2023年普通高等学校招生全国统一考试

上海　数学试卷

考生注意：

1．本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2．作答前，在答题纸指定位置填写姓名、报名号、座位号。将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3．所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分.

4．用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果.

1．设$x\in\mathbf{R}$，则不等式$|x-2|<1$的解集为__________.

2．已知向量$\vec{a}=(-2,4)$，$\vec{b}=(2,2)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________.

3．设$\{a_n\}$为首项为3，公比为2的等比数列，且其前n项的和为S_n，则$S_6=$__________.

4．若$\tan\alpha=2$，则$\tan 2\alpha=$__________.

5．已知函数$f(x)=\begin{cases}1,(x\le 0)\\ 2^x,(x>0)\end{cases}$，则$f(x)$的值域为__________.

6．设复数$z=1+\mathrm{i}$（i为虚数单位），则$|1-i\cdot z|=$__________.

7．已知圆$C:x^2+y^2-4y-m=0$的面积为π，则实数$m=$__________.

8．已知在$\triangle ABC$中，角A、B、C对应边长分别为a、b、c，且$a=4$、$b=5$、$c=6$，则$\sin A=$__________.

9．国内生产总值（GDP）是衡量该地区经济状况的最佳指标，根据统计数据显示，某市在2020年间经济高质量增长，GDP逐年增长，已知第一个季度的GDP为231，第四季度的GDP为242（单位：亿元），且四个季度的GDP中位数与平均数相同，则该市2020年的GDP总额为__________.

10．已知$(1+2023x)^{100}+(2023-x)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{100}x^{100}$（$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{100}\in\mathbf{R}$），若$k\in\{0,1,2,\cdots,100\}$，且$a_k<0$，则$k$的最大值为__________.

11．某公园欲建设一段斜坡，假设斜坡起点在水平面上，斜坡与水平面所成的角为 θ，斜坡顶点距水平地面的高度为 4 米，若游客每沿着斜坡向上走 1 米时，所消耗的体力大小为 $1.025-\cos\theta$，当游客从坡底走到斜坡顶端最省力时，$\theta=$__________．

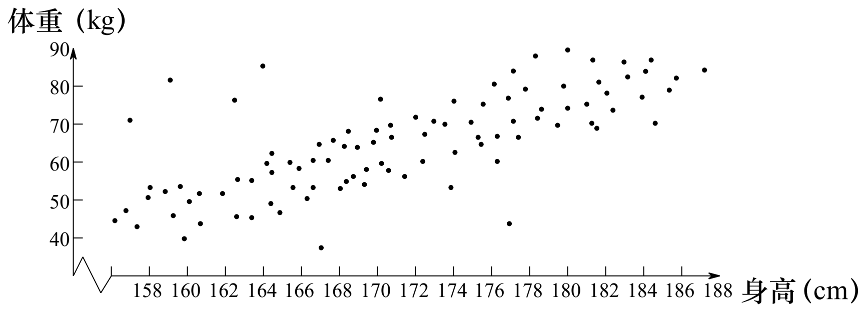
12．空间中存在三个点 A、B、C，且 $AB=AC=BC=1$，现在空间中任取两点（不计顺序），若这两个点与 A、B、C 恰好构成正四棱锥的五个顶点，则不同的取法的种数为__________．（用数字作答）

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分，第 13~14 题每题 4 分，第 15~16 题每题 5 分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑．

13．已知集合 $P=\{1,2\}$，$Q=\{2,3\}$，若 $M=\{x\,|\,x\in P \text{ 且 } x\notin Q\}$，则 $M=$（　　）．

(A) $\{1\}$；　(B) $\{2\}$；　(C) $\{3\}$；　(D) $\{1,2,3\}$．

14．已知某校 50 个学生的身高与体重的散点图如下所示，则下列说法**正确**的是（　　）．



(A) 身高越高，体重越大；　(B) 身高越高，体重越小；

(C) 身高与体重呈正相关；　(D) 身高与体重呈负相关．

15．已知实数 $a>0$，函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最小值为 s_a，在区间 $[2a,3a]$ 上的最小值为 t_a，当 a 变化时，下列情况中**不可能**的是（　　）．

(A) $s_a>0$ 且 $t_a>0$；　(B) $s_a<0$ 且 $t_a<0$；

(C) $s_a>0$ 且 $t_a<0$；　(D) $s_a<0$ 且 $t_a>0$．

16．平面上曲线 Γ 若满足以下性质：若存在 M 点，使得对于任意的 $P\in\Gamma$，都存在 $Q\in\Gamma$，使得 $|PM|\cdot|QM|=1$，则称曲线 Γ 称为“自洽”，现有如下两个命题：①任何椭圆都是“自洽”的；②存在双曲线是“自洽”的．则下列说法**正确**的是（　　）．

(A) ①成立，②成立；　(B) ①成立，②不成立；

(C) ①不成立，②成立；　(D) ①不成立，②不成立．

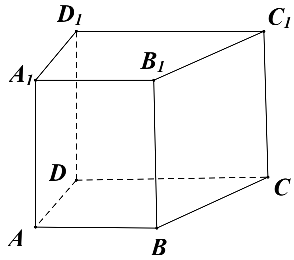
三、解答题（本大题满分 78 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤．

17.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，其底面 $ABCD$ 为梯形，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AB=2$，$AD=3$，$DC=4$．

(1) 求证：$A_1B//$平面 DCC_1D_1；

(2) 若四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 体积为 36，求二面角 A_1-BD-A 的大小．



18.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+(3a+1)x+c}{x+a}(a,c\in\mathbf{R})$．

(1) 当 $a=0$ 时，求函数的定义域，并判断是否存在实数 c，使得函数 $y=f(x)$ 为奇函数，并说明理由；

(2) 若函数 $y=f(x)$ 过点 $(1,3)$，且函数 $y=f(x)$ 图像与 x 轴的负半轴有两个不同交点，求实数 c 的值及实数 a 的取值范围．

19.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

21 世纪汽车博览会 2023 年在上海举行，某汽车模型公司共有 25 个汽车模型，其外观与内饰颜色数量如下表所示．

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

(1) 若小明从这些模型中随机拿一个模型，记事件 A 为“小明取到的模型为红色外观”，事件 B 为“小明取到模型为棕色内饰”，求 $P(B)$、$P(B|A)$，并判断事件 A 和事件 B 是否独立；

(2) 该公司举行了一个抽奖活动，规定在一次抽奖中，每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型，给出以下假设：①拿到的两个模型会出现三种结果，即外观和内饰均为同色、外观内饰都异色、以及仅外观或仅内饰同色；②按结果的可能性大小设置奖项，概率越小奖项越高；③奖金额为一等奖 600 元，二等奖 300 元，三等奖 150 元．根据以上假设，设随机变量 X 为抽取一次所获得的奖金金额，求 X 的数学期望．

20.（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A 是抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 上在第一象限的一点，纵坐标为 $a(a>0)$.

(1) 若 A 到 Γ 的准线的距离为 3，求 a 的值；

(2) 设 $a=4$，B 为 x 轴上一点，若 AB 的中点也在 Γ 上，求原点到直线 AB 的距离；

(3) 已知直线 $l: x=-3$，设 P 是 Γ 上异于 A 的第一象限的一点，直线 PA 交 l 于点 Q，P 在 l 上的射影为 H，若对任意的 P，都有“$|QH|>4$”恒成立，求 a 的取值范围.

21.（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

已知曲线 $f(x)=\ln x$，令其图像 $y=f(x)$ 为 Γ，我们进行以下操作：选取曲线 Γ 上任意一点 $(a_1, f(a_1))$，过其作曲线的切线交 y 轴正半轴于 $(0,a_2)$，再选取点 $(a_2, f(a_2))$，过其作曲线的切线交 y 轴于 $(0,a_3)\cdots$重复上述操作，直到产生一个正整数 k，使得 $a_k<0$，我们得到这样的一个数列 $\{a_n\}$.

(1) 任取数列 $\{a_n\}$ 中的一项 $a_m(m\geq 2)$，试证明：$a_m=\ln a_{m-1}-1$；

(2) 任取数列 $\{a_n\}$ 中的一项 $a_m(m\geq 2)$，试比较 a_m 与 $a_{m-1}-2$ 的大小，并说明理由；

(3) 是否存在正数 a_1 和正整数 $k(k\geq 3)$，使得 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 成等差数列？若是，请求出所有 k 的值；若不是，请说明理由.