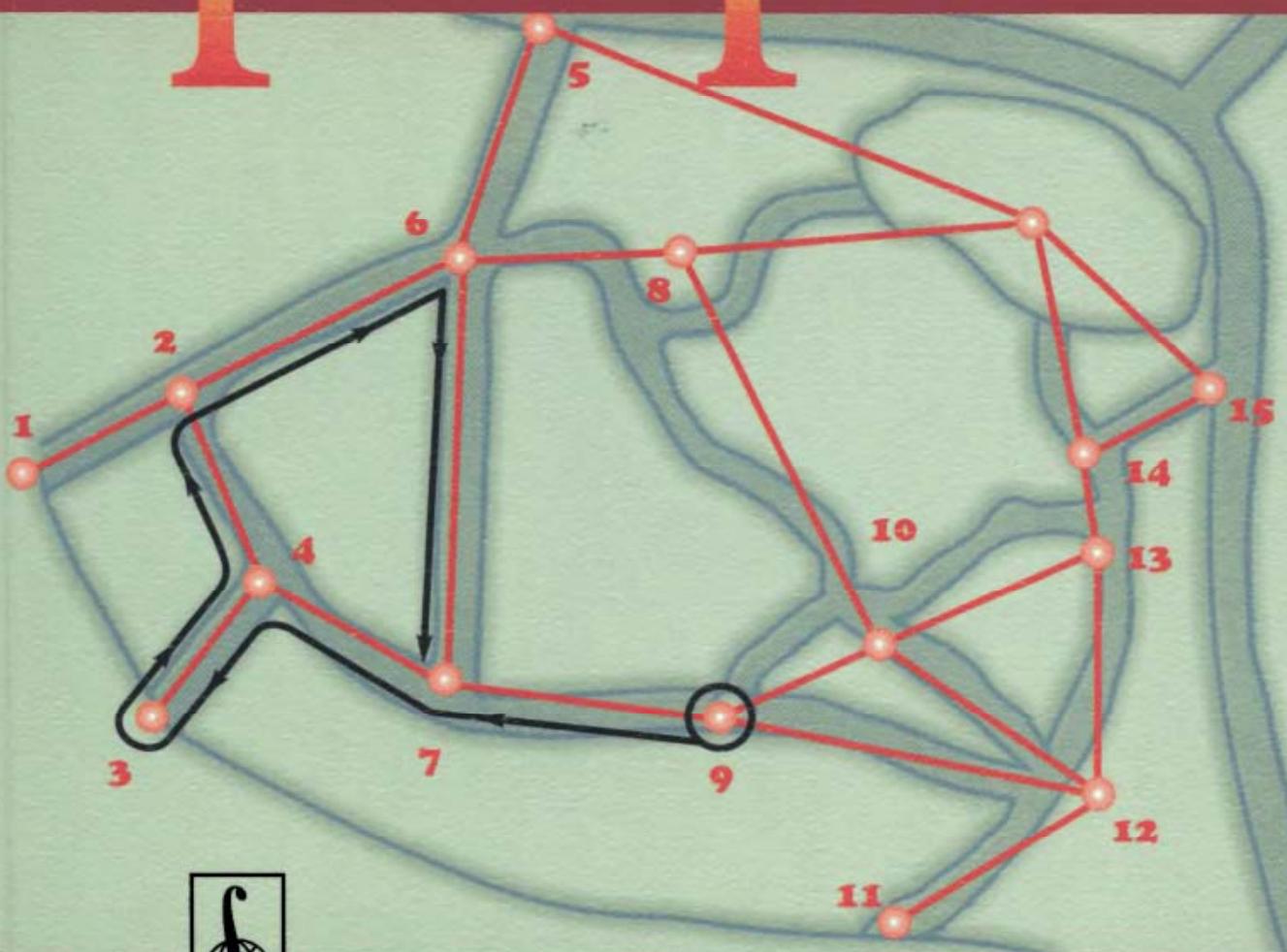


О. И. Мельников

# НЕЗНАЙКА В СТРАНЕ ГРАДОВ



URSS

О. И. Мельников

НЕЗНАЙКА  
В СТРАНЕ  
ГРАФОВ

Издание третье, стереотипное



URSS

МОСКВА

*Рекомендовано Научно-методическим центром учебной книги и средств обучения Министерства образования Республики Беларусь*

**Мельников Олег Исидорович**

**Незнайка в стране графов:** Пособие для учащихся. Изд. 3-е, стереотипное.  
М.: КомКнига, 2007. — 160 с.

В настоящей книге в занимательной форме изложены основы одного из интенсивно развивающихся разделов математики — теории графов. Книга написана как продолжение известных сказок о Незнайке и его друзьях. Главы объединены единым сюжетом, элементы теории графов органично введены в занимательные игровые ситуации. В книге содержится около 130 задач с подробными решениями.

Издание рассчитано на учащихся 6–8-х классов. Может быть использовано учителями средней школы для внеклассной работы по математике.

*Рецензенты:*

доктор физико-математических наук, профессор *O. B. Мельников*;  
учитель математики средней школы № 144 г. Минска *T. A. Адамович*

Издательство «КомКнига». 117312, г Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.  
Формат 60×90/16. Бумага типографская. Печ. л. 10.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

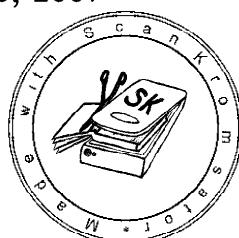
13-значный ISBN, вводимый с 2007 г.:

**ISBN 978-5-484-00855-1**

Соответствующий 10-значный ISBN, применяемый до 2007 г.:

**ISBN 5-484-00855-7**

© КомКнига, 2006, 2007



431007 ID 40715

9 785484 008551

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете:  
<http://URSS.ru>

Тел./факс: 7 (495) 135-42-16

URSS Тел /факс: 7 (495) 135-42-46

# *Оглавление*

<b>Глава 1. Новые знакомые Незнайки.....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 2. Незнайка собирается на шахматный турнир .....</b>	<b>16</b>
<b>Глава 3. Выбор маршрута .....</b>	<b>24</b>
<b>Глава 4. Незнайка заблудился.....</b>	<b>32</b>
<b>Глава 5. Прогулка по островам.....</b>	<b>39</b>
<b>Глава 6. Три дома и три колодца .....</b>	<b>50</b>
<b>Глава 7. В Зеленом городе пускают автобус .....</b>	<b>57</b>
<b>Глава 8. Возвращение домой .....</b>	<b>64</b>
<b>Немного теории и задач.....</b>	<b>78</b>
<b>Ответы, указания, решения .....</b>	<b>114</b>
<b>Приложение. Программа факультатива по математике для учащихся 5–6-го классов «Элементы теории графов».....</b>	<b>153</b>
<b>Литература .....</b>	<b>158</b>

# *Дорогие ребята!*

В этой книге вы опять встретитесь с Незнайкой и его друзьями, познакомитесь с его новыми приключениями. Но это еще и занимательная книга о важных математических объектах — графах. В виде графов можно представить карты железных и шоссейных дорог, электрические и интегральные схемы, химические молекулы, отношение между людьми и многое другое. Поэтому не удивительно, что теория графов применяется в физике, химии, электронике, экономике и других науках для решения различных задач. Кроме того, графы широко используются в программировании, и хорошо программировать, не зная теории графов, невозможно.

Прочитав эту книгу, вы познакомитесь с элементами теории графов. Книга написана в виде диалогов Незнайки и его друзей. Советую вам пробовать самостоятельно отвечать на возникающие в диалогах задачи. Это будет способствовать развитию вашего математического и логического мышления.

Желаю успехов!

\* \* \*

Автор благодарит С. Г. Ершову за помощь в оформление книги.

# *Глава 1*

---

---

## **Новые знакомые Незнайки**

---

---

Вышел однажды Знайка из дома. По городу решил погулять, воздухом подышать, в библиотеку зайти, новые книги и журналы посмотреть. Не успел он за порог ступить, как навстречу Незнайка с рюкзаком. Идет Незнайка довольный, улыбается, песенку веселую наспевывает.

— Ты куда? — спросил Знайка.

— Не куда, а откуда, — охотно ответил Незнайка. — Из похода вернулся. Нас Пулька в поход водил.

— А меня почему не позвали? — обиделся Знайка. — А еще друзья называются!

Незнайке стало стыдно. Ведь, когда Знайка полетел на воздушном шаре, он взял всех, кто хотел лететь. И в походе был бы не лишним, столько интересного рассказал бы.

— Честно говоря, я сам в последний момент узнал. Пулька объявление повесил, а я мимо шел. Но ты не расстраивайся. Через неделю мы снова пойдем. Можешь отправиться с нами.

— А что в походе было интересного? — спросил Знайка. — Может быть, я с вами и не пойду.

Незнайку переполняли впечатления, и он с удовольствием стал рассказывать, как шли они вдоль реки, потом заблудились, но он — отважный следопыт — нашел дорогу. Конечно, Незнайка умолчал о главном: заблудились они потому, что он предложил идти напрямик.

— А компас у вас был? — спросил Знайка.

— Зачем нам компас, если у нас карта была.

— Кто же ходит в поход без компаса? — воскликнул Знайка. — Потому и заблудились.

Но Незнайка уже рассказывал о купании в реке, песнях у костра, ночевке в палатках. Он поймал себя на удивительном открытии: врать почти не приходится!

— У меня появилось целых три новых друга! Самое интересное: каждый из нас познакомился ровно с тремя малышами!

— А сколько вас было? — спросил Знайка.

— Сейчас сосчитаю: Пулька, Пончик, Чудик, Топик, Гунька, Носик, Гвоздик, Трубач и я. Всего получается девять.

Знайка покачал головой:

— Не может такого быть!

— Какого такого? — с подозрением посмотрел Незнайка.

— А такого, что каждый познакомился ровно с тремя малышами.

— Ну и ну, — возмутился Незнайка. — Тебя с нами не было, а заявляешь так, словно своими глазами видел. Я подружился с Чудиком, Топиком и Трубачом, Пулька — с Носиком, Топиком и... я точно не припомню, — Незнайка задумался. — Кто с кем познакомился, я точно не припомню, но то, что новых знакомых у каждого оказалось ровно трое, знаю хорошо.

— Этого не может быть, — повторил Знайка.

— И как ты это узнал, сидя в городе? — засмеялся Незнайка.

— Путем логических рассуждений.

— Каких рассуждений?

— Логических. Давай обозначим каждого малыша точкой, — предложил Знайка.

— Давай, — согласился Незнайка и нарисовал девять точек.



— Почему одна точка такая большая? — удивился Знайка.

— А это — Пончик, он толстенький.

— Нам безразлично, кто толстый, а кто худой, нам важно выяснить, кто с кем познакомился.

И Знайка нарисовал свои девять точек.

## Незнайка

Носик.

## „Пулька“

# Гвоздик

Пончик

Трубач

## • Чудик

Гунька

Топик

— Зачем они уселись в кружок?

— Для того чтобы лучше знакомиться. Если Пулька познакомился с Носиком, то Носик познакомился с Пулькой. Соединим их точки между собой.

И Знайка провел линию:

Нез  
•  
Нос • Пул

ГВ • Пон

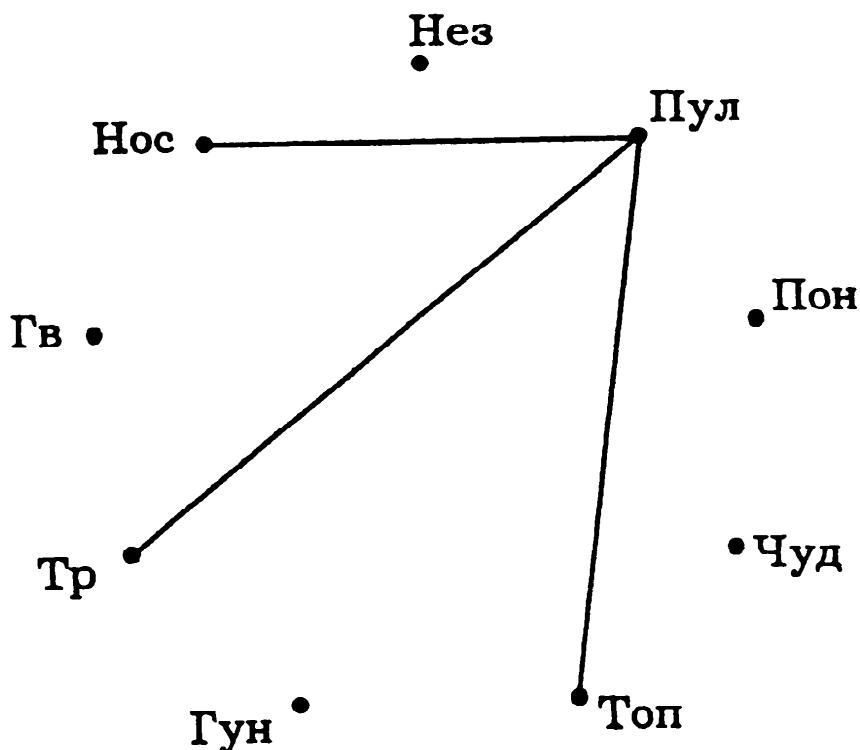
• Чудо

Гун

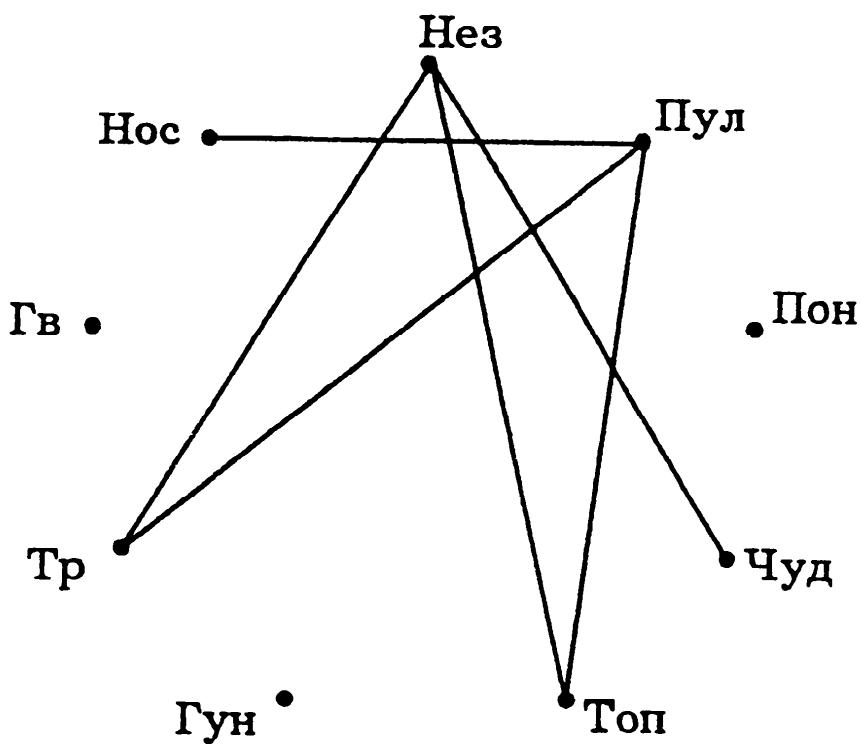
• Топ

— Но он же познакомился еще с Трубачом и... и, допустим, с Топиком

— Поэтому соединим Пулькину точку с Трубачовой и Топиковой:



- Ой, картинка получилась! — воскликнул Незнайка.
- От Пулькиной точки отходят три линии, значит, он познакомился с тремя малышами.
- Понял! — закричал Незнайка. — Я тоже познакомился с тремя, значит, и от моей точки должны отходить три линии.
- И Незнайка дорисовал.



— Соединим линией каждую пару новых знакомых, — предложил Знайка.

— Но я забыл, кто с кем познакомился, — расстроился Незнайка.

— Не беда. Мы докажем, что невозможно каждому познакомиться ровно с тремя.

— Опять ты за свое! — рассердился Незнайка. — Невозможно, невозможно... А я сам при этом был!

— Наверно, ты ошибся.

— Ты же знаешь, что я редко ошибаюсь.

— Хорошо, — улыбнулся Знайка. — Предположим, что такие знакомства возможны. Если точки обозначают малышей, а линии — знакомства, то ты должен нарисовать картинку с девятью точками...

— За одну минуту, — перебил Незнайка.

— ...А из каждой точки должны выходить три линии.

— Сейчас.

Незнайка принялся за работу. От усердия он даже высунул язык. Он проводил и вытирали линии, перечеркивал картинки и тут же начинал новые. Знайка терпеливо ждал.

— Не получается, — сказал Незнайка минуты через три. — Знаешь, я, должно быть, волнуюсь, а любую работу нужно делать спокойно.

— Спокойно или нет, а у тебя все равно ничего не получится, — засмеялся Знайка. — Ты сказал, что каждый из малышей познакомился с тремя. Значит, всех знакомств было  $3 \times 9 = 27$ .

— Ха-ха-ха, — теперь уже засмеялся Незнайка. — Но если я, к примеру, познакомился с Топиком, то и он познакомился со мной. Значит, знакомств на самом деле было в два раза меньше.

— Конечно, — согласился Знайка. — На рисунке каждое знакомство соответствует линии между двумя точками. Значит, на рисунке должно быть  $27 : 2 = 13,5$  линии.

— А что такое пол-линии? — удивился Незнайка. — Если малыши познакомились, на рисунке появляется линия между их точками, если же они были знакомы раньше, никакой линии не будет. У нас не может быть пол-линий.

— Правильно, не может, — сказал Знайка. — Значит, и обязательных трех новых знакомств у каждого из малышей быть не может.

Незнайка почесал затылок. Хочешь — не хочешь, а Знайка прав, придется с этим согласиться.

— Да, — протянул он, — не может. Наверное, я ошибся. Должно быть, Пончик познакомился не с тремя, а с пятью малышами.

— И это невозможно, — возразил Знайка. — У кого-то из ваших туристов должно быть четное число знакомств. Ты хоть помнишь, что такое четное число?

— Конечно, — обиделся Незнайка. — Это такое число, которое делится нацело на два. А нечетное на два не делится.

— А знаешь, что такое граф?

— Граф? Конечно, знаю, — ответил Незнайка. — Это такой важный господин со шпагой, гербом и слугами. Графы жили в давние времена, были богаты и имели много знатных предков, портреты которых развешивали в своих замках.

— Правильно. И наше слово «граф» тоже древнего происхождения и тоже имеет славных родственников: биография — жизнеописание, география — землеописание, графит — стержень для письма и так далее. Все эти слова имеют один корень: «граф», который происходит от греческого слова *grapho* — писать.

Граф, про который я хочу поговорить с тобой, состоит из точек и линий, соединяющих некоторые пары точек. Точки называются *вершинами*, а линии — *ребрами*. Две вершины, которые соединены ребром, называются *смежными*.

— Значит, та картинка, которую мы нарисовали, будет графиком? — спросил Незнайка.

— Конечно! Назовем его графиком знакомств. Точки (вершины) обозначают малышей...

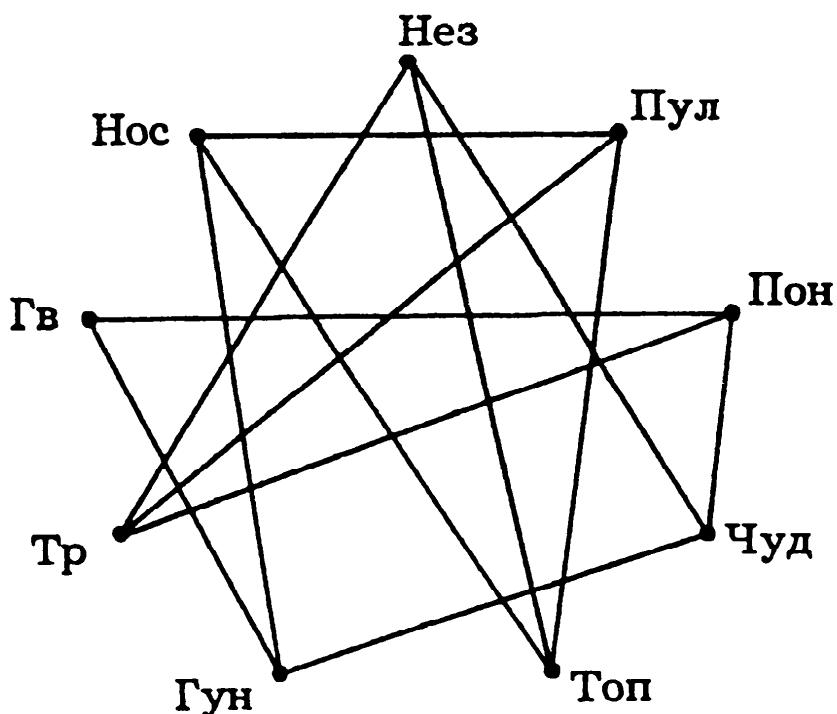
— ...А линии (ребра) — знакомства между малышами, — закончил мысль друга Незнайка.

— Давай нарисуем график знакомств полностью.

— Но я же забыл, кто с кем познакомился.

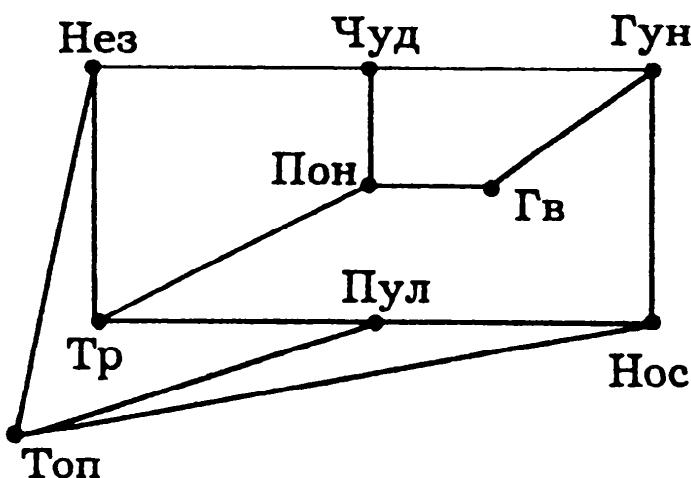
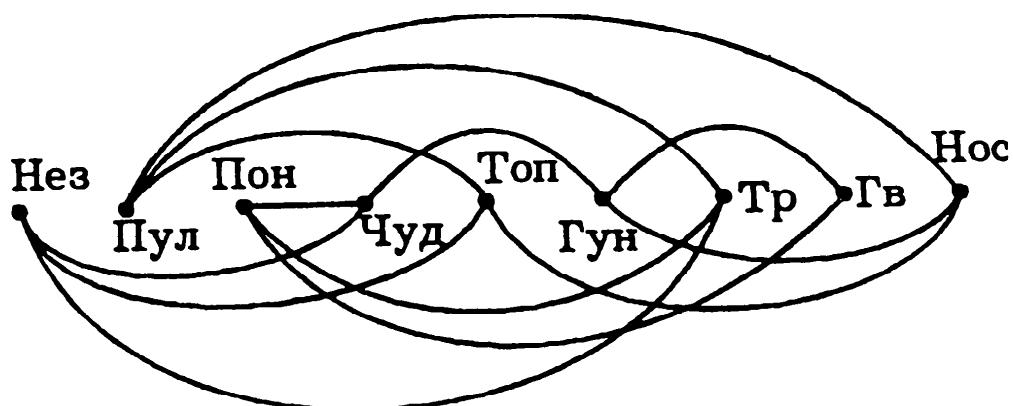
— Ты, наверное, знаешь некоторых малышей, которые были раньше знакомы, и я знаю некоторых. Смотри, вон Гунька бежит, он нам поможет.

Они остановили Гуньку, объяснили ему, чего хотят, и через пять минут общими усилиями нарисовали такую картинку:



— А почему ты нарисовал точки в таком порядке? — спросил Гунька. — На полянке мы сидели совсем не так.

— Не имеет значения, как расположены вершины графа, главное, как они соединены, — сказал Знайка и нарисовал еще два рисунка.



— Эти рисунки задают тот же граф знакомств, что и первый.

— Не может быть! — в один голос воскликнули Незнайка и Гунька. — Они совсем не похожи!

— Посмотрите: Носик познакомился с Пулькой, Топиком и Гунькой и на первом рисунке, и на втором, и на третьем. А если между Незнайкой и Пулькой нет линии на первом рисунке, то нет и на других. И так для каждой пары малышей.

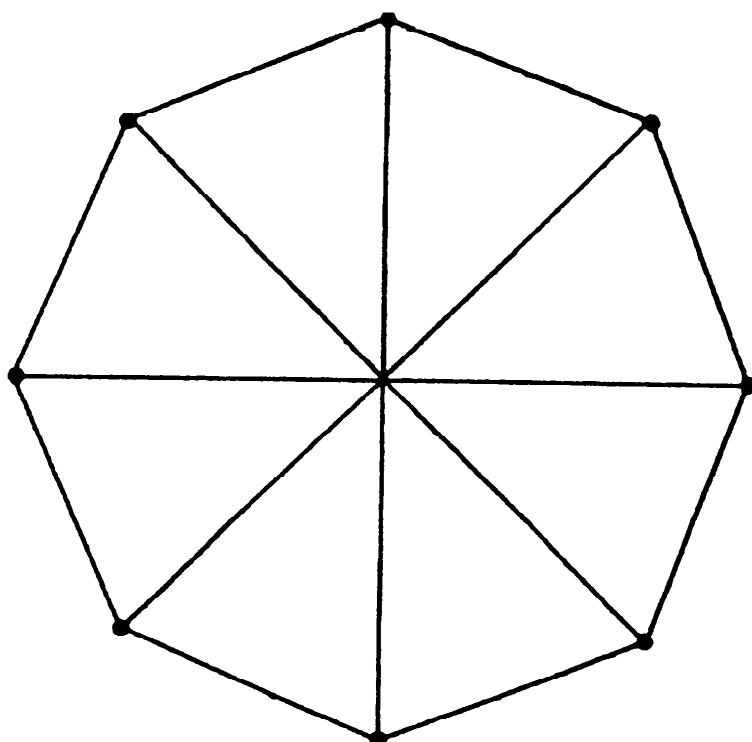
Внимательно посмотрев, Незнайка и Гунька убедились, что все на самом деле так. Все три графа рассказывали о новых знакомых малышей одинаково.

— Такие графы называются *изоморфными*, — сказал Знайка, подняв палец. — Они устроены одинаково, хотя нарисованы по-разному.

— Я ошибся чуть-чуть, — заметил Незнайка. — Да, у Гвоздика два новых знакомства, но у остальных по три.

— Я же говорил, что у кого-то должно быть четное число знакомств, — ответил Знайка.

— Разве так бывает всегда? — удивился Незнайка и тут же нарисовал картинку:



— А как зовут этих малышей? — спросил Гунька.

— Какая разница, как их зовут, — ответил Незнайка. — Главное, что из каждой точки выходят три линии. Значит, каждый из

малышей познакомился с тремя другими. А Знайка сказал, что это невозможно.

И Незнайка победно посмотрел на Знайку. Но Знайку было не так-то просто сбить с толку.

— Сколько у тебя вершин? — спросил он.

— Восемь!

— А на прогулке было девять малышей. Все, что мы говорили о знакомствах, верно для групп из нечетного количества малышей.

— Жаль, — печально проговорил Незнайка. Он уже предвкушал, как будет рассказывать всем, что смог посадить в лужу самого Знайку.

— Давайте посмотрим на наш граф знакомств. Сложим числа знакомств всех малышей:

ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ НЕЗНАЙКИ

+

ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ПУЛЬКИ

+

ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ПОНЧИКА

+

ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ГУНЬКИ

+

ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ТОПИКА

+

ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ЧУДИКА

+

ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ТРУБАЧА

+

ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ ГВОЗДИКА

+

ЧИСЛО ЗНАКОМСТВ НОСИКА

---

— Что получилось под чертой? — спросил Знайка.

— Сумма знакомств, — ответил Гунька.

— Нет, — возразил Незнайка. Он помнил то, о чем они говорили раньше. — Каждое знакомство считается дважды. Поэтому получилось удвоенное число знакомств.

— Правильно, — подтвердил Знайка. — Количество линий (ребер), выходящих из точки (вершины графа), называется *степенью вершины*.

— Она равна числу знакомств малыша? — спросил Гунька.

— Конечно, — важно подтвердил Незнайка. Ему нравилось, что он может кое-что объяснить Гуньке. — А каждая линия, или ребро, соответствует знакомству.

— Верно, — сказал Знайка. — Поэтому мы с вами доказали интересную теорему...

— А что такое теорема? — спросил Гунька, услышав незнакомое слово.

— Это такое утверждение, про которое сразу нельзя сказать, правильное оно или нет. Его нужно доказывать.

— Значит, то, что Незнайка всегда задается, не будет теоремой, — сказал Гунька и тут же получил от Незнайки подзатыльник.

— Так вот, — продолжил Знайка, — мы доказали интересную теорему:

---

*В графе сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер.*

---

— А вот и неправильно, — возразил Незнайка. — Надо говорить: в графе с девятью вершинами сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер, то есть будет четным числом. Мы-то рассматривали граф с девятью вершинами.

— Молодец, Незнайка, заметил, — похвалил Знайка. — Но все, что мы говорили о графе с девятью вершинами, можно сказать о графике с любым числом вершин.

— Конечно, — сказал Гунька. Ему очень хотелось показать, что он понимает не меньше, чем Незнайка. — Какая разница, сколько знакомств складывать — девять, или двадцать, или сорок.

— Верно, Гунька. Это утверждение верно для графов с любым числом вершин. Оно носит название *леммы о рукопожатиях*.

— А что такое лемма? — спросил Гунька.

— Лемма — это вспомогательная теорема, с ее помощью доказываются другие теоремы.

— Но при чем же здесь рукопожатия? Мы же говорили о знакомствах!

— Какой ты непонятливый! — закричал Незнайка. — Мы нарисовали график знакомств, а можем нарисовать график рукопожатий. Малыши — это вершины графа (точки). Пожали малыши друг другу руки — соединим их вершины ребром. Получим график. А в нем сумма степеней вершин равна удвоенному числу рукопожатий. Понял?

— Понял, понял, — поспешил согласился Гунька. — Но если лемма — помощница в доказательстве, то чему помогает это лемма?

— Она используется очень часто, — ответил Знайка. — Давайте докажем, что **число вершин нечетной степени в любом графе четное**.

— Это почему? — спросил Гунька.

— А я знаю! — обрадовался Незнайка. — Из леммы о рукопожатиях. Сложим степени всех вершин. По лемме о рукопожатиях должно получиться четное число. Но если в графе будет нечетное число вершин нечетной степени, то при их сложении четное число не получится никак!

— Теперь ты понял, почему каждый из вас не мог познакомиться с нечетным числом малышей? — спросил Знайка Незнайку.

— Конечно, понял: нельзя нарисовать граф с девятью вершинами так, чтобы из каждой вершины выходило нечетное число ребер.

— Молодец, Незнайка! Я тебе еще что-нибудь расскажу.

Но Незнайка уже бежал по улице и рассказывал всем встречным, как Знайка, который не ходил в поход, узнал, кто с кем там познакомился.

## *Глава 2*

---

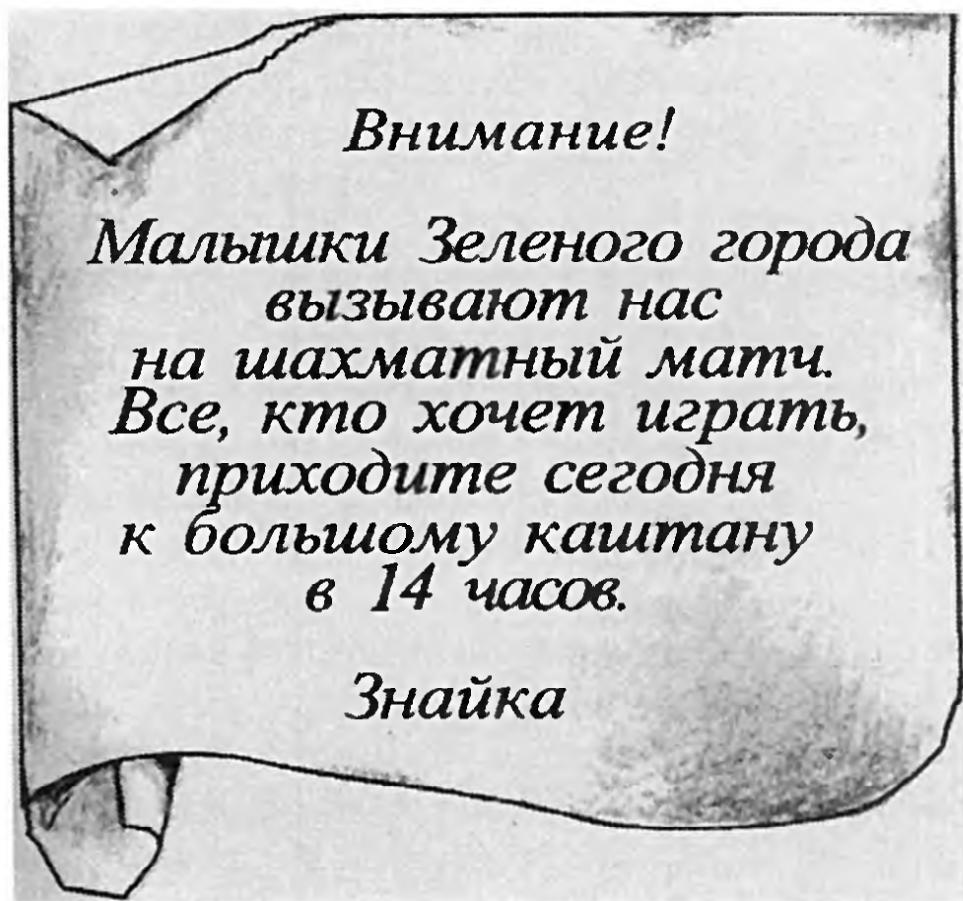
---

### **Незнайка собирается на шахматный турнир**

---

---

Идет как-то раз Незнайка по улице и вдруг при входе на бульвар Васильков видит на афишной тумбе объявление:



Посмотрел Незнайка на часы: без десяти минут два. Хорошо, что до каштана рукой подать.

Незнайка не так давно научился играть в шахматы, но уже считал себя хорошим игроком. Да и старых знакомых из Зеленого города хотелось увидеть.

Прибежал Незнайка к каштану, а там уже собралось много малышей. Знакомых и незнакомых тоже.

— Вот еще и Незнайка явился, — проворчал Ворчун. Он-то играл в шахматы хуже Незнайки и боялся конкуренции.

Знайка посмотрел на часы:

— Два часа, больше никого не ждем. Через две недели в Зеленом городе будет большой праздник. Малышки приглашают туда нашу команду. Кто хочет в ней играть?

Коротышки загадали, закричали: каждый хотел померяться силой с малышками.

— Вижу, — сказал Знайка, — желающих много. А в команде должно быть четыре малыша. Придется проводить отборочный турнир. Прошу записываться.

После того как желающие записались, в списках оказалось 16 малышей.

— Давайте проведем чемпионат Цветочного города, — предложил Незнайка. — Те, кто займет первые четыре места, составят команду.

Незнайку поддержал Знайка:

— Правильно. Это самый справедливый способ выбора сильнейших. А по какой системе будем играть?

— Не нужно нам никакой системы! — закричал Торопыжка. — Каждый играет с каждым. Кто наберет больше очков, тот и чемпион.

— Такая система называется круговой. Но я думаю, что она нам не подходит, — заявил Знайка.

— Это еще почему не подходит? — возмутился Гунька. — Она самая справедливая!

— Нас шестнадцать малышей. Значит, каждый должен будет сыграть с пятнадцатью. Если играть по одной партии в день, потребуется полмесяца.

— А мы будем играть по несколько партий в день, — не унимался Гунька.

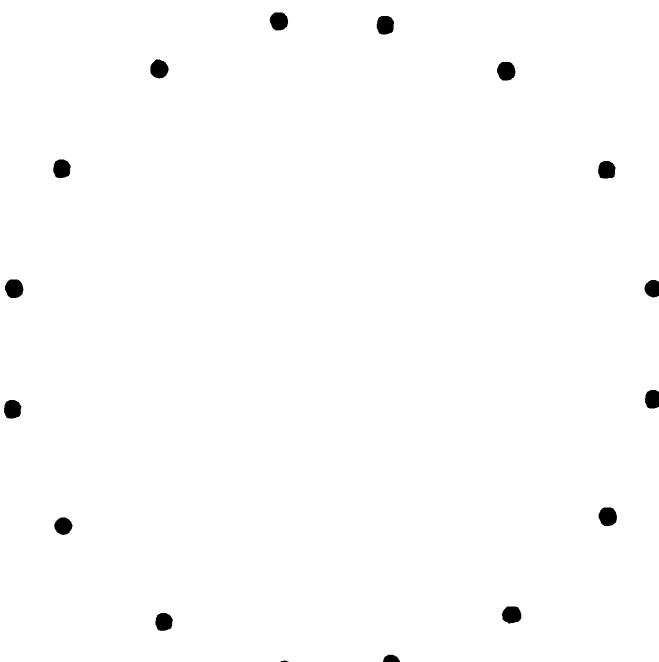
— Настоящие шахматисты играют по одной партии в день, — сказал Знайка, потом подумал немного и добавил, — ну, может быть, по две, и обязательно с часами. А мы же настоящие шахматисты.

Никто на это не возразил, ведь каждому хотелось чувствовать себя настоящим спортсменом.

— Интересно, а сколько при круговой системе пришлось бы сыграть партий? — спросил Шпунтик.

— Какая разница, — пробурчал Ворчун, — если нам эта система не подошла.

— Число партий легко подсчитать, — сказал Знайка и нарисовал 16 точек. — 16 точек — это 16 шахматистов.



— Если два шахматиста играют между собой, соединим их точки линией.

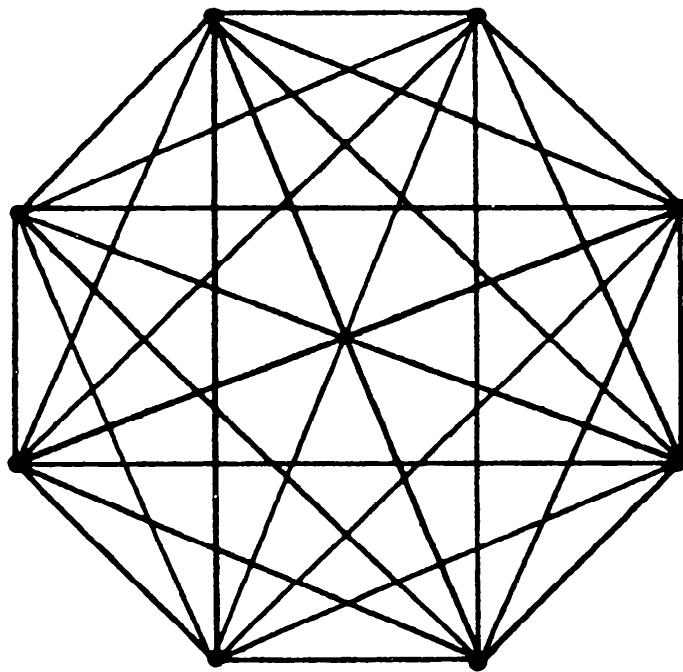
— Но у нас каждый малыш играет с каждым, — сказал Чудик.

— Поэтому соединим каждую точку с остальными, — и Знайка начал проводить линии. — Ой, очень много линий получается, уже запутался. Давайте считать, что шахматистов 8.

— Как это 8, если их 16, — не согласился Ворчун.

— Разберемся сначала с восьмью, а потом и с шестнадцатью.

Знайка нарисовал картинку:



— Незнайка, как называется такой рисунок?

Незнайка вспомнил недавний разговор со Знайкой:

— Граф.

— Верно. Точки, или вершины графа, — это шахматисты, а линии, или ребра, графа — это партии. Такой граф, в котором каждая вершина соединена со всеми остальными, называется *полным*. Если мы хотим узнать, сколько партий сыграют восемь шахматистов, мы должны подсчитать число ребер в полном графе с восьмью вершинами.

— Что здесь считать, — сказал Торопыжка. Из каждой точки выходят 7 линий, значит, всех линий будет  $8 \times 7 = 56$ .

— Ха-ха-ха, — засмеялся Гунька. — Поспешишь, малышей насмешишь. Ведь каждая линия выходит из двух точек, значит, Торопыжка сосчитал ее два раза, а нужно было всего один.

Гунька не признался, что совсем недавно он сделал такую же ошибку.

— Да, — Торопыжка почесал затылок. — Но это можно легко исправить: если я каждую линию посчитал дважды, то разделим полученное число на 2. В этом графе 28 ребер.

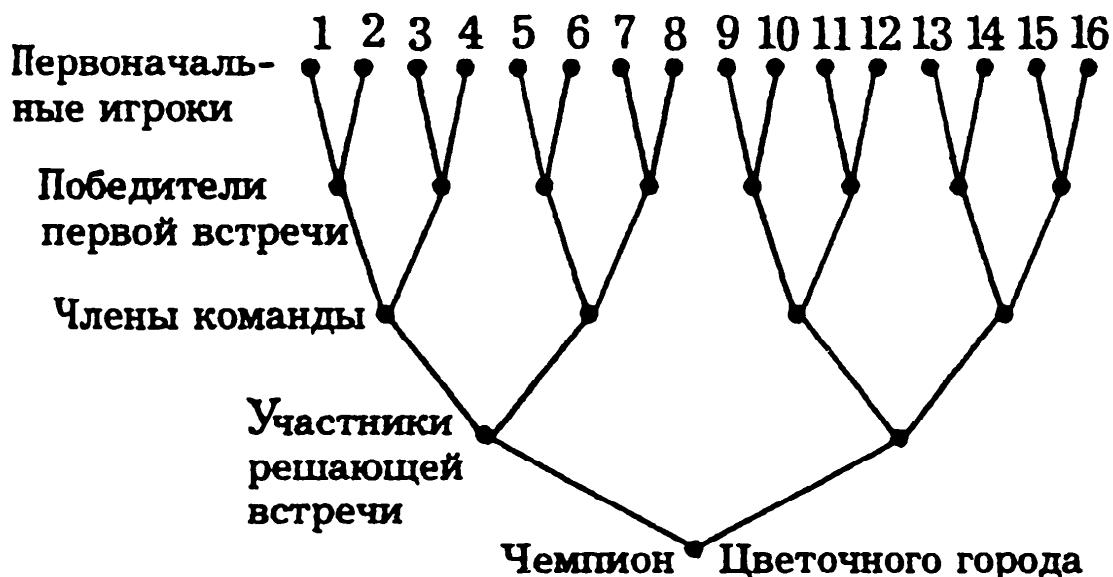
— Правильно, — согласился Знайка. — А сколько же ребер будет в полном графе с шестнадцатью вершинами?

— Знаю! — воскликнул Винтик. — Любая точка соединена с пятнадцатью другими:  $16 \times 15 = 240$ . Я тоже посчитал каждую линию дважды. 240 делим на 2, получается 120 линий. Нам нужно

сыграть 120 партий. Понадобится семь с половиной дней, если каждый будет играть по две партии в день.

— Многовато, — сказал Ворчун.

— Поэтому я предлагаю другую систему, — опять вступил в разговор Знайка. — Она называется *олимпийской*. Шестнадцать малышей разобьем на восемь пар. Малыши в каждой паре встречаются между собой. Восемь победителей составят четыре новые пары. После встречи в этих парах останутся четыре малыша, которые и войдут в команду. А еще через две встречи мы узнаем, кто чемпион Цветочного города. Олимпийскую систему можно изобразить следующим графиком:



Такой график называется *корневым деревом*.

— Конечно, деревом, — воскликнул художник Тюбик, — оно и растет из корня — точки снизу.

— Но если это дерево, то у него должны быть и листья, — задумчиво сказал Ворчун.

— Вершины вверху называются листьями, — уточнил Знайка. — Ну, что? Подходит нам такая система? Смотрите, чтобы определить команду, участникам нужно провести по две встречи.

— А восьми игрокам — только одну, — мрачно заметил Ворчун.

— Чемпион определится после четырех, — продолжил Знайка.

— Как будем выбирать соперников? — поинтересовался Винтик.

— По жребию. Согласны?

— Нет! — закричал Незнайка. — Несправедливая система! Я, наверное, один из лучших игроков в городе...

Многие малыши засмеялись, но Незнайка не обратил на это внимания.

— Может быть, только Знайка сильнее. А мне в первой встрече попадет Знайка. Или даже Гунька. А у меня в этот день будет болеть голова, и я ему из-за этого проиграю.

— Я у тебя и у здорового выиграю, — обиделся Гунька.

— Это несправедливая система, — повторил Незнайка. — Нельзя, чтобы из-за одного проигрыша малыш не попадал в команду.

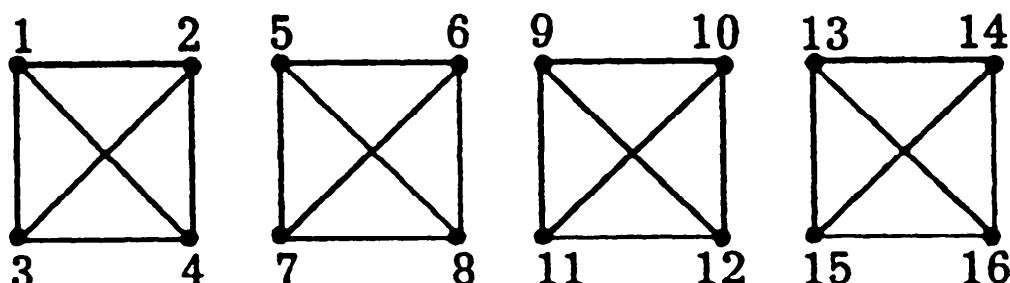
Малыши задумались. Почти все, кроме Знайки, играли в шахматы примерно одинаково, поэтому слова Незнайки затронули всех.

— Да, — протянул Ворчун, — такая система не годится.

Чуть-чуть подумав, Знайка снова заговорил:

— Предлагаю новую систему: шестнадцать игроков делятся на четыре группы по четыре игрока в группе. В группе каждый малыш играет с каждым. Победители групп образуют команду. Они же разыграют звание чемпиона.

Знайка нарисовал картинку:



— Получилось четыре полных графа с четырьмя вершинами каждый, — сказал Гунька.

— Да, — согласился Знайка. — Можно считать, что на этом рисунке нарисованы четыре графа, но можно считать, что это один граф, состоящий из четырех частей. Каждая такая часть называется *компонентой*. Если от одной вершины графа до другой можно перейти по ребрам, то эти вершины принадлежат одной компоненте, а если нельзя, то разным.

— А если от каждой вершины можно по ребрам перейти к любой другой, то у графа будет одна компонента? — спросил Гунька.

— Конечно. Такой граф называется *связным*. А если граф имеет больше чем одну компоненту, то он называется *несвязным*.

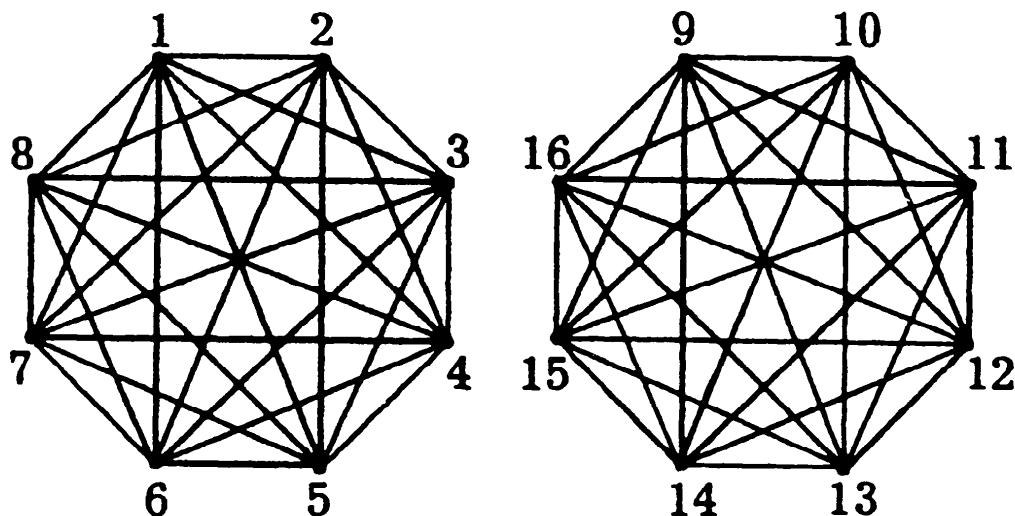
— Каждому малышу придется сыграть по три встречи, — продолжил Знайка. — Надеюсь, у тебя голова три раза болеть не будет? — ехидно обратился он к Незнайке.

— Три раза не будет, а один — возможно. Кроме того, те малыши, которые окажутся в одной группе с тобой, имеют мало шансов попасть в команду.

— Да, — сказал Чудик, — Знайка всех обыграет.

— Поэтому, — продолжил Незнайка, — предлагаю более справедливую систему.

И Незнайка нарисовал картинку:



— Разбиваем всех игроков на две группы по восемь малышей в группе. В группах каждый играет с каждым. По два победителя из каждой группы образуют команду. Так будет справедливее.

— Что же, и так можно. Каждый малыш должен сыграть семь партий в своей группе. За четыре дня управимся. И еще два дня на финал. Все согласны? — спросил Знайка.

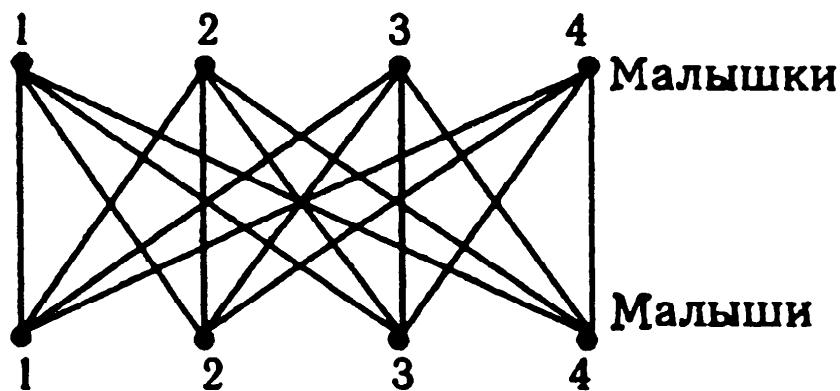
Несогласных не нашлось.

— Давно пора играть, — сказал Торопыжка. — А мы только разговариваем.

Торопыжку интересовал сам процесс игры. В команду попасть он не надеялся, поэтому ему было безразлично, по какой системе играть. Но Пилюлькин поинтересовался:

— А как будем играть с малышками?

— Они предлагают, чтобы каждый из нашей команды сыграл с каждым из их команды. Это можно изобразить таким графом:



— Наверно и этот граф как-то называется? — спросил Гунька.

— Это *двудольный граф*. Вершины двудольного графа можно разбить на две части (*доли*) так, что каждое ребро будет соединять вершины разных долей. А если каждая вершина одной доли будет соединена с каждой вершиной второй доли, как в этом графе, то получается *полный двудольный граф*.

— Каждый малыш должен сыграть в Зеленом городе четыре партии. Если играть по две партии в день, то турнир займет два дня, — заметил Пилюлькин.

— Отлично, — сказал Знайка. — Приступаем к жеребьевке.

# Глава 3

---

---

## Выбор маршрута

---

---

Через пять дней малыши вновь собрались у большого каштана. Два отборочных турнира подходили к концу. Хотя еще не все партии были сыграны, но и победители, и команда уже определились.

Незнайка пришел пораньше. Во время турнира он заметил интересную закономерность и теперь хотел расспросить о ней Знайку поподробнее. Ему повезло: Знайка сидел на лавочке под каштаном.

— Послушай, хочу у тебя кое-что спросить...

Знайка кивнул головой.

— В нашей группе было восемь малышей. Они играли с разной скоростью. Торопыжка все свои партии закончил в первый день и все проиграл. А Сиропчик вообще заболел и не сыграл ни одной. Но я заметил, что в каждый момент времени обязательно были хотя бы два игрока, которые сыграли одинаковое число партий. Это всегда так?

— Конечно, — ответил Знайка, — я сейчас тебе объясню. Только ты, наверное, ошибся. Как это возможно: Торопыжка сыграл все партии, значит, он сыграл и с Сиропчиком, а ты говоришь, что Сиропчик не сыграл ни одной?

— Да, я сказал неточно. Торопыжка сыграл со всеми, кроме Сиропчика.

— Давай нарисуем граф встреч. Вершины графа — это игроки, а если два игрока сыграли партию, то соединим их вершины ребром.



— Команда для встречи с малышками определилась, — продолжил Знайка. — А сейчас четыре победителя должны разыграть звание чемпиона Цветочного города.

— У меня есть предложение, — выскоцил вперед Пулька. — Давайте вместо этого отправимся в поход. За четыре дня дойдем до Зеленого города. А звание чемпиона можно разыграть потом.

— Конечно, поход! — закричал Незнайка. Ему уже надоело играть в шахматы. Кроме того, он с удовольствием вспоминал предыдущую вылазку на природу. — Посмотрите, какая погода: солнечно греет и комаров нет.

Другие малыши поддержали Пульку и Незнайку.

— Согласен, — присоединился ко всем Знайка. В руках у Пульки тотчас же оказалась карта.

Малыши обступили Пульку.

— Отлично, — сказал Знайка, — от Цветочного города до Зеленого — прямая дорога. За два дня дотопаем.

— Придумал тоже, — отзвался Пулька, — два дня брести по полю.

— Да, — поддержал его Пилюлькин, — пробыть целый день под прямыми солнечными лучами чрезвычайно вредно для здоровья.

— Ты нас еще в болото заведи, — пробормотал Ворчун.

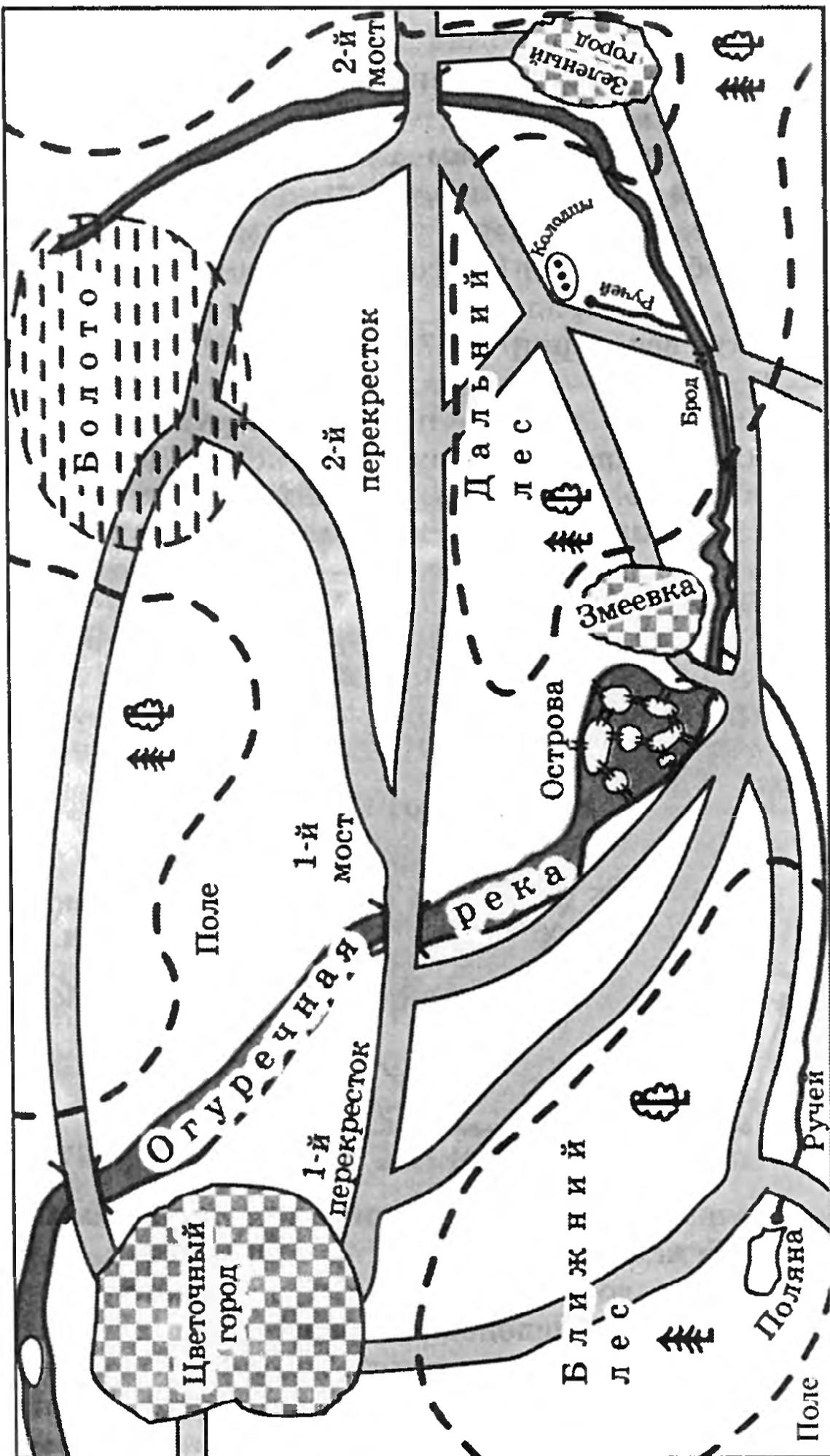
— У нас не соревнование на скорость, — вступил в разговор Незнайка. — Я хочу искупаться в реке, насобирать ягод в лесу, попить воды из родника. А топать два дня по полю — большое спасибо!

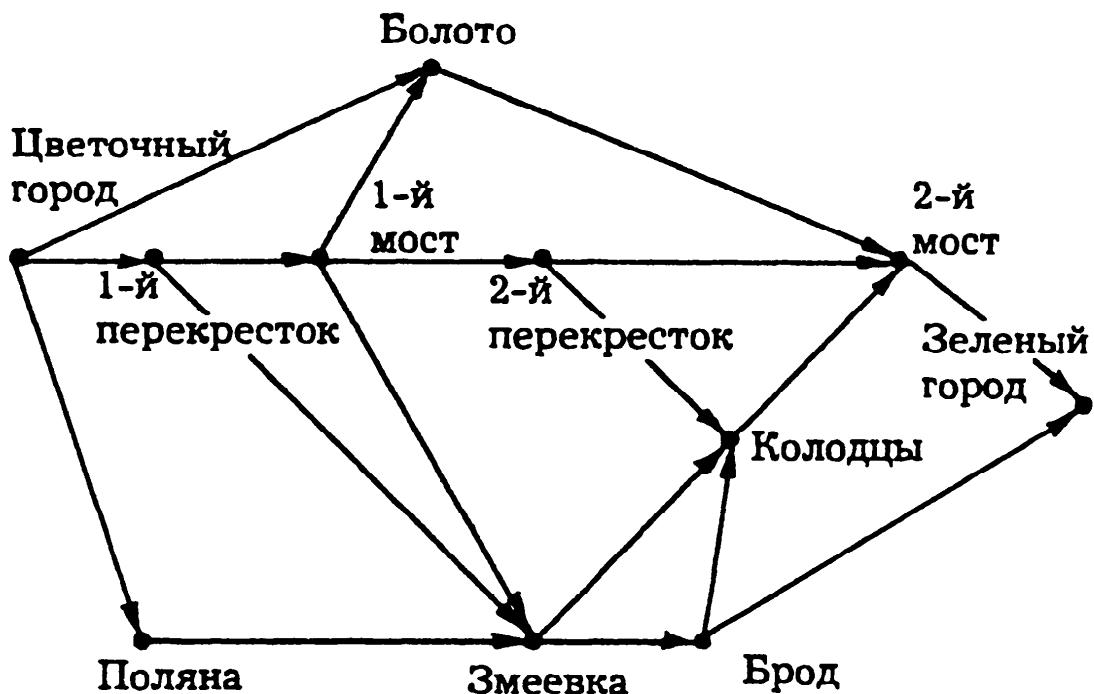
— Можно выбрать маршрут и получше, — сказал Пулька.

— Давайте переберем все маршруты, а потом выберем из них лучший, — предложил Гунька. — Интересно, сколькими различными маршрутами можно добраться из Цветочного города в Зеленый?

— Ну, ты и придумал, — засмеялся Незнайка. — Перебрать все маршруты? Их же бесконечно много!

— Вовсе нет, — вмешался Знайка. — Если договориться идти только по тем дорогам, которые приближают нас к Зеленому городу, то число маршрутов легко сосчитать. Давайте нарисуем граф дорог. Вершинами этого графа будут города и перекрестки дорог, а ребрами — дороги, соединяющие эти точки.





— Почему ты нарисовал линии со стрелками? — спросил Гунька.

— Мы же договорились идти по дорогам, которые ведут нас к Зеленому городу. Стрелки указывают направление движения. У нашего графа все ребра имеют ориентацию: начало и конец. Такие ребра называются *дугами*, или *ориентированными ребрами*, а сам график — *ориентированным графиком*, или *орграфом*. Каждая стрелка идет от начала дуги к ее концу.

— Как же искать маршруты? — спросил Пулька.

— Очень просто. У нас есть три возможности выйти из Цветочного города. Давайте изобразим эти возможности, — сказал Знайка и нарисовал картинку:



— Если мы попадем на поляну или в болото, то оттуда мы должны будем идти по единственной возможной дороге, а вот если мы попадем на перекресток, то у нас появятся две возможности продолжения пути: 1-й мост или Змеевка.



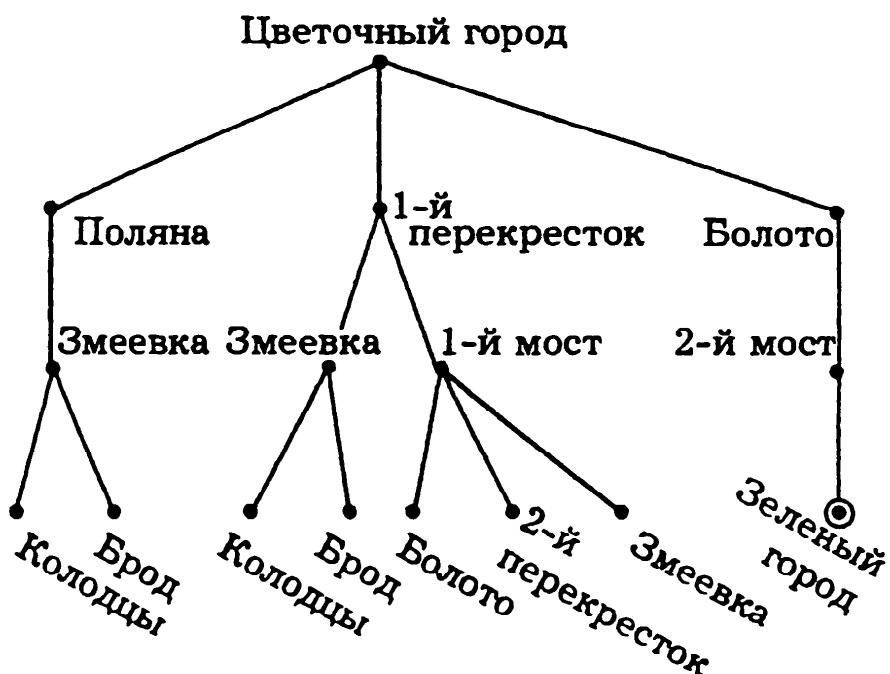
— Мы видим, что существуют четыре маршрута, которые начинаются в Цветочном городе и содержат ровно две дуги.

— От Цветочного города до болота ой как далеко, а перекресток рядом, — проговорил Ворчун.

— Сейчас мы не учитываем длины дорог, нас интересует только количество разных путей, возразил Знайка. — От первого моста у нас три возможности продолжить путь, от Змеевки — две...

— От второго моста приходим в Зеленый город! Конец пути! — перебил Гунька.

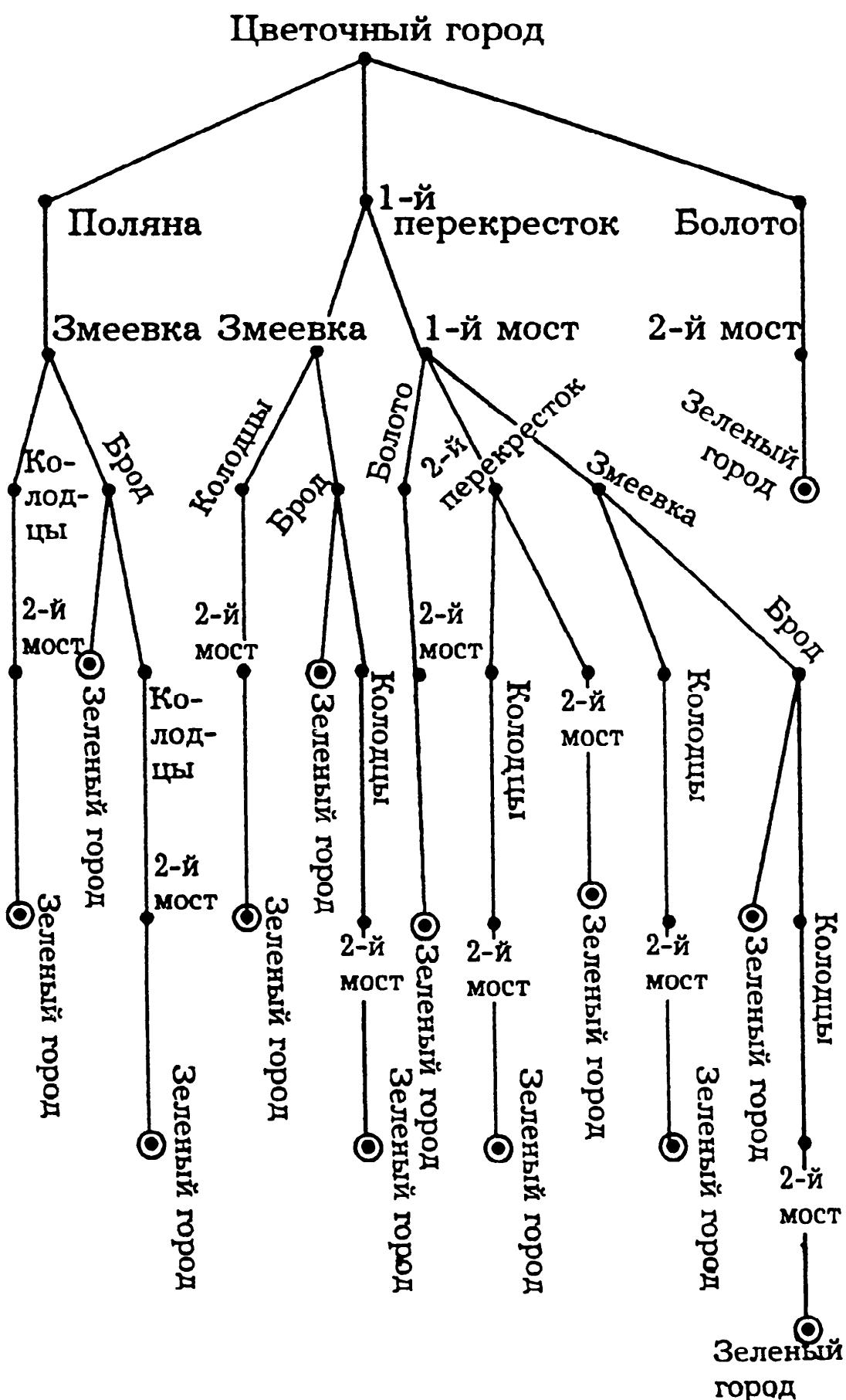
А Знайка нарисовал все возможные продолжения:



— Наш рисунок растет, как дерево! — удивился Чудик. — Только почему-то вниз.

— Это и есть корневое дерево. Та вершина, которая вверху, — корень. А то, что дерево растет вниз, — не беда. Мы же говорили, что не имеет значения, как рисовать граф. Давайте нарисуем остальные варианты маршрутов.

И Знайка с помощью товарищей принялся за работу. Вот что у них получилось:



— Используя построенное дерево, можно найти все маршруты из Цветочного города в Зеленый. Наше дерево имеет тринадцать листьев. Значит, у нас тринадцать различных маршрутов. Переходя по ребрам дерева от корня к какому-нибудь листу, мы получаем маршрут, соединяющий наши города. Те вершины, которые мы будем проходить в дереве, станут промежуточными пунктами пути.

— Вот уж не думал, что между нашими городами так много различных путей, — почесал затылок Пулька. — Трудно будет выбрать.

— Ничего, я помогу, — сказал Незнайка, — и остальные тоже.

# Глава 4

---

---

## Незнайка заблудился

---

---

Дело приближалось к полудню. Перед путешественниками открылась долгожданная поляна.

Привал! — скомандовал Пулька. Малыши быстро сняли рюкзаки.

— Отдыхать будем потом, — продолжил Пулька. — Сначала соберем хворост для костра.

Туристы быстро натаскали дров, и уже через пять минут весело трещал костер. Дежурные, Ворчун и Цветик, поставили на огонь кастрюли с водой.

— Обед — через час. До обеда все свободны. Отдыхайте, только от поляны далеко не отходите.

Малыши разбрелись кто куда. Знайка достал из рюкзака толстенную книгу и спрятался в тени. Чудик, наоборот, решил позагорать и улегся на солнышке. Художник Тюбик расставил мольберт и стал рисовать пейзаж. Остальные исчезли в лесу, где наверняка было много ягод. И только Пилюлькин остался у костра. Еще до похода он разработал наилучший рацион питания и следил, чтобы дежурные неукоснительно выполняли все его требования.

Час пролетел незаметно. Малыши постепенно стали подтягиваться к поляне.

— Подошел обеда час!  
Бери ложку, бери таз! —

закричал дежурный Цветик и громко застучал большой поварешкой по пустой кастрюле.

Малыши мигом выстроились с мисками наготове. Конечно, они проголодались: ведь из Солнечного города выходили на рассвете. А наспех собранные ягоды не утолили голода.

— Что за каша! Хороша!  
От нее поет душа! —

повторял Цветик, накладывая каждому полную миску каши.

Когда очередь за обедом рассосалась, Ворчун вдруг понял, что на поляне нет Незнайки и Гуньки.

— Ребята! — закричал он. — Где Незнайка? Где Гунька? Вечно опаздывают, а потом их ожидай! Кто их видел?

— Я видел, — сказал Чудик, — они собирали ягоды за пригорком.

— Наверное, чересчур увлеклись, — успокоил всех Пулька. Но сам встревожился: может быть, с друзьями что-нибудь случилось. — Я же говорил далеко не уходить. Подождем немного.

Малыши успели съесть кашу, попросить добавки (а Пончик — даже две добавки) и выпить компот, но опоздавшие так и не вернулись.

— Давайте позовем их хором, — предложил Чудик.

— Незнайка! Гунька! — громко закричали малыши, но никто не отозвался.

— Нужно искать, — сказал Пилюлькин. — Может быть, у них солнечный удар и необходима скорая помощь. А вдруг их укусила змея? Может быть, они споткнулись и сломали ноги?

— По теории вероятностей, — заметил Знайка, — эти события для двух малышей одновременно маловероятны.

— Зачем нам твоя теория, если Незнайка и Гунька потерялись! — рассердился Чудик. — Искать надо, а не теории вспоминать!

— Конечно, надо искать, — согласился Пулька. — Только я боюсь, что и другие потеряются. Мы сделаем так.

И Пулька позвал:

— Булька, ко мне!

С веселым лаем подбежала Булька. Пулька дал понюхать ей рюкзаки пропавших.

— Булька возьмет след. Часть малышей пойдет на поиски, а остальные будут ждать в лагере. Со мной пойдут...

Но Пулька не успел разделить путешественников на группы, потому что на поляну вышли Незнайка и Гунька. Нельзя сказать, что они выглядели очень свежими, но те опасения, которые высказал Пилюлькин, явно не сбылись.

— Мы о них беспокоимся, а они где-то бродят! — рассердился Чудик. — Где вы были?

— Заблудились, — грустно протянул Незнайка.

— Мы ходили кругами, — сказал Гунька. — Идем, идем — смотрим, а здесь мы уже были. Опять пошли, и снова пришли на старое место.

— Так и должно быть. У малыша правая нога сильнее, чем левая, вот он и делает правой ногой более длинный шаг. Поэтому вы и ходили кругами, — объяснил Знайка. — В лесу надо пользоваться компасом.

— А почему вы не держались тропинок? — спросил Пулька.

— Потом мы по ним пошли, — ответил Незнайка.

— Ну и что?

— Это все Незнайка виноват, — перебил друга Гунька. — Приходим на развилку, я говорю, что надо идти направо, а Незнайка говорит — налево. Спорим, спорим...

— И куда же вы идете?

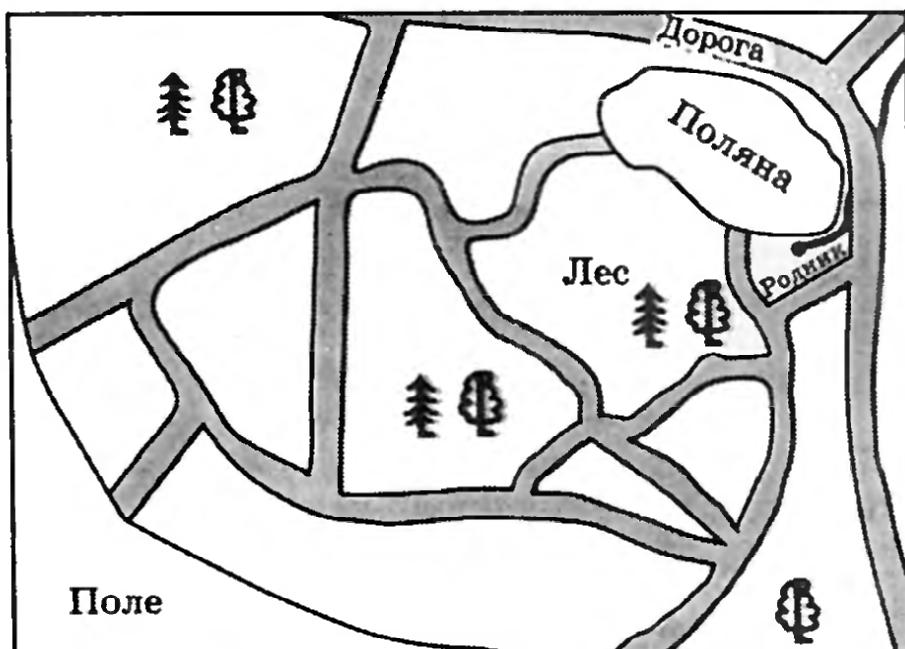
— Мы спорим, спорим и идем прямо, — ответил Гунька под громкий хохот малышей. — И так на каждой развилке. Хорошо, что услышали ваши крики.

— Лес вместе с дорожками можно считать лабиринтом, — сказал Знайка. — И есть простой способ выхода из лабиринта.

Коротышки насторожились. Они понимали, что каждый из них может оказаться в положении Незнайки и Гуньки.

— Пулька, покажи карту.

Пулька достал карту из сумки и развернул ее.



— Покажите, где вы были?

— Ой, — тяжело вздохнул Гунька, — мы, наверное, были везде.

— Тогда предположим, что вы оказались в этой точке, — и Знайка пальцем указал место на карте. — Правило выхода из лабиринта простое: если пришли на развилку, то идем по любой ранее не пройденной дороге.

— А как ее выбирать? — спросил Винтик.

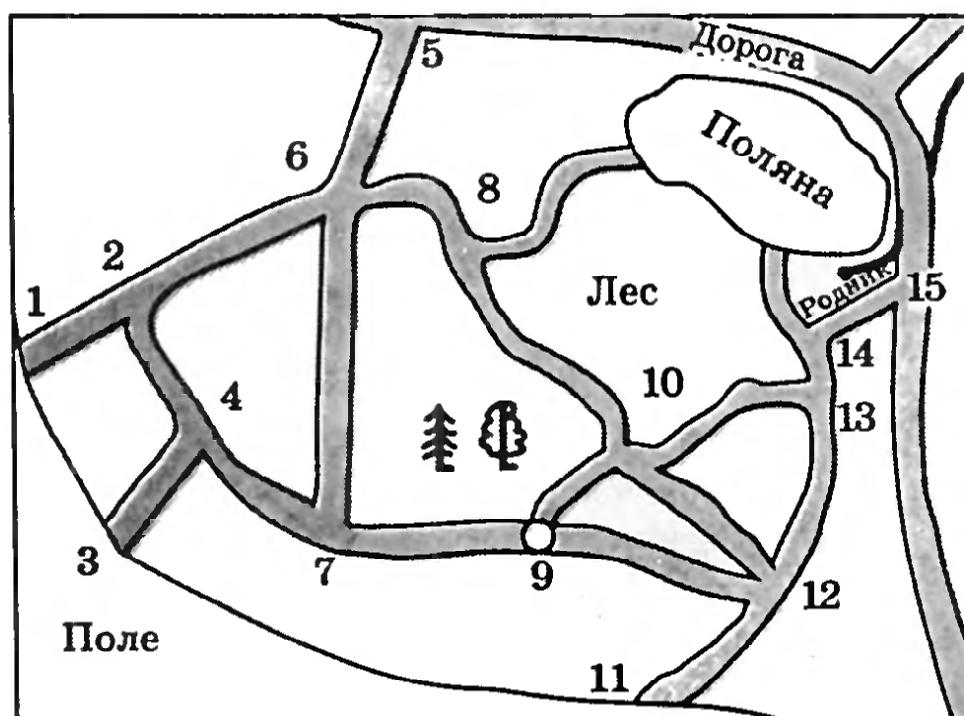
— Выбирать не нужно: какая больше нравится, по той и идите.

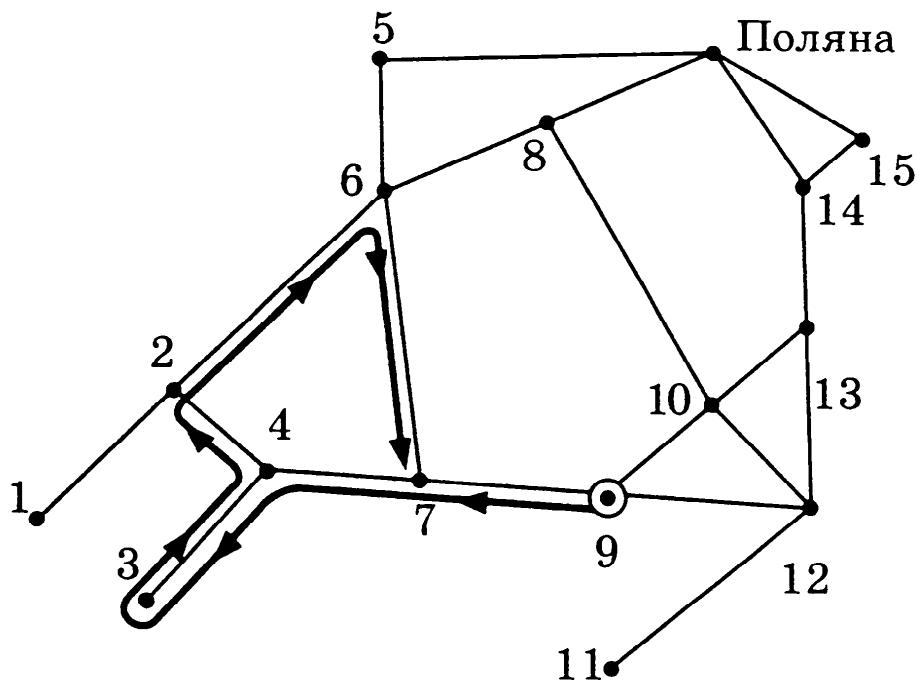
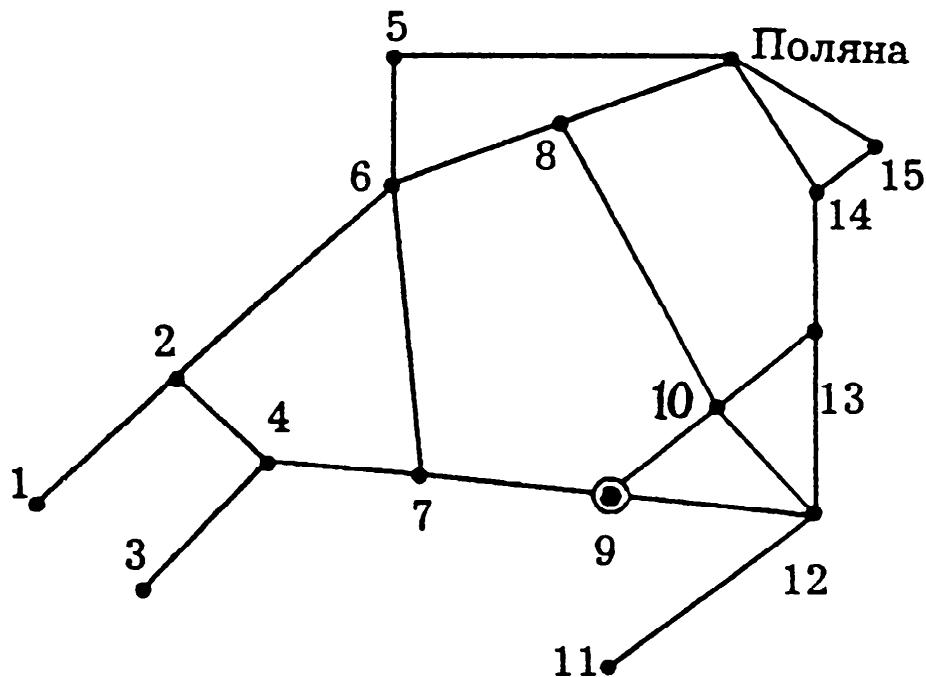
— Ну и правило, — пробормотал Ворчун. — Я всегда так делаю: иду, куда хочется, и всегда платаю.

— А если все дорожки, которые ведут от перекрестка, уже пройдены? — спросил Чудик.

— В этом случае мы должны вернуться назад, на предыдущий перекресток. Так же поступим, когда попадем в тупик. Для поиска выхода удобно использовать граф лабиринта. Давайте его построим.

Знайка пронумеровал перекрестки и тупики, затем для каждого перекрестка нарисовал точку — вершину графа. Если два места на карте были соединены тропинкой, то Знайка соединял их вершины линией. Кружком Знайка отметил место, где находились Незнайка и Гунька.



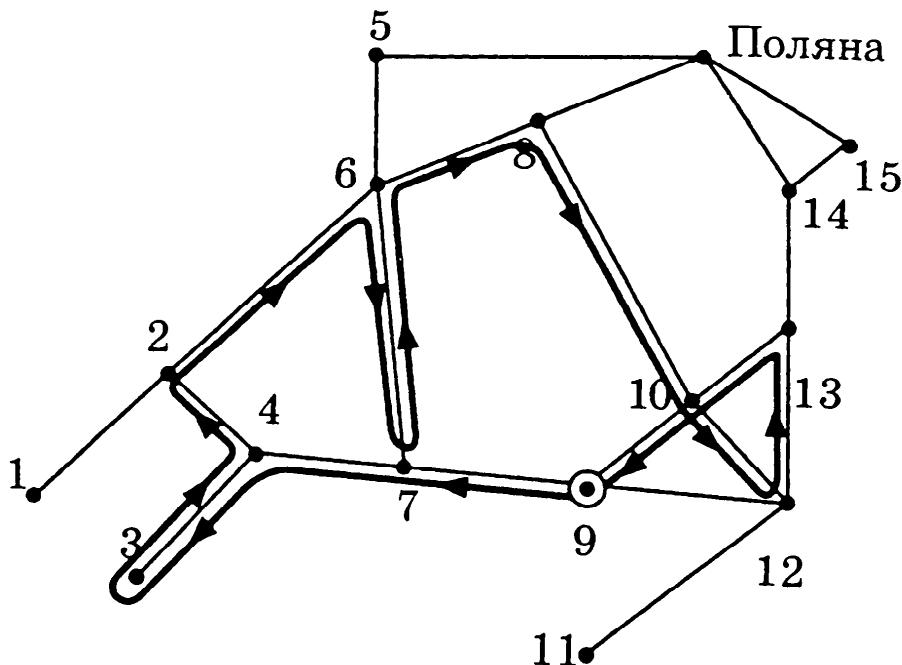


— Допустим, что Незнайка и Гунька пошли из пункта 9 на запад и попали в вершину 3. Вершина 3 — это тупик. Значит, малыши должны вернуться в предыдущую вершину 4 и пойти из нее по единственному пути в вершину 2. Предположим, что затем малыши каждый раз поворачивали направо, как говорил Гунька...

— Послушали Гуньку и опять попали в вершину 7, — засмеялся Незнайка. — Уж лучше бы слушали меня.

— Поскольку из вершины 7 нет непройденных дорожек, нужно вернуться в вершину 6 и идти дальше.

Знайка нарисовал на схеме дальнейший путь малышей.



— Ничего себе правило: пришли туда, откуда вышли, — удивился Чудик.

— Что поделаешь, ведь дорожки выбираем случайно.

И Знайка продолжил поиски пути.

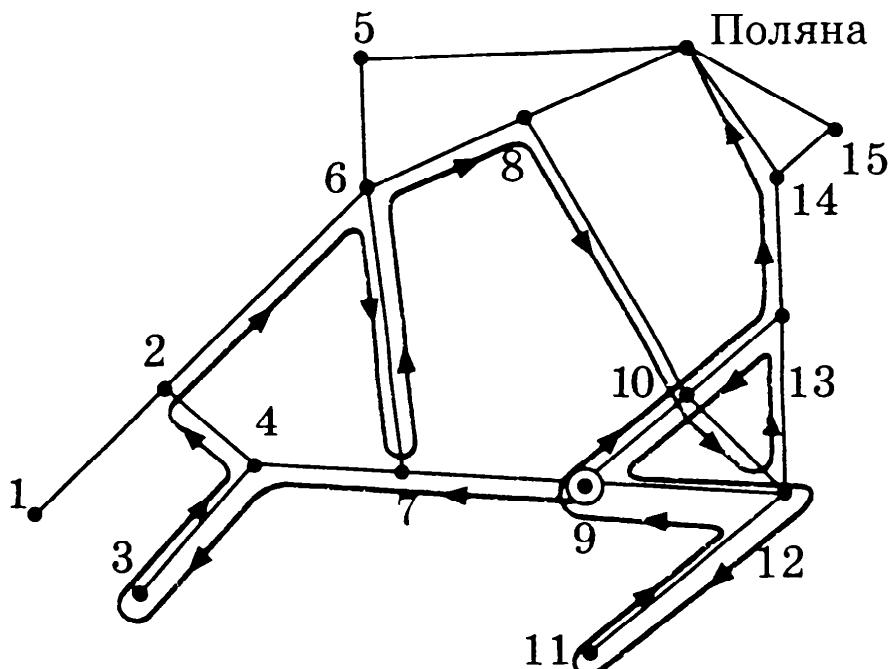
— Из вершины 11 тропинок нет, поэтому нужно вернуться в вершину 12.

— Но из нее тоже нет непройденных тропинок, — заметил Гунька.

— А это значит, что нужно возвращаться до тех пор, пока не найдем перекресток с еще непройденной дорогой.

— Значит, до вершины 13, — сказал Шпунтик.

— А оттуда до поляны рукой подать.



— Ура! — закричал Гунька. — Вышли!

— Зато сколько кружили по лесу, — заметил Ворчун.

— Да, — согласился Знайка, — если выберешь «плохую» дорожку, придется ходить больше, «хорошую» — меньше. Зато мы уверены, что выход из лабиринта найдем всегда. Такой способ обхода ребер и вершин графа используется для решения очень важных задач.

— Будь у меня карта, я бы нашел дорогу без всяких правил, — сказал Незнайка. — Хорошо тебе на бумаге стрелки рисовать, а в лесу?

— В лесу стрелки можно рисовать на дорожках, — закричал Гунька. — Или веточки класть, или камешки. Понял?

— Понял, понял, — согласился Незнайка.

— Все поняли? — спросил Знайка. — Теперь не заблудитесь?

— Не заблудимся! — закричали малыши хором. И только Ворчун добавил:

— Если дорожек будет немного.

# *Глава 5*

---

---

## **Прогулка по островам**

---

---

На ночлег путешественники остановились на берегу Огуречной реки, напротив города Змеевки. Место было очень красивое, а змеевцы вообще считали его самым красивым в Стране малышей. Конечно, остальные с этим не соглашались, но змеевцы в споры не вступали, а только снисходительно улыбались. И нужно сказать, что у них имелись веские причины так считать. Река, которая перед Змеевкой была быстрой и узкой и извивалась, как змея, здесь, широко разливаясь, замедляла течение. На ее глади располагались семь островов. Назывались они по цветам радуги: Красный, Оранжевый, Желтый, Зеленый, Голубой, Синий и Фиолетовый. Змеевцы построили мостики и соединили некоторые острова между собой, а любимым занятием у них стало гулять по островам, переходя с одного на другой по мостикам, и наслаждаться открывающимися пейзажами. Тот, кто уставал от прогулки, мог отдохнуть в любом месте: берега островов были усыпаны замечательным золотистым песочком.

В этом месте у туристов был запланирован день отдыха — дневка. Утром, после завтрака, малыши разбрелись кто куда. Большинство пошли на пляж. А там, как известно, всегда весело: солнце, песок и вода! Сколько можно придумать интересных игр и забав!

Дежурные быстро мыли посуду. Они тоже хотели искупаться, а ведь нужно было еще приготовить обед. Пилюлькин, Винтик и Шпунтик отправились в Змеевку проведать знакомых.

Незнайка сидел на коврике у своей палатки и внимательно рассматривал взятую у Пульки карту.



За этим занятием и застал его Гунька.

— Пойдем, искупаемся, — позвал он Незнайку.

— Еще успеется, день-то большой. У меня куда более интересный план.

— Какой план? — заинтересовался Гунька.

— Хочу пройти по всем мостикам, посмотреть, что же с них видно. Очень уж эти змеевцы задаются. Говорят, что с каждого мостика — особенный вид. А я считаю, что хоть у нас в Цветочном городе не семь, а всего один остров, но вид с него просто замечательный.

— Слушай, давай и я с тобой! Надоест ходить — искупаемся. Только зачем нам карта? Не заблудимся: с каждого острова берега видны.

— Бродить по островам без плана может всякий. Я хочу пройти по каждому мостику ровно один раз и вернуться на то же самое место, откуда начал.

— Хорошо, пошли!

— Не получается, — вздохнул Незнайка и показал карту. — Как ни пробую, ничего не получается.

Гунька склонился над картой.

— А если сделать так... — он стал водить по карте пальцем. Но и у Гуньки ничего не вышло. — Сейчас сбегаю за Знайкой.

— Зачем нам Знайка, сами справимся, — сказал Незнайка, но Гунька уже мчался к реке. Через несколько минут он тащил за собой Знайку, что-то объясняя ему при этом. Нельзя сказать, что у Знайки был довольный вид. Еще бы: лежишь себе на солнышке или играешь в мяч, а тут тебя хватают и волокут решать какие-то задачи.

— Рассказывай, что тебе нужно сделать, — сказал Знайка, подойдя ближе. — А то Гунька говорил так бестолково, что я ничего не понял.

Гунька обиженно засопел, а Незнайка объяснил, чего он хочет.

— О, — с уважением воскликнул Знайка, — эту задачу решил в 1736 году великий математик Леонард Эйлер.

У Гуньки от удивления открылся рот.

— А откуда он узнал про наши острова и мосты?

— Разве острова и мосты есть только на этой реке? — возмутился Знайка. — Конечно, у него в Кенигсберге на реке Прегель были свои острова. Эйлер решил задачу для их произвольного размещения. Давайте перейдем от карты к графу мостов. Обозначим каждый остров и каждый берег точкой (вершиной графа). Какие у нас острова?

— Синий... Желтый... Красный... Розовый... — запинаясь, произнес Гунька, пытаясь посмотреть на карту, которую Незнайка тут же спрятал за спину.

— Ты разве не знаешь, что острова называются так же, как цвета радуги?

— Знаю, — вздохнул Гунька, — но мне это не помогает.

— Для того чтобы запомнить порядок цветов радуги, нужно запомнить только одно предложение, — сказал Знайка.

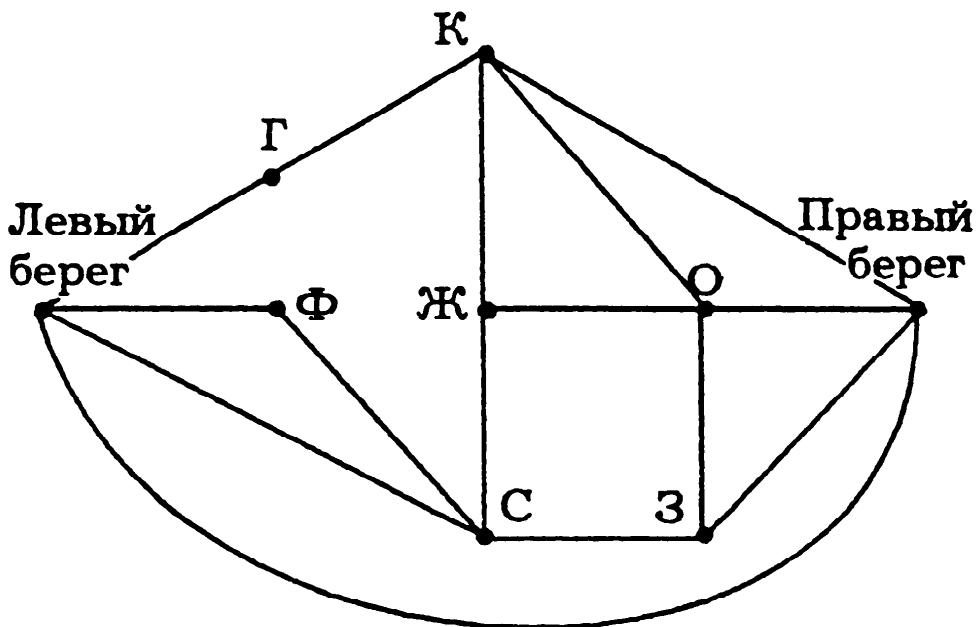
— Какое же?

— *Каждый Охотник Желает Знать, Где Сидит Фазан!* Понял?

— По-о-нял! — закричал смекалистый Гунька. — Понял! Первая буква каждого слова совпадает с первой буквой цвета: Красный, Оранжевый, Желтый, Зеленый, Голубой, Синий, Фиолетовый. Ура! Теперь запомню! И ты, Незнайка, тоже!

— Я это уже давно знаю, — презрительно заявил Незнайка.

— Вернемся к нашему графу, — сказал Знайка. — Если между двумя участками суши есть мостик, то соединим соответствующие вершины графа линией (ребром графа).



Знайка нарисовал график:

— Покажи еще раз, как ты хочешь пройти по мостикам, — попросил он Незнайку.

— Я хочу начать путь с этого места, пройти по каждому мостику ровно один раз и вернуться назад.

— Давайте считать ребра графа дорожками. Путь по вершинам и ребрам графа, который начинается в какой-то вершине и у которого каждое ребро содержит не более одного раза и заканчивается в начальной вершине, называется *циклом*, а если цикл проходит через каждое ребро графа, то — *эйлеровым циклом*. Значит, ты можешь осуществить свое желание, если в нарисованном графике есть эйлеров цикл. Так вот, в этом графике им и не пахнет.

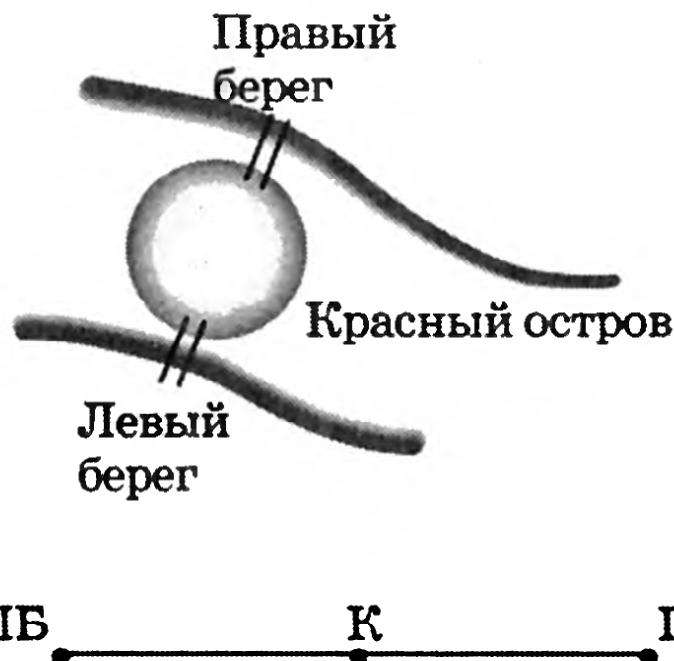
— А я вот возьму и нарисую! — Гуньке не понравилась самоуверенность Знайки.

— Хоть год рисуй, — засмеялся Знайка, — все равно не получится.

— Это почему же? — спросил Незнайка.

— Начнем с самого простого расположения островов и мостов.

Знайка нарисовал схему и график:



— Можно ли решить нашу задачу для этого графа?

— Ты, наверное, нас за дурачков считаешь! — обиделся Гунька.  
— Если мы перейдем с левого берега на правый, то не сможем вернуться назад по новому мосту.

— Правильно. А как называется число ребер, выходящих из вершины?

Незнайка и Гунька сморщили лбы.

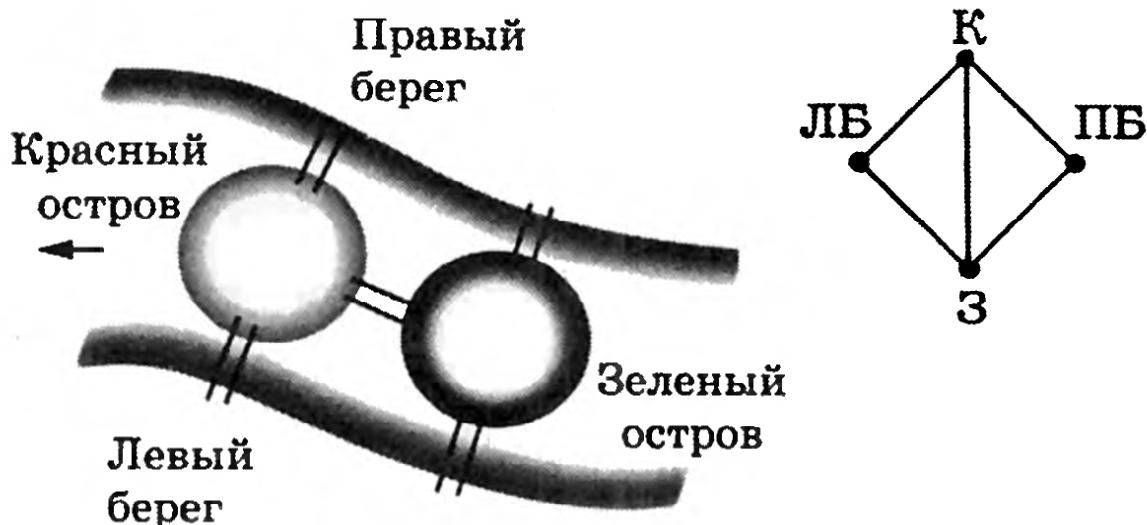
— Напоминаю: степень вершины. Вершина ПБ в последнем графе имеет степень 1. Если в графе есть вершина степени 1 и мы попадем в нее, то выйти из этой вершины по новому ребру не сможем. Поэтому *отсутствие вершин степени 1 является необходимым условием для существования эйлерова цикла*.

— Но в нашем графе нет таких вершин, — сказал Незнайка.  
Значит, в нашем графе есть эйлеров цикл.

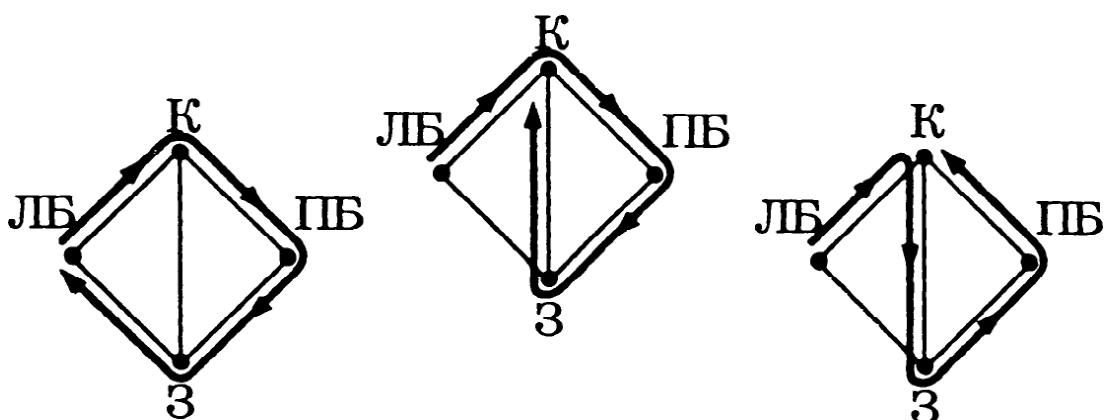
— Неправильно, — возразил Знайка. — Отсутствие вершин степени 1 является всего лишь необходимым условием. Это значит, что *без выполнения этого условия цикл в графе невозможен*. Но оно не является достаточным для существования цикла. То есть условие может выполняться, а цикла все равно не будет.

— А какое же условие достаточное?

Знайка не ответил, а нарисовал новые картинки:



— Попробуйте построить нужный цикл здесь.  
У Гуньки ничего не получилось:



— Не выйдет, — сказал Незнайка. — На Красный остров ведут три моста. После того как мы один раз пройдем через этот остров, неиспользованным останется один мост. Если мы по нему даже и придем на Красный остров еще раз, то уйти все равно не сможем.

— Молодец! — похвалил Знайка. — Ты заметил самое главное: сколько раз мы зашли на остров (или на берег), столько раз должны оттуда уйти. Что из этого следует?

Гунька задумался.

— На каждый участок суши должно вести четное число мостов, — сказал он неуверенно.

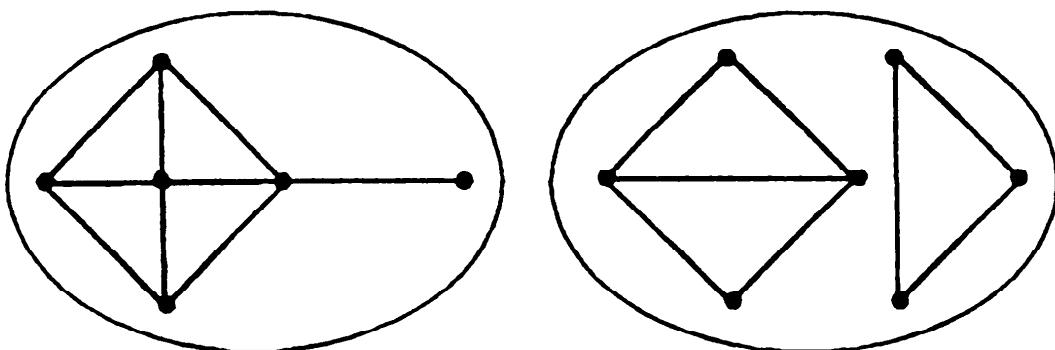
— Конечно, — подтвердил Знайка. — Это значит, что *степень каждой вершины графа должна быть четной*. Вот еще одно необходимое условие.

— У нас уже было необходимое условие: отсутствие вершин степени 1. Ну и что? Условие выполнялось, а нужного цикла не было, — выразил свои сомнения Незнайка.

— Четность степеней графа является и достаточным условием для существования эйлерова цикла. Ой-ой, я забыл сказать, что граф должен быть связным.

— А это что такое? — спросил Гунька.

— Один раз мы уже говорили об этом. Напоминаю, — сказал Знайка и нарисовал две картинки:



— Второй граф состоит из двух частей, — заметил Незнайка.

— Да. Эти части мы назвали компонентами. Первый граф — связный, второй — несвязный. В связном графе можно по ребрам перейти от любой вершины до любой другой.

— Ясно, что граф должен быть связным, если в нем существует эйлеров цикл, — сказал Гунька. — В несвязном графе мы просто не попадем из одной его части в другую.

— Правильно, — согласился Знайка. — Наша теорема будет звучать так:

---

*Для существования в связном графе эйлерова цикла необходимо и достаточно, чтобы степень каждой вершины графа была четной.*

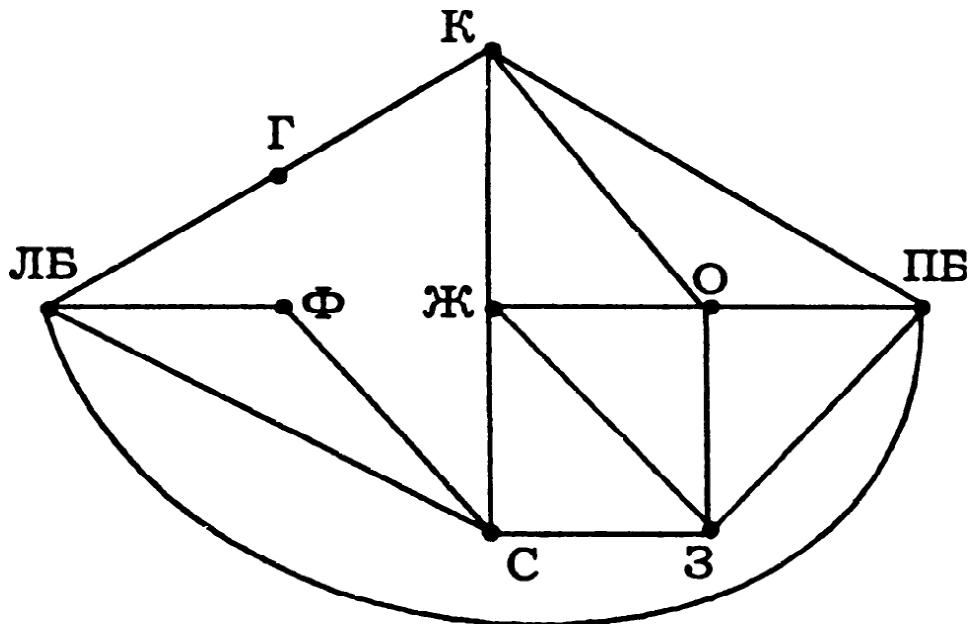
---

— Необходимость мы уже доказали, — напомнил Незнайка.

— Да. Осталось доказать достаточность. Вчера я ходил в Змеевку и узнал, что змеевцы собираются построить мостик между Желтым и Зеленым островами. После постройки моста на каждый участок суши будет вести четное число мостов, то есть все степени вершин графа будут четными.

Знайка соединил ребром вершины графа, обозначающие Желтый и Зеленый острова.

— Попробуем построить в этом графе эйлеров цикл. Выйдем из любой вершины графа, например из вершины ЛБ, и пойдем по ребрам, — сказал он.



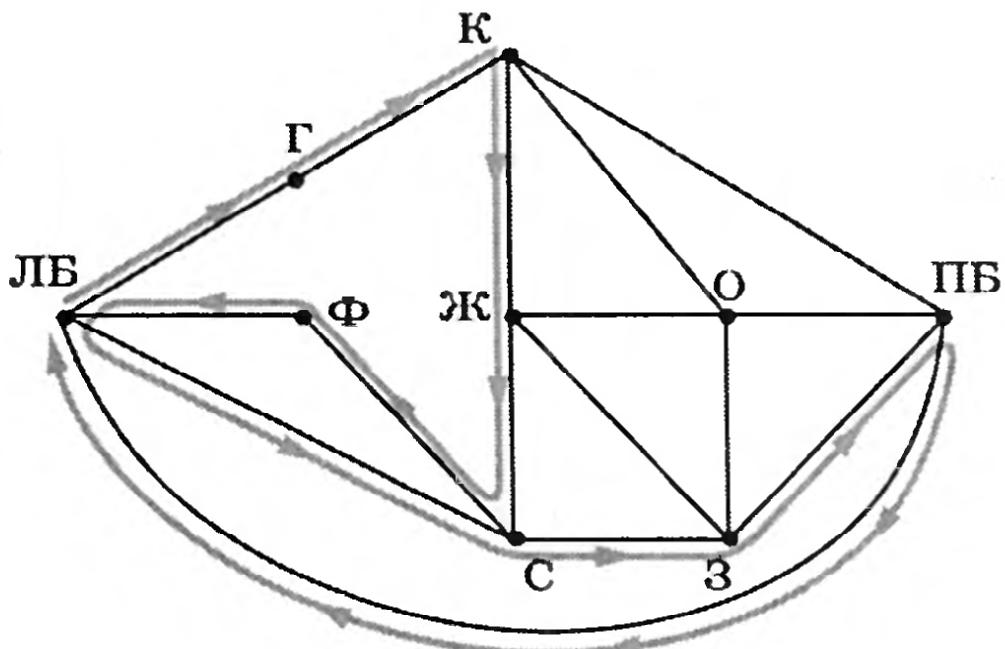
— Как будем выбирать путь?

— С помощью простого правила: каждый раз идти по еще не пройденному ребру.

— Как при поиске выхода из лабиринта? — вспомнил Гунька. — А если непройденных ребер не будет, то возвращаемся назад?

— Степень каждой вершины четная, поэтому, если мы придем в любую вершину, отличную от начальной, то сможем и выйти из нее. Значит, наш путь может окончиться только в начальной вершине.

Знайка нарисовал путь по графу:

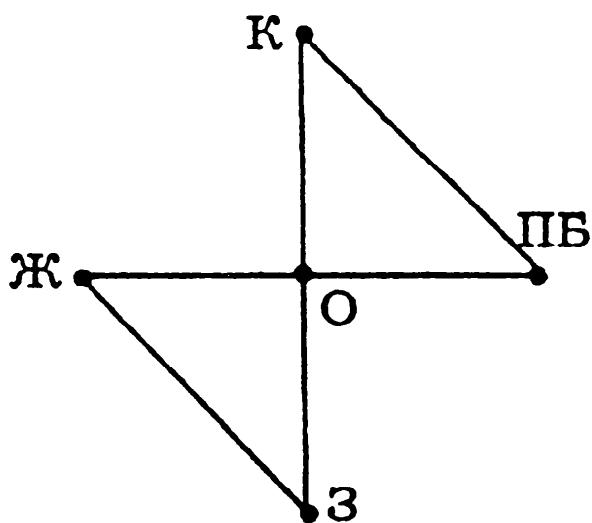


— Мы начали путь в вершине ЛБ и окончили его в ней. Запишем вершины полученного цикла в том порядке, в котором мы их проходили:  $C_1 = (\text{ЛБ}, \Gamma, \text{К}, \text{Ж}, \text{С}, \Phi, \text{ЛБ}, \text{С}, \text{З}, \text{ПБ}, \text{ЛБ})$ .

— Остались еще непройденные ребра, — заметил Гунька.

— Если бы мы прошли все ребра, то построили бы эйлеров цикл. Но нам не повезло. Ничего страшного. Удалим все пройденные ребра из графа.

Знайка нарисовал оставшиеся ребра:



— Какой график получился?

— Связный, — уверенно ответил Незнайка.

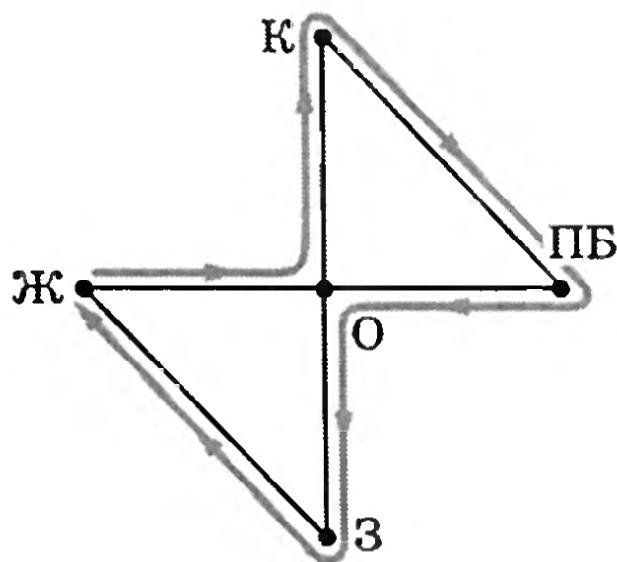
— Да, у нас получился связный график, но мог получиться и несвязный. Главное в другом: *все вершины полученного графа имеют четную степень*.

— Почему?

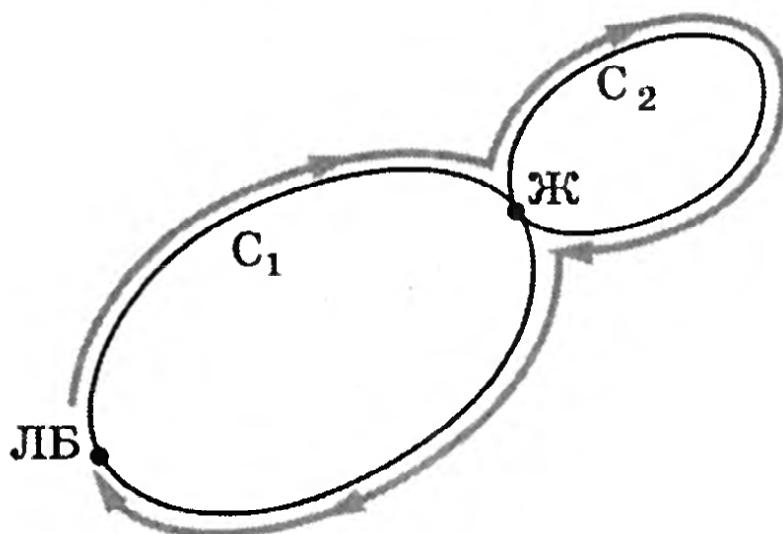
— Конечно, четную! — закричал Незнайка. — Они были четными в первом графике, а потом мы для каждой вершины выбросили ребра, по которым пришли в вершину и по которым ушли из нее. Значит, для каждой вершины удалили четное количество ребер, выходящих из этой вершины.

— Верно, — подтвердил Знайка. — Поскольку в полученном графике все вершины имеют четную степень, то в нем мы можем сделать то, что и в исходном: построить цикл.

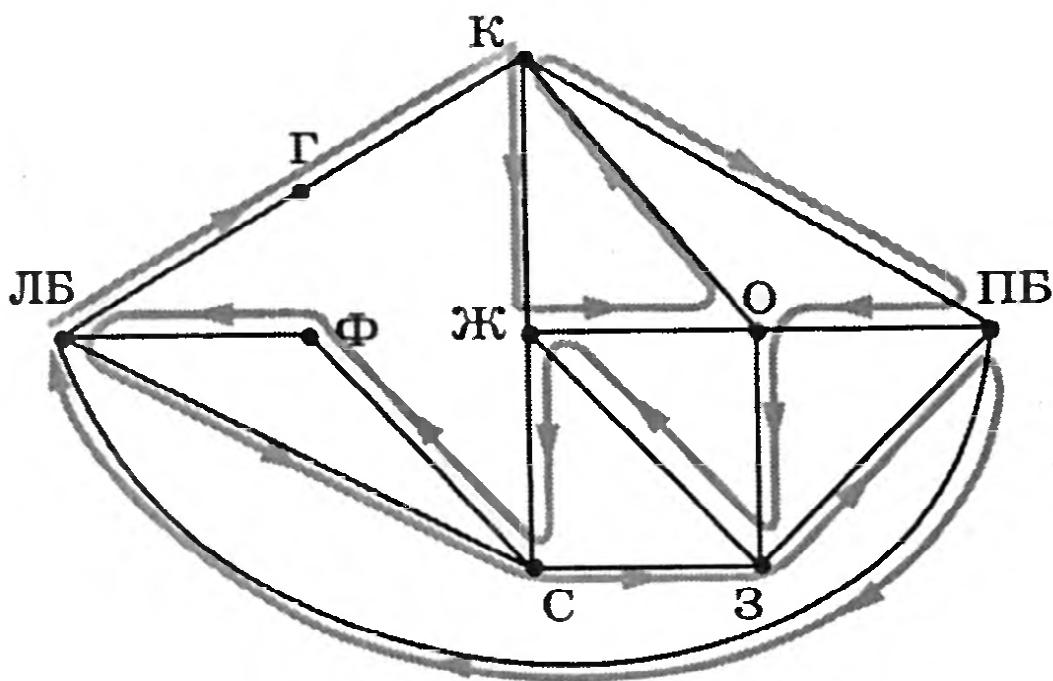
И он нарисовал цикл  $C_2 = (\text{Ж}, \text{О}, \text{К}, \text{ПБ}, \text{О}, \text{З}, \text{Ж})$ :



- Теперь объединим циклы  $C_1$  и  $C_2$ .
- Разве можно объединять циклы? — удивился Гунька.
- Мы пройдем по циклу  $C_1$  до вершины Ж, общей для обоих циклов, потом полностью пройдем цикл  $C_2$ , а потом оставшуюся часть цикла  $C_1$ :



Таким образом, мы из двух циклов  $C_1$  и  $C_2$  получили один:  $C = (\text{ЛБ}, \Gamma, К, Ж, О, К, ПБ, О, 3, Ж, С, \Phi, \text{ЛБ}, С, 3, ПБ, \text{ЛБ})$ :



— Ура! — закричал Гунька. — Мы прошли все ребра так, как хотели!

— Да-а, повезло, — протянул Незнайка, — а если бы ребра еще оставались?

— Ничего страшного, — ответил Знайка. — Мы бы поступили, как и раньше: удалили бы пройденные ребра, а в оставшемся графе построили цикл и добавили бы его к ранее построенному.

— А если снова не получится эйлерова цикла? — не унимался Незнайка.

— Какой же ты непонятливый! — закричал Гунька. — Когда-нибудь ребра окончатся!

— Правильно, — подтвердил Знайка. — В конце концов все ребра войдут в цикл, и это будет эйлеров цикл. Таким образом, мы доказали, что *если в связном графе степени всех вершин будут четными, то в этом графе можно построить эйлеров цикл*.

— Не будем же мы ждать, пока змеевцы построят новый мост, — сказал Незнайка. — Пойдемте погуляем по островам без всякого плана.

# Глава 6

## Три дома и три колодца

В центре Дальнего леса находилась большая поляна, самое удивительное место в Стране малышей. На ней были три колодца: один — с газировкой, второй — с молоком, а третий — с фантой. Вы скажете, что таких колодцев не бывает. Да, в обычной жизни не бывает, а в сказочной бывает все. Когда-то три друга из Змеевки Фантик, Грибок и Дружок построили на поляне домики. Целое лето коротышки жили в лесу, возвращаясь на зиму домой. Другим малышам нравилось приходить к ним в гости, попить молочка или фанты, погулять по лесным тропинкам. Правда, гостили они обычно недолго, потому что еще больше нравилось им купаться, загорать на пляже и гулять по мостикам, а в лесу ничего этого не было. Фантик же больше всего любил пить фанту, Грибок — собирать грибы и ягоды, а Дружок — общаться с друзьями. Троице скучно в лесу не было.

Когда туристы добрались до поляны, их взорам открылось неожиданное зрелище. Фантик, Грибок и Дружок зачем-то городили заборы в самом ее центре. Друзья выглядели мрачными и хмурыми. Они даже не разговаривали друг с другом.

— Что случилось, ребята? — спросил Пулька.

Малыши, перебивая друг друга, стали рассказывать. В конце концов выяснилось, что бывшие друзья поссорились. Но понять, что было причиной ссоры, не удалось. Каждый обвинял других, считая себя правым.

— Так всегда бывает, — заметил Пилюлькин рассудительно, — поругаются два малыша из-за пустяка, им бы взять и помириться, они уже не помнят, почему поссорились, а дуются друг на друга.

— А что вы теперь делаете? — спросил Гунька.

— Каждый хочет проложить свою дорожку к колодцам, — ответил Фантик.

— Девять дорожек!? Такую красивую поляну испортите! — возмутился Ворчун.

— Не хочу, чтобы эти ходили по моим дорожкам! Лучше я огорожу каждую.

В самом деле, одна дорожка была уже отмечена уродливой изгородью.

— Но у колодцев вам все равно придется встречаться, — сказал Винтик.

— А мы составим расписание, кому, когда и к какому колодцу подходить.

— Может быть, вы и лес разделите? — ехидно спросил Гунька.

— Лес большой. А вот дорожки огородим, — ответил Грибок.

— А если дорожки будут пересекаться?

— Надо провести их так, чтобы они не пересекались.

Поэт Цветик не выдержал и продекламировал:

— Я совет хороший дам:

Помириться нужно вам!

Путешественники принялись уговаривать малышей помириться, не портить поляну, но те и слышать ничего не хотели.

— Хорошо, — сказал Знайка. — Как вы проведете тропинки?

— К ближайшим колодцам они уже проведены, — ответил Дружок.



— А вдруг не получится? — не унимался Знайка.

— Проведем как получится, — сказал Грибок. — Пусть мои дорожки будут длиннее, лишь бы я на них никого не встречал.

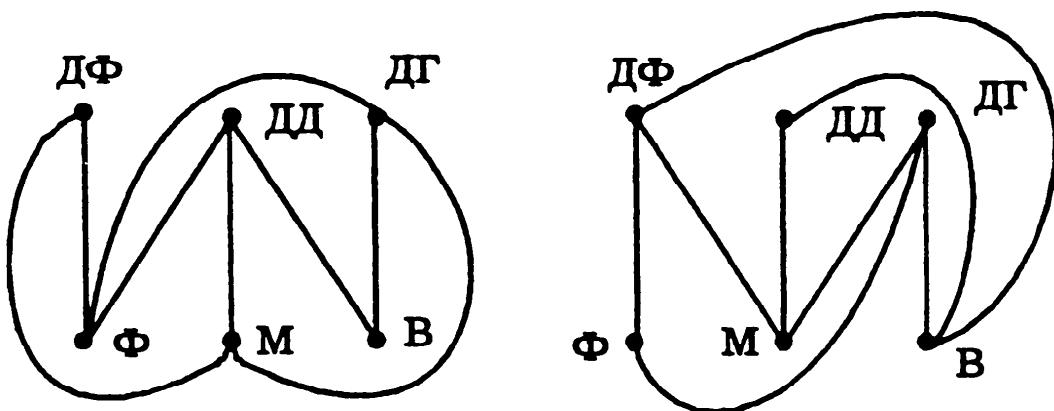
— А если неудачное расположение первых дорожек не позволит провести следующие? — спросил Знайка. — Вам нужен план.

— Да! — закричал Незнайка. — Без плана ничего строить нельзя, иначе получится вкрай и вкось.

— Все у нас получится, как надо, — возразил Фантик.

— Давайте лучше нарисуем чертеж.

Все малыши, кроме Знайки, начали рисовать схему дорожек. Восемь дорожек они рисовали без труда, а вот девятую провести не удалось никому:

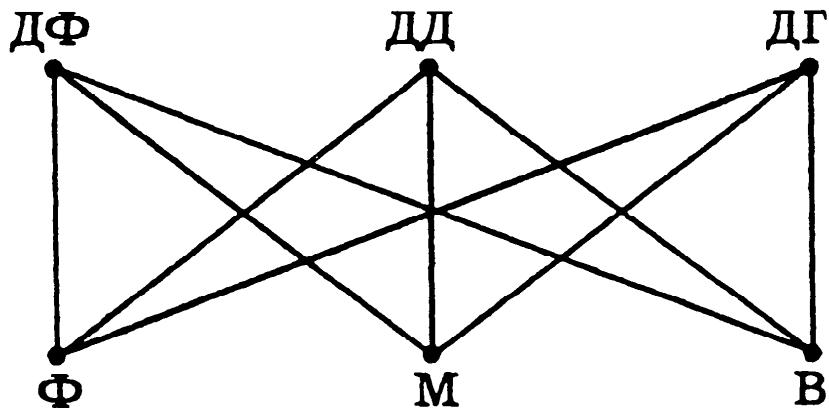


— Это все потому, — возмутился Гунька, — что три тропинки вы уже провели, и они мешают другим. Зачем торопились?! Теперь ничего не получится.

— Нет, — заявил Знайка, — три дорожки ни при чем. Как ни старайся, а девять провести невозможно.

— Ты это можешь доказать?

— Конечно. Нарисуем граф, соответствующий нашей задаче. Знайка нарисовал картинку:



— Какой это граф? — спросил он. — Помните, мы говорили о нем перед шахматным турниром.

Не удивительно, что малыши забыли название графа, ведь шахматный турнир был так давно.

— Это полный двудольный граф. Мы должны нарисовать его на листе бумаги так, чтобы ребра, изображающие дорожки, не пересекались.

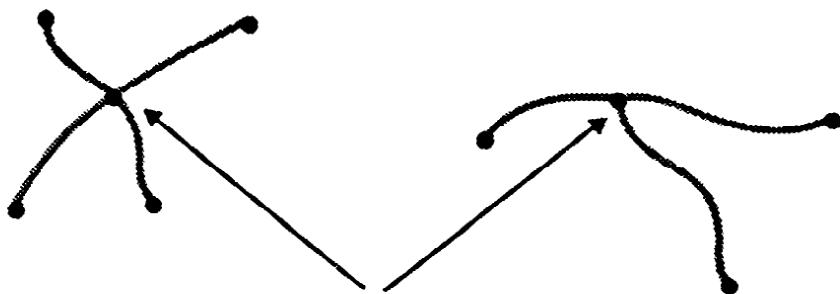
— А какие ребра считаются пересекающимися? — спросил Ворчун.

Малыши дружно засмеялись: уж очень глупым показался им вопрос.

— Что же здесь непонятного, — сказал Гунька. — Пересекаются — это значит... пересекаются.

Но Знайка поддержал Ворчуна.

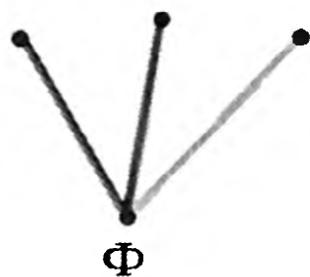
— Ты правильно сделал, что спросил. В математике все должно быть определено точно. Будем считать, что ребра пересекаются, если они имеют хотя бы одну общую точку. Вот эти пары ребер пересекаются:



### Общие точки ребер

— Вот-вот, — продолжил Ворчун, — поэтому три ребра, выходящие из одной вершины, всегда пересекаются.

Он нарисовал картинку:



— Какая нам разница, встречаются дорожки у колодцев или нет, — закричал Грибок, — к ним мы будем подходить в разное время!

— Уточним задачу, — сказал Знайка. — Мы должны нарисовать граф так, чтобы ребра не пересекались, за исключением общей вершины, из которой они выходят. Граф, который можно нарисовать таким образом, называется *планарным*, а нарисованный график — *плоским*.

— Ты хочешь доказать, что этот график не планарный? — спросил Пулька.

— Да. Вы помните, что такое цикл?

О цикле Незнайка и Гунька слышали недавно и еще не успели забыть.

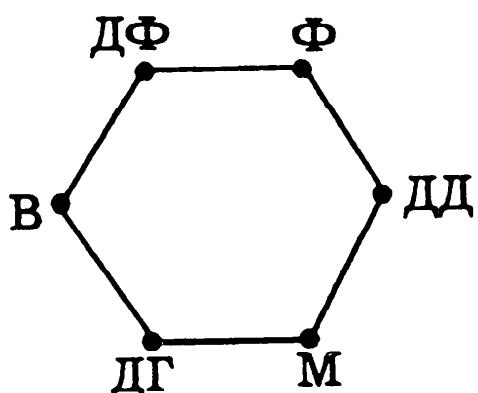
— Цикл — это путь по вершинам и ребрам графа, который начинается и оканчивается в одной и той же вершине. При этом цикл содержит каждое ребро не более одного раза, — сказал Незнайка.

— Молодец, Незнайка! Помнишь, — похвалил Знайка.

Незнайка расцвел. Всегда приятно, когда тебя хвалят, особенно, если заслуженно.

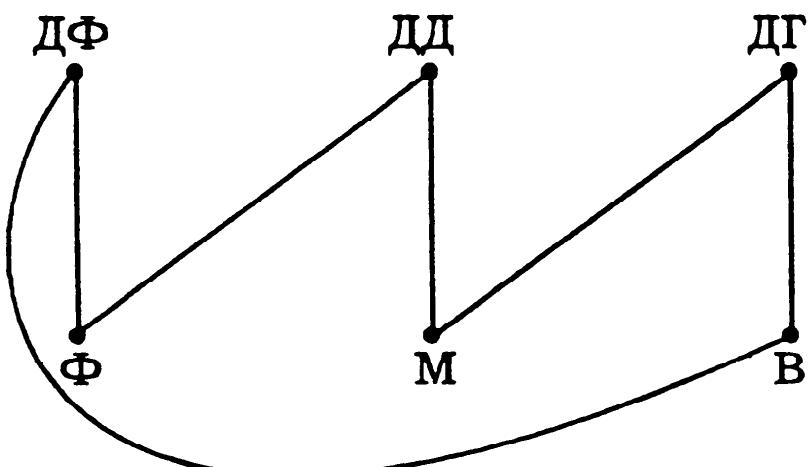
— Предположим, что наш график планарный, и его можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер. Как бы мы ни располагали вершины и ребра на плоскости, цикл  $C = (\text{ДФ}, \Phi, \text{ДД}, \text{М}, \text{ДГ}, \text{В}, \text{ДФ})$  всегда будет делить плоскость на две части: внутри цикла и вне цикла.

Знайка нарисовал цикл:



— Разве так расположены наши дома и колодцы? — удивился Дружок.

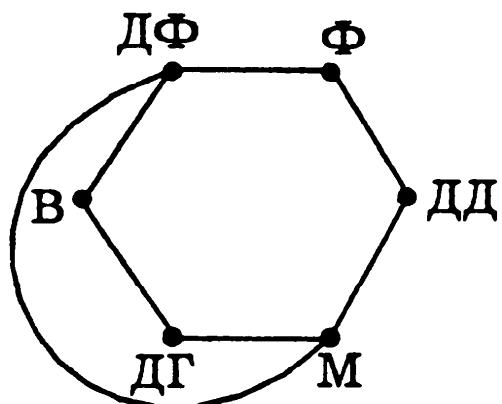
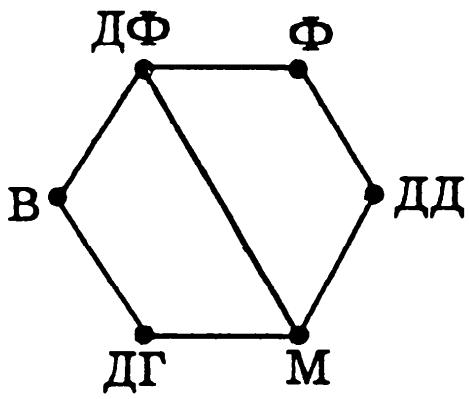
— Можно нарисовать по-другому:



— Сейчас главное не то, как расположены вершины и ребра графа, а то, что плоскость разделилась на две части: внутри цикла и вне цикла.

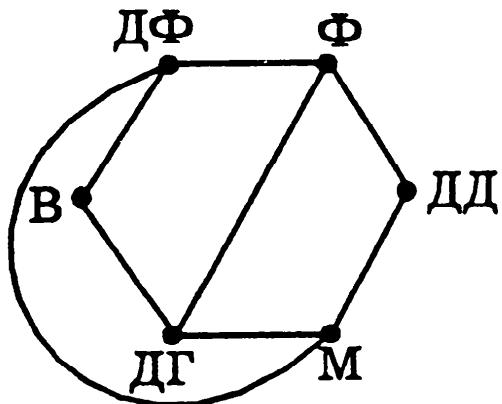
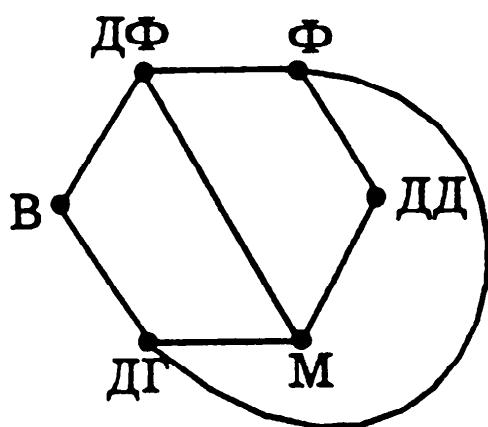
— Осталось нарисовать еще три ребра:  $(ДФ, М)$ ,  $(ДД, В)$ ,  $(ДГ, Ф)$ , — сказал Незнайка.

— Возьмем, например, ребро  $(ДФ, М)$ . Его можно поместить или внутри цикла, или вне. Других возможностей нет.



— Осталось два ребра.

— Теперь рассмотрим ребро  $(ДГ, Ф)$ . В первом случае его можно разместить только вне цикла, во втором — только внутри.



— Понял! — закричал Незнайка. — Последнее ребро  $(ДД, В)$  мы не можем провести ни внутри цикла, ни вне: оно обязательно что-нибудь пересечет. Значит, наш граф нарисовать без пересечения ребер нельзя.

— А если мы будем выбирать ребра в другом порядке? — спросил Пилюлькин.

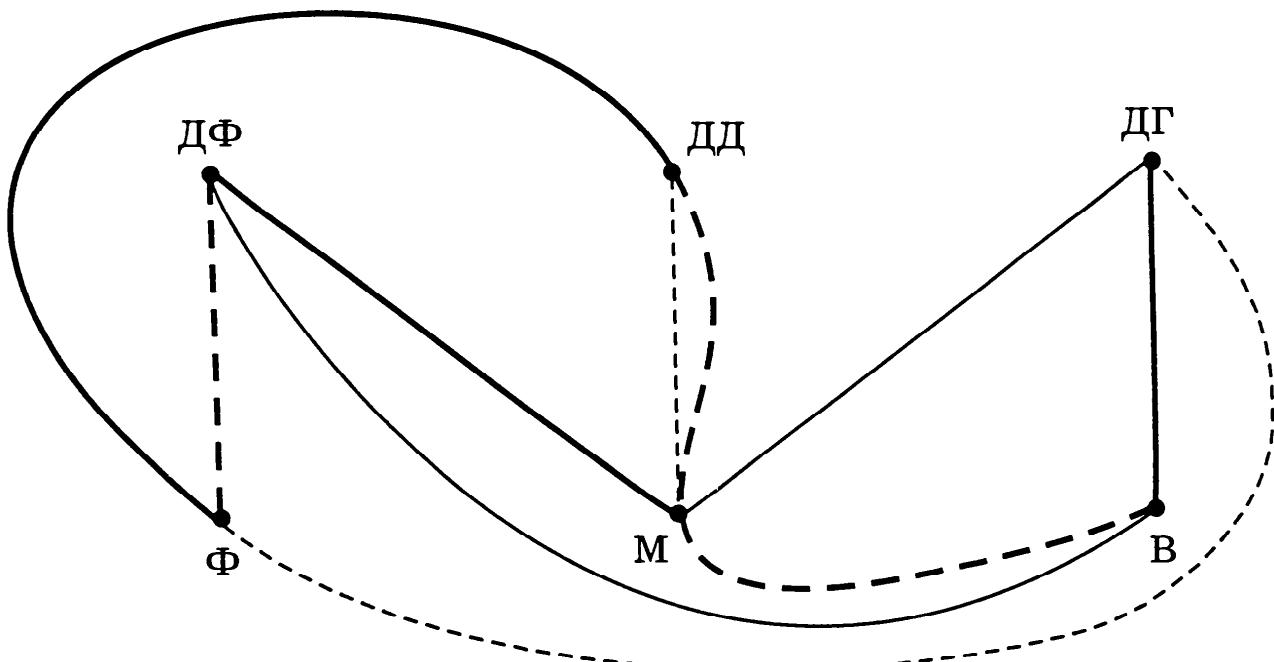
— Мы повторим те же рассуждения и получим тот же результат.

— Но ведь наши дома и колодцы стоят совсем не так, как на рисунке! — не мог успокоиться Фантик.

Как же ты не понимаешь, — сказал Незнайка. — Мы не можем решить задачу в самом лучшем для нас случае. А точное расположение домов и колодцев ее только усложнит!

— Верно, — подтвердил Знайка. — Граф непланарный, и провести девять ребер так, как нам нужно, невозможно.

— А вот и возможно! — закричал Торопыжка. Он не слушал объяснения Знайки, а рисовал свои варианты расположения дорожек. — Смотрите:



Малыши склонились над рисунком.

— Действительно, — неуверенно протянул Гунька и вопросительно посмотрел на Знайку.

— Ой-ой-ой, — притворился растерянным Знайка. — В чем же здесь дело?

— Ты, Торопыжка, никогда ничего до конца не выслушаешь, — сказал Ворчун. — Дорожка из ДД в В пересекается в вершине М с дорожками из ДД в М, из ДФ в М и из ДГ в М.

— Что же нам делать? — спросил Фантик.

— Мириться! — дружно ответили малыши.

# *Глава 7*

---

---

## **В Зеленом городе пускают автобус**

---

---

Праздник в Зеленом городе удался на славу. Малыши веселились, танцевали, играли. Они катались на автомобилях и катерах, а самые смелые поднимались вверх на воздушном шаре. Одновременно проходили разные конкурсы: артистов, художников, поэтов, а спортсмены состязались на стадионах и в игровых залах. Каждый коротышка удостоился пирожного и шоколадки, а сколько напитков было выпито! Вечером небеса над городом разукрасились огнями фейерверка.

На следующий день Незнайка проснулся в хорошем настроении. Хотя шахматный матч закончился вничью, сам Незнайка выиграл три партии из четырех. Когда он вышел из палатки, то увидел, что Знайка, Винтик и Шпунтик собираются уйти из лагеря.

— Куда вы собрались?

— Мэр Зеленого города Кубышка попросила нас помочь ей, — ответил Знайка.

— Хорошо, я с вами!

— Ты даже не умылся!

— Подождите минутку.

Незнайка понесся к реке, на ходу надевая рубашку и штаны. Через пять минут он был готов.

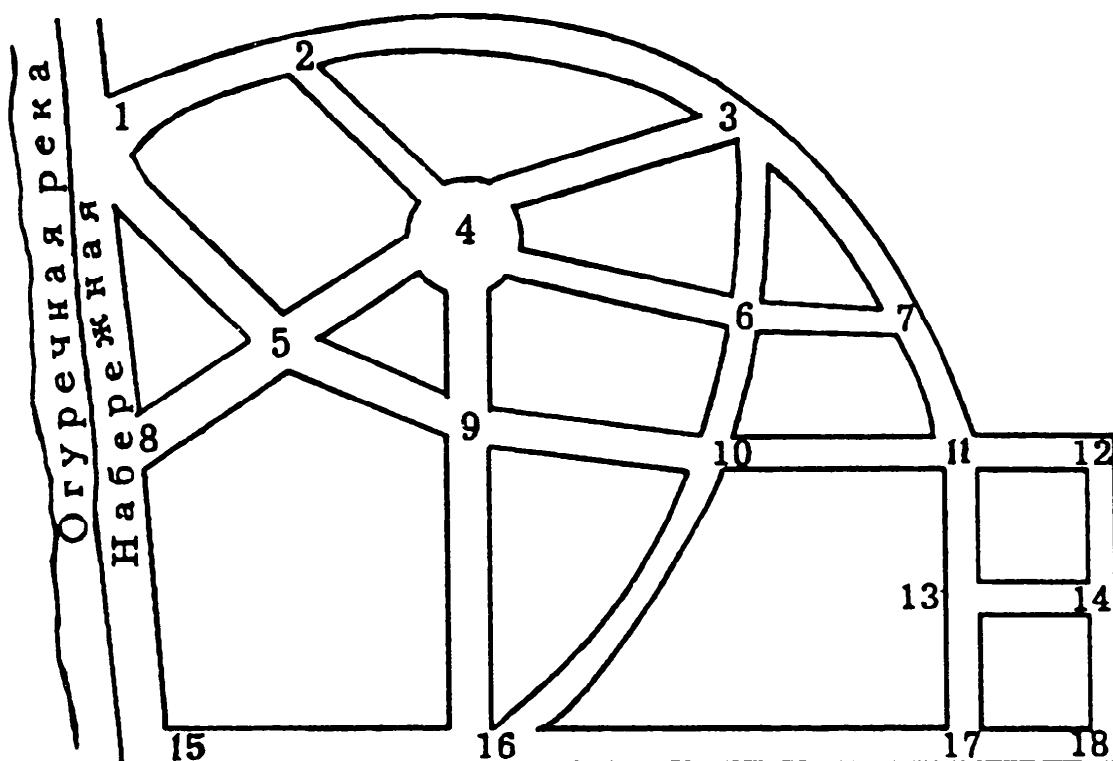
По дороге Знайка рассказал, что мэрия решила открыть в городе автобусное сообщение и думает, как это сделать лучше. Поэтому Кубышка и позвала малышей посоветоваться.

— А меня почему не позвали? — обиделся Незнайка. Он считал себя крупным специалистом в любом вопросе.

— Наверное, не смогли тебя вчера разыскать, — сказал Шпунтик.

Незнайка быстро успокоился. Он и в самом деле веселился до поздней ночи.

В кабинете у Кубышки находились Снежинка, Медуница и Стрекоза. После взаимных приветствий Кубышка развернула перед гостями карту города:



— Мы хотим, чтобы по каждой улице проходил ровно один маршрут.

— По набережной автобусы ходить не должны! — строго уточнила Медуница. — У реки следует гулять и дышать свежим воздухом, а не глотать бензиновую гарь.

— Еще бы хотелось, чтобы количество маршрутов было наименьшим, — добавила Стрекоза.

— Проложите единственный маршрут, пусть автобус ходит по всем улицам, — предложил Винтик.

— Но... но это невозможно, — сказал Незнайка и вопросительно посмотрел на Знайку. — Граф улиц не является эйлеровым.

Совсем недавно Незнайка пытался построить похожий маршрут для прогулки по островам. Он хорошо запомнил объяснения

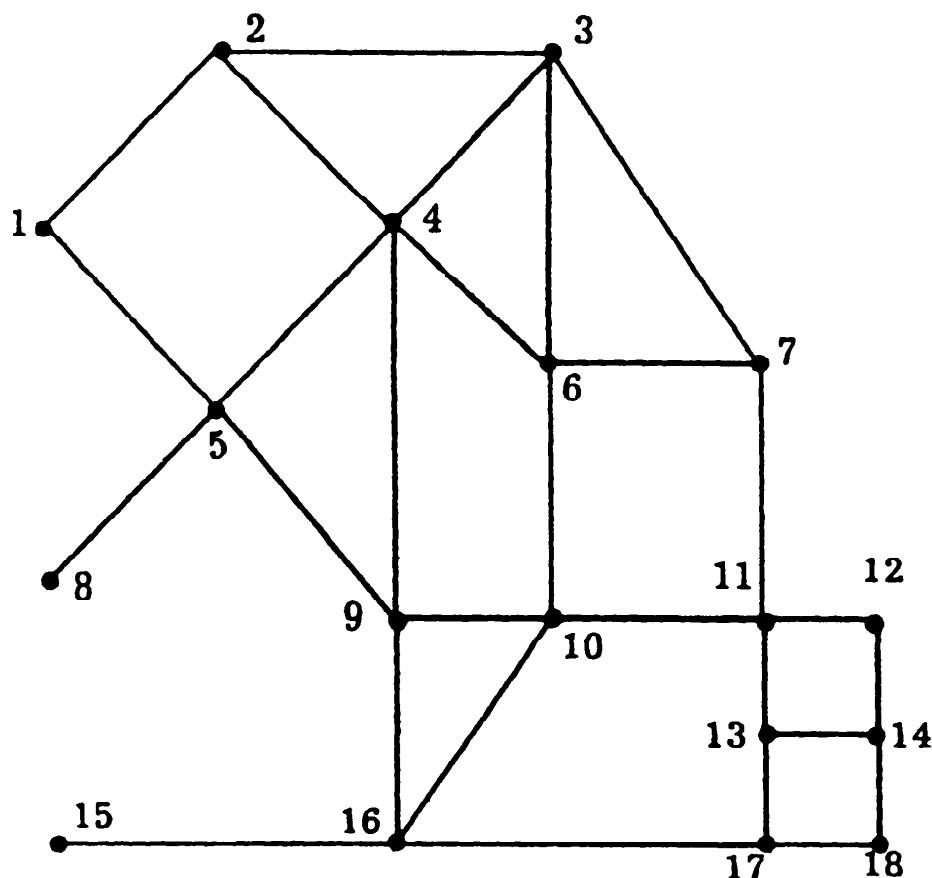
Знайки, но другие малыши услышали мудреное слово «эйлеров» впервые.

— Не знаю о чем ты говоришь, но, действительно, у нас этого не получилось, — сказала Кубышка.

— Молодец, Незнайка, — похвалил друга Знайка. — Давайте построим граф города. Перекресткам города будут соответствовать точки (вершины графа), а улицам — линии (ребра графа).

— Не забывайте о набережной, — напомнила Медуница.

— Хорошо, я учту это, — сказал Знайка и нарисовал граф:



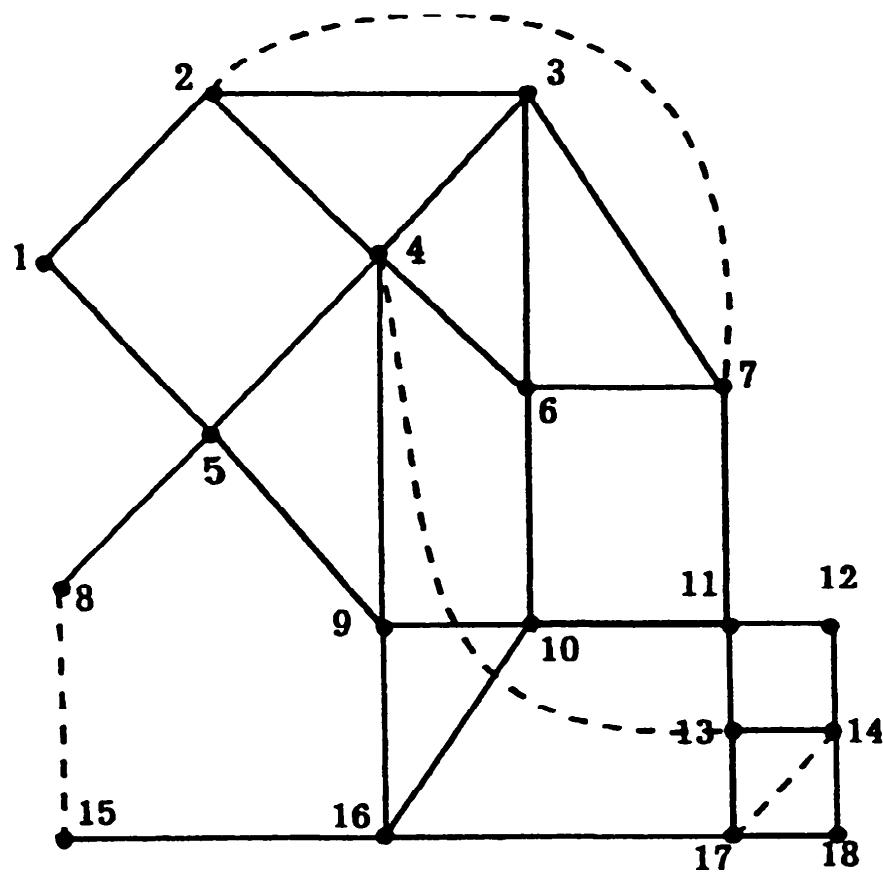
После этого Знайка рассказал об эйлеровых графах все то, что уже знал Незнайка.

— Да, граф города — не эйлеров, — согласилась Кубышка. — Но как твоя теория позволит найти наименьшее число маршрутов?

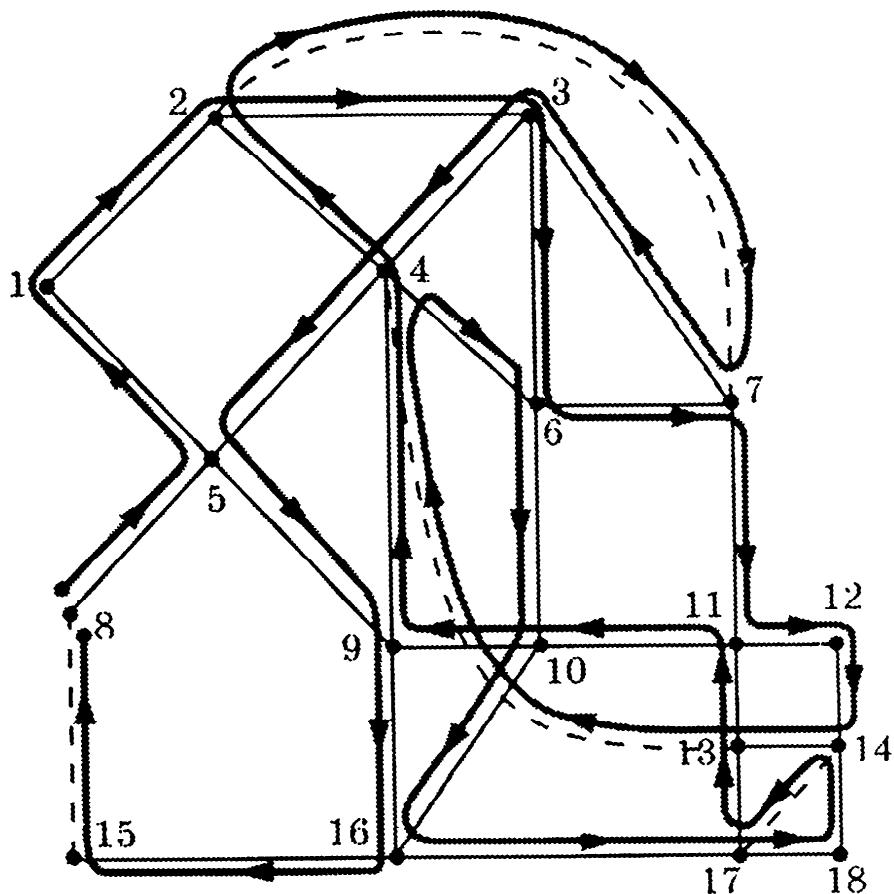
— Давайте превратим этот граф в эйлеров, — сказал Знайка.

— Каким образом?

— Граф будет эйлеровым тогда и только тогда, когда число ребер, выходящих из каждой вершины (степень каждой вершины), будет четным. Давайте соединим ребрами вершины 8 и 15, 2 и 7, 4 и 13, 14 и 17. У получившегося графа степени всех вершин четные, значит, в нем есть эйлеров цикл.



Знайка объяснил, как найти эйлеров цикл, и нашел его для этого графа:  $C = (8, 5, 1, 2, 3, 6, 7, 11, 12, 14, 13, 4, 6, 10, 16, 17, 18, 14, 17, 13, 11, 10, 9, 4, 2, 7, 3, 4, 5, 9, 16, 15, 8)$



— Если бы добавленные улицы существовали на самом деле, то можно было бы обойтись единственным автобусным маршрутом, — сказал Шпунтик.

— Но их-то как раз и нет, — заметила Снежинка.

— Поэтому уберем добавленные ребра, — сказал Знайка. — Что произойдет с построенным циклом?

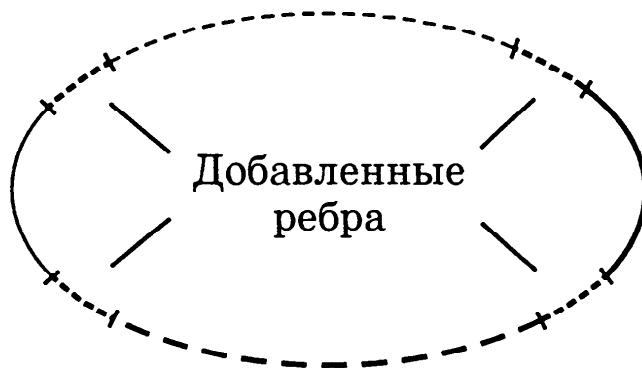
— Цикл распадается.

— На сколько частей?

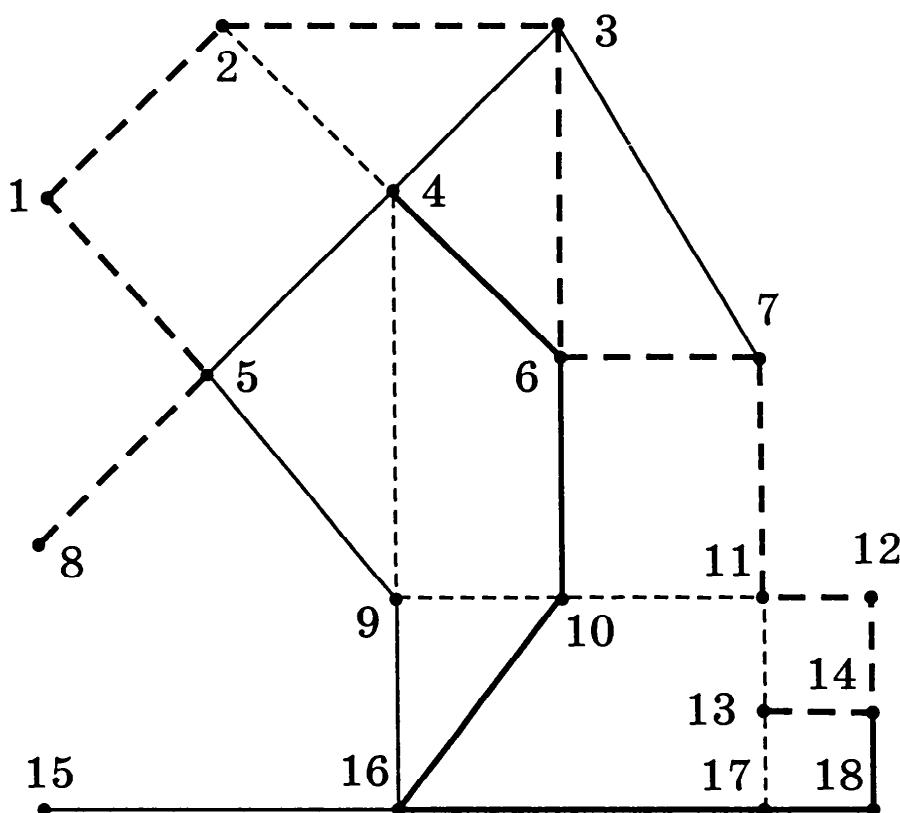
Малыши задумались.

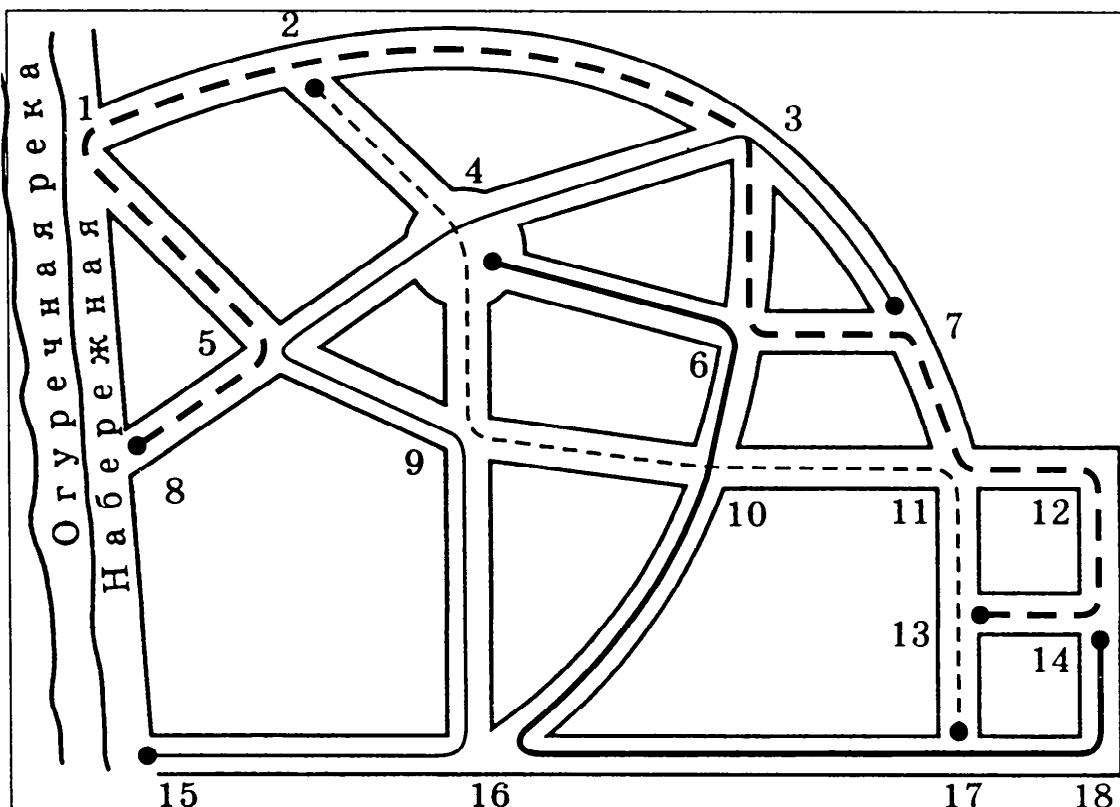
— На четыре?

— Конечно! — сказал Знайка и нарисовал картинку



Посмотрите: при удалении четырех ребер цикл распадается на четыре куска, которые называются *цепями*. А каждая из цепей будет соответствовать автобусному маршруту:





- Как хорошо получилось! — захлопала в ладоши Снежинка.
- Всего четыре маршрута!
- Кубышка была более сдержанной.
- Почему ты считаешь, что это наименьшее число маршрутов? А нельзя ли обойтись тремя? — спросила она у Знайки.
- Нельзя! — уверенно ответил Знайка. — Вершина нечетной степени обязательно должна быть начальной или конечной вершиной какой-нибудь цепи графа или соответственно конечной остановкой какого-либо автобусного маршрута.
- Почему? — в один голос воскликнули Кубышка и Стрекоза.
- Почему? — в один голос воскликнули Кубышка и Стрекоза.
- Это же очевидно! — закричал Незнайка. — Если остановка промежуточная, то на нее автобус приходит, останавливается и уходит дальше по маршруту. Поэтому если остановка будет промежуточной для всех маршрутов, то число приходов будет равно числу уходов.
- Ну и что? — спросила Стрекоза.
- Это значит, что степень соответствующей вершины графа четная!
- А разве для конечной остановки это не так? — спросила Стрекоза.

— Не так! На конечной остановке автобус разворачивается и идет не по новому пути, а по тому, откуда пришел.

— Правильно, — поддержал Знайка. — Вершина нечетной степени может получиться лишь тогда, когда в ней будет начинаться или заканчиваться какая-либо цепь. В нашем графе восемь вершин нечетной степени. Так как каждый маршрут может соединять две такие вершины, то и минимальное число маршрутов — четыре.

— Ничего, — подвела итог Кубышка, — число маршрутов нам подходит.

— Между прочим, — заметил Знайка, — мы доказали теорему:

---

*Если граф содержит  $k$  вершин нечетной степени, то наименьшее число цепей, на которое можно разбить ребра графа, равно  $k/2$ .*

---

— А если  $k$  не делится на два? — спросил Незнайка.

— Ай-ай-ай, — укоризненно покачал головой Знайка. — Когда-то мы с тобой доказали, что число вершин нечетной степени в любом графе четное. С эйлеровыми графиками связано много интересных задач. Вот, например...

— О других задачах расскажешь как-нибудь в другой раз, — решительно перебила его Кубышка. — Сейчас для нас самая важная задача — поскорее пустить автобусы. Винтик и Шпунтик, настала ваша очередь. Давайте обсудим технические вопросы этой задачи

# *Глава 8*

## **Возвращение домой**

Как бы долго ни длились праздники, когда-то и они кончаются. Настало время собираться домой. Малыши пригласили малышек погостить в Цветочном городе. Те с радостью согласились и предложили плыть в Цветочный город по реке на лодках.

Много коротышек хотели пуститься путешествовать по реке, но в городе оказалось только семь двухместных лодок. Поэтому желающим пришлось бросать жребий. Из малышей повезло Пульке, Знайке, Незнайке, Пончику, Авоське, Гуньке и Ворчуну, а из малышек — Синеглазке, Стрекозе, Снежинке, Самоцветику, Соломке, Белочке и Медунице.

После жеребьевки Знайка и Незнайка отправились играть в шахматы. Знайка играл намного лучше, чем Незнайка, поэтому он давал Незнайке фору: снимал у себя какую-нибудь фигуру. Но Незнайка быстро прогрессировал. Он легко выигрывал у партнера, если Знайка играл без королевы, и делал ничью, если — без ладьи. Сейчас Знайка играл без ладьи. Положение Незнайки все время улучшалось, и он уже предвкушал победу. Рядом крутился Гунька, который постоянно давал советы Незнайке. Знайка относился к этому спокойно: Гунькины советы могли только навредить игроку.

В этот момент к малышам подошел Пулька.

— Ребята, пора готовить лодки к походу.

Знайка, к неудовольствию Незнайки, решительно поднялся.

— Нет! Сначала доиграем! — уж очень не хотелось Незнайке упускать победу.

— Делу — время, потехе — час! — ответил Знайка.

— Мы решили, что в каждой лодке поплынут малыш и малышка, — продолжил Пулька. — Каждая пара должна проверить свою лодку, отремонтировать, если нужно, а я никак не могу разбить коротышек на пары.

— Не вижу никаких трудностей, — сказал Знайка. — Семь малышей и семь малышек, какие могут быть вопросы?

— Все не так-то просто. В одной лодке должны быть коротышки, которые хотят плыть вместе. С Ворчуном, например, согласились плыть только Соломка и Медуница, а вот Пончика с ними не посадишь — лодка станет тяжелой и будет отставать от каравана. Моя собака почему-то невзлюбила Белочку, значит, нам вместе плыть нельзя. Если в одну лодку сядут Авоська и Самоцветик, то утонут на первом же повороте, очень уж они несерьезные. И еще много всяких условий. Кроме того, в каждой лодке должен находиться хотя бы один опытный гребец.

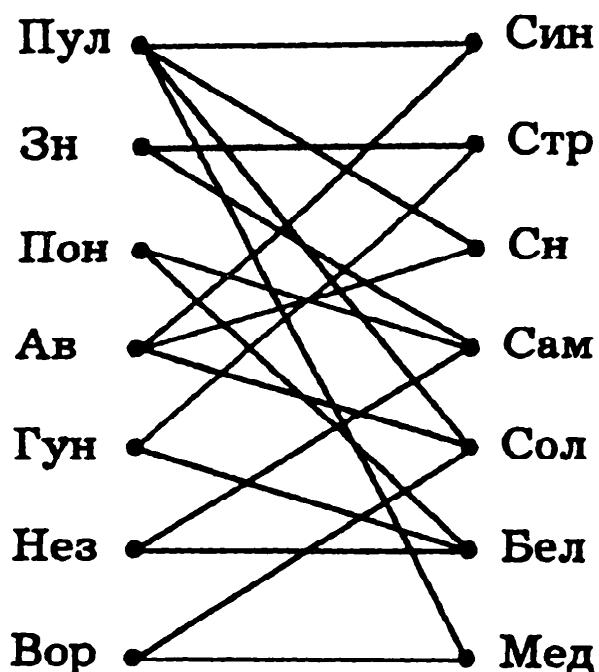
— Но ты-то хоть знаешь, кто с кем может плыть?

Пулька протянул листок бумаги.

	Синеглазка	Стрекоза	Снежинка	Самоцветик	Соломка	Белочка	Медуница
Пулька	+		+	+			+
Знайка		+	+				
Пончик				+	+		
Авоська	+		+	+			
Гунька		+				+	
Незнайка				+	+		
Ворчун					+		+

— Если на пересечении строки малыша и столбца малышки стоит крестик, то эту пару коротышек можно посадить в одну лодку, — сказал Пулька.

— Давайте построим граф возможных пар, — предложил Знайка. — Коротышкам будут соответствовать вершины графа. Если коротышки могут плыть в одной лодке, соответствующие им вершины соединим ребром.



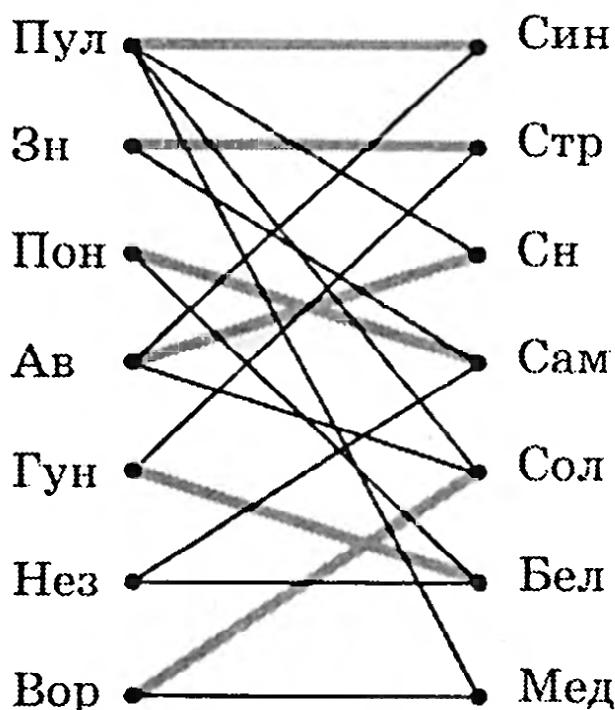
— Какой график получился? — обратился Знайка к малышам.

Те молчали.

— Это двудольный график. Смотрите, его вершины можно разбить на две части (доли): вершины, которые соответствуют малышам, и вершины, которые соответствуют малышкам. Любое ребро соединяет вершины разных долей, и нет ни одного ребра, которое соединяет две вершины одной доли.

Предположим, что мы посадили двух коротышек в одну лодку, — продолжил Знайка. — Пусть Пулька плывет с Синеглазкой, Знайка — со Стрекозой, Пончик — с Самоцветиком, Авоська — со Снежинкой, Гунька — с Белочкой, Ворчун — с Соломкой.

Знайка выделил ребра, соединяющие на графике коротышек, которых он решил посадить в одну лодку.



— Мне пары не хватило! — расстроился Незнайка.

— Сядешь с Медуницей, — съехидничал Гунька. Он знал, что Незнайка с давних пор побаивался Медуницу. — Она тоже одна осталась.

Незнайка показал Гуньке кулак.

— Что можно сказать про выделенные ребра? — спросил Знайка.

— Они не имеют общих вершин, — заметил Пулька.

— Верно. Множество ребер, в котором никаких два ребра не имеют общей вершины, называется *паросочетанием*. Любое паросочетание определяет коротышек, которых можно посадить в одну лодку. Поэтому если мы построим паросочетание, содержащее семь ребер, то рассадим всех участников. Но для нашего графа это невозможно.

— Почему? — удивился Гунька.

— А куда я дену Незнайку и Медуницу? — возмутился Пулька. — Без Медуницы никак нельзя: врач в походе необходим.

— А без меня, значит, можно? — не на шутку обиделся Незнайка.

— Не расстраивайся, Незнайка, всех заберем, — исправился Пулька.

— Рассмотрим четырех малышей: Знайку, Пончика, Гуньку и Незнайку, — сказал Знайка. — Для этих малышей есть только три малыши, с которыми малыши могут плыть: Стрекоза, Самоцветик и Белочка. Поэтому, как ни рассаживай, кому-то не хватит пары.

— Действительно, — почесал затылок Пулька. — Что же делать? Ты же, Незнайка, хотел плыть со Снежинкой, — вдруг вспомнил Пулька.

— А он с ней вчера поругался, — сказал Гунька.

— Ну, Незнайка, — возмутился Знайка, — такой большой коротышка, а ведешь себя, как маленький!

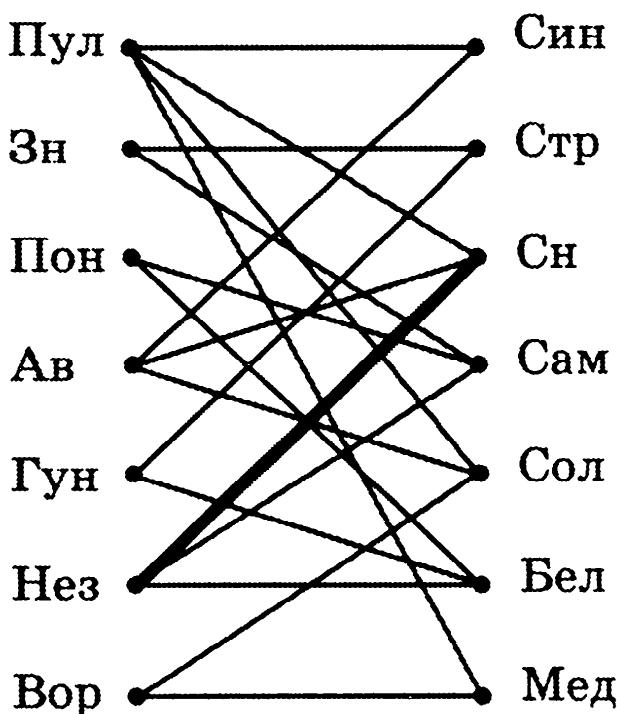
Незнайка и сам хотел помириться со Снежинкой, но не знал, как сделать первый шаг. И сейчас он был благодарен Пульке и Знайке за предоставленную возможность.

— Что ж, — притворно тяжело вздохнул Незнайка, — придется мириться... ради общего дела.

— А захочет ли она с тобой плыть? — спросил Пулька.

— Захочет... захочет... я знаю, — затараторил Гунька.

— Хорошо, — сказал Знайка и провел в графе ребро, соединяющее вершины, изображающие Незнайку и Снежинку.



— Ты думаешь, что теперь получится? — недоверчиво спросил Пулька.

— Давайте поставим математическую задачу. Дан двудольный граф  $G$ ,  $X$ ,  $Y$  — его доли. Сформулируем необходимое условие существования паросочетания, имеющего столько ребер, сколько вершин в доле  $X$ ... А вы помните, что такое необходимое условие?

Мы говорили о необходимых условиях, когда рассматривали возможность существования эйлерова цикла в графе.

Незнайка и Гунька наморщили лбы.

— Без выполнения этих условий в графе не было бы эйлерова цикла, — сказал Незнайка.

— Верно, — согласился Знайка. — Так и здесь. Без выполнения необходимого условия в графе невозможно существование нужного нам паросочетания. А условие такое: *любое множество из k произвольных вершин, входящих в X, должно иметь не менее k различных смежных (соседних) вершин, входящих в Y*. Мы уже обсудили, почему это условие необходимое. Можно доказать, что оно будет и достаточным, то есть при его выполнении обязательно будет существовать нужное нам паросочетание.

— Ничего себе условие, — возмутился Гунька. — Я должен брать сначала каждую пару вершин, смотреть, имеет ли эта пара хотя бы две соседние вершины, потом каждую тройку — имеет ли она хотя бы три соседние вершины, затем четверку и так далее. Да я за целый день не проверю. Даже с вашей помощью.

— А если и проверишь, — поддержал Гуньку Пулька, — это ничего не значит. Мне надо рассадить малышей по лодкам, а не определить, что это можно сделать.

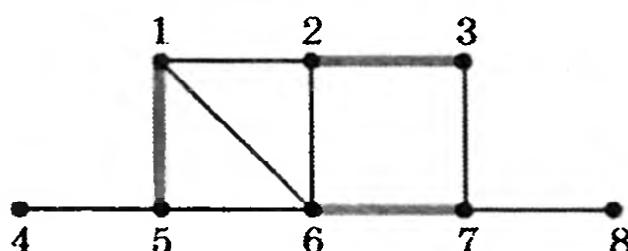
Но сбить Знайку с толку было трудно.

— Да, действительно, — согласился он. — Эта теорема говорит о существовании решения, но не дает способа его построения.

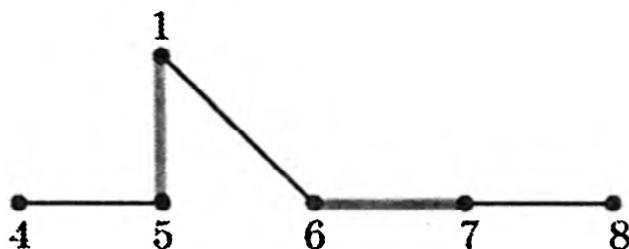
— Зачем нужны такие теоремы! — возмутился Незнайка.

— В математике существуют всякие теоремы. А этой часто пользуются при доказательстве других фактов. Вы не беспокойтесь: есть способы, позволяющие строить нужное паросочетание. Паросочетания можно рассматривать не только в двудольных графах. Например, вот в этом графе  $G$  паросочетание составляют ребра  $(1, 5), (2, 3), (6, 7)$ .

Знайка нарисовал граф



— Наша задача: построить паросочетание, содержащее как можно больше ребер. Рассмотрим цепь  $L = (4, 5, 1, 6, 7, 8)$ . Что можно о ней сказать?



— Ребра в ней чередуются, — ответил Незнайка. — Невыделенное, выделенное, опять невыделенное и так далее.

— Начинается и оканчивается цепь невыделенными ребрами, — добавил Гунька.

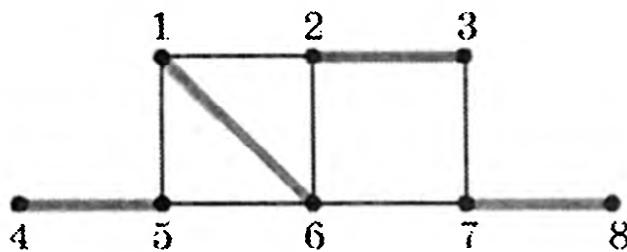
— Правильно, — подтвердил Знайка. — Давайте будем называть ребра, принадлежащие паросочетанию  $M$ , *толстыми*, а не принадлежащие — *тонкими*. Цепь, соединяющая две вершины, из которых выходят только тонкие ребра, и состоящая из чередующихся тонких и толстых ребер, называется *увеличивающей относительно  $M$  цепью*.

— Посмотрите внимательно на график, — продолжил Знайка. — Что можно сделать, если в графе есть увеличивающая относительно  $M$  цепь?

Малыши смотрели на график, но придумать ничего не могли.

— Вспомните нашу задачу, — подсказал Знайка. — Мы должны найти паросочетание с наибольшим числом ребер.

— Я догадался! — закричал Гунька. Поменяем в цепи местами тонкие и толстые ребра. Мы получим паросочетание не с тремя, а с четырьмя ребрами!



— Теперь паросочетание ребер  $(4, 5), (1, 6), (2, 3), (7, 8)$ .

— Молодец, Гунька! — похвалил Знайка. — *Если в графе есть увеличивающая относительно  $M$  цепь, то можно построить паросочетание, в котором будет на одно ребро больше, чем в  $M$ .*

— Это понятно. А если таких цепей нет? — спросил Гунька.

— Тогда построенное паросочетание  $M$  имеет наибольшее из возможных число ребер.

— Это можно доказать?

— Предположим противное: в графе нет чередующихся относительно  $M$  цепей, но существует паросочетание  $M_1$ , в котором больше ребер, чем в  $M$ . Построим граф  $T$ , который образован ребрами паросочетаний  $M$  и  $M_1$ , но если ребро принадлежит обоим паросочетаниям, то оно не будет входить в  $T$ .

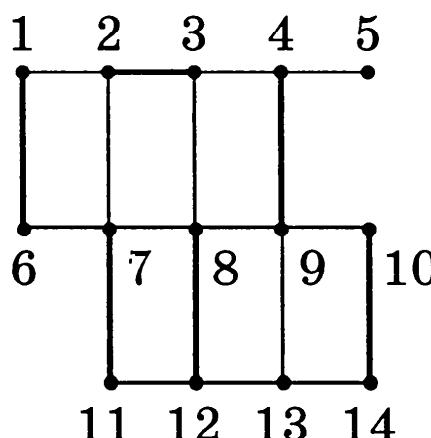
— Как это? — не понял Незнайка.

— Смотри. Ребра паросочетания  $M$  выделяю сплошной толстой линией: ———, а паросочетания  $M_1$  — пунктирной толстой линией: ..... . Ребро (1, 6) принадлежит обоим паросочетаниям, поэтому оно не будет входить в граф  $T$ .

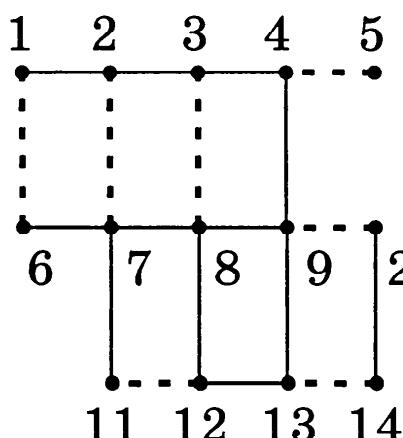
— Как будет устроен граф  $T$ ? — спросил Знайка.

— Из любой вершины графа  $T$  могут выходить или одно ребро, или два ребра. Три ребра выходить не могут, так как никаких двух пунктирных или сплошных ребра не выходят из одной вершины...

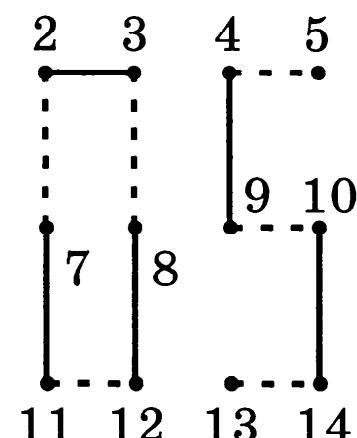
— Почему? — не понял Незнайка.



Граф  $G$   
и паросоче-  
тание  $M$



Граф  $G$   
и паросоче-  
тание  $M_1$



Граф  $T$

— Потому что два сплошных ребра принадлежат одному паросочетанию, а ребра одного паросочетания не могут выходить из общей вершины, — пояснил Гунька. — Это же верно и для пунктирных ребер. Поэтому каждая часть графа...

— Компонента, — поправил его Знайка.

— ...Каждая компонента графа  $G$  будет или циклом, или цепью, — закончил Гунька.

— А что можно сказать про цикл? — спросил Знайка.

— Что в нем чередуются пунктирные и сплошные ребра, — ответил Незнайка.

— Значит, каждый цикл состоит из одинакового числа пунктирных и сплошных ребер, — добавил Гунька.

— А каких ребер больше в графе  $T$ : пунктирных или сплошных?

— Конечно, пунктирных, — сказал Гунька. — Ведь в  $M_1$  больше ребер, чем в  $M$ .

— Постойте! — закричал Незнайка. — Мы же какие-то из ребер выбросили.

— Выбросили мы одинаковое число пунктирных и сплошных ребер. Потому в  $T$  осталось пунктирных ребер больше.

— В каждом цикле, — сказал Знайка, — число пунктирных и сплошных ребер одинаково. Поэтому должна существовать цепь  $L$ , в которой больше пунктирных ребер. А теперь подумайте, как будет устроена эта цепь?

Малыши наморщили лбы.

— В любой цепи тоже чередуются пунктирные и сплошные ребра, — произнес Гунька. — Но так как пунктирных ребер больше, то цепь должна начинаться и оканчиваться пунктирным ребром.

— Такая цепь у нас есть, — заметил Незнайка. — Это цепь  $L = (5, 4, 9, 10, 14, 13)$ .

— Рассмотрим эту цепь, — продолжил Знайка. — Она соединяет вершины, из которых не выходят ребра, принадлежащие  $M$ , в ней чередуются ребра, принадлежащие и не принадлежащие  $M$ . Какая это цепь?

— Увеличивающая? — неуверенно произнес Незнайка.

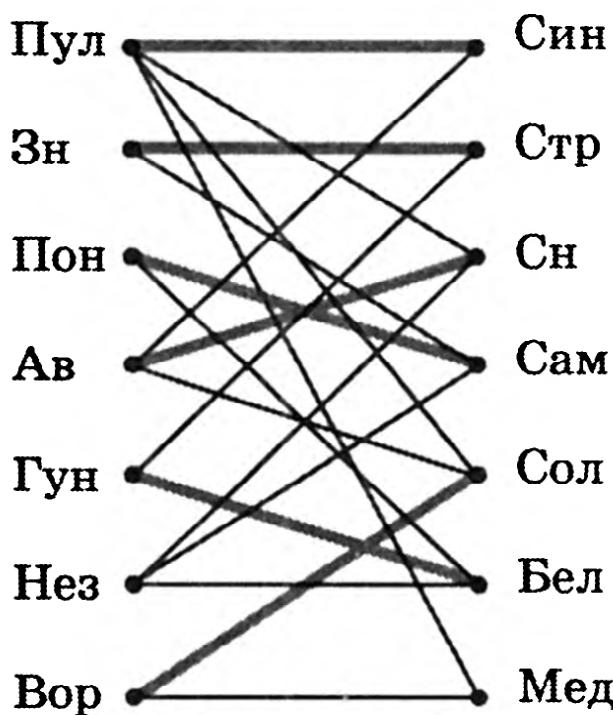
— Увеличивающая относительно  $M$ , — поправил Знайка. — Но вспомните: нам было дано, что таких цепей в графе нет. Мы предположили, что паросочетание  $M_1$  имеет больше ребер, чем  $M$ , и получили, что такая цепь существует. Противоречие! Значит, мы

предположили неправильно, и  $M$  — наибольшее по числу ребер паросочетание. Таким образом, мы доказали теорему:

*Для того чтобы паросочетание  $M$  было паросочетанием с наибольшим числом, ребер в графе  $G$ , необходимо и достаточно, чтобы в графе  $G$  не существовало увеличивающих относительно  $M$  цепей.*

— Устал я от ваших теорем, — вступил в разговор Пулька. Он уже давно всем своим видом показывал, что у него есть более важные дела. — Мне коротышек по лодкам рассадить надо, а вы теоремы доказываете.

— Сейчас займемся коротышками. Мы используем эту теорему для построения в нашем двудольном графе большего паросочетания, чем то, которое имеем, — сказал Знайка. — Если паросочетание с большим числом ребер существует, то в графе будет увеличивающая цепь. Попробуем найти ее.



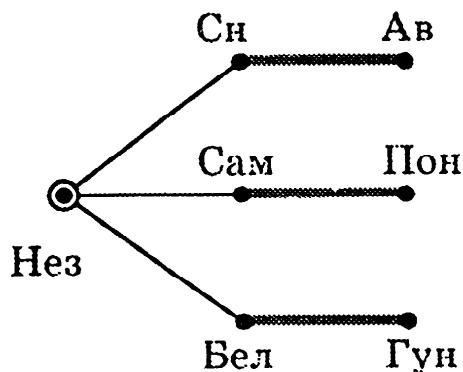
— Цепь должна начинаться в той вершине, из которой выходят только тонкие ребра, например из вершины НЕЗ.

— А почему не из вершины МЕД? — спросил Гунька.

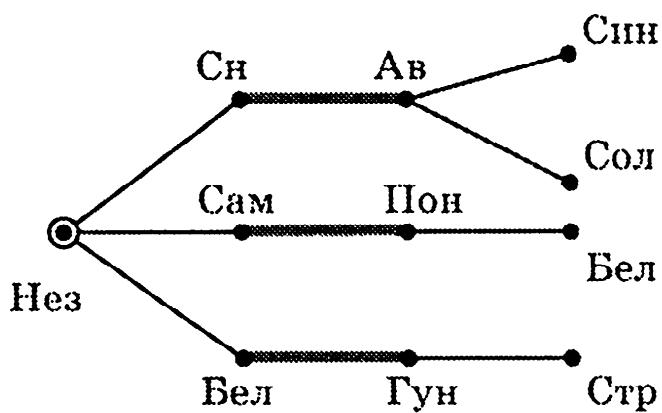
— Если вершин, из которых выходят только тонкие ребра, несколько, то нужно строить цепи, начиная из каждой такой вершины. Давайте попробуем построить цепь, первой вершиной которой бу-

дет вершина НЕЗ. В нашем случае строить цепь из второй вершины не обязательно, так как, если нужная цепь существует, то одним ее концом будет вершина (НЕЗ), а вторым — вершина (МЕД). Первым ребром цепи может служить одно из трех ребер (НЕЗ, СН), (НЕЗ, САМ), (НЕЗ, БЕЛ). Так как мы не знаем, какое из этих ребер приведет к нужному результату, то будем рассматривать все три варианта.

— На втором шаге в каждой из цепей находятся толстые ребра, — сказал Гунька и продолжил рисовать картинку. — Поэтому число вариантов не увеличится.



— Верно, — подтвердил Знайка. — Продолжим построение цепей с помощью тонких ребер. Из вершин ПОН и ГУН выходит по одному тонкому ребру, а из вершины АВ — два.

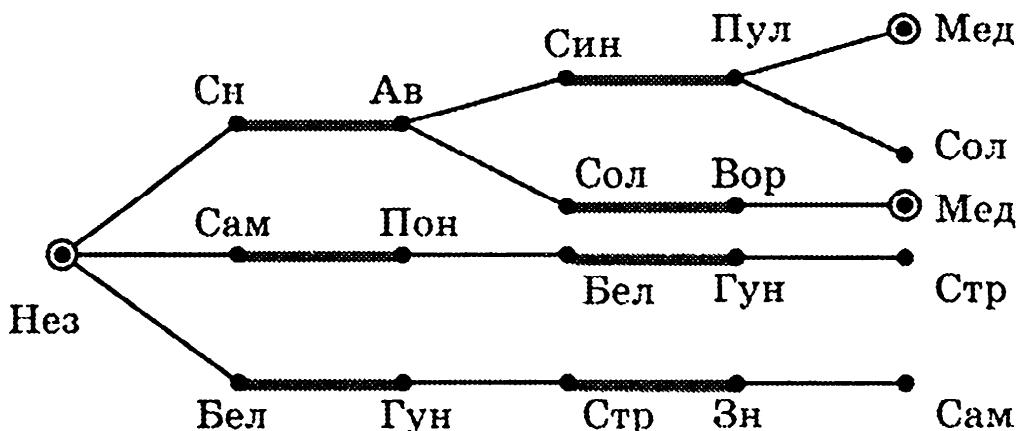


— Получается корневое дерево! — вдруг сказал Пулька. — Только почему-то оно лежит на боку.

— Молодец! — удивился Знайка. — Я и не думал, что ты запомнишь. А то, что дерево лежит на боку, не страшно: мы же говорили, что каждый граф можно рисовать по-разному.

— Похожее дерево уже встречалось у нас, когда мы искали число маршрутов из Цветочного города в Зеленый. Я хорошо помню все, что связано с походами, — сказал Пулька.

— Продолжим наши цепи сначала толстыми, а затем тонкими ребрами:



Смотрите: из вершины МЕД не выходят толстые ребра. Это значит, что мы построили две чередующиеся цепи:

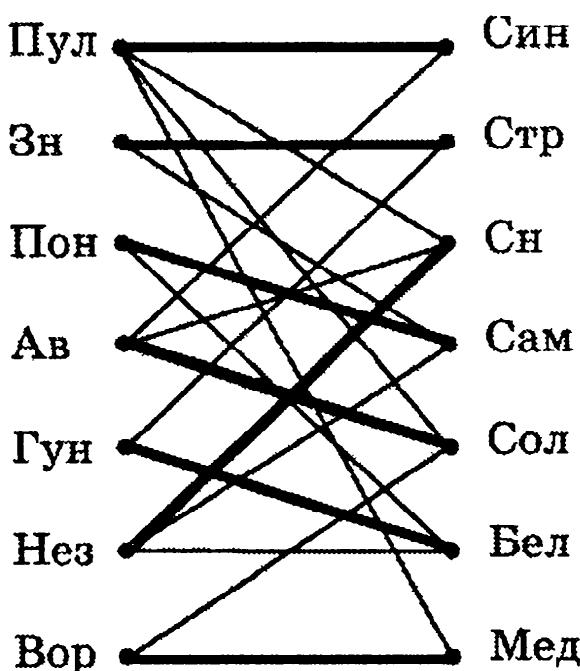
$$L_1 = (\text{НЕЗ}, \text{СН}, \text{АВ}, \text{СИН}, \text{ПУЛ}, \text{МЕД}) \text{ и}$$

$$L_2 = (\text{НЕЗ}, \text{СН}, \text{АВ}, \text{СОЛ}, \text{ВОР}, \text{МЕД}).$$

Поменяв местами тонкие и толстые ребра в одной из этих цепей, мы получим паросочетание из семи ребер. Какую цепь ты выбираешь? — спросил Знайка у Пульки.

Пулька внимательно посмотрел на рисунок:

— Пускай Медуница плывет с Ворчуном.  
— Хорошо! — Знайка быстро нарисовал новое паросочетание, поменяв местами тонкие и толстые ребра в цепи  $L_2$ :



— Смотри-ка, все коротышки разбились на пары! — обрадовался Незнайка.

— Вот удивил! — сказал Пулька. — Зачем нужна вся эта теория? Я обойдусь без нее. Рассмотрим предыдущий вариант, в котором Незнайка остался без пары. Посадим его со Снежинкой, тогда без пары останется Авоська. Авоську посадим, например с Синеглазкой. Теперь уже я без пары. Я сяду с Медуницей. Вот и все!

Пулька победно посмотрел на Знайку.

— Да, тебе повезло. Но откуда же ты знал, что Незнайку нужно посадить со Снежинкой? Попробуем повторить твои рассуждения, посадив Незнайку, например, с Самоцветиком.

— Нет уж, — испугался Незнайка. — Я поплычу со Снежинкой!

— Не волнуйся, это все понарошку, — успокоил его Пулька. — Посадим Незнайку с Самоцветиком. Оставшегося без пары Пончика посадим с Белочкой, Гуньку — со Стрекозой. Раньше Стрекоза сидела со Знайкой. Тебя, Знайка, посадим с Самоцветиком.

— Ха-ха-ха, — засмеялся Гунька. — Ничего не получится: ты уже посадил Самоцветика с Незнайкой.

— Видишь, ты волновался напрасно, — сказал Знайка Незнайке.

— А ведь и правда, — вынужден был согласиться Пулька.

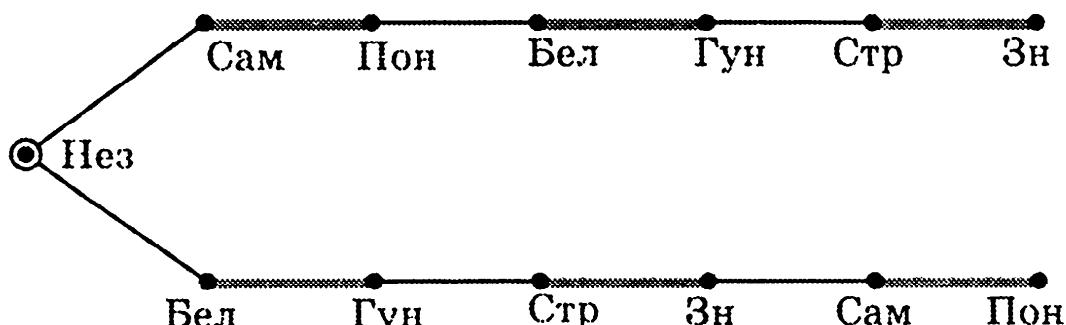
— Если граф большой, то трудно угадать, какую веточку корневого дерева нужно исследовать первой, поэтому приходится исследовать все, — уточнил Знайка.

— Спасибо, — поблагодарили Пулька. — Пойду готовиться к походу.

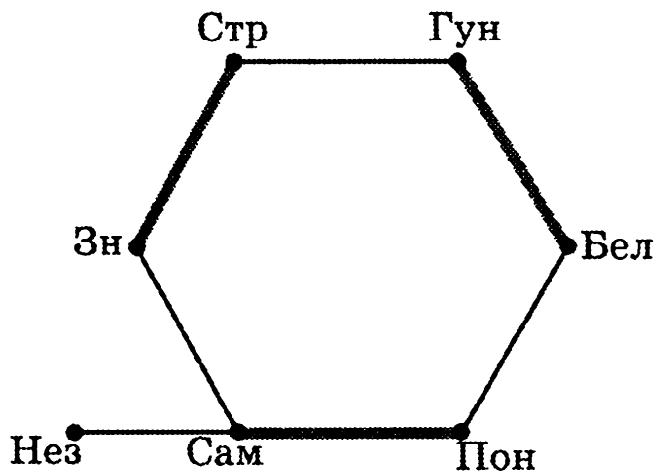
Пулька ушел, а Гунька вдруг спросил:

— А что бы произошло, если бы мы не добавили ребро (НЕЗ, СН)?

— Тогда бы дерево поиска чередующихся цепей выглядело так, — ответил Знайка и нарисовал:



Никакую из двух цепей нельзя дальше продолжить. Например, для верхней цепи из вершины ЗН выходит одно тонкое ребро, но оно ведет в вершину САМ, которая уже есть в этой цепи. Чередующаяся цепь не получается.



То же самое можно сказать и для нижней цепи. Это значит, что в начальном графе (без ребра (НЕЗ, СН)) нет чередующихся относительно построенного паросочетания цепей, и, значит, в нем нельзя увеличить число ребер паросочетания.

— Постой! — закричал Незнайка. — Ты же сам говорил, что надо пробовать строить цепь, начиная с каждой вершины, из которой выходят только тонкие ребра. Раз не получилось из вершины НЕЗ, попробуем из вершины МЕД!

— Об этом тоже говорили, — сказал Гунька. — Если бы такая цепь существовала, то она должна была бы соединять вершины НЕЗ и МЕД. Поэтому безразлично, откуда ее искать: если не получилось из вершины НЕЗ, то не получится и из вершины МЕД.

— Правильно, — подтвердил Знайка. — А теперь пойдемте готовиться к походу.

Казалось, что все население Зеленого города собралось на набережной в день отплытия туристов. Малышки прощались с путешественниками и еще раз приглашали в гости. Мэр города Кубышка произнесла напутственное слово, и эскадра отправилась навстречу новым приключениям.

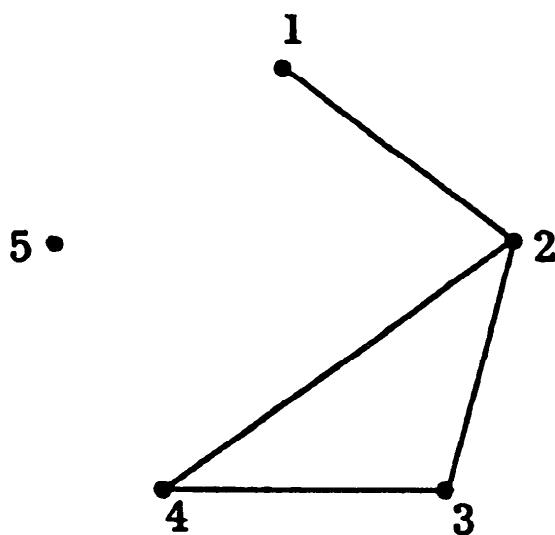
# Чемного теории и задач

## К главе 1

Рассмотрим любое конечное множество (совокупность, группу) каких-либо элементов, например точек, людей и т. д. Это множество будет называться *множеством вершин графа* и обозначаться  $VG$ . Каждый элемент из  $VG$  называется *вершиной графа*. Обычно вершины обозначают буквами  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  или цифрами  $\{1, 2, \dots, n\}$ , но возможны и другие обозначения. Количество  $n$  вершин графа называется его *порядком*. Любую пару элементов из  $VG$  назовем *ребром графа*, а множество ребер обозначим  $EC$ . Таким образом, *граф* — это *множество вершин  $VG$  и множество некоторых пар вершин, т. е. множество ребер  $EC$* .

Например,  $VG = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $EC = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\}$ .

Удобно изображать граф в виде рисунка, на котором вершины соответствуют точкам, а ребра — линиям, соединяющим соответствующие вершинам точки. Ранее заданный граф можно изобразить следующим образом:



Две вершины, образующие ребро, называются *смежными*. В этом случае будем говорить, что *вершины соединены ребром*. Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

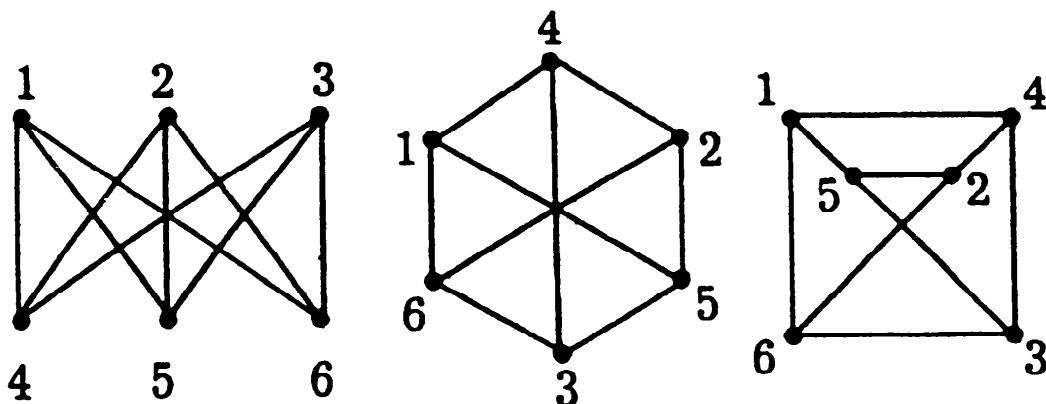
Число ребер, выходящих из вершины  $v$ , называется *степенью вершины* и обозначается  $d(v)$ . Так, в нашем примере:  $d(1) = 1$ ,  $d(2) = 3$ ,  $d(3) = 2$ ,  $d(4) = 2$ ,  $d(5) = 0$ . Вершина степени 0 называется *изолированной*, вершина степени 1 — *висячей*.

**Лемма о рукопожатиях.** Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер.

**Следствие.** В любом графике число вершин нечетной степени четное.

Два графа  $G$  и  $H$  называются *изоморфными*, если можно пронумеровать вершины каждого из них так, что если две вершины будут смежны в одном из графов, то вершины с такими же номерами будут смежны во втором. В случае изоморфизма графов пишут  $G \cong H$ .

На следующем рисунке представлены три изоморфных графа:



## □ Задачи

**1.1.** Возвратившись из похода, Незнайка утверждал, что в походе было  $n$  участников и каждый из них познакомился ровно с  $d$  участниками этого похода. Для каких  $n$  и  $d$  утверждение Незнайки может быть верным?

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
<b>n</b>	13	13	12	12	11	11	11	10	10	9	9	8	8	7	7	7	7
<b>d</b>	7	6	7	6	7	6	5	6	5	5	4	5	4	6	5	4	3

**1.2.** В шахматном турнире по круговой системе, при которой каждый участник встречается с каждым, участвуют 7 школьников. Известно, что в настоящий момент Ваня сыграл шесть партий, Толя — пять, Леша и Дима — по три, Семен и Илья — по две, Женя — одну. С кем сыграл Леша?

**1.3.** В шахматном турнире по круговой системе участвуют 8 школьников. Известно, что Миша и Петя сыграли по 7 партий, Саша — 5, Костя и Женя — по 4, Гриша и Ваня — по 2. С кем сыграл восьмой участник, Вова, если Костя и Женя сыграли между собой?

**1.4.** В шахматном турнире по круговой системе участвуют 5 школьников. Известно, что Миша и Саша провели по 4 встречи, Костя и Женя — по 3, Ваня — 2. С кем сыграл Ваня?

**1.5.** В шахматном турнире по круговой системе участвуют 8 школьников. Известно, что Миша и Леша, Илья и Женя сыграли между собой. Кроме этого, известно, что Ваня провел 7 встреч, Саша — 5, Илья, Женя, Аркадий и Петя — по 3, Миша и Леша — по две. Кто с кем сыграл?

**1.6.** В шахматном турнире по круговой системе участвуют 6 школьников. Известно, что Кеша сыграл 5 партий, Толя — 4, Семен — 2, Вася — 1. Сколько встреч провели еще 2 участника: Андрей и Саша?

**1.7.** В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 5 школьников, сыграно 6 партий. Больше всех встреч провели Ваня и Миша — по 3. Какое число партий сыграл участник, проведший наименьшее число встреч?

**1.8.** В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 6 школьников, сыграно 10 партий. Известно, что каждый участник сыграл не менее двух встреч, Ваня провел 4 встречи, а Миша — 3. Сыграл ли еще кто-нибудь, кроме Вани, больше, чем Миша, если Ваня и Миша между собой не встречались?

**1.9.** В футбольном турнире по круговой системе, в котором участвуют 4 команды 5-х классов и 3 команды 4-х классов, проведено 13 матчей. Известно, что команды 5«А» и 5«Б» классов провели все свои встречи. Какое наименьшее число встреч провела команда?

**1.10.** Сделайте еще по 2 новых изображения приведенных на рисунках графов:

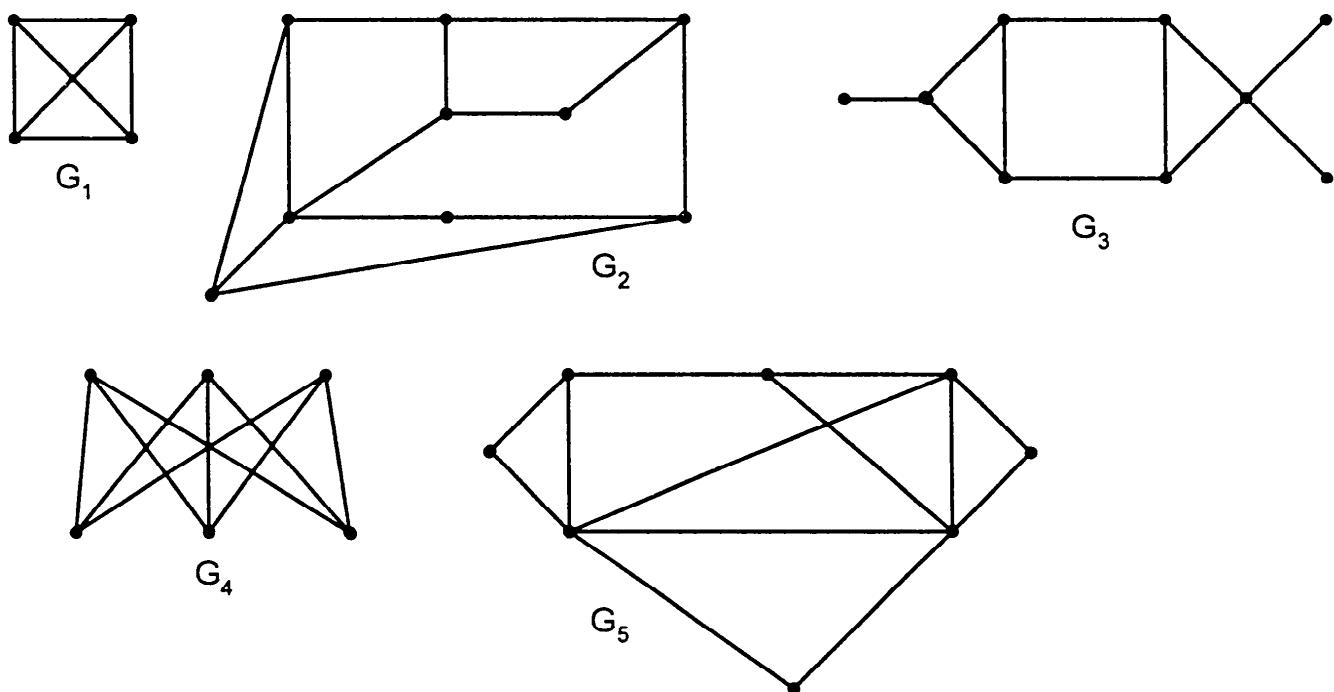


Рис. к задаче 1.10

**1.11.** Могут ли существовать графы, у которых  $n$  вершин, степени которых равны:

- а)  $n = 5; d(1) = 6, d(2) = 4, d(3) = 4, d(4) = 3, d(5) = 1;$
- б)  $n = 6; d(1) = 6, d(2) = 3, d(3) = 3, d(4) = 3, d(5) = 1, d(6) = 1;$
- в)  $n = 5; d(1) = 4, d(2) = 3, d(3) = 2, d(4) = 1, d(5) = 1;$
- г)  $n = 5; d(1) = 4, d(2) = 3, d(3) = 2, d(4) = 2, d(5) = 1;$
- д)  $n = 6; d(1) = 4, d(2) = 3, d(3) = 3, d(4) = 3, d(5) = 1, d(6) = 1;$
- е)  $n = 6; d(1) = 4, d(2) = 3, d(3) = 3, d(4) = 3, d(5) = 2, d(6) = 1;$
- ж)  $n = 7; d(1) = 6, d(2) = 4, d(3) = 3, d(4) = 3, d(5) = 3, d(6) = 3, d(7) = 1;$
- з)  $n = 7; d(1) = 6, d(2) = 4, d(3) = 3, d(4) = 3, d(5) = 3, d(6) = 3, d(7) = 2;$
- и)  $n = 7; d(1) = 6, d(2) = 6, d(3) = 5, d(4) = 4, d(5) = 3, d(6) = 2, d(7) = 2.$

**1.12.** В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 4 школьника и все сыграли хотя бы по одной встрече, только Ваня и Леша провели одинаковое число встреч. Сколько встреч провели Ваня и Леша?

**1.13.** В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 5 школьников и все сыграли хотя бы по одной встрече, только Ваня и Леша провели одинаковое число встреч. Сколько встреч провели Ваня и Леша?

**1.14.** Одиннадцать школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки трем из остальных. Может ли оказаться так, что каждый получит открытки именно от тех, кому напишет сам?

**1.15.** Можно ли на плоскости так нарисовать 7 отрезков, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

**1.16.** Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четное.

**1.17.** В Стране чудес Диснейленд на озере семь островов, из каждого из них ведет один, три или пять мостов. Докажите, что хотя бы один из мостов ведет на берег.

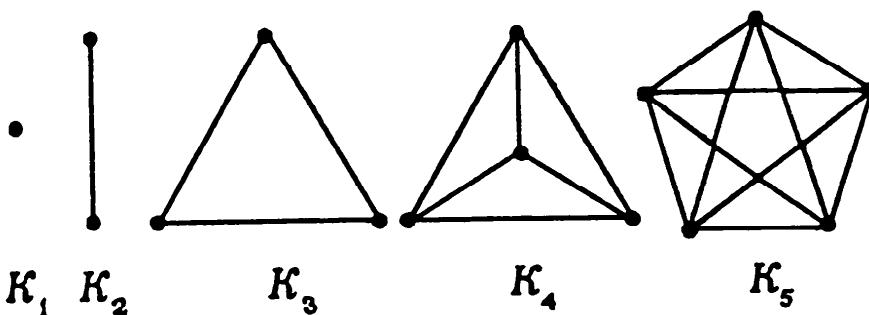
**1.18.** В парке 9 озер. Каждое озеро соединено с другими озерами не менее чем 3 каналами. Какое наименьшее количество каналов может быть в парке?

**1.19.** Марсиане очень любят танцевать танцы, в которых нужно браться за руки. В танце «Пирамидка» может участвовать не более 7 марсиан, у каждого из которых не более трех рук. Какое наибольшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина?

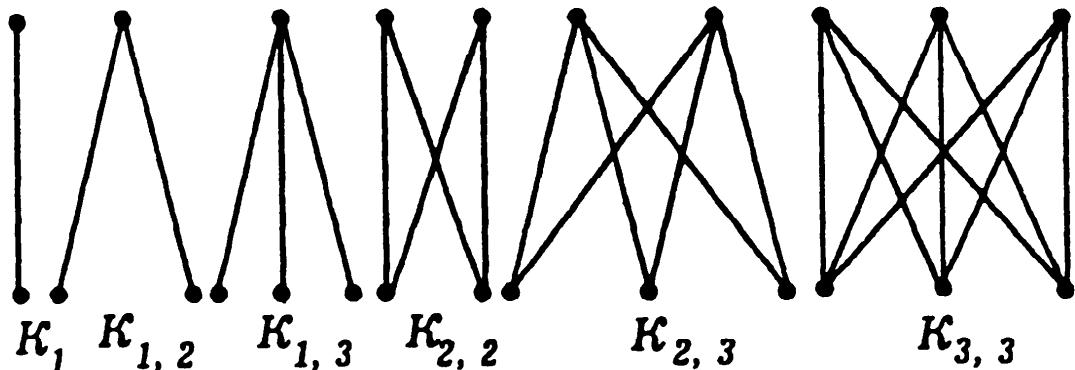
**1.20.** В танце «Большая пирамида» может участвовать не менее 7 марсиан, у каждого из которых не менее пяти рук. Какое наименьшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина?

## К главе 2

Граф называется *полным*, если любая пара его вершин соединена ребром. Полный граф с  $n$  вершинами обозначается  $K_n$ . Такой граф имеет  $n(n - 1)/2$  ребер. На рисунке изображены полные графы с небольшим числом вершин.



Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на две части (*доли*) так, что каждое ребро будет соединять вершины разных частей. Двудольный граф называется *полным двудольным*, если каждая вершина одной доли соединена с каждой вершиной другой. Полный двудольный граф, доли которого состоят из  $p$  и  $q$  вершин, обозначается  $K_{p,q}$ . Он имеет  $pq$  ребер. Граф  $K_{1,q}$  называется *звездой*. На рисунке даны примеры полных двудольных графов.



Отметим, что одни и те же графы могут иметь различные обозначения. Например,  $K_2 = K_{1,1}$ .

---

**Теорема.** Сумма степеней вершин долей двудольного графа равны.

---

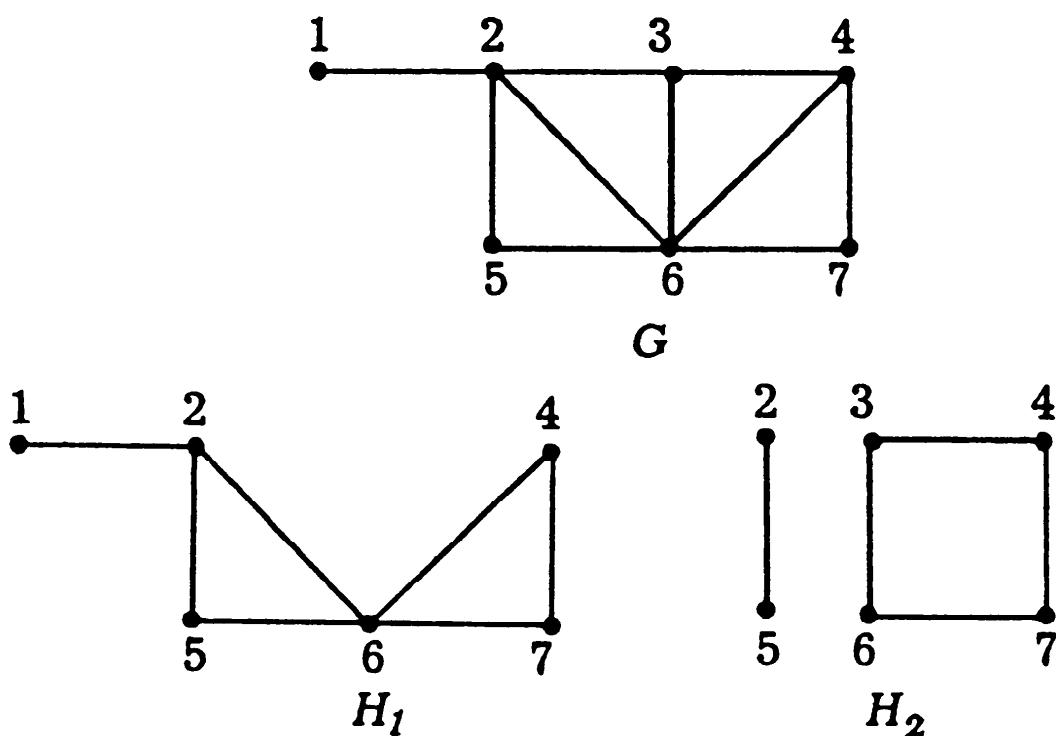
**Доказательство.** Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_k$  — вершины одной доли, а  $u_1, u_2, \dots, u_p$  — вершины другой доли. Тогда из одной доли выходит  $d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_k)$  ребер, а из другой —  $d(u_1) + d(u_2) + \dots + d(u_p)$  ребер. Равенство сумм следует из того, что это одни и те же ребра.

Граф называется *связным*, если от каждой его вершины можно по ребрам перейти к любой другой вершине. Если это сделать невозможно, то граф называется *несвязным*.

Говорят, что две вершины графа принадлежат одной *компоненте*, если от одной вершины можно перейти к другой по ребрам графа. Если этого сделать нельзя, то вершины принадлежат разным компонентам. Таким образом, связный граф состоит из одной компоненты, а несвязный — из нескольких.

Граф  $H$ , вершины и ребра которого принадлежат графу  $G$  называется *подграфом графа  $G$* .

На рисунке изображены граф  $G$  и два его подграфа  $H_1$  и  $H_2$ , причем  $H_2$  — несвязный граф.



### □ Задачи

**2.1.** Определите, какие из приведенных ниже графов полные, а какие нет:

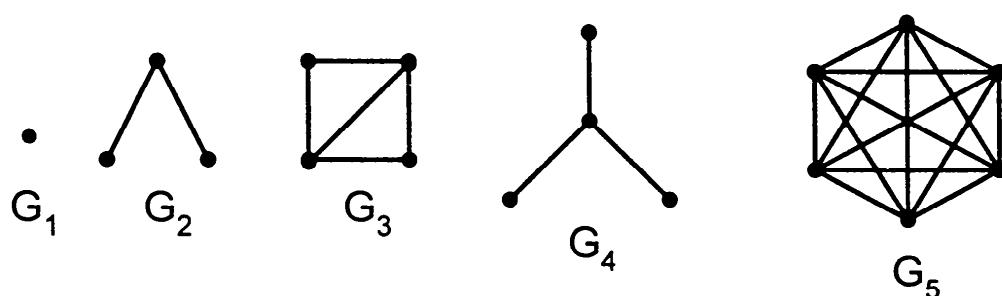


Рис. к задаче 2.1

**2.2.** Встретились  $n$  человек и каждый из них пожал руку другому. Сколько сделано рукопожатий, если  $n$  равно: а) 4; б) 6; в) 8; г) 10; д) 15; е) 20; ж) 22; з) 40; и) 82; к) 100?

**2.3.** Окончилось соревнование, в котором каждая команда встретилась с каждой. Было проведено  $m$  встреч. Определите число команд, если  $m$  равно: а) 10; б) 28; в) 45; г) 66; д) 91; е) 120; ж) 190; з) 207.

**2.4.** На плоскости нужно нарисовать 6 различных прямых. Какое наибольшее число пересечений этих прямых возможно?

**2.5.** В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовали в турнире? Сколько партий сыграл выбывший участник?

**2.6.** В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено  $m$  встреч. Сколько шахматистов участвовали в турнире, и сколько партий сыграл выбывший участник, если  $m$  равно:

- а) 50; б) 62; в) 110; г) 171?

**2.7.** В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира до того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовали в турнире?

**2.8.** В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира после того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовали в турнире?

**2.9.** В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира после того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 180 встреч. Сколько шахматистов участвовали в турнире?

**2.10.** В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, три шахматиста заболели и выбыли из турнира до того, как прошла его половина. Всего в турнире было проведено 130 встреч. Сколько шахматистов участвовали в турнире?

**2.11.** Определите, какие из нарисованных ниже графов связные, а какие несвязные? Определите число компонент несвязных графов.

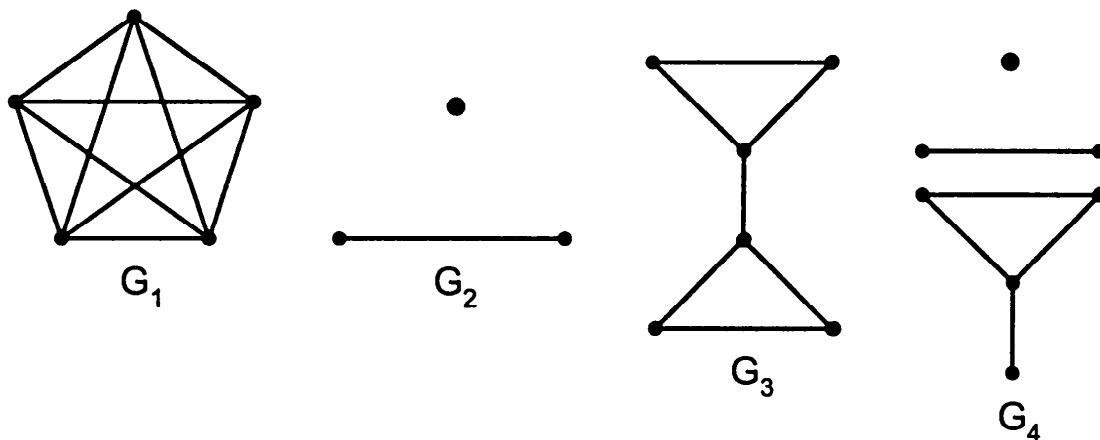


Рис. к задаче 2.11

**2.12.** Какое наименьшее число ребер нужно добавить к несвязным графикам, заданным в задаче 2.10 для того, чтобы получить связные графы?

**2.13.** Какое наибольшее число ребер можно добавить к несвязным графикам, заданным в задаче 2.10, так, чтобы они остались несвязными?

**2.14.** Какое наибольшее число ребер можно удалить у связных графов, заданных в задаче 2.10, так, чтобы они остались связными?

**2.15.** Какое наименьшее число ребер следует удалить у связных графов, заданных в задаче 2.10 для того, чтобы они оказались несвязными?

**2.16.** Летом Иван отдыхал в молодежном лагере «Восход», где вместе с ним находилось 53 школьника. После окончания отдыха некоторые пары обменялись адресами, причем у каждого из отдыхающих оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Ивану понадобился адрес Николая, с которым он адресом не обменивался. Докажите, что Иван может узнать адрес Николая, т. е. существует цепочка из школьников, которая начинается с Ивана и оканчивается Николаем и в которой каждая пара соседей обменялась адресами.

**2.17.** Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 15 линий, из города Дальний — одна, а из каждого из остальных городов — по 8 линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно с пересадками).

**2.18.** Определите, какие из нарисованных ниже графов являются двудольными, а какие нет? Есть ли среди них полные двудольные графы?

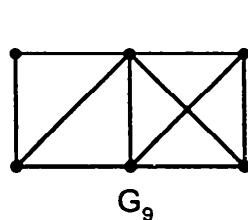
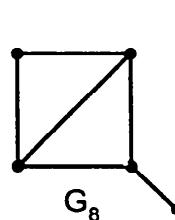
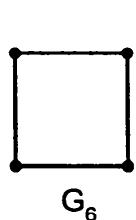
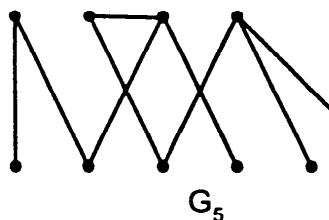
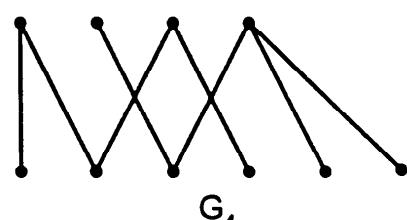
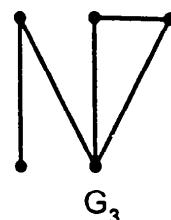
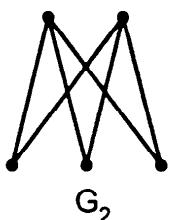
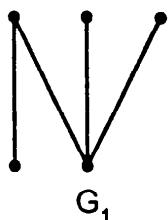


Рис. к задаче 2.18

**2.19.** Какое наименьшее число ребер нужно удалить у графов из задачи 2.17, не являющихся двудольными, чтобы превратить их в двудольные графы?

**2.20.** Какое наибольшее число ребер можно добавить к двудольным графикам из задачи 2.10, чтобы они остались двудольными?

**2.21.** В двух теннисных командах одинаковое число игроков. Каждый игрок одной команды встретился с каждым игроком второй команды. Сколько встреч проведено, если в командах: а) по 3 игрока; б) по 4 игрока; в) по 5 игроков; г) по 6 игроков; д) по 8 игроков?

**2.22.** В двух теннисных командах одинаковое число игроков. Каждый игрок одной команды встретился с каждым игроком второй команды. Сколько игроков в командах, если проведено: а) 16 встреч; б) 25 встреч; в) 49 встреч; г) 81 встреча; д) 98 встреч?

**2.23.** Каждый член одной делегации пожал руку каждому члену другой делегации. Сколько было сделано рукопожатий, если членов в делегациях: а) 2 и 3; б) 3 и 4; в) 4 и 6; г) 7 и 5; д) 8 и 8.

**2.24.** Каждый член одной делегации пожал руку каждому члену другой делегации. Сколько членов имеют делегации, если в каждой из них более одного человека и число рукопожатий равно:  
а) 6; б) 8; в) 15; г) 21; д) 27; е) 12; ж) 31.

**2.25.** Каждый член одной делегации пожал руку каждому члену другой делегации. Сколько членов имеют делегации, если в каждой из них не менее четырех человек и число рукопожатий равно:  
а) 16; б) 24; в) 30; г) 32; д) 81; е) 36; ж) 27.

**2.26.** Каждый из учеников 5«а» класса дружит ровно с тремя учениками 5«б» класса, а каждый ученик 5«б» класса дружит ровно с тремя учениками 5«а» класса. Докажите, что число учеников в этих классах одинаково.

**2.27.** В классе каждый мальчик дружит ровно с тремя девочками, а девочка — ровно с 6 мальчиками. Докажите, что мальчиков в классе в два раза больше, чем девочек.

**2.28.** В классе 12 мальчиков и 16 девочек. Каждая девочка дружит ровно с 3 мальчиками. Количество девочек, с которыми дружат мальчики одинаково. Со сколькими девочками дружит каждый мальчик?

**2.29.** На математической олимпиаде каждый из трех призеров решил ровно 6 задач. Известно, что каждую задачу решило ровно 2 призера. Сколько было задач?

**2.30.** В классе каждый мальчик дружит ровно с четырьмя девочками, а каждая девочка — ровно с тремя мальчиками. В классе 16 парт, а на последней экскурсии было 23 школьника. Сколько учеников в классе?

**2.31.** Могут ли существовать двудольные графы со следующими степенями вершин: а) в доле  $A$  — 2, 3, 4, 5, в доле  $B$  — 3, 3, 4, 4; б) в доле  $A$  — 2, 3, 3, 4, в доле  $B$  — 3, 3, 3, 4; в) в доле  $A$  — 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, в доле  $B$  — 3, 5, 5, 5, 5, 5, г) в доле  $A$  — 2, 3, 3, 4, в доле  $B$  — 2, 3, 3, 4; д) в доле  $A$  — 3, 4, 5, в доле  $B$  — 1, 2, 3, 3, 3.

**2.32.** Постройте двудольные графы со степенями вершин: а) 6, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1; б) 5, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1.

**2.33.** Возможен ли двудольный граф со степенями вершин:  
а) 5, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1; б) 6, 4, 2, 2, 2, 2; в) 5, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 1;  
г) 4, 3, 2, 2, 2, 1.

**2.34.** В турнире, проводимой по олимпийской системе, принимает участие: а) 16; б) 18; в) 25; г) 48; д) 105 команд. Какое количество встреч нужно провести для определения победителя?

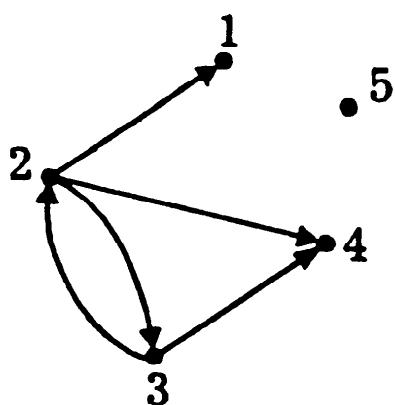
**2.35.** Нарисуйте корневое дерево, определяющее встречи 20 и 24 участников в соревнованиях, проходящих по олимпийской системе.

**2.36.** В соревнованиях по борьбе, проходящих по олимпийской системе, участвуют 20 борцов. За какое минимальное время можно провести соревнование, если в спортивном зале есть только три борцовских ковра, и на каждую схватку, включая разминку и отдых, отводится час? Изобразите схему соревнований с помощью корневого дерева.

**2.37.** В соревнованиях по настольному теннису, проходящих по олимпийской системе, участвуют 25 спортсменов. За какое минимальное время можно провести соревнование, если в спортивном зале установлено 4 теннисных стола, и на каждую встречу, включая разминку и отдых, отводится час? Изобразите схему соревнований с помощью корневого дерева.

## К главе 3

Пусть задано множество  $VG$  вершин графа  $G$ . Любую упорядоченную пару элементов из  $VG$  назовем *ориентированным ребром* или *дугой*. *Ориентированный граф*, или *орграф*, — это множество вершин  $VG$  и множество некоторых упорядоченных пар вершин  $EC$ . На рисунке дуга изображается линией, идущей от начала дуги к концу. Направление линии обозначается стрелкой. Изобразим, например, орграф  $G$ , у которого  $VG = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $EC = \{(2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (2, 4)\}$ .



*Маршрутом* в орграфе называется такая последовательность его вершин  $L = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ , в которой из каждой вершины идет дуга в следующую вершину последовательности.

Число дуг, входящих в вершину  $v$ , называется *полустепенью захода* и обозначается  $d^-(v)$ . Число дуг, выходящих из вершины  $v$ , называется *полустепенью исхода* вершины и обозначается  $d^+(v)$ . Сумма полустепеней захода и исхода называется *степенью вершины*, т. е.  $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$ .

---

**Теорема.** Сумма полустепеней захода всех вершин орграфа равна сумме полустепеней исхода всех вершин и равна числу дуг орграфа.

---

**Доказательство.** Утверждение теоремы вытекает из того, что каждая дуга выходит из какой-то вершины и заходит в какую-то вершину.

*Корневым деревом* называется орграф, одна вершина  $v$  которого имеет полустепень захода, равную нулю, а для любой другой вершины  $u$  существует единственный маршрут, соединяющий  $v$  и  $u$ .

Вершина, степень захода которой равна нулю, называется *корнем*. Вершина, степень исхода которой равна нулю, называется *листом*.

Часто при изображении корневого дерева стрелки не рисуются.

## □ Задачи

**3.1.** Изобразите точками времена года и покажите стрелками, в каком порядке они следуют друг за другом.

**3.2.** Бабушка печет несладкие и сладкие пирожки. Несладкие пирожки с мясом или капустой, сладкие — с медом или вареньем: клубничным, малиновым или черничным. Изобразите это с помощью графа.

**3.3.** Превратите каждый из графов, изображенных на рисунке, в два разных ориентированных графа и укажите число полустепеней захода и полустепеней исхода их вершин.

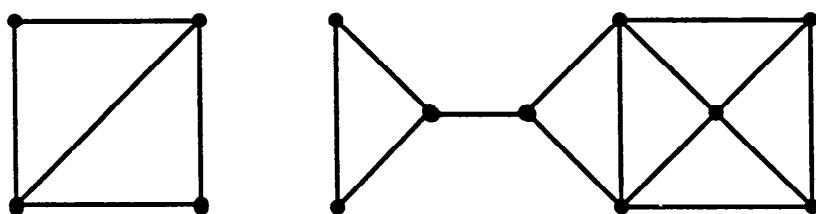


Рис. к задаче 3.3

**3.4.** Заданы полустепени захода вершин орграфа: а) 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3; б) 0, 0, 1, 1, 2, 2, 4. Определите число дуг орграфа.

**3.5.** Заданы полустепени исхода вершин орграфа: а) 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3; б) 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3. Определите число дуг орграфа.

**3.6.** Могут ли существовать орграфы со следующими полустепенями захода и полустепенями исхода:

№	1	2	3	4	5	6
Полустепени захода	1, 1, 1	0, 1, 1, 2	1, 2, 3	1, 2, 2, 3, 3	0, 0, 0, 0, 4	1, 1, 2, 5
Полустепени исхода	1, 1, 1	0, 1, 1, 2	1, 1, 2, 2	2, 2, 2, 3, 3	0, 1, 1, 1, 1	1, 2, 3, 3

**3.7.** Задан орграф, для которого  $d^-(1) = 1$ ,  $d^+(1) = 1$ ;  $d^-(2) = 3$ ,  $d^+(2) = 0$ ;  $d^-(3) = 0$ ,  $d^+(3) = 2$ ;  $d^-(4) = 1$ ,  $d^+(4) = 2$ . Каким образом из него можно получить орграф, для которого  $d^-(1) = 1$ ,  $d^+(1) = 1$ ;  $d^-(2) = 0$ ,  $d^+(2) = 3$ ;  $d^-(3) = 2$ ,  $d^+(3) = 0$ ;  $d^-(4) = 2$ ,  $d^+(4) = 1$ ?

**3.8.** В орграфе  $G$  полустепени исхода вершин равны (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2), а полустепени захода шести вершин равны (0, 0, 1, 1, 2, 4). Чему равна полустепень захода седьмой вершины?

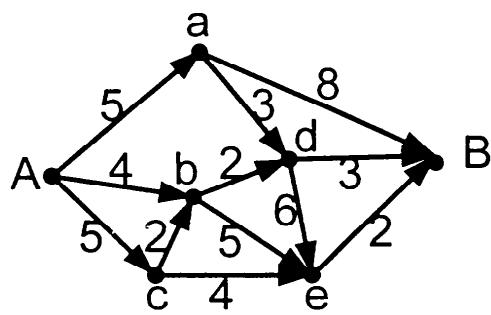
**3.9.** В соревнованиях по волейболу, где не бывает ничьих, участвует 5 команд. Команда, занявшая первое место, выиграла все встречи, ровно по две победы одержали только две команды, занявшие второе и третье место. В случае равенства очков место определяется по результату встречи между командами. Сколько побед одержала команда, занявшая последнее место? Определите, кто у кого выиграл?

**3.10.** Незнайка утверждал, что в турнире по теннису, прошедшем по круговой системе, в котором участвовало 8 коротышек, все игроки одержали одинаковое число побед. Может ли такое произойти? (Напомним, что в теннисе не бывает ничьих.)

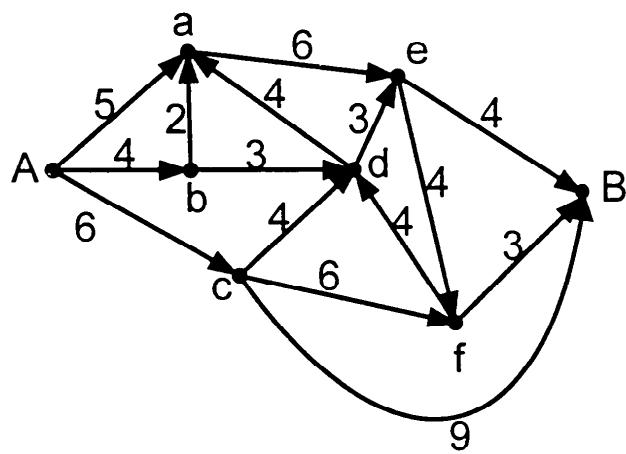
**3.11.** В турнире по теннису, прошедшем по круговой системе, в котором участвовало более пяти, но менее девяти коротышек, все игроки одержали одинаковое число побед. Сколько коротышек участвовали в турнире? Сколько побед одержал каждый из них?

**3.12.** В турнире по волейболу, прошедшем по круговой системе, в котором участвовало 9 команд, каждая из команд одерживала победы. Команда, занявшая последнее место одержала меньше всех побед, команда-победительница турнира одержала в 2 раза больше побед, чем команды, занявшие 2 последних места в сумме, а остальные 6 команды одержали одинаковое число побед. Сколько побед одержала каждая из команд? (Напомним, что в волейболе не бывает ничьих.)

**3.13.** На рисунках изображены графы дорог между городами A и B. (Вершины орграфа — промежуточные пункты между городами, дуги орграфа — дороги между ними с указанным направлением движения, цифры около дуг — длины дорог). Определите: 1) число маршрутов между городами; 2) маршруты, содержащие наименьшее число промежуточных пунктов; 3) маршруты, содержащие наибольшее число промежуточных пунктов; 4) маршруты, имеющие наименьшую длину; 5) маршруты, имеющие наибольшую длину.



а



б

Рис. к задаче 3.13

**3.14.** Изобразите в виде графа схему дорог между Вашим домом и школой. Определите самый короткий и самый длинный маршрут.

**3.15.** Среди трех монет есть одна фальшивая, которая легче других. Определите ее с помощью одного взвешивания на рычажных весах<sup>1</sup>.

**3.16.** Среди девяти монет есть одна фальшивая, которая легче других. Определите ее с помощью двух взвешиваний на рычажных весах. Изобразите поиск фальшивой монеты с помощью корневого дерева.

**3.17.** Среди двадцати семи монет есть одна фальшивая, которая легче других. Определите ее с помощью трех взвешиваний на рычажных весах. Изобразите поиск фальшивой монеты с помощью корневого дерева.

**3.18.** Среди 6 монет находится одна фальшивая, но не известно легче она настоящих или тяжелее. Среди этих монет известна также одна настоящая монета. Необходимо с помощью двух взвешиваний на чашечных весах определить фальшивую монету.

**3.19.** Для отправки поздравления есть конверты трех видов, на которые клеится одна из двух марок и в которые вкладывается одна из четырех открыток. Сколько существует способов сделать поздравление по почте?

**3.20.** Монету бросают три раза. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно получить? Выпишите их.

**3.21.** В новогодний подарок для первоклассника входит одна игрушка, одна шоколадка и одна книжка. Для формирования подарков купили игрушки четырех видов, шоколадки двух сортов и книги трех авторов. В классе 25 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них получат одинаковые подарки.

**3.22.** В баскетбольной команде 5 игроков. Сколько есть вариантов выбрать из них капитана команды и его заместителя?

**3.23.** В одном приморском курортном городе улицы настолько узкие, что в городе установлено одностороннее транспортное движение. Тем не менее, из каждой точки города можно проехать в любую другую. Докажите, что можно предложить такой маршрут патрулирования для полицейской машины, который начинается и оканчивается в одном и том же месте и проходит через

---

<sup>1</sup> Рычажные весы определяют равенство масс двух предметов или какой из предметов имеет большую массу.

каждый участок улиц между двумя перекрестками, по крайней мере, один раз.

## К главе 4

*Поиском с возвращением* в графе называется следующая процедура.

Поиск начинается в любой вершине графа.

Если в результате поиска мы оказались в вершине  $u$ , то перейдем от нее к другой вершине  $v$  по любому ранее не пройденному ребру и продолжим процесс из вершины  $v$ .

Если не существует не пройденных ребер, выходящих из вершины  $u$ , то вернемся в вершину  $w$ , из которой мы пришли в  $u$ , и продолжим процесс из вершины  $w$ .

Поиск с возвращением — очень экономная процедура исследования вершин и ребер графа. При этом каждое ребро проходится не более двух раз. Поиск с возвращением используется при построении эффективных алгоритмов на графах

### □ Задачи

**4.1.** Поставьте в соответствие предложенным лабиринтам графы и найдите выход из них с помощью алгоритма, рассмотренного в книге.

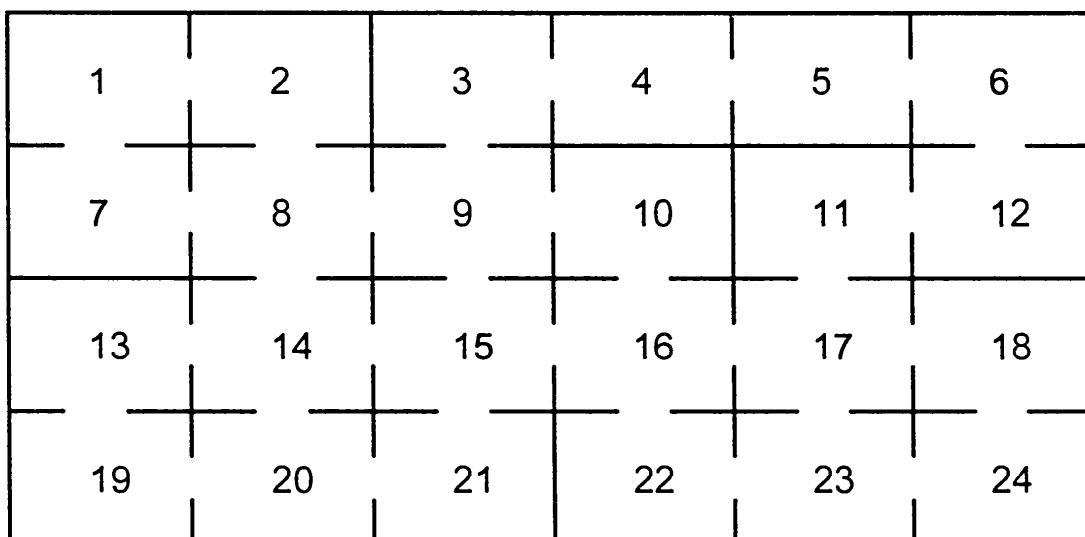
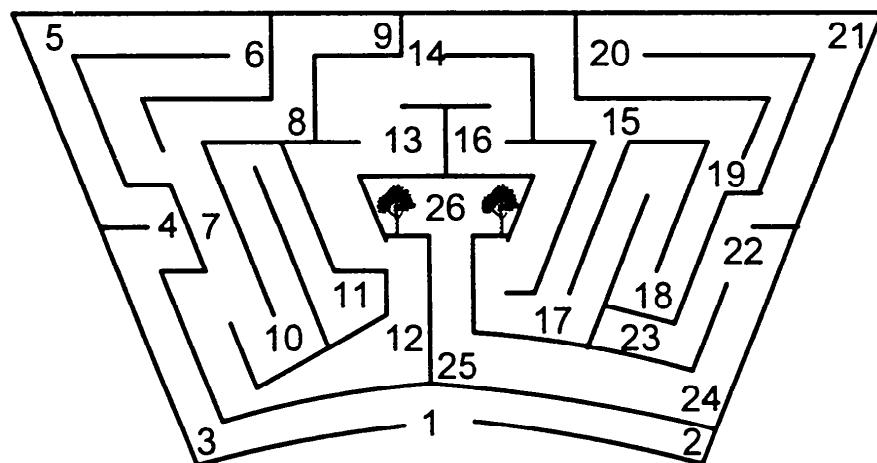
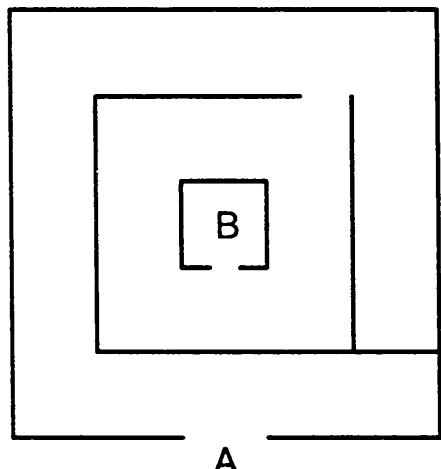


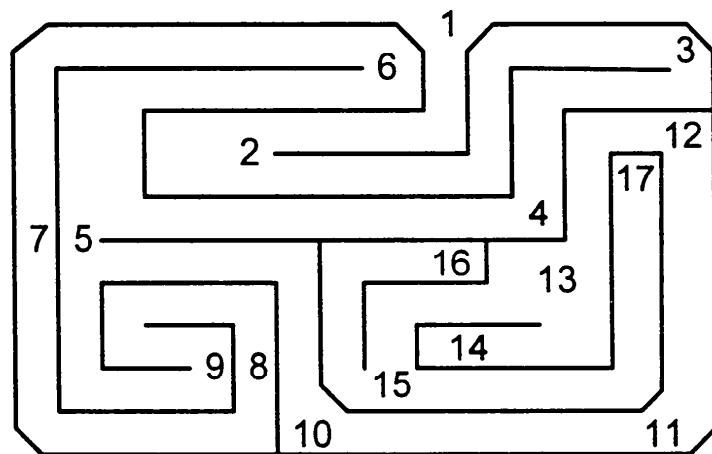
Рис. к задаче 4.1 (а)



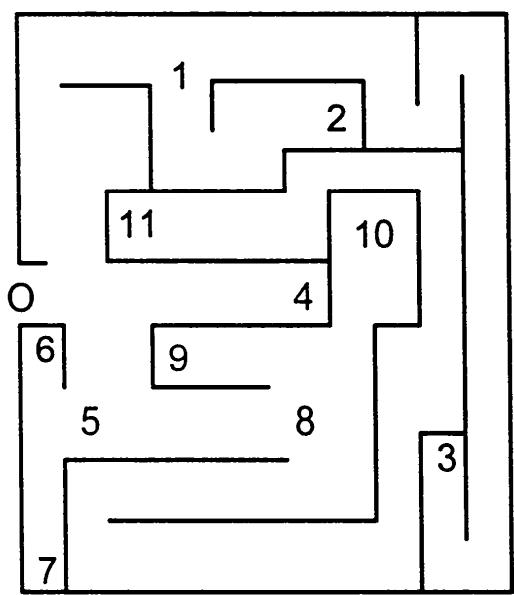
б)



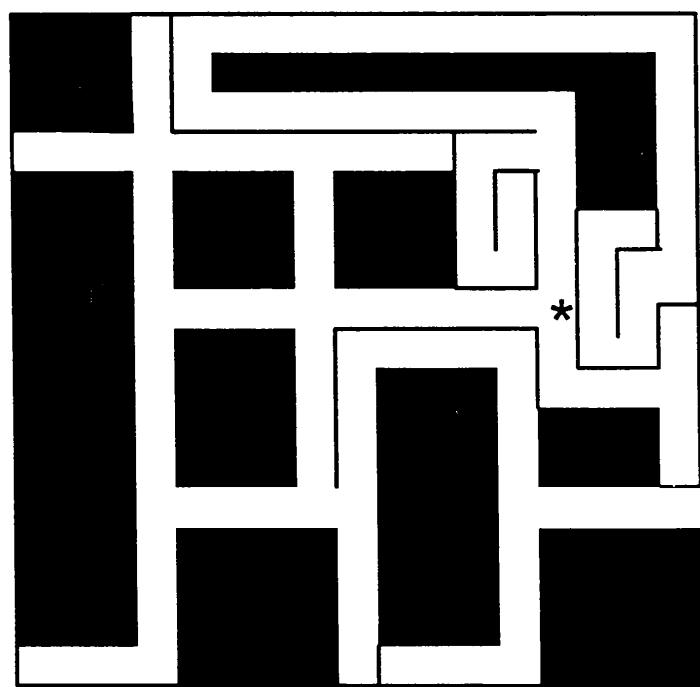
в)



г)



д)



е)

Рис. к задаче 4.1 (окончание)

**4.2.** Незнайка с Гунькой заблудились в лесу и оказались в пункте 7 (стр. 35). Вначале они пошли на север. Найдите выход из леса, используя алгоритм, рассмотренный в книге и выбирая на каждом перекрестке: а) самый правый путь из возможных; б) самый левый путь из возможных.

**4.3.** Незнайка с Гунькой заблудились в лесу и оказались в пункте 7 (стр. 35). Вначале они пошли на восток. Найдите выход из леса, используя алгоритм, рассмотренный в книге и выбирая на каждом перекрестке: а) самый правый путь из возможных; б) самый левый путь из возможных.

**4.4.** Незнайка с Гунькой заблудились в лесу и оказались в пункте 7. (стр. 35). Вначале они пошли на запад. Найдите выход из леса, используя алгоритм, рассмотренный в книге и выбирая на каждом перекрестке: а) самый правый путь из возможных; б) самый левый путь из возможных.

## К главам 5, 7

*Цепью* называется путь по вершинам и ребрам графа, который каждое ребро графа содержит не более одного раза. *Циклом* называется цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают. Если в цепи или цикле не повторяются вершины, то это будут соответственно *простая цепь* или *простой цикл*.

*Эйлеровым циклом* называется цикл, содержащий все ребра графа. Связный граф, содержащий эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

---

**Теорема Эйлера (1736 г.).** Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой вершины его четная.

---



---

**Теорема 5.1.** Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда его ребра можно разбить на простые циклы, не имеющие общих ребер.

---

Граф называется *уникурсальным*, если его можно нарисовать одним росчерком карандаша.

---

**Теорема 5.2.** Связный граф является универсальным тогда и только тогда, когда он содержит не более двух вершин нечетной степени.

---



---

**Теорема 5.3.** Пусть  $G$  — граф, не являющийся эйлеровым, и  $k$  — число его вершин нечетной степени. Тогда наименьшее число цепей, на которое можно разбить ребра графа  $G$ , равно  $k / 2$

---

□ Задачи

**5.1.** В нарисованных графах приведите примеры цепей и циклов. Перечислите цепи, простые цепи.

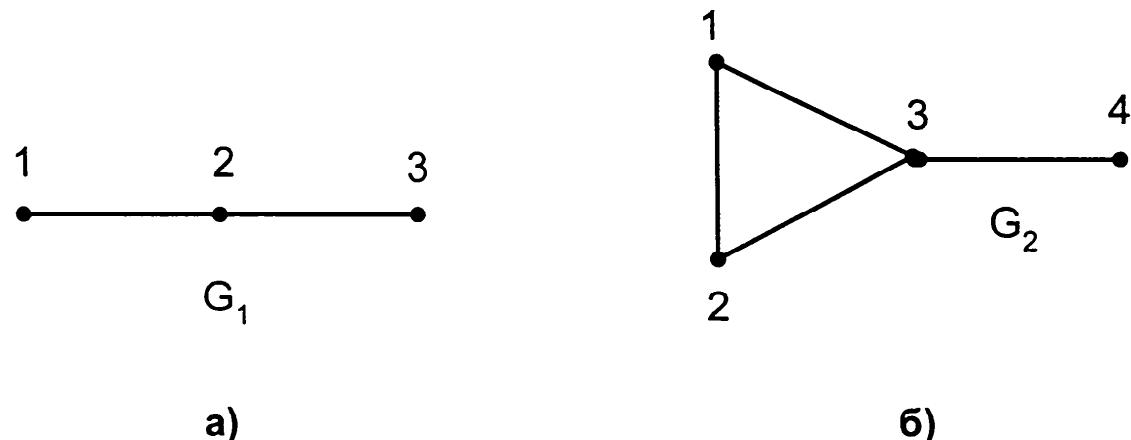


Рис. к задаче 5.1

**5.2.** В нарисованном графе перечислите цепи, не являющиеся простыми.

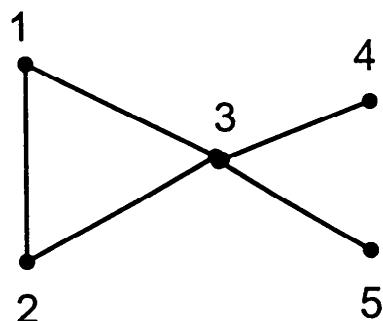
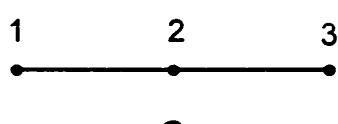
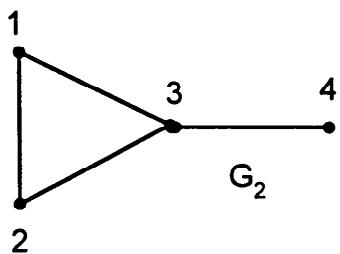
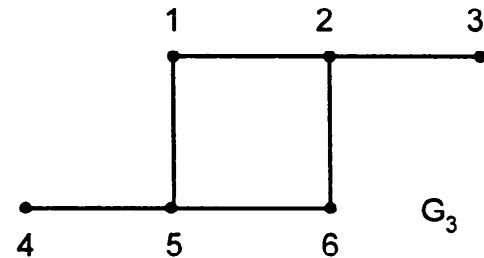


Рис. к задаче 5.2

**5.3.** В нарисованных графах перечислите простые цепи, из которых невозможно получить более длинные цепи добавлением ребер к их концам, и простые циклы.

 $G_1$  $G_2$  $G_3$ 

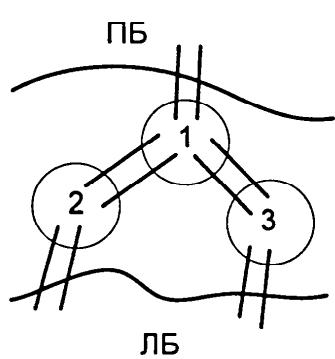
а)

б)

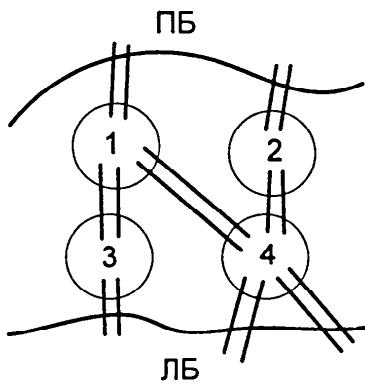
в)

Рис. к задаче 5.3

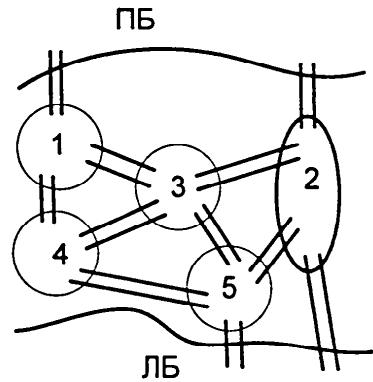
**5.4.** Перейдите от схем островов и мостов к графикам.



а)



б)



в)

Рис. к задаче 5.4

**5.5.** Являются ли нарисованные ниже графы эйлеровыми? Если граф не является эйлеровым, то так проведите в нем наименьшее число ребер, чтобы он стал эйлеровым.

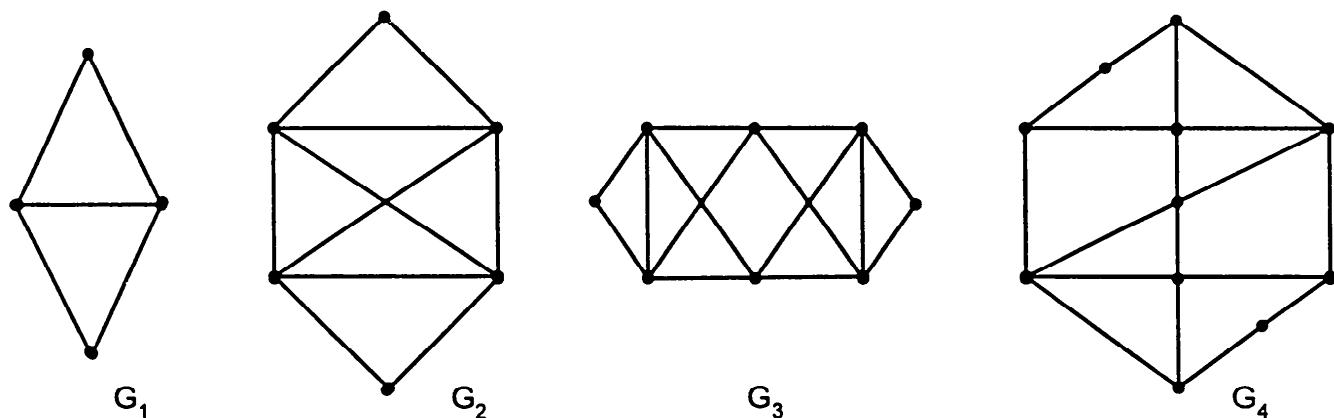


Рис. к задаче 5.5

**5.6.** Сколько существует способов добавить минимальное число ребер в графе  $G_4$  для того, чтобы превратить его в эйлеров?

**5.7.** С помощью рассмотренного алгоритма постройте в графах из задач 5.5 и 5.6 (заданных или исправленных) эйлеровы циклы.

**5.8.** Экспозиция картинной галереи представляет собой систему коридоров, на обеих стенах которых развешаны картины:

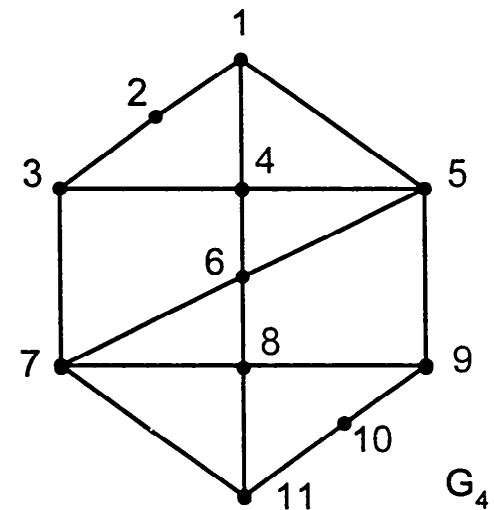


Рис. к задаче 5.6

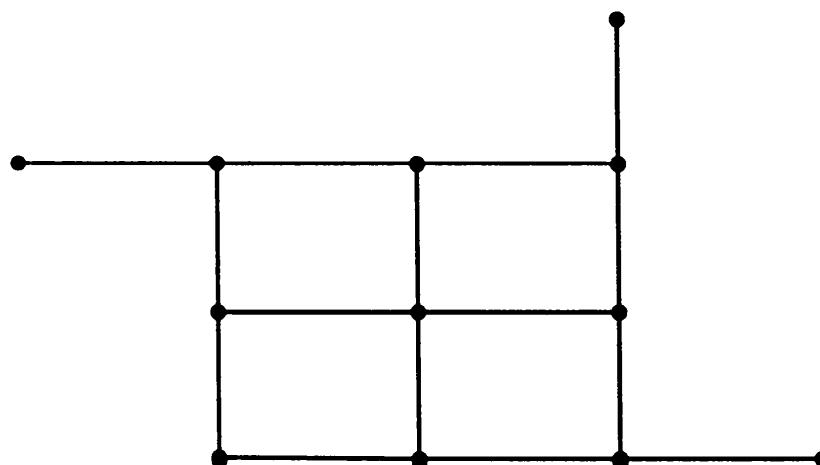
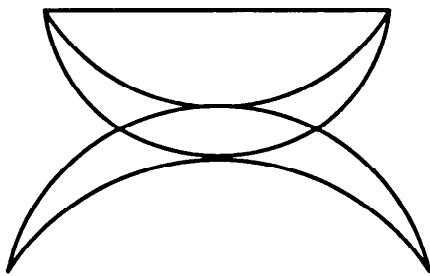


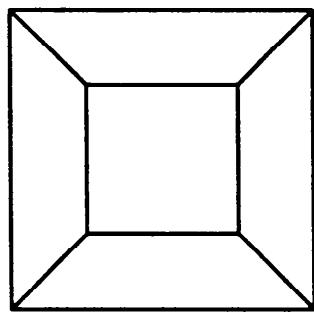
Рис. к задаче 5.8

Можно ли предложить такой маршрут осмотра экспозиции, при котором посетитель проходит вдоль каждой стены ровно один раз?

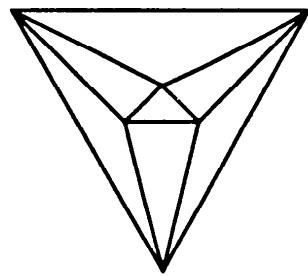
**5.9.** Можно ли нарисовать изображенные ниже фигуры, не отрывая карандаша от бумаги, причем каждую точку фигуры карандаш должен проходить только один раз?



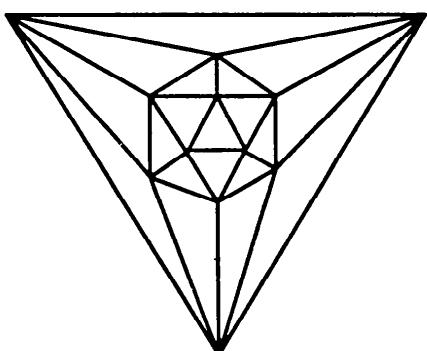
а)



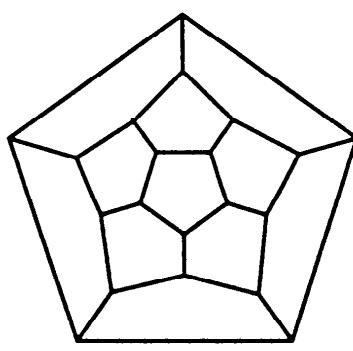
б)



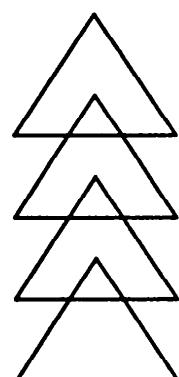
в)



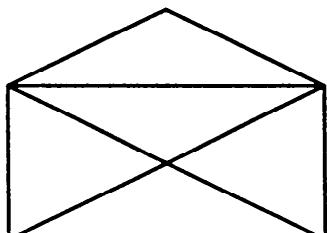
г)



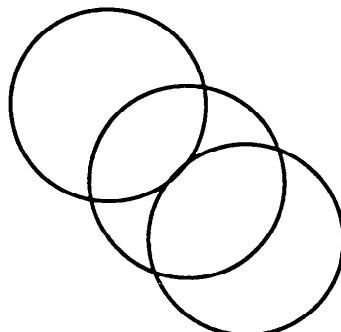
д)



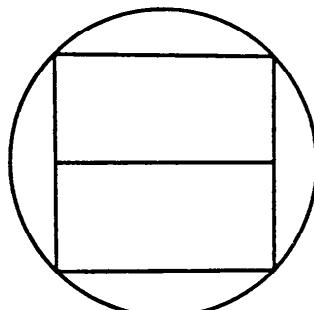
е)



ж)

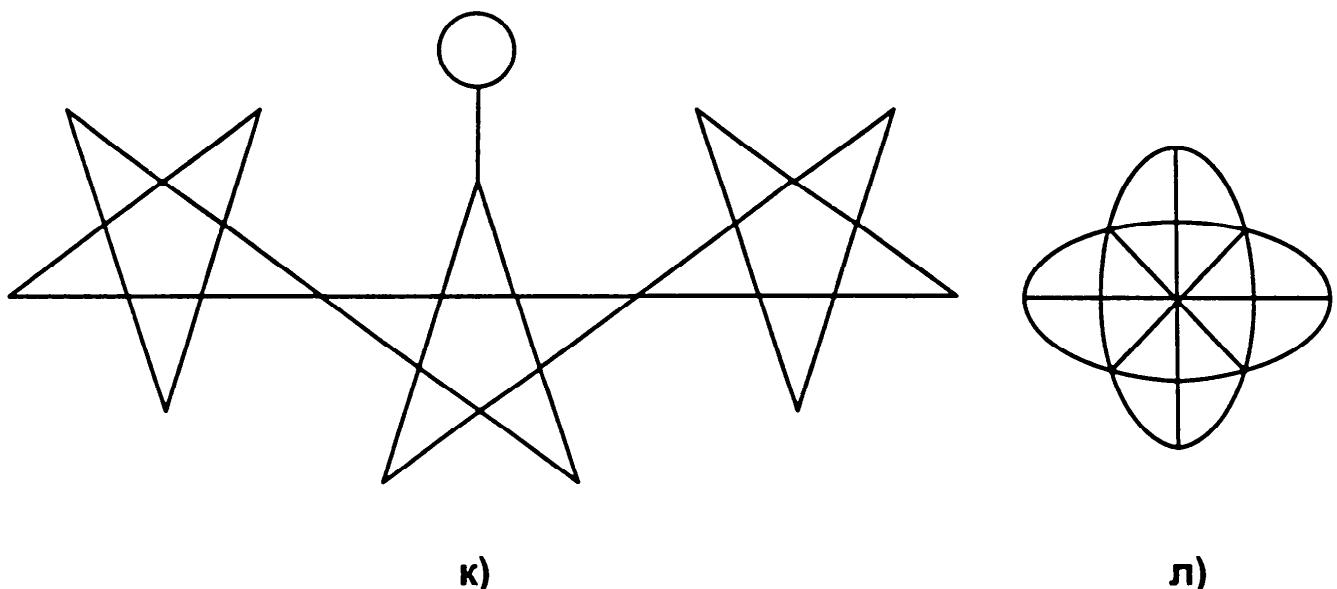


з)



и)

Рис. к задаче 5.9

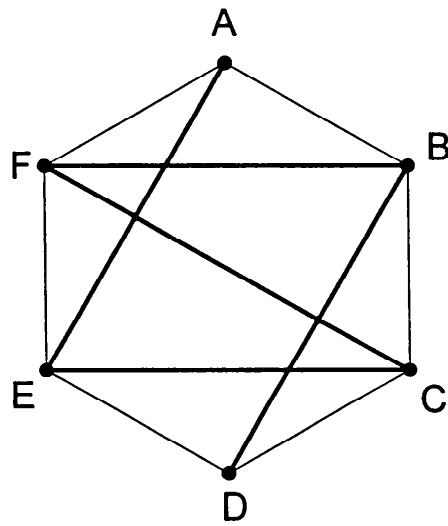
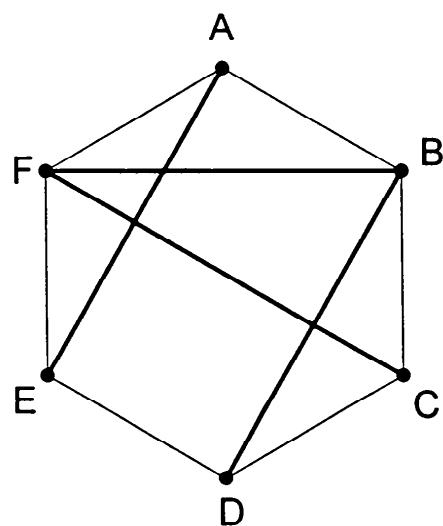


### Рис. к задаче 5.9 (окончание)

Если можно, нарисуйте фигуры указанным способом.

**5.9<sub>1</sub>.** В предыдущей задаче определите наименьшее число росчерков, которыми можно изобразить каждую фигуру.

**5.10.** Можно привязать к гвоздям  $A, B, C, D, E, F$  веревку так, как показано на рисунке, не разрезая ее и не сдваивая?



a)

б)

### **Рис. к задаче 5.10**

**5.11.** В небольшой роще находится заяц. Выскочив из норы и бегая от дерева к дереву, он оставил следы и, наконец, спрятался под деревом.

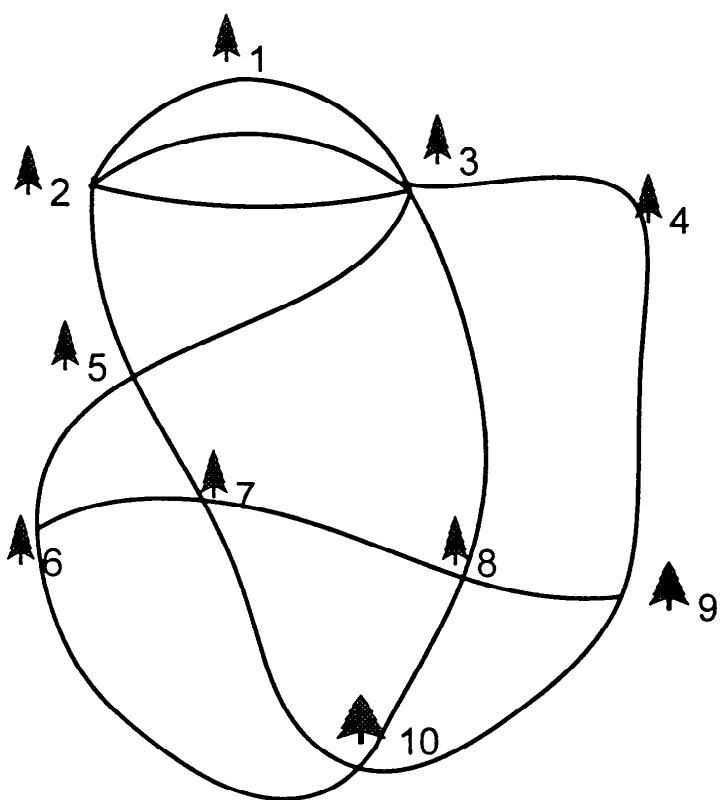


Рис. к задаче 5.11

Опытный охотник определил, что между каждыми двумя деревьями заяц пробегал не более раза. Под каким деревом находится нора зайца, и где сейчас он спрятался?

**5.12.** Из какого минимального числа кусков проволоки можно спаять каркас куба? (Толщина всех ребер каркаса должна быть одинаковой.)

**5.13.** Какова должна быть минимальная длина куска проволоки, для того чтобы, не ломая ее, а только перегибая, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

**5.14.** Определите наименьшее число маршрутов, которое можно провести в Зеленом городе при заданных в книге условиях, если разрешить автобусам ездить по набережной. Проведите эти маршруты.

**5.15\*.** Докажите теорему 5.1.

**5.16\*.** В одном приморском курортном городе улицы настолько узкие, что в городе установлено одностороннее транспортное движение. При этом оказалось, что число улиц, по которым можно въехать на каждый перекресток, равно числу улиц, по которым можно из него выехать. Докажите, что можно предложить такой маршрут патрулирования города полицейской машиной, который

начинается и оканчивается в одном месте и проходит через каждый участок улиц между двумя перекрестками ровно один раз.

**5.17.** Докажите теорему 5.2.

**5.17\*.** Почтальон Печкин должен получить газеты, журналы и письма на почте, разнести их по всем улицам своего поселка и вернуться в почту. (На рисунке изображена схема поселка, буквой П обозначена почта, а цифры обозначают длины улиц.) Конечно, почтальон при этом желает пройти как можно меньший путь. Помогите ему в этом.

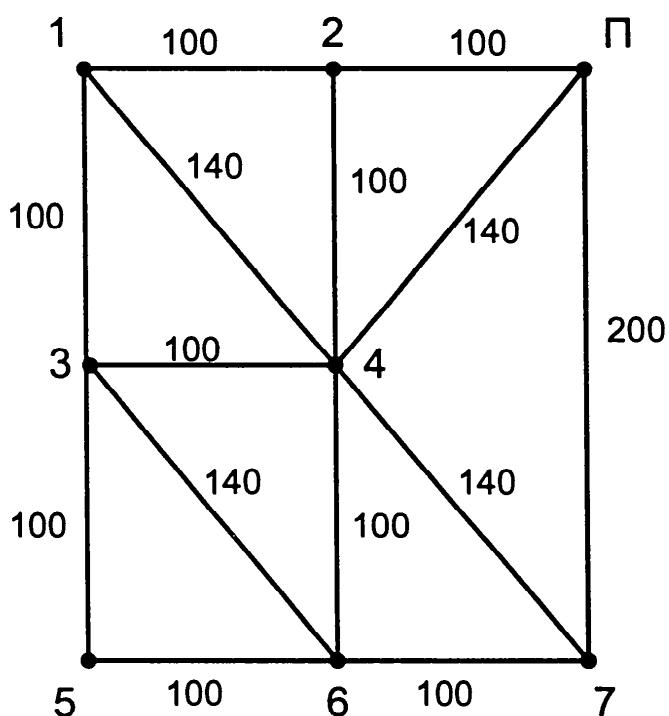


Рис. к задаче 5.17

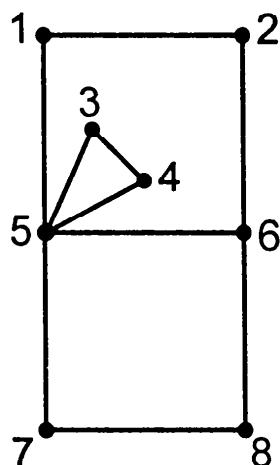
## К главе 6

Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, что никаких его два ребра (за исключением ребер, выходящих из общей вершины) не имеют общих точек.

Граф, нарисованный таким образом на плоскости, называется *плоским*.

Рассмотрим плоский граф. Часть плоскости, ограниченная ребрами графа, любые две точки которой можно соединить кривой, не имеющей общих точек с ребрами, называется *гранью* плоского графа.

Плоский граф, изображенный на рисунке ниже, имеет 4 грани: грань  $f_1$  ограничена семью ребрами  $(1, 2), (2, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 1)$ ; грань  $f_2$  — тремя ребрами —  $(5, 3), (3, 4), (4, 5)$ ; грань  $f_3$  — четырьмя ребрами —  $(5, 6), (6, 8), (8, 7), (7, 5)$ ; грань  $f_4$  — шестью ребрами —  $(1, 2), (2, 6), (6, 8), (8, 7), (7, 5), (5, 1)$ . Грань, которая имеет бесконечную площадь, называется *внешней* гранью. В нашем примере это грань  $f_4$ .

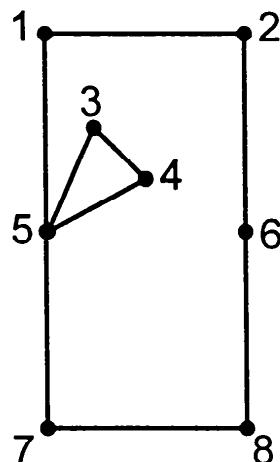


Обозначим через  $v$  — число вершин графа, через  $p$  — число его ребер, через  $g$  — число его граней.

**Теорема Эйлера.** Для любого связного плоского графа число его вершин, ребер и граней связано соотношением

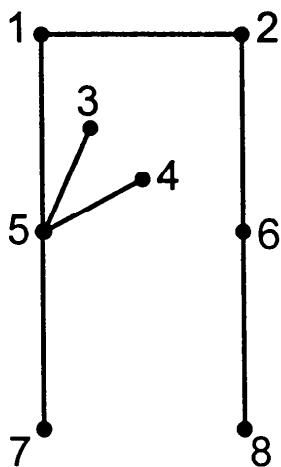
$$v - p + g = 2.$$

**Доказательство.** Возьмем произвольный связный плоский граф, например, изображенный на предыдущем рисунке. Будем по-очередно удалять ребра, разделяющие две грани. Сначала удалим, например, ребро  $(5, 6)$ .



При этом число вершин графа не изменится, а число ребер и число граней уменьшится на единицу. Поэтому для нового графа значение  $v - p + g$  останется прежним.

Подобным образом можно последовательно удалить ребра до тех пор, пока в графе не останется циклов.



После каждой из этих операций число вершин сохранялось, а число ребер и граней каждый раз уменьшалось на единицу. Поэтому для всех получаемых в результате операций графов значение  $v - p + g$  не менялось.

Теперь начнем по очереди удалять вершины, имеющие степень 1, вместе с выходящим из них ребром. Удалим, например, вершину 7 с ребром (7,5). При каждом таком удалении число вершин и число ребер уменьшается на единицу. Поэтому для всех получаемых в результате операций графов значение  $v - p + g$  не меняется.

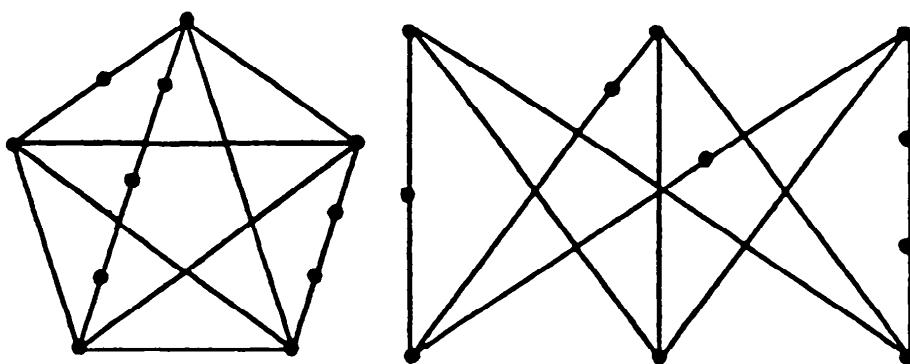
В конце концов, получим граф, состоящий из одной вершины. Для него  $v = 1$ ,  $p = 0$ ,  $g = 1$ , поэтому  $v - p + g = 1 - 0 = 1 = 2$ . Так как значение  $v - p + g$  не менялось для всех промежуточных графов, то оно было равно 2 и для исходного графа.

Теорема доказана.

Формула, связывающая число вершин, ребер и граней связного плоского графа, называется *формулой Эйлера*.

Графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  не являются планарными.

Разобьем некоторые из ребер графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$  новыми вершинами. Получившиеся графы будем называть соответственно *графами типов  $K_5$  и  $K_{3,3}$* .



**Теорема Понtryгина—Куратовского (1927 г.).** Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, изоморфных графам типов  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

### □ Задачи

**6.1.** Покажите, что приведенные ниже графы будут планарными и нарисуйте их нужным образом на плоскости.

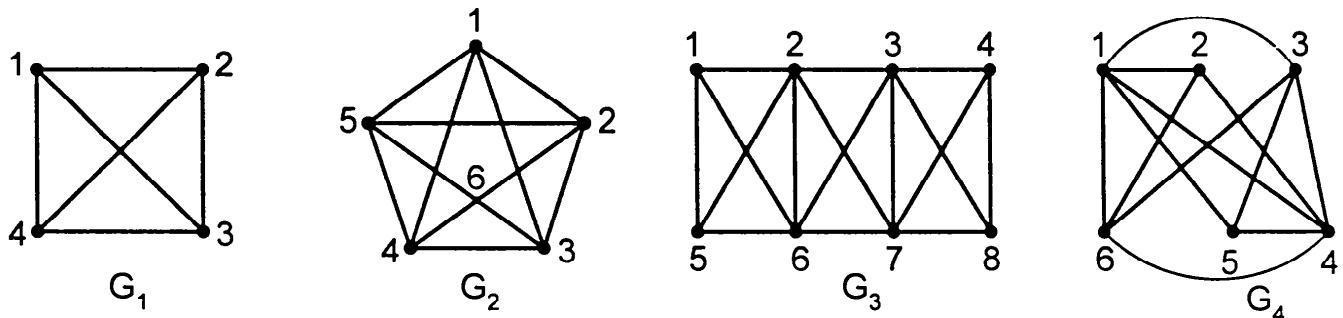


Рис. к задаче 6.1

**6.2.** Почему нарисованные ниже графы не являются планарными?

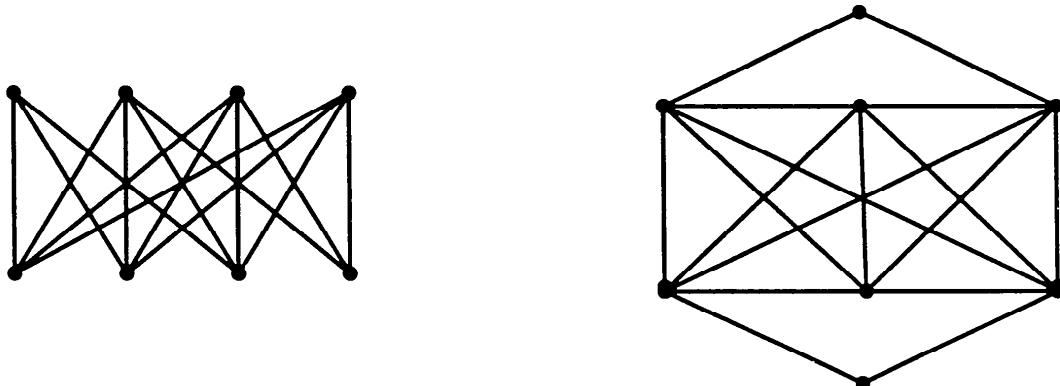


Рис. к задаче 6.2

**6.3.** Докажите, что граф вершинами и ребрами которого являются вершины и ребра куба будет планарным.

**6.4.** Сколько граней имеют графы, плоские изображения которых построены в задаче 6.1?

**6.5.** Изобразите представленные ниже графы, так чтобы грани, ограниченные ребрами  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$  и  $(3, 1)$  оказались внешними.

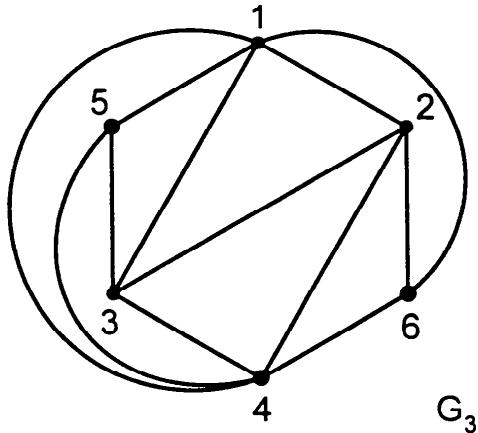
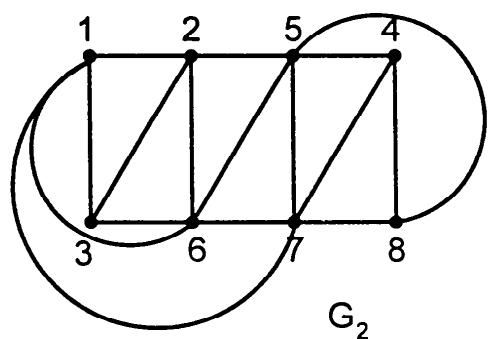
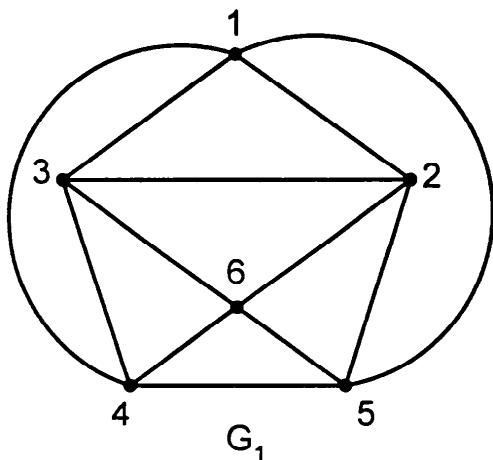


Рис. к задаче 6.4

**6.6.** Проверьте, выполняется ли для изображенных ранее плоских графов формула Эйлера.

**6.7\*.** Докажите с помощью формулы Эйлера, что граф  $K_5$  не является планарным.

**6.8\*.** Докажите с помощью формулы Эйлера, что граф  $K_{3,3}$  не является планарным.

**6.9.** На плоскости даны  $p$  прямых, из которых каждая пересекается с каждой, и никакие три не проходят через одну точку. На сколько областей разбивают плоскость эти прямые? Решите эту

задачу при: а)  $p = 5$ ; б)  $p = 6$ ; в)  $p = 10$ ; г)  $p = 100$ ; д) при произвольном  $p$ .

**6.10.** На какое наибольшее число областей могут разбить плоскость два треугольника?

**6.11\*.** Может ли существовать такая пятерка государств, в которой каждая пара государств соседствует друг с другом? (Граница каждого государства является замкнутой кривой. Соседними считаются государства, имеющие общую границу ненулевой длины.)

## К главе 8

Множество попарно несмежных ребер графа называется *паросочетанием*.

Пусть  $M$  — паросочетание в графе  $G$  и цепь  $L$  соединяет две вершины, из которых не выходят ребра паросочетания  $M$ . Если при этом в цепи чередуются ребра, не принадлежащие и принадлежащие паросочетанию  $M$ , то цепь называется *увеличивающей относительно  $M$*  цепью.

---

**Теорема.** Паросочетание  $M$  в графе имеет наибольшее число ребер тогда и только тогда, когда в этом графе нет увеличивающих относительно  $M$  цепей.

---

Пусть  $G$  — двудольный граф,  $X$  и  $Y$  — его доли,  $p$  — число вершин в доле  $X$ .

---

**Теорема.** Паросочетание в двудольном графе  $C$ , содержащее  $r$  ребер, существует тогда и только тогда, когда для любого числа  $k$  ( $1 \leq k \leq p$ ) любое множество из  $k$  произвольных вершин, принадлежащих  $X$ , имеет не менее  $k$  различных смежных вершин, принадлежащих  $Y$ .

---

Последняя теорема тесно связана с одной интересной и важной теоремой комбинаторики.

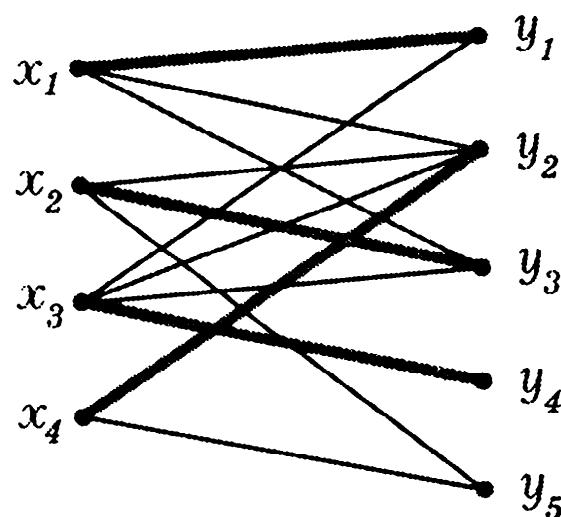
Пусть  $E$  — конечное непустое множество, а  $S = (S_1, S_2, \dots, S_p)$  — семейство его подмножеств, т. е. каждое  $S_i$  — непустое подмноже-

ство множества  $E$ . Подмножество  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$  называется *трансверсалю* (или *системой различных представителей*) семейства  $S$ , если все элементы множества  $T$  различны и  $t_i \leftarrow S_i$  для любого индекса  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ).

**Теорема Холла (1935 г.).** Пусть  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_a\}$  — непустое конечное множество,  $S = (S_1, S_2, \dots, S_p)$  — семейство его подмножеств. Для существования трансверсали семейства необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $k$  ( $1 \leq k \leq p$ ) объединение любых  $k$  подмножеств  $S$  содержало не менее  $k$  различных элементов.

Рассмотрим связь между двудольными графами и их паросочетаниями, с одной стороны, и семействами подмножеств и их трансверсальями — с другой. Построим двудольный граф  $G$ , вершины доли  $X$  которого будут соответствовать семействам  $S$ , вершины доли  $Y$  — элементам множества  $E$ , а вершина  $X_T$  будет соединена ребром с вершиной  $y_i$  тогда и только тогда, когда  $e_i \leftarrow S_i$ . Очевидно, что существование трансверсали семейства  $S$  эквивалентно существованию в графе  $G$  паросочетания, содержащего  $p$  ребер.

**Пример:**  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;  $S_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $S_2 = \{2, 3, 5\}$ ,  $S_3 = \{1, 3, 4\}$ ,  $S_4 = \{2, 5\}$ ,  $T = \{1, 3, 4, 2\}$



□ Задачи

**8.1.** Постройте в приведенных графах все паросочетания.

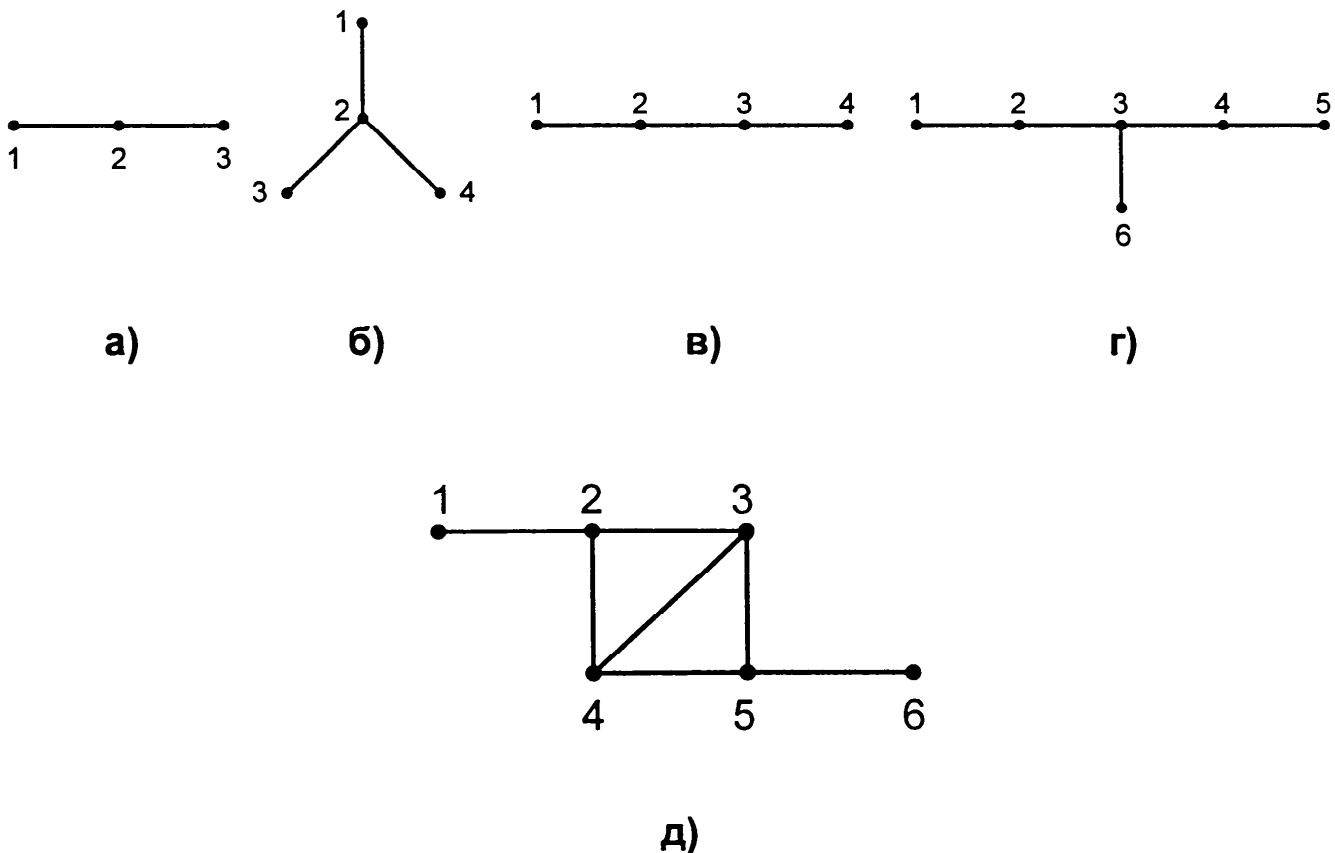


Рис. к задаче 8.1

**8.2.** Постройте в графах, приведенных в задаче 8.1, все такие паросочетания, к которым невозможно так добавить хотя бы одно ребро, чтобы новое множество ребер также оказалось паросочетанием.

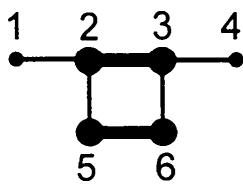
**8.3.** Какое наибольшее число ребер паросочетания может быть в графе с: а) 10; б) 15 вершинами?

**8.4.** Покажите, что разность между числом вершин графа и числом ребер в его наибольшем паросочетании может быть сколь угодно большой.

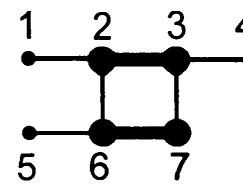
**8.5.** В приведенных ниже графах с заданными паросочетаниями укажите увеличивающие относительно паросочетаний цепи.



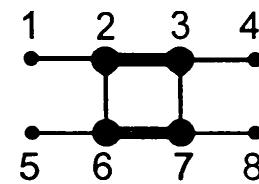
а)



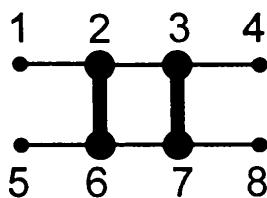
б)



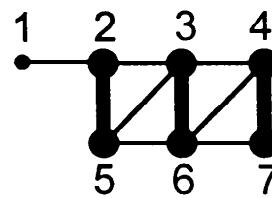
в)



г)



д)



е)

Рис. к задаче 8.5

**8.6.** Увеличьте число ребер в паросочетаниях в графах, представленных в предыдущей задаче, используя найденные при ее решении увеличивающие относительно паросочетаний цепи.

**8.7.** Докажите, не используя алгоритм из главы 8, что в приведенных ниже графах не может быть паросочетания, содержащего 7 ребер. Постройте в графах паросочетания с наибольшим числом вершин.

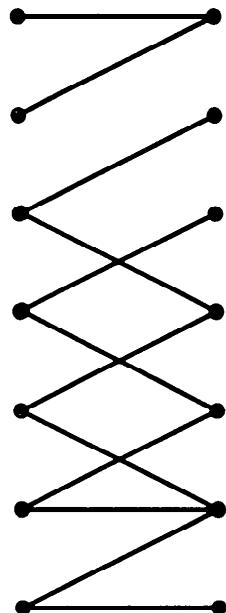
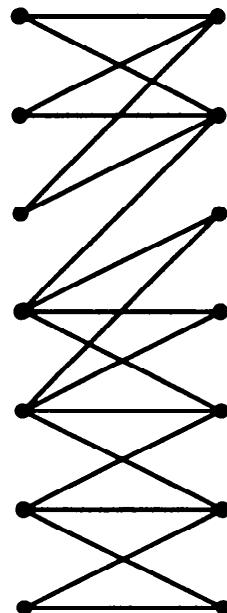
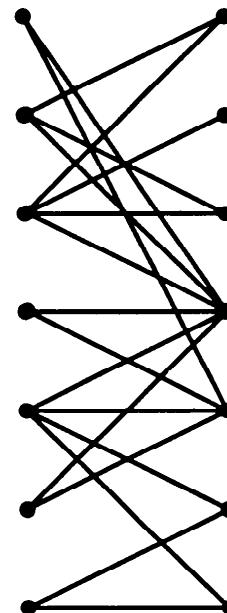
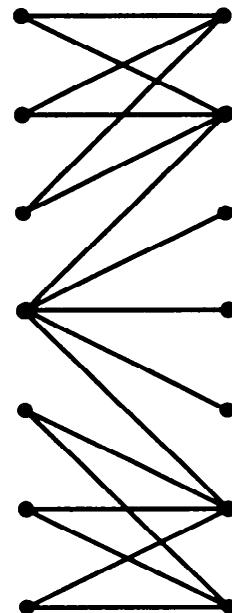
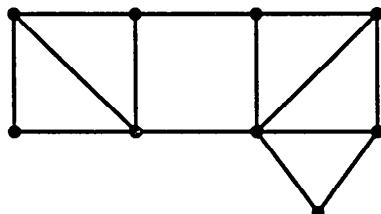
 $G_1$  $G_2$  $G_3$  $G_4$ 

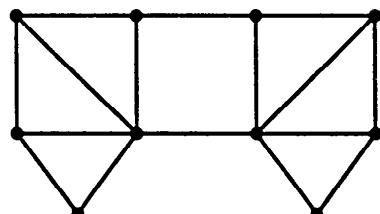
Рис. к задаче 8.7

**8.8.** Добавьте к графикам, приведенным в предыдущей задаче наименьшее количество ребер, так чтобы в получившихся графах были паросочетания, содержащие 7 ребер.

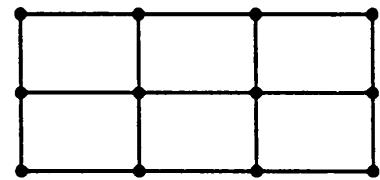
**8.9.** С помощью алгоритма из главы 8 найдите паросочетания с наибольшим числом ребер в предложенных ниже графах:



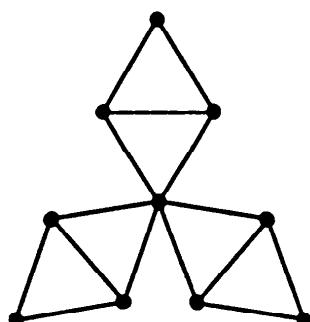
а)



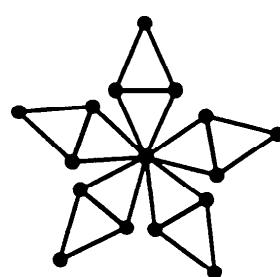
б)



в)



г)



д)

Рис. к задаче 8.9

**8.10.** Для участия в водном походе руководитель должен рассадить 10 туристов по пяти двухместным лодкам. Пары, которые могут плыть в одной лодке, определены таблицей:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+			+					
2	+				+	+				
3				+		+	+			
4			+					+		
5	+	+				+				
6		+	+		+		+	+	+	
7			+	+		+				
8						+			+	+
9						+		+		+
10								+	+	

Докажите, что как бы руководитель похода не старался, ему не удастся составить 5 экипажей.

**8.11.** Из условия предыдущей задачи следует, что невозможно составить 5 экипажей для плавания. Добавьте к условиям предыдущей задачи еще одну пару для совместного плавания в общей лодке так, чтобы из участников похода можно было составить 5 экипажей.

**8.12.** На математической олимпиаде предлагалось 16 задач. Оказалось, что каждый из 16 школьников решил две задачи, и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно организовать разбор задач таким образом, что каждый школьник расскажет одну из решенных им задач.

**8.10\*.** На вечере первые два танца каждый из юношей танцевал с одной из своих знакомых девушек, возможно, первый танец с одной, а второй — с другой. Некоторые танцевали два танца, некоторые — один, а очень застенчивые не танцевали ни разу. Докажите, что третий танец могут танцевать все юноши, танцевавшие первый танец, и все девушки, танцевавшие второй.

**8.11\*.** Руководитель водного похода сформировал 6 двухместных экипажей. Из оставшихся туристов он не может составить еще хотя бы одну пару, так как некоторые участники не могут плыть в одной лодке. Докажите, что как бы он не старался, ему не удастся составить более 12 экипажей.

**8.13.** Постройте, где возможно, трансверсали множеств:

а)  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $S_1 = \{1, 2\}$ ,  $S_2 = \{2, 3\}$ ,  $S_3 = \{3, 4\}$ ,  $S_4 = \{4, 5\}$ ;

б)  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $S_1 = \{1, 3\}$ ,  $S_2 = \{1, 3\}$ ,  $S_3 = \{1, 2, 4, 5\}$ ,  $S_4 = \{1, 3\}$ ;

в)  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $S_1 = \{1\}$ ,  $S_2 = \{1, 3, 5\}$ ,  $S_3 = \{2, 3, 6\}$ ,  $S_4 = \{4, 5\}$ ,  $S_5 = \{4, 6\}$ ;

г)  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $S_1 = \{1, 3, 7\}$ ,  $S_2 = \{2, 4, 6\}$ ,  $S_3 = \{2, 4, 6\}$ ,  $S_4 = \{2, 4\}$ ,  $S_5 = \{4, 6\}$ ,  $S_6 = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ ;

д)  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $S_1 = \{1, 3, 5\}$ ,  $S_2 = \{3, 4, 6\}$ ,  $S_3 = \{2, 8\}$ ,  $S_4 = \{1, 2, 4, 5\}$ ,  $S_5 = \{3, 4, 6, 7\}$ ,  $S_6 = \{4, 5, 6, 8\}$ ,  $S_7 = \{7, 8\}$ ,  $S_8 = \{6, 7\}$ .

# *Ответы, указания, решения*

## **Глава 1**

**1.1. Указание.** В случае отрицательного ответа следует обосновать ответ. В случае положительного ответа предложить возможную схему знакомств.

*Ответ.* Высказывание Незнайки не верно для вариантов 1, 5, 7, 10, 17 и верно для остальных вариантов.

**1.2. Решение.** Поставим в соответствие каждому игроку точку плоскости — вершину графа. Если два игрока встретились между собой, то соединим соответствующие вершины линией — ребром графа. Таким образом, мы построили *граф встреч* игроков. Пусть в этом графе  $G$  вершина 1 соответствует Ване, вершина 2 — Толе, вершина 3 — Леше, вершина 4 — Диме, вершина 5 — Семену, вершина 6 — Илье и вершина 7 — Жене.

Поскольку Ваня провел 6 встреч, то степень вершины 1 равна 6, и эта вершина соединим со всеми вершинами графа. Степень вершины 2 должна быть равна 5, так как Толя провел 5 встреч. Из вершины 2 уже выходит одно ребро. Оставшиеся 4 ребра проведем из 2 в вершины 3, 4, 5 и 6, поскольку вершина 7, степень которой равна 1 (Женя провел одну встречу), соединена уже ребром с вершиной 1.

Теперь вершины 3, 4, 5 и 6 имеют степени: 2. Вершины 5 и 6, соответствующие Семену и Илье, должны иметь такие степени, так как эти участники провели по две встречи. Вершины 3 и 4 соединим ребром, поскольку они должны иметь степени 3, так Леша и Дима провели по 3 встречи.

Это означает, что граф  $G$ , описывающий встречи участников, имеет вид:

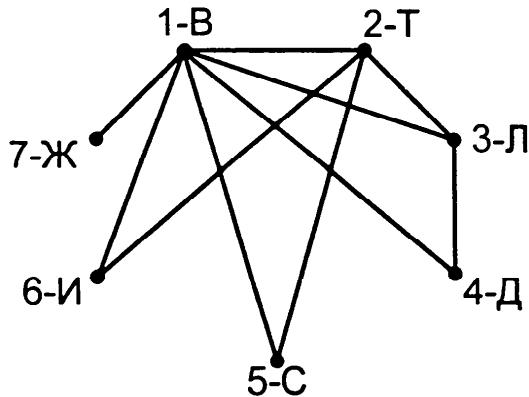


Рис. к ответу 1.2

Поэтому Леша, которому соответствует вершина 3, встретился с Ваней, Толей и Димой, которым соответствуют вершины 1, 2 и 4.

**1.3. Ответ.** Вова сыграл с Мишой, Петей и Сашей.

**1.4. Ответ.** Ваня сыграл с Мишой и Сашей.

**1.5. Ответ.** Встречи, проведенные школьниками, описывает следующий граф:

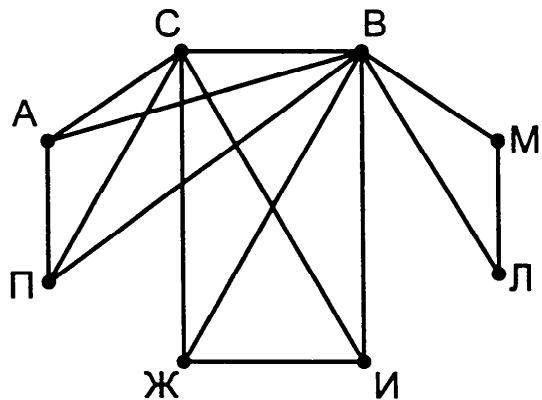


Рис. к ответу 1.5

**1.6. Ответ.** Андрей и Саша сыграли или по 3 партии (если играли друг с другом), или по 2 партии (или не играли друг с другом).

**1.7. Решение.** Рассмотрим два случая: 1) Ваня и Миша не играли друг с другом; 2) Ваня и Миша сыграли друг с другом.

1) В этом случае каждый из остальных участников провел по 2 встречи:

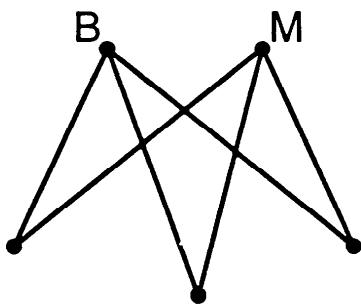


Рис. к ответу 1.7 (1)

2) Разобьем этот случай на 2 подслучая: 2а) существует участник, не встречавшийся ни с Ваней, ни с Мишой; 2б) каждый из участников встретился или с Ваней, или с Мишой (а может и с каждым из них).

2а) Этот случай невозможен, поскольку проведя шестое ребро, мы получим противоречие с условием задачи, так как будет еще один участник также сыгравший 3 партии:

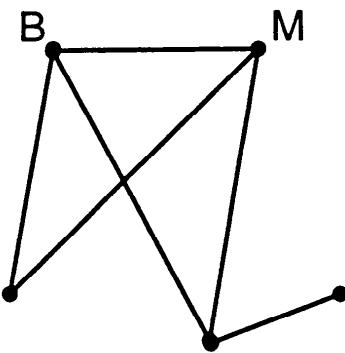


Рис. к ответу 1.7 (2)

2б) Есть только одна возможность провести шестое ребро, не нарушая условий задачи:

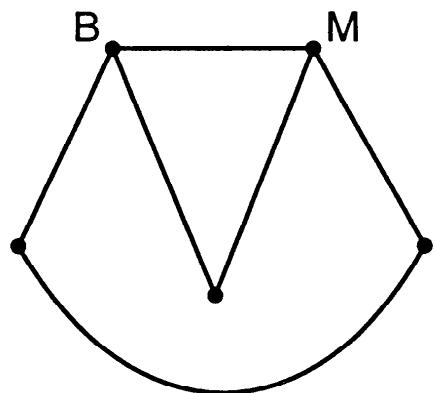
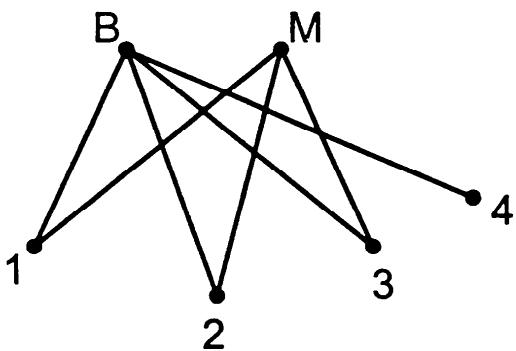


Рис. к ответу 1.7 (3)

*Ответ.* Наименьшее число встреч, проведенных участником, равно 2.

**1.8. Указание.** Построим граф, показывающий встречи Вани и Миши:



**Рис. к ответу 1.8**

Нужно провести еще 3 ребра, соединяющих некоторые пары вершин, помеченные числами 1, 2, 3, 4. В каждом из случаев проведения этих ребер появится вершина, из которой будет выходить 4 ребра.

*Ответ.* Существует участник, кроме Вани, проведший встреч больше, чем Миша.

**1.9. Ответ.** 2 матча.

**1.10. Указание.** У графов занумеруйте вершины.

**1.11. Ответ.** Для случаев а), б), в), д), ж), и) графы не существуют, для остальных случаев — существуют.

**1.12. Решение.** Так как любой игрок провел от одной до трех встреч, то рассмотрим следующие случаи:

а) Ваня и Леша провели по одной встрече, другие игроки — 2 и 3 встречи;

б) Ваня и Леша провели по две встречи, другие игроки — 1 и 3 встречи;

в) Ваня и Леша провели по три встречи, другие игроки — 1 и 2 встречи.

Случаи а) и в) невозможны по лемме о рукопожатиях.

Возможность случая б) показывает следующий граф:

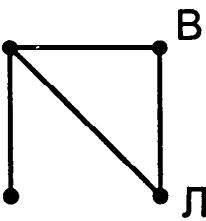


Рис. к ответу 1.12

*Ответ.* Ваня и Леша провели по 2 встречи.

**1.13. Указание.** Отбросьте случаи, которые не допускает лемма о рукопожатиях. Исследуйте оставшиеся возможности и покажите, что только для одной из них существует граф с данными степенями вершин.

*Ответ.* Ваня и Леша провели по 2 встречи.

**1.14. Решение.** Предположим, что на вопрос, поставленный в задаче, ответ положителен. Построим граф  $G$ , в котором вершины, соответствующие школьникам, соединены ребром тогда и только тогда, когда эти школьники обменялись открытками. Тогда граф  $G$  будет иметь 11 вершин степени 3, что невозможно по лемме о рукопожатиях.

**1.15. Решение.** Построим граф  $G$ , в котором вершины изображают отрезки, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им отрезки пересекаются. Предположим, что можно нарисовать отрезки указанным способом. Тогда граф будет иметь 9 вершин степени 3, что невозможно, по лемме о рукопожатиях.

**1.16. Указание.** Воспользуйтесь леммой о рукопожатиях.

**1.17. Решение.** Построим граф  $G$ , в котором острова будут соответствовать вершинам, а мосты между ними — ребрам.

Пусть на берег не ведет ни один мост. Тогда все вершины графа  $G$  будут иметь нечетную степень, и сумма их степеней будет нечетной. Но по лемме о рукопожатиях эта сумма должна быть четной. Получено противоречие. Следовательно, хотя бы один из мостов должен идти на берег.

**1.18. Решение.** Построим граф  $G$ , в котором озера будут соответствовать вершинам, а каналы — ребрам. По условию задачи

степень каждой вершины графа  $G$  не меньше 3. По лемме о рукопожатиях число ребер (каналов) равно сумме степеней вершин, деленной на 2. Минимальное число ребер получается, если степень одной вершины будет равна 4, а остальных вершин — 3. Поэтому в парке  $(4 \times 1 + 3 \times 8) : 2 = 14$  каналов.

*Указание.* Следует построить граф, имеющий требуемые степени вершин.

**1.19. Решение.** Построим граф  $G$ , в котором вершины будут обозначать марсиан, и две вершины соединены ребром, если соответствующие им марсиане взялись за руки. Тогда степень вершины будет соответствовать количеству рук марсианина, а сумма степеней — числу рук, участвующих в танце. По лемме о рукопожатиях граф не может иметь 7 вершин нечетной степени. Поэтому наибольшая возможная сумма степеней графа  $G$  получится, если граф будет иметь 6 вершин степени 3 и одну вершину степени 2. У танцующих 20 рук.

*Указание.* Следует построить граф, имеющий требуемые степени вершин.

**1.20. Решение.** Построим граф, как в предыдущей задаче. Наименьшая возможная сумма степеней графа  $G$  получится, если граф будет иметь 6 вершин степени 5 и одну вершину степени 6. Поэтому у танцующих 36 рук.

*Указание.* Следует построить граф, имеющий требуемые степени вершин.

## Глава 2

**2.1. Ответ.** Графы  $G_1$  и  $G_5$  — полные, остальные нет.

**2.2. Указание.** Нужно построить полный граф, в котором вершины соответствуют людям, а ребра — рукопожатиям, и подсчитать число ребер в нем.

*Ответ.* а) 6; б) 15; в) 28; г) 45; д) 105; е) 190; ж) 231; з) 780; и) 3321; к) 4950.

**2.3. Указание.** Подберите полный граф, у которого число ребер будет равно числу встреч команд.

*Ответ.* а) 5; б) 8; в) 10; г) 12; д) 14; е) 16; ж) 20; з) данное число игр невозможно.

**2.4. Указание.** После вычисления количества пересечений необходимо представить рисунок, показывающий, что оно возможно.

*Ответ.* 15.

**2.5. Указание.** Если в турнире участвовало 8 человек, то нужно было бы сыграть не более 28 партий (в случае, когда каждый участник сыграл все партии) и не менее 21 одной партии (в случае, когда один участник выбыл).

*Ответ.* 8; 3.

**2.6. Ответ.** а) 11, 5; б) 12, 7; в) 16, 5; г) 20, 0.

**2.7. Решение.** Если в турнире участвовало 16 шахматистов, то число сыгранных ими встреч не должно превосходить 120, если 15, то — 105, если 14, то — 91. Поэтому в турнире играли или 16, или 15 шахматистов. Во втором случае 13 шахматистов, закончивших турнир, провели между собой  $13 \times 12/2 = 78$  партий. Следовательно, выбывшие вместе сыграли 16 встреч, т. е. кто-то из них провел больше половины возможных партий. В первом случае выбывшие провели вместе 3 встречи, что удовлетворяет условию задачи. Если они не встречались между собой, то один из них сыграл одну партию, другой две. А сколько встреч они могли провести, если встречались между собой?

*Ответ.* 16.

**2.8. Ответ.** 15.

**2.9. Ответ.** 20.

**2.10. Решение.** Если в турнире участвовало 16 шахматистов, то число сыгранных ими партий не должно превосходить  $16 \times 15/2 = 120$ . Поэтому в турнире играло больше 16 человек. Рассмотрим следующие случаи.

а) Турнир начало 17 участников. Тогда 14 из них, закончивших турнир, провели между собой  $14 \times 13/2 = 91$  встречу, а выбывшие провели вместе 39 встреч, следовательно кто-то из них провел больше половины турнира.

б) Турнир начало 18 участников. Тогда 15 из них, закончивших турнир, провели между собой  $15 \times 14/2 = 105$  встреч, а выбывшие провели вместе 25 встреч. Однако участники выбыли в первой половине турнира, поэтому они не могли вместе провести более 24 встреч.

в) Турнир начало 19 участников. Тогда 16 из них, закончивших турнир, провели между собой  $16 \times 15/2 = 120$  встреч, а выбывшие провели вместе 10 встреч. Каждый из них мог выбыть в первой половине турнира.

г) Турнир начало 20 участников. Тогда 17 из них, закончивших турнир, провели между собой  $17 \times 16/2 = 136$  встреч, т. е. больше, чем все участники нашего турнира.

*Ответ.* 19.

**2.11. Ответ.** Графы  $G_1$  и  $G_3$  — связные, имеют по одной компоненте. Графы  $G_2$  и  $G_4$  несвязные. У графа  $G_2$  две компоненты, у графа  $G_4$  три компоненты.

**2.12. Ответ.** Граф  $G_2$  — одно ребро, граф  $G_4$  — два ребра.

**2.13. Ответ.** При добавлении любого ребра граф  $G_2$  становится связным, в графе  $G_4$  можно добавить 2 ребра.

**2.14. Ответ.** Граф  $G_1$  — 6 ребер, граф  $G_3$  — 2 ребра.

**2.15. Ответ.** Граф  $G_1$  — 4 ребра, граф  $G_4$  — одно ребро.

**2.16. Решение.** Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют школьникам, а две вершины соединены ребром, если соответствующие школьники обменялись адресами. Из каждой вершины графа выходит не менее 26 ребер. Для решения задачи мы должны доказать, что любой граф с 53 вершинами и со степенями вершин не меньшими, чем 26, является связным.

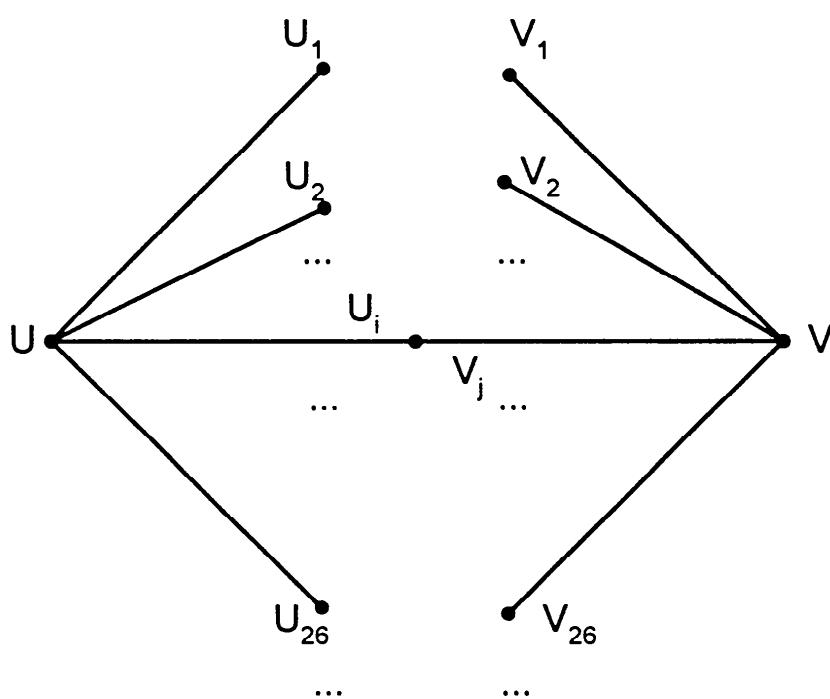


Рис. к ответу 2.16

Пусть вершина  $U$ , обозначающая Ваню, соединена ребрами с вершинами  $U_1, U_2, \dots, U_{26} \dots$ , а вершина  $V$ , обозначающая Мишу, соединена ребрами с вершинами  $V_1, V_2, \dots, V_{26} \dots$ . Среди вершин  $(U_1, U_2, \dots, U_{26}, \dots)$  и  $(V_1, V_2, \dots, V_{26} \dots)$  обязательно найдется общая, так как в противном случае граф будет содержать не менее 54 вершин (см. рисунок), в то время как в лагере отдыхало 53 школьника.

Это означает, что построенный граф связный, и Иван узнает адрес Николая.

**2.17. Решение.** Построим граф, поставив в соответствие городам страны вершины графа, а авиалиниям — ребра. Вообще говоря, граф может оказаться несвязным. Нужно доказать, что вершины графа, соответствующие столице и городу Дальнему, принадлежат одной компоненте графа. Это вытекает из следствия из леммы о рукопожатиях, так как в противном случае компоненты, содержащие вершины, обозначающие столицу и город Дальний, будут иметь ровно по одной вершине нечетной степени. Поэтому нужные нам вершины будут принадлежать одной компоненте графа, и из столицы можно долететь в Дальний.

**2.18. Ответ.** Двудольными не являются графы  $G_3, G_8, G_9$ . Остальные графы двудольные. Из них полные двудольные графы —  $G_2, G_6, G_7$ .

**Указание.** Постройте требуемое разбиение вершин графов на доли (см. рисунок ниже).

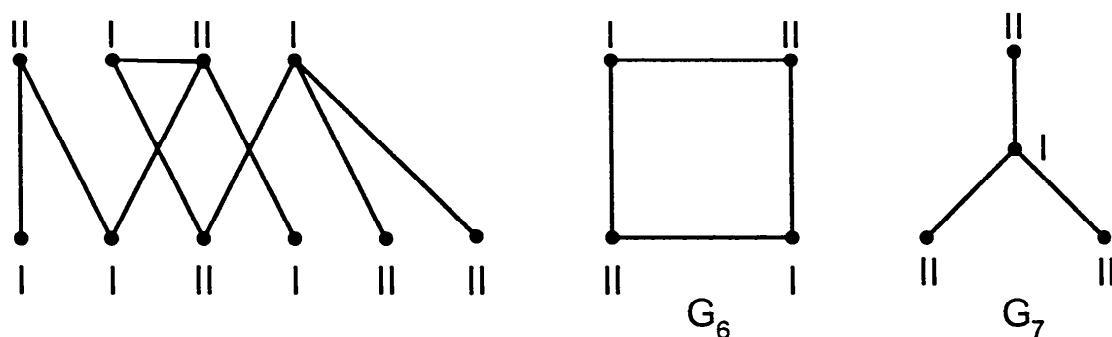


Рис. к ответу 2.18

**2.19. Ответ.** У графов  $G_3$  и  $G_8$  нужно удалить по одному ребру, у графа  $G_9$  — три ребра.

**2. 20. Ответ.** Граф  $G_1$  — 2, граф  $G_2$  — 0, граф  $G_4$  — 17, граф  $G_5$  — 16, граф  $G_6$  — 0, граф  $G_7$  — 0.

**Указание.** Если двудольный граф содержит много вершин, то для определения числа добавляемых ребер можно сначала определить число ребер в полном двудольном графе с теми же вершинами в долях, а затем вычесть имеющееся число ребер. Так, например, в графе  $G_5$  по 5 вершин в долях и 9 ребер. В полном двудольном графе  $K_{5,5}$  содержится  $5 \times 5 = 25$  ребер. Поэтому в графе  $G_5$  можно добавить  $(25 - 9) = 16$  ребер.

Поскольку граф  $G_4$  несвязный, то надо рассмотреть два возможных разбиения его вершин на доли (см. рисунок).

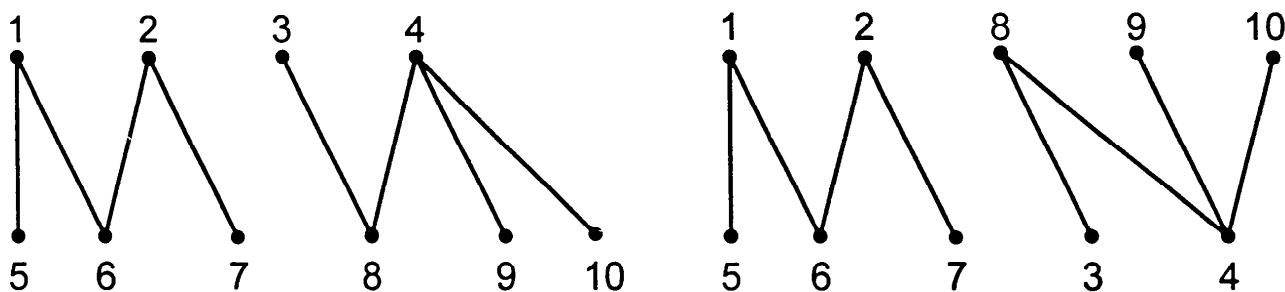


Рис. к ответу 2.20

**2.21. Ответ.** а) 9; б) 16; в) 25; г) 36) д) 64.

**2.22. Указание.** Подберите полный двудольный граф с одинаковым числом вершин в долях, имеющий указанное число ребер.

*Ответ.* а) 4; б) 5; в) 7; г) 9; д) данное число встреч невозможно.

**2.23. Ответ.** а) 6; б) 12; в) 24; г) 35; д) 64.

**2.24. Указание.** Подберите полный двудольный граф, имеющий указанное число ребер.

*Ответ.* а) 2 и 3; б) 2 и 4; в) 3 и 5; г) 3 и 7; д) 3 и 9; е) 2 и 6 или 3 и 4; ж) данное число рукопожатий невозможно.

**2.25. Указание.** Подберите полный двудольный граф, имеющий заданное число ребер.

*Ответ.* а) 4 и 4; б) 4 и 6; в) 5 и 6; г) 4 и 8; д) 9 и 9; е) 4 и 9 или 6 и 6; ж) данное число рукопожатий невозможно.

**2.26. Решение.** Поставим в соответствие ученикам вершины графа  $G$ , а если два ученика дружат, то соединим ребром соответствующие им вершины. Поскольку мы учитываем лишь дружбу учеников разных классов, то граф  $G$  будет двудольным.

Пусть 5«а» классу соответствует доля А графа, в которой  $m$  вершин, а 5«б»— доля В, в которой  $n$  вершин. Число ребер, выходящих из вершин доли А, равно  $3m$ , а из вершин доли В —  $3n$ . Поскольку это одни и те же ребра, то  $3m = 3n$ . Отсюда следует, что  $n = m$ , и число учеников в классах одинаково.

**2.27. Указание.** Постройте двудольный граф, как в предыдущей задаче и приравняйте числа ребер, выходящих из разных долей.

**2.28. Решение.** Построим двудольный граф, как в предыдущих задачах. Число ребер, выходящих из вершин соответствующих девочкам, равно  $16 \times 3 = 48$ . Если каждый мальчик дружит ровно с  $k$  девочками, то число ребер, выходящих из соответствующих мальчикам вершин, равно  $12 \times k$ . Так как это одни и те же ребра, то  $16 \times 3 = 12 \times k$ . Отсюда,  $k = 4$ .

*Ответ.* Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками.

**2.29. Решение.** Построим двудольный граф, в котором призеры соответствуют вершинам доли А, а задачи — вершинам доли В, и ребро между двумя вершинами будет тогда и только тогда, когда призер, соответствующий вершине из доли А, решил задачу, соответствующую вершине из доли В. Пусть в доле В  $k$  вершин. Тогда, как и в предыдущих задачах,  $3 \times 6 = k \times 2$ . Отсюда,  $k = 9$ .

*Ответ.* На олимпиаде было 9 задач.

**2.30. Решение.** Поставим в соответствие ученикам вершины графа  $G$ , а если два ученика дружат, то соединим ребром соответствующие им вершины. Поскольку мы учитываем лишь дружбу мальчиков и девочек, то граф  $G$  будет двудольным.

Пусть мальчикам соответствует доля А графа, в которой  $m$  вершин, а девочкам — доля В, в которой  $n$  вершин. Из вершин доли А выходит  $4m$  ребер, а из вершин доли В —  $3n$ . Так как это одни и те же ребра, то  $4m = 3n$  и  $n = 4/3m$ .

Из условий задачи следует, что  $23 \leq m + n \leq 32$ , отсюда  $23 \leq 7/3m \leq 32$ . Решив последнее неравенство и учитывая целочисленность  $m$ , получаем, что  $10 \leq m \leq 13$ . Поскольку  $m$  должно делиться на 3, то  $m = 12$ . Отсюда  $n = 16$ . В классе 28 учеников.

**2.31. Указание.** а) степень одной из вершин доли А равна 5, а в доле В только 4 вершины; б) и в) суммы степеней вершин долей А и В не равны.

В случае утвердительного ответа следует построить графы.

*Ответ.* а) нет; б) нет; в) нет; г) да; д) да.

**2.32. Указание.** а) Суммы степеней вершин долей должны быть одинаковы. Поэтому сумма степеней вершин каждой доли равна 9. Возможны следующие разбиения вершин на доли: 1) 6, 3 и 2, 2, 1, 1, 1, 1; 2) 6, 2, 1 и 3, 2, 1, 1, 1. Разбиение 6, 1, 1, 1 и 3, 2, 2, 1, 1 не подходит, так как вершина степени 6 должна быть соединена с шестью вершинами.

*Ответ.* а)

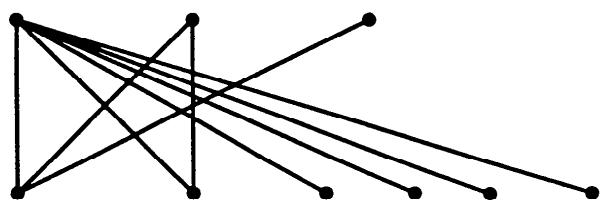
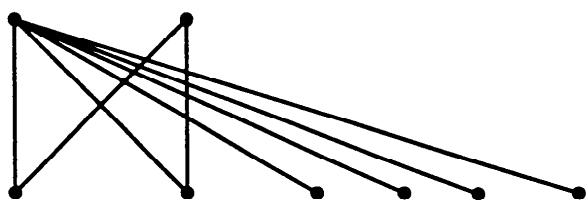


Рис. к ответу 2.32 (1)

б)

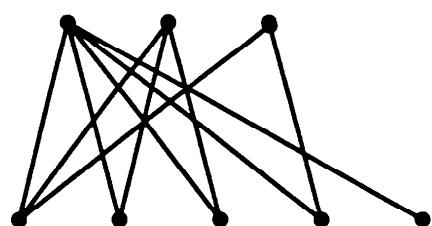
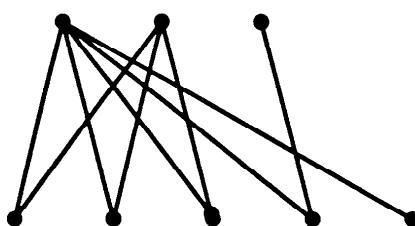


Рис. к ответу 2.32 (2)

**2.33. а) Указание.** Вспомните лемму о рукопожатиях.

В случае утвердительного ответа постройте граф.

**б) Решение.** Вершина степени 6 должна быть смежной с остальными шестью вершинами графа, т. е. вершина степени 6 и остальные вершины находятся в разных долях. Однако в этом случае суммы степеней вершин долей не будут равными. Поэтому граф с заданными степенями вершин не может существовать.

**в) Решение.** Вершины степени 5 не могут принадлежать одной доле двудольного графа, так как при этом суммы степеней долей не будут равны. Они не могут принадлежать и разным долям, поскольку в этом случае в одной из долей окажется меньше 5 вер-

шин. Поэтому граф с заданными степенями вершин не может существовать.

*Ответ.* а) нет; б) нет; в) нет; г) да.

**2.34. Решение.** После каждой встречи число участников уменьшается на одного. Поэтому для определения победителя нужно провести: а) 15; б) 17; в) 24; г) 47; д) 104 встречи.

**2.36. Ответ.** Одна из возможных схем соревнований изображена на рисунке.

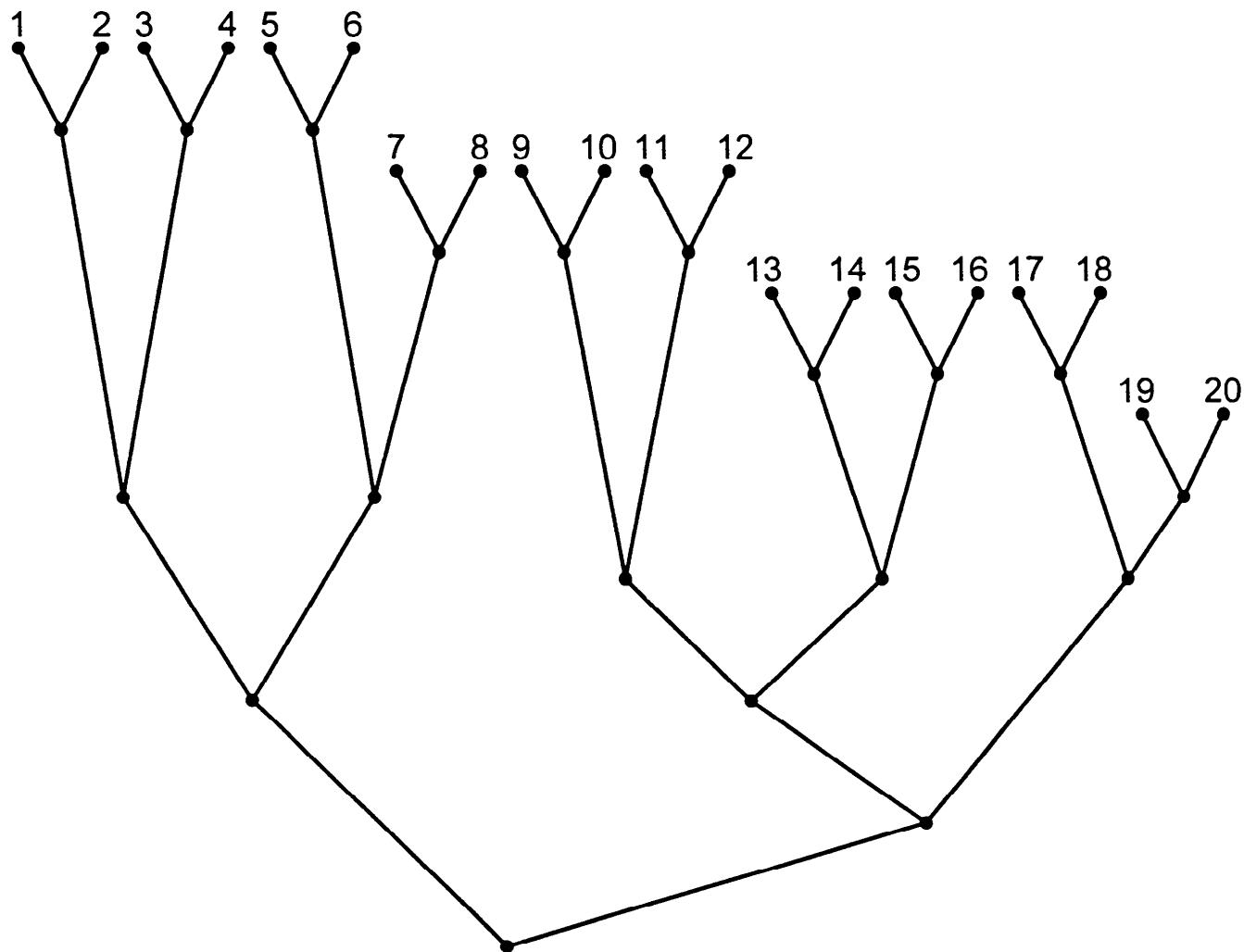


Рис. к ответу 2.36

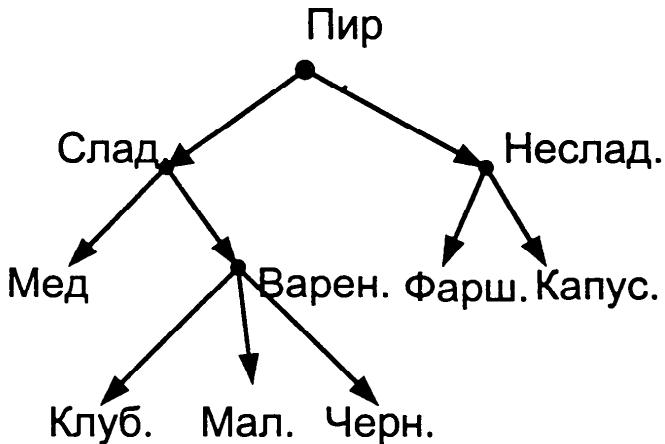
На соревнование уйдет 7 часов.

**2.37.**

*Ответ.* 8 часов.

## Глава 3

**3.2. Ответ.**



**Рис. к ответу 3.2**

**3.3. Указание.** Задайте ориентацию ребер графа.

**3.4. Ответ.** а) 8; б) 11.

**3.5. Ответ.** а) 10; б) 11.

**3.6. Указание.** В случае положительного ответа нужно построить орграфы.

*Ответ.* Орграфы для номеров 1, 2, 5 существуют, для номеров 3, 4, 6 — не существуют.

**3.7. Указание.** Измените ориентацию ребер.

**3.8. Ответ.** 3.

**3.9. Решение.** Поставим в соответствие командам вершины орграфа. Если команда  $A$  выиграла у команды  $B$ , то соединим соответствующие вершины дугой, идущей от вершины, обозначающей команду  $A$ , к вершине, обозначающей команду  $B$ . Полученный орграф  $G$  называется *турниром*. Он описывает результаты встреч команд. Полустепень исхода вершины орграфа равна числу побед соответствующей команды. Так как число ребер в графе  $K_5$  равно 10, то в орграфе  $G$  будет 10 дуг. Сумма полустепеней исхода вершин, соответствующих первой, второй и третьей командам, равна 8. Поэтому сумма полустепеней исхода вершин, соответствующих четвертой и пятой командам, равна 2. Поскольку только вторая и тре-

тья команды одержали по 2 победы, то четвертая и пятая команды одержали по одной победе. Вторая команда победила третью, а четвертая пятую, так как при равенстве очков более высокое место определяется победой в личной встрече. Третья команда, одержавшая две победы, выиграла у четвертой и пятой, а пятая единственную победу одержала над второй командой.

*Ответ.* 1. Результаты встреч между командами описывает следующий орграф.

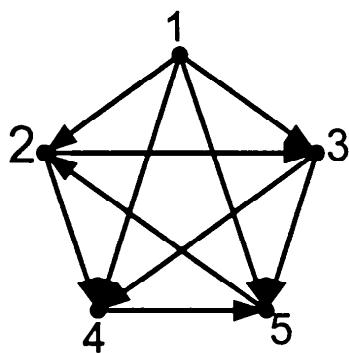


Рис. к ответу 3.9

**3.10. Решение.** Поставим в соответствие игрокам граф  $G$ , как в предыдущей задаче. Пусть  $a$  — полустепени исхода вершин орграфа, равные числу побед игроков. Тогда по теореме  $8a = \frac{8 \cdot 7}{2}$ . Отсюда  $a = 3,5$ , что невозможно.

**3.11. Решение.** Поставим в соответствие игрокам граф  $G$ , как в задаче 3.9. Пусть граф содержит  $n$  вершин и  $a$  — полустепени исхода вершин орграфа, равные числу побед игроков. Тогда по теореме  $na = \frac{n(n-1)}{2}$ . Отсюда  $a = \frac{n-1}{2}$ . Так как  $a$  — целое число, а

$n$  может принимать значения 6, 7, 8, то  $n$  равно 7, а равно 3.

*Ответ.* Число участников равно 7, каждый из них одержал по 3 победы. (*Указание.* Необходимо построить ориентированный граф для данной ситуации.)

**3.12. Решение.** Поставим в соответствие командам граф  $G$ , как в задаче 3.9. Число встреч, проведенных командами равно  $9 \times 8/2 = 36$ . Пусть команды, занявшие 2 последних места, одержа-

ла в сумме  $x$  побед. Тогда победительница турнира одержал  $2x$  побед, а каждая из остальных шести команд —  $(36 - 3x)/6 = 6 - x/2$ . Поскольку число побед целое, то  $x$  должно быть четным числом.

Если  $x = 2$ , то победительница одержала 4 победы, а остальные 6 команд по 5, что противоречит условию.

Если  $x = 4$ , то победительница одержала 8 побед, а остальные 6 команд по четыре. Поскольку команда, занявшая последнее место, одержала меньше всех побед, то она одержала одну победу, а команда, занявшая предпоследнее место — 3 победы.

Если  $x = 6$ , то победительница должна одержать 12 побед, но в турнире участвовало только 9 команд.

*Ответ.* Победительница турнира одержала 8 побед, команда, занявшая предпоследнее место — 3, команда, занявшая последнее место — 1, остальные 6 команд одержали по 4 победы. (*Указание.* Необходимо построить ориентированный граф для данной ситуации.)

**3.13. а) Решение.** Процесс поиска путей изображает корневое дерево на рисунке.

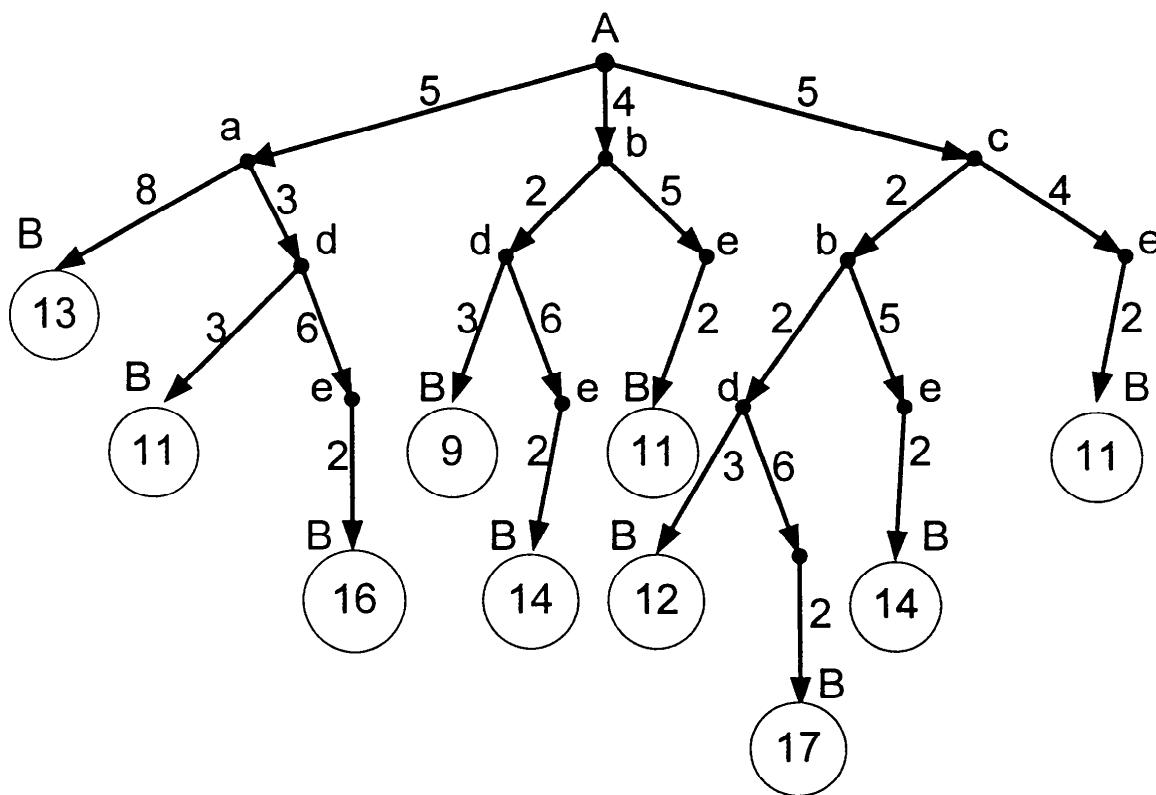


Рис. к ответу 3.13

*Ответ.* Между городами 10 маршрутов. Наименьшее число промежуточных пунктов содержит маршрут  $(A, a, B)$  — 1. Наибольшее число промежуточных пунктов содержит маршрут  $(A, c, b, d, e, B)$  — 4. Наименьшую длину имеет маршрут  $(A, b, d, B)$  — 9. Наибольшую длину имеет маршрут  $(A, c, b, d, e, B)$  — 17.

б) *Указание.* Стойте только те маршруты, которые содержат каждый свой промежуточный пункт один раз.

*Ответ.* Между городами 15 маршрутов. Наименьшее число промежуточных пунктов содержит маршрут  $(A, c, B)$  — 1. Наибольшее число промежуточных пунктов содержат маршруты  $(A, b, d, a, e, f, B), (A, c, d, a, e, f, b), (A, c, f, d, a, e, B)$  — 5. Наименьшую длину имеет маршрут  $(A, b, d, e, B)$  — 14. Наибольшую длину имеет маршрут  $(A, c, f, a, e, B)$  — 30.

**3.15. Решение.** Положим две монеты на разные чашки весов. Если чашки придут в равновесие, то фальшивая — третья монета. Если чашки не придут в равновесии, то фальшивая — более легкая монета.

**3.16. Решение.** Разобьем монеты на три группы по три монеты. Положим монеты двух групп на разные чашки весов. Если чашки придут в равновесие, то фальшивая монета — в третьей группе. Если чашки не придут в равновесии, то фальшивая — в более легкой группе. Поиск фальшивой монеты среди трех показан в задаче 3.15.

Введем следующие обозначения:  $A : B$  — сравнение массы монет групп  $A$  и  $B$ ;  $F(A)$  — масса монет группы  $A$ .

Корневое дерево, изображающее процесс определения фальшивой монеты, изображено на рисунке.

**3.17. Указание.** Разбейте монеты на три группы по девять монет. Сначала сравните массы двух групп.

**3.18. Решение.** Корневое дерево, изображающее процесс определения фальшивой монеты, изображено на рисунке.

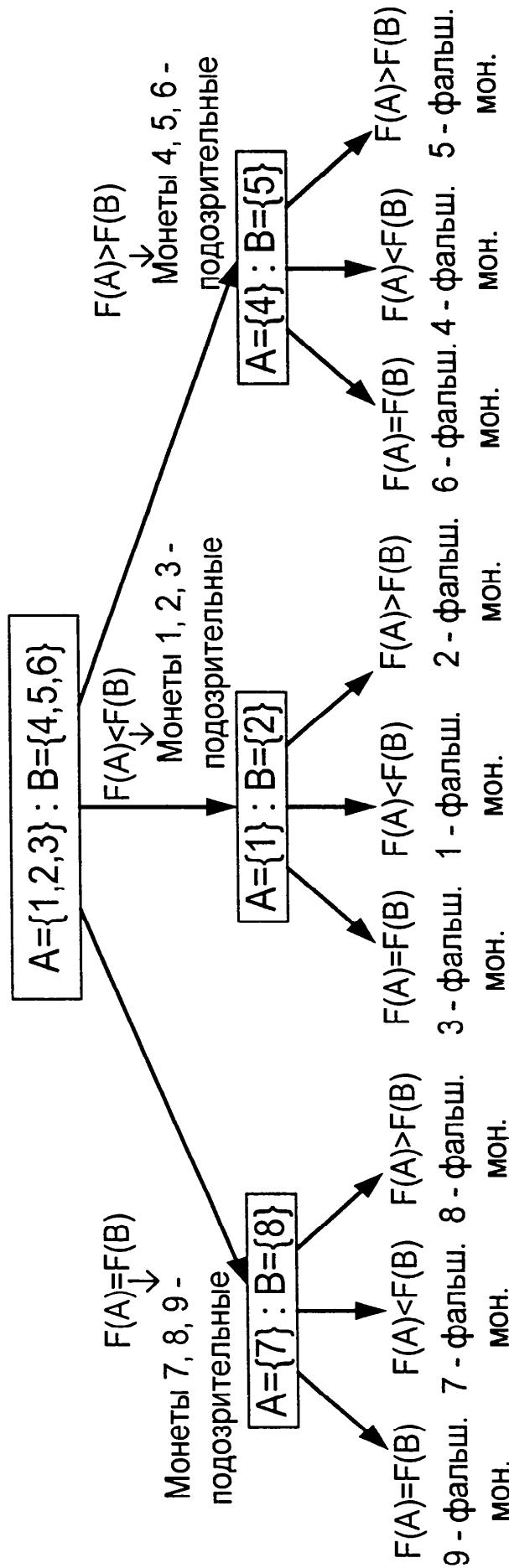


Рис. к ответу 3.16

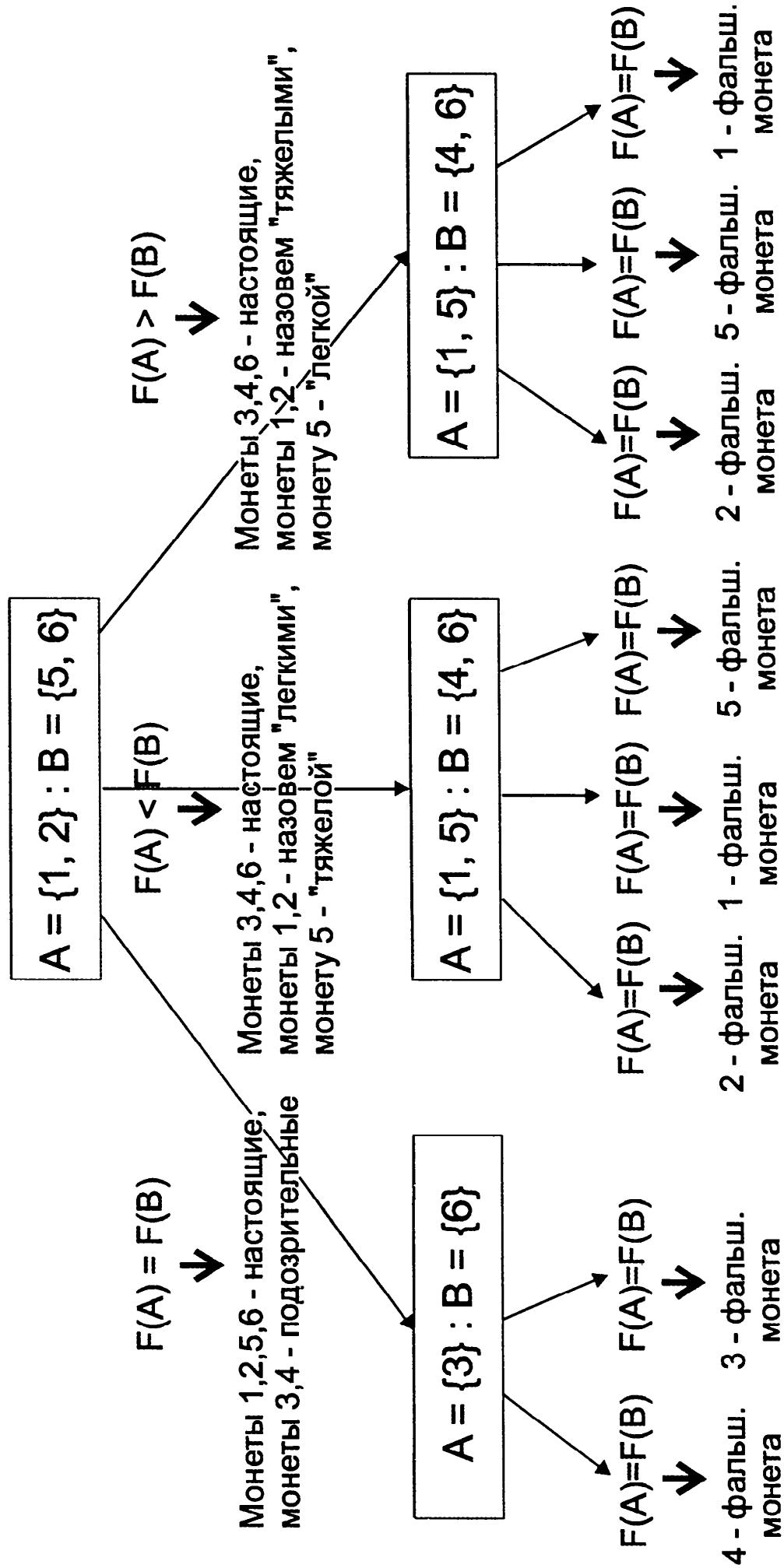


Рис. к ответу 3.18

**3.19. Решение.** Занумеруем конверты, марки и открытки. Выбор одного конверта из трех возможных можно изобразить следующим графом:

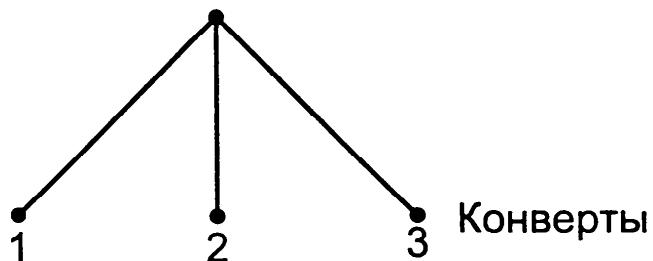


Рис. к ответу 3.19 (1)

На каждый из выбранных конвертов можно наклеить одну из двух марок. Это изображается следующим графом:

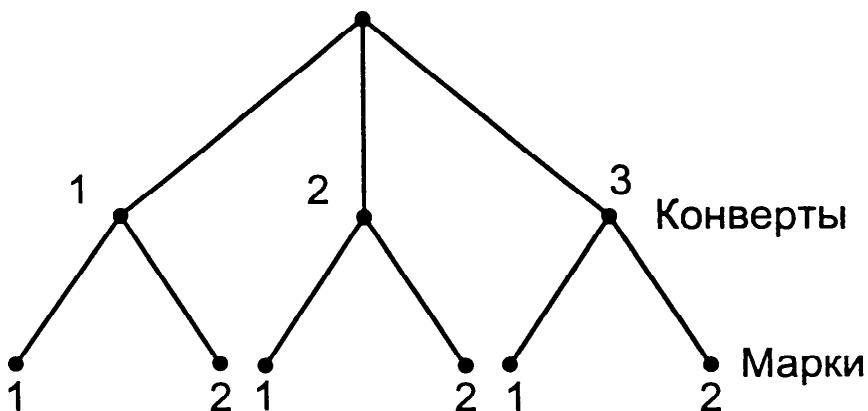


Рис. к ответу 3.19 (2)

Получилось 8 вариантов выбора конверта с маркой. В каждый из таких конвертов с маткой можно вложить одну из 4 открыток:

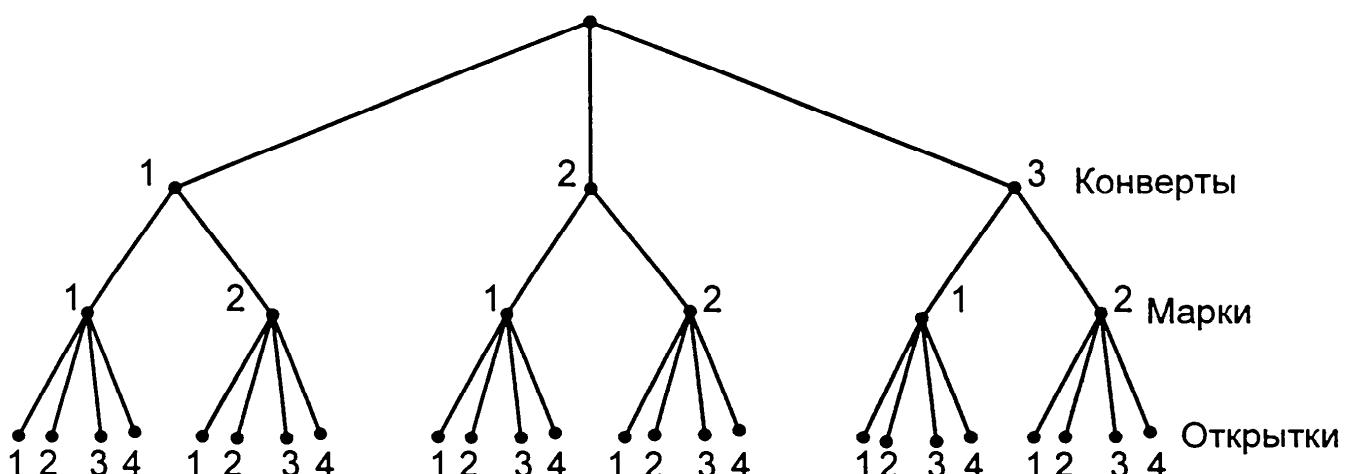


Рис. к ответу 3.19 (3)

Нижние вершины орграфа задают варианты рассылки поздравлений.

*Ответ. 24.*

**3.20. Решение.** Процесс подбрасывания монеты можно изобразить следующим корневым деревом:

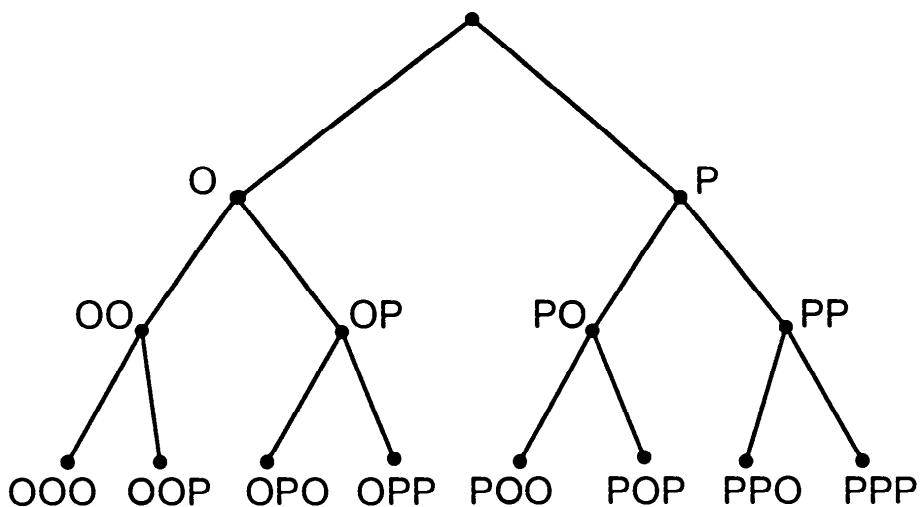


Рис. к ответу 3.20

*Ответ. 8.* Возможные последовательности выписаны около листьев графа.

**3.21. Решение.** Процесс формирования подарков можно изобразить следующим корневым деревом:

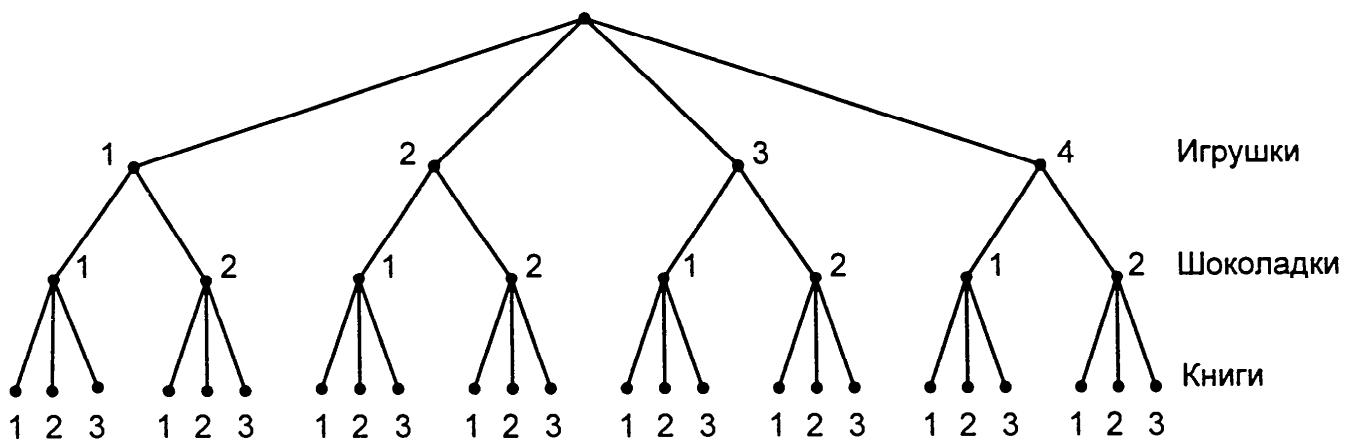


Рис. к ответу 3.21

Мы получили 24 различных варианта различных подарков. Но в классе 25 учеников. Поэтому хотя бы одна пара должна получить одинаковые подарки.

**3.22. Решение.** Занумеруем игроков команды. Тогда капитана можно выбрать одним из 5 способов:

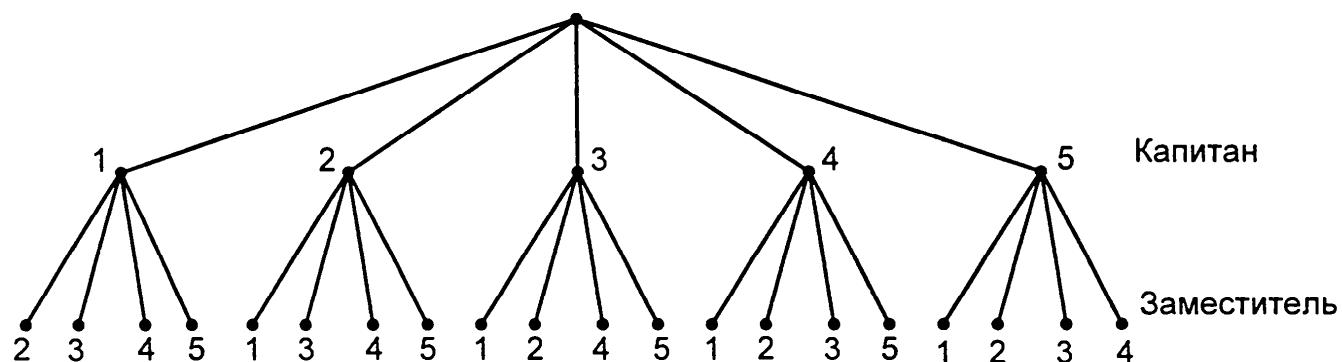


Рис. к ответу 3.22

После выбора капитана в каждом из 5 вариантов можно выбрать его заместителя из оставшихся спортсменов одним из четырех способов:

*Ответ.* 20.

**3.23. Решение.** Будем считать схему города ориентированным графом, в котором перекрестки являются вершинами, а улицы вместе с направлением движения по ним — дугами.

Рассмотрим две произвольные вершины  $u_1$  и  $v_1$ . Из условия задачи следует, что в орграфе существует маршрут  $L_1$ , соединяющий вершину  $u_1$  с вершиной  $v_1$ , и маршрут  $L_2$ , соединяющий вершину  $v_1$  с вершиной  $u_1$ . Объединим эти маршруты в один маршрут  $L$ . Если этот маршрут содержит все дуги орграфа, то он будет определять маршрут патрульной машины.

Предположим, что в орграфе остались дуги не вошедшие в построенный маршрут. Рассмотрим дугу  $(u_2, v_2)$ , причем  $u_2$  принадлежит  $L$ , а  $v_2$  не принадлежит. Из условия задачи следует, что в орграфе существует маршрут  $L_3$ , соединяющий вершину  $u_2$  с вершиной  $v_2$ . Объединим маршруты  $L$ ,  $L_3$  и дугу  $(u_2, v_2)$  в один маршрут (см. рисунок). (Возможно, что объединяемые маршруты имеют общие дуги.)

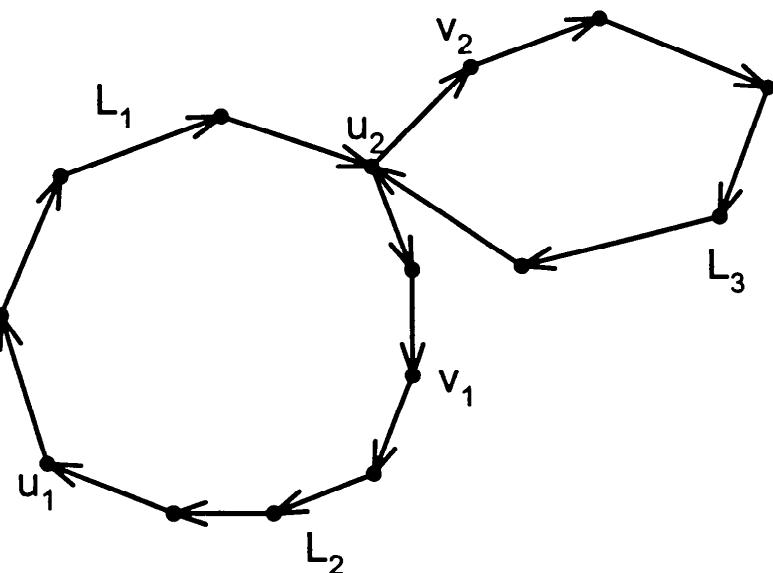


Рис. к ответу 3.23

Если построенный маршрут не содержит все дуги орграфа, то, как и ранее, увеличим его с помощью некоторого нового маршрута  $L_4$ , и так далее пока не получим нужный маршрут. Этот маршрут и будет соответствовать маршруту патрулирования.

## Глава 4

### 4.2. Ответ.

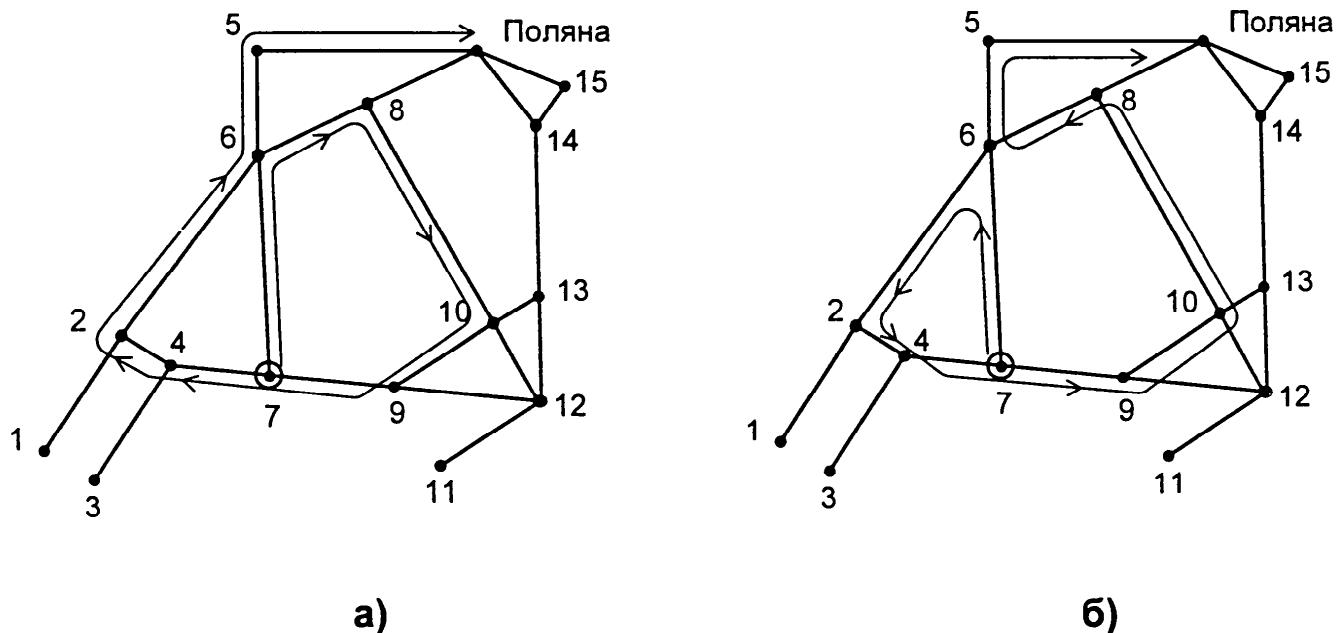
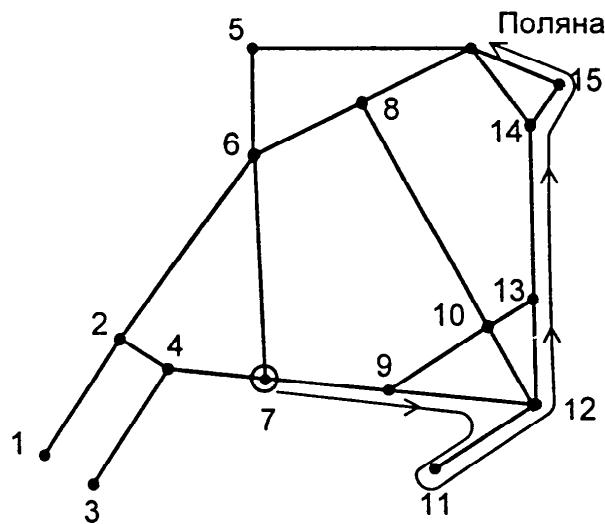
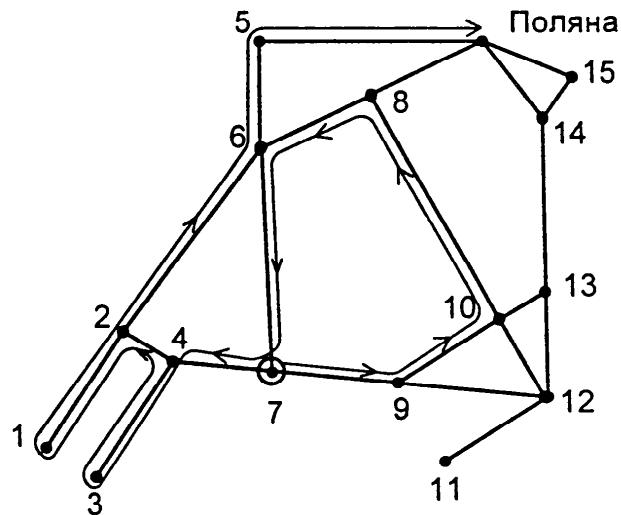


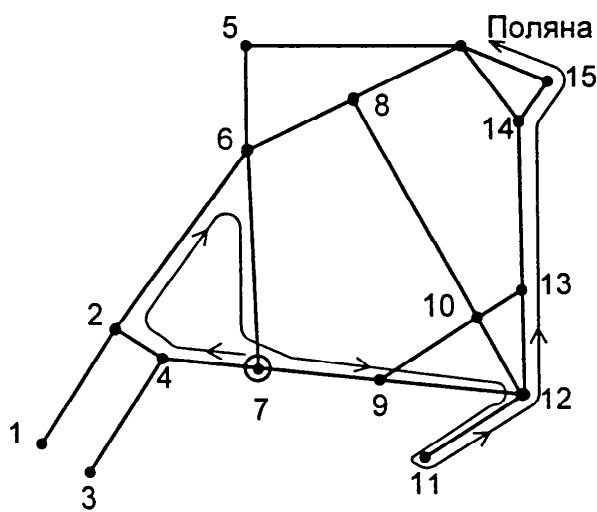
Рис. к ответу 4.2

**4.3. Ответ.**

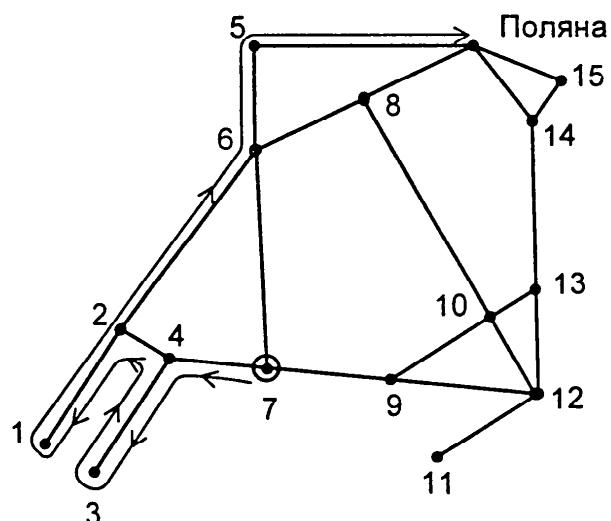
а)



б)

**Рис. к ответу 4.3****4.4. Ответ.**

а)



б)

**Рис. к ответу 4.4**

## Глава 5

**5.1.** *Ответ.* а) Простые цепи длины 1: (1, 2), (2,3). Простая цепь длины 2: (1,2,3).

б) Простые цепи длины 1: ребра графа. Простые цепи длины 2: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 3, 4), (2, 1, 3), (2, 3, 4). Простые цепи длины 3: (1, 2, 3, 1), (1, 2, 3, 4), (2, 1,3,4).

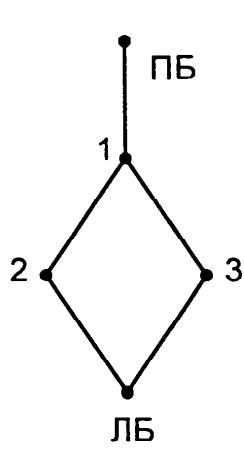
**5.2.** *Ответ.* Цепи, не являющиеся простыми: (4, 3, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2, 3, 5), (4, 3, 2, 1, 3), 9; 3, 2, 1, 3, 5), (5, 3, 2, 1, 3), (5, 3, 1, 2, 3).

**5.3.** *Ответ.* а) Искомая цепь (1, 2, 3). Простых циклов нет.

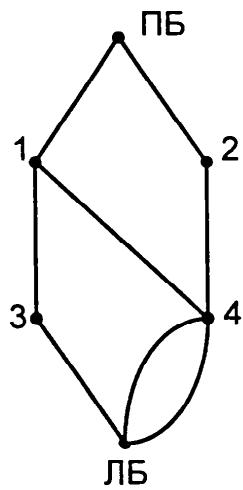
б) Простой цикл: (1, 2, 3). Искомые цепи: (1, 2, 3, 1), (1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4).

в). Простые циклы: (1, 5, 2, 1), (1, 5, 6, 2, 1), (5, 6, 2, 5). Искомые цепи: (4, 5, 1, 2, 3), (4, 5, 1, 2, 6), (4, 5, 2, 1), (4, 5, 2, 6), (4, 5, 6, 2, 1), (4, 5, 6, 2, 3), (3, 2, 1, 5, 6), (3, 2, 5, 6), (3, 2, 5, 1), (3, 2, 6, 5, 1) и простые циклы..

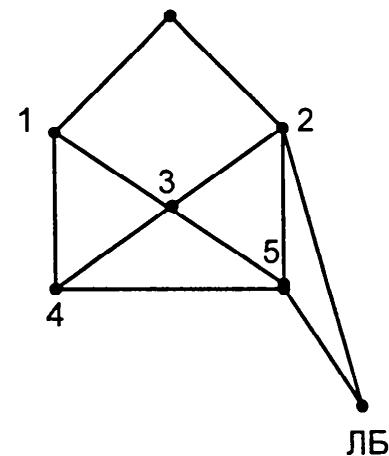
**5.4.** *Ответ.*



а)



б)



в)

**Рис. к ответу 5.4**

**5.5.** *Ответ.* Графы  $G_2$  и  $G_3$  эйлеровы. В графе  $G_1$  нужно добавить одно ребро, а в графе  $G_4$  два ребра, для того, чтобы превратить эти графы в эйлеровы.

**5.6.** *Ответ.* 3 способа: 1) добавить ребра (1, 3) и (9, 11); 2) добавить ребра (1, 9) и (3, 11); 3) добавить ребра (1, 11) и (3, 9).

**5.8. Решение.** Заменим каждый коридор в схеме двумя ребрами:

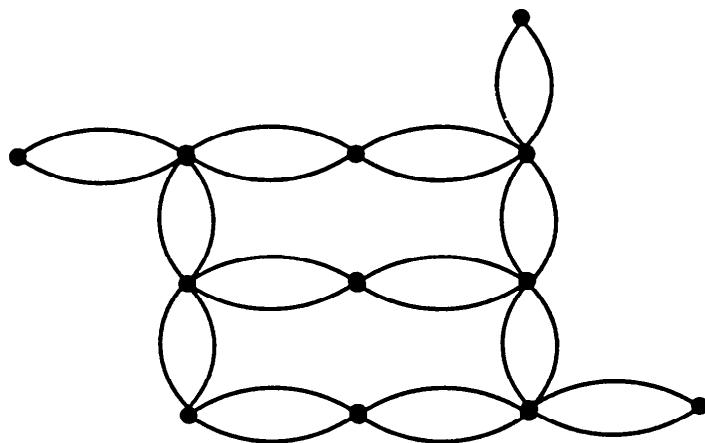


Рис. к ответу 5.8

При этом степень каждой вершины нового графа становится четной. Поэтому в графе можно построить эйлеров цикл, который и определит нужный маршрут осмотра экспозиции.

**5.9. Указание.** Рассмотрите рисунки как графы, вершинами которых являются точки пересечения линий, а ребрами части линий между такими точками. Если графы окажутся эйлеровыми или в них будут ровно две вершины нечетной степени, то соответствующие рисунки можно изобразить без отрыва карандаша от бумаги, а противном случае — нет.

*Ответ.* Заданным способом можно изобразить графы, заданные на рисунках а, в, г, е, ж, з, и, к.

**5.9<sub>1</sub>. Ответ.** Фигуры, изображаемые одним росчерком, названы в ответе к предыдущей задаче.

б) 4; д) 10; л) 4.

**5.10. Указание.** Будем считать гвозди вершинами графа, а части веревки между гвоздями ребрами графа. В случае а) в графе графе четыре вершины нечетной степени. Поэтому веревку заданным способом привязать нельзя. В случае б) в графе две вершины нечетной степени. Поэтому веревку заданным способом привязать можно.

**5.11. Решение.** Будем считать каждое дерево вершиной графа, а путь зайца от дерева к дереву — ребром графа. Нетрудно заметить, что все вершины этого графа, кроме вершин 6 и 9, имеют четную степень. Значит, нора зайца находится под деревом, обозначенным цифрой 6, а сам заяц под деревом, обозначенным цифрой 9, или наоборот. Задача имеет два решения.

**5.12. Решение.** Считая вершины куба вершинами графа, а ребра куба ребрами графа, получим граф куба.

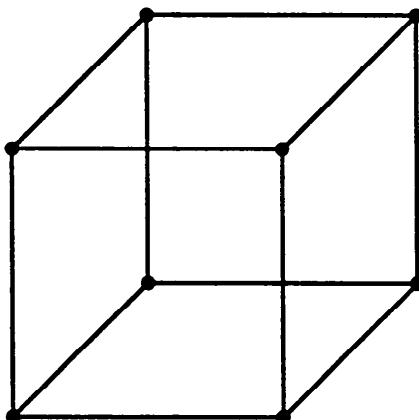


Рис. к ответу 5.12

В этом графе 8 вершин нечетной степени. Из теоремы следует, что ребра графа можно разбить на 4 реберно-непересекающихся цепи.

*Ответ.* 4.

**5.13. Решение.** Поскольку граф куба не является эйлеровым, а проволока не ломается, то надо превратить граф в универсальный добавлением ребер. Для этого 6 вершин нечетной степени следует попарно соединить тремя ребрами.

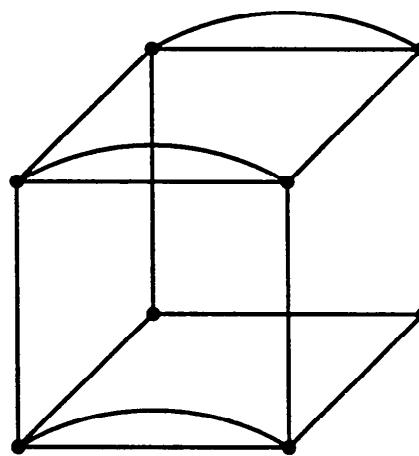
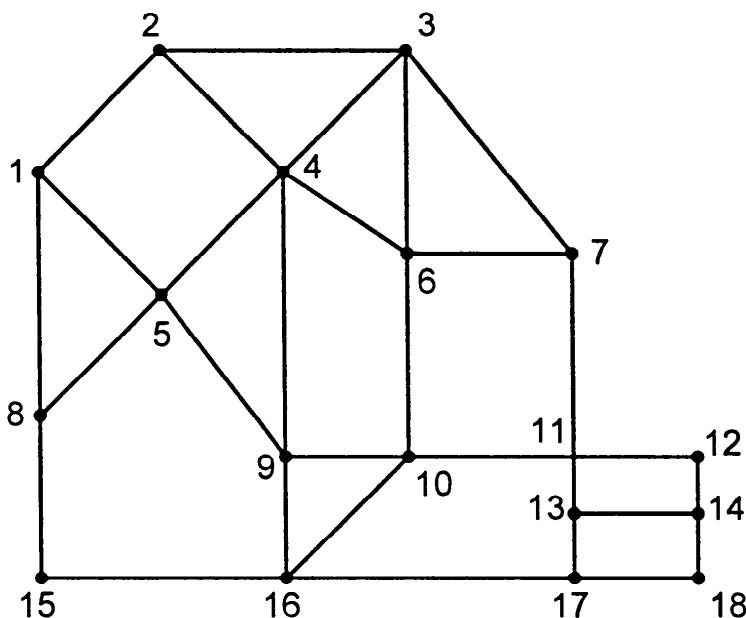


Рис. к ответу 5.13

В новом графе будет 17 ребер. Поэтому кусок проволоки должен иметь длину, по крайней мере, 170 см.

*Ответ.* 170 см.

**5.14. Решение.** Построим граф, соответствующий перекресткам и улицам Зеленого города в этом случае:

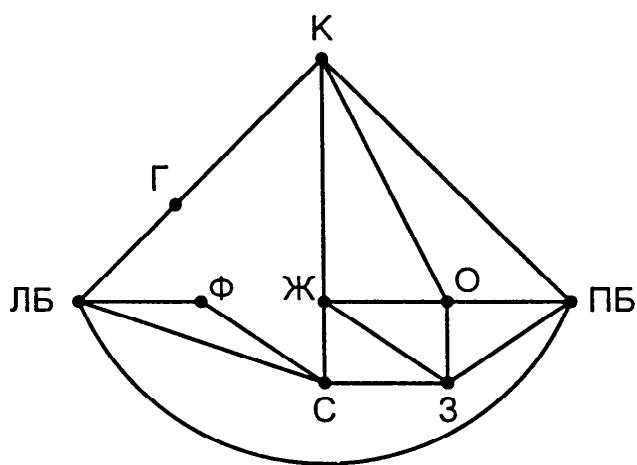


### Рис. к ответу 5.14

Этот граф содержит 8 вершин нечетной степени. Из теоремы следует, что наименьшее число нужных маршрутов равно 4.

### *Ответ. 4.*

**5.15. Решение.** Сначала рассмотрим случай, когда граф является эйлеровым. В этом графе существует эйлеров цикл. (В качестве иллюстрации к доказательству рассмотрим граф островов и мостов из 5-й главы книги.)



### Рис. к ответу 5.15 (1)

Выйдем из любой вершины (например, ЛБ) цикла и пойдем по нему до тех пор, пока не попадем в какую-либо вершину второй раз. (Пусть в нашем примере это будет маршрут (ЛБ, Г, К, Ж, С, З, О, К).) Часть маршрута, соединяющая повторяющуюся вершину (К, Ж, С, З, О, К), образует первый простой цикл. Удалим его ребра из графа.

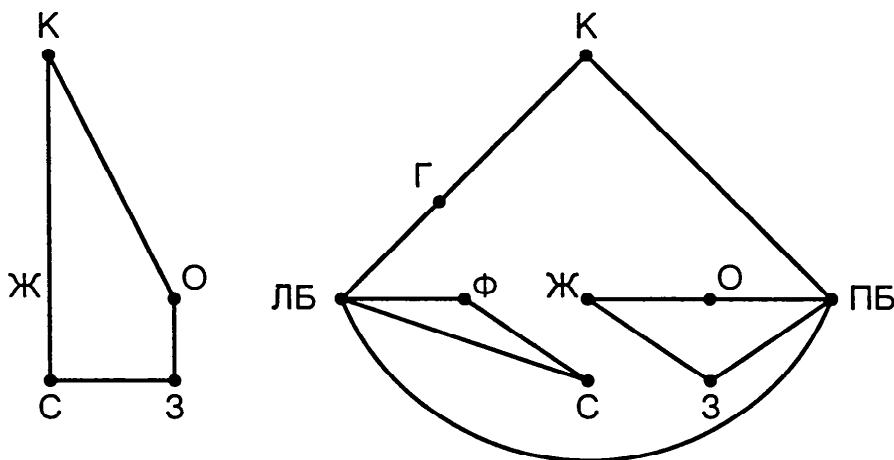


Рис. к ответу 5.15 (2)

Так как степень любой вершины цикла равна 2, то степень каждой вершины, принадлежащей циклу, в новом графе уменьшится на 2, т. е. останется четной. Это означает, что получившийся граф, если он связный, или компоненты получившегося графа, если граф несвязный, будут эйлеровыми графами. В них будут существовать эйлеровы циклы.

Поэтому описанную выше процедуру можно продолжить, выделив еще один простой цикл (в нашем примере цикл (ЛБ, Г, К, ПБ, ЛБ), и так до тех пор, пока ребра графа не будут исчерпаны. (В нашем примере можно построить третий (ЛБ, Ф, С, ЛБ) и четвертый (ПБ, З, Ж, О, ПБ) простые циклы.

Предположим теперь, что связный граф состоит из простых циклов, которые не содержат общих ребер. Объединяя циклы так, как это было сделано в главе 5, получим эйлеров цикл в графе.

**5.16. Решение.** Будем считать схему города ориентированным графом, в котором перекрестки будут вершинами, а отрезки улиц вместе с установленным на них движением дугами. Для каждой вершины  $v$  орграфа задано условие: полустепень исхода вершины равна ее полустепени захода, т. е.  $d^+(v) = d^-(v)$ .

Нужный маршрут начнем строить из любой вершины орграфа, выбирая каждый раз для его продолжения дугу, которую еще не проходили. Поскольку из каждой вершины орграфа выходит столько дуг, сколько в нее заходит, то процесс может окончиться только в начальной вершине. Если в маршрут попали все дуги орграфа, то нужный маршрут построен. В противном случае удалим дуги маршрута из орграфа. Для получившегося орграфа выполняется прежнее условие: число дуг, входящих в любую вершину, равно числу дуг, выходящих из нее. Поэтому в этом графе можно построить еще один замкнутый

маршрут аналогично первому. Затем объединим данные маршруты, как это делалось в главе 5. Процесс объединения маршрутов будем производить до получения нужного маршрута в орграфе.

**5.17. Решение.** Будем считать схему поселка графом  $G$ . Если бы этот граф был эйлеровым, то маршрут почтальона определялся бы эйлеровым циклом. Но степени вершин 2 и 7 нечетные, поэтому эйлерова цепи не существует и некоторые улицы почтальон должен будет пройти дважды. Допустим, что мы нашли маршрут обхода. Если улица проходится почтальоном дважды, то добавим соответствующее ребро к графу  $G$ . Таким образом мы получим эйлеров граф. Следовательно, для решения задачи мы должны удвоить некоторые ребра так, чтобы степени всех вершин стали четными. При этом сумма добавленных ребер должна быть наименьшей. В нашем графе степени вершин 2 и 7 должны стать четными. Но при удвоении некоторого ребра, выходящего из вершины 2, например ребра  $(2, 4)$ , степень вершины 4 станет нечетной и придется удваивать какое-то ребро, выходящее из вершины 4 и т. д. Процесс удваивания ребер может окончиться только в вершине 7. Следовательно, мы должны найти кратчайшую цепь, соединяющую вершины 2 и 7, и удвоить ребра этой цепи. Такой цепью является цепь  $L = (2, 4, 7)$ . В полученном графе так, как и раньше, найдем эйлеров цикл, который и определит маршрут почтальона. (Один из возможных маршрутов изображен на рисунке.)

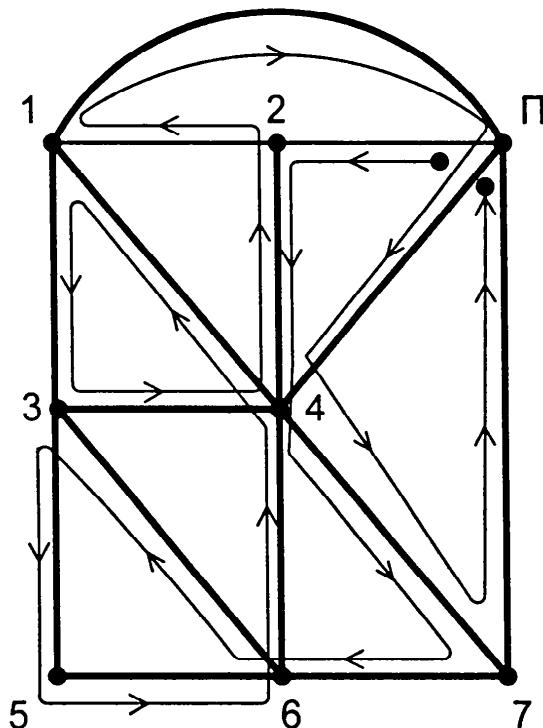
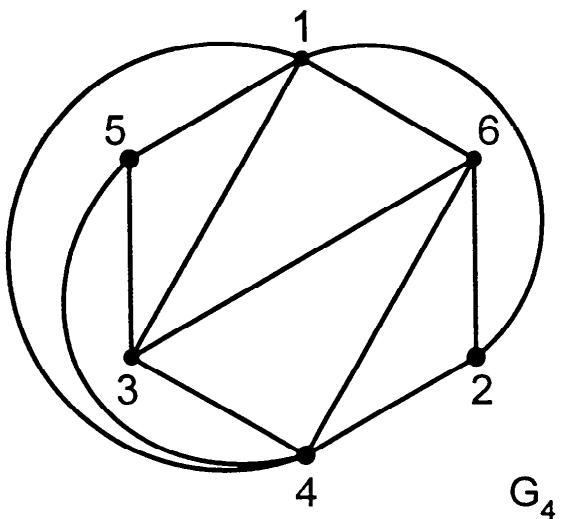
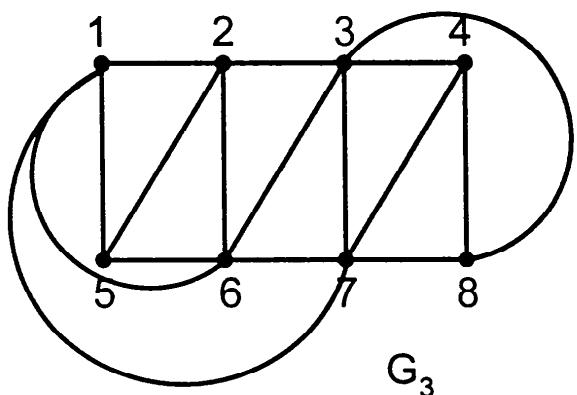
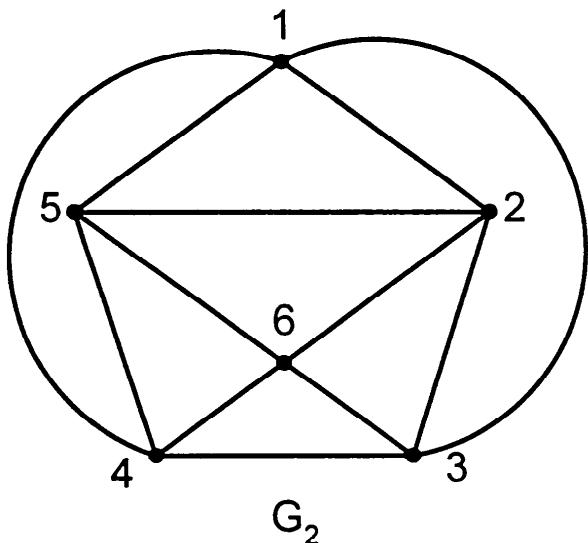
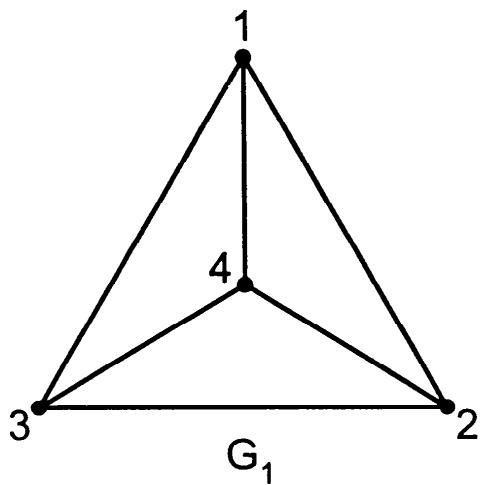


Рис. к ответу 5.17

## Глава 6

**6.1. Ответ.**



**Рис. к ответу 6.1**

*Примечание.* Возможны другие изображения представленных графов.

**6.2. Ответ.** Указанные графы содержат в качестве подграфа граф  $K_{3,3}$ , непланарность которого доказана в главе 6.

**6.3. Решение.** Изобразим указанный график на плоскости.

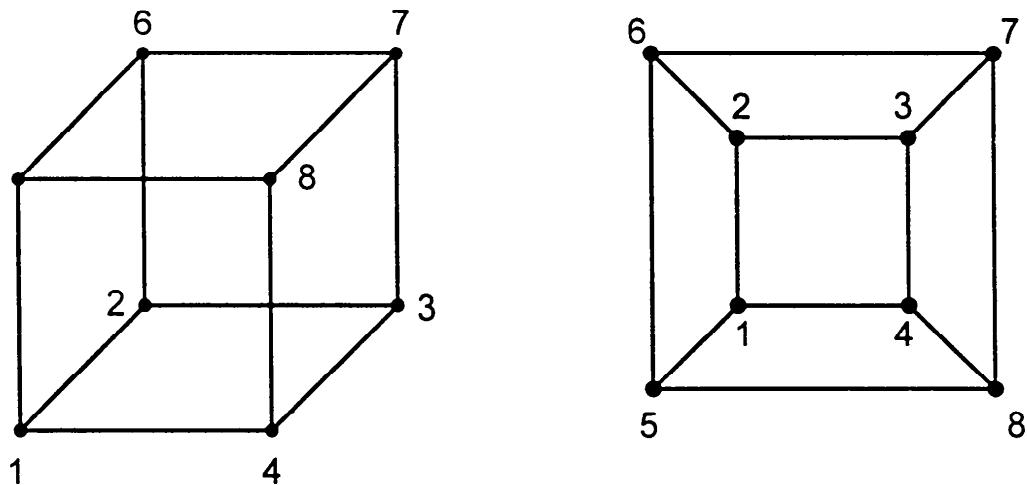


Рис. к ответу 6.3

**6.4. Ответ.**  $G_1$  — 4 грани,  $G_2$  — 8 граней,  $G_3$  — 10 граней,  $G_4$  — 8 граней.

**6.5. Ответ.**

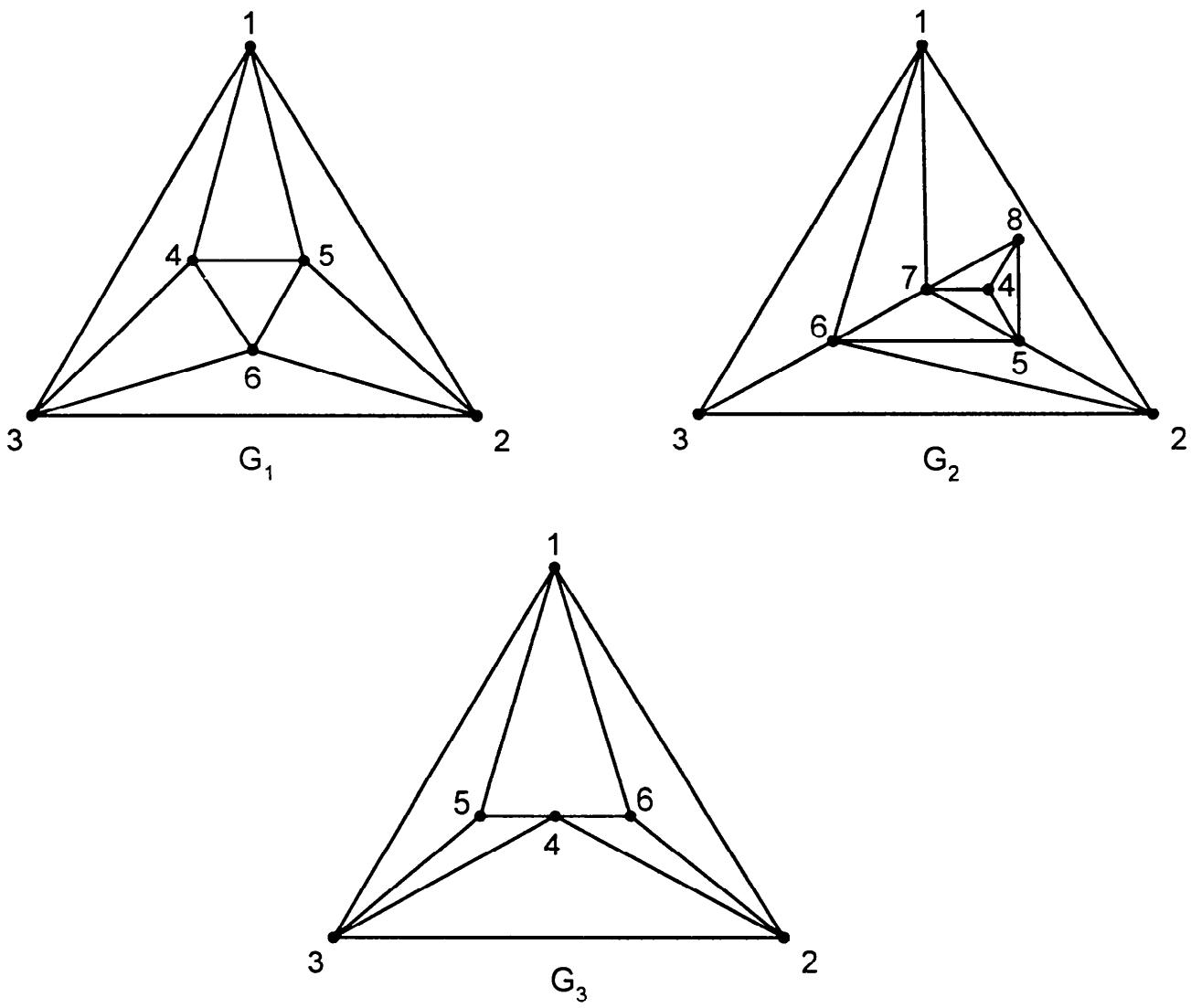


Рис. к ответу 6.5

*Примечание.* Возможны другие изображения представленных графов.

**6.7. Решение.** Предположим, что граф  $K_5$  планарный. Он имеет 5 вершин и 10 ребер. Тогда по формуле Эйлера его плоское изображение должно иметь  $2 - v + p = 2 - 5 + 10 = 7$  граней. Каждая грань должна быть ограничена по крайней мере тремя ребрами. Самое большое любое ребро может ограничивать две грани. Поэтому граф  $K_5$  должен иметь не меньше, чем  $7 \times 3/2 = 10,5$  ребер, а он имеет только 10 ребер. Следовательно граф  $K_5$  не будет планарным.

**6.8. Решение.** Предположим, что граф  $K_{3,3}$  планарный. Он имеет 6 вершин и 9 ребер. Тогда по формуле Эйлера его плоское изображение должно иметь  $2 - v + p = 2 - 6 + 9 = 5$  граней. Поскольку граф  $K_{3,3}$  двудольный, то каждая его грань должна быть ограничена по крайней мере четырьмя ребрами. Самое большое любое ребро может ограничивать две грани. Поэтому граф  $K_{3,3}$  должен иметь не меньше, чем  $5 \times 4/2 = 10$  ребер, а он имеет только 9 ребер. Следовательно, граф  $K_{3,3}$  не будет планарным.

**6.9. Решение. а)** Каждая прямая пересекается с четырьмя другими в четырех точках. Следовательно, всего имеется  $5 \times 4/2 = 10$  точек пересечения. (Произведение мы разделили на 2, поскольку через любую точку пересечения проходит ровно две прямых.)

Рассмотрим окружность, внутри которой будут находиться все 10 точек пересечения. Каждая прямая пересечет эту окружность ровно в двух точках.

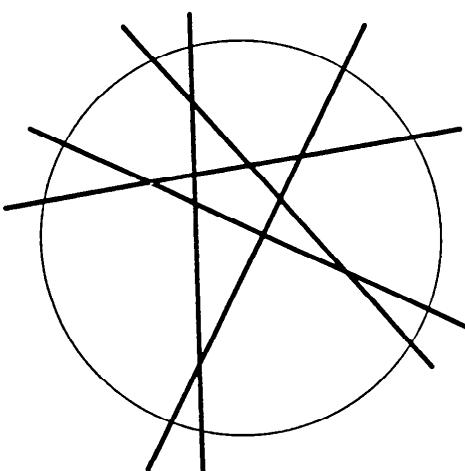


Рис. к ответу 6.9

Построенный рисунок рассмотрим как граф, в котором точки пересечения будут вершинами, а линии между ними — ребрами. Вершин в этом графе будет 20 (10 точек пересечения прямых и 10 точек пересечения прямых с окружностью), ребер — 35 (на каждой прямой — 5 ребер, на окружности — 10).

Рассмотренный граф является плоским и имеет столько внутренних граней, на сколько делят плоскость 5 заданных прямых. Воспользуемся формулой Эйлера:

$$g = 2 - v + p = 2 - 20 + 35 = 17.$$

Поскольку в это число входит и внешняя грань, которая лежит вне окружности, то число областей будет 16.

*Ответ.* а) 16; б) 22; в) 56; г) 5051; д)  $\frac{p(p+1)}{2} + 2$ .

**6.10. Решение.** Подсчитаем число вершин графа, полученного при пересечении треугольников. Максимальное число пересечения треугольников равно 6 и сами треугольники имеют по 3 вершины. Следовательно, общее число вершин построенного графа равно 12. Точки пересечения делят каждую сторону треугольников на 3 части. Поэтому граф будет иметь  $3 \times 3 \times 2 = 18$  ребер. Подставляя эти значения в формулу Эйлера имеем  $g = 2 - 12 + 18 = 8$ .

*Ответ.* 8.

**6.11. Решение.** Рассмотрим изображение государств на карте. Это изображение можно считать плоским графом  $G$ , в котором вершинами будут точки карты, в которых сходятся границы трех или более государств, а ребрами — сами границы. Государствам будут соответствовать грани графа. Если два государства соседние, то соответствующие им грани будут иметь общее ребро.

Для любого плоского графа  $G$  построим граф  $G^*$  по следующему правилу. Внутри каждой внутренней грани выделим по одной вершине нового графа. Если две грани имеют общее ребро, то соответствующие им новые вершины соединим ребром нового графа. Ясно, что ребра можно провести так, чтобы они не пересекались (См. рис. к ответу 6.12, на котором ребра графа  $G$  изображены сплошными линиями, а ребра графа  $G^*$  — штриховыми.). Поэтому граф  $G^*$  плоский.

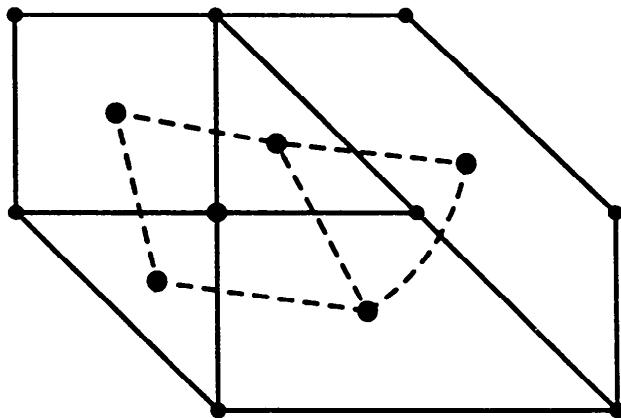


Рис. к ответу 6.12

Предположим, что пятерка государств с указанным свойством существует. Построим для этого случая граф  $G^*$ , который должен быть плоским. Однако, так как каждое государство граничит с каждым, то этот граф  $G^*$  будет полным графом  $K_5$ , для которого в задаче 6.6 доказано, что он не является планарным. Следовательно, пятерки государств с указанным свойством существовать не может.

## Глава 8

**8.1. Ответ.** а) паросочетания из одного ребра — ребра графа; б) паросочетания из одного ребра — ребра графа; в) паросочетания из одного ребра — ребра графа, паросочетание из двух ребер —  $((1, 2), (3, 4))$ ; г) паросочетания из одного ребра — ребра графа, паросочетания из двух ребер —  $((1, 2), (3, 4)), ((1, 2), (4, 5)), ((1, 2), (3, 6)), ((2, 3), (4, 5))$ ,  $((\#6), (4, 5))$ , паросочетание из трех ребер —  $((1, 2), (3, 6), (4, 5))$ ; д) паросочетания из одного ребра — ребра графа, паросочетания из двух ребер —  $((1, 2), (3, 4)), (1, 2), (3, 5)), (1, 2), (4, 5)), ((1, 2), (5, 6))$ , паросочетание из трех ребер —  $((1, 2), (3, 4), (5, 6))$ .

**8.2. Ответ.** а) ребра графа; б) ребра графа; в)  $((2, 3)), ((1, 2), (3, 4))$ ; в)  $((1, 2), (3, 4)), ((2, 3), (4, 5)), ((1, 2), (3, 6), (4, 5))$ ; г)  $((2, 3), (4, 5)), ((2, 3), (5, 6)), ((2, 4), (3, 5)), ((2, 4), (5, 6)), ((1, 2), (4, 5)), ((1, 2), (3, 4), (5, 6))$ .

**8.3. Указание.** Так как каждое ребро паросочетания соединяет ровно две вершины графа, то число ребер паросочетания не может превосходить половины числа вершин графа.

*Ответ.* а) 5; б) 7.

**8.4. Указание.** Рассмотрите одно множество простых двудольных графов.

**8.5. Ответ.** а)  $L_1 = (1, 2, 3, 4)$ ; б)  $L_1 = (1, 2, 3, 4)$ ; в)  $L_1 = (1, 2, 3, 4)$ ; г)  $L_1 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $L_2 = (5, 6, 7, 8)$ ; д)  $L_1 = (1, 2, 6, 5)$ ,  $L_2 = (1, 2, 6, 7, 8)$ ,  $L_3 = (1, 2, 6, 7, 3, 4)$ ,  $L_4 = (5, 6, 7, 8)$ ,  $L_5 = (5, 6, 7, 3, 4)$ ,  $L_6 = (5, 6, 2, 3, 4)$ ,  $L_7 = (5, 6, 2, 3, 7, 8)$ ,  $L_8 = (4, 3, 7, 8)$ ; е) нужных цепей нет.

**8.7. Указание.** Найдите среди вершин одной доли графа такое множество вершин, которое будет соединено ребрами с меньшим числом вершин другой доли.

**8.8. Указание.** В графах  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  нужно добавить по одному ребру, в графе  $G_4$  — два.

**8.9. Указание.** Наибольшее число ребер в паросочетаниях: а) 4; б) 5; в) 6; г) 4; д) 6.

**8.10. Указание.** Постройте граф, в котором вершины соответствуют туристам, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующих участников можно посадить в одну лодку.

С помощью алгоритма, разобранного в главе 8, покажите, что в этом графе невозможно построить паросочетание, содержащее 5 ребер.

**8.11. Указание.** В графе, полученном при решении предыдущей задачи, выберите вершину, из которой не выходят ребра паросочетания. Начните строить из этой вершины увеличивающую относительно паросочетания цепь. Когда процесс построения станет невозможным, добавьте ребро так, чтобы его продолжить.

**8.12. Решение.** Построим двудольный граф  $G$ , в котором вершины доли А будут соответствовать школьникам, вершины доли В — задачам, и вершины  $u$  и  $v$  будут соединены ребром, если школьник, соответствующий вершине  $u$ , решил задачу, соответствующую вершине  $v$ .

Пусть несколько учеников разобрали некоторые задачи. Выделим ребра, соответствующие этим ученикам и этим задачам. Поскольку каждый ученик может разобрать только одну задачу и каждая задача может быть разобрана одним учеником, то выделенные

ребра образуют паросочетание. Для решения задачи мы должны доказать, что в графе  $G$  можно построить такое паросочетание, в котором из каждой вершины, принадлежащей  $A$ , и из каждой вершины, принадлежащей  $B$ , будут выходить ребра паросочетания.

Исследуем строение графа  $G$ . Степень каждой его вершины равна двум. Поэтому граф является объединением циклов. В каждом цикле, начиная с произвольного ребра, будем поочередно включать и не включать ребра в паросочетание. Поскольку каждый цикл двудольного графа имеет четное число ребер, то половина ребер войдет в паросочетание, а половина не войдет, и из каждой вершины графа будет выходить одно ребро паросочетания.

Таким образом, в графе  $G$  построено нужное паросочетание. Его ребра будут определять школьников и разбираемые ими задачи.

**8.13. Решение.** Построим двудольный граф  $G$ , вершины одной доли ( $A$ ) которых соответствуют юношам, другой доли ( $B$ ) — девушкам, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие юноша и девушка знакомы.

Пусть первый танец танцевали юноши, соответствующие множеству  $X_1$  из  $A$ , и девушки, соответствующие множеству  $Y_1$  из  $B$ , а паросочетание  $M_1$  определяет танцующие пары. Аналогично для второго танца: юношам соответствует множество  $X_2$  из  $A$ , девушкам —  $Y_2$  из  $B$ , танцующим парам — паросочетание  $M_2$ . (Возможно, что  $M_1$  и  $M_2$  будут иметь некоторые одинаковые ребра.)

Для решения задачи докажем, что в графе  $G$  можно построить такое паросочетание  $M$ , что из каждой вершины множеств  $X_1$  и  $Y_2$  будут выходить ребра паросочетания.

Рассмотрим двудольный граф  $G_1$ , образованный ребрами паросочетаний  $M_1$  и  $M_2$ . Исследуем строение этого графа.

Каждое ребро, принадлежащее двум паросочетаниям, будет являться компонентой графа  $G_1$ . Включим такое ребро в паросочетание  $M$ .

Степени вершин остальных компонент графа  $G_1$  равны 1 или 2, поэтому компонентами графа являются или циклы четной длины, или цепи. И в циклах, и в цепях ребра поочередно принадлежат паросочетаниям  $M_1$  и  $M_2$ . Каждая вершина цикла принадлежит двум множествам ( $X_1$  и  $X_2$ ) или ( $Y_1$  и  $Y_2$ ). То же самое выполняется для всех неконцевых вершин цепей.

Рассмотрим различные случаи строения компонент.

1. Компонента является циклом. (См. рисунок, на котором ребра паросочетания  $M_1$  выделены.)

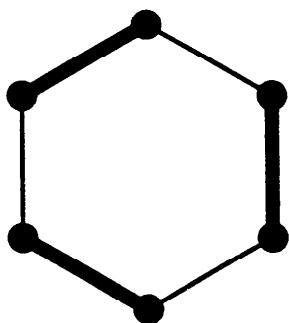


Рис. к ответу 8.13 (1)

В этом случае в паросочетание  $M$  можно включить все ребра одного из паросочетаний, принадлежащих этой компоненте.

2. Цепь  $L$  начинается в вершине  $v$  из  $Y_2$  и оканчивается или в вершине  $u$  из  $X_2$ , или в вершине  $w$  из  $Y_1$  (см. рисунок).

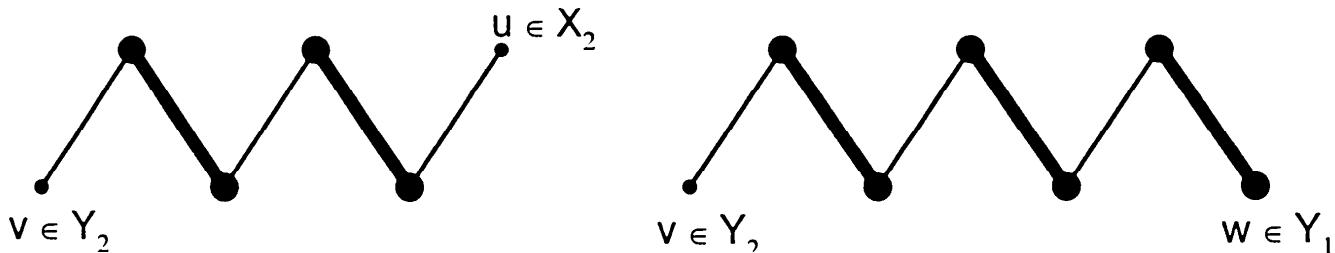


Рис. к ответу 8.13 (2)

В этом случае в  $M$  включим все ребра  $M$ , принадлежащие  $L$ .

3. Цепь  $L$  начинается в вершине  $u$  из  $X_1$  и оканчивается или в вершине  $v$  из  $Y_1$ , или в вершине  $w$  из  $X_2$  (см. рисунок).

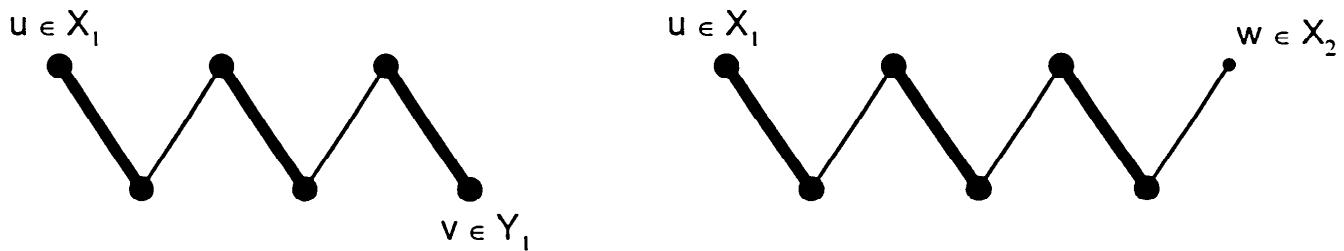


Рис. к ответу 8.13 (3)

В этом случае в  $M$  включим все ребра паросочетания  $M$ , принадлежащие  $L$ .

Других вариантов расположения концевых вершин цепей не существует.

Ребра построенного паросочетания выходят из нужных вершин и определяют танцующие в третьем танце пары.

**8.14. Решение.** Построим граф  $G$ , в котором вершины обозначают туристов, и две вершины соединены ребром, если соответствующие им туристы могут плыть вместе. Парам, выбранным для плавания в одной лодке, соответствуют ребра некоторого паросочетания  $M$ . По условию задачи в построенном графе больше нельзя найти ни одного ребра, добавление которого к паросочетанию  $M$  опять приведет к паросочетанию. Пусть в  $M$  содержится  $m$  ребер.

Для каждого ребра  $e = (u, v)$  паросочетания построим граф  $G_i$ , состоящий из этого ребра и ребер, выходящих из вершин  $u$  и  $v$ . Таких графов будет  $m$ . Каждое ребро графа  $G$  принадлежит хотя бы одному из графов  $G_i$ , поскольку в противном случае паросочетание  $M$  после добавления не принадлежащего  $M$  ребра по-прежнему оставалось бы паросочетанием.

Предположим, что в наибольшем паросочетании содержится  $p$  ребер. Каждому графу  $G_i$  принадлежит не более двух ребер наибольшего паросочетания. Поэтому  $p \leq 2m$ .

Следовательно, число экипажей не может быть больше 6.

## **Приложение**

# **Программа факультатива по математике для учащихся 5–6-го классов «Элементы теории графов»**

**Авторы:**  
**Мельников О. И., Куприянович В. В.**

(Утверждена Научно-методическим центром учебной книги и средств обучения  
Министерства образования Республики Беларусь в качестве факультатива по выбору)

### **Пояснительная записка**

*Главные цели факультатива* — ускорение математического развития учащихся, формирование их математической культуры и абстрактного мышления, подготовка школьников к восприятию основных понятий математики и ее методов в старших классах.

*Средства достижения целей:* понятия и результаты теории графов, одного из наиболее интенсивно развивающихся разделов дискретной математики, которой в школьной программе уделяется недостаточное внимание.

С помощью факультатива предполагается решать следующие задачи: знакомить учеников с начальными понятиями и теоремами теории графов; с простейшими математическими моделями и алгоритмами; с различными приемами доказательств (методом математической индукции, доказательством от противного и т. д.), понятием необходимых и достаточных условий и т. д.

*Организация учебно-воспитательного процесса.* Учебно-воспитательный процесс должен происходить с учетом возрастных характеристик школьников, с одной стороны, и с учетом их индивидуальных особенностей, с другой. Ученики 4–5-го классов находится на границе между младшим школьным и подростковым возрастами. В это время происходит перестройка их мышления. Ситуационно-конкретное мышление постепенно переходит в словесно-понятийное. Задачи все чаще решаются в уме без использования практических действий. Появляется тенденция к трафаретным решениям. Учащиеся часто составляют план действий.

В подростковом возрасте начинает формироваться теоретическое мышление, содержащее способность рассуждать дедуктивно

на основе общих посылок, при выдвижении и проверке гипотез. Решение задачи подросток чаще начинает не с конкретных действий, а с анализа условий и высказывания предположений, которые впоследствии доказывает или опровергает. Повышается способность к абстрагированию и обобщениям. Запоминание перестает носить механический характер, а становится осознанным.

Желательно разумное сочетание *объяснительно-репродуктивного и проблемного обучения*, при котором объяснение материала учителем, осмысление полученной информации, решение упражнений и задач с целью совершенствование знаний, получения и закрепления навыков чередуется с самостоятельным, но под контролем учителя, поиском учащимися путей решения поставленной задачи. Процесс обучения должен быть организован так, чтобы возникающие при обучении догадки, гипотезы, нечеткие знания обгоняли формирования конкретных знаний.

Следует воспитывать дисциплину мышления учащихся. Учитель регулярно должен объяснять ученикам, что между условием задачи и ответом необходим процесс логических рассуждений, обосновывающих ответ; что внешняя правдоподобность рассуждений не всегда приводит к верному результату; что выполнение утверждения для большого количества случаев не является гарантией его выполнения всегда и т. д. Учитель должен обучать школьников строгому перебору и исследованию всех вариантов в случае сведения задачи к составляющим ее подзадачам.

*Структура курса.* Курс строится индуктивно с элементами дедуктивных рассуждений и эвристики.

Начало курса посвящено решению занимательных и провоцирующих задач. Провоцирующие задачи воспитывают у детей дисциплину мышления, учат их не поддаваться на якобы «очевидные» решения, тщательно обдумывать и анализировать условия. Они обладают высоким развивающим потенциалом, способствуют воспитанию критичности мышления, приучают к анализу воспринимаемой информации, ее разносторонней оценке. Занимательные задачи повышают интерес школьников к занятиям математикой, позволяют использовать в процессе обучения их любознательность.

Подготовка к восприятию графов начинается с построения различных соответствий и отношений. На этом этапе происходит перв-

вичное знакомство с построением простейших описательно-иллюстративных графовых моделей.

В дальнейшем изучение материала происходит блоками через систему тематически ориентированных задач, которые подводят учащихся к теоретическим обобщениям и выводам. Теорем в курсе мало, они почти очевидны, их доказательства прости и коротки.

При изучении курса школьники получают сведения по теории графов, приобретают навыки сведения реальных ситуаций к графовым моделям, учатся производить содержательные рассуждения и строить простейшие алгоритмы, неявно знакомятся с математической индукцией, понятиями «необходимые и достаточные условия».

*Требования к математической подготовке учащихся.*

Знать, понимать и правильно употреблять термины, связанные с графиками и их элементами: график, вершина, ребро, степень вершины, подграф.

Определять вид графов и приводить примеры связных, полных, двудольных, эйлеровых, гамильтоновых, ориентированных, плоских и планарных графов, деревьев и корневых деревьев.

Уметь сводить решение задач, связанных с соответствиями и отношениями, к построению и анализу простейших графовых моделей.

Знать и уметь пользоваться результатами теории графов: леммой о рукопожатиях, теоремой о сумме степеней вершин доль двудольного графа, свойствами деревьев, теоремой и формулой Эйлера.

Уметь определять двудольность графа, строить эйлеров цикл, находить выход из лабиринта, перебирать все варианты решения задачи.

*Вариативность программы.* Программа факультатива является общей для учащихся всех школ. В то же время учитель при обучении выбирает объем материала, степень строгости его изложения, методы и приемы обучения в соответствии со своими склонностями и возможностями с учетом возрастных особенностей учащихся и их подготовленности. Если учащиеся хорошо подготовлены, то доказательства должны быть строгими, при средней подготовке школьников в некоторых случаях доказательства могут быть упрощены или заменены иллюстрацией выполнимости теорем для конкретных графов. Требования к математической подготовке учащихся и приводимое далее распределение времени по темам также являются примерными.

## Содержание обучения

### 5-й класс

I четверть — 8 часов  
II четверть — 7 часов

III четверть — 11 часов  
IV четверть — 10 часов

№ пп	Тема	Кол-во часов	Содержание	Литература
1	Занима- тельные и провоци- рующие задачи.	5	Задачи, побуждающие школьника к неправильному решению или ответу.	[1], [2], [3], [4], [12]
2	Соответст- вия и от- ношения.	5	Описание соответствий и отношений с помощью схем (графов)	[2, п. 6], [4, гл. 5], [6, зад. 2], [11, с. 3–29]
3	Графы и подгра- фы.	6	Определение графа и подграфа. Вершины, ребра, смежность. Степени вершин. Примеры применения графов.	[5, гл. 1], [7, п. 4], [8, гл. 1], [9, п. 2], [11, с. 42–43]
4	Лемма о рукопожа- тиях.	5	Доказательство леммы, опирающееся на влияние присутствия ребра на степени соединяемых им вершин. Доказательство леммы с неявным использованием математической индукции.	[5, гл. 1], [6, зад. 33–39], [7, п. 4], [11, с. 47]
5	Следствие из леммы.	3	Использование приема от противного при доказательстве следствия о числе вершин нечетной степени в графе.	[5, гл. 1], [7, п. 4]
6	Полные графы	3	Число ребер в полном графе.	[5, гл. 2], [6, зад. 4], [7, п. 4]
7.	Связные графы.	3	Определение компоненты графа и связного графа.	[5, гл. 2], [6, зад. 17–20], [7, п. 5]
8	Двудоль- ные графы.	4	Примеры двудольных графов. Теорема о сумме степеней вершин доль. Определение двудольности графа с помо- щью поиска в ширину*.	[5, гл. 2] [6, зад. 11–14]
9	Повторение	3		

**6-й класс**

I четверть — 8 часов  
II четверть — 7 часов

III четверть — 11 часов  
IV четверть — 10 часов

№ пп	Тема	Кол-во часов	Содержание	Литература
1	Повторение	4		
2	Деревья.	4	Свойства деревьев. Соотношение между числом вершин и ребер.	[6, зад. 43–46], [9, п. 9]
3	Ориентированные графы.	4	Свойства орграфов. Степени вершин. Аналог леммы о рукопожатиях. Обходы в орграфах. Турниры*	[5, гл. 3], [6, зад. 126, 130–134] [8, гл. 4, п. 1,2], [9, п. 22, 23]
4	Корневое дерево.	4	Перебор всех вариантов с помощью корневого дерева.	5, гл. 3 6, зад. 120
5	Поиск с возвращением.	3	Алгоритм выхода из лабиринта.	[5, гл. 3], [7, п. 3], [11, с. 59–64]
6	Эйлеровы графы	7	Необходимые и достаточные условия эйлеровости (теорема Эйлера). Алгоритм построение эйлерова цикла и эйлеровой цепи. Разбиение графа на минимальное число цепей*	[5, гл. 5,7], [6. зад 61–67], [7, п. 7], [8, гл. 2, п. 5], [9, п. 6], [10, п. 2.1] [11. с. 51–58]
7	Гамильтоновы графы*	1	Понятие о гамильтоновых графах	[8, гл. 2, п. 7], [9, п. 7], [11, с. 65–72], [10, п. 2.2]
8	Плоские графы*	4	Плоские и планарные графы. Укладка графа. Границ. Формула Эйлера. Задача о трех домах и трех колодцах.	[5, гл. 6], [6, зад. 73–81] [7, п. 7], [8, гл. 2, п. 1,2], [9, п. 12, 13], [10, п. 2.3]
9	Повторение	3		
10	Резерв	2		

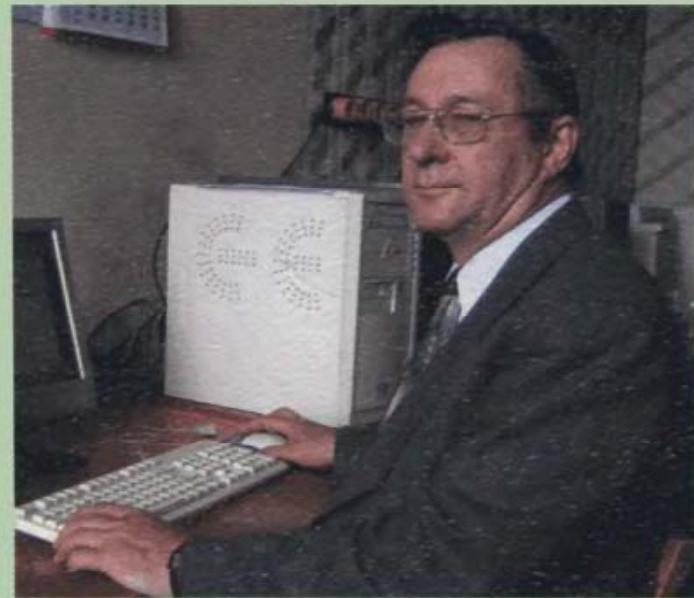
*Примечание.* Звездочкой отмечен материал, который можно сократить.

## Литература

1. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки. М.: Мирос, 1995.
2. Шарыгин И. Ф., Шевкин А. В. Математика: задачи на смекалку. М.: Просвещение, 2001.
3. Левитас Г. Г. Нестандартные задачи по математике в 4 классе. М.: Иллекса, 2003.
4. Лихторович Л. М. Занимательные логические задачи. СПб.: Лань, 1997.
5. Мельников О. И. Незнайка в стране графов. Минск: Беларуская навука, 2000.
6. Мельников О. И. Занимательные задачи по теории графов. Минск: ТетраСистемс, 2001.
7. Саркисян А. А., Колягин Ю. М. Познакомьтесь с топологией. М.: Просвещение, 1976.
8. Березина Л. Ю. Графы и их применение. М.: Просвещение, 1979.
9. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977.
10. Коннов В. В., Клековкин Г. А., Коннова Л. П. Геометрическая теория графов. М.: Народное образование, 1999.
11. Коннова Л. П. Знакомьтесь, графы. Самара: Издательство института повышения квалификации работников образования, 2001.
12. Зайкин М. И., Колесова В. А. Провоцирующие задачи // Математика в школе. 1997. № 6.
13. Мельников О. И. Современные аспекты обучения дискретной математике. Гл. 7. Минск: БГУ, 2002.
14. Мельников О. И. Использование графовых задач для развития сообразительности школьников // Математыка: праблемы выкладання. 2001. № 3.
15. Мельников О. И., Куприянович В. В. Использование графовых задач при самостоятельной работе для развития воображения школьников // Народная асвета. 2002. № 10.
16. Мельников О. И. Использование графов при обучении математике // Начальная школа. 2003. № 5.
17. Мельников О. И. Графы в обучении математики // Математика в школе. 2003. № 8.
18. Мельников О. И., Куприянович В. В. Обучение элементам теории графов в IV–VI классах // Математика в школе. 2004. № 4.

# Олег Исидорович МЕЛЬНИКОВ

Доцент механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.



В 2006 году защитил докторскую диссертацию. Научные интересы: теория графов, обучение дискретной математике в средней и высшей школе. Автор и соавтор книг: «Лекции по теории графов» (М., 1990); «Exercises in graph theory» (Dordrecht, 1998); «Информатика. Методы алгоритмизации» (Минск, 2000); «Занимательные задачи по теории графов» (Минск, 2001); «Современные аспекты обучения дискретной математике» (Минск, 2002); «Математика для экономистов на базе “Matcad”» (СПб., 2003). Лауреат Государственной премии Республики Беларусь.

Наше издательство рекомендует следующие книги:



431007 ID 40715



9 785484 008551

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Тел./факс: 7 (095) 135-42-16  
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46



E-mail:  
[URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru)  
Каталог изданий  
в Интернете:  
<http://URSS.ru>