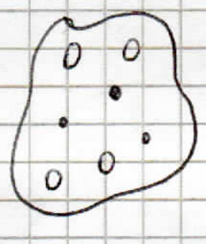
CORRENTE

CARICA ELETTRICA DELL'ELETTRONE: $q_e = -1.602 \times 10^{-19}\,C$

CARICA ELETTRICA DEL PROTONE: $q_p = +1.602 \times 10^{-19}\,C$

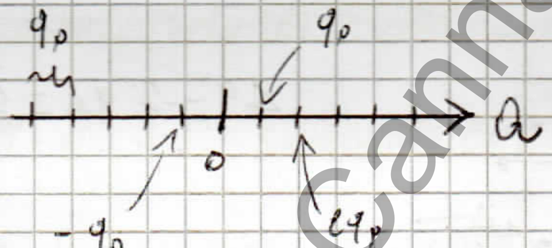
SE HO UN CORPO MATERIALE:



N_e
N_p

DICO CHE $Q = N_p \cdot q_p + N_e \cdot q_e$
$= (N_p - N_e) \cdot q_p$

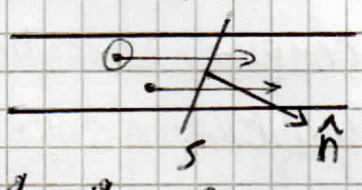
QUESTO MI FA CAPIRE CHE Q È QUANTIZZATA:



PUÒ ASSUMERE SOLO VALORI DISCRETI.

DATO CHE PER I NOSTRI STRUMENTI IL SALTO NON È APPREZZABILE APPROSSIMIAMO DICENDO CHE LA CARICA VARIA CON CONTINUITÀ:

SUPPONGO DI AVERE UN CONDUTTORE:

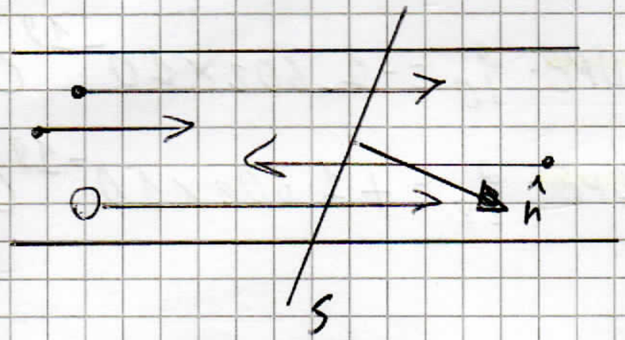


$[t_0, t_0 + \Delta t]$

$\Delta q = q_p + q_e = 0$
(IN QUESTO CASO SPEC.)

QUANTO VALE LA QUANTITÀ DI CARICA CHE HA ATTRAVERSATO S VERSO IL VERSORE $\hat{n}$ NELL'INTERVALLO $[t_0, t_0 + \Delta t]$?

ALTRO ESEMPIO ①

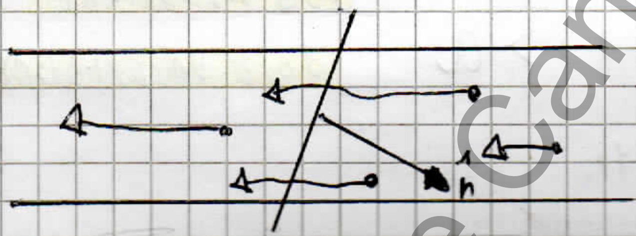


$$\Delta q = +q_e - q_e + q_p = q_p$$

ALTRO ESEMPIO ②

$$\Delta q = 2q_p$$

ALTRO ESEMPIO ③



$$\Delta q = -2q_e = 2q_p$$

LA CORRENTE ELETTRICA MEDIA È $\langle i(t_0)\rangle = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$

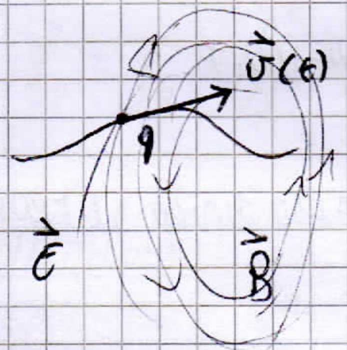
LA CORRENTE ISTANTANEA È $i(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$

CAMBIARE IL VERSO DI ATTRAVERSAMENTO, FA CAMBIARE DI SEGNO IL Δq E DI CONSEGUENZA CAMBIA DI SEGNO ANCHE LA CORRENTE.

RELAZIONE FONDAMENTALE

$$1\,A = \frac{1\,C}{1\,T}$$

TENSIONE E DIFFERENZA DI POTENZIALE



$$\vec{F}_{LORENTZ} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) =$$

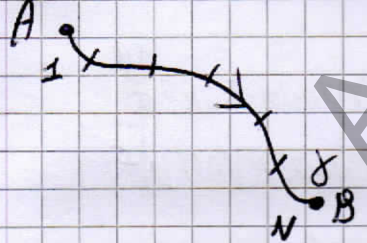
$$= q\left(\vec{E}(\vec{r}(t)) + \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(r(t))\right)$$

NEL CASO IN CUI POTESSIMO TRASCURARE IL SECONDO PEZZO:

$F_{LORENTZ} = q \cdot \vec{E}$ RICORDIAMO CHE $dL = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$

PER CALCOLARE QUANTA POTENZA SPENDE:

$$\frac{dL}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



QUANTO LAVORO SPENDE IL CAMPO ELETTRICO PER PORTARE LA PARTICELLA DA A A B?

$$L = \sum_{i=1}^{N} dL_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[N \to \infty]{\Delta \vec{s} \to 0} \int_{A\gamma B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A\gamma B} \vec{F} \cdot \hat{t}\, dl$$

LUNGHEZZA DELLO SPOSTAMENTO

VERSORE TANGENTE ALLA CURVA

$$L_{A\gamma B} = \int_{A\gamma B} \vec{F} \cdot \hat{t}\, ds = q \underbrace{\int_{A\gamma B} \vec{E} \cdot \hat{t}\, ds}_{\text{TENSIONE } T_{A\gamma B}}$$

$$\boxed{1V = \frac{1J}{1C}}$$

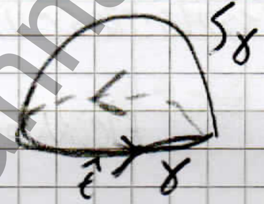
QUINDI:

$$\boxed{T_{A\gamma B} = \frac{L_{A\gamma B}}{q}}$$

LA TENSIONE SI MISURA IN VOLT.

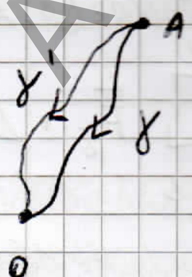
SI PARLA DI DIFFERENZA DI POTENZIALE QUANDO SIAMO DI FRONTE A CAMPI DI FORZA CONSERVATIVI.

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot \hat{t}\, ds = -\frac{d}{dt} \phi_{S_\gamma}$$



IN CONDIZIONI STAZIONARIE:

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot \hat{t}\, ds = 0 \Rightarrow L_{A\gamma B} = q T_{A\gamma B} = q \oint_\gamma \vec{E} \cdot \hat{t}\, ds = 0$$



$T_{A\gamma O} = T_{A\gamma' O}$ IN CASO DI FORZE CONSERVATIVE

$$0 = \underbrace{\int_{A\gamma O} \vec{E} \cdot \hat{t}\, ds}_{T_{A\gamma O}} + \underbrace{\int_{O\gamma' A} \vec{E} \cdot \hat{t}\, ds}_{-T_{A\gamma' O}} = 0$$

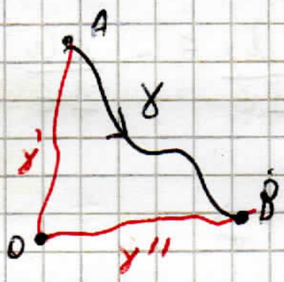
$\Rightarrow$ L'INTEGRALE DI LINEA NON DIPENDE DALLA CURVA SCELTA IN CASO DI FORZE CONSERVATIVE.

$$\boxed{\varphi_P = K + \int_P^O \vec{E} \cdot \hat{t}\, ds \quad \text{POTENZIALE SCALARE (LUNGO QUALSIASI CURVA)}}$$

PER CAPIRE CHI È K: $\varphi_O = K + \cancel{\int_O^O \vec{E} \cdot \hat{t}\, ds}$ QUINDI:

$$\boxed{\varphi_P = \varphi_O + \int_P^O \vec{E} \cdot \hat{t}\, ds}$$

APPLICAZIONE



$$T_{A\gamma B} = T_{A\gamma' O} + T_{O\gamma'' B}$$

$$\varphi_A = \varphi_O + \underbrace{\int_A^O \vec{E}\, \hat{t}\, ds}_{T_{A\gamma' O}}$$

$$\varphi_B = \varphi_O + \underbrace{\int_B^O \vec{E} \cdot \hat{t}\, ds}_{T_{B\gamma'' O}}$$

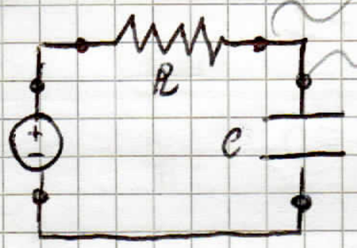
$$\Rightarrow = (\varphi_A - \varphi_O) + (\varphi_O - \varphi_B) =$$

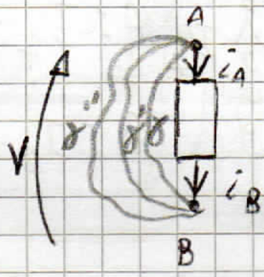
$$= T_{A\gamma B} = \varphi_A - \varphi_B$$ DIFFERENZA DI POTENZIALE

CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA

RETE ELETTRICA

NODI

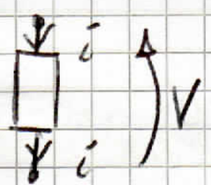


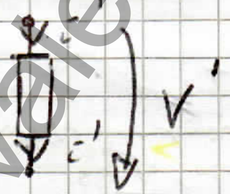


BIPOLO

$$\begin{cases} i_A = i_B \\ T_{A\gamma B} = T_{A\gamma' B} = T_{A\gamma'' B} \end{cases}$$

V RAPPRESENTA LA TENSIONE DALLA PUNTA ALLA CODA DELLA FRECCIA.





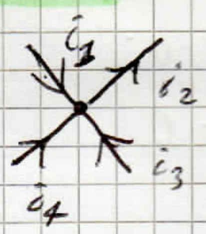
CONVENZIONE UTILIZZATORE

CONVENZIONE GENERATORE

	C.U.	C.G.
V·I	P_{ASS}	P_{GEN}

EQUAZIONI FONDAMENTALI = PRINCIPI DI KIRKOFF

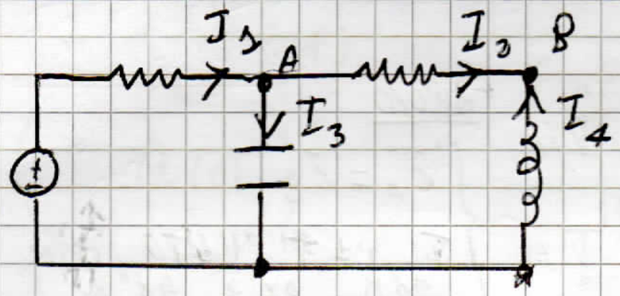
LKC



$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0 \\ -i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\ i_1 + i_3 + i_4 = i_2 \end{cases}$$

TRE MODI DIVERSI PER DIRE LA STESSA COSA

LA SOMMA ALGEBRICA DELLE CORRENTI ENTRANTI O USCENTI DAL NODO DELLA RETE ELETTRICA FA 0.

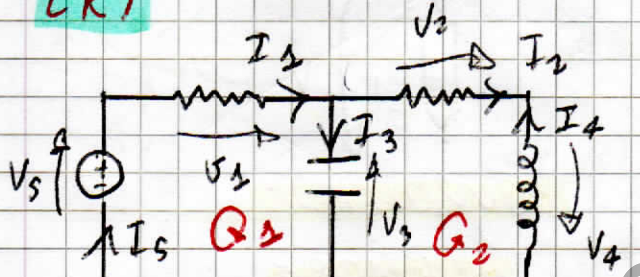


A: $I_1 = I_2 + I_3$

B: $I_2 + I_4 = 0$

QUINDI QUESTO CI RIBADISCE CHE NEI NODI NON VI È ACCUMULO DI CARICA ELETTRICA.

LKT

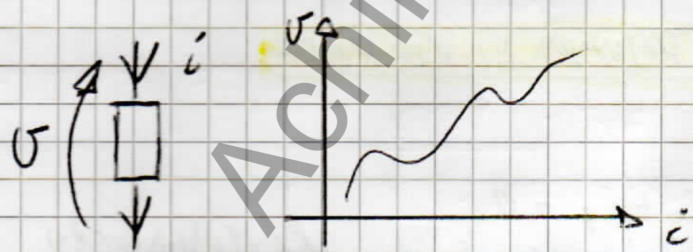


1: $V_s + V_1 - V_3 = 0$

2: $-V_4 - V_2 - V_3 = 0$

LUNGO UN PERCORSO CHIUSO, LE SOMME ALGEBRICHE DELLE DIFFERENZE DI POTENZIALE FANNO 0.

RELAZIONI CARATTERISTICHE

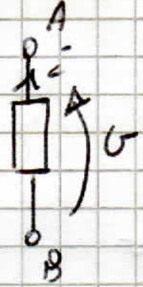


PER DESCRIVERE IL COMPONENTE DEVO FORNIRE UN'EQUAZIONE DI VINCOLO DEL TIPO:

$$g(i, v) = 0$$

GENERATORE INDIPENDENTE DI TENSIONE

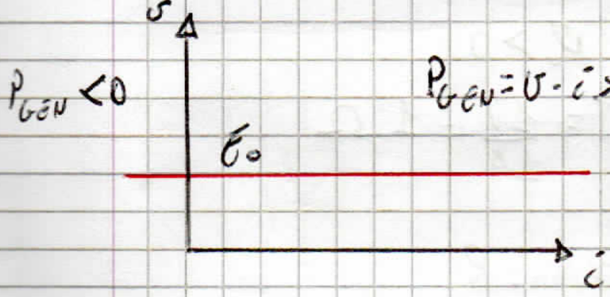
TENSIONE



EQUAZIONE DI VINCOLO

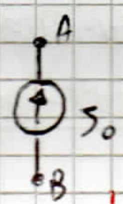
$$v = E_0$$

(SE AVESSI AVUTO  v SAREBBE STATO $v = -E_0$)



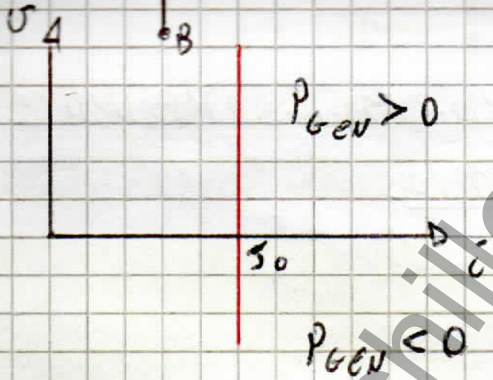
QUINDI PUÒ SIA ASSORBIRE CHE GENERARE POTENZA.

GENERATORE INDIPENDENTE DI CORRENTE



EQUAZIONE DI VINCOLO

$$i = J_0$$

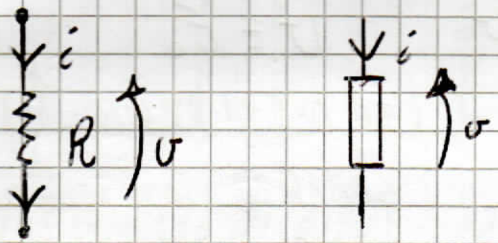


CASI PARTICOLARI

$E_0 = 0 \Rightarrow$ CORTOCIRCUITO E SI INDICA COSÌ:

$J_0 = 0 \Rightarrow$ CIRCUITO APERTO E SI INDICA COSÌ:

RESISTORE

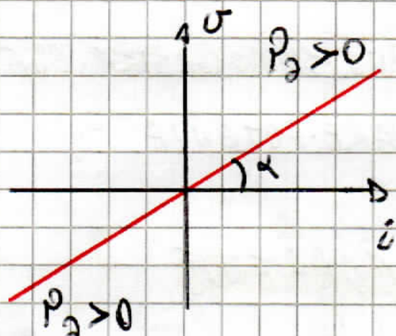


RELAZIONE CARATTERISTICA

$v = R \cdot i$

$R > 0$

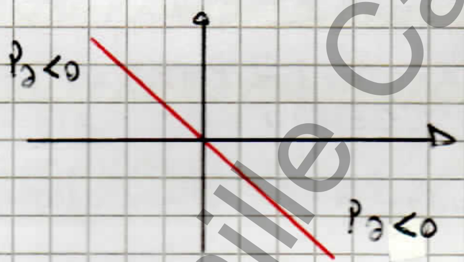
$[R] = \frac{1V}{1A} = 1\ \Omega$



$\tan(\alpha) = \text{COEFF. ANG} = R$

QUESTO COMPONENTE ASSORBE SEMPRE POTENZA, E IN QUESTO CASO SI CHIAMA COMPONENTE PASSIVO.

CASO $R < 0$



IN QUESTO CASO IL COMPONENTE È ATTIVO.

CONDUTTANZA

$i = \frac{1}{R} \cdot v$ ($\frac{1}{R}$ = G)

$i = G \cdot v$

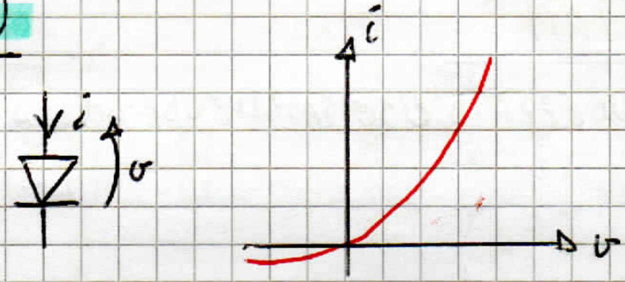
$[G] = \Omega^{-1} = S$

RICAPITOLANDO:

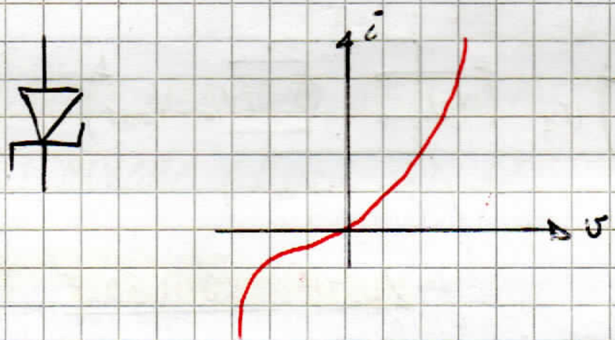
PASSIVO SE LA R.C. INTERESSA SOLO IL PRIMO E IL TERZO QUADRANTE.

ALTRIMENTI SI DICE ATTIVO

DIODO



DIODO SEMPLICE



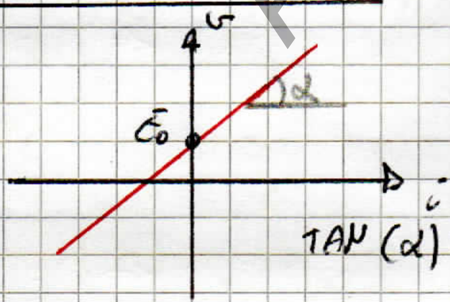
DIODO ZENER

DIODO TUNNEL

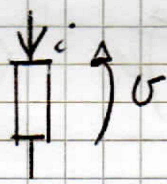
COMPONENTE INERTE

SI DEFINISCE ~~COMPONENTE INERTE~~ QUANDO LA SUA CARATTERISTICA PASSA PER L'ORIGINE, QUINDI VUOL DIRE CHE SENZA TENSIONE NON C'È CORRENTE E VICEVERSA.

BIPOLO NORMALE



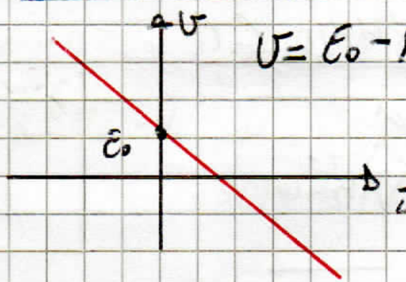
$\tan(\alpha) = R$



RELAZIONE CARATT.

$v = Ri + E_0$

MODELLO APPR. DI UNA BATTERIA

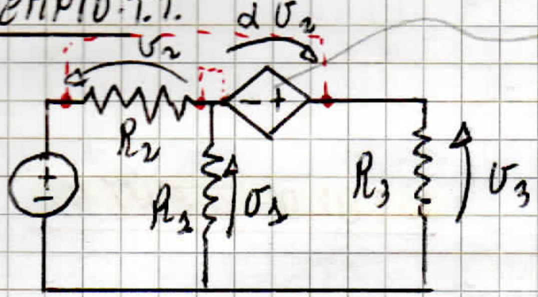


$v = E_0 - Ri$

GENERATORI PILOTATI

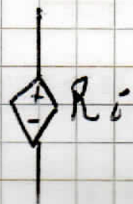
VUOL DIRE CHE LA GRANDEZZA D'USCITA DIPENDE DALLA GRANDEZZA IN ENTRATA.

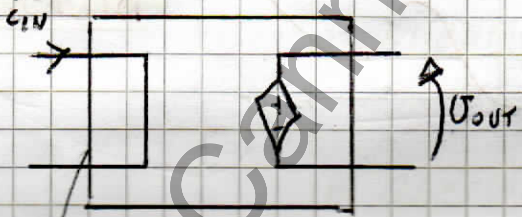
ESEMPIO T.T.



VOLTMETRO IDEALE (SI COLLEGA IN PARALLELO)

ESEMPIO T.C



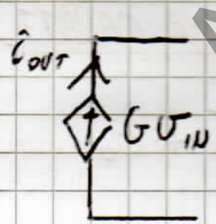


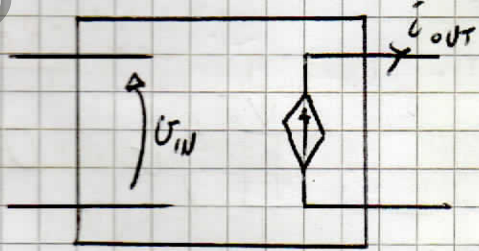
$v_{OUT} = R \cdot i_{IN}$

AMPEROMETRO IDEALE

(SI COLLEGA IN SERIE)

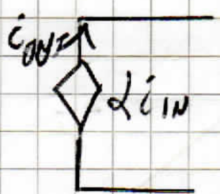
ESEMPIO C.T

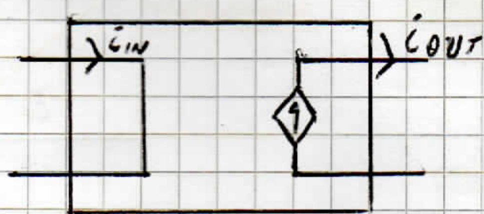




$i_{OUT} = G \cdot v_{IN}$

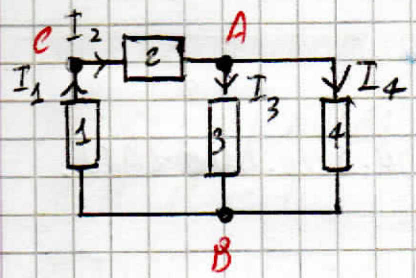
ESEMPIO C.C





$i_{OUT} = \alpha\, i_{IN}$

ESERCIZIO



SOMMA ALGEBRICA CORR USC = 0

LKC

$A: -I_2 + I_3 + I_4 = 0$

$B: I_1 - I_3 - I_4 = 0$

$C: -I_1 + I_2 = 0$

$A+B: +I_1 - I_2$ C'È RIDONDANZA!

PER NON AVERE RIDONDANZA, OVVERO AVERE LE LKC INDIPENDENTI BASTA SCRIVERE (NODI - 1) LKC.

MATRICE DI INCIDENZA

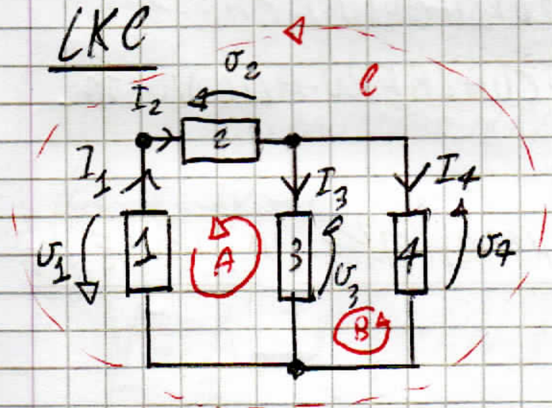
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{I} = \underline{0}$$

$\underline{\underline{A}}$ MATRICE DI INCIDENZA

SE ELIMINO UN'EQUAZIONE OTTERRÒ $\underline{\underline{A}}_R$ CHE SI CHIAMA MATRICE D'INCIDENZA RIDOTTA.

$N = 3$
$L = 4$ $\Rightarrow \underline{\underline{A}}^{N \times L}$ MENTRE $\underline{\underline{A}}_R^{(N-1) \times L}$

LKC



$A: v_1 + v_2 + v_3 = 0$

$B: -v_3 + v_4 = 0$

$C: v_2 + v_1 + v_4 = 0$

ANCHE IN QUESTO CASO LE EQUAZIONI SONO DIPENDENTI.

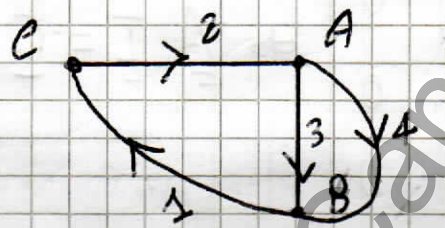
PER RISOLVERE QUESTO PROBLEMA, NELLE RETI PLANARI, BASTA CONSIDERARE SOLO LE LKT DEGLI ANELLI.

PER ANELLI SI INTENDONO PERCORSI CHIUSI CON SOLO DUE LATI.

ALBERO COALBERO

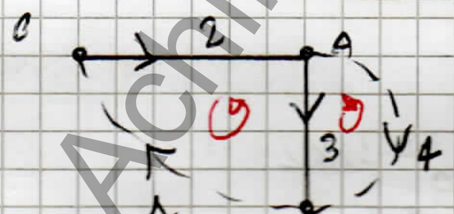
PIÙ IN GENERALE (SOPRATTUTTO PER RETI NON PLANARI) SI UTILIZZA LA DECOMPOSIZIONE ALBERO COALBERO.

PRIMO PASSO DISEGNO IL GRAFO DELLA RETE.



GRAFO ORIENTATO

SECONDO PASSO DISEGNO UN ALBERO, OVVERO UNA PORZIONE DEL GRAFO DI PARTENZA, SENZA PERCORSI CHIUSI.



I LATI CHE AVANZANO RAPPRESENTANO IL CO-ALBERO.

SCRIVIAMO LE LKT RELATIVE AI PERCORSI CHIUSI CHE SI FORMANO AGGIUNGENDO UN LATO DI COALBERO ALLA VOLTA.

$$l_1 : v_1 + v_3 + v_2 = 0$$

$$l_4 : -v_3 + v_4 = 0$$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

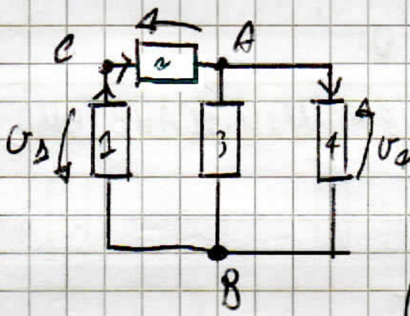
(NUM. LATI ALBERO = N. NODI − 1) ⇒ (LATI COALB = L − (N − 1))

QUINDI RICAPITOLANDO:

- ※ LKC INDIPENDENTI = N−1
- ※ LKT INDIPENDENTI = L−(N−1)
- ※ R.C. = L
- ※ INCOGNITE = 2L

$\left.\begin{matrix} \text{LKC} = N-1 \\ \text{LKT} = L-(N-1) \\ \text{R.C.} = L \end{matrix}\right\}$ EQUAZIONI 2L

POTENZIALI NODALI



$$\begin{cases} v_1 = \ell_B - \ell_C \\ v_2 = \ell_C - \ell_A \\ v_3 = \ell_A - \ell_B \\ v_4 = \ell_A - \ell_B \end{cases}$$

CAMBIO DI VARIABILE

SOSTITUISCO $\rightarrow$ $(\cancel{\ell_B}-\cancel{\ell_C})+(\cancel{\ell_C}-\cancel{\ell_A})+(\cancel{\ell_A}-\cancel{\ell_B})=0 \quad \forall\, \ell_A, \ell_B, \ell_C$

$-(\cancel{\ell_A}-\cancel{\ell_B})+(\cancel{\ell_A}-\cancel{\ell_B})=0 \quad \forall\, \ell_A, \ell_B$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ell_A \\ \ell_B \\ \ell_C \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{V} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\ell}$$

(DATO CHE I POTENZIALI AI NODI SONO DEFINITI A MENO DI UNA COSTANTE ARBITRARIA, POSSIAMO METTERE A 0 UN POTENZALE.
(ES. $\ell_B + K = 0 \big|_{K=-\ell_B}$))

$$\underline{V} = \underline{\underline{A}}_R^T\, \ell' \text{, DOVE } \ell' = \begin{bmatrix} \ell_A \\ \ell_C \end{bmatrix}$$

DOBBIAMO METTERE A POTENZIALE ZERO IL NODO DI CUI NON ABBIAMO SCRITTO LA LKC.

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA POTENZA

LA SOMMA DELLE POTENZE ASSORBITE DA TUTTI I COMPONENTI È ZERO.

DIMOSTRAZIONE

$$\underline{\underline{A}}_R \cdot \underline{I} = 0$$

$$\underline{V} = \underline{\underline{A}}_R^T \cdot \underline{l}$$

$$\sum_{k=1}^{L} p_k^a = \sum_{k=1}^{L} v_k \cdot I_k = \underline{V}^T \cdot \underline{I} = \left(\underline{\underline{A}}_R^T \underline{l}\right)^T \cdot \underline{I} =$$

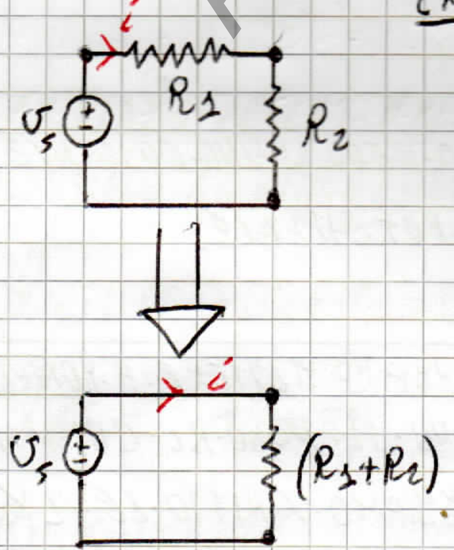
$$= \underline{l}^T \underline{\underline{A}}_R \cdot \underline{I} = 0$$

QUINDI LE RETI SONO SISTEMI CHIUSI, OVVERO NON SCAMBIANO ENERGIA CON L'ESTERNO.

COLLEGAMENTO IN SERIE

DUE BIPOLI SONO COLLEGATI IN SERIE SE SONO ATTRAVERSATI DALLA STESSA CORRENTE E SONO COLLEGATI DA UN SOLO NODO.

ESEMPIO



LKT $\Rightarrow v_s - v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_s = v_1 + v_2$

$$\Rightarrow v_s = \underbrace{(R_1 + R_2)}_{\text{RESISTENZA EQUIVALENTE}} i$$

$\Downarrow$ IN GENERALE

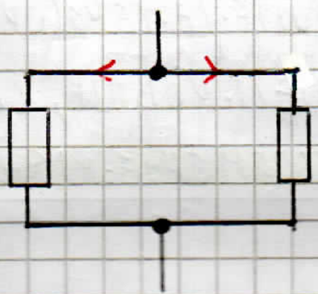
$$R_{EQ} = \sum_i^N R_i$$

PARTITORE DI TENSIONE

$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2} \longrightarrow v_1 = R_1 \cdot i \Rightarrow v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s$$

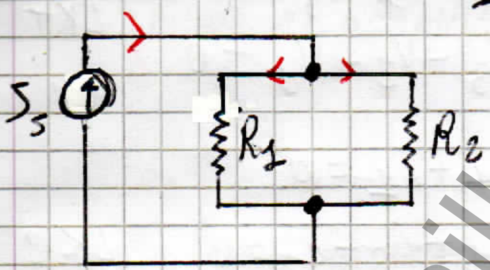
IN GENERALE $\rightarrow$ $$\boxed{v_N = \frac{R_N}{R_1 + \dots + R_N} v_s}$$

COLLEGAMENTO IN PARALLELO



DUE BIPOLI SONO COLLEGATI IN PARALLELO SE HANNO LA STESSA TENSIONE E SONO COLLEGATI DA DUE NODI.

ESEMPIO



$$\text{LKC} \rightarrow J_s = i_1 + i_2 = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = v\,\underbrace{(G_1 + G_2)}_{\text{CONDUTTANZA EQUIVALENTE}} \rightarrow G_{EQ} = G_1 + G_2$$

$$\Downarrow$$

$$G_{EQ} = \sum_{i}^{N} G_i$$

PARTITORE DI CORRENTE

$$v = \frac{J_s}{G_1 + G_2} \rightarrow i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} J_s$$

IN GENERALE $\rightarrow$ $$\boxed{i_N = \frac{G_N}{G_1 + \dots + G_N} J_s}$$

POTENZIALI NODALI

QUESTO METODO NASCE DALLA VOLONTÀ DI SEMPLIFICARE IL MODELLO MATEMATICO DELLE RETI.

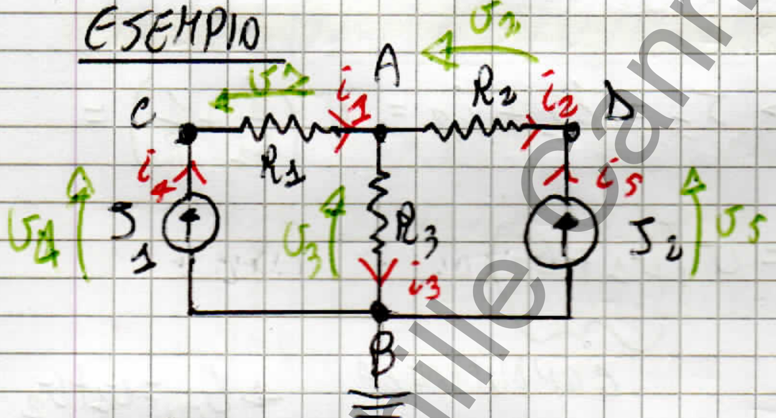
IN PARTICOLARE:

$$\underline{\underline{A}}_R\, \underline{I} = \underline{0}$$

$$\underline{V} = \underline{\underline{A}}_R^T\, \underline{e}$$

⇒ QUINDI SE ESPRIMIAMO TUTTE LE TENSIONI ATTRAVERSO I POTENZIALI NODALI, LE LKT SONO AUTOMATICAMENTE RISOLTE.

ESEMPIO



$$\begin{cases} V_4 - V_1 - V_3 = 0 \\ V_3 - V_2 - V_5 = 0 \end{cases} \quad \text{LKT}$$

$$\begin{cases} i_4 - i_1 = 0 \\ i_1 - i_3 - i_2 = 0 \\ i_2 + i_5 = 0 \end{cases} \quad \text{LKC}$$

$$\begin{cases} V_1 = R_1\, i_1 \\ V_2 = R_2\, i_2 \\ V_3 = R_3\, i_3 \\ i_4 = J_1 \\ i_5 = J_2 \end{cases} \quad \text{REL. CARAT.}$$

INTRODUCO I POTENZIALI IN NUMERO PARI A TUTTI I NODI TRANNE UNO CHE METTO A POTENZIALE 0.

$$\begin{cases} V_1 = e_C - e_A \\ V_2 = e_A - e_D \\ V_3 = e_A \\ V_4 = e_C \\ V_5 = e_D \end{cases} \xrightarrow[\text{LE LKT DIVENTANO IDENTITÀ}]{\text{SOSTITUIRE NEL CAR}} \begin{cases} i_1 = G_1(e_C - e_A) \\ i_2 = G_2(e_A - e_D) \\ i_3 = G_3(e_A) \\ i_4 = S_1 \\ i_5 = S_2 \end{cases}$$

QUINDI RISCRIVIAMO LE LKC:

$$\begin{cases} S_1 - G_1(e_C - e_A) = 0 \\ G_1(e_C - e_A) - G_2(e_A - e_D) - G_3 e_A = 0 \\ G_2(e_A - e_D) + S_2 = 0 \end{cases}$$

SISTEMA DI (N-1) EQUAZIONI (LKC) A (N-1) INCOGNITE (POTENZIALI NODALI)

↳ UNA VOLTA RISOLTO AVREMO:

e_A, e_C, e_D CHE SOSTITUITE NELLE PRECEDENTI EQUAZIONI CI DARANNO LE CORRENTI E LE TENSIONI.

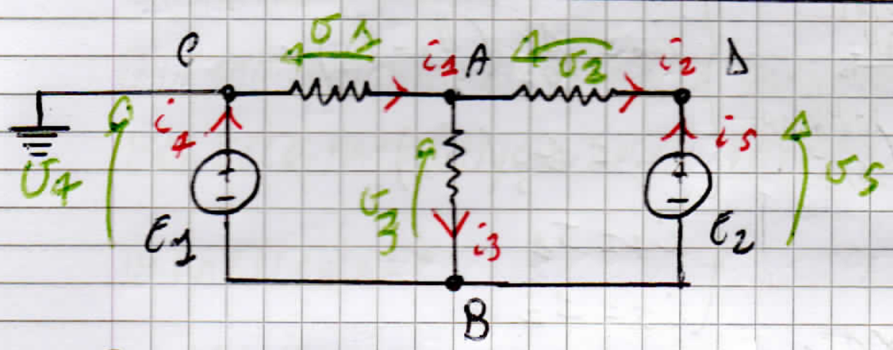
$$\begin{array}{c} \\ C \\ A \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_C & e_A & e_D \end{array} \\ \begin{bmatrix} +G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & (G_1+G_2+G_3) & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} e_C \\ e_A \\ e_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +S_1 \\ 0 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

PER COMODITÀ MANTENIAMO GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE CON SEGNO POSITIVO.

ORA NOTIAMO CHE:

1) È UNA MATRICE SIMMETRICA
2) GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO LA SOMMA DELLE CONDUTTANZE CHE INTERESSANO QUEL NODO.
3) GLI ELEMENTI FUORI DIAGONALE SONO NEGATIVI E RAPPRESENTANO LE CONDUTTANZE RELATIVE AL NODO PROVENIENTI DA ALTRI NODI.

POTENZIALI NODALI MODIFICATO (GEN. TENSIONE)



$$\begin{cases} v_4 - v_1 - v_3 = 0 \\ v_3 - v_2 - v_5 = 0 \\ i_1 - i_3 - i_2 = 0 \\ i_4 - i_1 = 0 \\ i_2 + i_5 = 0 \end{cases}$$

LKC E LKT

REL. CAR.
$$\begin{cases} i_1 = G_1 v_1 \\ i_2 = G_2 v_2 \\ i_3 = G_3 v_3 \\ V_4 = E_1 \\ V_5 = E_2 \end{cases}$$

POT.
$$\begin{cases} v_1 = - e_A \\ v_2 = (e_A - e_D) \\ v_3 = (e_A - e_B) \\ v_4 = - e_B \\ v_5 = (e_D - e_B) \end{cases}$$

POT. IN REL. CAR. →
$$\begin{cases} i_1 = G_1 e_A \\ i_2 = G_2 (e_A - e_D) \\ i_3 = G_3 (e_A - e_B) \\ -e_B = E_1 \\ (e_D - e_B) = E_2 \end{cases}$$

SOSTITUISCO NELLE LKC →
$$\begin{cases} i_4 + G_1 e_A = 0 \\ -G_1 e_A - G_2 (e_A - e_D) - G_3 (e_A - e_B) = 0 \\ G_2 (e_A - e_D) + i_5 = 0 \end{cases}$$

COMPAION DUE INCO ADDIZIONAL OVVERO LE CORRENTI REL AI GENERATORI DI TENSIONE.

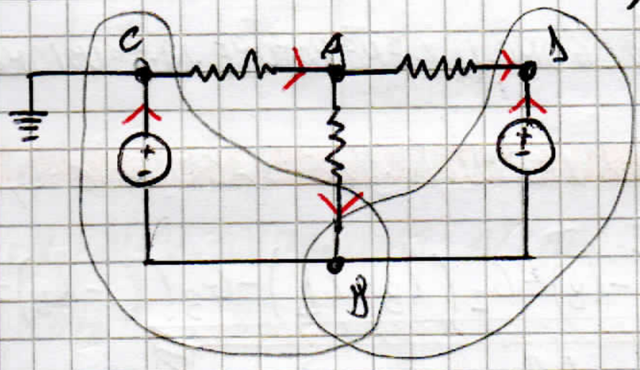
MA HO SOLO 3 EQUAZIONI !!!

↳ LE DUE EQUAZIONI ADDIZIONALI SONO:
$$\begin{cases} -e_B = E_1 \\ (e_D - e_B) = E_2 \end{cases}$$

QUINDI:
$$\begin{cases} i_4 + G_1 e_A = 0 \\ -G_1 e_A - G_2 (e_A - e_D) - G_3 (e_A - e_B) = 0 \\ G_2 (e_A - e_D) + i_5 = 0 \\ -e_B = E_1 \\ (e_D - e_B) = E_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{QUINDI IL NUMERO DI LKC È } N-1 - \#\text{GENERATORI DI TENSIONE.}}$$

UN'ALTERNATIVA A TUTTO QUESTO È SCRIVERE LE LKC IN CORRISPONDENZA DEL SUPERNODO (SUPERFICIE GAUSSIANA CHE RACCHIUDE IL GENERATORE DI TENSIONE).



A: $i_1 - i_2 - i_3 = 0$

$\downarrow$

$$\begin{cases} -G_1 e_A - G_2(e_A - e_D) - G_3(e_A - e_B) = 0 \\ e_B = -E_1 \\ (e_D - e_B) = E_2 \end{cases}$$

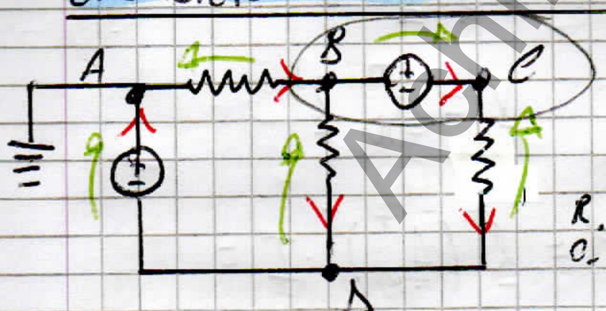
$\downarrow$

$$-G_1(e_A) - G_2(e_A - (E_2 - E_1)) - G_3(e_A + E_1) = 0$$

UN'EQUAZIONE IN UNA SOLA INCOGNITA.

QUINDI L'IDEA SULLO SFONDO È QUELLA DI EVITARE DI NON SCRIVERE LE LKC RELATIVE AI NODI RELATIVI AI GENERATORI DI TENSIONE.

ESERCIZIO CON SUPERNODO



R.C.
$$\begin{cases} I_1 = G_1 V_1 \\ I_2 = G_2 V_2 \\ I_3 = G_3 V_3 \\ V_4 = E_1 \\ V_5 = E_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = -e_B \\ V_2 = e_B - e_D \\ V_3 = e_C - e_D \\ V_4 = -e_D \\ V_5 = e_C - e_B \end{cases}$$

IL POTENZIALE ASSOCIATO AL NODO MESSO A TERRA NON È INCOGNITA!

$\Rightarrow e_A = 0$, $e_B = ?$, $e_C = ?$, $e_D = -E_1$

PERÒ SO CHE $e_C - e_B = E_2 \Rightarrow$ HO UNA SOLA INCOGNITA.

QUINDI DEVO SCRIVERE UNA SOLA LKC. A CHE NODO?

A NO PERCHÉ FA 0;

D NO PERCHÉ È NOTA;

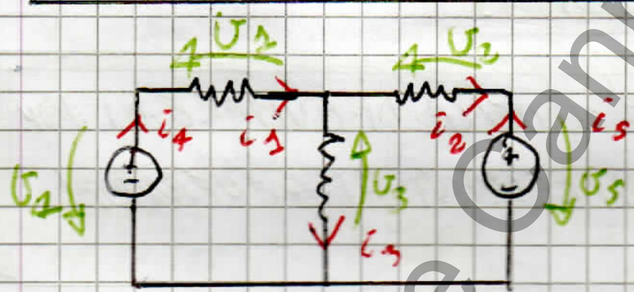
B E C NO PERCHÉ MI COINVOLGONO IL GENERATORE DI TENSIONE

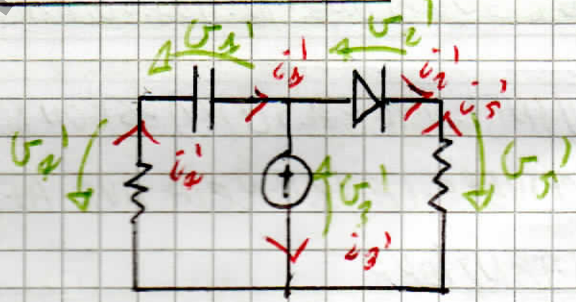
QUINDI?? ⇒ SI SCRIVE AL SUPERNODO CHE RACCHIUDE D,B

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow G_1(-e_B) - G_2(e_B - e_D) - G_3(e_C - e_D) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{G_1 e_B - G_2 e_B - G_2 E_1 - G_3(e_B + E_2 + E_1) = 0}$$

CONSERVAZIONE POTENZA VIRTUALE





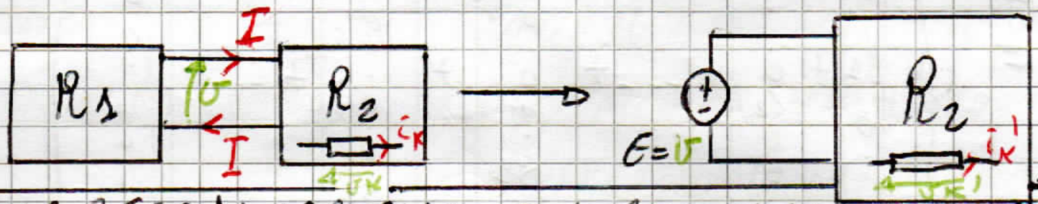
$$\underline{\underline{A}}_R \, \underline{I} = \underline{0} \qquad \underline{\underline{A}}_R \cdot \underline{I}' = 0$$

$$\underline{V} = \underline{\underline{A}}_R^T \, \underline{e} \qquad \underline{V}' = \underline{\underline{A}}_R^T \, \underline{e}'$$

$$\sum_{k=1}^{L} V_k \, i_k' = \underline{V}^T \cdot \underline{I}' = \underline{e}^T (\underline{\underline{A}}_R^T)^T \cdot \underline{I}' =$$

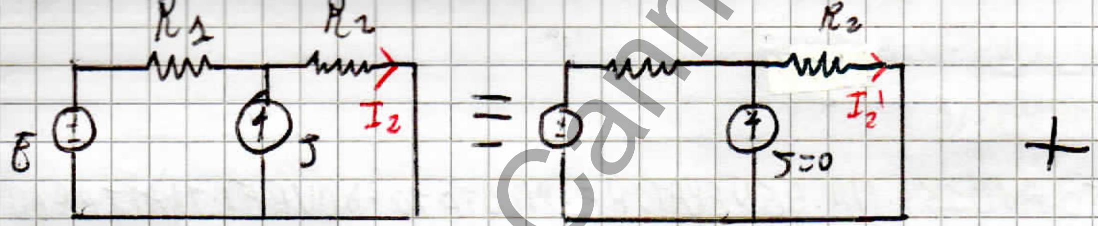
$$= \underline{e}^T \underline{\underline{A}}_R \, \underline{I}' = 0 \qquad \blacksquare$$

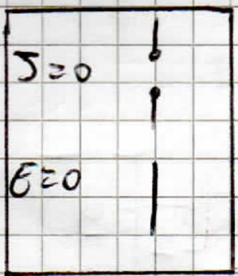
PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

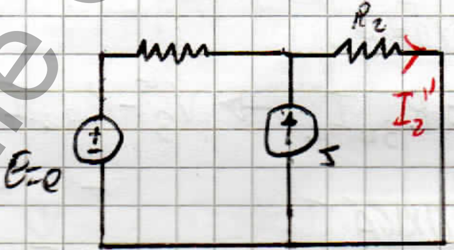


SE LA RETE DI PARTENZA E LA RETE MODIFICATA AMMETTONO UN'UNICA SOLUZIONE, ALLORA LE DUE SOLUZIONI DEVONO COINCIDERE. ($i_K = i_K'$, $v_K = v_K'$).
(LO STESSO DISCORSO VALE SULLA CORRENTE)

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE







$$I_2 = I_2' + I_2''$$

SI SPENGONO SOLO I GENERATORI INDIP.

DIMOSTRAZIONE

$\sum \pm V_K = 0$ LKT $l-(N-1)$

$\sum \pm I_L = 0$ LKC $(N-1)$

$$\left.\begin{array}{l} V_K^R - R_K I_K^R = 0 \\ I_K^G = J_K \\ V_K^G = E_K \end{array}\right\} L$$

$$\underline{\underline{T}} \begin{bmatrix} \underline{V} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ E_1 \\ \vdots \\ J_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} LKT \\ LKC \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

SUPPONENDO T INVERTIBILE:

$$\begin{bmatrix} \underline{V} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ E_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ S_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ S_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{V} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = \underbrace{\underline{\underline{T}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ E_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} + \dots + \underline{\underline{T}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix}$$

È LA SOLUZIONE DELLA RETE
CON SOLO IL GENERATORE E_1
ATTIVO!

$\blacksquare$

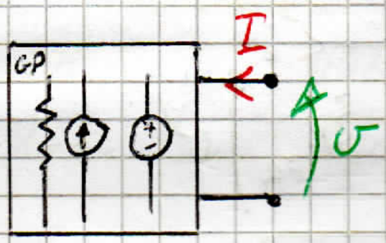
NEL CASO AVESSI UN GENERATORE PILOTATO DOVREI TRATTARLO COME UN RESISTORE.

<u>ESEMPIO</u> $V_3^G = R_{32} I_2 \rightarrow V_3^G - R_{32} I_2 = 0$

$$\underline{\underline{T}} \begin{bmatrix} \underline{V} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ E \end{bmatrix} & \begin{matrix} LKT \\ LKC \\ \text{-}\!\!\wedge\!\!\wedge\!\!\wedge\text{-} \\ GEN.\ PIL. \\ \ \end{matrix} \end{array} = E \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{V} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = E\, \underline{\underline{T}}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

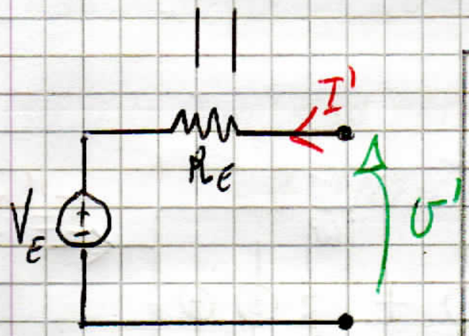
$\boxed{\text{QUINDI UNA QUALSIASI TENSIONE O CORRENTE È PROPORZIONALE AL GENERATORE INDIPENDENTE CHE AGISCE.}}$

TEOREMA DI TEVENIN

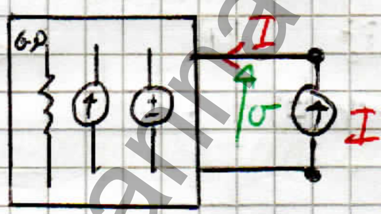


RETE LINEARE E CONTROLLATA IN CORRENTE

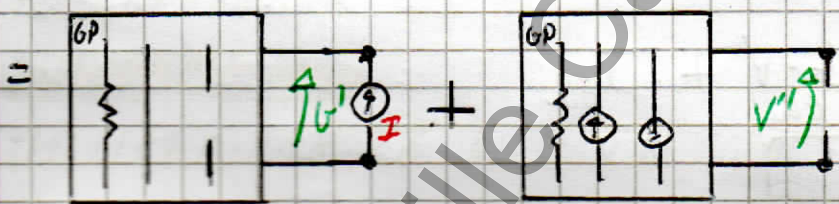
SOTTO QUESTE IPOTESI UNA RETE ELETTRICA ARBITRARIA PUÒ ESSERE RAPPRESENTATA DA UN CIRCUITO COMPOSTO DA UN RESISTORE E UN GENERATORE DI TENSIONE.



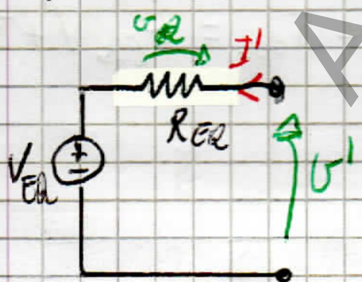
DIMOSTRAZIONE



= USO IL TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE A BLOCCHI



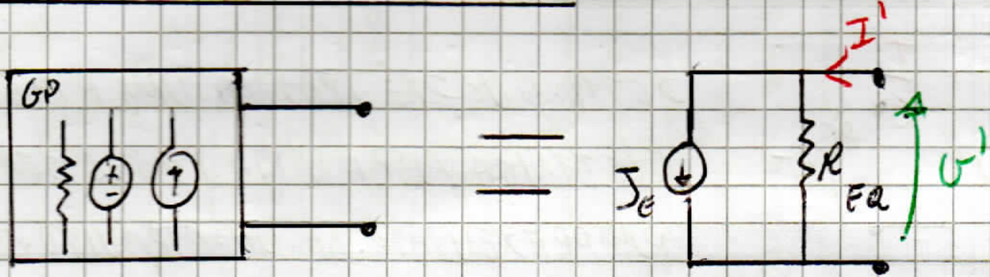
$$\left(V' = R_{EQ} I\right) + V_{EQ} = V$$



$\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} V_R &= R_{EQ} \cdot I' \\ V' - V_R - V_{EQ} &= 0 \end{aligned}\right\} \; V' = V_{EQ} + R_{EQ} I'$$

TEOREMA DI NORTON

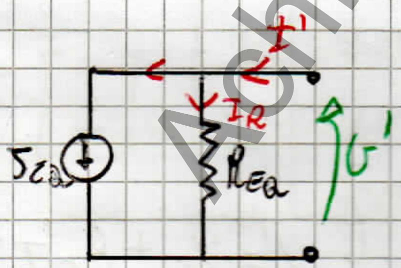


RETE LINEARE E CONTROLLABILE IN TENSIONE

DIMOSTRAZIONE

$$I = I' + I'' = G_{EQ} V + J_{EQ}$$

$$\boxed{\Rightarrow I = G_{EQ} V + J_{EQ}}$$



$$I' = I_R + J_{EQ} = \frac{V'}{R_{EQ}} + J_{EQ} = G_{EQ} V' + J_{EQ}$$

$$\Rightarrow I' = G_{EQ} V' + J_{EQ}$$

∎

LEGAME TRA TEVENIN E NORTON

TH.	NOR.
R_{EQ}	R_{EQ}
V_{EQ}	$J_{EQ} = V_{EQ}/R_{EQ}$

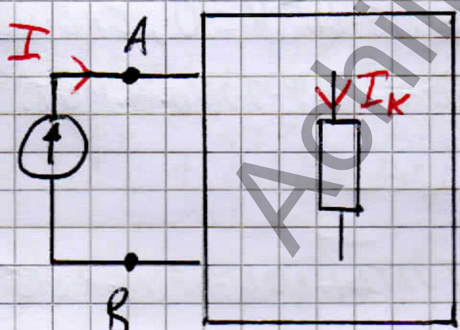
TEOREMA DI NON AMPLIFICAZIONE DELLE CORRENTI

IN UNA QUALSIASI RETE IN CUI SI HA UN SOLO GENERATORE; E TUTTI GLI ALTRI ELEMENTI PASSIVI, ALLORA

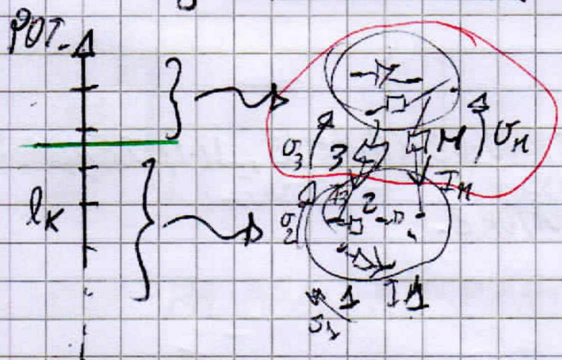
LA CORRENTE MASSIMA IN CORRISPONDENZA DEL GENERATORE.

~~DIMOSTRAZIONE~~

UTILIZZO PER EX. UN GEN. DI CORR.



$$|I| \geq |I_K| \quad \forall K$$



$$\sum_{K}^{N} I_K = 0$$

SUPPONIAMO CHE I_1 RIGUARDI IL GEN.

$$V_1, \dots, V_N > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{I_1}_{<0} = -I_2 - \dots - I_N \leq -I_2$$

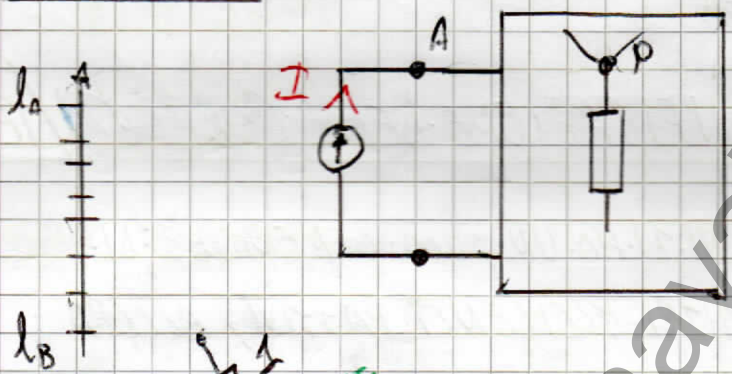
$$-I_1 \leq -I_2 \Rightarrow |I_1| \geq |I_2| \text{ ETC.}$$

$\boxtimes$

TEOREMA DI NON AMPLIFICAZIONE DELLE TENSIONI

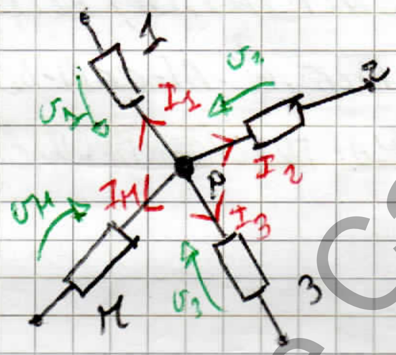
IN UNA QUALSIASI RETE IN CUI SI HA UN SOLO GENERATORE E TUTTI GLI ALTRI ELEMENTI PASSIVI ALLORA LA TENSIONE MASSIMA È AI CAPI DEL GENERATORE.

DIMOSTRAZIONE



SUPPONIAMO CHE PER ASSURDO IL POT. MASSIMO SIA AL NODO P.

$\Rightarrow \ell_P \geq \ell_K \quad \forall K$



LKC: P $\Rightarrow +I_1+I_2+I_3 - \dots + I_M = 0$

$v_1 \geq 0,\ V_2 \geq 0,\ V_3 \geq 0 \dots V_M \geq 0$

$\Rightarrow I_2 \geq 0,\ I_2 \geq 0,\ I_3 \geq 0 \dots I_M \geq 0$

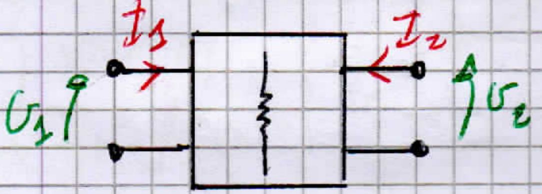
MA $\sum I_K = 0$

ALLORA TUTTE LE $I = 0$, CHE IMPLICA TUTTE LE $V = 0$, CHE VUOL DIRE CHE I POTENZIALI DEI NODI COLLEGATI A P SONO A POT. MASSIMO.

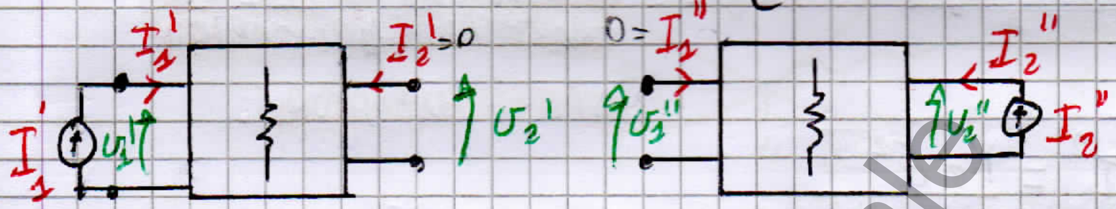
ITERANDO IL RAGIONAMENTO MI ESCE CHE TUTTI I NODI DELLA RETE SONO A POTENZIALE MASSIMO.

ALLORA SE NON PUÒ ESSERE ALL'INTERNO DELLA RETE, IL POTENZIALE MASSIMO SI TROVA AI CAPI DEL GENERATORE.

TEOREMA DI RECIPROCITÀ



$$\begin{cases} V_2' = V_1'' \\ I_1' = I_2'' \end{cases} \qquad \boxed{\frac{V_1''}{I_2''} = \frac{V_2'}{I_1'}}$$



3A 4V 4V 3A

L'EFFETTO DELLA PORTA ① SULLA ② È UGUALE ALL'EFFETTO DELLA PORTA ② SULLA ①.

DIMOSTRAZIONE

$$① \quad 0 = \sum_k V_k' I_k'' = \cancel{V_1' I_1''} + V_2' \cdot I_2'' + \sum_3 V_k' I_k'' =$$

$$② \quad 0 = \sum_k V_k'' I_k' = V_1'' I_1' + \cancel{V_2'' I_2'} + \sum_3 V_k'' I_k' =$$

$$= V_1'' I_1' + \sum (R_k I_k') I_k'$$

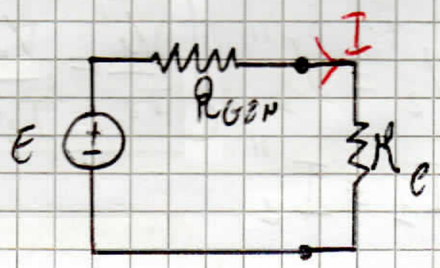
$$= V_2' I_2'' + \sum_3 (R_k I_k') I_k'$$

$$①-② \Rightarrow 0 = V_2' I_2'' - V_1'' I_1' = 0 \rightarrow V_2' I_2'' = V_1'' I_1' \qquad \blacksquare$$

$$\left.\frac{V_1''}{I_2''}\right|_{I_1''=0} = \left.\frac{V_2'}{I_1'}\right|_{I_2'=0}$$

TEOREMA ANALOGO PER LE TENSIONI: $\left.\frac{I_1''}{V_2''}\right|_{V_1''=0} = \left.\frac{I_2'}{V_1'}\right|_{V_2'=0}$

TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA



E = DATO

R_{GEN} = DATO

R_e = ? IN MODO CHE LA POTENZA TRASFERITA AL CARICO DAL GENERATORE.

$$P_e = R_e I^2 = \frac{R_e E^2}{(R_{GEN}+R_e)^2}$$

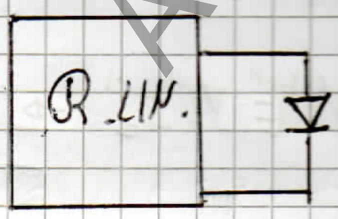
$$I = \frac{E}{R_{GEN}+R_e}$$

$$\max_{R_e}\left(\frac{R_e E^2}{(R_G+R_e)^2}\right) \Rightarrow \frac{E^2(R_G+R_e)^2-(R_e E^2)(2R_G+2R_e)}{(R_G+R_e)^4}=0$$

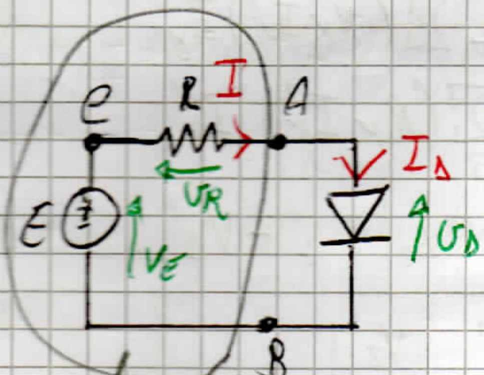
$$\rightarrow 0 = R_G + R_e - 2R_e = R_G - R_e \Rightarrow \boxed{R_e = R_G}$$

RETI NON LINEARI

FUNZIONA SOLO CON UN COMP. NON LIN.



CONTROLLABILE IN CORRENTE

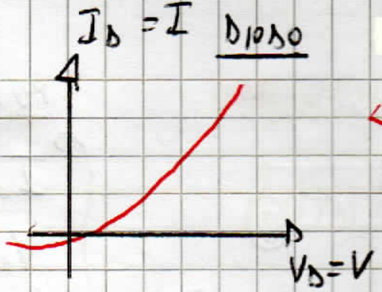


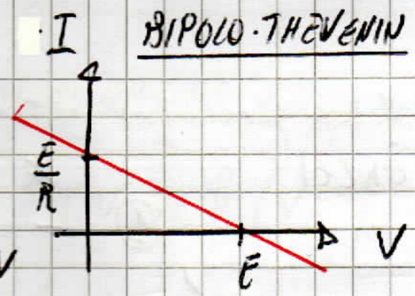
$$V = E - V_R = E - RI$$

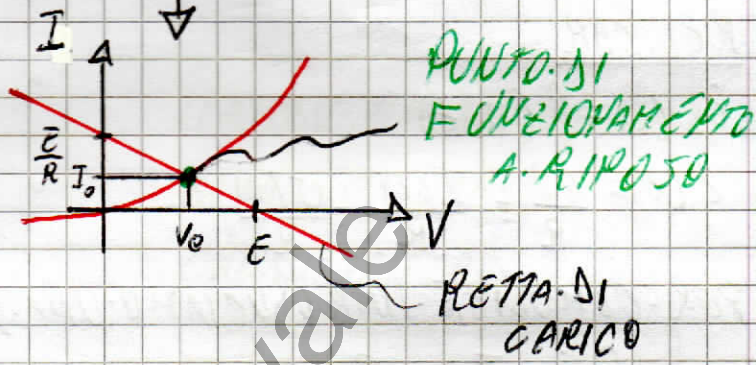
$$I_D = f(V_D)$$

$$I_D = I_0\left(e^{V_D/V_T} - 1\right)$$

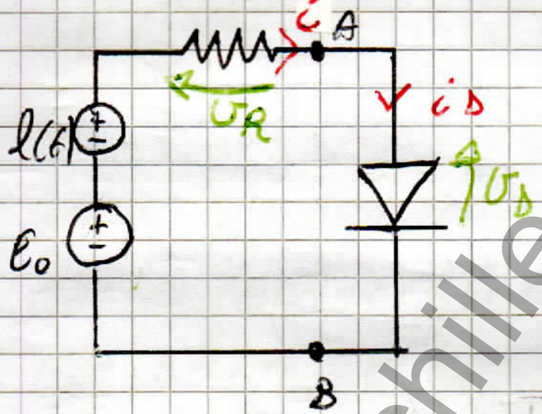
$$\begin{cases} I = I_D & \text{LKC} \\ V = V_D & \text{LKT} \\ V = E - RI \\ I_D = f(V_D) \end{cases} \Bigg\} R_C$$





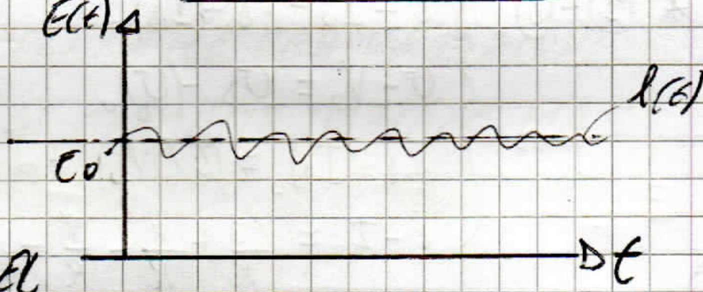


ANALISI PER PICCOLI SEGNALI



$$E(t) = E_0 + e(t)$$

SE $|e(t)| << E_0$



QUINDI SE E CAMBIA NEL TEMPO, ALLORA LA RETTA DEL BIPOLO THEVENIN TRASLA, MA NON CAMBIA IL SUO COEFF. ANGOLARE $\left(\frac{1}{R}\right)$.

MA SI SPOSTA DI MOLTO POCO, E ALLORA LA CARATT. DEL DIODO INTERESSATA DALL'INTERSEZIONE, PUÒ ESSERE CONFUSA CON LA RETTA TANGENTE NEL PUNTO DI RIPOSO.

LKC $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ **PUNTO A RIPOSO**

$$\begin{cases} i(t) = i_D(t) \\ \underline{\text{LKT}} \\ v(t) = v_D(t) \\ \underline{\text{REL. CAR}} \\ i_D(t) = f(v_D(t)) \\ i(t) = \dfrac{E_0}{R} + \dfrac{e(t)}{R} - \dfrac{v(t)}{R} \end{cases} \quad \overset{*}{\underset{\longleftrightarrow}{① - ②}} \quad \begin{cases} I_0 = (I_D)_0 \\ V_0 = (V_D)_0 \\ (I_D)_0 = f((V_D)_0) \\ I_0 = \dfrac{E_0}{R} - \dfrac{V_0}{R} \end{cases}$$

PER COMODITÀ INTRODUCIAMO UNA DECOMP.:

$$* \quad \begin{cases} i = I_0 + \delta i \\ v = V_0 + \delta v \\ i_D = (I_D)_0 + \delta i_D \\ v_D = (V_D)_0 + \delta v_D \end{cases}$$

$$* \quad ① - ② \quad \begin{cases} i - I_0 = i_D - (I_D)_0 \\ v - V_0 = v_D - (v_D)_0 \\ i_D - (I_D)_0 = f((V_D)_0 + \delta v_D) - f(V_{D_0}) \\ i - I_0 = \dfrac{E_0}{R} + \dfrac{e}{R} - \dfrac{V}{R} - \dfrac{E_0}{R} + \dfrac{V_0}{R} \end{cases}$$

$$\Downarrow *$$

$$\begin{cases} \delta i = i_D - (I_D)_0 \\ \delta v = v_D - (v_D)_0 \\ \delta i_D = f((V_D)_0 + \delta v_D) - f(V_{D_0}) \\ \delta i = \dfrac{e}{R} - \dfrac{V}{R} + \dfrac{V_0}{R} \end{cases}$$

DOBBIAMO INTRODURRE LA LINEARIZZAZIONE NELLA 3ª EQ.

$$\begin{cases} \delta i = \delta i_D \\ \delta v = \delta v_D \\ \boxed{\delta i_D = f'(V_0) \cdot \delta v_D} \\ \delta i = \frac{e}{R} - \frac{\delta v}{R} \end{cases}$$

SVILUPPO CON TAYLOR. $V_0 = (V_D)_0$

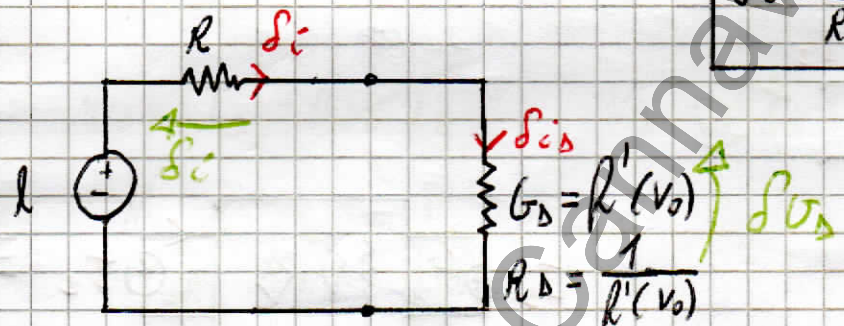
$$f((V_D)_0 + \delta v_D) = f(V_0) + f'(V_0) \cdot \delta v_D$$

REMAINDER

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \dots}$$

IL DIODO, NELLA TERZA EQ: HA LA REL. CAR. DI UNA CONDUTTANZA!!

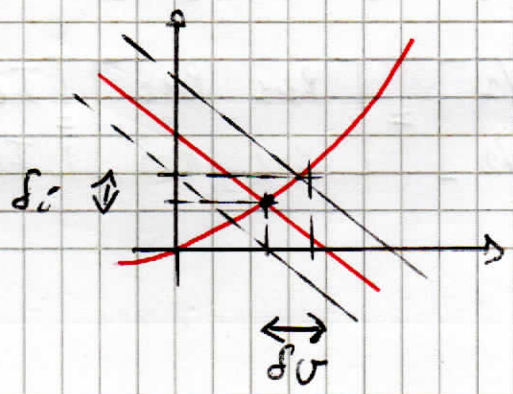
$$\boxed{\delta i = \frac{e}{R + R_D}, \quad \delta v = \frac{R_D \, e}{R + R_D}} \; *$$



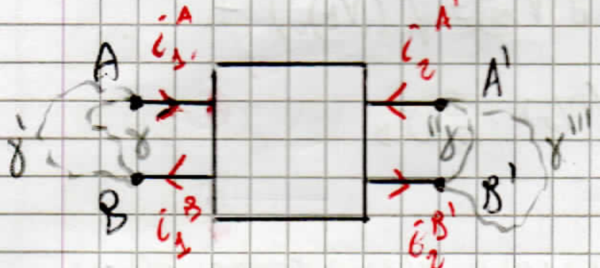
QUINDI ABBIAMO CAPITO CHE IL CIRCUITO ELETTRICO CHE CI PERMETTE DI CALCOLARE LE PERTURBAZIONI (LE DELTA) È UGUALE AL CIRCUITO INIZIALE, MA:

- LE QUANTITÀ COSTANTI VENGONO ELIMINATE (ES. LE BATTERIE COSTANTI);
- I COMPONENTI NON-LINEARI VENGONO LINEARIZZATI.

* CON QUESTI VALORI CONOSCO I PUNTI DI FUNZIONAMENTO ISTANTE PER ISTANTE.



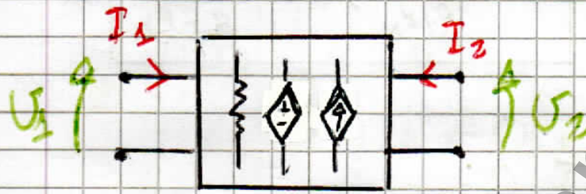
~~DOPPI BIPOLI LINEARI~~



PROPRIETÀ SPECIFICHE:

- $i_1^A = i_1^B$
- $i_2^{A'} = i_2^{B'}$
- $T_{A\gamma B} = T_{A\gamma' B}$
- $T_{A'\gamma'' B'} = T_{A'\gamma''' B'}$

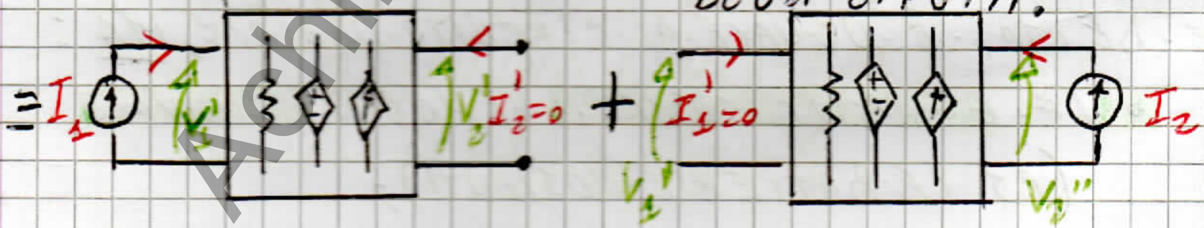
$$\begin{cases} f_1(V_1, V_2, I_1, I_2) = 0 \\ f_2(V_1, V_2, I_1, I_2) = 0 \end{cases}$$



1) RETE LIN.

2) CONTR. IN CORR. SU ENTRAMBE LE PORTE

USO LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.



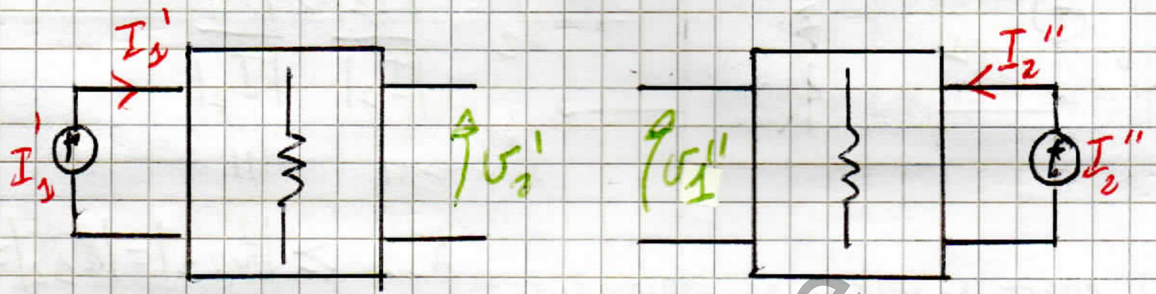
$$\begin{cases} V_1 = V_1' + V_1'' = \alpha' I_1 + \alpha'' I_2 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2 \\ V_2 = V_2' + V_2'' = R_{21} I_1 + R_{22} I_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

3) ASSUMIAMO CHE NELLA RETE NON VI SIANO GENERATORI PILOTATI:

$\Rightarrow$ LA MATRICE DELLE RESISTENZE È INVERTIBILE

USO IL TEOREMA DI RECIPROCITÀ:



$$\frac{V_2'}{I_1'} = \frac{V_1''}{I_2''}$$

$$V_2' = R_{21} \cdot I_1' + \cancel{R_{22} I_2'} \qquad V_1'' = \cancel{R_{11} I_1''} + R_{12} I_2''$$

$$\Rightarrow \quad R_{21} = \frac{V_2'}{I_1'} = \frac{V_1''}{I_2''} = R_{12}$$

QUINDI GLI ELEMENTI DELLA MATRICE FUORI DIAGONALE SONO UGUALI. $\Rightarrow$ LA MATRICE È INVERTIBILE ■

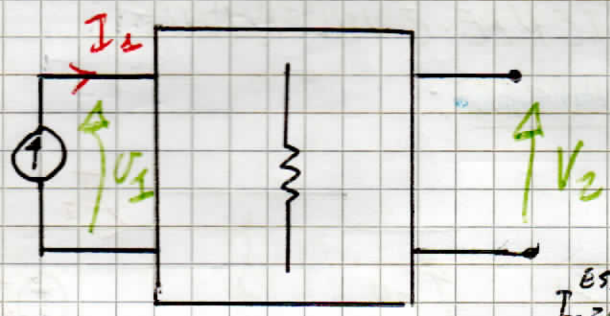
4) ASSUMIAMO CHE IL DISPOSITIVO SIA PASSIVO:

$$P_{ASS} = V_1 I_1 + V_2 I_2 \geq 0 \quad \forall I_1, I_2$$

$$0 \leq P_{ASS} = V_1 I_1 + V_2 I_2 \underset{\substack{es. \\ I_2 = 0}}{=} R_{11} I_1^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow R_{11} \geq 0, \; R_{22} \geq 0$$

SFRUTTO IL TEOREMA DI NON AMPLIFICAZIONE DELLE TENSIONI:



$$\frac{|V_1|}{|I_1|} \geq \frac{|V_2|}{|I_1|}$$

ES. $I_2 = 0 \rightarrow$ ‖ ‖

$$R_{11} \geq |R_{21}| = |R_{12}| = |R_M|$$

$\Rightarrow$ IL COEFF. DI MUTUO ACCOPPIAMENTO È MINORE DI R_{11}

IN MODO ANALOGO CAPIAMO CHE $\Rightarrow$ $R_{22} \geq |R_M|$

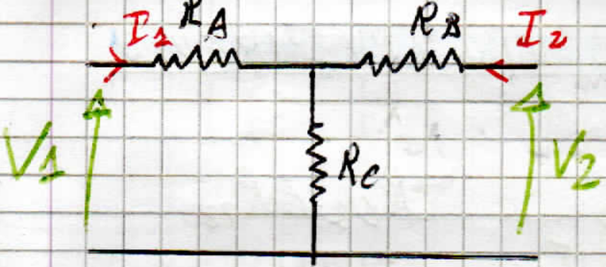
$$\Rightarrow R_{11} = \frac{V_1}{I_1}\bigg|_{I_2=0} \qquad R_{12} = \frac{V_1}{I_2}\bigg|_{I_1=0}$$

$$R_{21} = \frac{V_2}{I_1}\bigg|_{I_2=0} \qquad R_{22} = \frac{V_2}{I_2}\bigg|_{I_1=0}$$

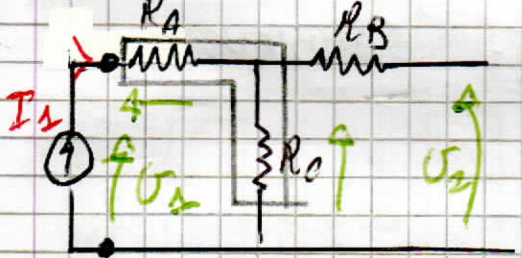
SINTESI DI UN DOPPIO BIPOLO

DEVONO VALERE TUTTE LE IPOTESI DI PRIMA TRANNE L'ULTIMA.

ES.



$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 9\,\Omega & 4\,\Omega \\ 4\,\Omega & 6\,\Omega \end{bmatrix}$$



$$V_1 = V_A + V_C = R_A I_1 + R_C I_1$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{I_1} = R_A + R_C = R_{11}$$

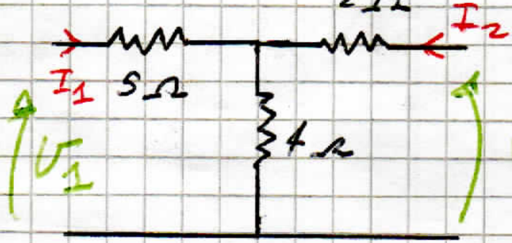
DISCORSO ANALOGO CON $R_{22} = R_C + R_B$

$$V_2 = V_C - \cancel{V_B} = R_C I_1 \Rightarrow \frac{V_2}{I_1} = R_C = R_{12} = R_{21}$$

QUINDI:

$$\underline{R}_T = \begin{bmatrix} (R_A + R_C) & R_C \\ R_C & (R_C + R_B) \end{bmatrix}$$

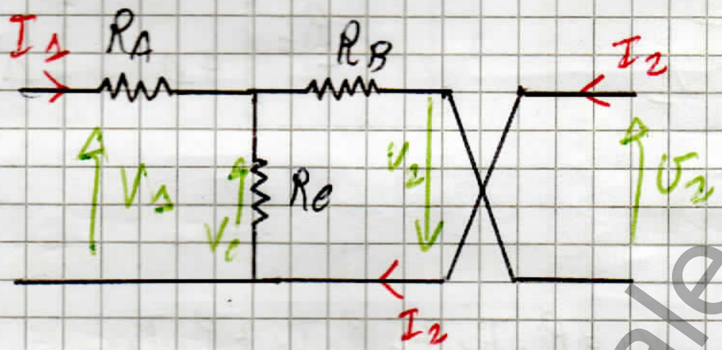
$$\begin{cases} R_A + R_C = 9 \\ R_C = 4 \\ R_C + R_B = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_A = 5\,\Omega \\ R_C = 4\,\Omega \\ R_B = 2\,\Omega \end{cases}$$



NEL CASO IN CUI GLI ELEM. FUORI DIAGONALE SIANO NEGATIVI?

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 9\Omega & -4\Omega \\ -4\Omega & 6\Omega \end{bmatrix}$$

ALLORA SU UNA DELLE DUE PORTE CAPOVOLGIAMO IL RIFERIMENTO

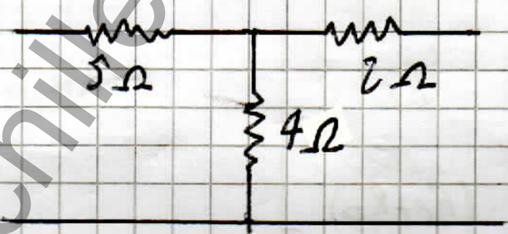


R_{11} E R_{22} NON CAMBIANO

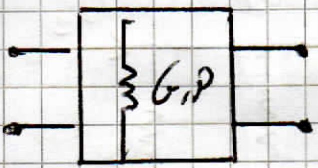
$V_c = R_c I_1 \Rightarrow V_2 = -R_c I_1 = -V_c$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{R}}}_T = \begin{bmatrix} (R_A+R_c) & -R_c \\ -R_c & (R_B+R_c) \end{bmatrix}$$

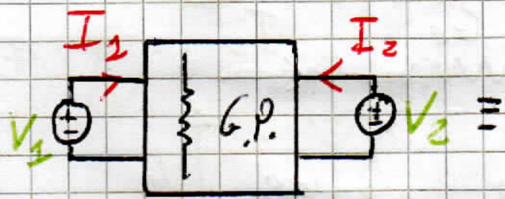
$$\begin{cases} R_A+R_c = 9 \\ -R_c = -4 \\ R_B+R_c = 6 \end{cases} \begin{cases} R_A = 5 \\ R_c = 4 \\ R_B = 2 \end{cases}$$



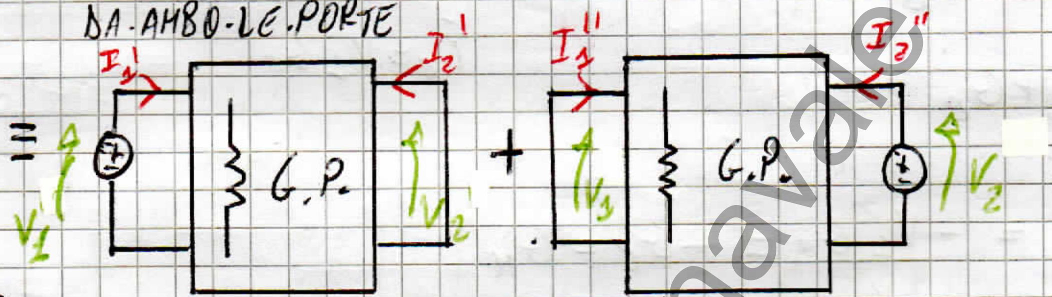
DOPPI BIPOLI CONTROLLATI IN TENSIONE



RETE LINEARE
CONTR. IN TENSIONE
DA AMBO LE PORTE



SOVRAPPOSIZIONE
DEGLI EFFETTI



$$\begin{cases} I_1 = I_1' + I_1'' = G_{11} V_1 + G_{12} V_2 \\ I_2 = I_2' + I_2'' = G_{21} V_1 + G_{22} V_2 \end{cases} \qquad \underline{I} = \underline{\underline{G}}\, \underline{V}$$

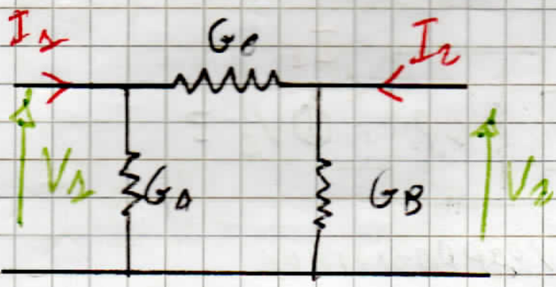
$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

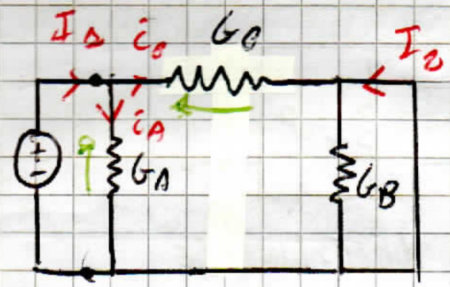
$$G_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad G_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

$$G_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \qquad G_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}$$

$$G_{12} = G_{21} \; ; \; G_{11}, G_{22} \geq 0 \; ; \; G_{11}, G_{22} \geq |G_m|$$

SINTESI DI UN DOPPIO BIPOLO





$$G_{11} = G_A + G_c$$

$$i_A = V_1 G_A$$

$$i_c = V_1 G_c$$

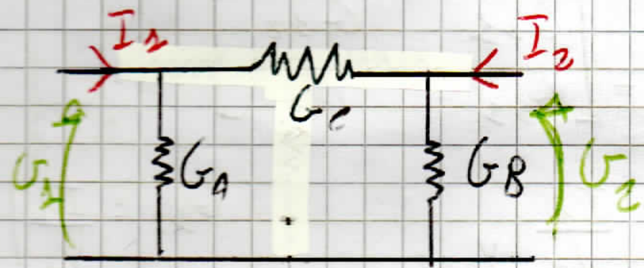
$$G_{22} = G_B + G_c$$

$$G_{12} = \frac{I_2}{V_1} = -\frac{\cancel{V_1} G_c}{\cancel{V_1}} = -G_c = G_M$$

$$\underline{\underline{G}}_\pi = \begin{bmatrix} (G_A+G_c) & -G_c \\ -G_c & (G_B+G_c) \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 7\,S & 3\,S \\ 2\,S & 5\,S \end{bmatrix} *$$

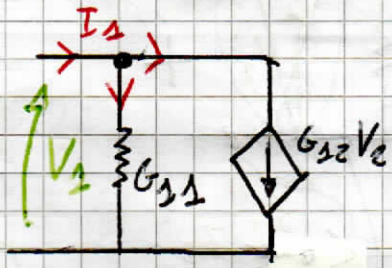


$$\underline{\underline{G}}_\pi = \begin{bmatrix} G_A+G_c & -G_c \\ -G_c & G_B+G_c \end{bmatrix}$$

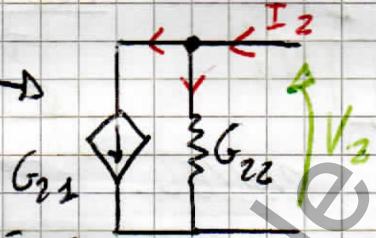
* NON LA POSSO SINTETIZZARE NELLO SCHEMA π PERCHÉ NON È SIMMETRICA.

ALLORA COME POSSO SINTETIZZARLA?

$$\begin{cases} I_1 = G_{11} V_1 + G_{12} V_2 \\ I_2 = G_{21} V_1 + G_{22} V_2 \end{cases} \rightarrow$$



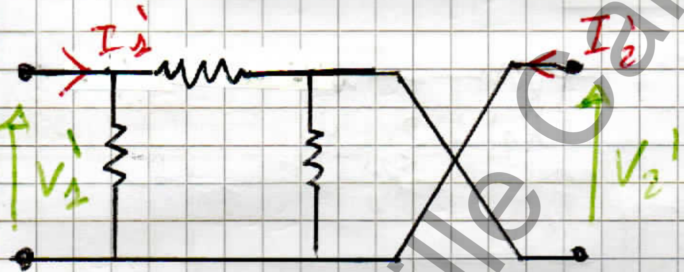
$\rightarrow$



AVREMMO POTUTO SCOMPORRE LA MATRICE COSÌ:

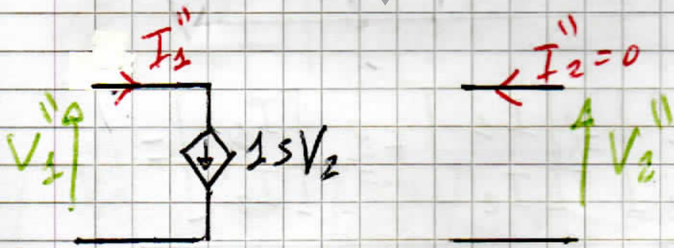
$$= \begin{bmatrix} 7S & 2S \\ 2S & 5S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0S & 1S \\ 0S & 0S \end{bmatrix} = \underline{\underline{G_1}} + \underline{\underline{G_2}}$$

$\underline{\underline{G_1}}$

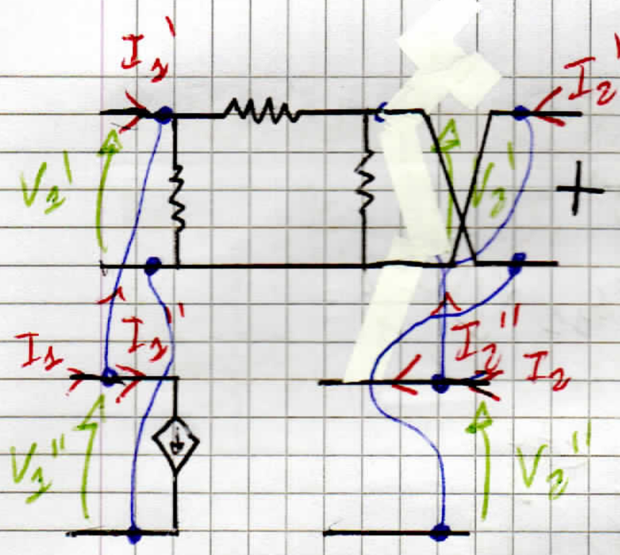


$$\begin{bmatrix} (G_A + G_C) & G_C \\ G_C & G_B + G_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7S & 2S \\ 2S & 5S \end{bmatrix} \quad \begin{cases} G_A = 5S \\ G_B = 3S \\ G_C = 2S \end{cases}$$

$\underline{\underline{G_2}}$



$$\Rightarrow \underline{I} = \underline{\underline{G}}\,\underline{V} = \underbrace{\underline{\underline{G_1}}\,\underline{V}}_{\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix}} + \underbrace{\underline{\underline{G_2}}\,\underline{V}}_{\begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix}}$$

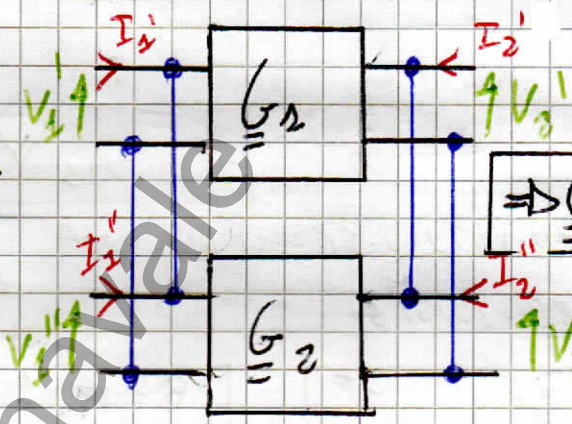


$$I_1 = I_1' + I_1''$$

$$I_2 = I_2' + I_2''$$

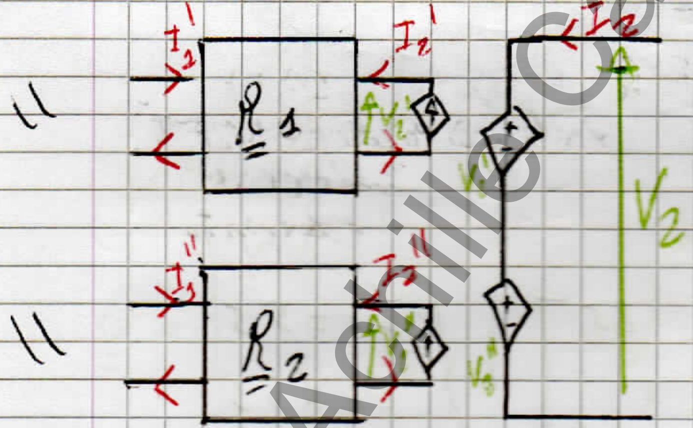
QUINDI IN GENERALE:

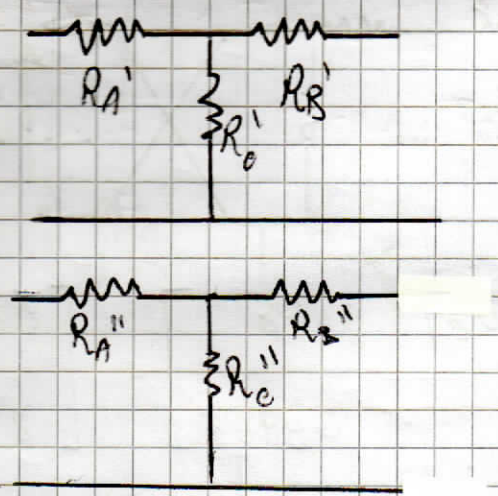
COLLEG. IN PARALLELO



$$\Rightarrow \underline{\underline{G}}_1 + \underline{\underline{G}}_2$$

SERIE MATRICE RESISTENZE





$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1' + V_1'' \\ V_2' + V_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}_1 \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} + \underline{\underline{R}}_2 \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{R}}_1 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \underline{\underline{R}}_2 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = (\underline{\underline{R}}_1 + \underline{\underline{R}}_2) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}}$$

LEGAME TRA $\underline{\underline{R}}$ E $\underline{\underline{G}}$

CONTR. IN CORR. $\Rightarrow \underline{V} = \underline{\underline{R}}\,\underline{I}$

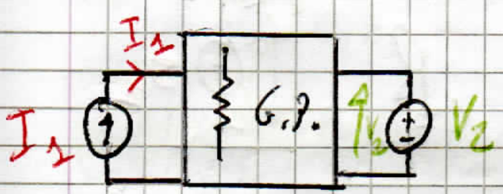
CONTR. IN TENSIONE $\Rightarrow \underline{I} = \underline{\underline{G}}\,\underline{V}$

$\Rightarrow \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{G}}^{-1}, \quad \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{R}}^{-1}$

ALTRI CONTROLLI

$(I_1, V_2) \longrightarrow (I_2, V_1)$

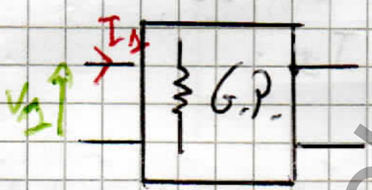
PAR. IBRIDI



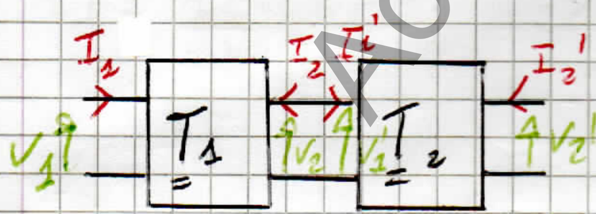
$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

$(I_1, V_1) \longrightarrow (I_2, V_2)$

PERCHÈ POSSIAMO COSTRUIRE $\underline{\underline{T}}$ QUANDO ABBIAMO DOPPI BIPOLI IN CASCATA



$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$



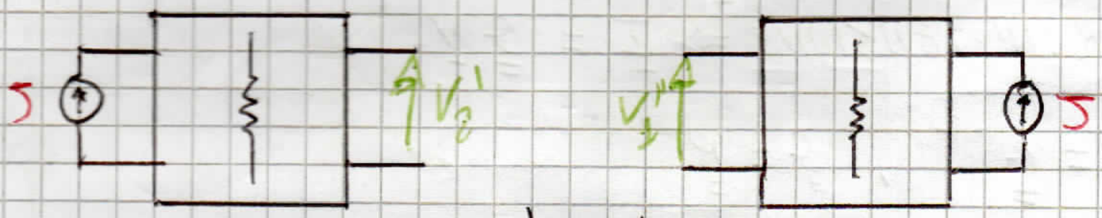
VOGLIO DIMOSTRARE CHE:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_2 \cdot \underline{\underline{T}}_1$$

$$\begin{bmatrix} V_2' \\ -I_2' \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}_2 \begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}_2 \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}_2\,\underline{\underline{T}}_1 \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

RECIPROCITÀ E SIMMETRIA

COMPORTAMENTO RECIPROCO



$$V_2' = V_1'' \Rightarrow R_{12} = R_{21}$$

COMPORTAMENTO SIMMETRICO

$$V_1 = V_2' \Rightarrow R_{11} = R_{22}$$

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2 \\ V_2 = R_{21} I_1 + R_{22} I_2 \end{cases} \rightarrow V_1 = R_{11} J_1 + R_{12} J_2$$

$$\rightarrow V_2' = R_{21} J_2 + R_{22} J_1$$

$$R_{11} J_1 + R_{12} J_2 = R_{21} J_2 + R_{22} J_1$$

$\rightarrow \boxed{R_{11} = R_{22}}$ PER $J_1 = 1$ E $J_2 = 0$

$\rightarrow \boxed{R_{12} = R_{21}}$ PER $J_1 = 0$ E $J_2 = 1$

TROVARE COEFF.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_1 \end{bmatrix} \qquad h_{11} = ??$$

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} V_2 + h_{12} I_1 \\ I_2 = h_{21} V_2 + h_{22} I_1 \end{cases}$$

$$h_{11} = \frac{V_1}{V_2}\bigg|_{I_1=0}$$

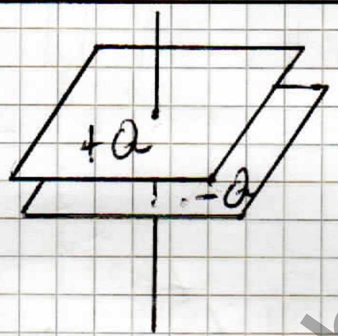
$$h_{21} = \frac{I_2}{V_2}\bigg|_{I_1=0}$$

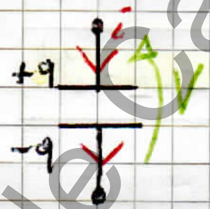
$$h_{12} = \frac{V_1}{I_1}\bigg|_{V_2=0}$$

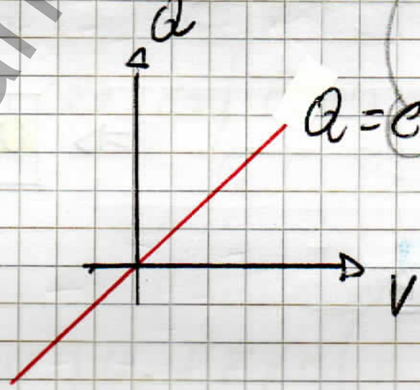
$$h_{22} = \frac{I_2}{I_1}\bigg|_{V_2=0}$$

CONDENSATORE

CAPACITÀ [F]







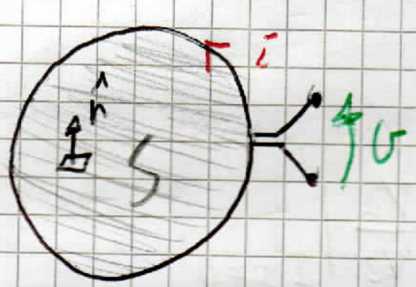
$Q = C \cdot V$

$$1\,F = \frac{1\,COUL}{1\,VOLT}$$

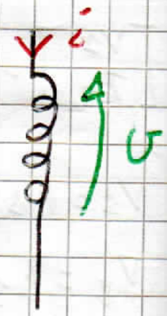
$$i = \frac{d}{dt} Q \Rightarrow i = \frac{d}{dt}(CV) = \cancel{C'V} + CV'$$

$$\Rightarrow \boxed{i = CV'}$$

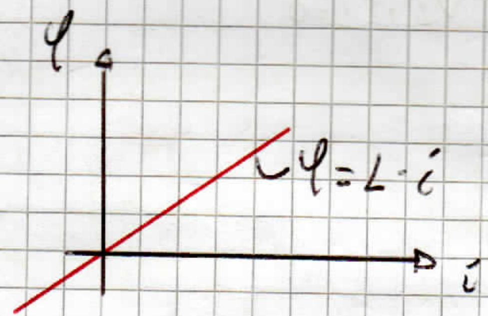
INDUTTORE



$$\varphi = \iint_S \underline{B} \cdot \hat{n} \, dS$$



$$\boxed{\begin{gathered} v = \frac{d}{dt} \varphi \\ f(i, \varphi) = 0 \end{gathered}}$$



$[L] = [\text{INDUTTANZA}] = H$

$$v = \frac{d}{dt}(L \cdot i) = \cancel{L' i} + L i' \Rightarrow$$

cost

$$\Rightarrow \boxed{v = L \cdot i'}$$

MEMORIA

$$i_c = C v_c' \rightarrow v_c' = \frac{i_c}{C} \rightarrow \int_{-\infty}^{t} \frac{i_c}{C}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} v_c'(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow v_c(t) - \cancel{v_c(-\infty)} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_c(\tau) d\tau$$

0

$$\hookrightarrow \boxed{v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_c(\tau) d\tau} =$$

$$= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_c(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i_c(\tau) d\tau = \boxed{v_c(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i_c(\tau) d\tau}$$

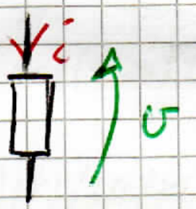
$$v_L = L \cdot i_L' \Rightarrow i_L' = \frac{v_L}{L} \Rightarrow \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} i_L'(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow i_L(t) - \underbrace{\cancel{i_L(-\infty)}}_{0} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)\,d\tau$$

$$\hookrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)\,d\tau =$$

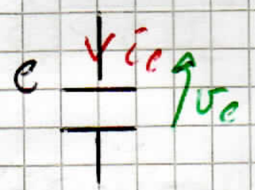
$$= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v_L(\tau)\,d\tau + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(\tau)\,d\tau = v_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(\tau)\,d\tau$$

ENERGIA



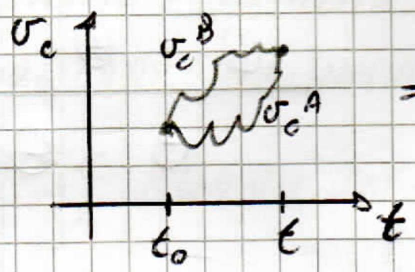
$[t_0, t]$

$$W(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,i(\tau)\,d\tau$$



$$W_C(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} (C v_C')\, v_C\, d\tau = C\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left(\frac{v_C^2}{2}\right) d\tau =$$

$$= \boxed{\frac{C}{2}\left[v_C^2(t) - v_C^2(t_0)\right]}$$



$\Rightarrow$ HANNO LA STESSA ENERGIA.

1) MASSIMA ENERGIA $= W_{MAX} = \frac{1}{2} C v_C^2(t)$

2) PER $t_0 = -\infty$

$$W_c(-\infty, t) = \frac{1}{2} C v_c^2(t)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} C v_c^2}$$

3) MASSIMA ENERGIA ESTRAIBILE

$$\tilde{W}_c(t_0, t) = \frac{1}{2} C v_c^2(t_0) - \frac{1}{2} C v_c^2(t)$$

$$\Rightarrow \max \tilde{W}_c = \frac{1}{2} C v_c^2(t_0)$$

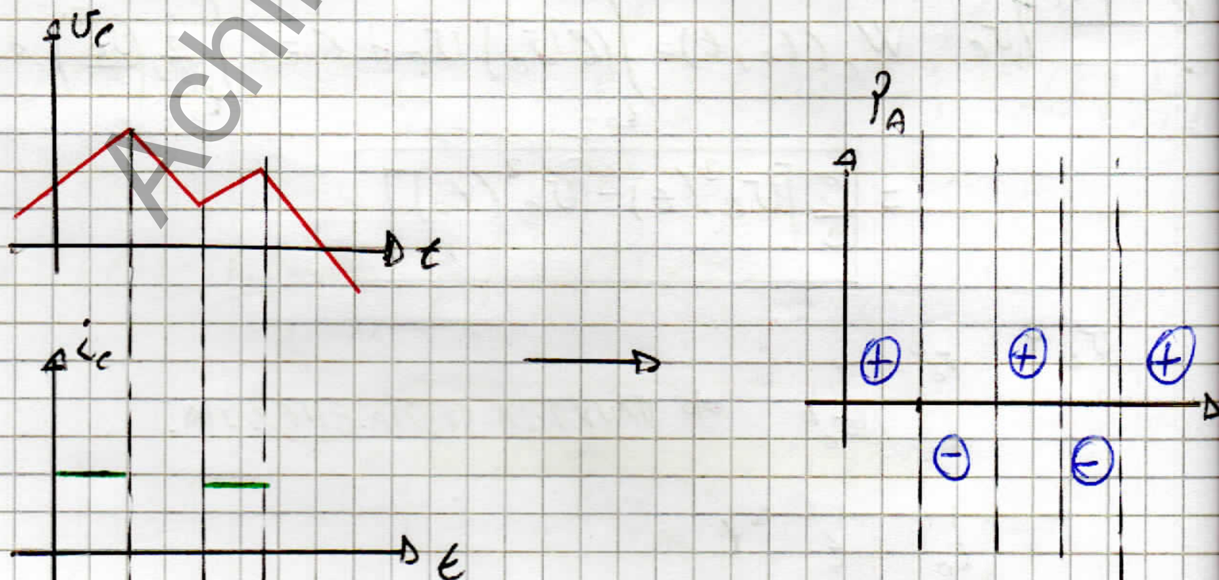
PER L'INDUTTORE IL DISCORSO È DUALE:

$$W_L(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} v_L i_L \, d\tau = \int_{t_0}^{t} (L i_L') i_L \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} L \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}(i_L^2) \, d\tau = \frac{1}{2} L i_L(t_0)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i_L^2}$$

PASSIVITÀ



DICIAMO CHE UN DIPOLO (UTILIZZ.) SIA PASSIVO:

$$- \mathcal{E}_{ASS}(-\infty, t) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\, i(\tau)\, d\tau \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

VERIFICA ①

$$\int_{-\infty}^{t} p_a(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} R\, i^2(\tau)\, d\tau \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

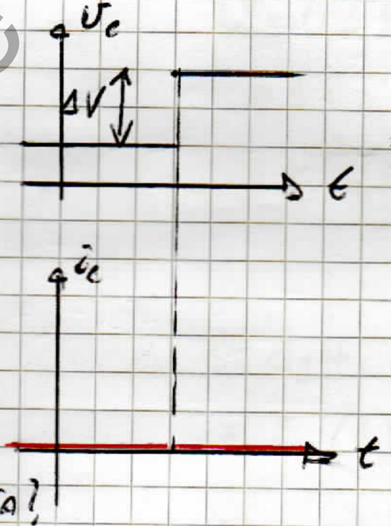
VERIFICA ②

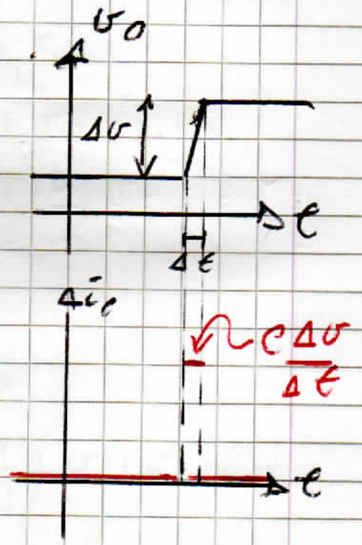
$$W_{C\,ASS}(-\infty, t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

$$W_{L\,ASS}(-\infty, t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

CONTINUITÀ

$$i_C = C v_C'$$



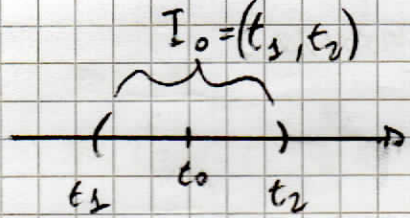


PER $\Delta t \to 0$, IL RAPPORTO $i_C = C \frac{\Delta v}{\Delta t}$ VA ALL'INFINITO.

ABBIAMO LA POSSIBILITÀ DI DARE CORRENTE INFINITA?

NO! $\Rightarrow$ QUINDI NON POSSONO ESSERCI SALTI

$\Rightarrow$ v_C DEVE ESSERE CONTINUA.



SUPPONGO CHE LA CORRENTE SIA LIMITATA.

↳ $|i_C(t)| \leq M_0, \ \forall t \in I_0$

ENUNCIATO: $\lim_{t \to t_0} v_C(t) = v_C(t_0) \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} |v_C(t) - v_C(t_0)| = 0$

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\tau)\,d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |v_C(t) - v_C(t_0)| = \frac{1}{C}\left|\int_{t_0}^{t} i_C(\tau)\,d\tau\right| \leq \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} |i_C(\tau)|\,d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} M_0\,d\tau = \frac{M_0}{C}(t - t_0) \xrightarrow[t \to t_0]{} 0 \quad \blacksquare$$

$\uparrow$ $t < t_2$

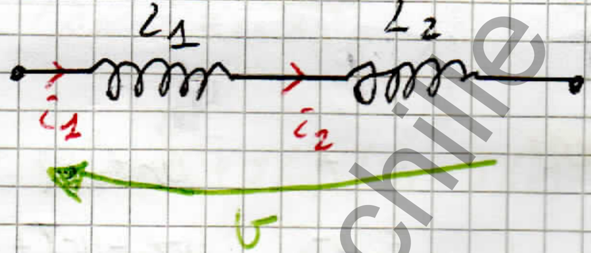
PER L'INDUTTORE VALE IL DISCORSO ANALOGO.

CONDENSATORI E INDUTTORI STAZIONARI

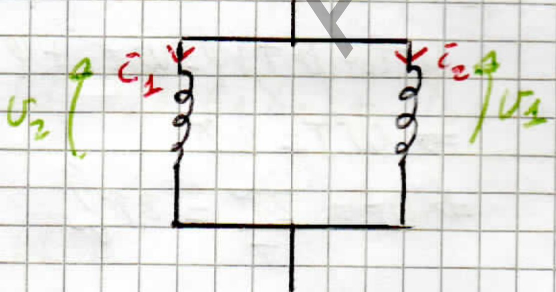
$i_C = C v_C'$, v_C cost. $\Rightarrow i_C = 0 =$ 

$v_L = L i_L'$, i_L cost. $\Rightarrow v_L = 0 =$ 

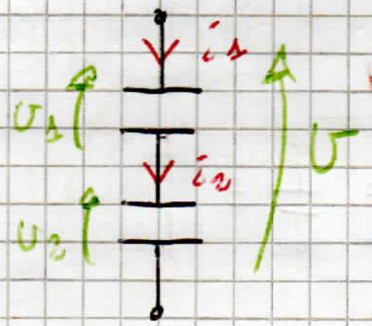
SERIE E PARALLELO



$$v = v_1 + v_2 = L_1 i_1' + L_2 i_2' = i'(L_1 + L_2)$$

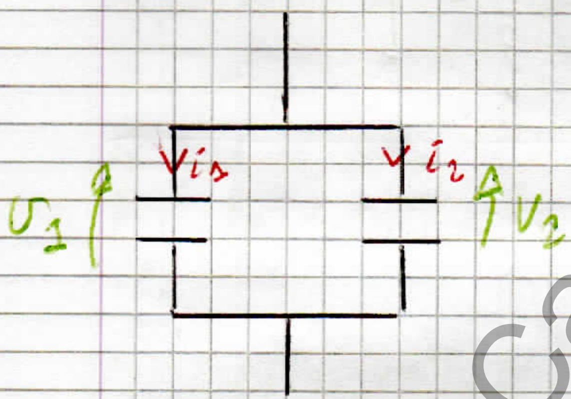


$$i = i_1 + i_2 = i_1(t_0) + \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v_1(\tau)\,d\tau + i_2(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v_2(\tau)\,d\tau = i(t_0) + \underbrace{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}_{\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$



$$v = v_1 + v_2 = v_1(t_0) + \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i_1(\tau)\,d\tau + v_2(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i_2(\tau)\,d\tau =$$

$$= v(t_0) + \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}_{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau$$



$$i = i_1 + i_2 = C_1 v_1' + C_2 v_2' =$$

$$= (C_1 + C_2)\, v'$$

RICHIAMI

FUNZ. SINUSOIDALI

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$$

FASE

AMPIEZZA

PULSAZIONE ANGOLARE

↓

RAPIDITÀ DELLA RIPETIZIONE

$t_0 \qquad \omega t_0 + \varphi$

$t_0 + T \qquad \omega t_0 + \omega T + \varphi$

$$\cancel{\omega t_0} + \omega T + \cancel{\varphi} = \cancel{\omega t_0} + \cancel{\varphi}$$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi$$

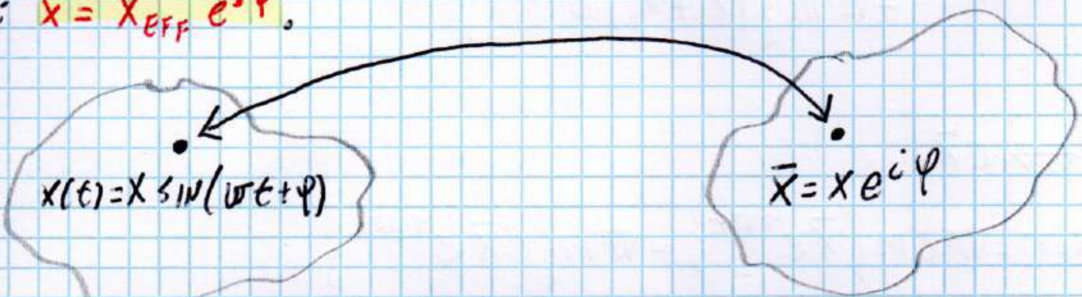
$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$X_M \sin(\omega t - \omega t_0)\Big|_{\varphi = -\omega t_0} = X_M \sin(\omega(t - t_0))$$

$$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$$

REGIME SINUSOIDALE PERMANENTE

PER UNA FISSATA PULSAZIONE ω, VIENE ASSOCIATO AD OGNI FUNZIONE SINUSOIDALE DEL TIPO: $x(t) = \sqrt{2}\, X_{EFF} \sin(\omega t + \varphi)$, UN NUMERO COMPLESSO DEL TIPO: $\bar{X} = X_{EFF}\, e^{j\varphi}$.



QUESTA È UN'ASSOCIAZIONE BIUNIVOCA, POSSIAMO DIMOSTRARLO IN DUE PASSI:

- $x(t) \rightarrow \bar{V} \leftarrow y(t)$
- $\bar{X} \leftarrow v(t) \rightarrow \bar{Y}$

$$x(t) = \sqrt{2}\, X \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow X e^{j\varphi} = \bar{V} = Y e^{j\psi} = \sqrt{2}\, Y \sin(\omega t + \psi) = y(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |X e^{j\varphi}| = |Y e^{j\psi}| \Rightarrow |X||e^{j\varphi}| = |Y||e^{j\psi}| \Rightarrow |X| = |Y| \\ \Rightarrow \angle X e^{j\varphi} = \angle Y e^{j\psi} \Rightarrow \angle X + \varphi = \angle Y + \psi \Rightarrow \angle X = \angle Y \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = y(t)$$

$$\sqrt{2}\, \mathrm{Im}\{\bar{X} e^{j\omega t}\} = v(t) = \sqrt{2}\, \mathrm{Im}\{\bar{Y} e^{j\omega t}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{PER } t = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\, \mathrm{Im}\{\bar{X}\} = \sqrt{2}\, \mathrm{Im}\{\bar{Y}\} \Rightarrow \bar{X}_{Im} = \bar{Y}_{Im} \\ \text{PER } \omega t = \pi/2 \Rightarrow \mathrm{Im}\{\bar{X} j\} = \mathrm{Im}\{\bar{Y} j\} \Rightarrow \bar{X}_R = \bar{Y}_R \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{X} = \bar{Y}$$

RICORDIAMO CHE:

$$z_1/z_2 = \frac{z_1}{z_2 \cdot z_2^*} \cdot z_2^* = \frac{(a_1 + j b_1)(a_2 - j b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z_2 \cdot z_2^* = a_2^2 + b_2^2 = |z_2|^2$$

$$z = |z| e^{i\theta}, \quad \theta = \angle z$$

$$\theta = \mathrm{ATAN}\left(\frac{b}{a}\right) + \begin{cases} 0, & a > 0 \\ \pi, & a < 0 \end{cases}$$

FASORE DELLA SOMMA, MOLTIPLICAZIONE PER UNA COSTANTE, DERIVATA

$x_1(t)+x_2(t) \Leftrightarrow \bar{X}_1+\bar{X}_2$

$$x_1(t)+x_2(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\bar{X}_1 e^{j\omega t}\right\}+\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\bar{X}_2 e^{j\omega t}\right\}=$$
$$=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\left(\bar{X}_1+\bar{X}_2\right)e^{j\omega t}\right\}$$

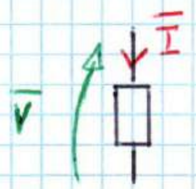
$c\,x(t) \Leftrightarrow c\bar{X}$

$$c\,x(t)=\sqrt{2}\,c\,\mathrm{Im}\left\{\bar{X}e^{j\omega t}\right\}=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{c\bar{X}e^{j\omega t}\right\}$$

$x'(t) \Leftrightarrow (j\omega)\bar{X}$

$$x(t)=\sqrt{2}\left\{X\sin(\omega t+\varphi)\right\} \Rightarrow \bar{X}=Xe^{j\varphi}$$
$$x'(t)=\sqrt{2}\left\{X\cos(\omega t+\varphi)\cdot\omega\right\}=\sqrt{2}\,X\omega\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X\omega e^{j\varphi+\pi/2}=\omega Xe^{j\varphi}\cdot e^{\pi/2}=(j\omega)Xe^{j\varphi}=(j\omega)\bar{X}$$

IMPEDENZE



SI PARLA DI IMPEDENZA SE IL RAPPORTO:

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}}=\text{È COSTANTE}=\dot{Z}$$

	$\omega \to 0$	$\omega \to \infty$
	$\bar{V}_L \to 0$ (———)	$\bar{I}_L \to 0$ (—• •—)
	$\bar{I}_C \to 0$ (—• •—)	$\bar{V}_C \to 0$ (———)

$\dot{Z}^* = \dot{Y} =$ AMMETTENZA

$\dot{Z} = R + jX$

↳ R È LA RESISTENZA ASSOCIATA ALL'IMPEDENZA $\dot{Z}$

X È LA REATTANZA ASSOCIATA ALL'IMPEDENZA $\dot{Z}$

$\dot{Y} = G + jB$

↳ G È LA CONDUTTANZA ASSOCIATA ALL'AMMETTENZA $\dot{Y}$

B È LA SUSCETTANZA ASSOCIATA ALL'AMMETTENZA $\dot{Y}$.

SE $\dot{Z} \neq 0 \Rightarrow \dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{R}{R^2+X^2} \\ B = -\frac{X}{R^2+X^2} \end{cases}$

IN PARTICOLARE:

$\dot{Z}_R = R$ — $\dot{Y}_R = \frac{1}{R}$

REATTANZA CAPACITIVA

$\dot{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = -j X_C$ — $\dot{Y}_C = j\omega C$

$\dot{Z}_L = j\omega L = j X_L$ REATTANZA INDUTTIVA — $\dot{Y}_L = -\frac{j}{\omega L}$

FASE

$\dot{Z} = |\dot{Z}| e^{j\varphi}$

$\varphi = \angle \dot{Z}$

$\bar{V} = V e^{j\alpha}$

$\bar{I} = I e^{j\beta}$

OSS. ① $|\bar{V}| = |\dot{Z}|\,|\bar{I}|$

OSS. ② $\angle \bar{V} = \angle \dot{Z} + \angle \bar{I} \Rightarrow \alpha = \varphi + \beta$

QUINDI φ PRENDE IL NOME DI SFASAMENTO TRA $\bar{V}$ E $\bar{I}$.

$\pi > \angle \dot{Z} > 0 \Rightarrow$ ANTICIPO DI FASE $(X>0)$

$\angle \dot{Z} = 0 \Rightarrow$ IN FASE $(X=0,\ R>0)$

$-\pi < \angle \dot{Z} < 0 \Rightarrow$ RITARDO DI FASE $(X<0)$

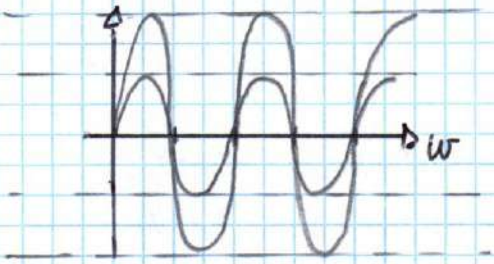
$\angle \dot{Z} = \pi \Rightarrow$ IN OPPOSIZIONE DI FASE $(X=0,\ R<0)$

NEL TEMPO... $v(t) = \sqrt{2}\, V \sin(\omega(t - t_0))$, $t_0 = -\alpha/\omega$

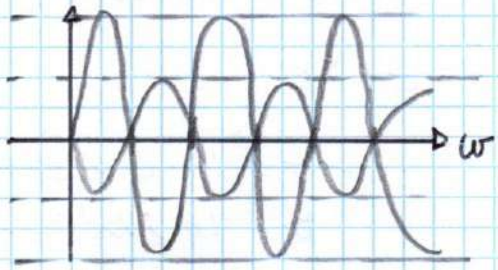
$i(t) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega(t - t_0))$, $t_0 = -\beta/\omega$

$$\alpha = \beta + \varphi$$

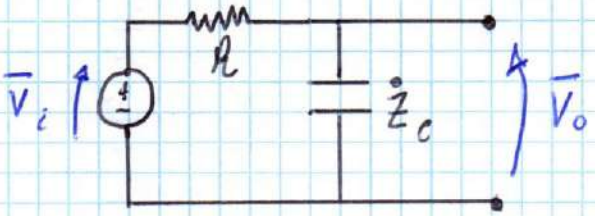
PER $\varphi = 0$



PER $\varphi = \pi$



FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

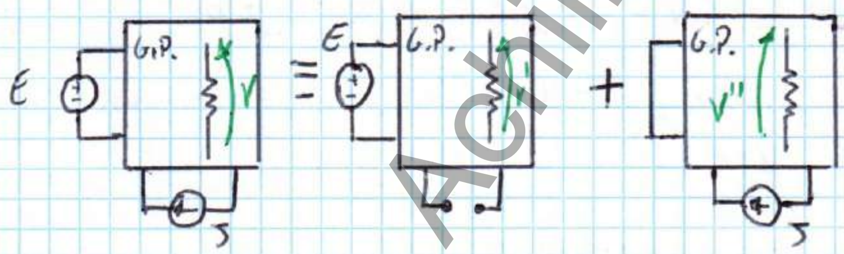


$$\bar{V}_o = \frac{\dot{Z}_c}{R + \dot{Z}_c}\bar{V}_i = \frac{1}{j\omega c} \cdot \frac{1}{\left(R + \frac{1}{j\omega c}\right)}\bar{V}_i =$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega Rc}\bar{V}_i$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{1}{1 + j\omega Rc} = \text{FUNZIONE DI TRASFERIMENTO } H(\omega)$$

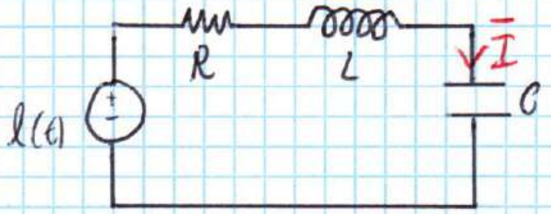
ESEMPIO



$$\Rightarrow \bar{V} = C_E \bar{E} + C_J \bar{J} =$$

$$= H_E(\omega)\bar{E} + H_J(\omega)\bar{J}$$

CIRCUITO RISONANTE SERIE



$e(t) = \sqrt{2}\, E \cdot \sin(\omega t)$

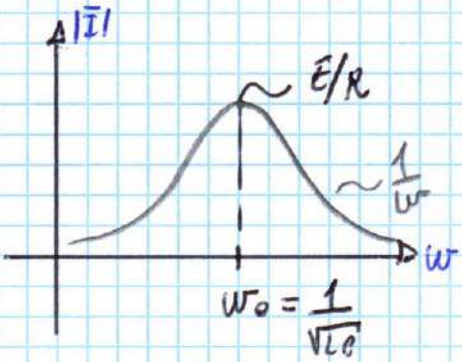
$\bar{E} = E$ · FISSATA

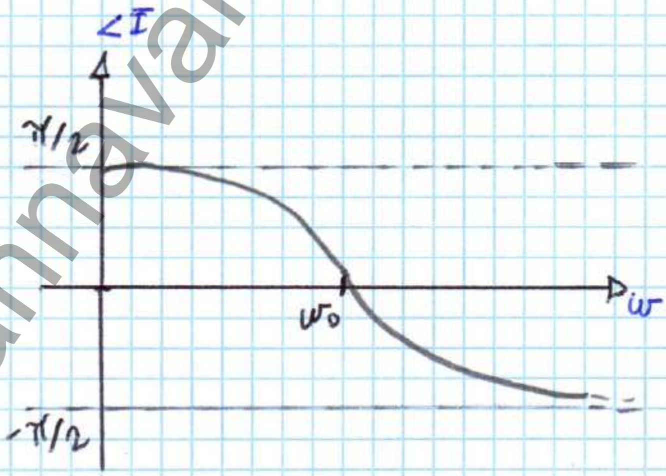
ω · VARIA

$\angle \bar{E} = 0$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C + \dot{Z}_L} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = \frac{\bar{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$|\bar{I}| = \frac{\bar{E}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad \angle \bar{I} = \angle \bar{E} - \mathrm{ATAN}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)$$





PULSAZIONE DI RISONANZA

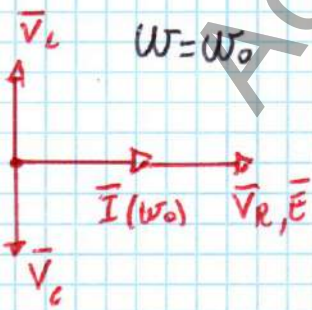
$$\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L$$

$|\bar{V}_C| = |\dot{Z}_C||\bar{I}_C| = \frac{1}{\omega C}\bar{I} = \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{E}{R}$

IN. RISON. $\Rightarrow |\bar{V}_C| = |\bar{V}_L|$

$|\bar{V}_L| = |\dot{Z}_L||\bar{I}_L| = \omega_0 L \cdot \frac{E}{R}$

$|\bar{V}_R| = R\bar{I}$, $|\bar{V}_E| = |\bar{V}_R| + \cancel{|\bar{V}_L|} + \cancel{|\bar{V}_C|}$

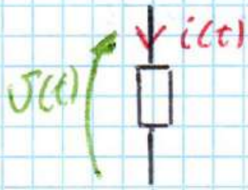


$$\frac{V_C}{E} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{R}$$

$\rightarrow$ Q FATTORE DI QUALITÀ

POTENZA NEL REGIME SIN. PERM.

DATO UN GENERICO BIPOLO IN REGIME SINUSOIDALE PERMANENTE CON LA CONVENZIONE DELL'UTILIZZATORE:



DOVE:

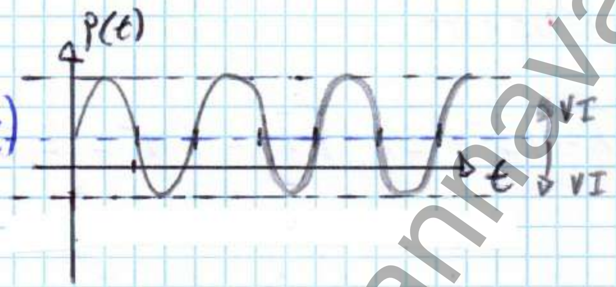
$$v(t) = \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \varphi_V)$$
$$i(t) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \varphi_I)$$

DEFINIAMO LA POTENZA ISTANTANEA ASSORBITA COME:

$$\boxed{\begin{aligned} p(t) &= v(t)\cdot i(t) = 2VI\sin(\omega t+\varphi_V)\sin(\omega t+\varphi_I) = \\ &= VI\left[\cos(\varphi_V-\varphi_I)-\cos(2\omega t+\varphi_V+\varphi_I)\right] \end{aligned}} \quad *$$

$P = VI\cos(\varphi_V - \varphi_I)$

POTENZA ATTIVA O MEDIA



DEFINIAMO INOLTRE LA POTENZA MEDIA COME:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T VI\cos(\varphi_V-\varphi_I) - VI\cos(2\omega t+\varphi_V+\varphi_I)\,dt =$$
$$= \frac{1}{T}\, VI\cos(\varphi_V-\varphi_I)\cdot T = VI\cos(\varphi_V-\varphi_I)$$

CONTINUANDO DA (*) $= VI\left[\cos(\varphi_V-\varphi_I) - \cos(2\omega t + 2\varphi_I + \varphi_V - \varphi_I)\right] =$

$$= VI\left[\cos(\varphi_V-\varphi_I) - \cos(2\omega t+2\varphi_I)\cos(\varphi_V-\varphi_I) + \right.$$
$$\left. + \sin(2\omega t+2\varphi_I)\cdot\sin(\varphi_V-\varphi_I)\right] =$$

$$= \underbrace{VI\cos(\varphi_V-\varphi_I)}_{P}\left[1-\cos(2\omega t+2\varphi_I)\right] + \underbrace{VI\sin(\varphi_V-\varphi_I)}_{Q}\sin(2\omega t+2\varphi_I)$$

POTENZA REATTIVA

POTENZA COMPLESSA

DEFINIAMO IL QUESTO MODO LA POTENZA COMPLESSA:

$$\bar{A} = P + jQ = \bar{V}\bar{I}^*$$

E IN GENERE IL SUO MODULO, VIENE CHIAMATO POTENZA APPARENTE:

$$|\bar{A}|^2 = P^2 + Q^2$$

DIMOSTRIAMO LA DEFINIZIONE COSÌ:

$$\bar{V}\bar{I}^* = (Ve^{j\varphi_V})(Ie^{j\varphi_I})^* = VIe^{j(\varphi_V - \varphi_I)} =$$

$$= VI[\cos(\varphi_V - \varphi_I) + j\sin(\varphi_V - \varphi_I)] = P + jQ \quad \boxtimes$$

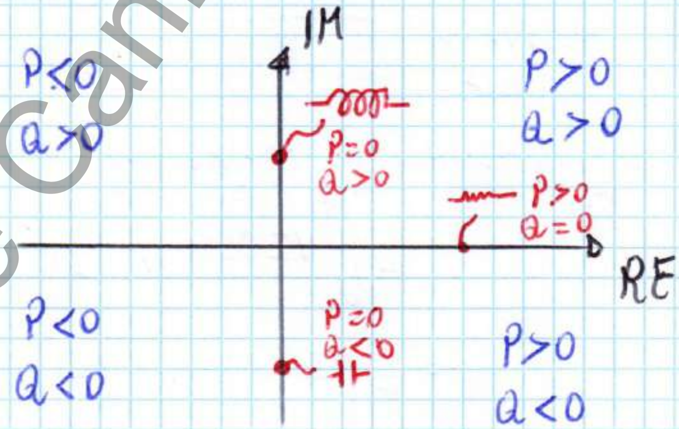
POTENZA COMPLESSA DI UN'IMPEDENZA

$$\dot{Z} \qquad \bar{V} = \dot{Z}\bar{I} \qquad \bar{I} = \dot{Y}\bar{V} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \bar{V}\bar{I}^* = \dot{Z}\bar{I}(\dot{Y}\bar{V})^* = \dot{Y}V^2 = \dot{Z}I^2$$

$$\bar{A} = RI^2 = \frac{1}{R}V^2$$

$$\bar{A} = j\omega LI^2 = \frac{j}{\omega L}V^2$$

$$\bar{A} = -\frac{j}{\omega C}I^2 = -j\omega CV^2$$



ENERGIA IN COMP. CON MEMORIA

SAPENDO CHE:

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L\, i^2(t), \quad \mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C\, v^2(t)$$

CALCOLO L'ENERGIA MEDIA DELL'INDUTTORE:

$$\langle \mathcal{E}_L \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{E}_L\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} L \left(2 I^2 \sin^2(\omega t + \varphi_I)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{T} L I^2 \int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t - 2\varphi_I)}{2}\, dt = \frac{L I^2}{2}$$

QUINDI $\bar{A}_L = \dot{Z}\,\bar{I}^2 = j\omega L\, \bar{I}^2 = j\omega\, 2\langle \mathcal{E}_L \rangle$

PROCEDIMENTO ANALOGO PER IL CONDENSATORE:

$$\langle \mathcal{E}_C \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{E}_C\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} C \left(2 V^2 \sin^2(\omega t + \varphi_V)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{T} C V^2 \int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t - 2\varphi_V)}{2}\, dt = \frac{C V^2}{2}$$

QUINDI $\bar{A}_C = \dot{Z}\,\bar{I}^2 = -\frac{j}{\omega C}\cdot \bar{I}^2 = -j\omega C\, V^2 = -j\omega \cdot 2\langle \mathcal{E}_C \rangle$

TEOREMA DI TELLEGEN

FATTA QUESTA CONSIDERAZIONE:

$$\underline{\underline{A}}_R \cdot \underline{i}(t) = \underline{0} \longrightarrow \underline{\underline{A}}_R \cdot \underline{\bar{I}} = 0$$

$$\underline{V}(t) = \underline{\underline{A}}_R^T\, \underline{e}(t) \longrightarrow \underline{\bar{V}} = \underline{\underline{A}}_R^T \cdot \underline{\bar{e}}$$

DICO CHE:

$$\sum_k^L \bar{A}_k = 0 \rightarrow \sum_k^L \bar{V}_k\, \bar{I}_k^* = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\bar{V}}^T \cdot \underline{\bar{I}}^* = 0$$

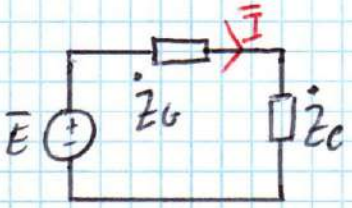
~~DIMOSTRAZIONE~~

$$\underline{\underline{A}}_R \cdot \underline{\bar{I}}^* = 0, \quad \underline{\bar{V}}^T \cdot \underline{\bar{I}}^* = (\underline{\bar{e}} \cdot \underline{\underline{A}}_R^T)\cdot \underline{\bar{I}}^* = \underline{\bar{e}}^T \underbrace{\underline{\underline{A}}_R\, \underline{\bar{I}}^*}_{0} = 0 \quad \blacksquare$$

È FACILE ANCHE DIMOSTRARE CHE SI CONSERVANO ANCHE LA POTENZA ATTIVA E QUELLA REATTIVA.

$$0 = \sum_k^L (P_k + j Q_k) = \underbrace{\sum_k^L P_k}_{\Downarrow\ 0} + j \underbrace{\sum_k^L Q_k}_{\Downarrow\ 0} \quad \blacksquare$$

TEOREMA DI MASSIMO TRASFER. DI POTENZA



ENUNCIATO: PER AVERE LA POTENZA MASSIMA $\Rightarrow \dot{Z}_C = \dot{Z}_G^*$

DIMOSTRAZIONE:

$\dot{Z}_C = R_C + j X_C$

$\dot{Z}_G = R_G + j X_G$

$$\Rightarrow P_C = R_C \bar{I}^2 = R_C \left| \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_G} \right|^2 = R_C \frac{E^2}{(R_C+R_G)^2+(X_C+X_G)^2}$$

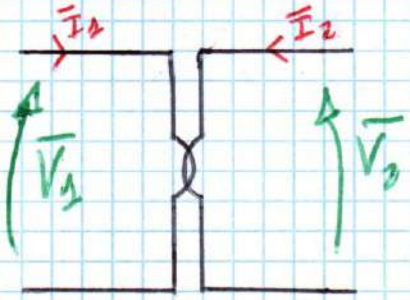
PER RENDERE LA FRAZIONE MASSIMA, $X_C = -X_G \Rightarrow R_C \dfrac{E^2}{(R_C+R_G)^2}$

QUINDI:

$$\begin{cases} X_C = -X_G \\ R_C = R_G \end{cases} \Rightarrow \dot{Z}_C = \dot{Z}_G^*$$

$$R_C = R_G \longrightarrow \frac{E^2}{4R_G} \quad \blacksquare$$

TRASFORMATORE IDEALE



RELAZIONE CARATTERISTICA:

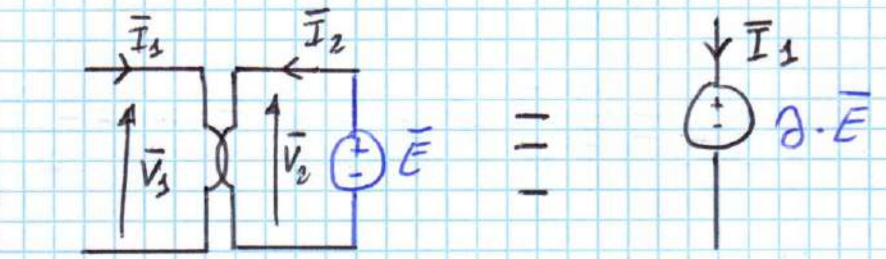
$$\begin{cases} \bar{V}_1 = a\,\bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = -\dfrac{1}{a}\,\bar{I}_2 \end{cases}$$

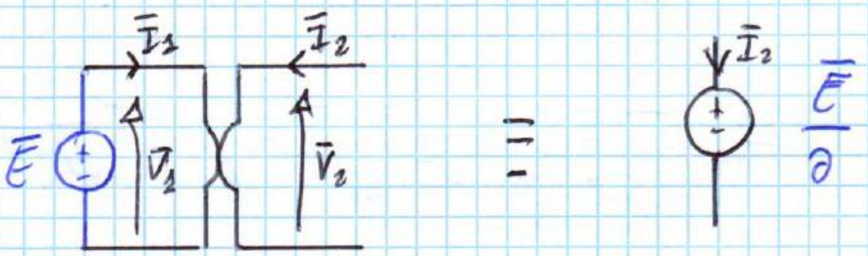
È POSSIBILE DIMOSTRARE CHE IL TRASFORMATORE NON ASSORBE POTENZA:

$$\bar{A} = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \frac{\bar{V}_1}{a}\left(-a\bar{I}_1^*\right) = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* - \bar{V}_1 \bar{I}_1^* = 0 \quad \blacksquare$$

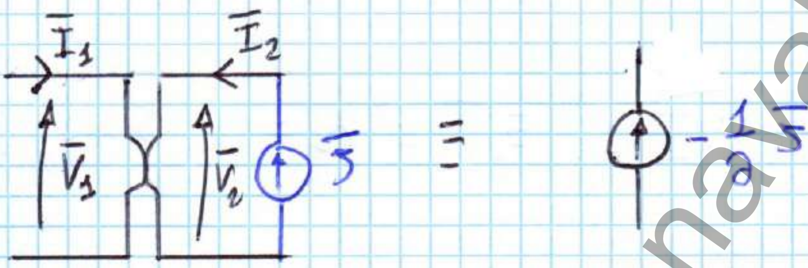
LA PROPRIETÀ PIÙ IMPORTANTE DEL TRASFORMATORE IDEALE È CHE IN BASE AL COMPONENTE CONNESSO SU UNA DELLE DUE PORTE, IL TUTTO PUÒ ESSERE SINTETIZZATO CON UN BIPOLO EQUIVALENTE.

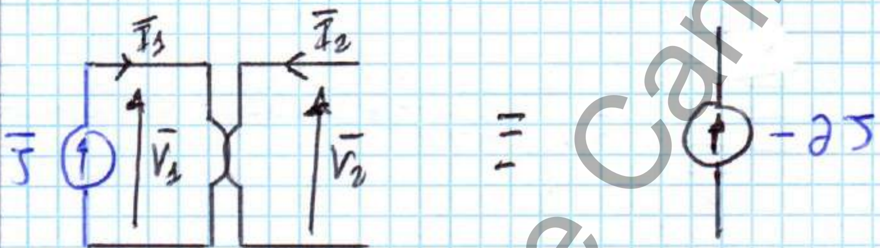
GENERATORE DI TENSIONE



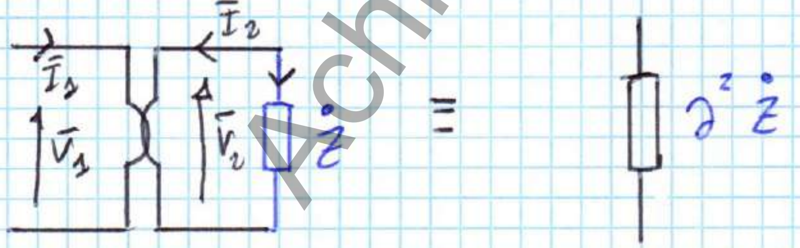


GENERATORE DI CORRENTE





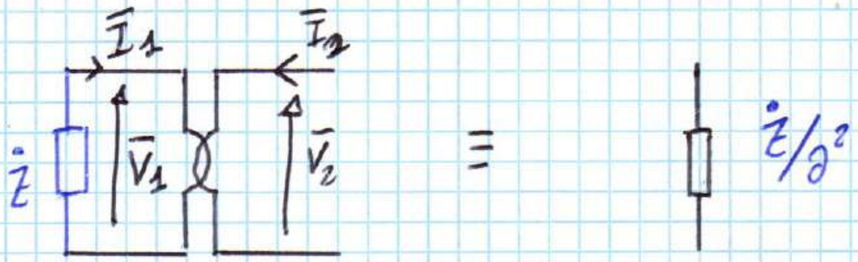
IMPEDENZE



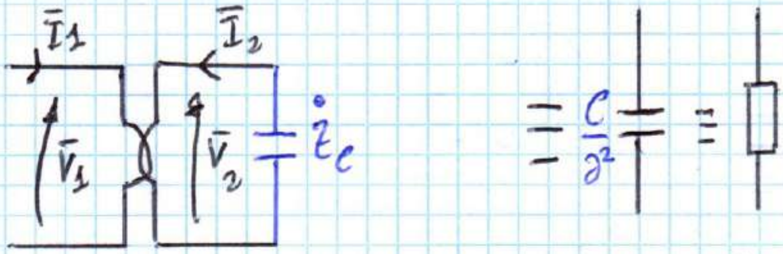
$\bar V_1 = a \bar V_2$

$\hookrightarrow a \ \dot Z(-\bar I_2) =$

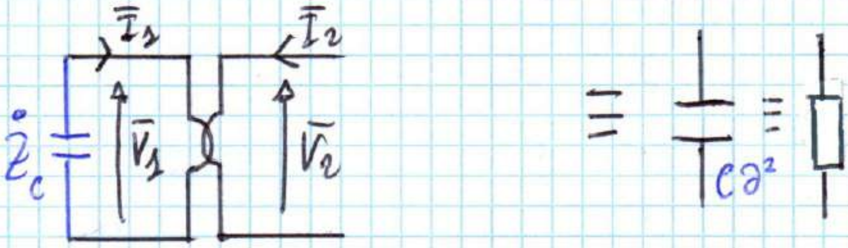
$= -a \dot Z(-a \bar I_1) = a^2 \dot Z$



CONDENSATORE

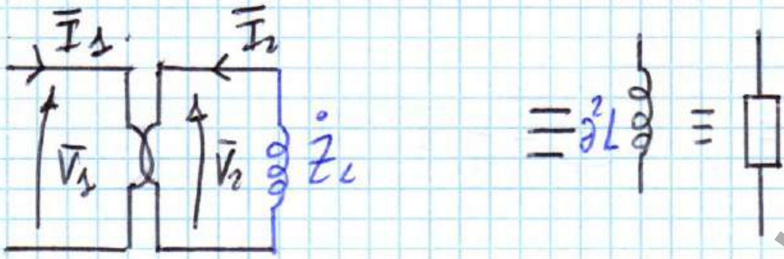


$$a^2 \cdot \dot{Z}_C = a^2\left(-\frac{j}{\omega C}\right) = -\frac{j}{\omega\left(\frac{C}{a^2}\right)}$$

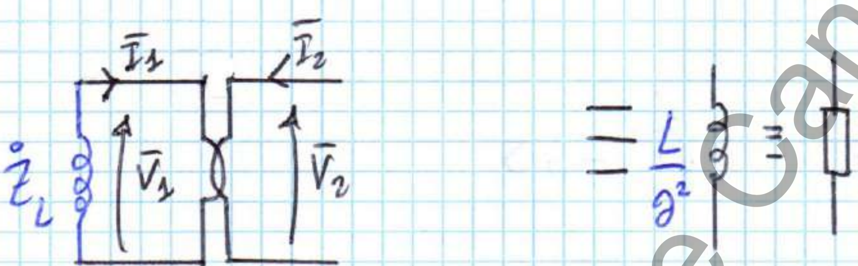


$$\frac{\dot{Z}_C}{a^2} = \left(-\frac{j}{\omega C}\right)\Big/ a^2 = -\frac{j}{\omega(Ca^2)}$$

INDUTTORE

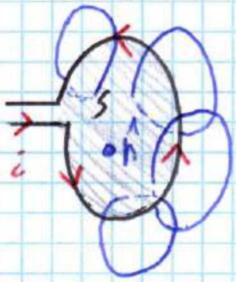


$$a^2 \dot{Z}_L = a^2(j\omega L)$$

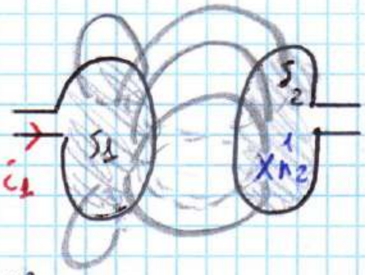


$$\dot{Z}_L/a^2 = (j\omega L)/a^2 = j\omega\left(\frac{L}{a^2}\right)$$

INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI



$$\phi = \iint_S \underline{B} \cdot \hat{n} \, dS$$



$$\phi_1 = \iint_{S_1} \underline{B}_1 \cdot \hat{n}_1 \, dS_1$$

$$\phi_2 = \iint_{S_2} \underline{B}_1 \cdot \hat{n}_2 \, dS_2 + \iint_{S_1} \underline{B}_2 \cdot \hat{n}_2 \, dS_2$$

RELAZIONE CARATTERISTICA:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{d}{dt}\phi_1 \\ v_2 = \frac{d}{dt}\phi_2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 \\ \phi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = L_1 i_1' + M_{12} i_2' \\ v_2 = M_{21} i_1' + L_2 i_2' \end{cases}$$

TEMPO

FREQUENZA

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = (L_1 \bar{I}_1' + M_{12} \bar{I}_2') j\omega \\ \bar{V}_2 = (M_{21} \bar{I}_1' + L_2 \bar{I}_2') j\omega \end{cases}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:
- $M_{12} = M_{21} = M$
- $M^2 \leq L_1 L_2$

ORA MI PONGO L'OBIETTIVO DI TRADURRE CIRCUITALMENTE LE DUE EQUAZIONI.

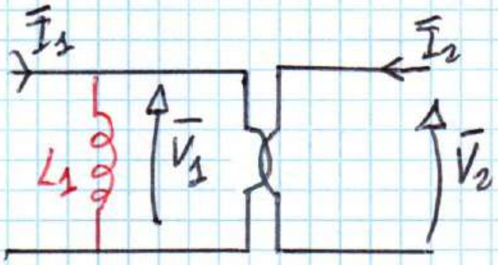
CASO $M^2 = L_1 L_2$ ACCOPPIAM. PERFETTO (ASSUMO $M_{12} = M_{21} = M$)

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{\cancel{j\omega}(L_1 \bar{I}_1 + M \bar{I}_2)}{\cancel{j\omega}(M \bar{I}_1 + L_2 \bar{I}_2)} = \frac{L_1}{M} \cdot \underbrace{\frac{\bar{I}_1 + M/L_1 \bar{I}_2}{\bar{I}_1 + L_2/M \bar{I}_2}}_{1} = \frac{L_1}{M} = a$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{V}_1 = a \bar{V}_2}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} - \frac{\cancel{j\omega}}{\cancel{j\omega}} \cdot \frac{M \bar{I}_2}{L_1} = \boxed{\frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{a} \bar{I}_2}$$

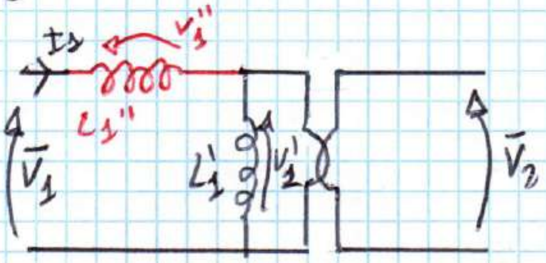
QUINDI L'EQUAZIONE DELLA TENSIONE È QUELLA DI UN TRASFORMATORE MENTRE QUELLA DELLA CORRENTE È DI UN TRASFORMATORE PIÙ UN ALTRO PEZZO, OVVERO: $\dfrac{\bar{V}_1}{j\omega L_1}$ CIOÈ UN INDUTTORE.



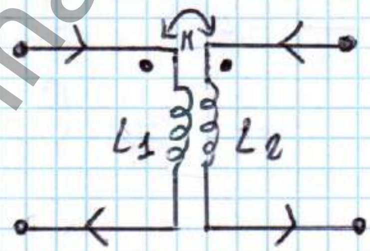
CASO $M^2 < L_1 L_2$ ACCOPP. NON PERFETTO

$L_1 L_2 > M^2$, ALLORA DEFINISCO L_1' : $L_1' \cdot L_2 = M$, $L_1 = L_1' + L_1''$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1' \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 + j\omega L_1'' \bar{I}_1 \\ \bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 \end{cases}$$



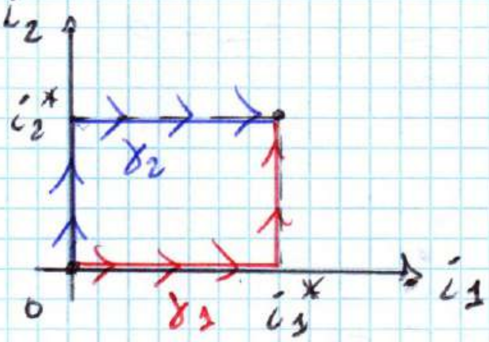
SIMBOLO CIRCUITALE



ANALISI ENERGETICA E DIM. $M_{12} = M_{21} = M$

$$\mathcal{E}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{(L_1 i_1' \cdot i_1 + M_{12} i_2' i_1)}_{v_1 \cdot i_1} + \underbrace{(M_{21} i_1' i_2 + L_2 i_2' i_2)}_{v_2 \cdot i_2} dt =$$

$$= \frac{L_1 \cdot i_1}{2}\Bigg|_{t_0}^{t_1} + \frac{L_2 i_2}{2}\Bigg|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (M_{12} i_2' i_1 + M_{21} i_1' i_2) dt$$



DATO CHE L'ENERGIA ASSORBITA TRA t_0 E t_1 DIPENDE SOLO DAL PUNTO INIZIALE E DA QUELLO FINALE, SCELGO DUE CURVE:

$\gamma_1 : \gamma_1^H, \gamma_1^V$

$\gamma_2 : \gamma_2^H, \gamma_2^V$

CALCOLO: $d\mathcal{E} = P\,dt = i_1 \frac{d\phi_1}{dt} dt + i_2 \frac{d\phi_2}{dt} dt =$

$= i_1\, d\phi_1 + i_2\, \phi_2 = (i_1 L_1 di_1 + i_1 M_{12}\, di_2) +$

$+ (i_2 M_{21}\, di_1 + i_2 L_2 di_2) =$

$= L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1$

$\gamma_1^H : d\mathcal{E} = L_1 i_1 di_1$

$\gamma_1^V : d\mathcal{E} = L_2 i_2 di_2 + M_{12} i_1^* di_2$

$\gamma_2^H : d\mathcal{E} = L_1 i_1 di_1 + M_{21} i_2^* di_1$

$\gamma_2^V : d\mathcal{E} = L_2 i_2 di_2$

$$\mathcal{E}_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1^H} d\mathcal{E} + \int_{\gamma_1^V} d\mathcal{E} = \int_0^{i_1^*} L_1 i_1 di_1 + \int_0^{i_2^*} L_2 i_2 di_2 + \int_0^{i_2^*} M_{12} i_1^* di_2 =$$

$$= \frac{L_1}{2} {i_1^*}^2 + \frac{L_2}{2} {i_2^*}^2 + M_{12} i_1^* i_2^*$$

$$\mathcal{E}_{\gamma_2} = \frac{L_1}{2} {i_1^*}^2 + \frac{L_2}{2} {i_2^*}^2 + M_{21} i_1^* i_2^*$$

$$\mathcal{E}_{\gamma_1} = \mathcal{E}_{\gamma_2} \Rightarrow M_{12} = M_{21} = M \qquad \blacksquare$$

TEOREMA DI RECIPROCITÀ: R.S.P.

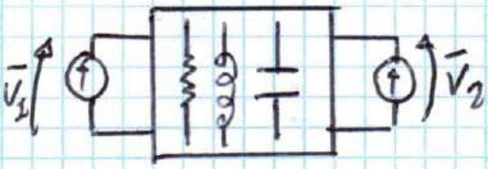
① $\begin{cases} \underline{\underline{A}}_R \underline{\bar{I}}' = \underline{0} \\ \underline{\bar{V}}' = \underline{\underline{A}}_R^T \underline{\bar{\ell}}' \end{cases}$

② $\begin{cases} \underline{\underline{A}}_R \underline{\bar{I}}'' = \underline{0} \\ \underline{\bar{V}}'' = \underline{\underline{A}}_R^T \underline{\bar{\ell}}'' \end{cases}$

③ $\begin{cases} \underline{\underline{A}}_R (\underline{\bar{I}}'')^* = \underline{0} \\ \underline{V}''^* = \underline{\underline{A}}_R^T (\underline{\bar{\ell}}'')^* \end{cases}$

①, ② $\begin{cases} \sum_K^L \bar{V}_K' \bar{I}_K'' = 0 \\ \sum_K^L \bar{V}_K'' \bar{I}_K' = 0 \end{cases}$

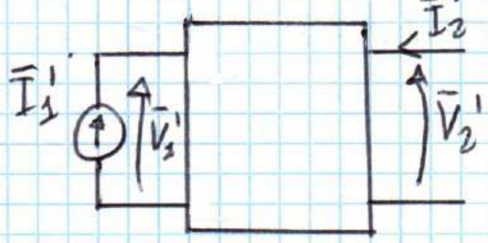
①, ③ $\begin{cases} \sum_K^L \bar{V}_K' \bar{I}_K''^* = 0 \\ \sum_K^L \bar{V}_K'' \bar{I}_K'^* = 0 \end{cases}$

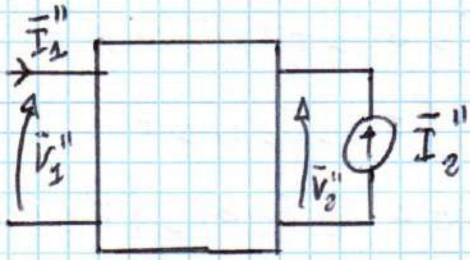


CONTROLLABILE IN CORRENTE

VOGLIO DIMOSTRARE:

$$\left.\frac{\bar V_2}{\bar I_1}\right|_{\bar I_2=0} = \left.\frac{\bar V_1}{\bar I_2}\right|_{\bar I_1=0}$$



,


$$0 = \cancel{\bar V_1'} \bar I_1'' + \bar V_2' \bar I_2'' + \sum_{k=3}^{L} \bar V_k' \bar I_k'' = \bar V_2' \bar I_2'' + \sum_{k=3}^{L} (\dot z_k \bar I_k') \bar I_k''$$

$$0 = \bar V_1'' \bar I_1' + \cancel{\bar V_2''} \bar I_2' + \sum_{k=3}^{L} \bar V_k'' \bar I_k' = \bar V_1'' \bar I_1' + \sum_{k=3}^{L} (\dot z_k \bar I_k'') \bar I_k'$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\bar V_2'}{\bar I_1'} - \frac{\bar V_1''}{\bar I_2''} \Rightarrow \left.\frac{\bar V_2'}{\bar I_1'}\right|_{\bar I_2'=0} = \left.\frac{\bar V_1''}{\bar I_2''}\right|_{\bar I_1''=0}$$

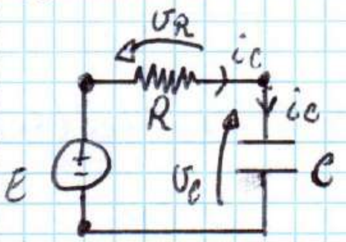
CON UN PROCEDIMENTO ANALOGO, IMPONENDO LA CONTROLLABILITÀ IN TENSIONE:

$$\Rightarrow \left.\frac{\bar I_2'}{\bar V_1'}\right|_{\bar V_2'=0} = \left.\frac{\bar I_1''}{\bar V_2''}\right|_{\bar V_1'=0} \quad \blacksquare$$

RETI DEL PRIMO ORDINE (RC)

PER CIRCUITO **DINAMICO** INDICHIAMO I CIRCUITI CHE HANNO ALMENO UN COMPONENTE CON MEMORIA, QUINDI IN GENERALE LE EQUAZIONI CHE REGOLANO IL FUNZIONAMENTO DEL CIRCUITO SONO DI TIPO DIFFERENZIALE.

PRENDIAMO AD ESEMPIO IL CIRCUITO RC.



$E = E(t)$

SCEGLIAMO COME INCOGNITA LA **GRANDEZZA DI STATO** DEL COMPONENTE DINAMICO PERCHÉ È CONTINUA.

$$E - v_R - v_C = 0 \rightarrow E - R \cdot i_R - v_C = 0 \rightarrow E - RCv_C' - v_C = 0$$

QUINDI RIORDINANDO OTTENGO UN' **EQUAZIONE DIFFERENZIALE**:

$$\begin{cases} v_C' + \dfrac{1}{RC} v_C = E/RC \\ v(t_0) = v_0 \quad \text{CONDIZIONE INIZIALE} \end{cases}$$

SUPPONENDO CHE CI SIA LA LINEARITÀ, AVREMO UNA SOLUZIONE DEL TIPO:

$$v_C(t) = v_{C_0}(t) + v_{C_P}(t) \text{ — SOLUZIONE PARTICOLARE}$$

SOLUZIONE OMOGENEA

$$\begin{cases} v_{C_0}' + \dfrac{1}{RC} v_{C_0} = 0 \\ v_{C_0}(t_0) + v_{CP}(t_0) = V_0 \end{cases}$$

$$v_{C_P}' + \frac{1}{RC} v_{C_P} = E/RC$$

REMAINDER EQ. DIFF.

$$x' + a x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + a x = 0 \rightarrow \frac{dx}{x} + a\,dt = 0 \rightarrow d\ln(x) = -a\,dt \Rightarrow \text{INTEGRO}$$

$$\Rightarrow \ln(x) = -at + K \rightarrow \text{ESPONENZIALE} \rightarrow x = e^{-at} e^{K}$$

DEFINISCO IL TEMPO CARATTERISTICO COME:

$$\tau = RC$$

$$v_{C_0}' + \frac{1}{\tau} v_{C_0} = 0 \rightarrow \lambda^1 + \frac{1}{\tau}\lambda^0 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow v_{C_0}(t) = C e^{\lambda t} = C e^{\lambda t_0} e^{\lambda (t - t_0)} = \tilde{C} e^{\lambda (t-t_0)}$$

$$v_{C_0}(t_0) + v_{Cp}(t_0) = V_0 \Rightarrow \tilde{C} e^{\lambda 0} = V_0 - v_{Cp}(t_0) \Rightarrow \tilde{C} = V_0 - V_{Cp}(t_0)$$

QUINDI LA SOLUZIONE OMOGENEA È: $[V_0 - V_{Cp}(t_0)] e^{\lambda(t-t_0)}$

PER QUANTO RIGUARDA LA SOLUZIONE PARTICOLARE, SE I GENERATORI DEL CIRCUITO SONO COSTANTI, ALLORA LA SOLUZIONE PARTICOLARE SARÀ UNA SOLUZIONE COSTANTE:

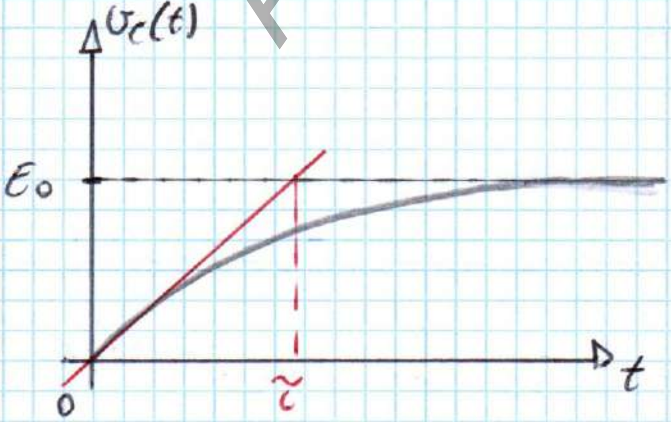
$$e(t) = E_0 \Rightarrow v_{Cp}(t) = K$$

E QUINDI LA SOLUZIONE GENERALE SARÀ:

$$\boxed{v_C(t) = [V_0 - E_0] e^{-(t-t_0)/\tau} + E_0}$$

CARICA DEL CONDENSATORE ($V_0 = 0, t_0 = 0$)

$$v_C(t) = -E_0 e^{-t/\tau} + E_0 = E_0 (1 - e^{-t/\tau})$$



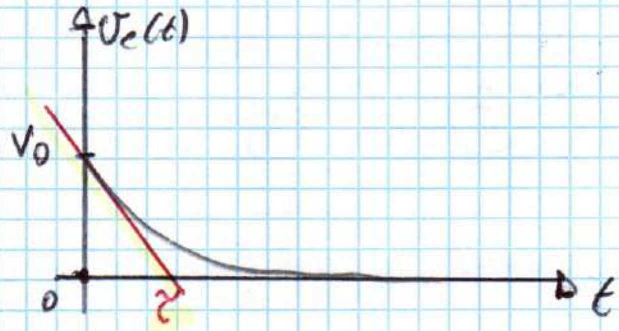
t/τ	$e^{-t/\tau}$	
0	1	
1	$1/e$	0,37
2	$1/e^2$	0,14
3	$1/e^3$	0,05
4	$1/e^4$	0,02
5	$1/e^5$	0,0067

DA NOTARE CHE τ DIPENDE DAI COMPONENTI PASSIVI DEL CIRCUITO

NON DAI GENERATORI!!

SCARICA DEL CONDENSATORE ($V_0 \neq 0$ VOLT, $e_0 = 0$, $t_0 = 0$)

$$v_c(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$



N.B. PER CALCOLARE $v_{cp}(t)$, SE:

I GENERATORI COSTANTI $\Rightarrow$ SOSTITUISCO I CONDENSATORI CON CIRC. AP.

CASO GENERATORE SINUSOIDALE

ω FISSO

$$v'_{cp} + \frac{1}{\tau} v_{cp} = \frac{e(t)}{\tau} \rightarrow \text{DOMINIO DEI FATORI} \rightarrow j\omega \bar{V}_{cp} + \frac{1}{\tau}\bar{V}_{cp} = \frac{\bar{E}}{\tau}$$

$$\Rightarrow \bar{V}_{cp} = \frac{\bar{E}}{\tau}\left(1/j\omega + \frac{1}{\tau}\right) = \bar{E} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau} \rightarrow \text{DOMINIO DEL TEMPO} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{cp}(t) = \sqrt{2}\, |\bar{V}_{cp}| \sin(\omega t + \angle \bar{V}_{cp})$$

$$|\bar{V}_{cp}| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

QUINDI POSSIAMO DISTINGUERE DUE CASI:

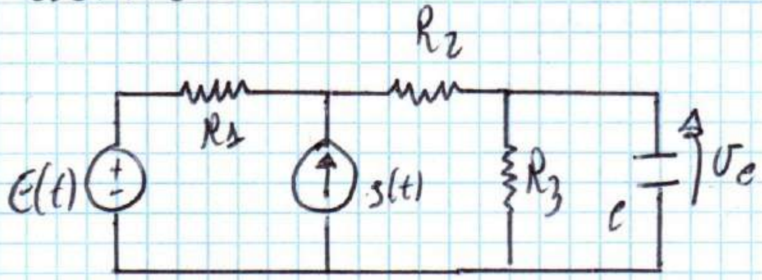
- $\omega >> \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} >> \frac{1}{\tau} \Rightarrow T << \tau \Rightarrow |\bar{V}_{cp}| << |\bar{E}|$

  IL SISTEMA NON RIESCE A STARE DIETRO ALLO STIMOLO PERCHÉ VARIA MOLTO VELOCEMENTE.

- $\omega << \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} << \frac{1}{\tau} \Rightarrow T >> \tau \Rightarrow |\bar{V}_{cp}| >> |\bar{E}|$

  QUI IL SISTEMA RIESCE A STARE DIETRO ALLO STIMOLO.

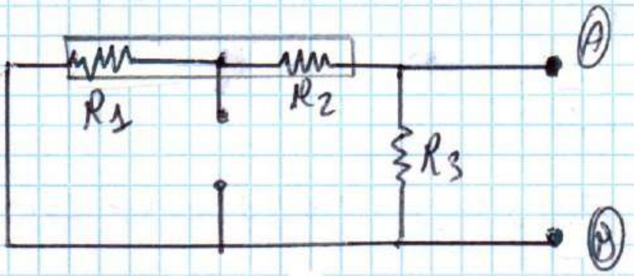
ESEMPIO



$i_1(t) = ?$

MI CONCENTRO SULLA DETERMINAZIONE DELLA VARIABILE DI STATO.

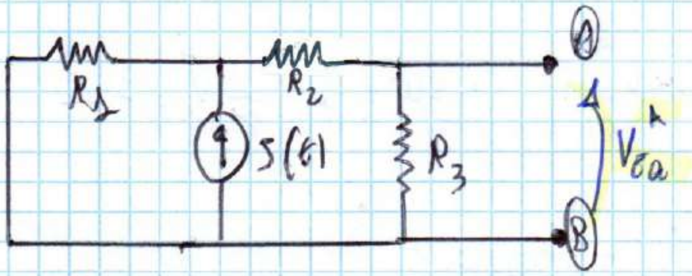
QUINDI CALCOLO IL CIRCUITO EQUIVALENTE THEVENIN VISTO DAL CONDENSATORE.



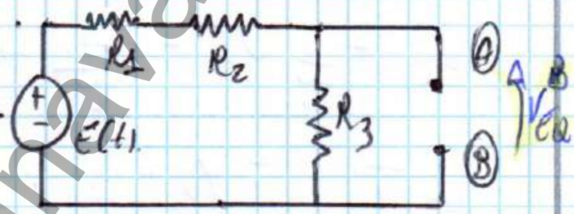
$R_{S1} = R_1 + R_2$

$R_{TH} = R_{S1} /\!/ R_3$

PER DETERMINARE V_{EQ} USO LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

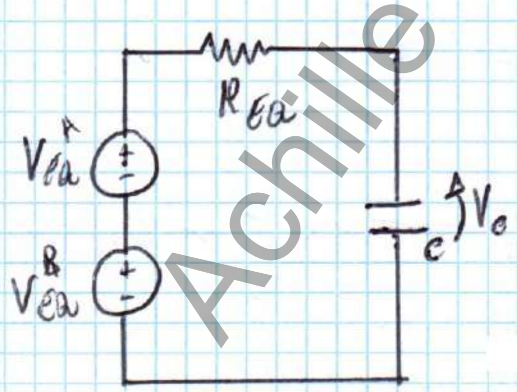


$+$



$$i_2 = \frac{s\,R_1}{R_1+R_2+R_3} \Rightarrow V_{EQ}^A = R_3 i_2$$

$$V_{EQ}^B = \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \cdot E$$



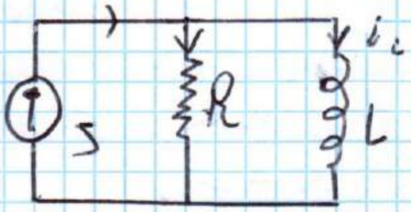
$$v_{cp}' + \frac{1}{\tau} v_{cp} = V_{EQ}^A + V_{EQ}^B$$

SE I DUE GENERATORI NON SONO ISOFREQUENZIALI $\Rightarrow$

FACCIO AGIRE UN GENERATORE ALLA VOLTA.

TRANSITORI · INDUTTORE

FACCIAMO · UN · DISCORSO · ANALOGO · PER · L' INDUTTORE.



$i_L(t_0) = I_0$, $\{J, R, L\}$ NOTI

$$J = i_R + i_L = \frac{v_L}{R} + i_L = \frac{L\, i_L'}{R} + i_L$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_L' + \frac{R}{L}\, i_L = \frac{R}{L} J \\ i_L(t_0) = I_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_L(t) = A\, e^{-(t-t_0)/\tau} + i_{Lp}(t) \\ i_L(t_0) = A + i_{Lp}(t_0) = I_0 \end{cases}$$

$\tau = L/R$

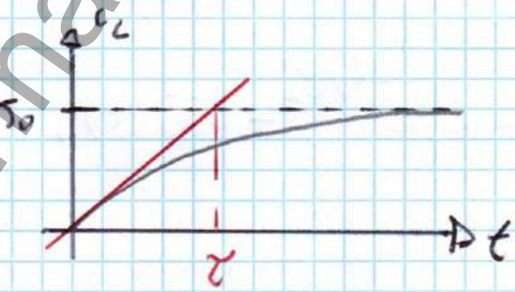
SE · $J(t) = J_0 \Rightarrow i_{Lp}(t) = J_0$ · COME · CON · IL · CONDENSATORE.

QUINDI $\Rightarrow$ $\boxed{i_L(t) = (I_0 - J_0)\, e^{-(t-t_0)/\tau} + J_0}$

CARICA · INDUTTORE

$J_0 \neq 0, I_0 = 0, t_0 = 0$

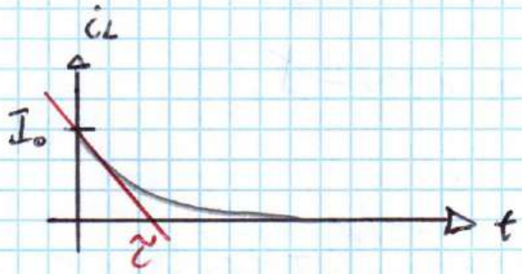
$$i_L(t) = J_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



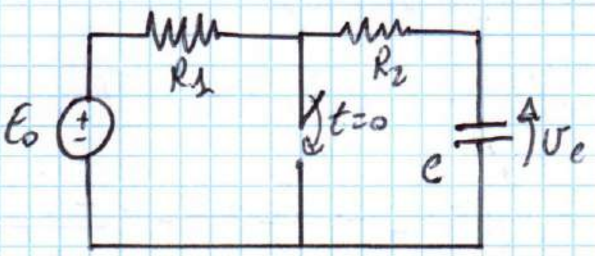
SCARICA · INDUTTORE

$J_0 = 0, I_0 \neq 0, t_0 = 0$

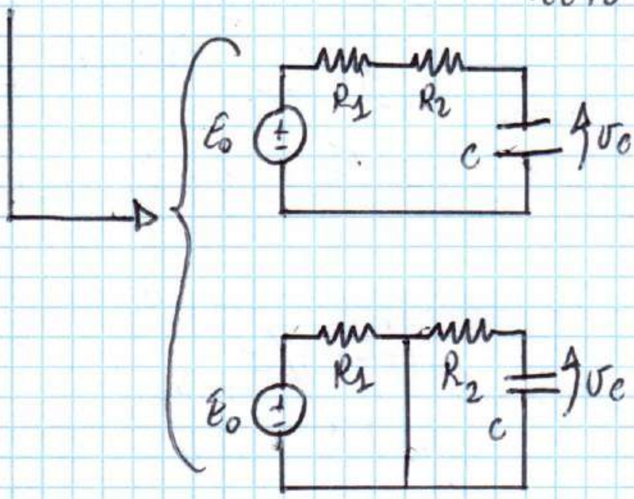
$$i_L(t) = I_0 \left(e^{-t/\tau}\right)$$



RETI CON INTERRUTTORI



NEL CASO DI RETI CON UN INTERRUTTORE, DISEGNAMO E STUDIAMO UNA PER VOLTA LA RETE CON $t<0$ E LA RETE CON $t>0$.



$t<0$

$t>0$

PER $t<0$

$v(t) = A_- e^{-t/\tau_-} + v_{cp}^-(t)$, MA DATO CHE A $-\infty$, e^{-t/τ_-} TENDE ALL'INFINITO, SI SCEGLIE $A_- = 0$.

RICORDANDO CHE SE IL GENERATORE È COSTANTE, ALLORA ANCHE LA SOLUZIONE PARTICOLARE SARÀ UNA FUNZIONE COSTANTE, PARI PROPRIO A E_0.

$$\Rightarrow v(t) = E_0$$

PER $t>0$

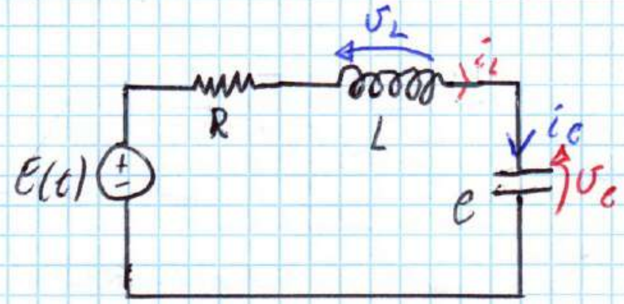
$v(t) = A_+ e^{-t/\tau_+} + v_{cp}^+(t)$, SE IMMAGINO DI CALCOLARE LA TENSIONE A VUOTO SUL CONDENSATORE, MI CONVINCO CHE LA SOLUZIONE PARTICOLARE $v_{cp}^+(t) = 0$.

$$\Rightarrow v(t) = A_+ e^{-t/\tau_+}$$

DATO CHE LA TENSIONE DEL CONDENSATORE È UNA FUNZIONE CONTINUA DICO:

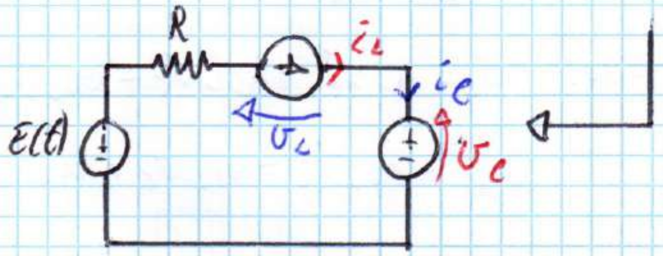
$$\begin{array}{ccc} v_c(0^-) & = & v_c(0^+) \\ \parallel & \downarrow & \parallel \\ E_0 & = & A_+ \end{array}$$

RETI DEL SECONDO ORDINE



CREO UNA RETE DI SUPPORTO NELLA QUALE SOSTITUISCO:

- CONDENSATORI → GEN. DI TENSIONE.
- INDUTTORI → GEN. DI CORRENTE.



SU QUESTA RETE DI SUPPORTO CALCOLO LE VARIABILI COMPLEMENTARI

$$\begin{cases} v_L = E - R\, i_L - v_C \\ i_C = i_L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L i_L' = E - R i_L - v_C \\ C v_C' = i_L \end{cases}$$

CHE PUÒ ESSERE RISCRITTA IN DUE MODI EQUIVALENTI →

-ꟷmmꟷ $v_L = L\, i_L'$

⊣⊢ $i_C = C\, v_C'$

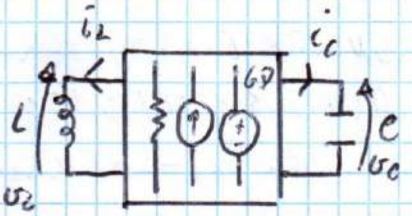
FORMA DI STATO →
$$\begin{cases} i_L' = -\frac{R}{L} i_L - \frac{v_C}{L} + \frac{E}{L} \\ v_C' = \frac{i_L}{C} \end{cases}$$

FORMA MATRICIALE →
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} E$$

INFINE, AGGIUNGENDO LE CONDIZIONI INIZIALI SI AVRÀ:

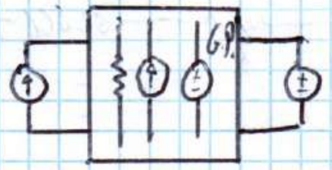
$$\begin{cases} i_L' = -\frac{R}{L} i_L - \frac{v_C}{L} + \frac{E}{L} \\ v_C' = \frac{i_L}{C} \\ i_L(t_0) = I_0 \\ v_C(t_0) = V_0 \end{cases}$$

PROCEDURA ASTRATTA



LINEARE

RETE AUSILIARIA $\longrightarrow$



USO LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI A BLOCCHI TRA $\{i_L, v_C, \text{GEN. INTERNI}\}$

OTTENGO: $\begin{cases} v_L = A_{11} i_L + A_{12} v_C + b_L \\ i_C = A_{21} i_L + A_{22} v_C + b_C \end{cases}$ $\longleftarrow$

$\hookrightarrow$ CHE PUÒ ESSERE ANCHE OTTENUTO FACENDO LA SINTESI DEL DOPPIO BIPOLO INTERNO:

$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + A_{12} v_2 + b_1 \\ i_2 = A_{21} i_1 + A_{22} v_2 + b_2 \end{cases}$$

QUINDI ALLA FINE OTTENIAMO:

$$\begin{cases} i_L' = \frac{A_{11}}{L} i_L + \frac{A_{12}}{L} v_C + \frac{b_L}{L} \\ v_C' = \frac{A_{21}}{C} i_L + \frac{A_{22}}{C} v_C + \frac{b_C}{C} \end{cases}, \quad \begin{cases} i_L(t_0) = I_0 \\ v_C(t_0) = V_0 \end{cases}$$

METODO DI SOSTITUZIONE

ORA, PER PROSEGUIRE, VOGLIAMO CONVERTIRE QUESTO SISTEMA DI DUE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE IN UNA SOLA EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE, E PER FARE CIÒ:

$$\begin{cases} L i_L' = E - R i_L - v_C \\ C v_C' = i_L \\ i_L(t_0) = I_0 \\ v_C(t_0) = V_0 \end{cases}$$

SCELGO UNA VARIABILE DI STATO PER LA QUALE VOGLIO RISOLVERE: PER ESEMPIO v_C.

QUINDI SCELGO LA 2ª EQUAZIONE, IN CUI:

$$C v_C'' = i_L'$$

SOSTITUENDO:

$$\begin{cases} LC v_C'' = E - RC v_C' - v_C \\ v_C(t_0) = V_0 \\ v_C'(t_0^+) = I_0 / C \end{cases}$$

N.B.

SCELTO $v_C \rightarrow LC v_C'' + RC v_C' + v_C = E$

SCELTO $i_L \rightarrow LC i_L'' + RC i_L' + i_L = CE'$

LA PARTE SX NON CAMBIA.

SOLUZIONE

$v_c(t) = v_{c_0}(t) + v_{c_p}(t)$ → LA SOL. PARTICOLARE SI CALCOLA COME NELLE RETI DEL PRIMO ORDINE

↓

MENTRE PER LA SOL. OMOGENEA:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad 2\alpha = \frac{R}{L}$$

$$v_{c_0} \rightarrow LC\,v_c'' + RC\,v_c' + v_c = 0 \rightarrow v_c'' + \frac{R}{L} v_c' + \frac{v_c}{LC} = 0$$

$$= v_c'' + 2\alpha v_c' + \omega_0^2 v_c = 0$$

↓ POLINOMIO CARATTERISTICO

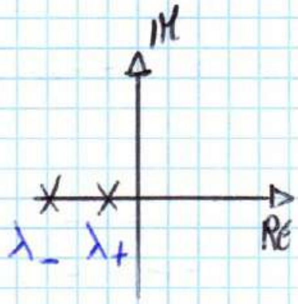
$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 v_c = 0 \rightarrow \lambda_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\underbrace{\alpha^2 - \omega_0^2}_{\Delta}}$$

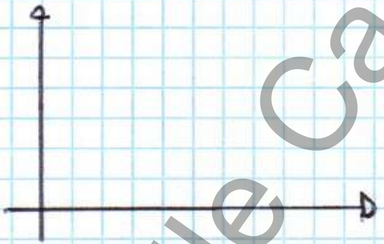
CASO $\Delta > 0$

$\Rightarrow \alpha > \omega_0$

$$v_{c_0}(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}, \quad \lambda_- = \frac{1}{\tau_-}, \quad \lambda_+ = \frac{1}{\tau_+}$$

$$\Rightarrow v_{c_0}(t) = A_+ e^{-t/\tau_+} + A_- e^{-t/\tau_-}$$



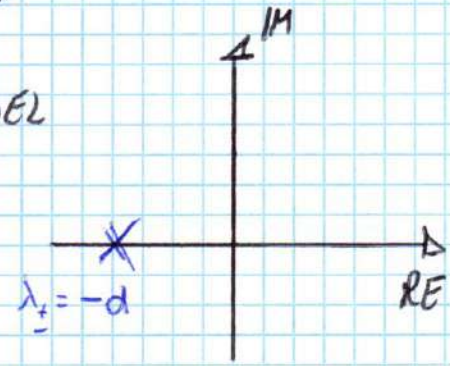


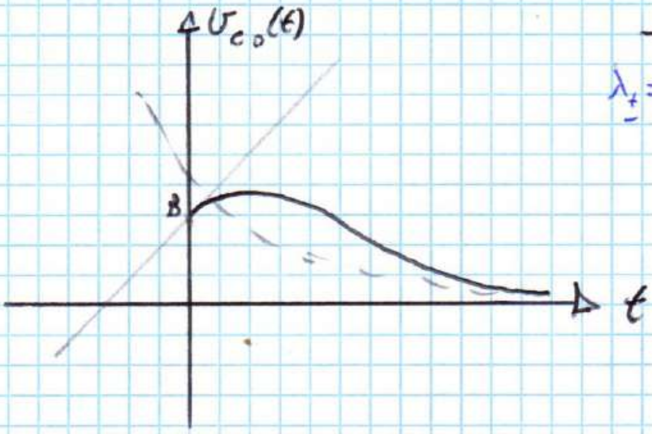
CASO $\Delta = 0$

$\Rightarrow \alpha = \omega_0$

$$v_{c_0}(t) = (At + B)e^{-\alpha t} = (At + B)e^{-t/\tau}$$

IN QUESTO CASO AUMENTIAMO DI UNO IL GRADO DEL POLINOMIO ARBITRARIO.





CASO $\Delta < 0$

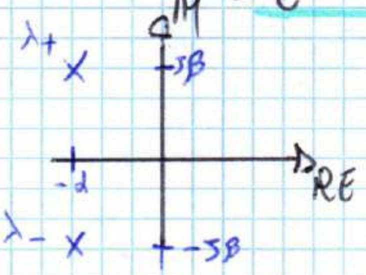
$$\Rightarrow \alpha < \omega_0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\alpha \pm j\underbrace{\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}}_{\beta} = -\alpha \pm j\beta$$

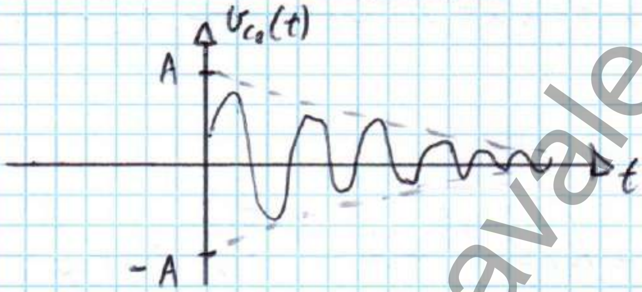
SICCOME: $v_{c_0}(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} = v_{c_0}^*(t)$

ALLORA $\Rightarrow A_+ = A_-^* \Rightarrow A_+ e^{-\alpha t} e^{j\beta t} + A_+^* e^{-\alpha t} e^{-j\beta t} =$

$$= e^{-\alpha t}\, 2RE\{A_+ e^{j\beta t}\} = e^{-\alpha t} A\cos(\beta t + \varphi) =$$

$$= e^{-\alpha t}[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)]$$



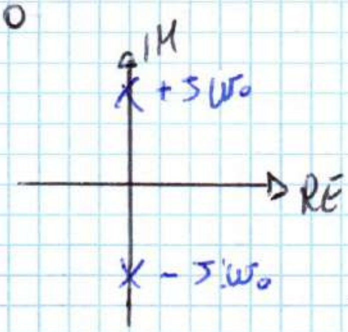


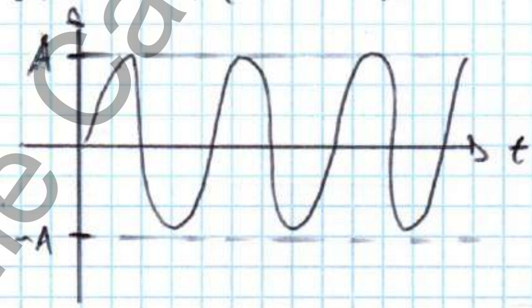
CASO $\alpha = 0$

$\Rightarrow R = 0$

PULSAZIONE DI RISONANZA

$$v_{c_0}(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$





RETI DI ORDINE N

SIA X UNA VARIABILE DI STATO.

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}u \rightarrow y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + \dots + a_0 y = z(t)$$

$$\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + a_0 = 0 \rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_N \Rightarrow e^{\lambda_k t}$$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE TUTTE LE PARTI REALI DELLE λ SONO ≤ 0.

$$\sum_{k=1}^{L} v_k i_k = 0 \Rightarrow \sum_{k \in I_R} R_k i_k^2 + \sum_{k \in I_C} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C_k v_k^2\right) + \sum_{k \in I_L} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_k i_k^2\right) =$$

$$= \sum_{k \in I_R} R_k i_k^2 + \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L\right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L\right) = -\sum_{k \in I_R} R_k i_k^2 \leq 0$$

VA A 0

CASO <0

TUTTE LE λ_k DEVONO AVERE PARTE REALE <0, PERCHÉ ALTRIMENTI L'ENERGIA DIVERGEREBBE ALL'INFINITO.

$$v_{C_k}(t) = e^{\lambda_k t} \text{ PER } t \rightarrow +\infty \rightarrow \infty$$

CASO $=0$

VUOL DIRE CHE NON HO RESISTORI CHE DISSIPANO ENERGIA E QUINDI LE λ_k DEVONO AVERE PARTE REALE NULLA.

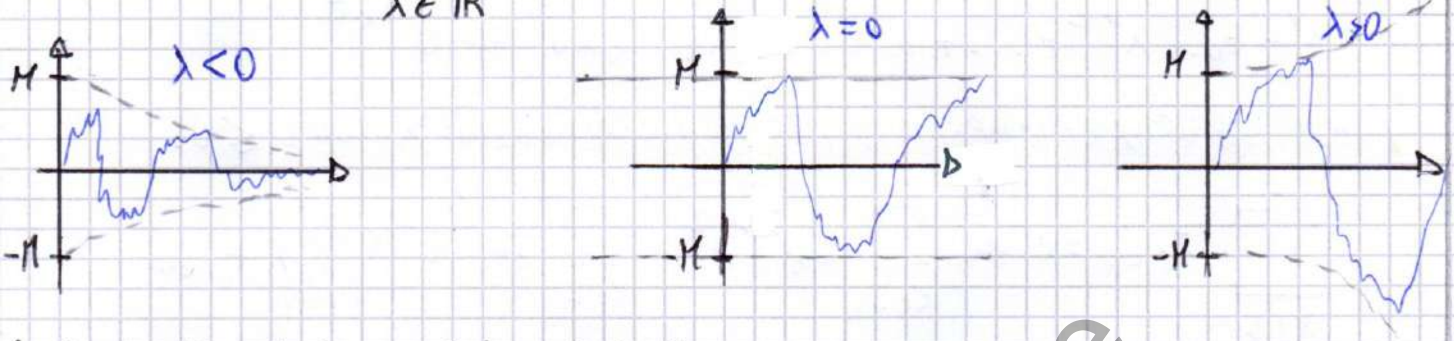
TRASFORMATA DI LAPLACE

CONSIDERIAMO UNA GENERICA FUNZIONE NEL TEMPO $f(t)$: $f(t)=0 \ \forall t<0$,

$|f(t)| \leq M e^{\lambda t}$, $\forall t \geq 0$, OVVERO LIMITATA DA FUNZIONI ESPONENZIALI COME IN QUESTI TRE ESEMPI:

$|M| \geq 0$

$\lambda \in \mathbb{R}$



DEFINIAMO TRASFORMATA DI LAPLACE:

$$\mathcal{L}: f(t) \longrightarrow F(s), \ s \in \mathbb{C}$$

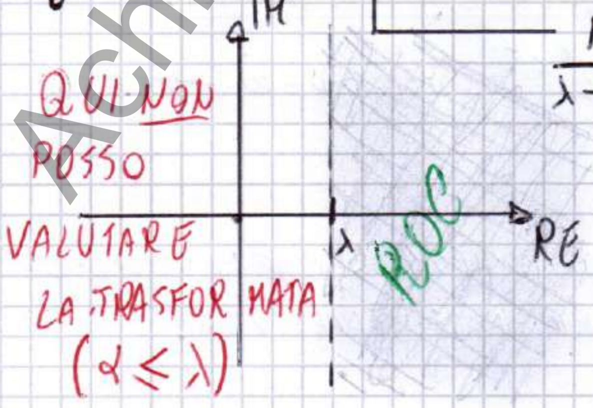
$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

E DEFINIAMO COME REGIONE DI CONVERGENZA IL DOMINIO DI s IN CUI QUESTO LIMITE È BEN DEFINITO:

$$\lim_{\substack{T \to \infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \int_{-\varepsilon}^{T} f(t) e^{-st} dt$$

$$\left| \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_{0^-}^{+\infty} |f(t)| \left| e^{-st} \right| dt \overset{s=\alpha+j\omega}{=}$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt \leq M \int_{0} e^{\lambda t} e^{-\alpha t} dt = \begin{cases} +\infty, & \text{SE } \alpha=\lambda \\ +\infty, & \text{SE } \alpha<\lambda \\ \dfrac{M}{\lambda-\alpha}, & \text{SE } \alpha>\lambda \end{cases}$$



LINEARITÀ

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} (a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t))\, e^{-st}\, dt = a_1 \int_{0^-}^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + a_2 \int_{0^-}^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt =$$

$$= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad \blacksquare$$

DERIVATA

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s)$$

$$\int_{0^-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st}\Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t)(-s) e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{T \to \infty} f(T) e^{-sT} - f(0^-) \cdot 1 + s \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt =$$

$$= s F(s) \quad \blacksquare$$

RITARDO

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0} F(s) \qquad t_0 > 0,\ \tau = t - t_0,\ d\tau = dt$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} f(t-t_0) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} e^{-st_0} d\tau =$$

$$= e^{-st_0} F(s) \quad \blacksquare$$

INTEGRALE

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, dt\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

DERIVATA DELLA TRASF.

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds}\left[\int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt\right] = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{d}{ds}\left(f(t) e^{-st}\right) dt =$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} -t f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{-t f(t)\}$$

RITARDO DELLA TRASF.

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s-a) \quad \blacksquare$$

CONVOLUZIONE

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \cdot G(s)$$

N.B. $* \to \int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$

TRASFORMATE NOTEVOLI

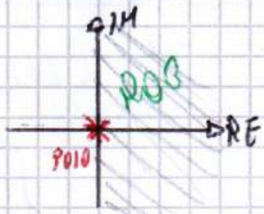
N.B. PER POLO INTENDIAMO IL NUMERO CHE ANNULLA IL DENOMIN.

GRADINO UNITARIO

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}, \quad Re\{s\} > 0$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} 1(s) e^{-st} = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad \blacksquare$$

LA ROC INIZIA DAL POLO PIÙ A DESTRA.

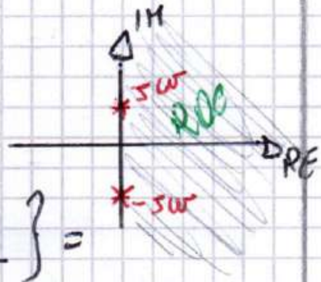


GRADINO UNITARIO RITARDATO

$$\mathcal{L}\{e^{at} 1(t)\} = \frac{1}{s-a}, \quad Re\{s\} > Re\{a\}$$

COSENO

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t) \cdot 1(t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad Re\{s\} > 0$$



$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot 1(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} 1(t)}{2} + \frac{e^{-j\omega t} 1(t)}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(s+j\omega)+(s-j\omega)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \blacksquare$$

SENO

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t) 1(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad Re\{s\} > 0$$

COSENO RITARDATO

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos(\omega t) \cdot 1(t)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}, \quad Re\{s\} > Re\{a\}$$

SENO RITARDATO

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin(\omega t) \cdot 1(t)\} = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}, \quad Re\{s\} > Re\{a\}$$

$$\frac{1}{s^2} \leftrightarrow t\, 1(t)$$

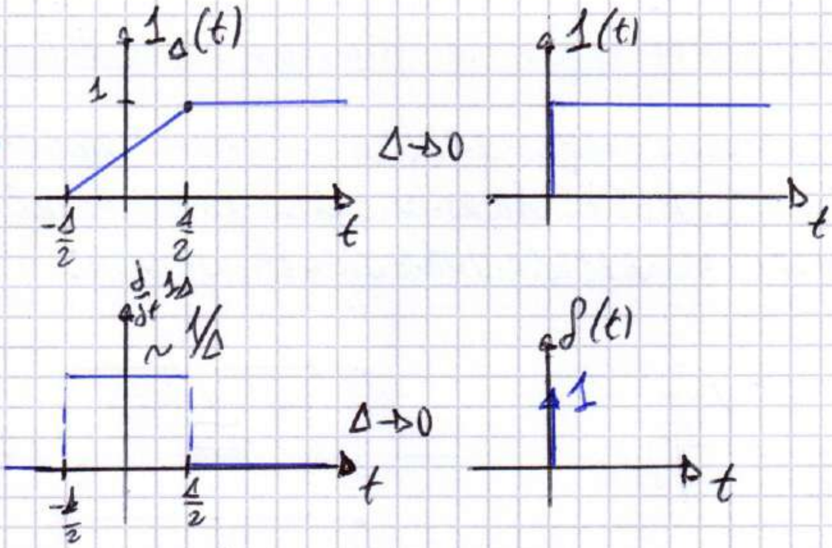
$$\frac{2}{s^3} \leftrightarrow t^2 1(t) \quad \dots \Rightarrow \frac{(n)!}{s^{n+1}} \longleftrightarrow t^n \cdot 1(t), \quad Re\{s\} > 0$$

$$\frac{2 \cdot 3}{s^4} \leftrightarrow t^3 1(t)$$

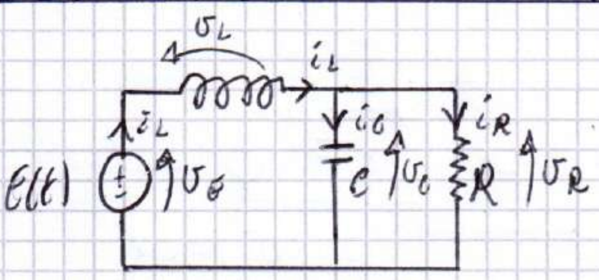
DELTA DI DIRAC

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\left(1(t)\right)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$



CONDENSATORI INIZIALMENTE SCARICHI



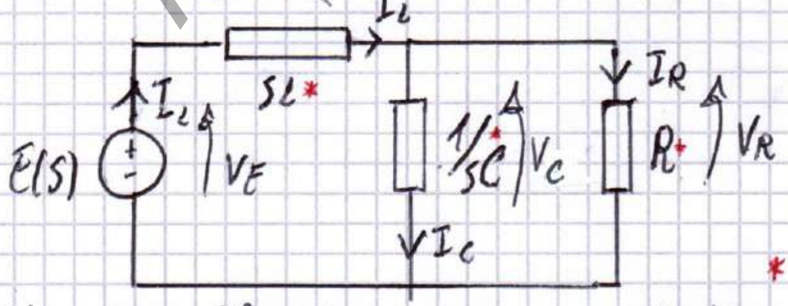
$e(t) = E_0$

$v_C(0) = 0\,V$

$i_L(0) = 0\,A$

LINEARITÀ E TEMPO INVARIANZA

$$\begin{cases} v_E - v_L - v_C = 0 \\ v_C - v_R = 0 \\ i_E = i_L \\ i_L = i_C + i_R \\ v_E = e(t) \\ v_L = L\,i_L' \\ i_C = C\,v_C' \\ v_R = R\,i_R \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}(\cdot)} \begin{cases} V_E - V_L - V_C = 0 \\ V_C - V_R = 0 \\ I_E = I_L \\ I_L = I_C + I_R \\ V_E = E \\ V_L = LsI_L \\ I_C = CsV_C \\ V_R = RI_R \end{cases}$$

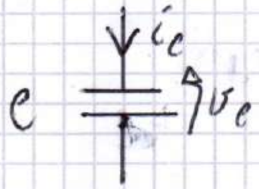


* IMPEDENZE OPERATORIALI

DA QUESTO PUNTO POSSO PROCEDERE PER CALCOLARE UNA QUALSIASI GRANDEZZA DELLA RETE CON UNO DEI METODI UTILIZZATI NEL REGIME STAZIONARIO.

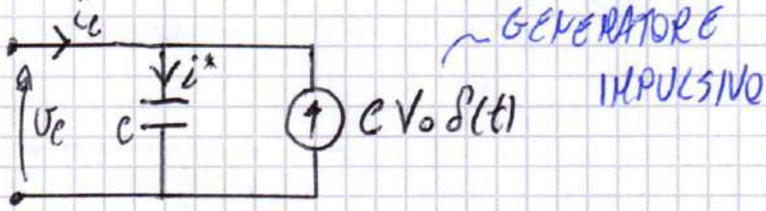
CONDENSATORI INIZIALMENTE CARICHI

DATO CHE UTILIZZANDO IL CIRCUITO DI LAPLACE STIAMO RAGIONANDO IN ASTRATTO, METTIAMO DEI GENERATORI IN GRADO DI FAR FARE UN SALTO AI COMPONENTI DINAMICI ATTRAVERSO UNA POTENZA INFINITA:

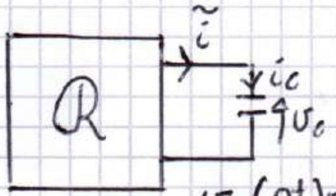


$v_C(0^+) = V_0$

$\equiv$

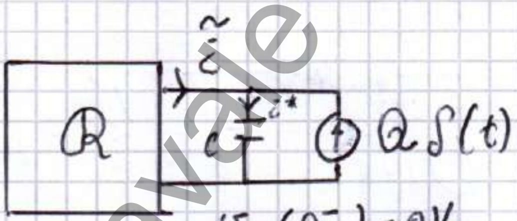


$v_C(0^-) = 0V$

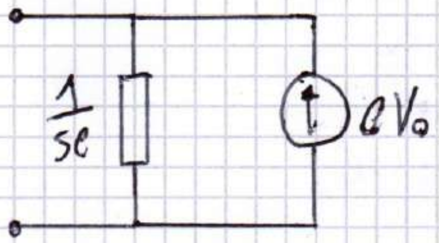


$v_C(0^+) = V_0$

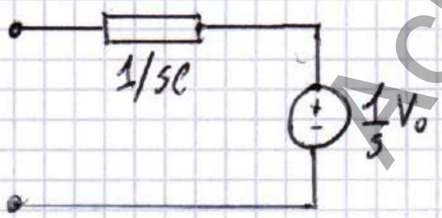
$\equiv$



$v_C(0^-) = 0V$



$\equiv$



$$v_C(t) = v_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i^*(\tau)\,d\tau$$

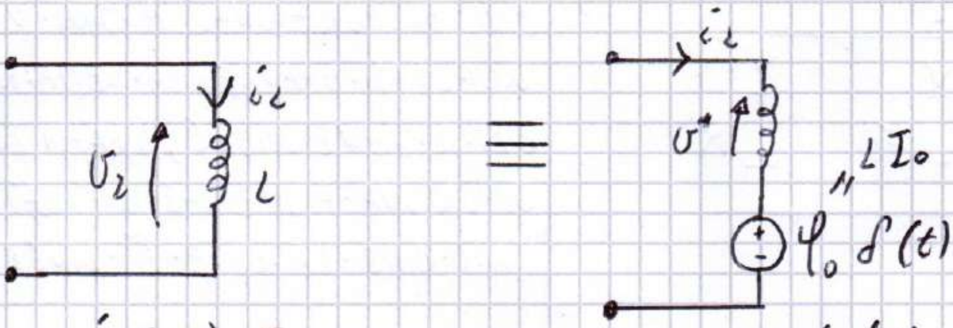
$$v_C(0^+) = \lim_{t\to 0^+} v_C(t) = v_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i^*(\tau)\,d\tau =$$

$$= v_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} \tilde{i}(\tau)\,d\tau + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} Q\,\delta(\tau)\,d\tau =$$

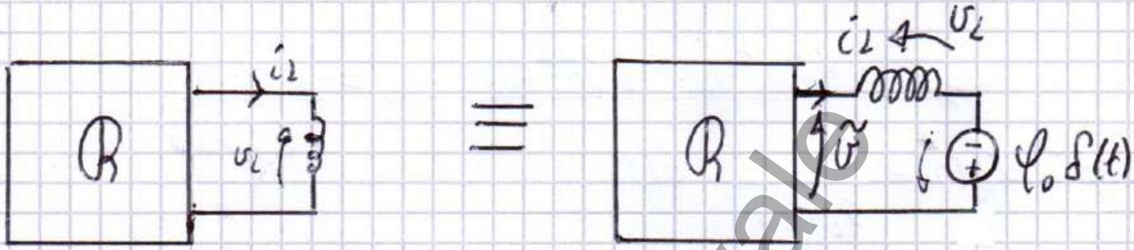
$$\Rightarrow v_C(0^+) = V_0$$

$$Q = C \cdot V_0$$

INDUTTORI INIZIALMENTE CARICHI



$i_L(0^-)=I_0$ $\qquad$ $i_L(0)=0$



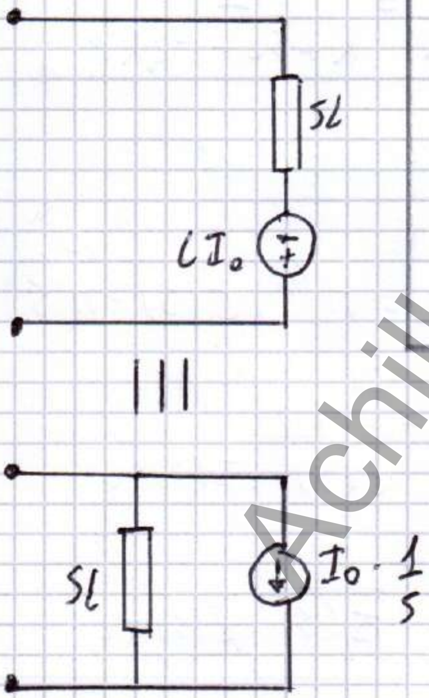
$i_L(0^-)=I_0$ $\qquad$ $i_L(0)=0$

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} v^*(\tau)\,d\tau=$$

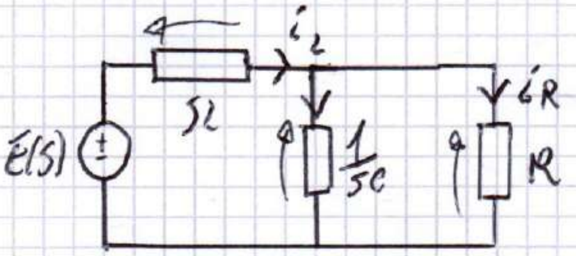
$$=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}\tilde{v}\,d\tau+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}\varphi_0\,\delta(t)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{L}\varphi_0=I_0$$

$$\varphi_0=LI_0$$



FUNZIONE DI TRASFERIMENTO



C'È PROPORZIONALITÀ TRA UNA QUALSIASI GRANDEZZA DELLA RETE ED IL GENERATORE, TRAMITE UN' OPPORTUNA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DATO CHE LA RETE È LINEARE.

ESEMPIO

$$I_R(s) = H(s) \cdot E(s)$$

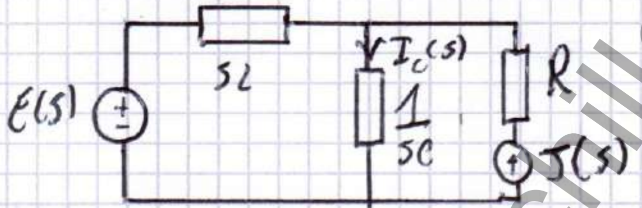
→ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $= \frac{I_R(s)}{E(s)}$

DATO CHE: $V_R(s) = \frac{\dot{Z}_P}{sL+\dot{Z}_P} \cdot E(s)$

ALLORA: $I_R(s) = V_R(s)/R = \frac{\dot{Z}_P}{sL+\dot{Z}_P} \cdot \frac{1}{R} \cdot E(s)$

⇒ QUINDI: $\boxed{H(s) = \left(I_R(s)/E(s)\right) = \frac{\dot{Z}_P}{sL+\dot{Z}_P} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R+sL+s^2LRC}}$

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



$$I_C(s) = H(s) \cdot E(s) + \tilde{H}(s)\, J(s)$$

$$H(s) = \frac{I_C(s)}{E(s)}\Big|_{J(s)=0}$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{I_C(s)}{J(s)}\Big|_{E(s)=0}$$

$$H(s) = \frac{I_C(s)}{E(s)} = \frac{1}{\cancel{E(s)}} \cdot \frac{\cancel{E(s)}}{sL+\frac{1}{sC}} = \frac{1}{sL+\frac{1}{sC}}$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{I_C(s)}{J(s)} = \frac{1}{J(s)} \cdot \frac{J(s)}{sL+\frac{1}{sC}} \cdot sL = \frac{sL}{sL+\frac{1}{sC}}$$

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO COINCIDE CON LA GRANDEZZA TRASFORMATA DI INTERESSE QUANDO IL GENERATORE È UNA DELTA DI DIRAC NEL TEMPO.

ESEMPIO

$$H(s) = \mathcal{L}\{i_R(t)\}\Big|_{E(t)=\delta(t)} \longrightarrow H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

→ QUESTO OGETTO SI CHIAMA RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$

$$h(t) = i_R(t)\Big|_{E(t)=\delta(t)}$$

ANTITRASFORMATA

$$\frac{M(s)}{D(s)} \qquad N_N = DEG(M(s)) \qquad N_D = DEG(D(s))$$

PROPIA, $N_N < N_D$

IMPROPIA, $N_N \geq N_D$

PROPIA

- FATTORIZZO $D(s)$: $D(s)=0$, $s \in \mathbb{C}$

$s_1, \dots, s_{N_D}$ $\quad s_i \neq s_j$, $i \neq j$ **RADICI SINGOLE**

$$D(s) = D_{N_D} \cdot s^{N_D} + \dots + D_0 = D_{N_D}(s-s_1)\cdot \dots \cdot (s-s_{N_D})$$

- UTILIZZIAMO QUESTO TEOREMA:

$$\frac{M(s)}{D(s)} = \sum_{k=1}^{N_D} \frac{A_k}{s-s_k}$$

QUESTI TERMINI VENGONO DETTI RESIDUI

MOLTIPLICO A DESTRA E A SINISTRA PER $(s-s_i)$

$$\frac{M(s)}{D(s)}(s-s_i) = \sum_{k=1}^{N_D} \frac{(s-s_i)}{s-s_k} A_k \longrightarrow \text{FACCIO IL LIMITE PER } s \to s_i$$

$$\rightarrow \lim_{s \to s_i} \frac{M(s)}{D(s)}(s-s_i) = \sum_{k=1}^{N_D} \lim_{s\to s_i} \frac{(s-s_i)}{s-s_k} \cdot A_k = A_i$$

QUINDI $\Rightarrow A_i = \lim_{s\to s_i} \frac{M(s)}{D(s)} \cdot (s-s_i) = \frac{M(s_i)}{D_{N_D} \prod_{\substack{k\neq i \\ k=1}} (s_i-s_k)}$

FORMULA PER RICAVARE I RESIDUI

QUINDI INFINE:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{M(s)}{D(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{N_D} \frac{A_k}{s-s_k}\right\} = \sum_{k=1}^{N_D} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-s_k}\right\} \cdot A_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N_D} A_k e^{s_k t} \cdot 1(t)$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{M(s)}{D(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{N_D} A_k e^{s_k t}\, 1(t)}$$

RADICI CON MOLTEPLICITÀ

RADICI $s_1, s_2, \dots, s_\nu$

MOLT. $\sum m_1, m_2, \dots, m_\nu = N_D$

- PROCEDIAMO CON IL TEOREMA PRECEDENTE:

$$\frac{m(s)}{D(s)} = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{kj}}{(s-s_k)^j} \longrightarrow$$

FACCIAMO UN ESEMPIO CON 4 RADICI CON MOLTEPLICITÀ:

3 1 2 2

$$\frac{m(s)}{D(s)} = \frac{A_{11}}{(s-s_1)} + \frac{A_{12}}{(s-s_1)^2} + \frac{A_{13}}{(s-s_1)^3} +$$

$$\frac{A_{21}}{(s-s_2)} + \frac{A_{31}}{(s-s_3)} + \frac{A_{32}}{(s-s_3)^2} + \frac{A_{41}}{(s-s_3)} + \frac{A_{42}}{(s-s_3)^2}$$

- ORA DOBBIAMO RICAVARE TUTTI I RESIDUI:

MOLTIPLICO A DX E SX $(s-s_1)$ CON L'ESPONENTE PIÙ ALTO E FACCIO IL LIMITE

$$\frac{m(s)}{D(s)} (s-s_1)^3 = A_{11}(s-s_1)^2 + A_{12}(s-s_1) + A_{13} + (s-s_1)^3(\dots)$$

$$\lim_{s \to s_1} \left(\frac{m(s)}{D(s)} (s-s_1)^3 \right) = \underline{A_{13}}$$

DERIVO A DX E SX E FACCIO IL LIMITE

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{m(s)}{D(s)} (s-s_1)^3 \right) = A_{11} \cdot 2(s-s_1) + A_{12} + 0 + 3(s-s_1)^2(\dots) + (s-s_1)^3 \frac{d}{ds}(\dots)$$

$$\lim_{s \to s_1} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{m(s)}{D(s)} (s-s_1)^3 \right) \right) = \underline{A_{12}}$$

DERIVO A DX E SX E FACCIO IL LIMITE

$$\frac{d^2}{ds} \left(\frac{m(s)}{D(s)} (s-s_1)^3 \right) = 2A_{11} + 0 + 0 + 3!(s-s_1)(\dots) + 3(s-s_1)^2 \frac{d}{ds}(\dots) +$$
$$+ 3(s-s_1)^2 \frac{d}{ds}(\dots) + (s-s_1)^3 \frac{d^2}{ds^2}(\dots)$$

$$\Rightarrow \underline{A_{11}} = \frac{1}{2} \lim_{s \to s_1} \left(\frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{m(s)}{D(s)} (s-s_1)^3 \right] \right)$$

QUINDI IN GENERALE RICAVIAMO CHE:

$$\boxed{\underset{\text{RADICE}\ \ \text{MOLT.}}{A_{kj}} = \frac{1}{(m_k-j)!}\cdot\lim_{s\to s_k} D^{m_k-j}\left[\frac{N(s)}{D(s)}(s-s_k)^{m_k}\right]}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_k} A_{kj}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-s_k)^j}\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_k} A_{kj}\,\frac{t^{j-1}\cdot 1(t)}{(j-1)!}\,e^{s_k t}$$

QUINDI:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_k} A_{kj}\,\frac{t^{j-1}\cdot 1(t)}{(j-1)!}\,e^{s_k t}}$$

NON PROPIA

RISCRIVO IL NUMERATORE COME:

$$N(s) = \underbrace{q(s)}_{N_N - N_D}\cdot D(s) + \underbrace{r(s)}_{< N_D}$$

QUINDI:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = q(s) + \frac{r(s)}{D(s)}$$

È UNA FUNZIONE PROPIA! QUINDI LA TRATTIAMO COME PRIMA.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{q_M s^M + \dots + q_0\right\} = q_M\,\delta^{(M)} + \dots + q_0\,\delta$$

REMAINDER

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t) f(t)\,dt = f(0) \quad ; \quad \int_{\mathbb{R}} \delta'(t)\cdot f(t)\,dt = \overbrace{\delta(t) f(t)\Big|_{\mathbb{R}}}^{0} - \int_{\mathbb{R}} \delta\, f'(t)\,dt = -f'(0)$$

...IN GENERALE:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta^{(m)}(t)\, f(t)\,dt = (-1)^m f^{(m)}(0)$$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

$$\begin{cases} \underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{g} \\ \underline{x}(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}(\cdot)} s\,\underline{X}(s) = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(s) + \underline{\underline{B}}\,\underline{G}(s) \rightarrow$$

$$\rightarrow (s \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\,\underline{X}(s) = \underline{\underline{B}}\,\underline{G}(s) \Rightarrow \underline{X}(s) = (s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}\,\underline{G}(s)$$

QUANDO I GENERATORI SONO FUNZIONI RAZIONALI IL VETTORE DI LAPLACE DELLE VARIABILI DI STATO È FATTO DI FUNZIONI RAZIONALI.

I POLI DI QUESTA FUNZIONE SONO GLI AUTOVALORI λ ASSOCIATI A.

$DET(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$

$$\left\{ \frac{\begin{bmatrix} DET_{11} & DET_{12} & DET_{13} \\ DET_{21} & DET_{22} & DET_{23} \\ DET_{33} & DET_{32} & DET_{33} \end{bmatrix}}{DET(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})} \right.$$

CALCOLANDO L'OMOGENEA NEL TEMPO NOTIAMO CHE:

SE $\underline{x}(t) = \underline{v}\, e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \underline{v}\,\lambda\,\cancel{e^{\lambda t}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}\,\cancel{e^{\lambda t}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v}$$

AUTOVALORE DI $\underline{\underline{A}}$

AUTOVALORE ASSOCIATO

$$\Rightarrow (\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\,\underline{v} = 0 \Rightarrow \text{CERCO I } \lambda : DET(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0 \Rightarrow$$

NON INVERTIBILE

$DET(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$

$$\Rightarrow \text{POLI DI } (s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} = \lambda$$