

Reti Wireless

Riassunto da

Achille Cannavale

Indice

1	Introduzione	7
1	Reti Wireless	7
1.1	Propagazione in spazio libero	7
1.2	Segmento di accesso	7
2	Hand-off	8
3	Interferenza Multi Utente	8
4	Tecniche di Accesso Multiplo	9
4.1	FDMA (Frequency Division Multiple Access)	9
4.2	TDMA (Time Division Multiple Access)	9
5	Fading	10
5.1	Path-Loss	10
5.2	Shadowing	10
6	Canale Wireless	10
6.1	Doppler Spread	10
6.2	Tempo di Coerenza	11
6.3	Multipath Delay Spread	11
6.4	Banda di Coerenza	11
6.5	Selettività	11
7	Canale Flat Fading	12
7.1	Fading di Rayleigh	12
7.2	Fading di Rice	12
8	Stima di Canale	12
2	Single Link	15
1	Parametri di Canale	15
1.1	Capacità di canale	15
1.2	Efficienza Energetica	15
2	Canale SISO (Single Input Single Output)	16
3	Canale SIMO (Single Input Multiple Output)	17
3.1	Capacità del canale SIMO	17
3.2	EE del canale SIMO	17
3.3	Filtro Adattato / MRC per Canali SIMO	17

	3.4	Antenna Selection	18
4		Canale MISO (Multiple Input Single Output)	19
	4.1	MTC (Maximum Transmit Combining)	19
	4.2	Antenna Selection	20
5		Canale MIMO (Multiple Input Multiple Output)	21
	5.1	Trasmissione	21
	5.2	Ricezione	22
	5.3	Capacità del canale MIMO	23
3		Multi Link: Canale SIMO Multi-Utente	27
1		Uplink	27
	1.1	Sum-Rate	28
	1.2	Global Energy Efficiency e sum-EE	28
	1.3	Filtro Adattato (MRC)	29
	1.4	Zero-Forcing	29
	1.5	Ricevitore LMMSE	31
2		Downlink	34
	2.1	Maximum Transmit Combining	35
	2.2	Zero-Forcing Beamforming	36
3		Massive MIMO	37
4		Reti Neurali	39
1		Ai, Machine Learning, Deep Learning	39
	1.1	Apprendimento	39
2		Apprendimento Supervisionato	39
	2.1	Training Set	40
	2.2	Validation Set	40
	2.3	Test Set	40
	2.4	Overfitting e Underfitting	41
3		Deep Learning	41
	3.1	Classificazioni delle ANN	42
4		Fully-Connected Neural Network	42
	4.1	Funzioni di Attivazione	42
5		Convolutional Neural Network	43
	5.1	Layer Convoluzionali	43
	5.2	Pooling Layer	44
6		Addestramento di Reti Neurali Artificiali	44
	6.1	ANN Training	44
	6.2	Algoritmo del Gradiente	45
	6.3	Metodo del Gradiente Stocastico	45

7	Regolarizzazione	46
7.1	Regolarizzazione L^P	46
5	Ottimizzazione	49
1	Introduzione ai Problemi Convessi	49
1.1	Insieme Convesso	49
1.2	Funzione Convessa	49
2	Condizioni al Primo Ordine	50
2.1	Funzioni Convesse Derivabili	50
2.2	Dimostrazione delle Condizioni al Primo Ordine	50
2.3	Sufficienza delle Condizioni al Primo Ordine	51
3	Proprietà delle Funzioni Convesse	51
3.1	Inversione di Segno	51
3.2	Somma Pesata di Funzioni	52
3.3	Massimo Pesato di Funzioni Convesse	52
4	Problemi Convessi	52
4.1	Minimizzazione Convessa	52
4.2	Lagrangiano	53
4.3	Funzione Duale	53
4.4	Duality Gap	53
4.5	Dualità Forte, Dualità Debole	54
4.6	Condizioni KKT	55
5	Concavità Generalizzata	55
5.1	Problema Frazionale	55
5.2	Funzioni Quasi-Concave	55
5.3	Funzioni Quasi-Convesse Differenziabili	56
5.4	Proprietà delle Funzioni Quasi-Concave	57
6	Funzioni Pseudo-Concave	57
6.1	Punti Stazionari	57
6.2	Proprietà delle Funzioni Pseudo-Concave	57
7	Concavità Generalizzata di un Rapporto	58
7.1	Affine/Affine	58
7.2	Concava/Affine	58
7.3	Concava/Convessa	58
7.4	Algoritmo di Dinkelbach	59
7.5	Esempio di Problema Convesso: Water Filling	60
8	Problemi Multi-Obiettivo	62
8.1	Tecnica di Scalarizzazione	62
8.2	Frontiera di Pareto	63

6	Allocazione delle Risorse	65
1	Uplink Power Control	66
1.1	Uplink Sum Rate Maximization	66
1.2	GEE Maximization	66
1.3	Downlink Sum Rate Maximization	67
1.4	Downlink GEE Maximization	68
2	MIMO Maximization	70
2.1	MIMO Rate Maximization	70
2.2	MIMO EE Maximization	71
7	Sistemi Multi-Cellulari	73
1	Sistemi Multi-Cellulari: Uplink	73
2	Sistemi Multi-Cellulari: Downlink	74
8	Superfici Intelligenti Riconfigurabili	75
1	Ris: Uplink	75
2	RIS: Downlink	76
3	Allocazione della Matrice Gamma	77
3.1	Caso Multi-Utente	77

Capitolo 1

Introduzione

1 Reti Wireless

Qualunque comunicazione avvenga tramite propagazione di onde nell'etere viene detta **Comunicazione Wireless**.

Essa è caratterizzata da:

- **Frequenza Portante e Banda**
- **Potenza** del segnale

1.1 Propagazione in spazio libero

La potenza relativa ad un segnale radio in spazio libero segue questa formula:

$$P_r = P_t G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 = P_t G_t G_r \left(\frac{c}{4\pi d f_0} \right)^2$$

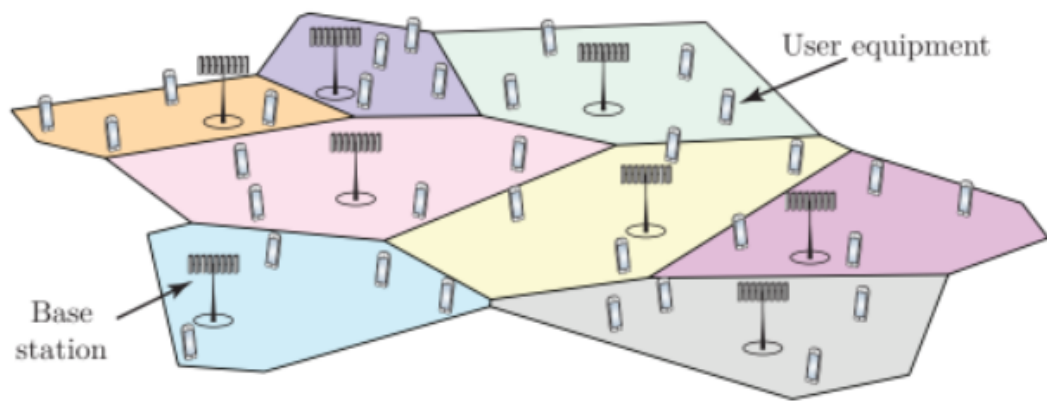
dove:

- f_0 è la frequenza portante
- d è la distanza tra Tx e Rx
- P_t e P_r sono potenza trasmessa e potenza ricevuta
- $c = 3 * 10^8 m/s$
- G_t e G_r sono i guadagni in trasmissione e ricezione

Quindi la potenza si attenua con il **quadrato della distanza**.

1.2 Segmento di accesso

Il territorio da coprire viene diviso in zone dette **celle** in cui vi è almeno una stazione **radio-base** (BS).

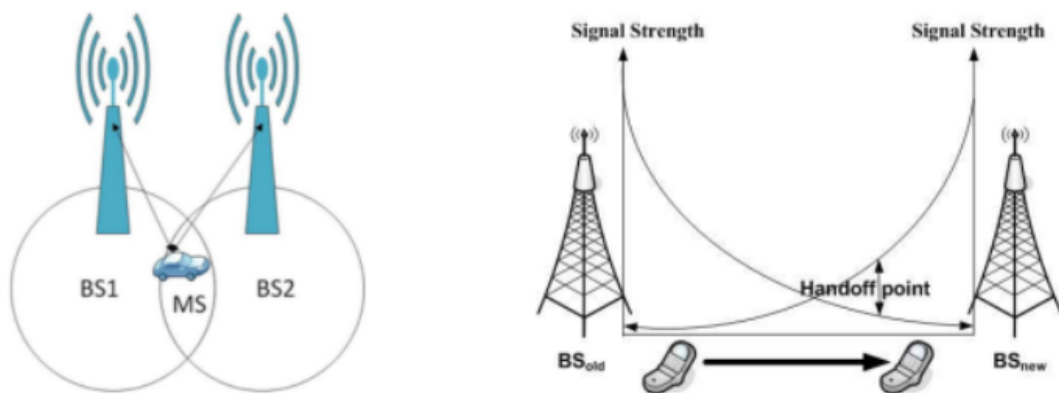


Differenziamo poi:

- canale di **Uplink** (utenti mobili verso la stazione radio-base)
- canale di **Downlink** (stazione radio-base verso gli utenti mobili)

2 Hand-off

L'**Hand-off** è una procedura con cui un utente mobile viene sganciato da una BS e agganciato da un'altra.



Possiamo dividerlo in due categorie:

- **Hard Hand-off**, in cui il terminale può essere servito SOLO da una BS
- **Soft Hand-off**, in cui il terminale può essere servito da due BS allo stesso tempo

3 Interferenza Multi Utente

Dato che il canale Wireless è un mezzo di comunicazione **condiviso**, qualunque trasmissione sarà soggetta a **interferenze** dovute agli altri segnali

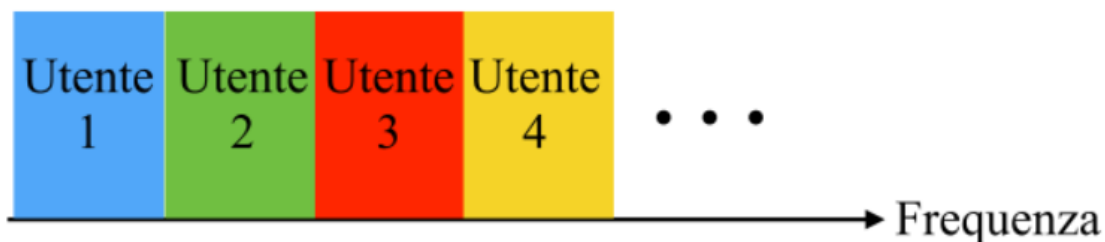
degli **altri nodi della rete**.

Tipicamente ha una potenza **molto più significativa rispetto al rumore termico**, quindi è il problema principale da dover risolvere nelle trasmissioni Wireless, per questo motivo è necessario l'uso di tecniche di accesso multiplo.

4 Tecniche di Accesso Multiplo

4.1 FDMA (Frequency Division Multiple Access)

La **FDMA** (Frequency Division Multiple Access) assegna a ciascun utente una banda di frequenze dedicata:



Il ricevitore potrà così estrarre il segnale desiderato attraverso un **filtro passa-banda reale**.

Tuttavia lo spettro di frequenze è limitato!! Quindi le bande di frequenza vengono riutilizzate tra celle non adiacenti, per far in modo che l'attenuazione del segnale dovuta alla distanza, non crei interferenza.

4.2 TDMA (Time Division Multiple Access)

Il **TDMA** (Time Division Multiple Access) assegna a ciascun utente uno slot temporale dedicato:



Il ricevitore potrà così estrarre il segnale desiderato moltiplicando per un **impulso rettangolare**.

5 Fading

Il segnale che parte dal trasmettitore si propagherà attraverso dei **cammini multipli** e ciò vuol dire che al ricevitore arriveranno delle **sovrapposizioni** del segnale trasmesso con **ritardi diversi**.

Questo effetto che caratterizza il Canale Wireless viene detto **Fading** e viene trattato come una realizzazione di una **variabile aleatoria**.

5.1 Path-Loss

Il **Path-Loss** descrive l'assorbimento del segnale da parte degli oggetti presenti tra T_x e R_x :

$$P_r = P_t G_t G_r \left(\frac{c}{4\pi f_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{d^\eta}$$

5.2 Shadowing

Lo **Shadowing** rappresenta anch'esso la densità di ostacoli tra T_x e R_x , ma è modellata come una variabile aleatoria **log-normale**.

6 Canale Wireless

Quindi sfruttando la sovrapposizione degli effetti possiamo rappresentare il segnale ricevuto nel seguente modo:

$$r(t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k(t) \cdot s(t - \tau_k(t))$$

6.1 Doppler Spread

Il **Doppler Spread** misura la selettività del canale dovuta alla tempo-varianza dei ritardi di propagazione:

$$D_s = \max_{i,j} \left| \tau'_i(t) - \tau'_j(t) \right| \cdot f_0$$

6.2 Tempo di Coerenza

Il **Tempo di Coerenza** misura il tempo durante il quale il Canale Wireless si può ritenere stazionario:

$$T_c = \frac{1}{4D_s}$$

6.3 Multipath Delay Spread

Il **Multipath Delay Spread** misura la selettività del canale dovuta alle differenze tra i ritardi di propagazione:

$$T_d = \max_{i,j} |\tau_i(t) - \tau_j(t)|$$

6.4 Banda di Coerenza

La **Banda di Coerenza** misura la banda di frequenze in cui il Canale Wireless si può ritenere costante:

$$B_c = \frac{1}{2T_d}$$

Una volta definite queste quantità, possiamo distinguere:

6.5 Selettività

Selettività nel Tempo

Sia T_s il tempo di simbolo:

- Se $T_c \gg T_s$ si parla di **Flat Fading nel tempo**.
- Se $T_c \ll T_s$ si parla di **canale selettivo nel tempo**.

Selettività in Frequenza

Sia B_s la banda:

- Se $B_c \gg B_s$ si parla di **Flat Fading in frequenza**.
- Se $B_c \ll B_s$ si parla di **canale selettivo in frequenza**.

7 Canale Flat Fading

Consideriamo un canale **Flat Fading** nel **tempo** e in **frequenza**:

- $T_c \gg T_s$
- $B_c \gg T_s$

L'effetto complessivo del Canale Wireless può essere espresso da un **singolo coefficiente aleatorio**:

$$h = \underbrace{\sqrt{G_t G_r} \left(\frac{c}{4\pi f_0} \right)}_{\text{Path-Loss}} \cdot \frac{1}{d^{\eta/2}} \underbrace{\psi}_{\text{Shadowing}} \underbrace{\delta}_{\text{Fading}}$$

- ψ è una v.a. log-normale
- $\delta \sim CN(\mu, \sigma_\delta^2)$

Quindi ogni T_c si ha una nuova realizzazione di h !!

7.1 Fading di Rayleigh

Nel caso in cui $\mu = 0$, $|\delta|$ è distribuito come una variabile di **Rayleigh**.

7.2 Fading di Rice

Nel caso in cui $\mu \neq 0$, $|\delta|$ è distribuito come una variabile di **Rice**.

8 Stima di Canale

Come conoscere la realizzazione di h ?

Essendo consci del fatto che h è costante durante il Tempo di Coerenza, trasmettiamo una sequenza di simboli noti (sequenza di training) s_1, \dots, s_J

Quindi riceveremo:

$$\underline{r} = \sqrt{p}h\underline{s} + \underline{n} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_J \end{bmatrix} = \sqrt{p}h \begin{bmatrix} s_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n_J \end{bmatrix}$$

Moltiplicheremo poi il vettore $\underline{\mathbf{r}}$ con il vettore $\underline{\mathbf{s}}^H$:

$$\begin{aligned} y &= \underline{\mathbf{s}}^H \underline{\mathbf{r}} = \sqrt{p}h||\underline{\mathbf{s}}||^2 + \underline{\mathbf{s}}^H \underline{\mathbf{n}} = \\ &= \sqrt{p}h||\underline{\mathbf{s}}||^2 + w \end{aligned}$$

dove $w \sim CN(0, \sigma^2||\underline{\mathbf{s}}||^2)$

Quindi data la **sequenza di training** $\underline{\mathbf{s}}$, usando metodi di stima possiamo ottenere una **stima di h**.

Tuttavia in ogni **intervallo di coerenza**, prima di poter iniziare a comunicare **bisogna stimarsi il canale h**.

Capitolo 2

Single Link

1 Parametri di Canale

1.1 Capacità di canale

La **Capacità** di un canale è il massimo rate a cui è possibile trasmettere, avendo una probabilità di errore piccola a piacere:

$$C = B \log_2(1 + SNR) \text{ [bit/s]}$$

Da notare è che la capacità non dipende nè dalla modulazione nè dalla codifica di canale in uso.

1.2 Efficienza Energetica

L'**Efficienza Energetica** di un canale di comunicazione misura quanti bit possono essere trasmessi in maniera affidabile per Joule di energia consumata:

$$EE = \frac{C}{P_t} = \frac{B \log_2(1 + SNR)}{\mu p + P_c} \text{ [bit/J]}$$

dove:

- $\mu \geq 1$ è l'inverso dell'efficienza dell'amplificazione di trasmissione
- P_c è la potenza generata dai circuiti del sistema che dipende dal sistema utilizzato.

2 Canale SISO (Single Input Single Output)

Consideriamo una singola antenna in trasmissione e in ricezione.

Il segnale ricevuto è:

$$r = \sqrt{p}hs + n$$

L'SNR sarà:

$$SNR = \frac{|\sqrt{p}h|^2 \mathbb{E}[|s|^2]}{\mathbb{E}[|n|^2]} = \frac{p|h|^2}{\sigma^2}$$

La **Capacità** del canale **SISO** è:

$$C_{SISO} = B \log_2 \left(1 + \frac{p|h|^2}{\sigma^2} \right) [bit/s]$$

L'**Efficienza Energetica** del canale **SISO** è:

$$EE_{SISO} = \frac{B \log_2 \left(1 + \frac{p|h|^2}{\sigma^2} \right)}{\mu p + P_c} [bit/J]$$

3 Canale SIMO (Single Input Multiple Output)

Consideriamo un canale **Flat-Fading** per una trasmissione in cui abbiamo una sola antenna trasmittente (antenna che immette l'input) e più antenne riceventi (antenne di output).

Il segnale ricevuto dall' l -esima antenna è:

$$r_l = \sqrt{p}h_ls + n$$

Quindi la BS riceve un vettore $L \times 1$ dato da:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_L \end{bmatrix} = \sqrt{p} \begin{bmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_L \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} n_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n_L \end{bmatrix} = \sqrt{p} \underline{h} s + \underline{n}$$

$$\underline{n} \sim CN(0, \sigma^2 \underline{I}) \text{ i.i.d.}$$

3.1 Capacità del canale SIMO

$$C_{SIMO} = B \log_2 \left(1 + \frac{p \|\underline{h}\|^2}{\sigma^2} \right) [bit/s]$$

3.2 EE del canale SIMO

$$E_{SIMO} = \frac{B \log_2 \left(1 + \frac{p \|\underline{h}\|^2}{\sigma^2} \right)}{\mu p + P_c} [bit/J]$$

3.3 Filtro Adattato / MRC per Canali SIMO

Si può raggiungere la capacità del canale SIMO **filtrando linearmente** il vettore ricevuto:

$$y = \underline{c}^H \underline{r} = \sqrt{p} \underline{c}^H \underline{h} s + \underline{c}^H \underline{n} = \sqrt{p} z + w$$

Quindi dopo il filtro l'SNR sarà:

$$SNR = \frac{p \mathbb{E} [|z|^2]}{\mathbb{E} [|w|^2]}$$

Esaminando il termine al numeratore:

$$p\mathbb{E}[|z|^2] = p\mathbb{E}[|s|^2] |\underline{\mathbf{c}}^H \underline{\mathbf{h}}|^2 = p|\underline{\mathbf{c}}^H \underline{\mathbf{h}}|^2 \leq p \|\underline{\mathbf{c}}\|^2 \|\underline{\mathbf{h}}\|^2 \text{ Per Shwartz}$$

Quindi si raggiunge l'uguaglianza quando $\underline{\mathbf{c}}$ e $\underline{\mathbf{h}}$ sono **paralleli**.

Esaminando ora il denominatore, capiamo che w è ancora una variabile aleatoria Gaussiana, quindi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[w] &= \underline{\mathbf{c}}^H \mathbb{E}[n] = 0 \\ \mathbb{E}[|w|^2] &= \mathbb{E}[w w^*] = \underline{\mathbf{c}}^H \mathbb{E}[\underline{\mathbf{n}} \underline{\mathbf{n}}^H] \underline{\mathbf{c}} = \sigma^2 \|\underline{\mathbf{c}}\|^2 \end{aligned}$$

Quindi Il **Massimo SNR** ottenibile dopo il filtro è:

$$SNR = \frac{p|\underline{\mathbf{h}}|^2 \|\underline{\mathbf{c}}\|^2}{\sigma^2 \|\underline{\mathbf{c}}\|^2} = \frac{p\|\underline{\mathbf{h}}\|^2}{\sigma^2}$$

che può essere ottenuto scegliendo $\underline{\mathbf{c}} = \alpha \underline{\mathbf{h}}$.

Tale filtro si dice **Filtro Adattato** oppure **Maximum Reciver Combining** (MRC)

3.4 Antenna Selection

Con il metodo di **Antenna Selection** si riceve solo dall'antenna con il canale migliore:

$$\hat{h} = \max_{l \in [1, L]} |h_l|$$

Il suo SNR sarà:

$$SNR = \frac{p|\hat{h}|^2}{\sigma^2}$$

Quindi avremmo:

$$\begin{aligned} R &= B \log_2 \left(1 + \frac{p|\hat{h}|^2}{\sigma^2} \right) \\ EE &= \frac{B \log_2 \left(1 + \frac{p|\hat{h}|^2}{\sigma^2} \right)}{\mu p + P_c} \end{aligned}$$

4 Canale MISO (Multiple Input Single Output)

Consideriamo un canale **Flat-Fading** per una trasmissione in cui abbiamo una sola antenna ricevente (antenna di output) e più antenne trasmittenti (antenne che immettono l'input).

Il canale che va dall' l -esima antenna della BS verso ciascun terminale mobile è:

$$y_l = \sqrt{p} q_l g_l^* s$$

dove:

- g_l^* è il Coefficiente di Downlink Utente- l -esima antenna trasmittente
- q_l è il Coefficiente di Beamforming dell' l -esima antenna trasmittente, tale che $||\underline{\mathbf{q}}||^2 = 1$
- La potenza del segnale trasmesso sarà quindi: $P = \sum_{l=1}^L p |q_l|^2 = p ||\underline{\mathbf{q}}||^2 = p$

Quindi il terminale mobile riceve la sovrapposizione dei segnale dalle L antenne della BS:

$$r = \sqrt{p} \left(\sum_{l=1}^L g_l^* q_l \right) s + n = \sqrt{p} \underline{\mathbf{g}}^H \underline{\mathbf{q}} s + n$$

4.1 MTC (Maximum Transmit Combining)

Dato il segnale ricevuto:

$$r = \sqrt{p} \underline{\mathbf{g}}^H \underline{\mathbf{q}} s + n = \sqrt{p} z + n$$

L'SNR al ricevitore sarà:

$$SNR = \frac{p \mathbb{E}[|z|^2]}{\mathbb{E}[|n|^2]}$$

Esaminando il numeratore:

$$p \mathbb{E}[|z|^2] = p \mathbb{E}[|s|^2] |\underline{\mathbf{g}}^H \underline{\mathbf{q}}|^2 \leq p ||\underline{\mathbf{g}}||^2 ||\underline{\mathbf{q}}||^2 = p ||\underline{\mathbf{g}}||^2$$

dove l'uguaglianza vale quando $\underline{\mathbf{g}}$ e $\underline{\mathbf{q}}$ sono paralleli.

Quindi il massimo SNR ottenibile dopo il filtro sarà:

$$SNR = \frac{p ||\underline{\mathbf{g}}||^2}{\sigma^2} \implies C_{MISO} = B \log_2 \left(1 + \frac{p ||\underline{\mathbf{g}}||^2}{\sigma^2} \right)$$

e può essere ottenuto scegliendo $\underline{\mathbf{q}} = \alpha \underline{\mathbf{g}}$.

Di solito si prende $\alpha = \frac{1}{\|\underline{\mathbf{g}}\|}$ in modo tale da normalizzare $\underline{\mathbf{q}}$.

4.2 Antenna Selection

Con il metodo di **Antenna Selection** si trasmette solo dall'antenna con il canale migliore:

$$\hat{g} = \max_{l \in [1, L]} |g_l|$$

Il suo SNR sarà:

$$SNR = \frac{p|\hat{g}|^2}{\sigma^2}$$

Quindi avremmo:

$$R = B \log_2 \left(1 + \frac{p|\hat{g}|^2}{\sigma^2} \right)$$

$$EE = \frac{B \log_2 \left(1 + \frac{p|\hat{g}|^2}{\sigma^2} \right)}{\mu p + P_c}$$

5 Canale MIMO (Multiple Input Multiple Output)

Consideriamo un canale **Flat-Fading** per una trasmissione in cui abbiamo N_T antenne al T_x e N_R antenne al R_x e trasmettiamo N_T simboli contemporaneamente s_1, \dots, s_{N_T} .

5.1 Trasmissione

Il Segnale x_i trasmesso dall'antenna i -esima è una sovrapposizione degli N_T simboli:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{p} \sum_{nt=1}^{N_T} s_{nt} q_{nt,1} \\ x_2 &= \sqrt{p} \sum_{nt=1}^{N_T} s_{nt} q_{nt,2} \\ &\vdots \\ x_{N_T} &= \sqrt{p} \sum_{nt=1}^{N_T} s_{nt} q_{nt,N_T} \end{aligned}$$

con $q_{nt,i}$ il coefficiente di Beamforming dell'antenna i , relativo al simbolo nt .

Ora definiamo:

- $\underline{\mathbf{x}} = [x_1, \dots, x_{N_T}]$
- $\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{2,1} & \dots & q_{N_T,1} \\ q_{1,2} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ q_{1,N_T} & \dots & \dots & q_{N_T,N_T} \end{pmatrix}$

Per ottenere:

$$\underline{\mathbf{x}} = \sqrt{p} \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{s}}$$

Dove vale il seguente vincolo:

$$\text{tr}(\underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{M}}^H) = 1$$

Dato che se assumiamo $\mathbb{E} [\underline{\mathbf{s}} \underline{\mathbf{s}}^H] = \underline{\mathbf{I}}$:

$$P_t = \mathbb{E} [||\underline{\mathbf{x}}||^2] = \mathbb{E} [\text{tr}(\underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{x}}^H)] = p \text{tr}(\underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{M}}^H)$$

La potenza dello stream nt è:

$$P_{nt} = \mathbb{E} [|\sqrt{p} \underline{\mathbf{q}}_{nt}^T \underline{\mathbf{s}}|^2] = p ||\underline{\mathbf{q}}_{nt}||^2 \mathbb{E} [\underline{\mathbf{s}} \underline{\mathbf{s}}^H] = p ||\underline{\mathbf{q}}_{nt}||^2$$

Allora la **Potenza Totale** può essere calcolata così:

$$\sum_{nt=1}^{N_T} P_{nt} = \sum_{nt=1}^{N_T} p \|\underline{\mathbf{q}}_{nt}\|^2 = \text{ptr}(\underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{M}}^H) = p$$

5.2 Ricezione

Ad ogni antenna ricevente arriva la sovrapposizione dei segnali trasmessi da tutte le antenne trasmettenti, quindi il segnale ricevuto dall'antenna nr sarà:

$$r_{nr} = \sum_{nt=1}^{N_T} h_{nr,nt} x_{nt} + n_{nr}$$

con $h_{nr,nt}$ canale tra l'antenna nr ricevente e l'antenna nt trasmittente.

$$r_1 = \sum_{nt=1}^{N_T} h_{1,nt} x_{nt} + n_1$$

$$r_2 = \sum_{nt=1}^{N_T} h_{2,nt} x_{nt} + n_2$$

.

.

.

$$r_{N_R} = \sum_{nt=1}^{N_T} h_{N_R,nt} x_{nt} + n_{N_R}$$

Che possiamo sintetizzare così:

$$r_1 = \underline{\mathbf{h}}_1^T \underline{\mathbf{x}} + n_1$$

$$r_2 = \underline{\mathbf{h}}_2^T \underline{\mathbf{x}} + n_2$$

.

.

.

$$r_{N_R} = \underline{\mathbf{h}}_{N_R}^T \underline{\mathbf{x}} + n_{N_R}$$

Infine definendo la matrice:

$$\underline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & \dots & h_{1,N_T} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N_R,1} & \dots & h_{N_R,N_T} \end{pmatrix}$$

Otterremo il seguente modello:

$$\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{n}} = \sqrt{p} \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{n}}$$

5.3 Capacità del canale MIMO

La Capacità del canale MIMO sarà:

$$C_{MIMO} = B \log_2 \left(\frac{|\mathbb{E} [\underline{\mathbf{r}} \underline{\mathbf{r}}^H]|}{|\mathbb{E} [\underline{\mathbf{n}} \underline{\mathbf{n}}^H]|} \right) [bit/s]$$

Assumiamo $\underline{\mathbf{x}}$ e $\underline{\mathbf{n}}$ indipendenti, allora:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\underline{\mathbf{r}} \underline{\mathbf{r}}^H] &= \mathbb{E} [(\underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{n}}) (\underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{n}})^H] = \\ &= \underline{\mathbf{H}} \underbrace{\mathbb{E} [\underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{x}}^H]}_{p \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{M}}^H = p \underline{\mathbf{Q}}} \underline{\mathbf{H}}^H + \underbrace{\mathbb{E} [\underline{\mathbf{n}} \underline{\mathbf{n}}^H]}_{\sigma^2 \underline{\mathbf{I}}} = \\ &= p \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{H}}^H + \sigma^2 \underline{\mathbf{I}} \end{aligned}$$

Quindi la Capacità nel canale MIMO si scriverà:

$$C_{MIMO} = B \log_2 \left(\frac{|p \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{H}}^H + \sigma^2 \underline{\mathbf{I}}|}{|\sigma^2 \underline{\mathbf{I}}|} \right) = B \log_2 \left(\left| \underline{\mathbf{I}} + \frac{p}{\sigma^2} \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{H}}^H \right| \right) [bit/s]$$

Disuguaglianza di Hadamard

Sia $\underline{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definita positiva ($\Re(\underline{\mathbf{x}}^* \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}}) > 0 \forall \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}} \in \mathbb{C}^n$), allora:

$$|\underline{\mathbf{A}}| \leq \prod_{i=1}^n A_{i,i}$$

Se $\underline{\mathbf{A}}$ è diagonale $\implies A_{i,i} = \lambda_i$

Applicazione

La matrice $\underline{I} + \frac{p}{\sigma^2} \underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H$ è definita positiva:

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \underline{x}^H \left(\underline{I} + \frac{p}{\sigma^2} \underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H \right) \underline{x} &= \|\underline{x}\|^2 + \frac{p}{\sigma^2} \underline{x}^H \underline{H} \underline{M} \underline{M}^H \underline{H}^H \underline{x} \\ &= \|\underline{x}\|^2 + \frac{p}{\sigma^2} \|\underline{M}^H \underline{H} \underline{x}\|^2 > 0 \end{aligned}$$

Quindi l'autovalore i -esimo della matrice $\left(\underline{I} + \frac{p}{\sigma^2} \underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H \right)$ sarà $\Rightarrow 1 + \frac{p}{\sigma^2} \lambda_i$, con λ_i che è l'autovalore della matrice $\underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H$.

In aggiunta ogni autovettore \underline{v} di $\underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H$ sarà anche autovettore di $\underline{I} + \frac{p}{\sigma^2} \underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H$ dato che:

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \left(\underline{I} + \frac{p}{\sigma^2} \underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H \right) \underline{v} &= \underline{v} + \frac{p}{\sigma^2} \underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H \underline{v} = \\ &= \underline{v} + \frac{p}{\sigma^2} \lambda_i \underline{v} = \\ &= \left(1 + \frac{p}{\sigma^2} \lambda_i \right) \underline{v} \end{aligned}$$

Allora applicando la disuguaglianza di Hadamard si ha:

$$C \leq B \sum_{i=1}^{\min\{N_R, N_T\}} \log_2 \left(1 + \frac{p}{\sigma^2} \lambda_i \right)$$

Ma come posso rendere $\underline{I} + \frac{p}{\sigma^2} \underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H$ anche **DIAGONALE**????

- Scriviamo la matrice di canale attraverso la sua SVD: $\underline{H} = \underline{U} \underline{\Lambda} \underline{V}^H$
- Scriviamo la matrice di covarianza del segnale tramite la sua EVD: $\underline{Q} = \underline{U}_Q \underline{\Lambda}_Q \underline{U}_Q^H$

Così sostituendo otterremo:

$$\underline{H} \underline{Q} \underline{H}^H = \underbrace{\underline{U} \underline{\Lambda} \underline{V}^H}_{\underline{H}} \underbrace{\underline{U}_Q \underline{\Lambda}_Q \underline{U}_Q^H}_{\underline{Q}} \underbrace{\underline{V} \underline{\Lambda}^H \underline{U}^H}_{\underline{H}^H}$$

Ma se scegliamo $\underline{U}_Q = \underline{V}$ otteniamo:

$$\underline{I} + \frac{p}{\sigma^2} \underline{U} \underline{\Lambda} \underline{\Lambda}_Q \underline{\Lambda}^H \underline{U}^H$$

Che ci fa arrivare alla massima capacità.

Ma quindi come dobbiamo elaborare il segnale al trasmettitore e al ricevitore per raggiungere la massima capacità???

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{H}\underline{x} + \underline{n} = \sqrt{p} \underline{H} \underline{M} \underline{s} + \underline{n} = \\ &= \sqrt{p} \underbrace{\underline{U} \underline{\Lambda} \underline{V}^H}_{\underline{H}} \underbrace{\underline{U}_M \underline{\Lambda}_M \underline{V}_M^H}_{\underline{M}} \underline{s} + \underline{n} = \\ &= \sqrt{p} \underline{U} \underline{\Lambda} \underline{V}^H \underline{U}_Q \underline{\Lambda}_Q^{1/2} \tilde{\underline{s}} + \underline{n} \end{aligned}$$

dove:

- $\underline{U}_M = \underline{U}_Q$ e $\underline{\Lambda}_M = \underline{\Lambda}_Q^{1/2}$
- $\tilde{\underline{s}} = \underline{V}_M^H \underline{s}$

Scegliendo $\underline{U}_Q = \underline{V}$ otteniamo:

$$\underline{r} = \sqrt{p} \underline{U} \underline{\Lambda} \underline{\Lambda}_Q^{1/2} \tilde{\underline{s}} + \underline{n}$$

Al ricevitore filtriamo il segnale ricevuto con $\underline{C}^H = \underline{U}^H$:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \underline{C}^H \underline{r} = \sqrt{p} \underline{C}^H \underline{U} \underline{\Lambda} \underline{\Lambda}_Q^{1/2} \tilde{\underline{s}} + \underline{C}^H \underline{n} = \\ &= \sqrt{p} \underline{\Lambda} \underline{\Lambda}_Q^{1/2} \tilde{\underline{s}} + \underline{U}^H \underline{n} = \sqrt{p} \underline{\Lambda} \underline{\Lambda}_Q^{1/2} \tilde{\underline{s}} + \underline{w} \end{aligned}$$

Scriviamolo componente per componente:

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{N_R} \end{pmatrix} = \sqrt{p} \begin{pmatrix} \lambda_{1,H} \sqrt{\lambda_{Q,1}} \tilde{s}_1 + w_1 \\ \lambda_{2,H} \sqrt{\lambda_{Q,2}} \tilde{s}_2 + w_2 \\ \vdots \\ \lambda_{N_R,H} \sqrt{\lambda_{Q,N_R}} \tilde{s}_{N_R} + w_{N_R} \end{pmatrix}$$

Così facendo abbiamo ottenuto $\min\{N_R, N_T\}$ Canali SISO Paralleli.

Quindi la capacità del Canale MIMO può anche essere calcolata sommando le capacità dei singoli canali SISO.

Il Canale SISO i-esimo ha il seguente SNR:

$$SNR_i = \frac{p}{\sigma^2} \lambda_{i,H}^2 \lambda_{i,Q}$$

Quindi la Capacità del Canale SISO i-esimo sarà:

$$C_i = B \log_2 \left(1 + \frac{p}{\sigma^2} \lambda_{i,H}^2 \lambda_{i,Q} \right)$$

Capitolo 3

Multi Link: Canale SIMO Multi-Utente

Fino ad ora abbiamo trascurato le interferenze dei segnali trasmessi dagli altri terminali mobili, quindi in questo capitolo ne terremo conto, dato che l'Interferenza Multi-Utente è una caratteristica peculiare delle Reti Wireless.

Si dice infatti che i canali wireless sono interference-limited.

1 Uplink

Consideriamo K utenti in una cella telefonica che comunicano, allo stesso tempo, con una BS avente L antenne.

La BS riceverà la sovrapposizione dei segnali trasmessi dai K utenti:

$$\underline{r} = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{h}_k s_k + \underline{n}$$

Supponiamo di voler ricavarci il simbolo trasmesso dall'utente m, possiamo riscrivere così:

$$\underline{r} = \underbrace{\sqrt{p_m} \underline{h}_m s_m}_{\text{Segnale Utile}} + \underbrace{\sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{h}_k s_k}_{\text{Interferenza Multi-Utente}} + \underline{n}$$

Ed ora elaboriamo il segnale ricevuto con un filtro lineare \underline{c}_m :

$$y_m = \underline{c}_m^H \underline{r} = \underbrace{\sqrt{p_m} \underline{c}_m^H \underline{h}_m s_m}_{\text{Segnale Utile}} + \underbrace{\sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{c}_m^H \underline{h}_k s_k}_{\text{Interferenza Multi-Utente}} + \underline{c}_m^H \underline{n}$$

Calcoliamo la Potenza del Segnale Utile:

$$p_m |\underline{c}_m^H \underline{h}_m|^2 \mathbb{E} [|s_m|^2] = p_m |\underline{c}_m^H \underline{h}_m|^2$$

Ed ora la Potenza dell'Interferenza e del Rumore Termico:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k s_k + \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{n}} \right|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k s_k \right|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left| \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{n}} \right|^2 \right] = \\
 &= \sum_{k \neq m} \mathbb{E} \left[\left| \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k s_k \right|^2 \right] + \sigma^2 \|\underline{\mathbf{c}}_m\|^2 = \\
 &= \sum_{k \neq m} p_k \left| \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k \right|^2 \mathbb{E} \left[|s_k|^2 \right] + \sigma^2 \|\underline{\mathbf{c}}_m\|^2 = \\
 &= \sum_{k \neq m} p_k \left| \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k \right|^2 + \sigma^2 \|\underline{\mathbf{c}}_m\|^2
 \end{aligned}$$

Quindi il SINR dell'utente m sarà:

$$SINR_m = \frac{p_m \left| \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m \right|^2}{\sum_{k \neq m} p_k \left| \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k \right|^2 + \sigma^2}$$

Tuttavia con la Ricezione Lineare, da sola, non consente di raggiungere la capacità a causa dell'Interferenza Multi Utente, quindi per ottenerla bisognerebbe usare tecniche di ricezione non-lineari, ma di conseguenza aumenta la complessità.

1.1 Sum-Rate

Per misurare le prestazioni globali del sistema in termini di rate si usa:

$$R_{sum} = B \sum_{m=1}^K \beta_m \log_2(1 + SINR_m)$$

dove β_m è la priorità dell'utente m.

1.2 Global Energy Efficiency e sum-EE

Per misurare le prestazioni globali del sistema in termini di EE si usa la Global Energy Efficiency:

$$GEE = \frac{B \sum_{m=1}^K \beta_m \log_2(1 + SINR_m)}{P_c + \sum_{m=1}^K \mu_k p_m}$$

oppure la Sum-EE:

$$EE_{sum} = B \sum_{m=1}^K \frac{\beta_m \log_2(1 + SINR_m)}{\mu_k p_m + P_{c,m}}$$

1.3 Filtro Adattato (MRC)

Il Filtro Addattato non è il miglior ricevitore lineare, ma è di sicuro il più semplice da implementare.

Sia:

$$\underline{c}_m = \underline{h}_m / \|\underline{h}_m\|, \forall m = 1, \dots, K$$

Si cerca di massimizzare la potenza del Segnale Utile, mitigando l'Interferenza Multi-Utente con l'uso di antenne multiple:

$$\begin{aligned} \text{Potenza Interferente} \sum_{k \neq m} p_k |\underline{h}_m^H \underline{h}_k|^2 &= \sum_{k \neq m} p_k \left| \sum_{l=1}^L \underline{h}_{m,l}^* \underline{h}_{k,l} \right|^2 \\ \text{Potenza Utile } p_m |\underline{h}_m^H \underline{h}_m|^2 &= p_m \left| \sum_{l=1}^L |\underline{h}_{m,l}^*|^2 \right|^2 \end{aligned}$$

SINR con Filtro Adattato

$$SINR_m = \frac{p_m \|\underline{h}_m\|^2}{\sum_{k \neq m} p_k \frac{|\underline{h}_m^H \underline{h}_k|^2}{\|\underline{h}_m\|^2} + \sigma^2}$$

1.4 Zero-Forcing

Il metodo Zero-Forcing consiste nell'azzerare l'Interferenza Multi-Utente, tuttavia non avremo controllo sulla potenza del Segnale Utile.

Caso Due Utenti

Per semplicità supponiamo di avere un sistema con solo due utenti:

$$y_1 = \underbrace{\sqrt{p_1} \underline{c}_1^H \underline{h}_1 s_1}_{\text{Segnale Utile}} + \underbrace{\sqrt{p_2} \underline{c}_1^H \underline{h}_2 s_2}_{\text{Interferenza Multi-Utente}} + \underbrace{\underline{c}_1^H \underline{n}}_{\text{RumoreTermico}}$$

Per azzerare l'Interferenza Multi-Utente dovremo scegliere \underline{c}_1 ortogonale ad \underline{h}_2 .

In particolare fissiamo $\underline{c}_1 = \underline{h}_2^\perp / \|\underline{h}_2^\perp\|$, ottenendo:

$$y_1 = \sqrt{p_1} \left(\frac{\underline{h}_2^\perp}{\|\underline{h}_2^\perp\|} \right)^H \underline{h}_1 s_1 + \left(\frac{\underline{h}_2^\perp}{\|\underline{h}_2^\perp\|} \right)^H \underline{n}$$

Quindi che abbiamo fatto???

Abbiamo proiettato il Segnale Ricevuto \underline{r} lungo una direzione ortogonale al vettore di canale interferente (\underline{h}_2).

Così facendo l'Interferenza viene azzerata, ma non abbiamo il controllo sulla potenza del Segnale Utile (noise enhancement).

Dopo l'applicazione dello Zero-Forcing avremo il seguente SNR:

$$SNR_{ZF} = p_1 \frac{|(\underline{h}_2^\perp)^H \underline{h}_1|^2}{\|\underline{h}_2^\perp\|^2 \sigma^2} < p_1 \frac{\|\underline{h}_1\|^2}{\sigma^2}$$

Invece, nel caso in cui avessimo avuto un Canale Noise-Limited, i termini \underline{h} sono meno limitanti rispetto al rumore termico, quindi:

$$SNR_{NL} = p_1 \frac{\|\underline{h}_1\|^4}{\|\underline{h}_1\|^2 \sigma^2} = p_1 \frac{\|\underline{h}_1\|^2}{\sigma^2}$$

Quindi $SNR_{ZF} < SNR_{NL}$.

Caso Generale

In generale il segnale filtrato m-esimo sarà:

$$y_m = \underline{c}_m^H \underline{r} = \sqrt{p_m} \underline{c}_m^H \underline{h}_m s_m + \sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{c}_m^H \underline{h}_k s_k + \underline{c}_m^H \underline{n}$$

Quindi dato che vogliamo porre a zero l'Interferenza Multi-Utente e far rimanere il Segnale Utile:

$$\underline{c}_m^H \underline{h}_1 = 0$$

$$\underline{c}_m^H \underline{h}_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\underline{c}_m^H \underline{h}_m = 1$$

$$\underline{c}_m^H \underline{h}_{m+1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\underline{c}_m^H \underline{h}_K = 0$$

I vettori di canale (\underline{h}) sono Linearmente Indipendenti \implies il sistema di sopra ammette almeno una soluzione se $L \geq K$.

Definiamo $\underline{P}^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_K})$, $\underline{s} = [s_1, \dots, s_K]^T$, e scriviamo il vettore ricevuto così:

$$\underline{r} = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{h}_k s_k + \underline{n} = \underline{H} \underline{P}^{1/2} \underline{s} + \underline{n}$$

Definendo poi $\underline{\mathbf{C}} = [\underline{\mathbf{c}}_1, \dots, \underline{\mathbf{c}}_K]$ e $\underline{\mathbf{y}} = [\underline{\mathbf{y}}_1, \dots, \underline{\mathbf{y}}_K]^T$ si avrà:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{y}} &= \underline{\mathbf{C}}^H \underline{\mathbf{r}} = \frac{1}{\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}} \underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{P}}^{1/2} \underline{\mathbf{s}} + \frac{1}{\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}} \underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{n}} \\ &= \underline{\mathbf{P}}^{1/2} \underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} s_1 \\ \vdots \\ \sqrt{p_K} s_K \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{w}}\end{aligned}$$

Quindi come abbiamo detto, la soluzione può essere calcolata SOLO quando $L \geq K$ perchè se così non fosse, la matrice $\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}$ non sarebbe invertibile!!!

Infatti, $\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}$ ha dimensioni $K \times K$, mentre $\underline{\mathbf{H}}$ ha dimensioni $L \times K$. Quindi affinché $\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}$ sia invertibile deve verificarsi che $L \geq K$, infatti:

$$rg(\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}) \leq rg(\underline{\mathbf{H}}) = \min\{L, K\}$$

Mentre il $\underline{\mathbf{w}}$ avrà:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\underline{\mathbf{w}}] &= \frac{1}{\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}} \underline{\mathbf{H}}^H \mathbb{E}[\underline{\mathbf{n}}] = 0 \\ \mathbb{E}[\underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{w}}^H] &= \frac{1}{\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}} \underline{\mathbf{H}}^H \mathbb{E}[\underline{\mathbf{n}} \underline{\mathbf{n}}^H] \left(\frac{1}{\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}} \underline{\mathbf{H}}^H \right)^H = \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}} \underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}} \frac{1}{\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}} = \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}}\end{aligned}$$

SNR ZF

Il Rapporto Segnale-Rumore dell'utente m è:

$$SNR_m^{ZF} = \frac{p_m \mathbb{E}[|s_m|^2]}{\sigma^2 \|\underline{\mathbf{h}}_m^+\|^2} = \frac{p_m}{\sigma^2 \|\underline{\mathbf{h}}_m^+\|^2}$$

dove $\underline{\mathbf{h}}_m^+$ non è altro che la riga m -esima della matrice $\frac{1}{\underline{\mathbf{H}}^H \underline{\mathbf{H}}} \underline{\mathbf{H}}^H$

1.5 Ricevitore LMMSE

Il miglior filtro lineare è il ricevitore a Minimo Errore Quadratico Medio (LMMSE). Consiste nel minimizzare per l'appunto l'errore quadratico medio tra il Simbolo da Stimare e il risultato a valle del filtro:

$$MSE_m = \mathbb{E}[|y_m - s_m|^2] = \mathbb{E}[|y_m|^2] + \mathbb{E}[|s_m|^2] - 2\Re\{\mathbb{E}[y_m s_m^*]\}$$

Calcoliamo i singoli termini separatamente:

$$\begin{aligned}
\bullet \mathbb{E} [|y_m|^2] &= \mathbb{E} [y_m y_m^*] = \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sqrt{p_m} \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m s_m + \sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k s_k + \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{n}} \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\sqrt{p_m} \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{c}}_m s_m^* + \sum_{i \neq m} \sqrt{p_i} \underline{\mathbf{h}}_i^H \underline{\mathbf{c}}_m s_i^* + \underline{\mathbf{n}}^H \underline{\mathbf{c}}_m \right) \right] = \\
&= p_m \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{c}}_m \mathbb{E} [|s_m|^2] + \sum_{k \neq m} p_k \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k \underline{\mathbf{h}}_k^H \underline{\mathbf{c}}_m \mathbb{E} [|s_k|^2] + \sigma^2 ||\underline{\mathbf{c}}_m||^2 = \\
&= p_m \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{c}}_m + \sum_{k \neq m} p_k \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k \underline{\mathbf{h}}_k^H \underline{\mathbf{c}}_m + \sigma^2 ||\underline{\mathbf{c}}_m||^2 \\
\bullet \Re(\mathbb{E} [y_m s_m^*]) &= \Re \left(\mathbb{E} \left[\left(\sqrt{p_m} \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m s_m + \sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k s_k + \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{n}} \right) s_m^* \right] \right) = \\
&= \sqrt{p_m} \mathbb{E} [|s_m|^2] \Re(\underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m) = \sqrt{p_m} \Re(\underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m)
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo il gradiente rispetto a $\underline{\mathbf{c}}_m$ dei singoli termini:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\underline{\mathbf{c}}_m} (p_m \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{c}}_m) &= 2 p_m \underline{\mathbf{h}}_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{c}}_m \\
\nabla_{\underline{\mathbf{c}}_m} (p_k \underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k \underline{\mathbf{h}}_k^H \underline{\mathbf{c}}_m) &= 2 p_k \underline{\mathbf{h}}_k \underline{\mathbf{h}}_k^H \underline{\mathbf{c}}_m \\
\nabla_{\underline{\mathbf{c}}_m} (||\underline{\mathbf{c}}_m||^2) &= \nabla_{\underline{\mathbf{c}}_m} (\underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{c}}_m) = 2 \underline{\mathbf{c}}_m \\
\nabla_{\underline{\mathbf{c}}_m} (\sqrt{p_m} \Re(\underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m)) &= \sqrt{p_m} \underline{\mathbf{h}}_m
\end{aligned}$$

Quindi ricaviamo la condizione di Ottimalità:

$$\begin{aligned}
\nabla_{c_m} MSE_m &= 0 \\
&= \underbrace{\left(p_m \underline{\mathbf{h}}_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{c}}_m + \sum_{k \neq m} p_k \underline{\mathbf{h}}_k \underline{\mathbf{h}}_k^H \underline{\mathbf{c}}_k + \sigma^2 \underline{\mathbf{c}}_m \right)}_{\nabla_{c_m}(\mathbb{E}[|y_m|^2])} = \underbrace{\sqrt{p_m} \underline{\mathbf{h}}_m}_{\nabla_{c_m}(\Re(\mathbb{E}[y_m s_m^*]))} = \\
&= \left(p_m \underline{\mathbf{h}}_m \underline{\mathbf{h}}_m^H + \sum_{k \neq m} p_k \underline{\mathbf{h}}_k \underline{\mathbf{h}}_k^H + \sigma^2 \underline{\mathbf{I}}_L \right) \underline{\mathbf{c}}_m = \sqrt{p_m} \underline{\mathbf{h}}_m \\
\underline{\mathbf{c}}_m &= \sqrt{p_m} \left(p_m \underline{\mathbf{h}}_m \underline{\mathbf{h}}_m^H + \underbrace{\sum_{k \neq m} p_k \underline{\mathbf{h}}_k \underline{\mathbf{h}}_k^H + \sigma^2 \underline{\mathbf{I}}_L}_{\underline{\mathbf{R}}_m} \right)^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m = \\
&= \sqrt{p_m} (p_m \underline{\mathbf{h}}_m \underline{\mathbf{h}}_m^H + \underline{\mathbf{R}}_m)^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m
\end{aligned}$$

Usando il Lemma di Inversione delle Matrici:

$$(\underline{\mathbf{p}} \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{x}}^H + \underline{\mathbf{M}})^{-1} = \underline{\mathbf{M}}^{-1} - \frac{p \underline{\mathbf{M}}^{-1} \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{x}}^H \underline{\mathbf{M}}^{-1}}{1 + p \underline{\mathbf{x}}^H \underline{\mathbf{M}}^{-1} \underline{\mathbf{x}}}$$

Otterremo:

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{p_m} \left(\underline{\mathbf{R}}_m^{-1} - \frac{p_m \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1}}{1 + p_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m} \right) \underline{\mathbf{h}}_m = \\
&= \frac{\sqrt{p_m}}{1 + p_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m} \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m \implies \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m
\end{aligned}$$

SINR dell' LMMSE

$$\begin{aligned}
SINR_m^{LMMSE} &= \frac{p_m |\underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m|^2}{\underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} (\sum_{k \neq m} p_k \underline{\mathbf{h}}_k \underline{\mathbf{h}}_k^H + \sigma^2 \underline{\mathbf{I}}_L) \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m} = \frac{p_m |\underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m|^2}{\underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m} = \\
&= \frac{p_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m}{\underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m} = p_m \underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{R}}_m^{-1} \underline{\mathbf{h}}_m
\end{aligned}$$

Massimizzazione del SINR

Ora cerchiamo di massimizzare il Rapporto Segnale Rumore, ovvero cerchiamo il vettore \underline{c}_m tale che:

$$\begin{aligned} \max_{c_m} \frac{p_m |\underline{c}_m^H \underline{h}_m|^2}{\sum_{k \neq m} p_k |\underline{c}_k^H \underline{h}_k|^2 + \sigma^2 \|\underline{c}_m\|^2} \\ = \max_{c_m} \frac{p_m \underline{c}_m^H \underline{h}_m \underline{h}_m^H \underline{c}_m}{\underline{c}_m^H \left(\underbrace{\sum_{k \neq m} p_k \underline{h}_k \underline{h}_k^H + \sigma^2 \underline{I}}_{\underline{R}_m} \right) \underline{c}_m} = \max_{c_m} \frac{p_m \underline{c}_m^H \underline{h}_m \underline{h}_m^H \underline{c}_m}{\underline{c}_m^H \underline{R}_m \underline{c}_m} \end{aligned}$$

Se definiamo $\underline{x}_m = \underline{R}_m^{-1/2} \underline{c}_m$ avremo:

$$\max_{x_m} \frac{p_m \overbrace{\underline{x}_m^H \underline{R}_m^{-1/2}}^{\underline{c}_m^H} \underline{h}_m \underline{h}_m^H \overbrace{\underline{R}_m^{-1/2} \underline{x}_m}^{\underline{c}_m}}{\|\underline{x}_m\|^2} = \max_{x_m} \frac{p_m |\underline{x}_m^H \underline{R}_m^{-1/2} \underline{h}_m|^2}{\|\underline{x}_m\|^2} = p_m \underline{h}_m^H \underline{R}_m^{-1} \underline{h}_m$$

Che raggiunge il suo massimo per $\underline{x}_m = \alpha \underline{R}_m^{-1/2} \underline{h}_m \implies \underline{c}_m = \alpha \underline{R}_m^{-1} \underline{h}_m$

Quindi il Ricevitore LMMSE massimizza il SINR!!

2 Downlink

Consideriamo ora la tratta Downlink con:

- K utenti
- Una BS con L antenne

La BS trasmetterà la sovrapposizione dei segnali per i K utenti.

$$\underline{y} = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{q}_k \underline{s}_k$$

con:

$$\mathbb{E} [\|\underline{y}\|^2] = p \sum_{k=1}^K \|\underline{q}_k\|^2 = P$$

L'utente m riceverà il segnale:

$$r_m = \underline{g}_m^H \left(\sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{q}_k \underline{s}_k \right) + n_m = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{g}_m^H \underline{q}_k \underline{s}_k + n_m$$

Dato che vogliamo decodificare il simbolo indirizzato all'utente m , riscriviamo il segnale ricevuto r_m così:

$$r_m = \underbrace{\sqrt{p_m} \underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_m \underline{\mathbf{s}}_m}_{\text{Segnale Utile}} + \underbrace{\sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k \underline{\mathbf{s}}_k}_{\text{Interferenza Multi-Utente}} + \underbrace{n_m}_{\text{Rumore Termico}}$$

Calcoliamo la potenza del Segnale Utile:

$$p_m |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_m|^2 \mathbb{E} [|\underline{\mathbf{s}}_m|^2] = p_m |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_m|^2$$

Mentre la potenza dell'Interferenza sommata al Rumore è:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k \underline{\mathbf{s}}_k + n_m \right|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k \underline{\mathbf{s}}_k \right|^2 \right] + \mathbb{E} [|n_m|^2] = \\ &= \sum_{k \neq m} \mathbb{E} [|\sqrt{p_k} \underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k \underline{\mathbf{s}}_k|^2] + \sigma^2 = \\ &= \sum_{k \neq m} p_k |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k|^2 \mathbb{E} [|\underline{\mathbf{s}}_k|^2] + \sigma^2 = \\ &= \sum_{k \neq m} p_k |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k|^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Quindi il SINR dell'Utente m sarà:

$$SINR_m = \frac{p_m |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_m|^2}{\sum_{k \neq m} p_k |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k|^2 + \sigma^2}$$

Definendo C_m la Capacità del Canale tra l'Utente m e la BS si ha:

$$R_m = B \log_2(1 + SINR_m) \leq C_m$$

$$EE_m = \frac{B \log_2(1 + SINR_m)}{P_{c,m} + \mu_m p_m}$$

2.1 Maximum Trasmit Combining

Come abbiamo detto il Filtro Adattato (o MTC) non è il migliore tra i filtri lineari, ma è di sicuro il più semplice e consiste nel massimizzare la potenza del Segnale Utile, mitigando l'Interferenza Multi-Utente con l'uso di antenne multiple.

Sia:

$$\underline{\mathbf{q}}_m = \alpha_m \underline{\mathbf{g}}_m, \forall m = 1, \dots, K$$

$$\text{Potenza Interferente } \sum_{k \neq m} p_k |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k|^2 = \alpha_m^2 \sum_{k \neq m} p_k \left| \sum_{l=1}^L g_{m,l}^* g_{k,l} \right|^2$$

$$\text{Potenza Utile } p_m |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_m|^2 = \alpha_m^2 p_m \left| \sum_{l=1}^L |g_{m,l}|^2 \right|^2$$

2.2 Zero-Forcing Beamforming

Lo Zero-Forcing nel Downlink consiste nel trovare un vettore $\underline{\mathbf{q}}_m$ ortogonale a TUTTI i $K - 1$ canali Interferenti:

$$r_m = \sqrt{p_m} \underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_m s_m + \sum_{k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k s_k + n_m$$

Imponiamo che:

- $\underline{\mathbf{g}}_k^H \underline{\mathbf{q}}_m = 0$ per ogni $k \neq m$
- $\underline{\mathbf{g}}_k^H \underline{\mathbf{q}}_m = 1$ per $k = m$

Vettorizzando e raccogliendo $\underline{\mathbf{g}}_k$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{r}} &= \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{g}}_1^H (\sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{q}}_k s_k) + n_1 \\ \underline{\mathbf{g}}_2^H (\sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{q}}_k s_k) + n_2 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{g}}_K^H (\sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{q}}_k s_k) + n_K \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{g}}_1^H \\ \underline{\mathbf{g}}_2^H \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{g}}_K^H \end{pmatrix} \left(\sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{q}}_k s_k \right) + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_K \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{G}}^H \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{P}}^{1/2} \underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

con $\underline{\mathbf{P}}^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_K})$

Se ora scegliamo $\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{G}}^H \underline{\mathbf{G}})^{-1}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{r}} &= \underline{\mathbf{G}}^H \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{P}}^{1/2} \underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{n}} = \\ &= \underline{\mathbf{G}}^H \underline{\mathbf{G}} (\underline{\mathbf{G}}^H \underline{\mathbf{G}})^{-1} \underline{\mathbf{P}}^{1/2} \underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{n}} = \\ &= \underline{\mathbf{P}}^{1/2} \underline{\mathbf{s}} + \underline{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} s_1 \\ \vdots \\ \sqrt{p_K} s_K \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Però per fare ciò, la matrice ($\underline{\mathbf{G}}^H \underline{\mathbf{G}}$) deve essere invertibile, il che richiede $L \geq K!!!$

Quindi è necessario che la BS abbia un numero di antenne almeno uguale al numero degli Utenti Interferenti.

3 Massive MIMO

Il Massive MIMO è una delle principali tecniche delle reti 5G e consiste nell'uso di un gran numero di antenne alla BS.

Tuttavia comporta un maggiore costo nella costruzione e nell'energia dissipata, ma consente di ottenere prestazioni "virtualmente" uguali ad un canale noise-limited con un Filtro Adattato.

Dato che l'Interferenza Multi-Utente diventa trascurabile per $L \gg K$:

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq m} \frac{p_k}{\|\underline{\mathbf{h}}_m\|^2} |\underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k|^2 &= \sum_{k \neq m} \frac{p_k}{\|\underline{\mathbf{h}}_m\|^2} L^2 \left| \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L h_{m,l}^* h_{k,l} \right|^2 \approx \\ &\approx \sum_{k \neq m} \frac{p_k}{\|\underline{\mathbf{h}}_m\|^2} L^2 |\mathbb{E}[H_m^* H_k]|^2 = 0 \end{aligned}$$

Invece il segnale utile viene preservato:

$$\frac{p_k}{\|\underline{\mathbf{h}}_m\|^2} |\underline{\mathbf{h}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k|^2 = \frac{p_k}{\|\underline{\mathbf{h}}_m\|^2} \left| \sum_{l=1}^L |h_{m,l}|^2 \right|^2 \approx \frac{p_k}{\|\underline{\mathbf{h}}_m\|^2} L^2 |\mathbb{E}[|H_m|^2]|^2$$

Capitolo 4

Reti Neurali

1 Ai, Machine Learning, Deep Learning

- AI: Qualunque tecnica con cui una macchina può riprodurre il comportamento umano.
- Machine Learning: Qualunque tecnica con cui una macchina può svolgere compiti senza essere esplicitamente programmata, ma semplicemente imparando per esperienza precedente.
- Deep Learning: Una specifica tecnica di machine learning, che implementa l'apprendimento attraverso reti neurali artificiali.

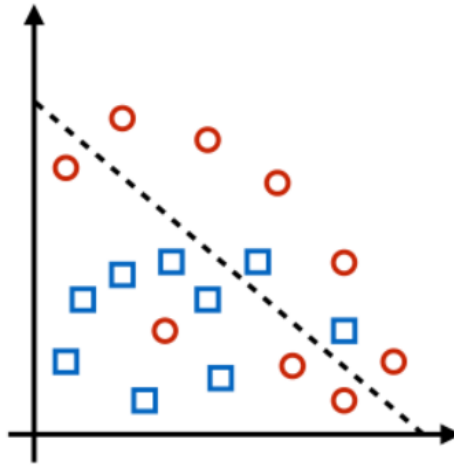
1.1 Apprendimento

Possiamo dividere i tipi di Apprendimento in:

- Apprendimento Non Supervisionato: vuol dire che i dati a disposizione sono soltanto i dati di input
- Apprendimento Supervisionato: vuol dire che i dati a disposizione sono i dati di input con i corrispettivi dati di output

2 Apprendimento Supervisionato

Supponiamo di avere i seguenti dati d'esempio:



Un Algoritmo di Learning imposta i Parametri di Progetto denotati con θ , come la pendenza della retta.

Ma come si impostano???

2.1 Training Set

Definendo il Training Set con $S_{TR}\{(x_n, y_n^*)\}$ per $n = 1, \dots, N_{TR}$, i parametri θ si impostano in modo tale da minimizzare:

$$\min_{\theta} \sum_{n=1}^{N_{TR}} \mathbb{L}(y_n(\theta), y_n^*)$$

dove:

- y_n è il risultato effettivo per l'ingresso x_n
- \mathbb{L} è una funzione di errore

Oltre a θ un Algoritmo di Learning deve impostare altri parametri, che non possono essere impostati con il Training Test, ovvero gli Iperparametri, come la scelta di una curva anzichè un'altra.

2.2 Validation Set

Il Validation Set serve per testare l'algoritmo con dati non presenti nel Training Test, dato che lo scopo ultimo dell'algoritmo è la generalizzazione.

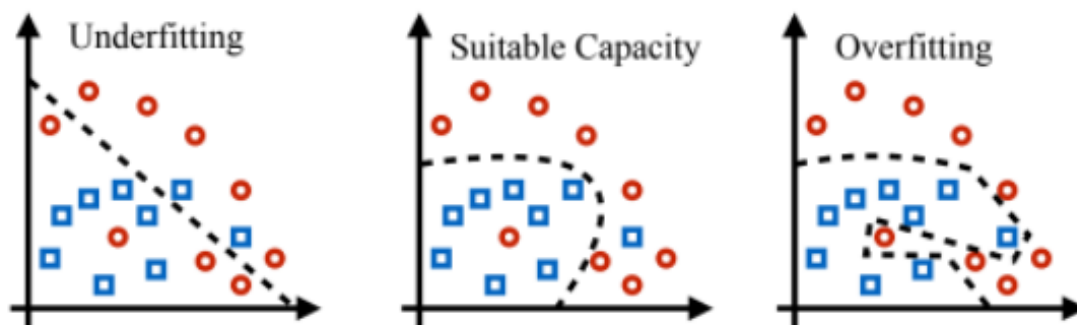
2.3 Test Set

Il Test Set svolge lo stesso ruolo del Validation Set, per questo lo scopo dell'algoritmo non è minimizzare l'errore nel training, ma è minimizzare l'Error Test.

2.4 Overfitting e Underfitting

Si ha Overfitting quando l'algoritmo di Learning si specializza troppo sul training set in uso.

Si ha Underfitting quando si ha un Errore Medio sul Training Set troppo basso.

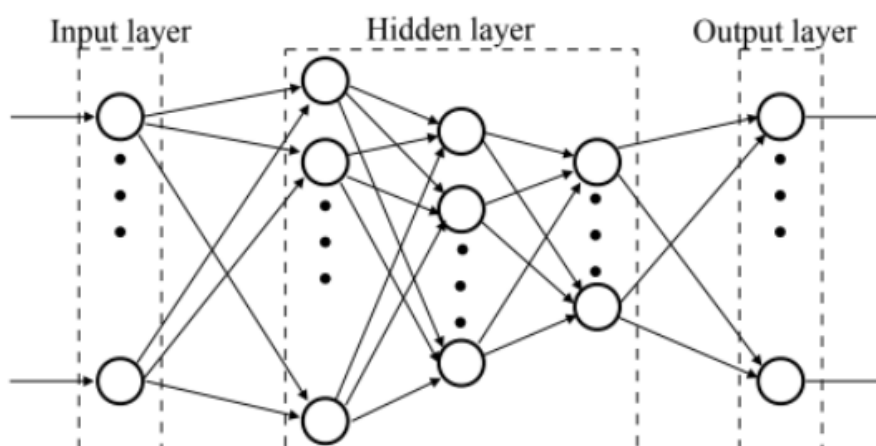


3 Deep Learning

Il Deep Learning utilizza, nel processo di apprendimento, le Reti Neurali Artificiali (ANN).

Le ANN sono organizzate in Layer, composti da "neuroni", divisi in:

- Input Layer che prendono i dati in ingresso e li inoltrano al Layer successivo
- Hidden Layer è il Layer che elabora i dati
- Output Layer che elabora i dati prima di mandarli in output



3.1 Classificazioni delle ANN

Le ANN possono essere classificate in:

- Feedforward Neural Network (FNN)
in cui i dati si propagano in una sola direzione
 - Fully-Connected Neural Network (FCNN)
è un caso particolare delle FNN, in cui ciascun neurone è connesso a tutti i neuroni del Layer successivo
 - Convolutional Neural Network (CNN)
è una FNN in cui ogni neurone fa una convoluzione dell'ingresso
- Recurrent Neural Network (RNN)
è una ANN in cui sono permessi loop, quindi l'uscita di un neurone potrebbe essere messa in ingresso ad un Layer precedente
- Deep Neural Network (DNN)
è una ANN con più di un Hidden Layer
- Shallow Neural Network (SNN)
è una ANN con un solo Hidden Layer

4 Fully-Connected Neural Network

Nelle FCNN l'ingresso del k-esimo layer è un vettore \underline{x}_{k-1} .

Mentre l'uscita dell'i-esimo neurone del k-esimo Layer sarà:

$$x_k(i) = f_{i,k}(z_{i,k})$$

$$z_{i,k} = \underline{w}_{i,k}^T \underline{x}_{k-1} + b_{i,k}$$

dove:

- $\underline{w}_{i,k}$ è un vettore di Pesì
- $b_{i,k}$ è un termine di Bias
- $f_{i,k}(z_{i,k})$ è una Funzione di Attivazione

4.1 Funzioni di Attivazione

Qualsiasi funzione può essere usata come Funzione di Attivazione, tuttavia esistono alcune scelte canoniche come la funzione Lineare, che viene usata al più dal Layer di Output e le funzioni Sigmoidali e Iperboliche, che non sono quasi mai usate per la loro difficile applicazione.

Le funzioni più largamente usate sono:

- Rectified Linear Unit (ReLU) è la più diffusa, anche se presenta il problema che sia identicamente nulla per ingressi negativi:

$$ReLU(z_{i,k}) = \max(0, z_{i,k})$$

- Generalized ReLU, risolve il problema visto sopra:

$$G-ReLU(z_{i,k}) = \max(0, z_{i,k}) + c \cdot \min(0, z_{i,k})$$

- Exponential Linear Unit (ELU) risolve lo stesso problema, ma pone gli ingressi negativi come esponenziali:

$$E-ReLU(z_{i,k}) = \begin{cases} \alpha(e^{z_{i,k}} - 1) & z_{i,k} \leq 0 \\ z_{i,k} & z_{i,k} > 0 \end{cases}$$

5 Convolutional Neural Network

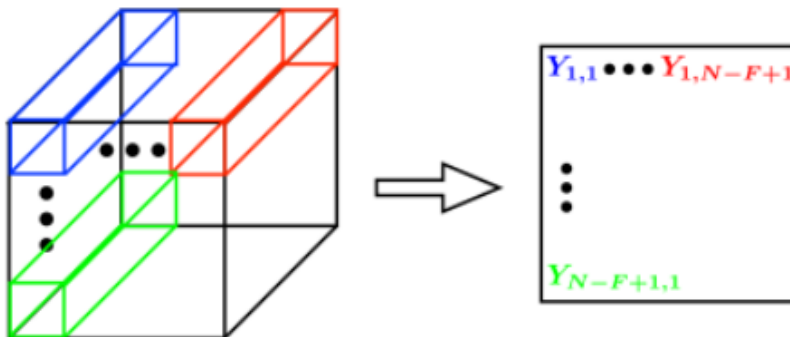
5.1 Layer Convoluzionali

Nelle Reti Convoluzionali, in ingresso si ha una matrice 3D, di dimensioni $N \times N \times N_c$

Ad ogni neurone è associato un Filtro indicato con \mathbf{W} di dimensioni $F \times F \times N_{c,f}$ ($F \leq N$) quindi più piccolo della matrice di Input.

Ogni neurone esegue una Cross-Correlazione a Finestra Mobile¹

Il risultato sarà una matrice 2D \mathbf{Y} , con dimensioni $N - F + 1 \times N - F + 1$



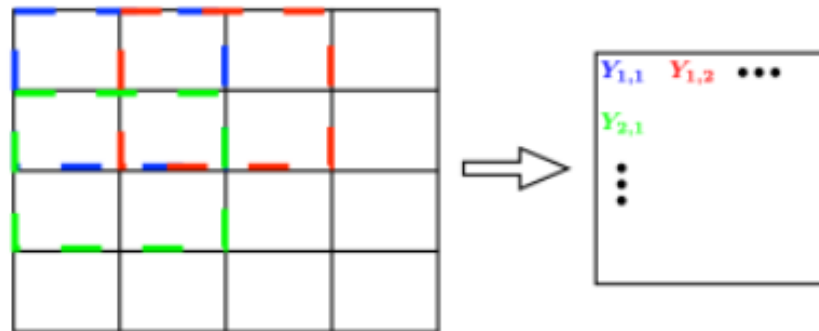
Alla matrice \mathbf{Y} sommeremo un termine di Bias per ogni neurone ed una Funzione di Attivazione per ogni componente di \mathbf{Y} .

¹Nel gergo delle ANN con un abuso di notazione viene chiamato Convoluzione

Tutte le matrici $\underline{\mathbf{Y}}$ del Layer vengono unite per formare una matrice 3D di dimensioni $(N - F - 1) \times (N - F - 1) \times N_F$ ed inoltrate in ingresso al Layer successivo.

5.2 Pooling Layer

Il Pooling è un'operazione svolta da un intero Layer, operando su ogni "strato"² della matrice di Input:



Max Pooling

Per ogni "strato" della matrice di Input, seleziona il massimo tra gli elementi di ogni sotto-matrice di dimensione $F \times F$.

Average Pooling

Per ogni "strato" della matrice di Input, seleziona la media tra gli elementi di ogni sotto-matrice di dimensione $F \times F$.

6 Addestramento di Reti Neurali Artificiali

6.1 ANN Training

Dato il Training-Set:

$$S_{TR} = \{x_n, y_n^*\}, n = 1, \dots, N_{TR}$$

l'obiettivo dell'Algoritmo di Learning è quello di OTTIMIZZARE l'assegnazione dei Pesi e dei Coefficienti di Bias contenuti in una variabile θ :

$$\min_{\theta} \sum_{n=1}^{N_{TR}} \mathbb{L}(y_n(\theta), y_n^*)$$

²Sugli N_F

Per risolvere questo problema si utilizzano metodi come l'Algoritmo del Gradiente.

6.2 Algoritmo del Gradiente

L'Algoritmo del Gradiente ha lo scopo di minimizzare una funzione.

Consideriamo il seguente problema:

$$\min_{\underline{x}} f(\underline{x})$$

Il Gradiente indica la direzione di massimo incremento della funzione, quindi l'algoritmo si muoverà in senso opposto rispetto al gradiente per trovare il minimo.

Algorithm 1 Algoritmo del Gradiente

Ensure: Inizializza x_{new} , $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$

▷ α viene detto step-size

repeat

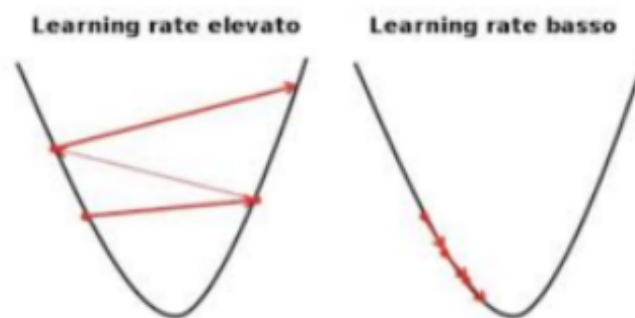
$\underline{x}_{old} = \underline{x}_{new}$

$\underline{x}_{new} = \underline{x}_{old} - \alpha \nabla f(\underline{x}_{old})$

until $\|\underline{x}_{new} - \underline{x}_{old}\| < \varepsilon$

L'algoritmo del gradiente converge ad un Punto Stazionario ($\nabla f = 0$) per α opportuni.

Tuttavia con α non opportunamente scelti si potrebbe cadere in uno di questi due casi:



IMPORTANTE:

L'Algoritmo del Gradiente arriva ad un Punto Stazionario, che NON è detto che sia un Minimo Globale!!

Ma non è detto che sia un problema, perchè alle volte trovare un Minimo Globale causerebbe un Overfitting!!!

6.3 Metodo del Gradiente Stocastico

L'Algoritmo del Gradiente è troppo complesso da calcolare per grandi quantità di dati.

Quindi scriviamo il Gradiente del Training-Set:

$$\nabla_{\theta} \Delta_{TR}(\theta) = \sum_{n=1}^{N_{TR}} \nabla_{\theta} \mathbb{L}(y_n(\theta), y_n^*)$$

Ed ora calcoliamo un'approssimazione del Gradiente, su un sotto-insieme S del Training-Set, chiamato mini-batch, con $N \ll N_{TR}$:

$$\nabla_{\theta} \widehat{\Delta_{TR}}(\theta) = \sum_{n \in S} \nabla_{\theta} \mathbb{L}(y_n(\theta), y_n^*)$$

SGD Training Algorithm

Algorithm 2 SGD Training Algorithm

Ensure: Inizializza $\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{b}}$

repeat

 Selezionare un mini-batch a caso chiamandolo S

 Calcola $\nabla_{\theta} \widehat{\Delta_{TR}}(\theta)$

$\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{W}} - \alpha \widehat{\nabla_{\Delta_{TR}}}(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{b}})$, con $\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}} - \alpha \widehat{\nabla_{\Delta_{TR}}}(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{b}})$

until Controlla la convergenza

7 Regularizzazione

Ogni metodo che minimizza il Test Error, a discapito del Training Error (quindi cerca di evitare l'Underfitting) viene detto metodo di Regularizzazione, che possiamo suddividere in varie categorie.

7.1 Regularizzazione L^P

Consiste nel "perturbare" la funzione di costo usata per il Training aggiungendo la norma L^P :

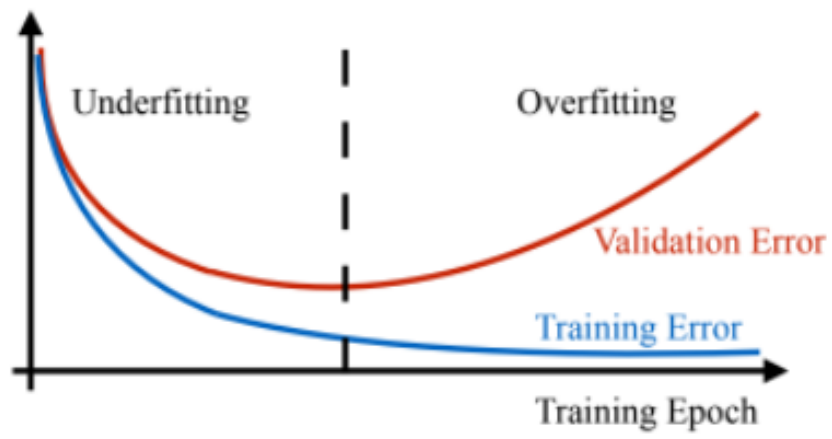
$$\Delta_r(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{b}}) = \Delta_{TR}(\underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{b}}) + \phi \|\underline{\mathbf{W}}\|_p^p$$

dove ϕ è un Iper Parametro che indica il peso della "perturbazione".

Da qui specificando si possono ottenere le definizioni di Regularizzazione L^2 e L^1 .

Early Stopping

L'Early Stopping consiste nell'interrompere il Training quando il Validation Error non è diminuito per T iterazioni di Training.



Capitolo 5

Ottimizzazione

Esaminiamo il seguente Problema di Massimo¹:

$$\begin{cases} \max_{\underline{\mathbf{x}}} f(\underline{\mathbf{x}}) \\ \text{con} & h_i(\underline{\mathbf{x}}) \geq 0, \forall i = 1, \dots, I \\ & c_j(\underline{\mathbf{x}}) = 0, \forall j = 1, \dots, J \end{cases}$$

dove:

- f è la Funzione Obiettivo
- le h_i definiscono i Vincoli di Disuguaglianza
- gli c_j definiscono i Vincoli di Uguaglianza

1 Introduzione ai Problemi Convessi

1.1 Insieme Convesso

Un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ si dice Convesso se e solo se $(\lambda \underline{\mathbf{x}}_1 + (1 - \lambda) \underline{\mathbf{x}}_2) \in C$, per ogni $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2 \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$.

(Ovvero se scelti due punti qualsiasi esiste un segmento che li congiunge senza uscire dall'insieme)

1.2 Funzione Convessa

² Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un Insieme Convesso. Allora $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è Convessa se e solo se:

$$f(\lambda \underline{\mathbf{x}}_1 + (1 - \lambda) \underline{\mathbf{x}}_2) \leq \lambda f(\underline{\mathbf{x}}_1) + (1 - \lambda) f(\underline{\mathbf{x}}_2)$$

¹Un problema di massimo può essere trasformato in un problema di minimo considerando la funzione -f

²Una Funzione Concava si ottiene con il maggiore uguale

per ogni $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$. La Convessità diventa Stretta³ con il minore.

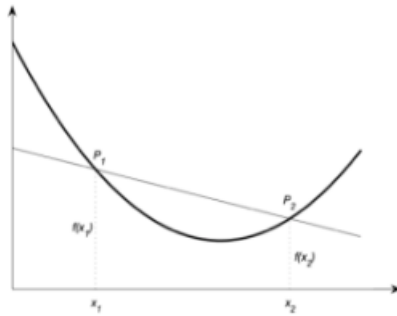


Figure: Funzione convessa

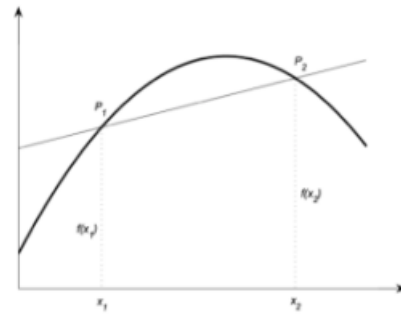


Figure: Funzione concava

2 Condizioni al Primo Ordine

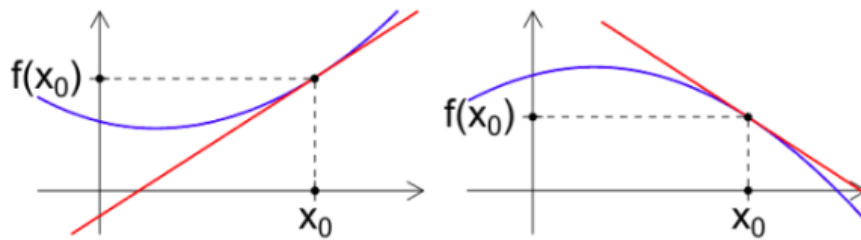
2.1 Funzioni Convesse Derivabili

Sia $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile.

Allora f è Convessa se e solo se:

$$f(\underline{x}_1) \geq f(\underline{x}_2) + \nabla^T f(\underline{x}_2)(\underline{x}_1 - \underline{x}_2), \quad \forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in C$$

f sarà Strettamente Convessa con il maggiore.



2.2 Dimostrazione delle Condizioni al Primo Ordine

Per definizione, se f è Convessa⁴, allora vale:

$$\begin{aligned} \lambda f(\underline{x}_1) + (1 - \lambda)f(\underline{x}_2) &\geq f(\lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda)\underline{x}_2) = \\ &= f(\underline{x}_2 + \lambda(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)) \end{aligned}$$

per ogni $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$.

³Con la Concavità Stretta avremo il maggiore

⁴In modo analogo si dimostra per le Funzioni Concave

Ora dividiamo entrambi i membri per λ :

$$\frac{\lambda f(\underline{\mathbf{x}}_1) + (1 - \lambda)f(\underline{\mathbf{x}}_2)}{\lambda} \geq \frac{f(\underline{\mathbf{x}}_2 + \lambda(\underline{\mathbf{x}}_1 - \underline{\mathbf{x}}_2))}{\lambda}$$

Risolviemo rispetto a $f(\underline{\mathbf{x}}_1)$:

$$f(\underline{\mathbf{x}}_1) \geq f(\underline{\mathbf{x}}_2) + \frac{f(\underline{\mathbf{x}}_2 + \lambda(\underline{\mathbf{x}}_1 - \underline{\mathbf{x}}_2)) - f(\underline{\mathbf{x}}_2)}{\lambda}$$

Facciamo tendere $\lambda \rightarrow 0$:

$$f(\underline{\mathbf{x}}_1) \geq f(\underline{\mathbf{x}}_2) + \nabla^T f(\underline{\mathbf{x}}_2)(\underline{\mathbf{x}}_1 - \underline{\mathbf{x}}_2)$$

2.3 Sufficienza delle Condizioni al Primo Ordine

Ogni Punto Stazionario è un Minimo Globale per Funzioni Convesse.

Sia $\underline{\mathbf{x}}_2$ tale che $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}_2) = 0$ allora secondo la Condizione al Primo Ordine abbiamo che:

$$f(\underline{\mathbf{x}}_1) \geq f(\underline{\mathbf{x}}_2), \quad \underline{\mathbf{x}}_1 \in C$$

Allora $\underline{\mathbf{x}}_2$ è un punto di Minimo Globale di f !!

Funzioni Note

Funzioni Convesse	Funzioni Concave
Funzioni Lineari	Funzioni Lineari
e^{ax}	$\log(a + bx)$
x^a , per $x > 0$, $a \geq 1$	x^a , per $x > 0$, $0 \leq a \leq 1$
$x \log(x)$ per $x \geq 0$	$(\prod_{i=1}^N x_i)^{1/n}$ in \mathbb{R}_{++}^n
Qualunque norma in \mathbb{R}^n	$\log(\det(\mathbf{I} + \underline{\mathbf{X}}))$, nello spazio delle $\underline{\mathbf{X}}$ semidefinite positive

3 Proprietà delle Funzioni Convesse

Ora elenchiamo le principali proprietà delle Funzioni Concave e Convesse.

3.1 Inversione di Segno

Sia f una Funzione Convessa, allora $-f$ è una Funzione Concava.

3.2 Somma Pesata di Funzioni

Siano f_1, \dots, f_N funzioni Convesse e siano w_1, \dots, w_N dei coefficienti non-negativi. Allora $\sum_{n=1}^N w_n f_n$ è convessa. Infatti per ogni $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \lambda \in [0, 1]$ si ha:

$$\begin{aligned} g(\lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2) &= \sum_{n=1}^N w_n f_n(\lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2) \leq \\ &\leq \lambda \sum_{n=1}^N w_n f_n(\underline{x}_1) + (1 - \lambda) \sum_{n=1}^N w_n f_n(\underline{x}_2) = \\ &= \lambda g(\underline{x}_1) + (1 - \lambda) g(\underline{x}_2) \end{aligned}$$

(Proprietà analoga per le funzioni Concave)

3.3 Massimo Pesato di Funzioni Convesse

Siano f_1, \dots, f_N funzioni Convesse e siano w_1, \dots, w_N dei coefficienti non-negativi. Allora $\max_n (w_n f_n)$ è convessa. Infatti per ogni $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \lambda \in [0, 1]$ si ha:

$$\begin{aligned} g(\lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2) &= \max_n w_n f_n(\lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2) \leq \\ &\leq \max_n (w_n \lambda f_n(\underline{x}_1) + (1 - \lambda) w_n f_n(\underline{x}_2)) \leq \\ &\lambda \max_n (w_n f_n(\underline{x}_1)) + (1 - \lambda) \max_n (w_n f_n(\underline{x}_2)) = \\ &= \lambda g(\underline{x}_1) + (1 - \lambda) g(\underline{x}_2) \end{aligned}$$

(Proprietà analoghe per il Minimo Pesato di Funzioni Convesse/Concave)

4 Problemi Convessi

4.1 Minimizzazione Convessa

Siano f e $\{h_k\}_{k=1}^K$ delle Funzioni Convesse definite sull'Insieme Convesso $C \subset \mathbb{R}^n$ e siano $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$.

Allora il seguente Problema di Minimo si dice Convesso.

$$(C_p) : \begin{cases} \min_{\underline{x}} f(\underline{x}) \\ \text{con} & h_k(\underline{x}) \leq 0, \forall k = 1, \dots, K \\ & \underline{a}_l^T \underline{x} = \underline{b}_l, \forall l = 1, \dots, L \end{cases}$$

(Analogia definizione per il Massimo Concavo)

4.2 Lagrangiano

Dato un generico problema di minimo, in cui ipotizziamo la Funzione Obiettivo f e i Vincoli h_i, c_j Differenziabili:

$$\begin{cases} \min_{\underline{\mathbf{x}}} f(\underline{\mathbf{x}}) \\ \text{con} & h_i(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0, \forall i = 1, \dots, I \\ & c_j(\underline{\mathbf{x}}) = 0, \forall j = 1, \dots, J \end{cases}$$

si definisce Lagrangiano la seguente funzione:

$$L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\boldsymbol{\lambda}}, \underline{\mathbf{v}}) = f(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^I \lambda_i h_i(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^J v_j c_j(\underline{\mathbf{x}})$$

dove i parametri $\underline{\boldsymbol{\lambda}}$ e $\underline{\mathbf{v}}$ si dicono Moltiplicatori di Lagrange.

4.3 Funzione Duale

La funzione:

$$g(\underline{\boldsymbol{\lambda}}, \underline{\mathbf{v}}) = \min_{\underline{\mathbf{x}}} L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\boldsymbol{\lambda}}, \underline{\mathbf{v}})$$

viene detta Funzione Duale del problema.

4.4 Duality Gap

Se assumiamo $\lambda \geq 0$, la Funzione Duale fornisce una "stima" della soluzione:

$$\begin{aligned} g(\underline{\boldsymbol{\lambda}}, \underline{\mathbf{v}}) &= \min_{\underline{\mathbf{x}}} L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\boldsymbol{\lambda}}, \underline{\mathbf{v}}) = \\ &= \min_{\underline{\mathbf{x}}} f(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^I \lambda_i h_i(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^J v_j c_j(\underline{\mathbf{x}}) \leq \\ &\leq f(\underline{\mathbf{x}}^*) + \sum_{i=1}^I \lambda_i h_i(\underline{\mathbf{x}}^*) + \underbrace{\sum_{j=1}^J v_j c_j(\underline{\mathbf{x}}^*)}_{c_j(\underline{\mathbf{x}})=0, \forall j} = \\ &= f(\underline{\mathbf{x}}^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^I \lambda_i h_i(\underline{\mathbf{x}}^*)}_{h_i(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0, \forall i} \leq f(\underline{\mathbf{x}}^*) \end{aligned}$$

Quindi, dato che gli $h_i(\underline{\mathbf{x}})$ sono negativi e i λ sono positivi, per ottenere la stima più simile a $f(\underline{\mathbf{x}}^*)$ si cerca di Massimizzare la Funzione Duale g , così la Funzione obbiettivo verrà sottratta a qualcosa di sempre più vicino allo 0 per ottenere l'uguaglianza nell'ultima riga qui sopra.

Quindi definiamo Duality Gap la differenza tra la $f(\underline{\mathbf{x}}^*)$ e la Funzione Duale:

$$f(\underline{\mathbf{x}}^*) - g(\underline{\boldsymbol{\lambda}}^*, \underline{\mathbf{v}}^*)$$

4.5 Dualità Forte, Dualità Debole

Dividiamo le dualità in:

- Dualità Debole se $f(\underline{\mathbf{x}}^*) - g(\underline{\boldsymbol{\lambda}}^*, \underline{\mathbf{v}}^*) > 0$
- Dualità Forte se $f(\underline{\mathbf{x}}^*) - g(\underline{\boldsymbol{\lambda}}^*, \underline{\mathbf{v}}^*) = 0$

Nel caso di Dualità Forte abbiamo che:

$$\begin{aligned} f(\underline{\mathbf{x}}^*) &= g(\underline{\boldsymbol{\lambda}}^*, \underline{\mathbf{v}}^*) = \min_{\underline{\mathbf{x}}} L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\boldsymbol{\lambda}}^*, \underline{\mathbf{v}}^*) = \\ &= \min_{\underline{\mathbf{x}}} f(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^I \lambda_i^* h_i(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^J v_j^* c_j(\underline{\mathbf{x}}) \leq \\ &\leq f(\underline{\mathbf{x}}^*) + \sum_{i=1}^I \lambda_i^* h_i(\underline{\mathbf{x}}^*) + \sum_{j=1}^J v_j^* c_j(\underline{\mathbf{x}}^*) = \\ &= f(\underline{\mathbf{x}}^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^I \lambda_i^* h_i(\underline{\mathbf{x}}^*)}_{\text{Vuol dire che questo deve fare 0}} \leq f(\underline{\mathbf{x}}^*) \end{aligned}$$

Quindi possiamo dire che:

- $\sum_{i=1}^I \lambda_i^* h_i(\underline{\mathbf{x}}^*) = 0$
- $\underline{\mathbf{x}}^*$ è un punto di Minimo del Lagrangiano in $(\underline{\boldsymbol{\lambda}}^*, \underline{\mathbf{v}}^*)$, ovvero:

$$- f(\underline{\mathbf{x}}^*) = \min_{\underline{\mathbf{x}}} f(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^I \lambda_i^* h_i(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^J v_j^* c_j(\underline{\mathbf{x}})$$
- Quindi se voglio trovare $\underline{\mathbf{x}}^*$ mi basta prendere la funzione qui sopra, farne il gradiente e porlo uguale a 0:

$$- \nabla_{\underline{\mathbf{x}}} L(\underline{\mathbf{x}}^*, \underline{\boldsymbol{\lambda}}^*, \underline{\mathbf{v}}^*) = 0$$

Se il problema in questione NON è convesso, allora il gradiente del Lagrangiano posto a 0 è solo una condizione Necessaria di Ottimalità.

Perchè potrebbe indicare un minimo/massimo locale!!!!

Mentre se il problema è Convesso, allora il Lagrangiano diventa una somma pesata di funzioni Convesse e Affini, per questo porre il suo gradiente a 0 diventa una condizione Suffuciente di Ottimalità!!!

4.6 Condizioni KKT

Le soluzioni di un generico problema di minimo soddisfano le seguenti condizioni dette KKT:

$$\begin{aligned}\nabla_{\underline{x}} L_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\nu}) &= 0 \\ h_i(\underline{x}) &\leq 0, \forall i = 1, \dots, I \\ c_j(\underline{x}) &= 0, \forall j = 1, \dots, J \\ \lambda_i(\underline{x}) &\geq 0, \forall i = 1, \dots, I \\ \lambda_i h_i(\underline{x}) &= 0, \forall i = 1, \dots, I\end{aligned}$$

- Se il problema è Convesso:
 - Le KKT sono condizioni Necessarie e Sufficienti di Ottimalità.
- Se il problema NON è Convesso:
 - Le KKT sono condizioni solo Necessarie Ottimalità.

5 Concavità Generalizzata

5.1 Problema Frazionale

Siano $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $g(\underline{x}) > 0$, per ogni $\underline{x} \in X$:

$$(F_p) : \begin{cases} \max_{\underline{x}} \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} \\ \text{con } \underline{x} \in X \end{cases}$$

In questo caso il problema non è concavo, quindi le condizioni KKT sono solo Necessarie...

Ma esiste una classe di funzioni che estende le proprietà delle funzioni concave alle funzioni fratte, ovvero le funzioni quasi concave.

5.2 Funzioni Quasi-Concave

Una funzione è Quasi-Concava se la restrizione della funzione ad un segmento giace al di sopra di uno dei due punti del segmento, matematicamente: Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un insieme convesso, allora $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ è Quasi-Concava se e solo se:

$$f(\lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2) \geq \min\{f(\underline{x}_1), f(\underline{x}_2)\}$$

per ogni $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in C$ e $\lambda \in [0; 1]$.

Funzioni Strettamente Quasi-Concave

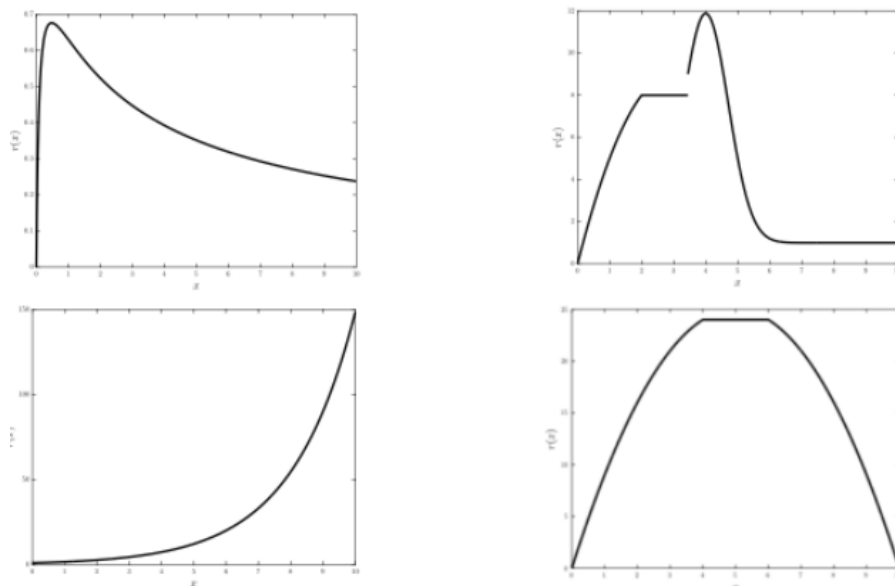
Partendo dalle stesse ipotesi di prima, una funzione si dice Strettamente Quasi-Concava se:

$$f(\lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda)\underline{x}_2) > \min\{f(\underline{x}_1), f(\underline{x}_2)\}$$

per ogni $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in C$, $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ e $\lambda \in (0; 1)$.

Esempi di funzioni Quasi-Concave

Quindi informalmente la Quasi-Concavit  pretende che la funzione cresca e poi decresca, senza ricrescere di nuovo.



5.3 Funzioni Quasi-Convesse Differenziabili

Facciamo alcune considerazioni:

- I Punti Stazionari di una Funzione Quasi-Concava NON sono necessariamente massimi Globali e le condizioni KKT sono solo Necessarie...
- Una Funzione Quasi-Concava pu  anche non essere Differenziabile (non   neanche detto che sia continua vedendo uno dei grafici qui sopra)
- Una Funzione Quasi-Concava pu  anche essere convessa in un tratto (ad esempio guardando il primo grafico qui sopra) o totalmente (come nel terzo grafico).

Condizioni al Primo Ordine

(Senza dimostrazione) Sia f una funzione Differenziabile su un insieme C Aperto e Convesso.

Allora f è quasi-concava se e solo se:

$$f(\underline{x}_2) \leq f(\underline{x}_1) \implies \nabla(f(\underline{x}_2))^T(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \geq 0$$

5.4 Proprietà delle Funzioni Quasi-Concave

Algebra delle Funzioni Quasi-Concave

$f(\underline{x}) = \min\{w_1 f_1(\underline{x}), \dots, w_N f_N(\underline{x})\}$ è Quasi-Concava se:

- $w_i \geq 0$
- Tutte le f_i sono Quasi-Concave

Da ricordare è che la Somma di Funzioni Quasi-Concave NON è Quasi-Concava!

6 Funzioni Pseudo-Concave

Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un insieme Convesso, allora $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ è Pseudo-Concava se e solo se è Differenziabile e se:

$$f(\underline{x}_2) < f(\underline{x}_1) \implies \nabla(f(\underline{x}_2))^T(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) > 0$$

per ogni $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in C$. Viceversa f si dice Strettamente Pseudo-Concava se e solo se è Differenziabile e se:

$$f(\underline{x}_2) \leq f(\underline{x}_1) \implies \nabla(f(\underline{x}_2))^T(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) > 0$$

per ogni $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in C$.

6.1 Punti Stazionari

Ogni Punto Stazionario di una Funzione Pseudo-Concava è un Massimo Globale! Ed è Unico se la funzione è Strettamente Pseudo-Concava!!

Quindi segue che per un Problema in cui la Funzione Obiettivo è una Funzione Pseudo-Concava e con Vincoli Affini, le KKT sono Condizioni Necessarie e Sufficienti!!

6.2 Proprietà delle Funzioni Pseudo-Concave

Concavità e Differenziabilità implica Pseudo-Concavità

Se f è concava, allora $f(\underline{x}_2) < f(\underline{x}_1)$ implica che:

$$\nabla(f(\underline{x}_2))^T(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) > 0$$

Ottimalità dei Punti Stazionari

La definizione di Pseudo-Concavità possiamo invertirla così:

$$\begin{aligned} (f(\underline{x}_2) < f(\underline{x}_1) \implies \nabla(f(\underline{x}_2))^T(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) > 0) &\equiv \\ &\equiv (\nabla(f(\underline{x}_2))^T(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \leq 0 \implies f(\underline{x}_2) \geq f(\underline{x}_1)) \end{aligned}$$

Quindi \underline{x}_2 tale che $\nabla(f(\underline{x}_2)) = 0$ verifica la prima parte della relazione, quindi implica che $f(\underline{x}_2) \geq f(\underline{x}_1)$ per ogni \underline{x}_1 .

Ma la stessa cosa NON VALE per le funzioni Quasi-Concave:

La definizione di Quasi-Concavità possiamo invertirla così:

$$\begin{aligned} (f(\underline{x}_2) \leq f(\underline{x}_1) \implies \nabla(f(\underline{x}_2))^T(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \geq 0) &\equiv \\ &\equiv (\nabla(f(\underline{x}_2))^T(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) < 0 \implies f(\underline{x}_2) > f(\underline{x}_1)) \end{aligned}$$

Quindi \underline{x}_2 tale che $\nabla(f(\underline{x}_2)) = 0$ NON verifica la prima parte della relazione, quindi NON implica che $f(\underline{x}_2) > f(\underline{x}_1)$ per ogni \underline{x}_1 .

7 Concavità Generalizzata di un Rapporto

Consideriamo il seguente rapporto:

$$R(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})}$$

e distinguiamo alcuni casi:

7.1 Affine/Affine

Supponendo $f(\underline{x}), g(\underline{x}) > 0$ allora $f(\underline{x})$ è Pseudo-Concava e Pseudo-Convessa.

7.2 Concava/Affine

Supponendo $f(\underline{x})$ Differenziabile e Concava, e $g(\underline{x})$ affine, allora: $R(\underline{x})$ è Pseudo-Concava.

7.3 Concava/Convessa

Supponendo $f(\underline{x})$ Differenziabile e Concava e $g(\underline{x}) > 0$ Differenziabile e Convessa, allora $R(\underline{x})$ è Pseudo-Concava.

$R(\underline{x})$ è Quasi-Concava se cade l'ipotesi di Differenziabilità.

7.4 Algoritmo di Dinkelbach

Siano:

- $f(\underline{\mathbf{x}}) \geq 0$ Concava e Differenziabile
- $g(\underline{\mathbf{x}}) > 0$ Convessa e Differenziabile
- h_k Convessa per ogni k

$$\begin{cases} \max_{\underline{\mathbf{x}}} \frac{f(\underline{\mathbf{x}})}{g(\underline{\mathbf{x}})} \\ \text{con } h_k(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad \forall k = 1, \dots, K \end{cases}$$

Quindi la Funzione Obiettivo è Pseudo-Concava \implies le Condizioni KKT sono Necessarie e Sufficienti.

Considerato ciò, l'algoritmo di Dinkelbach consiste nel convertire il Problema Funzionale in una sequenza di Problemi Convessi Non Frazionali.

Teorema

Consideriamo:

$$F(\lambda) = \max_{\underline{\mathbf{x}}} \{ (f(\underline{\mathbf{x}}) - \lambda g(\underline{\mathbf{x}})) : h_k(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0, \forall k \}$$

Enunciato: Esiste un unico valore λ^* positivo, tale che $F(\lambda^*) = 0$ che risolve anche il Problema Frazionale Associato.

Quindi risolvere un Problema Frazionale si traduce nel trovare l'unico zero della funzione $F(\lambda)$.

Inizializza $\varepsilon > 0; n = 0; \lambda_n = 0;$

repeat

$$\underline{\mathbf{x}}_n^* = \operatorname{argmax}_{\underline{\mathbf{x}}} \{ f(\underline{\mathbf{x}} - \lambda_n g(\underline{\mathbf{x}})) : h_k(\underline{\mathbf{x}}) \leq 0, \forall k \};$$

$$F(\lambda_n) = f(\underline{\mathbf{x}}_n^*) - \lambda_n g(\underline{\mathbf{x}}_n^*);$$

$$\lambda_{n+1} = \frac{f(\underline{\mathbf{x}}_n^*)}{g(\underline{\mathbf{x}}_n^*)};$$

$$n = n + 1;$$

until $F(\lambda_n) < \varepsilon$

Ciascuna iterazione rappresenta un Problema Convesso da risolvere.

7.5 Esempio di Problema Convesso: Water Filling

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max_{\underline{x}} \quad & \sum_{k=1}^K \log_2(1 + c_k x_k) \\ \text{con} \quad & x_k \geq 0, \forall k \\ & \sum_{k=1}^K x_k = P \end{aligned}$$

Esprimiamola in una forma più facile da utilizzare:

$$\begin{aligned} \min_{\underline{x}} \quad & - \sum_{k=1}^K \log_2(1 + c_k x_k) \\ \text{con} \quad & -x_k \leq 0, \forall k \\ & \sum_{k=1}^K x_k = P \end{aligned}$$

Calcoliamo il suo Lagrangiano:

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\nu}) = - \sum_{k=1}^K \log_2(1 + c_k x_k) - \sum_{k=1}^K \lambda_k x_k + \nu \left(\sum_{k=1}^K x_k - P \right)$$

Scriviamo ora le Condizioni KKT:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_n}}_{\text{Generica } x_n} &= \frac{-c_n / \ln(2)}{1 + c_n x_n} - \lambda_n + \nu = 0 \quad \forall n \\ &-x_n \leq 0, \quad \forall n \\ &\sum_{n=1}^K x_n = P \\ &\lambda_n \geq 0, \quad \forall n \\ &\lambda_n x_n = 0, \quad \forall n \end{aligned}$$

Ora ricaviamo λ_n dalla prima equazione:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= v - \frac{c_n/\ln(2)}{1 + c_n x_n}, \forall n \\ -x_n &\leq 0, \forall n \\ \sum_{n=1}^K x_n &= P \\ v - \frac{c_n/\ln(2)}{1 + c_n x_n} &\geq 0, \forall n \\ \left(v - \frac{c_n/\ln(2)}{1 + c_n x_n} \right) x_n &= 0, \forall n\end{aligned}$$

Quindi capiamo che:

- Per ogni n , se $v \geq c_n/\ln(2) \implies x_n = 0$
- Per ogni n , se $v \leq c_n/\ln(2) \implies$ dall'ultima equazione ricaviamo:

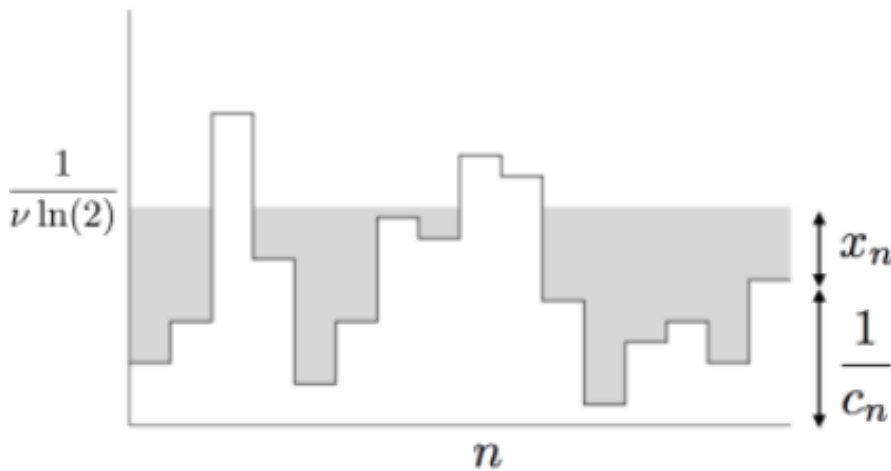
$$x_n = \frac{1}{v \ln(2)} - \frac{1}{c_n} \geq 0$$

Dunque possiamo scrivere:

$$x_n = \max \left(0, \frac{1}{v \ln(2)} - \frac{1}{c_n} \right)$$

Infine dalla terza equazione possiamo ricavare v risolvendo questa equazione:

$$\sum_{n=1}^K \max \left(0, \frac{1}{v \ln(2)} - \frac{1}{c_n} \right) = P$$



dove:

- $1/c_n$ è il "livello del terreno"

- $1/v \ln(2)$ è il "livello da raggiungere"
- x_n è quindi la quantità di "acqua" da versare per raggiungere il livello $1/v \ln(2)$
- Nel caso in cui il livello del terreno è maggiore rispetto a quello da raggiungere, "non si versa acqua" ($x_n = 0$)

La cosa importante è capire che più è grande c_n , più acqua devo versare (x_n).

8 Problemi Multi-Obiettivo

Ora esaminiamo il caso in cui ci siano più di una Funzione Obiettivo:

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}} \{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x})\} \\ \text{con } h_i(\mathbf{x}) \geq 0, \forall i \\ c_j(\mathbf{x}) = 0, \forall j \end{cases}$$

Questo tipo di problemi crea ambiguità sulla scelta delle soluzioni migliori dato che non esistono relazioni di ordine totale tra vettori.

Per questo motivo occorre l'utilizzo di alcune tecniche come quella di Scalarizzazione.

8.1 Tecnica di Scalarizzazione

Questa tecnica consiste nel convertire il problema in una forma con una Funzione Obiettivo Scalare:

Somma Pesata

Si massimizza una somma pesata delle funzioni obiettivo:

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}} \sum_{n=1}^N w_n f_n(\mathbf{x}) \\ \text{con } h_i(\mathbf{x}) \geq 0, \forall i \\ c_j = 0, \forall j \end{cases}$$

con $w_n \geq 0$ per ogni n e tipicamente normalizzati.

Minimo Pesato

Si massimizza il Minimo Pesato delle funzioni obiettivo:

$$\begin{cases} \max_{\underline{\mathbf{x}}} \min_n \{w_n f_n(\underline{\mathbf{x}})\} \\ \text{con } h_i(\underline{\mathbf{x}}) \geq 0, \forall i \\ c_j = 0, \forall j \end{cases}$$

con $w_n \geq$ per ogni n e tipicamente normalizzati.

Forma Differenziabile

Il Problema max-min qui sopra può essere riscritto nella seguente Forma Differenziabile:

$$\begin{cases} \max_{t, \underline{\mathbf{x}}} t \text{ con} \\ h_i(\underline{\mathbf{x}}) \geq 0, \forall i \\ c_j = 0, \forall j \\ w_n, f_n \geq t, \forall n \end{cases}$$

L'approccio max-min ha garanzie sul valore minimo assunto da ogni funzione obiettivo, mentre la massimizzazione di una somma pesata no.

8.2 Frontiera di Pareto

Diamo alcune definizioni:

- Dominazione

- Un vettore di funzioni $f_1^{(1)}, \dots, f_N^{(1)}$ DOMINA un altro vettore $f_1^{(2)}, \dots, f_N^{(2)}$ se:

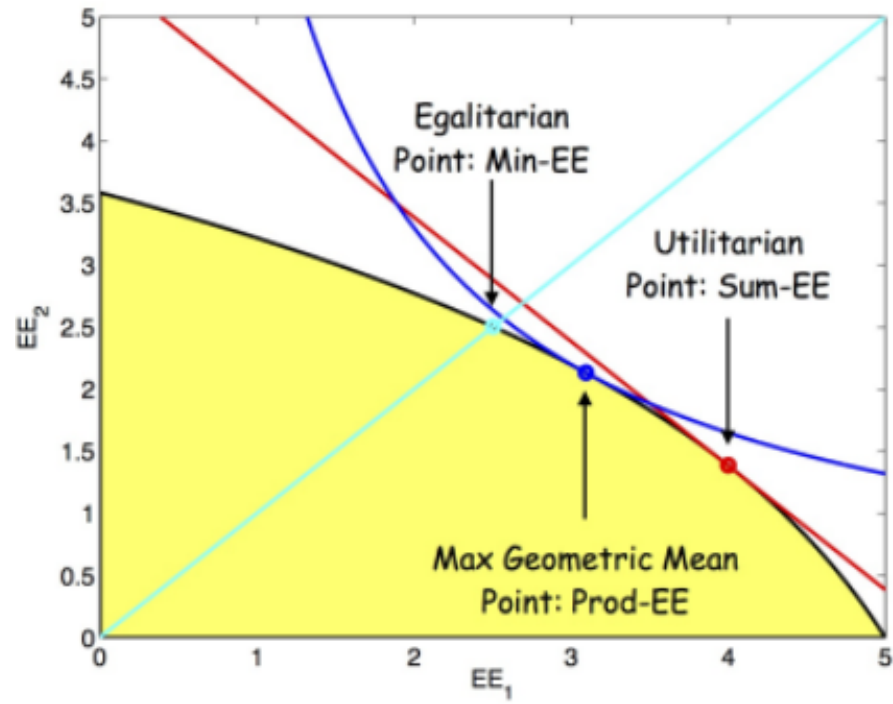
$$f_n^{(1)} \geq f_n^{(2)} \quad \forall n$$

- Pareto-Ottimo

- Un vettore f_1, \dots, f_N che soddisfa i vincoli del problema si dice Pareto-Ottimo se non esiste nessun vettore g_1, \dots, g_N che soddisfa i vincoli e tale che $f_n \leq g_n$ per ogni n

- Frontiera di Pareto

- L'insieme dei vettori Pareto-Ottimi forma la Frontiera di Pareto del problema



Capitolo 6

Allocazione delle Risorse

In questo capitolo ci occuperemo di trasportare gran parte delle nozioni di ottimizzazione apprese nel capitolo precedente, alle Reti Wireless.

Per prima cosa dobbiamo chiederci se le ipotesi per usare la teoria dell'ottimizzazione concava/pseudo-concava sono verificate:

Per il Sum-Rate e per la GEE abbiamo bisogno che i rate/EE di ciascun utente siano concavi :

$$SR = \sum_{k=1}^K \log(1 + \sin r_k)$$
$$GEE = \frac{\sum_{k=1}^K \log(1 + \sin r_k)}{P_c + \sum_{k=1}^K \mu_k p_k}$$

Tuttavia ricordando quali siano le formule del rate e dell'efficienza energetica in una rete SIMO in uplink:

$$R_m = \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m|^2}{\sigma^2 + \sum_{k \neq m} p_l |\underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k|^2} \right)$$
$$EE_m = \frac{\log \left(1 + \frac{p_m |\underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_m|^2}{\sigma^2 + \sum_{k \neq m} p_l |\underline{\mathbf{c}}_m^H \underline{\mathbf{h}}_k|^2} \right)}{\mu_m p_m + P_{c,m}}$$

Mentre nel downlink abbiamo:

$$R_m = \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_m|^2}{\sigma^2 + \sum_{k \neq m} p_l |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k|^2} \right)$$
$$EE_m = \frac{\log \left(1 + \frac{p_m |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_m|^2}{\sigma^2 + \sum_{k \neq m} p_l |\underline{\mathbf{g}}_m^H \underline{\mathbf{q}}_k|^2} \right)}{\mu_m p_m + P_{c,m}}$$

Dove la parte rossa rappresenta l'Interferenza Multi-Utente, che rende il rate una funzione non-concava e di conseguenza neanche l'efficienza energetica...

Allora l'unica cosa da fare è eliminare l'Interferenza Multi-Utente.

Possiamo fare ciò attraverso diverse strade:

- Usando un ricevitore/trasmittitore di tipo Zero-Forcing.
- Separando gli utenti in frequenza/tempo (FDMA/TDMA).
- Possiamo Considerare un sistema massive MIMO.

1 Uplink Power Control

Supponendo di aver tolto l'Interferenza Multi-Utente, i nostri problemi si ridurranno nei seguenti:

1.1 Uplink Sum Rate Maximization

$$\max_{\underline{p}} \sum_{m=1}^K \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{c}_m^H \underline{h}_m|^2}{\sigma^2} \right)$$

$$\text{con } 0 \leq p_m \leq P_{\max,m}, \forall m$$

Dato che ciascun membro della sommatoria e ciascun vincolo dipendono solo da p_m , possiamo far entrare max dentro la sommatoria:

$$\max_{p_m} \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{c}_m^H \underline{h}_m|^2}{\sigma^2} \right)$$

$$\text{con } 0 \leq p_m \leq P_{\max,m}, \forall m$$

Allora il risultato è:

$$p_m = P_{\max,m}$$

1.2 GEE Maximization

$$\max_{\underline{p}} \frac{\sum_{m=1}^K \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{c}_m^H \underline{h}_m|^2}{\sigma^2} \right)}{\mu_m p_m + P_{c,m}}$$

$$\text{con } 0 \leq p_m \leq P_{\max,m}, \forall m$$

Qui siamo costretti ad usare l'algoritmo di Dinkelbach, resolvendo in ciascuna iterazione il seguente problema ausiliario:

$$\begin{aligned} \max_{\underline{p}} \sum_{m=1}^K \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{c}_m^H \underline{h}_m|^2}{\sigma^2} \right) - \lambda (\mu_m p_m + P_{c,m}) \\ \text{con } 0 \leq p_m \leq P_{\max,m}, \forall m \end{aligned}$$

Adesso possiamo far entrare il max dentro la sommatoria!

$$\begin{aligned} \max_{p_m} \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{c}_m^H \underline{h}_m|^2}{\sigma^2} \right) - \lambda (\mu_m p_m + P_{c,m}) \\ \text{con } 0 \leq p_m \leq P_{\max,m}, \forall m \end{aligned}$$

Ora definendo:

$$a_m = |\underline{c}_m^H \underline{h}_m|^2 / \sigma^2$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{\ln(2)(a_m p_m + 1)} - \lambda \mu_m \geq 0 &\implies \\ \implies p_m \leq \left(\frac{1}{\ln(2) \lambda \mu_m} - \frac{1}{a_m} \right) &= \tilde{p}_m \end{aligned}$$

Quindi la funzione obbiettivo è:

- Crescente per $p_m \leq \tilde{p}_m$
- Decrescente per $p_m \geq \tilde{p}_m$
- Con un punto di massimo in $p_m = \tilde{p}_m$

Quindi considerando anche i vincoli avremo la seguente soluzione:

$$p_m^* = \max\{0, \min\{P_{\max,m}, \tilde{p}_m\}\}$$

1.3 Downlink Sum Rate Maximization

Vale un discorso analogo per il Downlink:

$$\begin{aligned} \max_{\underline{p}} \sum_{m=1}^K \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{g}_m^H \underline{q}_m|^2}{\sigma^2} \right) \\ \text{con } 0 \leq p_m \leq P_{\max,m}, \forall m \\ \sum_{m=1}^K p_m \leq P_{\max} \end{aligned}$$

Dato che la funzione obbiettivo, all'aumentare di p_m cresce, vuol dire che la soluzione del problema si avrà per $p_m = p_{max}$, quindi:

$$\begin{aligned} & \max_{\underline{p}} \sum_{m=1}^K \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{g}_m^H \underline{q}_m|^2}{\sigma^2} \right) \\ & \text{con } 0 \leq p_m \leq P_{max,m}, \forall m \\ & \sum_{m=1}^K p_m = P_{max} \end{aligned}$$

Che non è altro che un problema di Water-Filling con:

$$c_m = |\underline{g}_m^H \underline{q}_m|^2 / \sigma^2$$

quindi la soluzione è:

$$p_m = \max \left(\frac{1}{v \ln(2)} - \frac{1}{c_m} \right)$$

1.4 Downlink GEE Maximization

$$\begin{aligned} & \max_{\underline{p}} \frac{\sum_{m=1}^K \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{g}_m^H \underline{q}_m|^2}{\sigma^2} \right)}{\mu_m p_m + P_{c,m}} \\ & \text{con } 0 \leq p_m \leq P_{max,m}, \forall m \\ & \sum_{m=1}^K p_m \leq P_{max} \end{aligned}$$

Dobbiamo applicare, come nell'uplink, l'algoritmo di Dinkelbach, dove in ciascuna iterazione abbiamo il seguente problema ausiliario:

$$\begin{aligned} & \max_{\underline{p}} \sum_{m=1}^K \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{g}_m^H \underline{q}_m|^2}{\sigma^2} \right) - \lambda \mu p_m \\ & \text{con } p_m \geq 0 \forall m \\ & \sum_{m=1}^K p_m \leq P_{max} \end{aligned}$$

Purtroppo qui non possiamo mettere l'uguaglianza nell'ultimo vincolo dato che la nostra funzione obbiettivo non è crescente in p_m , quindi la somma delle Potenze Ottime sarà:

$$\sum_{m=1}^K p_m^* = P \leq P_{max}$$

Quindi dobbiamo risolvere il problema ausiliario per ogni $P \in [0, P_{max}]$:

$$\begin{aligned} & \max_{\underline{p}} \sum_{m=1}^K \log \left(1 + \frac{p_m |\underline{g}_m^H \underline{q}_m|^2}{\sigma^2} \right) - \lambda \mu p_m \\ & \text{con } p_m \geq 0 \quad \forall m \\ & \sum_{m=1}^K p_m = P \end{aligned} \quad (6.1)$$

E poi scegliere la soluzione corrispondente alla P con la quale otteniamo il valore più grande della funzione obiettivo.

```

Inizializza  $\delta > 0; P_{tot} = [0 : \delta : P_{max}]$ ;
for  $n = 1 : \text{length}(P)$  do
   $P = P_{tot}(n)$ ;
  Solve (6.1) to obtain  $\underline{p}_n^*$ ;
   $F(n) = \sum_{m=1}^K \log \left( 1 + \frac{p_{m,n}^* |\underline{g}_m^H \underline{q}_m|^2}{\sigma^2} \right) - \lambda \mu p_{m,n}^*$ 
end for
 $l = \text{argmax} F(n)$ ;
 $\underline{p}^* = \underline{p}_l^*$ 

```

Quindi dobbiamo risolvere 6.1 in ogni iterazione!

Definendo:

$$c_m = |\underline{g}_m^H \underline{q}_m|^2 / \sigma^2$$

Calcoliamo il Lagrangiano della funzione obiettivo:

$$\begin{aligned} L(\underline{x}, \underline{\psi}, \underline{nu}) = & - \sum_{m=1}^K \log(1 + c_m p_m) + \lambda \mu p_m - \\ & - \sum_{m=1}^K \psi_m p_m + \nu \left(\sum_{m=1}^K p_m - P \right) \end{aligned}$$

Ora poniamo la derivata di L rispetto alla generica p_k uguale a 0:

$$\frac{\partial L}{\partial p_k} = \frac{-c_k / \ln(2)}{1 + c_k p_k} + \lambda \mu - \psi_k + \nu = 0$$

Quindi definendo $\nu_{eq} = \nu + \lambda \mu$ otteniamo:

$$\psi_k = \nu_{eq} - \frac{c_k / \ln(2)}{1 + c_k p_k}$$

Quindi la soluzione è:

$$p_k = \max \left(0, \frac{1}{\nu_{eq} \ln(2)} - \frac{1}{c_k} \right)$$

2 MIMO Maximization

2.1 MIMO Rate Maximization

Consideriamo ora un sistema MIMO a singolo utente, in cui dopo aver ottimizzato:

- La Matrice di Beamforming \underline{U}_Q
- La Matrice di Ricezione \underline{C}

la Capacità si scrive così:

$$\sum_{i=1}^{\min\{N_R, N_T\}} C_i = B \sum_{i=1}^{\min\{N_R, N_T\}} \log \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \lambda_{i,H}^2 \lambda_{i,Q} \right)$$

Allora in questo caso il problema da risolvere è:

$$\begin{aligned} & \max_{\underline{\lambda}_Q} \sum_{i=1}^{\min\{N_R, N_T\}} \log \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \lambda_{i,H}^2 \lambda_{i,Q} \right) \\ & \text{con } \lambda_{i,Q} \geq 0, \forall i \\ & \sum_{i=1}^{\min\{N_R, N_T\}} \lambda_{i,Q} \leq 1 \end{aligned}$$

Ma possiamo riformulare il problema così:

$$\begin{aligned} & \max_{p, \underline{\lambda}_Q} \sum_{i=1}^{\min\{N_R, N_T\}} \log \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \lambda_{i,H}^2 \lambda_{i,Q} \right) \\ & \text{con } \lambda_{i,Q} \geq 0, \forall i \\ & \sum_{i=1}^{\min\{N_R, N_T\}} \lambda_{i,Q} = 1 \\ & p \in [0, P_{max}] \end{aligned}$$

Dunque, abbiamo un problema di tipo Water-Filling, con:

$$c_i = \frac{P}{\sigma^2} \lambda_{i,H}^2$$

Quindi la soluzione sarà:

$$\lambda_{i,Q} = \max \left(0, \frac{1}{v} - \frac{1}{c_i} \right)$$

2.2 MIMO EE Maximization

In questo caso il problema è:

$$\max_{p, \underline{\lambda_Q}} \frac{\sum_{i=1}^{\min\{N_R, N_T\}} \log \left(1 + \frac{p}{\sigma^2} \lambda_{i,H}^2 \lambda_{i,Q} \right)}{\mu p + P_c}$$

con $0 \leq p \leq P_{max}$

Gli autovalori $\lambda_{i,Q}$, come si può vedere, influenzano solo il Rate, quindi possono essere allocati come nella MIMO Rate Maximization.

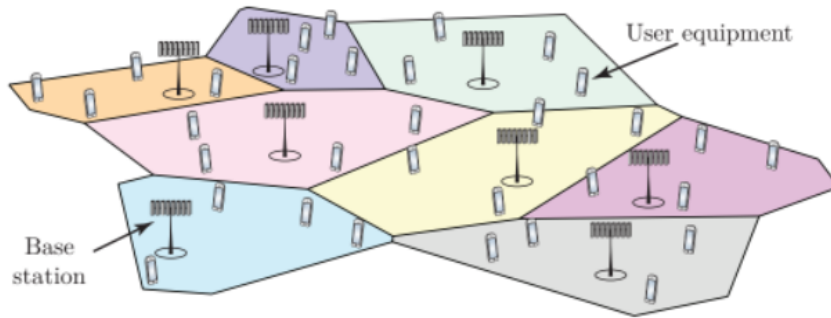
Dato che rispetto a p , la GEE è strettamente pseudo-concava, definendo con \hat{p} il punto stazionario, la soluzione è:

$$\hat{p} = \max\{0, \min\{P_{max}, \hat{p}\}\}$$

Capitolo 7

Sistemi Multi-Cellulari

In questo capitolo cercheremo di spiegare cosa accade nella realtà in presenza di sistemi in cui sono presenti diverse celle.



Ora con K indicheremo il numero TOTALE di utenti e con K_b l'insieme di utenti serviti dalla BS b .

1 Sistemi Multi-Cellulari: Uplink

Definiamo con $\underline{h}_{k,b}$ il vettore di canale tra l'utente k e la BS b , che riceverà il seguente segnale:

$$\begin{aligned} \underline{r}_b = & \underbrace{\sqrt{p_m} \underline{h}_{m,b} s_m}_{\text{Segnale Utile}} + \underbrace{\sum_{k \in K_b, k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{h}_{k,b} s_k}_{\text{Interferenza multi-utente nella cella}} + \\ & + \underbrace{\sum_{k \notin K_b} \sqrt{p_k} \underline{h}_{k,b} s_k}_{\text{Interferenza multi-utente fuori cella}} + \underbrace{\underline{n}_b}_{\text{Rumore Termico}} \end{aligned}$$

Se filtriamo con \underline{c}_m avremo:

$$\begin{aligned}
 y_b = \underline{c}_m^H \underline{r}_b = & \underbrace{\sqrt{p_m} \underline{c}_m^H \underline{h}_{m,b} s_m}_{\text{Segnale Utile}} + \underbrace{\sum_{k \in K_b, k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{c}_m^H \underline{h}_{k,b} s_k}_{\text{Interferenza multi-utente nella cella}} + \\
 & + \underbrace{\sum_{k \notin K_b} \sqrt{p_k} \underline{c}_m^H \underline{h}_{k,b} s_k}_{\text{Interferenza multi-utente fuori cella}} + \underbrace{\underline{c}_m^H \underline{n}_b}_{\text{Rumore Termico}}
 \end{aligned}$$

Ora calcoliamo il SINR dell'm-esimo utente:

$$\text{SINR}_m = \frac{p_m |\underline{c}_m^H \underline{h}_{m,b}|^2}{\sum_{k \in K_b, k \neq m} p_k |\underline{c}_m^H \underline{h}_{k,b}|^2 + \sum_{k \notin K_b} p_k |\underline{c}_m^H \underline{h}_{k,b}|^2 + \sigma^2 \|\underline{c}_m\|^2}$$

2 Sistemi Multi-Cellulari: Downlink

Sia $\underline{g}_{m,a}$, il Vettore di Canale tra la BS che chiameremo A, e l'utente m, che riceverà il seguente segnale:

$$\begin{aligned}
 \underline{r}_m = & \underbrace{\sqrt{p_m} \underline{g}_{m,A}^H \underline{q}_m s_m}_{\text{Segnale Utile}} + \underbrace{\sum_{k \in K_A, k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{g}_{m,A}^H \underline{q}_k s_k}_{\text{Interferenza multi-utente nella cella}} + \\
 & + \underbrace{\sum_{b \notin A} \underline{g}_{m,b}^H \sum_{k \in K_b} \sqrt{p_k} \underline{q}_k s_k}_{\text{Interferenza multi-utente fuori cella}} + \underbrace{\underline{n}_m}_{\text{Rumore Termico}}
 \end{aligned}$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\begin{aligned}
 \underline{r}_m = & \underbrace{\sqrt{p_m} \underline{g}_{m,A}^H \underline{q}_m s_m}_{\text{Segnale Utile}} + \underbrace{\sum_{k \in K_A, k \neq m} \sqrt{p_k} \underline{g}_{m,A}^H \underline{q}_k s_k}_{\text{Interferenza multi-utente nella cella}} + \\
 & + \underbrace{\sum_{b \notin A} \sum_{k \in K_b} \sqrt{p_k} \underline{g}_{m,b}^H \underline{q}_k s_k}_{\text{Interferenza multi-utente fuori cella}} + \underbrace{\underline{n}_m}_{\text{Rumore Termico}}
 \end{aligned}$$

Che di conseguenza associa all'utente m il seguente SINR:

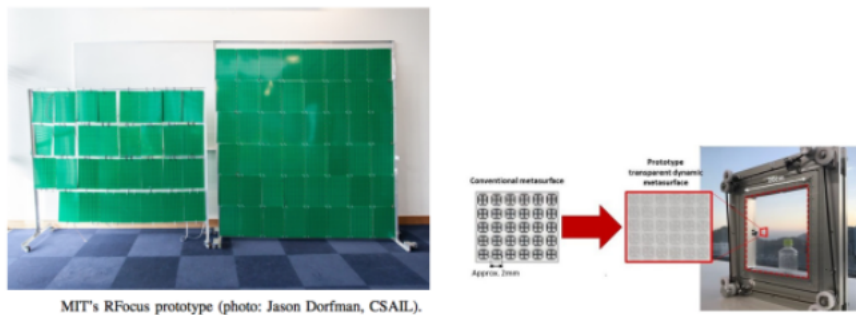
$$\text{SINR}_m = \frac{p_m |\underline{g}_{m,A}^H \underline{q}_m|^2}{\sum_{k \in K_A, k \neq m} p_k |\underline{g}_{m,A}^H \underline{q}_k|^2 + \sum_{k \notin K_A} p_k |\underline{g}_{m,b}^H \underline{q}_k|^2 + \sigma^2}$$

Come possiamo vedere, il modello di segnale è simile al caso di singola cella, quindi possiamo usare le tecniche a noi note (MRT/MRC, ZF, MMSE).

Capitolo 8

Superfici Intelligenti Riconfigurabili

In questo ultimo capitolo cercheremo di analizzare, almeno superficialmente, le RIS (Reconfigurable Intelligent Surface), ovvero delle strutture planari con N elementi riflettenti posti tra loro a distanza minore della lunghezza d'onda:



MIT's RFocus prototype (photo: Jason Dorfman, CSAIL).

Ogni elemento può riflettere un segnale elettromagnetico che arriva su di sé, con un Coefficiente di Riflessione Γ_n .

Una RIS è una struttura quasi-passiva dato che non usa amplificatori ed ha un hardware molto semplice, e per questo a un consumo energetico inferiore ad antenne tradizionali. Possono essere usate per:

- Creare nuovi canali
- Cancellare segnali interferenti

1 Ris: Uplink

Supponendo di essere nel seguente caso:

- K utenti serviti da una BS con L antenne
- $\underline{h}_{k,RIS}$ è il canale $N \times 1$ tra l'utente k e gli N elementi della RIS
- \underline{G}_{RIS} è il canale $L \times N$ tra gli N elementi della RIS e la BS

Alla RIS arriverà il seguente segnale:

$$\underline{r} = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{h}_{k,RIS} s_k = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \begin{pmatrix} \underline{h}_{k,RIS}(1) \\ \underline{h}_{k,RIS}(2) \\ \vdots \\ \underline{h}_{k,RIS}(N) \end{pmatrix} s_k$$

A questo punto la RIS trasmette il segnale tramite la matrice diagonale Γ , che ha come diagonali i coefficienti di riflessione:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_N \end{pmatrix}$$

Alla BS il segnale ricevuto verrà filtrato con \underline{c}_m per demodulare il simbolo dell'utente m;

$$y = \underline{c}_m^H \underline{G}_{RIS} \underline{\Gamma} \underline{r} = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{c}_m^H \underline{G}_{RIS} \underline{\Gamma} \underline{h}_{k,RIS} s_k + n$$

Il SINR dell'utente m quindi sarà:

$$SINR_m = \frac{p_m |\underline{c}_m^H \underline{G}_{RIS} \underline{\Gamma} \underline{h}_{m,RIS}|^2}{\sigma^2 + \sum_{k \neq m} p_k |\underline{c}_m^H \underline{G}_{RIS} \underline{\Gamma} \underline{h}_{k,RIS}|^2}$$

Ora se definiamo il Canale Equivalente $\underline{v}_m = \underline{G}_{RIS} \underline{\Gamma} \underline{h}_{m,RIS}$ possiamo riusarla teoria del Filtraggio Adattato.

2 RIS: Downlink

Nel downlink possiamo procedere in modo analogo definendo:

- \underline{H}_{RIS} il canale tra la BS e la RIS
- $\underline{g}_{m,RIS}$ il canale tra la RIS e l'utente m
- \underline{q}_m il vettore di Beamforming dell'utente m

quindi il segnale che la RIS riceverà sarà:

$$\underline{r} = \underline{H}_{RIS} \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} s_k \underline{q}_k$$

A questo punto la RIS riflette il segnale tramite la matrice $\underline{\Gamma}$:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_N \end{pmatrix}$$

Il segnale ricevuto dall'utente m sarà:

$$y = \underline{\mathbf{g}}_{m,RIS}^H \underline{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{r} = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} \underline{\mathbf{g}}_{m,RIS}^H \underline{\mathbf{\Gamma}} \underline{\mathbf{H}}_{RIS} \underline{\mathbf{q}}_k s_k + n$$

Il SINR dell'utente m sarà quindi:

$$SINR_m = \frac{p_m |\underline{\mathbf{g}}_{m,RIS}^H \underline{\mathbf{H}}_{RIS} \underline{\mathbf{\Gamma}} \underline{\mathbf{q}}_m|^2}{\sigma^2 + \sum_{l \neq m} p_l |\underline{\mathbf{g}}_{m,RIS}^H \underline{\mathbf{H}}_{RIS} \underline{\mathbf{\Gamma}} \underline{\mathbf{q}}_l|^2}$$

E definendo il vettore di canale equivalente:

$$\underline{\mathbf{u}}_m^H = \underline{\mathbf{g}}_{m,RIS}^H \underline{\mathbf{H}}_{RIS} \underline{\mathbf{\Gamma}}$$

possiamo riusare la teoria del Filtro Adattato, scegliendo $\underline{\mathbf{q}}_m$.

3 Allocazione della Matrice Gamma

Consideriamo un Downlink in un Sistema Singolo Utente e definiamo:

$$\underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{q}}_{eq}$$

Ora calcoliamo l'SNR:

$$SNR = \frac{p |\underline{\mathbf{g}}^H \underline{\mathbf{\Gamma}} \underline{\mathbf{H}} \underline{\mathbf{q}}|^2}{\sigma^2} = \frac{p |\underline{\mathbf{g}}^H \underline{\mathbf{\Gamma}} \underline{\mathbf{q}}_{eq}|^2}{\sigma^2} = \frac{p}{\sigma^2} \left| \sum_{n=1}^N \Gamma_n g_n^* h_n \right|^2$$

Applicando la disuguaglianza triangolare otteniamo:

$$SNR \leq \frac{p}{\sigma^2} \left(\sum_{n=1}^N |\Gamma_n| |g_n| |h_n| \right)^2 \leq \frac{p}{\sigma^2} \left(\sum_{n=1}^N |g_n| |h_n| \right)^2$$

A questo punto l'uguaglianza si otterrà per ogni n scegliendo:

- $\angle \Gamma_n = -\angle g_n^* h_n$
- $|\Gamma_n| = 1$

3.1 Caso Multi-Utente

Nel caso multi-utente l'ottimizzazione di $\underline{\mathbf{\Gamma}}$ è più complicata perchè non è possibile scegliere $\underline{\mathbf{\Gamma}}$ in modo da compensare le fasi dei canali di tutti gli utenti.