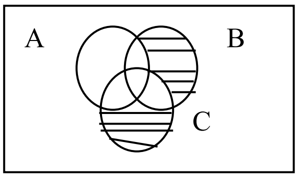
离散数学试题与答案试卷一

一、填空　20%（每小题 2 分）

1．设 $A=\{x \mid (x \in N)且(x<5)\}, B=\{x \mid x \in E^{+}且x<7\}$（N：自然数集，$E^{+}$ 正偶数）则 $A \cup B=$ ________________________。

2．A，B，C 表示三个集合，文图中阴影部分的集合表达式为

____________________________。



3．设 P，Q 的真值为 0，R，S 的真值为 1，则

$\neg(P \vee (Q \rightarrow (R \wedge \neg P))) \rightarrow (R \vee \neg S)$ 的真值= __________________。

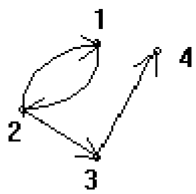
4．公式 $(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P$ 的主合取范式为

____。

5．若解释 I 的论域 D 仅包含一个元素，则 $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ 在 I 下真值为

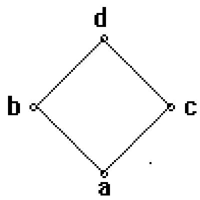
__________________________________。

6．设 A={1，2，3，4}，A 上关系图为

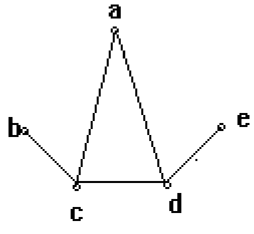


则 $R^2=$ ____。

7．设 A={a，b，c，d}，其上偏序关系 R 的哈斯图为



则 R= ____。



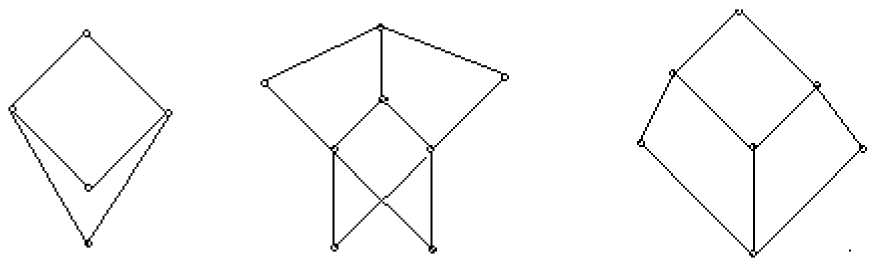
8．图　　　的补图为 __________________________________。

9．设 A={a，b，c，d}，A 上二元运算如下：

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

那么代数系统<A，*>的幺元是 ________，有逆元的元素为________________，它们的逆元分别为 ________________________________ 。

10．下图所示的偏序集中，是格的为 ___________________________ 。



[a]　　[b]　　[c]

二、选择 20% （每小题 2 分）

1、下列是真命题的有（　　　）

A. $\{a\}\subseteq\{\{a\}\}$；　　B. $\{\{\Phi\}\}\in\{\Phi,\{\Phi\}\}$；

C. $\Phi\in\{\{\Phi\},\Phi\}$；　　D. $\{\Phi\}\in\{\{\Phi\}\}$。

2、下列集合中相等的有（　　　）

A．{4，3}$\cup\Phi$；B．{Φ，3，4}；C．{4，Φ，3，3}；D． {3，4}。

3、设 A={1，2，3}，则 A 上的二元关系有（　　）个。

A． 2^3； B． 3^2 ； C． $2^{3\times3}$； D． $3^{2\times2}$。

4、设 R，S 是集合 A 上的关系，则下列说法正确的是（　　）

A．若 R，S 是自反的， 则$R\circ S$是自反的；

B．若 R，S 是反自反的， 则$R\circ S$是反自反的；

C．若 R，S 是对称的， 则$R\circ S$是对称的；

D．若 R，S 是传递的， 则$R\circ S$是传递的。

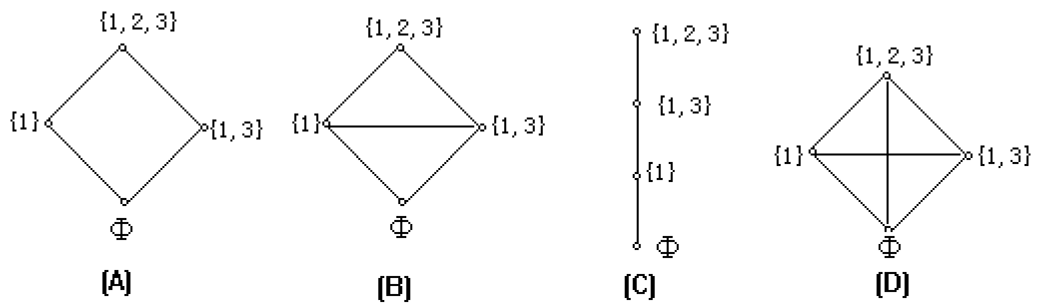
5、设 A={1，2，3，4}，P（A）（A 的幂集）上规定二元系如下

$R=\{<s,t>|\, s,t\in p(A)\wedge(|s|=|t|\}$ 则 P（A）/ R=（　　　）

A．A ；B．P(A) ；C．{{{1}}，{{1，2}}，{{1，2，3}}，{{1，2，3，4}}}；

D．{{Φ}，{2}，{2，3}，{{2，3，4}}，{A}}

6、设 A={Φ，{1}，{1，3}，{1，2，3}}则 A 上包含关系“⊆”的哈斯图为（　　　）



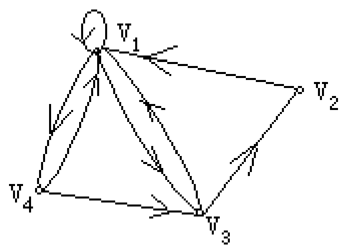
7、下列函数是双射的为（　　　　）

A．$f: I \to E$， $f(x) = 2x$ ；　B．$f: N \to N \times N$， $f(n) = <n, n+1>$ ；

C．$f: R \to I$， $f(x) = [x]$ ；　D．$f: I \to N$, $f(x) = |x|$ 。

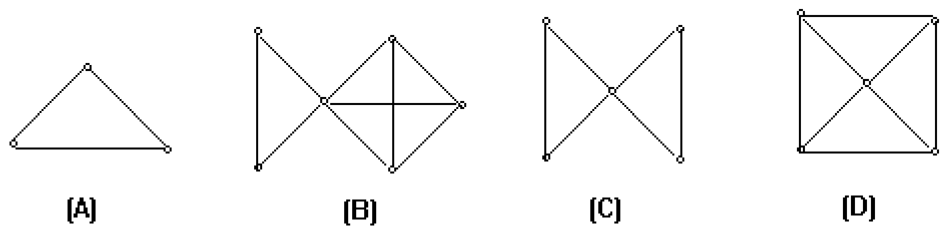
（注：I—整数集，E—偶数集， N—自然数集，R—实数集）

8、图 中 从 v_1 到 v_3 长度为 3 的通路有（　　　）条。



A． 0； B． 1； C． 2； D． 3。

9、下图中既不是 Eular 图，也不是 Hamilton 图的图是（　　　　）



10、在一棵树中有 7 片树叶，3 个 3 度结点，其余都是 4 度结点则该树有（　　）个 4 度结点。

A．1；B．2； C．3； D．4 。

三、证明 26%

1、R 是集合 X 上的一个自反关系，求证：R 是对称和传递的，当且仅当 < a, b> 和<a , c>在 R 中有<.b , c>在 R 中。（8 分）

2、f 和 g 都是群<G_1 ,★>到< G_2, *>的同态映射，证明<C，★>是<G_1, ★>的一个子群。其中 C=$\{x \mid x \in G_1 且 f(x) = g(x)\}$ (8 分)

3、G=<V, E> (|V| = v，|E|=e) 是每一个面至少由 k（k≥3）条边围成的连通平面图，则 $e \le \frac{k(v-2)}{k-2}$， 由此证明彼得森图（Peterson）图是非平面图。(11 分)

四、逻辑推演 16%

用 CP 规则证明下题（每小题 8 分）

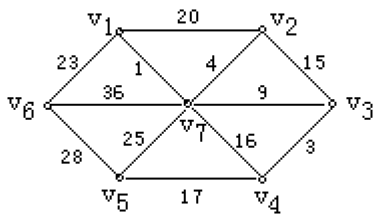
1、$A \vee B \to C \wedge D, D \vee E \to F \Rightarrow A \to F$

2、$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \to \forall xQ(x)$

五、计算 18%

1、设集合 A={a，b，c，d}上的关系 R={<a , b > ,< b , a > ,< b, c > , < c , d >}用矩阵运算求出 R 的传递闭包 t (R)。 （9 分）

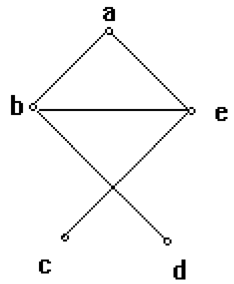
2、如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1, v_2, \cdots, v_7$ 及预先算出它们之间的一些直接通信线路造价，试给出一个设计方案，使得各城市之间能够通信而且总造价最小。 （9 分）



试卷一答案：

一、填空 20% （每小题 2 分）

1、{0，1，2，3，4，6}； 2、$(B \oplus C) - A$；3、1； 4、$(\neg P \vee S \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg S \vee R)$； 5、1；6、{<1,1>, <1,3>, <2,2>, <2,4> }；7、{<a.b>,<a,c>,<a,d>,<b,d>,<c,d>} $\cup$ I_A ；8、



9、a ； a , b , c ,d ； a , d , c , d ； 10、c;

二、选择 20% （每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C　D	B、C	C	A	D	C	A	D	B	A

三、证明 26%

1、证：

"$\Rightarrow$"　$\forall a,b,c \in X$ 若 $<a,b>,<a,c> \in R$ 由 R 对称性知 $<b,a>,<c,a> \in R$，由 R 传递性得 $<b,c> \in R$

"$\Leftarrow$"　若 $<a,b> \in R$，$<a,c> \in R$ 有 $<b,c> \in R$ 任意 $a,b \in X$，因 $<a,a> \in R$ 若 $<a,b> \in R$ $\therefore$ $<b,a> \in R$ 所以 R 是对称的。

若 $<a,b> \in R$，$<b,c> \in R$ 则 $<b,a> \in R \wedge <b,c> \in R$ $\therefore$ $<a,c> \in R$ 即 R 是传递的。

2、证 $\forall a,b \in C$，有 $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，又 $f(b^{-1})=f^{-1}(b)$，$g(b^{-1})=g^{-1}(b)$ $\therefore f(b^{-1})=f^{-1}(b)=g^{-1}(b)=g(b^{-1})$

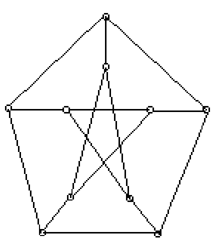
$\therefore f(a \bigstar b^{-1})=f(a)*f^{-1}(b)=g(a)*g(b^{-1})=g(a \bigstar b^{-1})$

$\therefore a \bigstar b^{-1} \in C$　　$\therefore$ $<C, \bigstar>$ 是 $<G_1, \bigstar>$的子群。

3、证：

①设 G 有 r 个面，则 $2e=\sum_{i=1}^{r} d(F_i) \geq rk$，即 $r \leq \frac{2e}{k}$。而 $v-e+r=2$ 故 $2=v-e+r \leq v-e+\frac{2e}{k}$ 即得 $e \leq \frac{k(v-2)}{k-2}$。（8 分）

②彼得森图为 $k=5, e=15, v=10$，这样 $e \leq \frac{k(v-2)}{k-2}$ 不成立，



所以彼得森图非平面图。（3 分）

一、 逻辑推演 16%

1、 证明：

① A	P（附加前提）
② $A \vee B$	T①I
③ $A \vee B \to C \wedge D$	P
④ $C \wedge D$	T②③I
⑤ D	T④I
⑥ $D \vee E$	T⑤I
⑦ $D \vee E \to F$	P
⑧ F	T⑥⑦I
⑨ $A \to F$	CP

2、证明

① $\forall x P(x)$	P（附加前提）
② $P(c)$	US①
③ $\forall x (P(x) \to Q(x))$	P
④ $P(c) \to Q(c)$	US③
⑤ $Q(c)$	T②④I
⑥ $\forall x Q(x)$	UG⑤
⑦ $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$	CP

二、 计算 18%

1、 解：

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{R^2} = M_R \circ M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

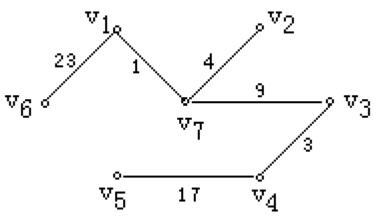
$$M_{R^3} = M_{R^2} \circ M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{R^4} = M_{R^3} \circ M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{t(R)} = M_R + M_{R^2} + M_{R^3} + M_{R^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∴ t (R)={<a , a> , <a , b> , < a , c> , <a , d > , <b , a > , < b ,b > , < b , c . > ,
< b , d > , < c , d > }

2、解： 用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法略。结果如图：



树权 C(T)=23+1+4+9+3+17=57 即为总造价。

试卷二试题与答案

一、填空 20% （每小题 2 分）

1、P：你努力，Q：你失败。“除非你努力，否则你将失败”的翻译为 ____________________；“虽然你努力了，但还是失败了”的翻译为 ______________________ 。

2、论域 D={1，2}，指定谓词 P

P (1,1)	P (1,2)	P (2,1)	P (2,2)
T	T	F	F

则公式 $\forall x \exists y P(y,x)$ 真值为 ______________________ 。

2、设 S={a_1 ，a_2 ，…，a_8}，B_i 是 S 的子集，则由 B_{31} 所表达的子集是 ____ 。

3、设 A={2, 3, 4, 5, 6}上的二元关系 $R = \{<x, y>| x < y \vee x\text{是质数}\}$，则 R=

____ （列举法）。

R 的关系矩阵 M_R=

____ 。

5、设 A={1，2，3}，则 A 上既不是对称的又不是反对称的关系 R= ____________________ ；

A 上既是对称的又是反对称的关系 R= ______________________ 。

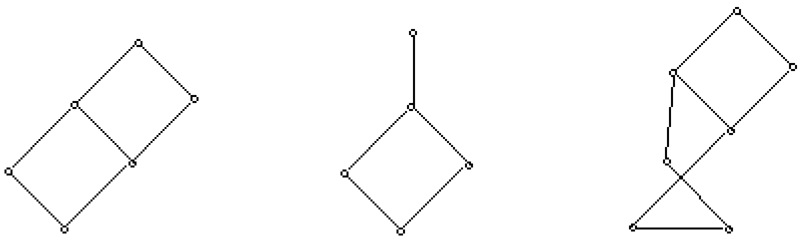
6、设代数系统<A，*>，其中 A={a，b，c}，

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

则幺元是 _____________ ；是否有幂等性 ______；是否有对称性________ 。

7、4 阶群必是 _______________ 群或 ________________ 群。

8、下面偏序格是分配格的是 _____________ 。



（A） （B） （C）

9、n 个结点的无向完全图 K_n 的边数为 _______________，欧拉图的充要条件是

____ 。

10、公式 $(P\vee(\neg P\wedge Q))\wedge((\neg P\vee Q)\wedge\neg R$ 的根树表示为

____ 。

二、选择 20% （每小题 2 分）

1、在下述公式中是重言式为（　　　　）

A. $(P\wedge Q)\rightarrow(P\vee Q)$；B. $(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))$；

C. $\neg(P\rightarrow Q)\wedge Q$；　　D. $P\rightarrow(P\vee Q)$。

2、命题公式 $(\neg P\rightarrow Q)\rightarrow(\neg Q\vee P)$ 中极小项的个数为（　　），成真赋值的个数为（　　）。

A．0；　B．1；　C．2；　D．3 。

3、设 $S=\{\Phi,\{1\},\{1,2\}\}$，则 2^S 有（　　　）个元素。

A．3；　　B．6；　　C．7；　　D．8 。

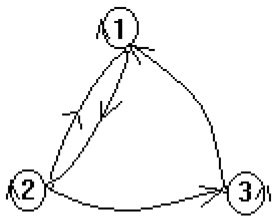
4、设 $S=\{1,\ 2,3\}$，定义 $S\times S$ 上的等价关系

$R=\{<<a,b>,<c,d>|<a,b>\in S\times S,<c,d>\in S\times S,a+d=b+c\}$ 则由 R 产 生

的 $S\times S$ 上一个划分共有（　　　）个分块。

A．4；　　B．5；　　C．6；　　D．9 。

5、设 $S=\{1,\ 2,3\}$，S 上关系 R 的关系图为



则 R 具有（　　　）性质。

A．自反性、对称性、传递性；　　B．反自反性、反对称性；

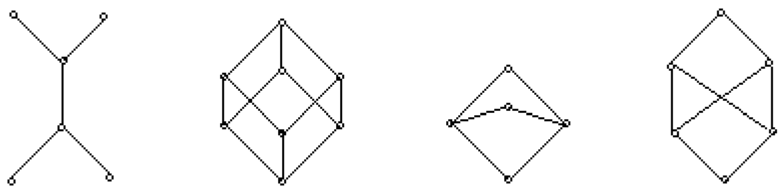
C．反自反性、反对称性、传递性；　　D．自反性 。

6、设 $+,\cdot$ 为普通加法和乘法，则（　　　）$<S,+,\cdot>$ 是域。

A. $S=\{x\mid x=a+b\sqrt{3}\,,\ \ a,b\in Q\}$　　B. $S=\{x\mid x=2n\,,\ \ a,b\in Z\}$

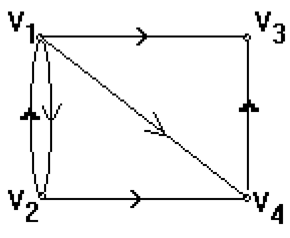
C. $S=\{x\mid x=2n+1,\ \ n\in Z\}$　　D. $S=\{x\mid x\in Z\wedge x\geq 0\}$ = N 。

7、下面偏序集（　　）能构成格。



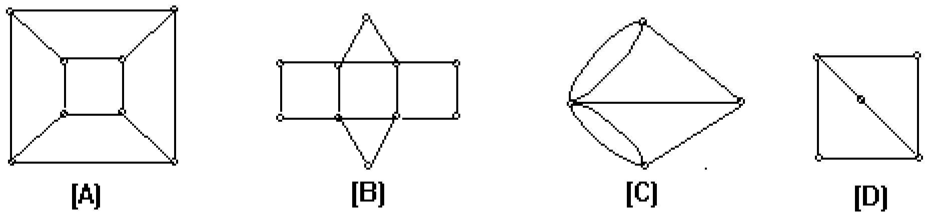
[A]　　[B]　　[C]　　[D]

8、在如下的有向图中，从 V_1 到 V_4 长度为 3 的道路有（　　　）条。



A．1；　　B．2；　　C．3；　　D．4 。

9、在如下各图中（　　）欧拉图。



10、设 R 是实数集合，“×”为普通乘法，则代数系统<R ，×> 是（   ）。

A．群；　　B．独异点；　　C．半群 。

三、证明 46%

1、设 R 是 A 上一个二元关系，

$S=\{<a,b>|(a,b\in A)\wedge(\text{对于某一个}c\in A,\text{有}<a,c>\in R\text{且}<c,b>\in R)\}$ 试证明若 R 是 A 上一个等价关系，则 S 也是 A 上的一个等价关系。（9 分）

2、用逻辑推理证明：

所有的舞蹈者都很有风度，王华是个学生且是个舞蹈者。因此有些学生很有风度。（11 分）

3、若 $f:A\to B$ 是从 A 到 B 的函数，定义一个函数 $g:B\to 2^A$ 对任意 $b\in B$ 有 $g(b)=\{x|(x\in A)\wedge(f(x)=b)\}$，证明：若 f 是 A 到 B 的满射，则 g 是从 B 到 2^A 的单射。（10 分）

4、若无向图 G 中只有两个奇数度结点，则这两个结点一定连通。（8 分）

5、设 G 是具有 n 个结点的无向简单图，其边数 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，则 G 是 Hamilton 图（8 分）

四、计算 14%

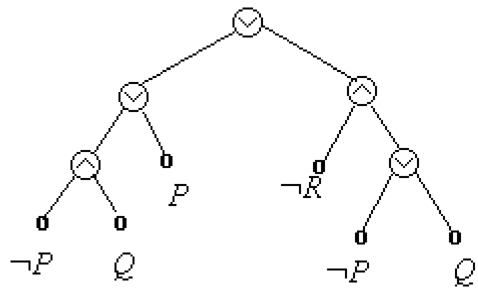
1、设<Z_6,$+_6$>是一个群，这里$+_6$是模 6 加法，Z_6={[0]，[1]，[2]，[3]，[4]，[5]}，试求出<Z_6,$+_6$>的所有子群及其相应左陪集。（7 分）

2、权数 1，4，9，16，25，36，49，64，81，100 构造一棵最优二叉树。（7 分）

试卷二答案：

一、填空 20%（每小题 2 分）

1、$\neg P\to Q$；$P\wedge Q$ 2、T　3、$B_{31}=B_{00011111}=\{a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}$ 4、 R={<2,2>,<2,3>,<2,4>,<2,5>,<2,6>,<3,2>,<3,3>,<3,4>,<3,5>,<3,6>,<4,5>,<4,6>,<5,2>,<5,3>,<5,4>,<5,5>,<5,6>} ； $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5 、 R={<1,2>,<1,3>,<2,1>} ； R={<1,1>,<2,2>,<3,3>} 6、a ；否；有 7、Klein 四元群；循环群 8、 B 9、 $\frac{1}{2}n(n-1)$ ；图中无奇度结点且连通 10 、



二、 选择 20%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B、D	D；D	D	B	D	A	B	B	B	B、C

三、 证明 46%

1、（9 分）

（1） S 自反的

$\forall a \in A$，由 R 自反，$\therefore (<a,a>\in R)\wedge(<a,a>\in R)$，$\therefore <a,a>\in S$

（2） S 对称的

$\forall a,b \in A$

$<a,b>\in S \Rightarrow (<a,c>\in R)\wedge(<c,b>\in R)$　　S 定义

$\Rightarrow (<a,c>\in R)\wedge(<c,b>\in R)$　　R 对称

$\Rightarrow <b,a>\in S$　　R 传递

（3） S 传递的

$\forall a,b,c \in A$

$<a,b>\in S \wedge <b,c>\in S$

$\Rightarrow (<a,d>\in R)\wedge(<d,b>\in R)\wedge(<b,e>\in R)\wedge(<e,c>\in R)$

$\Rightarrow (<a,b>\in R)\wedge(<b,c>\in R)$　　R 传递

$\Rightarrow <a,c>\in S$　　S 定义

由（1）、（2）、（3）得；S 是等价关系。

2、11 分

证明：设 P(x)：x 是个舞蹈者； Q(x) ：x 很有风度； S(x)：x 是个学生； a：王华

上述句子符号化为：

前提：$\forall x(P(x)\to Q(x))$ 、$S(a)\wedge P(a)$ 结论：$\exists x(S(x)\wedge Q(x))$ ……3 分

① $S(a)\wedge P(a)$　　P

② $\forall x(P(x)\to Q(x))$　　P

③ $P(a) \to Q(a)$ US②

④ $P(a)$ T①I

⑤ $Q(a).$ T③④I

⑥ $S(a)$ T①I

⑦ $S(a) \wedge Q(a)$ T⑤⑥I

⑧ $\exists x(S(x) \wedge Q(x))$ EG⑦ ……11 分

3、10分

证明：$\forall b_1, b_2 \in B, (b_1 \neq b_2)$ f 满射 $\therefore \exists a_1, a_2 \in A$

使$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$，且 $f(a_1) \neq f(a_2)$，由于f是函数，$\therefore a_1 \neq a_2$

又 $g(b_1) = \{x \mid (x \in A) \wedge (f(x) = b_1)\}$，$g(b_2) = \{x \mid (x \in A) \wedge (f(x) = b_2)\}$

$\therefore$ $a_1 \in g(b_1), a_2 \in g(b_2)$ 但 $a_1 \notin g(b_2), a_2 \notin g(b_1)$ $\therefore g(b_1) \neq g(b_2)$

由b_1, b_2任意性知，g为单射。

4、8分

证明：设 G 中两奇数度结点分别为 u 和 v，若 u，v 不连通，则 G 至少有两个连通分支 G_1、G_2，使得 u 和 v 分别属于 G_1 和 G_2，于是 G_1 和 G_2 中各含有 1 个奇数度结点，这与图论基本定理矛盾，因而 u，v 一定连通。

5、8分

证明： 证 G 中任何两结点之和不小于 n。

反证法：若存在两结点 u，v 不相邻且 $d(u) + d(v) \leq n - 1$，令 $V_1 = \{u, v\}$，则 $G-V_1$ 是具有 n-2 个结点的简单图，它的边数 $m' \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2 - (n-1)$，可得 $m' \geq \frac{1}{2}(n-2)(n-3) + 1$，这与 $G_1=G-V_1$ 为 n-2 个结点为简单图的题设矛盾，因而 G 中任何两个相邻的结点度数和不少于 n。

所以 G 为 Hamilton 图.

四、 计算 14%

1、7分

解：子群有<{[0]},$+_6$>；<{[0],[3]},$+_6$>；<{[0],[2],[4]},$+_6$>；<{Z_6},$+_6$>

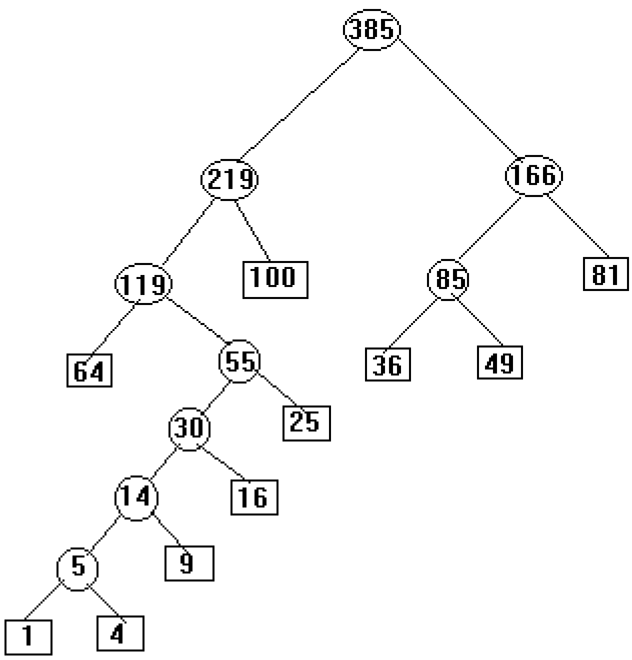
{[0]}的左陪集：{[0]}，{[1]}；{[2]}，{[3]}；{[4]}，{[5]}

{[0]，[3]}的左陪集：{[0]，[3]}；{[1]，[4]}；{[2]，[5]}

{[0]，[2]，[4]}的左陪集：{[0]，[2]，[4]}；{[1]，[3]，[5]}

Z_6的左陪集：Z_6。

2、7分



试卷三试题与答案

一、 填空 20% （每空 2 分）

1、 设 f，g 是自然数集 N 上的函数 $\forall x \in N,\quad f(x)=x+1,\quad g(x)=2x$，

则 $f \circ g(x) =$ ______________________________ 。

2、 设 A={a，b，c}，A 上二元关系 R={< a, a > , < a, b >,< a, c >, < c, c>} ，

则 s（R）= ______________________________ 。

3、 A={1，2，3，4，5，6}，A 上二元关系 $T=\{<x,y>|\ x \div y \text{ 是素数}\}$，则用列举法

T= ______________________________ ；

T 的关系图为

______________________________ ；

T 具有 ______________________ 性质。

4、 集合 $A=\{\{\Phi,2\},\{2\}\}$ 的幂集 $2^A=$ ______________________________ 。

5、 P，Q 真值为 0 ；R，S 真值为 1。则 wff $(P \wedge (R \vee S)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (R \wedge S))$ 的真值为 ______________________ 。

6、 wff $\neg((P \wedge Q) \vee R) \rightarrow R$ 的主合取范式为 ______________________________ 。

7、 设 P（x）：x 是素数， E(x)：x 是偶数，O(x)：x 是奇数 N (x,y)：x 可以整数 y。

则谓词 wff $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(O(y) \wedge N(y,x)))$ 的自然语言是

____ 。

8、 谓词 wff $\forall x \forall y(\exists z(P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$ 的前束范式为

____。

二、　选择 20%（每小题 2 分）

1、 下述命题公式中，是重言式的为（　　）。

A、$(p \wedge q) \to (p \vee q)$；　B、$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q)) \wedge (q \to p))$；

C、$\neg(p \to q) \wedge q$；　　D、$(p \wedge \neg p) \leftrightarrow q$。

2、 wff　$\neg(p \wedge q) \to r$ 的主析取范式中含极小项的个数为（　　）。

A 、2；　B、 3；　C、5；　D、0；　E、 8 。

3、 给定推理

① $\forall x(F(x) \to G(x))$	P
② $F(y) \to G(y)$	US①
③ $\exists x F(x)$	P
④ $F(y)$	ES③
⑤ $G(y)$	T②④I
⑥ $\forall x G(x)$	UG⑤

$\therefore\ \forall x(F(x) \to G(x)) \Rightarrow \forall x G(x)$

推理过程中错在（　　）。

A、①->②；　B、②->③；C、③->④；D、④->⑤；　E、⑤->⑥

4、 设 S_1={1，2，…，8，9}，S_2={2，4，6，8}，S_3={1，3，5，7，9}，S_4={3，4，5}，S_5={3，5}，在条件 $X \subseteq S_1$ 且 $X \not\subset S_3$ 下 X 与（　　）集合相等。

A、 X=S_2 或 S_5；　　B、X=S_4 或 S_5；

C、X=S_1，S_2 或 S_4；　D、X 与 S_1，…，S_5 中任何集合都不等。

5、设 R 和 S 是 P 上的关系，P 是所有人的集合，$R = \{<x,y>| x,y \in P \wedge x是y的父亲\}$，$S = \{<x,y>| x,y \in P \wedge x是y的母亲\}$

则 $S^{-1} \circ R$ 表示关系（　　）。

A、$\{<x,y>| x,y \in P \wedge x是y的丈夫\}$；

B、$\{<x,y>| x,y \in P \wedge x是y的孙子或孙女\}$；

C、 Φ；　D、$\{<x,y>| x,y \in P \wedge x是y的祖父或祖母\}$。

6、 下面函数（　　）是单射而非满射。

A、$f: R \to R,\quad f(x) = -x^2 + 2x - 1$；

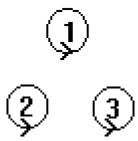
B、$f: Z^{+} \to R, \quad f(x) = \ln x$；

C、$f: R \to Z, \quad f(x) = [x], [x]$表示不大于$x$的最大整数；

D、$f: R \to R, \quad f(x) = 2x+1$。

其中 R 为实数集，Z 为整数集，R^{+}，Z^{+}分别表示正实数与正整数集。

7、 设 S={1，2，3}，R 为 S 上的关系，其关系图为



则 R 具有（　　　）的性质。

A、 自反、对称、传递；　　　　B、什么性质也没有；

C、反自反、反对称、传递；　　　　D、自反、对称、反对称、传递。

8、 设$S = \{\Phi, \{1\}, \{1, 2\}\}$，则有（　　　）$\subseteq S$。

A、{{1,2}} ；B、{1,2 } ；　C、{1} ；　D、{2} 。

9、 设 A={1 ,2 ,3 }，则 A 上有（　　　）个二元关系。

A、2^3　；　B、3^2　；　C、2^{2^3}；　D、2^{3^2}。

10、全体小项合取式为（　　　）。

A、可满足式； B、矛盾式； C、永真式； D、A，B，C 都有可能。

三、　用 CP 规则证明 16% （每小题 8 分）

1、$A \vee B \to C \wedge D, D \vee E \to F \quad \Rightarrow \quad A \to F$

2、$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \quad \Rightarrow \quad \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

四、（14%）

集合 X={<1,2>, <3,4>, <5,6>,⋯ }，$R=\{\langle\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\rangle \mid x_1+y_2 = x_2+y_1\}$ 。

1、 证明 R 是 X 上的等价关系。 （10 分）

2、 求出 X 关于 R 的商集。（4 分）

五、（10%）

设集合 A={ a ,b , c , d }上关系 R={< a, b > , < b , a > , < b , c > , < c , d >}

要求 1、写出 R 的关系矩阵和关系图。（4 分）

2、用矩阵运算求出 R 的传递闭包。（6 分）

六、（20%）

1、（10 分）设 f 和 g 是函数，证明 $f \cap g$ 也是函数。

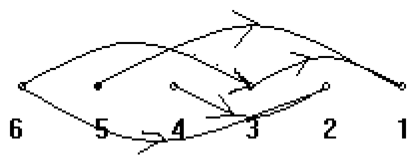
2、（10 分）设函数 $g: S \to T$　$f: T \to S$，证明 $f: T \to S$ 有一左逆函数当且仅当 f 是入射函数。

答案：

五、 填空 20%（每空 2 分）

1、2(x+1)；2、$\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<c,c>,<b,a>,<c,a>\}$；3、$\{<2,1>,<3,1>,<5,1>,<4,2>,<6,2>,<6,3>\}$；

4、



反对称性、反自反性；4、$\{\Phi,\{\{\Phi,2\}\},\{\{2\}\},\{\{\Phi,2\},\{2\}\}\}$；5、1；

6、$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$；7、任意 x，如果 x 是素数则存在一个 y，y 是奇数且 y 整除 x；8、$\forall x \forall y \forall z \exists u (\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z) \vee Q(x,y,u))$。

六、 选择 20%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	C	C	A	B	D	A	D	C

七、 证明 16%(每小题 8 分)

1、

① A	P（附加前提）
② $A \vee B$	T①I
③ $A \vee B \to C \wedge D$	P
④ $C \wedge D$	T②③I
⑤ D	T④I
⑥ $D \vee E$	T⑤I
⑦ $D \vee E \to F$	P
⑧ F	T⑥⑦I
⑨ $A \to F$	CP

2、

$\because$ $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x) P(x) \to \exists x Q(x)$

本题可证 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$

① $\neg(\forall x P(x))$	P（附加前提）
② $\exists x(\neg P(x))$	T①E
③ $\neg P(a)$	ES②
④ $\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P
⑤ $P(a) \vee Q(a)$	US④
⑥ $Q(a)$	T③⑤I
⑦ $\exists x Q(x)$	EG⑥
⑧ $\neg(\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$	CP

八、 **14%**

（1） 证明：

1、 自反性：$\forall <x, y> \in X$, 由于$x + y = x + y$

$\therefore$ $<<x, y>, <x, y>> \in R$ $\therefore$ R自反

2、 对称性：$\forall <x_1, y_1> \in X$, $\forall <x_2, y_2> \in X$

当$<<x_1, y_1>, <x_2, y_2>> \in R$时 即$x_1 + y_2 = x_2 + y_1$也即$x_2 + y_1 = x_1 + y_2$

故$<<x_2, y_2>, <x_1, y_1>> \in R$ $\therefore$ R有对称性

3、 传递性：$\forall <x_1, y_1> \in X$, $\forall <x_2, y_2> \in X$ $\forall <x_3, y_3> \in X$

当$<<x_1, y_1>, <x_2, y_2>> \in R$ 且 $<<x_2, y_2>, <x_3, y_3>> \in R$ 时

即$\begin{cases} x_1 + y_2 = x_2 + y_1 & (1) \\ x_2 + y_3 = x_3 + y_2 & (2) \end{cases}$

$(1)+(2)$ $x_1 + y_2 + x_2 + y_3 = x_2 + y_1 + x_3 + y_2$

即 $x_1 + y_3 = x_3 + y_1$

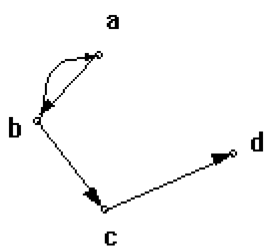
故$<<x_1, y_1>, <x_3, y_3>> \in R$ $\therefore$ R有传递性

由（1）（2）（3）知：R 是 X 上的先等价关系。

2、X/R=$\{[<1,2>]_R\}$

九、 **10%**

1、 $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 关系图



2、

$$M_{R^2}=M_R\circ M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^3}=M_{R^2}\circ M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^4}=M_{R^3}\circ M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=M_{R^2}$$

$$M_{R^5}=M_{R^3},M_{R^6}=M_{R^4},\cdots$$

$$M_{t(R)}=M_R+M_{R^2}+M_{R^3}+M_{R^4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

∴ t (R)={<a , a> , <a , b> , < a , c> , <a , d > , <b , a > , < b ,b > , < b , c . > , < b , d > , < c , d > }。

六、 20%

1、（1）

$$f\cap g=\{<x,y>|\,x\in domf\wedge x\in domg\wedge y=f(x)\wedge y=g(x)\}$$
$$=\{<x,y>|\,x\in domf\cap domg\wedge y=f(x)=g(x)\}$$

令$h=f\cap g$

$\therefore domf\cap g=domh=\{x\mid x\in domf\cap domg,f(x)=g(x)\}$

（2）$h=\{<x,y>|\,x\in domf\cap domg\wedge y=h(x)=f(x)=g(x)\}$

对$x\in domh$　若有y_1,y_2使得

$y_1=h(x)=f(x)=g(x)$，　$y_2=h(x)=f(x)=g(x)$

由于f(或g)是函数,有$y_1=y_2$ 即$\forall x\in domh$ 有唯一y使得$y=h(x)$

$\therefore f\cap g$也是函数。

2、证明：

"$\Rightarrow$"若f 有一左逆g ,则对 $\forall t\in T$　$g\circ f(t)=t$

故 $g\circ f$是入射 ,所以 f 是入射。

"$\Leftarrow$" f 是入射， $f:T\to S$定义如下：

$\forall s\in f(T)$,由 f 入射， $\exists|t\in T$,使$f(t)=s$

此时令$g(s)=t$, 若$s\notin f(T)$ 令$g(s)=c\in T$

则对$\forall s\in S$, $g(s)$只有一个值 t 或 c且若$f(t)=s$

则 $g\circ f(t)=g(s)=t$, 故g 是f 的左逆元

即若f入射,必能构造函数g, 使g为f左逆函数。

试卷四试题与答案

一、 填空 10% （每小题 2 分）

1、若 P，Q，为二命题，$P\to Q$ 真值为 0 当且仅当 ________________________ 。

2、命题“对于任意给定的正实数，都存在比它大的实数”令 F(x)：x 为实数，$L(x,y):x>y$ 则命题的逻辑谓词公式为 ____ 。

3、谓词合式公式 $\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$ 的前束范式为 __________________________ 。

4、将量词辖域中出现的 ______________ 和指导变元交换为另一变元符号，公式其余的部分不变，这种方法称为换名规则。

5、设 x 是谓词合式公式 A 的一个客体变元，A 的论域为 D，A(x)关于 y 是自由的，则 _______________________________________ 被称为存在量词消去规则，记为 ES。

二、 选择 25% （每小题 2.5 分）

1、下列语句是命题的有（ ）。

A、明年中秋节的晚上是晴天； B、$x+y>0$；

C、$xy>0$ 当且仅当 x 和 y 都大于 0； D、我正在说谎。

2、下列各命题中真值为真的命题有（ ）。

A、2+2=4 当且仅当 3 是奇数；B、2+2=4 当且仅当 3 不是奇数；

C、2+2≠4 当且仅当 3 是奇数； D、2+2≠4 当且仅当 3 不是奇数；

3、下列符号串是合式公式的有（ ）

A、$P\Leftrightarrow Q$；B、$P\Rightarrow P\vee Q$；C、$(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$；D、$\neg(P\leftrightarrow Q)$。

4、下列等价式成立的有（ ）。

A、$P\to Q\Leftrightarrow\neg Q\to\neg P$；B、$P\vee(P\wedge R)\Leftrightarrow R$；

C、 $P\wedge(P\to Q)\Leftrightarrow Q$； D、$P\to(Q\to R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\to R$。

5、若 $A_1, A_2 \cdots A_n$ 和 B 为 wff，且 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ 则（　　　　）。

A、称 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ 为 B 的前件；　　B、称 B 为 $A_1, A_2 \cdots A_n$ 的有效结论

C、当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge B \Leftrightarrow F$；　D、当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B \Leftrightarrow F$。

6、A，B 为二合式公式，且 $A \Leftrightarrow B$，则（　　　　）。

A、$A \rightarrow B$ 为重言式；　B、$A^* \Rightarrow B^*$；

C、$A \Rightarrow B$；　　　　D、$A^* \Leftrightarrow B^*$；　　E、$A \leftrightarrow B$ 为重言式。

7、“人总是要死的”谓词公式表示为（　　　　）。

（论域为全总个体域）M(x)：x 是人；Mortal(x)：x 是要死的。

A、$M(x) \rightarrow Mortal(x)$；　　B、$M(x) \wedge Mortal(x)$

C、$\forall x(M(x) \rightarrow Mortal(x))$；D、$\exists x(M(x) \wedge Mortal(x))$

8、公式 $A = \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的解释 I 为：个体域 D={2}，P(x)：x>3, Q(x)：x=4 则 A 的真值为（　　　）。

A、1；　B、0；　C、可满足式；　D、无法判定。

9、下列等价关系正确的是（　　　）。

A、$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$；

B、$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$；

C、$\forall x(P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow Q$；

D、$\exists x(P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \rightarrow Q$。

10、下列推理步骤错在（　　　　）。

① $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	P
② $F(y) \rightarrow G(y)$	US①
③ $\exists xF(x)$	P
④ $F(y)$	ES③
⑤ $G(y)$	T②④I
⑥ $\exists xG(x)$	EG⑤

A、②；B、④；C、⑤；D、⑥

三、 逻辑判断 30%

1、用等值演算法和真值表法判断公式 $A=((P\to Q)\wedge(Q\to P))\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)$ 的类型。（10 分）

2、下列问题，若成立请证明，若不成立请举出反例：（10 分）

（1） 已知 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$，问 $A\Leftrightarrow B$ 成立吗？

（2） 已知 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$，问 $A\Leftrightarrow B$ 成立吗？

3、如果厂方拒绝增加工资，那么罢工就不会停止，除非罢工超过一年并且工厂撤换了厂长。问：若厂方拒绝增加工资，面罢工刚开始，罢工是否能够停止。（10 分）

四、计算 10%

1、设命题 A_1，A_2 的真值为 1，A_3，A_4 真值为 0，求命题 $(A_1\vee(A_2\to(A_3\wedge\neg A_1)))\leftrightarrow(A_2\vee\neg A_4)$ 的真值。（5 分）

2、利用主析取范式，求公式 $\neg(P\to Q)\wedge Q\wedge R$ 的类型。（5 分）

五、谓词逻辑推理 15%

符号化语句："有些人喜欢所有的花，但是人们不喜欢杂草，那么花不是杂草"。并推证其结论。

六、证明：（10%）

设论域 D={a , b , c}，求证：$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$。

答案：

十、 填空 10%（每小题 2 分）

1、P 真值为 1，Q 的真值为 0；2、$\forall x(F(x)\wedge L(x,0)\to\exists y(F(y)\wedge L(y,x))$；3、$\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))$；4、约束变元；5、$\exists xA(x)\Rightarrow A(y)$，y 为 D 的某些元素。

十一、 选择 25%（每小题 2.5 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A,C	A,D	C,D	A,D	B,C	A,B,C,D,E	C	A	B	(4)

十二、 逻辑判断 30%

1、（1）等值演算法

$A=((P\to Q)\wedge(Q\to P))\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow T$

（2）真值表法

P Q	$P\to Q$	$Q\to P$	$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$	$P\leftrightarrow Q$	A
1 1	1	1	1	1	1
1 0	0	1	0	0	1
0 1	1	0	0	0	1
0 0	1	1	1	1	1

所以 A 为重言式。

2、（1）不成立。

若取 $C=T$ 则 $A\vee T\Leftrightarrow T$ $B\vee T\Leftrightarrow T$ 有 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C\Leftrightarrow T$

但 A 与 B 不一定等价，可为任意不等价的公式。

（2）成立。

证明：$\neg A\Leftrightarrow\neg B$ 充要条件 $\neg A\leftrightarrow\neg B\Leftrightarrow T$

即：
$$T\Leftrightarrow(\neg A\to\neg B)\wedge(\neg B\to\neg A)\Leftrightarrow(A\vee\neg B)\wedge(B\vee\neg A)$$
$$\Leftrightarrow(\neg B\vee A)\wedge(\neg A\vee B)\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)\Leftrightarrow A\leftrightarrow B$$

所以 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow T$ 故 $A\Leftrightarrow B$。

3、解：设 P：厂方拒绝增加工资；Q：罢工停止；R 罢工超壶过一年；R：撤换厂长

前提：$P\to(\neg(R\wedge S)\to\neg Q)$，$P$，$\neg R$ 结论：$\neg Q$

①$P\to(\neg(R\wedge S)\to\neg Q)$ P

②P P

③$\neg(R\wedge S)\to\neg Q$ T①②I

④$\neg R$ P

⑤$\neg R\vee\neg S$ T④I

⑥$\neg(R\wedge S)$ T⑤E

⑦$\neg Q$ T③⑥I

罢工不会停止是有效结论。

四、计算 10%

（1） 解：
$$(1\vee(1\to 0\wedge 0)))\leftrightarrow(1\vee 1)=(1\vee(1\to 0)\leftrightarrow 1$$
$$=(1\vee 0)\leftrightarrow 1\quad=1\leftrightarrow 1\quad=1$$

（2） $\neg(P\to Q)\wedge Q\wedge R \Leftrightarrow \neg(\neg P\vee Q)\wedge(Q\wedge R)$
$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\wedge(Q\wedge R)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q\wedge Q\wedge R\Leftrightarrow F$

它无成真赋值，所以为矛盾式。

五、谓词逻辑推理 15%

解：$M(x):x$是人； $F(x):x$是花； $G(x):x$是杂草； $H(x,y):x$喜欢y

$\exists x(M(x)\wedge\forall y(F(y)\to H(x,y)))$ $\forall x(M(x)\to\forall y(G(y)\to\neg H(x,y)))$

$\Rightarrow\forall x(F(x)\to\neg G(x))$

证明：

⑴ $\exists x(M(x)\wedge\forall y(F(y)\to H(x,y)))$	P
⑵ $M(a)\wedge\forall y(F(y)\to H(a,y))$	ES⑴
⑶ $M(a)$	T⑵I
⑷ $\forall y(F(y)\to H(a,y))$	T⑵I
⑸ $\forall x(M(x)\to\forall y(G(y)\to\neg H(x,y)))$	P
⑹ $M(a)\to\forall y(G(y)\to\neg H(a,y))$	US⑸
⑺ $\forall y(G(y)\to\neg H(a,y))$	T⑶⑹I
⑻ $\forall y(H(a,y)\to\neg G(y))$	T⑺E
⑼ $F(z)\to H(a,z)$	US⑷
⑽ $H(a,z)\to\neg G(z)$	US⑻
⑾ $F(z)\to\neg G(z)$	T⑼⑽I
⑿ $\forall x(F(x)\to\neg G(x))$	UG⑾

十三、 **证明 10%**

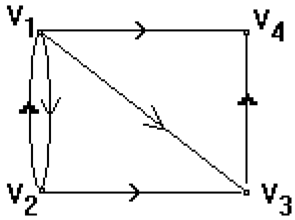
$$
\begin{aligned}
&\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Leftrightarrow(A(a)\wedge A(b)\wedge A(c)\vee(B(a)\wedge B(b)\wedge B(c)\\
&\Leftrightarrow(A(a)\vee B(a))\wedge(A(a)\vee B(b))\wedge(A(a)\vee B(c))\\
&\wedge(A(b)\vee B(a))\wedge(A(b)\vee B(b))\wedge(A(b)\vee B(c))\\
&\wedge(A(c)\vee B(a))\wedge(A(c)\vee B(b))\wedge(A(c)\vee B(c))\\
&\Rightarrow(A(a)\vee B(a))\wedge(A(b)\vee B(b))\wedge(A(c)\vee B(c)\\
&\Leftrightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))
\end{aligned}
$$

试卷五试题与答案

一、填空 15%（每空 3 分）

1、设 G 为 9 阶无向图，每个结点度数不是 5 就是 6，则 G 中至少有 ________ 个 5 度结点。

2、n 阶完全图，K_n 的点数 X (K_n) = _________________________ 。



3、有向图 中从 v_1 到 v_2 长度为 2 的通路有 _________ 条。

4、设[R，+，·]是代数系统，如果①[R，+]是交换群 ②[R，·]是半群

③ ____ 则称[R，+，·]为环。

5、设$[L,\otimes,\oplus]$是代数系统，则$[L,\otimes,\oplus]$满足幂等律，即对$\forall a\in L$有 _________________ 。

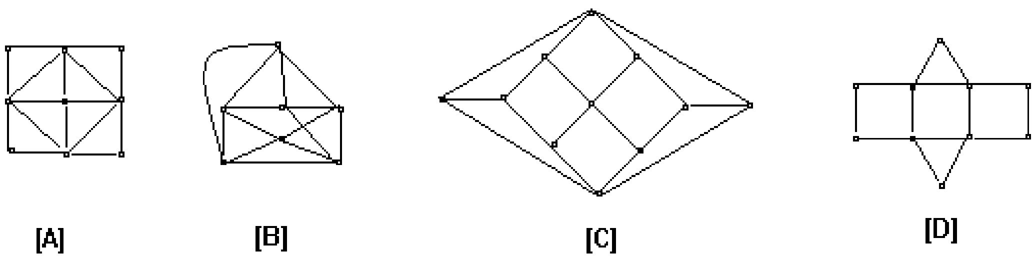
二、选择 15%（每小题 3 分）

1、 下面四组数能构成无向简单图的度数列的有（　　　　　）。

A、（2，2，2，2，2）；　　B、（1，1，2，2，3）；

C、（1，1，2，2，2）；　　D、（0，1，3，3，3）。

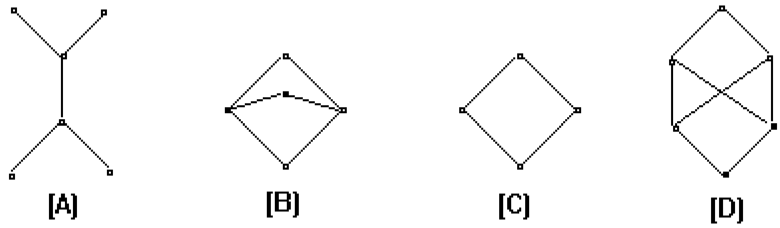
2、 下图中是哈密顿图的为（　　　）。



3、 如果一个有向图 D 是强连通图，则 D 是欧拉图，这个命题的真值为（　　）

A、真；　　B、假。

4、 下列偏序集（　　　）能构成格。



5、设 $s=\{1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},4\}$，*为普通乘法，则[S，*]是（）。

A、代数系统； B、半群； C、群； D、都不是。

三、证明 48%

1、（10%）在至少有 2 个人的人群中，至少有 2 个人，他们有相同的朋友数。

2、（8%）若图 G 中恰有两个奇数度顶点，则这两个顶点是连通的。

3、（8%）证明在 6 个结点 12 条边的连通平面简单图中， 每个面的面数都是 3。

4、（10%）证明循环群的同态像必是循环群。

5、（12%）设 $[B,\times,+,^{-},0,1]$ 是布尔代数，定义运算*为 $a*b=(a\times\overline{b})+(\overline{a}\times b)$，求证[B，*]是阿贝尔群。

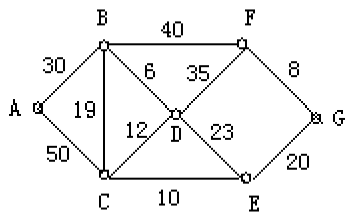
四、计算 22%

1、在二叉树中

1） 求带权为 2，3，5，7，8 的最优二叉树 T。（5 分）

2） 求 T 对应的二元前缀码。（5 分）

2、 下图所示带权图中最优投递路线并求出投递路线长度（邮局在 D 点）。



答案：

一、填空（15%）每空 3 分

1、 6；2、n；3、2；4、+对·分配且·对+分配均成立；5、$a\otimes a=a$ 且 $a\oplus a=a$。

二、选择（15%）每小题 3 分

题目	1	2	3	4	5
答案	A,B	B,D	B	C	D

三、证明（48%）

1、（10 分）证明：用 n 个顶点 v_1，…，v_n 表示 n 个人，构成顶点集 V={v_1，…，$v_{n\}}$，设

$E=\{uv\mid u,v\in V,且\quad u,v是朋友\ (u\neq v)\}$，无向图 G=（V，E）

现证 G 中至少有两个结点度数相同。

事实上，（1）若 G 中孤立点个数大于等于 2，结论成立。

（2） 若 G 中有一个孤立点，则 G 中的至少有 3 个顶点，既不考虑孤立点。设 G 中每个结点度数均大于等于 1，又因为 G 为简单图，所以每个顶点度数都小于等于 n-1，由于 G 中 n 顶点其度数取值只能是 1，2，…，n-1，由鸽巢原理，必然至少有两个结点度数是相同的。

2、（8 分）证：设 G 中两个奇数度结点分别为 u，v。若 u，v 不连通则至少有两个连通分支 G_1、G_2，使得 u，v 分别属于 G_1 和 G_2。于是 G_1 与 G_2 中各含有一个奇数度结点，与握手定理矛盾。因而 u，v 必连通。

3（8 分）证：n=6,m=12 欧拉公式 n-m+f=2 知 f=2-n+m=2-6-12=8

由图论基本定理知：$\sum\deg(F)=2\times m=24$，而 $\deg(F_i)\geq 3$，所以必有 $\deg(F_i)=3$，即每个面用 3 条边围成。

4（10 分） 证：设循环群[A，•]的生成元为 a，同态映射为 f，同态像为[f（A），*]，于是

$\forall a^n,a^m\in A$ 都有 $f(a^n\cdot a^m)=f(a^n)*f(a^m)$

对 n=1 有 $f(a)=f(a)$

n=2, 有 $f(a^2)=f(a\cdot a)=f(a)*f(a)=(f(a))^2$

若 n=k-1 时 有 $f(a^{k-1})=(f(a))^{k-1}$

对 n=k 时，$f(a^k)=f(a^{k-1}\cdot a)=f(a^{k-1})*f(a)=(f(a))^{k-1}*f(a)=(f(a))^k$

这表明，f(A)中每一个元素均可表示为 $(f(a))^n$，所以[f(A),*]为 f(a) 生成的循环群。

5、证：

（1） 交换律：$\forall a,b\in B$ 有 $a*b=(a\times\overline{b})+(\overline{a}\times b)=(b\times\overline{a})+(\overline{b}\times a)=b*a$

（2） 结合律：$\forall a,b,c\in B$ 有

$$(a*b)*c=((a\times\bar{b})+(\bar{a}\times b))*c=(((a\times\bar{b})+(\bar{a}\times b))\times\bar{c})+(\overline{(a\times\bar{b})+(\bar{a}\times b)})\times c$$
$$=(a\times\bar{b}\times\bar{c}+\bar{a}\times b\times\bar{c})+((\bar{a}+b)\times(a+\bar{b}))\times c$$
$$=a\times\bar{b}\times\bar{c}+\bar{a}\times b\times\bar{c}+(\bar{a}\times a+\bar{a}\times\bar{b}+b\times a+b\times\bar{b})\times c$$
$$=a\times\bar{b}\times\bar{c}+\bar{a}\times b\times\bar{c}+b\times a\times c+\bar{a}\times\bar{b}\times c$$
$$=a\times b\times c+a\times\bar{b}\times\bar{c}+\bar{a}\times b\times\bar{c}+\bar{a}\times\bar{b}\times c$$
而：

$$a*(b*c)=a*((b\times\bar{c})+(\bar{b}\times c))=(a\times\overline{(b\times\bar{c})+(\bar{b}\times c)})+((\bar{a}\times(b\times\bar{c})+(\bar{b}\times c))$$
$$=a\times(\bar{b}+c)\times(b+\bar{c})+\bar{a}\times b\times\bar{c}+\bar{a}\times\bar{b}\times c$$
$$=a\times b\times c+a\times\bar{b}\times\bar{c}+\bar{a}\times b\times\bar{c}+\bar{a}\times\bar{b}\times c$$
$$\therefore (a*b)*c=a*(b*c)$$

（3） 幺：$\forall a\in B$有

$$a*0=(a\times\bar{0})+(\bar{a}\times 0)=a+0=a \quad 0*a=(0\times\bar{a})+(\bar{0}\times a)=0+a=a$$

$\therefore 0$是$[B,*]$幺元。

（4） 逆：$\forall a\in B$ $\quad a*a=(a\times\bar{a})+(\bar{a}\times a)=0+0=0$

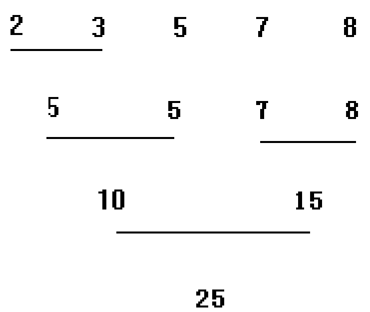
$\therefore a$是a的逆元。

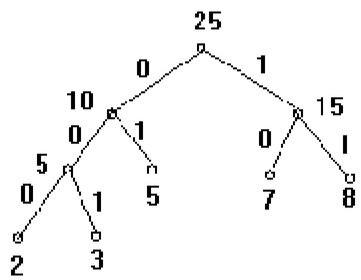
综上所述：[B，*]是阿贝尔群。

四、计算（22%）

1、（10 分）

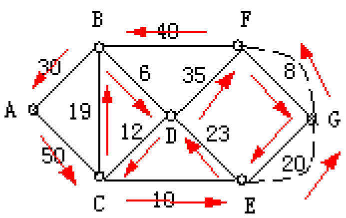
（1）（5 分）由 Huffman 方法,得最佳二叉树为：





（2）（5 分）最佳前缀码为：000，001，01，10，11

2、（12 分）



图中奇数点为 E、F ，d(E)=3,d(F)=3,d(E,F)=28 p=EGF

复制道路 EG、GF，得图 G‘，则 G‘是欧拉图。

由 D 开始找一条欧拉回路：DEGFGEBACBDCFD。

道路长度为：

35+8+20+20+8+40+30+50+19+6+12+10+23=281。

试卷六试题与答案

一、　填空 15% （每小题 3 分）

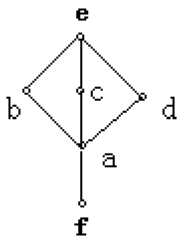
1、 n 阶完全图结点 v 的度数 d(v) = ______________________________ 。

2、 设 n 阶图 G 中有 m 条边，每个结点的度数不是 k 的是 k+1，若 G 中有 N_k 个 k 度顶点，N_{k+1} 个 k+1 度顶点，则 N_k = __________________________________ 。

3、 算式 $((a+(b*c)*d)\div(e*f)$ 的二叉树表示为

____ 。

4、 如图



给出格 L，则 _______________ 。

5、 一组学生，用二二扳腕子比赛法来测定臂力的大小，则幺元是 ___________________ 。

二、选择 15% （每小题 3 分）

1、设 S={0,1,2,3},≤为小于等于关系，则{S，≤}是（　　　　）。

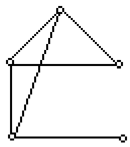
A、群；B、环；C、域；D、格。

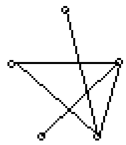
2、设[{a , b , c}，*]为代数系统，*运算如下：

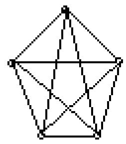
*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

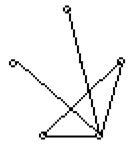
则零元为（　　　　）。

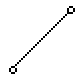
A、a；　B、b；　C、c；　D、没有。

3、如右图  相对于完全图 K_5 的补图为（　　　）。


[A]


[B]


[C]


[D]

4、一棵无向树 T 有 7 片树叶，3 个 3 度顶点，其余顶点均为 4 度。则 T 有（　　　）4 度结点。

A、1；　B、2；　C、3；　D、4。

5、设[A，+，•]是代数系统，其中+，•为普通加法和乘法，则 A=（　　　）时，[A，+，•]是整环。

A、$\{x \mid x = 2n, n \in Z\}$；　B、$\{x \mid x = 2n+1, n \in Z\}$；

C、$\{x \mid x \geq 0, 且 x \in Z\}$；　D、$\{x \mid x = a + b\sqrt[4]{5},\ a, b \in R\}$。

三、证明 50%

1、设 G 是（n,m）简单二部图，则 $m \leq \frac{n^2}{4}$。（10 分）

2、设 G 为具有 n 个结点的简单图，且 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，则 G 是连通图。（10 分）

3、记“开”为 1，“关”为 0，反映电路规律的代数系统[{0，1}，+，•]的加法运算和乘法运算。如下：

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

证明它是一个环，并且是一个域。（14 分）

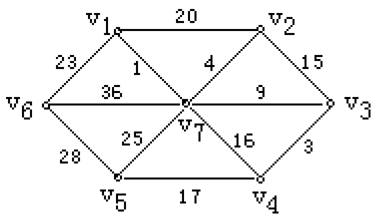
4、$[L, \otimes, \oplus]$ 是一代数格，“≤”为自然偏序，则[L，≤]是偏序格。（16 分）

四、10%

设 $E(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge x_2)\vee(x_2\wedge x_3)\vee(\overline{x_2}\wedge x_3)$ 是布尔代数 $[\{0,1\},\vee,\wedge,-]$ 上的一个布尔表达式，试写出 $E(x_1,x_2,x_3)$ 的析取范式和合取范式（10 分）

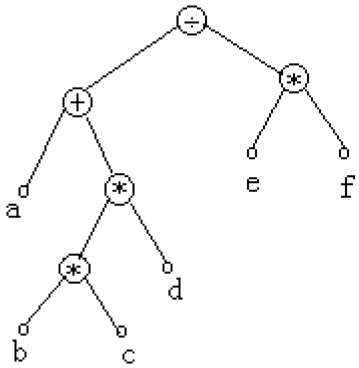
五、10%

如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1,v_2,\cdots,v_7$ 及预先算出它们之间的一些直接通信成路造价（单位：万元），试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信又使总造价最小。



答案：

一、填空 15%（每小题 3 分）



1、n-1；2、n(k+1)-2m；3、如右图；4、0 ；5、臂力小者

二、选择 15%（每小题 3 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	D	C	A	A	D

三、证明 50%

（1） 证：设 G=（V，E）

$V=X\cup Y$ ，$|X|=n_1$ ，$|Y|=n_2$ ，$n_1+n_2=n$

对完全二部图有 $m=n_1\cdot n_2=n_1(n-n_1)=-n_1^2+n_1n=-(n_1-\frac{n}{2})^2+\frac{n^2}{4}$

当 $n_1=\frac{n}{2}$ 时，完全二部图 (n,m) 的边数 m 有最大值 $\frac{n^2}{4}$

故对任意简单二部图 (n,m) 有 $m\le\frac{n^2}{4}$ 。

（2） 证：反证法：若 G 不连通，不妨设 G 可分成两个连通分支 G_1、G_2，假设 G_1

和 G_2 的顶点数分别为 n_1 和 n_2，显然 $n_1+n_2=n$

 $n_1 \geq 1 \quad n_2 \geq 1 \quad \therefore n_1 \leq n-1 \quad n_2 \leq n-1$

$$\therefore m \leq \frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2} \leq \frac{(n-1)(n_1+n_2-2)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

与假设矛盾。所以 G 连通。

（3）　（1）[{0，1}，+，·]是环

①[{0，1}，+]是交换群

乘：由“+”运算表知其封闭性。由于运算表的对称性知：+运算可交换。

群：（0+0）+0=0+（0+0）=0；（0+0）+1=0+（0+1）=1；

（0+1）+0=0+（1+0）=1；　（0+1）+1=0+（1+1）=0；

（1+1）+1=1+（1+1）=0　　……

结合律成立。

幺：幺元为 0。

逆：0，1 逆元均为其本身。

②[{0，1}，·]是半群

乘：由“·”运算表知封闭

群：（0·0）·0=0·（0·0）=0；（0·0）·1=0·（0·1）= 0；

（0·1）·0=0·（1·0）=0；　（0·1）·1=0·（1·1）=0；

（1·1）·1=1·（1·1）=0。

③·对+的分配律　$\forall x,y \in \{0,1\}$

Ⅰ　0·（x+y）=0=0+0=(0·x)+(0·y)；

Ⅱ　1·（x+y）

当 x=y　(x+y)=0　则

$$1\cdot(x+y)=1\cdot 0=0=\begin{Bmatrix}0+0\\1+1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(1\cdot 0)+(1\cdot 0)\\(1\cdot 1)+(1\cdot 1)\end{Bmatrix}=(1\cdot x)+(1\cdot y)$$

；

当 $x \neq y$（$x+y=1$）则

$$1\cdot(x+y)=1\cdot 1=1=\begin{Bmatrix}1+0\\0+1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(1\cdot 1)+(1\cdot 0)\\(1\cdot 0)+(1\cdot 1)\end{Bmatrix}=(1\cdot x)+(1\cdot y)$$

所以 $\forall x,y,z \in \{0,1\}$ 均有 $z\cdot(x+y)=(z\cdot x)+(z\cdot y)$

同理可证：$(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$

所以·对+ 是可分配的。

由①②③得，[{0，1}，+，·]是环。

（2）[{0，1}，+，·]是域

因为[{0，1}，+，·]是有限环，故只需证明是整环即可。

①乘交环： 由乘法运算表的对称性知，乘法可交换。

②含幺环：乘法的幺元是 1

③无零因子：$1 \cdot 1 = 1 \neq 0$

因此[{0，1}，+，·]是整环，故它是域。

4、证：（1）“≤”是偏序关系， ≤ 自然偏序 $\forall a, b \in L \quad a \otimes b = a$

①反自反性：由代数格幂等关系：$a \otimes a = a \therefore a \leq a$。

②反对称性：$\forall a, b \in L$ 若 $a \leq b, b \leq a$ 即：$a \otimes b = a,\quad b \otimes a = b$，

则 $a = a \otimes b = b \otimes a = b \qquad b \leq a$

③传递性：$a \leq b, b \leq c$ 则：

$$
\begin{aligned}
a \otimes c &= (a \otimes b) \otimes c && a \leq b 即 a \otimes b = a \\
&= a \otimes (b \otimes c) && 结合律 \\
&= a \otimes b && b \leq c 即 b \otimes c = b \\
&= a && a \leq b 即 a \otimes b = a
\end{aligned}
$$

$\therefore a \leq c$

（2）$\forall x, y \in L$ 在 L 中存在{x,y}的下（上）确界

设 $x, y \in L$ 则：$x \otimes y = \inf\{x, y\}$

事实上：$x \otimes (x \otimes y) = (x \otimes x) \otimes y = x \otimes y$

$\therefore x \otimes y \leq x$ 同理可证：$x \otimes y \leq y$

若{x , y }有另一下界 c，则 $c \otimes (x \otimes y) = (c \otimes x) \otimes y = c \otimes y = c$

$\therefore c \leq x \otimes y \quad \therefore x \otimes y$ 是{x , y }最大下界，即 $x \otimes y = \inf\{x, y\}$

同理可证上确界情况。

四、14%

解：函数表为：

x_1	x_2	x_3	$E(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

1	1	1	1

析取范式：$E(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3)\vee(\bar{x}_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3)$
$\vee(x_1\wedge x_2\wedge\bar{x}_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3)$

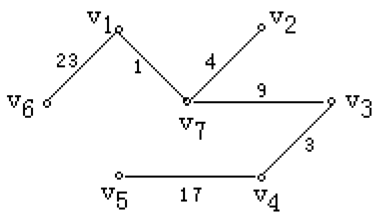
合取范式：$E(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x\vee_2\vee x_3)\wedge(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)$

五、10%

解： 用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法为：

$w(v_1,v_7)=1$　　选$e_1=v_1v_7$
$w(v_7,v_2)=4$　　选$e_2=v_7v_2$
$w(v_7,v_3)=9$　　选$e_3=v_7v_3$
$w(v_3,v_4)=3$　　选$e=v_3v_4$
$w(v_4,v_5)=17$　　选$e=v_4v_5$
$w(v_1,v_6)=23$　　选$e=v_1v_6$

结果如图：



树权 C(T)=23+1+4+9+3+17=57（万元）即为总造价

试卷七试题与答案

一、填空 15% （每小题 3 分）

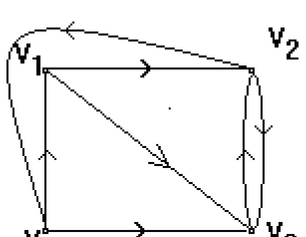
1. 任何(n,m) 图 G = (V,E) ， 边与顶点数的关系是 ________________________ 。
2. 当 n 为 ____________ 时，非平凡无向完全图 K_n 是欧拉图。
3. 已知一棵无向树 T 有三个 3 顶点，一个 2 度顶点，其余的都是 1 度顶点，
   则 T 中有______________________个 1 度顶点。
4. n 阶完全图 K_n 的点色数 $X(K_N)$= ________________________ 。
5. 一组学生，用两两扳腕子比赛来测定臂力大小，则幺元是 ________________________ 。

二、　选择 15% （每小题 3 分）

1、下面四组数能构成无向图的度数列的有(　　)。

A、 2,3,4,5,6,7；　　　　B、 1,2,2,3,4；

C、 2,1,1,1,2；　　　　D、 3,3,5,6,0。



2、图 的邻接矩阵为(　　　)。

A、$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$；B、$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$；C、$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$；D、$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$。

3、下列几个图是简单图的有(　　　)。

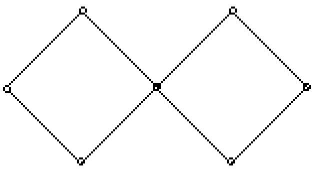
A. $G_1=(V_1,E_1)$，其中 $V_1=\{a,b,c,d,e\}$，$E_1=\{ab,be,eb,ae,de\}$；

B. $G_2=(V_2,E_2)$ 其中 $V_2=V_1$，$E_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,d\rangle,\langle d,a\rangle,\langle d,e\rangle\}$；

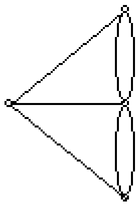
C. $G=(V_3,E_3)$，其中 $V_3=V_1$，$E_3=\{ab,be,ed,cc\}$；

D. $G=(V_4,E_4)$，其中 $V_4=V_1$，$E_4=\{(a,a),(a,b),(b,c),(e,c),(e,d)\}$。

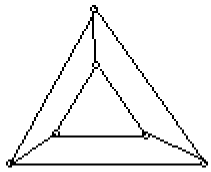
4、下列图中是欧拉图的有(　　　　)。



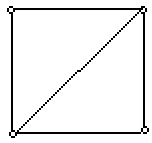
[A]



[B]



[C]



[D]

5、$G=(2^S,\oplus)$，其中 $S=\{1,2,3\}$，$\oplus$ 为集合对称差运算，

则方程 $\{1,2\}\oplus x=\{1,3\}$ 的解为（　　　　）。

A、$\{2,3\}$；　B、$\{1,2,3\}$；　C、$\{1,3\}$；　D、Φ。

三、　证明 34%

1、证明：在至少有 2 个人的人群中，至少有 2 个人，他的有相同的朋友数。(8 分)

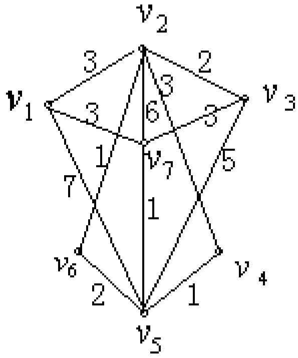
2、若图 G 中恰有两个奇数顶点，则这两个顶点是连通的。(8 分)

3、证明：在 6 个结点 12 条边的连通平面简单图中，每个面的面度都是 3。(8 分)

4、证明循环群的同态像必是循环群。(10 分)

四、　中国邮递员问题 13%

求带权图 G 中的最优投递路线。邮局在 v_1点。



五、　根树的应用 13%

在通讯中，八进制数字出现的频率如下：

0：30%、1：20%、2：15% 、3：10%、4：10%、5：5%、6：5%、7：5%

求传输它们最佳前缀码（写出求解过程）。

六、　10%

设 B_4={e , a , b , ab }，运算*如下表，

*	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

则<B_4,*>是一个群（称作 Klein 四元群

答案：

十四、　填空 15%（每小题 3 分）

1、$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$；2、奇数；3、5；4、n；5、臂力小者

十五、　选择 15%（每小题 3 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	B	C	B	B	A

十六、　证明 34%

1、（10 分）证明: 用 n 个顶点 v_1，…，v_n表示 n 个人，构成顶点集 V={v_1，…，v_n}，设$E=\{uv \mid u,v \in V,\text{且}\quad u,v\text{是朋友}\ (u \neq v)\}$，无向图 G=（V，E）

现证 G 中至少有两个结点度数相同。

事实上，（1）若 G 中孤立点个数大于等于 2，结论成立。

（2） 若 G 中有一个孤立点，则 G 中的至少有 3 个顶点，现不考虑孤立点。设 G 中每个结点度数均大于等于 1，又因为 G 为简单图，所以每个顶点度数都小于等于 n-1，由于 G 中顶点数到值只能是 1，2，…，n-1 这 n-1 个数，因而取 n-1 个值的 n 个顶点的度数至少有两个结点度数是相同的。

2、（8 分）证：设 G 中两个奇数度结点分别为 u，v。若 u，v 不连通，即它们中无任何通路，则至少有两个连通分支 G_1、G_2，使得 u，v 分别属于 G_1 和 G_2。于是 G_1 与 G_2 中各含有一个奇数度结点，与握手定理矛盾。因而 u，v 必连通。

3、（8 分）证：n=6,m=12 欧拉公式 n-m+f=2 知 f=2-n+m=2-6-12=8

由图论基本定理知：$\sum\deg(F)=2\times m=24$，而 $\deg(F_i)\geq 3$，所以必有 $\deg(F_i)=3$，即每个面用 3 条边围成。

4、（10 分） 证：设循环群[A，•]的生成元为 a，同态映射为 f，同态像为<f（A），*>，于是 $\forall a^n,a^m\in A$ 都有 $f(a^n\cdot a^m)=f(a^n)*f(a^m)$

对 n=1 有 $f(a)=f(a)$

n=2, 有 $f(a^2)=f(a\cdot a)=f(a)*f(a)=(f(a))^2$

若 n=k-1 时 有 $f(a^{k-1})=(f(a))^{k-1}$

对 n=k 时，$f(a^k)=f(a^{k-1}\cdot a)=f(a^{k-1})*f(a)=(f(a))^{k-1}*f(a)=(f(a))^k$

这表明，f(A)中每一个元素均可表示为 $(f(a))^n$，所以<f(A),*>是以 f(a) 生成元的循环群。

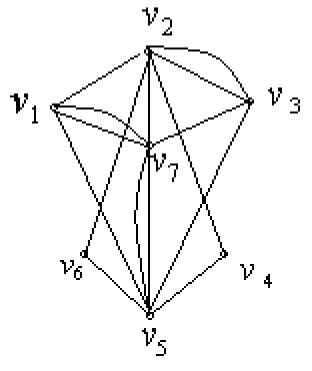
十七、 **中国邮递员问题 14%**

解：图中有 4 个奇数结点，$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=5,\quad d(v_3)=3\quad ,d(v_5)=5$

（1） 求 v_1,v_2,v_3,v_5 任两结点的最短路

$d(v_1v_2)=3,\quad d(v_2v_3)=5\quad ,d(v_1v_5)=4,\quad d(v_2v_3)=2,\quad d(v_2v_5)=3\quad ,\quad d(v_3v_5)=4$

$p_1=v_1v_2,\quad p_2=v_1v_2v_3,\quad p_3=v_1v_7v_5,\quad p_4=v_2v_3,\quad p_5=v_2v_6v_5,\quad p_6=v_3v_7v_5$



再找两条道路使得它们没有相同的起点和终点，且长度总和最短：$p_3=v_1v_7v_5$，$p_4=v_2v_3$，

（2） 在原图中复制出 p_3，p_4，设图 G‘，则图 G‘中每个结点度数均为偶数的图 G‘存在欧拉回路

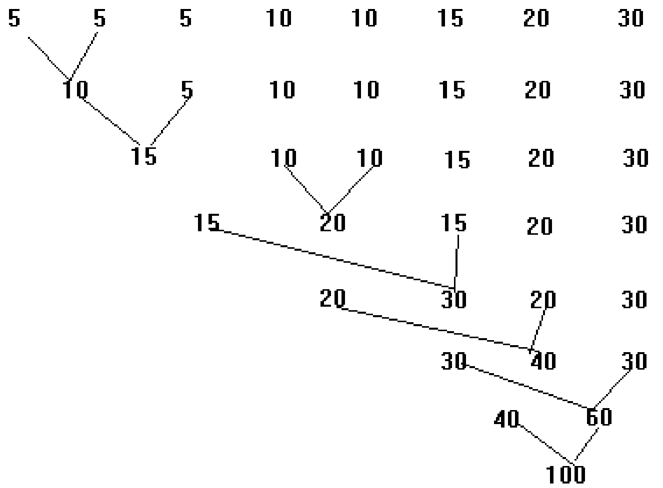
$C = v_1 v_7 v_3 v_2 v_4 v_5 v_6 v_2 v_7 v_5 v_3 v_2 v_1 v_7 v_5 v_1$，欧拉回路 C 权长为 43。

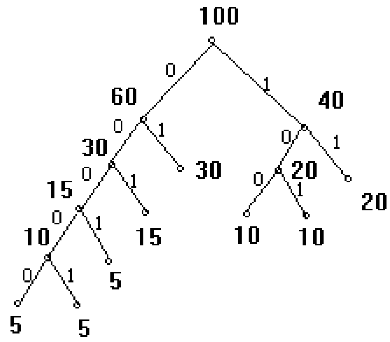
十八、 根树的应用 13%

解：用 100 乘各频率并由小到大排列得权数

$$w_1 = 5, w_2 = 5, w_3 = 5, w_4 = 10, w_5 = 10, w_6 = 15, w_7 = 20, w_8 = 30$$

（1） 用 Huffman 算法求最优二叉树：





（2） 前缀码

用 00000 传送 5；00001 传送 6；0001 传送 7；100 传送 3；101 传送 4；001 传送 2；11 传送 1；01 传送 0 （频率越高传送的前缀码越短）。

十九、 10%

证明：

（1） 乘：由运算表可知运算*是封闭的。

（2） 群：即要证明 $(x*y)*z = x*(y*z)$，这里有 4^3=64 个等式需要验证

但：① e 是幺元，含 e 的等式一定成立。

②ab=a*b=b*a，如果对含 a，b 的等式成立，则对含 a、b、ab 的等式也都成立。

③剩下只需验证含 a、b 等式，共有 2^3=8 个等式。即：

(a*b)*a=ab*a=b=a*(b*a)=a*ab=b； (a*b)*b=ab*b=a=a*(b*b)=a*e=a；

(a*a)*a=e*a=a=a*(a*a)=a*e=a ； (a*a)*b=e*b=b=a*(a*b)=a*ab=b；

(b*b)*a=e*a=a=b*(b*a)=b*ab=a； (b*b)*b=e*b=b=b*(b*b)=b*e=b；

(b*a)*a=ab*a=b=b*(a*a)=b*e=b ； (b*a)*b=ab*b=a=b*(a*b)=b*ab=a 。

（3） 幺： e 为幺元

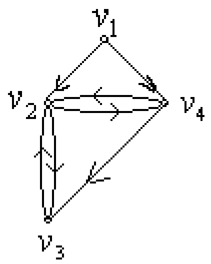
（4） 逆：e^{-1}=e ； a^{-1}=a ； b^{-1}=b ； $(ab)^{-1}$=ab 。

所以<B_4,*>为群。

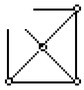
试卷八试题与答案

一、 填空 15% （每小题 3 分）

1、 n 阶完全图 K_n的边数为 ____________________ 。



2、 右图 的邻接矩阵 A= ____________________________ 。

3、 图  的对偶图为 ________________________________ 。

4、 完全二叉树中，叶数为 n_t，则边数 m= ______________________________ 。

5、 设< {a,b,c}, * >为代数系统，* 运算如下：

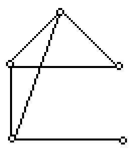
第3题

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

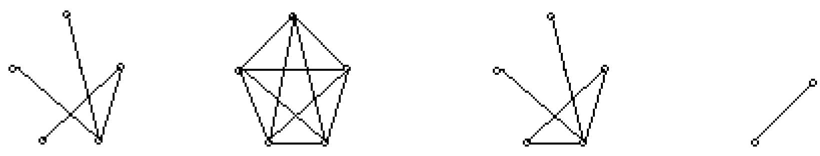
则它的幺元为 ___________ ；零元为 _________ ；

a、b、c 的逆元分别为 _____________________________________ 。

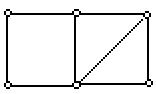
二、 选择 15% （每小题 3 分）



1、 图 相对于完全图的补图为（ ）。



[A] [B] [C] [D]



2、 对图 G 则 $k(G), \lambda(G), \delta(G)$

分别为（　　　　　）。

A、2、2、2；　B、1、1、2；　C、2、1、2；　D、1、2、2 。

3、 一棵无向树 T 有 8 个顶点，4 度、3 度、2 度的分枝点各 1 个，其余顶点均为树叶，则 T 中有（　）片树叶。

A、3；　B、4；　C、5；　D、6

4、 设<A，+，•>是代数系统，其中+，•为普通的加法和乘法，则 A=（　　　）时<A，+，•>是整环。

A、$\{x \mid x = 2n, n \in Z\}$；　B、$\{x \mid x = 2n+1, n \in Z\}$；

C、$\{x \mid x \geq 0, 且 x \in Z\}$；　D、$\{x \mid x = a + b\sqrt[4]{5},\quad a, b \in R\}$。

5、 设 A={1，2，…，10 }，则下面定义的运算*关于 A 封闭的有（　　　　）。

A、 x*y=max(x ,y)；　B、x*y=质数 p 的个数使得 $x \leq p \leq y$；

C、x*y=gcd(x , y)；　(gcd (x ,y)表示 x 和 y 的最大公约数)；

D、x*y=lcm(x ,y)　（lcm(x ,y) 表示 x 和 y 的最小公倍数）。

三、 证明 45%

1、设 G 是（n,m）简单二部图，则 $m \leq \dfrac{n^2}{4}$。（8 分）

2、设 G 为具有 n 个结点的简单图，且 $m > \dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 则 G 是连通图。（8 分）

3、设 G 是阶数不小于 11 的简单图，则 G 或 $\overline{G}$ 中至少有一个是非平图。（14 分）

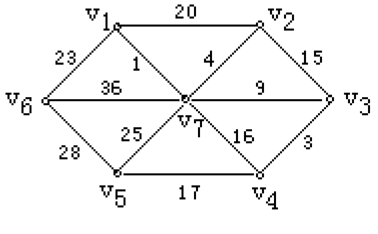
4、记“开”为 1，“关”为 0，反映电路规律的代数系统[{0，1}，+，•]的加法运算和乘法运算。如下：

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

证明它是一个环，并且是一个域。（15 分）

四、 生成树及应用 10%



1、（10 分）如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1, v_2, \cdots, v_7$ 及预先测算出它们之间的一些直接通信线路

造价，试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信而且总造价最小。

2、（10 分）构造 H、A、P、N、E、W、R、对应的前缀码，并画出与该前缀码对应的二叉树，写出英文短语 HAPPY　NEW　YEAR 的编码信息。

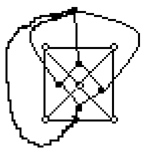
五、 5%

对于实数集合 R，在下表所列的二元远算是否具有左边一列中的性质，请在相应位上填写“Y”或“N”。

	Max	Min	+
可结合性			
可交换性			
存在幺元			
存在零元			

答案：

二十、 填空 15%（每小题 3 分）



1、$\frac{1}{2}n(n-1)$；2、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；3、；4、$2(n_t-1)$；5、a，c，a、b、没有

二十一、 选择 15%（每小题 3 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	A	A	C	D	A，C

二十二、 证明 45%

1、（8 分）：设 G=（V，E），$V = X \cup Y$ ，$|X| = n_1$ ，$|Y| = n_2$ ，则$n_1 + n_2 = n$

对完全二部图有$m = n_1 \cdot n_2 = n_1(n - n_1) = -n_1^2 + n_1 n = -(n_1 - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4}$

当$n_1 = \frac{n}{2}$时，完全二部图(n, m)的边数 m 有最大值$\frac{n^2}{4}$。

故对任意简单二部图(n, m)有$m \le \frac{n^2}{4}$。

2、（8 分）反证法：若 G 不连通，不妨设 G 可分成两个连通分支 G_1、G_2，假设 G_1

和 G_2 的顶点数分别为 n_1 和 n_2，显然 $n_1+n_2=n$ 。

$\because\ n_1\ge 1\quad n_2\ge 1\quad \therefore n_1\le n-1\quad n_2\le n-1$

$$\therefore m\le \frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2}\le \frac{(n-1)(n_1+n_2-2)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

与假设矛盾。所以 G 连通。

3、（14 分）（1）当 n=11 时，$G\cup\overline{G}=K_{11}$ K_{11} 边数 $m^{'}=\frac{11\times 10}{2}=55$ 条，因而必有 G 或 $\overline{G}$ 的边数大于等于 28，不妨设 G 的边数 $m\ge 28$，设 G 有 k 个连通分支，则 G 中必有回路。（否则 G 为 k 棵树构成的森林，每棵树的顶点数为 n_i，边数 m_i，则 $m_i=n_i-1, i=1\cdots k$ ，$\sum_{i=1}^{k}n_i=n=11, \sum_{i=1}^{k}m_i=m$

$\therefore 28\le m=\sum_{i=1}^{k}m_i=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=n-k=11-k$ 矛盾）

下面用反证法证明 G 为非平面图。

假设 G 为平面图，由于 G 中有回路且 G 为简单图，因而回路长大于等于 3 。于是 G 的每个面至少由 g ($g\ge 3$)条边围成，由点、边、面数的关系 $m\le \frac{g}{g-2}(n-k-1)$，得

$$28\le m\le \frac{g}{g-2}(11-k-1)\le \frac{3}{3-1}(11-(k+1))\le 3(11-(1+1))=3\times 11-3\times 2=27$$

而 $28\le 27$ 矛盾，所以 G 为非平面图。

（2）当 n>11 时，考虑 G 的具有 11 个顶点的子图 $G^{'}$，则 $G^{'}$ 或 $\overline{G}^{'}$ 必为非平面图。

如果 $G^{'}$ 为非平面图，则 G 为非平面图。

如果 $\overline{G}^{'}$ 为非平面图，则 $\overline{G}$ 为非平面图。

4、（15 分）

1）[{0，1}，+，•]是环

①[{0，1}，+]是交换群

乘：由“+”运算表知其封闭性。由于运算表的对称性知：+运算可交换。

群：（0+0）+0=0+（0+0）=0 ；（0+0）+1=0+（0+1）=1；

（0+1）+0=0+（1+0）=1 ；（0+1）+1=0+（1+1）=0;

（1+1）+1=1+（1+1）=0 ……

结合律成立。

幺：幺元为 0。

逆：0，1 逆元均为其本身。所以，<{0，1}，+>是 Abel 群。

②<{0，1}，•>是半群

乘：由“• ”运算表知封闭

群： (0•0)•0=0•（0•0）=0 ；（0•0）•1=0•（0•1）=1；

（0•1）•0=0•（1•0）=1 ；（0•1）•1=0•（1•1）=0;

（1•1）•1=1•（1•1）=0 ；…

③•对+的分配律

对 $\forall x, y \in \{0,1\}$

Ⅰ 0•（x+y）=0=0+0=(0•x)+(0•y)

Ⅱ 1•（x+y）

当 x=y (x+y)=0 则

$$1\cdot(x+y)=1\cdot 0=0=\begin{Bmatrix}0+0\\1+1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(1\cdot 0)+(1\cdot 0)\\(1\cdot 1)+(1\cdot 1)\end{Bmatrix}=(1\cdot x)+(1\cdot y)$$

当 $x \neq y$ （$x+y=1$）则

$$1\cdot(x+y)=1\cdot 1=1=\begin{Bmatrix}1+0\\0+1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(1\cdot 1)+(1\cdot 0)\\(1\cdot 0)+(1\cdot 1)\end{Bmatrix}=(1\cdot x)+(1\cdot y)$$

所以 $\forall x, y, z \in \{0,1\}$ 均有 $z\cdot(x+y)=(z\cdot x)+(z\cdot y)$

同理可证：$(x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z)$

所以•对+ 是可分配的。

由①②③得，<{0，1}，+，•>是环。

（2）<{0，1}，+，•>是域

因为<{0，1}，+，•>是有限环，故只需证明是整环即可。

①乘交环： 由乘法运算表的对称性知，乘法可交换。

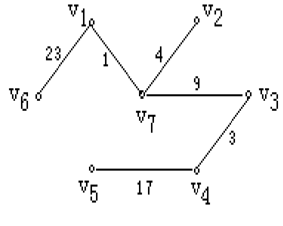
②含幺环：乘法的幺元是 1

③无零因子：1•1=1≠0

因此[{0，1}，+，•]是整环，故它是域。

二十三、 **树的应用 20%**

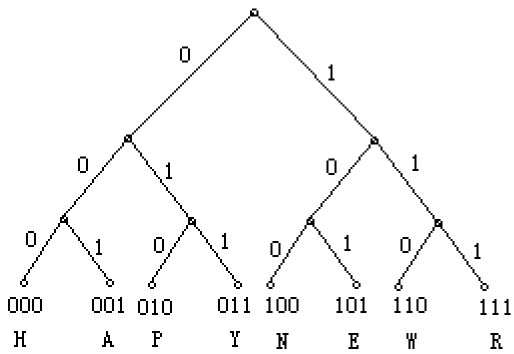
1、(10 分）解： 用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法略。结果如图：



树权 C(T)=23+1+4+9+3+17=57 即为总造价

五、（10 分）

由二叉树知



H、A、P、Y、N、E、W、R 对应的编码分别为

000、001、010、011、100、101、110、111。

显然{000，001，010，011，100，101，110，111}为前缀码。

英文短语 HAPPY NEW YEAR 的编码信息为

000 001 010 010 011 100 101 001 001 101 001 111

六、5%

	Max	Min	+
可结合性	Y	Y	Y
可交换性	Y	Y	Y
存在幺元	N	N	Y
存在零元	N	N	N

试卷九试题与答案

一、 填空 30% （每空 3 分）

1、 选择合适的论域和谓词表达集合 A=“直角坐标系中，单位元（不包括单位圆周）的点集”则 A= ________________________________ 。

2、 集合 A={Φ,{Φ}}的幂集 $\mathcal{P}(A)$ = ________________________________ 。

3、 设 A={1，2，3，4}，A 上二元关系 R={<1，2>，<2，1>，<2，3>，<3，4>}画出 R 的关系图

________________________________ 。

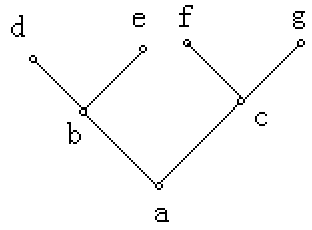
4、 设 A={<1,2>,<2 , 4 >,<3 , 3 >} , B={<1,3>,<2,4>,<4,2>},

则 $A \cup B =$ ________________________________ 。

$A \cap B =$ ________________________________ 。

5、 设|A|=3，则 A 上有 ______________________________ 个二元关系。

6、 A={1，2，3}上关系 R= ____________________ 时，R 既是对称的又是反对称的。

7、 偏序集$<A,R_{\le}>$的哈斯图为  ，

则$R_{\le}=$ ____ 。

8、 设|X|=n，|Y|=m 则（1）从 X 到 Y 有 _____________ 个不同的函数。

（2）当 n , m 满足 ____________ 时，存在双射有_____________ 个不同的双射。

9、 $\sqrt{2}$是有理数的真值为 ____ 。

10、 Q：我将去上海，R：我有时间，公式$(Q\to R)\wedge(R\to Q)$的

自然语言为 ____ 。

11、 公式$(Q\to P)\wedge(\neg P\wedge Q)$的

主合取范式是 ____ 。

12、 若$S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$是集合 A 的一个分划，

则它应满足____ 。

二、 选择 20% （每小题 2 分）

1、 设全集为 I，下列相等的集合是（ ）。

A、$A=\{x\,|\,x\text{是偶数或奇数}\}$； B、$B=\{x\,|\,\exists y(y\in I\wedge x=2y)\}$；

C、$C=\{x\,|\,\exists y(y\in I\wedge x=2y+1)\}$； D、$D=\{x\,|\,0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,\cdots\}$。

2、 设 S={N，Q，R}，下列命题正确的是（ ）。

A、$2\in N,N\in S$ 则$2\in S$； B、$N\subset Q,Q\in S$ 则$N\subset S$；

C、$N\subset Q,Q\subset R$ 则$N\subset R$； D、$\Phi\subset N,\Phi\subset S$ 则$\Phi\subset N\cap S$。

3、 设 C={{a},{b},{a,b}}，则$\bigcup_{S\in C}S$与$\bigcap_{S\in C}S$分别为（ ）。

A、C 和{a,b}；B、{a,b}与Φ；C、{a,b}与{a,b}；D、C 与 C

4、 下列语句不是命题的有（ ）。

A、 x=13； B、离散数学是计算机系的一门必修课； C、鸡有三只脚；

D、太阳系以外的星球上有生物； E、你打算考硕士研究生吗？

5、 $(P\to Q)\to R$的合取范式为（ ）。

A、$(P \wedge \neg Q) \vee R$ ；B、$(P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$ ；

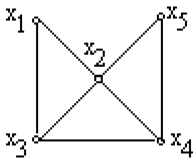
C、

$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

D、$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$ 。

6、 设|A|=n，则 A 上有（）二元关系。

A、2^n ； B、n^2 ； C、2^{n^2} ； D、n^n ； E、2^{n^n} 。



第 7 题

7、 设 r 为集合 A 上的相容关系，其简化关系图（如图），

则 [I] r 产生的最大相容类为（　　　　）；

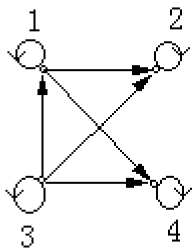
A、$\{x_1, x_2\}$； B、$\{x_1, x_2, x_3\}$； C、$\{x_4, x_5\}$； D、$\{x_2, x_4, x_5\}$

[II] A 的完全覆盖为（　　　　）。

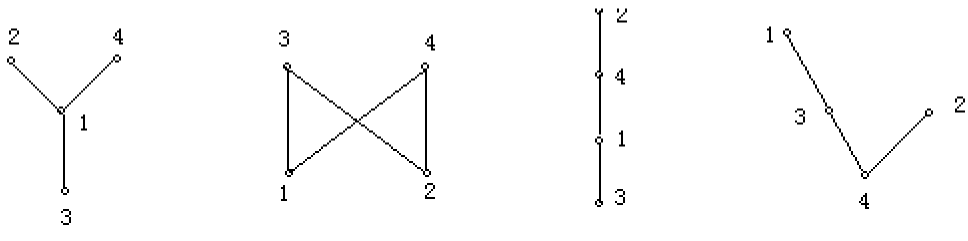
A、$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$； B、$\{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}\}$；

C、$\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_4, x_5\}\}$； D、$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_4, x_5\}\}$ 。

8、 集合 A={1，2，3，4}上的偏序关系图为



则它的哈斯图为（　　　　）。



[A] [B] [C] [D]

9、 下列关系中能构成函数的是（　　　　）。

A、$\{<x, y> | (x, y \in N) \wedge (x + y < 10)\}$；B、$\{<x, y> | (x, y \in R) \wedge (y = x^2)\}$；

C 、 $\{<x, y> | (x, y \in R) \wedge (y^2 = x)\}$； D 、

$\{<x, y> | (x, y \in I) \wedge (x \equiv y \bmod 3)\}$ 。

10、N 是自然数集，定义 $f: N \to N, \quad f(x) = (x) \bmod 3$（即 x 除以 3 的余数），

则 f 是（　　　　）。

A、满射不是单射；B、单射不是满射；C、双射；D、不是单射也不是满射。

三、 简答题 15%

1、(10 分)设 S={1 , 2 , 3 , 4, 6 , 8 , 12 , 24}，“≤”为 S 上整除关系，问：（1）偏序集 $<S\ ,\leq>$ 的 Hass 图如何？（2）偏序集 $\{S\ ,\leq\}$ 的极小元、最小元、极大元、最大元是什么？

2、（5 分）设解释 R 如下：D_R 是实数集，D_R 中特定元素 a=0，D_R 中特定函数 $f(x,y)=x-y$，特定谓词 $F(x,y):x<y$，问公式 $A=\forall x\forall y\forall z(F(x,y)\to F(f(x,z),f(y,z)))$ 的涵义如何？真值如何？

四、 逻辑推理 10%

或者逻辑难学，或者有少数学生不喜欢它; 如果数学容易学，那么逻辑并不难学。因此，如果许多学生喜欢逻辑，那么数学并不难学。

五、10%

设 X={1,2,3,4,5}，X 上的关系 R={<1,1> , < 1 , 2 > , <2 , 4 > , < 3 , 5 > , < 4 , 2 > }，用 Warshall 方法，求 R 的传递闭包 t (R)。

六、证明 15%

1、 每一有限全序集必是良序集。(7 分)

2、 设 $g\circ f$ 是复合函数，如果 $g\circ f$ 满射，则 g 也是满射。(8 分)

答案

二十四、 填空 20%（每小题 2 分）

1、 ；

2、 ；

3、见右图；

4、{< 1 , 2 > , < 2 , 4 > , <3 , 3 > , < 1，3 >，<2,4> ,<4,2>}、{< 1 , 4 > , < 2 , 2 > }；

5、2^9；　　6、{< 1 , 1 > , < 2 , 2 > , <3 , 3 > ；

7、{<a,b>,<a,d>,<a,e>,<b,d>,<b,e>,<a,c>,<a,f>,<a,g>,<c,f>,<c,g>} ；

8、m^n 、n=m、n!；9、假；10、我将去上海当且仅当我有空；

11、 ；

12、 。

二十五、 选择 20%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A、D	C	B	A、E	B、D	C	B、D；C	A	B	D

二十六、 简答题 15%

1、（10 分）

（1）≤ =<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,6>,<1,8>,<1,12>,<1,24>,<2,4>,<2,6>,<2,8>，<2,12>,<2,24>,<3,6>,<3,12>,<3,24>,<4,8>,<4,12>,<4,24>,<6,12>,<6,24>,<8,24>,<12,24>}

covS={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<2,6>,<3,6>,<4,8>,<4,12>,<6,12> ,<8,24>,<12,24>}

Hass 图为

（2）极小元、最小元是 1，极大元、最大元是 24。

2、（5 分）

解：公式 A 涵义为：对任意的实数 x,y,z，如果 x<y 则 (x-z) < (y-z)

A 的真值为： 真（T）。

二十七、 **逻辑推理 10%**

解：设 P：逻辑难学；Q：有少数学生不喜欢逻辑学；R：数学容易学

符号化：

证：① P

② T①E

③ P

④ T②③I

⑤ T④E

二十八、（10 分）

解：

1 时， [1,1]=1, A =

2 时，A[1,2]=A[4,2]=1

A=

3 时，A 的第三列全为 0，故 A 不变

4 时 A[1,4]=A[2,4]=A[4,4]=1

A=

5 时，A 的第五行全为 0，故 A 不变。

所以 t (R)={<1,1>, <1,2>,<1,4>,<2,2>,<2,4>,<3,5>,<4,2>,<4,4>}。

二十九、证明 15%

1、（7 分）

证明：设 ， 全序集。

若 不是良序集，那么必有一子集 ，在 B 中不存在最小元素，由于 B 是一有限集合，故一定可找出两元素 x ,y 是无关的，由于 是全序集。

所以 x ,y 必有关系，矛盾。故 必是良序集。

2、（8 分）

证明：设 ， 由于 满射，故必有 使得 ，由复合函数定义知，存在 使得 ，又因为 g 是函数，必对任 ，必 使 ，任每个 z 在 g 作用下都是 Y 中元素的一个映象，由 Z 的任意性，所以 g 是满射。

试卷十试题与答案

一、 填空 10% （每小题 2 分）

1、 若 P，Q 为二命题，$P \leftrightarrow Q$ 真值为 1，当且仅当 __________________________ 。

2、 对公式 $(\forall y P(x,y) \wedge \exists z Q(x,z)) \vee \forall x R(x,y)$ 中自由变元进行代入的公式为 ____ 。

3、 $\forall x F(x) \wedge \neg(\exists x G(x))$ 的前束范式为 _____________________________________ 。

4、 设 x 是谓词合式公式 A 的一个客体变元，A 的论域为 D，A（x）关于 y 的自由的，则

____ 被称为全称量词消去规则，记为 US。

5、 与非门的逻辑网络为

____ 。

二、 选择 30% （每小题 3 分）

1、 下列各符号串，不是合式公式的有（ ）。

A、$(P \wedge Q) \wedge \neg R$； B、$((P \to Q) \to (R \wedge S)$；

C、$P \vee Q \vee \wedge R$； D、$(\neg(P \vee Q) \wedge R) \vee S$。

2、 下列语句是命题的有（ ）。

A、2 是素数；B、x+5 > 6；C、地球外的星球上也有人；D、这朵花多好看呀！。

3、 下列公式是重言式的有（ ）。

A、$\neg(P \leftrightarrow Q)$；B、$(P \wedge Q) \to Q$；C、$\neg(Q \to P) \wedge P$；D、$(P \to Q) \leftrightarrow P$

4、 下列问题成立的有（ ）。

A、 若 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$，则 $A \Leftrightarrow B$； B、若 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$，则 $A \Leftrightarrow B$；

C、若 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$，则 $A \Leftrightarrow B$； D、若 $A \Leftrightarrow B$，则 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$。

5、 命题逻辑演绎的 CP 规则为（ ）。

A、 在推演过程中可随便使用前提；

B、在推演过程中可随便使用前面演绎出的某些公式的逻辑结果；

C、如果要演绎出的公式为 $B \to C$ 形式，那么将 B 作为前提，设法演绎出 C；

D、设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$B \Leftrightarrow A$，则可用 B 替换 $\Phi(A)$ 中的 A。

6、 命题“有的人喜欢所有的花”的逻辑符号化为（ ）。

设 D：全总个体域，F（x）：x 是花，M(x) ：x 是人，H(x,y)：x 喜欢 y

A、$\forall x(M(x) \to \forall y(F(y) \to H(x,y)))$；B、$\forall x(M(x) \wedge \forall y(F(y) \to H(x,y)))$；

C、$\exists x(M(x) \to \forall y(F(y) \to H(x,y)))$；D、$\exists x(M(x) \wedge \forall y(F(y) \to H(x,y)))$。

7、公式 $\forall x \forall y(P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists x P(x,y)$ 换名（　　　　　）。

A、$\forall x \forall u(P(x,u) \vee Q(u,z)) \wedge \exists x P(x,y)$；B、$\forall x \forall y(P(x,u) \vee Q(u,z)) \wedge \exists x P(x,u)$；

C、$\forall x \forall y(P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists x P(x,u)$；D、$\forall u \forall y(P(u,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists u P(u,y)$。

8、给定公式 $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$，当 D={a,b}时，解释（　　　　）使该公式真值为 0。

A、P(a)=0、P(b)=0；B、P(a)=0、P(b)=1；C、P(a)=1、P(b)=0；D、P(a)=1、P(b)=1

9、下面蕴涵关系成立的是（　　　　）。

A、$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$；

B、$\exists x P(x) \to \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \to Q(x))$；

C、$\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \to Q(x))$；

D、$\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$。

10、下列推理步骤错在（　　　　　）。

① $\forall y \exists y F(x,y)$	P
② $\exists y F(z,y)$	US①
③ $F(z,c)$	ES②
④ $\forall x F(x,c)$	UG③
⑤ $\exists y \forall x F(x,y)$	EG④

A、①→②；B、②→③；C、③→④；D、④→⑤。

三、 逻辑判断 28%

1、（8 分）下列命题相容吗？$A \to B,\ \neg(B \vee C),\ \ A$

2、（10 分）用范式方法判断公式 $(P \to Q) \wedge (P \to R)$，$P \to Q \wedge R$ 是否等价。

3、（10 分）下列前提下结论是否有效？

今天或者天晴或者下雨。如果天晴，我去看电影；若我去看电影，我就不看书。故我在看书时，说明今天下雨。

四、 计算 12%

1、（5 分）给定 3 个命题：P：北京比天津人口多；Q：2 大于 1；R：15 是素数。 求复合命题：$(Q \to R) \leftrightarrow (P \wedge \neg R)$的真值。

2、（7 分）给定解释 I：D={2，3}，L（x,y）为 L(2 , 2) = L (3 , 3) = 1 , L (2 , 3) = L (3 , 2)=0 ,求谓词合式公式$\exists y \forall xL(x,y)$的真值。

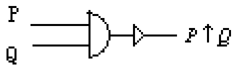
五、 逻辑推理 20%

1、（10 分）所有有理数是实数，某些有理数是整数，因此某些实数是整数。

2、（10 分）符号化语句：“有些病人相信所有的医生，但是病人都不相信骗子，所以医生都不是骗子”。并推证其结论。

答案

三十、 填空 15%（每小题 3 分）

1、P，Q 的真值相同；2、$(\forall yP(u,y) \wedge \exists zQ(u,z)) \vee \forall xR(x,v)$；3、$\forall x(F(x) \wedge \neg G(x))$；4、$\forall xA(x) \Rightarrow A(y)$；5、

。

三十一、 选择 30%（每小题 3 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B、C	A、C	B	C、D	C	D	A	B、C	B、D	C

三十二、 逻辑判断 28%

1、（8 分）

①$A \to B$	P
②A	P
③B	T①②I
④$\neg(B \vee C)$	P
⑤$\neg B \wedge \neg C$	T④E
⑥$\neg B$	T⑤I
⑦F	T③⑥I

所以$A \to B,\ \neg(B \vee C),\ A$不相容。

2、（10 分）

$(P \to Q) \wedge (P \to R) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (R \wedge \neg R)) \wedge ((\neg P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$= M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$

$P \to Q \wedge R \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (R \wedge \neg R)) \wedge ((\neg P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$= M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$

所以两式等价。

3、设 P：今天天晴，Q：今天下雨，R：我不看书，S：我看电影

符号化为：$P \vee Q$，$P \to S$， $S \to R \Rightarrow \quad \neg R \to Q$

① $P \to S$	P
② $S \to R$	P
③ $P \to R$	T①②I
④ $\neg R \to \neg P$	T③I
⑤ $P \vee Q$	P
⑥ $\neg P \to Q$	T⑤E
⑦ $\neg R \to Q$	T④⑥I

结论有效。

三十三、 **计算 12%**

1、（5 分）解：P，Q 是真命题，R 是假命题。

$(Q \to R) \leftrightarrow (P \wedge \neg R) = (1 \to 0) \leftrightarrow (1 \wedge 1) = 0 \leftrightarrow 1 = 0$

2、（7 分）

$\exists y \forall x L(x, y) \Leftrightarrow \exists y (L(2, y) \wedge L(3, y)) \Leftrightarrow (L(2,2) \wedge L(3,2)) \vee (L(2,3) \wedge L(3,3))$

$\Leftrightarrow (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0 \vee 0 = 0$

三十四、 逻辑推理 20%

1、（10 分）解：设 R(x)：x 是实数，Q(x)：x 是有理数，I(x)：x 是整数

符号化：前提：$\forall x (Q(x) \to R(x))$，$\exists x (Q(x) \wedge I(x))$ 结论：$\exists x (R(x) \wedge I(x))$

① $\exists x (Q(x) \wedge I(x))$	P
② $Q(c) \wedge I(c)$	ES①

③ $\forall x(Q(x)\to R(x))$ P

④ $Q(c)\to R(c)$ US③

⑤ $Q(c)$ T②I

⑥ $R(c)$ T④⑤I

⑦ $I(c)$ T②I

⑧ $R(c)\wedge I(c)$ T⑥⑦I

⑨ $\exists x(R(x)\wedge I(x))$ EG⑧

2、解：F(x)：x 是病人，G(x)：x 是医生，H(x)：x 是骗子，L(x,y)：x 相信 y

符号化：前提：$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\to L(x,y)))$ $\forall x(F(x)\to\forall y(H(y)\to\neg L(x,y)))$

结论：$\forall x(G(x)\to\neg H(x))$

(1) $\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\to L(x,y)))$ P

(2) $F(a)\wedge\forall y(G(y)\to L(a,y))$ ES(1)

(3) $F(a)$ T(2)I

(4) $\forall y(G(y)\to L(a,y))$ T(2)I

(5) $\forall x(F(x)\to\forall y(H(y)\to\neg L(x,y)))$ P

(6) $F(a)\to\forall y(H(y)\to\neg L(a,y))$ US(5)

(7) $\forall y(H(y)\to\neg L(a,y))$ T(3)(6)I

(8) $\forall y(L(a,y)\to\neg H(y))$ T(7)E

(9) $G(z)\to L(a,z)$ US(4)

(10) $L(a,z)\to\neg H(z)$ US(8)

(11) $G(z)\to H(z)$ T(9)(10)I

(12) $\forall x(G(x)\to\neg H(x))$ UG(11)

卷十一试题与答案

一、 填空 20% （每小题 2 分）

1、 ________________________________ 称为命题。

2、命题 P→Q 的真值为 0，当且仅当 ________________________ 。

3、一个命题含有 4 个原子命题，则对其所有可能赋值有 ______________ 种。

4、所有小项的析取式为 ________________________________ 。

5、令 P（x）：x 是质数，E（x）：x 是偶数，Q（x）：x 是奇数，D（x，y）：x 除尽 y. 则 $\forall x(E(x) \to \forall y(D(x,y) \to E(y)))$ 的汉语翻译为

____。

6、设 S={a，b， c} 则 S_6 的集合表示为 ________________________________。

7、$\mathcal{P}$（$\mathcal{P}(\Phi)$）= ____。

8、$A \oplus B$ = ____。

9、设 R 为集合 A 上的关系，则 t（R）= ________________________________。

10、若 R 是集合 A 上的偏序关系，则 R 满足 ________________________________。

二、 选择 20% （每小题 2 分）

1、 下列命题正确的有（ ）。

A、 若 g,f 是满射，则 $g \circ f$ 是满射； B、若 $g \circ f$ 是满射，则 g,f 都是满射；

C、若 $g \circ f$ 是单射，则 g,f 都是单射；D、若 $g \circ f$ 单射，则 f 是单射。

2、 设 f，g 是函数，当（ ）时，f=g 。

A、$\forall x \in domf$ 都有 $f(x) = g(x)$； B、$domg \subseteq domf$ 且 $f \subseteq g$；

C、f与g的表达式相同； D、$domg = domf, rangef = rangef$ 。

3、 下列关系，（ ）能构成函数。

A、$f = \{<x_1, x_2> | x_1, x_2 \in N \text{且} x_1 + x_2 = 10\}$；

B、$f = \{<x_1, x_2> | x_1, x_2 \in R, x_1 = x_2{}^2\}$；

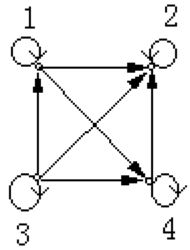
C、$f = \{<x_1, x_2> | x_1, x_2 \in N, x_2 \text{为小于} x_1 \text{的素数的个数}\}$；

D、$f = \{<x, |x|> | x \in R\}$ 。

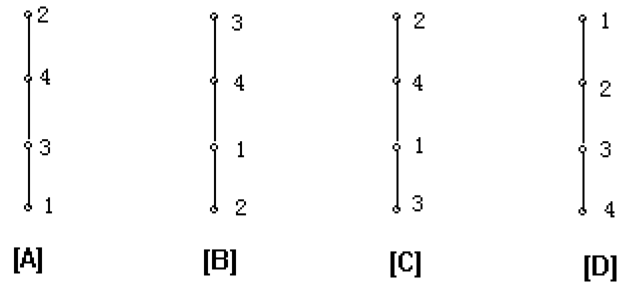
4、 下列函数（ ）满射；（ ）单射；（ ）双射（ ）；一般函数（ ）。

A、$f: N \to N, f(x) = x^2 + 2$； B、$f: N \to N, f(x) = x(\mathrm{mod}\, 3)$（$x$ 除以 3 的余数)；

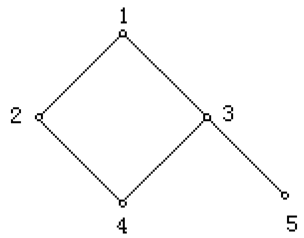
C、$f: N \to \{0,1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \text{偶数集} \\ 0 & x \in \text{奇数集} \end{cases}$； D、$f: R \to R, \quad f(x) = 2x - 5$ 。

5、 集合 A={1，2，3，4} 上的偏序关系为 

，则它的 Hass 图为（　　　　）。



6、 设集合 A={1，2，3，4，5}上偏序关系的 Hass 图为



则子集 B={2，3，4}的最大元（　　　　　　）；最小元（　　　　　　）；极大元（　　　　）；极小元（　　　　）；上界（　　　　　）；上确界（　　　　　）；下界（　　　）；下确界（　　　　）。

A、 无，4，2、3，4，1，1，4，4；　　B、无，4、5，2、3，4、5，1，1，4，4；

C、无，4，2、3，4、5，1，1，4，4；　D、无，4，2、3，4，1，1，4，无。

7、 设 R，S 是集合 A 上的关系，则下列（　　　　　）断言是正确的。

A、 R,S 自反的，则 $R \circ S$ 是自反的；B、若 R,S 对称的，则 $R \circ S$ 是对称的；

C、若 R,S 传递的，则 $R \circ S$ 是传递的；D、若 R,S 反对称的，则 $R \circ S$ 是反对称的

8、 设 X 为集合，|X|=n，在 X 上有（　　　　　　　　）种不同的关系。

A、n^2；　B、2^n；　C、2^{2^n}；　D、2^{n^2}。

9、 下列推导错在（　　　　　　　）。

①$\forall x \exists y(x > y)$　　P

②$\exists y(z > y)$　　US①

③$(z > C_z)$　　ES②

④ $\forall x(x > x)$　　　　　　　　UG③

A、②；　　B、③；　　C、④；　　D、无。

10、“没有不犯错误的人”的逻辑符号化为（　　　　　　）。

设 H（x）：x 是人，　P（x）：x 犯错误。

A、$\exists x(H(x) \to P(x))$；　　　B、$\neg(\exists x(H(x) \wedge \neg P(x)))$；

C、$\neg(\exists x(H(x) \to \neg P(x)))$；　D、$\forall x(H(x) \to P(x))$。

三、　命题演绎 28%

1、（10 分）用反证法证明 $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \Rightarrow S \vee R$。

2、（8 分）用 CP 规则证明 $P \to (Q \to R), R \to (Q \to S) \Rightarrow P \to (Q \to S)$。

3、（10 分）演绎推理：所有的有理数都是实数，所有的无理数也是实数，虚数不是实数。因此，虚数既不是有理数，也不是无理数。

四、　8%

将 wff　$\exists x(\neg(\exists y P(x,y)) \to (\exists z Q(z) \to R(x)))$ 化为与其等价的前束范式。

五、8%

A={a,b,c,d}，R={<a,b>,<b,c>,<b,d>,<c,b>}为 A 上的关系，利用矩阵乘法求 R 的传递闭包，并画出 t（R）的关系图。

六、证明 16%

1、（8 分）设 A={1，2，3，4}，在 $\mathcal{P}$（A）上规定二元关系如下：

$R = \{<s,t> \mid s,t \in$ $\mathcal{P}$（A） $\wedge (|s| = |t|)\}$

证明 R 是 $\mathcal{P}$（A）上的等价关系并写出商集 $\mathcal{P}$（A）/R。

2、（8 分）设 f 是 A 到 A 的满射，且 $f \circ f = f$，证明 $f=I_A$。

答案

一、　填空 20%（每小题 2 分）

1、能够断真假的陈述句；2、P 的真值为 1，Q 的真值为 0；3、$2^4=16$；4、永真式；

5、任意两数 *x*、*y*,如果 *x* 是偶数且能除尽 *y*，则 *y* 一定是偶数；6、S_{110}={a,b}；

7、 ；8、 ；9、 ；

10、自反性、反对称性、传递性

二、选择 20%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A、D	B	C、D	C、D；A、D；D；B	C	A	A	D	C	B、D

三、命题演绎 28%

1、（10 分）证明：

⑴ P（附加前提）

⑵ T⑴E

⑶ P

⑷ T⑶E

⑸ P

⑹ T⑷⑸E

⑺ T⑹E

⑻ T⑺I

⑼ T⑵⑻I

⑽ P

⑾ T⑽E

⑿ T⑾E

⒀ T⑼⑿I

2、（8 分）

① P（附加前提）

② P

③ T①②I

④ P

⑤ T③④I

⑥ T⑤E

⑦ CP

3、证明：设 Q（x）：x 是有理数，R(x)：x 是实数，N(x)：x 是无理数， C(x)：x 是虚数。

前提：

结论：

⑴	P
⑵	US⑴
⑶	P
⑷	US⑶
⑸	P
⑹	US⑸
⑺	T⑹E
⑻	T⑵⑺I
⑼	T⑷⑺I
⑽	T⑻⑼I
⑾	T⑽E
⑿	UG⑾

四、 8%

解：

五、8%

解：

所以 t（R）={<a,b>,<a,c>,<a,d>,<b,b>,<b,c>,<b,d>,<c,b>,<c,c>,<c,d>}

关系图为

六、证明 16%

1、（8 分）

证明：⑴ $\mathcal{P}$（A），由于 ，所以 ，即 R 自反的。

⑵ $\mathcal{P}$（A），若 ，则 ， ，R 是对称的。

⑶ $\mathcal{P}$（A），若： ，即：

所以 R 是传递的。

由⑴⑵⑶知，R 是等价关系。

$\mathcal{P}(A)/R = \{[\ \ ]_R，[\{1\}]_R，[\{1，2\}]_R，[\{1，2，3\}]_R，[\{1，2，3，4\}]_R\}$

2、（8 分）

证明：因为 f 是满射，所以 ，存在 使得 ，又因为 f 是函数，所以

即 由

所以 ，又 ，所以 由 a 的任意性知：f=I_A 。

卷十二试题与答案

五、 填空 20% （每空 2 分）

1、 设集合 A={1，2，3，4，5，6，7，8，9，10}，定义 A 上的二元关系“≤”为

x ≤ y = x|y，则 $x \vee y =$ ____ 。

2、 设 $A = \{x \mid x = 2^n, n \in N\}$，定义 A 上的二元运算为普通乘法、除法和加法，则代数系统<A,*>中运算*关于 ________________________ 运算具有封闭性。

3、 设集合 S={α，β，γ，δ，ζ}，S 上的运算*定义为

*	α	β	γ	δ	ζ
α	α	β	γ	δ	ζ
β	β	δ	α	γ	δ
γ	γ	α	β	α	β
δ	δ	α	γ	δ	γ
ζ	ζ	δ	α	γ	ζ

则代数系统<S，*>中幺元是 ____________ ，β 左逆元是 __________ ，

无左逆元的元素是 ______________________________ 。

4、 在群坯、半群、独异点、群中 ______________________ 满足消去律。

5、 设<G,*>是由元素 $a \in G$ 生成的循环群，且|G|=n，

则 G = ____ 。

6、 拉格朗日定理说明若<H , *>是群<G,*>的子群，则可建立 G 中的等价关系

R= ____ 。

若|G|=n, |H|=m 则 m 和 n 关系为 ______________________________________ 。

7、 设 f 是由群<G,☆>到群<G',*>的同态映射，e' 是 G' 中的幺元，

则 f 的同态核 Ker(f)= ____ 。

六、 选择 20% （每小题 2 分）

1、设 f 是由群<G,☆>到群<G',*>的同态映射，则 ker (f)是（ ）。

A、G' 的子群； B、G 的子群 ； C、包含 G'； D、包含 G。

2、设 <A ，+ ， • >是环，$\forall a,b \in A$，a • b 的关于“+”的逆元是（ ）。

A、(-a) • (-b)； B、(-a) • b； C、a • (-b)； D、a • b 。

3、设 <A ，+ ， • >是一代数系统且<A ，+ >是 Abel 群，如果还满足（ ）

<A ，+ ， •>是域。

A、<A ， •>是独异点且 • 对+可分配；

B、<A-{θ} ， •>是独异点，无零因子且 • 对+可分配；

C、<A-{θ} ， •>是 Abel 群且无零因子 ；

D、<A-{θ} ， •>是 Abel 且 • 对+可分配。

4、设<A ，+ ， •>是一代数系统，+、 • 为普通加法和乘法运算，当 A 为（　　　　）时，<A ，+ ， •>是域。

A、$\{x \mid x = a + b\sqrt{5}, a, b\text{均为有理数}\}$；B、$\{x \mid x = a + b\sqrt[3]{5}, a, b\text{均为有理数}\}$；

C、$\{x \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in I_+, \text{且} a \neq kb\}$；　　D、$\{x \mid x \geq 0,\ x \in I\}$。

5、设<A, ≤>是一个格，由格诱导的代数系统为$< A, \vee, \wedge >$，则（　　　　）成立。

A、$< A, \vee, \wedge >$满足$\vee$对$\wedge$的分配律；B、$\forall a, b \in A, a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$；

C、$\forall a, b, c \in A$, 若$a \vee b = a \vee c$　则$b = c$；

D、$\forall a, b \in A$, 有$a \vee (a \wedge b) = b$且 $a \wedge (a \vee b) = b$。

6、设<A, ≤>是偏序集，“≤”定义为：$\forall a, b \in A, a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$，则当 A=（　　　）时，<A, ≤>是格。

A、{1,2,3,4,6,12}； B、{1,2,3,4,6,8,12,14}； C、{1,2,3,⋯，12}； D、{1,2,3,4}。

7、设$< A, \vee, \wedge >$是由格<A, ≤>诱导的代数系统，若对$\forall a, b, c \in A$，当$b \leq a$时，有（　　　　　　　　　　）<A, ≤>是模格。

A、$a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$；　B、$c \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c)$；

C、$a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$；　D、$c \vee (a \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$。

8、在（　　　　）中，补元是唯一的。

A、有界格； B、有补格； C、分配格； D、有补分配格。

9、在布尔代数$< A, \vee, \wedge, - >$中，$b \wedge \bar{c} = 0$当且仅当（　　　　）。

A、$b \leq \bar{c}$； B、$\bar{c} \leq b$； C、$b \leq c$； D、$c \leq b$。

10、设$< A, \vee, \wedge, - >$是布尔代数，f 是从 A^n 到 A 的函数，则（　　　　）。

A、*f* 是布尔代数； B、*f* 能表示成析取范式，也能表示成合取范式；

C、若 A={0，1}，则 *f* 一定能表示成析取范式，也能表示成合取范式；

D、若 *f* 是布尔函数，它一定能表示成析（合）取范式。

三、8%

设 A={1，2}，A 上所有函数的集合记为 A^A, $\circ$ 是函数的复合运算，试给出 A^A 上运算 $\circ$ 的运算表，并指出 A^A 中是否有幺元，哪些元素有逆元。

四、证明 42%

1、设<R,*>是一个代数系统，*是 R 上二元运算，$\forall a,b \in R \quad a*b = a+b+a\cdot b$，则 0 是幺元且<R,*>是独异点。（8 分）

2、设<G,*>是 n 阶循环群，G=(a)，设 $b=a^k$，$k \in I_+$ 则 元素 b 的阶为 $\frac{n}{d}$，这里 d=GCD (n , k)。（10 分）

3、证明如果 f 是由<A,☆>到<B,*>的同态映射，g 是由<B,*>到<C,△>的同态映射，则 $g \circ f$ 是由<A,☆>到<C,△>的同态映射。（6 分）

4、设<A ，+ ，•>是一个含幺环，且任意 $a \in A$ 都有 a•a=a，若|A|≥3 则<A ，+ ，•>不可能是整环。（8 分）

5、K={ 1, 2 , 5 , 10 , 11 , 22 , 55 ,110 }是 110 的所有整因子的集合，证明：具有全上界 110 和全下界 1 的代数系统< K , LCM , GCD , ´ >是一个布尔代数。（$\forall x \in K, x' = \frac{110}{x}$）。（10 分）

五、布尔表达式 10%

设 $E(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_3)$ 是布尔代数 $<\{0,1\},\vee,\wedge,^{-}>$ 上的一个布尔表达式，试写出其析取范式和合取范式。（10 分）

答案：

一、填空 20%（每空 2 分）

1、LCM（x,y）；2、乘法；3、α、δ，γ、ζ；4、群；5、$G=\{a,a^2,\cdots a^{n-1}, a^n=e\}$；6、$\{<a,b>| a\in G, b\in G, a^{-1}*b\in H\}$、$m/n$；7、$\{x \mid x\in G$ 且 $f(x)=e'\}$

二、选择 20%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B，C	D	A	B	A	A	D	C	C，D

三、8%

解：因为|A|=2，所以 A 上共有 2^2=4 个不同函数。令 $A^A=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$，其中：

$f_1(1)=1, f_1(2)=2$； $f_2(1)=1, f_2(2)=1$； $f_3(1)=2, f_3(2)=2$； $f_4(1)=2, f_4(2)=1$

∘	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_2	f_2	f_2
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3
f_4	f_3	f_3	f_2	f_1

f_1 为 A^A 中的幺元，f_1 和 f_4 有逆元。

四、证明 42%

1、（8 分）

证明：

[幺] $\forall a\in R$，$0*a=0+a+0\cdot a=a$，$a*0=a+0+a\cdot 0$

即 $0*a=a*0=a \quad \therefore 0$为幺元

[乘] $\forall a,b\in R$，由于+，•在 R 封闭。所以 $a*b=a+b+a\cdot b\in R$ 即*在 R 上封闭。

[群] $\forall a,b,c\in R$

$(a*b)*c=(a+b+a\cdot b)*c=a+b+a\cdot b+c+(a+b+a\cdot b)\cdot c$

$=a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$

$a*(b*c)=a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$

所以 $(a*b)*c=a*(b*c)$

因此，〈R，*〉是独异点。

2、（10 分）

证明：（1）∵ $d=GCD(n,k)$,设$n=d\cdot n_1, k=d\cdot k_1$

$\therefore e=a^{n k_1}=a^{d n_1 k_1}=a^{k n_1}=b^{n_1}$

（2）若 b 的阶不为 n_1，则 b 阶 $m<n_1$，且有 $n_1=l\cdot m \quad (l>1)$，则有 $b^m=e$，即

$a^{km}=e, a^{d k_1 \frac{n_1}{e}}=e$，即 $a^{d n_1 \frac{k_1}{e}}=a^{n\frac{k_1}{e}}=e$，$\therefore k_1$ 有因子 l，这与 $d=GCD(n,k)$ 矛盾。

由（1）、（2）知，元素 b 的阶为 $\frac{n}{d}$

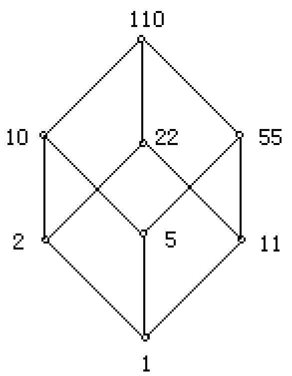
3、（6 分）

$\forall a,b\in A, g\circ f(a☆b)=g(f(a☆b))=g(f(a)*f(b))$

$=g(f(a))\triangle g(f(b))=g\circ f(a)\triangle g\circ f(b)$

所以 $g\circ f$ 是由<A,☆>到<c,△>的同态映射。

4、（8 分）



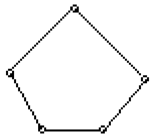
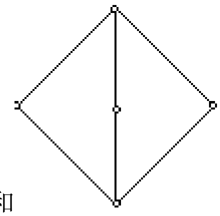
证明：反证法：如果<A，+，•>是整环，且|A|≥3，则 $\exists a\in A, a\neq\theta, a\neq 1$ 且 $a\cdot a=a$

即有 $a\neq\theta, a-1\neq\theta$ 且 $a\cdot(a-1)=a\cdot a-a=a-a=\theta$，这与整环中无零因子矛盾。

所以<A，+，•>不可能是整环。

5、（10 分）

（1） 代数系统<K , LCM , GCD, ´ > 是由格<K , | >诱导的，其 Hasst 图为

Hass 图中不存在与五元素格  和  同构的子格。

所以<K,|>格是分配格。

（2） $\forall x \in K, \exists x' = 100/x$ 使得 $: LCM(x,x') = 110, GCD(x,x') = 1$

如 $: 22' = \dfrac{110}{22} = 5$ ， $LCM(22,5) = 110, GCD(22,5) = 1$

即任元素都有补元，所以<K,|>有补格。

<K , LCM , GCD,’>是布尔代数。

五、布尔表达式 10%

解：函数表为：

x_1	x_2	x_3	$E(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

析取范式：

$$E(x_1,x_2,x_3) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$$

合取范式：$E(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x \vee_2 x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

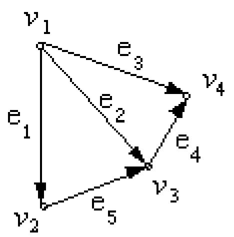
试卷十三试题与答案

七、 填空 10% （每小题 2 分）

1、$Z^+ = \{x \mid x \in Z \wedge x > 0\}$，*表示求两数的最小公倍数的运算（Z 表示整数集合），对于*运算的幺元是 ______________，零元是 _______________ 。

2、代数系统<A,*>中，|A|>1，如果 e 和 θ 分别为<A,*>的幺元和零元，则 e 和 θ 的关系为 ____________________ 。

3、设<G,*>是一个群，<G,*>是阿贝尔群的充要条件是 _________________________________ 。

4、图 

的完全关联矩阵为 ____ 。

5、一个图是平面图的充要条件是 ____ 。

八、 选择 10% （每小题 2 分）

1、 下面各集合都是 N 的子集，（   ）集合在普通加法运算下是封闭的。

A、{x | x 的幂可以被 16 整除}；　　B、{x | x 与 5 互质}；

C、{x | x 是 30 的因子}；　　　　D、{x | x 是 30 的倍数}。

2、 设 $G_1 =< \{0,1,2\},\oplus >$， $G_2 =< \{0,1\},* >$，其中$\oplus$表示模 3 加法，*表示模 2 乘法，则积代数 $G_1 \times G_2$ 的幺元是（   ）。

A、<0,0>；　B、<0,1>；　C、<1,0>；　D、<1,1> 。

3、 设集合 S={1,2,3,6}，“≤”为整除关系，则代数系统< S，≤ >是（   ）。

A、域；　B、格，但不是布尔代数；　C、布尔代数；　D、不是代数系统。

4、 设 n 阶图 G 有 m 条边，每个结点度数不是 k 就是 k+1，若 G 中有 N_k 个 k 度结点，则 N_k=（   ）。

A、n • k；　B、n(k+1)；　C、n(k+1)-m；　D、n(k+1)-2m 。

5、 一棵树有 7 片树叶，3 个 3 度结点，其余全是 4 度结点，则该树有（   ）个 4 度结点。

A、1；　B、2；　C、3；　D、4 。

三、判断 10% （每小题 2 分）

1、（　　　）设 S={1,2}，则 S 在普通加法和乘法运算下都不封闭。

2、（　　　）在布尔格<A,≤>中，对 A 中任意原子 a，和另一非零元 b，在 $a \le b$ 或 $a \le \bar{b}$ 中有且仅有一个成立。

3、（　　　）设 $S = \{x \mid x \in Z \wedge x \ge 0\} = N$，+,• 为普通加法和乘法，则<S，+，•>是域。

4、（　　　）一条回路和任何一棵生成树至少有一条公共边。

5、（　　　）没 T 是一棵 m 叉树，它有 t 片树叶，i 个分枝点，则(m-1)i = t-1。

四、证明 38%

1、（8 分）对代数系统<A,*>，*是 A 上二元运算，e 为 A 中幺元，如果*是可结合的且每个元素都有右逆元，则（1）<A,*>中的每个元素在右逆元必定也是左逆元。

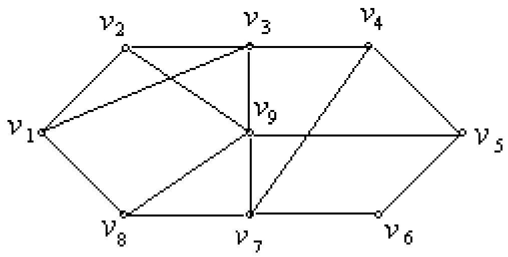
（2）每个元素的逆元是唯一的。

2、（12 分）设 $< A ,\vee ,\wedge ,- >$ 是一个布尔代数，如果在 A 上定义二元运算☆，为 $a☆b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$，则<A,☆>是一阿贝尔群。

3、（10 分）证明任一环的同态象也是一环。

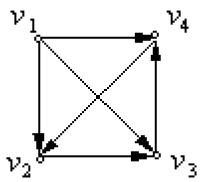
4、（8 分）若 $G = < V, E >$ $(|V| = v,\ |E| = e)$ 是每一个面至少由 k(k≥3)条边围成的连通平面图，则 $e \le \dfrac{k(v-2)}{k-2}$ 。

五、应用 32%



1、（8 分）某年级共有 9 门选修课程，期末考试前必须提前将这 9 门课程考完，每人每天只在下午考一门课，若以课程表示结点，有一人同时选两门课程，则这两点间有边（其图如右），问至少需几天？

2、用 washall 方法求图



的可达矩阵，并判断图的连通性。（8 分）

3、设有 a、b、c、d、e、f、g 七个人，他们分别会讲的语言如下：a：英，b：汉、英，c：英、西班牙、俄，d：日、汉，e：德、西班牙，f：法、日、俄，g：法、德，能否将这七个人的座位安排在圆桌旁，使得每个人均能与他旁边的人交谈？（8 分）

4、用 Huffman 算法求出带权为 2，3，5，7，8，9 的最优二叉树 T，并求 W（T）。

若传递 a ，b， c， d ，e， f 的频率分别为 2%， 3% ，5 %， 7% ，8% ，9%求传输它的最佳前缀码。（8 分）

答案：

三十五、 填空 10%（每小题 2 分）

1、1， 不存在；2、$e \neq \theta$；3、$\forall a,b \in G$ 有 $(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$；

4、

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	1	1	0	0
v_2	-1	0	0	0	1
v_3	0	-1	0	1	-1
v_4	0	0	-1	-1	0

5、它不包含与 $K_{3,3}$ 或 K_5 在 2 度结点内同构的子图。

三十六、 选择 10%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	A，D	B	C	D	A

三十七、 判断 10%

题目	1	2	3	4	5
答案	Y	Y	N	N	N

三十八、 **证明 38%**

1、（8 分）证明：

（1）设 $a,b,c \in A$，b 是 a 的右逆元，c 是 b 的右逆元，由于 $b*(a*b)=b*e=b$，

$e=b*c=b*(a*b)*c=(b*a)*(b*c)=(b*a)*e=b*a$

所以 b 是 a 的左逆元。

（2）设元素 a 有两个逆元 b、c，那么

$b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c$

a 的逆元是唯一的。

2、（12 分）证明：

[乘] $\vee$，$\wedge$，$-$ 在 A 上封闭，$\therefore$ 运算☆在 A 上也封闭。

[群] $\forall a,b,c \in A$

$(a☆b)☆c=((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))☆c$

$=(((a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b))\wedge\bar{c})\vee(\overline{(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)}\wedge c)$

$=(a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c})\vee((\bar{a}\vee\bar{\bar{b}})\wedge(a\vee\bar{b})\wedge c)$

$=(a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c})\vee(((a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}))\wedge c)$

$=(a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c})\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}\wedge c)$

同理可得$:a☆(b☆c)=(a\wedge\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{a}\wedge b\wedge\bar{c})\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b}\wedge c)$

$\therefore(a☆b)☆c=a☆(b☆c)$ 即☆满足结合性。

[幺] $\forall a\in A$, $a☆0=0☆a=(0\wedge\bar{a})\vee(\bar{0}\wedge a)=0\vee(1\wedge a)=0\vee a=a$

故全下界 0 是 A 中关于运算☆的幺元。

[逆] $\forall a\in A$, $(a☆a)=(a\wedge\bar{a})\vee(\bar{a}\wedge a)=0\vee 0=0$

即 A 中的每一个元素以其自身为逆元。

[交] $a☆b=(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)=(b\wedge\bar{a})\vee(\bar{b}\wedge a)=b☆a$

即运算☆具有可交换性。

所以<A, ☆>是 Abel 群。

3、(10 分) 证明:

设$<A,+,\bullet>$是一环,且$<f(A),\oplus,\otimes>$是关于同态映射 f 的同态象。

由$<A,+>$是 Abel 群，易证$<f(A),\oplus>$也是 Abel 群。

$<A,\bullet>$是半群，易证$<f(A),\otimes>$也是半群。

现只需证：$\otimes$对$\oplus$是可分配的。

$\forall b_1,b_2,b_3\in f(A)$,则必有相应的$a_1,a_2,a_3$使得$:f(a_i)=b_i,i=1,2,3$ 于是

$$b_1\otimes(b_2\oplus b_3)=f(a_1)\otimes(f(a_2)\oplus f(a_3))=f(a_1)\otimes(f(a_2+a_3))$$
$$=f(a_1\cdot(a_2+a_3))=f((a_1\cdot a_2)+(a_1\cdot a_3))=f(a_1\cdot a_2)\oplus f(a_1\cdot a_3)$$
$$=(f(a_1)\otimes f(a_2))\oplus(f(a_1)\otimes f(a_3))$$
$$=(b_1\otimes b_2)\oplus(b_1\otimes b_3)$$

同理可证$(b_2\oplus b_3)\otimes b_1=(b_2\otimes b_1)\oplus(b_3\otimes b_1)$

因此$<f(A),\oplus,\otimes>$也是环。

5、（8 分）证明：

设 G 有 r 个面，

$$\because \sum_{i=1}^{r}\deg(r_i)=2e,\quad 而\deg(r_i)\geq k\quad(1\leq i\leq r)\quad\therefore 2e\geq kr\quad 即r\ \leq\frac{2e}{k}$$

$$而v-e+r=2,\quad 故v-e+\frac{2r}{k}\geq 2\quad 即\ e\leq=\frac{k(v-2)}{k-2}$$ 。

三十九、 **应用 32%**

1、（8 分）

解：$\chi(G)$ 即为最少考试天数。

用 Welch-Powell 方法对 G 着色：$v_9v_3v_7v_1v_2v_4v_5v_8v_6$

第一种颜色的点 $v_9v_1v_4v_6$，剩余点 $v_3v_7v_2v_5v_8$

第二种颜色的点 $v_3v_7v_5$，剩余点 v_2v_8

第三种颜色的点 v_2v_8

所以 $\chi(G)\leqslant 3$

任 $v_2v_3v_9$ 构成一圈，所以 $\chi(G)\geqslant 3$

故 $\chi(G)=3$

所以三天下午即可考完全部九门课程。

2、（8 分）

解：
$$A(G)=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

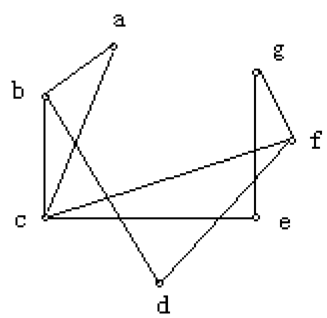
$i=1$：A[2，1]=1， $A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$； $i=2$： A[4，2]=1， $A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

$i=3$： A[1，3]=A[2，3]=A[4，3]=1， $A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

$i=4$： A[k，4]=1，k=1，2，3，4， $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

p 中的各元素全为 1，所以 G 是强连通图，当然是单向连通和弱连通。

3、（8 分）



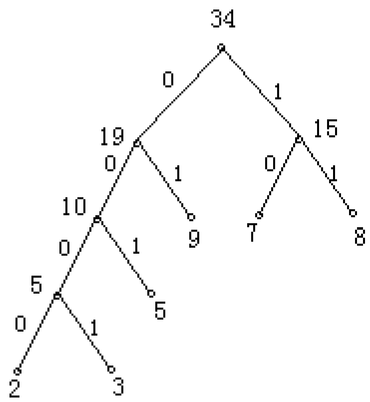
解: 用 a,b,c,d,e,f,g 7 个结点表示 7 个人，若两人能交谈可用一条无向边连结，所得无向图为此图中的 Hamilton 回路即是圆桌安排座位的顺序。

Hamilton 回路为 a b d f g e c a。

4、（8 分）

解：(1)

2	3	5	7	8	9
	5	5	7	8	9
		10	7	8	9
			10	15	9
				15	19
					34



$$W(T)=2\times4+3\times4+5\times3+9\times2+7\times2+8\times2=83$$

（1）　用 0000 传输 a、0001 传输 b、001 传输 c、01 传输 f、10 传输 d、11 传输 e

传输它们的最优前缀码为{0000，0001，001，01，10，11} 。

试卷十四试题与答案

九、　填空 10% （每小题 2 分）

1、 设$<A,\vee,\wedge,->$是由有限布尔格$<A,\leq>$诱导的代数系统，S 是布尔格$<A,\leq>$，中所有原子的集合，则$<A,\vee,\wedge,->\sim$ ________________ 。

2、 集合 S={α，β，γ，δ}上的二元运算*为

*	α	β	γ	δ
α	δ	α	β	γ
β	α	β	γ	δ
γ	β	γ	γ	γ
δ	α	δ	γ	δ

那么，代数系统<S, *>中的幺元是 ________ ，α 的逆元是 ________ 。

3、 设 I 是整数集合，Z_3 是由模 3 的同余类组成的同余类集，在 Z_3 上定义$+_3$如下：

$[i]+_3[j]=[(i+j)\bmod 3]$，则$+_3$的运算表为 ________________________；

<Z_+,$+_3$>是否构成群 ________________ 。

4、 设 G 是 n 阶完全图，则 G 的边数 m= ________________ 。

5、 如果有一台计算机，它有一条加法指令，可计算四数的和。现有 28 个数需要计算和，它至少要执行 ______________ 次这个加法指令。

十、 选择 20% （每小题 2 分）

1、 在有理数集 Q 上定义的二元运算*，$\forall x,y\in Q$有$x*y=x+y-xy$，则 Q 中满足（ ）。

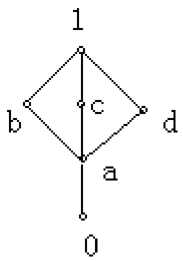
A、 所有元素都有逆元；　　B、只有唯一逆元；

C、$\forall x\in Q, x\neq 1$时有逆元x^{-1}；　　D、所有元素都无逆元。

2、 设 S={0，1}，*为普通乘法，则< S , * >是（ ）。

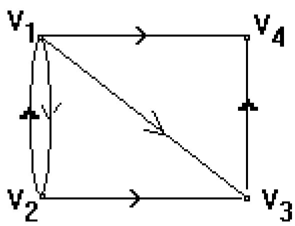
A、 半群，但不是独异点；　B、只是独异点，但不是群；

C、群；　　D、环，但不是群。



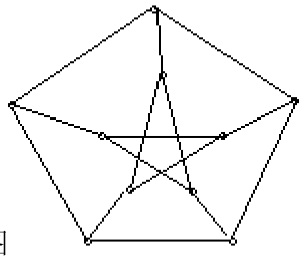
3、图 给出一个格 L，则 L 是（ ）。

A、分配格；　B、有补格；　C、布尔格；　D、 A,B,C 都不对。



3、 有向图 D=<V , E> ，则v_1到v_4长度为 2 的通路有（ ）条。

A、0；　B、1；　C、2；　D、3 。

4、 在 Peterson 图  中，至少填加（ ）条边才能构成 Euler 图。

A、1； B、2； C、4； D、5 。

十一、 判断 10% （每小题 2 分）

1、 在代数系统<A,*>中如果元素 $a \in A$ 的左逆元 a_e^{-1} 存在，

则它一定唯一且 $a^{-1} = a_e^{-1}$ 。（ ）

2、 设<S,*>是群<G,*>的子群，则<G,*>中幺元 e 是<S,*>中幺元。（ ）

3、 设 $A = \{x \mid x = a + b\sqrt{3},\ \ a,b\text{均为有理数}\}$， +, • 为普通加法和乘法，则代数系统<A，+， • >是域。（ ）

4、 设 G=<V ,E >是平面图，|V|=v, |E|=e，r 为其面数，则 v-e + r=2。（ ）

5、 如果一个有向图 D 是欧拉图，则 D 是强连通图。（ ）

四、证明 46%

1、 设<A,*>，是半群，e 是左幺元且 $\forall x \in A$,$\exists \hat{x} \in A$，使得 $\hat{x} * x = e$，

则<A , *>是群。（10 分）

2、 循环群的任何非平凡子群也是循环群。（10 分）

3、 设 aH 和 bH 是子群 H 在群 G 中的两个左陪集，证明：要末 $aH \cap bH = \Phi$，要末 $aH = bH$ 。（8 分）

4、 设<A ,+ , • >，是一个含幺环，|A|>3，且对任意 $\forall a \in A$，都有 $a \cdot a = a$，则<A ,+ , • >

不可能是整环（这时称<A，+， • >是布尔环）。（8 分）

5、 若图 G 不连通，则 G 的补图 $\overline{G}$ 是连通的。（10 分）

五、布尔表达式 8%

设 $E(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge x_2)\vee(x_2\wedge x_3)\vee(\overline{x}_2\wedge x_3)$ 是布尔代数 $<\{0,1\},\vee,\wedge,^{-}>$ 上的一个布尔表达式，试写出其的析取范式和合取范式。

六、图的应用 16%

1、 构造一个结点 v 与边数 e 奇偶性相反的欧拉图。（6 分）

2、 假设英文字母，a，e，h，n，p，r，w，y 出现的频率分别为 12%，8%，15%，7%，6%，10%，5%，10%，求传输它们的最佳前缀码，并给出 happy new year 的编码信息。（10 分）

答案

四十、 填空 10%（每小题 2 分）

$+_3$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

1、$<\mathcal{P}(S),\cup,\cap,\sim>$；2、β，γ；3、是；

4、$\frac{1}{2}n(n-1)$；5、9

四十一、 选择 10%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	C	B	D	B	D

四十二、 判断 10%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	N	Y	Y	N	Y

四十三、 证明 46%

1、（10 分）证明：

（1）$\forall a,b,c\in A$，若 $a*b=a*c$ 则 $b=c$

$\text{事实上}:\because\ a*b=a*c\ \therefore\exists\hat{a}\ \text{使}\hat{a}*(a*b)=\hat{a}*(a*c)$
$(\hat{a}*a)*b=(\hat{a}*a)*c,\therefore e*b=e*c$
$\text{即}:b=c$

(2) e 是<A，*>之幺元。

事实上：由于 e 是左幺元，现证 e 是右幺元。

$\forall x\in A\,,x*e\in A,\exists\hat{x}\ \text{使}\hat{x}*(x*e)=(\hat{x}*x)*e=e*e=e=\hat{x}*x$
$\text{由(1)即}x*e=x,\quad\therefore e\text{为右幺元}$

（3） $\forall x\in A\,,\text{则}\ x^{-1}\in A$

$\text{事实上}:\forall x\in A\ \ (x*\hat{x})*x=x*(\hat{x}*x)=x*e=x=e*x$
$x*\hat{x}=e\ \text{故有}\hat{x}*x=x*\hat{x}=e\quad\therefore x\text{有逆元}\hat{x}$

由（2），（3）知：<A,*>为群。

2、（10 分）证明：

设<G,*>是循环群,G=(a)，设<S,*>是<G,*>的子群。且 $S\neq\{e\},S\neq G$，则存在最小正整数 m，使得：$a^m\in S$，对任意 $a^l\in S$，必有 $l=tm+r,\quad 0\le r<m,\quad t>0$，

故：$a^r=a^{l-tm}=a^l*a^{-tm}=a^l*(a^m)^{-t}\in S$ 即：$a^l=a^r*(a^m)^t\in S$

所以 $a^r\in S$ 但 m 是使 $a^m\in S$ 的最小正整数，且 $0\le r<m$，所以 r=0 即：$a^l=(a^m)^t$

这说明 S 中任意元素是 a^m 的乘幂。 所以<G,*>是以 a^m 为生成元的循环群。

3、（8 分）证明：

对集合 aH 和 bH，只有下列两种情况：

（1） $aH\cap bH\neq\Phi$； （2） $aH\cap bH=\Phi$

对于 $aH\cap bH\neq\Phi$，则至少存在 $h_1,h_2\in H$，使得 $ah_1=bh_2$，即有 $a=bh_2h_1^{-1}$，这时任意 $ah\in aH$，有 $ah=bh_2h_1^{-1}h\in bH$，故有 $aH\subseteq bH$

同理可证：$bH\subseteq aH$ 所以 $aH=bH$

4、（8 分）证明：

反证法: 如果<A，+，• >，是整环，且有三个以上元素，则存在 $a\in A,a\neq\theta,a\neq 1$ 且 $a\cdot a=a$

即有：$a\neq\theta,a-1\neq\theta$ 但 $a\cdot(a-1)=a\cdot a-a=a-a=\theta$ 这与整环中无零因子条件矛盾。

因此<A，+， • >不可能是整环。

5、（10 分）证明：

因为 G=< V，E>不连通，设其连通分支是 $G(V_1),\cdots,G(V_k)\quad(k\ge 2)$，$\forall u,v\in V$，则有两种情况：

（1） u , v，分别属于两个不同结点子集 V_i, V_j，由于 $G(V_i)$, $G(V_j)$是两连通分支，故(u , v)在不 G 中，故 u , v 在$\overline{G}$中连通。

（2） u ,v ，属于同一个结点子集 V_i，可在另一结点子集 V_j 中任取一点 w，故(u , w),(w , v)均在$\overline{G}$中，故邻接边(u ,w) (w , v) 组成的路连接结点 u 和 v，即 u , v 在$\overline{G}$中也是连通的。

五、布尔表达式 8%

函数表为：

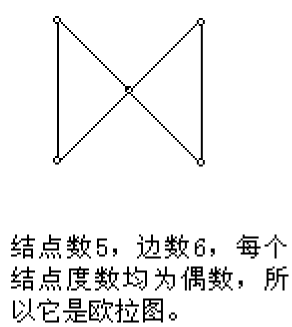
x_1	x_2	x_3	$E(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

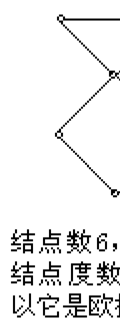
析取范式：
$$E(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x}_1\wedge\overline{x}_2\wedge x_3)\vee(\overline{x}_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge\overline{x}_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge\overline{x}_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3)$$

合取范式：$E(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x\vee_2 x_3)\wedge(x_1\vee\overline{x}_2\vee x_3)\wedge(\overline{x}_1\vee x_2\vee x_3)$

六、 树的应用 16%

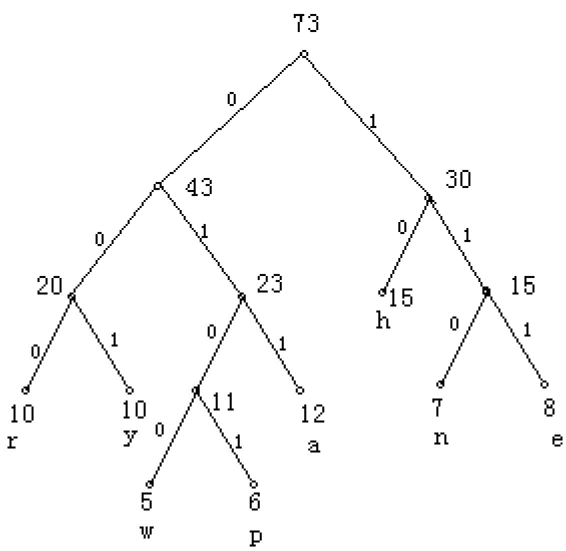
1、（6 分）解：





2、（10 分）解：

根据权数构造最优二叉树：



传输它们的最佳前缀码如上图所示，happy new year 的编码信息为：

10 011 0101 0101 001 110 111 0100 001 111 011 000

附：最优二叉树求解过程如下：

5 6 7 8 10 10 12 15

11 7 8 10 10 12 15

11 15 10 10 12 15

11 15 20 12 15

15 20 23 15

20 23 30

43 30

73

试卷十五试题与答案

十二、 填空 20% （每空 2 分）

1、 如果有限集合 A 有 n 个元素，则$|2^A|$= ________________ 。

2、 某集合有 101 个元素，则有 ___________ 个子集的元素为奇数。

3、 设 S={a_1，a_2,…，a_8}，B_i是 S 的子集，由 B_{17}表达的子集为 ______________________ ，子集{a_2,a_6,a_7}规定为 __________________ 。

4、 由 A_1，A_2,…，A_n，生成的最小集的形式为 _______________________，它们的并为 ________________ 集，它们的交为 ______________________ 集。

5、 某人有三个儿子，组成集合 A={S_1,S_2,S_3}，在 A 上的兄弟关系具有____ 性质。

6、每一个良序集必为全序集，而_______________ 全序集必为良序集。

7、若 $f:A\rightarrow B$ 是函数，则当 f 是 $A\rightarrow B$ 的 ____________ ，$f^c:B\rightarrow A$ 是 f 的逆函数。

十三、 选择 15% （每小题 3 分）

1、 集合 $B=\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$ 的幂集为（　　　　）。

A、$\{\{\Phi\},\{\{\Phi\},\Phi\},\Phi\}$；

B、$\{\Phi,\{\Phi\},\{\{\Phi\}\},\{\{\Phi,\{\Phi\}\}\},\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi,\{\Phi\}\}\},\{\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\},B\}$；

C、$\{\Phi,\{\Phi\},\{\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi,\{\Phi\}\}\},\{\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\},B\}$；

D、$\{\{\Phi\}\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi,\{\Phi\}\}\},\{\{\Phi\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\},\Phi,B\}$

2、 下列结果正确的是（　　　　）。

A、$(A\cup B)-A=B$；B、$(A\cap B)-A=\Phi$；C、$(A-B)\cup B=A$；

D、$\Phi\cup\{\Phi\}=\Phi$；E、$\Phi\cap\{\Phi\}=\Phi$；F、A⊕A=A 。

3、 集合 $A\cup\overline{B}$ 的最小集范式为（　　　）（由 A、B、C 生成）。

A、$(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$；B、$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$；

C、$(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C)\cap(\overline{A}\cup B\cup\overline{C})\cap(\overline{A}\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup\overline{C})\cap(A\cup B\cup C)$；D、$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup B)$。

4、 在（　　　　　　）下有 $A\times B\subseteq A$。

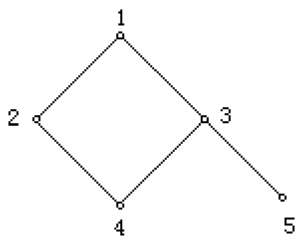
A、$A=B$；B、$B\subseteq A$；C、$A\subseteq B$；D、$A=\Phi或B=\Phi$

5、 下列二元关系中是函数的有（　　　　）。

A、$R=\{<x,y>|\,x\in N\wedge y\in N\wedge x+y<10\}$；

B、$R=\{<x,y>|\,x\in R\wedge y\in R\wedge y=x^2\}$；

C、$R=\{<x,y>|\,x\in R\wedge y\in R\wedge x=y^2\}$。



三、 15%

用 Warshall 算法，对集合 A={1 ，2 ，3 ，4 ，5} 上二元关系 R={<1,1>,<1,2>,<2,4>,<3,5>,<4,2>}求 t（R）。

四、15%

集合 $C^*=\{a+bi\,|\,i^2=-1,a,b是任意实数，a\neq 0\}$，C*上定义关系 $R=\{<a+bi,c+di>|\,ac>0\}$，则 R 是 C*上的一个等价关系，并给出 R 等价类的几何

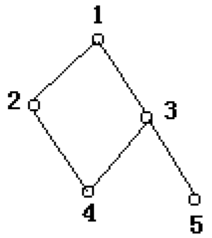
说明。

五、计算 15%

1、设A={1，2，3，4}，S={{1}，{2，3}，{4}}，为A的一个分划，求由S导出的等价关系。
（4分）

2、设Z为整数集，关系$R=\{<a,b>|\,a,b\in Z\wedge a\equiv b\ (\mathrm{mod}\,k)\}$为Z上等价关系，求R的模K等价关系的商集Z/R，并指出R有秩。（5分）

3、设A={1，2，3，4，5}，A上的偏序关系为



求A的子集{3，4，5}和{1，2，3}，的上界，下界，上确界和下确界（6分）

六、证明 20%

1、假定$f:A\rightarrow B, g:B\rightarrow C$，且$g\circ f$是一个满射，g是个入射，则f是满射。（10分）

2、设f，g是A到B的函数，$f\subseteq g$ 且 $domg\subseteq domf$，证明$f=g$。（10分）

答案

一、填空 20%（每空2分）

1、2^n；2、2^{100}；3、$\{a_4, a_8\}$，$B_{01000110}$（B_{70}）；4、$\hat{A}_1\cap\hat{A}_2\cap\cdots\cap\hat{A}_n(\hat{A}_i=A_i或\overline{A_i})$，全集，$\Phi$；5、反自反性、对称性、传递性；6、有限；7、双射。

二、选择 15%（每小题3分）

题目	1	2	3	4	5
答案	B	B，E	A	D	B

三、Warshall算法 15%

解：

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$i=1$ 时，$M_R[1,1]=1$, A $=M_R$

$i=2$ 时，M[1,2]=M[4,2]=1

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$i=3$ 时，A 的第三列全为 0，故 A 不变

$i=4$ 时，M[1,4]=M[2,4]=M[4,4]=1

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$i=5$ 时，M[3,5]=1 ，这时

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 t (R)={<1,1>, <1,2>,<1,4>,<2,2>,<2,4>,<3,5>,<4,2>,<4,4>} 。

四、5%

证明：

对称性：$\forall a+bi\in C^*, c+di\in C^*$ 且 $<a+bi,c+di>\in R$, $ac>0$

$\Rightarrow ca>0, \therefore <c+di,a+bi>\in R$ 。

自反性：$\forall a+bi\in C^*(a\neq 0),\quad aa>0\quad \therefore <a+bi,a+bi>\in R$

传递性：若 $\forall a+bi\in C^*,\quad c+di\in C^*,\quad e+fi\in C^*$

当 $<a+bi,c+di>\in R$ 且 $<c+di,e+fi>\in R$ 则

$ac>0, ce>0,\quad \therefore acce>0$ 即 $ae>0\quad \therefore <a+bi\,,e+fi>\in R$

所以 R 是 C*上等价关系。

R 两等价类：$\pi_1=\{z \mid z=a+bi\,,a>0\}$ 右半平面；

$\pi_2=\{z \mid z=a+bi\,,a<0\}$ 左半平面。

五、计算 15%

1、（4 分）R={< 1 , 1 > , < 2 , 2> , < 2, 3 > , < 3 , 2 > , < 3 , 3 > < 4 , 4 > } 。

2、（5 分）Z/R={[0]，[1]，…，[k-1]} ，所以 R 秩为 k。

3、（6 分）{3，4，5}：上界：1，3；上确界：3；下界：无；下确界：无；

{1，2，3}：上界：1；上确界：1；下界：4；下确界：4。

六、证明 20%

1、（10 分）证明：$\forall b\in B$，由于 g 是入射，所以存在唯一 $c\in C$ 使 $g(b)=c$，又 $g\circ f$ 满射，对上述 c 存在 $a\in A$，使得 $g\circ f(a)=c$，也即 $g(f(a))=c$，由 g 单射，所以 $f(a)=b$ 即：$\forall b\in B$ 均存在 $a\in A$ 使得 $f(a)=b$，所以 f 满射。

2、（10 分）证明：

$\forall <x,y>\in g$ 则$x\in domg$且$y\in rangeg \Rightarrow x\in domf$且$y\in rangeg$

对上述$x\in domf$ 则$\exists|\, y'\in rangef$ 即$<x,y'>\in f$

而 $f\subseteq g$ $\therefore <x,y'>\in g$ 但$<x,y>\in g$ 由g是函数知 $y'=y$

$\therefore x\in domf$ 且 $y\in rangef$ 即$<x,y>\in f$

$\therefore f=g$