

МС-20 Аудиторное задание

Основные понятия статистической проверки гипотез (часть 1) Проверка гипотезы об определенном значении генерального среднего при известной и неизвестной дисперсии.

1. Решение о досмотре багажа пассажира принимается на основании сигнала металлодетектора. Сформулируйте гипотезы, которые целесообразно выбрать в качестве нулевой и альтернативной, сравните между собой последствия от ошибок первого и второго рода.

2. Пусть $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{10})$ – реализация случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_{10})$ из нормального распределения $N(\mu; \sigma^2)$ (данные в файле sample20_2_PM23.csv). Проверяется на уровне значимости $\alpha = 0,05$ основная гипотеза $H_0: \mu = 13,7$ против альтернативной гипотезы $H_1: \mu \neq 13,7$.

1) Найдите значение статистики критерия $t = T_{\text{набл}} = T(\vec{x})$, критическое множество K_α и на 5% уровне значимости проверить основную гипотезу H_0 ;

2) Найдите P -значение критерия и сделайте выводы.

3) Найдите вероятность ошибки второго рода β и мощность W критерия для $\mu = \mu_1 = 24.702$ и сделать выводы.

4) Написать программу на платформе *Jupyter Python*, которая моделирует гистограмму PV (P -значений критерия) и сделать выводы.

Ответ. 1) $t = 0.583104$; 2) $pv(\vec{x}) = 0.574142$; 3) $\beta = 0.01896$.

3. По выборке объема $n = 13$, извлечённой из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратичным отклонением $\sigma = 3$, при уровне значимости $0,05$ проверяется нулевая гипотеза $H_0: \mu = \mu_0 = 17$. Требуется:
а) найти мощность критерия для проверки гипотезы $H_1: \mu = \mu_1 = 16$. б) найти объем выборки n , при котором мощность критерия не меньше $0,92$.

4. Средний доход фирмы в день составлял 1020 единиц. После реорганизации выборочный средний доход в день за 30 рабочих дней составил 1070 единиц с исправленной дисперсией $s^2 = 90^2$. Можно ли утверждать (на уровне значимости $0,05$), что реорганизация привела к увеличению среднего дохода? Найдите P -значение теста.

5. Пусть $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{30})$ – реализация случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_{30})$ из нормального распределения $N(\mu; 3,4^2)$. Проверяется на уровне значимости $\alpha = 0,01$ основная гипотеза $H_0: \mu = 1,29$ против альтернативной гипотезы $H_1: \mu \neq 1,29$ с критическим множеством вида $K_\alpha = (-\infty, -A) \cup (A, +\infty)$.

1) Найдите значение статистики критерия $Z_{\text{набл}} = Z(\vec{x})$.

2) Найдите границу A критического множества.

3) Найдите P -значение критерия и сделайте выводы.

4) Найдите мощность W критерия для $H_1 : \mu = 1,17$.

Исходные данные:

$\vec{x} = (1,416; 0,624; 6,471; 6,256; 1,787; 2,546; -1,758; -5,475; 0,077; 1,792; 5,443; 5,348; -0,057; 0,232; -2,305; -3,568; -4,541; 7,893; -0,473; -0,229; -3,0; 3,903; -4,227; 0,537; -1,785; 2,575; -0,477; -2,754; 1,164; 2,716)$.

Домашнее задание

1. По выборке объёма $n = 16$, извлечённой из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратичным отклонением $\sigma = 5$, при уровне значимости $0,05$ проверяется нулевая гипотеза $H_0 : \mu = \mu_0 = 20$ о равенстве генеральной средней гипотетическому значению $\mu_0 = 20$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : \mu \neq 20$. Найти мощность двустороннего критерия проверки рассматриваемой гипотезы для гипотетического значения генеральной средней $\mu_1 = 24$.

Ответ. 0,892519

2. Фармацевтическая компания следит за тем, чтобы концентрация примесей в таблетках не превышала 3%. Известно, что при используемом производственном процессе концентрация примесей следует нормальному закону распределения со стандартным отклонением 0,4%. Для контроля производства взята случайная выборка из 64 таблеток, и среднее по выборке содержание примесей оказалось равным 3,07%.

а) На 5%-ном уровне значимости проверьте гипотезу, что средняя концентрация примесей равна 3%, против альтернативной гипотезы, что их концентрация превосходит 3%.

б) Найдите P -значение теста.

Ответ. б) P -значение = 0,08.

3. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 40$ извлечена выборка объёма $n = 64$ и по ней найдена выборочная средняя $\bar{x} = 136,5$. Требуется при уровне значимости $0,01$ проверить нулевую гипотезу $H_0 : \mu = 130$

а) при конкурирующей гипотезе $H_1 : \mu \neq 130$;

б) при конкурирующей гипотезе $H_1 : \mu > 130$.

с) в п.а) и б) вычислить значение статистики критерия, P -value и сделать выводы.