线性代数与解析几何 B 2023 年 6 月 14 号

一、（每小题 2 分，共 20 分）选择题

1. 设 A 为三阶可逆矩阵，将 A 的第 1 列加到第 2 列得到 B，再将 B 的第 2 行的 -1 倍加到第 1 行得到 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^*=$（　　）

（A）$P^{-1}C^*P^{-1}$　（B）PC^*P^{-1}　（C）PC^*P^T　（D）P^TC^*P

2. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵，下列选项中正确的是（　　）

（A）$|-A|=-|A|$　（B）$|A+B|=|A|+|B|$

（C）$\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}=|A+B|\cdot|A-B|$　（D）$\begin{vmatrix}O&B\\A&A\end{vmatrix}=-|A|\cdot|B|$

3. 下列选项正确的是（　　）

（A）若 AB 可逆，则 A 和 B 都可逆，　（B）若 A 和 B 都可逆，则 $A+B$ 可逆，

（C）若 $ABC=E$ 可逆，则 $BAC=E$　（D）若 A 可逆，则 A^* 可逆，

4. 设 $Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&k\\3&6&9\end{pmatrix}$，$P$ 为三阶非零矩阵，$PQ=O$，则（　　）是正确的

（A）若 $k\neq 6$ 时，P 的秩必为 1　（B）若 $k\neq 6$ 时，P 的秩必为 2

（C）若 $k=6$ 时，P 的秩必为 1　（D）若 $k=6$ 时，P 的秩必为 2

5. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 A^TA 可逆的充要条件是（　　）

（A）A 的行向量组线性无关　（B）A 的行向量组线性相关

（C）A 的列向量组线性无关　（D）A 的列向量组线性相关

6. 已知 η_1,η_2,η_3 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则方程组 $Ax=0$ 的基础解系还可取为（　　）

（A）$\eta_1-\eta_2,\eta_2-\eta_3,\eta_3-\eta_1$　（B）$\eta_1+2\eta_2,\eta_2+2\eta_3,\eta_1+\eta_3$

（C）与 η_1,η_2,η_3 等秩的向量组　（D）与 η_1,η_2,η_3 等价的向量组

7. 向量空间 $V=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T \mid x_1-x_2+3x_4=0\right\}$ 的维数为（　　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

8. 设 A 为三阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的三元列向量组，$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2, A\alpha_3=-\alpha_3$，记 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $P=$（　　）

（A）$(-\alpha_3,2\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2)$　（B）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

（C）$(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3)$　　（D）$(\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_1)$

9. 设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在可逆变换 $x=Py$ 下化成标准形 $-2y_2^2+3y_3^2$，要使二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在可逆变换 $x=Qz$ 下化成标准形 $z_1^2-z_2^2$，则 $Q=$（　　）

（A）$(\frac{1}{3}\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\alpha_3)$　　（B）$(3\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3)$

（C）$(\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_3,\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2,\alpha_1)$　　（D）$(\sqrt{3}\alpha_3,\sqrt{2}\alpha_2,\alpha_1)$

10. 设方阵 A 与 B 等价，则下列选项中不一定等价的是（　　）

（A）$\begin{pmatrix} A & A \\ O & A^T \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & O \\ B & B^T \end{pmatrix}$　　（B）A^* 与 B^*

（C）AA^T 与 B^TB　　（D）$A+A^T$ 与 $B+B^T$

B 一、BCDAC BCACD

二、（每小题 3 分，共 30 分）填空题

1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & k \end{pmatrix},AB=BA$，则 $k=$____

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是三元列向量，$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=1$，则 $|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_3|=$______

3. 设 A,B,C 都是三阶方阵，A 和 B 都可逆，则 $\begin{pmatrix} O & B \\ A & C \end{pmatrix}^{-1}=$________

4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$b_1=k\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$b_2=\alpha_1+k\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，，$b_3=\alpha_1+\alpha_2+k\alpha_3+\alpha_4$ $b_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4$，向量组 b_1,b_2,b_3,b_4 线性相关，$k\neq 1$，则 $k=$______

5. 经过点 $(1,3,0)$ 且垂直于直线 $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ y+z=3 \end{cases}$ 的平面方程为________________

6. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_2)$，$\alpha_1,\alpha_2$ 为线性无关的三元列向量，则方程组 $Ax=\alpha_1+\alpha_2$ 的通解为_________

7. 已知向量组 α_1,α_2 和 β_1,β_2 都是向量空间 V 的基，$\alpha_1=-2\beta_1+\beta_2$，$\alpha_2=3\beta_1-\beta_2$，则从基 α_1,α_2 到基 β_1,β_2 的过渡矩阵为____________

8. 设四阶方阵 A 和 B 相似，A 的各行元素之和都是 3，$|A|=0,r(E-B)=2$，则 $|A^2+E|=$________

9. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+x_2^2+4x_3^2-2kx_2x_3$ 为正定二次型的充分必要是 k 满足_________

10. 设四阶方阵 A 和 4 元列向量 u 满足 $A^3u\neq 0,A^4u=0,$ 则 $r(A)=$________

答案：二、1. $\underline{5}$　2. $\underline{4}$　3. $\begin{pmatrix} -A^{-1}CB^{-1} & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$　4. $\underline{-3}$　5. $\underline{3x-y+z=0}$

6. $\underline{k(1,3,-1)^T+(1,1,0)^T}$　7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　8. $\underline{40}$　9. $\underline{0<k<2}$　10. $\underline{3}$

三（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$2XA^{-1}=AXA^{-1}+E$，求 X.

解：由 $2XA^{-1}=AXA^{-1}+E$，得 $(2E-A)XA^{-1}=E$，$X=(2E-A)^{-1}A$　…………4 分

$(2E-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$…………4 分　　$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$…………2 分

四（10 分）已知方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-x_2-x_3=-3 \\ 3x_1+x_2+mx_3=k \end{cases}$ 有无穷多个解，

（1）求 m 和 k 的值；（2）求该方程组的通解

解：（1）$\left[A,b\right]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & m & k \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-6 & k-3 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & k+2 \end{bmatrix}$…………4 分

当 $m=1,k=-2$ 时，该方程组有无穷多个解.　…………2 分

（2）该方程组的通解为 $x=c\left[0,-1,1\right]^T+\left[-1,1,0\right]^T$　…………4 分

五（12 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，（1）求正交矩阵 Q 和对角矩阵 A，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.（2）设 $u=(x,y,z)^T$，试问方程 $u^TAu=1$ 表示什么曲面？

解：（1）$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2-2(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$

A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$　………3 分

$\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $p_1=\left[1,0,1\right]^T$，$\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $p_2=\left[-1,-1,1\right]^T$，

$\lambda_3=-1$ 对应的特征向量为 $p_3=\left[-1,2,1\right]^T$，　………3 分

单位化，得 $q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1,0,1\right]^T,q_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[-1,-1,1\right]^T,q_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[-1,2,1\right]^T$　………2 分

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}, \Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{bmatrix}$$ ………2 分

（2） 方程 $\boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{u}=1$ 在正交变换 $u=\boldsymbol{Q}v$ 下化成为 $x_1^2+2y_1^2-z_1^2=1$，

为单叶双曲面 ………2 分

六（10 分）求向量组 $\boldsymbol{a}_1=[1,0,-1,1]^T,\boldsymbol{a}_2=[2,-1,-2,1]^T,\boldsymbol{a}_3=[1,1,-1,2]^T,\boldsymbol{a}_4=[0,2,-2,-6]^T$ 的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

解：$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-1&1&2\\-1&-2&-1&-2\\1&1&2&-6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-1&1&2\\0&0&0&-2\\0&-1&1&-6\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-1&1&2\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ ………4 分

秩为 3 ………2 分

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 是一个极大无关组 ………2 分

$\boldsymbol{a}_3=3\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$ ………2 分

七（8 分）设方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 不可逆，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，a_{11} 的代数余子式 $A_{11}\neq 0$，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，证明：$\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系。

证：由 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 不可逆及 $A_{11}\neq 0$ 可知，$|\boldsymbol{A}|=0,\ r(\boldsymbol{A})=n-1.$ ………2 分

$r(\boldsymbol{A}^*)=1.$ ………1 分

$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 $n-1$ 个向量。 ………1 分

由 $A_{11}\neq 0$ 可知，$\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关. ………2 分

由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 可知，$\boldsymbol{A}$ 的列向量都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

综上所述可知，$\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.