Produktion und Supply Chain Management

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fertigungs- und Bestellmengenplanung

Prof. Dr. Christoph Glock

Das EOQ-Modell

Problemstellung

Ausgangslage:
Nicht für alle Materialarten, die in einem Unternehmen benötigt werden, ist eine bedarfssynchrone Anlieferung möglich oder aus wirtschaftlichen Gründen sinnvoll.

Konsequenz:
Es werden größere Mengen als zum Bestellzeitpunkt benötigt in Form eines Loses bestellt und eingelagert. Der Lagerbestand wird anschließend sukzessive abgebaut und das Lager wird bei Bedarf wieder befüllt.
Bestellmengen und Bestellzeitpunkte werden im Rahmen der **Bestellmengen-ermittlung** berechnet.

Zielsetzung:
Minimierung der mit der Beschaffung des benötigten Materials verbundenen Kosten.

Hierarchische Stellung im Beschaffungsprozess
Die Bestellmengenermittlung baut auf den Ergebnissen der Bedarfsermittlung auf und setzt die Vorgaben der strategischen Beschaffung um.

Arten von Bestellmengenmodellen

	Keine Berücksichtigung zeitlicher Aspekte	**Berücksichtigung zeitlicher Aspekte**
Keine Berücksichtigung von Unsicherheit	Statisch/ deterministisches Modell	Dynamisch/ deterministisches Modell
Berücksichtigung von Unsicherheit	Statisch/ stochastisches Modell	Dynamisch/ stochastisches Modell

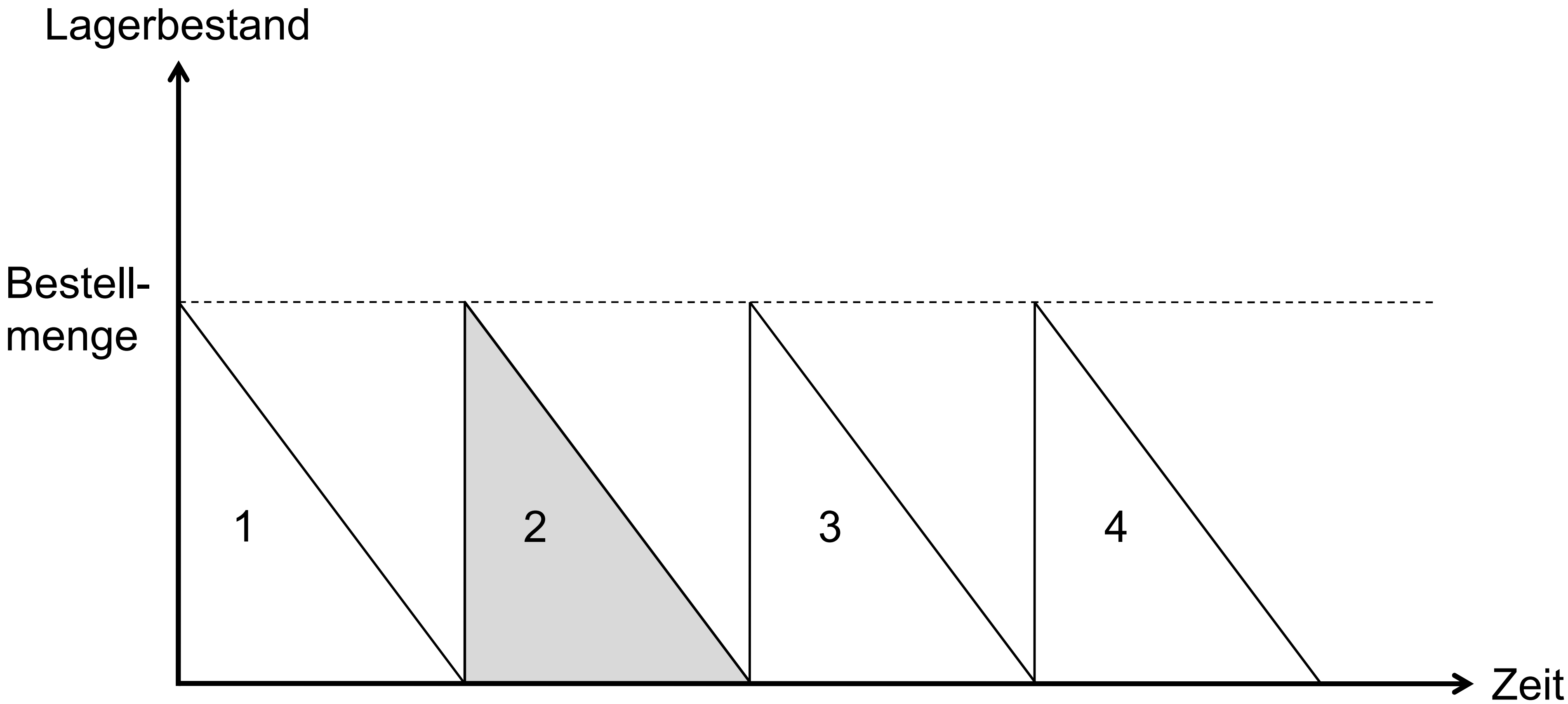
Grundmodell der optimalen Bestellmenge

Zweck:
Mithilfe des Grundmodells der optimalen Bestellmenge sollen Bestelllose ermittelt werden, die die Summe aus Lagerhaltungs- und Bestellkosten im Planungszeitraum minimieren.

Modellannahmen:

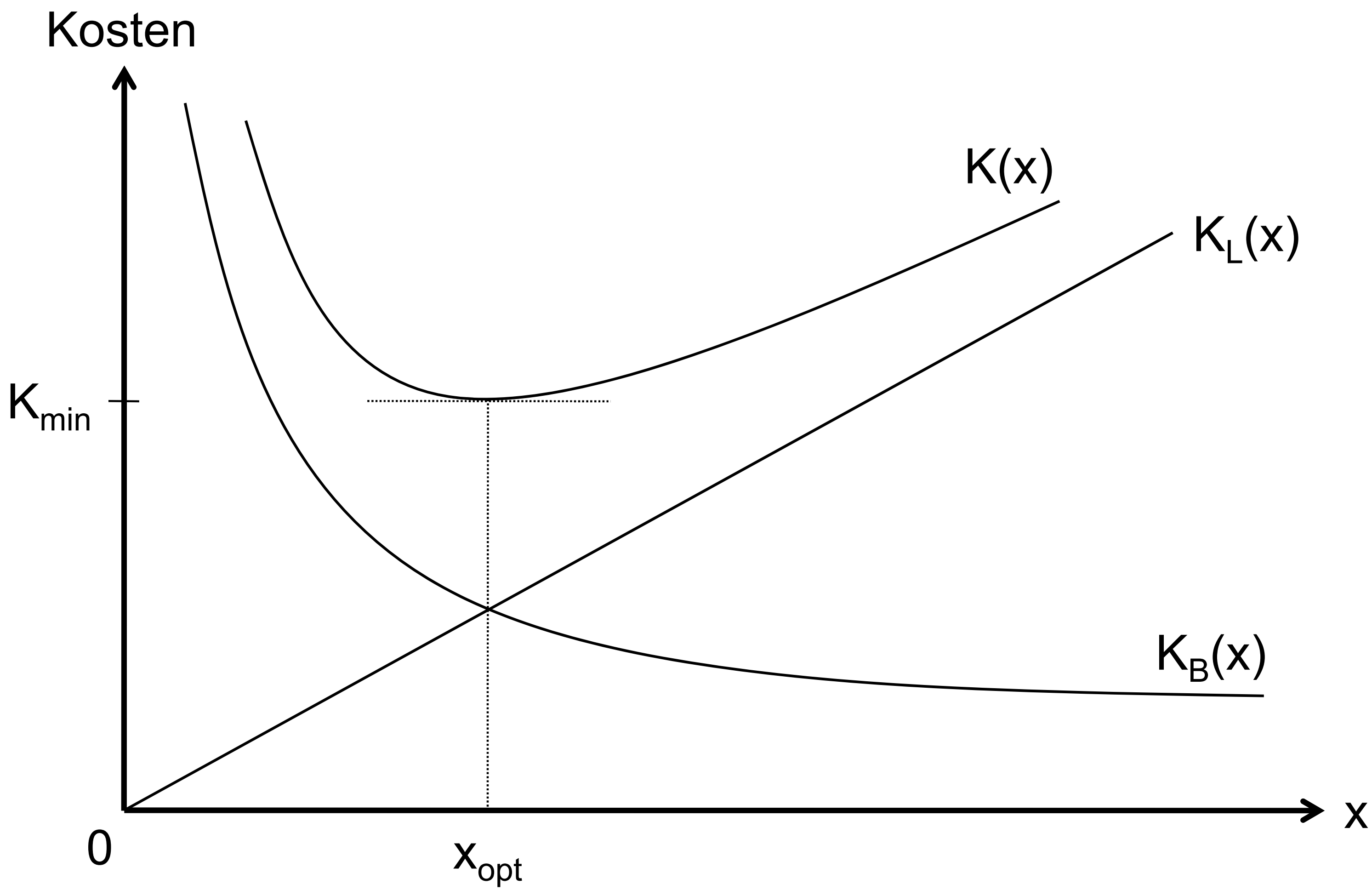
- Der Lagerabgang erfolgt kontinuierlich und linear im Zeitablauf
- Die Lagerbestände zu Beginn und zum Ende des Planungszeitraums sind null
- Die Lagerauffüllung erfolgt ohne Zeitverzug
- Die Bestellmenge ist im Fall mehrerer Bestellungen konstant
- Es existieren keine Restriktionen, wie z. B. Transport- oder Lagerkapazitäten
- Alle relevanten Planungsparameter sind bekannt und es herrscht keine Unsicherheit

Lagerbestandsverläufe



- Feldinhalt bestimmt die Lagerhaltungskosten
- Feldanzahl bestimmt die Bestellkosten

Kostenverläufe



Mathematische Formulierung

Nomenklatur:

B Bedarf im Planungszeitraum (von $t = 0$ bis $t = T$)
x Bestellmenge
n Anzahl Bestellungen
k_L Lagerhaltungskostensatz je Mengeneinheit im Planungszeitraum
k_B Bestellkostensatz je Bestellung
z Zinssatz im Planungszeitraum
q_c Preis einer Mengeneinheit
k_{Lm} Kosten der physischen Lagerhaltung je Mengeneinheit im Planungszeitraum

Zusammenhang:
$B = n*x$ bzw. $n = B/x$
d. h. der Bedarf B soll in n Bestellungen der Größe x gedeckt werden

$k_L = z*q_c + k_{Lm}$

Mathematische Formulierung

Bestellkosten:

Es werden genau n Bestellungen durchgeführt, für die jeweils Kosten in Höhe von k_B anfallen. Die Bestellkosten betragen damit:

$$K_B = k_B \cdot n = k_B \cdot \frac{B}{x}$$

Gesamtkosten:

Die Gesamtkosten setzen sich additiv aus den Lagerhaltungs- und Bestellkosten zusammen:

$$K = K_L + K_B = \frac{x}{2} \cdot k_L + k_B \cdot \frac{B}{x}$$

Die Kostenfunktion berücksichtigt nur entscheidungsrelevante Kosten, d. h. Kosten, die durch die Bestellung beeinflusst werden können. Konstante Einstandspreise, die unabhängig von der Höhe der Bestellung anfallen, sind nicht entscheidungsrelevant.

Ermittlung der optimalen Bestellmenge

Die Zielfunktion des vorliegenden Optimierungsproblems lautet:

$$K = \frac{x}{2} \cdot k_L + k_B \cdot \frac{B}{x} \to Min!$$

Da die Kostenfunktion konvex ist, kann eine optimale Bestellmenge durch Ableiten der Funktion nach x, Gleichsetzen der Ableitung mit null und Auflösen erfolgen:

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2} \cdot k_L - k_B \cdot \frac{B}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot k_L = k_B \cdot \frac{B}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{2 \cdot k_B \cdot B}{k_L}$$

$$x_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot B}{k_L}}$$

Eigenschaften der Optimallösung

1. Die optimale Bestellmenge ist von der Länge des Planungszeitraums unabhängig.
2. Im Optimum entsprechend sich die Grenzkosten der Lagerhaltung und die Grenzbestellkosten.
3. Im Optimum sind Lagerhaltungs- und Bestellkosten identisch.
4. Im Optimum sind die Stückkosten minimal.

Aufgabe

Ein Unternehmen weist für die nächste Planungsperiode, die sich auf einen Zeitraum von T = 100 Zeiteinheiten [ZE] erstreckt, einen Gesamtbedarf an einem Produktionsfaktor in Höhe von 80.000 Mengeneinheiten [ME] auf. Jeder Bestellvorgang verursacht fixe Kosten in Höhe von 10 Geldeinheiten [GE]. Ferner sind Lagerhaltungskosten zu berücksichtigen, die mithilfe des Lagerhaltungskostensatzes von 0,1 GE je ME und ZE ermittelt werden können.

Bestimmen Sie die optimale Bestellmenge, die optimale Bestellhäufigkeit und die optimale Zykluszeit! Geben Sie die Gesamtkosten an, die sich bei Umsetzung der optimalen Bestellmenge im Planungszeitraum ergeben!

x_{opt} = 400, K = 4000

Bewertung des Grundmodells

Restriktive Annahmen schränken die Anwendbarkeit des Grundmodells in der Praxis ein. Problematisch sind insbesondere:

- die Annahme eines konstanten Lagerabgangs
- die fehlende Berücksichtigung zeitlicher Veränderungen
- die Vernachlässigung von Risiken

Aber: Das Grundmodell der optimalen Bestellmenge

- verdeutlicht wichtige Zusammenhänge zwischen losabhängigen und losfixen Kosten
- ist leicht verständlich und führt ohne großen Rechenaufwand zu Ergebnissen
- ist das am häufigsten verwendete Planungsmodell für Bestellmengen in der Praxis
- kann leicht um interessante Aspekte erweitert werden

Literatur

Bloech, J. et al.: Einführung in die Produktion, 6. Auflage, Springer, Heidelberg 2008, S. 194-205.

S. 87-98.

Das EPQ-Modell

Ausgangssituation

- Häufig werden auf einer Maschine mehrere Produktarten gefertigt, da der Einsatz von Universalmaschinen Flexibilitätsvorteile mit sich bringt.
- Die Fertigung erfolgt in diesem Fall losweise, d. h. es wird zunächst eine Produktart hergestellt, dann werden die Einstellungen der Maschine verändert, und dann wird eine andere Produktart gefertigt.
- Beispiele: Automobil- und Automobilzulieferindustrie, Standardmaschinenbau, Möbelindustrie, metallverarbeitende Industrie.

Definition Fertigungslos:

Diejenige Menge einer Produktart, die ohne Unterbrechung durch eine andere Produktart auf einer Anlage als geschlossener Posten gefertigt wird.

⇨ Das Problem der Bestimmung optimaler Fertigungslosgrößen stellt sich damit insbesondere in der Sorten- und Serienfertigung.

Problemstellung und Zielsetzung

Grundproblematik:

Der Produktwechsel auf einer Anlage erfordert Rüstvorgänge, die Zeit in Anspruch nehmen und Kosten verursachen.

- Große Lose mit wenigen Rüstvorgängen führen zu niedrigen Rüstkosten und -zeiten, aber auch zu hohen Lagerbeständen und hohen Lagerhaltungskosten.
- Kleine Lose mit vielen Rüstvorgängen führen zu niedrige Lagerbeständen und Lagerhaltungskosten, aber zu häufigen Umrüstvorgängen und damit hohen Rüstkosten/-zeiten.

Ziel:

Für diese beiden gegenläufigen Kostenentwicklungen ist die optimale Fertigungslosgröße zu bestimmen, die zum Kostenminimum führt. Hierbei ist sowohl ein Mengenproblem als auch ein Termin- bzw. Reihenfolgeproblem zu lösen.

Bestandteile der Rüstkosten

- Personalkosten, die beim Umrüstvorgang entstehen

  ⇨ nur entscheidungsrelevant, wenn Personal während der Rüstzeiten einen zusätzlichen Deckungsbeitrag erzielen könnte.

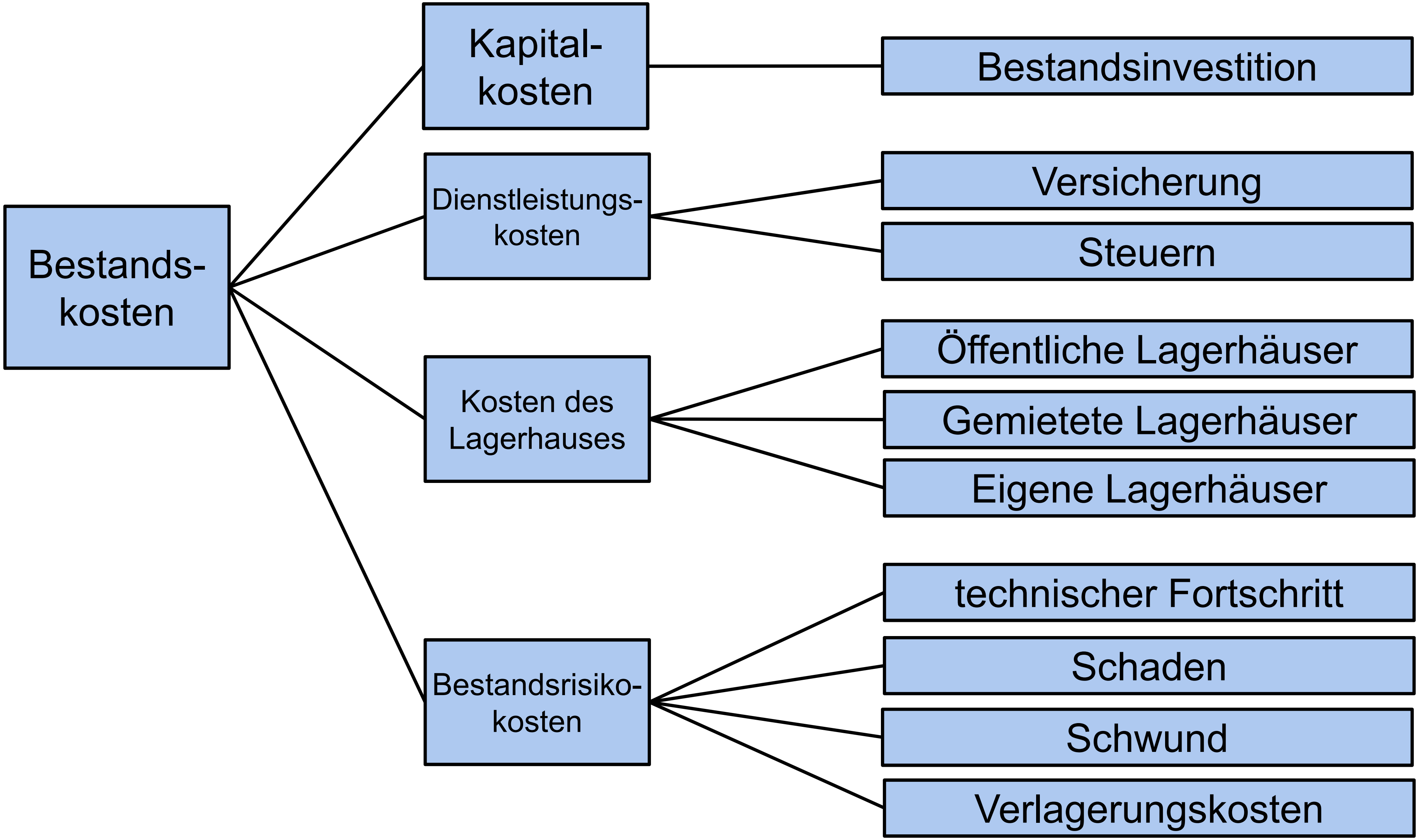
- Anlaufkosten (z. B. Materialkosten für erhöhten Ausschuss)
- Rüstbedingter Verschleiß der Werkzeuge
- Reinigung der Maschine und der Werkzeuge

  ⇨ nur entscheidungsrelevant, wenn Personal während der Reinigung einen zusätzlichen Deckungsbeitrag erzielen könnte.

- Opportunitätskosten für den Stillstand der Maschine

  ⇨ entgangene Deckungsbeiträge
  ⇨ nur bei Engpasskapazitäten, d. h. Output könnte durch geringere Rüstzeiten gesteigert werden.

Bestandteile der Bestandskosten



In Anlehnung an Lambert et al., 1998

Entscheidungsrelevanz von Kosten

In der Losgrößenplanung werden nur solche Kostenarten betrachtet, die durch die anstehende Entscheidung beeinflusst werden können. Solche Kostenarten werden **entscheidungsrelevante Kosten** genannt.

- Die **Kosten des zu beschaffenden Materials** bzw. **Produktionskosten** sind nur dann entscheidungsrelevant, wenn sie durch die Losgrößenentscheidung beeinflusst werden können. Fallen die Kosten unabhängig von der Höhe der Losgröße an, so werden sie in der Planung nicht berücksichtigt.
- **Personalkosten** sind nur dann entscheidungsrelevant, wenn sie von der Losgrößenentscheidung beeinflusst werden können und das Personal in Beschäftigungszeiten alternativen wertschöpfenden Tätigkeiten nachgehen könnte.

Knappe Kapazitäten

Wenn Fertigungskapazitäten knapp sind, kann die Nachfrage nicht komplett befriedigt werden.

- In diesem Fall liegt ein Produktionsprogrammplanungsproblem vor, da bestimmt werden muss, welche Produkte hergestellt werden sollen und welche nicht.

Aber:

Die Losgrößenplanung nimmt auf die verfügbaren Kapazitäten Einfluss:

$$T_N = T_B - T_R$$

mit T_N = Nettokapazität
T_B = Bruttokapazität
T_R = Kapazitätsverlust aufgrund von Rüstvorgängen

Grundmodell der optimalen Fertigungsmenge

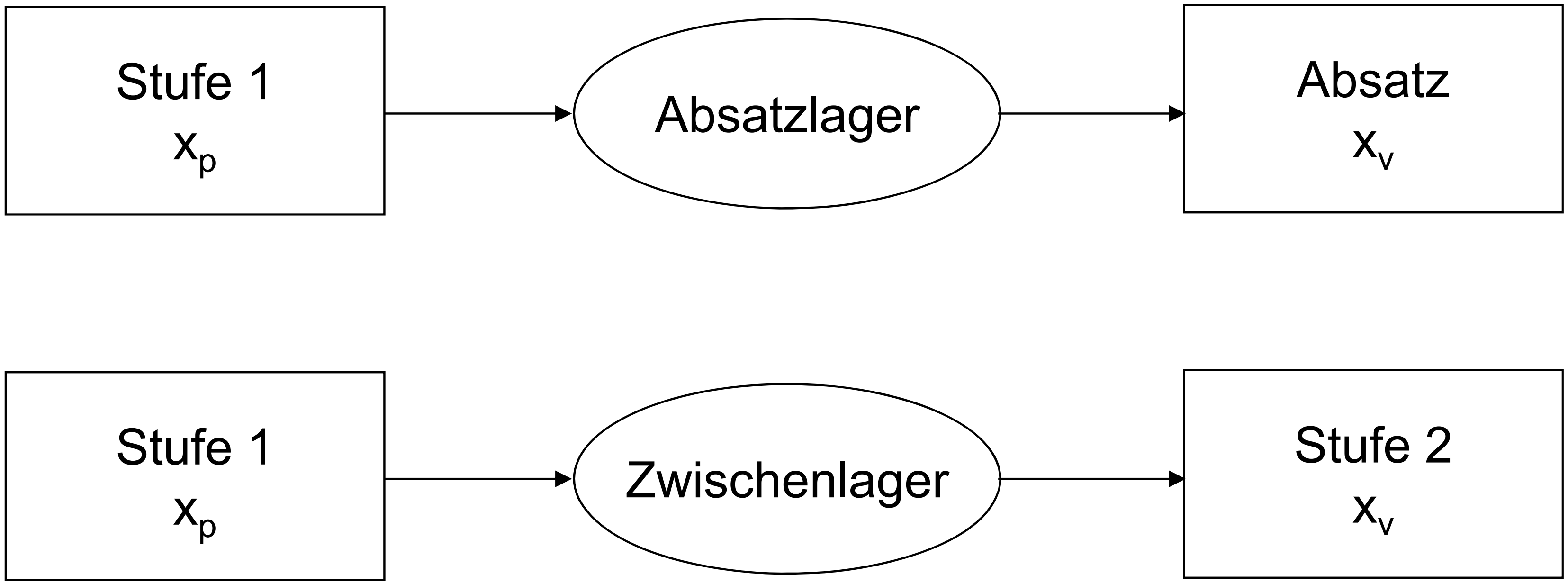
Zweck:
Mithilfe des Grundmodells der optimalen Fertigungsmenge soll die Größe von Fertigungslosen ermittelt werden, sodass die Summe aus Lagerhaltungs- und Rüstkosten im Planungszeitraum minimiert wird.

Modellannahmen:

- Der Lagerabgang erfolgt kontinuierlich und linear im Zeitablauf
- Die Lagerbestände zu Beginn und zum Ende des Planungszeitraums sind null
- **Die Lagerauffüllrate ist endlich**
- Die Fertigungsmenge ist im Fall mehrerer Losauflagen konstant
- Es existieren keine Restriktionen, wie z. B. Transport- oder Lagerkapazitäten
- Alle relevanten Planungsparameter sind bekannt und es herrscht keine Unsicherheit

Planungssituation

Zwei Varianten:



x_p: Produktionsrate
x_v: Verbrauchsrate

Offene vs. geschlossene Fertigung

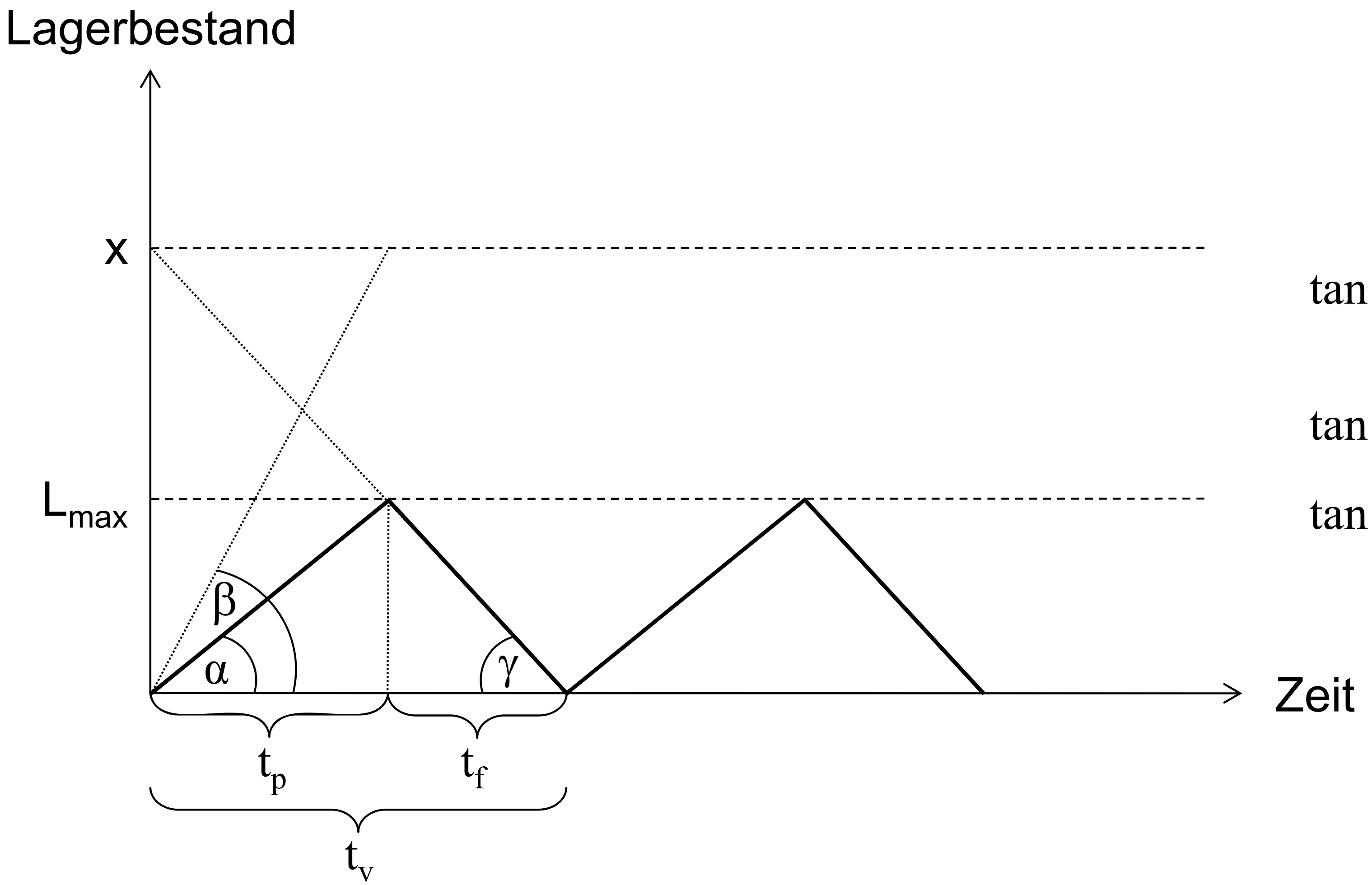
Art der Produkt-weitergabe

Offene Fertigung	Geschlossene Fertigung
Eine gefertigte Mengeneinheit wird sofort zur nächsten Stufe weitergegeben	Produktweitergabe erfolgt erst, wenn ein komplettes Los fertig gestellt ist.

Modellsystematisierung

	Offene Fertigung	Geschlossene Fertigung
Staulager ($x_p>x_v$)	Offenes Staulager	Geschlossenes Staulager
Zerreißlager ($x_v>x_p$)	Offenes Zerreißlager	Geschlossenes Zerreißlager

offenes Staulager



$\tan \alpha = L_{max}/t_p$
$= x_p - x_v$

$\tan \beta = x/t_p = x_p$

$\tan \gamma = x/t_v = x_v$

Ermittlung der Kostenfunktion

<u>Lagerhaltungskosten:</u>
Im Falle eines offenen Staulagers liegt durchschnittlich die Hälfte des maximalen Lagerbestands auf Lager.

maximaler Lagerbestand:

$$\tan\alpha = \frac{L_{max}}{t_p} \quad \Rightarrow \quad L_{max} = \tan\alpha \cdot t_p = \left(x_p - x_v\right) \cdot \frac{x}{x_p} = x \cdot \left(1 - \frac{x_v}{x_p}\right)$$

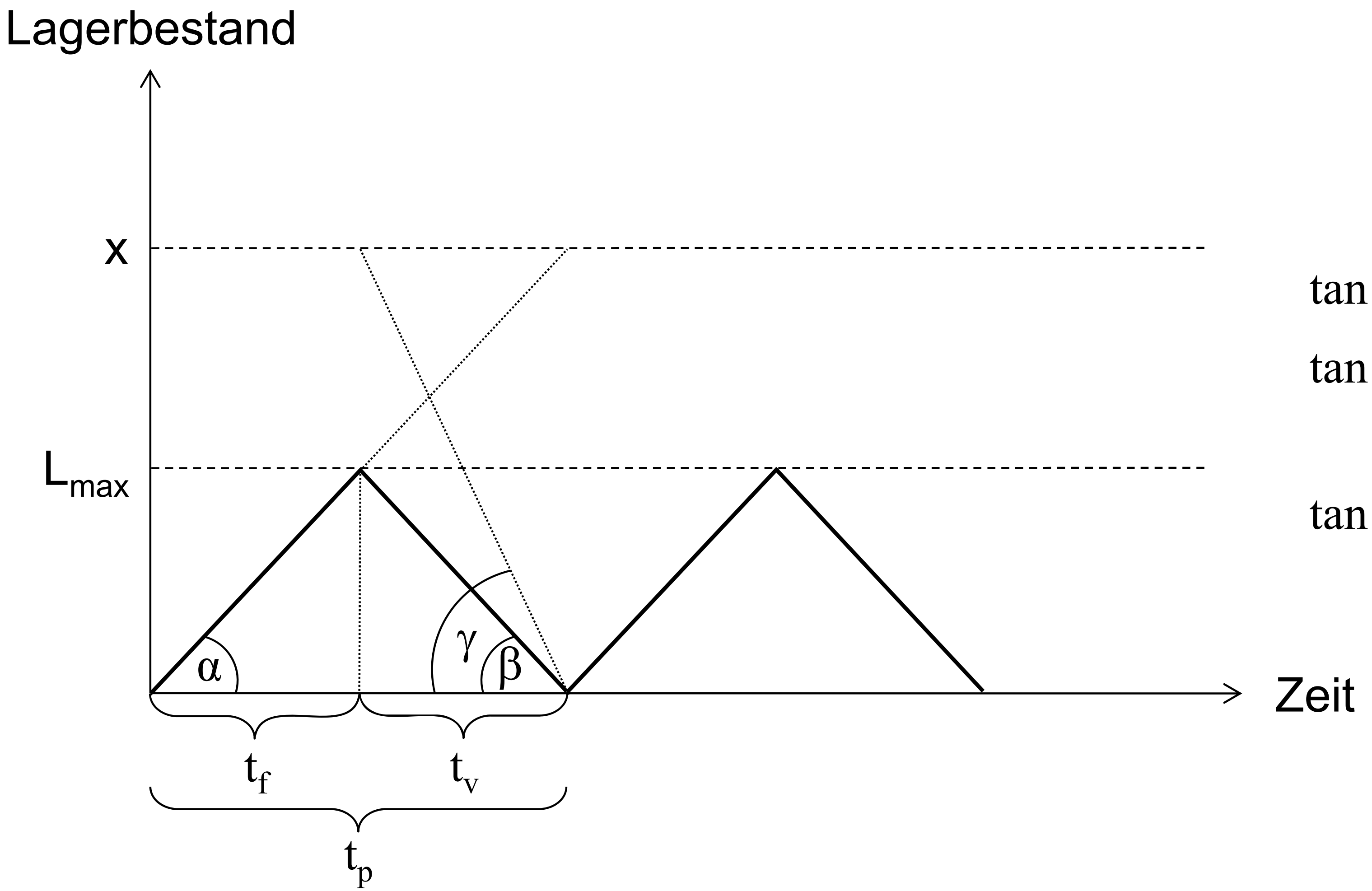
Die Lagerhaltungskosten im Planungszeitraum betragen damit:

$$K_L = \frac{x}{2} \cdot \left(1 - \frac{x_v}{x_p}\right) \cdot t_v \cdot k_L \cdot \frac{B}{x} = \frac{x}{2} \cdot \left(1 - \frac{x_v}{x_p}\right) \cdot \frac{x}{x_v} \cdot k_L \cdot \frac{B}{x} = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_v} - \frac{1}{x_p}\right) \cdot B \cdot k_L$$

Die <u>Gesamtkosten</u> betragen damit:

$$K = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_v} - \frac{1}{x_p}\right) \cdot B \cdot k_L + k_R \cdot \frac{B}{x}$$

offenes Zerreißlager



$\tan \alpha = x/t_p = x_p$

$\tan \beta = L_{max}/t_v = $
$= (x_v - x_p)$

$\tan \gamma = x/t_v = x_v$

Ermittlung der Kostenfunktion

<u>Lagerhaltungskosten:</u>
Im Falle eines offenen Zerreißlagers liegt durchschnittlich die Hälfte des maximalen Lagerbestands auf Lager.

maximaler Lagerbestand:

$$\tan\beta = \frac{L_{\max}}{t_v} \quad \Rightarrow \quad L_{\max} = \tan\beta \cdot t_v = \left(x_v - x_p\right) \cdot \frac{x}{x_v} = x \cdot \left(1 - \frac{x_p}{x_v}\right)$$

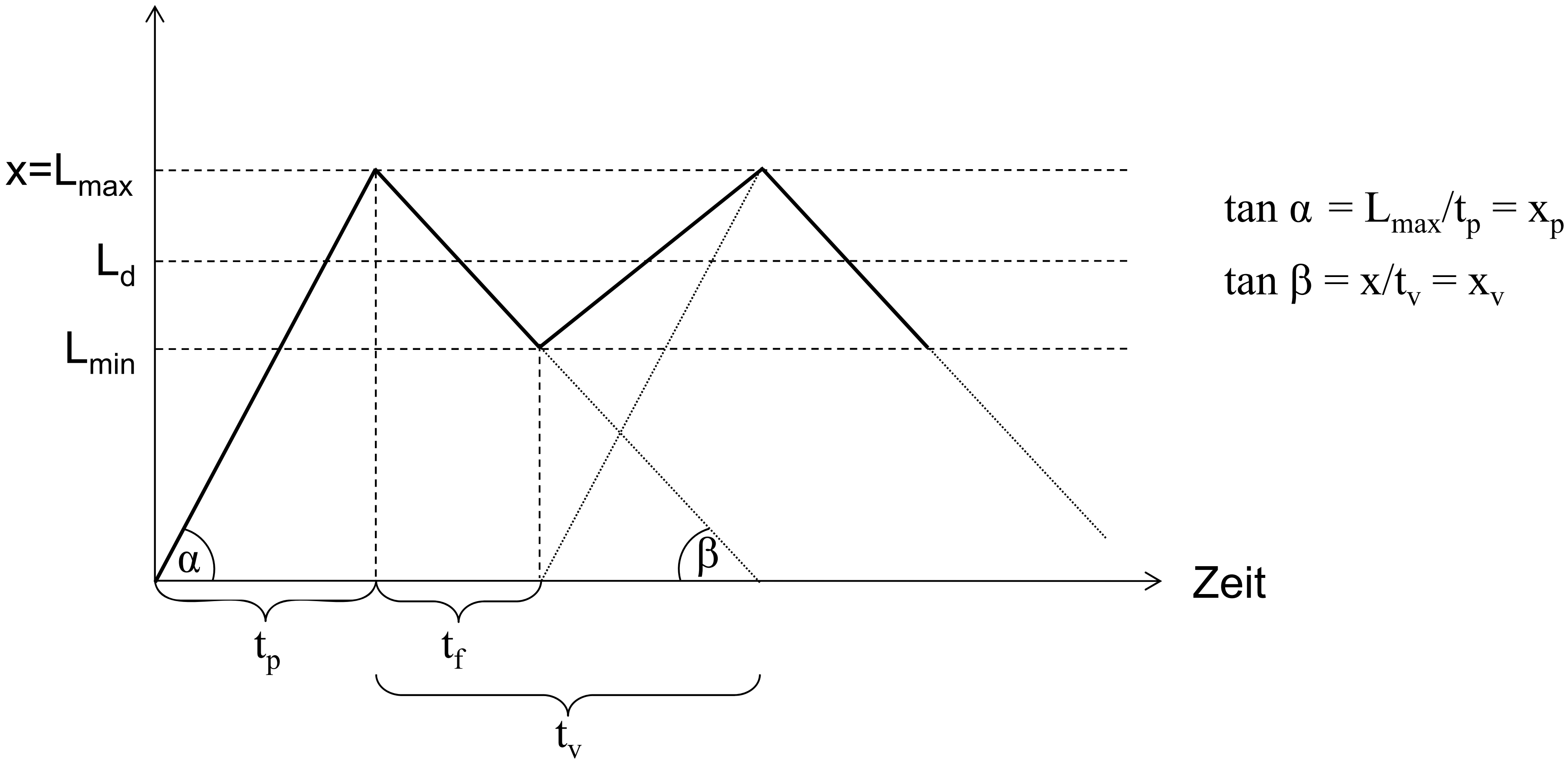
Die Lagerhaltungskosten im Planungszeitraum betragen damit:

$$K_L = \frac{x}{2} \cdot \left(1 - \frac{x_p}{x_v}\right) \cdot t_p \cdot k_L \cdot \frac{B}{x} = \frac{x}{2} \cdot \left(1 - \frac{x_p}{x_v}\right) \cdot \frac{x}{x_p} \cdot k_L \cdot \frac{B}{x} = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_v}\right) \cdot B \cdot k_L$$

Die <u>Gesamtkosten</u> betragen damit:

$$K = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_v}\right) \cdot B \cdot k_L + k_R \cdot \frac{B}{x}$$

geschlossenes Staulager



Ermittlung der Kostenfunktion

<u>Lagerhaltungskosten:</u>
Im Falle eines geschlossenen Staulagers liegt je Los die folgende Menge auf Lager.

$$L_{Los} = \frac{x}{2} \cdot t_p + \frac{x}{2} \cdot t_v = \frac{x}{2}\left(\frac{x}{x_p} + \frac{x}{x_v}\right) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_v}\right)$$

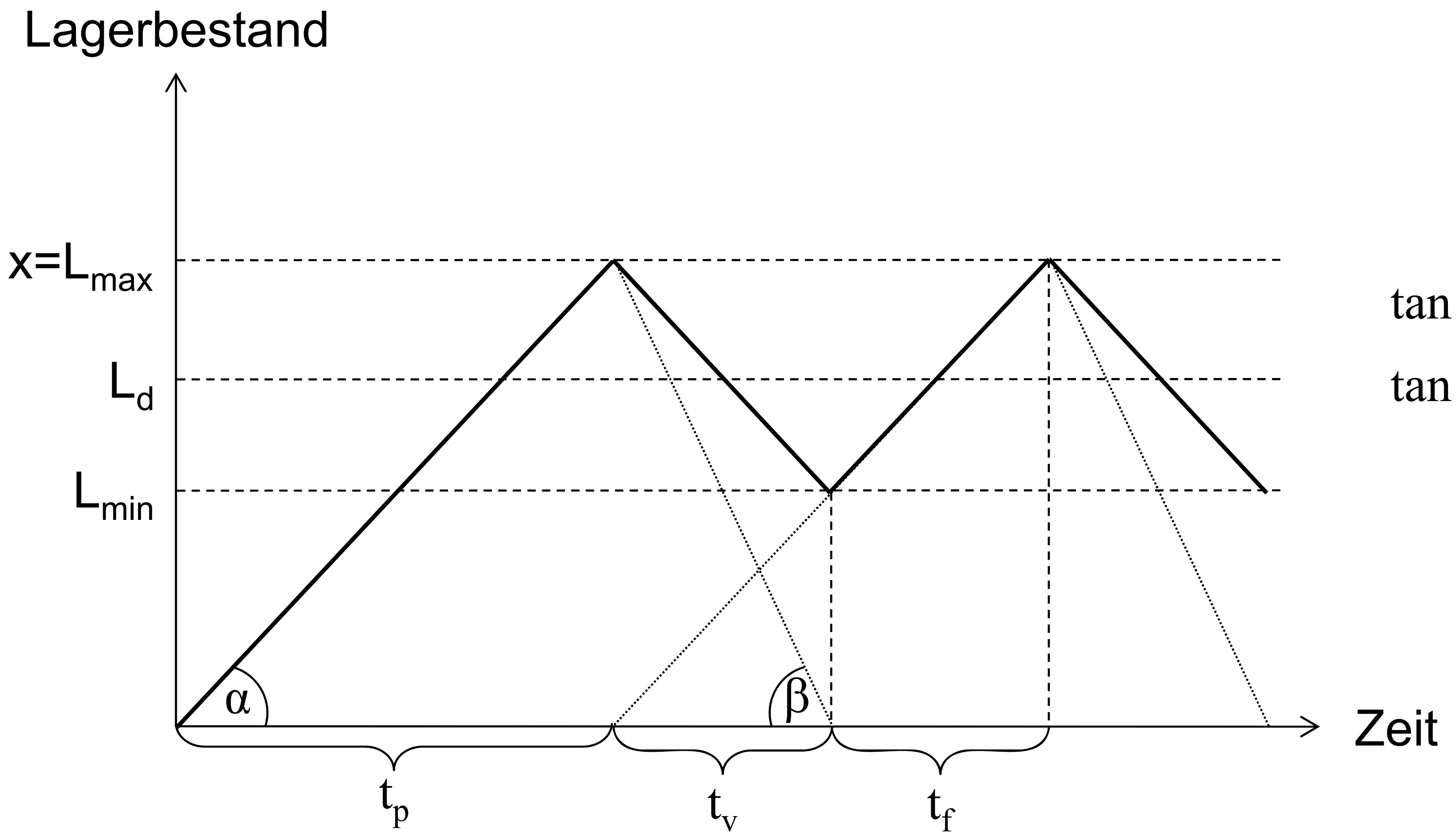
Die Lagerhaltungskosten im Planungszeitraum betragen damit:

$$K_L = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_v}\right) \cdot k_L \cdot \frac{B}{x} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_v}\right) \cdot k_L \cdot B$$

Die <u>Gesamtkosten</u> betragen damit:

$$K = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_v}\right) \cdot B \cdot k_L + k_R \cdot \frac{B}{x}$$

geschlossenes Zerreißlager



$\tan\alpha = x/t_p = x_p$

$\tan\beta = x/t_v = x_v$

Ermittlung der Kostenfunktion

<u>Lagerhaltungskosten:</u>
Im Falle eines geschlossenen Zerreißlagers liegt je Los die folgende Menge auf Lager:

$$L_{Los} = \frac{x}{2} \cdot t_p + \frac{x}{2} \cdot t_v = \frac{x}{2}\left(\frac{x}{x_p} + \frac{x}{x_v}\right) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_v}\right)$$

Die Lagerhaltungskosten im Planungszeitraum betragen damit:

$$K_L = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_v}\right) \cdot k_L \cdot \frac{B}{x} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_v}\right) \cdot k_L \cdot B$$

Die <u>Gesamtkosten</u> betragen damit:

$$K = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_v}\right) \cdot B \cdot k_L + k_R \cdot \frac{B}{x}$$

Überblick

Lagertyp	Kostenfunktion
Offenes Staulager	$K(x)=\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{x_v}-\frac{1}{x_p}\right)\cdot k_L\cdot B+k_R\cdot\frac{B}{x}$
Offenes Zerreißlager	$K(x)=\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{x_p}-\frac{1}{x_v}\right)\cdot k_L\cdot B+k_R\cdot\frac{B}{x}$
Geschlossenes Staulager	$K(x)=\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{x_p}+\frac{1}{x_v}\right)\cdot k_L\cdot B+k_R\cdot\frac{B}{x}$
Geschlossenes Zerreißlager	$K(x)=\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{x_p}+\frac{1}{x_v}\right)\cdot k_L\cdot B+k_R\cdot\frac{B}{x}$

Aufgabe

Ein Unternehmen stellt in einem zweistufigen, geschlossenen Fertigungsprozess eine Produktart her. Die erste Fertigungsstufe produziert bei Inanspruchnahme x_p = 150 ME/ZE, die zweite x_v = 100 ME/ZE. Für das zwischen den Stufen aufgrund der nicht-synchronen Produktionsrate entstehende Lager werden je ME und ZE k_L = 4 GE an Lagerhaltungskosten berechnet. Jeder Rüstvorgang auf der ersten Stufe würde $k_{R,I}$ = 500 GE und auf der zweiten Stufe $k_{R,II}$ = 750 GE kosten.

a) Verdeutlichen Sie grafisch den prinzipiellen Lagerbestandsverlauf sowie die Lagerzugangs- und -abgangsfunktionen für die Auflage von zwei Losen! Kennzeichnen Sie die Produktionszeit t_p, die Verbrauchszeit t_v und die freie Zeit t_f der Stufen, die Höhe der Losgröße x und den maximalen (L_{max}) und durchschnittlichen (L_d) Lagerbestand!
b) Leiten Sie unter Verwendung der oben angegebenen Symbole die Formel für die optimale Losgröße bei isolierter Sicht der beiden Stufen her!
c) Geben Sie die theoretischen Optimalwerte für die Losgröße, die Produktionszeit, die Verbrauchszeit und die freie Zeit sowie die Kosten je Los an!

Aufgabe - Lösung

c) $x_{opt} = \sqrt{\frac{2 * 500}{\left(\frac{1}{150}+\frac{1}{100}\right)*4}} = 122{,}47$

$t_p = \frac{122{,}47}{150} = 0{,}816$ $\qquad t_v = \frac{122{,}47}{100} = 1{,}225$ $\qquad t_f = t_v - t_p = 0{,}409$

Kosten je Los: $K_{L,Los} = \frac{122{,}47^2}{2} * \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{100}\right) * 4 = 499{,}963 \approx k_{RI} = 500$

$$K_{L,Los} = 499{,}964 + 500 = 999{,}963$$

Literatur

Bloech, J. et al.: Einführung in die Produktion, 6. Auflage, Springer, Heidelberg 2008, S. 266-272.

Bogaschewsky, R.: Losgröße, in: Kern, W. et al. (Hrsg.): Handwörterbuch der Produktionswirtschaft, 2. Auflage, Schäffer Poeschel, Stuttgart 1996, Sp. 1141-1150.

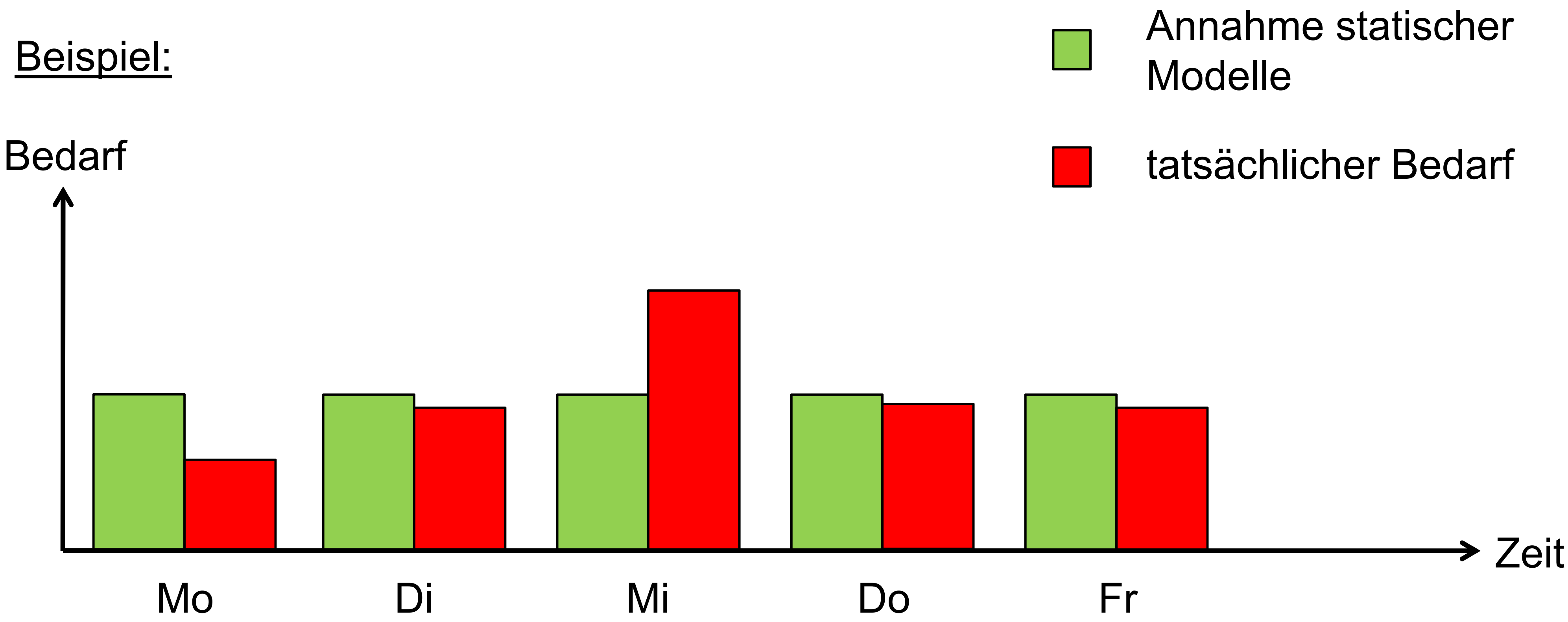
S. 116-125.

Dynamische Bestellmengenplanung

Problemstellung

Das statische Modell der optimalen Bestellmenge geht von einem konstanten Bedarf im Zeitablauf aus. In realen Anwendungssituationen schwanken Bedarfe in der Regel aber im Zeitablauf:

<u>Beispiel:</u>

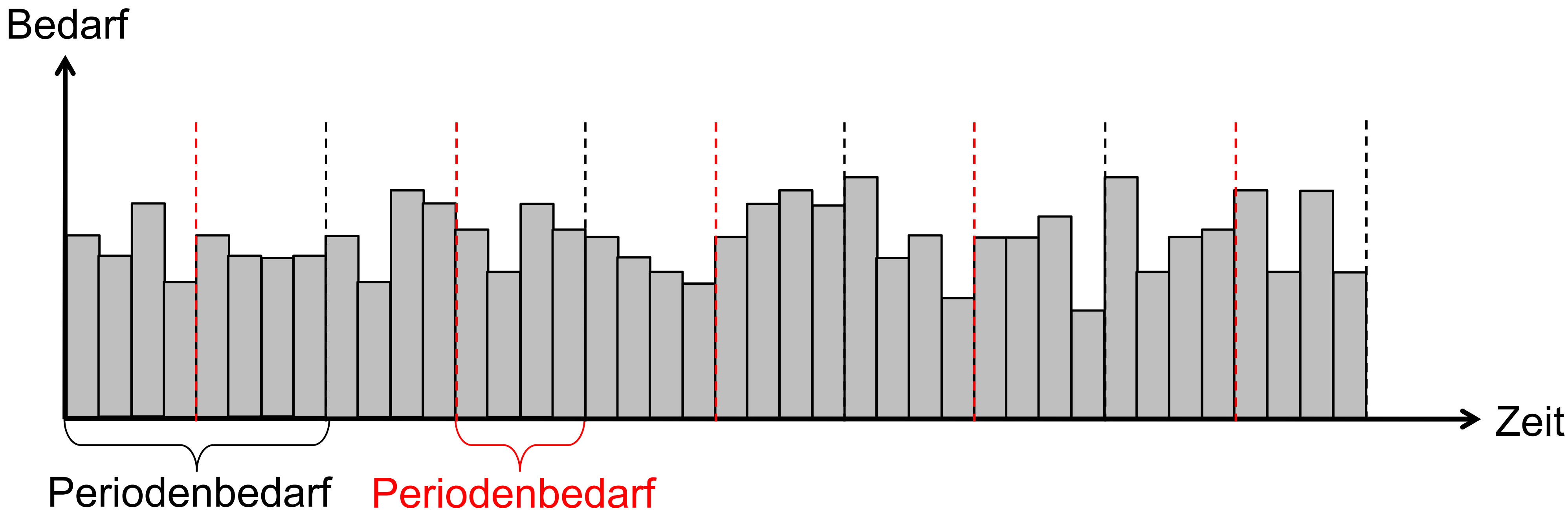


Annahmen dynamischer Modelle

<u>Annahmen des Grundmodells:</u>

- Die Verbrauchsrate schwankt innerhalb des Planungszeitraums.
- Keine Unsicherheit bezüglich der Daten.
- Isolierte Betrachtung einzelner Produktionsfaktoren.
- Der Gesamtbedarf im Planungszeitraum (B) ist vorgegeben.
- Lagerbestände zum Beginn und zum Ende des Planungszeitraums sind null.
- Unterteilung des Planungszeitraums in P Teilperioden mit gegebenem Periodenbedarf B_P.
- Lieferungen sind nur zu Beginn einer Teilperiode möglich.
- Weitere Restriktionen (Lagerraum, Handlingkapazität etc.) werden nicht berücksichtigt.

Wahl der Periodenlänge



Welche Faktoren sind bei der Periodeneinteilung zu berücksichtigen?

- Bedarfsverlauf
- Entwicklung der Kostenparameter im Zeitablauf
- potenzielle Liefertermine

Wahl der Periodenlänge

<u>Abwägung:</u>

viele, relativ kleine Teilperioden:
- genauere Abbildung des Bedarfsverlaufs
- genauere Berücksichtigung der Entwicklung der Kostenparameter
- relativ hoher Rechenaufwand
- Berücksichtigung vieler potenzieller Liefertermine

wenige, relativ lange Teilperioden:
- ungenaue Abbildung des Bedarfsverlaufs
- ungenaue Berücksichtigung der Entwicklung der Kostenparameter
- geringer Rechenaufwand
- Berücksichtigung nur weniger potenzieller Liefertermine

Grundproblem

Verfahrensarten

optimierende Verfahren

Verfahren von Wagner/Whitin

Heuristiken

- gleitende wirtschaftl. Losgröße
- Vergleichswertmethode
- Kostenausgleichsverfahren
- Part-Period-Algorithmus
- Verfahren von Silver/Meal

Das Modell von Wagner-Whitin

Das Modell von Wagner/Whitin

Optimierungsproblem:

Zielfunktion:

$$K = \sum_{p=1}^{P} K_p\left(x_p, L_{p+1}\right) \rightarrow \text{Min!}$$

Nebenbedingungen:

$$K_p\left(x_p, L_{p+1}\right) = y_p\left(x_p\right) \cdot k_{B,p} + L_{p+1} \cdot q \cdot z_p$$

$$y_p\left(x_p\right) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x_p = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x_p > 0 \end{cases}$$

$$L_{p+1} = L_p + x_p - B_p$$

$$x_p \geq 0$$

$$L_p \geq 0$$

mit:

K_p	entscheidungsrelevante Kosten in der Teilperiode p
x_p	Bestellmenge zu Beginn der Teilperiode p
L_{p+1}	Lagerbestand zu Beginn der Teilperiode p+1 (= Lagerbestand am Ende der Teilperiode p)
y_p	Bestellhäufigkeit in der Teilperiode p
$k_{B,p}$	Bestellkostensatz in der Teilperiode p
q	Preis des Produkts
z_p	kalkulatorischer Zinssatz in der Teilperiode p

Lösungsansatz

Grundüberlegungen:

- Bestellungen erfolgen nur für Perioden, deren Bedarf nicht durch den vorhandenen Lagerbestand gedeckt werden kann.
- Die Bestellmengen entsprechen genau einem Periodenbedarf oder der Summe mehrerer aufeinander folgender Periodenbedarfe.

Vorgehensweise:

1. Durchführung einer Vorwärtsrekursion, um die Kosten unterschiedlicher Bestell-strategien zu ermitteln.
2. Durchführung einer Rückwärtsrekursion, um die optimale Bestellstrategie festzu-legen

Rechentabelle im Verfahren von Wagner-Whitin

Bedarfsperioden

Bestellperioden

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2		$K(x_{2,2})$	$K(x_{2,3})$				
3							
4							
5							
6							
7							

Werden nicht mit Werten befüllt.

$x_{2,2}$ = Bestellung in Periode 2 für Periode 2

$x_{2,3}$ = Bestellung in Periode 2 für Periode 2 und 3

Vorwärtsrekursion vs. Rückwärtsrekursion

Vorwärtsrekursion

Berechnung der $x_{i,j}$-Werte →

	1	2	3	4	5	6	7
1	$K(x_{1,1})$	$K(x_{1,2})$	$K(x_{1,3})$	$K(x_{1,4})$	$K(x_{1,5})$	$K(x_{1,6})$	$K(x_{1,7})$
2		$K(x_{2,2})$	$K(x_{2,3})$	$K(x_{2,4})$	$K(x_{2,5})$	$K(x_{2,6})$	$K(x_{2,7})$
3			$K(x_{3,3})$	$K(x_{3,4})$	$K(x_{3,5})$	$K(x_{3,6})$	$K(x_{3,7})$
4				$K(x_{4,4})$	$K(x_{4,5})$	$K(x_{4,6})$	$K(x_{4,7}^{*})$
5					$K(x_{5,5})$	$K(x_{5,6})$	$K(x_{5,7})$
6						$K(x_{6,6})$	$K(x_{6,7})$
7							$K(x_{7,7})$

← Auswahl optimaler $x_{i,j}$-Werte

Theorem des verkürzten Planungshorizonts

Wenn der Bedarf B_t der Periode t durch Bestellungen von x_b in Periode b kostenminimal gedeckt werden kann, werden auch alle Bedarfe B_b, B_{b+1}, …, B_{t-1} durch x_b kostenminimal abgedeckt. Ist eine Bestellung x_τ in Periode τ mit τ < b nicht günstiger als eine Bestellung in b, dann kann eine Bestellung in τ für Bedarfe über t hinaus nicht günstiger sein als der Einkauf in b.

Bestell-periode	Bedarfsperiode				
	1	2	3	4	5
1	70	115	215		
2		140	190		
3			185	230	340
4				255	310
5					300

kann nicht optimal sein

Beispiel

In einem Unternehmen liegen die folgenden Bedarfszahlen B_t einer Materialart für die sechs Perioden des Planungszeitraums vor:

t	1	2	3	4	5	6
B_t	100	20	30	120	90	10

Es sollen nur komplette Periodenbedarfsmengen bestellt werden. Die Lieferung erfolgt zum Beginn der Lieferperiode, wobei das benötigte Material sofort verfügbar ist. Jede Bestellung bzw. Lieferung verursacht fixe Kosten in Höhe von k_B = 100 Geldeinheiten [GE]. Für die Lagerhaltung sind je Mengeneinheit und Periode k_L = 0,5 GE zu verrechnen.

Ermitteln Sie die Bestellmengen und die anfallenden entscheidungsrelevanten Kosten unter Einsatz des Wagner-Whitin-Algorithmus!

Lösung der Beispielaufgabe

	1	2	3	4	5	6
1	100	110	140	320		
2		200	215			
3			210	270		
4				240	285	295*
5					340	345
6						385

Literatur

Bloech, J. et al.: Einführung in die Produktion, 6. Auflage, Springer, Berlin 2008, S. 231-238.

Bogaschewsky, R.: Dynamische Materialdisposition im Beschaffungsbereich, Bundesverband Materialwirtschaft, Einkauf und Logistik, Frankfurt 1988, S. 31-50.

Kistner, K.-P.; Switalski, M.: Dynamische Losgrößenmodelle, in: Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 17. Jg., Nr. 7, 1988, S. 335-341.

S. 98-106

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Heuristiken

Problemstellung

Das Verfahren von Wagner-Whitin kann in Abhängigkeit von der Planungssituation zu einem hohen Rechenaufwand führen. Aus diesem Grund werden insbesondere bei komplexen Planungssituationen Heuristiken eingesetzt, die Näherungslösungen bestimmen.

<u>Vorteil:</u>
Der Rechenaufwand kann reduziert werden und die Planung wird erleichtert.

<u>Nachteil:</u>
Die Heuristiken führen ggf. zu schlechten Ergebnissen.

Gleitende wirtschaftliche Losgröße

Grundidee:
Im statischen Grundmodell liegt das Minimum der Gesamtkosten bei der gleichen Bestellmenge wie das Minimum der Stückkosten. Diese Eigenschaft wird auf das dynamische Modell übertragen.

Vorgehensweise:
Ausgehend vom Beginn des Planungszeitraums wird durch Vergleich der Stückkosten bei Hinzunahme eines weiteren Periodenbedarfs zu einer potenziellen Bestellmenge das Minimum der Stückkosten gesucht.

Gleitende wirtschaftliche Losgröße

Berechnung der Stückkosten:

$$k_{b,l} = \frac{k_B + k_L \cdot \sum_{t=b+1}^{l} (t-b) \cdot B_t}{\sum_{t=b}^{l} B_t}$$

Optimalitätskriterium:

$$k_{b,l^*-1} \geq k_{b,l^*} < k_{b,l^*+1}$$

b: Bestell- und Lieferperiode
l: letzte in die Bestellung einbezogene Bedarfsperiode

Beispiel

In einem Unternehmen liegen die folgenden Bedarfszahlen B_t einer Materialart für die sechs Perioden des Planungszeitraums vor:

t	1	2	3	4	5	6
B_t	100	20	30	120	90	10

Es sollen nur komplette Periodenbedarfsmengen bestellt werden. Die Lieferung erfolgt zum Beginn der Lieferperiode, wobei das benötigte Material sofort verfügbar ist. Jede Bestellung bzw. Lieferung verursacht fixe Kosten in Höhe von k_B = 100 Geldeinheiten [GE]. Für die Lagerhaltung sind je Mengeneinheit und Periode k_L = 0,5 GE zu verrechnen.

Ermitteln Sie die Bestellmengen und die anfallenden entscheidungsrelevanten Kosten unter Einsatz des Verfahrens der gleitenden wirtschaftlichen Losgröße!

Vergleichswertmethode

Grundidee:
Das Optimalitätskriterium der gleitenden wirtschaftlichen Losgröße wird umgeformt, um eine einfachere Bestimmung von Bestellmengen und Bestellzeitpunkten zu ermöglichen.

Vorgehensweise:
Ausgehend vom Beginn des Planungszeitraums werden so lange Periodenbedarfe zu einer Bestellmenge aggregiert, bis der gewichtete Bedarf einen fixen Vergleichswert überschreitet.

Vergleichswertmethode

Berechnung der Vergleichswerte:

$$\sum_{t=b}^{l} (l-t) \cdot B_t \leq \frac{k_B}{k_L}$$

Beispiel

In einem Unternehmen liegen die folgenden Bedarfszahlen B_t einer Materialart für die sechs Perioden des Planungszeitraums vor:

t	1	2	3	4	5	6
B_t	100	20	30	120	90	10

Es sollen nur komplette Periodenbedarfsmengen bestellt werden. Die Lieferung erfolgt zum Beginn der Lieferperiode, wobei das benötigte Material sofort verfügbar ist. Jede Bestellung bzw. Lieferung verursacht fixe Kosten in Höhe von k_B = 100 Geldeinheiten [GE]. Für die Lagerhaltung sind je Mengeneinheit und Periode k_L = 0,5 GE zu verrechnen.

Ermitteln Sie die Bestellmengen und die anfallenden entscheidungsrelevanten Kosten unter Einsatz des Verfahrens der Vergleichswertmethode!

Kostenausgleichsverfahren

<u>Grundidee:</u>
Im statischen Grundmodell entsprechen sich die Lagerhaltungs- und Bestellkosten im Optimum, d. h. es gilt $K_L = K_B$. Diese Eigenschaft wird auf das dynamische Modell übertragen.

<u>Vorgehensweise:</u>
Ausgehend vom Beginn des Planungszeitraums werden so lange Periodenbedarfe zu einer Bestellmenge aggregiert, bis die Lagerhaltungskosten die Bestellkosten überschreiten. Die Bedarfsmenge der letzten Periode, die zu einem Überschreiten der Bestellkosten führt, wird der neuen Bestellung zugerechnet.

Kostenausgleichsverfahren

Optimalitätskriterium:

$$k_L \cdot \sum_{t=b}^{l^*} (t-b) \cdot B_t \leq k_B < k_L \cdot \sum_{t=b}^{l^*+1} (t-b) \cdot B_t$$

Optimalitätskriterium Part-Period-Algorithmus:

$$\sum_{t=b}^{l^*} (t-b) \cdot B_t \leq \frac{k_B}{k_L} < \sum_{t=b}^{l^*+1} (t-b) \cdot B_t$$

Beispiel

In einem Unternehmen liegen die folgenden Bedarfszahlen B_t einer Materialart für die sechs Perioden des Planungszeitraums vor:

t	1	2	3	4	5	6
B_t	100	20	30	120	90	10

Es sollen nur komplette Periodenbedarfsmengen bestellt werden. Die Lieferung erfolgt zum Beginn der Lieferperiode, wobei das benötigte Material sofort verfügbar ist. Jede Bestellung bzw. Lieferung verursacht fixe Kosten in Höhe von k_B = 100 Geldeinheiten [GE]. Für die Lagerhaltung sind je Mengeneinheit und Periode k_L = 0,5 GE zu verrechnen.

Ermitteln Sie die Bestellmengen und die anfallenden entscheidungsrelevanten Kosten unter Einsatz des Part-Period-Algorithmus!

Silver-Meal-Heuristik

Grundidee:
Im statischen Grundmodell sind im Optimum die durchschnittlichen Kosten je Zeiteinheit minimal.

Vorgehensweise:
Ausgehend vom Beginn des Planungszeitraums werden so lange Periodenbedarfe zu einer Bestellmenge aggregiert, bis die Kosten je Zeiteinheit erstmalig ansteigen. Die Bedarfsmenge der letzten Periode, die zu einem Anstieg der durchschnittlichen Kosten führt, wird der neuen Bestellung zugerechnet.

Silver-Meal-Heuristik

Berechnung der Kosten je Zeiteinheit:

$$k_{b,l}^{(z)} = \frac{k_B + k_L \cdot \sum_{t=b}^{l} (t-b) \cdot B_t}{l - b + 1}$$

Optimalitätskriterium:

$$k_{b,l^*-1}^{(z)} \geq k_{b,l^*}^{(z)} < k_{b,l^*+1}^{(z)}$$

Beispiel

In einem Unternehmen liegen die folgenden Bedarfszahlen B_t einer Materialart für die sechs Perioden des Planungszeitraums vor:

t	1	2	3	4	5	6
B_t	100	20	30	120	90	10

Es sollen nur komplette Periodenbedarfsmengen bestellt werden. Die Lieferung erfolgt zum Beginn der Lieferperiode, wobei das benötigte Material sofort verfügbar ist. Jede Bestellung bzw. Lieferung verursacht fixe Kosten in Höhe von k_B = 100 Geldeinheiten [GE]. Für die Lagerhaltung sind je Mengeneinheit und Periode k_L = 0,5 GE zu verrechnen.

Ermitteln Sie die Bestellmengen und die anfallenden entscheidungsrelevanten Kosten unter Einsatz des Verfahrens von Silver/Meal!

Literatur

Bloech, J. et al.: Einführung in die Produktion, 6. Auflage, Springer, Berlin 2008, S. 226-231

Bogaschewsky, R.: Dynamische Materialdisposition im Beschaffungsbereich, Bundesverband Materialwirtschaft, Einkauf und Logistik, Frankfurt 1988, S. 50-59.

Kistner, K.-P.; Switalski, M.: Dynamische Losgrößenmodelle, in: Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 17. Jg., Nr. 7, 1988, S. 335-341.

S. 107-112.

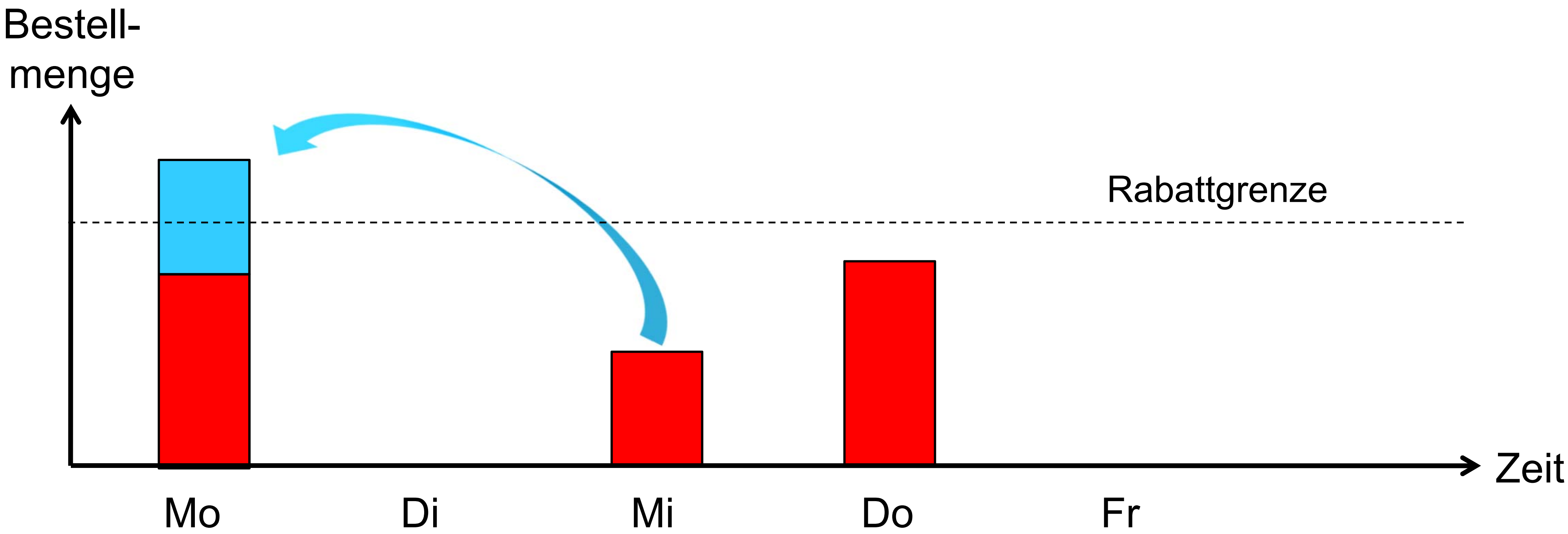
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Berücksichtigung variabler Preise im dynamischen Bestellmengenmodell

Problemstellung

Sind Preise bestellmengenabhängig und damit im Zeitablauf variabel, so kann das Verfahren von Wagner-Whitin nicht ohne Erweiterung angewandt werden, da evtl. Materialkostenvorteile durch Wahrnehmung von Rabatten bei einem vorzeitigen Abbruch der Alternativenvergleiche nicht erkannt werden könnten.

Beispiel:



Modellerweiterung

Einbeziehung der Materialkosten:

$$K_{EV,t} = x_t \cdot q_t(x_t)$$

Anpassung des Lagerhaltungskostensatzes:

$$k_{L,t} = z \cdot q_t(x_t) + k_{Lm}$$

Auch der durchschnittliche Periodenlagerbestand $B_t/2$ ist nun zu berücksichtigen!

Theorem des verkürzten Planungshorizonts

Liegen mengenabhänige Preise vor, so gilt die folgende Abwandlung:

Wenn der Bedarf B_t der Periode t durch Bestellungen von x_b in Periode b kosten-minimal gedeckt werden kann, werden auch alle Bedarfe B_b, B_{b+1}, …, B_{t-1} durch x_b kostenminimal abgedeckt. Ist eine Bestellung x_τ in Periode τ mit $\tau < b$ nicht günstiger als eine Bestellung in b *und wäre die höchste Rabattklasse bei einer potenziellen Bestellung x_τ für Bedarfe bis Periode t erreicht*, dann kann eine Bestellung in τ für Bedarfe über t hinaus nicht günstiger sein als der Einkauf in b.

Bestell-periode	Bedarfsperiode				
	1	2	3	4	5
1	70	115	215		
2		140	190		
3			185	230	340
4				255	310
5					300

Abbruch nur dann, wenn die niedrigste Rabattstufe bereits erreicht wurde.

Überlegungen zur Optimalität

Problem: Im erweiterten Planungsansatz von Wagner-Whitin werden nur komplette Periodenbedarfe bestellt, die Realisierung von Rabattgrenzen wird jedoch nicht berücksichtigt.

Was passiert, wenn Bestellmengen geordert werden, die einer Rabattgrenze, nicht jedoch der Summe aufeinander folgender Periodenbedarfe entsprechen?

→ Der Rabatt kann in Anspruch genommen werden und das Einkaufsvolumen wird reduziert.
→ Die Restmenge, d.h. die Differenz aus Periodenbedarf und zusätzlich bestellter Menge, muss für eine Folgeperiode separat bestellt werden, wodurch zusätzliche Bestellkosten anfallen.

Beispiel

In einem Unternehmen liegen die folgenden Bedarfszahlen B_t einer Materialart für die sechs Perioden des Planungszeitraums vor:

t	1	2	3	4	5	6
B_t	100	20	30	120	90	10

Es sollen nur komplette Periodenbedarfsmengen bestellt werden. Die Lieferung erfolgt zum Beginn der Lieferperiode, wobei das benötigte Material sofort verfügbar ist. Jede Bestellung bzw. Lieferung verursacht fixe Kosten in Höhe von k_B = 100 Geldeinheiten [GE]. Der Preis je Mengeneinheit beträgt 100 GE für Bestellmengen unter 150 ME und 95 GE für Bestellungen ab 150 ME. Der Zinssatz beträgt 4%, Kosten der physischen Lagerhaltung sind zu vernachlässigen.

Ermitteln Sie die Bestellmengen und die anfallenden entscheidungsrelevanten Kosten unter Einsatz des Verfahrens von Wagner-Whitin!

Lösung zur Beispielaufgabe zu Wagner-Whitin mit Rabatten

	1	2	3	4	5	6
1	10300 ←	12420 ←	14939 ←	27935	VPH	VPH
2		12440	15620	27899	VPH	VPH
3			15580	27511	36916	VPH
4				27279 ←	35730 ←	36775*
5					36559	37619
6						36850

Literatur

Bogaschewsky, R.: Dynamische Materialdisposition im Beschaffungsbereich, Bundesverband Materialwirtschaft, Einkauf und Logistik, Frankfurt 1988, S. 48-49.

S. 112-115.