线性代数往年期末试卷【含完整答案的新版本】

（包含 2004、2005、2007、2008、2009、2011、2012 年份试题）

大连理工大学

课程名称：线性代数与解析几何　　试卷：A　　考试形式：闭卷

授课院（系）：应用数学系　　考试日期：2008 年 1 月 8 日　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
标准分	20	10	8	10	12	14	6	10	10	100
得　分										

注：1.E 表示单位阵，$|A|$ 表示 A 的行列式，$r(A)$ 表示 A 的秩，A^{-1} 表示 A 的逆阵，A^T 表示 A 的转置矩阵，$tr(A)$ 表示 A 的迹。

一. 填空题（每题 2 分，共 20 分）。

1. 设 A 为三阶方阵，其列分块阵为 $A=[a_1, \ a_2, \ a_3]$，$|A|=2$，则 $|a_1+a_2, \ a_2, 3a_3|=$_

2. 设 A 为四阶方阵，$|A|=-1$，则 $|A^{-1}+2A^*|=$__________

3. 设从向量空间 V 的基底 u_1,u_2,u_3，到基底 v_1,v_2,v_3，的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，则从基底 v_1,v_2,v_3 到基底 u_1,u_2,u_3 的过度矩阵为__________

4. 已知 $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & k & -1 \end{bmatrix}$ 的特征值 λ 对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$，则 k=_______，$\lambda=$__

5. 若方阵 A 已知，且满足 $A^2-A+2E=0$，则 $(A+3E)^{-1}=$__________

6. Oxy 面上的曲线 $y^2+x=-5$ 绕 x 轴旋转所得的旋转面方程为_________________

7. 已知三个平面 $\pi_i: A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 (i = 1,2,3)$，记 $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$，

$B = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix}$，则三平面交于一条直线的充要条件是 $r(A)$ 和 $r(B)$ 满足__________

8. 设 3 阶方阵 A 满足 $r(E+A)=r(E-A)=r(2E+A)=2$，则 $|A+3E|=$__________

9.设 A 为 n×s 型矩阵，B 是秩为 k 的 n×k 型矩阵，且存在矩阵 P 使得 $B=AP$，则 $r(P)=$__________

二. (10 分)求向量组 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$a_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的秩，求其一个极大无关组，并求出其余向量所求极大无关组线性表示的表达式。

三. （8 分）设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，并且 $AB = 2B + C$，求矩阵 B。

四. （10 分）(1) 设 a_1, a_2, a_3 为线性无关向量组，数 k 使得 $4a_1 + a_2, a_2 - a_3, a_3 + ka_1$ 线性无关，确定 k 的取值范围（2）设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + x_2^2 + (a - \frac{1}{2})x_3^2 + 2ax_1x_2$ 是正定的，确定 a 的取值范围

五. （12 分）1. k 取何值时，方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 - x_3 = k-1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - kx_3 = k \end{cases}$ （1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？若存在无穷多解时，求方程组的通解。

六. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$相似，求可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$

七. 选择题（10 分）。

1. 设 A，B 为同阶非零实对称阵，则（　　）

A. AB 是实对称阵　　B. AB≠0

C. $|AB|=|BA|$　　D. AB 的特征值都是实数

2. 如果方阵 $A\neq 0$，那么（　　）

A. 若 $AB=AC$，则 $B=C$　　B. $r(A)\geq 1$

C. $|A|\neq 0$　　D. A 可逆

3. 一个矩阵 A 为正交阵的充要条件是（　　）

A. $A^TA=AA^T=E$　　B. A 的行向量组是标准正交向量组

C. $A^TA=E$　　D. A 的列向量组是正交向量组

4. 若可逆变换 $x=Py$ 将二次型 $f(x)=x^TAx$ 化为二次型 $g(y)=y^TBy$，则（　　）不正确

A. $P^TAP=B$　　B. $r(A)=r(B)$

C. $|AB|\geq 0$　　D. $P^{-1}AP=B$

5. 如果 4 阶实方阵 A 满足 $r(A)=2$，则（　　）

A. 方程组 $A^*x=0$ 的基础解系含有两个向量　　B. $r(A^*)=2$

C. 方程组 $A^{*}x=0$ 的解空间是 R^{4}　　　　D. A^{*} 可以是可逆矩阵

八.（10 分）1. 若实对称阵 A 满足 $A^{2}=E$，$|A|\prec 0$，证明 $A+kE$ 为正定矩阵的充分必要条件是 k>1。

2. 设 p_1 是 n×n 型方程组 $Ax=0$ 的一个非零解向量，若存在一组向量 $p_1,p_2,\cdots p_s$，满足 $Ap_i=p_{i-1},(i=2,\cdots,s)$，证明向量组 $p_1,p_2,\cdots p_s$ 线性无关。

2008 年期末参考答案

一、

1. 6
2. -1
3. $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$
4. -1，1
5. $-\dfrac{A-4E}{14}$
6. $y^{2}+z^{2}+x=5$ （5 改为-5）
7. $r(A)=r(B)$=2
8. 8
9. k

二、

解：设 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\begin{bmatrix}1&2&4&3&3\\-1&1&-1&1&-2\\1&-1&1&-1&2\\1&1&3&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&2&4&3&3\\0&3&3&4&1\\0&-3&-3&-4&-1\\0&-1&-1&-1&0\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_2+3r_4]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&2&4&3&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\\0&-1&-1&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{\substack{r_4\cdot(-1)\\ r_4\leftrightarrow r_2}}\begin{bmatrix}1&2&4&3&3\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-r_3\\ r_2-r_3}]{r_1-2r_2}\begin{bmatrix}1&0&2&0&2\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$ 的秩为 3，其中一个极大无关组为 a_1,a_2,a_4

$a_3=2a_1+a_2,a_5=2a_1-a_2+a_4$

三、

$$AB=2B+C \quad (A-2E)B=C \quad A-2E=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$(A-2E,C)=\begin{bmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&-1&3&0\\0&1&0&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&-1&3&0\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&2&1\\0&1&0&2&1\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore R=\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}$$

四、（1）设 $A=(a_1,a_2,a_3),B=(4a_1+a_2,a_2-a_3,a_3+ka_1)$

则 $B=AP$，其中 $P=\begin{bmatrix}4&0&k\\1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&-4&k\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&k-4\\0&0&0\end{bmatrix}$

A 线性无关，要使 B 线性无关，则 $r(P)=3$，$\therefore k\neq 4$

（2）设

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx,\text{其中}A=\begin{bmatrix}a&a&0\\a&1&0\\0&0&a-0.5\end{bmatrix}\text{为正定}$$

$$\therefore\begin{cases}|A_1|=a>0\\|A_2|=a-a^2>0\\|A_3|=(a-0.5)(a-a^2)>0\end{cases}\Rightarrow 0.5<a<1$$

五、设 $A=\begin{bmatrix}k&1&-1\\1&k&1\\1&1&-k\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}k-1\\1\\k\end{bmatrix}$

$$(A,b)=\begin{bmatrix}k&1&-1&k-1\\1&k&1&1\\1&1&-k&k\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-r_1\\r_3-kr_1}]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&-k&k\\0&k-1&k-1&1-k\\2&1-k&k^2-1&k-1-k^2\end{bmatrix}$$ （矩阵左下角的 2 改为 0）

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&-k&k\\0&k-1&k+1&1-k\\0&0&k^2+k&-k^2\end{bmatrix}$$

1. 当 $k^2+k\neq0$且$-k^2\neq0$时，即 $k\neq0$且$k\neq\pm1$时，有唯一解
2. 当 $k=\pm1$时，无解

3. 当 k=0时，有无穷多解。

$$(A,b)=\begin{bmatrix}0&1&-1&-1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\begin{cases}x_1=-x_3+1\\x_2=x_3-1\end{cases}$ $\therefore$ $Ax=b$ 的通解为 $\alpha\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

六、由题意 A 与 B 相似，∴A 的特征值为：$\lambda_1=4$(二重)，$\lambda_2=2$

当 $\lambda=\lambda_1=4$ 时，$(E-A)x=0$【E 的前面加系数 λ】的基础解系为：$P_{1=}$（1,1,0）^{T}；$P_2=(1,0,1)^T$

当 $\lambda=\lambda_2=2$ 时，$(E-A)x=0$【改错同上】的基础解系为：$P_3=(1,0,1)^T$

令 $P=(P_1,P_2,P_3)$，则 $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$

七、

1. C　　3. A　　5. C

2. B　　4. D

八、

1. $A^2=E,|A|^2=1$ 且 $|A|\prec 0,\therefore|A|=-1$ 设 A 的特征值为 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ A^2 的特征值为 λ_i^2

$\therefore\lambda_i^2=1,\lambda=\pm1,|A|=\lambda_1\cdots\lambda_n=-1$ $\therefore$ λ_i 不全为 1，存在-1

必要性：$A+kE$ 的特征值为 $\lambda+k$，$A+kE$ 为正定矩阵，$\therefore A+k\succ0,\therefore k\succ-\lambda$ 即 $k\succ1$

注意：【A+k>0 中的 A 改为 λ】

充分性：$\because k\succ1,\therefore\lambda+k\succ0,\therefore A+kE$ 为正定阵。

2. $AP_1=0$，$AP_i=P_{i-1}$ 令存在 $x_1\cdots x_s$，使 $x_1P_1+x_2P_2+\cdots+x_sP_s=0$

两边左乘 A 得：$x_1AP_1+x_2AP_2+\cdots+x_sAP_s=0$，$x_2P_1+x_3P_2+\cdots+x_sP_{s-1}=0$

两边左乘 A 得：$x_2AP_1+x_3AP_2+\cdots+x_sAP_{s-1}=0$，$x_3P_1+x_4P_2+\cdots+x_sP_{s-2}=0$

以此类推：$x_4P_1+x_5P_2+\cdots+x_sP_{s-3}=0$，$x_sP_1=0,P_1\neq0$，$\therefore x_s=0$

又由：$x_{s-1}P_1+x_sP_2=0$，$\therefore x_{s-1}=0$

以此类推：$x_s = x_{s-1} = \cdots x_1 = 0$， $\therefore P_1, P_2, \cdots P_S$ 线性无关。

大连理工大学

课程名称：线性代数与解析几何　　试卷：A　　考试形式：闭卷

授课院（系）：数学科学学院　　考试日期：2007 年 1 月 11 日　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
标准分	28	12	8	12	12	10	8	10	100
得　分									

一．填空题（每题 4 分，共 28 分）。

1. 设三阶方阵 A 的行列式 $\det(A) = -2$，则 A^{-1} 的行列式 $\det(A^{-1}) =$__________， A^k 的行列式 $\det(A^k) =$__________

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$， $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，则 $AB^T =$__________

3. 过点 $(1,1,1)$，且垂直于直线 $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{-4}$ 的平面方程为__________

4. 已知三元向量 $a_1 = (1, b_1, b_1^2)^T$，$a_2 = (1, b_2, b_2^2)^T$，$a_3 = (1, b_3, b_3^2)^T$ 线性相关，则 $b_i\ (i = 1,2,3)$ 应满足条件__________

5. 已知 R^3 的一组基为 $a_1 = (1,-1,1)^T$， $a_2 = (0,1,1)^T$， $a_3 = (-1,0,-1)^T$，则向量 $a = (2,1,3)^T$ 在基 a_1, a_2, a_3 下的坐标向量为__________

6. 设 A 与 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 相似，则 $A^2 + E$ 的行列式 $\det(A^2 + E) =$__________

7. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线在 OXY 面上的投影方程为__________

二．（8 分）求向量组 $a_1 = (1,0,0,1)^T$， $a_2 = (0,1,1,0)^T$， $a_3 = (2,3,3,2)^T$， $a_4 = (2,1,2,0)^T$ 的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示。

三. （12 分）设$u=(x,y,z)^T$，$v=(x_1,y_1,z_1)^T$，$f(x,y,z)=k(x^2+y^2+z^2)-8(xy+yz+zx)$

1. 用正交变换$u=Qv$将$f(x,y,z)$化成的标准型

2. 若$f(x,y,z)$为正定二次型，求 k 的取值范围

四. （12 分）设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}$

1. 求出可逆矩阵 P，使$P^{-1}AP$为对称阵，并写出此对称阵；

2. 计算A^k。

五. 单项选择题（每题 2 分，共 10 分）。

1. 设二次多项式$f(x)$有下列行列式确定

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x&2&3\\2&3&1&5\\2&3&2&9-x\end{vmatrix}$$【第四排 9-x 的前面的 2 改成 1】

则 $f(x)=0$的根为（　　）

A. -1，2　　B. -1，-2

C. 1，4　　D. 1，-1

2. 设 n（n≥3）阶矩阵 A 的伴随矩阵$A^*\neq 0$，且 A 的行列式$\det(A)=0$，则A，A^*的秩分别为（　　）

A. $r(A)=n-1,r(A^*)=n-1$　　B. $r(A)=n,r(A^*)=2$

C. $r(A)=n-1,r(A^*)=1$　　D. $r(A)=n-1,r(A^*)=0$

3. 下列说法正确的是（　　）

A. 若矩阵 AB 与 A 的秩相等，即 $r(AB)=r(A)$，则 B 可逆

B. 若矩阵 A 经初等行变换化为 B，则 A 的行向量组的极大无关组与 B 的行向量组的极大无关组一一对应

C. 若矩阵 A 经初等行变换化为 B，则 A 的列向量组的极大无关组与 B 的列向量组的极大无关组一一对应

D. 若矩阵 A 与 B 的秩相等，即 $r(A)=r(B)$，则 A 的行向量与 B 的行向量组等价

4. 已知 η_1,η_2,η_3 是 $Ax=0$ 的基础解系，则此方程组的基础解系还可选用（　　）

A. $\eta_1-\eta_2,\eta_2-\eta_3,\eta_3-\eta_1$　　B. 与 η_1,η_2,η_3 等价的向量组

C. 与 η_1,η_2,η_3 等秩的向量组　　D. $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_1$

5. 设 A 是三阶方阵，将 A 的第一行和第二行对换得到的矩阵记为 B，再将 B 的第二行加到第三行上得到矩阵 C，则满足 QA=C 的可逆矩阵 Q=（）。

A. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$

六. （8 分）设 A，B 均为 n 阶方阵，且 $AB=A+B$，证明

1. $A-E$，$B-E$ 皆可逆；
2. $AB=BA$

七. （10 分）设 A 为 n 阶实矩阵，且有 n 个正交的特征向量，证明：

1. A 为实对称矩阵；
2. 存在实数 k 及实对称矩阵 B，使得 $A+kE=B^2$。

2007 年试卷答案：

一、填空题 1) $-\frac{1}{2}$　$(-2)^k$　2) $\begin{bmatrix}3&6&5\\2&3&3\\2&3&5\end{bmatrix}$　3) 、2(x-1)3(y-1)-4(z-1)=0　4、$(b_2-b_1)(b_3-b_1)(b_3-b_2)=0$

5、（0,1,-2） 6、500 7、$\begin{cases} 2x^2+y^2-2x=8 \\ z=0 \end{cases}$

二、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \therefore r=3 \text{即秩为}3$$【最后的矩阵 右上角的 1 改为 2】

$\therefore$ 极大无关向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ $\therefore \alpha_3 = 2\alpha_2+3\alpha_1$

【上方改为$\alpha_3=2\alpha_1+3\alpha_2$】

三、$A=\begin{bmatrix} k & -4 & -4 \\ -4 & k & -4 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} k+4 & 0 & 0 \\ -4 & k & -4 \\ -4 & -4 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} k+4 & 0 & 0 \\ -4 & k-4 & -4 \\ -4 & -8 & k \end{bmatrix}$

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda-k & 4 & 4 \\ 4 & \lambda-k & 4 \\ 4 & 4 & \lambda-k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda-k-4 & 4-\lambda+k & 0 \\ 4 & \lambda-k & 4 \\ 4 & 4 & \lambda-k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda-k-4 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+4-k & 4 \\ 4 & 8 & \lambda-k \end{bmatrix}$$

$|\lambda E-A| = (\lambda-k)(\lambda-k+4)(\lambda-k-8) \because \lambda_1=k+4, \lambda_2=k-4, \lambda_3=k+8$

$\therefore f=(k+4)x^2+(k-4)y^2+(k-8)z^2$

2.

$$\begin{cases} k>0 \\ k^2-16>0 \\ |A|=(k+4)[k^2-4k-32]>0 \end{cases} \Rightarrow k>8$$

四、(1)

$$(\lambda_1 E-A)x=0,\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-1&-1\\-2&0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&2\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\text{基础解系为}P_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 E-A)x=0,\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&0&-1\\-2&0&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\text{基础解系为}P_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$(\lambda_3 E-A)x=0,\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&1&-1\\-2&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\text{基础解系为}P_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$P=[P_1,P_2,P_3]=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$(2)P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix},A=P\Lambda P^{-1},A^k=P\Lambda^k P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2^k&\\&&3^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\-2^k+3^k&2^k&-2^k+3^k\\3^k-1&0&3^k\end{bmatrix}$$

六、CCCDB

七、 (1) $AB-A-B+E=(A-E)(B-E)=E\therefore A-E$可逆，$B-E$可逆

$(2)(A-E)(B-E)=E\therefore(B-E)(A-E)=E=(A-E)(B-E)$

$BA-A-A+E=AB-A+E\therefore AB=BA$

【上方↑连续减两个 A 是错误的、第二个 A 改成 B】

八、 (1)$\because A$有n个正交特征向量$\therefore\exists$正交阵P使得$P^{-1}AP=\Lambda$

$\therefore A=P\Lambda P^{-1},A^T=\left(P^{-1}\right)^T\Lambda^T P^T=P\Lambda P^{-1}=A$

(2) $P^{-1}\left(A+\mathrm{k}E\right)=\Lambda+\mathrm{k}\mathrm{E}$，设$\lambda$为$A$的最小特征值$\therefore\exists\mathrm{k}>0$使$\mathrm{k}+\lambda_1>0$

$$\text{令}B=P\begin{bmatrix}\sqrt{k+\lambda_1}&&&\\&\cdots&&\\&&\cdots&\\&&&\sqrt{k+\lambda_n}\end{bmatrix}P^{-1}=P\Lambda_1P^{-1}\therefore P^{-1}BP=\Lambda_1$$

则$B^2=P^{-1}BP\cdot P^{-1}BP=P\Lambda^2P^{-1}=A+kE$

课程名称：线性代数与解析几何　　试卷：C　　考试形式：闭卷

授课院（系）：应用数学系　　考试日期：2005 年 2 月　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
标准分	28	12	10	12	12	12	5	9	100
得　分									

E 表示单位阵，$|A|,\det(A)$ 表示 A 的行列式，$r(A)$ 表示 A 的秩，A^* 表示 A 的伴随矩阵，A^T 表示 A 的转置矩阵。

一．填空题（每题 4 分，共 28 分）。

1. A 的行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} =$ ____________________

2. 过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$ 的直线的对称式方程为____________________

3. 设向量组 $a_1=(a,0,c)$，$a_2=(b,c,0)$，$a_3=(0,a,b)$ 线性无关，则 a，b，c 必满足关系式 ____________________

4. 向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 在基 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 下的坐标为____________________

5. 若 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} -4 & & \\ & y & \\ & & -5 \end{bmatrix}$ 相似，则 x=____________，y=__________

6. 若 $|A_{4\times4}|=-2$，则 $|A^*|=$ ___________，$|A^*-A^{-1}|=$ _____________

7. Oxy 面上的曲线 $y^2=4x$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转面的方程为__________________

二、单项选择题（每题 2 分，共 6 分）。

1. 设 A，B 均为 2n×n 型矩阵，在下列各项中只有（　　）正确

   A. $[A,B]$ 与 $[B,A]$ 相似　　B. $[A,B]$ 与 $[B,A]$ 的行列式相同

   C. $[A,B]$ 与 $[B,A]$ 相合　　D. $[A,B]$ 与 $[B,A]$ 的秩相同

2. 非齐次方程组 $Ax=b$ 有唯一解的充要条件是（　　）

   A. b 能用 A 的列向量组线性表示　　B. A 的列向量组是 $[A,b]$ 的列向量组的极大无关组

   C. $[A,b]$ 的秩等于 A 的秩　　D. $Ax=0$ 有唯一解

3. 若 $A_{m\times k}B_{k\times n}=0$，则 A 和 B（　　）

A. 至少有一个矩阵的秩小于 k　　B. 至少有一个是零矩阵

C. 两个矩阵的秩都小于 k　　D. 至少有一个矩阵的秩等于 k

4. 若 A 为 n 阶对称负定阵，k 为正整数，则（　　）

A. A 的行列式小于零　　B. A^k 也负定

C. A^{-1} 也负定　　D. A^* 也负定

5. 设向量α，β分别是矩阵 A 的对应于特征值λ，μ的特征向量，那么（　　）

A. 若α与β线性相关，则$\lambda\neq\mu$　　B. 若α与β线性无关，则$\lambda\neq\mu$

C. 若$\lambda\neq\mu$，则α与β线性无关　　D. 若$\lambda=\mu$，则α与β线性无关 λ=μ

三、（12 分）已知 $a_1=(1,-1,2)^T$，$a_2=(k.1,-2)^T$【句号改为逗号】，$a_3=(2,-k,1)^T$，$\beta=(1,8,-7)^T$

1. k 为何值时，β不能表示成a_1,a_2,a_3的线性组合？

2. k 为何值时，β可由a_1,a_2,a_3唯一地线性表示？

3. k 为何值时，β可由a_1,a_2,a_3线性表示且表示式不唯一？写出此表达式

四、（10 分）求向量组 $a_1=[-1,0,3,2]^T$，$a_2=[1,-1,-1,2]^T$，$a_3=[-3,1,7,2]^T$，$a_4=[-2,-2,9,7]^T$ 的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

五、（12 分）设二次型 $f(x,y,z)=2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz-2yz$，求二次型 $f(x,y,z)$的正、负惯性指数；

六、（12 分）设 $A=\begin{bmatrix}4&1&0\\1&3&1\\0&1&4\end{bmatrix}$，求正交矩阵 T 和对角阵$\Lambda$，使 $T^{-1}AT=A$【A 改为Λ】

七、（5 分）已知向量组$(\mathrm{I}): a_1,a_2,a_3$，$(\mathrm{II}): a_1,a_2,a_3,a_4$，$(\mathrm{III}): a_1,a_2,a_3,a_5$，如果$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$，$r(\mathrm{III})=4$，确定$r(a_1,a_2,a_3,a_4+a_5)$，并说明理由。

八、（9 分)设 n 元向量$a=(1,1,\cdots,1)^T$，$A=aa^T$，求 A 的特征值与特征向量. A 能否相似对角矩阵Λ？若不能，说明理由；若能，求可逆矩阵 P，使$P^{-1}AP=\Lambda$

2005 年答案

一、填空题(1)12 (2)$\frac{x-4}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{9}$ (3) $abc\neq 0$ (4) $\begin{bmatrix}2\\5\\-1\end{bmatrix}$ (5)-4，3 (6)-8，$-\frac{81}{2}$ (7) 4x=y^2+z^2

二、选择题：DBACC

三、$[A:B]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&k&2&1\\-1&1&-k&8\\2&2&1&7\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&k&2&1\\0&k+1&2-k&9\\0&-2-2k&-3&-9\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&k&2&1\\0&k+1&2-k&9\\0&0&1-2k&9\end{array}\right]$

【↑ α_4改为β】

$1) r(A)\neq r(A:B) \therefore 1-2k=0, k=0.5$

$2) r(A)=r(A:B)=3 \therefore 1-2k\neq 0 \text{且} k+1\neq 0 \therefore k\neq 0.5 \text{且} k\neq -1$

$3) r(A)=r(A:B)<3 \therefore k=-1$

四、$|a_1,a_2,a_3,a_4|=\begin{vmatrix}-1&1&-3&-2\\0&-1&1&-2\\3&-1&7&9\\2&2&2&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&-3&-2\\0&-1&1&-2\\0&2&-2&3\\0&4&-4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&-3&-2\\0&-1&1&-2\\0&0&0&-1\\0&0&0&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&-3&-2\\0&-1&1&-2\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{vmatrix}$

$r(a_1,a_2,a_3,a_4)=3$，极大线性无关组$a_1,a_2,a_4; a_3=2a_1-a_2(+0a_4)$

五、记 $f(x,y,z)$=(x,y,z)^{T}A(x,y,z)， 则 A=$\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&-2\\1&-1&2\end{vmatrix}$【左侧矩阵第二行最后一个数改为 -1】

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\\lambda-3&\lambda-3&0\\\lambda-3&0&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda-3&0\\\lambda-3&0&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\0&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)=0$$

↑改为$\lambda(\lambda-3)^2$

即$\lambda_{1,2}=3,\lambda_3=0\therefore$正负惯性指数分别为$p=2$，$q=0$

六、$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&0\\-1&\lambda-3&-1\\0&-1&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5&-1&0\\\lambda-5&\lambda-3&-1\\\lambda-5&-1&\lambda-4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda-5&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda-4)=0;\lambda$的三个值为2,4,5

①当其值为2时，$2E-A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$得$\alpha_1=[1,-2,1]^T$

②当其值为4时，$4E-A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$得$\alpha_2=[1,0,-1]^T$

③同理可求得$\alpha_3=[1,1,1]^T$则正交矩阵$T=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$对角阵$\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&4&\\&&5\end{bmatrix}$

七、$3\le 5(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5)\le 4$若$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5)=3$

则$\alpha_4+\alpha_5=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$，又$r(\mathrm{II})=3$，知$\alpha_4$不由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表达

α_5可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表达$\Rightarrow$矛盾；$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5)=4$

八、$A=\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&1\\1&\dots&\dots&1\end{bmatrix}_{n\times n}$ 为实对称阵，所以存在相似对角矩阵

$|\lambda E-A|=(\lambda-n)\lambda^{n-1}=0\therefore\lambda_1=n;\lambda_{2,3\dots n}=0$

①当$\lambda=\lambda_1=n$时，$E-A=\begin{bmatrix}n-1&-1&\dots&1\\-1&n-1&\dots&1\\-1&-1&\dots&n-1\end{bmatrix}$[行数也是n行]$\therefore\alpha_1=(1,1,1\dots1)^T$

②当$\lambda=\lambda_{2,3\dots n}=0$时，$-A=\begin{bmatrix}1&1&\dots&1\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\end{bmatrix}$[行数也是n行]$\therefore\begin{cases}\alpha_2=(1,-1,0,0\dots0)^T\\\alpha_3=(1,0,-1,0\dots0)^T\\\alpha_{n-1}=(1,0,\dots0,-1)^T\end{cases}$

则$P=(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)=\begin{bmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&-1&0&\dots&0\\1&0&-1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&0&0&\dots&-1\end{bmatrix}\therefore A=\begin{bmatrix}n&&&&\\&0&&&\\&&0&&\\&&&\dots&\\&&&&0\end{bmatrix}$

大连理工大学

课程名称：线性代数与解析几何　　试卷：C　　考试形式：闭卷

授课院（系）：数学系　　考试日期：2004 年 7 月 3 日　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
标准分	24	13	12	12	7	10	10	12	100
得　分									

一．填空题（每题 4 分，共 24 分）。

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$______________

2. 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 ?? x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ 的解为 $\begin{matrix} x_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ x_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ x_3 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{matrix}$【第二行的问号和 x_2 删掉】

3. 方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系为______________

4. 设 $x \succ 0$，$y \succ 0$，若 $\begin{bmatrix} x & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & x \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 相似，则 $\begin{matrix} x = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ y = \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{matrix}$

5. 若 A 只有特征值-1 和 2，则 A^2 的特征值只能是______________，3A 的特征值为______________

6. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 A 的列向量组线性______关，A 的行向量组线性______关

二．（13 分）当 k 和 m 满足什么条件时，方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = m \end{cases}$

1. 有唯一解；2. 无解；3. 有无穷多解，并求出此时的通解。

三．（12 分）设 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&k\\2&k&1\end{bmatrix}$，说明理由，回答下列各题：

1. k 为哪些值时，$Ax=0$ 有非零解？
2. k 和正数 m 为何值时，mA 是正交阵；
3. λ 和 k 为何值时，A 的特征值 λ 对应的特征向量为 $p=[1,1,1]^T$？

四．（12 分）设 $A=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求正交阵 Q 和对角阵 Λ，使得？$Q^{-1}AQ=\Lambda$

五．（7 分）说明理由，k 满足什么条件时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2\div 2x_2^2+kx_3^2\div 2(x_1x_2+kx_1x_3)$

为正定二次型，否则不正定？【上面的除号改为加号】

六、（12 分）证明：设 λ 和 μ 是 n 阶实对称阵 A 的特征值，对应的特征向量分别为 p 和 q，若 $\lambda\neq\mu$，则 p 和 q 正交。

2004 年答案

一、（1）$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-3&1\end{bmatrix}$（2）5，-2，-1 （3）$\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$（4） 1，3（5）1，4；-3，6（6）相，无

【下方第三个矩阵第一行后两个数改为：-2；1】

二、$\bar{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-2&1\\2&-1&k&4\\-1&2&3&m\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2&1\\0&1&k+4&2\\0&1&1&m+1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&k+2&3\\0&1&k+4&2\\0&0&-(k+3)&m-1\end{bmatrix}$

①当 r($\bar{A}$)=r(A)=3 时，有唯一解，$k\neq-3$ 且 $m\neq1$ ②$k=-3$ 且 m≠1，当 r(A)<r($\bar{A}$)时无解

③当 r(A)=r($\bar{A}$)<3 时有无穷多解，$k=-3$ 且 m=1，通解为 x=k(1,-1,1)^T+(3,2,0)^T

三、(1) |A|=0

$$1-k^2-2(2-2k)+2(2k-2)=0;-k^2+8k-7=0;k_1=1,k_2=7$$
$$(2)2+2+2k=0\to k=-2;m^2(1+2^2+2^2)=1,m>0\therefore m=1/3$$

(3)$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-1 & k \\ 2 & k & \lambda-1 \end{bmatrix} = 0, \lambda = 5; 2+1+k = \lambda, k = 2$

四、$|\lambda E - A| = 0 \therefore \lambda_1=1, \lambda_2=5, \lambda_3=2$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}[P]=0 \therefore P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{正交化} Q = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

五、$(x_1+x_2+kx_3)^2 = k_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2kx_1x_3 + 2kx_2x_3 + k^2x_3^2$

$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+kx_3)^2 + x_2^2 - 2kx_2x_3 + (k-k^2)x_3^2$

$k - 2k^2 > 0, 0 < k < 1/2$

六、$Ap = \lambda p$①$Aq = \mu q, A^T = A$

$q^T A^T = \mu q^T, q^T A = \mu q^T$;由①可得$q^T Ap = \mu q^T p \to$②

同理$p^T Aq = \lambda p^T q \to$③；将②转置$q^T Ap = \lambda q^T p$

③−②得：$0 = (\mu - \lambda) q^T p \because \lambda \neq \mu \therefore q^T p = 0$（得证）

大连理工大学

课程名称：线性代数与解析几何　　试卷：A　　考试形式：闭卷

授课院（系）：应用数学系　　考试日期：2009 年 1 月 9 日　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
标准分	8	5	8	15	14	30	10	10	100
得　分									

E 表示单位阵，$|A|$ 表示 A 的行列式，$r(A)$ 表示 A 的秩，A^{-1} 表示 A 的逆阵，A^T 表示 A 的转置，$tr(A)$ 表示 A 的迹。

一．（8 分）求向量组 $a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$，$a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$，$a_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ 的秩，一个极大无关组，并

用所求极大无关组线性表示其余向量。

二．（5 分）设 $A=\begin{bmatrix}1&b&0\\b&3&0\\0&0&b\end{bmatrix}$ 为正定阵，试确定 b 的取值范围。

三．（8 分）设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&4&-4\\0&1&3\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&-2\\2&-1\\1&-3\end{bmatrix}$，并且 $AB=2B+C$，求矩阵 B。

四．（14 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

求正交变换 $I=Qy$ 将该二次型化为标准形，并写出相应的标准形。

五．填空题（每题 3 分，共 30 分）。

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，则 $\left(A^*\right)^{-1}=$__________

2. 已知四阶矩阵 A 的行列式等于 2，则 $\det\left((2A)^{-1}-A^*\right)=$__________

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$，$a=\begin{bmatrix}k\\1\\1\end{bmatrix}$，a 是 A 的特征向量，则 k=__________

4. 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & k\end{bmatrix}$，若 aA 为正交矩阵，则 a=________，k=________

5. 设 A 是 4×3 型矩阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得到 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列上得到 C，那么满足 A=CQ 的可逆矩阵 Q 可取为________

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}x & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=4$，则 x=________，

且 A________对角化（选填可以或不可以）。

7. 设向量组 $a_1=[1,1,-1]^T$，$a_2=[-1,1,1]^T$ 是向量空间 V 的一个基底，基底 b_1，b_2 到 a_1，a_2 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，则 $b_1=$________，$b_2=$________

8. 已知 m×3 型的非零矩阵 A 的列向量组 a_1，a_2，a_3 满足 $a_1+a_2-a_3=0$，且 $b=-a_1+a_2$，$b=4a_1-a_3$，则 $Ax=b$ 的通解为________________

六. 单项选择题（每题 2 分，共 10 分）。

1. 已知 A，B 分别为 m×4 和 n×4 型的矩阵，且 $(AB)x=0$ 只有零解，则（　　）

A. $\min(m,n)\le 4$　　B. $\min(m,4)\le n$

C. $\max(m,n)\le 4$　　D. $\max(n,4)\le m$

2. 设 a_1,a_2,a_3 线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　）

A. a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_1　　B. a_1-a_2,a_2-a_3,a_3-a_1

C. a_1-a_2,a_2-a_3,a_3+a_1　　D. a_1+a_2,a_2-a_3,a_3-a_1

3. 设 A 是非零方阵，满足 $A^3=0$，则（　　）

A. $E-A$ 和 $E+A$ 都可逆　　B. $E-A$ 可逆，而 $E+A$ 不可逆

C. $E-A$ 和 $E+A$ 都不可逆　　D. $E-A$ 不可逆，而 $E+A$ 可逆

4. 下列叙述不正确的是（　　）

A. 若 A 和 B 相合，则 $|AB|\ge 0$

B. 设 A，B 为同阶对称阵，若 AB 为对称阵，则 AB=BA

C. 若 m×n 型矩阵 A 的列向量组线性无关，则其行向量也线性无关

D. 若 A，B 为同阶方阵，则 $|AB|=|BA|$

5. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\end{bmatrix}$，$\beta$是三元列向量，若a，b，c，d 互异，则（　　）

A. $Ax=0$只有零解　　B. $AA^Tx=0$有非零解

C. $AA^Tx=\beta$有唯一解　　D. $AA^Tx=\beta$有无穷多解

七. （共 10 分）

1. 设$v_1,v_2,\cdots v_x$为齐次方程组$Ax=0$的基础解系，$v_1,v_2,\cdots v_x$可由$u_1,u_2,\cdots u_x$线性表示，证明$u_1,u_2,\cdots u_x$也是$Ax=0$的基础解系。

2. 设$f(x_1,x_2,\cdots x_n)$为 n 元实二次型，若对任意非零 n 元实向量$x=[x_1,x_2,\cdots x_n]^T$都有$f(x_1,x_2,\cdots x_n)\neq 0$，证明：$f(x_1,x_2,\cdots x_n)$要么为正定二次型，要么为负定二次型。

2009 年答案　　【下方a_2前系数改为-2】

一、解:$[a_1,a_2,a_3,a_4]=\begin{bmatrix}-1&-2&1&-1\\0&0&-2&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\therefore r(A)=2;a_2和a_4为一个极大无关组\begin{cases}a_3=-a_4\\a_1=-a_2-2a_4\end{cases}$

二、$\begin{cases}3-b^2>0\\b(3-b^2)>0\end{cases}$解得$0<b<\sqrt{3}$

三、$AB=2B+C,(A-2E)\cdot B=C,B=(A-2E)^{-1}C$

$(A-2E)=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&2&-4\\0&1&1\end{bmatrix}$其逆阵为$\begin{bmatrix}-1&0&1\\1/6&1/6&1/2\\-1/6&-1/6&1/2\end{bmatrix}\therefore B=(A-2E)^{-1}C=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-2\\0&-1\end{bmatrix}$

四、$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},(\lambda E-A)=\begin{bmatrix}-\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{bmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-2)\therefore\lambda=-1$(二重)或2

$\therefore$标准型$f=-y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}+2y_3^{\ 2}$

当$\lambda=$-1时，$|-E-A|=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\therefore\begin{cases}\alpha_1=(-1,1,0)^T\\\alpha_2=(-1,0,1)^T\end{cases}$

当$\lambda=2$时，同理可求得$\alpha_3=(1,1,1)^T$；对α_1和α_2进行史密特正交化

$\beta_1=\alpha_1=(-1,1,0)^T$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=[-1,-1,2]$;

再进行单位化$\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[-1,1,0]^T$，$\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}[-1,-1,2]^T$，$\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^T$

$$\therefore Q=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{1}{\sqrt{6}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\0&\dfrac{2}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

五、(1)$-A$、(2)$\dfrac{3}{4}$、(3)-1、(4)$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,-2、(5)$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$、(6)2,不可以、(7)$\begin{bmatrix}-3\\-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\2\\-4\end{bmatrix}(8)k_1\begin{bmatrix}-5\\1\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

六、ABACC

七、(1)$v_1\ldots v_s$可由$u_1\ldots u_s$线性表示，则$s=r(v_1\ldots v_s)\le r(u_1\ldots u_s)\le s$

$\therefore r(u_1\ldots u_s)=s\therefore u_1\ldots u_s$也可由$v_1\ldots v_s$线性表示，对任意$u_z$也是$Ax=0$的解，所以也是$Ax=0$的基础解系

(2)假设$f(x_1\ldots x_n)$不为正定二次型也不是负定二次型，则特征值含0，或含有异号特征值；

若含0，则$f(x_1\ldots x_n)$化为规范型会缺项，缺项中x_i为任意值时，$f(x_1\ldots x_n)=0$与题意矛盾

若含有异号特征值，不妨设$f(x_1\ldots x_n)=-x_1^2+x_2^2$，则只要$x_1^2=x_2^2$，$f(x_1\ldots x_n)=0$，与题意矛盾，假设不成立

大连理工大学

课程名称：线性代数与解析几何　　试卷：B　　考试形式：闭卷

授课院（系）：数学科学学院　　考试日期：2011 年 1 月 13 日　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
标准分	30	10	6	12	8	8	12	8	6	100
得　分										

注：.E 表示单位阵，$|A|$，$\det(A)$表示 A 的行列式，$r(A)$表示 A 的秩，A^*表示 A 的伴随矩阵，A^T表示 A 的转置矩阵。

一．填空题（每题 3 分，共 30 分）。

1. 设三阶方程 A 的列分块阵为$A=(a_1,a_2,a_3)$，且 A 的行列式$\det(A)=-3$，若三阶方阵$B=(a_1,-3a_2,2a_3)$，则$A+B$的行列式$\det(A+B)=$____________

2. 设 A 为 n 阶矩阵，且$A^2+3A=0$，$3A^2+A=0$，则 A 的行列式$\det(A)=$____________

3. 已知$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-1&2&-2\\0& &1\end{pmatrix}$【缺的数是-1】，则$(A^T)^{-1}=$____________

4. 已知由三元向量组$a_1=(2,2,k)^T$，$a_2=(2,k,2)^T$，$a_3=(k,2,2)^T$，生成的向量空间的维数为 2，则 k=____________

5. 设β_1，β_2，β_3是 3 维向量空间R^3的一组基，则由基β_1，β_2，β_3到基$\beta_1+\beta_3$，$\beta_1+\beta_2$，$\beta_2+\beta_3$的过度矩阵为____________

6. 已知R^3的一组基为$a_1=(1,0,0)^T$，$a_2=(1,1,0)^T$，$a_3=(1,1,1)^T$，则向量$a=(1,2,3)^T$在基a_1，a_2，a_3下的坐标向量为____________

7. 设 A 与$\begin{pmatrix}2& & \\ &1& \\ & &-2\end{pmatrix}$相似，则$A^2+E$的行列式$\det(A^2+E)=$____________

二．单项选择题（每题 3 分，共 18 分）。

1. 设$n(n\succ 2)$阶方阵 A 的行列式$|A|=0$，且 A 的伴随矩阵$A^*\neq 0$，则A^*的秩为（　　）

   A. n-1　　　　B. n
   C. 2　　　　　D. 1

2. 设实二次型$f(x_1,x_2)=-2x_1^2+x_2^2$经可逆线性变换$x=Cy$，化成标准形$f=y_1^2-y_2^2$，则可逆矩阵 C 为（　　）

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$

3. 设λ_1，λ_2是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为a_1，a_2，则$k_1a_1+k_2a_2$是 A 的特征向量的充分必要条件是（　　）

A. $k_1=0,k_2\neq 0$　B. k_1,k_2有且只有一个不为零

C. $k_1\neq 0,k_2\neq 0$　D. $k_1\neq 0,k_2=0$

4. 设 A，B 分别是 m×n，n×s 矩阵，当（　　）时，齐次线性方程组$ABx=0$与$Bx=0$同解。

A. 秩$r(A)=m$　B. 秩$r(B)=s$

C. 秩$r(A)=n$　D. 秩$r(B)=n$

三. （6 分）设$B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，满足$BA=B+2A$，求 A。

四. （8 分）设 4 维向量组$\beta_1=(1+\lambda,1,1,1)^T$，$\beta_2=(2,2+\lambda,2,2)^T$，$\beta_3=(3,3,3+\lambda,3)^T$，$\beta_4=(4,4,4,4+\lambda)^T$，问$\lambda$为何值时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关？当$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关时，求其一个极大线性无关组。

五. （8 分）已知三阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$的特征值为 1，1，7，就正交矩阵 Q 及对角矩阵Λ，使$Q^{-1}AQ=\Lambda$。

六、（12 分）设$A=\begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix}$，$u=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，

1. （4 分）求 A 的三个特征值；

2. （4 分）若 $f(u)=u^T Au$ 是正定二次型，则 k 应满足什么条件；

七、（8 分）设 A 为 m×n 矩阵，B，C 均为 n×s 矩阵，且 $AB=AC, B\neq C$，证明：A 的秩 $r(A)\prec n$。

八、（6 分）设 A，B 均为 n 阶实对称矩阵，且 A 是正定矩阵，$B\neq 0$ 为半正定矩阵，证明：$|A+B|\succ|A|$。

2011 年答案

一、填空题

①36②0③$\begin{bmatrix}2&-1&0\\-2&2&-1\\0&-2&1\end{bmatrix}$④$-4$【解析：$k=2$舍去】⑤$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$

⑥$[-1,-1,3]^T$【解析：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\alpha$，即为$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，求x的三个值即可】⑦25

二、选择：DBBD

三、$BA-2A=B\rightarrow(B-2E)A=B\rightarrow A=(B-2E)^{-1}B$

$$B-2E=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&0&1\\2&2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-1&0\\-1&-2&1\\2&2&-1\end{bmatrix};|B-2E|=-1;|B-2E|^*=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&3&3\\2&4&5\end{bmatrix}$$

$$(B-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-3\\-2&-4&-5\end{bmatrix}\therefore A=(B-2E)^{-1}B=\begin{bmatrix}1&2&2\\-2&-5&-6\\-4&-8&-9\end{bmatrix}$$

四、若 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关

$$\text{则}D=\begin{vmatrix}1+\lambda & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+\lambda & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+\lambda & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+\lambda\end{vmatrix}=0\to\begin{vmatrix}1+\lambda & 2 & 3 & 4\\ -\lambda & \lambda & 0 & 0\\ -\lambda & 0 & \lambda & 0\\ -\lambda & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda+10)$$

当$|D|=0$时，$\lambda=0$或$\lambda=-10$，此向量组线性相关

$$\begin{cases}\text{当}\lambda=0\text{时，向量组的秩为1,}\therefore\text{极大无关组为1个，可以为四组向量中任意一组}\\ \text{当}\lambda=-10\text{时，向量组的秩为3,}\therefore\text{极大无关组为3个，可以为四组向量的任意三个组合}\end{cases}$$

五、已知$\lambda_{1,2}=1$，$\lambda_3=7$，当$\lambda=1$时，$E-A=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$特征向量$\vec{r}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\vec{r}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

当$\lambda=7$时，$7E-A=\begin{bmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$第三个特征向量为$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

三个特征向量相互正交，不需再正交化

$Q=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$

六、(1)$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-k & -2 & -2\\ -2 & \lambda-k & -2\\ -2 & -2 & \lambda-k\end{vmatrix}\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_1}(\lambda-k+2)^2\begin{vmatrix}\lambda-k & -2 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$

解得$\lambda_1=k+4$，$\lambda_2=k-2$（二重）

(2) 当 $f(u)=u^TAu$ 是正定二次型时，矩阵 A 的特征值都应该是大于零的数，所以 k>2

七、$AB=AC\Rightarrow A(B-C)=0\therefore r(A)+r(B-C)\le n$

又$\because B\ne C,\therefore r(B-C)>0,\therefore r(A)<\text{n}$

八、由于 A 正定，那么存在可逆矩阵 P，使得 $A=P'EP=P'P$；设$c=(P')^{-1}BP^{-1}$，即$B=P'CP$，显然c也是半正定矩阵

由于c半正定，那么存在正交矩阵Q，使$c=Q'JQ$，J为对角矩阵，不妨设$J=\text{diag}\{c_1,c_2...c_i\}$显然$c_i>0$

$$|A+B|=|P'P+P'CP|=|P'|\cdot|I+C|\cdot|P|=|P'|\cdot|Q'Q+Q'JQ|\cdot|P|=|P'|\cdot|Q'|\cdot|I+J|\cdot|Q|\cdot|P|=|P|^2|Q|^2||I+J|$$

考虑到Q是正交阵，那么$|Q|=\pm1,|Q|^2=1$

$|I+J|=\prod_{i=1}^{n}(c_i+1)$，考虑到$c_i\ge0$，并且不全为零，那么必有$|I+J|=\prod_{i=1}^{n}(c_i+1)>1$

那么$|A+B|=|P|^2|Q|^2|I+J|>|P|^2=A\therefore$得证

大连理工大学

课程名称：线性代数与解析几何　　试卷：A　　考试形式：闭卷

授课院（系）：数学科学学院　　考试日期：2012 年 1 月 5 日　　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
标准分	30	15	7	8	8	10	10	6	6	100
得　分										

E 表示单位阵，$|A|$ 表示 A 的行列式，$r(A)$ 表示 A 的秩，A^{-1} 表示 A 的逆阵，A^T 表示 A 的转置矩阵，A^* 表示 A 的伴随矩阵，$tr(A)$ 表示 A 的迹。

一．填空题（每题 3 分，共 30 分）。

1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$，则 $A\left(B^T\right)^{-1}=$________

2. 设三阶方阵 A 的一个特征值为 2，并且 $r(A-E)=2$，$|2E-A|=0$，则 $tr(A)=$________

3. 已知 A 是 3 阶方阵，a_1,a_2,a_3 是三元线性无关的列向量组，若 $Aa_1=a_1+a_2$，$Aa_2=a_2+2a_3$，$Aa_3=2a_1+a_3$，则 A 的行列式等于________

4. 若矩阵 A，B 可逆，则 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=$________

5. 设 a_1,a_2,a_3 为向量空间 R^3 的一组基，则从基 $a_1,\frac{1}{2}a_2,\frac{1}{3}a_3$ 到基 a_1-a_2,a_2-a_3,a_1+a_3 过度矩阵为________

6. 若 5 阶方阵 A 满足秩为 3，则 r（A*）=________

7. 矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&-k\\0&k&0\\k&0&9\end{bmatrix}$ 为正定阵的充要条件是 k 满足________

8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$ 可相似对角化，则 x=________

二．单项选择题（每题 3 分，共 15 分）。

1. 设 n 阶方阵 A，B，C，满足 ABC=E，则必有（　　）

A. BCA=E　　B. CBA=E

C. ACB=E　　D. BAC=E

2. 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$【m 改成 n】为非零矩阵，$\overline{a_{ij}}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式且满足 $a_{ij}=\overline{a_{ij}}$，则（ ）

A. $r(A)=0$　　B. $r(A)=1$

C. $r(A)=n$　　D. $r(A)=n-1$

3. 下面哪一项不是“方阵 A 可逆”的充要条件（ ）

A. $|A|\neq 0$　　B. A 可分解为有限个初等阵的乘积

C. A 的特征值全不为 0　　D. $Ax=0$ 有非零解

4.设二次多项式$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 3-x & 2\\ 1 & 1 & x\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}$,则$f(\mathrm{x})=0$的根为（ ）

A.1，-2　　B.2，-2　　C.2,1　　D. -1,2

三. （7 分）计算行列式$\begin{vmatrix}x_1-a & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2-a & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a\end{vmatrix}$

四. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$，$AB=A+B$，求矩阵 B

五. （10 分）求向量组 $a_1=(1,-2,1,1)^T$，$a_2=(1,0,-1,1)^T$，$a_3=(-2,2,0,0)^T$，$a_4=(5,-6,1,3)^T$ 的秩及一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示。

六. （10 分）已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_2^{\,2}+2x_2^{\,2}+2bx_1x_3-2x_3^{\,2}$【左式中等号后面的、含系数 a 的第一项的 x 的角标改为 1】，其中 $b\succ 0$，该二次型所对应对称阵的特征值之和为 1，特征值之积为-12，求：（1）a，b 的值；（2）用正交变换将该二次型化为标准型，并写出正交矩阵；

七. （6 分）设 A 为实对称矩阵，B 为实反对矩阵，并且满足 AB=BA，A-B 为可逆阵，

证明：$(A+B)(A-B)^{-1}$ 是正交阵。

八. （6 分）设 A 为 3 阶方阵，a_1,a_2,a_3 为三元非零列向量。已知 $Aa_1=-a_1$，$Aa_2=a_2$，$Aa_3=a_2+a_3$。

试证明：a_1,a_2,a_3 线性无关。

2012 年试卷答案

一、填空题

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 2. 1【解析：$\lambda_3 = 1, |E - A| = 0, \lambda_2 = -2; tr(A) = 1 + 2 + (-2) = 1$】

3. $\begin{pmatrix} A\alpha_1 \\ A\alpha_2 \\ A\alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$【解析：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\alpha_1 \\ A\alpha_2 \\ A\alpha_3 \end{pmatrix}$】

4. $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 6. 0 7. $0 \prec k \prec 3$ 8. 3

二、选择题：ACDC

三、原式 $= \begin{vmatrix} \sum x_i - a & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum x_i - a & x_2 - a & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum x_i - a & x_2 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum x_i - a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$= \left(\sum x_i - a\right) \begin{vmatrix} -a & & & \\ & -a & & \\ & & -a & \\ & & & -a \end{vmatrix} = \left(\sum x_i - a\right)(-a)^{n-1}$$

四、$AB - B = A$、$(A - E)B = A$、$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$、$(A - E, A) \xrightarrow{\text{初等变换}} (E, B)$ 即可求出答案

五、$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore$ 秩为3

极大无关组、将其余向量用此极大无关组表示等等可很容易写出，不再加以赘述

六、$(1) A=\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2+(-2)=1 \Rightarrow a+2-2=1 \Rightarrow a+0=1 \Rightarrow a=1 \\ 2(-a-b^2)=-12 \Rightarrow 2a+b^2=6 \Rightarrow b=\pm 2, \because \mathrm{b}>0 \therefore \mathrm{b}=2 \end{cases}$

$(2) A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$【利用正交变换求解，为普通计算不再赘述】

七、证明：假设$A^T=A, B^T=-B$

$(A+B)(A-B)^{-1}\left[(A+B)(A-B^{-1})\right]^T=(A+B)(A-B)^{-1}\left\{\left[(A-B)^T\right]^{-1}(A+B)^T\right\}$

$=(A+B)(A-B)^{-1}(A+B)^{-1}(A+B)=(A+B)\left[(A+B)(A-B)\right]^{-1}(A-B)$

由于$AB=BA$,易知$\left[(A+B)(A-B)\right]^{-1}=\left[(A-B)(A+B)\right]^{-1}$

$\therefore$ 上式$=(A+B)\left[(A-B)(A+B)^{-1}\right](A-B)=E$,得证。

八、(采用反证法)

$A(A\alpha_3)$①α_1与α_3线性无关

②α_1与α_2线性无关，$\alpha_2=\mathrm{k}\alpha_1, A\alpha_2=kA\alpha_1, \alpha_2=-k\alpha_1, 2\alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_2=0$[矛盾]

③假设线性相关，$\alpha_3=\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2, A\alpha_3=A(\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2), \alpha_1+\alpha_2=-k$

$\mathrm{k}_1\alpha_1+\mathrm{k}_2\alpha_2=-\mathrm{k}_1\alpha_1-\alpha_2+\mathrm{k}_2\alpha_2 \Rightarrow \mathrm{k}_1\alpha_1=-\mathrm{k}_1\alpha_1-\alpha_2$[矛盾]$\therefore$线性无关