

Imagerie par résonance magnétique et Compressed Sensing

Dinh Phong Nguyen et Rémy Garnier

Université Paris-Sud

27 mars 2018

Sommaire

- 1 Introduction et Position du Problème
- 2 Reconstruction
- 3 Importance de l'échantillonnage
- 4 Exemple d'application

Contexte

- La théorie du Compressed Sensing a de nombreuses applications dans le monde médical, et notamment pour l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM)
- **Réduire le temps d'acquisition** en réduisant le nombre de données à collecter présente un grand attrait étant donnée la durée importante de certaines acquisitions IRM

Signal

Impose un champ magnétique de gradient spatial \vec{G} sur un objet m .

Signal :

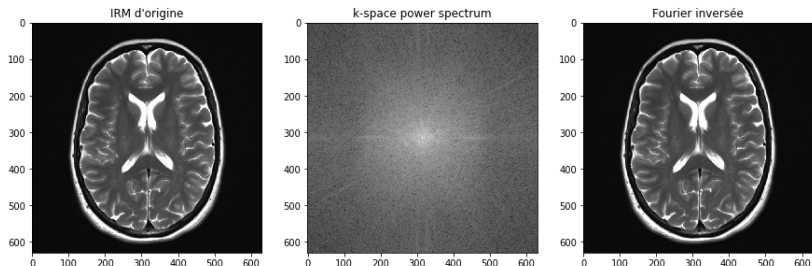
$$s(t) = \int m(\vec{r}) e^{-i2\pi \vec{k}(t) \cdot \vec{r}} d\vec{r}$$

avec $\vec{k}(t) \propto \int_0^t \vec{G}(t) dt$

- Transformée de Fourier spatiale de $m(\vec{r})$
- Fréquence d'échantillonnage $\vec{k}(t)$ contrôlable

k -space

k -space : Ensemble des valeurs de $k(\vec{t})$:



Possibilité d'une reconstruction par transformée de Fourier inverse

k -space

- Acquisition de l'ensemble des coefficients de Fourier coûteuse
- On peut choisir un petit ensemble de vecteur de mesures et acquérir le signal a ces fréquences.
- Comment reconstruire l'image à partir d'un petit nombre de coefficients de Fourier ?
- Comment choisir l'ensemble des vecteurs de mesures ?

projected Iterative Soft Thresholding Algorithm

- y : Signal ayant un support S
- \mathcal{F} : Transformée de Fourier

On souhaite résoudre le problème suivant : U

$$\min_x \|x\|_1 \quad \text{tel que} \quad \|(\mathcal{F} \cdot x)_S - y\|_2 < \epsilon$$

L'algorithme du **seuillage doux itératif projeté** permet de résoudre ce problème de manière itérative.

projected Iterative Soft Thresholding Algorithm

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{Argmin}} \frac{1}{2} \|(\mathcal{F} \cdot x)_S - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$$

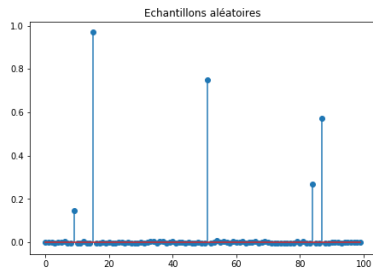
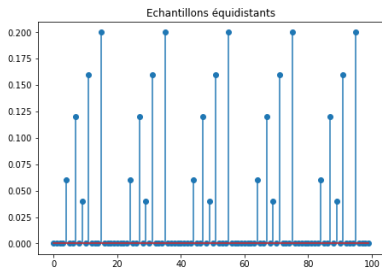
Algo (pISTA) :

- On part de $X_0 = y$ et $x_0 = \mathcal{F}^{-1} X_0$
- Tant que que $\|x_{i+1} - x_i\|_2 < \epsilon$:
 - Transformée de Fourier inversée pour obtenir $x_i = \mathcal{F}^{-1} \cdot X_i$
 - Seuillage de x_i . On annule toutes les composantes de x_i inférieures à λ
 - Transformée de Fourier $X_{i+1} = \mathcal{F} \cdot x_i$
 - On impose les conditions sur le support $(X_{i+1})_S = y$

Reconstruction

Reconstruction du signal d'origine par pISTA

Itération 74



Incohérence

Conditions d'application du Compressed Sensing

- Sparsité du signal
- **Incohérence des mesures**
- Reconstruction non-linéaire

Incohérence

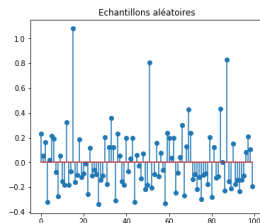
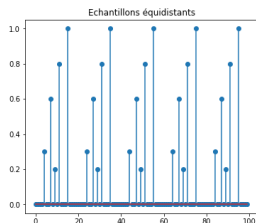
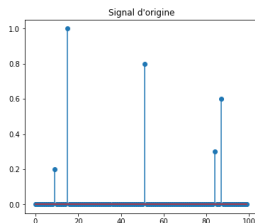
Soit $\mathcal{B}_e = (e_j)_{j=1}^N$ et $\mathcal{B}_f = (f_j)_{j=1}^N$ deux bases orthonormales de \mathbb{R}^N . On dit qu'elles sont **incohérentes** quand $\forall i, j$ on a

$$|\langle e_i | f_j \rangle| \leq \frac{Cst}{\sqrt{N}}$$

- C'est le cas de la base de Fourier avec la base canonique (et également avec le couple base de Fourier/base des ondelettes)
- Les vecteurs de mesure X_i doivent être incohérents avec la base dans laquelle s'exprime la sparsité des signaux

Incohérence

La théorie du CS nous dit que les **mesures aléatoires** ont, avec grande probabilité, cette propriété d'incohérence



Compressed Sensing et IRM

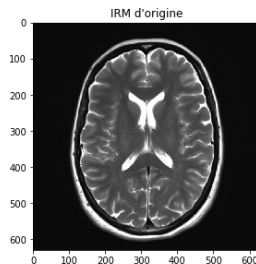
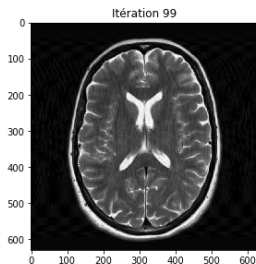
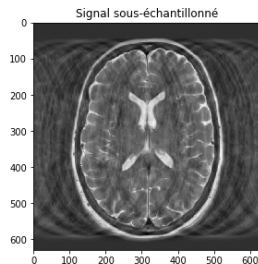
En IRM, plusieurs avantages

- données acquises **directement dans l'espace de Fourier**
- données **sparse** dans une certaine base (dans l'espace image ou dans une base d'ondelettes)

On a donc un cadre idéal pour le Compressed Sensing

Sous-échantillonnage Cartésien

Reconstruction error: 0.00517995721388



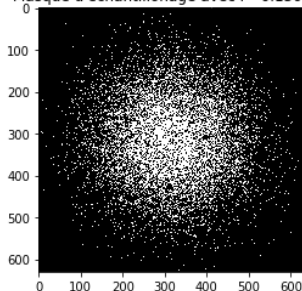
- mesures : 70%
- itérations : 100

Sous-échantillonnage Cartésien

Cependant

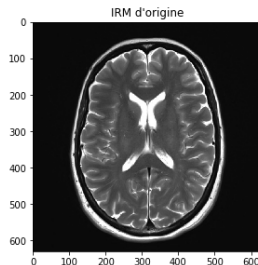
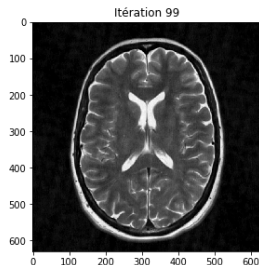
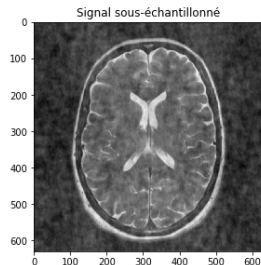
- **Structure** de parcimonie du signal non-respectée
- En pratique, on doit échantillonner de façon plus dense les basses fréquences : **échantillonnage à densité variable**

Masque d'échantillonnage avec $P=0.150000$



Sous-échantillonnage Gaussien

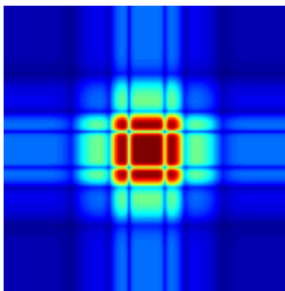
Reconstruction error: 0.00817569187537



- mesures : 15%
- itérations : 100

Sous-échantillonnage Gaussien

- Difficile à implémenter en pratique (contraintes machine)
- Recherche active sur des **schémas d'échantillonnage optimaux**, combinant maximisation de l'incohérence et praticité d'acquisition



Références

- [1] Lustig, Mike, D. L. Donoho, J. M. Santos and J. M. Pauly.
"Compressed Sensing MRI." IEEE Signal Processing Magazine
25 (2008) : 72-82.
- [2] Lustig, M. , Donoho, D. and Pauly, J. M. (2007), Sparse MRI :
The application of compressed sensing for rapid MR imaging.
Magn. Reson. Med., 58 : 1182-1195. doi :10.1002/mrm.21391
- [3] Nicolas Chauffert, Philippe Ciuciu, Jonas Kahn, Pierre
Weiss. Variable density sampling with continuous trajectories.
Application to MRI.. SIAM Journal of Imaging Sciences, 2014, 7
(4), pp.1962-1992.
- [4] Liu Y. et al. Projected Iterative Soft-thresholding Algorithm
for Tight Frames in Compressed Sensing Magnetic Resonance
Imaging (<https://arxiv.org/abs/1504.07786>)