Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие
по дисциплине «Методы оптимизации»
Часть II

Т.В. Золотова

Москва 2018

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)

Департамент анализа данных, принятия решений
и финансовых технологий

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие
Часть II

Т.В. Золотова

Утверждено на заседании Совета департамента
анализа данных, принятия решений и финансовых технологий
(протокол № 9 от 20.02.2018 г.)

Москва 2018

УДК 519.8(075.8)
ББК 65в6
З-81

Рецензент: И.В. Трегуб, д.э.н., профессор Департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

Т.В. Золотова. Методы оптимизации. Учебное пособие. Часть II. – М.: Финансовый университет, Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, 2018. – 119 с.

Издание предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика» и содержит задачи многокритериальной оптимизации, задачи оптимизации в условиях неопределенности и риска, приведены примеры постановки и решения финансово-экономических задач.

УДК 519.8(075.8)
ББК 65в6

Учебное издание

Т.В.Золотова

Методы оптимизации

Учебное пособие

Компьютерный набор, верстка: ***Т.В.Золотова***

Формат 60x90/16. Гарнитура *Times New Roman*
Усл. п.л. 7,3. Изд. № 28.2 - 2018. Тираж - 0 экз.
Заказ № ______

Отпечатано в Финансовом университете

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В Части I учебного пособия «Методы оптимизации» были изложены методы оптимизации в условиях полной информированности об условиях, в которых принимается решение. Учебное пособие «Методы оптимизации. Часть II» посвящено методам оптимизации в условиях многокритериальности, случайного или неопределенного воздействия внешней среды. В первой главе рассматриваются многокритериальные модели предпочтений. Вторая глава посвящена методам решения многокритериальных задач. Третья глава содержит принципы оптимальности в условиях неопределенности, а также задачи оптимизации в условиях случайного воздействия внешней среды (на примере задач инвестирования).

Учебное пособие «Методы оптимизации» написано в соответствии с утвержденной программой дисциплины направления подготовки «Прикладная математика и информатика». Изучение дисциплины «Методы оптимизации» основывается на базе знаний, полученных студентами в ходе освоения дисциплин «Математический анализ», «Алгебра», «Теория вероятностей», «Математическая статистика».

В результате освоения изложенных в данном пособии разделов курса «Методы оптимизации» читатель должен:

знать

- понятие векторного критерия, критериального пространства, множества возможных оценок и выбираемых векторов, функции ценности и функции выбора;

- понятие бинарного отношения предпочтения и безразличия, свойства бинарного отношения, отношение порядка, лексикографическое отношение предпочтения;

- принцип Эджворта−Парето, определение множества недоминируемых решений и векторов, множества Парето-оптимальных векторов,

- принципы оптимальности и решающие правила;

- понятие риска, функции риска, управления риском, виды финансового риска;

- модели принятия решений на основе сверток критериев эффективности и риска: «математическое ожидание – дисперсия», свертка типа отношения, минимизация риска при ограничении по эффективности;

- модели принятия решений с использованием вероятностных функций риска;

- принципы оптимальности в задачах принятия решений в условиях полной неопределенности, свойства критериев оптимальности;

уметь

- формулировать задачу многокритериального выбора;

- строить кривые безразличия на множестве решений и множестве оценок, находить коэффициент замещения критериев;

- находить множество Парето-оптимальных оценок, строить множество Парето;

- определять количественную и качественную важность критериев;

- строить математическую модель задачи принятия решений в условиях полной неопределенности или риска;

- использовать методы векторной оптимизации для формализации задачи выбора портфеля ценных бумаг;

владеть

- методами нахождения решения в многокритериальных задачах: методом свертки критериев, идеальной точки, выделения главного критерия и перевода других в ограничения, пороговых значений и уступок, лексикографии, целевого программирования;

- методом анализа иерархий;

- методами обработки статистической информации для оценки параметров модели выбора решений.

Наряду со сведениями теоретического характера в каждой главе разбираются примеры и задачи, цель которых – уяснение основных понятий и математических методов. Кроме того, предложены задания для самостоятельного выполнения.

Дополнительные теоретические сведения для более глубокого изучения того или иного раздела можно получить из книг, приведенных в списке литературы.

Настоящее учебное пособие адресовано студентам, обучающимся по различным направлениям подготовки, учебные планы которых включают дисциплины «Методы оптимизации», «Методы оптимальных решений», «Теория принятия решений», «Методы принятия управленческих решений», «Исследование операций». Оно может найти применение в обучении студентов по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика», «Бизнес-информатика» и другим направлениям подготовки бакалавров, а также может оказаться полезным магистрантам и аспирантам, интересующимся проблемами оптимизации и новыми областями приложений.

Глава 1. ЗАДАЧА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

Чрезвычайно широкий и крайне важный с практической точки зрения класс задач оптимизации составляют многокритериальные задачи, в которых качество принимаемого решения оценивается по нескольким критериям одновременно. Успешное решение многокритериальных задач невозможно без использования различного рода сведений о предпочтениях лица, принимающего решение. При этом одним из самых главных источников таких сведений является информация об относительной важности критериев. Но прежде чем учиться выявлять и использовать эту информацию, необходимо выяснить, что она собой представляет. Какой смысл содержит высказывание о том, что один критерий важнее другого критерия? Как имеющуюся в распоряжении информацию об относительной важности критериев можно использовать в процессе принятия решений? Обсуждению и решению этих и близких к ним вопросов посвящена эта глава.

1.1. Моделирование предпочтений

Рассмотрим ситуации, когда имеется несколько числовых функций $f_1, f_2, ..., f_m$, $m \geq 2$, определенных на множестве возможных решений X. В зависимости от типа задачи принятия решений эти функции называют критериями эффективности, целевыми функциями, показателями или критериями качества. В задаче выбора наилучшего проектного решения множество X состоит из нескольких конкурсных проектов (например, строительства нового предприятия), а критериями эффективности могут служить стоимость реализации проекта f_1 и величина прибыли f_2, которую обеспечит данное проектное решение (т. е. построенное предприятие). Если ограничить рассмотрение данной задачи лишь одним критерием эффективности, практическая значимость решения такой задачи будет незначительной. В самом деле, при использовании только первого критерия будет выбран самый дешевый проект, но его реализация может привести к недопустимо малой прибыли. С другой стороны, на строительство самого прибыльного проекта, выбранного на основе второго критерия эффективности, может просто не хватить имеющихся средств. Поэтому в данной задаче необходимо учитывать оба указанных критерия одновременно. Если дополнительно стараться минимизировать нежелательные экологические последствия строительства и функционирования предприятия, то к двум указанным следует добавить еще один – третий критерий, учитывающий экологический ущерб от строительства предприятия, и т.д. ЛПР в данной задаче является глава администрации района, на территории которого будет построено предприятие, при условии, что это предприятие является государственным. Если же предприятие – частное, то в качестве ЛПР выступает глава соответствующей фирмы.

Указанные выше числовые функции $f_1, f_2, ..., f_m$ образуют **векторный критерий**

$$f = (f_1, f_2, ..., f_m), \tag{1.1}$$

который принимает значения в пространстве m-мерных векторов R^m. Это пространство называют **критериальным пространством** или пространством оценок, а всякое значение $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \in R^m$ векторного критерия f при определенном $x \in X$ именуют векторной оценкой возможного решения x. Все возможные векторные оценки образуют **множество возможных оценок** (возможных векторов) $Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x), x \in X\}$.

Обозначим **множество выбираемых решений** Sel X, которое представляет собой решение задачи выбора, Sel $X \subset X$. Наряду с множеством выбираемых решений удобно ввести в рассмотрение **множество выбираемых векторов** (выбираемых оценок) Sel $Y=f$ (Sel X)$=\{y \in Y \mid y=f(x), x \in \text{Sel } X\}$, представляющее собой некоторое подмножество критериального пространства R^m.

Для того чтобы осуществить более обоснованный выбор, следует помимо векторного критерия располагать какими-то дополнительными сведениями о предпочтениях ЛПР. С этой целью необходимо включить в многокритериальную задачу еще один элемент, который позволил бы выразить и описать эти предпочтения. Рассмотрим два возможных решения x' и x''. Предположим, что после предъявления ЛПР этой пары решений, оно выбирает (отдает предпочтение) первому из них. В этом случае пишут $x' \succ_X x''$. Знак $\succ_X$ служит для обозначений предпочтений данного ЛПР и называется отношением *строгого предпочтения* или, короче, **отношением предпочтения**. Отношение строгого предпочтения означает, что решение x' строго предпочтительнее, чем x''. Отношение *безразличия* означает, что решения x' и x'' одинаковы по предпочтительности (если выбор ограничить двумя этими решениями, то безразлично, какой из них взять); записывается как $x' \sim x''$. Отношение *нестрогого предпочтения* означает, что решение x' не менее предпочтителен, чем x'', т.е. отношение нестрогого предпочтения есть объединение отношений строгого предпочтения и отношения безразличия); записывается как $x' \succeq_X x''$.

Отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений, естественным образом

$$f(x') \succ_Y f(x'') \Leftrightarrow x' \succ_X x'' \text{для } x',\ x'' \in X \tag{1.2}$$

порождает отношение предпочтения $\succ_Y$ на множестве возможных векторов Y. Тем самым, вектор $y' = f(x')$ является предпочтительнее вектора $y'' = f(x'')$ (т.е. $y' \succ_Y y''$) тогда и только тогда, когда решение x' предпочтительнее решения x'' (т.е. $x' \succ_X x''$).

Для описания и изучения введенного выше отношения предпочтения существует специальное математическое понятие – бинарное отношение. Пусть имеются два произвольных множества A и B. Декартовым произведением этих множеств называется множество, обозначаемое $A\times B$ и определяемое равенством $A\times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Бинарным отношением $\Re$, заданным на множестве A, называется подмножество декартова произведения $A\times A$, т. е. $\Re \subset A\times A$. Другими словами, всякое множество пар, составленных из элементов множества A, образует некоторое бинарное отношение. В частности, самым «широким» бинарным отношением является множество $\Re = A\times A$, совпадающее с данным декартовым произведением. Если имеет место включение $(a, b) \in \Re$, то обычно пишут $a \Re b$ и говорят, что *элемент a находится в отношении* $\Re$ *с элементом* b. Заметим, что в общем случае из $a \Re b$ не следует выполнение соотношения $b \Re a$.

Приведем примеры некоторых бинарных отношений. Из курса арифметики известен целый ряд бинарных отношений, определенных на множестве вещественных чисел: =, $\geqq$, $\leqq$, > и <. В теории множеств рассматривается бинарное отношение включения $\subset$, заданное на множестве всех подмножеств некоторого фиксированного множества. Введем следующие активно используемые в дальнейшем изложении бинарные отношения для произвольных векторов $a=(a_1, a_2, ..., a_m)$ и $b=(b_1, b_2, ..., b_m)$ пространства R^m:

$a > b \Leftrightarrow a_i > b_i$, $I = 1, 2, ..., m$;

$a \geqq b \Leftrightarrow a_i \geqq b_i$, $I = 1, 2, ..., m$;

$a \geq b \Leftrightarrow a_i \geqq b_i$ и $a \neq b$.

Выполнение последнего соотношения $a \geq b$ означает, что каждая компонента вектора a больше либо равна соответствующей компоненты вектора b, причем хотя бы одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

В зависимости от свойств, которыми обладают бинарные отношения, производят их типизацию. Приведем определения некоторых распространенных типов бинарных отношений.

Бинарное отношение $\Re$, заданное на множестве A, называют

– *рефлексивным*, если соотношение $a \Re a$ имеет место для всех $a \in A$;

– *иррефлексивным*, если соотношение $a \Re a$ не выполняется ни для одного $a \in A$;

– *симметричным*, если всякий раз из выполнения соотношения $a \Re b$ для элементов $a, b \in A$ следует выполнение соотношения $b \Re a$;

– *асимметричным*, если из выполнения соотношения $a \Re b$ для элементов a, $b \in A$ всегда следует, что соотношение $b \Re a$ места не имеет;

– *антисимметричным*, если всякий раз из выполнения соотношений $a\Re b$, $b\Re a$ для элементов $a, b\in A$ вытекает равенство $a = b$;

– *транзитивным*, если для любой тройки элементов $a, b, c\in A$ из выполнения соотношений $a\Re b$, $b\Re c$ всегда следует справедливость соотношения $a\Re c$;

– *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если для любых трех элементов $a, b, c\in A$ и произвольного положительного числа α из выполнения соотношения $a\Re b$ всегда вытекает соотношение $(\alpha\cdot a + c)\Re(\alpha\cdot b + c)$ (здесь считается, что $A=R^m$);

– *полным*, если для любой пары элементов $a, b\in A$ выполняется соотношение $a\Re b$, или соотношение $b\Re a$, или оба эти соотношения одновременно;

– *частичным*, если это отношение не является полным.

Отношения равенства = и нестрогого неравенства $\geqq$ дают примеры рефлексивных, а отношение строгого неравенства > и отношение ≥ – иррефлексивных отношений на R^m. Отношения равенства и нестрогого неравенства являются симметричным и антисимметричными, а отношения > и ≥ – асимметричны. Все отношения =, ≥, >, $\geqq$ транзитивны и инвариантны относительно линейного положительного преобразования. Отношения равенства и отношение строгого неравенства, очевидно, являются частичными. Отношение нестрогого неравенства $\geqq$, рассматриваемое на множестве чисел, является полным, потому, что для любых двух чисел a и b выполнено $a\geqq b$, либо $b\geqq a$, либо оба эти неравенства одновременно. Если же отношения нестрогого неравенства рассмотреть на множестве векторов R^m при $m > 1$, то оно окажется лишь частичным.

Нетрудно проверить, что всякое асимметричное отношение иррефлексивно. Действительно, если, напротив, некоторое асимметричное отношение $\Re$ не является иррефлексивным, то для некоторого $a\in A$ выполнено соотношение $a\Re a$. Но благодаря асимметричности данного отношения последнее соотношение не должно иметь места. Полученное противоречие устанавливает иррефлексивность $\Re$.

Бинарное отношение $\Re$, заданное на множестве A, называют

– *порядком* (*отношением порядка*), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

– *строгим порядком* (*отношением строгого порядка*), если оно является иррефлексивным и транзитивным;

– *линейным порядком*, если оно является полным порядком.

Из определений следует, что строгий порядок и линейный порядок являются представителями отношений порядка. Отношение нестрогого неравенства $\geqq$ на множестве вещественных чисел представляет собой линейный порядок, тогда как на множестве векторов это отношение будет лишь частичным. Отношение $\geq$, рассматриваемое на множестве векторов, является строгим частичным порядком.

Покажем, что *всякое отношение строгого порядка является асимметричным*. Предположим противное: некоторое отношение $\Re$ иррефлексивно и транзитивно, но не является асимметричным. Это означает, что найдется пара элементов a, $b \in A$, для которой выполнены соотношения $a \Re b$ и $b \Re a$ одновременно. На основании транзитивности отсюда следует $a \Re a$, что несовместимо с условием иррефлексивности отношения $\Re$.

Еще один пример строгого порядка, заданного на пространстве R^m, дает **лексикографическое отношение порядка**, задаваемое следующим образом. Вектор $y' = (y'_1, y'_2, ..., y'_m)$ *лексикографически больше* вектора $y'' = (y''_1, y''_2, ..., y''_m)$ тогда и только тогда, когда выполнено какое-либо одно из следующих условий

1) $y'_1 > y''_1$;

2) $y'_1 = y''_1$, $y'_2 > y''_2$;

3) $y'_1 = y''_1$, $y'_2 = y''_2$, $y'_3 > y''_3$;

....

m) $y'_i = y''_i, i = 1, ..., m-1$, $y'_m > y''_m$.

Нетрудно понять, что любые два вектора пространства R^m либо равны друг другу, либо один из них лексикографически больше другого вектора.

Рассмотрим **задачу многокритериального выбора**, включающую множество возможных решений X, векторный критерий f вида (1.1) и отношение предпочтения $\succ_X$. Поскольку отношение предпочтения задается на парах возможных решений, то, как нетрудно понять, оно представляет собой некоторое бинарное отношение.

Предположим, что ЛПР в процессе выбора ведет себя «разумно» и обсудим требования, которым в таком случае должно удовлетворять его бинарное отношение предпочтения.

Напомним, что отношение предпочтения $\succ_X$ является отношением строгого предпочтения в том смысле, что выполнение соотношения $x \succ_X x$ невозможно ни для какого решения $x \in X$, поскольку ни одно решение не может быть строго предпочтительнее самого себя. В терминах рассмотренных бинарных отношений это означает, что отношение предпочтения должно быть иррефлексивным. Тем самым, далее при изучении задач принятия решений будут рассматриваться только такие отношения предпочтения, на которые наложено требование иррефлексивности.

Рассмотрим ситуацию, когда одно решение предпочтительнее второго, а оно, в свою очередь, предпочтительнее некоторого третьего решения. В таком положении ЛПР при сравнении первого и третьего решения всегда выберет первое. Здесь происходит примерно то же самое, что и при сравнении чисел с помощью отношения строгого неравенства. Например, если 5 > 3 и 3 > 1, то непременно выполнено 5 > 1. В терминах возможных решений это свойство может быть сформулировано следующим образом: для любой тройки возможных решений x', x'', x''' из выполнения соотношений $x' \succ_X x''$ и $x'' \succ_X x'''$ обязательно следует справедливость соотношения $x' \succ_X x'''$. На языке бинарных отношений это означает, что отношение предпочтения, используемое в задачах многокритериального выбора, должно быть подчинено требованию транзитивности.

В соответствии с приведенными рассуждениями сформулируем условие (требование), которому должны удовлетворять все рассматриваемые в данной книге бинарные отношения предпочтения: *отношение предпочтения* $\succ_X$, *которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, представляет собой строгий порядок, т. е. является иррефлексивным и транзитивным.*

На основании доказанного выше отношение предпочтения, удовлетворяющее данному требованию, обязательно будет асимметричным.

Технически удобным средством описания предпочтений ЛПР является функция ценности (полезности). Действительная функция u, заданная на множестве X и представляющая отношение строгого порядка, называется **функцией полезности** (ценности), если она монотонна, т.е. $\forall x', x'' \in X \quad u(x') > u(x'') \Leftrightarrow x' \succ_X x''$. Функция ценности является качественным критерием: она определена с точностью до произвольного возрастающего преобразования. Принятие решений сводится к задаче, в которой принципом выбора является максимизация полезности.

Если заданное предпочтение не представимо функцией полезности (не является, например, иррефлексивным или транзитивным), то максимизация полезности не может служить принципом выбора. Само же предпочтение, очевидно, является достаточной основой выбора, несмотря на нетранзитивность или другие его недостатки, если наиболее предпочитаемая альтернатива существует.

Предположим, что предпочтение неизвестно, но известен оптимальный выбор ЛПР: для каждого Z из некоторого семейства $\Im$ подмножества X задано множество $r(Z) \subset Z$ наиболее предпочитаемых в Z решений. Пусть $\Im$ – некоторое семейство подмножеств множества X. Отображение r: $\Im \to X$, $r(Z) \subset Z$, называется **функцией выбора**.

Если ставить вопрос о том, как по функции выбора восстановить предпочтение индивида, т. е. решать задачу обратную задаче принятия решений, то обязательно сталкиваемся с некоторыми принципами рациональности самих функций выбора. Функция выбора r выглядела бы странно, если, согласно ей, ЛПР их трех элементов $\{x, y, z\}$ будет выбирать x, а из двух элементов $\{x, y\}$ – не x, а y; или если он будет выбирать x из $\{x, y\}$, y из $\{y, z\}$, а z из $\{x, y, z\}$.

Решение задачи многокритериального выбора заключается в отыскании множества выбираемых решений Sel X, поэтому выясним, каким образом сведения об отношении предпочтения могут быть использованы в процессе решения задачи многокритериального выбора.

Рассмотрим два произвольных возможных решения x' и x''. Для них имеет место один и только один случай из следующих трех:

– справедливо соотношение $x' \succ_X x''$, а соотношение $x'' \succ_X x'$ не выполняется;

– справедливо соотношение $x'' \succ_X x'$, а соотношение $x \succ_X x''$ не выполняется;

– не выполняется ни соотношение $x' \succ_X x''$, ни соотношение $x'' \succ_X x'$.

Заметим, что четвертый случай, когда оба участвующих здесь соотношения $x' \succ_X x''$ и $x'' \succ_X x'$ выполняются, невозможен благодаря асимметричности отношения предпочтения $\succ_X$.

В первом указанном выше случае, т.е. при выполнении соотношения $x' \succ_X x''$, говорят, что решение x' *доминирует* решение x'' (по отношению $\succ_X$). Во втором случае x'' *доминирует* x'. Если же реализуется третий случай, то говорят, что решения x' и x'' *не сравнимы* по отношению предпочтения.

Пусть для некоторого возможного решения x'' найдется такое возможное решение x', что выполнено соотношение $x' \succ_X x''$. По определению отношения предпочтения это означает, что из данной пары решений ЛПР выберет первое решение. Тогда второе решение x'' не может быть выбранным из данной пары x'' и x', так как это означало бы выполнение соотношения $x'' \succ_X x'$, противоречащее вместе с $x' \succ_X x''$ условию асимметричности отношения $\succ_X$. Сказанное в терминах множества выбираемых решений можно выразить в виде следующей эквивалентности $x' \succ x'' \Leftrightarrow$ Sel $\{x', x''\}=\{x'\}$, $x', x'' \in X$.

Если второе решение x'' не выбирается из пары в силу того, что для него в этой паре есть лучшее решение, то, рассматривая x'' в пределах всего множества возможных решений X, разумно предположить, что решение x'' в таком случае не может быть выбранным и из всего множества возможных решений, так как для него в X существует, по крайней мере, одно заведомо более предпочтительное решение x'.

Приведенные рассуждения показывают, что при выборе первого решения из пары x', x'' естественно считать, что второе решение не может оказаться выбранным и из всего множества возможных решений X. Тем самым, всюду далее будет предполагаться выполненным следующее требование, которое выразим в виде следующей аксиомы.

Аксиома 1.1 (исключение доминируемых решений). *Если для некоторой пары решений* x', $x'' \in X$ *имеет место соотношение* $x' \succ_X x''$, то $x'' \notin \mathrm{Sel}\, X$.

В аксиоме 1.1 участвует не только отношение предпочтения $\succ_X$, которым руководствуется ЛПР в процессе принятия решений, но и множество Sel X. Это означает, что данное требование следует рассматривать как определенное ограничение на множество выбираемых решений. А именно, любое множество выбираемых решений не должно содержать ни одного такого решения, для которого может найтись более предпочтительное решение. Более точно и полно этот факт будет выражен далее в лемме 1.1.

Нетрудно привести простой содержательный пример, в котором аксиома исключения не выполняется. Рассмотрим задачу выбора из трех возможных претендентов на два вакантных места. Считается, что оба вакантных места обязательно должны быть заполнены. Предположим, что при сравнении претендентов выяснилось, что первый является предпочтительнее второго и третьего, а второй предпочтительнее третьего. Поскольку согласно условию из трех кандидатов обязательно следует выбрать двоих, то, очевидно, ими окажутся первый и второй. Таким образом, второй претендент из пары первых двух не выбирается, тем не менее из всего множества трех возможных претендентов он оказывается выбранным. Следовательно, аксиома исключения доминируемых решений в этом примере нарушается.

В соответствии с аксиомой 1.1 любое доминируемое решение следует исключать из списка решений, претендующих на роль выбираемых. Исключение всех доминируемых решений приводит к множеству недоминируемых решений.

Множество недоминируемых решений обозначается Ndom X и определяется равенством $\mathrm{Ndom}\, X = \{x^* \in X \mid \bar{\exists} x \in X, \text{ что } x \succ_X x^*\}$.

Таким образом, Ndom X представляет собой определенное подмножество множества возможных решений X. В зависимости от вида множества X и конкретного типа отношения предпочтения $\succ_X$ множество недоминируемых решений может быть пустым (т. е. не содержать ни одного решения), состоять в точности из одного решения, содержать некоторое конечное число решений. состоять из бесконечного числа решений.

Лемма 1.1. *Для любого непустого множества выбираемых решений* Sel X, *удовлетворяющего аксиоме* 8.1, *справедливо включение*

$$\text{Sel } X \subset \text{Ndom } X. \qquad (1.3)$$

Доказательство. Если предположить, что включение (1.3) для некоторого непустого множества Sel X не имеет места, то среди элементов этого множества найдется решение $x'' \in$ Sel X, для которого выполнено соотношение $x'' \notin$Ndom X. Тогда, по определению множества недоминируемых решений, существует такое решение $x' \in X$, что $x' \succ_X x''$. Отсюда, используя аксиому 8.1, получаем $x'' \notin X$. Это противоречит начальному предположению о том, что x'' – выбранное решение. Лемма доказана.

Замечание. В формулировке леммы 1.1 утверждается, что включение (1.3) выполняется для произвольного непустого множества выбираемых решений. Если Sel $X=\varnothing$, то включение (1.3) также имеет место, поскольку, как принято в теории множеств, пустое множество содержится в качестве подмножества в любом множестве. Поэтому условие непустоты множества выбираемых решений в формулировке леммы 1.1 можно было бы опустить; при этом справедливость рассматриваемой леммы не нарушается. Но тогда при доказательстве следовало бы специально оговаривать этот «вырожденный» случай, который с практической точки зрения интереса не представляет (если нет выбора, то и нет смысла изучать законы такого выбора). По этой причине здесь и всюду далее в подобных ситуациях, когда речь пойдет о включениях, содержащих множество выбираемых решений (или множество выбираемых векторов), мы будем подчеркивать непустоту этих множеств, чтобы сразу исключить из рассмотрения бессодержательные с практической точки зрения случаи.

Включение (1.3) устанавливает, что для достаточно широкого класса задач (а именно, для тех задач, для которых выполнена аксиома 1.1): *выбор решений следует производить только среди недоминируемых решений.* Кроме того, поскольку все последующие требования (аксиомы), предъявляемые к рассматриваемому здесь классу задач многокритериального выбора, как мы увидим далее, не содержат множества выбираемых решений (и выбираемых векторов), включение (1.3) показывает, что выбранным может оказаться любое подмножество множества недоминируемых решений.

Когда Sel $X \neq \varnothing$ и множество недоминируемых решений состоит из единственного элемента, задача выбора в принципе решена, поскольку это единственное недоминируемое решение в силу (1.3) является выбираемым решением и остается только найти его. Заметим, что подобного рода ситуации в практике встречаются крайне редко. Чаще всего, тех сведений, которые имеются об отношении предпочтения, оказывается недостаточно не только для нахождения множества выбираемых решений, но и для построения множества недоминируемых решений.

Тем не менее, даже неполные, фрагментарные сведения об отношении предпочтения ЛПР позволяют из всего множества возможных решений исключить доминируемые решения (как заведомо непригодные для выбора) и, тем самым, упростить последующий выбор. Наряду с множеством недоминируемых решений удобно ввести в рассмотрение **множество недоминируемых векторов** (недоминируемых оценок):

$\mathrm{Ndom}\, Y=f\,(\mathrm{Ndom}\, X)=\{f(x^*)\in Y \mid \bar{\exists} x\in X,\, x\succ_X x^*\}=\{y^*\in Y \mid \bar{\exists} y\in Y,\, y\succ_Y y^*\}$.

Для введенного множества недоминируемых векторов аксиому 1.1 и лемму 1.1 можно переформулировать следующим образом.

Аксиома 1.2 (исключение доминируемых векторов). *Если для некоторой пары векторов* $y', y''\in Y$ *выполнено соотношение* $y'\succ_Y y''$, то $y''\notin \mathrm{Sel}\, Y$.

Лемма 1.2. (в терминах оценок). *Для любого непустого множества выбираемых векторов* $\mathrm{Sel}\, Y$, *удовлетворяющего аксиоме* 1.2, *справедливо включение* $\mathrm{Sel}\, Y\subset \mathrm{Ndom}\, Y$.

Вопрос построения множества недоминируемых решений и/или векторов представляется чрезвычайно сложным, однако для конечного множества возможных решений X (множества возможных векторов Y) он решается достаточно просто. Итак, пусть множество возможных решений X состоит из конечного числа элементов, а отношение предпочтения является иррефлексивным и транзитивным. Для построения множества недоминируемых решений $\mathrm{Ndom}\, X$ прежде всего следует перенумеровать все возможные решения. Пусть, например, $X=X_1=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Первый шаг алгоритма нахождения множества недоминируемых решений заключается в последовательном сравнении первого решения x_1 со всеми остальными $x_2, ..., x_n$. Это сравнение заключается в проверке справедливости соотношения $x_1\succ_X x_i$ и соотношения $x_i\succ_X x_1$ при каждом $i=2, ..., n$. В случае истинности для некоторого i первого соотношения $x_1\succ_X x_i$, доминируемое решение x_i следует удалить из множества X_1 и продолжить указанную проверку для следующего за x_i решения. При выполнении второго соотношения $x_i\succ_X x_1$ удалению подлежит первое решение x_1, после чего сразу же следует перейти ко второму шагу. Если же ни одно из двух приведенных соотношений $x_1\succ_X x_i$ и $x_i\succ_X x_1$ не является истинным, ничего удалять не нужно. В том случае, когда сравнения решения x_1 были проведены со всеми остальными решениями $x_2, ..., x_n$, и ни для какого $i=2, ..., n$ не оказалось выполненным соотношение $x_i\succ_X x_1$, первое решение следует запомнить как недоминируемое и удалить его из (оставшегося) множества возможных решений. Указанные действия описывают первый шаг алгоритма.

Если после выполнения первого шага во множестве возможных решений не осталось ни одного решения (т.е. все оказались удаленными), то алгоритм заканчивает работу. При этом в памяти будет храниться одно недоминируемое решение x_1. Оно и представляет собой множество недоминируемых решений. В противном случае (т.е. когда не все решения оказались удаленными), необходимо перейти ко второму шагу.

Обозначим множество, оставшееся после выполнения первого шага X_2.

Второй шаг полностью аналогичен первому. А именно, сначала нужно перенумеровать элементы множества X_2. После этого следует провести последовательное сравнение первого решения этого множества со всеми остальными его элементами. При этом сравнение осуществляется совершенно аналогично тому, как это было описано на первом шаге. Выполнение сравнений на втором шаге либо закончится удалением первого решения множества X_2, как доминируемого, либо такого удаления не произойдет. Во втором случае это решение следует запомнить как недоминируемое, а затем удалить его из множества X_2. Если после этого во множестве возможных решений не останется ни одного решения, то вычисления заканчиваются; в памяти будет храниться множество недоминируемых решений. В противном случае к оставшемуся непустому множеству возможных решений нужно применить аналогичный третий шаг алгоритма и т.д. В результате, после окончания работы алгоритма в памяти будет храниться множество всех недоминируемых решений Ndom X.

На каждом шаге алгоритма происходит удаление, по крайней мере, одного возможного решения. Следовательно, после выполнения некоторого конечного числа шагов будут удалены все возможные решения кроме некоторого одного и алгоритм закончит свою работу, так как оставшееся решение не с чем будет сравнивать и потому оно также будет недоминируемым. Это рассуждение доказывает конечность приведенного алгоритма.

Применение описанного алгоритма к произвольному конечному множеству возможных решений за конечное число шагов приведет к отысканию, по крайней мере, одного недоминируемого решения. Действительно, недоминируемым запоминается лишь первое решение из множества, которое участвует в выполнении очередного шага алгоритма. Если на всех предыдущих шагах (кроме последнего) не было выявлено ни одного недоминируе мого решения, то таковым должно быть последнее решение, поскольку его не может доминировать ни одно из всех остальных возможных решений. Тем самым, получен следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть множество возможных решений X* (*множество возможных векторов Y*) *состоит из конечного числа элементов. Если отношение предпочтения* $\succ_X$ *является иррефлексивным и транзитивным, то множество возможных решений* (*векторов*) *содержит хотя бы одно недоминируемое решение* (*один недоминируемый вектор*), *т.е.* Ndom $X \neq \varnothing$ (Ndom $Y \neq \varnothing$).

Чаще всего в практических задачах выбора отношение предпочтения задано лишь частично, либо вообще не задано и его следует построить прежде, чем приступать к решению задачи. В таких случаях схему приведенного выше алгоритма можно использовать для опроса ЛПР с целью выявления его отношения предпочтения и одновременного построения множества недоминируемых решений. Для этого ЛПР сначала предлагают выбрать предпочтительное решение из каждой пары, содержащей первое решение. При этом доминируемые решения, по мере их выявления, сразу же удаляются. Далее, для сравнения предлагаются все пары, содержащие первое решение из множества, оставшегося после первого шага, и т.д. Кроме того, необходимо отметить, что схема приведенного выше алгоритма может быть использована для построения множества Парето.

1.2. Многокритериальные модели предпочтений

В практической деятельности часто встречаются задачи, заключающиеся в поиске лучшего (оптимального) решения при наличии различных несводимых друг к другу критериев эффективности. Примеров таких задач множество. Приведем некоторые из них.

Мэр города должен решить, следует ли одобрить строительство новой электростанции. Потребность в увеличении производства электроэнергии существует, но новая электростанция увеличит загрязненность воздушной среды, особенно из-за увеличения содержания в ней таких веществ, как сернистый ангидрид, твердые частицы, окислы азота. Мэр вынужден рассмотреть возможные последствия принимаемого решения с точки зрения таких факторов, как: здоровье жителей (заболеваемость и смертность), экономическое положение жителей, психологическое состояние жителей, экономика города и штата, бизнес, местная политика. Эти широкие категории и некоторые другие должны быть уточнены, приведены к более понятному виду, прежде чем можно будет произвести измерения и оценки и приступить к комплексному и весьма тонкому сбалансированию возможных последствий. Даже если все последствия каждого возможного действия мэра можно заранее точно предвидеть (что едва ли возможно в действительности), все равно перед мэром будет стоять (сложная проблема установления сравнительной «ценности».

Рассмотрим вопрос размещения аэропорта: целесообразно ли модернизировать существующий аэропорт или построить новый, к северу от города? Для данной ситуации примера характерно то, что последствия возможных решений разнесены во времени, т.е.

имеем дело не со статической, а с динамической задачей принятия решений, т.к. решение связано с фазами развития на протяжении какого-то срока. В задаче имеется множество неконтролируемых факторов, включая возможность появления технических новшеств (например, глушителей шума, новых методов строительства взлетно-посадочных полос на заболоченной почве, новшеств в области увеличения маневренности коммерческих самолетов), возможность изменения потребности в международных перевозках и появления в будущем новых требований к безопасности и т.п. Стоящая проблема выбора оказывается весьма сложной. Нужно сбалансировать такие цели, как: сокращение затрат со стороны федерального правительства; увеличение пропускной способности аэропорта; повышение безопасности системы; уменьшение шума; сокращение времени поездки в аэропорт; сокращение числа переселяемых людей в связи с расширением аэропорта; улучшение регионального развития (например, строительство дорог); достижение политических целей.

Принятие решения о строительстве дороги в объезд города должно учитывать такие факторы, как выигрыш города в целом по соображениям экологии, проигрыш отдельных предприятий и фирм, например, из-за уменьшения проезжающих через город потенциальных покупателей и многие другие. При оценке технического изделия основными критериями служат его технические характеристики, надежность, внешний вид и др. При выборе кандидата на должность важнейшими критериями оценки являются квалификация, образование, эрудиция, возраст, коммуникабельность и т.д. При выборе площадок для строительства промышленных объектов необходимо учитывать группы критериев: экономические, экологические, социальные, критерии безопасности и т. д. Оценка качества продукции (технического уровня разработок) осуществляется по множеству потребительских свойств. Следствием данной задачи является определение цены на продукцию на основе потребительских свойств. В основе проектирования лежит принцип многовариантности. Каждый из вариантов в абсолютном большинстве оценивается множеством критериев. В этой связи следует подчеркнуть, что системы автоматизированного проектирования должны включать подсистему выбора и оценки решений по многим критериям. В экономических задачах основными критериями служат экономическая эффективность и стоимость, каждый из которых, в свою очередь, может быть подразделен на более частные.

Примеры показывают, что исследуемое явление, объект или процесс рассматриваются с различных точек зрения. Поэтому для формализации каждой точки зрения используется соответствующая числовая функция.

Итак, постановка всякой задачи многокритериального выбора включает множество возможных решений X, векторный критерий f, отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений. Само ЛПР в постановку задачи многокритериального выбора не включено. В этом нет необходимости. Подразумевается, что все его устремления, вкусы, пристрастия и предпочтения, оказывающие влияние на процесс выбора, «материализованы» в терминах векторного критерия и отношения предпочтения. Приведенный список основных компонентов задачи многокритериального выбора в дальнейшем при необходимости может быть расширен за счет добавления каких-то новых объектов, с помощью которых дополнительно удастся учесть интересы, мотивацию и пристрастия ЛПР.

Приведенная задача многокритериального выбора сформулирована в терминах решений. Нередко данную задачу формулируют в терминах векторов. В таком случае она содержит два объекта: множество возможных векторов Y, $Y \subset R^m$, отношение $\succ_Y$, заданное на множестве возможных векторов.

Отметим, что если y' и y'' – различные точки в пространстве оценок, то они не могут быть одинаковыми по предпочтительности при лексикографическом упорядочении.

Рассмотрим предпочтения, для которых характерно следующее: если y является внутренней точкой множества Y, то для достаточно малого уменьшения y_i найдется достаточно большое компенсирующее увеличение y_j. В случае двумерного критериального пространства ($X \subset R^2$) это означает, что каждая точка y лежит на некоторой **кривой безразличия**. Если ЛПР все равно, достигнет он y' или же y'', то это выражается в том, что обе точки y' и y'' лежат на одной и той же кривой безразличия (равноценности). Если же точка y''' предпочтительнее, чем y' (по мнению ЛПР), то y''' расположена на более высокой (предпочтительной) кривой безразличия. В общем случае через всякую точку y в пространстве оценок проходит поверхность безразличия, включающая все точки, одинаковые по предпочтительности с y. Эти поверхности безразличия будут кривыми при n=2.

Введем понятие функции ценности на множестве оценок. Функция v, которая каждой точке y пространства оценок ставит в соответствие действительное число $v(y)$, называется **функцией ценности**, представляющей структуру предпочтений принимающего решение, в том случае, если $y' \sim y'' \Leftrightarrow v(y') = v(y'')$; $y' \succ_Y y'' \Leftrightarrow v(y') > v(y'')$. Если v – функция ценности, отражающая предпочтения ЛПР, то рассматриваемая задача может быть сформулирована в форме стандартной задачи оптимизации: найти $x \in X$, которое максимизирует $v(f(x))$. При заданной функции ценности v любые две точки y' и y'', такие, что $v(y') = v(y'')$, должны быть одинаковыми по предпочтительности и лежать на одной и той же поверхности безразличия. Следовательно, если задана v, то в принципе можно найти кривые безразличия.

Предположим, что f_1 и f_2 обозначают используемые критерии и при этом f_2 увеличен на Δ единиц. Требуется определить насколько нужно уменьшить f_1, чтобы компенсировать данное увеличение f_2. Во многих случаях ответ будет зависеть от уровней значений y_1 критерия f_1 и y_2 критерия f_2. Если в точке (y_1^*, y_2^*) мы согласны уступить λΔ единиц критерия f_1 за Δ единиц f_2, то мы будем говорить, что предельный **коэффициент замещения** f_1 на f_2 в (y_1^*, y_2^*) равен λ. Другими словами, λ примерно равен тому «количеству» f_1, которое мы согласны «заплатить» за единицу f_2, если мы имеем значение y_1 по критерию f_1 и y_2 по f_2. Строго говоря, мы должны были бы перейти к пределу при стремлении Δ к нулю. Полагая, что все функции имеют гладкие вторые производные, предельный коэффициент замещения равен взятому с обратным знаком тангенсу угла наклона касательной к кривой безразличия в точке (y_1^*, y_2^*) (в двухкритериальном пространстве). Таким образом, если у нас есть кривые безразличия, то мы можем вычислить локальные коэффициенты замещения. Если кривая безразличия, проходящая через точку (y_1^*, y_2^*), задается уравнением $v(y_1, y_2)=c$ или в дифференциальной форме $dv=v'_{y_1}dy_1+v'_{y_2}dy_2=$ =0, то предельный коэффициент замещения в точке (y_1^*, y_2^*) может быть получен по следующей формуле: $\lambda=-\left.\dfrac{dy_1}{dy_2}\right|_{y_1^*,y_2^*}=\dfrac{v'_{y_2}(y_1^*, y_2^*)}{v'_{y_1}(y_1^*, y_2^*)}$, где $v'_{y_1}(y_1^*, y_2^*)$ и $v'_{y_2}(y_1^*, y_2^*)$ – частные производные в точке (y_1^*, y_2^*) от v по первому и второму аргументу соответственно.

Пусть Y представляет собой непустое подмножество декартова произведения m множеств $Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_m$ (в частности, это имеет место в важном случае принятия решения по многим критериям). Декартово произведение образуется из всех возможных m элементов данных множеств, причем первым элементом является элемент первого множества, а вторым – элемент второго множества и т.д. Пусть определено отношение строгого предпочтения на Y, допускающее функцию полезности v. Возникает вопрос: как функция v выражается через некоторые функции полезности v_i соответственно на $Y_i,\ i=1,\ldots,m$? Допуская, что v_i является полезностью на $Y_i,\ i=1,\ldots,m$, покажем как глобальная полезность v дезагрегируется по индивидуальным полезностям v_i. Наиболее важным результатом в данном направлении является выражение полезности v в виде аддитивной функции. Будем говорить, что v является **аддитивной функцией полезности** для отношения $\succ_Y$ тогда и только тогда, когда она является вещественной функцией полезности на Y и существуют вещественные функции $v_1, v_2, \ldots, v_m$ (определенные на

$Y_1, Y_2,\ldots, Y_m$ соответственно), такие, что для всех $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ из Y справедливо равенство $v(y)=\sum_{i=1}^{m} v_i(y_i)$, $y_i \in Y_i$, $i=1,\ldots, m$.

Рассмотри вопрос существования аддитивной функции ценности на множестве критериев. Пусть $F_I \subset \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ – подмножество множества критериев, т.е. группа критериев с номерами из множества $I=\{i_1, \ldots, i_n\}$. $\bar{I}=\{1, \ldots, m\}\backslash I$. Тогда $F_{\bar{I}}$ – все остальные критерии, а векторная оценка y представляется в виде $(y_I, y_{\bar{I}})$. Говорят, что критерии F_I *не зависят по предпочтению* от критериев $F_{\bar{I}}$, если предпочтения для любых двух оценок $y=(y_I, y_{\bar{I}})$ и $y'=(y'_I, y_{\bar{I}})$, содержащих одинаковые компоненты с номерами из $\bar{I}$, не зависят от самих значений этих компонент.

Пример 1.1. $m=5$, $I=\{1, 3, 4\}$, $\bar{I}=\{2, 5\}$.

$y^1=(7, 1, 2, 8, 2)=(y_I^1, y_{\bar{I}}^1)$, где $y_I^1=(7, 2, 8)$, $y_{\bar{I}}^1=(1, 2)$.

$y^2=(4, 1, 8, 3, 2)=(y_I^2, y_{\bar{I}}^2)$, где $y_I^2=(4, 8, 3)$, $y_{\bar{I}}^2=(1, 2)$.

Таким образом, $y_{\bar{I}}^1=y_{\bar{I}}^2$. Если критерии F_I не зависят по предпочтению от критериев $F_{\bar{I}}$ и оценка y^1 предпочтительнее, чем оценка y^2, то и, например, оценка $y^3=(7, 4, 2, 8, 5)$ будет предпочтительнее, чем $y^4=(4, 4, 8, 3, 5)$, потому что их значения по критериям из группы F_I совпадают с соответствующими значениями оценок y^1 и y^2, а оценки по остальным критериям одинаковые. Таким образом, вместо $y_{\bar{I}}^1=y_{\bar{I}}^2=(1, 2)$ можно подставить любую оценку (a, b) и предпочтение сохранится: $(7, a, 2, 8, b)$ предпочтительнее, чем $(4, a, 8, 3, b)$.

Критерии $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *взаимонезависимы по предпочтению*, если каждое подмножество F этого множества критериев не зависит по предпочтению от своего дополнения. Взаимная независимость по предпочтению влечет за собой существование аддитивной функции ценности.

Теорема 1.2. Для критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$, $n \geq 3$, аддитивная функция ценности $u(y_1,\ldots,y_m)=\sum_{i=1}^{m} u_i(y_i)$, где u_i – функция ценности по критерию f_i, y_i – значение критерия f_i, существует тогда и только тогда, когда критерии взаимонезависимы по предпочтению.

При $n=2$, кроме взаимной независимости критериев, требуется выполнение условия соответственных замещений (при $n \geq 3$ оно выполняется автоматически):

$\forall y_1^*, y_2^*, y_1^{**}, y_2^{**}$, a, b, c, d если $(y_1^*, y_2^*) \sim (y_1^*-a, y_2^*+b)$ и $(y_1^*, y_2^{**}) \sim (y_1^*-a, y_2^{**}+c)$, то $(y_1^{**}, y_2^*) \sim (y_1^{**}-d, y_2^*+b)$ и $(y_1^{**}, y_2^{**}) \sim (y_1^{**}-d, y_2^{**}+c)$,

т.е., если увеличение на b и c разных значений y_2^* и y_2^{**} критерия f_2 при некотором опорном значении y_1^* критерия f_1 компенсируется одним и тем же уменьшением этого значения y_1^*

критерия f_1, то такие же увеличения b и c тех же значений y_2^* и y_2^{**} критерия f_2 сохраняются и при любом другом опорном значении y_1^{**} критерия f_1.

Непосредственно по определению проверить независимость критериев затруднительно, т.к. даже при небольших n возникает большое число вариантов, которые надо проверить.

Утверждение: если любая пара критериев $\{f_i, f_j\}$ не зависит по предпочтению от остальных (n-2) критериев, то все критерии f_1, f_2, ..., f_m взаимно независимы по предпочтению.

Таким образом, проверка сводится к установлению независимости только всех пар критериев от всех остальных критериев.

Построение аддитивной функции полезности может осуществляться шаговым методом совместного шкалирования или методом половинного деления.

1) Совместное шкалирование: поэтапная процедура.

Пусть m=2 и условие соответственных замещений выполнено, $v(y_1, y_2)=v_1(y_1)+v_2(y_2)$. Обозначим диапазоны изменения оценок y_1 и y_2: $y_{1\min} \le y_1 \le y_{1\max}$, $y_{2\min} \le y_2 \le y_{2\max}$. Полагаем $v(y_{1\min}, y_{2\min})=v_1(y_{1\min})=v_2(y_{2\min})=0$. Этим устанавливается начало отсчета для измерения.. Берем любое значение $y_1^1 > y_{1\min}$ достаточно близкое к $y_{1\min}$ и устанавливаем $v_1(y_1^1) = 1$. Этим устанавливается единица измерения. От ЛПР требуем указать y_2^1 такое, что $(y_1^1, y_{2\min}) \sim (y_{1\min}, y_2^1)$, для значения y_2^1 также $v_2(y_2^1) = 1$. Затем у ЛПР запрашиваем y_1^2 и y_2^2 такие, что $(y_1^2, y_{2\min}) \sim (y_1^1, y_2^1) \sim (y_{1\min}, y_2^2)$. Причем $v(y_1^1, y_2^1) = 1+1 = 2 \Rightarrow v_1(y_1^2) = v_2(y_2^2) = 2$. Далее у ЛПР запрашиваем y_1^3 и y_2^3 такие, что $(y_1^3, y_{2\min}) \sim (y_1^2, y_2^1) \sim (y_1^1, y_2^2) \sim (y_{1\min}, y_2^3) \Rightarrow$ $v_1(y_1^3) = v_2(y_2^3) = 3$ и т. д. Таким образом, получаем наборы значений $v_1(y_{1\min}), v_1(y_1^1), v_1(y_1^2), v_1(y_1^3), \ldots$, по которым с помощью метода интерполяции строятся функции $v_1(y_1)$ и $v_2(y_2)$.

Обратите внимание, как существенно взаимосвязаны функции v_1 и v_2: мы не можем полностью использовать ни одну из них без привлечения другой. Вышеописанный метод построения v_1 и v_2 дает конструктивное эвристическое (почти) доказательство того, что из справедливости условия соответственных замещений следует существование аддитивной структуры предпочтений. Построение было показано только на дискретном наборе точек, а для завершения доказательства мы должны были бы дробить интервалы (т. е. применять метод половинного деления) и использовать свойство непрерывности.

2) Метод половинного деления.

Метод позволяет находить функцию полезности в виде $v(y_1, y_2)=\lambda_1 v_1(y_1)+\lambda_2 v_2(y_2)$, где $v_1(y_{1\min}) = v_2(y_{2\min}) = 0$, $v_1(y_{1\max}) = v_2(y_{2\max}) = 1$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$.

Построим функцию v_1. ЛПР просим указать среднюю по полезности оценку $y_1^{0,5} \in [y_{1\min}, y_{1\min}]$, т. е. такую, что изменение полезности на $[y_{1\min}, y_1^{0,5}]$ равно изменению полезности на $[y_1^{0,5}, y_{1\max}]$. Устанавливаем $v_1(y_1^{0,5}) = 0{,}5$. Далее аналогично получаем $y_1^{0,25} \in [y_{1\min}, y_1^{0,5}] \Rightarrow v_1(y_1^{0,25}) = 0{,}25$ и $y_1^{0,75} \in [y_1^{0,5}, y_{1\max}] \Rightarrow v_1(y_1^{0,75}) = 0{,}75$ и т. д. С помощью метода интерполяции, восстанавливаем функцию v_1 по ее значениям в точках $y_1^{0,5}, y_1^{0,25}, y_1^{0,75}, \ldots$. Функция v_2 строится аналогично. Для нахождения весового коэффициента λ_1 достаточно запросить у ЛПР пару одинаковых по предпочтительности оценок: $(y_1', y_2') \sim (y_1'', y_2'')$. Тогда имеем $v(y_1', y_2') = v(y_1'', y_2'')$ или $\lambda_1 v_1(y_1') + (1-\lambda_1) v_2(y_2') = \lambda_1 v_1(y_1'') + (1-\lambda_1) v_2(y_2'')$. Из последнего равенства можно выразить λ_1, а $\lambda_2=1-\lambda_1$.

В постановке задачи многокритериального выбора имеется векторный критерий $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, каждая компонента f_i которого, как правило, характеризует определенную цель ЛПР, а стремление достичь этой цели в математических терминах нередко выражается в условии максимизации (или минимизации) функции f_i на множестве X. Отметим, что в некоторых задачах принятия решений могут встретиться критерии, которые не обязательно следует максимизировать или минимизировать. Например, иногда требуется получить некоторое среднее значение критерия или «удержать» его значения в определенных заданных пределах и т.п. В таких случаях используются не критерии f_i, а («частные») отношения предпочтения $\succ_i$. Однако, установлено, что во многих важных с практической точки зрения случаях (т. е. при некоторых «разумных» требованиях к $\succ_i$ и X) существует функция полезности (ценности) u_i, адекватно описывающая данное «частное» отношение предпочтения: для всех $x', x''\in X$ верна эквивалентность $x' \succ_i x'' \Leftrightarrow u_i(x') > u_i(x'')$ и $x' \sim_i x'' \Leftrightarrow u_i(x') = u_i(x'')$. Эти результаты показывают, что многие задачи, в которых изначально не требуется максимизация (или минимизация) критериев, могут быть, по крайней мере, теоретически, сведены к экстремальным задачам.

1.3. Оптимальность по Парето

Предположим, что ЛПР заинтересовано в получении по возможности бóльших значений каждой компоненты f_i векторного критерия f. В рамках многокритериальной задачи приходится ограничиваться уровнем строгости сформулированного допущения в том виде, в котором оно приведено выше. Однако внимательный анализ показывает его некоторую неопределенность, расплывчатость. Придадим обсуждаемому допущению строгую форму.

Для этого перейдем к оценкам и напомним, что бинарное отношение $\succ_Y$, заданное на множестве возможных векторов $Y = f(X)$, $Y \in R^m$: определяется согласно (1.2). Всюду далее будем считать выполненным следующее допущение, формулируемое в терминах векторов критериального пространства.

Аксиома 1.3 (продолжение отношения предпочтения). *Существует продолжение* $\succ$ *на все критериальное пространство* R^m *отношения* $\succ_Y$, *причем это продолжение* $\succ$ *является иррефлексивным и транзитивным отношением*.

Данное требование (не считая обязательную иррефлексивность и транзитивность) заключается в постулировании «расширенных» возможностей ЛПР сравнивать оценки по предпочтительности. В соответствии с ним для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$ выполняется одно и только одно из следующих трех соотношений: $y' \succ y''$; $y'' \succ y'$; не имеет места ни $y' \succ y''$, ни $y'' \succ y'$.

При этом отношение предпочтения $\succ$ на множестве возможных векторов Y совпадает с отношением $\succ_Y$, которое связано с отношением $\succ_X$. Иррефлексивность и транзитивность отношения $\succ$ означает наличие аналогичных свойств у отношения $\succ_Y$, откуда следует иррефлексивность и транзитивность отношения $\succ_X$. Поэтому требование иррефлексивности и транзитивности отношения $\succ_X$ с данного момента не является необходимым, т.к. это требование автоматически выполняется в условиях справедливости аксиомы 1.3.

Будем говорить, что i-й *критерий* f_i *согласован с отношением предпочтения* $\succ$, если для любых двух векторов y', $y'' \in R^m$, таких, что $y' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, ..., y'_m)$, $y'' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, ..., y'_m)$, $y'_i > y''_i$, следует $y' \succ y''$.

Содержательно согласованность данного критерия с отношением предпочтения означает, что ЛПР при прочих равных условиях заинтересовано в получении по возможности бóльших значений этого критерия. Взаимосвязь отношения предпочтения данного ЛПР с критериями оптимальности выразим в виде следующего требования.

Аксиома 1.4 (согласование критериев с отношением предпочтения). *Каждый из критериев* $f_1, f_2, ..., f_m$ *согласован с отношением предпочтения* $\succ$.

Заинтересованность ЛПР в получении по возможности бóльших значений всех компонент векторного критерия f можно также выразить в терминах так называемой аксиомы Парето.

Аксиома Парето (в терминах решений). *Для всех пар решений* x', $x'' \in X$, *для которых имеет место неравенство* $f(x') \geq f(x'')$, *выполняется соотношение* $x' \succ_X x''$.

Напомним, что запись $f(x') \geq f(x'')$ означает выполнение покомпонентных неравенств $f_i(x') \geqq f_i(x'')$ для всех i=1, 2, ..., m, причем $f(x') \neq f(x'')$.

Лемма 1.3. *Принятие аксиом* 1.3 *и* 1.4 *гарантирует выполнение аксиомы Парето*.

Если для некоторой пары возможных решений имеет место неравенство $f(x') \geq f(x'')$, то благодаря аксиоме Парето первое решение будет предпочтительнее второго, т. е. $x' \succ_X x''$. Тогда в соответствии с аксиомой 1.1 второе решение ни при каких обстоятельствах не может оказаться выбранным и его можно исключить из последующего учета в процессе принятия решений. Исключение всех подобного рода решений приводит к множеству Парето.

Множество Парето-оптимальных решений обозначается $P_f(X)$ и определяется равенством $P_f(X) = \{x^* \in X \mid \bar{\exists}\ x \in X$, что $f(x) \geq f(x^*)\}$.

Лемма 1.4. *При выполнении аксиом* 8.3 *и* 8.4 *множество недоминируемых решений* Ndom X *удовлетворяет включению* Ndom $X \subset P_f(X)$.

Из лемм 1.1 и 1.4 вытекает следующий принципиально важный для теории принятия решений результат.

Теорема 1.2. *В условиях выполнения аксиом* 1.1 – 1.4 *для любого непустого множества выбираемых решений* Sel X *справедливо включение*

$$\text{Sel}\ X \in P_f\,(X). \tag{1.4}$$

Включение (1.4) выражает собой **принцип Эджворта−Парето** (**принцип Парето**), согласно которому *если ЛПР ведет себя достаточно «разумно»* (*т.е. в соответствии с аксиомами* 1.1 – 1.4), *то выбираемые им решения обязательно являются Парето-оптимальными*.

Этот принцип демонстрирует особую, исключительно важную роль множества Парето-оптимальных решений в теории принятия решений. Если хотя бы одна из аксиом 1.1, 1.2, 1.3 или 1.4 нарушается, то выбираемое решение не обязано быть Парето-оптимальным. Отсюда следует, что *принцип Эджворта−Парето не является универсальным*, т.е. применимым во всех без исключения задачах многокритериального выбора. Более того, на основе аксиом 1.1 – 1.4 (точнее говоря, на основе отрицаний этих аксиом) при желании можно сделать определенный вывод и о том, в каких именно задачах этот принцип может «не работать». Итак, применение этого принципа рискованно или же вообще недопустимо, если:

– отношение предпочтения, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, не является транзитивным;
– отношение предпочтения ЛПР не согласовано хотя бы с одним из критериев;
– не выбираемое из некоторой пары решение оказывается выбранным из всего множества возможных решений.

Вектор $f(x^*)$ при Парето-оптимальном решении x^* называют **Парето-оптимальным вектором** (Парето-оптимальной оценкой) **решения** x^* или просто Парето-оптимальным вектором, а множество всех таких векторов – **множеством Парето-оптимальных векторов** (Парето-оптимальных оценок). Для этого множества используют обозначение $P(Y)$. Таким образом, $P(Y) = f(P_f(X)) = \{f(x^*)\in Y \mid$ при некотором $x^*\in P_f(X)\}$, где $Y = f(X)$.

Равенство $P(Y) = f(P_f(X))$ естественным образом связывает множество Парето-оптимальных решений и Парето-оптимальных векторов. В соответствии с ним, зная множество Парето-оптимальных решений, можно найти соответствующее множество Парето-оптимальных векторов. Справедливо и, в определенном смысле обратное, утверждение, а именно, располагая множеством Парето-оптимальных векторов $P(Y)$ по формуле $P_f = f^{-1}(P(Y))$, где в правой части равенства записан прообраз множества $P(Y)$, можно пытаться строить соответствующее множество Парето-оптимальных решений. Таким образом, в идейном отношении эти два множества полностью определяют друг друга, хотя попытка построения одного из них на основе второго может натолкнуться на определенные вычислительные трудности (в большей степени это относится к построению множества Парето-оптимальных решений).

Множество Парето-оптимальных векторов можно определить следующим эквивалентным образом:

$$P(Y) = \{y^*\in Y \mid \bar{\exists}\ y\in Y, y \geq y^*\}. \tag{1.5}$$

Сравнивая равенство (1.5) с аналогичным равенством из определения множества недоминируемых векторов нетрудно обнаружить их полное совпадение (не считая отношений $\succ_X$ и $\geq$). На основании этого совпадения множество Парето-оптимальных векторов можно рассматривать как множество недоминируемых по отношению $\geq$ элементов множества Y. Теорема 8.2 была сформулирована для решений. Ее можно переформулировать в терминах оценок.

Теорема 1.3 (в терминах векторов). *Пусть выполняются аксиомы* 1.1 – 1.4. *Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов* Sel Y *имеет место включение* Sel $Y \subset P(Y)$.

Ранее уже говорилось о том, что результаты, связанные с недоминируемыми решениями и векторами и рассмотренные в предыдущем разделе, могут быть переформулированы применительно к множествам Парето. В частности, теорема 1.1 после такой переформулировки принимает следующий вид.

Теорема 1.4. *В случае конечного множества возможных векторов* Y (*в частности, если конечно множество возможных решений* X) *существует хотя бы одно Парето-оптимальное решение и, соответственно, хотя бы один Парето-оптимальный вектор, т. е.* $P_f(X) \neq \varnothing$, $P(Y) \neq \varnothing$.

Взаимосвязь между введенными выше различными подмножествами множества возможных решений при выполнении аксиом 1.1 – 1.4 в условиях справедливости лемм 1.1 и 1.4 имеет вид следующих включений

$$\mathrm{Sel}\, X \subset \mathrm{Ndom}\, X \subset P_f(X) \subset X. \qquad (1.6)$$

Из четырех участвующих в соотношении (1.6) множеств самым широким является множество возможных решений, а самым узким – множество выбираемых решений. В терминах векторов включения (1.6) принимают вид $\mathrm{Sel}\, Y \subset \mathrm{Ndom}\, Y \subset P(Y) \subset Y$.

Благодаря наличию указанной выше прямой связи между множествами недоминируемых и Парето-оптимальных векторов все результаты, полученные ранее для первого множества, нетрудно переформулировать в терминах второго множества. В частности, для построения множества $P_f(X)$ (и $P(Y)$) в случае конечного множества возможных векторов Y можно применять сформулированный выше алгоритм нахождения множества недоминируемых решений, заменив в нем сравнение по отношению предпочтения $\succ_X$ сравнением по отношению $\geq$, которое является иррефлексивным и транзитивным.

Пусть множество возможных векторов Y состоит из конечного числа N элементов и имеет вид $Y = \{y_1, y_2, ..., y_N\}$. *Алгоритм построения множества Парето-оптимальных векторов* $P(Y)$ состоит из следующих семи шагов.

Шаг 1. Положить $P(Y)=Y$, $i=1$, $j=2$. Образуется так называемое текущее множество Парето-оптимальных векторов, которое в начале работы алгоритма совпадает с множеством Y, а в конце составит искомое множество Парето-оптимальных векторов. Алгоритм устроен таким образом, что искомое множество Парето-оптимальных векторов получается из Y последовательным удалением заведомо неоптимальных векторов.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства $y^i \geq y^j$. Если оно оказалось истинным, то перейти к Шагу 3. В противном случае перейти к Шагу 5.

Шаг 3. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор y^j, т.к. он не является Парето-оптимальным. Затем перейти к Шагу 4.

Шаг 4. Проверить выполнение неравенства $j < N$. Если оно имеет место, то положить $j = j + 1$ и вернуться к Шагу 2. В противном случае – перейти к Шагу 7.

Шаг 5. Проверить справедливость неравенства $y^j \geq y^i$. В том случае, когда оно является истинным, перейти к Шагу 6. В противном случае – вернуться к Шагу 4.

Шаг 6. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор y^i и перейти к Шагу 6.

Шаг 7. Проверить выполнение неравенства $i < N - 1$. В случае истинности этого неравенства следует последовательно положить $i = i + 1$, а затем $j = i + 1$. После этого необходимо вернуться к Шагу 2. В противном случае (т. е. когда $i \geqq N - 1$) вычисления закончить. Множество Парето-оптимальных векторов построено полностью.

Пример 812. Пусть $m = 4$ и $Y = \{y^1, y^2, \dots, y^5\}$, где y^1=(4, 0, 3, 2), y^2=(5, 0, 2, 2), y^3=(2, 1, 1, 3), y^4=(5, 0, 1, 2), y^5=(3, 1, 2, 3). Сначала для отыскания множества Парето-оптимальных векторов полагаем $P(Y) = Y$ и сравниваем первую оценку с остальными. При этом, как легко видеть, все пары y^1, y^2; y^1, y^3; y^1, y^4; y^1, y^5 оказываются несравнимыми по отношению ≥. Поэтому вектор y^1 запоминаем как Парето-оптимальный и после этого удаляем его из множества Y^1=Y. Получаем множество $Y^2 = \{y^2, y^3, y^4, y^5\}$. Затем сравниваем вектор y^2 с остальными элементами множества Y^2. Пара y^2, y^3 не сравнима по отношению ≥. Поскольку $y^2 \geq y^4$, вектор y^4 удаляем из множества Y^2. Оставшаяся пара векторов y^2, y^5 не сравнима по отношению ≥. Так как вектор y^2 оказался недоминируемым, то его следует запомнить как Парето-оптимальный, а затем удалить из множества Y^2. Приходим к множеству $Y^3 = \{y^3, y^5\}$. Поскольку $y^5 \geq y^3$, удаляется вектор y^3 и в результате остается один вектор y^5, который также является Парето-оптимальным. В итоге получено следующее множество Парето-оптимальных векторов $P(Y) = \{y^1, y^2, y^5\}$.

Если в пространстве критериев изобразить всю область возможных значений вектора критериев, являющуюся отображением множества возможных решений X, то множество Парето является ее «северо-восточной» границей. На рис. 1.1 для случая двух критериев множество Парето представляет собой участок границы AB. Нетрудно видеть, что участок AB находится внутри прямоугольного конуса, стороны которого параллельны осям координат и касаются области возможных значений вектора критериев.

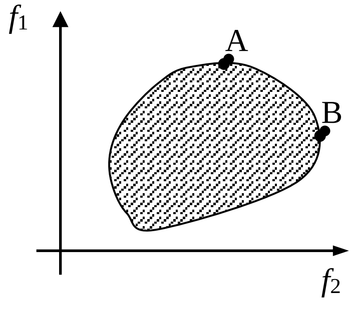


Рис. 1.1. **Множество Парето**

Если оба критерия являются линейными функциями, а множество X задано линейными ограничениями, то на плоскости (x_1, x_2) множество Парето-оптимальных решений находится внутри конуса, стороны которого перпендикулярны градиентам критериев и касаются множества возможных решений X.

При решении многокритериальных задач ЛПР приходится сталкиваться с необходимостью согласования противоположных целей, описываемых разными критериями. Одним из методов нахождения решения в таких задачах является **метод «стоимость–эффективность»**, используемый при принятии важных стратегических и тактических решений. Опыт показывает, что наиболее эффективные проекты часто оказываются и наиболее затратными. Наиболее предпочтительным оказался бы проект, ожидаемая эффективность которого превосходит ожидаемую эффективность других проектов, а стоимость – меньше стоимости других проектов. Однако в реальной практике принятия решений этот случай крайне редкий, поэтому, для того чтобы ЛПР мог выбрать действительно наиболее предпочтительный проект, необходимо провести дополнительный анализ: дополнительную многокритериальную (здесь двухкритериальную) оценку.

Эффективность является обобщенным понятием результата деятельности. Эффективность различных видов деятельности может выражаться в разных единицах: деньги, производительность оборудования, энергетические мощности, надежность технологического процесса, срок службы потребительских товаров, грузоподъемность и др. Поэтому при анализе «стоимость–эффективность» не делаются попытки объединить различного вида эффективности в одну общую меру эффективность. Одним из возможных способов практического решения задач многокритериального оценивания в методе «стоимость–эффективность» и является назначение желательных уровней получаемых эффективностей, достигаемых при условии, что необходимые при этом затраты (стоимость) не превосходят заданный уровень. Наиболее предпочтительные проекты определяются с помощью варьирования желательных уровней получаемых эффективностей при фиксированном объеме затрат. В рамках анализа «стоимость–эффективность» можно рассмотреть, например, следующую проблему: охарактеризовать различные наборы проектов, которые обеспечивают получение эффективностей различного вида, по крайней мере, в количествах $Э_1^*, Э_2^*, ..., Э_r^*$ (желательные уровни получаемых эффективностей). Имеются ли такие наборы проектов, которые обеспечивают достижение желательного уровня одновременно по всем видам эффективности? Если нет, следует изменить значения некоторых из $Э_k^*, k = 1,\dots,r$. Если да, проверить, можно ли увеличить значения отдельных желательных уровней. Конечно, при таком подходе в формальный анализ не включаются два важных соображения:

1) Каким образом следует с самого начала выбирать желательные уровни? Возможна ли и в какой мере взаимная компенсация различных уровней?

2) Как можно обобщить предлагаемый подход, чтобы ввести также всегда существующий фактор неопределенности?

Другим часто используемым в практике принятия решений является **метод «затраты–прибыль»**, при котором рассматриваются различные виды прибыли. Различные виды прибыли здесь описываются различными критериями, характеризующие проект, причем необязательно экономической природы. При этом имеется возможность складывать различные виды прибыли с фиксированными числовыми коэффициентами (весовые коэффициенты, отражающие степень вклада каждого вида прибыли в суммарную прибыль), получая единую составную величину – прибыль, характеризующую проект. Поскольку с экономической точки зрения проекты могут характеризоваться различными критериями, то суммарную прибыль могут образовывать, например, такие показатели, как потоки платежей, внутренняя норма окупаемости, срок окупаемости и т.д. После того как суммарные прибыли для проектов определены, получаем двухкритериальную задачу выбора. Этот прием позволяет сводить многокритериальную задачу при числе критериев, большем двух, к двухкритериальной.

Для метода «затраты–прибыль» более характерно стремление к получению числовых характеристик, позволяющих сопоставлять по предпочтительности предлагаемые проекты. Здесь имеется в виду стремление не только определить суммарную прибыль (эффективность), т. е. количественное значение, характеризующее в некотором смысле эффективность проекта, но и ранжировать проекты по предпочтительности на основании количественных оценок. Например, в методе «затраты–прибыль» для каждого проекта с номером k, рассчитав значение составной прибыли R_k и требуемых затрат C_k, можно рассчитать и величину отношения R_k / C_k, характеризующую ожидаемое значение суммарной прибыли на единицу затрат (доходность). Далее, упорядочив проекты по убыванию значения отношения R_k / C_k, получим ранжирование рассматриваемых проектов по степени предпочтительности, имея в виду, что наиболее предпочтительным проектом является проекте наибольшей ожидаемой составной прибылью, получаемой на единицу затрат. Вторым по предпочтительности является проект, который обладает вторым по величине значением ожидаемой суммарной прибыли, получаемой на единицу затрат, и т.д. Для того чтобы сформировать портфель проектов, обладающих максимальной ожидаемой суммарной прибылью, необходимо последовательно включать в такой перечень проекты по убыванию отношения R_k / C_k до тех пор, пока не будет исчерпан выделенный на финансирование проектов объем средств C. Если проекты, включенные в перечень согласно изложенному правилу, полностью исчерпывают C, то получаем оптимальное решение задачи распределения ресурсов. В противном случае необходимо дополнительно учитывать возможное наиболее эффективное использование остатка выделенного объема финансирования.

Для введения более сильной системы предпочтений для проектов в методах «стоимость–эффективность» и «затраты–прибыль» прибегают к дополнительному содержательному анализу степени предпочтительности сравниваемых проектов.

Возможно, что ЛПР требуется выбрать один проект, соответствующий наибольшему отношению R_k/C_k. Если в пространстве двух критериев изобразить все множество значений возможных оценок R_k и C_k, $i=1, \ldots, r$, то отношение суммарной прибыли к затратам R_k/C_k представляет собой тангенс угла наклона прямой, проходящей через начало координат и точку (R_k, C_k). Пусть C_k откладываются по оси абсцисс, а R_k – по оси ординат. Тогда решением задачи является проект, для которого тангенс угла наклона наибольший, при этом прямая является касательной к множеству Парето.

1.4. Теория важности критериев

Введем множество номеров критериев $I=\{1, 2, ..., m\}$ и рассмотрим задачу выбора из двух векторов y', $y''\in R^m$ с минимальным числом различных компонент. Если векторы y' и y'' имеют лишь одну различную компоненту, например, $y'_i \neq y''_i$ и $y'_s = y''_s$ для всех $s\in I\backslash\{i\}$, то справедливо соотношение $y' \geq y''$, либо $y'' \geq y'$. Отсюда, на основании аксиомы 1.4, соответственно следует $y'\succ y''$ либо $y''\succ y'$. Таким образом, в данном простейшем случае выбор из двух векторов однозначно определяется аксиомой 1.4.

Теперь предположим, что векторы y' и y'' имеют не одну, а две различные компоненты: $y'_i \neq y''_i$, $y'_j \neq y''_j$ и $y'_s = y''_s$ для всех $s\in I\backslash\{i, j\}$, причем $y'_i = y'_j$, $y''_i = y''_j$ невозможно. Тогда реализуется один и только один из следующих четырех случаев:

1) $y'_i > y''_i$, $y'_j > y''_j$; 2) $y''_i > y'_i$, $y''_j > y'_j$; 3) $y'_i > y''_i$, $y''_j > y'_j$; 4) $y''_i > y'_i$, $y'_j > y''_j$.

Предположим, что ЛПР из двух данных векторов сделало свой выбор, т. е. имеет место одно и только одно их следующих двух соотношений: $y'\succ y''$ или $y''\succ y'$. Без ограничения общности в силу симметричности можно считать, что верно первое соотношение $y'\succ y''$. Объяснить сделанный ЛПР выбор можно следующим образом. Если реализовался первый из указанных выше четырех случаев, то истинность соотношения $y'\succ y''$ вытекает из аксиомы Парето. Второй вариант невозможен, так как в этом случае благодаря аксиоме Парето выполнено соотношение $y''\succ y'$, несовместимое в силу асимметричности $\succ$ с соотношением $y'\succ y''$.

Рассмотрим оставшиеся две возможности. В силу симметричности двух последних вариантов ограничимся рассмотрением третьего. Выполнение неравенства $y'_i > y''_i$ означает, что с точки зрения i-го критерия вектор y' для ЛПР более предпочтителен, чем y''. С другой стороны, с точки зрения j-го критерия в силу $y''_j > y'_j$ вектор y'' предпочтительнее вектора y'. В итоге имеется два взаимопротиворечивых условия, но выбор был сделан в пользу вектора y' против y''. Одним из наиболее разумных объяснений этому факту может служить следующее: в рассматриваемом противоречивом случае i-й критерий для ЛПР был важнее j-го критерия. *Под важностью критерия понимают степень влияния изменения его значений на эффективность решения*. Таким образом, несмотря на «проигрыш» по менее важному j-му критерию при выборе y', этот вектор был признан более предпочтительным, чем y'', так как он приводит к «выигрышу» по более важному i-му критерию при условии равенства всех остальных компонент.

Рассуждая аналогичным образом, можно прийти к выводу, что при выборе первого из данной пары векторов (т.е. при выполнении $y' \succ y''$) в случае реализации четвертой из указанных выше ситуаций для ЛПР j-й критерий оказался важнее i-го критерия.

Сравнение критериев по важности, т. е. выяснение, является ли один из них более важным, чем другой, или они одинаковы по важности, предполагает, что критерии являются **однородными**, т.е. имеют сопоставимый вид. Это означает, что у критериев должна быть единая (общая) шкала и должно выполняться следующее условие (требование) однородности: каждая градация шкалы должна отражать одинаковый уровень предпочтений для каждого из критериев (это условие выполняется, например, когда градации являются вербальными, причем имеют смысл, одинаковый для всех критериев, например, «превосходно», «отлично», «отвратительно»).

Существуют различные типы шкал измерения. Когда требуется подсчитать число предметов, людей, вещей и т.п., используется так называемая *абсолютная шкала*. В этой шкале жестко зафиксировано начало отсчета (нуль) и масштаб измерения (единица). Два разных (измеряющих) человека, независимо друг от друга выполнив измерения (подсчет) в этой шкале одних и тех же количеств, должны получить абсолютно идентичные результаты. Можно также сказать, что в этой шкале существует единственная для всех измеряющих единица измерения. При измерении такой физической характеристики, как масса предмета, используют различные единицы измерения. Как известно, масса предмета может быть выражена в килограммах, фунтах, тоннах, пудах и т.д. Здесь фиксированным для всех измеряющих оказывается лишь начало отсчета – нуль, который соответствует отсутствию какой-либо массы, тогда как масштаб измерения может оказаться различным для разных измеряющих. Тем самым, результаты измерений y_i' и y_i'' одного и того же предмета для двух различных измеряющих, пользующихся разными единица измерений, могут отличаться на некоторый фиксированный положительный множитель α_i, т. е. $y_i' = \alpha_i y_i''$. В этом случае говорят, что результаты измерений определяются с точностью до преобразования вида $\varphi_i(y_i) = \alpha_i y_i$, $\alpha_i > 0$. Шкала подобного типа называется *шкалой отношений*. Название этой шкалы связано с тем, что при измерении в этой шкале независимо от единицы измерения отношения измерений будут одинаковыми для различных измеряющих. Действительно, пусть один измеряющий для двух объектов получил два числа y_i' и y_i'', а другой для тех же объектов – $\bar{y}_i'$ и $\bar{y}_i''$ соответственно. Поскольку $\bar{y}_i' = \alpha_i y_i'$ и $\bar{y}_i'' = \alpha_i y_i''$ при некотором $\alpha_i > 0$, то выполняются равенства $\frac{\bar{y}_i'}{\bar{y}_i''} = \frac{\alpha_i y_i'}{\alpha_i y_i''} = \frac{y_i'}{y_i''}$, которые и означают сохранение отношений измерений для различных измеряющих в шкале отношений. Таким образом, если какой-то измеряющий пришел к выводу, что, например, масса одного предмета в два раза больше массы другого, то и другой измеряющий (использующий другие единицы измерения) должен прийти к тому же самому выводу. Это свидетельствует о том, что, при сравнении результатов измерения в шкале отношений, высказывание «во столько-то раз больше (меньше)» является осмысленным. Нетрудно понять, что измерение таких величин, как прибыль, затраты и т.п., выраженных в единицах какой-либо валюты, также следует производить в шкале отношений.

Еще одна шкала измерений характеризуется заданием масштаба измерений и нефиксированным (для различных измеряющих) началом отсчета. Примером такой шкалы может служить шкала летоисчисления – переход от одного летоисчисления к другому осуществляется изменением начала отсчета. Говоря более точно, *шкалой разностей* называется такая шкала, в которой результаты измерений определяются с точностью до преобразования $\varphi_i(y_i) = y_i + c_i$, где c_i – фиксированное число. Измерения в этой шкале характеризуются сохранением разностей между двумя разными измерениями, выполненными различными измеряющими. Другими словами, для измерений, выполненных в шкале разностей, осмысленным является высказывание «на столько-то больше (меньше)». Например, продолжительность правления Николая II, вычисленная как в Григорианском, так и юлианском (или каком-то другом) календаре будет одна и та же.

Шкалой интервалов называется шкала, в которой результаты измерений определяются с точностью до (инвариантны относительно) линейного положительного преобразования $\varphi_i(y_i) = \alpha_i y_i + c_i$, где $\alpha_i > 0$ и c_i – фиксированные числа. Типичным примером такой шкалы может служить шкала температур. Как известно, для измерения температуры имеются, например, шкалы Цельсия, Фаренгейта и Кельвина. Переход от результатов измерений в одной шкале к результатам в другой происходит по формулам вида $\bar{y}_i = \alpha_i y_i + c_i$. Параметр α_i называется масштабом, а параметр c_i – началом отсчета. Шкала интервалов характеризуется тем, что у каждого измеряющего может быть свое начало отсчета и свой масштаб измерения. При этом для измерений, выполненных в шкале интервалов различными измеряющими, будут сохраняться отношения разностей: $\frac{\bar{y}_i - \bar{y}'_i}{\bar{y}''_i - \bar{y}'''_i} = \frac{\alpha_i y_i + c_i - (\alpha_i y'_i + c_i)}{\alpha_i y''_i + c_i - (\alpha_i y'''_i + c_i)} = \frac{y_i - y'_i}{y''_i - y'''_i}$.

Все перечисленные выше шкалы – абсолютную, отношений, разностей и интервалов относят к *количественным шкалам*. Понятно, что результаты измерения, инвариантные относительно линейного положительного преобразования $\bar{y}_i = \alpha_i y_i + c_i$, будут инвариантны и относительно преобразований вида $\bar{y}_i = \alpha_i y_i$ и $\bar{y}_i = y_i + c_i$. По этой причине среди количественных шкал наиболее «общей» оказывается шкала интервалов. Поэтому все утверждения, полученные для измерений, выполненных в шкале интервалов, будут иметь место и для измерений в шкалах отношений и разностей (тем более, для абсолютной шкалы).

Кроме количественных существуют *качественные шкалы*. Типичным представителем качественной шкалы является *порядковая шкала*, в которой результаты измерений определяются с точность до преобразований вида $\varphi_i(y_i)$, где φ_i – произвольная строго возрастающая функция. Примерами такой шкалы могут служить шкала упорядочения по важности выполнения работ, различные балльные шкалы. В порядковых шкалах не фиксируется начало отсчета, может быть различным масштаб измерений, причем, образно говоря, даже величина деления при переходе от одной отметки к другой у различных измеряющих может оказаться разной. Для результатов измерений в порядковой шкале лишены смысла высказывания «во столько-то раз больше (меньше)», «на столько-то единиц больше (меньше)». Здесь имеет смысл только отношение «больше-меньше». Градации обычно нумеруются в порядке возрастания предпочтительности. Номера градаций (или баллы) отражают только упорядоченность по предпочтению, поэтому с числами-номерами градаций нельзя производить арифметические операции для получения каких-либо иных оценок предпочтений, например, для выражения степени превосходства одной градации над другой или сравнения приращений предпочтений при переходе от одних градаций к другим. Например, не имеет смысла говорить, что при оценке «отлично» успеваемость в 2,5 раза выше, чем при неудовлетворительной. Все утверждения, полученные для результатов измерений, выполненных в качественной шкале, имеют место и для количественных шкал, тогда как обратное не верно. Поэтому количественные шкалы по сравнению с качественными оказываются «богаче» в том смысле, что для них могут быть получены более богатые по содержанию утверждения, хотя и для менее широко го класса задач.

На практике часто встречаются задачи, в которых критерии **неоднородны**, например, выражают вес, стоимость, площадь и т. д. Для того, чтобы сравнивать такие количественные критерии по важности, их нужно привести к единой шкале. При этом достаточно использовать порядковую шкалу. Приведение некоторого количественного критерия к порядковой шкале с q градациями нужно «разрезать» исходную шкалу на q частей так, чтобы любое значение этого критерия из i-й части имело интерпретацию по предпочтительности, соответствующую градации i общей шкалы. Например, если в задаче выбора помещения под офис для небольшой фирмы один из критериев выражает общую его площадь, а число градаций q вводимой единой шкалы равно пяти, причем 1 – «очень плохо», 5 – «очень хорошо», то можно указать, что площадь офиса менее 15 м^2 – «очень плохо», площадь от 15 м^2 до 20 м^2 – «плохо», …, а площадь более 40 м^2 – «очень хорошо». Далее предполагается, что все критерии однородны – имеют единую порядковую шкалу.

Оценки относительной важности критериев могут быть качественными и количественными. Качественными (нечисловыми) оценками важности являются суждения (утверждения, сообщения) вида «один критерий важнее другого» и «оба критерия равноважны» (имеют одинаковую важность). Количественными оценками важности являются суждения вида «один критерий важнее другого во столько-то раз». Качественные оценки менее информативны, чем количественные, но являются более простыми для человека и поэтому более надежны (меньше возможности возникновения ошибок). Например, человек держит в каждой руке по предмету. При сравнении двух предметов по весу труднее ответить на вопрос «во сколько раз один из них тяжелее другого?» нежели «какой из предметов тяжелее?». При этом легче допустить ошибку отвечая на первый вопрос.

Под **качественной важностью** критериев будем понимать качественные оценки их относительной важности, под **количественной** – количественные оценки.

Обозначим y^{ij} векторную оценку, полученную из $y=(y_1, ,…, y_m)$ перестановкой ее компонент y_i и y_j. Критерии f_i и f_j **равноважны** (обозначается $i \sim j$), или одинаково важны, когда любые две векторные оценки y_i и y_j одинаковы по предпочтению. Критерий f_i **важнее** критерия f_j (обозначается $i \succ j$), когда всякая векторная оценка y, в которой $y_i > y_j$, предпочтительнее, чем y^{ij}. Согласно первому из этих определений сообщений $i \sim j$ связывает векторные оценки y и y^{ij} отношением безразличия. Согласно второму определению сообщение $i \succ j$ связывает векторные оценки y и y^{ij} такие, что $y_i > y_j$, отношением строгого предпочтения.

Для получения качественной информации о важности критериев ЛПР необходимо попарно сравнивать критерии по важности. Это означает, что для каждой выбранной пары ЛПР должно указать, что один из критериев более важен, чем другой, или что они равноважны, или, что критерии несравнимы по важности. Для сравнения критериев f_i и f_j можно исходить из определений равенства и превосходства в важности и сопоставлять по предпочтению пары векторных оценок y и y^{ij}. Так для сравнения по важности первого и второго критериев нужно сопоставить векторные оценки вида $(a, b, *, \ldots, *)$ и $(b, a, *, \ldots, *)$, где $a < b$ (или $a > b$) и звездочки $*$ означают, что на одинаковых местах в обеих оценках стоят произвольные, но равные шкальные значения. Целесообразно на месте $*$ использовать один раз наихудшее шкальное значение, один раз – наилучшее, один раз – некоторое среднее значение. И в роли чисел a, b следует использовать указанные шкальные значения и ближайшие к ним (если из предыдущих ответов можно предположить, что первый критерий важнее второго) или, наоборот, наихудшее и наилучшее значения (если появляется предположение о равенстве сравниваемых критериев по важности). Если всегда предпочтительней векторная оценка, для которой значение первого критерия больше, то можно считать, что первый критерий важнее второго, т.е. $1 \succ 2$. Если обе векторные оценки всегда одинаковы по предпочтительности, то критерии равноважны, т.е. $1 \sim 2$.

Полученную информацию о важности критериев нужно проверять на непротиворечивость, поскольку возможны ошибки. Противоречивость проявится в том, что при помощи сообщений, относящейся к информации о важности критериев, можно будет составить цикл, приводящий к заключению, что некоторый критерий важнее самого себя. Тогда соответствующие сообщения надо скорректировать. Так, например, если информация о важности содержит сообщения $1 \succ 2$, $2 \succ 3$ и $3 \succ 1$, то отсюда вытекает, что $1 \sim 1$. Следовательно, по крайней мере, одно из трех сообщений ошибочно. Если при проверке окажется, что неверно суждение $3 \succ 1$, то его нужно заменить на $1 \succ 3$.

Пусть информация о важности состоит в том, что все критерии равноважны. Порождаемые такой информацией отношения строгого предпочтения и безразличия можно задать следующим образом. Обозначим через z векторную оценку, полученную из y упорядочением ее компонент по убыванию. Например, если $y=(3, 4, 2, 3, 5)$, то $z=(5, 4, 3, 3, 2)$. *Решающее правило*, задающее отношения строгого предпочтения и безразличия имеет вид: $y' \sim y''$ при $z'=z''$; $y' \succ y''$ при $z'_i \neq z''_i, i = 1, \ldots, m$, $z' \neq z''$. Таким образом, для сравнения по предпочтительности векторных оценок y' и y'' следует покомпонентно сравнивать по величине соответствующие им векторы z' и z''.

Количественная важность может выступать в двух основных формах:

1) *степень превосходства в важности* одних критериев над другими: критерий f_i в h раз важнее критерия f_j (обозначается $i \succ^h j$), где $h > 0$; если $h < 1$, то критерий f_j, в $1/h > 1$ раз важнее критерия f_i, а при $h = 1$ критерии равноважны;

2) *значения важности* отдельных *критериев*, количественно измеряемой по общей «шкале важности»: важность критерия f_i имеет величину β_i, где $\beta_i > 0$.

Между обоими указанными видами количественной важности имеется тесная взаимосвязь: степень превосходства h критерия f_i над f_j равна отношению значений их важности β_i и β_j: $h=\beta_i / \beta_j$. Если изменить значения важности всех критериев в одно и то же число раз $t > 0$, т. е. заменить β_i на $t\beta_i$, то величины степеней важности не изменятся: $t\beta_i / t\beta_j =\beta_i / \beta_j=h$.

В том случае, когда оценки важности критериев β_i в сумме равны единице, они называются *коэффициентами важности*. Эти коэффициенты есть доли единичной важности совокупности всех критериев, приходящиеся на каждый отдельный критерий.

Основное определение количественной важности опирается на расширение исходной задачи многокритериального выбора, описанной в п. 1.1, до N-кратной задачи, или N-задачи. Предположим, что важности отдельных критериев β_i – натуральные числа n_i, которые составляют вектор $N=(n_1, \ldots, n_m)$. В случае дробных значений β_i, нужно все значения β_i умножить на подходящее натуральное число. Под N-задачей понимается задача с $n_1 + \ldots + n_m$ однородными критериями, которая получена заменой каждого из исходных однородных критериев f_i набором n_i однородных (попарно) равноважных критериев, а отношения строгого предпочтения и безразличия определяются на множестве векторных оценок.

Основное определение количественной важности: Критерий f_i в h раз важнее критерия f_j для N-задачи, соответствующей исходной задачи многокритериального выбора, выполнены следующие условия: 1) $n_i / n_j=h$; 2) каждый из n_i критериев, полученных из критерия f_i, равноважен любому из n_j критериев, полученных из критерия f_j.

В настоящее время для получения и анализа количественной информации о важности критериев разработано множество методов на основе ответов ЛПР и/или экспертов. Все они не опираются на точное определение понятия важности критериев. Поэтому разные методы приводят к разным результатам. При этом непонятно как проверить адекватность полученных результатов, и нет обоснованных рекомендаций по корректному использованию полученных оценок при анализе многокритериальных задач.

На основном определении количественной важности можно предложить ряд методов оценки относительной важности критериев. Эти методы можно разбить на два класса – прямые методы и косвенные методы. *Косвенные методы* предполагают вычисление оценок важности путем решения системы линейных равенств и неравенств, построенной по результатам сравнения по предпочтению достаточно большого числа пар векторных оценок. *Прямые методы* позволяют найти количественные оценки важности (обычно степени превосходства в важности) на основе результатов сравнения по предпочтению пар векторных оценок специального вида, используемых в определениях понятий равенства и превосходства в важности.

Оптимальными могут быть только те решения, которые являются недоминируемыми по отношению предпочтения, порождаемому всей накопленной информацией о важности критериев.

Исторический экскурс. Решение проблемы формального качественного описания важности качественных (имеющих общую порядковую шкалу) критериев было дано Подиновским В.В. в 1979 г. в статье «Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений» и развито в ряде его последующих работ. Основу разработанной теории составили строгие определения понятий «Один критерий важнее другого» и «Оба критерия равноважны (одинаково важны)». Система поддержки принятия решений, реализующая методы указанной теории, описана в работе «Система, использующая Информацию о Важности Критериев для Анализа альтернатив (СИВКА)», опубликованной 1998г. Прямым обобщением (развитием) теории качественной важности критериев является теория количественной важности, кратко изложенная в работе 1975 года «Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями». Ее основу составили строгие определения типа «Один критерий важнее другого во столько-то раз».

Рассмотрим еще одно определение количественной важности критериев. Пусть $i, j \in I$, $i \neq j$. Будем говорить, что *i-й критерий важнее j-го критерия с заданными положительными параметрами* w_i^*, w_j^*, если для всех векторов y', $y'' \in R^m$, для которых выполняется $y_i' > y_i''$, $y_j'' > y_j'$ и $y_s' = y_s''$ для всех $s \in I \setminus \{i, j\}$, $y_i' - y_i'' = w_i^*$, $y_j'' - y_j' = w_j^*$ имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Иначе говоря, для ЛПР i-й критерий важнее j-го, если всякий раз при выборе из пары векторов ЛПР готово пожертвовать определенным количеством w_j^* по менее важному j-му критерию ради получения дополнительного количества w_i^* по более важному i-му критерию при условии сохранения всех остальных значений критериев. При этом соотношение между числами w_i^* и w_j^* позволяет количественно оценить указанную степень важности. Введем соответствующее определение.

Пусть $i, j \in I, i \neq j$, и i-й критерий важнее j-го критерия с положительными параметрами w_i^* и w_j^*. В этом случае положительное число $\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*}$ будем называть *коэффициентом относительной важности* для указанной пары критериев.

Очевидно, $0 < \theta_{ij} < 1$. Этот коэффициент показывает долю потери по менее важному критерию, на которую согласно пойти ЛПР, в сравнении с суммой потери и прибавки по более важному критерию. Если коэффициент θ_{ij} близок к единице, то это означает, что ЛПР за относительно небольшую прибавку по более важному i-му критерию готово платить довольно большой потерей по менее важному j-му критерию. Такое положение соответствует ситуации, когда i-й критерий имеет сравнительно высокую степень важности по сравнению с j-м критерием. В случае, когда этот коэффициент вблизи нуля, ЛПР согласно пойти на потери по менее важному критерию лишь при условии получения существенной прибавки по более важному критерию. Это означает, что степень важности i-го критерия сравнительно невысока; данное положение и находит свое выражение в малом значении коэффициента относительной важности. Если $\theta_{ij} = ½$, то ЛПР готово согласиться на определенную прибавку по более важному критерию за счет потери по менее важному критерию при условии, что величина потери в точности совпадает с величиной прибавки. Необходимо добавить, что степень относительной важности критериев, а значит и величина коэффициента относительной важности θ_{ij}, находится в прямой зависимости от типа шкалы, в которой измеряется тот или иной критерий.

Изучим свойства введенного выше определения относительной важности критериев.

Теорема 1.5. *Пусть отношение предпочтения* $\succ$ *удовлетворяет аксиомам* 1.3 *и* 1.4. *Если i-й критерий важнее j-го критерия с положительными параметрами* w_i^*, w_j^*, *то i-й критерий будет важнее j-го критерия с любой парой положительных параметров* w_i', w_j'*, удовлетворяющих неравенствам* $w_i' > w_i^*$, $w_j' < w_j^*$. *Иначе говоря, если i-й критерий важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности* θ_{ij}, *то i-й критерий будет важнее j-го критерия с любым меньшим, чем* θ_{ij}, *коэффициентом относительной важности.*

Содержание теоремы 1.5 вполне согласуется с интуитивными представлениями об относительной важности критериев. А именно, если ЛПР готово пойти на потерю в размере w_j^* по менее важному j-му критерию ради получения выигрыша в размере w_i^* по более важному i-му критерию, то это ЛПР, очевидно, должно согласиться как на меньшие потери w'_j ($w'_j < w^*_j$), так и на больший выигрыш w'_i ($w'_i > w^*_i$).

Опираясь на определение относительной важности критериев и теорему 8.1, проанализируем возникающие возможности соотношений важности для произвольной пары различных критериев f_i , f_j. Может иметь место один и только один из следующих трех случаев:

1) хотя бы одно положительное число из интервала (0, 1) является коэффициентом относительной важности i-го критерия по сравнению с j-м критерием и хотя бы одно – не является таковым;

2) ни одно положительное число из интервала (0, 1) не является коэффициентом относительной важности i-го критерия по сравнению с j-м критерием. В этом случае будем говорить, что *i-й критерий ни в коей мере не является более важным, чем j-й критерий*;

3) любое положительное число из интервала (0, 1) является коэффициентом относительной важности i-го критерия по сравнению с j-м критерием. В этом случае будем говорить, что *i-й критерий несравнимо важнее* (*несравнимо более важен*) *j-го критерия.*

Разберем первый случай более подробно. Если хотя бы одно число $\theta_{ij} \in (0, 1)$ является коэффициентом относительной важности i-го критерия по сравнению с j-м критерием, то в соответствии с теоремой 8.5 любое меньшее число в пределах указанного интервала также является коэффициентом относительной важности для рассматриваемой пары критериев. Образуем два непересекающихся множества A и B. К первому множеству причислим все числа интервала (0, 1), которые являются коэффициентами относительной важности для данной пары критериев. Очевидно, $A \neq \varnothing$. Второе множество B составим из всех тех чисел указанного интервала, которые не являются коэффициентами относительной важности. При этом по условию $B \neq \varnothing$. Ясно, что $A \cup B = (0, 1)$, причем неравенство $a < b$ выполняется для всех $a \in A$, $b \in B$. Это означает, что множества A и B образуют сечение интервала (0, 1). В таком случае в соответствии с принципом Дедекинда существует единственное число $\bar{\theta}_{ij} \in (0,1)$, производящее указанное сечение. Это число можно назвать *предельным коэффициентом относительной важности* i-го критерия по сравнению с j-м критерием.

Отметим, что само число $\bar{\theta}_{ij}$ может как оказаться коэффициентом относительной важности, так и не быть таковым. Иначе говоря, может реализоваться любой из двух возможных случаев $\bar{\theta}_{ij} \in A$ или $\bar{\theta}_{ij} \notin A$.

Между отношением $\succ$ и лексикографическим отношением имеется определенная связь, которая в терминах упорядоченного набора несравнимо более важных критериев раскрывается в следующем утверждении.

Теорема 1.5. *Заданное на пространстве* R^m *бинарное отношение* $\succ$, *удовлетворяющее аксиомам* 1.3 *и* 1.4, *является лексикографическим тогда и только тогда, когда первый критерий несравнимо важнее второго, второй – несравнимо важнее третьего, ...,* $(m-1)$*-й критерий несравнимо важнее m-го критерия.*

Задачи и упражнения

1. Приведите практические примеры многокритериальных задач принятия решений.

2. Дайте определение понятию «бинарное отношение» и перечислите типы бинарных отношений.

3. Что называют лексикографическим отношением порядка?

4. Что такое функция ценности и функция выбора?

5. Как определяется множество недоминируемых решений?

6. Какие критерии называют однородными, а какие неоднородные?

7. Сформулируйте определение понятий «один критерий важнее другого» и «оба критерия равноважны». Как в них использовано свойство равноважности критериев?

8. Что такое N-задача?

9. Сформулируйте определение понятия «один критерий важнее другого в h раз».

10. Какие типы шкал измерения вам известны?

11. В чем состоит принцип Эджворта−Парето?

12. Если в пространстве максимизируемых критериев изобразить все множество возможных значений вектора критериев, являющееся отображением множества возможных решений X, то множество Парето является ее

а. «северо-восточной» границей;

б. «северо-западной» границей;

в. «юго-восточной» границей.

13. В пространстве оценок задана функция полезности $v(y_1, y_2) = 3y_1^{2/3} y_2^{1/3}$. Найти коэффициент замещения в точке (y_1^*, y_2^*)=(10, 5).

14. Найти множество Парето-оптимальных решений в области X, ограниченной многоугольником $OABCD$, если критерии являются линейными функциями. На рис. 1.2 изображены градиенты критериев и их линии уровня в угловых точках области X.

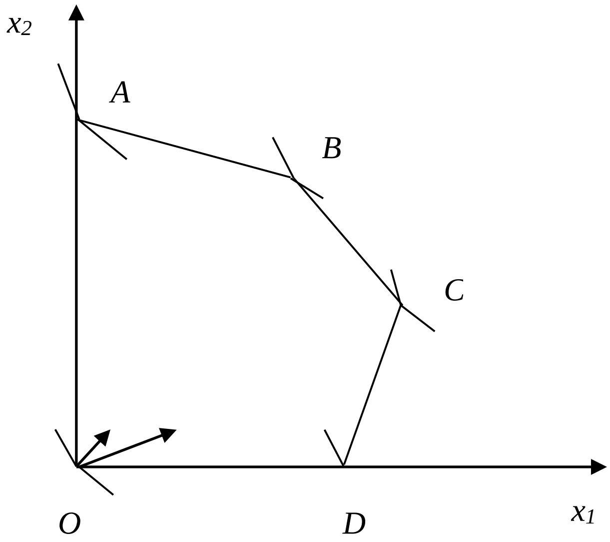


Рис. 1.2. **Множество возможных решений**

15. Рассматриваются пять вариантов создания некоторой системы. Прибыль и затраты для каждого варианта представлены парой (R_i; C_i), i=1, …, 5: (0,3; 3), (0,7; 8), (0,2; 3), (0,2; 1), (0,7; 9). Выделить множество Парето-оптимальных вариантов попарным сравнением их векторных оценок. Найти наилучший вариант аналитическим способом. Изобразить множество векторных оценок вариантов и найти наилучший вариант графическим способом.

Глава 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Итак, как уже было отмечено, в практической деятельности часто встречаются задачи, заключающиеся в поиске лучшего (оптимального) решения при наличии различных несводимых друг к другу критериев эффективности. Если такого рода задачи решаются методами математического программирования, то говорят о задачах многокритериальной (или векторной) оптимизации.

Многокритериальная оптимизация – это раздел математического программирования, посвященный проблемам выбора принципов оптимальности и методов нахождения их реализаций в экстремальных задачах с несколькими критериями.

2.1. Психологические составляющие процесса принятия решений. Поведение человека в условиях многокритериальности

В процессе решения выделяют стадии *поиска*, *принятия* и *реализации* решения. Принятие решений – волевой акт формирования последовательности действий, ведущих к достижению цели на основе преобразования исходной информации в ситуации неопределенности. Основные этапы процесса принятия решений включают *информационную подготовку решений* и собственно *процедуру принятия решений* – формирование и сопоставление вариантов, выбор, построение программы действий.

Принятие решений с одной стороны может выступать как особая форма мыслительной деятельности (например, управленческое решение), с другой – как один из этапов мыслительного действия при решении любых задач. Область применения этого понятия чрезвычайно широка. Под принятием решений мы будем понимать особый процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта действий. Процесс принятия решений обеспечивается деятельностью *интеллекта*, который складывается в основном из совместной работы *памяти, внимания* и *мышления*.

Память связывает прошлое субъекта с его настоящим и будущим и представляет собой особого рода процессы организации и сохранения прошлого опыта, позволяющие повторно использовать этот опыт в деятельности человека или же дающие возможность возврата в сферу сознания. Память лежит в основе любого психического явления. Собственно благодаря памяти существует как таковая личность, ее отношения, навыки, привычки, надежды, желания и притязания. В зависимости от времени сохранения различают несколько видов памяти – *мгновенную* или *сенсорную* (обеспечивает удержание информации в течение срока менее одной секунды), *кратковременную* (время сохранения – до 30 сек.), *оперативную* (время сохранения информации до нескольких минут) и *долговременную*, которая способна удерживать информацию от нескольких часов до десятилетий. По мнению психологов, именно с оперативной памятью человека прежде всего связаны процессы принятия решений, поскольку наиболее типичным для оперативной памяти является удержание материала для использования его именно в процессе принятия решений. Оперативная память тесно связана с долговременной и опирается на способы запоминания и различные приемы, выработанные в других видах деятельности. В свою очередь, долговременная память использует приемы и способы запоминания, сложившиеся внутри оперативной памяти. Между этими видами памяти существует самая тесная связь и в отношении циркуляции информации – оперативная память использует часть информации, хранящейся в долговременной памяти и, с другой стороны, она сама постоянно передает в долговременную память какую-то часть новой информации.

В оперативной памяти может храниться лишь очень ограниченное количество информации – не более 7 ± 2 единиц материала, которых называют чанками (от английского слова chunk). Этот факт составляет содержание так называемого *закона Дж. Миллера* по имени психолога, который в 1956 году на основе экспериментальных данных опубликовал свою знаменитую статью «о магическом числе 7 ± 2».

Заметное влияние на постановку проблемы памяти оказала аналогия между этапами переработки информации человеком и структурными блоками компьютера. Заметим, что при таком сравнении функциональная структура памяти человека обнаруживает значительно большую гибкость по сравнению с компьютером.

Следующий компонент интеллекта – *внимание*, которое понимают как сосредоточенность деятельности субъекта в данный момент времени на каком-то идеальном или реальном объекте, т.е. предмете, событии, образе, рассуждении и т.п. Внимание – это динамическая сторона сознания, характеризующая степень его направленности на объект и сосредоточения на нем с целью обеспечения адекватного отражения в течение времени, необходимого для выполнения определенного акта деятельности (например, принятия решения). Внимание обеспечивает индивиду возможность сосредоточенности и направленности сознания на объекты, которые он воспринимает в ходе той или иной деятельности. Концентрация внимания позволяет человеку быстрее и качественнее выполнять ту или иную работу. С другой стороны, отсутствие должного внимания затрудняет восприятие нового, усложняет процесс обучения человека. Как известно, отсутствие внимания пагубным образом сказывается, например, на выполнении различного рода вычислительных операций: достаточно лишь одной ошибки для того, чтобы в итоге получить неверный результат.

Мышление в понимании психологов – это процесс познавательной деятельности человека, обеспечивающий организацию и переработку информации; это – анализ, синтез, а также обобщение условий и требований решаемой задачи и способов ее решения. Только с помощью развитого мышления человек получает возможность преодолевать пространственную ограниченность восприятия и может устремляться мыслью в необозримые дали макро- и микромира. При этом снимается и временная ограниченность восприятия – возникает свободное мысленное перемещение вдоль временной оси от седой древности к неопределенному будущему. Мышление активизируется при решении любой задачи, возникающей перед человеком, коль скоро она актуальна, не имеет готового решения, и мощный мотив побуждает человека искать выход из создавшегося положения. Непосредственным толчком к развертыванию мыслительного процесса служит возникновение, осознание задачи. Следующий этап обычно связан с задержкой импульсивно возникающих реакций. Такая задержка создает паузу, необходимую для ориентировки в ее условиях, анализа компонентов, выделения наиболее существенных и соотнесения их друг с другом. Ключевой этап мышления связан с выбором одного из вариантов и формирования общей схемы решения. Мышление включает произвольные и непроизвольные составляющие. В качестве непроизвольных могут выступать ассоциации, приводящие к образованию неуправляемых связей, которые с одной стороны определяют некоторую стереотипность, с другой – могут способствовать появлению оригинальных и плодотворных в свете решаемой задачи идей и гипотез. Мышление характерно единством осознанного и неосознанного. Отметим, что большую роль в мыслительной деятельности играют эмоции, обеспечивающие управление поиском решения задачи. Различают следующие виды мышления: наглядно-образное, словесно-образное, словесно-логическое, и др. Считается установленным, что мышление словесно-логическое является наиболее поздним продуктом развития мышления индивида и что переход от наглядного к абстрактному мышлению составляет одну из линий этого развития. Кроме того, психологи выделяют следующие в определенном плане противоположные пары типов мышления – теоретическое и практическое (эмпирическое), логическое (аналитическое) и интуитивное, реалистическое и аутистическое, связанной с уходом от действительности во внутренние переживания и др.

Обратимся к вопросу стратегий принятия решений человеком в многокритериальной среде. Во многих ситуациях, связанных с выбором, результат выбора невозможно оценить только в одной шкале, например, в деньгах или времени. Существуют две принципиально различные позиции, отражающие в определенном плане противоположные точки зрения на данный предмет. В соответствии с первой точкой зрения существует некий единый показатель или критерий, в терминах которого могут быть измерены все другие качества. Согласно второй – подобного показателя не существует в принципе. При этом чисто логическим путем, умозрительно ни одна из этих позиций, по-видимому, не может быть доказана или опровергнута, поэтому они обе имеют право на существование. Но вторая более реалистична и жизнеспособна, поскольку знание лишь того отвлеченного факта, что все можно выразить в единой шкале, в практике принятия решений мало что дает – нужно уметь реализовать эту точку зрения. Другими словами, необходимо научиться выполнять указанное сведение к единой шкале (на языке многокритериальной оптимизации это означает – уметь производить *скаляризацию* многокритериальной задачи), а его выполнение есть не что иное, как определенный этап решения исходной по существу многокритериальной задачи.

Многокритериальные задачи принятия решений представляют собой исключительно сложный класс задач интеллектуальной деятельности человека. Наличие нескольких критериев усиливает нагрузку на ограниченную естественными пределами оперативную память человека, делает задачу, стоящую перед человеком, более неопределенной, требует высокой концентрации внимания и нередко – нестандартного мышления.

Нет полной картины того, каким образом и при помощи каких механизмов человек осуществляет выбор в многокритериальной среде. Существуют лишь определенные подходы и варианты предложений решения этих сложных вопросов. При этом они нередко в чем-то противоречат друг другу и в совокупности явно не исчерпывают все возможные способы выбора. Считается, что одной из наиболее типичных черт поведения индивида в ходе решения задачи выбора является расчленение (декомпозиция) исходной проблемы на множество более простых промежуточных задач.

Когда имеются всего два возможных варианта (решения), стратегии поведения человека в условиях многокритериальной среды в этом простейшем случае, можно разделить на два класса: стратегия компенсации, стратегия исключения.

Стратегия компенсации соответствует такой линии поведения человека, при которой низкие показатели по одному критерию (или сразу по нескольким критериям) искупаются (компенсируются) высоким показателем по другому критерию (или одновременно по некоторым другим критериям). Типичный пример выбора при использовании стратегии компенсации – покупка автомобиля, когда невысокая экономичность (т.е. большой расход горючего) может окупаться стильным видом или престижной маркой автомобиля. Другой пример подобного рода – приобретение дома с не совсем удачной планировкой комнат и несколько завышенной ценой, но в замечательном районе парковой зоны, расположенном не слишком далеко от места работы.

Стратегия исключения (или *некомпенсирующая стратегия*) состоит в удалении (исключении) из списка имеющихся возможных вариантов тех, которые заведомо не удовлетворяют по какому-то одному или же сразу по нескольким критериям одновременно. Например, при покупке автомобиля или дома покупатель, пользуясь некомпенсирующей стратегией, сразу исключает такие варианты, которые выходят за пределы его финансовых возможностей. Еще один характерный пример некомпенсирующей стратегии, связанный с покупкой автомобиля, – это такая ситуация, когда внимание покупателя сосредотачивается только на моделях с автоматической коробкой передач, а все машины с ручной передачей сразу исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Результаты экспериментальных исследований показывают, что при решении многокритериальных задач с более чем двумя возможными решениями, человек обычно не придерживается лишь одной линии поведения. Он, как правило, определенным образом комбинирует указанные стратегии. Такого рода фактический материал позволил некоторым авторам выдвинуть теории человеческого поведения в процессе принятия решений. Например, в соответствии с *теорией поиска доминантной структуры* человек при выборе лучшего варианта из нескольких сначала как бы окидывает взглядом все имеющиеся возможные решения и старается найти лучшее, основываясь лишь на первом впечатлении. После этого он попарно сравнивает выделенное решение со всеми остальными. Если в результате такого сравнения выбранное решение оказалось предпочтительнее остальных, то процесс выбора закончен. В противном случае то решение, которое при сравнении оказалось лучше выбранного первоначально, становится претендентом на наилучшее решение и оно далее сравнивается со всеми остальными возможными решениям, и т.д.

С точки зрения наличия или отсутствия гарантии полученного результата механизмы принятия решений можно разделить на два класса – *точные* (или *аналитические, логические*) и *эвристические* (или *приближенные, интуитивные*) механизмы. Механизмы первого класса характеризуются четким описанием того типа или класса задач принятия решений, в которых их применение гарантированно приводит к положительным результатам (или, по крайней мере, дает возможность избежать принятия заведомо неприемлемых решений). Что касается эвристических механизмов, то они в задачах разного типа могут давать различные с точки зрения удовлетворительности результаты. При этом точное разделение всех возможных задач на две группы, в одной из которых данный эвристический механизм работает хорошо, а в другой – его применять не стоит, осуществить не удается.

Нередко к точным механизмам и методам принятия решений причисляют все те, которые предполагают использование математического аппарата. С этим нельзя согласиться, поскольку применение языка математики для записи некоторого высказывания еще не означает точности самого высказывания. Более того, у людей, не разбирающихся в математических тонкостях, при знакомстве с такими методами или механизмами может возникнуть иллюзия их высокой точности и надежности.

Психологи продолжают заниматься изучением поведения человека при выборе различного рода решений. К настоящему времени сформулирован и изучен целый ряд психологических эффектов, которые человек должен учитывать для осуществления действительно наилучшего выбора. На основе этого материала специалистами предложены определенные рекомендации, например: не позволяйте детализированным сценариям вводить вас в заблуждение, по возможности обращайте внимание на так называемую базовую частоту (т.е. на относительную частоту, с которой происходит то или иное событие), − помните, что шанс не саморегулируется (т. е. после длинной череды неудач совсем необязательно наступит ряд удачных событий, или наоборот), не забывайте о регрессе к среднему (когда после сильных отклонений в ту или иную сторону обычно следуют более обычные, средние события).

Процесс принятия решений предполагает достижение некоторой цели. Для этого потребуется умения правильно и четко сформулировать то, чего человек хочет получить. Одним из классических методов постановки задач является **метод SMART**, служащий для правильного формулирования и проверки обоснованности задач.

Исторический экскурс. Впервые SMART формат для постановки задачи был изложен гением менеджмента Питером Друкером в середине XX века как часть концепции «Управления по задачам» (Management by Objectives). Именно Питер Друкер придумал и развил современный менеджмент. Питер Друкер придал менеджменту статус научной дисциплины и рассматривал его как своего рода новую философию. Воспитанный на традициях либерального гуманизма, Питер Друкер вместо того, чтобы подробно анализировать каждую возникающую задачу, исследовал лежащие в их основе общие принципы управления. Смещение акцента с производительности на конечный результат позволило ему разработать концепцию «управления по целям», в соответствии с которой задача руководителя состоит в установлении целей и осуществлении действий, направленных на их осуществление.

Проблемы терминологии. Слово Smart переводится с английского языка как умный, но в данном случае оно еще является и аббревиатурой, пришедшей также из английского языка (SMART: Specific, Measurable, Achievable, Relevant/Result-oriented, Time-bound), обозначающая совокупность требований к постановке целей. Сейчас уже существуют несколько трактовок расшифровки аббревиатуры SMART, которых объединяет одно – цель должна быть понятной, измеримой, достижимой, приурочена к определенным срокам и ориентированной на конкретные результаты.

Рассмотрим каждый критерий цели по SMART.

Конкретные цели (**Specific**). Цель должна быть четко и строго определена, иначе результат будет отличаться от того, каким он был запланирован. Цель должна быть недвусмысленная и однозначная, сформулированная таким образом, чтобы ее нельзя было понять неправильно и интерпретировать по-своему.

Измеримые цели (**Measurable**). Цель должна быть измерима. В штуках, процентах, деньгах, страницах. Критерии оценки должны быть такими, чтобы по ним легко можно было определить достигнута цель или нет.

Достижимые цели (**Achievable**). Задача должна решаться в принципе. Декомпозицией, привлечением дополнительных средств, сил и др. Невыполнимые цели – демотивируют, приводят к плохому настроению или стрессу. Цель должна быть достижима и не наносить вреда человеку.

Ориентированные на результат цели (**Result oriented**, **Relevant**). Исполнитель должен понимать чего он достигнет, а не чем будет заниматься, т. е. ориентироваться на результат, а не на процесс. Если не определить ожидаемый результат, то цель будет бесполезной.

Цель должна быть ограничена, определена по времени (**Time-bound**). Для цели необходимо назначить конкретное время достижения.

Пример работы по методу SMART:

«Хочу иметь деньги» – распространенное желание. Что видно из этого:

S – Нет конкретики…

M – сколько? В какой валюте? Наличными? Карточка? Счет?...

A – так как не определено сколько и в каком формате, то можно этого ждать всю жизнь.

R – как образуется S, от чего, за счет чего?

T – к какому сроку у меня должны быть деньги?

Правильный вариант по SMART: «Сегодня 28 марта. Хочу иметь 35 тыс. рублей наличными для поездки в летний спортивный лагерь через 60 дней, т. е. с 28 июля по 12 июля на 14 дней.

S – поездка в летний лагерь.

M – 35 тыс. рублей наличными, спортивный лагерь с 28 июня по 12 июля.

A – хочу пройти тренинг «Сценарии жизни людей», завести новые знакомства, посмотреть новую страну, искупаться в море, зарядиться энергией. Это меня радует!

R – каждый месяц со своей зарплаты в 32 тыс. рублей я откладываю по 12 тыс. рублей в апреле и мае, при получении отпускных 20 июня докладываю еще 11 тыс. рублей.

T – деньги должны быть не позднее 20 июня вечером.

Метод SMART может быть эффективен в следующих случаях:

1) Даты достижения целей должны быть актуальными. Долгосрочное планирование по SMART не имеет смысла при быстро меняющейся ситуации, когда цели становятся не актуальными раньше срока достижения. Сюда же подходит вариант, когда у человека быстро меняется свое собственное мнение.

2) Бывают ситуации, когда важен не конкретный результат, а движение в определенном направлении. В таком случае применять методику SMART придется с некоторыми оговорками.

3) Методика подразумевает совершение действий для достижения поставленной цели. Если заведомо планируется отсутствие каких-либо действий, эффективность методики невысока.

2.2. Свед́ение многокритериальных задач к однокритериальным. Количественные и качественные критерии

Введенные оценки эффективности стратегий и понятия оптимальности при наличии неконтролируемых факторов (см. Т.В.Золотова «Методы оптимизации. Часть I») не зависят от происхождения этих факторов. Чаще всего под ними подразумеваются природные факторы (в том числе такой фактор, как недостаточная изученность исследуемого процесса) и действия противника или других лиц, не принадлежащих к оперирующей стороне. Однако имеется еще один источник неопределенности. Речь идет о неопределенности в понимании цели операции. Эта неопределенность в строгом смысле не является неконтролируемым фактором, так как выбор цели и связанного с ней критерия эффективности находится в распоряжении ЛПР. Однако если она не может или не решается сделать этот выбор, то возникает ситуация, аналогичная случаю наличия неконтролируемых факторов. Обычно эта ситуация связана с тем, что имеется целый ряд показателей эффективности, желательность максимизации (или минимизации) которых не вызывает сомнения, но нет четких представлений о виде общего критерия, т.е. едином показателе. Для выработки такого критерия приходится проводить предварительное исследование. При этом ЛПР оказывается в таком же положении, что и при принятии решения с неконтролируемыми факторами. Общность этих ситуаций легко понять, если представить себе, что каждому значению неконтролируемого фактора y^* соответствует свой критерий эффективности $f(x, y^*)$, зависящий уже только от стратегии x. Поэтому в модели с неконтролируемыми факторами, по существу имеется столько критериев эффективности, сколько различных значений принимают эти неконтролируемые факторы. И проблема со многими критериями возникает та же: каждому решению соответствует не одно, а много значений критерия эффективности.

Вопрос о введении единого (будем называть его общим) критерия эффективности в операции по ряду первичных (будем называть их частными) критериев аналогичен вопросу о введении оценок эффективности стратегий. Но так как выбор критерия эффективности, в принципе, находится в распоряжении ЛПР, то варианты введения общего критерия (они называются методами свертки критериев эффективности) отличаются большим разнообразием. Общий вид свертки следующий:

$$f_0 = \varphi(f_1, \ldots, f_m),$$

где f_0 – общий критерий, $f_1, \ldots, f_m$ – частные критерии, φ – некоторая (вообще говоря, произвольная) функция.

Перечислим наиболее распространенные способы свертки критериев эффективности.

Суммирование с весовыми коэффициентами. Этот способ наиболее распространен в экономических задачах, откуда проистекает его второе название – экономический способ свертки:

$$f_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i \ . \qquad (2.1)$$

Коэффициенты α_i называются весовыми и обычно удовлетворяют условию нормировки: $\alpha_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, m,\, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. Эти коэффициенты могут играть роль переводных (в единую систему измерения). Остающаяся неточность знания цели может выражаться в неопределенности α_i.

Переход от критериев количественных к качественным. Все критерии можно условно разбить на два типа: критерии, принимающие только два значения (чаще всего 0 и 1), и критерии, принимающие более двух (как правило, много) значений. Первые будем называть критериями качественного типа. Смысл их состоит в том, что все исходы операции они разбивают на две группы: удовлетворительные и неудовлетворительные. Вторые будем называть критериями количественного типа, при таких критериях цель операции состоит в получении возможно большего значения эффективности. От критериев качественного типа можно перейти к количественным, например, с помощью предыдущего способа свертки. Способ перехода от количественных критериев к качественным имеет вид

$$f_0 = \begin{cases} 1, & f_i \geq f_i^*, i = 1, \ldots, m, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где через f_i^* обозначены пороговые (удовлетворительные) значения частных критериев. Исход операции удовлетворителен только в том случае, если по всем частным критериям достигнуты пороговые значения.

Логические способы свертки (для критериев качественного типа). Переменные, принимающие значения только 0 и 1, называются логическими (или булевыми). Операции с такими переменными носят название логических. Так как критерии качественного типа представляют собой булевы переменные, то для свертки качественных критериев можно использовать логические операции. Таких основных операций три:

– отрицание (противоположная цель), $f_0=1-f_1$ ($m = 1$);

– конъюнкция (логическое произведение); исход операции оценивается как удовлетворительный по общему критерию, если он удовлетворителен по всем частным критериям, $f_0 = \prod_{i=1}^{m} f_i$;

– дизъюнкция (логическая сумма); для «успеха» по общему критерию достаточно «успеха» хотя бы по одному частному критерию, $f_0 = 1-\prod_{i=1}^{m}(1-f_i)$.

Обобщенные логические способы свертки (для критериев количественного типа). Содержательными аналогами логических операций для количественных критериев служат следующие операции:

– противоположная цель, $f_0 = -f_1$ ($m = 1$);

– оценка по наихудшему значению частных критериев (с учетом весовых коэффициентов)

$$f_0 = \min_{1\le i\le m} \alpha_i f_i, \ (\alpha_i > 0); \tag{2.2}$$

– оценка по наилучшему значению частных критериев $f_0 = \max_{1\le i\le m} \alpha_i f_i$, ($\alpha_i > 0$).

Перечисленные способы свертки являются не только наиболее распространенными, но в совокупности обладают в определенном смысле свойством полноты, т.е. практически любая свертка представима в виде их комбинации. Отметим, что оценка в среднем представляет собой фактически первый способ свертки критериев с весовыми коэффициентами, равными вероятностям, а гарантированная оценка эффективности является обобщением на случай бесконечного множества критериев свертки критериев (2.2) с равными весовыми коэффициентами.

Зачастую ЛПР затрудняется выбрать не только значения весовых коэффициентов, но и сам способ свертки критериев. В такой ситуации обычно вводят понятия оптимальности в терминах всего набора частных критериев (вектора критериев). Оказывается, однако, что эти понятия представляют собой неявное определение единого (общего) критерия. Покажем это на примере понятия *оптимальности по Парето.*

Пусть имеется вектор критериев эффективности $(f_1(x),..., f_m(x))$, зависящих для простоты только от стратегии $x\in X$ (неконтролируемых факторов нет). Согласно введенному в главе 1 понятию поретооптимальности точка x^0 называется *эффективной точкой* (или оптимальной по Парето стратегией), а вектор $(f_1(x^0),\ldots,f_m(x^0))$ – эффективным значением вектора критериев, если не существует такой точки $x\in X$, что $f(x)\geqq f(x^0)$, т.е. $f_i(x)\geq f_i(x^0),\ i=1,\ldots,m$, причем хотя бы для одного i_0 неравенство строгое: $f_{i_0}(x)>f_{i_0}(x^0)$.

Теорема 2.1 (Карлина**).** *Если частные критерии* $f_i(x)$ *вогнуты на выпуклом множестве X, то для любой эффективной точки* x^0 *существуют такие весовые коэффициенты* α_i*, что* x^0 *доставляет максимум функции* (2.1) *на множестве X при подстановке в нее данных* α_i.

Доказательство. Рассмотрим множество m-мерных векторов $Z=\{z\,|\,z_i=f_i(x)-f_i(x^0),\ i=1,..m,\ x\in X\}$ и его выпуклую оболочку co$Z$ (наименьшее выпуклое множество, содержащее Z). Из условия вогнутости $f_i(x)$ на выпуклом X и эффективности точки x^0 следует, что co$Z$ не содержит внутренних точек неотрицательного ортанта R_+^m m-мерного евклидова пространства. Используем теорему о разделяющей гиперплоскости: если есть два выпуклых множества, не имеющих общих внутренних точек, то можно построить гиперплоскость такую, что эти множества лежат в разных полупространствах, определяемых этой гиперплоскостью. Так как гиперплоскость задается уравнением $az=d$, где a – вектор нормали, d – скаляр, то существуют такие вектор $a\neq 0$ и число d, что $az_1\leq d\leq az_2\quad \forall z_1\in Z,\ z_2\in R_+^m$. Вектор a, очевидно, неотрицателен, так как если $a_i<0$, то, выбирая такую последовательность $z_k\in R_+^m$, что $z_k^i\to\infty, z_k^j=0,\ j\neq i$, получим $az_k\to-\infty$, что противоречит предыдущему неравенству. Положим $\alpha_i=\dfrac{a_i}{\sum_{j=1}^{n}a_j}$,

тогда $\alpha_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$.

Так как начало координат принадлежит R_+^m, то $az_1\leq 0\quad \forall z_1\in Z$, откуда $\forall x\in X$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x^0)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.2 (Гермейера**).** *Пусть* x^0 *- эффективная точка, причем* $f_i(x^0) > 0$, $i = 1, \ldots, m$. *Тогда существуют такие весовые коэффициенты* $\alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, m, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, *что для единого критерия вида* (2.2) x^0 *является точкой максимума на X.*

Доказательство. Положим $\mu_i = \dfrac{1}{f_i(x^0)}$, $\alpha_i = \dfrac{\mu_i}{\sum_{j=1}^{m} \mu_j} > 0$ ($\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$) и введем с данными весовыми коэффициентами $\alpha_i \geq 0, i = 1, ..., m,$ по формуле (2.2) единый критерий эффективности. Тогда $f_0(x^0) = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{m} \mu_j$. Так как x^0 – эффективная точка, то $\forall x \in X$ существует индекс i_1 такой, что $f_{i_1}(x) \leq f_{i_1}(x^0)$. Поэтому $f_0(x) \leq \dfrac{\mu_{i_1} f_{i_1}(x^0)}{\sum_{j=1}^{m} \mu_j} = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{m} \mu_j} = f_0(x^0)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, оптимальные по Парето точки могут получаться как обычные точки максимума общего критерия, вводимого с помощью одного из двух перечисленных выше методов свертки критериев эффективности. Как правило, эффективных точек для векторов критериев оказывается много, фиксация весовых коэффициентов в (2.1) и (2.2) соответствует выделению единственной такой точки.

Свертка (2.1) несколько предпочтительней свертки (2.2) при вычислениях, так как (2.2) приводит фактически к максиминной задаче. Однако в отличие от (2.1) максимизация свертки (2.2) справедлива как необходимое условие эффективности практически без ограничений. Как достаточное условие эффективности максимизации свертки (2.1) справедлива без учета требований выпуклости и вогнутости (при этом должно быть $\lambda_i > 0$).

2.3. Методы решения задач векторной оптимизации

Рассмотрим задачу с двумя критериями, считая их равноправными. На плоскости (x_1, x_2) задано множество X и в каждой точке этого множества определены две непрерывные функции $f_1(x)=\Phi(x_1, x_2)$ и $f_2(x)=\Psi(x_1, x_2)$. Требуется найти точку $(x_1^0, x_2^0) \in X$, в которой $\Phi(x_1^0, x_2^0)$ и $\Psi(x_1^0, x_2^0)$ принимают максимальные значения, т.е. решить совместно две экстремальные задачи $\Phi(x_1, x_2) \to \max$ и $\Psi(x_1, x_2) \to \max$, $(x_1, x_2) \in X$. В общем случае поставленная задача решения не имеет. В самом деле, изобразим на плоскости (f_1, f_2) все точки, координаты которых вычисляются по формулам $f_1=\Phi(x_1, x_2)$, $f_2=\Psi(x_1, x_2)$ $(x_1, x_2)\in X$. Обозначим полученное множество через Y.

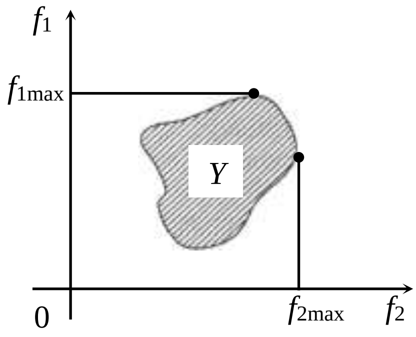


Рис. 2.1. **Множество значений вектора критериев**

Из рис. 2.1 видно, что наибольшее значение f_1 (f_{1max}) и наибольшее значение f_2 (f_{2max}) достигаются в разных точках, а точка с координатами (f_{1max}, f_{2max}) лежит вне множества Y. Тем самым в исходной постановке задача, вообще говоря, неразрешима – удовлетворить обоим требованиями одновременно невозможно. Следовательно, нужно искать какое-то компромиссное решение. Процесс решения многокритериальных задач неизбежно связан с экспертными оценками как самих критериев, так и взаимоотношений между ними.

Среди известных методов решения задач многокритериальной оптимизации можно отметить: метод последовательных уступок, метод идеальной точки, субоптимизация (или метод ограничений), лексикографическая оптимизация (или метод приоритетов).

Оба метода используют множество Парето, составленное в данном случае из допустимых точек задачи, которые не могут быть «сдвинуты» в пределах допустимого множества с улучшением сразу по обоим критериям. Иными словами, улучшая значения одного критериев, мы неизбежно ухудшаем значения другого.

Метод последовательных уступок решения задач многокритериальной оптимизации применяется в случае, когда частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывания их важности. Предположим, что все частные критерии максимизируются и пронумерованы в порядке убывания их важности. Находим максимальное значение первого по важности критерия в области допустимых решений путем решения однокритериальной задачи. Затем, исходя из практических соображений и принятой точности, назначается величина допустимого отклонения первого критерия и находится максимальное значение второго критерия при условии, что значение первого критерия не должно отклоняться от своего максимального значения более чем на величину допустимой уступки. Снова назначается величина уступки по второму критерию, которая вместе с первой уступкой используется для нахождения условного максимума третьего частного критерия. Аналогичные процедуры повторяются до тех пор, пока не будет выявлено максимальное значение последнего по важности критерия при условии, что значение каждого из первых $m-1$ частных критериев отличается от соответствующего условного максимума не более чем на величину допустимой уступки по данному критерию. Полученное на последнем этапе решение считается оптимальным. Следует заметить, что этот метод не всегда приводит к эффективному решению. Поэтому практически метод реализуется так, что ЛПР, работая в режиме диалога со специалистом, анализирует точки на границе Парето и, в конце концов, соглашается остановиться на некоторой компромиссной.

Пример 2.1. Решить задачу по двум критериям

$$f(x) = \{ f_1(x) = x_1 + 3x_2,\ f_2(x) = 40x_1 + 10x_2 \} \to \max ,$$

при ограничениях $2x_1 + x_2 \le 90,\ x_1 + x_2 \le 60,\ x_2 \le 50,\ x_1, x_2 \ge 0$

методом последовательных уступок, если уступка по первому критерию составляет 10% от его оптимального значения.

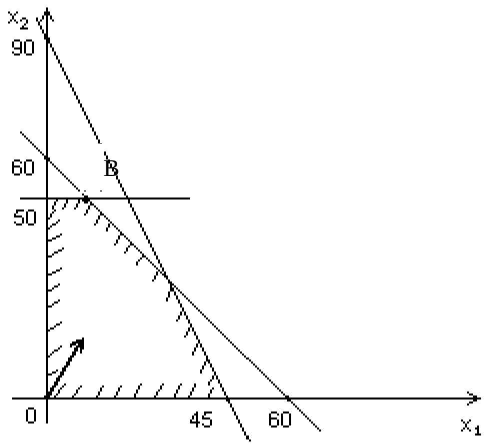


Рис. 2.2. **Графическое решение задачи по критерию** $\boldsymbol{f_1}$

Решим задачу по критерию f_1 графическим методом (рис. 2.2). Получим $x^* = x(B) = (10, 50)$, $f_1^* = f_1(10, 50) = 160$. В соответствии с условием задачи величина уступки $\Delta_1 = 16$. Дополнительное ограничение будет иметь вид $f_1(x) \ge f_1^* - \Delta_1$, т. е. $x_1 + 3x_2 \ge 160 - 16$. Решаем задачу по второму критерию:

$$f_2(x) = 40x_1 + 10x_2 \to \max ,\ 2x_1 + x_2 \le 90,\ x_1 + x_2 \le 60,\ x_2 \le 50,\ x_1 + 3x_2 \ge 144,\ x_1, x_2 \ge 0,$$

также графическим способом (рис. 2.3).

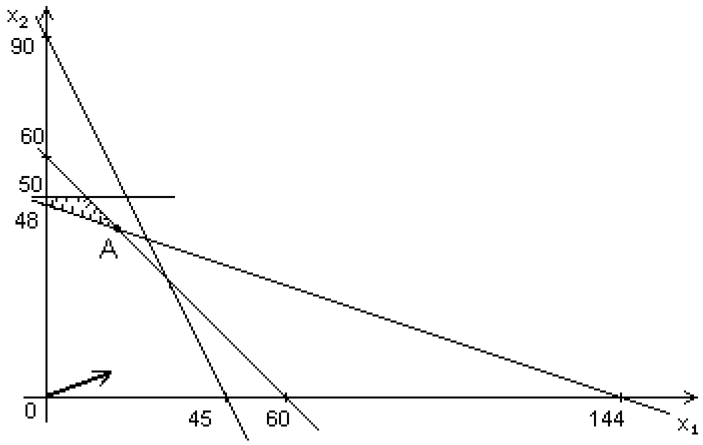


Рис. 2.3. **Графическое решение задачи по критерию f_2**

Получаем решение исходной задачи $x^0 = x(A) = (18,\ 42)$, $f_2^0 = f_2(x^0) = 1140$, $f_1^0 = f_1(x^0) = 144$.

Метод идеальной точки состоит в отыскании на границе Парето точки, ближайшей к *точке утопии*, задаваемой ЛПР. Обычно ЛПР формулирует цель в виде желаемых значений показателей, и часто в качестве координат целевой точки выбирается сочетание наилучших значений всех критериев (обычно эта точка не реализуется при заданных ограничениях, поэтому ее и называют точкой утопии).

Пример 2.2. Решить задачу по двум критериям

$$f(x) = \{ f_1(x) = x_1 + x_2 + 2,\ f_2(x) = x_1 - x_2 + 6\} \to \max ,$$

при ограничениях $x_1 + 2x_2 \le 6,\ \ 0 \le x_1 \le 4,\ \ 0 \le x_2 \le 2.$

Множество X плоскости (x_1, x_2), определяемом системой неравенств, представляет собой пятиугольник с вершинами в точках A(0, 0), B(0, 2), C(2, 2), D(4, 1), E(4, 0) (рис. 2.4).

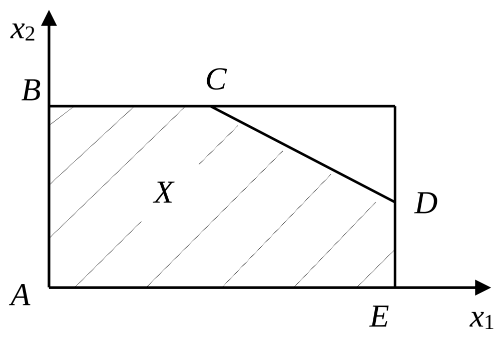


Рис. 2.4. **Множество возможных решений *X***

В силу линейности критериев f_1 и f_2 пятиугольник *ABCDE* переходит в пятиугольник $A^*B^*C^*D^*E^*$, координаты вершин которого вычисляются по формулам f_1 и f_2: A^*(2, 6), B^*(4, 4), C^*(6, 6), D (7, 9), E^*(6, 10).

Находим границу Парето. Это отрезок D^*E^* (рис. 2.5). Точка утопии $M^*(7,\ 10)$ (ее координаты суть наибольшие значения f_1 и f_2).

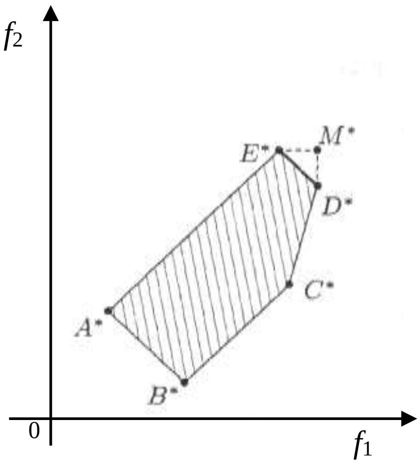


Рис. 2.5. **Множество Парето**

Необходимо найти на множестве Парето точку, ближайшую к точке утопии M^*. Из рис. 2.6 видно, что искомая точка должна лежать на отрезке D^*E^*.

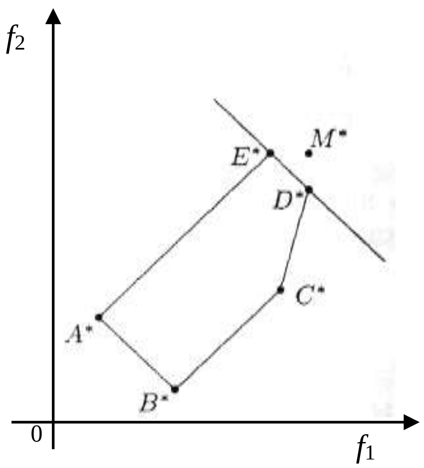


Рис. 2.6. **Нахождение точки, ближайшей к точке утопии**

Проведем через точки D^* и E^* прямую. Пусть ее уравнение есть $\alpha f_1 + \beta f_2 = \gamma$. Чтобы отыскать конкретные значения параметров α, β, γ , подставим в него координаты точек D^* и E^*. Получим $6\alpha + 10\beta = \gamma$, $7\alpha + 9\beta = \gamma$. После простых преобразований придем к соотношению $\alpha = \beta$. Положим $\alpha = \beta = 1$. Тогда $\gamma = 16$ и $f_1 + f_2 = 16$ – искомое уравнение прямой. По условию задачи нам нужно определить на прямой $f_1 + f_2 = 16$ точку $M^0 = (f_1^0,\ f_2^0)$, расстояние которой от точки $M^*(7,\ 10)$ минимально, т.е. решить экстремальную задачу:

$$(f_1 - 7)^2 + (f_2 - 10)^2 \to \min.$$

Учитывая, что $f_1 = 16 - f_2$, получаем задачу

$$2f_2^2 - 38f_2 + 181 \to \min.$$

Целевая функция в последней задаче описывает параболу с вершиной в точке $f_2^0 = 9{,}5$. Тогда $f_1^0 = 16 - 9{,}5 = 6{,}5.$

Идеальная точка $M^0 = (6{,}5,\ 9{,}5)$ находится на расстоянии $\frac{\sqrt{2}}{2}$ от точки утопии $M^*(7,\ 10)$. Соответствующие значения x_1 и x_2 легко находятся из системы линейных уравнений $x + y + 2 = 6{,}5$, $x - y + 6 = 9{,}5$. Имеем $x_1=4$, $x_2=0{,}5$.

Мы рассмотрели задачу, в которой оба критерия максимизируются. На практике часто встречаются случаи, когда требования выглядят по-иному, например,

$$\Phi(x_1, x_2) \to \min, \quad \Psi(x_1, x_2) \to \max.$$

Можно решать такие задачи непосредственно (для указанной выше задачи множество Парето представляет собой «северо-западную» границу), но поменяв в случае необходимости знак у критерия на противоположный, можно свести любую двухкритериальную задачу к рассмотренной задаче на максимум частных критериев.

Субоптимизация,или *метод ограничений*, заключается в том, что выделяется один частный критерий, а остальные переводятся в ограничения в виде условия достижимости определенного значения. Строится задача вида

$$f_1(x) \to \max, \ f_i(x) \ge l_i, i = 2, ..., m, x \in X.$$

Пример 2.3. Формализуем двухкритериальную задачу их примера 2.2 методом ограничений $f_1(x) \to \max, \ f_2(x) \ge 8, x \in X$. Получаем задачу ЛП

$$f_1(x) = x_1 + x_2 + 2 \to \max, \ x_1 - x_2 + 6 \ge 8, \ x_1 + 2x_2 \le 6, \ 0 \le x_1 \le 4, \ 0 \le x_2 \le 2.$$

Решив задачу ЛП, например, графическим методом, получаем $x^0 = (4, 1)$, $f_1^0 = 7$ $f_2^0 = 9$.

Лексикографическая оптимизация, или *метод приоритетов*, основан на введении отношения порядка критериев по относительной важности. Критерии перенумеровываются таким образом, что функция $f_1(x)$ считается самым важным показателем, а последняя по номеру функция $f_m(x)$ – наименее важной. Далее рассматривается задача последовательной оптимизации $f_1(x)$, …, $f_m(x)$. Сначала решается задача $f_1(x) \to \max, \ x \in X$. Если множество полученных оптимальных стратегий содержит более одной точки, решается задача максимизации критерия $f_2(x)$ на этом множестве:

$$f_2(x) \to \max, x \in \operatorname{Arg} \max_{x \in X} f_1(x).$$

И так далее, до тех пор пока не будут рассмотрены все критерии или найдено единственное решение задачи.

Пример 2.4. Пусть в примере 2.1 критерии упорядочены по убыванию приоритетов $f_1(x)$, $f_2(x)$. Тогда решением является точка $x^0 = (10, 50)$, при которой $f_1^0 = 160$, $f_2^0 = 900$.

Если изменить порядок критериев, решение – точка $x^0 = (45, 0)$, при которой $f_1^0 = 45$, $f_2^0 = 1800$.

Обобщением метода идеальной точки является *целевое программирование.* Этот термин был предложен А. Чарнсом и В. Купером для определенного типа задач математического программирования, состоящих в нахождении решений, обеспечивающих «как можно более близкое» приближение к множеству одновременно недостижимых целей.

Обозначим Y^* целевое множество в пространстве критериев. Данное множество может быть задано, например, $f_i(x) = y_i^*$ или $f_i(x) \ge y_i^*$ ($f_i(x) \le y_i^*$), или $f_i(x) \in [y_i^1, y_i^2]$, i=1, …, m.

Кандидатами в решение являются точки из Y, ближайшие к Y^* в смысле какой-то метрике ρ в пространстве критериев. Тогда в общем виде задача формулируется следующим образом: найти

$$\rho(f(x), Y^*) \to \min_{x \in X}, \text{ где } \rho(f(x), Y^*) = \min_{y \in Y^*} (f(x), y).$$

Метрика может быть выбрана, например, полиэдральная (обобщенная линейная): $\rho_0(f(x), y^*) = \min_i \alpha_i \mid f_i(x) - y_i^* \mid$, $\rho_1(f(x), y^*) = \sum_i \alpha_i \mid f_i(x) - y_i^* \mid$, или не полиэдральная $\rho_2(f(x), y^*) = \sum_i \alpha_i (f_i(x) - y_i^*)^2$. Если метрика полиэдральная, задача целевого программирования может быть сведена к задаче ЛП. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 2.5. Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации:

$$f_1(x) = 2x_1 + x_2,\ f_2(x) = x_1 + 2x_2,\ x_1 + x_2 \le 8,\ 0 \le x_1 \le 7,\ 0 \le x_2 \le 6.$$

Пусть заданы цели $f_1(x) = 16$, $f_2(x) \ge 13$ (т. е. $y_1^* = 16$, $y_2^* = 13$), а расстояние определяется на основе полиэдральной метрики: $\rho_1(f(x), y^*) = \frac{1}{2} \mid f_1(x) - y_1^* \mid + \frac{1}{2} \mid f_2(x) - y_2^* \mid$. Обозначим $f_1(x) - 16 = d_1$, $\min\{ f_2(x) - 13, 0\} = d_2$, получим задачу целевого программирования:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \mid d_1 \mid - \tfrac{1}{2} d_2 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 \le 8,\ 0 \le x_1 \le 7,\ 0 \le x_2 \le 6,\ 2x_1 + x_2 - d_1 - 16 = 0,\ x_1 + 2x_2 - d_2 - 13 = 0.$$

Выполнив замену переменных $d_1 = d_1^+ - d_1^-$, $d_2 = -d_2^-$, $d_1^+, d_1^-, d_2^- \ge 0$, получаем задачу ЛП:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} d_1^+ + \tfrac{1}{2} d_1^- + \tfrac{1}{2} d_2^- \to \min,$$

$$x_1 + x_2 \le 8,\ 0 \le x_1 \le 7,\ 0 \le x_2 \le 6,$$

$$2x_1 + x_2 - d_1^+ + d_1^- - 16 = 0,\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - 13 = 0,\ d_1^+, d_1^-, d_2^- \ge 0.$$

Найдем решение задачи целевого программирования графически. Множество $X=\{x \in R^2 \mid x_1+x_2 \le 8,\ 0 \le x_1 \le 7,\ 0 \le x_2 \le 6\}$ – пятиугольник *OABCD* с вершинами *O*(0, 0), *A*(0, 6), *B*(2, 6), *C*(7, 1), *D*(7, 0) (рис. 2.7). Множество *Y* – это образ *X* при линейном отображении $f:(x_1, x_2) \to (f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2))$.

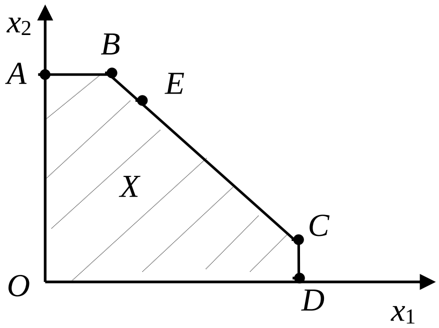
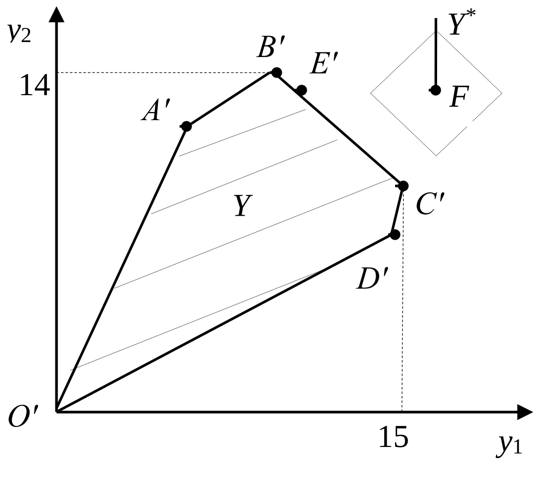


Рис. 2.7. **Множество *X***

Так как отображение линейное, то пятиугольник *OABCD* переходит в некоторый пятиугольник *O′A′B′C′D′*. Найдем координаты вершин: *O′*=*f*(*O*)=(0, 0), *A′*=*f*(*A*)=(6, 12), *B′*=*f*(*B*)=(10, 14), *C′*=*f*(*C*)=(15, 9), *D′*=*f*(*D*)=(14, 7). Множество $Y^*=\{y \in R^2 \mid y_1=16,\ y_2 \ge 13\}$ – вертикальный луч (сонаправленный с осью ординат) с вершиной *F*=(16, 13) (рис. 2.8). Требуется найти кратчайшее расстояние между множествами *Y* и Y^* в смысле заданной метрики.

Рис. 2.8. **Множество *Y* и *Y****



Линии уровня функции $\rho_1(y)=\frac{1}{2}|y_1-y_1^*|+\frac{1}{2}|y_2-y_2^*|$ – это квадраты с центром (y_1^*, y_2^*) и сторонами, параллельными биссектрисам координатных четвертей. Поэтому множество точек из *Y*, ближайших к Y^*, – это отрезок, лежащий на стороне *B′C′*, соединяющий точки *C′*=(15, 9) и *E′*=(11, 13). Решением в пространстве стратегий является прообраз отрезка *C′E′*. Координаты точки *E* удовлетворяют системе уравнений $2x_1+x_2=11,\ x_1+2x_2=13$, поэтому

E(3, 5). Оптимальной является любая точка отрезка *CE*, т.е. $x^0 = (7\beta_1 + 3\beta_2, \beta_1 + 5\beta_2)$, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

2.4 Метод анализа иерархий

Иерархия является некоторой абстракцией структуры системы, предназначенной для изучения функциональных взаимодействий ее компонент и их воздействий на систему в целом. Эта абстракция может принимать различные родственные формы, в каждой из которых, производится спуск с вершины (общей цели) вниз к подцелям. От них к силам, которые влияют на эти подцели, к людям, влияющим на эти силы, к целям отдельных людей, к их политикам, еще дальше к стратегиям, и, наконец, к исходам, являющимся результатами этих стратегий. Стоит отметить, что существует некоторая степень инвариантности этой структуры, высшие уровни которой представляют ограничения и силы окружающей среды, спускающиеся к уровням действующих лиц, их целей, функциям системы, и, наконец, к ее структуре, которая может быть модифицирована или управляема.

Рассмотрим три родственные задачи, имеющие интересные приложения. *Первая* касается измерений. Предположим, что имеется некоторое множество предметов, каждый из которых достаточно легок и может быть поднят рукой. В отсутствии взвешивающего прибора мы хотим оценить их относительные веса. Один способ оценки заключается в том, чтобы угадать вес каждого предмета, взяв за единицу измерения самый легкий, таким образом сравнить все предметы, а потом разделить веса отдельных предметов на суммарный вес всех предметов, чтобы получить относительный вес каждого. Другой метод, использующий большее количество имеющейся в эксперименте информации, представляет собой попарное сравнение предметов, заключающееся в том, что мы поднимаем один предмет, затем другой, и вновь возвращаемся к первому и затем к следующему и т. д., пока у нас не сформируется суждение об относительном весе (отношении) каждой пары объектов. Затем задача заключается в получении удобной шкалы для попарных сравнений. Преимущество второго способа состоит в том, что одновременно рассматриваются только два предмета и выясняется, как они соотносятся друг с другом. Отметим также, что при этом используется избыточная информация, так как каждый предмет методично сравнивается со всеми остальными.

В задачах, где нет шкалы, по которой фиксируется количественная характеристика результатов, процесс попарных сравнений, как можно показать, обладает тем ценным качеством, что, несмотря на большее число этапов, каждый из этапов проще, чем при первом способе взвешивания.

Отметим, что при любом способе измерений их согласованность – это не нечто само собой разумеющееся. Всем измерениям, включая измерения с использованием приборов, присущи как экспериментальные ошибки, так и ошибки измерительного прибора. Серьезным следствием ошибки является то, что она может привести и часто приводит к несогласованным выводам. Простым примером следствия ошибок при взвешивании предметов может служить следующая ситуация: А тяжелее Б, Б тяжелее В, однако В тяжелее А. Это может произойти, в частности, в том случае, когда веса предметов А, Б и В близки, а измерительный прибор недостаточно точен. Отсутствие согласованности может быть существенным для одних задач и не столь существенным для других. Например, если предметами являются два химических препарата, путем смешивания которых в точной пропорции изготовляют лекарство, то несогласованность в данном случае может означать, что непропорционально большее количество одного препарата смешивается с меньшим количеством второго, что может привести к пагубным результатам.

Однако совершенной согласованности в измерениях на практике трудно достигнуть даже при помощи точнейших приборов, поэтому нужен способ оценки согласованности для отдельной задачи.

Под согласованностью здесь подразумевается не просто традиционное требование транзитивности предпочтений (если яблоки предпочтительнее апельсинов, а апельсины предпочтительнее бананов, то яблоки должны быть предпочтительнее бананов), а фактическая степень предпочтения, которая проходит через всю последовательность сравниваемых предметов. Например, если яблоки в 2 раза предпочтительнее апельсинов, а те, в свою очередь, в 3 раза предпочтительнее бананов, то яблоки должны быть в 6 раз предпочтительнее бананов. Именно это называют числовой (кардинальной) согласованностью по степени предпочтений. Несогласованность означает отсутствие пропорциональности, которое может вызвать нарушение транзитивности, а может и не вызвать его. Метод исследования согласованности не только показывает несогласованность при отдельных сравнениях, но и дает численную оценку того, как сильно нарушена согласованность для всей рассматриваемой задачи.

Отметим, что зависимость между согласованностью и тестами, показывающими близость измерений к воспроизводимой реальности, необязательна. Так, у индивидуума может быть отличная согласованность в суждениях, однако он может мало что знать о реальной ситуации. Хотя обычно, чем лучше человек знаком с ситуацией, тем более последовательным в своих суждениях он должен быть при ее воспроизведении. Попарные сравнения позволяют повысить согласованность путем использования всей возможной информации.

Для того чтобы измерения воспроизводили реальность, делаются следующие предположения:

1. Физическая «реальность» согласованна и при контролируемых условиях от опыта к опыту можно рассчитывать на получение одинаковых результатов.

2. Суждения должны стремиться к согласованности, являющейся желаемой целью. Необходимо «схватить» реальность, но этого еще не достаточно. У индивидуума могут быть весьма согласованные мысли, которые не соответствуют реальным ситуациям в мире. Согласованность является центральной проблемой в конкретных измерениях, в суждениях и в мыслительном процессе.

3. Для получения лучших оценок реальности, при проведении суждений следует систематически направлять наши впечатления, ощущения и мнения. Целью является повышение объективности и понижение слишком большой субъективности.

4. Для получения хороших результатов (соответствующих реальности) из наших ощущений требуется: а) применить математику для построения правильной теории, которая предоставит численные шкалы суждений и других сравнительных измерений; б) найти шкалу, которая будет различать наши ощущения так, чтобы мы легко могли доверять соответствию между качественными суждениями и числами этой шкалы; в) иметь возможность воспроизводить измерения реальности, которые уже нам известны из физики и экономики; г) иметь возможность определить величину нашей несогласованности.

Измерительные приборы не только не являются и не могут быть средством абсолютных измерений, но и сами стали объектом научных исследований и анализа. Если эти приборы в каком-либо смысле неадекватны (а можно всегда придумать эксперимент, для которого нет удовлетворительного измерительного прибора), то нужно создать новые приборы. Нетрудно представить себе какой-нибудь важный эксперимент, для которого нельзя найти достаточно точных приборов, всегда дающих непротиворечивые ответы. В этом случае задача в целом смещается в плоскость изучения согласованности и оценки степени несогласованности. Предлагаемый подход к оценке шкал отношений, основанный на максимальном собственном значении; позволяет измерить отклонение от согласованности. При этом обеспечивается сравнение суждений, полученных на основе информированности, с разобщёнными или случайными суждениями, что служит средством оценки отклонения от основной шкалы отношений.

При измерениях физических величин обычно можно установить размерность или характеристику, например для длины, которая остается одной и той же во времени и пространстве, и создать приборы для измерения этой характеристики. В действительности гораздо труднее создать прибор, который перед проведением измерения приспосабливает свою шкалу к изменяющимся обстоятельствам. К примеру, расстояние и масса меняются при скоростях, близких к скорости света, и поэтому прибор, который непосредственно измерял бы эти характеристики при скоростях, близких к скорости света, потребовал бы некую разновидность переменной шкалы.

Такая проблема возникает и в общественных науках. Речь идет о характеристиках, которые изменяются не только в пространстве и во времени, но, что гораздо важнее, изменяют также свое значение в сочетании с другими характеристиками. Мы не можем изобрести универсальные шкалы для социальных событий. Социальные явления сложнее физических, поскольку их труднее воспроизвести в достаточном количестве. Кроме того, при этом необходимо осуществлять строгий контроль, сам по себе часто нарушающий именно то социальное поведение, которое и пытаются измерить. Наши суждения должны быть достаточно гибкими и учитывать ситуацию, при которой происходит измерение интересующей нас характеристики.

Обратимся теперь к нашей *второй* задаче, которая касается обеспечения большей устойчивости и инвариантности в социальных измерениях. Допустим, что размерности или характеристики являются переменными. Зададимся вопросом, как измерять воздействия этой изменчивости на характеристики более высокого уровня, как измерять воздействия последних на еще более высокий уровень и т.д. Получается, что для очень большого класса задач обычно можно определить общие характеристики (или одну характеристику), которые остаются неизменными достаточно долго, т.е. на время эксперимента. Такой подход ведет к измерению и анализу воздействий в иерархиях. Затем можно исследовать инвариантность полученных результатов преобразованием иерархии различными способами. Результаты измерений могут быть использованы для придания системе устойчивости или для построения систем, ориентированных на новые цели, а также (в качестве приоритетов) для распределения ресурсов. Здесь вновь измерения получаются из суждений, основанных на опыте и понимании, причем только из относительных, а не абсолютных сравнений.

Третья задача заключается в установлении правильных условий, при которых люди определили бы структуру своих задач и представили бы необходимые суждения для оценки приоритетов. Предполагается, что попарные сравнения получаются непосредственным опросом лиц (или отдельного лица, если задача касается только его одного), которые могут быть, а могут и не быть экспертами, но знакомы с проблемой. Центральным моментом данного подхода является то, что суждения людей часто не согласованы, но, несмотря на это, приоритеты должны быть установлены.

Предполагается также, что все альтернативы определены заранее, и что не все переменные контролируются каждой из групп, влияющей на исходы альтернатив. Желательно знать, является ли приоритет альтернативы результатом влияния более сильной внешней группы. Целью здесь может быть импровизация политик и установление связей для оказания влияния на эту группу и получения более подходящего исхода для участников. Представляет интерес также и устойчивость результатов по отношению к изменениям оценок суждений.

Предполагается, что выраженные предпочтения являются детерминистическими, а не вероятностными. Поэтому предпочтение остается постоянным и независимым от других факторов, не включенных в задачу.

Если в процессе участвуют несколько лиц, то они могут помогать друг другу в уточнении своих суждений, а также разделить задачу так, чтобы произвести суждения в тех сферах, где они достаточно компетентны. Они могут попытаться достигнуть консенсуса. Когда оценку производит каждый из нескольких лиц, отдельные результаты могут сравниваться с точки зрения их индивидуальных полезностей для синтеза, осуществляемого внешней группой.

Еще одним способом применения метода было бы получение решения посредством использования своих суждений каждым членом группы с конфликтующими интересами, запись результата и сравнение его (возможно, с помощью ЭВМ) с результатами, полученными другими. Данный процесс обнаруживает, на достижение какого исхода оказывает давление каждая группа. Важным результатом этого является стимулирование сотрудничества.

Очень часто при анализе интересующей нас структуры число элементов и их взаимосвязей настолько велико, что превышает способность исследователя воспринимать информацию в полном объеме. В таких случаях система делится на подсистемы.

Иерархия есть определенный тип системы, основанный на предположении, что элементы системы могут группироваться в несвязанные множества. Элементы каждой группы находятся под влиянием элементов некоторой вполне определенной группы и, в свою очередь, оказывают влияние на элементы другой группы. Мы считаем, что элементы в каждой группе иерархии (называемой уровнем, кластером, стратой) независимы.

Основной задачей в иерархии является оценка высших уровней исходя из взаимодействия различных уровней иерархии, а не из непосредственной зависимости от элементов на этих уровнях. Точные методы построения систем в виде иерархий появляются в естественных и общественных науках, и особенно в задачах общей теории систем, связанных с планированием и построением социальных систем. Концептуально, наиболее простая иерархия – линейная, восходящая от одного уровня элементов к соседнему уровню. Например, в процессе производства имеется уровень рабочих, доминируемый уровнем мастеров, который в свою очередь доминируется уровнем управляющих и т.д., до вице-президентов и президента. В нелинейной иерархии верхний уровень может быть как в доминирующем положении по отношению к нижнему уровню, так и в доминируемом (например, в случае потока информации). В математической теории иерархий разрабатывается метод оценки воздействия уровня на соседний верхний уровень посредством композиции соответствующего вклада (приоритетов) элементов нижнего уровня по отношению к элементу верхнего уровня. Эта композиция может распространяться вверх по иерархии. Каждый элемент иерархии функционально может принадлежать к нескольким другим различным иерархиям. Элемент может являться управляющей компонентой на некотором уровне одной иерархии или может просто быть элементом, раскрывающим функции нижнего или высшего порядка в другой иерархии.

Преимущества иерархий состоит в следующем:

1. Иерархическое представление системы можно использовать для описания того, как влияют изменения приоритетов на верхних уровнях на приоритеты элементов нижних уровней.

2. Иерархии предоставляют более подробную информацию о структуре и функции системы на нижних уровнях и обеспечивают рассмотрение участников и их целей на высших уровнях. Для удовлетворения ограничений на элементы уровня их лучше всего воспроизводить на следующем более высоком уровне. Например, природу можно рассматривать как участника, цель которого – использовать определенный материал и который подчиняется определенным законам в качестве ограничений.

3. Естественные системы, составленные иерархически, т.е. посредством модульного построения и затем сборки модулей, строятся намного эффективнее, чем системы, собранные в целом.

4. Иерархии устойчивы и гибки; они устойчивы в том смысле, что малые изменения вызывают малый эффект, а гибкие в том смысле, что добавления к хорошо структурированной иерархии не разрушают ее характеристик.

На практике не существует установленной процедуры генерирования целей, критериев и видов деятельности для включения в иерархию или даже в более общую систему. Это зависит от тех целей, которые мы выбираем для декомпозиции сложной системы. Обычно основные цели устанавливаются на вершине иерархии; их подцели – непосредственно ниже вершины; силы, ограничивающие участников, – еще ниже. Силы доминируют над уровнем самих участников, которые, в свою очередь, доминируют над уровнем своих целей, ниже которых будет уровень их возможных действий, и в самом низу находится уровень различных возможных исходов (сценариев). Это естественная форма, которую принимают иерархии, связанные с планированием и конфликтами.

Существует достаточное сходство между проблемами, так что мы не всегда сталкиваемся с совершенно новой задачей при построении иерархии. Задачей для опытного исследователя в некотором смысле становится отождествление различных классов проблем, возникающих в реальных системах. Существует такое разнообразие этих систем, что исследователю необходимо знание идей и концепций, которыми оперируют специалисты. Это требует интеллекта, терпения и способности взаимодействовать с другими людьми, чтобы извлечь выгоду из их опыта и знаний.

Важным замечанием при иерархическом подходе к решению задач является то, что функциональное воспроизведение системы может быть различным у разных лиц, однако люди обычно приходят к согласию по нижнему уровню альтернативных действий, которые нужно предпринимать, и по следующему за ним уровню характеристик этих действий.

Иерархия, в том виде, в каком она представлена, является более или менее заслуживающей доверия моделью реальной ситуации. Она отражает проведенный нами анализ наиболее важных элементов и их взаимоотношений, однако она – не достаточно мощное средство в процессе принятия решений или планирования. Необходим метод определения силы, с которой различные элементы одного уровня влияют на элементы предшествующего уровня, чтобы можно было вычислять величину воздействий элементов самого низкого уровня на общую цель. Таким методом является метод анализа иерархий.

Метод анализа иерархий представляет собой систематическую процедуру для иерархического представления элементов, отражающих содержание проблемы. Метод состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений ЛПР на основе попарных сравнений. В результате может быть выражена относительная степень взаимодействия элементов в иерархии. Эти суждения затем выражаются численно. Метод анализа иерархий включает в себя процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений.

Матричный метод попарных сравнений, позволяющий сравнивать самые разнообразные параметры систем, был предложен Т. Саати. Элементы задачи сравниваются попарно по отношению к интенсивности их воздействия на общую для них характеристику. Степень интенсивности определяется опросом экспертов, поэтому метод Саати можно рассматривать как дальнейшее развитие и формализацию метода экспертных оценок [14].

Введем некоторые понятия. Матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$ называется *положительной*, если $a_{ij}>0,\ i,\ j=1,\ldots,n.$ Матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$ называется *обратносимметричной*, если $a_{ji}=1/a_{ij}>0,\ i,\ j=1,\ldots,n.$ Матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$ является *согласованной*, если $a_{ik}=a_{ij}\cdot a_{jk},\ i,\ j,\ k=1,\ldots,n.$ Очевидно, что условие обратносимметричности является необходимым, но не достаточным условием согласованности. *Собственный вектор* (характеристический вектор) матрицы $A=(a_{ij})_{n\times n}$ – это такой ненулевой вектор ξ, что $A\xi=\lambda\xi$, или $(1/\lambda)A$ преобразует ξ в ξ, т. е. оставляет ξ инвариантным. Величины λ, соответствующие такому ξ, называются *собственными значениями* (характеристическими значениями) матрицы *A*. Следовательно, ξ будет собственным вектором, если он является нетривиальным (т.е. ненулевым) решением уравнения $(A-\lambda E)\xi=0$ для некоторого числа λ, где *E* – единичная матрица. Компоненты *w* составляют множество решений однородной линейной системы с матрицей $A-\lambda E$. Для получения нетривиального решения матрица $A-\lambda E$ должна быть вырожденной, т. е. ее определитель должен быть равен нулю. Этот определитель представляет собой полином *n*-й степени от λ. Условие равенства определителя нулю ведет к уравнению *n*-й степени, которое называется характеристическим уравнением матрицы *A*. Собственный вектор получается в результате решения системы уравнений соответствующей найденному собственному значению.

Теорема 2.3. Положительная обратносимметричная матрица согласована тогда и только тогда, когда $\lambda_{max}=n$, где λ_{max} – максимальное собственное значение матрицы, а *n*-размерность матрицы.

Допустим, что *n* видов действия или объектов рассматриваются экспертами. Предположим, что цели экспертов следующие: 1) высказать суждения об относительной важности этих объектов; 2) гарантировать такой процесс получения суждений, который позволит количественно интерпретировать суждения по всем объектам. Опишем метод получения из количественных суждений экспертов (т.е. из относительных величин, ассоциируемых с *пáрами* объектов) множества весов, ассоциируемых с *отдельными* объектами; в том смысле, который определен ниже, эти веса должны отражать количественные суждения экспертов. Благодаря такому подходу полученную из целей экспертов информацию приводим в удобную форму без информационных потерь, свойственных качественным суждениям.

Пусть C_1, C_2, …, C_n – совокупность объектов (например, проектов, критериев эффективности, учебных дисциплин). Экспертам предлагается высказать суждения об их относительной важности (эффективности). Для проведения парных сравнений объектов разработана шкала, представленная в табл. 2.1.

Таблица 2.1. **Шкала относительной важности**

Интенсивность относительной важности	*Определение*	*Объяснение*
1	Равная важность	Равный вклад двух видов деятельности в цель
3	Умеренное превосходство одного над другим	Опыт и суждения дают легкое превосходство одному виду деятельности над другим
5	Существенное или сильное превосходство	Опыт и суждения дают сильное превосходство одному виду деятельности над другим
7	Значительное превосходство	Одному виду деятельности дается настолько сильное превосходство, что оно становится практически значимым
9	Очень сильное превосходство	Очевидность превосходства одного вида деятельности над другим подтверждается наиболее сильно
2, 4, 6, 8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Применяются в компромиссном случае
Обратные величины приведенных выше чисел	Если при сравнении одного вида деятельности с другим получено одно из вышеуказанных чисел (например, 3), то при сравнении второго вида деятельности с первым получим обратную величину (т.е. 1/3)	

Приведем некоторые из возможных объяснений, почему выбираются оценки от 1 до 9.

1. Способность человека производить качественные разграничения хорошо представлена пятью определениями: *слабый*, *равный*, *сильный*, *очень сильный*, *абсолютный*. Для большей точности можно пользоваться промежуточными определениями.

2. Классификация по трем основным *зонам – неприятие, безразличие, приятие*, каждая из которых делится на низкую, умеренную и высокую степени.

3. Психологический предел 7 ± 2 предметов при одновременном сравнении подтверждает, что если взять7 ± 2 отдельных предметов, близких относительно свойства, используемого для сравнения, то требуется 9 точек, чтобы их различить.

4. Уместно упомянуть о принятой в отечественном образовании системе оценок 3, 4 и 5 с ее градациями 3 ±, 4 ±, 5 ±.

Опыт показал, что при проведении попарных сравнений в основном ставятся следующие вопросы. При сравнении двух объектов: Какой из них важнее или имеет большее воздействие? Какой из них более вероятен? Какой из них предпочтительнее? Количественные суждения о парах объектов (C_i, C_j) представляются матрицей $A=(a_{ij})_{n\times n}$, (i, j = 1, 2, …, n). При сравнении объектов (определения a_{ij}) нужно ответить на вопрос: во сколько C_i важнее C_j. Элементы a_{ij} определены по следующим правилам:

Правило 1. Если $a_{ij} = \alpha$, то $a_{ji} = 1/\alpha$, $\alpha \neq 0$.

Правило 2. Если суждения таковы, что C_i имеет одинаковую с C_j относительную важность, то $a_{ij} = 1$, $a_{ji} = 1$; в частности, $a_{ii} = 1$ для всех i. Итак, матрица A имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/a_{n1} & 1/a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

После представления количественных суждений о парах (C_i, C_j) в числовом выражении через a_{ij}, задача сводится к тому, чтобы n возможным объектам C_1, C_2, …, C_n поставить в соответствие множество числовых весов ω_1, ω_2, …, ω_n, которые соответствовали бы зафиксированным суждениям, например, коэффициенты важности критериев или количество кредитов для каждой учебной дисциплины.

В идеальном случае точного отношения между попарными суждениями a_{ij} и искомыми весами имеют место соотношения

$$\omega_i/\omega_j = a_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.3}$$

и $A=\begin{pmatrix} \omega_1/\omega_1 & \omega_1/\omega_2 & \cdots & \omega_1/\omega_n \\ \omega_2/\omega_1 & \omega_2/\omega_2 & \cdots & \omega_2/\omega_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_n/\omega_1 & \omega_n/\omega_2 & \cdots & \omega_n/\omega_n \end{pmatrix}.$

Значит, если A – согласованная матрица значений парных сравнений, то для нахождения вектора приоритетов нужно найти вектор ω, который удовлетворяет уравнению $A\omega = \lambda_{\max}\omega$. На основании теоремы 2.3 имеем $\lambda_{\max}=n$, но для согласованной матрицы A имеет место $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = n$, поэтому все остальные собственные значения матрицы равны нулю. Так как желательно иметь нормализованное решение, изменим ω, полагая $\gamma = \sum_{i=1}^{n}\omega_i$ и заменяя ω на $(1/\gamma)\omega$. Это обеспечивает единственность, а также то, что $\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$. Но если A – несогласованная матрица, то не существует вектора приоритетов ω, удовлетворяющего уравнению $A\omega = \lambda\omega$.

Пример 2.6. Пусть имеется согласованная матрица попарных сравнений для трех критериев f_1, f_2, f_3:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3 \\ 2/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

т.е. установлено, что критерий f_1 в 3/2 раза важнее критерия f_2 и в 3 раза важнее критерия f_3, а критерий f_2 в 2 раза важнее f_3. Для свертки этих критериев типа суммы (2.1) требуется найти весовые коэффициенты свертки (вектор приоритетов). Согласно теореме 9.3 λ_{max}=3, поэтому для нахождения вектора приоритетов имеем систему линейных уравнений $(A-3E)\omega = 0,\ \sum_{i=1}^{3}\omega_i = 1$:

$$\begin{aligned} &(1-3)\omega_1 + \tfrac{3}{2}\omega_2 + 3\omega_3 = 0, \\ &\tfrac{2}{3}\omega_1 + (1-3)\omega_2 + 2\omega_3 = 0, \\ &\tfrac{1}{3}\omega_1 + \tfrac{1}{2}\omega_2 + (1-3)\omega_3 = 0, \\ &\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1. \end{aligned}$$

Тогда нормированные веса (вектор приоритетов) есть $\omega=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)=(1/2, 1/3, 1/6)$.

Тем не менее, нереальным было бы требование выполнения этих условий в общем случае, т.е. матрица A не всегда согласована. В большинстве практических случаев это сделало бы задачу нахождения ω_i (при заданных a_{ij}) неразрешимой. Во-первых, даже физические изменения никогда не бывают точными в математическом смысле, и, следовательно, отклонения должны быть приняты во внимание; во-вторых, эти отклонения достаточно велики из-за ошибок в человеческих суждениях.

В общем случае, под согласованностью подразумевается то, что при наличии основного массива необработанных данных все другие данные логически могут быть получены из них. Для проведения парных сравнений n объектов или действий при условии, что каждый объект или действие представлены в данных по крайней мере один раз, требуется $(n-1)$ суждений о парных сравнениях. Из них можно просто вывести все остальные суждения, используя следующее отношение: если объект A_1 в 3 раза превосходит объект A_2 и в 6 раз превосходит A_3, то $A_1=3A_2$ и $A_1=6A_3$. Следовательно, $3A_2=6A_3$, или $A_2=2A_3$ и $A_3=1/2A_2$. Если численное значение суждения в позиции (2, 3) отличается от 2, то матрица будет несогласованной. Это случается часто и не является бедствием. Даже при использовании для суждений всех действительных чисел до тех пор, пока не будет суждений по основным $(n-1)$ объектам, получить согласованные числа невозможно. Для большинства задач очень трудно определить $(n-1)$ суждений, связывающих все объекты или виды действия, одно из которых является абсолютно верным.

Если матрица не согласована, то на основе теоремы 9.3 можно оценить отклонение от согласованности величиной $(\lambda_{max}-n)/(n-1)$. Заметим, что неравенство $\lambda_{max} \geq n$ всегда верно. Насколько плоха согласованность для определенной задачи, можно оценить путем сравнения полученного нами значения величины $(\lambda_{max}-n)/(n-1)$ с ее значением из случайно выбранных суждений и соответствующих обратных величин матрицы того же размера. Выражение $(\lambda_{max}-n)/(n-1)$ называется *индексом согласованности* (ИС). Индекс согласованности сгенерированной случайным образом по шкале от 1 до 9 обратносимметричной матрицы с соответствующими обратными величинами элементов, назовем *случайным индексом* (СИ).

Сгенерированные средние СИ для матриц порядка от 1 до 15 на базе 100 случайных выборок имеют значения, приведенные в табл. 2.2

Таблица 2.2. **Случайная согласованность**

Порядок матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Средние СИ	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59

СИ увеличиваются с увеличением порядка матрицы.

Отношение ИС к среднему СИ для матрицы того же порядка называется *отношением согласованности* (ОС). Значение ОС, меньшее или равное 0,10, считается приемлемым.

Приведем метод получения приближенной оценки согласованности (индекса согласованности). Умножив матрицу попарных сравнений справа на вектор приоритетов, получим новый вектор. Разделив первую компоненту нового вектора на первую компоненту вектор приоритетов, вторую компоненту нового вектора на вторую компоненту вектор приоритетов и т.д., определим еще один вектор. Разделив сумму компонент этого вектора на число компонент, найдем приближение к числу λ_{max}. Чем ближе λ_{max} к n (числу объектов или видов действия в матрице), тем более согласован результат.

Чтобы понять, как установить допуски на отклонения, рассмотрим i-ю строку матрицы A. Элементами этой строки являются $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}$. В идеальном (точном) случае эти величины не что иное, как отношения ω_i/ω_1, ω_i/ω_2, …, ω_i/ω_n. Следовательно, в идеальном случае при умножении первого элемента этой строки на ω_1, второго – на ω_2 и т. д. получим ω_i, $j = 1, 2, \ldots, n$. В итоге имеем строку идентичных элементов $\omega_i, \omega_i, \ldots, \omega_i$, тогда как в общем случае мы получили бы строку элементов, представляющих статистическое рассеивание значений вокруг ω_i. Поэтому, видимо, имело бы смысл требование равенства ω_i среднему этих значений. Следовательно, вместо выражения (2.3) в идеальном случае $\omega_i = a_{ij}\omega_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, более реалистичные выражения для общего случая принимают вид (для каждого фиксированного i) ω_i = среднее из $(a_{i1}\omega_1, a_{i2}\omega_2, \ldots, a_{in}\omega_n)$. Иначе это можно записать в виде

$$\omega_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \text{ , } i, j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.4)$$

Несмотря на то, что условия для выражения (2.4) являются менее строгими, чем для выражения (2.3) все еще остается вопрос: достаточны ли эти условия для существования решения; т.е. гарантируется ли решаемость задачи по определению единственных весов ω_i, при заданных a_{ij}? Чтобы найти ответ на заданный вопрос, необходимо записать (2.4) в другом виде. Для этого необходимо подытожить цепь рассуждений по данному вопросу. При поиске условий, описывающих зависимость вектора весов ω от количественных суждений, мы вначале рассмотрели идеальный (точный) случай этапа 1 и получили выражение (2.3). Затем, ясно понимая, что в реальном случае потребуется допускать отклонения, мы предусмотрели такие допущения и пришли к формулировке (2.4). Оказалось, что все это еще недостаточно реалистично, т. е. то, что выражение (2.4), имеющее силу в идеальном случае, все еще слишком строго для гарантирования существования такого вектора весов ω , который удовлетворял бы (2.4). Отметим, что при хороших оценках a_{ij} приближается к ω_i / ω_j и, следовательно, является малым возмущением этого отношения. Но поскольку a_{ij} изменяется, соответствующее решение (2.4) получим (т. е. ω_i и ω_j могут изменяться, чтобы приспособиться к отклонению a_{ij} от идеального случая), если изменится n, т. е. нужно брать λ_{max}. Следовательно, задача

$$\omega_i = \frac{1}{\lambda_{\max}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j \text{ , } i, j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.4)$$

имеет решение, которое также должно быть единственным.

В общем случае отклонения в a_{ij} могут вызывать большие отклонения как в λ_{max}, так и в ω_i, $i = 1, \ldots, n$. Однако в случае обратносимметричных матриц, удовлетворяющих правилам 1 и 2, этого не наблюдается, т.е. имеется устойчивое решение.

Вычисление вектора приоритетов по матрице попарных сравнений, являющейся заведомо несогласованной, можно осуществить следующими четырьмя методами, которые представлены ниже в порядке увеличения точности оценок.

Метод 1. Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов будет равна единице. Первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первого объекта, второй – второго объекта и т. д.

Метод 2. Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделить каждую обратную величину на сумму всех обратных величин.

Метод 3. Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (т. е. нормализовать столбец), затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки. Это – процесс усреднения по нормализованным столбцам.

Метод 4. Умножить n элементов каждой строки и извлечь корень n-й степени (геометрическое среднее). Нормализовать полученные числа.

Если матрица согласована, то во всех четырех случаях векторы приоритетов будут одинаковыми. В случае несогласованности очень хорошее приближение можно получить только с помощью метода 4.

Легко убедиться, что решая задачу из примера 9.6 любым из этих методов, получается тот же вектор приоритетов. В общем случае, когда матрица не согласована, эти методы дают различные результаты.

Пример 2.7. Пусть A, B, C и D обозначают цели профессорско-преподавательского состава: A – работа, B – профессиональный рост, C – повышение квалификации, D – уверенность. Создадим шкалу приоритетов относительной важности этих критериев. Суждения производит эксперт, который, задает вопросы типа «Насколько сильнее профессиональный рост (B) по сравнению с повышением квалификации (C)?». Ответ представителя профессорско-преподавательского состава соответствует одному из чисел для сравнения, записанных в табл. 2.1, и это суждение заносится в позицию (B, C) матрицы попарных сравнений 4×4. После занесения оставшихся пяти суждений, а также вычисления средних значений элементов матрицы, соответствующих ответам выбранных представителей профессорско-преподавательского состава, получим

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Следующий шаг состоит в вычислении вектора приоритетов по данной матрице, являющейся заведомо несогласованной. Применим различные методы оценки решения в данном примере. Метод 1 дает сумму строк этой матрицы в виде вектора-столбца $(19{,}00;\ 11{,}20;\ 5{,}42;\ 1{,}56)^T$. Сумма всех элементов матрицы получается путем сложения компонент этого вектора и равна 37,18. Разделив каждую компоненту вектора на это число, получим $(0{,}51;\ 0{,}30;\ 0{,}15;\ 0{,}04)^T$ вектор-столбец приоритетов относительной важности критериев A, B, C и D соответственно.

Метод 2 дает сумму столбцов этой матрицы $(1{,}51;\ 6{,}43;\ 11{,}25;\ 18{,}00)^T$. Обратными величинами этих сумм являются $(0{,}66;\ 0{,}16;\ 0{,}09;\ 0{,}06)^T$, а после нормализации становятся $(0{,}68;\ 0{,}16;\ 0{,}09;\ 0{,}06)^T$.

Методом 3 нормализуем каждый столбец (складываем компоненты и делим каждую компоненту на эту сумму) и получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}78 & 0{,}53 & 0{,}39 \\ 0{,}13 & 0{,}16 & 0{,}36 & 0{,}33 \\ 0{,}11 & 0{,}04 & 0{,}09 & 0{,}22 \\ 0{,}09 & 0{,}03 & 0{,}02 & 0{,}06 \end{pmatrix}.$$

Сумма строк является вектором-столбцом $(2{,}36;\ 0{,}98;\ 0{,}46;\ 0{,}20)^T$, который после деления на размерность столбцов 4 позволяет получить вектор-столбец приоритетов $(0{,}590;\ 0{,}245;\ 0{,}115;\ 0{,}050)^T$.

Метод 4 дает $(0{,}61;\ 0{,}24;\ 0{,}10;\ 0{,}04)^T$.

Проиллюстрируем на данном примере приближенные вычисления ИС. Для нахождения приближения к λ_{max} используем приведенную выше матрицу и вектор приоритетов, полученный методом 3. После умножения матрицы справа на вектор приоритетов $(0{,}59;\ 0{,}245;\ 0{,}115;\ 0{,}05)^T$ имеем вектор-столбец $(2{,}85;\ 11{,}11;\ 0{,}47;\ 0{,}20)^T$. Разделив компоненты этого вектора на соответствующие компоненты первого вектора, получим $(4{,}83;\ 4{,}44;\ 4{,}28;\ 4{,}00)^T$, а в результате усреднения последних имеем приближение к λ_{max}, равное 4,39. Отсюда ИС=(4,39 – 4)/3=0,13. Для определения того, насколько хорош этот результат, разделим его на соответствующий СИ=0,90. Отношение согласованности 0,13/0,90=0,14, что, пожалуй, не так уж близко к 0,10.

Эти сравнения и вычисления устанавливают приоритеты элементов некоторого уровня иерархии относительно одного элемента следующего уровня. Если уровней больше, чем два, то различные векторы приоритетов могут быть объединены в матрицы приоритетов, из которых определяется один окончательный вектор приоритетов для нижнего уровня.

Например, требуется определить «степень влияния», или приоритеты, элементов одного уровня относительно их важности для элемента следующего уровня. Заданы элементы одного уровня иерархии и один элемент следующего более высокого уровня. Нужно сравнить элементы данного уровня *попарно* по силе их влияния на элемент более высокого уровня, поместить числа, отражающие достигнутое при сравнении согласие во мнениях, в матрицу парных сравнений и в случае ее согласованности найти собственный вектор с наибольшим собственным значением. Собственный вектор обеспечивает упорядочение приоритетов, а собственное значение является мерой согласованности суждений. Для несогласованных матриц методы нахождения вектора приоритетов рассмотрены далее.

Пример 2.8. Решается вопрос покупки дома, выбор которого осуществляется по восьми критериям: размеры дома (критерий f_1), транспортная доступность (критерий f_2), окрестности (критерий f_3), время постройки дома (критерий f_4), двор (критерий f_5), современное оборудование (критерий f_6), общее состояние (критерий f_7), финансовые условия (критерий f_8). Имеются три дома-кандидата *A, B, C*. Представим задачу выбора дома в иерархической форме: первый (высший) уровень соответствует общей цели «Дом»; на втором уровне находятся восемь критериев, уточняющих общую цель; и на третьем (нижнем) уровне находятся три дома-кандидата, оцениваемые по критериям второго уровня. Элементы нижнего уровня сравниваются попарно по отношению к элементам следующего уровня и т.д. вплоть до вершины иерархии (закон иерархической непрерывности). Потребуется девять матриц попарных сравнений, одна – для второго уровня иерархии и восемь – для третьего уровня.

Субъективные суждения потенциального покупателя заносятся в клетки матриц. При этом вопрос на втором уровне иерархии может звучать, например, так: «на сколько важны размеры дома по отношению к общей цели?», а на третьем уровне – «насколько дом *A* лучше дома *B* или *C* по критерию «окрестности»?». Матрица попарных сравнений для второго уровня имеет вид

$$
\begin{array}{c}
\text{Дом} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 6 & 1/3 & 1/4 \\
1/5 & 1 & 1/3 & 5 & 3 & 3 & 1/5 & 1/7 \\
1/3 & 3 & 1 & 6 & 3 & 4 & 6 & 1/5 \\
1/7 & 1/5 & 1/6 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/7 & 1/8 \\
1/6 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/6 \\
1/6 & 1/3 & 1/4 & 4 & 2 & 1 & 1/5 & 1/6 \\
3 & 5 & 1/6 & 7 & 5 & 5 & 1 & 1/2 \\
4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 6 & 2 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Попарные сравнения элементов на нижнем уровне иерархии приводят к матрицам для третьего уровня:

$$
\begin{array}{c} f_1 \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 1/6 & 1 & 4 \\ 1/8 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \end{array},
\quad
\begin{array}{c} f_2 \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/5 \\ 1/7 & 1 & 1/8 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \end{array},
\quad
\begin{array}{c} f_3 \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 1/8 & 1 & 1/4 \\ 1/6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array},
\quad
\begin{array}{c} f_4 \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},
$$

$$\begin{array}{c|ccc} f_5 & A & B & C \\ \hline A & & & \\ B & & & \\ C & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c}f_5\\A\\B\\C\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}A & B & C\end{array}\\\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\1/5 & 1 & 1/3\\1/4 & 3 & 1\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{c}f_6\\A\\B\\C\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}A & B & C\end{array}\\\begin{pmatrix}1 & 8 & 6\\1/8 & 1 & 1/5\\1/6 & 5 & 1\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{c}f_7\\A\\B\\C\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}A & B & C\end{array}\\\begin{pmatrix}2 & 1/2 & 1/2\\2 & 1 & 1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array},\quad \begin{array}{c}f_8\\A\\B\\C\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}A & B & C\end{array}\\\begin{pmatrix}1 & 1/7 & 1/5\\7 & 1 & 3\\5 & 1/3 & 1\end{pmatrix}\end{array}.$$

Применив метод 4, имеем вектор приоритетов для второго уровня (0,173; 0,054; 0,188; 0,018; 0,031; 0,036; 0,167; 0,333), показывающий предпочтительность критериев по отношению к общей цели «Дом». Значит, наличие адекватного финансирования считается потенциальным покупателем наиболее важным критерием, а время постройки – наименее важным. Приближенное собственное значение есть λ_{max}=9,669, индекс согласованности ИС=0,238 , отношение согласованности ОС=0,169.

Для третьего уровня иерархии, используя также метод 4, имеем векторы приоритетов, иллюстрирующие сравнительную желательность домов по отношению к критериям второго уровня, приближенное λ_{max}, ИС и ОС для каждой из восьми матриц попарных сравнений. По отношению к критерию «Размеры дома» (f_1) имеем (0,754; 0,181; 0,065), λ_{max}=3,136, ИС=0,068 , ОС=0,117. По отношению к критерию «Транспортная доступность» (f_2) – (0,233; 0,005; 0,713), λ_{max}=3,247, ИС=0,124 , ОС=0,213. По отношению к критерию «Окрестности» (f_3) – (0,745; 0,065; 0,181), λ_{max}=3,130, ИС=0,068 , ОС=0,117. По отношению к критерию «Время постройки дома» (f_4) – (0,333; 0,333; 0,333), λ_{max}=3, ИС=0, ОС=0. По отношению к критерию «Двор» (f_5) – (0,674; 0,101; 0,226), λ_{max}=3,086, ИС=0,043 , ОС=0,74. По отношению к критерию «Современное оборудование» (f_6) – (0,747; 0,06; 0,193), λ_{max}=3,197, ИС=0,099 , ОС=0,17. По отношению к критерию «Общее состояние» (f_7) – (0,2; 0,4; 0,4), λ_{max}=3, ИС=0, ОС=0. По отношению к критерию «Финансовые условия» (f_8) – (0,072; 0,65; 0,278), λ_{max}=3,065, ИС=0,032 , ОС=0,056.

Теперь применим принцип синтеза. Приоритеты синтезируются, начиная со второго уровня вниз. Локальные векторы приоритетов элементов по отношению ко всем критериям верхнего уровня скалярно перемножаются с вектором приоритетов вышестоящего уровня (при этом каждый элемент вектора приоритетов второго уровня умножается на единицу, т. е. на вес единственной цели самого верхнего уровня). Это дает составной (глобальный) приоритет того элемента, который затем используется для взвешивания локальных приоритетов по отношению к нему как к критерию и расположенных уровнем ниже. Процедура продолжается до самого нижнего уровня. Например, для дома *A* имеем вектор его приоритетов (0,754; 0,233; 0,745; 0,333; 0,674; 0,747; 0,2; 0,072), который скалярно умножим на вектор приоритетов второго уровня (0,173; 0,054; 0,188; 0,018; 0,031; 0,036; 0,167; 0,333) и получим глобальный приоритет дома *A*: 0,396. Проделав аналогичную процедуру, имеем глобальные приоритеты 0,341 и 0,263 для домов *B* и *C* соответственно. Получили, что дом *A*, который был наименее желателен с точки зрения финансовых условий (имеет наименьший вес по данному критерию), вопреки ожиданию оказался наиболее предпочтительным.

Найдем ИС всей иерархии, перемножая каждый ИС на приоритет соответствующего критерия и суммируя полученные числа. Разделив полученный результат на выражение того же типа, но со случайным индексом согласованности, соответствующим размерам каждой взвешенной приоритетами матрицы, находим ОС иерархии. Если ОС более 10%, то качество суждений следует улучшить, пересмотрев вопросы при проведении попарных сравнений. Если это не поможет улучшить согласованность, то вероятно, задачу следует более точно структурировать, т.е. сгруппировать аналогичные элементы под более значащими критериями. В данном случае ОС=0,081 , что соответствует приемлемому значению.

Таким образом, метод попарных сравнений, основанный на решении задачи о собственном значении, обеспечивает способ шкалирования, особенно в тех сферах, где не существует измерений и количественных сравнений. Мера согласованности позволяет возвратиться к суждениям, модифицируя их для улучшения общей согласованности. Участие нескольких человек позволяет приходить к компромиссам между различными элементами, а также может вызвать диалог о том, каким следует быть действительному отношению – компромиссу между различными суждениями, представляющими разный опыт.

Полезно еще раз повторить этапы метода анализа иерархий:

1. Формулировка задачи. Определить место задачи (если есть необходимость) в общей системе, включающей другие действующие лица, их цели и результаты. Идентифицировать критерии, влияющие на принятие решений.
2. Построить иерархию общих критериев, частных критериев, свойств альтернатив и самих альтернатив. Построение начинается с вершины (цели с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят последующие уровни) к самому нижнему уровню, который обычно является перечнем альтернатив.
3. Установить приоритеты первичных критериев относительно их воздействия на общую цель. Сформулировать вопрос для парных сравнений в каждой матрице. При этом следует обращать внимание на ориентацию каждого вопроса, например, стоимость должна уменьшаться, а эффективность увеличиваться. Установить приоритеты частных критериев относительно своих общих критериев.
4. Ввести суждения о попарных сравнениях и их обратные величины в матрицы попарных сравнений. Определить согласованность матриц.

5. Вычислить приоритеты на всех уровнях иерархии. Для несогласованных матриц найти индекс согласованности и отношение согласованности.

6. Произвести иерархический синтез для взвешивания вектора приоритетов весами критериев и вычислить сумму по всем соответствующим взвешенным компонентам вектора приоритетов уровня иерархии, лежащего ниже.

7. Найти ИС и ОС всей иерархии. При ОС менее 10%, то качество суждений следует улучшить.

Задачи и упражнения

1. Поражаемая мишень состоит из четырех отдельных частей. Для поражения объекта необходимо поразить не менее двух частей, в том числе обязательно первую и третью. Пусть для $i = 1, 2, 3, 4$.

$$f_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-я часть поражена,} \\ 0, \text{ если } i\text{-я часть не поражена;} \end{cases} \quad f_0 = \begin{cases} 1, \text{ если объект поражен,} \\ 0, \text{ если объект не поражен.} \end{cases}$$

Записать критерий f_0 как функцию критериев f_1, f_2, f_3, f_4, используя только операции взятия максимума и минимума.

2. Пусть $x_1 \in M_0 = \{1, 2, 3\}$, $x_2 \in N = \{1, 2, 3\}$, $(f_1(x_1, x_2))_{3\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$$(f_2(x_1, x_2))_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (f_3(x_1, x_2))_{3\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 3 & 4 & 10 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записать обобщенный критерий f_0, если:

а) все частные критерии равноправны, а оперирующая сторона стремится к увеличению значения хотя бы одного частного критерия;

б) все частные критерии равноправны, а оперирующая сторона стремится к одновременному увеличению значений всех частных критериев.

3. Частный критерий f_i принимает значение 1, если выполнена i-я частная цель, и значение 0 – в противном случае, $i = 1, \ldots, m$. Записать обобщенный критерий f_0, используя только операции взятия максимума и минимума, если цель оперирующей стороны состоит в следующем:

а) достигнуть хотя бы одной пары целей с соседними номерами;

б) для любой пары целей с соседними номерами достигнуть хотя бы одной цели из пары.

4. На множестве, определяемом системой неравенств $0 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 4,$ $2x_1 + x_2 \le 6$ заданы линейные функции: $f_1 = x_1 + x_2 + 2$, $f_2 = x_1 - x_2 + 6$. Требуется найти решение задачи $f_1 \to \max$, $f_2 \to \max$ методом идеальной точки при условии, что точка утопии M^* имеет координаты, равные наибольшим значениям f_1 и f_2.

5. Суммирование с весовыми коэффициентами имеет вид

а) $f_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i W_i$; б) $f_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i W_i$; в) $f_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i W_i$.

6. Условие нормировки весовых коэффициентов имеет вид:

а) $\alpha_i \ge 0, i = 1,..m, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$; б) $\alpha_i \ge 0, i = 1,..m, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i < 1$; в) $\alpha_i \le 0, i = 1,..m, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

7. Качественные критерии – это

а) критерии, принимающие только два значения – 0 и 1;

б) критерии, принимающие только значение 1;

в) критерии, принимающие более двух значений.

8. Логические способы свертки используются:

а) только для количественных критериев;

б) только для качественных критериев;

в) для количественных и качественных критериев.

9. К логическим способам свертки не относят:

а) отрицание; б) конъюнкцию; в) импликацию.

10. Обобщенные логические способы свертки используются:

а) для критериев количественного типа;

в) для критериев качественного типа;

в) для критериев количественного и качественного типа.

11. Противоположная цель имеет вид:

а) $f_0 = -f_1$; б) $f_0 = \min_{i=1,\dots,m} \alpha_i W_i$; в) $f_0 = \max_{i=1,\dots,m} \alpha_i W_i$.

12. Оценка по наихудшему значению эффективности имеет вид:

а) $f_0 = -f_1$; б) $f_0 = \min_{i=1,\dots,m} \alpha_i W_i$; в) $f_0 = \max_{i=1,\dots,m} \alpha_i W_i$.

13. Оценка по наилучшему значению эффективности имеет вид:

а) $f_0 = -f_1$; б) $f_0 = \min_{i=1,\dots,m} \alpha_i W_i$; в) $f_0 = \max_{i=1,\dots,m} \alpha_i W_i$.

14. Точка x^0 называется эффективной точкой (или оптимальной по Парето стратегией), а вектор $(f_1(x^0),\dots,f_m(x^0))$ – эффективным значением вектора критериев, если:

а) не существует такой точки $x \in X$, что $f_i(x) \geq f_i(x^0), i = 1, \ldots, m$, причем хотя бы для одного i_0 неравенство строгое: $f_{i_0}(x) > f_{i_0}(x^0)$;

б) существует такая точка $x \in X$, что $f_i(x) \geq f_i(x^0), i = 1, \ldots, m$, причем хотя бы для одного i_0 неравенство строгое: $f_{i_0}(x) > f_{i_0}(x^0)$;

в) не существует такой точки $x \in X$, что $f_i(x) \geq f_i(x^0), i = 1, \ldots, m$.

15. Точка утопии – это

а) точка в пространстве критериев, которая не реализуется при заданных ограничениях;

б) точка в пространстве стратегий, которая не реализуется при заданных ограничениях**;**

в) точка, которая может быть реализуется при заданных ограничениях.

16. Дана задача многокритериальной оптимизации:

$$f_1(x) = x_1 + 2x_2,\ f_2(x) = x_1 - 2x_2,\ x_1 + x_2 \leq 8,\ \ 0 \leq x_1 \leq 7,\ \ 0 \leq x_2 \leq 6.$$

Цели: $f_1(x) \geq 16,\ f_2(x) = 2.$ Расстояние определяется на основе полиэдральной метрики: $\rho_1(f(x), y^*) = \frac{2}{3}\,|\, f_1(x) - y_1^* \,| + \frac{1}{3}\,|\, f_2(x) - y_2^* \,|$. Записать задачу целевого программирования в виде задачи ЛП, построить графики множества достижимых векторных оценок Y и утопического множества Y^*, графически решить задачу целевого программирования.

17. Привлекательность места работы оценивается по шести критериям f_i, i=1, …, 6: «исследования», «карьерный рост», «доходы», «коллеги», «местонахождение», «репутация». Матрица попарных сравнений данных критериев имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 & 5 & 3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/5 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1/3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор приоритетов по методу 4, приближенное собственное значение, индекс согласованности и отношение согласованности.

18. Со студентом, только что получившим диплом, беседовали о трех возможных местах работы (A, B, C). Оценка студентом каждого места работы осуществляется по критериям из задачи 17. Матрицы попарных сравнений работ по отношению к каждому критерию имеют вид

$$\begin{array}{cc} f_1 & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{cc} f_2 & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/5 \\ 4 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{cc} f_3 & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{cc} f_4 & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\begin{array}{cc} f_5 & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{cc} f_6 & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 1/7 & 1 & 5 \\ 1/9 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Студент решил использовать МАИ для осуществления выбора места работы. Какую работу выбрал студент? Найти отношение согласованности иерархии.

Глава 3. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

3.1. Понятие риска. Виды финансового риска. Управление риском

Неполнота или неточность исходных данных о состоянии системы и ее будущем развитии приводит к математическим задачам принятия решений, сформулированным на основе некоторой информационной модели

Неточность исходной информации привела к появлению такого понятия, как «риск», в отношении которого до сих пор не сложилось однозначного толкования. Это объясняется сложностью данного явления и его недостаточным теоретическим изучением. В существующих трактовках риск определяется как

- возможная опасность потерь, вытекающая из специфики тех или иных явлений природы, видов деятельности человеческого общества;
- возможность наступления неблагоприятного события, связанного с различными видами потерь;
- вероятность неблагоприятного исхода операции, приводящего к возможному ущербу;
- вероятность неожиданного воздействия определенных факторов, под влиянием которых может произойти отклонение результата от запланированной величины;
- степень неопределенности или непредсказуемости процесса функционирования системы.

Данные определения риска относятся к различным сферам деятельности. Общим для них является связывание риска с вероятностью наступления некоторого события (значение случайного неконтролируемого фактора), приводящего к убыткам, ущербу, потери доходов или появлению дополнительных расходов, отклонению результата от запланированной величины.

Риск в широком смысле – это непредсказуемость состояния системы или течения процесса как результат неполноты информации. При этом под обеспечением устойчивости, т.е. безопасности функционирования, процесса или системы подразумевается достижение достаточно низкого уровня риска, оцениваемого величиной возможных потерь, связанных с принятием решений в условиях неполной информации.

В последнее время появилось много работ, использующих понятие «управление риском», и в основном они относятся к финансово-экономической сфере деятельности. Под **управлением риском** понимается принятие управленческих решений в системе, непременным атрибутом которого являются процедуры учета и оценки факторов риска в целях максимального снижения неопределенности при принятии решений и обеспечения устойчивости (или безопасности функционирования) системы.

Проблема управления риском возникает, например, в задачах принятия решений на рынке ценных бумаг. Одна из основных функций финансового рынка – преобразование риска. Рыночный механизм производит оценку различных типов рисков (так называемая премия за риск). Однако даже если рынок находится в равновесии, т.е. все риски оценены справедливо, это не значит, что все ценные бумаги одинаково привлекательны для различных инвесторов. На предпочтения инвесторов влияют их финансовое положение, индивидуальное отношение к риску, наличная структура активов и пассивов, положение на рынке и многое другое. Процесс управления риском включает определение видов риска, которые являются существенными для инвестора и должны быть исключены, оценку риска для различных ценных бумаг и формирование портфеля с заданными характеристиками доходности и риска.

Принято выделять следующие *виды риска*:

- рыночный риск, связанный с изменением общего уровня процентных ставок,
- профильный риск, связанный с изменением временной структуры ставок,
- риск изменчивости, связанный с колебанием доходности и несимметричным влиянием ее роста и падения,
- секторный риск, связанный с разным поведением различных групп ценных бумаг,
- валютный риск, связанный с изменением обменных курсов,
- кредитный риск, связанный с возможным неисполнением эмитентом своих финансовых обязательств,
- риск ликвидности, связанный с возможными изменениями спреда между ценой спроса и предложения,
- остаточный риск, т.е. специфический несистемный риск, связанный с поведением конкретной бумаги.

Таким образом, каждая ценная бумага имеет целый набор атрибутов, связанных с разного вида рисками. Если еще учесть, что каждый вид риска может оцениваться с той или иной степенью точности разными показателями, то ясно, что портфель ценных бумаг характеризуется вектором критериев оценки риска. С другой стороны, эффективность портфеля также может оцениваться разными величинами (простая или эффективная доходность, доходность к аукциону или погашению, доход или чистая прибыль и т.д.), причем в качестве их измерителя для простоты часто берутся те или иные приближенные показатели. Поэтому портфель ценных бумаг в общем случае характеризуется вектором оценок эффективности и риска и этот вектор должен, вообще говоря, формироваться инвестором.

Большинство разумных инвесторов не склонно к риску, т.е. стремится по возможности исключить неопределенность в своих результатах. Следует иметь в виду, что в условиях рыночного равновесия полное исключение риска приводит к доходности портфеля, равной ставке безрискового вклада, что вряд ли может быть приемлемо для инвестора. Поэтому необходимо выделять виды риска, которые должны быть исключены полностью или частично, и соотносить прирост эффективности с увеличением риска.

Существует множество различных стратегий управления риском, однако при этом могут быть условно выделены два направления. Первое связано с диверсификацией портфеля, состоящего из первичных финансовых инструментов (акций, облигаций), таким образом, чтобы взаимно погасить воздействие тех или иных факторов. Второе связано с использованием имеющихся или конструированием новых производных финансовых инструментов (фьючерсов, опционов), специально предназначенных для страхования от риска. Управление портфелем, основанное на использовании первичных инструментов, не учитывает будущей информации, поэтому по терминологии теории управления может быть отнесено к программному управлению (соответствующие модели управления портфелем иногда называют моделями финансовой оптимизации). Управление портфелем, основанное на использовании производных инструментов, учитывает будущую информацию (т.к. дает возможность использовать приобретаемое право в зависимости от будущей конъюнктуры), поэтому может назваться управлением с обратной связью или синтезом (соответствующие модели иногда называют моделями финансового инжиниринга). Здесь мы остановимся только на моделях финансовой оптимизации.

Как уже говорилось выше, портфель ценных бумаг характеризуется вектором критериев оценки эффективности и риска, т.е. задачи формирования и реструктуризации портфеля относится к разделу векторной оптимизации. Такие задачи в исходном виде не имеют четкой постановки, поэтому важная роль аналитика состоит в формализации задачи. Существуют разные подходы к многокритериальным задачам. Наиболее распространенные из них рассмотрены в главе 2.

Помимо проблемы многокритериальности аналитик должен решить и упомянутую проблему неполноты информации, т.е. выбрать способы оценки будущих результатов. При этом, во-первых, необходимо установить какого типа неконтролируемые факторы: случайные (т.е. с заданными законами распределения) или неопределенные (т.е. с заданной областью значений), и, во-вторых, какие виды оценки параметров приемлемы (в финансовой оптимизации чаще всего факторы считают случайными, а в качестве оценки эффективности берут математическое ожидание, однако это допустимо только при большом количестве операций на рынке с незначительными возможными ущербами, в крупных единичных операциях лучше оценка по гарантированному результату).

Выбор того или иного подхода к проблемам многокритериальности, неопределенности и риска приводит к строго формализованной задаче математического программирования, для решения которой уже можно применять существующие методы оптимизации (важно также выбрать подходящий метод для данного типа задачи, однако в современных пакетах оптимизации этот процесс в определенной степени автоматизирован). Таким образом, чрезвычайно важная роль финансового менеджера и аналитика состоит в выборе адекватных целей и ограничений, видов ценных бумаг с нужными атрибутами, анализе соотношения доходностей и рисков, точной формулировке задачи финансовой оптимизации. При этом существующий аппарат прогнозирования и оптимизации помогает, но не снимает с них этих функций.

3.2. Методы статистической обработки данных в задачах оценки финансовых рисков. Функции риска

В курсе теории вероятностей основными характеристиками случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия [1].

Математическое ожидание случайной величины – среднее значение случайной величины, одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины. В англоязычной литературе математическое ожидание случайной величины Y обозначается через $E(Y)$ (например, от англ. Expected value или нем. Erwartungswert), в русской $M(Y)$ – (возможно, от англ. Mean value или нем. Mittelwert, а возможно от рус. Математическое ожидание). Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле $M(Y)=\sum_{k=1}^{N} p_k y_k$, где y_k – значение случайной величины Y (например, доходности ценной бумаги); p_k – вероятность возникновения значения y_k; N – количество значений случайной величины. Если значения случайной величины равновероятны, то $p_k=\frac{1}{N}$, i=1,…,N.

Дисперсия случайной величины – мера разброса случайной величины, т.е. математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Обозначается $D(Y)$ в русской литературе и *var x* (англ. variance) в зарубежной. В статистике часто употребляется обозначение σ_Y^2 или σ^2. Квадратный корень из дисперсии, равный σ, называется средним квадратическим отклонением (СКО), стандартным отклонением или стандартным разбросом. Стандартное отклонение измеряется в тех же единицах, что и математическое ожидание случайной величины, а дисперсия измеряется в квадратах этой единицы измерения. Дисперсия рассчитывается по формуле $D(Y)=M(Y-M(Y))^2$.

Математическая статистика занимается разработкой методов регистрации, описания, анализа экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений. Одной из ее задач является задача экспериментального определения числовых характеристик случайных величин. Пусть произведено N опытов, в результате которых получено множество $\{y_1, \ldots, y_N\}$ значений случайной величины Y. Естественно определить математическое ожидание этой величины по формуле

$$M^*(Y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \ , \qquad (3.1)$$

а дисперсию – по формуле

$$D^*(Y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (y_k - M(Y))^2 \ . \qquad (3.2)$$

Рассмотрим величины $M^*(Y)$ и $D^*(Y)$ как случайные, определенные формулами (3.1) и (3.2). Математическое ожидание величины $M^*(Y)$ равно $M(Y)$, а математическое ожидание $D^*(Y)$ равно $\frac{D(Y)(N-1)}{N}$. Эти факты принято выражать следующим образом: экспериментальная оценка (3.1) математического ожидания является несмещенной, а экспериментальная оценка (3.2) дисперсии является смещенной. Это означает, что если повторять много раз серию из N опытов, получая каждый раз экспериментальные значения случайной переменной X и вычислять каждый раз значение $D^*(Y)$, то оно будет колебаться не около $D(Y)$, а около $\frac{D(Y)(N-1)}{N}$. Несмещенная оценка величины дисперсии дается формулой $D(Y) = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} (y_k - M(Y))^2$.

Пусть на фондовом рынке случайная величина доходности r некоторой ценной бумаги за N предыдущих периодов принимала значения $r_1, \ldots, r_N$. Тогда $M(r)$ (можно обозначить также $\bar{r}$) есть $M(r) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} r_k$, а дисперсия доходности $D(r)$ (или σ^2) этой ценной бумаги равна $D(r) = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} (r_k - \bar{r}))^2$. Отметим, что для расчета, например, дневной доходности ценной бумаги используется формула $r_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1}}$, где r_k – доходность ценной бумаги k-й день, S_k – стоимость ценной бумаги при закрытии на k-й день, S_{k-1} – стоимость ценной бумаги при закрытии на (k-1)-й день. Аналогично рассчитывается доходность ценной бумаги за любой период.

Для описания системы случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий составляющих в теории вероятностей используют и другие характеристики; к их числу относятся корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом $\sigma_{Y_1Y_2}$ (*ковариацией*) случайных величин Y_1 и Y_2 называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий $\sigma_{Y_1Y_2} = M([Y_1 - M(Y_2)][Y_1 - M(Y_2)])$.

Корреляционный момент дискретных случайных величин вычисляют по формуле $\sigma_{Y_1Y_2} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{S}[y_{1k} - M(Y_1)][y_{2l} - M(Y_2)]p(y_{1k}, y_{2l})$, где y_k – значение случайной величины Y_1, k=1, …, N, y_l – значение случайной величины Y_2, l=1, …, S, $p(y_k, y_l)$ – вероятность того, что система (Y_1, Y_2) случайных величин принимает значения (y_k, y_l).

Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами Y_1 и Y_2. Если корреляционный момент не равен нулю, то случайные величины Y_1 и Y_2 являются зависимыми. Положительный корреляционный момент указывает на то, что две случайные величины меняются в одну сторону (одновременно увеличиваются или уменьшаются), при отрицательном – в разные.

Если имеется N измерений двух случайных величин, то статистический корреляционный момент имеет вид $\sigma_{Y_1Y_2} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}[y_{1k} - M(Y_1)][y_{2l} - M(Y_2)]$. Для двух ценных бумаг, доходности которых r_1 и r_2 принимали значения за N предыдущих периодов (r_{11}, …, r_{1N}) и (r_{21}, …, r_{2N}) соответственно, корреляционный момент имеет вид $\sigma_{r_1r_2} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}[r_{1k} - \bar{r}_1][r_{2l} - \bar{r}_2]$, где $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ – математические ожидания доходностей двух ценных бумаг.

Коэффициентом корреляции $\rho_{Y_1Y_2}$ случайных величин Y_1 и Y_2 называют отношение корреляционного момента к произведению СКО этих величин: $\rho_{Y_1Y_2} = \frac{\sigma_{Y_1Y_2}}{\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}}$.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами. Если случайные величины Y_1 и Y_2 связаны точной линейной функциональной зависимостью $Y_1=aY_2+b$, то $\rho_{Y_1Y_2} = \pm 1$, причем знак «плюс» или «минус» берется в зависимости от того, положителен или отрицателен коэффициент a. В общем случае, когда величины Y_1 и Y_2 связаны произвольной вероятностной зависимостью, имеем $-1<\rho_{Y_1Y_2}<+1$. Для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю $\rho_{Y_1Y_2}=0$. Коэффициент корреляции нормирует ковариацию для облегчения сравнения с другими параметрами случайных переменных.

Минимальное число характеристик, с помощью которых может быть охарактеризована система n случайных величин Y_1, …, Y_n, сводится к вычислению n математических ожиданий, характеризующих среднее значение величин; n дисперсий, характеризующих их рассеяние; $n(n-1)$ корреляционных моментов, характеризующих попарную корреляцию всех величин, входящих в систему.

Все корреляционные моменты и дисперсии удобно расположить в виде матрицы $K=(\sigma_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$, которая называется корреляционной матрицей системы случайных величин. Таким образом, если на фондовом рынке имеются n финансовых инструментов, то случайные величины их доходностей r_1, …, r_n могут быть охарактеризованы вектором математических ожиданий $\bar{r}=(\bar{r}_1, ..., \bar{r}_n)$ и корреляционной матрицей $K=(\sigma_{ij})_{n\times n}$.

В моделях принятия решений в условиях случайного воздействия риск чаще всего определяется как математическое ожидание отрицательных последствий, которые в свою очередь представляют собой отклонение результата деятельности системы или процесса от запланированной величины в некоторой метрике. Оценка вероятностей возникновения неблагоприятных событий для расчета математического ожидания отрицательных последствий осуществляется на основе имеющейся априорной информации. Для оценки риска можно использовать подход, связанный с введением функции (критерия) риска.

Пусть x – стратегия ЛПР, которая может быть скалярной или векторной величиной; $r(x)$ – случайная функция, определяющая результат деятельности ЛПР (например, инвестора) в случае возникновения неблагоприятного события; $d(x)$ – функция, определяющая ожидаемый результат деятельности ЛПР, не связанный с возможностью возникновения неблагоприятного события, приводящего к убыткам или потерям. В данном случае имеется в виду, что $d(x)$ не обязательно математическое ожидание величины $r(x)$, и возможно $d(x)\geq r(x), \forall x$, но, в частности, $d(x)=Mr(x)=\bar{r}(x)$.

Отклонение $r(x)$ от $d(x)$ представляет собой функцию потерь ЛПР. Функцию риска будем задавать в соответствии с выбранной метрикой, считая вероятности возникновения неблагоприятных событий известными.

В метрике l_1 классическая функция риска имеет вид

$$R_{absl_1}(x) = M\,|\,r(x) - d(x)\,|, \qquad (3.3)$$

Согласно метрике l_2^2 оценка риска есть дисперсия

$$R_{absl_2^2}(x) = M(r(x) - d(x))^2. \qquad (3.4)$$

Метрика l_2 приводит к функции риска в виде среднего квадратического отклонения

$$R_{absl_2}(x) = (M(r(x) - d(x))^2)^{1/2}. \qquad (3.5)$$

Для функций риска (3.3)-(3.5) $d(x) = Mr(x) = \bar{r}(x)$, т.е. представляет собой математическое ожидание величины $r(x)$. Оценки риска (3.3)-(3.5) представляют собой абсолютные функции риска.

Иногда требуется оценить риск на единицу выгоды или выигрыша. В этой ситуации можно использовать относительные функции риска. В соответствии с выбранной метрикой определим *относительные функции риска*.

Метрика l_2^2 дает относительную функцию риска вида

$$R_{rell_2^2}(x) = \frac{M(r(x) - d(x))^2}{d(x)}, \qquad (3.5)$$

Метрика l_2 приводит относительную функцию риска к виду

$$R_{rell_2}(x) = \frac{(M(r(x) - d(x))^2)^{1/2}}{d(x)}, \qquad (3.6)$$

Аналогично определяются относительная функция риска, использующая метрику l_1.

Вероятностные функции риска могут быть определены по-разному. Пусть известно некоторое требуемое значение результата деятельности ЛПР (например, инвестора) $r_{\text{тр}}$ (требуемой доходности). Тогда функцию риска можно представить в виде

$$R_{prob\,\text{тр}}(x) = P(r(x) < r_{\text{тр}}). \qquad (3.7)$$

Для ожидаемого результата деятельности системы $d(x)$ функции риска имеют вид

$$R_{probr}(x) = P(r(x) < d(x)), \qquad R_{prob\delta}(x) = P(d(x) - r(x) \geq \delta),\ \delta > 0.$$

Другой оценкой риска, используемой инвесторами при принятии решений на фондовом рынке, является Value at Risk.

Value at Risk (VaR) – это стоимостная мера риска. Это выраженная в денежных единицах оценка величины, которую не превысят ожидаемые в течение данного периода времени потери с заданной вероятностью.

Таким образом, VaR портфеля – это наименьшая доходность, которую предполагается получить на рассматриваемом временном горизонте с вероятностью α:

$\mathrm{VaR}_{\alpha}(Y) = \max(\vartheta | P(Y \geq \vartheta) \geq \alpha),$ где $P(Y)$ – вероятность случайной величины Y (например, доходности портфеля), ϑ – граница минимальной доходности. С точки зрения теории вероятностей VaR – это α-квантиль заданного распределения. Существуют различные методы нахождения VaR, к основным из них относят историческое моделирование, вариационно-ковариационный (или аналитический) подход и имитационное моделирование по методу Монте-Карло. Каждый из представленных методов имеет свои достоинства и недостатки.

Рассмотрим один из способов расчета VaR, предполагающий использование исторических (статистических) данных о ценах на акции в инвестиционном портфеле для прогнозирования будущих потерь. Основным принципом действия метода VaR является то, что цены на акции в будущем будут вести себя так же, как и в прошлом. В этом и заключается метод использования исторических данных. При расчете VaR подразумевается, что доходность акций имеет нормальный закон распределения. В неявном виде VaR изображается формулой $P(\mathrm{VaR} \geq Y) = \alpha$ или $\alpha = \int\limits_{-VaR}^{\infty} f(Y)dY$, где $f(Y)$ – плотность нормального расмпределения, Y – потери портфеля, выраженные в денежных единицах. Под потерями в данном случае понимается отрицательное изменение стоимости портфеля, т.е. отрицательная разница между стоимостью портфеля в конце и в начале периода. Стоимостная мера риска VaR позволяет рассчитать рыночный риск, т.е. риск понести потери из-за неблагоприятных движений рынка. Величина VaR рассчитывается следующим образом: $VaR_p = u_{\alpha}\sigma_p W$, где u_{α} – α-квантиль нормального распределения (определяется из таблицы значений), σ_p – СКО портфеля, W – общий объем портфеля в денежных единицах.

3.3. Модели принятия решений на фондовом рынке с учетом риска

Модели доходность-дисперсия. Предположим, что теоретически существует вероятностное распределение n-мерного вектора случайных величин доходностей r_i финансовых инструментов на фондовом рынке. При этом известно, что доходности представляют собой взаимосвязанные случайные величины и мерой, определяющей эту взаимосвязь, служит ковариация (или корреляционный момент) доходностей. Будем считать, что фондовый рынок характеризуется вектором математических ожиданий доходностей финансовых инструментов $\bar{r} = (\bar{r}_1, ..., \bar{r}_i, ..., \bar{r}_n)$ и ковариационной матрицей K= $(\sigma_{ij})_{n\times n}$. Рассмотрим индивидуальное поведение инвестора, управление которого есть вектор x (портфель инвестиций), компоненты которого x_i – доли средств, вкладываемых в финансовые инструменты из конечного списка (i=1, …, n). Инвестору необходимо принять решение о наиболее выгодном вложении средств в те или иные ценные бумаги, т.е. сформировать портфель ценных бумаг. Ценность портфеля характеризуется понятием доходность. Так как большинство инвесторов предпочитают избегать риска неполучения ожидаемой доходности, то возникает проблема формирования портфеля ценных бумаг, который доставлял бы по возможности наибольшую доходность и имел бы наименьший риск. В данном случае речь пойдет о несистематическом риске. На фондовом рынке доходности ценных бумаг имеют ненулевую корреляцию. Поэтому многие финансовые аналитики использовали именно метрики l_2^2 (дисперсия) или l_2 (среднее квадратическое отклонение (СКО)) для оценки риска на фондовом рынке.

Задачу принятия решений по формированию портфеля ценных бумаг с использованием свертки Ψ математического ожидания доходности портфеля $\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i$ и функции риска, заданной в метрике l_2^2 (дисперсия), можно представить в виде

$$\min_{x \in X} \Psi(-\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i, M(\sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r}_i) x_i)^2),$$

где $X = \{x \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$, M – математическое ожидание. Запишем задачу более подробно $\min_{x \in X} \Psi(-\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j)$. Может быть использована свертка типа суммы с весовым коэффициентом $\alpha \geq 0$ при дисперсии, который показывает отношение инвестора к риску:

$$\max_{x \in X} [\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j]. \tag{3.8}$$

Рассмотрение дисперсии в качестве функции риска линейной свертки удобно в том смысле, что исходная задача сразу представляет собой задачу квадратичного программирования (ЗКП) и не требует дополнительных преобразований для нахождения решения.

Портфель называется *полноразмерным*, если у составляющего его вектора x все компоненты положительные [3]. Решение задачи (3.8) в матричном виде для полноразмерных портфелей приведено в работе [3], а именно,

$$x^0(\alpha) = \frac{K^{-1} e}{e K^{-1} e} + (K^{-1} \bar{r} - \frac{e K^{-1} \bar{r}}{e K^{-1} e} K^{-1} e) \frac{1}{2\alpha}, \tag{3.9}$$

где e = (1, …, 1). Здесь и далее мы не делаем различия в обозначении вектора-строки и вектора-столбца, считая их соответствующими требованиям операций умножения матриц и векторов.

Предлагается в задаче принятия решений о составе портфеля также использовать свертку типа отношения с функцией риска, заданной в метрике l_2, не требующей при этом введения весового коэффициента:

$$\min_{x\in X}\frac{(M(\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r}_i)x_i)^2)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i},$$

или более подробно

$$\min_{x\in X}\frac{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i}. \tag{3.10}$$

Выбор метрики l_2 для относительной функции риска, во-первых, более естественен, чем l_2^2, так как математическое ожидание и СКО являются соизмеримыми величинами (одни и те же единицы), и, во-вторых, дает возможность свести задачу (3.10) к ЗКП а, в конечном счете, к системе линейных уравнений.

Теорема 3.1. *В задаче* (3.10) *свертка критериев эффективности и риска достигает минимума на заданном множестве X в точке* $x^0=(x_1^0,\dots,x_i^0,\dots,x_n^0)$ *такой, что* $x_i^0=\frac{\xi_i^0}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^0}$, $i=1,\dots,n$, *а* $\xi^0=(\xi_1^0,\dots,\xi_n^0)$ *является решением задачи квадратичного программирования*:

$$\min_{\xi}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\xi_i\xi_j,\quad \xi_i\ge 0, i=1,\dots,n, \sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i\xi_i=1. \tag{3.11}$$

Доказательство. Введем обозначение $z=(\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i)^{-1}$. Тогда задача (3.10) примет вид

$$\min_{x,z}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(zx_i)(zx_j))^{1/2},\quad \sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i(zx_i)=1, \sum_{i=1}^{n}x_i=1, x_i\ge 0, i=1,\dots,n.$$

Приняв $\xi_i=zx_i$ и введя коэффициент 0,5 в критерии, получаем ЗКП (3.11). Пусть $\xi^0=(\xi_1^0,\dots,\xi_n^0)$ – решение задачи (3.11), тогда $x_i^0=\frac{\xi_i^0}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^0}$, $i=1,\dots,n$, – компоненты решения задачи (3.10). Теорема доказана.

Функция Лагранжа для задачи (3.11) имеет вид $L(\xi,\lambda)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\xi_i\xi_j+\lambda(1-\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i\xi_i)$.

Необходимые и достаточные условия оптимальности для ненулевых ξ_i, $i=1,\ldots,n$, приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\xi_j-\lambda\bar{r}_i=0,\ i=1,\ldots,n,\quad \sum_{j=1}^{n}\bar{r}_j\xi_j=1. \tag{3.12}$$

Если часть переменных принимает нулевое значение, то система (3.12) становится меньшего порядка.

Для нахождения решения системы (3.12) удобно представить ее в матричном виде: $K\xi-\lambda\bar{r}=0,\ \bar{r}\xi=1$. Найдем решение системы для $\xi > 0$. Для этого из первой группы уравнений выразим ξ: $\xi=\lambda K^{-1}\bar{r}$. Подставим его в последнее уравнение системы: $\bar{r}\lambda K^{-1}\bar{r}=1$, получаем $\lambda^0=\frac{1}{\bar{r}K^{-1}\bar{r}}$. В [3] показано, что $\bar{r}K^{-1}\bar{r}>0$. Следовательно, $\xi^0=\frac{K^{-1}\bar{r}}{\bar{r}K^{-1}\bar{r}}$.

Суммируя элементы вектора ξ^0, имеем $e\xi^0=\frac{eK^{-1}\bar{r}}{\bar{r}K^{-1}\bar{r}}$. Тогда решение задачи (3.10) для $x^0 > 0$ имеет вид $x^0=\frac{K^{-1}\bar{r}}{eK^{-1}\bar{r}}$.

Инвестор, желая еще больше избегать риска, может вкладывать часть средств в безрисковый актив. Обозначим доходность по безрисковому активу r_0, а долю средств, инвестируемых в безрисковый актив через x_0. Тогда величину риска портфеля следует соотносить с доходностью рисковой и безрисковой части портфеля. Задача принятия решений по формированию портфеля имеет вид

$$\min_{x\in X}\Psi(-\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i-r_0x_0,\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j),$$

где $X=\{x\mid x_i\geq 0, i=0,\ldots,n,\sum_{i=0}^{n}x_i=1\}$.

Минимизация относительного риска системы приводит к задаче

$$\min_{x\in X}\frac{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_ix_i+r_0x_0}. \tag{3.13}$$

Используем преобразования, представленные в доказательстве теоремы 3.1. Введя обозначение $z=(\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_ix_i+r_0x_0)^{-1}$ и приняв $\xi_i=zx_i$, получаем ЗКП:

$$\min_{\xi\in\Xi}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\xi_i\xi_j, \tag{3.14}$$

$\Xi = \{\xi \mid \xi_i \geq 0, i = 0,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \xi_i + r_0 \xi_0 = 1\}$. Функция Лагранжа для задачи (3.14) имеет вид $L_0(\xi, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi_i \xi_j + \lambda(1 - r_0 \xi_0 - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \xi_i)$. Необходимые и достаточные условия экстремума для ненулевых ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi_j - \lambda \bar{r}_i = 0, i = 1, \ldots, n, \quad \lambda = 0 \vee \xi_0 = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j \xi_j + r_0 \xi_0 = 1.$$

Однако очевидно, что решением задачи (3.14) является распределение $(\xi_0^0, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) = (r_0^{-1}, 0, \ldots, 0)$, дающее минимальное (нулевое) значение относительного риска. Согласно тому, что $x_i^0 = \frac{\xi_i^0}{\sum_{i=0}^{n} \xi_i^0}$, $i = 1, \ldots, n$, – компоненты решения задачи (3.13), имеем оптимальное распределение средств $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = (1, 0, \ldots, 0)$. Значит, критерий (3.13) рекомендует все средства вкладывать в безрисковый актив.

Примеры 3.1 и 3.2 демонстрируют решение задач (3.10) и (3.13) при управлении портфелем ценных бумаг.

Пример 3.1. Имеется три инвестиционных инструмента с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}08$, $\bar{r}_2 = 0{,}1$ и $\bar{r}_3 = 0{,}13$, дисперсиями $\sigma_{11} = 0{,}1$, $\sigma_{22} = 0{,}15$, $\sigma_{33} = 0{,}19$ и ковариациями $\sigma_{12} = 0{,}01$, $\sigma_{13} = -0{,}02$, $\sigma_{23} = -0{,}03$. Требуется найти оптимальный состав портфеля, доставляющего по возможности наибольшую доходность и имеющий при этом наименьший риск, т.е. нужно решить задачу (3.10).

Решая систему (3.12), имеем следующий результат: оптимальный состав портфеля $x^0 = (0{,}348;\, 0{,}304;\, 0{,}348)$, ожидаемая доходность портфеля $\sum_{i=1}^{3} \bar{r}_i x_i^0 = 0{,}103$, риск портфеля $(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} x_i^0 x_j^0)^{1/2} = 0{,}2$.

Пример 3.2. Рассмотрим три инвестиционных инструмента с характеристиками, представленными в примере 3.1, и безрисковый актив с доходностью $r_0 = 0{,}02$. В такой задаче оптимальный состав портфеля $x^0 = (1;\, 0;\, 0;\, 0)$, ожидаемая доходность портфеля $\sum_{i=0}^{3} \bar{r}_i x_i^0 = 0{,}02$, риск портфеля $(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} x_i^0 x_j^0)^{1/2} = 0$. Критерий (3.13) рекомендует все средства вкладывать в безрисковый актив.

Возьмем теперь линейную свертку критериев, характеризующую абсолютный риск, с весовым коэффициентом $\alpha \in (0;1)$:

$$\min_{x\in X}[(1-\alpha)(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j)-\alpha(\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i + r_0 x_0)], \qquad (3.15)$$

$X=\{x \mid x_i \geq 0, i=0,\ldots,n, \sum_{i=0}^{n}x_i=1\}$.

Применение критерия (3.15) дает возможность, в отличие от критерия (3.13), для некоторых значений α комбинировать рисковую и безрисковую части.

Если ЛПР необходимо достигнуть требуемого (планового) результата деятельности системы r_p, то вместо задачи (3.10) можно рассмотреть следующую задачу:

$$\min_x \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j, \quad \sum_{i=0}^{n}x_i=1, \sum_{i=0}^{n}\bar{r}_i x_i=r_p, x_i\geq 0, i=0,\ldots,n,$$

или в матричном виде

$$\min_x xKx, \quad \bar{r}x=r_p,\ xe=1,\ x\geq 0, \qquad (3.16)$$

а вместо задачи (3.13) можно рассмотреть задачу, где в знаменателе будет выражение $\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i + r_0 x_0 - r_p$.

Функция Лагранжа для задачи (3.16) имеет вид $L_1(x,\lambda_1,\lambda_2)=xKx+\lambda_1(r_p-\bar{r}x)+\lambda_2(1-xe)$. Условия оптимальности для полноразмерного портфеля приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$2Kx=\lambda_1\bar{r}+\lambda_2 e, \quad \bar{r}x=r_p, \quad xe=1.$$

Из первой группы уравнений выразим *x*: $x=\frac{K^{-1}}{2}(\lambda_1\bar{r}+\lambda_2 e)$. Подставив его в остальные уравнения системы, получаем систему для нахождения множителей Лагранжа λ_1^0,λ_2^0: $\quad \frac{\bar{r}K^{-1}}{2}(\lambda_1^0\bar{r}+\lambda_2^0 e)=r_p, \quad \frac{eK^{-1}}{2}(\lambda_1^0\bar{r}+\lambda_2^0 e)=1,$

которая эквивалентна системе

$$\lambda_1^0\frac{\bar{r}K^{-1}\bar{r}}{2}+\lambda_2^0\frac{\bar{r}K^{-1}e}{2}=r_p, \quad \lambda_1^0\frac{eK^{-1}\bar{r}}{2}+\lambda_2^0\frac{eK^{-1}e}{2}=1.$$

При условии, что определитель последней системы $\frac{1}{4}(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)-(eK^{-1}\bar{r})^2$ отличен от нуля, получаем по формулам Крамера значения λ_1^0 и λ_2^0:

$$\lambda_1^0=\frac{2(r_p(eK^{-1}e)-\bar{r}K^{-1}e)}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)-(eK^{-1}\bar{r})^2}, \ \lambda_2^0=\frac{2(\bar{r}K^{-1}\bar{r}-r_p(\bar{r}K^{-1}e))}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)-(eK^{-1}\bar{r})^2}.$$

Тогда решение задачи (3.16) для $x^0 > 0$ имеет вид

$$x^0 = \frac{(r_p(eK^{-1}e) - \bar{r}K^{-1}e)K^{-1}\bar{r} + (\bar{r}K^{-1}\bar{r} - r_p(\bar{r}K^{-1}e))K^{-1}e}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e) - (eK^{-1}\bar{r})^2}.$$

Теорема 3.2. *Если для* $\bar{r}, K$ *и* r_p, *удовлетворяющих условию*

$$\max\left(\frac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)}, \frac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)}\right) < 1 \vee \min\left(\frac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)}, \frac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)}\right) > 1, \quad (3.17)$$

коэффициент риска $\alpha = \dfrac{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e) - (eK^{-1}\bar{r})^2}{2(r_p(eK^{-1}e) - (\bar{r}K^{-1}e))}$, *то решение задач* (3.8) *и* (3.16) *совпадают для полноразмерных портфелей.*

Доказательство теоремы 3.2 приведено в [11].

В задачах (3.8) и (3.16) предполагается, что оптимальные портфели являются точками множества эффективных (Парето-оптимальных) портфелей. Для задачи (3.8) условием принадлежности оптимальных портфелей эффективному множеству является условие $\alpha > 0$. Если в задаче (3.16) вместо ограничения типа равенства $\bar{r}x = r_p$ взять $\bar{r}x \geq r_p$, то получающиеся при различных значениях r_p оптимальные портфели такой задачи также будут принадлежать эффективному множеству. При ограничении $\bar{r}x = r_p$ это происходит не при всех r_p. Условие (3.17) характеризует принадлежность оптимальных портфелей задачи (3.16) множеству эффективных (Парето-оптимальных) портфелей, а соответствующее значение α, представленное в теореме 3.2 дает возможность получить одинаковые оптимальные решения задач (3.8) и (3.16) на Парето-оптимальном множестве.

В примере 3.4 показано для задачи управления портфелем ценных бумаг, что модель, использующая функцию риска в метрике l_2 и свертку типа отношения, может оказаться более привлекательной для инвестора, избегающего риска, по сравнению с моделью (3.16) при некоторых r_p.

Пример 3.3. Рассмотрим три инвестиционных инструмента с характеристиками, представленными в примере 3.1, и уровнем требуемой доходности портфеля $r_p = 0{,}09$. Решение задачи (3.16) дает оптимальный состав портфеля $x^0 = (0{,}417;\, 0{,}289;\, 0{,}294)$, ожидаемую доходность портфеля $\sum_{i=1}^{3} \bar{r}_i x_i^0 = 0{,}1$, риск портфеля $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} x_i^0 x_j^0 = 0{,}039$. Использование функции риска, заданной в метрике l_2^2, в задаче (3.16) с заданным уровнем доходности $r_p = 0{,}09$ приводит к тому, что ожидаемая доходность оптимального портфеля в задаче (3.16) снизилась примерно на 3%, а риск – на 1,5%, по сравнению с решением задачи из примера 3.1. Для сравнения рисков нужно извлечь квадратный корень из $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}x_i^0x_j^0=0{,}039$.

В задачах фондового инвестирования предлагается также рассматривать вероятностные функции риска. Задачи принятия решения по формированию портфеля ценных бумаг при этом могут быть сформулированы следующим образом

$$\min_x P(\sum_{i=1}^{n}r_ix_i+r_0x_0<r_p),\quad \sum_{i=0}^{n}x_i=1,\ x_i\ge 0, i=0,\dots,n.$$

$$\max_x \sum_{i=1}^{n}\bar r_ix_i+r_0x_0,\quad P(\sum_{i=1}^{n}r_ix_i<\sum_{i=1}^{n}\bar r_ix_i)\le\alpha,\quad \sum_{i=0}^{n}x_i=1,\ x_i\ge 0, i=0,\dots,n.$$

$$\max_x \sum_{i=1}^{n}\bar r_ix_i+r_0x_0,\quad P(\sum_{i=1}^{n}\bar r_ix_i+r_0x_0-\sum_{i=0}^{n}r_ix_i\ge\delta)\le\beta,\quad \delta>0,\quad x_i\ge 0, i=1,\dots,n,\sum_{i=0}^{n}x_i=1.$$

$$\max_x r_0x_0,\quad P(\sum_{i=1}^{n}r_ix_i<r_0x_0)\le\gamma,\quad \sum_{i=0}^{n}x_i=1,\ x_i\ge 0, i=0,\dots,n.$$

$$\min_x P(\sum_{i=1}^{n}r_ix_i<r_p),\quad \sum_{i=1}^{n}x_i=1,\ x_i\ge 0, i=1,\dots,n. \tag{3.18}$$

На примере задачи (3.18) покажем механизм сведения таких задач к задаче квадратичного программирования.

Теорема 3.3. *Пусть* $\{r_i\}$ *– система нормально распределенных случайных величин с математическими ожиданиями* $\bar r_i$ *и ковариационной матрицей К=* $(\sigma_{ij})_{n\times n}$. *Тогда в задаче* (3.18) *критерий эффективности достигает минимума на заданном множестве* X *в точке* $x^0=(x_1^0,\dots,x_i^0,\dots,x_n^0)$ *такой, что* $x_i^0=\dfrac{\tilde\xi_i^0}{\sum_{i=1}^{n}\tilde\xi_i^0}$, $i=1,\dots,n$, *а* $\tilde\xi^0=(\tilde\xi_1^0,\dots,\tilde\xi_n^0)$ *является решением ЗКП*:

$$\min_{\tilde\xi}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\tilde\xi_i\tilde\xi_j,\quad \tilde\xi_i\ge 0, i=1,\dots,n, \sum_{i=1}^{n}\bar r_i\tilde\xi_i-r_p\sum_{i=1}^{n}\tilde\xi_i=1. \tag{3.19}$$

Доказательство. Случайная величина $\sum_{i=1}^{n}r_ix_i$ нормально распределена, т. е. $P(\sum_{i=1}^{n}r_ix_i<r_p)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{r_p}e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$, где $a=\sum_{i=1}^{n}\bar r_ix_i$ - математическое ожидание, $\sigma=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j)^{1/2}$ – СКО случайной величины $\sum_{i=1}^{n}r_ix_i$. Для вычисления величины $P(\sum_{i=1}^{n}r_ix_i<r_p)$ воспользуемся функцией Лапласа $\Phi(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{y}e^{\frac{-t^2}{2}}dt$:

$P(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i < r_p) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_p} e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{r_p - a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$, где $z = \frac{t-a}{\sigma}$ или $t = a + \sigma z$. Далее имеем

$$P(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i < r_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{r_p - a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi(0) - \Phi(\frac{a - r_p}{\sigma}) = \frac{1}{2} - \Phi(\frac{a - r_p}{\sigma}).$$

Тогда задача, эквивалентная (3.18), имеет вид $\frac{\sigma}{a - r_p} \to \min$. Возвращаясь к переменной *x*, окончательно получаем

$$\min_{x \in X} \frac{(\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i - r_p}, \tag{3.20}$$

где $X = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \ge 0, i = 1, \ldots, n\}$. Далее аналогично задаче (3.10), задача (3.20) сводится к задаче квадратичного программирования и, в конечном счете, к системе линейных алгебраических уравнений. Действительно, введем обозначение $\tilde{z} = (\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i - r_p)^{-1}$. Тогда задача (3.20) примет вид

$$\min_{x, \tilde{z}} (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} (\tilde{z} x_i)(\tilde{z} x_j))^{1/2}, \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i (\tilde{z} x_i) - \tilde{z} r_p = 1, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Приняв $\tilde{\xi}_i = \tilde{z} x_i$, имеем $\sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}_i = \tilde{z}$ и получаем задачу (3.19). Пусть $\tilde{\xi}^0 = (\tilde{\xi}_1^0, \ldots, \tilde{\xi}_n^0)$ – решение задачи (3.19), тогда $x_i^0 = \frac{\tilde{\xi}_i^0}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}_i^0}$, $i = 1, \ldots, n$, – компоненты решения задачи (3.18). Теорема доказана.

Функция Лагранжа для задачи (3.19) имеет вид $\tilde{L}(\tilde{\xi}, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j + \lambda(1 + r_p \sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \tilde{\xi}_i)$. Необходимые и достаточные условия экстремума для ненулевых $\tilde{\xi}_i$, $i = 1, \ldots, n$, приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \tilde{\xi}_j + \lambda(r_p - \bar{r}_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j \tilde{\xi}_j - r_p \sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}_j = 1. \tag{3.21}$$

Если часть переменных принимает нулевое значение, то система (3.21) становится меньшего порядка.

Для нахождения решения системы (3.21) удобно представить ее в матричном виде: $K\tilde{\xi}+\lambda(r_p e-\bar{r})=0,\ (\bar{r}-r_p e)\tilde{\xi}=1$. Найдем решение системы для $\tilde{\xi}>0$. Для этого из первой группы уравнений выразим $\tilde{\xi}$: $\tilde{\xi}=\lambda K^{-1}(\bar{r}-r_p e)$. Подставим его в последнее уравнение системы: $\lambda(\bar{r}-r_p e)K^{-1}(\bar{r}-r_p e)=1$, получаем $\lambda^0=\dfrac{1}{(\bar{r}-r_p e)K^{-1}(\bar{r}-r_p e)}$. При этом, как уже было отмечено, $(\bar{r}-r_p e)\sigma^{-1}(\bar{r}-r_p e)>0$. Следовательно, $\tilde{\xi}^0=\dfrac{K^{-1}(\bar{r}-r_p e)}{(\bar{r}-r_p e)K^{-1}(\bar{r}-r_p e)}$.

Суммируя элементы вектора $\tilde{\xi}^0$, имеем $e\tilde{\xi}^0=\dfrac{eK^{-1}(\bar{r}-r_p e)}{(\bar{r}-r_p e)K^{-1}(\bar{r}-r_p e)}$. Тогда решение задачи (3.18) для $x^0>0$ имеет вид

$$x^0=\frac{K^{-1}(\bar{r}-r_p e)}{eK^{-1}(\bar{r}-r_p e)}. \tag{3.22}$$

В отличие от традиционных задач с использованием VAR, заключающихся в нахождении такого значения случайной величины, которое обеспечивается с заданной вероятностью, в задаче (3.18) минимизируется вероятность того, что случайная величина будет меньше требуемого значения.

Пример 3.4 демонстрирует решение задачи (3.18) при принятии решения по формированию портфеля ценных бумаг, проводится сравнение результата этого решения с результатами, полученными в примерах 3.1 и 3.3.

Пример 3.4. Рассмотрим три инвестиционных инструмента с характеристиками, представленными в примере 3.1, и уровнем доходности портфеля $r_p=0{,}09$. Найдем решение задачи (3.18), т.е. такой состав портфеля, для которого вероятность того, что его ожидаемая доходность будем меньше значения $r_p=0{,}09$ минимальна. Это значит, что нужно решить задачу (3.20), т.е. соответствующую ей систему (3.21). Оптимальный состав портфеля есть $x^0=(0;\,0{,}33;\,0{,}67)$, доходность портфеля $\sum_{i=1}^{3}\bar{r}_i x_i^0=0{,}12$, риск портфеля $(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}x_i^0 x_j^0)^{1/2}=0{,}297$. По сравнению с результатом решения задачи из примера 3.1 ожидаемая доходность оптимального портфеля увеличилась на 16,5%, а риск увеличился на 48,5%. Очевидно, что на больший процент произошло увеличение ожидаемой доходности и риска в решении задачи из примера 3.3. Но при этом вероятность того, что ожидаемая доходность найденного оптимального портфеля окажется меньше значения

$r_p = 0{,}09$, минимальна, чего нельзя сказать об ожидаемой доходности портфеля из примеров 3.1 и 3.3.

3.4. Автоматизированная система поддержки принятия решений на фондовом рынке

Рассмотрим одну из возможных автоматизированных систем поддержки принятия решений на фондовом рынке. Программа написана на языке программирования VB.NET, использующая статистические данные для нахождения математических ожиданий случайных значений доходностей и ковариационной матрицы ценных бумаг, а также математические модели (3.8) и (3.16) для нахождения оптимального состава портфеля инвестора: максимизизация линейной свертки «математическое ожидание – дисперсия» при заданном коэффициенте риска, и минимизация дисперсии портфеля при заданной доходности портфеля.

Пользователю (инвестору, ЛПР) требуется ввести диапазон статистических данных интересующих его бумаг. Считается достаточным наличие в портфеле не больше восьми разных активов (видов ценных бумаг), т.к. дальнейшее увеличение их количества не обеспечивает снижения портфельного риска. Такое увеличение может вызвать эффект чрезмерной диверсификации, отрицательные последствия которого проявляются, например, в отсутствии качественного управления портфелем, высоких расходах на выявление подходящих ценных бумаг, покупки недостаточно качественных ценных бумаг (низкий уровень надежности, прибыльности и ликвидности ценных бумаг) и т.п. Программа проводит вычисления корреляционной матрицы и вектора математических ожиданий случайных значений доходностей. Затем инвестор задает требуемое значение доходности портфеля, если для нахождения оптимального портфеля используется модель (3.16). При использовании модели (3.8) инвестор задает коэффициент риска.

В качестве примера рассматривались акции компаний «Аэрофлот», «МТС» и «Мегафон», т.е. выбраны были акции с номерами 1, 4 и 5 из обработанной программой статистики [13] по восьми ведущим российским компаниям (рис. 3.1). Доходности акций этих компаний определялись с использованием ежедневных цен закрытия торговых сессий.

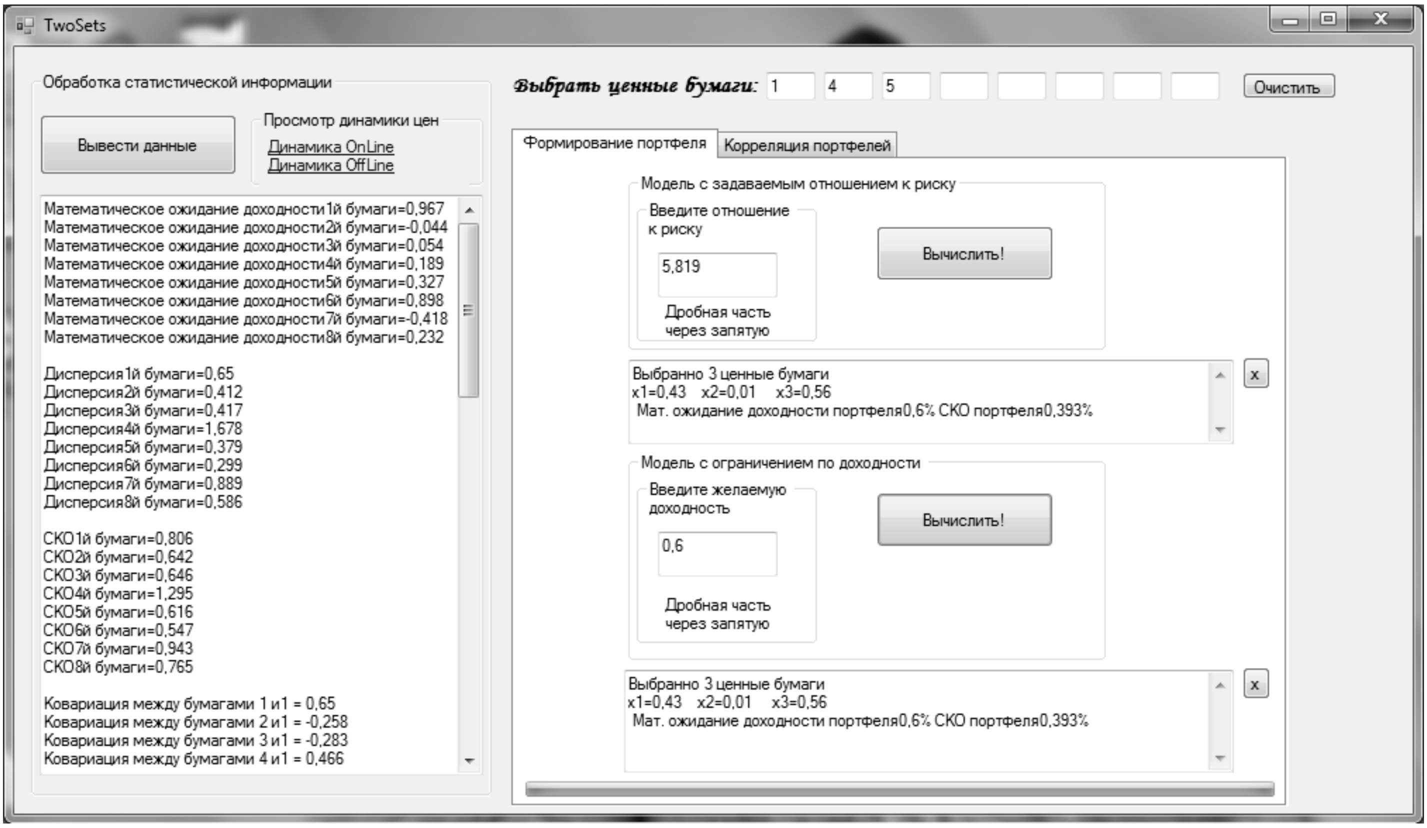


Рис. 3.1. **Фрагмент работы программы**

На рис. 3.1 показан фрагмент работы программы. В фрейме (GroupBox) «Обработка статистической информации» можно посмотреть математические ожидания доходностей ценных бумаг за каждый рабочий день, СКО и ковариацию всех восьми ценных бумаг. Для акций компаний «Аэрофлот», «МТС» и «Мегафон» (акции с номерами 1, 4 и 5) имеем вектор математических ожиданий доходностей акций $\bar{r} = (0{,}97;\ 0{,}19;\ 0{,}33)$, ковариационная матрица $K = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}47 & -0{,}18 \\ 0{,}47 & 1{,}68 & -0{,}19 \\ -0{,}18 & -0{,}19 & 0{,}38 \end{pmatrix}$.

Пусть требуемое значение доходности портфеля r_p=0,6. Условие (3.17) теоремы 3.2 при этом выполняется: $\dfrac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)} = 0{,}907$, $\dfrac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)} = 0{,}753$ и max{0,907; 0,753}<1. Тогда по теореме 3.2 α=5,819.

В фрейме «Модель с задаваемым отношением к риску» пользователь задает коэффициент риска 5,819 , после чего программа определяет оптимальный состав портфеля $x^{01} = (0{,}43;\ 0{,}01;\ 0{,}56)$ (доли средств, инвестированных в каждую акцию). В фрейме «Модель с ограничением по доходности» пользователь задает требуемое значение доходности портфеля $r_p = 0{,}6$, после чего программа определяет оптимальный состав портфеля $x^{02} = (0,43;\,0,01;\,0,56)$. Таким образом, при $r_p = 0,6$ и $\alpha = 5,819$ решение задач (3.8) и (3.16) совпадают для портфелей с положительными компонентами.

Пусть теперь требуемое значение доходности портфеля r_p=0,5. Условие (3.17) при этом не выполняется: $\dfrac{\bar{r}K^{-1}e}{r_p(eK^{-1}e)} = 1,089$ и $\dfrac{(eK^{-1}\bar{r})^2}{(\bar{r}K^{-1}\bar{r})(eK^{-1}e)} = 0,753$. Используя теорему 3.2, получаем $\alpha = -7,331$. Задача (3.8) дает решение $x^{01} = (0;\,1;\,0)$, а задача (3.16) – $x^{02} = (0,29;\,0,092;\,0,617)$. Решения этих задач лежат за пределами эффективного множества: значение доходности r_p=0,5 меньше минимальной доходности на эффективном множестве и соответствует портфелю $x^{02} = (0,29;\,0,092;\,0,617)$, расположенному на юго-западной границе множества возможных портфелей, значение $\alpha = -7,331$ дает отрицательный наклон кривой безразличия целевой функции задачи (3.8), максимальное значение которой достигается в точке $x^{01} = (0;\,1;\,0)$ на северо-восточной границе множества возможных портфелей.

При наличии коротких продаж, предполагающих отсутствие в моделях условия неотрицательности *x*, результат распространяется на произвольные оптимальные портфели.

Исследование связи решений задач (3.8) и (3.16) дает возможность определять отношение инвестора к риску (коэффициент риска), если для нахождения оптимального портфеля использовалась модель с ограничением по доходности, а также тестировать (отлаживать) программу. Исследование также может быть продолжено для сверток другого типа.

3.5. Принципы оптимальности (критерии выбора решений) в условиях неопределенности

При принятии решений в условиях неопределенности используется информация только о множестве возможных состояний внешней среды. Наличие перечня возможных событий или сценариев при отсутствии статистических данных относительно их вероятностей является весьма распространенным случаем, обусловленным различными причинами: нестабильность экономической ситуации, неизвестный покупательский спрос на товар, экологическая обстановка, стихийные бедствия и др. В задачах такого рода выбор решения зависит от объективной действительности, называемой в модели «природой». Математическая модель подобных ситуаций называется иногда «игрой с природой» [2, 4].

Рассмотрим ситуацию, когда ЛПР, располагая информацией о возможных состояниях внешней среды (природы), обладает конечным числом стратегий (управлений) $i = 1, \ldots, n$ и набор возможных вариантов состояний внешней среды (значений неопределенного неконтролируемого фактора) также конечен $j = 1, \ldots, m$. Выигрыш от i-й стратегии при j-м состоянии внешней среды (j-е значение неконтролируемого фактора) равен a_{ij}. Матрица выигрышей (платежная матрица) при всевозможных стратегиях и состояниях внешней среды есть $A=(a_{ij})_{n\times m}$. Например, ЛПР рассматривает инвестиции в n проектов и анализируют бизнес-планы этих проектов. При анализе каждого проекта ЛПР может проводить классификацию состояний внешней среды на макроэкономические, экологические, технологические. Так как будущее состояние внешней среды при выборе решения неизвестно, то задача ЛПР состоит в выборе такого проекта для инвестирования, который окажется в некотором смысле наиболее прибыльным и наименее рискованным.

Выбор стратегии (строки матрицы A) в условиях неопределенности можно осуществлять с использованием предлагаемых далее критериев.

Разность между выигрышем, который получает ЛПР, зная состояние внешней среды j, и выигрышем, который будет получен в ситуации, когда ЛПР выберет произвольную стратегию i, а состояние внешней среды окажется тем же j, называется *риском* (по Сэвиджу) при использовании стратегии i в условиях состояния j и обозначается r_{ij}. Матрица $R=(r_{ij})_{n\times m}$ называется *матрицей риска*, ее элементы $r_{ij} = \max_{1\le k\le n} a_{kj} - a_{ij} \ge 0$.

Если ЛПР стремится избежать возможных потерь, то он выберет ту стратегию, которая гарантирует минимальный риск, т.е. по критерию Сэвиджа:

$$S = \min_{1\le i\le n} \max_{1\le j\le m} r_{ij} . \tag{3.23}$$

Возможна ситуация, когда в результате накопленных статистических данных можно оценить вероятности состояний природы $q_1, q_2, \ldots, q_m$, тогда разумно использовать понятие оптимальности в среднем, т.е. выбрать стратегию i_0, для которой $\sum_{j=1}^{m} a_{i_0 j} q_j =$ $= \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$. Использование вероятностных распределений здесь выигрыша не увеличивает.

Подход, связанный с оценкой вероятностей состояний природы, можно развить дальше. Имеет ли смысл принимать решение на основе накопленных статистических данных или следует провести эксперимент с целью уточнения этих данных.

Тут возможны различные математические постановки задач. Рассмотрим ситуацию, когда до эксперимента известны вероятности состояний природы q_1, q_2, …, q_m, а в результате эксперимента можно точно выяснить, какое состояние имеет место в действительности. Проведение эксперимента всегда связано с затратами. Пусть эти затраты равны *C*. Стоит ли проводить эксперимент? Здесь у оперирующей стороны появились две дополнительные стратегии - проводить, не проводить, одну из которых надо выбрать. Для того чтобы сделать это, надо сравнить выигрыши с экспериментом и без него. Выигрыш (максимальный в среднем) без эксперимента равен $\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}q_j$.

В результате проведения эксперимента узнаем состояние природы *j*, поэтому максимальный выигрыш будет $b_j = \max\limits_{1\le k\le n} a_{kj}$, но заранее до проведения эксперимента это состояние неизвестно, а принимать решение надо заранее. Так как пользуемся вероятностными оценками, то надо взять математическое ожидание выигрыша после эксперимента, которое равно $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j q_j$. С учетом затрат на проведение эксперимента условие выгодности эксперимента имеет вид $\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}q_j < \sum\limits_{j=1}^{m} b_j q_j$ − *C*. Преобразуя соответствующим образом данное неравенство, с учетом замены операции максимизации на минимизацию при выносе знака «минус» получим $C < \min\limits_{1\le i\le n}[\sum\limits_{j=1}^{m}(b_j - a_{ij})q_j]$ или $C < \min\limits_{1\le i\le n}[\sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}q_j]$.

Величина $r_i^* = \sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}q_j$ представляет собой средний ожидаемый риск, следовательно, эксперимент нужно проводить, если связанные с ним затраты меньше минимального среднего риска $C < \min\limits_{1\le i\le n} r_i^*$. В противном случае эксперимент не следует проводить и необходимо применить ту стратегию i^*, для которой достигается минимум среднего риска. Существуют и другие критерии, согласно которым ЛПР может сделать разумный выбор стратегии. Если предположить, что внешняя среда (природа) действует по отношению к ЛПР наихудшим образом, то используется критерий Вальда:

$$W = \max_{1\le i\le n}\min_{1\le j\le m} a_{ij} . \tag{3.24}$$

Максимаксный критерий основан на предположении, что природа благоприятствует ЛПР:

$$M = \max_{1\le i\le n}\max_{1\le j\le m} a_{ij} . \tag{3.25}$$

Если ЛПР не чистый пессимист, не чистый оптимист, то для выбора стратегии ЛПР может использовать критерий Гурвица:

$$H = \max_{1\le i\le n}(\alpha\min_{1\le j\le m} a_{ij} + (1-\alpha)\max_{1\le j\le m} a_{ij}) , \tag{3.26}$$

где $\alpha \in (0;1)$ означает степень пессимизма ЛПР. Чем ближе α к единице, тем ЛПР больше считает себя пессимистом и склонен получить гарантированный выигрыш, нежели рисковать.

Критерий Лапласа опирается на «принцип недостаточного основания» (недостаточно основания выделить какие-либо состояния природы как более вероятные). Согласно этому принципу все состояния природы полагаются равновероятными:

$$L = \max_{1 \le i \le n} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} . \qquad (3.27)$$

Если имеется информация, позволяющая получить оценки апостериорных вероятностей состояний природы, то возможно также использование критерия Байеса-Лапласа.

Отметим, что все критерии, кроме одного, связаны с матрицей выигрышей A и так или иначе максимизируют выигрыш. Критерий Сэвиджа связан с матрицей рисков R и предназначен для нахождения стратегии, минимизирующей потери в результате выбора стратегии, не обеспечивающей наибольший выигрыш при данном состоянии природы. Это говорит о принципиальном отличии критерия Сэвиджа от остальных критериев. Оптимальная стратегия найденная, например, по критерию Вальда может привести к бóльшим потерям, чем та, которая найдена по критерию Сэвиджа, что ставит под сомнение удобство использования критерия, ориентированного на максимальный гарантированный результат. Аналогичные замечания можно высказать и по остальным критериям, использующим матрицу выигрышей. Оптимальная стратегия, найденная по критерию Сэвиджа, при этом может привести к выигрышу, значительно меньшему, чем, например, по критерию Вальда.

Пример 3.5. Дана матрица выигрышей A и соответствующая ей матрица рисков R:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0{,}1 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1{,}9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если ЛПР склонен к осторожному поведению, то согласно критерию Вальда имеем значение игры W=2 и оптимальную стратегию i^0=1. Критерий Сэвиджа имеет значение S=3 и дает оптимальную стратегию i^0=3. Максимальные потери при использовании стратеги i^0=1 равны 5, а минимальный выигрыш составляет 2. При использовании стратегии i^0=3 максимальные потери равны 3, а минимальный выигрыш составляет 0,1.

Пример 3.6. Возможны два состояния природы: $П_1$ – поставщик надежный; $П_2$ – поставщик не надежный. ЛПР – завод. Он может применять стратегии: $А_1$ – не осуществлять дополнительных мероприятий; $А_2$ – послать поставщику свой транспорт; $А_3$

– послать представителя и транспорт; A_4 – купить материал-заменитель у другого. Матрица выигрышей (затрат со знаком «–») имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} П_1 & П_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} -100 & -400 \\ -150 & -300 \\ -200 & -260 \\ -330 & -200 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Какую оптимальную стратегию рекомендует каждый из приведенных выше критериев? Оптимальной по критерию Вальда ($W = \max\limits_{1\le i\le 4} \min\limits_{1\le j\le 2} a_{ij} = -260$) является чистая стратегия A_3. Согласно максимаксному критерию ($M = \max\limits_{1\le i\le n} \max\limits_{1\le j\le m} a_{ij} = -100$) оптимальной является стратегия A_1. По критерию Гурвица (при α=0,8) имеем $H = \max\limits_{1\le i\le 4} [0{,}8 \min\limits_{1\le j\le 2} a_{ij} + 0{,}2 \max\limits_{1\le j\le 2} a_{ij}] =$

$= \max\limits_{1\le i\le 4} \{-520; -540; -680; -464\} = -464$, т. е. рекомендуется стратегия A_4.

Матрица рисков имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} П_1 & П_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 200 \\ 50 & 100 \\ 100 & 60 \\ 230 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Тогда оптимальными по критерию Сэвиджа ($S = \min\limits_{1\le i\le 4} \max\limits_{1\le j\le 2} r_{ij} = 200$) являются стратегии A_2 и A_3. По критерию Лапласа ($L = \max\limits_{1\le i\le 4} \{\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{2} a_{ij}\} = \max\limits_{1\le i\le 4} \{-250; -225; -230; -265\} = -225$) рекомендуется стратегия A_2.

Пример 3.7. Инвестор (ЛПР) имеет возможность выделить 10 ден.ед. на формирование портфеля акций. Ценные бумаги можно приобрести у компаний B, C и K, номинальная стоимость акции составляет соответственно 3, 2 и 5 ден.ед. На конец года рынок ценных бумаг может оказаться в одном из двух состояний. Эксперты установили, что дивиденды компании B для первого состояния на конец года составят 10% от номинальной стоимости акции, а для второго состояния – 15%; для компании C соответственно 8 и 12%; для компании K – 14 и 8%. Сформировать портфель акций инвестора, обеспечив ему возможно большую прибыль.

Инвестор принимает решение о способах формирования портфеля акций; природа – совокупность внешних обстоятельств, обуславливающих то или иное состояние рынка ценных бумаг на конец года.

Ограничимся для инвестора тремя возможностями, полностью использующими выделенную банком сумму в 10 ден.ед. на приобретение ценных бумаг. Тогда первая стратегия инвестора состоит в том, что он приобретает по одной акции каждой из компаний; вторая стратегия – банк приобретает по две акции компаний В и С; третья стратегия – приобретается две акции компании К. Природа может реализовать одно из двух состояний, которые характеризуются различными размерами дивидендов, выплачиваемых (в процентах) компаниями.

Элементы a_{ij} матрицы выигрышей имеют смысл суммарной прибыли инвестора, получаемой им в различных ситуациях. Так, например, элемент a_{11} отвечает ситуации (R_1, S_1) и a_{11} = 3·0,10+2·0,08+5·0,14=1,16. Аналогично считаем другие элементы. Матрица выигрышей имеет вид

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1{,}16 & 1{,}09 \\ 0{,}92 & 1{,}38 \\ 1{,}40 & 0{,}80 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Оптимальной по критерию Вальда ($W = \max\limits_{1\le i\le 3}\min\limits_{1\le j\le 2} a_{ij}$ =1,09) является первая чистая стратегия. По критерию Гурвица (при α=0,7) имеем $H=\max\limits_{1\le i\le 3}[0{,}7\min\limits_{1\le j\le 2} a_{ij}+0{,}3\max\limits_{1\le j\le 2} a_{ij}]=$ $=\max\limits_{1\le i\le 3}\{1.111;\ 1{,}058;\ 0{,}98\}=1{,}111$, т.е. рекомендуется стратегия R_1. Оптимальной по критерию Сэвиджа (предлагается проверить читателю) является стратегия R_1.

Смысл того или иного критерия раскрывается по результатам его применения к конкретным задачам, а особенно по его дополнительным свойствам. Такие свойства могут формулироваться в виде аксиом.

Пусть на множестве альтернатив задано отношение предпочтения: строгое $\succ$ или нестрогое $\succeq$. Отношение предпочтения $\succ$ ($\succeq$) будем называть строгим (нестрогим), если $i_1 \succ i_2$ ($i_1 \succeq i_2$) эквивалентно тому, что альтернатива i_1 согласно выбранному критерию дает строго большее (нестрого большее) значение критерия, чем альтернатива i_2.

Для критериев (3.23), (3.24), (3.26), (3.27) сформулированы следующие аксиомы:

(А1) *Упорядочение*. Любые две альтернативы сравнимы по критерию оптимальности.

(А2) *Симметрия*. Решение не зависит от перестановки строк и столбцов матрицы $A=(a_{ij})_{n\times m}$.

(А3) *Строгое доминирование*. Если $\forall j = 1, \dots, m,\ a_{ij} > a_{lj}$, то $i \succ l$.

(А4) *Непрерывность*. Если последовательность матриц (a_{ij}^k) сходится поэлементно к матрице (a_{ij}) и $\forall k\ \ i_1 \succ i_2$, то в пределе $i_1 \succeq i_2$.

(A5) *Линейное преобразование*. Отношение $\succeq$ не изменится, если каждый элемент матрицы a_{ij} заменить на $\lambda a_{ij} + \mu$, $\lambda > 0$.

(A6) *Присоединенные строки*. Предпочтение имеющихся альтернатив не изменится от присоединения новой альтернативы (строки матрицы).

(A7) *Сдвиг столбца*. Предпочтение не меняется от добавления константы ко всем элементам некоторого столбца.

(A8) *Повторение столбца*. Предпочтение не изменится, если добавить новый столбец, идентичный одному из уже имеющихся.

(A9) *Выпуклость*. Если $i_1 \sim i_2$ (эквивалентно), т. е. $i_1 \succeq i_2$ и $i_2 \succeq i_1$, и $a_{i_0 j} = \frac{1}{2}(a_{i_1 j} + a_{i_2 j})$, $j = 1, \ldots, m$, то $i_0 \succeq i_1$.

(A10) *Присоединение специальной строки*. Предпочтение имеющихся альтернатив не изменится от присоединения новой строки, каждый элемент которой не превосходит всех имеющихся в соответствующем столбце.

Легко проверяется, что критерий Вальда удовлетворяет всем аксиомам, кроме A7, критерий Лапласа – всем, кроме A8, критерий Сэвиджа – всем, кроме A6 (имея в виду, что отношение предпочтения для двух альтернатив является строгим (нестрогим) по критерию Сэвиджа, если альтернатива i_1 дает строго меньшее (нестрого меньшее) значения этого критерия), критерий Гурвица – всем, кроме A7 и A9.

Задачи и упражнения

1. Имеется два инвестиционных инструмента с математическими ожиданиями доходности, соответственно, 10 и 20 и корреляционной матрицей $\sigma_{11} = 5$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -5$, $\sigma_{22} = 10$. Функция полезности инвестора есть разность математического ожидания доходности портфеля и дисперсии, умноженной на весовой коэффициент 1. Найти оптимальный состав портфеля, максимизирующий функцию полезности.

2. Имеется три инвестиционных инструмента с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1 = 0{,}07$, $\bar{r}_2 = 0{,}9$ и $\bar{r}_3 = 0{,}11$, дисперсиями $\sigma_{11} = 0{,}12$, $\sigma_{22} = 0{,}14$, $\sigma_{33} = 0{,}16$ и ковариациями $\sigma_{12} = 0{,}02$, $\sigma_{13} = -0{,}03$, $\sigma_{23} = -0{,}01$. Требуется найти оптимальный состав портфеля, доставляющего по возможности наибольшую доходность и имеющий при этом наименьший риск, использовав при этом свертку типа отношения. Посчитать ожидаемую доходность и риск портфеля.

3. Рассмотрим три инвестиционных инструмента с характеристиками, представленными в задании 2, и безрисковый актив с доходностью $r_0 = 0{,}03$. Требуется найти оптимальный состав портфеля, доставляющего по возможности наибольшую доходность и имеющий при этом наименьший риск, использовав при этом линейную свертку этих критериев. Посчитать ожидаемую доходность и риск портфеля.

4. Рассмотрим три инвестиционных инструмента с характеристиками, представленными в задании 2, безрисковый актив с доходностью $r_0 = 0{,}03$. Уровень требуемой доходности портфеля – $r_p = 0{,}085$. Требуется найти оптимальный состав портфеля, доставляющего по возможности наименьший риск при заданном уровне доходности. Найти процентное изменение ожидаемой доходности и риска по сравнению с результатами решения задачи из задания 3.

5. Рассмотрим три инвестиционных инструмента с характеристиками, представленными в задании 2, и уровнем доходности портфеля $r_p = 0{,}085$. Найти такой состав портфеля, для которого вероятность того, что его ожидаемая доходность будем меньше значения $r_p = 0{,}085$ минимальна. Найти процентное изменение ожидаемой доходности и риска, сравнив результаты решения этих задач 4 и 5.

6. Пусть $\bar{r}_p$ – математическое ожидание доходности портфеля, σ_p – мера риска. Решение какой из задач дает наиболее рискованный состав портфеля x?

а) $\max\limits_{x\in X}(\bar{r}_p - \sigma_p^2)$; б) $\max\limits_{x\in X}(\bar{r}_p - 3\sigma_p^2)$; в) $\max\limits_{x\in X}(\bar{r}_p - 5\sigma_p^2)$.

7. Пусть $\bar{r}_p$ – математическое ожидание доходности портфеля, σ_p – мера риска. Решение какой из задач дает наименее рискованный состав портфеля x?

а) $\max\limits_{x\in X}(\bar{r}_p - 0{,}5\sigma_p^2)$; б) $\max\limits_{x\in X}(\bar{r}_p - \sigma_p^2)$; в) $\max\limits_{x\in X}(\bar{r}_p - 7\sigma_p^2)$

8. Определите, какая из функций, определяющих линию безразличия функции полезности $u = u(\bar{r}_p, \sigma_p)$ инвестора, возрастает быстрее (более крутая).

а) $\bar{r}_p = 2 + 3\sigma_p^2$; б) $\bar{r}_p = 3 + 2\sigma_p^2$; в) $\bar{r}_p = 4 + 2\sigma_p^2$

9. Совокупность взаимосвязанных и взаимозависимых элементов, конечной целью существования которых является минимизация риска представляет собой

а) управление риском; б) функцию риска; в) оценку риска

10. Принятие решений с точки зрения эффективности и риска можно свести к решению задачи

а) максимизации разности критериев эффективности и риска с весовыми коэффициентами;

б) максимизации суммы критериев эффективности и риска с весовыми коэффициентами;

в) максимизации суммы критериев эффективности и риска без учета весовых коэффициентов.

11. Минимизация величины риска на единицу эффективности представляет собой процедуру

а) минимизации относительного риска;

б) минимизации абсолютного риска;

в) минимизации VaR.

12. В каком случае говорят о принятии решения в условиях неопределенности?

13. Что в теории принятия решений называют игрой с природой?

14. В чем принципиальное отличие антагонистической игры от игры с природой?

15. Перечислите критерии выбора решений в условиях полной неопределенности.

16. На какой принцип опирается критерий Вальда?

17. В чем суть максимаксного критерия?

18. На каких предположениях основан критерий Гурвица?

19. Что понимают под экспериментом в игре с природой? В каком случае его целесообразно проводить?

20. Что называют риском при использовании некоторой стратегии в условиях определенного состояния?

21. Как составляется матрица рисков?

22. Определите средний ожидаемый риск.

23. Опишите критерий Сэвиджа.

24. На какой принцип опирается критерий Лапласа?

25. Попробуйте сформулировать общие рекомендации для лица, принимающего решения по выбору критерия оптимальности в зависимости от его характера.

26. Составьте задачу практического характера, математической моделью который была бы игра с природой.

27. Какие аксиомы сформулированы для критериев оптимального выбора в условиях полной неопределенности?

28. Какими свойствами обладают критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа, Лапласа?

29. Планируется строительство овощехранилища. Имеются три возможных проекта создания такого хранилища площадью $R_1 = 200$, $R_2 = 300$, $R_3 = 400$ кв.м. В зависимости от эффективности использования выделенных площадей на $S_1 = 100$, $S_2 = 200$, $S_3 = 300$,

$S_4 = 400$ кв.м. рассчитаны варианты ежегодного дохода a_{ij} (тыс.руб.), которые представлены в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 130 & 350 & 350 & 350 \\ 60 & 410 & 520 & 520 \\ -140 & 290 & 560 & 670 \end{pmatrix}.$$

Определите наиболее целесообразный вариант строительства овощехранилища, используя критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица при α=0,8. Сравните решения и сделайте выводы.

30. Транспортное предприятие должно определить вариант развития парка, характеризующий уровень его возможностей, так чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Спрос на транспортные услуги не известен, но ожидается, что он может принять одно из значений: 10, 15, 20 или 25 тыс. т. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень возможностей транспортного предприятия, отклонение от которого приводит к дополнительным затратам. В табл. 3.1 определены возможные прогнозируемые затраты.

Таблица 3.1. **Затраты транспортного предприятия**

Варианты возможностей транспортного предприятия	Варианты спроса на услуги			
	10	15	20	25
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Выберете наилучшую стратегию, обеспечивающую наименьшие затраты, используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа.

31. Администрацией города получен целевой кредит на покупку пассажирских автобусов. Для его реализации был объявлен конкурс, в котором приняли участие пять фирм. Комиссия независимых экспертов провела исследование предложенных вариантов заказа автобусов по шести признакам. Оценки выставлялись по шестибальной шкале. Эффективность использования вариантов с учетом баллов экспертов представлена матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определите оптимальный тип автобуса, используя критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица при α=0,5. Сравните решения и сделайте выводы.

32. До эксперимента известны вероятности состояний природы q_1=0,2 , q_2,=0,3 , q_3=0,5. Пусть затраты C на проведение эксперимента, позволяющего определить состояние природы, равны 2. Стоит ли проводить эксперимент, если, если платежная матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Заключение

Задача многокритериальной оптимизации включает множество возможных решений X, векторный критерий $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ и отношение предпочтения $\succ_X$. Поскольку отношение предпочтения задается на парах возможных решений, то оно представляет собой некоторое бинарное отношение. Отношение предпочтения $\succ_X$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, представляет собой строгий порядок, т.е. является иррефлексивным и транзитивным. Технически удобным средством описания предпочтений ЛПР является функция ценности (полезности). Глобальная полезность на множестве оценок может быть выражена в виде аддитивной функции индивидуальных полезностей. Построение аддитивной функции полезности может осуществляться шаговым методом совместного шкалирования или методом половинного деления.

Множество недоминируемых решений Ndom X представляет собой определенное подмножество множества возможных решений X. При выполнении аксиом 8.3 и 8.4 множество недоминируемых решений удовлетворяет включению Ndom $X \subset P_f(X)$. Если ЛПР ведет себя достаточно «разумно» (т.е. в соответствии с аксиомами 8.1 – 8.4), то выбираемые им решения обязательно являются Парето-оптимальными. При решении многокритериальных задач ЛПР приходится сталкиваться с необходимостью согласования противоположных целей, описываемых разными критериями. Нахождения решения в таких задачах опирается на методы «стоимость–эффективность», «затраты–прибыль», в которых прибегают к содержательному анализу степени предпочтительности сравниваемых проектов.

Сравнение критериев по важности предполагает, что критерии являются однородными, т.е. имеют сопоставимый вид. Это означает, что у критериев должна быть единая шкала и должно выполняться следующее условие однородности: каждая градация шкалы должна отражать одинаковый уровень предпочтений для каждого из критериев. Количественная важность критериев может выступать в двух основных формах: 1) степень превосходства в важности одних критериев над другими; 2) значения важности отдельных критериев, количественно измеряемой по общей «шкале важности». Для получения качественной информации о важности критериев ЛПР необходимо попарно сравнивать критерии по важности.

При всем многообразии подходов к формализации задачи многокритериальной оптимизации условно можно выделить два основных направления. Первое основано на введении некоторой строгой математической процедуры выбора, связанной с вектором критериев. Сюда относятся методы свертки критериев, идеальной точки, выделения главного критерия и перевода других в ограничения, пороговых значений и уступок, лексикографии, целевого программирования и т.д. Во всех этих методах присутствуют некоторые параметры (весовые коэффициенты, пороговые значения, порядок лексикографии, условные значения критериев, штрафы за отклонения, меры, расстояния и т.д.), которые должны быть назначены ЛПР, т.е. требуют от него дополнительной информации. Второе направление основано на непосредственном выявлении предпочтений ЛПР путем постановки ему «более простых» вопросов (нежели, например, назначение весовых коэффициентов). Это направление привело к появлению целого ряда эвристических процедур итеративного типа, реализованного в виде диалоговых человеко-машинных процедур. Оба направления продолжают интенсивно развиваться, пополняя арсенал подходов к формализации и решению задач многокритериальной оптимизации. Сейчас уже очевидно, что проблема векторной оптимизации является «плохо формализуемой», т.е. для нее в принципе не существует единого принципа оптимальности и «право на жизнь» имеют разные подходы и методы. Разделение на два направления является, конечно, условным, т.к. процедуры получения дополнительной информации у ЛПР могут быть связаны с нахождением параметров в методах первого направления (например, весовых коэффициентов свертки или пороговых значений). При этом считается, что непосредственное задание этих параметров слишком сложно для ЛПР и приводит к противоречию при ответах на соответствующие вопросы, поэтому следует задавать последовательно «простые» вопросы, постепенно уточняя значения параметров.

Метод анализа иерархий состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений ЛПР на основе попарных сравнений. В результате может быть выражена относительная степень (интенсивность) взаимодействия элементов в иерархии. Эти суждения затем выражаются численно. Метод анализа иерархий включает в себя процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений. Метод попарных сравнений, основанный на решении задачи о собственном значении, обеспечивает способ шкалирования, особенно в тех сферах, где не существует измерений и количественных сравнений. Мера согласованности позволяет возвратиться к суждениям, модифицируя их для улучшения общей согласованности. Такой подход к решению проблемы выбора исходит из естественной способности людей думать логически и творчески, определять события и устанавливать отношения между ними.

Неполнота или неточность исходных данных о состоянии системы и ее будущем развитии приводит к задачам оптимизации, сформулированным на основе некоторой информационной модели. Неточность исходной информации привела к появлению понятия «риск». Риск в широком смысле – это непредсказуемость состояния системы или течения процесса как результат неполноты информации. Под управлением риском понимается принятие управленческих решений в системе, непременным атрибутом которого являются процедуры учета и оценки факторов риска в целях максимального снижения неопределенности при принятии решений и обеспечения устойчивости (или безопасности функционирования) системы.

Проблема управления риском возникает, например, в задачах принятия решений на рынке ценных бумаг. Задачи формирования и реструктуризации портфеля относится к разделу векторной оптимизации. Такие задачи в исходном виде не имеют четкой постановки, поэтому формализации задачи может быть осуществлена на основе определенного типа свертки критериев эффективности и риска системы, процесса, портфеля, проекта. Решение проблемы неполноты информации связано с необходимостью установления типа неконтролируемых факторов: случайные или неопределенные, и видов приемлемой оценки параметров. В финансовой оптимизации чаще всего факторы считают случайными, а в качестве оценки эффективности берут математическое ожидание. Риск определяется как математическое ожидание отрицательных последствий, которые представляют собой отклонение результата деятельности системы или процесса от запланированной величины в некоторой метрике. При оценке риска можно использовать функции риска.

При принятии решений в условиях неопределенности используется информация только о множестве возможных состояний внешней среды. Наличие перечня возможных событий или сценариев при отсутствии статистических данных относительно их вероятностей является весьма распространенным случаем, обусловленным различными причинами: нестабильность экономической ситуации, неизвестный покупательский спрос на товар, экологическая обстановка, стихийные бедствия и др.

Выбор того или иного подхода к проблемам многокритериальности, неопределенности и риска при принятии решений приводит к строго формализованной задаче математического программирования, для решения которой уже можно применять существующие методы оптимизации.

Список рекомендуемой литературы к части II

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: КноРус, 2010 – 658 с.
2. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения / под ред. В.С. Молоствова. – М.: КРАСАНД, 2013. – 368 с.
3. Горелик В.А., Золотова Т.В. Некоторые вопросы оценки корреляции доходностей инвестиционных портфелей // Проблемы управления. – М.: ИПУ РАН, 2011. – № 3. – С. 36–42.
4. Лабскер Л.Г., Ященко Н.А. Экономические игры с природой (практикум с решением задач): учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению «Экономика» – М.: Кнорус , 2015. – 505 с.
5. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений: Учебник. – М.: Логос, 2002. – 390 с.
6. Лотов А.В., Холмов А.В. Метод разумных целей в задаче многокритериального выбора с неточной информацией//Доклады Академии наук.–2009. Т.429. – № 1. – С. 28-30.
7. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход. М.: Физматлит, 2005. – 176 с.
8. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. – М.: Физматлит, 2007. – 64 с.
9. Подиновский В.В. Подход теории важности критериев к задачам принятия решений с иерархической критериальной структурой // Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. – 2014. Т.54 – №1. – С. 1-6.
10. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 255 с.
11. Прохорова М.С. Исследование связи решений задач на максимум линейной свертки «математическое ожидание – дисперсия» и на минимум дисперсии при ограничении по доходности // Экономика, Статистика и Информатика. Вестник УМО. – М.: МЭСИ, 2014. – № 3. – С. 162–166.
12. Шарп, У., Александер, Г., Бейли, Дж. Инвестиции / пер. с англ. А.Н. Буренина, А.А. Васина. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 1028 с.
13. Данные котировок с Московской Межбанковской Валютной Биржи [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.finam.ru/analysis/profile00008/default.asp
14. Saaty Thomas L. Theory and Applications of the Analytic Network Process: Decision Making with Benefits, Opportunities, Costs, and Risks. – Pittsburgh, RWS Publication, 2009. – 352 p.