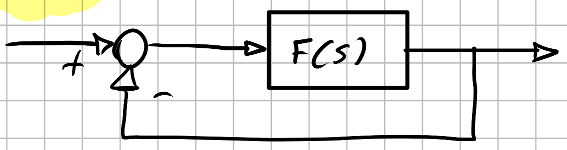
LDR



$$F(s) = K' \frac{\prod^{m} (s-z_i)}{\prod^{n} (s-p_i)} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)} \qquad m \le n$$

FZ DI $m+n+1$ PARAMETRI

$$W(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)+N_F(s)}$$

VOGLIAMO STUDIARE COME VARIANO I POLI DI $W(s)$ AL VARIARE DI K', NOTI z_i, p_i

CONSIDERIAMO: $P_c(s,K') = D_F(s)+N_F(s) = \prod^{n}(s-p_i) + K' \prod^{m}(s-z_i)$

POLINOMIO CARATT. DI CICLO CHIUSO

IL LDR È IL LUOGO GEOMETRICO NEL PIANO COMPLESSO DESCRITTO DALLE RADICI DI $P_c(s,K') = 0$ AL VARIARE DI $K' \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L} \triangleq \{ s \in \mathbb{C},\ \exists K' \in \mathbb{R} : P_c(s,K') = 0 \}$$

AD ESEMPIO SCELTO UN $\bar{K}'$ SI AVRANNO n RADICI DA $P_c(s,\bar{K}') = 0$.

SCEGLIENDO UNA DI QUESTE RADICI, LA COPPIA $(\bar{s}, K')$ È DETTA COPPIA SOLUZIONE.

LUOGO POSITIVO $K' > 0$

LUOGO NEGATIVO $K' < 0$

IL LUOGO GEOMETRICO DESCRITTO DA $P_c(\bar{s}, K') = 0$ AL VARIARE DI K' È DETTO RAMO.

$\Rightarrow$ IL LDR HA UN NUMERO DI RAMI PARI AL NUMERO DI POLI DELLA $F(s)$.

EX

$$F(s) = \frac{K'}{s-p}, \quad P_c(s,K') = s-p+K' = 0 \Rightarrow s = p-K'$$

EX

$$F(s) = \frac{K'}{s(s+p)}, \quad P_c(s,K') = s^2+sp+K' = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{p}{2} \sqrt{\frac{p^2}{4} - K'}$$

$s_{1,2} =$
- REALI E DISTINTI SE $K' < p^2/4$
- REALI E COINCIDENTI SE $K' = p^2/4$
- COMPLESSE E CONIUGATE SE $K' > p^2/4$

NEL CASO IN CUI $n \geq 3$ NON SI PUÒ PIÙ ESPRIMERE IL LEGAME TRA s E K' IN MANIERA ESPLICITA $\rightsquigarrow$ DOBBIAMO TROVARE ALTRE REGOLE

$\prod^{n}(s-p_i) = -K'\prod^{m}(s-z_i)$ → È UN'EQ. NEL PIANO COMPLESSO →

→ SPLITTIAMO → $\prod^{n}|(s-p_i)| = |K'|\cdot\prod^{m}|(s-z_i)|$ CONDIZIONE DI MODULO

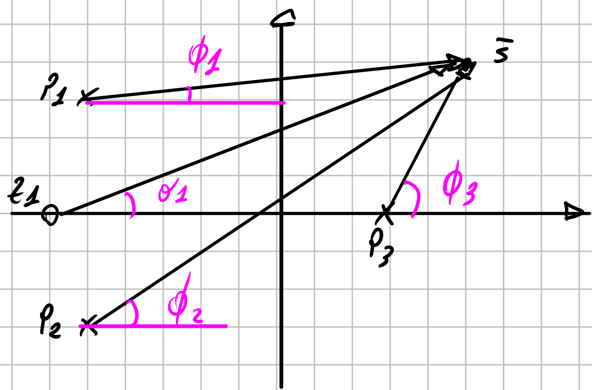
→ $\sum^{n}\angle(s-p_i) = \pi + \angle K' + \sum^{m}\angle(s-z_i)$ CONDIZIONE DI FASE

K' VIENE CONSID. SOLO COL SUO SEGNO.
→ $K'>0 \quad \angle K'=0$
$K'<0 \quad \angle K'=\pi$

LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÈ $s \in \mathcal{L}$ È CHE SODDISFI LA CONDIZIONE DI FASE.

EX

$s \in \mathcal{L} \iff$
$$\begin{cases} \phi_1+\phi_2+\phi_3 = \theta_1 + (2h+1)\pi \\ \phi_1+\phi_2+\phi_3 = \theta_1 + 2\pi \end{cases}$$



UNA VOLTA APPURATO CHE $\bar{s} \in \mathcal{L}$, IL VALORE DI K' SI RICAVA DALLA CONDIZIONE DI MODULO:
$$|K'| = \frac{\prod^{n}|(\bar{s}-p_i)|}{\prod^{m}|(\bar{s}-z_i)|}$$

→ QUESTA ESPRESSIONE CI FA CAPIRE CHE SE $\bar{s}$ È VICINA AD UNO ZERO
⇒ K' È MOLTO GRANDE

MENTRE SE $\bar{s}$ È VICINA AD UN POLO ⇒ K' È MOLTO PICCOLO.

REGOLE PER IL TRACCIAMENTO

•) IL LDR È COSTITUITO DA m RAMI.

•) IL LDR È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE REALE:
$$\forall s \in \mathcal{L} : P_c(s,K')=0 \Rightarrow \tilde{s} \in \mathcal{L},\ P_c(\tilde{s},K')=0$$

•) PUNTI SINGOLARI: SONO PUNTI DEL LUOGO CORRISPONDENTI A RADICI MULTIPLE DI $P_c(s,K')=0$.

LA F.I. $P_c(s,K')=0$ È ESPLICITABILE NELL'INTORNO DELLA COPPIA SOLUZIONE $(\bar{s},\bar{K}')$, CON:
$$\left.\frac{\partial P_c(s,K')}{\partial s}\right|_{(\bar{s},\bar{K}')} \neq 0$$ → CURVA REGOLARE

NEL CASO IN CUI NON VALGA LA F Z. QUI SOPRA, SIAMO IN PRESENZA DI UN PUNTO SINGOLARE.

IN UN PUNTO SINGOLARE SI INTERSECANO UN NUMERO DI RAMI APPARTENENTI ALLO STESSO LUOGO, PARI ALLA MOLTEPLICITÀ DI $\bar{s}$.

QUINDI I PUNTI SINGOLARI SODDISFANO:

$$\begin{cases} P_c(s,k') = 0 \\ \dfrac{\partial P_c(s,k')}{\partial s} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \prod^{n}(s-p_i) + k' \prod^{m}(s-z_i) = 0 \\ \dfrac{d}{ds}\prod^{n}(s-p_i) + k' \dfrac{d}{ds}\prod^{m}(s-z_i) = 0 \end{cases}$$

$$k' = -\frac{\prod^{n}(s-p_i)}{\prod^{m}(s-z_i)}$$

$$\prod^{m}(s-z_i)\frac{d}{ds}\prod^{n}(s-p_i) - \prod^{n}(s-p_i)\frac{d}{ds}\prod^{m}(s-z_i)$$

EQ. AI PUNTI SINGOLARI

QUINDI I PUNTI SINGOLARI SONO AL PIÙ $n+m-1$

•) LUOGO PER $|k'| \longrightarrow \infty$

▷ PER $k' \to \infty$ m RAMI CONVERGONO SUGLI ZERI AL FINITO DI $F(s)$.
IN PARTICOLARE, IN NUMERO PARI ALLA MOLTEPLICITÀ DELLO ZERO STESSO.
I RESTANTI $(n-m)$ RAMI CONVERGONO AL PUNTO IMPROPRIO $s=\infty$ SEGUENDO GLI ASINTOTI CHE FORMANO I SEGUENTI ANGOLI CON L'ASSE REALE:

$$\theta_i = \frac{(2\nu_i+1)\pi}{n-m}, \quad \nu_i = 0,1,\dots,n-m-1$$

▷ PER $k' \to -\infty$ DA OGNI ZERO AL FINITO DIVERGONO UN NUMERO DI RAMI PARI ALLA MOLTEPLICITÀ DELLO ZERO STESSO.
I RESTANTI $(n-m)$ RAMI DIVERGONO DAL PUNTO IMPROPRIO CON:

$$\theta_i = \frac{2\nu_i\pi}{n-m}, \quad \nu_i = 0,1,\dots,n-m-1$$

IL CENTRO DEGLI ASINTOTI SI TROVA SULL'ASSE REALE:

$$\sigma_B = \frac{\sum^{n} p_i - \sum^{m} z_i}{n - m}$$

•) LUOGO PER $K' \to 0$

ANALOGO

•) PUNTI SULL'ASSE REALE

▷ PER $K' > 0$ APPARTENGONO AL LUOGO TUTTI I PUNTI DELL'ASSE REALE CHE LASCIANO A DESTRA UN NUMERO DISPARI DI ZERI E POLI CIASCUNO CONTATO CON LA PROPRIA MOLT.

▷ PER $K' < 0$ ANALOGO

QUINDI TUTTO L'ASSE REALE APPARTIENE AL LDR.

STABILIZZAZIONE LDR

CONSIDERANDO IL CASO IN CUI $P(s)$ ABBIA SOLO POLI A PARTE REALE POSITIVA, CON LA TECNICA DEL LDR È POSSIBILE PROGETTARE $C(s)$ TALE CHE:

$$F(s) = C(s) \cdot P(s) = K_c \cdot K_p \frac{\prod^{m}(s - z_i)}{\prod^{n}(s - p_i)}$$

APPARTENGA, ALMENO PER OPPORTUNI VALORI DI K_c AL SEMIPIANO APERTO SINISTRO.

HYP: z_i^p TUTTI A PARTE REALE NEGATIVA.

CASO $n_p - m_p = 1$

SI TRACCIA IL LDR POSITIVO DI:

$$K_c P(s) = K_c K_p \frac{\prod^{m_p}(s - z_i^p)}{\prod^{n_p}(s - p_i^p)}$$

AL VARIARE DI $0 < K_c < \infty$

IL LUOGO POSITIVO HA UN SOLO ASINTOTO COINCIDENTE CON IL SEMIASSE REALE NEGATIVO.

PER AVERE TUTTE LE RADICI DI CICLO CHIUSO A PARTE REALE NEGATIVA È SUFFICIENTE ATTRIBUIRE A K_c VALORI ELEVATI.

INDICHIAMO CON K_c^m IL VALORE DI K_c DOPO IL QUALE TUTTE LE RADICI DI CICLO CHIUSO SONO A PARTE REALE NEGATIVA.

$$C(s) = K_c \qquad \text{CON } K_c > K_c^m$$

CASO $n_p - m_p = 2$

IN QUESTO CASO IL LDR POSITIVO DI $K_c P(s)$, HA DUE ASINTOTI VERTICALI PASSANTI PER σ_B.

CASO $\sigma_B < 0$: I DUE ASINTOTI APPARTENGONO AL DOMINIO DI STABILITÀ BIBO. È SUFFICIENTE ATTRIBUIRE A K_c VALORI ELEVATI, COME NEL CASO PRECEDENTE.

CASO $\sigma_B > 0$: I DUE ASINTOTI APPARTENGONO AL DOMINIO DI INSTABILITÀ. QUINDI DOBBIAMO SPOSTARE IL BARICENTRO NEL SEMIPIANO SINISTRO

$\Rightarrow$ SI UTILIZZA UNA COPPIA POLO-ZERO $(-p_b, -z_b)$ E SI SPOSTA IL BARICENTRO NELLA POSIZIONE DESIDERATA σ_B':

$$\sigma_B' = \sigma_B - \frac{(p_b - z_b)}{2}$$

CASO $m_p - m_p \geq 3$ ⇒ DOBBIAMO RICONDURCI AL CASO 2.

↳ SI AGGIUNGONO $(m_p - m_p - 2)$ ZERI A PARTE REALE NEGATIVA TALI DA NON CANCELLARE NESSUN POLO DI P(s).

⇒ COSÌ OTTENIAMO UNA FZ DI GRADO RELATIVO UGUALE A 2.

⇒ IL BARICENTRO SI È SPOSTATO A DESTRA.

⇒ SI CALCOLA UN NUOVO σ_B'

⇒ SI TROVA UN OPPORTUNO $\bar{K}'_c$ DOPO IL QUALE TUTTE LE RADICI DI CICLO CHIUSO SIANO A PARTE REALE NEGATIVA.

LA C(s) OTTENUTA NON È FISICAMENTE REALIZZABILE.

↳ BISOGNA AGGIUNGERE ALMENO $(m_p - m_p - 2)$ POLI AD ALTA FREQ. DEL TIPO $(1 + sT_i)$.

SI TRACCIA INFINE IL LUOGO POSITIVO E SI RICAVA UN NUOVO $\bar{K}'_c$.

ALLA FINE IL CONTROLLORE AVRÀ GRADO NULLO.

CONTORNO DELLE RADICI

IL LUOGO DEI PUNTI DESCRITTO NEL PIANO COMPLESSO DALL'EQ. CARATT. DI CICLO CHIUSO AL VARIARE DI UN POLO O DI UNO ZERO DELLA F(S) PRENDE IL NOME DI CONTORNO DELLE RADICI.

VARIAZIONE POLO

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI VARI UN POLO P_S:

$$F(s) = K' \frac{\prod^{m} (s-z_i)}{(s-P_S)\prod^{n}(s-P_i)} \quad , \quad P_c(s,K') = D_F(s) + N_F(s) = 0$$

VARIAZIONE DI P_S: $P_S = P_S^{NOM} + \Delta P_S$

$$(s-P_S)\prod_{i\neq s}^{n}(s-P_i) + K'\prod^{m}(s-z_i) = 0$$

$$\underbrace{(s-P_S^{NOM})\prod_{i\neq s}(s-P_i) + K'\prod^{m}(s-z_i)}_{\text{NOTO}} + \Delta P_S \prod_{i\neq s}^{n}(s-P_i) = 0$$

DIVIDO PER IL TERMINE NOTO

QUINDI LA DIPENDENZA DELLE RADICI DI $P_c(s,K')=0$ DALLA VARIAZIONE DEL POLO P_S DI F(S) SI PUÒ STUDIARE TRACCIANDO IL LDR (CDR) DI $F_P(s)$ AL VARIARE DI ΔP_S.

$$1 + \Delta P_S \frac{\prod^{m}(s-P_i)}{(s-P_S^{NOM})\prod^{n}(s-P_i) + K'\prod^{m}(s-z_i)} = 1 + F_P(s) = 0$$

VARIAZIONE ZERO

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI VARI UNO ZERO z_S:

$$F(s) = K' \frac{(s-z_S)\prod^{m}(s-z_i)}{\prod^{n}(s-P_i)} \quad , \quad P_c(s,K') = D_F(s) + N_F(s) = 0$$

VARIAZIONE DI z_S: $z_S = z_S^{NOM} + \Delta z_S$

$$\prod^{m}(s-P_i) + K'(s-z_S)\prod_{i\neq s}^{m}(s-z_i) = 0$$

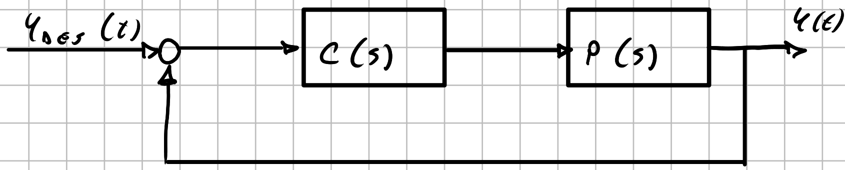
$$\underbrace{\prod^{m}(s-P_i) + K'(s-z_S^{NOM})\prod_{i\neq s}^{m}(s-z_i)}_{\text{NOTO}} + K'\,\Delta z_S \prod_{i\neq s}(s-z_i) = 0$$

DIVIDO PER IL TERMINE NOTO

QUINDI LA DIPENDENZA DELLE RADICI DI $P_c(s,K')=0$ DALLA VARIAZIONE DELLO ZERO z_S DI F(S) SI PUÒ STUDIARE TRACCIANDO IL LDR (CDR) DI $F_z(s)$ AL VARIARE DI Δz_S.

$$1 + \Delta z_S \frac{K'\prod^{m}(s-z_i)}{\prod^{m}(s-P_i) + K'(s-z_S^{NOM})\prod_{i\neq s}^{m}(s-z_i)} = 1 + F_z(s) = 0$$

ASSEGNAZIONE DEI POLI



N_P E D_P SONO COPRIMI TRA LORO.

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{c_\ell s^\ell + \dots + c_1 s + c_0}{s^\ell + g_{\ell-1}s^{\ell-1} + \dots + g_1 s + g_0}$$

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$\text{ROOTS}\{1 + C(s)\cdot P(s)\} = \Gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m+\ell}\} \in \mathbb{C} \rightsquigarrow D_{DES}(s) = \prod^{m+\ell}(s - \lambda_i)$$

POLINOMIO DESIDERATO DI CICLO CHIUSO

$$1 + C(s)\cdot P(s) = 0 \iff N_P(s)\,N_c(s) + D_P(s)\,D_c(s) = 0$$

$$\Rightarrow N_P(s)\,N_c(s) + D_P(s) + D_c(s) = D_{DES}(s) \quad (\star)$$

INCOGNITE

SUSSISTE IL SEGUENTE TH. $(\star)$ AMMETTE SE E SOLO SE IL MCD DI $N_P(s)$ E $D_P(s)$ È DIVISORE DI $D_{DES}(s)$ E INOLTRE:

$$\begin{cases} (N_P, D_D) \text{ COPRIMI} \iff (N_P, D_c) \text{ COPRIMI} \\ (D_P, D_D) \text{ COPRIMI} \iff (D_P, N_c) \text{ COPRIMI} \end{cases}$$

SE D_D È COPRIMO SIA DI N_P E SIA DI D_P NON SI AVRANNO CANCELLAZIONI TRA I POLI E GLI ZERI DI $C(s)$ E $P(s)$.

MENTRE SE SI VOGLIONO CANCELLARE POLI O ZERI CANCELLABILI, OCCORRE CHE SIANO POLI O ZERI DI $D_{DES}(s) = 0$.

RISCRIVIAMO $(\star)$:

$$(b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)\cdot$$
$$\cdot(c_\ell s^\ell + \dots + c_1 s + c_0) +$$
$$+ (s^m + \dots + a_1 s + a_0)\cdot$$
$$\cdot(s^\ell + \dots + g_1 s + g_0) = s^{m+\ell} + d_{m+\ell-1}s^{m+\ell-1} + \dots + d_1 s + d_0$$

CHE RAPPRESENTA UN SISTEMA DI $(m+\ell)$ EQ. LIN. NELLE $(2\ell+1)$ INCOGNITE.

QUINDI IMPONENDO UN NUMERO DI EQ. UGUALE AL NUMERO DI INCOGNITE:

$$\ell = m - 1$$

IL SISTEMA DI $(2m-1)$ EQ. IN $(2m-1)$ INCOGNITE È ESPRIMIBILE IN FORMA MATRICIALE:

$$\underline{\underline{M}} = \underline{x} = \underline{y}$$

DEVE ESSERE NON SINGOLARE

PRINCIPIO MODELLO INTERNO

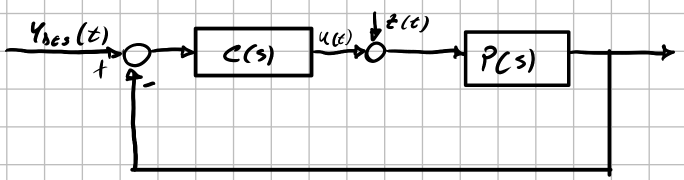
IL PRINCIPIO DEL MODELLO INTERNO FORNISCE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA REIEZIONE DEI SEGNALI DESIDERATI. IN PARTICOLARE SI CONSIDERANO QUELLA CLASSE DI SEGNALI AVENTI TRASFORMATE DI LAPLACE FZ. RAZIONALI FRATTE, IL CUI POLINOMIO A DEN. È DETTO POLINOMIO GENERATORE $(Q(s))$:

$Q(s) = s$ GRADINO

$Q(s) = s^2$ RAMPA

$Q(s) = s^2+\omega^2$ SINUSOIDE

REIEZIONE AL DISTURBO $(Y_{DES}=0)$



$$P(s)=\frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad , \quad Z(s)=\frac{N_z(s)}{Q_z(s)}$$

INCLUDIAMO $Q_z(s)$ A DEN. DI $C(s)$:

$$C(s)=\frac{N_c(s)}{D_c(s)\,Q_z(s)}$$

$$\Rightarrow W_z(s)=\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}=$$

$$=\frac{N_p(s)D_c(s)Q_z(s)}{N_p(s)N_c(s)+D_p(s)D_c(s)Q_z(s)}$$

QUINDI LA TRASF. DI LAPLACE DELL'USCITA SARÀ:

$$Y_z(s)=W_z(s)\cdot Z(s)=\frac{N_p(s)D_c(s)N_z(s)}{N_p(s)N_c(s)+D_p(s)D_c(s)Q_z(s)}$$

DOBBIAMO IMPORRE CHE TUTTE LE RADICI DI QUESTO POLINOMIO ABBIANO PARTE REALE NEGATIVA.

$$\lim_{t\to\infty} Y_z(t)=0$$

PROGETTO ESTESO:

$$P_e=\frac{P(s)}{Q_z(s)}$$

INSEGUIMENTO SEGNALE $(z(t)=0)$

$$Y_{DES}(s)=\frac{N_{DES}(s)}{Q_{DES}(s)} \quad , \quad E(s)=Y_{DES}(s)-Y(s)=$$

$$=Y_{DES}(s)-W(s)Y_{DES}(s)=Y_{DES}(s)-\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}Y_{DES}(s)=$$

$$=\frac{N_{DES}(s)}{Q_{DES}(s)}-\frac{N_c(s)\cdot N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s)}\cdot\frac{N_{DES}(s)}{Q_{DES}(s)}=$$

$$=\frac{N_{DES}(s)}{Q_{DES}(s)}-\frac{N_c(s)N_p(s)\cdot N_{DES}(s)}{(D_c(s)D_p(s)+N_c(s)N_p(s))Q_{DES}(s)}=\frac{N_{DES}(s)D_p(s)D_c(s)}{(N_p(s)N_c(s)+D_p(s)D_c(s))Q_{DES}(s)}$$

PROCESSO ESTESO

$$P_e(s)=\frac{P(s)}{Q_{DES}(s)}$$

PER AVERE ERRORE NULLO A REGIME, $Q_{DES}(s)$ DEVE ESSERE FATTORE DI $D_p(s)$ E $D_c(s)$ A NUM.

SE $Q_{DES}(s)$ È FATTORE DI $D_p(s)$ ALLORA IL PROGETTO DI $C(s)$ DEVE GARANTIRE STABILITÀ A $P(s)$ → CDR, POLE-PLACE.

SUPPONENDO CHE $Q_{DES}(s)$ NON COMPAIA IN $D_p(s)$ POSSIAMO RISCRIVERE IL CONTROLLORE:

$$C(s)=\frac{N_c(s)}{D_c(s)Q_{DES}(s)}$$

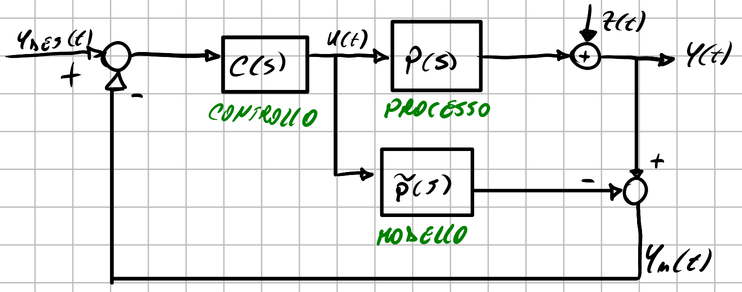
$$\Rightarrow E(s)=\frac{N_{DES}(s)D_p(s)D_c(s)}{N_p(s)N_c(s)+D_p(s)D_c(s)Q_{DES}(s)}$$

SE QUESTO POLINOMIO HA TUTTE LE RADICI A PARTE REALE NEGATIVA $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t)=0$.

CONTROLLO A MODELLO INTERNO (VALLE)

QUESTA TECNICA È USATA PER INSEGUIRE UNA TRAIETTORIA DESIDERATA E LA REIEZIONE DEI DISTURBI IN PRESENZA DI INCERTEZZE NEL MODELLO.

(ASSUMO I POLI DI $P(s)$ TUTTI A PARTE REALE NEGATIVA E UN POLO IN ZERO, PRESENTE ANCHE IN $\tilde{P}(s)$)



$$Y_m(s) = U(s)\,[P(s) - \tilde{P}(s)] + Z(s)$$

$Z(t) = 0$ MISURA DI DIFF. TRA PROCESSO E MODELLO

$\tilde{P}(s) = P(s)$ INCERTEZZA NEL MODELLO DI CONTROLLO

$$U(s) = \frac{C(s)\,(Y_{DES}(s) - Z(s))}{1 + C(s)(P(s) - \tilde{P}(s))} \quad , \quad Y(s) = P(s)\cdot U(s) + Z(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)(P(s) - \tilde{P}(s))}\,Y_{DES}(s) + \frac{1 - C(s)P(s)}{1 + C(s)(P(s) - \tilde{P}(s))}\,Z(s) = W(s)\,Y_{DES}(s) + W_Z(s)\,Z(s)$$

L'ESPRESSIONE DEL CONTROLLORE A MODELLO INTERNO SI RICAVA COSÌ:

$$C(s) = \tilde{P}^{-1}(s) \Rightarrow \begin{cases} W(s) = 1 \\ W_Z(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = y_{DES}(t) \\ y_Z(t) = 0 \end{cases} \quad \forall\, t \geq 0$$

TUTTAVIA L'ESPRESSIONE DI $\tilde{P}(s)$ HA ALCUNI PROBLEMI:

a) SE $\tilde{P}(s)$ HA GRADO RELATIVO POSITIVO $\Rightarrow C(s)$ NON È REALIZZABILE

b) SE $\tilde{P}(s)$ PRESENTA RITARDI O ZERI A PARTE REALE POSITIVA $\Rightarrow C(s)$ È INSTABILE

CASO a

VIENE INTRODOTTO UN FILTRO PASSA BASSO $G_f(s)$ CON $G_f(0) = 1$:

$$G_f(s) = \frac{1}{(1 + s\lambda)^q} \quad \Rightarrow C(s) = \tilde{P}^{-1}(s)\cdot G_f(s)$$

- L'ORDINE q VIENE SCELTO IN MODO TALE CHE $C(s)$ ABBIA GRADO RELATIVO ALMENO NULLO.
- IL PARAMETRO λ INFLUENZA LA RAPIDITÀ DI RISPOSTA DEL SISTEMA DI CICLO CHIUSO. LA SUA SCELTA RAPPRESENTA UN COMPROMESSO TRA PRONTEZZA (PICCOLO) E ROBUSTEZZA (ELEVATO).

$$\rightsquigarrow Y(s) = W(s)\,Y_{DES}(s) + W_Z(s)\,Y_Z(s) \rightsquigarrow \begin{cases} W(0) = 1 \\ W_Z(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{SE } y_{DES}(t) \text{ E } z(t) \text{ SONO SEGNALI COSTANTI} \Rightarrow \begin{cases} \lim_t e(t) = 0 \\ \lim_t z(t) = 0 \end{cases}$$

CASO b

SI FATTORIZZA $\tilde{P}(s) = \tilde{P}_+(s)\cdot\underbrace{\tilde{P}_-(s)}$ COMPONENTE INVERSIBILE CON TUTTI ZERI A PARTE REALE NEGATIVA

$$\Rightarrow C(s) = G_f(s)\,\tilde{P}_-^{-1}(s)$$

(MONTE) (HYP: $P(s)$ HA UN POLO IN $s=0$, NESSUNO ZERO POSITIVO E GRADO RELATIVO UNITARIO)

$$P(s)=\frac{N_P(s)}{s\hat{D}_P(s)}, \quad \tilde{P}(s)=\frac{N_{\tilde{P}}(s)}{s\hat{D}_{\tilde{P}}(s)}.$$

NEL NUOVO SISTEMA LA $W_z(s)$ SARÀ:

$$W_z(s)=\frac{P(s)(1-C(s)\tilde{P}(s))}{1+(P(s)-\tilde{P}(s))C(s)}$$

UGUALE A PRIMA SOLO CHE HA $P(s)$ A NUM.

SE LO FA LUI

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:

$$W_z(0)=\frac{N_{\tilde{P}}(0)}{\hat{D}_{\tilde{P}}(0)}\lambda \neq 0$$ CHE DIFFERISCE DAL CASO A VALLE ☹

$$\Rightarrow \lim_{t} y_z(t)=y_z(\infty)=A_z W_z(0)$$

AMPIEZZA COSTANTE

QUINDI NON SI PUÒ REIETTARE IL DISTURBO.

TUTTAVIA SCEGLIENDO VALORI DI λ MOLTO PICCOLI POSSIAMO REIETTARE GRAN PARTE DEL DISTURBO, MA DOBBIAMO SCEGLIERE UN λ COERENTE CON L'ESIGENZA DELLA STAB. BIBO DEL SISTEMA.

N.B. NEL CASO IN CUI $q>1$:

$$y_z(\infty)=A_z\tilde{P}(0)q\lambda$$

CASO IN CUI $\tilde{P}(s)$ HA UN RITARDO

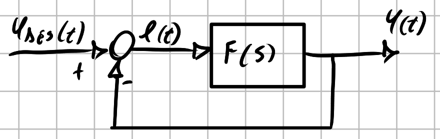
UTILIZZO PADÉ $\rightsquigarrow$ $$e^{-s\tilde{\tau}} \approx \frac{1-s\,\tilde{\tau}/2}{1+s\,\tilde{\tau}/2} \Rightarrow \tilde{P}(s)=\frac{N_{\tilde{P}}(s)}{s\hat{D}_P(s)}\cdot\frac{1-s\,\tilde{\tau}/2}{1+s\,\tilde{\tau}/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(0)=\frac{N_P(0)}{\hat{D}_P(0)}\left(q\lambda+\tilde{\tau}/2\right) \Rightarrow W_z(0)=\frac{N_{\tilde{P}}(0)}{\hat{D}_{\tilde{P}}(0)}\left(q\lambda+\tilde{\tau}/2\right) \Rightarrow y_z(\infty)=A_z\tilde{P}(0)\left(q\lambda+\tilde{\tau}/2\right)$$

PRECISIONE INGRESSI SINUSOIDALI

IL PRINCIPIO A MODELLO INTERNO FORNISCE UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'INSEGUIMENTO ASINTOTICO CON ERRORE NULLO DI UN SEGNALE SINUSOIDALE DI PULSAZIONE ω.

MA È UNA CONDIZIONE PUNTUALE $\Rightarrow$ POSSIAMO ALMENO OTTENERE L'INSEGUIMENTO CON PICCOLO ERRORE IN UN INTERVALLO DI PULSAZIONI:



$y_{des}(t) = \sin(\omega t)$

DEFINIAMO "FUNZIONE DI SENSIBILITÀ": $S(j\omega) = \dfrac{1}{1+F(j\omega)}$

$\Rightarrow$ POSSIAMO SCRIVERE L'ERRORE COME $\rightsquigarrow$ $e(t) = \left|\dfrac{1}{1+F(j\omega)}\right| \sin\left(\omega t + \arg\left\{\dfrac{1}{1+F(j\omega)}\right\}\right)$

$\Rightarrow$ DATO CHE SIAMO INTERESSATI ALL'AMPIEZZA DELL'ERRORE:

$$|e(t)| \leq \left|\frac{1}{1+F(j\omega)}\right|$$

PICCOLO $\Rightarrow$ PRECISIONE

A FREQUENZE ELEVATE NON POSSIAMO PIÙ RENDERE $S(j\omega)$ PICCOLO. $\Rightarrow$ AD ALTE FREQUENZE $F(j\omega)$ ATTENUA, RENDENDO $y(t) \approx 0 \Rightarrow e(t) \approx y_{des}(t)$, QUINDI NON POSSIAMO ASSEGNARE UNA SPECIFICA DEL TIPO:

$$\lim_{\omega\to\infty} |F(j\omega)| = 0 \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} |S(j\omega)| = 1$$

$$|S(j\omega)| \leq 0.1 \quad \forall \omega$$

QUINDI ASSEGNAMO UNA SPECIFICA DEL TIPO:

$$|S(j\omega)| \leq M(\omega) \quad \forall \omega$$

$\Rightarrow$ $M(\omega)$ RAPPRESENTA UNA "MASCHERA" SOTTO LA QUALE DEVE ESSERE COLLOCATA $|S(j\omega)|$.

UN SUO POSSIBILE ANDAMENTO POTREBBE ESSERE VALORI PICCOLI A BASSA FREQUENZA E VALORI CHE TENDONO AD 1 IN ALTA FREQUENZA.

IN ALTERNATIVA POSSIAMO USARE LA SEGUENTE FZ:

$$|S(j\omega)\, Q(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \text{ CON } Q(\omega) = M^{-1}(\omega)$$

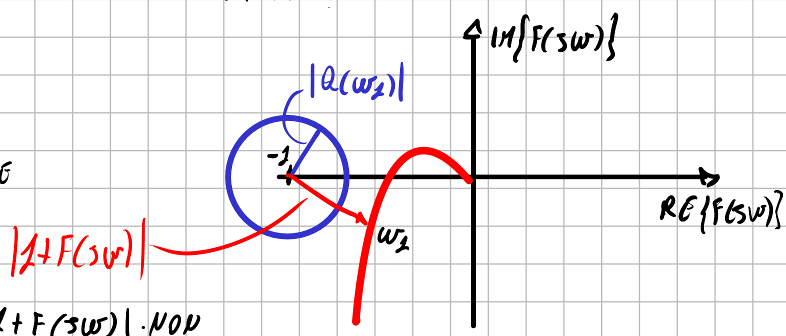
$\Rightarrow$ QUINDI $Q(j\omega)$ PESA LA FZ. DI SENSIBILITÀ.

PER AVERE UN'INTERPRETAZIONE GRAFICA, NOTIAMO CHE:

$$|S(j\omega)\, Q(\omega)| \leq 1 \iff \left|\frac{Q(\omega)}{1+F(j\omega)}\right| \leq 1 \ \forall\omega \Rightarrow |Q(j\omega)| \leq |1+F(j\omega)| \quad \forall \omega$$

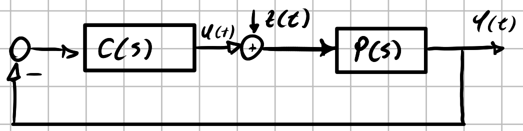
TRACCIANDO ORA IL DIAGRAMMA DI NYQUIST DI $F(j\omega)$,

LA QUANTITÀ $|1+F(j\omega)|$ È IL VETTORE CHE CONGIUNGE PER OGNI ω IL PUNTO -1 CON UN PUNTO SULLA CURVA.



QUINDI $|Q(\omega)| \leq |1+F(j\omega)|$ IMPONE CHE IL VETTORE $|1+F(j\omega)|$ NON ENTRI NEL CERCHIO.

REIEZIONE AI DISTURBI SINUSOIDALI



$z(t) = \sin(\omega t)$

DOBBIAMO ATTENUARE IL DISTURBO SULL'USCITA IN UN INTERVALLO DI PULSAZIONI Ω. $\Rightarrow y(t) \leq \alpha \quad \forall \omega \in \Omega$

$y(t) = |W_z(j\omega)| \sin(\omega t + \arg\{W_z(j\omega)\})$, DOVE:

$W_z(j\omega) = \dfrac{P(j\omega)}{1 + C(j\omega)P(j\omega)}$ IMPONGO CHE: $|W_z(j\omega)| \leq \alpha \quad \forall \omega \in \Omega$

$|1 + C(j\omega)P(j\omega)| \geq \dfrac{|P(j\omega)|}{\alpha}$

MA SE $|C(j\omega)P(j\omega)| \geq 1 \Rightarrow |1 + C(j\omega)P(j\omega)| \geq |C(j\omega)P(j\omega)| - 1$

CHE È SODDISFATTA NELL'INTERVALLO $[0, \omega_c]$

QUINDI $|C(j\omega)P(j\omega)| \geq 1 + \dfrac{|P(j\omega)|}{\alpha}$ (*)

VUOL DIRE CHE IL DIAGRAMMA DI BODE DI $|F(j\omega)|$ NON DEVE MAI ATTRAVERSARE QUELLO DI $1 + \dfrac{|P(j\omega)|}{\alpha}$

DALLA PRIMA ESPRESSIONE CAPIAMO CHE PER RIDURRE $|W_z(j\omega)|$,

$|C(j\omega)P(j\omega)|$ DEVE ESSERE ALTO $\Rightarrow$ SONO QUINDI BEN ATTENUATI I DISTURBI SINUSOIDALI A BASSA FREQUENZA O PER QUELLA PULSAZIONE ω_d PER LA QUALE $|C(j\omega_d)P(j\omega_d)|$ RISULTA GRANDE.

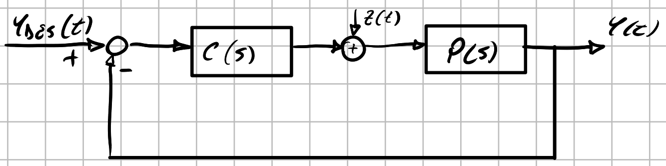
NEL CASO IN CUI $z(t)$ AGISCA A VALLE DI $P(s)$ $\Rightarrow W_z(j\omega) = \dfrac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)}$

QUINDI (*) DIVENTA $\Rightarrow |C(j\omega)P(j\omega)| \geq 1 + \dfrac{1}{\alpha}$

QUINDI IL DOMINIO INTERDETTO ALLA $|F(j\omega)|$ È UN RETTANGOLO.

SINTESI DIRETTA

QUESTA TECNICA HA COME OBIETTIVO QUELLO DI COSTRUIRE UN CONTROLLORE $C(s)$ IN MODO TALE CHE LA $W(s)$ SIA UGUALE AD UNA TF DESIDERATA $W_{des}(s)$ CHE SODDISFA OPPORTUNE SPECIFICHE.



HYP: $z(t)=0$

$$W(s)=\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \rightsquigarrow W(s)=W_{des}(s) \rightsquigarrow \text{RISOLVO PER } C(s) \rightsquigarrow C(s)=\frac{W_{des}(s)}{P(s)(1-W_{des}(s))}$$

$\Rightarrow$ DATO CHE $C(s)$ È PROPORZIONALE AL RECIPROCO DI $P(s)$, VUOL DIRE CHE IL CONTROLLORE CANCELLA I POLI E GLI ZERI DEL PROCESSO SOSTITUENDOLI CON I PROPRI.

LA $W_{des}(s)$ DEVE GARANTIRE:

- CAUSALITÀ DEL CONTROLLORE: $gr\{C(s)\} \geq 0 \Rightarrow n_c \geq m_c$
- STABILITÀ INTERNA D'ANELLO

CAUSALITÀ CONTROLLORE

$$C(s)=\frac{N_c(s)}{D_c(s)}, \quad P(s)=\frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad W_{des}(s)=\frac{N_{des}(s)}{D_{des}(s)}$$

$$C(s)=\frac{N_{des}(s)D_p(s)}{N_p(s)\left(D_{des}(s)-N_{des}(s)\right)} \Rightarrow \underbrace{n_c-m_c=m_p+n_{des}-(m_{des}+n_p)}$$

$\rightarrow n_{des}-m_{des} \geq n_p-m_p$

$\rightarrow gr\{W_{des}(s)\} \geq gr\{P(s)\}$

STABILITÀ INTERNA D'ANELLO

PER QUESTA PROPRIETÀ OCCORRE CHE I POLI E GLI ZERI DI $P(s)$ CHE $C(s)$ CANCELLA SIANO QUELLI A PARTE REALE NEGATIVA.

$$\left.\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}W_{des}(s)\right|_{s=z_i}=0 \qquad \left.\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left(1-W_{des}(s)\right)\right|_{s=p_i}=0$$

$$\forall j=1,\dots,\mu_i \qquad\qquad \forall j=1,\dots,\nu_i$$

PER QUANTO RIGUARDA LE SPECIFICHE DI REGIME DEVE RISULTARE, IN BASE AL PRINCIPIO DEL MODELLO INTERNO, CHE LA TF DI ANELLO APERTO $F(s)$ ABBIA TRA I SUOI POLI, I POLI DEL SEGNALE DESIDERATO DA INSEGUIRE:

$Q(s)=s$ GRADINO $\Rightarrow 1-W_{des}(0)=0$

$Q(s)=s^2$ RAMPA $\Rightarrow 1-W_{des}(0)=0, \ \left.-\frac{d}{ds}W_{des}(s)\right|_{s=0}=0$

$Q(s)=s^2+\omega^2$ SINUSOIDE $\Rightarrow 1-W_{des}(\pm j\omega)=0$

È IMPORTANTE NOTARE CHE PER AVERE ERRORE A GRADINO NULLO SI PONE: $W_{DES}(0)=1$, CHE È LA STESSA CONDIZIONE PER NON CANCELLARE UN POLO SEMPLICE IN $s=0$ $\Rightarrow$ QUESTA CONDIZIONE, IN SEGUITO ANDRÀ CONTATA UNA SOLA VOLTA.

PER QUANTO RIGUARDA LA CONDIZIONE DI ERRORE FINITO E NON NULLO PER LA RAMPA LINEARE SI IMPONE:

$$e_1 = -\frac{d}{ds} W_{DES}(s)\Big|_{s=0} = \sum^{m_{DES}} \frac{1}{z_{W_i}} - \sum^{n_{DES}} \frac{1}{p_{W_i}} \leq e_{1,max}$$

QUINDI LA $W_{DES}(s)$ AVRÀ LA SEGUENTE FORMA:

$$W_{DES}(s) = \frac{\prod_i^{m_p^+} (s-z_i)^{\mu_i} \left(\beta_{l-1} s^{l-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0\right)}{D_{W_{DES}}(s)}$$

DOVE:

- m_p^+ È IL NUMERO DI ZERI NON CANCELLABILI DI $P(s)$
- $l = l_1 + l_2$
  - l_1 È IL NUMERO DI CONDIZIONI DA IMPORRE PER EVITARE LA CANCELLAZIONE DEI POLI NON NEGATIVI DI $P(s)$.
  - l_2 È IL NUMERO DI CONDIZIONI DA IMPORRE PER LE SPECIFICHE DI REGIME.
- $D_{W_{DES}}(s)$ È UN QUALSIASI POLINOMIO STABILE CHE HA IL COMPITO DI SODDISFARE LE SPECIFICHE NEL TRANSITORIO, IL CUI GRADO:

$$n_{DES} \geq n_p - \sum_i^{n_{p-}} \mu_i + l_1 + l_2 - 1$$

DOVE n_{p-} È IL NUMERO DI ZERI DISTINTI DI $P(s)$ A PARTE REALE NEGATIVA

FORMA STANDARD

NEL CASO IN CUI IL GRADO RELATIVO DI $P(s)$ NON SIA SUPERIORE A 2 E PRESENTI TUTTI POLI E ZERI A PARTE REALE NEGATIVA, AD ECCEZIONE DI UN POLO SEMPLICE IN 0, LA $W_{DES}(s)$ PUÒ ESSERE ASSEGNATA NELLA SEGUENTE FORMA STANDARD, CARATTERIZZATA DA DUE POLI COMPLESSI CONIUGATI:

$$W_{DES_1}(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad 0 < \xi < 1$$

IN QUESTA FORMA, LE SPECIFICHE VENGONO ASSEGNATE IN TERMINI DI PRECISIONE DINAMICA $(\tilde{s})$ E DI RAPIDITÀ DI RISPOSTA (ω_{-3}).

INFATTI $\tilde{s}$ E ω_{-3} SONO ESPRIMIBILI IN FORMA CHIUSA IN FZ. DI ξ E DI ω_n:

$$\tilde{s} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi}}}, \quad \omega_{-3} = \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}}$$

LE SPECIFICHE SI ASSEGNANO QUINDI COSÌ:

$$\tilde{S} \leq \tilde{S}_{MAX}$$

$$\omega_{-3} = \omega_{-3,DES} \quad \text{CON} \quad \omega_{-3,DES} \in [\omega^{m}_{-3,DES},\ \omega^{M}_{-3,DES}]$$

PER QUANTO RIGUARDA LE SPECIFICHE A REGIME, LA FORMA STANDARD GARANTISCE ERRORE NULLO A GRADINO $e_0 = 0$

ED ERRORE FINITO E NON NULLO ALLA RAMPA LINEARE:

$$e_{1,1} = -\frac{d}{ds} W_{DES_1}(s)\Big|_{s=0} = \frac{2\xi}{\omega_n} \leq e_{1,MAX}$$

SE I VALORI DI $\tilde{S}$ E DI ω_{-3} SODDISFANO QUESTA CONDIZIONE, IL PROGETTO È CONCLUSO, ALTRIMENTI È POSSIBILE

ADOTTARE QUEST'ALTRA FORMA:

$$W_{DES_2}(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n}} \cdot \underbrace{\frac{m(s+z)}{(s+mz)}}_{T(s)} = W_{DES_1}(s) \cdot T(s) \qquad m > 1$$

PER PRIMA COSA NOTIAMO CHE $W_{DES}(0) = 1$

$\Rightarrow e_0 = 0$

MENTRE PER QUANTO RIGUARDA LA RAMPA LINEARE:

$$e_{1,2} = -\frac{d}{ds} W_{DES,2}(s) = \frac{2\xi}{\omega_n} \cdot \frac{m-1}{mz} \leq e_{1,MAX}$$

PER LE SPECIFICHE TRANSITORIE È POSSIBILE DIMOSTRARE:

$$\tilde{S}_1 \leq \frac{1}{m}\left(\tilde{S}_{MAX} - (m-1)\right)$$

PASSI PROGETTUALI

1) SI SCEGLIE $m > 1$

2) SI RICAVA $\tilde{S}_1$ DA $\tilde{S}_1 \leq \frac{1}{m}\left(\tilde{S}_{MAX} - (m-1)\right)$

3) SI SOSTITUISCE $\tilde{S}_1$ IN $\tilde{S} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ RICAVANDO ξ

4) DA $W_{DES,2}(s) = W_{DES,1}(s) \cdot T(s)$, IMPONGO CHE $W_{DES,2}(j\omega)$ ABBIA LA BANDA PASSANTE DESIDERATA E CHE

$$|W_{DES}(0)| = 1 \Rightarrow |W_{DES_2}(j\omega_{-3DES})| = |W_{DES,1}(j\omega_{-3DES}) \cdot T(j\omega_{-3DES})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

SE ASSUMO $|T(j\omega_{-3DES})| \approx m$

$$\rightsquigarrow \frac{m}{\left|1 + j2\frac{\xi\,\omega_{-3DES}}{\omega_n} - \frac{\omega^2_{-3DES}}{\omega_n^2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\to (2m^2-1)\,\omega_n^4 + 2\omega_{-3DES}(1-2\xi^2)\,\omega_n^2 - \omega^4_{-3DES} = 0$$

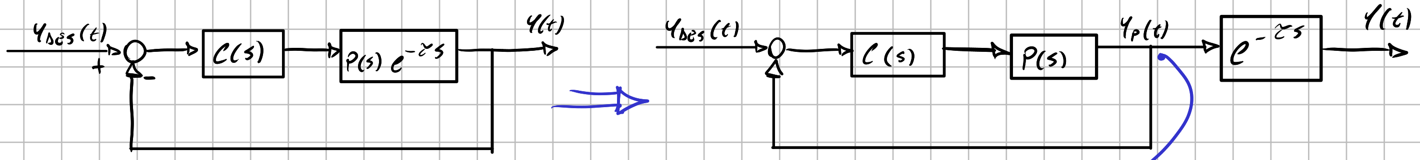
ω_n È LA SOLUZIONE REALE POSITIVA

LE 4 RADICI SONO IN SIMMETRIA QUADRANTALE

5) NOTI ξ, ω_n E m SI RICAVA z DA: $e_{1,2} = \frac{2\xi}{\omega_n} \cdot \frac{m-1}{mz} \leq e_{1,MAX}$

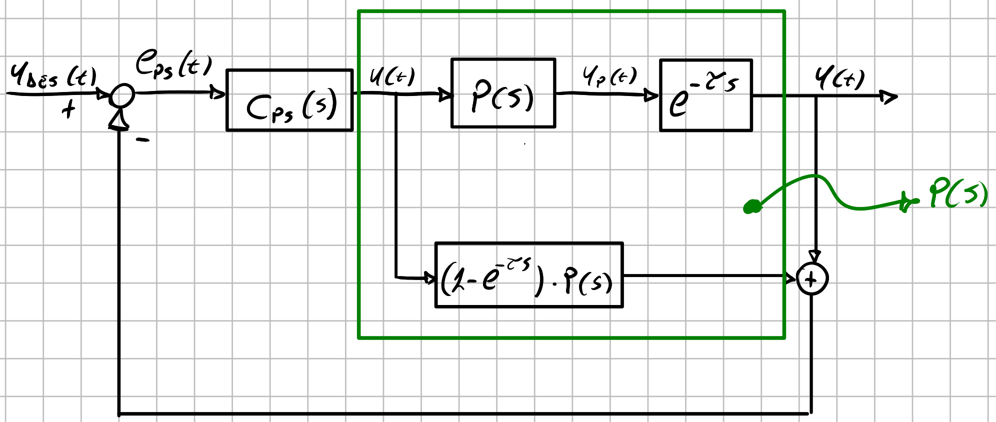
PREDITTORE DI SMITH

LO SCHEMA A PREDITTORE DI SMITH HA COME OBIETTIVO IL MIGLIORAMENTO DELLE PRESTAZIONI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO IN CUI È PRESENTE UN RITARDO TEMPORALE.



QUESTO SCHEMA NON PUÒ ESSERE IMPLEMENTATO PERCHÉ NON ABBIAMO ACCESSO A $y_p(t)$

SOLUZIONE



IN QUESTO SCHEMA VIENE RETROAZIONATA LA PREDIZIONE

$$y_p(t) = y(t+\tau)$$

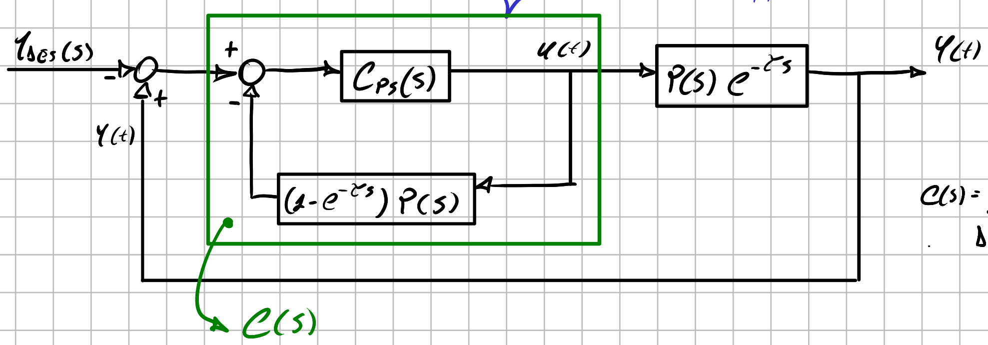
$$W_{ps}(s) = \frac{C_{ps}(s)\cdot P(s)\, e^{-\tau s}}{1 + C_{ps}(s)\cdot P(s)} \quad \text{SMITH}$$

$$W_{RU}(s) = \frac{C(s)\cdot P(s)\cdot e^{-\tau s}}{1 + C(s)P(s)\,e^{-\tau s}} \quad \text{RETR. UNIT.}$$

POSSIAMO AVERE $W_{ps}(s) = W_{RU}(s)$ SE:

$$C(s) = \frac{C_{ps}(s)}{1 + C_{ps}(s)\,(1-e^{-\tau s})\,P(s)}$$

CHE EQUIVALE A



ESPLICITANDO

$$C(s) = \frac{N_{cps}(s)\cdot D_p(s)}{D_{cps}(s)\,D_p(s) + N_p(s)\,N_{c_{ps}}(s) - N_p(s)\,N_{cps}(s)\cdot e^{-\tau s}}$$

COME È POSSIBILE NOTARE TRA GLI ZERI DI $C(s)$ CI SONO ANCHE I POLI DEL PROCESSO.

⇒ QUINDI IL CONTROLLORE EFFETTUA CANCELLAZIONI

⇒ ALLORA È OPPORTUNO CHE $P(s)$ SIA ASINTOTICAMENTE STABILE.

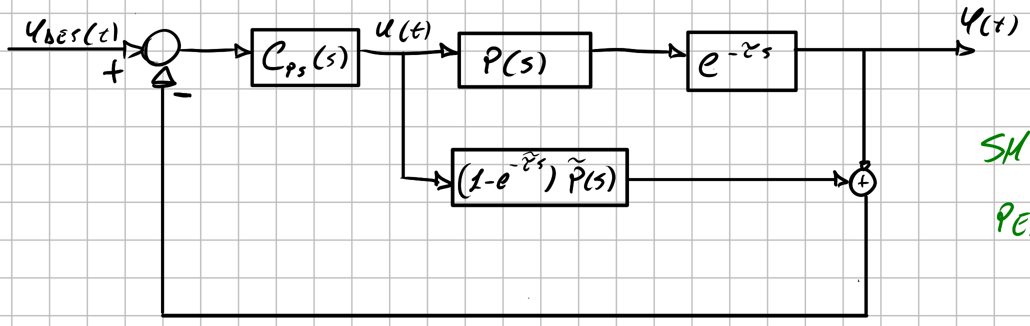
INOLTRE, LA TF DI $C(s)$ È NON RAZIONALE A CAUSA DEL TERMINE $(e^{-\tau s})$ ⇒ SI APPROSSIMA CON PADÈ.

IN GENERALE SI PUÒ AFFERMARE CHE LE CONSIDERAZIONI DA FARE SUL CONTROLLORE PER DELLE SPECIFICHE DESIDERATE, SI RIFLETTONO IN $C_{PS}(s)$.

INOLTRE, NOTIAMO COME: $W(s) = \tilde{W}_{PS}(s)\, e^{-\tau s}$, QUINDI NONOSTANTE L'IMPIEGO DI SMITH, IL RITARDO INFLUENZA LO STESSO IL SISTEMA.

PERTURBAZIONI

DEFINENDO $\tilde{P}(s)$ E $\tilde{\tau}$ LE STIME DI $P(s)$ E τ, LO SCHEMA DIVENTA:



SMITH PERTURBATO

$$W_{PS}^{P}(s) = \frac{C_{PS}(s)\,P(s)\,e^{-\tau s}}{1 + C_{PS}(s)\,P(s)\,e^{-\tau s} + C_{PS}(s)\,(1-e^{-\tilde{\tau} s})\,\tilde{P}(s)} = W_{PS}(s)\Big|_{\substack{\tilde{P}=P \\ \tilde{\tau}=\tau}}$$

È DA NOTARE CHE NEL CASO NON PERTURBATO, I POLI DELLA $W_{PS}(s)$ ERANO FINITI MENTRE QUI NON LO SONO.

PUÒ QUINDI ACCADERE CHE VI SIA STABILITÀ BIBO SOLO SENZA PERTURBAZIONI.

DEFINIAMO:

$$S = \left\{ \sigma_i \,:\, \sigma_i = Re\{z_i\},\ D_{W_{PS}^{P}}(s) = 0 \right\}$$

SE S HA UN ESTREMO SUPERIORE NEGATIVO ALLORA IL SISTEMA AD ANELLO CHIUSO È ASINTOTICAMENTE STABILE.

UN PREDITTORE DI SMITH È DETTO PRATICAMENTE STABILE QUANDO È IN GRADO DI FAR FRONTE A PERTURBAZIONI INFINITESIME NELLA DINAMICA DEL PROCESSO.

IN PARTICOLARE, SIANO ε_τ, ε_P, $\bar{\omega}$ VALORI PICCOLI, UN PREDITTORE DI SMITH È PRATICAMENTE STABILE SE:

$$|\tau - \tilde{\tau}| \leq \varepsilon_\tau, \quad \left| \frac{P(j\omega)}{\tilde{P}(j\omega)} - 1 \right| \leq \varepsilon_P \qquad \forall\ 0 < \omega < \bar{\omega}$$

MODELLI DI INCERTEZZA

LE INCERTEZZE POSSONO ESSERE CLASSIFICATE IN:

- INCERTEZZE STRUTTURATE
- INCERTEZZE NON STRUTTURATE

SUPPONIAMO DI AVERE UN MODELLO NOMINALE DEL SISTEMA FISICO.

PER OGNI VALORE DI ω CHE VARIA IN UN CERTO INTERVALLO, SI POSSONO DEFINIRE DEI LIMITI AI VALORI DI MODULO E FASE DANDO LUOGO AD UNA REGIONE DI INCERTEZZA NEL PIANO COMPLESSO, CHE PERÒ È DIFFICILE DA RAPPRESENTARE MATEMATICAMENTE, QUINDI SI DEFINISCE UN DISCO CHE LA RACCHIUDE.

QUESTO DISCO HA RAGGIO $\gamma(\omega)$ CHE RAPPRESENTA UN MAGGIORANTE DELL'INCERTEZZA. (ALL'AUM. DI ω AUM. IL DISCO).

POSSIAMO QUINDI DEFINIRE L'INSIEME DEI PROCESSI PERTURBATI:

$$\underline{P} = \left\{ P(j\omega) : \left| \underbrace{P(j\omega)}_{\text{PROCESSO PERTURBATO}} - \underbrace{P_n(j\omega)}_{\text{PROCESSO NOMINALE}} \right| \leq \gamma(\omega) \right\}$$

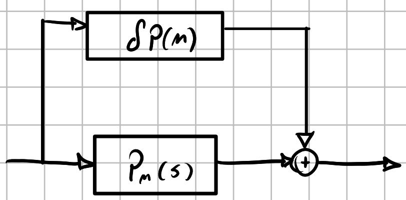
MODELLO ADDITIVO

$$P(j\omega) = P_n(j\omega) + \underbrace{\delta P(j\omega)}_{\text{INCERTEZZA ADDITIVA NON NOTA}} \Rightarrow |\delta P(j\omega)| \leq \gamma_A(\omega)$$

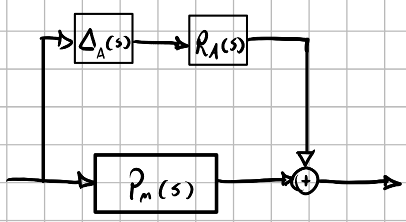
$$\Rightarrow \underline{P} = \left\{ P(s) : P(s) = P_n(s) + R_A(s)\,\Delta_A(s) \right\}$$

CON:

- $\Delta_A(s)$ T.F. ASINTOTICAMENTE STABILE ARBITRARIA NON NOTA $\Rightarrow |\Delta_A(j\omega)| < 1 \ \forall \omega$
- $R_A(s)$ FZ RAZIONALE ASINT. STABILE CHE FORNISCE L'INFORMAZIONE DI COME L'ACCURATEZZA DEL MODELLO NOMINALE VARIA CON LA FREQUENZA.



PROCESSO PERTURBATO



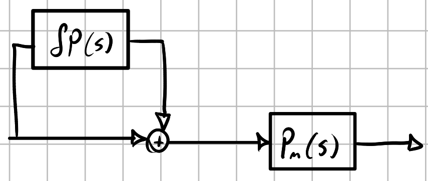
MODELLO ADDITIVO

MODELLO MOLTIPLICATIVO

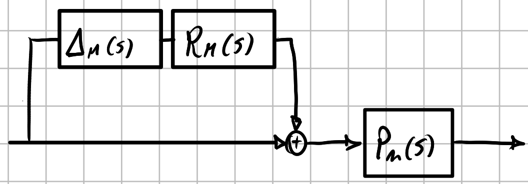
$$\frac{|P(j\omega) - P_n(j\omega)|}{|P_n(j\omega)|} \leq \gamma_M(j\omega) \quad , \quad P(j\omega) = P_n(j\omega)\,(1 + \underbrace{\delta P(j\omega)}_{\text{INCERTEZZA MOLTIPLICATIVA}})$$

$$|\delta P(j\omega)| < \gamma_M(j\omega)$$

$$\Rightarrow \underline{P} = \left\{ P(s) : P(s) = P_m(s)\,(1 + R_M(s)\,\Delta_M(s)) \right\} \ , \ \text{CON } |\Delta_M(j\omega)| \leq 1 \ \forall \omega$$



PROCESSO PERTURBATO



MODELLO MOLTIPLICATIVO

SE VALUTIAMO IL MODELLO MOLTIPLICATIVO IN $s = j\omega$ E RICORDANDO CHE $|\Delta_M(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega$:

$$\left| \frac{P(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| \leq |R_M(j\omega)|$$

QUINDI $\forall \omega$ $|R_M(j\omega)|$ RAPPRESENTA LA MASSIMA DISTANZA RELATIVA TRA PROCESSO NOMINALE E QUELLO REALE NON NOTO.

$$\boxed{\left| \frac{P(j\omega)}{P_n(j\omega)} - 1 \right| \leq |R_M(j\omega)| \quad \forall \omega}$$

ROBUSTEZZA

ASSUMIAMO $P(s) \in \mathcal{P}$ FAMIGLIA DEI PROCESSI DISTURBATI.

SI CONSIDERA UNA CERTA PROPRIETÀ, AD ESEMPIO LA STABILITÀ BIBO.

$\Rightarrow$ UN CONTROLLORE $C(s)$ SI CONSIDERA ROBUSTO RISPETTO A QUESTA PROPRIETÀ SE ESSA SI CONSERVA PER OGNI PROCESSO PERTURBATO APPARTENENTE ALLA FAMIGLIA $\mathcal{P}$.

STABILITÀ ROBUSTA

MODELLO MOLT.

$$\mathcal{P} = \Big\{ P(j\omega) : P(j\omega) = \underbrace{P_m(j\omega)}_{\text{PROCESSO NOMINALE}} \big(1 + \underbrace{\Delta}_{\text{COSTANTE } |\Delta| \leq 1} \underbrace{R(j\omega)}_{\text{FZ. PESO NOTA}}\big) \Big\}$$

ESISTE IL SEGUENTE TH:

"ESISTE UN CONTROLLORE $C(s)$ CHE PERMETTE DI STABILIZZARE ROBUSTAMENTE A CICLO CHIUSO OGNI PROCESSO DELLA FAMIGLIA $\mathcal{P}$ SE E SOLO SE VALGONO:

1. $C(s)$ STABILIZZA $P_m(s)$ $(\Delta = 0)$
2. $C(s)$ DEVE ESSERE TALE CHE $|W_m(j\omega) \cdot R(j\omega)| < 1 \quad \forall\omega$

DOVE $W_m(j\omega) = \dfrac{C(s)\, P_m(s)}{1 + C(s) P_m(s)}$

DIMOSTRAZIONE

SE VALE LA 1 $\Rightarrow$ $1 + C(s) \cdot P_m(s)$ HA SOLO RADICI A PARTE REALE NEGATIVA.

$$\Rightarrow 1 + C(s)P(s) = 1 + C(s)P_m(s)\big(1 + \Delta R(s)\big) = 1 + C(s)P_m(s) + C(s)P_m(s)R(s) =$$

$$= 1 + C(s)P_m(s) + C(s)P_m(s)\Delta R(s) \cdot \frac{1 + C(s)P_m(s)}{1 + C(s)P_m(s)} =$$

$$= 1 + C(s)P_m(s) + W_m(s)\Delta R(s) \cdot \big(1 + C(s)P_m(s)\big) =$$

$$= \big(1 + C(s)P_m(s)\big)\big(1 + W_m(s)\Delta R(s)\big)$$

$$\Rightarrow 1 + C(s)P(s) = \big(1 + C(s)P_m(s)\big)\big(1 + W_m(s)\Delta R(s)\big)$$

$$\frac{1 + C(s)P(s)}{1 + C(s)P_m(s)} = 1 + W_m(s)\Delta R(s)$$

RICORDANDO ORA CHE VALE:

$$\begin{cases} 1 + C(s)P(s) = \dfrac{P_{CH}(s)}{P_{AP}(s)} \\[2ex] 1 + C(s)P_m(s) = \dfrac{P_{CH_m}(s)}{P_{AP_m}(s)} \end{cases}$$

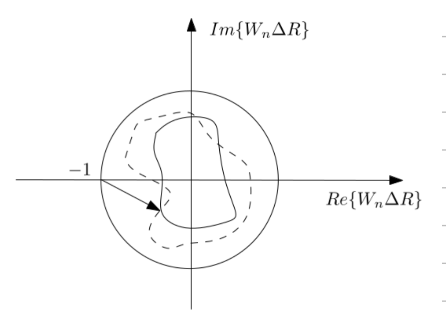
$$\frac{P_{CH}(s)}{P_{AP}(s)} \cdot \frac{P_{AP_m}(s)}{P_{CH_m}(s)} = 1 + W_m(s)\Delta R(s)$$

DOBBIAMO VERIFICARE CHE $P_{CH}(s)$ ABBIA TUTTE RADICI A PARTE REALE NEGATIVA.

SE È VERA LA 2 $\Rightarrow$ $|W_m(s)\Delta R(s)| < 1 \quad \forall\omega$

DATO CHE $|\Delta| \leq 1$

$\Rightarrow$ ALLORA IL DIAGRAMMA DI NYQUIST DI $|W_m(s)\Delta R(s)|$ SARÀ CONTENUTO NELLA CIRCONFERENZA UNITARIA QUALSIASI SIA IL VALORE DI Δ.



IL VETTORE $1+W_m(s)\Delta R(s)$ QUINDI NON COMPIE ROTAZIONI ATTORNO AL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE $\forall\Delta$. $\Rightarrow N=0$

SI PUÒ DIMOSTRARE:

DOVE Z È IL NUMERO DI RADICI A PARTE REALE POSITIVA.

$$N = Z_{AP} + Z_{CH_m} - (Z_{CH} + Z_{AP_m})$$

MA $Z_{CH_m} = 0$ PER LA (1) $\Rightarrow Z_{AP} - (Z_{CH} + Z_{AP_m}) = 0$

ORA SI AGGIUNGE UN'IPOTESI "TECNICA" $\Rightarrow (Z_{AP_m} = Z_{AP}) \Rightarrow Z_{CH} = 0$

QUESTA IPOTESI IMPONE CHE LE PERTURBAZIONI NON SIANO DI ENTITÀ TALE DA FAR OLTREPASSARE L'ASSE IMMAGINARIO AI POLI DI $W(s)$.

RADICI A PARTE REALE NULLA

$$\frac{P_{CH}(s)}{P_{AP}(s)} \cdot \frac{P_{AP_m}(s)}{P_{CH_m}(s)} = 1 + W_m(s)\Delta R(s)$$

MA DOVE STANNO?? $\Rightarrow$ IN $P_{CH_m}(s)$ NO PER LA (1)

SE STANNO IN $P_{AP}(s)$ ALLORA SI DEVONO CANCELLARE CON $(P_{CH}(s) \cdot P_{AP_m}(s))$ A NUM.

MA CHI TRA $P_{CH}(s)$ E $P_{AP_m}(s)$ HA LE RADICI A PARTE REALE NULLA CHE SI CANCELLANO CON QUELLE DI $P_{AP}(s)$?

$\Rightarrow$ SI ESTENDE L'IPOTESI TECNICA ALLE RADICI A PARTE REALE NULLA $(Z_{AP_m} = Z_{AP})$

$\Rightarrow$ QUINDI SI TROVANO IN $P_{AP_m}(s)$ ✓

PRECISIONE ROBUSTA

(STABILITÀ E PRECISIONE SI VERIFICANO INSIEME)

SI È VISTO CHE UN MODO PER CARATTERIZZARE LA PRECISIONE AD INGRESSI SINUSOIDALI SI IMPONE:

$$|S_m(j\omega) \cdot Q(j\omega)| \le 1 \quad \forall\omega$$

MENTRE POCO FA ABBIAMO VISTO UN TEOREMA CHE VERIFICA LA STABILITÀ ROBUSTA, IMPONENDO COME SECONDA COND.:

$$|W_m(j\omega) R(j\omega)| < 1 \quad \forall\omega$$

ESISTE IL SEGUENTE TH:

ESISTE UN CONTROLLORE $C(s)$ CHE GARANTISCE STABILITÀ ROBUSTA E PRECISIONE ROBUSTA $\forall P(s) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow$

$$(\star) \quad |W_m(j\omega) R(j\omega)| + |S_m(j\omega) Q(j\omega)| < 1 \quad \forall\omega$$

DIMOSTRAZIONE

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE SE VALE $(\star) \Rightarrow |\underbrace{S(j\omega)}_{S(j\omega)=\frac{1}{1+C(s)P(s)}} \cdot Q(j\omega)| < 1 \ \forall\omega$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1+CP_m(1+\Delta R)} = \frac{1}{1+CP_m+CP_m\Delta R \cdot \frac{1+CP_m}{1+CP_m}} = \frac{1}{1+CP_m+W_m\Delta R(1+CP_m)} = \frac{1}{(1+CP_m)(1+W_m\Delta R_m)}$$

$$= \frac{S_m}{1+\Delta W_m R} = S$$

QUINDI LA CONDIZIONE DEL TH. DIVENTA:

$$\left|\frac{S_m Q}{1+\Delta W_m R}\right| < 1 \quad \forall\omega$$

RISCRIVIAMO ORA LA (★) COSÌ $\Rightarrow$ $|S_m Q| < 1 - |W_m R|$

MA: $1 = 1+\Delta W_m R - \Delta W_m R = |1+\Delta W_m R - \Delta W_m R| \leq |1+\Delta W_m R| + |\Delta W_m R| \leq |1+\Delta W_m R| + |W_m R|$

QUINDI:

$1 - |W_m R| \leq |1+\Delta W_m R| \Rightarrow |S_m Q| < 1 - |W_m R|$ DIVENTA $\rightsquigarrow |S_m Q| < |1+\Delta W_m R|$

$$\left|\frac{S_m Q}{1+\Delta W_m R}\right| < 1$$

DIVISO PER $|1+\Delta W_m R|$

SISTEMI A TEMPO DISCRETO

TRASFORMATA ZETA

DATA UNA f REALE DI VARIABILE K, SI DEFINISCE TRASFORMATA ZETA DI $f(k)$ LA FZ COMPLESSA F DI VARIABILE COMPLESSA z:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^{-k},$$ CHE DEVE CONVERGERE PER ALMENO ALCUNI VALORI DI z.

IMPULSO $\quad f(k) = \delta(k) \quad F(z) = 1$

GRADINO $\quad f(k) = 1(k) \quad F(z) = \dfrac{z}{(z-1)}$

RAMPA $\quad f(k) = k \quad F(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$

SINUSOIDE $\quad f(k) = \sin(\omega_0 k) \quad F(z) = \dfrac{\sin(\omega_0)}{z^2 - 2\cos(\omega_0) z + 1}$

$f(k) = 0 \quad \forall k < 0$

ANALISI DEI SISTEMI A T.D.

EQ. ALLE DIFF. $\quad \sum_{i=0}^{n} a_i\, Y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i\, U(k-i)$, CON $m \leq n$

APPLICO LA TRASF. ZETA:

$$a_0 Y(z) + a_1 Y(z) z^{-1} + \dots + a_n Y(z) z^{-n} =$$

$$b_0 U(z) + b_1 U(z) z^{-1} + \dots + b_m U(z) z^{-m}$$

$$Y(z)\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}\right) = U(z)\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}\right)$$

$\downarrow \cdot z^n$

$$Y(z)\left(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n\right) = U(z)\left(b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_m z^{n-m}\right)$$

SI DEFINISCE FZ DI TRASFERIMENTO A TEMPO DISCRETO LA SEGUENTE FZ:

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots b_m z^{n-m}}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

SI DEFINISCE TEMPO DI LATENZA IL $gr\{G(z)\}$, OVVERO IL NUMERO DI PASSI DA ASPETTARE PER VEDERE IL PRIMO VALORE DELL'USCITA DIVERSO DA ZERO.

SE GLI n POLI DI $G(z)$ SONO TALI CHE: $|P_i| < 1 \quad \forall i \Rightarrow$ IL SISTEMA È STABILE BIBO.

INOLTRE $\lim_{k\to\infty} P_i^k = 0 \Rightarrow$ IL MODO DI EVOLUZIONE P_i^k PUÒ ASSUMERSI ESTINTO PER $K_{ass} = (4 \div 5)\, K_\tau$

$$\hookrightarrow K_\tau \approx -\frac{1}{\ln(|P_i|)}$$

PER RICAVARE $Y(K)$ FACCIAMO L'ANTITRASFORMATA, USANDO QUESTA ASSUNZIONE:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{z}{(z-p)}\right\} = p^K$$ PER UTILIZZARLA DOBBIAMO SCOMPORRE $\frac{Y(z)}{z}$ IN FRATTI SEMPLICI:

(HYP: $u(k) = 1(k)$, p_i DI $G(z)$ REALI E SEMPLICI)

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{G(z)U(z)}{z} = \frac{G(z)}{\cancel{z}} \cdot \frac{\cancel{z}}{(z-1)} = \frac{G(z)}{(z-1)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{(z-p_i)} + \frac{\overbrace{r_{m+1}}^{G(1)}}{(z-1)}$$

$\cdot z$

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{z}{(z-p_i)} + G(1)\frac{z}{(z-1)}$$ UNA VOLTA CALCOLATI GLI r_i POSSO APPLICARE LA ($\star$):

$$Y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \sum_{i=1}^{m} r_i p_i^K + G(1) \cdot 1^K$$

SE VALGONO LE COND. DI PRIMA $\Rightarrow \lim_{K \to \infty} Y(k) = G(1)$

ANALISI IN FREQUENZA DELLO ZOH E SCELTA DI T

LA T.F. DELLO ZOH È:

$$\boxed{G_{ZOH}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}} \rightsquigarrow G_{ZOH}(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{e^{-j\omega T/2}}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j}\right) =$$

$$\rightsquigarrow \cdot \frac{T/2}{T/2} \rightsquigarrow = T\,\frac{e^{-j\omega T/2}}{\omega T/2}\left(\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j}\right)$$

$\rightarrow SIN(\omega T/2)$

$$\boxed{= T\,SINC\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-j\omega T/2}}$$

MODULO $\boxed{|G_{ZOH}(s)|} = T\left|SINC\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right| = \boxed{T\left|SINC\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)\right|}$

$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s}$ $\rightarrow$ PULSAZIONE DI CAMPIONAMENTO

FASE $\boxed{\angle G_{ZOH}(s) = -\frac{\omega T}{2} + \theta}$

$\theta = 0$ SE $SIN\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right) > 0$

$\theta = \pi$ SE $SIN\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right) < 0$

GUADAGNO STATICO $G_{ZOH}(j0) = T$

LA FZ. DEL MODULO SI ANNULLA PER $\omega = K\omega_s$, CON K INTERO, OVVERO PER LE PULSAZIONI MULTIPLE DELLA PULSAZIONE DI CAMPIONAMENTO.

MENTRE LA FZ. DELLA FASE AVRÀ DELLE DISCONTINUITÀ DI π NEI PUNTI $\omega = K\omega_s$.

METODO 1

$$\boxed{\omega_s = \alpha\,\omega_{-3} \quad CON\ \alpha >> 1}$$

SI HA CHE $\forall \omega \in [0, \omega_{-3}] \Rightarrow \left|SINC\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)\right| \approx 1 \Rightarrow |G_{ZOH}(s)| \approx T$

$\Rightarrow$ QUINDI IN QUESTO INTERVALLO POSSIAMO APPROSSIMARE:

$$\boxed{G_{ZOH}(j\omega) \approx T e^{-j\omega T/2}}$$

METODO 2

INDICHIAMO CON $-\Delta\varphi$ IL MASSIMO DECREMENTO TOLLERABILE, IN GRADI, DEL MARGINE DI FASE m_φ:

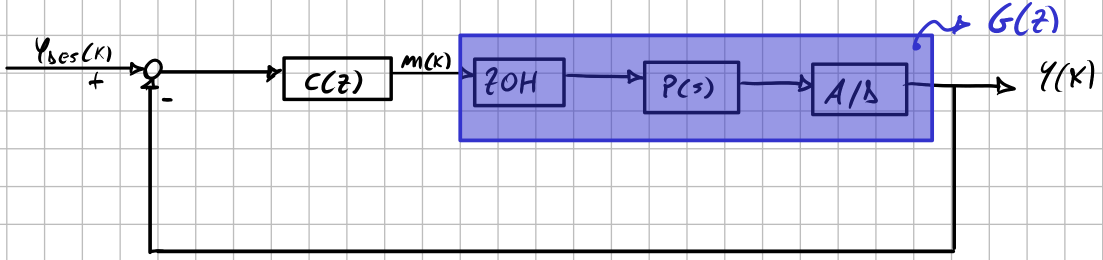
$$m_\varphi - \Delta\varphi > 0$$

RICORDIAMO CHE: $\angle G_{ZOH}(j\omega_t) = -\omega_t \frac{T}{2} \rightsquigarrow$ ALLORA T DOVRÀ SODDISFARE:

$$-\omega_t \frac{T}{2} \geq -\Delta\varphi \frac{\pi}{180}$$

$$\boxed{T \leq \frac{2\pi}{180}\,\frac{\Delta\varphi}{\omega_t}}$$

CONTROLLO A TEMPO DI RISPOSTA FINITO



SE W(z) È STABILE BIBO LA RISPOSTA DI UN SEGNALE CANONICO $Y_{DES}(K)$ PUÒ CONVERGERE IN UN TEMPO FINITO.

CONSIDERIAMO IL GRADINO CAMPIONATO $Y_{DES}(K) = 1(K) \quad \forall K \geq 0$.

VOGLIAMO CAPIRE QUANDO $e(K) = Y_{DES}(K) - Y_{DES}(K)$ ASSUME UN VALORE COSTANTE $(e_0 \neq 0)$ O NULLO $(e_0 = 0)$ IN UN NUMERO FINITO DI PASSI.

$$\exists \ell : \forall K \geq \ell \Rightarrow e(K) = e_0 \Rightarrow E(z) = \sum_{K=0}^{\infty} e(K) z^{-K} = \sum_{K=0}^{\ell-1} e(K) z^{-K} + \sum_{K=\ell}^{\infty} e_0 z^{-K} + \sum_{K=0}^{\ell-1} e_0 z^{-K} - \sum_{K=0}^{\ell-1} e_0 z^{-K} =$$

$$= \sum_{K=0}^{\ell-1} (e(K) - e_0) z^{-K} + \sum_{K=\ell}^{\infty} e_0 z^{-K} = \frac{Q(z)}{z^{\ell-1}} + e_0 \frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{(z-1)Q(z) + e_0 z^{\ell}}{(z-1)\, z^{\ell-1}}$$

$$\Rightarrow E(z) = Y_{DES}(z) - Y(z) =$$

$$= (1 - W(z)) Y_{DES}(z) =$$

$$= W_e(z) \frac{z}{z-1}$$

$$W_e(z) = \frac{(z-1)Q(z) + e_0 z^{\ell}}{z^{\ell}}$$

- L'ERRORE VA A $e_0 \neq 0$ IN TEMPO FINITO SE E SOLO SE $W_e(z)$ HA TUTTI I POLI COINCIDENTI CON $z = 0$
- L'ERRORE VA A $e_0 = 0$ IN TEMPO FINITO SE E SOLO SE $W_e(z)$ HA TUTTI I POLI IN $z = 0$ E UNO ZERO IN $z = 1$

DALLO SCHEMA SI RICAVA CHE: $W(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \rightsquigarrow W_e(z) = 1 - W(z) = \frac{1}{1 - F(z)}$

SE SI RICHIEDE $e_0 = 0 \Rightarrow W_e(z) = \frac{(z-1)Q(z)}{z^{\ell}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + F(z)} = \frac{(z-1)Q(z)}{z^{\ell}} \xrightarrow{\text{RISOLVO RISPETTO } C(z)} \boxed{C(z) = \frac{1}{G(z)} \left[\frac{z^{\ell} - (z-1)Q(z)}{(z-1)Q(z)} \right]}$$

Q(z) HA GRADO $\ell - 1$ CHE MINIMIZZA IL GRADO DEL NUM DI C(z):

$Q(z) = z^{\ell-1} + \ldots + z + 1$

$(z-1)Q(z) = z^{\ell} - 1$ DEN

$z^{\ell} - (z-1)Q(z) = 1$ NUM

$$\Rightarrow C(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{1}{z^{\ell} - 1}$$

ORA LO SOSTITUISCO IN W(z) E PONGO $W_{DES}(z) = W(z)$ OTTENENDO:

$$\Rightarrow \boxed{W_{DES}(z) = \frac{1}{z^{\ell}}}$$

PER RENDERE IL CONTROLLORE FISICAMENTE REALIZZABILE:

$$\ell_{MIN} = n_G - m_G \Rightarrow C(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{1}{z^{(n_G - m_G)} - 1}$$