题目描述

- 有 n 堆咖啡豆，每次可以合并若干堆咖啡豆，并获得用到的每一堆咖啡豆的魔力值的 mex 值之和的美味值。现在需要把所有咖啡豆合并成一堆，要求使合并过程中的美味值之和最大，求出这个最大值。
- Author by shstyle & StarSilk; Prepared by shstyle

题解

- 考虑将集合合并的过程看成一棵树，容易发现，根节点代表全集，叶节点代表最初的集合，总共产生的贡献就是树中除根节点（全集）所代表的集合的 mex 值之和。
- 但并没有良好的性质支持直接统计答案。考虑每次合并后的集合的 mex 之和，容易发现这个值就是树中除叶结点（初始集合）所代表的集合的 mex 值之和。相较于答案，这个值多计算了一次根节点的 mex，少计算了一次所有叶结点的 mex，而这些状态都已确定，因此两者的差是个常数。

题解

- 因此，如果能够最大化每次合并后的集合的 mex 之和，使用相同的策略也可以将答案最大化。对于每次合并后的集合，这个值的上界有以下两个限制：
- 1. 第 i 次合并产生的贡献不超过 i
- 2. 任意一次合并产生的贡献不超过全集的 mex
- 注意到，先把 $0, 1 ... mex - 1$ 从小到大合并成一个集合，再将这个集合直接和剩下的单个元素一一合并，便能达到这两个对这个值上界的限制。
- 因此，可以直接通过这种合并的策略进行答案的计算。

小趣事

- 题面中出现的两个人物，声优是同一人 ()
- 欢迎大家光顾 USST 的 1906 咖啡厅!

题目描述

- 有 n 个任务，总共可以用 m 分钟的任务去完成这些任务，如果花了 x 分钟去完成第 i 项任务，能获得 $max(0, w_i - c_i * (t_i - x))$ 的满意度，求满意度的最大值。
- Author by shstyle ; Prepared by shstyle

题解

- 根据数据范围，不难想到 dp。
- 设 $dp[i][j]$ 表示完成了前 i 个任务，总共花费了 j 的时间能够获得的最大满意度。转移方程为 $dp[i][j]=\max\limits_{0\le x\le i}\{dp[i-1][j-x]+max(0,w_i-c_i*(t_i-x))\}$，直接转移的复杂度为 $O(nm^2)$，难以通过。
- 注意到转移需要用到的区间是一个滑动窗口，将转移方程移项，得 $dp[i][j]-c[i]\cdot j=\max\limits_{0\le x\le i}\{dp[i-1][x]-c[i]\cdot x\}+w[i]-c[i]\cdot t[i]$，可以用单调队列进行优化做到 $O(1)$ 转移。
- 时间复杂度 $O(nm)$。
- 注意如果出现 $w[i]>t[i]\cdot c[i]$ 的情况需要特殊处理。

掌管提瓦特大陆的焚神龙

题目描述

- 给定一棵树，每个节点有一种颜色，现在可以选一个连通块并抹去其中节点的颜色。定义总的不稳定值为剩余节点颜色种类数与连通块直接的最大值，求出最小的不稳定值。
- Author by lbromine ; Prepared by lbromine & CN_Amuzi

题解

- 对于两个值求最大值的答案，可以考虑枚举一个值，使另一个值最小。
- 如果枚举 S 的直径，那么只要加入的点不改变原来的直径就加入，得到的 S 一定能使得第二个值最小，但是枚举直径需要 n^2 ，不能接受。
- 观察到每次往 S 中选点时一定会一次性选取同一个颜色的所有点，否则第二项不会减少。
- 可以将同一个颜色作为一个点集一起考虑，求出这个点集的点集直径。
- 那么可以枚举成为直径的两种颜色，那么只要加入的颜色不改变原来的直径就加入，两个点集并的直径可以通过结论 $O(1)$ 得到。

题解

- 可以先预处理出所有颜色点集两两之间并的直径，用 $dist(i,j)$ 表示颜色 i 和颜色 j 并的直径长度。
- 假设枚举的成为直径的两种颜色是 u 和 v, 那么颜色 x 只要满足 $dist(u,x) <= dist(u,v) \&\& dist(v,x) <= dist(u,v)$，颜色 x 就可以加入 S。
- 可以预处理出满足 $dist(u,x) <= dist(u,v)$ 的 $bitset$ 和满足 $dist(v,x) <= dist(u,v)$ 的 $bitset$。
- 所以第二个答案就是 $n-$ 这两个 $bitset$ 的与。
- 时间复杂度 $O(m^3/32 + m^2 log(m) + nlog(n))$, 空间复杂度 $O(m^3/32)$。