总复习

一 行列式：

1， 定义(3个特点),10种特殊类型

2， 行列式的性质(6+3)

3，行列式的展开(两种展开方式， 三个定理)

二 矩阵

1，矩阵的运算：6种基本运算
- 1，加法 } 8条运算规律
- 2，数乘 } 8条运算规律
- 3，乘法 5条运算规律
- 4，转置
- 5，对称(反对称)矩阵
- 6，分块矩阵

2, $A_{n\times n}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ R(A)=n $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A^*$ 可逆 $\Leftrightarrow AX=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow A$ 与 E 等价 $\Leftrightarrow$ A的列(行)向量组线性无关

$\Leftrightarrow A$行(列)满秩 $\Leftrightarrow$ 特征值不为零

$\Leftrightarrow A$可以表示成一系列初等矩阵的乘积

3 秩
- 矩阵的秩
- 向量组的秩
- 二次型的秩

区别
- 定义
- 性质
- 判别方法

4，矩阵之间的关系

$$\begin{cases} \text{等价}\quad PAQ = B \quad \text{三个充要条件, 等价标准形的合理运用} \\ \text{相似}\quad P^{-1}AP = B \quad \text{五个必要条件，相似理论的应用} \\ \text{合同}\quad P^{T}AP = B \quad \text{三个保持} \begin{cases} \text{复数域上对称矩阵合同的充要条件} \\ \text{实数域上对称矩阵合同的充要条件} \end{cases} \end{cases}$$

5，矩阵的对角化

(1)普通矩阵　$P^{-1}AP = \Lambda$ (P,Λ的特点，如何求？)

一个定理，两个判别法则

(2)对称矩阵　$\mathrm{U}^{T}AU = \Lambda$　$(U^{T}U = E)$

6，特征值与特征向量

$$\text{性质，求法}\begin{cases} f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0 \quad \text{求特征值} \\ (\lambda E - A)X = 0 \qquad \text{求特征向量} \end{cases}$$

实对称矩阵的特征值与特征向量和普通矩阵的区别

7，一些特殊矩阵

1，对称与反对称矩阵(运算规律，实对称矩阵的特点)

2，可逆矩阵 (性质，求法，判断）

3，伴随矩阵 A^* ($AA^* = A^*A = |A|E$,由此得到一系列公式)

4，初等矩阵$E(\mathrm{i,j})$;$E(i(k))$;$E(i+j(k),j)$ (性质，定理）

5，过渡矩阵M,(($\eta_1 \cdots \eta_n$)=($\xi_1 \cdots \xi_n$)M ,坐标变换公式)

6，度量矩阵$\mathrm{A}_{n\times n}=\left[(\xi_i,\xi_j)\right]$, $\xi_1,\cdots,\xi_n$为V的一组基，特点

7，正交矩阵($A^TA=E \Leftrightarrow A^{-1}=A^T \Leftrightarrow A$的列向量组为$R^n$的一组标准正交基)

8，正定矩阵 (A为正定矩阵$\Rightarrow A = A^T$, A可逆，$a_{ii} > 0$)

A为正定矩阵$\Leftrightarrow f = X^TAX$为正定二次型

$\Leftrightarrow \lambda > 0 \Leftrightarrow A = B^TB$, B可逆$\Leftrightarrow \Delta_\mathrm{i} > 0$

$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数p=n

$\Leftrightarrow$ A与E合同

三，线性方程组的求解

1， 求 解 过 程

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{行变换}} \text{阶梯形} \xrightarrow[\text{如有解}]{\text{行变换}} \text{约化阶梯形}$$

2, 解的定理

$$\begin{cases} A_{m\times n}X=b & \begin{cases} R(A)\neq R(\overline{A}) \Rightarrow \text{无解} \\ R(A)=R(\overline{A})=\text{r} \Rightarrow \text{有解} \begin{cases} r=n \Rightarrow \text{唯一解} \\ r<n \Rightarrow \text{无穷多解，且有}n-r\text{个自由变量} \end{cases} \end{cases} \\ A_{m\times n}X=0 \ \ \text{设}R(A)=\text{r} & \begin{cases} r=n \Rightarrow \text{只有零解，即唯一解} \\ r<n \Rightarrow \text{有非零解，即有无穷多解，且有}n-r\text{个自由变量} \end{cases} \end{cases}$$

3，通解的表示

$$\begin{cases} A_{m\times n}X=0 \ \ \text{设}R(A)=\text{r}\text{，} \ \xi_1\cdots\xi_{n-r} \ \text{为一组基础解系(n-r=自由变量)} \\ \qquad \text{通解 } X=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r} \\ A_{m\times n}X=\text{b} \ \ \text{设}R(A)=R(\overline{A})=\text{r} \qquad \text{设}\eta^* \text{ 为一个特解，利用解的结构原理} \\ \qquad \text{通解 } X=\eta^*+(k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}) \end{cases}$$

四，两个空间

- 1，线性空间
  - 1，定义
  - 2，向量之间的关系(线性表示，线性相关性，正交性)
  - 3，基和维数dimV, 三个常用空间 $P^{n}, P^{m\times n}, P[X]_n$
  - 4, 子空间的判别及基，维数

- 2, 欧氏空间
  - 1，定义
  - 2, 内积，初等，夹角，正交向量组，标准正交基
  - 3，如何求标准正交基

五， 二 次 型

- 二 大 问 题
  - 1， 化 成 标 准 形
    - 配 方 法
    - 对 称 矩 阵 原 理
  - 2, 判 断 二 次 型 的 正 定 性

浙江大学2014-2015春夏 2015.7.8

1(10) $\begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \cdots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \cdots & a^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \cdots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix}$

$$\underset{c_1+a\sum_{i=2}^{n}c_i}{\overset{r_i-ar_{i-1}\ \mathrm{i}=n\cdots 2}{\rightleftarrows}}(-1)^n\left(x^n-x^{n-1}\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right)$$

2(15) (1) $|A_{3\times 3}|=-2$，求$\left|\left(\frac{1}{12}A\right)^{-1}+(3\mathrm{A})^*\right|$ $=108$

(2) A满足$A^3+3A+E=0$，求$(A+2E)^{-1}$ $=\frac{1}{13}(A^2-2A+7E)$

3(15)已知线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + ax_2 + bx_3 = c \end{cases}$有解$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T, \alpha_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}^T$求通解

解 利用解的结构原理，先求$AX = 0$的基础解系

显然 $R(A) \geq 2$

又 $\because$ $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ 是$AX = 0$的非零解 $\therefore R(A) \leq 2$

$\therefore R(A) = 2$ 且 β 是 $AX = 0$ 的基础解系

$\therefore$ 方程组的通解 $X = \alpha_1 + k\beta \quad k \in P$

5(15) 已知$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & b \end{bmatrix}$与$B = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & c \end{bmatrix}$相似，求$a,b,c$和$P$,使得$P^{-1}AP = B$

$a,b,c = 0,1,-2 \ \ or \ \ 1,0,-2$

当$a,b,c = 0,1,-2$ 时 $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，当$a,b,c = 1,0,-2$ 时 $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

4（15） 在 R^4 中两组基 (a) $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$，(b) $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$

其中 $\xi_1=[1,0,0,0]^T$，$\xi_2=[0,1,0,0]^T$ $\xi_3=[0,0,1,0]^T$ $\xi_4=[0,0,0,1]^T$

$\eta_1=[8,1,2,-7]^T$，$\eta_2=[5,4,2,-5]^T$，$\eta_3=[4,2,4,-4]^T$，$\eta_4=[8,2,3,-7]^T$

(1) 求从基 (a) 到基 (b) 的过渡矩阵

(2) 在 R^4 中另有一组基 (c)，求从基 (c) 到基 (b) 的过渡矩阵

$\varepsilon_1=[1,0,0,0]^T$，$\varepsilon_2=[1,1,0,0]^T$ $\varepsilon_3=[1,1,1,0]^T$ $\varepsilon_4=[1,1,1,1]^T$

(3) 在 R^4 中求向量 α，使得 α 在基 (a) 和基 (b) 下有相同的坐标

解 (1) $\because$ $(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)\begin{bmatrix}8&5&4&8\\1&4&2&2\\2&2&4&3\\-7&-5&-4&-7\end{bmatrix}=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)M_{12}$

(2) $\because$ $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)M_{13}$

$\therefore$ $(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)M_{13}^{-1}$

$\therefore$ $(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)M_{12}=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)M_{13}^{-1}M_{12}=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)M_{32}$

$$M_{32}=M_{13}^{-1}M_{12}=\begin{bmatrix}7&1&2&6\\-1&2&-2&-1\\9&7&8&10\\-7&-5&-4&-7\end{bmatrix}$$

(3) $\alpha=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)X=EX$

$=(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)X=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)M_{12}X$ $\quad\therefore (M_{12}-E)X=0$

求得基础解系 $\beta=[5,1,2,-6]^T$ $\quad\therefore \alpha=k\beta \quad k\in P$

6(15)已知$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+6x_2x_3$

求$f(x_1,x_2,x_3)$在条件$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$下的最大值

解 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & 3 \\ & 3 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=X^TAX$

求得A的特征值我0,2,6

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX \underset{U^TU=E}{\overset{X=UY}{\rightleftarrows}} Y^T\begin{bmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{bmatrix}Y=2y_2^2+6y_3^2\le 6(y_2^2+y_3^2)=6$$

取$Y_0=[0,0,1]^T$,则有$X_0=UY_0$且$\|X_0\|=\|Y_0\|=1$,使得

$f(X_0)=6 \quad \therefore f_{\max}=6=\max\{\lambda_i\}$

7（15）在R^3中取2015 个向量，如果每一个向量都是一个正数与其余向量之和的数乘，求这2015 个向量的和

解 由已知 $\alpha_{\mathrm{i}} = c_c \sum_{j=1(\neq i)}^{2015} \alpha_j \quad (i = 1 \cdots 2015) \quad c_i > 0$

$$\therefore -\frac{1}{c_i}\alpha_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j = 0 \qquad (i = 1 \cdots 2015)$$

上面可以看为关于 $\alpha_1 \cdots \alpha_{2015}$ 的线性方程组

$$\because 系数行列式 D = \begin{vmatrix} -\frac{1}{c_1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\frac{1}{c_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -\frac{1}{c_{2015}} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \ (i = 1 \cdots 2015)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{2015} \alpha_i = 0$$

8(7) 设$\left|A_{n\times n}\right|<0$证明

(1) 当n为偶数时，A的特征值既有正的特征值，又有负的特征值

(2)当n为奇数时，A必有负的特征值

证明 设$\lambda_1\cdots\lambda_t$为A的实特征值，

$u_1,\overline{u_1},\cdots u_s,\overline{u_s}$是$A$的复特征值 则 t+2s=n

则$|A|=(\lambda_1\cdots\lambda_t)(u_1\overline{u_1}\cdots u_s\overline{u_s})<0$

$\because\left|u_\mathrm{i}\overline{u_i}\right|>0\therefore(u_1\overline{u_1}\cdots u_s\overline{u_s})>0$

$\therefore\lambda_1\cdots\lambda_t<0$

$\therefore$当n为偶数时，t为奇数

当n为奇数时，t为偶数