO



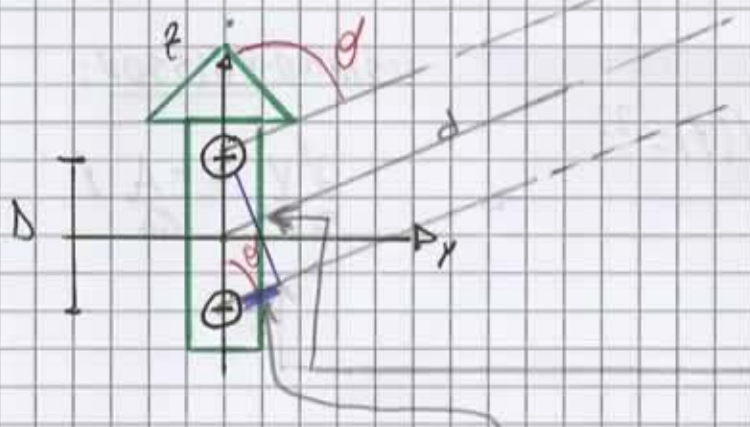
$$V(P) = V_+(P) + V_-(P) =$$

$$= K_e \frac{q}{d_+} - K_e \frac{q}{d_-} =$$

$$= K_e q \left(\frac{1}{d_+} - \frac{1}{d_-}\right) =$$

$$= K_e q \left(\frac{d_- - d_+}{d_+ d_-}\right)$$

ESEMPIO PUNTO INFINITAMENTE LONTANO

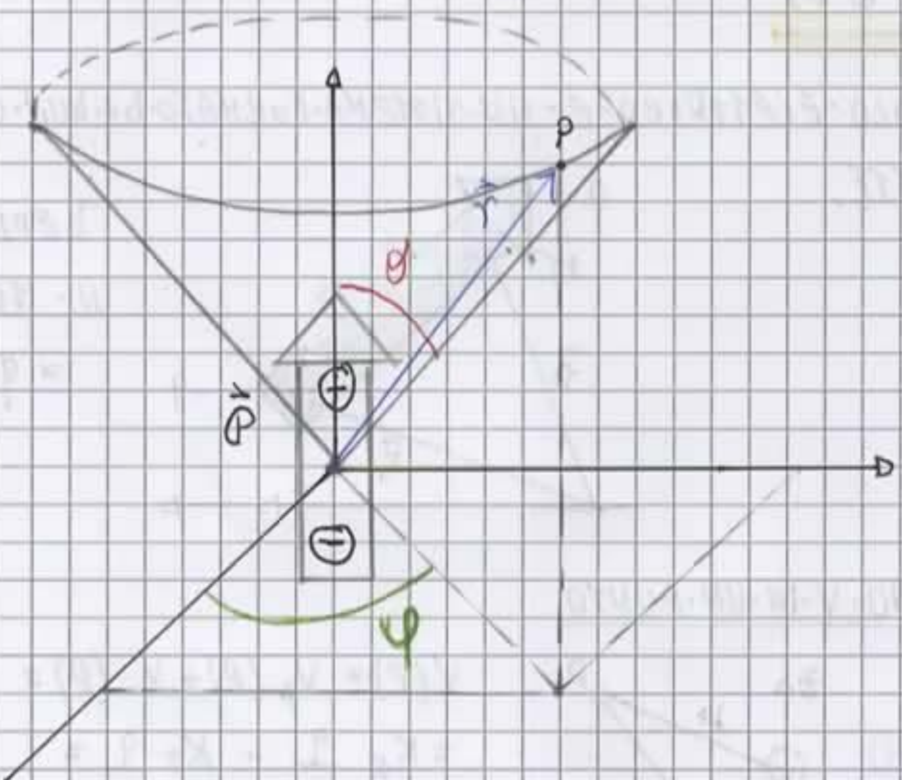


PER $P \to \infty$ d_+ E d_- SEMBRANO QUASI PARALLELE QUINDI $(d_- - d_+)$ PUO' ESSERE APPROSSIMATO CON QUESTA RETTA:

$$\Rightarrow V(P) \simeq K_e q \left(\frac{D \cdot \cos(\theta)}{d_+ \cdot d_-} \right), \quad d_+ \cdot d_- = d^2$$

$$\Rightarrow V(P) \simeq K_e \cdot \frac{|\vec{P}| \cdot \cos(\theta)}{d^2}$$

COORDINATE SFERICHE



$V(P) =$ $V(x, y, z)$ CARTESIANE

$V(r, \theta, \varphi)$ SFERICHE

ZENITH

DISTANZA

COORDINATA DI

IN PARTICOLARE:

$$\vec{\nabla}_{RETT} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla}_{SFERICHE} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

SAPENDO·CHE· $\vec{E}(\text{P·DISTANTE}) = -\vec{\nabla} V = -\vec{\nabla}\left(K_e \frac{p\cos\theta}{r^2}\right)$

UTILIZZIAMO·IL·GRADIENTE·PER·LE·COORDINATE·SFERICHE:

$$-\left[\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi\right] =$$

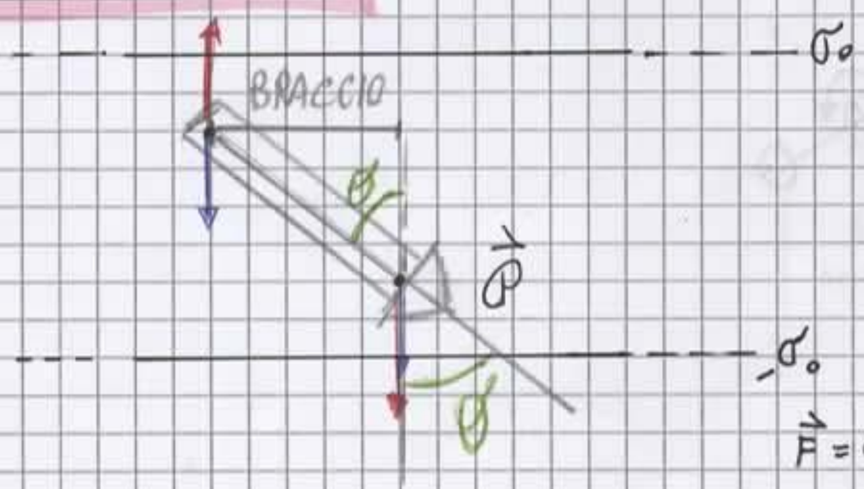
- $E_r = -\left[-\frac{2K_e p\cos\theta}{r^3}\right] = 2K_e\frac{p\cos\theta}{r^3}$

- $E_\theta = -\frac{1}{r}\left[-K_e\frac{p\sin\theta}{r^2}\right] = K_e\frac{p\sin\theta}{r^3}$

- $E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right] = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_{DIPOLO} \sim \frac{1}{r^3}}$$

DIPOLI·IN·MOTO



PER·LORENZ LE·DUE·PARTICELLE DEL·DIPOLO· SENTIRANNO:

$$\vec{F} = q\vec{E} + (q\vec{v}\wedge\vec{B})$$

QUANDO LASCIAMO LA PRESA IL CENTRO DI MASSA RIMARRÀ FERMO, MA CI SARÀ UN MOVIMENTO ROTAZIONALE ATTORNO AL CENTRO DI MASSA, PERCHÉ C'È UNA COPPIA DI FORZE.

QUINDI CI SARÀ UN MOMENTO TORCENTE τ ENTRANTE.

$$\vec{\tau} = \vec{P} \wedge \vec{E} \quad \text{OPPURE} \quad \vec{\tau} = I\ddot{\theta}$$

$$\vec{\tau} = |\vec{P}|\,|\vec{E}| \cdot \sin\theta \qquad\qquad I\ddot{\theta} = \tau_{coppia} = -F_0 D \cdot \sin\theta$$

$$I\ddot{\theta} = -q E_0 D \cdot \sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{q E_0 D}{I} \cdot \sin\theta$$

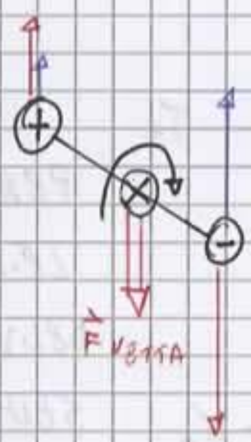
PER θ MOLTO PICCOLO $\Rightarrow$ $\ddot{\theta} = -\frac{q E_0 D}{I}\,\theta$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

DOVE $\omega_0^2 = \frac{qED}{I}$

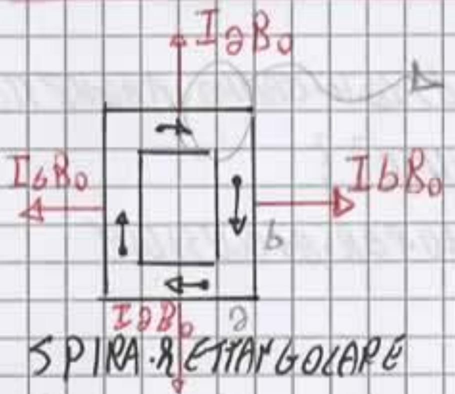
$$\vec{P} \wedge \vec{E} = |\vec{P}| \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \end{vmatrix} = |\vec{P}|\,E_0 \cos\theta\, \vec{u}_z$$

MENTRE NEL CASO IN CUI IL CAMPO ELETTRICO NON SIA UNIFORME:

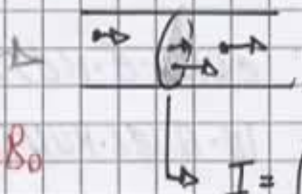


Achille Cannavale

CAMPO MAGNETICO: SPIRA RETTANGOLARE



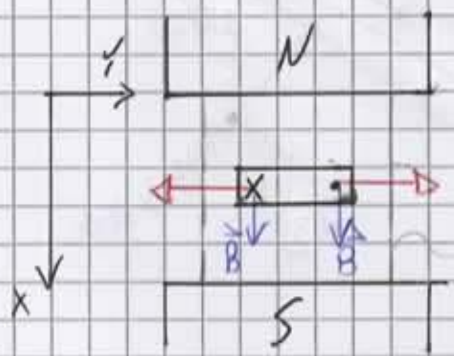
SPIRA RETTANGOLARE PERCORSA DA CORRENTE



$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

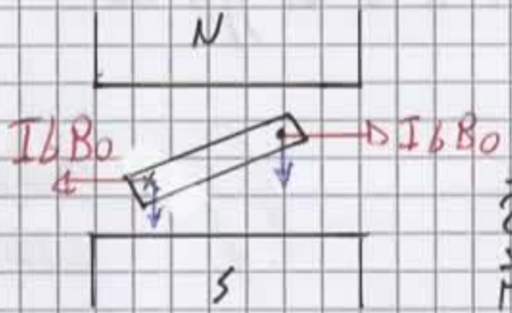
FORZA DI LORENZ

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$



$$\vec{B} = B_0 \vec{u}_x$$

ZONA FIDUCIALE

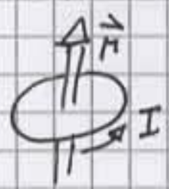


$$\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

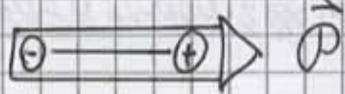
$\vec{m} = I\vec{A}$, DOVE $|\vec{A}| = a \cdot b$

NOTIAMO L'ANALOGIA CON IL DIPOLO ELETTRICO:

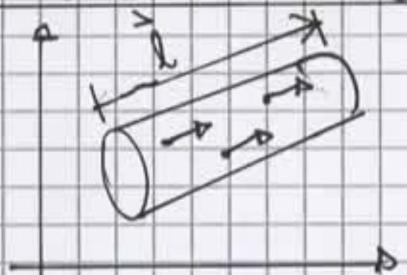
- $\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}$



- $\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{\varepsilon}$



FORZA TOTALE NEL FILO



$\vec{B}$ UNIFORME

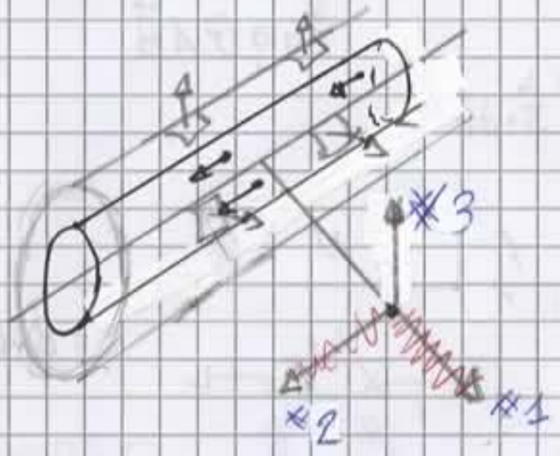
$\vec{J}$ UNIFORME

$$F_i = q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \sum F_i = \underbrace{n l s}_{\#\text{PORTATORI NEL FILO}}\, q \vec{v} \wedge \vec{B} = (\underbrace{\vec{J} s}_{I})(\underbrace{l \vec{u}_T}_{\vec{l}}) \wedge \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UN FILO



COME È MESSO IL CAMPO MAGNETICO IN QUEL PUNTO??

ANDIAMO PER ESCLUSIONE

※1

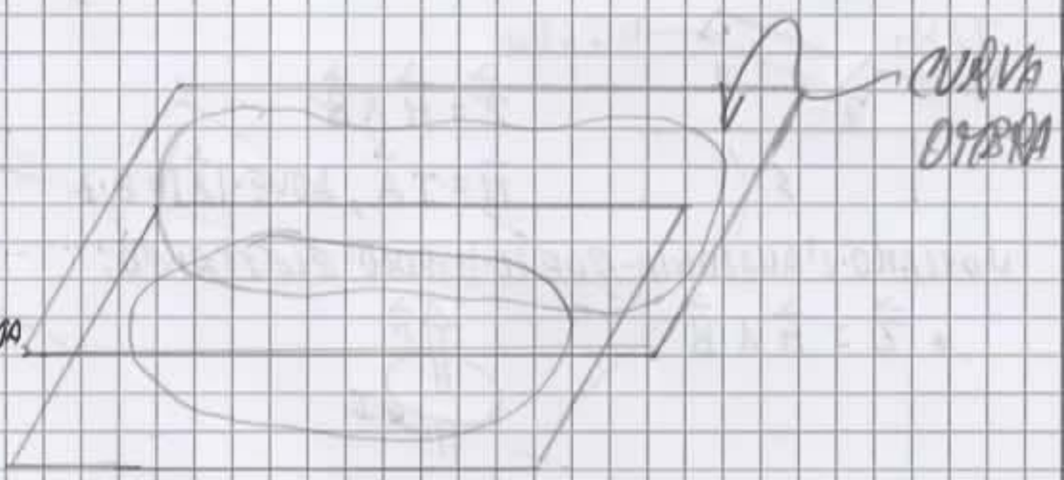
IMPOSSIBILE PERCHÉ VIOLA:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Leftrightarrow \iint \vec{B}\cdot d\vec{a} =$$

※2

$$\oint_{OMBRA} \vec{B}\cdot d\vec{r} \neq 0$$

MA NON C'È ALCUNA CORRENTE CONCATENATA NELLA CURVA OMBRA



$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow$ NEANCHE ※2 NON VA BENE.

Achille Cannavale

TEOREMA DI MATEMATICA

PRESI DUE CAMPI QUALSIASI $\vec{E}$ E $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$$

DIMOSTRAZIONE

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{B})=\vec{\nabla}\cdot\begin{vmatrix}\vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z\\ E_x & E_y & E_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\frac{\partial}{\partial x}(E_yB_z-E_zB_y)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(E_zB_x-E_xB_z)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(E_xB_y-E_yB_x)$$

$$\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot\begin{vmatrix}\vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}-\vec{E}\cdot\begin{vmatrix}\vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=$$

$$=B_x\cdot\partial_y E_z-B_x\cdot\partial_z E_y+B_y\cdot\partial_z E_z-B_y\cdot\partial_x E_z+B_z\cdot\partial_x E_y-B_z\cdot\partial_y E_x-$$

$$-E_x\cdot\partial_y B_z+E_x\cdot\partial_z B_y-E_y\cdot\partial_z B_z+E_y\cdot\partial_x B_z-E_z\cdot\partial_x B_y+E_z\cdot\partial_y B_x=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(E_yB_z-E_yB_z)+\frac{\partial}{\partial y}(E_zB_x-E_xB_z)+\frac{\partial}{\partial z}(E_xB_y-E_yB_x)$$

$\blacksquare$

APPLICAZIONE TEOREMA DI POYNTING

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)-\vec{E}\cdot\left(\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

DEFINIAMO IL VETTORE DI POYNTING:

$$\boxed{\vec{S}\overset{d}{=}\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B}}\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot\vec{S}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2+\frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\right]+\vec{J}\cdot\vec{E}=0$$

LEMMA A SUPPORTO

NELLA VERSIONE INTEGRALE SARÀ:

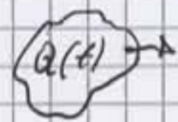
$$\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt}\left[\iiint_{Vol}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\right)dVol\right] + \iiint_{Vol}\vec{J}\cdot\vec{E}\,dVol = 0$$

NEL VUOTO SARÀ:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_E + \rho_B\right] = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\rho_{EB} = 0$$

QUINDI ANALOGAMENTE,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0$$



LA PRIMA EQUAZIONE ESPRIME LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA ELETTROMAGNETICA.

EQUAZIONE DELLE ONDE

PRENDIAMO L'EQUAZIONE DI FARADAY-LENZ: $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

E FACCIAMO IL ROTORE:

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = \vec{\nabla}\wedge\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \overset{\text{SCHWARTZ}}{=} -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

NEL VUOTO:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

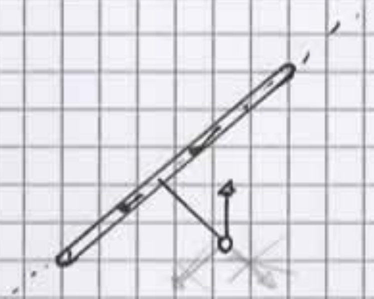
EQUAZIONE DELLE ONDE DEL CAMPO ELETTRICO

PRENDIAMO L'EQUAZIONE DI AMPERE MAXWELL NEL VUOTO:

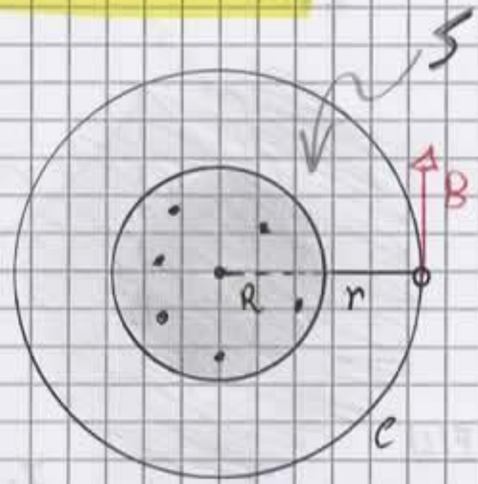
$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$, E FACCIAMO IL ROTORE:

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\,\vec{\nabla}\wedge\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right) = \mu_0\varepsilon_0\left(-\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\right)$$

CAMPO MAGNETICO DI UN FILO ②



FILO VISTO DI FRONTE $\longrightarrow$



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \underbrace{\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{a}}_{\to\, I_{FILO}}$$

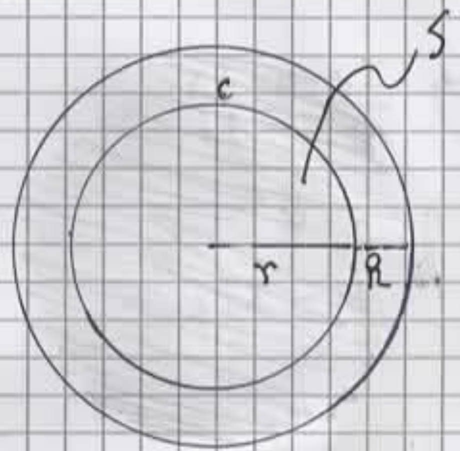
AMPERE MAXWELL

(DATO CHE SIAMO IN MAGNETOSTATICA IL SECONDO PEZZO NON C'È)

ESSENDO IL CAMPO MAGNETICO CON LO STESSO MODULO SPOSTANDOSI SU C:

$$B(r)\oint_C d\vec{r} = B(r)\cdot 2\pi R = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B(r \geq R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

PER PUNTI INTERNI AL FILO

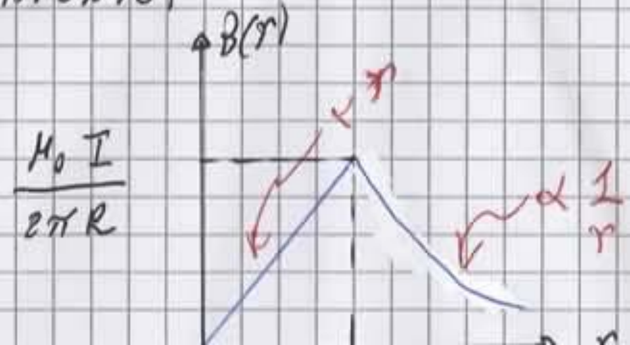


$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \underbrace{\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{a}}_{\to\, < I_{FILO}}$$

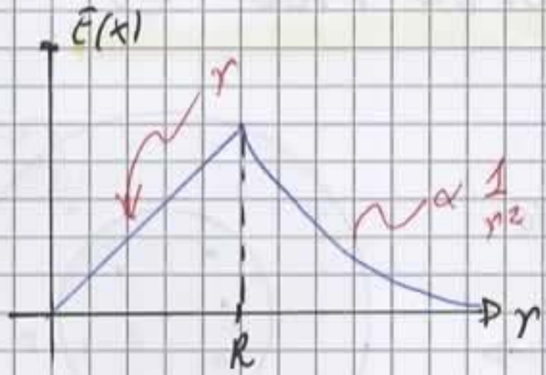
$$\Rightarrow B(r)\cdot \oint_C d\vec{r} = B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2$$

$$\Rightarrow B(r \leq R) = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}$$

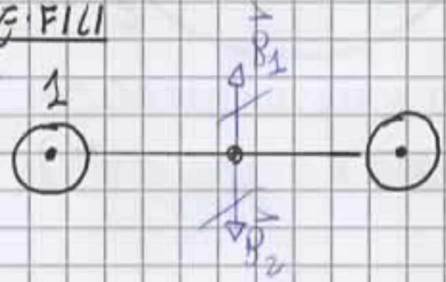
GRAFICAMENTE:



...IA · CON · IL · CAMPO · ELETTRICO;



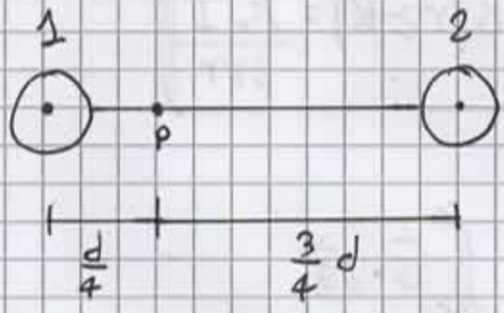
DUE · FILI



$I_1 = I_2$

$$\vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P) = \vec{B}(P)$$

ESERCIZIO



$I_2 \neq I_1$ COME · DEVE · ESSERE · I_2 · PER AVERE · $\vec{B}(P) = 0$???

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi \frac{d}{4}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \frac{3}{4} d} \rightarrow \frac{I_1}{d} = \frac{I_2}{3d}$$

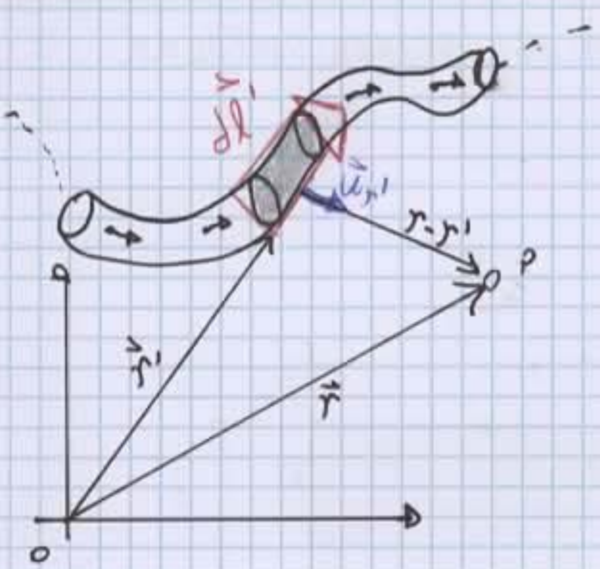
$$\Downarrow$$

$$I_2 = 3 I_1$$

Achille Cannavale

TEOREMA DI BIOT-SAVART

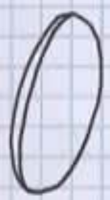
$$K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$$



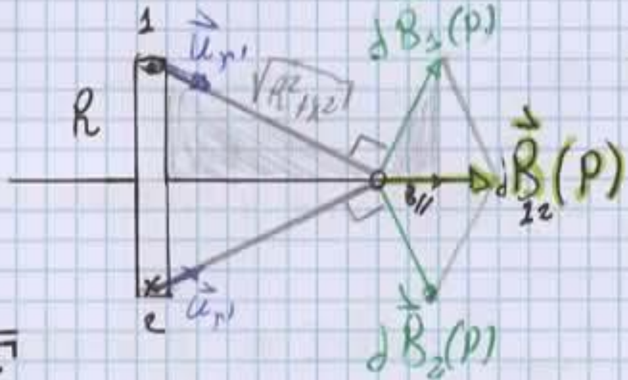
$$\vec{B}(P) = \oint_{CIRCUITO} d\vec{B}(P)$$

$$d\vec{B} = \frac{K_m\, I\, d\vec{l}' \wedge (r-r')}{|r-r'|^3} = K_m \frac{I\, d\vec{l}' \wedge \vec{u}_{r'}}{|r-r'|^2}$$

SPIRA CIRCOLARE



VISTA DI LATO $\longrightarrow$

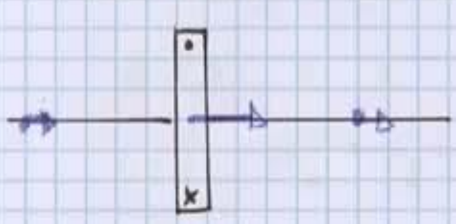


$$\frac{dB_\parallel}{dB} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} \rightarrow dB_\parallel = |d\vec{B}| \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

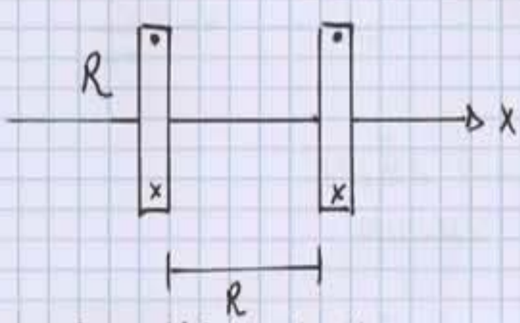
$$B_\parallel = \int dB_\parallel = \int K_m \frac{I\,dl}{R^2+x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} = K_m \frac{I}{(R^2+x^2)^{3/2}} \cdot R \underbrace{\boxed{\int dl}}_{2\pi R} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{(R^2+x^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R^2$$

PER $B_\parallel (x=0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi \frac{I}{R} = \frac{\mu_0 I}{2R}$

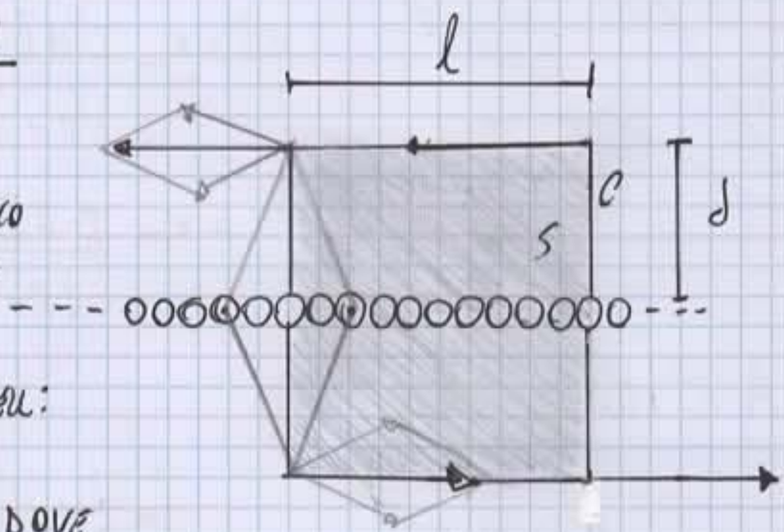


... DI · HELMOTHZ



TRA · LE · DUE · SPIRE · IL · CAMPO · MAGNETICO SARÀ · ABBASTANZA · UNIFORME.

ESEMPIO · MOLTI · FILI



PER · CAPIRE · COME VARIA · IL · CAMPO · MAGNETICO PER · PUNTI · A · DISTANZE DIVERSE · USIAMO · LA LEGGE · DI · AMPERE-MAXWELL:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{COND}$$, DOVE

$$I_{COND} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$, MA · LA · CORRENTE · C'È · SOLO · DOVE · CI · SONO · I · FILI!!!

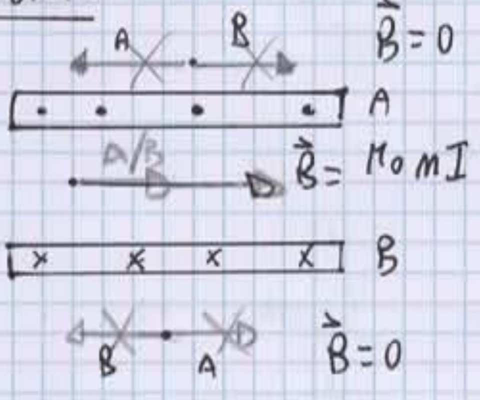
$$\Rightarrow I_{COND} = m \, l \cdot I \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 m l I$$, GLI · SPOSTAMENTI · IN · Y FANNO · 0.

DENSITÀ LINEARE NUMERO FILI

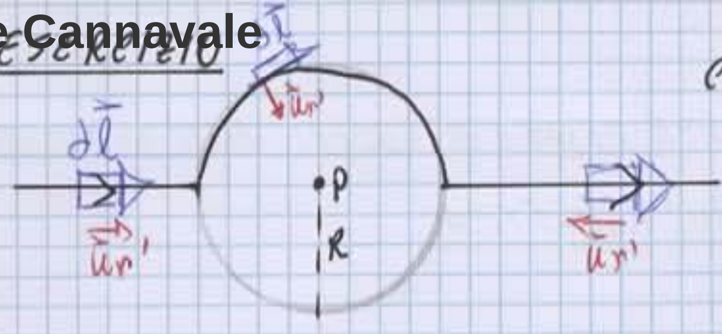
$$\Rightarrow 2B(d) = \mu_0 m l I \Rightarrow \boxed{B(d) = \frac{\mu_0 m I}{2}}$$

NON · DIPENDE DA · d!!!

APPLICAZIONE



ESERCIZIO



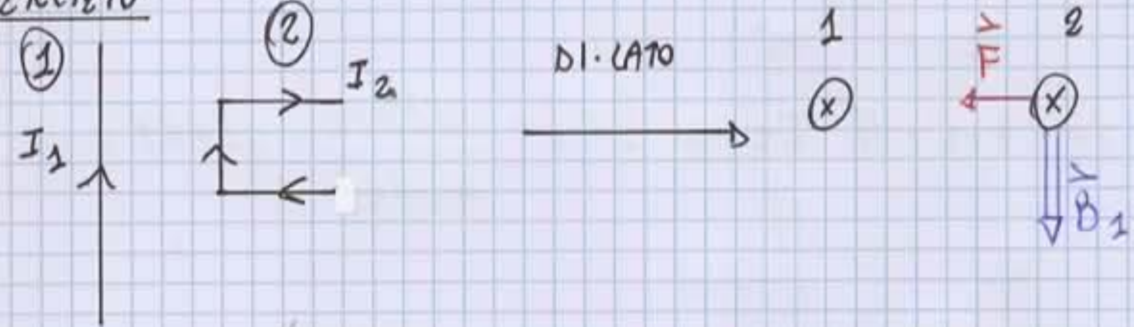
COME È $\vec{B}$ = ???

SULLE DUE RETTE IL CAMPO MAGNETICO NEL PUNTO P È NULLO PERCHÉ $d\vec{l}$ E $\vec{u}_{r'}$ NON SONO STORTI.

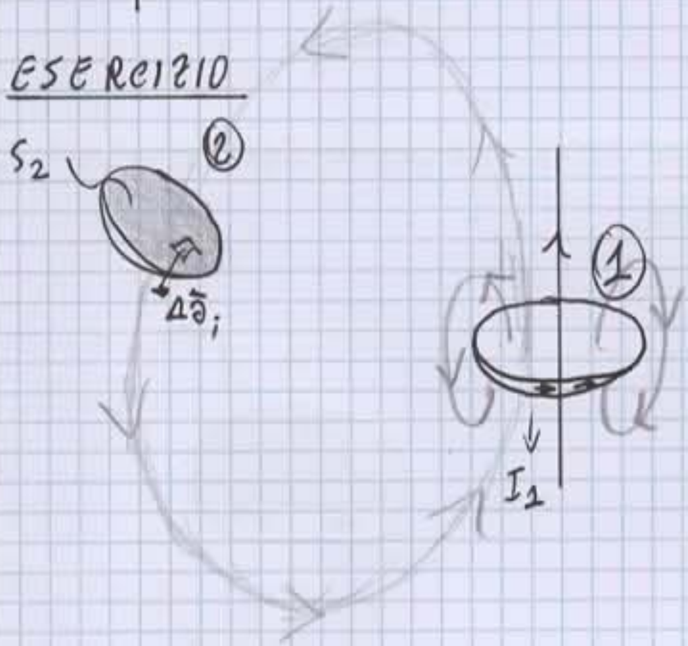
QUINDI CONTRIBUISCE SOLO IL SEMICERCHIO:

$$\vec{B}(P) = \frac{1}{2} B(\text{P DI UNA SPIRALE CIRCOLARE})$$

ESERCIZIO



ESERCIZIO



$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2$$

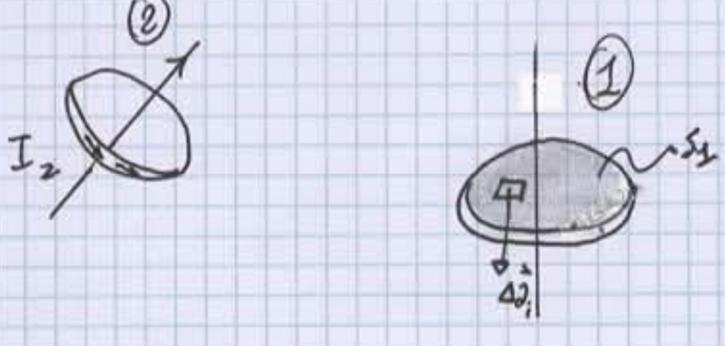
PER BIOT-SAVART:

$$\Phi_{21} \propto I_1$$

IN PARTICOLARE:

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITÀ



$$\Phi_{12} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{a}_1$$

PER BIOT-SAVART: $\Phi_{12} \propto I_2$

IN PARTICOLARE: $\Phi_{...} = M_{...} I$

[illegible] CHE;

$$M_{12} = M_{21} = M$$ E VIENE CHIAMATO <u>COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE MAGNETICA.</u>

CHE MISURA HA???

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \underbrace{\vec{B}_1}_{\text{TESLA}} \cdot d\underbrace{\vec{a}_2}_{m^2} \Rightarrow [\Phi_{21}] = \text{TESLA} \cdot \text{METRO}^2 = \text{WEBER} = Wb$$

QUINDI SE $\underbrace{\Phi_{21}}_{Wb} = M \cdot \underbrace{I_1}_{\text{AMPERE}} \Rightarrow [M] = \dfrac{\text{WEBER}}{\text{AMPERE}} = \text{HENRY} = H$

AUTOFLUSSO

SI CHIAMA AUTOFLUSSO IL FLUSSO CHE PASSA PER UNA SUPERFICIE INDIVIDUATA DAL CIRCUITO PERCORSO DA CORRENTE.

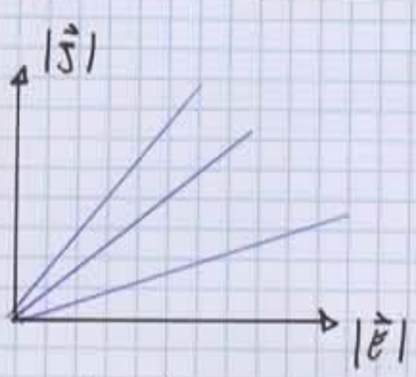
$$\Phi = \iint_S \vec{B}_{AUTO} \cdot d\vec{a} = \underbrace{L}_{\text{COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE}} \cdot I$$

$[L] = H$

CONDUTTIVITÀ E RESISTENZA

PER LA MAGGIOR PARTE DEI MATERIALI VALE LA LEGGE DI OHM MICROSCOPICA

$$\boxed{\vec{J} \propto \vec{E}}$$



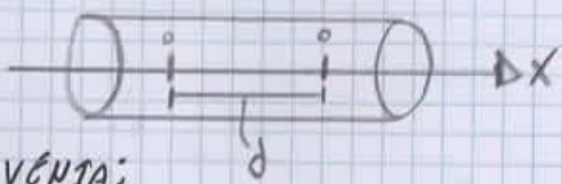
CONDUCIBILITÀ

$J = \sigma E$

QUESTO TIPO DI MATERIALI SONO CHIAMATI MATERIALI OHMICI.

DATO CHE $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V \rightarrow$ SUPPONIAMO CHE VARI SOLO NELLA X:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \rightarrow |E| = \frac{\Delta V}{d}$$



MENTRE $\vec{J} = I/\text{AREA}$, QUINDI $J = \sigma E$ DIVENTA:

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \Delta V = \frac{d \cdot I}{A} \cdot \frac{1}{\sigma}$$

RESISTENZA

SPESSO VIENE SCRITTA COSÌ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta V = I R}$, DOVE $R = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{A}$

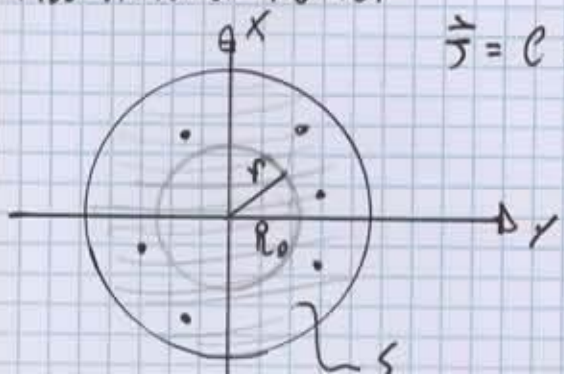
RESISTIVITÀ $= \rho$

E VIENE DETTA LEGGE DI OHM MACROSCOPICA.

DA NOTARE CHE: $I = \frac{1}{R} \cdot \Delta V = \frac{A}{\rho l} \cdot \Delta V$

ESERCIZIO

FILO VISTO DI FRONTE:



$\vec{J} = C r \hat{u}_z$ $\quad [C] = Q L^{-3}$

$$I = ??? \overset{d}{=} \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

Achille Cannavale

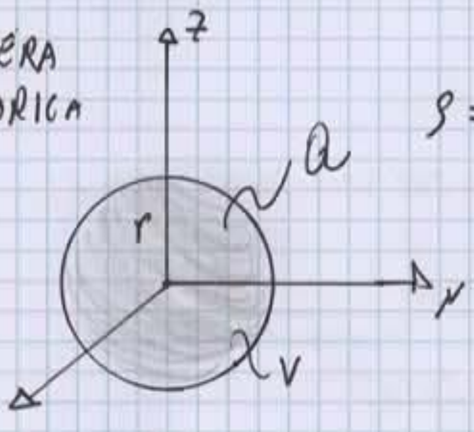
$$I_{\text{STIMA}} = \sum_{\substack{\text{CORONE}\\\text{CIRCOLARI}}} I_i = \sum_i (c r_i) \cdot \Delta a_i = \sum_i (c r_i) \cdot 2\pi r_i \Delta r_i =$$

$$= \sum_i c r_i^2 \cdot 2\pi \Delta r_i = c \cdot 2\pi \sum r_i^2 \cdot \Delta r_i \xrightarrow[\nu \to \infty]{\Delta r_i \to 0} c 2\pi \int_0^{r_0} r^2 \, dr =$$

$$= c\, 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{r_0} = c\, 2\pi \frac{r_0^3}{3} = \frac{2\pi}{3} c\, r_0^3$$

ESERCIZIO

SFERA CARICA

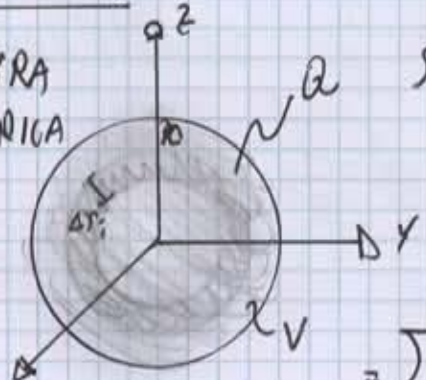


$\rho = \rho_0$ PER PUNTI INTERNI

$$Q = \iiint_V \rho_0 \, dVol = \rho_0 \iiint_V dVol = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3$$

ESERCIZIO

SFERA CARICA



$\rho(r) = c r \qquad [c] = Q L^{-4}$

$$Q_{\text{STIMA}} = \sum_{\substack{\text{GUSCI}\\\text{SFERICI}}} Q_i = \sum \rho_0 \cdot \Delta Vol =$$

$$= \sum c r_i \cdot \Delta VOL = \sum c r_i (4\pi r_i^2 \cdot \Delta r) =$$

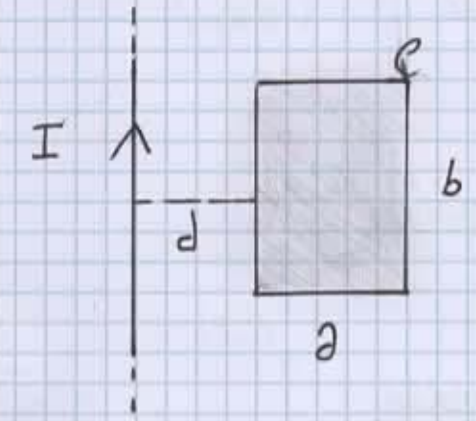
$$= \sum c 4\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i \xrightarrow[\nu \to \infty]{\Delta r_i \to 0} c 4\pi \int_0^{r_0} r^3 \, dr = c 4\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{r_0} =$$

$$= c 4\pi \left[\frac{r_0^4}{4} \right] = c \pi r_0^4$$

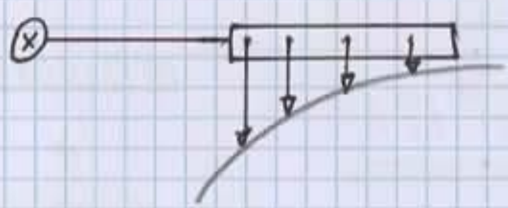
Achille Cannavale

ESERCIZIO

QUALE È IL FLUSSO ATTRAVERSO C CREATO DAL CAMPO MAGNETICO DEL FILO???



DI LATO $\longrightarrow$



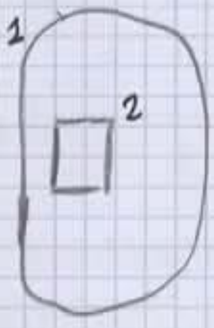
$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

DIVIDIAMO LA SUPERFICIE IN PIÙ STRISCE.

$$\Phi_{B\,STIMA} = \sum_{STRISCE} \vec{B}_i \cdot \Delta \vec{a}_i = \sum B_i \cdot \Delta a_i = \sum \frac{\mu_0 I}{2\pi r_i} \cdot \Delta r_i \cdot b =$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \sum \frac{1}{r_i} \cdot \Delta r_i \xrightarrow[\nu \to \infty]{\Delta r_i \to 0} \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_a^{a+d} \frac{1}{r}\, dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+d}{a}\right) = \Phi_B$$

CONCRETAMENTE PERÒ LA SITUAZIONE SAREBBE QUESTA:



QUALE SARÀ IL COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE???

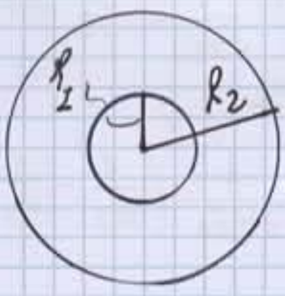
SI PUÒ CALCOLARE IN DUE MODI:

$$M = \left\langle \begin{matrix} \Phi_{12}/I_2 \\ \Phi_{21}/I_1 \end{matrix} \right\rbrace \text{ IDENTICI}$$

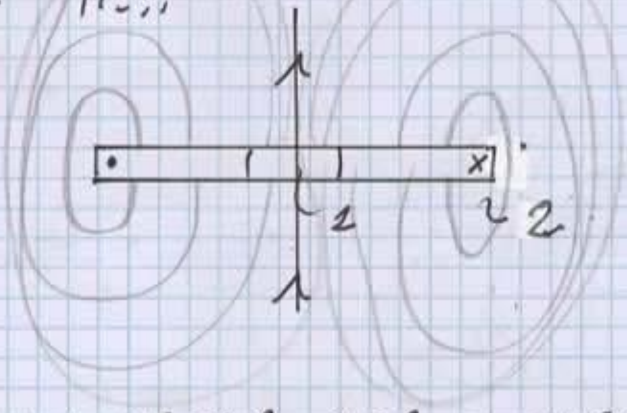
$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{d+a}{a}\right)\right)$$

ESERCIZIO ANELLI CONCENTRICI

$M = ??$



DI LATO $\longrightarrow$



$$M = \left\langle \begin{matrix} \Phi_{12}/I_2 \\ \Phi_{21}/I_1 \end{matrix} \right.$$

NOTIAMO CHE SE $R_1 << R_2$ IL CAMPO MAGNETICO È QUASI UNIFORME PER ① ED È UGUALE AL CAMPO MAGNETICO DI ② AL CENTRO

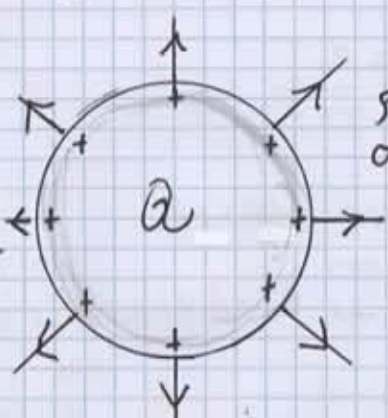
$B_2(\text{CENTRO}) = \frac{\mu_0 I_2}{2R_2} \Rightarrow \Phi_{12} = \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{a} = B_2 \iint d\vec{a} = \left(\frac{\mu_0 I_2}{2R_2}\right) \cdot \pi R_1^2$

$\Rightarrow M = \frac{\mu_0}{2R_2} \pi R_1^2$

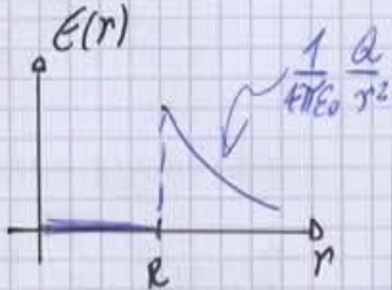
CAPACITÀ

$\text{CAPACITÀ} \stackrel{d}{=} \frac{Q}{\Delta V}$

APPLICAZIONE · SFERA · ISOLATA

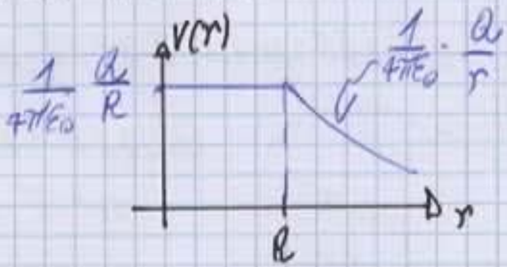


$\rho = 0$
$\sigma \cdot$ UNIFORME



$V(\infty) = 0 \cdot \text{VOLT}$. QUINDI · POSSIAMO · PENSARE · ALL'INFINITO · COME · L'ALTRO ELETTRODO · IN · CUI · MUOIONO · LE · LINEE · DI · CAMPO.

QUINDI · $\Delta V = V\begin{pmatrix}\text{NELLA}\\ \text{SFERA}\end{pmatrix} - V(\infty) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$

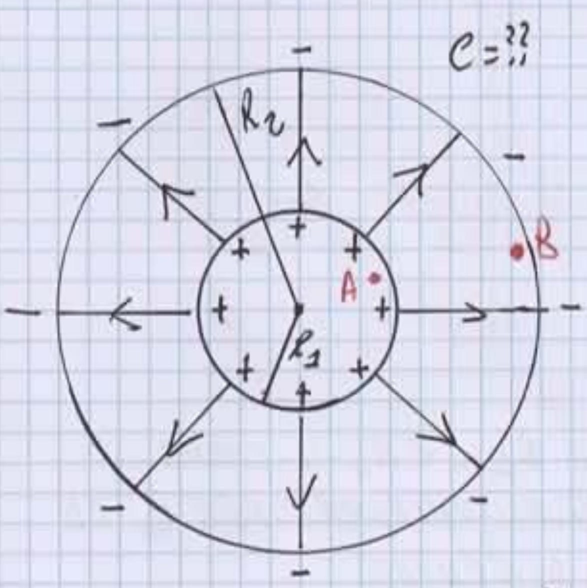


$\Rightarrow$ LA · CAPACITÀ · (CHE · SI · MISURA · IN · FARAD) =

$= \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}} = 4\pi\varepsilon_0 R$ m F/m

UN · OGETTO · COMPOSTO · DA · DUE ELETTRODI · IN · ACCOPPIAMENTO CAPACITIVO · COMPLETO · SI · CHIAMA CONDENSATORE.

SFERE · CONCENTRICHE



$C = ??$

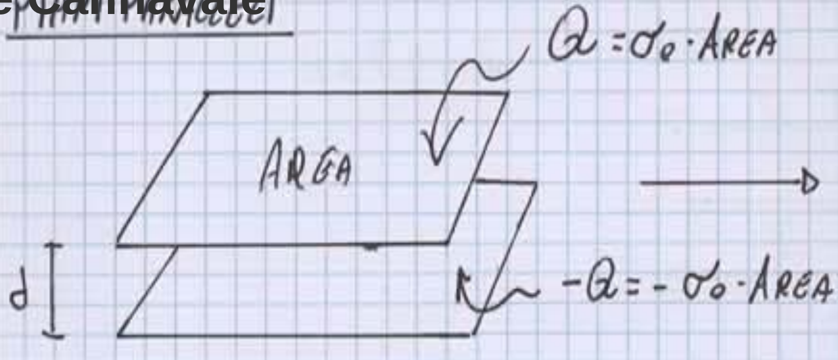
$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr =$

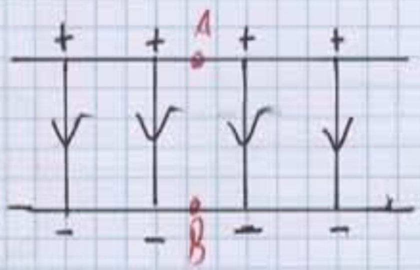
$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} =$

$= 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$

PIANI PARALLELI





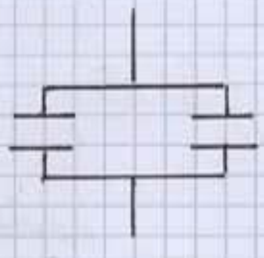
$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma_0 A}{\Delta V} \, , \quad \Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_0 \int_A^B dr = E_0 \cdot d =$$

$$= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} d \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

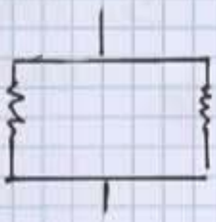
IN SERIE E IN PARALLELO

CONDENSATORI IN SERIE $\qquad \frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$



CONDENSATORI IN PARALLELO $\qquad C = \sum C_i$

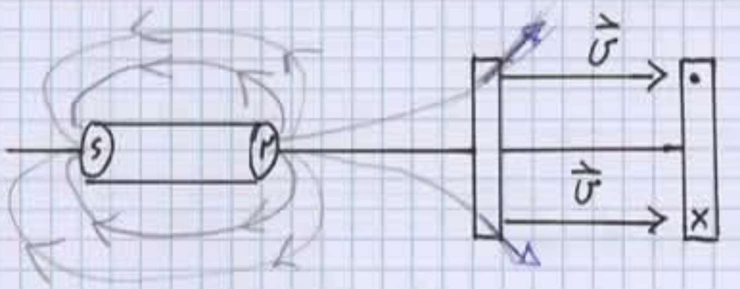
RESISTORI IN SERIE $\qquad R = \sum R_i$

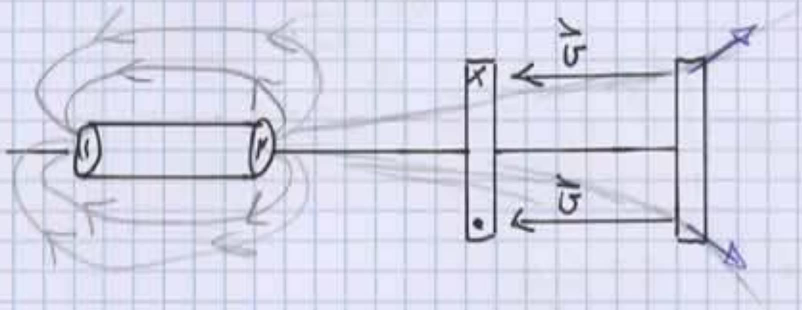


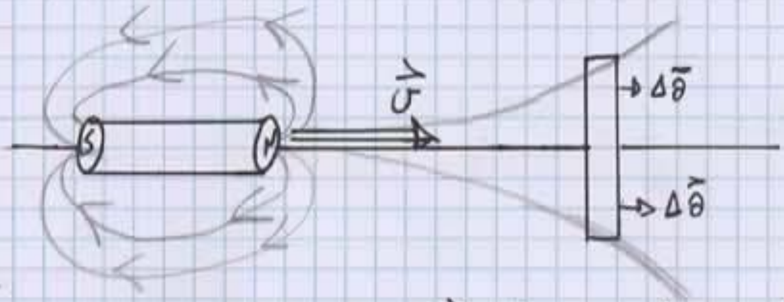
RESISTORI IN PARALLELO $\qquad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$

ESERCIZIO INDUZIONE MAGNETICA

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

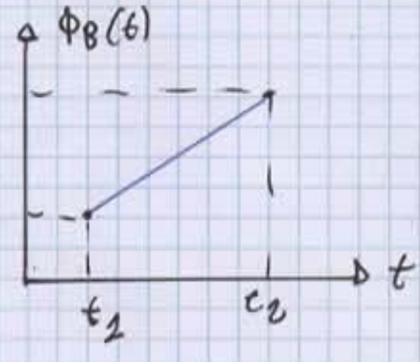






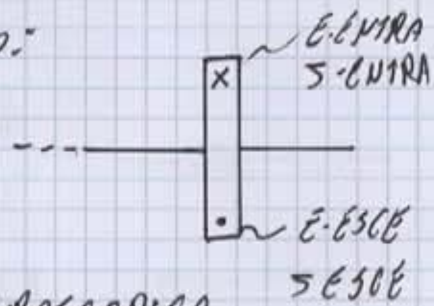
DATO CHE IN QUESTO CASO I PORTATORI NON HANNO $\vec{v}$ NON POSSO USARE LA LEGGE DI LORENZ.

USO FARADAY-LENZ: $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_s \vec{B}\cdot d\vec{a}\right)$



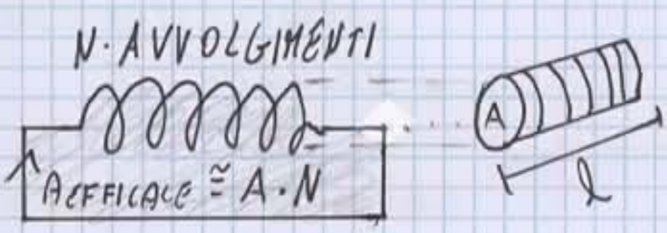
SE COME IN QUESTO CASO:

$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow$



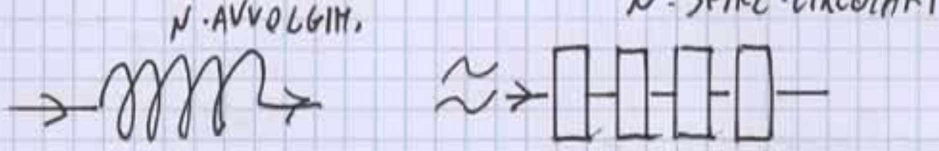
PER OHM MICROSCOPICA

SOLENOIDE

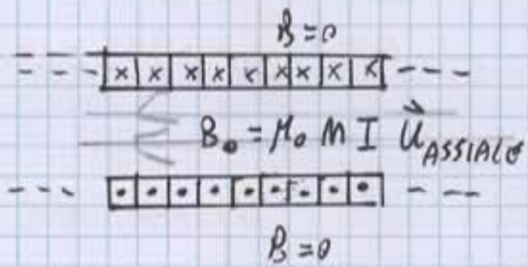


$\Rightarrow \Phi_B = (N A) B_0$

POSSIAMO APPROSSIMARE:



IN UN SOLENOIDE IDEALE:



QUINDI: $B_{SOLENOIDE} \approx B_{IDEALE}$

DOVE $m = \dfrac{N}{l}$

CALCOLIAMO IL COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE: $L = \dfrac{\Phi_{AUTO}}{I} = \dfrac{B_0 \cdot A_{EFFIC.}}{I} =$

$$= \frac{\mu_0 \, N/l \, I \cdot A_{EFF.}}{I} = \mu_0 \frac{N}{l} \cdot (N \cdot A) = \boxed{\mu_0 \frac{N^2 A}{l} = L}$$

ONDE ②

EQUAZIONE DI D'ALAMBERT

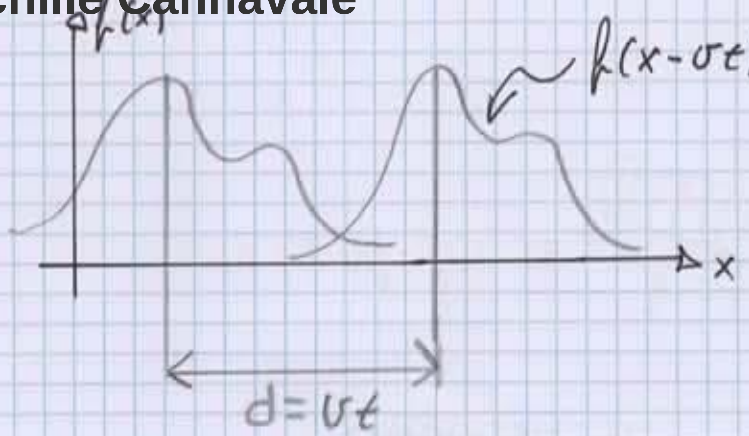
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \Rightarrow$$ SOLUZION DEL TIPO $\Rightarrow f(x - v t)$

DIMOSTRAZIONE

$x - vt = \eta$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{d\eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{1} = \frac{dh}{d\eta} \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -v \frac{dh}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{d^2 h}{d\eta^2} \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = +v^2 \frac{d^2 h}{d\eta^2}$$



PROPAGA SENZA DISTORSIONI VERSO DESTRA CON VELOCITÀ v.

N.B. $f(x+vt)$ PROPAGA VERSO SX.

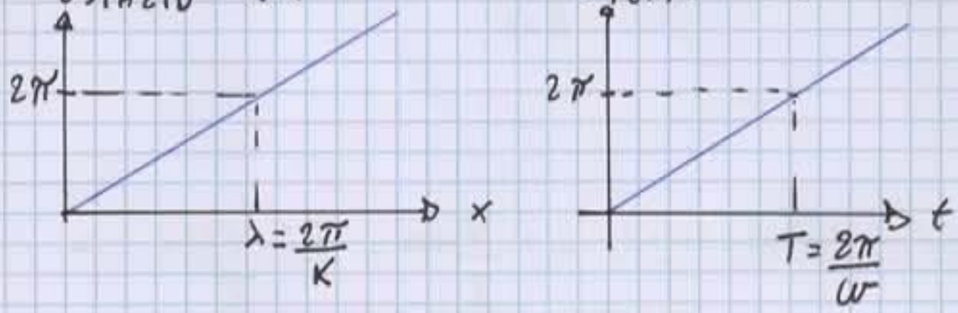
ESEMPIO

$[\omega] = T^{-1}$

$[k] = L^{-1}$

SOLUZIONE DI D'ALAMBERT: $\cos[k(x-vt)] = \cos(kx-\omega t)$, DOVE $v = \dfrac{\omega}{k} = c$

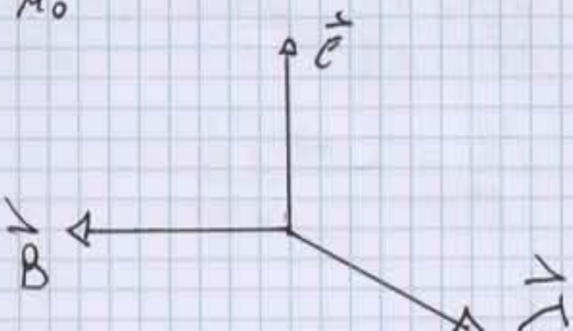
$\theta_{SPAZIO} = kx$ $\qquad$ $\theta_{TEMPO} = \omega t$



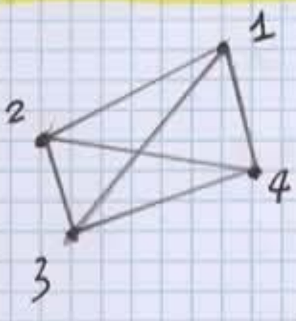
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right)$$

OSSERVAZIONI

1. $\vec{E}$ E $\vec{B}$ SONO ORTOGONALI ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE (x)
2. $\vec{E}$ E $\vec{B}$ SONO PERPENDICOLARI TRA DI LORO (FARADAY/AMPERE)
3. $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B}$ PUNTA NELLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE.



ENERGIA

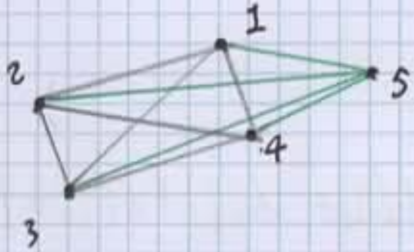


$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$, QUINDI IN GENERALE:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

L'ENERGIA TOTALE SARÀ: $U_{TOT} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}$

AGGIUNGIAMO UNA PARTICELLA:



$$\begin{array}{ccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \end{array} \sim \Delta U$$

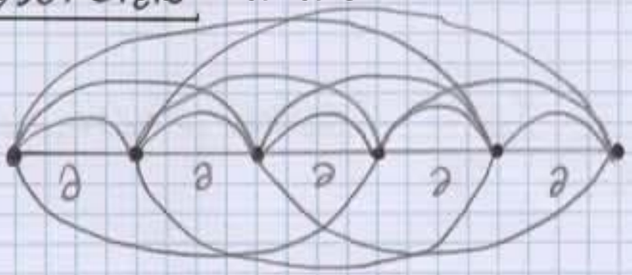
$$\Delta U = K_e \left[\frac{q_1 q_5}{r_{15}} + \frac{q_2 q_5}{r_{25}} + \frac{q_3 q_5}{r_{35}} + \frac{q_4 q_5}{r_{45}} \right] =$$

$$= q_5 \underbrace{\left[K_e \left(\frac{q_1}{r_{15}} + \frac{q_2}{r_{25}} + \frac{q_3}{r_{35}} + \frac{q_4}{r_{45}} \right) \right]}_{V_{4\,PARTICELLE}}$$

$V_{4\,PARTICELLE}$ (NEL PUNTO DELLA QUINTA)

$$\Rightarrow U_{5\,PARTICELLE} = U_{4\,PARTICELLE} + \Delta U =$$

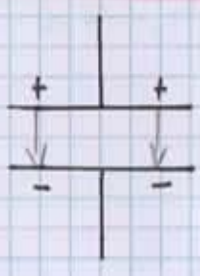
$$= U_{4\,PARTICELLE} + q_5 V_4 (P_5)$$



$\#$	DISTANZA
5	∂
4	2∂
3	3∂
2	4∂
1	5∂
15	

$$U = K_e \frac{q^2}{\partial}\left(5 + \frac{4}{2} + \frac{3}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right)$$

ENERGIA·CONDENSATORE



$$U(q+dq) = U(q) + dq \cdot V(q) = U(q) + V(q)\,dq$$

RICORDO·CHE· $C = \frac{q}{\Delta V} \Rightarrow V = \frac{q}{C}$

$$\Rightarrow U = \int_0^Q V(q)\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \boxed{\frac{Q^2}{2C}}$$

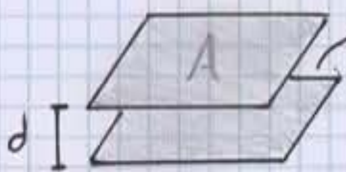
UN·ALTRO·MODO·PER·INDICARE·L'ENERGIA·DI·UN·CONDENSATORE·È:

$$= \boxed{\frac{1}{2} C V^2}$$

$$\frac{Q}{A} / \varepsilon_0$$

ESEMPIO·1

$VOL = A \cdot d$



$$|\vec{E}| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

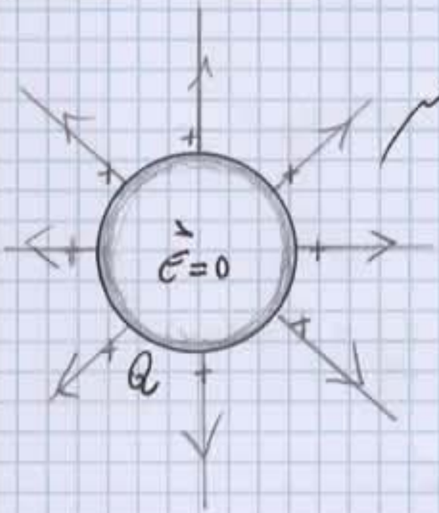
$|\vec{E}|_{FUORI} = \vec{0}$

$$\iiint_{\vec{E}\neq 0} \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2\, dVOL =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 \iiint dVOL =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{A\varepsilon_0}\right)^2 VOL = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{A^2\varepsilon_0}\, d \cdot A = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{Q^2}{A\varepsilon_0}\cdot d}_{C} = \frac{Q^2}{2C} \quad \blacksquare$$

ESEMPIO (2)



$$\vec{E} = K_e \frac{Q}{r^2}\,\vec{u}_r$$

$$\underset{\text{SFERA ISOLATA}}{C} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

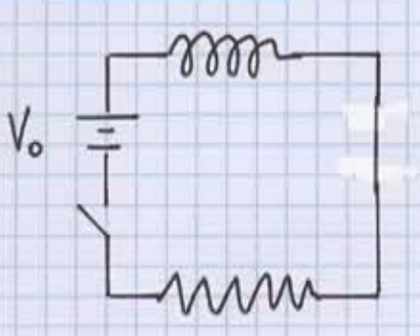
$$U = \iiint_{\vec{E}\neq 0} \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2\, dVol = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_{\vec{E}\neq 0} \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4}\, dVol$$

$$U_{STIMA} = \sum \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0^2 r_i^4}\,\Delta Vol_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0}\sum\frac{(4\pi r_i^2)\cdot\Delta r_i}{(4\pi)^2 r_i^4} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0}\sum\frac{\Delta r_i}{4\pi r_i^2} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{1}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{\infty} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

CIRCUITI



APPENA CHIUDO IL CIRCUITO:

$$\phi_{AUTO}(t) = L\cdot I(t)$$

$$\Rightarrow \oint \vec{e}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\phi_{AUTO}$$

LA LEGGE DI OHM MACROSCOPICA VALE A REGIME $(V = IR)$, QUINDI DIVENTA:

$$V_0 + V_L = IR$$

FORZA ELETTROMOTIVA CHIMICA

PER FARADAY

NOTIAMO CHE: $\frac{d\Phi}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow V_L = -L\frac{dI}{dt}$

SUPPONIAMO CHE CI SIA ANCHE UN CONDENSATORE: $V_C = \frac{q}{C}$

$$V_0 - L\frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = IR$$

$$V_0 - L\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0$$

MOLTIPLICANDO PER I: $IV_0 = LI\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}I + RI^2$

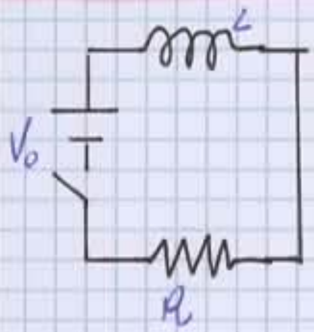
$$= IV_0 = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}LI^2}_{\mathcal{E}_B}\Big) + \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\tfrac{q^2}{C}}_{\mathcal{E}_E}\Big) + RI^2$$

ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO $\sim \mathcal{E}_B$

$\mathcal{E}_E \sim$ ENERGIA DEL CAMPO ELETTRICO

$$\underbrace{IV_0}_{\text{POTENZA ISTANTANEA EROGATA}} = \frac{d}{dt}\left[\mathcal{E}_B + \mathcal{E}_E\right] + \underbrace{RI^2}_{\text{POTENZA DISSIPATA DALLA RESISTENZA}}$$

CIRCUITO RL



$$V_0 = IR$$

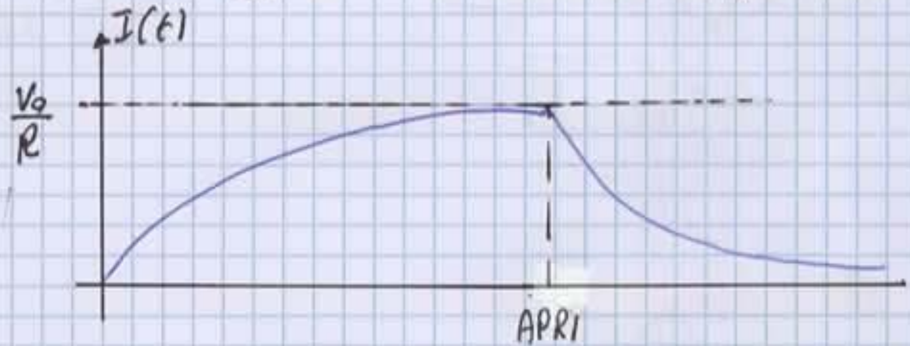
$$V_{EFFICACE} = IR$$

$$V_0 - L\frac{dI}{dt} = IR$$ RISOLVIAMO!

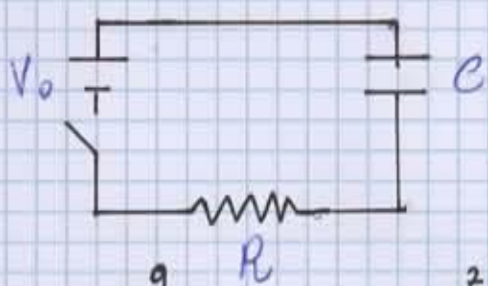
$$L\frac{dI}{dt} = V_0 - IR \rightarrow L\,dI = (V_0 - IR)\,dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{L\,dI}{V_0 - IR} = dt \rightarrow t = \int_0^I \frac{L}{V_0 - I'R}\,dI' = -\frac{L}{R}\int_{V_0}^{V_0 - IR} \frac{dz}{z} = -\frac{L}{R}\ln\left(\frac{V_0 - IR}{V_0}\right)$$

ESPLICITO: $I(t) = \frac{V_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right] = I_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tau = \frac{L}{R}$



CIRCUITO RC



$$V_0 = IR$$

$$V_{EFFICACE} = IR$$

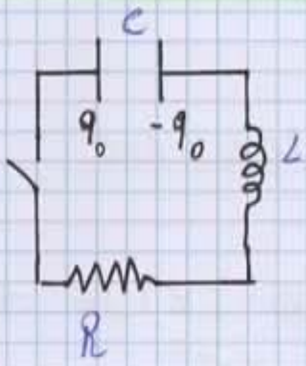
$$V_0 - \frac{q}{C} = IR$$

$$V_0 - \frac{q}{C} = \frac{dq}{dt}R \rightarrow \left(V_0 - \frac{q}{C}\right)dt = dq\,R$$

$$\rightarrow t = \int_0^q \frac{R}{V_0 - \frac{q'}{C}}\,dq' = \int_0^z -\frac{RC}{z'}\,dz' = -RC\,\ln\left(\frac{V_0 - q/C}{V_0}\right)$$

ESPLICITO: $q(t) = CV_0\left(1 - e^{-t/RC}\right) = q_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tau = RC$

CIRCUITO RCL



$V_0 = IR \Rightarrow V_{EFF} = IR$

$\cancel{V_0} + V_L + V_C = IR$

$-L\frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = \frac{dq}{dt}R$

$-L\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C} = \frac{dq}{dt}R$

$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$

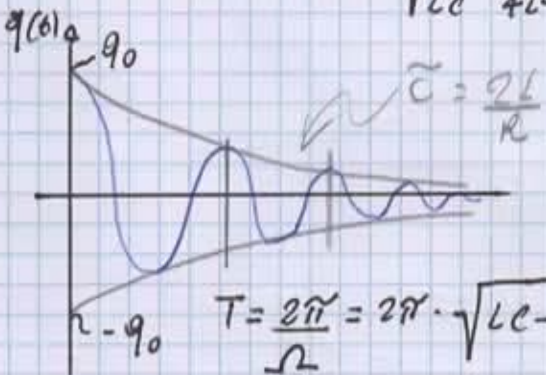
$q_{PROVA}(t) = q\,e^{\alpha t}$

$\Rightarrow L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow \alpha_{\pm} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2 - \frac{4L}{C}}{4L^2}} =$

$= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$

SE $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow q(t) = q_0\, e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\Omega t)$,

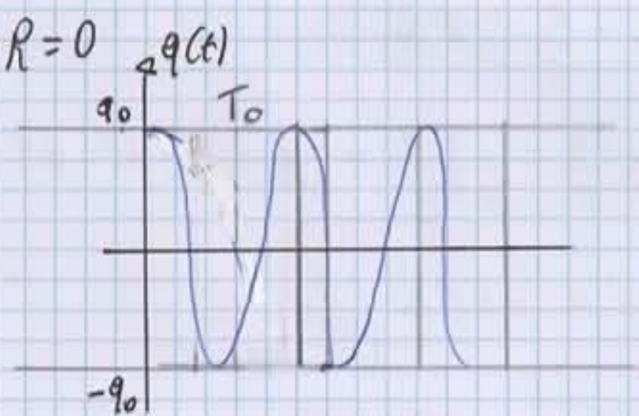
DOVE: $\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$



$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \cdot \sqrt{LC - \frac{4L^2}{R^2}}$

$T > T_0$

SE $R = 0$



$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$

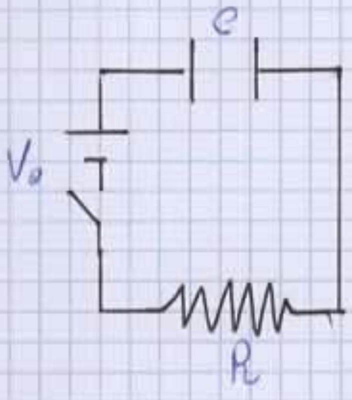
ENERGIA E POTENZA

NEL CASO RCL: $V_{EFF} = IR \rightarrow V_0 - L\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{q}{C} = RI \rightarrow$

$\rightarrow V_0 = L\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{q}{C} + RI \rightarrow$ MOLTIPLICO PER $I \Rightarrow IV_0 = LI\frac{\partial I}{\partial t} + I\frac{q}{C} + RI^2 =$

$= \underbrace{IV_0}_{\downarrow} = \frac{d}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right] + RI^2$

POTENZA EROGATA DALLA BATTERIA $\Rightarrow P_{BATT} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = IV_0$



QUALE È IL LAVORO TOTALE FATTO DALLA BATTERIA PER CARICARE IL CONDENSATORE?

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right)_{BATT} \partial t = \text{LAVORO EROGATO DALLA BATTERIA} = \int_0^\infty I V_0 \, dt =$$

$$= V_0 \int_0^\infty I(t)\, dt = V_0 \int_0^\infty \frac{CV_0}{\tau} e^{-t/\tau}\, dt = CV_0^2$$

MA RICORDIAMO L'ENERGIA DI UN CONDENSATORE CARICATO:

$$\mathcal{E}_{COND.} = \frac{Q^2}{2C} \underset{Q=CV_0}{=} \frac{CV_0^2}{2} \rightarrow$$ È LA METÀ DELL'ENERGIA EROGATA DALLA BATTERIA!!!

DOVE È ANDATA L'ALTRA METÀ??

NELLA RESISTENZA!!

$$\Rightarrow \left(\frac{d\mathcal{E}}{\partial t}\right)_{RESIST.} = I(\Delta V) = RI^2$$

$$\mathcal{E}_{RESIST.} = \int_0^\infty RI^2\, dt = R\int_0^\infty \left(\frac{CV_0}{\tau} e^{-t/\tau}\right) dt = \frac{1}{2} CV_0^2$$

QUINDI: $CV_0^2 = 1\, CV_0^2 + 1\, CV_0^2$