**2012年上海市数学高考真题（理）**

一、填空题（本大题共14小题，满分56分）

1．计算：\_\_\_\_\_\_\_\_（为虚数单位）．

2．若集合，则\_\_\_\_\_\_\_\_．

3．函数的值域是\_\_\_\_\_\_\_\_．

4．若是直线的一个方向向量，则的倾斜角的大小为\_\_\_\_\_\_\_\_（结果用反三角函数值表示）.

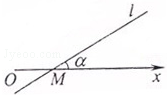
5．在的二项展开式中，常数项等于\_\_\_\_\_\_\_\_．

6．有一列正方体，棱长组成以1为首项、为公比的等比数列，体积分别记为，则\_\_\_\_\_\_\_\_．

7．已知函数（为常数）．若在区间上是增函数，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

8．若一个圆锥的侧面展开图是面积为的半圆面，则该圆锥的体积为\_\_\_\_\_\_\_\_．

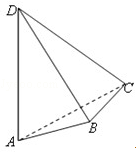
9．已知是奇函数，且，若，则\_\_\_\_\_\_\_\_．

10．如图，在极坐标系中，过点的直线与极轴的夹角，若将的极坐标方程写成的形式，则\_\_\_\_\_\_\_\_．

11．三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛，若每人都选择其中两个项目，则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_（结果用最简分数表示）．

12．在平行四边形中，，边、的长分别为2、1，若、分别是边、上的点，且满足，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

13．已知函数的图象是折线段，其中、、，函数的图象与轴围成的图形的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_．

14．如图，与是四面体中互相垂直的棱，，若，且，其中、为常数，则四面体的体积的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

二、选择题（本大题共4小题，满分20分）

15．若是关于x的实系数方程的一个复数根，则（　　）

A．， B．，

C．， D．，

16．在中，若，则的形状是（　　）

A．锐角三角形 B．直角三角形

C．钝角三角形 D．不能确定

17．设，随机变量取值、、、、的概率均为0.2，随机变量取值、、、、的概率也均为0.2，若记、分别为、的方差，则（　　）

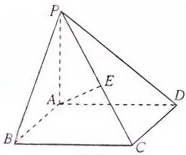
A． B．

C． D．与的大小关系与、、、的取值有关

18．设，在中，正数的个数是（　　）

A．25 B．50 C．75 D．100

三、解答题（本大题共有5小题，满分74分）

19．如图，在四棱锥中，底面是矩形，底面，是的中点，已知，=，，求：

（1）三角形的面积；

（2）异面直线与所成的角的大小．

20．已知

（1）若，求的取值范围；

（2）若是以2为周期的偶函数，且当时，有，求函数

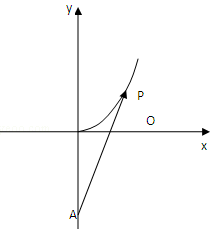
的反函数．

21．海事救援船对一艘失事船进行定位：以失事船的当前位置为原点，以正北方向为轴正方向建立平面直角坐标系（以1海里为单位长度），则救援船恰在失事船的正南方向12海里处，如图. 现假设：①失事船的移动路径可视为抛物线；

②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援；

③救援船出发小时后，失事船所在位置的横坐标为

（1）当时，写出失事船所在位置的纵坐标，若此时两船恰好会合，求救援船速度的大小和方向．

（2）问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船？

22．在平面直角坐标系中，已知双曲线．

（1）过的左顶点引的一条渐进线的平行线，求该直线与另一条渐进线及轴围成的三角形的面积；

（2）设斜率为1的直线交于、两点，若与圆相切，求证：；

（3）设椭圆，若、分别是、上的动点，且，求证：到直线的距离是定值．

23．对于数集，其中，定义向量集，若对任意，存在，使得，则称具有性质．例如具有性质．

（1）若，且具有性质，求的值；

（2）若具有性质，求证：，且当时，；

（3）若具有性质，且（为常数），求有穷数列的通项公式．

**2012年上海市数学高考真题（理）**

一、填空题（本大题共14小题，满分56分）

1．计算：\_\_\_\_\_\_\_\_（为虚数单位）．

2．若集合，则\_\_\_\_\_\_\_\_．

3．函数的值域是\_\_\_\_\_\_\_\_．

4．若是直线的一个方向向量，则的倾斜角的大小为\_\_\_\_\_\_\_\_（结果用反三角函数值表示）.

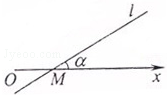
5．在的二项展开式中，常数项等于\_\_\_\_\_\_\_\_．-160

6．有一列正方体，棱长组成以1为首项、为公比的等比数列，体积分别记为，则\_\_\_\_\_\_\_\_．

7．已知函数（为常数）．若在区间上是增函数，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

8．若一个圆锥的侧面展开图是面积为的半圆面，则该圆锥的体积为\_\_\_\_\_\_\_\_．

9．已知是奇函数，且，若，则\_\_\_\_\_\_\_\_．-1

10．如图，在极坐标系中，过点的直线与极轴的夹角，若将的极坐标方程写成的形式，则\_\_\_\_\_\_\_\_．

11．三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛，若每人都选择其中两个项目，则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_（结果用最简分数表示）．

12．在平行四边形中，，边、的长分别为2、1，若、分别是边、上的点，且满足，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．[2,5]

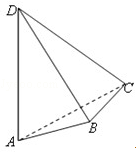
**【解析】**以向量所在直线为轴，以向量所在直线为轴建立平面直角坐标系，如图所示，因为，所以  设根据题意，有.

所以，所以

**高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。**

13．已知函数的图象是折线段，其中、、，函数的图象与轴围成的图形的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_．

**【解析】**根据题意得到，从而得到所以围成的面积为，所以围成的图形的面积为 .

14．如图，与是四面体中互相垂直的棱，，若，且，其中、为常数，则四面体的体积的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

**【解析】**据题，也就是说，线段的长度是定值，因为棱与棱互相垂直，当时，此时有最大值，此时最大值为：**.**

**【点评】**本题主要考查空间四面体的体积公式、空间中点线面的关系.本题主要考虑根据已知条件构造体积表达式，这是解决问题的关键，本题综合性强，运算量较大.属于中高档试题.

二、选择题（本大题共4小题，满分20分）

15．若是关于x的实系数方程的一个复数根，则（　B　）

A．， B．，

C．， D．，

16．在中，若，则的形状是（　C　）

A．锐角三角形 B．直角三角形

C．钝角三角形 D．不能确定

17．设，随机变量取值、、、、的概率均为0.2，随机变量取值、、、、的概率也均为0.2，若记、分别为、的方差，则（　A　）

A． B． C．

D．与的大小关系与、、、的取值有关

[解析]=*t*，++++)=*t*，

++++]

；

记，，…，，同理得

，

只要比较与有大小，







，所以，选A.

[评注] 本题的数据范围够阴的，似乎为了与选项D匹配，若为此范围面困惑，那就中了阴招!稍加计算，考生会发现和相等，其中的智者，更会发现第二组数据是第一组数据的两两平均值，故比第一组更“集中”、更“稳定”，根据方差的涵义，立得>而迅即攻下此题。

18．设，在中，正数的个数是（　D　）

A．25 B．50 C．75 D．100

[解析] 对于1≤*k*≤25，*ak*≥0(唯*a*25=0)，所以*Sk*(1≤*k*≤25)都为正数.

当26≤*k*≤49时，令，则，画出*kα*终边如右，

其终边两两关于*x*轴对称，即有，

所以++…+++0

++…+

=++…+++…

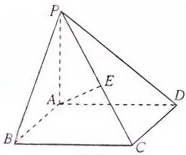
+，其中*k*=26,27,…,49，此时，

所以，又，所以，

从而当*k*=26,27,…,49时，*Sk*都是正数，*S*50=*S*49+*a*50=*S*49+0=*S*49>0.

对于*k*从51到100的情况同上可知*Sk*都是正数. 综上，可选D.

[评注] 本题中数列难于求和，可通过数列中项的正、负匹配来分析*Sk*的符号，为此，需借助分类讨论、数形结合、先局部再整体等数学思想。而重中之重，是看清楚角序列的终边的对称性，此为攻题之关键。

三、解答题（本大题共有5小题，满分74分）

19．如图，在四棱锥中，底面是矩形，底面，是的中点，已知，=，，求：

（1）三角形的面积；

（2）异面直线与所成的角的大小．

（1）（2）

20．已知

（1）若，求的取值范围；

（2）若是以2为周期的偶函数，且当时，有，求函数

的反函数．

（1）

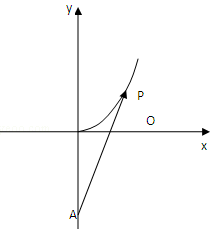
（2），

21．海事救援船对一艘失事船进行定位：以失事船的当前位置为原点，以正北方向为轴正方向建立平面直角坐标系（以1海里为单位长度），则救援船恰在失事船的正南方向12海里处，如图. 现假设：①失事船的移动路径可视为抛物线；

②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援；

③救援船出发小时后，失事船所在位置的横坐标为

（1）当时，写出失事船所在位置的纵坐标，若此时两船恰好会合，求救援船速度的大小和方向．

（2）问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船？

（1） 救援船速度的方向为北偏东arctan弧度. 救援船速度的大小为海里/时

（2） 救援船的时速至少是25海里才能追上失事船

22、[解](1)双曲线，左顶点，渐近线方程：.

过点*A*与渐近线平行的直线方程为，即.

解方程组，得. ……2分

所以所求三角形的面积1为. ……4分

(2)设直线*PQ*的方程是.因直线与已知圆相切，

故，即. ……6分

由，得.

设*P*(*x*1, *y*1)、*Q*(*x*2, *y*2)，则.

又，所以



，

故*OP*⊥*OQ*. ……10分

(3)当直线*ON*垂直于*x*轴时，

|*ON*|=1，|*OM*|=，则*O*到直线*MN*的距离为.

当直线*ON*不垂直于*x*轴时，

设直线*ON*的方程为(显然)，则直线*OM*的方程为.

由，得，所以.

同理. ……13分

设*O*到直线*MN*的距离为*d*，因为，

所以，即*d*=.

综上，*O*到直线*MN*的距离是定值. ……16分

23.对于数集，其中，，定义向量集

. 若对于任意，存在，使得，则称*X*

具有性质**P**. 例如具有性质**P**.

(1)若*x*>2，且，求*x*的值；(4分)

(2)若*X*具有性质**P**，求证：1∈*X*，且当*xn*>1时，*x*1=1；(6分)

(3)若*X*具有性质**P**，且*x*1=1，*x*2=*q*(*q*为常数)，求有穷数列的通

项公式.(8分)

[解](1)选取，*Y*中与垂直的元素必有形式. ……2分

所以*x*=2*b*，从而*x*=4. ……4分

(2)证明：取.设满足.

由得，所以、异号.

因为－1是*X*中唯一的负数，所以、中之一为－1，另一为1，

故1∈*X*. ……7分

假设，其中，则.

选取，并设满足，即，

则、异号，从而、之中恰有一个为－1.

若=－1，则，矛盾；

若=－1，则，矛盾.

所以*x*1=1. ……10分

(3)[解法一]猜测，*i*=1, 2, …, *n*. ……12分

记，*k*=2, 3, …, *n*.

先证明：若具有性质**P**，则也具有性质**P.**

任取，、∈.当、中出现－1时，显然有满足；

当且时，、≥1.

因为具有性质**P**，所以有，、∈，使得，

从而和中有一个是－1，不妨设=－1.

假设∈且∉，则.由，得，与

∈矛盾.所以∈.从而也具有性质**P.** ……15分

现用数学归纳法证明：，*i*=1, 2, …, *n*.

当*n*=2时，结论显然成立；

假设*n=k*时，有性质**P**，则，*i*=1, 2, …, *k*；

当*n=k*+1时，若有性质**P**，则

也有性质**P**，所以.

取，并设满足，即.由此可得*s*与*t*中有且只有一个为－1.

若，则，所以，这不可能；

所以，，又，所以.

综上所述，，*i*=1, 2, …, *n*. ……18分

[解法二]设，，则等价于.

记，则数集*X*具有性质**P**当且仅当数集*B*关于原点对称. ……14分

注意到－1是*X*中的唯一负数，共有*n*－1个数，

所以也只有*n*－1个数.

由于，已有*n*－1个数，对以下三角数阵





……



注意到，所以，从而数列的通项公式为

，*k*=1, 2, …, *n*. ……18分