上海　数学试卷(理工农医类)

考生注意：

1. 答卷前，考生务必将姓名、高考准考证号、校验码等填写清楚.

2. 本试卷共有22道试题，满分150分．考试时间120分钟．请考生用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上.

3. 华东师大二附中、大同中学、格致中学考生请注意试卷最后的符号说明.

得　分	评 卷 人

一.填空题（本大题满分48分）本大题共有12题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1. 函数 $y=\sin x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T=$______.

2. 若 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x+\alpha)=1$ 的解，其中 $\alpha\in(0,2\pi)$，则 $\alpha=$____________.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5=3$，$a_6=-2$，则 $a_4+a_5+\cdots+a_{10}=$____________.

4. 在极坐标系中，定点 $A\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$，点 B 在直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=0$ 上运动，当线段 AB 最短时，点 B 的极坐标是____________.

5. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，若侧面与底面所成二面角的大小为 60°，则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于____________.（结果用反三角函数值表示）

6. 设集合 $A=\{x\,|\,|x|<4\}$，$B=\{x\,|\,x^2-4x+3>0\}$，则集合 $\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}$ $=$____________.

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，则 $\angle ABC=$________.（结果用反三角函数值表示）

8. 若首项为 a_1，公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和，则首项 a_1，公比 q 的一组取值可以是（a_1，q）$=$____________.

9. 某国际科研合作项目成员由11个美国人、4个法国人和5个中国人组成. 现从中随机选出两位作为成果发布人，则此两人不属于同一个国家的概率为________.（结果用分数表示）

10. 方程 $x^3+\lg x=18$ 的根 $x\approx$ ____________.（结果精确到0.1）

11. 已知点 $A\left(0,\dfrac{2}{n}\right)$，$B\left(0,-\dfrac{2}{n}\right)$，$C\left(4+\dfrac{2}{n},0\right)$，其中 n 为正整数. 设 S_n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$____________.

12. 给出问题：F_1、F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$ 的焦点，点 P 在双曲线上. 若点 P 到焦点 F_1 的距离等于9，求点 P 到焦点 F_2 的距离. 某学生的解答如下：双曲线的实轴长为8，由 $||PF_1|-|PF_2||=8$，即 $|9-|PF_2||=8$，得 $|PF_2|=1$ 或17.

该学生的解答是否正确？若正确，请将他的解题依据填在下面空格内；若不正确，将正确结果填在下面空格内.

____.

得　分	评 卷 人

二．选择题（本大题满分16分）本大题共有4 题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4 分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分．

13. 下列函数中，既为偶函数又在$(0,\pi)$上单调递增的是　　　　[答]（　　　）

（A）$y=\mathrm{tg}\,|x|$.　　　　（B）$y=\cos(-x)$．

（C）$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.　　　　（D）$y=\left|\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}\right|$.

14. 在下列条件中，可判断平面α与β平行的是　　　　[答]（　　　）

（A）α、β都垂直于平面γ.

（B）α内存在不共线的三点到β的距离相等.

（C）l,m是α内两条直线，且$l//\beta$，$m//\beta$．

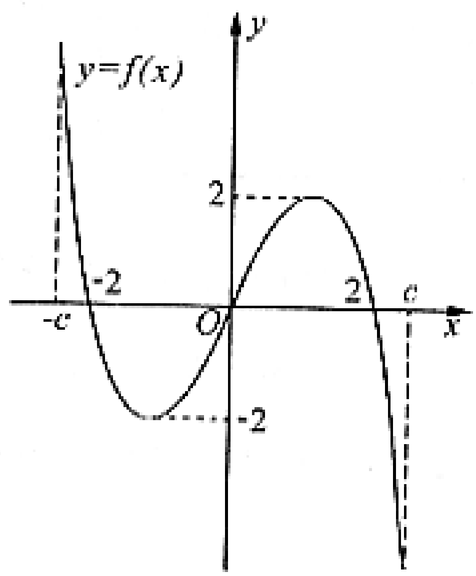
（D）l,m是两条异面直线，且$l//\alpha$，$m//\alpha$，$l//\beta$，$m//\beta$．

15．设a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2均为非零实数，不等式$a_1x^2+b_1x+c_1>0$和$a_2x^2+b_2x+c_2>0$的解集分别为集合M和N，那么“$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$”是“$M=N$”的　　　　[答]（　　　）

（A）充分非必要条件.　　　　（B）必要非充分条件.

（C）充要条件.　　　　（D）既非充分又非必要条件.

16. $f(x)$是定义在区间$[-c,c]$上的奇函数，其图象如图所示．令$g(x)=af(x)+b$，则下列关于函数$g(x)$的叙述正确的是：　　　　[答]（　　　）



（A）若$a<0$，则函数$g(x)$的图象关于原点对称.

（B）若$a=-1,-2<b<0$，则方程$g(x)=0$有大于2的实根.

（C）若$a\neq 0,b=2$，则方程$g(x)=0$有两个实根.

（D）若$a\geq 1,b<2$，则方程$g(x)=0$有三个实根.

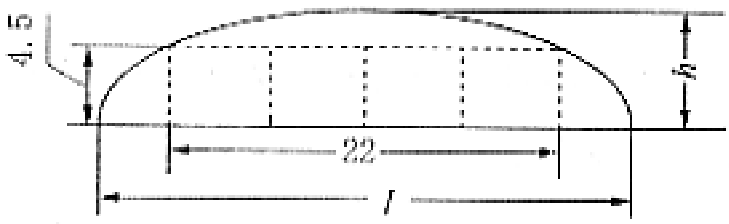
得　分	评 卷 人

20.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

如图，某隧道设计为双向四车道，车道总宽22米，要求通行车辆限高4.5米，隧道全长2.5千米，隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.

（1）若最大拱高 h 为6米，则隧道设计的拱宽 l 是多少？

（2）若最大拱高 h 不小于6米，则应如何设计拱高 h 和拱宽 l，才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最小？



（单位：米）

(半个椭圆的面积公式为 $S=\dfrac{\pi}{4}lh$，柱体体积为：底面积乘以高. 本题结果均精确到0.1米)

[解]（1）

（2）

得　分	评 卷 人

21.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分5分，第3小题满分7分.

在以 O 为原点的直角坐标系中，点 $A(4,-3)$ 为 $\triangle OAB$ 的直角顶点. 已知 $|AB|=2|OA|$，且点 B 的纵坐标大于零.

（1）求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标；

（2）求圆 $x^2-6x+y^2+2y=0$ 关于直线 OB 对称的圆的方程；

（3）是否存在实数 a，使抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点？若不存在，说明理由；若存在，求 a 的取值范围.

[解]（1）

（2）

（3）

得 分	评卷人

22.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分5分，第2小题满分6分，第3小题满分7分.

已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体：

存在非零常数 T，对任意 $x\in \mathrm{R}$，有 $f(x+T)=T\,f(x)$ 成立.

（1）函数 $f(x)=x$ 是否属于集合 M？说明理由；

（2）设函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图象与 $y=x$ 的图象有公共点，证明：$f(x)=a^x\in M$；

（3）若函数 $f(x)=\sin kx\in M$，求实数 k 的取值范围.

[解] (1)

(2)

(3)

符号意义	本试卷所用符号	等同于《实验教材》符号
正切、余切	tg、ctg	tan、cot

上海数学试卷(理工农医类)答案要点

一、（第1题至第12题）

1. π.　　2. $\frac{4}{3}\pi$.　　3. -49.　　4. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$.　　5. arctg2 .

6. [1, 3].　　7. $\arccos\frac{11}{16}$.　　8. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$（$a_1>0, 0<q<1$ 的一组数）.

9. $\frac{119}{190}$.　　10. 2.6.　　11. 4π.　　12. $|PF_2|=17$.

二、（第13题至第16题）

题　号	13	14	15	16
代　号	C	D	D	B

三、（第17题至第22题）

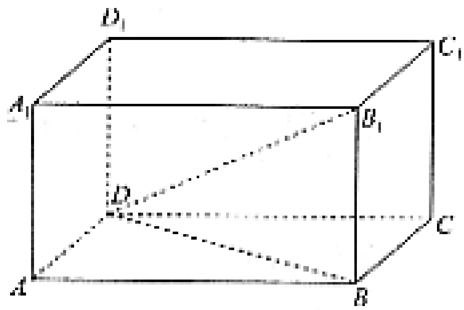
17. [解] $|z_1\cdot z_2| = |1+\sin\theta\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)i|$

$$= \sqrt{(1+\sin\theta\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{2+\sin^2\theta\cos^2\theta} = \sqrt{2+\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}.$$

故$|z_1\cdot z_2|$的最大值为$\frac{3}{2}$，最小值为$\sqrt{2}$.

18. [解] 连结 BD，因为 $B_1B\perp$ 平面 $ABCD$，$B_1D\perp BC$，所以$BC\perp BD$.



在$\triangle BCD$中，$BC=2$，$CD=4$，

所以$BD=2\sqrt{3}$.

又因为直线 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 $30°$，所以$\angle B_1DB=30°$，

于是 $BB_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} BD = 2$.

故平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $S_{ABCD} \cdot BB_1 = 8\sqrt{3}$.

19. [解] （1）$a_1C_2^0 - a_2C_2^1 + a_3C_2^2 = a_1 - 2a_1q + a_1q^2 = a_1(1-q)^2$,

$a_1C_3^0 - a_2C_3^1 + a_3C_3^2 - a_4C_3^3 = a_1 - 3a_1q + 3a_1q^2 - a_1q^3 = a_1(1-q)^3$.

（2）归纳概括的结论为：

若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公比为 q 的等比数列，则

$a_1C_n^0 - a_2C_n^1 + a_3C_n^2 - a_4C_n^3 + \cdots + (-1)^n a_{n+1}C_n^n = a_1(1-q)^n$，$n$ 为正整数.

证明：$a_1C_n^0 - a_2C_n^1 + a_3C_n^2 - a_4C_n^3 + \cdots + (-1)^n a_{n+1}C_n^n$

$= a_1C_n^0 - a_1qC_n^1 + a_1q^2C_n^2 - a_1q^3C_n^3 + \cdots + (-1)^n a_1q^nC_n^n$

$= a_1[C_n^0 - qC_n^1 + q^2C_n^2 - q^3C_n^3 + \cdots + (-1)^n q^nC_n^n] = a_1(1-q)^n$.

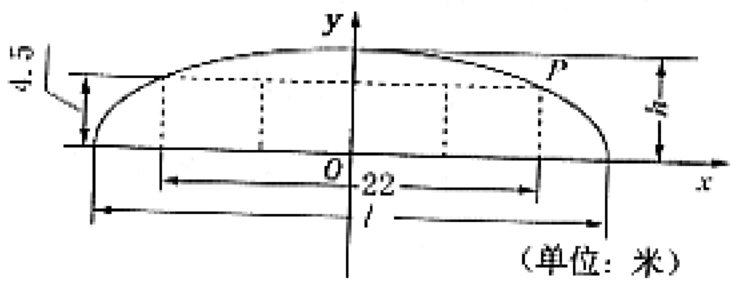
20. [解] （1）如图建立直角坐标系，则点 P（11，4.5），

椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

将 $b = h = 6$ 与点 P 坐标代入椭圆方程，得 $a = \dfrac{44\sqrt{7}}{7}$，此时 $l = 2a = \dfrac{88\sqrt{7}}{7} \approx 33.3$.

因此隧道的拱宽约为33.3米.

（2）[解一]



由椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

得 $\dfrac{11^2}{a^2} + \dfrac{4.5^2}{b^2} = 1$.

因为 $\dfrac{11^2}{a^2} + \dfrac{4.5^2}{b^2} \ge \dfrac{2 \times 11 \times 4.5}{ab}$，即 $ab \ge 99$，且 $l = 2a$，$h = b$，

所以 $S = \dfrac{\pi}{4} lh = \dfrac{\pi ab}{2} \ge \dfrac{99\pi}{2}$.

当 S 取最小值时，有 $\dfrac{11^2}{a^2} = \dfrac{4.5^2}{b^2} = \dfrac{1}{2}$，得 $a = 11\sqrt{2}$，$b = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$，

此时 $l = 2a = 22\sqrt{2} \approx 31.1$，$h = b \approx 6.4$.

故当拱高约为6.4米、拱宽约为31.1米时，土方工程量最小.

[解二] 由椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}=1$．

于是 $b^2=\frac{81}{4}\cdot\frac{a^2}{a^2-121}$，

$$a^2b^2=\frac{81}{4}\left(a^2-121+\frac{121^2}{a^2-121}+242\right)\geq\frac{81}{4}\left(2\sqrt{121^2}+242\right)=81\times121,$$

即 $ab\geq99$，当 S 取最小值时，有 $a^2-121=\frac{121^2}{a^2-121}$，

得 $a=11\sqrt{2}$，$b=\frac{9\sqrt{2}}{2}$．以下同解一．

21. [解] （1）设 $\overrightarrow{AB}=\{u,v\}$，则由 $\begin{cases}\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\overrightarrow{OA}\right|\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}u^2+v^2=100\\ 4u-3v=0\end{cases}$，得

$\begin{cases}u=6\\ v=8\end{cases}$，或 $\begin{cases}u=-6\\ v=-8\end{cases}$．　　因为 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\{u+4,v-3\}$，

所以 $v-3>0$，得 $v=8$，故 $\overrightarrow{AB}=\{6,8\}$．

（2）由 $\overrightarrow{OB}=\{10,5\}$，得 $B(10,5)$，于是直线 OB 方程：$y=\frac{1}{2}x$．

由条件可知圆的标准方程为：$(x-3)^2+(y+1)^2=10$，

得圆心 $(3,-1)$，半径为 $\sqrt{10}$．

设圆心 $(3,-1)$ 关于直线 OB 的对称点为 (x,y)，则

$\begin{cases}\frac{x+3}{2}-2\cdot\frac{y-1}{2}=0\\ \frac{y+1}{x-3}=-2\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$，

故所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=10$．

（3）设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 为抛物线上关于直线 OB 对称的两点，则

$\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}-2\frac{y_1+y_2}{2}=0\\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-2\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2}{a}\\ x_1x_2=\frac{5-2a}{2a^2}\end{cases}$，

即 x_1、x_2为方程$x^2+\frac{2}{a}x+\frac{5-2a}{2a^2}=0$的两个相异实根，

于是由$\Delta=\frac{4}{a^2}-4\cdot\frac{5-2a}{2a^2}>0$，得 $a>\frac{3}{2}$.

故当$a>\frac{3}{2}$时，抛物线$y=ax^2-1$上总有关于直线OB对称的两点.

22.［解］（1）对于非零常数T，$f(x+T)=x+T$，$Tf(x)=Tx$.

因为对任意$x\in R$，$x+T=Tx$不能恒成立，

所以$f(x)=x\notin M$.

（2）因为函数$f(x)=a^x$（$a>0$且$a\neq1$）的图象与函数$y=x$的图象有公共点，

所以方程组：$\begin{cases}y=a^x\\y=x\end{cases}$有解，消去$y$得$a^x=x$，

显然$x=0$不是方程$a^x=x$的解，所以存在非零常数T，使$a^T=T$.

于是对于$f(x)=a^x$，有

$f(x+T)=a^{x+T}=a^T\cdot a^x=T\cdot a^x=Tf(x)$，

故$f(x)=a^x\in M$.

（3）当$k=0$时，$f(x)=0$，显然$f(x)=0\in M$.

当$k\neq0$时，因为$f(x)=\sin kx\in M$，所以存在非零常数T，

对任意$x\in R$，有

$f(x+T)=Tf(x)$成立，即$\sin(kx+kT)=T\sin kx$.

因为$k\neq0$，且$x\in R$，所以$kx\in R$，$kx+kT\in R$，

于是$\sin kx\in[-1,1]$，$\sin(kx+kT)\in[-1,1]$，

故要使$\sin(kx+kT)=T\sin kx$成立，只有$T=\pm1$.

当$T=1$时，$\sin(kx+k)=\sin kx$成立，则$k=2m\pi$，$m\in Z$.

当$T=-1$时，$\sin(kx-k)=-\sin kx$成立，

即$\sin(kx-k+\pi)=\sin kx$成立，

则$-k+\pi=2m\pi$，$m\in Z$，即$k=-(2m-1)\pi$，$m\in Z$.

综合得，实数k的取值范围是$\{k\mid k=m\pi,m\in Z\}$.