上海　数学试卷(理工农医类)

考生注意:

1. 答卷前，考生务必将姓名、高考准考证号、校验码等填写清楚.

2. 本试卷共有21道试题，满分150分. 考试时间120分钟. 请考生用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上.

一. 填空题（本大题满分44分）本大题共有11题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1. 函数 $y=\dfrac{\lg(4-x)}{x-3}$ 的定义域是________.

2. 若直线 $l_1: 2x+my+1=0$ 与直线 $l_2: y=3x-1$ 平行，则 $m=$________.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$________.

4. 方程 $9^x-6\cdot 3^x-7=0$ 的解是________.

5. 若 x、$y\in \mathrm{R}^+$，且 $x+4y=1$，则 $x\cdot y$ 的最大值是________.

6. 函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期 $T=$________.

7. 在五个数字1, 2, 3, 4, 5中，若随机取出三个数字，则剩下两个数字都是奇数的概率是________（结果用数值表示）.

8. 以双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的中心为焦点，且以该双曲线的左焦点为顶点的抛物线方程是________.

9. 对于非零实数 a、b，以下四个命题都成立:

① $a+\dfrac{1}{a}\neq 0$；　　② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

③ 若 $|a|=|b|$，则 $a=\pm b$；　　④ 若 $a^2=ab$，则 $a=b$.

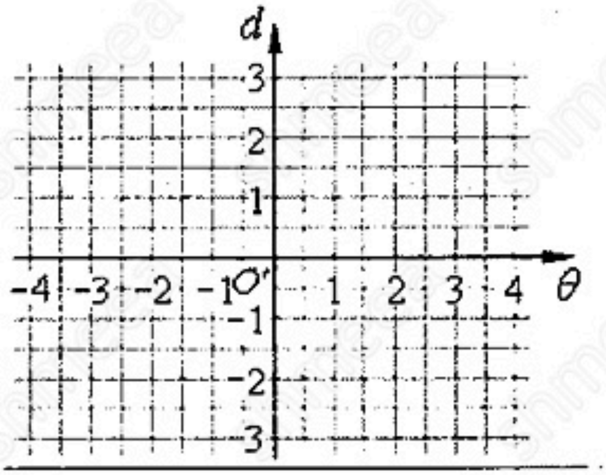
那么，对于非零复数 a、b，仍然成立的命题的所有序号是________.

10. 在平面上，两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种. 已知 α、β 是两个相交平面，空间两条直线 l_1、l_2 在 α 上的射影是直线 s_1、s_2，l_1、l_2 在 β 上的射影是直线 t_1、t_2. 用 s_1 与 s_2，t_1 与 t_2 的位置关系，写出一个总能确定 l_1 与 l_2 是异

面直线的充分条件：________________

________________________________.

11. 已知 P 为圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点（原点 O 除外），直线 OP 的倾斜角为 θ 弧度，记 $d=|OP|$. 在右侧的坐标系中，画出以 (θ,d) 为坐标的点的轨迹的大致图形为



得 分	评卷人

二. **选择题（本大题满分16分）本大题共有4 题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.**

12. 已知 a、$b\in\mathrm{R}$，且 $2+a\mathrm{i}$，$b+\mathrm{i}$（i是虚数单位）是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，那么 p、q 的值分别是 [答]（ ）

(A) $p=-4$，$q=5$.　　(B) $p=-4$，$q=3$.

(C) $p=4$，$q=5$.　　(D) $p=4$，$q=3$.

13. 设 a、b 是非零实数. 若 $a<b$，则下列不等式成立的是 [答]（ ）

(A) $a^2<b^2$.　　(B) $ab^2<a^2b$.　　(C) $\dfrac{1}{ab^2}<\dfrac{1}{a^2b}$.　　(D) $\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$.

14. 直角坐标系 xOy 中，$\vec{i}$、$\vec{j}$ 分别是与 x、y 轴正方向同向的单位向量. 在直角三角形 ABC 中，若 $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}$，$\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+k\vec{j}$，则 k 的可能值个数是 [答]（ ）

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

15. 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数，且 $f(x)$ 满足："当 $f(k)\ge k^2$ 成立时，总可推出 $f(k+1)\ge(k+1)^2$ 成立". 那么，下列命题总成立的是 [答]（ ）

(A) 若 $f(3)\ge 9$ 成立，则当 $k\ge 1$ 时，均有 $f(k)\ge k^2$ 成立.

(B) 若 $f(5)\ge 25$ 成立，则当 $k\le 5$ 时，均有 $f(k)\ge k^2$ 成立.

(C) 若 $f(7)<49$ 成立，则当 $k\ge 8$ 时，均有 $f(k)<k^2$ 成立.

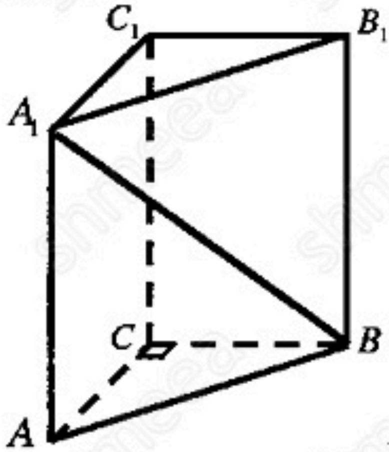
(D) 若 $f(4)=25$ 成立，则当 $k\ge 4$ 时，均有 $f(k)\ge k^2$ 成立.

三. **解答题（本大题满分90分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.**

16.（本题满分12分）

如图，在体积为1的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$， $AC=BC=1$. 求直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）.

[解]



17.（本题满分14分）

在△ABC 中，a、b、c 分别是三个内角 A、B、C 的对边. 若 $a=2$, $C=\dfrac{\pi}{4}$，$\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，求△$ABC$ 的面积 S.

[解]

18.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

近年来，太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002年全球太阳电池的年生产量达到670兆瓦，年生产量的增长率为34%. 以后四年中，年生产量的增长率逐年递增2%（如，2003年的年生产量的增长率为36%）.

（1）求2006年全球太阳电池的年生产量（结果精确到0.1兆瓦）；

（2）目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量，2006年的实际安装量为1420兆瓦. 假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在42%，到2010年，要使年安装量与年生产量基本持平（即年安装量不少于年生产量的95%），这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少（结果精确到0.1%）?

[解] （1）

（2）

19.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分7分，第2小题满分7分.

已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ （$x\neq 0$，常数 $a\in\mathrm{R}$）.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 上为增函数，求 a 的取值范围.

[解] （1）

（2）

20.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分.

如果有穷数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$（$n$ 为正整数）满足条件 $a_1 = a_n$，$a_2 = a_{n-1}$，…，$a_n = a_1$，即 $a_i = a_{n-i+1}$（$i = 1, 2, \cdots, n$），我们称其为“对称数列”．例如，由组合数组成的数列 $C_m^0, C_m^1, \cdots, C_m^m$ 就是“对称数列”．

（1）设 $\{b_n\}$ 是项数为7的“对称数列”，其中 b_1, b_2, b_3, b_4 是等差数列，且 $b_1 = 2$，$b_4 = 11$. 依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项；

（2）设 $\{c_n\}$ 是项数为 $2k-1$（正整数 $k>1$）的“对称数列”，其中 $c_k, c_{k+1}, \cdots, c_{2k-1}$ 是首项为50，公差为 -4 的等差数列. 记 $\{c_n\}$ 各项的和为 S_{2k-1}．当 k 为何值时，S_{2k-1} 取得最大值？并求出 S_{2k-1} 的最大值；

（3）对于确定的正整数 $m>1$，写出所有项数不超过 $2m$ 的“对称数列”，使得 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^{m-1}$ 依次是该数列中连续的项；当 $m>1500$ 时，求其中一个“对称数列”前2008项的和 S_{2008}．

[解]（1）

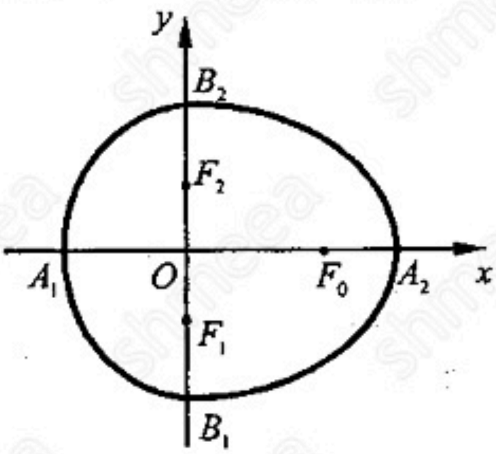
（2）

（3）

21.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分.

我们把由半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(x \ge 0)$ 与半椭圆 $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$ $(x \le 0)$ 合成的曲线称作“果圆”，其中 $a^2 = b^2 + c^2$，$a>0$，$b>c>0$.

如图，点 F_0、F_1、F_2 是相应椭圆的焦点，A_1、A_2 和 B_1、B_2 分别是“果圆”与 x、y 轴的交点.



（1）若△$F_0F_1F_2$ 是边长为1的等边三角形，求“果圆”的方程；

（2）当 $|A_1A_2| > |B_1B_2|$ 时，求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围；

（3）连接“果圆”上任意两点的线段称为“果圆”的弦. 试研究：是否存在实数 k，使斜率为 k 的“果圆”平行弦的中点轨迹总是落在某个椭圆上？若存在，求出所有可能的 k 值；若不存在，说明理由.

[解]（1）

（2）

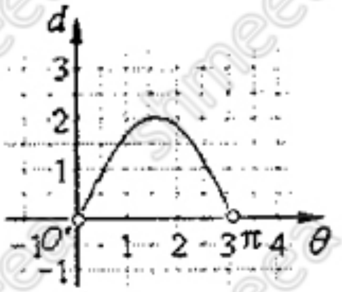
（3）

一、（第1题至第11题）

1. $\{x \mid x<4 \text{ 且 } x \neq 3\}$.　2. $-\dfrac{2}{3}$.　3. $\dfrac{x}{x-1}$（$x \neq 1$）.　4. $\log_3 7$.

5. $\dfrac{1}{16}$.　6. π.　7. 0.3.　8. $y^2=12(x+3)$.

9. ② ④.　10. $s_1 /\!/ s_2$，并且 t_1 与 t_2 相交（$t_1 /\!/ t_2$，并且 s_1 与 s_2 相交）.

11. 

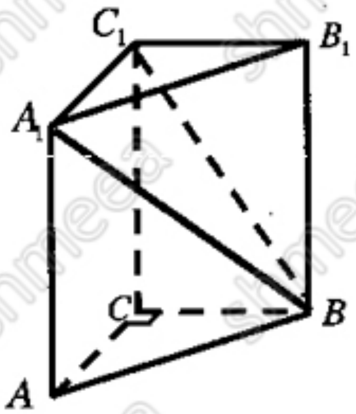
.

二、（第12题至第15题）

题　号	12	13	14	15
代　号	A	C	B	D

三、（第16题至第21题）

16. [解法一] 由题意，可得



体积 $V=CC_1 \cdot S_{\Delta ABC}=CC_1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BC=\dfrac{1}{2}CC_1=1$，

$\therefore\ AA_1=CC_1=2$.

连接 BC_1. $\because\ A_1C_1 \perp B_1C_1$，$A_1C_1 \perp CC_1$，

$\therefore\ A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C，

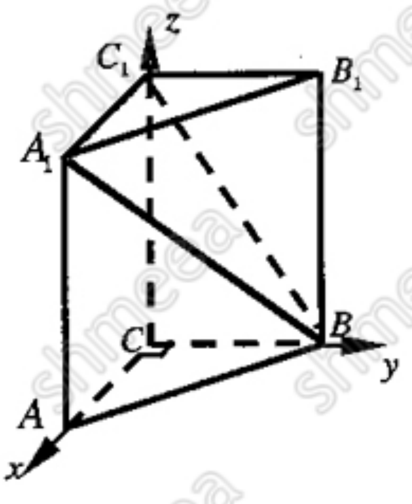
$\therefore\ \angle A_1BC_1$ 是直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成的角.

$BC_1=\sqrt{CC_1{}^2+BC^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore\ \tan\angle A_1BC_1=\dfrac{A_1C_1}{BC_1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，则 $\angle A_1BC_1=\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

即直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小为 $\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

[解法二] 由题意，可得



体积 $V=CC_1 \cdot S_{\Delta ABC}=CC_1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BC=\dfrac{1}{2}CC_1=1$，

$\therefore\ CC_1=2$，

如图，建立空间直角坐标系. 得点 $B(0,1,0)$，

$C_1(0,0,2)$，$A_1(1,0,2)$. 则 $\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-2)$，

平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$.

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{a}{x_1}-x_2^2-\frac{a}{x_2}=\frac{(x_1-x_2)}{x_1x_2}[x_1x_2(x_1+x_2)-a],$$

要使函数$f(x)$在$x\in[2,+\infty)$上为增函数，必须$f(x_1)-f(x_2)<0$恒成立.

$\because\ x_1-x_2<0,\ x_1x_2>4$，即$a<x_1x_2(x_1+x_2)$恒成立.

又$\because\ x_1+x_2>4$，$\therefore\ x_1x_2(x_1+x_2)>16$.

$\therefore\ a$的取值范围是$(-\infty,16]$.

[解法二]当$a=0$时，$f(x)=x^2$，显然在$[2,+\infty)$为增函数.

当$a<0$时，反比例函数$\frac{a}{x}$在$[2,+\infty)$为增函数，

$\therefore\ f(x)=x^2+\frac{a}{x}$在$[2,+\infty)$为增函数.

当$a>0$时，同解法一.

20. [解]（1）设$\{b_n\}$的公差为d，则$b_4=b_1+3d=2+3d=11$，解得 $d=3$，

$\therefore$ 数列$\{b_n\}$为$2,5,8,11,8,5,2$.

（2）$S_{2k-1}=c_1+c_2+\cdots+c_{k-1}+c_k+c_{k+1}+\cdots+c_{2k-1}$

$\quad=2(c_k+c_{k+1}+\cdots+c_{2k-1})-c_k$，

$S_{2k-1}=-4(k-13)^2+4\times13^2-50$，

$\therefore$ 当$k=13$时，S_{2k-1}取得最大值.

S_{2k-1}的最大值为626.

（3）所有可能的“对称数列”是：

① $1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1$；

② $1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1},2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1$；

③ $2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1}$；

④ $2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1,1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1}$.

对于①，当$m\ge2008$时，$S_{2008}=1+2+2^2+\cdots+2^{2007}=2^{2008}-1$.

当$1500<m\le2007$时，$S_{2008}=1+2+\cdots+2^{m-2}+2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2^{2m-2009}$

$$=2^m-1+2^{m-1}-2^{2m-2009}$$
$$=2^m+2^{m-1}-2^{2m-2009}-1.$$

对于②，当$m\ge 2008$时，$S_{2008}=2^{2008}-1$.

当$1500<m\le 2007$时，$S_{2008}=2^{m+1}-2^{2m-2008}-1$.

对于③，当$m\ge 2008$时，$S_{2008}=2^{m}-2^{m-2008}$.

当$1500<m\le 2007$时，$S_{2008}=2^{m}+2^{2009-m}-3$.

对于④，当$m\ge 2008$时，$S_{2008}=2^{m}-2^{m-2008}$.

当$1500<m\le 2007$时，$S_{2008}=2^{m}+2^{2008-m}-2$.

21. [解]（1）$\because$ $F_0(c,0)$，$F_1\left(0,-\sqrt{b^2-c^2}\right)$，$F_2\left(0,\sqrt{b^2-c^2}\right)$，

$\therefore$ $|F_0F_2|=\sqrt{(b^2-c^2)+c^2}=b=1$，$|F_1F_2|=2\sqrt{b^2-c^2}=1$，

于是$c^2=\dfrac{3}{4}$，$a^2=b^2+c^2=\dfrac{7}{4}$，所求“果圆”方程为

$\dfrac{4}{7}x^2+y^2=1\quad(x\ge 0)$，$y^2+\dfrac{4}{3}x^2=1\quad(x\le 0)$.

（2）由题意，得 $a+c>2b$，即$\sqrt{a^2-b^2}>2b-a$.

$\because$ $(2b)^2>b^2+c^2=a^2$，$\therefore$ $a^2-b^2>(2b-a)^2$，得$\dfrac{b}{a}<\dfrac{4}{5}$.

又$b^2>c^2=a^2-b^2$，$\therefore$ $\dfrac{b^2}{a^2}>\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ $\dfrac{b}{a}\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{4}{5}\right)$.

（3）设“果圆”C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(x\ge 0)$，$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1\quad(x\le 0)$.

记平行弦的斜率为k.

当$k=0$时，直线$y=t\,(-b\le t\le b)$与半椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(x\ge 0)$的交点是

$P\left(a\sqrt{1-\dfrac{t^2}{b^2}},t\right)$，与半椭圆$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1\quad(x\le 0)$的交点是$Q\left(-c\sqrt{1-\dfrac{t^2}{b^2}},t\right)$.

$\therefore$ P、Q的中点$M\ (x,y)$满足 $\begin{cases}x=\dfrac{a-c}{2}\cdot\sqrt{1-\dfrac{t^2}{b^2}},\\ y=t,\end{cases}$

得 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

$\because\ a<2b$，$\therefore\ \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2-b^2=\dfrac{a-c-2b}{2}\cdot\dfrac{a-c+2b}{2}\neq 0$.

综上所述，当$k=0$时，“果圆”平行弦的中点轨迹总是落在某个椭圆上.

当$k>0$时，以k为斜率过B_1的直线l与半椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(x\geq 0)$的交点是$\left(\dfrac{2ka^2b}{k^2a^2+b^2},\dfrac{k^2a^2b-b^3}{k^2a^2+b^2}\right)$.

由此，在直线l右侧，以k为斜率的平行弦的中点轨迹在直线$y=-\dfrac{b^2}{ka^2}x$上，即不在某一椭圆上.

当$k<0$时，可类似讨论得到平行弦中点轨迹不都在某一椭圆上.