Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

ISBN 978-5-4344-0515-7

На 1 CD

Системные требования:
Celeron 1600 Mhz; 128 Мб RAM;
Windows XP/7/8 и выше;
8x CDROM; разрешение экрана
1024 × 768 или выше;
программа для просмотра pdf.

А. В. Браилов, П. Е. Рябов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Для студентов, обучающихся по направлению «Экономика»
для всех профилей (программа подготовки бакалавра)

Москва ♦ Ижевск
2018

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ» (ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

А. В. Браилов, П. Е. Рябов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Для студентов, обучающихся по направлению «Экономика»
для всех профилей (программа подготовки бакалавра)

Москва ♦ Ижевск
2018

НА 1 CD

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования

«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Департамент анализа данных, принятия решений
и финансовых технологий

А. В. Браилов, П. Е. Рябов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Для студентов, обучающихся по направлению
«Экономика» для всех профилей
(программа подготовки бакалавра)

Москва ♦ Ижевск
2018

ISBN 978-5-4344-0515-7

УДК 519.2(072)
ББК 22.17я73
Б87

Рецензенты: **С. М. Рамоданов** — д. ф.-м. н., профессор кафедры «Математический анализ и теория вероятностей» Института криптографии, связи и информатики Федерального государственного казенного образовательного учреждения высшего образования «Академия Федеральной службы безопасности Российской Федерации»
С. В. Соколов — к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник лаборатории компьютерного моделирования Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук»

ТЕКСТОВОЕ УЧЕБНОЕ ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ (учебное пособие)

Браилов А. В., Рябов П. Е.

Б87 Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. В. Браилов, П. Е. Рябов. Текстовое (символьное) электронное издание (1,44 Мб). — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2018. — 1 электрон. опт. диск (CD-R).

Учебное пособие по теории вероятностей и математической статистики предназначено для организации самостоятельной работы студентов бакалавриата экономических специальностей, изучающих дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика». В теоретической справке приведены решения типовых задач, которые вошли в варианты заданий учебного пособия. Учебное издание содержит 180 вариантов контрольных заданий.

Минимальные системные требования: Celeron 1600 Mhz; 128 Мб RAM; Windows XP/7/8 и выше; 8x CDROM; разрешение экрана 1024×768 или выше; программа для просмотра pdf.

ISBN 978-5-4344-0515-7

Браилов Андрей Владимирович, Рябов Павел Евгеньевич

Сборник задач по теории вероятностей
и математической статистике

Подписано к использованию 21.08.2018.
Объем электронного издания 1,44 Мб на 1 CD.
АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426057, г. Ижевск, ул. К. Маркса, д. 250, кв. 55.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95

Содержание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Комбинации событий. Классический способ подсчета вероятностей

Суммой событий A и B называется событие $A+B$, заключающееся в наступлении *хотя бы одного* из событий A и B. Вообще, суммой конечного или счетного множества событий называется событие, заключающееся в наступлении хотя бы одного события из данного множества событий.

Произведением событий A и B называется событие AB, заключающееся в *одновременном* (совместном) наступлении обоих событий A и B. Произведением конечного или счетного множества событий называется событие, заключающееся в одновременном наступлении всех событий из данного множества.

Противоположным событием для A называется событие $\overline{A}$, заключающееся в том, что A *не наступает*. Иначе говоря, $\overline{A}$ — это не наступление A.

Справедливы формулы:

$$\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n},$$

$$\overline{A_1 A_2 \ldots A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_n}.$$

С формальной точки зрения, событие — подмножество *пространства элементарных событий* Ω, испытание — случайный выбор элемента ω (называемого *элементарным исходом*) из множества Ω. Если для элементарного исхода ω выполняется включение $\omega \in A$, то событие *наступает*, если же $\omega \notin A$, то — *не наступает*.

В классической вероятностной модели пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ — конечное множество, при этом все элементарные события ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n имеют одну и ту же вероятность.

Пусть событие A состоит из $k = |A|$ элементарных событий ω_i (последние называются «благоприятными» для A). Тогда для определения вероятности события A применяется следующая формула (классический способ подсчета вероятностей):

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $n = |\Omega|$ — число всех элементарных исходов.

Пример 1. *Независимо друг от друга 5 человек садятся в поезд, содержащий 13 вагонов. Найдите вероятность того, что все они поедут в разных вагонах.*

Решение. Всего способов рассадить 5 человек в 13 вагонов равно $|\Omega| = 13^5$, из них событию A, что все они поедут в разных вагонах, благоприятствует $|A| = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ различных способов. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{154\,440}{371\,293} \approx 0{,}416.$$

Ответ: 0,416.

Пример 2. *Компания из $n = 16$ человек рассаживается в ряд случайным образом. Найдите вероятность того, что между двумя определенными людьми окажутся ровно $k = 6$ человек.*

Решение. Приведем одно из решений задачи, которое связано с выбором 2 мест, а не с размещением людей. Итак, два места из 16 можно выбрать C_{16}^2 способами. Событию A, выбору 2 мест, так чтобы между ними было ровно 6, благоприятствует $16 - 6 - 1 = 9$ способов. Таким образом, искомая вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{120} = 0{,}075.$$

Ответ: 0,075.

Пример 3. *В группе учатся 13 юношей и 9 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.*

Решение. Количество способов выбрать троих для дежурства совпадает с числом сочетаний из 22 по 3, т. е. $|\Omega| = C_{22}^3$. Из них событию A, что все дежурные окажутся юношами, благоприятствует $|A| = C_{13}^3$ способов выбрать троих юношей. Таким образом, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_{13}^3}{C_{22}^3} = \frac{286}{1\,540} \approx 0{,}186.$$

Ответ: 0,186.

Пример 4. *В партии из* 13 *деталей имеется* 8 *стандартных. Наудачу отобраны* 7 *деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей ровно* 5 *стандартных.*

Решение. Число способов отобрать 7 деталей совпадает с числом сочетаний из 13 по 7, т. е. $|\Omega| = C_{13}^7$. Событию A, что среди 7 деталей окажется ровно 5 стандартных, а, следовательно, остальные 2 — не стандартные, благоприятствует $|A| = C_8^5 \cdot C_5^2$ исходов. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_8^5 \cdot C_5^2}{C_{13}^7} = \frac{560}{1\,716} \approx 0{,}326.$$

Ответ: 0,326.

Пример 5. *В киоске продается* 9 *лотерейных билетов, из которых число выигрышных составляет* 3 *штуки. Студент купил* 4 *билета. Какова вероятность того, что число выигрышных среди них будет не меньше* 2*, но не больше* 3*?*

Решение. Количество способов выбрать 4 билета из 9 равно $|\Omega| = C_9^4$. Требуется определить вероятность события A, что среди 4 билетов окажется либо 2 (событие A_1), либо 3 (событие A_2) выигрышных билета. Событию A_1 благоприятствует $|A_1| = C_3^2 \cdot C_6^2$ способов, а событию A_2 — $|A_2| = C_3^3 \cdot C_6^1$ способов. Искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{|A_1| + |A_2|}{|\Omega|} = \frac{C_3^2 \cdot C_6^2 + C_3^3 \cdot C_6^1}{C_9^4} = \frac{51}{126} \approx 0{,}405.$$

Ответ: 0,405.

§ 2. Геометрическое определение вероятности

Одним из недостатков классического определения вероятности является то, что оно предполагает *конечное* число возможных исходов. Приводимые здесь примеры не укладываются в классическую схему, поскольку связаны с *бесконечным* множеством элементарных исходов опыта. Но в основе их, как и в классической схеме, лежит представление о равновозможных исходах. Говоря о том, что точка выбирается наугад в некоторой области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$, имеют в виду следующее: вероятность попадания точки в некоторую часть A области Ω равна отношению

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(A) = l_A$ — длина $(n = 1)$, $\mu(A) = S_A$ — площадь $(n = 2)$ или $\mu(A) = V_A$ объем $(n = 3)$ множества A.

Пример 6. *На отрезок AB длины 240 наудачу поставлена точка X. Найдите вероятность того, что меньший из отрезков AX и XB имеет длину меньшую, чем 48.*

Решение. Пусть x — координата точки X, тогда множество

$$\Omega = \{x\colon 0 \leqslant x \leqslant 240\}$$

представляет собой множество элементарных исходов, так что $l_\Omega = 240 - 0 = 240$. Событие A, что меньший из отрезков AX и XB имеет длину меньшую, чем 48, представляет собой подмножество Ω:

$$A = \{x \in \Omega\colon 0 \leqslant x \leqslant 48 \text{ или } 192 \leqslant x \leqslant 240\}.$$

Поэтому $l_A = (48 - 0) + (240 - 192) = 96$. Искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{l_A}{l_\Omega} = \frac{96}{240} = 0{,}4.$$

Ответ: 0,4.

Пример 7. *Два лица X и Y договорились о встрече между 9 и 10 часами утра. Если первым приходит X, то он ждет Y в течение 5 минут. Если первым приходит Y, то он ждет X в течение 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.*

Решение. Пусть x — момент прихода X в пределах указанного часа, y — момент прихода Y в пределах того же часа, тогда $\omega = (x, y)$ — элементарный исход. Множество

$$\Omega = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant 1, \}$$

представляет собой множество всех элементарных исходов, так что $S_\Omega = 1^2 = 1$. Обозначим через A — событие, что встреча состоится. Тогда, согласно условию задачи, событие A представляет собой подмножество Ω:

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega\colon y - x \leqslant \frac{1}{12},\, x - y \leqslant \frac{1}{6}\right\}.$$

Искомая вероятность равна отношению площади выделенного шестиугольника к площади квадрата:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2}{1^2} = \frac{67}{288} \approx 0{,}233.$$

Ответ: 0,233.

§ 3. Правила сложения и умножения вероятностей

Правило сложения вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Правило сложения вероятностей для несовместных событий: *если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны (никакие два из них не могут наступить вместе в одном испытании), то*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Для двух событий A и $\overline{A}$ отсюда следует равенство $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ или $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Вероятность события A при условии, что наступило событие B (*условная вероятность*) определяется формулой

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Правило умножения вероятностей: *если для событий* A_1, A_2, ..., A_n *вероятности* $P(A_1) > 0$, $P(A_1A_2) > 0$, ..., $P(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$, *то*

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = \\ = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \quad (1)$$

Если A и B — *независимые* события с положительной вероятностью, то выполняются равенства:

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B).$$

Правило умножения вероятностей для независимых событий: *если события* A_1, A_2, ..., A_n *независимы, то*

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Вычисление вероятности суммы событий можно свести к вычислению вероятности произведения по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n\right). \quad (2)$$

В частности, если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, из последнего равенства вытекает: вероятность наступления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна $1 - P\left(\overline{A}_1\right) \cdot P\left(\overline{A}_2\right) \ldots P\left(\overline{A}_n\right)$.

Пример 8. *Имеется* 25 *экзаменационных билетов, на каждом из которых напечатано условие некоторой задачи. В* 15 *билетах задачи по статистике, а в остальных* 10 *билетах задачи по теории вероятностей. Трое студентов выбирают наудачу по одному билету. Найдите вероятность того, что хотя бы одному из них не достанется задача по теории вероятностей.*

Решение. Приведем решение задачи, которое использует формулу умножения (другое решение основано на классической вероятности). Итак, обозначим через A_k событие, что k-му студенту не достанется задача по теории вероятности, следовательно, $\overline{A_k}$ — k-му студенту достанется задача по теории вероятностей. Тогда $A = A_1 + A_2 + A_3$ означает событие, что *хотя бы одному из них не достанется задача по теории* *вероятностей.* Тогда, используя (1) и (2), находим

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}\right) =$$
$$= 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}|\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}|\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}\right) =$$
$$= 1 - \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{8}{23} \approx 0{,}948.$$

Ответ: 0,948

Пример 9. *В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}17$, $p_2 = 0{,}73$ и $p_3 = 0{,}14$. Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.*

Решение. Пусть A_k обозначает событие, что тока не будет в k-ом элементе. Тогда $A = A_1 + A_2 + A_3$ означает событие, что тока в цепи не будет (поскольку элементы соединены последовательно). Тогда

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) =$$
$$= 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3)) =$$
$$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 0{,}807.$$

Ответ: 0,807.

Пример 10. *Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины допущена ошибка, равна $p = 0{,}05$. Найдите наименьшее число n измерений, которые необходимо произвести, чтобы с вероятностью больше, чем 0,83, можно было ожидать, что хотя бы один результат измерений окажется неверным.*

Решение. Пусть A_k обозначает событие, что при k-ом измерении некоторой физической величины допущена ошибка, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Через n обозначено количество измерений. Тогда $A = A_1 + \ldots + A_n$ означает событие, что *хотя бы один результат измерений окажется неверным при n измерениях.* Поэтому

$$P = P(A) = P(A_1 + \ldots + A_n) = 1 - (1 - p)^n > 0{,}83.$$

Откуда, решая полученное неравенство, находим:

$$n > \frac{\ln(1 - a)}{\ln(1 - p)} = \frac{\ln 0{,}17}{\ln 0{,}95} \approx 34{,}5.$$

Ответ: $n_{\min} = 35$.

Пример 11. *События A, B, C независимы и $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}7$; $P(C) = 0{,}6$. Найдите $P(AB \mid \overline{B} + \overline{C})$.*

Решение. Используя: **а**) определение условной вероятности; **б**) правило сложения вероятностей; **в**) независимость событий A, B и C, получаем

$$P(AB \mid \overline{B} + \overline{C}) \overset{\mathbf{а}}{=} \frac{P(AB \cdot (\overline{B} + \overline{C}))}{P(\overline{B} + \overline{C})} \overset{\mathbf{б}}{=} \frac{P(AB \cdot \overline{C})}{P(\overline{B}) + P(\overline{C}) - P(\overline{B} \cdot \overline{C})} =$$

$$\overset{\mathbf{в}}{=} \frac{P(A) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C})}{P(\overline{B}) + P(\overline{C}) - P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4}{0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}3 \cdot 0{,}4} \approx 0{,}386.$$

Ответ: 0,386.

§ 4. Формула полной вероятности и формула Байеса

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и при каждом испытании обязательно наступает хотя бы одно из этих событий.

Если события H_1, H_2, …, H_n образуют полную группу, то для любого события A справедливо равенство

$$P(A) = P(A|H_1)\, P(H_1) + P(A|H_2)\, P(H_2) + \ldots + P(A|H_n)\, P(H_n)$$

(*формула полной вероятности*). При этом события H_1, H_2, …, H_n называют *гипотезами*.

В тех же предположениях справедлива *формула Байеса*:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)\, P(H_i)}{P(A|H_1)\, P(H_1) + P(A|H_2)\, P(H_2) + \ldots + P(A|H_n)\, P(H_n)},$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример 12. *В ящике содержится $n_1 = 6$ деталей, изготовленных на заводе 1, $n_2 = 5$ деталей — на заводе 2 и $n_3 = 6$ деталей — на заводе 3. Вероятности изготовления брака на заводах с номерами 1, 2 и 3 соответственно равны: $p_1 = 0{,}04$, $p_2 = 0{,}02$ и $p_3 = 0{,}03$. Найдите вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется качественной.*

Решение. Пусть H_k — событие, что извлеченная наудачу деталь изготовлена на k-ом заводе, где $k = 1, 2, 3$. Тогда H_1, H_2, H_3 образуют полную группу событий, причем

$$P(H_1) = \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{6}{17},$$
$$P(H_2) = \frac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{5}{17},$$
$$P(H_3) = \frac{6}{17}.$$

Обозначим через A событие, что извлеченная наудачу деталь окажется бракованной. Противоположное к A будет событие $\overline{A}$, что извлеченная наудачу деталь окажется качественной. Тогда по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) =$$
$$= \frac{6}{17} \cdot 0{,}04 + \frac{5}{17} \cdot 0{,}02 + \frac{6}{17} \cdot 0{,}03 = \frac{13}{425} \approx 0{,}031.$$

Откуда искомая вероятность, что извлеченная наудачу деталь окажется качественной, равна

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}969.$$

Ответ: 0,969.

Пример 13. *Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике $n = 23$ белых шаров, во втором — $m = 9$ белых и $n - m = 14$ черных шаров, в третьем — $n = 23$ черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Найдите вероятность того, что шар вынут из второго ящика.*

Решение. Введем гипотезы, H_k, что выбран k-ый ящик, $k = 1, 2, 3$. Тогда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Обозначим через A событие, что извлеченный наудачу шар *окажется* белым. Поскольку у нас есть неопределенность, связанная с выбором ящика, то по формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{9}{23} + 0\right) = \frac{32}{69} \approx 0{,}464.$$

После того, как событие A произошло (вынутый шар *оказался* белым), по формуле Байеса переоценим вероятность гипотезы H_2:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{23}}{\frac{32}{69}} = \frac{9}{32} \approx 0{,}281.$$

Таким образом, вероятность того, что шар вынут из второго ящика, равна 0,281.
Ответ: 0,281.

§ 5. Независимые испытания. Схема Бернулли. Приближенные формулы Лапласа и Пуассона

Несколько испытаний (с конечным числом исходов) называются *независимыми*, если вероятность того или иного исхода в любом из этих испытаний не зависит от исхода других испытаний.

Схема Бернулли: производится n независимых испытаний, в каждом из которых с одной и той же вероятностью p наступает некоторое событие A (называемое обычно «успехом») и, следовательно, с вероятностью $q = 1 - p$ наступает событие $\overline{A}$, противоположное A.

Пусть $P_n(k)$ — вероятность того, что в схеме Бернулли успех наступит k раз. Справедлива *формула Бернулли*:

$$P_n\,(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Известно, что наиболее вероятное число успехов приближенно равно np. Точнее: если число $\alpha = np + p$ является целым, то максимум чисел $P_n(k)$ достигается при $k = \alpha$ и $k = \alpha - 1$; если же α — не целое, то максимум достигается при $k = [\alpha]$, где $[\alpha]$ — целая часть α.

При больших n имеет место так называемая *приближенная локальная формула Лапласа*:

$$P_n\,(k) \approx \frac{\varphi\,(x_0)}{\sqrt{npq}},$$

где $x_0 = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ — *функция Гаусса*.

Также при больших n справедлива *приближенная интегральная формула Лапласа*:

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ — *функция Лапласа.*

Приближенными формулами Лапласа на практике пользуются, если $npq > 10$.

Из приближенной интегральной формулы Лапласа следует, что при заданном $\varepsilon > 0$ и большом n вероятность события $\left|\dfrac{k}{n} - p\right| < \varepsilon$ близка к $2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right)$.

При больших n и малых p (точнее при $np^2 \ll 1$) справедлива *приближенная формула Пуассона*:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$.

Пример 14. *Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна* 0,18. *Сделано* 7 *выстрелов. Найдите вероятность того, что в цель попали менее трех раз.*

Решение. Пусть A событие, что в цель попали менее трех раз, причем вероятность успеха («попадет в цель при одном выстреле») $p = 0{,}18$, а $q = 1 - p = 0{,}82$. Тогда по формуле Бернулли имеем:

$$P(A) = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2) = q^7 + 7pq^6 + 21p^2q^5 \approx 0{,}885.$$

Ответ: 0,885.

Пример 15. *Отрезок длины* 6 *поделен на две части длины* 4 *и* 2 *соответственно,* 8 *точек последовательно бросают случайным образом на этот отрезок. Найдите вероятность того, что количество точек, попавших на отрезок длины* 4 *будет больше или меньше* 1.

Решение. Сначала найдем вероятность события A, что количество точек, попавших на отрезок длины 4, будет *равно одному.* Используя геометрическую вероятность, вероятность успеха для одной точки попасть в указанный отрезок равна $p = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. Тогда по формуле Бернулли

$$P(A) = P_8(1) = 8pq^7 = \frac{16}{6561} \approx 0{,}00244.$$

Следовательно, вероятность того, что количество точек, попавших на отрезок длины 4 будет больше или меньше 1, равна $1 - P(A) \approx 0{,}998$.
Ответ: 0,998.

Пример 16. *Монета подбрасывается до тех пор, пока герб не выпадет 7 раз. Найдите вероятность того, что будет произведено 14 бросков.*

Решение. Неверным было бы считать, что речь идет о 14 бросках, в семи из которых выпадет герб. По условию задачи при последнем, четырнадцатом бросании, должен выпасть герб (вероятность этого события равна $p = 0{,}5$). Остальные появления шести раз гербов могут случиться произвольно в предыдущих тринадцати бросаниях (вероятность такого события равна $C_{13}^6 p^6 q^7$). Таким образом, искомая вероятность равна

$$\left(C_{13}^6 p^6 q^7\right) \cdot p = C_{13}^6 p^7 q^7 = \frac{429}{4096} \approx 0{,}105.$$

Ответ: 0,105.

Пример 17. *Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадет* 5 *раз число очков, отличное от* 6*. Какова вероятность, что будет произведено* 8 *бросков?*

Решение. По условию задачи при последнем восьмом подбрасывании не выпадает 6 (вероятность этого события равна $p = \frac{5}{6}$. Остальные четыре раза выпадения числа очков, отличного от 6, могут случиться произвольно в семи предыдущих подбрасываниях игральной кости (вероятность такого события равна $C_7^4 p^4 q^3$). Искомая вероятность равна

$$p \cdot \left(C_7^4 p^4 q^3\right) = C_7^4 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0{,}0651.$$

Ответ: 0,0651.

Пример 18. *Вероятность попадания стрелком в цель равна* $\frac{1}{12}$*. Сделано* 132 *выстрелов. Определите наивероятнейшее число попаданий в цель.*

Решение. Мы имеем дело со схемой Бернулли, для которой $n = 132$, вероятность успеха $p = \frac{1}{12}$. Поскольку $\alpha = np + p = \frac{133}{12}$ — не целое, то наиболее вероятное число попаданий в цель равно $k = [\alpha] = 11$.
Ответ: 11.

Пример 19. *Вероятность выпуска бракованного изделия равна* 0,4. *Найдите вероятность того, что среди* 104 *выпущенных изделий ровно* 62 *изделия без брака.*

Решение. Мы имеем дело со схемой Бернулли, для которой $n = 104$, вероятность успеха, что изделие без брака, равна $p = 0{,}6$; $q = 1 - p = 0{,}4$. Требуется оценить $P_{104}(62)$. Поскольку $npq = 104 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 24{,}96 > 10$, то воспользуемся приближенной локальной формулой Лапласа, согласно которой

$$P_{104}(62) \approx \frac{1}{\sqrt{104 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \cdot \varphi\left(\frac{62 - 104 \cdot 0{,}6}{\sqrt{104 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) \approx$$
$$\approx 0{,}2 \cdot \varphi(-0{,}08) \approx 0{,}2 \cdot 0{,}3977 \approx 0{,}0795.$$

Ответ: 0,0795.

Пример 20. *Вероятность выпуска бракованного изделия равна* $p = \frac{7}{20}$. *Найдите вероятность того, что среди* $n = 108$ *выпущенных изделий будет хотя бы одно, но не более* $s = 37$ *бракованных изделий.*

Решение. В нашем случае, $n = 108$, вероятность успеха, что изделие бракованное, равна $p = 0{,}35$; $q = 0{,}65$. Требуется найти $P_{108}(1 \leqslant k \leqslant 37)$. Поскольку $npq = 108 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 24{,}57 > 10$, воспользуемся приближенной интегральной формулой Лапласа, согласно которой

$$P_{108}(1 \leqslant k \leqslant 37) \approx \Phi\left(\frac{37 - 108 \cdot 0{,}35}{\sqrt{108 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65}}\right) - \Phi\left(\frac{1 - 108 \cdot 0{,}35}{\sqrt{108 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65}}\right) \approx$$
$$\approx \Phi(-0{,}16) - \Phi(-7{,}42) \approx -0{,}0675 + 0{,}5 \approx 0{,}433.$$

Ответ: 0,433.

Пример 21. *Прядильщица обслуживает* 1 000 *веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение* 1 *минуты равна* 0,004. *Найдите вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет более чем на* 2 *веретенах.*

Решение. Применяется схема Бернулли: $n = 1\,000$ — число веретен; $p = 0{,}004$ — вероятность обрыва на 1-ом веретене; $A = \{k > 2\}$. Используя: **а**) формулу для вероятности противоположного события;

б) $\overline{A} = \{k=0\} + \{k=1\} + \{k=2\}$; **в**) приближенную формулу Пуассона ($np^2 = 0{,}016 \ll 1$, $\lambda = np = 4$), имеем

$$P(A) \overset{\mathbf{а}}{=} 1 - P(\overline{A}) \overset{\mathbf{б}}{=} 1 - P_{1000}(0) - P_{1000}(1) - P_{1000}(2) \approx$$
$$\overset{\mathbf{в}}{\approx} 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} =$$
$$= 1 - e^{-\lambda}\left(\frac{2 + 2\lambda + \lambda^2}{2}\right) \approx 1 - 0{,}238 = 0{,}762.$$

Ответ: 0,762.

§ 6. Распределение дискретной случайной величины

Случайная величина X называется *дискретной*, если множество всех ее возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$ конечно или счетно. Вероятность попадания X в какое-либо множество $B \subseteq \mathbb{R}$ находится по формуле

$$P\,(X \in B) = \sum_{x_i \in B} p_i,$$

где $p_i = P(X = x_i)$ — вероятность i-го возможного значения.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть представлен в форме таблицы:

X	x_1	x_2	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$

Нетрудно убедиться в том, что сумма чисел во второй строке этой таблицы равна $P(X \in \mathbb{R}) = 1$. В случае дискретной случайной величины X ее функция распределения имеет вид

$$F\,(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

т. е. $F(x)$ — ступенчатая функция со скачками в точках $x_1, x_2, \ldots$, причем величины скачков равны соответственно $p_1, p_2, \ldots$.

Пример 22. *Случайная величина X принимает только целые значения $1, 2, \ldots, 28$. При этом вероятности возможных значений X пропорциональны значениям: $P(X = k) = ck$. Найдите значение константы c и вероятность $P(X > 2)$.*

Решение. Имеем

$$1 = \sum_{k=1}^{28} P(X = k) = \sum_{k=1}^{28} c \cdot k = c\frac{28 \cdot 29}{2} = 406 \cdot c \Rightarrow c = \frac{1}{406}.$$

Далее, вероятность $P(X > 2)$ равна

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$= 1 - (c + 2c) = 1 - 3c = 1 - 3\frac{1}{406} = \frac{403}{406} \approx 0{,}993.$$

Ответ: $c = \frac{1}{406}$; $P(X > 2) = 0{,}993$.

§ 7. Независимые дискретные случайные величины

Для независимости дискретных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого набора их возможных значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнялось равенство

$$P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n) =$$
$$= P(X_1 = a_1) \cdot P(X_2 = a_2) \ldots P(X_n = a_n).$$

Пример 23. *Независимые дискретные случайные величины X, Y принимают только целые значения: X от -6 до 5 с вероятностью $\frac{1}{12}$, Y от -6 до 9 с вероятностью $\frac{1}{16}$. Найдите вероятность $P(XY = 0)$.*

Решение. Используя: **а**) правило сложения вероятностей; **б**) независимость случайных величин X и Y, имеем

$$P(XY = 0) \overset{\text{а}}{=} P(X = 0) + P(Y = 0) - P(X = 0, Y = 0) =$$
$$\overset{\text{б}}{=} P(X = 0) + P(Y = 0) - P(X = 0) \cdot P(Y = 0) =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} = \frac{9}{64} \approx 0{,}141.$$

Ответ: 0,141.

Пример 24. *Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X — от 0 до 7, Y — от 0 до 10, Z — от 0 до 13. Найдите вероятность $P(X + Y + Z = 4)$, если известно, что возможные значения X, Y и Z равновероятны.*

Решение. Поскольку возможные значения X, Y и Z равновероятны, имеем:

$$P(X=k)=\frac{1}{8}, \qquad k=0,1,\ldots,7,$$
$$P(Y=l)=\frac{1}{11}, \qquad l=0,\ldots,10,$$
$$P(Z=m)=\frac{1}{14}, \qquad m=0,\ldots,13.$$

С учетом: **а**) попарной несовместности событий $\{X=k,\, Y=l,\, Z=m\}$ при различных k, l, m; **б**) независимости событий $\{X=k\}$, $\{Y=l\}$, $\{Z=m\}$, находим

$$P(X+Y+Z=4) \overset{\mathbf{а}}{=} \sum_{k+l+m=4} P(X=k, Y=l, Z=m) =$$
$$\overset{\mathbf{б}}{=} \sum_{k+l+m=4} P(X=k)\cdot P(Y=l)\cdot P(Z=m) =$$
$$= C_6^2\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{14} = \frac{C_6^2}{1\,232} = \frac{15}{1\,232} \approx 0{,}0122.$$

При подсчете количества слагаемых в последней сумме мы использовали тот факт, что число троек $k+l+m=4$ совпадает с числом последовательностей, состоящих из 4 единиц и 2 нулей.

Ответ: 0,0122.

Пример 25. *Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X — от 1 до 13 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y — от 1 до 9 с вероятностью $\frac{1}{9}$, Z — от 1 до 7 с вероятностью $\frac{1}{7}$. Найдите вероятность $P(X<Y<Z)$.*

Решение. Используя: **а**) попарную несовместность событий $\{X=k,\, Y=l,\, Z=m\}$ при различных k, l, m; **б**) независимость событий $\{X=k\}$, $\{Y=l\}$, $\{Z=m\}$, находим

$$P(X<Y<Z) \overset{\mathbf{а}}{=} \sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 7} P(X=k, Y=l, Z=m) =$$
$$\overset{\mathbf{б}}{=} \sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 7} P(X=k)\cdot P(Y=l)\cdot P(Z=m) =$$
$$= C_7^3\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{7} = \frac{C_7^3}{13\cdot 9\cdot 7} = \frac{35}{819} \approx 0{,}0427.$$

При подсчете количества слагаемых в последней сумме мы использовали тот факт, что число троек (k, l, m), для которых $1 \leqslant k < l < m \leqslant 7$, совпадает с числом способов выбора трех различных чисел из множества $\{1, 2, \ldots, 7\}$.

Ответ: 0,0427.

Пример 26. *Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: Y и Z — от 1 до 20 с вероятностью $\frac{1}{20}$, а X только значения 5 и 10, при этом $P(X = 5) = \frac{9}{10}$. Найдите вероятность $P(X < Y < Z)$.*

Решение. С учетом: **а**) формулы полной вероятности; **б**) независимости Y и Z от X; **в**) попарной несовместности событий $\{Y = l,\ Z = m\}$ для различных l и m; **г**) независимости Y и Z, находим

$$
\begin{aligned}
P(X < Y < Z) &\overset{\textbf{а}}{=} P(5 < Y < Z | X = 5) \cdot P(X = 5) + \\
&+ P(10 < Y < Z | X = 10) \cdot P(X = 10) = \\
&\overset{\textbf{б}}{=} P(5 < Y < Z) \cdot P(X = 5) + P(10 < Y < Z) \cdot P(X = 10) = \\
&\overset{\textbf{в}}{=} \left[\sum_{6 \leqslant l < m \leqslant 20} P(Y = l, Z = m) \right] \cdot P(X = 5) + \\
&+ \left[\sum_{11 \leqslant l < m \leqslant 20} P(Y = l, Z = m) \right] \cdot P(X = 10) = \\
&\overset{\textbf{г}}{=} \left[\sum_{6 \leqslant l < m \leqslant 20} P(Y = l) \cdot P(Z = m) \right] \cdot P(X = 5) + \\
&+ \left[\sum_{11 \leqslant l < m \leqslant 20} P(Y = l) \cdot P(Z = m) \right] \cdot P(X = 10) = \\
&= C_{15}^2 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{9}{10} + C_{10}^2 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{10} = \frac{99}{400} = 0{,}2475.
\end{aligned}
$$

Ответ: 0,2475.

§ 8. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, множество возможных значений которой конечно, называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Если множество возможных значений счетное, то

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части сходится абсолютно.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. *Математическое ожидание константы равно этой константе:*

$$E(C) = C.$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:*

$$E(CX) = CE(X).$$

3. *Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:*

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n).$$

4. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:*

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \ldots \cdot E(X_n).$$

5. *Если $\varphi(x)$ — числовая функция и X — дискретная случайная величина, то*

$$E[\varphi(X)] = \varphi(x_1)p_1 + \varphi(x_2)p_2 + \ldots.$$

6. *Если $\varphi(x)$ — выпуклая функция, то для любой случайной величины X выполняется неравенство Йенсена:*

$$E[\varphi(X)] \geqslant \varphi\left(E[X]\right).$$

Пример 27. *Независимые случайные величины X_1, X_2, ..., X_8 принимают только целые значения -9, -8, ..., 6, 7. Найдите математическое ожидание $E(X_1 \cdot X_2 \ldots X_8)$, если известно, что возможные значения равновероятны.*

Решение. Сначала найдем математическое ожидание какой-нибудь одной случайной величины X_k:

$$E(X_k) = \frac{1}{17} \cdot (-9 - 8 - \ldots - 0 + 1 + 2 + \ldots 7) = -1.$$

Используя свойства математического ожидания, находим

$$E(X_1 \cdot X_2 \ldots X_8) = E(X_1) \cdot E(X_2) \ldots E(X_8) = \\ = [E(X_k)]^8 = (-1)^8 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 28. *Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_5$ могут принимать только значения* 0 *и* 1. *При этом $P(X_i = 0) = 0{,}4$, $i = 1, \ldots, 5$. Найдите математическое ожидание $E[4^{X_1 + \ldots + X_5}]$.*

Решение. Для одной случайной величины X_k имеем

$$E[4^{X_k}] = 4^0 \cdot 0{,}4 + 4^1 \cdot 0{,}6 = 2{,}8.$$

Тогда, используя, что 4^{X_1}, ..., 4^{X_5} — независимые случайные величины, находим

$$E[4^{X_1 + \ldots + X_5}] = E[4^{X_1}] \ldots E[4^{X_5}] = \left(E[4^{X_k}]\right)^5 = (2{,}8)^5 \approx 172{,}1.$$

Ответ: 172,1.

§ 9. Дисперсия дискретной случайной величины

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от $E(X)$ называется *дисперсией* X:

$$D(X) = E([X - E(X)]^2).$$

Стандартное (*среднее квадратичное*) *отклонение* случайной величины X определяется как корень из дисперсии и обозначается σ_X или $\sigma(X)$,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

2. *Дисперсия константы равна нулю:* $D(C) = 0$.

3. *Постоянный множитель выносится из-под знака дисперсии в квадрате:*
$$D(CX) = C^2 D(X).$$

4. *Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:*
$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

В частности, прибавление константы C к случайной величине X не меняет ее дисперсии: $D(X + C) = D(X)$.

Свойство 2 дисперсии обращается в несколько ослабленном виде: *если* $D(X) = 0$*, то для некоторой константы* C *равенство* $X = C$ *выполняется с вероятностью* 1.

Пример 29. *Распределение случайной величины* X *задано таблицей*

X	4	8	11	14	18
P	0,1	0,25	0,3	0,25	0,1

.

Найдите математическое ожидание $m = E(X)$*, среднее квадратичное отклонение* $\sigma = \sigma_X$ *и вероятность* $P(|X - m| < \sigma)$.

Решение. По определению математического ожидания и свойства дисперсии имеем:

$$m = E(X) = 4 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}25 + 11 \cdot 0{,}3 + 14 \cdot 0{,}25 + 18 \cdot 0{,}1 = 11;$$
$$E(X^2) = 4^2 \cdot 0{,}1 + 8^2 \cdot 0{,}25 + 11^2 \cdot 0{,}3 + 14^2 \cdot 0{,}25 + 18^2 \cdot 0{,}1 = 135{,}3;$$
$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 135{,}3 - 11^2 = 14{,}3.$$

Следовательно, стандартное отклонение равно
$$\sigma = \sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{14{,}3} \approx 3{,}782.$$

Таким образом, искомая вероятность равна
$$\begin{aligned} P(|X - m| < \sigma) &= P(|X - 11| < 3{,}782) = P(7{,}218 < X < 14{,}782) = \\ &= P(X = 8) + P(X = 11) + P(X = 14) = \\ &= 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}25 = 0{,}8. \end{aligned}$$

Ответ: $m = 11$; $\sigma = 3{,}782$; $P(|X - m| < \sigma) = 0{,}8$.

Пример 30. *Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X = 0) = 0{,}9$, $P(Y = 0) = 0{,}3$. Найдите математическое ожидание $E[(X - Y)^2]$.*

Решение. Сначала найдем математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}9 + 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1; \qquad E(Y) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}7;$$
$$E(X^2) = 0^2 \cdot 0{,}9 + 1^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}1; \qquad E(Y^2) = 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}7;$$
$$D(X) = 0{,}1 - (0{,}1)^2 = 0{,}09; \qquad D(Y) = 0{,}7 - (0{,}7)^2 = 0{,}21.$$

Тогда, используя свойства дисперсии, находим:

$$\begin{aligned} E[(X - Y)^2] &= D(X - Y) + [E(X - Y)]^2 = \\ &= D(X) + D(Y) + [E(X) - E(Y)]^2 = \\ &= 0{,}09 + 0{,}21 + (0{,}1 - 0{,}7)^2 = 0{,}66. \end{aligned}$$

Ответ: 0,66.

Пример 31. *Для независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_4$ известно, что их математические ожидания $E(X_i) = -2$, дисперсии $D(X_i) = 1$, $i = 1, \ldots, 4$. Найдите дисперсию произведения $D(X_1 \ldots X_4)$.*

Решение. Используя свойства дисперсии, находим

$$\begin{aligned} D(X_1 \ldots X_4) &= E[(X_1 \ldots X_4)^2] - [E(X_1 \ldots X_4)]^2 = \\ &= E(X_1^2 \ldots X_4^2) - [E(X_1) \ldots E(X_4)]^2 = \\ &= E(X_1^2) \ldots E(X_4^2) - [E(X_i)]^8 = \\ &= \left[D(X_i) + [E(X_i)]^2\right]^4 - (-2)^8 = \\ &= [1 + (-2)^2]^4 - 256 = 625 - 256 = 369. \end{aligned}$$

Ответ: 369.

Пример 32. *Вероятность выигрыша 3 рублей в одной партии равна $\frac{2}{5}$, вероятность проигрыша 2 рублей равна $\frac{3}{5}$. Найдите дисперсию капитала игрока после 5 партий.*

Решение. Представим случайную величину K, капитал игрока, в виде суммы

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \ldots + K_5,$$

где K_0 — начальный капитал, K_i — изменение капитала игрока в результате i-ой партии ($i = 1, 2, \ldots, 5$). Тогда

$$D(K_i) = E(K_i^2) - [E(K_i)]^2 = \left(3^2 \cdot \frac{2}{5} + (-2)^2 \cdot \frac{3}{5}\right) - \left[3 \cdot \frac{2}{5} - 2 \cdot \frac{3}{5}\right]^2 = 6.$$

Следовательно, дисперсия капитала игрока после 5 сыгранных независимых партий составит

$$D(K) = D(K_0 + K_1 + \ldots + K_5) = \\ = D(K_1) + \ldots + D(K_5) = 5 \cdot D(K_i) = 5 \cdot 6 = 30.$$

Ответ: 30.

§ 10. Числовые характеристики основных дискретных законов распределения

Биномиальным распределением с параметрами n и p называется распределение числа успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха в каждом испытании p. Биномиальное распределение имеет вид:

X	0	1	2	$\ldots$	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^n p^n q^0$

,

где $q = 1 - p$. Для случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p, имеем:

$$E(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$ задается следующей бесконечной таблицей

X	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	$e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\ldots$	$\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$\ldots$

.

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равны параметру λ данного распределения.

Геометрическим распределением с параметром p называется распределение числа испытаний до первого успеха в серии независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании. Геометрическое распределение имеет вид бесконечной таблицы

X	1	2	3	...	k	...
P	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...

Для дискретной случайной величины X, распределенной по геометрическому закону, $E\,(X) = \frac{1}{p}$, $D\,(X) = \frac{q}{p^2}$.

Пример 33. *Производится* 1920 *независимых испытаний, состоящих в том, что одновременно подбрасываются* 7 *монет. Пусть* X *— число испытаний, в которых выпало* 3 *герба. Найдите математическое ожидание* $E(X)$.

Решение. По условию задачи случайная величина X, число испытаний, распределена по биномиальному закону, причем $n = 1920$. Вероятность успеха в одном испытании p найдем как вероятность события, что при одновременном подбрасывании 7 монет выпадет 3 герба. Здесь можно воспользоваться формулой Бернулли, согласно которой

$$p = P_7(3) = C_7^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}.$$

Следовательно, искомое математическое ожидание равно

$$E(X) = np = 1920 \cdot \frac{35}{128} = 525.$$

Ответ: 525.

Пример 34. *Производится* 10 *независимых испытаний с вероятностью успеха* 0,6 *в каждом испытании. Пусть* X *— число успехов в испытаниях с номерами* 1, 2, ..., 7*,* Y *— число успехов в испытаниях с номерами* 5, 6, ..., 10*. Найдите дисперсию* $D[X + 2Y]$.

Решение. Представим случайные величины X и Y в виде $X = U + V$ и $Y = V + W$, где U обозначает число успехов в испытаниях с номерами 1, 2, 3 и 4, V — число успехов в испытаниях с номерами 5, 6 и 7, а W — число успехов в испытаниях с номерами 8, 9 и 10. Поскольку испытания *независимы*, то случайные величины U, V и W также *независимы*, что нельзя сказать о случайных величинах X и Y. Ясно, что U, V и W распределены по биномиальному закону, причем $D(U) = 4pq$, $D(V) = 3pq$, $D(W) = 3pq$, где $p = 0{,}6$ — вероятность успеха в одном испытании, а $q = 1 - p = 0{,}4$. Следовательно,

$$D(X + 2Y) = D(U + 3V + 2W) = D(U) + 9D(V) + 4D(W) = \\ = 4pq + 27pq + 12pq = 43pq = 43 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 10{,}32.$$

Ответ: 10,32.

Пример 35. *На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых* 10 *и* 50 *соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X — число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.*

Решение. По условию задачи случайная величина X (число бросаний) распределена по геометрическому закону. Вероятность успеха p в одном испытании определим как вероятность события A, что точка, брошенная в большой квадрат Ω, попадет и в маленький. Используя геометрическую вероятность, найдем

$$p = P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{10^2}{50^2} = \frac{1}{25}.$$

Таким образом, используя формулы для математического ожидания и дисперсии в случае геометрического распределения, находим

$$E(X) = \frac{1}{p} = 25, \quad D(X) = \frac{q}{p^2} = 600.$$

Ответ: 25; 600.

Пример 36. *Для пуассоновской случайной величины X отношение $\dfrac{P(X=10)}{P(X=9)} = 6$. Найдите математическое ожидание $E[X]$.*

Решение. Если X распределена по закону Пуассона, то

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0{,}1, 2, \ldots .$$

Поэтому

$$6 = \frac{P(X = 10)}{P(X = 9)} = \frac{\lambda^{10}}{10}.$$

Откуда, $\lambda = 60$. Следовательно, $E(X) = D(X) = \lambda = 60$.
Ответ: 60.

§ 11. Ковариация и коэффициент корреляции

Ковариация $\operatorname{Cov}(X, Y)$ случайных величин X, Y задается формулой

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Ковариация обладает следующими свойствами:

1. $\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

2. $\operatorname{Cov}(X, X) = D(X)$.

3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y)$.

4. *Если X и Y независимы, то* $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

5. $\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(Y, X)$.

6. $\operatorname{Cov}(aX, Y) = \operatorname{Cov}(X, aY) = a\operatorname{Cov}(X, Y)$, *где* $a = \mathrm{const}$.

7. $\operatorname{Cov}(X + Y, Z) = \operatorname{Cov}(X, Z) + \operatorname{Cov}(Y, Z)$.

8. $\operatorname{Cov}(X, Y + Z) = \operatorname{Cov}(X, Y) + \operatorname{Cov}(X, Z)$.

Если $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$, то случайные величины X и Y называются *некоррелированными*. Таким образом, из независимости X и Y следует их некоррелированность. Обратное утверждение неверно.

Ковариация $\operatorname{Cov}(X, Y)$ может использоваться как характеристика взаимосвязи X и Y. Например, положительный знак $\operatorname{Cov}(X, Y) > 0$ свидетельствует о том, что в колебательной динамике случайных величин X и Y преобладают отклонения от средних значений в одном направлении. Для подобного сравнения случайных величин, однако, больше подходит безразмерная характеристика — *коэффициент корреляции*, определяемый формулой

$$\rho_{XY} = \rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Свойства коэффициента корреляции:

1. $\rho_{XY} = \rho_{YX}$.

2. $|\rho_{XY}| \leqslant 1$.

3. *Условие* $|\rho_{XY}| = 1$ *равнозначно существованию таких констант* α *и* $\beta \neq 0$, *что равенство* $Y = \alpha + \beta X$ *выполняется с вероятностью* 1.

Пример 37. *Случайные величины* X, Y *принимают только значения* 0 *и* 1. *Найдите дисперсию* $D(X - Y)$, *если вероятности* $P(X = 1) = P(Y = 1) = 0{,}5$, *а коэффициент корреляции* X *и* Y *равен* 0,7.

Решение. Математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y равны:

$$E(X) = E(Y) = 0{,}5; \quad D(X) = D(Y) = 0{,}25.$$

Используя определение коэффициента корреляции и свойства ковариации, находим

$$\begin{aligned} D(X - Y) &= D(X) + D(Y) - 2\operatorname{Cov}(X, Y) = \\ &= D(X) + D(Y) - 2\rho_{XY}\sigma(X)\sigma(Y) = \\ &= 0{,}25 + 0{,}25 - 2 \cdot 0{,}7\sqrt{0{,}25} \cdot \sqrt{0{,}25} = 0{,}15. \end{aligned}$$

Ответ: 0,15.

Пример 38. *Случайные величины* X, Y *распределены по закону Пуассона. Найдите* $E\{(X + Y)^2\}$, *если* $E(X) = 40$ *и* $E(Y) = 70$, *а коэффициент корреляции* X *и* Y *равен* 0,8.

Решение. Поскольку случайные величины X и Y распределены по закону Пуассона и известны их математические ожидания, соответствующие дисперсии равны:

$$D(X) = E(X) = 40; \quad D(Y) = E(Y) = 70.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E\{(X + Y)^2\} &= D(X + Y) + [E(X + Y)]^2 = \\ &= D(X) + D(Y) + 2\rho_{XY}\sigma(X)\sigma(Y) + [E(X) + E(Y)]^2 = \\ &= 40 + 70 + 2 \cdot 0{,}8\sqrt{40}\sqrt{70} + (40 + 70)^2 \approx 12\,294{,}7. \end{aligned}$$

Ответ: 12 294,7.

§ 12. Абсолютно непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

Пусть $F(x) = P(X < x)$ — функция распределения некоторой случайной величины X. Если $F(x)$ непрерывна, то $P(X = c) = 0$ для любого $c \in \mathbb{R}$. Кроме того, вероятности событий

$$\{a \leqslant X \leqslant b\},\ \{a \leqslant X < b\},\ \{a < X \leqslant b\},\ \{a < X < b\}$$

одинаковы и равны $F(b) - F(a)$, если $a \leqslant b$.

Абсолютно непрерывная случайная величина X характеризуется наличием *плотности распределения* (*вероятности*) — неотрицательной функции $f(x)$, такой, что для любого отрезка $[a,\, b]$ вероятность

$$P(X \in [a,\, b]) = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Функция распределения $F(x)$ абсолютно непрерывной случайной величины непрерывна и может быть представлена в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Отметим, что для любой функции плотности справедливы соотношения:

- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ (*свойство нормированности*);
- $f(x) = F'(x)$ *в точках непрерывности* $f(x)$.

Нахождение математического ожидания абсолютно непрерывной случайной величины X в общем случае сводится к вычислению несобственного интеграла

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

а для случайной величины X, сосредоточенной на отрезке $[a,\, b]$, $P(X \in [a,\, b]) = 1$, — к вычислению интеграла по этому отрезку

$$E(X) = \int\limits_a^b x f(x)\, dx.$$

Пусть Y — случайная величина вида $Y = \varphi(X)$. Математическое ожидание Y вычисляется в общем случае по формуле

$$E(\varphi(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\, dx,$$

а для случайной величины, сосредоточенной на отрезке $[a,\, b]$, — по формуле

$$E(\varphi(X)) = \int\limits_{a}^{b} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

В частности, для начальных моментов $\nu_k = E(X^k)$ и центральных моментов $\mu_k = E\big\{(X - \nu_1)^k\big\}$ имеем

$$\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx,$$

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \nu_1)^k f(x)\, dx.$$

Поскольку $D(X) = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$, приведенные формулы используются и для вычисления дисперсии.

Пример 39. *Функция плотности распределения случайной величины X имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, x < 5, \\ \dfrac{C}{x^2}, x \geqslant 5. \end{cases}$ Найдите константу C и вероятность $P(X < 6)$.*

Решение. Из свойства нормированности имеем

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = C \int\limits_{5}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{C}{5}.$$

Отсюда $C = 5$. Далее,

$$P(X < 6) = F(6) = \int\limits_{-\infty}^{6} f(x)\, dx = 5 \int\limits_{5}^{6} \frac{dx}{x^2}\, dx = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $C = 5$, $P(X < 6) = \dfrac{1}{6}$.

Пример 40. *Плотность распределения случайной величины X имеет вид* $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$ *Найдите a и $P\left(|X| > \frac{a}{2}\right)$.*

Решение. Из условия нормированности находим

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{3}{2}\int\limits_{-a}^{a} x^2\,dx = a^3,$$

Поэтому $a = 1$. Тогда искомая вероятность при $a = 1$ равна:

$$P\left(|X| > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(-\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Ответ: $a = 1$, $P\left(|X| > \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$.

Пример 41. *Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-2, 3]$. Найдите вероятность $P\left(\dfrac{1}{X-2} > 7\right)$.*

Решение. Отметим, что если случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, то вероятность события $\{a \leqslant \alpha < X < \beta \leqslant b\}$ можно найти, используя «геометрическую вероятность», т. е.

$$P\left(X \in (\alpha, \beta)\right) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}, \quad a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b.$$

В нашем случае событие $\left\{\dfrac{1}{X-2} > 7\right\}$ равносильно событию $\left\{X \in \left(2; \frac{15}{7}\right)\right\}$. Поэтому искомая вероятность равна

$$P\left(\frac{1}{X-2} > 7\right) = P\left(X \in \left(2; \frac{15}{7}\right)\right) = \frac{\frac{15}{7} - 2}{3 - (-2)} = \frac{1}{35}.$$

Ответ: $P\left(\dfrac{1}{X-2} > 7\right) = \dfrac{1}{35}$.

Пример 42. *Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найдите дисперсию $D\left(7X^{\frac{5}{2}}\right)$.*

Решение. Поскольку случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,1]$, ее плотность вероятности $f(x)$ имеет вид $f(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [0,1], \\ 0, \ x \notin [0,1]. \end{cases}$ Используя свойства дисперсии, находим

$$D\left(7X^{\frac{5}{2}}\right) = 7^2 D\left(X^{\frac{5}{2}}\right) = 49\left(E\left(X^5\right) - \left(E\left(X^{\frac{5}{2}}\right)\right)^2\right) =$$

$$= 49\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^5 f(x)\,dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx\right)^2\right) =$$

$$= 49\left(\int\limits_0^1 x^5 \cdot 1\,dx - \left(\int\limits_0^1 x^{\frac{5}{2}} \cdot 1\,dx\right)^2\right) = 49\left(\frac{1}{6} - \left(\frac{2}{7}\right)^2\right) = \frac{25}{6}.$$

Ответ: $D\left(7X^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{25}{6}$.

Пример 43. *Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,9]$. Найдите $E\{5 - \ln(3X)\}$.*

Решение. Плотность вероятности для случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[0,9]$, имеет вид $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, \ x \in [0,9], \\ 0, \ x \notin [0,9]. \end{cases}$

Используя свойства математического ожидания и формулу интегрирования по частям, находим

$$E\{5 - \ln(3X)\} = 5 - E(\ln(3X)) = 5 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln(3x) f(x)\,dx =$$

$$= 5 - \frac{1}{9}\int\limits_0^9 \ln(3x)\,dx = 5 - \frac{1}{9}\left(x \cdot \ln(3x)\Big|_0^9 - \int\limits_0^9 x \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3\,dx\right) =$$

$$= 5 - \frac{1}{9}\left(9\ln(27) - 9\right) = 6 - 3\ln 3 \approx 2{,}7042.$$

Ответ: $E\{5 - \ln(3X)\} = 6 - 3\ln 3 \approx 2{,}7042$.

Пример 44. *Случайные величины X и Y независимы и равномерно распределены на отрезках: X — на отрезке $[0, 1]$, Y — на отрезке $[3, 7]$. Найдите $E\{X \cdot (6X^4 + Y)\}$.*

Решение. Плотности вероятностей $f(x)$ и $g(x)$ для случайных величин X и Y имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [0{,}1], \\ 0, \ x \notin [0{,}1], \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \ x \in [3{,}7], \\ 0, \ x \notin [3{,}7]. \end{cases}$$

Используя свойства математического ожидания для независимых случайных величин, находим

$$E\{X \cdot (6X^4 + Y)\} = 6E(X^5) + E(X) \cdot E(Y) =$$
$$= 6\int_{-\infty}^{\infty} x^5 f(x)\,dx + \frac{0+1}{2} \cdot \frac{7+3}{2} = 6\int_0^1 x^5\,dx + \frac{5}{2} = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}.$$

Ответ: $E\{X \cdot (6X^4 + Y)\} = \frac{7}{2}$.

Пример 45. *Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-7, 7]$. Найдите коэффициент корреляции случайных величин X и $Y = X^7$.*

Решение. Плотность вероятности для случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[-7, 7]$, имеет вид $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{14}, \ x \in [-7, 7], \\ 0, \ x \notin [-7, 7]. \end{cases}$

Последовательно находим:

$$E(X) = \frac{7 + (-7)}{2} = 0, \quad D(X) = \frac{(7 - (-7))^2}{12} = \frac{49}{3},$$
$$E(Y) = E(X^7) = \int_{-\infty}^{\infty} x^7 f(x)\,dx = \frac{1}{14}\int_{-7}^{7} x^7\,dx = 0,$$

$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = E(X^{14}) - 0 = \frac{1}{14}\int_{-7}^{7} x^{14}\,dx = 4{,}5215 \cdot 10^{10},$$

$$E(X \cdot Y) = E(X^8) = \frac{1}{14} \int\limits_{-7}^{7} x^8\, dx = 6{,}4053 \cdot 10^5,$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - M(X) \cdot E(Y) = 6{,}4053 \cdot 10^5.$$

Таким образом, коэффициент корреляции равен

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}7454.$$

Ответ: $\rho(X, Y) \approx 0{,}7454$.

Пример 46. *Найдите математическое ожидание и дисперсию произведения независимых случайных величин X и Y с равномерными законами распределения: X — на отрезке $[0, 1]$, Y — на отрезке $[2, 9]$.*

Решение. Последовательно находим

$$E(X) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad D(X) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}, \quad E(Y) = \frac{11}{2}, \quad D(Y) = \frac{49}{12}.$$

Используя свойства математического ожидания для независимых случайных величин X и Y, определяем

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} = 2{,}75,$$

$$\begin{aligned} D(X \cdot Y) &= E(X^2 \cdot Y^2) - E^2(X \cdot Y) = E(X^2) \cdot E(Y^2) - E^2(X) \cdot E^2(Y) = \\ &= (D(X) + E^2(X)) \cdot (D(Y) + E^2(Y)) - E^2(X) \cdot E^2(Y) = \\ &= D(X) \cdot D(Y) + E^2(X) \cdot D(Y) + E^2(Y) \cdot D(X) = \frac{559}{144} \approx 3{,}8819. \end{aligned}$$

Ответ: $E(X \cdot Y) = 2{,}75$; $D(X \cdot Y) \approx 3{,}8819$.

Пример 47. *Случайные величины $X_1, \ldots, X_4$ независимы и распределены по показательному закону. Найдите $E\{(X_1 + \ldots + X_4 - 5)^2\}$, если $E(X_1) = \ldots = E(X_4) = 5$.*

Решение. Напомним, что если случайная величина X распределена по показательному закону с параметром λ, то $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Поэтому, $D(X_1) = E^2(X_1) = 25$. Используя свойства дисперсии для независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_4$, находим

$$E\left\{(X_1 + \ldots + X_4 - 5)^2\right\} =$$
$$= D(X_1 + \ldots + X_4 - 5) + E^2(X_1 + \ldots + X_4 - 5) =$$
$$= 4 \cdot D(X_1) + \left(4 \cdot E(X_1) - 5\right)^2 = 4 \cdot 25 + 15^2 = 325.$$

Ответ: $E\{(X_1 + \ldots + X_4 - 5)^2\} = 325$.

Пример 48. *Случайная величина X распределена по показательному закону. Найдите математическое ожидание $E\{(X-7)\cdot(6-X)\}$, если дисперсия $D(4-4X) = 36$.*

Решение. Из условия, что $D(4 - 4X) = 36$, находим $D(X) = \frac{9}{4}$. Поскольку X распределена по показательному закону, $E(X) = \frac{3}{2}$. Используя свойства математического ожидания, находим

$$E\left\{(X - 7) \cdot (6 - X)\right\} = E(13X - 42 - X^2) =$$
$$= 13 \cdot E(X) - E(X^2) - 42 = 13 \cdot E(X) - \big(D(X) + E^2(X)\big) - 42 =$$
$$= 13 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{9}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - 42 = -27.$$

Ответ: $E\{(X - 7) \cdot (6 - X)\} = -27$.

Пример 49. *Случайная величина X распределена по показательному закону. Найдите вероятность $P(16 < X < 32)$, если $E(X) = \frac{8}{\ln 2}$.*

Решение. Из условия, что $E(X) = \frac{8}{\ln 2}$, находим $\lambda = \frac{\ln 2}{8}$. Если X распределена по показательному закону с параметром λ, то

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda \cdot a} - e^{-\lambda \cdot b}.$$

Поэтому искомая вероятность равна

$$P(16 < X < 32) = e^{-16 \cdot \frac{\ln 2}{8}} - e^{-32 \cdot \frac{\ln 2}{8}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Ответ: $P(16 < X < 32) = \frac{3}{16}$.

Пример 50. *Случайные величины X и Y независимые и распределены по показательному закону, причем $E(X) = 1$, $E(Y) = 5$. Найдите* $\mathrm{Cov}(X \cdot Y, X - Y)$.

Решение. Используя свойства ковариации математического ожидания для независимых случайных величин X и Y, находим

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X \cdot Y, X - Y) &= E(XY \cdot (X - Y)) - E(X \cdot Y) \cdot E(X - Y) = \\ &= E(X^2) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y^2) - E(X) \cdot E(Y) \cdot (E(X) - E(Y)) = \\ &= E(Y) \cdot \big(E(X^2) - E^2(X)\big) - E(X) \cdot \big(E(Y^2) - E^2(Y)\big) = \\ &= E(Y) \cdot D(X) - E(X) \cdot D(Y) = 5 \cdot 1^2 - 1 \cdot 5^2 = -20.\end{aligned}$$

Ответ: $\mathrm{Cov}(X \cdot Y, X - Y) = -20$.

§ 13. Закон распределения функции от случайной величины

Пусть X — произвольная случайная величина, Y — случайная величина вида $Y = \varphi(X)$; $F_X(x)$ и $F_Y(x)$ — их функции распределения. Можно доказать, что $F_Y(x)$ однозначно определяется функциями $\varphi(x)$ и $F_X(x)$. Если, например, $\varphi(x)$ — возрастающая функция с обратной функцией $\psi(x)$, то

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(X < \psi(x)) = F_X(\psi(x)).$$

Предположим, что $F_Y(x)$ дифференцируема всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда случайная величина Y является абсолютно непрерывной, а плотностью распределения Y в этом случае является любая неотрицательная функция, совпадающая с $F'_Y(x)$ везде, где определена $F'_Y(x)$.

Пример 51. *Распределение случайной величины X задано плотностью вероятности $f(x)$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = 5 - 9X$.*

Решение. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины X, $F(x) = P(X < x)$ и $f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$. Обозначим через $G(x)$ функцию распределения случайной величины Y, а через $g(x) = \dfrac{d}{dx}G(x)$ —

ее плотность вероятности. Выразим $G(x)$ через $F(x)$:

$$G(x) = P(Y < x) = P(5 - 9X < x) = P\left(X > \frac{5-x}{9}\right) =$$

$$= 1 - P\left(X \leqslant \frac{5-x}{9}\right) = 1 - F\left(\frac{5-x}{9}\right).$$

Дифференцируя полученное равенство, находим плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = 5 - 9X$:

$$g(x) = \frac{d}{dx}\,G(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - F\left(\frac{5-x}{9}\right)\right) =$$

$$= -F'\left(\frac{5-x}{9}\right)\cdot\left(\frac{5-x}{9}\right)' = \frac{1}{9}\cdot f\left(\frac{5-x}{9}\right).$$

Ответ: $g(x) = \frac{1}{9}\cdot f\left(\frac{5-x}{9}\right)$.

Пример 52. *Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Найдите функцию распределения $G(x)$ случайной величины $Y = -\frac{1}{7}\ln X$.*

Решение. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$, имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ x, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

Выразим функцию распределения $G(x)$ случайной величины $Y = -\frac{1}{7}\ln X$ через $F(x)$.

$$G(x) = P(Y < x) = P\left(-\frac{1}{7}\ln X < x\right) = P\left(\ln X > -7x\right) =$$

$$= P\left(X > e^{-7x}\right) = 1 - P\left(X \leqslant e^{-7x}\right) = 1 - F\left(e^{-7x}\right).$$

Используя явный вид функции распределения $F(x)$ для различных значений x, находим из предыдущего равенства окончательное выражение для $G(x)$

$$G(x) = 1 - F\left(e^{-7x}\right) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-7x}, & x > 0. \end{cases}$$

Ответ: $G(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-7x}, & x > 0. \end{cases}$

Пример 53. *Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = X^3$.*

Решение. Используя обозначения примера 18, выразим функцию распределения $G(x)$ случайной величины $Y = X^3$ через $F(x)$

$$G(x) = P(Y < x) = P(X^3 < x) = P\left(X < \sqrt[3]{x}\right) = F\left(\sqrt[3]{x}\right).$$

Дифференцируя полученное равенство, находим для $x \neq 0$ плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = X^3$:

$$g(x) = \frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}F\left(\sqrt[3]{x}\right) =$$
$$= F'\left(\sqrt[3]{x}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot f\left(\sqrt[3]{x}\right).$$

Ответ: $g(x) = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} \cdot f\left(\sqrt[3]{x}\right)$.

Пример 54. *Случайная величина X имеет функцию распределения $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-9x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$ Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = X^2$.*

Решение. Выразим функцию распределения $G(x)$ случайной величины $Y = X^2$ через функцию распределения $F(x)$ случайной величины X.

$$G(x) = P(Y < x) = P\left(X^2 < x\right) =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ P\left(|X| < \sqrt{x}\right), \text{ если } x > 0, \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ P\left(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\right), \text{ если } x > 0, \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right), \text{ если } x > 0 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \left(1 - e^{-9\sqrt{x}}\right) - 0, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Дифференцируя полученное равенство, находим плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = X^2$.

$$g(x) = \frac{d}{dx}\,G(x) = \begin{cases} 0, \; x \leqslant 0, \\ \frac{9}{2} \cdot \frac{e^{-9\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \; x > 0. \end{cases}$$

Ответ: $g(x) = \begin{cases} 0, \; x \leqslant 0, \\ \frac{9}{2} \cdot \frac{e^{-9\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, \; x > 0. \end{cases}$

§ 14. Нормальное и логнормальное законы распределения случайной величины

Определение. *Непрерывная случайная величина X имеет* ***нормальный закон распределения*** *или* ***закон Гаусса*** *с параметрами μ и σ^2, $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, если ее плотность вероятностей имеет вид:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty.$$

Параметры μ и σ^2 имеют смысл математического ожидания и дисперсии случайной величины X, т. е. $EX = \mu$, $DX = \sigma^2$. Функция распределения $F(x) = P(X < x)$ и вероятность $P(X > x)$ выражаются через функцию Лапласа $\Phi(x)$ следующим образом

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$
$$P(X > x) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Отметим следующий факт, что *если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины и $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$, то* $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i \sim$ $\sim N\left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mu_i, \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2\right)$.

Определение. *Случайная величина Y распределена* ***логарифмически нормально*** *или* ***логнормально*** *с параметрами μ и σ^2, $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$, если $\ln Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.*

Из определения следует, что если $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$, то $Y = e^X$, где $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Пример 55. *Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 19$ и дисперсией $D(X) = 25$ найдите вероятность $P(X > 17{,}5)$.*

Решение. По условию $X \sim N(19; 5^2)$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(X > 17{,}5) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{17{,}5 - 19}{5}\right) = \frac{1}{2} - \Phi(-0{,}3) = \\ = 0{,}5 + \Phi(0{,}3) \approx 0{,}5 + 0{,}1179 = 0{,}6179.$$

Ответ: $P(X > 17{,}5) \approx 0{,}6179$.

Пример 56. *Для независимых нормальных случайных величин X, Y известны их математические ожидания и дисперсии $E(X) = 13$, $E(Y) = 15{,}7$, $D(X) = 6$, $D(Y) = 3$. Найдите вероятность $P(X < Y + 3)$.*

Решение. Для независимых нормальных случайных величин разность $Z = X - Y$, как и сумма, также является нормальной случайной величиной, причем

$$E(Z) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 13 - 15{,}7 = -2{,}7;$$
$$D(Z) = D(X - Y) = D(X) + D(Y) = 6 + 3 = 9.$$

Поэтому искомая вероятность равна

$$P(X < Y + 3) = P(X - Y < 3) = P(Z < 3) = F(3) = \\ = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{3 - (-2{,}7)}{3}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(1{,}9) \approx \\ \approx 0{,}5 + 0{,}4713 = 0{,}9713.$$

Ответ: $P(X < Y + 3) = 0{,}9713$.

Пример 57. *Независимые нормальные случайные величины* $X_1, \ldots, X_{16}$ *имеют одинаковые параметры* $E(X_i) = 2$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, \ldots, 16$. *Для случайной величины* $S = X_1 + \ldots + X_{16}$ *найдите вероятность* $P\left(|S - 32| < \frac{6}{5}\,\sigma\right)$.

Решение. Случайная величина $S = X_1 + \ldots + X_{16}$, как сумма независимых нормальных случайных величин, распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $E(S) = 2 \cdot 16 = 32$ и дисперсией $D(S) = 16\sigma^2$. Тогда искомая вероятность равна

$$P\left(|S - 32| < \frac{6}{5}\,\sigma\right) = P\left(32 - \frac{6}{5}\,\sigma < S < 32 + \frac{6}{5}\,\sigma\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{32 + \frac{6}{5}\,\sigma - 32}{4\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{32 - \frac{6}{5}\,\sigma - 32}{4\sigma}\right) = \Phi(0{,}3) - \Phi(-0{,}3) =$$
$$= 2 \cdot \Phi(0{,}3) \approx 2 \cdot 0{,}1179 = 0{,}2358.$$

Ответ: $P\left(|S - 32| < \frac{6}{5}\,\sigma\right) = 0{,}2358$.

Пример 58. *Для нормальной случайной величины* X *известно, что математическое ожидание* $E(X) = 54{,}9$ *и вероятность* $P(X < 57) = 0{,}7580$. *Найдите дисперсию* $D(X)$.

Решение. Из условия имеем

$$0{,}7580 = P(X < 57) = F(57) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{57 - 54{,}9}{\sigma}\right).$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\Phi\left(\frac{2{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}2580.$$

Откуда по таблице значений функции Лапласа определяем

$$\frac{2{,}1}{\sigma} = 0{,}7.$$

Следовательно, $\sigma = 3$, а дисперсия $D(X) = \sigma^2 = 9$.
Ответ: $D(X) = 9$.

Пример 59. *Случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону, $D(X) = 4$, $E(Y) = -2$. Найдите* $\mathrm{Cov}(X \cdot Y, X)$.

Решение. Используя свойства ковариации и математического ожидания для независимых случайных величин, находим

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}(X \cdot Y, X) = E(X^2 \cdot Y) - E(XY) \cdot E(X) = \\ &= E(X^2) \cdot E(Y) - E^2(X) \cdot E(Y) = E(Y) \cdot D(X) = -2 \cdot 4 = -8.\end{aligned}$$

Ответ: $\mathrm{Cov}(X \cdot Y, X) = -8$.

Пример 60. *Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Предполагая, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, распределенными логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00331$ и $\sigma = 0{,}0513$, найдите вероятность того, что цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели.*

Решение. Случайные величины $\ln\left(\dfrac{S(n)}{S(n-1)}\right)$, $n = 2{,}3, 4$, независимые и распределены по нормальному закону с параметрами $\mu = 0{,}00331$ и $\sigma^2 = 0{,}0513^2 = 0{,}00263$. Поэтому $X = \ln\left(\dfrac{S(4)}{S(3)}\right) + \ln\left(\dfrac{S(3)}{S(2)}\right) + {}$ $+ \ln\left(\dfrac{S(2)}{S(1)}\right)$, как сумма независимых нормальных случайных величин, также является нормальной, причем $X \sim N\left(3 \cdot 0{,}00331; 3 \cdot 0{,}0513^2\right)$. Следовательно

$$\begin{aligned}P\left(\frac{S(4)}{S(1)} > 1\right) &= P\left(\frac{S(4)}{S(3)} \cdot \frac{S(3)}{S(2)} \cdot \frac{S(2)}{S(1)} > 1\right) = \\ &= P\left(\ln\left(\frac{S(4)}{S(3)}\right) + \ln\left(\frac{S(3)}{S(2)}\right) + \ln\left(\frac{S(2)}{S(1)}\right) > 0\right) = \\ &= P\left(X > 0\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{0 - 3 \cdot \mu}{\sqrt{3} \cdot \sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(0{,}11\right) = \\ &= 0{,}5 + 0{,}0438 \approx 0{,}544.\end{aligned}$$

Ответ: 0,544.

§ 15. Центральная предельная теорема (ЦПТ)

В теории вероятностей центральными предельными теоремами называют теоремы, которые формулируются приблизительно следующим образом:

Распределение суммы большого числа независимых случайных величин при весьма общих условиях близко к нормальному распределению.

Наиболее известной является так называемая ЦПТ для одинаково распределенных слагаемых:

Для бесконечной последовательности одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots,$, для которых существует математическое ожидание $\mu = E(X_i)$ и дисперсия $\sigma^2 = D(X_i)$, функции распределения нормированных частичных сумм

$$S'_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

стремятся при $n \to \infty$ к функции распределения нормального закона с параметрами 0 и 1:

$$\lim_{n\to\infty} F_{S'_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Их этой теоремы следует, что для промежутка Δ любого вида предел вероятности попадания нормированной частичной суммы в Δ существует и

$$\lim_{n\to\infty} P(S'_n \in \Delta) = P(Z \in \Delta),$$

где $Z \sim N(0,1)$ — стандартная нормальная случайная величина. В частности, для промежутка $\Delta = (a, b)$ или $\Delta = [a, b]$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} P(S'_n \in \Delta) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Пример 61. *Для независимых случайных величин* $X_1, X_2, \ldots,$ *принимающих с равной вероятностью значения* 1, 4 *и* 7, *найдите предел* $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < 4n + \sqrt{n})$.

Решение. Сначала найдем математическое ожидание $E(X_i)$ и дисперсию $D(X_i)$: $E(X_i) = 4$, $D(X_i) = 6$. Тогда искомый предел равен

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < 4n + \sqrt{n}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - 4n}{\sqrt{n}\sqrt{6}} < \frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0{,}5 + \Phi(0{,}40825) = 0{,}65845.$$

Ответ: 0,65845.

Пример 62. *Для независимых, распределенных по геометрическому закону случайных величин* $X_1, X_2, \ldots,$ *найдите предел* $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n > 6n + \sqrt{3n})$, *если известно, что* $E(X_i) = 6$.

Решение. Для случайной величины X_i, распределенной по геометрическому закону, дисперсия равна 30. Следовательно, искомый предел равен

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n > 6n + \sqrt{3n}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - 6n}{\sqrt{n}\sqrt{30}} > \frac{1}{\sqrt{10}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0{,}5 - \Phi(0{,}31623) = 0{,}37591.$$

Ответ: 0,37591.

Пример 63. *Для независимых случайных величин* $X_1, X_2, \ldots,$ *равномерно распределенных на отрезке* $[3, 12]$, *найдите предел* $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n > \frac{15}{2}n + \sqrt{n}\right)$.

Решение. Для равномерно распределенной на отрезке $[3, 12]$ случайной величины X_i математическое ожидание и дисперсия соответственно равны $\frac{15}{2}$ и $\frac{27}{4}$. Поэтому искомый предел равен

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1+\ldots+X_n > \frac{15}{2}n+\sqrt{n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n-\frac{15}{2}n}{\sqrt{n}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}} > \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = 0{,}5 - \Phi(0{,}3849) = 0{,}35016.$$

Ответ: 0,35016.

§ 16. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины

Закон распределения случайного вектора (X, Y) (двумерной случайной величины) называется также *совместным распределением* случайных величин X и Y. Закон распределения вектора (X, Y) однозначно определяет как законы распределения его компонент X и Y, так и распределение любой случайной величины $Z = \varphi(X, Y)$.

Для дискретных случайных величин X и Y с возможными значениями $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_n$ их совместное распределение обычно записывается следующим образом:

	$Y = y_1$	$Y = y_2$	$\ldots$	$Y = y_n$
$X = x_1$	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$X = x_m$	p_{m1}	p_{m2}	$\ldots$	p_{mn}

.

Суммируя в этой таблице вероятности по строкам и столбцам, получаем распределения X и Y:

X	x_1	$\ldots$	x_m
P	$p_{1\bullet}$	$\ldots$	$p_{m\bullet}$

и

Y	y_1	$\ldots$	y_n
P	$p_{\bullet 1}$	$\ldots$	$p_{\bullet n}$

,

где $p_{i\bullet} = \sum\limits_j p_{ij}$, $p_{\bullet j} = \sum\limits_i p_{ij}$.

Для вероятности возможного значения z случайной величины $Z = \varphi(X, Y)$ имеем

$$P(Z = z) = \sum_{\varphi(x_i, y_j) = z} p_{ij},$$

что позволяет достаточно эффективно находить распределение Z.

Математическое ожидание $E(Z)$ можно найти двумя способами:

- непосредственно, по формуле

$$E(Z) = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j) p_{ij},$$

- или, предварительно построив распределение

Z	z_1	$\ldots$	z_s
P	p_1	$\ldots$	p_s

,

по формуле

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{s} z_k p_k.$$

Для $Z = aX + bY$ оптимальным, как правило, является способ вычисления $E(Z)$, основанный на тождестве

$$E(Z) = aE(X) + bE(Y).$$

Пример 64. *Найдите распределение случайной величины $Z = X + Y$ и $E(Z)$, если известно распределение случайного дискретного вектора (X, Y)*

	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$
$Y = -3$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
$Y = -2$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

.

Решение. Возможные значения случайной величины $Z = X + Y$ есть $0, 1, 2, 3$. Найдем соответствующие вероятности:

$$P(Z = 0) = P(X + Y = 0) = P(X = 3, Y = -3) = \frac{1}{6},$$

$$P(Z = 1) = P(X + Y = 1) =$$

$$= P(X = 3, Y = -2) + P(X = 4, Y = -3) = \frac{5}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{4},$$

$$P(Z=2)=P(X+Y=2)=$$
$$=P(X=4,Y=-2)+P(X=5,Y=-3)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4},$$
$$P(Z=3)=P(X+Y=3)=P(X=5,Y=-2)=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины $Z=X+Y$ имеет вид

Z	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

. Математическое ожидание случайной величины Z равно

$$E(Z)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{4}.$$

Ответ:

Z	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

, $E(Z)=\frac{7}{4}$.

Пример 65. *Найдите распределение случайной величины* $Z=\max(X,Y)$ *и* $E(Z)$, *если известно распределение дискретного случайного вектора* (X,Y)

	$X=-2$	$X=-1$	$X=0$
$Y=-1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$
$Y=0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

.

Решение. Возможными значениями случайной величины $Z=\max(X,Y)$ будут -1 и 0, при этом

$$P(Z=-1)=P(\max(X,Y)=-1)=$$
$$=P(X=-2,Y=-1)+P(X=-1,Y=-1)=$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8},$$
$$P(Z=0)=P(\max(X,Y)=0)=$$
$$=P(X=-2,Y=0)+P(X=-1,Y=0)+$$
$$+P(X=0,Y=-1)+P(X=0,Y=0)=$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{24}+\frac{1}{3}\overset{\text{или}}{=}1-P(Z=-1)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины $Z = \max(X, Y)$ имеет вид

Z	-1	0
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$

. Математическое ожидание случайной величины Z равно

$$E(Z) = -1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{7}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Ответ:

Z	-1	0
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$

, $E(Z) = -\frac{1}{8}$.

Пример 66. *Найдите распределение случайной величины* $Z = \min(X, Y)$ *и* $E(Z)$*, если известно распределение дискретного случайного вектора* (X, Y)

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$
$Y = -1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
$Y = 0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

Решение. Возможными значениями случайной величины $Z = \min(X, Y)$ будут -2, -1 и 0. Кроме того,

$$\begin{aligned}
P(Z = -2) &= P(\min(X, Y) = -2) = \\
&= P(X = -2, Y = -1) + P(X = -2, Y = 0) = \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}, \\
P(Z = -1) &= P(\min(X, Y) = -1) = P(X = -1, Y = -1) + \\
&+ P(X = -1, Y = 0) + P(Y = -1, X = 0) = \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24} = \frac{13}{24}, \\
P(Z = 0) &= P(\min(X, Y) = 0) = P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Таким образом, закон распределения случайной величины $Z = \min(X, Y)$ имеет вид

Z	-2	-1	0
P	$\frac{5}{24}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{1}{4}$

. Математическое ожидание случайной

величины Z равно

$$E(Z) = -2 \cdot \frac{5}{24} - 1 \cdot \frac{13}{24} + 0 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{23}{24}.$$

Ответ:

Z	-2	-1	0
P	$\frac{5}{24}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{1}{4}$

, $E(Z) = -\frac{23}{24}$.

Пример 67. *Найдите распределение случайной величины $Z = \min(6, X - Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y)*

	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$
$Y = -2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$Y = -1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

.

Решение. Возможными значениями случайной величины $Z = \min(6, X - Y)$ будут 4, 5 и 6. Найдем соответствующие вероятности:

$$P(Z = 4) = P(\min(6, X - Y) = 4) = P(X = 3, Y = -1) = \frac{1}{8},$$

$$\begin{aligned} P(Z = 5) &= P(\min(6, X - Y) = 5) = \\ &= P(X = 3, Y = -2) + P(X = 4, Y = -1) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z = 6) &= P(\min(6, X - Y) = 6) = \\ &= P(X = 4, Y = -2) + P(X = 5, Y = -2) + \\ &+ P(X = 5, Y = -1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} \overset{\text{или}}{=} \\ &\overset{\text{или}}{=} 1 - P(Z = 4) - P(Z = 5) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Таким образом, закон распределения случайной величины $Z = \min(6, X - Y)$ имеет вид

Z	4	5	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

. Математическое ожидание случайной величины Z равно

$$E(Z) = 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{4}.$$

Ответ:

Z	4	5	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

, $E(Z) = \frac{21}{4}$.

Пример 68. *Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону*

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$
$Y = 0$	$\frac{3}{14}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{1}{28}$

,

выясните, зависимы или нет события $A = \{X \cdot Y \neq 0\}$ и $B = \{X + Y = 0\}$.

Решение. Напомним, что события A и B называются ***независимыми***, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. В противном случае, события A и B называются ***зависимыми***. Найдем вероятности событий $P(A)$, $P(B)$ и $P(A \cdot B)$:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \cdot Y \neq 0) = \\ &= P(X = -1, Y = -1) + P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{14}, \\ P(B) &= P(X + Y = 0) = \\ &= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{2}, \\ P(A \cdot B) &= P(X \cdot Y \neq 0, X + Y = 0) = P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{28}. \end{aligned}$$

Имеем,

$$P(A \cdot B) = \frac{1}{28} = \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B).$$

Следовательно, A и B — независимые события.

Ответ: независимые.

Пример 69. *Распределение случайного вектора (X, Y) задается таблицей*

	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\alpha$	$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\,\alpha$
$Y = 1$	$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\,\alpha$	$\frac{2}{3}\,\alpha$

.

Найдите значение параметра α при котором коэффициент корреляции между X и Y равен $-\frac{1}{4}$.

Решение. Найдем законы распределения компонент X и Y. Возможные значения X это 0 и 1, а вероятности

$$P(X = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) =$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\alpha + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\,\alpha = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Возможные значения Y — также 0 и 1. Соответствующие вероятности

$$P(Y = 0) = P(Y = 0, X = 0) + P(Y = 0, X = 1) =$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\alpha + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\,\alpha = \frac{1}{3},$$
$$P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Наконец, возможными значениями произведения $X \cdot Y$ будут 0 и 1, при этом

$$P(X \cdot Y = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{3}\,\alpha,$$
$$P(X \cdot Y = 0) = 1 - P(X \cdot Y \neq 0) = 1 - P(X = 1, Y = 1) = 1 - \frac{2}{3}\,\alpha.$$

В итоге, законы распределения X, Y и $X \cdot Y$ имеют вид

X, Y	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

,

$X \cdot Y$	0	1
P	$1 - \frac{2}{3}\,\alpha$	$\frac{2}{3}\,\alpha$

.

Найдем $\mathbf{Cov}(X, Y)$, вычислив предварительно $E(X)$, $E(Y)$ и $E(X \cdot Y)$,

$$E(X) = E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$
$$E(X \cdot Y) = 0 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\,\alpha\right) + 1 \cdot \frac{2}{3}\,\alpha = \frac{2}{3}\,\alpha.$$

Следовательно,

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{2}{3}\,\alpha - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,\alpha - \frac{4}{9}.$$

Далее,

$$D(X) = D(Y) = E(X^2) - E^2(X) = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

Поэтому, $\sigma(X) \cdot \sigma(Y) = \frac{2}{9}$. Таким образом, коэффициент корреляции X и Y равен

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = 3\alpha - 2 \overset{\text{по условию}}{=} -\frac{1}{4}.$$

Отсюда, $\alpha = \frac{7}{12}$. Закон распределения в этом случае имеет вид

	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$
$Y = 1$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$

.

Ответ: $\alpha = \frac{7}{12}$.

§ 17. Условные распределения и условные числовые характеристики

Пусть (X, Y) — дискретный случайный вектор с законом распределения $f(x_k, y_l) = P(X = x_k, Y = y_l)$, где x_k и y_l — возможные значения компонент X и Y, соответственно, $f_Y(y_l) = P(Y = y_l) = \sum\limits_k f(x_k, y_l)$ — распределение случайной величины Y, $f_X(x_k) = P(X = x_k) = \sum\limits_l f(x_k, y_l)$ — распределение случайной величины X.

Определение. *Набор вероятностей*

$$f_{X|Y}(x_k|y_l) = P(X = x_k|Y = y_l) = \frac{P(X = x_k, Y = y_l)}{P(Y = y_l)} = \frac{f(x_k, y_l)}{f_Y(y_l)}$$

для всех значений y_l, таких, что $f_Y(y_l) > 0$, определяет ***условное распределение дискретной случайной величины X при условии, что*** $Y = y_l$.

Можно показать, что для фиксированного y_l набор $\{f_{X|Y}(x_k|y_l)\}$ действительно определяет распределение вероятностей, т. е. $\sum\limits_k f_{X|Y}(x_k|y_l) = 1$. Точно так же определяется условное распределение дискретной случайной величины Y при условии, что $X = x_k$.

Заметим, что если X и Y независимы, то $f_{X|Y}(x_k|y_l) = f_X(x_k)$, и условное распределение совпадает с распределением компоненты X.

Определение. ***Условным математическим ожиданием*** *дискретной случайной величины X при условии, что $Y = y_l$, называется число*

$$E(X|Y = y_l) = \sum_k x_k P(X = x_k|Y = y_l) = \sum_k x_k f_{X|Y}(x_k|y_l).$$

Меняя ролями X и Y, получим $E(Y|X = x_k) = \sum\limits_l y_l f_{Y|X}(y_l|x_k)$.

Аналогичным образом определяется условная вероятность события $\{Y = y_l\}$ при условии, что $X \in B$,

$$P(Y = y_l|X \in B) = \frac{P(Y = y_l, X \in B)}{P(X \in B)},$$

а также условное математическое ожидание Y при условии, что $X \in B$,

$$E(Y|X \in B) = \sum_l y_l \cdot \frac{P(Y = y_l, X \in B)}{P(X \in B)},$$

где

$$P(X \in B) = \sum_{x_k \in B} P(X = x_k),$$

$$P(Y = y_l, X \in B) = \sum_{x_k \in B} P(Y = y_l, X = x_k).$$

Условные распределения удовлетворяют всем свойствам распределения вероятностей, поэтому и условные математические ожидания также удовлетворяют всем свойствам обычных математических ожиданий. Например, имеют место формулы

$$\textbf{1.}\quad E[\varphi(X)|Y=y]=\sum_k \varphi(x_k)f_{X|Y}(x_k|y).$$

$$\textbf{2.}\quad E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k|Y=y\right]=\sum_{k=1}^{n} E[X_k|Y=y].$$

Определение. ***Условным математическим ожиданием случайной величины*** X ***относительно случайной величины*** Y *называется случайная величина* $E(X|Y)$, *которая принимает значение* $E(X|Y=y)$ *при* $Y=y$.

Условное математическое ожидание $E(X|Y)$ обладает следующими свойствами:

1. $E(c|Y)=c$, *где* $c=\mathrm{const}$.
2. $E(aX+b|Y)=aE(X|Y)+b$, *где* a *и* b *— постоянные.*
3. $E(X+Y|Z)=E(X|Z)+E(Y|Z)$.
4. *Если* X *и* Y *— независимые случайные величины, то* $E(X|Y)=$ $=E(X)$.
5. $E\left[\varphi(Y)\cdot X|Y\right]=\varphi(Y)\cdot E(X|Y)$.

Понятие условного математического ожидания можно распространить на абсолютно непрерывные случайные величины, при этом сохраняются все перечисленные выше свойства.

Теорема (формула полного математического ожидания).

$$E(X)=E[E(X|Y)].$$

Если Y — дискретная случайная величина, то указанное выше соотношение означает, что выполняется равенство

$$E(X)=\sum_l E(X|Y=y_l)P(Y=y_l).$$

Доказательство. Пусть X и Y — дискретные случайные величины, тогда

$$\begin{aligned} E[E(X|Y)] &= \sum_l E(X|Y=y_l)P(Y=y_l) = \\ &= \sum_l \sum_k x_k P(X=x_k|Y=y_l)P(Y=y_l) = \\ &= \sum_l \sum_k x_k \frac{P(X=x_k, Y=y_l)}{P(Y=y_l)} \cdot P(Y=y_l) = \\ &= \sum_l \sum_k x_k P(X=x_k, Y=y_l) = \\ &= \sum_k x_k \sum_l P(X=x_k, Y=y_l) = \\ &= \sum_k x_k P(X=x_k) = E(X). \end{aligned}$$

□

Определение. ***Условной дисперсией случайной величины** X **относительно случайной величины** Y называется случайная величина*

$$D(X|Y) \equiv E[(X - E(X|Y))^2 \, |Y],$$

которая принимает значение $D(X|Y=y)$ при $Y=y$.

Значение $D(X|Y=y)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} D[X|Y=y] &= E[(X - E(X|Y=y))^2 \, |Y=y] = \\ &= \sum_k [x_k - E(X|Y=y)]^2 f_{X|Y}(x_k|y). \end{aligned}$$

Свойства условной дисперсии:

1. $D(c|Y) = 0$, *где* $c = \mathrm{const}$.

2. $D(aX+b|Y) = a^2 D(X|Y)$, *где a и b — постоянные.*

3. $D(X|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2$.

4. *Если X и Y — независимые случайные величины, то $D(X|Y) = D(X)$.*

5. $D[\varphi(Y) \cdot X|Y] = \varphi^2(Y) \cdot D(X|Y)$.

Понятие условной дисперсии, как и понятие условного математического ожидания, можно распространить на абсолютно непрерывные случайные величины, при этом перечисленные свойства также сохраняются.

Теорема (формула полной дисперсии).

$$D(X) = E[D(X|Y)] + D[E(X|Y)].$$

Доказательство. Поскольку $D(X|Y) = E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2$, имеем

$$E[D(X|Y)] = E[E(X^2|Y)] - E\left[(E(X|Y))^2\right] = E(X^2) - E\left[(E(X|Y))^2\right].$$

С другой стороны, так как $E[E(X|Y)] = E(X)$, то

$$D[E(X|Y)] = E\left[(E(X|Y))^2\right] - (E(X))^2 .$$

Складывая полученные выше равенства, приходим к формуле полной дисперсии. □

Определение. ***Условной ковариацией случайных величи*** X ***и*** Y ***относительно случайной величины*** Z *называется случайная величина*

$$\mathrm{Cov}(X, Y|Z) = E\left[(X - E(X|Z)(Y - E(Y|Z)|Z\right].$$

Упражнение. *Покажите, что справедливы равенства*:

1. $\mathrm{Cov}(X, Y|Z) = E(XY|Z) - E(X|Z) \cdot E(Y|Z)$.
2. $\mathrm{Cov}(X, E(Y|X)) = \mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[\mathrm{Cov}(X, Y|Z)] + \mathrm{Cov}(E(X|Z), E(Y|Z))$.

Последнее соотношение называется ***формулой полной ковариации***.

Пример 70. *Дискретный случайный вектор* (X, Y) *имеет распределение*

	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$
$Y = 1$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

.

Найдите условное распределение случайной величины X при условии, что $Y = 1$.

Решение. Используя определение, находим

$$f_{X|Y}(0|1) = P(X = 0|Y = 1) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{10}} = \frac{2}{5},$$

$$f_{X|Y}(1|1) = P(X = 1|Y = 1) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{10}} = \frac{3}{5}.$$

Запишем условный закон распределения в виде таблицы

X	0	1
$P(.\|Y = 1)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Пример 71. *Дискретный случайный вектор (X, Y) имеет распределение*

	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$
$Y = 1$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

Найдите $E(X|Y = 1)$.

Решение. Условный закон распределения определяется таблицей

X	0	1
$P(.\|Y = 1)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

из которой находим, что

$$E(X|Y = 1) = 0 \cdot f_{X|Y}(0|1) + 1 \cdot f_{X|Y}(1|1) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $E(X|Y = 1) = \frac{3}{5}$.

Пример 72. *Дискретный случайный вектор* (X, Y) *имеет распределение*

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
$Y=2$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

.

Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X \geqslant 1)$.

Решение. Последовательно находим:

$$P(X \geqslant 1) = P(X=1) + P(X=2) = P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2)+$$
$$+ P(X = 2, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{13}{24},$$
$$P(Y = 1, X \geqslant 1) = P(Y = 1, X = 1) + P(Y = 1, X = 2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24},$$
$$P(Y = 2, X \geqslant 1) = P(Y = 2, X = 1) + P(Y = 2, X = 2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3},$$
$$P(Y = 1|X \geqslant 1) = \frac{P(Y = 1, X \geqslant 1)}{P(X \geqslant 1)} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{13}{24}} = \frac{5}{13},$$
$$P(Y = 2|X \geqslant 1) = \frac{P(Y = 2, X \geqslant 1)}{P(X \geqslant 1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{24}} = \frac{8}{13}.$$

Таким образом, условный закон распределения случайной величины Y при условии, что $X \geqslant 1$, имеет вид

Y	1	2
$P(.\|X \geqslant 1)$	$\frac{5}{13}$	$\frac{8}{13}$

.

Условное математическое ожидание $E(Y|X \geqslant 1)$ случайной величины Y при условии $X \geqslant 1$ получается простым вычислением

$$E(Y|X \geqslant 1) = 1 \cdot P(Y = 1|X \geqslant 1) + 2 \cdot P(Y = 2|X \geqslant 1) =$$
$$= 1 \cdot \frac{5}{13} + 2 \cdot \frac{8}{13} = \frac{21}{13}.$$

Ответ: $E(Y|X \geqslant 1) = \frac{21}{13}$.

Пример 73. *Дискретный случайный вектор* (X, Y) *имеет распределение*

	$X=-2$	$X=-1$	$X=0$
$Y=1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$Y=2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

.

Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X+Y=1)$.

Решение. Последовательно находим:

$$P(X+Y=1) = P(X=0, Y=1) + (X=-1, Y=2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(Y=1, X+Y=1) = P(X=0, Y=1) = \frac{1}{6},$$

$$P(Y=2, X+Y=1) = P(X=-1, Y=2) = \frac{1}{6},$$

$$P(Y=1|X+Y=1) = \frac{P(Y=1, X+Y=1)}{P(X+Y=1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

$$P(Y=2|X+Y=1) = \frac{P(Y=2, X+Y=1)}{P(X+Y=1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, условный закон распределения случайной величины Y при условии, что $X+Y=1$, имеет вид

Y	1	2
$P(.\|X+Y=1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

.

Поэтому искомое условное математическое ожидание $E(Y|X+Y=1)$ равно

$$E(Y|X+Y=1) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: $E(Y|X+Y=1) = 1{,}5$.

Пример 74. *Дано* $P(Y=20) = 0{,}2$, $P(Y=70) = 0{,}8$, $E(X|Y=20) = 1$, $E(X|Y=70) = 4$. *Найдите* $E(X)$.

Решение. Используя формулу полного математического ожидания, находим

$$\begin{aligned}
E(X) &= E[E(X|Y)] = \\
&\quad = E(X|Y = 20) \cdot P(Y = 20) + E(X|Y = 70) \cdot P(Y = 70) = \\
&\quad = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}4.
\end{aligned}$$

Ответ: $E(X) = 3{,}4$.

Пример 75. *Дано* $P(X=30) = 0{,}9$, $P(X=60) = 0{,}1$, $E(Y|X=30) = 3$ *и* $E(Y|X=60) = 2$. *Найдите* $\mathrm{Cov}(X, Y)$ *и* $D\{E(Y|X)\}$.

Решение. Последовательно находим:

$$\begin{aligned}
E(X) &= 30 \cdot 0{,}9 + 60 \cdot 0{,}1 = 33, \\
E(Y) &= E[E(Y|X)] = \\
&= E(Y|X = 30) \cdot P(X = 30) + E(Y|X = 60) \cdot P(X = 60) = \\
&= 3 \cdot 0{,}9 + 2 \cdot 0{,}1 = 2{,}9, \\
E(XY) &= E[E(XY|X)] = E[X \cdot E(Y|X)] = \\
&= 30 \cdot E(Y|X=30) \cdot P(X=30) + 60 \cdot E(Y|X=60) \cdot P(X=60) = \\
&= 30 \cdot 3 \cdot 0{,}9 + 60 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 93.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 93 - 33 \cdot 2{,}9 = -2{,}7.$$

Наконец, найдем дисперсию $D[E(Y|X)]$ случайной величины $E(Y|X)$

$$\begin{aligned}
D[E(Y|X)] &= E[E^2(Y|X)] - (E[E(Y|X)])^2 = \\
&= E^2(Y|X = 30) \cdot P(X = 30) + \\
&+ E^2(Y|X = 60) \cdot P(X = 60) - E^2(Y) = \\
&= 3^2 \cdot 0{,}9 + 2^2 \cdot 0{,}1 - 2{,}9^2 = 0{,}09.
\end{aligned}$$

Ответ: $\mathrm{Cov}(X, Y) = -2{,}7$, $D[E(Y|X)] = 0{,}09$.

Пример 76. *Дискретный случайный вектор* (X, Y) *имеет распределение*

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
$Y=3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

Найдите распределение условного математического ожидания $Z = E(X^2+Y^2|Y)$ *и* $E(Z)$.

Решение. Используя свойства условного математического ожидания, запишем случайную величину Z в виде:

$$Z = E(X^2+Y^2|Y) = E(X^2|Y) + E(Y^2|Y) = E(X^2|Y) + Y^2.$$

Найдем распределение случайной величины $E(X^2|Y)$. Сначала найдем ее возможные значения $E(X^2|Y=y)$ при условии, что $Y=y$, где $y=2$ или 3:

$$E(X^2|Y=2) = 0^2 \cdot f_{X|Y}(0|2) + 1^2 \cdot f_{X|Y}(1|2) + 2^2 \cdot f_{X|Y}(2|2) =$$
$$= 0^2 \cdot \frac{P(X=0, Y=2)}{P(Y=2)} + 1^2 \cdot \frac{P(X=1, Y=2)}{P(Y=2)} + 2^2 \cdot \frac{P(X=2, Y=2)}{P(Y=2)} =$$
$$= 0^2 \cdot \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{5}{24}} + 1^2 \cdot \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{8}} + 2^2 \cdot \frac{\frac{5}{24}}{\frac{3}{8}} = \frac{22}{9},$$

$$E(X^2|Y=3) = 0^2 \cdot f_{X|Y}(0|3) + 1^2 \cdot f_{X|Y}(1|3) + 2^2 \cdot f_{X|Y}(2|3) =$$
$$= 0^2 \cdot \frac{P(X=0, Y=3)}{P(Y=3)} + 1^2 \cdot \frac{P(X=1, Y=3)}{P(Y=3)} + 2^2 \cdot \frac{P(X=2, Y=3)}{P(Y=3)} =$$
$$= 0^2 \cdot \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} + 1^2 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} + 2^2 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = 2.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины $Z = E(X^2|Y) + Y^2$ имеет вид

Z	$\frac{22}{9} + 2^2 = \frac{58}{9}$	$2 + 3^2 = 11$
P	$P(Y=2) = \frac{3}{8}$	$P(Y=3) = \frac{5}{8}$

.

Следовательно, математическое ожидание случайной величины Z равно

$$E(Z) = \frac{58}{9} \cdot \frac{3}{8} + 11 \cdot \frac{5}{8} = \frac{223}{24} \approx 9{,}292.$$

Можно также воспользоваться формулой полного математического ожидания

$$\begin{aligned} E(Z) &= E[E(X^2 + Y^2|Y)] = E(X^2 + Y^2) = E(X^2) + E(Y^2) = \\ &= 0^2 \cdot P(X = 0) + 1^2 \cdot P(X = 1) + 2^2 \cdot P(X = 2) + \\ &+ 2^2 \cdot P(Y = 2) + 3^2 \cdot P(Y = 3) = \\ &= 1^2 \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) + 2^2 \cdot \left(\frac{5}{24} + \frac{1}{4}\right) + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{223}{24}. \end{aligned}$$

Ответ:

Z	$\frac{58}{9}$	11
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

, $E(Z) \approx 9{,}292$.

Пример 77. *Дано:* $P(X=50) = 0{,}1$, $P(X=70) = 0{,}9$, $E(Y|X=50) = 4$, $E(Y|X = 70) = 2$, $D(Y|X = 50) = 9$ *и* $D(Y|X = 70) = 5$. *Найдите* $E[D(Y|X)]$ *и* $D(Y)$.

Решение. Сначала найдем $E[D(Y|X)]$

$$\begin{aligned} E[D(Y|X)] &= D(Y|X = 50) \cdot P(X = 50) + D(Y|X = 70) \cdot P(X = 70) = \\ &= 9 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}9 = 5{,}4. \end{aligned}$$

Для вычисления $D(Y)$ найдем по формуле полного математического ожидания $E(Y) = E[E(Y|X)]$ и $D[E(Y|X)]$:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E[E(Y|X)] = \\ &= E(Y|X = 50) \cdot P(X = 50) + E(Y|X = 70) \cdot P(X = 70) = \\ &= 4 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}9 = 2{,}2; \\ D[E(Y|X)] &= E[E^2(Y|X)] - (E[E(Y|X)])^2 = \\ &= E^2(Y|X = 50) \cdot P(X = 50) + \\ &+ E^2(Y|X = 70) \cdot P(X = 70) - E^2(Y) = \\ &= 4^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}9 - 2{,}2^2 = 0{,}36. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле полной дисперсии

$$D(Y) = E[D(Y|X)] + D[E(Y|X)] = 5{,}4 + 0{,}36 = 5{,}76.$$

Приведем также другое решение, не использующее формулы полной дисперсии,

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= E[E(Y^2|X)] = \\ &= E(Y^2|X=50)\cdot P(X=50) + E(Y^2|X=70)\cdot P(X=70) = \\ &= \big(D(Y|X=50) + E^2(Y|X=50)\big)\cdot P(X=50) + \\ &+ \big(D(Y|X=70) + E^2(Y|X=70)\big)\cdot P(X=70) = \\ &= (9+4^2)\cdot 0{,}1 + (5+2^2)\cdot 0{,}9 = 10{,}6; \\ D(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) = 10{,}6 - 2{,}2^2 = 5{,}76.\end{aligned}$$

Ответ: $E[D(Y|X)] = 5{,}4$, $D(Y) = 5{,}76$.

Пример 78. *Дано совместное распределение случайных величин* X *и* Y

	$Y=2$	$Y=4$	$Y=9$
$X=60$	0,3	0,1	0
$X=90$	0,1	0,2	0,3

.

Найдите $D[E(X|Y)]$ *и* $E[D(X|Y)]$.

Решение. Последовательно находим возможные значения случайной величины $E(X|Y)$:

$$\begin{aligned}E(X|Y=2) &= 60\cdot f_{X|Y}(60|2) + 90\cdot f_{X|Y}(90|2) = \\ &= 60\cdot\frac{P(X=60,Y=2)}{P(Y=2)} + 90\cdot\frac{P(X=90,Y=2)}{P(Y=2)} = \\ &= 60\cdot\frac{0{,}3}{0{,}3+0{,}1} + 90\cdot\frac{0{,}1}{0{,}3+0{,}1} = 67{,}5; \\ E(X|Y=4) &= 60\cdot f_{X|Y}(60|4) + 90\cdot f_{X|Y}(90|4) = \\ &= 60\cdot\frac{P(X=60,Y=4)}{P(Y=4)} + 90\cdot\frac{P(X=90,Y=4)}{P(Y=4)} = \\ &= 60\cdot\frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}2} + 90\cdot\frac{0{,}2}{0{,}1+0{,}2} = 80;\end{aligned}$$

$$E(X|Y=9) = 60 \cdot f_{X|Y}(60|9) + 90 \cdot f_{X|Y}(90|9) = \\ = 60 \cdot \frac{P(X=60, Y=9)}{P(Y=9)} + 90 \cdot \frac{P(X=90, Y=9)}{P(Y=9)} = \\ = 60 \cdot \frac{0}{0+0{,}3} + 90 \cdot \frac{0{,}3}{0+0{,}3} = 90.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины $E(X|Y)$ имеет вид

$E(X\|Y)$	67,5	80	90
P	$P(Y=2)=0{,}4$	0,3	0,3

.

Дисперсия $D[E(X|Y)]$ случайной величины $E(X|Y)$ равна

$$D[E(X|Y)] = \left(67{,}5^2 \cdot 0{,}4 + 80^2 \cdot 0{,}3 + 90^2 \cdot 0{,}3\right) - \\ - (67{,}5 \cdot 0{,}4 + 80 \cdot 0{,}3 + 90 \cdot 0{,}3)^2 = 6\,172{,}5 - 78^2 = 88{,}5.$$

Далее, находим возможные значения случайной величины $D(X|Y)$:

$$D(X|Y=2) = E(X^2|Y=2) - (E(X|Y=2))^2 = \\ = 60^2 \cdot \frac{3}{4} + 90^2 \cdot \frac{1}{4} - 67{,}5^2 = 168{,}75;$$

$$D(X|Y=4) = E(X^2|Y=4) - (E(X|Y=4))^2 = \\ = 60^2 \cdot \frac{1}{3} + 90^2 \cdot \frac{2}{3} - 80^2 = 200;$$

$$D(X|Y=9) = E(X^2|Y=9) - (E(X|Y=9))^2 = \\ = 60^2 \cdot 0 + 90^2 \cdot 1 - 90^2 = 0.$$

Следовательно, закон распределения случайной величины $D(X|Y)$ имеет вид

$D(X\|Y)$	168,75	200	0
P	$P(Y=2)=0{,}4$	0,3	0,3

.

Математическое ожидание $E[D(X|Y)]$ случайной величины $D(X|Y)$ равно

$$E[D(X|Y)] = 168{,}75 \cdot 0{,}4 + 200 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}3 = 127{,}5.$$

Для проверки воспользуемся формулой полной дисперсии, предварительно вычислив дисперсию $D(X)$,

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \\ = 60^2 \cdot 0{,}4 + 90^2 \cdot 0{,}6 - (60 \cdot 0{,}4 + 90 \cdot 0{,}6)^2 = 6\,300 - 78^2 = 216.$$

С другой стороны, по формуле полной дисперсии имеем

$$D(X) = E[D(X|Y)] + D[E(X|Y)] = 127{,}5 + 88{,}5 = 216.$$

Ответ: $D[E(X|Y)] = 88{,}5$; $\quad E[D(X|Y)] = 127{,}5$.

§ 18. Абсолютно непрерывные случайные векторы

Случайный вектор (X, Y) называется *абсолютно непрерывным*, если найдется неотрицательная функция $f_{X,Y}(x, y)$, называемая *плотностью распределения*, такая, что для любого множества $G \subset \mathbb{R}^2$, которое может служить областью интегрирования, вероятность попадания точки (X, Y) в G находится по формуле

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint\limits_G f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy.$$

Если (X, Y) — абсолютно непрерывный случайный вектор, то вероятность попадания точки (X, Y) в какую-либо линию (график непрерывной функции) равна 0.

Функция распределения $F_{X,Y}(x, y)$ абсолютно непрерывного случайного вектора (X, Y) является непрерывной и может быть представлена в виде несобственного интеграла

$$F_{X,Y}(x, y) = \iint\limits_{s \leqslant x,\ t \leqslant y} f_{X,Y}(s, t)\, ds\, dt.$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy = 1$ *(свойство нормированности);*
- $f_{X,Y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x, y)$ *в точке непрерывности* $f_{X,Y}(x, y)$.

Компоненты X, Y абсолютно непрерывного случайного вектора (X, Y) также являются абсолютно непрерывными. Плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ случайных величин X и Y могут быть получены как интегралы от плотности их совместного распределения:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy, \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx.$$

Компоненты X, Y абсолютно непрерывного случайного вектора (X, Y) являются независимыми случайными величинами, тогда и только тогда, когда произведение их плотностей совпадает с какой-либо плотностью совместного распределения

$$f_X(x) f_Y(y) = f_{X,Y}(x, y).$$

Математическое ожидание функции $Z = \varphi(X, Y)$ от компонент случайного вектора находится путем интегрирования произведения функции $\varphi(x, y)$ и плотности распределения:

$$E[\varphi(X, Y)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy.$$

В частности, математическое ожидание XY находится по формуле

$$E(XY) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy.$$

Случайный вектор (X, Y) называется *равномерно распределенным* в области $G \subset \mathbb{R}^2$, если для него существует плотность распределения вида

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin G, \\ |G|^{-1}, & (x, y) \in G, \end{cases}$$

где $|G|$ — площадь G.

Случайный вектор (X, Y) называется *сосредоточенным на множестве* $G \subset \mathbb{R}^2$, если $P\{(X, Y) \in G\} = 1$. Для такого вектора математическое ожидание функции от его компонент может быть представлено в виде интеграла

$$E[\varphi(X,Y)] = \iint\limits_G \varphi(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$

Пример 79. *Случайный вектор (X,Y) имеет плотность распределения*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,x + Cy, & \text{\textit{если} } 0 < x < 1,\ 0 < y < 2, \\ 0, & \text{\textit{в остальных точках.}} \end{cases}$$

Найдите константу C и $P(X+Y>1)$.

Решение. Константу C найдем из условия нормировки плотности распределения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1,$$

которое в данном случае принимает вид

$$\iint\limits_{\substack{0<x<1\\0<y<2}} \left(\frac{1}{2}\,x + Cy\right) dx\,dy = 1.$$

Вычисляя выражение слева, получаем

$$1 = \int\limits_0^1 dx \left(\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{2}\,x + Cy\right) dy\right) = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}\,xy + C\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2}\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x + 2C)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2Cx\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 2C.$$

Решая уравнение относительно C, находим $C = \dfrac{1}{4}$. Для вычисления искомой вероятности воспользуемся формулой

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy,$$

с помощью которой получаем

$$P(X+Y>1) = 1 - P(X+Y \leqslant 1) = 1 - \iint\limits_{\substack{0<x<1,\\ 0<y<2,\\ x+y\leqslant 1.}} \left(\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,y\right) dx\,dy =$$

$$= 1 - \int\limits_0^1 dx \left(\int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,y\right) dy \right) = 1 - \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}\,xy + \frac{y^2}{8}\Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx =$$

$$= 1 - \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}\,x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{8}\right) dx = 1 - \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{4}\,x - \frac{3}{8}\,x^2 + \frac{1}{8}\right) dx =$$

$$= 1 - \left(\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + \frac{x}{8}\Big|_0^1 \right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Ответ: $C = \frac{1}{4}$, $P(X+Y>1) = \frac{7}{8}$.

Пример 80. *Случайный вектор* (X, Y) *имеет плотность распределения*

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & \textit{если}\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1, \\ 0, & \textit{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите $E(X)$.

Решение. Компонента X абсолютно непрерывного случайного вектора (X, Y) также является абсолютно непрерывной случайной величиной. Найдем плотность распределения $f_X(x)$, используя формулу

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy.$$

Для $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем

$$f_X(x) = \int\limits_0^{1-x} 24xy\,dy = 12xy^2\Big|_{y=0}^{y=1-x} = 12x(1-x)^2.$$

Таким образом, плотность распределения $f_X(x)$ компоненты X записывается в виде

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2, & \text{если}\, 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Математическое ожидание $E(X)$ определяется стандартным образом

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = 12\int\limits_0^1 x^2(1-x)^2\,dx =$$

$$= 12\int\limits_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right)dx = 12\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right) = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $E(X) = \frac{2}{5}$.

Пример 81. *Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения*

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & \textit{если}\, 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \textit{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите вероятность $P(X < 2)$.

Решение. Сначала найдем плотность распределения $f_X(x)$ компоненты X

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-x-2y}\,dy =$$

$$= 2e^{-x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\Big|_0^{\infty}\right) = e^{-x},\ \text{если}\, x \geqslant 0.$$

Следовательно, плотность распределения $f_X(x)$ имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если}\, 0 \leqslant x < +\infty, \\ 0, & \text{если}\, x < 0. \end{cases}$$

Искомая вероятность

$$P(X < 2) = F_X(2) = \int\limits_{-\infty}^{2} f_X(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^2 = 1 - e^{-2} \approx 0{,}865.$$

Ответ: $P(X < 2) \approx 0{,}865$.

Пример 82. *Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $8x + 9y \leqslant 72$. Найдите значение функции распределения $F_X(6)$ и $E(X)$.*

Решение. Используя свойства равномерного распределения, находим

$$F_X(6) = P(X < 6) = \frac{S_{OADC}}{S_{OAB}} = 1 - P(X \geqslant 6) = 1 - \frac{S_{CDB}}{S_{OAB}} =$$
$$= 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{8}{3}}{\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

где S_{OADC}, S_{OAB} и S_{CDB} обозначают площади трапеции $OADC$ и треугольников OAB и CDB соответственно.

Плотность распределения $f(x, y)$ случайного вектора (X, Y) задается в виде

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_{OAB}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9} = \dfrac{1}{36}, & \text{если}\, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 8x + 9y \leqslant 72, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Далее, для $0 \leqslant x \leqslant 9$ находим плотность распределения компоненты X

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \frac{1}{36} \int\limits_{0}^{8 - \frac{8}{9}x} 1\, dy = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{x}{9}\right).$$

Следовательно,

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}\left(1 - \dfrac{x}{9}\right), & \text{если}\, 0 \leqslant x \leqslant 9, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Затем находим математическое ожидание

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \frac{2}{9} \int\limits_{0}^{9} x \left(1 - \frac{x}{9}\right)\, dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{27}\bigg|_0^9\right) = 3.$$

Ответ: $F_X(6) = \frac{8}{9}$, $E(X) = 3$.

Пример 83. *Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $33x + y \leqslant 33$. Найдите математическое ожидание $E(X^{10}Y)$.*

Решение. Поскольку случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике G: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $33x + y \leqslant 33$, плотность распределения $f(x, y)$ случайного вектора (X, Y) задается в виде:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_G} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 33} = \dfrac{2}{33}, & \text{если } (x,y)\in G\colon x \geqslant 0, \\ & y \geqslant 0,\ 33x+y\leqslant 33, \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

где S_G — площадь треугольника G.

Математическое ожидание $E(X^{10}Y)$ находится в результате вычисления интеграла

$$E(X^{10}Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{10}y\cdot f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{2}{33}\int\limits_0^1 dx\left(\int\limits_0^{33-33x} x^{10}y\,dy\right) = \frac{2}{33}\int\limits_0^1\left(x^{10}\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=33(1-x)}\right)dx =$$

$$= 33\int\limits_0^1 x^{10}(1-x)^2\,dx = 33\int\limits_0^1 (x^{10} - 2x^{11} + x^{12})\,dx =$$

$$= 33\left(\frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{6} + \frac{x^{13}}{13}\Bigg|_0^1\right) = 33\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13}\right) = \frac{1}{26}.$$

Ответ: $E(X^{10}Y) = \dfrac{1}{26}$.

§ 19. Двумерные нормальные векторы

Определение. *Случайный вектор (X, Y) имеет* ***невырожденное двумерное нормальное распределение с параметрами*** m_1, m_2, σ_1^2, σ_2^2, ρ, *$(X,Y) \sim N(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, если его функция плотности распределения имеет вид*

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{q(x,y)}{2}},$$

где

$$q(x,y) = \frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)$$

и $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1.$

Используя ковариационную матрицу C вектора (X, Y), функцию $q(x, y)$ можно представить в матричном виде

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} x-m_1 \\ y-m_2 \end{pmatrix}^T \cdot C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x-m_1 \\ y-m_2 \end{pmatrix},$$

где C^{-1} — обратная матрица для

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Если* $(X, Y) \sim N(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, *то* $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$.

Пример 84. *Пусть* $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0$, *тогда случайный вектор* (X, Y) *имеет функцию плотности распределения*

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

которая определяет ***стандартное нормальное распределение на плоскости****, т. е.* $(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, 0)$.

Пример 85. *Случайный вектор* (X, Y) *распределен по нормальному закону с плотностью*

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{9}{2\pi}\, e^{-\frac{9}{2}x^2+3x-5-12xy+13y-\frac{25}{2}y^2}.$$

Найдите математическое ожидание $E(X)$, *дисперсию* $D(X)$ *и коэффициент корреляции* $\rho(X, Y)$.

Решение. Выражение для $q(x, y)$ имеет вид

$$q(x,y) = 9x^2 + 24xy + 25y^2 - 6x - 26y + 10.$$

Найдем ковариационную матрицу C

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{81} & -\frac{4}{27} \\ -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $D(X) = \frac{25}{81}$, $D(Y) = \frac{1}{9}$, $\rho\sigma_1\sigma_2 = -\frac{4}{27}$. Поэтому $\rho = -\frac{4}{5}$. Наибольшее значение $f_{X,Y}(x,y)$ достигается в точке $(E(X), E(Y))$. Составим систему $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\, q(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\, q(x,y) = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 9x + 12y = 3, \\ 12x + 25y = 13. \end{cases}$ Решение этой системы имеет вид $x_{\max} = -1$, $y_{\max} = 1$. Следовательно, $E(X) = -1$, $E(Y) = 1$.

Ответ: $E(X) = -1$, $D(X) = \frac{25}{81}$, $\rho = -\frac{4}{5}$.

Теорема. *Для нормального случайного вектора (X,Y) понятия независимости и некоррелированности компонент X и Y эквивалентны.*

Доказательство. Если X и Y независимы, то $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$, т. е. X и Y — некоррелированные случайные величины. Это общий факт. Пусть теперь X и Y — некоррелированы, т. е. $\rho(X,Y) = 0$, тогда

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} = f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

Следовательно, X и Y — независимые случайные величины. □

Пример 86. *Пусть $X \sim N(1{,}4)$, $Y \sim N(2{,}16)$ — независимые случайные величины, тогда случайный вектор (X,Y) распределен по нормальному закону с плотностью распределения*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-2)^2}{32}} = \frac{1}{16\pi}\, e^{-\frac{4(x-1)^2+(y-2)^2}{32}}.$$

Теорема. *Если случайный вектор* (X, Y) *имеет нормальное распределение,* $(X,Y) \sim N(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, *то*

$$(X|Y=y) \sim N\left(m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2); \sigma_1^2(1-\rho^2)\right),$$
$$(Y|X=x) \sim N\left(m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1); \sigma_2^2(1-\rho^2)\right),$$

т. е. условная плотность одной из компонент при фиксированном значении другой является нормальной, причем справедливы формулы

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left(x-m_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right)^2},$$
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left(y-m_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)\right)^2},$$
$$E(X|Y=y) = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2),$$
$$D(X|Y=y) = \sigma_1^2(1-\rho^2),$$
$$E(Y|X=x) = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1),$$
$$D(Y|X=x) = \sigma_2^2(1-\rho^2).$$

Доказательство. Поскольку $(X,Y) \sim N(m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, совместная плотность распределения имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)},$$

а плотность компоненты Y

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Следовательно,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(1-(1-\rho^2)\right)\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\rho^2(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left(x-m_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)\right)^2}.$$

□

Пример 87. *Плотность распределения случайного вектора* (X, Y) *имеет вид*

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{5}{2}x^2-10x-10-3yx-6y-y^2}.$$

Найдите условное математическое ожидание $E(X|Y=y)$ *и* $D(X|Y = = y)$.

Решение. Случайный вектор (X, Y) распределен по нормальному закону, причем $(X,Y) \sim N\left(-2; 0; 2; 5; -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. Следовательно,

$$E(X|Y=y) = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2) = -2 - \frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot(y-0) = -2-\frac{3}{5}\,y,$$

$$D(X|Y=y) = \sigma_1^2(1-\rho^2) = 2\left(1-\frac{9}{10}\right) = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $E(X|Y=y) = -2 - \frac{3}{5}\,y$, $D(X|Y=y) = \frac{1}{5}$.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1. Эмпирические характеристики признаков

Одним из первых понятий, с которых начинается изложение математической статистики, является понятие *признака*. В сущности, *признак* — это то же самое, что функция, только без явной привязки к некоторой области определения. Вместо термина *признак* иногда используется равнозначный термин *переменная*. Признаки обозначаются так же, как и случайные величины — большими латинскими буквами: X, Y и т. д.

Рассмотрим признак X, заданный на некотором множестве (статистической совокупности) $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Пусть $x_1 = X(\omega_1)$, ..., $x_n = X(\omega_n)$ — его значения.

Определение. ***Эмпирическим средним*** *или* ***средним значением признака в совокупности*** Ω *называется среднее арифметическое всех его значений в этой совокупности*

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Определение. ***Эмпирической дисперсией или дисперсией признака*** X ***в совокупности*** Ω *называется среднее арифметическое квадратов отклонений его значений от эмпирического среднего*

$$D(X) = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n},$$

при этом корень $\sigma = \sqrt{D(X)}$ *называется* ***стандартным отклонением*** *признака* X *в совокупности* Ω.

Эмпирические начальные и *центральные моменты* k-го порядка признака X определяются соотношениями:

$$\nu_k(X) = \frac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n} \text{ — начальный момент и}$$

$$\mu_k(X) = \frac{(x_1 - \overline{x})^k + (x_2 - \overline{x})^k + \ldots + (x_n - \overline{x})^k}{n}$$

— центральный момент.

В этих формулах $k = 1, 2, \ldots$ — *порядок* эмпирического момента.

Наконец, *эмпирическая функция распределения* $F(x)$ определяется так:

$$F(x) = \frac{\{\text{число элементов } \omega \in \Omega, \text{ для которых } X(\omega) < x\}}{n}.$$

Обозначения эмпирических моментов и функции распределения зависят от обозначения статистической совокупности. Если, например, признак X определен на совокупности $\widehat{\Omega}$, эмпирические моменты обозначаются $\widehat{\nu}_k$ и $\widehat{\mu}_k$, а функция распределения — $\widehat{F}(x)$.

Введенные эмпирические понятия обладают всеми свойствами своих теоретико-вероятностных аналогов. Например, хорошо известное в теории вероятностей тождество

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

применительно к признаку X со значениями $x_1, \ldots, x_n$ на совокупности $\widehat{\Omega}$, дает следующее соотношение для эмпирической дисперсии:

$$\widehat{D}(X) = \widehat{\nu}_2 - \widehat{\nu}_1^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2.$$

Упорядочив значения $x_1, \ldots, x_n$ по неубыванию, получим *вариационный ряд* признака

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n-1)} \leqslant x_{(n)}.$$

Разность между наибольшим и наименьшим значением $x_{(n)} - x_{(1)}$ называется *размахом* признака.

Порядковый центр (середина) вариационного ряда называется *эмпирической медианой* и определяется формулой

$$Me = \begin{cases} x_{(k+1)}, & \text{если } n = 2k+1, \\ \dfrac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right), & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Эмпирические квантили порядка p определяются как приближенные решения уравнения $F(x) = p$, где $F(x)$ — эмпирическая функция распределения.

Пусть X — признак в совокупности Ω объема n. Список всех его значений образует ряд из n чисел. Удалив из него одинаковые числа и пронумеровав заново то, что осталось, получим последовательность $x_1, \ldots, x_s$, $s \leqslant n$.

Определение. *Количество n_i элементов $\omega \in \Omega$, для которых $X(\omega) = x_i$ называется* ***частотой*** *значения x_i. Отношение $\frac{n_i}{n}$ называется* ***относительной частотой*** *x_i. При этом таблица частот значений*

x_1	x_2	$\ldots$	x_s
n_1	n_2	$\ldots$	n_s

называется ***частотным*** *(****или статистическим****)* ***распределением****, а таблица относительных частот*

x_1	x_2	$\ldots$	x_s
$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\ldots$	$\frac{n_s}{n}$

называется ***эмпирическим распределением*** *признака.*

Эмпирические характеристики признака находятся по таблицам частот следующим образом:

- эмпирическое среднее

$$\overline{x} = \frac{x_1 n_1 + \ldots + x_s n_s}{n},$$

- эмпирический начальный момент порядка k

$$v_k = \frac{x_1^k n_1 + \ldots + x_s^k n_s}{n},$$

- эмпирический центральный момент порядка k

$$\mu_k = \frac{(x_1 - \overline{x})^k n_1 + \ldots + (x_s - \overline{x})^k n_s}{n},$$

- эмпирическая дисперсия

$$D(X) = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 n_1 + \ldots + (x_s - \overline{x})^2 n_s}{n},$$

- эмпирическая функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_i < x} n_i.$$

Пусть $x_i = X(\omega_i)$ и $y_i = Y(\omega_i)$, $\omega_i \in \Omega$ — значения признаков X и Y на совокупности $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. *Эмпирическая ковариация* определяется формулой

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Таблицей сопряженности или *совместным частотным распределением признаков* X и Y называется следующая таблица:

	$Y = y_1$	$Y = y_2$	$\ldots$	$Y = y_s$
$X = x_1$	n_{11}	n_{12}	$\ldots$	n_{1s}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$X = x_r$	n_{r1}	n_{r2}	$\ldots$	n_{rs}

где n_{ij} — *частота пары* (x_i, y_j), т. е. число элементов $\omega \in \Omega$, для которых $X(\omega) = x_i$, а $Y(\omega) = y_j$.

На основе таблицы сопряженности эмпирическая ковариация находится по формуле:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) n_{ij}.$$

Эмпирический коэффициент корреляции признаков определяется тем же соотношением, что и коэффициент корреляции случайных величин:

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X) D(Y)}}.$$

Пример 88. *В совокупности* 16 *студентов определены два признака: X — оценка по математике и Y — оценка по иностранному языку. Совместное частотное распределение оценок задано таблицей:*

	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$
$Y = 3$	1	0	1	0
$Y = 4$	2	4	4	2
$Y = 5$	0	1	0	1

Требуется найти эмпирический коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$.

Решение. Сначала находим частотные распределения признаков:

Значение X	2	3	4	5
Частота	3	5	5	3

и

Значение Y	3	4	5
Частота	2	12	2

Затем последовательно вычисляем

$$\overline{x} = \frac{1}{16}\,(2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 5 + 5 \times 3) = 3{,}5;$$

$$D(X) = \frac{1}{16}\,\big((2 - 3{,}5)^2 \times 3 + (3 - 3{,}5)^2 \times 5 + \\ + (4 - 3{,}5)^2 \times 5 + (5 - 3{,}5)^2 \times 3\big) = 1;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{16}(3 \times 2 + 4 \times 12 + 5 \times 2) = 4;$$

$$D(Y) = \frac{1}{16}\,\big((3 - 4)^2 \times 2 + (4 - 4)^2 \times 12 + (5 - 4)^2 \times 2\big) = \frac{1}{4};$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{16}\,((1{,}5) + (-0{,}5) + (-0{,}5) + (1{,}5)) = \frac{1}{8};$$

$$\rho(X, Y) = \frac{1/8}{\sqrt{1/4}} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

§ 2. Межгрупповая дисперсия

Пусть X — признак в совокупности Ω объема n, разбитой на s групп:

$$\Omega_i = \{\omega_{i1},\ \omega_{i2},\ \ldots,\ \omega_{in_i}\}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Введем следующие обозначения:

$$x_{ij} = X(\omega_{ij})$$

— значение признака на j-м элементе i-ой группы;

$$\overline{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \tag{3}$$

— эмпирическое среднее в i-ой группе или i-е *групповое среднее*;

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \overline{x}_i)^2 \tag{4}$$

— эмпирическая дисперсия в i-й группе или i-я *групповая дисперсия*;

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \overline{x}_i n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \tag{5}$$

— эмпирическое среднее во всей совокупности Ω или *общее среднее*;

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 n_i \tag{6}$$

— *средняя групповая дисперсия*;

$$\delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (\overline{x}_i - \overline{x})^2 n_i \tag{7}$$

— *межгрупповая дисперсия.*

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \overline{x})^2 \tag{8}$$

— эмпирическая дисперсия признака в Ω или *общая дисперсия.*

Общую дисперсию σ^2 можно представить в виде суммы

$$\sigma^2 = \overline{\sigma}^2 + \delta^2, \tag{9}$$

где первое слагаемое $\overline{\sigma}^2$ характеризует среднюю изменчивость признака в каждой группе $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, а второе слагаемое δ^2 характеризует разброс групповых средних $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k$.

Пример 89. *Пусть некоторая совокупность разбита на две равные по объему группы. Предположим, что в первой группе среднее значение признака $\overline{x}_1 = 10$, дисперсия $\sigma_1^2 = 15$, а во второй группе $\overline{x}_2 = 20$, $\sigma_2^2 = 25$. Найдите среднее значение и дисперсию признака во всей совокупности.*

Решение. Сначала находим среднее, затем дисперсию:

$$\overline{x} = \overline{x}_1 \frac{n_1}{n} + \overline{x}_2 \frac{n_2}{n} = 10 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{2} = 15,$$

$$\sigma^2 = \overline{\sigma}^2 + \delta^2 =$$

$$= \left(\sigma_1^2 \frac{n_1}{n} + \sigma_2^2 \frac{n_2}{n}\right) + \left((\overline{x}_1 - \overline{x})^2 \frac{n_1}{n} + (\overline{x}_2 - \overline{x})^2 \frac{n_2}{n}\right) = 20 + 25 = 45.$$

Ответ: $\overline{x} = 15$, $\sigma^2 = 45$.

§ 3. Интервальные характеристики признака

Пусть (a_1, b_1), …, (a_s, b_s) — набор попарно непересекающихся интервалов, покрывающих все значения признака X в совокупности Ω объема n.

Определение. ***Частотой интервала*** (a_i, b_i) *называется число тех элементов $\omega \in \Omega$, для которых $X(\omega) \in (a_i, b_i)$; интервал (a_i, b_i) при этом называется i-м* ***интервалом группировки****.*

Таблицей интервальных частот называется таблица

a_1	b_1	n_1
a_2	b_2	n_2
…	…	…
a_s	b_s	n_s

в которой n_i — частота интервала (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots, s$. Поскольку интервалы группировки не пересекаются и покрывают все значения признака, сумма интервальных частот равна объему совокупности, $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n$. Обозначим середину i-го интервала группировки через $x_i^* = \dfrac{a_i + b_i}{2}$.

К эмпирическим интервальным характеристикам относятся:

- интервальное среднее $\overline{x}^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{s} x_i^* n_i$,
- интервальная дисперсия $D^*(X) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{s}(x_i^* - \overline{x}^*)^2 n_i$,
- интервальное стандартное отклонение $\sigma^*(X) = \sqrt{D^*(X)}$.

Отметим, что эти и другие эмпирические интервальные характеристики вычисляются как характеристики *интервального распределения*

X	x_1^*	x_2^*	$\ldots$	x_s^*
P	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\ldots$	$\frac{n_s}{n}$

В типичном случае, когда концы интервалов группировки $\Delta_i = (a_i, b_i)$ образуют арифметическую прогрессию с шагом h,

$$\Delta_1 = (a_1,\ a_1 + h), \quad \Delta_2 = (a_1 + h,\ a_1 + 2h), \ldots$$

для приближенного вычисления эмпирической дисперсии σ^2 по интервальному распределению применяется *поправка Шеппарда*:

$$\sigma^2 \approx \sigma^{*2} - \frac{1}{12}h^2.$$

§ 4. Повторные и бесповторные выборки

Определение. *Совокупность, из которой извлекаются элементы, называется* ***генеральной****, тогда как совокупность, образованная отобранными элементами, называется* ***выборочной****.*

Повторной выборкой называется совокупность, образованная по следующей схеме: сначала из генеральной совокупности случайным равновероятным образом извлекается один элемент; затем этот элемент возвращается в генеральную совокупность и все повторяется, пока не будет отобрано необходимое число элементов. *Бесповторной выборкой* называется совокупность, образованная по аналогичной схеме, но с одним отличием — отобранные элементы в генеральную совокупность не возвращаются.

Характерной особенностью бесповторной выборки является то, что она состоит из различных элементов. Напротив, в состав повторной выборки могут входить одинаковые элементы генеральной совокупности.

Предположим, что из генеральной совокупности Ω объема N извлекается выборка $\widehat{\Omega}$ объема n. Пусть X — некоторый признак на Ω. Поскольку все элементы $\widehat{\Omega}$, независимо от вида выборки, являются также элементами Ω, признак X определен и на совокупности $\widehat{\Omega}$.

Обозначим $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0N}$ значения признака X в генеральной совокупности и $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — значения X в выборке. Далее значения $x_{01}, \ldots, x_{0N}$ рассматриваются как числа, а $X_1, \ldots, X_n$ — как случайные величины.

Определение. ***Генеральными*** *(соответственно* ***выборочными****)* ***характеристиками*** *признака X называют эмпирические характеристики признака X в генеральной (соответственно выборочной) совокупности.*

Например:

$\overline{x}_0 = \dfrac{1}{N}(x_{01} + \ldots + x_{0N})$ — генеральное среднее (число);

$\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ — выборочное среднее (случайная величина);

$D(X) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}(x_{0i} - \overline{x}_0)^2$ — генеральная дисперсия (число);

$\widehat{D}(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ — выборочная дисперсия (случайная величина).

Теорема. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — значения признака X в выборке, $\overline{x}_0$ — генеральное среднее, а $D(X)$ — генеральная дисперсия. Тогда для выборочного среднего $\overline{X}$ имеем:*

- *в случае повторной или бесповторной выборки*

$$E(\overline{X}) = \overline{x}_0; \tag{10}$$

- *в случае повторной выборки*

$$D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n}; \tag{11}$$

- *в случае бесповторной выборки*

$$D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n}\frac{N-n}{N-1}, \tag{12}$$

где N — объем генеральной совокупности.

Из теоремы нетрудно получить следующее следствие:

Следствие. *Пусть $X_1, \ldots X_n$; $Y_1, \ldots, Y_n$ — значения признаков X и Y в выборочной совокупности объема n, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ — ковариация признаков X и Y в генеральной совокупности объема N. Тогда для ковариации выборочных средних справедливы соотношения:*

- *в случае повторной выборки*

$$\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y}) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{n}; \tag{13}$$

- *в случае бесповторной выборки*

$$\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y}) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}. \tag{14}$$

Доказательство. Действительно, с учетом равенства $\overline{X \pm Y} = \overline{X} \pm \overline{Y}$ в случае повторной выборки имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y}) &= \frac{1}{4}\left(D\left(\overline{X} + \overline{Y}\right) - D\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(D\left(\overline{X + Y}\right) - D\left(\overline{X - Y}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{4n}\left(D\left(X+Y\right) - D\left(X-Y\right)\right) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{n}.\end{aligned}$$

Для бесповторной выборки доказательство аналогично. □

Пример 90. *Признак $X(k)$ задан на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ следующей таблицей:*

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(k)$	2	1	1	2	1	2	2	3	2	2

Из Ω извлекается случайная бесповторная выборка объема 5. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{X}$ признака X в выборке.

Решение. Распределение частот признака X имеет следующий вид

x_i	1	2	3
n_i	3	6	1

Объем генеральной совокупности $N = 10$. Найдем генеральное среднее и генеральную дисперсию признака X

$$\overline{x}_0 = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1}{10} = \frac{9}{5} = 1{,}8;$$
$$D(X) = \frac{1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 6 + 3^2 \cdot 1}{10} - (\overline{x}_0)^2 = \frac{9}{25} = 0{,}36.$$

Используя формулы (10) и (12) в случае *бесповторной* выборки объема $n = 5$, находим математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{X}$ признака X в выборке

$$E(\overline{X}) = \overline{x}_0 = 1{,}8;$$
$$D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{0{,}36}{5} \cdot \frac{10-5}{10-1} = 0{,}04.$$

Ответ: 1,8; 0,04.

Пример 91. *Признак $X(k)$ задан на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ следующей таблицей:*

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(k)$	3	3	3	3	1	3	3	2	1	2

Из Ω извлекается случайная повторная выборка объема 5. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{X}$ признака X в выборке.

Решение. Отличие от предыдущего примера состоит в том, что теперь извлекается *повторная выборка*. Здесь $N = 10$, $n = 5$. Генеральные характеристики признака X соответственно равны $\overline{x}_0 = 2{,}4$, $D(X) = 0{,}64$. Используя формулы (10) и (11) в случае *повторной* выборки, находим

$$E(\overline{X}) = \overline{x}_0 = 2{,}4; \quad D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{0{,}64}{5} = 0{,}128.$$

Ответ: 2,4; 0,128.

Пример 92. *Итоговое распределение баллов на некотором письменном экзамене задано таблицей*

Оценка работы	2	3	4	5
Число работ	16	16	24	40

Работы проверяли 8 преподавателей, которые разделили все работы между собой поровну случайным образом. Предполагая независимость оценки от личности проверяющего, найдите математическое ожидание и дисперсию среднего балла по результатам одного преподавателя.

Решение. Объем генеральной совокупности составляет $N = 16 + 16 + 24 + 40 = 96$ работ. Найдем генеральные характеристики (генеральное среднее $\overline{x}_0$ и генеральную дисперсию $D(X)$) признака X (в данном случае оценки):

$$\overline{x}_0 = \frac{2 \cdot 16 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 24 + 5 \cdot 40}{96} = \frac{47}{12} \approx 3{,}917;$$

$$D(X) = \frac{2^2 \cdot 16 + 3^2 \cdot 16 + 4^2 \cdot 24 + 5^2 \cdot 40}{96} - (\overline{x}_0)^2 = \\ = \frac{199}{12} - \left(\frac{47}{12}\right)^2 = \frac{179}{144} \approx 1{,}243.$$

Каждому преподавателю досталось 12 работ. Используя формулы (10) и (12) в случае *бесповторной* выборки объема $n = 12$, находим математическое ожидание и дисперсию среднего бала по результатам одного преподавателя

$$E(\overline{X}) = \overline{x}_0 = \frac{47}{12} \approx 3{,}917;$$

$$D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{179}{144 \cdot 12} \cdot \frac{96-12}{96-1} = \frac{1\,253}{13\,680} \approx 0{,}0916.$$

Ответ: 3,917; 0,01916.

Пример 93. *Две игральные кости, красная и синяя, подбрасываются до тех пор, пока не выпадет* 19 *различных с учетом цвета комбинаций очков. Пусть S_i — сумма очков на красной и синей кости* *в i-той комбинации, $\overline{S}$ — среднее арифметическое всех этих сумм, $i = 1, \ldots, 19$. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{S}$.*

Решение. Генеральную совокупность объема $N = 36$ можно представить как пространство элементарных исходов в опыте по подбрасыванию двух игральных костей, выборочную — объема $n = 19$ — как результат бесповторной выборки из этой генеральной совокупности. В обеих совокупностях определены признаки: X_1 — число очков на красной, X_2 — число очков на синей игральной кости и $S = X_1 + X_2$. Признаки X_1 и X_2 в генеральной совокупности имеют одинаковое распределение

X_i	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Находим генеральное среднее

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{1}{6}(1 + 2 + \ldots + 6) = \frac{6 \cdot 7}{2 \cdot 6} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

и дисперсию

$$D(X_1) = D(X_2) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

В опыте по подбрасыванию двух игральных костей X_1 и X_2 — независимые случайные величины, следовательно, $D(X_1 + X_2) = \frac{35}{6}$. Таким образом, генеральные характеристики признака S равны: $E(S) = 7$, $D(S) = \frac{35}{6}$. Используя формулы (10) и (12) в случае *бесповторной* выборки объема $n = 19$, находим математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{S}$:

$$E(\overline{S}) = E(S) = 7;$$
$$D(\overline{S}) = \frac{D(S)}{n}\frac{N - n}{N - 1} = \frac{35}{6 \cdot 19} \cdot \frac{36 - 19}{36 - 1} = \frac{17}{114} \approx 0{,}1491.$$

Ответ: 7; 0,1491.

Пример 94. *Статистические данные о результатах экзамена в трех группах приведены в таблице*

№ группы	*Число студентов*	*Средний балл*	*Среднее квадр. откл.*
1	20	79	6
2	18	64	14
3	19	79	19

При проведении экзамена студенты случайным образом размещались (в соответствии с числом мест) в нескольких аудиториях. В одной из них находилось 20 *студентов. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего балла по результатам, полученным в данной аудитории, предполагая, что условия для выполнения экзаменационных работ во всех аудиториях одинаковы.*

Решение. Объем генеральной совокупности составляет $N = 20 + 18 + 19 = 57$ студентов. Используя формулу (5), найдем генеральное среднее $\overline{x}_0$

$$\overline{x}_0 = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2 + n_3\overline{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{20 \cdot 79 + 18 \cdot 64 + 19 \cdot 79}{57} = \frac{1\,411}{19} \approx 74{,}263.$$

Затем, используя формулы (6), (7) и (9), найдем генеральную дисперсию $\sigma^2 = D(X)$ признака X (в данном случае балла по результатам экзамена)

$$\begin{aligned}
\delta^2 &= \frac{n_1(\overline{x}_1 - \overline{x}_0)^2 + n_2(\overline{x}_2 - \overline{x}_0)^2 + n_3(\overline{x}_3 - \overline{x}_0)^2}{n_1 + n_2 + n_3} = \\
&= \frac{20 \cdot (79 - \overline{x}_0)^2 + 18 \cdot (64 - \overline{x}_0)^2 + 19 \cdot (79 - \overline{x}_0)^2}{57} = \\
&= \frac{17\,550}{361} \approx 48{,}615 \text{ (межгрупповая дисперсия)}, \\
\overline{\sigma}^2 &= \frac{\sigma_1^2 n_1 + \sigma_2^2 n_2 + \sigma_3^2 n_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{20 \cdot 6^2 + 18 \cdot 14^2 + 19 \cdot 19^2}{57} = \\
&= \frac{11\,107}{57} \approx 194{,}86 \text{ (средняя групповая дисперсия)}, \\
\sigma^2 &= D(X) = \delta^2 + \overline{\sigma}^2 = \\
&= \frac{17\,550}{361} + \frac{11\,107}{57} = \frac{263\,683}{1\,083} \approx 243{,}475 \text{ (общая дисперсия)}.
\end{aligned}$$

Используя формулы (10) и (12) в случае *бесповторной* выборки объема $n = 20$, находим математическое ожидание и дисперсию среднего балла $\overline{X}$ по результатам, полученным в данной аудитории:

$$E(\overline{X}) = \overline{x}_0 = \frac{1\,411}{19} \approx 74{,}263;$$
$$D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{263\,683}{1\,083\cdot 20}\cdot\frac{57-20}{57-1} = \frac{1\,393\,753}{173\,280} \approx 8{,}0434.$$

Ответ: 74,263; 8,0434.

Пример 95. *Значения признаков X и Y заданы на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$ таблицей частот*

	$Y = 3$	$Y = 5$	$Y = 8$
$X = 300$	17	19	18
$X = 600$	13	14	19

Из Ω без возвращения извлекаются 8 элементов. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — средние значения признаков в выборочной совокупности. Найдите $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$.

Решение. Находим частотные распределения признаков:

Значение X	300	600
Частота	54	46

и

Значение Y	3	5	8
Частота	30	33	37

Затем последовательно вычисляем

$$\overline{x}_0 = \frac{1}{100}(300\cdot 54 + 600\cdot 46) = 438;$$
$$\overline{y}_0 = \frac{1}{100}(3\cdot 30 + 5\cdot 33 + 8\cdot 37) = 5{,}51;$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 3\,(3\cdot 17 + 5\cdot 19 + 8\cdot 18) + {} + 6\,(3\cdot 13 + 5\cdot 14 + 8\cdot 19) - 438\cdot 5{,}51 = 22{,}62.$$

Используя формулу (14) в случае *бесповторной* выборки объема $n = 8$, находим значение $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$:

$$\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y}) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Cov}(X,Y)\cdot\frac{N-n}{N-1} = \frac{1}{8}\cdot 22{,}62\cdot\frac{100-8}{100-1} = \frac{8\,671}{3\,300} \approx 2{,}6276.$$

Ответ: 2,6276.

Пример 96. *Значения признаков X и Y заданы на множестве $\Omega =$ $= \{1, 2, \ldots, 2000\}$ таблицей частот*

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 6$
$X = 7$	100	400	200
$X = 10$	300	100	900

Из Ω с возвращением извлекаются 800 элементов. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — средние значения признаков в выборочной совокупности. Найдите $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$.

Решение. Отличие от предыдущего примера состоит в том, что теперь извлекается *повторная выборка*. Здесь $N = 2\,000$, $n = 800$. Генеральные средние признаков X и Y соответственно равны $\overline{x}_0 = 8{,}95$, $\overline{y}_0 = 4{,}7$, а генеральная ковариация: $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0{,}435$. Используя формулу (13) в случае *повторной* выборки, находим значение $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$:

$$\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y}) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{800} \cdot 0{,}435 = 0{,}00054375.$$

Ответ: 0,00054375.

Пример 97. *В некотором городе сторонники партии A составляют 16%, партии B — 23%. Известно, что объем бесповторной выборки составляет 15% от числа всех избирателей. Пусть $\widehat{p}_A$ — выборочная доля сторонников партии A, n_B — число отобранных сторонников партии B. Найдите (приближенно) $\mathrm{Cov}(\widehat{p}_A, n_B)$.*

Решение. Введем две случайные величины X и Y:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{если избиратель поддерживает партию } A,\\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{если избиратель поддерживает партию } B,\\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Законы распределения X и Y имеют соответственно вид

X	0	1
P	0,84	0,16

и

Y	0	1
P	0,77	0,23

Легко найти $\mathrm{Cov}(X,Y)=-0{,}0368$. Пусть N — количество всех жителей города. Тогда $n=0{,}15N$, где n — объем бесповторной выборки. Ясно, что $n_B=n\cdot\overline{Y}$ и $\widehat{p}_A=\overline{X}$, где $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — соответственно выборочные средние сторонников партий A и B в выборке. Используя формулу (14) в случае бесповторной выборки, находим

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\widehat{p}_A,n_B)&=\mathrm{Cov}(\overline{X},n\cdot\overline{Y})=n\cdot\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{Y})=\\&=n\cdot\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X,Y)\frac{N-n}{N-1}\approx\mathrm{Cov}(X,Y)\left(1-\frac{n}{N}\right)=\\&=\mathrm{Cov}(X,Y)\left(1-\frac{0{,}15N}{N}\right)=0{,}85\,\mathrm{Cov}(X,Y)=\\&=0{,}85\cdot(-0{,}0368)=-0{,}03128.\end{aligned}$$

Ответ: $-0{,}03128$.

Рассмотрим теперь задачу определения точности приближенного равенства:

$$\overline{x}_0\ \text{(генеральное среднее)}\approx\overline{X}\ \text{(выборочное среднее)}.\qquad(15)$$

Действительно, для выборки любого вида $\overline{x}_0=E(\overline{X})$, имеем

$$\sqrt{E(|\overline{X}-\overline{x}_0|^2)}=\sqrt{E\{(\overline{X}-E(\overline{X}))^2\}}=\sqrt{D(\overline{X})}=\sigma_{\overline{X}},$$

поэтому, среднеквадратичная ошибка $\sigma_{\overline{X}}$ в соотношении (15) находится как корень из дисперсии $D(\overline{X})$, рассчитанной по формулам (11) или (12).

Пример 98. *Значение признака X в генеральной совокупности задано следующей таблицей:*

Интервал	3–23	23–43	43–63
Частота	20	60	20

Из этой совокупности извлекается бесповторная выборка объема 25. Пусть $\overline{x}_0$ — генеральное, а $\overline{X}$ — выборочное среднее. Найдите среднеквадратичную ошибку в приближенном равенстве $\overline{x}_0\approx\overline{X}$. При вычислении генеральной дисперсии используйте поправку Шеппарда.

Решение. Составим интервальное распределение

X	13	33	53
P	0,2	0,6	0,2

Затем найдем интервальное среднее $\overline{x}^*$ и интервальную дисперсию σ^{*2}:

$$\overline{x}^* = 13 \cdot 0{,}2 + 33 \cdot 0{,}6 + 53 \cdot 0{,}2 = 33;$$
$$\sigma^{*2} = (13-33)^2 \cdot 0{,}2 + (33-33)^2 \cdot 0{,}6 + (53-33)^2 \cdot 0{,}2 = 400 \cdot 0{,}4 = 160.$$

С учетом поправки Шеппарда

$$\sigma^2 \approx \sigma^{*2} - h^2/12 = 160 - 400/12 \approx 126{,}7.$$

Следовательно,

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}} \approx \sqrt{\frac{126{,}7}{25}\frac{75}{99}} = \sqrt{\frac{126{,}7}{33}} \approx 1{,}96.$$

Ответ: $\sigma_{\overline{X}} \approx 1.96$.

Пусть

x_1	x_2	$\ldots$	x_s
N_1	N_2	$\ldots$	N_s

— распределение признака X в генеральной совокупности Ω, а

x_1	x_2	$\ldots$	x_s
n_1	n_2	$\ldots$	n_s

— распределение того же признака в выборочной совокупности $\widehat{\Omega}$.

Определение. *Отношение* $p_i = \dfrac{N_i}{N}$ (*соответственно* $\widehat{p}_i = \dfrac{n_i}{n}$) *называется* ***генеральной*** (*соответственно* ***выборочной***) ***долей значения*** x_i *признака* X.

Теорема. *Пусть* p *— генеральная, а* $\widehat{p}$ *— выборочная доля какого-либо значения* x_1 *признака* X, $q = 1 - p$. *Тогда:*

- *в случае повторной или бесповторной выборки*

$$E(\widehat{p}) = p;$$

- *в случае повторной выборки*

$$D(\widehat{p}) = \frac{pq}{n};$$

- *в случае бесповторной выборки*

$$D(\widehat{p}) = \frac{pq}{n}\frac{N-n}{N-1}.$$

Пример 99. *В выборах приняли участие* 1 000 000 *избирателей. Предполагая, что за наиболее популярного кандидата проголосует* $\approx 50\,\%$ *избирателей, найдите стандартное отклонение процента бюллетеней в его пользу среди первых* 900 000 *обработанных бюллетеней.*

Решение. Поскольку генеральная доля кандидата $p \approx 0{,}5$, имеем

$$\sigma_{\widehat{p}} \approx \sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{900\,000}\left(1 - \frac{900\,000}{1\,000\,000}\right)} = \frac{5}{3}\cdot 10^{-4} \approx 0{,}017\,\%.$$

Ответ: $\sigma_{\widehat{p}} \approx 0{,}017\,\%$.

§ 5. Выборки из распределения

Пусть Ω — пространство элементарных событий, связанное с испытанием, в ходе которого случайная величина X получает определенное значение. Таким образом, $X = X(\omega)$ — функция от $\omega \in \Omega$. Предположим, что данное испытание осуществляется n раз по схеме повторных независимых испытаний и $\widehat{\omega}_1, \ldots, \widehat{\omega}_n$ ($\widehat{\omega}_i \in \Omega$) — результаты этих испытаний. Множество $\widehat{\Omega} = \{\widehat{\omega}_1, \ldots, \widehat{\omega}_n\}$ рассматривается как выборочная совокупность, полученная в результате выборки с возвращением из генеральной совокупности Ω. Функция X рассматривается как признак, определенный как на Ω, так и на $\widehat{\Omega}$.

Значения случайной величины X, принятые в отдельных независимых испытаниях, обозначим

$$X_1 = X(\widehat{\omega}_1),\ \ldots,\ X_n = X(\widehat{\omega}_n).$$

Значения $X_1, \ldots, X_n$ интерпретируются как случайные величины, связанные со сложным опытом, состоящим из n простых испытаний, при этом $X_1, \dots, X_n$ независимы и имеют то же распределение, что и случайная величина X. Набор случайных величин $X_1, \dots, X_n$ называется *выборкой из распределения.*

Все эмпирические характеристики X в совокупности $\widehat{\Omega}$ называются *выборочными* характеристиками случайной величины X и обозначаются подобно соответствующим вероятностным характеристикам:

$$\begin{aligned} &\widehat{D}(X) = \widehat{\sigma}^2 && \text{— выборочная дисперсия;} \\ &\widehat{\mu}_k,\ \widehat{\nu}_k && \text{— выборочные моменты и т. д.} \end{aligned}$$

Исключение составляет лишь выборочное среднее

$$\overline{X} = \widehat{E}(X) = \frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right).$$

Выборочна функция распределения

$$\widehat{F}(x) = \frac{\{\text{число тех } X_i,\ \text{для которых } X_i < x\}}{n}$$

отличается от генеральной функции распределения $F(x) = P(X < x)$ тем, что при фиксированном x значение $\widehat{F}(x)$ является дискретной случайной величиной, распределенной по закону

$$P\left(\widehat{F}(x) = \frac{k}{n}\right) = C_n^k F(x)^k \left(1 - F(x)\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \qquad (16)$$

Основные числовые характеристики $\widehat{F}(x)$ легко находятся, с учетом того, что случайная величина $n\widehat{F}(x)$ распределена по биномиальному закону с параметрами n и $F(x)$.

Пример 100. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_6$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[5, 8]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите вероятность $P\left(\widehat{F}(7) = \frac{1}{2}\right)$.*

Решение. Согласно свойствам выборочной функции распределения случайная величина $Y = 6\widehat{F}(7)$ распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 6$ и $p = \frac{2}{3}$. Используя формулу (16), находим

$$P\left(\widehat{F}(7) = \frac{1}{2}\right) = P(Y = 3) = C_6^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{160}{729} \approx 0{,}2195.$$

Ответ: 0,2195.

Пример 101. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots, X_6$ *— выборка из равномерного распределения на отрезке* $[4, 9]$, $\widehat{F}(x)$ *— соответствующая выборочная функция распределения. Найдите* $P\left(\widehat{F}(7) = \widehat{F}(8)\right)$.

Решение. По определению выборки и свойствам выборочной функции распределения искомая вероятность равна

$$P\left(\widehat{F}(7) = \widehat{F}(8)\right) = (P(X_i \notin [7{,}8]))^6 = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^6 = \left(\frac{4}{5}\right)^6 \approx 0{,}2621.$$

Ответ: 0,2621.

Пример 102. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ *— выборка из распределения* $P(X = l) = \frac{1}{12}$, $l = 1, 2, \ldots, 12$, $\widehat{F}(x)$ *— соответствующая выборочная функция распределения. Найдите вероятность* $P\left(\widehat{F}(7+0) - \widehat{F}(7) = \frac{2}{5}\right)$.

Решение. Функция распределения случайной величины $Y = 10\widehat{F}(7)$ является ступенчатой, возрастает скачками величиной $\frac{1}{12}$ в точках $x_k = l$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P\left(\widehat{F}(7+0) - \widehat{F}(7) = \frac{2}{5}\right) = P(Y = 4) = C_{10}^4 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^4 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^6 \approx 0{,}006.$$

Ответ: 0,006.

Пример 103. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots, X_5$ *— выборка из равномерного распределения на отрезке* $[4, 9]$, $\widehat{F}(x)$ *— соответствующая выборочная функция распределения. Найдите дисперсию* $D[\widehat{F}(8)]$.

Решение. Случайная величина $Y = 5 \cdot \widehat{F}(8)$ распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 5$ и $p = \frac{4}{5}$. Дисперсия такой случайной величины равна $np(1 - p)$. Следовательно,

$$D[\widehat{F}(8)] = D\left[\frac{1}{5}Y\right] = \frac{1}{25} \cdot D(Y) = \frac{1}{25} \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}032.$$

Ответ: 0,032.

§ 6. Точечные статистические оценки

Предположим, что генеральное распределение признака X зависит от некоторого параметра $\theta \in \Theta$. *Точечной статистической оценкой* параметра θ называется функция $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$, предназначенная для приближенного вычисления неизвестного параметра θ по выборочным значениям признака. Оценка $\widehat{\theta}$ называется *несмещенной*, если $E(\widehat{\theta}) = \theta$ для всех $\theta \in \Theta$.

Пример 104. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 7e^{7(\theta-x)} & \text{при } x \geqslant \theta, \\ 0 & \text{при } x < \theta. \end{cases}$ Проверьте, является ли оценка $\widehat{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{7}$ несмещенной оценкой параметра θ?*

Решение. Сначала найдем математическое ожидание $E(X)$ случайной величины X с плотностью $f(x)$

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int\limits_{\theta}^{\infty} x \cdot 7e^{7(\theta-x)}\, dx = -\frac{1}{7}(1+7x)e^{7(\theta-x)}\Big|_{\theta}^{\infty} = \theta + \frac{1}{7}.$$

Далее, по определению выборки и выборочного среднего найдем, что $E(\overline{X}) = E(X) = \theta + \frac{1}{7}$.

Наконец, по определению несмещенной оценки имеем

$$E(\widehat{\theta}) = E\left(\overline{X} - \frac{1}{7}\right) = E(\overline{X}) - \frac{1}{7} = \theta + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} = \theta.$$

Ответ: оценка $\widehat{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{7}$ является несмещенной оценкой параметра θ.

Если генеральное среднее $\mu = E(X)$ известно, для приближенного вычисления неизвестной генеральной дисперсии $D(X)$ используется ее несмещенная оценка:

$$s_0^2 = \frac{1}{n}\Big((X_1 - \mu)^2 + \ldots + (X_n - \mu)^2\Big). \tag{17}$$

Если $\mu = E(X)$ не известно, используется другая несмещенная оценка:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\Big(\big(X_1 - \overline{X}\big)^2 + \ldots + \big(X_n - \overline{X}\big)^2\Big). \tag{18}$$

Для построения точечных оценок $\widehat{\theta}_{i,MM}$ одного или нескольких параметров распределения методом моментов сначала находятся функции $\theta_i = h_i(\nu_1, \ldots, \nu_k)$, выражающие неизвестные параметры θ_i генерального распределения через его начальные (или центральные) моменты, после чего производится замена генеральных моментов соответствующими выборочными моментами:

$$\widehat{\theta}_{i,MM} = h_i(\widehat{\nu}_1, \ldots, \widehat{\nu}_k).$$

Наиболее простой вид метод моментов приобретает, когда параметрами распределения являются его моменты. Действительно, в этом случае оценками генеральных моментов являются соответствующие выборочные моменты:

$$\widehat{\nu}_{k,MM} = \widehat{\nu}_k, \quad \widehat{\mu}_{k,MM} = \widehat{\mu}_k.$$

Пример 105. *В 17 независимых испытаниях случайная величина X значение 3 приняла 9 раз, а значение 5–8 раз. Найдите несмещенную оценку дисперсии $D(X)$.*

Решение. Составим выборочное распределение

x_i	3	5
n_i	9	8

Найдем выборочную дисперсию

$$\widehat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{3^2 \cdot 9 + 5^2 \cdot 8}{9+8} - \left(\frac{3 \cdot 9 + 5 \cdot 8}{9+8}\right)^2 = $$
$$= \frac{281}{17} - \left(\frac{67}{17}\right)^2 = \frac{288}{289} \approx 0{,}9965.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии $D(X)$ является s^2, которую можно определить по формуле (18) или воспользоваться ее связью с выборочной дисперсией

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\,\widehat{\sigma}^2 = \frac{17}{16} \cdot \frac{288}{289} = \frac{18}{17} \approx 1{,}0588.$$

Ответ: 1,0588.

Пример 106. *Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок:* 361, 375, 313, 426, 389, 404, 373, 383 *м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина известна и равна* 371 *м.*

Решение. Генеральное среднее (истинная длина) $\mu = 371$ известно. Для приближенного вычисления неизвестной генеральной дисперсии $D(X)$ (дисперсии ошибок измерений) воспользуемся ее несмещенной оценкой s_0^2, которая определяется по формуле (17)

$$\begin{aligned} s_0^2 = \frac{1}{8}\big((361-371)^2 + (375-371)^2 + (313-371)^2 + (426-371)^2 + \\ + (389-371)^2 + (404-371)^2 + (373-371)^2 + (383-371)^2\big) = \\ = \frac{1}{8}\left(10^2 + 4^2 + 58^2 + 55^2 + 18^2 + 33^2 + 2^2 + 12^2\right) = \\ = \frac{1}{8} \cdot 8\,066 = 1\,008{,}25. \end{aligned}$$

Ответ: $1\,008{,}25$.

Пример 107. *Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок:* 365, 377, 313, 424, 385, 402, 372, 381 *м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина неизвестна.*

Решение. Здесь истинная длина неизвестна. Несмещенной оценкой дисперсии ошибок измерений является s^2, которая определяется по формуле (18). Сначала найдем выборочное среднее

$$\overline{x} = \frac{365+377+313+424+385+402+372+381}{8} = \frac{3\,019}{8} = 377{,}375.$$

Используя формулу (18), получаем

$$\begin{aligned} s^2 = \frac{1}{7}\big((365-\overline{x})^2 + (377-\overline{x})^2 + (313-\overline{x})^2 + (424-\overline{x})^2 + \\ + (385-\overline{x})^2 + (402-\overline{x})^2 + (372-\overline{x})^2 + (381-\overline{x})^2\big) = \\ = \frac{1}{7} \cdot \frac{57\,423}{8} = \frac{57\,423}{56} \approx 1025{,}4. \end{aligned}$$

Ответ: $1\,025{,}4$.

Пример 108. *Случайная величина X (время бесперебойной работы устройства) имеет показательное распределение с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geqslant 0)$. По эмпирическому распределению времени работы*

Время работы	0 — 30	30 — 60	60 — 90	90 — 120
Число устройств	134	42	12	4

методом моментов найдите точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

Решение. Составим интервальное распределение

X	15	45	75	105
P	$\frac{67}{96}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{48}$

Найдем интервальное среднее $\overline{x}^*$

$$\overline{x}^* = 15 \cdot \frac{67}{96} + 45 \cdot \frac{7}{32} + 75 \cdot \frac{1}{16} + 105 \cdot \frac{1}{48} = \frac{435}{16} = 27{,}1875.$$

Для построения точечной оценки $\widehat{\lambda}$ методом моментов выразим неизвестный параметр λ показательного закона распределения через начальный момент первого порядка (*математическое ожидание*), после чего произведем замену начального момента первого порядка соответствующим выборочным моментом (*интервальным средним*), получим

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}^*} = \frac{16}{435} \approx 0{,}0368.$$

Ответ: 0,0368.

Пример 109. *Случайная величина X распределена по закону Пуассона $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Результаты 457 независимых наблюдений X отражены в таблице*

Значение X	0	1	2	3
Частота	201	157	77	22

Найдите методом моментов точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

Решение. Напомним, что для случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром λ, математическое ожидание совпадает с этим параметром, т. е. $E(X) = \lambda$. Согласно методу моментов точечной оценкой $\widehat{\lambda}$ служит выборочное среднее $\overline{x}$. Следовательно,

$$\widehat{\lambda} = \overline{x} = \frac{0 \cdot 201 + 1 \cdot 157 + 2 \cdot 77 + 3 \cdot 22}{201 + 157 + 77 + 22} = \frac{377}{457} \approx 0{,}8249.$$

Ответ: 0,8249.

§ 7. Доверительные интервалы

Пусть $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка объема n из распределения, зависящего от некоторого числового параметра $\theta \in \Theta$.

Определение. *Случайный промежуток $I(\vec{X})$ называется γ-**доверительным интервалом** для параметра θ, если при любом допустимом значении параметра $\theta \in \Theta$ вероятность $P\{\theta \in I(\vec{X})\} = \gamma$. Число γ при этом называется **доверительной вероятностью**.*

Границы γ-доверительного интервала $I(\vec{X}) = \left(\underline{\theta}(\vec{X}),\ \overline{\theta}(\vec{X})\right)$ называются *γ-доверительными границами*: $\underline{\theta}\,(\vec{X})$ — *нижняя граница*, $\overline{\theta}(\vec{X})$ — *верхняя граница*. Полуразность $\frac{1}{2}\left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)$ называется *точностью доверительной оценки.*

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$.

Несимметричная по вероятности $(1 - \alpha)$-доверительная оценка генерального среднего μ при известной дисперсии σ^2 имеет вид:

$$\overline{X} - Z_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_\delta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{19}$$

где Z_ε — 100ε-процентная точка стандартного нормального распределения с параметрами 0 и 1, $\varepsilon + \delta = \alpha$. Процентные точки распределения $N(0, 1)$ находятся из соотношения $\Phi(Z_\varepsilon) = 0{,}5 - \varepsilon$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

В задачах на построение $(1-\alpha)$-доверительного интервала по умолчанию предполагается построение симметричного по вероятности интервала, т. е. интервала, для которого $\varepsilon = \delta = \frac{\alpha}{2}$.

В случае неизвестной генеральной дисперсии σ^2 при большом объеме выборки применяется приближенная $(1-\alpha)$ -доверительная оценка генерального среднего μ:

$$\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}. \tag{20}$$

Формулы (19) и (20) применяются и в том случае, когда генеральное распределение не является нормальным, но к последовательности независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ применима та или иная форма ЦПТ.

Рассмотрим теперь случай выборки из дискретного распределения. Пусть $p = P(X = x)$ — вероятность некоторого фиксированного значения признака. В случае конечной генеральной совокупности p — генеральная доля значения x. Долю значения x в выборочной совокупности обозначим $\widehat{p}$.

В качестве приближенной симметричной $(1-\alpha)$-доверительной оценки генеральной доли p используется соотношение

$$\widehat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} < p < \widehat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}. \tag{21}$$

Пример 110. *Брокер на бирже желает найти* 0,95*-доверительный интервал для математического ожидания недельной доходности выбранной акции. Известно, что выборочная средняя недельная доходность за последний год* (52 *недели*) *составила* $\overline{r} = 0{,}006$. *Найдите искомый доверительный интервал в предположении, что недельные доходности независимы и распределены нормально с постоянными параметрами, причем генеральное среднеквадратичное отклонение недельной доходности равно* 0,03.

Решение. Имеем $n = 52$, $\overline{r} = 0{,}006$, $\sigma = 0{,}03$, $\gamma = 0{,}95$. Найдем процентную точку Z_ε из уравнения

$$\Phi(Z_\varepsilon) = 0{,}5 - \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\gamma}{2} = 0{,}025$. Следовательно,

$$Z_{0{,}025} = \Phi^{-1}(0{,}475) = 1{,}96.$$

Используя формулу (19), находим

$$\left(\overline{r} - Z_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{r} + Z_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \left(0{,}006 - 1{,}96 \frac{0{,}03}{\sqrt{52}}, 0{,}006 + 1{,}96 \frac{0{,}03}{\sqrt{52}}\right) = (-0{,}0022, 0{,}0142).$$

Таким образом, интервал $(-0{,}22\%; 1{,}42\%)$ является 0,95-доверительным для средней недельной доходности выбранной акции. При этом точность доверительной оценки составляет

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right) = Z_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \frac{0{,}03}{\sqrt{52}} = 0{,}0082 \text{ или } 0{,}82\%.$$

Ответ: $(-0{,}0022, 0{,}0142)$.

Пример 111. *Производится выборочное обследование возраста читателей массовых библиотек. Сколько карточек необходимо взять для обследования, чтобы с вероятностью* 0,95 *можно было бы утверждать, что средний возраст в выборочной совокупности отклонится от генерального среднего не более, чем на* 1 *год? Генеральное среднее квадратичное отклонение принять равным* 26 *годам.*

Решение. Исходные данные: $\gamma = 0{,}95$, $\sigma = 26$. По условию задачи точность доверительной оценки Δ должна быть не более 1 года. Следовательно,

$$Z_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant 1.$$

Решая полученное неравенство относительно n, находим

$$n \geqslant Z_\varepsilon^2 \sigma^2.$$

Процентная точка Z_ε соответствует $\varepsilon = 0{,}025$, так что $Z_{0{,}025} = 1{,}96$. Следовательно,

$$n \geqslant 1{,}96^2 \cdot 26^2 \Rightarrow n \geqslant 2\,596{,}92.$$

Таким образом, необходимо взять для обследования не менее 2 597 карточек.

Ответ: 2597.

Пример 112. *В результате проведенного социологического опроса* $n = 1\,140$ *человек рейтинг кандитата в президенты составил* 14 %. *Найдите доверительный интервал для рейтинга кандидата с гарантированной надежностью* 95 %.

Исходные данные: $n = 1\,140$, выборочная доля составляет $\widehat{p} = 0{,}14$, доверительная вероятность — $\gamma = 0{,}95$. Процентная точка $Z_{0{,}025} = 1{,}96$. Используя формулу (21), приходим к доверительному интервалу для рейтинга кандидата

$$\left(0{,}14 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}14 \cdot 0{,}86}{1\,140}}; 0{,}14 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}14 \cdot 0{,}86}{1\,140}}\right) = \\ = (0{,}1199; 0{,}1601) = (11{,}99\%; 16{,}01\%).$$

Ответ: $(11{,}99\%; 16{,}01\%)$.

§ 8. Общая схема статистического критерия

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка объема n из некоторого генерального распределения. Не ограничивая общности можно считать, что существует определенная схема испытаний, при осуществлении которой вычисляется случайная величина X, а $X_1, \ldots, X_n$ — это те ее значения, которые X принимает в результате серии n независимых испытаний. Таким образом, случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и распределены по тому же закону, что и X.

Статистической гипотезой называется любое утверждение о виде или параметрах генерального распределения. Пусть H_0 и H_1 — две взаимоисключающие статистические гипотезы. Проверяемая гипотеза H_0 называется *основной*, а дополнительная гипотеза H_1 — *альтернативной*. Предполагается, что одна из этих гипотез выполняется.

Статистическим критерием с критической областью $K \subset \mathbb{R}^n$ называется правило, в соответствии с которым H_0 отвергается, если выборка попадает в критическую область, $(X_1, \ldots, X_n) \in K$.

Критические области задаются либо при помощи неравенств вида $K = \{t < c_1\}$ или $K = \{t > c_2\}$, либо как объединение $K = \{t < c_1\} \cup \{t > c_2\}$, где $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ — подходящая функция от выборочных значений, а c_1 и c_2 — некоторые константы, такие что $c_1 < c_2$. Во всех этих случаях числа c_1 и c_2 называются *критическими значениями*, а функция $t(x_1, \ldots, x_n)$ — *статистикой критерия*. *Статистикой критерия* называется также случайная величина $T = t(X_1, \ldots, X_n)$.

Ошибка первого рода состоит в том, что отвергается верная гипотеза H_0. *Ошибка второго рода* состоит в том, что отвергается верная гипотеза H_1.

Вероятность ошибки первого рода называется *уровнем значимости* критерия и обозначается α. Вероятность ошибки второго рода обозначается β, а величина $1-\beta$ называется *мощностью* критерия.

§ 9. Сравнение генеральных средних двух нормальных распределений

Пусть $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ — выборка из $N(\mu_x, \sigma_x^2)$, а $\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — выборка из нормального распределения $N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Выборки $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ предполагаются *независимыми*, что означает независимость в совокупности $m+n$ случайных величин $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, \ldots, Y_n$ Способ проверки гипотез о соотношениях между генеральными средними μ_x и μ_y определяется тем, известны или нет дисперсии σ_x^2 и σ_y^2.

Предположим, что дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 известны, а генеральные средние μ_x и μ_y неизвестны. Основная гипотеза $H_0\colon \mu_x = \mu_y$, альтернативная гипотеза имеет вид 1) $H_1\colon \mu_x > \mu_y$; 2) $H_1\colon \mu_x < \mu_y$ или 3) $H_1\colon \mu_x \neq \mu_y$.

При проверке H_0 против H_1 вида 1), 2) или 3) используется одна и та же статистика $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{m} + \dfrac{\sigma_y^2}{n}}}$.

Пусть Z_α — (верхняя) процентная точка стандартного нормального распределения $N(0,1)$, это означает, что $\mathsf{P}(Z > Z_\alpha) = \alpha$, для $Z \sim N(0,1)$. При проверке H_0 против H_1 применяется критерий с критической областью K, определяемой по таблице

H_1	K
1) $\mu_x > \mu_y$	$Z > Z_\alpha$
2) $\mu_x < \mu_y$	$Z < -Z_\alpha$
3) $\mu_x \neq \mu_y$	$\lvert Z\rvert > Z_{\alpha/2}$

При проверке гипотез о соотношениях между генеральными средними μ_x и μ_y при неизвестных генеральных дисперсиях σ_x^2 и σ_y^2 дополнительно предполагается, что они равны: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma$. В качестве несмещенной оценки s^2 применяется следующая статистика:

$$s^2 = \frac{m-1}{m+n-2}\, s_x^2 + \frac{n-1}{m+n-2}\, s_y^2,$$

где $s_x^2 = \dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ и $s_y^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$.

При проверке H_0 против H_1 при неизвестной генеральной дисперсии критическая область выбирается по таблице

H_1	K
1) $\mu_x > \mu_y$	$t > t_\alpha(m+n-2)$
2) $\mu_x < \mu_y$	$t < -t_\alpha(m+n-2)$
3) $\mu_x \neq \mu_y$	$\lvert t\rvert > t_{\alpha/2}(m+n-2)$

Здесь t (может обозначаться как T) — статистика критерия:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{s\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}},$$

$t_\alpha(m+n-2)$ — верхняя процентная точка распределения Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы, α — требуемый уровень значимости.

Пример 113. *По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 22$ и $n_y = 31$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 488$ и $\overline{y} = 487$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 80$ и $D(Y) = 94$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.*

Решение. В данной задаче известны дисперсии

$$\sigma_x^2 = D(X) = 80, \quad \sigma_y^2 = D(Y) = 94,$$

поэтому для проверки нулевой гипотезы следует использовать статистику

$$Z(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}.$$

Так как альтернативная гипотеза имеет вид

$$H_1\colon E(X) \neq E(Y),$$

то следует использовать критерий

$$K = \{(\vec{x}, \vec{y})\colon |Z(\vec{x}, \vec{y})| > Z_{\alpha/2}\}.$$

Так как $P(Z > Z_{\alpha/2}) = 1/2 - \Phi(Z_{\alpha/2})$, то $Z_{\alpha/2}$ находится из уравнения

$$\frac{1}{2} - \Phi(Z_{\alpha/2}) = \alpha/2.$$

С учетом того, что $\alpha = 0{,}004$, из таблицы значений функции $\Phi(x)$ находим $Z_{\alpha/2} = Z_{0{,}002} = 2{,}88$. Поэтому критическая область имеет вид

$$K = \{(\vec{x}, \vec{y})\colon |Z(\vec{x}, \vec{y})| > 2{,}88\}.$$

Осталось вычислить наблюдаемое значение статистики Z:

$$Z_{\text{набл.}} = \frac{488 - 487}{\sqrt{\frac{80}{22} + \frac{94}{31}}} \approx 0{,}39 < 2{,}88.$$

Так как неверно, что $Z_{\text{набл.}} > 2{,}88$, то нет оснований отклонить гипотезу H_0 при уровне значимости 0,004.
Ответ: гипотеза H_0 принимается.

Пример 114. *По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 27$ и $n_y = 29$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 693$ и $\overline{y} = 688$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 96$ и $D(Y) = 69$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}03$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.*

Решение. Так как в данной задаче известны дисперсии $D(X) = \sigma_x^2 = 96$, $D(Y) = \sigma_y^2 = 69$, то для проверки гипотезы H_0 нам понадобится статистика

$$Z(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}.$$

Альтернативная гипотеза имеет вид $H_1\colon E(X) > E(Y)$, поэтому следует использовать критическое множество $K=\{(\vec{x},\vec{y})\colon Z(\vec{x},\vec{y})>Z_\alpha\}$. Процентная точка Z_α удовлетворяет уравнению $1/2-\Phi(Z_\alpha)=\alpha$. В нашем случае $\alpha=0{,}03$, поэтому $\Phi(Z_{0,03})=0{,}47$, откуда $Z_{0,03}=1{,}88$. Значит,

$$K=\{(\vec{x},\vec{y})\colon Z(\vec{x},\vec{y})>1{,}88\}.$$

Вычислим наблюдаемое значение статистики Z:

$$Z_{\text{набл.}}=\frac{693-688}{\sqrt{\frac{96}{27}+\frac{69}{29}}}\approx 2{,}05>1{,}88.$$

Так как $Z_{\text{набл.}}>1{,}88$, то гипотезу H_0 следует отвергнуть при уровне значимости 0,03.

Ответ: гипотеза H_0 отвергается.

Пример 115. *По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n=10$ и $l=8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x}=569{,}2$; $\overline{y}=581{,}2$ и исправленные дисперсии $s_x^2=43{,}2$; $s_y^2=51{,}2$. Требуется при уровне значимости $\alpha=0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X)=E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X)\neq E(Y)$.*

Решение. Так как генеральные дисперсии равны, но неизвестны, то для решения задачи нам необходимо использовать статистику

$$t(\vec{X},\vec{Y})=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{l}}},\text{ где } s^2=\frac{n-1}{n+l-2}s_x^2+\frac{l-1}{n+l-2}s_y^2.$$

В нашем случае $s^2=9s_x^2/16+7s_y^2/16$. Критическая область будет иметь вид

$$K=\{(\vec{x},\vec{y})\colon |t(\vec{x},\vec{y})|>t_{\alpha/2}(n+l-2)\}.$$

Пользуясь условиями задачи и таблицей критических точек распределения Стьюдента, находим

$$t_{\alpha/2}(n+l-2)=t_{0,005}(16)\approx 2{,}921.$$

Таким образом, в данной задаче

$$K=\{(\vec{x},\vec{y})\colon |t(\vec{x},\vec{y})|>2{,}921\}.$$

Для завершения проверки гипотезы H_0 осталось вычислить $t_{\text{набл}}$. Имеем

$$s^2_{\text{набл}} = \frac{9 \cdot 43{,}2}{16} + \frac{7 \cdot 51{,}2}{16} = 46{,}7, \text{ поэтому}$$
$$t_{\text{набл}} \approx \frac{569{,}2 - 581{,}2}{6{,}834 \cdot \sqrt{0{,}225}} \approx -3{,}705.$$

Так как $|t_{\text{набл}}| \approx 3{,}705 > 2{,}291$, то гипотезу H_0 следует отклонить на уровне значимости 0,01.
Ответ: гипотеза H_0 отвергается.

§ 10. Сравнение дисперсий двух нормальных распределений

Пусть по-прежнему имеется две независимые выборки:

$$X_1, \ldots, X_m \sim N(\mu_x, \sigma_x^2),$$
$$Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu_y, \sigma_y^2).$$

Предполагается, что все четыре параметра μ_x, μ_y, σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны. Основная гипотеза $H_0\colon \sigma_x^2 = \sigma_y^2$, альтернативная — имеет вид:

$$1)\; H_1\colon \sigma_x^2 > \sigma_y^2; \quad 2)\; H_1\colon \sigma_x^2 < \sigma_y^2 \quad \text{или} \quad 3)\; H_1\colon \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2.$$

При построении критериев по проверке H_0 против H_1 с требуемым уровнем значимости α применяется критическая область K, заданная следующими неравенствами:

H_1	K
1) $s_x^2 > s_y^2$	$\dfrac{s_x^2}{s_y^2} > F_\alpha(m-1, n-1)$
2) $s_x^2 < s_y^2$	$\dfrac{s_y^2}{s_x^2} > F_\alpha(n-1, m-1)$
3) $s_x^2 \neq s_y^2$	$\dfrac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha/2}(k_1, k_2)$

где символы s_1^2, s_2^2, k_1 и k_2 в зависимости от соотношения между s_x^2 и s_y^2 определяются таблицей

	$s_x^2 > s_y^2$	$s_x^2 < s_y^2$
s_1^2	s_x^2	s_y^2
s_2^2	s_y^2	s_x^2
k_1	$m-1$	$n-1$
k_2	$n-1$	$m-1$

Другими словами, s_1^2 — большая, а s_2^2 — меньшая из двух статистик: s_x^2 и s_y^2. Здесь также используется верхняя процентная точка $F_\alpha(m-1, n-1)$ распределения Фишера $F(m-1, n-1)$ с $m-1$ и $n-1$ степенями свободы.

Пример 116. *По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 6$ и $n_y = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 70$ и $s_y^2 = 60$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезу $H_1\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.*

Решение. Так как альтернативная гипотеза имеет вид

$$H_1\colon D(X) > D(Y),$$

то в данной задаче следует использовать статистику

$$T = s_x^2/s_y^2$$

и критерий

$$K = \{(\vec{x}, \vec{y})\colon s_x^2/s_y^2 > F_\alpha(n_x - 1, n_y - 1))\}.$$

Из таблицы находим процентную точку распределения Фишера

$$F_\alpha(n_x - 1, n_y - 1) = F_{0{,}01}(5{,}14) = 4{,}69.$$

Так как наблюдаемое значение статистики

$$T_{\text{набл.}} = 70/60 < 4{,}69,$$

то основную гипотезу H_0 следует принять при уровне значимости 0,01.
Ответ: гипотеза H_0 принимается.

Пример 117. *По двум независимым выборкам, объемы которых* $n_x = 3$ *и* $n_y = 5$*, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей* X *и* Y*, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий* $s_x^2 = 10$ *и* $s_y^2 = 19$*. При уровне значимости* $\alpha = 0{,}02$ *проверьте гипотезу* $H_0\colon D(X) = D(Y)$ *о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе* $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$*.*

Решение. В данном случае $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$, поэтому будем использовать критерий

$$K = \left\{(\vec{x}, \vec{y})\colon \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha/2}(k_1, k_2)\right\}$$

(определения величин s_x^2, s_y^2, k_1, k_2 см. в табл. выше.)

Так как наблюдаемые значения дисперсий относятся как

$$s_x^2/s_y^2 = 10/19 < 1,$$

то в данной задаче

$$s_1^2 = s_y^2, \quad s_2^2 = s_x^2, \quad k_1 = n_y - 1, \quad k_2 = n_x - 1.$$

Вычислим $F_{\alpha/2}(n_x - 1, n_y - 1)$ из таблицы для процентных точек распределения Фишера:

$$F_{\alpha/2}(n_x - 1, n_y - 1) = F_{0{,}01}(4{,}2) = 99{,}25.$$

Наблюдаемое значение статистики $T = s_1^2/s_2^2$ равно

$$T_{\text{набл.}} = 19/10 = 1{,}9 < 99{,}25 = F_{0{,}01}(4{,}2).$$

Поэтому основную гипотезу H_0 следует принять на уровне значимости 0,02.

Ответ: гипотеза H_0 принимается.

§ 11. Критерий хи-квадрат Пирсона

Производится серия повторных независимых испытаний, n — число испытаний с общим вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Предположим, что $A_1, \ldots, A_l \in \mathcal{F}$ — попарно несовместные события, такие что $A_1 + \ldots + A_l = \Omega$. В качестве H_0 примем гипотезу, состоящую в том, что вероятности событий A_i $(i = 1, \ldots, l)$ заданы таблицей

Событие	A_1	$\ldots$	A_l
Вероятность	p_1	$\ldots$	p_l

Пусть n_i — эмпирическая частота события A_i, т. е. число испытаний, в которых A_i наступило. Исходными данными для критерия χ^2 Пирсона является таблица эмпирических частот

Событие	A_1	$\ldots$	A_l
Частота	n_1	$\ldots$	n_l

Если основная гипотеза верна, согласно статистическому определению вероятности $\widehat{p_i} \approx p_i$, где $\widehat{p_i} = n_i/n$ — относительная частота события A_i. В качестве меры одновременной близости l пар чисел $(\widehat{p_i}, p_i)$ принимается статистика Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{n}{p_i}(\widehat{p_i} - p_i)^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

распределение которой при $n \to \infty$ перестает зависеть от конкретных значений вероятностей p_i и стремится к распределению $\chi^2(l-1)$ (хи-квадрат с $l-1$ степенями свободы).

При верной H_0 случайные величины n_i распределены по биномиальному закону с параметрами n и p_i, вследствие чего $np_i = E(n_i)$ называется *ожидаемой* (*теоретической*) частотой события A_i.

Можно также доказать, что если гипотеза H_0 не верна, то при $n \to \infty$ вероятность $P(\chi^2 > c) \to 1$ для любого c, что в конечном счете определяет достаточно высокую мощность критерия Пирсона, по крайней мере, для выборок большого объема.

Для проверки H_0 с асимптотическим уровнем значимости α применяется критерий согласия, основанный на статистике χ^2 и критической области $\chi^2 > \chi^2_\alpha(l-1)$. Здесь $\chi^2_\alpha(l-1)$ — верхняя процентная точка распределения $\chi^2(l-1)$. На практике данный критерий Пирсона применяется, если объем выборки $n > 50$ и все ожидаемые частоты $np_i > 5$.

Пример 118. *В некоторой стране немцы составляют* 50 %, *французы —* 30 %, *итальянцы —* 20 %. *В гостинице остановились: немцев —* 21, *французов —* 17 *и итальянцев —* 12. *При* 5%*-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.*

Решение. Разделим все население страны Ω на три группы

$$A_1 = \{\text{немцы}\}, \quad A_2 = \{\text{французы}\}, \quad A_3 = \{\text{итальянцы}\}.$$

Тогда, согласно условию задачи, теоретические вероятности p_i, $i = 1, 2, 3$ этих событий имеют вид

Событие	A_1	A_2	A_3
p_i	0,5	0,3	0,2

Теперь выпишем эмирические частоты. В гостинице остановилось $n = 21 + 17 + 12 = 50$ человек, поэтому частоты событий A_1, A_2, A_3 имеют вид

Событие	A_1	A_2	A_3
n_i	27	17	12

Таким образом, гипотеза H_0 состоит в том, что вероятности событий A_i равны p_i, $i = 1, 2, 3$. Так как $np_i \geqslant 5$ для всех i, то для проверки H_0 можно использовать критерий χ^2 Пирсона

$$K = \{\chi^2 > \chi^2_\alpha(l-1)\}, \text{ где статистика } \chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

В нашем случае процентная точка

$$\chi^2_\alpha(l-1) = \chi^2_{0{,}05}(2) = 5{,}991.$$

Вычислим значение статистики хи-квадрат на наблюдениях:

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \frac{(21-25)^2}{25} + \frac{(17-15)^2}{15} + \frac{(12-10)^2}{10} \approx 1{,}3 < 5{,}991.$$

Поэтому гипотезу H_0 следует принять при уровне значимости 5 %.
Ответ: гипотеза H_0 принимается.

Пример 119. *Две монеты подброшены* 400 *раз. В результате две решки выпали в* 105 *бросках, орел и решка — в* 196 *бросках и два орла — в* 99 *бросках. При* 5%*-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами* 2 *и* 1/2.

Решение. Обозначим за X число орлов в двух бросках монеты. Введем события $A_1 = \{X = 0\}$ — выпало две решки, $A_2 = \{X = 1\}$ — выпали орел и решка, $A_3 = \{X = 2\}$ — выпало два орла. Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами 2 и 1/2. Поэтому теоретические вероятности равны

Событие	A_1	A_2	A_3
p_i	0,25	0,5	0,25

Всего было проведено $n = 400$ бросаний монеты. В соответствии с условиями задачи, эмпирические частоты имеют вид

Событие	A_1	A_2	A_3
n_i	105	196	99

Так как $np_i > 5$ для всех i, то для проверки гипотезы о распределении числа орлов можно использовать критерий хи-квадрат Пирсона со статистикой $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ и критическим множеством

$$K = \{\chi^2 > \chi^2_\alpha(l-1)\}.$$

Процентная точка $\chi^2_\alpha(l-1)$ в нашем случае равна

$$\chi^2_{0,05}(2) = 5{,}991,$$

а наблюдаемое значение статистики χ^2 равно

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \frac{(105-100)^2}{100} + \frac{(196-200)^2}{200} + \frac{(99-100)^2}{100} = \\ = 0{,}34 < 5{,}991.$$

Получим, что $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{0,05}(2)$. Следовательно, мы принимаем гипотезу H_0 о том, что число орлов X имеет биномиальное распределение с параметрами 2 и 1/2.

Ответ: гипотеза H_0 принимается.

§ 12. Проверка гипотезы о совпадении нескольких генеральных средних методом дисперсионного анализа

Пусть $\vec{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{in_i})$ — выборка объема n_i из $N(\mu_i, \sigma^2)$, где $i = 1, \ldots, k$. Предположим также, что $n = n_1 + \ldots + n_k$ случайных величин

$$X_{11},\ \ldots,\ X_{1n_1};\ X_{21},\ \ldots,\ X_{2n_2}; \ldots; X_{k1},\ \ldots,\ X_{kn_k}$$

независимы в совокупности. Таким образом, выборки $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_k$ независимы и получены из нормальных распределений с одинаковой дисперсией σ^2 и, возможно, различными средними $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Гипотеза о равенстве всех средних одновременно записывается как

$$H_0 \colon \mu_1 = \ldots = \mu_k,$$

а альтернативная гипотеза — как

$$H_1 \colon (\exists i, j)\, \mu_i \neq \mu_j.$$

Заметим, что при верной H_0 генеральные распределения совпадают:

$$N(\mu_1, \sigma^2) = \ldots = N(\mu_k, \sigma^2).$$

Рассмотрим объединенную выборку объема $n = n_1 + \ldots + n_k$

$$\vec{X} = (X_{11},\ \ldots,\ X_{1n_1}; X_{21},\ \ldots,\ X_{2n_2}; \ldots; X_{k1},\ \ldots,\ X_{kn_k}).$$

Интерпретируя выборки $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_k$ как группы, на которые разбита совокупность $\vec{X}$, введем обозначения, аналогичные тем, что использовались при изучении межгрупповой дисперсии:

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

— выборочное среднее в i-й совокупности;

$$\widehat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$$

— выборочная дисперсия в той же выборке;

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \overline{X}_i n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

— выборочное среднее в объединенной выборке $\vec{X}$;

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\widehat{\sigma}_i^2 n_i$$

— средняя групповая дисперсия;

$$\delta^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_i - \overline{X})^2 n_i$$

— межгрупповая дисперсия;

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X})^2$$

— выборочная дисперсия признака в объединенной выборке $\vec{X}$.

Известно, что выборочную дисперсию $\widehat{\sigma}^2$ можно представить в виде суммы $\widehat{\sigma}^2 = \overline{\sigma}^2 + \delta^2$, где первое слагаемое $\overline{\sigma}^2$ характеризует среднюю изменчивость признака в каждой выборке $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_k$, а второе слагаемое δ^2 характеризует разброс выборочных средних $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k$.

Критерий проверки H_0 против H_1 использует так называемое отношение Фишера:

$$F = \frac{\frac{1}{k-1}\sum\limits_{i=1}^{k}(\overline{X}_i - \overline{X})^2 n_i}{\frac{1}{n-k}\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2} = \frac{\frac{1}{k-1}\,n\delta^2/s^2}{\frac{1}{n-k}\,n\overline{\sigma}^2/s^2}.$$

Можно доказать, что $F \sim F(k-1, n-k)$, где $F(n-1, n-k)$ — распределение Фишера с $k-1$ и $n-k$ степенями свободы. Для проверки H_0 с уровнем значимости α применяется критерий с критической областью $F > F_\alpha(k-1, n-k)$, где $F_\alpha(k-1, n-k)$ — верхняя процентная точка распределения $F(k-1, n-k)$.

Пример 120. *Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки:* 1) 7, 8, 9; 2) 9, 10, 11; 3) 11, 12, 13. *Для объединенной выборочной совокупности объема* 9 *вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости* $\alpha = 0{,}01$ *гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.*

Решение. В каждой из $k = 3$ групп произведена выборка объема $n_i = 3$, $i = 1, 2, 3$. Следовательно, всего произведено $n = 9$ наблюдений.

Для проверки основной гипотезы H_0 используем статистику Фишера $F = \dfrac{\dfrac{1}{k-1}\delta^2}{\dfrac{1}{n-k}\overline{\sigma}^2}$ и критерий

$$K = \{F > F_\alpha(k-1, n-k)\}.$$

В нашем случае процентная точка $F_\alpha(k-1, n-k)$ распределения Фишера равна $F_{0,01}(2{,}6) = 10{,}92$. Для проверки H_0 против альтернативы H_1 осталось вычислить наблюдаемое значение статистики $F_{\text{набл.}}$. Для этого нужно найти межгрупповую дисперсию δ^2 и среднюю групповую дисперсию $\overline{\sigma}^2$.

Средние значения внутри групп равны

$$\overline{x}_1 = \frac{7+8+9}{3} = 8, \quad \overline{x}_2 = \frac{9+10+11}{3} = 10,$$
$$\overline{x}_3 = \frac{11+12+13}{3} = 12.$$

Следовательно, выборочное среднее равно

$$\overline{x} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2 + n_3\overline{x}_2}{n} = \frac{8+10+12}{3} = 10.$$

Выборочные дисперсии внутри групп равны

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{(7-\overline{x}_1)^2 + (8-\overline{x}_1)^2 + (9-\overline{x}_1)^2}{3} = \frac{2}{3},$$
$$\widehat{\sigma}_2^2 = \frac{(9-\overline{x}_2)^2 + (10-\overline{x}_2)^2 + (11-\overline{x}_3)^2}{3} = \frac{2}{3},$$
$$\widehat{\sigma}_3^2 = \frac{(11-\overline{x}_3)^2 + (12-\overline{x}_2)^2 + (13-\overline{x}_3)^2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Тогда средняя групповая дисперсия равна

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{n_1\widehat{\sigma_1}^2 + n_2\widehat{\sigma_2}^2 + n_3\widehat{\sigma_3}^2}{n} = \frac{2}{3},$$

а межгрупповая дисперсия равна

$$\delta^2 = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x})^2 n_1 + (\overline{x}_2 - \overline{x})^2 n_2 + (\overline{x}_3 - \overline{x})^2 n_3}{n} =$$
$$= \frac{(8-10)^2 + (10-10)^2 + (12-10)^2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Вычислим теперь наблюдаемое значение статистики Фишера F и завершим проверку гипотезы H_0.

$$F_{\text{набл.}} = \frac{\dfrac{1}{k-1}\,\delta^2}{\dfrac{1}{n-k}\,\overline{\sigma}^2} = \frac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{3}}{\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{3}} = 12.$$

В итоге получим $F_{\text{набл.}} = 12 > 10{,}92 = F_{0{,}01}(2{,}6)$. Поэтому гипотезу о совпадении всех трех средних при уровне значимости 5 % следует отвергнуть.

Ответ: $\overline{\sigma}^2 = 2/3$, $\delta^2 = 8/3$, гипотеза H_0 отвергается.

Требования к оформлению заданий

- ✔ Порядок записи решений задач повторяет порядок условий в варианте заданий.
- ✔ Перед решением указывается порядковый номер задачи, условие не переписывается.
- ✔ Номер задачи выделяется маркером или иным образом. В конце решения приводится ответ по форме: «Ответ: ...».
- ✔ Как правило, ответ записывается как десятичная дробь или целое. Допускается также запись в виде несократимой дроби, если такая запись содержит не более 5 символов (например: $\frac{11}{36}$). Ошибка округления в ответе не должна превосходить 0,1 %.
- ✔ Если задача не решена, после ее номера ставится прочерк.
- ✔ Решения, которые содержат грубые ошибки (отрицательная дисперсия, вероятность больше 1, ...), считаются неправильными.
- ✔ Неправильное решение, решение задачи из другого варианта или задачи с измененным условием, отсутствие решения или ответа приводит к минимальной оценке задачи (0 баллов).
- ✔ Отсутствие обоснования при правильном решении влечет снижение оценки на 2 балла.
- ✔ Неправильный ответ (в том числе из-за ошибок округления) при правильном решении снижает оценку.
- ✔ Оценка также снижается за плохое оформление работы (зачеркнутый текст, вставки, ...).

Вариант № 1-01

1. В группе учатся 18 юношей и 5 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся либо юношами, либо девушками.

2. В круг радиуса 120 наудачу бросаются 2 точки. Найдите вероятность того, что расстояние от центра круга до ближайшей точки будет не меньше 40.

3. Вероятность попадания при одном выстреле в мишень 0,81. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при 3 выстрелах.

4. С первого станка-автомата на сборочный конвеер поступает 15 % деталей, со 2-го и 3-го по 35 % и 50 %, соответственно. Вероятности выдачи бракованных деталей составляют для каждого из них соответственно 0,3 %, 0,35 % и 0,05 %. Найдите вероятность того, что поступившая на сборку деталь окажется бракованной, а также вероятности того, что она изготовлена на 1-м, 2-м и 3-м станках-автоматах, при условии, что она оказалась бракованной.

5. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадет 4 раза число очков, отличное от 6. Какова вероятность, что «шестерка» выпадет 2 раза?

Вариант № 1-02

1. В партии из 15 деталей имеется 9 стандартных. Наудачу отобраны 6 деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 4 стандартных.

2. Двое договорились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более $a = 5$ минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча не состоится.

3. События A, B и C независимы; $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$ и $P(C) = 0{,}7$. Найдите вероятность события $A + B$ при условии, что наступило событие $B + C$.

4. В первой урне $m_1 = 6$ белых и $n_1 = 6$ черных шаров, во второй — $m_2 = 7$ белых и $n_2 = 6$ черных. Из второй урны случайным образом перекладывают в первую два шара, после чего из первой урны берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар — белый?

5. Фирма участвует в четырех проектах, каждый из которых может закончиться неудачей с вероятностью 0,23. В случае неудачи одного проекта вероятность разорения фирмы равна 17 %, двух — 33 %, трех — 72 %, четырех — 82 %. Определите вероятность разорения фирмы.

Вариант № 1-03

1. В группе учатся 11 юношей и 11 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.

2. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 15 и 30 соответственно. Найдите вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

3. События A, B и C независимы. Найдите вероятность события $(A+B)\cdot(A+C)\cdot(B+C)$, если $P(A)=0{,}1$, $P(B)=0{,}4$ и $P(C)=0{,}9$.

4. В урну, содержащую 14 шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найдите вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновероятны все возможные предположения о первоначальном количестве белых шаров в урне.

5. Отрезок длины 5 поделен на две части длины 2 и 3 соответственно, 10 точек последовательно бросают случайным образом на этот отрезок. Найдите вероятность того, что количество точек, попавших на отрезок длины 2, не будет равно 9.

Вариант № 1-04

1. Независимо друг от друга 4 человека садятся в поезд, содержащий 13 вагонов. Найдите вероятность того, что все они поедут в разных вагонах.

2. На отрезок AB длины 60 наудачу поставлена точка X. Найдите вероятность того, что меньший из отрезков AX и XB имеет длину меньшую, чем 15.

3. Вероятность события $P(A) = 0{,}69$, $P(B) = 0{,}78$, $P(C) = 0{,}82$. Найдите наименьшую возможную вероятность события ABC.

4. В первой урне $m_1 = 8$ белых и $n_1 = 3$ черных шаров, во второй — $m_2 = 7$ белых и $n_2 = 8$ черных. Из второй урны случайным образом перекладывают в первую два шара, после чего из первой урны берут один шар, который оказывается белым. Какова вероятность того, что два шара, переложенные из второй урны в первую, были разных цветов?

5. Банк решил вложить поровну средств в три предприятия при условии возврата ему каждым предприятием через определенный срок 164 % от вложенной суммы. Вероятность банкротства каждого из предприятий 0,22. Найдите вероятность того, что по истечении срока кредитования банк получит обратно по крайней мере вложенную сумму.

Вариант № 1-05

1. В группе учатся 9 юношей и 16 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что среди дежурных будет хотя бы одна девушка.

2. В квадрат со стороной 12 см случайным образом вбрасывается точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется в правой верхней четверти квадрата или не далее, чем в 1 см от центра квадрата.

3. Вероятность события $P(A) = 0{,}86$, $P(B) = 0{,}94$. Найдите наименьшую возможную вероятность события AB.

4. В среднем из 100 клиентов банка $n = 37$ обслуживаются первым операционистом и 63 — вторым операционистом. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет $p_1 = 0{,}54$ и $p_2 = 0{,}92$ соответственно для первого и второго служащих банка. Какова вероятность, что клиент, для обслуживания которого потребовалась помощь заведующего, был направлен к первому операционисту?

5. Монета подбрасывается до тех пор, пока герб не выпадет 6 раз. Найдите вероятность того, что будет произведено 12 бросков.

Вариант № 1-06

1. В киоске продается 9 лотерейных билетов, из которых число выигрышных составляет 4 штуки. Студент купил 5 билетов. Какова вероятность того, что число выигрышных среди них будет не меньше 2, но не больше 3?

2. В круг радиуса 60 наудачу бросаются 2 точки. Найдите вероятность того, что расстояние от центра круга до ближайшей точки будет не больше 40.

3. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}45$, $p_2 = 0{,}67$ и $p_3 = 0{,}59$. Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.

4. В магазине было проведено исследование продаж некоторого товара. Выяснилось, что этот товар покупают 28 % женщин, 18 % мужчин и 33 % детей. В настоящий момент среди покупателей: 160 женщин, 75 мужчин и 26 детей. Найдите вероятность того, что случайно выбранный для мониторинга покупатель приобретет этот товар.

5. Завод отправил на базу 5 000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,002. Какова вероятность того, что на базу поступят 2 некачественных изделия?

Вариант № 1-07

1. Имеется 22 экзаменационных билета, на каждом из которых напечатано условие некоторой задачи. В 12 билетах задачи по статистике, а в остальных 10 билетах задачи по теории вероятностей. Трое студентов выбирают наудачу по одному билету. Найдите вероятность того, что хотя бы одному из них не достанется задачи по теории вероятностей.

2. Внутрь круга радиуса 15 наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

3. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при $k = 13$ выстрелах равна $p = 0{,}71$. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

4. Имеется 14 монет, из которых 2 штуки бракованные: вследствие заводского брака на этих монетах с обеих сторон отчеканен герб. Наугад выбранную монету, не разглядывая, бросают 8 раз, причем при всех бросаниях она ложится гербом вверх. Найдите вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами.

5. Вероятность попадания стрелком в цель равна $\frac{1}{5}$. Сделано 38 выстрелов. Определите наивероятнейшее число попаданий в цель.

Вариант № 1-08

1. Компания из $n = 22$ человек рассаживается в ряд случайным образом. Найдите вероятность того, что между двумя определенными людьми окажутся ровно $k = 5$ человек.

2. Двое договорились о встрече между 7 и 8 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более $a = 30$ минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

3. Фирма участвует в четырех независимых проектах, вероятности успеха которых составляют 0,9; 0,4; 0,8 и 0,2 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы два проекта завершатся успехом.

4. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике $n = 24$ белых шара, во втором — $m = 9$ белых и $n - m = 15$ черных шаров, в третьем — $n = 24$ черных шара. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Найдите вероятность того, что шар вынут из второго ящика.

5. При введении вакцины против птичьего гриппа иммунитет создается в 99,98 % случаях. Определите (приближенно) вероятность того, что из 10 000 вакцинированных птиц заболеют 4.

Вариант № 1-09

1. Независимо друг от друга 3 человека садятся в поезд, содержащий 10 вагонов. Найдите вероятность того, что по крайней мере двое из них окажутся в одном вагоне.

2. Внутрь круга радиуса 40 наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного шестиугольника.

3. События A, B и C независимы. Найдите вероятность того, что из событий A, B и C наступит ровно одно событие, если $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}4$ и $P(C) = 0{,}9$.

4. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс (A, B, C). Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местонахождения и равны соответственно 0,35, 0,3 и 0,35. Вероятности того, что к моменту прихода пассажира, имеющиеся в кассе билеты распроданы равны соответственно 0,25, 0,35 и 0,05. Найдите вероятность того, что билет куплен. В какой из касс это могло произойти с наибольшей вероятностью?

5. Прядильщица обслуживает 2 000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,004. Найдите (приближенно) вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет более чем на 2 веретенах.

Вариант № 1-10

1. В ящике 9 белых и 2 черных шара. Найдите вероятность того, что из двух вынутых наудачу шаров один белый, а другой черный. Вынутый шар в урну не возвращается.

2. На отрезок AB длины 240 наудачу поставлена точка X. Найдите вероятность того, что меньший из отрезков AX и XB имеет длину большую, чем 60.

3. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины допущена ошибка, равна $p = 0{,}21$. Найдите наименьшее число n измерений, которые необходимо произвести, чтобы с вероятностью больше $a = 0{,}92$ можно было ожидать, что хотя бы один результат измерений окажется неверным.

4. Фирма A занимает 14 % рынка электронной техники, фирма B — 50 %, фирма C — 36 %. Доля мобильных телефонов в поставках фирмы A составляет 14 %, в поставках фирмы B — 3 %, в поставках фирмы C — 21 %. Случайный покупатель приобрел мобильный телефон. Какова вероятность того, что этот телефон произведен фирмой B или фирмой C?

5. В банке, осуществляющем кредитование населения, 1 000 клиентов. Каждому из клиентов выдается кредит 200 тыс. ден. ед. при условии возврата 119,31 % от этой суммы. Вероятность невозврата кредита каждым из клиентов составляет 0,09. С какой вероятностью прибыль банка будет не ниже 12,8 млн рублей?

Вариант № 1-11

1. В группе учатся 11 юношей и 11 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что среди дежурных будет хотя бы одна девушка.

2. На отрезок AB длины 180 наудачу поставлена точка X. Найдите вероятность того, что меньший из отрезков AX и XB имеет длину меньшую, чем 45.

3. Студент, разыскивая уникальную книгу, решил подать запрос в 10 библиотек. Наличие или отсутствие в фонде каждой библиотеки нужной книги одинаково вероятны. Также одинаково вероятно выдана она или нет. Какова вероятность, что хотя бы от одной библиотеки студент получит уведомление о наличии книги в свободном доступе?

4. Студент пользуется тремя библиотеками, комплектование которых осуществляется независимо друг от друга. Нужная ему книга может быть в данных библиотеках с вероятностями 0,29; 0,85 и 0,42 соответственно. Какова вероятность того, что учащийся достанет нужную ему книгу, обратившись наугад в одну из этих библиотек?

5. Всхожесть семян данного растения равна 60 %. Найдите (приближенно) вероятность того, что из 1 200 посаженных семян число проросших семян заключено между 699 и 739.

Вариант № 1-12

1. Имеется 25 экзаменационных билетов, на каждом из которых напечатано условие некоторой задачи. В 13 билетах задачи по статистике, а в остальных 12 билетах задачи по теории вероятностей. Трое студентов выбирают наудачу по одному билету. Найдите вероятность того, что хотя бы одному из них не достанется задачи по теории вероятностей.

2. В квадрат со стороной 20 см случайным образом вбрасывается точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется в правой верхней четверти квадрата или не далее, чем в 1 см от центра квадрата.

3. События A, B и C независимы; $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}5$ и $P(C) = 0{,}3$. Найдите вероятность события $A + B$ при условии, что наступило событие $A + B + C$.

4. В ящике содержится $n_1 = 5$ деталей, изготовленных на заводе 1, $n_2 = 10$ деталей — на заводе 2 и $n_3 = 6$ деталей — на заводе 3. Вероятности изготовления брака на заводах с номерами 1, 2 и 3 соответственно равны $p_1 = 0{,}07$, $p_2 = 0{,}08$ и $p_3 = 0{,}09$. Найдите вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется качественной.

5. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,2. Используя приближенную формулу для числа успехов в схеме Бернулли, найдите вероятность того, что среди 106 выпущенных изделий ровно 84 изделий без брака.

Вариант № 1-13

1. В партии из 17 деталей имеется 9 стандартных. Наудачу отобраны 9 деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 4 стандартных.

2. Двое договорились о встрече между 8 и 9 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более $a = 10$ минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

3. События A, B и C независимы; $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}6$ и $P(C) = 0{,}3$. Найдите вероятность события A при условии, что наступило событие $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.

4. Детали, изготовленные в цехе, попадают к одному из 2-х контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к 1-му контролеру, равна 0,3; ко 2-му — 0,7. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной 1-м контролером равна 0,95; 2-м контролером — 0,98. Годная деталь при проверке оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что эту деталь проверял 1-й контролер.

5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Сделано 6 выстрелов. Найдите вероятность того, что в цель попали менее трех раз.

Вариант № 1-14

1. Независимо друг от друга 3 человека садятся в поезд, содержащий 12 вагонов. Найдите вероятность того, что по крайней мере двое из них окажутся в одном вагоне.

2. Двое договорились о встрече между 8 и 9 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более $a = 5$ минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча не состоится.

3. Вероятность попадания при одном выстреле в мишень 0,63. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при 4 выстрелах.

4. В центральную бухгалтерию корпорации поступили пачки накладных для проверки и обработки. 54 % пачек были признаны удовлетворительными: они содержали 1 % неправильно оформленных накладных. Остальные пачки были признаны неудовлетворительными, т. к. они содержали 6 % неправильно оформленных накладных. Какова вероятность того, что взятая наугад накладная оказалась неправильно оформленной?

5. При введении вакцины против птичьего гриппа иммунитет создается в 99,99 % случаях. Определите (приближенно) вероятность того, что из 10 000 вакцинированных птиц заболеют по меньшей мере две птицы.

Вариант № 1-15

1. Независимо друг от друга 4 человека садятся в поезд, содержащий 14 вагонов. Найдите вероятность того, что все они поедут в разных вагонах.

2. Внутрь круга радиуса 50 наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного шестиугольника.

3. Студент, разыскивая уникальную книгу, решил подать запрос в 13 библиотек. Наличие или отсутствие в фонде каждой библиотеки нужной книги одинаково вероятны. Также одинаково вероятно выдана она или нет. Какова вероятность, что хотя бы от одной библиотеки студент получит уведомление о наличии книги в свободном доступе?

4. В первой урне $m_1 = 8$ белых и $n_1 = 4$ черных шара, во второй — $m_2 = 6$ белых и $n_2 = 7$ черных. Из второй урны случайным образом перекладывают в первую два шара, после чего из первой урны берут один шар, который оказывается белым. Какова вероятность того, что два шара, переложенные из второй урны в первую, были разного цвета?

5. Завод отправил на базу 3 000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,001. Какова вероятность того, что на базу поступят 3 некачественных изделия?

Вариант № 1-16

1. В ящике 2 белых и 6 черных шаров. Найдите вероятность того, что из двух вынутых наудачу шаров один белый, а другой черный. Вынутый шар в урну не возвращается.

2. Внутрь круга радиуса 100 наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

3. Фирма участвует в четырех независимых проектах, вероятности успеха которых составляют 0,6; 0,5; 0,9 и 0,2 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы два проекта завершатся успехом.

4. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс (A, B, C). Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местонахождения и равны соответственно 0,35, 0,6 и 0,05 Вероятности того, что к моменту прихода пассажира, имеющиеся в кассе билеты распроданы равны соответственно 0,4, 0.5 и 0,15. Найдите вероятность того, что билет куплен. В какой из касс это могло произойти с наибольшей вероятностью?

5. Прядильщица обслуживает 1 000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,001. Найдите (приближенно) вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет более чем на 2 веретенах.

Вариант № 1-17

1. В киоске продается 9 лотерейных билетов, из которых число выигрышных составляет 4 штуки. Студент купил 5 билетов. Какова вероятность того, что число выигрышных среди них будет не меньше 2, но не больше 3?

2. В круг радиуса 30 наудачу бросаются 3 точки. Найдите вероятность того, что расстояние от центра круга до ближайшей точки будет не больше 15.

3. События A, B и C независимы; $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}5$ и $P(C) = 0{,}3$. Найдите вероятность события $A + B$ при условии, что наступило событие $A + B + C$.

4. В центральную бухгалтерию корпорации поступили пачки накладных для проверки и обработки. 39 % пачек были признаны удовлетворительными: они содержали 4 % неправильно оформленных накладных. Остальные пачки были признаны неудовлетворительными, т. к. они содержали 9 % неправильно оформленных накладных. Какова вероятность того, что взятая наугад накладная оказалась неправильно оформленной?

5. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,27. Используя приближенную формулу для числа успехов в схеме Бернулли, найдите вероятность того, что среди 110 выпущенных изделий ровно 80 изделий без брака.

Вариант № 1-18

1. В группе учатся 11 юношей и 9 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.

2. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 15 и 60 соответственно. Найдите вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

3. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1 = 0{,}05$, $p_2 = 0{,}7$ и $p_3 = 0{,}31$. Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.

4. Имеется 15 монет, из которых 3 штуки бракованные: вследствие заводского брака на этих монетах с обеих сторон отчеканен герб. Наугад выбранную монету, не разглядывая, бросают 6 раз, причем при всех бросаниях она ложится гербом вверх. Найдите вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами.

5. При введении вакцины против птичьего гриппа иммунитет создается в 99,98 % случаях. Определите (приближенно) вероятность того, что из 20 000 вакцинированных птиц заболеют 4.

Вариант № 1-19

1. В группе учатся 11 юношей и 10 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся либо юношами, либо девушками.

2. На отрезок AB длины 120 наудачу поставлена точка X. Найдите вероятность того, что меньший из отрезков AX и XB имеет длину большую, чем 20.

3. Вероятность события $P(A) = 0{,}91$, $P(B) = 0{,}71$, $P(C) = 0{,}95$. Найдите наименьшую возможную вероятность события ABC.

4. Фирма A занимает 17 % рынка электронной техники, фирма B — 45 %, фирма C — 38 %. Доля мобильных телефонов в поставках фирмы A составляет 10 %, в поставках фирмы B — 3 %, в поставках фирмы C — 22 %. Случайный покупатель приобрел мобильный телефон. Какова вероятность того, что этот телефон произведен фирмой B или фирмой C?

5. Отрезок длины 5 поделен на две части длины 2 и 3 соответственно, 9 точек последовательно бросают случайным образом на этот отрезок. Найдите вероятность того, что количество точек, попавших на отрезок длины 2, не будет равно 4.

Вариант № 1-20

1. Компания из $n = 21$ человек рассаживается в ряд случайным образом. Найдите вероятность того, что между двумя определенными людьми окажутся ровно $k = 15$ человек.

2. В круг радиуса 90 наудачу бросаются 3 точки. Найдите вероятность того, что расстояние от центра круга до ближайшей точки будет не меньше 60.

3. События A, B и C независимы. Найдите вероятность того, что из событий A, B и C наступит ровно одно событие, если $P(A) = 0{,}1$, $P(B) = 0{,}6$ и $P(C) = 0{,}7$.

4. В ящике содержатся $n_1 = 5$ деталей, изготовленных на заводе 1, $n_2 = 8$ деталей — на заводе 2 и $n_3 = 6$ деталей — на заводе 3. Вероятности изготовления брака на заводах с номерами 1, 2 и 3 соответственно равны $p_1 = 0{,}09$, $p_2 = 0{,}06$ и $p_3 = 0{,}01$. Найдите вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется качественной.

5. Монета подбрасывается до тех пор, пока герб не выпадет 6 раз. Найдите вероятность того, что будет произведено 12 бросков.

Вариант № 1-21

1. В группе учатся 11 юношей и 13 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что среди дежурных будет хотя бы одна девушка.

2. На отрезок AB длины 240 наудачу поставлена точка X. Найдите вероятность того, что меньший из отрезков AX и XB имеет длину меньшую, чем 40.

3. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины допущена ошибка, равна $p = 0{,}47$. Найдите наименьшее число n измерений, которые необходимо произвести, чтобы с вероятностью больше $a = 0{,}77$ можно было ожидать, что хотя бы один результат измерений окажется неверным.

4. Детали, изготовленные в цехе, попадают к одному из 2-х контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к 1-му контролеру, равна 0,6; ко 2-му — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной 1-м контролером равна 0,92; 2-м контролером — 0,97. Годная деталь при проверке оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что эту деталь проверял 1-й контролер.

5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Сделано 4 выстрела. Найдите вероятность того, что в цель попали менее трех раз.

Вариант № 1-22

1. В ящике 10 белых и 2 черных шаров. Найдите вероятность того, что из двух вынутых наудачу шаров один белый, а другой черный. Вынутый шар в урну не возвращается.

2. Внутрь круга радиуса 10 наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата.

3. Вероятность события $P(A) = 0{,}86$, $P(B) = 0{,}6$. Найдите наименьшую возможную вероятность события AB.

4. В магазине было проведено исследование продаж некоторого товара. Выяснилось, что этот товар покупают 16 % женщин, 13 % мужчин и 33 % детей. В настоящий момент среди покупателей: 155 женщин, 77 мужчин и 29 детей. Найдите вероятность того, что случайно выбранный для мониторинга покупатель приобретет этот товар.

5. В банке, осуществляющем кредитование населения, 1 500 клиентов. Каждому из клиентов выдается кредит 600 тыс. ден. ед. при условии возврата 113,48 % от этой суммы. Вероятность невозврата кредита каждым из клиентов составляет 0,062. С какой вероятностью прибыль банка будет не ниже 45,6 млн рублей?

Вариант № 1-23

1. В группе учатся 14 юношей и 10 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся либо юношами, либо девушками.

2. В круг радиуса 120 наудачу бросаются 2 точки. Найдите вероятность того, что расстояние от центра круга до ближайшей точки будет не меньше 60.

3. События A, B и C независимы; $P(A) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}6$ и $P(C) = 0{,}1$. Найдите вероятность события A при условии, что наступило событие $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.

4. В первой урне $m_1 = 6$ белых и $n_1 = 7$ черных шаров, во второй — $m_2 = 3$ белых и $n_2 = 4$ черных. Из второй урны случайным образом перекладывают в первую два шара, после чего из первой урны берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар — белый?

5. Вероятность попадания стрелком в цель равна $\frac{1}{8}$. Сделано 150 выстрелов. Определите наивероятнейшее число попаданий в цель.

Вариант № 1-24

1. Независимо друг от друга 4 человека садятся в поезд, содержащий 11 вагонов. Найдите вероятность того, что по крайней мере двое из них окажутся в одном вагоне.

2. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 25 и 50 соответственно. Найдите вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

3. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень при $k = 8$ выстрелах равна $p = 0{,}67$. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

4. В среднем из 100 клиентов банка $n = 39$ обслуживаются первым операционистом и 61 — вторым операционистом. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет $p_1 = 0{,}59$ и $p_2 = 0{,}53$ соответственно для первого и второго служащих банка. Какова вероятность, что клиент, для обслуживания которого потребовалась помощь заведующего, был направлен к первому операционисту?

5. Банк решил вложить поровну средств в три предприятия при условии возврата ему каждым предприятием через определенный срок 163 % от вложенной суммы. Вероятность банкротства каждого из предприятий 0,24. Найдите вероятность того, что по истечении срока кредитования банк получит обратно по крайней мере вложенную сумму.

Вариант № 1-25

1. В киоске продается 9 лотерейных билетов, из которых число выигрышных составляет 3 штуки. Студент купил 5 билетов. Какова вероятность того, что число выигрышных среди них будет не меньше 1, но не больше 2?

2. На отрезок AB длины 180 наудачу поставлена точка X. Найдите вероятность того, что меньший из отрезков AX и XB имеет длину большую, чем 30.

3. События A, B и C независимы; $P(A) = 0{,}1$, $P(B) = 0{,}5$ и $P(C) = 0{,}8$. Найдите вероятность события $A + B$ при условии, что наступило событие $B + C$.

4. В урну, содержащую 6 шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найдите вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновероятны все возможные предположения о первоначальном количестве белых шаров в урне.

5. При введении вакцины против птичьего гриппа иммунитет создается в 99,99 % случаях. Определите (приближенно) вероятность того, что из 20 000 вакцинированных птиц заболеют по меньшей мере две птицы.

Вариант № 1-26

1. Компания из $n = 15$ человек рассаживается в ряд случайным образом. Найдите вероятность того, что между двумя определенными людьми окажутся ровно $k = 8$ человек.

2. Двое договорились о встрече между 7 и 8 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более $a = 24$ минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

3. События A, B и C независимы. Найдите вероятность события $(A+B) \cdot (A+C) \cdot (B+C)$, если $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}6$ и $P(C) = 0{,}9$.

4. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике $n = 10$ белых шаров, во втором — $m = 3$ белых и $n - m = 7$ черных шаров, в третьем — $n = 10$ черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Найдите вероятность того, что шар вынут из второго ящика.

5. Всхожесть семян данного растения равна 30 %. Найдите (приближенно) вероятность того, что из 1 200 посаженных семян число проросших семян заключено между 339 и 379.

Вариант № 1-27

1. Имеется 20 экзаменационных билетов, на каждом из которых напечатано условие некоторой задачи. В 10 билетах задачи по статистике, а в остальных 10 билетах задачи по теории вероятностей. Трое студентов выбирают наудачу по одному билету. Найдите вероятность того, что хотя бы одному из них не достанется задачи по теории вероятностей.

2. В квадрат со стороной 20 см случайным образом вбрасывается точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется в правой верхней четверти квадрата или не далее, чем в 5 см от центра квадрата.

3. Вероятность события $P(A) = 0{,}69$, $P(B) = 0{,}73$, $P(C) = 0{,}79$. Найдите наименьшую возможную вероятность события ABC.

4. С первого станка-автомата на сборочный конвеер поступает 15 % деталей, со 2-го и 3-го по 35 % и 50 %, соответственно. Вероятности выдачи бракованных деталей составляют для каждого из них соответственно 0,25 %, 0,45 % и 0,1 %. Найдите вероятность того, что поступившая на сборку деталь окажется бракованной, а также вероятности того, что она изготовлена на 1-м, 2-м и 3-м станках-автоматах, при условии, что она оказалась бракованной.

5. Фирма участвует в четырех проектах, каждый из которых может закончиться неудачей с вероятностью 0,23. В случае неудачи одного проекта вероятность разорения фирмы равна 18 %, двух — 40 %, трех — 65 %, четырех — 93 %. Определите вероятность разорения фирмы.

Вариант № 1-28

1. В партии из 14 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 6 деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 4 стандартных.

2. В круг радиуса 30 наудачу бросаются 4 точки. Найдите вероятность того, что расстояние от центра круга до ближайшей точки будет не больше 15.

3. События A, B и C независимы. Найдите вероятность того, что из событий A, B и C наступит ровно одно событие, если $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ и $P(C) = 0{,}7$.

4. Студент пользуется тремя библиотеками, комплектование которых осуществляется независимо друг от друга. Нужная ему книга может быть в данных библиотеках с вероятностями 0,1; 0,88 и 0,66 соответственно. Какова вероятность того, что учащийся достанет нужную ему книгу, обратившись наугад в одну из этих библиотек?

5. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадет 3 раза число очков, отличное от 6. Какова вероятность, что «шестерка» выпадет 3 раза?

Вариант № 1-29

1. В группе учатся 11 юношей и 12 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.

2. Двое договорились о встрече между 8 и 9 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более $a = 5$ минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча не состоится.

3. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины допущена ошибка, равна $p = 0{,}32$. Найдите наименьшее число n измерений, которые необходимо произвести, чтобы с вероятностью больше $a = 0{,}91$ можно было ожидать, что хотя бы один результат измерений окажется неверным.

4. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике $n = 12$ белых шаров, во втором — $m = 8$ белых и $n-m = 4$ черных шаров, в третьем — $n = 12$ черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Найдите вероятность того, что шар вынут из второго ящика.

5. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,47. Используя приближенную формулу для числа успехов в схеме Бернулли, найдите вероятность того, что среди 110 выпущенных изделий ровно 57 изделий без брака.

Вариант № 1-30

1. Независимо друг от друга 3 человека садятся в поезд, содержащий 11 вагонов. Найдите вероятность того, что все они поедут в разных вагонах.

2. Внутрь круга радиуса 25 наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного шестиугольника.

3. События A, B и C независимы. Найдите вероятность события $(A+B)\cdot(A+C)\cdot(B+C)$, если $P(A)=0{,}1$, $P(B)=0{,}5$ и $P(C)=0{,}7$.

4. Фирма A занимает 29 % рынка электронной техники, фирма B — 42 %, фирма C — 29 %. Доля мобильных телефонов в поставках фирмы A составляет 13 %, в поставках фирмы B — 7 %, в поставках фирмы C — 25 %. Случайный покупатель приобрел мобильный телефон. Какова вероятность того, что этот телефон произведен фирмой B или фирмой C?

5. Всхожесть семян данного растения равна 30 %. Найдите (приближенно) вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших семян заключено между 249 и 289.

Вариант № 2-01

1. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X — от 1 до 13 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y — от 1 до 10 с вероятностью $\frac{1}{10}$, Z — от 1 до 8 с вероятностью $\frac{1}{8}$. Найдите вероятность $P(X < Y < Z)$.

2. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_9$ распределены по закону, заданному таблицей

X	-1	0	1
P	0,4	0,3	0,3

.

Найдите математическое ожидание $E\big(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_9^2\big)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 2 % равна 0,3, вероятность повышения на 0,1 % равна 0,5,а вероятность понижения на 3 % равна 0,2. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{256}$ распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 3$ и $p = \frac{5}{8}$. Найдите математическое ожидание $E\big(X_1^2 + \ldots + X_{256}^2\big)$.

5. Случайные величины независимы $X_1, \ldots, X_{17}$ и распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 6. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1 + \ldots + X_{17})^2\right\}$.

Вариант № 2-02

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: X — от 0 до 12 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y — от 0 до 13 с вероятностью $\frac{1}{14}$, а Z только значения 3 и 7, при этом $P(Z=3)=\frac{9}{10}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет равна 13.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_4$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i = 0) = 0{,}4$, $i = 1, \ldots, 4$. Найдите математическое ожидание $E\left[2^{X_1+\ldots+X_4}\right]$.

3. Вероятность выигрыша 30 рублей в одной партии равна 0,4, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,3, а вероятность проигрыша 40 рублей равна 0,3. Найдите дисперсию капитала игрока после 3 партий.

4. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых подбрасываются 3 игральные кости. Пусть X — число испытаний, в которых все выпавшие цифры оказались $\geqslant 2$. Найдите дисперсию $D(X)$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_7$ распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 10. Найдите математическое ожидание $E\left(X_1^2 + \ldots + X_7^2\right)$.

Вариант № 2-03

1. Независимые случайные величины X, Y могут принимать только целые значения: Y — от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, а X только значения 2 и 10, при этом $P(X = 2) = \frac{2}{5}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин не равна 12.

2. Распределение случайной величины X задано таблицей

X	7	8	11	14	15
P	0,25	0,2	0,1	0,2	0,25

Найдите математическое ожидание $\mu = E(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sigma_X$ и вероятность $P(|X - \mu| < \sigma)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 1 % равна 0,2, вероятность повышения на 0,1 % равна 0,7, а вероятность понижения на 2 % равна 0,1. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 200 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Отрезок длины 35 поделен на две части длины 25 и 10 соответственно. 8 точек последовательно бросаются наудачу на отрезок. Пусть X — случайная величина, равная числу точек, попавших на отрезок длины 10. Найдите математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины X.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 10 и 50 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X — число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 2-04

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: X — от 1 до 7 с вероятностью $\frac{1}{7}$, Y — от 1 до 14 с вероятностью $\frac{1}{14}$, а Z только значения 7 и 14, при этом $P(Z = 7) = \frac{3}{5}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет не меньше 21.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X = 0) = 0{,}3$, $P(Y = 0) = 0{,}9$. Найдите математическое ожидание $E\big[(X - Y)^2\big]$.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна 0,5, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,3, а вероятность проигрыша 50 рублей равна 0,2. Найдите дисперсию капитала игрока после 6 партий.

4. На плоскости начерчены две окружности, радиусы которых 10 и 50 соответственно. Меньшая окружность содержится внутри большего круга. В большой круг наудачу бросаются 7 точек. Пусть случайная величина X — число точек, попавших в малый круг. Вычислите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

5. В спортивной лотерее каждую неделю на 100 билетов разыгрывается 18 палаток и 18 рюкзаков. Турист решил каждую неделю покупать по одному билету до тех пор, пока он не выиграет палатку и рюкзак. Найдите среднее время реализации данного намерения (время измеряется в неделях).

Вариант № 2-05

1. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X — от 1 до 10 с вероятностью $\frac{1}{10}$, Y — от 1 до 7 с вероятностью $\frac{1}{7}$, Z — от 1 до 6 с вероятностью $\frac{1}{6}$. Найдите вероятность того, что X, Y, Z примут разные значения.

2. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ принимают только целые значения $-6, -5, \ldots, 3, 4$. Найдите математическое ожидание $E(X_1 \cdot X_2 \ldots X_{10})$, если известно, что возможные значения равновероятны.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна 0,6, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,2, а вероятность проигрыша 60 рублей равна 0,2. Найдите дисперсию капитала игрока после 5 партий.

4. Производится 3 840 независимых испытаний, состоящих в том, что одновременно подбрасываются 7 монет. Пусть X — число испытаний, в которых выпало 3 герба. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

5. Для пуассоновской случайной величины X отношение $\frac{P(X=6)}{P(X=5)}=7$. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

Вариант № 2-06

1. Независимые случайные величины X и Y принимают только целые значения: X — от -7 до 7, Y — от -5 до 5. Найдите $P(XY > 0)$, если известно, что возможные значения X и Y равновероятны.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X = 0) = 0{,}4$, $P(Y = 0) = 0{,}1$. Найдите математическое ожидание $E[(X + Y)^2]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 3 % равна 0,2, вероятность повышения на 0,2 % равна 0,5, а вероятность понижения на 2 % равна 0,3. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 300 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Случайные величины X, Y принимают только значения 0 и 1. Найдите дисперсию $D(X - Y)$, если вероятности $P(X = 1) = P(Y = 1) = 0{,}3$, а коэффициент корреляции X и Y равен 0,1.

5. Случайные величины X, Y распределены по геометрическому закону. Найдите дисперсию $D(X - Y)$, если их математические ожидания равны 6, а коэффициент корреляции X и Y равен 0,8.

Вариант № 2-07

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: Y и Z — от 1 до 21 с вероятностью $\frac{1}{21}$, а X только значения 5 и 10, при этом $P(X = 5) = \frac{3}{10}$. Найдите вероятность $P(X < Y < Z)$.

2. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей

X	1	4	7
P	0,4	0,4	0,2

Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна 0,7, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,1, а вероятность проигрыша 70 рублей равна 0,2. Найдите дисперсию капитала игрока после 5 партий.

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{245}$ независимы и распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 5$ и $p = \frac{3}{7}$. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1 + \ldots + X_{245})^2\right\}$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_6$ распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 2. Найдите математическое ожидание $E\left(X_1^2 + \ldots + X_6^2\right)$.

Вариант № 2-08

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X — от -5 до 5 с вероятностью $\frac{1}{11}$, Y — от -9 до 9 с вероятностью $\frac{1}{19}$. Найдите $P(XY < 0)$.

2. Для случайной величины X известно, что $E(X) = 4$, $E(|X|) = 9$, $D(|X|) = 90$.Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 1 % равна 0,4, вероятность повышения на 0,2 % равна 0,5, а вероятность понижения на 4 % равна 0,1. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 300 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Для случайных величин X, Y даны их математические ожидания и дисперсии $E(X) = E(Y) = 7$, $D(X) = D(Y) = 90$, а также коэффициент корреляции 0,4. Найдите математическое ожидание $E[(X+Y)^2]$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{16}$ независимы и распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 8. Найдите математическое ожидание $E\big\{(X_1 + \ldots + X_{16})^2\big\}$.

Вариант № 2-09

1. Независимые случайные величины X, Y могут принимать только целые значения: Y — от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, а X только значения 3 и 9, при этом $P(X = 3) = \frac{9}{10}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет меньше 12.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_{90}$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i = 0) = 0{,}7$, $i = 1, \ldots, 90$. Найдите математическое ожидание $E[(X_1 + \ldots + X_{90})^2]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 2 % равна 0,4, вероятность повышения на 0,3 % равна 0,4, а вероятность понижения на 4 % равна 0,2. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 200 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Даны математические ожидания случайных величин X и Y: $E(X) = 40$, $E(Y) = 30$, их дисперсии $D(X) = 9$, $D(Y) = 8$ и ковариация $\mathrm{Cov}(X, Y) = 6$. Найдите математическое ожидание $E(X - Y)$ и дисперсию $D(X - Y)$.

5. В серии независимых испытаний, которые проводятся с частотой одно испытание в единицу времени, вероятность наступления события A в одном испытании равна $\frac{1}{7}$. Пусть T — время ожидания наступления события A 13 раз (за все время ожидания). Найдите математическое ожидание $E(T)$ и дисперсию $D(T)$.

Вариант № 2-10

1. Независимые дискретные случайные величины X, Y принимают только целые значения: X от 1 до 18 с вероятностью $\frac{1}{18}$, Y от 1 до 23 с вероятностью $\frac{1}{23}$. Найдите вероятность $P(X+Y=34)$.

2. Для независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_6$ известно, что их математические ожидания $E(X_i) = 1$, дисперсии $D(X_i) = 3$, $i = 1, \ldots, 6$. Найдите дисперсию произведения $D(X_1 \ldots X_6)$.

3. Вероятность выигрыша 50 рублей в одной партии равна 0,4, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,1, а вероятность проигрыша 40 рублей равна 0,5. Найдите дисперсию капитала игрока после 6 партий.

4. Производится 13 независимых испытаний с вероятностью успеха 0,7 в каждом испытании. Пусть X — число успехов в испытаниях с номерами $1, 2, \ldots, 9$, Y — число успехов в испытаниях с номерами $6, 7, \ldots, 13$. Найдите дисперсию $D(X+2Y)$.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 20 и 40 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X — число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 2-11

1. Независимые случайные величины $X_1, \dots, X_7$ принимают только целые значения от 0 до 10. Найдите вероятность $P(X_1 \cdot X_2 \dots X_7 = 0)$, если известно, что все возможные значения равновероятны.

2. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_5$ распределены по закону, заданному таблицей

X	-1	0	1
P	0,2	0,1	0,7

.

Найдите математическое ожидание $E[X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_5^2]$.

3. Вероятность выигрыша 30 рублей в одной партии равна 0,6, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,1, а вероятность проигрыша 60 рублей равна 0,3. Найдите дисперсию капитала игрока после 3 партий.

4. Случайные величины X, Y принимают только значения 0 и 1. Найдите дисперсию $D(X - Y)$, если вероятности $P(X = 1) = P(Y = 1) = 0{,}9$, а коэффициент корреляции X и Y равен 0,3.

5. Для пуассоновской случайной величины X отношение $\dfrac{P(X = 10)}{P(X = 9)} = 13$. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

Вариант № 2-12

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X — от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, Y — от 1 до 16 с вероятностью $\frac{1}{16}$. Найдите вероятность $P(X+Y<7)$.

2. Для случайной величины X известно, что $E(X)=1$, $E(|X|)=2$, $D(|X|)=70$. Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 2 % равна 0,4, вероятность повышения на 0,2 % равна 0,4, а вероятность понижения на 4 % равна 0,2. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Даны математические ожидания случайных величин X и Y: $E(X)=40$, $E(Y)=20$, их дисперсии $D(X)=5$, $D(Y)=3$ и ковариация $\mathrm{Cov}(X,Y)=1$. Найдите математическое ожидание $E(X-Y)$ и дисперсию $D(X-Y)$.

5. Случайные величины независимы $X_1,\ldots,X_8$ и распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 3. Найдите математическое ожидание $E\left\{(X_1+\ldots+X_8)^2\right\}$.

Вариант № 2-13

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X — от -5 до 9 с вероятностью $\frac{1}{15}$, Y — от -8 до 5 с вероятностью $\frac{1}{14}$. Найдите вероятность $P(XY = 0)$.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X=0)=0{,}9$, $P(Y=0)=0{,}2$. Найдите математическое ожидание $E[(X - Y)^2]$.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна 0,6, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,2, а вероятность проигрыша 60 рублей равна 0,2. Найдите дисперсию капитала игрока после 7 партий.

4. Производится 13 независимых испытаний с вероятностью успеха 0,7 в каждом испытании. Пусть X — число успехов в испытаниях с номерами $1, 2, \ldots, 9$, Y — число успехов в испытаниях с номерами $5, 6, \ldots, 13$. Найдите дисперсию $D(X + 2Y)$.

5. В спортивной лотерее каждую неделю на 100 билетов разыгрывается 19 палаток и 19 рюкзаков. Турист решил каждую неделю покупать по одному билету до тех пор, пока он не выиграет палатку и рюкзак. Найдите среднее время реализации данного намерения (время измеряется в неделях).

Вариант № 2-14

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X — от 1 до 17 с вероятностью $\frac{1}{17}$, Y — от 1 до 5 с вероятностью $\frac{1}{5}$. Найдите вероятность $P(X < Y)$.

2. Распределение случайной величины X задано таблицей

X	7	11	13	15	19
P	0,1	0,05	0,7	0,05	0,1

Найдите математическое ожидание $\mu = E(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sigma_X$ и вероятность $P(|X - \mu| < \sigma)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 3 % равна 0,4, вероятность повышения на 0,2 % равна 0,3, а вероятность понижения на 4 % равна 0,3. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. На плоскости начерчены две окружности, радиусы которых 20 и 100 соответственно. Меньшая окружность содержится внутри большего круга. В большой круг наудачу бросаются 5 точек. Пусть случайная величина X — число точек, попавших в малый круг. Вычислите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{16}$ независимы и распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 8. Найдите математическое ожидание $E\Big\{(X_1 + \ldots + X_{16})^2\Big\}$.

Вариант № 2-15

1. Случайная величина X принимает только целые значения $1, 2, \ldots, 25$. При этом вероятности возможных значений X пропорциональны значениям: $P(X = k) = ck$. Найдите значение константы c и вероятность $P(X > 4)$.

2. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_5$ принимают только целые значения $-8, -7, \ldots, 3, 4$. Найдите математическое ожидание $E(X_1 \cdot X_2 \ldots X_5)$, если известно, что возможные значения равновероятны.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна 0,5, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,3, а вероятность проигрыша 50 рублей равна 0,2. Найдите дисперсию капитала игрока после 5 партий.

4. Производится 1 280 независимых испытаний, состоящих в том, что одновременно подбрасываются 8 монет. Пусть X — число испытаний, в которых выпало 2 герба. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 20 и 60 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X — число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 2-16

1. Независимые случайные величины X, Y могут принимать только целые значения: Y — от 1 до 15 с вероятностью $\frac{1}{15}$, а X только значения 6 и 9, при этом $P(X = 6) = \frac{9}{10}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет меньше 15.

2. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей

X	1	3	5
P	0,2	0,2	0,6

Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 4 % равна 0,1, вероятность повышения на 0,3 % равна 0,5, а вероятность понижения на 1 % равна 0,4. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 200 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Отрезок длины 35 поделен на две части длины 15 и 20 соответственно. 8 точек последовательно бросаются наудачу на отрезок. Пусть X — случайная величина, равная числу точек, попавших на отрезок длины 20. Найдите математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины X.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_5$ распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 6. Найдите математическое ожидание $E(X_1^2 + \ldots + X_5^2)$.

Вариант № 2-17

1. Независимые случайные величины X, Y могут принимать только целые значения: Y — от 1 до 8 с вероятностью $\frac{1}{8}$, а X только значения 2 и 6, при этом $P(X = 2) = \frac{2}{5}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин не равна 8.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_4$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i = 0) = 0{,}4$, $i = 1, \ldots, 4$. Найдите математическое ожидание $E\big[3^{X_1+\ldots+X_4}\big]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 3 % равна 0,2, вероятность повышения на 0,3 % равна 0,5, а вероятность понижения на 2 % равна 0,3. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 300 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{243}$ независимы и распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 4$ и $p = \frac{1}{9}$. Найдите математическое ожидание $E\Big\{(X_1 + \ldots + X_{243})^2\Big\}$.

5. Случайные величины X, Y распределены по геометрическому закону. Найдите дисперсию $D(X - Y)$, если их математические ожидания равны 5, а коэффициент корреляции X и Y равен 0,3.

Вариант № 2-18

1. Случайная величина X принимает только целые значения $1, 2, \ldots, 27$. При этом вероятности возможных значений X пропорциональны значениям: $P(X = k) = ck$. Найдите значение константы c и вероятность $P(X > 5)$.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X = 0) = 0{,}9$, $P(Y = 0) = 0{,}6$. Найдите математическое ожидание $E[(X + Y)^2]$.

3. Вероятность выигрыша 60 рублей в одной партии равна 0,2, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,2, а вероятность проигрыша 20 рублей равна 0,6. Найдите дисперсию капитала игрока после 3 партий.

4. Для случайных величин X, Y даны их математические ожидания и дисперсии $E(X) = E(Y) = 3$, $D(X) = D(Y) = 10$, а также коэффициент корреляции 0,6. Найдите математическое ожидание $E[(X + Y)^2]$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{12}$ распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 6. Найдите математическое ожидание $E\bigl(X_1^2 + \ldots + X_{12}^2\bigr)$.

Вариант № 2-19

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: X — от 1 до 6 с вероятностью $\frac{1}{6}$, Y — от 1 до 14 с вероятностью $\frac{1}{14}$, а Z только значения 6 и 14, при этом $P(Z=6)=\frac{1}{10}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет не меньше 20.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_{10}$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i = 0) = 0{,}9$, $i = 1, \ldots, 10$. Найдите математическое ожидание $E[(X_1 + \ldots + X_{10})^2]$.

3. Вероятность выигрыша 30 рублей в одной партии равна 0,5, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,2, а вероятность проигрыша 50 рублей равна 0,3. Найдите дисперсию капитала игрока после 7 партий.

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{243}$ распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 5$ и $p = \frac{2}{9}$. Найдите математическое ожидание $E\big(X_1^2 + \ldots + X_{243}^2\big)$.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 10 и 50 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X — число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 2-20

1. Независимые дискретные случайные величины X, Y принимают только целые значения: X от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, Y от 1 до 14 с вероятностью $\frac{1}{14}$. Найдите вероятность $P(X+Y=21)$.

2. Для независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_4$ известно, что их математические ожидания $E(X_i) = -1$, дисперсии $D(X_i) = 3$, $i = 1, \ldots, 4$. Найдите дисперсию произведения $D(X_1 \ldots X_4)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 2 % равна 0,1, вероятность повышения на 0,2 % равна 0,7, а вероятность понижения на 1 % равна 0,2. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 300 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых подбрасываются 2 игральные кости. Пусть X — число испытаний, в которых все выпавшие цифры оказались $\geqslant 4$. Найдите дисперсию $D(X)$.

5. В серии независимых испытаний, которые проводятся с частотой одно испытание в единицу времени, вероятность наступления события A в одном испытании равна $\frac{1}{7}$. Пусть T — время ожидания наступления события A 17 раз (за все время ожидания). Найдите математическое ожидание $E(T)$ и дисперсию $D(T)$.

Вариант № 2-21

1. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X — от 1 до 13 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y — от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, Z — от 1 до 8 с вероятностью $\frac{1}{8}$. Найдите вероятность того, что X, Y, Z примут разные значения.

2. Для независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_4$ известно, что их математические ожидания $E(X_i) = -2$, дисперсии $D(X_i) = 1$, $i = 1, \ldots, 4$. Найдите дисперсию произведения $D(X_1 \ldots X_4)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 3 % равна 0,1, вероятность повышения на 0,1 % равна 0,6, а вероятность понижения на 1 % равна 0,3. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{180}$ распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 3$ и $p = \frac{5}{6}$. Найдите математическое ожидание $E\big(X_1^2 + \ldots + X_{180}^2\big)$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{18}$ независимы и распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 7. Найдите математическое ожидание $E\Big\{(X_1 + \ldots + X_{18})^2\Big\}$.

Вариант № 2-22

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: Y и Z — от 1 до 20 с вероятностью $\frac{1}{20}$, а X только значения 5 и 9, при этом $P(X = 5) = \frac{4}{5}$. Найдите вероятность $P(X < Y < Z)$.

2. Распределение случайной величины X задано таблицей

X	6	7	11	15	16
P	0,2	0,15	0,3	0,15	0,2

.

Найдите математическое ожидание $\mu = E(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sigma_X$ и вероятность $P(|X - \mu| < \sigma)$.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна 0,7, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,1, а вероятность проигрыша 70 рублей равна 0,2. Найдите дисперсию капитала игрока после 6 партий.

4. Даны математические ожидания случайных величин X и Y: $E(X) = 30$, $E(Y) = 70$, их дисперсии $D(X) = 5$, $D(Y) = 8$ и ковариация $\operatorname{Cov}(X, Y) = 3$. Найдите математическое ожидание $E(X - Y)$ и дисперсию $D(X - Y)$.

5. В серии независимых испытаний, которые проводятся с частотой одно испытание в единицу времени, вероятность наступления события A в одном испытании равна $\frac{1}{11}$. Пусть T — время ожидания наступления события A 15 раз (за все время ожидания). Найдите математическое ожидание $E(T)$ и дисперсию $D(T)$.

Вариант № 2-23

1. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: X — от 0 до 6 с вероятностью $\frac{1}{7}$, Y — от 0 до 18 с вероятностью $\frac{1}{19}$, а Z только значения 1 и 8, при этом $P(Z = 1) = \frac{9}{10}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет равна 11.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X = 0) = 0{,}7$, $P(Y = 0) = 0{,}1$. Найдите математическое ожидание $E[(X + Y)^2]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 1 % равна 0,2, вероятность повышения на 0,1 % равна 0,7, а вероятность понижения на 2 % равна 0,1. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Производится 14 независимых испытаний с вероятностью успеха 0,8 в каждом испытании. Пусть X — число успехов в испытаниях с номерами $1, 2, \ldots, 9$, Y — число успехов в испытаниях с номерами $5, 6, \ldots, 14$. Найдите дисперсию $D(X + 2Y)$.

5. Случайные величины независимы $X_1, \ldots, X_{14}$ и распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 5. Найдите математическое ожидание $E\Big\{(X_1 + \ldots + X_{14})^2\Big\}$.

Вариант № 2-24

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X — от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$, Y — от 1 до 7 с вероятностью $\frac{1}{7}$. Найдите вероятность $P(X < Y)$.

2. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_9$ распределены по закону, заданному таблицей

X	-1	0	1
P	0,2	0,3	0,5

Найдите математическое ожидание $E[X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_9^2]$.

3. Вероятность выигрыша 30 рублей в одной партии равна 0,5, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,2, а вероятность проигрыша 50 рублей равна 0,3. Найдите дисперсию капитала игрока после 6 партий.

4. Производится 18 независимых испытаний, в каждом из которых подбрасываются 4 игральные кости. Пусть X — число испытаний, в которых все выпавшие цифры оказались $\geqslant 3$. Найдите дисперсию $D(X)$.

5. В спортивной лотерее каждую неделю на 100 билетов разыгрывается 5 палаток и 5 рюкзаков. Турист решил каждую неделю покупать по одному билету до тех пор, пока он не выиграет палатку и рюкзак. Найдите среднее время реализации данного намерения (время измеряется в неделях).

Вариант № 2-25

1. Независимые случайные величины X и Y принимают только целые значения: X — от -8 до 8, Y — от -9 до 6. Найдите $P(XY > 0)$, если известно, что возможные значения X и Y равновероятны.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_{50}$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i = 0) = 0{,}6$, $i = 1, \ldots, 50$. Найдите математическое ожидание $E[(X_1 + \ldots + X_{50})^2]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 3 % равна 0,4, вероятность повышения на 0,3 % равна 0,3, а вероятность понижения на 4 % равна 0,3. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 300 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{147}$ независимы и распределены по биномиальному закону с параметрами $n = 4$ и $p = \dfrac{1}{7}$. Найдите математическое ожидание $E\{(X_1 + \ldots + X_{147})^2\}$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{19}$ распределены по закону Пуассона с одинаковым математическим ожиданием, равным 9. Найдите математическое ожидание $E(X_1^2 + \ldots + X_{19}^2)$.

Вариант № 2-26

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X — от -9 до 9 с вероятностью $\frac{1}{19}$, Y — от -6 до 5 с вероятностью $\frac{1}{12}$. Найдите вероятность $P(XY = 0)$.

2. Независимые дискретные случайные величины X, Y могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X = 0) = 0{,}2$, $P(Y = 0) = 0{,}7$. Найдите математическое ожидание $E[(X - Y)^2]$.

3. Вероятность выигрыша 40 рублей в одной партии равна 0,3, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,3, а вероятность проигрыша 30 рублей равна 0,4. Найдите дисперсию капитала игрока после 4 партий.

4. Отрезок длины 35 поделен на две части длины 15 и 20 соответственно. 6 точек последовательно бросаются наудачу на отрезок. Пусть X — случайная величина, равная числу точек, попавших на отрезок длины 20. Найдите математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение величины X.

5. Для пуассоновской случайной величины X отношение $\dfrac{P(X=10)}{P(X=9)} = 4$. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

Вариант № 2-27

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X — от 1 до 13 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y — от 1 до 14 с вероятностью $\frac{1}{14}$. Найдите вероятность $P(X+Y<6)$.

2. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_7$ принимают только целые значения $-9, -8, \ldots, 12, 13$. Найдите математическое ожидание $E(X_1 \cdot X_2 \ldots X_7)$, если известно, что возможные значения равновероятны.

3. Вероятность выигрыша 20 рублей в одной партии равна 0,7, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,1, а вероятность проигрыша 70 рублей равна 0,2. Найдите дисперсию капитала игрока после 6 партий.

4. На плоскости начерчены две окружности, радиусы которых 5 и 15 соответственно. Меньшая окружность содержится внутри большего круга. В большой круг наудачу бросаются 10 точек. Пусть случайная величина X — число точек, попавших в малый круг. Вычислите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

5. Случайные величины X, Y распределены по геометрическому закону. Найдите дисперсию $D(X-Y)$, если их математические ожидания равны 6, а коэффициент корреляции X и Y равен 0,8.

Вариант № 2-28

1. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_4$ принимают только целые значения от 0 до 10. Найдите вероятность $P(X_1 \cdot X_2 \ldots X_4 = 0)$, если известно, что все возможные значения равновероятны.

2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_5$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $P(X_i = 0) = 0{,}6$, $i = 1, \ldots, 5$. Найдите математическое ожидание $E[2^{X_1 + \ldots + X_5}]$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 1 % равна 0,2, вероятность повышения на 0,3 % равна 0,7, а вероятность понижения на 2 % равна 0,1. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 200 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Производится 640 независимых испытаний, состоящих в том, что одновременно подбрасываются 7 монет. Пусть X — число испытаний, в которых выпало 2 герба. Найдите математическое ожидание $E(X)$.

5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{15}$ распределены по геометрическому закону с одинаковым математическим ожиданием, равным 3. Найдите математическое ожидание $E(X_1^2 + \ldots + X_{15}^2)$.

Вариант № 2-29

1. Независимые случайные величины X, Y принимают только целые значения: X — от -8 до 7 с вероятностью $\frac{1}{16}$, Y — от -9 до 8 с вероятностью $\frac{1}{18}$. Найдите $P(XY < 0)$.

2. Распределение дискретной случайной величины X задано таблицей

X	3	6	7
P	0,4	0,4	0,2

Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность выигрыша 60 рублей в одной партии равна 0,2, вероятность проигрыша 10 рублей равна 0,2, а вероятность проигрыша 20 рублей равна 0,6. Найдите дисперсию капитала игрока после 4 партий.

4. Для случайных величин X, Y даны их математические ожидания и дисперсии $E(X) = E(Y) = 9$, $D(X) = D(Y) = 40$, а также коэффициент корреляции 0,5. Найдите математическое ожидание $E[(X + Y)^2]$.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 25 и 50 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X — число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 2-30

1. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X — от 1 до 16 с вероятностью $\frac{1}{16}$, Y — от 1 до 13 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Z — от 1 до 9 с вероятностью $\frac{1}{9}$. Найдите вероятность $P(X < Y < Z)$.

2. Для случайной величины X известно, что $E(X) = 3$, $E(|X|) = 4$, $D(|X|) = 20$. Найдите дисперсию $D(X)$.

3. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 4 % равна 0,2, вероятность повышения на 0,1 % равна 0,4, а вероятность понижения на 2 % равна 0,4. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 200 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет 1 000 рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни — независимые случайные величины.

4. Случайные величины X, Y принимают только значения 0 и 1. Найдите дисперсию $D(X - Y)$, если вероятности $P(X = 1) = P(Y = 1) = 0{,}8$, а коэффициент корреляции X и Y равен 0,9.

5. На плоскости начерчены два квадрата, стороны которых 5 и 25 соответственно. Меньший квадрат содержится внутри большего квадрата. В большой квадрат случайным образом бросают точки до тех пор, пока не попадут в маленький квадрат. Пусть случайная величина X — число бросаний. Найдите математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант № 3-01

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-8, 12]$. Найдите вероятность $P\left(\frac{1}{X-8} > 4\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найдите математическое ожидание $E\left(\sqrt[7]{X^{12}}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 15$ и дисперсией $D(X) = 16$ найдите вероятность $P(X > 10{,}2)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\frac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00264$ и $\sigma = 0{,}0671$. Найдите вероятность того, что цена акции будет расти подряд две недели.

5. Для независимых, распределенных по геометрическому закону случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n > 8n + \sqrt{3n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 8$.

Вариант № 3-02

1. Функция плотности вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 5, \\ \dfrac{C}{x^4}, & x \geqslant 5. \end{cases}$$

Найдите константу C и вероятность $P(X < 6)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-5, 4]$. Найдите $E\left(e^{4X}\right)$.

3. Случайная величина X распределена по показательному закону. Найдите математическое ожидание $E\{(X+3)^2\}$, если дисперсия $D(X) = 100$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции в конце n-ой недели, $n \geqslant 1$. Найдите вероятность того, что цена акции в конце третьей недели будет выше, чем в конце первой недели, если известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00143$ и $\sigma = 0{,}0435$.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, равномерно распределенных на отрезке $[1, 7]$, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n > 4n + 2).$$

Вариант № 3-03

1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{16}x^2, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

Найдите a и $P\left(-\frac{a}{4} < X < \frac{a}{4}\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найдите дисперсию $D\left(5X^{\frac{2}{5}}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 10$ и дисперсией $D(X) = 4$ найдите вероятность $P(X < 12{,}2)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}0013$ и $\sigma = 0{,}0468$. Найдите вероятность того, что за три недели цена акции вырастет более, чем на $2\,\%$.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, равномерно распределенных на отрезке $[1, 10]$, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n < \frac{11}{2}n + \sqrt{n}\right).$$

Вариант № 3-04

1. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = X^3$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найдите математическое ожидание $E\left(\sqrt[5]{X^{14}}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 0{,}7$ и дисперсией $D(X) = 49$ найдите вероятность $P(|X| > 4{,}9)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Предполагая, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, распределенными логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00236$ и $\sigma = 0{,}0599$, найдите вероятность того, что цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели.

5. Для независимых, распределенных по геометрическому закону случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n > 9n - \sqrt{n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 9$.

Вариант № 3-05

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-2, 9]$. Найдите вероятность $P\left(\dfrac{1}{X-2} < 6\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найдите дисперсию $D\left(4X^{\frac{7}{4}}\right)$.

3. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{10}$ независимы и распределены по показательному закону. Найдите $E\{(X_1 + \ldots + X_{10} - 3)^2\}$, если $E(X_1) = \ldots = E(X_{10}) = 3$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции в конце n-ой недели, $n \geqslant 1$. Найдите вероятность того, что цена акции в конце третьей недели будет выше, чем в конце первой недели, если известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00446$ и $\sigma = 0{,}0858$.

5. Для независимых, распределенных по показательному закону случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n > 4n - \sqrt{2n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 4$.

Вариант № 3-06

1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{18}x^2, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

Найдите a и $P\left(|X| > \frac{a}{6}\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 5]$. Найдите $E(e^{4X})$.

3. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $E(X) = 40$ и $D(X) = \sigma^2$. Найдите вероятность попадания X в интервал $(40 - 2\sigma, 40)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}0019$ и $\sigma = 0{,}0785$. Найдите вероятность того, что за три недели цена акции вырастет более, чем на $6\,\%$.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, распределенных по биномиальному закону с параметрами $n = 4$ и $p = \dfrac{2}{3}$, найдите предел

$$\lim_{t\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_t > \frac{8}{3}\,t + \sqrt{2t}\right).$$

Вариант № 3-07

1. Распределение случайной величины X задано плотностью вероятности $f(x)$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = 8 - 7X$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найдите дисперсию $D\left(5X^{\frac{7}{5}}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 29$ и дисперсией $D(X) = 64$ найдите вероятность $P(26{,}6 < X < 34{,}6)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00126$ и $\sigma = 0{,}0641$. Найдите вероятность того, что цена акции будет расти подряд три недели.

5. Для независимых, распределенных по показательному закону случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n > 5n + \sqrt{n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 5$.

Вариант № 3-08

1. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = X^7$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найдите математическое ожидание $E\left(\sqrt[5]{X^6}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X известно, что математическое ожидание $E(X) = 20{,}3$ и вероятность $P(X < 41) = 0{,}98928$. Найдите дисперсию $D(X)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Предполагая, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, распределенными логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00211$ и $\sigma = 0{,}0475$, найдите вероятность того, что цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели.

5. Для независимых, распределенных по геометрическому закону случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < 9n + \sqrt{2n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 9$.

Вариант № 3-09

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-9, 18]$. Найдите вероятность $P\left(\dfrac{1}{X-9} < 3\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-2, 1]$. Найдите $E(e^{5X})$.

3. Для нормальной случайной величины X известно, что дисперсия $D(X) = 81$ и вероятность $P(X < 54) = 0{,}61791$. Найдите математическое ожидание $m = E(X)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции в конце n-ой недели, $n \geqslant 1$. Найдите вероятность того, что цена акции в конце третьей недели будет выше, чем в конце первой недели, если известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00266$ и $\sigma = 0{,}0707$.

5. Для независимых, распределенных по закону Пуассона случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < 5n + \sqrt{3n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 5$.

Вариант № 3-10

1. Распределение случайной величины X задано плотностью вероятности $f(x)$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = 9 - 4X$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найдите дисперсию $D\left(4X^{\frac{3}{4}}\right)$.

3. Математические ожидания и дисперсии независимых нормальных случайных величин X, Y, Z, U равны 1. Найдите вероятность $P(X + Y + Z - U < 0)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00132$ и $\sigma = 0{,}0589$. Найдите вероятность того, что за три недели цена акции вырастет более, чем на $4\,\%$.

5. Для независимых, распределенных по геометрическому закону случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < 8n - \sqrt{2n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 8$.

Вариант № 3-11

1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

Найдите a и $P\left(|X| > \frac{a}{5}\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-3, 4]$. Найдите $E(e^{4X})$.

3. Случайные величины $X_1, \ldots, X_8$ независимы и распределены по показательному закону. Найдите $E\{(X_1 + \ldots + X_8 - 3)^2\}$, если $E(X_1) = \ldots = E(X_8) = 3$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Предполагая, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, распределенными логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00353$ и $\sigma = 0{,}0696$, найдите вероятность того, что цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели.

5. Для независимых, распределенных по закону Пуассона случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n > 6n + \sqrt{2n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 6$.

Вариант № 3-12

1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{16}x^2, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

Найдите a и $P\left(-\frac{a}{3} < X < \frac{a}{3}\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найдите математическое ожидание $E\left(\sqrt[3]{X^{14}}\right)$.

3. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $E(X) = 20$ и $D(X) = \sigma^2$. Найдите вероятность попадания X в интервал $(20 - \sigma, 20)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00257$ и $\sigma = 0{,}0547$. Найдите вероятность того, что цена акции будет расти подряд три недели.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, распределенных по биномиальному закону с параметрами $n = 7$ и $p = \dfrac{1}{2}$, найдите предел

$$\lim_{t\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_t < \frac{7}{2}t + \sqrt{3t}\right).$$

Вариант № 3-13

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-3, 6]$. Найдите вероятность $P\left(\dfrac{1}{X-3} > 5\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найдите дисперсию $D\left(6X^{\frac{7}{6}}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 17$ и дисперсией $D(X) = 16$ найдите вероятность $P(15{,}8 < X < 21{,}8)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Предполагая, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, распределенными логнормально с параметрами $\mu = 0{,}0025$ и $\sigma = 0{,}0565$, найдите вероятность того, что цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели.

5. Для независимых, распределенных по закону Пуассона случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n > 4n - \sqrt{n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 4$.

Вариант № 3-14

1. Функция плотности вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 4, \\ \dfrac{C}{x^3}, & x \geqslant 4. \end{cases}$$

Найдите константу C и вероятность $P(X < 5)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 5]$. Найдите $E(e^{2X})$.

3. Случайная величина X распределена по показательному закону. Найдите математическое ожидание $E\{(X + 4)^2\}$, если дисперсия $D(X) = 100$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00205$ и $\sigma = 0{,}0544$. Найдите вероятность того, что цена акции будет расти подряд две недели.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, распределенных по биномиальному закону с параметрами $n = 5$ и $p = \dfrac{1}{2}$, найдите предел

$$\lim_{t\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_t > \frac{5}{2}t - \sqrt{3t}\right).$$

Вариант № 3-15

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-8, 12]$. Найдите вероятность $P\left(\dfrac{1}{X-8} < 2\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найдите математическое ожидание $E\left(\sqrt[15]{X^2}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 26$ и дисперсией $D(X) = 49$ найдите вероятность $P(X > 21{,}1)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции в конце n-ой недели, $n \geqslant 1$. Найдите вероятность того, что цена акции в конце третьей недели будет выше, чем в конце первой недели, если известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00196$ и $\sigma = 0{,}0821$.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, равномерно распределенных на отрезке $[1, 10]$, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n < \frac{11}{2}n - \sqrt{2n}\right).$$

Вариант № 3-16

1. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = X^9$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найдите дисперсию $D\left(2X^{\frac{5}{2}}\right)$.

3. Математические ожидания и дисперсии независимых нормальных случайных величин X, Y, Z, U равны 1. Найдите вероятность $P(X - Y + Z + U < 6)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00162$ и $\sigma = 0{,}0387$. Найдите вероятность того, что за три недели цена акции вырастет более, чем на $5\,\%$.

5. Для независимых, распределенных по показательному закону случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < 9n + \sqrt{2n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 9$.

Вариант № 3-17

1. Функция плотности вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 5, \\ \dfrac{C}{x^3}, & x \geqslant 5. \end{cases}$$

Найдите константу C и вероятность $P(X < 6)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найдите математическое ожидание $E\left(\sqrt[3]{X^{10}}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X известно, что дисперсия $D(X) = 121$ и вероятность $P(X < 57) = 0{,}18406$. Найдите математическое ожидание $m = E(X)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Предполагая, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, распределенными логнормально с параметрами $\mu = 0{,}0043$ и $\sigma = 0{,}0562$, найдите вероятность того, что цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих с равной вероятностью значения 5, 14 и 23, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n > 14n + \sqrt{2n}\right).$$

Вариант № 3-18

1. Распределение случайной величины X задано плотностью вероятности $f(x)$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = 1 - 6X$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-2, 2]$. Найдите $E(e^{4X})$.

3. Для нормальной случайной величины X известно, что математическое ожидание $E(X) = 43{,}5$ и вероятность $P(X < 53) = 0{,}97128$. Найдите дисперсию $D(X)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00124$ и $\sigma = 0{,}092$. Найдите вероятность того, что цена акции будет расти подряд две недели.

5. Для независимых, распределенных по показательному закону случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < 9n - \sqrt{n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 9$.

Вариант № 3-19

1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

Найдите a и $P\left(|X| > \dfrac{a}{6}\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найдите дисперсию $D\left(8X^{\frac{3}{8}}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 13$ и дисперсией $D(X) = 16$ найдите вероятность $P(X < 14{,}6)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции в конце n-ой недели, $n \geqslant 1$. Найдите вероятность того, что цена акции в конце третьей недели будет выше, чем в конце первой недели, если известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00159$ и $\sigma = 0{,}0945$.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих с равной вероятностью значения 2, 10 и 18, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n < 10n + \sqrt{2n}\right).$$

Вариант № 3-20

1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{16}x^2, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

Найдите a и $P\left(-\frac{a}{4} < X < \frac{a}{4}\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найдите математическое ожидание $E\left(\sqrt[9]{X^2}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 4$ и дисперсией $D(X) = 64$ найдите вероятность $P(|X| > 4)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00172$ и $\sigma = 0{,}0996$. Найдите вероятность того, что за две недели цена акции вырастет более, чем на $4\,\%$.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих с равной вероятностью значения 9, 18 и 27, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n < 18n - \sqrt{2n}\right).$$

Вариант № 3-21

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-3, 11]$. Найдите вероятность $P\left(\dfrac{1}{X-3} > 4\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-4, 2]$. Найдите $E(e^{4X})$.

3. Случайная величина X распределена по показательному закону. Найдите математическое ожидание $E\{(X+8)^2\}$, если дисперсия $D(X) = 36$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00242$ и $\sigma = 0{,}0505$. Найдите вероятность того, что цена акции будет расти подряд две недели.

5. Для независимых, распределенных по закону Пуассона случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < 7n - \sqrt{2n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 7$.

Вариант № 3-22

1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{16}x^2, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

Найдите a и $P\left(|X| > \frac{a}{8}\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-5, 3]$. Найдите $E(e^{3X})$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 2{,}1$ и дисперсией $D(X) = 49$ найдите вероятность $P(|X| > 6{,}3)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции в конце n-ой недели, $n \geqslant 1$. Найдите вероятность того, что цена акции в конце третьей недели будет выше, чем в конце первой недели, если известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00435$ и $\sigma = 0{,}0831$.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, распределенных по биномиальному закону с параметрами $n = 9$ и $p = \dfrac{1}{3}$, найдите предел

$$\lim_{t\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_t < 3t - \sqrt{2t}\right).$$

Вариант № 3-23

1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}x^2, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

Найдите a и $P\left(-\frac{a}{3} < X < \frac{a}{3}\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найдите математическое ожидание $E\left(\sqrt[3]{X^4}\right)$.

3. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $E(X) = 20$ и $D(X) = \sigma^2$. Найдите вероятность попадания X в интервал $(20 - 2\sigma, 20)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Предполагая, что отношения цен $\frac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, распределенными логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00298$ и $\sigma = 0{,}0365$, найдите вероятность того, что цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих с равной вероятностью значения 8, 14 и 20, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n > 14n - \sqrt{3n}\right).$$

Вариант № 3-24

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-5, 10]$. Найдите вероятность $P\left(\dfrac{1}{X-5} < 9\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найдите дисперсию $D\left(9X^{\frac{4}{9}}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 28$ и дисперсией $D(X) = 81$ найдите вероятность $P(19{,}9 < X < 37)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00145$ и $\sigma = 0{,}0745$. Найдите вероятность того, что за три недели цена акции вырастет более, чем на 7 %.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, равномерно распределенных на отрезке $[1, 13]$, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n > 7n - \sqrt{n}\right).$$

Вариант № 3-25

1. Функция плотности вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 5, \\ \dfrac{C}{x^4}, & x \geqslant 5. \end{cases}$$

Найдите константу C и вероятность $P(X < 6)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-5, 3]$. Найдите $E(e^{3X})$.

3. Для нормальной случайной величины X известно, что дисперсия $D(X) = 49$ и вероятность $P(X < 45) = 0{,}18406$. Найдите математическое ожидание $m = E(X)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Предполагая, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, распределенными логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00465$ и $\sigma = 0{,}088$, найдите вероятность того, что цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих с равной вероятностью значения 5, 10 и 15, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n < 10n - \sqrt{n}\right).$$

Вариант № 3-26

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-2, 8]$. Найдите вероятность $P\left(\frac{1}{X-2} > 6\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найдите математическое ожидание $E\left(\sqrt[7]{X^8}\right)$.

3. Случайные величины $X_1, \ldots, X_6$ независимы и распределены по показательному закону. Найдите $E\{(X_1 + \ldots + X_6 - 5)^2\}$, если $E(X_1) = \ldots = E(X_6) = 5$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\frac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}0015$ и $\sigma = 0{,}0432$. Найдите вероятность того, что цена акции будет расти подряд две недели.

5. Для независимых, распределенных по закону Пуассона случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n > 5n + \sqrt{3n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 5$.

Вариант № 3-27

1. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = X^5$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найдите дисперсию $D\left(8X^{\frac{3}{8}}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 20$ и дисперсией $D(X) = 36$ найдите вероятность $P(X > 18{,}2)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00169$ и $\sigma = 0{,}056$. Найдите вероятность того, что за три недели цена акции вырастет более, чем на 4 %.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, распределенных по биномиальному закону с параметрами $n = 4$ и $p = \dfrac{2}{5}$, найдите предел

$$\lim_{t\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_t > \frac{8}{5}t - \sqrt{3t}\right).$$

Вариант № 3-28

1. Распределение случайной величины X задано плотностью вероятности $f(x)$. Найдите плотность вероятности $g(x)$ случайной величины $Y = 7 - 4X$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-5, 5]$. Найдите $E(e^{4X})$.

3. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 24$ и дисперсией $D(X) = 49$ найдите вероятность $P(X < 20{,}5)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции в конце n-ой недели, $n \geqslant 1$. Найдите вероятность того, что цена акции в конце третьей недели будет выше, чем в конце первой недели, если известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00367$ и $\sigma = 0{,}0851$.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, равномерно распределенных на отрезке $[3, 15]$, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n > 9n + \sqrt{3n}\right).$$

Вариант № 3-29

1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}x^2, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

Найдите a и $P\left(|X| > \frac{a}{7}\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найдите дисперсию $D\left(10X^{\frac{3}{10}}\right)$.

3. Для нормальной случайной величины X известно, что математическое ожидание $E(X) = 40{,}4$ и вероятность $P(X < 35) = 0{,}18406$. Найдите дисперсию $D(X)$.

4. Пусть $S(n)$ — цена акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}00133$ и $\sigma = 0{,}0996$. Найдите вероятность того, что за две недели цена акции вырастет более, чем на $4\,\%$.

5. Для независимых, распределенных по геометрическому закону случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < 4n + \sqrt{3n}),$$

если известно, что $E(X_i) = 4$.

Вариант № 3-30

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-9, 17]$. Найдите вероятность $P\left(\dfrac{1}{X-9} < 3\right)$.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найдите математическое ожидание $E\left(\sqrt[9]{X^2}\right)$.

3. Математические ожидания и дисперсии независимых нормальных случайных величин X, Y, Z, U равны 1. Найдите вероятность $P(X + Y + Z - U < 0)$.

4. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\dfrac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0{,}0018$ и $\sigma = 0{,}0598$. Найдите вероятность того, что цена акции будет расти подряд две недели.

5. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, равномерно распределенных на отрезке $[0, 15]$, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_1 + \ldots + X_n < \frac{15}{2}n + \sqrt{3n}\right).$$

Вариант № 4-01

1. Случайный вектор (X, Y) распределен по закону: $P(X=1, Y=1) = 0{,}15$; $P(X = 1, Y = 2) = 0{,}1$; $P(X = 1, Y = 3) = 0{,}15$; $P(X = 2, Y = 1) = 0{,}19$; $P(X = 2, Y = 2) = 0{,}15$; $P(X = 2, Y = 3) = 0{,}26$. Найдите условную вероятность $P(Y = 2|X = 2)$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \min(4, X - Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

3. Найдите $E(X)$, $D(X)$, $E(Y)$, $D(Y)$, $E(XY)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ и $\rho(X, Y)$ для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	0,1	0,1	0,1
$Y = 1$	0,1	0,2	0,4

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} 12e^{-3x-4y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите вероятность $P(X > 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-x^2-10x-26-3xy-16y-\frac{5}{2}y^2}.$$

Найдите $D(X|Y = y)$.

Вариант № 4-02

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

.

выясните, зависимы или нет события $A = \{X=-1\}$ и $B = \{X=Y\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(X, Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=-3$	$X=-2$	$X=-1$
$Y=-2$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{24}$
$Y=-1$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$

.

3. Дано: $P(X=40) = 0{,}9$, $P(X=80) = 0{,}1$, $E(Y|X=40) = 4$, $E(Y|X=80) = 1$. Найдите $E(Y)$.

4. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $52x + y \leqslant 52$. Найдите математическое ожидание $E(X^{10}Y)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{5}{2}x^2-18x-36-xy-6y-\frac{1}{2}y^2}.$$

Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X=x)$.

Вариант № 4-03

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$
$Y=0$	$\frac{5}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{3}{32}$

.

выясните, зависимы или нет события $A = \{X=-1\}$ и $B = \{X=Y\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = X+Y$ и $E(Z)$, если известно распределение случайного дискретного вектора (X, Y):

	$X=2$	$X=3$	$X=4$
$Y=-2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$Y=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

.

3. Дискретный случайный вектор (X, Y) задан распределением

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=-2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
$Y=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

. Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X \geqslant 1)$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + Cy, & \text{если } 0 < x < 1,\ 0 < y < 2, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$ Найдите константу C и $P(X+Y<1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}\, e^{-\frac{1}{2}x^2-4x-16-xy-12y-\frac{5}{2}y^2}$. Найдите $D(Y|X=x)$.

Вариант № 4-04

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$Y = 0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

выясните, зависимы или нет события $A = \{X = -1\}$ и $B = \{Y = 0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = X - Y$ и $E(Z)$, если известно распределение случайного дискретного вектора (X, Y):

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = -1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$
$Y = 0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

3. Дано: $P(X = 10) = 0{,}2$, $P(X = 70) = 0{,}8$, $E(Y|X = 10) = 2$, $E(Y|X = 70) = 4$. Найдите $E(XY)$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} Ce^{-x-2y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C и $P(X < 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-x^2 + x - \frac{1}{2} - xy - \frac{1}{2}y^2}.$$

Найдите условное математическое ожидание $E(X|Y = y)$.

Вариант № 4-05

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{28}$
$Y=0$	$\frac{1}{14}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{5}{28}$

.

выясните, зависимы или нет события $A=\{X=1\}$ и $B=\{X+Y=0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(5, X - Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=3$	$X=4$	$X=5$
$Y=-2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=-1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

3. Дано: $P(X = 50) = 0{,}3$, $P(X = 80) = 0{,}7$, $E(Y|X = 50) = 3$, $E(Y|X = 80) = 4$. Найдите $D\{E(Y|X)\}$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9}\,x + Cy, & \text{если } 0 < x < 2,\ 0 < y < 4, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C и $P(X + Y > 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{5}{2}x^2-3xy-y^2}.$$

Найдите $E(X|Y = y)$.

Вариант № 4-06

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

выясните, зависимы или нет события $A=\{X=1\}$ и $B=\{X+Y=0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \min(X, Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=-2$	$X=-1$	$X=0$
$Y=-1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
$Y=0$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

3. Распределение случайного вектора (X, Y) задается таблицей

	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$
$Y=1$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$

. Найдите x так, чтобы коэффициент корреляции между X и Y был равен $-\frac{1}{4}$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения $f(x, y) = \begin{cases} Ce^{-2x-y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$ Найдите константу C и $P(X < 2)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{5}{2}x^2+9x-\frac{17}{2}-3xy+5y-y^2}$. Найдите $D(Y|X = x)$.

Вариант № 4-07

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
$Y=0$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$

.

выясните, зависимы или нет события $A=\{X=-1\}$ и $B=\{Y=0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z=\dfrac{X}{Y}$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$Y=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

.

3. Дано: $P(X=20)=0{,}5$, $P(X=60)=0{,}5$, $E(Y|X=20)=1$, $E(Y|X=60)=4$, $D(Y|X=20)=5$ и $D(Y|X=60)=8$. Найдите $D(Y)$.

4. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $5x+12y \leqslant 60$. Найдите значение функции распределения $F_X(4)$ и $E(X)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi}\,e^{-\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{41}{2}-xy+13y-\frac{5}{2}y^2}.$$

Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X=x)$.

Вариант № 4-08

1. Случайный вектор (X, Y) распределен по закону: $P(X=1, Y=1) = 0{,}18$; $P(X = 1, Y = 2) = 0{,}11$; $P(X = 1, Y = 3) = 0{,}11$; $P(X = 2, Y = 1) = 0{,}16$; $P(X = 2, Y = 2) = 0{,}16$; $P(X = 2, Y = 3) = 0{,}28$. Найдите условную вероятность $P(X = 1|Y = 3)$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \min(2, X - Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

3. Найдите $E(X)$ и $\mathrm{Cov}(X, Y)$ для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	0,3	0,1	0
$Y = 1$	0,1	0,1	0,4

.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2}{7}\,x + Cy, & \text{если } 0 < x < 1,\ 0 < y < 3, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}\, e^{-2x^2-2xy-y^2}.$$

Найдите $E(X|Y = y)$.

Вариант № 4-09

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$
$Y = 0$	$\frac{3}{28}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{7}$

выясните, зависимы или нет события $A = \{XY \neq 0\}$ и $B = \{X + Y = 0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = X+Y$ и $E(Z)$, если известно распределение случайного дискретного вектора (X, Y):

	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y = -1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3. Найдите $\mathrm{Cov}(X, Y)$ и $\rho(X, Y)$ для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	0,3	0,2	0
$Y = 1$	0	0,1	0,4

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} 12e^{-4x-3y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите вероятность $P(X < 2)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}\, e^{-\frac{1}{2}x^2-2-xy+4y-\frac{5}{2}y^2}$. Найдите $D(X|Y = y)$.

Вариант № 4-10

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$Y=0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

.

выясните, зависимы или нет события $A = \{X=-1\}$ и $B = \{Y=0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(X, Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
$Y=1$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

.

3. Дискретный случайный вектор (X, Y) задан распределением

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

. Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X+Y=1)$.

4. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $55x + y \leqslant 55$. Найдите математическое ожидание $E(X^9Y)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{5}{2}x^2+9x-\frac{17}{2}-3xy+5y-y^2}.$$

Найдите условное математическое ожидание $E(X|Y=y)$.

Вариант № 4-11

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

.

выясните, зависимы или нет события $A = \{X = -1\}$ и $B = \{X = Y\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \dfrac{X}{Y}$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
$Y=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

3. Дискретный случайный вектор (X, Y) задан распределением

	$X=-2$	$X=-1$	$X=0$
$Y=2$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{24}$
$Y=3$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$

. Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X \leqslant -1)$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения $f(x, y) = \begin{cases} Ce^{-2x-y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$ Найдите константу C и $P(X < 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x, y) = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{5}{2}x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2}$. Найдите $E(X|Y = y)$.

Вариант № 4-12

1. Случайный вектор (X, Y) распределен по закону: $P(X=1, Y=1) =$ $= 0{,}11$; $P(X = 1, Y = 2) = 0{,}19$; $P(X = 1, Y = 3) = 0{,}19$; $P(X = 2, Y = 1) = 0{,}17$; $P(X = 2, Y = 2) = 0{,}1$; $P(X = 2, Y = 3) =$ $= 0{,}24$. Найдите условную вероятность $P(X = 2|Y = 2)$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(5, X - Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$
$Y = -2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$Y = -1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

.

3. Дано: $P(X = 40) = 0{,}4$, $P(X = 60) = 0{,}6$, $E(Y|X = 40) = 4$, $E(Y|X = 60) = 1$. Найдите $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}x + Cy, & \text{если } 0 < x < 2,\ 0 < y < 3, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C и $P(X + Y > 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{5}{2}x^2 - 3xy - 6x - y^2 - 4y - 4}.$$

Найдите $D(Y|X = x)$.

Вариант № 4-13

1. Случайный вектор (X, Y) распределен по закону: $P(X=1, Y=1) = 0{,}14$; $P(X = 1, Y = 2) = 0{,}13$; $P(X = 1, Y = 3) = 0{,}15$; $P(X = 2, Y = 1) = 0{,}11$; $P(X = 2, Y = 2) = 0{,}2$; $P(X = 2, Y = 3) = 0{,}27$. Найдите условную вероятность $P(Y = 3|X = 1)$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \min(X, Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$
$Y = -1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

.

3. Дано: $P(X = 30) = 0{,}7$, $P(X = 70) = 0{,}3$, $D(Y|X = 30) = 9$ и $D(Y|X = 70) = 5$. Найдите $E\{D(Y|X)\}$.

4. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $7x + 3y \leqslant 21$. Найдите значение функции распределения $F_X(2)$ и $E(X)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{2\pi}\, e^{-\frac{5}{2}x^2 - xy - x - y^2 - 2y - 1}.$$

Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X = x)$.

Вариант № 4-14

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{14}$
$Y=0$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{14}$

выясните, зависимы или нет события $A=\{X=1\}$ и $B=\{X+Y=0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = X-Y$ и $E(Z)$, если известно распределение случайного дискретного вектора (X, Y):

	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=-1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
$Y=0$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

3. Найдите $E(Y)$ и $D(X)$ для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	0,1	0,2	0
$Y=1$	0,1	0,1	0,5

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} 12e^{-4x-3y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите вероятность $P(X > 2)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{2}-2xy-4y-\frac{5}{2}y^2}$. Найдите условное математическое ожидание $E(X|Y=y)$.

Вариант № 4-15

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$
$Y=0$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$

выясните, зависимы или нет события $A=\{X=-1\}$ и $B=\{Y=0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z=\min(X,Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=-3$	$X=-2$	$X=-1$
$Y=-2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
$Y=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3. Найдите $E(X)$, $D(X)$, $E(Y)$, $D(Y)$, $E(XY)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ и $\rho(X,Y)$ для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	0,2	0,1	0
$Y=1$	0	0,1	0,6

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения $f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-3x-2y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$ Найдите вероятность $P(X<2)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{2\pi}\, e^{-x^2+x-\frac{41}{2}-xy-13y-\frac{5}{2}y^2}$. Найдите $D(X|Y=y)$.

Вариант № 4-16

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

.

выясните, зависимы или нет события $A=\{X=1\}$ и $B=\{X+Y=0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z=\dfrac{X}{Y}$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=-2$	$X=0$	$X=2$
$Y=-2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

3. Найдите $E(X)$ и $\operatorname{Cov}(X, Y)$ для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	0,1	0,1	0
$Y=1$	0,1	0,1	0,6

.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения $f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-2x-y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$ Найдите константу C и $P(X<1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}x^2 - x - 1 - xy - y^2}$. Найдите $D(X|Y=y)$.

Вариант № 4-17

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{28}$
$Y=0$	$\frac{1}{14}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{5}{28}$

выясните, зависимы или нет события $A = \{X = -1\}$ и $B = \{X = Y\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(X, Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$Y=1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

3. Найдите $E(Y)$ и $D(X)$ для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	0,2	0,2	0
$Y=1$	0	0,2	0,4

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}x + Cy, & \text{если } 0 < x < 1,\ 0 < y < 3, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C и $P(X + Y < 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{5}{2}x^2 - x - 1 - 2xy - y - \frac{1}{2}y^2}$. Найдите условное математическое ожидание $E(X|Y = y)$.

Вариант № 4-18

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$
$Y=0$	$\frac{3}{28}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{7}$

выясните, зависимы или нет события $A = \{XY \neq 0\}$ и $B = \{X + Y = 0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(5, X - Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=3$	$X=4$	$X=5$
$Y=-2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
$Y=-1$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

3. Дано: $P(X = 50) = 0{,}3$, $P(X = 90) = 0{,}7$, $E(Y|X = 50) = 1$, $E(Y|X = 90) = 4$. Найдите $E(Y)$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{7}\,x + Cy, & \text{если } 0 < x < 1,\ 0 < y < 3, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{5}{2}x^2 + 21x - \frac{89}{2} - 3xy + 13y - y^2}.$$

Найдите $D(Y|X = x)$.

Вариант № 4-19

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{28}$
$Y=0$	$\frac{3}{14}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{1}{28}$

.

выясните, зависимы или нет события $A = \{XY \neq 0\}$ и $B = \{X + Y = 0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = X - Y$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=2$	$X=3$	$X=4$
$Y=-2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$
$Y=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

.

3. Дискретный случайный вектор (X, Y) задан распределением

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

. Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X \geqslant 1)$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения $f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-2x-y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$ Найдите константу C и $P(X < 2)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{5}{2}y^2}$. Найдите условное математическое ожидание $E(X|Y = y)$.

Вариант № 4-20

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{28}$
$Y=0$	$\frac{1}{14}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{5}{28}$

.

выясните, зависимы или нет события $A=\{X=-1\}$ и $B=\{X=Y\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z=X+Y$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X,Y):

	$X=2$	$X=3$	$X=4$
$Y=-2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=-1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

3. Распределение случайного вектора (X,Y) задается таблицей

	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x$
$Y=1$	$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x$

. Найдите x так, чтобы коэффициент корреляции между X и Y был равен $-\frac{1}{4}$.

4. Случайный вектор (X,Y) имеет плотность распределения $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{7}x+Cy, & \text{если } 0<x<1,\ 0<y<3, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$ Найдите константу C и $P(X+Y<1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X,Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}x^2-2-xy-4y-\frac{5}{2}y^2}$. Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X=x)$.

Вариант № 4-21

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{28}$
$Y = 0$	$\frac{1}{14}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{5}{28}$

.

выясните, зависимы или нет события $A = \{X = 1\}$ и $B = \{X + + Y = 0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \min(2, X - Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

.

3. Дискретный случайный вектор (X, Y) задан распределением

	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

. Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X \leqslant 3)$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения $f(x, y) = \begin{cases} 12e^{-3x-4y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$ Найдите $P(X < 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{5}{2}x^2+9x-9-2xy+3y-\frac{1}{2}y^2}$. Найдите условное математическое ожидание $E(X|Y = y)$.

Вариант № 4-22

1. Для случайного дискретного вектораЁ(X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
$Y=0$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$

.

выясните, зависимы или нет события $A=\{X=-1\}$ и $B=\{Y=0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(X, Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=-3$	$X=-2$	$X=-1$
$Y=-2$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{24}$
$Y=-1$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$

.

3. Дано: $P(X = 40) = 0{,}3$, $P(X = 90) = 0{,}7$, $E(Y|X = 40) = 4$, $E(Y|X = 90) = 3$. Найдите $D\{E(Y|X)\}$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + Cy, & \text{если } 0 < x < 1,\ 0 < y < 2, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C и $P(X + Y > 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2-3x-5-2xy-7y-\frac{5}{2}y^2}.$$

Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X = x)$.

Вариант № 4-23

1. Случайный вектор (X, Y) распределен по закону: $P(X=1, Y=1) = 0{,}17$; $P(X = 1, Y = 2) = 0{,}18$; $P(X = 1, Y = 3) = 0{,}12$; $P(X = 2, Y = 1) = 0{,}14$; $P(X = 2, Y = 2) = 0{,}16$; $P(X = 2, Y = 3) = 0{,}23$. Найдите условную вероятность $P(Y = 1|X = 1)$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = X+Y$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = -1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$
$Y = 0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

.

3. Дано: $P(X = 10) = 0{,}1$, $P(X = 60) = 0{,}9$, $E(Y|X = 10) = 2$, $E(Y|X = 60) = 4$, $D(Y|X = 10) = 9$ и $D(Y|X = 60) = 5$. Найдите $D(Y)$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9}\,x + Cy, & \text{если } 0 < x < 2,\ 0 < y < 4, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{2\pi}\, e^{-\frac{5}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} - xy + 3y - y^2}.$$

Найдите $D(X|Y = y)$.

Вариант № 4-24

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

.

выясните, зависимы или нет события $A=\{X=-1\}$ и $B=\{X=Y\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z=\min(2, X-Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$
$Y=1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

.

3. Дано: $P(X=10)=0{,}9$, $P(X=80)=0{,}1$, $E(Y|X=10)=2$, $E(Y|X=80)=3$. Найдите $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $26x+y \leqslant 26$. Найдите математическое ожидание $E(X^{10}Y)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y)=\frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}x^2-2xy-\frac{5}{2}y^2}.$$

Найдите условное математическое ожидание $E(X|Y=y)$.

Вариант № 4-25

1. Случайный вектор (X, Y) распределен по закону: $P(X=1, Y=1) = 0{,}13$; $P(X = 1, Y = 2) = 0{,}17$; $P(X = 1, Y = 3) = 0{,}15$; $P(X = 2, Y = 1) = 0{,}14$; $P(X = 2, Y = 2) = 0{,}13$; $P(X = 2, Y = 3) = 0{,}28$. Найдите условную вероятность $P(X = 2|Y = 1)$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(3, X - Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
$Y = 0$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

.

3. Дано: $P(X = 10) = 0{,}4$, $P(X = 60) = 0{,}6$, $E(Y|X = 10) = 4$, $E(Y|X = 60) = 1$. Найдите $E(XY)$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} 12e^{-3x-4y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите $P(X > 2)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}\, e^{-2x^2+12x-18-2xy+6y-y^2}.$$

Найдите $D(Y|X = x)$.

Вариант № 4-26

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y=0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

.

выясните, зависимы или нет события $A = \{X = 1\}$ и $B = \{X + Y = 0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = X - Y$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=2$	$X=3$	$X=4$
$Y=-2$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{24}$
$Y=-1$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$

.

3. Дискретный случайный вектор (X, Y) задан распределением

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
$Y=-1$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

.

Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X + Y = -1)$.

4. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $5x + 12y \leqslant 60$. Найдите значение функции распределения $F_X(8)$ и $E(X)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{2\pi} e^{-x^2 - xy - \frac{5}{2}y^2}$. Найдите условное математическое ожидание $E(X|Y = y)$.

Вариант № 4-27

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$Y=0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

.

выясните, зависимы или нет события $A = \{X=-1\}$ и $B = \{Y=0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \min(X, Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$Y=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

.

3. Дано: $P(X = 10) = 0{,}9$, $P(X = 70) = 0{,}1$, $D(Y|X = 10) = 7$ и $D(Y|X = 70) = 9$. Найдите $E\{D(Y|X)\}$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-x-y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C и $P(X < 2)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-x^2+4x-4-3xy+6y-\frac{5}{2}y^2}.$$

Найдите $D(X|Y = y)$.

Вариант № 4-28

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$Y = 0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

.

выясните, зависимы или нет события $A = \{X = 1\}$ и $B = \{Y = -1\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \dfrac{X}{Y}$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X = -3$	$X = 0$	$X = 3$
$Y = -3$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
$Y = 3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

3. Найдите $\mathrm{Cov}(X, Y)$ и $\rho(X, Y)$ для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	0,3	0,2	0,1
$Y = 1$	0,1	0,1	0,2

.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{7}x + Cy, & \text{если } 0 < x < 1,\ 0 < y < 3, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$ Найдите константу C и $P(X + Y < 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x, y) = \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-x^2 - 3xy - 6x - \frac{5}{2}y^2 - 10y - 10}$. Найдите $D(Y|X = x)$.

Вариант № 4-29

1. Случайный вектор (X, Y) распределен по закону: $P(X=1, Y=1) = 0{,}16$; $P(X = 1, Y = 2) = 0{,}14$; $P(X = 1, Y = 3) = 0{,}12$; $P(X = 2, Y = 1) = 0{,}15$; $P(X = 2, Y = 2) = 0{,}18$; $P(X = 2, Y = 3) = 0{,}25$. Найдите условную вероятность $P(Y = 2|X = 1)$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(X, Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X = -3$	$X = -2$	$X = -1$
$Y = -2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Y = -1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

3. Дано: $P(X = 30) = 0{,}6$, $P(X = 90) = 0{,}4$, $D(Y|X = 30) = 6$ и $D(Y|X = 90) = 7$. Найдите $E\{D(Y|X)\}$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-3x-2y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите $P(X > 2)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}-xy-y-y^2}.$$

Найдите условное математическое ожидание $E(X|Y = y)$.

Вариант № 4-30

1. Для случайного дискретного вектора (X, Y), распределенного по закону

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$
$Y=0$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$

.

выясните, зависимы или нет события $A = \{X=-1\}$ и $B = \{Y=0\}$.

2. Найдите распределение случайной величины $Z = \min(4, X-Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y):

	$X=2$	$X=3$	$X=4$
$Y=-1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
$Y=0$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

.

3. Дано: $P(X = 10) = 0{,}3$, $P(X = 70) = 0{,}7$, $E(Y|X = 10) = 1$, $E(Y|X = 70) = 4$. Найдите $D\{E(Y|X)\}$.

4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-2x-y}, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant y < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C и $P(X < 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-x^2-10x-26-3xy-16y-\frac{5}{2}y^2}.$$

Найдите условное математическое ожидание $E(Y|X = x)$.

Вариант № 5-01

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_6$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[6, 12]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите вероятность $P\left(\widehat{F}(8) = \frac{1}{2}\right)$.

2. В некотором городе сторонники партии A составляют 23 %, партии B — 29 %. Известно, что объем бесповторной выборки составляет 5 % от числа всех избирателей. Пусть $\widehat{p}_A$ — выборочная доля сторонников партии A, n_B — число отобранных сторонников партии B. Найдите (приближенно) $\mathrm{Cov}(\widehat{p}_A, n_B)$.

3. Случайная величина X распределена по закону Пуассона $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Результаты 465 независимых наблюдений X отражены в таблице

Значение X	0	1	2	3
Частота	205	155	78	27

Найдите методом моментов точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

4. Численность повторной выборки составляет 1 340 единиц. Доля признака составляет 8 %. Найдите с доверительной вероятностью 0,994, в каких пределах находится отклонение частоты от доли признака.

Вариант № 5-02

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_8$ — выборка из распределения $P(X = l) = \dfrac{1}{11}$, $l = 1, 2, \ldots, 11$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая эмпирическая функция распределения. Найдите вероятность $P\left(\widehat{F}(3+0) - \widehat{F}(3) = \frac{1}{4}\right)$.

2. Значения признаков X и Y заданы на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$ таблицей частот

	$Y = 3$	$Y = 6$	$Y = 8$
$X = 300$	11	13	17
$X = 900$	10	18	31

Из Ω без возвращения извлекаются 15 элементов. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — средние значения признаков в выборочной совокупности. Найдите $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$.

3. В 26 независимых испытаниях случайная величина X значение 3 приняла 14 раз, а значение 6 — 12 раз. Найдите несмещенную оценку дисперсии $D(X)$.

4. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна 0, а случайные ошибки распределены нормально со среднеквадратичным отклонением 18 м. Каково наименьшее число независимых измерений, при котором удается определить глубину с ошибкой меньше 3 метров с надежностью не ниже 0,994?

Вариант № 5-03

1. Итоговое распределение баллов на некотором письменном экзамене задано таблицей

Оценка работы	2	3	4	5
Число работ	6	24	18	30

Работы проверяли 6 преподавателей, которые разделили все работы между собой поровну случайным образом. Предполагая независимость оценки от личности проверяющего, найдите математическое ожидание и дисперсию среднего балла по результатам одного преподавателя.

2. Значения признаков X и Y заданы на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2000\}$ таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 7$	200	300	200
$X = 10$	200	100	1 000

Из Ω с возвращением извлекаются 200 элементов. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — средние значения признаков в выборочной совокупности. Найдите $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$.

3. Случайная величина X (время бесперебойной работы устройства) имеет показательное распределение с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$. По эмпирическому распределению времени работы

Время работы	0 — 30	30 — 60	60 — 90	90 — 120
Число устройств	130	41	12	7

методом моментов найдите точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

4. При испытании $n = 1\,040$ элементов зарегистрировано $m = 104$ отказов. Найдите доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p отказа элемента с надежностью $\gamma \approx 0{,}97$.

Вариант № 5-04

1. Две игральные кости, красная и синяя, подбрасываются до тех пор, пока не выпадет 14 различных с учетом цвета комбинаций очков. Пусть S_i — сумма очков на красной и синей кости в i-той комбинации, $\overline{S}$ — среднее арифметическое всех этих сумм, $i = 1, \ldots, 14$. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{S}$.

2. Значения признака X в генеральной совокупности заданы таблицей частот

Интервал	11 — 31	31 — 51	51 — 71
Частота	500	1 300	1 000

Из этой совокупности производится бесповторная выборка объема 200. Пусть m — генеральное, а $\overline{X}$ — выборочное среднее. Найдите среднеквадратичную ошибку в приближенном равенстве $m \approx \overline{X}$. При вычислении генеральной дисперсии не следует использовать поправку Шеппарда.

3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 6e^{6(\theta - x)} & \text{при } x \geqslant \theta, \\ 0 & \text{при } x < \theta. \end{cases}$ Проверьте, является ли оценка $\widehat{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{6}$ несмещенной оценкой параметра θ?

4. Производится выборочное обследование возраста читателей массовых библиотек. Сколько карточек необходимо взять для обследования, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что средний возраст в выборочной совокупности отклонится от генерального среднего не более, чем на 3 года? Генеральное среднее квадратичное отклонение принять равным 30 годам.

Вариант № 5-05

1. Две игральные кости, красная и синяя, подбрасываются до тех пор, пока не выпадет 18 различных с учетом цвета комбинаций очков. Пусть S_i — число очков на красной кости в i-той комбинации, $\overline{S}$ — среднее арифметическое всех этих чисел, $i = 1, \ldots, 18$. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{S}$.

2. В некоторой области имеется 100 000 жителей, из которых пенсионеры составляют 6 %. Пусть $\widehat{p}$ — доля пенсионеров среди случайно (без возвращения) отобранных 12 000 жителей данной области. Найдите среднеквадратичную погрешность в приближенном равенстве $0{,}06 \approx \widehat{p}$.

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 362, 379, 313, 426, 385, 409, 371, 382 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина известна и равна 375 м.

4. Обследуется средняя продолжительность телефонного разговора. Сколько телефонных разговоров должно быть зафиксировано, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что отклонение средней продолжительности зафиксированных разговоров от генеральной средней не превосходит 9 секунд, если среднее квадратичное отклонение длительности одного разговора равно 3 минутам?

Вариант № 5-06

1. Признак $X(k)$ задан на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ следующей таблицей:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(k)$	1	2	1	1	2	2	2	3	2	3

Из Ω извлекается случайная повторная выборка объема 5. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{X}$ признака X в выборке.

2. В некотором округе имеется 400 000 избирателей, из которых желающие принять участие в выборах составляют 67 %. Пусть $\widehat{p}$ — доля желающих проголосовать среди случайно (без возвращения) отобранных 11 000 избирателей. Найдите среднеквадратичную погрешность в приближенном равенстве $0{,}67 \approx \widehat{p}$.

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 367, 375, 315, 421, 386, 406, 374, 381 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина неизвестна.

4. Выборочно обследовали качество кирпича. Из $n = 1\,700$ проб в $m = 50$ случаях кирпич оказался бракованным. В каких пределах заключается доля брака для всей продукции, если результат гарантируется с надежностью $\gamma \approx 0{,}97$?

Вариант № 5-07

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_6$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[7, 12]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите $P(\widehat{F}(10) = \widehat{F}(11))$.

2. Значения признака X в генеральной совокупности заданы таблицей частот

Интервал	7 — 11	11 — 15	15 — 19
Частота	5	15	6

Из этой совокупности производится повторная выборка объема 2. Пусть m — генеральное, а $\overline{X}$ — выборочное среднее. Найдите среднеквадратичную ошибку в приближенном равенстве $m \approx \overline{X}$. При вычислении генеральной дисперсии не следует использовать поправку Шеппарда.

3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из распределения с плотностью $f(x) = \begin{cases} 7e^{7(\theta - x)} & \text{при } x \geqslant \theta, \\ 0 & \text{при } x < \theta. \end{cases}$ Проверьте, является ли оценка $\widehat{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{7}$ несмещенной оценкой параметра θ?

4. Выборка из большой партии электроламп содержит 110 ламп. Средняя продолжительность горения отобранных ламп оказалось равной 1 600 ч. Найдите приближенный 0,994-доверительный интервал для средней продолжительности горения лампы во всей партии, если известно, что среднеквадратичное отклонение продолжительности горения лампы в партии равно 21 ч.

Вариант № 5-08

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_4$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[8, 17]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите дисперсию $D\left[\widehat{F}(13)\right]$.

2. Статистические данные о результатах экзамена в трех группах приведены в таблице

№ группы	Число студентов	Средний балл	Среднее квадр. откл.
1	18	64	9
2	22	67	15
3	22	66	20

При проведении экзамена студенты случайным образом размещались (в соответствии с числом мест) в нескольких аудиториях. В одной из них находилось 20 студентов. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего балла по результатам, полученным в данной аудитории, предполагая, что условия для выполнения экзаменационных работ во всех аудиториях одинаковы.

3. В 22 независимых испытаниях случайная величина X значение 3 приняла 12 раз, а значение 4–10 раз. Найдите несмещенную оценку дисперсии $D(X)$.

4. В результате проведенного социологического опроса $n = 1\,660$ человек рейтинг кандидата в президенты составил 7 %. Найдите доверительный интервал для рейтинга кандидата с гарантированной надежностью 95 %.

Вариант № 5-09

1. Признак $X(k)$ задан на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ следующей таблицей:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(k)$	3	3	2	3	1	3	2	2	3	2

Из Ω извлекается случайная бесповторная выборка объема 5. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{X}$ признака X в выборке.

2. Значения признака X в генеральной совокупности заданы таблицей частот

Интервал	5 — 25	25 — 45	45 — 65
Частота	3	14	8

.

Из этой совокупности производится повторная выборка объема 7. Пусть m — генеральное, а $\overline{X}$ — выборочное среднее. Найдите среднеквадратичную ошибку в приближенном равенстве $m \approx \overline{X}$. При вычислении генеральной дисперсии не следует использовать поправку Шеппарда.

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 368, 377, 314, 425, 388, 402, 373, 381 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок.

4. В 30 000 сеансах игры с автоматом выигрыш появился 5 200 раз. Найдите для вероятности выигрыша p приближенный 0,994-доверительный интервал.

Вариант № 5-10

1. Итоговое распределение баллов на некотором письменном экзамене задано таблицей

Оценка работы	2	3	4	5
Число работ	10	40	40	30

Работы проверяли 10 преподавателей, которые разделили все работы между собой поровну случайным образом. Предполагая независимость оценки от личности проверяющего, найдите математическое ожидание и дисперсию среднего балла по результатам одного преподавателя.

2. Значения признаков X и Y заданы на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$ таблицей частот

	$Y = 1$	$Y = 6$	$Y = 7$
$X = 300$	14	14	13
$X = 700$	16	10	33

Из Ω без возвращения извлекаются 10 элементов. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — средние значения признаков в выборочной совокупности. Найдите $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$.

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 362, 377, 315, 429, 388, 407, 371, 382 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина неизвестна.

4. Брокер на бирже желает найти 0,95-доверительный интервал для математического ожидания недельной доходности выбранной акции. Известно, что выборочная средняя недельная доходность за последний год (52 недели) составила $\overline{r} = 0{,}013$. Найдите искомый доверительный интервал в предположении, что недельные доходности независимы и распределены нормально с постоянными параметрами, причем генеральное среднеквадратичное отклонение недельной доходности равно 0,01.

Вариант № 5-11

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_7$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[10, 18]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите вероятность $P\left(\widehat{F}(13) = \frac{4}{7}\right)$.

2. В некоторой области имеется 500 000 жителей, из которых пенсионеры составляют 10 %. Пусть $\widehat{p}$ — доля пенсионеров среди случайно (без возвращения) отобранных 12 000 жителей данной области. Найдите среднеквадратичную погрешность в приближенном равенстве $0{,}1 \approx \widehat{p}$.

3. Случайная величина X распределена по закону Пуассона $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Результаты 469 независимых наблюдений X отражены в таблице

Значение X	0	1	2	3
Частота	204	157	82	26

Найдите методом моментов точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

4. Численность повторной выборки составляет 1 200 единиц. Доля признака составляет 9 %. Найдите с доверительной вероятностью 0,97, в каких пределах находится отклонение частоты от доли признака.

Вариант № 5-12

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_5$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[4, 11]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите $P(\widehat{F}(5) = \widehat{F}(8))$.

2. Статистические данные о результатах экзамена в трех группах приведены в таблице

№ группы	Число студентов	Средний балл	Среднее квадр. откл.
1	21	76	5
2	19	77	17
3	21	68	12

При проведении экзамена студенты случайным образом размещались (в соответствии с числом мест) в нескольких аудиториях. В одной из них находилось 20 студентов. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего балла по результатам, полученным в данной аудитории, предполагая, что условия для выполнения экзаменационных работ во всех аудиториях одинаковы.

3. Случайная величина X (время бесперебойной работы устройства) имеет показательное распределение с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$. По эмпирическому распределению времени работы

Время работы	0–30	30–60	60–90	90–120
Число устройств	133	41	14	3

методом моментов найдите точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

4. Выборочно обследовали качество кирпича. Из $n = 1\,400$ проб в $m = 45$ случаях кирпич оказался бракованным. В каких пределах заключается доля брака для всей продукции, если результат гарантируется с надежностью $\gamma \approx 0{,}95$?

Вариант № 5-13

1. Признак $X(k)$ задан на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ следующей таблицей:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(k)$	3	2	3	2	1	3	1	1	1	3

Из Ω извлекается случайная повторная выборка объема 5. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{X}$ признака X в выборке.

2. В некотором городе сторонники партии A составляют 25 %, партии B — 29 %. Известно, что объем бесповторной выборки составляет 12 % от числа всех избирателей. Пусть $\widehat{p}_A$ — выборочная доля сторонников партии A, n_B — число отобранных сторонников партии B. Найдите (приближенно) $\mathrm{Cov}(\widehat{p}_A, n_B)$.

3. В 25 независимых испытаниях случайная величина X значение 3 приняла 10 раз, а значение 5 — 15 раз. Найдите несмещенную оценку дисперсии $D(X)$.

4. При испытании $n = 1\,010$ элементов зарегистрировано $m = 104$ отказов. Найдите доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p отказа элемента с надежностью $\gamma \approx 0{,}94$.

Вариант № 5-14

1. Две игральные кости, красная и синяя, подбрасываются до тех пор, пока не выпадет 16 различных с учетом цвета комбинаций очков. Пусть S_i — сумма очков на красной и синей кости в i-той комбинации, $\overline{S}$ — среднее арифметическое всех этих сумм, $i = 1, \ldots, 16$. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{S}$.

2. Значения признака X в генеральной совокупности заданы таблицей частот

Интервал	3–7	7–11	11–15
Частота	50	150	60

Из этой совокупности производится бесповторная выборка объема 40. Пусть m — генеральное, а $\overline{X}$ — выборочное среднее. Найдите среднеквадратичную ошибку в приближенном равенстве $m \approx \overline{X}$. При вычислении генеральной дисперсии не следует использовать поправку Шеппарда.

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 366, 378, 315, 422, 388, 404, 372, 383 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина известна и равна 375 м.

4. Обследуется средняя продолжительность телефонного разговора. Сколько телефонных разговоров должно быть зафиксировано, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что отклонение средней продолжительности зафиксированных разговоров от генеральной средней не превосходит 12 секунд, если среднее квадратичное отклонение длительности одного разговора равно 4 минутам?

Вариант № 5-15

1. Две игральные кости, красная и синяя, подбрасываются до тех пор, пока не выпадет 20 различных с учетом цвета комбинаций очков. Пусть S_i — число очков на красной кости в i-той комбинации, $\overline{S}$ — среднее арифметическое всех этих чисел, $i = 1, \ldots, 20$. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{S}$.

2. Значения признаков X и Y заданы на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2000\}$ таблицей частот

	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 6$
$X = 7$	400	200	200
$X = 9$	300	100	800

Из Ω с возвращением извлекаются 600 элементов. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — средние значения признаков в выборочной совокупности. Найдите $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$.

3. Случайная величина X распределена по закону Пуассона $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Результаты 465 независимых наблюдений X отражены в таблице

Значение X	0	1	2	3
Частота	202	160	79	24

Найдите методом моментов точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

4. В результате проведенного социологического опроса $n = 1\,100$ человек рейтинг кандидата в президенты составил $10\,\%$. Найдите доверительный интервал для рейтинга кандидата с гарантированной надежностью $95\,\%$.

Вариант № 5-16

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_7$ — выборка из распределения $P(X = l) = \frac{1}{9}$, $l = 1, 2, \ldots, 9$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая эмпирическая функция распределения. Найдите вероятность $P\left(\widehat{F}(5+0) - \widehat{F}(5) = \frac{2}{7}\right)$.

2. В некотором округе имеется 700 000 избирателей, из которых желающие принять участие в выборах составляют 89 %. Пусть $\widehat{p}$ — доля желающих проголосовать среди случайно (без возвращения) отобранных 9 000 избирателей. Найдите среднеквадратичную погрешность в приближенном равенстве $0{,}89 \approx \widehat{p}$.

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 367, 377, 317, 422, 389, 402, 371, 381 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина неизвестна.

4. В 50 000 сеансах игры с автоматом выигрыш появился 4 400 раз. Найдите для вероятности выигрыша p приближенный 0,94-доверительный интервал.

Вариант № 5-17

1. Пусть X_1, X_2, X_3 — выборка из равномерного распределения на отрезке $[8, 15]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите дисперсию $D\left[\widehat{F}(13)\right]$.

2. В некоторой области имеется 500 000 жителей, из которых пенсионеры составляют 11 %. Пусть $\widehat{p}$ — доля пенсионеров среди случайно (без возвращения) отобранных 9 000 жителей данной области. Найдите среднеквадратичную погрешность в приближенном равенстве $0{,}11 \approx \widehat{p}$.

3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 7e^{7(\theta - x)} & \text{при } x \geqslant \theta, \\ 0 & \text{при } x < \theta. \end{cases}$$

Проверьте, является ли оценка $\widehat{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{7}$ несмещенной оценкой параметра θ?

4. Брокер на бирже желает найти 0,95-доверительный интервал для математического ожидания недельной доходности выбранной акции. Известно, что выборочная средняя недельная доходность за последний год (52 недели) составила $\overline{r} = 0{,}008$. Найдите искомый доверительный интервал в предположении, что недельные доходности независимы и распределены нормально с постоянными параметрами, причем генеральное среднеквадратичное отклонение недельной доходности равно 0,01.

Вариант № 5-18

1. Признак $X(k)$ задан на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ следующей таблицей:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(k)$	3	3	3	2	1	1	2	1	3	2

Из Ω извлекается случайная бесповторная выборка объема 5. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{X}$ признака X в выборке.

2. Значения признаков X и Y заданы на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$ таблицей частот

	$Y=3$	$Y=4$	$Y=7$
$X=500$	12	19	12
$X=800$	11	16	30

Из Ω без возвращения извлекаются 8 элементов. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — средние значения признаков в выборочной совокупности. Найдите $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$.

3. Случайная величина X (время бесперебойной работы устройства) имеет показательное распределение с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$. По эмпирическому распределению времени работы

Время работы	0–20	20–40	40–60	60–80
Число устройств	134	42	13	8

методом моментов найдите точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

4. Производится выборочное обследование возраста читателей массовых библиотек. Сколько карточек необходимо взять для обследования, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что средний возраст в выборочной совокупности отклонится от генерального среднего не более, чем на 3 года? Генеральное среднее квадратичное отклонение принять равным 10 годам.

Вариант № 5-19

1. Две игральные кости, красная и синяя, подбрасываются до тех пор, пока не выпадет 17 различных с учетом цвета комбинаций очков. Пусть S_i — сумма очков на красной и синей кости в i-той комбинации, $\overline{S}$ — среднее арифметическое всех этих сумм, $i = 1, \ldots, 17$. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{S}$.

2. В некотором округе имеется 700 000 избирателей, из которых желающие принять участие в выборах составляют 83 %. Пусть $\widehat{p}$ — доля желающих проголосовать среди случайно (без возвращения) отобранных 6 000 избирателей. Найдите среднеквадратичную погрешность в приближенном равенстве $0{,}83 \approx \widehat{p}$.

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 365, 378, 319, 424, 385, 406, 374, 381 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина неизвестна.

4. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения отобранных ламп оказалось равной 1 100 ч. Найдите приближенный 0,72-доверительный интервал для средней продолжительности горения лампы во всей партии, если известно, что среднеквадратичное отклонение продолжительности горения лампы в партии равно 44 ч.

Вариант № 5-20

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_5$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[7, 13]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите дисперсию $D\left[\widehat{F}(10)\right]$.

2. Значения признаков X и Y заданы на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2000\}$ таблицей частот

	$Y = 1$	$Y = 3$	$Y = 6$
$X = 8$	400	300	300
$X = 10$	400	300	300

Из Ω с возвращением извлекаются 300 элементов. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — средние значения признаков в выборочной совокупности. Найдите $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$.

3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 9e^{9(\theta - x)} & \text{при } x \geqslant \theta, \\ 0 & \text{при } x < \theta. \end{cases}$$

Проверьте, является ли оценка $\widehat{\theta} = \overline{X} - \dfrac{1}{9}$ несмещенной оценкой параметра θ?

4. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна 0, а случайные ошибки распределены нормально со среднеквадратичным отклонением 11 м. Каково наименьшее число независимых измерений, при котором удается определить глубину с ошибкой меньше 4 метров с надежностью не ниже 0,97?

Вариант № 5-21

1. Пусть X_1, X_2, X_3 — выборка из равномерного распределения на отрезке $[4, 12]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите $P(\widehat{F}(6) = \widehat{F}(9))$.

2. Значения признака X в генеральной совокупности заданы таблицей частот

Интервал	7–27	27–47	47–67
Частота	50	130	80

Из этой совокупности производится бесповторная выборка объема 50. Пусть m — генеральное, а $\overline{X}$ — выборочное среднее. Найдите среднеквадратичную ошибку в приближенном равенстве $m \approx \overline{X}$. При вычислении генеральной дисперсии не следует использовать поправку Шеппарда.

3. Случайная величина X (время бесперебойной работы устройства) имеет показательное распределение с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$. По эмпирическому распределению времени работы

Время работы	0–20	20–40	40–60	60–80
Число устройств	130	44	17	6

методом моментов найдите точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

4. В 40 000 сеансах игры с автоматом выигрыш появился 4 500 раз. Найдите для вероятности выигрыша p приближенный 0,72-доверительный интервал.

Вариант № 5-22

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_6$ — выборка из распределения $P(X = l) = \frac{1}{9}$, $l = 1, 2, \ldots, 9$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая эмпирическая функция распределения. Найдите вероятность $P\left(\widehat{F}(5+0) - \widehat{F}(5) = \frac{1}{3}\right)$.

2. Статистические данные о результатах экзамена в трех группах приведены в таблице

№ группы	Число студентов	Средний балл	Среднее квадр. откл.
1	19	66	7
2	22	71	17
3	19	64	19

При проведении экзамена студенты случайным образом размещались (в соответствии с числом мест) в нескольких аудиториях. В одной из них находилось 20 студентов. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего балла по результатам, полученным в данной аудитории, предполагая, что условия для выполнения экзаменационных работ во всех аудиториях одинаковы.

3. Случайная величина X распределена по закону Пуассона $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Результаты 468 независимых наблюдений X отражены в таблице

Значение X	0	1	2	3
Частота	205	160	81	22

Найдите методом моментов точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

4. Выборка из большой партии электроламп содержит 170 ламп. Средняя продолжительность горения отобранных ламп оказалось равной 1 100 ч. Найдите приближенный 0,95-доверительный интервал для средней продолжительности горения лампы во всей партии, если известно, что среднеквадратичное отклонение продолжительности горения лампы в партии равно 37 ч.

Вариант № 5-23

1. Итоговое распределение баллов на некотором письменном экзамене задано таблицей

Оценка работы	2	3	4	5
Число работ	5	20	15	20

Работы проверяли 5 преподавателей, которые разделили все работы между собой поровну случайным образом. Предполагая независимость оценки от личности проверяющего, найдите математическое ожидание и дисперсию среднего балла по результатам одного преподавателя.

2. Значения признака X в генеральной совокупности заданы таблицей частот

Интервал	3–19	19–35	35–51
Частота	400	1 400	800

.

Из этой совокупности производится повторная выборка объема 700. Пусть m — генеральное, а $\overline{X}$ — выборочное среднее. Найдите среднеквадратичную ошибку в приближенном равенстве $m \approx \overline{X}$. При вычислении генеральной дисперсии не следует использовать поправку Шеппарда.

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 368, 377, 316, 423, 385, 407, 373, 381 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина известна и равна 376 м.

4. Численность повторной выборки составляет 1 280 единиц. Доля признака составляет 9 %. Найдите с доверительной вероятностью 0,97, в каких пределах находится отклонение частоты от доли признака.

Вариант № 5-24

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_6$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[10, 16]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите вероятность $P\left(\widehat{F}(13) = \frac{1}{2}\right)$.

2. В некотором городе сторонники партии A составляют 18 %, партии B — 26 %. Известно, что объем бесповторной выборки составляет 11 % от числа всех избирателей. Пусть $\widehat{p}_A$ — выборочная доля сторонников партии A, n_B — число отобранных сторонников партии B. Найдите (приближенно) $\mathrm{Cov}(\widehat{p}_A, n_B)$.

3. В 24 независимых испытаниях случайная величина X значение 1 приняла 11 раз, а значение 2 — 13 раз. Найдите несмещенную оценку дисперсии $D(X)$.

4. Обследуется средняя продолжительность телефонного разговора. Сколько телефонных разговоров должно быть зафиксировано, чтобы с вероятностью 0,994 можно было бы утверждать, что отклонение средней продолжительности зафиксированных разговоров от генеральной средней не превосходит 15 секунд, если среднее квадратичное отклонение длительности одного разговора равно 5 минутам?

Вариант № 5-25

1. Две игральные кости, красная и синяя, подбрасываются до тех пор, пока не выпадет 19 различных с учетом цвета комбинаций очков. Пусть S_i — число очков на красной кости в i-той комбинации, $\overline{S}$ — среднее арифметическое всех этих чисел, $i = 1, \ldots, 19$. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{S}$.

2. В некоторой области имеется 400 000 жителей, из которых пенсионеры составляют 10 %. Пусть $\widehat{p}$ — доля пенсионеров среди случайно (без возвращения) отобранных 6 000 жителей данной области. Найдите среднеквадратичную погрешность в приближенном равенстве $0{,}1 \approx \widehat{p}$.

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 365, 379, 316, 427, 386, 403, 371, 384 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина неизвестна.

4. При испытании $n = 1\,050$ элементов зарегистрировано $m = 102$ отказов. Найдите доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p отказа элемента с надежностью $\gamma \approx 0{,}95$.

Вариант № 5-26

1. Признак $X(k)$ задан на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ следующей таблицей:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(k)$	2	3	2	1	1	3	1	1	1	3

Из Ω извлекается случайная бесповторная выборка объема 5. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{X}$ признака X в выборке.

2. Значения признака X в генеральной совокупности заданы таблицей частот

Интервал	7–27	27–47	47–67
Частота	3	13	7

.

Из этой совокупности производится повторная выборка объема 5. Пусть m — генеральное, а $\overline{X}$ — выборочное среднее. Найдите среднеквадратичную ошибку в приближенном равенстве $m \approx \overline{X}$. При вычислении генеральной дисперсии не следует использовать поправку Шеппарда.

3. Случайная величина X распределена по закону Пуассона $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Результаты 464 независимых наблюдений X отражены в таблице

Значение X	0	1	2	3
Частота	201	159	77	27

Найдите методом моментов точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

4. Выборочно обследовали качество кирпича. Из $n = 1\,400$ проб в $m = 60$ случаях кирпич оказался бракованным. В каких пределах заключается доля брака для всей продукции, если результат гарантируется с надежностью $\gamma \approx 0{,}72$?

Вариант № 5-27

1. Признак $X(k)$ задан на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ следующей таблицей:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(k)$	3	3	3	1	2	2	3	2	3	3

Из Ω извлекается случайная повторная выборка объема 5. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{X}$ признака X в выборке.

2. Значения признака X в генеральной совокупности заданы таблицей частот

Интервал	5–9	9–13	13–17
Частота	50	150	90

Из этой совокупности производится бесповторная выборка объема 50. Пусть m — генеральное, а $\overline{X}$ — выборочное среднее. Найдите среднеквадратичную ошибку в приближенном равенстве $m \approx \overline{X}$. При вычислении генеральной дисперсии не следует использовать поправку Шеппарда.

3. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 361, 377, 314, 424, 387, 409, 373, 383 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина известна и равна 379 м.

4. Производится выборочное обследование возраста читателей массовых библиотек. Сколько карточек необходимо взять для обследования, чтобы с вероятностью 0,97 можно было бы утверждать, что средний возраст в выборочной совокупности отклонится от генерального среднего не более, чем на 1 год? Генеральное среднее квадратичное отклонение принять равным 13 годам.

Вариант № 5-28

1. Две игральные кости, красная и синяя, подбрасываются до тех пор, пока не выпадет 15 различных с учетом цвета комбинаций очков. Пусть S_i — число очков на красной кости в i-той комбинации, $\overline{S}$ — среднее арифметическое всех этих чисел, $i = 1, \ldots, 15$. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{S}$.

2. Значения признаков X и Y заданы на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2000\}$ таблицей частот

	$Y = 1$	$Y = 4$	$Y = 6$
$X = 7$	100	200	200
$X = 10$	100	200	1 200

Из Ω с возвращением извлекаются 200 элементов. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — средние значения признаков в выборочной совокупности. Найдите $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{Y})$.

3. В 20 независимых испытаниях случайная величина X значение 2 приняла 7 раз, а значение 4 — 13 раз. Найдите несмещенную оценку дисперсии $D(X)$.

4. В результате проведенного социологического опроса $n = 1\,830$ человек рейтинг кандидата в президенты составил 6 %. Найдите доверительный интервал для рейтинга кандидата с гарантированной надежностью 99,4 %.

Вариант № 5-29

1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_6$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[7, 11]$, $\widehat{F}(x)$ — соответствующая выборочная функция распределения. Найдите вероятность $P\left(\widehat{F}(10) = \frac{1}{2}\right)$.

2. Статистические данные о результатах экзамена в трех группах приведены в таблице

№ группы	Число студентов	Средний балл	Среднее квадр. откл.
1	19	70	8
2	22	66	13
3	20	66	15

При проведении экзамена студенты случайным образом размещались (в соответствии с числом мест) в нескольких аудиториях. В одной из них находилось 20 студентов. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего балла по результатам, полученным в данной аудитории, предполагая, что условия для выполнения экзаменационных работ во всех аудиториях одинаковы.

3. Случайная величина X (время бесперебойной работы устройства) имеет показательное распределение с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geqslant 0)$. По эмпирическому распределению времени работы

Время работы	0–30	30–60	60–90	90–120
Число устройств	131	40	12	3

методом моментов найдите точечную оценку $\widehat{\lambda}$.

4. Брокер на бирже желает найти 0,994-доверительный интервал для математического ожидания недельной доходности выбранной акции. Известно, что выборочная средняя недельная доходность за последний год (52 недели) составила $\overline{r} = 0{,}014$. Найдите искомый доверительный интервал в предположении, что недельные доходности независимы и распределены нормально с постоянными параметрами, причем генеральное среднеквадратичное отклонение недельной доходности равно 0,05.

Вариант № 5-30

1. Признак $X(k)$ задан на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$ следующей таблицей:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(k)$	2	3	2	2	3	2	3	2	1	1

Из Ω извлекается случайная повторная выборка объема 5. Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\overline{X}$ признака X в выборке.

2. В некотором округе имеется 600 000 избирателей, из которых желающие принять участие в выборах составляют 84 %. Пусть $\widehat{p}$ — доля желающих проголосовать среди случайно (без возвращения) отобранных 13 000 избирателей. Найдите среднеквадратичную погрешность в приближенном равенстве $0{,}84 \approx \widehat{p}$.

3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 6e^{6(\theta - x)} & \text{при } x \geqslant \theta, \\ 0 & \text{при } x < \theta. \end{cases}$$

Проверьте, является ли оценка $\widehat{\theta} = \overline{X} - \dfrac{1}{6}$ несмещенной оценкой параметра θ?

4. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна 0, а случайные ошибки распределены нормально со среднеквадратичным отклонением 16 м. Каково наименьшее число независимых измерений, при котором удается определить глубину с ошибкой меньше 4 метров с надежностью не ниже 0,72?

Вариант № 6-01

1. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $l = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x} = 426{,}9$; $\overline{y} = 435{,}9$ и исправленные дисперсии $s_x^2 = 24{,}3$; $s_y^2 = 28{,}8$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 6$ и $n_y = 14$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 90$ и $s_y^2 = 60$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 26, французов — 11 и итальянцев — 13. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 8, 9, 10; 2) 10, 11, 12; 3) 12, 13, 14. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-02

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 38$ и $n_y = 23$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 638$ и $\overline{y} = 620$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 96$ и $D(Y) = 62$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 12$ и $n_y = 7$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 28$ и $s_y^2 = 30$. При уровне значимости $\alpha = 0.02$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 93 бросках, орел и решка — в 203 бросках и два орла — в 104 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 2, 3, 4; 2) 4, 5, 6; 3) 6, 7, 8. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-03

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 13$ и $n_y = 20$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 818$ и $\overline{y} = 805$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 95$ и $D(Y) = 53$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}03$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 6$ и $n_y = 17$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 50$ и $s_y^2 = 10$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 91 бросках, орел и решка — в 199 бросках и два орла — в 110 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 3, 4, 5; 2) 5, 6, 7; 3) 7, 8, 9. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-04

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 15$ и $n_y = 22$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 613$ и $\overline{y} = 607$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 79$ и $D(Y) = 67$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 4$ и $n_y = 5$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 9$ и $s_y^2 = 23$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 29, французов — 13 и итальянцев — 8. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 4, 5, 6; 2) 6, 7, 8; 3) 8, 9, 10. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-05

1. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $l = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x} = 426{,}9$; $\overline{y} = 435{,}9$ и исправленные дисперсии $s_x^2 = 24{,}3$; $s_y^2 = 28{,}8$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 15$ и $n_y = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 7$ и $s_y^2 = 28$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 93 бросках, орел и решка — в 207 бросках и два орла — в 100 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 6, 7, 8; 2) 8, 9, 10; 3) 10, 11, 12. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-06

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 12$ и $n_y = 26$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 203$ и $\overline{y} = 218$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 86$ и $D(Y) = 56$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 8$ и $n_y = 14$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 50$ и $s_y^2 = 40$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 28, французов — 14 и итальянцев — 8. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 2, 3, 4; 2) 4, 5, 6; 3) 6, 7, 8. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-07

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 27$ и $n_y = 32$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 540$ и $\overline{y} = 525$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 54$ и $D(Y) = 51$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}03$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 4$ и $n_y = 17$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 40$ и $s_y^2 = 30$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 30, французов — 15 и итальянцев — 5. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 1, 2, 3; 2) 3, 4, 5; 3) 5, 6, 7. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-08

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 33$ и $n_y = 30$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 860$ и $\overline{y} = 863$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 54$ и $D(Y) = 84$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 3$ и $n_y = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 9$ и $s_y^2 = 19$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 109 бросках, орел и решка — в 198 бросках и два орла — в 93 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 2, 3, 4; 2) 4, 5, 6; 3) 6, 7, 8. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-09

1. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $l = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x} = 426{,}9$; $\overline{y} = 435{,}9$ и исправленные дисперсии $s_x^2 = 24{,}3$; $s_y^2 = 28{,}8$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 18$ и $n_y = 5$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 19$ и $s_y^2 = 28$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 104 бросках, орел и решка — в 199 бросках и два орла — в 97 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 7, 8, 9; 2) 9, 10, 11; 3) 11, 12, 13. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-10

1. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $l = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x} = 711{,}5$; $\overline{y} = 726{,}5$ и исправленные дисперсии $s_x^2 = 67{,}5$; $s_y^2 = 80{,}0$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 8$ и $n_y = 20$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 60$ и $s_y^2 = 20$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 29, французов — 11 и итальянцев — 10. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 2, 3, 4; 2) 4, 5, 6; 3) 6, 7, 8. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-11

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x=32$ и $n_y=12$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 611$ и $\overline{y} = 605$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 95$ и $D(Y) = 87$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}03$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 5$ и $n_y = 13$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 90$ и $s_y^2 = 50$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 98 бросках, орел и решка — в 192 бросках и два орла — в 110 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 9, 10, 11; 2) 11, 12, 13; 3) 13, 14, 15. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-12

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 27$ и $n_y = 14$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 406$ и $\overline{y} = 396$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 68$ и $D(Y) = 51$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 8$ и $n_y = 3$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 20$ и $s_y^2 = 29$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 22, французов — 15 и итальянцев — 13. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 5, 6, 7; 2) 7, 8, 9; 3) 9, 10, 11. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-13

1. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $l = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x} = 284{,}6$; $\overline{y} = 290{,}6$ и исправленные дисперсии $s_x^2 = 10{,}8$; $s_y^2 = 12{,}8$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 5$ и $n_y = 4$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 2$ и $s_y^2 = 14$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 92 бросках, орел и решка — в 206 бросках и два орла — в 102 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 5, 6, 7; 2) 7, 8, 9; 3) 9, 10, 11. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-14

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 24$ и $n_y = 18$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 697$ и $\overline{y} = 695$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 75$ и $D(Y) = 90$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 9$ и $n_y = 19$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 100$ и $s_y^2 = 80$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 20, французов — 16 и итальянцев — 14. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 6, 7, 8; 2) 8, 9, 10; 3) 10, 11, 12. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-15

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 19$ и $n_y = 20$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 858$ и $\overline{y} = 853$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 59$ и $D(Y) = 54$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}03$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 15$ и $n_y = 3$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 15$ и $s_y^2 = 18$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 96 бросках, орел и решка — в 204 бросках и два орла — в 100 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 3, 4, 5; 2) 5, 6, 7; 3) 7, 8, 9. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-16

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 21$ и $n_y = 22$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 653$ и $\overline{y} = 668$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 93$ и $D(Y) = 68$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 9$ и $n_y = 16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 100$ и $s_y^2 = 30$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 29, французов — 14 и итальянцев — 7. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 4, 5, 6; 2) 6, 7, 8; 3) 8, 9, 10. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-17

1. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $l = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x} = 284{,}6$; $\overline{y} = 290{,}6$ и исправленные дисперсии $s_x^2 = 10{,}8$; $s_y^2 = 12{,}8$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 10$ и $n_y = 19$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 30$ и $s_y^2 = 10$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 30, французов — 14 и итальянцев — 6. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 4, 5, 6; 2) 6, 7, 8; 3) 8, 9, 10. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-18

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 18$ и $n_y = 33$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 243$ и $\overline{y} = 228$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 50$ и $D(Y) = 57$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 6$ и $n_y = 7$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 14$ и $s_y^2 = 15$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 113 бросках, орел и решка — в 195 бросках и два орла — в 92 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 5, 6, 7; 2) 7, 8, 9; 3) 9, 10, 11. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-19

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 13$ и $n_y = 35$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 404$ и $\overline{y} = 409$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 84$ и $D(Y) = 71$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 12$ и $n_y = 7$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 4$ и $s_y^2 = 8$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 25, французов — 15 и итальянцев — 10. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 6, 7, 8; 2) 8, 9, 10; 3) 10, 11, 12. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-20

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 39$ и $n_y = 37$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 900$ и $\overline{y} = 896$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 57$ и $D(Y) = 85$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 7$ и $n_y = 20$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 60$ и $s_y^2 = 40$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 86 бросках, орел и решка — в 206 бросках и два орла — в 108 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 7, 8, 9; 2) 9, 10, 11; 3) 11, 12, 13. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-21

1. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $l = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x} = 284{,}6$; $\overline{y} = 290{,}6$ и исправленные дисперсии $s_x^2 = 10{,}8$; $s_y^2 = 12{,}8$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 3$ и $n_y = 18$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 80$ и $s_y^2 = 20$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 29, французов — 11 и итальянцев — 10. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 2, 3, 4; 2) 4, 5, 6; 3) 6, 7, 8. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-22

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 36$ и $n_y = 10$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 490$ и $\overline{y} = 507$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 75$ и $D(Y) = 74$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 8$ и $n_y = 7$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 3$ и $s_y^2 = 5$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 110 бросках, орел и решка — в 196 бросках и два орла — в 94 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 1, 2, 3; 2) 3, 4, 5; 3) 5, 6, 7. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-23

1. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $l = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x} = 284{,}6$; $\overline{y} = 290{,}6$ и исправленные дисперсии $s_x^2 = 10{,}8$; $s_y^2 = 12{,}8$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 9$ и $n_y = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 5$ и $s_y^2 = 22$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 110 бросках, орел и решка — в 200 бросках и два орла — в 90 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 4, 5, 6; 2) 6, 7, 8; 3) 8, 9, 10. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-24

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 33$ и $n_y = 14$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 446$ и $\overline{y} = 441$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 82$ и $D(Y) = 52$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 4$ и $n_y = 13$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 80$ и $s_y^2 = 10$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 23, французов — 13 и итальянцев — 14. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 1, 2, 3; 2) 3, 4, 5; 3) 5, 6, 7. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-25

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 28$ и $n_y = 16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 241$ и $\overline{y} = 230$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 55$ и $D(Y) = 77$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 15$ и $n_y = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 2$ и $s_y^2 = 11$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 23, французов — 12 и итальянцев — 15. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 1, 2, 3; 2) 3, 4, 5; 3) 5, 6, 7. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-26

1. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $l = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x} = 569{,}2$; $\overline{y} = 581{,}2$ и исправленные дисперсии $s_x^2 = 43{,}2$; $s_y^2 = 51{,}2$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 6$ и $n_y = 20$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 60$ и $s_y^2 = 10$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 103 бросках, орел и решка — в 203 бросках и два орла — в 94 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 1, 2, 3; 2) 3, 4, 5; 3) 5, 6, 7. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-27

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 25$ и $n_y = 27$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 898$ и $\overline{y} = 891$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 73$ и $D(Y) = 55$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 8$ и $n_y = 13$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 60$ и $s_y^2 = 40$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 103 бросках, орел и решка — в 207 бросках и два орла — в 90 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 3, 4, 5; 2) 5, 6, 7; 3) 7, 8, 9. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-28

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 27$ и $n_y = 29$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 693$ и $\overline{y} = 682$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 96$ и $D(Y) = 69$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}004$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) > E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 17$ и $n_y = 3$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 23$ и $s_y^2 = 29$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 26, французов — 15 и итальянцев — 9. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 1, 2, 3; 2) 3, 4, 5; 3) 5, 6, 7. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-29

1. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 22$ и $n_y = 31$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние: $\overline{x} = 488$ и $\overline{y} = 480$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 80$ и $D(Y) = 94$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 6$ и $n_y = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 70$ и $s_y^2 = 60$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу $H_1\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) > D(Y)$.

3. Две монеты подброшены 400 раз. В результате две решки выпали в 105 бросках, орел и решка — в 196 бросках и два орла — в 99 бросках. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что число орлов при броске двух монет распределено по биномиальному закону с параметрами 2 и 1/2.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 9, 10, 11; 2) 11, 12, 13; 3) 13, 14, 15. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Вариант № 6-30

1. По двум независимым малым выборкам, объемы которых $n = 10$ и $l = 8$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y с равными дисперсиями, найдены выборочные средние $\overline{x} = 569{,}2$; $\overline{y} = 581{,}2$ и исправленные дисперсии $s_x^2 = 43{,}2$, $s_y^2 = 51{,}2$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить нулевую гипотезу $H_0\colon E(X) = E(Y)$ при альтернативной гипотезе $H_1\colon E(X) \neq E(Y)$.

2. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_x = 3$ и $n_y = 5$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены несмещенные оценки генеральных дисперсий $s_x^2 = 10$ и $s_y^2 = 19$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ проверьте гипотезу $H_0\colon D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при альтернативной гипотезе $H_1\colon D(X) \neq D(Y)$.

3. В некоторой стране немцы составляют 50 %, французы — 30 %, итальянцы — 20 %. В гостинице остановились: немцев — 21, французов — 17 и итальянцев — 12. При 5%-м уровне значимости проверьте гипотезу о том, что отклонение процентного состава постояльцев по национальностям от среднего по стране объясняется исключительно случайными факторами.

4. Из трех нормальных генеральных совокупностей с одинаковыми дисперсиями извлечены выборки: 1) 7, 8, 9; 2) 9, 10, 11; 3) 11, 12, 13. Для объединенной выборочной совокупности объема 9 вычислите межгрупповую дисперсию, среднюю групповую дисперсию и проверьте на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ гипотезу о совпадении всех трех генеральных средних.

Рекомендуемая литература

[1] **Солодовников, А. С.** Математика в экономике [Текст] : учеб. В 3 ч. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. — М.: Финансы и статистика, 2008. — 464 с.

[2] **Браилов, А. В.** Сборник задач по курсу «Математика в экономике» [Тескт] : учеб. пособие. Ч. 3. Теория вероятностей / А. В. Браилов, А. С. Солодовников. — М.: Финансы и статистика, 2017. — 128 с.

ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ ИЗДАНИЯ:

Интерфейс электронного издания (в формате pdf) можно условно разделить на 2 части.

Левая навигационная часть (закладки) включает в себя содержание книги с возможностью перехода к тексту соответствующей главы по левому щелчку компьютерной мыши.

Центральная часть отображает содержание текущего раздела. В тексте могут использоваться ссылки, позволяющие более подробно раскрыть содержание некоторых понятий.

Минимальные системные требования:

Celeron 1600 Mhz; 128 Мб RAM; Windows XP/7/8 и выше; 8x CDROM; разрешение экрана 1024×768 или выше; программа для просмотра pdf.

Сведения о лицах, осуществлявших техническую обработку и подготовку материалов:

Оформление электронного издания АНО «Ижевский институт компьютерных исследований».

Подписано к использованию 21.08.2018.
Объем электронного издания 1,44 Мб на 1 CD.
АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426057, г. Ижевск, ул. К. Маркса, д. 250, кв. 55.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95

УДК 519.2(072)
ББК 22.17я73
Б87

Браилов А. В., Рябов П. Е.
Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. В. Браилов, П. Е. Рябов. Текстовое (символьное) электронное издание (1,44 Мб). — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2018. — 1 электрон. опт. диск (CD–R).

Аннотация

Учебное пособие по теории вероятностей и математической статистики предназначено для организации самостоятельной работы студентов бакалавриата экономических специальностей, изучающих дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика». В теоретической справке приведены решения типовых задач, которые вошли в варианты заданий учебного пособия. Учебное издание содержит 180 вариантов контрольных заданий.

Описание функциональности издания

Интерфейс электронного издания (в формате pdf) можно условно разделить на 2 части.

Левая навигационная часть (закладки) включает в себя содержание книги с возможностью перехода к тексту соответствующей главы по левому щелчку компьютерной мыши.

Центральная часть отображает содержание текущего раздела. В тексте могут использоваться ссылки, позволяющие более подробно раскрыть содержание некоторых понятий.

Издание располагается в каталоге Publication.

Минимальные системные требования

Celeron 1600 Mhz; 128 Мб RAM; Windows XP/7/8 и выше; 8x CDROM; разрешение экрана 1024 × 768 или выше; программа для просмотра pdf.

ISBN 978-5-4344-0515-7