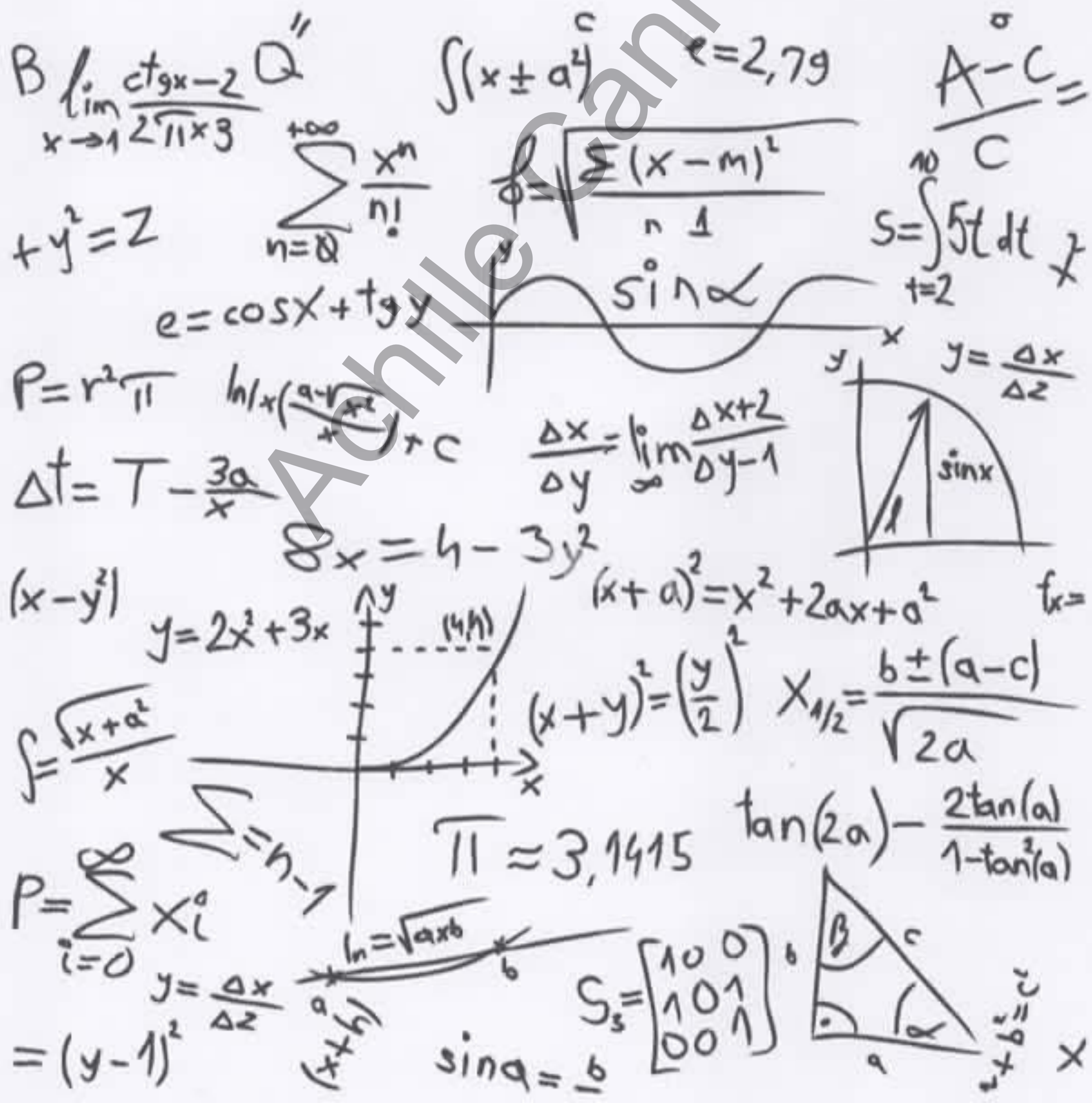
FISICA
APPUNTI

Cannavale Achille



VALORI DA RICORDARE

- c = VELOCITÀ DELLA LUCE NEL VUOTO = 3×10^8 m/s (299.792.458)
- π = PI-GRECO = 3,14159...
- e = NUMERO DI NEPERO = 2,7182...

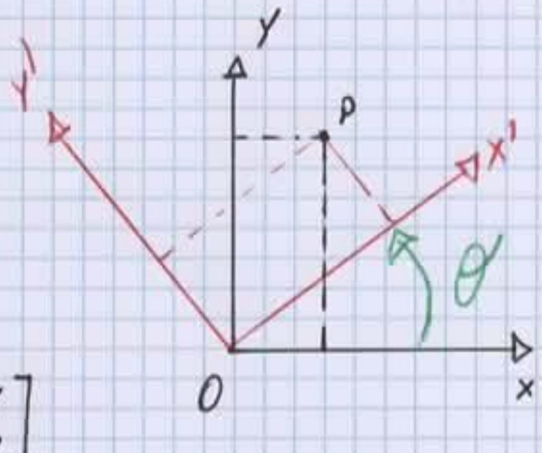
$m^3 / T^3 \, Kg^2$

- G = COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE = $6,67 \times 10^{-11}$ $N\,m^2/Kg^2$
- g = ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ = 9,81 m/s^2
- e = CARICA ELEMENTARE = $1,60 \times 10^{-19}$ C
- ε_0 = COSTANTE DIELETTRICA = $8,85 \times 10^{-12}$ F/m
- μ_0 = PERMEABILITÀ MAGNETICA = $4\pi \times 10^{-7}$ H/m
- σ = COSTANTE DI STEFAN-BOLTZMANN = $5,6 \times 10^{-8}$ $W/(m^2 \cdot K^4)$
- K_b = COSTANTE DI BOLTZMANN = $1,38 \times 10^{-23}$ J/K

DIMENSIONI FISICHE

- $[x]$ = POSIZIONE = L
- $[v] = \dot{x}$ = VELOCITÀ = L/T
- $[a] = \ddot{x}$ = ACCELERAZIONE = L/T^2
- $[m]$ = MASSA = M
- $[p] = m \cdot v$ = QUANTITÀ DI MOTO = $M \cdot L/T$
- $[F] = m \cdot a$ = FORZA = $N = m \cdot L/T^2$
- $[K] = 1/2 \cdot m \cdot v^2$ = ENERGIA CINETICA = $M \cdot L^2/T^2$
- $[I] = L/\omega$ = MOMENTO DI INERZIA = $(m\,L^2/T)/(RAD/T)$
- $[L] = m \cdot v \cdot r$ = MOMENTO ANGOLARE = $M \cdot L^2/T$
- $[\tau] = r \wedge F$ = MOMENTO TORCENTE = $M\,L^2/T^2$

ROTAZIONE



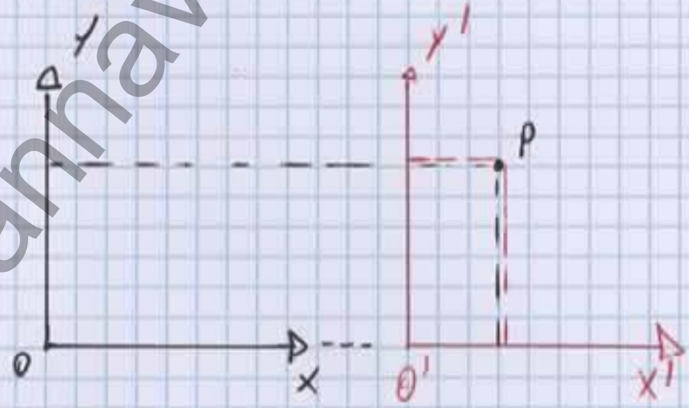
FISSATA UN'ORIGINE TRASLIAMO RIGIDAMENTE GLI ASSI.

$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ y' = y\cos(\theta) - x\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R(\theta)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

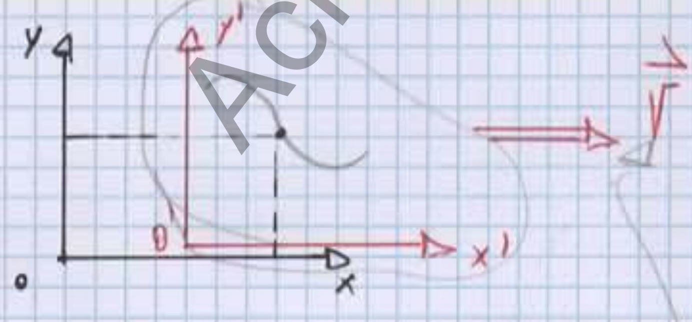
TRASLAZIONE

TRASLAZIONE DELL'ORIGINE LUNGO UNA DIREZIONE COMUNE.



$$\begin{cases} x' = x - d(O\,O') \\ y' = y \end{cases}$$

TRASFORMAZIONI DI GALILEO



$x' = x - d(O\,O')$ (PER NEWTON $t = t$)

$y' = y$

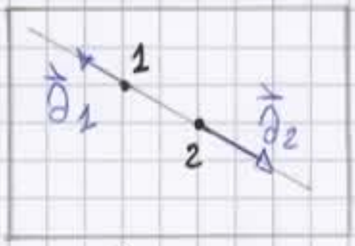
$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x - d(O\,O')\right] = \frac{dx}{dt} - \frac{d}{dt}\left(d(O\,O')\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \vec{V} \Rightarrow v_x' = v_x - \vec{V} \Rightarrow a_x = a_x - \vec{A}$$

BOOST!!

LEGGI DI NEWTON (MACH)

1) OSSERVAZIONE SPERIMENTALE — 1ª LEGGE DI NEWTON



"SI DEFINISCE SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE IL LUOGO IN CUI UNA PARTICELLA SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME."

$\vec{a}_1 \mathbin{/\!/} \vec{a}_2$ ANTIPARALLELE IN SENSO STRETTO

2) DEFINIZIONE

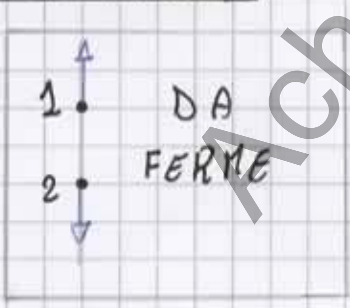
IN GENERALE $|\vec{a}_1| \neq |\vec{a}_2|$,

MA NEL CASO IN CUI $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$ DIREMO CHE I CORPI HANNO LA STESSA MASSA.

DEFINIAMO IL RAPPORTO DI MASSA $\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}$, QUINDI:

- SE $|\vec{a}_1| > |\vec{a}_2| \Rightarrow m_2 > m_1$,
- SE $|\vec{a}_1| < |\vec{a}_2| \Rightarrow m_2 < m_1$;

3) OSSERVAZIONE



IN ENTRAMBI I CASI LE ACCELERAZIONI SONO ANTIPARALLELE E I RAPPORTI DI MASSA NON CAMBIA MAI.

PRODOTTO SCALARE

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$$
$$\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z) \cdot (B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z) =$$

$$= A_x \vec{u}_x \cdot B_x \vec{u}_x + A_x \vec{u}_x \cdot B_y \vec{u}_y + A_x \vec{u}_x \cdot B_z \vec{u}_z +$$
$$+ A_y \vec{u}_y \cdot B_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y \cdot B_y \vec{u}_y + A_y \vec{u}_y \cdot B_z \vec{u}_z +$$
$$+ A_z \vec{u}_z \cdot B_x \vec{u}_x + A_z \vec{u}_z \cdot B_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z \cdot B_z \vec{u}_z =$$

RACCOLGO I VERSORI

$$= \boxed{A_x B_x (\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x)} + A_x B_y (\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y) + A_x B_z (\vec{u}_x \cdot \vec{u}_z) +$$
$$+ A_y B_x (\vec{u}_y \cdot \vec{u}_x) + \boxed{A_y B_y (\vec{u}_y \cdot \vec{u}_y)} + A_y B_z (\vec{u}_y \cdot \vec{u}_z) +$$
$$+ A_z B_x (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_x) + A_z B_y (\vec{u}_z \cdot B_y) + \boxed{A_z B_z (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z)} =$$

SE ABBIAMO A CHE FARE CON UN SISTEMA ORTOGONALE:

$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1$ MENTRE I PRODOTTI SCALARI DI VERSORI

$\vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = 1$ A 90^0 GRADI TRA LORO FANNO 0.

$\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

OSSERVAZIONE ①

$$|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

OSSERVAZIONE ②

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\theta)$, DATO CHE $\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \cos(\alpha) \vec{u}_x + |\vec{A}| \cdot \sin(\alpha) \vec{u}_y$

$\vec{B} = |\vec{B}| \cos(\beta) \vec{u}_x + |\vec{B}| \sin(\beta) \vec{u}_y$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \left(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\right) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos(\theta)$$

PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$$
$$\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z) \wedge (B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z) =$$

$$= A_x \vec{u}_x \wedge B_x \vec{u}_x + A_x \vec{u}_x \wedge B_y \vec{u}_y + A_x \vec{u}_x \wedge B_z \vec{u}_z +$$
$$+ A_y \vec{u}_y \wedge B_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y \wedge B_y \vec{u}_y + A_y \vec{u}_y \wedge B_z \vec{u}_z +$$
$$+ A_z \vec{u}_z \wedge B_x \vec{u}_x + A_z \vec{u}_z \wedge B_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z \wedge B_z \vec{u}_z =$$

RACCOLGO I VERSORI

$$= \cancel{A_x B_x (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_x)} + A_x B_y (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y) + A_x B_z (\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) +$$
$$+ A_y B_x (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x) + \cancel{A_y B_y (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_y)} + A_y B_z (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z) +$$
$$+ A_z B_x (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x) + A_z B_y (\vec{u}_z \wedge \vec{B}_y) + \cancel{A_z B_z (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_z)}$$

ESSENDO IL PRODOTTO VETTORIALE UN VETTORE ORTOGONALE AL PIANO GENERATO DA $\vec{A}$ E $\vec{B}$, IL PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VERSORI CON LO STESSO PEDICE È $= \vec{0}$.

UN MODO PER RISOLVERE IL PRODOTTO VETTORIALE È TROVARE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE:

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} \boxed{\begin{aligned} &= (A_y B_z - A_z B_y)\vec{u}_x + \\ &+ (A_z B_x - A_x B_z)\vec{u}_y + \\ &+ (A_x B_y - A_y B_x)\vec{u}_z \end{aligned}}$$

TEOREMA

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d(|\vec{v}|^2)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right] = *$$

$$\frac{d}{dt}(v_x^2) = \frac{d v_x^2}{dx}\cdot\frac{d v_x}{dt} = 2v_x\cdot a_x$$

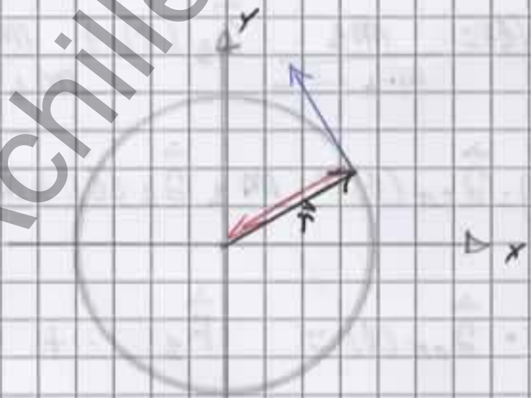
$$\frac{d}{dt}(v_y^2) = \frac{d v_y^2}{dy}\cdot\frac{d v_y}{dt} = 2v_y\cdot a_y$$

$$\frac{d}{dt}(v_z^2) = \frac{d v_z^2}{dz}\cdot\frac{d v_z}{dt} = 2v_z\cdot a_z$$

$$* = 2(v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z) = \boxed{2\vec{v}\cdot\vec{a}} \quad ▨$$

OSSERVAZIONE

$\frac{d}{dt}|\vec{v}|^2 = 0$ SE $\vec{a} \perp \vec{v}$, E QUESTO ACCADE PER ESEMPIO NEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME:



TEOREMINO

$$\int a(x)\,dx = \int \frac{dv}{dt}\,dx = \int dv\,\frac{dx}{dt} = \int v\,dv = \frac{1}{2}v^2 + c$$

CON GLI ESTREMI $\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2$

QUINDI POSSIAMO APPLICARE LO STESSO RAGIONAMENTO CON $F = m \cdot a$

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2 = K_2 - K_1$$

TEOREMA MOTO CENTRO DI MASSA

$$\vec{r}_{cm}(t) = f_1\,\vec{r}_1(t) + f_2\,\vec{r}_2(t)$$

$$\dot{\vec{r}}_{cm}(t) = \vec{v}_{cm}(t) = f_1\,\vec{v}_1(t) + f_2\,\vec{v}_2(t)$$

$$\ddot{\vec{r}}_{cm}(t) = \vec{a}_{cm}(t) = f_1\,\vec{a}_1(t) + f_2\,\vec{a}_2(t)$$

QUINDI: $\vec{a}_{cm}(t) = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{a}_1(t) + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{a}_2(t)$

$$(m_1+m_2)\cdot\vec{a}_{cm}(t) = m_1\,\vec{a}_1(t) + m_2\,\vec{a}_2(t)$$

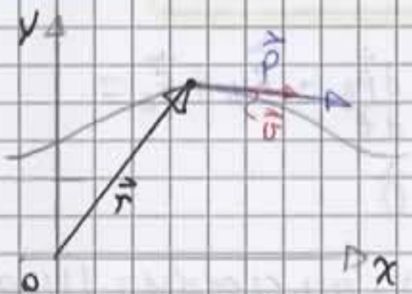
$$\Downarrow$$

$$M_s \cdot \vec{a}_{cm}(t) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{ext}$$

QUINDI COME SI MUOVE IL CM??

SI MUOVE SEGUENDO LA LEGGE: $\boxed{M_s \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}}$

QUANTITÀ DI MOTO

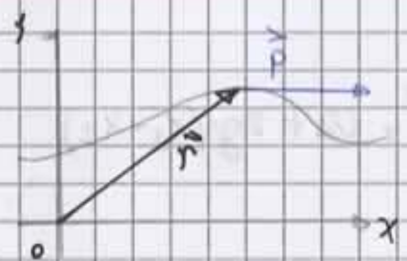


$$\vec{P} = m \cdot \vec{v}$$

$$[P] = M\frac{L}{T}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \vec{v}\right) = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO



$$\vec{L} \overset{d}{=} \vec{r} \wedge \vec{P} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$$

$$[L] = M\frac{L^2}{T}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge \vec{P}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} =$$

$= \vec{v} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \vec{F} =$ "MOMENTO TORCENTE DI $\vec{F}$ RISPETTO ALL'ORIGINE" $= \tau$

$$[\tau] = [F]\,[r] = M\frac{L^2}{T^2}$$

QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA (ISOLATO)

$$\vec{P}_s = \sum_{i \in s} \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \quad \text{(NEL CASO DI DUE CORPI)}$$

$$\frac{d\vec{P}_s}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \overset{\text{ISOLATO}}{=} \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \overrightarrow{COST}$$

"LA QUANTITÀ DI MOTO DI UN SISTEMA ISOLATO

È CONSERVATIVA"

QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA (NON ISOLATO)

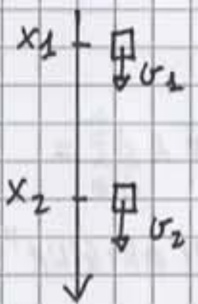
$\vec{P}_s = \sum_{i \in s} \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $\frac{d\vec{P}_s}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 =$

$= \cancel{\vec{F}_{12}} + \vec{F}_{13} + \cancel{\vec{F}_{21}} + \vec{F}_{23} = \vec{F}_{1,EXT} + \vec{F}_{2,EXT} \neq \vec{0}$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

"LA QUANTITÀ DI MOTO DI UN SISTEMA IN CUI CI SONO FORZE ESTERNE NON È COST."

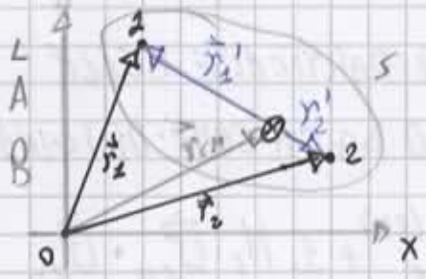
TEOREMA CADUTA GRAVE VELOCITÀ



$a = g$ ENUNCIATO: $v_2^2 = v_1 + 2g(x_2 - x_1)$

DIMOSTRAZIONE

TEOREMI DEL CM ($\vec{L}$)



$\vec{r}_1'$ E $\vec{r}_2'$ SONO I VETTORI POSIZIONE DELLE PARTICELLE PARTENDO DA CM COME ORIGINE.

ENUNCIATO: $\boxed{\vec{L}_s^{(LAB)} = \vec{L}_s^{(CM)} + M_s \cdot \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm}}$

DIMOSTRAZIONE

$$* \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_1' \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_2' \end{cases} \xrightarrow{\frac{d(\cdot)}{dt}} \begin{cases} \vec{v}_1 = \dfrac{d\vec{r}_{cm}}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_1'}{dt} \\ \vec{v}_2 = \dfrac{d\vec{r}_{cm}}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_2'}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_1' \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_2' \end{cases}$$

ORA RICORDIAMO LA FORMULA: $\vec{L}_s = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{P}_2 =$

$= m_1 \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2$

ORA SOSTITUIAMO ($*$) IN $\vec{L}_s$:

$$\vec{L}_s = m_1(\vec{r}_{cm} + \vec{r}_1') \wedge (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_1') + m_2(\vec{r}_{cm} + \vec{r}_2') \wedge (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_2') =$$

$$= \underbrace{\boxed{\begin{matrix} m_1 \cdot \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} \\ + m_2 \cdot \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} \end{matrix}}}_{*1} + \underbrace{\boxed{\begin{matrix} m_1 \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_1' \\ + m_2 \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_2' \end{matrix}}}_{*2} + \underbrace{\boxed{\begin{matrix} m_1 \cdot \vec{r}_1' \wedge \vec{v}_{cm} \\ + m_2 \cdot \vec{r}_2' \wedge \vec{v}_{cm} \end{matrix}}}_{*3} + \underbrace{\boxed{\begin{matrix} m_1 \cdot \vec{r}_1' \wedge \vec{v}_1' \\ + m_2 \cdot \vec{r}_2' \wedge \vec{v}_2' \end{matrix}}}_{*4} =$$

$$*1 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} = M_s \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm}$$

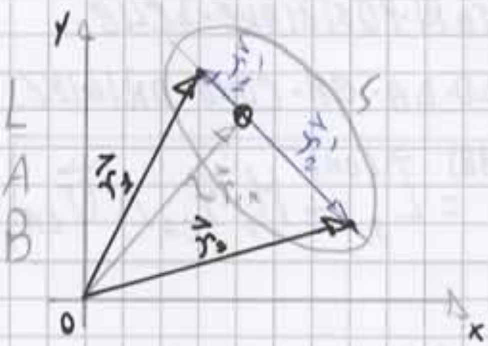
$$*2 = \begin{matrix} m_1 \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_1' + \\ m_2 \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_2' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_1' m_1 + \\ \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_2' m_2 \end{matrix} \Rightarrow \vec{r}_{cm} \wedge \underbrace{(m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2')}_{0} \equiv \vec{0}$$

$$*3 = \begin{matrix} m_1 \cdot \vec{r}_1' \wedge \vec{v}_{cm} + \\ m_2 \vec{r}_2' \wedge \vec{v}_{cm} \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{(m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2')}_{0} \wedge \vec{v}_{cm} \equiv \vec{0}$$

$$*4 = \begin{matrix} m_1 \vec{r}_1' \wedge \vec{v}_1' + \\ m_2 \vec{r}_2' \wedge \vec{v}_2' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{r}_1' \wedge \vec{P}_1' + \\ \vec{r}_2' \wedge \vec{P}_2' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{L}_1^{(cm)} + \\ \vec{L}_2^{(cm)} \end{matrix} \Rightarrow \vec{L}_s^{(cm)}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s^{(LAB)} = \vec{L}_s^{(cm)} + M_s \vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm} \qquad \blacksquare$$

TEOREMI DEL CM (K)



$\vec{r}_1'$ E $\vec{r}_2'$ SONO I VETTORI POSIZIONE DELLE PARTICELLE PARTENDO DA CM COME ORIGINE.

ENUNCIATO: $K_s^{(LAB)} = K_s^{(CM)} + \frac{1}{2} M_s \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM}$

DIMOSTRAZIONE

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_1' \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_2' \end{cases} \Rightarrow \text{SOSTITUIAMO IN} \Rightarrow K_s^{(LAB)} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$K_s^{(LAB)} = \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_1') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_1') + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_2') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_2') =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_1' + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_{CM} + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_1' +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_2' + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2' \cdot \vec{v}_{CM} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2' \cdot \vec{v}_2' =$$

※1 ※2 ※3 ※4

$$※1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} = \frac{1}{2} M_s \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM}$$

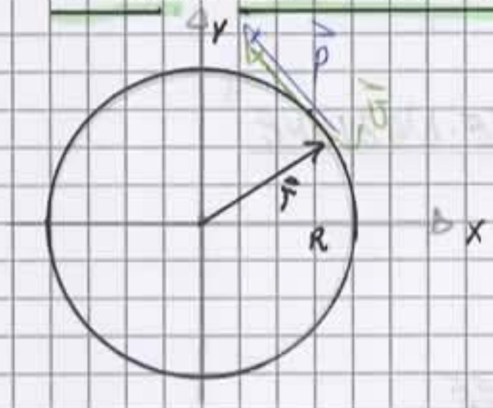
$$※2 = \frac{1}{2} \vec{v}_{CM} \underbrace{(m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2')}_{0} \equiv 0$$

$$※3 = \frac{1}{2} \underbrace{(m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2')}_{0} \cdot \vec{v}_{CM} \equiv 0$$

$$※4 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_1' + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2' \cdot \vec{v}_2' = K_1^{CM} + K_2^{CM} = K_s^{CM}$$

$$\Rightarrow K_s^{LAB} = K_s^{CM} + \frac{1}{2} M_s \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM}$$

MOMENTO DI INERZIA



RICORDIAMO CHE: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P} = m \vec{r} \wedge \vec{v}$

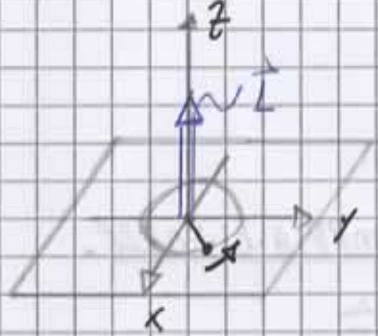
QUINDI: $\vec{L} = m R v \vec{u}_z$

MA DATO CHE SIAMO IN UN MOTO CIRCOLARE UNIFORME:

$$v = R\, \omega_0 \quad , \quad \omega_0 = \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = m R^2 \omega_0 \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{L} = m R^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$



DOVE $|\vec{L}| = m R^2 |\dot{\theta}|$

ORA DEFINIAMO IL MOMENTO DI INERZIA:

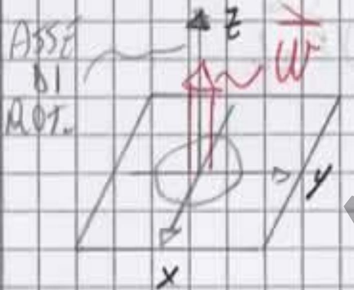
$$I = m R^2$$

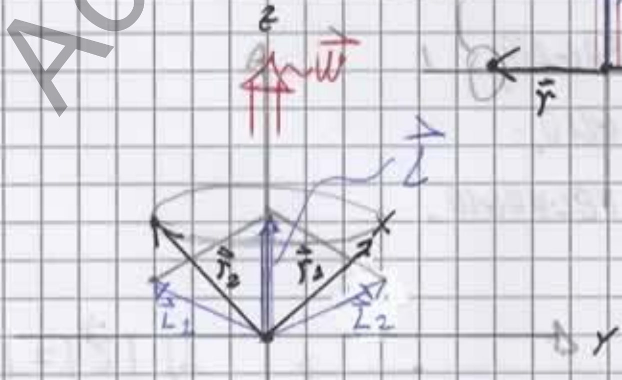
CHE POSSIAMO SOSTITUIRE NEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO:

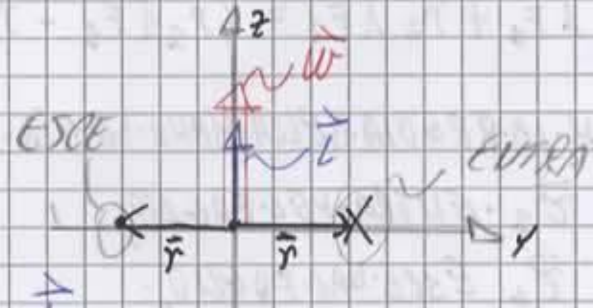
$$\vec{L} = I\, \dot{\theta}\, \vec{u}_z$$

E CHIAMIAMO ORA $\dot{\theta}\, \vec{u}_z$ LA VELOCITÀ ANGOLARE VETTORIALE $\vec{\omega}$:

$$\vec{L} = I\, \vec{\omega}$$



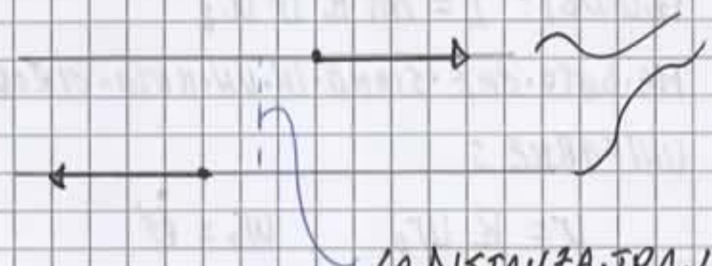




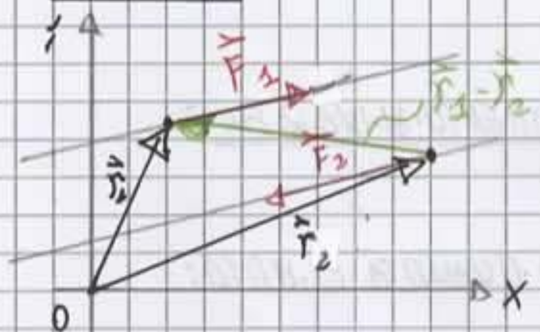
QUINDI CONCLUDIAMO CHE SE IL SISTEMA È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE DI ROTAZIONE $\vec{L}$ È PARALLELO A $\vec{\omega}$.

COPPIA DI FORZE

ESEMPIO DI COPPIA DI FORZE



ESEMPIO



$\vec{F}_1$ E $\vec{F}_2$ SONO UNA COPPIA DI FORZE.

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$

$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1$, $\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$

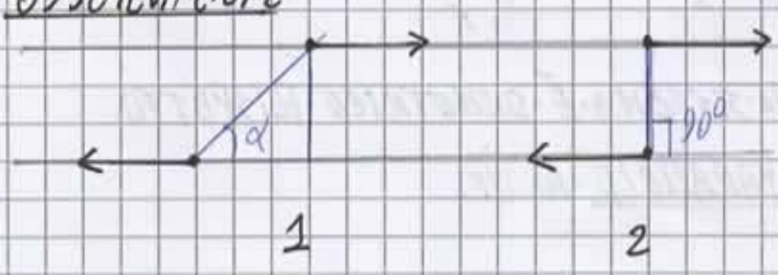
$\vec{\tau}_{COPPIA} = \vec{\tau}_1 \wedge \vec{\tau}_2 =$

$= \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}_1$

CON LA REGOLA DELLA MANO DESTRA NOTIAMO CHE:

- $\vec{\tau}_1$ ENTRA NEL FOGLIO,
- $\vec{\tau}_2$ ESCE DAL FOGLIO,
- $\vec{\tau}_{COPPIA}$ ENTRA NEL FOGIO.

OSSERVAZIONE

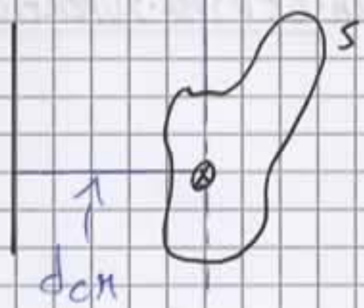


1) $|\vec{\tau}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \cdot |\vec{F}_1| \cdot \sin(\alpha)$

2) $|\vec{\tau}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \cdot |\vec{F}_1| \sin(90°)$

N.B. L'ORIGINE NON HA ALCUNA UTILITÀ NELLA DETERMINAZIONE DEL

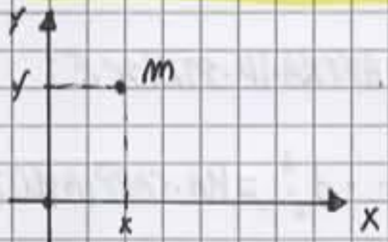
TEOREMA ASSI PARALLELI



$$I_i = m_i \, d_i^2$$

ENUNCIATO: $I_s = I_s^{(cm)} + M_s \cdot d_{cm}^2$

TEOREMA ASSI PERPENDICOLARI



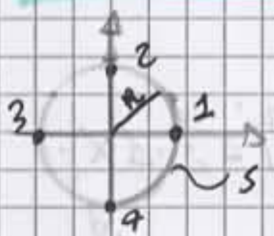
$$I_x = m\,x^2$$

$$I_y = m\,y^2$$

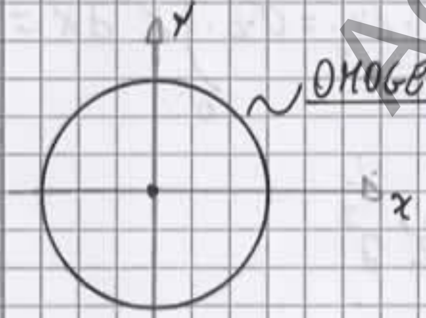
$$I_z = m\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = m\,x^2 + m\,y^2 = \underline{I_x + I_y}$$

Z USCENTE

ANELLO OMOGENEO



$$I_s = \sum_i I_i = m_1 R^2 + m_2 R^2 + m_3 R^2 + m_4 R^2 =$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) R^2 =$$
$$= M_s \cdot R^2$$



OMOGENEO: "LA MATERIA È DISTRIBUITA IN MANIERA SIMMETRICA"

DAL TEOREMA DEGLI ASSI PERPENDICOLARI SAPPIAMO CHE $I_z = I_x + I_y$.

Z ESCE

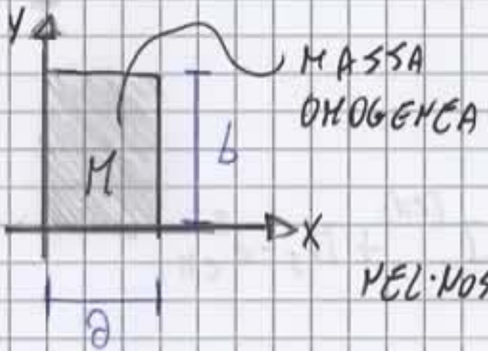
MA NEL NOSTRO CASO, ESSENDO UNA CIRCONFERENZA:

$$I_x = I_y$$

QUINDI $I_z = 2 I_x = m R^2$

$$\Rightarrow I_x = \frac{1}{2} m R^2$$

LASTRA OMOGENEA



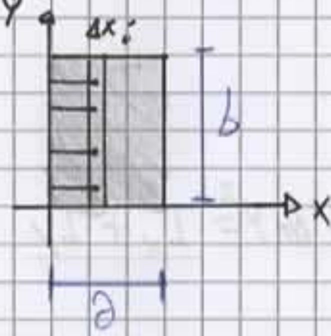
DEFINIAMO σ LA "DENSITÀ SUPERFICIALE"

$$\frac{\text{MASSA}}{\text{AREA}} = \sigma$$

NEL NOSTRO CASO $M = \sigma \cdot (a \cdot b)$

ALLORA DICIAMO CHE $I_X = \frac{1}{3} M b^2$ E $I_Y = \frac{1}{3} M a^2$

DIMOSTRAZIONE



$$I = \sum_i I_i$$

DIVIDIAMO LA LASTRA IN STRISCE;

$I_{STRISCIA-i} = m_i \cdot d_i^2$, MA SAPPIAMO:

$$m_i = \sigma \cdot (\Delta x_i \cdot b);$$

$$d_i = x_i.$$

$$\Rightarrow I_{STRISCIA-i} = \sigma (\Delta x_i \cdot b) \cdot x_i^2$$

$$\Rightarrow I_{STIMA} = \sum_i^N I_{STRISCIA-i} = \sum_i^N \sigma (\Delta x_i \cdot b) \cdot x_i^2 = \sigma \cdot b \sum_i^N x_i^2 \cdot \Delta x_i$$

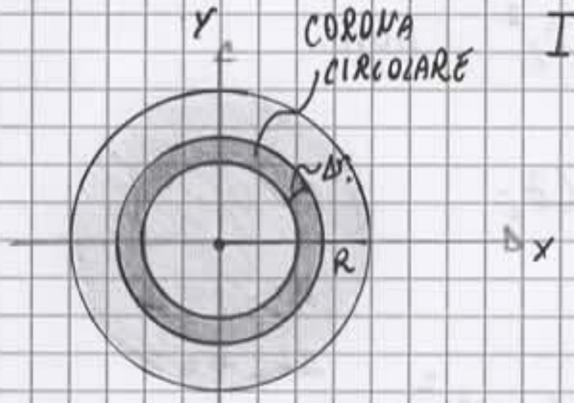
ORA PONIAMO IL LIMITE IN CUI LE STRISCE SONO SEMPRE PIÙ PICCOLE E PIÙ NUMEROSE $\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ N \to \infty}} \sigma \cdot b \sum_i^N x_i^2 \cdot \Delta x_i = \sigma \cdot b \int_0^a x^2 dx =$

$$= \sigma \cdot b \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \sigma \cdot b \left(\frac{a^3}{3} \right) = \overset{M}{\sigma \cdot b \cdot a} \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3} M a^2$$

∎

DIMOSTRAZIONE ANALOGA PER I_Y.

DISCO OMOGENEO



$$I_{STIMA} = \sum_i I_i$$

$$I_{CORONA-i} = m_i \cdot d_i^2 \text{ , MA SAPPIAMO CHE:}$$

$$m_i = \sigma\,(\underbrace{2\pi r_i}_{\text{CIRCONF.}} \cdot \Delta r_i)\,;$$

$$d_i = r_i\,.$$

$$\Rightarrow I_{CORONA-i} = \sigma(2\pi r_i \cdot \Delta r_i)\cdot r_i^2$$

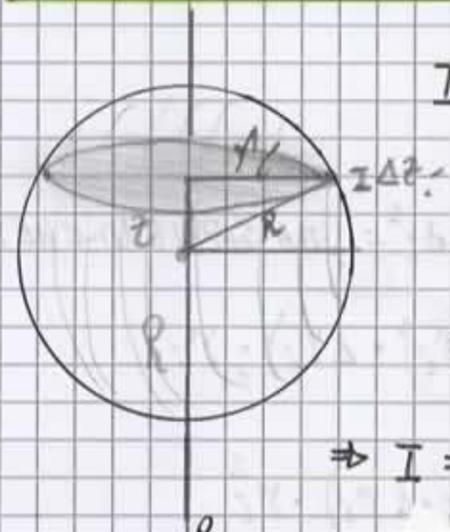
QUINDI:

$$I_{STIMA} = \sum_i^N I_{CORONA-i} = \sum_i^N \sigma(2\pi r_i \cdot \Delta r_i)\cdot r_i^2 = \sum_i^N \sigma 2\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i =$$

$$= \sigma 2\pi \sum_i^N r_i^3 \Delta r_i \xrightarrow[N \to \infty]{\Delta r_i \to 0} \sigma 2\pi \int_0^R r^3\, dr = \sigma 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R =$$

$$= \sigma 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \sigma\, 2\pi R^2\, \frac{R^2}{4} = M \cdot 2 \cdot \frac{R^2}{4} = \boxed{\frac{1}{2} M R^2}$$

SFERA OMOGENEA



$I_{DISCO_i} = \frac{1}{2} m_i r_i^2$, DOVE:

$m_i = \rho \pi r_i^2 \cdot \Delta z_i$

$r_i^2 = R^2 - z^2$

$$\Rightarrow I = \sum \frac{1}{2} \rho \pi r_i^2 \Delta z_i \cdot r_i^2 = \xrightarrow[N \to \infty]{\Delta z_i \to 0}$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 \, dz = \frac{1}{2} \rho \pi \left[\int_{-R}^{R} R^4 \, dz + \int_{-R}^{R} z^4 \, dz - 2R^2 \int_{-R}^{R} z^2 \, dz \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi \left[2 R^5 + \frac{2}{5} R^5 - \frac{4}{3} R^5 \right] = \frac{1}{2} \rho \pi R^3 \left[\frac{16}{15} R^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi R^3 \frac{4}{3} \left[\frac{4}{5} R^2 \right] = \boxed{\frac{2}{5} M R^2}$$

URTI ANELASTICI

DATO CHE IL TAVOLO È LUBRIFICATO, LE FORZE ESTERNE NON CI SONO.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_s}{dt} = \vec{F}_{EXT} = \vec{0}$$, QUESTO VUOL DIRE CHE:

$\vec{P}$ È COSTANTE NEL TEMPO:

$$P(PRIMA) = P(DURANTE) = P(DOPO)$$

"QUINDI LA QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA"

$$P_s(PRIMA) = m_1 \cdot \vec{v}_i$$
$$P_s(DOPO) = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_F$$

$$= \quad m_1 \vec{v}_i = (m_1 + m_2)\vec{v}_F$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_F = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_i$$

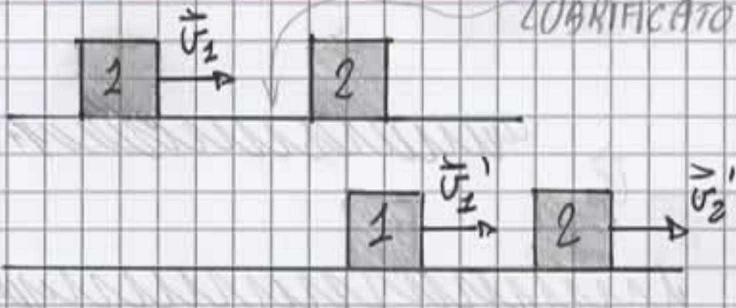
ANALIZZIAMO ORA L'ENERGIA CINETICA:

$$K_s(PRIMA) = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_i^2$$
$$K_s(DOPO) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}_F^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \vec{v}_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \vec{v}_i^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{2} m_1 \cdot \vec{v}_i^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot K_s(PRIMA)$$

$$K_s(DOPO) < K_s(PRIMA) \Rightarrow$$ "L'ENERGIA CINETICA NON SI CONSERVA".

URTI ELASTICI



ESSENDO IL TAVOLO LUBRIFICATO NON CI SONO FORZE ESTERNE:

$$\frac{d\vec P_s}{dt} = \vec F_{ext} = \vec 0$$

QUINDI $\vec P_s(t) = \overrightarrow{cost}$

$$\Rightarrow \vec P_s(PRIMA) = \vec P_s(DURANTE) = \vec P_s(DOPO)$$

$P_s(PRIMA) = m_1 \vec v_1$

$P_s(DOPO) = m_1 \vec v_1' + m_2 \vec v_2'$

"QUINDI ANCHE IN QUESTO CASO LA QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA!!"

"E DATO CHE PARLIAMO DI URTI ELASTICI DIREMO CHE ANCHE L'ENERGIA CINETICA SI CONSERVA."

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{cases}$$ (1/2 NON SERVE)

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_2' & (1) \\ m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 = m_2 v_2'^2 & (2) \end{cases}$$

DIVIDO $\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \boxed{v_2' = v_1 + v_1'}$ (*)

$$\Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_1 + m_2 v_1' \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_1 = (m_1 + m_2) v_1'$$

QUINDI $\boxed{v_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1}$

(*) $\Rightarrow v_2' = v_1 + \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1 = \left(1 + \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}\right) v_1 = \boxed{\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1}$

OSSERVAZIONE

- $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Longrightarrow \begin{cases} \text{SE } m_1 = m_2 \Rightarrow v_1' = 0 \\ \text{SE } m_1 < m_2 \Rightarrow v_1' < 0 \end{cases}$

- $v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow$ SARÀ SICURAMENTE POSITIVA (O NULLA)

CASI PARTICOLARI

- SE $m_1 \ll m_2$, $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$ CHE SUCCEDE??

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)}{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)} v_1 \xrightarrow[\frac{m_1}{m_2} \to 0]{} -1 \cdot v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_2\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)} v_1 \xrightarrow[\frac{m_1}{m_2} \to 0]{} 0$$

"QUINDI SE IL CORPO 1 HA UNA MASSA MOLTO PIÙ PICCOLA RISPETTO AL CORPO 2, DOPO L'URTO IL CORPO 1 TORNERÀ INDIETRO, MENTRE IL CORPO 2 NON AVVERTIRÀ NESSUN SPOSTAMENTO".

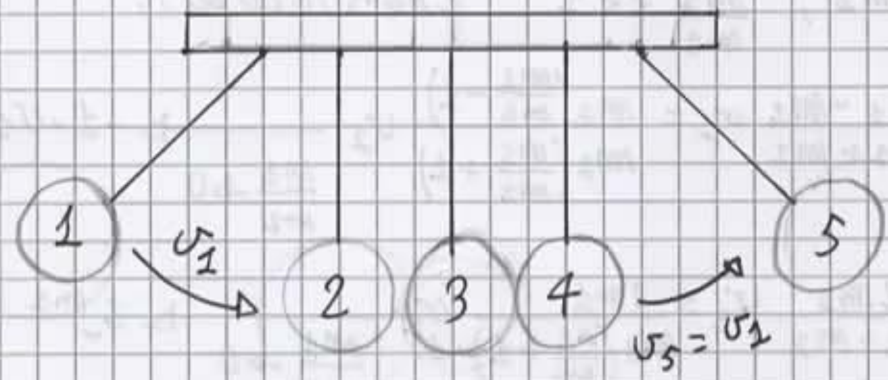
- SE $m_1 \gg m_2$, $\frac{m_2}{m_1} \ll 1$ CHE SUCCEDE??

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)}{m_1\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} v_1 \xrightarrow[\frac{m_2}{m_1} \to 0]{} v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} v_1 \xrightarrow[\frac{m_2}{m_1} \to 0]{} 2v_1$$

"QUINDI NEL CASO IN CUI IL CORPO 1 ABBIA UNA MASSA MOLTO PIÙ GRANDE RISPETTO AL CORPO 2, DOPO L'URTO IL CORPO 1 CONTINUERÀ A MUOVERSI CON LA VELOCITÀ INIZIALE, MENTRE IL CORPO 2 SCHIZZERÀ VIA AL DOPPIO DELLA VELOCITÀ INIZIALE DEL CORPO 1."

CULLA DI NEWTON



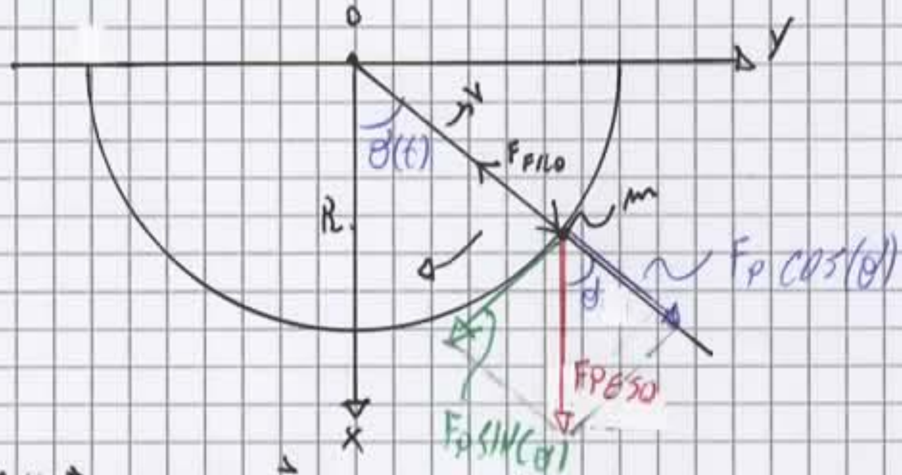
SE LA BIGLIA 1 URTA ELASTICAMENTE LA BIGLIA 2, L'ENERGIA CINETICA SI CONSERVA, MA PERCHE SE LE BIGLIE 1 2 URTANO LA 3 SI MUOVONO 4 E 5 !!

SE PER ASSURDO:

$$1 \xrightarrow[v_0]{} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \quad \rightarrow \quad 1\ 2\ 3\ (4\ 5) \rightarrow \frac{v_0}{2}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} 2m \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m v_0^2\right)$$

PENDOLO SEMPLICE



$$\vec{r} = R\left(\cos(\vartheta)\vec{u}_x + \sin(\vartheta)\vec{u}_y\right)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\dot{\vartheta}\sin(\vartheta)\vec{u}_x + R\dot{\vartheta}\cos(\vartheta)\vec{u}_y$$

$$\vec{L}(t) = m\left(\vec{r}\wedge\vec{v}\right) = m\cdot\begin{bmatrix}\vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ R\cos\vartheta & R\sin\vartheta & 0 \\ -R\dot{\vartheta}\sin\vartheta & R\dot{\vartheta}\cos\vartheta & 0\end{bmatrix} = 0\vec{u}_x + 0\vec{u}_y + \left(\dot{\vartheta} m R^2\cos^2\vartheta + \dot{\vartheta} m R^2 \sin^2\vartheta\right)\vec{u}_z$$

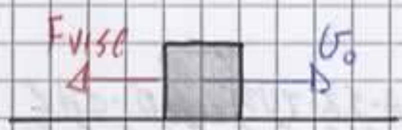
$$= \left(m R^2 \dot{\vartheta}(t)\right)\vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\wedge\vec{F}_{TOT} = \vec{r}\wedge\left(\vec{F}_{PESO} + \vec{F}_{FILO}\right) = \vec{r}\wedge\vec{F}_{PESO} + \underbrace{\vec{r}\wedge\vec{F}_{FILO}}_{//} = \vec{\tau}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix}\vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ R\cos(\vartheta) & R\sin(\vartheta) & 0 \\ \vec{F}_p\sin(\vartheta) & 0 & 0\end{vmatrix} = \left(-\vec{F}_p R\sin\vartheta\right)\vec{u}_z$$

ATTRITO VISCOSO

LINEARE



$$F_{visc} = -bv \Rightarrow m \cdot a = F$$
$$\Downarrow$$
$$m \cdot a = -bv$$

$$m \frac{dv}{dt} = -bv \rightarrow \boxed{m\, dv = -b\, v\, dt}$$ DEVO TROVARE UNA $v(t)$ CHE SODDISFI L'EQUAZIONE.

SPOSTO A SX TUTTO CIÒ CHE DIPENDE DA v:

$$-\frac{m}{b} \cdot \frac{dv}{v} = dt \rightarrow$$ INTEGRO AMBO LE PARTI: $$\int_0^t dt = -\frac{m}{b} \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} \rightarrow$$

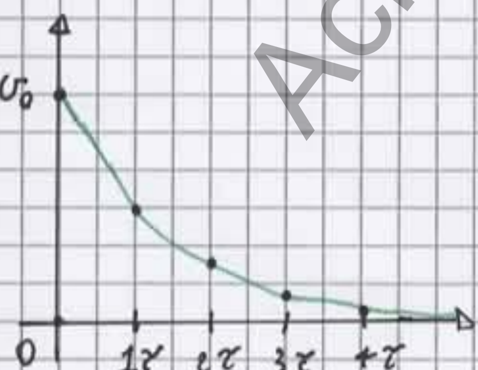
$$\rightarrow t = -\frac{m}{b}\left[\ln(v)\right]_{v_0}^{v} = -\frac{m}{b}\left(\ln(v) - \ln(v_0)\right) = -\frac{m}{b} \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow t = -\frac{m}{b} \ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$ MA IO VOGLIO $v(t)$, QUINDI: $$-\frac{b}{m} t = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{-\frac{b}{m}t} = \frac{v}{v_0} \Rightarrow v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{b}{m}t}$$, CHE RISCRIVIAMO:

$$\boxed{v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ DOVE } \tau = \frac{m}{b}}$$

ANALIZZIAMO L'ANDAMENTO DI $v(t)$ IN FUNZIONE DI τ:



ANDAMENTO ESPONENZIALE DECRESCENTE

t IN τ	$v(t)$
0	v_0
1τ	$v_0 \cdot 1/e$
2τ	$v_0 \cdot 1/e \cdot 1/e$
3τ	$v_0 \cdot 1/e \cdot 1/e \cdot 1/e$

QUADRATICO

$F_{visc} = -cv^2 \Rightarrow m \cdot a = -cv^2$

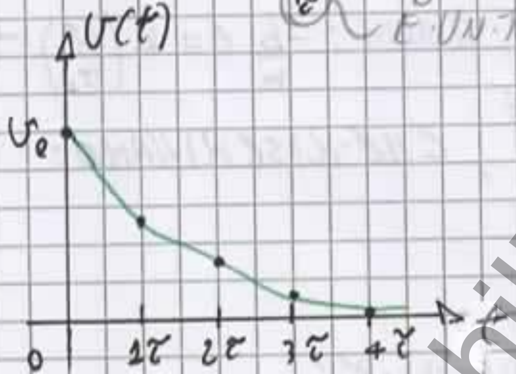
$m \cdot \frac{dv}{dt} = -cv^2 \rightarrow -\frac{m}{c} dv = v^2 dt \rightarrow$ SPOSTO A SX TUTTO CIÒ CHE DIPENDE DA $v \rightarrow dt = -\frac{m}{c}\frac{dv}{v^2} \rightarrow$ INTEGRO AMBO I LATI $\longrightarrow \int_0^t dt = -\frac{m}{c}\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^2}\, dv$

$\rightarrow t = -\frac{m}{c}\left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = -\frac{m}{c}\left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0}\right) =$ ESTRAGGO $v(t) \rightarrow$

$\rightarrow -\frac{c}{m}t - \frac{1}{v_0} = -\frac{1}{v} = \frac{m + ctv_0}{mv_0}, \quad v(t) = \frac{mv_0}{m + ctv_0} = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{cv_0}{m}t\right)}$

$\Rightarrow v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{t}{\tau}}$, DOVE $\tau = \frac{m}{cv_0}$

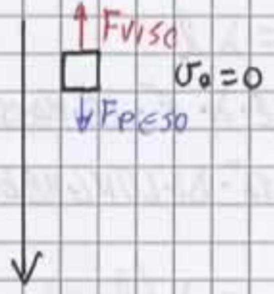
È UN TEMPO



(NON È UN ESPONENZIALE)

t in τ	$v(t)$
0	v_0
1τ	$v_0/2$
2τ	$v_0/3$
3τ	$v_0/4$

CADUTA GRAVE NEL FLUIDO



$$\Rightarrow F_{TOT} = m \cdot a = F_{PESO} + F_{VISC}$$

$$= m \cdot a = mg - bv$$

TROVIAMO LA $v(t)$ SOLUZIONE!

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv \rightarrow m\,dv = (-bv + mg)\,dt \rightarrow dv = \left(g - \frac{b}{m}v\right)dt$$

$$\rightarrow \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt \rightarrow \text{INTEGRO} \rightarrow \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{g - \frac{b}{m}v}\,dv \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \int_g^{g - b/m\, v} \frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{m}{b}\right)dz = -\frac{m}{b}\Big[\ln(z)\Big]_g^{g - b/m\, v} =$$

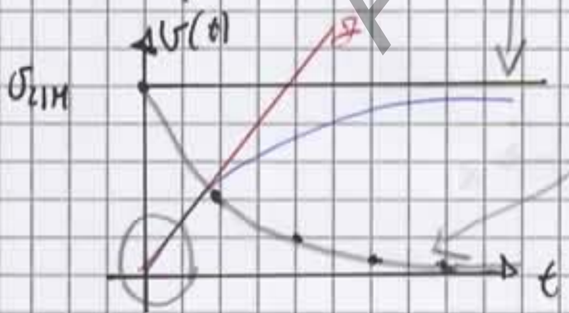
$$\boxed{\begin{aligned} &g - \tfrac{b}{m}v = z \\ &dv = -\tfrac{m}{b}\,dz \\ &0 \rightarrow g \\ &v \rightarrow g - \tfrac{b}{m}v \end{aligned}}$$

$$= -\frac{m}{b}\left(\ln\left(g - \frac{b}{m}v\right) - \ln(g)\right) = -\frac{m}{b}\ln\left(\frac{g - \frac{b}{m}v}{g}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{m}t = \ln\left(\frac{g - \frac{b}{m}v}{g}\right) \Rightarrow e^{-\frac{b}{m}t} = \frac{g - \frac{b}{m}v}{g}$$

QUINDI $v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) =$

$$= v_{LIM}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = v_{LIM} - v_{LIM}\,e^{-t/\tau}$$



QUANDO t È MOLTO PICCOLO, L'ESPONENZIALE PUÒ ESSERE APPROX.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} \ldots$$

$$\text{QUINDI} \Rightarrow v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \Rightarrow \frac{mg}{b}\left(1 - \left(1 - \frac{b}{m}t\right)\right) = g \cdot t$$

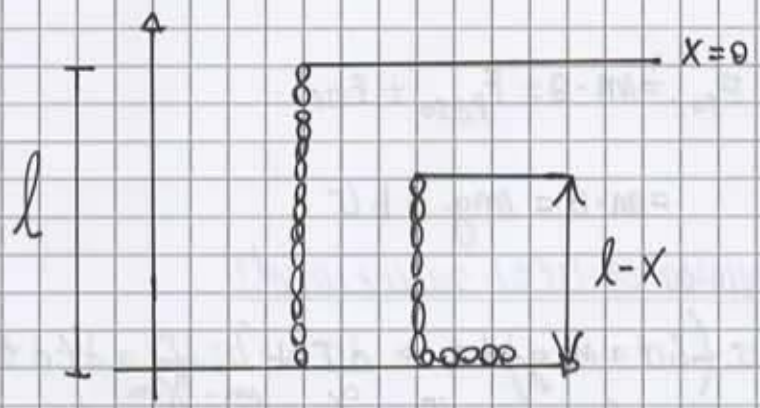
QUESTO VUOL DIRE CHE NEI POCHI ISTANTI SUBITO DOPO AVER MOLLATO LA PRESA, IL CORPO AVRÀ UNA VELOCITÀ COME SE STESSE NEL VUOTO. CON IL TEMPO PERÒ $v(t)$ SI ACCORGERÀ DELL'ATTRITO E CURVERÀ

CATENA

$$M = \lambda l$$

DOVE λ È LA MASSA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA.

$$m_{mov.} = \lambda (l - x)$$



$$P_s(t) = m \cdot v = m_{mov.} \cdot \dot{x}$$

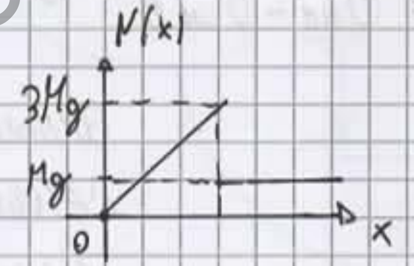
$$\frac{dP_s}{dt} = \vec{F}_{ext} = F_{peso} + F_{tavolo} = Mg + N = \lambda l g + N$$

$$\frac{dP_s}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\lambda(l-x)\cdot\dot{x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\lambda l \dot{x} - \lambda x \dot{x}\right) = \lambda l \ddot{x} - \lambda \dot{x}^2 - \lambda x \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \lambda l g + N = \lambda l \ddot{x} - \lambda \dot{x}^2 - \lambda x \cdot \ddot{x} \Rightarrow N = -\lambda \dot{x}^2 - \lambda x \ddot{x}$$

$$\Rightarrow N = -\lambda(\dot{x}^2 + xg) = -\lambda(2gx + xg) \Rightarrow \boxed{N = -\lambda 3 g x}$$

"VUOL DIRE CHE IN UN MOTO DINAMICO, IL TAVOLO DEVE USARE UNA FORZA CHE È 3 VOLTE MAGGIORE RISPETTO ALLA FORZA PESO DELLA CATENA".



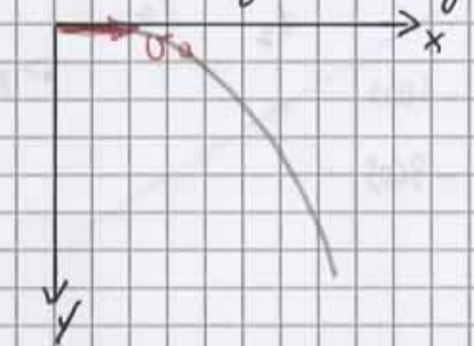
ΔK

RICORDIAMO CHE $K \stackrel{d}{=} \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ E $\frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\theta)$

POSSIAMO SCRIVERE DUNQUE: $\boxed{\int_{t_1}^{t_2} F \cdot v \, dt = K_2 - K_1}$

ESEMPIO

$\vec{F} = m \vec{a} = m g \Rightarrow \vec{a} = g$



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_{x_0} \\ v_y = v_{y_0} + g t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x_0} t \\ y(t) = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

QUINDI IN QUESTO CASO: $K_2 - K_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} m g \cdot g t \, dt =$

$= m g \left(\underbrace{\frac{1}{2} g t_2^2}_{*2} - \underbrace{\frac{1}{2} g t_1^2}_{*1} \right)$

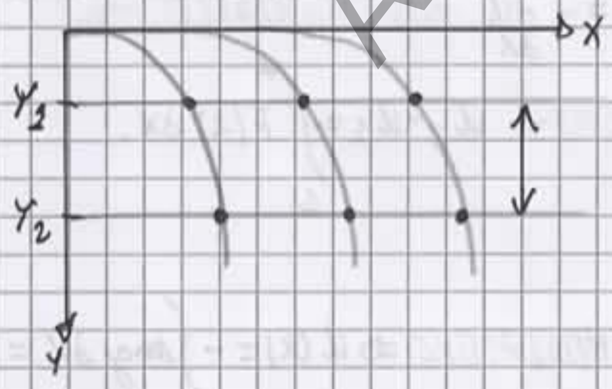
NOTIAMO CHE LA:

$*1)$ È LA POSIZIONE $y(t_1)$

$*2)$ È LA POSIZIONE $y(t_2)$

$\Rightarrow K_2 - K_1 = m g \underbrace{(y_2 - y_1)}_{\text{DISLIVELLO}}$

IN GENERALE:



HANNO TUTTE LA STESSA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA!!!

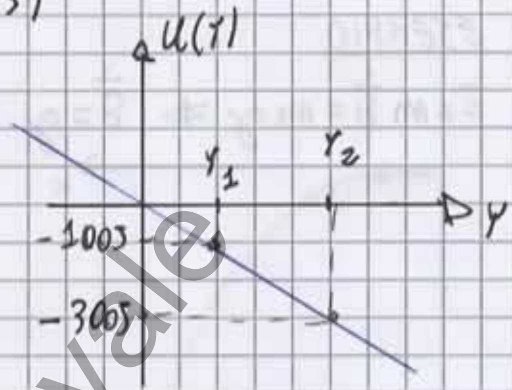
QUINDI ABBIAMO: $K_2 - K_1 = mg\,Y_2 - mg\,Y_1$

"VOGLIAMO TROVARE UN'OPPORTUNA FUNZIONE $U(Y)$, CHE ABBIA LE STESSE DIMENSIONI DI K E CHE ABBIA QUESTA PROPRIETÀ:

$$\boxed{K_2 + U_2 = K_1 + U_1}$$

$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow U(Y) = -mg\,Y + COST$

ESEMPIO:



$\Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2$

$\Rightarrow -100\,J - (-300\,J) = 200\,J$

ESEMPIO MOLLA

$F = -Kx$ (LEGGE DI HOOKE)

CERCHIAMO UNA $U(Y)$ TALE CHE: $K + U = COST$

OVVERO $\frac{d}{dt}(K+U) = 0$

QUINDI: $\frac{d}{dt}K = -\frac{d}{dt}U \Rightarrow$

$\Rightarrow F \cdot v = -\frac{d}{dt}U \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dx} \cdot v \Rightarrow F \cdot v = -\frac{dU}{dx} \cdot v$

$\Rightarrow F = -\frac{dU}{dx}$. NEL NOSTRO CASO $\Rightarrow -Kx = -\frac{dU}{dx} \rightarrow$ INTEGRIAMO $\rightarrow$

$\Rightarrow U = -\int F(x)\,dx \Rightarrow$ USIAMO GLI ESTREMI $\rightarrow U_2 - U_1 = -\int_1^2 F(x)\,dx$.

QUINDI:

- $F(x) = mg = F_{PESO}$ NON DIPENDE DALLA POSIZIONE $\Rightarrow U(x) = -\int mg\,dx = -mgx + C$

- $F(x) = -Kx = F_{MOLLA}$ DIPENDE DALLA POSIZIONE $\Rightarrow U(x) = -\int -Kx\,dx = K\frac{x^2}{2} + C$

ENERGIA MECCANICA

METTIAMO IL CASO IN CUI IL NOSTRO CORPO SIA SOGGETTO A DUE FORZE:

$$\vec{F}_{TOT} = F_{MOLLA} + F_{VISC} = -kx - bv$$

QUINDI IMPOSTIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZA DI ENERGIA CINETICA:

$$K_2 - K_1 = \int_1^2 F_1(x) \cdot \underbrace{v\,dt}_{dx} + \int_1^2 F_2(v) \cdot v\,dt = \int_1^2 F_1(x) \cdot dx + \int_1^2 F_2(v)\,v\,dt =$$

$$= \int_1^2 -kx\,dx - b\int_1^2 v^2\,dt = -\int_1^2 kx\,dx - b\int_1^2 v^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - b\int_1^2 v^2\,dt = K_2 - K_1 =$$

$$= -b\int_1^2 v^2\,dt = K_2 + \underbrace{\frac{1}{2}kx_2^2}_{U_2} - \Big(K_1 + \underbrace{\frac{1}{2}kx_1^2}_{U_1}\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(K_2 + U_2)}_{\mathcal{E}_2} - \underbrace{(K_1 + U_1)}_{\mathcal{E}_1} = -b\int_1^2 v^2\,dt$$

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = -b\int_1^2 v^2\,dt$$

$\mathcal{E}$ VIENE CHIAMATA ENERGIA MECCANICA.

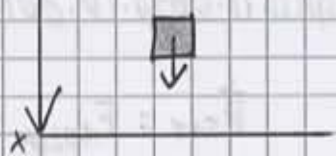
AL PASSARE DEL TEMPO: $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1 \Rightarrow$ L'ENERGIA MECCANICA NON SI CONSERVA!!

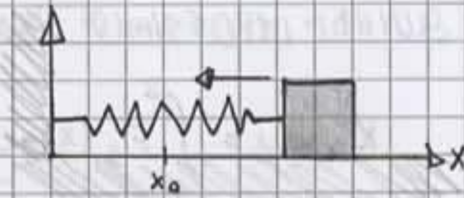
DA NOTARE CHE SE CI FOSSE STATA SOLO LA FORZA DELLA MOLLA: $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$

$\Rightarrow$ QUESTO TIPO DI FORZE VENGONO CHIAMATE FORZE CONSERVATIVE MENTRE FORZE COME QUELLE DI ATTRITO VENGONO CHIAMATE FORZE DISSIPATIVE PERCHÉ DISSIPANO L'ENERGIA MECCANICA.

TABELLA

$F(x)$	$U(x)$
$m \cdot g$	$U(x) = -mgx + C$
$-Kx$	$U(x) = K\frac{1}{2}x^2 + C$
$-G\frac{Mm}{x^2}$	$U(x) = -G\frac{Mm}{x} + C$
$K_e\frac{Qq}{x^2}$	$U(x) = K_e\frac{Qq}{x} + C$





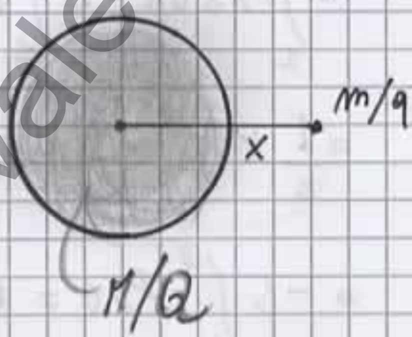
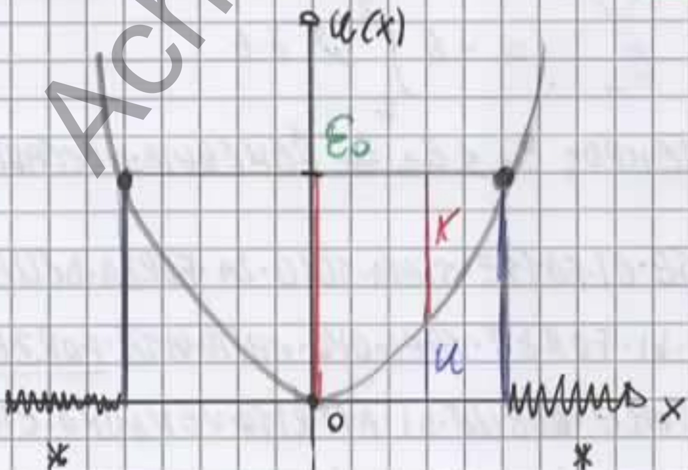


GRAFICO MOLLA

$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 + C$, DATO CHE È UNA FORZA CONSERVATIVA $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \boxed{\mathcal{E}_0}$

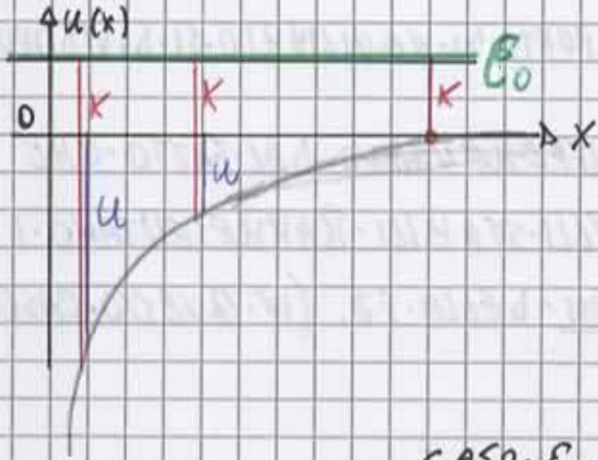


* QUESTE ZONE RICHIEDONO UNA K NEGATIVA, IL CHE È IMPOSSIBILE.

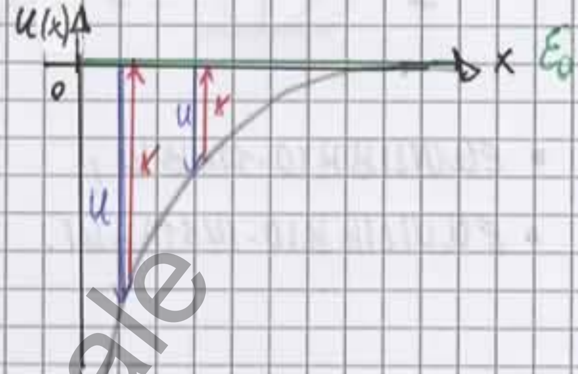
GRAFICO: GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$$U(x) = -G\frac{Mm}{x} + C$$

CASO $\mathcal{E}_0 > 0$



CASO $\mathcal{E}_0 = 0$



CASO $\mathcal{E}_0 < 0$

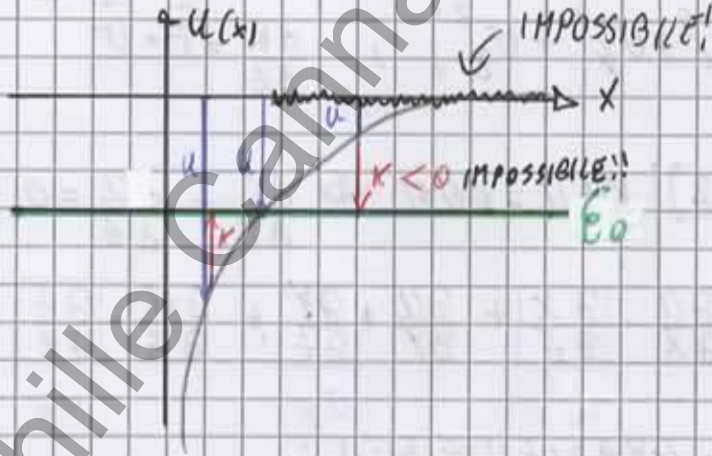


GRAFICO: COULOMB

$$U(x) = K_e\frac{Qq}{x} + C$$

RICORDIAMO...

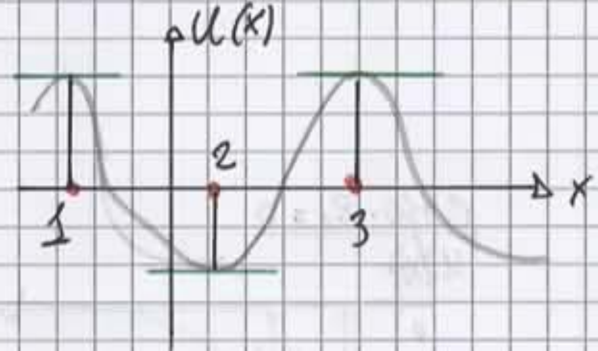
$U \mid K + U = COST$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt}$$

$$F \cdot v = -\frac{dU}{dx} \cdot \boxed{\frac{dx}{dt}}$$

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

ORA·PRENDIAMO·AD·ESEMPIO·QUESTO·GRAFICO:



I·PUNTI·SEGNATI·VENGONO·CHIAMATI <u>PUNTI·DI·EQUILIBRIO</u>.

I·PUNTI·DI·EQUILIBRIO·SI·DIVIDONO·IN:

- EQUILIBRIO·STABILI;
- EQUILIBRIO·INSTABILI.

SI·DIFFERENZIANO·DAL·FATTO·CHE QUELLI·STABILI·RAPPRESENTANO·I <u>MINIMI</u>·DELLA·FZ. (IN·QUESTO·CASO·2).

<u>CASO·2D/3D</u>

$$K=\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\quad,\quad \frac{dK}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$U(x,y,z)\,\Big|\,K+U=COST\Rightarrow\frac{dK}{dt}+\frac{dU}{dt}=0\rightarrow\vec{F}\cdot\vec{v}=-\frac{dU}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\partial x}{\partial t}}}_{v_x}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\partial y}{\partial t}}}_{v_y}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\partial z}{\partial t}}}_{v_z}$$

DEFINIAMO· <u>GRADIENTE·DI·U</u>:

$$\vec{\nabla}U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow\vec{F}\cdot\vec{v}=-\vec{\nabla}U\cdot\vec{v}\Rightarrow\boxed{\vec{F}=-\vec{\nabla}U}$$

ROTORE

SIA $\vec{w}$ UN CAMPO VETTORIALE.

SI DEFINISCE ROTORE DEL CAMPO $\vec{w}$:

$$ROT(\vec{w}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\partial_y w_z - \partial_z w_y) - (\partial_x w_z - \partial_z w_x)\vec{u}_y + (\partial_x w_y - \partial_y w_x)\vec{u}_z$$

VEDIAMO ALCUNI ESEMPI:

① $$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} h) = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ \partial h_x & \partial h_y & \partial h_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y, \partial z} - \frac{\partial^2 h}{\partial z, \partial y}\right)\vec{u}_x - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x, \partial z} - \frac{\partial^2 h}{\partial z, \partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x, \partial y} - \frac{\partial^2 h}{\partial y, \partial x}\right)\vec{u}_z$$

MA PER SCHWARTZ SAPPIAMO:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial_i, \partial_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial_j, \partial_i}$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} h) = \vec{0}$$

SI DICE CHE, SE $\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w}$ È UN CAMPO IRROTAZIONALE

E INOLTRE QUESTO TIPO DI CAMPO:

$$\exists\, h \text{ SCALARE} \mid \vec{w} = \vec{\nabla} h$$

OSSERVAZIONE

LE FORZE CONSERVATIVE SI DICONO IRROTAZIONALI:

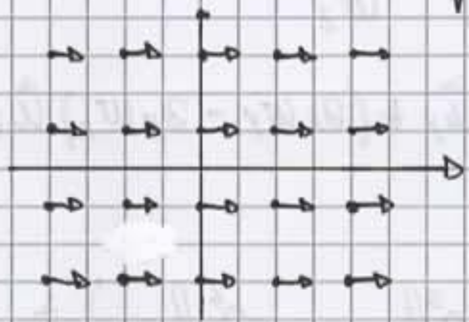
$$\vec{F} = -\frac{d\vec{U}}{dt} \quad , \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} u$$

② $\vec{w} = x^2 y^3 z^2 \vec{u}_x + x y^2 \vec{u}_y + z^3 \vec{u}_z$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ x^2 y^3 z^2 & x y^2 & z^3 \end{vmatrix} = 0 \vec{u}_x - \left(-2 x^2 y^3 z\right) \vec{u}_y + \left(y^2 - 3 x^2 y^2 z^2\right) \vec{u}_z \neq \vec{0}$$

QUINDI · QUESTO · CAMPO · <u>NON</u> · È · IRROTAZIONALE!!

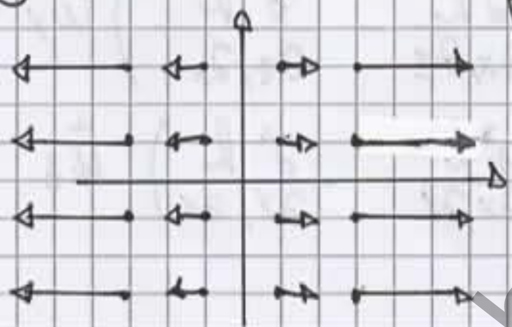
③ $\vec{w} = w_0 \vec{u}_x$



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ w_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \vec{u}_x + 0 \vec{u}_y + 0 \vec{u}_z = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ <u>UN · CAMPO · UNIFORME · È IRROTAZIONALE!!!</u>

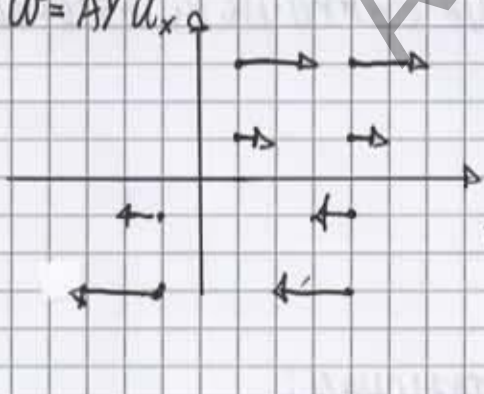
④ $\vec{w} = A x \vec{u}_x$



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ A x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \vec{u}_x + 0 \vec{u}_y + 0 \vec{u}_z = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ È · <u>IRROTAZIONALE</u>

⑤ $\vec{w} = A y \vec{u}_x$



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & A y & 0 \end{vmatrix} = 0 \vec{u}_x + 0 \vec{u}_y + 0 \vec{u}_z = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ È · <u>IRROTAZIONALE</u>

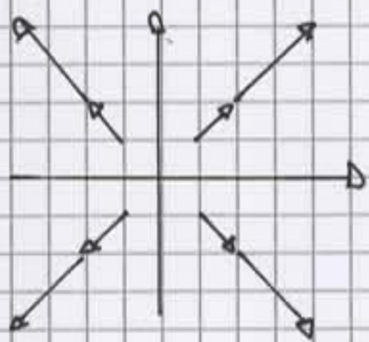
⑥ $\vec{w} = Bx\,\vec{u}_y$

N.B. DA NOTARE COME POTREMMO IMMAGINARE QUESTE FRECCE COME FORZE E DI CONSEGUENZA ACCOPPIARLE PER CAPIRE IN CHE VERSO SARÀ IL MOVIMENTO ROTAZIONALE.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & By & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{u}_x + 0\vec{u}_y + B\vec{u}_z \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow$ <u>NON</u> È IRROTAZIONALE.

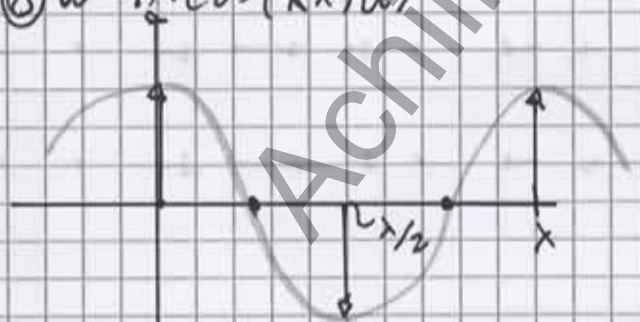
⑦ $\vec{w} = Ay\,\vec{u}_x + Bx\,\vec{u}_y$

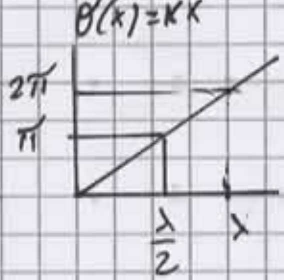


$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ Ay & Bx & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{u}_x + 0\vec{u}_y + (B-A)\vec{u}_z$$

$\Rightarrow$ <u>NON</u> È IRROTAZIONALE.

⑧ $\vec{w} = A \cdot \cos(Kx)\,\vec{u}_y$





$2\pi = K\lambda$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{K}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & A\cos(Kx) & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{u}_x + 0\vec{u}_y - AK\sin(Kx)\,\vec{u}_z$$

DIVERGENZA

DEFINIAMO DIVERGENZA DEL CAMPO VETTORIALE $\vec{w}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{w} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right)\cdot\left(w_x\vec{u}_x + w_y\vec{u}_y + w_z\vec{u}_z\right) =$$

$$= \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

ESEMPIO 1

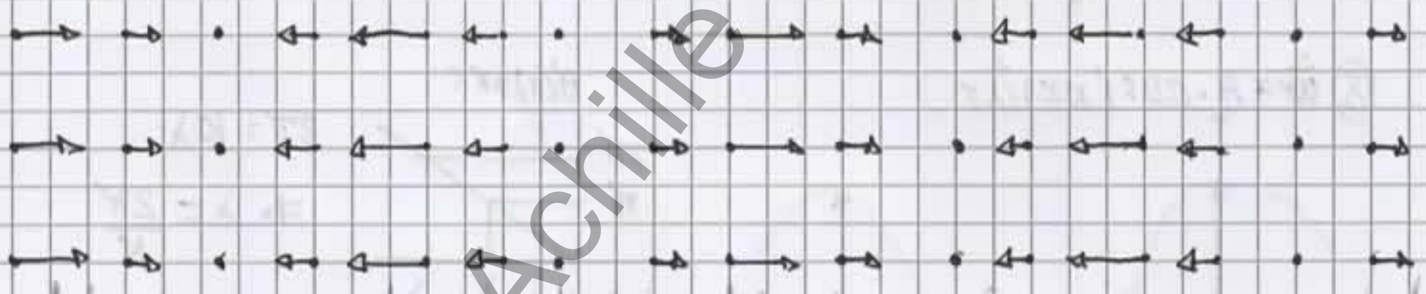
$\vec{w} = w_0\vec{u}_x$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{w} = 0$

ESEMPIO 2

$\vec{w} = A\cos(kx)\,\vec{u}_y$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{w} = 0$

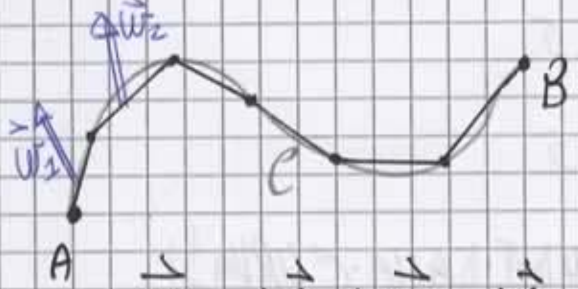
ESEMPIO 3

$\vec{w} = A\cos(kx)\,\vec{u}_x$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{w} = -Ak\sin(kx)$



INTEGRALE CURVILINEO

SIA $\vec{w}$ UN CAMPO VETTORIALE.



APPROSSIMIAMO LA CURVA CON UNA SPEZZATA.

$$\vec{w}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{w}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \dots + \vec{w}_i \cdot \Delta\vec{r}_i + \dots =$$

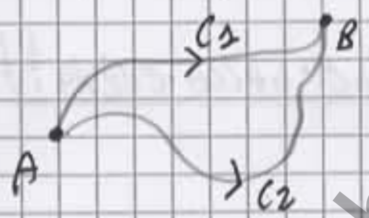
$$= \sum_i^N \vec{w}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \xrightarrow[|\Delta\vec{r}_i| \to 0]{N \to \infty} \int_A^B \vec{w} \cdot d\vec{r}$$ INTEGRALE CURVILINEO

OSSERVAZIONE

IN GENERALE: $\displaystyle\int_{A\,(C_1)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} \neq \int_{A\,(C_2)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r}$

TUTTAVIA ESISTONO CAMPI VETTORIALI MOLTO SPECIALI:

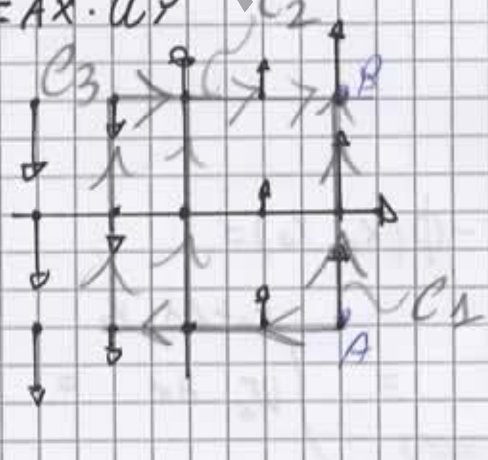
$\forall$ COPPIA DI PUNTI A E B



$\displaystyle\int_{A\,(C_1)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} = \int_{A\,(C_2)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r}$ NON DIPENDE DALLA CURVA SCELTA!!!

ESEMPIO 1

$\vec{w} = Ax \cdot \vec{u}_y$

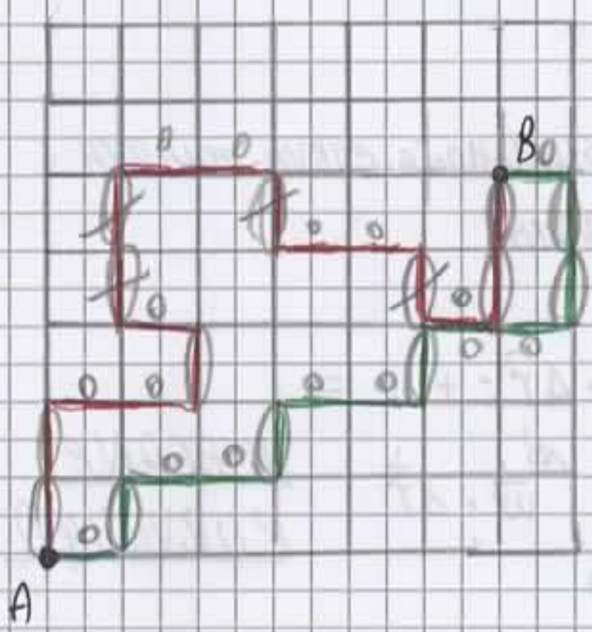


$\displaystyle\int_{A\,(C_1)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} > 0$, $\displaystyle\int_{A\,(C_2)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} = 0$

$\displaystyle\int_{A\,(C_3)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} < 0$

ESEMPIO ②

$\vec{w} = w_0 \vec{u}_y$



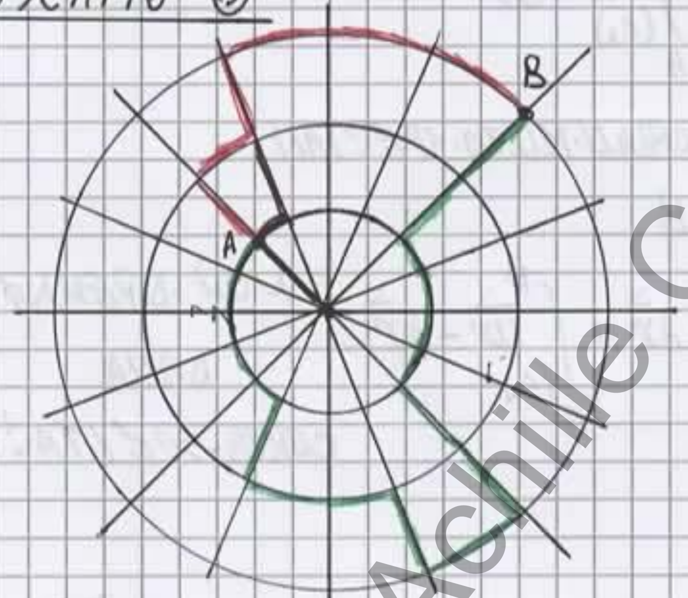
C_1 5

C_2 5

NON DIPENDE DALLA CURVA!!

ESEMPIO ③

$\vec{w} = w_0 \vec{u}_r$



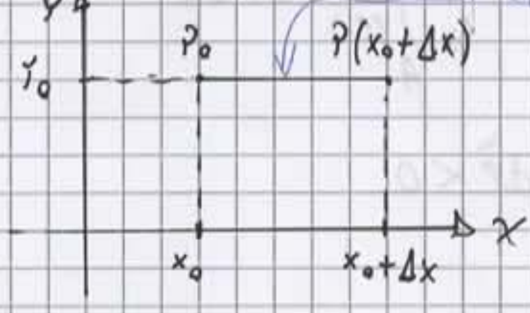
C_1 2

C_2 2

NON DIPENDE DALLA CURVA!!

OSSERVAZIONE (1 → 3)

CURVA SPECIALE



$$\phi(x_0+\Delta x, y_0) - \phi(x_0, y_0) =$$

$$= \int_{P_0\ (\text{CURVA SPECIALE})}^{P} \vec{w}\cdot d\vec{r} = \int_{x_0, y_0}^{x_0+\Delta x,\, y_0} w_x \, dx =$$

MEDIA INTEGRALE

$$= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} w_x(x, y_0)\, dx = w_x(\xi, y_0)\cdot\Delta x$$

QUINDI, DATO CHE: $\Delta \phi = w_x(\xi, y_0)\Delta x$ ALLORA:

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta x} = w_x(\xi, y_0),$$

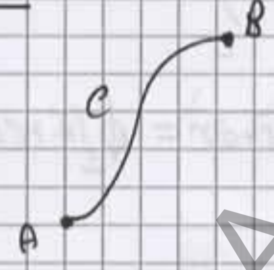
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x_0+\Delta x, y_0) - \phi(x_0, y_0)}{\Delta x} = w_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

$$\boxed{\vec{w} = \vec{\nabla} \phi}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x}}_{w_x} \vec{u}_x + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y}}_{w_y} \vec{u}_y + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial z}}_{w_z} \vec{u}_z$$

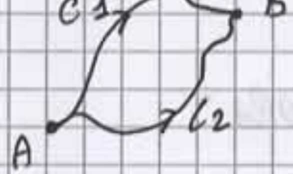
QUINDI UN CAMPO CHE HA UN INTEGRALE CURVILINEO CHE NON DIPENDE DALLA CURVA, PUO' ESSERE RISCRITTO COME GRADIENTE DI UNA FUNZIONE SCALARE.

LEMMA



$$\int_{A,\,C}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} = -\int_{B,\,C}^{A} \vec{w} \cdot d\vec{r}$$

APPLICAZIONE (1 → 2)



$$\int_{A,\,C_1}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} = \int_{A,\,C_2}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{A,\,C_1}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} = -\int_{A,\,C_2}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{A,\,C_1}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} - \int_{A,\,C_2}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{A,\,C_1}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} + \int_{B,\,C_2}^{A} \vec{w} \cdot d\vec{r} = 0$$

QUESTO VUOL DIRE CHE PRESI DUE PUNTI QUALSIASI A E B, ABBIAMO:

$\int_A^B \vec{w} \cdot d\vec{r}$ NON DIPENDE DALLA CURVA $\Rightarrow$ PER OGNI CURVA C CHIUSA DEFINIAMO:

$$\boxed{\oint \vec{w} \cdot d\vec{r} = 0}$$ CIRCUITAZIONE DI $\vec{w}$

PROPOSIZIONI

1) $\forall A, B \quad \int_A^B \vec{w} \cdot d\vec{r}$ NON DIPENDE DALLA CURVA.

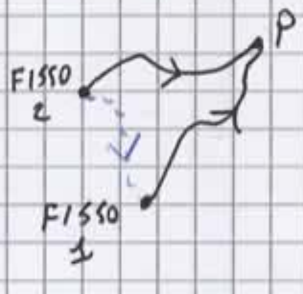
2) $\oint \vec{w} \cdot d\vec{r} \equiv 0$

3) $\exists$ UN CAMPO SCALARE $\phi : \vec{\nabla}\phi = \vec{w}$

4) $\vec{\nabla} \wedge \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow$ IRROTAZIONALE

TEOREMA DI STOKES

OSSERVAZIONE



$$\phi_1(P) = \int_1^P \vec{w} \cdot d\vec{r} \quad , \quad \phi_2(P) = \int_2^P \vec{w} \cdot d\vec{r}$$

MA ANCHE: $\phi_2(P) = \underbrace{\int_2^1 \vec{w} \cdot d\vec{r}}_{COST} + \underbrace{\int_1^P \vec{w} \cdot d\vec{r}}_{\phi_1(P)} = \phi_1(P) + COST$

QUINDI CAMBIANDO IL PUNTO FISSO, IL RISULTATO DIFFERISCE DI UNA COSTANTE.

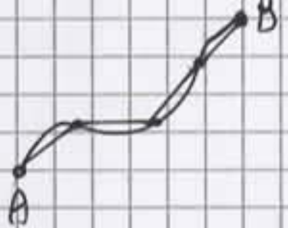
$$\Rightarrow \phi(A) = \int_1^A \vec{w} \cdot d\vec{r} \quad , \quad \phi(B) = \int_1^B \vec{w} \cdot d\vec{r} \quad , \text{ ALLORA:}$$

$$\int_A^B \vec{w} \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

INDIPENDENTE DAL PUNTO 1 SCELTO

APPLICAZIONE INTEGRALI CURVILINEI

DATO CHE: $\dfrac{dK}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \Rightarrow K_2 - K_1 = \displaystyle\int_1^2 \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$



$$\downarrow$$

$$\xrightarrow{\text{PER } \Delta t \to 0} \sum_i^N \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{v}_i \cdot \Delta t_i$$

$$\sum_i^N \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

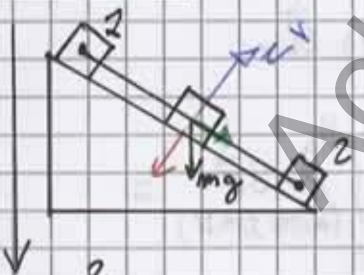
DA CIÒ CAPIAMO CHE:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_{1\,(\text{TRAIETTORIA})}^{2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

SUPPONIAMO ORA CHE LA FORZA SIA IRROTAZIONALE

$$\Rightarrow \int_{1\,(\text{TRAIETTORIA})}^{2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{1\,(\text{QUALSIASI TRAIETTORIA})}^{2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ESEMPIO ①

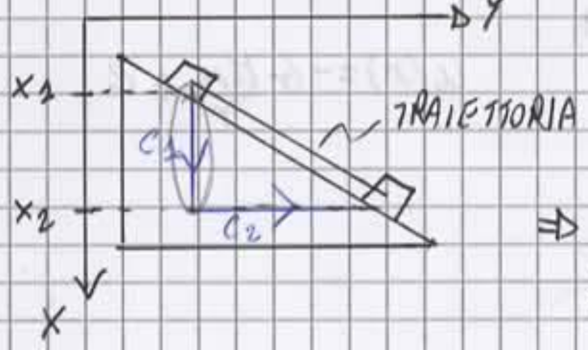


$$K_2 - K_1 = \int_{1\,(\text{TRAIETT.})}^{2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{1\,(\text{TRAIETT.})}^{2} m\vec{g}\cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{1\,(\text{TRAIETT.})}^{2} \vec{N}\cdot d\vec{r}}_{0} =$$

NON FA LAVORO

$$= \int_{1\,(\text{QUALSIASI})}^{2} m\vec{g}\cdot d\vec{r}$$

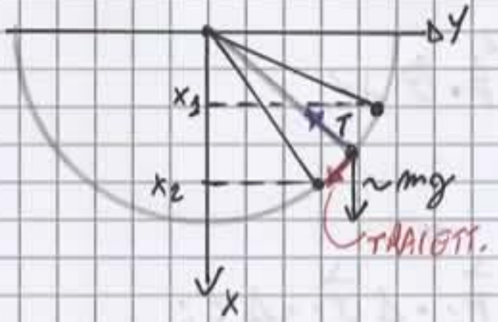
ALLORA SCEGLIAMO UNA CURVA SEMPLICE!!!



MA SAPPIAMO CHE mg VA SOLO NELLA DIREZIONE Y, QUINDI C_2 NON CONTRIB.

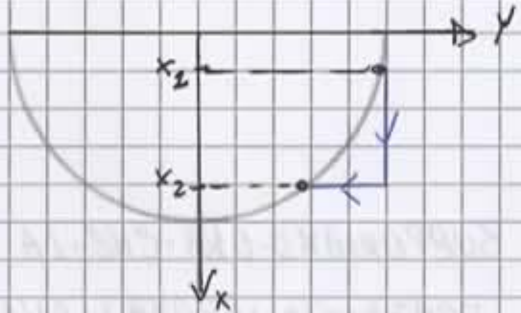
$$\Rightarrow \int_{1\,C_1}^{2} m\vec{g}\cdot d\vec{r} = \int_{1\,C_1}^{2} m g \cdot dx =$$

ESEMPIO 2



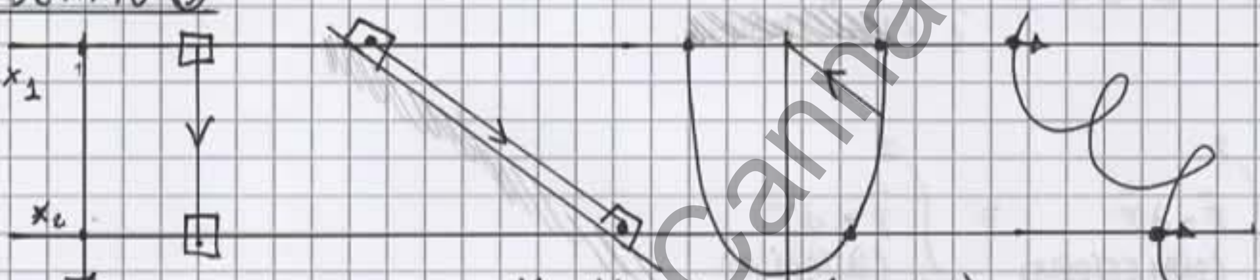
$$K_2 - K_1 = \int_{1\,(TRAIETT.)}^{2} m\vec{g}\cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{1\,(TRAIETT.)}^{2} \vec{T}\cdot d\vec{r}}_{0} =$$

$$= \int_{1\,(QUALSIASI)}^{2} m\vec{g}\cdot d\vec{r}$$



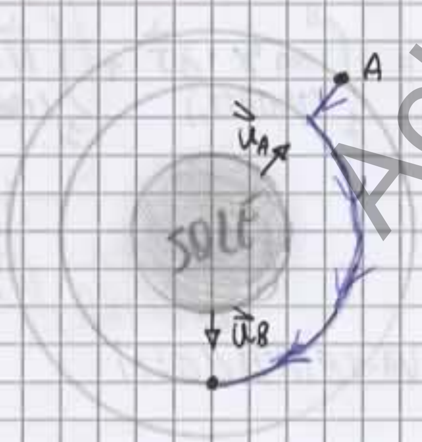
$$K_2 - K_1 = mg(x_2 - x_1)$$

ESEMPIO 3



$$K_2 - K_1 = mg\ (x_2 - x_1)$$

ESEMPIO 4



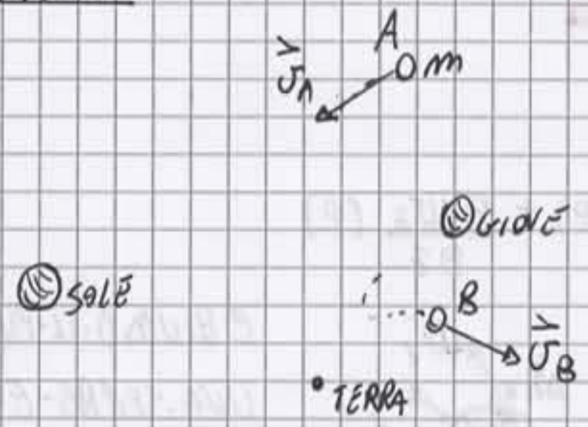
$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r = F(r)\,\vec{u}_r$$

$$K_B - K_A = \int_{A\,(TRAIETT.)}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\,(QUALSIASI)}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{Mm}{r^2}\,d\vec{r} = U_A - U_B\text{, DOVE:}$$

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} + C$$

ESEMPIO ⑤



$$K_B - K_A = U_A - U_B$$

$$U(P) = U_{SOLE}(P) + U_{GIOVE}(P) + U_{TERRA}(P)$$

$$U_{SOLE} = -G\frac{M_S m}{r_{SOLE}}$$

$$U_{GIOVE} = -G\frac{M m}{r_{GIOVE}}$$

$$U_{TERRA} = -G\frac{M m}{r_{TERRA}}$$

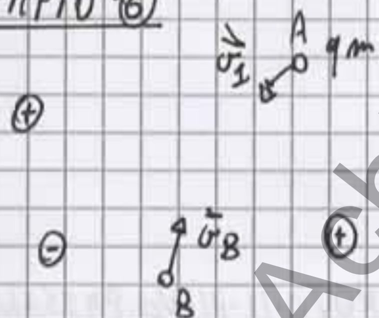
$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_S + \vec{F}_G + \vec{F}_T$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U_S - \vec{\nabla} U_G - \vec{\nabla} U_T$$

$$\vec{F} = -\nabla(U_S + U_G + U_T)$$

$$\Rightarrow U_{TOT} = m\left[-G\frac{M_S}{r_S} - G\frac{M_G}{r_G} - \frac{GM_T}{r_T}\right] = m \cdot \phi(P)$$

ESEMPIO ⑥



$$K_B - K_A$$

$$\vec{F}_{SONDA}(A) = q\,\vec{E}(A)$$

$$\vec{F}_{SONDA}(P) = q\,\vec{E}(P)$$

DOVE $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, QUINDI: $\vec{F}_{SONDA}(P) = q(-\vec{\nabla} V) = -\vec{\nabla} U$, DOVE:

$$U = q \cdot V(P)$$

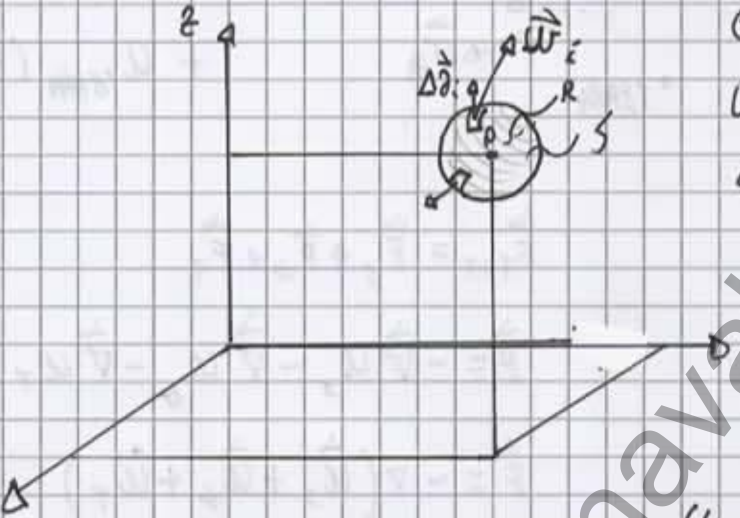
$$U_{TOT} = q \cdot V(P)$$

$$\Rightarrow K_B - K_A = U_A - U_B = q(V_A - V_B)$$

DIVERGENZA IN UN PUNTO

$$\vec{w}(P) = w_x \vec{u}_x + w_y \vec{u}_y + w_z \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w}(P) = \frac{\partial w_x}{\partial x}(P) + \frac{\partial w_y}{\partial y}(P) + \frac{\partial w_z}{\partial z}(P)$$



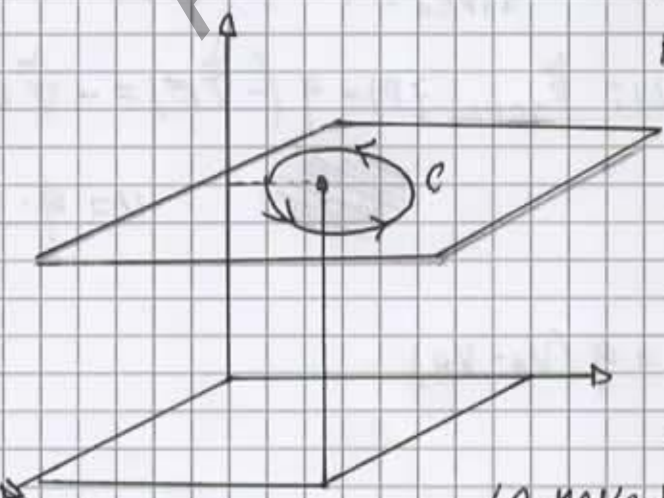
CHIUDO IL PUNTO IN UNA SFERA E SFRUTTO LA CONVENZIONE DI PORRE I VETTORI D'AREA ALL'ESTERNO.

$$\sum_i^N \vec{w}_i \cdot \Delta \vec{a}_i \xrightarrow[\Delta \vec{a}_i \to 0]{N \to \infty} \oint_S \vec{w} \cdot d\vec{a} \xrightarrow[\text{VOL}(S)]{\text{FRATTO}} \frac{\oint_S \vec{w} \cdot d\vec{a}}{\text{Vol}(S)} \to$$

$\to$ FACCIO COLLASSARE LA SFERA SUL PUNTO P $(R \to 0)$ $\longrightarrow$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{w}(P)$

ROTORE IN UN PUNTO

ESEMPIO IN Z



TROVO IL PIANO PASSANTE PER QUEL PUNTO E ORTOG. ALLA DIREZIONE IN CUI VOGLIAMO LA COMPONENTE DEL ROTORE.

POI RACCIUDO IL PUNTO CON UN CERCHIO E CON LA MANO DESTRA TROVO IL VERSO DI PERCORRENZA.

$$\oint_C \vec{w} \cdot d\vec{r} \xrightarrow{\text{FACCIO COLLASS.}} \vec{\nabla} \wedge \vec{w}(P)$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

PER QUALSIASI SUPERFICIE CHIUSA, IL FLUSSO DEL CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO LA SUPERFICIE È:

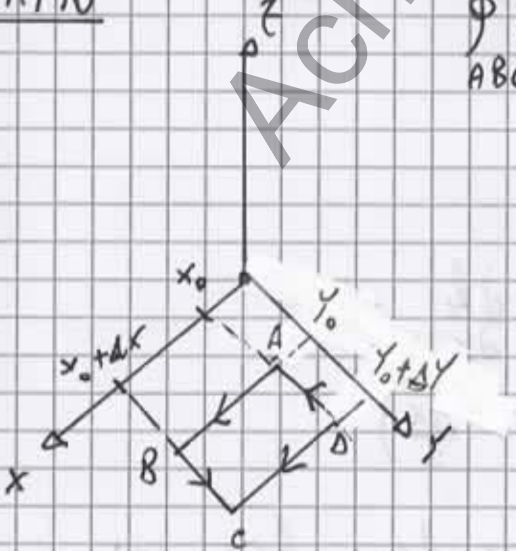
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{w}\cdot d\vec{a} = \iiint_{VOL(S)} (\vec{\nabla}\cdot\vec{w})\cdot dVOL(S)$$

TEOREMA DEL ROTORE (4→2)

PER QUALSIASI CURVA CHIUSA C E QUALSIASI SUPERFICIE S CHE ABBIA C COME ORLO, LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO VETTORIALE LUNGO LA CURVA C È:

$$\oint_C \vec{w}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{w})\cdot d\vec{a}$$

ESEMPIO



$$\oint_{ABCD} \vec{w}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{w}\cdot d\vec{r} + \int_B^C \vec{w}\cdot d\vec{r} +$$

$$+ \int_C^D \vec{w}\cdot d\vec{r} + \int_D^A \vec{w}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} w_x(x', Y_0)\,dx' + \int_{Y_0}^{Y_0+\Delta Y} w_Y(x_0+\Delta x, Y')\,dY'$$

$$- \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} w_x(x', Y_0+\Delta Y)\,dx' - \int_{Y_0}^{Y_0+\Delta Y} w_Y(x_0, Y')\,dY' =$$

SCHEDA MATEMATICA

TEOREMA MEDIA $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$

TEOREMA DI TAYLOR $f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}\cdot\Delta x \dots$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) \cong \frac{df}{dx}\cdot\Delta x$$

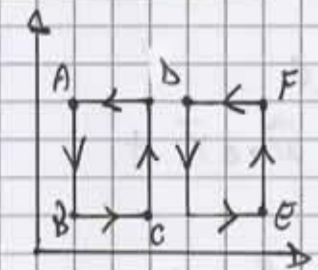
$$\overset{*}{=} \boxed{w_x(x^*, y_0)\cdot\Delta x - w_x(\bar{x}, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x} +$$

$$+ \boxed{w_y(x_0+\Delta x, y^*)\cdot\Delta y - w_y(x_0, \bar{y})\cdot\Delta y} =$$

$$\overset{*}{=} -\frac{\partial w_x}{\partial y}\cdot\Delta y\cdot\Delta x + \frac{\partial w_y}{\partial x}\cdot\Delta x\cdot\Delta y = \underbrace{\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)}_{\text{COMPONENTE Z DEL ROTORE}}\cdot\underbrace{\Delta x\cdot\Delta y}_{\text{AREA}} =$$

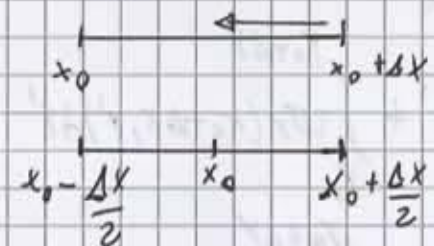
$$= (\vec{\nabla}\wedge\vec{w})\cdot\Delta\vec{a}$$

OSSERVAZIONE



$$\oint_{ABFE}\vec{w}\cdot d\vec{s} = \oint_{AB\,CD}\vec{w}\cdot d\vec{s} + \oint_{DCEF}\vec{w}\cdot d\vec{s}$$

LEMMA



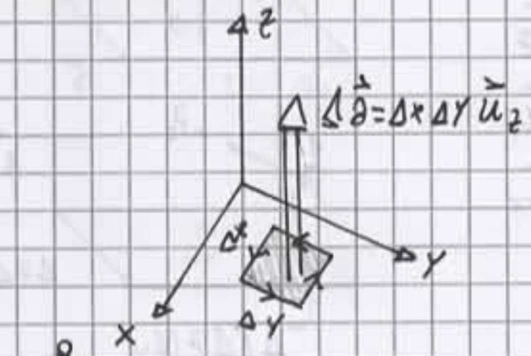
$$f(x_0+\Delta x) - f(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\cdot\Delta x$$

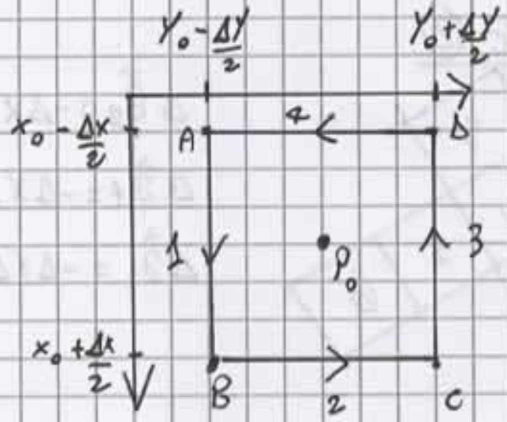
$$f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= f\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) - f(x_0) + f(x_0) - f\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\cdot\frac{\Delta x}{2} - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\frac{(-\Delta x)}{2} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}\cdot\Delta x$$

APPLICAZIONE ①





$$\int_{A\,(1)}^{B} \vec{w} \cdot d\vec{r} = w_x\left(x', y_0 - \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot \Delta x$$

$$\int_{B\,(2)}^{C} \vec{w} \cdot d\vec{r} = w_y\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y'\right) \cdot \Delta y$$

$$\int_{C\,(3)}^{D} \vec{w} \cdot d\vec{r} = - w_x\left(x'', y_0 + \frac{\Delta y}{2}\right) \cdot \Delta x$$

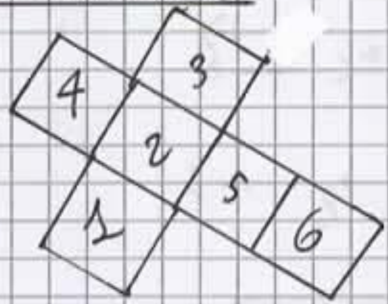
$$\int_{D\,(4)}^{A} \vec{w} \cdot d\vec{r} = - w_y\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y''\right) \cdot \Delta y$$

USANDO IL LEMMA...

$$\begin{cases} \Delta x \to 0 & \int_2 \vec{w} \cdot d\vec{r} + \int_4 \vec{w} \cdot d\vec{r} \sim \left[\left.\frac{\partial w_y}{\partial x}\right|_{P_0} \cdot \Delta x \right] \cdot \Delta y \\ \Delta y \to 0 & \int_1 \vec{w} \cdot d\vec{r} + \int_3 \vec{w} \cdot d\vec{r} \sim \left[\left.\frac{\partial w_x}{\partial y}\right|_{P_0} \cdot \Delta y \right] \cdot \Delta x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{w} \cdot d\vec{r} \sim (\vec{\nabla} \wedge \vec{w})_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \equiv (\vec{\nabla} \wedge \vec{w})_{P_0} \cdot \Delta \vec{a}$$

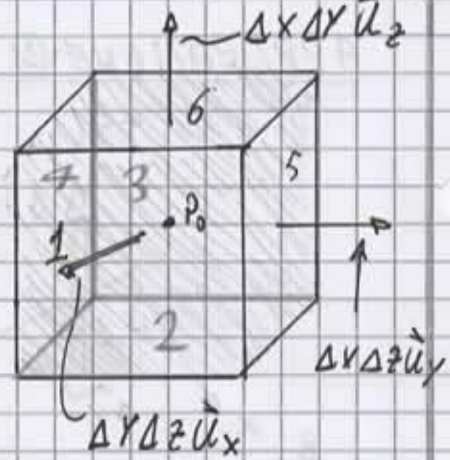
APPLICAZIONE ②



$\Delta\vec{\partial}_2 = -\Delta x \Delta y \vec{u}_z$

$\Delta\vec{\partial}_4 = -\Delta x \Delta z \vec{u}_y$

$\Delta\vec{\partial}_1 = -\Delta y \Delta z \vec{u}_x$

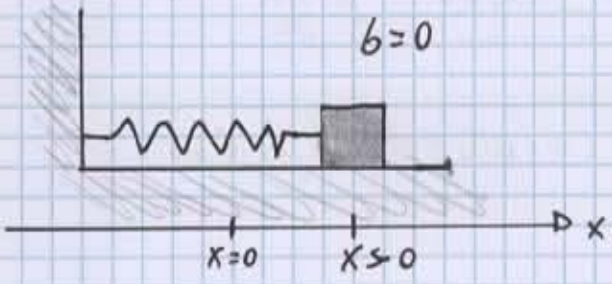


$$\iint_1 \vec{w}\cdot\partial\vec{\partial} + \iint_3 \vec{w}\cdot\partial\vec{\partial} = w_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta y\cdot\Delta z - w_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta y\cdot\Delta z =$$

$$= \Delta y \Delta z\left(w_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) - w_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}\right)\right) \underset{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y \to 0}}{\sim} \left[\left.\frac{\partial w_x}{\partial x}\right|_{P_0}\cdot \underbrace{\Delta x\right] \Delta y \Delta z}_{VOL}$$

$$\Rightarrow \oiint_{BOX} \vec{w}\cdot\partial\vec{\partial} \sim (\vec{\nabla}\cdot\vec{w})_{P_0}\cdot \Delta VOL$$

MOLLA



$\vec{F} = m \cdot a = \cancel{F_{TAVOLO}} + \cancel{F_{FLUIDO}} + \cancel{F_{PESO}} + F_{MOLLA}$

$\Rightarrow F_{MOLLA} = -K \cdot X$ HOOKE

DEFORMAZIONE

QUINDI: $m \cdot a = -KX \to m\ddot{X} = -KX$ STIAMO CERCANDO UNA $X(t)$ SOLUZIONE.

$\ddot{X} = -\frac{K}{m} X \to \boxed{\ddot{X} + \frac{K}{m} X = 0 \Rightarrow \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0, \text{ DOVE } \omega_0^2 = \frac{K}{m}}$

PROVIAMO $x(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0$

$\dot{x}(t) = 3At^2 + 2Bt + C = 0$ NO!!

$\ddot{x}(t) = 6At + 2B = 0$

PROVIAMO $x(t) = e^{\alpha t}$ OK!!!

$\dot{x}(t) = \alpha e^{\alpha t}$

$\ddot{x}(t) = \alpha^2 e^{\alpha t} \dots \overset{N}{x}(t) = N\alpha e^{\alpha t}$

PIU' PRECISAMENTE: $\left.\begin{array}{l} x(t) = Ae^{\alpha t} \\ \dot{x}(t) = A\alpha e^{\alpha t} \\ \ddot{x}(t) = A\alpha^2 e^{\alpha t} \end{array}\right\} \Rightarrow$ METTIAMO NELL'EQUAZIONE.

$\Rightarrow \alpha^2 A e^{\alpha t} + \frac{K}{m} A e^{\alpha t} = 0 \to \alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{K}{m} e^{\alpha t} \to \boxed{\alpha^2 + \frac{K}{m} = 0}$

$\alpha_\pm = \pm\sqrt{-\frac{K}{m}} = \pm\sqrt{(-1)\frac{K}{m}} = \pm\sqrt{\frac{K}{m}}\, i$, RISCRIVO:

$\alpha_\pm = \pm W_0 \cdot i$, DOVE $W_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE $= A \cdot e^{\pm i w_0 t}$, CHE IN GENERALE SARÀ:

$X(t) = C_+ e^{+i w_0 t} + C_- e^{-i w_0 t}$

NUMERI
COMPLESSI

SE VOGLIAMO UNA $X(t)$ APPARTENENTE AI REALI, DOBBIAMO IMPORRE:

$$x(t) = C\, e^{i\omega_0 t} + \bar{C}\, e^{-i\omega_0 t} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\,,\ A, B \in \mathbb{R}}$$

NOTIAMO CHE:

$$x(t=0) = A = x_0$$

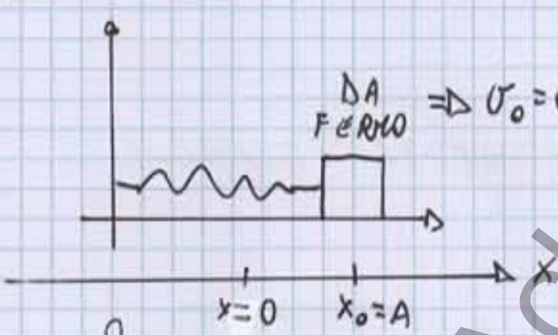
$$\dot{x}(t) = A\,\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\,\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t=0) = B\omega_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

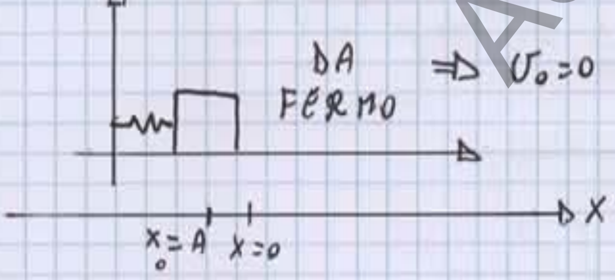
QUINDI PUO' ESSERE RISCRITTA:

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

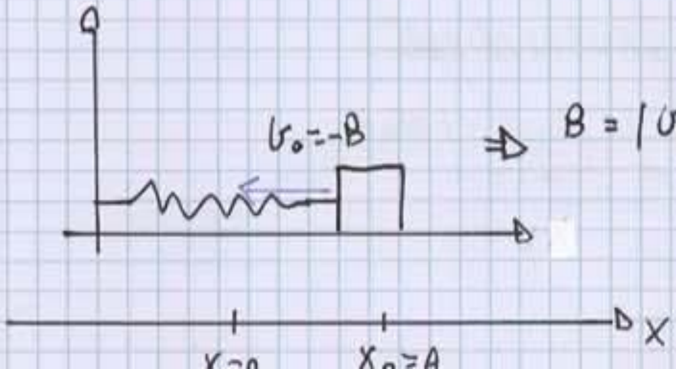
CASI PARTICOLARI



$\Rightarrow v_0 = 0 \Longrightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t)$

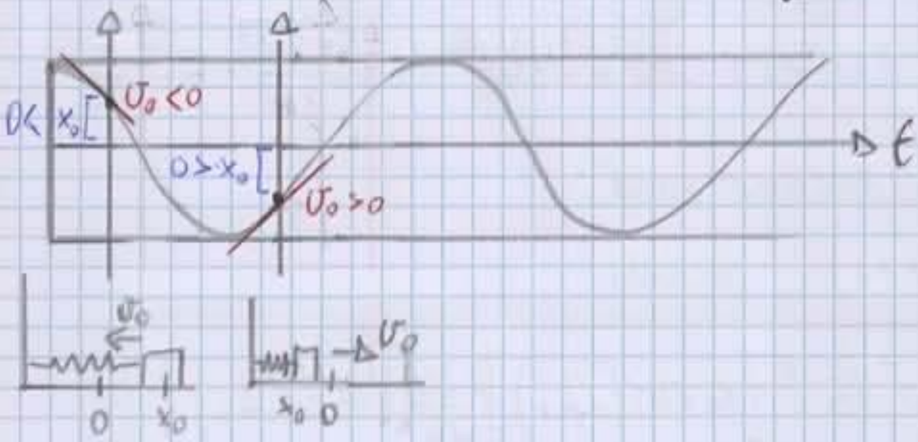


$\Rightarrow v_0 = 0 \Rightarrow X(t) = -A\cos(\omega_0 t)$

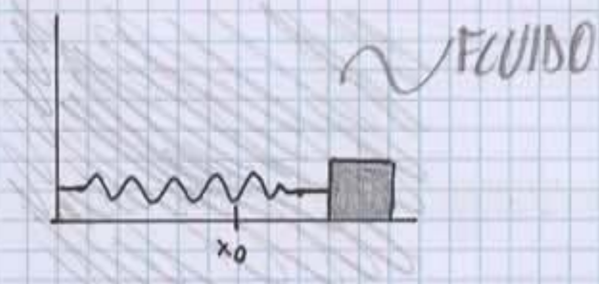


$\Rightarrow B = |v_0| \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t) - \frac{B}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

GRAFICAMENTE: $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$



MOLLA·CON·FLUIDO



$$m \cdot a = F_{FLUIDO} + F_{MOLLA}$$

$$m a = -bv - Kx$$

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - Kx$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0$$

CERCHIAMO $x(t)$ SOLUZIONE!!!

$$x_{PROVA} = Ae^{\alpha t}$$

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{K}{m}Ae^{\alpha t} + \frac{b}{m}A\alpha e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{K}{m}e^{\alpha t} + \frac{b}{m}\alpha e^{\alpha t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \frac{K}{m} = 0$$ RISOLVIAMO!! $$\Rightarrow \alpha_\pm = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{K}{m}\right)}}{2}$$

PORTIAMO IL 2 NELLA RADICE

$$\Rightarrow \alpha_\pm = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{b}{m}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot 4\left(\frac{K}{m}\right)}$$

$$= -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{K}{m}}$$

NOTIAMO·ORA·CHE:

- $\frac{b^2}{4m^2} > \frac{K}{m}$ 2·SOLUZIONI·REALI
- $\frac{b^2}{4m^2} = \frac{K}{m}$ 1·SOLUZIONE·REALE
- $\frac{b^2}{4m^2} < \frac{K}{m}$ SOLUZIONI·COMPLESSE

$$-1\left(\frac{K}{m}-\frac{b^2}{4m^2}\right) \Rightarrow \alpha_{\pm} = -\frac{b}{2m} \pm i\,\Omega\text{, DOVE } \Omega=\sqrt{\frac{K}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}$$

>0 (N.B. IN ASSENZA DI FLUIDO $\alpha_{\pm} = i\sqrt{\frac{K}{m}} = \pm i\omega_0$)

QUINDI LA SOLUZIONE GENERALE SARÀ:

$e^{\left(-\frac{b}{2m}t \pm i\Omega_t\right)}$, QUINDI:

$$\boxed{X(t)=e^{-\frac{b}{2m}t}\left[X_0\cos(\Omega_t)+\frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega_t)\right]}$$