2024 年普通高等学校招生全国统一考试

上海　数学试卷

（考试时间 120 分钟，满分 150 分）

（试 卷 共 4 页， 答 题 纸 共 2 页）

一、填空题（本大题共 12 题。第 1–6 题每题 4 分，第 7–12 题每题 5 分，共 54 分。）

1．已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$， $A=\{2,4\}$，则 $\overline{A}=$____________.

2．已知函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\ge 0\\ 1, & x<0\end{cases}$，则 $f(3)=$____________.

3．设 $x\in\mathbf{R}$，则不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解集为____________.

4．设 $a\in\mathbf{R}$，且 $f(x)=x^3+a$ 是奇函数，则 $a=$____________.

5．已知向量 $\vec{a}=(2,5)$，$\vec{b}=(6,k)$，若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，则 $k=$____________.

6．若二项式 $(x+1)^n$ 的展开式中，各项系数和为 32，则 x^2 项的系数为____________.

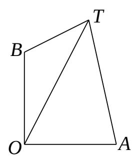
7．若抛物线 $y^2=4x$ 上一点 P 到准线的距离为 9，则 P 到 x 轴的距离为____________.

8．小王参加知识竞赛，题库中 A 组题有 5000 道，B 组题有 4000 道，C 组题有 3000 道，已知小王做对这 3 组题的概率依次为 0.92、0.86、0.72，则随机从题库中抽取一道题，小王做对的概率为____________.

9．设 $m\in\mathbf{R}$，已知虚数 z 的实部为 1 且满足 $z+\dfrac{2}{z}=m$，则 m 的值为____________.

10．某集合中的元素为不重复的数字组成的三位正整数，若该集合中任意两个数的积均为偶数，则该集合中元素数量的最大值为____________.

11．海上有灯塔 O、A、B 和船只 T，A 在 O 的正东方向，B 在 O 的正北方向，A、B 到 O 的距离相同，O、A、T、B 按逆时针排列．若 $\angle OTA=37.0^\circ$，$\angle OTB=16.5^\circ$，则 $\angle BOT=$____________.（精确到 0.1°）



12．等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1>0$，公比 $q>1$，$I_n=\{x-y\mid x、y\in[a_1,a_2]\cup[a_n,a_{n+1}]\}$．若对任意正整数 n，I_n 都是闭区间，则 q 的取值范围为____________.

二、选择题（本大题共 4 题。第 13−14 题每题 4 分，第 15−16 题每题 5 分，共 18 分。）

13．已知气温（单位：℃）与海水表层温度（单位：摄氏度）的相关系数为正数，则下列有关两者关系的说法正确的是（　　　）.

A．随着气温由低变高，海水表层温度由低变高

B．随着气温由低变高，海水表层温度由高变低

C．随着气温由低变高，海水表层温度有由低变高的趋势

D．随着气温由低变高，海水表层温度有由高变低的趋势

14．下列函数中，最小正周期 $T=2\pi$ 的是（　　　）.

A． $y=\sin x+\cos x$　　　　B． $y=\sin x\cos x$

C． $y=\sin^2 x+\cos^2 x$　　　　D． $y=\sin^2 x-\cos^2 x$

15．已知空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的点集 Ω，对任意 P_1、P_2、$P_3\in\Omega$，均存在不全为零的实数 λ_1、λ_2、λ_3 满足 $\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\lambda_2\overrightarrow{OP_2}+\lambda_3\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$．已知 $(1,0,0)\in\Omega$，则 $(0,0,1)\notin\Omega$ 的一个充分条件是（　　　）.

A． $(0,0,0)\in\Omega$　　　　B． $(-1,0,0)\in\Omega$

C． $(0,-1,0)\in\Omega$　　　　D． $(0,0,-1)\in\Omega$

16．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$， $M=\left\{x_0 \mid 对于任意x\in(-\infty,x_0), f(x)<f(x_0)\right\}$。对于所有 $M=[-1,1]$ 的函数 $y=f(x)$，以下说法正确的是（　　　）.

A．存在 $y=f(x)$ 是偶函数　　　　B．存在 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处取到最大值

C．存在 $y=f(x)$ 是严格增函数　　　　D．存在 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极小值

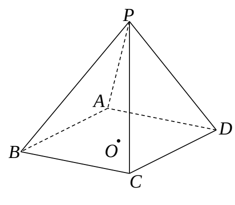
三、解答题（本大题共 5 题。第 17−19 题每题 14 分，第 20、21 题每题 18 分，共 78 分。）

17．本题满分 14 分．第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分．

如图， $P-ABCD$ 是正四棱锥，O 为底面中心．

(1) 设 $AD=3\sqrt{2}$， $PA=5$，将 $\triangle POA$ 绕 PO 旋转一周，求所得旋转体的体积；

(2) 设 $PA=AD$， E 为棱 PD 中点，求直线 BD 与平面 AEC 所成角的大小．



18．本题满分 14 分．第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分．

已知 $f(x)=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）．

(1) 若 $y=f(x)$ 的图像过 $(4,2)$，求 $f(2x-2)<f(x)$ 的解集；

(2) 若存在 x 使 $f(x+1)$、$f(ax)$、$f(x+2)$ 成等差数列，求 a 的取值范围．

19．本题满分 14 分．第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 6 分．

某地区为调查初中生体育锻炼时长与学业成绩的关系，从该地区 29000 名初中生中抽取 580 人，得到日均体育锻炼时长（表中简称“时长”）与学业成绩的数据如下表所示：

时长	$[0,0.5)$	$[0.5,1)$	$[1,1.5)$	$[1.5,2)$	$[2,2.5)$	合计
优秀	5	44	42	3	1	95
不优秀	134	147	137	40	27	485
合计	139	191	179	43	28	580

(1) 估计该地区 29000 名学生中日均锻炼时长不少于 1 小时的人数；

(2) 估计该地区初中生的平均日均锻炼时长（精确到 0.1 小时）；

(3) 判断是否有 95%的把握认为该地区初中生学业成绩优秀与日均锻炼时长不少于 1 小时但少于 2 小时有关？

	$[1,2)$	其他	合计
优秀	a	b	$a+b$
不优秀	c	d	$c+d$
合计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}，其中 n=a+b+c+d .$$

20．本题满分 18 分．第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分．

已知双曲线$\Gamma: x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，左、右顶点分别为$A_1$、$A_2$，过$M(-2,0)$的直线交双曲线与$P$、$Q$两点．

(1) 若离心率$e=2$，求b的值；

(2) 若$b=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，P在第一象限，$\triangle MA_2P$是等腰三角形，求P的坐标；

(3) 延长QO交双曲线于R，若$\overrightarrow{A_1R}\cdot\overrightarrow{A_2P}=1$，求$b$的取值范围．

21．本题满分 18 分．第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分．

已知D是$\mathbf{R}$的一个非空子集，$y=f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数．对于点$M(a,b)$，函数$s(x)=(x-a)^2+(f(x)-b)^2$．若对于$P(x_0,f(x_0))$，满足$s(x)$在$x=x_0$处取得最小值，则称P是M的f最近点．

(1) $D=(0,+\infty)$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$M(0,0)$，求证：存在M的f最近点；

(2) $D=\mathbf{R}$，$f(x)=\mathrm{e}^x$，$M(1,0)$，若$y=f(x)$上一点P满足MP垂直于$y=f(x)$在P处的切线，则P是否是M的f最近点？

(3) $D=\mathbf{R}$，已知$y=f(x)$是可导的，$y=g(x)$定义在$\mathbf{R}$上且函数值恒正．已知$t\in\mathbf{R}$，$M_1(t-1,f(t)-g(t))$，$M_2(t+1,f(t)+g(t))$．若对于任意$t\in\mathbf{R}$，都存在$y=f(x)$上的一点P，使得P既是M_1的f最近点，又是M_2的f最近点．试求$y=f(x)$的单调性．