

# **Propagazione GUIDATA**

Riassunto da

**Achille Cannavale**

# Indice

<b>1</b>	<b>Linee di trasmissione</b>	<b>3</b>
1	Introduzione . . . . .	3
1.1	Tensione . . . . .	4
1.2	Corrente . . . . .	5
1.3	Campo elettrico e magnetico . . . . .	5
2	Caso senza Perdite . . . . .	7
3	Caso con Perdite . . . . .	9
<b>2</b>	<b>V e I, Trasporto di Impedenza, Coefficiente di Riflessione, ROS</b>	<b>12</b>
1	Soluzione dell'Equazione delle Linee . . . . .	12
1.1	Soluzione per Onde Viaggianti . . . . .	12
1.2	Soluzione per Onde Stazionarie . . . . .	12
2	Trasporto dell'Impedenza . . . . .	14
2.1	Caso Carico uguale a Impedenza della Linea . . . . .	15
2.2	Caso Impedenza Generica . . . . .	15
3	Coefficiente di Riflessione . . . . .	16
3.1	Caratteristiche del Coefficiente di Riflessione . . . . .	17
4	Rapporto d'Onda Stazionario . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Potenza lungo una Linea senza Perdite</b>	<b>21</b>
1	Linea indefinita . . . . .	21
2	Due Linee Indefinite . . . . .	21
3	Linea con Carico . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Potenza lungo la Linea con Perdite</b>	<b>26</b>
1	Linea Indefinita . . . . .	27
2	Potenza tra due ascisse . . . . .	29
3	Linea con Carico . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Adattamenti</b>	<b>33</b>
1	Adattamento con Stub Serie . . . . .	33
1.1	Metodo 1 . . . . .	33
1.2	Metodo 2 . . . . .	36
2	Adattamento con Stub Parallelo . . . . .	38
2.1	Metodo 1 . . . . .	38
2.2	Metodo 2 . . . . .	40
3	Adattamento Tramite Inverter . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Propagazione di un Segnale a Banda Stretta</b>	<b>44</b>
1	Linea Non Dispersiva . . . . .	46
2	Linea Dispersiva . . . . .	47
2.1	Grado di Correttezza . . . . .	49

<b>7</b>	<b>Risuonatori</b>	<b>50</b>
1	Circuito Risonante Serie . . . . .	50
2	Circuito Risonante Parallelo . . . . .	50
3	Circuito Risonante con Perdite . . . . .	51
4	Capacità Filtranti di un Risuonatore . . . . .	51
5	Risuonatori a Parametri Distribuiti . . . . .	52
5.1	Metodo Perturbativo . . . . .	54
6	Esempi di Calcolo di Q in circuiti a parametri Distribuiti . . . . .	55
6.1	Esempio 1 . . . . .	55
6.2	Esempio 2 . . . . .	57
6.3	Esempio 3 . . . . .	58
7	Condizioni di Risonanza su una Rete Complessa . . . . .	59
7.1	Esempio 1 . . . . .	60
7.2	Esempio 2 . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Teorema di Reciprocità</b>	<b>62</b>
<b>9</b>	<b>Parametri Z di un Doppio Bipolo</b>	<b>64</b>
1	Reciprocità . . . . .	64
2	Simmetria . . . . .	65
3	Dissipamento Potenza . . . . .	65
<b>10</b>	<b>Parametri S di un Doppio Bipolo</b>	<b>66</b>
1	Reciprocità . . . . .	66
2	Senza Perdite . . . . .	67
<b>11</b>	<b>Parametri ABCD di un Doppio Bipolo</b>	<b>70</b>
<b>12</b>	<b>Parametri di un Cavo Coassiale</b>	<b>73</b>
1	Campo Elettrico e Capacità . . . . .	73
1.1	Campo Elettrico . . . . .	73
1.2	Capacità . . . . .	75
2	Campo Magnetico e Induttanza . . . . .	76
2.1	Campo Magnetico . . . . .	76
2.2	Induttanza . . . . .	77
<b>13</b>	<b>Guida a Piatti Paralleli e Guida a Sezione Rettangolare</b>	<b>79</b>
1	Caso TE . . . . .	79
1.1	Il Fenomeno del Cut-Off nelle Guide Metalliche . . . . .	87
2	Caso TM . . . . .	90
<b>14</b>	<b>Diagramma di Dispersione - Velocità di Fase e Velocità di Gruppo</b>	<b>91</b>

# Capitolo 1

## Linee di trasmissione

### 1 Introduzione

In termini generici possiamo dire che una **linea di trasmissione** è il supporto fisico che permette di collegare due punti.

Alcuni esempi possono essere:

- **Cavo Coassiale**
- **Doppino Telefonico**
- **Fibra Ottica**
- **Microstriscia**
- **Guida d'Onda Metallica**

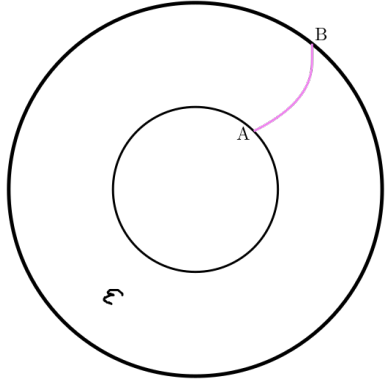
Tutte queste strutture condividono una **simmetria traslazionale**, nel senso che si individua una **direzione longitudinale** e **ortogonale** a tale direzione, le sezioni trasversali tutte uguali tra di loro.

Il segnale si propaga nella direzione longitudinale su distanze che sono generalmente **grandi rispetto alle lunghezze d'onda** associate al segnale, mentre la sezione trasversale ha sempre la stessa dimensione indipendentemente da dove essa venga misurata, **spesso piccola rispetto alla lunghezza d'onda**, e possiamo chiederci se sia possibile introdurre una **differenza di potenziale** e una **corrente** con caratteristiche analoghe alle tensioni e correnti a bassa frequenza, consentendoci così di descrivere la propagazione con riferimento a sole quantità scalari.

## 1.1 Tensione

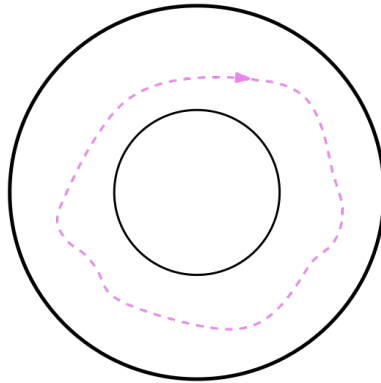
Prendiamo ad esempio una struttura guidante costituita da due **conduttori elettrici paralleli** separati da un **dielettrico lineare omogeneo e non dispersivo**.

Affinché l'integrale curvilineo che va da A a B lungo un qualsiasi percorso, giacente in una sezione trasversale, dipenda dai soli estremi di integrazione (campo conservativo), si deve avere che:



$$\int_{C(A,B)} \vec{E} \cdot \hat{i}_l dl = \varphi(A) - \varphi(B) = v(z, t)$$

Quindi deve accadere che per ogni curva chiusa appartenente alla sezione trasversa valga:



$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \hat{i}_l dl = 0$$

Da **Maxwell** sappiamo che:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{Faraday-Lenz})$$

Che integreremo sulla superficie S:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \hat{i}_z dS = \underbrace{\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \hat{i}_l dl}_0 = -\frac{d}{dt} \int_S \mu \vec{H} \cdot \hat{i}_z dS$$

Quindi ne consegue che  $\vec{H} \cdot \hat{i}_z = \vec{H}_z = 0 \forall S \text{ trasversa}$

## 1.2 Corrente

Analogamente a quanto fatto prima per la tensione, per introdurre una **corrente** si deve avere:

$$\oint_{\partial S} \bar{H} \cdot \bar{l} \, dl = i(z, t)$$

Da **Maxwell** sappiamo che:

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \bar{J} \quad (\text{Ampere-Maxwell})$$

Dove  $\bar{J}$  è la **corrente che circola sui conduttori**.

Integriamola sulla superficie S:

$$\begin{aligned} \int_S \bar{\nabla} \times \bar{H} \cdot \hat{i}_z \, dS &= \oint_{\partial S} \bar{H} \cdot \bar{l} \, dl = \\ &= \epsilon \frac{d}{dt} \int_S \bar{E} \cdot \hat{i}_z \, dS + \int_S \bar{J} \, dS = \epsilon \underbrace{\frac{d}{dt} \int_S \bar{E} \cdot \hat{i}_z \, dS}_{\text{deve fare 0}} + i(z, t) \end{aligned}$$

Quindi vuol dire che:

$$\boxed{\bar{E} \cdot \hat{i}_z = E_z = 0 \quad \forall S \text{ trasversa}}$$

## 1.3 Campo elettrico e magnetico

Definiamo ora il **Nabla Trasverso**:

$$\bar{\nabla}_t = \bar{\nabla} - \frac{\partial}{\partial z} \cdot \hat{i}_z$$

Che ci porta queste equazioni:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t = 0 & \bar{\nabla}_t \times \bar{H}_t = J_z \hat{i}_z \\ \bar{\nabla}_t \cdot \bar{E}_t = \frac{\rho}{\epsilon} & \bar{\nabla}_t \cdot \bar{H}_t = 0 \end{cases}$$

Quindi sostituiamo nelle Equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \times \bar{E} = \left( \bar{\nabla}_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{i}_z \right) \times \bar{E}_t = -\mu \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial t} \\ \bar{\nabla} \times \bar{H} = \left( \bar{\nabla}_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{i}_z \right) \times \bar{H}_t = \epsilon \frac{\partial \bar{E}_t}{\partial t} \end{cases}$$

<sup>1</sup> Proietto ora nel **Piano Longitudinale**:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_t \times \bar{E}_t = 0 \\ \bar{\nabla}_t \times \bar{H}_t = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Queste equazioni stabiliscono l'**andamento dei campi rispetto alle coordinate del piano trasverso** in qualsiasi sezione danno lo stesso andamento a meno di un'**ampiezza moltiplicativa**, che ci viene data, proiettando le **Equazioni di Maxwell ridefinite nel Piano trasverso**:

$$\begin{cases} \hat{i}_z \times \frac{\partial \bar{E}_t}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial t} \\ \hat{i}_z \times \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}_t}{\partial t} \end{cases} \quad (o)$$

Quindi se valgono le (\*) possiamo valutare indipendentemente il **Campo Elettrico** e il **Campo Magnetico**:

Integrando  $\bar{E}_t$  tra A e B otteniamo:

$$v(z, t) = \int_A^B \bar{E}_t(x, y, z, t) \cdot \hat{i}_l \, dl$$

Poniamo:

$$\bar{E}_t(x, y, z) = v(z, t) \cdot \bar{e}_t(x, y)$$

dove:

$$\int_A^B \bar{e}_t(x, y, z, t) \cdot \hat{i}_l \, dl = 1$$

Un discorso analogo lo faremo con  $\bar{H}_t$ :

$$\oint_{\partial S} \bar{H}_t(x, y, z, t) \cdot \hat{i}_l \, dl = i(z, t)$$

$$\bar{H}_t(x, y, z, t) = i(z, t) \cdot \bar{h}_t(x, y)$$

dove:

$$\oint_{\partial S} \bar{h}_t(x, y) \cdot \hat{i}_l \, dl = 1$$

---

<sup>1</sup>Manca J perchè circola sui conduttori verso z

Sostituendo tutto nelle (o) otteniamo:

$$\begin{cases} \hat{i}_z \times \bar{e}_t \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -\mu \bar{h}_t \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \hat{i}_z \times \bar{h}_t \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = \epsilon \bar{e}_t \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Che riscriviamo come:

$$\begin{cases} \hat{i}_z \times \bar{e}_t \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -\mu \bar{h}_t \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \bar{h}_t \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -\epsilon \hat{i}_z \times \bar{e}_t \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Poniamo:

$$\hat{i}_z \times \bar{e}_t = -\mu \bar{h}_t \frac{\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}}{\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}} = A \cdot \bar{h}_t$$

Quindi le due equazioni diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -\frac{\mu}{A} \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -\epsilon A \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{x})$$

dove:

- $-\frac{\mu}{A}$  è un'**induttanza**
- $-\epsilon A$  è una **capacità**

## 2 Caso senza Perdite

Consideriamo ora una fettina  $dZ$  della linea e valutiamo l'**Energia** che vi si **accumula**:

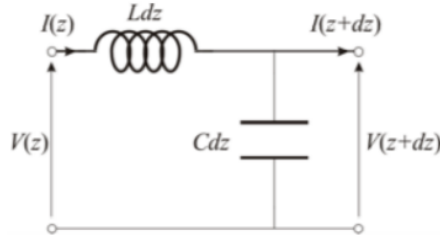


$$\begin{aligned} W_e &= dz \cdot \int_S \frac{1}{2} \epsilon |\bar{E}_t|^2 dS = \frac{1}{2} dz \epsilon (v(z,t))^2 \int_{s_t} |\bar{e}_t|^2 dS = \\ &= \frac{1}{2} C v^2 dz \implies C = \epsilon \int_{s_t} |\bar{e}_t|^2 dS \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 W_m &= dz \cdot \int_S \frac{1}{2} \mu |\bar{H}_t|^2 dS = \frac{1}{2} dz \mu (i(z, t))^2 \int_{S_t} |\bar{h}_t|^2 dS = \\
 &= \frac{1}{2} L i^2 dz \implies L = \mu \int_{S_t} |\bar{h}_t|^2 dS
 \end{aligned}$$

Possiamo quindi costruire un **circuito equivalente** a questa fettila, permettendoci di individuare facilmente le equazioni che legano **tensioni** e **correnti**:



Analizziamo la **maglia**:

$$\begin{cases} V(z) = j\omega L dz I(z) + V(z + dz) \\ V(z + dz) - V(z) = -j\omega L dz I(z) \end{cases}$$

Divido per dz:

$$\frac{V(z + dz) - V(z)}{dz} \longrightarrow dz \rightarrow 0 \longrightarrow \frac{dV}{dz} = -j\omega L I$$

Analogamente analizziamo il **nodo**:

$$\begin{cases} I(z) = I(z + dz) + j\omega C dz V(z + dz) \\ I(z + dz) - I(z) = -j\omega C dz V(z + dz) \end{cases}$$

Divido per dz:

$$\frac{I(z + dz) - I(z)}{dz} \longrightarrow dz \rightarrow 0 \longrightarrow \frac{dI}{dz} = -j\omega C V$$

Confrontiamo le (x) e le equazioni appena ottenute e portiamo tutto nel dominio dei **Fasori**:

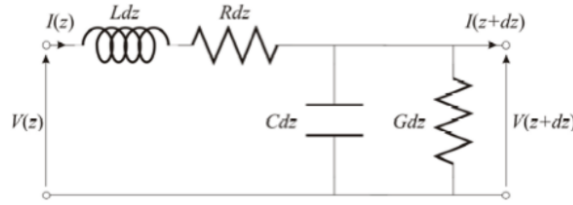
$$\boxed{
 \begin{cases} \frac{dV(z)}{dz} = -j\omega \frac{\mu}{A} I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -j\omega \epsilon A V(z) \end{cases}
 } \quad \text{(Equazioni delle Linee)}$$

Dove:

$$LC = \epsilon \mu$$

### 3 Caso con Perdite

Analizzando il caso in cui sono presenti **Perdite**, il circuito diventa:



Che possiamo sintetizzare in queste equazioni:

$$\begin{cases} Z_{RL}dZ = Rdz + j\omega Ldz \\ Y_{GC}dZ = Gdz + j\omega Cdz \end{cases}$$

Analizzando la **maglia** otteniamo:

$$V(z) = Z_{RL}dZI(z) + V(z + dZ)$$

Che riscriviamo in questo modo per far uscire un **rapporto incrementale**:

$$V(z + dZ) - V(z) = -Z_{RL}dzI(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dV}{dz} = -Z_{RL}I(Z)$$

Mentre analizzando il **nodo** otteniamo:

$$I(z + dZ) - I(z) = -Y_{GC}dzV(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dI}{dz} = -Y_{GC}V(Z)$$

Per rendere queste equazioni simili al caso **Senza Perdite** si pone:

- $L_{EQ} = L - j\frac{R}{\omega}$
- $C_{EQ} = C - j\frac{G}{\omega}$

Con cui otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{dV(z)}{dz} = -j\omega L_{EQ}I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -j\omega C_{EQ}V(z) \end{cases}$$

(Equazioni delle Linee)

Queste equazioni sono analoghe a quelle che legano campo elettrico e magnetico per un'**Onda Piana** che si propaga nella direzione  $z$ , quindi hanno delle **soluzioni analoghe**:

$$I = \frac{1}{-j\omega L} \frac{dV(z)}{dz}$$

Che se sostituiamo nella **seconda equazione delle Linee** ci restituisce:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -\omega^2 LCV$$

(Equazione di Helmotz)

Che è un'**equazione Differenziale** del **Secondo ordine** e che quindi ha per soluzione:

$$\begin{cases} V^+ e^{-jkz} \\ V^- e^{jkz} \end{cases}, \text{ con } k = \omega\sqrt{LC}$$

$$V(z) = V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz}$$

Con  $V^+ = |V^+|e^{j\varphi^+}$  e  $V^- = |V^-|e^{j\varphi^-}$  **Complesse**

Nel **dominio del Tempo** le due soluzioni diventano:

$$\begin{aligned} v^+(z, t) &= \text{Re} \{ V^+ e^{-jkz} e^{j\omega t} \} = \text{Re} \left\{ |V^+| e^{j\varphi^+} e^{-jkz} e^{j\omega t} \right\} = \\ &= |V^+| \cos \left( \omega \left( t + \frac{\varphi^+}{\omega} \right) - kz \right) = \\ &= |V^+| \cos \left( \omega (t - t_0^+) - kz \right) = \\ &= |V^+| \cos(k(vt - vt_0^+ - z)) \end{aligned}$$

Dove:

- $t_0^+ = -\frac{\varphi^+}{\omega}$
- $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Analogamente per la **soluzione negativa** faremo:

$$\begin{aligned}
 v^-(z, t) &= \operatorname{Re} \{ V^- e^{jkz} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \left\{ |V^-| e^{j\varphi^-} e^{jkz} e^{j\omega t} \right\} = \\
 &= |V^-| \cos \left( \omega \left( t + \frac{\varphi^-}{\omega} \right) + kz \right) = \\
 &= |V^-| \cos \left( \omega (t - t_0^-) + kz \right) = \\
 &= |V^-| \cos(k(vt - vt_0^- + z))
 \end{aligned}$$

Dove:

- $t_0^- = -\frac{\varphi^-}{\omega}$
- $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Possiamo fare un procedimento del tutto analogo con l'**equazione di Helmotz della corrente**, per questo capiamo che tensione e corrente sono soluzioni del **sistema omogeneo di equazioni differenziali**.

Cominciamo quindi a sostituire la tensione nella prima equazione:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dz} &= -jkV^+ e^{-jkz} = -j\omega LI \\
 \Rightarrow I &= \underbrace{\frac{k}{\omega L}}_{\frac{1}{Z_0}} V^+ e^{-jkz} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{I^+}
 \end{aligned}$$

Questo vuol dire che se è presente un'onda progressiva di tensione ( $V^+ e^{-jkz}$ ) è anche presente un'onda progressiva di corrente ( $I^+ e^{-jkz}$ ).<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Un discorso analogo vale per l'onda di tensione che va nel verso opposto.

## Capitolo 2

# V e I, Trasporto di Impedenza, Coefficiente di Riflessione, ROS

## 1 Soluzione dell'Equazione delle Linee

### 1.1 Soluzione per Onde Viaggianti

Abbiamo quindi ricavato nel capitolo precedente le **Equazioni delle Linee**, dette anche **Soluzioni per Onde Viaggianti**:

$$\begin{cases} \frac{dV(z)}{dz} = -j\omega LI(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -j\omega CV(z) \end{cases}$$

(Onde Viaggianti)

### 1.2 Soluzione per Onde Stazionarie

Un'altra possibile soluzione è costituita dalla combinazione lineare di due **funzioni circolari indipendenti**:

$$\begin{cases} V(z) = A \\ \quad \cos(kz) + B \\ \quad \sin(kz) \\ I(z) = C \\ \quad \cos(kz) + D \\ \quad \sin(kz) \end{cases}$$

(Onde Stazionarie)

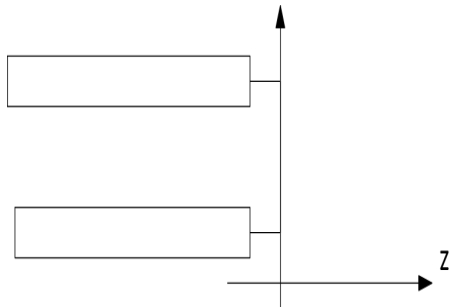
Facilmente è possibile dimostrare che:

- $A = V(0)$
- $C = I(0)$
- $B = V(\frac{\lambda}{4}) = -jZ_0 I(0)$

- $D = I(\frac{\lambda}{4}) = -j \frac{V(0)}{Z_0}$

(Per ricavarsi B sostituire V (z) nell'equazione delle linee e valutare in 0, analogo discorso per D).

Poniamoci ora nella seguente situazione:



$$V(z) = -jI(0)Z_0 \sin(kz)$$

E cerchiamo di disegnare il **modulo** di  $|V(z)|$  cercando di capire per prima cosa dove ha gli **zeri**, ovvero quando si annulla  $\sin(kz)$ :

$$kz = n\pi$$

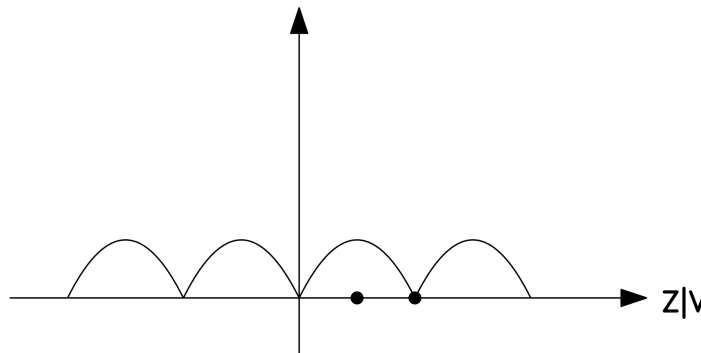
Ricordando che:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ e } \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} z = n\pi \Rightarrow z = n \frac{\lambda}{2}$$

Mentre assumerà valori massimi per:

$$z = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$$

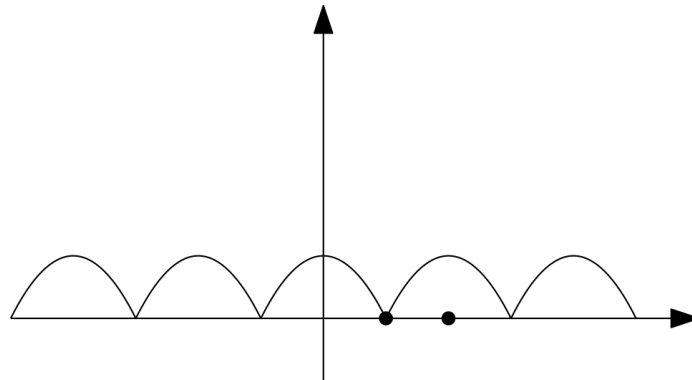


Analizziamo analogamente la corrente:

$$I(z) = I(0) \cos(kz)$$

Il coseno si annulla per:

$$kz = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} z = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow z = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$$

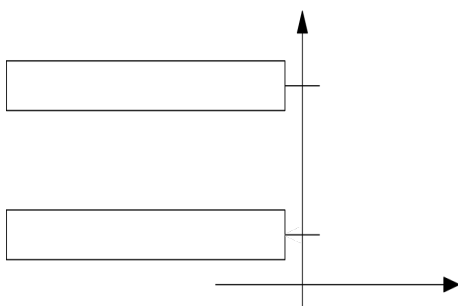


## 2 Trasporto dell'Impedenza

Definiamo ora l'**impedenza** associata alla generica ascissa  $z$  dalla linea come:

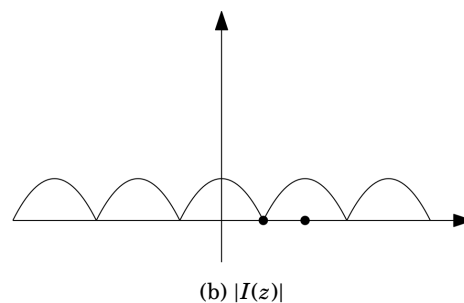
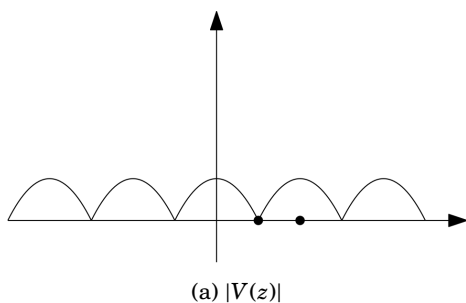
$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{-jI(0)Z_0 \sin(kz)}{I(0) \cos(kz)} = -jZ_0 \tan(kz)$$

Analizziamo ora il seguente esempio di una linea chiusa su un **aperto**:



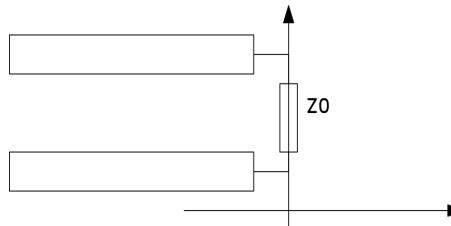
$$\begin{cases} V(z) = V(0) \cos(kz) \\ I(z) = -j \frac{V(0)}{Z_0} \sin(kz) \end{cases}$$

In questo caso avremo i grafici invertiti:



## 2.1 Caso Carico uguale a Impedenza della Linea

Poniamoci nella seguente situazione:



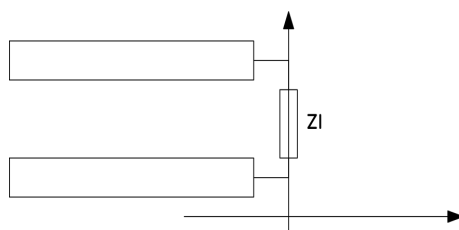
$$\begin{cases} V(z) = V(0) \\ \cos(kz) - jZ_0 I(0) \\ \sin(kz) \\ I(z) = I(0) \\ \cos(kz) - j \frac{V(0)}{Z_0} \\ \sin(kz) \end{cases}$$

$$Z_0 = \frac{V(0)}{I(0)} \implies V(0) = Z_0 I(0)$$

Quindi sostituendo otteniamo:

$$\begin{cases} V(z) = Z_0 I(0) \cos(kz) - jZ_0 I(0) \sin(kz) \\ = Z_0 I(0) (\cos(kz) - j \sin(kz)) = Z_0 I(0) e^{-jkz} \\ I(z) = I(0) \cos(kz) - jI(0) \sin(kz) = I(0) e^{-jkz} \end{cases}$$

## 2.2 Caso Impedenza Generica



$$\begin{cases} V(z) = Z_l I(0) \cos(kz) - jZ_0 I(0) \sin(kz) \\ I(z) = I(0) \cos(kz) - j \frac{Z_l}{Z_0} I(0) \sin(kz) \end{cases}$$

Ora calcoliamo l'impedenza sulla linea:

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{Z_l I(0) \cos(kz) - jZ_0 I(0) \sin(kz)}{I(0) \cos(kz) - j \frac{Z_l}{Z_0} I(0) \sin(kz)} = \\ &= Z_0 \frac{Z_l \cos(kz) - jZ_0 \sin(kz)}{Z_0 \cos(kz) - jZ_l \sin(kz)} = \\ &\text{raccolgo sopra e sotto } \cos(kz) \\ &= Z_0 \frac{Z_l - jZ_0 \tan(kz)}{Z_0 - jZ_l \tan(kz)} = Z_0 \frac{Z_l - jZ_0 \tan(l)}{Z_0 - jZ_l \tan(l)} \end{aligned}$$

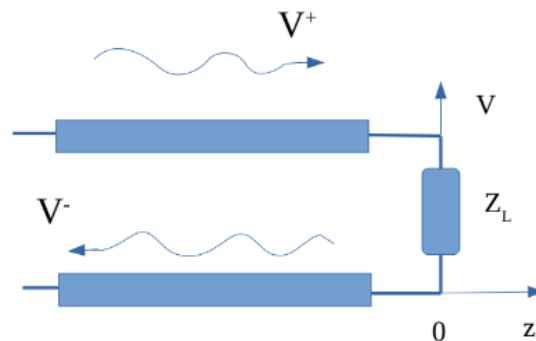


Quindi definiamo Formula del Trasporto di Impedenza:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_l - jZ_0 \tan(kz)}{Z_0 - jZ_l \tan(kz)} = Z_0 \frac{Z_l - jZ_0 \tan(l)}{Z_0 - jZ_l \tan(l)}$$

### 3 Coefficiente di Riflessione

Consideriamo nuovamente questo caso:



Scriviamo la tensione sottoforma di **onde viaggianti**:

$$\begin{aligned} V(z) &= V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz} = \\ &= V^+ e^{-jkz} [1 + \Gamma(z)] \end{aligned}$$

Dove:

$$\Gamma(z) = \frac{V^-}{V^+} e^{2jkz} = \Gamma(0) e^{2jkz}$$

Discorso analogo vale per la corrente:

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-jkz} [1 - \Gamma(z)]$$

Mentre:

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \\ Z(0) &= \frac{V(0)}{I(0)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(0)}{1 - \Gamma(0)} \end{aligned}$$

Possiamo inoltre definire:

$$\Gamma(0) = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}$$

### 3.1 Caratteristiche del Coefficiente di Riflessione

Lungo una linea **senza perdite** abbiamo che:

$$\Gamma(z) = \frac{V^-}{V^+} e^{2jkz} = \Gamma(0) e^{2jkz}$$

Allora se facciamo il **modulo**:

$$|\Gamma(z)| = |\Gamma(0) e^{2jkz}| = |\Gamma(0)| |e^{2jkz}| = |\Gamma(0)|$$

Vuol dire che il **modulo del Coefficiente di Riflessione non varia lungo una linea uniforme**.

Ora scriviamo:

$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} = \frac{R_l + jX_l - Z_0}{R_l + jX_l + Z_0}$$

Facciamo il modulo quadro:

$$|\Gamma_l|^2 = \frac{(R_l - Z_0)^2 + X_l^2}{(R_l + Z_0)^2 + X_l^2} \begin{cases} = 0 \leftrightarrow Z_l = Z_0 \\ = 1 \leftrightarrow Z_l = jX_l \\ < 1 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

## 4 Rapporto d'Onda Stazionario

Si definisce il **Rapporto d'Onda Stazionario** (ROS) lungo una linea omogenea il rapporto:

$$ROS = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}}$$

Possiamo metterlo in relazione con il modulo del **Coefficiente di Riflessione**:

$$V(z) = V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz} = V^+ e^{-jkz} (1 + \Gamma(0) e^{2jkz})$$

$$\begin{aligned} |V(z)| &= |V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz}| = |V^+ e^{-jkz}| |1 + \Gamma(0) e^{2jkz}| = \\ &= |V^+| |1 + \Gamma(0) e^{2jkz}| \end{aligned}$$

Quindi il ROS lo scriveremo come:

$$\begin{aligned} ROS &= \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} = \frac{(|V^+| | (1 + \Gamma(0)e^{2jkz}) |)_{\max}}{(|V^+| | (1 + \Gamma(0)e^{2jkz}) |)_{\min}} = \\ &= \frac{| (1 + \Gamma(0)e^{2jkz}) |_{\max}}{| (1 + \Gamma(0)e^{2jkz}) |_{\min}} \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere:

$$\Gamma(0) = |\Gamma(0)|e^{j\Phi_0}$$

Quindi:

$$\Gamma(z) = \Gamma(0)e^{2jkz} = |\Gamma(0)|e^{j\Phi_0}e^{2jkz} = |\Gamma(0)|e^{j(2jkz+\Phi_0)}$$

Quindi  $\Gamma(z)$  ha:

- $|\Gamma(z)| = |\Gamma(0)|$
- $ARG(\Gamma(z)) = (2kz + \Phi_0)$

Inoltre notiamo che  $\Gamma(z)$  è **periodica**:

$$2kz = 2\pi \implies 2 \frac{2\pi}{\lambda} z = 2\pi \implies z = \frac{\lambda}{2}$$

Quindi il numeratore del ROS è massimo quando:

$$2kz + \Phi_0 = 2n\pi$$

Possiamo allora definire una serie di ascisse  $z_n$  in corrispondenza delle quali la **tensione è massima**:

$$z_n = \frac{n\pi}{k} - \frac{\Phi_0}{2k} = n \frac{\lambda}{2} - \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\lambda}{2} = \left( n - \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \frac{\lambda}{2}$$

$$\begin{aligned} |V|_{\max} &= |V^+| |1 + |\Gamma(0)e^{j(2kz_n+\Phi_0)}| = \\ &= |V^+| (1 + |\Gamma(0)|) = |V^+| (1 + |\Gamma(z)|) \end{aligned}$$

Un discorso analogo può essere fatto per minimizzare il denominatore del ROS:

$$\begin{aligned} 2kz + \Phi_0 &= \pi + 2n\pi = (2n + 1)\pi \\ z'_n &= \frac{n\pi}{k} + \frac{\pi}{2k} - \frac{\Phi_0}{2k} = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\lambda}{2} = \left( n + \frac{1}{2} - \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |V|_{\min} &= |V^+| |1 + |\Gamma(0)e^{j(2kz'_n + \Phi_0)}| = \\
 &= |V^+| (1 - |\Gamma(0)|) = |V^+| (1 - |\Gamma(z)|)
 \end{aligned}$$

Quindi in conclusione:

$$ROS = \frac{1 + |\Gamma(z)|}{1 - |\Gamma(z)|}$$

Quindi al variare del carico  $Z_l$  il ROS varia per:

$$1 \leq ROS \leq \infty$$

In particolare:

- $ROS = 1$  se  $\Gamma = 0$  ovvero se  $Z_l = Z_0$
- $ROS = \infty$  se  $|\Gamma| = 1$  ovvero se  $Z_l = jX_l$

Calcoliamo ora l'impedenza in  $z_n$ :

$$Z(z_n) = \frac{V(z_n)}{I(z_n)} = Z_0 \frac{V^*(1 + |\Gamma|)}{V^*(1 - |\Gamma|)} = Z_0 ROS$$

Facciamo un analogo calcolo per  $z'_n$ :

$$Z(z'_n) = \frac{V(z'_n)}{I(z'_n)} = Z_0 \frac{V^*(1 - |\Gamma|)}{V^*(1 + |\Gamma|)} = \frac{Z_0}{ROS}$$

Quindi  $|Z|$  assume valori:

$$\frac{Z_0}{ROS} \leq |Z(z)| \leq Z_0 ROS$$

Ora definiamo la parte reale dell'impedenza lungo la linea come:

$$\begin{aligned}
 R(z) &= \operatorname{Re}\{Z(z)\} = Z_0 \operatorname{Re}\left\{\frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}\right\} \\
 \operatorname{Re}\left\{\frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}\right\} &= \operatorname{Re}\left\{\frac{(1 + \Gamma(z))(1 - \Gamma^*(z))}{|1 - \Gamma(z)|^2}\right\} = \\
 &= \operatorname{Re}\left\{\frac{1 - |\Gamma(z)|^2 + 2j\operatorname{Im}\{\Gamma(z)\}}{|1 - \Gamma(z)|^2}\right\} = \frac{1 - |\Gamma(z)|^2}{|1 - \Gamma(z)|^2}
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$R(z) = Z_0 \frac{1 - |\Gamma(z)|^2}{|1 - \Gamma(z)|^2}$$

Dove  $|\Gamma(z)|^2$  è costante per qualsiasi  $z$ , quindi varierà solo il suo denominatore:

$$Z_0 \frac{1 - |\Gamma(z)|^2}{[1 + |\Gamma(z)|]^2} \leq R(z) \leq Z_0 \frac{1 + |\Gamma(z)|^2}{[1 - |\Gamma(z)|]^2}$$

Ovvero

$$\frac{Z_0}{ROS} \leq R(z) \leq Z_0 ROS$$

## Capitolo 3

# Potenza lungo una Linea senza Perdite

### 1 Linea indefinita



Lungo questa **linea senza perdite** si propaga la sola onda:

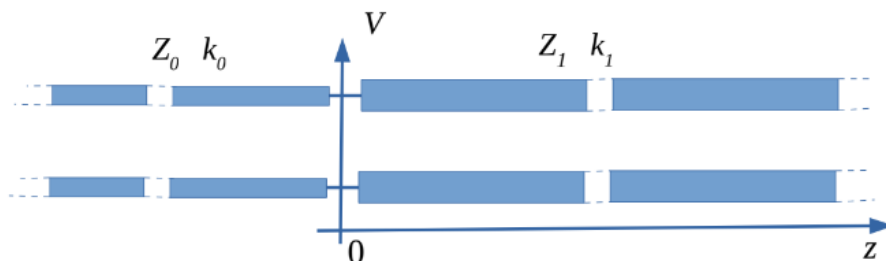
$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-jkz} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-jkz} \end{cases}$$

Valutiamo ora la potenza su un'ascissa generica:

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} V^+ e^{-jkz} \frac{V^{+*}}{Z_0} e^{jkz} = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0}$$

### 2 Due Linee Indefinite

Consideriamo ora il seguente schema:



$$\begin{cases} V_0(z) = V_0^+ e^{-jk_0 z} + V_0^- e^{jk_0 z} = V_0^+ e^{-jk_0 z} + V_0^+ \Gamma(0) e^{jk_0 z} \\ I_0(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-jk_0 z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{jk_0 z} = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-jk_0 z} - \frac{V_0^+}{Z_0} \Gamma(0) e^{jk_0 z} \end{cases}$$

(Prima Linea)

Dove:

$$\Gamma(0) = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \begin{cases} \text{Positivo se } Z_1 > Z_0 \\ \text{Negativo se } Z_1 < Z_0 \end{cases}$$

Mentre nella **seconda linea**:

$$\begin{cases} V_1(z) = V_1^+ e^{-jk_1 z} \\ I_1(z) = \frac{V_1^+}{Z_1} e^{-jk_1 z} \end{cases} \quad \text{(Seconda Linea)}$$

Per la **Continuità della Tensione** possiamo dire che:

$$V_0(0) = V_1(0)$$

Quindi:

$$V_0^+ + V_0^- = V_1^+$$

Possiamo quindi riscrivere  $V_1^+$  come:

$$V_1^+ = V_0^+ (1 + \Gamma(0)) = V_0^+ \left( 1 + \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \right) = V_0^+ \left( \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_0} \right)$$

La **Potenza della seconda linea** è:

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \frac{1}{2} V_1(z) I_1^*(z) = \frac{1}{2} V_1^+ e^{-jk_1 z} \frac{V_1^*}{Z_1} e^{jk_1 z} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_1^+|^2}{Z_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_0} \right)^2 \frac{|V_0^+|^2}{Z_1} = \\ &= \frac{2 Z_1}{(Z_1 + Z_0)^2} |V_0^+|^2 \end{aligned}$$

Mentre la **Potenza nella prima linea** è:

$$\begin{aligned}
 P_0(z) &= \frac{1}{2} V_0(z) I_0^*(z) = \frac{1}{2} (V_0^+ e^{-jk_0 z} + V_0^+ \Gamma(0) e^{jk_0 z}) \\
 &\quad \left( \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-jk_0 z} - \frac{V_0^+}{Z_0} \Gamma(0) e^{jk_0 z} \right)^* = \\
 &= \frac{1}{2} (V_0^+ e^{-jk_0 z} + V_0^+ \Gamma(0) e^{jk_0 z}) \left( \frac{V_0^{+*}}{Z_0} e^{jk_0 z} - \frac{V_0^{+*}}{Z_0} \Gamma(0) e^{-jk_0 z} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} - \Gamma(0)^2 \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} + \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} \Gamma(0) e^{2jk_0 z} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} \Gamma(0) e^{-2jk_0 z}
 \end{aligned}$$

Quindi:<sup>1</sup>

$$P_0(z) = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} - \Gamma(0)^2 \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} + j \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} \Gamma(0) \sin(2jk_0 z)$$

Quindi la Potenza nella sezione generica  $z$  è costituita da una **Potenza Attiva** indipendente da  $z$ :

$$Re\{P_0(z)\} = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} - \Gamma(0)^2 \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} \quad (\text{Potenza Attiva})$$

E da una **Potenza Reattiva**:

$$Im\{P_0(z)\} = \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} \Gamma(0) \sin(2jk_0 z) \quad (\text{Potenza Reattiva})$$

Questa potenza si **annulla** per  $z = 0$ , cioè se si calcola proprio sul **carico**, essendo resistivo, all'aumentare di  $z$  aumenta anche il **modulo della potenza reattiva**, raggiungendo il suo **massimo** in  $z = -\frac{\lambda}{8}$  per poi diminuire ed **annullarsi** in  $z = -\frac{\lambda}{4}$ .  
(ripetendosi con periodo  $\frac{\lambda}{2}$ )

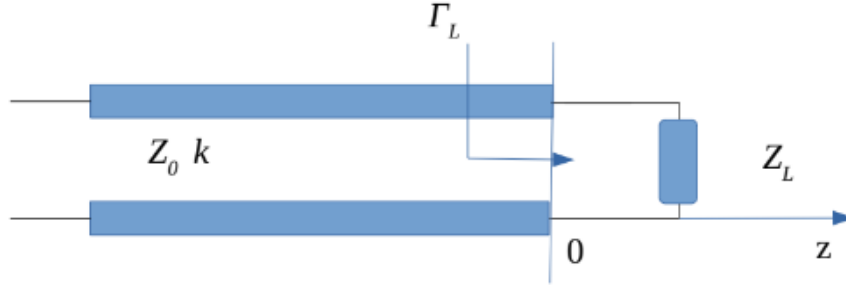
---

<sup>1</sup>  $\frac{1}{2} e^a - \frac{1}{2} e^{-a} = j \sin(a)$



### 3 Linea con Carico

Prendiamo ora il seguente caso:



Dove avremo i seguenti andamenti di tensione e corrente lungo la linea:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz} = V^+ e^{-jkz} + V^+ \Gamma(0) e^{jkz} = \\ \quad = V^+ e^{-jkz} + V^+ |\Gamma(0)| e^{j(kz+\Phi_0)} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-jkz} - \frac{V^-}{Z_0} e^{jkz} = \frac{V^+}{Z_0} e^{-jkz} - \frac{V^+}{Z_0} |\Gamma(0)| e^{j(kz+\Phi_0)} \end{cases}$$

E in generale la potenza vale:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} (V^+ e^{-jkz} + V^+ |\Gamma(0)| e^{j(kz+\Phi_0)}) \\ &\quad \left( \frac{V^+}{Z_0} e^{-jkz} - \frac{V^+}{Z_0} |\Gamma(0)| e^{j(kz+\Phi_0)} \right)^* = \\ &= \frac{1}{2} (V^+ e^{-jkz} + V^+ |\Gamma(0)| e^{j(kz+\Phi_0)}) \\ &\quad \left( \frac{V^{+*}}{Z_0} e^{jkz} - \frac{V^{+*}}{Z_0} |\Gamma(0)| e^{-j(kz+\Phi_0)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} - |\Gamma(0)|^2 \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} + \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} |\Gamma(0)| e^{j(kz+\Phi_0)} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} |\Gamma(0)| e^{-j(kz+\Phi_0)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} - |\Gamma(0)|^2 \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} + j \frac{|V^+|^2}{Z_0} |\Gamma(0)| \sin(2kz + \Phi_0)$$

Anche in questo caso la potenza alla sezione  $z$  è costituita da una **Potenza Attiva** indipendente da  $z$ :

$$\operatorname{Re}\{P(z)\} = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} - |\Gamma(0)|^2 \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0} \quad (\text{Potenza Attiva})$$

E da una **Potenza Reattiva**:

$$\operatorname{Im}\{P(z)\} = \frac{|V^+|^2}{Z_0} |\Gamma(0)| \sin(2kz + \Phi_0) \quad (\text{Potenza Reattiva})$$

Che si **annulla** per  $2kz + \Phi_0 = n\pi$ , quindi **non si annulla** per  $z = 0$  come nel caso di un carico **puramente resistivo**.

Infatti nel caso di un carico con una **parte reattiva non nulla** ( $Z_l = R_l + jX_l$ ), è associata la **potenza reattiva**:

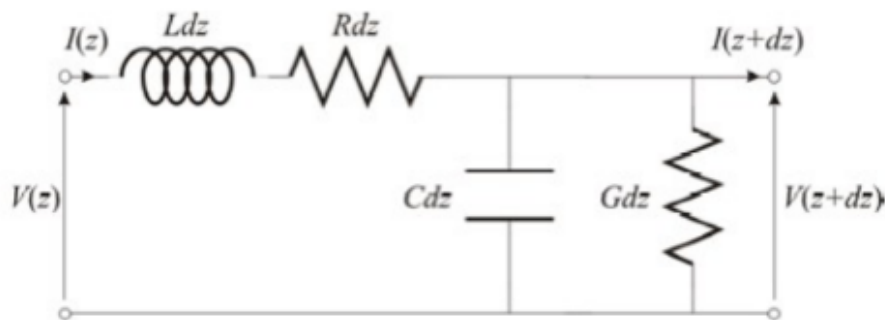
$$\operatorname{Im}\{P(0)\} = \frac{1}{2} |I(0)|^2 X_l = \frac{|V^+|^2}{Z_0} |\Gamma(0)| \sin(\Phi_0) = 2\omega(w_m^l - w_e^l)$$

Dove  $w_m^l$  e  $w_e^l$  sommo le **energie pseudo magnetiche e pseudo elettriche immagazzinate nel carico**.

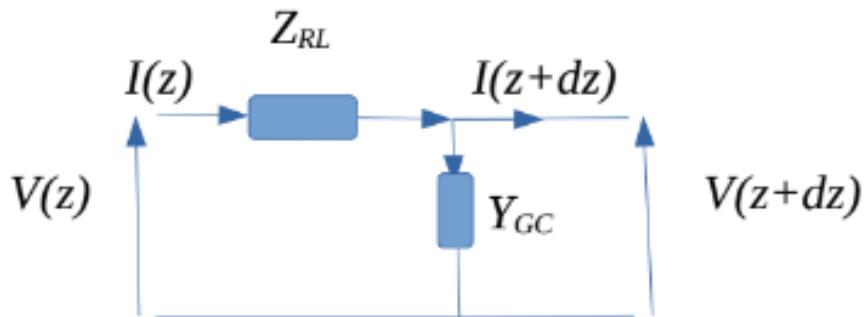
## Capitolo 4

# Potenza lungo la Linea con Perdite

Consideriamo il **circuito equivalente** associato ad una **fettina  $dz$**  di **linea con perdite**:



Che possiamo sintetizzare nel seguente modo:



Dove:

- $Z_{RL} = j\omega L_{eq} = j\omega \left( L - j\frac{R}{\omega} \right) = j\omega L + R$
- $Y_{GC} = j\omega C_{eq} = j\omega \left( C - j\frac{G}{\omega} \right) = j\omega C + G$

**Risolvendo** il circuito ottengo:

$$V(z + dz) - V(z) = -Z_{RL}dzI = -j\omega L_{eq}dzI \quad (\text{Tensione})$$

Quindi:

$$\frac{dV}{dz} = -j\omega L_{eq}I$$

$$I(z + dz) - I(z) = -Y_{GC} dz V = -j\omega C_{eq} dz V \quad (\text{Corrente})$$

Quindi:

$$\frac{dI}{dz} = -j\omega C_{eq} V$$

## 1 Linea Indefinita

In particolare valutiamo la seguente situazione:



Dove avremo il seguente andamento di **tensione** e **corrente**:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-jkz} + \frac{V^-}{Z_0} e^{jkz} \end{cases}$$

Dove:

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}} = \omega \sqrt{\left(L - j\frac{R}{\omega}\right) \left(C - j\frac{G}{\omega}\right)} = \\ &= \omega \sqrt{\left(LC - \frac{RG}{\omega^2}\right) - j\left(\frac{LG}{\omega} + \frac{RC}{\omega}\right)} \end{aligned} \quad 1$$

Quindi:

$$k = \beta - j\alpha$$

E consideriamo il solo **caso fisico**:

$$\beta > 0, \quad \alpha > 0$$

$$V(z) = V^+ e^{-jkz} = V^+ e^{-j(\beta - j\alpha)z} = |V^+| e^{j\alpha_+} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

E passiamo nel **dominio del tempo**:

$$v(z, t) = |V^+| e^{-\alpha z} \cos(\omega t + \alpha_+ - \beta z)$$

Che con  $\beta > 0$  e  $\alpha > 0$  rappresenta **un'onda** che si propaga con **velocità**  $v = \frac{\omega}{\beta}$  nelle  $z$  positive **attenuandosi**.

<sup>1</sup>fai la moltiplicazione e poi separa Re e Im

Complessivamente la **tensione** sarà:

$$V(z) = V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz} = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V^- e^{-\alpha z} e^{j\beta z}$$

Calcoliamoci  $Z_0$ :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \sqrt{\frac{L - j\frac{R}{\omega}}{C - j\frac{G}{\omega}}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{1 - j\frac{R}{\omega L}}{1 - j\frac{G}{\omega C}}}$$

$Z_0$  sarà sempre **reale** e **positivo** se vale:

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{G}{\omega C} \quad (\text{HEAVISIDE})$$

In tal caso:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Se  $L$ ,  $C$ ,  $R$  e  $G$  **non dipendono dalla frequenza** allora:

- $\beta = \omega\sqrt{LC}$
- $\alpha = -\sqrt{\frac{L}{C}}G$

Tuttavia la condizione di **HEAVISIDE** è difficile da verificarsi, quindi nel caso in cui non si verifichi, la scelta **corretta** è quella di  $Re\{Z_0\} > 0$ :

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-j(\beta - j\alpha)z} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-j(\beta - j\alpha)z} \end{cases}$$

Calcolo la **Potenza**:

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0^*} e^{-2\alpha z}$$

Suddivido in **potenza attiva** e **potenza reattiva**:

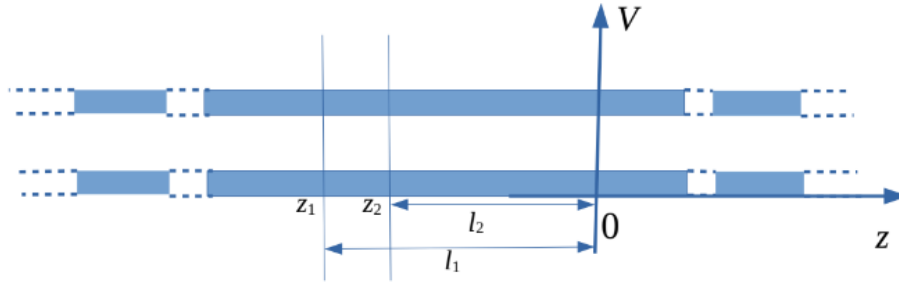
$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{\left(\frac{|Z_0|^2}{Z_0}\right)} e^{-2\alpha z} = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0^2 + X_0^2} (R_0 + jX_0) e^{-2\alpha z}$$

$$P_R(z) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0^2 + X_0^2} R_0 e^{-2\alpha z}$$

Che è una **potenza positiva** e **diminuisce** al **crescere di  $z$** .

## 2 Potenza tra due ascisse

Per capire meglio analizziamo il seguente caso:



Dove avremo le seguenti **potenze**:

$$\begin{cases} P_R(z_1) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z_1} \\ P_R(z_2) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z_2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_R(z_1) - P_R(z_2) &= \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z_1} - \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z_2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} R_0 (e^{2\alpha l_1} - e^{2\alpha l_2}) \end{aligned}$$

La **differenza delle due potenze attive** rappresenta la **potenza dissipata dalla linea tra le due sezioni** ed è positiva (quindi  $R_0 > 0$ ,  $\alpha > 0$ ).

Ripetiamo il calcolo per  $P_x$ :

$$\begin{cases} P_X(z_1) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} X_0 e^{-2\alpha z_1} \\ P_X(z_2) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} X_0 e^{-2\alpha z_2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_X(z_1) - P_X(z_2) &= \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} X_0 e^{-2\alpha z_1} - \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} X_0 e^{-2\alpha z_2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{|Z_0|^2} X_0 (e^{2\alpha l_1} - e^{2\alpha l_2}) \end{aligned}$$

La **differenza tra le potenze reattive** è **proporzionale alla differenza delle pseudo energie elettriche e magnetiche medie immagazzinate nel tratto di linea**.

Tale **potenza** è **positiva** o **negativa** in base al segno di  $X_0$  (discorso analogo per  $V^-$ ).

Consideriamo ora:

$$\begin{aligned} k &= \omega \sqrt{\left(LC - \frac{RG}{\omega^2}\right) - j\left(\frac{LG}{\omega} + \frac{RC}{\omega}\right)} = \\ &= \omega \sqrt{LC} \sqrt{1 - \frac{RG}{\omega^2 LC} - j\left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)} \end{aligned}$$

Avere **piccole perdite** vuol dire:

- $\frac{R}{\omega L} \ll 1 \implies \frac{RG}{\omega^2 LC} \ll \frac{R}{\omega L}$
- $\frac{G}{\omega C} \ll 1 \implies \frac{RG}{\omega^2 LC} \ll \frac{G}{\omega C}$

Queste approssimazioni ci **semplificano** l'espressione di  $k$ :

$$k \approx \omega \sqrt{LC} \left(1 - j \frac{1}{2} \left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)\right) = \beta - j\alpha$$

Quindi  $\beta$  ha lo stesso valore di  $k$  in **assenza di perdite**, ma esse danno luogo ad un'**attenuazione** che cresce **linearmente** con le **perdite**.

Calcoliamo ora l'**impedenza caratteristica**:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \sqrt{\frac{L - j\frac{R}{\omega}}{C - j\frac{G}{\omega}}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{1 - j\frac{R}{\omega L}}{1 - j\frac{G}{\omega C}}} = \\ &= \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right)^{1/2} \left(1 - j\frac{G}{\omega C}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Nel caso di **piccole perdite**:

$$\frac{R}{\omega L} \ll 1 \implies \left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right)^{1/2} \approx 1 - j\frac{1}{2} \frac{R}{\omega L}$$

E dato che:

$$\frac{G}{\omega C} \ll 1 \implies \left(1 - j\frac{G}{\omega C}\right)^{1/2} \approx 1 + j\frac{1}{2} \frac{G}{\omega C}$$

Quindi sostituendo:<sup>2</sup>

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} + j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}\right) = R_0 + jX_0$$

Dove:

- $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$
- $X_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}\right)$

Quindi ha la **parte reale** uguale a come sarebbe  $Z_0$  in **mancanza di perdite**, o nel caso in cui valga la **condizione di Heaviside**.

### 3 Linea con Carico

Infine consideriamo la seguente situazione:



Dove:

$$\begin{cases} k = \beta - j\alpha \\ Z_0 = R_0 + jX_0 \end{cases}$$

$$V(z) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} =$$

$$= V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \left(1 + \frac{V^-}{V^+} e^{2\alpha z} e^{2j\beta z}\right) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} (1 + \Gamma(z))$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} (1 - \Gamma(z))$$

$$\Gamma(0) = \Gamma_l = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}$$

Nel caso di piccole perdite  $X_0 \ll R_0$ , quindi:

$$\Gamma(0) = \frac{Z_l - R_0 - jX_0}{Z_l + R_0 + jX_0} \approx \frac{Z_l - R_0}{Z_l + R_0} - j \underbrace{\frac{X_0}{R_0} \frac{1}{\frac{Z_l}{R_0} + 1}}_{\text{trascurare}}$$

<sup>2</sup>Trascuro il termine con il coefficiente  $\frac{1}{4}$



La differenza maggiore dal caso **senza perdite** è che  $|\Gamma(z)| = |\Gamma(0)|e^{2\alpha z}$  **non è costante** lungo la linea, ma allontanandosi dal **carico**, il modulo **diminuisce**.

Calcoliamo ora la generica potenza lungo la linea:<sup>34</sup>

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} (1 + \Gamma(z)) \frac{V^{+*}}{Z_0^*} e^{-\alpha z} e^{j\beta z} (1 - \Gamma(z)^*) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0^*} e^{-2\alpha z} (1 - |\Gamma(z)|^2 + \Gamma(z) - \Gamma(z)^*) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0^*} e^{-2\alpha z} (1 - |\Gamma(z)|^2 + 2j \operatorname{Im}\{\Gamma(z)\}) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0^*} e^{-2\alpha z} (1 - |\Gamma_l|^2 e^{4\alpha z}) + j \frac{|V^+|^2}{Z_0^*} e^{-2\alpha z} e^{2\alpha z} \operatorname{Im}\{\Gamma_l e^{2j\beta z}\} = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{Z_0^*} e^{-2\alpha z} (1 - |\Gamma_l|^2 e^{4\alpha z})}_{\text{P. onda dir. meno P. onda rifl.}} + j \frac{|V^+|^2}{Z_0^*} \operatorname{Im}\{\Gamma_l e^{2j\beta z}\}
 \end{aligned}$$

Allontanandosi dal carico la **potenza dell'onda riflessa** sarà sempre più **piccola** di quella dell'**onda incidente**.

---

<sup>3</sup>  $|\Gamma(z)| = |\Gamma_L| e^{2\alpha z}$

<sup>4</sup>  $\Gamma(z) = \Gamma_L e^{2\alpha z} e^{2j\beta z}$

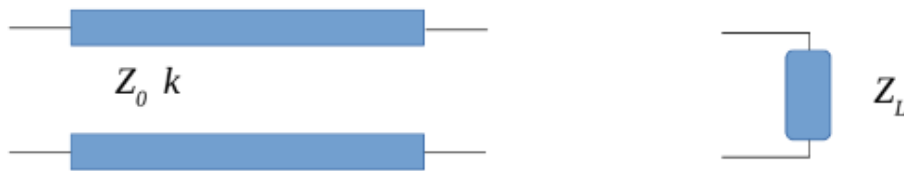
# Capitolo 5

## Adattamenti

### 1 Adattamento con Stub Serie

#### 1.1 Metodo 1

Poniamoci nella situazione in cui vogliamo collegare il carico  $Z_L$  sulla linea **senza perdite**, con **impedenza caratteristica**  $Z_0$ :



Se la colleghiamo direttamente, avremo un **coefficiente di riflessione** non nullo:

$$\Gamma_l = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

E un **ROS** pari a:

$$ROS = \frac{1 + |\Gamma_l|}{1 - |\Gamma_l|}$$

Spostandosi lungo la linea,  $|\Gamma|$  rimane **costante**, mentre il **modulo dell'impedenza** cambia sezione per sezione:

$$\frac{Z_0}{ROS} \leq |Z(z)| \leq Z_0 ROS$$

E analogamente la **parte reale dell'impedenza** varia tra:

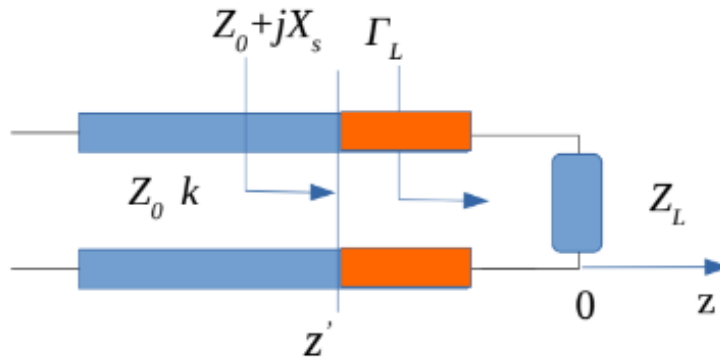
$$\frac{Z_0}{ROS} \leq R(z) \leq Z_0 ROS$$

In particolare esiste una coordinata  $z'$  tale che:

$$R(z') = Z_0$$

E allo stesso tempo:

$$Z(z') = Z_0 + j \underbrace{X(z')}_{X_s}$$



**Ma come posso individuare questa sezione  $z'$ ?**

Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} Z(z') &= Z_0 \frac{1 + \Gamma(z')}{1 - \Gamma(z')} = Z_0 \frac{[1 + \Gamma(z')][1 - \Gamma(z')^*]}{|1 - \Gamma(z')|^2} = \\ &= Z_0 \frac{1 - |\Gamma|^2 + 2j \operatorname{Im}\{\Gamma(z')\}}{|1 - \Gamma(z')|^2} = \\ &= Z_0 \frac{1 - |\Gamma|^2}{|1 - \Gamma(z')|^2} + jZ_0 2 \frac{\operatorname{Im}\{\Gamma(z')\}}{|1 - \Gamma(z')|^2} \end{aligned}$$

Quindi affinché:

$$R(z') = Z_0 \leftrightarrow \frac{1 - |\Gamma|^2}{|1 - \Gamma(z')|^2} = 1$$

(se  $|\Gamma| = 1$  la linea è chiusa su una pura reattanza)

Se  $|\Gamma| < 1$ :

$$\begin{aligned} 1 - |\Gamma|^2 &= |1 - \Gamma(z')|^2 = [1 - \Gamma(z')][1 - \Gamma(z')^*] = \\ &= 1 - \Gamma(z')^* - \Gamma(z') + |\Gamma|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}\{\Gamma(z')\} + |\Gamma|^2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\operatorname{Re}\{\Gamma(z')\} = |\Gamma|^2 = |\Gamma_l|^2$$

Ricordando che:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \Gamma(0)e^{2jkz} = \Gamma_l e^{2jkz} = |\Gamma_l| e^{j\varphi_l} e^{2jkz} = |\Gamma_l| e^{j(2kz + \varphi_l)} = \\ &= |\Gamma_l| \cos(2kz + \varphi_l) + j|\Gamma_l| \sin(2kz + \varphi_l) \end{aligned}$$

Quindi sostituendo otterremo:

$$\operatorname{Re}\{\Gamma(z')\} = |\Gamma_l| \cos(2kz' + \varphi_l) = |\Gamma|^2 \implies \cos(2kz' + \varphi_l) = |\Gamma|$$

Che ha come soluzioni:

$$2kz'_n = \frac{4\pi}{\lambda} \pm \arccos(|\Gamma_n|) - \varphi_l + 2n\pi$$

$$\implies z'_n = \pm \frac{\arccos(|\Gamma_n|) \lambda}{2\pi} - \frac{\varphi_l \lambda}{2\pi} + n \frac{\lambda}{2} \quad \forall n : z'_n < 0$$

Quindi abbiamo trovato le ascisse  $z'_n$  in corrispondenza delle quali:

$$Z(z'_n) = Z_0 + jZ_0 2 \frac{\operatorname{Im}\{\Gamma(z'_n)\}}{|1 - \Gamma(z'_n)|^2}$$

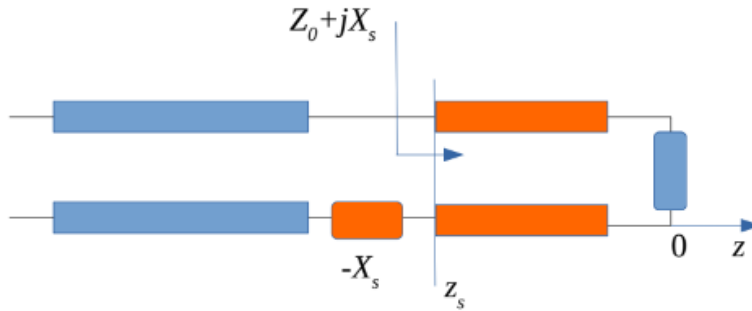
Ricordando anche che:

- $1 - |\Gamma_l|^2 = |1 - \Gamma(z'_n)|^2$
- $\operatorname{Im}\{\Gamma(z'_n)\} = |\Gamma_l| \sin(2kz'_n + \varphi_l) = \pm \sqrt{1 - |\Gamma_l|^2}$

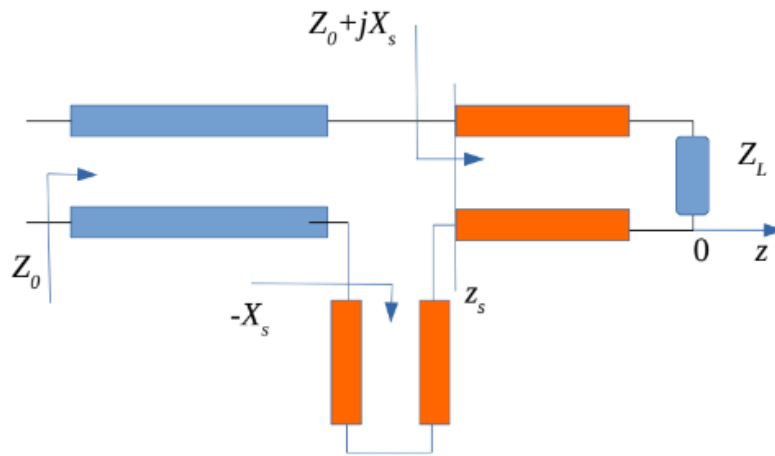
Quindi:

$$X_s = \operatorname{Im}\{Z(z'_n)\} = Z_0 2 \frac{\operatorname{Im}\{\Gamma(z'_n)\}}{|1 - \Gamma(z'_n)|^2} = \pm Z_0 \underbrace{\frac{\sqrt{1 - |\Gamma_l|^2}}{1 - |\Gamma_l|^2}}_{\frac{\sqrt{X}}{X} = \frac{1}{\sqrt{X}}} = \frac{\pm Z_0}{\sqrt{1 - |\Gamma_l|^2}}$$

Quindi per ottenere l'adattamento dobbiamo **compensare** la  $X_s$  inserendo a  $z'_n$  una  $X_s$  **uguale** ed **opposta**:



La **reattanza**  $X_s$  può essere realizzata con uno **stub in corto** o con uno **stub aperto** (es. corto):



**Ma a che distanza devo mettere lo stub??**

$$Z(l) = jZ_0 \tan(kl)$$

Quindi pongo:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} Z_0 \tan(kl_{stub}) &= -X_s \\ \Rightarrow l_{stub} &= -\operatorname{atan}\left(\frac{X_s}{Z_0}\right) \frac{\lambda}{2\pi} + n \frac{\lambda}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

## 1.2 Metodo 2

Gli stessi risultati li possiamo ottenere con il **trasporto di impedenza**:

Voglio trovare tutte le sezioni in cui **l'impedenza di carico trasportata ha parte reale  $Z_0$** .

$$Z(l) = Z_0 \frac{R_l + jZ_0 \tan(kl)}{Z_0 + jR_l \tan(kl)} = Z_0 + jX_s$$

Divido primo e secondo membro per  $Z_0$  e numeratore e denominatore per  $Z_0$ :

$$Z'(l) = \frac{R'_l + jt}{1 + jR'_l t} = 1 + jX'_s$$

Dove:

- $Z'(l) = \frac{Z(l)}{Z_0}$

<sup>1</sup>La tangente si annulla ogni  $n\pi$

- $R'(l) = \frac{R_l}{Z_0}$
- $X'_s = \frac{X_s}{Z_0}$
- $t = \tan(kl)$

In particolare:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{Z'(l)\} = 1 \\ \operatorname{Im}\{Z'(l)\} = X'_s \end{cases}$$

Cerchiamo ora di separare **parte reale** e **parte immaginaria**:

$$Z'(l) = \frac{(R'_l + jt)(1 - jR'_l t)}{1 + R'^2_l t^2} = \frac{R'_l - jR'^2_l t + jt + R'_l t^2}{1 + R'^2_l t^2} = 1 + jX'_s$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{R'_l + R'_l t^2}{1 + R'^2_l t^2} &= 1 \\ \frac{-R'^2_l t + t}{1 + R'^2_l t^2} &= X'_s \end{aligned}$$

**Risolviamo la prima in t:**

Ricordiamoci però che la vera incognita è l!!

Quindi per prima cosa verifichiamo se  $t = \infty$ , ovvero  $l = \frac{\lambda}{4}$  è **soluzione del problema**:

$$t = \infty \Rightarrow Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) \approx \frac{1}{R'_l} = 1$$

Ma questo può accadere solo se  $R'_l = 1$ , quindi **NON è soluzione**.

Procediamo quindi moltiplicando per  $1 + R'^2_l t^2$ :

$$\begin{aligned} R'_l + R'_l t^2 &= 1 + R'^2_l t^2 \Rightarrow (R'^2_l - R'_l)t^2 = R'_l - 1 \\ \Rightarrow t^2 &= \frac{R'_l - 1}{R'^2_l - R'_l} \Rightarrow t^2 = \frac{\cancel{R'_l} - 1}{R'_l(\cancel{R'_l} - 1)} = \frac{1}{R'_l} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{R'_l}} \\ \Rightarrow \tan(kl) &= t = \pm \sqrt{\frac{1}{R'_l}} = \pm \sqrt{\frac{Z_0}{R_l}} \end{aligned}$$

Da questa espressione valuto la  $l$  in corrispondenza della quale:

$$Z(l) = Z_0 + jX_s$$

Ovvero:

$$l = \arctan \left( \sqrt{\frac{Z_0}{R_l}} \right) \frac{\lambda}{2\pi} + n \frac{\lambda}{2} \geq 0$$

Una volta calcolata la  $l$  alla quale vogliamo fare l'adattamento mi ricavo  $X_s$ :

$$\begin{aligned} X'_s &= \frac{-R'_l t + t}{1 + R'_l t^2} = \frac{\pm(1 - R'_l) \sqrt{\frac{1}{R'_l}}}{1 + R'_l} = \pm \frac{\frac{1 - R'_l}{\sqrt{R'_l}}}{1 + R'_l} = \\ &= \pm \frac{1 - R'_l}{\sqrt{R'_l}(1 + R'_l)} = \pm \frac{(1 - R'_l)(1 + R'_l)}{\sqrt{R'_l}(1 + R'_l)} = \pm \frac{1 - R'_l}{\sqrt{R'_l}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$X_s = X'_s \cdot \underbrace{Z_0}_{R_0} = \pm \frac{1 - \frac{R_l}{Z_0}}{\sqrt{\frac{R_l}{Z_0}}} \cdot Z_0 = \pm \frac{Z_0 - R_l}{\sqrt{R_l}/\sqrt{Z_0}} = \pm (R_0 - R_l) \cdot \sqrt{\frac{R_0}{R_l}}$$

Questa **reattanza** va compensata con una **reattanza uguale e opposta** attraverso uno **stub serie**:

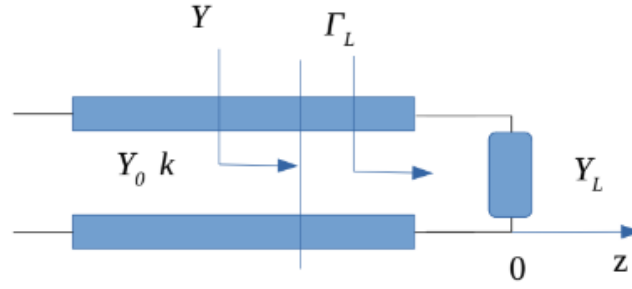
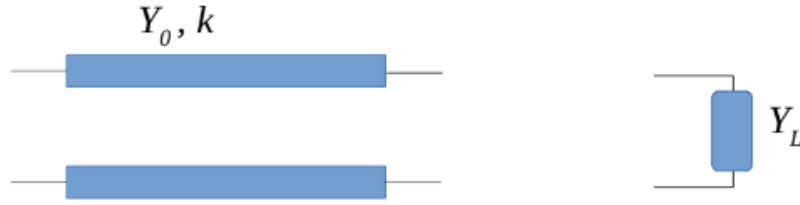
$$\begin{aligned} X_{stub} &= Z_0 \tan(kl_{stub}) = -X_s \\ kl_{stub} &= -\arctan \left( \frac{X_s}{Z_0} \right) + n\pi \\ \Rightarrow l_{stub} &= -\arctan \left( \frac{X_s}{Z_0} \right) \frac{\lambda}{2\pi} + n \frac{\lambda}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

## 2 Adattamento con Stub Parallelo

### 2.1 Metodo 1

Nel caso di un **adattamento** mediante **stub parallelo** conviene lavorare con le **ammettenze**.

Consideriamo quindi una linea **senza perdite** con un'**ammettenza caratteristica**  $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$  che vogliamo collegare ad un carico di **ammettenza**  $Y_l = \frac{1}{Z_l}$ :



Ricordiamo che:

$$\begin{aligned}
 Y(z') &= Y_0 \frac{1 - \Gamma(z')}{1 + \Gamma(z')} = Y_0 \frac{[1 - \Gamma(z')][1 + \Gamma(z')^*]}{|1 + \Gamma(z')|^2} = \\
 &= Y_0 \frac{1 - |\Gamma|^2 - 2j \operatorname{Im}\{\Gamma(z')\}}{|1 + \Gamma(z')|^2} = \\
 &= Y_0 \frac{1 - |\Gamma|^2}{|1 + \Gamma(z')|^2} - jY_0 2 \frac{\operatorname{Im}\{\Gamma(z')\}}{|1 + \Gamma(z')|^2}
 \end{aligned}$$

Quindi affinché:

$$Y(z') = G(z') + jB(z') = Y_0 + jB_p \leftrightarrow Y_0 \frac{1 - |\Gamma|^2}{|1 + \Gamma(z')|^2} = Y_0$$

(se  $|\Gamma| = 1$  la linea è chiusa su una pura reattanza) Se  $|\Gamma| < 1$ :

$$\begin{aligned}
 1 - |\Gamma|^2 &= |1 + \Gamma(z')|^2 = [1 + \Gamma(z')][1 + \Gamma(z')^*] = \\
 &= 1 + \Gamma(z')^* + \Gamma(z') + |\Gamma|^2 = 1 + 2\operatorname{Re}\{\Gamma(z')\} + |\Gamma|^2
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\operatorname{Re}\{\Gamma(z')\} = -|\Gamma|^2 = -|\Gamma_l|^2$$

Ricordando che:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z) &= \Gamma(0)e^{2jkz} = \Gamma_l e^{2jkz} = |\Gamma_l| e^{j\varphi_l} e^{2jkz} = |\Gamma_l| e^{j(2kz + \varphi_l)} = \\
 &= |\Gamma_l| \cos(2kz + \varphi_l) + j|\Gamma_l| \sin(2kz + \varphi_l)
 \end{aligned}$$



Quindi sostituendo otterremo:

$$\operatorname{Re}\{\Gamma(z')\} = |\Gamma_l| \cos(2kz' + \varphi_l) = -|\Gamma|^2 \implies \cos(2kz' + \varphi_l) = -|\Gamma|$$

Che ha come **soluzioni**:

$$2kz'_n = \frac{4\pi}{\lambda} \pm \arccos(-|\Gamma_n|) - \varphi_l + 2n\pi$$

$$\implies z'_n = \pm \frac{\arccos(-|\Gamma_n|) \lambda}{2\pi} - \frac{\varphi_l \lambda}{2\pi} + n \frac{\lambda}{2} \quad \forall n : z'_n < 0$$

Che sono le **ascisse** in cui  $G = Y_0$ .

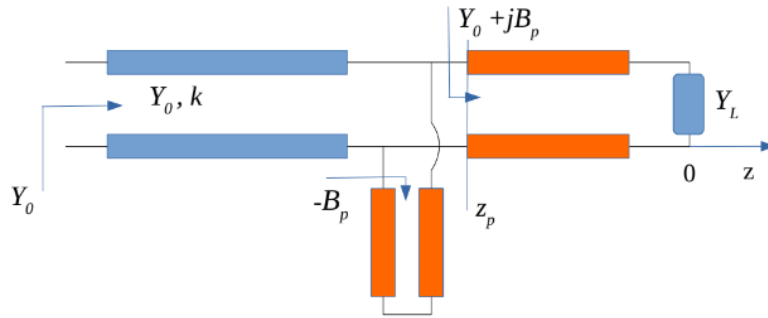
Ripetendo calcoli analoghi:

$$\operatorname{Im}\{\Gamma(z'_n)\} = |\Gamma_l| \sin(2kz'_n + \varphi_l) = \pm \sqrt{1 - |\Gamma_l|^2}$$

Quindi:

$$B_p = \operatorname{Im}\{Y(z'_n)\} = Y_0 2 \frac{\operatorname{Im}\{\Gamma(z'_n)\}}{|1 + \Gamma(z'_n)|^2} = \pm Y_0 \frac{\sqrt{1 - |\Gamma_l|^2}}{1 - |\Gamma_l|^2} = \frac{\pm Y_0}{\sqrt{1 - |\Gamma_l|^2}}$$

Quindi ora per ottenere l'**adattamento** devo compensare la **suscettanza**  $B_p$  con una **suscettanza uguale ed opposta**, attraverso per esempio uno **stub parallelo** in corto:



## 2.2 Metodo 2

Gli stessi risultati li possiamo ottenere con il **trasporto di ammettenza**:

Voglio trovare tutte le sezioni in cui l'**ammettenza** di carico **trasportata** ha **parte reale**  $G_L$ .

$$Y(l) = Y_0 \frac{Y_l + jY_0 \tan(kl)}{Y_0 + jY_l \tan(kl)} = Y_0 + jB_p$$

Divido primo e secondo membro per  $Y_0$  e numeratore e denominatore per  $Y_0$ :

$$Y'(l) = \frac{G'_l + jt}{1 + jG'_l t} = 1 + jB_p$$

Dove:

- $Y'(l) = \frac{Y(l)}{Y_0}$
- $G'_l = \frac{G_l}{Y_0}$
- $B'_p = \frac{B_p}{Y_0}$
- $t = \tan(kl)$

In particolare:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{Y'(l)\} = 1 \\ \operatorname{Im}\{Y'(l)\} = B'_p \end{cases}$$

Cerchiamo ora di separare **parte reale** e **parte immaginaria**:

$$Y'(l) = \frac{(G'_l + jt)(1 - jG'_l t)}{1 + jG'^2_l t^2} = \frac{G'_l - jG'^2_l t + jt + G'_l t^2}{1 + jG'^2_l t^2} = 1 + jB'_p$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{G'_l + G'_l t^2}{1 + jG'^2_l t^2} &= 1 \\ \frac{-G'^2_l t + t}{1 + G'^2_l t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Risolviamo la prima in  $t$ :

Procediamo quindi moltiplicando per  $1 + G'^2_l t^2$ :

$$\begin{aligned} G'_l + G'^2_l t^2 &= 1 + G'^2_l t^2 \implies (G'^2_l - G'_l)t^2 = G'_l - 1 \\ \implies t^2 &= \frac{G'_l - 1}{G'^2_l - G'_l} \implies t^2 = \frac{G'_l - 1}{G'_l(G'_l - 1)} = \frac{1}{G'_l} \implies t = \frac{1}{\sqrt{G'_l}} \end{aligned}$$

$$\implies \tan(kl) = t = \pm \sqrt{\frac{1}{G'_l}} = \pm \sqrt{\frac{Y_0}{G_l}}$$

Da questa espressione valuto la  $l$  in corrispondenza della quale:

$$Y(l) = Y_0 + jB_p$$

Ovvero:

$$l = \arctan\left(\frac{Y_0}{G_l}\right) \frac{\lambda}{2\pi} + n \frac{\lambda}{2} \geq 0$$

Una volta calcolata la  $l$  alla quale vogliamo fare l'**adattamento** mi ricavo  $B_p$ :

$$\begin{aligned} B'_p &= \frac{-G'_l{}^2 t + t}{1 + G'_l{}^2 t^2} = \frac{\pm(1 - G'_l{}^2) \sqrt{\frac{1}{G'_l}}}{1 + G'_l} = \pm \frac{\frac{1 - G'_l{}^2}{\sqrt{G'_l}}}{1 + G'_l} = \\ &= \pm \frac{1 - G'_l{}^2}{\sqrt{G'_l}(1 + G'_l)} = \pm \frac{(1 - G'_l)(1 + G'_l)}{\sqrt{G'_l}(1 + G'_l)} = \pm \frac{1 - G'_l}{\sqrt{G'_l}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$B_p = B'_p \cdot Y_0 = \pm \frac{1 - \frac{G_l}{Y_0}}{\sqrt{\frac{G_l}{Y_0}}} \cdot Y_0 = \pm \frac{Y_0 - G_l}{\sqrt{G_l}/\sqrt{Y_0}} = \pm(Y_0 - G_l) \cdot \sqrt{\frac{Y_0}{G_l}}$$

Questa **reattanza** va **compensata** con una **reattanza uguale e opposta** attraverso uno **stub parallelo**:

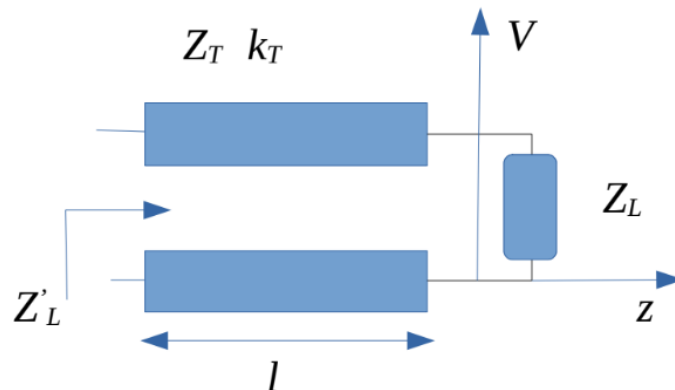
$$B_{stub} = Y_0 \cotan(kl_{stub}) = -B_p$$

$$kl_{stub} = -\operatorname{arccotan}\left(\frac{B_p}{Y_0}\right) + n\pi$$

$$\Rightarrow l_{stub} = -\operatorname{arccotan}\left(\frac{B_p}{Y_0}\right) \frac{\lambda}{2\pi} + n \frac{\lambda}{2} \geq 0$$

### 3 Adattamento Tramite Inverter

Consideriamo la seguente **linea senza perdite chiusa su un carico**:



L'impedenza  $Z'_L$  sarà:

$$Z'_L = Z_T \frac{Z_L + jZ_T \tan(k_T l)}{Z_T + jZ_L \tan(k_T l)}$$

Nel caso in cui:

$$k_T l = \frac{\pi}{2} \implies l = \frac{\lambda_T}{4}$$

Allora:

$$k_T l = \left(\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \infty$$

Quindi va calcolata con il limite:

$$Z'_L = \lim_{\tan(k_T l) \longrightarrow \infty} Z_T \frac{Z_L + jZ_T \tan(k_T l)}{Z_T + jZ_L \tan(k_T l)} = \frac{Z_T^2}{Z_L} = Z_T^2 Y_L$$

**Quindi possiamo dire che il trasporto di un'impedenza di un quarto di lunghezza d'onda lungo una linea da luogo ad un'impedenza proporzionale al reciproco dell'impedenza originale.**

## Capitolo 6

# Propagazione di un Segnale a Banda Stretta

Analizziamo la **propagazione** di un segnale a **banda stretta**.

Facciamo prima alcune considerazioni sulla **Trasformata di Fourier**:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{Trasformata})$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(2\pi f)e^{j2\pi f t} \quad (\text{Antitrasformata})$$

E considerando un segnale  $s(t)$  **reale**, possiamo dire che:

$$s(t) = s^*(t) \leftrightarrow S^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{j\omega t} dt = S(-\omega)$$

Questo ci fa capire che per rappresentare un segnale ci basta considerare le **sole pulsazioni positive**, infatti:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \\ &\quad \boxed{\omega' = -\omega \quad d\omega' = -d\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(-\omega')e^{-j\omega' t} d\omega' \end{aligned}$$

Quindi sfruttando quanto detto:

$$\int_0^{\infty} S(-\omega')e^{-j\omega' t} d\omega' = \int_0^{\infty} S(\omega')^* e^{-j\omega' t} d\omega' = \left[ \int_0^{\infty} S(\omega')e^{j\omega' t} d\omega' \right]^*$$

Che possiamo sostituire sopra, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(-\omega') e^{j\omega' t} d\omega' = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} S(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' \right]^* = \\
 &= 2Re \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\} = Re \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\}
 \end{aligned}$$

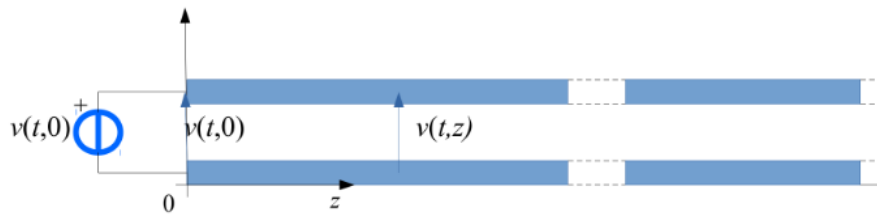
**Definisco ora:**

$$\begin{cases} \hat{S}(\omega) = 2S(\omega) & \text{per } \omega > 0 \\ \hat{S}(\omega) = 0 & \text{per } \omega < 0 \end{cases} \leftrightarrow \hat{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

In particolare:

$$s(t) = Re\{\hat{s}(t)\} \quad \hat{s}(t) \text{ è detto segnale analitico}$$

Analizziamo ora la **propagazione** di un segnale a **banda stretta** lungo la seguente linea:



Scriviamo  $v(t,0)$  così:

$$v(t,0) = s(t) \cos(\omega_0 t)$$

In particolare:

- $s(t) = s_0$  per  $|t| < \frac{\tau}{2}$
- $s(t) = 0$  per  $|t| > \frac{\tau}{2}$
- $\omega_0 \gg \frac{2\pi}{\tau}$

Il segnale  $v(t, 0)$  è **reale** e a **banda stretta**, quindi procediamo associandogli il suo **analogo nella frequenza** e il suo **segnale analitico**:

$$\begin{aligned} V(\omega, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t, 0) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

(Analogo in Frequenza)

$$\hat{V}(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = S(\omega - \omega_0)$$

(Segnale Analitico)

Quindi ora possiamo analizzare il problema nel dominio della frequenza:

Fissato  $\omega$ :

$$\hat{V}(\omega, z) = \hat{V}(\omega, 0) e^{-j\beta z}$$

Passiamo nel **dominio del tempo**:

$$\hat{v}(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega, 0) e^{j\omega t} e^{-j\beta z} d\omega$$

Distinguiamo ora i casi di **linea non dispersiva** e **linea dispersiva**.

## 1 Linea Non Dispersiva

$$\beta(\omega) = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{c}$$

dove  $c = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{\omega}{\beta}$ .

Facciamo la **sostituzione** in  $\hat{v}(t, z)$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{v}(t, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega, 0) e^{j\omega t} e^{-j\frac{\omega}{c}z} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega, 0) e^{j\omega(t - \frac{z}{c})} d\omega \\
 t_R &= t - \frac{z}{c} \\
 \Rightarrow &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega, 0) e^{j\omega t_R} d\omega = \\
 &= \hat{v}(t_R, 0) = \hat{v}\left(t - \frac{z}{c}, 0\right) = s\left(t - \frac{z}{c}\right) e^{j\omega_0(t - \frac{z}{c})}
 \end{aligned}$$

Mentre  $v(t, z)$  sarà:

$$v(t, z) = \operatorname{Re}\{\hat{v}(t, z)\} = s\left(t - \frac{z}{c}\right) \cos\left(\omega_0\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)$$

Quindi se la linea non è dispersiva, **il segnale si propaga senza dispersione**.

## 2 Linea Dispersiva

In questo caso  $\epsilon$  e  $\mu$  sono **funzioni** di  $\omega$ , o siamo in una situazione **NON TEM** ( $\beta$  non è una funzione lineare di  $\omega$ ).

Detta  $\Delta\omega$  la **banda del segnale** centrato in  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{v}(t, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega, 0) e^{j\omega t} e^{-j\beta z} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \hat{V}(\omega, 0) e^{j\omega t} e^{-j\beta z} d\omega
 \end{aligned}$$

Questo ci fa capire che per calcolare  $\hat{v}(t, z)$  ci servono i valori di  $\beta$  solo **intorno** a  $\omega_0$ .

Quindi svilupperemo  $\beta$  in **serie di Taylor** centrato in  $\omega_0$ :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta''_0(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$



Quindi:

$$\begin{aligned}
 \hat{v}(t, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega, 0) e^{j\omega t} e^{-j\beta z} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega, 0) e^{j\omega t} e^{-j(\beta_0 + \beta'_0(\omega - \omega_0))z} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega, 0) e^{j(\omega t - \beta_0 z - \beta'_0(\omega - \omega_0)z)} d\omega \\
 \Omega &= \omega - \omega_0 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\Omega + \omega_0, 0) e^{j(\Omega t + \omega_0 t - \beta_0 z - \beta'_0 \Omega z)} d\omega = \\
 &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\Omega + \omega_0, 0) e^{j(\Omega t - \beta'_0 \Omega z)} d\omega
 \end{aligned}$$

Dove:

$$\hat{V}(\Omega + \omega_0, 0) = S(\Omega)$$

Dato che:

$$\hat{V}(\omega, 0) = S(\omega - \omega_0)$$

Poniamo:

$$t_R = t - \beta'_0 z$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 \hat{v}(t, z) &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega, 0) e^{j\Omega t_R} d\Omega = \\
 &= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} s(t_R) = e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} s(t - \beta'_0 z)
 \end{aligned}$$

Definiamo:

- **Velocità di Fase:**  $v_F = \frac{\omega_0}{\beta_0}$  alla pulsazione  $\omega_0$
- **Velocità di Gruppo:**  $v_G = \frac{1}{\beta'_0}$  alla pulsazione  $\omega_0$

Sostituiamo:

$$\hat{v}(t, z) = \underbrace{e^{j\omega_0 \left(t - \frac{z}{v_F}\right)}}_{\text{Portante}} \underbrace{s\left(t - \frac{z}{v_G}\right)}_{\text{Inviluppo}}$$

Dove l'**Inviluppo** è l'energia del segnale che si propaga lungo la linea a velocità  $v_G$ .

Quindi è identico al caso non dispersivo, tuttavia solo per brevi distanze, dato che per distanze più lunghe bisogna considerare ordini superiori dello sviluppo di Taylor di  $\beta(\omega)$ .

## 2.1 Grado di Correttezza

Per **quantificare il grado di correttezza dell'approssimazione** dobbiamo controllare se:

$$\frac{e^{-j\beta z}}{e^{-j(\beta_0 + \beta'_0(\omega - \omega_0))z}} = e^{-j(\beta - \beta_0 - \beta'_0(\omega - \omega_0))z} \approx 1$$

Quindi possiamo procedere sviluppando  $\beta$ :

$$\begin{aligned} (\beta_0 + \beta'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta''_0(\omega - \omega_0)^2 + \dots - \beta_0 - \beta'_0(\omega - \omega_0))z = \\ = (\frac{1}{2}\beta''_0(\omega - \omega_0)^2 + \dots)z \end{aligned}$$

Ora sostituendo:

$$e^{-j(\beta - \beta_0 - \beta'_0(\omega - \omega_0))z} = e^{-j(\frac{1}{2}\beta''_0(\omega - \omega_0)^2 + \dots)z} \approx 1$$

Che è verificata se e solo se:

$$\left| \left( \frac{1}{2}\beta''_0(\omega - \omega_0)^2 + \dots \right) z \right| \ll 1$$

Quindi è evidente che **al crescere della distanza (z) questa disuguaglianza non sarà più verificata.**

Possiamo avere una **stima della distanza** prima della quale è verificata se vale:

$$\left| \frac{1}{2}\beta''_0(\omega - \omega_0)^2 z \right| \ll 1$$

Ovvero:

$$|z| \ll \frac{1}{\left| \frac{1}{2}\beta''_0(\Delta\omega)^2 \right|} = L_0$$

## Capitolo 7

# Risuonatori

### 1 Circuito Risonante Serie

L'impedenza di un **circuito LC** è la seguente:

$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

dove  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  viene detta **pulsazione di risonanza**, mentre  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  è il **parametro di pendenza**.

Alla **pulsazione di risonanza**, l'energia elettrica immagazzinata nella capacità eguaglia l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore, quindi:

$$Z(\omega_0) = 0$$

Invece per pulsazioni prossime a  $\omega_0$ , usando l'approssimazione di **Taylor**, vale:

$$Z \approx j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0}, \quad \omega \approx \omega_0$$

### 2 Circuito Risonante Parallelo

Nel caso del **parallelo** si ragiona con le **ammettenze**:

$$Y = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\sqrt{\frac{C}{L}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Dove  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , in corrispondenza della quale vale che  $W_E = W_M$ .

### 3 Circuito Risonante con Perdite

In un **circuito risonante reale** vi è una **resistenza** (conduttanza) che tiene conto delle **perdite**.

Facciamo l'esempio del **circuito serie**:

$$Z = j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + R_L$$

Definiamo il **fattore di merito del circuito** come:

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot W_{EM}}{P_{diss}} = \frac{2\omega_0 L \frac{|I|^2}{4}}{\frac{1}{2} R_L |I|^2} = \frac{\omega_0 L}{R_L}$$

Così l'**impedenza** diventa:

$$Z = j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + \frac{\omega_0 L}{Q} = j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ} \right)$$

Analogo discorso per il **parallelo**:

$$Y = j\sqrt{\frac{C}{L}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + G = j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ} \right)$$

### 4 Capacità Filtranti di un Risuonatore

Se colleghiamo un **risuonatore serie** ad un **generatore ideale di tensione** a pulsazione  $\omega$ , avremo questa **corrente**:

$$I(\omega) = \frac{V_0}{j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ} \right)}$$

Per  $\omega = \omega_0$  la corrente avrà il suo **massimo**:

$$I(\omega_0) = V_0 Q \sqrt{\frac{C}{L}}$$

**A quali pulsazioni il modulo della corrente diminuirà di 3dB??**

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{1}{jQ}$$

Che ha per soluzioni:

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2} \right) = \left( \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \right)$$

Che per  $Q \gg 1$  fornisce  $\omega = \pm \left( \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2Q} \right)$

Analizziamo ora il **caso di un generatore reale**, con una sua **resistenza interna**  $R_0$ :

$$\begin{aligned} Z &= j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ} \right) + R_0 = j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ} + \frac{1}{jQ_{ext}} \right) = \\ &= j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ_{tot}} \right) \end{aligned}$$

Dove:

$$Q_{ext} = R_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Dunque:

$$Q_{tot} = \frac{Q Q_{ext}}{Q + Q_{ext}} = \left( \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ext}} \right)^{-1}$$

Quindi si avrà:

$$I(\omega) = \frac{V_0}{j\sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{jQ_{tot}} \right)}$$

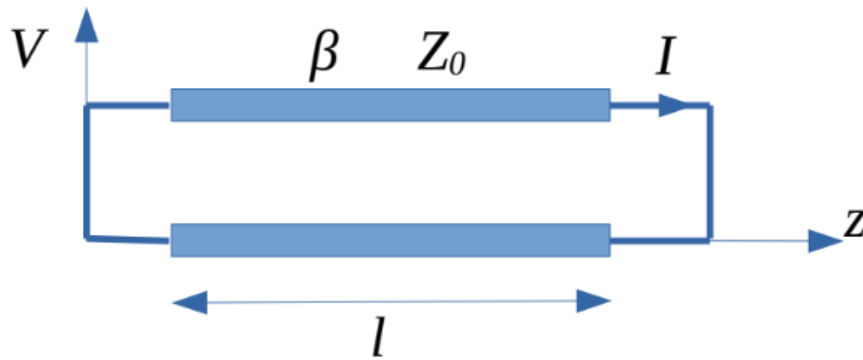
$$I(\omega_0) = V_0 Q_{tot} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

E analogamente a prima, **la pulsazione a 3dB sarà:**

$$\omega_{3dB} = \pm \frac{\omega_0}{2Q_{tot}}$$

## 5 Risuonatori a Parametri Distribuiti

Consideriamo la seguente situazione e poniamo l'origine su uno dei due corti:



Avremo i seguenti andamenti di **tensione** e **correnti**:

$$\begin{cases} V(z) = -jZ_0 I(0) \sin(kz) \\ I(z) = I(0) \cos(kz) \end{cases}$$

Mentre l'**impedenza** sarà:

$$Z(z) = -jZ_0 \tan(kz) \implies Z(l) = -jZ_0 \tan(kl) = Z_R$$

La **pulsazione di risonanza** è quella in cui  $Z = 0$ , quindi:

$$\begin{aligned} Z(l) = -jZ_0 \tan(kl) = 0 &\implies \tan(\beta l - j\alpha l) \approx \\ &\approx \tan(\beta l) + \frac{1}{\cos^2(\beta l)(-j\alpha l)} \end{aligned}$$

Se le perdite sono piccole allora:

$$\alpha l \ll 1$$

Quindi:

$$Z_R = jZ_0 \tan(kl) \approx jZ_0 \tan(\beta l) + \frac{Z_0}{\cos^2(\beta l)} \alpha l$$

Quindi le **pulsazioni di risonanza** sono:

$$\omega_n : \quad \beta(\omega_n)l = (n+1)\pi, \quad n \in N_0$$

In corrispondenza delle quali:

$$Z_R = Z_0 \alpha l$$

Quindi ci sono estreme differenze tra **risuonatori a parametri concentrati** e quelli **distribuiti**.

In un **risuonatore a parametri concentrati** si ha **un solo valore di pulsazione di risonanza**, mentre nei **risuonatori a parametri distribuiti** se ne hanno **infiniti**.

In comune hanno che **entrambe le impedenze si annullano in risonanza**.

Altre analogie le possiamo trovare se analizziamo il comportamento dei due risuonatori in un intorno di  $\omega_{0(n)}$ .

Assumiamo che entrambi i **risuonatori** risuonino a:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\beta(\omega_0)l}$$

Sviluppiamo le due impedenze al primo ordine di **Taylor**:<sup>1</sup>

$$Z'_R \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \left( \frac{\omega - \omega_0}{2\omega_0} - j\frac{1}{Q} \right)$$

$$Z_R \approx jZ_0l \left[ \frac{d\beta}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \underbrace{Z_0\alpha l}_{f(x_0)}$$

Che coincidono se:

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \omega_0 \frac{Z_0l}{2} \left[ \frac{d\beta}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0}$$

E se:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \left( \left[ \frac{d\beta}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} \right)^{-1}$$

## 5.1 Metodo Perturbativo

Un altro metodo di valutazione è **l'analisi delle perturbazioni**.

Consideriamo una linea **non dispersiva**, ovvero con i parametri L, R, C, G **indipendenti** dalla frequenza:

$$Z_R = jZ_0 \tan(\beta l)$$

---

<sup>1</sup>  $f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0)$

$$\beta(\omega_0)l = (n+1)\pi, \quad n \in N_0$$

Sviluppiamo  $Z_R$  al **primo ordine** in  $(\omega - \omega_0)$  e valutiamone il **fattore di pendenza**:

$$\omega_0 \frac{Z_0 l}{2} \left[ \frac{d\beta}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 Z_0 l \sqrt{LC}}{2}$$

Per valutare  $Q$  scriviamo **tensione** e **corrente** lungo la linea:

$$\begin{cases} V(z) = V(0)\cos(\beta z) = V(0)\cos(\pi/lz) \\ I(z) = -j\frac{V(0)}{Z_0}\sin(\beta z) = -j\frac{V(0)}{Z_0}\sin(\pi/lz) \end{cases}$$

Essendo la linea **non dispersiva**, calcoliamo  $W_E$  e  $W_M$  come:

$$\begin{cases} W_E = \frac{1}{4}C \int_l |V(z)|^2 dz \\ W_M = \frac{1}{4}L \int_l |I(z)|^2 dz \end{cases}$$

E le **potenze dissipate** come:

$$\begin{cases} P_R = \frac{1}{2}R \int_l |I(z)|^2 dz \\ P_G = \frac{1}{2}G \int_l |V(z)|^2 dz \end{cases}$$

E infine calcolo  $Q$ :

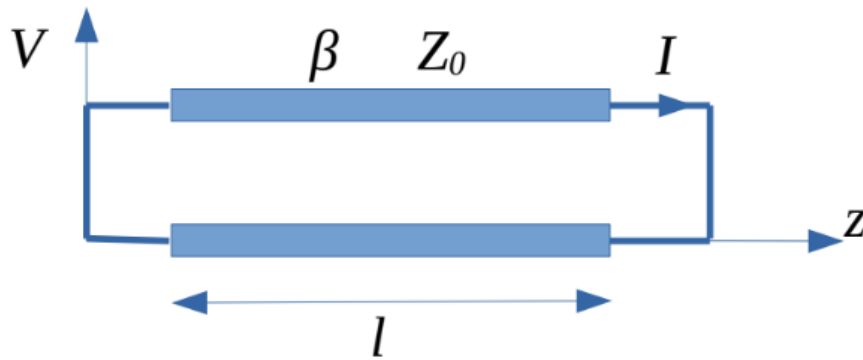
$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0(W_E + W_M)}{P_R + P_G} = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P_R + P_G} = \left( \frac{P_R}{\omega_0 W_{EM}} + \frac{P_G}{\omega_0 W_{EM}} \right)^{-1} = \\ &= \left( \frac{R}{\omega_0 L} + \frac{G}{\omega_0 C} \right)^{-1} \end{aligned}$$

## 6 Esempi di Calcolo di $Q$ in circuiti a parametri Distribuiti

### 6.1 Esempio 1

Consideriamo la seguente **linea con piccole perdite** chiusa in **corto** su entrambe le porte:





La linea avrà **piccole perdite** se:

- $\frac{R}{\omega L} \ll 1$
- $\frac{G}{\omega C} \ll 1$

Calcoliamo la **pulsazione di risonanza fondamentale** e il **Q** corrispondente:

$$\begin{cases} V(z) = -jI(0)Z_0 \sin(\beta z) \\ I(z) = I(0) \cos(\beta z) \end{cases}$$

Dove:

- $\beta = \omega \sqrt{LC}$
- $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Quindi:

$$\omega_0 \sqrt{LC} l = \pi \implies \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{LC} l}$$

Mentre Q sarà:

$$Q = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P_{diss}} = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P_{diss}^R + P_{diss}^G} \implies Q = \left( \frac{1}{Q_R} + \frac{1}{Q_G} \right)^{-1}$$

In particolare:

$$Q_R = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P_{diss}^R}, \quad Q_G = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P_{diss}^G}$$

Dove:

$$P_{diss}^R = \frac{1}{2} \int_0^l |I(z)|^2 dz, \quad P_{diss}^G = \frac{1}{2} \int_0^l |V(z)|^2 dz$$

. Quindi:

$$W_{EM} = W_M + W_E = \frac{1}{4}L \int_0^l |I(z)|^2 dz + \frac{1}{4}C \int_0^l |V(z)|^2 dz$$

In risonanza  $W_E = W_M$ , quindi:

$$W_{EM} = 2W_M = \frac{1}{2}L \int_0^l |I(z)|^2 dz = \frac{1}{2}C \int_0^l |V(z)|^2 dz = 2W_E$$

Quindi ci **semplifichiamo i calcoli** facendo scelte opportune:

$$Q_R = \frac{\omega_0 \frac{1}{2}L \int_0^l |I(z)|^2 dz}{\frac{1}{2}R \int_0^l |I(z)|^2 dz} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

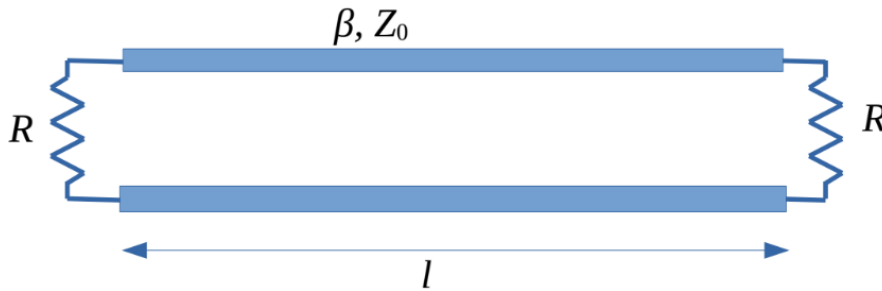
$$Q_G = \frac{\omega_0 \frac{1}{2}C \int_0^l |V(z)|^2 dz}{\frac{1}{2}G \int_0^l |V(z)|^2 dz} = \frac{\omega_0 C}{G}$$

Quindi avremo:

$$Q = \left( \frac{R}{\omega_0 L} + \frac{G}{\omega_0 C} \right)^{-1} = \frac{\omega_0 LC}{RC + LG}$$

## 6.2 Esempio 2

Consideriamo la seguente **linea chiusa su due resistenze, senza perdite**:



Suppongo **R piccole** in modo tale da **non variare tensioni e correnti sulla linea rispetto al caso 1**.

$$\begin{cases} V(z) = -jI(0)Z_0 \cos(\beta z) \\ I(z) = I(0) \cos(\beta z) \end{cases}$$

E la **pulsazione di risonanza** è:

$$\omega_0 \sqrt{LC}l = \pi \implies \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{LC}l}$$

Per calcolare  $Q$  ci occorrono l'**energia immagazzinata** e la **potenza dissipata**:

$$\begin{aligned} P_{diss} &= \frac{1}{2}R|I(0)|^2 + \frac{1}{2}R|I(l)|^2 = R|I(0)|^2 \\ W_{EM} &= 2W_M = \frac{1}{2}L|I(0)|^2 \int_0^l \cos^2(\beta z) dz \\ (\theta = \beta z \implies dz &= \frac{1}{\beta} d\theta) \\ \implies \frac{1}{\beta} \int_0^\pi \cos^2(\theta) d\theta &= \frac{1}{\beta} \int_0^\pi \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\pi}{2\omega_0 \sqrt{LC}} = \frac{\lambda}{4} \end{aligned}$$

Per cui:

$$W_{EM} = \frac{1}{2}L|I(0)|^2 \frac{\pi}{2\omega_0 \sqrt{LC}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{L}{C}} |I(0)|^2 \frac{\pi}{\omega_0}$$

Quindi:

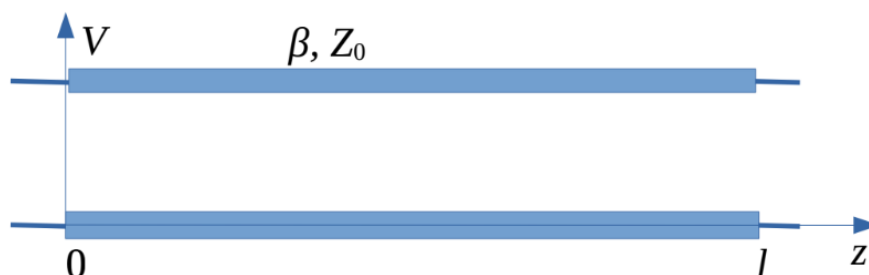
$$Q = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P_{diss}} = \frac{\omega_0 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{L}{C}} |I(0)|^2 \frac{\pi}{\omega_0}}{R^2 |I(0)|^2} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\pi}{4R} = \frac{\pi Z_0}{4R}$$

Di conseguenza:

$$Q \gg 1 \quad \text{se} \quad Z_0 \gg R$$

### 6.3 Esempio 3

Nel caso in cui  $Z_0 \ll R$ , gli andamenti di  $V$  e  $I$ , sono gli stessi di una **linea aperta**:



$$\begin{cases} V(z) = V(0)\cos(\beta z) \\ I(z) = -j\frac{V(0)}{Z_0}\sin(\beta z) \end{cases}$$

$$\omega_0\sqrt{LC}l = \pi \implies \omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{LC}l}$$

$$P_{diss} = \frac{1}{2} \frac{|V(0)|^2}{R} + \frac{1}{2} \frac{|V(l)|^2}{R} = G|V(0)|^2$$

$$\begin{aligned} W_{EM} = 2W_E &= \frac{1}{2}C|V(0)|^2 \int_0^l \cos^2(\beta z) dz = \frac{1}{2}C|V(0)|^2 \frac{\pi}{2\omega_0\sqrt{LC}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{C}{L}} |V(0)|^2 \frac{\pi}{\omega_0} \end{aligned}$$

Infine:

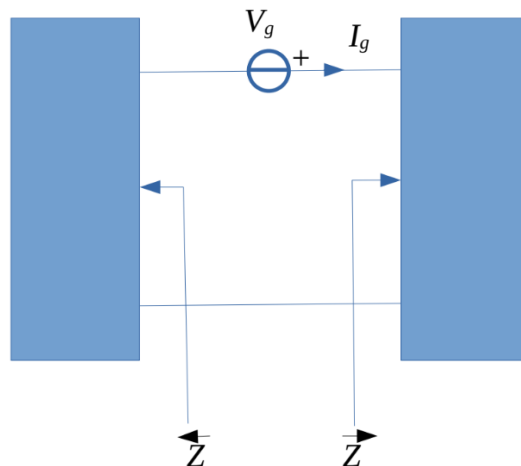
$$Q = \frac{\omega_0 W_{EM}}{P_{diss}} = \frac{\omega_0 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\pi}{\omega_0}}{G|V(0)|^2} = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\pi}{4G} = \frac{\pi R}{4Z_0}$$

Quindi:

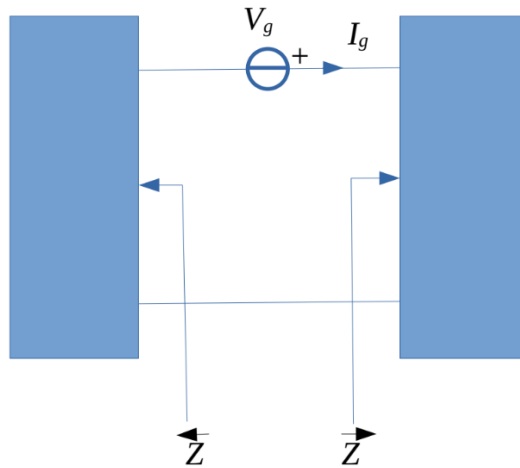
$$Q \gg 1 \quad \text{se} \quad Z_0 \ll R$$

## 7 Condizioni di Risonanza su una Rete Complessa

Consideriamo una rete di **elementi concentrati** e **distribuiti senza perdite** e **senza generatori** e individuiamo una sezione che la divide in due, e alla quale posso inserire un **generatore di tensione**:



O di corrente:



Nel primo caso:

$$I = \frac{V_G}{\overleftarrow{Z} \overrightarrow{Z}}$$

Dove le due impedenze sono pure **reattanze**.

Può accadere che a qualche frequenza  $\overleftarrow{Z} + \overrightarrow{Z} = 0$  e nel caso in cui anche  $V_G$  fosse 0, queste frequenze vengono dette di **risonanza**.

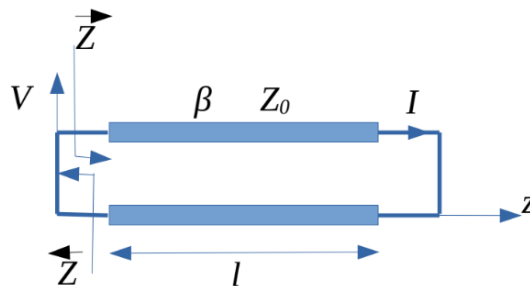
In modo analogo:

$$V = \frac{I_G}{\overleftarrow{Y} \overrightarrow{Y}}$$

Se  $\overleftarrow{Y} + \overrightarrow{Y} = 0$  e  $I_G = 0$  sono dette **frequenze di risonanza**.

Devono valere entrambe.

## 7.1 Esempio 1



$$\overleftarrow{Z} + \overrightarrow{Z} = 0 + jZ_0 \tan(\beta l) = 0$$

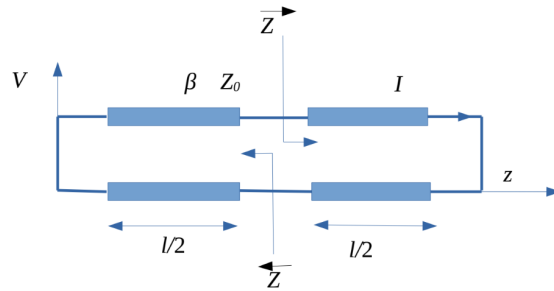
$$\Rightarrow \beta l = n\pi$$

Ma in questo caso:

$$\overleftarrow{Y} \rightarrow \infty$$

**Quindi non va bene.**

## 7.2 Esempio 2



$$\overleftarrow{Z} + \overrightarrow{Z} = jZ_0 \tan(\beta l/2) + jZ_0 \tan(\beta l/2) = 2jZ_0 \tan(\beta l/2) = 0$$

Le cui soluzioni sono:

$$\beta \frac{l}{2} = \frac{n\pi}{2} \leftrightarrow \beta l = n\pi \Rightarrow l = n \frac{\lambda}{2} = n \lambda$$

Mentre per le **ammettenze**:

$$\overleftarrow{Y} + \overrightarrow{Y} = -jY_0 \tan(\beta l/2) - jY_0 \cotan(\beta l/2) = -2jY_0 \cotan(\beta l/2) = 0$$

Le cui soluzioni sono:

$$\beta \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \leftrightarrow \beta l = (2n+1)\pi \Rightarrow l = (2n+1) \frac{\lambda}{2}$$

**Quindi va bene!!**

## Capitolo 8

# Teorema di Reciprocità

In un mezzo **lineare** e **isotropo**, i campi dovuti a sorgenti diverse sono legati dalla relazione:

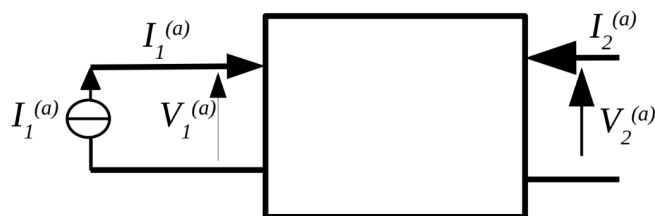
$$\int_{V_s} \bar{\mathbf{J}}_1 \cdot \bar{\mathbf{E}}_2 - \bar{\mathbf{J}}_2 \cdot \bar{\mathbf{E}}_1 dV + \int_{V_s} \bar{\mathbf{J}}_{m2} \cdot \bar{\mathbf{H}}_1 - \bar{\mathbf{J}}_{m1} \cdot \bar{\mathbf{H}}_2 dV = 0$$

Applichiamo il **teorema** a un dispositivo con una porta in posizione  $\bar{\mathbf{r}}_1$  e l'altra in posizione  $\bar{\mathbf{r}}_2$ :



Dividiamo ora **due situazioni**:

(a)

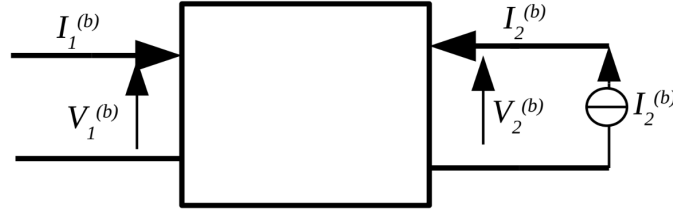


$$\bar{\mathbf{J}}_1 = I_1^a \Delta \delta(|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1|) \hat{\mathbf{i}}_1$$

che produce:

$$\bar{\mathbf{E}}_1 \quad e \quad \bar{\mathbf{H}}_1$$

(b)



$$\bar{J}_2 = I_2^b \Delta \delta(|\bar{r} - \bar{r}_2|) \hat{i}_2$$

che produce:

$$\bar{E}_2 \quad e \quad \bar{H}_2$$

Sostituiamo nella **tesi**

$$\int_{V_s} I_1^a \Delta \delta(|\bar{r} - \bar{r}_1|) \hat{i}_1 \cdot \bar{E}_2 - I_2^b \Delta \delta(|\bar{r} - \bar{r}_2|) \hat{i}_2 dV = 0$$

Ovvero:

$$I_1^a \Delta \int_{V_s} \delta(|\bar{r} - \bar{r}_1|) \hat{i}_1 \cdot \bar{E}_2 dV = I_2^b \Delta \int_{V_s} \delta(|\bar{r} - \bar{r}_2|) \hat{i}_2 dV = 0$$

Che sfruttando la **proprietà della delta di Dirac** diventa:

$$I_1^a \Delta \hat{i}_1 \bar{E}_2(\bar{r}_1) = I_2^b \Delta \hat{i}_2 \bar{E}_1(\bar{r}_2) \quad (\text{x})$$

Possiamo assumere  $\Delta$  **piccola** rispetto a  $\lambda$ , quindi possiamo considerare i **campi costanti** lungo  $\Delta$ , quindi:

$$V_1^b = - \int_{l_1} \bar{E}_2 \cdot \hat{i}_1 dl = -\bar{E}_2(\bar{r}_1) \cdot \hat{i}_1 \Delta$$

che rappresenta la tensione alla porta 1 dovuta alla corrente  $I_2^b$  alla porta 2.

Analogamente:

$$V_2^a = - \int_{l_2} \bar{E}_1 \cdot \hat{i}_2 dl = -\bar{E}_1(\bar{r}_2) \cdot \hat{i}_2 \Delta$$

Sostituendo in (x) otteniamo:

$$I_1^a V_1^b = I_2^b V_2^a$$



## Capitolo 9

# Parametri Z di un Doppio Bipolo

In prima analisi consideriamo le **correnti indipendenti** e usiamo su ogni porta la **convenzione dell'utilizzatore**:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \implies \underline{V} = \underline{Z} \underline{I}$$

- $Z_{11}$  e  $Z_{22}$  sono dette autoimpedenze
- $Z_{12}$  e  $Z_{21}$  sono dette mutueimpedeze

## 1 Reciprocità

Un'importante proprietà è la **Reciprocità**.

Un doppio bipolo si dice **reciproco** se vale il **teorema di reciprocità**, che per un **sistema elettromagnetico vale sempre** purchè il sistema **non sia costituito da mezzi** che risentono di un **campo magnetico di polarizzazione**.

Se un **doppio bipolo** è **reciproco** allora  $\underline{Z}$  è **simmetrica**:

$$Z_{12} = Z_{21}$$

Applichiamo il **teorema di reciprocità**:

$$I_1^a V_1^b = I_2^b V_2^a$$

E sostituiamo:

$$\begin{cases} V_1^b = Z_{11}I_1^b + Z_{12}I_2^b \\ V_2^a = Z_{21}I_1^a + Z_{22}I_2^a \end{cases} \longrightarrow I_1^a Z_{12} I_2^b = I_2^b Z_{21} I_1^a \implies Z_{12} = Z_{21}$$

## 2 Simmetria

Un'altra proprietà dei **doppi bipoli reciproci** è la **simmetria**, ovvero che se si scambia la porta 1 con la porta 2 il funzionamento del bipolo non cambia:

$$Z_{11} = Z_{22}$$

## 3 Dissipamento Potenza

L'ultima proprietà dei **bipoli reciproci** è l'**assenza di perdite** che si avvera se al suo interno **non si dissipa potenza**:

$$Re \left\{ \frac{1}{2} V_1 I_1^* + \frac{1}{2} V_2 I_2^* \right\} = 0 \quad \forall I_1, I_2$$

$$\begin{aligned} Re \left\{ \frac{1}{2} (Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2) I_1^* + \frac{1}{2} (Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2) I_2^* \right\} &= \\ = Re \left\{ \frac{1}{2} (Z_{11} |I_1|^2 + Z_{12} I_1 I_2 + Z_{21} I_1 I_2^* + Z_{22} |I_2|^2) \right\} &= \\ = \frac{1}{2} (Re \{ (Z_{11}) |I_1|^2 + 2 Re \{ Z_{12} \} * Re \{ I_2 I_1^* \} + Re \{ Z_{22} \} |I_2|^2 \}) &= 0 \\ \forall I_1, I_2 \end{aligned}$$

Quindi possiamo imporre  $I_2 = 0$ :

$$\implies Re \{ Z_{11} \} = 0$$

Mentre se imponiamo  $I_1 = 0$ :

$$\implies Re \{ Z_{22} \} = 0$$

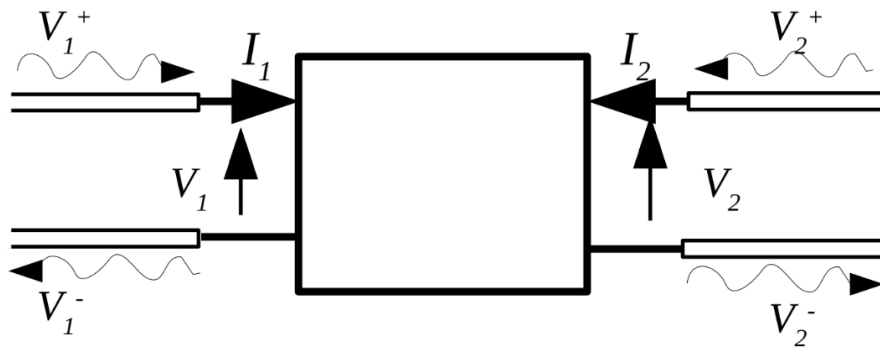
Ma se devono valere entrambe, sostituendo ottengo:

$$Re \{ Z_{12} \} = 0 = Re \{ Z_{21} \}$$

Quindi la **matrice delle impedenze** di un **doppio bipolo reciproco, simmetrico e senza perdite** è **puramente immaginaria**.

## Capitolo 10

# Parametri S di un Doppio Bipolo



Scegliamo le **ampiezze delle onde incidenti** come **variabili indipendenti**:

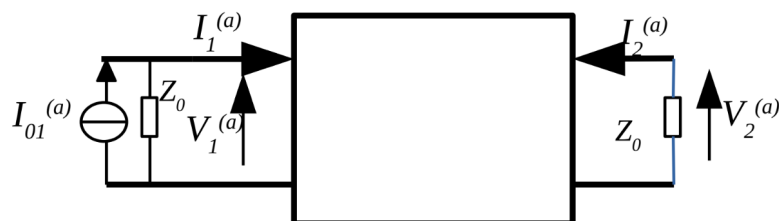
$$\begin{cases} V_1^- = S_{11}V_1^+ + S_{12}V_2^+ \\ V_2^- = S_{21}V_1^+ + S_{22}V_2^+ \end{cases} \Rightarrow \underline{V}^- = \underline{\underline{S}}\underline{V}^+$$

I coefficienti  $S_{i,j}$  sono **adimensionali** e detti **parametri di Scattering**.

## 1 Reciprocità

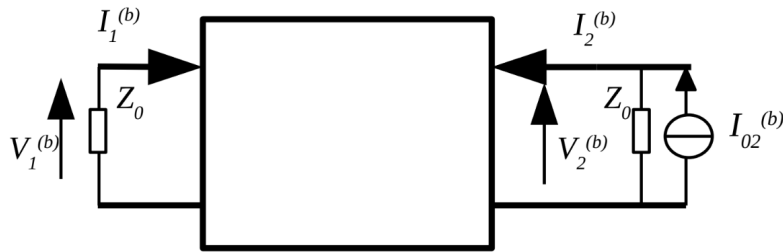
Dividiamo due casi:

(a)



$$I_{01}^a = 2I_1^a = 2\frac{V_1^{a+}}{Z_0}$$

(b)



$$I_{02}^b = 2I_1^b = 2 \frac{V_2^{b+}}{Z_0}$$

Il **teorema di reciprocità** applicato in questo caso ci da:

$$I_{01}^a V_1^b = I_{02}^b V_2^a$$

Che sostituendo le **correnti** diventa:

$$V_1^{a+} V_1^b = V_2^{b+} V_2^a \quad (\text{x})$$

Calcoliamo  $V_2^a$ :

$$\begin{aligned} V_2^a &= \cancel{V_2^{a+}} + V_2^{a-} = V_2^{a-} = S_{21} V_1^{a+} + \cancel{S_{22} V_2^{a+}} \\ \Rightarrow V_2^a &= S_{21} V_1^{a+} \end{aligned}$$

Calcoliamo  $V_1^b$ :

$$\begin{aligned} V_1^b &= \cancel{V_1^{b+}} + V_1^{b-} = V_1^{b-} = \cancel{S_{12} V_1^{b+}} + S_{12} V_2^{b+} \\ \Rightarrow V_1^b &= S_{12} V_2^{b+} \end{aligned}$$

Sostituiamo in (x):

$$\cancel{V_1^{a+}} S_{12} \cancel{V_2^{b+}} = \cancel{V_2^{b+}} S_{21} \cancel{V_1^{a+}}$$

$$\Rightarrow S_{12} = S_{21} \Rightarrow \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^T$$

## 2 Senza Perdite

**Assenza di perdite** vuol dire che la **somma delle potenze attive alle due porte è nulla**.

Possiamo calcolare la potenza alle due porte tramite la **differenza della potenza incidente e quella riflessa**, quindi:

$$\begin{aligned}
 P_{diss} &= \frac{1}{2} \frac{|V_1^+|^2}{Z_0} - \frac{1}{2} \frac{|V_1^-|^2}{Z_0} + \frac{1}{2} \frac{|V_2^+|^2}{Z_0} - \frac{1}{2} \frac{|V_2^-|^2}{Z_0} = 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{|V_1^+|^2}{Z_0} + \frac{1}{2} \frac{|V_2^+|^2}{Z_0} &= \frac{1}{2} \frac{|V_1^-|^2}{Z_0} + \frac{1}{2} \frac{|V_2^-|^2}{Z_0} \\
 \Rightarrow |V_1^+|^2 + |V_2^+|^2 &= |V_1^-|^2 + |V_2^-|^2
 \end{aligned}$$

In **forma matriciale** sarebbe:

$$\begin{aligned}
 [V_1^{+*}, V_2^{+*}] \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{bmatrix} &= [V_1^{-*}, V_2^{-*}] \begin{bmatrix} V_1^- \\ V_2^- \end{bmatrix} \\
 \underline{V}^{+H} \underline{V}^+ &= \underline{V}^{-H} \underline{V}^- \\
 \underline{V}^{+H} \underline{V}^+ &= (\underline{S} \underline{V}^+)^H (\underline{S} \underline{V}^+) \\
 \Rightarrow \underline{V}^{+H} \underline{V}^+ &= \underline{V}^{+H} (\underline{S}^H \underline{S}) \underline{V}^+
 \end{aligned}$$

Dato che deve valere che  $\forall \underline{V}^+$

$$\Rightarrow \underline{S}^H \underline{S} = \underline{I}$$

Analizziamo ora elemento per elemento  $\underline{S}$  per **verificare se rispetta la condizione**:

$$\begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \\ S_{12}^* S_{11} + S_{22}^* S_{12} = 0 \\ S_{11}^* S_{12} + S_{12}^* S_{22} = 0 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \end{cases}$$

Ricordando che  $S_{12} = S_{21}$ :

$$|S_{22}|^2 = 1 - |S_{12}|^2, \quad |S_{21}|^2 = 1 - |S_{22}|^2 \Rightarrow |S_{22}|^2 = |S_{11}|^2 = s^2$$

Da cui:

$$\begin{cases} S_{11} = se^{j\varphi_{11}} \\ S_{22} = se^{j\varphi_{22}} \\ S_{12} = S_{21} = \sqrt{1-s^2}e^{j\varphi_{12}} \end{cases}$$

Sostituiamo in  $S_{11}^*S_{12} + S_{21}^*S_{22} = 0$ :

$$se^{-j\varphi_{11}}\sqrt{1-s^2}e^{-j\varphi_{12}} + \sqrt{1-s^2}e^{-j\varphi_{12}}se^{-j\varphi_{22}} = 0$$

Da cui:

$$e^{-j\varphi_{11}}e^{j\varphi_{12}} + e^{-j\varphi_{12}}e^{j\varphi_{22}} = 0$$

Ovvero:

$$e^{j(\varphi_{12}-\varphi_{11})} = -e^{j(\varphi_{22}-\varphi_{12})}$$

$$e^{j(\varphi_{12}-\varphi_{11})} = e^{j(\varphi_{22}-\varphi_{12}+\pi)}$$

$$\varphi_{12} - \varphi_{11} = \varphi_{22} + \varphi_{12} + \pi + 2n\pi$$

$$2\varphi_{12} = \varphi_{22} + \varphi_{11} + \pi + 2n\pi$$

$$\varphi_{12} = \frac{\varphi_{22} + \varphi_{11}}{2} \pm \frac{\pi}{2}$$

## Capitolo 11

# Parametri ABCD di un Doppio Bipolo

Per l'analisi di **bipoli** in **cascata** è conveniente che la **tensione** e la **corrente** in **uscita dal primo doppio bipolo** risultino **l'ingresso al secondo**:

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 + BI_2 \\ I_1 = CV_2 + DI_2 \end{cases}$$

Dove:

- $A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$  **Adimensionale** Inverso di un **Guadagno di tensione a vuoto**
- $B = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$  **Transimpedenza** tra ingresso e uscita **cortocircuitata**
- $C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$  **Transimpedenza** tra ingresso e uscita **aperta**
- $D = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$  **Adimensionale** Inverso di un **Guadagno di corrente di cortocircuito**

Un **doppio bipolo lineare** può essere descritto anche dai **parametri Z**:

$$\begin{cases} V'_1 = Z_{11}I'_1 + Z_{12}I'_2 \\ V'_2 = Z_{21}I'_1 + Z_{22}I'_2 \end{cases}$$

Manipoliamo il sistema **ABCD** per ricondurci al **sistema dei parametri Z**:

$$V_2 = \frac{1}{C}I_1 - \frac{D}{C}I_2$$

Che sostituiamo nella prima:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{A}{C}I_1 - \frac{AD}{C}I_2 + BI_2 = \\ &= \frac{A}{C}I_1 - \frac{(AD - BC)}{C}I_2 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{A}{C}I_1 - \frac{(AD - BC)}{C}I_2 \\ V_2 = \frac{1}{C}I_1 - \frac{D}{C}I_2 \end{cases}$$

Notando le seguenti uguaglianze tra i due sistemi:

$$\begin{cases} V_1 = V'_1 \\ I_1 = I'_1 \\ V_2 = V'_2 \\ I_2 = -I'_2 \end{cases}$$

Che sostituiamo nel sistema appena ottenuto:

$$\begin{cases} V'_1 = \frac{A}{C}I'_1 + \frac{(AD - BC)}{C}I'_2 \\ V'_2 = \frac{1}{C}I'_1 + \frac{D}{C}I'_2 \end{cases}$$

Quindi identifichiamo:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} = \frac{A}{C} & Z_{12} = \frac{AD - BC}{C} \\ Z_{21} = \frac{1}{C} & Z_{22} = \frac{D}{C} \end{bmatrix}$$

Quindi possiamo **sfruttare le proprietà dimostrate nel capitolo dei parametri Z**, come la **reciprocità**:

$$Z_{12} = Z_{21} \implies \frac{1}{C} = \frac{AD - BC}{C} \implies AD - BC = 1$$

E l'assenza di perdite:

$$Re\{Z_{11}\} = Re\left\{\frac{A}{C}\right\} = 0$$

$$Re\{Z_{22}\} = Re\left\{\frac{D}{C}\right\} = 0$$



$$Re\{Z_{12}\} = Re\{Z_{21}\} = Re\left\{\frac{1}{C}\right\} = 0$$

Che si verificano se:

- $Re\{C\} = 0$
- $Im\{A\} = 0$
- $Im\{D\} = 0$
- $Re\{B\} = 0$

## Capitolo 12

# Parametri di un Cavo Coassiale

Le **equazioni** che descrivono il **campo elettrico** in un **cavo coassiale** sono:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{e}_t = 0 \\ \nabla_t \cdot \underline{e}_t = \frac{\rho}{v\epsilon} \end{cases}$$

Dove  $\rho$  è la **carica sui conduttori**, in particolare:

$$\int_{P_1}^{P_2} \underline{e}_t \cdot \hat{i}_r dr = 1$$

Mentre le **equazioni** che regolano il **campo magnetico**:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{h}_t = \frac{j_z}{I} \hat{i}_z \\ \nabla_t \cdot \underline{h}_t = 0 \end{cases}$$

Dove  $j_z$  è la **densità di corrente**, indotta dal **campo magnetico**, che **circola sui conduttori**, tale che:

$$\int_{\partial S} \underline{h}_t \cdot \hat{i}_l dl = 1$$

## 1 Campo Elettrico e Capacità

### 1.1 Campo Elettrico

La **prima equazione del campo elettrico in un cavo coassiale** è soddisfatta se:

$$\underline{e}_t = -\nabla\Phi$$

Che sostituita nella seconda ci restituisce:

$$\bar{\nabla} \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{v\epsilon}$$

Analizziamo ora questa equazione tra i due **conduttori**, dove ovviamente  $\rho$  è **nullo**:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Ricordiamo che sui **CEP** la **componente tangente** del **campo elettrico** deve essere **nulla**:

$$\underline{e}_t \cdot \hat{i}_\varphi \quad \forall \text{ Punto} \in C$$

Dove  $C$  è la **frontiera** della zona che stiamo considerando, ovvero quella tra i due "tubi" conduttori.

Ma questo contorno è formato da **due curve non connesse tra loro**.

Sostituiamo ora al **campo elettrico** la sua versione **potenziale**:

$$\nabla_t \Phi \cdot \hat{i}_\varphi = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right]_C = 0$$

Quindi la **derivata** qui sopra **deve fare zero**, ma questo non vuol dire che  $\Phi$  deve avere lo stesso valore su entrambe le curve, basta che sia **costante su entrambe**.

$$\begin{cases} \Phi(P) = \Phi_1 = 1 \quad \forall P \in C_1 \\ \Phi(P) = \Phi_2 = 0 \quad \forall P \in C_2 \end{cases}$$

Assumiamo ora  $\Phi$  **funzione solo di  $r$** :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$$

Poniamo:

$$r \frac{d\Phi}{dr} = A_1, \quad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{A_1}{r}$$

Quindi facendo integrale da ambo le parti ottengo:

$$\Phi(r) = A_1 \ln(r) + A_2$$

Quindi possiamo particularizzare questa espressione definendo  $r_1$  come il **raggio del tubo interno**, ed  $r_2$  il **raggio di quello esterno**:

$$\Phi(r_2) = A_1 \ln(r_2) + A_2 = \Phi_2 = 0$$

quindi da questa ricaviamo che:

$$A_2 = -A_1 \ln(r_2)$$

Mentre:

$$\Phi(r_1) = A_1 \ln(r_1) + A_2 = A_1 \ln(r_1) \underbrace{- A_1 \ln(r_2)}_{A_2} = \Phi_1 = 1$$

Da quest'ultima raccogliamo  $A_1$ :

$$A_1(\ln(r_1) - \ln(r_2)) = A_1 \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 1$$

Quindi possiamo riscriverci:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \\ A_2 = -\frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln(r_2) \end{cases}$$

Allora possiamo riscrivere  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \underbrace{\frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}}_{A_1} \ln(r) - \underbrace{\frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln(r_2)}_{A_2} = \\ &= \frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \underbrace{(\ln(r) - \ln(r_2))}_{\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)} \end{aligned}$$

Possiamo sostituire questa espressione nel **campo elettrico**:

$$\underline{e}_t = -\nabla_t \Phi = -\underbrace{\frac{d\Phi}{dr}}_{\frac{A_1}{r}} \hat{i}_r = -\frac{1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \frac{1}{r} \hat{i}_r = \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \frac{1}{r} \hat{i}_r$$

## 1.2 Capacità

Sappiamo che:

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2$$

Ma abbiamo imposto  $V = 1$ , quindi diventa:

$$W_e = \frac{1}{2}C$$

Ma come calcolo  $W_e$ ?

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}\epsilon \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} |\underline{e}|^2 r \, d\varphi \, dr = \\ &= \frac{1}{2}\epsilon \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right]^2 \frac{1}{r^2} r \, d\varphi \, dr = \\ &= \frac{1}{2}\epsilon 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left[ \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right]^2 \frac{1}{r} \, dr = \\ &= \frac{1}{2}\epsilon 2\pi \left[ \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right]^2 \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \, dr}_{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \\ &= \frac{1}{2}\epsilon 2\pi \left[ \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right]^2 \cdot \cancel{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \end{aligned}$$

Quindi la **capacità** sarà:

$$C = \epsilon 2\pi \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

## 2 Campo Magnetico e Induttanza

### 2.1 Campo Magnetico

Per il **campo magnetico** analizziamo la **seconda equazione**:

$$\nabla_t \cdot \mu \underline{h}_t = 0$$

Ma ricordiamo che possiamo esprimere il **campo magnetico** attraverso il suo **potenziale scalare**:

$$\mu \underline{h}_t = \nabla_t \times (\psi \hat{i}_z) = (\nabla_t \psi) \times \hat{i}_z$$

quindi considerando **lo spazio tra i due conduttori**, le **equazioni** da risolvere saranno:

$$\begin{cases} \mu \underline{h}_t = \nabla_t \times (\psi \hat{i}_z) = (\nabla_t \psi) \times \hat{i}_z \\ \nabla_t \cdot \mu \underline{h}_t = 0 \end{cases}$$

Con la **condizione al contorno** che la **componente normale** di  $\underline{b}$  deve essere **nulla**:

$$\mu \underline{h}_t \cdot \hat{i}_n = 0 \quad \forall P \in C$$

Ovvero:

$$\mu \underline{h}_t \cdot \hat{i}_n = (\nabla_t \psi) \times \hat{i}_z \cdot \hat{i}_n = \frac{\partial \psi}{\partial c} = 0 \quad \forall P \in C$$

$$\begin{cases} \psi(r) = \psi(r_1) = \psi_1 \quad \forall P \in C_1 \\ \psi(r) = \psi(r_2) = \psi_2 \quad \forall P \in C_2 \end{cases}$$

Con calcoli analoghi al caso del **campo elettrico** otteniamo l'espressione:

$$\psi(r) = B_1 \ln(r) + B_2$$

Quindi:

$$\mu \underline{h}_t = (\nabla_t \psi) \times \hat{i}_z = B_1 \frac{1}{r} \hat{i}_r \times \hat{i}_z = -B_1 \frac{1}{r} \hat{i}_\varphi$$

Calcoliamone l'integrale sul **bordo di una superficie che sta tra i due conduttori**:

$$\int_{\partial S} \underline{h}_t \cdot \hat{i}_\varphi r d\varphi = \int_{[0, 2\pi]} -\frac{B_1}{\mu} d\varphi = -2\pi \frac{B_1}{\mu} = I = 1$$

Dove possiamo calcolare:

$$B_1 = \frac{-\mu}{2\pi}$$

E:

$$\underline{h}_t = \frac{1}{2\pi r} \hat{i}_\varphi$$

## 2.2 Induttanza

Sappiamo che:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

Ma abbiamo imposto  $I = 1$ , quindi diventa:

$$W_m = \frac{1}{2}L$$

Ma come calcolo  $W_m$ ?

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}\mu \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} |\underline{h}|^2 r \, d\varphi \, dr = \\ &= \frac{1}{2}\mu \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(2\pi r)^2} r \, d\varphi \, dr = \\ &= \frac{1}{2}\mu 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(2\pi r)^2} r \, dr = \\ &= \frac{1}{2}\mu \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(2\pi r)} dr = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \end{aligned}$$

Quindi l'**induttanza** sarà:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

In conclusione:

$$\begin{cases} L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \\ C = \epsilon 2\pi \frac{1}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \end{cases}$$

In particolare:

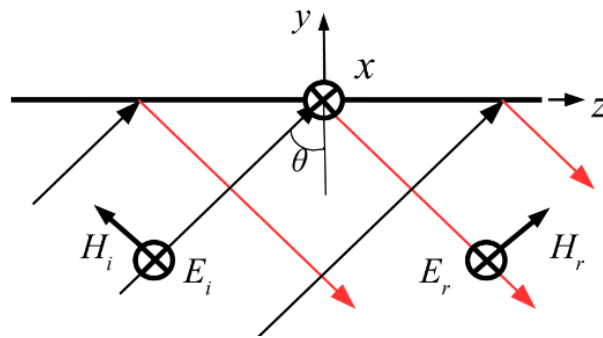
$$LC = \epsilon\mu$$

## Capitolo 13

# Guida a Piatti Paralleli e Guida a Sezione Rettangolare

### 1 Caso TE

Consideriamo, in un **mezzo omogeneo nel tempo** e nello **spazio**, **isotropo**, **spazialmente non dispersivo** e **senza perdite**, un'onda **piana incidente** su un piano **CEP**, con un angolo  $\theta_i = \theta$  e **Incidenza TE**:



Il **campo elettrico** ha la sola componente **x**, **ortogonale** al piano (y,z):

$$\underline{E}_i^+ = E_i^+ \hat{i}_x = \hat{i}_x E_{i_0}^+ e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} = \hat{i}_x E_{i_0}^+ e^{-j(k_y y + k_z z)}$$

Da notare che;

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= k_y \hat{i}_y + k_z \hat{i}_z \\ k_i^2 &= k^2 = \omega^2 \epsilon \mu = k_y^2 + k_z^2 \\ k_y &= k \cos(\theta) \\ k_z &= k \sin(\theta) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'**onda riflessa**:

$$\underline{E}_r^+ = E_r^+ \hat{i}_x = \hat{i}_x E_{r_0}^+ e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} = \hat{i}_x E_{r_0}^+ e^{-j(-k_y y + k_z z)}$$



Dove:

$$\begin{aligned} k_r &= -k_y \hat{i}_y + k_z \hat{i}_z \\ k_r^2 &= k^2 = \omega^2 \epsilon \mu = k_y^2 + k_z^2 \\ k_y &= k \cos(\theta) \\ k_z &= k \sin(\theta) \end{aligned}$$

Le **condizioni al contorno** del **CEP**, che si trova a coordinate ( $y=0$ ) sono che la **componente tangente al piano del campo elettrico sia nulla**, ma nel caso in esame abbiamo che:

$$\underline{E}^+(x, y, z) = \underline{E}_i^+ + \underline{E}_r^+ = \hat{i}_x (E_i^+ + E_r^+)$$

è **tangente** al piano...

Bisogna **imporre** che  $\underline{E}_i^+ + \underline{E}_r^+ = 0$  in  $y = 0$ :

$$\underline{E}^+(x, 0, z) = \hat{i}_x (E_{i_0}^+ e^{-jk_z z} + E_{r_0}^+ e^{-jk_z z}) = 0$$

Che è **verificata** se e solo se  $E_{r_0}^+ = -E_{i_0}^+$ , quindi scriviamo in forma compatta:

$$\underline{E}^+ = E^+ \hat{i}_x = -2jE_{i_0}^+ \sin(k_y y) e^{-jk_z z} \hat{i}_x \quad (X)$$

Quindi  $\underline{E}^+$  si **annulla** per  $y = 0$ , ma anche **ogni**:

$$y = y_n : k_y y_n = n\pi$$

Questa espressione ci dice che se poniamo **un altro CEP** ad una distanza  $a = y_n$  dal piano  $y=0$ , questo piano **non perturba** il campo (X), o in altri termini se cerchiamo le **soluzioni delle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti**, tra due **CEP** distanti a (e supponiamo campo TE) ottengo l'espressione (X) che tra i due piani **rispetta le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti**.

Fissando ora a:

$$k_y a = n\pi \implies k_y = k_n = n \frac{\pi}{a}$$

Cioè per angoli:

$$\theta = \theta^{(n)} = \arccos\left(\frac{k_n}{k}\right) = \arccos\left(\frac{n\pi}{ak}\right) = n \frac{\lambda}{2a}$$

Calcoliamo ora il **campo magnetico** partendo da **Faraday-Lenz**:

$$\bar{\nabla} \times \underline{E} = -j\omega\mu\underline{H} \implies (\nabla_t - jk_z\hat{i}_z) \times \underline{E}_t = -j\omega\mu\underline{H}_t - j\omega\mu H_z\hat{i}_z$$

Da cui:

$$\begin{cases} k_z\hat{i}_z \times \underline{E}_t = \omega\mu\underline{H}_t \\ \nabla_t \times \underline{E}_t = -j\omega\mu H_z\hat{i}_z \end{cases}$$

La prima ci mostra che  $\underline{H}_t$  è **proporzionale** ad  $\underline{E}_t$  **ruotato** di  $\pi/2$ .

Ora sostituiamo (X):

$$k_z \underbrace{\hat{i}_z \times \hat{i}_x}_{\hat{i}_y} E^+ = k_z \hat{i}_y E^+ = -2jk_z E_{i_0}^+ \sin(k_y y) e^{-jk_z z} \hat{i}_y = \omega\mu \underline{H}_t$$

Quindi:

$$\underline{H}_t = H_y \hat{i}_y = -2j \frac{k_z}{\omega\mu} E_{i_0}^+ \sin(k_y y) e^{-jk_z z} \hat{i}_y$$

Dalla seconda invece, calcoliamo la **componente longitudinale** di  $\underline{H}$ :

$$\begin{aligned} -j\omega\mu H_z \hat{i}_z &= \nabla_t \times \underline{E}_t \\ -j\omega\mu H_z &= \hat{i}_z \cdot \nabla_t \times \underline{E}_t = \nabla_t \cdot (\underline{E}_t \times \hat{i}_z) \end{aligned}$$

Sostituiamo (X):

$$\begin{aligned} \nabla_t \cdot (2jE_{i_0}^+ \sin(k_y y) e^{-jk_z z} \hat{i}_y) &= \\ = \frac{\partial}{\partial y} (2jE_{i_0}^+ \sin(k_y y) e^{-jk_z z}) &= \\ = 2jk_y E_{i_0}^+ \cos(k_y y) e^{-jk_z z} &= -j\omega\mu H_z \end{aligned}$$

Quindi:

$$H_z = -2 \frac{k_y}{\omega\mu} E_{i_0}^+ \cos(k_y y) e^{-jk_z z}$$

**Quindi tra due CEP paralleli, in assenza di sorgenti, si può propagare un campo elettromagnetico.**

Definiamo:

$$\begin{cases} A_E^+ = -2jE_{i_0}^+ \\ A_H^+ = -2j \frac{k_z}{\omega\mu} E_{i_0}^+ = -2j \frac{k_z}{\omega\mu} \zeta H_{i_0}^+ = -2j \frac{k_z}{k} H_{i_0}^+ \end{cases}$$

Dato che:

$$\begin{cases} k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \\ \zeta = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon \mu}} \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere il **campo elettrico tra i due CEP** come:

$$\begin{cases} \underline{E}^+ = A_E^+ \sin(k_y y) e^{-jk_z z} \hat{i}_x \\ \underline{H}_t^+ = \frac{k_z}{\omega \mu} \hat{i}_z \times \underline{E}_t^+ = \frac{k_z}{\omega \mu} A_E^+ e^{-jk_z z} \sin(k_y y) \hat{i}_y = A_H^+ e^{-jk_z z} \sin(k_y y) \hat{i}_y \\ H_z^+ = -j \frac{k_y}{\omega \mu} A_E^+ \cos(k_y y) e^{-jk_z z} = -j \frac{k_y}{k_z} A_H^+ \cos(k_y y) e^{-jk_z z} \end{cases}$$

Dove:

$$k_y = k_n = n \frac{\pi}{a}, \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_n^2} = \sqrt{k^2 - \left(n \frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Diciamo però che questo campo è **possibile solo per alcuni valori** di  $k_y$  e  $k_z$ , dove:

- $k_y$  **autovalore trasverso**
- $k_z$  **autovalore longitudinale**

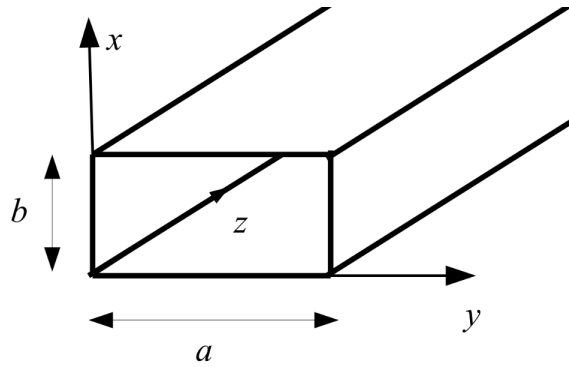
Questo campo è **confinato nei due CEP** e si propaga verso Z, longitudinalmente al piano (x,y), **ma questo piano è infinito!!**

Quindi **non è realizzabile...**

Infatti se calcoliamo il **flusso di potenza** per una generica z **otterremo un flusso di potenza infinito!** Anche se la **densità di potenza** è **finita...**

Osservando le **equazioni dei campi** che abbiamo ricavato notiamo che il **campo elettrico** è tutto nella direzione x.

Quindi possiamo mettere **altri due CEP paralleli all'asse y**, separati da una distanza **b** in modo tale da **non perturbare le equazioni ottenute:**



Possiamo anche considerare il **campo nullo all'esterno di questo "tubo"**.

Mentre il **campo all'interno rispetta le condizioni a contorno**, ovvero **componenti tangenti del campo elettrico nulle sui conduttori**.

Se ora calcolassimo il **flusso di potenza** attraverso una qualsiasi sezione trasversa, sarebbe **finito**.

Questa **guida metallica NON TEM** prende il nome di **guida metallica rettangolare**.

Possiamo scomporre il **campo elettrico** nella guida come:

$$\begin{cases} \underline{E}_i^+ = E_{ix}^+ \hat{i}_x = E_{i0}^+ e^{-j(k_y y + k_z z)} \hat{i}_x \\ \underline{E}_r^+ = E_{rx}^+ \hat{i}_x = E_{r0}^+ e^{-j(-k_y y + k_z z)} \hat{i}_x \end{cases}$$

Possiamo però considerare anche:

$$\begin{cases} \underline{E}_i^- = E_{ix}^- \hat{i}_x = E_{i0}^- e^{j(-k_y y + k_z z)} \hat{i}_x \\ \underline{E}_r^- = E_{rx}^- \hat{i}_x = E_{r0}^- e^{j(k_y y + k_z z)} \hat{i}_x \end{cases}$$

Sia quelle sopra che queste sotto, sommandosi **verificano le condizioni a contorno sui CEP**:

$$\underline{E}^- = \underline{E}_i^- + \underline{E}_r^- = \underline{E}^- \hat{i}_x = -2jE_{i0}^- \sin(k_y y) e^{jk_z z} \hat{i}_x = A_E^- \sin(k_y y) e^{jk_z z} \hat{i}_x$$

Discorso analogo per  $\underline{H}^-$ , ma si può notare che basta cambiare di segno  $k_z$ :

$$\begin{cases} \underline{H}_t^- = A_H^- \sin(k_y y) e^{jk_z z} \hat{i}_y \\ H_z^- = j \frac{k_y}{k_z} A_H^- \cos(k_y y) e^{jk_z z} \end{cases}$$

Riassumendo, nella **guida**, in **assenza di sorgenti**, per ogni  $k_n$  troviamo un **campo TE** ( $E_0$ ):

$$\begin{cases} \underline{E}^+ = (A_E^+ e^{-jk_z z} + A_E^- e^{jk_z z}) \sin(k_y y) \hat{i}_x \\ \underline{H}_t^+ = (A_E^+ e^{-jk_z z} + A_E^- e^{jk_z z}) \frac{k_z}{\omega \mu} \sin(k_y y) \hat{i}_y \\ H_z^+ = -j \frac{k_y}{\omega \mu} (A_E^+ e^{-jk_z z} + A_E^- e^{jk_z z}) \cos(k_y y) \end{cases}$$

Possiamo ora notare che  $\underline{E}_t$  e  $\underline{H}_t$  sono costituite dal prodotto di una **ampiezza scalare dipendente da z**, per una **funzione vettoriale che dipende solo da y in questo caso**, ma come vedremo può dipendere anche da x e y:

$$\begin{cases} \underline{E} = (V^+ e^{-jk_z z} + V^- e^{jk_z z}) \underline{e}(x, y) = V(z) \underline{e}(x, y) \\ \underline{H}_t = (I^+ e^{-jk_z z} + I^- e^{jk_z z}) \underline{h}_t(x, y) = I(z) \underline{h}_t(x, y) \end{cases}$$

Questa **fattorizzazione non è univoca**, possiamo infatti moltiplicare  $V(z)$  (o  $I(z)$ ) e dividere  $\underline{e}_t$  (o  $\underline{h}_t$ ) per una stessa **costante** chiamate **costanti di separazione**, ed ottenere lo stesso campo.

Una di queste costanti può essere scelta imponendo:

$$\underline{e}_t = \underline{h}_t \times \hat{i}_z$$

Quindi:

$$\begin{cases} V^+ = I^+ Z_{TE} \\ V^- = -I^- Z_{TE} \\ Z_{TE} = \frac{V^+}{I^+} = \frac{A_E^+}{A_E^+ \cdot \frac{k_z}{\omega \mu}} = \frac{\omega \mu}{k_z} \end{cases}$$

Notiamo in particolar modo che l'**ampiezza del campo elettrico trasverso** ( $V(z)$ ) e del **campo magnetico trasverso** ( $I(z)$ ) variano lungo

la guida allo stesso modo della **tensione** e della **corrente** lungo una **linea di trasmissione**:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-jk_z z} + V^- e^{jk_z z} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_{TE}} e^{-jk_z z} - \frac{V^-}{Z_{TE}} e^{jk_z z} \end{cases}$$

Con:  $Z_{TE} = \frac{k_z}{\omega\mu}$ ,  $k_z = \sqrt{k^2 - \left(n - \frac{\pi}{a}\right)^2}$

Queste **ampiezze** rispettano le **equazioni delle linee**:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dZ} = -j\omega\mu I = -j\omega L_{eq} I \\ \frac{dI}{dZ} = -j\omega \frac{k_z^2}{\omega^2\mu} V = -j\omega C_{eq} V \end{cases}$$

Possiamo quindi **associare** alla **propagazione in guida d'onda metallica**, per un fissato  $k_n$ , **la linea TEM sopra descritta**.

Da ricordare però che in questo caso **V non è una vera tensione** e **I non è una vera corrente**.

Possiamo però creare un'altra analogia fissando la **seconda costante di separazione**, imponendo:

$$\int_S \underline{e}_t \times \underline{h}_t \cdot \hat{i}_z dS = 1$$

Dove S è la sezione trasversa della guida.

La **potenza** in una generica sezione z sarà:

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_S \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \cdot \hat{i}_z dS = \int_S \frac{1}{2} \underline{E}_t \times \underline{H}_t^* \cdot \hat{i}_z dS = \\ &= \int_S V(z) \underline{h}_t \times I^*(z) \underline{h}_t \cdot \hat{i}_z dS = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) \end{aligned}$$

Notiamo che la **normalizzazione** può anche essere riscritta come:

$$\int_S \underline{e}_t \times \underline{h}_t \cdot \hat{i}_z dS = \int_S \underbrace{\underline{h}_t \times \hat{i}_z}_{\underline{e}_t} \cdot \underline{e}_t dS = \int_S \underline{e}_t \cdot \underline{e}_t dS = 1$$

Analogamente:

$$\int_S \underline{h}_t \cdot \underline{h}_t dS = 1$$

Quindi possiamo ricavare:

$$\begin{cases} \underline{e}_t = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right) \hat{i}_x \\ \underline{h}_t = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right) \hat{i}_y \\ h_z = -j\frac{k_y}{k_z} \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\left(n\frac{\pi}{a}y\right) \end{cases}$$

Infine notiamo una **relazione** tra questi campi:

$$\nabla_t h_z = j\frac{k_y}{k_z} k_y \underbrace{\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin(k_y y) \hat{i}_y}_{\underline{h}_t} = j\frac{k_y^2}{k_z} \underline{h}_t = j\frac{k_y^2}{k_z} \hat{i}_z \times \underline{e}_t$$

Ragionando possiamo dire che è possibile fare dei calcoli del tutto analoghi ruotando la guida e considerando un'onda che incide sul piano (y,z), anzichè sul piano (x,z).

Facendo le stesse **considerazioni** e **normalizzazioni** avremo:

$$\nabla_t h_z = -j\sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{k_x}{k_z} \left(m\frac{\pi}{b}\right) \sin\left(m\frac{\pi}{b}x\right) \hat{i}_x = j\frac{k_x^2}{k_z} \underline{h}_t = j\frac{k_x^2}{k_z} \hat{i}_z \times \underline{e}_t$$

Questa espressione, come quella del primo caso, ci dice che le **componenti dei campi trasversi** possono essere ricavati mediante le **componenti longitudinali** a patto che esse **rispettino le condizioni al contorno** che per  $h_z$  sarebbero **derivata nulla sui conduttori**.

Assumiamo per  $h_z$  una forma generale:

$$h_z = jA \cos\left(n\frac{\pi}{a}y\right) \cos\left(m\frac{\pi}{b}x\right)$$

E valutiamone il gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla_t h_z = -jA & \left[ \left(n\frac{\pi}{a}\right) \sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right) \cos\left(m\frac{\pi}{b}x\right) \hat{i}_y + \right. \\ & \left. + \left(m\frac{\pi}{b}\right) \cos\left(n\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(m\frac{\pi}{b}x\right) \hat{i}_x \right] \end{aligned}$$

Confrontandola con le altre possiamo asserire che  $\hat{i}_z \times \nabla_t h_z$  **soddisfa le condizioni al contorno**.<sup>1</sup>

$$\underline{e}_t = jC \hat{i}_z \times \nabla_t h_z = B \left[ \sin\left(n \frac{\pi}{a} y\right) \cos\left(m \frac{\pi}{b} x\right) \hat{i}_x - \cos\left(n \frac{\pi}{a} y\right) \sin\left(m \frac{\pi}{b} x\right) \hat{i}_y \right]$$

Perchè così le **componenti tangenti del campo elettrico** si **annullano sulle pareti** del conduttore!! Infatti:

$$\begin{cases} e_x(x, 0) = e_x(x, a) = 0 \\ e_y(0, y) = e_y(b, y) = 0 \end{cases}$$

Ce ne sono due perchè l'onda incide su tutti e 4 i piani, quindi vuol dire che  $\underline{k}$  avrà 3 componenti:

$$\underline{k} = k_x \hat{i}_x + k_y \hat{i}_y + k_z \hat{i}_z = \underline{k}_{t_{nm}} + k_z \hat{i}_z$$

Dove:

$$\begin{cases} k_x = m \frac{\pi}{b} \\ k_y = n \frac{\pi}{a} \\ k_{z_{nm}} = \sqrt{k^2 - k_{t_{nm}}^2} = \sqrt{k^2 - \left(m \frac{\pi}{b}\right)^2 - \left(n \frac{\pi}{a}\right)^2} \end{cases}$$

Quindi in una **guida metallica rettangolare** si possono propagare una **doppia infinità numerabile di modi** ad ogn'uno dei quali **possiamo associare una linea di trasmissione equivalente** con i seguenti parametri:

$$L_{eq} = \mu, \quad C_{eq} = \frac{k_{z_{nm}}^2}{\omega^2 \mu}$$

**In particolare il modo che si propaga con il  $k_z$  più grande è detto modo fondamentale.**

## 1.1 Il Fenomeno del Cut-Off nelle Guide Metalliche

Consideriamo il seguente **modo (n,m)** costituito dalle seguenti **onde di tensione** e di **corrente** equivalenti che si propagano in una

<sup>1</sup>A e B sono costanti di normalizzazione



**guida a sezione rettangolare con costante di propagazione  $K_{z_{n,m}}$**   
(consideriamo per semplicità solo quelle nella direzione positiva di  $z$ ):

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-jK_{z_{n,m}}z} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_{TE}^{n,m}} e^{-jK_{z_{n,m}}z} \end{cases}$$

Dove:

$$K_{z_{n,m}} = \sqrt{K^2 - K_{t_{n,m}}^2}$$

In particolare:

$$K^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

Che è **funzione** di  $\omega$ , mentre  $K_{t_{n,m}}^2$  è **indipendente** da  $\omega$ , quindi possiamo calcolare la particolare **pulsazione**  $\omega_{t_{n,m}}$  che **annulla**  $K_{z_{n,m}}$ :

$$\omega_{t_{n,m}} = \frac{K_{t_{n,m}}}{\epsilon \mu}$$

Per **pulsazioni maggiori** di  $\omega_{t_{n,m}}$  il radicando è **positivo** e quindi la radice ammette una **determinazione reale positiva**.

Tuttavia per **pulsazioni minori** di  $\omega_{t_{n,m}}$  il radicando è **negativo** e quindi la radice ammette **due determinazioni immaginarie**, dove:

- La determinazione **immaginaria positiva** corrisponde ad un **campo che cresce nella direzione positiva delle  $z$** , ma il mezzo è **passivo** quindi **non è una soluzione fisica**;
- La determinazione **immaginaria negativa** corrisponde ad un **campo che si attenua lungo le  $z$  positive**, ma questa attenuazione è di tipo **reattivo**.

Possiamo quindi dire che:

$$\begin{cases} K_{z_{n,m}} = \sqrt{K^2 - K_{z_{n,m}}^2} = \beta_{n,m}, \text{ sse } \omega > \omega_{t_{n,m}} \\ K_{z_{n,m}} = \sqrt{K^2 - K_{z_{n,m}}^2} = -j\alpha_{n,m}, \text{ sse } \omega < \omega_{t_{n,m}} \end{cases}$$

Quindi **ogni modo si propaga solo per pulsazioni superiori alla pulsazione  $\omega_{t_{n,m}}$  detta pulsazione di taglio del modo**.

Il modo che la **pulsazione di taglio più bassa** (che quindi si propaga prima) è il **modo fondamentale**.

Per esempio, considerando una **guida rettangolare metallica** con  $a > b$ , il **modo fondamentale** è il  $TE_{10}$ :

$$K_{t_{10}} = \frac{\pi}{a}$$

$$\omega_{t_{10}} = \frac{\pi}{a\epsilon\mu}$$

$$K_{z_{10}} = \sqrt{K^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Una cosa interessante che possiamo elaborare da queste informazioni è che una **guida metallica semplicemente connessa** si comporta come un **filtro passa alto** dato che al di sotto della **pulsazione di taglio** non lascia propagare nulla.

Valutiamo ora il **flusso di potenza** ad una qualsiasi sezione della **guida**:

$$P(z) = \int_S \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \cdot \hat{i}_z dS = \int_S \frac{1}{2} \underline{E}_t \times \underline{H}_t^* \cdot \hat{i}_z dS =$$

$$= \int_S V(z) \underline{e}_t \times I^*(z) \underline{h}_t \cdot \hat{i}_z = \frac{1}{2} V(z) I^*(z)$$

dove per  $\omega > \omega_{t_{n,m}} \Rightarrow K_{z_{n,m}} = \beta_{n,m}$ :

$$P = \frac{1}{2} V^+ e^{-jK_{z_{n,m}} z} \frac{V^{+*}}{Z_{TE}^{n,m*}} e^{jK_{z_{n,m}}^* z} = \frac{1}{2} |V^+|^2 \frac{\beta_{n,m}}{\omega\mu}$$

Quindi in questo caso abbiamo una **potenza attiva**, mentre nel caso contrario  $\omega < \omega_{t_{n,m}} \Rightarrow K_{z_{n,m}} = -j\alpha_{n,m}$ :

$$P = \frac{1}{2} V^+ e^{-jK_{z_{n,m}} z} \frac{V^{+*}}{Z_{TE}^{n,m*}} e^{jK_{z_{n,m}}^* z} = \frac{1}{2} j \frac{\alpha_{n,m}}{\omega\mu} |V^+|^2 e^{-2\alpha_{n,m} z}$$

Quindi in questo caso abbiamo una **potenza alla generica sezione puramente reattiva** e diminuisce con  $z$ .

---

<sup>2</sup>dove  $Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{K_z}$



## Capitolo 14

# Diagramma di Dispersione - Velocità di Fase e Velocità di Gruppo

Consideriamo ora un **generico modo** con **pulsazione di taglio**  $\omega_t$  e valutiamo per  $\omega > \omega_t$  la funzione:

$$\omega = \omega(\beta_z)$$

Che ci viene data in forma implicita da:

$$\beta_z^2 = K^2 - K_t^2$$

Ovvero:

$$\beta_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - K_t^2$$

Dividendo ora entrambi i membri per  $K_t^2$  otteniamo:

$$\frac{\omega^2}{K_t^2 c^2} - \frac{\beta_z^2}{K_t^2} = 1$$

E ricordando che  $\omega_t = \frac{K_t}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ :

$$\frac{\omega^2}{\omega_t^2} - \frac{\beta_z^2}{K_t^2} = 1$$

Che non è altro che l'**equazione di un'iperbole**, i cui **asintoti** si calcolano facendo tendere  $\beta_z \rightarrow \infty$ :

$$\frac{\omega^2}{\omega_t^2} - \frac{\beta_z^2}{K_t^2} = 1$$

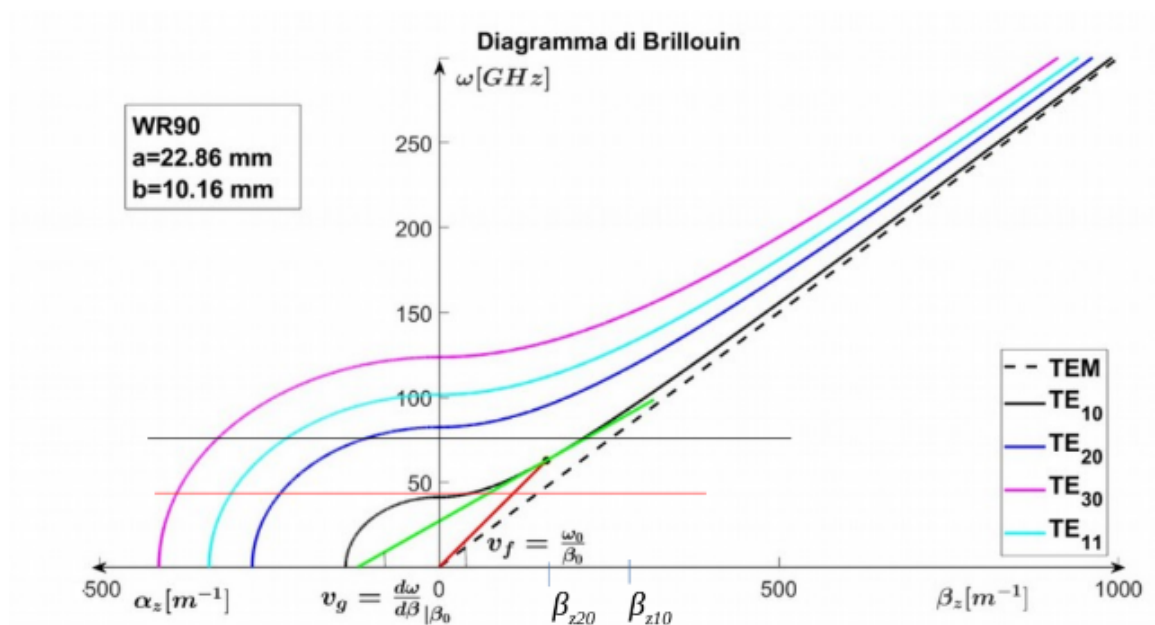
$$\frac{\omega^2}{\omega_t^2} = 1 + \frac{\beta_z^2}{K_t^2}$$

Faccio tendere  $\beta_z$  all'infinito

$$\frac{\omega^2}{\omega_t^2} = \frac{\beta_z^2}{K_t^2}$$

Da cui ci possiamo ricavare l'equazione dell'**asintoto obliquo**:

$$\omega = \frac{\omega_t}{K_t} \beta_z = c \beta_z$$



Consideriamo **un punto su un ramo di iperbole**, ad esempio quella nera, relativa al **modo fondamentale**  $TE_{10}$ , chiamandolo  $(\omega_0, \beta_0)$  e tracciamo la **secante** a questo punto passante per l'origine (la retta rossa), che ha come equazione:

$$\omega = v_{fase} \beta_z$$

Dove il **coefficiente angolare** è:

$$v_{fase} = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

E che dovrebbe rappresentare la **velocità di propagazione di un segnale di pulsazione**  $\omega_0$  sul **modo fondamentale**.

Tuttavia come si evince dal disegno  $v_f > c$  ma questo è **impossibile!!**

Per questo la **vera velocità** con cui viene trasportata l'informazione non è  $v_{fase}$  ma:

$$v_{gruppo} = \frac{d\omega}{d\beta_z}(\omega_0)$$

Che non è altro che il **coefficiente angolare della retta tangente al punto** (linea verde) che è **più piccolo della velocità della luce**.

Ritorniamo ora a questa relazione:

$$\frac{\omega^2}{\omega_t^2} = 1 + \frac{K_z^2}{K_t^2}$$

$$\omega^2 = \omega_t^2 + \omega_t^2 \frac{K_z^2}{K_t^2}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_t^2 + c^2 K_z^2}$$

Ed ora differenziamola:

$$\frac{d\omega}{dK_z} = \frac{1}{2} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\omega_t^2 + c^2 K_z^2}}_{\omega}} 2c^2 K_z = \frac{c^2 K_z}{\omega} = v_{gruppo} = c^2 \cdot \frac{1}{v_f}$$