上海　数学试卷(理工农医类)

考生注意：

1. 答卷前，考生务必将姓名、高考准考证号、校验码等填写清楚.

2. 本试卷共有22道试题，满分150分．考试时间120分钟．请考生用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上.

得　分	评卷人

一．填空题（本大题满分48分）本大题共有12题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1. 函数 $f(x)=\log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$____________________.

2. 方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是____________.

3. 直角坐标平面 xOy 中，若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$，则点 P 的轨迹方程是____________________.

4. 在 $(x-a)^{10}$ 的展开式中，x^7 的系数是15，则实数 $a=$________________.

5. 若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm3x$，它的一个焦点是 $(\sqrt{10},0)$，则双曲线的方程是____________________________.

6. 将参数方程 $\begin{cases}x=1+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ （θ 为参数）化为普通方程，所得方程是____________

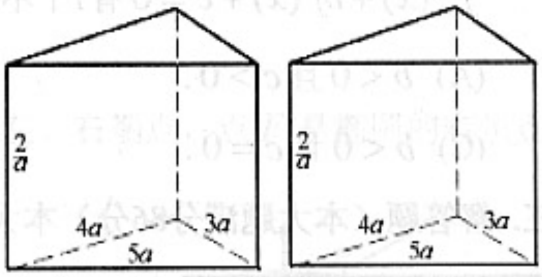
7. 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^{n+1}}=$____________.

8. 某班有50名学生，其中15人选修A课程，另外35人选修B课程．从班级中任选两名学生他们是选修不同课程的学生的概率是________________．(结果用分数表示)

9. 在△ ABC 中，若 $\angle A=120^\circ$，$AB=5$，$BC=7$，则△ ABC 的面积 $S=$____________

10. 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点，则 k 的取值范围是______________.

11. 有两个相同的直三棱柱，高为 $\dfrac{2}{a}$，底面三角形的三边长分别为 $3a$、$4a$、$5a$ $(a>0)$．用它们拼成一个三棱柱或四棱柱，在所有可能的情形中，全面积最小的是一个四棱柱，则 a 的取值范围是______________.



12. 用 n 个不同的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可得到 $n!$ 个不同的排列，每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵.对第 i 行 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$，记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$，$i=1,2,3,\cdots,n!$．例如：用1, 2, 3可得数阵如右，由于此数阵中每一列各数之和都是12，所以，$b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times12-3\times12=-24$．那么,在用1，2，3，4，5 形成的数阵中，$b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$__________.

$$\begin{matrix}1&2&3\\1&3&2\\2&1&3\\2&3&1\\3&1&2\\3&2&1\end{matrix}$$

得 分	评 卷 人

二. 选择题（本大题满分16分）本大题共有4 题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

13. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$，则该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 [答]（　　）

(A) 单调递减无最小值. (B) 单调递减有最小值.

(C) 单调递增无最大值. (D) 单调递增有最大值.

14. 已知集合 $M=\{x\,|\,|x-1|\le 2,\ x\in \mathrm{R}\}$，$P=\{x\,|\,\dfrac{5}{x+1}\ge 1,\ x\in \mathrm{Z}\}$，则 $M\cap P$ 等于 [答]（　　）

(A) $\{x\,|\,0<x\le 3,\ \ x\in \mathrm{Z}\}$. (B) $\{x\,|\,0\le x\le 3,\ \ x\in \mathrm{Z}\}$.

(C) $\{x\,|\,-1\le x\le 0,\ \ x\in \mathrm{Z}\}$. (D) $\{x\,|\,-1\le x<0,\ \ x\in \mathrm{Z}\}$.

15. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于 A、B 两点，它们的横坐标之和等于5，则这样的直线 [答]（　　）

（A）有且仅有一条. （B）有且仅有两条 . （C）有无穷多条. （D）不存在.

16. 设定义域为R的函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg|x-1||, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ ，则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有7个不同实数解的充要条件是 [答]( )

(A) $b<0$ 且 $c>0$. (B) $b>0$ 且 $c<0$.

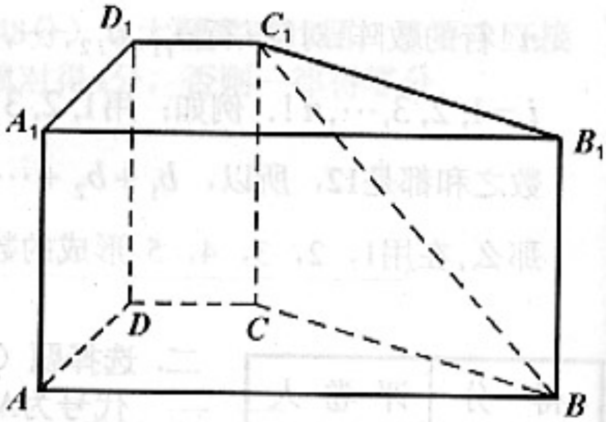
(C) $b<0$ 且 $c=0$. (D) $b\geq 0$ 且 $c=0$.

三. 解答题（本大题满分86分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

得 分	评 卷 人

17.（本题满分12分）

已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$\angle A$ 为直角，$AB//CD$，$AB=4$, $AD=2$, $DC=1$，求异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小.（结果用反三角函数值表示）



[解]

得 分	评 卷 人

18.（本题满分12分）

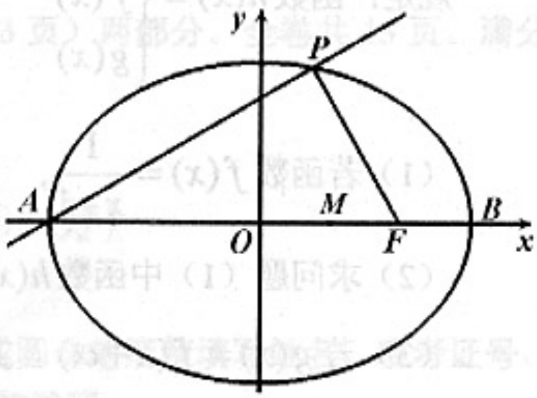
证明：在复数范围内，方程 $|z|^2+(1-i)\bar{z}-(1+i)z=\dfrac{5-5i}{2+i}$（i为虚数单位）无解.

[证明]

得　分	评 卷 人

19.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

如图，点 A、B 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 长轴的左、右端点，点 F 是椭圆的右焦点. 点 P 在椭圆上，且位于 x 轴上方，$PA\perp PF$.



（1）求点 P 的坐标；

（2）设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点，M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$，求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.

[解]（1）

（2）

得　分	评 卷 人

20.（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

假设某市2004年新建住房400万平方米，其中有250万平方米是中低价房. 预计在今后的若干年内，该市每年新建住房面积平均比上一年增长8%. 另外，每年新建住房中，中低价房的面积均比上一年增加50万平方米. 那么，到哪一年底，

（1）该市历年所建中低价房的累计面积（以 2004 年为累计的第一年）将首次不少于 4750 万平方米?

（2）当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

[解]（1）

（2）

得 分	评卷人

21.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分．

对定义域分别是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$，

规定：函数 $h(x)=\begin{cases} f(x)\cdot g(x) & \text{当} x\in D_f \text{且} x\in D_g \\ f(x) & \text{当} x\in D_f \text{且} x\notin D_g \\ g(x) & \text{当} x\notin D_f \text{且} x\in D_g \end{cases}$．

（1）若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，$g(x)=x^2$，写出函数 $h(x)$ 的解析式；

（2）求问题（1）中函数 $h(x)$ 的值域；

（3）若 $g(x)=f(x+\alpha)$，其中 α 是常数，且 $\alpha\in[0,\pi]$，请设计一个定义域为R的函数 $y=f(x)$，及一个 α 的值，使得 $h(x)=\cos 4x$，并予以证明．

[解]（1）

（2）

（3）

得 分	评卷人

22.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分8分，第3小题满分6分．

在直角坐标平面中，已知点 $P_1(1,2)$，$P_2\left(2,2^2\right)$，$P_3\left(3,2^3\right)$，…，$P_n\left(n,2^n\right)$，其中 n 是正整数．对平面上任一点 A_0，记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点，A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点，…，A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点．

（1）求向量 $\overrightarrow{A_0A_2}$ 的坐标；

（2）当点 A_0 在曲线 C 上移动时，点 A_2 的轨迹是函数 $y=f(x)$ 的图象，其中 $f(x)$ 是以3为周期的周期函数，且当 $x\in(0,3]$ 时，$f(x)=\lg x$．求以曲线 C 为图象的函数在 $(1,4]$ 上的解析式；

（3）对任意偶数 n，用 n 表示向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 的坐标．

[解]（1）

（2）

（3）

上海　数学（理工农医类）参考答案

说明

1.本解答列出试题的一种或几种解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分．

2.评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅，当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分．

解答

一、（第1题至第12题）

1. 4^x-1．　　2. $x=0$．　　3. $x+2y-4=0$．　　4. $-\dfrac{1}{2}$．

5. $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$．　　6. $(x-1)^2+y^2=4$．　　7. 3.　　8. $\dfrac{3}{7}$．

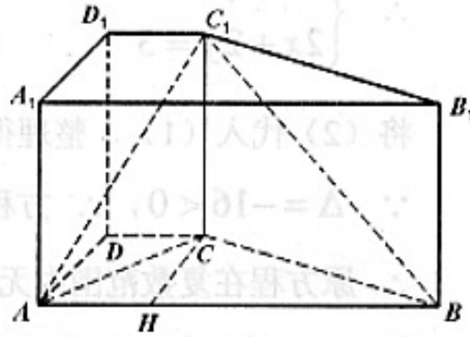
9. $\dfrac{15}{4}\sqrt{3}$．　　10. $1<k<3$．　　11. $0<a<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$．　　12. -1080.

二、（第13题至第16题）

题　号	13	14	15	16
代　号	A	B	B	C

三、（第17题至第22题）

17. [解法一]由题意 $AB \parallel DC$，$\therefore\ \angle C_1BA$ 是异面直线 BC_1 与 DC 所成的角．



连结 AC_1 与 AC，在 Rt△ADC 中，可得 $AC=\sqrt{5}$．

又在 Rt△ACC_1 中，可得 $AC_1=3$．

在梯形 $ABCD$ 中，过 C 作 $CH \parallel AD$ 交 AB 于 H，

得 $\angle CHB=90^\circ$，$CH=2$，$HB=3$，

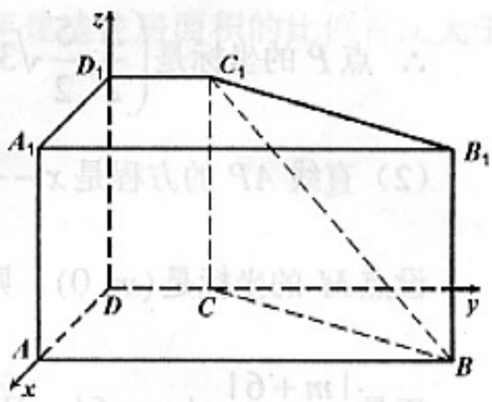
$\therefore\ CB=\sqrt{13}$． 又在 Rt△CBC_1 中，可得 $BC_1=\sqrt{17}$，

在△ABC_1 中，$\cos\angle ABC_1=\dfrac{AB^2+BC_1^2-AC_1^2}{2AB\cdot BC_1}=\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$．

$\therefore\ \angle ABC_1=\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$．

$\therefore$ 异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$．

[解法二]如图，以 D 为坐标原点，分别以 DA、DC、DD_1 所在直线为 x、y、z 轴建立直角坐标系．



则 $C_1(0,1,2)$，$B(2,4,0)$，

$\therefore\ \overrightarrow{BC_1}=(-2,-3,2)$，

$\overrightarrow{CD}=(0,-1,0)$，

设 $\overrightarrow{BC_1}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 所成的角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BC_1}||\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$，

$\theta=\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$，

$\therefore$ 异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$．

18. [证明]原方程化简为 $|z|^2+(1-\mathrm{i})\overline{z}-(1+\mathrm{i})z=1-3\mathrm{i}$．

设 $z=x+y\mathrm{i}$ （x、$y\in\mathrm{R}$），代入上述方程得

$x^2+y^2-2x\mathrm{i}-2y\mathrm{i}=1-3\mathrm{i}$，

$\therefore \begin{cases} x^2+y^2=1 & (1) \\ 2x+2y=3 & (2) \end{cases}$，

将（2）代入（1），整理得 $8x^2-12x+5=0$， (*)

$\because$ $\Delta=-16<0$，$\therefore$ 方程（*）无实数解.

$\therefore$ 原方程在复数范围内无解.

19. [解]（1）由已知可得点 $A(-6, 0)$, $F(4, 0)$，

设点 P 的坐标是 (x, y)，则 $\overrightarrow{AP}=\{x+6, y\}$，$\overrightarrow{FP}=\{x-4, y\}$，由已知得

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1 \\ (x+6)(x-4)+y^2=0 \end{cases},$$

则 $2x^2+9x-18=0$，$x=\dfrac{3}{2}$ 或 $x=-6$.

由于 $y>0$，只能 $x=\dfrac{3}{2}$，于是 $y=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\sqrt{3}\right)$.

（2）直线 AP 的方程是 $x-\sqrt{3}y+6=0$，

设点 M 的坐标是 $(m, 0)$，则 M 到直线 AP 的距离是 $\dfrac{|m+6|}{2}$，

于是 $\dfrac{|m+6|}{2}=|m-6|$，又 $-6\le m\le 6$，解得 $m=2$，

椭圆上的点 (x, y) 到点 M 的距离 d 有

$$\begin{aligned} d^2 &= (x-2)^2+y^2 \\ &= x^2-4x+4+20-\frac{5}{9}x^2 \\ &= \frac{4}{9}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+15, \end{aligned}$$

由于 $-6\le x\le 6$，

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{9}{2}$ 时，d 取得最小值 $\sqrt{15}$.

20. [解]（1）设中低价房面积形成数列$\{a_n\}$，由题意可知$\{a_n\}$是等差数列，

其中$a_1=250,\quad d=50$，

则 $S_n=250n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 50=25n^2+225n$，

令$25n^2+225n\geq 4750$，

即$n^2+9n-190\geq 0$，而n是正整数，$\therefore\quad n\geq 10$．

$\therefore$ 到2013年底，该市历年所建中低价房的累计面积将首次不少于4750万平方米．

（2）设新建住房面积形成数列$\{b_n\}$，由题意可知$\{b_n\}$是等比数列，

其中$b_1=400,\quad q=1.08$，

则 $b_n=400\cdot(1.08)^{n-1}$．

由题意可知 $a_n>0.85b_n$，

有$250+(n-1)\cdot 50>400\cdot(1.08)^{n-1}\cdot 0.85$．

由计算器解得满足上述不等式的最小正整数$n=6$．

$\therefore$ 到2009年底，当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于85%．

21. [解]（1）$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1}, & x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\\ 1, & x=1\end{cases}$

（2）当$x\neq 1$时，$h(x)=\dfrac{x^2}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+2$，

若$x>1$，则$h(x)\geq 4$，其中等号当$x=2$时成立．

若$x<1$，则$h(x)\leq 0$，其中等号当$x=0$时成立．

$\therefore$ 函数$h(x)$的值域是$(-\infty,0]\cup\{1\}\cup[4,+\infty)$．

（3）[解法一]令$f(x)=\sin 2x+\cos 2x,\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}$，

则 $g(x)=f(x+\alpha)=\sin 2(x+\dfrac{\pi}{4})+\cos 2(x+\dfrac{\pi}{4})$

$=\cos 2x-\sin 2x$，

于是$h(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)$

$=(\sin 2x+\cos 2x)(\cos 2x-\sin 2x)$

$=\cos 4x$．

[解法二] 令 $f(x)=1+\sqrt{2}\sin 2x,\quad \alpha=\dfrac{\pi}{2}$，

则 $g(x)=f(x+\alpha)=1+\sqrt{2}\sin 2(x+\dfrac{\pi}{2})$

$=1-\sqrt{2}\sin 2x$，

于是 $h(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)$

$=(1+\sqrt{2}\sin 2x)\ (1-\sqrt{2}\sin 2x)$

$=1-2\sin^2 2x$

$=\cos 4x$.

22. [解]（1）设点 $A_0(x,y)$，

A_0 关于点 P_1 的对称点 A_1 的坐标为 $A_1(2-x,4-y)$，

A_1 关于点 P_2 的对称点 A_2 的坐标为 $A_2(2+x,4+y)$，

所以，$\overrightarrow{A_0A_2}=\{2,4\}$.

（2）[解法一] ∵ $\overrightarrow{A_0A_2}=\{2,4\}$，

∴ $f(x)$ 的图象由曲线 C 向右平移2个单位，再向上平移4个单位得到.

因此，曲线 C 是函数 $y=g(x)$ 的图象，其中 $g(x)$ 是以3为周期的周期函数，且当 $x\in(-2,1]$ 时，$g(x)=\lg(x+2)-4$. 于是，当 $x\in(1,4]$ 时，$g(x)=\lg(x-1)-4$.

[解法二] 设 $A_0(x,y)$，$A_2(x_2,y_2)$，于是

$$\begin{cases} x_2-x=2 \\ y_2-y=4 \end{cases}$$

若 $3<x_2\le 6$，则 $0<x_2-3\le 3$，于是 $f(x_2)=f(x_2-3)=\lg(x_2-3)$.

当 $1<x\le 4$ 时，则 $3<x_2\le 6$，$\quad y+4=\lg(x-1)$，

∴ 当 $x\in(1,4]$ 时，$g(x)=\lg(x-1)-4$.

(3) $\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_2A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-2}A_n}$，

由于 $\overrightarrow{A_{2k-2}A_{2k}}=2\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$，得

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{A_0A_n}&=2\left(\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_3P_4}+\cdots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n}\right),\\
&=2\left(\{1,2\}+\{1,2^3\}+\cdots+\{1,2^{n-1}\}\right)\\
&=2\left\{\frac{n}{2},\frac{2(2^n-1)}{3}\right\}\\
&=\left\{n,\frac{4(2^n-1)}{3}\right\}.
\end{aligned}
$$