Модель векторной авторегрессии

Динамика сложных явлений в экономике и финансах редко может быть описана с использованием одного временного ряда. Следует учитывать, что многие временные ряды изменяются синхронно в определенной взаимозависимости. Поэтому теперь мы перейдём к подходам и методам совместного моделирования двух или более временных рядов.

Стационарная VAR-модель

Начнём с рассмотрения двух рядов x_t и y_t. Модель векторной авторегрессии $\mathrm{VAR}(p)$ порядка p имеет вид

$$x_t = \mu_1 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j y_{t-j} + u_t,$$

$$y_t = \mu_2 + \sum_{j=1}^{p} \delta_j x_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \theta_j y_{t-j} + v_t.$$

Обратите внимание, что в модели VAR все факторы рассматриваются как эндогенные[1].

Обозначим

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} \beta_j & \gamma_j \\ \delta_j & \theta_j \end{pmatrix}.$$

Тогда модель VAR(p) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=1}^{p} A_j \mathbf{x}_{t-j} + \mathbf{u}_t. \tag{4.1}$$

Общая модель векторной VAR(p) имеет вид (4.1), где

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{kt} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{kt} \end{pmatrix}.$$

и $A_1, \ldots, A_p$ – $k \times k$ матрицы.

Обозначим

$$A(z) = I - zA_1 - \cdots - z^p A_p$$

где I – единичная $k \times k$ матрица.

Условием стационарности является то, что все корни уравнения

$$\det A(z) = 0$$ [2]

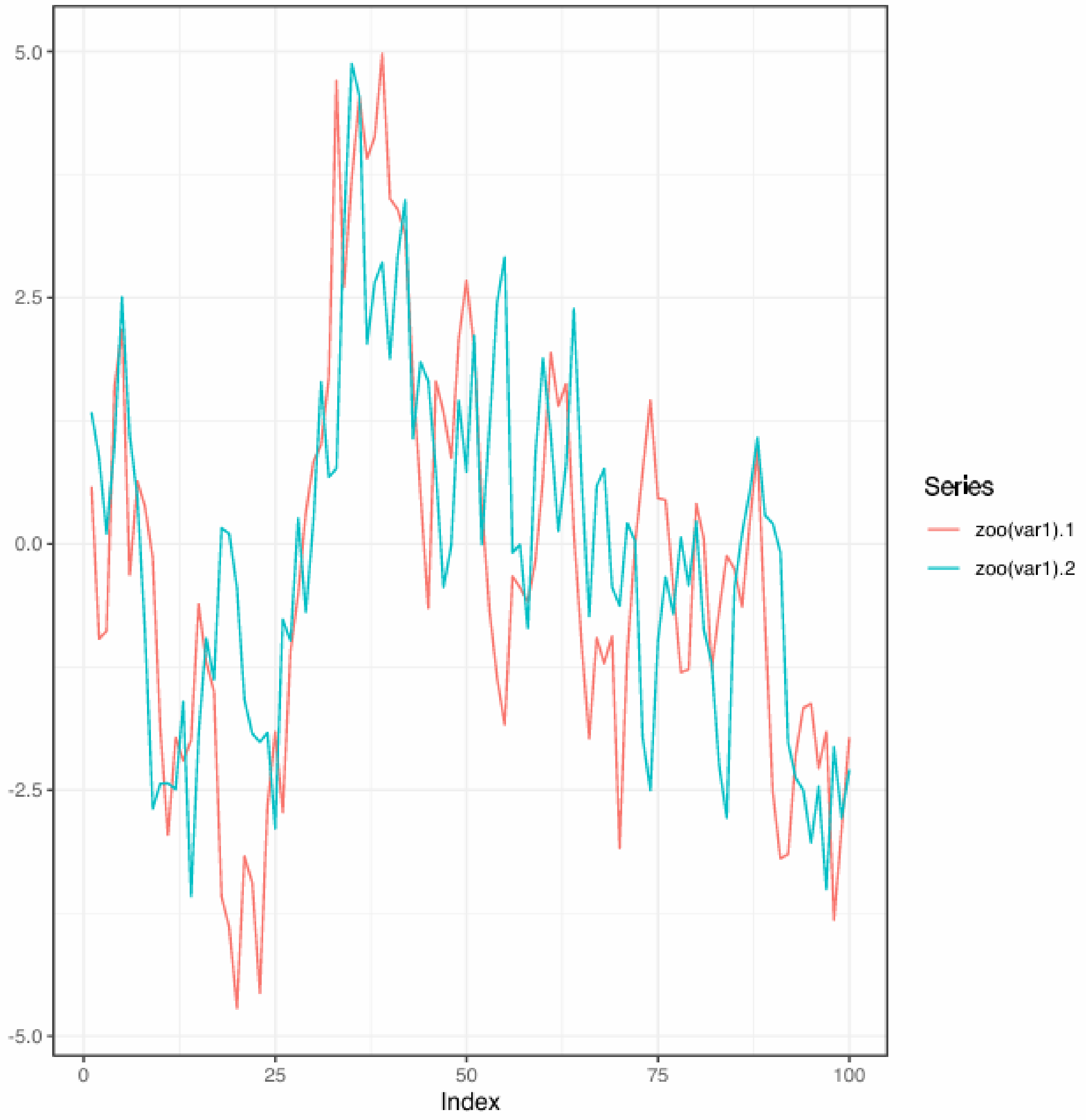
по модулю больше единицы, включая комплексные.

Для простоты рассмотрим модель VAR(1). Её спецификация выглядит следующим образом $\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + A\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t$. Собственные значения – это корни характеристического многочлена $\det(A - \lambda I) = 0$.

Очевидно, что если $\det A \neq 0$, то $\det A(z) = 0 \iff \lambda = 1/z$ – собственные значения A. Откуда делаем вывод, что модель VAR(1) стационарна тогда и только тогда, когда все собственные значения A по модулю меньше 1.

Пример. Рассмотрим модель с матрицей (см.рис.)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$



Замечание. Коэффициенты VAR-модели в общем случае **не имеют экономической интерпретации**. Сама VAR-модель часто рассматривается как привидённая форма некоторой структурной системы одновременных уравнений.

Стандартные условия на вектор шоков (ошибку) для стационарной модели VAR выглядят так:

- отсутствие серийной корреляции

$$\operatorname{cov}(u_{it}, u_{js}) = 0, \quad t \neq s,$$

- допускаются кросс-корреляции

$$\operatorname{cov}(u_{it}, u_{jt}) \neq 0, \quad i \neq j.$$

Приведём алгоритм оценки и тестирования стационарной модели VAR.

1. Порядок модели: многомерные аналоги информационных критериев Akaike, Schwarz, Hannan-Quinn.
2. Метод оценивания: независимо оцениваем каждое уравнение VAR-модели, используя метод наименьших квадратов.
3. Статистические выводы: стандартные МНК-инференции, т.е. используем стандартные тестовые статистики.
4. Проверка “адекватности”: тест Льюинга-Бокса на серийную корреляцию для каждого уравнения VAR-модели.

4.1.1. Функции импульсного отклика

Так как коэффициенты VAR-модели не имеют экономической интерпретации, то, как правило, рассматривают функции импульсного отклика IRF[3] для описание того, как переменные реагируют на экзогенный шок. Более точно, как влияние на все факторы экзогенного шока в одно стандартное отклонение распространяется во времени. При этом Факторы нужно упорядочить «по степени возрастания эндогенности».

Формально функция импульсного отклика — это матричная функция от $h = 0, 1, 2, ...$, которая задается так $\frac{\partial \mathbf{x}_{t+h}}{\partial \mathbf{u}_t} = \left[\frac{\partial x_{i,t+h}}{\partial u_{j,t}}\right]_{p\times p}$.

Таким образом, (i, j)-элемент этой матричной функции отражает реакцию переменной x_i на шок в переменной x_j. А именно $\frac{\partial x_{i,t+h}}{\partial u_{j,t}}$ — это реакция значения i-й переменной в момент времени $t + h$ на единичное изменение шока j-й переменной в момент времени t. Функция импульсного отклика переменной x_i на шок переменной x_j — это последовательность $\frac{\partial x_{i,t}}{\partial u_{j,t}}, \frac{\partial x_{i,t+1}}{\partial u_{j,t}}, \ldots, \frac{\partial x_{i,t+h}}{\partial u_{j,t}}, \ldots$.

[3] Impulse response function.

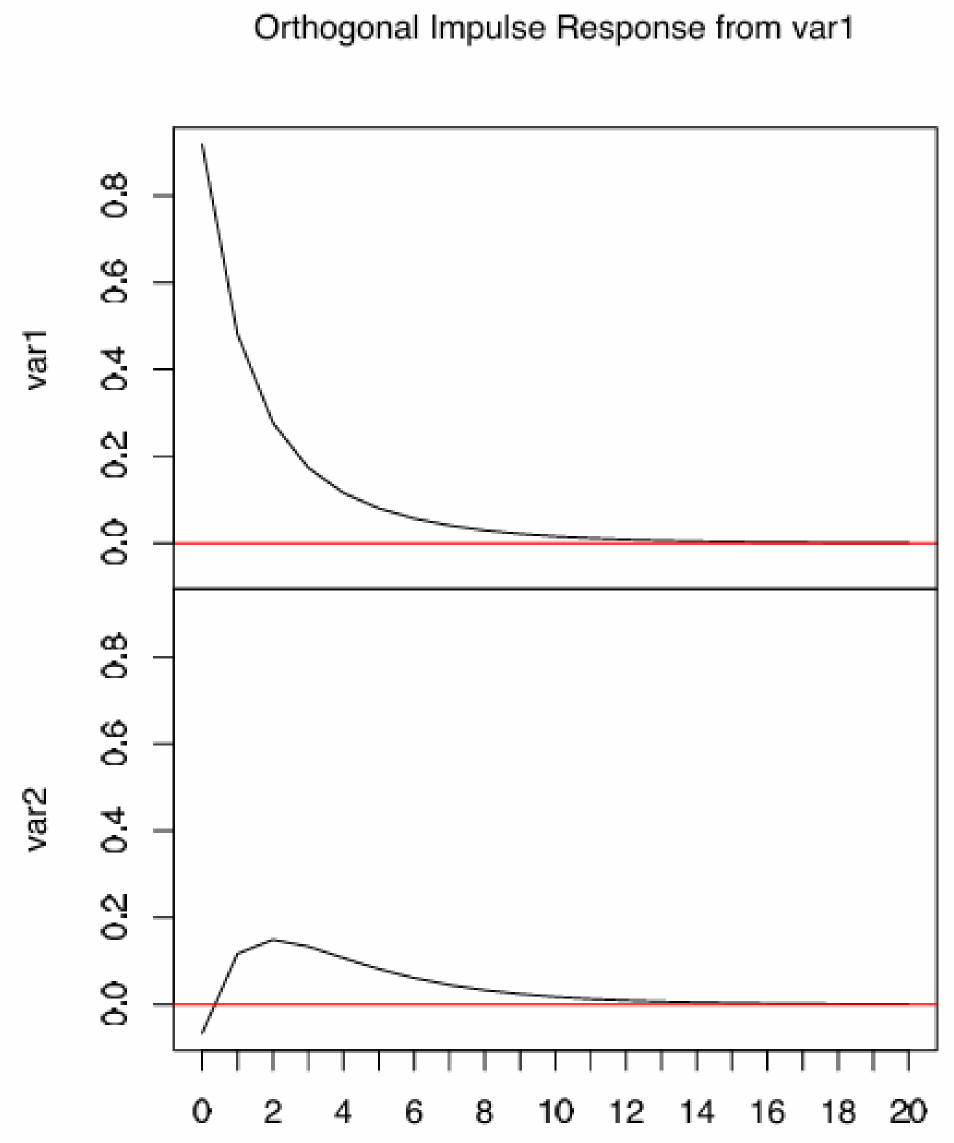


Рисунок 4.2. Функции импульсного отклика первой переменной.

Если u_t коррелированны, то мы не можем рассуждать о рассматриваемых шоках как об изолированных, поскольку в силу корреляции будет наблюдаться мгновенное воздействие на все другие элементы вектора. Поэтому, с учетом этих единовременных эффектов, рассматриваются ортогонализированные функции импульсного отклика, которые вычисляются в пакетах.

Пример. Для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

графики импульсных откликов каждой переменной приведены на рисунках 4.2 и 4.3.

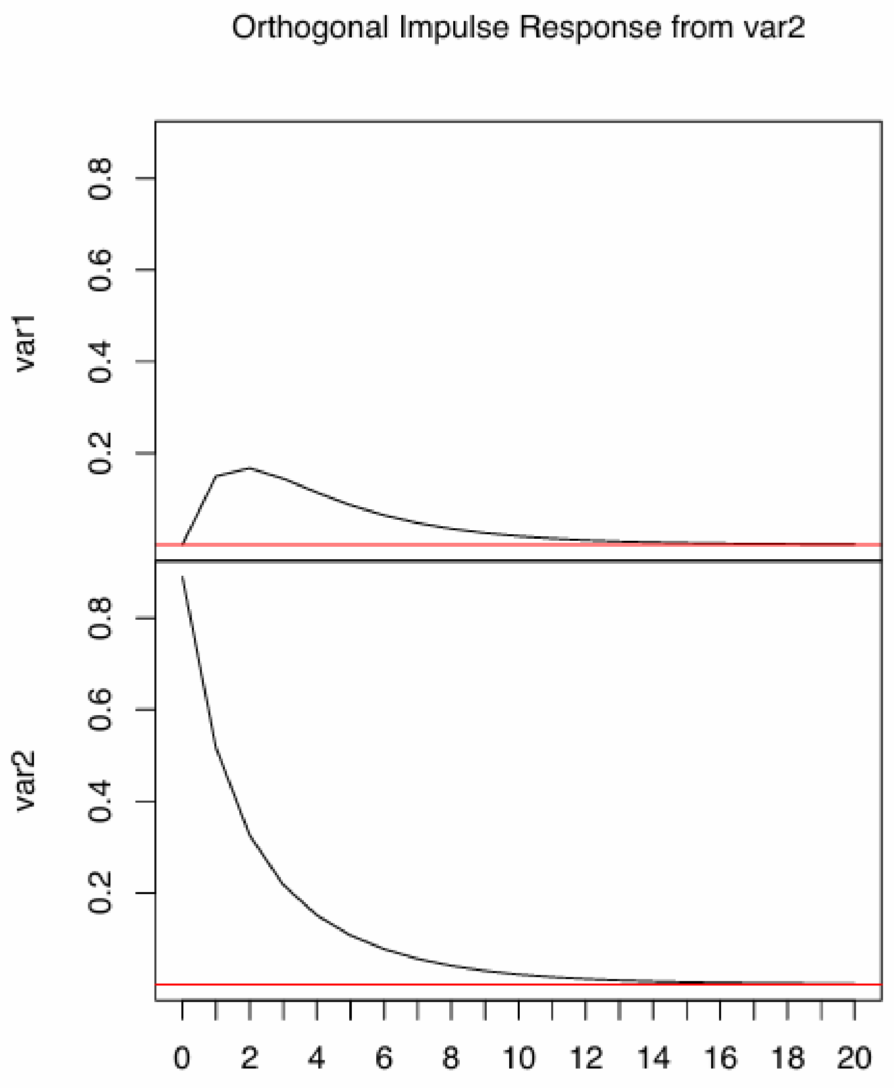


Рисунок 4.3. Функции импульсного отклика второй переменной.

ЛИСЫ И КРОЛИКИ

Вы располагаете данными о динамике популяций лис и кроликов в некотором регионе (файл **fox_rabbit**). Предполагается, что численности этих популяций взаимосвязаны между собой и описываются моделью векторной авторегрессии VAR(p).

(а) Определите оптимальный порядок лага для VAR-модели, опираясь на информационный критерий Шварца.

(б) Оцените параметры модели. Запишите полученные уравнения регрессии в стандартной форме, указав коэффициенты детерминации и (в скобках под соответствующими коэффициентами) стандартные ошибки. Укажите, какие из переменных являются значимыми при уровне значимости 1%.

(в) Постройте прогноз популяции кроликов на один период вперед, укажите 95%-ный доверительный интервал прогноза.

(г) Допустим, в вашем распоряжении нет исходных данных, а есть только уравнения, оцененные в пункте (б). Вычислите равновесный уровень (оценку безусловного математического ожидания) численности лис в регионе. Приведите необходимые расчеты.

(д) Постройте график отклика функции на импульс, характеризующий динамику численности лис в ответ на импульс численности кроликов. Дайте содержательную интерпретацию такого вида графика.

(е) Для двух переменных, имеющихся в вашем распоряжении, осуществите тест Грейнджера на причинно-следственную связь и интерпретируйте его результаты.