Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)

И.А. Александрова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Методическое пособие для вузов

МОСКВА
2020

УДК 517.9
ББК 22.161.6
А 46

Рецензент

Денежкина И.Е. — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Бизнес-информатика» Финансового университета при Правительстве Российской Федерации/

убрать слеш.
должна стоять
точка или нет?

Александрова И.А.

А 46 **Дифференциальные уравнения. Руководство к решению задач:** Учебное пособие для вузов / И.А. Александрова. — М.: Прометей, 2020. — 122 с.

ISBN 978-5-

Учебное пособие посвящено изложению методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В пособии приведены разборы типовых примеров, которые решаются классическими методами, и подобраны задачи для самостоятельного решения с ответами.

Пособие предназначено для студентов физико-математических, технических и экономических направлений обучения.

ISBN 978-5-

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения широко применяются при решении технических и экономических задач. Данное учебное пособие посвящено изложению основных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь приведены разборы типовых примеров, которые решаются классическими методами.

В начале каждого параграфа изложена основная теория, необходимая для решения задач этого параграфа, далее — подробный разбор примеров всех методов, применяемых к этому типу уравнений и задачи для самостоятельного решения с ответами. Часть задач взята из известных задачников А.Ф. Филиппова, А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк, А.П. Шилина.

Пособие предназначено для студентов физико-математических, технических и экономических направлений.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные $y', y'' \ldots, y^{(n)}$.

Дифференциальное уравнение n-го порядка можно записать в виде

$$F(x,\ y,\ y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где F — некоторая заданная функция.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y(x)$, которая при подстановки в данное дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Если решение дифференциального уравнения задано неявно в виде $\Phi(x,y)=0$, то оно называется *интегралом* дифференциального уравнения.

Пример 1.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - y = 0.$$

Легко проверить, что функция $y = e^{-x}$ является решением данного уравнения.

Действительно, найдем производную второго порядка и подставим ее в заданное дифференциальное уравнение:

$$y' = -e^{-x},$$
$$y'' = e^{-x},$$
$$e^{-x} - e^{-x} = 0.$$

Получили тождество, что и требовалось доказать. И вообще, функции вида $y = C_1 e^{x}$, $y = C_2 e^{-x}$ и $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$ при любом выборе значений C_1 и C_2 являются решениями заданного уравнения.

В общем виде дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений. *Общее решение* дифференциального уравнения n-го порядка зависит не только от x, но и от произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots C_n$. Число таких постоянных совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Пример 1.2. Проверить, что функция $y = \dfrac{C}{\sin x} + \sin x$ является решением дифференциального уравнения первого порядка $y' + y \cdot ctgx = 2\cos x$.

Решение: Найдем производную y':

$$y' = -\frac{C \cdot \cos x}{\sin^2 x} + \cos x.$$

Подставим ее в исходное дифференциальное уравнение

$$-\frac{C \cdot \cos x}{\sin^2 x} + \cos x + \left(\frac{C}{\sin x} + \sin x\right) \cdot ctgx = 2\cos x.$$

Имеем

$$-\frac{C \cos x}{\sin^2 x} + \cos x + \frac{C \cos x}{\sin^2 x} + \cos x = 2\cos x,$$

или

$$2\cos x = 2\cos x.$$

Следовательно, функция $y = \dfrac{C}{\sin x} + \sin x$ является решением заданного уравнения.

Частные решения получаются из общего решения, если постоянным $C_1, C_2, \ldots C_n$ придать определенные числовые значения.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

удовлетворяющего *начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

называется *задачей Коши*.

Если в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ функция f непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем аргументам, начиная со второго, то задача Коши имеет единственное решение.

Пример 1.3. Доказать, что функция $y = \sqrt[3]{\ln(3x(\ln x - 1) - 5e^3)}$ является решением задачи Коши

$$y^2 y' = e^{-y^3} \ln x, \ y(e^3) = \sqrt[3]{3}.$$

Решение: Докажем сначала, что данная функция является решением заданного дифференциального уравнения. Для этого найдем производную функции y':

$$y' = \frac{1}{3}(\ln(3x(\ln x - 1) - 5e^3))^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3x(\ln x - 1) - 5e^3} \cdot (3\ln x - 3 + 3x \cdot \frac{1}{x})$$

Подставим функцию y и ее производную y' в исходное дифференциальное уравнение:

$$(\ln(3x(\ln x - 1) - 5e^3))^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}(\ln(3x(\ln x - 1) - 5e^3))^{-\frac{2}{3}} \times$$

$$\times \frac{1}{3x(\ln x - 1) - 5e^3} \cdot 3\ln x =$$

$$= e^{-(\ln(3x(\ln x - 1) - 5e^3))} \ln x.$$

После некоторых элементарных преобразований получим:

$$\frac{\ln x}{3x(\ln x-1)-5e^3}=\frac{\ln x}{3x(\ln x-1)-5e^3}.$$

Теперь покажем, что функция $y(x)$ удовлетворяет заданному начальному условию:

$$y(e^3)=\sqrt[3]{\ln(3e^3(\ln e^3-1)-5e^3)}=\sqrt[3]{\ln(e^3)}=\sqrt[3]{3}.$$

Замечание: *Чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые* $y=f(x,C_1,C_2,\dots C_n)$*, надо продифференцировать функцию* y *n раз и из полученных уравнений исключить произвольные постоянные* $C_1,C_2,\dots C_n$.

Пример 1.4. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $y=C_1x^2+C_2x$.

Решение: Найдем производные первого и второго порядка:

$$y'=2C_1x+C_2,\ y''=2C_1.$$

Откуда $C_1=\frac{1}{2}y''$, $C_2=y'-y''x$.

Подставляя их в функцию y, получаем:

$$x^2y''-2xy'+2y=0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1–8. Выяснить, является ли указанная функция решением соответствующего дифференциального уравнения:

1. $y=-x^2-2x-2+Ce^x; y'-y=x^2$
2. $y=Cx^2; xy'=2y$
3. $y^3=3x-2x^3+5$; $y^2y'=1-x^2$
4. $y=(x-C)^3; y'=3y^{\frac{2}{3}}$
5. $y=\sin(x+C); y^2+(y')^2=1$
6. $\arcsin\frac{y}{x}=\ln x+C$; $xy'=\sqrt{2x^2-y^2}+y$
7. $y=1-2x+Ce^x; y'-y=2x-3$
8. $2x+y-\ln(e^{x+y}+1)=C$; $y'+e^{x+y}+2=0$

9–11. При каком значении параметра a функция $y(x)$ является решением указанного дифференциального уравнения:

9. $y(x)=(a\ln^2 x+C)^2$; $\sqrt{y}\ln x=5y'x$
10. $y=ax^3+\frac{1}{x^2}$; $y'+\frac{2y}{x}=5x^2$
11. $a\sqrt{y}=x$; $2y'+x=4\sqrt{y}$

12–16. Составить дифференциальные уравнения данных семейств кривых:

12. $y=Cx^3$
13. $y=\frac{C}{x}$
14. $y=(x-C)^2$
15. $y=C\sqrt{x}$
16. $y=ax^2+be^x$

17–19. Найти значения параметров a и b, при которых функция $y(x)$ удовлетворяет указанным начальным условиям:

17. $y=a\cos x+\sin x$, $y(0)=2$
18. $y=a\cos x+b\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$
19. $y=(a+bx)e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Ответы:

1. да
2. да
3. нет

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

4. да
5. да
6. нет
7. да
8. да
9. $a=\frac{1}{20}$
10. $a=1$
11. $a=2$
12. $y'x=3x$
13. $y'x+y=0$
14. $(y')^2=4y$
15. $y=2xy'$
16. $y''(x^2-2x)-y'(x^2-2)+2y(x-1)=0$
17. $a=2$
18. $a=1, b=2$
19. $a=0, b=1$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $F(x,y,y')=0$.

График решения данного дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Если уравнение 1-го порядка записано в виде

$$y'=f(x,y),$$

то говорят, что оно называется дифференциальным уравнением первого порядка, *разрешенным относительно производной*. В этом случае угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, которая проходит через точку (x_0,y_0), равен $f(x_0,y_0)$. Для каждой точки из области определения функции $f(x,y)$ оказывается задано некоторое направление, а на всей области определения — поле направлений. Точки, через которые не проходит ни одна интегральная кривая или проходит более одной интегральной кривой, называются *особыми точками* дифференциального уравнения. Решение, целиком состоящее из особых точек, называется *особым решением*.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать *в дифференциальной (симметричной) форме:*

$$P(x,y)dx+R(x,y)dy=0.$$

В этом случае искомой функцией может быть любая из переменных x или y.

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно представить в виде:

$$y'=p(x)\cdot g(y),$$

где $p(x)$ и $g(y)$ — непрерывные на некотором интервале функции.

Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными следующий:

1) представить производную y' как $\dfrac{dy}{dx}$;

2) умножить обе части равенства на dx;

3) разделить переменные x и y по разные стороны от знака равенства в уравнении, т.е. представить уравнение в виде $\dfrac{dy}{g(y)}=p(x)dx$.

Теперь левая часть уравнения содержит только переменную y, а правая только x.

4) интегрируя обе части равенства

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int p(x)dx,$$

получить решение исходного дифференциального уравнения в виде

$$T(y)=F(x)+C,$$

где $T(y)$ и $F(x)$ — первообразные для $\dfrac{1}{g(y)}$ и $p(x)$ соответственно.

При разделении переменных мы можем потерять некоторые решения дифференциального уравнения. В частности, решениями исходного уравнения могут быть функции, удовлетворяющие уравнению $g(y)=0$. Необходимо проверить отдельно, являются ли решениями дифференциального уравнения те функции, которые обращают в ноль знаменатели полученных при разделении переменных дробей.

Замечание: *Уравнение вида $y'=f(y)$ называется автономным. Оно является частным случаем уравнения с разделяющимися переменными.*

Пример 2.1. Решить уравнение

$$y'=x\cdot(y^2+1)$$

Решение: Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно представить в виде $y'=p(x)\cdot g(y)$.

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot(y^2+1).$$

Умножив обе его части на dx, получим:

$$dy=x\cdot(y^2+1)dx.$$

Разделим обе части равенства на y^2+1:

$$\frac{dy}{1+y^2}=xdx.$$

Разделили переменные. Интегрируя обе части равенства, имеем:

$$arctgy=\frac{x^2}{2}+C.$$

Мы получили общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Так как $1+y^2\neq 0$, то никаких дополнительных проверок по поводу возможной потери решения делать не следует.

Ответ: $arctgy=\dfrac{x^2}{2}+C$.

Пример 2.2. Решить уравнение

$$y' = 2\sqrt{y}\cdot cosx$$

Решение: Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно представить в виде $y' = g(y)\cdot p(x)$. Заметим, что $y \ge 0$.

Запишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}\cos x$. Умножив на dx и разделив на $2\sqrt{y}$ обе его части, получим $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \cos x dx$. Интегрируя обе части равенства, имеем $\sqrt{y} = \sin x + C$ или $y = (\sin x + C)^2$.

При делении на $2\sqrt{y}$ мы могли потерять решение $y = 0$. Проверим это, подставив данное значение переменной y в исходное дифференциальное уравнение. Очевидно, что $y = 0$ является решением уравнения.

Ответ: $y = (\sin x + C)^2$, $y = 0$.

Пример 2.3. Решить задачу Коши:

$$x\ln x dy + e^y dx = 0, \quad y(e^e) = -\ln 2$$

Решение: Приведем исходное уравнение к виду $\frac{dx}{x\ln x} = -e^{-y}dy$.

Разделили переменные. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = -\int e^{-y}dy .$$

Общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид: $e^{-y} = \ln\ln x + C$.

Для нахождения значения постоянной C подставим начальное условие в полученное решение:

$$e^{\ln 2} = \ln\ln e^e + C .$$

То есть,

$$2 = 1 + C .$$

Откуда,

$$C = 1 .$$

Таким образом, решением задачи Коши является $e^{-y} = \ln\ln x + 1$.

Ответ: $e^{-y} = \ln\ln x + 1$

Замечание: *Уравнения вида* $y' = f(ax + by)$, *где* $a, b \in R$, *сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой* $ax + by = z$.

Пример 2.4. Решить уравнение

$$y' = 9x^2 + y^2 + y + 4 + 3x(2y + 1)$$

Решение: Представим уравнение в виде

$$y' = (3x + y)^2 + (3x + y) + 4 .$$

Теперь ясно, что следует сделать замену $3x + y = z$, которая приведет к уравнению

$$(z - 3x)' = z^2 + z + 4 .$$

Тогда

$$z' = z^2 + z + 7 .$$

Далее разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{z^2 + z + 7} = dx ,$$

$$\frac{dz}{(z + \frac{1}{2})^2 + \frac{27}{4}} = dx ,$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} arctg \frac{2z + 1}{3\sqrt{3}} = x + C .$$

При делении на $z^2 + z + 7$ мы никаких решений не теряем. Осталось вернуться к исходной переменной.

Ответ: $\frac{2}{3\sqrt{3}} arctg \frac{6x + 2y + 1}{3\sqrt{3}} = x + C$

Задачи для самостоятельного решения

20–30. Решить следующие дифференциальные уравнения:

20. $x(y+3)dx + y(x+2)dy = 0$
21. $y' = xy^2 + 2xy$
22. $e^x dx - (1+e^x)ydy = 0$
23. $\sqrt{y^2+1}dx = 2xy\,dy$;
24. $y' = \dfrac{4yx}{y^2-4}$
25. $y' = (x\sin y)^2 \cos x$
26. $2yy' = e^{x+y^2}$
27. $y' + y = 2x + 1$
28. $dy = \cos(x-y-1)dx$
29. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$
30. $y' = x^2 + y^2 + 2(xy+1) + 4(x+y)$

31–37. Найти решения задач Коши:

31. $y^2 y' = e^{-y^3}\ln x; y(e^3) = \sqrt[3]{3}$
32. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$
33. $y' = 2xe^{x^2+y}; y(0) = 0$
34. $e^x dx - (1+e^x)ydy = 0; y(0) = 1$
35. $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}5$
36. $\sqrt[3]{xy+2y}dx = dy; y(-3) = \sqrt{8}$
37. $\dfrac{y'}{x} = (\dfrac{\ln x}{\ln y})^2; y(e) = e$

Ответы:

20. $Ce^{x+y} = (x+2)^2(y+3)^3$
21. $\dfrac{y}{y+2} = Ce^{x^2}; y = -2$
22. $\ln(1+e^x) + C = \dfrac{y^2}{2}$
23. $\ln|x| + C = 2\sqrt{y^2+1}$
24. $y^2 - 8\ln|y| = 4x^2 + C$
25. $-ctgy = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$
26. $C - e^{-y^2} = e^x$
27. $y = 2x - 1 + Ce^{-x}$
28. $y = x - 1 - 2arcctg(C-x) + 2\pi n, n \in Z; y = x - 1 + 2\pi k, k \in Z$
29. $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x + C$
30. $\dfrac{x+y+1}{x+y+3} = Ce^{2x}; x + y + 3 = 0$
31. $e^{y^3} = 3x(\ln x - 1) - 5e^3$
32. $\dfrac{1}{y} = \ln|x^2-1| + 1$
33. $e^{x^2} + e^{-y} = 2$
34. $y^2 = 1 + 2\ln(\dfrac{1+e^x}{2})$
35. $y = \dfrac{1}{1+x}$
36. $2\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{(x+2)^4} + 3$
37. $y(\ln^2 y - 2\ln y + 2) = \dfrac{x^2}{2}(\ln^2 x - \ln x + \dfrac{1}{2}) + e - \dfrac{e^2}{4}$

2.2. Однородные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией n-го измерения* относительно своих аргументов x и y, если для любого значения λ имеет место тождество $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$.

Однородные функции обладают следующими свойствами:

1. Сумма однородных функций одинакового измерения есть однородная функция того же измерения.

2. Произведение однородных функций есть однородная функция, измерение которой равно сумме измерений сомножителей.

3. Частное однородных функций есть однородная функция, измерение которой равно разности измерений делимого и делителя.

Дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ называется *однородным,* если $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида

$$N(x,y)dx+M(x,y)=0,$$

где $N(x,y)$ и $M(x,y)$ — однородные функции одного и того же измерения, также будет однородным.

С помощью замены $u=\dfrac{y}{x}$ однородные уравнения сводятся к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 2.5. Решить дифференциальное уравнение первого порядка

$$y^2+x^2y'=xyy'$$

Решение: Запишем исходное уравнение в виде

$$y'=\frac{y^2}{xy-x^2}.$$

Докажем, что данное уравнение является однородным. Действительно, функция $f(x,y)=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$ есть однородная функция нулевого измерения, так как

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda y)^2}{\lambda x\lambda y-(\lambda x)^2}=\frac{\lambda^2y^2}{\lambda^2xy-\lambda^2x^2}=\frac{y^2}{xy-x^2}=f(x,y).$$

Сделаем замену $u=\dfrac{y}{x}$, тогда $y=ux$ и $y'=u'\cdot x+u$.

Подставим y и y' в исходное дифференциальное уравнение.

Имеем

$$u'\cdot x+u=\frac{u^2x^2}{x^2u-x^2},$$

$$u'\cdot x+u=\frac{u^2}{u-1},$$

$$u'\cdot x=\frac{u}{u-1}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части получившегося равенства:

$$\frac{(u-1)du}{u}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{(u-1)du}{u}=\int\frac{dx}{x},$$

$$u-\ln u+\ln C=\ln x.$$

Возвращаясь к переменной y, получим:

$$y=Ce^{\frac{y}{x}}.$$

Подстановкой в исходное уравнение проверим, что $x=0$ не является решением дифференциального уравнения. При этом $y=0$ является решением уравнения, но его легко получить из общего решения при $C=0$.

Ответ: $y=Ce^{\frac{y}{x}}$.

Пример 2.6. Решить уравнение

$$\left(y'-\frac{y}{x}\right)\ln\frac{y}{x}=\frac{x^2}{y^2}.$$

Решение: Это уравнение является однородным. Действительно, легко показать, что функция $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2\ln\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$ есть однородная функция нулевого измерения.

Выполнив замену $u=\dfrac{y}{x}$, приходим к уравнению

$$u'\ln u=\frac{1}{u^2}.$$

Или

$$u^2\ln u\cdot du=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части уравнения, получим

$$\frac{u^3}{3}\ln u-\frac{1}{9}u^3=\ln|x|+C,$$

откуда

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3(\ln\left|\frac{y}{x}\right|-\frac{1}{3})=\ln|x|+C.$$

Ответ: $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3(\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|-\dfrac{1}{3})=\ln|x|+C$.

Замечание 1: *Уравнения вида* $y=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, *где* $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2\in R$, $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ *можно свести к однородному уравнению заменой* $z=z(t)$, *где* $z=y-y_0, t=x-x_0$ *и* x_0,y_0 *— решение системы* $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0.\end{cases}$

Пример 2.7. Решить уравнение

$$y'=\frac{6(x+3y+53)}{17x+y+1}$$

Решение: Найдем решение системы $\begin{cases}x+3y+53=0\\ 17x+y+1=0\end{cases}$.

$x_0=1, y_0=-18$. Замена $z=y+18$, $t=x-1$, сводит исходное уравнение к однородному уравнению

$$z'=\frac{6(t+3z)}{17t+z}.$$

Делая еще одну замену $u=\dfrac{z}{t}$, получим уравнение $u't+u=\dfrac{6(1+3u)}{17+u}$. Решаем его как уравнение с разделяющими переменными:

$$\frac{17+u}{u^2-u-6}du=-\frac{dt}{t},$$

$$\int\left(\frac{4}{u-3}-\frac{3}{u+2}\right)du=-\int\frac{dt}{t},$$

$$4\ln|u-3|-3\ln|u+2|=-\ln|t|+\ln C,$$

$$\ln(u-3)^4+\ln|t|=\ln|(u+2)^3|+\ln C,$$

$$(z-3t)^4=(z+2t)^3\cdot C,$$

$$(y-3x+21)^4=C(y+2x+16)^3.$$

При разделении переменных были потеряны корни $u=3$, $u=-2$ и соответственно решения $y-3x+21=0$, $y+2x+16=0$. Первое решение может быть получено из общего интеграла при $C=0$ и, поэтому, особым решением не является. Второе решение является особым.

Ответ: $(y-3x+21)^4=C(y+2x+16)^3$, $y+2x+16=0$.

Замечание 2: *Некоторые уравнения можно привести к однородному с помощью замены* $y=z^m$, *причем* m *заранее не известно. Его находят из условия, что уравнение после замены становится однородным. Если* m *найти нельзя, то и уравнение с помощью такой замены свести к однородному невозможно.*

Пример 2.8. Решить уравнение

$$2x^2y'=y^3+xy$$

Решение: Легко проверить, что данное уравнение не является однородным. Попробуем привести его к однородному с помощью замены $y=z^m$. Получим уравнение $2mx^2z^{m-1}z'=z^{3m}+xz^m$. Оно будет однородным только в том случае, если общие степени всех его слагаемых равны между собой, т.е. $2+(m-1)=3m=m+1$. Решением данного соотношения является $m=\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение можно свести к однородному с помощью замены $y=\sqrt{z}$.

Имеем:

$$\frac{1}{2}\cdot 2x^2\frac{1}{\sqrt{z}}z'=z\sqrt{z}+x\sqrt{z}$$

или

$$x^2z'=z^2+xz.$$

Действительно, легко убедиться, что полученное уравнение является однородными и решается с помощью новой замены $u=\dfrac{z}{x}$.

Отсюда

$$z=ux,\quad z'=u'x+u.$$

В результате имеем уравнение с разделяющими переменными:

$$u'x=u^2.$$

Решая его, получим:

$$u=-\frac{1}{\ln|Cx|},u=0.$$

Возвращаясь к переменной y, получим ответ.

Ответ: $y^2=-\dfrac{x}{\ln|Cx|},y=0.$

Задачи для самостоятельного решения

38–54. Решить уравнения

38. $y'=3\dfrac{y}{x}-2$

39. $y'x^2=xy+y^2e^{-\frac{x}{y}}$

40. $y'=\dfrac{2x+y}{x-2y}$

41. $(x+y)dx+(x-y)dy=0$

42. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$

43. $y-xy'=y\ln\dfrac{x}{y}$

44. $xy'=y\cos\ln\dfrac{y}{x}$

45. $x^2y'=x^2+3xy+y^2$

46. $xy'-y=xtg\dfrac{y}{x}$

47. $y'=\dfrac{4x+21y-25}{24x+y-25}$

48. $y'=\dfrac{34-12x-5y}{2x+y-6}$

49. $y'=\dfrac{4-6x-5y}{y+4}$

50. $(29x+y-30)dy=2(2x+13y-15)dx$

51. $(y'-\dfrac{y+8}{x-2})\cos\dfrac{4x+y}{x-2}=1+\sin\dfrac{4x+y}{x-2}$

52. $x^3y'-x^4=y^2$

53. $y'=y^2-\dfrac{2}{x^2}$

54. $2y+(x^2y+1)xy'=0$

Ответы:

38. $y = Cx^3 + x$

39. $e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = C$

40. $arctg\dfrac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2) + C$

41. $-y^2 + 2xy + x^2 = C$

42. $y = -x\ln\ln Cx$

43. $y = xe^{Cx}$;

44. $ctg(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{x}) = \ln Cx; y = xe^{2\pi n}; n \in Z$

45. $\ln|x| + \dfrac{x}{x+y} = C; y = -x$

46. $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$

47. $(y-x)^5 = C(y+4x-5)^4; y+4x-5=0$

48. $(y+4x-10)^2 = C(y+3x-8); y+3x-8=0$

49. $(y+3x-8)^3 = C(y+2x-4)^2; y+2x-4=0$

50. $(y-x)^6 = C(y+4x-5)^5; y+4x-5=0$

51. $1+\sin\dfrac{4x+y}{x-2} = C(x-2)$

52. $\dfrac{x^2}{x^2-y} = \ln|Cx|; y = x^2$

53. $1-xy = Cx^3(2+xy); xy=-2$

54. $x^2y\ln|Cy| = 1; y=0$

2.3. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует функция $f(x,y)$, для которой $df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. Общий интеграл уравнения в этом случае имеет вид:

$$f(x,y) = C.$$

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ и их частные производные $M'_y(x,y)$, $N'_x(x,y)$ непрерывны в некоторой области D. Тогда необходимым и достаточным условием того, что исходное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах является выполнение в области D равенства:

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y).$$

Для решения уравнения в полных дифференциалах необходимо восстановить функцию двух переменных $f(x,y)$ по ее дифференциалу и записать решение $y(x)$ или $x(y)$ в неявном виде $f(x,y) = C$, где C — произвольная постоянная.

По определению полного дифференциала $df = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$, следовательно:

$$\begin{cases} f'_x = M(x,y), \\ f'_y = N(x,y). \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим $f(x,y)$ и соответственно решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах $f(x,y) = C$.

Пример 2.9. Решить уравнение

$$(2x\cos(x^2) + \cos(y^2))dx - 2xy\sin(y^2)dy = 0.$$

Решение: Пусть

$$M(x,y) = 2x\cos(x^2) + \cos(y^2),$$

$$N(x,y) = -2xy\sin(y^2).$$

Докажем, что заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Проверим выполнение соответствующего условия:

$$M'_y(x,y) = -2y\sin(y^2),$$

$$N'_x(x,y) = -2y\sin(y^2).$$

Следовательно, $M_y(x,y) = N_x(x,y)$ и данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем $f(x,y)$ как решение системы:

$$\begin{cases} f'_x = 2x\cos(x^2) + \cos(y^2), \\ f'_y = -2xy\sin(y^2). \end{cases}$$

Выберем любое уравнение системы и проинтегрируем его по соответствующей переменной. Например, выберем второе уравнение и тогда проинтегрируем его по переменной y:

$$f(x,y) = \int -2xy\sin(y^2)dy = -x\int \sin(y^2)dy^2 = x\cos(y^2) + C(x).$$

Заметим, что при интегрировании по переменной y, вторая переменная x считается постоянной величиной и, следовательно, может встречаться в произвольной постоянной интегрирования, т.е. $C = C(x)$.

Подставим найденную функцию $f(x,y)$ в первое уравнение системы:

$$\cos(y^2) + C'_x(x) = 2x\cos(x^2) + \cos(y^2).$$

Следовательно,

$$C'_x(x) = 2x\cos(x^2).$$

Откуда

$$C(x) = \sin(x^2) + C_1.$$

Пусть $C_1 = 0$, тогда

$$f(x,y) = x\cos(y^2) + \sin(x^2).$$

Таким образом, общий интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x\cos(y^2) + \sin(x^2) = C.$$

Ответ: $x\cos(y^2) + \sin(x^2) = C$.

Пример 2.10. Решить уравнение

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$$

Решение. Так как $\left(\frac{y}{x}\right)'_y = (y^3 + \ln x)'_x = \frac{1}{x}$, то данное равнение является уравнением в полных дифференциалах.

Запишем систему для нахождения $f(x,y)$:

$$\begin{cases} f'_x = \dfrac{y}{x}, \\ f'_y = y^3 + \ln x. \end{cases}$$

Проинтегрируем по x первое уравнение системы, считая y постоянной величиной. Получим

$$f(x,y) = \int \frac{y}{x}dx = y\ln x + C(y),$$

где $C(y)$ — неизвестная функция. Подставим найденное $f(x,y)$ во второе уравнение системы:

$$f'_y(x,y) = \ln x + C'(y),$$

$$\ln x + C'_y(y) = y^3 + \ln x.$$

Следовательно,

$$C'_y(y) = y^3,$$

$$C(y) = \frac{1}{4}y^4 + C_1.$$

Положим для удобства $C_1 = 0$, тогда:

$$f(x,y) = y\ln x + \frac{1}{4}y^4.$$

Соответственно, общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид:

$$y\ln x+\frac{1}{4}y^4=C,$$

где C – произвольная постоянная.

Интегрирующим множителем для уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется некоторая функция $\mu(x,y)\neq 0$, после умножения на которую дифференциальное уравнение становится уравнением в полных дифференциалах.

Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ определены, имеют непрерывные частные производные первого порядка и не обращаются в нуль одновременно, то интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ уравнения существует. Стоит отметить, что общего метода для нахождения интегрирующего множителя нет.

В некоторых случаях для нахождения интегрирующего множителя нужно применить метод выделения полных дифференциалов, используя ранее известные формулы:

$$xdx=d\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\frac{dx}{x}=d\ln x,$$

$$ydx+xdy=d(xy),$$

$$ydx-xdy=y^2d\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$ydx-xdy=-x^2d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пример 2.11. Решить уравнение

$$ydx-(4x^2y+x)dy=0.$$

Решение. Пусть $M(x,y)=y$, $N(x,y)=-(4x^2y+x)$. Данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как не выполняется соответствующее условие: $M'_y=1$, $N'_x=-8xy-1$, $M'_y\neq N'_x$. Выясним, можно ли с помощью интегрирующего множителя привести заданное уравнение к уравнению в полных дифференциалах.

Рассмотрим два возможных способа.

1 способ: Умножим обе части уравнения на интегрирующий множитель $\mu(x,y)$.

$$\mu(x,y)ydx-\mu(x,y)(4x^2y+x)dy=0$$

Рассмотрим случай $\mu(x,y)=\mu(x)$. Попробуем найти интегрирующий множитель из условия:

$$(\mu(x)y)'_y=(-\mu(x)(4x^2y+x))'_x.$$

Имеем

$$\mu(x)=-(8xy+1)\mu(x)-\mu'(x)(4x^2y+x),$$

$$\mu(x)(8xy+2)+\mu'(x)(4x^2y+x)=0,$$

$$(4xy+1)(2\mu(x)+x\mu'(x))=0.$$

Найдем $\mu(x)$ из условия

$$2\mu(x)+x\mu'(x)=0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{d\mu}{\mu}=-2\frac{dx}{x},$$

$$\ln\mu=-2\ln x+\ln C,$$

$$\mu(x)=\frac{C}{x^2}.$$

Пусть $C=1$, тогда интегрирующий множитель имеет вид

$$\mu(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Теперь дифференциальное уравнение

$$\frac{y}{x^2}dx-(4y+\frac{1}{x})dy=0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Действительно,

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)'_y=\left(-4y-\frac{1}{x}\right)'_x=\frac{1}{x^2}.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} f'(x,y)_x=\dfrac{y}{x^2}, \\ f'(x,y)_y=-4y-\dfrac{1}{x} \end{cases}$ найдем функцию $f(x,y)$.

$$f(x,y)=\int\frac{y}{x^2}dx=-\frac{y}{x}+C(y),$$

$$-\frac{1}{x}+C'(y)=-4y-\frac{1}{x},$$

$$C'(y)=-4y,$$

$$C(y)=-2y^2+C_1.$$

Полагая $C_1=0$, получаем решение дифференциального уравнения $\frac{y}{x}+2y^2=C$.

При умножении на интегрирующий множитель мы потеряли решение $x=0$.

Ответ: $\frac{y}{x}+2y^2=C$, $x=0$.

2 способ: Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые в заданном дифференциальном уравнении:

$$(ydx-xdy)-4x^2ydy=0.$$

Так как

$$ydx-xdy=-x^2d\left(\frac{y}{x}\right),$$

то $-x^2d\left(\frac{y}{x}\right)-x^2d(2y^2)=0$.

Разделив уравнение на $(-x^2)$, имеем $d\left(\frac{y}{x}\right)+$ $+d(2y^2)=0$ или $\frac{y}{x}+2y^2=C$. При делении на $(-x^2)$ мы потеряли решение $x=0$.

Ответ: $\frac{y}{x}+2y^2=C$, $x=0$.

Пример 2.12. Решить уравнение

$$(3x^2\cos y-\sin y)\cos y dx-xdy=0.$$

Решение. Пусть $M(x,y)=3x^2\cos^2 y-\sin y\cos y, N(x,y)=-x$. Данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как соответствующее условие не выполняется: $M'_y\neq N'_x$. С помощью интегрирующего множителя приведем заданное дифференциальное уравнение к уравнению в полных дифференциалах.

Умножим обе части уравнения на интегрирующий множитель $\mu(x,y)$

$$\mu(x,y)(3x^2\cos y-\sin y)\cos y dx-\mu(x,y)xdy=0.$$

Рассмотрим случай $\mu(x,y)=\mu(y)$. Найдем интегрирующий множитель из условия

$$(\mu(y)(3x^2\cos y-\sin y)\cos y)'_y=(-\mu(y)x)'_x.$$

Имеем:

$$\mu'(y)((3x^2\cos y-\sin y)\cos y)-2\sin y\mu(y)(3x^2\cos y-\sin y)=0,$$

$$(3x^2\cos y-\sin y)(\cos y\mu'(y)-2\mu(y)\sin y)=0.$$

Найдем $\mu(y)$ из условия

$$\cos y\mu'(y)-2\mu(y)\sin y=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя обе части уравнения, получим:

$$\frac{d\mu}{\mu} = 2\frac{\sin y dy}{\cos y},$$

$$\ln\mu = -2\ln\cos y + \ln C_1,$$

$$\mu(y) = \frac{C_1}{\cos^2 y}.$$

Пусть $C_1 = 1$, тогда интегрирующий множитель имеет вид $\mu(y) = \dfrac{1}{\cos^2 y}$.

Теперь дифференциальное уравнение

$$(3x^2 - tgy)dx - \frac{x}{\cos^2 y}dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Действительно,

$$\left(3x^2 - tgy\right)'_y = \left(-\frac{x}{\cos^2 y}\right)'_x = -\frac{1}{\cos^2 y}.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} f'(x,y)_x = 3x^2 - tgy \\ f'(x,y)_y = -\dfrac{x}{\cos^2 y} \end{cases}$ найдем функцию $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \int (3x^2 - tgy)dx = x^3 - xtgy + C(y).$$

Подставим ее во второе уравнение системы

$$-\frac{x}{\cos^2 y} + C'(y) = -\frac{x}{\cos^2 y},$$

$$C'(y) = 0,$$

$$C(y) = C_2,$$

Полагая $C_2 = 0$, получаем решение дифференциального уравнения $x^3 - xtgy = C$.

При умножении на интегрирующий множитель мы потеряли решение $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $x^3 - xtgy = C$, $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

55–64. Решить уравнения, предварительно проверив, являются ли они уравнениями в полных дифференциалах:

55. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$
56. $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$
57. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$
58. $e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0$
59. $(2y + 6x^2)dx + (2x + 10)dy = 0$
60. $\dfrac{y}{x} + (y^3 + \ln x)y' = 0$
61. $(2x\cos x^2 + \cos y^2)dx - 2xy\sin y^2 dy = 0$
62. $6(x^5 + 2xy)dx + (6x^2 + 5y^4)dy = 0$
63. $3\left(\dfrac{y}{3x+2} + \ln y\right)dx + (\ln(3x+2) + \dfrac{3x+2}{y})dy = 0$
64. $\left(e^{4y} - 2x\right)dx + \left(8y + 4xe^{4y}dy\right) = 0$

65–69. Подобрать интегрирующий множитель и решить уравнения:

65. $(\dfrac{y}{xe^x} + \sin y)dx + (\dfrac{\ln x}{e^x} + \cos y)dy = 0$
66. $\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + ydy = 0$
67. $\left(y - \dfrac{1}{x}\right)dx + \dfrac{dy}{y} = 0$

68. $y^2dx-\left(xy+x^3\right)dy=0$

69. $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin(2y)dy=0$

Ответы:

55. $x^2y+3xy^2-y^3=C$
56. $3xy^2+x^2y+3y+x^2=C$
57. $y=x^2-\left(\frac{3}{2}(C-x^2)\right)^{\frac{2}{3}}$
58. $e^{-y}x-y^2=C$
59. $2xy+10y+2x^3=C$
60. $4y\ln x+y^4=C$
61. $\sin x^2+x\cos y$
62. $x^6+6x^2y+y^5=C$
63. $y\ln(3x+2)+(3x+2)\ln y=C$
64. $xe^{4y}-x^2+4y^2=C$
65. $y\ln x+e^x\sin y=C$
66. $2x+\ln(x^2+y^2)=C$
67. $(x^2-C)y=2x$
68. $y^2=x^2(C-2y);x=0$
69. $\sin^2 y=Cx-x^2;x=0$

2.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x),$$

где $p(x),q(x)$ — непрерывные в некоторой области функции.

Соответствующее ему *линейное однородное уравнение* имеет вид $y'+p(x)y=0$. Оно решается как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Для решения линейных неоднородных уравнений первого порядка можно использовать либо *метод вариации постоянной* (*метод Лагранжа*), либо *метод подстановки* (*метод Бернулли*).

Рассмотрим *алгоритм* решения линейных неоднородных уравнений первого порядка *методом вариации постоянной*:

1. Для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка составим соответствующее линейное однородное уравнение и решим его как уравнение с разделяющимися переменными

$$y'+p(x)y=0,$$

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx,$$

$$\ln y=-\int p(x)dx+\ln C.$$

Откуда, решение линейного однородного уравнения имеет вид:

$$y_0(x)=Ce^{-\int p(x)dx}.$$

2. Варьируем постоянную. Пусть $C=C(x)$, тогда решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

3. Для нахождения неизвестной функции $C(x)$ подставим $y(x)$ в исходное уравнение. Имеем

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}+C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x))+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x).$$

Откуда

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Вычислив интеграл, найдем $C(x)$ и подставим в $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Пример 2.13. Решить уравнение методом вариации постоянной: $y' = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{\cos^2 x}$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\cos^2 x}$$

и составим для него соответствующее линейное однородное уравнение $y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = 0$.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решим его.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2\sqrt{x}},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

$$\ln y = \sqrt{x} + \ln C,$$

$$y = Ce^{\sqrt{x}}.$$

Варьируем постоянную. Пусть $C = C(x)$, тогда решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y(x) = C(x)e^{\sqrt{x}}.$$

Для нахождения неизвестной функции $C(x)$ подставим $y(x)$ в исходное уравнение. Имеем:

$$C'(x)e^{\sqrt{x}} + C(x)e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} - C(x)e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\cos^2 x}.$$

Откуда:

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

и

$$C(x) = tgx + C_1.$$

Подставив найденную функцию $C(x)$ в $y(x)$, получим:

$$y(x) = (tgx + C_1)e^{\sqrt{x}}.$$

Ответ: $y(x) = (tgx + C_1)e^{\sqrt{x}}$.

Рассмотрим *алгоритм* решения линейных уравнений первого порядка *методом подстановки (методом Бернулли)*:

1) Решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде: $y(x) = u(x)v(x)$, где $u(x), v(x)$ — некоторые, пока неизвестные, функции.

2) Подставим $y(x)$ в исходное уравнение

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

или

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \qquad (*)$$

3) Функция $v(x)$ находим из условия:

$$v' + p(x)v = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, найдем

$$v = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Пусть $C = 1$, тогда

$$v = e^{-\int p(x)dx}.$$

4) Подставим найденную функцию $v(x)$ в уравнение (*):

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

или

$$u' = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Получили дифференциальное уравнение для определения функции $u(x)$.

5) Общее решение исходного дифференциального уравнения получим перемножением найденных функций $u(x), v(x)$:

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Пример 2.14. Решить задачу Коши методом Бернулли:

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x-1}; \quad y(2) = \frac{1}{15}$$

Решение: Решение дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Имеем:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \sqrt{x-1},$$

$$u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = \sqrt{x-1} \qquad (*)$$

Функцию $v(x)$ находим из условия:

$$v' + \frac{v}{x} = 0.$$

Решаем полученное уравнение как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln v = -\ln x + \ln C_1,$$

$$v = \frac{C_1}{x}.$$

Возьмем $C_1 = 1$, тогда

$$v = \frac{1}{x}.$$

Подставим v в уравнение (*):

$$\frac{u'}{x} = \sqrt{x-1}.$$

Из полученного уравнения найдем $u(x)$:

$$du = x\sqrt{x-1}dx,$$

$$u(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C.$$

Теперь мы можем записать общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y(x) = \frac{2}{5x}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3x}\sqrt{(x-1)^3} + \frac{C}{x}.$$

Для нахождения решения задачи Коши, воспользуемся начальным условием

$$y(2) = \frac{1}{15}.$$

Имеем:

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{C}{2},$$

откуда

$$C = -\frac{14}{15}$$

и решение задачи Коши:

$$y = \frac{2}{15x}\left(3\sqrt{(x-1)^5} + 5\sqrt{(x-1)^3} - 7\right).$$

Ответ: $y = \dfrac{2}{15x}\left(3\sqrt{(x-1)^5} + 5\sqrt{(x-1)^3} - 7\right)$

Замечание: *Уравнение, не являющееся линейным относительно переменной y, может стать линейным относительно переменной x, если рассматривать ее как функцию аргумента y, то есть $x = x(y)$.*

Пример 2.15. Решить уравнение

$$y^3+(1-xy)y'=0.$$

Решение: Данное уравнение не является линейным относительно переменной y. Но если его переписать в виде $\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y^2}x=-\frac{1}{y^3}$, то уравнение становится линейным относительно переменной x. При этом мы теряем решение $y=0$.

Решим полученное уравнение методом вариации постоянной. Составим для него соответствующее линейное однородное уравнение и решим его.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y^2},$$

$$\ln x=-\frac{1}{y}+\ln C,$$

$$x(y)=Ce^{-\frac{1}{y}}.$$

Пусть $C=C(y)$, тогда

$$x(y)=C(y)e^{-\frac{1}{y}}.$$

Подставляя $x(y)$ в линейное неоднородное уравнение, получим:

$$C'e^{-\frac{1}{y}}+Ce^{-\frac{1}{y}}\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^2}Ce^{-\frac{1}{y}}=-\frac{1}{y^3}.$$

Выражая C' и интегрируя, получаем

$$C(y)=-\int\frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^3}dy=e^{\frac{1}{y}}\left(\frac{1}{y}-1\right)+C_1.$$

Поэтому, решение будет иметь вид :

$$x=\frac{1}{y}-1+C_1e^{-\frac{1}{y}}.$$

Ответ: $x=\frac{1}{y}-1+C_1e^{-\frac{1}{y}}$; $y=0$.

Задачи для самостоятельного решения

70–79. Решить линейное уравнение методом вариации постоянной

70. $y'-2xy=3x^2-2x^4$
71. $xy'-2y=2x^4$
72. $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$
73. $\frac{dy}{\cos x}+\left(\frac{y\sin x-1}{\cos^2 x}\right)dx=0$
74. $y'+\frac{y}{x\ln x}=3x^2; y(e)=1+\frac{2e^3}{3}$
75. $y'+ytgx=5\cos^2 x\sin^4 x; y(0)=1$
76. $y'+\frac{y}{x}=\ln x; y(1)=0$
77. $y'+2y=x^2+2x$
78. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$
79. $x^2y'+xy+1=0$

80–84. Решить линейное уравнение методом подстановки (методом Бернулли):

80. $y'+\frac{y}{x}=xe^x$
81. $dy-\frac{y}{x}dx=x\arcsin x dx$

82. $y' + \dfrac{y}{x\ln x} = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$

83. $y' + 2y = 2 - 3x$

84. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2} y = x$

85–89. Решить дифференциальные уравнения, считая x искомой функцией, а y — независимой переменной:

85. $(2x+y)dy = ydx + 4\ln y dy$

86. $(\cos^5 y - xctgy)dy = dx$

87. $ydx = (\sqrt{y-1} - 2x)dy$

88. $ydx = (ye^y - 2x)dy$

89. $e^y(e^y - x)y' = 1$

Ответы:

70. $y = Ce^{x^2} + x^3$

71. $y = Cx^2 + x^4$

72. $y = (x+C)e^{-\sin x}$

73. $y = C\cos x + \sin x$

74. $y = x^3 - \dfrac{x^3 - 3}{3\ln x}$

75. $y = \cos x(\sin^5 x + 1)$

76. $y = \dfrac{2x^2\ln x - x^2 + 1}{4x}$

77. $y = \dfrac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1) + Ce^{-2x}$

78. $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$

79. $y = -\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{C}{x}$

80. $y = e^x(x - 2 + \dfrac{2}{x}) + \dfrac{C}{x}$

81. $y = x^2 \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + Cx$

82. $y = \dfrac{\ln\ln x + C}{\ln x}$

83. $y = \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{2}x + Ce^{-2x}$

84. $y = \dfrac{x^2(2+x^2)}{4(1+x^2)}$

85. $x + y - 1 = 2\ln y + Cy^2$

86. $x = \dfrac{C - \cos^6 y}{6\sin y}$

87. $15xy^2 = 6\sqrt{(y-1)^5} + 10\sqrt{(y-1)^3} + C$

88. $xy^2 = e^y(y^2 - 2y + 2) + C; y = 0$

89. $x = e^y - 1 + Ce^{-e^y}$

2.5. Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + p(x)y = f(x)y^\alpha$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 0$ называется *уравнением Бернулли*. Оно легко сводится к линейному заменой $z = y^{1-\alpha}$.

Пример 2.16. Решить уравнение:

$$2yy' + \frac{y^2}{x\ln x} = 1.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на $2y \neq 0$, запишем его в виде:

$$y' + \frac{1}{2x\ln x} y = \frac{1}{2y}.$$

Здесь $\alpha = -1$. После замены $z = y^{1-(-1)} = y^2$, $y = \sqrt{z}, y' = \dfrac{z'}{2\sqrt{z}}$ исходное уравнение примет вид:

$$\frac{z'}{2\sqrt{z}}+\frac{\sqrt{z}}{2x\ln x}=\frac{1}{2\sqrt{z}},$$

$$z'+\frac{z}{x\ln x}=1.$$

Мы получили линейное неоднородное уравнение первого порядка. Решим его методом вариации постоянной.

Составим соответствующее линейное однородное уравнение и решим его.

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{z}{x\ln x},$$

$$\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x\ln x},$$

$$\ln z=-\ln\ln x+\ln C,$$

$$z=\frac{C}{\ln x}.$$

Пусть $C=C(x)$, тогда решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$z=\frac{C(x)}{\ln x}.$$

После подстановки z и z' в исходное уравнение получим:

$$\frac{C'(x)\ln x-C(x)\frac{1}{x}}{\ln^2 x}+\frac{C(x)}{x\ln^2 x}=1,$$

$$C'(x)=\ln x,$$

$$C(x)=x\ln x-x+C_1.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения таково:

$$y^2=x-\frac{x}{\ln x}+\frac{C_1}{\ln x}.$$

Ответ: $y^2=x-\dfrac{x}{\ln x}+\dfrac{C_1}{\ln x}$.

Задачи для самостоятельного решения

90–99. Решить уравнение Бернулли:

90. $\dfrac{y}{x}-y'=y^2 arctgx$
91. $4y^3y'+\dfrac{y^4}{x}=8x^6$
92. $5y'+\dfrac{y}{x\ln x}=\dfrac{x^4}{y^4}$
93. $xy^2y'=x^2+y^3$
94. $y'=y^4\cos x+y\cdot\mathrm{tg}\,x$
95. $4xy'+3y=-e^x x^4 y^5$
96. $ydx+x(1-2xy)dy=0$
97. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{y^2}{x}\ln x$
98. $y'+2y=y^2e^x$
99. $xy'-4y=2x^2\sqrt{y}$

Ответы:

90. $\dfrac{1}{y}=\dfrac{(x^2+1)arctgx-x+C}{2x};y=0$
91. $y^4=x^7+\dfrac{C}{x}$
92. $5y^5\ln x=x^5(\ln x-\dfrac{1}{5})+C$
93. $y^3+3x^2=Cx^3$
94. $y^3(C\cos^3 x-3\sin x\cos^2 x)=1;y=0$
95. $\dfrac{1}{y^4}=x^3(e^x+C);y=0$

96. $\dfrac{1}{x} = Cy - 2y\ln y; y = 0$

97. $y = \dfrac{1}{Cx + \ln x + 1}; y = 0$

98. $y = \dfrac{1}{e^x + Ce^{2x}}; y = 0$

99. $y = x^4(\ln x + C)^2; y = 0$

2.6. Уравнение Рикатти

Уравнение вида $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ называется *уравнением Рикатти.*

Если известно его какое-либо частное решение $y_0(x)$, то заменой $y = y_0 + z$ уравнение Рикатти может быть сведено к уравнению Бернулли. Общего метода нахождения частного решения не существует. Иногда его удается подобрать по виду свободного члена дифференциального уравнения $c(x)$.

Пример 2.17. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$$

Решение: Для данного дифференциального уравнения частное решение можно найти по виду свободного члена $\dfrac{6}{x^2}$. Действительно, в левой части уравнения члены, подобные правой части, появятся в том случае, если взять частное решение в виде $y_0 = \dfrac{a}{x}$. Постоянную a найдем подстановкой y_0 в исходное уравнение:

$$-\frac{a}{x^2} + 2\frac{a^2}{x^2} = \frac{6}{x^2},$$

$$2a^2 - a - 6 = 0.$$

Откуда $a_1 = 2, a_2 = -\dfrac{3}{2}$. Возьмем частное решение $y_0 = \dfrac{2}{x}$.

Сведем исходное дифференциальное уравнение к уравнению Бернулли заменой $y = \dfrac{2}{x} + z$.

Получим:

$$-\frac{2}{x^2} + z' + 2\left(\frac{2}{x} + z\right)^2 = \frac{6}{x^2},$$

а после некоторых элементарных преобразований:

$$z' + \frac{8z}{x} + 2z^2 = 0.$$

Мы получили уравнение Бернулли, для которого $\alpha = 2$. С помощью еще одной замены $t = \dfrac{1}{z}$ приведем его к линейному неоднородному уравнению первого порядка

$$t' - \frac{8t}{x} = 2,$$

решение которого $t = \dfrac{-2x + 7Cx^8}{7}$.

Выполнив обратные замены $t = \dfrac{1}{z}$ и $z = y - \dfrac{2}{x}$, мы получим решение исходного дифференциального уравнения

$$y = \frac{7}{7Cx^8 - 2x} + \frac{2}{x}.$$

Легко проверить, что $z = 0$ является решением уравнения Бернулли.

Таким образом, $y=\frac{2}{x}$ также является решением исходного уравнения.

Ответ: $y=\frac{7}{7Cx^8-2x}+\frac{2}{x}$; $y=\frac{2}{x}$

Замечание: Иногда уравнение, не относящееся ни к одному из рассмотренных типов, можно преобразовать путем замены переменной и решить одним из известных методов.

Пример 2.18. Решить уравнение

$$y'-\operatorname{tg}y=\frac{e^x}{\cos y}.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на $\cos y\neq 0$. Получим:

$$\cos y\cdot y'-\sin y=e^x.$$

Введем новую переменную:

$$u=\sin y,$$

тогда

$$u'=\cos y\cdot y'.$$

Таким образом, исходное уравнение приобретает вид:

$$u'-u=e^x.$$

Это линейное неоднородное уравнение первого порядка. Решая его, получим

$$u=(x+C)e^x.$$

Соответственно, решение исходного дифференциального уравнения иммет вид:

$$y=\arcsin((x+C)e^x).$$

Задачи для самостоятельного решения

100–104. Решить уравнение Рикатти:

100. $y'-\frac{y}{x}+5y^2=\frac{39}{x^2}$

101. $y'+3y^2=\frac{10}{x^2}$

102. $x^2y'-4xy+3x^2y^2=50$

103. $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$

104. $y'-2xy+y^2+x^2=5$

105–108. Решить, подобрав подходящую замену переменной:

105. $y'=y(e^x+\ln y)$

106. $y'\sin y+x\cdot\cos y+x=0$

107. $(x+1)(yy'-1)=y^2$

108. $(x^2-1)y'\sin y+2x\cos y=2x-2x^3$

Ответы:

100. $y=\frac{3Cx^{28}+13}{Cx^{29}-5x}; y=\frac{3}{x}$

101. $y=\frac{2Cx^{11}+5}{Cx^{12}-3x}; y=\frac{2}{x}$

102. $y=\frac{5Cx^{25}+10}{Cx^{26}-3x}; y=\frac{5}{x}$

103. $y=x+\frac{x}{x+C}; y=x$

104. $y=x+2+\frac{4}{Ce^{4x}-1}; y=x+2$

105. $\ln y=(x+C)e^x$

106. $\cos y=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1$

107. $y^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1)$

108. $\cos y = (x^2-1)\ln(C(x^2-1))$

2.7. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Уравнение вида $F(x,y,y')=0$ не всегда удается разрешить относительно производной y', то есть представить его в виде $y'=f(x,y)$. В этом случае применяются другие методы, которые зависят от вида дифференциального уравнения.

Рассмотрим *уравнение вида* $F(x,y')=0$. Оно не содержит искомую функцию $y(x)$. Такое уравнение можно решить *методом введения параметра*.

Пример 2.19. Решить уравнение

$$x - y' = e^{y'}$$

Решение: Пусть $y'=t$. Тогда $x-t=e^t$ и $dx=(1+e^t)dt$.

С другой стороны, так как $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то

$$dy = y'dx$$

и, поэтому

$$dy = t(1+e^t)dt$$

Теперь не сложно найти функцию $y(t)$:

$$y = \int t(1+e^t)dt = t + (t-1)e^t + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Решение заданного дифференциального уравнения, записанное в параметрической форме, имеет вид:

$$\begin{cases} x = t + e^t, \\ y = t + (t-1)e^t + C. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = t + e^t, \\ y = t + (t-1)e^t + C. \end{cases}$

Рассмотрим *уравнение вида* $F(y,y')=0$. Оно не содержит независимую переменную x. Такое уравнение тоже можно решить *методом введения параметра*.

Пример 2.20. Решить уравнение

$$y = y' + \ln y'$$

Решение: Пусть $y'=t$, тогда $y = t + \ln t$ и $dy = (1+\frac{1}{t})dt$.

С другой стороны, так как $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то

$$dx = \frac{dy}{y'}$$

и, поэтому

$$dx = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt.$$

Значит,

$$x = \ln t - \frac{1}{t} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Решение заданного дифференциального уравнения, записанное в параметрической форме, имеет вид:

$$\begin{cases} x = \ln t - \dfrac{1}{t} + C, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \ln t - \dfrac{1}{t} + C, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

Замечание: *Среди дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, выделяют уравнения Лагранжа, которые могут быть записаны в форме* $y = xh(y') + p(y')$ *и уравнения Клеро, которые имеют вид* $y = xy' + p(y')$ *. Эти уравнения также решаются методом введения параметра.*

Задачи для самостоятельного решения

109–113. Решить дифференциальные уравнения:

109. $y=(y')^2\cdot e^{y'}$

110. $\ln(y')+\sin(y')=x$

111. $y=(y')^4-(y')^3-2$

112. $xy'+y=\ln(y')$

113. $y=xy'-(y')^2$

Ответы:

109. $\begin{cases} x=e^t(1+t)+C, \\ y=t^2e^t \end{cases}$

110. $\begin{cases} x=\ln t+\sin x, \\ y=t+t\sin t+\cos t+C \end{cases}$

111. $\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+C, \\ y=t^4-t^3-2 \end{cases}$

112. $\begin{cases} x=2t, \\ y=t^2 \end{cases}$, $y=Cx-C^2$

113. $\begin{cases} x=\dfrac{-1}{t}+\dfrac{C}{\sqrt{t}}, \\ y=\ln t+1-C\sqrt{t} \end{cases}$

2.8. Разные уравнения первого порядка

114. $y'-\dfrac{y}{x}=x^2, y(1)=0$

115. $y^2dx+(x+e^{\frac{2}{y}})dy=0$

116. $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2; y(0)=1$

117. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$

118. $y'=\dfrac{x+2y-3}{2x-2}$

119. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$

120. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+4\dfrac{y}{x}+2$

121. $y'=\dfrac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$

122. $2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x(1+\sin x), \quad y(0)=1$

123. $\dfrac{dx}{y}-\dfrac{x+y^2}{y^2}dy=0$

124. $(x\cos^2 y-y^2)y'=y\cos^2 y; y(\pi)=\dfrac{\pi}{4}$

125. $y'+2xy=-2x^3; y(1)=\dfrac{1}{e}$

126. $y'=\dfrac{x+6y-7}{8x-y-7}$

127. $xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$

128. $(1+e^x)yy'=e^x$

129. $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{2}{x^2}; y(1)=1$

130. $y'-ytgx=-\dfrac{2}{3}y^4\sin x; y(0)=1$

131. $y'=\dfrac{x^2}{2y\sqrt{1-y^2}};\ y(1)=0$

132. $y'-x^2-y^2=2xy+5(x+y+1)$

133. $(y'-\dfrac{y}{x})\sin\dfrac{y}{x}=\cos^3\dfrac{y}{x}$

134. $y'=\dfrac{2(y-3x-11)}{7x+y-1}$

135. $6(x^5+2xy)dx+(6x^2+5y^4)dy=0$

136. $\dfrac{y}{x}(y+\dfrac{1}{\cos^2(xy)})dx+(2y+\dfrac{1}{\cos^2(xy)})dy=0$

137. $(3x^2+\dfrac{e^y\ln y}{\sqrt{x}})dx+(\dfrac{2\sqrt{x}e^y}{y}-x^3)dy=0$

138. $(3x+3y+\dfrac{ye^{xy}}{x+y})dx+(3x+3y+\dfrac{xe^{xy}}{x+y})dy=0$

139. $y'+\dfrac{y}{x}=arctgx;y(1)=\dfrac{\pi}{4}$

140. $3y^2(y^3-x)y'=1$

141. $ytgx-2y'=\dfrac{y^3}{\cos x}$

142. $y'+\dfrac{2y}{x}+y^2=\dfrac{56}{x^2}$

143. $\cos^2 ydx=(tgy-x)dy$

144. $y'+\dfrac{11y}{x}+y^2=\dfrac{24}{x^2}$

145. $x=((y')^2-2y'+2)e^{y'}$

146. $y=\dfrac{(y')^6}{36}(6\ln y'-1)$

147. $y\ln y+y'e^{y'}-xy'=0$

148. $y=x(y'-e^{-y'})+e^{2e^{y'}}$

Ответы:

149. $y=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x}{2}$ 14

150. $x=e^{\frac{2}{y}}+Ce^{\frac{1}{y}}$ 15

151. $y=e^x$ 16

152. $e^yx^3-y=C$ 17

153. $y=1+(x-1)\ln|C\sqrt{x-1}|$ 18

154. $1+x^2=C\sqrt{(2+y^2)^3}$ 19

155. $\dfrac{y+x}{y+2x}=Cx;y=-2x$ 20

156. $2arctg\dfrac{y}{x}=\ln\left|\dfrac{C(x^2+y^2)}{x}\right|$ 21

157. $y=\sqrt{\sin x+e^{-\sin x}}$ 22

158. $\dfrac{x}{y}-y=C$ 23

159. $x=5y-ytgy$ 24

160. $y=1-x^2+e^{-x^2}$ 25

161. $\dfrac{7-7x}{y-x}=\ln|C(y-x);y=x|$ 26

162. $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^5$ 27

163. $\dfrac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C$ 28

164. $y=\dfrac{1}{x}$ 29

165. $\frac{1}{y^3}=\cos x$

166. $x^3-3+2\sqrt{(1-y^2)^3}=0$

167. $\frac{x+y+2}{x+y+3}=Ce^x; x+y+3=0$

168. $\ln|x|=\frac{1}{2\cos^2\frac{y}{x}}+C; y=(\frac{\pi}{2}+\pi n)x$

169. $(y+2x-6)^5=C(y+3x-5)^4; y+3x-5=0$

170. $x^6+6x^2y+y^5=C$

171. $xy^2+tg(xy)=C$

172. $x^3e^{-y}+2\sqrt{x}\ln y=C$

173. $(x+y)^3+e^{xy}=C$

174. $2y=xarctgx+\frac{arctgx+1}{x}-1$

175. $x+1=y^3+Ce^{-y^3}$

176. $\frac{1}{y^2}=(tgx+C)\cos x; y=0$

177. $y=\frac{7Cx^{15}+8}{Cx^{16}-x}; y=\frac{7}{x}$

178. $x-tgy+1=Ce^{-tgy}$

179. $y=\frac{2Cx^{14}+12}{Cx^{15}-x}; y=\frac{2}{x}$

180. $\begin{cases} x=(t^2-2t+2)e^t, \\ y=(t^3-3t^2+6t-6)e^t+C \end{cases}$

181. $\begin{cases} x=\frac{t^5}{5}\ln t-\frac{t^5}{25}+C, \\ y=\frac{t^6}{6}\ln t-\frac{t^6}{36} \end{cases}$

182. $x=C\ln\frac{y}{C}+e^C,$

183. $\begin{cases} x=1+(\ln(1-\ln t)-1)\ln t, \\ y=t\ln(1-\ln t) \end{cases}$

184. $\begin{cases} x=e^{t+e^t}(C+2e^{e^t}), \\ y=x(t-e^{-t})+e^{2e^t} \end{cases}$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Как уже говорилось ранее, дифференциальное уравнение n-го порядка можно записать в виде

$$F(x,\ y,\ y',\dots,y^{(n)})=0\,.$$

Если его можно разрешить относительно старшей производной, то говорят, что оно записано в форме Коши:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$$

3.1. Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка

1. Общий интеграл *уравнения вида* $y^{(n)}=f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная на некотором отрезке функция, легко найти путем последовательного интегрирования n раз обеих частей уравнения.

Пример 3.1. Решить уравнение

$$y'''=e^{3x}\,.$$

Решение: Так как функция $f(x)=e^{3x}$ непрерывна на всей числовой прямой, то общее решение данного дифференциального уравнения легко получить путем трехкратного последовательного интегрирования:

$$y''=\frac{1}{3}e^{3x}+C_1\,,$$

$$y'=\frac{1}{9}e^{3x}+C_1x+C_2\,,$$

$$y=\frac{1}{27}e^{3x}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3\,,$$

где C_1,C_2,C_3 — произвольные постоянные.

Ответ: $y=\dfrac{1}{27}e^{3x}+\dfrac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$

2. *Уравнения вида* $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\dots,y^{(n)})=0$, то есть уравнения, не содержащие искомую функцию $y(x)$ и ее производные до $k-1$ порядка включительно, допускают понижение порядка на k единиц. Для этого необходимо сделать замену $z(x)=y^{(k)}$.

Пример 3.2. Решить уравнение

$$y'''=\frac{y''}{x}$$

Решение: Порядок данного уравнения можно понизить сделав замену $z=y''$. Тогда $z'=y'''$ и уравнение примет вид:

$$z'=\frac{z}{x}\,.$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными, решение которого

$$z=C_1x\,.$$

Таким образом,

$$y''=C_1x\,.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения легко получить путем двукратного последовательного интегрирования.

Решая его, находим

$$y = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2x + C_3 .$$

Ответ: $y = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2x + C_3$

3. *Уравнения вида* $F(y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, то есть уравнения, не содержащие независимую переменную x, допускают понижение порядка на единицу, если сделать замену

$$z(y) = y' .$$

В этом случае

$$y'' = z'(y)y' = z'z .$$

Пример 3.3. Решить уравнение

$$y'^2 + 2yy'' = 0$$

Решение: Это уравнение второго порядка, которое не содержит переменную x. Пусть $z(y) = y'$, тогда $y'' = z'(y)y' = z'z$ и уравнение примет вид:

$$z^2 + 2yzz' = 0 .$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными, решения которого

$$z = \frac{C_1}{\sqrt{y}}; z = 0 .$$

Подставив $z = y'$, получим решения исходного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y^3 = (C_1x + C_2)^2; y = C .$$

Ответ: $y^3 = (C_1x + C_2)^2; y = C$

4. *Если функция* $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ *обладает свойством однородности степени* k *относительно переменной* y *и ее производных*, то есть при любом значении множителя t выполняется соотношение $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) =$

$= t^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, то порядок дифференциального уравнения легко понизить, применив замену: $z = \frac{y'}{y}$

Пример 3.4. Решить уравнение

$$yy' = y'^2 + yy'ctgx$$

Решение: Несложно проверить, что функция

$$F(x, y, y', y'') = yy'' - y'^2 - yy'ctgx$$

является однородной функцией второй степени относительно y, y', y''.

Следовательно, можем сделать замену $z = \frac{y'}{y}$.

Откуда

$$y' = yz ,$$

$$y'' = yz' + y'z = yz' + yz^2 = y(z' + z^2)$$

После подстановки y', y'' в исходное дифференциальное уравнение получим:

$$y^2(z' + z^2) = y^2(z^2 + zctgx) .$$

Следовательно,

$$y = 0; z' = zctgx .$$

Решая полученное уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$z = C_1 \sin x .$$

Возвращаясь к исходной переменной, приходим еще к одному уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} = C_1 \sin x ,$$

имеющее решение $y = C_2 e^{C_1 \cos x}$. Заметим, что решение $y = 0$ получается из решения $y = C_2 e^{C_1 \cos x}$ при $C_2 = 0$.

Ответ: $y = C_2 e^{C_1 \cos x}$

5. *Порядок уравнения можно понизить, если уравнение* $F(x,\ y,\ y',\ldots,y^{(n)})=0$
можно представить в виде:

$$\frac{d}{dx}F_1(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})=0\,.$$

В этом случае оно сводится к равносильному уравнению $n-1$ порядка $F_1(x,\ y,\ y',\ldots,y^{(n-1)})=C$.

Пример 3.5. Решить уравнение

$$y''=\frac{y'}{2x}-\frac{y}{2x^2}+\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,.$$

Решение: Несложно заметить, что данное уравнение можно записать в виде:

$$\frac{d}{dx}y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{2x}+e^{\sqrt{x}}\right).$$

Тогда

$$y'=\frac{y}{2x}+e^{\sqrt{x}}+C_1\,.$$

Получили линейное неоднородное уравнение первого порядка. Решим его методом вариации постоянной. Для данного уравнения составим соответствующее линейное однородное уравнение

$$y'=\frac{y}{2x}\,.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид:

$$y=C\sqrt{x}\,.$$

Варьируем постоянную. Пусть $C=C(x)$. Тогда решение линейного неоднородного уравнения будем искать в виде $y(x)=C(x)\sqrt{x}$, где $C(x)$ некоторая неизвестная функция, найти которую можно путем подстановки в уравнение функции $y(x)$.

Действительно,

$$C'(x)\sqrt{x}+\frac{C(x)}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}C(x)\sqrt{x}=e^{\sqrt{x}}+C_1\,,$$

$$C'(x)\sqrt{x}=e^{\sqrt{x}}+C_1\,,$$

$$C'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{C_1}{\sqrt{x}}\,,$$

$$C(x)=2e^{\sqrt{x}}+C_1\sqrt{x}+C_2\,.$$

Таким образом, мы получили решение исходного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y(x)=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}+C_1x+C_2\sqrt{x}$$

Ответ: $y(x)=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}+C_1x+C_2\sqrt{x}$

Задачи для самостоятельного решения

149–164. Решить уравнения

149. $y'''x\ln x=y''$

~~150.~~ $x^4y''+x^3y'=1$

~~151.~~ $tgx\cdot y''-y'+\dfrac{1}{\sin x}=0$

~~152.~~ $y'=xy''-\sqrt{y''}$

153. $y''=(y')^2e^x$

~~154.~~ $y''+3(y')^3\sin^2 y\cos y=0$

155. $-xy'''+2y''=\dfrac{2}{x^2}$

156. $y''+\dfrac{2x}{x^2+1}y'=2x$

~~157.~~ $y^4-y^3y''=1$

158. $xy'''=\dfrac{1}{x}$

159. $(y'+2y)y''=y'^2$

160. $yy''=y'^2-y'^3$

161. $x\ln x(yy''-y'^2)=yy'$

162. $y''+9(\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2})=100x^9e^{x^{10}}$

163. $\sin x\cos x(yy''-y'^2)=2yy'$

164. $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Ответы:

165. $y=C_1x^2(2\ln x-3)+C_2x+C_3$ 49

166. $y=\frac{1}{4x^2}+C_1\ln x+C_2$ 50

167. $y=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|-C_1\cos x+C_2$ 51

168. $y=C_1\frac{x^2}{2}+x\ln C_1+C_2;y=C-x\ln(-x)$ 52

169. $y=\frac{\ln|e^x+C_1|-x}{C_1}+C_2;y=e^{-x}+C_3;y=C$ 53

170. $x=\frac{\cos^3 y}{3}-\cos y+C_1y+C_2;y=C$ 54

171. $y=-\frac{1}{2}\ln x+C_1x^4+C_2x+C_3$ 55

172. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x}{2}+C_1arctgx+C_2$ 56

173. $\ln\left|y^2+C_1\pm\sqrt{y^4+2C_1y^2+1}\right|=2x+C_2;y=\pm1$ 57

174. $y=x(1-\ln x)+C_1x^2+C_2x+C_3$ 58

175. $x=\pm\sqrt{1+4C_1y}-\ln|1\pm\sqrt{1+4C_1y}|;y=C;y=Ce^{-x}$ 59

176. $y+C_1\ln|y|=x+C_2;y=C$ 60

177. $y=C_1e^{C_2x(\ln x-1)}$ 61

178. $y=C_1x+\frac{e^{x^{10}}+C_2}{x^9}$ 62

179. $y=C_1e^{C_2(tgx-x)}$ 63

180. $y=x(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C_1\ln|x|+C_2)$ 64

3.2. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'(x)+a_ny=0,$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ - некоторые постоянные, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Уравнение

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0$$

называется *характеристическим уравнением*, *соответствующим данному дифференциальному уравнению*.

Рассмотрим *алгоритм нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнением с постоянными коэффициентами*:

1. Составить характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению и найти все его корни.

2. Найти частные решения данного дифференциального уравнения. При этом:

а) каждому простому действительному корню k характеристического уравнения ставится в соответствие решение e^{kx};

b) каждому действительному корню кратности p характеристического уравнения ставится в соответствие p решений $e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, \ldots, x^{p-1}e^{kx}$;

c) каждой паре простых комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставятся в соответствии два решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

d) каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения кратности p ставятся в соответствии $2p$ решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

и

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3. Составить линейную комбинацию всех найденных в п.2 решений.

Пример 3.6. Решить дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Решение: Для данного дифференциального уравнения составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Его корнями являются $k_1 = 1, k_2 = -2$ и соответственно частными решениями исходного уравнения функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-2x}$.

Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

Пример 3.7. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Решение: Для данного дифференциального уравнения составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Оно имеет один двукратный действительный корень $k = -1$ и соответственно частными решениями исходного уравнения функции $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = xe^{-x}$.

Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

Пример 3.8. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{IV} - y = 0.$$

Решение: Для данного дифференциального уравнения составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^4 - 1 = 0.$$

Оно имеет два действительных корня $k_1 = -1, k_2 = 1$ и два комплексно сопряженных корня $k_3 = i, k_4 = -i$. Поэтому, частными решениями исходного уравнения являются функции $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$

Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 —произвольные постоянные.

Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$

Пример 3.9. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Решение: Для данного дифференциального уравнения составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0.$$

Оно имеет два двукратных комплексно сопряженных корня $k_3 = i, k_4 = -i$. Поэтому частными решениями исходного уравнения являются функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = x\cos x$, $y_4 = x\sin x$.

Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 -произвольные постоянные.

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$

Задачи для самостоятельного решения

165–182. Решить уравнения

165. $y'' - 5y' + 4y = 0$
166. $y'' + 3y' - 4y = 0$
167. $y'' + 6y' - 7y = 0$
168. $y'' - 7y' + 6y = 0$
169. $y'' - y' - 2y = 0$
170. $y'' - 6y' + 9y = 0$
171. $y'' - 8y' + 16y = 0$
172. $y'' + 10y' + 25y = 0$
173. $y'' + 4y' + 4y = 0$
174. $y'' + 14y' + 49y = 0$
175. $y'' + 2y' + 5y = 0$
176. $y'' - 4y' + 8y = 0$
177. $y'' + 6y' + 13y = 0$
178. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$

179. $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$
180. $y^{IV} + 4y = 0$
181. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$
182. $y^{V} - 6y''' + 9y' = 0$

Ответы:

183. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$ 65
184. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$ 66
185. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-7x}$ 67
186. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}$ 68
187. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ 69
188. $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ 70
189. $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$ 71
190. $y = e^{-5x}(C_1 + C_2 x)$ 72
191. $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$ 73
192. $y = e^{-7x}(C_1 + C_2 x)$ 74
193. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ 75
194. $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ 76
195. $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ 77
196. $y = C_1 e^{2x} + e^{x}(C_2 + C_3 x)$ 78
197. $y = C_1 e^{3x} + e^{-x}(C_2 + C_3 x)$ 79
198. $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$ 80
199. $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x$ 81
200. $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{\sqrt{3}x} + (C_4 + C_5 x)e^{-\sqrt{3}x}$ 82

3.3. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'(x)+a_ny=f(x),$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — некоторые постоянные, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением* n*-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Существует два способа решения линейных неоднородных уравнений: метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) и метод неопределенных коэффициентов.

Алгоритм метода вариации произвольных постоянных (метода Лагранжа):

a) Составить соответствующее линейное однородное уравнение

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+a_2y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'(x)+a_ny=0$$

и решить его.

Пусть его общее решение имеет вид:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n,$$

где $C_1,C_2,\ldots,C_n$ — произвольные постоянные, $y_1,y_2,\ldots,$ y_n — линейно независимые частные решения однородного уравнения.

b) Решение линейного неоднородного уравнения искать в виде:

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n.$$

c) Неизвестные функции $C_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$ найти как решение системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\ldots+C_n'(x)y_n=0\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+\ldots+C_n'(x)y_n'=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}+C_2'(x)y_2^{(n-2)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0\\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x)\end{cases}$$

Пример 3.10. Решить дифференциальное уравнение

$$y''-y=xe^{2x}.$$

Решение: Для данного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка составим соответствующее однородное:

$$y''-y=0.$$

Корнями характеристического уравнения $k^2-1=0$ являются значения $k_{1,2}=\pm1$ и общее решение однородного уравнения есть функция:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

Теперь варьируем постоянные. Будем искать решение неоднородного уравнения в виде:

$$y=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{-x}.$$

Неизвестные функции $C_1(x),C_2(x)$ найдем из системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{-x}=0\\ C_1'(x)e^x-C_2'(x)e^{-x}=xe^{2x}\end{cases}$$

Сложив два уравнения системы, легко выразить C_1':

$$C_1'(x)=\frac{1}{2}xe^x$$

Тогда

$$C_2'(x)=-C_1'(x)e^{2x}=-\frac{1}{2}xe^{3x}.$$

Интегрированием по частям найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \frac{1}{2}e^x(x-1) + C_3,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{18}e^{3x}(3x-1) + C_4.$$

Таким образом,

$$y = (\frac{1}{2}e^x(x-1) + C_3)e^x + (-\frac{1}{18}e^{3x}(3x-1) + C_4)e^{-x}.$$

После некоторых элементарных преобразований имеем:

$$y = e^{2x}(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}) + C_3e^x + C_4e^{-x}.$$

Ответ: $y = e^{2x}(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}) + C_1e^x + C_2e^{-x}$

Метод неопределенных коэффициентов основан на структуре общего решения неоднородного уравнения:

Общее решение линейного неоднородного уравнения в некоторой области есть сумма любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения в той же области.

Алгоритм метода неопределенных коэффициентов:

a) Составить соответствующее линейное однородное уравнение

$$y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + a_2y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_{n-1}y'(x) + a_ny = 0$$

и решить его.

Пусть его общее решение имеет вид:

$$y_0 = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые частные решения однородного уравнения.

b) Найти какое-либо частное решение по правилу:

Если правая часть линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x),$$

где $P_1(x)$ — многочлен степени m_1, $P_2(x)$ — многочлен степени m_2, α, β — некоторые постоянные, то его частное решение может быть найдено в виде:

$$y^* = x^re^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x),$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$-многочлены степени не выше m, $m = max(m_1; m_2)$, r — кратность числа $\alpha + i\beta$ как корня характеристического уравнения.

Для нахождения частного решения y^* коэффициенты многочленов $Q_1(x), Q_2(x)$ изначально берутся неопределенными, а затем находятся после подстановки y^* в исходное уравнение, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях.

Пример 3.11. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y' - 6y = 2e^{-3x}x^2$$

Решение: Сначала найдем общее решение y_0 соответствующего линейного однородного уравнения $y'' + y' - 6y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + k - 6 = 0$ имеет однократные корни $k_1 = -3$, $k_2 = 2$ и поэтому

$$y_0 = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}.$$

Теперь найдем частное решение исходного уравнения. Правая его часть равна

$$f(x) = 2x^2e^{-3x}.$$

Следовательно, $\alpha = -3, \beta = 0, P_1(x) = x^2, m_1 = 2$. Так как число $\alpha + i\beta = -3$ является однократным корнем характеристического уравнения, то $r=1$ и частное решение исходного уравнения следует искать в виде:

$$y^* = xe^{-3x}(Ax^2+Bx+C).$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A,B,C подставим y^* в исходное уравнение. Для этого найдем производные первого и второго порядка функции y^*:

$$(y^*)' = e^{-3x}(-3Ax^3+(3A-3B)x^2+(2B-3C)x+C),$$

$$(y^*)'' = e^{-3x}(9Ax^3+(9B-18A)x^2+ +(6A-12B+9C)x+2B-6C).$$

Подставим y^* в исходное уравнение:

$$9Ax^3+(9B-18A)x^2+(6A-12B+9C)x+(2B-6C)-3Ax^3+ +(3A-3B)x^2+(2B-3C)x+C-6Ax^3-6Bx^2-6Cx=2x^2$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, получим систему уравнений, из которой находим коэффициенты A,B,C:

$$\begin{cases}-15A=2,\\6A-10B=0,\\2B-5C=0.\end{cases}$$

Откуда, $A=-\dfrac{2}{15}, B=-\dfrac{2}{25}, C=-\dfrac{4}{125}$.

Таким образом,

$$y^* = xe^{-3x}\left(-\frac{2}{15}x^2-\frac{2}{25}x-\frac{4}{125}\right)$$

и общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y=y_0+y^*=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}-xe^{-3x}\left(\frac{2}{15}x^2+\frac{2}{25}x+\frac{4}{125}\right).$$

Ответ: $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}-xe^{-3x}\left(\dfrac{2}{15}x^2+\dfrac{2}{25}x+\dfrac{4}{125}\right)$.

Пример 3.12. Решить дифференциальное уравнение

$$y''-8y'+20y=5e^{4x}\sin x$$

Решение: Сначала найдем общее решение y_0 соответствующего линейного однородного уравнения $y''-8y'+20y=0$. Характеристическое уравнение $k^2-8k+20=0$ имеет комплексно сопряженные корни $k_{1,2}=4\pm 2i$ и поэтому

$$y_0=e^{4x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Теперь найдем частное решение исходного уравнения. Правая его часть равна

$$f(x)=5e^{4x}\sin 2x.$$

Следовательно, $\alpha=4, \beta=2, P_1(x)=5, m_1=0, P_2(x)=0,$ $m_2=0$. Так как число $\alpha+i\beta=4+2i$ является однократным корнем характеристического уравнения, то $r=1$ и частное решение исходного уравнения следует искать в виде:

$$y^*=xe^{4x}(A\sin 2x+B\cos 2x).$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A,B подставим y^* в исходное уравнение и приравняем соответствующие коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$. Получим систему:

$$\begin{cases}4A=0,\\-4B=5\end{cases}$$

Откуда, $A=0, B=-\dfrac{5}{4}$.

Таким образом, $y^*=xe^{4x}\left(-\dfrac{5}{4}\cos 2x\right)$ и общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y=y_0+y^*=e^{4x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+xe^{4x}\left(-\frac{5}{4}\cos 2x\right).$$

Ответ: $y=e^{4x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\dfrac{5}{4}xe^{4x}\cos 2x$.

Пример 3.13. Решить дифференциальное уравнение

$$y''-2y'+y=6e^x+\cos x+\sin x$$

Решение: Сначала найдем общее решение y_0 соответствующего линейного однородного уравнения $y''-2y'+1=0$. Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет двукратный корень $k=1$ и поэтому

$$y_0=e^x(C_1+C_2x).$$

Правая часть исходного дифференциального уравнения равна

$$f(x)=6e^x+\sin x+\cos x.$$

Ее вид не подходит к правилу нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения. В этом случае частное решение уравнения удобно находить в виде:

$$y^*=y_1^*+y_2^*,$$

где y_1^* - частное решение дифференциального уравнения $y''-2y'+y=6e^x$, а y_2^* - частное решение уравнения $y''-2y'+y=\cos x+\sin x$.

Найдем y_1^*. Так как $f_1(x)=6e^x$, то $\alpha=1,\beta=0,P_1(x)=6,$ $m_1=0,P_2(x)=0,m_2=0$.

Так как число $\alpha+i\beta=1$ является двукратным корнем характеристического уравнения, то $r=2$ и частное решение первого уравнения следует искать в виде:

$$y_1^*=Ax^2e^x.$$

После подстановки y^* в соответствующее уравнение найдем $A=3$ и $y_1^*=3x^2e^x$.

Теперь найдем y_2^*. Так как $f_2(x)=\cos x+\sin x$, то $\alpha=0,\beta=1,P_1(x)=1,m_1=0,P_2(x)=1,m_2=0$.

Число $\alpha+i\beta=i$ не является корнем характеристического уравнения, то $r=0$ и частное решение второго уравнения следует искать в виде:

$$y_2^*=A\cos x+B\sin x$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A,B подставим y_2^* в уравнение и приравняем соответствующие коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$:

$$-A\cos x-B\sin x+2A\sin x-2B\cos x+$$
$$+A\cos x+B\sin x=\cos x+\sin x,$$
$$2A\sin x-2B\cos x=\cos x+\sin x.$$

Получим систему:

$$\begin{cases}2A=1,\\-2B=1\end{cases}$$

Откуда, $A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2}$.

Таким образом, $y_2^*=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$ и частное решение исходного дифференциального уравнения:

$$y^*=y_1^*+y_2^*=3x^2e^x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y=y_0+y^*=e^x(C_1+C_2x)+3x^2e^x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x.$$

Ответ: $y=e^x(C_1+C_2x)+3x^2e^x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$.

Задачи для самостоятельного решения

183–190. Решить уравнения методом вариации постоянной

183. $y''-5y'+6y=7e^x$
184. $y''+y'-6y=(2-10x)e^{3x}$
185. $y''+y'-2y=3xe^x$

186. $y''-4y'+13y=x^2+1+e^{2x}\cos 3x$

187. $y''-6y'+10y=\dfrac{e^{3x}}{\cos x}$

188. $y''+4y=\dfrac{2}{ctgx}$

189. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$

191–195. Решить уравнение методом неопределенных коэффициентов

190. $y''-2y'-3y=e^{4x}$

191. $y''-5y'=3x^2+\sin 5x$

192. $y''+4y'+4y=xe^{-2x}$

193. $y''+2y'+2y=e^x+x\cos x$

194. $y''-9y=e^{-3x}(x^2+\sin 3x)$

195. $y'''-4y''+5y'-2y=(16-12x)e^{-x}$

196–200. Решить задачу Коши

196. $y''-2y'=2e^x; y(1)=-1; y'(1)=0$

197. $y''-2y'+y=2e^x; y(1)=2e; y'(1)=3e$

198. $y''-4y'+4y=15e^{2x}\sqrt{x}; y(1)=6e^2; y'(1)=23e^2$

199. $y''-2y'+5y=5e^x\cos 3x; y(0)=1; y(2\pi)=e^{2\pi}$

200. $y''+6y'+13y=-3e^{-3x}\sin x; y(\pi)=y(2\pi)=0$

Ответы:

183. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\dfrac{7}{2}e^x$

184. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+(-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{41}{18})e^{3x}$

185. $y=(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{3})e^x+C_1e^{-2x}+C_2e^x$

186. $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+(C_2+\dfrac{x}{6})\sin 3x)+\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{8x}{169}+\dfrac{175}{2197}$

187. $y=(C_1\cos x+C_2\sin x+\ln|\cos x|\cos x+x\sin x)e^{3x}$

188. $y=\sin 2x\ln|\cos x|-x\cos 2x+C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$

189. $y=(e^{-2x}+e^{-x})\ln(e^x+1)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

190. $y=0{,}2e^{4x}+C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$

191. $y=C_1e^{5x}+C_2-0{,}2x^3-0{,}12x^2-0{,}048x+0{,}02(\cos 5x-$
$-\sin 5x)$

192. $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{6}x^3e^{-2x}$

193. $y=e^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\dfrac{e^x}{5}+(\dfrac{x}{5}-\dfrac{2}{25})\cos x+$
$+(\dfrac{2}{5}x-\dfrac{14}{25})\sin x$

194. $y=C_1e^{3x}+e^{-3x}(C_2-\dfrac{x^3}{18}-\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{x}{108}+\dfrac{2}{45}\cos 3x-$
$-\dfrac{1}{45}\sin 3x)$

195. $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{2x}+xe^{-x}$

196. $y=e^{2x-1}-2e^x+e-1$

197. $y=(2-x+x^2)e^x$

198. $y=e^{2x}(1+x+4x^2\sqrt{x})$

199. $y=e^x(2\cos 2x-\cos 3x+C\sin 2x)$

200. $y=e^{-3x}(C\sin 2x-\sin x)$

3.4. Уравнение Эйлера

Уравнение вида:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a^{n-1} x y' + a_n y = f(x),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторые постоянные, называется *неоднородным уравнением Эйлера.*

Уравнение вида:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a^{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

называется *соответствующим однородным уравнением Эйлера.*

Заменой $x = e^t$ (при $x > 0$) или $x = -e^t$ (при $x < 0$) уравнение Эйлера сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет вид:

$$k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1) + a_1 k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+2) + \\ + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0.$$

Алгоритм решения уравнения Эйлера аналогичен алгоритму решения линейного неоднородного уравнения.

Пример 3.14. Решить уравнение

$$x^2 y'' + x y' + 4y = 10x$$

Решение: Данное уравнение является уравнением Эйлера. Сделаем замену:

$$x = e^t.$$

Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-t} y'_t,$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}y'_t + e^{-t}y''_t}{e^{-t}} = e^{-2t}(y''_t - y'_t).$$

Подставим x, y', y'' в исходное уравнение. Имеем:

$$e^{2t}e^{-2t}(y''_t - y'_t) + e^t e^{-t} y'_t + 4y = 10e^t.$$

или

$$y''_t + 4y = 10e^t.$$

Очевидно, что мы получили линейное неоднородное уравнение второго порядка. Решив его любым известным нам способом, получим:

$$y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 2e^t.$$

Теперь легко снова вернуться к функции $y(x)$, учитывая, что $y(t) = y(\ln x)$. Таким образом, решением исходного дифференциального уравнения является функция:

$$y(x) = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|) + 2x.$$

Ответ: $y(x) = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|) + 2x$.

Замечание: Решение уравнения Эйлера можно искать в виде:

$$y = x^k.$$

Число k находим из характеристического уравнения:

$$k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1) + a_1 k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+2) + \\ + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0.$$

При этом, простому корню k_1 соответствует частное решение x^{k_1}, m — кратному корню k_2 соответствуют m линейно независимых частных решений x^{k_2}, $x^{k_2}\ln x$, $x^{k_2}(\ln x)^2$,..., $x^{k_2}(\ln x)^{m-1}$. Если корни характеристического уравнения комплексно сопряженные $k = \pm\alpha + i\beta$, то частными решениями однородного уравнения Эйлера являются функции

$$x^{\alpha}\cos(\beta\ln x), x^{\alpha}\sin(\beta\ln x).$$

Если же характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $k=\pm\alpha+i\beta$ кратности p, то частными решениями однородного уравнения Эйлера являются функции

$$x^{\alpha}\cos(\beta\ln x), x^{\alpha}\ln x\cos(\beta\ln x), x^{\alpha}(\ln x)^2\cos(\beta\ln x),\ldots, x^{\alpha}(\ln x)^{p-1}\cos(\beta\ln x)$$
$$x^{\alpha}\sin(\beta\ln x), x^{\alpha}\ln x\sin(\beta\ln x), x^{\alpha}(\ln x)^2\sin(\beta\ln x),\ldots, x^{\alpha}(\ln x)^{p-1}\sin(\beta\ln x)$$

Пример 3.15. Решить уравнение

$$x^5y^{(5)}+10x^4y^{(4)}+27x^3y'''+21x^2y''+3xy'=0$$

Решение: Пусть $y=x^k$, тогда $y'=kx^{k-1}$, ..., $y^{(5)}=k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)x^{k-5}$. Подставляя это в исходное уравнение, получим:

$$x^k(k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)+10k(k-1)(k-2)(k-3)+$$
$$+27k(k-1)(k-2)+21k(k-1)+3k)=0,$$

откуда:

$$k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)+10k(k-1)(k-2)(k-3)+$$
$$+27k(k-1)(k-2)+21k(k-1)+3k=0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, имеем:

$$k^3(k^2+2)=0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет действительный корень $k_1=0$ кратности 3 и комплексно сопряженные корни $k_{2,3}=\pm\sqrt{2}i$ и общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y=C_1+C_2\ln x+C_3(\ln x)^2+C_4\cos(\sqrt{2}\ln x)+C_5\sin(\sqrt{2}\ln x).$$

Ответ: $y=C_1+C_2\ln x+C_3(\ln x)^2+C_4\cos(\sqrt{2}\ln x)+$
$+C_5\sin(\sqrt{2}\ln x)$

Пример 3.16. Решить уравнение

$$x^2y''-3xy'+3y=2x^4\cos(x+1)$$

Решение: Пусть $x=e^t$,тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{e^t}=e^{-t}y'_t,$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{-e^{-t}y'_t+e^{-t}y''_t}{e^{-t}}=e^{-2t}(y''_t-y'_t).$$

Подставим x,y',y'' в исходное уравнение. Получим:

$$y''_t-4y'_t+3y=2e^{4t}\cos(e^t+1)$$

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общим решением соответствующего однородного уравнения $y''_t-4y'_t+3y=0$ является функция :

$$y_0(t)=C_1e^t+C_2e^{3t}.$$

Варьируем постоянные. Решение неоднородного уравнения будем искать в виде: $y(t)=C_1(t)e^t+C_2(t)e^{3t}$, где неизвестные функции есть решение системы :

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t+C_2'(t)e^{3t}=0,\\ C_1'(t)e^t+3C_2'(t)e^{3t}=2e^{4t}\cos(e^t+1). \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$2C_2'(t)e^{3t}=2e^{4t}\cos(e^t+1),$$

$$C_2'(t)=e^t\cos(e^t+1),$$

$$C_2(t)=\int e^t\cos(e^t+1)dt=\sin(e^t+1)+C_3.$$

Найдем теперь $C_1(t)$:

$$C_1'(t) = -e^{3t}\cos(e^t+1),$$
$$C_1(t) = -\int e^{3t}\cos(e^t+1)dt = -e^{2t}\sin(e^t+1) - \\ -2e^t\cos(e^t+1) + 2\sin(e^t+1) + C_4.$$

Подставляя найденные $C_1(t)$, $C_2(t)$ в решение и учитывая, что $y(t) = y(\ln x)$, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = -2x^2\cos(x+1) + 2x\sin(x+1) + C_1x + C_2x^3 .$$

Ответ: $y = -2x^2\cos(x+1) + 2x\sin(x+1) + C_1x + C_2x^3$.

Задачи для самостоятельного решения

201–212. Решить уравнения Эйлера при $x > 0$

201. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 3x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$
202. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 4x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$
203. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + x^2y'' - 5xy' - 7y = 0$
204. $x^2y'' - 2y = \dfrac{x^2}{(x+1)^2} + 2\ln(x+1)$
205. $x^2y'' - 6y = \dfrac{5x^4}{x^2+1}$
206. $x^2y'' + xy' - y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
207. $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = \dfrac{4}{x}$
208. $x^3y''' + 7x^2y'' + 10xy' + 2y = 12x$
209. $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = -\dfrac{4}{x}$
210. $x^2y'' + xy' + 4y = \sin(2\ln x)$

211. $x^2y'' + xy' + 9y = 3(3\cos(3\ln x) + \sin(3\ln x))$
212. $x^2y'' + xy' + 16y = 8\cos(4\ln x)$

Ответы:

201. $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x} + C_3x^{\sqrt{3}} + C_4x^{-\sqrt{3}}$
202. $y = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x^2} + C_3\cos\ln x + C_4\sin\ln x$
203. $y = C_1x^{\sqrt{7}} + \dfrac{C_2}{x^{\sqrt{7}}} + C_3\cos\ln x + C_4\sin\ln x$
204. $y = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x} - \ln(x+1)$
205. $y = C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x^2} + x^3\operatorname{arctg} x - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln\sqrt{x^2+1}}{x^2}$
206. $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x} + x\operatorname{arctg} x - 1 + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$
207. $y = (C_1 + C_2\ln x)x + \dfrac{C_3}{x^2} + \dfrac{1}{x}$
208. $y = (C_1 + C_2\ln x)\dfrac{1}{x} + \dfrac{C_3}{x^2} + x$
209. $y = C_1x + \dfrac{C_2 + C_3\ln x}{x^2} + \dfrac{2}{x}$
210. $y = C_1\sin(2\ln x) + (C_2 - \dfrac{\ln x}{4})\cos(2\ln x)$
211. $y = (C_1 + \dfrac{3\ln x}{2})\sin(3\ln x) + (C_2 - \dfrac{\ln x}{2})\cos(3\ln x)$
212. $y = (C_1 + \ln x)\sin(4\ln x) + C_2\cos(4\ln x)$

3.5. Разные уравнения высших порядков

213–235. Решить дифференциальные уравнения

213. $(y'')^2 - 2y'' = 0; y(1) = 2; y'(1) = 1$

214. $xy''' - y'' = 0$

215. $y'' = 2\sqrt{y'}; y(0) = y'(0) = 1$

216. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y; y(0) = y'(0) = 1$

217. $x(y''y - y'^2) = yy' + xy^2$

218. $\dfrac{y''}{y'} + e^{y'}y'' = 1$

219. $y'' + \dfrac{2}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y = 3x^2$

220. $y''' - 13y' - 12y = 0$

221. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

222. $y'' - y' + y = 0$

223. $y^{(4)} - y = 0$

224. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$

225. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$

226. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

227. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$

228. $y''' + y = x^2 - x + 1$

229. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

230. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

231. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$

232. $y'' + 4y = \sin 2x; y(0) = y'(0) = 0$

233. $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$

234. $x^2y'' - xy' + y = 6x\ln x$

235. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

Ответы:

213. $y = x + 1; y = x^2 - x + 2$

214. $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$

215. $y = \dfrac{1}{3}(x+1)^3 + \dfrac{2}{3}$

216. $y = e^{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

217. $\ln y = C_2 + \dfrac{x^2}{2}\ln x + C_1x^2 - \dfrac{x^2}{4}$

218. $x = \ln t + e^t + C_1,$
$y = t + te^t - e^t + C_2$

219. $y = \dfrac{C_1}{x^2} + \dfrac{x^4}{6} + C_2x$

220. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} + C_3e^{-3x}$

221. $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}$

222. $y = e^{\frac{x}{2}}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)$

223. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$

224. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + 2\cos x - \sin x$

225. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{x}{2}\sin x - \dfrac{1}{3}\cos 2x$

226. $y = C_1 e^{3x} + C_2 + \frac{x}{3} e^{3x} + 3x^2 + 2x$

227. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{37} e^{3x} (6 \sin x - \cos x)$

228. $y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} (C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x) + x^2 - x + 1$

229. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \cdot \ln|\cos 2x| + \frac{1}{2} x \sin 2x$

230. $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x \cdot \ln|\cos x| +$

$+ (x - tgx) \sin x$

231. $y = e^x (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{x}$

232. $y = -\frac{x}{4} \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x$

233. $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) - \ln x \cdot \cos(\ln x)$

234. $y = x(C_1 + C_2 \ln x) + x \ln^3 x$

235. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$

4. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Основные понятия и определения

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка называется совокупность соотношений вида

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0 \end{cases}$$

где x — независимая переменная, $y_1, y_2, \dots, y_n$ — искомые функции.

Решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется такой набор функций $y_1, y_2, \dots, y_n$, после подстановки которых в систему уравнений каждое из них превращается в тождество.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных $y_1', y_2', \dots, y_n'$, называется *нормальной системой* дифференциальных уравнений. Она имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Метод решения системы дифференциальных уравнений заключается в приведении системы уравнений к одному уравнению n-го порядка или к нескольким уравнениям порядка, меньшим чем n. Для этого дифференцируем любое из уравнений последовательно $n-1$ раз и подставляем каждый раз вместо производных их значения.

Пример 4.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 1 - \dfrac{1}{y_2}, \\ y_2' = \dfrac{1}{y_1 - x} \end{cases}$$

Решение: Продифференцируем обе части первого уравнения. Получим:

$$y_1'' = \frac{y_2'}{{y_2}^2}.$$

Выразим y_2 из первого уравнения системы

$$y_2 = \frac{1}{1 - y_1'}$$

и подставим его и его производную в y_1''.

Имеем:

$$y_1'' = \frac{(y_1' - 1)^2}{y_1 - x}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка. Решим его. Для этого запишем полученное уравнение в виде:

$$\frac{y_1''}{y_1' - 1} = \frac{y_1' - 1}{y_1 - x},$$

которое легко представить в виде:

$$\frac{d}{dx}(\ln(y_1' - 1)) = \frac{d}{dx}(\ln(y_1 - x)).$$

Поэтому

$$\ln(y_1' - 1) = \ln(y_1 - x) + \ln C_1.$$

Отсюда

$$y_1' - 1 = C_1(y_1 - x).$$

Данное дифференциальное уравнение первого порядка является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Решая его методом вариации постоянной, получим:

$$y_1 = x + C_2 e^{C_1 x}.$$

Теперь легко найти y_2:

$$y_2 = \frac{1}{1 - y_1'} = \frac{1}{1 - (1 + C_1 C_2 e^{C_1 x})} = -\frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}.$$

Ответ: $\begin{cases} y_1 = x + C_2 e^{C_1 x} \\ y_2 = -\dfrac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x} \end{cases}$, $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$

Пример 4.2. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} y' = x + y + z \\ z' = 2x - 4y - 3z \end{cases}, \quad y(0) = 1, z(0) = 0$$

Решение: Дифференцируя по x первое уравнение системы, имеем:

$$y'' = 1 + y' + z'.$$

Подставим в полученное выражение y' и z' из уравнений исходной системы. Получим,

$$y'' = 1 + x + y + z + 2x - 4y - 3z,$$

$$y'' = 3x - 3y - 2z + 1 \ .$$

Выразим из первого уравнения системы z

$$z = y' - x - y$$

и подставим в y''. Получим линейное уравнение второго порядка.

Действительно,

$$y'' = 3x - 3y - 2y' + 2x + 2y + 1 \ ,$$

$$y'' = -y - 2y' + 5x + 1 \ ,$$

$$y'' + 2y' + y = 5x + 1 \ .$$

Решим данное уравнение методом неопределенных коэффициентов. Составим соответствующее линейное однородное уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0 \ ,$$

характеристическое уравнение которого имеет вид:

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \ .$$

Откуда

$$k_1 = k_2 = -1$$

и поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения таково:

$$y_0 = e^{-x}(C_1 + C_2 x) \ .$$

Анализируя правую часть линейного неоднородного уравнения, понимаем, что частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\tilde{y} = Ax + B \ .$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B, подставим $\tilde{y}$ в линейное неоднородное уравнение. Имеем:

$$2A + Ax + B = 5x + 1 \ .$$

Откуда $A = 5, B = -9$ и $\tilde{y} = 5x - 9$.

Таким образом, получим общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = y_0 + \tilde{y} = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + 5x - 9 \ .$$

Теперь найдем z:

$$z = y' - x - y = e^{-x}(-C_1 - C_2 x + C_2) + 5 - x - e^{-x}(C_1 + C_2 x) - 5x - 9,$$

$$z = e^{-x}(C_2 - 2C_1 - 2C_2 x) - 6x + 14 \ .$$

Таким образом, общее решение исходной системы линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}(C_1 + C_2 x) + 5x - 9 \\ z &= e^{-x}(C_2 - 2C_1 - 2C_2 x) - 6x + 14 \end{aligned} .$$

Подберем постоянные C_1 и C_2 так, чтобы оно удовлетворяло начальным условиям $y(0) = 1, z(0) = 0$.

Имеем:

$$\begin{cases} C_1 - 9 = 1 \\ C_2 - 2C_1 + 14 = 0 \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 10, C_2 = 6$.

Таким образом, решение системы уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет:

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}(10 + 6x) + 5x - 9, \\ z &= e^{-x}(-14 - 12x) - 6x + 14. \end{aligned}$$

Ответ: $\begin{aligned} y &= e^{-x}(10 + 6x) + 5x - 9, \\ z &= e^{-x}(-14 - 12x) - 6x + 14. \end{aligned}$

Пример 4.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = y^2 + \sin t \\ y' = \dfrac{x}{2y} \end{cases} .$$

Решение: Дифференцируя по t первое уравнение системы, имеем:

$$x'' = 2yy' + \cos t \ .$$

Из второго уравнения системы легко выразить

$$2yy' = x \ .$$

Поэтому мы получаем линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$$x'' - x = \cos t.$$

Решим данное уравнение методом неопределенных коэффициентов. Составим соответствующее линейное однородное уравнение

$$x'' - x = 0,$$

характеристическое уравнение которого имеет вид:

$$k^2 - 1 = 0.$$

Откуда

$$k_1 = 1, k_2 = -1$$

и поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения таково:

$$x_0 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Анализируя правую часть линейного неоднородного уравнения, понимаем, что частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\tilde{x} = A\cos t + B\sin t.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B, подставим $\tilde{x}$ в линейное неоднородное уравнение. Имеем:

$$-2A\cos t - 2B\sin t = \cos t.$$

Откуда $A = -\dfrac{1}{2}, B = 0$ и $\tilde{x} = -\dfrac{1}{2}\cos t$.

Таким образом, получим общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$x = x_0 + \tilde{x} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.$$

Из первого уравнения системы найдем y:

$$y^2 = x' - \sin t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \sin t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

Таким образом, общее решение исходной системы линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t \\ y^2 &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t \end{aligned}.$$

Ответ: $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \dfrac{1}{2}\cos t, y^2 = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \dfrac{1}{2}\sin t.$

Задачи для самостоятельного решения

236–243. Решить систему уравнений:

236. $\begin{cases} y_1' = y_1 \sin x \\ y_2' = y_1 e^{\cos x} \end{cases}$

237. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$

238. $\begin{cases} x' = z - y \\ y' = z \\ z' = -x + z \end{cases}$

239. $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = 2y - z \\ z' = z \end{cases}$

240. $\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_2}{x^2} \\ y_2' = 3y_1 + \dfrac{3}{x} y_2 \end{cases}$

241. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = (ctgx - \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1)y_1 + (ctgx - 1)y_2 \end{cases}$

242. $\begin{cases} y_1' = {y_1}^4 {y_2}^3 \\ y_2' = \dfrac{y_2}{x} - {y_1}^3 {y_2}^4 \end{cases}$

243. $\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_1}{y_1 - y_2} \\ y_2' = \dfrac{y_2}{y_1 - y_2} \end{cases}$

Ответы:

236. $\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-\cos x} \\ y_2 = C_1 x + C_2 \end{cases}$

237. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ z = C_3 e^t + 2C_1 t e^t \end{cases}$

238. $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y = C_3 e^t + \dfrac{1}{2}(C_1 - C_2)\cos t + \dfrac{1}{2}(C_1 + C_2)\sin t \\ z = C_3 e^t + \dfrac{1}{2}(C_1 + C_2)\cos t + \dfrac{1}{2}(C_2 - C_1)\sin t \end{cases}$

239. $\begin{cases} x = (C_1 - C_2 t)e^{2t} \\ y = C_2 e^{2t} + C_3 e^t \\ z = C_3 e^t \end{cases}$

240. $\begin{cases} y_1 = \dfrac{C_1}{x} + C^2 t^3 \\ y_2 = -C_1 + 3C_2 t^4 \end{cases}$

241. $\begin{cases} y_1 = C_1 \sin x \ln\left| tg\dfrac{x}{2}\right| + C_2 \sin x \\ y_2 = (\cos x - \sin x)(C_1 \ln\left| tg\dfrac{x}{2}\right| + C_2) + C_1 \end{cases}$

242. $\begin{cases} y_1 = C_2 e^{\frac{C_1^3 x^4}{4}} \\ y_2 = \dfrac{C_1}{C_2} x e^{-\frac{C_1^3 x^4}{4}} \end{cases}; \quad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = Cx \end{cases}$

243. $\begin{cases} y_1 = \dfrac{C_1 x}{C_1 - 1} + C_1 C_2 \\ y_2 = \dfrac{x}{C_1 - 1} + C_2 \end{cases}$

4.2. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется система вида:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases},$$

где $a_{ij} \in R, i = 1,2,\ldots,n, j = 1,2,\ldots,n.$

Существует несколько способов решения такой системы.

1 способ: Метод исключения неизвестных.

Данным способом можно свести систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией.

Пример 4.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = -7y + z \\ z' = -2y - 5z \end{cases}$$

Решение: Продифференцируем по x обе части первого уравнения. Получим:

$$y'' = -7y' + z' = -7y' - 2y - 5z = -7y' - 2y - 5(y' + 7y),$$

$$y'' + 12y' + 37y = 0\,.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2+12k+37=0,$$

корнями которого являются комплексно-сопряженные числа $k_{1,2}=-6\pm i$.

Следовательно, общее решение уравнения $y''+12y'+37y=0$ может быть записано в виде:

$$y=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Теперь не сложно найти z .

$$z=y'+7y=e^{-6x}(-6C_1\cos x-6C_2\sin x-C_1\sin x+C_2\cos x+$$
$$+7C_1\cos x+7C_2\sin x)$$

Таким образом,

$$z=e^{-6x}((C_1+C_2)\cos x+(C_2-C_1)\sin x).$$

Ответ: $y=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

$$z=e^{-6x}((C_1+C_2)\cos x+(C_2-C_1)\sin x).$$

Пример 4.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y''=z \\ z''=y \end{cases}$$

Решение: Дважды продифференцируем по x обе части первого уравнения системы. Получим:

$$y^{(4)}=z''.$$

Так как $z''=y$, то получаем линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$y^{(4)}=y.$$

Решим его. Составим соответствующее характеристическое уравнение

$$k^4-1=0$$

$$(k-1)(k+1)(k^2+1)=0$$

Таким образом, корнями характеристического уравнения являются

$$k_1=1, k_2=-1, k_3=i, k_4=-i$$

и общее решение уравнения

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Подставляя y в первое уравнение системы, найдем z.

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x.$$

Ответ: $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x$$

2 способ: Метод Эйлера.

Линейную однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n \\ y_2'=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n \end{cases},$$

можно записать в матричной форме:

$$\frac{dy}{dx}=Ay,$$

где $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ — $n-$ мерный вектор, $A-$ квадратная матрица размера $n\times n$. Решение данной системы будем искать в виде

$$y=e^{\lambda x}a,$$

где $\lambda-$ собственное значение матрицы A, $a-$ соответствующий собственный вектор матрицы A.

Возможны следующие случаи:

1. Матрица A имеет n различных действительных собственных значений $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Тогда общее решение

системы линейных однородных дифференциальных уравнений определяется следующим образом

$$y = C_1 e^{\lambda 1 x} a_1 + C_2 e^{\lambda 2 x} a_2 + \ldots + C_n e^{\lambda n x} a_n ,$$

где a_i — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_i, C_i — произвольные числа, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Матрица A имеет действительные собственные значения, некоторые из которых кратные.

В этом случае, если для кратного собственного значения λ матрицы A имеется столько линейно независимых собственных векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, какова его кратность, то ему соответствует k линейно независимых решений исходной системы $e^{\lambda x} a_1, e^{\lambda x} a_2, \ldots, e^{\lambda x} a_k$ и общее решение исходной системы дифференциальных уравнений есть линейная комбинация всех линейно независимых решений данной системы.

Если же для собственного значения λ кратности k имеется только m линейно независимых собственных векторов $(m < k)$, то решения, соответствующие λ, нужно искать в виде

$$y = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-m} x^{k-m}) e^{\lambda x} ,$$

При этом векторы $a_0, a_1, \ldots, a_{k-m}$ находятся методом неопределенных коэффициентов при подстановки y в исходную систему.

3. Матрица A имеет комплексные собственные значения. В этом случае надо найти решение системы через комплексные функции и воспользоваться тем, что вещественная и мнимая части комплексного решения являются линейно независимыми решениями, соответствующими собственному значению λ.

Пример 4.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = -4x - y \end{cases}$$

Решение: Запишем данную систему в матричном виде

$$\frac{dX}{dt} = AX ,$$

где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения матрицы A. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 .$$

Откуда $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Для нахождения соответствующих собственных векторов матрицы A решим систему уравнений $(A - \lambda E)X = 0$. Легко проверить, что собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует собственный вектор $(1;-2)^T$, а собственному значению $\lambda_2 = 3$ соответствует собственный вектор $(1;-1)^T$.

Таким образом, общее решение исходной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} ,$$

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$$
$$y = -2C_1 e^t - C_2 e^{3t}$$

Ответ: $\begin{matrix} x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ y = -2C_1 e^t - C_2 e^{3t} \end{matrix}$

Пример 4.7. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases},$$

удовлетворяющее следующим условиям

$$x(0) = 1, y(0) = 0 .$$

Решение: Запишем данную систему уравнений в матричном виде

$$\frac{dX}{dt} = AX \ ,$$

где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения матрицы A. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 .$$

Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Соответствующий собственный вектор — $(1;-1)^T$. Следовательно, мы имеем одно решение системы уравнений

$$x_1 = e^{2t}, y_1 = -e^{2t} .$$

Еще одно решение исходной системы, которое будет линейно независимым с найденным ранее, будем искать в виде

$$x_2 = (a + bt)e^{2t}; y_2 = (c + dt)e^{2t} .$$

Подставляя их в исходные уравнения системы, получим

$$\begin{cases} be^{2t} + 2(a + bt)e^{2t} = 3(a + bt)e^{2t} + (c + dt)e^{2t} \\ de^{2t} + 2(c + dt)e^{2t} = -(a + bt)e^{2t} + (c + dt)e^{2t} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} b + bt = a + 3bt + c + dt \\ d + c + dt = -a - bt + dt \end{cases}.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} a + c - b = 0 \\ b + d = 0 \end{cases},$$

которая имеет два линейно независимых решения. Например, $a = 1, b = d = 0, c = -1$ и $a = 1, b = 1, c = 0, d = -1$.

Следовательно, найдены два линейно независимых решения исходных уравнений системы

$$x_1 = e^{2t}, y_1 = -e^{2t} \text{ и } x_2 = (1 + t)e^{2t}; y_2 = -te^{2t} .$$

Таким образом, общее решение исходной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} x &= C_1e^{2t} + C_2(1 + t)e^{2t} \\ y &= -C_1e^{2t} - C_2te^{2t} \end{aligned}$$

Теперь легко найти частное решение системы, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1, y(0) = 0$, из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 = 0 \end{cases}.$$

Откуда $C_1 = 0, C_2 = 1$ и , следовательно, частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x &= (1 + t)e^{2t} \\ y &= -te^{2t} \end{aligned}$$

Ответ: $\begin{aligned} x &= (1 + t)e^{2t} \\ y &= -te^{2t} \end{aligned}$

Пример 4.8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

Решение: Запишем данную систему в матричном виде

$$\frac{dX}{dt} = AX ,$$

где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения матрицы A. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 .$$

Откуда $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Найдем собственный вектор матрицы A , соответствующий $\lambda_1 = 2 - i$, решив систему

$$\begin{cases} (1+i)x + 2y = 0 \\ -x + (-1+i)y = 0 \end{cases}.$$

Одним из ее решений есть $(1-i;-1)$, поэтому

$$\begin{cases} x = (1-i)e^{(2-i)t} \\ y = -e^{(2-i)t} \end{cases}$$

— есть комплексное решение исходной системы уравнений.

Так как действительная и мнимая части полученного решения также являются решениями заданных уравнений, то, применив формулу Эйлера, имеем

$$x = (1-i)e^{(2-i)t} = (1-i)e^{2t}e^{-it} = (1-i)e^{2t}(\cos t - i\sin t) =$$
$$= e^{2t}(\cos t - \sin t - i(\cos t + \sin t))$$

Аналогично,

$$y = -e^{(2-i)t} = -e^{2t}e^{-it} = -e^{2t}(\cos t - i\sin t)$$

Таким образом, мы получили два действительных решения исходной системы

$$x_1 = e^{2t}(\cos t - \sin t) , \; y_1 = -e^{2t}\cos t$$

$$x_2 = -e^{2t}(\cos t + \sin t) , \; y_2 = e^{2t}\sin t .$$

Найденные решения являются линейно независимыми и, следовательно, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{aligned} x &= e^{2t}((C_1 - C_2)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t) \\ y &= -e^{2t}(C_1\cos t - C_2\sin t) \end{aligned}$$

Ответ: $\begin{aligned} x &= e^{2t}((C_1 - C_2)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t) \\ y &= -e^{2t}(C_1\cos t - C_2\sin t) \end{aligned}$

Задачи для самостоятельного решения

244–257. Решить систему уравнений:

244. $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x \end{cases}$

245. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$

246. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - y \end{cases}$

247. $\begin{cases} x' = -x + 4y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

248. $\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = -3x - y \end{cases}$

249. $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$

250. $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = 15x - 3z \\ z' = -5x - y - 2z \end{cases}$

251. $\begin{cases} x' = x + y - 3z \\ y' = 3x + 2y - 3z \\ z' = x + 3z \end{cases}$

252. $\begin{cases} x' = -2x - y + z \\ y' = -3x - 3y + 2z \\ z' = -4x - 3y + 2z \end{cases}$

253. $\begin{cases} x' = -2x - 5y - 5z \\ y' = -2x - y - 3z \\ z' = 5y + 3z \end{cases}$

254. $\begin{cases} x' = -2x + 3y + z \\ y' = -x - 6y - z \\ z' = 3x + 9y \end{cases}$

255. $\begin{cases} x' = 4x + y - z \\ y' = -2x + y + z \\ z' = 7x + y - 4z \end{cases}$

256. $\begin{cases} x' = 4x + 5y - 2z \\ y' = -2x - 2y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$

257. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -3x - 3y - z \\ z' = 2x + y \end{cases}$

Ответы:

244. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \\ y = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t} \end{cases}$

245. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases}$

246. $\begin{cases} x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ y = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(-3\cos 3t + \sin 3t) \end{cases}$

247. $\begin{cases} x = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^{t} \\ y = (C_1 + C_2 t)e^{t} \end{cases}$

248. $\begin{cases} x = (C_1 + 3C_2 t)e^{2t} \\ y = (-C_1 + C_2 - 3C_2 t)e^{2t} \end{cases}$

249. $\begin{cases} x = (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)e^{t} \\ y = (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)e^{t} \end{cases}$

250. $\begin{cases} x = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-3t} \\ y = 3C_1 e^{6t} + C_3 e^{-3t} \\ z = -C_1 e^{6t} + (5C_2 + C_3)e^{-3t} \end{cases}$

251. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_3 e^{2t} \\ y = 3(C_1 + C_2 t)e^{t} + 4C_3 e^{2t} \\ z = (C_1 + C_2 t)e^{t} + C_3 e^{2t} \end{cases}$

252. $\begin{cases} x = (-C_2 + 6C_3 + 2C_3 t)e^{-t} \\ y = (C_1 + C_2 + 8C_3 + (C_2 + 2C_3)t + C_3 t^2)e^{-t} \\ z = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^{-t} \end{cases}$

253. $\begin{cases} x = 2C_1 e^{-2t} + 5(C_2 \cos t + C_3 \sin t)e^{t} \\ y = C_1 e^{-2t} + ((2C_2 - C_3)\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t)e^{t} \\ z = -C_1 e^{-2t} - 5(C_2 \cos t + C_3 \sin t)e^{t} \end{cases}$

254. $\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y = -C_1 e^{-2t} + C_3 e^{-3t} \\ z = 3C_1 e^{-2t} - (C_2 + 3C_3)e^{-3t} \end{cases}$

255. $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t} - C_3 e^{-3t} \\ y = -(C_1 + C_2 t)e^{2t} + C_3 e^{-3t} \\ z = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t} - 6C_3 e^{-3t} \end{cases}$

256. $\begin{cases} x = -(C_1 + 2C_2 - 2C_3 + (C_2 + 4C_3)t + C_3 t^2)e^{t} \\ y = (C_1 + C_2 - 2C_3 + (C_2 + 2C_3)t + C_3 t^2)e^{t} \\ z = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^{t} \end{cases}$

257. $\begin{cases} x = (-C_1 + C_3 \cos t - C_2 \sin t)e^{-t} \\ y = (C_1 - (C_2 + C_3)\cos t + (C_2 - C_3)\sin t)e^{-t} \\ z = (C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t)e^{-t} \end{cases}$

4.3. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется система вида:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases},$$

где $a_{ij} \in R, i = 1,2,\ldots,n, j = 1,2,\ldots,n.$

Её можно также записать в матричной форме:

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x),$$

где $y^T = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — n-мерный вектор, A — квадратная матрица размера $n \times n$, $f^T(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$

Систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений можно решать, *как методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных)*, так и *методом неопределенных коэффициентов.*

1 способ: Метод вариации произвольных постоянных разберем на примере.

Пример 4.9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x + \dfrac{1}{t^2} + \ln t \end{cases}$$

Решение:

1 шаг: Составим для данной неоднородной системы уравнений соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases},$$

jбщее решение которой несложно найти

$$\begin{aligned} x &= C_1e^t + C_2e^{-t} \\ y &= C_1e^t - C_2e^{-t} \end{aligned}$$

2 шаг: Варьируем постоянные. Пусть $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$. Тогда общее решение исходной неоднородной системы будем искать в виде

$$\begin{aligned} x &= C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t} \\ y &= C_1(t)e^t - C_2(t)e^{-t} \end{aligned}$$

Для нахождения функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$, подставим x и y в исходную систему дифференциальных уравнений. После некоторых несложных преобразований получим

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-t} = 0 \\ C_1'(t)e^t - C_2'(t)e^{-t} = \dfrac{1}{t^2} + \ln t \end{cases}$$

Сложив два уравнения системы, а затем вычтя из первого уравнения системы второе, найдем $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$

$$\begin{aligned} C_1'(t) &= \frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right) \\ C_2'(t) &= -\frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right) \end{aligned}.$$

Отсюда

$$C_1(t) = \frac{1}{2}\int e^{-t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right)dt = \frac{1}{2}\left(\int e^{-t}\frac{1}{t^2}dt + \int e^{-t}\ln t\,dt\right)$$

Применяя к обоим интегралам формулу интегрирования по частям, получим

$$C_1(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-t}}{t} - \int\frac{e^{-t}}{t}dt - e^{-t}\ln t + \int\frac{e^{-t}}{t}dt\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-t}}{t} - e^{-t}\ln t\right) =$$
$$= -\frac{e^{-t}}{2}\left(\frac{1}{t} + \ln t\right) + \tilde{C}_1$$

Аналогично,

$$C_2(t)=\frac{e^t}{2}(\frac{1}{t}-\ln t)+\tilde{C}_2$$

$\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ - произвольные постоянные.

Подставляя найденные выражения в x и y, находим общее решение исходной неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$x=(-\frac{e^{-t}}{2}(\frac{1}{t}+\ln t)+\tilde{C}_1)e^t+(\frac{e^t}{2}(\frac{1}{t}-\ln t)+\tilde{C}_2)e^{-t}$$
$$y=(-\frac{e^{-t}}{2}(\frac{1}{t}+\ln t)+\tilde{C}_1)e^t-(\frac{e^t}{2}(\frac{1}{t}-\ln t)+\tilde{C}_2)e^{-t}$$

Или

$$x=-\ln t+\tilde{C}_1e^t+\tilde{C}_2e^{-t}$$
$$y=-\frac{1}{t}+\tilde{C}_1e^t-\tilde{C}_2e^{-t}$$

Ответ: $$\begin{aligned}x&=-\ln t+\tilde{C}_1e^t+\tilde{C}_2e^{-t}\\ y&=-\frac{1}{t}+\tilde{C}_1e^t-\tilde{C}_2e^{-t}\end{aligned}$$

2 способ: Метод неопределённых коэффициентов

Общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений есть сумма общего решения соответствующей линейной однородной системы и какого-либо частного решения неоднородной системы, то есть

$$y=y_0+\tilde{y},$$

где $y^T=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ — общее решение линейной неоднородной системы уравнений, $y_0{}^T=(y_{01},y_{02},\ldots,y_{0n})$ - общее решение соответствующей однородной системы, $\tilde{y}^T=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_n)$ - частное решение линейной неоднородной системы уравнений.

Частное решение $\tilde{y}$ можно найти в зависимости от вектора $f(x)$. Возможны два случая.

a. Пусть вектор $f(x)$ может быть представлен в виде

$$f(x)=e^{\alpha x}P(x),$$

где $P^T(x)=(P_1(x),P_2(x),\ldots,P_n(x))$ — многочлены степеней m_j, $j=1,2,\ldots,n$ соответственно, α — действительное число. Тогда

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}R(x),$$

где $R^T(x)=(R_1(x),R_2(x),\ldots,R_n(x))$ - многочлены степеней $m+k$, $m=\max(m_1,m_2,\ldots,m_n)$, k равно кратности числа α как собственного значения матрицы A. Все коэффициенты многочленов $R_j(x)$, $j=1,2,\ldots,n$ берутся сначала неопределенными и находятся непосредственной подстановкой $\tilde{y}$ в исходную систему.

b. Пусть вектор $f(x)$ может быть представлен в виде

$$f(x)=e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x),$$

где

$$P^T(x)=(P_1(x),P_2(x),\ldots,P_n(x))$$

и

$$Q^T(x)=(Q_1(x),Q_2(x),\ldots,Q_n(x))$$

— многочлены степеней m_j и l_j, $j=1,2,\ldots,n$ соответственно, α и β — действительные числа. Тогда

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}(R(x)\cos\beta x+S(x)\sin\beta x),$$

где

$$R^T(x)=(R_1(x),R_2(x),\ldots,R_n(x))$$

и

$$S^T(x)=(S_1(x),S_2(x),\ldots,S_n(x))$$

— многочлены степеней $m+k$, $m=\max(m_1,m_2,\ldots,m_n,l_1,l_2,\ldots,l_n)$, k равно кратности чисел $\alpha\pm i\beta$ как собственных значений матрицы A. Все коэффициенты многочленов $R_j(x)$ и $S_j(x)$, $j=1,2,\ldots,n$ берутся сначала неопределенными и находятся непосредственной подстановкой $\tilde{y}$ в исходную систему.

Пример 4.10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = y - 5\cos t \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

Решение:

1 шаг: Составим для данной неоднородной системы уравнений соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x + y \end{cases},$$

общее решение которой несложно найти любым рассмотренным ранее методом

$$x_0 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$
$$y_0 = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}$$

2 шаг: Найдем частное решение исходной системы. Так как вектор $f(x)$ может быть записан в виде

$$f(x) = \begin{pmatrix} -5\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\cos t + 0\sin t \\ 0\cos t + 0\sin t \end{pmatrix},$$

то это случай b). Здесь $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и $P(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $Q(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — многочлены нулевой степени. Числа $\alpha \pm i\beta = \pm i$ не являются собственными значениями матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ найдены на первом шаге нашего решения) и, следовательно, $k = 0$. Так как $m = 0$ (как максимальная степень многочленов $P(t)$ и $Q(t)$), то $m + k = 0$ и $R(t)$ и $S(t)$ также являются многочленами нулевой степени. Таким образом, частное решение исходной задачи можно представить в виде

$$\tilde{x} = A_1 \sin t + B_1 \cos t$$
$$\tilde{y} = A_2 \sin t + B_2 \cos t$$

Подставляя его в исходную систему дифференциальных уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2

$$\begin{cases} A_1 - B_2 = -5 \\ A_2 + B_1 = 0 \\ A_2 - 2B_1 - B_2 = 0 \\ 2A_1 + B_2 + A_2 = 0 \end{cases}$$

Откуда $A_1 = -2,\ B_1 = -1,\ A_2 = 1,\ B_2 = 3$.

Таким образом, общее решение исходной системы уравнений имеет вид

$$x = x_0 + \tilde{x} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 2\sin t - \cos t$$
$$y = y_0 + \tilde{y} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + \sin t + 3\cos t$$

Ответ: $x = x_0 + \tilde{x} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 2\sin t - \cos t$
$y = y_0 + \tilde{y} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + \sin t + 3\cos t$

Пример 4.11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 3e^{2t} \\ y' = x + 2y + e^{2t} \end{cases}$$

Решение:

1 шаг: Составим для данной неоднородной системы уравнений соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = x + 2y \end{cases},$$

общее решение которой несложно найти любым рассмотренным ранее методом

$$x_0 = C_1 e^{t} + C_2 e^{4t}$$
$$y_0 = -C_1 e^{t} + \frac{1}{2} C_2 e^{4t}$$

2 шаг: Найдем частное решение исходной системы. Так как вектор $f(x)$ может быть записан в виде

$$f(x) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то это случай а). Здесь $P(t)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ — многочлен нулевой степени. Число $\alpha=2$ не является собственным значением матрицы $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$ ($\lambda_1=1,\lambda_2=4$ найдены на первом шаге нашего решения) и, следовательно, $k=0$. Так как $m=0$ (как максимальная степень многочленов $P(t)$), то $m+k=0$ и $R(t)$ также является многочленом нулевой степени. Таким образом, частное решение исходной задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=Ae^{2t}\\ \tilde{y}&=Be^{2t}\end{aligned}$$

Подставляя его в исходную систему дифференциальных уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов A и B

$$\begin{cases}A+2B=-3\\ B=-1\end{cases}$$

Откуда $A=-1,\ B=-1$.

Таким образом, общее решение исходной системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}x&=x_0+\tilde{x}=C_1e^t+C_2e^{4t}-e^{2t}\\ y&=y_0+\tilde{y}=-C_1e^t+\frac{1}{2}C_2e^{4t}-e^{2t}\end{aligned}$$

Ответ: $\begin{aligned}x&=x_0+\tilde{x}=C_1e^t+C_2e^{4t}-e^{2t}\\ y&=y_0+\tilde{y}=-C_1e^t+\frac{1}{2}C_2e^{4t}-e^{2t}\end{aligned}$

Пример 4.12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x'=2x+y+e^t\\ y'=x+2y-3e^{4t}\end{cases}$$

Решение:

1 шаг: Составим для данной неоднородной системы уравнений соответствующую однородную систему

$$\begin{cases}x'=2x+y\\ y'=x+2y\end{cases},$$

и найдем корни его характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\lambda_1=1,\lambda_2=3$$

Тогда общее решение неоднородной системы имеет вид

$$\begin{aligned}x_0&=C_1e^t+C_2e^{3t}\\ y_0&=-C_1e^t+C_2e^{3t}\end{aligned}$$

2 шаг: Найдем частное решение исходной системы дифференциальных уравнений. Так как вектор $f(x)$ может быть записан в виде

$$f(x)=e^t\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+e^{4t}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},$$

то это случай а). Здесь $P_1(t)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ и $P_2(t)=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ — многочлены нулевой степени. Число $\alpha=4$ не является собственным значением матрицы $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, а вот число $\alpha=1$ является однократным корнем характеристического уравнения ($\lambda_1=1,\lambda_2=3$ найдены на первом шаге нашего решения) и, следовательно, $k_1=1,k_2=0$. Так как $m=0$ (как максимальная степень многочленов $P(t)$), то $m+k_1=1,m+k_2=0$ и $R_1(t)$ является многочленом первой степени, а $R_2(t)$ — многочленом нулевой степени. Таким образом, частное решение исходной задачи можно представить в виде

$$\tilde{x} = (A_1 + A_2 t)e^t + A_3 e^{4t}$$
$$\tilde{y} = (B_1 + B_2 t)e^t + B_3 e^{4t}$$

Подставляя его в исходную систему дифференциальных уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов

$$\begin{cases} -A_1 - B_1 + A_2 = 2 \\ A_2 + B_2 = 0 \\ 2A_3 - B_3 = 0 \\ -B_1 + B_2 - A_1 = 0 \\ -A_3 + 2B_3 = -3 \end{cases}$$

Откуда $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = -1$, $B_1 = -1$, $B_2 = -1$, $B_3 = -2$ и частное решение исходной системы дифференциальных уравнений

$$\tilde{x} = te^t - e^{4t}$$
$$\tilde{y} = (-1 - t)e^t - 2e^{4t}$$

Таким образом, общее решение исходной системы уравнений имеет вид

$$x = x_0 + \tilde{x} = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + te^t - e^{4t}$$
$$y = y_0 + \tilde{y} = -C_1 e^t + C_2 e^{3t} - (1+t)e^t - 2e^{4t}$$

Ответ: $\begin{array}{l} x = x_0 + \tilde{x} = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + te^t - e^{4t} \\ y = y_0 + \tilde{y} = -C_1 e^t + C_2 e^{3t} - (1+t)e^t - 2e^{4t} \end{array}$

Задачи для самостоятельного решения

258–267. Решить систему уравнений:

258. $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 3e^{2t} \\ y' = x + 2y + e^{2t} \end{cases}$

259. $\begin{cases} x' = y + \cos t \\ y' = -x + 1 \end{cases}$

260. $\begin{cases} x' = -5x - y + e^t \\ y' = x - 3y + e^{2t} \end{cases}$

261. $\begin{cases} x' = -y + \cos t \\ y' = -x + \sin t \end{cases}$

262. $\begin{cases} x' = -x + 2y + z + \dfrac{2}{\cos^2 t} \\ y' = x - 2y + 3z + \dfrac{1}{\cos^2 t} \\ z' = 4x - 8y + 6z \end{cases}$

263. $\begin{cases} x' = x + y - z + ctgt - \sin t \\ y' = z - ctgt + \sin t \\ z' = x + \cos t + 1 \end{cases}$

264. $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4z + t - 5 \\ y' = -y - 2z + t + 3 \\ z' = -4x - 2y - 5z - 2t + 5 \end{cases}$

265. $\begin{cases} x' = 4x + 3y - 3z + 3\sin t + 3\cos t \\ y' = 3x + y + z - \sin t - \cos t \\ z' = 8x + 5y - 3z + 2\sin t + 4\cos t \end{cases}$

266. $\begin{cases} x' = 4x + y - e^{2t} \\ y' = -2x + y \end{cases}$

267. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2e^t \end{cases}$

Ответы:

258. $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} - e^{2t} \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} - e^{2t} \end{cases}$

259. $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \dfrac{1}{2} t \cos t + 1 \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \dfrac{1}{2} t \sin t - \dfrac{1}{4} \cos t \end{cases}$

260. $$\begin{cases} x = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t} + \dfrac{4}{25}e^t - \dfrac{1}{36}e^{2t} \\ y = -C_1e^{-4t} - C_2e^{-4t} - C_2te^{-4t} + \dfrac{1}{25}e^t + \dfrac{7}{36}e^{2t} \end{cases}$$

261. $$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} + \sin t \\ y = -C_1e^t + C_2e^{-t} \end{cases}$$

262. $$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + 2C_2 + 9C_3e^t + 2tgt \\ y = C_1e^{2t} + C_2 + 7C_3e^t + tgt \\ z = C_1e^{2t} + 4C_3e^t \end{cases}$$

263. $$\begin{cases} x = C_1e^t - C_2\sin t + C_3\cos t - t\sin t + \cos t\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| \\ y = C_1e^t + C_2\sin t - C_3\cos t + t\sin t - \cos t\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| \\ z = C_1e^t + C_2\cos t + C_3\sin t + t\cos t + \sin t\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| \end{cases}$$

264. $$\begin{cases} x = -C_1e^{-3t} + C_2e^{-t} - C_3e^t - t \\ y = C_1e^{-3t} - 2C_2e^{-t} - C_3e^t + t \\ z = C_1e^{-3t} + C_3e^t + 1 \end{cases}$$

265. $$\begin{cases} x = 9C_1e^{-t} - C_2e^t \\ y = -14C_1e^{-t} + 4C_2e^t + C_3e^{2t} \\ z = C_1e^{-t} + 3C_2e^t + C_3e^{2t} + \sin t + \cos t \end{cases}$$

266. $$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + (t+1)e^{2t} \\ y = -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} - 2te^{2t} \end{cases}$$

267. $$\begin{cases} x = (C_1 + C_2t - t^2)e^t \\ y = (C_1 - C_2 + C_2t)e^t + (2t - t^2)e^t \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие. — М.: ЛЕНАНД, 2015.

2. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: Учебное пособие. — М.: Высш. шк., 1989.

3. *Шилин А.П.* Дифференциальные уравнения: подробный разбор решений типовых примеров, 1800 примеров, собранных в многовариантные задания по важнейшим темам курса. Коллекция важнейших типов решений алгоритмического характера: Учебное пособие. — М: ЛЕНАНД, 2017.

4. *Гисин В.Б., Денежкина И.Е., Зададаев С.А.* Практикум по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие. — М.: Финакадемия, 2006.

АЛЕКСАНДРОВА Ирина Александровна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Методическое пособие для вузов

Публикуется в авторской редакции
Верстка и дизайн обложки *Середы Т.В.*

Издательство «Прометей»
119002, г. Москва, ул. Арбат, д. 51, стр. 1
Тел./факс: +7 (495) 730-70-69
E-mail: info@prometej.su

Подписано в печать .2019
Формат 60×84/16. Объем 7,625 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ