2006年普通高等学校招生全国统一考试

上海　数学试卷(理工农医类)

考生注意：

1. 答卷前，考生务必将姓名、高考准考证号、校验码等填写清楚.

2. 本试卷共有22道试题，满分150分. 考试时间120分钟. 请考生用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上.

得　分	评卷人

一. 填空题（本大题满分48分）本大题共有12题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1. 已知集合 $A=\{-1,\ 3,\ 2m-1\}$，集合 $B=\{3,\ m^2\}$. 若 $B\subseteq A$，则实数 $m=$__________.

2. 已知圆 $x^2-4x-4+y^2=0$ 的圆心是点 P，则点 P 到直线 $x-y-1=0$ 的距离是______.

3. 若函数 $f(x)=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的反函数的图像过点 $(2,\ -1)$，则 $a=$________.

4. 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_n^3}{n^3+1}=$______________.

5. 若复数 z 同时满足 $z-\bar{z}=2\mathrm{i}$，$\bar{z}=\mathrm{i}z$（i 为虚数单位），则 $z=$__________.

6. 如果 $\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，且 α 是第四象限的角，那么 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$______________.

7. 已知椭圆中心在原点，一个焦点为 $F\left(-2\sqrt{3},\ 0\right)$，且长轴长是短轴长的2倍，则该椭圆的标准方程是______________________________.

8. 在极坐标系中，O 是极点. 设点 $A\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$B\left(5,-\dfrac{5\pi}{6}\right)$，则 $\triangle OAB$ 的面积是_______.

9. 两部不同的长篇小说各由第一、二、三、四卷组成，每卷1本，共8本. 将它们任意地排成一排，左边4本恰好都属于同一部小说的概率是_____________(结果用分数表示).

10. 如果一条直线与一个平面垂直，那么，称此直线与平面构成一个“正交线面对”．在一个正方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是__________.

11. 若曲线 $y^2=|x|+1$ 与直线 $y=kx+b$ 没有公共点，则 k、b 分别应满足的条件是____________________.

12. 三个同学对问题“关于 x 的不等式 $x^2+25+\left|x^3-5x^2\right|\geq ax$ 在 $[1, 12]$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围”提出各自的解题思路.

甲说：“只须不等式左边的最小值不小于右边的最大值”.

乙说：“把不等式变形为左边含变量 x 的函数，右边仅含常数，求函数的最值”.

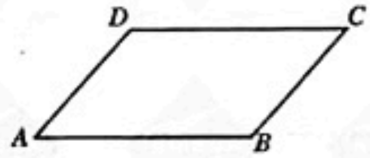
丙说：“把不等式两边看成关于 x 的函数，作出函数图像”.

参考上述解题思路，你认为他们所讨论的问题的正确结论，即 a 的取值范围是______.

得 分	评 卷 人

二. 选择题（本大题满分16分）本大题共有4 题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

13. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，下列结论中错误的是 [答]（ ）



(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.　　(B) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.　　(D) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

14. 若空间中有四个点，则“这四个点中有三点在同一条直线上”是“这四个点在同一个平面上”的 [答]（ ）

(A) 充分非必要条件.　　(B) 必要非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

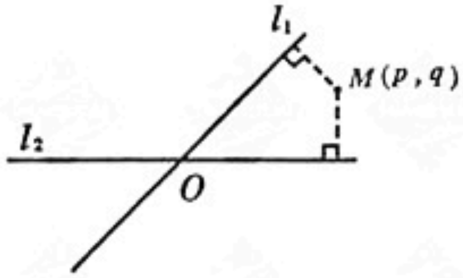
15. 若关于 x 的不等式 $\left(1+k^2\right)x\leq k^4+4$ 的解集是 M，则对任意实常数 k，总有

[答]（ ）

(A) $2\in M, 0\in M$.　　(B) $2\notin M, 0\notin M$.

(C) $2\in M, 0\notin M$.　　(D) $2\notin M, 0\in M$.

16. 如图，平面中两条直线l_1和l_2相交于点O．对于平面上任意一点M，若p、q分别是M到直线l_1和l_2的距离，则称有序非负实数对$(p,\ q)$是点M的“距离坐标”．已知常数$p\geq 0$，$q\geq 0$，给出下列三个命题：



① 若$p=q=0$，则“距离坐标”为$(0,\ 0)$的点有且仅有1个.

② 若$pq=0$，且$p+q\neq 0$，则“距离坐标”为$(p,\ q)$的点有且仅有2个.

③ 若$pq\neq 0$，则“距离坐标”为$(p,\ q)$的点有且仅有4个.

上述命题中，正确命题的个数是 [答]( )

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

三. 解答题（本大题满分86分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

得 分	评 卷 人

17.（本题满分12分）

求函数$y=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin 2x$的值域和最小正周期.

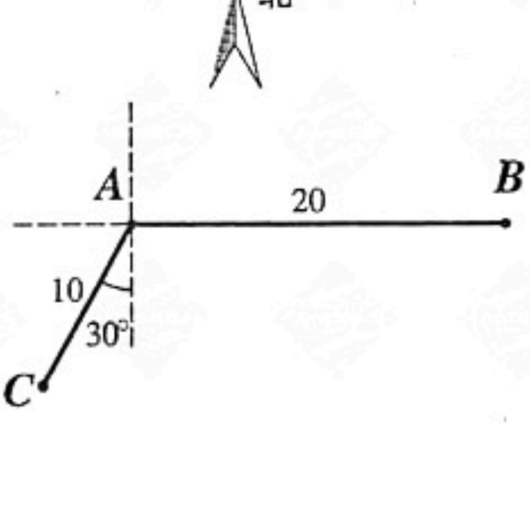
[解]

得 分	评 卷 人

18.（本题满分12分）

如图，当甲船位于A处时获悉，在其正东方向相距20海里的B处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援，同时把消息告知在甲船的南偏西30°，相距10海里C处的乙船，试问乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往B处救援（角度精确到1°）？

[解]



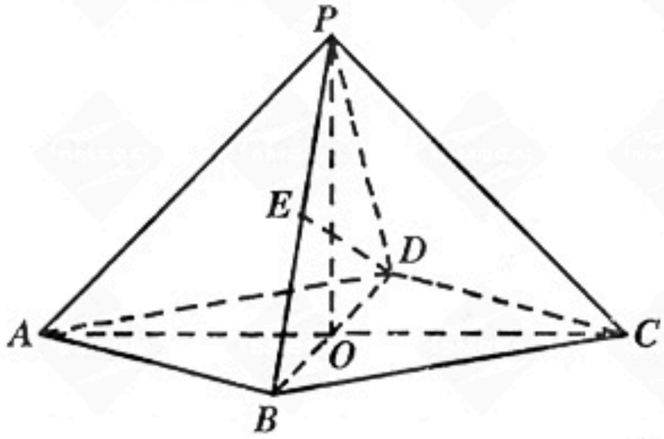
得　分	评卷人

19.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面是边长为2的菱形. $\angle DAB=60^\circ$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，PB 与平面 $ABCD$ 所成角为 60°.

（1）求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

（2）若 E 是 PB 的中点，求异面直线 DE 与 PA 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）.



[解]（1）

（2）

得　分	评卷人

20.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A、B 两点.

（1）求证："如果直线 l 过点 $T(3,\ 0)$，那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题；

（2）写出（1）中命题的逆命题，判断它是真命题还是假命题，并说明理由.

[解]（1）

（2）

得　分	评卷人

21.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分.

已知有穷数列$\{a_n\}$共有$2k$项（整数$k \geq 2$），首项$a_1 = 2$. 设该数列的前n项和为S_n，且$a_{n+1} = (a-1)S_n + 2 \quad (n = 1, 2, \cdots, 2k-1)$，其中常数$a > 1$.

（1）求证：数列$\{a_n\}$是等比数列；

（2）若$a = 2^{\frac{2}{2k-1}}$，数列$\{b_n\}$满足$b_n = \dfrac{1}{n}\log_2(a_1 a_2 \cdots a_n)\ (n = 1, 2, \cdots, 2k)$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（3）若（2）中的数列$\{b_n\}$满足不等式

$$\left|b_1 - \frac{3}{2}\right| + \left|b_2 - \frac{3}{2}\right| + \cdots + \left|b_{2k-1} - \frac{3}{2}\right| + \left|b_{2k} - \frac{3}{2}\right| \leq 4$$，求k的值.

[解]　（1）

（2）

（3）

得　分	评卷人

22.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分.

已知函数$y = x + \dfrac{a}{x}$有如下性质：如果常数$a > 0$，那么该函数在$\left(0,\ \sqrt{a}\,\right]$上是减函数,在$\left[\sqrt{a},\ +\infty\right)$上是增函数.

（1）如果函数$y = x + \dfrac{2^b}{x}\ (x > 0)$的值域为$[6,\ +\infty)$，求$b$的值；

（2）研究函数$y = x^2 + \dfrac{c}{x^2}$　（常数$c > 0$）在定义域内的单调性，并说明理由；

（3）对函数$y = x + \dfrac{a}{x}$和$y = x^2 + \dfrac{a}{x^2}$（常数$a > 0$）作出推广，使它们都是你所推广的函数的特例. 研究推广后的函数的单调性（只须写出结论，不必证明），并求函数$F(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^n + \left(\dfrac{1}{x^2} + x\right)^n$（$n$是正整数）在区间$\left[\dfrac{1}{2},\ 2\right]$上的最大值和最小值（可利用你的研究结论）.

[解]　（1）

（2）

（3）

上海　数学（理工农医类）参考答案

说明

1.本解答列出试题的一种或几种解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2.评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅，当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分.

解答

一、（第1题至第12题）

1. 1.　　2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　3. $\frac{1}{2}$.　　4. $\frac{1}{6}$.

5. $-1+\mathrm{i}$.　　6. $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.　　7. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.　　8. 5.

9. $\dfrac{1}{35}$.　　10. 36.　　11. $k=0$, $-1<b<1$.　　12. $a\le 10$.

二、（第13题至第16题）

题 号	13	14	15	16
代 号	C	A	A	D

三、（第17题至第22题）

17. [解] $y=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin 2x$

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$\therefore$ 函数 $y=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin 2x$ 的值域是$[-2, 2]$，最小正周期是π.

18. [解] 连接BC，由余弦定理得$BC^2=20^2+10^2-2\times 20\times 10\cdot\cos 120^\circ=700$，

于是，$BC=10\sqrt{7}$.

$\because$ $\dfrac{\sin\angle ACB}{20}=\dfrac{\sin 120^\circ}{10\sqrt{7}}$，$\therefore$ $\sin\angle ACB=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$，

$\because$ $\angle ACB<90^\circ$，$\therefore$ $\angle ACB\approx 41^\circ$，

所以，乙船应朝北偏东71°方向沿直线前往B处救援.

19. [解]（1）在四棱锥$P-ABCD$中，由$PO\perp$平面$ABCD$，得

$\angle PBO$是PB与平面$ABCD$所成角，$\angle PBO=60^\circ$.

在$Rt\Delta AOB$中，$BO=AB\sin 30^\circ=1$，又$PO\perp BO$，

于是，$PO=BO\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，而底面菱形的面积$S_{ABCD}=2\sqrt{3}$，

$\therefore$ 四棱锥$P-ABCD$的体积$V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=2$.

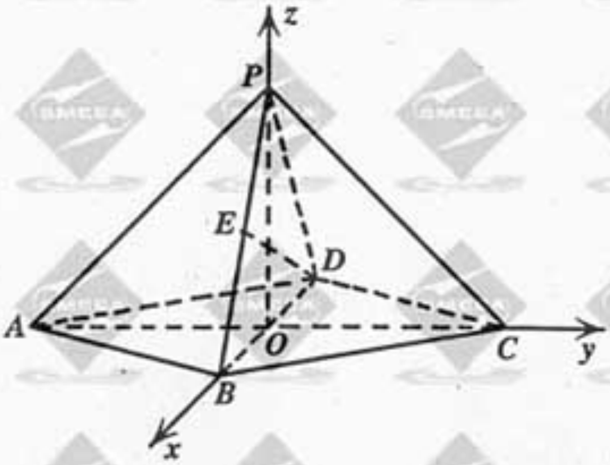
（2） [解法一] 以O为坐标原点，射线OB、OC、OP分别为x轴、y轴、z轴的正半轴，建立空间直角坐标系.

在$Rt\triangle AOB$中，$OA=\sqrt{3}$，

于是，点A、B、D、P的坐标分别是

$A(0,-\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，

$D(-1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$.



$\because$ E是PB的中点，则点E的坐标是

$\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

于是，$\overline{DE}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overline{AP}=(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$.

设$\overline{DE}$与$\overline{AP}$的夹角为θ，有$\cos\theta=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{3+3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore$ 异面直线DE与PA所成角的大小是$\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

[解法二] 取AB的中点F，连接EF、DF.

由E是PB的中点，得$EF\,//\,PA$，

$\therefore$ $\angle FED$是异面直线DE与PA所成角（或它的补角）.

在$Rt\Delta AOB$中，$OA=AB\cos 30^\circ=\sqrt{3}=OP$，

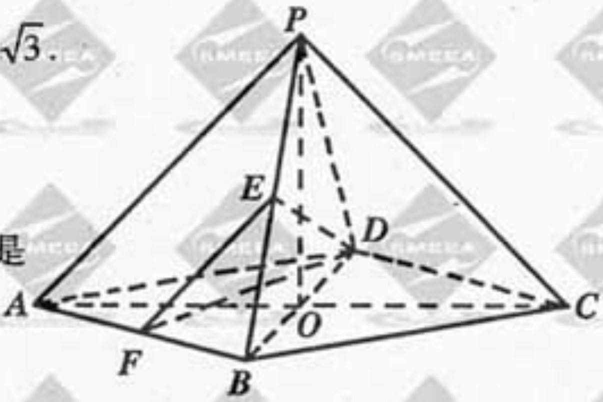
于是，在等腰直角$\triangle POA$中，$PA=\sqrt{6}$，则$EF=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

而在正$\triangle ABD$和正$\triangle PBD$中，$DE=DF=\sqrt{3}$.

$\cos\angle FED=\dfrac{\frac{1}{2}EF}{DE}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore$ 异面直线DE与PA所成角的大小是

$\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



20. [证明]（1）设过点$T(3,\ 0)$的直线l交抛物线$y^2=2x$于点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$.

当直线l的斜率不存在时，直线l的方程为$x=3$，此时，直线l与抛物线相交于点$A(3,\ \sqrt{6})$，$B(3,\ -\sqrt{6})$，$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$.

当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=k(x-3)$，其中$k\neq 0$.

由$\begin{cases} y^2=2x, \\ y=k(x-3). \end{cases}$ 得$ky^2-2y-6k=0$，则$y_1y_2=-6$.

又 $\because x_1=\frac{1}{2}y_1^2$，$x_2=\frac{1}{2}y_2^2$，

$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{4}(y_1y_2)^2+y_1y_2=3$.

综上所述，命题“如果直线l过点$T(3,\ 0)$，那么$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$”是真命题.

（2）逆命题是：设直线l交抛物线$y^2=2x$于A、B两点，如果$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$，那么该直线过点$T(3,\ 0)$. 该命题是一个假命题.

例如：取抛物线上的点$A(2,\ 2)$，$B\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$，此时$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$，

直线AB的方程是$y=\frac{2}{3}(x+1)$，而$T(3,\ 0)$不在直线AB上.

说明：由抛物线$y^2=2x$上的点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$满足$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$，可得$y_1y_2=-6$或$y_1y_2=2$. 如果$y_1y_2=-6$，可证得直线$AB$过点$(3,\ 0)$；如果$y_1y_2=2$，可证得直线$AB$过点$(-1,\ 0)$，而不过点$(3,\ 0)$.

21. [证明]（1）当$n=1$时，$a_2=2a$，则$\frac{a_2}{a_1}=a$；

当$2\leq n\leq 2k-1$时，$a_{n+1}=(a-1)S_n+2$，$a_n=(a-1)S_{n-1}+2$，

$a_{n+1}-a_n=(a-1)a_n$，

$\therefore\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=a$.

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是等比数列.

[解]（2）由（1）得$a_n=2a^{n-1}$，

$\therefore\ a_1a_2\cdots a_n=2^n a^{1+2+\cdots+(n-1)}$

$$=2^n a^{\frac{(n-1)n}{2}}=2^{n+\frac{n(n-1)}{2k-1}},$$

$$b_n=\frac{1}{n}\left[n+\frac{n(n-1)}{2k-1}\right]=\frac{n-1}{2k-1}+1\quad(n=1,2,\cdots,2k).$$

(3) 设$b_n \le \frac{3}{2}$，解得$n \le k+\frac{1}{2}$，又n是正整数，于是当$n \le k$时，$b_n < \frac{3}{2}$；

当$n \ge k+1$时，$b_n > \frac{3}{2}$.

$$\text{原式}=\left(\frac{3}{2}-b_1\right)+\left(\frac{3}{2}-b_2\right)+\cdots+\left(\frac{3}{2}-b_k\right)+\left(b_{k+1}-\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(b_{2k}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\left(b_{k+1}+\cdots+b_{2k}\right)-\left(b_1+\cdots+b_k\right)$$

$$=\left[\frac{\frac{1}{2}(k+2k-1)k}{2k-1}+k\right]-\left[\frac{\frac{1}{2}(0+k-1)k}{2k-1}+k\right]=\frac{k^2}{2k-1}.$$

由$\frac{k^2}{2k-1} \le 4$，得$k^2-8k+4 \le 0$，

$4-2\sqrt{3} \le k \le 4+2\sqrt{3}$，又$k \ge 2$，

$\therefore$ 当$k=2,3,4,5,6,7$时，原不等式成立.

22. [解] (1) 函数$y=x+\frac{2^b}{x}$ $(x>0)$的最小值是$2\sqrt{2^b}$，则$2\sqrt{2^b}=6$，

$\therefore$ $b=\log_2 9$.

(2) 设$0<x_1<x_2$，$y_2-y_1=x_2^2+\frac{c}{x_2^2}-x_1^2-\frac{c}{x_1^2}=\left(x_2^2-x_1^2\right)\left(1-\frac{c}{x_1^2 \cdot x_2^2}\right)$.

当$\sqrt[4]{c} \le x_1 < x_2$时，$y_2>y_1$，函数$y=x^2+\frac{c}{x^2}$在$\left[\sqrt[4]{c}, +\infty\right)$上是增函数；

当$0<x_1<x_2 \le \sqrt[4]{c}$时，$y_2<y_1$，函数$y=x^2+\frac{c}{x^2}$在$\left(0, \sqrt[4]{c}\right]$上是减函数.

又$y=x^2+\frac{c}{x^2}$是偶函数，于是，该函数在$\left(-\infty, -\sqrt[4]{c}\right]$上是减函数，在$\left[-\sqrt[4]{c}, 0\right)$上是增函数.

(3) 可以把函数推广为$y=x^n+\frac{a}{x^n}$（常数$a>0$），其中n是正整数.

当n是奇数时，函数$y=x^n+\frac{a}{x^n}$在$\left(0, \sqrt[2n]{a}\right]$上是减函数，在$\left[\sqrt[2n]{a}, +\infty\right)$上是增

函数;在$\left(-\infty, -\sqrt[2n]{a}\right]$上是增函数，在$\left[-\sqrt[2n]{a}, 0\right)$上是减函数.

当n是偶数时，函数$y=x^n+\dfrac{a}{x^n}$在$\left(0, \sqrt[2n]{a}\right]$上是减函数，在$\left[\sqrt[2n]{a}, +\infty\right)$上是增函数;在$\left(-\infty, -\sqrt[2n]{a}\right]$上是减函数，在$\left[-\sqrt[2n]{a}, 0\right)$上是增函数.

$$F(x)=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^n$$

$$=C_n^0\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)+C_n^1\left(x^{2n-3}+\frac{1}{x^{2n-3}}\right)+\cdots+C_n^r\left(x^{2n-3r}+\frac{1}{x^{2n-3r}}\right)+\cdots+C_n^n\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right);$$

因此，$F(x)$在$\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$上是减函数，在$[1, 2]$上是增函数.

所以，当$x=\dfrac{1}{2}$或$x=2$时，$F(x)$取得最大值$\left(\dfrac{9}{2}\right)^n+\left(\dfrac{9}{4}\right)^n$;

当$x=1$时，$F(x)$取得最小值2^{n+1}.