Przetwarzanie obrazów

Mariusz Borawski
mariusz.borawski@wi.ps.pl
Politechnika Szczecińska
Wydział Informatyki

26 czerwiec, 2005

Materiały

1. Karaśkiewicz E., Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, Warszawa 1971;
2. Stark M., *Geometria analityczna*, Warszawa-Wrocław 1951.

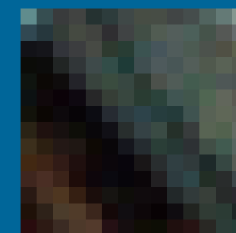
Globalne metody obróbki obrazu

Globalne metody obróbki zmieniają jasności pikseli na podstawie wszystkich pikseli obrazu. Operacje te mają na ogól na celu polepszenie jakości odbioru obrazu, usunięcie szumów, wydobycie informacji istotnej itd.

Jak określić udział powierzchni w obrazie ?

$\approx$

c_1 *

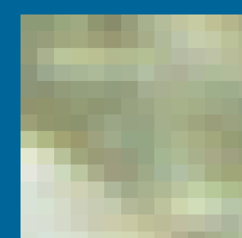


+

c_2 *

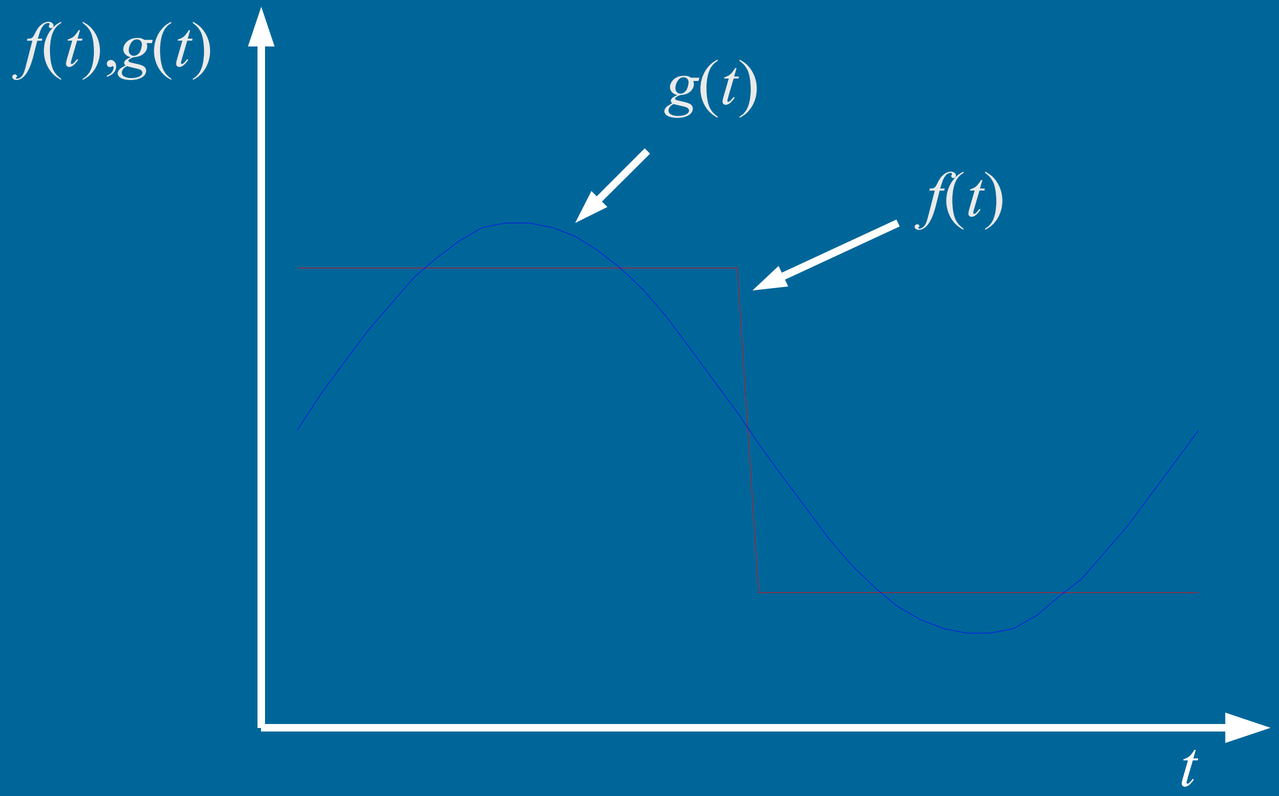
+

c_3 *



< > Koniec

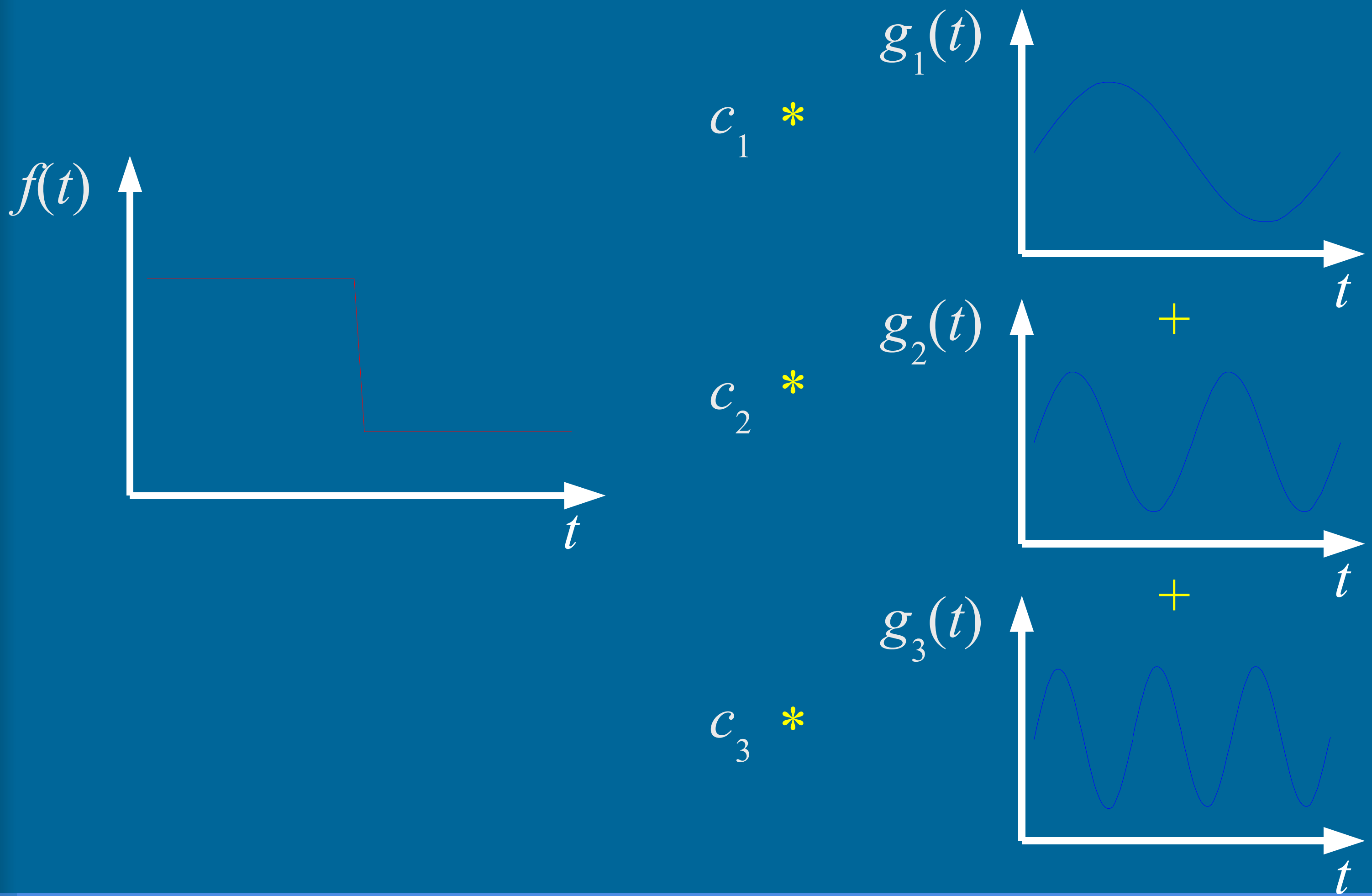
Przybliżanie jednego sygnału drugim sygnałem



Przybliżanie jednego sygnału drugim sygnałem

01 Aproksymacja sygnalu drugim sygnalem\test.m

Przybliżanie jednego sygnału wieloma sygnałami



Zbiór

Zbiór - pojęcie pierwotne (niedefiniowane), używane w znaczeniu kolekcji określonych obiektów.

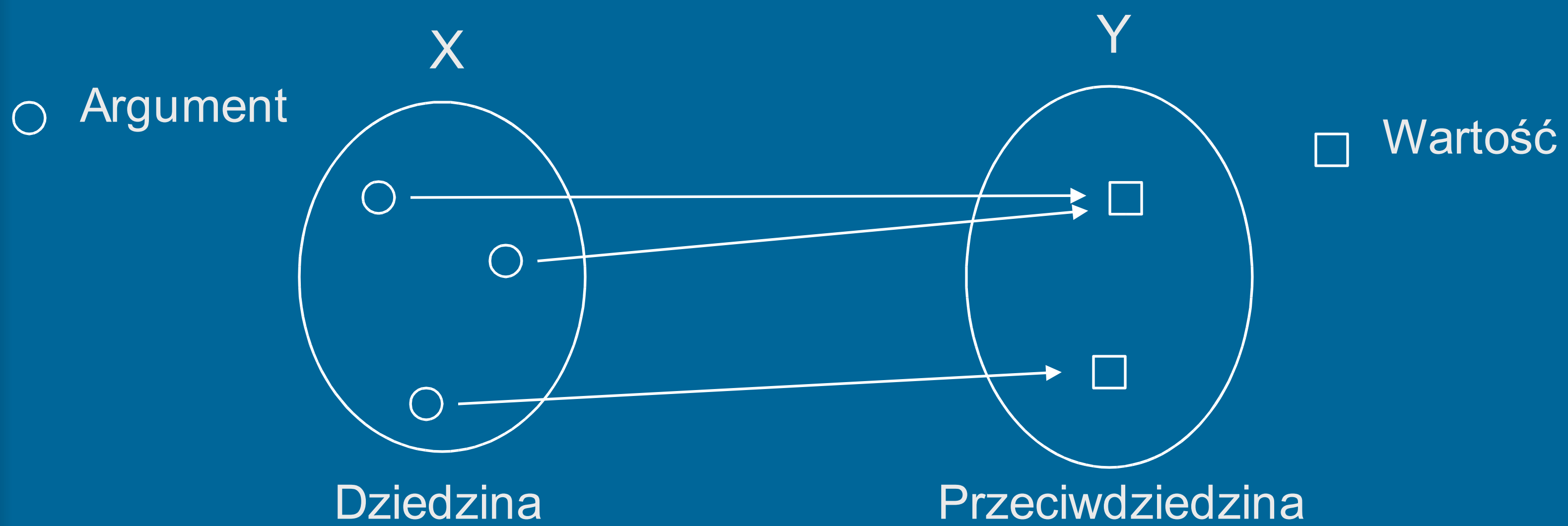
Obiekty, które należą do danego zbioru, nazywa się elementami tego zbioru.

Zbiór, którego wszystkie elementy są zbiorami, nazywa się rodziną zbiorów.

Funkcja matematyczna

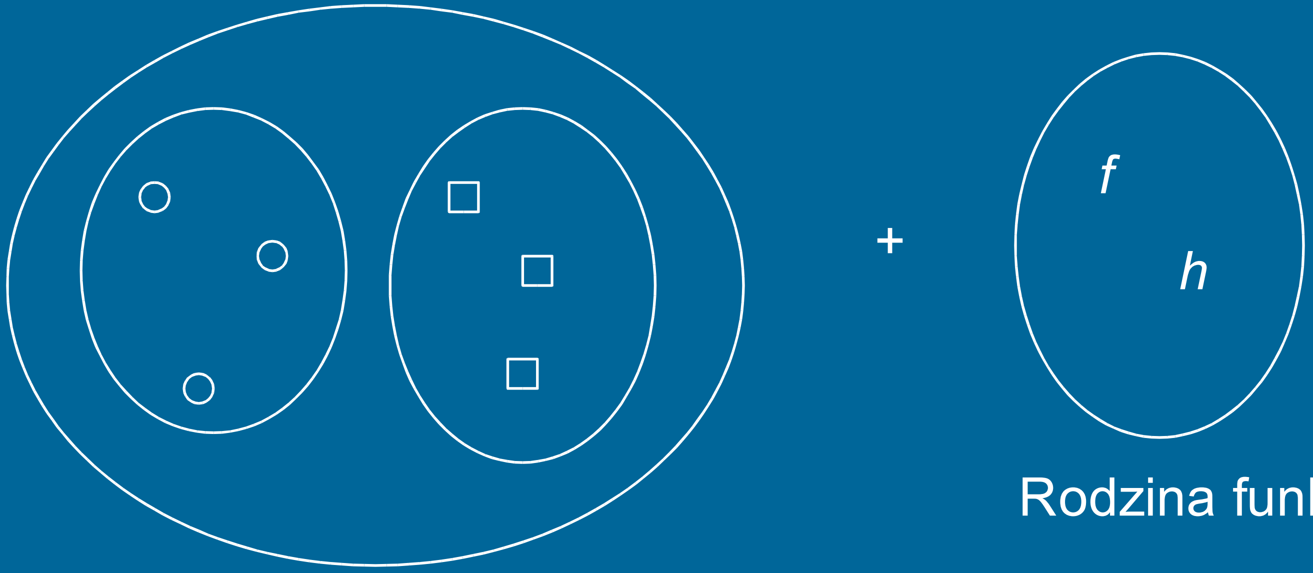
Funkcja matematyczna ze zbioru X w zbiór Y odwzorowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y.

Zbiór X jest nazywany dziedziną, a jego elementy - argumentami, a zbiór Y - przeciwdziedziną, a jego elementy wartościami.



Struktura algebraiczna

Struktura algebraiczna
Para złożona z rodziny zbiorów zwanej nośnikiem oraz rodziny funkcji operujących na nośniku i spełniających pewne aksjomaty.



Rodzina funkcji

Nośnik

Grupa

Grupa – struktura algebraiczna G z działaniem * spełniającym następujące aksjomaty:

- działanie * jest łączne: dla dowolnych a, b, c należących do G jest $(a * b) * c = a * (b * c)$
- istnieje w G element e taki, że dla każdego a należącego do G jest $e * a = a * e = a$ (taki element e jest jedyny i nosi nazwę elementu neutralnego grupy)
- dla każdego a należącego do G istnieje w G element a^{-1} taki, że $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (element a^{-1} to element odwrotny do elementu a).

Jeśli dodatkowo w grupie G jest spełniony aksjomat:

- działanie * jest przemienne: dla dowolnych a, b należących do G jest $a * b = b * a$, to grupę G nazywamy grupą przemienną lub grupą abelową.

Ciało

Ciało - struktura algebraiczna K z dwoma działaniami, zwanymi dodawaniem i mnożeniem, spełniającymi następujące aksjomaty:

- zbiór K z dodawaniem jest grupą abelową
- zbiór K (pomniejszony o 0, czyli element neutralny dodawania) z mnożeniem jest grupą abelową
- mnożenie jest obustronnie rozdzielne względem dodawania:

  $a * (b+c) = (a*b) + (a*c)$

  $(b+c) * a = (b*a) + (c*a)$

- zbiór K ma co najmniej dwa elementy.

Przestrzeń liniowa

Przestrzeń liniowa X nad ciałem K (zwana także przestrzenią wektorową) jest to pewna struktura algebraiczna z działaniami dodawania (określonym pomiędzy elementami X) i mnożenia (określonym między elementami K a X), która spełnia następujące aksjomaty:

- X ze względu na dodawanie jest grupą abelową
- Mnożenie jest jest rozdzielne względem dodawania

$$\forall_{a,b\in K} \wedge \forall_{x\in X} (a \oplus b)\times x = a\times x + b\times x$$

$$\forall_{a,b\in K} \wedge \forall_{x\in X} (a \otimes b)\times x = a\times (b\times x)$$

Gdzie $\oplus$ i $\otimes$ to odpowiednio dodawanie i mnożenie w K.

- $\forall_{x\in X} 1\times x = x$ gdzie 1 jest jedynką w K

Elementy ciała K nazywane są skalarami, a elementy X - wektorami.

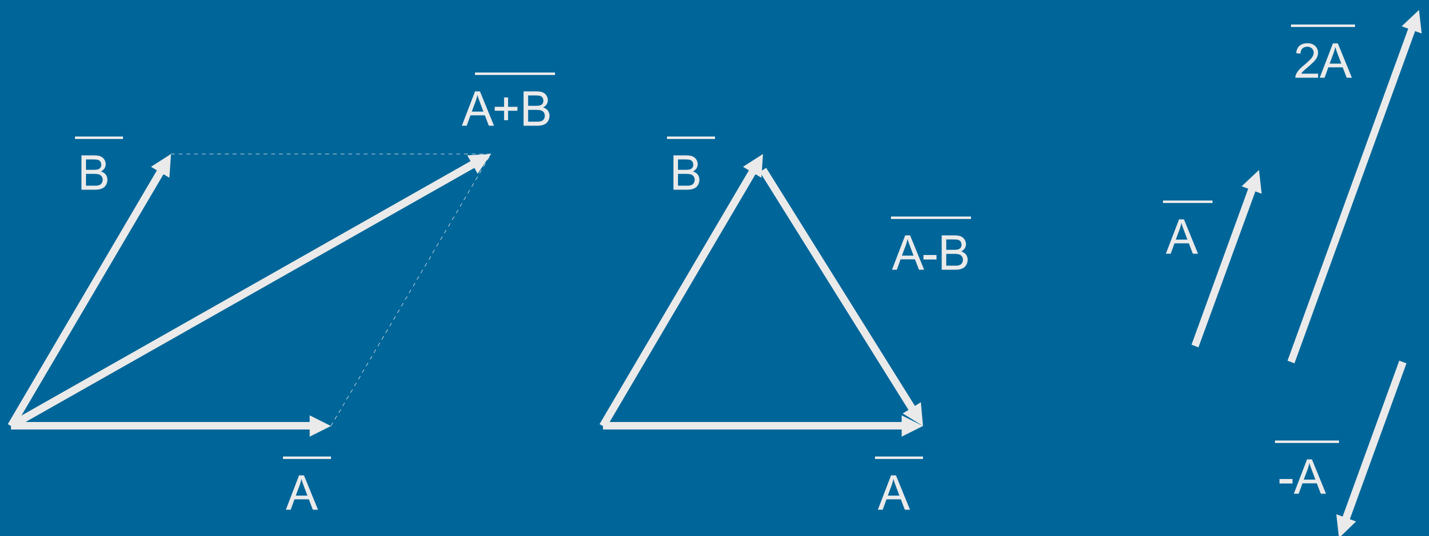
Wektory

Wektor swobodny – początek wektora może być dowolnie obrany w przestrzeni.

Wektor związany (umiejscowiony) – początek wektora leży w ściśle określonym punkcie.

Wektor jednostkowy – wektor o długości równej jeden.

Operacje na wektorach



Dodawanie Odejmowanie Mnożenie przez skalar

Przestrzeń metryczna

Przestrzeń metryczna – przestrzeń liniowa z określoną na zbiorze X funkcją d, która każdym jego dwu elementom przypisuje nieujemną wartość rzeczywistą, spełniającą następujące warunki:

- $d(x,x) = 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z)$ jest mniejsza bądź równa wartości $d(x,y) + d(y,z)$.

Powyższe warunki muszą zachodzić dla każdych x,y,z ze zbioru X.

Funkcja ta nazywana jest metryką.

Relacja

Relacja – pojęcie pierwotne logiki matematycznej. W najprostszym przypadku dwóch elementów, relacja opisuje związek zachodzący pomiędzy nimi.

Funkcjonał

Funkcjonał – funkcjonałem *J(f)* nazywamy relację, która każdemu elementowi pewnego zbioru A funkcji *f*(*t*) określonych w przedziale X przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę *J* ze zbioru liczb rzeczywistych. Mówimy przy tym, że funkcjonał *J* został określony na zbiorze A.

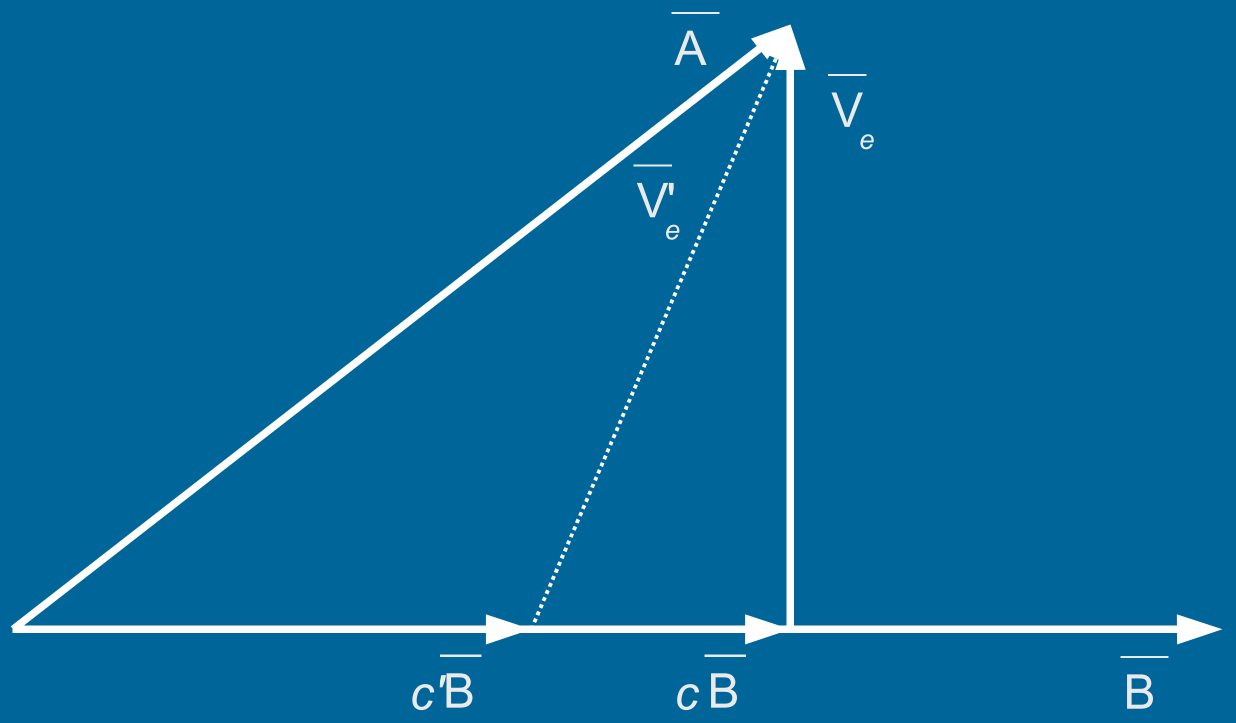
Funkcje f(t)→A nazywamy funkcjami dopuszczonymi. Funkcjonał jest uogólnieniem pojęcia funkcji.

Przestrzeń unitarna

Przestrzeń liniowa E nad ciałem liczb zespolonych C (lub jego podciałem R) nazywamy przestrzenią unitarną, jeśli jest zdefiniowany funkcjonał dwuargumentowy (x,y) zwany iloczynem skalarnym wektorów x, y mającym następujące własności:

- $(x + y,z) = (x,z) + (x,y)$
- $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$ dla α należącego do zbioru C
- $(x,y)^* = (y,x)$ * - oznaczamy sprzężoną liczbę zespoloną
- (x,x) jest większe lub równe 0
- jeżeli $(x,x) = 0$, to $x = 0$

Składowa wektora wzdłuż drugiego wektora



Iloczyny skalarne

$$\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}}=\left|\overline{\mathrm{A}}\right|\left|\overline{\mathrm{B}}\right|\cos\alpha$$

$$\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}}=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{A}(t)\,\mathrm{B}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}}=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{A}(x,y)\,\mathrm{B}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

Przybliżanie jednego obrazu drugim obrazem (każdy kanał osobno)

02 Aproksymacja obrazu drugim obrazem\test.m

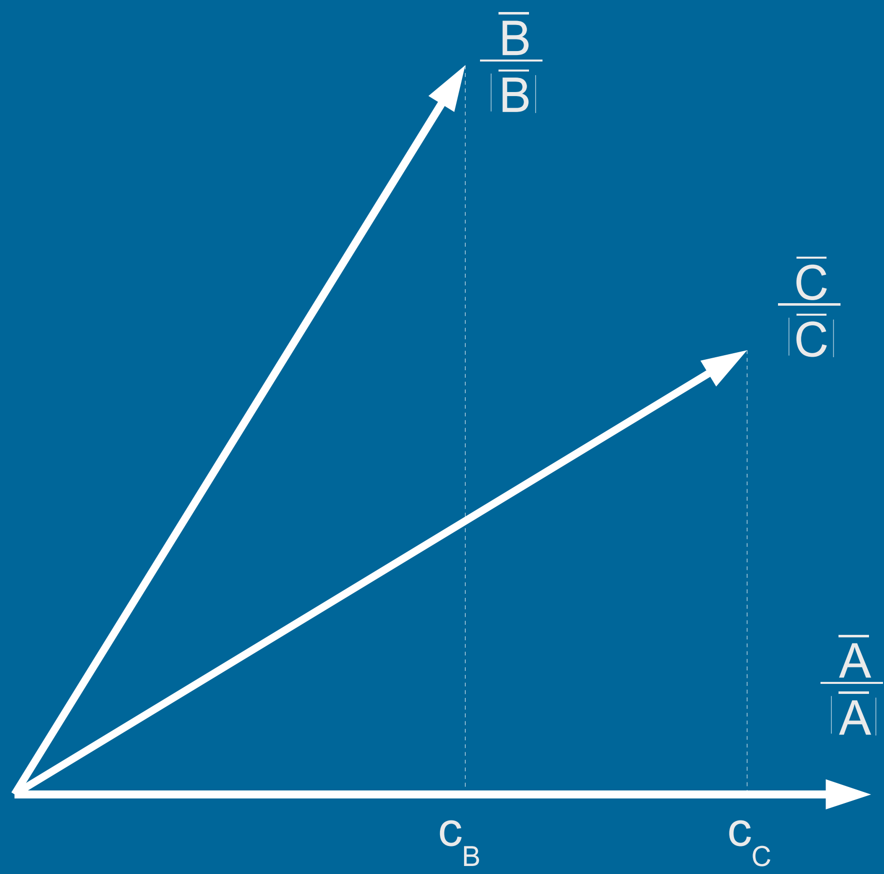
Przybliżanie jednego obrazu drugim obrazem (każdy kanał osobno)

Przybliżanie jednego obrazu drugim obrazem (każdy kanał osobno)

Przybliżanie jednego obrazu drugim obrazem (wszystkie kanały razem)

02 Aproksymacja obrazu drugim obrazem\test4.m

Składowa wektora jako współczynnik porównania



Składowa wektora jako współczynnik porównania obrazów

$$c_{norm} = \frac{\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\sqrt{\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} g^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}}$$

Porównywanie obrazów

03 Porownywanie obrazow\test.m

03 Porownywanie obrazow\test2.m

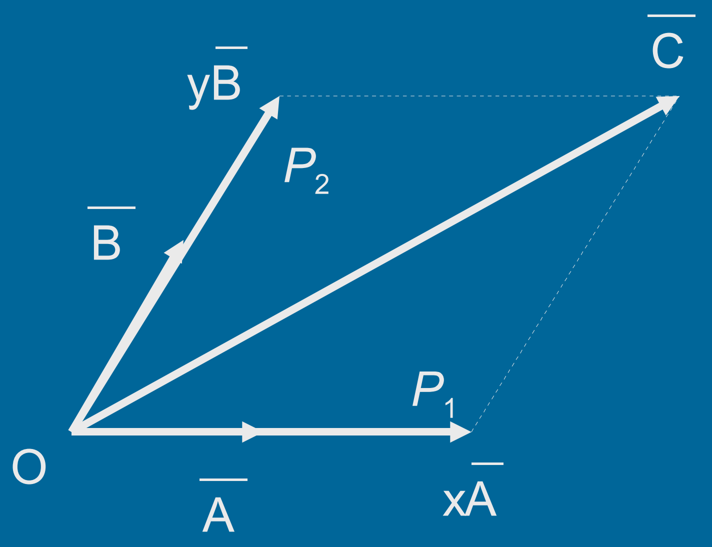
Wektory liniowo niezależne

Mówimy, że między *n* wektorami $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ... $\overline{A}_n$ istnieje zależność liniowa, jeżeli istnieje *n* takich liczb $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ z których nie wszystkie są równe zeru, a dla których zachodzi zależność:

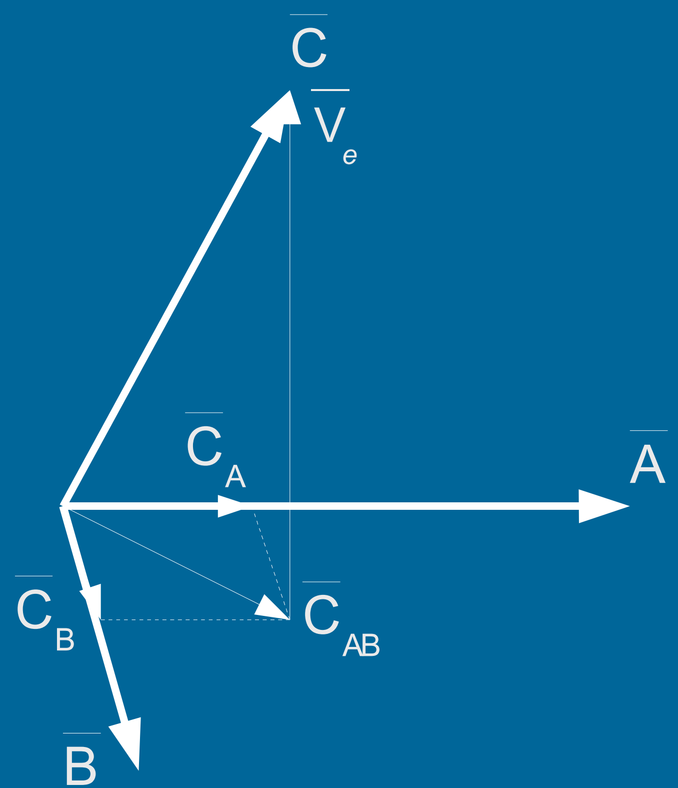
$$\alpha_1 \overline{A}_1 + \alpha_2 \overline{A}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{A}_n = 0$$

Jeżeli przy powyższych założeniach taka zależność nie zachodzi, to wektory nazywamy liniowo niezależnymi.

Liniowa zależność wektorów



Składowa wektora wzdłuż innych wektorów



Składowa wektora wzdłuż innych wektorów

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\overline{X}_1, \overline{X}_1) & (\overline{X}_2, \overline{X}_1) & \cdots & (\overline{X}_n, \overline{X}_1) \\ (\overline{X}_1, \overline{X}_2) & (\overline{X}_2, \overline{X}_2) & \cdots & (\overline{X}_n, \overline{X}_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\overline{X}_1, \overline{X}_n) & (\overline{X}_2, \overline{X}_n) & \cdots & (\overline{X}_n, \overline{X}_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\overline{A}, \overline{X}_1) \\ (\overline{A}, \overline{X}_2) \\ \cdots \\ (\overline{A}, \overline{X}_n) \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = c_1 \overline{X}_1 + c_2 \overline{X}_2 + \ldots + c_n \overline{X}_n$$

Przybliżanie jednego obrazu dwoma obrazami (każdy kanał osobno)

04 Aproksymacja obrazu dwoma obrazami\test.m

Przybliżanie jednego obrazu dwoma obrazami (każdy kanał osobno)

Przybliżanie jednego obrazu dwoma obrazami (każdy kanał osobno)

Przybliżanie jednego obrazu dwoma obrazami (wszystkie kanały razem)

04 Aproksymacja obrazu dwoma obrazami\test4.m

Przybliżanie jednego obrazu wieloma obrazami (każdy kanał osobno)

06 Aproksymacja obrazu wieloma obrazami\test.m

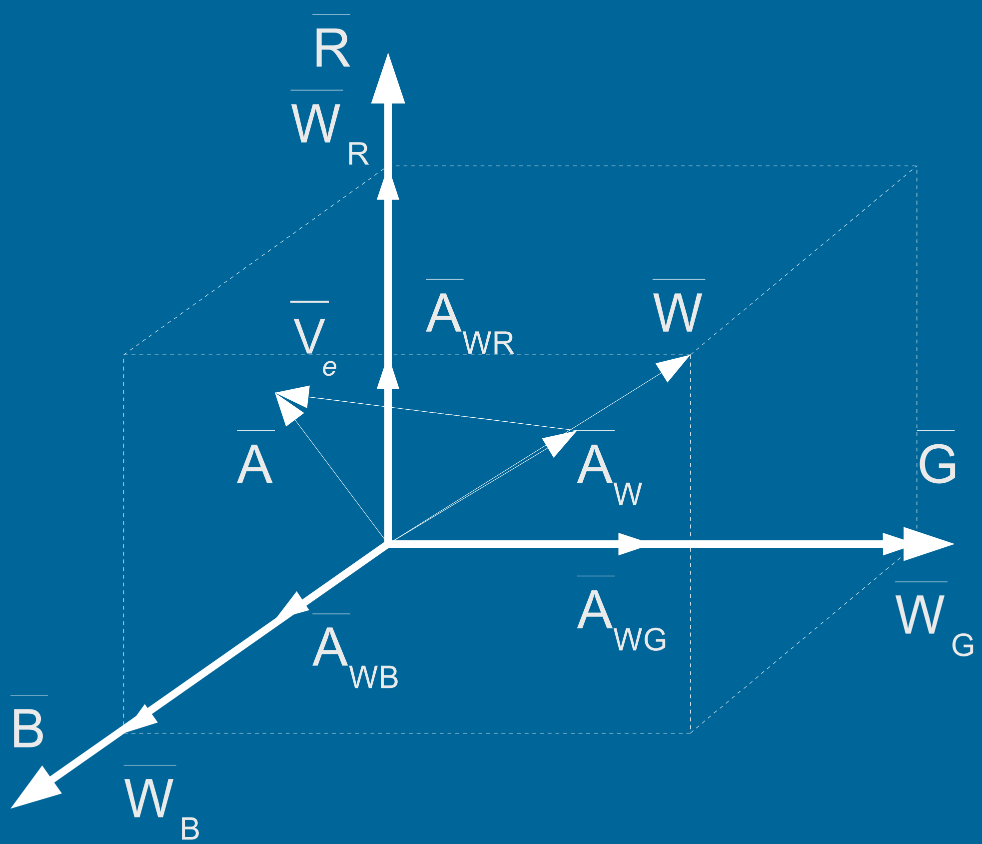
Przybliżanie jednego obrazu wieloma obrazami (każdy kanał osobno)

Przybliżanie jednego obrazu wieloma obrazami (każdy kanał osobno)

Przybliżanie jednego obrazu wieloma obrazami (każdy kanał osobno)

Przybliżanie jednego obrazu wieloma obrazami (każdy kanał osobno)

Operacje w przestrzeni barw „malowanie” jednym pędzlem



Operacje w przestrzeni barw „malowanie” jednym pędzlem

Operacje w przestrzeni barw
filtracja barw

0,8 *  + 0,2 * 

Rozbarwienie

Usunięcie składowych

Usunięcie składowych

Wykrywanie kierunku
Filtr Gabora

$$h(x,y)=s(x,y)\,g(x,y)$$

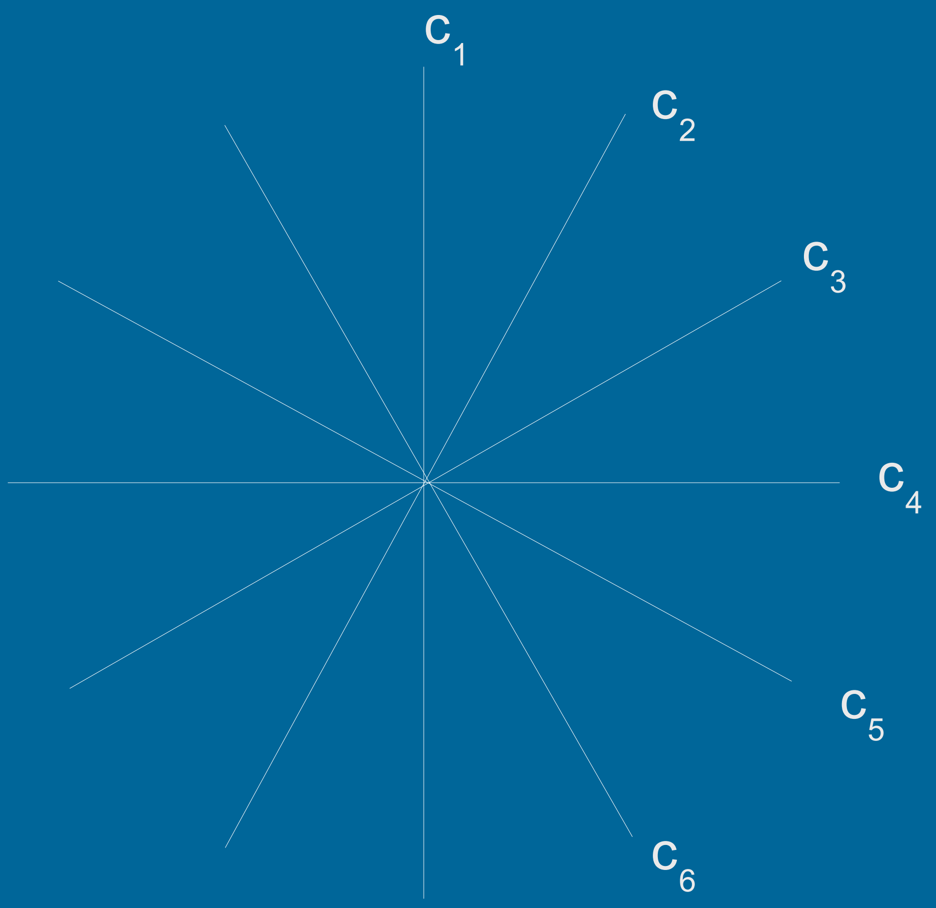
$$s(x,y)=\mathrm{e}^{-j2\pi(u_0x+v_0y)}$$

$$g(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

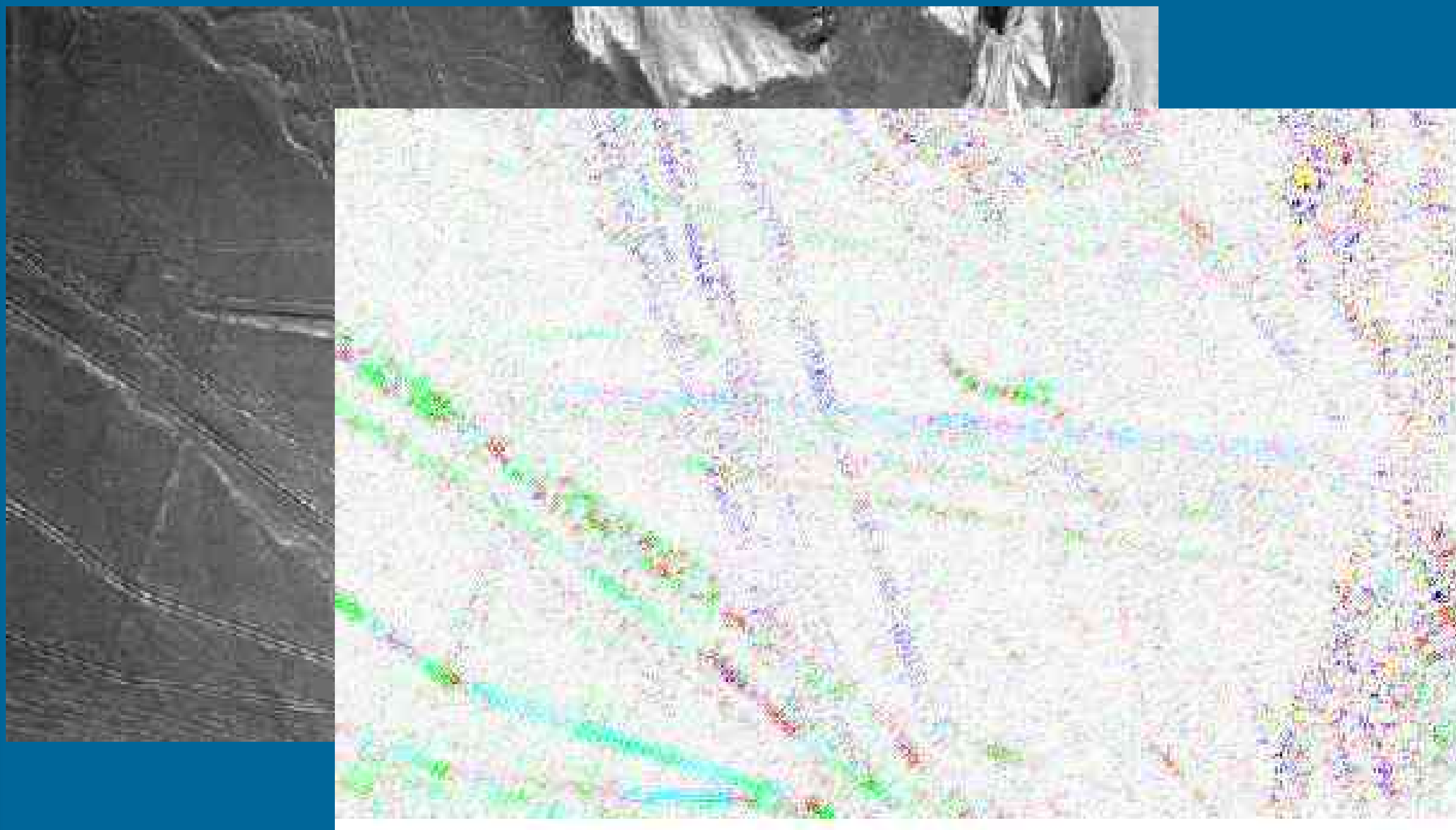
Wykrywanie kierunku
Maski filtru Gabora

08 Wykrywanie kierunku\gabor_maski.m

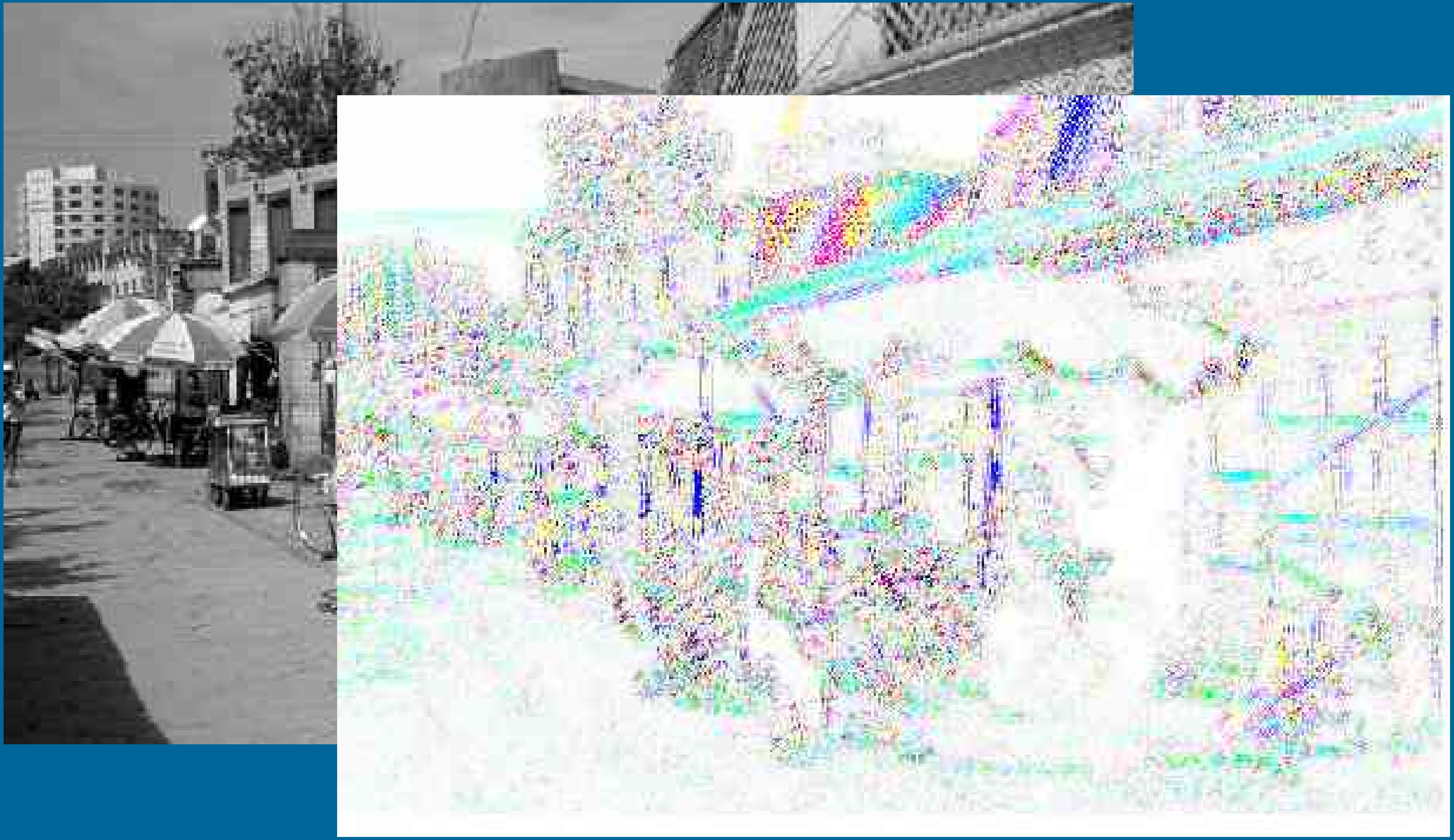
Wykrywanie kierunku



Wykrywanie kierunku



Wykrywanie kierunku



Składowa wektora wzdłuż innych wektorów wzajemnie ortogonalnych

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\overline{X}_1, \overline{X}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\overline{X}_2, \overline{X}_2) & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & (\overline{X}_n, \overline{X}_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\overline{A}, \overline{X}_1) \\ (\overline{A}, \overline{X}_2) \\ \dots \\ (\overline{A}, \overline{X}_n) \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = c_1 \overline{X}_1 + c_2 \overline{X}_2 + \dots + c_n \overline{X}_n$$

$$c_r = \frac{\overline{A} \cdot \overline{X}_r}{\overline{X}_r \cdot \overline{X}_r}$$

Proces ortonormalizacji Grama-Schmidta

1.
$$\overline{Y}_1 = \frac{\overline{X}_1}{|\overline{X}_1|}$$

2. Rekurencyjnie
$$\overline{Y}_k = \frac{\overline{X}_k - \overline{V}_k}{|\overline{X}_k - \overline{V}_k|}$$

gdzie

k=1,2,3, ...

$$\overline{V}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\overline{Y}_i \cdot \overline{X}_k\right) \overline{Y}_i$$

Proces ortonormalizacji Grama-Schmidta

09 Ortonormalizacja Grama-Schmitda\test2.m

Proces ortonormalizacji Grama-Schmidta

Ortogonalność funkcji sin x

dla różnych *n* i *m* całkowitych:

$$I = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t \, \mathrm{d}t = 0$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right) - \cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

Szereg trygonometryczny

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t\right)$$

dla $\left(t_0<t<t_0+T\right)$

n = 1,2,3, ...

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

Politechnika Szczecińska - Wydział Informatyki

Szereg trygonometryczny

01 Szereg trygonometryczny\test.m

< > Koniec

Dwuwymiarowy szereg trygonometryczny

01 Szereg trygonometryczny\test2.m
01 Szereg trygonometryczny\test3.m
01 Szereg trygonometryczny\test4.m

Ortogonalność funkcji zespolonych

$$c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, g_r^*(t)\, \mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} g_r(t)\, g_r^*(t)\, \mathrm{d}t}$$

Szereg wykładniczy

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j} n \omega_0 t}$$

dla

$$\left(t_0 < t < t_0 + T\right)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j} n \omega_0 t} \mathrm{d}t$$

Szereg wykładniczy

$$F_n = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} f(k)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi nk}{M}},$$

$$f(k) = \sum_{n=0}^{M-1} F_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi nk}{M}},$$

Szereg wykładniczy

02 Szereg wykladniczy\test.m

Dwuwymiarowy szereg wykładniczy

$$f(x,y)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=-\infty}^{\infty}F(u,v)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(ux\omega_{x0}+vy\omega_{y0}\right)}$$

dla

$$\left(x_0<x<x_0+T_x\right)\qquad\left(y_0<y<y_0+T_y\right)$$

$$u=0,\pm1,\pm2,\ldots\qquad v=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

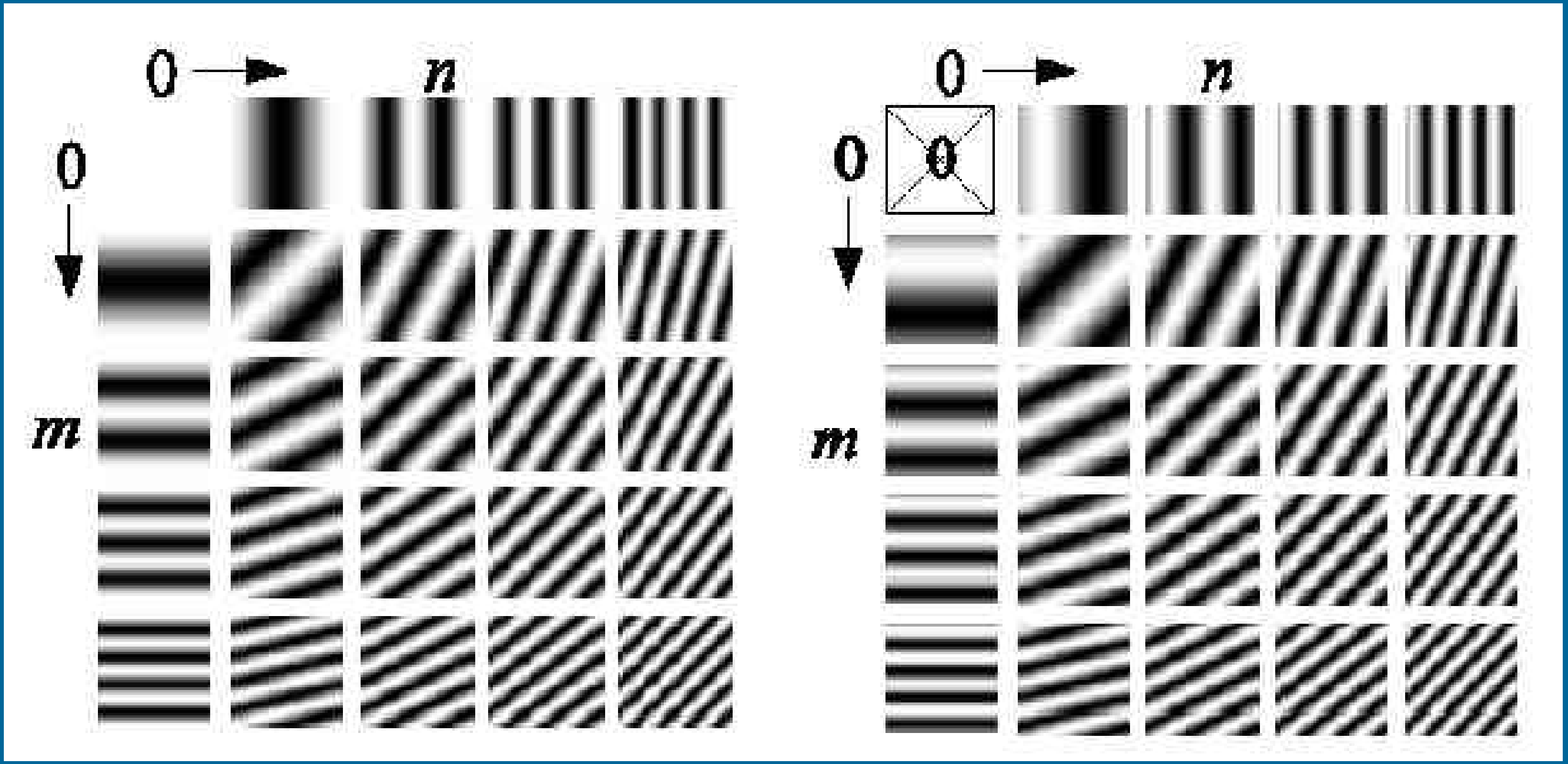
$$F_{u,v}=\frac{1}{T_xT_y}\int_{y_0}^{y_0+\frac{2\pi}{\omega_{y0}}}\int_{x_0}^{x_0+\frac{2\pi}{\omega_{x0}}}f(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(ux\omega_{x0}+vy\omega_{y0}\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Dwuwymiarowy szereg wykładniczy

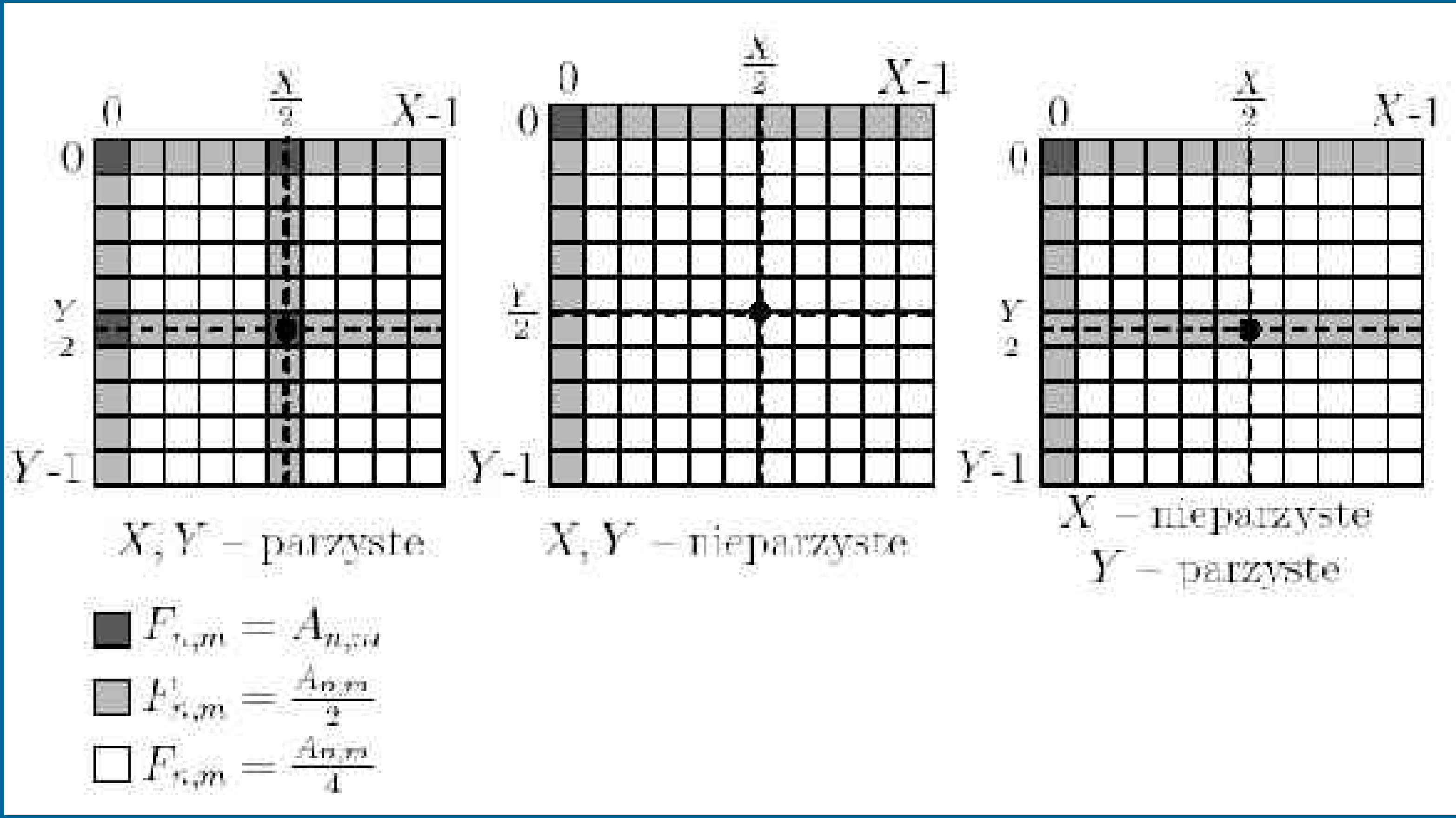
$$F_{n,m} = \frac{1}{XY} \sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} f(x,y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\left(\frac{nx}{X}+\frac{my}{Y}\right)}$$

$$f(x,y) = \sum_{y=0}^{Y-1} \sum_{x=0}^{X-1} F_{n,m}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\left(\frac{nx}{X}+\frac{my}{Y}\right)}$$

Dwuwymiarowy szereg wykładniczy – funkcje bazowe

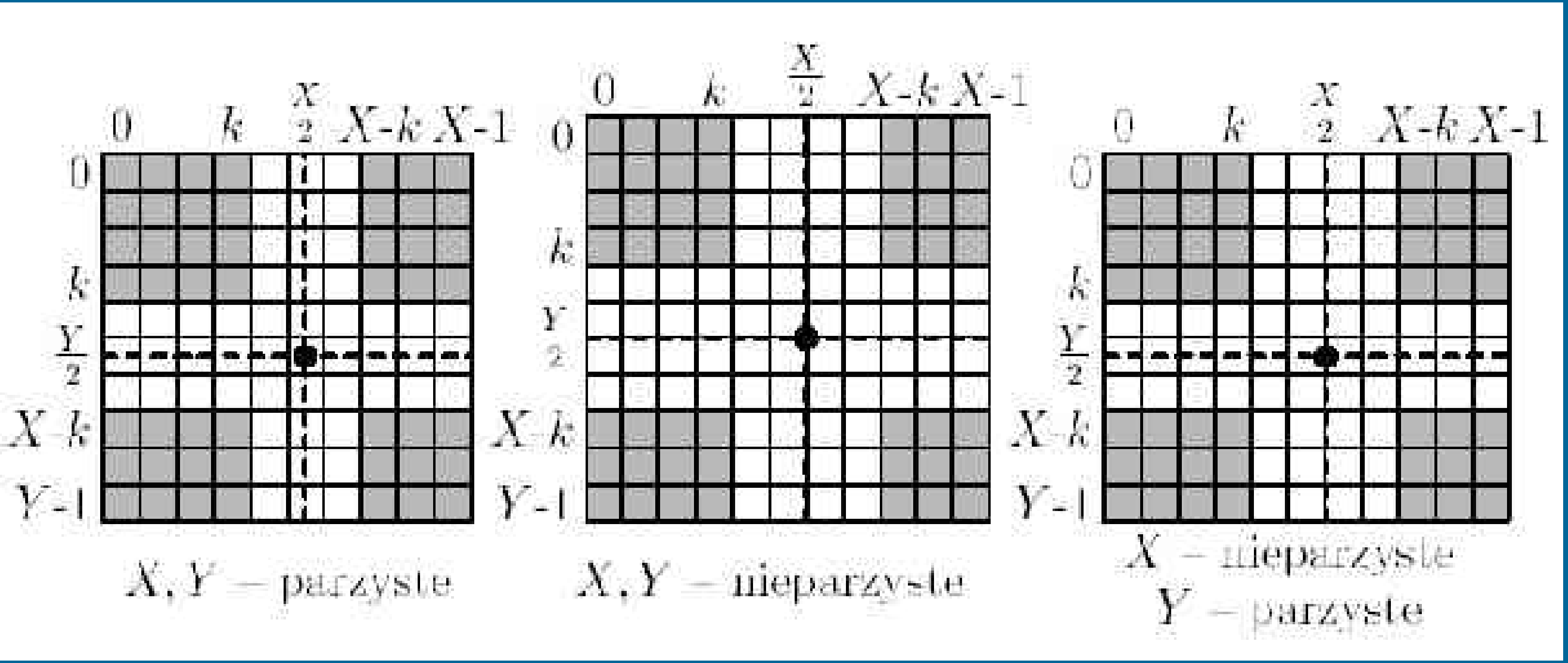


Dwuwymiarowy szereg wykładniczy – symetria

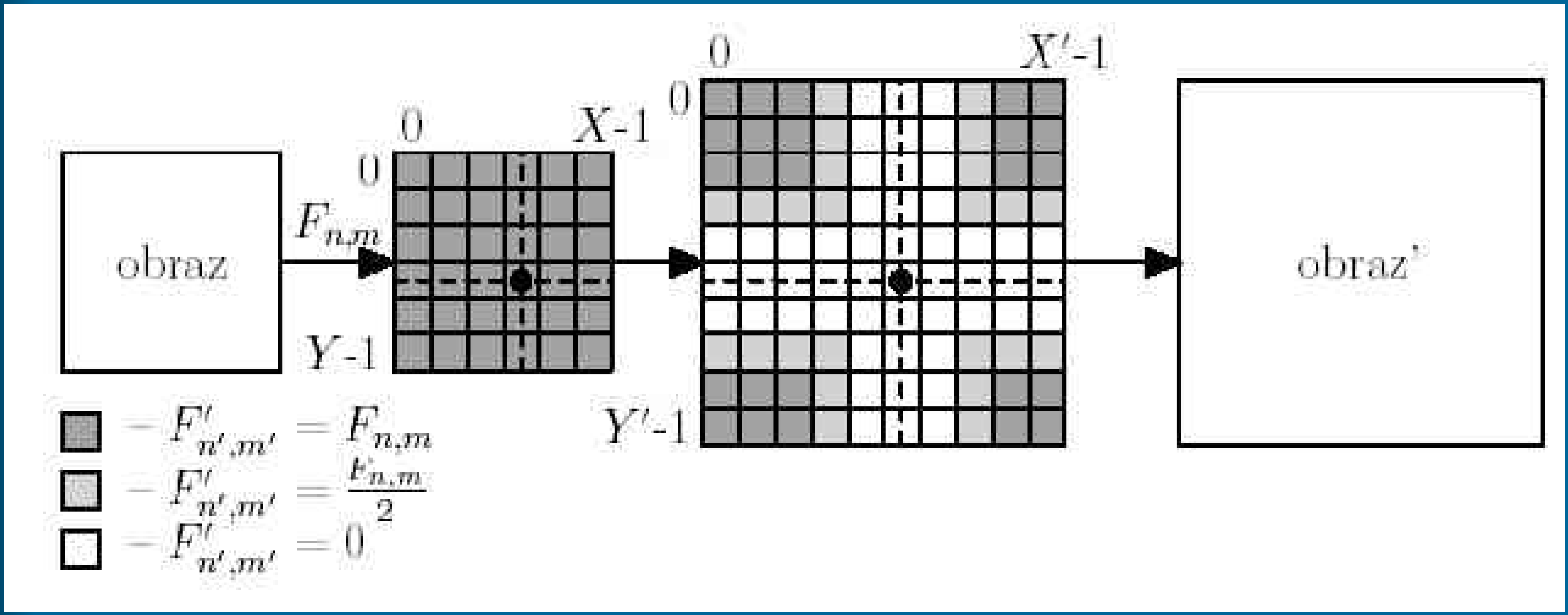


< > Koniec

Dwuwymiarowy szereg wykładniczy – filtracja



Dwuwymiarowy szereg wykładniczy – powiększanie obrazu



Dwuwymiarowy szereg wykładniczy

02 Szereg wykladniczy\test2.m
02 Szereg wykladniczy\test3.m
02 Szereg wykladniczy\test4.m

Transformata Fouriera

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{\mathrm{j}2\pi\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-\mathrm{j}2\pi\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Dwuwymiarowa transformata Fouriera

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)e^{\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Dwuwymiarowa transformata Fouriera

03 Przeksztalcenie Fouriera\test.m

03 Przeksztalcenie Fouriera\test2.m

03 Przeksztalcenie Fouriera\test3.m