

МС-12 Аудиторное задание

Доверительная оценка параметров (Часть 2)

(оценка дисперсии при известном и неизвестном генеральном среднем, генеральной доли признака, интервал предсказания, интервальная оценка коэффициента корреляции)

1. По реализации случайной выборки объёма $n = 20$

$\vec{x} = (29, 23, 25, 24, 9, 18, 36, 27, 33, 20, 12, 40, 29, 22, 30, 9, 39, 5, 20, 59)$.

при доверительной вероятности $\gamma=0,95$ построить доверительные интервалы (генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения):

- а) для математического ожидания генеральной совокупности при известной дисперсии $\sigma^2=100$;
- б) для математического ожидания при неизвестной дисперсии;
- с) для дисперсии генеральной совокупности при известном математическом ожидании $E(X) = 25$;
- д) для дисперсии при неизвестном математическом ожидании.

2. Из генеральной совокупности супружеских пар была сделана выборка объёма 400. Известно, что

- рост женатого мужчины имеет нормальное распределение со средним 177,8 см и стандартным отклонением 7,62 см;
- рост замужней женщины имеет также нормальное распределение со средним 165,1 см и стандартным отклонением 6,35 см;
- в выборке - 20 пар, в которых жена выше мужа, и 380 пар, в которых муж выше жены.

а) Найдите 95%-ный доверительный интервал для доли пар, в которых жена выше мужа, среди всей генеральной совокупности.

б) Если женатый мужчина и замужняя женщина выбраны случайным образом, какова вероятность, что женщина окажется выше мужчины?

3. В случайной выборке из $n=200$ аспирантов, специализирующихся в финтех-предпринимательстве, составленной по нескольким ведущим российским университетам, $m=90$ человек оказались сыновьями банкиров. Оцените с 90%-ной надежностью: а) долю аспирантов обследованных университетов, специализирующихся в финтех-предпринимательстве, отцы которых являются банкирами; б) число таких аспирантов среди $N=2000$ аспирантов.

4. За последние 5 лет годовой рост цены актива A составлял в среднем 20% со средним квадратичным (исправленным) отклонением 5%. Построить 97%-ый доверительный интервал для цены актива в конце следующего года, если в начале года она равна 100 д.е.

5. Пусть $(x_1, y_1); \dots; (x_{31}, y_{31})$ – реализация случайной выборки $(X_1, Y_1); \dots; (X_{31}, Y_{31})$ из двумерного нормального распределения $N(\mu_x; \mu_y; \sigma_x^2; \sigma_y^2; \rho)$. Используя векторы $\vec{x} = (x_1; \dots; x_{31})$ и $\vec{y} = (y_1; \dots; y_{31})$, постройте асимптотический 0,93-доверительный интервал $(\hat{\theta}_1; \hat{\theta}_2)$ для коэффициента корреляции ρ . В ответе укажите:

- 1) выборочный коэффициент корреляции $\hat{\rho}$;
- 2) верхнюю границу $\hat{\theta}_2$ построенного доверительного интервала для ρ .

Исходные данные:

$\vec{x} = (-0,616; -0,238; 0,173; -0,255; 0,531; 0,718; -0,161; 0,371; -1,014; -0,413; -1,571; 0,485; 0,486; 0,688; -0,944; 0,155; 0,003; 0,111; 0,752; 0,783; -0,102; -0,74; -2,097; 1,349; -0,044; -0,617; -0,782; -0,873; -0,995; -1,256; -0,596),$
 $\vec{y} = (-1,34; -0,25; 0,101; -0,626; -0,088; 0,539; -0,451; 0,233; -1,186; -0,423; -1,329; 0,231; 0,209; 0,638; -0,274; -0,491; -0,319; 0,294; 0,895; 1,164; -0,57; -1,078; -1,526; 1,491; 0,182; -0,31; -1,001; -0,969; -0,918; -0,904; -0,595).$

Ответ. Выборочный коэффициент корреляции 0,9019;

Верхняя граница доверительного интервала 0,9493.

6. Из 2500 выданных некоторым банком кредитов 420 не были возвращены в срок. Постройте 95%-й и 99%-й доверительные интервалы для вероятности невозврата кредита.

7. Наблюдатель Алексей Недопускальный решил проверить честность выборов. Ему удалось подглядеть, как проголосовали 60 избирателей. Из них 42 выбрали действующего президента.

а) Постройте 95%-й доверительный интервал для истинной доли избирателей, проголосовавших «за» действующего президента.

б) По результатам ЦентрИзберКома «за» действующего президента проголосовало 76.67% населения. Согласуются ли эти данные с данными Алексея?

в) Сколько бюллетеней нужно подглядеть Алексею, чтобы с вероятностью 0.95 отклонение от выборочной доли проголосовавших «за» действующего президента от истинной не превышало 0.01?

8. В «акции протеста против коррупции» в Москве в 2017 по данным МВД приняло участие 8 000 человек. Считая, что население Москвы составляло 12 300 000 человек, постройте 95% доверительный интервал для истинной доли желающих участвовать в подобных акциях жителей России. Можно ли утверждать, что эта доля статистически не отличается от нуля?

9. При испытании 1040 элементов зарегистрировано 106 отказов. Найдите доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p отказа элемента с надежностью 0.97.

10. Покупатель пришёл в магазин и увидел, что интересующая его вещь стоит 99\$. Такой суммы в этот момент у него не оказалось, и он отложил покупку на следующий день. Какую минимальную сумму в рублях покупатель должен

принести на следующий день, чтобы с вероятностью 0,99 её хватило на покупку нужной ему вещи? Известно, что курс доллара последние пять дней изменялся так: 79,99 руб.; 72,68 руб.; 71,32 руб.; 78,77 руб.; 77,85 руб. Кроме того, предполагается, что курс доллара в рассматриваемый промежуток времени изменяется как нормально распределённая случайная величина.

11. На контрольных испытаниях 16 осветительных ламп были определены оценки математического ожидания и среднего квадратичного отклонения срока их службы: $\bar{x}=3000$ ч и $s=200$ ч. Считая, что срок службы лампы является нормально распределённой случайной величиной, определите: а) вероятность, с которой можно утверждать, что ошибка оценивания математического ожидания выборочным средним \bar{x} не превзойдет 100 ч; б) 90%-й доверительный интервал для математического ожидания срока службы лампы. в) Постройте 90%-й и 95%-й доверительные интервалы для срока службы купленной новой осветительной лампы из той же партии, из которой извлекалась выборка.

12. В результате проведенного социологического опроса 1780 человек рейтинг кандидата в президенты составил 17%. Найдите доверительный интервал для рейтинга кандидата с гарантированной надежностью 95.0%.

13. По выборке из 25 упаковок товара средний вес составил 101 г с выборочным средним квадратическим отклонением 3 г. Построить доверительный интервал для дисперсии с вероятностью 90%.

14. По выборке из 50 наблюдений двумерной нормальной случайной величины получен выборочный коэффициент корреляции 0,5. Построить доверительный интервал для коэффициента корреляции с надежностью 90%.
(Ответ. $0,30 < \rho < 0,66$)

15. Пусть p - доля жителей города, считающих, что их качество жизни ухудшилось за последние годы. Каким должен быть объём выборки, чтобы оценить p с ошибкой не более 0,025 и 98%-ным уровнем доверия?

16. Произведено 20000 независимых испытаний, в каждом из которых неизвестная вероятность p события A постоянна. Событие A наступило в 5800 испытаниях. Найдите для вероятности p приближенный 0.994-доверительный интервал.

Домашнее задание

1. Гмурман В.Е. «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике», 517, 518, 520, 522.

2. Подготовиться к контрольной работе (часть 2)
<https://campus.fa.ru/mod/quiz/view.php?id=760439>