2008年普通高等学校招生全国统一考试

上海　数学试卷(理工农医类)

考生注意：

1. 答卷前，考生务必将姓名、高考准考证号、校验码等填写清楚.

2. 本试卷共有21道试题，满分150分．考试时间120分钟．请考生用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上.

得　分	评 卷 人

一．填空题（本大题满分44分）本大题共有11题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1．不等式$|x-1|<1$的解集是__________________.

2．若集合$A=\{x|x\le 2\}$、$B=\{x|x\ge a\}$满足$A\cap B=\{2\}$，则实数$a=$____________.

3．若复数z满足$z=\mathrm{i}(2-z)$（i是虚数单位），则$z=$____________.

4．若函数$f(x)$的反函数为$f^{-1}(x)=x^2$（$x>0$），则$f(4)=$______________.

5．若向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$__________.

6．函数$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$的最大值是____________.

7．在平面直角坐标系中，从六个点：$A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(1,1)$、$D(0,2)$、$E(2,2)$、$F(3,3)$中任取三个，这三点能构成三角形的概率是____________（结果用分数表示）.

8．设函数$f(x)$是定义在R上的奇函数．若当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=\lg x$，则满足$f(x)>0$的x的取值范围是__________________.

9．已知总体的各个体的值由小到大依次为2，3，3，7，a，b，12，13.7，18.3，20，且总体的中位数为10.5．若要使该总体的方差最小，则a、b的取值分别是________________________.

10．某海域内有一孤岛．岛四周的海平面（视为平面）上有一浅水区（含边界），其边界是长轴长为$2a$、短轴长为$2b$的椭圆．已知岛上甲、乙导航灯的海拔高度分别为h_1、h_2，且两个导航灯在海平面上的投影恰好落在椭圆的两个焦点上．现有船只经过该海域（船只的大小忽略不计），在船上测得甲、乙导航灯的仰角分别为θ_1、θ_2，那么船只已进入该浅水区的判别条件是________________________.

11．方程$x^2+\sqrt{2}x-1=0$的解可视为函数$y=x+\sqrt{2}$的图像与函数$y=\dfrac{1}{x}$的图像交点的横坐标．若方程$x^4+ax-4=0$的各个实根$x_1,x_2,\cdots,x_k$ $(k\le 4)$所对应的点$\left(x_i,\dfrac{4}{x_i}\right)$ $(i=1,2,\cdots,k)$均在直线$y=x$的同侧，则实数a的取值范围是________________________.

得　分	评卷人

二．选择题（本大题满分16分）本大题共有4 题，每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分．

12．组合数C_n^r $(n>r\ge 1,\ n、r\in Z)$恒等于　　　　[答]（　　　）

(A) $\dfrac{r+1}{n+1}C_{n-1}^{r-1}$.　　(B) $(n+1)(r+1)C_{n-1}^{r-1}$.　　(C) nrC_{n-1}^{r-1}.　　(D) $\dfrac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}$.

13．给定空间中的直线l及平面α．条件"直线l与平面α内无数条直线都垂直"是"直线l与平面α垂直"的　　　　[答]（　　　）

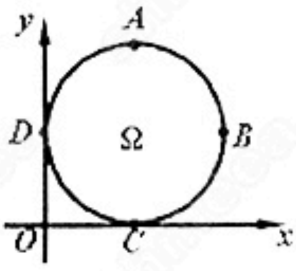
(A) 充要条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

14．若数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为$a-\dfrac{3}{2}$的无穷等比数列，且$\{a_n\}$各项的和为a，则a的值是　　　　[答]（　　　）

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) $\dfrac{5}{4}$.

15．如图，在平面直角坐标系中，Ω是一个与x轴的正半轴、y轴的正半轴分别相切于点C、D的定圆所围成的区域（含边界），A、B、C、D是该圆的四等分点．若点$P(x,y)$、点$P'(x',y')$满足$x\le x'$且$y\ge y'$，则称P优于P'．如果Ω中的点Q满足：不存在Ω中的其它点优于Q，那么所有这样的点Q组成的集合是劣弧　　　　[答]（　　　）

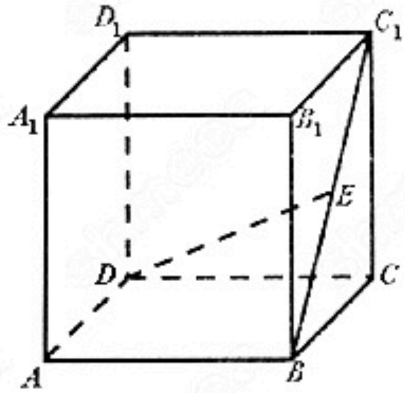


(A) $\overset{\frown}{AB}$.　　(B) $\overset{\frown}{BC}$.　　(C) $\overset{\frown}{CD}$.　　(D) $\overset{\frown}{DA}$.

三. 解答题（本大题满分90分）本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

16.（本题满分12分）

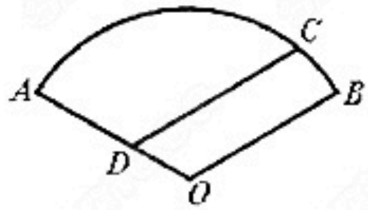
如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E是BC_1 的中点. 求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）.



[解]

17.（本题满分13分）

如图，某住宅小区的平面图呈圆心角为120°的扇形 AOB. 小区的两个出入口设置在点 A 及点 C 处，且小区里有一条平行于 BO 的小路 CD. 已知某人从 C 沿 CD 走到 D 用了10分钟，从 D 沿 DA 走到 A 用了6分钟. 若此人步行的速度为每分钟50米，求该扇形的半径 OA 的长（精确到1米）.



[解]

18.（本题满分15分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分9分.

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，P 是 C 上的任意点.

(1) 求证：点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离的乘积是一个常数；

(2) 设点 A 的坐标为 $(3,0)$，求 $|PA|$ 的最小值.

[证明] (1)

[解] (2)

19.（本题满分16分）本题共有2个小题，第1小题满分8分，第2小题满分8分．

已知函数 $f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^{|x|}}$．

（1）若 $f(x)=2$，求 x 的值；

（2）若 $2^t f(2t)+mf(t)\ge 0$ 对于 $t\in[1,2]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

[解]（1）

（2）

20.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分．

设 $P(a,\ b)$ $(b\ne 0)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点，l 是经过原点与点 $(1,\ b)$ 的直线．记 Q 是直线 l 与抛物线 $x^2=2py$ $(p\ne 0)$ 的异于原点的交点．

（1）已知 $a=1$、 $b=2$、 $p=2$．求点 Q 的坐标；

（2）已知点 $P(a,\ b)$ $(ab\ne 0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，$p=\dfrac{1}{2ab}$．求证：点 Q 落在双曲线 $4x^2-4y^2=1$ 上；

（3）已知动点 $P(a,\ b)$ 满足 $ab\ne 0$，$p=\dfrac{1}{2ab}$．若点 Q 始终落在一条关于 x 轴对称的抛物线上，试问动点 P 的轨迹落在哪种二次曲线上，并说明理由．

[解]（1）

[证明]（2）

[解]（3）

21.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分7分，第3小题满分8分.

已知以a_1为首项的数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+c, & a_n<3,\\ \dfrac{a_n}{d}, & a_n\ge 3.\end{cases}$

（1）当$a_1=1$，$c=1$、$d=3$时，求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）当$0<a_1<1$，$c=1$、$d=3$时，试用a_1表示数列$\{a_n\}$前100项的和S_{100};

（3）当$0<a_1<\dfrac{1}{m}$（m是正整数），$c=\dfrac{1}{m}$，正整数$d\ge 3m$时，求证：数列$a_2-\dfrac{1}{m}$，$a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}$成等比数列当且仅当$d=3m$.

[解]（1）

（2）

[证明]（3）

上海　数学（理工农医类）参考答案

说明

1.本解答列出试题的一种或几种解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2.评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅，当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分.

解答

一、（第1题至第11题）

1. $(0,2)$.　2. 2.　3. $1+\mathrm{i}$.　4. 2.　5. $\sqrt{7}$.

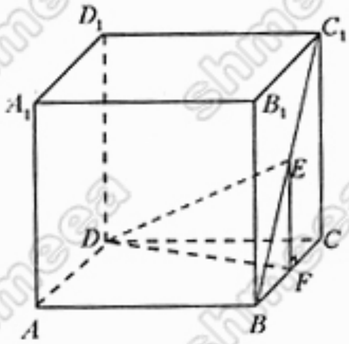
6. 2.　7. $\dfrac{3}{4}$.　8. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.　9. $a=10.5$, $b=10.5$.

10. $h_1\cdot\cot\theta_1+h_2\cdot\cot\theta_2\le 2a$.　11. $(-\infty,\ -6)\cup(6,\ +\infty)$.

二、（第12题至第15题）

题　号	12	13	14	15
代　号	D	C	B	D

三、（第16题至第21题）



16. [解] 过 E 作 $EF\perp BC$，交 BC 于 F，连接 DF.

$\because EF\perp$ 平面$ABCD$，

$\therefore$ $\angle EDF$ 是直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成的角.

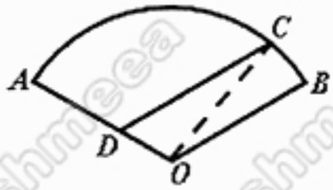
由题意，得 $EF=\dfrac{1}{2}CC_1=1$.

$\because$ $CF=\dfrac{1}{2}CB=1$，$\therefore$ $DF=\sqrt{5}$.

$\because\ EF \perp DF$， $\therefore\ \tan\angle EDF = \dfrac{EF}{DF} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小是 $\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

17. [解法一] 设该扇形的半径为 r 米. 连接 CO.



由题意，得

$CD=500$（米）， $DA=300$（米）， $\angle CDO=60°$.

在△CDO 中， $CD^2+OD^2-2\cdot CD\cdot OD\cdot\cos 60°=OC^2$，

即 $500^2+(r-300)^2-2\times500\times(r-300)\times\dfrac{1}{2}=r^2$，

解得 $r=\dfrac{4900}{11}\approx445$（米）.

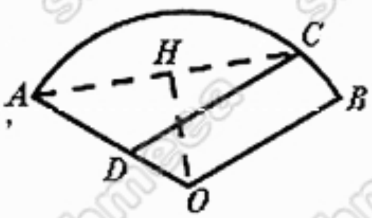
答：该扇形的半径 OA 的长约为445米.

[解法二] 连接 AC，作 $OH\perp AC$，交 AC 于 H.

由题意，得 $CD=500$（米）， $AD=300$（米）， $\angle CDA=120°$.

在△ACD 中， $AC^2=CD^2+AD^2-2\cdot CD\cdot AD\cdot\cos120°$

$$=500^2+300^2+2\times500\times300\times\frac{1}{2}=700^2,$$



$\therefore\ AC=700$（米），

$\cos\angle CAD=\dfrac{AC^2+AD^2-CD^2}{2\cdot AC\cdot AD}=\dfrac{11}{14}$.

在直角△HAO 中， $AH=350$（米）， $\cos\angle HAO=\dfrac{11}{14}$，

$\therefore\ OA=\dfrac{AH}{\cos\angle HAO}=\dfrac{4900}{11}\approx445$（米）.

答：该扇形的半径 OA 的长约为445米.

18. [解] （1）设 $P(x_1, y_1)$ 是双曲线上任意一点，

该双曲线的两条渐近线方程分别是 $x-2y=0$ 和 $x+2y=0$.

点 $P(x_1, y_1)$ 到两条渐近线的距离分别是 $\dfrac{|x_1-2y_1|}{\sqrt{5}}$ 和 $\dfrac{|x_1+2y_1|}{\sqrt{5}}$，

它们的乘积是 $\dfrac{|x_1-2y_1|}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{|x_1+2y_1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|x_1^2-4y_1^2|}{5}=\dfrac{4}{5}$.

$\therefore$ 点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离的乘积是一个常数.

（2）设 P 的坐标为 (x, y)，则

$$|PA|^2=(x-3)^2+y^2$$

$$=(x-3)^2+\frac{x^2}{4}-1$$

$$=\frac{5}{4}\left(x-\frac{12}{5}\right)^2+\frac{4}{5}.$$

$\because$ $|x|\geq 2$，

$\therefore$ 当 $x=\frac{12}{5}$ 时，$|PA|^2$ 的最小值为 $\frac{4}{5}$，

即 $|PA|$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

19. [解]（1）当 $x<0$ 时，$f(x)=0$；当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$.

由条件可知 $2^x-\frac{1}{2^x}=2$，即 $2^{2x}-2\cdot 2^x-1=0$，

解得 $2^x=1\pm\sqrt{2}$.

$\because$ $2^x>0$，$\therefore$ $x=\log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

（2）当 $t\in[1,2]$ 时，$2^t\left(2^{2t}-\frac{1}{2^{2t}}\right)+m\left(2^t-\frac{1}{2^t}\right)\geq 0$，

即 $m\left(2^{2t}-1\right)\geq-\left(2^{4t}-1\right)$.

$\because$ $2^{2t}-1>0$，$\therefore$ $m\geq-\left(2^{2t}+1\right)$.

$\because$ $t\in[1, 2]$，$\therefore$ $-\left(1+2^{2t}\right)\in[-17,-5]$，

故 m 的取值范围是 $[-5, +\infty)$.

20. [解]（1）当 $a=1$，$b=2$，$p=2$ 时，

解方程组 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=2x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=8,\\ y=16,\end{cases}$

即点 Q 的坐标为 $(8,16)$.

[证明]（2）由方程组 $\begin{cases}x^2=\frac{1}{ab}y,\\ y=bx,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{a},\\ y=\frac{b}{a},\end{cases}$

即点 Q 的坐标为 $\left(\frac{1}{a},\frac{b}{a}\right)$.

$\because$ P是椭圆上的点，即 $\dfrac{a^2}{4}+b^2=1$，

$\therefore$ $4\left(\dfrac{1}{a}\right)^2-4\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=\dfrac{4}{a^2}\left(1-b^2\right)=1$.

因此点Q落在双曲线$4x^2-4y^2=1$上.

（3）设Q所在抛物线的方程为 $y^2=2q(x-c)$，$q\neq 0$.

将$Q\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{b}{a}\right)$代入方程，得 $\dfrac{b^2}{a^2}=2q\left(\dfrac{1}{a}-c\right)$，即$b^2=2qa-2qca^2$.

当$qc=0$时，$b^2=2qa$，此时点P的轨迹落在抛物线上；

当$qc=\dfrac{1}{2}$时，$\left(a-\dfrac{1}{2c}\right)^2+b^2=\dfrac{1}{4c^2}$，此时点$P$的轨迹落在圆上；

当$qc>0$且$qc\neq\dfrac{1}{2}$时，$\dfrac{\left(a-\dfrac{1}{2c}\right)^2}{\dfrac{1}{4c^2}}+\dfrac{b^2}{\dfrac{q}{2c}}=1$，此时点$P$的轨迹落在椭圆上；

当$qc<0$时，$\dfrac{\left(a-\dfrac{1}{2c}\right)^2}{\dfrac{1}{4c^2}}-\dfrac{b^2}{\left(-\dfrac{q}{2c}\right)}=1$，此时点$P$的轨迹落在双曲线上.

21. [解]（1）由题意得$a_n=\begin{cases}1, & n=3k-2,\\ 2, & n=3k-1,\\ 3, & n=3k,\end{cases}$ $\left(k\in Z^+\right)$.

（2）当$0<a_1<1$时，

$a_2=a_1+1$，$a_3=a_1+2$，$a_4=a_1+3$，$a_5=\dfrac{a_1}{3}+1$，$a_6=\dfrac{a_1}{3}+2$，$a_7=\dfrac{a_1}{3}+3$，…，

$a_{3k-1}=\dfrac{a_1}{3^{k-1}}+1$，$a_{3k}=\dfrac{a_1}{3^{k-1}}+2$，$a_{3k+1}=\dfrac{a_1}{3^{k-1}}+3$，…

$\therefore\ S_{100}=a_1+(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{98}+a_{99}+a_{100})$

$=a_1+(3a_1+6)+(a_1+6)+\left(\dfrac{a_1}{3}+6\right)+\cdots+\left(\dfrac{a_1}{3^{31}}+6\right)$

$=a_1+a_1\left(3+1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3^{31}}\right)+6\times33$

$=\dfrac{1}{2}\left(11-\dfrac{1}{3^{31}}\right)a_1+198.$

（3）当$d=3m$时，$a_2=a_1+\dfrac{1}{m}$；

$\because\ a_{3m}=a_1+\dfrac{3m-1}{m}=a_1-\dfrac{1}{m}+3<3<a_1+3=a_{3m+1}$，$\therefore\ a_{3m+2}=\dfrac{a_1}{3m}+\dfrac{1}{m}$；

$\because\ a_{6m}=\dfrac{a_1}{3m}-\dfrac{1}{m}+3<3<\dfrac{a_1}{3m}+3=a_{6m+1}$，$\therefore\ a_{6m+2}=\dfrac{a_1}{9m^2}+\dfrac{1}{m}$；

$\because\ a_{9m}=\dfrac{a_1}{9m^2}-\dfrac{1}{m}+3<3<\dfrac{a_1}{9m^2}+3=a_{9m+1}$，$\therefore\ a_{9m+2}=\dfrac{a_1}{27m^3}+\dfrac{1}{m}$.

$\therefore\ a_2-\dfrac{1}{m}=a_1$，$a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}=\dfrac{a_1}{3m}$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}=\dfrac{a_1}{9m^2}$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}=\dfrac{a_1}{27m^3}$.

综上所述，当$d=3m$时，数列$a_2-\dfrac{1}{m}$，$a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}$是公比为$\dfrac{1}{3m}$的等比数列.

当$d\geq3m+1$时，$a_{3m+2}=\dfrac{a_1+3}{d}\in\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$，

$a_{6m+2}=\dfrac{a_1+3}{d}+3\in\left(3,3+\dfrac{1}{m}\right)$，$a_{6m+3}=\dfrac{\dfrac{a_1+3}{d}+3}{d}\in\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$，

$a_{9m+2}=\dfrac{\dfrac{a_1+3}{d}+3}{d}+\dfrac{3m-1}{m}\in\left(3-\dfrac{1}{m},3\right)$.

由于$a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}<0$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}>0$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}>0$，

故数列$a_2-\dfrac{1}{m}$，$a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}$不是等比数列.

所以，数列$a_2-\dfrac{1}{m}$，$a_{3m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{6m+2}-\dfrac{1}{m}$，$a_{9m+2}-\dfrac{1}{m}$成等比数列当且仅当$d=3m$.