Asset Management

Brach Loic

- Définition
- Limites, extensions et alternatives

4 Utilisations pratiques
- Cas de portefeuille Multi-Asset
- Cas de portefeuille Passif

Objectif du cours

- Base de la théorie économique
- MEDAF / CAPM
- Markowitz et frontière efficiente
- Optimisation de portefeuille d'actifs
- Construction de portefeuille d'instruments

Notations

- $\omega_P = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ vecteur des poids d'un panier d'actifs / portefeuille P.
- $r = (r_1, \cdots, r_n)$ vecteur des rendements d'un panier d'actifs.
- $\mathbb{E}(\cdot)$ et $\mathbb{V}(\cdot)$ l'espérance et la variance.
- $\sigma(\cdot)$ la volatilité et $\rho(\cdot, \cdot)$ et la corrélation.

Efficience des marchés

Un marché est dit efficient si le prix de chacun de ses actifs reflète l'ensemble de l'information disponible sur le marché.
On suppose ainsi qu'aucun acteur n'a d'informations privilégiés sur un actif et que le marché valorise à chaque moment, l'ensemble des actifs à leur value "juste" : ils ne sont ni sous-évalués ni surévalués
Note: sous cette hypothèse (forte), il n'est pas possible pour un gestionnaire de portefeuille de gagner plus d'argent en cherchant à identifier des titres sur / sous évalués.

Hypothèses de base

Rendement et Espérance

Calcul du rendement d'un portefeuille d'actif et de son espérance

$$r_P = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \times r_i$$

$$\mathbb{E}(r_P) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \times r_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \times \mathbb{E}(r_i) = \omega_P \mu$$

Dans la suite, on notera μ_i le rendement attendu de l'actif i et $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ le vecteur de rendement des n actifs

Hypothèses de base

Variance et volatilité

Calcul de la variance et de volatilité d'un portefeuille d'actif

$$\mathbb{V}(r_P) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \mathbb{V}(r_i) + 2\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \times \rho_{ij} \times \sqrt{\mathbb{V}(r_i)}\sqrt{\mathbb{V}(r_j)}$$

$$\sigma(r_P) = \sqrt{\mathbb{V}(r_P)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma^2(r_i) + 2\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \times \rho_{ij} \times \sigma(r_i)\sigma(r_j)}$$

Dans la suite, on notera Σ la matrice de variance covariance des n actifs et on obtient l'écriture matriciel de la variance comme :

$$\mathbb{V}(r_P) = \omega_P^t \Sigma \omega_P$$

Hypothèses de base

Note sur l'annualisation

Annualisation du rendement : exemple avec la conversion de rendement mensuel en annuel:

$$r_A = (1 + r_M)^{12} - 1$$

Souvent l'approximation suivante peut être faite, mais attention il s'agit d'un développement de Taylor d'ordre 1 valable uniquement quand le rendement est proche de 0:

$$r_A = r_M \times 12$$

Plus particulièrement cette formule ne tient pas compte des intérêts composés. Par exemple, un produit qui verse 1% par mois sur un an aura un rendement annualisé de $1.01^{12} - 1 = 12.68\%$ et non 12%

Hypothèses de base

Note sur l'annualisation

Annualisation de la volatilité : standard de marché = utilisation de la formule de scaling:

$$\sigma_A = \sigma_M \times \sqrt{12}$$

Cette formule tend à corriger l'erreur de sous-estimation du risque commise lors de son estimation sur un pas de temps trop court (mensuel, hebdomadaire, journalière, etc..). Il y a un compromis à faire entre avoir assez de données pour avoir une estimation robuste du risque et avoir une donnée comparable sur une période donnée (souvent annuel)

Hypothèses de base

Note sur les moments d'ordres supérieurs

Si la théorie "classique" de gestion de portefeuille se concentre sur le couple rendement / risque, il existe également d'autres faits stylisés que vous venez plus loin et pour cela nous introduisons les moments d'ordres 3 et 4 :

- Skewness: coefficient permettant de contrôler l'asymétrie de la distribution. Il vaut 0 pour une loi normale où moyenne, médiane et mode sont égaux

  $$Skew = \mathbb{E}\left(\frac{(r_P - \mathbb{E}(r_P))^3}{\sigma_P^3}\right)$$

  Le skewness est positif si la queue de distribution à droite est plus importante (généralement plus longue et plus fréquente) et négatif si c'est celle à gauche

Hypothèses de base

Note sur les moments d'ordres supérieurs

- Kurtosis: coefficient permettant de contrôler la large des queues de distribution. Il vaut 3 pour une loi normale, où les queues de distribution sont jugées peu fréquentes

$$Kurtosis = \mathbb{E}\left(\frac{(r_P - \mathbb{E}(r_P))^4}{\sigma_P^4}\right)$$

- Kurtosis normalisé : excès de Kurtosis par rapport à une loi normale

$$Exces\ Kurtosis = Kurtosis - 3$$

Hypothèses de base

Existence d'autres mesures de risques

Comme vous l'avez surement vu dans d'autres cours plus spécifique au risque de marché, il existe d'autres mesures de risque que la "simple" volatilité :

- VaR: Value at Risk = quantile de perte à des niveaux extrêmes (généralement 95% ou 99%)
- CVaR ou Expected Shortfall: Conditional Value at Risk = espérance des pertes au-delà de la VaR

Hypothèses de base

Définition de l'actif sans risque

Un actif dit sans risque est un actif (parfois fictif) qui délivre un rendement certain à une date donnée.

En pratique, on considère souvent comme actif sans risque des obligations d'états ou de banques centrales et émises dans leur devise locale (par exemple le USD pour les Etats Unis). L'hypothèse justifiant le caractère sans-risque est que l'état pourra au besoin émettre de devise supplémentaire pour payer sa dette.

Pour la suite, nous appellerons :

- r_f le rendement annualisé de l'actif sans risque
- $r_A - r_f$ excès de rendement d'un actif A et prime de risque son espérance

Markowitz et frontière efficiente

Idée générale

- la théorie moderne du portefeuille (ou Modern Portfolio Theory=MPT) a été introduite en 1952 par Markowitz
- cette théorie explique comment des investisseurs utilisent la diversification entre actifs pour construire des portefeuilles en fonction de leur aversion au risque

Markowitz et frontière efficiente

Principales hypothèses

- chaque investisseur prend ses décisions de manière "rationnelle" et uniquement sous le prisme du couple rendement risque
- chaque investisseur a une aversion au risque et contrôle ce risque via la diversification
- chaque investisseur a accès sans limite au taux sans risque pour prêter ou emprunter
- absence de coûts de transactions + absence de variation de position dominante sur le marché pouvant faire bouger les prix en cas d'achat / vente

Markowitz et frontière efficiente

Frontière efficiente en l'absence d'actif sans risque

- Security Market Line (SML) = frontière efficiente d'investissement dans différentes combinaisons d'actifs risqués
- Construction: minimisation du risque sous contrainte de rendement cible noté μ_T

$$argmin_{\omega} \;\; \omega_P^t \Sigma \omega_P$$

Sous contrainte

$$\omega_P^t \mu = \mu^t \omega_P \geq \mu_T \;\; et \;\; \sum_{i=1}^{n} \omega_i = e^t \omega_P = 1$$

- il est aussi possible de maximiser le rendement sous contrainte de risque OU de maximiser une quantité $\mu^t \omega_P - \frac{\gamma}{2} \times \omega_P^t \Sigma \omega_P$ où γ coefficient d'aversion au risque de l'investisseur

Markowitz et frontière efficiente

Frontière efficiente en l'absence d'actif sans risque: démo (1)

- Introduction d'un Lagrangien tel que :

$$L(\omega_P, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\omega_P^t \Sigma \omega_P + \lambda_1 \times \left(\mu_T - \mu^t \omega_P\right) + \lambda_2 \times \left(1 - e^t \omega_P\right)$$

- Calcul des dérivées :

$$(1) \quad \frac{dL(\omega_P, \lambda_1, \lambda_2)}{d\omega_P} = \Sigma\omega_P - \lambda_1 \times \mu^t - \lambda_2 \times e^t = 0$$

$$(2) \quad \frac{dL(\omega_P, \lambda_1, \lambda_2)}{d\lambda_1} = \mu_T - \mu^t \omega_P = 0$$

$$(3) \quad \frac{dL(\omega_P, \lambda_1, \lambda_2)}{d\lambda_2} = 1 - e^t \omega_P = 0$$

Markowitz et frontière efficiente

Frontière efficiente en l'absence d'actif sans risque: démo (2)

- Combinaisons des équations pour abaisser la dimension

$$(1)\ \ \omega_P = \lambda_1 \times \Sigma^{-1}\mu^t + \lambda_2 \times \Sigma^{-1}e^t$$

$$(2)\ \ \mu_T = \mu^t\omega_P = \mu^t\left(\lambda_1 \times \Sigma^{-1}\mu + \lambda_2 \times \Sigma^{-1}e^t\right)$$

$$(3)\ \ 1 = e^t\omega_P = e^t\left(\lambda_1 \times \Sigma^{-1}\mu + \lambda_2 \times \Sigma^{-1}e^t\right)$$

- Notons $a = e^t\Sigma^{-1}\mu$, $b = \mu^t\Sigma^{-1}\mu$ et $c = e^t\Sigma^{-1}e$

$$(2)\ \ \mu_T = \lambda_1 \times b + \lambda_2 \times a$$

$$(3)\ \ 1 = \lambda_1 \times a + \lambda_2 \times c$$

Markowitz et frontière efficiente

Frontière efficiente en l'absence d'actif sans risque: démo (3)

- Combiner à nouveau les équations pour calculer λ_1 et λ_2

$$c \times (2) - a \times (3) = c\mu_T - a = \lambda_1 \times (bc - a^2) + \lambda_2 \times (ac - ac)$$

$$a \times (2) - b \times (3) = a\mu_T - b = \lambda_1 \times (ab - ab) + \lambda_2 \times (a^2 - bc)$$

- Donc

$$\lambda_1 = \frac{a - c\mu_T}{a^2 - bc} \quad et \quad \lambda_2 = \frac{a\mu_T - b}{a^2 - bc}$$

- Enfin on obtient une formule fermée des poids du portefeuille :

$$(1) \quad \omega_P = \frac{a - c\mu_T}{a^2 - bc} \times \Sigma^{-1}\mu^t + \frac{a\mu_T - b}{a^2 - bc} \times \Sigma^{-1}e^t$$

Markowitz et frontière efficiente

Frontière efficiente en l'absence d'actif sans risque: résultat

- Au-delà des calculs (souvent posés en entretiens liés la gestion d'actif), l'importance de ce résultat est qu'il existe une formule fermée donnant les poids optimaux de chacun des actifs pour minimiser le risque et atteindre une espérance de rendement cible μ_T.
- Le fait de varier ce niveau cible permet ainsi de créer un ensemble de portefeuilles optimaux d'un point de vue rendement-risque, ce qui est appelé frontière efficiente en l'absence d'actif sans risque

TABLEAU: TRACER LA FRONTIERE EFFICIENTE

Markowitz et frontière efficiente

Frontière efficiente avec actif sans risque

- Capital Market Line (CML) = ajout de la possibilité d'investir dans l'actif sans l'actif pour réduire / augmenter le "levrage" aux portefeuilles de marché
- Cette frontière est donc une droite qui part de r_f lors que le risque est nul puis est tangent à la SML
- L'intersection entre les deux "Capital market line" est appelé portefeuille de marché
- L'ensemble des portefeuilles de la CML sont des combinaisons linéaires d'actif sans risque et du portefeuille de marché.

TABLEAU: AJOUTER LA CML ET EXPLIQUER LE LEVRAGE

Markowitz et frontière efficiente

Inversibilité de la matrice

- théorie basée sur la possibilité de diversification des risques via la matrice de matrice de variance-covariance.
- formule du portefeuille de marché nécessite d'inverser cette matrice et il convient de s'assurer que cela soit possible.
- en pratique, s'ils existent un trop grand nombre d'actifs ayant des sources de risques similaires, il est possible d'exprimer certaines lignes de la matrice comme des combinaisons linéaires des autres et la matrice devient non inversible.
- par exemple si on construit un portefeuille d'actifs CAC40, il est fort probable que la sous-matrice de corrélation entre des entreprises bancaires (Société Générale, BNP, Credit Agricole etc...) forme quasiment un bloc unitaire.

Construction de portefeuille sous Markowitz

Discussion autour des contraints: Long-Short vs Long only

Une principale limite de la formule fermée obtenue par Markowitz est la pratique souvent controversé de la vente de titres à découvert (Short positions). La plupart des investisseurs imposent ainsi une contrainte supplémentaire dites Long Only: l'ensemble des poids des actifs est positif ie:

$$\forall i \in [1, n], 0 \leq \omega_i \leq 1$$

L'ajout de cette contrainte rend impossible la possibilité d'obtenir une formule fermée pour le poids des actifs mais le programme d'optimisation peut cependant être résolu numériquement via des algorithmes du type descentes de gradient (ou autres).

MEDAF / CAPM

Bref historique

- Modèle d'Evaluation / d'Equilibre des Actifs Financiers OU Capital Asset Pricing Model = modèle financier permettant de déterminer l'espérance de rendement d'un actif en fonction d'un portefeuille de marché
- Introduit Treynor (1961) puis repris Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966), elle est une extension des travaux de Markowitz et Fama
- Théorie construite sur l'hypothèse d'efficience des marchés et la présence de risque systémique

MEDAF / CAPM

Définition

Soit un actif A et un portefeuille de marché M:

$$r_A = r_f + \beta_A \times (r_M - r_f) + \varepsilon_A$$

Le MEDAF dit alors que:

$$\mathbb{E}(r_A) = r_f + \beta_A \times (\mathbb{E}(r_M) - r_f)$$

Note:

- r_f est un actif sans risque à rendement connu
- ε_A est un terme de bruit correspondant au rendement non expliqué par le marché, supposé nul dans le MEDAF

MEDAF / CAPM

Définition

En d'autres termes, le MEDAF suppose que le rendement attendu / la prime de risque pour l'ensemble des actifs peut être exprimé directement comme une fonction du rendement attendu / la prime de risque d'un portefeuille de marché via le
Le coefficient β_i est ainsi un coefficient de régression entre la prime de risque de l'actif A et celle du portefeuille de marché M, et se calcule comme :

$$\beta_i = \frac{cov(r_A, r_M)}{\mathbb{V}(r_M)}$$

Limites

Certaines hypothèses de ce modèle sont très fortes comme :

- la logique d'uniformité de l'approche des investisseurs sur l'optimisation du prisme rendement - risque
- le fait de penser que le contrôle de la volatilité des actifs suffit à contrôler efficacement le risque
- l'hypothèse de d'efficience des marchés qui permet d'expliquer l'espérance de rendement uniquement par le portefeuille de marché (systémique) et non par des caractéristiques de l'actif (idiosyncratique)
- la possibilité d'emprunter / de prêter de manière illimitée qui n'est pas possible en pratique

Extension: Modèle à facteurs

Ajout de 2 facteurs additionnels dits Size et Value:

$$\mathbb{E}(r_i) - r_F = \beta_i \times (\mathbb{E}(r_M) - r_F) + s_i \times \mathbb{E}(SMB) + h_i \times \mathbb{E}(HML)$$

- $\mathbb{E}(r_M) - r_F$ excès de rendement entre le portefeuille de marché et le l'actif sans risque
- $\mathbb{E}(SMB)$ différence entre l'espérance de rendement d'un portefeuille de titres à faibles vs fortes capitalisations (SMB = Small Minus Big)
- $\mathbb{E}(HML)$ différence entre l'espérance de rendement d'un portefeuille de titres à fort vs faibles ratios entre la valeur comptable / valeur de marché (HML = High Minus Low)

Extension: Modèle à facteurs

D'autres extensions de ce type existent avec des facteurs liés aux :

- Momentum = persistance de la rentabilité à court terme = privilégier les titres ayant mieux performés dans un horizon de temps court
- Mean-Reverting = effet de ressort = privilégier les titres ayant moins performés dans un horizon court
- Growth = croissance des résultats = privilégier les titres ayant une croissance des bénéfices
- etc...

La recherche de ses facteurs, appelés également facteurs de style, relève d'une même logique d'identification d'anomalies de marché et challenge donc l'hypothèse d'efficience des marchés

Alternative: Approche Fractale

Idées générales :

- Critique de l'hypothèse d'indépendance des rendements
- Mise en évidence de cluster de volatilités
- Sous-estimation des risques avec l'approche d'aléa gaussien et opposition du caractère "sauvage" des marchés financiers
- Proposition de modélisation par des modèles de type fractals

Voir Une approche fractale des marchés - Mandelbrot - 2004

Utilisations pratiques

Cas de portefeuille Multi-Assets

Cas d'usage classique = Strategic Asset Allocation (SAA) :

- construction d'un portefeuille composé de différents actifs : actions de différentes régions, obligations gouvernementales, d'entreprises (Corporate) de différentes régions et qualités (IG=Investment Grade, HY=High Yield), actions alternatifs tels que l'immobilier / infrastructure, les actions ou dettes privés, etc...
- étape 1, collecte des hypothèses de rendements μ et risque Σ pour l'ensemble des actifs
- étape 2, optimisation via le programme de Markowitz pour trouver le type de portefeuille qui correspond le mieux à l'appétence de risque d'un client.

VOIR PROJET

Utilisations pratiques

Construction d'un tracker (1)

- gestion passive = créer des portefeuilles répliquant un indice de référence comme le S&P500 pour les actions ou le Barclays Global Aggregate pour les obligations.
- objectif = répliquer la performance d'un indice avec un coût (humain et transaction) plus faible que des portefeuilles de gestion plus active.
- appelés également des trackers ou Exchange Trade Fund
- supporte hypothèse qu'il est difficile de surperformer le marché sur un horizon de temps long.
- existence de tracker plus thématiques afin d'investir en fonction de convictions propres à l'investisseur (ESG, crypto...)

VOIR PROJET

Utilisations pratiques

Construction d'un tracker (2)

Pour contrôler le caractère passif d'un portefeuille, on utilise généralement la mesure de Tracking Error (TE):

$$TE = \sigma(r_P - r_B) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}(\omega_i^P - \omega_i^B) \times r_i\right)$$

$$TE = \sqrt{\sigma^2(r_P) - 2 \times \rho_{P,B} \times \sigma(r_P)\sigma(r_B) + \sigma^2(r_B)}$$

Ici n représente l'ensemble des actifs contenus soit dans le portefeuille P soit dans le benchmark B. Pour un portefeuille passif, on considère généralement le portefeuille comme un sous-ensemble (potentiellement complet) du benchmark, cependant la formule reste valable si ce n'est pas le cas (par exemple en présence de cash dans le portefeuille).