

МС-17: Аудиторное задание

Метод моментов получения оценок

1. В таблице представлены данные по числу сделок на фондовой бирже за квартал для 400 инвесторов:

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|----|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| n_i | 146 | 97 | 73 | 34 | 23 | 10 | 6 | 3 | 4 | 2 | 2 |

В предположении, что случайное число сделок описывается **распределением Пуассона**, оценить параметр λ методов моментов. Определить вероятность того, что число сделок за квартал будет не менее двух, применяя, метод моментов, и непосредственно по таблице.

Ответ: $\hat{\lambda} = 1,535$. На основе метода моментов – 46%, по таблице – 39%.

2. Пусть случайная величина X **равномерно распределена** на $[a; b]$. Найдите методом моментов оценки для параметров a и b .

3. Случайная величина X (срок службы изделия) имеет **показательное распределение** $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$. В таблице приведены сгруппированные данные по срокам службы (в часах) для $n = 200$ изделий:

| | | | | | | |
|-------|-----|-----|------|------|------|------|
| x_i | 2,5 | 7,5 | 12,5 | 17,5 | 22,5 | 27,5 |
| n_i | 133 | 45 | 15 | 4 | 2 | 1 |

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения. Исследовать полученную оценку на несмещённость и при необходимости подправить. Используя полученную несмещённую оценку, оцените время, которое изделие прослужит с вероятностью 90%.

4. Известно, что доля возврата по кредитам в банке имеет **распределение** $F(x) = x^\beta, 0 \leq x \leq 1$. Наблюдения показали, что в среднем она составляет 90%. Методом моментов оцените параметр β и вероятность того, что она опуститься ниже 75%. **Ответ:** $\hat{\beta} = 9; 0,0751$.

5. Случайная величина X (отклонение размера изделия от номинала) подчинена **нормальному закону распределения** с неизвестными параметрами a и σ . Ниже приведена таблица наблюдаемых отклонений от номинала, подвергнутых группировке, для $n = 200$ изделий. В первой строке указаны середины интервалов отклонений x_i (мм); во второй строке приведена частота n_i – число наблюдений, попадающих в данный интервал:

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2,2 | 2,3 |
| n_i | 6 | 9 | 26 | 25 | 30 | 26 | 21 | 24 | 20 | 8 | 5 |

Найти методом моментов оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения. Оценить долю изделий с отклонением менее 1,5 мм в генеральной совокупности, используя нормальное приближение, и непосредственно по таблице.

6. Выполнение некоторой работы занимает случайное время с **распределением Симпсона** на отрезке $[a; b]$. Хронометраж 20 испытаний дал среднее время работы 30 мин и исправленную выборочную дисперсию 24 мин². Определить параметры a и b методом моментов. Оценить, за какое время работа будет выполняться с вероятностью 98%.

Определение. Случайная величина имеет *треугольное распределение (распределение Симпсона)* на отрезке $[a; b]$ ($a < b$), если

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a \leq x < \frac{a+b}{2}; \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{24}.$$

7. Устройство состоит из элементов, время безотказной работы которых подчинено **гамма-распределению**. Испытания пяти элементов дали следующие наработки (время работы элемента в часах до отказа): 50, 75, 125, 250, 300. Найти методом моментов точечные оценки неизвестных параметров α и β , которыми определяется гамма-распределение.

Определение. Случайная величина имеет *гамма-распределение*, если

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad (\alpha > -1, \beta > 0, x \geq 0);$$

$$E(X) = (\alpha+1)\beta, \quad Var(X) = (\alpha+1)\beta^2.$$

8. «Насяльника» отправил Равшана и Джамшуда измерить ширину и длину земельного участка. Равшан и Джамшуд для надежности измеряют длину и ширину 100 раз. Равшан меряет длину, результат каждого измерения — случайная величина $X_i = a + e_i$, где a — истинная длина участка, а $e_i \sim N(0, 1)$ — ошибка измерения. Джамшуд меряет ширину, результат каждого измерения — случайная величина $Y_i = b + u_i$, где b — истинная ширина участка, а $u_i \sim N(0, 1)$ — ошибка измерения. Все ошибки независимы. Думая, что «насяльника» хочет измерить площадь участка, Равшан и Джамшуд каждый раз сообщают «насяльнику» только величину $S_i = X_i Y_i$. Помогите «насяльнику» оценить параметры a и b по отдельности методом моментов. По выборке оказалось, что $\sum S_i = 3600$ сотен метров, $\sum S_i^2 = 162500$ квадратных сотен метров.

Домашнее задание

1. Ежедневный спрос на некоторый товар имеет **распределение Симпсона** на отрезке $[a; b]$. За 25 рабочих дней спрос составлял в среднем 100 кг с исправленной выборочной дисперсией 54 кг². Определить параметры и методом моментов Оценить, сколько нужно товара, чтобы удовлетворить ежедневный спрос с вероятностью 92%.

Определение. *Случайная величина имеет треугольное распределение (распределение Симпсона) на отрезке $[a; b]$ ($a < b$), если*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} |a+b-2x|, & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$
$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{24}.$$

Вычислить для этого распределения его функцию распределения.

2. Случайная величина X – ошибка измерения дальности радиодальномером – имеет **равномерное распределение** на $[a; b]$, где a, b – неизвестные параметры. Эмпирическое распределение ошибки $n = 200$ независимых измерений имеет вид:

| | | | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
| n_i | 21 | 16 | 15 | 26 | 22 | 24 | 21 | 22 | 18 | 25 |

Найти методом моментов значения точечных оценок неизвестных параметров a, b .

Ответ: $\hat{a} = 2.242641855978304$; $\hat{b} = 22.3773581440217$