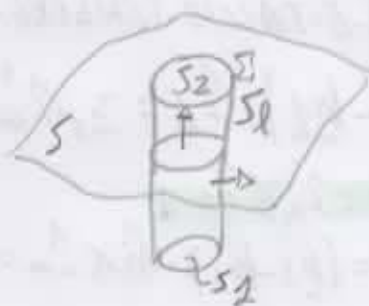


CONTINUITÀ CAMPI

CONSIDERIAMO L'EQ. DI MAXWELL IN FORMA INTEGRALE:

$$\begin{cases} \oint_S \underline{E} \cdot \underline{\hat{n}} d\ell = - \int_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \underline{\hat{n}} dS \\ \oint_S \underline{H} \cdot \underline{\hat{n}} d\ell = \int_S \left(\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J} \right) \cdot \underline{\hat{n}} dS \\ \int_V \underline{D} \cdot \underline{\hat{n}} dS = \int_V \rho dV \\ \int_V \underline{B} \cdot \underline{\hat{n}} dS = 0 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO COME VOLUME QUELLO DI UN CILINDRO CON UNA SUPERFICIE CHE LO DIVIDE.



$$\Delta q = \oint_S \underline{D} \cdot \underline{\hat{n}} dS$$

$$= \iint_{S_1} \underline{D}_1 \cdot \underline{\hat{n}} dS + \iint_{S_2} \underline{D}_2 \cdot \underline{\hat{n}} dS + \iint_{S_l} \underline{D} \cdot \underline{\hat{n}} dS$$

→ FACCIAMO TENDERE $\Delta \ell$ A 0

COSÌ L'INTEGRALE DELLA SUPERFICIE LATERALE VA A ZERO, COME LA CARICA Δq A MENO CHE NON SIA PRESENTE UNA CARICA SUPERFICIALE Δq_s .

IN QUESTO CASO APPLICHIAMO IL TEOREMA DELLA MEDIA:

$$\underline{D}_2(\underline{x}_2, t) \cdot \underline{\hat{n}} \Delta S_2 - \underline{D}_1(\underline{x}_1, t) \cdot \underline{\hat{n}} \Delta S_1 = (\underline{D}_2(\underline{x}_2, t) - \underline{D}_1(\underline{x}_1, t)) \cdot \underline{\hat{n}} \Delta S = \Delta q_s$$

DATO CHE $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$.

FACCIAMO TENDERE A ZERO ΔS E OTTIENGO:

$$(\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \underline{\hat{n}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q_s}{\Delta S} = \rho_s$$

IN MODO ANALOGO OTTIENGO:

$$(\underline{B}_2 - \underline{B}_1) \cdot \underline{\hat{n}} = 0$$

DENSITÀ DI CARICA SUP.

CONSIDERIAMO ORA L'EQ. DI AMPERE-MAXWELL:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma_m} \underline{D} \cdot \underline{\hat{n}} dS + \iint_{\Sigma_m} \underline{J} \cdot \underline{\hat{n}} dS &= \oint_{\Pi} \underline{H} \cdot \underline{\hat{n}} d\ell \\ &= \int_{\ell_1} \underline{H}_1 \cdot \underline{\hat{n}} d\ell + \int_{\ell_2} \underline{H}_2 \cdot \underline{\hat{n}} d\ell + \int_{\ell_3} \underline{H} \cdot \underline{\hat{n}} d\ell + \int_{\ell_4} \underline{H} \cdot \underline{\hat{n}} d\ell \end{aligned}$$



FACENDO TENDERE ΔA A ZERO, L'INTEGRALE SU ℓ_1 E ℓ_2 VA A ZERO, COME ANCHE IL FLUSSO DI \underline{D} ATTRAVERSO S .

IL FLUSSO DI \underline{J} INVECE TENDE A ZERO SE C'È SOLO CORRENTE DI VOLUME, MENTRE DA UN CONTRIBUTO NON NULLO SE C'È UNA DENSITÀ DI CORRENTE SUP.

$$\Sigma_s = \Delta q s \underline{0}$$

APPLICHIAMO IL TH. DELLA HODIA:

$$\underline{h}_2(\underline{\Sigma}_2, t) \cdot \hat{\underline{e}}_t \Delta l_2 - \underline{h}_1(\underline{\Sigma}_1, t) \cdot \hat{\underline{e}}_t \Delta l_1 = (\underline{h}_2 - \underline{h}_1) \cdot \hat{\underline{e}}_t \Delta l = \underline{\Sigma}_s \cdot \hat{\underline{m}} \Delta l$$

DIVIDO PER Δl E FACCILO TENDERE A ZERO:

$$(\underline{h}_2 - \underline{h}_1) \cdot \hat{\underline{e}}_t = \underline{\Sigma}_s \cdot \hat{\underline{m}}$$

DATO CHE $\hat{\underline{e}}_t = \hat{\underline{m}} \times \hat{\underline{e}}_m$:

$$\underline{\Sigma}_s \cdot \hat{\underline{m}} = (\underline{h}_2 - \underline{h}_1) \cdot \hat{\underline{m}} \times \hat{\underline{e}}_m = \hat{\underline{m}} \cdot \hat{\underline{e}}_m \times (\underline{h}_2 - \underline{h}_1) = \hat{\underline{e}}_m \times (\underline{h}_2 - \underline{h}_1) \cdot \hat{\underline{m}}$$

DATO CHE $\hat{\underline{m}}$ È ARBITRARIO. HO CHE:

$$\underline{\Sigma}_s = \hat{\underline{e}}_m \times (\underline{h}_2 - \underline{h}_1)$$

MA CHE CI DICE CHE IN PRESENZA DI DISCONTINUITÀ LE COMPONENTI TANGENTI DEL CAMPO MAGNETICO SONO CONTINUE A MENO DI UNA DENSITÀ DI CORRENTE SUPERFICIALE.

IN MODO ANALOGO R/CARO DA FARADAY-LENZ:

$$\hat{\underline{e}}_m \times (\underline{e}_2 - \underline{e}_1) = 0 \rightarrow \text{OVVERO LE COMPONENTI TANGENZIALI DEL CAMPO ELETTRICO SONO SEMPRE CONTINUE}$$

$$\underline{E} = -\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

$$\underline{E} = -\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

PUNTING NEL TEMPO

DEFINIAMO LA FORZA DI LORENTZ COME LA FORZA ESERCITATA SU UNA CARICA UNITARIA:

$$\underline{F} = q(\underbrace{\underline{E}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{\underline{v} \times \underline{B}}_{\text{Lorentz}})$$

1. S.I. UNITARIO

POSSIAMO POI INTRODURRE

LA DENSITÀ DI CARICA VOLUMETRICA ρ : $\underline{F} = \rho \delta V (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

CONSIDERANDO CHE $\rho \cdot \underline{v} = \underline{j} \Rightarrow \underline{f} = \rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B}$

SE ORA CONSIDERIAMO QUESTA FORZA \underline{F} IN UN INTERVALLO δt , COMPIRÀ UN LAVORO:

$$\delta L = \underline{F} \cdot \underline{v} \delta t = \rho \delta V (\underline{E} + \underbrace{\underline{v} \times \underline{B}}_0) \cdot \underline{v} \delta t$$

UNITARIO

$$\delta L = \rho \delta V \underline{E} \cdot \underline{v} \delta t \Rightarrow \delta L = \delta V \underline{E} \cdot \underline{j} \delta t \xrightarrow{\text{UNITARIO}} \frac{dL}{dt} = \underline{E} \cdot \underline{j}$$

ORA STUDIAMO IL CASO IN CUI \underline{j} SIA UNA CORRENTE DI CONDIZIONE:

$$\underline{j} = \underline{j}_c = \sigma \underline{E} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \underline{E} \cdot \underline{j}_c = \sigma |\underline{E}|^2$$

IL SECONDO CASO È QUELLO IN CUI LE CARICHE SONO MANTENUTE IN MOTO DA

FORZE ESTERNE: $\underline{j} = \underline{j}_0 \Rightarrow -\frac{dL}{dt} = -\underline{E} \cdot \underline{j}_0$

CONSIDERIAMO C.E. E A. DI MAXWELL IN UN MEZZO LINEARE, ISOTROPO, OMogeneo NEL TEMPO E NON DISPERSIVO CON SORGENTI IMPRESSE \underline{S}_0 :

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{H} = \epsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \sigma \underline{E} + \underline{S}_0 \\ \nabla \cdot \epsilon \underline{E} = \rho \\ \nabla \cdot \mu \underline{H} = 0 \end{cases}$$

VEETTORE DI POYNTING

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$$

$$\nabla \cdot \underline{S} = \underline{H} \cdot \nabla \times \underline{E} - \underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H}$$

$$\underline{H} \cdot \left(-\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \right) - \underline{E} \cdot \left(\epsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \sigma \underline{E} + \underline{S}_0 \right)$$

$$\rightarrow -\mu \frac{1}{2} \frac{\partial |\underline{H}|^2}{\partial t} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial |\underline{E}|^2}{\partial t} - \sigma |\underline{E}|^2 - \underline{E} \cdot \underline{S}_0 \quad \rightarrow \text{INTEGRO IN UN VOLUME}$$

$$\rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{1}{2} \mu |\underline{H}|^2 + \frac{1}{2} \epsilon |\underline{E}|^2 \right] dV - \underbrace{\int_V \sigma |\underline{E}|^2 dV}_{\text{POT. DISSIPATA}} - \underbrace{\int_V \underline{E} \cdot \underline{S}_0 dV}_{\text{POT. GENERATA}}$$

APPLICHO L'INTEGRALE A ∞

$$\rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\infty} \left[\frac{1}{2} \mu |\underline{H}|^2 + \frac{1}{2} \epsilon |\underline{E}|^2 \right] dV - \int_{V_\infty} \sigma |\underline{E}|^2 dV - \int_{V_\infty} \underline{E} \cdot \underline{S}_0 dV = 0 \quad \begin{matrix} \text{ALL'INFINITO IL} \\ \text{CAMPO È NULLO} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\infty} \left[\frac{1}{2} \mu |\underline{H}|^2 + \frac{1}{2} \epsilon |\underline{E}|^2 \right] dV = P_G - P_D = \frac{dW}{dt} \quad \begin{matrix} \text{NON C'È POTENZA SCAMBIATA} \\ \text{CON L'ESTERNO. } \Phi_P \end{matrix}$$

VARIATIONE DELL'ENERGIA INTERNA IN UN ISTANTE DI TEMPO

SE TORNIAMO AL GENERICO VOLUME V OTTENIAMO:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon |\underline{E}|^2, \quad W_m = \frac{1}{2} \mu |\underline{H}|^2$$

DENSITA' DI ENERGIA ELETTRICA

DENSITA' DI ENERGIA MAGNETICA

$$\int_{\partial V} \underline{S} \cdot \underline{\hat{c}}_n dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V (W_e + W_m) dV - P_D + P_G = \Phi_P \rightarrow \text{QUINDI IL FLUSSO DI } \underline{S}$$

ATTRAVERSO LA FRONTIERA DI ∂V È UGUALE ALLA DIFFERENZA DI POTENZA GENERATA E DISSIPATA E LA VARIATIONE DI ENERGIA NEL VOLUME IN UN ISTANTE DI TEMPO, OVVERO LO SCAMBIO DI POTENZA CON L'ESTERNO Φ_P .

POYNTING NEL FASORE

SIAMO:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \psi)$$

$$\rightarrow P(t) = U(t) \cdot i(t) = U_0 i_0 \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \psi)$$

POSTO: $\phi = \psi - \alpha \Rightarrow P(t) = U_0 i_0 \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \phi + \alpha)$ \downarrow

$$\rightarrow = U_0 i_0 \cos(\omega t + \alpha) [\cos(\omega t + \alpha) \cos(\phi) - \sin(\omega t + \alpha) \sin(\phi)] = \downarrow$$

$$\rightarrow = U_0 i_0 [\cos^2(\omega t + \alpha) \cos(\phi) - \cos(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \alpha) \sin(\phi)] = \downarrow$$

→ BASTA CHE: $\left| \begin{array}{l} \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \\ \cos^2(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{2} U_0 i_0 \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] - \frac{1}{2} U_0 i_0 \sin(\phi) \sin(2\omega t + 2\alpha)$

→ IL PRIMO TERMINE È LA POTENZA CEDUTA ALL'IMPIEDENZA, MENTRE IL SECONDO È UN TERMINE OSCILLANTE CHE VARIA DI SEGNO E RAPPRESENTA UNA ENERGIA PER UNITÀ DI TEMPO CHE VIENE SCAMBIATA TRA IL GENERATORE E L'IMPIEDENZA.

→ PASSIAMO ORA AL DOMINIO DEI FASORI:

$$\begin{aligned} V &= U_0 e^{j\alpha} \leftrightarrow U(t) = \text{Re}\{V e^{j\omega t}\} \\ I &= i_0 e^{j\psi} \leftrightarrow i(t) = \text{Re}\{I e^{j\omega t}\} \end{aligned} \rightarrow P = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} U_0 e^{j\alpha} i_0 e^{-j\psi} = \downarrow$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} U_0 i_0 e^{j(\alpha - \psi)} = \frac{1}{2} U_0 i_0 e^{j\phi} = \underbrace{\frac{1}{2} U_0 i_0 \cos(\phi)}_{\text{POT. ATTIVA}} + j \underbrace{\frac{1}{2} U_0 i_0 \sin(\phi)}_{\text{POT. REATTIVA}}$$

CONSIDERIAMO ORA LE EQ. DI MAXWELL PER MEZZI LINEARI, ISOTROPI, INVARIANTI NEL TEMPO, MA SOLO SPAZIAMENTE NON DISPERSIVI:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega \mu \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = j\omega \epsilon \underline{E} + \underline{\sigma} \underline{E} + \underline{J}_0 \\ \nabla \cdot \underline{E} = \rho \\ \nabla \cdot \underline{H} = 0 \end{cases}$$

DOVE μ E ϵ DIPENDONO DA ω E SONO COMPLESSI.

COME GIÀ VISTO NEL TEMPO:

$$P_G(t) = -\underline{E} \cdot \underline{J}_0 \rightarrow \underline{P}_G = -\frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{J}_0^*$$

$$P_D(t) = \sigma |\underline{E}|^2 \rightarrow \underline{P}_D = \frac{1}{2} \sigma |\underline{E}|^2$$

DEFINIAMO ANCHE: $\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \rightarrow$ CALCOLIAMONE $\nabla \cdot \underline{S}$ \downarrow

$$\rightarrow \pm \frac{1}{2} \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}^*) = \frac{1}{2} \underline{H}^* \cdot (\nabla \times \underline{E}) - \frac{1}{2} \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{H}^*) = \downarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \underline{H}^* \cdot (-j\omega \mu \underline{H}^*) - \frac{1}{2} \underline{E} \cdot (j\omega \epsilon \underline{E} + \sigma \underline{E} + \underline{J}_0)^* = \downarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon = \epsilon_R - j\epsilon_I \\ \mu = \mu_R - j\mu_I \end{array} \right.$$

$$\rightarrow -\frac{j\omega}{2} (\mu_R - j\mu_I) |\underline{H}|^2 + \frac{j\omega}{2} (\epsilon_R + j\epsilon_I) |\underline{E}|^2 - \frac{1}{2} \sigma |\underline{E}|^2 - \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* = \downarrow$$

SEPARIAMO ORA PARTE REALE E PARTE IMMAGINARIA:

•) REALE

$$-\frac{1}{2} \omega \mu_I |\underline{H}|^2 - \frac{1}{2} \omega \epsilon_I |\underline{E}|^2 - \frac{1}{2} \sigma |\underline{E}|^2 - \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \}$$

•) IMMAGINARIA

$$-\frac{1}{2} \omega \mu_R |\underline{H}|^2 + \frac{1}{2} \omega \epsilon_R |\underline{E}|^2 - \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \}$$

$$\int_V \nabla \cdot \underline{S}_R dV = \int_{\partial V} \underline{S}_R \cdot \underline{\hat{e}}_n dS$$

ORA INTEGRIAMO LA PRIMA IN UN VOLUME $\rightarrow - \int_V \frac{1}{2} (\omega \mu_I |\underline{H}|^2 + \omega \epsilon_I |\underline{E}|^2 + \sigma |\underline{E}|^2 + \text{Re} \{ \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \}) dV$

$$\rightarrow - \int_V \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \} dV = \int_V \frac{1}{2} (\omega \mu_I |\underline{H}|^2 + \omega \epsilon_I |\underline{E}|^2 + \sigma |\underline{E}|^2) dV + \int_{\partial V} \underline{S}_R \cdot \underline{\hat{e}}_n dS$$

OLTRE AL TERMINE $\frac{1}{2} \sigma |\underline{E}|^2$, ABBIAMO ANCHE $\frac{1}{2} \omega \epsilon_I |\underline{E}|^2$, E $\frac{1}{2} \omega \mu_I |\underline{H}|^2$ CHE

RAPPRESENTANO LA POTENZA DISSIPATA, CHE DOVENDO ESSERE POSITIVA

IMPLICA CHE $\begin{cases} \epsilon_I \geq 0 \\ \mu_I \geq 0 \end{cases}$

ORA INTEGRIAMO LA PARTE IMMAGINARIA $\rightarrow \int_{\partial V} \underline{S}_I \cdot \underline{\hat{e}}_n dS = - \int_V \frac{1}{2} (\omega \mu_R |\underline{H}|^2 - \omega \epsilon_R |\underline{E}|^2 + \text{Im} \{ \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \}) dV$

$$\rightarrow - \int_V \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \} dV = \int_V \frac{1}{2} (\omega \mu_R |\underline{H}|^2 - \omega \epsilon_R |\underline{E}|^2) dV + \int_{\partial V} \underline{S}_I \cdot \underline{\hat{e}}_n dS \rightarrow \text{CHE POSSIAMO RISCRIVERE}$$

$$\rightarrow 2\omega \int_V \frac{1}{4} \mu_R |\underline{H}|^2 - \frac{1}{4} \epsilon_R |\underline{E}|^2 dV + \int_{\partial V} \underline{S}_I \cdot \underline{\hat{e}}_n dS = - \int_V \frac{1}{2} \text{Im} \{ \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \} dV$$

DENSITA' DI ENERGIA EM.

ONDE PIANE NEL TEMPO

CONSIDERIAMO LE EQ. DI MAXWELL IN UN MEZZO LINEARE, ISOTROPO, OMOGENEO, INVARIANTE E NON DISPERSIVO SIA NEL TEMPO E SIA NELLO SPAZIO E SENZA PERDITE.

$$\begin{cases} \underline{d} = \epsilon \underline{e} \\ \underline{b} = \mu \underline{h} \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{e} = 0 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO SOLUZIONI CHE DIPENDONO SOLO DA t E DALLA COORDINATA z .

QUESTE SOLUZIONI NON VARIANO SE CI MUOVIAMO LUNGO PIANI ORTOGONALI A z → LE CHIAMIAMO ONDE PIANE.

$$\Delta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{e} = -\mu \frac{\partial \underline{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{h} = \epsilon \frac{\partial \underline{e}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \underline{e} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{h} = 0 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO LE EQ. AI ROTORI:

$$\nabla \times \underline{e} = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial e_y}{\partial z} \hat{i}_x + \frac{\partial e_x}{\partial z} \hat{i}_y = -\mu \frac{\partial \underline{h}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{h} = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \partial/\partial z & 0 & 0 \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial h_y}{\partial z} \hat{i}_x + \frac{\partial h_x}{\partial z} \hat{i}_y = \epsilon \frac{\partial \underline{e}}{\partial t}$$

DA CUI SI OTTIENE:

$$\begin{cases} \frac{\partial e_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial h_y}{\partial t} \\ \frac{\partial h_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial e_x}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial e_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial h_x}{\partial t} \\ \frac{\partial h_x}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial e_y}{\partial t} \end{cases}$$

DATO CHE h_y È DIFFERENZIALE POSSO SOSTITUIRE UNA DENTRO L'ALTRA.

DERIVO PRIMA RISPETTO A z E POI RISPETTO A t →

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = -\mu \frac{\partial^2 h_y}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial^2 h_y}{\partial t \partial z} = -\epsilon \frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2}} \quad \text{EQ. DI ALAMBERT}$$

LA CUI SOLUZIONE È:

$$e_x(z, t) = e_{x+}(ct - z) + e_{x-}(ct + z)$$

$$\epsilon \mu = \frac{1}{c^2}$$

ORA DERIVIAMO PRIMA RISPETTO A t E POI A z :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 e_x}{\partial t \partial z} = -\mu \frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} = -\epsilon \frac{\partial^2 e_x}{\partial z \partial t} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2}} \rightarrow h_y(z, t) = h_{y+}(ct - z) + h_{y-}(ct + z)$$

MA \underline{e} E \underline{h} DEVONO ANCHE RISPETTARE →

$$\begin{cases} \frac{\partial e_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial h_y}{\partial t} \\ \frac{\partial h_y}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial e_x}{\partial z} \end{cases}$$

ΜΑ. ΣΑΠΠΑΚΟ. ΟΗΕ:

$$\frac{\partial e_x}{\partial z} = -\frac{\partial e_x^+}{\partial s^+} = -\mu \frac{\partial h_y}{\partial t} \quad \in \quad \epsilon \frac{\partial e_x}{\partial t} = \epsilon c \frac{\partial e_x^+}{\partial s^+} = -\frac{\partial h_y}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial e_x^+}{\partial s^+} = \mu \frac{\partial h_y}{\partial t} = \mu \left(c \frac{\partial h_y}{\partial s^+} \right) \leadsto \text{CON } \mu c = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon \epsilon'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \xi$$

INTEGRANDO RISPETTO A s^+ OTTIENIAMO:

$$e_{x+} = \xi h_{y+} + C \quad C=0.$$

ONDE PIANE NEL FASORI

RIHUVIAMO L'IPOTESI DI MEZZO NON DISPERSIVO NEL TEMPO.

ANDIAMO A VINDI A CONSIDERARE LE EQ. DI MAXWELL NEL REGIME SINUSOIDALE:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\omega \mu \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = \omega \epsilon \underline{E} \\ \nabla \cdot \underline{E} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{H} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{STUDIAMO I ROTORI:}$$

$$\nabla \times \underline{E} = \begin{vmatrix} \hat{z} & \hat{y} & \hat{x} \\ 0 & 0 & d/dz \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{dE_y}{dz} \hat{x} + \frac{dE_x}{dz} \hat{y} = -\omega \mu \underline{H}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \begin{vmatrix} \hat{z} & \hat{y} & \hat{x} \\ 0 & 0 & d/dz \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\frac{dH_y}{dz} \hat{x} + \frac{dH_x}{dz} \hat{y} = \omega \epsilon \underline{E}$$

OTTENIAMO COSÌ
DUE SISTEMI:

$$\begin{cases} \frac{dE_x}{dz} = -\omega \mu H_y \\ \frac{dH_y}{dz} = -\omega \epsilon E_x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dE_y}{dz} = \omega \mu H_x \\ \frac{dH_x}{dz} = \omega \epsilon E_y \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -\omega^2 \epsilon \mu E_x} \quad \text{OSCILLATORE ARMONICO}$$

CHE HA PER SOLUZIONI

$$\begin{aligned} E_{x+} &= E_{0x+} e^{-jKz} \\ E_{x-} &= E_{0x-} e^{jKz} \end{aligned}$$

ANALOGAMENTE OTTENIAMO:

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} = -\omega^2 \epsilon \mu H_y \rightarrow \begin{cases} H_{y+} = H_{0y+} e^{-jKz} \\ H_{y-} = H_{0y-} e^{jKz} \end{cases}$$

APPLICHIAMO LA SOVR. DEGLI EFFETTI $\Rightarrow \frac{d}{dz} (E_{0x+} e^{-jKz}) = -\omega \mu H_{0y+} e^{-jKz}$

$$\rightarrow -jK E_{0x+} e^{-jKz} = -\omega \mu H_{0y+} e^{-jKz} \rightarrow E_{0x+} = \frac{\omega \mu}{K} H_{0y+}, \text{ con } K = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{0x+} = \frac{1}{\epsilon} H_{0y+}} \quad \text{NELLA DIREZIONE } \hat{z}$$

ANALOGAMENTE SI OTTIENE:

$$\Rightarrow \boxed{E_{0x-} = -\frac{1}{\epsilon} H_{0y-}} \quad \text{NELLA DIREZIONE } -\hat{z}$$

POLARIZZAZIONE

CONSIDERIAMO IL CAMPO ELETTRICO CON TUTTE LE SUE COMPONENTI CARTESIANE CHE VARIANO NEL TEMPO:

$$\begin{cases} \underline{E}_x(t) = E_{0x} \cos(\omega_0 t + \varphi_{0x}) \hat{x} \\ \underline{E}_y(t) = E_{0y} \cos(\omega_0 t + \varphi_{0y}) \hat{y} \\ \underline{E}_z(t) = E_{0z} \cos(\omega_0 t + \varphi_{0z}) \hat{z} \end{cases} \quad \text{se } \varphi_i = \varphi_0 \quad \downarrow \quad \underline{E}(t) = (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\downarrow$$

$$\underline{E}(t) = \underline{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

POSSIAMO SCOMPORRE $\underline{E}(t)$ COME SOMMA DI

DUE VETTORI POLARIZZATI LINEARMENTE:

PARTI DA QUI $\underline{E}_x(t) = E_{0x} \cos(\omega_0 t + \varphi_{0x})$

$$\underline{E}_x(t) = E_{0x} [\cos(\omega_0 t) \cos(\varphi_{0x}) -$$

$$- \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi_{0x})] \hat{x}$$

$$\Rightarrow \underline{E}(t) = [E_{0x} \cos(\varphi_{0x}) \hat{x} + E_{0y} \cos(\varphi_{0y}) \hat{y} + E_{0z} \cos(\varphi_{0z}) \hat{z}] \cdot \cos(\omega_0 t) - [E_{0x} \sin(\varphi_{0x}) \hat{x} + E_{0y} \sin(\varphi_{0y}) \hat{y} + E_{0z} \sin(\varphi_{0z}) \hat{z}] \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\underline{E}(t) = \underline{E}_{0c} \cos(\omega_0 t) + \underline{E}_{0s} \sin(\omega_0 t)$$

QUINDI IN OGNI ISTANTE t , IL VETTORE $\underline{E}(t)$ GIACE SEMPRE SUL PIANO INDIVIDUATO DAI VETTORI \underline{E}_{0c} E \underline{E}_{0s} .

PASSIAMO AL DOMINIO DEI FASORI: $\underline{E} = \text{Re}\{\underline{E}\} + \text{Im}\{\underline{E}\}$

$$\text{QUINDI NEL TEMPO SARÀ: } \underline{E}(t) = \text{Re}\{\text{Re}\{\underline{E}\} e^{j\omega_0 t}\} + \text{Re}\{\text{Im}\{\underline{E}\} e^{j\omega_0 t}\} = \text{Re}\{\underline{E}\} \cos(\omega_0 t) - \text{Im}\{\underline{E}\} \sin(\omega_0 t)$$

PARALLELI

NEL CASO IN CUI \underline{E}_R E \underline{E}_I SIANO PARALLELI AL GENERICO VETTORE \hat{e} :

$$\begin{cases} \underline{E}_R = E_R \hat{e} \\ \underline{E}_I = E_I \hat{e} \end{cases} \quad \text{DATO CHE } E = \sqrt{E_R^2 + E_I^2} \Rightarrow \begin{cases} E_R = E \cos(\alpha) \\ E_I = E \sin(\alpha) \end{cases} \quad \square$$

$$\Rightarrow \underline{E}(t) = E \cos(\alpha) \cos(\omega_0 t) \hat{e} - E \sin(\alpha) \sin(\omega_0 t) \hat{e} = E \cos(\omega_0 t + \alpha) \hat{e}$$

QUESTO CI DICE CHE $\underline{E}(t)$ RIMANE SEMPRE PARALLELO AD \hat{e} .

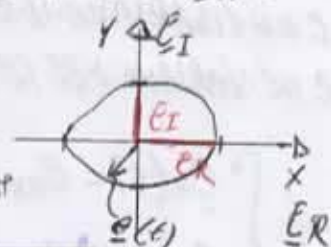
ORTOGONALI

NEL CASO IN CUI \underline{E}_R E \underline{E}_I SIANO ORTOGONALI, COMINCIAMO PORENDO L'ASSE X LUNGO \underline{E}_R E L'ASSE Y LUNGO \underline{E}_I : $\underline{E} = \underline{E}_R + j\underline{E}_I = \underline{E}_x + j\underline{E}_y$

NEL TEMPO AVREMO $\underline{E}(t) = E_x \cos(\omega_0 t) \hat{e}_x - E_y \sin(\omega_0 t) \hat{e}_y$

POSIAMO ORA:

$$\begin{cases} X(t) = E_x \cos(\omega_0 t) \\ Y(t) = -E_y \sin(\omega_0 t) \end{cases} \xrightarrow{\substack{1/E_x \\ 1/E_y}} \begin{cases} \frac{X(t)}{E_x} = \cos(\omega_0 t) \\ \frac{Y(t)}{E_y} = -\sin(\omega_0 t) \end{cases} \xrightarrow{\substack{(\cdot)^2 \\ (\cdot) + (\cdot)}} \boxed{\frac{X^2}{E_x^2} + \frac{Y^2}{E_y^2} = 1}$$



\underline{E} PARABOLI \underline{E} ORTOGONALI

CALCOLIAMO: $\underline{E} \cdot \underline{E} = (\underline{E}_R + j\underline{E}_I) \cdot (\underline{E}_R + j\underline{E}_I) = |\underline{E}_R|^2 - |\underline{E}_I|^2 + 2j\underline{E}_R \cdot \underline{E}_I$

CHE POSSIAMO RISCRIVERE COME: $\underline{E} \cdot \underline{E} = |\underline{E} \cdot \underline{E}| e^{j2\alpha} \xrightarrow{\cdot e^{-j2\alpha}} \underline{E} \cdot \underline{E} \cdot e^{-j2\alpha} = |\underline{E} \cdot \underline{E}| \cdot 1$

$\xrightarrow{\cdot e^{-j2\alpha}} \underline{E} e^{-j2\alpha} \cdot \underline{E} e^{-j2\alpha} = |\underline{E} \cdot \underline{E}| \cdot 1$

$\underline{E}' \cdot \underline{E}' = |\underline{E} \cdot \underline{E}| \rightsquigarrow$ PER QUANTO RIGUARDA LA POLARIZZAZIONE È INDIFFERENTE STUDIARE $\underline{E} \cdot \underline{E}'$.

QUINDI:

•) SE $\underline{E}_R' = 0$ O $\underline{E}_I' = 0$ POL. LIN.

•) SE $\underline{E}_R' = \underline{E}_I'$ POL. CIRC.

•) SE $\underline{E}_R' \neq \underline{E}_I'$ POL. ELL.

POSSIAMO TORNARE AL VETTORE ORIGINALE MOLTIPLICANDO PER $e^{j2\alpha}$

$\underline{E} = \underline{E}' e^{j2\alpha} = (\underline{E}_R' + j\underline{E}_I') e^{j2\alpha}$

DISTINGUIAMO QUINDI:

•) SE \underline{E}

INTRODUZIONE ALLA RADIAZIONE

SE ASSUMIAMO CHE LOCALMENTE IL VETTORE DI POYNTING SI COMPORTA COME UN'ONDA PIANA, POSSIAMO DIRE CHE VELL'INTORNO DI UN PUNTO \underline{r} POSTO A GRANDE DISTANZA DALLE SORGENTI AVREMO:

$$\begin{cases} \underline{E} \approx \underline{F}_0 \frac{e^{-jkr}}{r} \\ \underline{H} \approx \frac{1}{\eta} \hat{e}_r \times \underline{E} \Rightarrow \underline{E} \approx \eta \hat{e}_r \times \underline{H} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{METTENDOLE} \\ \text{INSIEME} \\ \text{ALL'INFINITO} \end{array} \rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} (\underline{E} - \eta \hat{e}_r \times \underline{H}) = 0$$

CONDIZIONE DI RADIAZIONE ALL'INFINITO.

POTENZIALE VETTORE E SCALARE

CONSIDERIAMO LE EQ DI MAXWELL NEL DOMINIO DEI FASORI PER UN MEZZO OMogeneo SENZA PERDITE E CON SORGENTI ELETTRICHE:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega \mu \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = j\omega \epsilon \underline{E} + \underline{J} \\ \nabla \cdot \epsilon \underline{E} = \rho \\ \nabla \cdot \mu \underline{H} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{QUESTA SARÀ SODDISFATTA, SE PONGO:} \\ \underline{H} = \nabla \times \underline{A} \quad \text{POT. VETTORE} \Rightarrow \text{SOSTITUIAMO NELLA 1} \\ \Rightarrow \nabla \times \underline{E} + j\omega \nabla \times \underline{A} = \nabla \times (\underline{E} + j\omega \underline{A}) = 0 \\ \Rightarrow \underline{E} + j\omega \underline{A} = -\nabla \phi \Rightarrow \underline{E} = -j\omega \underline{A} - \nabla \phi \end{array}$$

POT. SCALARE

SOSTITUIAMO ORA NELLA 2:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \underline{A} = j\omega \epsilon (j\omega \underline{A} + \nabla \phi) + \underline{J} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \underline{A} = -j\omega \epsilon \mu \nabla \phi + \omega^2 \epsilon \mu \underline{A} + \mu \underline{J}$$

DA TO CHE: $\nabla \times \nabla \times \underline{A} = \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \underline{A}$

$$\nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \underline{A} = -j\omega \epsilon \mu \nabla \phi + \omega^2 \epsilon \mu \underline{A} + \mu \underline{J} \Rightarrow \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = \nabla \nabla \cdot \underline{A} + j\omega \epsilon \mu \nabla \phi - \mu \underline{J}$$

RACCOLGO $\nabla \cdot \underline{A}$ SECONDO MEMBRO $\Rightarrow \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = \nabla (\nabla \cdot \underline{A} + j\omega \epsilon \mu \phi) - \mu \underline{J}$

ORA SOSTITUIAMO $\underline{E} = -j\omega \underline{A} - \nabla \phi$ IN GAUSS ELETTRICO:

$$\nabla \cdot (-j\omega \underline{A} - \nabla \phi) = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow -j\omega \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \phi = \rho/\epsilon \Rightarrow \nabla^2 \phi = -j\omega \nabla \cdot \underline{A} - \rho/\epsilon$$

SOLITAMENTE VIENE IMPOSTA LA GAUG DI LORENTZ: $\nabla \cdot \underline{A} = -j\omega \mu \epsilon \phi = -j\frac{k^2}{\omega} \phi$

$$\Rightarrow \rho = j\frac{\omega}{k^2} \nabla \cdot \underline{A} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu \underline{J} \\ \nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\rho/\epsilon \end{cases}$$

BIPOLIO ELETTRICO ELEMENTARE

CONSIDERIAMO LE EQ. DI PRIMA:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu \underline{S} \\ \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\rho/\epsilon \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{LA DENSITA' DI CORRENTE DI UN BIPOLIO LUNG O L'ASSE Z} \\ \text{DI LUNGHEZZA } \Delta z \cdot e^-: \underline{S} = I_0 \Delta z \delta(r) \underline{e}_z \end{array} \right.$$

↓ PROIETTIAMO LA PRIMA SUGLI ASSI

$$\begin{cases} \nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu I_0 \Delta z \delta(r) \\ \nabla^2 A_y + k^2 A_y = 0 \\ \nabla^2 A_x + k^2 A_x = 0 \end{cases}$$

QUESTE TRE EQ. SOLO LE EQ. DI HELMOLTZ.

DATO CHE LA PRIMA HA SORSENTI CHE DIPENDONO SOLO DA r POSSIAMO CERCARE SOLUZIONI DIPENDENTI SOLO DA r .

NOTIAMO CHE: $\nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0 \quad \forall r \neq 0$

→ QUINDI PONIAMO $\forall r \neq 0 \quad A_z(r) = \frac{h(r)}{r} \rightarrow \nabla^2 A_z(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} A_z \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 \frac{d}{dr} \frac{h(r)}{r} = r^2 \left(-\frac{h}{r^2} + \frac{h'}{r} \right) = h'r - h \quad \forall r \neq 0 \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{h(r)}{r} \right)$

$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{h(r)}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (h'r - h) \rightarrow$ SOSTITUISCO NELLA PRIMA EQ.

$\Rightarrow \forall r \neq 0 \quad \frac{h''(r)}{r} + k^2 \frac{h(r)}{r} = 0 \Rightarrow \boxed{h''(r) + k^2 h(r) = 0}$ OSCILLATORE ARMONICO

$\Rightarrow h(r) = C e^{-skr} + D e^{skr} \Rightarrow \boxed{A_z(r) = \frac{C e^{-skr}}{r} + \frac{D e^{skr}}{r}}$ SOL. DOBBIAMO QUINDI TROVARE C E D

FISSIAMO $D=0$ PERCHÉ È UN'ONDA CHE VA DALL'INFINITO VERSO L'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO.

TROVIAMO C INTEGRANDO LA PRIMA EQ. IN UN VOLUME:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla^2 A_z + k^2 A_z) dV &= -\mu I_0 \Delta z \quad \text{CHE FACCIAMO TENDERE A ZERO} \\ \Rightarrow \int_V \nabla A_z \cdot \underline{e}_r dS + \int_V k^2 A_z dV &= \int_V \frac{\partial A_z}{\partial r} dS + \int_V k^2 A_z dV = -C \int_V \frac{e^{-skr}}{r^2} dS - \\ &- skC \int_V \frac{e^{-skr}}{r} dS + k^2 C \int_V \frac{e^{-skr}}{r} dV = -\mu I_0 \Delta z \end{aligned}$$

FACCIAMO TENDERE I 3 INTEGRALI PER $V \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow 0} \int_V \frac{e^{-skr}}{r^2} dS &= \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 \frac{e^{-skr}}{r^2} = 4\pi \\ \lim_{V \rightarrow 0} \int_V \frac{e^{-skr}}{r} dS &= \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 \frac{e^{-skr}}{r} = 0 \\ \lim_{V \rightarrow 0} \int_V \frac{e^{-skr}}{r} dV &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{e^{-skr}}{r} = 0 \end{aligned}$$

QUINDI SE SOSTITUIAMO:

$$\frac{1}{4\pi} = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} \Rightarrow C = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi}$$

QUINDI IL POTENZIALE DI UN DIPOLO

→ ELEMENTARE ELETTRICO È:

$$\underline{A}_0 = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{z}$$

CAMPO DI UNA SPIRA

LA DENSITÀ DI UNA SPIRA ELEMENTARE ATTRAVERSA DA CORRENTE È:

$$\underline{J}_s = I_0 \delta(r) \hat{z}$$

MENTRE IL POTENZIALE DELLA SPIRA SARÀ IL ROTORE DEL POTENZIALE DEL DIPOLO:

$$\underline{A}_s = \nabla \times \underline{A}_0 = \frac{\mu I_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \hat{z} \right)$$

CAMPI LONTANI

$$\text{DATO CHE: } \nabla \cdot \underline{A} = \left(-jkr \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r^2} \right) \hat{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -jka \hat{r}$$

CAMPO MAGNETICO

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \left(C \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{z} \right) = \frac{C}{\mu} (-jk) \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{r} \times \hat{z} = \downarrow \\ &= \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} (-jk) \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{r} \times \hat{z} \end{aligned}$$

$$\underline{H} = \frac{I_0 \Delta z}{2\lambda r} j e^{-jkr} \sin(\theta) \hat{\phi}$$

$$\underline{E} = \frac{j\zeta}{2\lambda r} I_0 \Delta z e^{-jkr} \sin(\theta) \hat{\phi}$$

CAMPO LONTANO DA SORGENTI ELEMENTARI

IL POTENZIALE VETTORE E I CAMPI PER UN DIPOLO ELETTRICO ELEMENTARE SONO:

$$\underline{\Sigma} = I_0 \Delta z f(r) \hat{z}$$

$$\underline{A} = \frac{\mu I_0 \Delta z}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{z}$$

$$E_r = \int \frac{I_0 \Delta z}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \cos(\theta)$$

$$E_\theta = \int \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \cdot k \left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta)$$

SE FACCIAMO TENDERE $r \rightarrow \infty$ NELLE EQ. DEI CAMPI ELETTRICO E MAGNETICO, I TERMINI CHE DECADONO PIÙ LENTAMENTE SONO QUELLI CON $\left(\frac{1}{r}\right)$:

$$E_\theta = \int \frac{I_0 \Delta z}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin(\theta)$$

$$H_\phi = \int \frac{I_0 \Delta z}{2\lambda r} e^{-jkr} \sin(\theta)$$

$$H_\phi = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} jk \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta)$$

LE COMPONENTI CHE DECADONO PIÙ VELOCEMENTE VENGONO DETTE REATTIVE PERCHÉ CONTRIBUISCONO AL SOLO FLUSSO DI POT. REATTIVA.

IN PARTICOLARE, IN CAMPO LONTANO, PER OGNI DIPOLO ABBIAMO CHE:

$$\underline{E} = \int \frac{I_0}{2\lambda r} e^{-jkr} \underline{h}(\theta, \phi)$$

$$\underline{H} = \frac{1}{j} \hat{r} \times \underline{E}$$

\underline{h} È UN VETTORE COMPLESSO E PER UN DIPOLO ELEMENTARE VALE:

$$\underline{h}(\theta, \phi) = \Delta z \sin(\theta) \hat{\theta}$$

RADIAZIONE E ALTEZZA EFFICACE

UN PRIMO PARAMETRO È L'ESPRESSIONE DEL CAMPO IRRADIATO DALL'ANTENNA A GRANDE DISTANZA: $\underline{E}(r, \theta, \phi) = \underline{E}_0(r, \theta, \phi)$

ALTEZZA EFFICACE

$$\underline{E} = \frac{j \sqrt{30}}{2\lambda r} e^{-jkr} \underline{h}(\theta, \phi), \quad \underline{H} = \frac{1}{3} \hat{r} \times \underline{E}$$

SI MISURA IN METRI

Questa funzione è l'ALTEZZA EFFICACE. Ed è un VETTORE COMPLESSO FUNZIONE DELLA DIREZIONE DI OSSERVAZIONE.

SOLIDO DI RADIAZIONE

IL SOLIDO DI RADIAZIONE PERMETTE DI VISUALIZZARE IN QUALE DIREZIONE L'ANTENNA TRASMETTE MEGLIO:

$$\underline{E} = \frac{j \sqrt{30}}{2\lambda r} e^{-jkr} \underline{h}(\theta, \phi) \Rightarrow \underline{E} \cdot 2\lambda r = j \sqrt{30} e^{-jkr} \underline{h}(\theta, \phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\underline{E} \cdot 2\lambda r| = |j \sqrt{30} \underline{h}| \Rightarrow \frac{|\underline{E} \cdot 2\lambda r|}{|\underline{E} \cdot 2\lambda r|_{\max}} = \frac{|j \sqrt{30}| |\underline{h}|}{|j \sqrt{30}| |\underline{h}_{\max}|} = \frac{|\underline{h}|}{|\underline{h}_{\max}|}$$

QUESTO RAPPORTO CONFRONTA IL VALORE DELL'ALTEZZA EFFICACE RISPETTO AL VALORE MASSIMO DELL'ALTEZZA EFFICACE.

PER IL DIPOLO ELEMENTARE:

$$\underline{h}(\theta, \phi) = \Delta \sin(\theta) \hat{\theta} \Rightarrow |\underline{h}_{\max}| = \Delta, \quad |\underline{h}| = \Delta |\sin(\theta)|$$

$$\Rightarrow \frac{|\underline{h}|}{|\underline{h}_{\max}|} = \frac{\Delta |\sin(\theta)|}{\Delta} = |\sin(\theta)|$$

RESISTENZA DI RADIAZIONE

VALUTIAMO UN VOLUME CHE CONTENGA UN DIPOLO ELEMENTARE E APPLICHIAMO POYNTING

$$\nabla \cdot \underline{S} = -\frac{1}{2} \omega \mu_0 |\underline{H}|^2 + \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 |\underline{E}|^2 - \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{S}_0^*$$

DOVE:

$$P_G = \int_V -\frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{S}_0^* dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_m ds + \frac{1}{2} \omega \right) \left(\frac{1}{4} \mu_0 |\underline{H}|^2 + \frac{1}{4} \epsilon_0 |\underline{E}|^2 \right) dV$$

POTENZA FORNITA
DAL GEN. ALLA ANTENNA

- PARTO DA QUI

IN PARTICOLARE POSSO SCRIVERE: $P_G = P_R + \frac{1}{2} P_x = \frac{1}{2} V_0 I_0^* = \frac{1}{2} |\underline{I}_0|^2 Z_A$

$$Z_A = R_A + jX_A = \frac{2P_R}{|\underline{I}_0|^2} + j \frac{2P_x}{|\underline{I}_0|^2}$$

* RESISTENZA
DI RADIAZIONE

ORA CALCOLIAMO IL FLUSSO DI POTENZA ATTRAVERSO UNA SFERA:

$$\int_{\partial V} \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \cdot \underline{\hat{e}}_m ds$$

$\underline{\hat{e}}_r \times \underline{\hat{e}}_\theta = \underline{\hat{e}}_\phi$
 $\underline{\hat{e}}_\theta \times \underline{\hat{e}}_\phi = \underline{\hat{e}}_r$
 $\underline{\hat{e}}_\phi \times \underline{\hat{e}}_r = \underline{\hat{e}}_\theta$

$$\Rightarrow \underline{S} = \frac{1}{2} (\underline{E}_r \underline{\hat{e}}_r + \underline{E}_\theta \underline{\hat{e}}_\theta) (\underline{H}_\phi \underline{\hat{e}}_\phi)^* = \frac{1}{2} (-\underline{E}_r \underline{H}_\phi^* \underline{\hat{e}}_\theta + \underline{E}_\theta \underline{H}_\phi^* \underline{\hat{e}}_r)$$

$$\underline{E}_r = \frac{1}{2} \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{jkr^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \cos(\theta)$$

$$\underline{E}_\theta = \frac{1}{2} \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} k \left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta)$$

$$\underline{H}_\phi = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} jk \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta)$$

$$(k = \frac{2\pi}{\lambda})$$

DATO CHE V. E. UNA SFERA: $\underline{\hat{e}}_m = \underline{\hat{e}}_r$

$$\underline{S} \cdot \underline{\hat{e}}_m = \underline{S} \cdot \underline{\hat{e}}_r = \frac{1}{2} (\underline{E}_r \underline{H}_\phi^* \underline{\hat{e}}_\theta + \underline{E}_\theta \underline{H}_\phi^* \underline{\hat{e}}_r) \cdot \underline{\hat{e}}_r = \frac{1}{2} \underline{E}_\theta \underline{H}_\phi^* =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} k \left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta) \right] \left[\frac{I_0 \Delta z}{4\pi} jk \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta) \right]^* =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|I_0 \Delta z|^2}{32\pi^2} \cdot \frac{k^2}{r^2} \left(1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \left(1 - \frac{1}{jkr} \right) \sin^2(\theta) = \frac{1}{2} \frac{|I_0 \Delta z|^2}{32\pi^2} \cdot \frac{k^2}{r^2} \left(1 + \frac{1}{jk^3 r^3} \right) \sin^2(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|I_0|^2}{8\lambda^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{jk^3 r^3} \right) \Delta z^2 \sin^2(\theta) \rightarrow \text{POSSIAMO METTERLO NELL'INTEGRALE}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \underline{S} \cdot \underline{\hat{e}}_m ds = \int_{\partial V} \frac{1}{2} \frac{|I_0|^2}{8\lambda^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{jk^3 r^3} \right) \Delta z^2 \sin^2(\theta) dS$$

$dS = r d\theta r \sin(\theta) d\phi$

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \frac{3 |I_0|^2}{8 \lambda^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{5 k^3 r^3} \right) \Delta_z^2 \sin^2(\theta) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4$$

$$= 3 \frac{|I_0|^2}{8 \lambda^2} \left(1 + \frac{1}{5 k^3 r^3} \right) \Delta_z^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi$$

L'INTEGRALE IN $d\phi$
VALÈ 2π

$$2\pi \int_0^\pi \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta$$

$$t = \cos(\theta) \\ dt = -\sin(\theta) d\theta$$

$$2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta = - \int_1^{-1} (1 - t^2) dt = \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left[\frac{\cos^3(\theta)}{3} - \cos(\theta) \right]_0^\pi$$

$$\Rightarrow 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \pi$$

QUINDI:

$$\int_{\partial V} \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \cdot \underline{e}_n dS = \frac{3 |I_0|^2}{8 \lambda^2} \left(1 + \frac{1}{5 k^3 r^3} \right) \Delta_z^2 \cdot \frac{8}{3} \pi = 4$$

$$= 40\pi^2 \left(\frac{\Delta_z}{\lambda} \right)^2 |I_0|^2 - 540\pi^2 \left(\frac{\Delta_z}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{k^3 r^3} |I_0|^2$$

ABBIAMO TROVATO QUINDI LA RESISTENZA DI RADIAZIONE R_A :

$$R_A = \frac{2P_R}{|I_0|^2} = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta_z}{\lambda} \right)^2$$

RENDIMENTO

QUANDO ALIMENTIAMO UN'ANTENNA, NON TUTTA LA POTENZA ATTIVA TRASFERITA VIENE IRRADIATA, UNA PARTE VIENE DISSIPATA, INTRODUCIAMO QUINDI:

$$\eta = \frac{P_{IRR}}{P_{ING}} = \frac{\frac{1}{2} R_r |I_0|^2}{\frac{1}{2} R_{ING} |I_0|^2} = \frac{R_r}{R_{ING}}$$

MA POSSIAMO SCRIVERE: $P_{ING} = P_{IRR} + P_{LOSS} = \frac{1}{2} R_r |I_0|^2 + \frac{1}{2} R_{LOSS} |I_0|^2$

QUINDI:

$$\eta = \frac{P_{IRR}}{P_{ING}} = \frac{R_r}{R_{ING}} = \frac{R_r}{R_r + R_{LOSS}} < 1$$

$\eta \approx 1$ CON PERDITE TRASC.

DIRETTIVITÀ

È UNA QUANTITÀ CHE CI PERMETTE DI MISURARE QUANTO MEGLIO IRRADIA UN'ANTENNA RISPETTO ALLE ALTRE:

$$D(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \frac{|E|^2}{\epsilon_0}}{\frac{P_{IRR}}{4\pi r^2}}$$

DENSITÀ MEDIA
DI POTENZA
IRRADIATA

PIÙ È ELEVATA IN UNA DIREZIONE, E MEGLIO IRRADIA IN QUELLA DIREZIONE.

POSSIAMO ANCHE ESPRIMERLA INTRODUCENDO L'ALTEZZA EFFICACE;

$$D(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{3 |h(\theta, \phi)|^2 |I_0|^2}{8 \lambda^2 r^2}}{\frac{P_{IRR}}{4\pi r^2}} = \frac{\pi 3}{2 \lambda^2} \frac{|I_0|^2}{\frac{1}{2} R_r |I_0|^2} \frac{|h(\theta, \phi)|^2}{\lambda^2} = \frac{\pi 3}{\lambda^2} \cdot \frac{|h(\theta, \phi)|^2}{R_r}$$

•) PER UN DIPOLO ELETTRICO ELEMENTARE HO:

$$|h_{max}| = \Delta z, \quad R_r = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2$$

$$\text{QUINDI } D_{MAX} = \frac{\pi 3}{\lambda^2} \cdot \frac{|h_{max}|^2}{R_r}$$

$$\Rightarrow D_{MAX} = \frac{\pi 3}{\lambda^2} \cdot \frac{|\Delta z|^2}{80\pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

•) PER UN DIPOLO CORTO HO:

$$h_{max} = l/2 \Rightarrow D_{MAX} = \frac{3}{2}$$

•) PER UN DIPOLO A $\lambda/2$ HO: $h_{max} = \frac{\lambda}{\pi}$, $R_r = 75\Omega \Rightarrow D_{MAX} \approx \frac{8}{3}$

GUADAGNO

LO DEFINIAMO COME:

$$G(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{|E|^2}{2\zeta}}{\frac{P_{\text{ING}}}{4\pi r^2}}$$

, RICORDIAMO CHE $P_{\text{ING}} = P_{\text{IRR}} + P_{\text{LOSS}} = \frac{1}{\eta} P_{\text{IRR}}$

$$\Rightarrow G(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{|E|^2}{2\zeta}}{\frac{P_{\text{IRR}} + P_{\text{LOSS}}}{4\pi r^2}} = \eta D(\theta, \phi) < D(\theta, \phi)$$

ANCHE IL GUADAGNO SI PUO' ESPRIMERE CON L'ALTEZZA EFFICACE:

$$G(\theta, \phi) = \frac{\pi \zeta}{\lambda^2} \cdot \frac{|h(\theta, \phi)|^2}{R_{\text{ING}}}$$

TEOREMA DI RECIPROCIITÀ

CONSIDERIAMO UN MEZZO LINEARE, ISOTROPO, SPAZIALMENTE NON DISPERSIVO E OMogeneo NEL TEMPO, CONSIDERANDO SORGENTI ELETTRICHE E MAGNETICHE:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\Sigma \omega \mu \underline{H} - \underline{\Sigma}_m \\ \nabla \times \underline{H} = \Sigma \omega \epsilon \underline{E} + \underline{\Sigma} \end{cases}$$

CONSIDERIAMO DUE INSIEMI DI SORGENTI:

$$\begin{cases} (\underline{\Sigma}_1, \underline{\Sigma}_{m,1}) \rightarrow (\underline{E}_1, \underline{H}_1) \\ (\underline{\Sigma}_2, \underline{\Sigma}_{m,2}) \rightarrow (\underline{E}_2, \underline{H}_2) \end{cases}$$

DEFINIAMO:

$$\underline{F} = \underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1 \rightarrow \nabla \cdot (\underline{F}) \rightarrow \nabla \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) - \nabla \cdot (\underline{E}_2 \times \underline{H}_1) =$$

$$\rightarrow \nabla \times \underline{E}_1 \cdot \underline{H}_2 - \nabla \times \underline{H}_2 \cdot \underline{E}_1 - \nabla \times \underline{E}_2 \cdot \underline{H}_1 + \nabla \times \underline{H}_1 \cdot \underline{E}_2$$

ORA INSERIAMO LE EQ. DI MAXWELL AI ROTORI:

$$\begin{aligned} & (-\Sigma \omega \mu \underline{H}_1 - \underline{\Sigma}_{m,1}) \cdot \underline{H}_2 - (\Sigma \omega \epsilon \underline{E}_2 + \underline{\Sigma}_2) \cdot \underline{E}_1 - (-\Sigma \omega \mu \underline{H}_2 - \underline{\Sigma}_{m,2}) \cdot \underline{H}_1 + (\Sigma \omega \epsilon \underline{E}_1 + \underline{\Sigma}_1) \cdot \underline{E}_2 \\ & = -\underline{\Sigma}_{m,1} \cdot \underline{H}_2 - \underline{\Sigma}_2 \cdot \underline{E}_1 + \underline{\Sigma}_{m,2} \cdot \underline{H}_1 + \underline{\Sigma}_1 \cdot \underline{E}_2 \rightarrow \text{ORA INTEGRIAMO SU UN VOLUME} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_V \nabla \cdot \underline{F} dV = \int_V \underline{\Sigma}_1 \cdot \underline{E}_2 - \underline{\Sigma}_2 \cdot \underline{E}_1 dV + \int_V \underline{\Sigma}_{m,2} \cdot \underline{H}_1 - \underline{\Sigma}_{m,1} \cdot \underline{H}_2 dV$$

TEOREMA DI RECIPROCIITÀ

ASSENZA DI SORGENTI

$$\text{IN ASSENZA DI SORGENTI} \Rightarrow \underline{\Sigma}_1 = \underline{\Sigma}_2 = \underline{\Sigma}_{m,1} = \underline{\Sigma}_{m,2} = 0 \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \underline{F} dV = \int_{\partial V} \underline{F} \cdot \hat{\underline{c}}_n dS = 0$$

$$\rightarrow \int_{\partial V} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \hat{\underline{c}}_n dS = 0$$

APPLICAZIONE AD UN CER.

SE TUTTO IL VOLUME È RACCHIUSO DA UN CER, L'INTEGRALE DI SUPERFICIE È NULLO:

$$\int_{\partial V} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \hat{\underline{c}}_n dS = \int_{\partial V} (\hat{\underline{c}}_n \times \underline{E}_1 \underline{H}_2 - \hat{\underline{c}}_n \times \underline{E}_2 \underline{H}_1) dS = 0$$

QUESTO INTEGRALE COINVOLGE TUTTE LE COMPONENTI TANGENTI DEI CAMPI ELETTRICI, MA SU C. CER SONO NULLE, QUINDI L'INTEGRALE FA 0.

TUTTO LO SPAZIO

APPLICHIAMO IL TEOREMA A TUTTO LO SPAZIO:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial V} \underline{F} \cdot \hat{\underline{c}}_r dS = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial V} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \hat{\underline{c}}_r dS = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial V} (\hat{\underline{c}}_r \times \underline{E}_1 \underline{H}_2 - \hat{\underline{c}}_r \times \underline{E}_2 \underline{H}_1) dS$$

MA DEVE VALERE LA CONDIZIONE DI RADIATIONE ALL'INFINITO:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\underline{E} - \underline{\zeta} \underline{H} \times \hat{\underline{r}}) = 0 \Rightarrow \underline{E} = \underline{\zeta} \underline{H} \times \hat{\underline{r}} + o\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow \hat{\underline{r}} \times \underline{E} = \underline{\zeta} \underline{H} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

QUINDI SOSTITUIAMO ABBIAMO:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial V} \left(\underline{\zeta} \underline{H}_1 + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) \cdot \underline{H}_2 - \left(\underline{\zeta} \underline{H}_2 + o\left(\frac{1}{r}\right) \right) \cdot \underline{H}_1 \, dS =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial V} o\left(\frac{1}{r}\right) \underline{H}_2 - o\left(\frac{1}{r}\right) \underline{H}_1 \, dS \rightarrow \text{CHÉ DECRESCe PER } \frac{1}{r^2} \downarrow$$

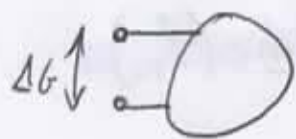
$$\Rightarrow \int_V \nabla \cdot \underline{F} \, dV = \int_V \underline{\zeta}_1 \cdot \underline{E}_2 - \underline{\zeta}_2 \cdot \underline{E}_1 \, dV + \int_V \underline{\zeta}_{m_2} \underline{H}_1 - \underline{\zeta}_{m_1} \underline{H}_2 \, dV = 0$$

$$\int_V \left(\underline{\zeta}_1 \cdot \underline{E}_2 - \underline{\zeta}_2 \cdot \underline{E}_1 + \underline{\zeta}_{m_2} \underline{H}_1 - \underline{\zeta}_{m_1} \underline{H}_2 \right) dV = 0$$

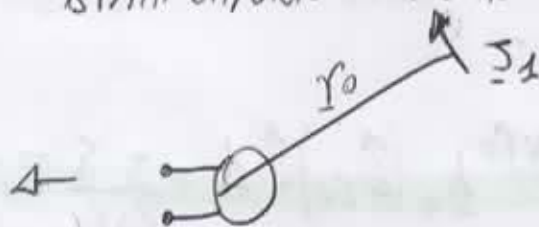
UGUAGLIANZA $h_r = h$

QUESTA UGUAGLIANZA DISPENDE DAL TEOREMA DI RECIPROCA.

CONSIDERIAMO UN'ANTENNA REALIZZATA CON CONDUTTORI E DIELETTICI ISOTROPI.



① APPLICHIAMO IL TEOREMA PRIMA PER UN DIPOLO ELEMENTARE POSTO A GRANDE DISTANZA, ORTOGONALE AL RAGGIO \underline{r}_0 :

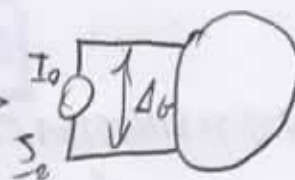


A CUI CORRISPONDE:

$$\underline{S}_1 = \Delta I \delta(|\underline{r} - \underline{r}_0|) \underline{\hat{z}}$$

$\underline{r}_0 \cdot \underline{\hat{z}} = 0$ DATO CHE SONO ORTOGONALI.

② ORA ALIMENTIAMO L'ANTENNA CON UNA CORRENTE I_0



DOVE $\underline{S}_2 = \Delta_G I_0 \delta(\underline{r}) \underline{\hat{z}}$

APPLICHIAMO ORA IL TH. ALLE DUE SITUAZIONI:

① $\underline{S}_1 = \Delta I \delta(|\underline{r} - \underline{r}_0|) \underline{\hat{z}}$ GENERA $\underline{E}_1(\underline{r})$

② $\underline{S}_2 = \Delta_G I_0 \delta(\underline{r}) \underline{\hat{z}}$ GENERA $\underline{E}_2(\underline{r})$

$$\Rightarrow \int_V \underline{S}_1 \cdot \underline{E}_2 - \underline{S}_2 \cdot \underline{E}_1 dV = 0$$

IN PARTICOLARE, NEL SECONDO INTEGRALE: (PER IL S)

$$\Rightarrow \int_V \underline{S}_1 \cdot \underline{E}_2 dV = \int_V \underline{S}_2 \cdot \underline{E}_1 dV$$

$$\underline{E}_2(\underline{r}_0) = \frac{\Delta_G I_0}{2\lambda r_0} e^{-jkr_0} \underline{h}_t(\underline{\hat{r}}_0)$$

QUINDI:

$$\int_V \underline{S}_1 \cdot \underline{E}_2 dV = \int_V \Delta I \delta(|\underline{r} - \underline{r}_0|) \underline{\hat{z}} \cdot \frac{\Delta_G I_0}{2\lambda r} e^{-jkr} \underline{h}_t(\underline{\hat{r}}_r) dV =$$

$$= \frac{\Delta_G I_0}{2\lambda r_0} e^{-jkr_0} \underline{h}_t(\underline{\hat{r}}_0) \underline{\hat{z}} \Delta I$$

È IL CAMPO ELETTRICO TRA I DUE MORSETTI NEL PRIMO CASO

CALCOLIAMO IL SECONDO INTEGRALE:

$$\int_V \underline{S}_2 \cdot \underline{E}_1 dV = \int_V \Delta_G I_0 \delta(\underline{r}) \underline{\hat{z}} \cdot \underline{E}_1 dV = \Delta_G I_0 \underline{\hat{z}} \cdot \underline{E}_1(0)$$

$$\Delta_G \underline{\hat{z}} \cdot \underline{E}_1(0) = -V_0$$

$$\Rightarrow \int_V \underline{S}_2 \cdot \underline{E}_1 dV = \Delta_G I_0 \underline{\hat{z}} \cdot \underline{E}_1(0) = -I_0 V_0$$

QUESTA TENSIONE A VUOTO PUO' ESSERE VALUTATA MEDIANTE \underline{h}_r :

$$V_0 = \underline{\hat{z}} \cdot \underline{h}_r(\underline{\hat{r}}_0)$$

DOVE \underline{E}_1 È IL CAMPO PRODOTTO DAL DIPOLO \underline{S}_1 IN ASSENZA DELL'ANTENNA.

$\underline{E} = \underline{E}$. VALUTATO SUL GAP, QUINDI DOVE $r=0$, QUINDI:

$$\underline{E} = \underline{E}_\Delta = \frac{55 I_\Delta}{2 \lambda r_0} e^{-5 \kappa r_0} \Delta (-\hat{e}) \Rightarrow V_0 = \underline{E} \cdot \underline{h}_r(\hat{e}_{r_0}) = -\frac{55 I_\Delta}{2 \lambda r_0} e^{-5 \kappa r_0} \Delta \hat{e} \cdot \underline{h}_r(\hat{e}_{r_0})$$

QUINDI SOSTITUENDO NELL'INTEGRALE:

$$\int_V \underline{J}_2 \cdot \underline{E}_1 dV = -I_0 V_0 = \frac{55}{2 \lambda r_0} I_0 I_\Delta e^{-5 \kappa r_0} \Delta \hat{e} \cdot \underline{h}_r(\hat{e}_{r_0})$$

APPLICHIAMO IL TH:

$$\frac{55}{2 \lambda r_0} I_0 I_\Delta e^{-5 \kappa r_0} \underline{h}_e(\hat{e}_{r_0}) \cdot \hat{e} \Delta = \frac{55}{2 \lambda r_0} I_0 I_\Delta e^{-5 \kappa r_0} \Delta \hat{e} \cdot \underline{h}_r(\hat{e}_{r_0})$$

$$\Downarrow$$
$$\underline{h}_e(\hat{e}_{r_0}) \cdot \hat{e} = \underline{h}_r(\hat{e}_{r_0}) \cdot \hat{e}$$

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE:

$$\underline{h}_e(\hat{e}_{r_0}) = \underline{h}_r(\hat{e}_{r_0})$$

ANTENNE IN RICEZIONE

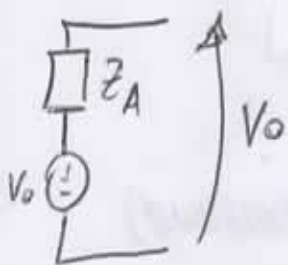
ALTEZZA EFFICACE IN RICEZIONE

SE IMMERGO UN'ANTENNA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO, LE CARICHE DELL'ANTENNA RISENTONO DI QUESTO CAMPO.

SE L'ANTENNA È COLLEGATA AD UN CARICO, LE CARICHE FARANNO CIRCOLARE UNA CORRENTE NEL CARICO.

SE INVECE È LASCIATA CON I MORSETTI APERTI, CI SARÀ UNA TENSIONE A VUOTO AI CAPI DEI MORSETTI.

PER CARATTERIZZARE UN'ANTENNA IN RICEZIONE USO THEVENIN:



IL LEGAME PIÙ GENERALE TRA UN VETTORE E UNO SCALARE

È: $V_0 = E \cdot \underline{l}$, DOVE \underline{l} È UN VETTORE [m].

INOLTRE PER "CAMPO IN CUI È IMMERSA L'ANTENNA" INTENDIAMO IL CAMPO INCIDENTE.

ASSUMIAMO CHE IL CAMPO INCIDENTE SIA GENERATO DA UNA SORGENTE LONTANA E QUINDI CHE IL CAMPO INCIDENTE SIA UN'ONDA PIANA O ALMENO LOCALMENTE PIANA, COSÌ CHE:

$$V_0 = E \cdot h_r$$

DOVE h_r È L'ALTEZZA EFFICACE IN RICEZIONE, CHE DIPENDE DALLA DIREZIONE DA CUI PROVIENE L'ONDA PIANA INCIDENTE.

PER VALUTARE Z_A , CORTOCIRCUITO IL GENERATORE, PONGO UNA TENSIONE V_0 AI CAPI DEL DIPOLO.

LA TENSIONE APPLICATA DIVISO LA CORRENTE PRODOTTA MI DA Z_A .

MA CORTOCIRCUITARE V_0 SIGNIFICA ANNULLARE IL CAMPO INCIDENTE.

FACENDO COSÌ PERÒ OTTENGO UN'ANTENNA TRASMETTENTE, QUINDI LA Z_A È LA STESSA DEL CASO TRASMETTENTE.

AREA EFFICACE

DETERMINIAMO UN PARAMETRO CHE LEGA LA POTENZA TRASFERITA AL CARICO DI UN'ANTENNA IN RICEZIONE CON LA DENSITÀ DI POTENZA INCIDENTE. $\frac{[W]}{[W]/[m^2]} = [m^2]$ CHE CHIAMEREMO AREA EFFICACE.

COME CON L'ALTEZZA EFFICACE CONSIDERIAMO UN CAMPO LOCALMENTE PIANO.

SCHEMIAMO INOLTRE UN CARICO PARI AL CONIUGATO DELL'IMPEDEENZA DI INGRESSO DELL'ANTENNA.

DETTA P_L LA POTENZA ATTIVA TRASFERITA AL CARICO.

ADATT. IN POT.

$$P_L = \frac{1}{2} V_L I_L^* = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{|Z_A + Z_L|^2} Z_L \rightarrow \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{4R_A} R_A = \frac{1}{8} \frac{|V_0|^2}{R_A}$$

$Z_L = Z_A^*$

DOVE $V_0 = \underline{E}_i \cdot \underline{h}_r \rightarrow$ DIPENDE SIA DALLA DIREZIONE DA CUI PROVIENE L'ONDA INCIDENTE, MA ANCHE DALLA POLARIZZAZIONE DEL CAMPO INCIDENTE.

QUINDI FISSIAMO LA POLARIZZAZIONE DI \underline{E}_i IN MODO DA MASSIMIZZARE V_0 .

$$|V_0|^2 = |(\underline{E}_{iR} + j\underline{E}_{iI}) \cdot (\underline{h}_{rR} + j\underline{h}_{rI})|^2 \Rightarrow \text{MAX. } \underline{E}_i = \alpha \underline{h}_r^* \quad \alpha \text{ COMP.}$$

$$\rightarrow V_0 = \alpha (\underline{h}_{rR} + j\underline{h}_{rI}) \cdot (\underline{h}_{rR} + j\underline{h}_{rI})^* = \alpha (h_{rR}^2 + h_{rI}^2)$$

$$\Rightarrow |V_0|^2 = |\alpha|^2 (h_{rR}^2 + h_{rI}^2)^2 = |\underline{E}_i|^2 |\underline{h}_r|^2 \quad (\text{ADATTAMENTO IN POLARIZZAZIONE})$$

\rightarrow MAX. VALORE POSSIBILE

POSSIAMO SCRIVERE L'AREA EFFICACE COME:

$$A_{EFF} = \frac{P_L}{S_i}; \quad P_L = \frac{1}{8} \frac{|V_0|^2}{R_A} = \frac{1}{8} \frac{|\underline{h}_r|^2 |\underline{E}_i|^2}{R_A} \rightarrow \text{DATO CHE } S_i = \frac{1}{2} \frac{|\underline{E}_i|^2}{\zeta}$$

$$E \cdot P_L = \frac{1}{8} \frac{2|\underline{h}_r|^2 \zeta S_i}{R_A}$$

$$\Rightarrow A_{EFF} = \frac{P_L}{S_i} = \frac{1}{4} \frac{|\underline{h}_r|^2 \zeta}{R_A}$$

CONFRONTIAMO QUESTA ESPRESSIONE CON QUELLA DEL GUADAGNO:

$$G(\theta, \phi) = \frac{\pi \zeta}{\lambda^2} \cdot \frac{|\underline{h}(\theta, \phi)|^2}{R_{ING}}$$

CONSIDERANDO CHE:

$$R_{ING} = R_A$$

$$\underline{h}_r = \underline{h}_\theta$$

$$\Rightarrow \frac{A_{EFF}(\theta, \phi)}{G(\theta, \phi)} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

FORMULA DEL COLLEGAMENTO

SUPPONIAMO DI AVERE DUE ANTENNE, UNA TRASMETTENTE E UNA RICEVENTE,
SE L'ANTENNA TRASMETTENTE HA IL GUADAGNO MASSIMO:

$$G_T = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S_{IRR}}{\frac{P_{ING}}{4\pi r^2}}$$

A DISTANZA d VALUTO S_{IRR} :

$$S_{IRR} = G_T \cdot \frac{P_{ING}}{4\pi d^2}$$

CHE È LA DENSITÀ DI
POTENZA GENERATA DALLA
ANTENNA TRASMETTENTE
NELLA DIR. DI MASSIMA RADIAZ.

SE PONIAMO L'ANTENNA RICEVENTE
IN TALE DIREZIONE, ADATTANDO LA IN POLARIZZAZIONE
E IN POTENZA, POSSIAMO VALUTARE LA POTENZA MASSIMA RICEVIBILE IN
RELAZIONE ALL'AREA EFFICACE:

$$A_{EFF} = \frac{P_L}{S_i} \Rightarrow P_L = A_{EFF} \cdot S_i$$

$$\uparrow \\ S_i = S_{IRR}$$

$$P_L = A_{EFF} \cdot G_T \cdot \frac{P_{ING}}{4\pi d^2}$$

FORMULA
DEL
COLLEGAMENTO

SE SCRIVIAMO A_{EFF} IN FUNZIONE DEL GUADAGNO:

$$A_{EFF} = G_R \frac{\lambda^2}{4\pi}, \Rightarrow P_L = G_R G_T \lambda^2 \frac{P_{ING}}{(4\pi d)^2}$$

TEOREMA DELLE IMMAGINI

• DIPOLO ELETTRICO VERTICALE SU UN CEP (I)

IN QUESTO CASO IL TH AFFERMA CHE IL CAMPO PRODOTTO DA TALE DIPOLO AL DI SOPRA DEL PIANO È LO STESSO CHE PRODURREBBE, IN ASSENZA DEL PIANO, IL DIPOLO PIÙ UN ALTRO DIPOLO IDENTICO AL PRIMO, ALIMENTATO DALLA STESSA CORRENTE E POSTO IN POSIZIONE SIMMETRICA, LUNGO LO STESSO ASSE.

PER DIMOSTRARLO VERIFICHIAMO CHE LA SOMMA DEL CAMPO PRODOTTO DAL DIPOLO E DALLA SUA IMMAGINE ABBAIA COMPONENTE TANGENTE AL CEP NULLA.

$$E_r = \sum \frac{I_0 \Delta z}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{5kr^2} \right) \frac{e^{-5kr}}{r} \cos(\theta) = I_0 g(r) \cos(\theta)$$

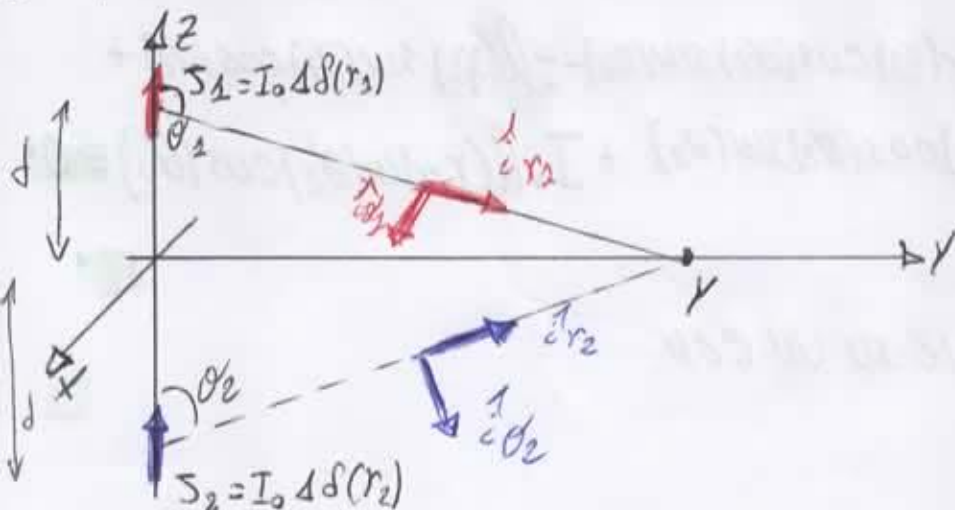
$$E_\theta = \sum \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} K \left(2 + \frac{1}{5kr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \frac{e^{-5kr}}{r} \sin(\theta) = I_0 h(r) \sin(\theta)$$

$$H_\phi = \sum \frac{I_0 \Delta z}{4\pi} K \left(2 + \frac{1}{5kr} \right) \frac{e^{-5kr}}{r} \sin(\theta) = I_0 \ell(r) \sin(\theta)$$

$$\underline{E} = E_r \hat{e}_r + E_\theta \hat{e}_\theta = I_0 [g(r) \cos(\theta) \hat{e}_r + h(r) \sin(\theta) \hat{e}_\theta]$$

$$\underline{H} = H_\phi \hat{e}_\phi = I_0 \ell(r) \sin(\theta) \hat{e}_\phi$$

CONSIDERIAMO UN GENERICO PUNTO SUL CEP E FISSIAMO IL SISTEMA DI RIF. CON Y PASSANTE PER TAL PUNTO:



VALUTIAMO L'EFFETTO DEI DIPOLI SEPARATI.

$$r_1 = \sqrt{d^2 + y^2}$$

$$\theta_1 = \pi - \theta_2$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_{\theta_1} &= \cos(\theta_1) \hat{e}_y - \sin(\theta_1) \hat{e}_z = \\ &= -\cos(\theta_2) \hat{e}_y - \sin(\theta_2) \hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_{r_1} &= \sin(\theta_1) \hat{e}_y + \cos(\theta_1) \hat{e}_z = \\ &= \sin(\theta_2) \hat{e}_y - \cos(\theta_2) \hat{e}_z \end{aligned}$$

$$r_2 = \sqrt{d^2 + y^2} = r_1$$

$$\theta_2 = \pi - \theta_1$$

$$\hat{e}_{\theta_2} = \cos(\theta_2) \hat{e}_y - \sin(\theta_2) \hat{e}_z$$

$$\hat{e}_{r_2} = \sin(\theta_2) \hat{e}_y + \cos(\theta_2) \hat{e}_z$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_1 &= I_0 \left(q(r_1) \cos(\theta_1) \hat{e}_{r_1} + h(r_1) \sin(\theta_1) \hat{e}_{\theta_1} \right) \\ \underline{E}_2 &= I_0 \left(q(r_2) \cos(\theta_2) \hat{e}_{r_2} + h(r_2) \sin(\theta_2) \hat{e}_{\theta_2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2$$

$$\begin{aligned} \underline{E} &= I_0 \left[\left(q(r_1) \cos(\theta_1) - \sin(\theta_2) \right) - h(r_1) \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \right. \\ &\quad \left. + q(r_2) \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + h(r_2) \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \right) \hat{e}_y + \\ &\quad \left. + (---) \hat{e}_z \right] \end{aligned}$$

$$\text{QUINDI LUNGO } \hat{e}_y \text{ HO: } -I_0 q(r) \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) - I_0 h(r) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \\ + I_0 q(r) \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) + I_0 h(r) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) = 0$$

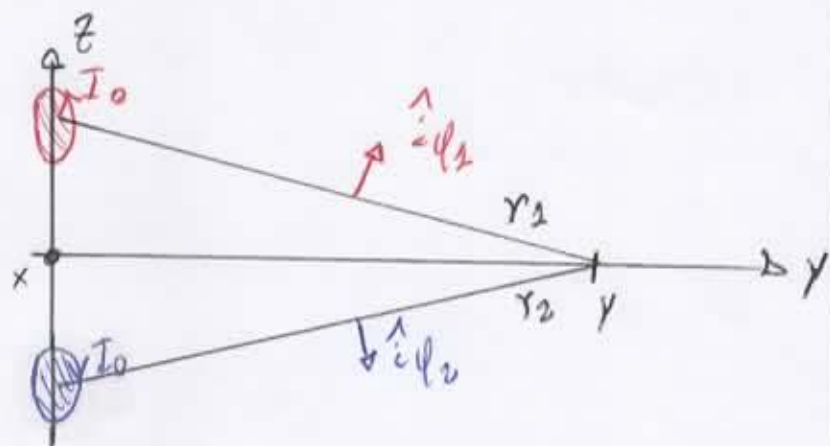
□

•) DIPOLO ELETTRICO ORIZZONTALE SU UN CDP.
ANALOGA.

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$$

0) DIPOLO MAGNETICO VERTICALE SU UN CER

IL CAMPO ELETTRICO PRODOTTO DA TALE DIPOLO È QUELLO CHE PRODURREBBE IN ASSENZA DEL PIANO, IL DIPOLO PIÙ LA SUA IMMAGINE ALIMENTATA DA UNA CORRENTE CON SEGNO OPPOSTO.



PER UN DIPOLO MAGNETICO HO:

$$\underline{J}_m = I_{m0} \Delta z \delta(r) \hat{e}_z$$

CHE GENERA:

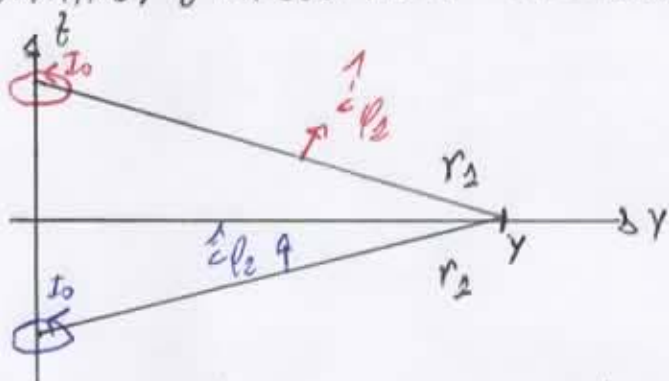
$$\underline{E}_\phi = \frac{I_0 (-\nabla \times \nabla \times)}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{\nabla k r} \right) \frac{e^{-\nabla k r}}{r} \sin \theta$$

$$= I_0 \rho(r) \sin(\theta) \hat{e}_\phi$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{J}_{m1} &= I_{m0} \Delta z \delta(|\underline{r} - d \hat{e}_z|) \hat{e}_z \\ \underline{J}_{m2} &= -I_{m0} \Delta z \delta(|\underline{r} + d \hat{e}_z|) \hat{e}_z \end{aligned} \right\} \text{SONO OPPOSTI} \quad \square$$

0) DIPOLO MAGNETICO ORIZZONTALE SU UN CER

IL CAMPO PRODOTTO DA TALE DIPOLO È QUELLO CHE PRODURREBBE IN ASSENZA DEL PIANO, IL DIPOLO PIÙ LA SUA IMMAGINE ALIMENTATO DALLA STESSA CORRENTE.



$$\hat{e}_1 = \sin(\varphi) \hat{e}_y + \cos(\varphi) \hat{e}_z$$

$$\hat{e}_2 = -\sin(\varphi) \hat{e}_y + \cos(\varphi) \hat{e}_z$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_1 &= I_{m0} \rho(r) \sin(\theta) (\sin(\varphi) \hat{e}_y + \cos(\varphi) \hat{e}_z) \\ \underline{E}_2 &= I_{m0} \rho(r) \sin(\theta) (-\sin(\varphi) \hat{e}_y + \cos(\varphi) \hat{e}_z) \end{aligned} \right\} (\underline{E}_1 + \underline{E}_2) \cdot \hat{e}_y = 0 \quad \square$$

ONDE PIANE INCIDENTI SU UN CER

SUPPONIAMO DI AVERE UN MEZZO LINEARE, OMogeneo, ISOTROPO E SENZA PERDITE CON DELLE SORGENTI, CHE GENERANO ONDE PIANE:

$$\begin{cases} \underline{E}_i = \underline{E}^+ e^{-jKz} \\ \underline{H}_i = \underline{H}^+ e^{-jKz} \\ \underline{E}_i = \sum \underline{H}_i \times \hat{z} \\ \underline{E}_i \cdot \hat{z} = \underline{H}_i \cdot \hat{z} = 0 \end{cases}$$

IN SERIAMO ORA UN CER IN $z > 0$, E SICO CHE:

- 1) NEL CER IL CAMPO ELETTRICO È NULLO E SULLA FRONTIERA IL CAMPO MAGNETICO È DISCONTINUO.
- 2) NON C'È CONTINUITÀ DEI CAMPI.

DOBBIAMO FAR IN MODO DI AVERE:

- 1) COMPONENTE TANGENTE DI \underline{E} NULLA PER $z < 0$
- 2) COMPONENTE TANGENTE DI \underline{H} DISCONTINUA PER $z = 0$

QUINDI COSTRUIAMO LA SOLUZIONE COME SOMMA DI DUE ONDE, INCIDENTE E RIFLESSA:

$$\begin{cases} \underline{E}_r = \underline{E}^- e^{jKz} \\ \underline{H}_r = \underline{H}^- e^{jKz} \\ \underline{E}_r = \sum \underline{H}_r \times \hat{z} \\ \underline{E}_r \cdot \hat{z} = \underline{H}_r \cdot \hat{z} = 0 \end{cases}$$

LA SOMMA DI QUESTE DUE ONDE È COSTANTE E TANGENTE SU $z = 0$:

$$\underline{E} = \underline{E}_i + \underline{E}_r \Rightarrow \underline{E}(z=0) = \underline{E}^+ + \underline{E}^- \Rightarrow \underline{E}^+ = -\underline{E}^-$$

ORA SAPENDO CHE:

$$\underline{H}^+ = \frac{1}{j} \hat{z} \times \underline{E}^+ \Rightarrow \underline{H}^- = \frac{1}{j} (-\hat{z}) \times (-\underline{E}^+) = \underline{H}^+$$

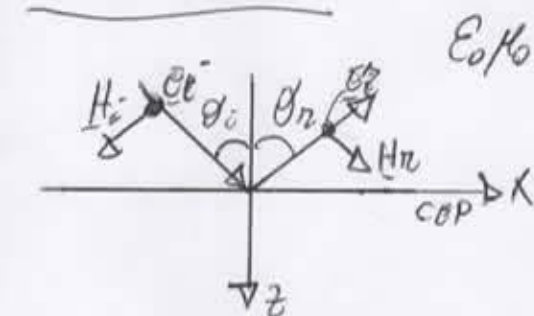
INFINE HO:

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{E}^+ e^{-jKz} - \underline{E}^+ e^{jKz} = 2j \underline{E}^+ \sin(Kz) \\ \underline{H} &= \underline{H}^+ e^{-jKz} + \underline{H}^+ e^{jKz} = 2 \underline{H}^+ \cos(Kz) \end{aligned}$$

\Rightarrow

- 1) $\underline{E}(z=0) = 0$
- 2) $\underline{H}(z=0) = 2 \underline{H}^+ \neq 0$

INCIDENZA ORLQUA



DOVE:

$$\begin{aligned} \underline{K}_i &= K_{ix} \hat{x} + K_{iz} \hat{z} = \\ &= K \sin(\theta_i) \hat{x} + K \cos(\theta_i) \hat{z} \end{aligned}$$

IN QUESTO CASO L'ONDA INCIDENTE È:

$$\begin{cases} \underline{E}_i = \underline{E}^+ e^{-j \underline{K}_i \cdot \underline{r}} \\ \underline{H}_i = \underline{H}^+ e^{-j \underline{K}_i \cdot \underline{r}} \\ \underline{E}_i = \sum \underline{H}_i \times \hat{K}_i \\ \underline{E}_i \cdot \hat{K}_i = \underline{H}_i \cdot \hat{K}_i = 0 \end{cases}$$

IN $z=0$ HO UNA CORRENTE SUPERFICIALE $\underline{J}_s = 2 \underline{H}^+ \times \hat{z}$

ANCHE IN QUESTO CASO CERCEREMO DI SODDISFARE LE CONDIZIONI A CONFINO INTRODUCENDO UN'ONDA RIFLESSA;

$$\begin{cases} \underline{E}_r = \underline{E}^- e^{-jK_r \cdot \underline{r}} \\ \underline{H}_r = \underline{H}^- e^{-jK_r \cdot \underline{r}} \end{cases}$$

DOVE $\underline{K}_r = K_{rx} \hat{x} + K_{rz} \hat{z} = K \sin(\theta) \hat{x} - K \cos(\theta) \hat{z}$
 IMPONGO ORA LA SOMMA DELL'ONDA INCIDENTE E DELL'ONDA RIFLESSA CON COMPONENTE TANGENTE DEL CAMPO ELETTRICO NULLA SU $z=0$.

$$\begin{cases} \underline{E}_r = -\underline{H}_r \times \hat{k}_r \\ \underline{E} \cdot \hat{k}_r = \underline{H} \cdot \hat{k}_r = 0 \end{cases}$$

$$\underline{E}_i(x, z=0) = E^+ e^{-jK_{ix} \cdot x}, \quad \underline{E}_r(x, z=0) = E^- e^{-jK_{rx} \cdot x}$$

$$\Rightarrow \hat{z} \times (\underline{E}_i(x, z=0) + \underline{E}_r(x, z=0)) = \hat{z} \times (E^+ e^{-jK_{ix} \cdot x} + E^- e^{-jK_{rx} \cdot x}) = 0$$

QUINDI DOBBIAMO IMPORRE $\rightarrow e^{-jK_{ix} \cdot x} = e^{-jK_{rx} \cdot x}$ CHE AVVIENE

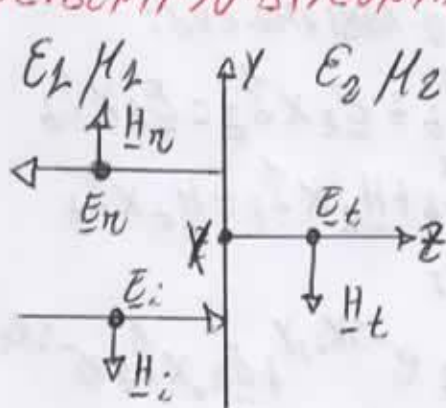
$$\Rightarrow K_{ix} = K \sin(\theta) = K_{rx} = K \sin(\theta_r) \Rightarrow \theta_i = \theta_r = \theta$$

INOLTRE DOBBIAMO IMPORRE;

$$\hat{z} \times \underline{E}^+ = -\hat{z} \times \underline{E}^- \rightarrow \text{CHE VUOL DIRE} \rightarrow \begin{cases} E_x^+ = -E_x^- \\ E_y^+ = -E_y^- \end{cases}$$



ONDE INCIDENTI SU DISCONTINUITÀ



$$\underline{E}_i = \underline{E}_{0i} e^{-j k_1 z}$$

DOVE:

$$k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$$

$$\underline{H}_i = \underline{H}_{0i} e^{-j k_1 z}$$

$$\underline{E}_i = \xi_1 \underline{H}_i \times \hat{z}$$

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

$$\underline{E}_t = \underline{E}_{0t} e^{-j k_2 z}$$

DOVE:

$$k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$$

$$\underline{H}_t = \underline{H}_{0t} e^{-j k_2 z}$$

$$\underline{E}_t = \xi_2 \underline{H}_t \times \hat{z}$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

$$\underline{E}_r = \underline{E}_{0r} e^{j k_1 z}$$

$$\underline{H}_r = \underline{H}_{0r} e^{j k_1 z}$$

$$\underline{E}_r = \xi_1 \underline{H}_r \times (-\hat{z})$$

→ COSÌ ABBIAMO CHE A $z=0$:

$$\begin{cases} \underline{E}_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t} \\ \underline{H}_{0i} + \underline{H}_{0r} = \underline{H}_{0t} \end{cases}$$

→ CHE POSSIAMO

SCRIVERE IN TERMINI SCALARI.

POVIAMO ORA:

$$\Gamma = \frac{E_{0r}}{E_{0i}}, \quad \tau = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}$$

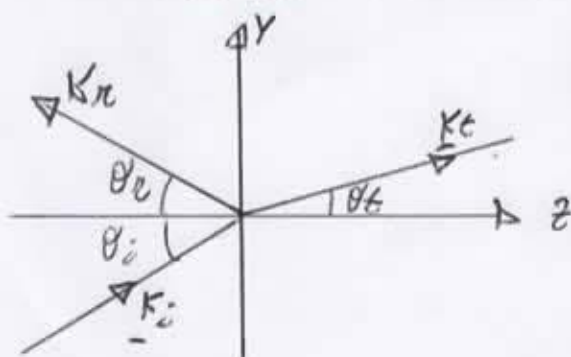
$$\begin{cases} 1 + \Gamma = \tau \\ \frac{1}{\xi_1} - \frac{\Gamma}{\xi_1} = \frac{\tau}{\xi_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \\ \frac{E_{0i}}{\xi_1} - \frac{E_{0r}}{\xi_1} = \frac{E_{0t}}{\xi_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \\ H_{0i} + H_{0r} = H_{0t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{RISOLVO} \rightarrow \begin{cases} \Gamma = \tau - 1 \\ \frac{\tau}{\xi_2} = \frac{2}{\xi_1} - \frac{\tau}{\xi_1} \end{cases} & \rightarrow \begin{cases} \Gamma = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 + \xi_1} \\ \tau = \frac{2}{\xi_1} \left(\frac{\xi_2 + \xi_1}{\xi_2 \xi_1} \right)^{-1} = \frac{2 \xi_2}{\xi_1 + \xi_2} \end{cases} \end{aligned}$$

ONDE INCIDENTI OBLIQUE SU DISCONTINUITÀ



$$\underline{E}_i = \underline{E}_{i0} e^{-j k_{iz} z} = \underline{E}_{i0} e^{-j (k_{iy} y + k_{iz} z)}$$

$$\underline{H}_i = \underline{H}_{i0} e^{-j (k_{iy} y + k_{iz} z)}$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_i &= \xi_1 \underline{H}_i \times \hat{k}_i = \xi_1 \underline{H}_i \times \frac{\underline{k}_i}{|\underline{k}_i|} = \xi_1 \underline{H}_i \times \frac{\underline{k}_i}{\omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \\ &= \underline{H}_i \times \frac{\underline{k}_i}{\omega \epsilon_1} \end{aligned}$$

$$\underline{H}_i = \frac{1}{\xi_1} \hat{k}_i \times \underline{E}_i = \frac{\underline{k}_i}{\omega \mu_1} \times \underline{E}_i$$

ONDA RIFLESSA

$$\underline{E}_r = \underline{E}_{r0} e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} = \underline{E}_{r0} e^{-j(k_{ry}y + k_{rz}z)}$$

$$\underline{H}_r = \underline{H}_{r0} e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} = \underline{H}_{r0} e^{-j(k_{ry}y + k_{rz}z)}$$

$$\underline{E}_r = \zeta_1 \underline{H}_r \hat{\mathbf{k}}_r = \underline{H}_r \times \frac{\mathbf{k}_r}{\omega \epsilon_1}$$

$$\underline{H}_r = \frac{1}{\zeta_1} \hat{\mathbf{k}}_r \times \underline{E}_r = \frac{\mathbf{k}_r}{\omega \mu_1} \times \underline{E}_r$$

ONDA TRASMESSA

$$\underline{E}_t = \underline{E}_{t0} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} = \underline{E}_{t0} e^{-j(k_{tx}x + k_{tz}z)}$$

$$\underline{H}_t = \underline{H}_{t0} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} = \underline{H}_{t0} e^{-j(k_{tx}x + k_{tz}z)}$$

$$\underline{E}_t = \zeta_2 \underline{H}_t \hat{\mathbf{k}}_t = \underline{H}_t \times \frac{\mathbf{k}_t}{\omega \epsilon_2}$$

$$\underline{H}_t = \frac{1}{\zeta_2} \hat{\mathbf{k}}_t \times \underline{E}_t = \frac{\mathbf{k}_t}{\omega \mu_2} \times \underline{E}_t$$

$$k_1 \sin(\theta_i) = k_1 \sin(\theta_r) = k_2 \sin(\theta_t)$$

↓

$$\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin(\theta_i) = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin(\theta_t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{m_1 \sin(\theta_i) = m_2 \sin(\theta_t)} \text{ SNELL}$$

VERIFICHIAMO LA CONTINUITÀ DELLE COMPONENTI TANGENTI NELL'ORIGINE:

$$\underline{E}_{i0} \hat{\mathbf{z}} + \underline{E}_{r0} \hat{\mathbf{z}} = \underline{E}_{t0} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\underline{H}_{i0} \hat{\mathbf{z}} + \underline{H}_{r0} \hat{\mathbf{z}} = \underline{H}_{t0} \hat{\mathbf{z}}$$

A. z = 0. ABBIAMO CHE:

$$\underline{E}_i \hat{\mathbf{z}} + \underline{E}_r \hat{\mathbf{z}} = \underline{E}_t \hat{\mathbf{z}}$$

$$\underline{H}_i \hat{\mathbf{z}} + \underline{H}_r \hat{\mathbf{z}} = \underline{H}_t \hat{\mathbf{z}}$$

OVVERO:

$$\underline{E}_{i0} \hat{\mathbf{z}} e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \underline{E}_{r0} \hat{\mathbf{z}} e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} = \underline{E}_{t0} \hat{\mathbf{z}} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}$$

$$\underline{H}_{i0} \hat{\mathbf{z}} e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \underline{H}_{r0} \hat{\mathbf{z}} e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} = \underline{H}_{t0} \hat{\mathbf{z}} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}$$

QUANTE DEVONO VALERE VY, QUINDI:

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

CHE POSSIAMO RISCRIVERE COME:

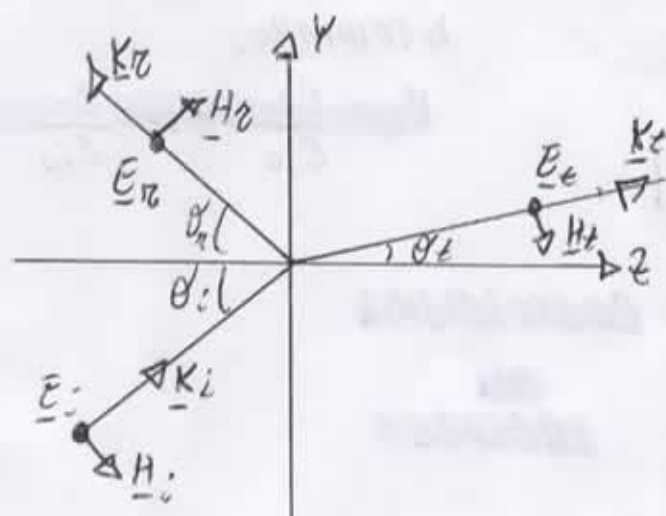
INTRODUCENDO L'INDICE DI RIFRAZIONE:

$$m_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

È PIÙ FACILE STUDIARLA DIVIDENDO L'ONDA INCIDENTE IN DUE ONDE PIANE, UNA TE E UNA TM.



INCIDENZA.TE



ONDA.RIFLESSA

$$\underline{E}_r = \underline{E}_{r0} e^{-j\underline{k}_r \cdot \underline{z}} \underline{\hat{x}}$$

$$\underline{H}_r = \underline{H}_{r0} e^{-j\underline{k}_r \cdot \underline{z}}$$

$$\downarrow \underline{H}_{r0} = \frac{1}{\xi_1} \underline{\hat{k}}_r \times \underline{E}_{r0} \underline{\hat{x}} = \frac{E_{r0}}{\omega \mu_1} \underline{k}_r \times \underline{\hat{x}} = \frac{E_{r0}}{\omega \mu_1} (k_{ry} \underline{\hat{y}} + k_{rz} \underline{\hat{z}}) \times \underline{\hat{x}} =$$

$$= \left[\frac{k_{rz}}{\omega \mu_1} E_{r0} \underline{\hat{y}} - \frac{k_{ry}}{\omega \mu_1} E_{r0} \underline{\hat{z}} \right]$$

$$H_{roy} \rightarrow = -\frac{k_z \cos(\theta_i)}{\omega \mu_1} E_{r0} = -\frac{E_{r0}}{Z_{TE1}}$$

ONDA.TRASMESSA

$$\underline{E}_t = \underline{E}_{t0} e^{-j\underline{k}_t \cdot \underline{z}} \underline{\hat{x}}$$

$$\underline{H}_t = \underline{H}_{t0} e^{-j\underline{k}_t \cdot \underline{z}}$$

$$\downarrow \underline{H}_{t0} = \frac{1}{\xi_2} \underline{\hat{k}}_t \times \underline{E}_{t0} \underline{\hat{x}} = \frac{E_{t0}}{\omega \mu_2} \underline{k}_t \times \underline{\hat{x}} = \frac{E_{t0}}{\omega \mu_2} (k_{ty} \underline{\hat{y}} + k_{tz} \underline{\hat{z}}) \times \underline{\hat{x}} =$$

$$= \left[\frac{k_{tz}}{\omega \mu_2} E_{t0} \underline{\hat{y}} + \frac{k_{ty}}{\omega \mu_2} E_{t0} \underline{\hat{z}} \right]$$

$$H_{toy} \rightarrow = \frac{k_z \cos(\theta_t)}{\omega \mu_2} E_{t0} = \frac{E_{t0}}{Z_{TE2}}$$

ONDA. INCIDENTE

$$\underline{E}_i = \underline{E}_{i0} e^{-j\underline{k}_i \cdot \underline{z}} \underline{\hat{x}} = \underline{E}_{i0} e^{-j(k_{iy} \underline{\hat{y}} + k_{iz} \underline{\hat{z}})}$$

$$\underline{H}_i = \underline{H}_{i0} e^{-j(k_{iy} \underline{\hat{y}} + k_{iz} \underline{\hat{z}})}$$

$$\underline{H}_{i0} = \frac{1}{\xi_1} \underline{\hat{k}}_i \times \underline{E}_{i0} \underline{\hat{x}} = \frac{E_{i0}}{\omega \mu_1} \underline{k}_i \times \underline{\hat{x}} =$$

$$= \frac{E_{i0}}{\omega \mu_1} (k_{iy} \underline{\hat{y}} + k_{iz} \underline{\hat{z}}) \times \underline{\hat{x}} =$$

$$= \left[\frac{k_{iz}}{\omega \mu_1} E_{i0} \underline{\hat{y}} - \frac{k_{iy}}{\omega \mu_1} E_{i0} \underline{\hat{z}} \right]$$

$$= H_{i0y}$$

$$H_{i0y} = E_{i0} \frac{k_z \cos(\theta_i)}{\omega \mu_1} = \frac{E_{i0}}{Z_{TE1}}$$

DOBBIAMO IMPORRE LA CONTINUITÀ DEI CAMPI, PONIAMO ALL'ORIGINE PER SEMPLICITÀ;

$$\begin{cases} E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ H_{i0y} + H_{r0y} = H_{t0y} \rightarrow \frac{E_{i0}}{Z_{TE1}} - \frac{E_{r0}}{Z_{TE1}} = \frac{E_{t0}}{Z_{TE2}} \end{cases}$$

DEFINIAMO:

$$\Gamma_{TE} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}}, \quad \tau_{TE} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \Gamma_{TE} = \tau_{TE} \\ \frac{1}{Z_{TE1}} + \frac{\Gamma_{TE}}{Z_{TE1}} = \frac{\tau_{TE}}{Z_{TE2}} \end{cases}$$

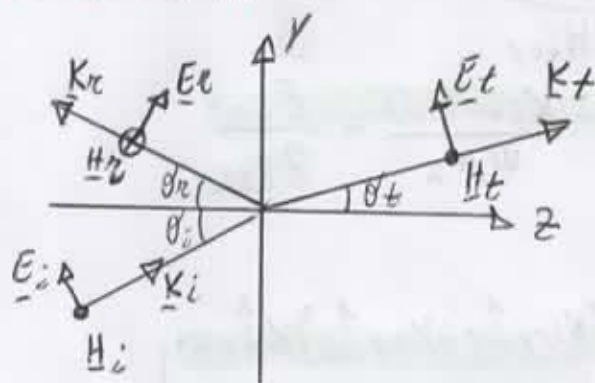
$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{TE} = \frac{Z_{TE2} - Z_{TE1}}{Z_{TE2} + Z_{TE1}} \\ \tau_{TE} = \frac{2Z_{TE2}}{Z_{TE2} + Z_{TE1}} \end{cases}$$

COEFFICIENTI

DI

FRESNEL

INCIDENZA TH



ONDA INCIDENTE

$$\underline{H}_i = H_{i0} e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \underline{r}} \hat{x}$$

$$\underline{E}_i = E_{i0} e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \underline{r}}$$

↓

$$\underline{E}_{i0} = \zeta_1 H_{i0} \hat{x} \times \hat{k}_i =$$

$$= \frac{H_{i0}}{\omega \epsilon_1} \hat{x} \times \underline{k}_i = \frac{H_{i0}}{\omega \epsilon_1} \hat{x} \times (k_{iy} \hat{y} + k_{iz} \hat{z})$$

$$= \frac{k_{iz}}{\omega \epsilon_1} H_{i0} \hat{z} - \frac{k_{iy}}{\omega \epsilon_1} H_{i0} \hat{y}$$

$$E_{i0y} = \underbrace{-\frac{k_1 \cos(\theta_i)}{\omega \epsilon_1} H_{i0}}_{Z_{TH1}}$$

ONDA RIFLESSA

$$\underline{H}_r = H_{r0} e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \underline{r}} \hat{x}$$

$$\underline{E}_r = E_{r0} e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{E}_{r0} = \zeta_1 H_{r0} \hat{x} \times \hat{k}_r = \frac{H_{r0}}{\omega \epsilon_1} \hat{x} \times \underline{k}_r =$$

$$= \frac{H_{r0}}{\omega \epsilon_1} \hat{x} \times (k_{ry} \hat{y} + k_{rz} \hat{z}) = \frac{k_{rz}}{\omega \epsilon_1} H_{r0} \hat{z} - \frac{k_{ry}}{\omega \epsilon_1} H_{r0} \hat{y}$$

$$E_{r0y} = \underbrace{\frac{k_1 \cos(\theta_r)}{\omega \epsilon_1} H_{r0}}_{-Z_{TH1}}$$

ONDA TRASMESSA

$$\underline{H}_t = H_{t0} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \underline{r}} \hat{x}$$

$$\underline{E}_t = E_{t0} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{E}_{t0} = \zeta_2 H_{t0} \hat{x} \times \hat{k}_t = \frac{H_{t0}}{\omega \epsilon_2} \hat{x} \times \underline{k}_t = \frac{H_{t0}}{\omega \epsilon_2} \hat{x} \times (k_{ty} \hat{y} + k_{tz} \hat{z}) =$$

$$= \frac{k_{tz}}{\omega \epsilon_2} H_{t0} \hat{z} - \frac{k_{ty}}{\omega \epsilon_2} H_{t0} \hat{y}$$

$$E_{t0y} = \underbrace{-\frac{k_2 \cos(\theta_t)}{\omega \epsilon_2} H_{t0}}_{Z_{TH2}}$$

IPOTESI DI CONTINUITÀ:

$$\begin{cases} E_{ioy} + E_{roy} = E_{toy} \\ H_{io} + H_{ro} = H_{to} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{ioy} + E_{roy} = E_{toy} \\ \frac{E_{ioy}}{Z_{TH1}} - \frac{E_{roy}}{Z_{TH1}} = \frac{E_{toy}}{Z_{TH2}} \end{cases}$$

DEFINISCO:

$$\Gamma_{TH} = \frac{E_{roy}}{E_{ioy}}$$

SOSTITUISCO

$$Z_{TH} = \frac{E_{toy}}{E_{ioy}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \Gamma_{TH} = Z_{TH} \\ \frac{1}{Z_{TH1}} - \frac{\Gamma_{TH}}{Z_{TH1}} = \frac{Z_{TH}}{Z_{TH2}} \end{cases}$$

⇒ RISOLVO ⇒

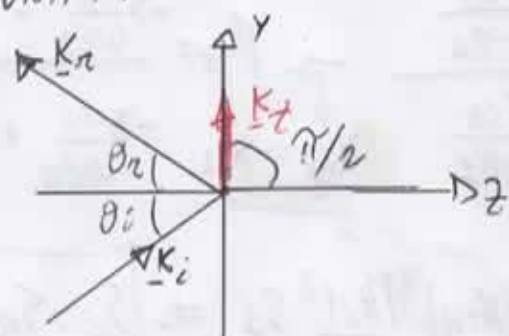
$$\begin{cases} \Gamma_{TH} = \frac{Z_{TH2} - Z_{TH1}}{Z_{TH2} + Z_{TH1}} \\ Z_{TH} = \frac{2Z_{TH1}}{Z_{TH2} + Z_{TH1}} \end{cases}$$

COEFFICIENTI DI FRESNELL

RIFLESSIONE TOTALE

NEL CASO IN CUI:

$\sin(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1} < 1$ ABBIAMO UNA RIFLESSIONE TOTALE: $\Rightarrow \theta_c = \frac{\pi}{2}$



MA NULLA CI IMPEDISCE DI SCEGLIERE $\sin(\theta_c) > \frac{n_2}{n_1} < 1$, IN QUESTO CASO NON TROVIAMO ALCUN ANGOLO REALE CHE SODDISFACCA LEGGI DI SNELL.

SAPPIAMO CHE:

$$k_1 \sin(\theta_1) = k_1 y = k_2 y \leadsto \text{MA SE } \theta = \text{UN CERTO ANGOLO } \theta_c$$

$\Rightarrow k_1 y = k_1 \sin(\theta_c) = k_2 = k_2 y$ SE $k_2 z = 0 \Rightarrow$ QUINDI NEL SECONDO MEZZO TUTTA L'ONDA SI PROPAGA IN DIREZIONE $\frac{1}{2}y$

o $\theta_1 > \theta_c$:

$$k_1 y = k_1 \sin(\theta_1) > k_1 \sin(\theta_c) = k_2 \leadsto \text{E PER SNELL } k_1 \sin(\theta_1) = k_1 y = k_2 y > k_2$$

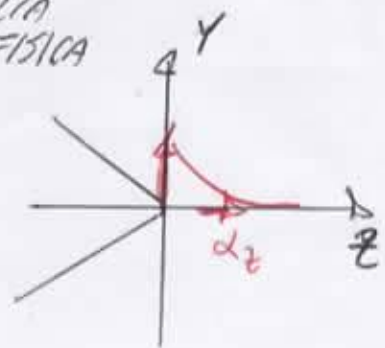
$$\Rightarrow k_{2z}^2 = k_2^2 - k_{2y}^2 < 0 \Rightarrow k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2y}^2} = i\alpha_2$$

SCELTA FISICA

QUINDI:

$$E_t = E_{to} e^{-i(k_{2y}y - \omega t)} = E_{to} e^{-\alpha_2 z} e^{-iK_{2y}y}$$

$$H_t = H_{to} e^{-i(k_{2y}y - \omega t)} = H_{to} e^{-\alpha_2 z} e^{-iK_{2y}y}$$



VALUTIAMO ORA IL CAMPO EM NEL PRIMO MEZZO, SCOMPONENDO L'ONDA INCIDENTE NELLA SOMMA DI UN'ONDA PIANA TE E UNA TM.

$$\Gamma_{TE} = \frac{Z_{TE2} - Z_{TE1}}{Z_{TE2} + Z_{TE1}} = \frac{\frac{\omega \mu_2}{k_{2z}} - \frac{\omega \mu_1}{k_{1z}}}{\frac{\omega \mu_2}{k_{2z}} + \frac{\omega \mu_1}{k_{1z}}} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \\ k_{2z} = -\beta d_2 \end{array} \quad \Gamma_{TE} = \frac{\frac{\omega \mu_2}{\alpha_2} - \frac{\omega \mu_1}{k_{1z}}}{\frac{\omega \mu_2}{\alpha_2} + \frac{\omega \mu_1}{k_{1z}}} \quad \downarrow$$

NOTIAMO CHE IL NUM È L'OPPOSTO DEL COEFFICIENTE DEL DEN. QUINDI:

$$\Gamma_{TE} = -1$$



VALUTIAMO ORA IL CAMPO EM NEL PRIMO MEZZO, SCOMPONENDO L'ONDA INCIDENTE NELLA SOMMA DI UN'ONDA PIANA TE E UNA TM.

$$\Gamma_{TE} = \frac{Z_{TE2} - Z_{TE1}}{Z_{TE2} + Z_{TE1}} = \frac{\frac{\omega \mu_2}{k_{z2}} - \frac{\omega \mu_1}{k_{z1}}}{\frac{\omega \mu_2}{k_{z2}} + \frac{\omega \mu_1}{k_{z1}}} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \\ k_{z2} = -\gamma d_2 \end{array} \quad \Gamma_{TE} = \frac{\frac{\gamma \omega \mu_2}{\alpha_2} - \frac{\omega \mu_1}{k_{z1}}}{\frac{\gamma \omega \mu_2}{\alpha_2} + \frac{\omega \mu_1}{k_{z1}}} \quad \downarrow$$

NOTIAMO CHE IL NUM È L'OPPOSTO DEL CONIUGATO DEL DEN. QUINDI:

$$|\Gamma_{TE}| = 1 \quad \Rightarrow \quad S_i = \frac{|E_i|^2}{2\zeta_1}, \quad S_r = \frac{|E_r|^2}{2\zeta_1} = |\Gamma_{TE}|^2 \frac{|E_i|^2}{2\zeta_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_i = S_r}$$

CONSIDERIAMO L'ONDA TM:

$$\Gamma_{TM} = \frac{Z_{TM2} - Z_{TM1}}{Z_{TM2} + Z_{TM1}} = \frac{\frac{k_{z2}}{\omega \epsilon_2} - \frac{k_{z1}}{\omega \epsilon_1}}{\frac{k_{z2}}{\omega \epsilon_2} + \frac{k_{z1}}{\omega \epsilon_1}} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \\ k_{z2} = -\gamma d_2 \end{array} \quad \Gamma_{TM} = \frac{\frac{-\gamma \alpha_2}{\omega \epsilon_2} - \frac{k_{z1}}{\omega \epsilon_1}}{\frac{-\gamma \alpha_2}{\omega \epsilon_2} + \frac{k_{z1}}{\omega \epsilon_1}} \quad \downarrow$$

$$|\Gamma_{TM}| = 1 \quad \Rightarrow \quad S_i = \frac{\sum \frac{|H_i|^2}{2}}{\frac{1}{2}}, \quad S_r = \frac{\sum \frac{|H_r|^2}{2}}{\frac{1}{2}} = |\Gamma_{TM}|^2 \frac{|H_i|^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_i = S_r}$$