МС-16: Точечные оценки и их свойства

Аудиторное задание

1. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на $[a; b]$, причём значение параметра a известно. Какие из перечисленных ниже функций являются статистиками?

а) $T_1 = 2\bar{X}$; б) $T_2 = X_{(n)} - \frac{a}{n}$; с) $T_3 = \frac{X_{(1)}}{b-a}$.

2. Пусть $\hat{\theta} = T(X_1, \dots, X_n)$ оценка параметра θ, а $b = E(\hat{\theta}) - \theta$ – смещение. Доказать формулу

$$\Delta = Var(\hat{\theta}) + b^2,$$

где $\Delta = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ – среднеквадратичная ошибка оценки (MSE – Mean Squared Error) .

3. Дана случайная выборка $X_1, X_2, \dots, X_n$ из некоторого распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2. Даны три оценки μ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}; \ \hat{\theta}_2 = \frac{X_1}{4} + \frac{X_2 + \dots + X_{n-1}}{2n-4} + \frac{X_n}{4}; \ \hat{\theta}_3 = \bar{X}.$$

а) Какая из оценок является несмещённой? б) Какая из оценок является более эффективной, чем остальные?

4. Пусть X – случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке $[0; \theta]$. Рассмотрим выборку объёма 3 и класс оценок вида $\hat{\theta} = c \cdot \bar{X}$ неизвестного параметра θ. Найдите такое c, чтобы:

а) оценка $\hat{\theta}$ – несмещённая;

б) оценка $\hat{\theta}$ – эффективная в рассматриваемом классе. Здесь под эффективностью оценки понимается свойство, что оценка обладает наименьшим $\Delta = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ (среднеквадратичная ошибка оценки).

5. Пусть выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению $N(m, \theta^2)$. Найти величину C, при которой оценка $\hat{\theta} = \frac{C}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - m|$ будет несмещённой оценкой параметра θ.

6. Пусть $X_1, \dots, X_n$ есть результаты n повторных независимых наблюдений над случайной величиной X, функция распределения которой $F(x; \theta)$ $(x \in \mathbb{R})$ – известна с точностью до параметра θ, и $\hat{\theta}_n -$ несмещённая оценка θ, причём $Var(\hat{\theta}_n) < \infty$. Определить, является ли $\hat{\theta}_n^2$ – несмещённой оценкой θ^2.

7. В 17 независимых испытаниях случайная величина X значение 3 приняла 9 раз, а значение 5–8 раз. Найдите несмещенную оценку дисперсии $Var(X)$.

8. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 361, 375, 313, 426, 389, 404, 373, 383 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина известна и равна 371 м.

9. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 365, 377, 313, 424, 385, 402, 372, 381 м. Найдите несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений, если истинная длина неизвестна.

10. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — такая выборка, что $X_i = \theta + \varepsilon_i, i = 1,2, \dots, n, \theta -$ неслучайный скалярный параметр, ε_i – независимые случайные величины с $E(\varepsilon_i)$=0, Var(ε_i)= $d_i \le d < \infty$, $\forall i \ge 1$. Доказать, что $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ является несмещённой и состоятельной оценкой параметра θ.

11. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - выборка объёма n из равномерного закона $Unif([-\theta; \theta])$, где θ – неизвестный параметр. В качестве оценки параметра θ^2 рассмотрим статистику $\hat{\theta} = \frac{3}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)$. Является статистика $\hat{\theta}$ несмещённой оценкой параметра θ^2?

12. Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 –выборка из $N(0; \sigma^2)$. Рассмотрим две оценки параметра θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{10}; \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + 4X_2 + 4X_3 + X_4}{10}.$$

а) Покажите, что обе оценки несмещённые.

б) Какая из оценок оптимальная?

Домашнее задание

1. Выборочные значения случайной величины X представлены в следующей таблице:

x_i	-3	-2	0	1	4
n_i	7	10	9	4	10

Найдите несмещенную оценку для дисперсии генеральной совокупности при условии: а) математическое ожидание генеральной совокупности известно и равно 0; б) математическое ожидание генеральной совокупности неизвестно.

2. В итоге четырех измерений некоторой величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 7, 10, 12, 14. Найти: а) выборочное среднее результатов измерений; б) смещенную и исправленную выборочные дисперсии ошибок прибора.

3. Пусть $Y_k = \beta x_k + \varepsilon_k, k = 1, \dots, n,$ где x_k – некоторые константы, а ε_k – независимые одинаково распределённые случайные величины, $\varepsilon_k \sim N(0; \sigma^2)$.

а) Является ли оценка $\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ несмещённой оценкой параметра β?

б) Является ли оценка $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{Y_k}{x_k}\right)$ несмещённой оценкой параметра β?

в) Найдите дисперсии обеих оценок.

4. Исследователь получил два наблюдения X_1 и X_2 случайной величины X, причём он предполагает, что второе наблюдение два раза важнее первого. В качестве оценки математического ожидания θ случайной величины X используется оценка вида $\hat{\theta} = aX_1 + 2aX_2$. Известно отношение $\frac{\sigma^2}{\theta^2} = \frac{3}{5}$. Найдите «лучшую» оценку такого вида, используя среднеквадратичный подход сравнения. Является ли эта оценка несмещённой?

5. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - выборка объёма n из равномерного закона $Unif([-\theta; \theta])$, где θ – неизвестный параметр. В качестве оценки параметра θ^2 рассмотрим статистику $\hat{\theta} = \frac{3}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)$. Является статистика $\sqrt{\hat{\theta}}$ несмещённой оценкой параметра θ^2?

6. Пусть ε_i обозначает ошибку i-го измерения радиуса шара R. Предполагается, что ошибки измерений независимые и одинаково распределённые случайные величины, $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$. Пусть $X_1, \dots, X_n$ - результаты n независимых измерений радиуса шара R. Найдите несмещённую оценку объёма шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, если: а) σ^2 – известна; б) σ^2 – неизвестна.