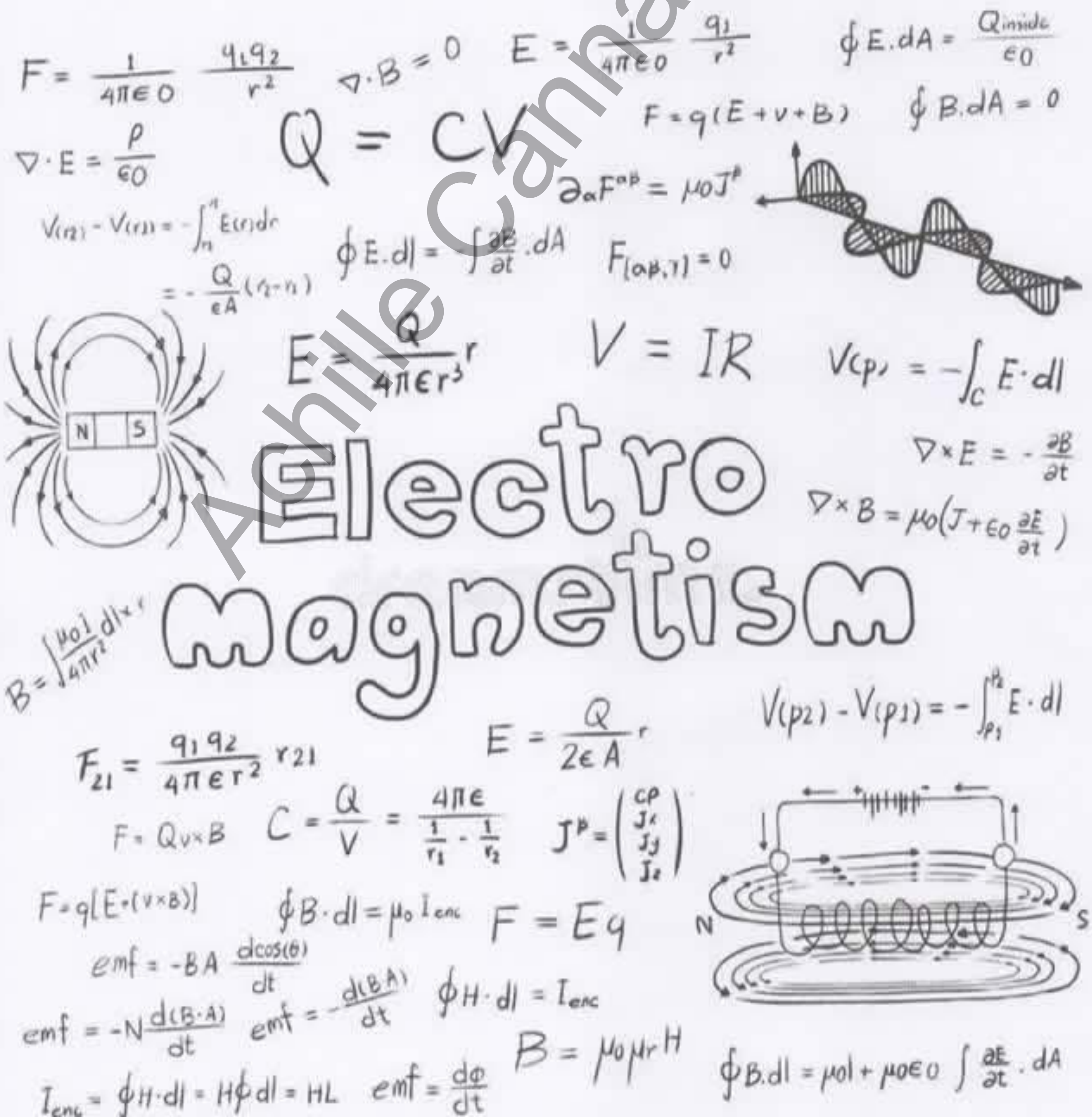
FISICA
APPUNTI

Cannavale Achille

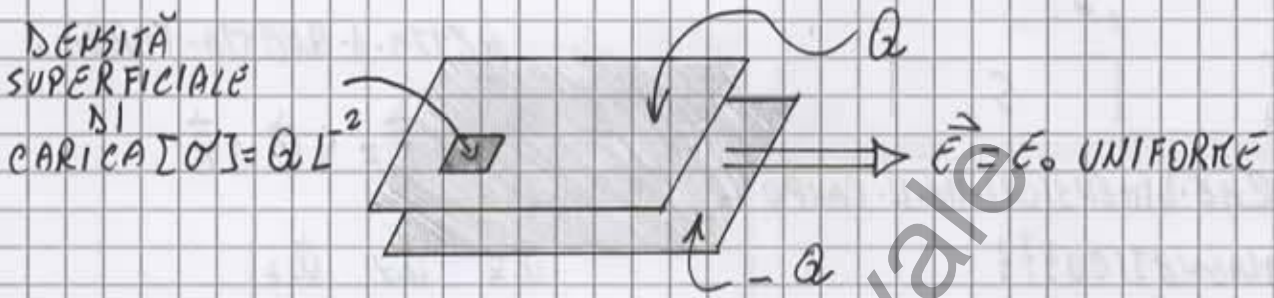


CAMPO ELETTRICO VETTORIALE UNIFORME

PRIMA DI TUTTO RICORDIAMO CHE:

$$q_{ELETTRONE} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ COULOMB}$$

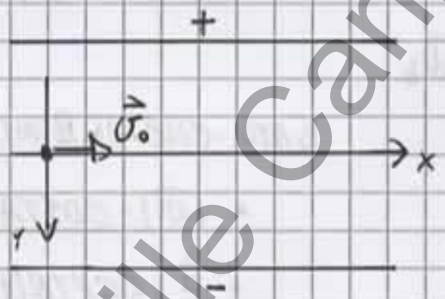
DETTO QUESTO, COME SI CREA UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME??



UNA PARTICELLA CON CARICA q CHE SI TROVA TRA LE DUE LASTRE SARÀ SOGGETTA A QUESTA FORZA: $\vec{F} = q\vec{E}$

$m \cdot a = \vec{F} = q\vec{E}$

$\Rightarrow a = \frac{q}{m}\vec{E}$



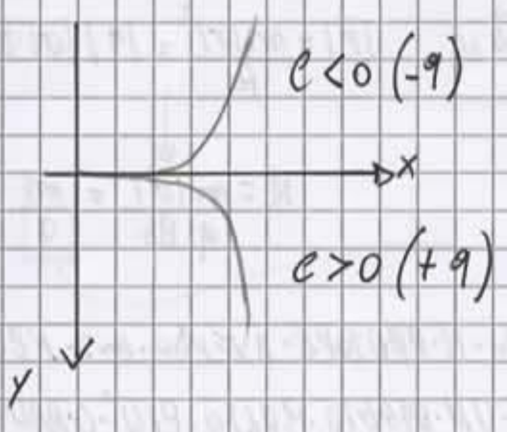
SUPPONIAMO $\vec{E} = 0\vec{u}_x + E_0\vec{u}_y$

ALLORA: $\begin{cases} a_x = \frac{q}{m} E_x = 0 \\ a_y = \frac{q}{m} E_0 \end{cases}$

$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = \frac{q}{m} E_0 t \end{cases} \rightarrow \left.\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2}\frac{q}{m} E_0 t^2 \end{cases}\right\}$ COMBINIAMOLE ASSIEME $\rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{E_0}{v_0^2}x^2$, OPPURE $y(x) = C x^2$ DOVE $C = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{E_0}{v_0^2}$

GRAFICAMENTE AVREMO:



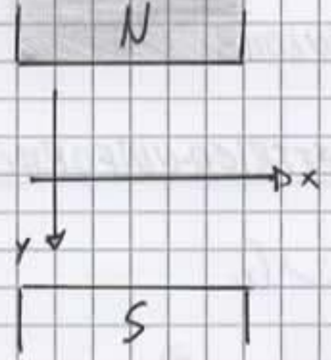
N.B. CHE DIMENSIONI HA IL CAMPO VETTORIALE ELETTRICO???

$[\vec{E}] = MLT^{-2}Q^{-1}$ $\frac{N}{COULOMB}$

CAMPO MAGNETICO VETTORIALE UNIFORME

COME POSSIAMO CREARE UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME???

CALAMITA



$\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$

UNA PARTICELLA CON CARICA q, TRA LE ESTREMITÀ DELLA CALAMITA SARÀ SOGGETTA A QUESTA FORZA:

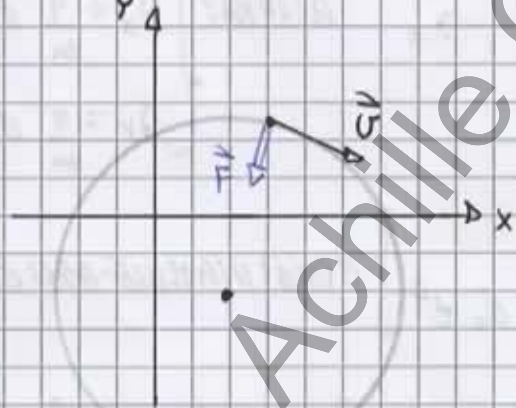
$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} =$$

N.B. CHE DIMENSIONI HA IL CAMPO MAGNETICO???

$$[\vec{B}] = \frac{[\vec{F}]}{[q\vec{v}]} = \frac{M}{TQ} = \text{TESLA}$$

$$= q v_y B_0 \vec{u}_x - q v_x B_0 \vec{u}_y + 0\vec{u}_z$$



DATO CHE ABBIAMO:

- $|\vec{v}|$ COSTANTE;
- $\vec{F}$ CENTRIPETA.

$\Rightarrow$ MOTO CIRCOLARE UNIFORME

QUINDI UN CAMPO MAGNETICO HA:

$$\vec{a} = m \cdot \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_T + \boxed{m\frac{|\vec{v}|^2}{R}\vec{u}_N}$$

IL CAMPO MAGNETICO NON FA LAVORO

QUESTA È LA $\vec{F}$ NECESSARIA PER TENERE LA PARTICELLA SULL'ORBITA. E VALE:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$|\vec{F}| = \frac{m|\vec{v}|^2}{R} = |q||\vec{v}| \cdot B_0$$

$$\Downarrow$$

$$R = \frac{m|\vec{v}|}{qB_0} = \boxed{\frac{m}{q}}\frac{|\vec{v}|}{B_0}$$

QUINDI IL PROTONE AVENDO m > NEUTRONE AVRÀ UN RAGGIO MOLTO PIÙ GRANDE.

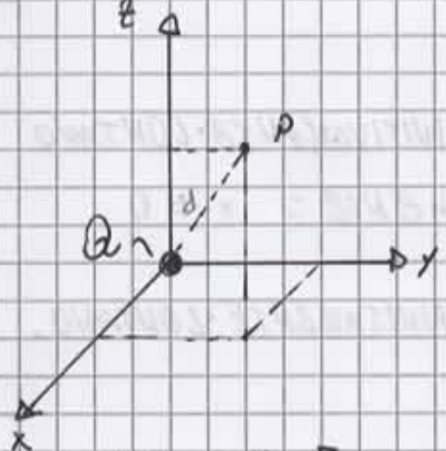
POTENZIALE ELETTROSTATICO

IL CAMPO ELETTROSTATICO PUÒ ESSERE SCRITTO COME:

$$\vec{E}_{STATICO} = -\vec{\nabla} V$$

POTENZIALE SCALARE ELETTROSTATICO

ESSENDO V UNO SCALARE, PER OGNI PUNTO DELLO SPAZIO AVRÀ UN VALORE.



$$V(\underbrace{x,y,z}_{P}) = K_e \cdot \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C$$

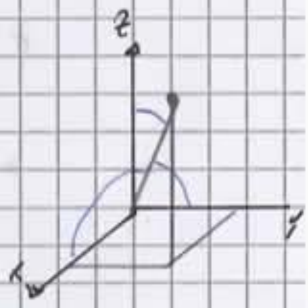
QUINDI $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z$

IN PARTICOLARE: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_e \frac{Q}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + C\right] =$$

$$= K_e Q \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\right] = K_e Q \frac{\frac{1}{-2\sqrt{x^2+a}} \cdot 2x}{x^2+a} =$$

$$= -K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \text{QUINDI:}$$



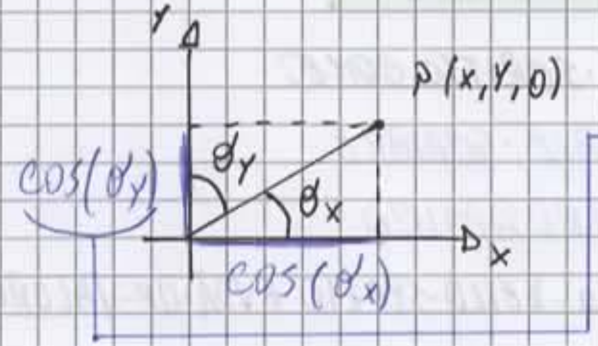
- $E_x = K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} \cdot \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$ $\cos(\theta_x)$
- $E_y = K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} \cdot \boxed{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$ $\cos(\theta_y)$
- $E_z = K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} \cdot \boxed{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$ $\cos(\theta_z)$

COSENI DIRETTORI

PROPOSIZIONE

$$\cos^2(\theta_x) + \cos^2(\theta_y) + \cos^2(\theta_z) = 1$$

DIMOSTRAZIONE (2D)



$\sin(\theta_x) \Rightarrow \cos^2(\theta_y) + \cos^2(\theta_x) =$

$= \sin^2(\theta_x) + \cos^2(\theta_x) = 1$

OSSERVAZIONE

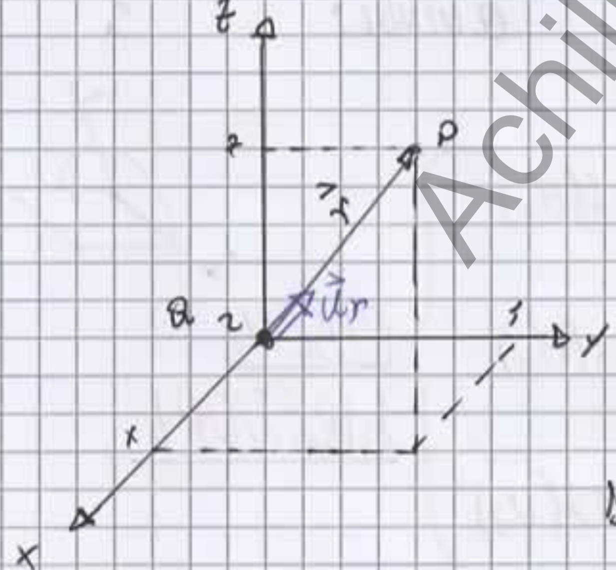
$$V(x,y,z) = \boxed{K_e \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} + C$$

SE P È INFINITAMENTE LONTANO DALLA SORGENTE * → 0

QUINDI SI SCEGLIE DI PORRE $C=0$ PER P INFINITAMENTE LONTANO.

È POSSIBILE INOLTRE UTILIZZARE UNA DIVERSA NOTAZIONE PER IL CAMPO ELETTROSTATICO.

$$\vec{E} = K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} \Big[\underbrace{\cos(\theta_x)\vec{u}_x + \cos(\theta_y)\vec{u}_y + \cos(\theta_z)\vec{u}_z}_{\vec{u}_r} \Big]$$



$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

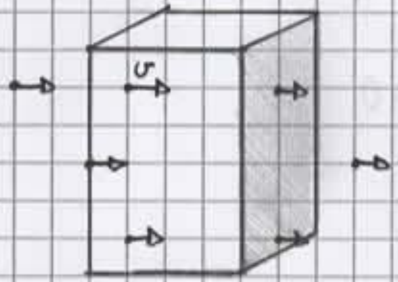
$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, DOVE $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

QUINDI $\vec{E}(P) = \vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\cdot\vec{u}_r$

DOVE $E(r) = K_e \frac{Q}{x^2+y^2+z^2} = K_e \frac{Q}{|\vec{r}|^2}$

PORTATORI DI CARICA

ORA DEFINIAMO ALCUNI VALORI RIGUARDANTI I PORTATORI DI CARICA.



DEFINIAMO <u>DENSITÀ VOLUMETRICA DI NUMERO</u> IL NUMERO DI PORTATORI IN UN VOLUME MATEMATICO E LO INDICHIAMO CON

$$m$$

ORA CI CHIEDIAMO: QUANTE PARTICELLE NEL VOLUME COLPIRANNO LA SUPERFICIE IN Δt SECONDI?

$$m \cdot AREA \cdot v \cdot \Delta t$$

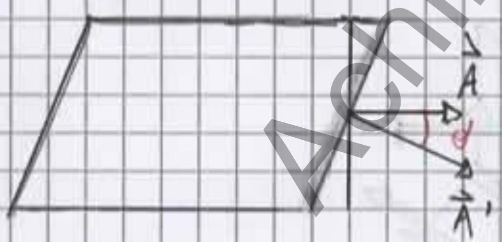
TUTTAVIA SONO PORTATORI DI CARICA, QUINDI TENIAMONE CONTO:

$$m \cdot q \cdot AREA \cdot v \cdot \Delta t = \Delta Q \quad \text{COULOMB}$$

COSÌ POSSIAMO DEFINIRE LA CARICA CHE ATTRAVERSA LA SUPERFICIE PER UNITÀ DI TEMPO:

$$m\, q\, AREA\, v = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \frac{\text{COULOMB}}{\text{TEMPO}}$$

<u>SUPERFICIE INCLINATA</u>



QUINDI I NUOVI VALORI SARANNO:

$$\Delta Q = m\, q\, AREA \cdot v \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta)$$

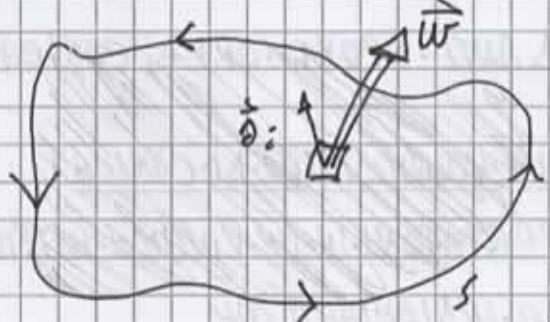
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = m\, q\, AREA \cdot v \cdot \cos(\theta)$$

È POI POSSIBILE RISCRIVERE $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, COSÌ:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \vec{J} \cdot \vec{A}$$, DOVE $\vec{J} = m\, q\, \vec{v}$ ED È LA <u>DENSITÀ SUPERFICIALE</u>

$$[\vec{J}] = [m][q][\vec{v}] = \frac{Q}{T} \cdot \frac{1}{L^2} = A/m^2$$

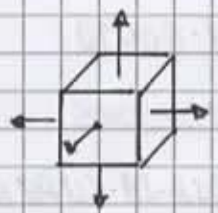
E SE, IN ULTIMA ANALISI LA SUPERFICIE FOSSE ONDULATA???



$$\sum_i^N \vec{w}_i \cdot \Delta \vec{a}_i \xrightarrow[\Delta \vec{a}_i \to 0]{N \to \infty} \boxed{\iint_S \vec{w} \cdot d\vec{a}}$$

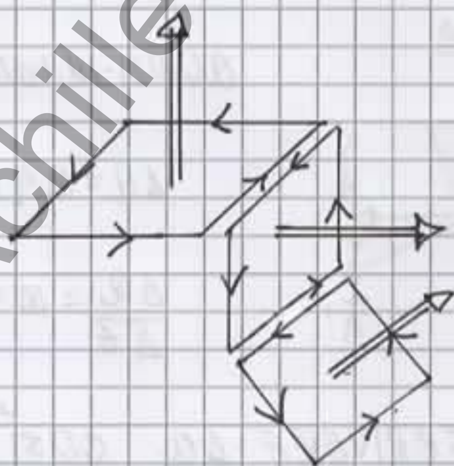
FLUSSO DI $\vec{w}$ ATTRAVERSO $\vec{S}$

PER SUPERFICI CHIUSE SI UTILIZZA LA CONVENZIONE CHE I VETTORI D'AREA VANNO VERSO L'ESTERNO.



$$\sum_i^N \vec{w}_i \cdot \Delta \vec{a}_i \longrightarrow \oiint \vec{w} \cdot d\vec{a}$$

VICEVERSA CON UNA SUPERFICIE APERTA SI UTILIZZA LA MANO DESTRA.

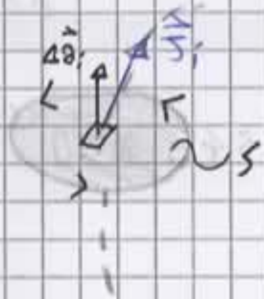


CORRENTE ELETTRICA

COME ABBIAMO VISTO, DEFINIAMO LA <u>DENSITÀ SUPERFICIALE DI CORRENTE ELETTRICA</u>:

$$\vec{J} = q \cdot n \vec{v} \qquad \left([J] = \frac{Q}{L^2} \cdot \frac{1}{T} \right)$$

ORA POSSIAMO DEFINIRE LA <u>CORRENTE ELETTRICA</u>, COME LA QUANTITÀ DI CARICA ELETTRICA CHE ATTRAVERSA LA SUPERFICIE S IN UN' UNITÀ DI TEMPO.



$$\sum_{i}^{N} \vec{J}_i \cdot \Delta\vec{a}_i \xrightarrow[\Delta\vec{a}_i \to 0]{N \to \infty} \iint_S \vec{J}_i \cdot d\vec{a} = I$$

$\vec{J}$: $\frac{A}{m^2}$; $d\vec{a}$: m^2 ; I: $A = \frac{COUL}{SECONDO}$

DEFINIAMO INOLTRE LA <u>DENSITÀ VOLUMETRICA DI CARICA ELETTRICA</u>

$$\rho = q n \qquad [\rho] = Q\,L^{-3}$$

SE ABBIAMO UN INSIEME DI VOLUMI, LA CARICA TOTALE SARÀ:

$$Q = \sum_{i}^{N} \rho_i \,\Delta VOL_i$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle N \to \infty,\ \Delta VOL_i \to 0}$$

$$\iiint \rho \, dVOL$$

<u>TEOREMA DI HELMHOLTZ</u>

QUESTO TEOREMA AFFERMA CHE UN CAMPO VETTORIALE È COMPLETAMENTE DETERMINATO QUANDO SONO NOTI LA SUA

EQUAZIONI DI MAXWELL

LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

EQUAZIONE DI FARADAY-LENZ

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

EQUAZIONE DI AMPERE-MAXWELL

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

DOVE: ε_0 = COSTANTE DIELETTRICA NEL VUOTO $= 8,854\ldots \times 10^{-12}$ (F/m)

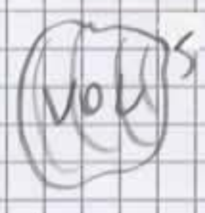
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)

NEL VUOTO LE EQUAZIONI DIVENTERANNO:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

DIVERGENZA



RICORDIAMO CHE IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA DICE:

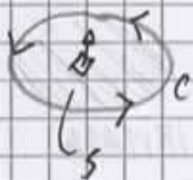
$$\iiint_{VOL} \vec{\nabla} \cdot \vec{w} \, dVOL = \oiint_S \vec{w} \cdot d\vec{a}$$

ED ORA APPLICHIAMOLO ALLE LEGGI DI GAUSS!!!

$$\iiint_{VOL} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dVOL = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iiint_{VOL} \rho/\varepsilon_0 \, dVOL$$

$$\iiint_{VOL} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dVOL = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

ROTORE



IL TEOREMA DEL ROTORE AFFERMA CHE:

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \oint_C \vec{w} \cdot d\vec{r}$$

ORA APPLICHIAMOLO ALLE ULTIME DUE EQUAZIONI!!!

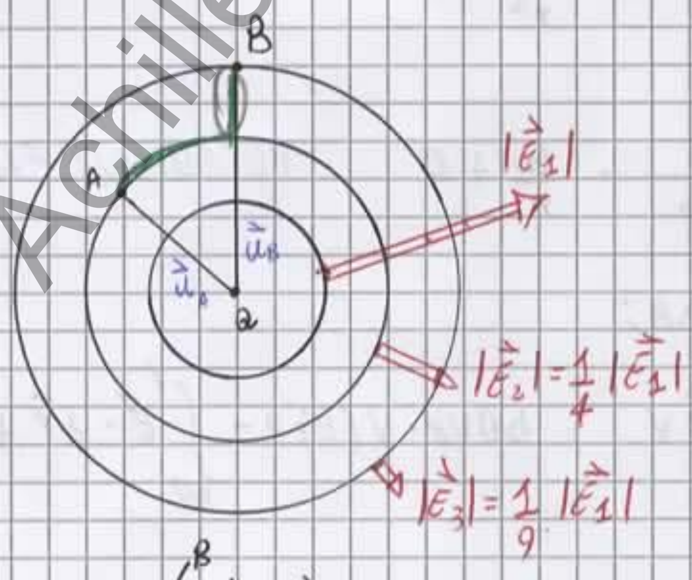
$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{E}\, d\vec{\partial} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\partial} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{\partial}\right)$$

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{\partial} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint \vec{J} \cdot d\vec{\partial} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{\partial}\right]$$

CARICA PUNTIFORME

CERCHIAMO DI CALCOLARE IL CAMPO ELETTROSTATICO DI UNA CARICA PUNTIFORME STAZIONARIA.

COME SAPPIAMO $\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\, \vec{u}_r$, QUINDI DIPENDE DA r^2:



INOLTRE SAPPIAMO CHE $\int_{A \,(\text{QUALSIASI})}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_A - V_B$, DOVE $V(P) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C$

DIGRESSIONE:

$$\int_{P}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(P) - V(\infty) \Rightarrow V(P) = \int_{P}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(\infty)$$

PER CONVENZIONE, QUANDO SI HA UNA CARICA IN UNA ZONA LIMITATA DELLO SPAZIO, SI PONE $V(\infty) = 0$ VOLT

$$\Rightarrow V(P) = \int_{r}^{\infty} E(r)\, d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} = V(P)$$

TRASFORMO L'INTEGRALE DA CURVILINEO A ORDINARIO:

$$\int_{A\,(\text{QUALSIASI})}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} E(r) \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} =$$

$$= V_A - V_B \ , \text{ DOVE } V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} + C$$

QUINDI:

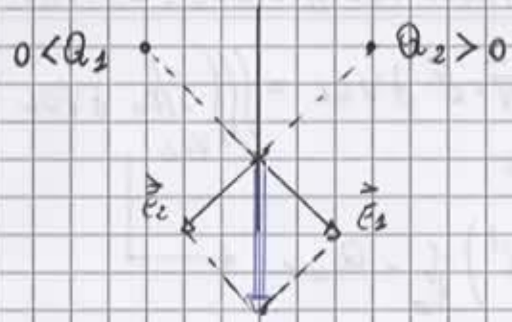
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$ CAMPO ELETTRICO

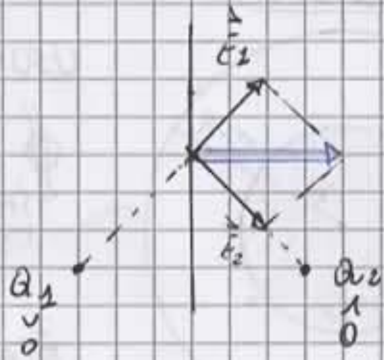
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + C$$ POTENZIALE ELETTROSTATICO

E SONO LEGATI DA:

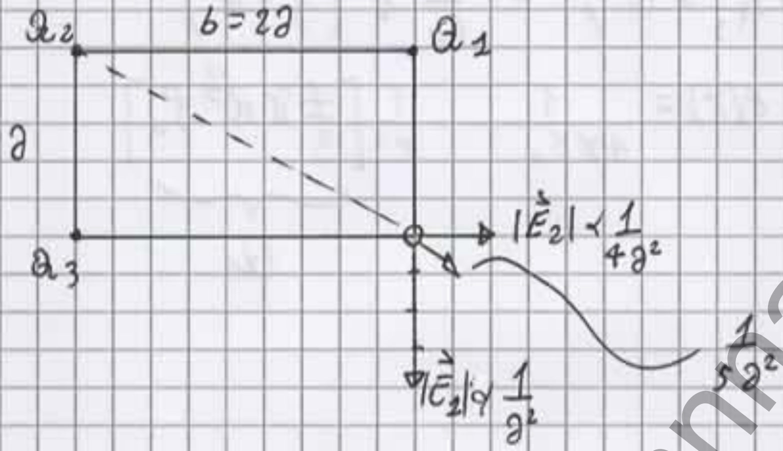
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \ , \text{ DOVE } V(P) = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(\infty)$$

ESEMPI





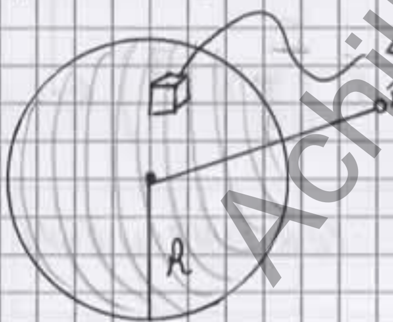
ESEMPIO · ESERCIZIO · ESAME



SFERA · CARICA

CERCHIAMO · DI · CALCOLARE · IL · CAMPO · ELETTRICO · DI · UNA · SFERA · CARICA:

$\Delta q = \rho_0 \cdot \Delta VOL_i$

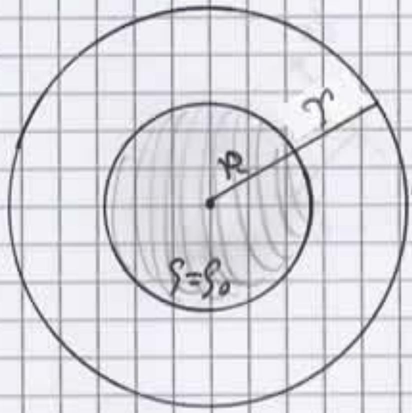


$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & r \leq R \\ 0, & r > 0 \end{cases}$$

LO · SPAZIO · SI · DIVIDE · QUINDI · IN · DUE · ZONE:

- PUNTI · DENTRO · LA · SFERA $(r \leq R)$
- PUNTI · FUORI · DALLA · SFERA $(r \geq R)$

PUNTI ESTERNI



USO LA LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO:

$$\oint\!\!\!\oint_{SFERA} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iiint_{VOL} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dVOL = \iiint_{VOL} \rho/\varepsilon_0 \, dVOL =$$

$$E(r)\cdot\left(4\pi r^2\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot Q_{INT}$$

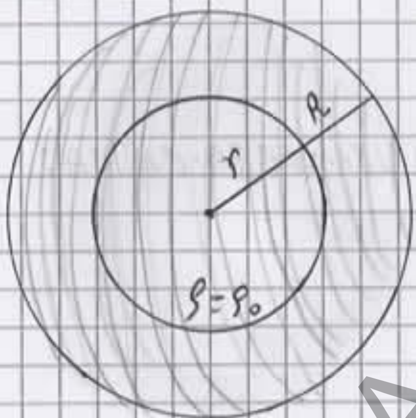
$$E(r)\left(4\pi r^2\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0\cdot\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\right]}_{Q}$$

QUINDI:

$$\boxed{\vec{E}(\text{PUNTI ESTERNI}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}_r}$$

PUNTI INTERNI



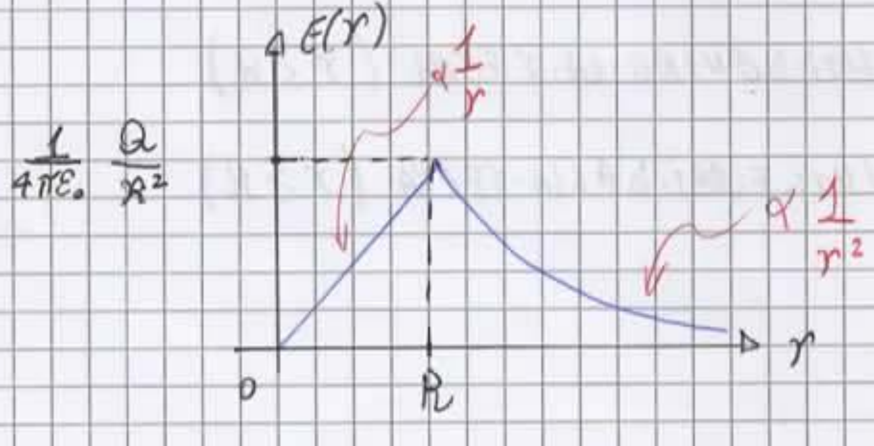
USO LA LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO:

$$\oint\!\!\!\oint_{SFERA} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \iiint_{VOL} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dVOL = \iiint_{VOL} \rho/\varepsilon_0 \, dVOL$$

$$E(r)(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\boxed{E(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho_0 r \quad \text{PER PUNTI INTERNI}}$$

GRAFICO

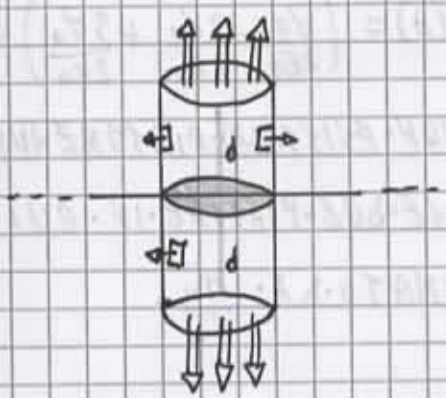


PIANO UNIFORMEMENTE CARICO

DISTRIBUZIONE SUPERFICIALE DI CARICA UNIFORME σ_0

$[\sigma] = Q\,L^{-2}$ $\quad \frac{\text{COULOMB}}{m^2}$

RACCHIUDIAMO UNA PORZIONE DEL PIANO IN UNA SUPERFICIE DI GAUSS:



E USO LA LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO:

$$\oiint_{LATTINA} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{INT} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sigma_0 A =$$

$\rightarrow$ DIVIDIAMO IN 3 CONTRIBUTI

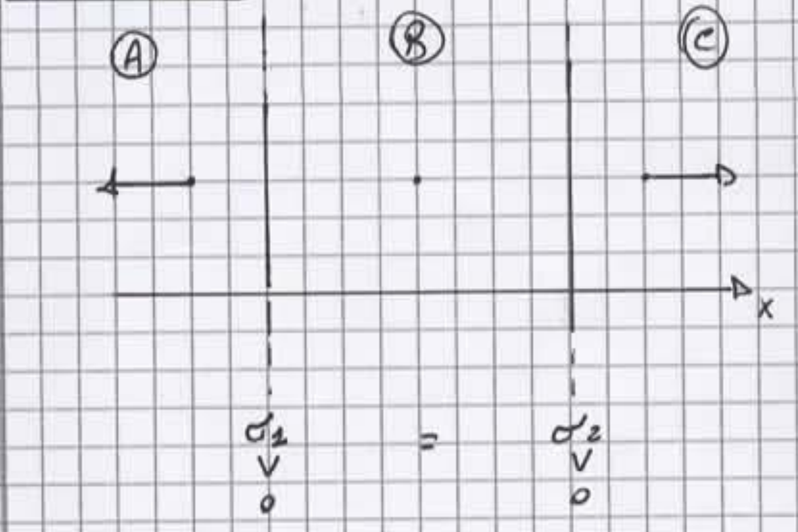
$$\iint_{TOP} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \iint_{BOTTOM} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \iint_{SUPERFICIE} \vec{E} \cdot d\vec{a} =$$

$$= E(d) \cdot A + E(d) \cdot A + 0 =$$

$$= 2E(d) \cdot A = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_0 A \Rightarrow \boxed{E(d) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}}$$

NON DIPENDE DALLA DISTANZA!!!

ESEMPIO 1

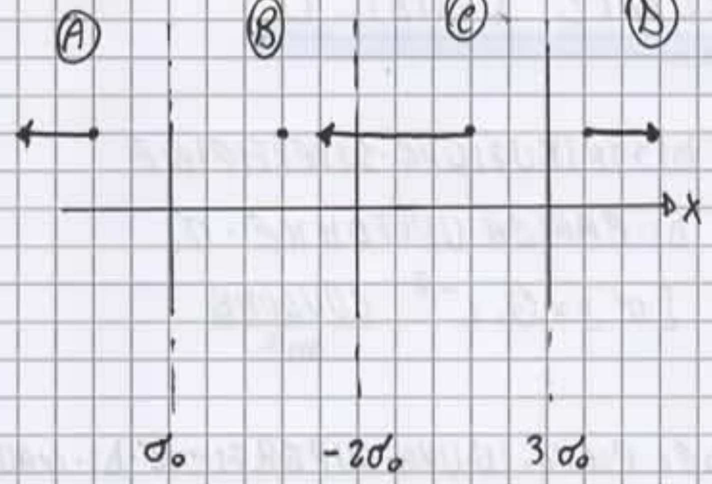


$$\vec{E}(A) = \left(-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right) \vec{u}_x$$

$$\vec{E}(B) = \left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right) \vec{u}_x$$

$$\vec{E}(C) = \left(\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right) \vec{u}_x$$

ESEMPIO 2



$$\vec{E}(A) = \left(-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{2\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$

$$\vec{E}(B) = \left(\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{2\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$

$$\vec{E}(C) = \left(\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{2\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$

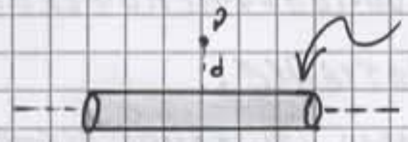
$$\vec{E}(D) = \left(\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{2\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right)\vec{u}_x$$

TUTTAVIA È DA SAPERE CHE NELLA REALTÀ NON ESISTONO PIASTRE INFINITE QUINDI CI SARÀ UNA ZONA FIDUCIALE TRA LE DUE PIASTRE IN CUI IL CAMPO ELETTRICO PUÒ ESSERE APPROSSIMATO DA $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$.

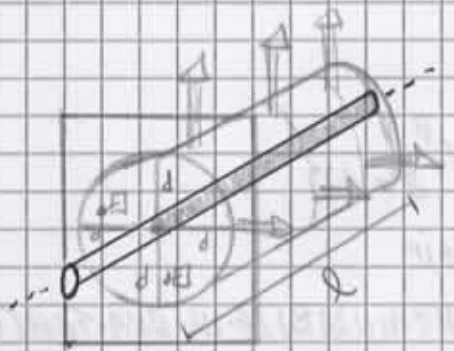
MENTRE VERSO LA FINE DELLE PIASTRE QUELL'APPROSSIMAZIONE NON VALE PIÙ, E QUESTI "DISTURBI" VENGONO CHIAMATI EFFETTI DI BORDO.

BASTONE CARICATO UNIFORMEMENTE

DENSITÀ LINEARE UNIFORME λ_0



$[\lambda] = \frac{Q}{L}$ $\frac{\text{COULOMB}}{\text{METRO}}$



RACCHIUDIAMO IL FILO CON UN CILINDRO COASSIALE E USIAMO LA LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO:

$$\oiint_{\text{CILINDRO}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{INT} = \frac{1}{\varepsilon_0} \lambda_0 \cdot l$$

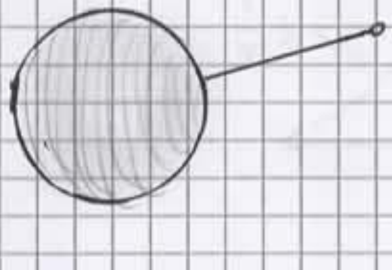
|| ← DIVIDO IN 3 CONTRIBUTI

$$\iint_{\text{ANTER.}} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \iint_{\text{POSTER.}} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \iint_{\text{SUPERFICIE}} \vec{E} \cdot d\vec{a} =$$

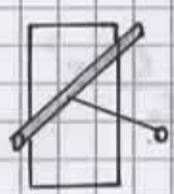
$$0 + 0 + E(d) \cdot \underbrace{(2\pi d \cdot l)}_{\text{SUPERF. LATERALE}} =$$

$$= \boxed{E(d) = \frac{\lambda_0}{2\pi \varepsilon_0 d}}$$

QUINDI RIASSUMENDO:



$\Bigg\}$ $|\vec{E}| \propto \frac{1}{r^2}$



$|\vec{E}| \propto \frac{1}{r}$

$|\vec{E}| = \text{UNIFORME} = \sigma_0$

RICORDIAMO CHE:

$$\int_{RIF}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -U(P)$$ E SCEGLIAMO DI METTERE UN SEGNO MENO PERCHÉ VOGLIAMO CHE $K + U =$ COSTANTE.

DATA QUESTA CONSIDERAZIONE LA RIUTILIZZIAMO NEL CAMPO ELETTRICO:

$$\int_{RIF}^{P} F_{SONDA}\cdot d\vec{r} = -U_{SONDA}(P) \quad , \text{DOVE } U_{SONDA} = q_{SONDA}\cdot V$$

ORA AFFRONTIAMO QUESTO CASO:

$$\int_{A}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{r} = V_A - V_B \quad , \text{DOVE } V(P) = V_{RIF} - \int_{RIF}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

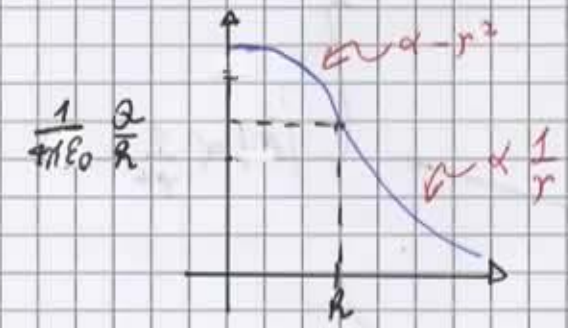
PER CONVENZIONE, QUANDO SI HA UNA CARICA RINCHIUDIBILE IN UNA SCATOLA SI PONE $V(RIF) = 0$. $\Rightarrow V(P) = +\int_{P}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{r}^{\infty} E(r')\,dr' =$

$$= \int_{r}^{R} E(r')\,dr' + \int_{R}^{\infty} E(r')\,dr' =$$

$$= \int_{r}^{R} \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r'\,dr' + \int_{R}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\,dr' =$$

$$= \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r}^{R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R}^{\infty} = \frac{\rho_0 R^2 - \rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} r^2$$



EQ. DI MAXWELL · FORMA INTEGRALE

∀ S CHIUSA:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{INT} \qquad\qquad \oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

∀ C CHIUSA

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\left[\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}\right] \qquad\qquad \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{COND.} + \mu_0 I_{SPOST} =$$

$$= \mu_0 I_{CONCATENATA}$$

DOVE:

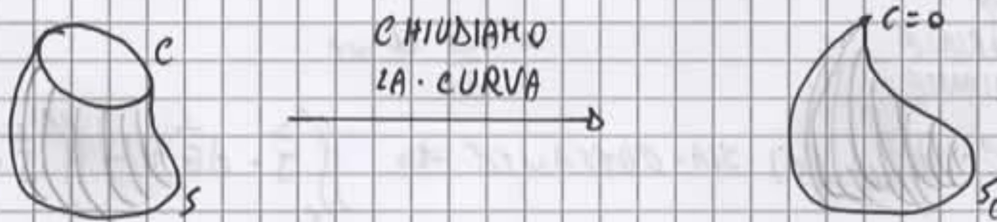
$$\underline{I_{CONDUZIONE}} = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} \quad , \quad \underline{I_{SPOSTAMENTO}} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{a}\right]$$

COSA VUOL DIRE CORRENTE CONCATENATA!!

NON CONCATENATI CONCATENATI

RIPRENDIAMO LA LEGGE DI AMPERE-MAXWELL:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{a}\right]$$



$$\Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \oint\!\!\!\oint_{S_c} \vec{J}\cdot d\vec{a} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\oint\!\!\!\oint_{S_c} \vec{E}\cdot d\vec{a}\right] \equiv 0$$

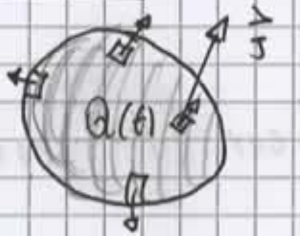
$$= \oint\!\!\!\!\oint_{S_c} \vec{J}\cdot d\vec{a} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\varepsilon_0} Q_{INT}\right] \equiv 0$$

OPPURE

$$\boxed{\oint\!\!\!\!\oint_{S_c} \vec{J}\cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt}\left[Q_{INT}\right]}$$

QUESTA EQUAZIONE PRENDE IL NOME DI <u>LEGGE DELLA CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA</u>.

<u>ESEMPIO</u>



SE LA DERIVATA DI $Q_{INT}(t)$ È NEGATIVA: VUOL DIRE CHE STANNO USCENDO PORTATORI.
MENTRE SE LA DERIVATA DI $Q_{INT}(t)$ È POSITIVA: VUOL DIRE CHE STANNO ENTRANDO PORTATORI.

<u>CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA (OPERATORI DIFFERENZIALI)</u>

$$\oint\!\!\!\!\oint_{S_c} \vec{J}\cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt}\left[Q_{INT}\right] = \oint\!\!\!\!\oint_{S_c} \vec{J}\cdot d\vec{a} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint_{VOL} \rho \, dVol\right]$$

PER IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$\iiint_{VOL} \left[\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dVol \equiv 0$$

QUINDI $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

<u>OSSERVAZIONE</u>

MATERIALE ISOLANTE *

$$\oint\!\!\!\!\oint_{S} \vec{J}\cdot d\vec{a} = \iint_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{a} + \iint_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{a} + \boxed{\iint_{S_3} \vec{J}\cdot d\vec{a}}^{\,* = 0} = -\frac{d}{dt} Q_{INT}$$

VOGLIAMO CHE $Q_{INT}(t)$ SIA COSTANTE $\Rightarrow$ $\iint_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{a} = -\iint_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{a}$

TEOREMA POTENZIALE VETTORE MAGNETICO

UN TEOREMA VISTO IN PRECEDENZA DICEVA:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \iff \exists \text{ UN CAMPO SCALARE } V \text{ CHIAMATO POTENZIALE SCALARE TALE CHE } \vec{E} = -\vec{\nabla} V.$$

ANALOGAMENTE DIREMO CHE:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \iff \exists \text{ UN CAMPO VETTORE } \vec{A} \text{ CHIAMATO POTENZIALE VETTORE TALE CHE } \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

DIMOSTRAZIONE

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\,\vec{u}_x - (\partial_x A_z - \partial_z A_x)\,\vec{u}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\,\vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \partial_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \partial_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \partial_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x) =$$

$$= \text{PER SHWARTZ} = \cancel{\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}} = 0$$

$\blacksquare$

DIMOSTRAZIONE LEGGE CONSERVAZIONE CARICA

SCRIVIAMO LA LEGGE DI AMPERE-MAXWELL:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \text{RISOLVIAMOLA PER } \vec{J}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \text{FACCIAMO LA DIVERGENZA AMBO I LATI}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})}_{\text{PER TEOREMA DI PRIMA } 0} - \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{PER SHWARTZ} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \Big(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{\text{GAUSS } \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \Big) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$$

LEGGE DI POISSON

PRENDIAMO LE EQUAZIONI DEL CAMPO ELETTROSTATICO:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}V) = \rho/\varepsilon_0 =$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V \qquad = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V) = -\rho/\varepsilon_0 =$$

($\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ · LAPLACIANO)

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\rho/\varepsilon_0 =$$

$$= \boxed{\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ LEGGE DI POISSON

TEOREMA

PRENDIAMO L'EQ. DI AMPERE-MAXWELL:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J}, \text{ MA SAPPIAMO CHE } \vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \mu_0\vec{J} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

DIMOSTRAZIONE PER x

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\hat{u}_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\hat{u}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\hat{u}_z$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ // & // & // \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} =$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial x\partial z} - \cancel{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} =$$

ELETTROSTATICA

$$\vec{E}: \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 & (1) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} & (2) \end{cases} \iff \vec{E} = -\vec{\nabla} V \; *$$

DALLA LEGGE DI LORENZ $(\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B})$ SAPPIAMO CHE:

$$[\vec{E}] = M L T^{-2} Q^{-1} \quad \frac{Volt}{m}$$

METTENDO $(*)$ IN (1) $\Rightarrow \nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ POISSON

METTENDO $(*)$ IN (2) $\Rightarrow \nabla^2 V = 0$ LAPLACE (VUOTO)

MAGNETOSTATICA

$$\vec{B}: \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (1) \iff \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \; * \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & (2) \end{cases}$$

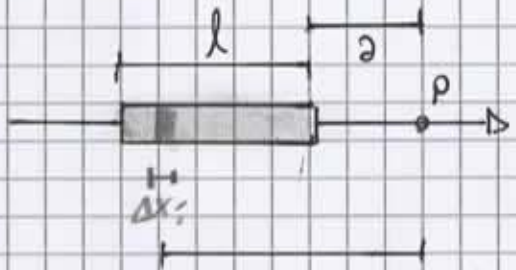
(UN CAMPO CON DIVERGENZA NULLA SI DICE SOLENOIDALE)

METTENDO $(*)$ IN (2) $\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ POSSIAMO QUINDI INVOCARE IL TEOREMA DELLA GAUGE DI COULOMB, CHE ASSERISCE CHE SI HA LA LIBERTÀ DI IMPORRE $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

ESERCIZIO



$$\Delta E_i = K_e \frac{\Delta q_i}{x_i^2}, \quad \Delta V_i = K_e \frac{\Delta q_i}{x_i} + C$$

$$E_{STIMA} = \sum \Delta E_i = K_e \lambda_0 \sum \frac{\Delta x_i}{x_i^2} \xrightarrow[\Delta x_i \to 0]{N \to \infty} K_e \lambda_0 \int_a^{a+l} \frac{1}{x^2}\, dx =$$

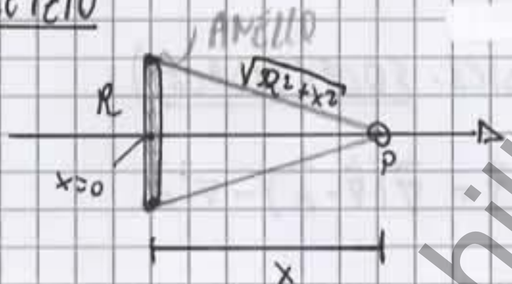
$$\vec{E} = K_e \lambda_0 \left(-\frac{1}{l+a} + \frac{1}{a} \right)$$

$$V_{STIMA} = \sum \Delta V_i = K_e \lambda_0 \sum \frac{\Delta x_i}{x_i} \xrightarrow[\Delta x_i \to 0]{N \to \infty} K_e \lambda_0 \int_a^{l+a} \frac{1}{x}\, dx =$$

$V = K_e \lambda_0 \left(\ln(l+a) - \ln(a) \right)$, VERIFICHIAMO CHE $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$$-\frac{d}{dt}\left[\ln(l+a) - \ln(a) \right] = -\frac{1}{l+a} + \frac{1}{a} = \vec{E}$$

ESERCIZIO



$$\Delta q_i = \lambda_0 \cdot \Delta s_i$$

$$Q = \lambda_0 \cdot 2\pi R$$

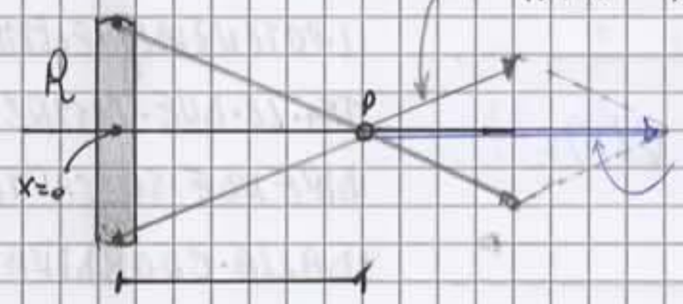
$$V(P) = V(x) = K_e \frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}} + C$$

$$V(x) = \sum V_i = \sum K_e \frac{\Delta q_i}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{K_e \lambda_0}{\sqrt{R^2+x^2}} \sum \Delta s_i \xrightarrow[N \to \infty]{\Delta s_i \to 0}$$

$$\longrightarrow \frac{K_e \lambda_0}{\sqrt{R^2+x^2}} \int ds = \frac{K_e \lambda_0}{\sqrt{R^2+x^2}} \cdot 2\pi R = \boxed{K_e \frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}}$$

ESERCIZIO

$$\frac{K_e \lambda_0 \Delta s}{R^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

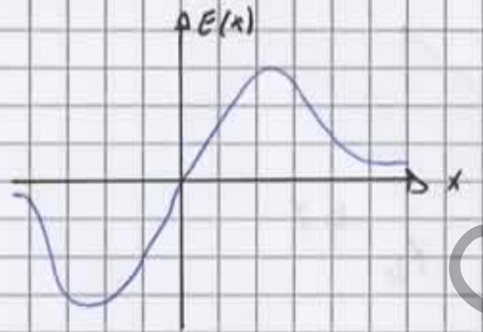


$$2K_e\frac{\lambda_0 \Delta s}{R^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$\vec{E}(P)=\vec{E}(x)=2K_e\frac{\lambda_0 x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{2}\sum\Delta s \xrightarrow[N\to\infty]{\Delta s\to 0} \boxed{K_e\frac{\lambda_0 x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot 2\pi R \quad \text{OPPURE} \quad K_e\frac{Q}{(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot x}$$

DOBBIAMO FARE MEZZO CERCHIO

RAPPRESENTIAMO LA FUNZIONE:



PER $x \gg R$

$$\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{x}{\left[x^2\left(\frac{R^2}{x^2}+1\right)\right]^{3/2}}\simeq\frac{1}{x^2}$$

ANDAMENTO COULOMBIANO

PER $x \ll R$

$$\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{x}{\left[R^2\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)\right]^{3/2}}=\frac{x}{R^3}$$

QUINDI $\vec{E}(x \ll R)=\underbrace{K_eQ\frac{x}{R^3}}_{K}=Kx$

METTENDO UNA CARICA SONDA SENTIRÀ UNA FORZA: $\vec{F}=-C\vec{E}$

$$F(\text{MOLTO VICINO})=\underbrace{-CK_eQ\frac{x}{R^3}}_{K}=-Kx$$

RICORDIAMO CHE:

$$m\ddot{x}=-Kx \rightarrow \ddot{x}+\frac{K}{m}x=0 \rightarrow \ddot{x}+\omega_0^2x=0, \text{ DOVE } \omega_0^2=\frac{K}{m}$$

$x(t)=x_0\cos(\omega_0 t) \Rightarrow$ LA SONDA, MESSA VICINO ALL'ANELLO

POTENZIALE ELETTRICO TRA DUE PIANI

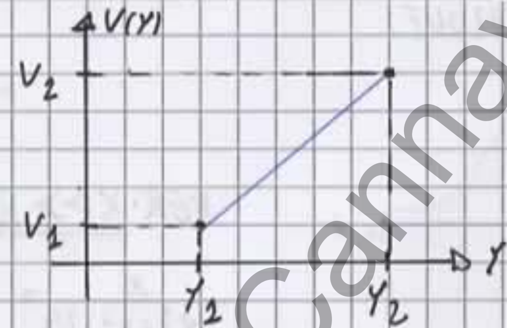
IL POTENZIALE ELETTRICO TRA LE DUE LASTRE DIPENDE SOLTANTO DALLA COORDINATA Y.

RICORDANDO LA LEGGE DI LAPLACE:

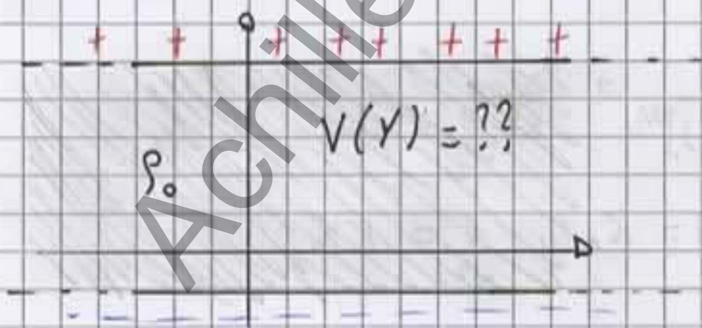
$$\nabla^2 V = 0 \longrightarrow \text{IN QUESTO CASO} \longrightarrow \frac{d^2}{dY^2} V = 0$$

QUALE FUNZIONE HA COME DERIVATA SECONDA 0??? UNA RETTA!!!

$$\left.\begin{aligned} V(Y) &= AY \\ \frac{dV}{dY} &= A \\ \frac{dV}{dY} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



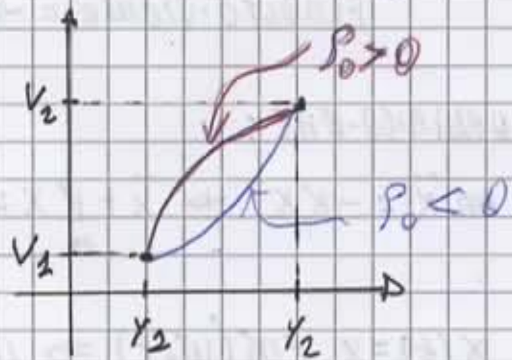
CON CARICA UNIFORME



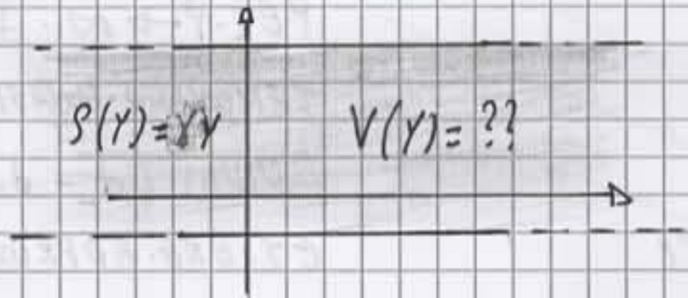
IN QUESTO CASO NON VALE PIÙ LAPLACE, QUINDI DOBBIAMO USARE POISSON!!!

$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, OVVERO:

$$\left.\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{2} A Y^2 + BY + C \\ \frac{dV(Y)}{dt} &= AY + B \\ \frac{d^2V}{dt^2} &= A, \text{ DOVE A VALE } -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



CON CARICA NON UNIFORME



USIAMO POISSON:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} y$$

OVVERO:

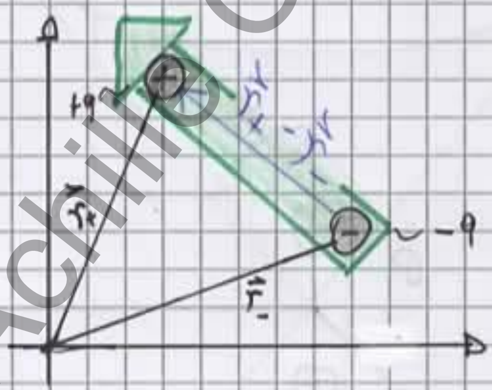
$$V(y) = \frac{1}{6} A y^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} A y^2$$

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = A y \text{, DOVE } A = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0}$$

DIPOLI

IL DIPOLO ELETTRICO È UN SISTEMA FORMATO DA DUE CARICHE UGUALI MA OPPOSTE.

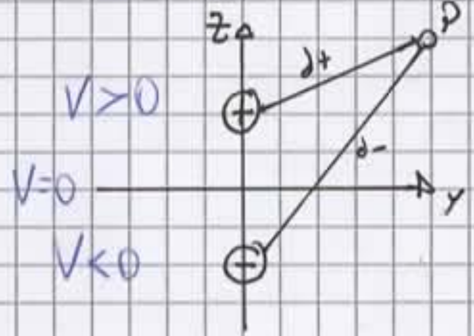


DEFINIAMO CON $\vec{p}$ IL MOMENTO DI DIPOLO

$$= q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

$$[\vec{p}] = Q L$$

ESEMPIO V IN UN PUNTO



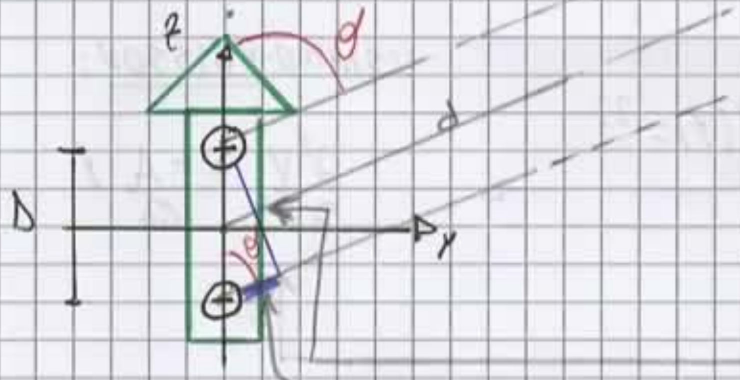
$$V(P) = V_+(P) + V_-(P) =$$

$$= K_e \frac{q}{d_+} - K_e \frac{q}{d_-} =$$

$$= K_e q \left(\frac{1}{d_+} - \frac{1}{d_-} \right) =$$

$$= K_e q \left(\frac{d_- - d_+}{d_+ d_-} \right)$$

ESEMPIO · PUNTO · INFINITAMENTE · LONTANO

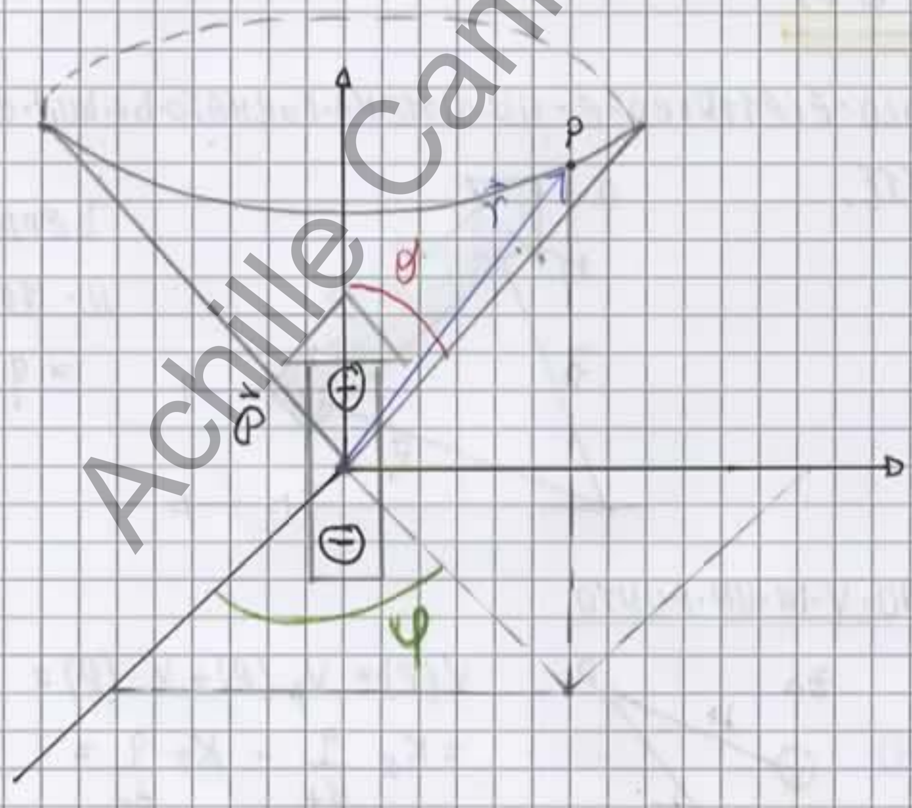


PER · P → ∞ · d_+ E d_- · SEMBRANO · QUASI · PARALLELE QUINDI · $(d_- - d_+)$ · PUO' ESSERE · APPROSSIMATO · CON QUESTA · RETTA :

$$\Rightarrow V(P) \simeq K_e q \left(\frac{D \cdot \cos(\theta)}{d_+ \cdot d_-} \right) \quad , \quad d_+ \cdot d_- = d^2$$

$$\Rightarrow V(P) \simeq K_e \cdot \frac{|P| \cdot \cos(\theta)}{d^2}$$

COORDINATE · SFERICHE



$V(P) =$ $V(x, y, z)$ · CARTESIANE

$V(r, \theta, \varphi)$ SFERICHE

ZENITH

DISTANZA

COORDINATA DI

IN PARTICOLARE:

$$\vec{\nabla}_{RETT} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla}_{SFERICHE} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

SAPENDO CHE $\vec{E}(P\ \text{DISTANTE}) = -\vec{\nabla} V = -\vec{\nabla}\left(K_e \frac{p\cos\theta}{r^2}\right)$

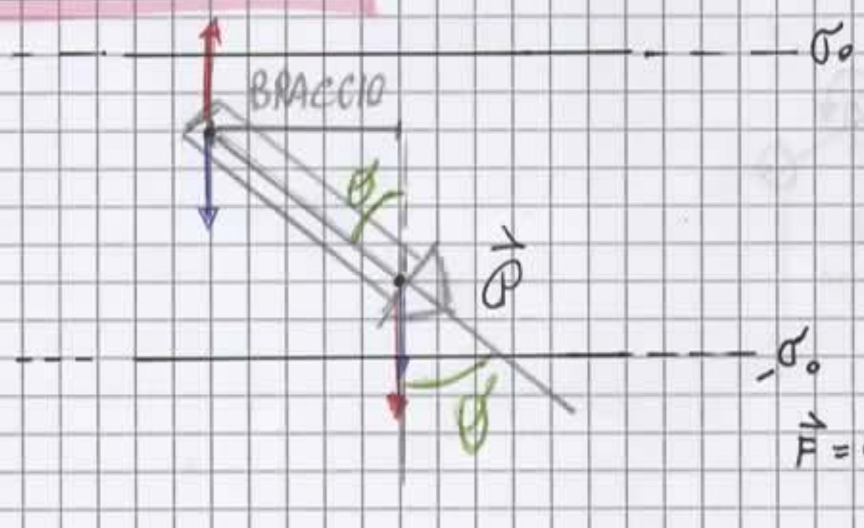
UTILIZZIAMO IL GRADIENTE PER LE COORDINATE SFERICHE:

$$-\left[\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi\right] =$$

- $E_r = -\left[-\frac{2K_e p\cos\theta}{r^3}\right] = 2K_e\frac{p\cos\theta}{r^3}$
- $E_\theta = -\frac{1}{r}\left[-K_e\frac{p\sin\theta}{r^2}\right] = K_e\frac{p\sin\theta}{r^3}$
- $E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right] = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_{DIPOLO} \sim \frac{1}{r^3}}$$

DIPOLI IN MOTO



PER LORENZ LE DUE PARTICELLE DEL DIPOLO SENTIRANNO:

$$\vec{F} = q\vec{E} + (q\vec{v} \wedge \vec{B})$$

QUINDI SE LASCIAMO LA PRESA IL CENTRO DI MASSA RIMARRÀ FERMO, MA CI SARÀ UN MOVIMENTO ROTAZIONALE ATTORNO AL CENTRO DI MASSA, PERCHÉ C'È UNA COPPIA DI FORZE.

QUINDI CI SARÀ UN MOMENTO TORCENTE τ ENTRANTE.

$$\vec{\tau} = \vec{P} \wedge \vec{E} \quad \text{OPPURE} \quad \vec{\tau} = I\ddot{\theta}$$

$$\vec{\tau} = |\vec{P}||\vec{E}| \cdot \sin\theta \qquad\qquad I\ddot{\theta} = \tau_{coppia} = -F_0 D \cdot \sin\theta$$

$$I\ddot{\theta} = -qE_0 D \cdot \sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{qE_0 D}{I} \cdot \sin\theta$$

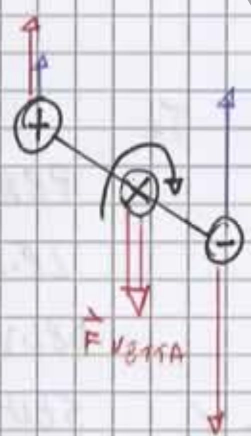
PER θ MOLTO PICCOLO $\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{qE_0 D}{I}\theta$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

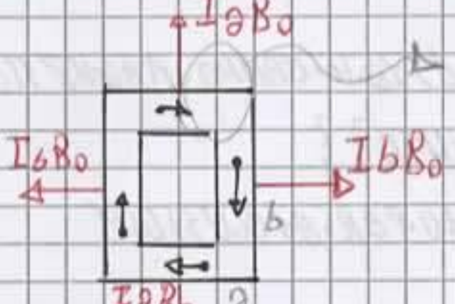
DOVE $\omega_0^2 = \frac{qED}{I}$

$$\vec{P} \wedge \vec{E} = |\vec{P}| \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \end{vmatrix} = |\vec{P}| E_0 \cos\theta \, \vec{u}_z$$

MENTRE NEL CASO IN CUI IL CAMPO ELETTRICO NON SIA UNIFORME:

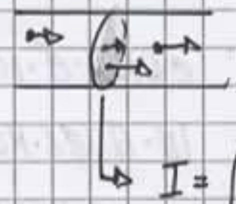


CAMPO MAGNETICO: SPIRA RETTANGOLARE



SPIRA RETTANGOLARE

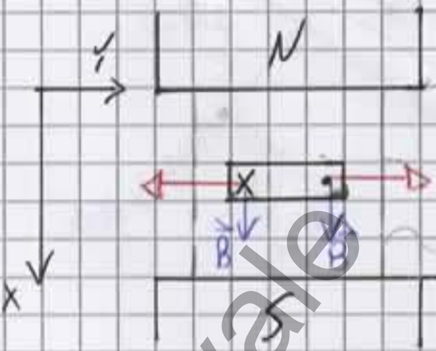
PERCORSA DA CORRENTE



$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{a}$

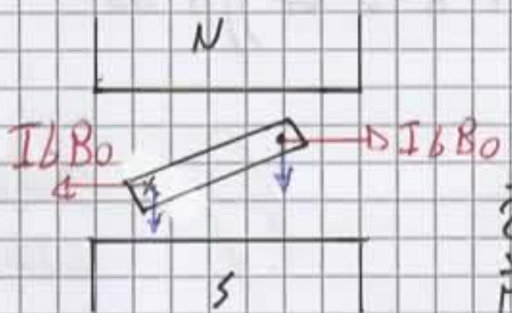
FORZA DI LORENZ

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$



$\vec{B} = B_0 \vec{u}_x$

ZONA FIDUCIALE

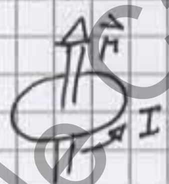


$\vec{\tau} = \vec{M} \wedge \vec{B}$

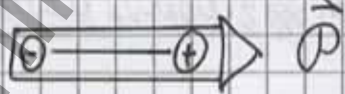
$\vec{M} = I\vec{A}$, DOVE $|\vec{A}| = a \cdot b$

NOTIAMO L'ANALOGIA CON IL DIPOLO ELETTRICO:

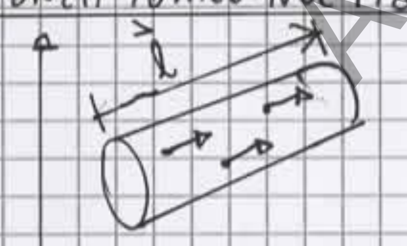
- $\vec{\tau} = \vec{M} \wedge \vec{B}$



- $\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$



FORZA TOTALE NEL FILO



$\vec{B}$ UNIFORME

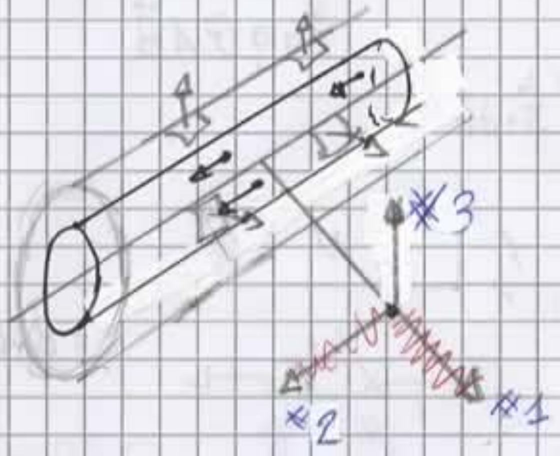
$\vec{J}$ UNIFORME

$F_i = q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}$

$$\vec{F}_{TOT} = \sum F_i = \underbrace{n l S}_{\#\text{PORTATORI NEL FILO}} q \vec{v} \wedge \vec{B} = \underbrace{(\vec{J} S)}_{I} \underbrace{(l \vec{u}_T)}_{\vec{l}} \wedge \vec{B}$$

$\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = I \vec{l} \wedge \vec{B}$

CAMPO·MAGNETICO·GENERATO·DA·UN·FILO



COME·È·MESSO·IL·CAMPO·MAGNETICO IN·QUEL·PUNTO??

ANDIAMO·PER·ESCLUSIONE

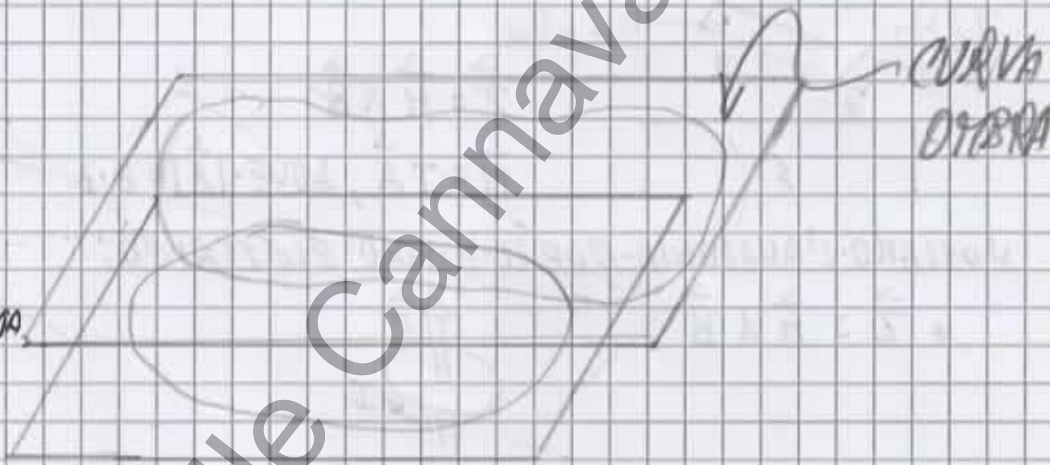
※1

IMPOSSIBILE·PERCHÉ·VIOLA:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Leftrightarrow \iint \vec{B}\cdot d\vec{a}=$$

※2

$$\oint_{\text{OMBRA}} \vec{B}\cdot d\vec{r} \neq 0$$



MA·NON·C'È·ALCUNA CORRENTE·CONCATENATA NELLA·CURVA·OMBRA

$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{r}=0 \Rightarrow$ NEANCHE·※2·NON·VA·BENE.

TEOREMA DI MATEMATICA

PRESI DUE CAMPI QUALSIASI $\vec{E}$ E $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$$

DIMOSTRAZIONE

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{B})=\vec{\nabla}\cdot\begin{vmatrix}\vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z\\ E_x & E_y & E_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\frac{\partial}{\partial x}(E_yB_z-E_zB_y)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(E_zB_x-E_xB_z)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(E_xB_y-E_yB_x)$$

$$\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot\begin{vmatrix}\vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}-\vec{E}\cdot\begin{vmatrix}\vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=$$

$$=B_x\cdot\partial_y E_z-B_x\,\partial_z E_y+B_y\cdot\partial_z E_z-B_y\cdot\partial_x E_z+B_z\cdot\partial_x E_y-B_z\cdot\partial_y E_x-$$

$$-E_x\cdot\partial_y B_z+E_x\cdot\partial_z B_y-E_y\cdot\partial_z B_z+E_y\cdot\partial_x B_z-E_z\cdot\partial_x B_y+E_z\cdot\partial_y B_x=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(E_yB_z-E_yB_z)+\frac{\partial}{\partial y}(E_zB_x-E_xB_z)+\frac{\partial}{\partial z}(E_xB_y-E_yB_x)\quad\blacksquare$$

APPLICAZIONE TEOREMA DI POYNTING

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)-\vec{E}\cdot\left(\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

DEFINIAMO IL VETTORE DI POYNTING:

$$\boxed{\vec{S}\overset{d}{=}\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B}}\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot\vec{S}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2+\frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\right]+\vec{J}\cdot\vec{E}=0$$

LEMMA A SUPPORTO

NELLA VERSIONE INTEGRALE SARÀ:

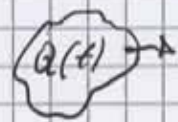
$$\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt}\left[\iiint_{Vol}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2+\frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\right)dVOL\right]+\iiint_{Vol}\vec{J}\cdot\vec{E}\cdot dVOL=0$$

NEL VUOTO SARÀ:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_E+\rho_B\right]=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{S}+\frac{\partial}{\partial t}\rho_{EB}=0$$

QUINDI ANALOGAMENTE,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}\rho=0$$



LA PRIMA EQUAZIONE ESPRIME LA <u>CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA ELETTROMAGNETICA</u>.

EQUAZIONE DELLE ONDE

PRENDIAMO L'EQUAZIONE DI FARADAY-LENZ: $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

E FACCIAMO IL ROTORE:

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})=\vec{\nabla}\wedge\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

NEL VUOTO:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

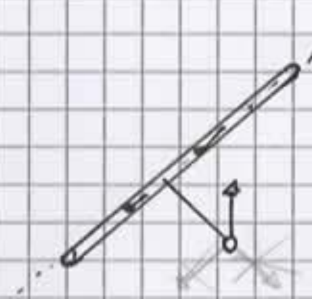
EQUAZIONE DELLE ONDE DEL CAMPO ELETTRICO

PRENDIAMO L'EQUAZIONE DI AMPERE-MAXWELL NEL VUOTO:

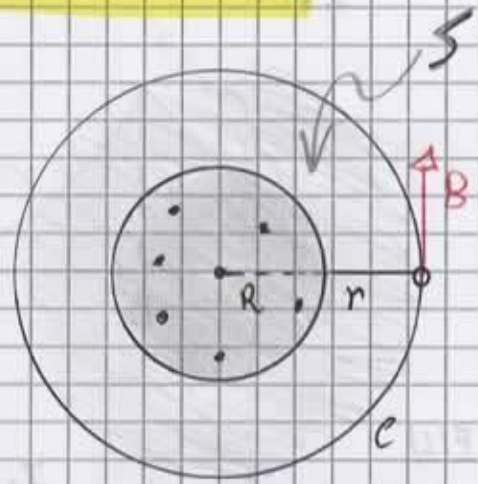
$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$, E FACCIAMO IL ROTORE:

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})=\mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\wedge\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)=\mu_0\varepsilon_0\left(-\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\right)$$

CAMPO MAGNETICO DI UN FILO ②



FILO VISTO DI FRONTE →



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \underbrace{\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{a}}_{\to\, I_{FILO}}$$

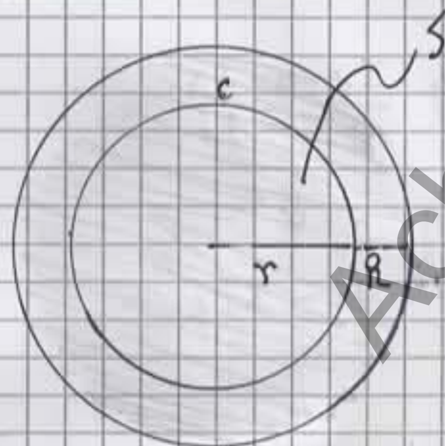
AMPERE MAXWELL

(DATO CHE SIAMO IN MAGNETOSTATICA IL SECONDO ADDENDO NON C'È)

ESSENDO IL CAMPO MAGNETICO CON LO STESSO MODULO SPOSTANDOSI SU C:

$$B(r)\oint_C d\vec{r} = B(r)\cdot 2\pi R = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B(r\geq R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

PER PUNTI INTERNI AL FILO

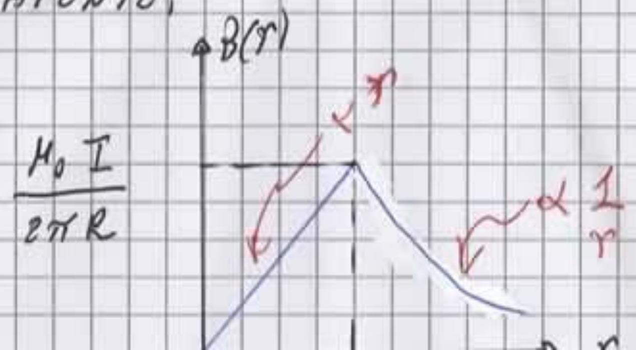


$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \underbrace{\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{a}}_{\to\, < I_{FILO}}$$

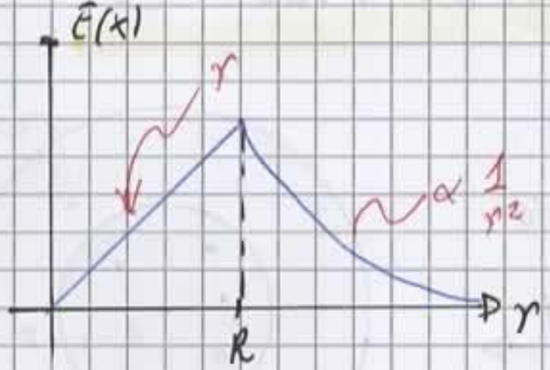
$$\Rightarrow B(r)\cdot\oint_C d\vec{r} = B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2$$

$$\Rightarrow B(r\leq R) = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}$$

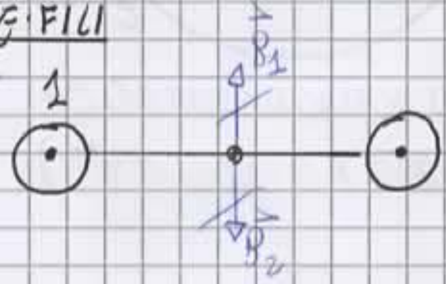
GRAFICAMENTE:



DA NOTARE L'ANALOGIA CON IL CAMPO ELETTRICO:



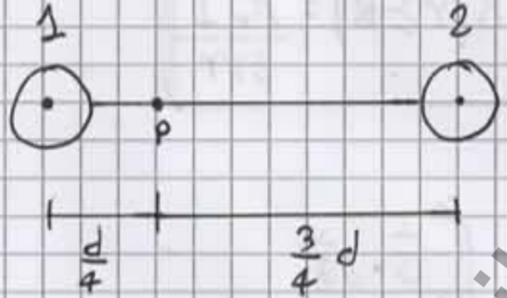
DUE FILI



$I_1 = I_2$

$$\vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P) = \vec{B}(P)$$

ESERCIZIO



$I_2 \neq I_1$ COME DEVE ESSERE I_2 PER AVERE $\vec{B}(P) = 0$???

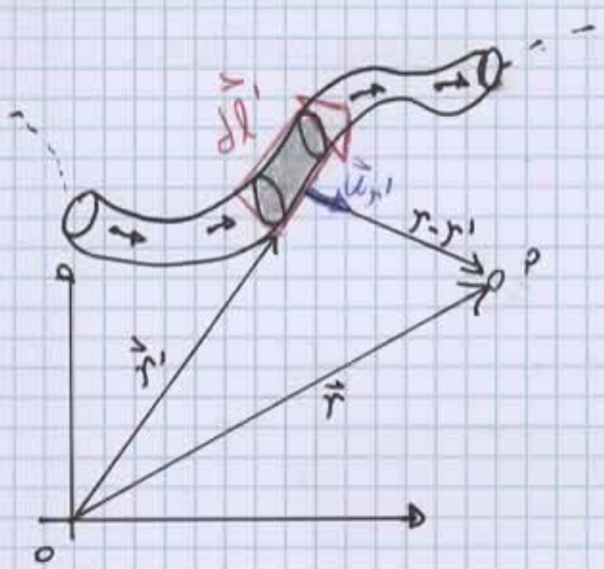
$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi \frac{d}{4}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \frac{3}{4} d} \rightarrow \frac{I_1}{d} = \frac{I_2}{3d}$$

$$\Downarrow$$

$$I_2 = 3 I_1$$

TEOREMA DI BIOT-SAVART

$K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$

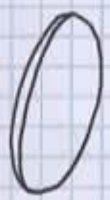


$$\vec{B}(P) = \oint_{CIRCUITO} d\vec{B}(P)$$

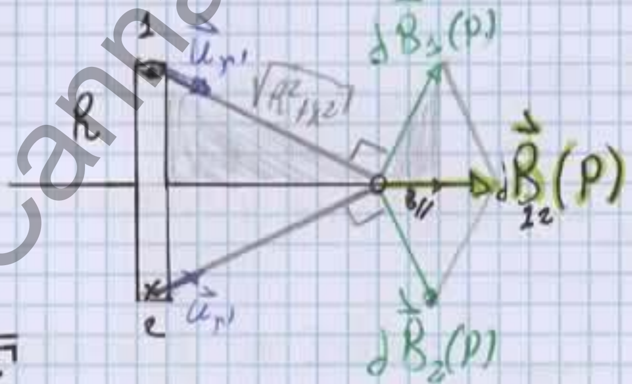
$$d\vec{B} = \frac{K_m \, I \, d\vec{l}' \wedge (r-r')}{|r-r'|^3} =$$

$$= K_m \frac{I \, d\vec{l}' \wedge \vec{u}_{r'}}{|r-r'|^2}$$

SPIRA CIRCOLARE



VISTA DI LATO $\longrightarrow$

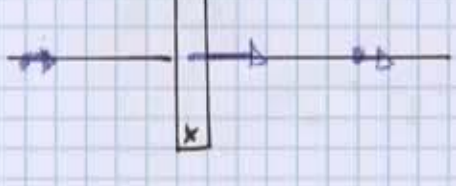


$$\frac{dB_{//}}{dB} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} \longrightarrow dB_{//} = |d\vec{B}| \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

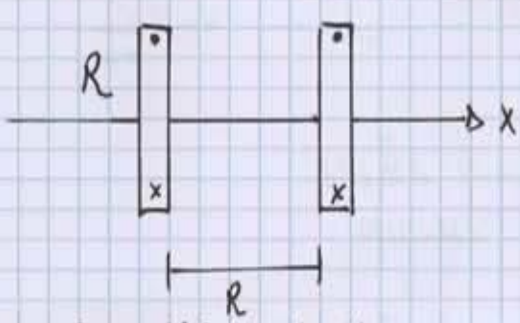
$$B_{//} = \int dB_{//} = \int K_m \frac{I\,dl}{R^2+x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}} = K_m \frac{I}{(R^2+x^2)^{3/2}} \cdot R \underbrace{\boxed{\int dl}}_{2\pi R} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{(R^2+x^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R^2$$

$$\text{PER } B_{//}(x=0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi \frac{I}{R} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

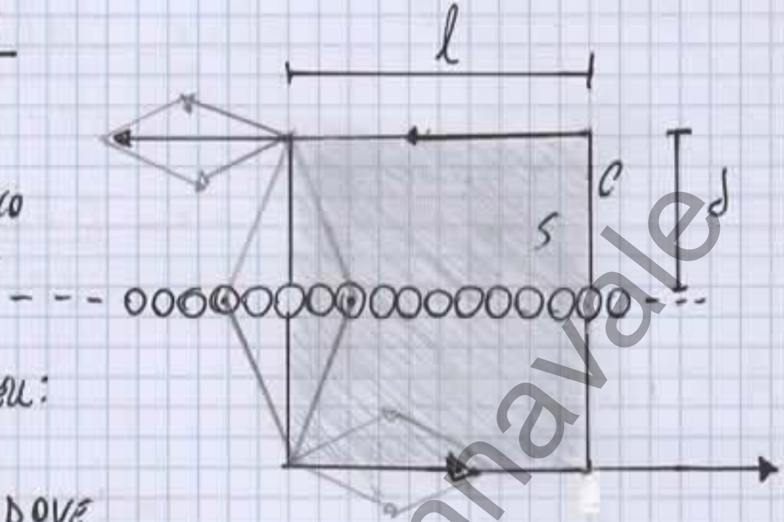


ESEMPIO: SPIRE DI HELMOTHZ



TRA LE DUE SPIRE IL CAMPO MAGNETICO SARÀ ABBASTANZA UNIFORME.

ESEMPIO MOLTI FILI



PER CAPIRE COME VARIA IL CAMPO MAGNETICO PER PUNTI A DISTANZE DIVERSE USIAMO LA LEGGE DI AMPERE-MAXWELL:

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{COND}$, DOVE

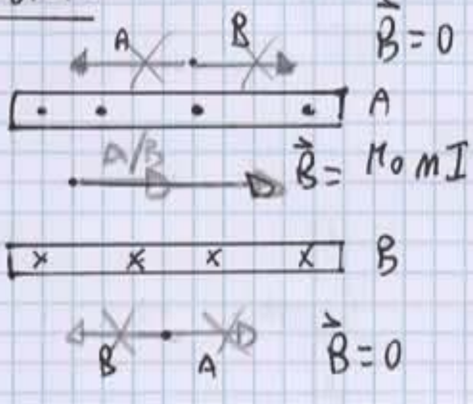
$I_{COND} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$, MA LA CORRENTE C'È SOLO DOVE CI SONO I FILI!!!

$\Rightarrow I_{COND} = m\, l \cdot I \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 m l I$, GLI SPOSTAMENTI IN Y FANNO 0.

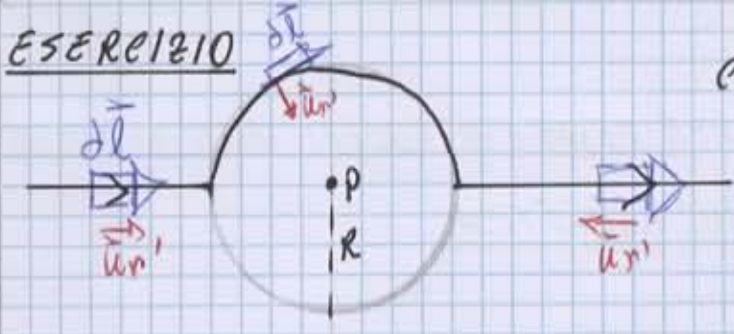
DENSITÀ LINEARE NUMERO FILI

$\Rightarrow 2B(d) = \mu_0 m l I \Rightarrow \boxed{B(d) = \frac{\mu_0 m I}{2}}$ NON DIPENDE DA d!!!

APPLICAZIONE



ESERCIZIO



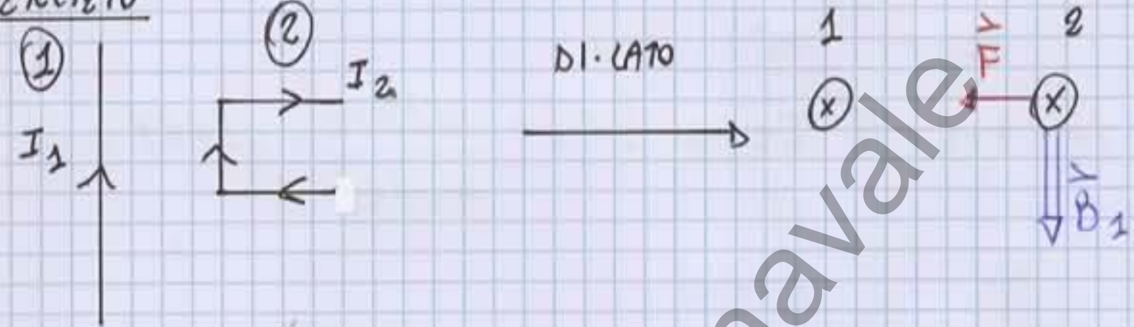
COME È $\vec{B}$ = ???

SULLE DUE RETTE IL CAMPO MAGNETICO NEL PUNTO P È NULLO PERCHÉ $d\vec{l}$ E $\vec{u}_{r'}$ NON SONO STORTI.

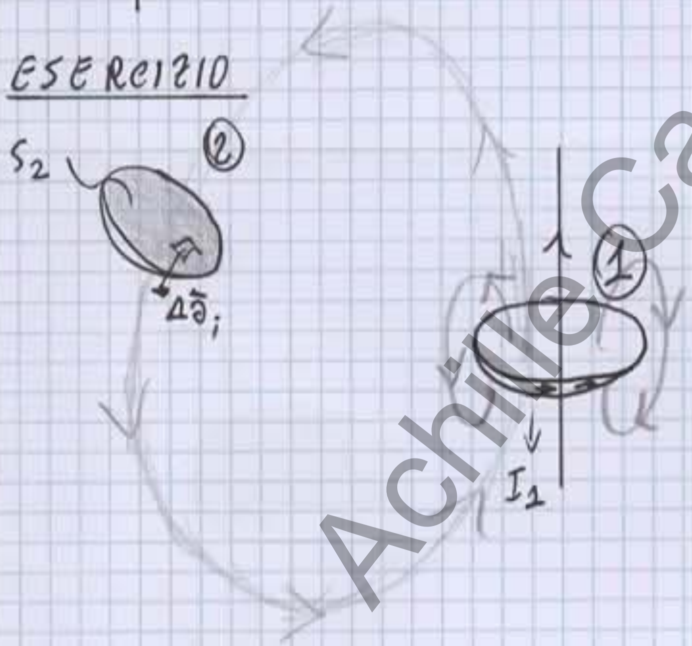
QUINDI CONTRIBUISCE SOLO IL SEMICERCHIO:

$$\vec{B}(P) = \frac{1}{2}\, B(\text{P DI UNA SPIRALE CIRCOLARE})$$

ESERCIZIO



ESERCIZIO



$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2$$

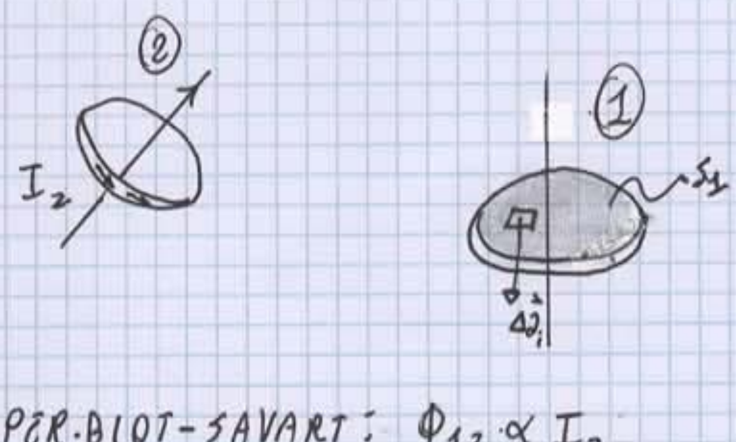
PER BIOT-SAVART:

$$\Phi_{21} \propto I_1$$

IN PARTICOLARE:

$$\Phi_{21} = M_{21}\, I_1$$

COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITÀ



$$\Phi_{12} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{a}_1$$

PER BIOT-SAVART: $\Phi_{12} \propto I_2$

IN PARTICOLARE: $\Phi \;=\; M \;\; I$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:

$M_{12} = M_{21} = M$ E VIENE CHIAMATO <u>COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE MAGNETICA.</u>

CHE MISURA HA???

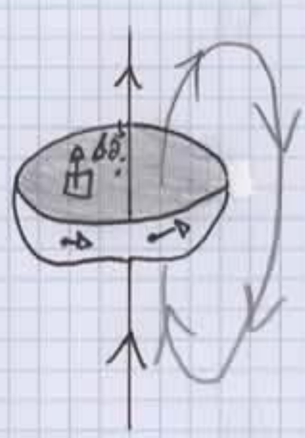
$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \underset{\text{TESLA}}{\vec{B}_1} \cdot d\underset{m^2}{\vec{a}_2} \Rightarrow [\Phi_{21}] = \text{TESLA} \cdot \text{METRO}^2 = \text{WEBER} = \text{Wb}$$

QUINDI SE $\underset{\text{Wb}}{\Phi_{21}} = M \cdot \underset{\text{AMPERE}}{I_1} \Rightarrow [M] = \frac{\text{WEBER}}{\text{AMPERE}} = \text{HENRY} = H$

AUTOFLUSSO

SI CHIAMA AUTOFLUSSO IL FLUSSO CHE PASSA PER UNA SUPERFICIE INDIVIDUATA DAL CIRCUITO PERCORSO DA CORRENTE.

$$\Phi = \iint_S \vec{B}_{AUTO} \cdot d\vec{a} = \underset{\text{COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE}}{L} \cdot I$$

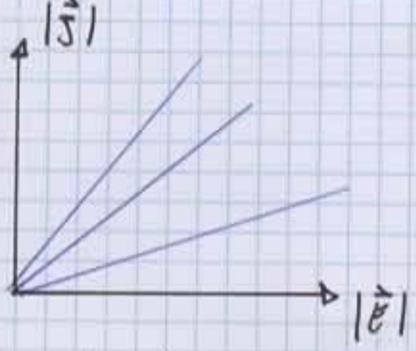


$[L] = H$

CONDUTTIVITÀ E RESISTENZA

PER LA MAGGIOR PARTE DEI MATERIALI VALE LA LEGGE DI OHM MICROSCOPICA

$$\boxed{\vec{J} \propto \vec{E}}$$

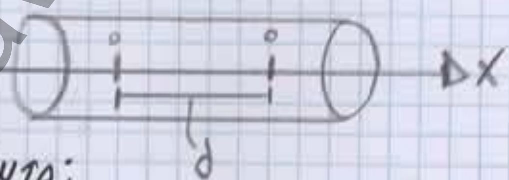


CONDUCIBILITÀ

$J = \sigma E$ QUESTO TIPO DI MATERIALI SONO CHIAMATI MATERIALI OHMICI.

DATO CHE $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V \rightarrow$ SUPPONIAMO CHE VARI SOLO NELLA X:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \rightarrow |E| = \frac{\Delta V}{d}$$



MENTRE $\vec{J} = I/AREA$, QUINDI $J = \sigma E$ DIVENTA:

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \Delta V = \frac{d \cdot I}{A} \cdot \frac{1}{\sigma}$$

RESISTENZA

SPESSO VIENE SCRITTA COSÌ $\Rightarrow \boxed{\Delta V = I R}$, DOVE $R = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{A}$

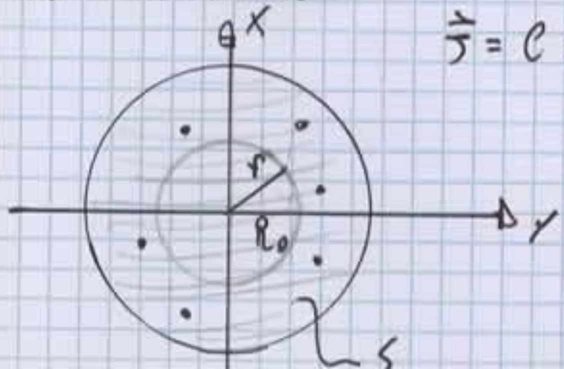
RESISTIVITÀ $= \rho$

E VIENE DETTA LEGGE DI OHM MACROSCOPICA.

DA NOTARE CHE: $I = \frac{1}{R} \cdot \Delta V = \frac{A}{\rho l} \cdot \Delta V$

ESERCIZIO

FILO VISTO DI FRONTE:



$$\vec{J} = C r \, \hat{u}_z \qquad [C] = Q L^{-3}$$

$$I = ??? \overset{d}{=} \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

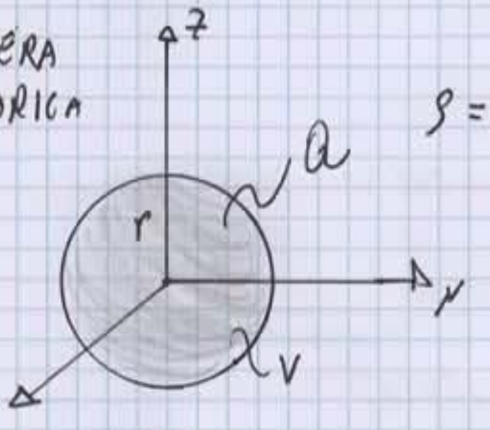
$$I_{\text{STIMA}} = \sum_{\text{CORONE CIRCOLARI}} I_i = \sum_i (c r_i)\cdot \Delta a_i = \sum_i (c r_i)\cdot 2\pi r_i \Delta r_i =$$

$$= \sum_i c r_i^2 \cdot 2\pi \Delta r_i = c\cdot 2\pi \sum r_i^2 \cdot \Delta r_i \xrightarrow[\nu\to\infty]{\Delta r_i \to 0} c 2\pi \int_0^{r_0} r^2 dr =$$

$$= c\, 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{r_0} = c\, 2\pi \frac{r_0^3}{3} = \frac{2\pi}{3} c\, r_0^3$$

ESERCIZIO

SFERA CARICA

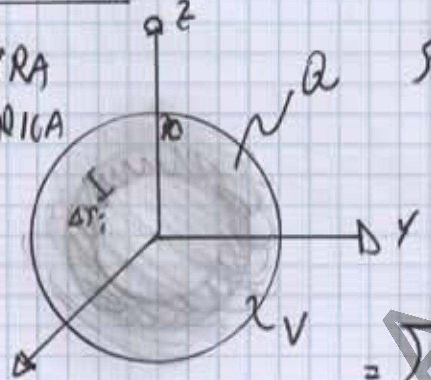


$\rho = \rho_0$ PER PUNTI INTERNI

$$Q = \iiint_V \rho_0 \, dVOL = \rho_0 \iiint_V dVOL = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$$

ESERCIZIO

SFERA CARICA



$\rho(r) = c r \qquad [c] = Q L^{-4}$

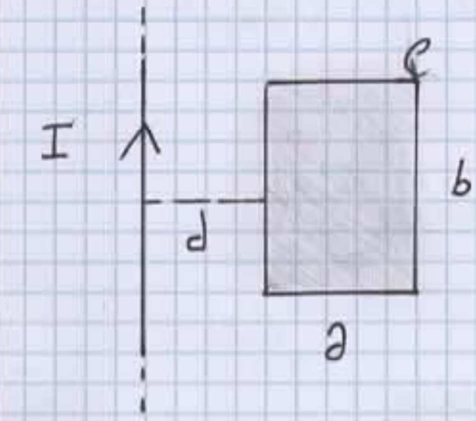
$$Q_{\text{STIMA}} = \sum_{\text{GUSCI SFERICI}} Q_i = \sum \rho_0 \cdot \Delta VOL =$$

$$= \sum c r_i \cdot \Delta VOL = \sum c r_i (4\pi r_i^2 \cdot \Delta r) =$$

$$= \sum c\, 4\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i \xrightarrow[\nu\to\infty]{\Delta r_i \to 0} c 4\pi \int_0^{r_0} r^3 dr = c 4\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{r_0} =$$

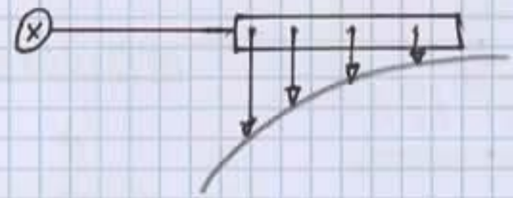
$$= c 4\pi \left[\frac{r_0^4}{4}\right] = c\pi r_0^4$$

ESERCIZIO



QUALE È IL FLUSSO ATTRAVERSO C CREATO DAL CAMPO MAGNETICO DEL FILO???

DI LATO $\longrightarrow$



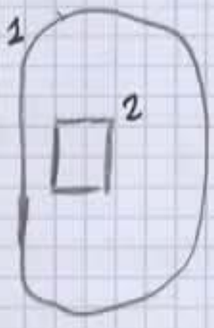
$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

DIVIDIAMO LA SUPERFICIE IN PIÙ STRISCE.

$$\vec{\Phi}_{B\,STIMA} = \sum_{STRISCE} \vec{B}_i \cdot \Delta \vec{a}_i = \sum B_i \cdot \Delta a_i = \sum \frac{\mu_0 I}{2\pi r_i} \cdot \Delta r_i \cdot b =$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \sum \frac{1}{r_i} \cdot \Delta r_i \xrightarrow[N \to \infty]{\Delta r_i \to 0} \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_a^{a+d} \frac{1}{r}\, dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+d}{a}\right) = \Phi_B$$

CONCRETAMENTE PERÒ LA SITUAZIONE SAREBBE QUESTA:



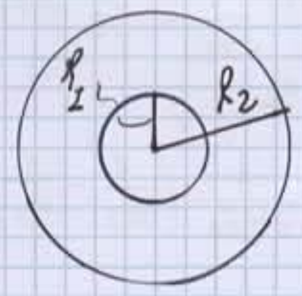
QUALE SARÀ IL COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE??

SI PUÒ CALCOLARE IN DUE MODI:

$$M = \begin{cases} \Phi_{12}/I_2 \\ \Phi_{21}/I_1 \end{cases} \text{ IDENTICI}$$

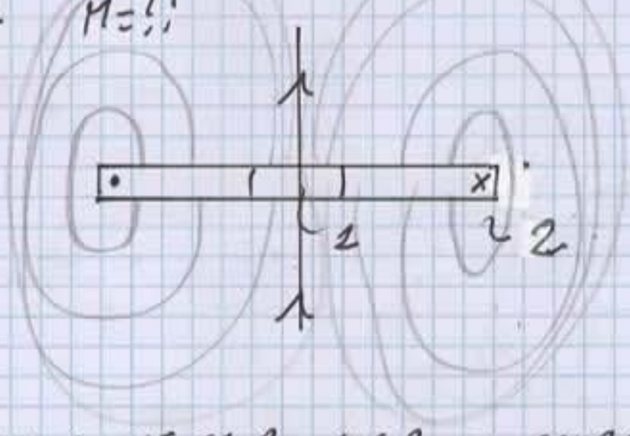
$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{d+a}{a}\right)\right)$$

ESERCIZIO ANELLI CONCENTRICI



DI LATO $\longrightarrow$

$M = ??$



$$M = \begin{cases} \Phi_{12}/I_2 \\ \Phi_{21}/I_1 \end{cases}$$

NOTIAMO CHE SE $R_1 \ll R_2$ IL CAMPO MAGNETICO È QUASI UNIFORME PER ① ED È UGUALE AL CAMPO MAGNETICO DI ② AL CENTRO

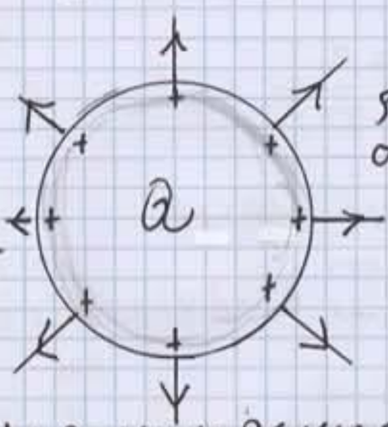
$$\vec{B}_2(\text{CENTRO}) = \frac{\mu_0 I_2}{2R_2} \Rightarrow \Phi_{12} = \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{a} = B_2 \iint d\vec{a} = \left(\frac{\mu_0 I_2}{2R_2}\right) \cdot \pi R_1^2$$

$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0}{2R_2} \pi R_1^2$$

CAPACITÀ

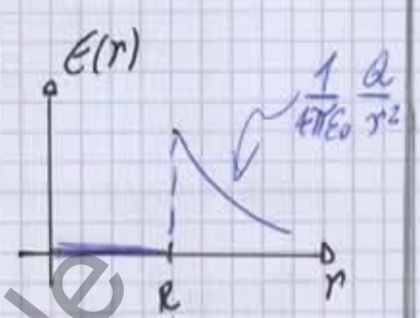
$$\text{CAPACITÀ} \doteq \frac{Q}{\Delta V}$$

APPLICAZIONE · SFERA · ISOLATA



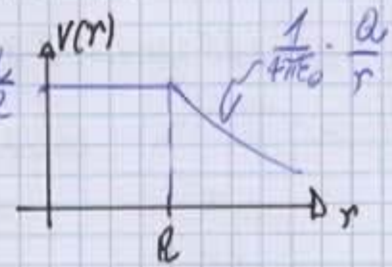
$\rho = 0$

σ · UNIFORME



$V(\infty) = 0$ · VOLT. QUINDI · POSSIAMO · PENSARE · ALL'INFINITO · COME · L'ALTRO ELETTRODO · IN · CUI · MUOIONO · LE · LINEE · DI · CAMPO.

QUINDI · $\Delta V = V\left(\begin{smallmatrix}\text{NELLA}\\ \text{SFERA}\end{smallmatrix}\right) - V(\infty) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$



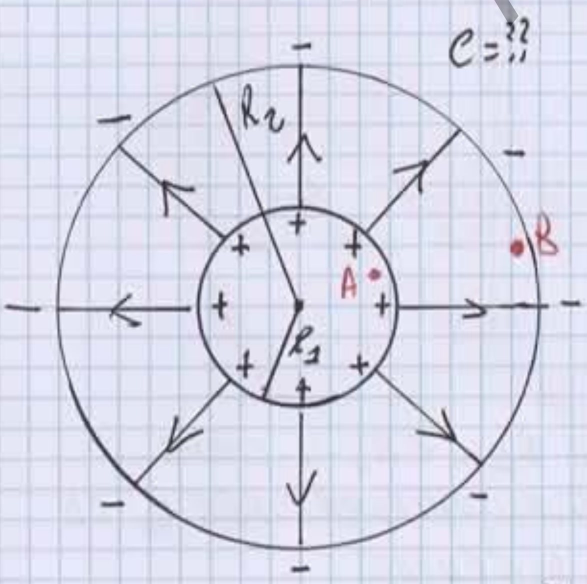
$\Rightarrow$ LA · CAPACITÀ · (CHE · SI · MISURA · IN · FARAD) =

$$= \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

UN · OGGETTO · COMPOSTO · DA · DUE ELETTRODI · IN · ACCOPPIAMENTO CAPACITIVO · COMPLETO · SI · CHIAMA CONDENSATORE.

SFERE · CONCENTRICHE

$C = ??$



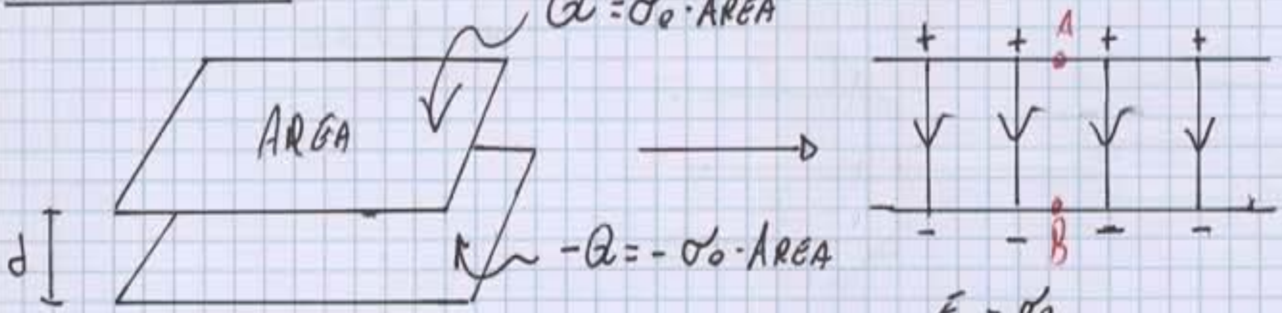
$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\, dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} =$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$

PIANI PARALLELI



$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

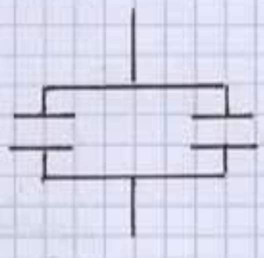
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma_0 A}{\Delta V}, \quad \Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_0 \int_A^B dr = E_0 \cdot d =$$

$$= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} d \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

IN SERIE E IN PARALLELO

CONDENSATORI IN SERIE

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$$

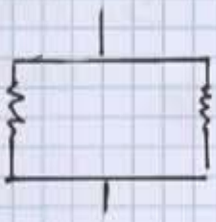


CONDENSATORI IN PARALLELO

$$C = \sum C_i$$

RESISTORI IN SERIE

$$R = \sum R_i$$

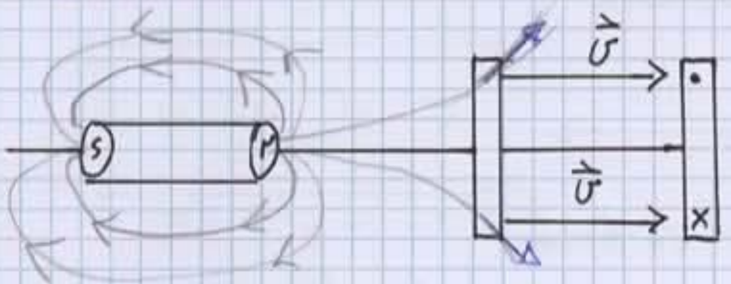


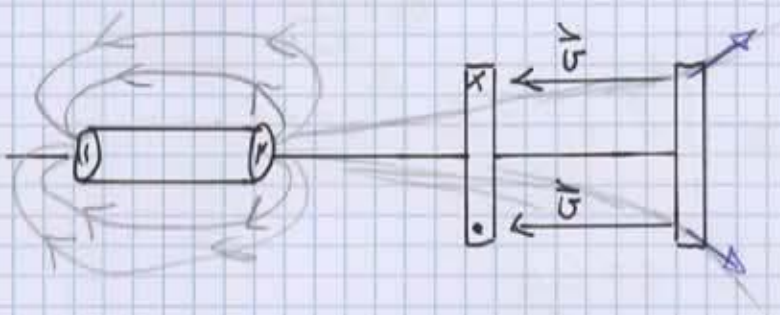
RESISTORI IN PARALLELO

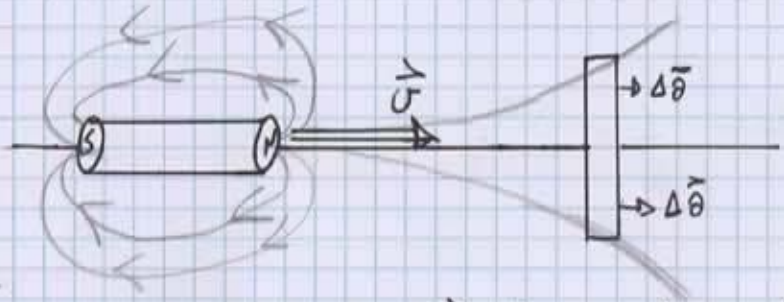
$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$$

ESERCIZIO INDUZIONE MAGNETICA

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

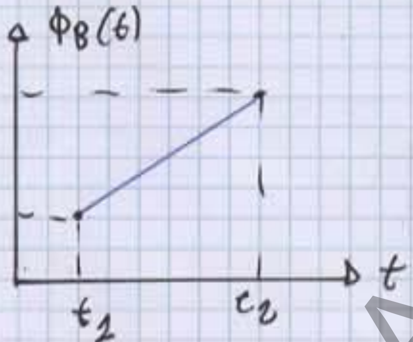






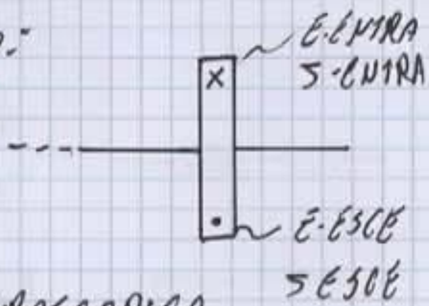
DATO CHE IN QUESTO CASO I PORTATORI NON HANNO $\vec{v}$ NON POSSO USARE LA LEGGE DI LORENZ.

USO FARADAY-LENZ: $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \right)$



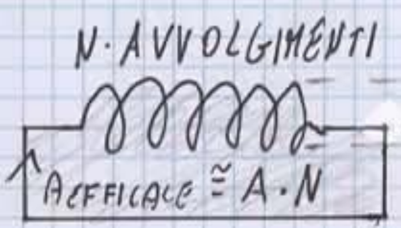
SE COME IN QUESTO CASO:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow \ldots$$



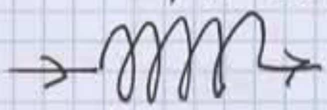
PER OHM MICROSCOPICA

SOLENOIDE

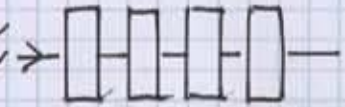


$\Rightarrow \Phi_B = (N A)\, B_0$

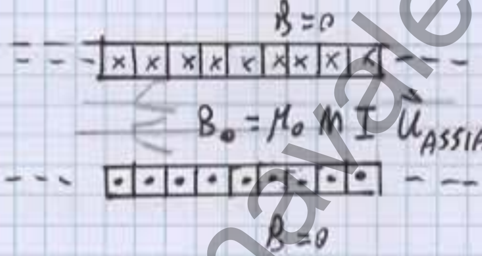
POSSIAMO·APPROSSIMARE:



$\approx$



IN·UN·SOLENOIDE·IDEALE:



$B_0 = \mu_0 n I \vec{u}_{ASSIALE}$

QUINDI: $B_{SOLENOIDE} \approx B_{IDEALE}$

DOVE· $n = \dfrac{N}{l}$

CALCOLIAMO·IL·<u>COEFFICIENTE·DI·AUTOINDUZIONE</u>: $L = \dfrac{\Phi_{AUTO}}{I} = \dfrac{B_0 \cdot A_{EFFIC.}}{I} =$

$$= \frac{\mu_0 \, N/l \, I \cdot A_{EFF.}}{I} = \mu_0 \frac{N}{l} \cdot (N \cdot A) = \boxed{\mu_0 \frac{N^2 A}{l} = L}$$

ONDE · 2

EQUAZIONE DI D'ALAMBERT

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \Rightarrow$$ SOLUZION DEL TIPO $\Rightarrow f(x - v t)$

DIMOSTRAZIONE

$x - vt = \eta$

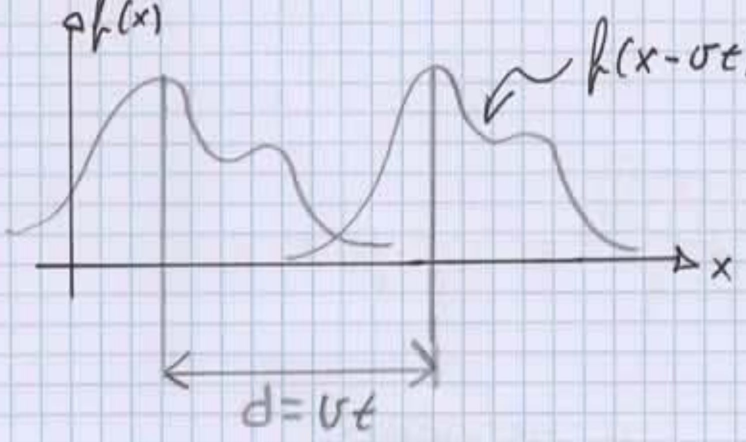
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{d h}{d \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d h}{d \eta}$$

1

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{d^2 h}{d \eta^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{d h}{d \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -v \frac{d h}{d \eta}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = +v^2 \frac{d^2 h}{d \eta^2}$$



PROPAGA SENZA DISTORSIONI VERSO DESTRA CON VELOCITÀ v.

N.B. $f(x+vt)$ PROPAGA VERSO SX.

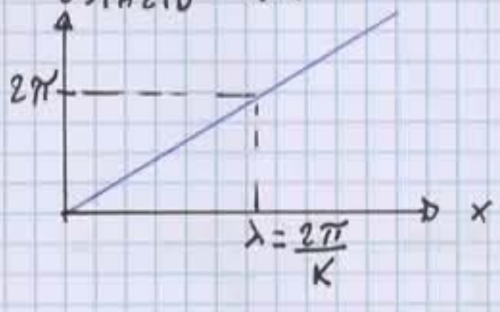
ESEMPIO

$$[\omega] = T^{-1}$$
$$[k] = L^{-1}$$

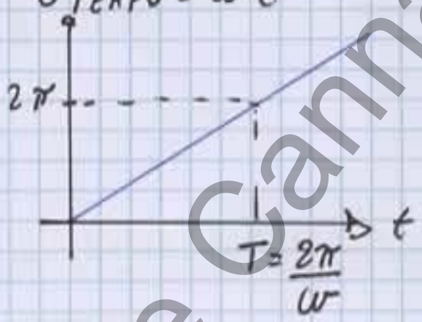
SOLUZIONE DI D'ALAMBERT: $\cos[k(x-vt)] =$

$$= \cos(kx - \omega t), \text{ DOVE } v = \frac{\omega}{k} = c$$

$\theta_{SPAZIO} = kx$



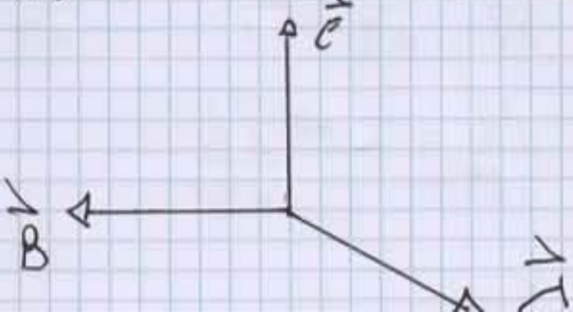
$\theta_{TEMPO} = \omega t$



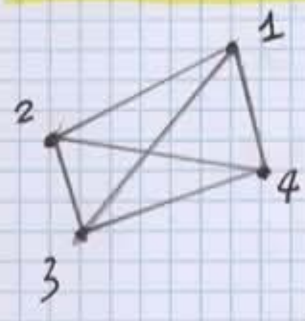
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right)$$

OSSERVAZIONI

1. $\vec{E}$ E $\vec{B}$ SONO ORTOGONALI ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE (x)
2. $\vec{E}$ E $\vec{B}$ SONO PERPENDICOLARI TRA DI LORO (FARADAY/AMPERE)
3. $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ PUNTA NELLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE.



ENERGIA

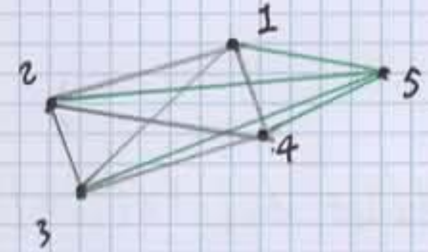


$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$, QUINDI IN GENERALE:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

L'ENERGIA TOTALE SARÀ: $U_{TOT} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}$

AGGIUNGIAMO UNA PARTICELLA:



11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35
41	42	43	44	45
51	52	53	54	55

ΔU

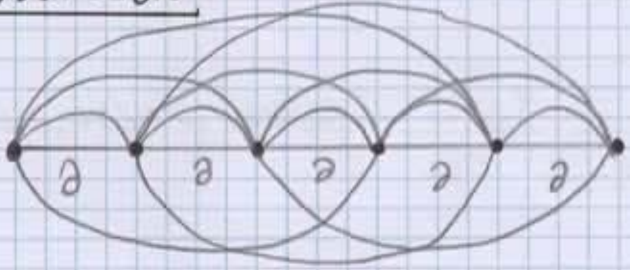
$$\Delta U = K_e \left[\frac{q_1 q_5}{r_{15}} + \frac{q_2 q_5}{r_{25}} + \frac{q_3 q_5}{r_{35}} + \frac{q_4 q_5}{r_{45}} \right] =$$

$$= q_5 \Bigg[\underbrace{K_e \left(\frac{q_1}{r_{15}} + \frac{q_2}{r_{25}} + \frac{q_3}{r_{35}} + \frac{q_4}{r_{45}} \right)}_{V_{4\,PARTICELLE}\ \text{(NEL PUNTO DELLA QUINTA)}} \Bigg]$$

$$\Rightarrow U_{5\,PARTICELLE} = U_{4\,PARTICELLE} + \Delta U =$$

$$= U_{4\,PARTICELLE} + q_5 V_4 (P_5)$$

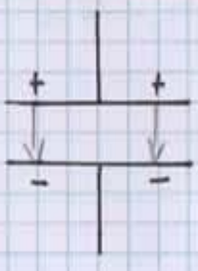
ESERCIZIO



*	DISTANZA
5	a
4	2a
3	3a
2	4a
1	5a
15	

$$U = K_e \frac{q^2}{a}\left(5 + \frac{4}{2} + \frac{3}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right)$$

ENERGIA CONDENSATORE



$$U(q + dq) = U(q) + dq \cdot V(q) = U(q) + V(q)\,dq$$

RICORDO CHE $C = \frac{q}{\Delta V} \Rightarrow V = \frac{q}{C}$

$$\Rightarrow U = \int_0^Q V(q)\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \boxed{\frac{Q^2}{2C}}$$

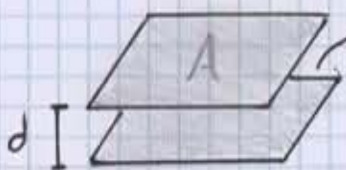
UN ALTRO MODO PER INDICARE L'ENERGIA DI UN CONDENSATORE È:

$$= \boxed{\frac{1}{2} C V^2}$$

$\frac{Q}{A} / \varepsilon_0$

ESEMPIO ①

$VOL = A \cdot d$



$|\vec{E}| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

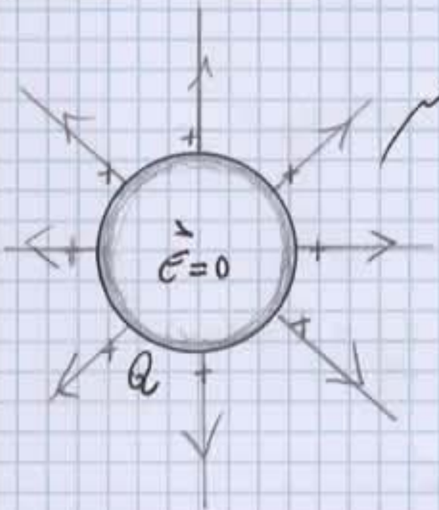
$|\vec{E}|_{FUORI} = \vec{0}$

$$\iiint_{\vec{E} \neq 0} \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2\, dVOL =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 \iiint dVOL =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{A\varepsilon_0}\right)^2 VOL = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{A^2\varepsilon_0}\, d \cdot A = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{Q^2}{A\varepsilon_0}\cdot d}_{C} = \frac{Q^2}{2C} \quad \blacksquare$$

ESEMPIO ②



$$\vec{E} = K_e \frac{Q}{r^2}\,\vec{u}_r$$

$$C_{\substack{\text{SFERA}\\ \text{ISOLATA}}} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

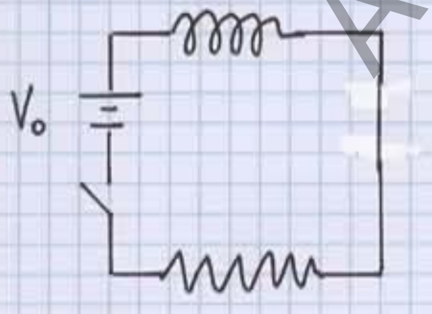
$$U = \iiint_{\vec{E}\neq 0} \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 \, dVol = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_{\vec{E}\neq 0} \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4}\, dVol$$

$$U_{STIMA} = \sum \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0^2 r_i^4}\,\Delta Vol_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0}\sum \frac{(4\pi r_i^2)\cdot \Delta r_i}{(4\pi)^2 r_i^4} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0}\sum \frac{\Delta r_i}{4\pi r_i^2} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

CIRCUITI



APPENA CHIUDO IL CIRCUITO:

$$\phi_{AUTO}(t) = L\cdot I(t)$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\phi_{AUTO}$$

LA LEGGE DI OHM MACROSCOPICA VALE A REGIME $(V = IR)$, QUINDI DIVENTA:

$$V_0 + V_L = IR$$

FORZA ELETTROMOTIVA CHIMICA

PER FARADAY

NOTIAMO CHE: $\frac{d\Phi}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow V_L = -L\frac{dI}{dt}$

SUPPONIAMO CHE CI SIA ANCHE UN CONDENSATORE: $V_C = \frac{q}{C}$

$$V_0 - L\frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = IR$$

$$V_0 - L\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt} \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0$$

MOLTIPLICANDO PER I: $IV_0 = LI\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}I + RI^2$

$$= IV_0 = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}LI^2}_{\mathcal{E}_B}\Big) + \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}_{\mathcal{E}_E}\Big) + RI^2$$

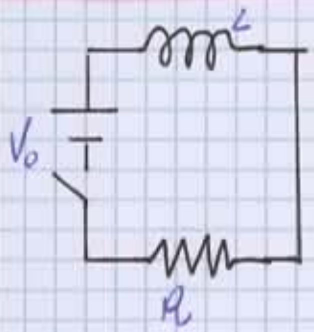
ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO $\sim \mathcal{E}_B$

$\mathcal{E}_E \sim$ ENERGIA DEL CAMPO ELETTRICO

$$\underbrace{IV_0}_{\text{POTENZA ISTANTANEA EROGATA}} = \frac{d}{dt}\left[\mathcal{E}_B + \mathcal{E}_E\right] + RI^2$$

RI^2 — POTENZA DISSIPATA DALLA RESISTENZA

CIRCUITO RL



$$V_0 = IR$$

$$V_{EFFICACE} = IR$$

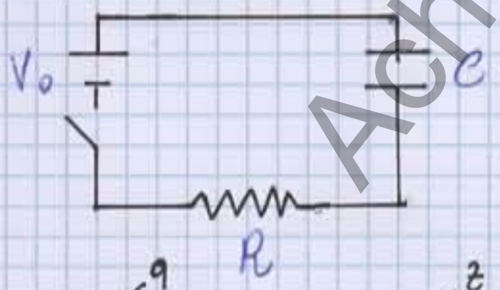
$$V_0 - L\frac{dI}{dt} = IR$$ RISOLVIAMO!

$$L\frac{dI}{dt} = V_0 - IR \rightarrow L\,dI = (V_0 - IR)\,dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{L\,dI}{V_0 - IR} = dt \rightarrow t = \int_0^I \frac{L}{V_0 - I'R}\,dI' = -\frac{L}{R}\int_{V_0}^{V_0 - I} \frac{dz}{z} = -\frac{L}{R}\ln\left(\frac{V_0 - IR}{V_0}\right)$$

ESPLICITO: $I(t) = \frac{V_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right] = I_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tau = \frac{L}{R}$

CIRCUITO RC



$$V_0 = IR$$

$$V_{EFFICACE} = IR$$

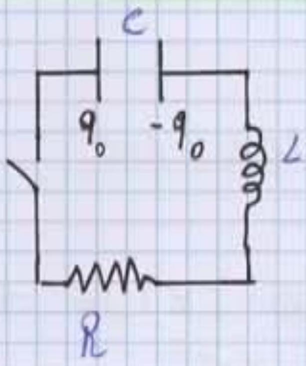
$$V_0 - \frac{q}{C} = IR$$

$$V_0 - \frac{q}{C} = \frac{dq}{dt}R \rightarrow \left(V_0 - \frac{q}{C}\right)dt = dq\,R$$

$$\rightarrow t = \int_0^q \frac{R}{V_0 - \frac{q'}{C}}\,dq' = \int_0^z -\frac{RC}{z'}\,dz' = -RC\ln\left(\frac{V_0 - q/C}{V_0}\right)$$

ESPLICITO: $q(t) = CV_0\left(1 - e^{-t/RC}\right) = q_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tau = RC$

CIRCUITO RCL



$V_0 = IR \Rightarrow V_{EFF} = IR$

$\cancel{V_0} + V_L + V_C = IR$

$$-L\frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = \frac{dq}{dt}R$$

$$-L\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C} = \frac{dq}{dt}R$$

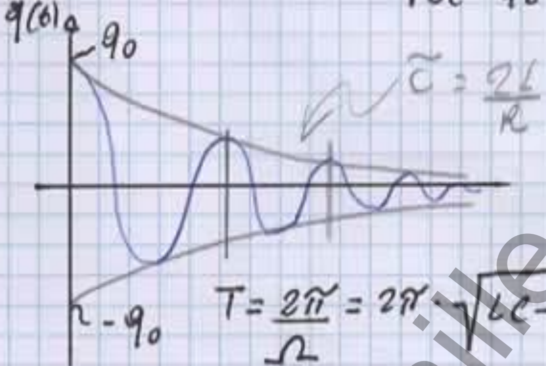
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

$q_{PROVA}(t) = q\,e^{\alpha t}$

$$\Rightarrow L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow \alpha_\pm = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2 - 4L}{4L^2}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{L}}$$

SE $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\Omega t)$,

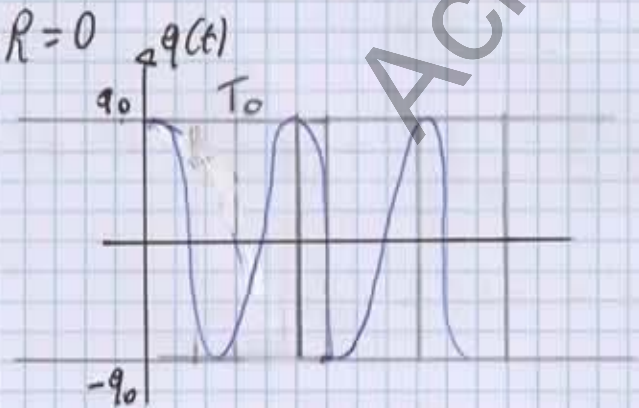
DOVE: $\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$



$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{LC - \frac{4L^2}{R^2}}$$

SE $R = 0$

$T > T_0$



$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

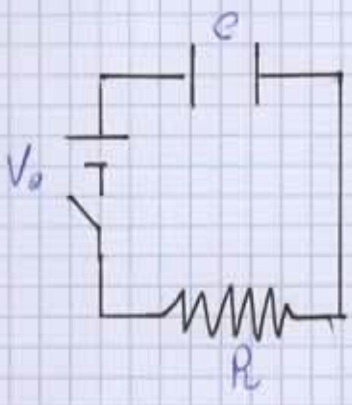
ENERGIA E POTENZA

NEL CASO RCL: $V_{EFF} = IR \Rightarrow V_0 - L\frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = RI \Rightarrow$

$\Rightarrow V_0 = L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} + RI \Rightarrow$ MOLTIPLICO PER $I \Rightarrow IV_0 = LI\frac{dI}{dt} + I\frac{q}{C} + RI^2 =$

$$= \underbrace{IV_0}_{\downarrow} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right] + RI^2$$

POTENZA EROGATA DALLA BATTERIA $\Rightarrow P_{BATT} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = IV_0$



QUALE È IL LAVORO TOTALE FATTO DALLA BATTERIA PER CARICARE IL CONDENSATORE?

$$\int_0^\infty \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{BATT} dt = \text{LAVORO EROGATO DALLA BATTERIA} = \int_0^\infty I V_0\, dt =$$

$$= V_0 \int_0^\infty I(t)\, dt = V_0 \int_0^\infty \frac{CV_0}{\tau} e^{-t/\tau}\, dt = CV_0^2$$

MA RICORDIAMO L'ENERGIA DI UN CONDENSATORE CARICATO:

$$\mathcal{E}_{COND.} = \frac{Q^2}{2C} \underset{\uparrow}{=} \frac{CV_0^2}{2}$$

$Q = CV_0$

$\Rightarrow$ È LA METÀ DELL'ENERGIA EROGATA DALLA BATTERIA!!!

DOVE È ANDATA L'ALTRA METÀ??

NELLA RESISTENZA!!

$$\Rightarrow \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{RESIST.} = I(\Delta V) = RI^2$$

$$\mathcal{E}_{RESIST.} = \int_0^\infty RI^2\, dt = R\int_0^\infty \left(\frac{CV_0}{\tau} e^{-t/\tau}\right) dt = \frac{1}{2} CV_0^2$$

QUINDI $CV_0^2 = \frac{1}{2} CV_0^2 + \frac{1}{2} CV_0^2$