СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ "МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ"

Часть 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Под редакцией В.А.Бабайцева и В.Б.Гисина

Рекомендовано
УМО по образованию в области
финансов, учета и мировой экономики
в качестве учебного пособия
для студентов, обучающихся по специальностям:
"Бухгалтерский учет, анализ и аудит", "Финансы
и кредит","Налоги и налогообложение"
и "Мировая экономика"

МОСКВА
"ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА"
2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач подготовлен коллективом авторов кафедры математики Финансовой академии при Правительстве Российской Федерации на базе изданного ранее учебника[1].

После выхода в свет упомянутого учебника возникла потребность в создании сборника задач, в полной мере отражающего содержание учебника, а также новации в области высшего образования на современном этапе развития экономики.

Материал указанных учебника и сборника задач в полной мере соответствует программе бакалавриата по направлению «Экономика».

Задачник состоит из трех частей: часть 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование; часть 2. Математический анализ; часть 3. Теория вероятностей – и содержит более 2000 задач и упражнений, собранных в 20 главах.

В части 1 приводятся задачи и упражнения по основным разделам линейной алгебры, аналитической геометрии и линейного программирования, входящим в программу. Эта часть служит базой для обучения по математическому анализу, теории вероятностей и математической статистике в частях 2 и 3.

Каждый параграф сборника задач начинается с изложения основных сведений по данной теме, затем следует разбор типовых примеров, а заканчивается рядом упражнений и задач для самостоятельной работы. Почти ко всем задачам даны ответы, а к наиболее сложным приведены указания к их решению. Разделение задач по трудности не проводилось, но, как правило, более трудные задачи отнесены в конец параграфа и к ним даны указания.

Кроме традиционного материала по линейной алгебре и аналитической геометрии в задачнике присутствуют такие темы, как продуктивные и неотрицательные матрицы, балансовые модели, линейные экономические модели и линейное программирование.

Следует подчеркнуть, что особое место занимают разобранные примеры, имеющие экономическое содержание. Авторы имели

---

[1] *Солодовников А.С.* Математика в экономике: в 3-х ч. / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2007–2008.

целью иллюстрировать все используемые математические понятия экономическими примерами. Значительную часть задач для самостоятельной работы составляют задачи с экономическим и финансовым содержанием. Все специальные термины поясняются в разобранных примерах.

При подборе задач были использованы многочисленные сборники задач по высшей математике, в частности, такие задачники, как «Сборник задач по высшей математике» В.П. Минорского, «Задачник по высшей математике» В.С. Шипачева. Задачи с экономическим содержанием подбирались из многочисленных учебников для экономистов как отечественных, так и иностранных авторов.

Большое внимание авторы уделили выверке ответов к задачам. Вместе с тем они отчетливо понимают, что опечатки возможны, и надеются на сотрудничество с вдумчивыми читателями в деле их нахождения и исправления.

Содержание сборника задач формировалось и апробировалось в течение многих лет на кафедре математики, и авторы пользуются случаем поблагодарить администрацию Финансовой академии при Правительстве РФ за создание творческой атмосферы, благоприятствующей процессу его написания и издания.

ГЛАВА 1

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1.1. Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса

Основные сведения

Система m линейных уравнений с n неизвестными, или, как будем дальше говорить, система $m \times n$, записывается в общем виде так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для сокращения этой записи можно использовать *таблицу Гаусса* (табл. 1.1), которая содержит всю информацию о системе (1.1).

Таблица 1.1

x_1	x_2	...	x_n	–
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

С помощью *элементарных преобразований* систему (1.1) можно привести к специальному виду. При этом найдутся r неизвестных, называемых *базисными*, которые будут выражаться через остальные $n-r$ *свободные неизвестные*. Предположим, что базисными являются неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, тогда систему (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = b_1' + a_{1,r+1}'x_{r+1} + \ldots + a_{1,n}'x_n, \\ \quad x_2 \qquad\quad = b_2' + a_{2,r+1}'x_{r+1} + \ldots + a_{2,n}'x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad x_r = b_r' + a_{r,r+1}'x_{r+1} + \ldots + a_{r,n}'x_n. \end{cases} \tag{1.2}$$

Запись (1.2) называют *общим решением* системы (1.1). Действительно, придав свободным переменным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ произвольные значения и вычислив по формулам (1.2) значения базисных неизвестных, получим некоторое *частное решение* системы (1.1). *Базисное решение* системы (1.1) получим, если положим все свободные неизвестные равными нулю:

$$x_1 = b_1', x_2 = b_2', \ldots, x_r = b_r', x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Замечание. Один шаг исключения по методу Гаусса – Жордана состоит в следующем. *Разрешающий элемент* $a_{pq} \neq 0$ выбирают из строки, которую не использовали в предыдущих действиях. Строка и столбец, в которых стоит выбранный элемент, называют *разрешающими*. Выполнить следующие действия:

1. Все элементы разрешающей строки разделить на разрешающий элемент.

2. Все остальные элементы разрешающего столбца заменить нулями.

3. Все остальные элементы табл. 1.1 пересчитать по «правилу прямоугольника»:

$$a_{ij}' = \frac{a_{ij}a_{pq} - a_{ip}a_{pj}}{a_{pq}}, b_i' = \frac{b_i a_{pq} - b_p a_{iq}}{a_{pq}}, i \neq p, j \neq q. \tag{1.3}$$

Числители этих формул содержат элементы, расположенные в табл. 1.1 в вершинах прямоугольника, и равны разности попарных произведений элементов, стоящих в противоположных вершинах.

Примеры

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -8, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выполним преобразования по методу Гаусса в соответствующих таблицах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 2 & -8 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Разрешающие элементы помещены в рамку. На первом шаге выбирается разрешающий элемент $a_{11} = 1,$ первая строка переписывается без изменения, остальные элементы первого столбца обнуляются. Остальные элементы второй таблицы пересчитываются по правилу прямоугольника. Например, $a'_{32} = \frac{(-2)\cdot 1 - 3\cdot(-1)}{1} = 1.$ На втором шаге выбирается разрешающий элемент $a_{22} = 1,$ на третьем – $a_{33} = 1.$

Последней таблице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: решение единственно: $x_1 = 4,$ $x_2 = -3,$ $x_3 = 0.$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 8x_3 = -42, \\ -2x_1 + 7x_2 + 19x_3 = 99, \\ -3x_1 + 11x_2 + 30x_3 = 100. \end{cases}$$

Решение. Выполним преобразования по методу Гаусса в соответствующих таблицах:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -8 & -42 \\ -2 & 7 & 19 & 99 \\ -3 & 11 & 30 & 100 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -8 & -42 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 15 \\ 0 & 2 & 6 & -26 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -56 \end{array}\right).$$

На втором шаге получилась таблица, третьей строке которой соответствует уравнение $0 = -56$, не имеющее решений. Следовательно, исходная система уравнений решений не имеет.

Ответ: решений нет.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и применим метод Гаусса. На первом шаге в качестве разрешающего элемента выберем $a_{11} = 1$, а на втором шаге – $a_{23} = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \boxed{1} & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Последней таблице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4, \\ -2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

Здесь x_1, x_3 – базисные переменные, x_2 – свободная переменная. Выразим базисные переменные через свободную:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 3x_2, \\ x_3 = -3 + 2x_2. \end{cases}$$

Тем самым мы нашли общее решение. Полагая $x_2 = 0,$ получим базисное решение $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -3.$ Для значения $x_2 = 1$ получим частное решение $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1.$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 4 - 3x_2, \\ x_3 = -3 + 2x_2 \end{cases}$ – общее решение.

4. Найти значения параметра $\lambda,$ при которых система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -5, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 + \lambda x_4 = -1 \end{cases}$$

несовместна.

Решение. Для того чтобы не иметь дело с дробями, сначала вычтем из второй и третьей строк первую, потом поменяем первые две строки местами.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -5 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -3 & -2 & -5 \\ 5 & 4 & -1 & \lambda & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -5 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -11 \\ 2 & -2 & 4 & \lambda+2 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -11 \\ 3 & 6 & -5 & -2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 & \lambda+2 & -7 \end{array}\right).$$

Выбрав за разрешающий элемент $a_{11} = 1$, выполним один шаг по методу Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -11 \\ 0 & 9 & -11 & -2 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 & -7 \end{array}\right).$$

Из последней строки видно, что система несовместна при $\lambda = -2$.

Ответ: $\lambda = -2$.

5. Найти значения параметра λ, при которых система линейных уравнений

$$\begin{cases} 8x_1 + 15x_2 + 21x_3 + 30x_4 = 34, \\ -6x_1 - 11x_2 - 16x_3 - 24x_4 = -27, \\ 7x_1 + 14x_2 + 22x_3 + 30x_4 = 38, \\ 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + \lambda x_4 = 20 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений. Для найденных значений параметра указать общее решение системы.

Решение. Применим метод Гаусса к расширенной матрице системы. Сначала вычтем из первой строки третью, а ко второй прибавим третью:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 15 & 21 & 30 & 34 \\ -6 & -11 & -16 & -24 & -27 \\ 7 & 14 & 22 & 30 & 38 \\ 4 & 8 & 12 & \lambda & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & 11 \\ 7 & 14 & 22 & 30 & 38 \\ 4 & 8 & 12 & \lambda & 20 \end{array}\right).$$

Выполним шаг полного исключения с помощью разрешающего элемента $a_{11} = 1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 7 & 6 & 15 \\ 0 & 7 & 29 & 30 & 66 \\ 0 & 4 & 16 & \lambda & 36 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей и четвертой строкам вторую строку, умноженную на числа -3 и -2 соответственно:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 7 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 8 & 12 & 21 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda-12 & 6 \end{array}\right).$$

Поменяем вторую и третью строки местами и выполним очередной шаг полного исключения с помощью разрешающего элемента $a_{22} = 1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 8 & 12 & 21 \\ 0 & 2 & 7 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda-12 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & -12 & -25 \\ 0 & 1 & 8 & 12 & 21 \\ 0 & 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda-12 & 6 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке четвертую, умноженную на 5, и выполним очередной шаг полного исключения с помощью разрешающего элемента $a_{33} = 1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & -12 & -25 \\ 0 & 1 & 8 & 12 & 21 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5\lambda-78 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda-12 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 45\lambda-714 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 636-40\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5\lambda-78 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9\lambda+144 & 0 \end{array}\right).$$

Рассматривая последнюю строку, мы можем заключить, что если $\lambda \neq 16$, то система имеет единственное решение $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$. Если же $\lambda = 16$, то можно вычеркнуть четвертую нулевую строку и получить общее решение

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 6x_4, \\ x_2 = -3 + 4x_4, \\ x_3 = 3 - 2x_4. \end{cases}$$

Ответ: $\lambda = 16$, $\begin{cases} x_1 = 2 - 6x_4, \\ x_2 = -3 + 4x_4, \\ x_3 = 3 - 2x_4 \end{cases}$ – общее решение.

Упражнения

Решить системы линейных уравнений:

1.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 36, \\ -2x_1 - 3x_2 + 12x_3 = -60, \\ -x_1 - 3x_2 + 10x_3 = -53. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 17, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 13x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 28, \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 31, \\ x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

Найти общее и базисное решения системы линейных уравнений, введя в базис указанные переменные:

1.7. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -2, \end{cases}$ $x_1, x_3, x_4;$

1.8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8, \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3;$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 2, \\ 4x_1 - 12x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 10x_4 = 2, \end{cases}$ $x_1, x_3, x_4;$

1.10. $\begin{cases} 28x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 29, \\ 18x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 20, \\ -8x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -39, \end{cases}$ $x_2, x_3, x_4.$

В предлагаемых задачах составить систему уравнений и решить ее:

1.11. Для изготовления трех видов изделий A, B и C предприятие использует три основных вида сырья: I, II и III. Нормы расхода сырья на производство одного изделия, а также общее количество сырья указаны в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Общее количество сырья
	A	B	C	
I	2	1	1	45
II	1	1	2	40
III	1	0	1	15

Сколько изделий каждого вида может выпустить предприятие?

1.12. Три бригады обработали три участка поля. Площади участков и затраты времени на их обработку представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Участок	Время работы бригады, ч			Площадь участка, га
	I	II	III	
1	2	3	1	10
2	1	5	4	19
3	4	1	3	18

Найти производительность каждой бригады.

Исследовать, при каких значениях параметров α и β система линейных уравнений является определенной, неопределенной, несовместной. Найти решение системы в тех случаях, когда это возможно:

1.13. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + (\alpha-1)x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + (2-\alpha)x_3 = 1, \\ 2x_1 - \alpha x_2 + (2\alpha-3)x_3 = \beta+1. \end{cases}$$

1.14. $\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + (1+\alpha)x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + (2\alpha-1)x_2 + \alpha x_3 = \beta. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + (2\alpha+3)x_3 = 4-2\beta, \\ x_1 + x_2 + (\alpha+2)x_3 = 2-\beta, \\ x_1 + 5x_2 + (2\alpha+1)x_3 = 3-2\beta. \end{cases}$

Найти значения параметра m, при которых система линейных уравнений имеет бесконечно много решений; для найденных значений параметра указать общее решение системы:

1.16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 = -16, \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -10, \\ -3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + mx_4 = -5. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ 7x_1 + 19x_2 - 19x_3 + mx_4 = -63, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -21, \\ 3x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 2x_4 = -48. \end{cases}$

Решить системы уравнений:

1.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -15, \\ x_1 + x_3 + x_4 = -21, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 50. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 49, \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 27x_4 = 142, \\ x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 64x_4 = 313, \\ x_1 + 5x_2 + 25x_3 + 125x_4 = 586. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 13, \\ 8x_1 + 13x_2 + 11x_3 - 10x_4 = 69. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 23x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 10x_1 - 17x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 9, \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 = 84, \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 = 72, \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 = 59. \end{cases}$

1.24. Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с тремя неизвестными? Привести соответствующие примеры.

1.25. Доказать, что однородная система линейных уравнений $m \times n$, для которой $m < n$: **а)** имеет ненулевое решение; **б)** является неопределенной.

1.26. Может ли система линейных уравнений иметь ровно два решения?

§ 1.2. Линейные пространства

Основные сведения

Множество всевозможных упорядоченных наборов вида $\vec{a} = (a_1; ...; a_n)$, состоящих из n действительных чисел, в котором введены действия покоординатного сложения и умножения на число, называется *n-мерным векторным пространством* $\mathbb{R}^n$.

Линейным пространством над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ называется множество V элементов произвольной природы (они называются *векторами*), на котором заданы два действия: **а)** *сло-*

жение векторов $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \in V$; **б)** *умножения вектора на число* $\lambda\vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V$, удовлетворяющие определенным правилам.

Подмножество S линейного пространства V над полем $\mathbb{R}$ называется линейным *подпространством*, если выполнены условия: 1) $\vec{0} \in S$; 2) для любых $\vec{a}, \vec{b} \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $\vec{a}+\vec{b} \in S$, $\lambda\vec{a} \in S$.

Примеры

1. Найти вектор $5\vec{a}-3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-2\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)+4\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;2;3;4)$ и $\vec{b}=(1;2;1;2)$.

Решение. Упростим данное выражение, воспользовавшись свойствами операций над векторами:

$$5\vec{a}-3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-2\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)+4\vec{b}=5\vec{a}-3\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{b}=-2\vec{a}+9\vec{b},$$

следовательно,

$$-2\vec{a}+9\vec{b}=\left((-2)\cdot 1+9\cdot 1; (-2)\cdot 2+9\cdot 2; (-2)\cdot 3+9\cdot 1; (-2)\cdot 4+9\cdot 2\right)=$$
$$=(7;\ 14;\ 3;\ 10).$$

Упражнения

1.27. Даны векторы $\vec{a}=(3;\ 2;\ -4;\ 1)$ и $\vec{b}=(1;\ -7;\ 2;\ 0)$. Найти векторы:

а) $2\vec{a}+3\vec{b}$;

б) $5\vec{a}-2\vec{b}$;

в) $2\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)-3\vec{a}+\vec{b}+7\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

1.28. Даны векторы $\vec{a}=(5;-8;-1;2)$, $\vec{b}=(2;-1;4;-3)$, $\vec{c}=(-3;2;-5;4)$. Найти неизвестный вектор $\vec{x}$:

а) $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}+4\vec{x}=\vec{0}$;

б) $\left(\vec{x}-\vec{a}\right)+2\left(\vec{x}-\vec{b}\right)+3\left(\vec{x}-\vec{c}\right)=\vec{0}$;

в) $3(\vec{a}-\vec{x})+2(\vec{x}+\vec{b})=5(\vec{x}+\vec{c});$

г) $7(\vec{a}+\vec{c}+\vec{x})-5(\vec{b}+\vec{c}+\vec{x})=5(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{x}).$

1.29. Проверить, что каждое из следующих множеств относительно обычных действий сложения и умножения на числа образует линейные пространства: **а)** множество направленных отрезков V_1 (соответственно V_2), параллельных некоторой прямой (соответственно плоскости); **б)** множество решений однородной системы линейных уравнений; **в)** множество многочленов от одной переменной x с действительными коэффициентами; **г)** множество многочленов от одной переменной x с действительными коэффициентами, степени которых не превосходят данного числа n.

1.30. Проверить, что каждое из следующих множеств образует линейные пространства относительно указанных действий сложения и умножения на числа: **а)** множество функций, определенных на отрезке $[a,b]$, с обычными операциями сложения и умножения на число; **б)** множество положительных вещественных чисел относительно «новых действий» сложения и умножения на число: если $\vec{a}=a, \vec{b}=b,$ то $\vec{a}+\vec{b}=ab,$ $\lambda\vec{a}=a^{\lambda}.$

1.31. Показать, что каждое из следующих множеств не образует линейное пространство относительно обычных действий сложения и умножения на число: **а)** множество квадратных трехчленов; **б)** множество решений совместной неоднородной системы линейных уравнений; **в)** множество многочленов от одной переменной x с целыми коэффициентами; **г)** множество арифметических векторов с рациональными координатами; **д)** множество арифметических векторов с иррациональными координатами.

1.32. Все векторы, входящие в подпространство S, имеют одну и ту же вторую координату. Чему она равна?

1.33. Определить, какие из следующих множеств являются подпространствами в $\mathbb{R}^3$:

а) $\{(\alpha;\beta;0)|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\};$ **б)** $\{(\alpha;\beta;2\alpha)|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\};$

в) $\{(\alpha;1;\beta-\gamma)|\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\};$ **г)** $\{(\alpha+\beta+\gamma;\beta+\gamma;\gamma)|\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}.$

1.34. Выполнить задания: **а)** доказать, что пересечение двух линейных подпространств линейного пространства V является линейным подпространством в V; **б)** привести пример подпространств в $\mathbb{R}^2$, объединение которых не является подпространством в $\mathbb{R}^2$; **в)** доказать, что сумма $S_1 + S_2 = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \,|\, \vec{x}_1 \in S_1, \vec{x}_2 \in S_2\}$ линейных подпространств S_1 и S_2 линейного пространства V является подпространством в V.

§ 1.3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Основные сведения

Система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $x_1, ..., x_k$, не равные нулю одновременно, такие что $x_1\vec{a}_1 + ... + x_k\vec{a}_k = \vec{0}$.

Вопрос о линейной зависимости системы векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ можно выяснить с помощью метода Гаусса. Сравнивая координаты векторов из левой и правой частей векторного равенства $x_1\vec{a}_1 + ... + x_k\vec{a}_k = \vec{0}$, получим однородную систему уравнений. Система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда получившаяся однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение.

Примеры

1. Выразить векторы $\vec{b}_1 = (-11; 16; -7)$ и $\vec{b}_2 = (10; -5; 12)$ через векторы $\vec{a}_1 = (1; 2; 1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; -3)$, $\vec{a}_3 = (3; -2; 1)$.

Р е ш е н и е. Вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ тогда и только тогда, когда найдутся числа x_1, x_2, x_3, для которых выполняется равенство $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b}$. Подставляя данные и записывая данные векторы по столбцам, получим векторные равенства

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} -11 \\ 16 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая выражения слева и справа по строкам, получим две системы с одинаковой левой частью:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -11, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 16, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$$

Можно одновременно решить две системы линейных уравнений. Для этого рассмотрим таблицу Гаусса, содержащую два столбца свободных членов:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 3 & -11 & 10 \\ 2 & 1 & -2 & 16 & -5 \\ 1 & -3 & 1 & -7 & 12 \end{array}\right).$$

Исключая последовательно переменные, имеем:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 3 & -11 & 10 \\ 2 & 1 & -2 & 16 & -5 \\ 1 & -3 & 1 & -7 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 3 & -11 & 10 \\ 0 & 3 & -8 & 38 & -25 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 3 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & -10 & 42 & -23 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & -7 & 31 & -13 \\ 0 & 1 & -10 & 42 & -23 \\ 0 & 0 & -22 & 88 & -44 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & -7 & 31 & -13 \\ 0 & 1 & -10 & 42 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

Следовательно, $\vec{b}_1 = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3$ и $\vec{b}_2 = \vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

2. Найти значения параметра λ, для которых векторы $\vec{a}_1 = (1;1;1)$, $\vec{a}_2 = (5;5;\lambda)$, $\vec{a}_3 = (3;-2;1)$ линейно зависимы.

Решение. Пусть данные векторы линейно зависимы, тогда найдутся числа x_1, x_2, x_3, для которых выполнено векторное равенство $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{0}$. Записывая его по координатам, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Из первых двух равенств имеем $x_3 = 0$, следовательно, из первого и третьего уравнений $(\lambda - 5)x_2 = 0$. Если $x_2 = 0$, то и $x_1 = 0$, этот случай не подходит. Если же $\lambda = 5$, то векторы $\vec{a}_1 = (1;1;1)$ и $\vec{a}_2 = (5;5;5)$ пропорциональны. Итак, векторы линейно зависимы только при $\lambda = 5$.

3. Доказать, что система, содержащая два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, линейно зависима в том и только том случае, когда эти векторы *коллинеарны*, т.е. $\vec{a} = k\vec{b}$ или $\vec{b} = k\vec{a}$ для некоторого числа k.

Решение. Если оба вектора равны нулю, то они, очевидно, линейно зависимы и коллинеарны. Пусть $\vec{a} \neq 0$. Допустим, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа x, y, не равные нулю одновременно, что $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$. Если $y = 0$, то $x\vec{a} = \vec{0}$, следовательно, $x = 0$, так как $\vec{a} \neq 0$. Если же $y \neq 0$, то имеем $-x\vec{a} = y\vec{b}, \vec{b} = -\frac{x}{y}\vec{a}$, т.е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Обратно, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны: $\vec{a} = k\vec{b}$, то $1 \cdot \vec{a} - k\vec{b} = 0$, т.е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

Упражнения

1.35. Даны векторы $\vec{a}_1 = (2;5;1)$, $\vec{a}_2 = (10;1;5)$, $\vec{a}_3 = (4;1;-1)$. Выяснить, является ли вектор $\vec{b}$ линейной комбинацией этих векторов: **а)** $\vec{b} = (12;6;6)$; **б)** $\vec{b} = (8;5;7)$; **в)** $\vec{b} = (-12;3;-5)$; **г)** $\vec{b} = (2;-10;4)$.

1.36. Используя линейные соотношения между векторами $\vec{a}=(1;2;3;4)$, $\vec{b}=(4;3;2;1)$, $\vec{c}=(5;5;5;5)$, $\vec{d}=(-3;-1;1;3)$, вычислить значение линейной комбинации:

а) $23\vec{a}+15\vec{b}-16\vec{c}$;

б) $132\vec{a}+131\vec{b}-130\vec{c}$;

в) $27\vec{a}+95\vec{b}-41\vec{c}+34\vec{d}$.

1.37. Найти все значения параметра λ, при которых вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots$:

а) $\vec{a}_1=(4;\ 4;\ 3)$, $\vec{a}_2=(7;\ 2;\ 1)$, $\vec{a}_3=(4;1;6)$, $\vec{b}=(5;9;\lambda)$;

б) $\vec{a}_1=(3;\ 2;5)$, $\vec{a}_2=(2;\ 4;\ 7)$, $\vec{a}_3=(5;\ 6;\lambda)$, $\vec{b}=(1;\ 3;5)$;

в) $\vec{a}_1=(3;\ 2;\ 6)$, $\vec{a}_2=(7;\ 3;\ 9)$, $\vec{a}_3=(5;\ 1;\ 3)$, $\vec{b}=(\lambda;\ 2;\ 5)$.

1.38. Каждый из векторов $\vec{u}=(8;5;7;12)$, $\vec{v}=(-12;3;-3;-8)$, $\vec{w}=(2;8;10;13)$ представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}=(2;5;1;3)$, $\vec{b}=(10;1;5;10)$, $\vec{c}=(4;1;-1;1)$.

1.39. Найти линейную оболочку $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и проверить, принадлежит ли этой оболочке вектор $\vec{x}$:

а) $\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(2,0)$, $\vec{c}=(3,0)$, $\vec{x}=(-3,7)$;

б) $\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(-3,2)$, $\vec{c}=(-2,3)$, $\vec{x}=(17,19)$;

в) $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(1,0,2)$, $\vec{c}=(2,0,3)$, $\vec{x}=(13,0,17)$;

г) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(2,3,2)$, $\vec{c}=(5,-6,-1)$, $\vec{x}=(10,-12,11)$.

1.40. Доказать, что линейная оболочка $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ системы векторов линейного пространства V является подпространством в V.

1.41. При каких значениях параметра λ линейно зависимы векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$:

а) $\vec{a}_1=(5;4;3)$, $\vec{a}_2=(6;\lambda;4)$, $\vec{a}_3=(-1;1;3)$;

б) $\vec{a}_1=(5;8;1;\lambda)$, $\vec{a}_2=(3;7;-6;-2)$, $\vec{a}_3=(2;3;1;7)$;

в) $\vec{a}_1=(4;7;4;5)$, $\vec{a}_2=(4;2;1;9)$, $\vec{a}_3=(3;1;6;\lambda)$?

1.42. Являются ли следующие системы векторов $\vec{a}_1,...,\vec{a}_4$ линейно зависимыми:

а) $\vec{a}_1=(1;2;3;-4)$, $\vec{a}_2=(2;3;-4;1)$, $\vec{a}_3=(2;-5;8;-3)$, $\vec{a}_4=(5;26;-9;-11)$;

б) $\vec{a}_1=(1;0;0;2;5)$, $\vec{a}_2=(0;1;0;3;4)$, $\vec{a}_3=(0;0;1;4;7)$, $\vec{a}_4=(2;-3;4;11;26)$?

1.43. Доказать линейную независимость системы векторов:

а) $(2;4;8;16)$, $(0;3;9;27)$, $(0;0;5;25)$, $(0;0;0;7)$;

б) $(0;0;1;2)$, $(0;1;2;7)$, $(-1;2;-3;6)$, $(0;0;0;5)$;

в) $(1;2;4;8)$, $(0;3;5;7)$, $(0;0;4;16)$, $(0;0;5;25)$.

1.44. Доказать, что элементарные преобразования сохраняют свойство линейной зависимости. Сохраняют ли элементарные преобразования свойство линейной независимости?

1.45. Доказать, что любые $n+1$ векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейно зависимы.

1.46. Что можно сказать о векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависимы, но вектор $\vec{c}$ не выражается линейно через $\vec{a}$, $\vec{b}$?

1.47. Доказать, что если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ линейно независимы, а векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{x}$ линейно зависимы, то вектор $\vec{x}$ линейно выражается через векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

1.48. Доказать, что если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ линейно независимы, то для любого вектора $\vec{x}$ не более чем один вектор системы $\vec{x},\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ линейно выражается через предыдущие.

1.49. Для векторов $\vec{a}_1=(1;2;3;4)$, $\vec{a}_2=(2;3;4;5)$, . . . , $\vec{a}_k=(k;k+1;k+2;k+3)$ вычислить значения линейных комбинаций: **а)** $\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n$; **б)** $\vec{a}_1-\vec{a}_2+\vec{a}_3-\vec{a}_4+...+\vec{a}_{2n-1}-\vec{a}_{2n}$.

1.50. Можно ли представить векторы $\vec{b}=(13;36;59;82)$, $\vec{c}=(133;126;119;112)$ в виде целочисленных линейных комбинаций векторов $\vec{a}_1=(1;2;3;4)$, $\vec{a}_2=(2;3;4;5)$, . . . , $\vec{a}_k=(k;k+1;k+2;k+3)$?

1.51. Доказать, что вектор (p,q,r,s) является целочисленной линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1=(1;2;3;4)$, $\vec{a}_2=(2;3;4;5)$, . . . , $\vec{a}_k=(k;k+1;k+2;k+3)$ тогда и только тогда, когда целые числа p,q,r,s образуют арифметическую прогрессию.

§ 1.4. Базис и размерность линейного пространства

Основные сведения

Система векторов $S=\{\vec{a}_1,...,\vec{a}_s\}$ называется базисом линейного пространства V, если выполнены следующие условия:

1) эти векторы линейно независимы;

2) любой вектор $\vec{a}$ из V является линейной комбинацией векторов данной системы, т.е. $\vec{a}=k_1\vec{a}_1+...+k_s\vec{a}_s$.

Это равенство называется *разложением вектора* $\vec{a}$ по данному базису, а коэффициенты $k_1,...,k_s$ – *координатами вектора* $\vec{a}$ в данном базисе S: $\vec{a}_S=(k_1,k_2,\ldots,k_s)$.

Размерностью пространства V называется число s векторов его базиса и обозначается $\dim V$. Линейное пространство, имеющее размерность n, называют n*-мерным*. В частности $\dim(\mathbb{R}^n)=n$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ в качестве базиса может быть выбрана система E из n *единичных векторов*:

$$\vec{e}_1=(1,0,\ldots,0),\ \vec{e}_2=(0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ \vec{e}_n=(0,0,\ldots,1).$$

Если $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, то $\vec{a}=\vec{a}_E$.

Рангом системы векторов $S=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_s\}$ пространства V называется размерность линейной оболочки этой системы $L(S)$: $\mathrm{rk}(S)=\dim L(S)$. *Базисом системы* S называется часть системы, являющаяся базисом линейной оболочки $L(S)$.

Примеры

1. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (1;1;1)$, $\vec{a}_2 = (0;1;1)$, $\vec{a}_3 = (0;0;1)$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$.

Решение. Три вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют лестничную систему, поэтому они линейно независимы. Поскольку $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, то они образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$.

2. Доказать, что любые два вектора данной системы векторов образуют ее базис:

а) $\vec{a}_1 = (1;2;0;0)$, $\vec{a}_2 = (1;2;3;4)$, $\vec{a}_3 = (5;10;3;4)$;

б) $\vec{a}_1 = (1;2;3;4)$, $\vec{a}_2 = (2;3;4;5)$, $\vec{a}_3 = (3;4;5;6)$, $\vec{a}_4 = (4;5;6;7)$.

Решение. **а)** заметим, что любые два вектора системы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ не пропорциональны. Кроме того, $\vec{a}_3 = 4\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, значит, ранг данной системы равен двум;

б) векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна $\vec{d} = (1;1;1;1)$, т.е. $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{d}$, $\vec{a}_3 = \vec{a}_2 + \vec{d}$, $\vec{a}_4 = \vec{a}_3 + \vec{d}$. Поэтому все векторы системы выражаются через векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, которые не коллинеарны. Следовательно, ранг системы равен двум. Поскольку векторы системы попарно не пропорциональны, то любые два ее вектора образуют базис.

Упражнения

1.52. Выполнить задания:

а) представить каждый из векторов пространства $\mathbb{R}^4$: $\vec{a} = (2;0;1;-1)$, $\vec{b} = (1;-1;5;-3)$, $\vec{c} = (0;1;-1;0)$ в виде линейной комбинации единичных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$;

б) можно ли вектор $\vec{e}_3$ линейно выразить через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_5$ в пространстве $\mathbb{R}^5$?

в) для каких коэффициентов $\vec{a}_3$ выполняется равенство $a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n = \vec{0}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$?

1.53. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – единичные векторы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Доказать, что каждая из систем векторов:

а) $\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, ..., n\vec{e}_n$;

б) $\vec{e}_1, \vec{e}_2 - \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n - \vec{e}_{n-1}$ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$.

1.54. Доказать, что в пространстве многочленов степени, не превосходящей n, каждая из следующих систем векторов образует базис:

а) $1, x, x^2, ..., x^n$ (степени переменной x) – стандартный базис;

б) $1, x-1, (x-1)^2, ..., (x-1)^n$ – базис Тейлора с центром в точке $x=1$.

1.55. Найти координаты векторов $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2;\ 3; 4)$ в данном базисе $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

а) $\vec{e}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; 1)$, $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$;

б) $\vec{e}_1 = (1; -1; 1)$, $\vec{e}_2 = (0; 2; 1)$, $\vec{e}_3 = (0; 1; 2)$.

1.56. Найти координаты векторов $\vec{a} = (1;\ 2;\ 3;\ 4)$, $\vec{b} = (2; -1; 1; 2)$ в данном базисе $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$:

а) $\vec{e}_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 1)$, $\vec{e}_2 = (1;\ 1;\ 1;\ 0)$, $\vec{e}_3 = (1;\ 1;\ 0;\ 0)$, $\vec{e}_4 = (1;\ 0;\ 0;\ 0)$;

б) $\vec{e}_1 = (1; 0; 0; 1)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; 1; 0)$, $\vec{e}_3 = (1; 1; 0; 0)$, $\vec{e}_4 = (0; 1; 1; 1)$.

1.57. Найти координаты векторов $\vec{a} = x^2 + 2x - 1$, $\vec{b} = 4x^2 + 2x + 5$ в базисе Тейлора с центром в точке $x = 1$.

1.58. Найти координаты векторов $\vec{a} = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$, $\vec{b} = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ в базисе Тейлора с центром в точке $x = 2$.

1.59. Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}$ линейно независимы. Являются ли линейно независимыми векторы $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$?

1.60. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – базис пространства V, $\vec{a}_1 = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2$, $\vec{a}_2 = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2$. Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ образуют базис пространства V тогда и только тогда, когда векторы (p_1, p_2), (q_1, q_2) образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$.

1.61. Известно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независимы. Является ли линейно зависимой система векторов: $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{v} = 2\vec{a} + 5\vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{w} = 3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}$?

1.62. Доказать, что произвольную линейно независимую систему S векторов конечномерного пространства V можно дополнить до базиса пространства.

1.63. Доказать, что ненулевое линейное пространство имеет бесконечно много базисов. Существует ли базис в нулевом пространстве?

1.64. Допустим, что векторы $\vec{a}_1,...,\vec{a}_k$ линейно выражаются через векторы $\vec{b}_1,...,\vec{b}_m$ и $k > m$. Доказать, что векторы $\vec{a}_1,...,\vec{a}_k$ линейно зависимы.

1.65. Доказать: **а)** размерность подпространства U не превосходит размерности пространства V; **б)** если размерности U и V равны, то $U = V$.

1.66. Выразить остальные векторы системы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ через указанный базис:

а) $\vec{a}_1 = (1; 2)$, $\vec{a}_2 = (0; 3)$, $\vec{a}_3 = (4; 5)$, $\vec{a}_4 = (2; 1)$; $\vec{a}_1, \vec{a}_4$;

б) $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (1; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (2; -3; -1)$, $\vec{a}_4 = (0; 1; 1)$; $\vec{a}_2, \vec{a}_4$;

в) $\vec{a}_1 = (1; -1; 2; -2)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; 0; 3)$, $\vec{a}_3 = (0; 0; 2; 1)$, $\vec{a}_4 = (-3; 3; -4; 7)$; $\vec{a}_1, \vec{a}_2$;

г) $\vec{a}_1 = (5; -2; -1; -4)$, $\vec{a}_2 = (1; 4; 9; 6)$, $\vec{a}_3 = (-2; 3; 5; 5)$, $\vec{a}_4 = (3; 1; 4; 1)$; $\vec{a}_2, \vec{a}_4$.

1.67. Найти какой-нибудь базис данной системы векторов и все векторы системы представить в виде линейных комбинаций векторов выбранного базиса:

а) $\vec{a}_1 = (5; 2; -3; 1)$, $\vec{a}_2 = (4; 1; -2; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; -1; -2)$, $\vec{a}_4 = (3; 4; -1; 2)$;

б) $\vec{a}_1 = (2; 1; -3; -1)$, $\vec{a}_2 = (3; 1; -5; -3)$, $\vec{a}_3 = (4; 2; -1; 4)$, $\vec{a}_4 = (1; 0; -7; -8)$;

в) $\vec{a}_1 = (7; -3; 18; 21)$, $\vec{a}_2 = (-1; -1; -12; -13)$, $\vec{a}_3 = (3; -2; 3; 4)$, $\vec{a}_4 = (4; -1; 15; 17)$, $\vec{a}_5 = (9; -6; -7; 0)$;

г) $\vec{a}_1 = (7; 0; 5; 19)$, $\vec{a}_2 = (-2; 2; 2; 2)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; 3; 5)$, $\vec{a}_4 = (4; -3; 1; 3)$, $\vec{a}_5 = (5; 1; 2; 14)$.

1.68. Найти все базисы системы векторов:

а) $\vec{a}_1=(2;1;-3;1)$, $\vec{a}_2=(4;2;-6;2)$, $\vec{a}_3=(6;3;-9;3)$, $\vec{a}_4=(1;1;1;1)$;

б) $\vec{a}_1=(1;2;3)$, $\vec{a}_2=(2;3;4)$, $\vec{a}_3=(3;2;3)$, $\vec{a}_4=(4;3;4)$, $\vec{a}_5=(1;1;1)$.

1.69. Доказать, что система, содержащая хотя бы один ненулевой вектор, обладает базисом.

1.70. Доказать, что линейно независимую часть системы можно дополнить до базиса всей системы.

1.71. Доказать, что линейно независимая часть системы, содержащая максимально возможное число векторов, образует базис всей системы.

1.72. Какие из следующих утверждений являются верными:

а) если ранг системы равен единице, то ненулевой вектор системы образует ее базис;

б) если ранг системы равен двум, то два ненулевых вектора системы образуют ее базис;

в) если ранг системы равен трем, то любые три линейно независимых вектора системы образуют ее базис?

§ 1.5. Евклидовы пространства

Основные сведения

Говорят, что на линейном *евклидовом* пространстве V задано *скалярное произведение*, если имеется правило, по которому любым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из V сопоставляется число $(\vec{a},\vec{b})$, удовлетворяющее следующим четырем аксиомам:

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;

2) $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$;

3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$;

4) $(\vec{a},\vec{a})\geq 0$, и $(\vec{a},\vec{a})=0$ только в случае $\vec{a}=\vec{0}$.

Основной пример евклидова пространства – пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением векторов $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, заданным правилом: $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

Длиной (или *модулем*) вектора $\vec{a}$ называется число $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$. *Углом* между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такое число $\varphi \in [0, \pi]$, что $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Вектор единичной длины называется *нормированным*. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектор $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ нормирован. Корректность определения угла между векторами следует из *неравенства Коши – Буняковского*: $|(\vec{a}, \vec{b})| \le |\vec{a}||\vec{b}|$, справедливого для любых двух векторов евклидова пространства.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ евклидова пространства называются *ортогональными*, если $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Базис конечномерного евклидова пространства называется *ортогональным*, если его векторы попарно ортогональны; ортогональный базис называется *ортонормированным*, если он состоит из нормированных векторов.

Пусть S – линейное подпространство евклидова пространства V. Говорят, что вектор $\vec{b}$ ортогонален S, если он ортогонален любому вектору из S. *Ортогональным дополнением* $S^{\perp}$ к подпространству S называется множество всех векторов из V, ортогональных S.

Примеры

1. Найти длины векторов $\vec{a} = (1; -1; \ -1; \ -1)$, $\vec{b} = (-1; \ 1; \ 1; \ -1)$ и угол между ними в пространстве $\mathbb{R}^4$.

Решение. Находим длины векторов и их скалярное произведение:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{b}, \vec{b}\right)} = \sqrt{\left(-1^2\right)+1^2+1^2+\left(-1\right)^2} = 2,$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1) = -2.$$

Угол между векторами определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{-2}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2} \text{ и равен } \frac{2\pi}{3}.$$

2. Дополнить векторы $\vec{a}_1 = (1; 0; 1; 0)$ и $\vec{a}_2 = (1; -1; -1; 0)$ до ортогонального базиса пространства $\mathbb{R}^4$.

Решение. Заметим, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ ортогональны. Найдем вектор $\vec{a}_3 = \left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\right)$, ортогональный векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Неизвестные координаты можно найти из условий ортогональности: $\left(\vec{a}_1, \vec{a}_3\right) = 0, \left(\vec{a}_2, \vec{a}_3\right) = 0,$ которые приводят к системе линейных уравнений: $x_1 + x_3 = 0, x_1 - x_2 - x_3 = 0.$ Складывая уравнения, получаем $2x_1 - x_2 = 0.$ Значит, общее решение системы имеет вид $\left(x_1, 2x_1, -x_1, x_4\right).$ Подставляя значения $x_1 = 1,\ x_4 = 0,$ получаем вектор $\vec{a}_3 = \left(1, 2, -1, 0\right).$ Поскольку векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ имеют нулевую последнюю координату, то единичный вектор $\vec{a}_4 = \left(0, 0, 0, 1\right)$ ортогонален векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3.$ Таким образом, нами получен ортогональный базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4.$

3. Проверить, что векторы $\vec{a}_1 = \left(1;\ -1;\ 2\right)$, $\vec{a}_2 = \left(-1;\ 1;\ 1\right)$, $\vec{a}_3 = \left(1;\ 1;\ 0\right)$ образуют ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $\vec{x} = \left(3;\ 5;\ 4\right)$ в этом базисе.

Решение. Нетрудно проверить, что данные векторы попарно ортогональны. Ненулевые ортогональные векторы линейно независимы. Поскольку число этих векторов совпадает с размерностью пространства $\mathbb{R}^3$, то они образуют его ортогональный базис. Пусть $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ – координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, т.е. $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3.$ Умножая скалярно обе части этого равенства на вектор $\vec{a}_1$, получим $\left(\vec{a}, \lambda\vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$; откуда $x_1 = \dfrac{\left(\vec{x}, \vec{a}_1\right)}{\left(\vec{a}_1, \vec{a}_1\right)}$, т.е. $x_1 = \dfrac{3-5+8}{1+1+4} = 1$. Аналогично, $x_2 = \dfrac{\left(\vec{x}, \vec{a}_2\right)}{\left(\vec{a}_2, \vec{a}_2\right)} = 2$, $x_3 = 4$. Значит, $\left(x_1; x_2; x_3\right) = \left(1; 2; 4\right)$.

Упражнения

1.73. Доказать, что в любом евклидовом пространстве справедливы следующие свойства скалярного произведения:

а) $\left(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{a}, \vec{c}\right)$; **б)** $\left(\vec{a}, \lambda\vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$;

в) $\left(\vec{a}, \vec{b}-\vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) - \left(\vec{a}, \vec{c}\right)$; **г)** $\left(\vec{a}, \vec{0}\right) = \left(\vec{0}, \vec{a}\right) = 0$.

1.74. Доказать, что в любом евклидовом пространстве справедливы свойства: **а)** если $\left(\vec{x}, \vec{a}\right) = 0$ для любого $\vec{x}$ и фиксированного $\vec{a}$, то $\vec{a} = \vec{0}$; **б)** если $\left(\vec{x}, \vec{a}\right) = \left(\vec{x}, \vec{b}\right)$ для любого $\vec{x}$ и фиксированных $\vec{a}, \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

1.75. Проверить справедливость аксиом 1 – 4 для стандартного скалярного произведения векторов $\vec{a} = \left(a_1, \ldots, a_n\right)$ и $\vec{b} = \left(b_1, \ldots, b_n\right)$, из пространства $\mathbb{R}^n$, заданного правилом $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

1.76. Какие из следующих правил задают скалярное произведение на $\mathbb{R}^2$:

а) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_1 b_1 - a_2 b_2$;

б) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_1 b_1 + 2a_1 b_2 + 3a_2 b_2$;

в) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_1 b_1 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + a_2 b_2$;

г) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_1 b_1 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + 5a_2 b_2$?

1.77. Какие соотношения должны быть выполнены для коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, чтобы правило $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \alpha a_1 b_1 + \beta a_1 b_2 + \gamma a_2 b_1 + \delta a_2 b_2$ задавало скалярное произведение?

1.78. Найти длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и угол между ними в пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $\vec{a} = (1;\ -1;\ 2)$, $\vec{b} = (1;\ 0;\ 1)$, $\mathbb{R}^3$;

б) $\vec{a} = (1;\ 1;\ 1)$, $\vec{b} = (0;\ 1;\ 1)$, $\mathbb{R}^3$;

в) $\vec{a} = (1;\ 1;\ -1;\ -1)$, $\vec{b} = (-1;\ -1;\ 1;\ 1)$, $\mathbb{R}^4$;

г) $\vec{a} = (1;\ 2;\ 0;\ -2)$, $\vec{b} = (-2;\ -1;\ 2;\ 0)$, $\mathbb{R}^4$.

1.79. Доказать, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ евклидова пространства справедливы неравенства:

а) $\left|(\vec{a},\ \vec{b})\right| \le |\vec{a}|\ \left|\vec{b}\right|$ (неравенство Коши – Буняковского);

б) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$ (неравенство треугольника).

1.80. Используя неравенство Коши – Буняковского, проверить справедливость следующих неравенств:

а) $|a_1 b_1 + a_2 b_2| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$;

б) $|a_1 b_1 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + 5a_2 b_2| \le \sqrt{a_1^2 + 4a_1 a_2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2}$.

1.81. Проверить ортогональность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $\vec{a} = (1;\ 0;\ 1)$, $\vec{b} = (1;\ -1;\ 1)$, $\mathbb{R}^3$;

б) $\vec{a} = (1;\ 0;\ 1;\ 0)$, $\vec{b} = (1;\ -1;\ -1;\ 1)$, $\mathbb{R}^4$;

в) $\vec{a} = (1;\ 2;\ 2;\ -3)$, $\vec{b} = (2;\ 3;\ 2;\ 4)$, $\mathbb{R}^4$;

г) $\vec{a} = (1;\ 1;\ 1;\ 2)$, $\vec{b} = (1;\ 2;\ 3;\ -3)$, $\mathbb{R}^4$.

1.82. Доказать теорему Пифагора: векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ евклидова пространства ортогональны тогда и только тогда, когда $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$.

1.83. Известно, что вектор $\vec{a}$ ортогонален векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Может ли вектор $\vec{a}$ линейно выражаться через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

1.84. Доказать, что ортогональная система векторов линейно независима.

1.85. Дополнить данные векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ до какого-нибудь ортогонального базиса пространства $\mathbb{R}^3$:

а) $\vec{a}_1 = (1;\ -1;\ 2)$, $\vec{a}_2 = (-2;\ 0;\ 1)$, $\mathbb{R}^3$;

б) $\vec{a}_1 = (-3;\ 2;\ 1)$, $\vec{a}_2 = (1;\ 1;\ 1)$, $\mathbb{R}^3$.

1.86. Дополнить данные векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ до какого-нибудь ортогонального базиса пространства $\mathbb{R}^4$:

а) $\vec{a}_1 = (1;\ -2;\ 2;\ -3)$, $\vec{a}_2 = (2;\ -3;\ 2;\ 4)$;

б) $\vec{a}_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 2)$, $\vec{a}_2 = (1;\ 2;\ 3;\ -3)$;

в) $\vec{a}_1 = (1;\ 0;\ 1;\ 0)$, $\vec{a}_2 = (1;\ -1;\ -1;\ 1)$.

1.87. Доказать, что ортонормированная система векторов линейно независима.

1.88. Доказать, что любая ортонормированная система может быть дополнена до ортонормированного базиса конечномерного евклидова пространства.

1.89. Даны векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$. Указать ортонормированный базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ пространства $\mathbb{R}^4$, для которого верно равенство $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$:

а) $\vec{a}_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 1)$, $\vec{a}_2 = (1;\ 1;\ -1;\ -1)$;

б) $\vec{a}_1 = (0;\ 2;\ 1;\ 2)$, $\vec{a}_2 = (1;\ 1;\ 2;\ 2)$;

в) $\vec{a}_1 = (-1;\ 2;\ -2;\ 1)$, $\vec{a}_2 = (1;\ 2;\ 3;\ 1)$.

1.90. Доказать, что всякое конечномерное евклидово пространство обладает ортонормированным базисом.

1.91. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^4$. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$.

а) $\vec{a}_1 = (1;\ -1;\ 2;\ 0)$, $\vec{a}_2 = (-1;\ 1;\ 1;\ 3)$, $\vec{a}_3 = (1;\ 1;\ 0;\ 0)$, $\vec{a}_4 = (1;\ -1;\ -1;\ 1)$, $\vec{x} = (4;\ -8;\ 12;\ -4)$;

б) $\vec{a}_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 2)$, $\vec{a}_2 = (1;\ 0;\ 1;\ -1)$, $\vec{a}_3 = (-1;\ 0;\ 1;\ 0)$, $\vec{a}_4 = (1;\ -6;\ 1;\ 2)$, $\vec{x} = (42;\ -21;\ 0;\ 21)$.

1.92. Дополнить вектор $\vec{e}_1 = (1;\ 0)$ до ортонормированного базиса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + 5a_2 b_2$. Найти разложение вектора $\vec{x}$

относительно указанного базиса: **а)** $\vec{x}=(-2;1)$; **б)** $\vec{x}=(3;-1)$; **в)** $\vec{x}=(1;1)$; **г)** $\vec{x}=(19;-7)$.

1.93. Указать общий вид вектора, ортогонального заданным векторам $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$: **а)** $\vec{a}_1=(2;\ 3;\ 4)$, $\vec{a}_2=(1;\ 2;\ 3)$, $\mathbb{R}^3$; **б)** $\vec{a}_1=(1;\ -1;\ 0;\ 1)$, $\vec{a}_2=(-2;\ 1;\ -1;\ 0)$, $\mathbb{R}^4$.

1.94. Найти базис ортогонального дополнения к линейной оболочке векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ в пространстве $\mathbb{R}^4$:

а) $\vec{a}_1=(0;\ 1;\ 2;\ -1)$, $\vec{a}_2=(-1;\ 0;\ 1;\ 2)$;

б) $\vec{a}_1=(1;\ 1;\ -1;\ 1)$, $\vec{a}_2=(-1;\ 1;\ 3;\ 1)$, $\vec{a}_3=(-1;\ 0;\ 1;\ 2)$.

1.95. Доказать, что вектор $\vec{b}$ ортогонален линейной оболочке $L(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k)$ тогда и только тогда, когда $\vec{b}$ ортогонален векторам $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k$.

1.96. Верно ли, что ортогональное дополнение $S^{\perp}$ к подпространству $S\subset V$ является подпространством V?

1.97. Пусть $S\subseteq T$ – подпространства V. Как связаны подпространства $S^{\perp}$ и $T^{\perp}$?

1.98. Доказать, что если пространство V конечномерно, то верны утверждения: **а)** $V=S+S^{\perp}$ и $S\cap S^{\perp}=\vec{0}$; **б)** $\dim V=\dim S+\dim S^{\perp}$; **в)** $\left(S^{\perp}\right)^{\perp}=S$ для любого подпространства S.

ГЛАВА 2

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 2.1. Матрицы и операции над ними

Основные сведения

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из чисел a_{ij} и содержащая m строк и n столбцов. Числа a_{ij} называются *элементами* матрицы; первый индекс в обозначении элемента указывает номер строки, а второй – номер столбца. Используется также краткое обозначение матрицы: $A = (a_{ij})$.

Матрица, получаемая из матрицы A заменой строк на столбцы (с сохранением их порядка), называется *транспонированной* к A и обозначается A^T.

Матрица A размера $n \times n$ называется *квадратной*, а число n – ее порядком. Набор элементов a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} квадратной матрицы A порядка n называется *главной диагональю* (другая диагональ называется *побочной*), а сумма диагональных элементов – *следом* матрицы и обозначается $\mathrm{tr}(A)$.

Квадратная матрица D, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, т.е. матрица вида

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется *диагональной.* Частным случаем диагональной матрицы является матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

называемая *единичной.*

Квадратная матрица, для которой все элементы, стоящие под (над) главной диагональю, равны нулю, называется *верхней треугольной* (*нижней треугольной*).

Квадратная матрица A называется *симметрической*, если $A^T = A,$ и *кососимметрической*, если $A^T = -A.$

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера называется матрица $A + B$ того же размера, определяемая равенством $A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$ Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ij}).$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей*. Матрица $-A = (-1)A$ называется *противоположной* матрице A.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B = (b_{jk})$ размера $n \times s$ называется матрица $AB = (c_{ik})$ размера $m \times s,$ элементы которой находятся по формуле

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \ldots + a_{in}\, b_{nk},$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$ $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s.$

В общем случае $AB \neq BA.$ Если $AB = BA$ ($AB = -BA$), то говорят, что матрицы A и B *коммутируют* (*антикоммутируют*).

Примеры

1. Найти A^T, если:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; **в)** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -5 & 6\\ -7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

Решение.

а) $A^T=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$; **б)** $A^T=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; **в)** $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & -7\\ 2 & -5 & 8\\ -7 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

2. Найти след $\mathrm{tr}(A)$ матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\\ 7 & -8 & 9\end{pmatrix}$.

Решение. Имеем $\mathrm{tr}(A)=1+5+9=15$.

3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=7A-4B^T$.

Решение.

$$C=7A-4B^T=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 14 & -21\\ 21 & -14 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12 & 4 & 4\\ -4 & -8 & -16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 18 & -17\\ 17 & -22 & -9\end{pmatrix}.$$

4. Найти произведения матриц AB и BA для данных матриц:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Решение.

а) $AB=\begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+(-2)\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\end{pmatrix}$,

$$BA=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3 & 1\cdot(-2)\\ 4\cdot 3 & 4\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 12 & -8\end{pmatrix}.$$

б) $AB=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot1+2\cdot3 & 4\cdot2+2\cdot1 & 4\cdot3+2\cdot2\\ (-3)\cdot1+1\cdot3 & (-3)\cdot2+1\cdot1 & (-3)\cdot3+1\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 10 & 16\\ 0 & -5 & -7\end{pmatrix},$$

произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

5. Найти A^7 для матрицы A:

а) $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -12 & -5\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; **г)** $A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е.

а) Поскольку $A^2=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -12 & -5\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$, то $A^7=\left(A^2\right)^3 A=$

$=EA=A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -12 & -5\end{pmatrix}$;

б) поскольку $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=2A$, то, $A^3=2A^2=4A$, т.е. $A^3=4A$. Возводя обе части в куб, получим $A^6=16A^2=32A$, откуда $A^6=32A$. Наконец, $A^7=32A^2=64A=\begin{pmatrix}64 & 64\\ 64 & 64\end{pmatrix}$;

в) имеем: $A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,

$A^3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$,

$A^4=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4E$,

$$A^7 = A^4A^3 = -4E\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix};$$

г) пусть $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Тогда $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $A = = 2\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Для любого натурального числа n верно равенство

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix},$$

в частности,

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} \cos 6\varphi & -\sin 6\varphi \\ \sin 6\varphi & \cos 6\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = E.$$

Тогда $A^7 = A^6A = 2^6A = 64A = \begin{pmatrix} 64 & -64\sqrt{3} \\ 64 & 64 \end{pmatrix}$.

6. Предприятие выпускает три вида продукции в количестве 10, 50 и 20 единиц в день, используя при изготовлении два вида сырья. Расходы сырья (в кг на единицу продукции) характеризуются матрицей

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

элемент a_{ij} которой равен затратам сырья i-го вида на изготовление единицы продукции j-го вида $\left(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3\right)$. Сколько сырья каждого вида расходуется ежедневно?

Решение. Представим ежедневный выпуск продукции и ежедневные затраты сырья соответственно вектор-столбцами $\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$ и $\vec{S} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$, где через s_i обозначен расход сырья i-го вида.

Тогда $\vec{S} = A\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 270 \end{pmatrix}$, т.е. искомые затраты сырья составляют: 130 кг первого вида и 270 кг второго вида.

Упражнения

2.1. Найти матрицу A^T для следующих матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; **в)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

2.2. Найти след матрицы $\mathrm{tr}(A)$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & 2 & 6 \\ -4 & -8 & -3 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3. Доказать равенство $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$ для матрицы A.

2.4. Может ли на главной диагонали кососимметрической матрицы стоять единица? Тот же вопрос для симметрической матрицы.

2.5. Как называется каждая из следующих квадратных матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **в)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **д)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

е) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$?

2.6. По данным матрицам A и B найти матрицу C:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix},\ C=3A+2B.$

б) $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ C=A-3B.$

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ C=7A-4B.$

2.7. Проверить, что операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$, 2) $(A+B)+C=A+(B+C)$, 3) $A+\mathbf{0}=A$,

4) $A+(-A)=\mathbf{0}$, 5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$, 6) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta B$,

7) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$, 8) $1\cdot A=A$,

где A,B,C – произвольные матрицы одного размера, $\mathbf{0}$ – нулевая матрица того же размера, α,β – произвольные числа.

2.8. Доказать, что множество всех матриц размера $m\times n$ с определенными операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство.

2.9. Пусть E_{ij} – матрица, содержащая единственный ненулевой элемент – $a_{ij}=1$. Проверить, что *матричные единицы* E_{ij} образуют базис пространства матриц размера $m\times n$. Найти размерность этого пространства.

2.10. Доказать, что каждое из следующих множеств является подпространством в пространстве квадратных матриц порядка n:

а) множество диагональных матриц;

б) множество симметрических матриц;

в) множество кососимметрических матриц;

г) множество верхних треугольных матриц.

2.11. Проверить, что матрицы $E_{11}, E_{12}+E_{21}, E_{22}$, где E_{ij} – матричные единицы, образуют базис пространства симметрических матриц порядка 2.

2.12. Найти размерность пространства симметрических матриц порядка три.

2.13. Вычислить произведения матриц AB и BA:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.14. Вычислить произведения трех матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.15. Предприятие выпускает четыре вида продукции в количестве 40, 100, 50 и 120 единиц в день, используя при изготовлении три вида сырья. Расходы сырья (в кг на единицу продукции) характеризуются матрицей

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

элемент a_{ij} которой равен затратам сырья i-го вида на изготовление единицы продукции j-го вида $(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$. Сколько сырья каждого вида расходуется ежедневно?

2.16. Предприятие выпускает три вида продукции в количестве 30, 20 и 40 единиц в день, используя при изготовлении два вида сырья. Расходы сырья (в кг на единицу продукции) характеризуются матрицей

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

элемент a_{ij} которой равен затратам сырья i-го вида на изготовление единицы продукции j-го вида $(i=1,2;\ j=1,2,3)$. Известна также стоимость каждого вида сырья (в расчете на единицу сырья в руб.): $p=(10\ \ 20)$. Найти ежедневные затраты на приобретение сырья.

2.17. Предприятие выпускает три вида продукции в количествах, характеризуемых вектором $\vec{x}=(1;\ 7;\ 4)$. Для ее изготовления используются пять видов сырья. Расходы сырья (в кг на единицу продукции) характеризуются матрицей

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 10 & 8 & 12 \\ 3 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – расход i-го вида сырья на единицу j-го вида продукции, вектор $\vec{p}=(7;4;5;1;2)$ задает стоимость единицы каждого вида сырья. Определить: **а)** количество сырья каждого вида, необходимое для обеспечения плана; **б)** общую стоимость сырья, необходимого для выпуска всей продукции.

2.18. Пусть A – квадратная матрица, E – единичная матрица того же порядка. Вычислить произведения AE и EA.

2.19. Проверить справедливость следующих свойств умножения матриц:

1) $(AB)C = A(BC)$; 2) $A(B+C) = AB + AC$;

3) $(A+B)C = AC + BC$; 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

2.20. Вычислить произведения матричных единиц: **а)** $E_{12}E_{22}$; **б)** $E_{12}E_{12}$; **в)** $E_{12}E_{21}$.

2.21. Проверить, что матричные единицы E_{ij} перемножаются по правилу Кронекера: $E_{ij}E_{jk} = E_{ik}$ и $E_{ij}E_{kl} = 0$, $(j \neq k)$.

2.22. Как меняются строки и столбцы матрицы A, если умножить ее слева или справа на одну из матричных единиц E_{11} или E_{12}? Тот же вопрос для матричной единицы E_{ij}.

2.23. Доказать, что транспонирование матриц обладает свойствами:

а) $(A+B)^T = A^T + B^T$; **б)** $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$;

в) $(A-B)^T = A^T - B^T$; **г)** $(AB)^T = B^T A^T$.

2.24. Какое из равенств верно:

а) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$; **б)** $(ABC)^T = A^T B^T C^T$?

2.25. Найти степени матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; **б)** $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$; **в)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^4$; **г)** $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^8$.

2.26. Вычислить произвольную степень матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$; **б)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; **г)** $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^n$.

2.27. Используя разложение матрицы в виде линейной комбинации матричных единиц и формулу Кронекера, вычислить степени матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{15}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{10}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{5}$.

2.28. Найти все матрицы, коммутирующие с данной:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.29. Доказать, что для коммутирующих матриц A и B справедливы формулы сокращенного умножения:

а) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; **б)** $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$;

в) $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$;

г) $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

Какие из этих равенств равносильны условию коммутирования матриц A и B?

2.30. Пусть матрицы A и B коммутируют с матрицей C. Верно ли, что каждая из следующих матриц AB, $A+B$, ABA, $AB-BA$ также коммутирует с матрицей C?

2.31. Пусть A – квадратная матрица; $f(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n$ – многочлен. Доказать, что коммутируют матрицы A и $f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_nE$.

2.32. Пусть A – матрица второго порядка. Доказать, что: **а)** если A коммутирует со всеми матричными единицами, то она коммутирует с произвольной матрицей B; **б)** если матрица A коммутирует со всеми матрицами, то она *скалярная*, т.е. $A = \lambda E$ для подходящего числа λ.

2.33. Диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ по главной диагонали обозначается через diag $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Какие из утверждений являются истинными:

а) умножение матрицы A слева на диагональную diag $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ вызывает умножение строк матрицы A соответственно на числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$;

б) умножение матрицы A справа на диагональную diag (λ_1, ... , λ_n) вызывает умножение строк матрицы A соответственно на числа λ_1, ... , λ_n;

в) любая матрица, коммутирующая с матрицей diag (λ_1, ... , λ_n), где λ_1, ... , λ_n – попарно различные числа, также диагональна?

2.34. Доказать эквивалентность условий а) – г) для квадратной матрицы A порядка n: **а)** $A \cdot A^T = E$; **б)** $A^T \cdot A = E$; **в)** строки матрицы A образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$; **г)** столбцы матрицы A образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Матрица, удовлетворяющая указанным условиям, называется *ортогональной*.

2.35. Доказать, что произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей. Является ли сумма ортогональных матриц ортогональной матрицей? Останется ли матрица ортогональной, если ее умножить на число?

2.36. При каких условиях диагональная матрица является ортогональной?

2.37. Пусть $x = (\cos\alpha \quad \sin\alpha)$, $X = x^T$. Вычислить $A = 2Xx - E$.

2.38. Пусть x – строка единичной длины, $X = x^T$; тогда $x \cdot X = 1$. При каких значениях λ матрица $A = E + \lambda Xx$ ортогональна?

§ 2.2. Матрицы и системы линейных уравнений

Основные сведения

Для системы m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

введем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (2.1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B, \tag{2.2}$$

где A – матрица системы, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов.

Рангом матрицы A (обозначается $\mathrm{rk}(A)$) называется ранг системы векторов, образуемых строками (или столбцами) матрицы. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк (столбцов).

Множество решений однородной системы линейных уравнений $AX = 0$ с n неизвестными является подпространством в $\mathbb{R}^n$. Базис линейного пространства решений однородной системы линейных уравнений $AX = 0$ называется *фундаментальным набором решений* этой системы. Каждый фундаментальный набор решений состоит из $n - r$ линейно независимых решений этой системы: $X_1, ..., X_{n-r}$, где $r = \mathrm{rk}(A)$ – ранг матрицы A. Общее решение системы имеет вид $X = C_1 X_1 + ... + C_{n-r} X_{n-r}$, где $C_1, ..., C_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Множество векторов $\vec{a} + U = \{\vec{a} + \vec{x} \mid \vec{x} \in U\}$ для данного вектора $\vec{a}$ и U – подпространства в $\mathbb{R}^n$ называется *сдвинутым подпространством*. Множество решений неоднородной системы линейных уравнений $AX = B$ является сдвинутым подпространством $X_0 + U$, где X_0 – частное решение неоднородной системы, U – пространство решений однородной системы $AX = 0$.

Примеры

1. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 34 & 47 \\ 2 & 1 & 8 & 11 \\ -13 & -5 & -46 & -64 \\ 11 & 6 & 46 & 63 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях, так что приведем матрицу A к ступенчатому виду методом Гаусса (в качестве ведущих элементов выбираем единицы):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 11 \\ -3 & 0 & -6 & -9 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получили матрицу с двумя линейно независимыми строками, так что ранг исходной матрицы A равен 2.

2. Найти фундаментальный набор решений однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем основную матрицу этой системы и с помощью элементарных преобразований строк выделим в ней максимальное число единичных столбцов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выразим базисные неизвестные x_1, x_2 через свободные: $x_1 = x_3 - x_4$, $x_2 = x_3$. Запишем общее решение системы $\left(x_3 - x_4; x_3; x_3; x_4\right)$. Полагая последовательно одну из свободных переменных равной 1, а остальные свободные переменные равными 0, найдем фундаментальный набор решений:

$$X_1 = \left(1; 1; 1; 0\right),\ X_2 = \left(-1; 0; 0; 1\right).$$

3. Пусть векторы $\vec{a}_1 = \left(1; 1; 0; 1\right)$, $\vec{a}_2 = \left(1; 1; 1; 0\right)$ образуют базис подпространства U в $\mathbb{R}^4$. Найти систему линейных уравнений, задающую подпространство U.

Р е ш е н и е. Запишем систему линейных уравнений, задающую пространство $U^{\perp}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему, заметив, что в качестве свободных неизвестных удобно взять x_1, x_2; общее решение имеет вид $(x_1; x_2; -x_1 - x_2; -x_1 - x_2)$. Найдем фундаментальный набор решений, последовательно подставляя значения свободных неизвестных $x_1 = 1, x_2 = 0$ и $x_1 = 0, x_2 = 1$: $X_1 = (1; 0; -1; -1)$, $X_2 = (0; 1; -1; -1)$. Следовательно, пространство U задается системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Упражнения

2.39. Записать систему линейных уравнений в матричной форме:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

2.40. Перейти от матричной формы записи системы линейных уравнений к развернутой:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

2.41. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

2.42. Найти ранг матрицы в зависимости от значений параметра λ:

а) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \lambda & 0 \\ 3 & \lambda & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2.43. Выполнить задания: **а)** найти, как изменится ранг матрицы, если к ней приписать еще одну строку; **б)** доказать, что вычеркивание одной строки не меняет ранга тогда и только тогда, когда вычеркнутая строка является линейной комбинацией остальных строк.

2.44. Доказать, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.

2.45. Матрица называется *ступенчатой*, если она имеет лестничную систему строк. Как найти ранг ступенчатой матрицы?

2.46. Матрица называется *высокой*, если число ее строк больше числа ее столбцов. Доказать, что строки высокой матрицы линейно зависимы.

2.47. Доказать, что с помощью элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу ранга r можно привести к виду $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_r – единичная матрица порядка r.

2.48. Доказать, что множество решений однородной системы линейных уравнений $AX = 0$ с n неизвестными является подпространством в $\mathbb{R}^n$.

2.49. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 9x_3 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 + 23x_3 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 16x_3 = 0; \end{cases}$

2.50. Найти фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0. \end{cases}$

2.51. Существует ли фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \end{cases}$$

содержащий вектор $(0; 1; -4; 1; 2)$? Если да, то найти его.

2.52. Найти все значения параметра λ, при которых система

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ 5x_1 - 16x_2 - 17x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет фундаментальный набор решений, состоящий из двух векторов. Привести соответствующий фундаментальный набор решений.

2.53. Задать системой линейных уравнений линейную оболочку системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$:

а) $\vec{a}_1 = (1; -1; 1)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 3)$;

б) $\vec{a}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 1)$;

в) $\vec{a}_1 = (1; 0; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (0; 1; 2; 1)$;

г) $\vec{a}_1 = (1; -1; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; 0; -2)$.

2.54. Доказать, что каждое подпространство в $\mathbb{R}^n$ является пространством решений подходящей системы линейных уравнений.

2.55. Доказать критерий совместности: система линейных уравнений $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A \mid B)$.

2.56. Доказать критерий определенности: система линейных уравнений $AX = B$ с n неизвестными является определенной тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A \mid B) = n$.

2.57. Доказать, что неопределенная система линейных уравнений имеет бесконечно много решений.

2.58. Пусть U – подпространство в $\mathbb{R}^n$. Проверить, что для любого вектора $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ множество векторов $\vec{a} + U$ является подпространством тогда и только тогда, когда $\vec{a} \in U$.

2.59. Пусть U и V – два подпространства в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что $\vec{a} + U = \vec{b} + V$ тогда и только тогда, когда выполняются условия: $U = V, \vec{a} - \vec{b} \in U$.

2.60. **а)** пусть X_1, X_2 – частные решения неоднородной системы $AX = B$. Проверить, что $X_1 - X_2$ является решением однородной системы $AX = 0$; **б)** пусть X_0 – частное решение неоднородной системы $AX = B$, Y – частное решение однородной системы $AX = 0$. Проверить, что $X_0 + Y$ – частное решение неоднородной системы $AX = B$; **в)** как связаны общие решения систем уравнений $AX = B$ и $AX = 0$?

2.61. **а)** доказать, что если система линейных уравнений с целыми коэффициентами имеет два целых решения, то она имеет бесконечное число целых решений; **б)** привести пример системы линейных уравнений с целыми коэффициентами, которая имеет бесконечно много решений, но не имеет ни одного целого решения.

2.62. Задать системой линейных уравнений сдвинутое подпространство $\vec{b} + L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$:

а) $\vec{a}_1 = (1; 1; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; 1; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2; -2; 1)$;

б) $\vec{a}_1 = (0; 1; 1; -3)$, $\vec{a}_2 = (2; -3; 1; 1)$, $\vec{b} = (0; -2; 1; 2)$.

§2.3. Определители

Основные сведения

Каждой квадратной матрице A по некоторому закону может быть поставлено в соответствие некоторое число $|A|$, называемое ее *определителем* (определитель называют также *детерминантом* и обозначают через $\det A$). Если A имеет порядок n, то говорят, что $|A|$ – определитель n-го порядка.

Определитель второго порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}, \tag{2.3}$$

а определитель третьего порядка – по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}\, a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}. \tag{2.4}$$

Можно также говорить и об определителях первого порядка, если положить $\det(a) = a$.

Определитель $(n - 1)$-го порядка, полученный вычеркиванием строки i и столбца j из определителя n-го порядка $|A|$, называют *минором* элемента a_{ij} и обозначают M_{ij}. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называют величину

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}.$$

Для определителя порядка n справедлива *формула Лапласа* разложения по строке i:

$$\Delta = |A| = a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \ldots + a_{in}\, A_{in} \tag{2.5}$$

и столбцу j:

$$\Delta = |A| = a_{1j}\, A_{1j} + a_{2j}\, A_{2j} + \ldots + a_{nj}\, A_{nj}. \tag{2.6}$$

Свойства определителей

Вычисление определителей можно упростить, используя указанные свойства.

1. Общий множитель элементов любой строки можно вынести за знак определителя.

2. Если все элементы строки i определителя Δ представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель Δ равен сумме двух определителей Δ_1 и Δ_2, в которых строка i состоит соответственно из первых или вторых слагаемых, а все остальные строки – те же, что и в определителе Δ.

3. При перестановке любых двух строк определитель умножается на (-1).

4. Величина определителя не изменится, если к одной из строк прибавить любую другую, умноженную на некоторое число.

5. Определитель, содержащий нулевую строку, равен нулю.

6. Определитель матрицы A равен нулю тогда и только тогда, когда ее строки линейно зависимы.

7. Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового размера равен произведению их определителей: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

8. При транспонировании матрицы определитель не меняется, т.е. $\left|A^T\right| = |A|$ для любой квадратной матрицы A.

Из свойства 8 следует, что перечисленные выше свойства 1 – 6 определителей сохраняются, если в формулировках слово «строка» заменить на слово «столбец».

Примеры

1. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -8 & 7 & -6 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е . Решим задачу разными способами:
а) из формулы (2.4) имеем:

$$\Delta = 1 \cdot 7 \cdot 2 + (-2) \cdot (-6) \cdot 5 + 3 \cdot (-8) \cdot (-4) -$$
$$-3 \cdot 7 \cdot 5 - (-2) \cdot 2 \cdot (-8) - 1 \cdot (-6) \cdot (-4) = 9;$$

б) разложим определитель по третьему столбцу (формула (2.6)):

$$\Delta = 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-8 & 7\\ 5 & -4\end{vmatrix} - 6\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & -4\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -8 & 7\end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(32-35)+6(-4+10)+2(7-16)=9;$$

в) преобразуем определитель (не меняя его величины) так, чтобы в первом столбце остался лишь один ненулевой элемент, и разложим определитель по этому столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -8 & 7 & -6\\ 5 & -4 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -9 & 18\\ 0 & 6 & -13\end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-9 & 18\\ 6 & -13\end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 6 & -13\end{vmatrix} = 9.$$

2. Вычислить определитель с помощью элементарных преобразований:

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 8 & 7 & 6 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 8\\ 4 & 6 & 5 & 7\end{vmatrix}.$$

Решение. Заметим, что из свойств определителя 1, 3 и 4 следует, что, во-первых, с помощью перестановки строк и изменения знака определителя на противоположный можно добиться того, что разрешающим элементом всегда будет a_{11}; во-вторых, деля все элементы первой строки на a_{11} и вынося общий множитель за знак определителя, можно сделать так, чтобы разрешающий элемент стал равным 1. Наконец, в-третьих, пересчитывая остальные элементы определителя по правилу прямоугольника, мы можем преобразовать первый столбец в единичный. Разлагая определитель по первому столбцу, что сводится к вычеркиванию первой строки и первого столбца, мы получим определитель меньшего порядка.

В нашем примере можно выбрать в качестве разрешающего элемента $a_{11} = 1$. Выполним один шаг полного исключения, при этом определитель не изменится:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -18 & -27 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & -18 & -27 \\ -1 & -5 & 0 \\ -2 & -7 & -9 \end{vmatrix}.$$

Вынесем (-9) из элементов первой строки и прибавим к третьей строке вторую, умноженную на 3:

$$\Delta = -9\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \\ -2 & -7 & -9 \end{vmatrix} = -9\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -27\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -27 \cdot 6 = -162.$$

3. Найти определитель матрицы X, если выполнено следующее матричное равенство:

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 & 3 \\ 16 & 6 & 5 \\ 11 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ -3 & -1 & 6 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Данное матричное уравнение можно записать в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 3 \\ 16 & 6 & 5 \\ 11 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ -3 & -1 & 6 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $|A||X| = |AX| = |B|$, то $|X| = \dfrac{|B|}{|A|}$. Находим определители матриц A и B:

$$|A| = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 3 \\ 16 & 6 & 5 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$|B|=\begin{vmatrix}7&4&-3\\-3&-1&6\\-4&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&0&21\\-3&-1&6\\2&0&-8\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-5&21\\2&-8\end{vmatrix}=2.$$

Поэтому $|X|=2$.

4. Найти определитель матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix}5&3&0&0&0\\2&1&0&0&0\\0&0&1&2&3\\0&0&2&3&1\\0&0&3&1&2\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е . Матрица A имеет блочно-диагональный вид:

$$A=\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix},$$

где $B=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$. Нетрудно показать, что в этом случае справедлива следующая формула для определителя матрицы A:

$$|A|=|B||C|.$$

Вычислим определители матриц B и C:

$$|B|=5-6=-1,$$

$$|C|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&-5&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5\\5&7\end{vmatrix}=-18.$$

Таким образом, $|A|=(-1)\cdot(-18)=18$.

5. Вычислить определитель матрицы $M=\begin{pmatrix}A&2A\\3A&5A\end{pmatrix}$, где

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Решение. Используя элементарные преобразования, приведем матрицу M к блочно-диагональному виду и воспользуемся формулой предыдущей задачи:

$$\begin{vmatrix}A&2A\\3A&5A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&2A\\0&-A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&0\\0&-A\end{vmatrix}.$$

Сначала мы прибавили ко второй строке первую, умноженную на (-3); а потом к первой строке прибавили удвоенную вторую. Теперь надо правильно вынести знак «минус». Поскольку матрица A имеет порядок 3, то знак «минус» надо вынести из каждой строки, что дает $(-1)^3=-1$ (в случае, если бы порядок матрицы A был бы равен 2, то мы должны были вынести $(-1)^2=1$). Поскольку $|A|=2^3=8$, то $|M|=-|A|^2=-8^2=-64$.

6. Пусть определитель n-го порядка задается формулой

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}-1&4&0&\dots&\dots&0\\-3&-1&4&\dots&\dots&0\\0&-3&-1&4&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&-3&-1&4\\0&0&\dots&\dots&-3&-1\end{vmatrix}.$$

Найти Δ_5.

Решение. Разумеется, можно выписать определитель пятого порядка и попытаться вычислить его непосредственно. Мы постараемся избежать таких сложных вычислений. А именно, разложим данный определитель по последней строке:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}-1&4&0&\dots&\dots&0\\-3&-1&4&\dots&\dots&0\\0&-3&-1&4&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&-3&-1&4\\0&0&\dots&\dots&-3&-1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-1&4&0&\dots&0\\-3&-1&4&\dots&0\\0&-3&-1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&-3&4\end{vmatrix}+(-1)\Delta_{n-1}=$$

$$=3\cdot 4\Delta_{n-2}-\Delta_{n-1}.$$

Таким образом, мы получили уравнение, связывающее Δ_n для последовательных значений n: $\Delta_n=12\Delta_{n-2}-\Delta_{n-1}$. Такие уравнения называются *разностными*. Мы не будем вдаваться в подробности нахождения общего решения такого уравнения. Заметим лишь, что если мы знаем числовые значения для двух последовательных значений индекса n, то из уравнения мы можем найти все последующие значения.

Легко видеть, что $\Delta_1=-1, \Delta_2=13,$ поэтому

$$\Delta_3=12\Delta_1-\Delta_2=-12-13=-25,\ \ \Delta_4=12\Delta_2-\Delta_3=156+25=181,$$
$$\Delta_5=12\Delta_3-\Delta_4=12(-25)-181=-481.$$

Упражнения

2.63. Доказать тождества:

а) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\beta\\ \cos\alpha & \sin\beta\end{vmatrix}=-\cos(\alpha+\beta),$

$$\begin{vmatrix}\sin\alpha+\cos\alpha & \sin\alpha-\cos\alpha\\ \sin\alpha-\cos\alpha & \sin\alpha+\cos\alpha\end{vmatrix}=2\sin 2\alpha;$$

б) $\begin{vmatrix}(a+b)^2 & (a-b)^2\\ (a-b) & (a+b)\end{vmatrix}=6a^2b+2b^3,\ \begin{vmatrix}(a+b)^2 & (a-b)^2\\ (a-b)^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}=8ab\left(a^2+b^2\right).$

2.64. Доказать, что определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) пропорциональны.

2.65. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}_1=(a_{11};a_{12}),\ \vec{a}_2=(a_{21};a_{22}).$

2.66. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2.67. Разложить определитель по степеням x:

а) $\begin{vmatrix} x & a & b \\ b & x & a \\ a & b & x \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & c \\ b & c & x \end{vmatrix}$.

2.68. Доказать, что если числа $a_1, a_2, ..., a_9$ образуют арифметическую прогрессию, то составленный из них определитель $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$ равен нулю. Верно ли аналогичное утверждение для чисел, образующих геометрическую прогрессию?

2.69. Как изменится определитель третьего порядка, если каждый его элемент a_{ik} умножить на число ik?

2.70. Вычислить определитель, разложив его по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \\ 4 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$.

2.71. Вычислить определитель, разложив его по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

2.72. Разложив определитель по последнему столбцу, доказать равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11}x^3 & a_{12}x^2 & a_{13}x & a_{14} \\ a_{21}x & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31}x^2 & a_{32}x & a_{33} & 0 \\ a_{41}x^3 & a_{42}x^2 & a_{43}x & a_{44} \end{vmatrix} = x^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

2.73. Разложить определитель $\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix}$ по степеням x.

2.74. Найти сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя:

а) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; **г)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

2.75. Используя свойства определителей, доказать теорему умножения определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

2.76. Найти определитель матрицы X, если выполнено следующее матричное равенство:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$; **б)** $X \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 31 \\ 5 & 1 & 29 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$.

2.77. Доказать, что если в определителе поменять местами две строки, определитель умножится на -1.

2.78. Как изменится определитель порядка n, если его первую строку поместить на место второй, вторую – на место третьей, …, последнюю – на место первой?

2.79. Доказать, что определитель единичной матрицы равен единице.

2.80. Доказать, что если в определителе все элементы, стоящие под (над) главной диагональю, равны нулю, то определитель равен произведению диагональных элементов.

2.81. Доказать, что если в определителе n-го порядка все элементы, стоящие под (над) побочной диагональю, равны нулю, то определитель равен произведению диагональных элементов, умноженному на $(-1)^{n(n-1)/2}$.

2.82. Доказать свойства определителей третьего порядка, связанные с элементарными преобразованиями.

2.83. Доказать, что если сумма элементов каждого столбца (каждой строки) определителя кратна числу k, то определитель также кратен k.

2.84. Числа 204, 527 и 255 делятся на 17. Можно ли утверждать, что число, равное значению определителя $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$, делится на 17?

2.85. Числа 2945, 1273, 6327, 9462 кратны 19. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ также кратен 19.

2.86. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю. Верно ли утверждение для кососимметрических матриц порядка 4?

2.87. Вычислить определитель с постоянной суммой чисел в строке:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 16 & 25 \\ 4 & 8 & 16 & 25 \\ 4 & 9 & 15 & 25 \\ 4 & 9 & 16 & 24 \end{vmatrix}$.

2.88. Вычислить определитель с помощью элементарных преобразований:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2.89. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$.

2.90. Вычислить значение *циркулянта*:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

2.91. Найти определитель блочной матрицы A:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.92. Вычислить определитель матрицы M для данной матрицы A:

а) $M = \begin{pmatrix} A & -2A \\ -2A & 3A \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $M = \begin{pmatrix} -A & 5A \\ -3A & -8A \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.93. Вычислить определители следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$,

где E – единичная матрица порядка m.

2.94. Не вычисляя определителя, решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1+x-2 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2+x-3 & \dots & a_{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}+x-n \end{vmatrix} = 0;$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & x & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_2 & a_2 & x & a_3 & \dots & a_3 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} & \dots & x \end{vmatrix}.$

2.95. Вычислить определитель n-го порядка Δ_n :

а) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$; **б)** $\Delta_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix}.$

§ 2.4. Обратная матрица

Основные сведения

Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если выполняется равенство

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица. Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. $|A| \neq 0$.

Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^{*}\right)^{T}, \tag{2.7}$$

где T означает транспонирование, а A^{*} – так называемая *присоединенная* матрица, т.е. матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для случая $n = 2$, т.е. матриц второго порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, формула для обратной матрицы (2.7) имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Кроме данного метода, используют также метод нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. К матрице A приписывают справа единичную матрицу такого же порядка:

$$A_1 = (A \mid E).$$

Выполняя элементарные преобразования над строками матрицы A_1, добиваются того, чтобы на месте, ранее занимаемом матрицей A, получилась единичная матрица E, тогда в правой половине матрицы A_1 получится обратная матрица A^{-1}.

Для системы линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ с невырожденной матрицей A ее решение может быть записано в матричной форме $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, где $\vec{x}$ – столбец неизвестных, $\vec{b}$ – столбец свободных членов.

Формулы Крамера. Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $A\vec{x} = \vec{b}$. Если $|A| \neq 0$, то единственное решение этой системы находится по формулам

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ \ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \dots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}, \tag{2.9}$$

где A_i – матрица, полученная из матрицы заменой *i*-го столбца столбцом свободных членов $\vec{b}$.

Замечание. Если $|A| = 0$, а один из определителей $|A_1|,\ |A_2|,\ \dots,\ |A_n|$ отличен от нуля, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ несовместна.

Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными $A\vec{x} = 0$ имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

Примеры

1. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 3 \\ 16 & 6 & 5 \\ 13 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим определитель матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 3 \\ 16 & 6 & 5 \\ 13 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 16 & 6 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 14\cdot 5 - 5\cdot 15 + 3\cdot 2 = 1,$$

следовательно, обратная матрица A^{-1} существует. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = -15, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 16 & 6 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -10, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 31, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 14 & 5 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 7, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 16 & 5 \end{vmatrix} = -22, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 14 & 5 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 4.$$

Поэтому присоединенная матрица имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 7 \\ -15 & 31 & -22 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -10 & 7 \\ -15 & 31 & -22 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 7 \\ -15 & 31 & -22 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу для матрицы из предыдущего примера методом элементарных преобразований.

Решение. Запишем матрицу A_1, приписав к матрице A справа единичную матрицу:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 6 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Сначала вычтем из первой строки третью и выполним полное исключение для разрешающего элемента $a_{11} = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 16 & 6 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 37 & -16 & 1 & 16 \\ 0 & 5 & 31 & -13 & 0 & 14 \end{array}\right).$$

Вычтем из второй строки третью и проведем полное исключение для разрешающего элемента $a_{22} = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 31 & -13 & 0 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 4 \end{array}\right).$$

Проведя полное исключение для разрешающего элемента $a_{33} = 1$, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -10 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & 31 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 4 \end{array}\right).$$

Нетрудно убедиться, что в правой части последней матрицы стоит обратная матрица A^{-1}.

3. Решить с помощью обратной матрицы систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 14x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 33, \\ 16x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 43, \\ 13x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 38. \end{cases}$$

Решение. Поскольку матрица системы совпадает с матрицей A из примеров 1 и 2, то мы можем использовать полученную обратную матрицу. Положим $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 33 \\ 43 \\ 38 \end{pmatrix}$ и получим по формуле $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 7 \\ -15 & 31 & -22 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 \\ 43 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

4. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 3z = 23, \\ 6x + 2y + z = 13, \\ x + 5y + 2z = 17. \end{cases}$$

Решение. Вычислим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 5 + 90 - 6 - 60 - 20 = 25.$$

Так как $\Delta \neq 0,$ система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 23 & 5 & 3 \\ 13 & 2 & 1 \\ 17 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 25, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 23 & 3 \\ 6 & 13 & 1 \\ 1 & 17 & 2 \end{vmatrix} = 50, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 23 \\ 6 & 2 & 13 \\ 1 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 75.$$

Отсюда

$$x = \frac{25}{25} = 1; \quad y = \frac{50}{25} = 2; \quad z = \frac{75}{25} = 3.$$

5. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значений параметров a и b; в случае, когда система совместна, указать решение:

$$\begin{cases} \phantom{ax_1 + {}} ax_2 + bx_3 = 2, \\ ax_1 + x_2 + ax_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + ab - b - a^2 = ab - b = (a-1)b,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & a & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + a^2 + b - b - a - 2a = a^2 - 3a + 2a = (a-1)(a-2),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & b \\ a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2a + ab - b - 2a = (a-1)b,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + 2a - 2 - a^2 = -(a-1)(a-2).$$

1. Если $\Delta \neq 0,$ т.е. если $a \neq 1$ и $b \neq 0,$ система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{a-2}{b}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{2-a}{b}.$$

2. Пусть $\Delta = 0.$ Возможны два случая: либо $a = 1,$ либо $b = 0$:

а) пусть $a = 1.$ Тогда исходная система принимает вид:

$$\begin{cases} x_2 + bx_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Находим общее решение системы: $x_1 = -1 + (b-1)x_3, \quad x_2 = 2 - bx_3;$

б) пусть $b = 0.$ Можно считать, что $a \neq 1.$ Тогда исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} ax_2 = 2, \\ ax_1 + x_2 + ax_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения третье, получим $(a-1)(x_1 + x_3) = 0.$ Поскольку $a \neq 1,$ то $x_1 + x_3 = 0$, тогда из третьего уравнения $x_2 = 1,$ а из первого – $a = 2.$

Таким образом, если $a \neq 1$ и $b \neq 0,$ система имеет единственное решение $x_1 = \dfrac{a-2}{b}, \; x_2 = 1, \; x_3 = \dfrac{2-a}{b};$ если $a = 1,$ система имеет бесконечно много решений $x_1 = -1 + (b-1)x_3, \; x_2 = 2 - bx_3.$

Упражнения

2.96. Доказать, что $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

2.97. Доказать, что если обратная матрица существует, то она единственная.

2.98. Пусть матрицы A и B коммутируют. Доказать, что матрицы A^{-1} и B также коммутируют. Будут ли коммутировать матрицы A^{-1} и B^{-1}? Верно ли, что матрицы A и B антикоммутируют, только если антикоммутируют матрицы A^{-1} и B^{-1}?

2.99. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A поменять местами:

а) две строки; **б)** два столбца?

2.100. Показать, что для любых невырожденных матриц A и B верно равенство $\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

2.101. Верно ли, что матричные равенства $AB = E$ и $BA = E$ равносильны?

2.102. Существуют ли матрицы A и B, такие, что $AB = 0$, а $BA = E$?

2.103. Является ли обратимой каждая из следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 121 & 122 & 123 \\ 124 & 125 & 126 \\ 127 & 128 & 129 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$?

2.104. Обратима ли матрица $\begin{pmatrix} 2a_1 + b_1 & 3a_1 + b_1 & 4a_1 + b_1 \\ 2a_2 + b_2 & 3a_2 + b_2 & 4a_2 + b_2 \\ 2a_3 + b_3 & 3a_3 + b_3 & 4a_3 + b_3 \end{pmatrix}$?

2.105. Найти матрицы, обратные к данным:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

2.106. Проверить, что для невырожденной матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ справедлива формула для обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

2.107. Используя формулу (1), найти обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2.108. Решить системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -9, \\ 2x_1 + 3x_2 = -6. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = -9, \\ 3x_1 + 4x_2 = -8. \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = 21, \\ 4x_1 - 7x_2 = -29. \end{cases}$

2.109. Решить системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

а) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 7. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -13. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -26, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -43. \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.110. Чему равен определитель присоединенной матрицы

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

составленной из алгебраических дополнений элементов матрицы A, если $|A| = \Delta$?

2.111. Используя метод элементарных преобразований, найти матрицу, обратную данной:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

2.112. Найти обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.113. Чему равен определитель ортогональной матрицы A?

2.114. Найти все ортогональные матрицы второго порядка.

2.115. Доказать, что матрица, обратная симметрической, является симметрической. Какой будет матрица, обратная кососимметрической?

2.116. Доказать, что матрица, обратная верхней треугольной (нижней треугольной) матрице, является верхней треугольной (нижней треугольной).

2.117. Пусть все недиагональные элементы невырожденной матрицы B неположительны. Доказать, что обратная матрица B^{-1} неотрицательна тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы B положительны:

$$\Delta_1 = \det(b_{11}) > 0, \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \; \dots, \; \Delta_n = \det(B) > 0.$$

2.118. Пользуясь формулами Крамера, решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 11, \\ x - 3y + 4z = 5, \\ -4x + 4y + 12z = 7. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x + 6y + 4z = 12, \\ 2x + 5y - z = -4, \\ 2x - 11y - 3z = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

2.119. Изготовили несколько изделий видов *A* и *B*. Для этого полностью использовали 500 кг стали и 950 кг железа, причем на одно изделие *A* использовали 10 кг стали и 40 кг железа, на одно изделие *B* – 20 кг стали и 10 кг железа. Определить, сколько изготовили изделий *A* и *B*.

2.120. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 2/9 вклада, который составляет 900 тыс. руб., вложили в первый банк, 3/9 вклада вложили во второй банк и оставшуюся часть вклада – в третий банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 1080 тыс. руб. Если бы первоначально 3/9 вклада положили в первый банк, 4/9 вклада – во второй банк, оставшуюся часть вклада – в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов стала бы равна 1060 тыс. руб. Если бы 4/9 вклада вложили в первый банк, 2/9 вклада – во второй банк, оставшуюся часть вклада – в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов была бы равна 1055 тыс. руб. Какой процент начисляет каждый банк?

2.121. Показать, что следующие системы имеют единственное решение:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = b, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = c; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + z = \alpha, \\ x + 2y + 4z = \beta, \\ x + 3y + 9z = \gamma; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ bx_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4 = c_2, \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 + ax_4 = c_3, \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + ax_4 = c_4, \end{cases}$ где $a \neq b$.

2.122. Исследовать и решить методом Крамера систему линейных уравнений в зависимости от значений параметра λ:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2. \end{cases}$

2.123. Найти все значения параметра λ, при которых система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} (\lambda+3)x + y + 2z = \lambda, \\ \lambda x + (\lambda-1)y + z = 2\lambda, \\ 3(\lambda+1)x + \lambda y + (\lambda+3)z = 3. \end{cases}$$

2.124. Найти неизвестную матрицу X:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

2.125. Решить линейные матричные уравнения $AX = B$ и $YA = B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -18 & 8 & 21 \\ 21 & -4 & -17 \\ -3 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

2.126. Доказать, что $(E+A)^{-1}=E-A+A^2$, если $A^3=0$.

2.127. Найти $(E-A)^{-1}$, если A *нильпотентная* матрица, т.е. $A^k=0$ для некоторого натурального числа k.

2.128. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, где B – невырожденная квадратная матрица порядка m, D – невырожденная квадратная матрица порядка k, C – матрица $k\times m$.

2.129. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где D, C, B – невырожденные квадратные матрицы порядка m.

§ 2.5. Преобразование координат вектора при замене базиса

Основные сведения

Пусть дано n-мерное линейное пространство V. Свяжем с данным вектором $\vec{x}$ и базисом $E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ пространства V n-мерный вектор-столбец $X=X_E=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$, состоящий из его координат в выбранном базисе. В новом базисе $E'=(\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n)$ вектор $\vec{x}$ будет иметь координаты $x'_1,x'_2,\dots,x'_n$, т.е. ему соответствует некоторый другой вектор-столбец $X'=X_{E'}=(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)^T$. Для того чтобы найти связь между векторами X и X', выразим векторы базиса E' через векторы базиса E. Пусть матричная запись такого представления имеет вид $E'=EP$; невырожденная матрица P называется *матрицей перехода от базиса E к базису E'*. Тогда формулы преобразования координат запишутся так:

$$X=PX'.$$

Разумеется, можно записать и выражение новых координат через старые, разрешая последнее уравнение относительно $X_{E'}$:

$$X'=P^{-1}X.$$

Примеры

1. В пространстве $\mathbb{R}^2$ даны два базиса E и E', состоящие соответственно из векторов: $\vec{e}_1 = (7; 3)$, $\vec{e}_2 = (2; 1)$; $\vec{e}_1' = (14; -5)$, $\vec{e}_2' = (3; -1)$. Найти матрицу перехода от базиса E к базису E' и определить координаты вектора $\vec{x} = (-5; 2)$ в базисах E и E'.

Решение. Матрицу перехода P от базиса E к базису E' найдем, решив матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} P.$$

Имеем $P = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \\ -77 & -16 \end{pmatrix}.$

Координаты вектора $\vec{x}$ в базисе E' найдем из равенства $\begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, откуда

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Наконец, найдем координаты вектора $\vec{x}$ в базисе E, используя формулу $X = PX'$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \\ -77 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

2.130. Найти матрицу перехода P от базиса E к базису E':

$\vec{e}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; 1)$, $\vec{e}_3 = (1; 2; 3)$;

$\vec{e}_1' = (4; 3; 5)$, $\vec{e}_2' = (9; 6; 8)$, $\vec{e}_3' = (12; 8; 10)$.

2.131. Найти матрицу перехода P от базиса E к базису E':

$$\vec{e}_1 = (\cos\alpha; \sin\alpha), \vec{e}_2 = (-\sin\alpha; \cos\alpha);$$

$$\vec{e}_1' = (\cos\beta; -\sin\beta), \ \vec{e}_2' = (\sin\beta; \cos\beta).$$

2.132. Найти координаты векторов $\vec{x}, \vec{y}$ пространства $\mathbb{R}^3$ относительно базисов E и E': $\vec{x} = (1; 2; 3)$, $\vec{y} = (2; 3; 4)$;

$$\vec{e}_1 = (1; 1; 1), \vec{e}_2 = (0; 1; 1), \vec{e}_3 = (0; 0; 1);$$

$$\vec{e}_1' = (1; -1; 1), \vec{e}_2' = (0; 2; 1), \vec{e}_3' = (0; 1; 2).$$

2.133. Найти координаты векторов-матриц $\vec{x}, \vec{y}$ относительно базисов E и E': $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_4' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.134. Вывести формулы, связывающие координаты вектора относительно разных базисов.

2.135. Доказать, что матрица перехода от одного базиса к другому обратима.

2.136. Пусть даны три базиса и матрицы перехода P, Q от первого базиса ко второму и от второго к третьему соответственно. Доказать, что матрица перехода от первого базиса к третьему равна PQ.

2.137. Пусть даны три базиса и матрицы перехода P, Q от первого базиса ко второму и от первого к третьему соответственно. Найти матрицу перехода от второго базиса к третьему.

2.138. Доказать, что матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной.

2.139. Пусть E и E' – два базиса, причем E – ортонормированный базис; P – ортогональная матрица перехода от базиса E к базису E'. Доказать, что E' – ортонормированный базис.

ГЛАВА 3

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 3.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Основные сведения

Комплексное число z обозначается символом $a+bi$, где a и b – действительные числа; слагаемые a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой частью* комплексного числа; символ i, определяемый условием $i^2=-1$, называется *мнимой единицей*. Такое представление комплексного числа z называется его *алгебраической формой*; действительную часть числа z обозначают $\operatorname{Re}(z)$, а мнимую – $\operatorname{Im}(z)$. Если $\operatorname{Im}(z)=0$, то z – действительное число; если $\operatorname{Re}(z)=0$, то z имеет вид bi и называется *мнимым*.

Множество комплексных чисел обозначается буквой $\mathbb{C}$.

Два комплексных числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ равны, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$. Комплексное число $-a-bi$ называется *противоположным* комплексному числу $a+bi$. Комплексное число $a-bi$ называется *сопряженным* с числом $z=a+bi$ и обозначается $\bar{z}$.

Алгебраические операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел выполняются аналогично соответствующим операциям над многочленами. Пусть $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ – два комплексных числа. Сумма z_1+z_2 и произведение $z_1\cdot z_2$ вычисляются по формулам

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2), \quad z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1).$$

Примеры

1. Вычислить: **а)** $(1+2i)(2+3i)$; **б)** $\dfrac{1+2i}{1-i}$.

Р е ш е н и е. **а)** по правилу умножения комплексных чисел имеем:

$$(1+2i)(2+3i)=\left(1\cdot 2-2\cdot 3\right)+\left(1\cdot 3+2\cdot 2\right)i=-4+7i;$$

б) умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, получаем $\dfrac{1+2i}{1-i}=\dfrac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{-1+3i}{2}$.

2. Решить уравнение $z^2-\left(1+2i\right)z-7+i=0$ в области $\mathbb{C}$.

Р е ш е н и е. Вычислим дискриминант $D=\left(1+2i\right)^2-4\left(-7+i\right)=$ $=1+4i-4+28-4i=25.$ Поэтому $z_{1,2}=\dfrac{1+2i\pm 5}{2}$ и корни уравнения:

$$z_1=3+i,\ z_2=i-2.$$

3. Решить систему уравнений в области комплексных чисел $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases}\left(1+i\right)z & + & \left(2+i\right)w & = & 1+16i,\\ \left(1+3i\right)z & + & \left(1+2i\right)w & = & -12+19i.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Будем решать систему уравнений, используя формулы Крамера. Вычислим главный определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+i & 2+i\\ 1+3i & 1+2i\end{vmatrix}=\left(1+i\right)\left(1+2i\right)-\left(1+3i\right)\left(2+i\right)=-4i.$$

Поскольку $\Delta\neq 0,$ то система имеет единственное решение. Найдем вспомогательные определители, входящие в формулы Крамера:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1+16i & 2+i\\ -12+19i & 1+2i\end{vmatrix}=12-8i,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1+i & 1+16i\\ 1+3i & -12+19i\end{vmatrix}=16-12i.$$

Поэтому $z=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{12-8i}{-4i}=2+3i,\quad w=\dfrac{16-12i}{-4i}=3+4i.$

Упражнения

3.1. Найти действительные корни уравнений:

а) $z^2+(2-i)z+(-3+i)=0;$ **б)** $z^2+(1+i)z-(12+3i)=0;$

в) $z^3+(1+i)z-(10+2i)=0;$ **г)** $z^3+iz^2+(1+2i)z+(2+i)=0.$

3.2. Найти действительные числа $x, y,$ удовлетворяющие уравнению:

а) $(1+i)x+(2+3i)y=1+2i;$ **б)** $(1-2i)x+(4-3i)y=6-7i;$

в) $(5-3i)x-(2+i)y=4-9i;$ **г)** $(3-i)x-(4-7i)y=-7+25i.$

3.3. Вычислить значение выражений:

а) $(2+3i)(3-4i);$ **б)** $(13-i)(2i-3);$

в) $(1+i)(2-3i)+(2+3i)(1-i);$ **г)** $i^{10}-(1+i)^8.$

3.4. Упростить выражения:

а) $(a+bi)+(a-bi);$ **б)** $(a+bi)(a-bi);$ **в)** $(a+bi)^2+(a-bi)^2.$

3.5. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix};$ **б)** $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix};$ **г)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}.$

3.6. Для действительных чисел a,b решить уравнения:

а) $z+2\overline{z}=3a+bi;$ **б)** $2z-3\overline{z}=a+5bi.$

3.7. Доказать, что сумма и произведение комплексно сопряженных чисел является действительным числом. Что можно сказать о разности комплексно сопряженных чисел?

3.8. Доказать, что операция сопряжения обладает следующими свойствами:

а) $\overline{z+t}=\overline{z}+\overline{t};$ **б)** $\overline{z-t}=\overline{z}-\overline{t};$ **в)** $\overline{z\cdot t}=\overline{z}\cdot\overline{t};$ **г)** $\overline{\left(\frac{z}{t}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{t}}.$

3.9. Проверить, что следующие числа являются комплексно сопряженными:

а) $(2+5i)^4(4-3i)^3$ и $(2-5i)^4(4+3i)^3;$

б) $\dfrac{7-5i}{3+11i}(1-2i)$ и $\dfrac{7+5i}{3-11i}(1+2i)$.

3.10. Используя комплексные числа, доказать тождество Эйлера для действительных чисел a, b, c, d:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac-bd\right)^2+\left(ad+bc\right)^2.$$

3.11. Представить комплексное число в алгебраической форме:

а) $\dfrac{2}{1+i}$; **б)** $\dfrac{1+i}{2+i}$; **в)** $\dfrac{2-3i}{2+3i}$; **г)** $\dfrac{2+3i}{1+2i}$.

3.12. Вычислить:

а) $\dfrac{3+i}{\left(1+i\right)\left(1-2i\right)}$; **б)** $\dfrac{\left(1+2i\right)^2}{4+3i}$; **в)** $\dfrac{3i-2}{2i-3}(1+i)$; **г)** $\dfrac{4-3i}{5-4i}\left(1+2i\right)$.

3.13. Упростить выражения, содержащие ненулевые действительные числа a, b:

а) $\dfrac{a+bi}{a-bi}+\dfrac{a-bi}{a+bi}$; **б)** $\dfrac{a+bi}{a-bi}-\dfrac{a-bi}{a+bi}$.

3.14. Решить систему линейных уравнений в комплексных числах:

а) $\begin{cases} \left(3-i\right)z+\left(4+2i\right)t=1+3i, \\ \left(4+2i\right)z-\left(2+3i\right)t=7; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \left(2+i\right)z+\left(3-i\right)t=2+6i, \\ \left(1+2i\right)z-\left(3-2i\right)t=-3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \left(2-i\right)z+\left(3-i\right)t=5+4i, \\ \left(1+2i\right)z+it=-3+2i; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \left(1-i\right)z+\left(2-3i\right)t=6-4i, \\ \left(3+2i\right)z+\left(2+i\right)t=9+4i. \end{cases}$

3.15. Решить систему линейных уравнений в комплексных числах:

а) $\begin{cases} x+iy-2z=-5+2i, \\ x-y-2iz=-1-6i, \\ ix+3iy-(1+i)z=-3+4i; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x+iy-2z=10, \\ x-y-2iz=-8-4i, \\ ix+3iy-(1+i)z=30. \end{cases}$

3.16. Пусть a, b, c, d – действительные числа. Доказать, что корни каждого из следующих уравнений также являются действительными числами:

а) $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix}=0$; **б)** $\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix}=0.$

3.17. Найти комплексные корни квадратных уравнений:

а) $z^2 - 3z + (3+i) = 0$; **б)** $z^2 - 5z + (7+i) = 0$;

в) $z^2 - (2+i)z + 7i = 1$; **г)** $z^2 + (2i-3)z + 5 = 5i$.

3.18. Решить уравнения в комплексных числах:

а) $z^4 = 1$; **б)** $z^3 = -1$; **в)** $z^6 = 1$; **г)** $z^5 + z^3 + z^2 + 1 = 0$.

3.19. Пусть $z_1 = a + b$, $z_2 = a\omega + b\omega^2$, $z_3 = a\omega^2 + b\omega$, где $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Проверить справедливость следующих равенств:

а) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$; **б)** $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = -3ab$; **в)** $z_1 z_2 z_3 = a^3 + b^3$.

2. Доказать, что для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ верно тождество:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a + b\omega + c\omega^2\right)\left(a + b\omega^2 + c\omega\right).$$

3.20. Пусть $u = a + bi$ и $w = c + di$ – два комплексных числа. Поставим в соответствие им следующие матрицы $U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ и $W = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$. Показать, что при этом:

а) u^{-1} соответствует U^{-1}; **б)** uw соответствует UW; **в)** $\overline{u}$ соответствует U^T; **г)** $|u|^2 = |U|$.

3.21. Найти матрицу, соответствующую числу:

а) $u + w$; **б)** $u - w$; **в)** $\dfrac{u}{w}$; **г)** $\dfrac{u}{\overline{w}}$.

§ 3.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Основные сведения

Каждому комплексному числу $z = a + bi$ может быть поставлен в соответствие вектор $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Длина этого вектора, равная $\sqrt{a^2 + b^2}$, называется *модулем* комплексного числа z и обозначается через $|z|$. Угол φ между данным вектором и положительным направлением оси Ox называется *аргументом* комплексного числа z (обозначается $\arg z$).

Любое комплексное число $z \neq 0$ может быть представлено в виде

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи комплексного числа называется *тригонометрической*.

Произведение и частное двух отличных от нуля комплексных чисел $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2)$, записанных в тригонометрической форме, находятся по формулам

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right);$$

n-я степень комплексного числа z вычисляется по формуле Муавра:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + \sin n\varphi).$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число u такое, что $u^n = z$. Корни n-й степени вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{z} = u_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Примеры

1. Представить в тригонометрической форме число $z = \sqrt{3} + i.$

Решение. Вычислим модуль z: $|z| = \sqrt{3+1} = 2.$ Тогда

$$z = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

2. Вычислить $\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^{20}$.

Решение. Найдем тригонометрическую форму числа $z = \dfrac{1}{i-1}$. Имеем

$$z = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Тогда по формуле Муавра находим

$$z^{20} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{20}\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{20\pi}{4}\right)\right) = 2^{-10}\left(\cos 5\pi - i\sin 5\pi\right) = -\frac{1}{1024}.$$

3. Решить уравнение $z^6 = 8.$

Решение. У данного уравнения на множестве комплексных числах существует шесть корней. Чтобы их найти, представим число 64 в тригонометрической форме: $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0).$ Тогда

$$z_k = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}\right),$$

$k = 0, 1, \ldots, 5,$

т. е.

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = \sqrt{2},$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{6},$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{6},$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -\sqrt{2},$$

$$z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{6},$$

$$z_5 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{6}.$$

Заметим, что найденные значения корней совпадают с вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, причем одна из вершин находится в точке $\left(\sqrt{2}, 0\right)$.

Упражнения

3.22. Изобразить комплексные числа на плоскости:

а) $1+i$; **б)** $2i-1$; **в)** $2-3i$; **г)** $\sin\alpha + i\cos\alpha$.

3.23. Найти аргумент следующих комплексных чисел: **а)** положительного действительного числа; **б)** отрицательного действительного числа; **в)** мнимого числа.

3.24. Доказать справедливость равенств:

а) $\left|-1-i\sqrt{3}\right| = 2,\ \arg\left(-1-i\sqrt{3}\right) = \dfrac{4\pi}{3}$;

б) $\left|\sqrt{3}-i\right| = 2,\ \arg\left(\sqrt{3}-i\right) = \dfrac{11\pi}{6}$.

3.25. Вычислить модуль и аргумент комплексных чисел:

а) $\left(2+\sqrt{3}\right)+i$; **б)** $\left(1+\cos\alpha\right)+i\sin\alpha$, если $-\pi < \alpha < \pi$.

3.26. Как связаны модули и аргументы комплексно сопряженных чисел?

3.27. Доказать, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей.

3.28. Допустим, что выполняется равенство $a+bi=(c+di)^n$, где a, b, c, d – действительные числа. Доказать равенство $a^2+b^2=\left(c^2+d^2\right)^n$.

3.29. Доказать, что расстояние между точками, изображающими комплексные числа z и t, равно модулю разности $|z-t|$.

3.30. Доказать, что для любых комплексных чисел z и t справедливо равенство $|z+t|^2+|z-t|^2=2\left(|z|^2+|t|^2\right)$. Объяснить его геометрический смысл.

3.31. Доказать неравенство треугольника: модуль суммы комплексных чисел не превосходит суммы модулей слагаемых. Что можно утверждать о модуле разности двух комплексных чисел?

3.32. Пусть $|z|<\dfrac{1}{2}$. Используя неравенство треугольника, доказать, что выполняются неравенства:

а) $\left|(1+i)z^3+iz\right|<\dfrac{3}{4}$; **б)** $\left|(2+3i)z^5+(1-i)z\right|<\dfrac{7}{8}$.

3.33. Какой геометрический объект описывают указанные соотношения:

а) $\mathrm{Re}(z)=3$; **б)** $1\le \mathrm{Im}(z)\le 2$; **в)** $|z|=1$; **г)** $1\le|z|\le 2$; **д)** $\arg z=\dfrac{\pi}{6}$;

е) $0\le \arg z\le\dfrac{\pi}{2}$.

3.34. Изобразить на плоскости множество точек z, таких, что

а) $|z-i|=1$; **б)** $|z-i|\le 1$; **в)** $|z-i|<1$; **г)** $|z-i|>1$.

3.35. Какое множество точек z задается условиями:

а) $|z-1|=|z-i|$; **б)** $|z+1|=|z+i|=|z-i|$.

3.36. Решить графически уравнения:

а) $z+|z|=1-i$; **б)** $z+|z|=1+3i$; **в)** $z+|z-1|=1$; **г)** $z+|z+1|=i$.

3.37. Найти тригонометрическую форму комплексных чисел:

а) 3; **б)** $2i$; **в)** $1+i$; **г)** $i-1$.

3.38. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $1-\sqrt{3}i$; **б)** -4; **в)** $1-i$; **г)** $\sqrt{3}-i$.

3.39. Пусть $z_1=|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=|z_2|(\cos\varphi_2+\sin\varphi_2)$ $(z_2\neq 0)$ – два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме. Доказать, что

а) $z_1\cdot z_2=|z_1||z_2|\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$;

б) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$.

3.40. Выполнить действия над комплексными числами:

а) $\left(1-i\sqrt{3}\right)(\cos\varphi-i\sin\varphi)$; **б)** $\dfrac{i-1}{\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}}$;

в) $\left(1+i\sqrt{3}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)(1+i)$; **г)** $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\sqrt{2}(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$.

3.41. Используя формулу Муавра, вычислить:

а) $(1+i)^{25}$; **б)** $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{15}$; **в)** $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

3.42. Пусть U_n – множество всех корней n-й степени из 1. Как изобразить на плоскости это множество комплексных чисел?

3.43. Нарисовать на плоскости корни уравнения $z^n-1=0$ при $n\leq 6$. Записать корни в тригонометрической и алгебраической форме.

3.44. Вычислить сумму и произведение корней уравнения $z^5-1=0$.

3.45. Найти значение определителя, если $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$:

а) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$.

3.46. Решить уравнения:

а) $z^8 = 256$; **б)** $z^3 = 27$; **в)** $z^4 = -14$; **г)** $z^3 = i$.

3.47. Пусть n – натуральное число, $n > 3$. Найти ненулевые корни уравнений: **а)** $z^n = \overline{z}$; **б)** $z^n = 2^{n-2}\overline{z}^2$; **в)** $z^n = 3^{n-3}\overline{z}^3$.

3.48. Используя формулу Муавра, доказать формулы понижения степени:

а) $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$; **б)** $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$;

в) $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$; **г)** $4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$.

3.49. Доказать равенства:

а) $\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{1}{2}$; **б)** $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} + \dfrac{1}{2} = 0$;

в) $\cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{3\pi}{9} + \cos\dfrac{5\pi}{9} + \cos\dfrac{7\pi}{9} = \dfrac{1}{2}$.

3.50. Вычислить значение тригонометрических выражений:

а) $\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}$; **б)** $\sin\dfrac{3\pi}{10} - \sin\dfrac{\pi}{10}$.

§ 3.3. Многочлены в комплексной области

Основные сведения

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ – многочлены над $\mathbb{C}$. Говорят, что $f(z)$ *делится на* $g(z)$, если существует такой многочлен $h(z)$, что $f(z) = g(z)\cdot h(z)$.

Число w называется *корнем* многочлена $f(z)$, если $f(w) = 0$. Справедлива теорема Безу: число w является корнем многочлена $f(z)$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ делится на $(z - w)$.

Число w называется *корнем кратности* k многочлена $f(z)$, если $f(z)$ делится на $(z-w)^k$, но не делится на $(z-w)^{k+1}$. Корни кратности 1 называются *простыми*.

Согласно основной теореме алгебры комплексных чисел, *всякий многочлен* $f(z)$ *с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень*.

Всякий многочлен $f(z)$ положительной степени n над $\mathbb{C}$ представим в виде $f(z)=a_0\prod\limits_{1\le i\le s}(z-v_i)^{k_i}$, где числа $v_1,\dots,v_s$ попарно различны, причем степень многочлена $f(z)$ равна сумме кратностей корней, т.е. $n=k_1+\dots+k_s$.

Примеры

1. Разложить многочлен $f(z)=z^3+z^2+z+1$ по степеням $(z-1)$.

Решение. Введем новую переменную $t=z-1$; тогда $z=t+1$ и

$$f(z)=(t+1)^3+(t+1)^2+(t+1)+1=$$

$$=t^3+4t^2+6t+4=(z-1)^3+4(z-1)^2+6(z-1)+4.$$

2. Указать многочлен $f(z)$ с комплексными коэффициентами степени 4, если известны его корни: корень 1 кратности 2, простые корни 2 и i.

Решение. Многочлен $f(z)$ делится на $(z-1)^2$, $(z-2)$, $(z-i)$, значит, $f(z)=(z-1)^2(z-2)(z-i)$.

3. Указать все многочлены $f(z)$ наименьшей степени с действительными коэффициентами, если известны их простые корни: 3, 5 и $1+i$.

Решение. Поскольку у многочлена $f(z)$ действительные коэффициенты, то он имеет также сопряженный к $1-i$ корень, значит, $f(z)$ делится на $(z-3)$, $(z-5)$, $(z-(1+i))(z-(1-i))=$ $=z^2-2z+2$. Поэтому $f(z)=c(z-3)(z-5)(z^2-2z+2)$, где c – ненулевое действительное число.

Упражнения

3.51. Разложить $f(z)=z^3+3z^2-4z+2$ по степеням:

а) $(z-1)$; **б)** $(z+1)$.

3.52. Доказать, что многочлен $f(z)=a_0z^n+...+a_{n-1}z+a_n$ однозначно разлагается по степеням $(z-w)$, где w – комплексное число.

3.53. Пусть $f(z)=(z-2)^5-7(z-2)^2+5$. Проверить равенство $f(2)=5$.

3.54. Пусть $f(z)=a_0(z-c)^n+...+a_{n-1}(z-c)+a_n$. Как связаны числа $f(c)$ и a_n?

3.55. Доказать, что многочлен $f(z)=a_0z^n+...+a_{n-1}z+a_n$ делится на $(z-w)$ тогда и только тогда, когда $f(w)=0$.

3.56. Известно, что кубический многочлен $f(z)=z^3+az^2+bz+c$ имеет корни 1, 2 и 3.

1. Доказать равенство $f(z)=(z-1)(z-2)(z-3)$;

2. Найти коэффициенты многочлена $f(z)$.

3.57. Известно, что многочлен $f(z)$ имеет корни 2 и 5. Доказать, что $f(z)$ делится на квадратный трехчлен $z^2-7z+10$.

3.58. Известно, что многочлен $f(z)$ имеет корни $(2+i)$ и $(2-i)$. На какой квадратный трехчлен делится $f(z)$?

3.59. Может ли квадратное уравнение в области комплексных чисел: **а)** не иметь корней; **б)** иметь более двух корней?

3.60. Может ли многочлен пятой степени иметь 6 комплексных корней?

3.61. Доказать, что уравнение $z^5-5z+5=0$ имеет действительный корень. Можно ли утверждать, что любое уравнение степени 5 с действительными коэффициентами имеет действительный корень?

3.62. Многочлен четвертой степени с действительными коэффициентами имеет корень $1+i$. Доказать, что корнем этого многочлена является число $1-i$.

3.63. Пусть многочлен $f(z)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень w. Доказать, что комплексно сопряженное число $\overline{w}$ также является корнем многочлена $f(z)$.

3.64. Пусть многочлен $f(z)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $w = a + bi, b \neq 0$. Доказать, что многочлен $f(z)$ делится на квадратный трехчлен $z^2 - 2az + \left(a^2 + b^2\right)$.

3.65. Найти корни многочлена $f(z)$ с указанием их кратности:

а) $f(z) = (z-1)^3 (z-2)^2 (z-3)$; **б)** $f(z) = \left(z^2 - 7z + 10\right)(z-2)^2$;

в) $f(z) = \left(z^2 - 3z + 2\right)\left(z^2 - 4z + 3\right)$; **г)** $f(z) = z^7 - 1$.

3.66. Доказать, что комплексно сопряженные корни многочлена с действительными коэффициентами имеют одинаковые кратности.

3.67. Разложить многочлен $f(z)$ на линейные множители в комплексной области:

а) $f(z) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6$; **б)** $f(z) = z^3 + z^2 + z + 1$;

в) $f(z) = z^4 + 5z^2 + 4$; **г)** $f(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1$.

3.68. Разложить многочлен $f(z)$ на неприводимые множители над действительными числами:

а) $f(z) = z^4 + 4$; **б)** $f(z) = z^6 + 27$;

в) $f(z) = z^4 + 4z^3 + 4z^2 - 1$; **г)** $f(z) = z^4 - az^2 + 1, -2 < a < 2$.

3.69. Найти многочлен наименьшей степени, корнями которого являются: **а)** все корни степени ≤ 3 из единицы; **б)** все корни степени ≤ 5 из единицы.

3.70. Указать многочлен наименьшей степени с комплексными коэффициентами, если известны его корни: **а)** корни $z = 1, z = 2$ кратности 2 и простые корни $z = 3$, $z = 1 + i$; **б)** корень $z = 3 - 2i$ кратности 2 и простой корень $z = 2 + i$.

3.71. Указать многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, если известны его корни: **а)** корни

$z=2, z=3$ кратности 2 и простые корни $z=i, z=1-i$; **б)** простой корень $1-2i$ и корень $2+3i$ кратности 3.

3.72. Решить следующие уравнения, определив их степень и «угадав» корни:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$ **б)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4-x & 4 \\ 2 & 3 & 7+x \end{vmatrix} = 0;$

в) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & x-2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 3+x \\ 6 & -3 & 3 & x+1 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 0.$

3.73. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$ при условии, что $a \neq b$.

3.74. Разложить на множители определители Вандермонда $W(a,b,c)$ и $W(a,b,c,d)$:

а) $W(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$ **б)** $W(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$

ГЛАВА 4

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 4.1. Линейные преобразования и матрицы

Основные сведения

Отображение f линейного пространства V в себя называется *линейным преобразованием* (*линейным оператором*), если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V$ и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \quad f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}).$$

Если в пространстве V задан базис $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$, то линейному преобразованию f можно сопоставить квадратную матрицу A порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой являются координатными столбцами векторов $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), ..., f(\vec{e}_n)$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$: $f(\vec{e}_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{e}_i$, $j = 1, \dots, n$. Матрица A называется *матрицей линейного преобразования* f в данном базисе $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

Пусть $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ и $E' = (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \dots, \vec{e}\,'_n)$ – два базиса пространства V; $E' = ET$, где T – матрица перехода от базиса E к базису E'. Матрицы A и A' линейного преобразования f относительно базисов E и E' связаны равенством

$$A' = T^{-1}AT.$$

Матрица B называется *подобной* матрице C, если существует такая невырожденная матрица T, что выполняется равенство $B = T^{-1}CT$. Таким образом, *матрицы, отвечающие одному линейному преобразованию в двух различных базисах, подобны друг другу.*

Образом $\operatorname{Im} f$ линейного преобразования f называется его область значений, а *ядром* $\operatorname{Ker} f$ – множество векторов $\vec{x} \in V$, таких, что $f(\vec{x}) = 0$. Образ и ядро линейного преобразования f являются линейными подпространствами в пространстве V. Размерность образа называется *рангом* линейного преобразования f и равна рангу матрицы линейного преобразования в каком-нибудь базисе; размерность ядра вычисляется по формуле $\dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{Im} A$.

Множество линейных преобразований, действующих на линейном пространстве размерности n, само является линейным пространством, размерность которого равна числу n^2.

Примеры

1. Какие из следующих преобразований f пространства $\mathbb{R}^n$ являются линейными:

а) $f(\vec{x}) = \vec{a}$ ($\vec{a}$ – фиксированный вектор);

б) $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \lambda \neq 0$ (λ – фиксированное число);

в) $f(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a})\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ – фиксированные вектора);

г) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 5, 3x_2 + x_3, x_2 + x_1)$?

Решение. **а)** так как для любого линейного преобразования f образ нулевого вектора равен нулю: $f(\vec{0}) = 0$, то преобразование $f(\vec{x}) = \vec{a}$ является линейным только если $\vec{a} = 0$;

б) заметим, что для любых векторов $\vec{y}, \vec{z}$ и для любого действительного числа μ выполняются равенства: $\lambda(\vec{y} + \vec{z}) = \lambda\vec{y} + \lambda\vec{z}$ и $\lambda(\mu\vec{y}) = \mu(\lambda\vec{y})$. Поэтому указанное преобразование является линейным;

в) так же, как в п. б), легко проверить, что для любых векторов $\vec{y}, \vec{z}$ и для любого действительного числа μ выполняются равенства: $(\vec{y} + \vec{z}, \vec{a})\vec{b} = (\vec{y}, \vec{a})\vec{b} + (\vec{z}, \vec{a})\vec{b}$, $(\mu\vec{y}, \vec{a})\vec{b} = \mu(\vec{y}, \vec{a})\vec{b}$. Отсюда следует, что данное преобразование является линейным;

г) данное преобразование не является линейным, так как вектор $\vec{x}=(0,0,0)$ переходит в вектор $\vec{y}=(-5,0,0)$.

2. Найти матрицы линейных операторов п. б), в) примера 1 в стандартном базисе $\vec{e}_1=(1,0,...,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,...,0)$, ..., $\vec{e}_n=(0,...,0,1)$.

Решение. **б)** линейный оператор $f(\vec{x})=\lambda\vec{x}$ переводит векторы стандартного базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_n$ в векторы $\lambda\vec{e}_1=(\lambda,0,...,0)$, $\lambda\vec{e}_2=(0,\lambda,...,0)$, …, $\lambda\vec{e}_n=(0,...,0,\lambda)$. Поэтому матрицей данного преобразования является диагональная матрица с числом λ по главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix};$$

в) если в стандартном базисе векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ имеют вид $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$, то данное преобразование переводит векторы стандартного базиса $\vec{e}_j$ в векторы $(\vec{a},\vec{e}_j)\vec{b}=a_j\vec{b}$, $j=1,2,...,n$. Поэтому матрица соответствующего линейного преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_nb_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

3. Доказать, что проектирование p_1 пространства $\mathbb{R}^3$ на координатную ось вектора $\vec{e}_1$ параллельно координатной плоскости векторов $\vec{e}_2,\vec{e}_3$ является линейным оператором, и найти его матрицу в стандартном базисе.

Решение. Очевидно, для произвольного вектора $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3\in\mathbb{R}^3$ преобразование p_1 может быть записано в виде $p_1(\vec{x})=x_1\vec{e}_1$. Его линейность проверяется так же, как и линейность отображений п. б), в) примера 1. Далее, очевидно, что

$p_1(\vec{e}_1)=\vec{e}_1,\quad p_1(\vec{e}_2)=\vec{0},\quad p_1(\vec{e}_3)=\vec{0};$ поэтому матрицей преобразования p_1 в стандартном базисе будет матричная единица E_{11}.

4. Как изменится матрица линейного преобразования f, если поменять местами первые два вектора базиса?

Решение. Так как столбцы матрицы – координаты векторов $f(\vec{e}_j)$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$, то при перестановке векторов базиса меняются первые два столбца и первые две строки матрицы.

5. Найти образ и ядро линейных операторов п. б), в) примера 1.

Решение. **б)** рассмотрим преобразование $f(\vec{x})=\lambda\vec{x},\lambda\neq 0.$ Так как $\lambda\neq 0,$ то $\lambda\vec{x}=\vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\vec{x}=0,$ и ядро преобразования A состоит только из нулевого вектора, так что $\mathrm{Ker}A=0.$ Для любого вектора $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ существует вектор $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ такой, что $f(\vec{x})=\vec{y}.$ Действительно, если $\lambda\vec{x}=\vec{y},$ то можно положить $\vec{x}=\lambda^{-1}\vec{y},$ поэтому $\mathrm{Im}\,A=\mathbb{R}^n;$

в) рассмотрим теперь преобразование $f(\vec{x})=(\vec{x},\vec{a})\vec{b}.$ Если $f(\vec{x})=0,$ то $(\vec{x},\vec{a})=0,$ т.е. ядро преобразования f состоит из векторов, ортогональных вектору $\vec{a},$ и его размерность равна $n-1.$ Образ f состоит из векторов, коллинеарных вектору $\vec{b},$ следовательно, $\dim\mathrm{Im}\,f=1$ и ранг преобразования f равен 1. Заметим, что в обоих случаях сумма размерностей ядра и образа линейного преобразования равна размерности пространства.

6. Матрица A линейного преобразования f в некотором базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}.$ Найти матрицу A' преобразования f в новом базисе, состоящем из векторов

$$\vec{e}_1'=\vec{e}_1+\vec{e}_2,\vec{e}_2'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2.$$

Решение. Матрица перехода от базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ к базису $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$ имеет вид $T=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}.$ Поэтому матрица A' преобразования f в новом базисе находится следующим образом:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Линейное преобразование f переводит векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в векторы $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_2' = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, а линейное преобразование g переводит векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ в векторы $\vec{e}_1'' = 3\vec{e}_1' - 4\vec{e}_2', \vec{e}_2'' = \vec{e}_1' + \vec{e}_2'$. Найти матрицу преобразования h, переводящего векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ соответственно в векторы $\vec{e}_1'', \vec{e}_2''$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Решение. Найдем формулы, выражающие векторы $\vec{e}_1'', \vec{e}_2''$ через векторы исходного базиса:

$$\vec{e}_1'' = 3(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) - 4(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2,$$

$$\vec{e}_2'' = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) + (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2.$$

Поэтому матрица A_h преобразования h в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет вид

$$A_h = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Эти вычисления можно записать в матричной форме. Введем матрицу перехода $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ от базиса $E = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2)$ к базису $E' = (\vec{e}_1' \quad \vec{e}_2')$, тогда имеем

$$E' = EF.$$

Аналогично для матрицы перехода $G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ от базиса $E' = (\vec{e}_1' \quad \vec{e}_2')$ к базису $E'' = (\vec{e}_1'' \quad \vec{e}_2'')$ получим

$$E'' = E'G.$$

Тогда очевидно, что

$$E'' = E'G = EFG, \quad A_h = FG = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

8. Линейное преобразование f в базисе, состоящем из векторов $\vec{e}_1 = (3, 0, -1)$, $\vec{e}_2 = (0, 2, 1)$, $\vec{e}_3 = (-1, 1, 1)$, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A' линейного преобразования f в базисе $\vec{e}_1' = (4, 1, -1)$, $\vec{e}_2' = (1, 1, 0)$, $\vec{e}_3' = (-3, 2, 2)$.

Решение. Найдем матрицу T перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$. В соответствии с принятыми обозначениями $E' = ET$, т.е. $Q = PT$, где

$$Q = E' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому искомая матрица перехода выглядит следующим образом:

$$T = P^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь нетрудно найти матрицу A' линейного преобразования в новом базисе:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -9 & -4 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

4.1. Пусть f – линейное преобразование, действующее в пространстве V; $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Доказать, что $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$.

4.2. Найти образ $f(\lambda_1\vec{x}_1 + \dots + \lambda_k\vec{x}_k)$ линейной комбинации векторов при действии линейного преобразования f, если известны образы векторов $f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_k)$.

4.3. Доказать, что образ $f(\vec{0})$ нулевого вектора при действии линейного преобразования f равен нулевому вектору. Как связаны образы $f(\vec{x})$ и $f(-\vec{x})$ векторов $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ при действии линейного преобразования f?

4.4. Доказать, что линейное преобразование f, действующее на одномерном пространстве, имеет вид $f(\vec{x}) = k\vec{x}$, $k = \text{const}$.

4.5. Проверить линейность следующих преобразований f пространства $\mathbb{R}^n$:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2)$;

б) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

4.6. Проверить, что следующие преобразования f пространства $\mathbb{R}^n$ не являются линейными:

а) $f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$ ($\vec{a} \neq 0$ – фиксированный вектор);

б) $f(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x})\vec{x}$ ($\vec{a} \neq 0$ – фиксированный вектор);

в) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2 + 2, x_3 + 3)$.

4.7. На пространстве V с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ определим преобразование f, называемое *проектированием на подпространство* $L(\vec{e}_1)$ *вдоль* $L(\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$: если $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ – разложение $\vec{x}$ из V по базису, то положим $f(\vec{x}) = x_1\vec{e}_1$. Доказать, что проектирование является линейным преобразованием.

4.8. Каждому многочлену $g(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ поставим в соответствие его производную, т.е. многочлен $g'(z) = na_0z^{n-1} + (n-1)a_1z^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}z + a_{n-1}$. Доказать, что указанное действие задает линейное преобразование пространства всех многочленов.

4.9. Проверить, что образ и ядро линейного преобразования f являются подпространствами линейного пространства V.

4.10. Найти ядро и образ следующих линейных операторов, действующих в пространстве V с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$:

а) проектирование на $L(\vec{e}_1)$ вдоль подпространства $L(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$;

б) проектирование на $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ вдоль подпространства $L(\vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

4.11. Найти ядро и образ дифференцирования на пространстве многочленов степени, не превышающей 5.

4.12. Проверить формулу $\dim \operatorname{Ker} f = n - \dim \operatorname{Im} f$ для линейных операторов f пространства $\mathbb{R}^n$:

а) $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$;

б) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

4.13. Найти матрицы линейных операторов из предыдущей задачи.

4.14. Для каждого из следующих преобразований f пространства $\mathbb{C}$:

а) f – сопряжение комплексных чисел;

б) f – умножение комплексных чисел на мнимую единицу.

Выясните, является ли оно линейным. Найти матрицу f в стандартном базисе. Найти его ядро и образ.

4.15. Пусть f – транспонирование квадратных матриц второго порядка. Проверить, что оно является линейным преобразованием, и найти матрицу f в стандартном базисе, его ядро и образ.

4.16. Линейное преобразование f переводит векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в векторы $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, а линейное преобразование g переводит векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ в векторы $\vec{e}_1'' = 2\vec{e}_1' - 3\vec{e}_2'$, $\vec{e}_2'' = \vec{e}_1' + 2\vec{e}_2'$. Найти матрицу преобразования h, переводящего векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ соответственно в векторы $\vec{e}_1'', \vec{e}_2''$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

4.17. Найти ядро и образ преобразования f, если известна его матрица A в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$:

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4.18. Пусть V – линейное пространство с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$; $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ – произвольная система векторов из V. Доказать, что существует такое линейное преобразование f, что выполнены равенства $f(\vec{e}_1)=\vec{a}_1, f(\vec{e}_2)=\vec{a}_2, ..., f(\vec{e}_n)=\vec{a}_n$. Можно ли утверждать, что оператор f находится однозначно?

4.19. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего векторы стандартного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$:

а) $\vec{e}_1'=(1,-1,2)$, $\vec{e}_2'=(2,0,4)$, $\vec{e}_3'=(3,-1,-1)$;

б) $\vec{e}_1'=(3,0,-8)$, $\vec{e}_2'=(2,-1,7)$, $\vec{e}_3'=(1,1,0)$.

4.20. Матрица A линейного преобразования f в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет вид $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A' преобразования f в новом базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$:

а) $\vec{e}_1'=\vec{e}_1-\vec{e}_2, \vec{e}_2'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$; **б)** $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2, \vec{e}_2'=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2$.

4.21. Пусть $\vec{a}=(-1;1), \vec{b}=(2;3)$. Найти матрицу линейного преобразования $f(\vec{x})=(\vec{x},\vec{a})\vec{b}$ относительного данного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$:

а) $\vec{e}_1=(0;1), \vec{e}_2=(1;1)$; **б)** $\vec{e}_1=(1;-2), \vec{e}_1=(2;-3)$.

4.22. Матрица A линейного преобразования f в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет вид $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -11 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A' преобразования f в новом базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$:

а) $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{e}_2'=2\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3'=-\vec{e}_1-\vec{e}_2-2\vec{e}_3$;

б) $\vec{e}_1'=2\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{e}_2'=3\vec{e}_1+5\vec{e}_2+2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3'=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

4.23. Линейное преобразование f в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Для данного вектора $\vec{x}$ найти координаты вектора $f(\vec{x})$ в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, если $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$:

а) $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$; **б)** $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$; **в)** $\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$.

4.24. Доказать, что для подобных матриц выполняются следующие свойства:

а) если матрица A подобна матрице B, то и матрица B подобна матрице A;

б) если матрица A подобна матрице B и матрица B подобна матрице C, то матрица A подобна матрице C.

4.25. Доказать, что матрицы линейного преобразования в двух различных базисах подобны друг другу.

4.26. Доказать, что две матрицы подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами линейного преобразования в подходящих базисах.

4.27. Доказать, что матрицы одного и того же преобразования в различных базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрица перехода от одного базиса к другому коммутирует с матрицей преобразования в одном из данных базисов.

4.28. Доказать линейность каждого из следующих преобразований, определенных на пространстве V с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$:

а) $f(\vec{x}) = 0$ для любого $\vec{x} \in V$ (*нулевое* преобразование);

б) $f(\vec{x}) = \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in V$ (*единичное* преобразование).

4.29. Пусть f и g – линейные преобразования, действующие в пространстве V и $\lambda \in \mathbb{R}$. Доказать, что следующие правила: **а)** $(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$; **б)** $(\lambda f)(\vec{x}) = f(\lambda \vec{x})$; **в)** $(fg)(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$, для любого $\vec{x} \in V$ задают линейные преобразования $f+g$, λf, fg на пространстве V.

4.30. Пусть V – линейное пространство с базисом $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$; A_f – матрица линейного преобразования f относительно базиса E, т.е. $f(E) = EA_f$. Доказать, что для любой матрицы A порядка n существует единственное преобразование f, такое, что $A_f = A$.

4.31. Доказать, что операции сложения, умножения на число и умножения для линейных преобразований и для соответствующих им матриц согласованы, т.е. для любых операторов f, g и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливы равенства:

а) $A_{f+g} = A_f + A_g$; **б)** $A_{\lambda f} = \lambda A_f$; **в)** $A_{fg} = A_f A_g$.

4.32. Доказать, что линейные преобразования n-мерного пространства относительно операций сложения и умножения на число сами образуют линейное пространство. Доказать, что размерность этого пространства равна n^2.

4.33. Пусть e – единичное преобразование. Преобразование f^{-1} называется обратным к линейному преобразованию f, если $ff^{-1} = f^{-1}f = e$. Доказать, что **а)** преобразование f^{-1} является линейным; **б)** $A_{f^{-1}} = \left(A_f\right)^{-1}$.

4.34. Линейное преобразование f в базисе $\vec{e}_1 = (1, 2), \vec{e}_2 = (2, 3)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а преобразование g в базисе $\vec{e}_1' = (3, 1)$, $\vec{e}_2' = (4, 2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования $f + g$ в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$.

4.35. Линейное преобразование f в базисе $\vec{e}_1 = (-3, 7)$, $\vec{e}_2 = (1, -2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а линейное преобразование g в базисе $\vec{e}_1' = (6, -7)$, $\vec{e}_2' = (-5, 6)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования fg в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

§ 4.2. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

Основные сведения

Ненулевой вектор $\vec{x}$ линейного пространства V называется *собственным вектором* линейного преобразования f, если

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x},$$

где λ – некоторое число. При этом число λ называется *собственным значением* линейного преобразования f. Говорят также, что $\vec{x}$ является собственным вектором, принадлежащим собственному значению λ.

Пусть A – матрица линейного преобразования f в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ и X – вектор-столбец из координат вектора $\vec{x}$. Тогда соотношение $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ запишем в равносильной форме

$$AX = \lambda X.$$

Поэтому говорят, что ненулевой вектор-столбец X является собственным вектором квадратной матрицы A, соответствующим собственному значению λ. Собственные значения матрицы A находят из *характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda E) = 0, \qquad (4.1)$$

а собственные векторы из однородной системы уравнений

$$(A - \lambda E)X = 0. \qquad (4.2)$$

Многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A, его корни являются собственными значениями матрицы A.

Примеры

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -7 \\ -11 & 3 & 13 \\ 7 & -1 & -7 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & -7 \\ -11 & 3-\lambda & 13 \\ 7 & -1 & -7-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Разлагая определитель по третьему столбцу, получим $-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda=0.$ Отсюда $\lambda_1=0; \lambda_2=1; \lambda_3=2.$

Найдем собственные векторы.

1. Пусть $\lambda=0.$ Подставляя это значение в систему уравнений (4.2), получим

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -7 \\ -11 & 3 & 13 \\ 7 & -1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} 7x_1-x_2-7x_3=0, \\ -11x_1+3x_2+13x_3=0, \\ 7x_1-x_2-7x_3=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $\vec{x}=a(4;-7;\ 5)^T$, где a – произвольное число. Вектор $\vec{x}$ будет собственным при условии $a\neq 0.$

2. В случае $\lambda=1$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} 6x_1-x_2-7x_3=0, \\ -11x_1+2x_2+13x_3=0, \\ 7x_1-x_2-8x_3=0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что вектор $\vec{x} = a(1; -1;\ 1)^T$ является собственным для собственного значения $\lambda = 1$ при условии $a \neq 0$.

3) Аналогично в случае $\lambda = 2$ получим:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 7x_3 = 0, \\ -11x_1 + x_2 + 13x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $\vec{x} = a(1; -2;\ 1)^T$, $a \neq 0$.

2. Пусть дана структурная матрица торговли трех стран:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Ее элемент a_{ij} показывает, какую часть своего дохода страна под номером j тратит на покупку товаров страны под номером i. Найти величины национальных доходов этих стран, при которых все страны не имели бы убытков от торговли, если сумма национальных доходов равна 14.

Решение. Данная задача представляет собой пример модели международной торговли (линейной модели обмена).

Пусть $\vec{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3)^T$ – вектор национальных доходов. В результате торговли страны получат соответственно доходы:

$$\begin{cases} I_1 = 0,5y_1 + 0,2y_2 + 0,1y_3, \\ I_2 = 0,3y_1 + 0,4y_2 + 0,3y_3, \\ I_3 = 0,2y_1 + 0,4y_2 + 0,6y_3, \end{cases}$$

или, в матричном виде, $\vec{I} = A\vec{y}$. По условию задачи $A\vec{y} \geq \vec{y}$. Но здесь может иметь место только равенство, так как если какие-то страны имели бы прибыль, то другие страны должны были бы иметь убытки. Следовательно, $A\vec{y} = \vec{y}$ и $\vec{y}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Для нахождения собственного вектора $\vec{y}$ запишем систему уравнений

$$\begin{cases} -0,5y_1 + 0,2y_2 + 0,1y_3 = 0, \\ 0,3y_1 - 0,6y_2 + 0,3y_3 = 0, \\ 0,2y_1 + 0,4y_2 - 0,4y_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $y_1 = 2a,\ y_2 = 2a,\ y_3 = 3a\ (a > 0)$. Учитывая, что $y_1 + y_2 + y_3 = 14$, находим, что $a = 2$, т.е. $y_1 = 4,\ \ y_2 = 4,\ \ y_3 = 6.$

3. Доказать, что собственные векторы $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$ линейного преобразования f, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, ..., \lambda_n$, линейно независимы.

Решение. Пусть найдутся числа $a_1, ..., a_n$, не все равные нулю, для которых выполняется равенство

$$a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n = 0. \tag{4.3}$$

Предположим для определенности, что $a_1 \neq 0.$

Применяя к обеим частям равенства (4.3) преобразование f, получим

$$f\left(a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n\right) = a_1 f\left(\vec{x}_1\right) + ... + a_n f\left(\vec{x}_n\right) = a_1\lambda_1\vec{x}_1 + ... + a_n\lambda_n\vec{x}_n = 0,$$

т.е.

$$a_1\lambda_1\vec{x}_1 + ... + a_n\lambda_n\vec{x}_n = 0. \tag{4.4}$$

Умножим обе части равенства (4.3) на число λ_n:

$$a_1\lambda_n\vec{x}_1 + ... + a_n\lambda_n\vec{x}_n = 0. \tag{4.5}$$

Вычитая почленно из равенства (4.4) равенство (4.5), имеем

$$a_1\left(\lambda_1 - \lambda_n\right)\vec{x}_1 + ... + a_{n-1}\left(\lambda_{n-1} - \lambda_n\right)\vec{x}_{n-1} = 0. \tag{4.6}$$

Равенство (4.6) полностью аналогично исходному равенству (4.3), причем коэффициент $a_1(\lambda_1 - \lambda_n) \neq 0.$ Продолжая таким же образом отбрасывать по одному вектору, придем к равенству $a_1(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1})\ldots(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_1 = 0.$ Учитывая, что числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ различны и $a_1 \neq 0,$ имеем $\vec{x}_1 = 0.$ Это противоречит тому, что вектор $\vec{x}_1$ – собственный.

4. Доказать, что матрица A порядка n, имеющая n различных собственных значений, подобна диагональной.

Решение. Пусть V – линейное n-мерное пространство с базисом $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n).$ Определим в нем линейное преобразование $f,$ задав его действие на базисе формулой $f(E) = EA.$ Тогда матрица преобразования f в базисе E совпадает с матрицей A и собственные значения матрицы A и преобразования f совпадают. Для каждого собственного значения λ_i выберем собственный вектор $\vec{x}_i.$ Собственные векторы $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$ линейно независимы, поскольку они отвечают различным собственным значениям и их число совпадает с размерностью пространства $V,$ поэтому они образуют базис в нем. Матрица преобразования f в этом базисе имеет диагональный вид: на главной диагонали расположены числа $\lambda_1, ..., \lambda_n.$ Матрицы одного преобразования в различных базисах подобны, следовательно, матрица A подобна диагональной.

Упражнения

4.36. Доказать, что если $\vec{x}$ – собственный вектор линейного преобразования $f,$ то вектор $k\vec{x}$ $(k \neq 0)$ также является собственным вектором преобразования $f.$

4.37. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – два собственных вектора линейного преобразования $f,$ принадлежащие собственному значению $\lambda.$ Доказать, что если вектор $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \neq 0,$ то он также является собственным вектором преобразования $f,$ отвечающим тому же собственному значению $\lambda.$

4.38. Доказать, что множество всех собственных векторов преобразования $f,$ принадлежащих одному собственному значению

λ, к которому добавили нулевой вектор, образует линейное подпространство V.

4.39. Если $f(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n$ – многочлен, A – матрица, то положим $f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nE$. Доказать, что всякий собственный вектор $\vec{x}$ матрицы A, отвечающий значению λ, является собственным вектором матрицы $f(A)$. Какому собственному значению он отвечает?

4.40. Найти собственные значения и собственные векторы данных матриц:

а) $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$.

4.41. Какие собственные значения и собственные векторы имеют преобразования f и g, действующие в пространстве комплексных чисел:

а) $f(z)=\bar{z}$ – сопряжение комплексных чисел;

б) $g(z)=z\cdot i$ – умножение комплексных чисел на мнимую единицу?

4.42. Найти собственные значения и собственные векторы преобразований проектирования p_1 и p_2, действующих в пространстве с базисом $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4$:

а) проектирование на $L(\vec{e}_1)$ вдоль подпространства $L(\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$;

б) проектирование на $L(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ вдоль подпространства $L(\vec{e}_3,\vec{e}_4)$.

4.43. Пусть f – преобразование дифференцирования в пространстве многочленов степени, не превышающей пяти. Доказать, что единственным собственным значением f является нуль, собственные векторы f суть ненулевые числа.

4.44. Доказать, что действительные корни характеристического уравнения матрицы A, и только они являются ее собственными значениями.

4.45. Какое максимальное число различных собственных значений может иметь матрица порядка n?

4.46. Какое максимальное число линейно независимых собственных векторов может иметь матрица порядка n?

4.47. Чему равен в характеристическом уравнении матрицы A порядка n:

а) коэффициент при старшей степени λ^n; **б)** коэффициент при степени λ^{n-1}; **в)** свободный член?

4.48. Доказать, что если определитель матрицы A не равен нулю, то все ее собственные значения не равны нулю.

4.49. Доказать, что произведение собственных значений матрицы (учитывая кратные и комплексные) равно ее определителю, а сумма собственных значений – сумме элементов, стоящих на главной диагонали.

4.50. Найти общий вид характеристического многочлена матрицы A порядка 2.

4.51. Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является корнем характеристического многочлена $|A - \lambda E|$, т.е. $A^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot E = 0$.

4.52. Как связаны собственные значения подобных матриц?

4.53. Пусть A и B подобные матрицы порядка 3. Допустим, что пространство $\mathbb{R}^3$ имеет базис, состоящий из собственных векторов матрицы A. Доказать, что оно имеет базис, состоящий из собственных векторов матрицы B.

4.54. Как связаны собственные значения матриц A и A^T? Привести пример матрицы A порядка 2, удовлетворяющей одновременно условиям: **а)** все собственные векторы матрицы A пропорциональны вектору $\vec{e}_1 = (1; 0)$; **б)** все собственные векторы матрицы A^T пропорциональны вектору $\vec{e}_2 = (0; 1)$.

4.55. Найти собственные векторы матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4.56. Существует ли в $\mathbb{R}^3$ базис, состоящий из собственных векторов матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.57. Пусть в матрице A порядка 3 сумма элементов каждой строки равна 5. Доказать, что вектор $(1;1;1)$ является собственным, отвечающим значению 5.

4.58. Пусть в матрице A порядка 3 сумма элементов каждого столбца равна 1. Доказать, что она имеет собственный вектор, отвечающий значению 1.

4.59. Пусть дана структурная матрица торговли трех стран:

$$A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Ее элемент a_{ij} показывает, какую часть своего дохода страна под номером j тратит на покупку товаров страны под номером i. Найти величины национальных доходов этих стран, при которых все страны не имели бы убытков от торговли, если сумма национальных доходов равна 91.

4.60. Доказать, что матрица A порядка n подобна диагональной тогда и только тогда, когда пространство $\mathbb{R}^n$ имеет базис, состоящий из собственных векторов матрицы A.

4.61. Являются ли подобными матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

4.62. Подобна ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, диагональной?

4.63. Пусть $f(t)$ – многочлен; $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что матрица $f(A)$ подобна диагональной тогда и только тогда, когда $f'(1)=0$.

§ 4.3. Симметрические линейные преобразования

Основные сведения

Пусть f – линейное преобразование евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Преобразование f^* называется *сопряженным* к f, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $(f(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, f^*(\vec{y}))$, где $(\vec{x}, \vec{y})$, как и ранее, обозначает скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Пусть преобразованию f в ортонормированном базисе отвечает матрица A. Тогда преобразованию f^* будет отвечать в том же базисе матрица A^T.

Линейное преобразование f называется *симметрическим*, если оно совпадает со своим сопряженным преобразованием f^*, т.е. справедливо равенство $(f(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, f(\vec{y}))$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

В любом ортонормированном базисе матрица A симметрического преобразования f является симметрической матрицей, т.е. $A^T = A$. Выполняются следующие свойства симметрического линейного преобразования:

1. *Собственные значения симметрического линейного преобразования действительные числа.*
2. *Собственные векторы симметрического линейного преобразования, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*
3. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов симметрического линейного преобразования, в котором его матрица имеет диагональный вид.*

Линейное преобразование f в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *ортогональным*, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\left(f(\vec{x}), f(\vec{y})\right) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

Матрица A ортогонального преобразования f в ортонормированном базисе будет ортогональной, т.е. $A^T A = E$.

Примеры

1. Доказать, что собственные векторы симметрического линейного преобразования, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

Решение. Пусть f – симметрическое линейное преобразование и

$$f(\vec{x}_1) = \lambda_1 \vec{x}_1, \ \ (\vec{x}_1 \neq 0), \ \ f(\vec{x}_2) = \lambda_2 \vec{x}_2, \ \ (\vec{x}_2 \neq 0),$$

причем $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$. Докажем, что $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$. Для этого воспользуемся равенством

$$(f(\vec{x}_1), \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_2)),$$

справедливым в силу симметричности f. Из этого равенства следует

$$\lambda_1 (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda_2 (\vec{x}_1, \vec{x}_2),$$

и так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$.

2. Доказать, что поворот f_φ на угол φ в пространстве $\mathbb{R}^2$ является ортогональным преобразованием, и найти его матрицу в стандартном базисе.

Решение. Очевидно, что при повороте на угол φ векторы стандартного базиса $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ переходят в векторы $\vec{e}_1{}' = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\vec{e}_2{}' = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Поэтому матрицей поворота является матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $A^T A = E$, так что A является ортогональной матрицей, а поворот f_φ – ортогональное преобразование.

3. Найти ортонормированный базис для симметрического преобразования, заданного (в некотором ортонормированном базисе) матрицей

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

в котором его матрица принимает диагональный вид.

Решение. Решая характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$, находим, что собственными значениями матрицы A являются $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$. При этом собственному значению $\lambda_1=1$ соответствуют два линейно независимых вектора $\vec{x}_1=(1;-1;0)$, $\vec{x}_2=(1;0;-1)$, а собственному значению $\lambda_2=4$ соответствует собственный вектор $\vec{x}_3=(1,1,1)$.

Вектор $\overline{x}_3$ ортогонален каждому из векторов $\vec{x}_1,\vec{x}_2$. Для построения собственного ортогонального базиса применим процесс ортогонализации к векторам $\vec{x}_1,\vec{x}_2$. Положим

$$\vec{v}_1=\vec{x}_1=(1,-1,0),\ \ \vec{v}_2=\vec{x}_2-\frac{(\vec{x}_1,\vec{x}_2)}{(\vec{x}_1,\vec{x}_1)}\vec{x}_1=\frac{1}{2}(1,1,-2),\ \ \vec{v}_3=\vec{x}_3=(1,1,1).$$

По построению векторы $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ ортогональны, а соответствующий ортонормированный базис имеет вид

$$\frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \ \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\ \ \frac{\vec{v}_3}{|\vec{v}_3|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{3}\right).$$

Можно проверить, что в указанном базисе матрица линейного преобразования A имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

Упражнения

4.64. Доказать, что линейное преобразование, сопряженное к f^*, совпадает с f, т.е. $\left(f^*\right)^*=f$.

4.65. Пусть f – линейное преобразование евклидова пространства $\mathbb{R}^n$; $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$; A – матрица преобразования f в этом базисе. Доказать, что преобразованию f^* отвечает в том же базисе матрица A^T.

4.66. Пусть f и g – симметрические преобразования в пространстве $\mathbb{R}^n$. Указать, какое из преобразований $f+g$, $2f-g$, $fg+gf$, fg не является симметрическим?

4.67. Доказать, что преобразование f является симметрическим тогда и только тогда, когда матрица A преобразования f в ортонормированном базисе является симметрической, т.е. $A^T = A$. Остается ли утверждение справедливым для ортогонального базиса?

4.68. Пусть A – симметрическая матрица, $\lambda = a+bi$ – комплексный корень характеристического уравнения $|A-\lambda E| = 0$, X – ненулевое решение системы однородных уравнений $(A-\lambda E)X = 0$, $\overline{X}$ – столбец, координаты которого являются сопряженными числами по отношению к координатам вектора X. Доказать справедливость следующих утверждений:

а) $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$;

б) $X^T\overline{X} = x_1\overline{x}_1 + \ldots + x_n\overline{x}_n > 0$;

в) $\overline{\lambda} = \lambda$, т.е. λ – действительное число.

Доказать, что характеристическое уравнение симметрической матрицы имеет только действительные корни.

4.69. Пусть λ_1 – собственное значение, $\vec{a}_1$ – соответствующий собственный вектор симметрического линейного преобразования f: $f(\vec{a}_1) = \lambda_1\vec{a}_1$; S – множество всех векторов $\vec{x} \in V$, ортогональных к $\vec{a}_1$: $(\vec{a}_1, \vec{x}) = 0$. Доказать, что если $\vec{x} \in S$, то $f(\vec{x}) \in S$.

4.70. Пусть f – симметрическое линейное преобразование в $\mathbb{R}^2$; λ_1, λ_2 – собственные значения преобразования f. Доказать, что:

а) в $\mathbb{R}^2$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов преобразования f;

б) матрица оператора f в этом базисе имеет диагональный вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

4.71. Доказать, что симметрическая матрица A подобна диагональной D, т.е. существует обратимая матрица C, такая, что $A = C^{-1}DC$. Существует ли ортогональная матрица C, удовлетворяющая равенству $A = C^{-1}DC$?

4.72. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис для симметрического линейного преобразования, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.73. Для данной матрицы A найдите такую ортогональную матрицу C, что матрица $C^{-1}AC$ является диагональной:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **в)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.74. Пусть f – линейное преобразование, действующее в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что это – ортогональное преобразование тогда и только тогда, когда оно сохраняет длины векторов, т.е. для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено условие: $\left(f(\vec{x}), f(\vec{x})\right) = (\vec{x}, \vec{x})$.

4.75. Доказать, что линейное преобразование, переводящее ортонормированный базис в ортонормированный, является ортогональным.

4.76. Доказать, что матрица A ортогонального преобразования f в ортонормированном базисе B будет ортогональной, т.е. $A^T A = E$.

4.77. Найти матрицу поворота на угол φ вокруг вектора $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ пространства $\mathbb{R}^3$ в стандартном базисе. Доказать, что она ортогональна.

4.78. Пусть линейное преобразование f пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу A в базисе $(\vec{e}_1', \vec{e}_2')$. Проверить, будет ли оно ортогональным и почему:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1' = (1; 0)$, $\vec{e}_2' = (1; 1)$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1' = (1; 0)$, $\vec{e}_2' = (1; 1)$.

4.79. Найти образ вектора $\vec{x} = (x_1; x_2)$ при ортогональном преобразовании f пространства $\mathbb{R}^2$, если известна матрица A преобразования f в стандартном базисе. Как изменится положение вектора $\vec{x} = (x_1; x_2)$ при этом преобразовании:

а) $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 4.4. Квадратичные формы

Основные сведения

Квадратичной формой Φ от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется однородный многочлен второй степени от этих переменных. Каждая квадратичная форма допускает однозначную запись в следующем симметричном виде:

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$.

Симметрическая матрица A, элементами которой являются числа a_{ij}, называется *матрицей квадратичной формы* Φ. Если ввести в рассмотрение столбец $X=(x_1;x_2;...;x_n)^T$, то квадратичную форму Φ можно записать в матричном виде

$$\Phi = X^T AX.$$

Пусть от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ мы переходим к новым переменным $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ с помощью невырожденного линейного преобразования $X = PX'$. Матрица A' квадратичной формы в новых переменных выражается через матрицы A и P следующим образом:

$$A' = P^T AP.$$

Поскольку формулы $X = PX'$ можно истолковывать как формулы преобразования координат при переходе к новому базису, то равенство $A' = P^T AP$ можно рассматривать как выражение для матрицы формы Φ в новом базисе.

Рангом r квадратичной формы Φ называется ранг ее матрицы A; ранг формы не меняется при невырожденных линейных преобразованиях переменных.

Квадратичная форма Φ имеет *канонический вид*, если она не содержит произведений переменных, т.е.

$$\Phi = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Любую квадратичную форму Φ в некотором ортонормированном базисе можно привести к каноническому виду. Коэффициентами при квадратах переменных в каноническом виде являются собственные значения матрицы A данной квадратичной формы. При этом базис, в котором Φ принимает канонический вид, состоит из ортонормированных собственных векторов матрицы A.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду называется также приведением квадратичной формы *к главным осям*.

Канонический вид квадратичной формы называется *нормальным*, если входящие в него квадраты переменных имеют коэффициенты плюс или минус 1.

Квадратичную форму можно привести к нормальному виду методом Лагранжа с помощью невырожденного преобразования. При этом справедлив «закон инерции квадратичных форм»: число p положительных коэффициентов и число q отрицательных коэффициентов в нормальном виде формы ранга r не зависят от способа приведения квадратичной формы к нормальному виду; очевидно, $r = p + q$.

Квадратичная форма Φ от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется *определенной*, если $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ только в случае $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0.$ Если при этом $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ ($\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$) для всех остальных наборов $x_1, x_2, ..., x_n$, то Φ называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*) квадратичной формой.

Угловыми минорами матрицы A называются определители:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Критерий Сильвестра. *Квадратичная форма является положительно определенной, когда все угловые миноры ее матрицы положительны. Квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда знаки угловых миноров ее матрицы чередуются:* $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$.

Примеры

1. Найти матрицу квадратичной формы

$$\Phi = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

Р е ш е н и е. Представим коэффициенты при произведениях переменных в виде суммы $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ij}x_jx_i$:

$$\Phi = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 =$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2x_3 + x_2x_1 + 2x_3x_1 - 3x_3x_2.$$

Поэтому матрица квадратичной формы Φ имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 3\end{pmatrix}.$$

2. Представить в виде многочлена квадратичную форму Ф, матрица которой равна $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 5\\ -1 & 3 & -2\\ 5 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Поскольку $\Phi = X^T AX$, где $X=(x_1,x_2,x_3)^T$, то

$$\Phi=\left(4x_1-x_2+5x_3\right)x_1+\left(-x_1+3x_2-2x_3\right)x_2+\left(5x_1-2x_2+2x_3\right)x_3=$$

$$=4x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+10x_1x_3-4x_2x_3.$$

Заметим, что коэффициенты при квадратах переменных получаются из диагональных элементов матрицы A, а коэффициенты при произведениях x_ix_j – это удвоенные элементы a_{ij} при $i\neq j$.

3. Привести к каноническому виду квадратичную форму, указав канонический базис и соответствующее ортогональное преобразование:

$$\Phi=6x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2.$$

Решение. Данной квадратичной форме отвечает матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Она имеет собственные значения $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=7$. Поэтому канонический вид квадратичной формы можно написать сразу:

$$\Phi=2(x_1')^2+7(x_2')^2.$$

Найдем базис, в котором форма имеет такой вид. Собственным значениям λ_1 и λ_2 отвечают собственные векторы $\vec{x}_1=(1;-2)$, $\vec{x}_2=(2;1)$. Соответствующие единичные собственные векторы имеют вид

$$\vec{a}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \ \vec{a}_2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Чтобы найти матрицу ортогонального преобразования C, приводящего форму к главным осям, запишем по столбцам координаты векторов канонического базиса. Получим

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти канонический вид и канонический базис для квадратичной формы $\Phi = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 11x_3^2 - 20x_1x_2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3$. Какое ортогональное преобразование приводит квадратичную форму к главным осям?

Р е ш е н и е . Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 8 \\ -10 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения равны $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -9, \lambda_3 = 18$, поэтому каноническим видом квадратичной формы является $\Phi = 9y_1^2 - 9y_2^2 + 18y_3^2$, а каноническим базисом – ортонормированный базис, состоящий из нормированных собственных векторов матрицы A:

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{3}(1, -2, -2), \vec{a}_2 = \frac{1}{3}(-2, -2, 1), \vec{a}_3 = \frac{1}{3}(-2, 1, -2).$$

Чтобы найти матрицу ортогонального преобразования C, приводящего форму к главным осям, запишем по столбцам координаты векторов канонического базиса. Получим

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Методом Лагранжа найти нормальный вид квадратичной формы

$$\Phi = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Р е ш е н и е. Сначала сгруппируем все члены квадратичной формы, содержащие переменную x_1, и выделим полный квадрат:

$$\Phi = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 =$$

$$= x_1^2 + 2x_1\left(x_2 + x_3\right) + \left(x_2 + x_3\right)^2 - \left(x_2 + x_3\right)^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_2x_3 =$$

$$= \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_2x_3 =$$

$$= \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2.$$

На следующем шаге мы повторяем выполненные действия для остатка квадратичной формы:

$$\Phi = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 + \left(x_2 + 2x_3\right)^2 + x_3^2.$$

Окончательно имеем

$$\Phi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

где $y_1 = x_1 + x_2 + x_3, y_2 = x_2 + 2x_3, y_3 = x_3.$

6. Определить, являются ли положительно или отрицательно определенными перечисленные ниже квадратичные формы:

а) $x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$

б) $-6x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 + 10x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$

в) $x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3.$

Р е ш е н и е:

а) матрицей квадратичной формы является матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Для нее

$$\Delta_1 = \det\left(1\right) = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

Поэтому данная квадратичная форма – положительно определенная;

б) соответствующая матрица равна

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 5 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим угловые миноры:

$$\Delta_1 = \det(-6) = -6 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 5 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 5 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

так что по критерию Сильвестра данная квадратичная форма – отрицательно определенная;

в) матрицей данной квадратичной формы является матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Для нее $\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = 1 > 0,\ \Delta_3 = -11 < 0.$ По критерию Сильвестра квадратичная форма не является определенной.

Упражнения

4.80. Найти матрицу квадратичной формы:

а) $3x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 24x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3;$

б) $2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$

в) $x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_2 - 2x_1x_3.$

4.81. Найти квадратичную форму Φ по ее матрице A:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix};$ **б)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$ **в)** $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

4.82. Производится замена переменных по формуле $X = PY$, здесь $X = (x_1, ..., x_n)^T$, $Y = (y_1, ..., y_n)^T$, P – невырожденная матрица;

а) выяснить, как связаны матрицы A и A' квадратичной формы Φ относительно множества переменных X и Y;

б) проверить, что матрица A' является симметрической;

в) какое из следующих соотношений: $|A||A'| > 0$, $|A||A'| < 0$, $|A||A'| = 0$, связывающее определители матриц A и A', не может выполняться?

4.83. Пусть Φ – квадратичная форма от двух переменных $\vec{x} = (x_1, x_2)$ с невырожденной матрицей A; $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ – ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A; (x_1', x_2') – координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$. Доказать, что форма Φ относительно переменных (x_1', x_2') имеет канонический вид $\Phi = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_1 (x_2')^2$.

4.84. Найти канонический вид и канонический базис для квадратичной формы Φ, указав ортогональное преобразование C, приводящее форму к главным осям:

а) $\Phi = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$; **б)** $\Phi = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$.

4.85. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к главным осям, ее канонический вид и канонический базис:

а) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

б) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

в) $5x_1^2 - 7x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

4.86. Методом Лагранжа привести квадратичную форму Φ к виду $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$:

а) $\Phi = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$;

б) $\Phi = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

в) $\Phi = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

г) $\Phi = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

4.87. Привести форму Φ к нормальному виду:

а) $\Phi = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

б) $\Phi = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$;

в) $\Phi = x_1^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_3x_2$;

г) $\Phi = 2x_1x_2 - x_3^2$.

4.88. Квадратичные формы называются *эквивалентными*, если одна из них переводится в другую посредством невырожденного линейного преобразования переменных.

Выяснить, какие из форм эквивалентны:

а) $\Phi_1 = x_1x_2$, $\Phi_2 = y_1^2 - y_2^2$, $\Phi_3 = z_1^2 + z_2^2$;

б) $\Phi_1 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$, $\Phi_2 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $\Phi_3 = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

4.89. Привести пример эквивалентных квадратичных формы от двух и трех переменных.

4.90. Проверить, что если Φ – положительно определенная квадратичная форма, то квадратичная форма $F = -\Phi$ является отрицательно определенной.

4.91. Найти все значения параметра λ, при которых квадратичная форма является положительно определенной:

а) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3$;

в) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

4.92. Являются ли следующие квадратичные формы отрицательно определенными:

а) $-x_1^2 - 6x_2^2 - 8x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

б) $-x_1^2 - 5x_2^2 - 16x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$?

4.93. Пусть $\Phi(\vec{x})$ – квадратичная форма, а $\vec{a}, \vec{b}$ – векторы, такие что $\Phi(\vec{a}) > 0, \Phi(\vec{b}) < 0$. Доказать, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – линейно независимы.

4.94. Доказать, что если квадратичная форма с матрицей A положительно определена, то и квадратичная форма с матрицей A^{-1} положительно определена.

4.95. Доказать критерий Сильвестра для квадратичных форм от двух переменных.

ГЛАВА 5

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

§ 5.1. Собственные векторы неотрицательных матриц

Основные сведения

Квадратная матрица A называется *неотрицательной*, $A \geq 0$, если ее элементы неотрицательны. Если все элементы матрицы A положительны, то она называется *положительной*, $A > 0$. Вектор $\vec{x}$ называется *положительным* (*неотрицательным*), если все его компоненты $x_i > 0$ (соответственно $x_i \geq 0$).

Теорема Фробениуса – Перрона. *Для любой неотрицательной матрицы $A \geq 0$ существует собственное значение $\lambda_A \geq 0$ (называемое числом Фробениуса), такое, что $\lambda_A \geq |\lambda|$ для любого собственного значения λ матрицы A. Кроме того, существует неотрицательный собственный вектор $\vec{x}_A \geq 0$, соответствующий собственному значению λ_A и называемый вектором Фробениуса. Причем, если $A > 0$, то $\lambda_A > 0$ и $\vec{x}_A > 0$.*

Примеры

1. Найти число λ_A и вектор $\vec{x}_A$ Фробениуса матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Матрица A имеет два собственных значения: число Фробениуса $\lambda_A = 6$, которому соответствует собственный вектор $\vec{x}_A = t(1,1)^T$ (он является вектором Фробениуса для $t > 0$), и собственное значение $\lambda_2 = 1$ с собственным вектором $\vec{x} = t(-1, 1)^T$ $(t \neq 0)$. Очевидно, что выполняется неравенство $\lambda_A > |\lambda_2|$.

2. Пусть $\vec{x} > 0$ – собственный вектор матрицы $A \geq 0$. Доказать, что вектор $\vec{x}$ является вектором Фробениуса.

Доказательство. Поскольку матрицы A и A^T неотрицательны и имеют одни и те же собственные значения, то λ_A – число Фробениуса для A^T. Пусть $\vec{p}_A$ – вектор Фробениуса матрицы A^T, т.е. $A^T \vec{p}_A = \lambda_A \vec{p}_A$, или $\vec{p}_A^T A = \lambda_A \vec{p}_A^T$. Вектор $\vec{p}_A$ называется левым вектором Фробениуса матрицы A.

По условию $\vec{x} > 0$ и $A\vec{x} = \alpha \vec{x}$. Умножим это равенство слева на вектор $\vec{p}_A^T$. Учитывая, что $\vec{p}_A^T A = \lambda_A \vec{p}_A^T$, имеем $\vec{p}_A^T A\vec{x} = \lambda_A \vec{p}_A^T \vec{x}$, или $\alpha \vec{p}_A^T \vec{x} = \lambda_A \vec{p}_A^T \vec{x}$. Поскольку $\vec{p}_A{}^T \vec{x} > 0$ (хотя бы одно из неотрицательных слагаемых в сумме $\vec{p}_A{}^T \vec{x}$ положительно), то $\lambda_A = \alpha$. А это и означает, что $\vec{x}$ есть вектор Фробениуса.

3. Известно, что сумма элементов любой строки (любого столбца) положительной матрицы A равна α. Найти число Фробениуса матрицы A.

Решение. Пусть сумма элементов любой строки матрицы A равна α. Это можно записать в виде матричного равенства

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \dots \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, положительный вектор $(1, \dots, 1)$ является собственным вектором матрицы A, принадлежащим собственному значению α. Поэтому оно является числом Фробениуса матрицы A.

Упражнения

5.1. Проверить, что вектор $\vec{x}$ является собственным для матрицы A:

а) $\vec{x} = (1; 1; 2)^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\vec{x} = (1; 2; 3)^T$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти ее число Фробениуса λ_A, вектор Фробениуса $\vec{x}_A$.

5.2. Доказать, что положительный собственный вектор неотрицательной матрицы является ее вектором Фробениуса.

5.3. Доказать, что неотрицательная матрица второго порядка является симметрической тогда и только тогда, когда ее правый вектор Фробениуса является ее левым вектором Фробениуса. Остается ли это утверждение справедливым для матриц третьего порядка?

5.4. Для данной матрицы A найти число Фробениуса λ_A:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; **г)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.5. Найти число Фробениуса λ_A неотрицательной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

где B – квадратная матрица порядка m, D – квадратная матрица порядка k, C – матрица $k \times m$, если известны собственные значения матриц B и D.

5.6. Найти число Фробениуса λ_A, левый $\vec{p}_A$ и правый $\vec{x}_A$ – векторы Фробениуса матрицы A:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5.7. Проверить, что матрица A не имеет собственных положительных векторов:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; **в)** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **г)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.8. Найти число и вектор Фробениуса данных матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5.9. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \geq 0$, $I = (1;1;1)^T$, $\vec{c} = I^T A$ – вектор-строка, координата c_j которого есть сумма элементов *j*-го столбца матрицы A, например, $c_2 = a_{12} + a_{22} + a_{32}$. Пусть s – наименьшая, S – наибольшая из координат $\vec{c}$. Доказать, что $s \leq \lambda_A \leq S$. При этом если $A > 0$, то все неравенства строгие, за исключением случая $s = S$.

5.10. Доказать, что если сумма чисел в каждой строке неотрицательной матрицы A равна одному и тому же числу λ, то число Фробениуса λ_A равно λ. Какой вектор Фробениуса имеет матрица A?

5.11. Найти число и вектор Фробениуса данных матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

5.12. Зная число Фробениуса λ_A матрицы A, найти число Фробениуса следующих матриц:

а) $\alpha A + \beta E \ (\alpha > 0, \beta \geq 0)$; **б)** $A^k, k \geq 2$.

5.13. Пусть $f(t)$ – ненулевой многочлен с неотрицательными коэффициентами; λ_A – число Фробениуса матрицы A. Доказать, что $f(\lambda_A)$ – число Фробениуса матрицы $f(A)$.

5.14. Для каких значений $a > 0$ верно неравенство $a < \lambda_A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.15. Пусть $m_A = \max\{1, a\}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Указать какое-нибудь число $a > 0$, для которого верно соотношение:

а) $\lambda_A > m_A$; **б)** $\lambda_A < m_A$; **в)** $\lambda_A = m_A$.

5.16. Пусть A – неотрицательная матрица третьего порядка; m – наибольший из ее коэффициентов. Доказать, что: **а)** выполняется неравенство $\lambda_A \le 3m$; **б)** равенство $\lambda_A = 3m$ выполняется тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны числу m.

§ 5.2. Продуктивные матрицы

Основные сведения

Матрица $A \ge 0$ называется *продуктивной*, если для любого вектора $\vec{y} \ge 0$ существует решение $\vec{x} \ge 0$ *уравнения Леонтьева*

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}. \tag{5.1}$$

Уравнение Леонтьева можно записать следующим образом:

$$(E - A)\vec{x} = \vec{y},$$

где E – единичная матрица. Если обратная матрица $(E - A)^{-1}$ существует, то

$$\vec{x} = (E - A)^{-1}\vec{y}. \tag{5.2}$$

Первый критерий продуктивности. *Матрица $A \ge 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.*

Второй критерий продуктивности. *Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы.*

Следствие. *Если для неотрицательной матрицы A и некоторого положительного вектора $\vec{y}^*$ уравнение* (5.1) *имеет неотрицательное решение $\vec{x}^*$, то матрица A продуктивна.*

Критерий Саймона – Хокинса. *Для продуктивности неотрицательной матрицы A необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы $E-A$ были положительны.*

Пусть $A \geq 0$ – продуктивная матрица. *Запасом продуктивности* матрицы A назовем такое число $\alpha > 0$, что все матрицы λA, где $1 < \lambda < 1+\alpha$, продуктивны, а матрица $(1+\alpha)A$ не продуктивна.

Примеры

1. Исследовать на продуктивность матрицу $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Решение. В данном случае

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,5 \\ -0,3 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,01} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 50 \\ 30 & 80 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица неотрицательна, следовательно, A продуктивна ввиду первого критерия продуктивности.

2. Показать продуктивность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сумма элементов каждого столбца меньше единицы, значит, $\lambda_A < 1$. Значит, A продуктивна ввиду второго критерия продуктивности.

3. Выяснить, при каких значениях $a > 0$ матрица

$$A = a \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 11 & 22 & 9 \end{pmatrix}$$

будет продуктивной.

Р е ш е н и е . Характеристический многочлен матрицы A будет

$$|A-\lambda E| = \left| a\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 11 & 22 & 9 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 6a-\lambda & 2a & 0 \\ 2a & 3a-\lambda & 0 \\ 11a & 22a & 9a-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (9a-\lambda)\begin{vmatrix} 6a-\lambda & 2a \\ 2a & 3a-\lambda \end{vmatrix} = (9a-\lambda)\left(14a^2 - 9a\lambda + \lambda^2\right),$$

а характеристическое уравнение –

$$(9a-\lambda)(2a-\lambda)(7a-\lambda) = 0.$$

Корни этого уравнения (собственные значения):

$$\lambda_1 = 9a, \lambda_2 = 7a, \lambda_3 = 2a.$$

Согласно второму критерию для продуктивности A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $9a < 1,$ т.е. $a < \frac{1}{9}.$ Например, при $a = \frac{1}{10}$ получим продуктивную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0 \\ 1,1 & 2,2 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать, что положительное число $\alpha > 0$ является запасом продуктивности неотрицательной матрицы A тогда и только тогда, когда $(1+\alpha)\lambda_A = 1.$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Число Фробениуса матрицы $\mu A,$ где $\mu > 0,$ равно $\mu\lambda_A.$ Значит, матрица μA продуктивна тогда и только тогда, когда $\mu\lambda_A < 1.$

Если α – запас продуктивности матрицы A и $1<\mu<1+\alpha$, то $\mu\lambda_A<1$, $(1+\alpha)\lambda_A\geq 1$. Если бы неравенство было строгим, то можно было бы взять число $\mu<1+\alpha$ так, что $\mu\lambda_A>1$, что противоречит продуктивности матрицы μA в силу второго критерия продуктивности.

Обратно, если верно равенство $(1+\alpha)\lambda_A=1$, то для числа $1<\mu<1+\alpha$ верно $\lambda_{\mu A}=\mu\lambda_A<(1+\alpha)\lambda_A=1$ и $\lambda_{(1+\alpha)A}=(1+\alpha)\lambda_A=1$, т.е. матрица μA продуктивна, а матрица $(1+\alpha)A$ не продуктивна.

5. Найти запас продуктивности матрицы $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,6\\ 0,7 & 0,5\end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим собственные значения матрицы $B=$ $=10A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 7 & 5\end{pmatrix}$:

$$|B-\lambda E|=\left|\begin{pmatrix}1 & 6\\ 7 & 5\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=-37-6\lambda+\lambda^2.$$

Уравнение $\lambda^2-6\lambda-37=0$ имеет корни $\lambda_1=3-\sqrt{46}$, $\lambda_2=3+\sqrt{46}$. Значит, $\lambda_B=3+\sqrt{46}$, $\lambda_A=\dfrac{3+\sqrt{46}}{10}$. Далее, если α – запас продуктивности матрицы A, то $(1+\alpha)\lambda_A=1$. Следовательно,

$$\alpha=\frac{1}{\lambda_A}-1=\frac{10}{3+\sqrt{46}}-1=2.2251\times 10^{-2}\approx 0,022.$$

Упражнения

5.17. Используя первый критерий продуктивности матрицы, исследовать на продуктивность матрицу A:

а) $A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,6\\ 0,4 & 0,5\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,6\\ 0,6 & 0,5\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}0,7 & 0,2\\ 1,2 & 0,2\end{pmatrix}$; **г)** $A=\begin{pmatrix}0,8 & 0,4 & 0\\ 0,2 & 0,1 & 0\\ 3 & 4 & 0,9\end{pmatrix}$.

5.18. Установить продуктивность матрицы A, используя первый критерий продуктивности:

а) $A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,5 & 0,1\\ 0,2 & 0,4 & 0,5\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,1\\ 0,5 & 0,2 & 0,3\\ 0,2 & 0,4 & 0,5\end{pmatrix}$.

5.19. Проверить, что матрица A не является продуктивной:

а) $A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0,2 & 0,4 & 0,5\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,1\\ 0,5 & 0,2 & 0,3\\ 0,2 & 0,5 & 0,5\end{pmatrix}$.

5.20. Используя второй критерий продуктивности, установить продуктивность матрицы A:

а) $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0 & 0,5\\ 0,3 & 0,8 & 0,2\\ 0,5 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3 & 0,5\\ 0,3 & 0,4 & 0,2\\ 0,7 & 0,1 & 0,1\end{pmatrix}$.

5.21. Выяснить, при каких значениях $a>0$ матрица aA продуктивна:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 4 & 5\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$; **г)** $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 2\\ 7 & 1 & 1\end{pmatrix}$?

5.22. Найти с точностью до 10^{-4} запас продуктивности α матрицы A:

а) $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,2\\ 0,2 & 0,1\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,6\\ 0,4 & 0,5\end{pmatrix}$; **в)** $A=\begin{pmatrix}0,7 & 0,2\\ 1,15 & 0,2\end{pmatrix}$.

5.23. Пусть квадратная матрица $A\geq 0$ и векторы $\vec{x}\geq 0$, $\vec{y}>0$ удовлетворяют уравнению Леонтьева. Доказать, что: **а)** $\vec{x}>0$; **б)** $\lambda_A<1$.

5.24. Пусть $A,$ $P,$ Q – неотрицательные матрицы, E – единичная матрица порядка $n.$ Доказать, что если $(E-A)P = E+Q,$ то матрица A продуктивна.

5.25. Пусть A и B – неотрицательные матрицы порядка n и $A \geq B.$ Доказать, что: **а)** если матрица A продуктивна, то и матрица B продуктивна; **б)** если $A \geq B,$ то $\lambda_A \geq \lambda_B.$

5.26. Доказать, что если $A_1 = \begin{pmatrix} A & \vec{c}^{\,T} \\ \vec{b} & d \end{pmatrix}$ продуктивна, то и A продуктивна.

5.27. Доказать критерий продуктивности Саймона – Хокинса.

5.28. Доказать, что ни один из элементов главной диагонали продуктивной матрицы A не превосходит 1. Можно ли утверждать, что любой из элементов главной диагонали неотрицательной матрицы A не превосходит ее числа Фробениуса λ_A?

5.29. Исследовать на продуктивность матрицу A:

а) $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix};$ **б)** $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}.$

5.30. Доказать, что матрица A продуктивна, а матрица B нет:

$$A = \begin{pmatrix} 0,999 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,9999 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 \end{pmatrix}.$$

5.31. При каких значениях параметра a продуктивна матрица $\frac{1}{10}A$:

а) $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 4 \\ 4 & 2 & a \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix};$ **б)** $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ a & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix};$ **г)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & a \\ 6 & a & 7 \end{pmatrix}$?

§ 5.3. Балансовые модели

Основные сведения

Балансовый анализ отвечает на следующий макроэкономический вопрос: каким должен быть валовой объем производства каждой из n отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в выпускаемом продукте?

Пусть весь производственный сектор разбит на n отраслей, каждая из которых производит однородный продукт. Рассмотрим *матрицу Леонтьева*

$$A = \left(a_{ij}\right),$$

где $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ – стоимость продукции отрасли i, затрачиваемый на производство на 1 руб. продукции отрасли j; x_{ij} – объем продукции отрасли i, используемый в отрасли j; x_j – валовой выпуск отрасли j. Обозначим

$\vec{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$ – вектор валового выпуска всех отраслей;

$\vec{d} = \left(d_1, d_2, \ldots, d_n\right)^T$ – вектор конечного потребления.

Тогда уравнения межотраслевого баланса (*уравнение Леонтьева*) в матричной форме имеют вид:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{d}.$$

Зная матрицу Леонтьева A и объемы конечного потребления $\vec{d}$, найдем планируемые объемы валового выпуска $\vec{x}$ всех отраслей народного хозяйства. Если матрица $\left(E - A\right)$ невырождена, то из уравнения межотраслевого баланса получим

$$\vec{x} = \left(E - A\right)^{-1} \vec{d}.$$

Матрица $H = \left(E - A\right)^{-1}$ называется *матрицей коэффициентов полных затрат*. Таким образом, основной результат балансового анализа можно представить в виде матричного равенства:

$$\vec{x} = H\vec{d}, \qquad (5.3)$$

где $\vec{d}$ – вектор конечного потребления, $\vec{x}$ – вектор валового выпуска.

Примеры

1. Пусть в двухотраслевой модели дана матрица Леонтьева

$$A = \begin{pmatrix} 0,20 & 0,40 \\ 0,15 & 0,30 \end{pmatrix}$$

и вектор конечного потребления $\vec{d} = (80; 60)^T$. Требуется:

а) найти соответствующие объемы валового выпуска каждой отрасли;

б) пусть надо удвоить выпуск конечного продукта первой отрасли. На сколько процентов должны измениться объемы валового выпуска каждой отрасли?

Решение: **а)** находим последовательно

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,80 & -0,40 \\ -0,15 & 0,70 \end{pmatrix},$$

$$H = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,5}\begin{pmatrix} 0,70 & 0,40 \\ 0,15 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле (5.3) вектор валового выпуска находится по формуле

$$\vec{x} = H\vec{d} = \frac{1}{0,5}\begin{pmatrix} 0,70 & 0,40 \\ 0,15 & 0,80 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, валовой выпуск первой отрасли равен 160, второй – 120;

б) решение в этом случае отличается лишь тем, что изменяется вектор

$$\vec{d} = (80; 120)^T.$$

Поэтому

$$\vec{x} = H\vec{d} = \frac{1}{0,5}\begin{pmatrix} 0,70 & 0,40 \\ 0,15 & 0,80 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 208 \\ 216 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, объем валового выпуска первой отрасли должен увеличиться примерно на 30 %, второй отрасли – на 80 %.

2. В трехотраслевой балансовой модели дана матрица Леонтьева

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

и вектор норм добавленной стоимости по каждой отрасли $\vec{v} = (8;4;6)^T$. Требуется:

а) найти равновесные цены;

б) пусть произошло увеличение нормы добавленной стоимости первой отрасли на 2. На сколько процентов возрастут равновесные цены каждой отрасли?

Решение: **а)** для нахождения равновесных цен воспользуемся формулой

$$\vec{p} = H^T\vec{v},$$

где H – матрица полных затрат. Находим

$$H = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,2 \\ -0,1 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0,295}\begin{pmatrix} 0,47 & 0,16 & 0,18 \\ 0,09 & 0,47 & 0,16 \\ 0,08 & 0,16 & 0,47 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\vec{p} = \frac{1}{0,295}\begin{pmatrix} 0,47 & 0,16 & 0,18 \\ 0,09 & 0,47 & 0,16 \\ 0,08 & 0,16 & 0,47 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,54 \\ 13,92 \\ 16,58 \end{pmatrix};$$

б) изменив вектор нормы добавленной стоимости, находим равновесные цены в этом случае:

$$\vec{p} = \frac{1}{0,295}\begin{pmatrix} 0,47 & 0,16 & 0,18 \\ 0,09 & 0,47 & 0,16 \\ 0,08 & 0,16 & 0,47 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,72 \\ 15,0 \\ 17,8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, продукция первой отрасли подорожала на 20,46 %, второй – на 7,76 %, третьей – на 7,36 %. Нетрудно также, зная объемы выпуска каждой отрасли, подсчитать инфляцию, вызванную этим повышением цен.

Упражнения

5.32. В двухотраслевой модели даны матрица Леонтьева

$$A = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,40 \\ 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}$$

и вектор конечного потребления $\vec{d} = (72; 10)^T$. Требуется: **а)** найти соответствующие объемы валового выпуска каждой отрасли; **б)** пусть надо удвоить выпуск конечного продукта второй отрасли. На сколько процентов должны измениться объемы валового выпуска каждой отрасли?

5.33. Дана балансовая таблица в двухотраслевой модели (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Производители	Потребители		Потребление	Валовой выпуск
	I	II		
I	15	60	25	100
II	25	5	20	50

Построить структурную матрицу и рассчитать валовой выпуск на новый вариант потребления: $\vec{d} = (20, 25)$.

5.34. Допустим, что в производственном цикле отрасли I и II осуществляют выброс загрязняющих веществ. Рассмотрим отрасль III, «выпуск» которой состоит в производстве загрязняющих веществ (на единицу объема выпуска каждой отрасли) согласно следующей балансовой таблице (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Производители	Потребители		Потребление	Валовой выпуск
	I	II		
I	15	60	25	100
II	25	10	15	50
III	50	10	–	60

На сколько процентов увеличится выброс загрязняющих веществ, соответствующий варианту потребления $\vec{d} = (40; 20)^T$?

5.35. Дана балансовая таблица по трем отраслям экономики (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Производители	Потребители			Потребление	Валовой выпуск
	I	II	III		
I	40	10	20	30	100
II	50	20	20	10	100
III	20	20	5	5	50

Требуется: **а)** рассчитать структурную матрицу; **б)** какая из отраслей не является рентабельной? **в)** найти валовой выпуск для следующего варианта потребления: $\vec{d} = (35; 10; 10)^T$.

5.36. Для трехотраслевой балансовой модели даны матрица Леонтьева

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,01 \\ 0,2 & 0,2 & 0,01 \end{pmatrix}$$

и вектор норм добавленной стоимости по каждой отрасли $\vec{v} = (6; 3; 4)^T$. Требуется:

а) найти равновесные цены;

б) пусть произошло увеличение нормы добавленной стоимости первой отрасли на 1,1. На сколько процентов возрастут равновесные цены каждой отрасли?

5.37. В некотором городе имеется три главных промышленных объекта: угольная шахта, теплоэлектроцентраль и железная дорога. Из отчетов за ряд лет известны основные величины, входящие в структурную матрицу.

Чтобы добыть угля на 1 млн руб., необходимо затратить электроэнергии на 0,25 млн руб. и столько же на его транспортировку.

Чтобы произвести электроэнергии на 1 млн руб., ТЭЦ требуется затратить 0,65 млн руб. на сжигаемый уголь, 0,05 млн руб. собственной электроэнергии и 0,05 млн руб. на транспортные расходы.

Наконец, железной дороге для выполнения перевозок на 1 млн руб. надо затратить угля на 0,55 млн руб. и электроэнергии на 0,10 млн руб.

На следующую неделю внешние потребители заказали поставить им угля общей стоимостью 50 млрд руб. и электроэнергии на 25 млрд руб. Найти валовой объем каждой отрасли (в млрд руб.).

ГЛАВА 6

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 6.1. Прямая на плоскости

Основные сведения

Стандартные координаты в $\mathbb{R}^2$ обозначаются обычно символами x и y. *Параметрические уравнения прямой* в $\mathbb{R}^2$ состоят из двух уравнений

$$\begin{cases} x - a_0 = pt, \\ y - b_0 = qt, \end{cases}$$

где $(a_0; b_0)$ – начальная точка, $(p; q)$ – ненулевой вектор. Исключая параметр t, получим *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x - a_0}{p} = \frac{y - b_0}{q}.$$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $P(x_0; y_0)$ и $Q(x_1; y_1)$ (P – начальная точка, $\overrightarrow{PQ}$ – направляющий вектор), имеет вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Уравнение прямой в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b – координаты точек, в которых прямая пересекает оси Ox и Oy соответственно.

Уравнением прямой с угловым коэффициентом называется уравнение $y = kx + b$. Угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой относительно оси Ox.

Общим уравнением прямой называется уравнение

$$Ax + By + C = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов A или B отличен от нуля.

Вектор $\vec{n} = (A; B)$ является вектором *нормали* прямой. В качестве направляющего вектора прямой, заданной общим уравнением, можно взять любой вектор $\vec{p}$, ортогональный $\vec{n}$, например, $\vec{p} = (B; -A)$. Наоборот, если известен направляющий вектор $\vec{p} = (p_1; p_2)$, то в качестве вектора нормали можно взять вектор $\vec{n} = (p_2; -p_1)$. Две прямые перпендикулярны в том и только в том случае, если их направляющие векторы (векторы нормали) ортогональны. Если векторы нормали двух прямых коллинеарны, то прямые либо параллельны, либо совпадают. Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$, заданной общим уравнением, находится по формуле

$$\rho(M, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Примеры

1. Найти расстояние от точки $M(5; 2)$ до прямой l, заданной уравнением с угловым коэффициентом $y = \frac{3}{4}x - 1$.

Решение. Записываем общее уравнение $l: 3x - 4y - 4 = 0$. Отсюда

$$\rho(M, l) = \frac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}.$$

2. Найти общее уравнение прямой l, содержащей точки $P(1;2)$ и $Q(-5;-3)$.

Р е ш е н и е. Возьмем в качестве начальной точки прямой l точку P. Вычислим $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-5;-3) - (1;2) = (-6;-5)$, значит, в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{p} = (6;5)$. Каноническое уравнение прямой l запишется следующим образом:

$$l : \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{5},$$

откуда получим общее уравнение

$$l : 5x - 6y + 7 = 0.$$

3. Для прямой $l_1 : 3x + 4y + 5 = 0$ найти общее уравнение прямой l, содержащей точку $M(3;2)$, такой, что: **а)** $l \parallel l_1$; **б)** $l \perp l_1$.

Р е ш е н и е: **а)** коэффициенты при неизвестных x, y в общих уравнениях параллельных прямых l, l_1 пропорциональны, поэтому общее уравнение прямой l можно искать в виде

$$l : 3x + 4y + C = 0.$$

Подставляя координаты точки M, находим $C = -17$. Итак, $l : 3x + 4y - 17 = 0$;

б) пусть $\vec{n}, \vec{n}_1$ – векторы нормали прямых l, l_1 соответственно. Поскольку $\vec{n}_1 = (3;4)$, то можно положить $\vec{n} = (4;-3)$ и искать уравнение l в виде

$$l : 4x - 3y + C = 0.$$

Из условия $M \in l$ находим $C = -6$. Значит, $l : 4x - 3y - 6 = 0$.

4. Составить общее уравнение прямой m, содержащей точку $A(3;2)$ и перпендикулярной прямой, проходящей через точки $B(-2;-3)$ и $C(-4;1)$.

Решение. Поскольку $\overrightarrow{BC} = C - B = (-4;1) - (-2;-3) = (-2;4)$, то в качестве вектора нормали к m можно взять вектор $\vec{n} = (1;-2)$. Тогда ее общее уравнение имеет вид $m: x - 2y + C = 0$. Подставляя в уравнение прямой m координаты точки A, получаем верное равенство $3 - 2 \cdot 2 + C = 0$, откуда находим $C = 1$. Значит, $m: x - 2y + 1 = 0$.

Можно было бы рассуждать иначе. Пусть $X(x;y)$ – произвольная точка прямой m. Тогда векторы $\overrightarrow{AX} = X - A = (x;y) - (3;2) = (x-3;y-2)$ и $\vec{n} = (1;-2)$ ортогональны, т.е. их скалярное произведение равно нулю: $(\overrightarrow{AX}, \vec{n}) = 0$. Отсюда имеем:

$$(x-3) - 2(y-2) = 0,$$

Значит, $m: x - 2y + 1 = 0$.

5. Найти проекцию P точки $A(10;14)$ на прямую $l: 4x + 3y - 7 = 0$.

Решение. Пусть $P(x;y)$ – искомая проекция. Тогда вектор $\overrightarrow{AP}$ является нормалью к прямой l. Значит, векторы $\overrightarrow{AP}(x-10;y-14)$ и $\vec{n} = (4;3)$ коллинеарны, т.е. уравнение нормали $\frac{x-10}{4} = \frac{y-14}{3}$. Кроме того, $P \in l$, поэтому координаты точки $P(x,y)$ удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} \frac{x-10}{4} = \frac{y-14}{3}, \\ 4x + 3y - 7 = 0. \end{cases}$

Решением системы является пара $\{x = -2,\ y = 5\}$. Значит, $P(-2;5)$.

6. Найти точку A', симметричную точке $A(9;-11)$ относительно прямой $l: 5x - 6y + 11 = 0$.

Решение. Пусть $P(x;y)$ – проекция точки A на прямую l. Тогда вектор $\overrightarrow{AP}$ является нормалью к прямой l, значит, векторы $\overrightarrow{AP}(x-9;y+11)$ и $\vec{n} = (5;-6)$ коллинеарны, т.е. уравнение нормали

$\dfrac{x-9}{5}=\dfrac{y+11}{-6}$. Кроме того, $P\in l$, поэтому координаты точки $P(x,y)$ удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases}\dfrac{x-9}{5}=\dfrac{y+11}{-6},\\ 5x-6y+11=0.\end{cases}$

Решением системы является пара $\{x=-1,\ y=1\}$. Значит, $A'=P+\overrightarrow{AP}=(-1;1)+(-10;12)=(-11;13)$.

Упражнения

6.1. Найти точку пересечения прямых: **а)** $x+y+1=0$, $x+2y+3=0$; **б)** $2x+3y=5$, $7x+8y=15$; **в)** $5y+4=0$, $3x+2y+4=0$; **г)** $6x-6y=1$, $2x+3y=2$.

6.2. Найти значения параметра a, при которых точки $A(3;2)$, $B(2;1)$, $C(a;3)$ лежат на одной прямой.

6.3. Доказать, что точки $A_1(a_1;b_1)$, $A_2(a_2;b_2)$, $A_3(a_3;b_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 1\\ a_2 & b_2 & 1\\ a_3 & b_3 & 1\end{vmatrix}=0$.

6.4. Для прямой l, заданной общим уравнением $Ax+By+C=0$ $(A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0)$, найти: **а)** каноническое уравнение; **б)** уравнение в отрезках; **в)** уравнение с угловым коэффициентом.

6.5. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом:

а) проходящей через точку $A\left(\sqrt{3};3+\sqrt{5}\right)$ и образующей с осью Ox угол $\dfrac{\pi}{3}$;

б) содержащей точки $A(-1;\ 1)$ и $B(1;\ 5)$.

6.6. Записать уравнение прямой в отрезках, проходящей через точки M и N:

а) $M(2;0)$, $N(0;3)$; **б)** $M(a;0)$, $N(0;b)$, $(a\neq 0, b\neq 0)$.

6.7. Найти уравнение в отрезках прямой, содержащей точки $A(5;-4)$ и $B(-3;\ 2)$.

6.8. Записать общее уравнение прямой, проходящей через точки A и B: **а)** $A(1;\ 4)$, $B(-5;\ -2)$; **б)** $A(2;\ -3)$, $B(-4;\ 5)$.

6.9. Найти общее уравнение прямой, заданной: **а)** каноническим уравнением $\dfrac{x-a}{p}=\dfrac{y-b}{q}$; **б)** уравнением в отрезках $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$; **в)** уравнением с угловым коэффициентом $y=kx+b$.

6.10. Для данной прямой $y=kx+b$ найти: **а)** направляющий вектор; **б)** вектор нормали; **в)** уравнение прямой, проходящей через начало координат и перпендикулярной данной прямой.

6.11. Найти косинус острого угла между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$.

6.12. Даны точки $P(2;0)$ и $Q(10;-12)$. Для прямой PQ найти: **а)** параметрические уравнения с начальной точкой P и направляющим вектором $\overrightarrow{PQ}$; **б)** каноническое уравнение; **в)** уравнение с угловым коэффициентом; **г)** общее уравнение; **д)** уравнение в отрезках.

6.13. Найти канонические уравнения сторон треугольника с вершинами $A(3;4)$, $B(-1;\ 1)$, $C(-2;-1)$.

6.14. Найти центр тяжести L (точка пересечения медиан) треугольника с вершинами $A_1(a_1;b_1)$, $A_2(a_2;b_2)$, $A_3(a_3;b_3)$.

6.15. Дана прямая $m: x+2y+6=0$. Составить общее уравнение прямой l, содержащей точку $P(3;4)$ и такой, что: **а)** $l \parallel m$; **б)** $l \perp m$.

6.16. Найти общее уравнение прямой, содержащей точку $A(-1;-3)$ и перпендикулярной прямой, проходящей через точки $B(1;-4)$ и $C(-5;6)$.

6.17. Найти общее уравнение прямой m, содержащей точку $A(4;6)$ и параллельной прямой l, заданной уравнением:

а) $l:\ x+2y+3=0$; **б)** $l:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{5}$;

в) $l:\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$; **г)** $l:\ y=7x+25$.

6.18. Найти каноническое уравнение прямой, содержащей высоту треугольника ABC, проведенной из вершины A:

а) $A(7;\ 6)$, $B(0;-12)$, $C(21;\ 0)$; **б)** $A(-3;\ 4)$, $B(1;-2)$, $C(2;\ 1)$.

6.19. Найти ортоцентр L (точка пересечения высот) треугольника с вершинами $A(3;\ 5)$, $B(-1;\ 1)$, $C(7;-3)$.

6.20. Найти уравнение в отрезках прямой, содержащей точку $A(2;-12)$ и параллельной прямой $3x-2y+9=0$.

6.21. Найти расстояние от точки $M(2;5)$ до прямой $l: 15x+8y=240$.

6.22. Найти расстояние между параллельными прямыми: $l_1: 15x-8y+7=0$ и $l_2: 15x-8y+13=0$.

6.23. Найти центр M окружности, вписанной в треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(a;0)$, $B(0;b)$, если $a>0, b>0$.

6.24. Найти общее уравнение прямой l, все точки которой равноудалены от точек $A(2;5)$ и $B(6;1)$.

6.25. Проверить, что точки A и A' симметричны относительно прямой l:

а) $A(4;1)$, $A'(6;\ 7)$, $l: x+3y-17=0$;

б) $A(3;2)$, $A'(7;8)$, $l: x+3y-25=0$.

6.26. Найти каноническое уравнение прямой, относительно которой симметричны точки $A(3;2)$ и $B(7;6)$.

6.27. Найти точку A', симметричную точке A относительно прямой l:

а) $A(1;1)$, $l: x+2y-38=0$; **б)** $A(1;2)$, $l: 3x+4y-61=0$.

6.28. Найти уравнение биссектрисы острого угла, образованного прямыми $l_1: 7x+24y+1=0$ и $l_2: 3x+4y+1=0$.

6.29. Даны точки $A(1;1)$, $B(5;-2)$, $C(21;49)$. Найти общее уравнение прямой, содержащей: **а)** высоту; **б)** медиану; **в)** биссектрису, проведенных из вершины A в треугольнике ABC.

§ 6.2. Прямая и плоскость в $\mathbb{R}^3$

Основные сведения

Стандартные координаты в $\mathbb{R}^3$, как правило, обозначаются символами x, y и z.

Параметрические уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$ имеют вид:

$$\begin{cases} x = a_0 + pt, \\ y = b_0 + qt, \\ z = c_0 + rt, \end{cases}$$

где $(a_0; b_0; c_0)$ – начальная точка, $(p; q; r)$ – ненулевой вектор (направляющий вектор прямой), t – произвольное число. Плоскость задается параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a_0 + p_1 t_1 + p_2 t_2, \\ y = b_0 + q_1 t_1 + q_2 t_2, \\ z = c_0 + r_1 t_1 + r_2 t_2, \end{cases}$$

где векторы $(p_1; q_1; r_1)$ и $(p_2; q_2; r_2)$ линейно независимы, t_1, t_2 – любые числа.

Прямая в $\mathbb{R}^3$ задается двумя каноническими уравнениями. Если координаты направляющего вектора $(p; q; r)$ ненулевые, то *канонические уравнения прямой* имеют вид

$$\frac{x - a_0}{p} = \frac{y - b_0}{q}, = \frac{z - c_0}{r}.$$

Если одна из координат равна нулю, например, $p \neq 0$, $q \neq 0$, $r = 0$, то канонические уравнения выглядят следующим образом:

$$\frac{x - a_0}{p} = \frac{y - b_0}{q}, \quad z = c_0.$$

Общим уравнением плоскости Π называется уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля.

Две различные плоскости параллельны (перпендикулярны) в том и только в том случае, если их векторы нормали коллинеарны (ортогональны). Прямая с направляющим вектором $\vec{p}$ и плоскость с вектором нормали $\vec{n}$ перпендикулярны в том и только в том случае, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{n}$ коллинеарны. Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости Π находится по формуле

$$\rho(M, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Плоскость с начальной точкой $(a_0; b_0; c_0)$ и направляющими векторами $(p_1; q_1; r_1)$ и $(p_2; q_2; r_2)$ может быть задана уравнением

$$\begin{vmatrix} x - a_0 & y - b_0 & z - c_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Предположим, что $A(x_0; y_0; z_0)$, $B(x_1; y_1; z_1)$, $C(x_2; y_2; z_2)$ – точки, не лежащие на одной прямой. Через такие точки проходит единственная плоскость Π. Если в качестве начальной точки плоскости взять точку A, а в качестве направляющих векторов – векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, то получим уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Примеры

1. Найти расстояние от точки $A(4; 4; 4)$ до прямой l, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-8}{3}.$$

Р е ш е н и е. Записываем параметрические уравнения прямой l с начальной точкой $A(4; 5; 8)$ и направляющим вектором $\vec{p} = (1; 2; 3)$:

$$\begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = 8 + 3t. \end{cases}$$

Таким образом, проекция точки A на прямую l имеет вид

$$B(4 + t; 5 + 2t; 8 + 3t).$$

Чтобы найти t, необходимо воспользоваться условием ортогональности векторов $\vec{p}$ и $\overrightarrow{AB}$. Имеем

$$(\vec{p}, \overrightarrow{AB}) = ((1; 2; 3), (t; 1 + 2t; 4 + 3t)) = t + 2(1 + 2t) + 3(4 + 3t) = 14 + 14t = 0.$$

Отсюда $t = -1$, $B(3; 3; 5)$, $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1)$. Окончательно, имеем

$$\rho(A, l) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}.$$

2. В условиях примера 1 найти точку A', симметричную точке A относительно данной прямой l.

Решение. Для того чтобы найти точку A', симметричную точке A относительно прямой (плоскости), достаточно найти проекцию B этой точки на данную прямую (плоскость) и затем отложить от точки B вектор $\overrightarrow{AB}$. Так, для прямой l и точки A из предыдущего примера точка A' находится следующим образом:

$$A' = B + \overrightarrow{AB} = (3; 3; 5) + (-1; -1; 1) = (2; 2; 6).$$

3. Составить параметрические уравнения прямой l', содержащей точку $P(7; 8; 9)$, и параллельной прямой l, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{5} = \frac{z - 3}{6}.$$

Р е ш е н и е. Точка $P \notin l$, так как $\frac{7-1}{4} \neq \frac{8-2}{5}$. Вектор $(4;5;6)$ – направляющий вектор прямой l. Поэтому прямая l' с начальной точкой P и направляющим вектором, коллинеарным вектору $(4;5;6)$, параллельна l. Положив для определенности направляющий вектор прямой l' равным вектору $(4;5;6)$, получим ее параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 7 + 4t, \\ y = 8 + 5t, \\ z = 9 + 6t. \end{cases}$$

4. Составить общее уравнение плоскости Π, содержащей точку $Q(1;2;3)$ и перпендикулярной прямой

$$\frac{x-7}{4} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-9}{2}.$$

Р е ш е н и е. В качестве вектора нормали плоскости Π можно взять любой вектор, коллинеарный направляющему вектору данной прямой. Положим для определенности $\vec{n} = (4;3;2)$. Тогда общее уравнение плоскости Π запишется следующим образом:

$$4x + 3y + 2z + D = 0.$$

Из условия $Q \in \Pi$ находим $D = -(4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = -16$. Значит, общее уравнение плоскости Π имеет вид: $4x + 3y + 2z - 16 = 0$.

5. Найти проекцию точки $A(1;2;3)$ на плоскость $x + y - z - 6 = 0$.

Р е ш е н и е. Составим параметрические уравнения прямой l, содержащей точку A и перпендикулярной заданной плоскости Π. Прямая l перпендикулярна Π, если ее направляющий вектор $\overline{p}$ равен вектору нормали плоскости $\vec{n} = (1;1;-1)$. Считая, что A

– начальная точка на прямой l, имеем следующие параметрические уравнения этой прямой:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Таким образом, всякая точка B прямой l имеет вид $B(1+t; 2+t; 3-t)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ ортогонален каждому направляющему вектору плоскости Π, поэтому если $B \in \Pi$, то B – проекция точки A на Π. Находим t из условия $B \in \Pi$:

$$0 = (1+t) + (2+t) - (3-t) - 6 = 3t - 6, t = 2.$$

Отсюда $B(3; 4; 1)$ – проекция A на Π.

6. Найти точку A', симметричную точке $A(5; -6; 7)$ относительно прямой l : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$.

Решение. Сначала найдем проекцию $B(x; y; z)$ точки $A(5; -6; 7)$ на l. Должны быть выполнены условия: 1) $B \in l$ и 2) вектор $\overrightarrow{AB}$ ортогонален направляющему вектору $\overrightarrow{p}(2; 3; 4)$ прямой l. Имеем:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x; y; z) - (5; -6; 7) = (x-5; y+6; z-7),$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{p}\right) = 2x - 20 + 3y + 4z.$$

Условия 1) и 2) равносильны системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3}, \\ \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}, \\ 2x - 20 + 3y + 4z = 0. \end{cases}$$

Решением системы является набор $\{x=1, y=2, z=3\}$, значит, $B(1;2;3)$. Далее находим вектор $\overrightarrow{AB}=(-4;8;-4)$ и искомую точку A':

$$A' = B + \overrightarrow{AB} = (1;2;3)+(-4;8;-4)=(-3;10;-1).$$

Упражнения

6.30. Лежит ли точка M на прямой l:

а) $M(3;5;6)$, $l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$;

б) $M(-21,-6,-1)$, $l: \dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$?

6.31. Даны точки $A(3;5;4)$, $B(-1;1;2)$. Составить: **а)** параметрические уравнения прямой с начальной точкой A и направляющим вектором $\overrightarrow{AB}$; **б)** канонические уравнения прямой AB.

6.32. Проверить, что существует единственная плоскость Π, содержащая точки $A(2;-3;4)$, $B(-2;9;-4)$, $C(-8;6;12)$. Найти для плоскости Π: **а)** общее уравнение; **б)** параметрические уравнения; **в)** уравнение в отрезках.

6.33. Даны точки $A(3;4;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(-2;-1;3)$. Найти:

а) общее уравнение плоскости Π, содержащей данные точки;

б) канонические уравнения сторон треугольника ABC.

6.34. Найти значения параметра a, при которых точки $M(5;\ 1;\ a)$, $A(1;2;0)$, $B(-1;1;2)$, $C(0;-3;4)$ лежат в одной плоскости Π.

6.35. Определить взаимное расположение прямых l_1 и l_2:

а) $l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$, $l_2: \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-5}{1}$;

б) $l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$, $l_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{4}$;

в) $l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$, $l_2: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{4}$;

г) $l_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-2}{4}$, $l_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

6.36. Определить взаимное расположение плоскостей Π_1 и Π_2:

а) $\Pi_1: x+y+2z-4=0, \quad \Pi_2: 3x+3y+6z-12=0;$

б) $\Pi_1: x+2y+3z-4=0, \quad \Pi_2: x+2y+3z-5=0;$

в) $\Pi_1: 2x+3y+4z-9=0, \quad \Pi_2: 5x+6y+7z-18=0.$

6.37. Определить взаимное расположение прямой l и плоскости Π:

а) $l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}, \quad \Pi: -11x+6y+z+4=0;$

б) $l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}, \quad \Pi: -11x+4+6y+z=0;$

в) $l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}, \quad \Pi: -11x+6y+z+4=0.$

6.38. Записать канонические уравнения прямой m, которая содержит точку $A(3;4;2)$ и параллельна прямой $l: \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{3}$.

6.39. Записать канонические уравнения прямой l, которая содержит точку $A(1;-4;2)$ и перпендикулярна плоскости $\Pi: 2x+y+3z+5=0$.

6.40. Составить общее уравнение плоскости Π, которая содержит точку $A(-3;5;-4)$ и

а) перпендикулярна прямой $l: \dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z-1}{7}$;

б) параллельна плоскости $\Pi': 3x+2y+4z+5=0$.

6.41. Найти проекцию M_0 точки $M(2;7;8)$ на плоскость $\Pi: x+2y+3z+2=0$.

6.42. Найти проекцию l_0 прямой l : $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ на плоскость $\Pi: x+2y+3z-6=0$.

6.43. Найти проекцию M_0 точки $M(-5;3;1)$ на прямую $l: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+4}{1}$.

6.44. Найти расстояние от точки M до плоскости Π:

а) $M(1;2;3), \quad \Pi: 2x+2y+z-24=0;$

б) $M(1;1;1), \ \Pi: 3x+4y+12z-6=0.$

6.45. Найти расстояние между параллельными плоскостями: $\Pi_1: 3x+4y+12z+4=0$ и $\Pi_2: 3x+4y+12z+34=0$.

6.46. Найти расстояние от точки $M(3;3;2)$ до прямой $l: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-4}$.

6.47. Найти расстояние между параллельными прямыми: $l_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ и $l_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{2}$.

6.48. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

а) $l_1: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $l_2: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$;

б) $l_1: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{3}$, $l_2: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

6.49. Составить общее уравнение плоскости Π, которая содержит точки $A(-1;2;-3)$, $B(3;1;-2)$ и перпендикулярна плоскости $\Pi': x+5y+3z+23=0$.

6.50. Найти косинус острого угла между:

а) прямыми $l_1: \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+7}{3}$ и $l_2: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-9}{1}$;

б) плоскостями $\Pi_1: 2x+3y+4z+5=0$ и $\Pi_2: 4x+3y+2z+1=0$.

6.51. Найти острый угол между прямой и плоскостью:

а) $l: \{y=0, x=z\}$, $\Pi: z=0$;

б) $l: \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z-6}{5}$, $\Pi: 5x+4y+3z+11=0$.

6.52. Дана пирамида $ABCD$ с вершинами $A(1;4;2)$, $B(2;1;3)$, $C(4;1;3)$, $D(2;3;4)$. Найти канонические и параметрические уравнения высоты пирамиды AH.

6.53. Найти общее уравнение плоскости Π, которая содержит точку $A(-1;-2;-3)$ и перпендикулярна к прямой l, проходящей через точки $B(1;3;-4)$ и $C(4;5;6)$.

6.54. Найти общее уравнение плоскости Π, которая содержит точку $A(2;3;5)$ и параллельна плоскости Π', проходящей через точки $B(4;3;1)$, $C(6;5;2)$ и $D(1;1;1)$.

6.55. Найти общее уравнение плоскости П, содержащей прямую $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-2}{3}$ и параллельную прямой $m: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{4}$.

6.56. Найти общее уравнение плоскости П, все точки которой равно удалены от точек $A(-3;2;5)$ и $B(7;4;1)$.

6.57. Проверить, что точки $A(3;-3;3)$ и $B(-1;5;-1)$ симметричны относительно прямой $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$.

6.58. Найти точку A', симметричную точке $A(7;6;-3)$ относительно прямой $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

6.59. Проверить, что точки $A(4;8;5)$ и $B(-2;-4;-1)$ симметричны относительно плоскости $\Pi: x+2y+z-7=0$.

6.60. Найти уравнение плоскости П, все точки которой равно удалены от точек $A(5;7;7)$ и $B(-1;-5;1)$.

6.61. Найти точку A', симметричную точке $A(6;3;-8)$ относительно плоскости $\Pi: 5x+2y-7z-14=0$.

§ 6.3. Геометрия в $\mathbb{R}^4$

Основные сведения

Стандартные координаты в $\mathbb{R}^4$ обозначаются x_1, x_2, x_3, x_4. Расстояние между точками $A(a_1;a_2;a_3;a_4)$ и $B(b_1;b_2;b_3;b_4)$ находится по формуле

$$\rho(A,B) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2 + (a_4-b_4)^2}.$$

Примеры

1. Найти начальную точку A и направляющие векторы $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ для плоскости, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим систему уравнений относительно переменных x_1, x_2:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -7 & -14 & -7 & 14 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Итак, плоскость Π состоит из точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x_1 = -x_4 - 1, \\ x_2 = -2x_3 - x_4 - 2. \end{cases}$ В качестве начальной точки A можно взять базисное решение $A(-1; -2;\ 0;\ 0)$. В качестве направляющих векторов можно взять фундаментальный набор решений однородной системы $\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = -2x_3 - x_4 \end{cases}$:

$$\overline{p}_1 = (0; -2; 1; 0), \ \ \overline{p}_2 = (-1; -1; 0; 1).$$

2. Даны точки: $A(1; 2; 3; 5)$, $B(2; 4; 2; 5)$, $C(1; 2; 4; 6)$, $D(2; 5; 6; 5)$. Найти проекцию P точки D на плоскость ABC.

Р е ш е н и е. Пусть A – начальная точка, $\overrightarrow{AB} = (1; 2; -1; 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (0; 0; 1; 1)$ – направляющие векторы плоскости ABC. Запишем параметрические уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 1 \cdot s + 0 \cdot t, \\ x_2 = 2 + 2 \cdot s + 0 \cdot t, \\ x_3 = 3 + (-1) \cdot s + 1 \cdot t, \\ x_4 = 5 + 0 \cdot s + 1 \cdot t. \end{cases}$$

Следовательно, проекция точки D на плоскость ABC имеет вид

$$P(1 + s; 2 + 2s; 3 - s + t; 5 + t).$$

Параметры s, t находятся из условия ортогональности вектора $\overrightarrow{PD}$ векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Имеем

$$\overrightarrow{PD} = (1-s; 3-2s; 3+s-t; -t);$$
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PD}) = 4 - 6s + t = 0;$$
$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PD}) = 3 + s - 2t = 0.$$

Решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6s - t = 4, \\ -s + 2t = 3, \end{cases}$$

находим $s = 1, t = 2$. Отсюда получаем $P(2; 4; 4; 7)$.

3. Пусть Π – гиперплоскость в $\mathbb{R}^4$ с начальной точкой A и направляющими векторами $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3$. Доказать, что проекция P точки M на Π представима в виде $P = A + t_1\overline{p}_1 + t_2\overline{p}_2 + t_3\overline{p}_3$, где числа t_1, t_2, t_3 являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} t_1(\overline{p}_1, \overline{p}_1) + t_2(\overline{p}_2, \overline{p}_1) + t_3(\overline{p}_3, \overline{p}_1) = (\overrightarrow{AM}, \overline{p}_1), \\ t_1(\overline{p}_1, \overline{p}_2) + t_2(\overline{p}_2, \overline{p}_2) + t_3(\overline{p}_3, \overline{p}_2) = (\overrightarrow{AM}, \overline{p}_2), \\ t_1(\overline{p}_1, \overline{p}_3) + t_2(\overline{p}_2, \overline{p}_3) + t_3(\overline{p}_3, \overline{p}_3) = (\overrightarrow{AM}, \overline{p}_3). \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Поскольку $P \in \Pi$, то точка P представима в указанном виде. Вектор $\overrightarrow{PM}$ ортогонален направляющим векторам плоскости Π, значит, $(\overrightarrow{PM}, \overline{p}_i) = 0$ для $i = 1, 2, 3$. Заметив, что $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = -(t_1\overline{p}_1 + t_2\overline{p}_2 + t_3\overline{p}_3) + \overrightarrow{AM}$, имеем

$$0 = (\overrightarrow{PM}, \overline{p}_i) = \left(-(t_1\overline{p}_1 + t_2\overline{p}_2 + t_3\overline{p}_3) + \overrightarrow{AM}, \overline{p}_i\right).$$

Но это и означает, что числа t_1, t_2, t_3 являются решением указанной системы уравнений.

Упражнения

6.62. Найти расстояние между точками $A(2;3;6;4)$ и $B(1;1;2;2)$.

6.63. Даны точки $A(a-1;\ b-2;\ a+1;\ 2+b)$, $B(-1;-2;\ 1;\ 2)$, $C(0;-2;\ 1;\ 2)$, $D(-1;-1;\ 1;\ 2)$. Найти значения параметров a и b, при которых точка A содержится в плоскости BCD.

6.64. Даны точки $A(2;3;4;5)$, $B(3;2;5;4)$, $C(3;4;3;6)$. Найти угол A в треугольнике ABC.

6.65. Пусть $A,B,C\in\mathbb{R}^4$. Показать, что проекция P точки A на прямую BC представима в виде $P=B+t\overrightarrow{BC}$, где число t удовлетворяет равенству $t\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.

6.66. Найти расстояние от точки $A(6;3;7;8)$ до прямой, содержащей точки $B(2;3;4;1)$ и $C(0;7;3;-1)$.

6.67. Найти начальную точку A и направляющие векторы $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ для плоскости, заданной системой уравнений:

а) $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=14,\\ x_1+2x_2+7x_3+3x_4=13;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3+4x_4=2,\\ 5x_1+2x_2+6x_3-1x_4=20.\end{cases}$

6.68. Найти проекцию P точки $M(-3;1;2;10)$ на двумерную плоскость, содержащую точки $A(1;1;0;0)$, $B(2;2;1;1)$, $C(0;0;1;1)$.

6.69. Пусть $A,B,C,D\in R^4$ – такие точки, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не коллинеарны. Показать, что проекцию P точки D на плоскость ABC можно представить в виде $P=A+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$, где коэффициенты s,t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\right)s+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)t=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right),\\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)s+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\right)t=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right).\end{cases}$$

6.70. Найти проекцию P точки $M(-2;5;4;7)$ на гиперплоскость, содержащую точки $A(1;3;3;4)$, $B(2;3;4;5)$, $C(0;1;4;5)$, $D(1;2;2;5)$.

6.71. Даны точки $A(6;5;4;3)$, $B(7;6;5;4)$, $C(5;4;5;4)$, $D(6;5;3;4)$. Найти точку M', симметричную точке $M(10;3;8;9)$ относительно: **а**) прямой AB; **б)** двумерной плоскости ABC; **в)** гиперплоскости $ABCD$.

6.72. Описать все возможные случаи взаимного расположения двух непересекающихся прямых в пространстве $\mathbb{R}^4$.

6.73. Расстоянием $\rho(l_1,l_2)$ между плоскостями l_1 и l_2 называется минимальное расстояние $\rho(X_1,X_2)$ между точками $X_1\in l_1, X_2\in l_2$. Как найти расстояние между двумя прямыми в $\mathbb{R}^4$, если они: **а)** параллельны; **б)** скрещиваются?

6.74. Даны точки $A_1(1;1;0;0)$, $A_2(0;1;1;0)$ и векторы $\vec{v}_1=(1;0;1;0)$, $\vec{v}_2=(1;0;0;1)$. Найти расстояние между прямыми $l_1=A_1+L(\vec{v}_1)$ и $l_2=A_2+L(\vec{v}_2)$.

6.75. Даны точка $A(1;1;1;1)$ и единичные векторы $\vec{e}_1=(1;0;0;0)$, $\vec{e}_2=(0;1;0;0)$, $\vec{e}_3=(0;0;1;0)$. Найти расстояние между двумерными плоскостями $\Pi_1=A+L(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ и $\Pi_2=L(\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

§ 6.4. Выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$

Основные сведения

Пусть P,Q – две различные точки в $\mathbb{R}^n$. *Отрезком*, соединяющим точки P и Q, называется множество всех точек вида

$$X=P+t\overrightarrow{PQ},\ t\in[0;1].$$

Множество $M\subset\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми точками $P,Q\in M$ содержит и отрезок PQ. Точка выпуклого множества M называется *крайней*, если ее нельзя представить как внутреннюю точку отрезка, соединяющего различные точки из M.

Линейное ограничение – это ограничение вида

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n + b \geq 0,$$

где вместо знака "≥" возможны знаки "=" и "≤". Линейное ограничение задает либо гиперплоскость (знак "="), либо полупространство (знаки "≥" и "≤"). Гиперплоскость и полупространство являются выпуклыми множествами. Выпуклым множеством является также всякое множество, заданное системой линейных ограничений, поскольку его можно представить как пересечение гиперплоскостей и полупространств, соответствующих линейным ограничениям системы.

Рассмотрим систему S линейных ограничений, имеющую непустое множество решений M. Крайние точки множества M называются *его вершинами*, или *угловыми точками*. Далее считаем, что S не содержит "лишних" уравнений, т.е. уравнений, вытекающих из других уравнений системы. Обозначим символом S' систему линейных уравнений, полученную в результате замены в S всех знаков "≥" и "≤" на знак "=". Точка $X \in M$ является вершиной в том и только в том случае, если X – единственное решение некоторой подсистемы из n уравнений системы S', содержащей все исходные уравнения системы S. Если, например, S содержит только одно уравнение и n неравенств, то S' содержит $n+1$ уравнений. Количество подсистем в S' из n уравнений, содержащих одно исходное уравнение, равно n. Поэтому количество вершин в данном случае также не превосходит n. В любом случае число вершин конечно.

Пусть $A_1, A_2, ..., A_p$ – некоторый набор точек из $\mathbb{R}^n$. Их линейная комбинация

$$X = s_1A_1 + s_2A_2 + ... + s_pA_p$$

называется *неотрицательной*, если $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, ..., $s_p \geq 0$. Если, кроме того, выполняется условие $s_1 + s_2 + ... + s_p = 1$, то точка X называется *выпуклой линейной комбинацией* точек $A_1, A_2, ..., A_p$. Множество всех выпуклых линейных комбинаций точек $A_1, A_2, ..., A_p$ называется *выпуклой оболочкой* этих точек. Выпуклая оболочка точек $A_1, A_2, ..., A_p$ является выпуклым множеством и содержится в любом выпуклом множестве, содержащем точки $A_1, A_2, ..., A_p$.

Ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым многогранником*, если оно может быть задано системой линейных ограничений. Известно, что выпуклая оболочка нескольких точек является выпуклым многогранником, а всякий выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.

Примеры

1. Предприятие, выпускающее n видов товаров, в каждый момент времени может работать по одной из технологий $1,...,m$. Обозначим $\vec{x}^i = (x_1^i, ..., x_n^i)$ – набор товаров, производимый предприятием за час работы по технологии i $(i = 1,...,m)$. Пусть t_i – время (в часах) работы по технологии i, $T = t_1 + ... + t_m$ – суммарное время работы. Набор товаров $\vec{x} = (x_1,...,x_n)$, произведенный за время T, может быть представлен как неотрицательная комбинация векторов $\vec{x}^1,...,\vec{x}^m$:

$$\vec{x} = t_1\vec{x}^1 + ... + t_m\vec{x}^m.$$

Обозначим $s_i = \dfrac{t_i}{T}$ долю времени, соответствующую технологии i. Имеем

$$\vec{x} = s_1X^1 + s_2X^2 + ... + s_mX^m,$$

где $X^i = T\,\vec{x}^i$ – набор товаров, который предприятие может произвести за время T, работая только по технологии i. Так как $s_i \geq 0$ и $s_1 + ... + s_m = 1$, то $\vec{x}$ – выпуклая комбинация наборов $X^1,...,X^m$.

2. Построить множество M, заданное неравенствами

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -3, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 7, \end{cases}$$

и найти его угловые точки.

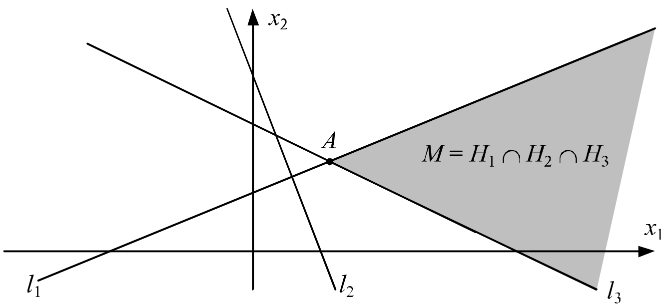

Рис. 6.1

Решение. Каждому неравенству соответствует полуплоскость: $H_1 = \{x_1 - 3x_2 \geq -3\}$ – для первого, $H_2 = \{2x_1 + x_2 \geq 6\}$ – для второго, $H_3 = \{x_1 + 2x_2 \geq 7\}$ – для третьего неравенства. Границами этих полуплоскостей служат прямые $l_1 : x_1 - 3x_2 = -3$, $l_2 : 2x_1 + x_2 = 6$ и $l_3 : x_1 + 2x_2 = 7$. Прямая l_1 пересекает оси координат в точках $(-3; 0)$ и $(0; 1)$, l_2 – в точках $(3; 0)$ и $(0; 6)$, l_3 – в точках $(7; 0)$ и $(0; 3,5)$. Строим эти точки, затем и сами прямые l_1, l_2, l_3.

Для того чтобы определить, с какой стороны от построенных прямых расположены полуплоскости H_1, H_2, H_3, воспользуемся методом пробной точки.

Точка $(0; 0)$ удовлетворяет первому неравенству, поэтому полуплоскость H_1 расположена с той же стороны от l_1, что и точка $(0; 0)$, т.е. ниже прямой l_1 (рис. 6.1). Точка $(0; 0)$ не удовлетворяет второму неравенству, поэтому относительно точки $(0; 0)$ полуплоскость H_2 расположена с другой стороны от l_2 (справа). Аналогично, $(0; 0)$ не удовлетворяет третьему неравенству, поэтому H_3 – выше прямой l_3. Так как точки множества M удовлетворяют всем трем неравенствам, то $M = H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Из рис. 6.1 ясно, что прямая l_2 не касается M, поэтому M имеет только одну вершину – $A = l_1 \cap l_3$.

Решая систему

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3, \\ x_1 + 2x_2 = 7, \end{cases}$$

находим точку $A(3;\ 2)$.

3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ – множество неотрицательных наборов товаров $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$, имеющих стоимость не более 60 при ценах $p_1 = 4, p_2 = 5, p_3 = 15$. Множество X задается системой линейных ограничений

$$S: \begin{cases} x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 15x_3 \leq 60. \end{cases}$$

Найти вершины X.

Решение. Система S' имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 15x_3 = 60. \end{cases}$$

Перечислим все подсистемы из трех уравнений в S' (табл. 6.1):

Таблица 6.1

Подсистема 1	Подсистема 2	Подсистема 3	Подсистема 4
$x_1 = 0$	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$
$x_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 0$	$x_3 = 0$
$x_3 = 0$	$4x_1+5x_2+15x_3=60$	$4x_1+5x_2+15x_3=60$	$4x_1+5x_2+15x_3=60$

Каждая из этих подсистем имеет единственное решение: $A_1(0; 0; 0)$, $A_2(0; 0; 4)$, $A_3(0; 12; 0)$ и $A_4(0; 0; 15)$ соответственно. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 удовлетворяют ограничениям исходной системы S, поэтому все они – вершины множества (многогранника) X.

4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^4$ – множество всех неотрицательных наборов товаров $\vec{x}$, имеющих стоимость $(\vec{p}, \vec{x}) = 6$ при ценах $\vec{p} = (1; 1; 2; 1)$ и имеющих стоимость $(\vec{p},\vec{x})=9$ при ценах $\vec{p}=(1;2;1;2)$. Найдем вершины X двумя способами.

Первый способ. Множество X задается системой

$$S:\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=6, \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=9, \\ x_i\geq 0,\ i=1,...,4. \end{cases}$$

Записываем сначала систему

$$S':\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=6, \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=9, \\ x_i=0,\ i=1,...,4, \end{cases}$$

а затем – все ее подсистемы из четырех уравнений, содержащие два исходных уравнения системы S (табл. 6.2):

Таблица 6.2

Подсистема S_1	Подсистема S_2	Подсистема S_3
$x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ $x_1=0$ $x_2=0$	$x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ $x_1=0$ $x_3=0$	$x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ $x_1=0$ $x_4=0$

Подсистема S_4	Подсистема S_5	Подсистема S_6
$x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ $x_2=0$ $x_3=0$	$x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ $x_2=0$ $x_4=0$	$x_1+x_2+2x_3+x_4=6$ $x_1+2x_2+x_3+2x_4=9$ $x_3=0$ $x_4=0$

Подсистема S_2 несовместна, в то время как остальные подсистемы имеют следующие решения: S_1 – $A(0;0;1;4)$, S_3 – $B(0;4;1;0)$, S_4 – $C(3;0;0;3)$, S_5 – $D(12;0;-3;0)$, S_6 – $E(3;3;0;0)$. Точка D не удовлетворяет ограничениям системы S, поэтому вершинами X являются точки A, B, C и E.

Второй способ. С помощью элементарных преобразований (методом Гаусса) приводим систему S к виду

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 3x_3, \\ x_2 = 3 + x_3 - x_4. \end{cases}$$

Поскольку $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$ то получаем систему неравенств для переменных x_3, x_4:

$$\begin{cases} 3 - 3x_3 \geq 0, \\ 3 + x_3 - x_4 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Данная система задает множество X' в координатной плоскости Ox_3x_4 (рис. 6.2).

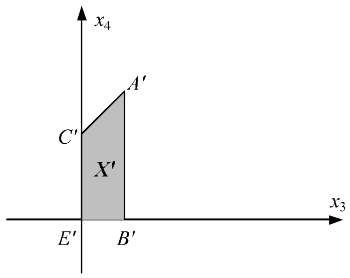

Рис. 6.2

Находим вершины X': $A'(1;4)$, $B'(1;0)$, $C'(0;3)$, $E'(0;0)$. Используя равенства $x_1 = 3 - 3x_3$ и $x_2 = 3 + x_3 - x_4$, определяем вершины X: $A(0;0;1;4)$, $B(0;4;1;0)$, $C(3;0;0;3)$, $E(3;3;0;0)$.

Упражнения

6.76. Какие из следующих множеств являются выпуклыми:

а) $M_1 = \{(x_1;\ x_2) \mid 2x_1 + 3x_2 \geq 4\}$; **б)** $M_2 = \{(x_1; x_2) \mid |x_1| + |x_2| \geq 1\}$;

в) $M_3 = \{(x_1; x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$?

6.77. Исходя из определения, доказать выпуклость множества M:

а) $M = \{(x_1; x_2) \mid x_1 + 2x_2 \leq 3\}$; **б)** $M = \{(x_1; x_2) \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}$;

в) $M = \{(x_1; x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

6.78. Доказать, что пересечение $M_1 \cap M_2$ выпуклых множеств M_1 и M_2 является выпуклым множеством.

6.79. Привести пример выпуклых множеств M_1 и M_2, таких, что их объединение $M_1 \cup M_2$ не является выпуклым множеством.

6.80. Доказать, что множество решений системы (S) является выпуклым:

а) (S) : $\begin{cases} x - y + z \geq 1, \\ x + y - z \geq 0, \\ x \geq 2y; \end{cases}$ **б)** (S) : $\begin{cases} x = y + z, \\ z \geq 1. \end{cases}$

6.81. Доказать, что выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(A_1, A_2, A_3)$ набора точек A_1, A_2, A_3 является выпуклым множеством.

6.82. Для данных точек $A(21; 14; 28)$ и $B(21; 35; 28)$ выяснить, принадлежит ли точка $C(21; 29; 28)$ отрезку AB.

6.83. Пусть A, B – различные точки в $\mathbb{R}^n$; k, l – положительные числа; $P = \dfrac{k}{k+l}A + \dfrac{l}{k+l}B$ – выпуклая линейная комбинация точек A и B. В каком отношении точка P делит отрезок AB?

6.84. Является ли точка $P(55; 30)$ выпуклой линейной комбинацией набора точек $A_1(90; 5)$, $A_2(40; 35)$, $A_3(10; 45)$?

6.85. Имеются три сплава A, B, C. Сплав A содержит 80 % золота и 10 % серебра, B – 70 % золота и 20 % серебра, C – 60 % золота и 30 % серебра. В какой пропорции необходимо взять сплавы A, B, C, чтобы произвести изделие, содержащее 65 % золота и 25 % серебра?

6.86. Для произвольного треугольника ABC показать, что выпуклая линейная комбинация вершин $P = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ является точкой пересечения его медиан.

6.87. Пусть $ABCD$ – произвольная пирамида, M – точка пересечения медиан грани BCD. Показать, что выпуклая линейная комбинация вершин пирамиды $P = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$ принадлежит отрезку AM. В каком отношении точка P делит отрезок AM?

6.88. Пусть A', B', C', D' – точки пересечения медиан в треугольниках BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Доказать, что отрезки AA', BB', CC' и DD' имеют общую точку.

6.89. Пусть Π – двумерная плоскость в $\mathbb{R}^n$; A_1, A_2, A_3 – набор точек, содержащихся в Π. Показать, что выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(A_1, A_2, A_3)$ содержится в плоскости Π.

6.90. Пусть A, B, C – точки, а Π – плоскость в $\mathbb{R}^n$. Пусть A', B', C' – проекции на плоскость Π точек A, B, C соответственно. Доказать, что в случае, если точка C принадлежит отрезку AB, то и точка C' также принадлежит отрезку $A'B'$.

6.91. Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны выпуклое множество X и плоскость Π; X' – множество всех проекций точек из X на Π: **а)** доказать, что X' – выпуклое множество; **б)** предположим, что для различных точек $A, B \in X$ их проекции A', B' на плоскость Π также различны. Доказать, что A – крайняя точка X тогда и только тогда, когда A' – крайняя точка X'.

6.92. Предприятие, применяя четыре технологии, производит товары X и Y. При этом в каждый момент времени в производственном процессе используется только одна технология, и каждая технология позволяет производить одновременно товары двух видов. Количество единиц продукции, производимых за час работы по определенной технологии, указано в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Технология	X	Y
1	2	6
2	4	9
3	8	8
4	9	6

Определить три из четырех технологий, работая по которым предприятие может произвести за 1000 часов 5000 ед. товара X и 8000 ед. товара Y.

6.93. Изобразить на плоскости $(x; y)$ множество решений системы неравенств, найти вершины построенных выпуклых многоугольников:

а) $\begin{cases} x+y\ge 1, \\ x-y\ge -1, \\ x+2y\le 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x-y+1\ge 0, \\ x+y-9\ge 0, \\ x-2y+3\le 0; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x-2y\ge 2, \\ 3x+2y\le 26, \\ x-4y\le -10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+2y\le 4, \\ x+y\le 3, \\ x\ge 0, y\ge 0; \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} 6x-4y\ge 0, \\ 2x+3y\le 20, \\ 4x+2y\le 36, \\ y\ge 0. \end{cases}$

6.94. Используя метод сведения к набору систем линейных уравнений, найти вершины множеств, заданных линейными ограничениями:

а) $\begin{cases} 4x+3y\le 12, \\ x+y-z=-1, \\ x\ge 0, y\ge 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x+3y\ge 6, \\ x+y-z=-1, \\ x\ge 0, y\ge 0. \end{cases}$

6.95. Рассматривая проекцию на плоскость Ox_1x_2, найти вершины множеств, заданных линейными ограничениями:

а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=6, \\ x_1+2x_2+x_4=4, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4x_1+7x_2+3x_3+x_4=15, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+x_4=11, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0. \end{cases}$

6.96. Пусть $X\subset\mathbb{R}^3$ – множество всех неотрицательных наборов товаров, имеющих стоимость не более 100 при ценах $p_1=10$, $p_2=20$, $p_3=25$. Найти вершины X.

6.97. Даны два варианта цен: $\vec{p}=(2;3;4)$ и $\vec{p}\,'=(1;4;5)$. Пусть $X\subset\mathbb{R}^3$ – множество всех неотрицательных наборов товаров $\vec{x}$, имеющих стоимость не более 120 при первом и втором вариантах цен. Найти вершины X.

6.98. Пусть $X\subset\mathbb{R}^3$ – множество всех неотрицательных наборов товаров $\vec{x}$, имеющих стоимость не более 12 при ценах $\vec{p}=(6;4;3)$

и не более L при ценах $\vec{p}' = (1;1;1)$. Найти количество вершин X в зависимости от положительного значения L.

6.99. Нефтеперерабатывающий завод получает нефть из трех районов добычи, имеющих мощности не более чем 20, 30 и 40 тонн нефти в сутки соответственно. Пусть x_i – количество нефти, получаемое заводом в течение суток из района $i\,(i = 1, 2, 3)$; $K = x_1 + x_2 + x_3$ – плановая мощность завода; $X \subset \mathbb{R}^3$ – множество всех векторов $\vec{x}$, определяющих различные варианты поставки нефти. Найти количество вершин X в зависимости от значения $K \in \{15; 25; 35; 45\}$.

6.100. Найти вершины множеств, заданных линейными ограничениями:

а) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 17x_1 - 12x_2 - 4x_3 + x_5 = -2, \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ 13x_1 - 10x_2 - 3x_3 + x_5 = -4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

6.101. Доходности акций компаний A, B, C, D равны соответственно 20 %, 40 %, 60 % и 80 %. Множество $\wp_{100,\,50}$ всех неотрицательных портфелей этих акций с начальной стоимостью 100 и доходом 50 задается системой ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3 + 0,8x_4 = 50, \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, ..., 4. \end{cases}$$

Найти вершины множества $\wp_{100,50}$.

6.102. На сколько частей разбивают пространство $\mathbb{R}^3$ плоскости, содержащие грани тетраэдра?

6.103. Указать систему неравенств, определяющую выпуклую оболочку данного набора точек $A_1, A_2, ...$:

а) $A_1(-2;-1)$, $A_2(-4;4)$, $A_3(4;3)$;

б) $A_1(1;0)$, $A_2(2;1)$, $A_3(1;2)$, $A_4(0;1)$;

в) $A_1(0;0)$, $A_2(0;\ 2)$, $A_3(1;3)$, $A_4(2;3)$, $A_5(5;0)$;

г) $A_1(0;\ 1)$, $A_2(0;2)$, $A_3(0;3)$, $A_4\left(\frac{2}{3};\ \frac{7}{3}\right)$, $A_5(2;\ 1)$, $A_6\left(\frac{13}{7};\frac{9}{8}\right)$.

§ 6.5. Кривые второго порядка

Основные сведения

Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина $2a$, превышающая расстояние между F_1 и F_2 (рис. 6.3).

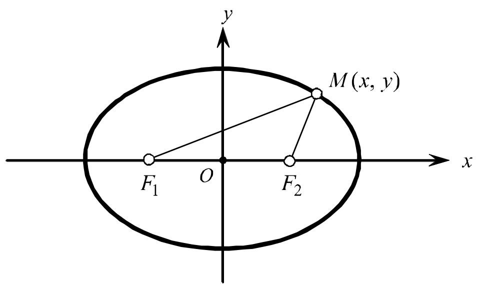

Рис. 6.3

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса, а расстояние $|F_1F_2|$ между ними – *фокальным расстоянием*, которое обозначается $2c$.

Пусть точка M принадлежит эллипсу. Отрезки F_1M и F_2M называются *фокальными радиусами точки* M. Пусть $|F_1F_2| = 2c$. По определению $a > c$. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат Oxy, в которой фокусы F_1 и F_2 расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. В этой системе координат эллипс описывается *каноническим уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Числа a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*.

Эксцентриситетом эллипса называется число ε, равное отношению его фокального расстояния к большой полуоси, т.е. $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Эксцентриситет изменяется в следующих пределах: $0 \le \varepsilon < 1$. Случай $c = 0$ соответствует окружности, эксцентриситет окружности равен нулю.

Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы, а расстояние между ними – *фокальным расстоянием*, которое обозначается $2c$.

Отрезки F_1M и F_2M называются *фокальными радиусами* точки M.

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат Oxy, в которой фокусы F_1 и F_2 расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат (рис. 6.4).

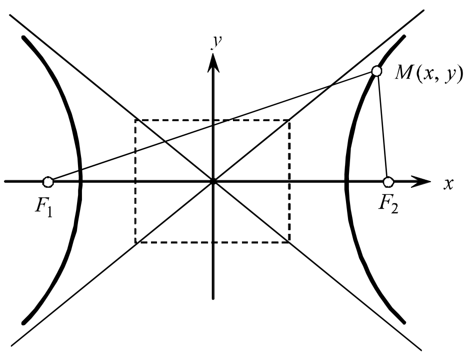

Рис. 6.4

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Числа a и b называются соответственно *действительной и мнимой полуосями* гиперболы. Внутри области, определяемой неравенством $\left|\frac{x}{a}\right| \le \left|\frac{y}{b}\right|$, точек гиперболы нет. Границы этой области задаются прямыми $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$, которые называются *асимптотами* гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы, как и для эллипса, задается формулой $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, для которых расстояние до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F.

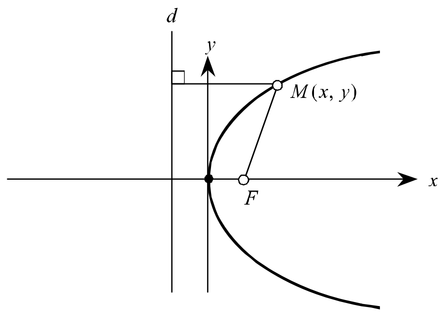

Рис. 6.5

Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая d – *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *параметром* параболы и обозначается через p (рис. 6.5).

Выберем начало O декартовой системы координат на середине отрезка FD, представляющего собой перпендикуляр, опущенный из точки F на прямую d. В этой системе координат фокус F имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а директриса d задается уравнением $x+\frac{p}{2}=0$. *Каноническое уравнение* параболы: $y^2=2px$.

Парабола симметрична относительно оси OF, называемой *осью параболы*. Точка O пересечения этой оси с параболой называется *вершиной* параболы.

Общее уравнение кривой второго порядка

Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0,$$

где $a_{11},a_{12},a_{22},a_{10},a_{20},a_{00}$ – некоторые действительные числа, причем a_{11},a_{12},a_{22} не равны нулю одновременно. Это уравнение называется *общим уравнением* кривой второго порядка.

Эллипс, гипербола и парабола являются примерами кривых второго порядка на плоскости. Кроме названных кривых, существуют и другие виды кривых второго порядка, например, уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$, задает на плоскости *пару пересекающихся прямых*. Система координат, в которой уравнение кривой принимает наиболее простой вид, называется *канонической*. При помощи композиции преобразований: поворота осей на угол α, параллельного переноса начала координат в точку $(x_0;y_0)$ и отражения относительно оси абсцисс, – уравнение кривой второго порядка приводится к одному из канонических уравнений, основные из которых были перечислены выше.

Примеры

1. Составить каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат и фокусами, расположенными на оси абсцисс, если известна большая полуось $a = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Р е ш е н и е. Поскольку $c = \varepsilon a = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$, $b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 20$, то получаем каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

2. Составить каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат и фокусами, расположенными на оси абсцисс, если известны:

а) фокальное расстояние $|F_1F_2| = 2\sqrt{58}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{58}}{3}$;

б) фокальное расстояние $|F_1F_2| = 2\sqrt{17}$ и уравнения асимптот $y = \pm 4x$.

Р е ш е н и е: **а)** по условию $c = \sqrt{58}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{58}}{3}$. Тогда $a = \frac{c}{\varepsilon} = 3$, $b = c\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} = 7$, и гипербола имеет уравнение $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1$;

б) по условию $c = \sqrt{17}$, $\frac{b}{a} = 4$. Тогда $b = 4a$ и $c^2 = a^2 + b^2 = 17a^2$, $a = 1$, $b = 4$, каноническое уравнение гиперболы: $x^2 - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

3. Составить каноническое уравнение параболы γ с вершиной в начале координат, если известна ее директриса $d : x = -3$.

Р е ш е н и е. Каноническое уравнение параболы $\gamma : y^2 = 2px$, уравнение ее директрисы $d : x = -\frac{p}{2}$. Значит, $p = 6$, парабола имеет уравнение $\gamma : y^2 = 12x$.

4. Найти на параболе $\gamma : y^2 = 4x$ точки, фокальный радиус которых равен 5.

Решение. Заметим, что парабола расположена в правой полуплоскости. Если $M(x;y)\in\gamma$, то $x\geq 0$. Пусть $M(x;y)$ – искомая точка, F – фокус, d – директриса γ. Тогда $F(1;0)$, $d: x=-1$. Поскольку $|FM|=\rho(M, d)$, то $x+1=5$, $x=4$, $y^2=16$, $y=\pm 4$. Итак, получили две точки: $M_1(4;-4)$, $M_2(4;4)$.

5. Даны эллипс $\gamma: \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ и точка $M\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}};-2\sqrt{2}\right)\in\gamma$. Найти уравнения прямых, содержащих фокальные радиусы точки M.

Решение. Поскольку $c^2=a^2-b^2=5^2-4^2=9$, то $c=3$. Поэтому координаты фокусов $F_1=(-3;0)$, $F_2(3;0)$. Отсюда нетрудно найти искомые уравнения:

$$\overline{F_1M}=M-F_1=\left(\frac{5}{\sqrt{2}},-2\sqrt{2}\right)-(-3,0)=\left(\frac{5\sqrt{2}+6}{2},-2\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(5+3\sqrt{2},-4\right),$$

$$F_1M: \frac{x+3}{5+3\sqrt{2}}=-\frac{y}{4};$$

$$\overline{F_2M}=M-F_2=\left(\frac{5}{\sqrt{2}},-2\sqrt{2}\right)-(3,0)=\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}-3,-2\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(5-3\sqrt{2},-4\right),$$

$$F_2M: \frac{x-3}{5-3\sqrt{2}}=-\frac{y}{4}.$$

6. Найти уравнение гиперболы $x^2-y^2=2$ в новой системе координат $\left\{O(0;0);\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Решение. Старые координаты $(x;y)$ и новые $(z;t)$ связаны матричным равенством

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}z+t\\z-t\end{pmatrix}.$$

Значит, уравнение $x^2 - y^2 = 2$ в новых координатах имеет вид $\left(\dfrac{z+t}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\dfrac{z-t}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2.$ После упрощений получим

$$zt = 1.$$

7. Привести кривую $\gamma : 4x^2 - 4xy + 8x + y^2 - 4y + 3 = 0$ к каноническому виду.

Решение. Рассмотрим квадратичную форму $q(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Матрица $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ формы q имеет собственные значения 5 и 0 и соответствующие им собственные ортонормированные векторы $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Перейдем к новой системе координат:

$$\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Выразим старые координаты $(x; y)$ через новые $(z; t)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \sqrt{5}\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{5}z + \dfrac{1}{5}t \\ \dfrac{1}{5}z + \dfrac{2}{5}t \end{pmatrix},$$

значит, $x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}z + \dfrac{1}{\sqrt{5}}t,\ \ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}z + \dfrac{2}{\sqrt{5}}t.$ Подставляя указанные выражения в уравнение кривой $\gamma,$ получим

$$4x^2 - 4xy + 8x + y^2 - 4y + 3 = 5z^2 - 4\sqrt{5}z + 3 =$$
$$= \left(z\sqrt{5}\right)^2 - 4\left(z\sqrt{5}\right) + 3 = \left(z\sqrt{5} - 1\right)\left(z\sqrt{5} - 3\right).$$

Таким образом, в новых координатах кривая γ задается уравнением

$$\gamma : \left(z - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(z - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$

Полагая $y' = z - \frac{2}{\sqrt{5}}, x' = t$, получим $\gamma : \left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$, откуда находим каноническое уравнение кривой $\gamma : y'^2 - \frac{1}{5} = 0$ в канонических координатах $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Заметим, что кривая γ является парой параллельных прямых.

Упражнения

6.104. Для кривой γ указать, если возможно: 1) название; 2) значения полуосей; 3) фокальное расстояние; 4) эксцентриситет; 5) уравнения директрис; 6) уравнения асимптот:

а) $\gamma : x^2 + 2y^2 = 4$; **б)** $\gamma : 2x^2 - 3y^2 = 6$; **в)** $\gamma : y^2 = 12x$;

г) $\gamma : x^2 - y^2 = 1$; **д)** $\gamma : x^2 + y^2 = 9$.

6.105. Составить каноническое уравнение эллипса, если известны фокальное расстояние $|F_1F_2|$ и эксцентриситет ε:

а) $|F_1F_2| = 8, \varepsilon = \frac{4}{5}$; **б)** $|F_1F_2| = 10, \varepsilon = \frac{5}{13}$.

6.106. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны фокальное расстояние $|F_1F_2|$ и эксцентриситет ε:

а) $|F_1F_2| = 10,\ \varepsilon = \frac{5}{3}$; **б)** $|F_1F_2| = 4\sqrt{5},\ \varepsilon = \sqrt{5}$.

6.107. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны фокальное расстояние $|F_1F_2|$ и уравнения асимптот $y = \pm kx$:

а) $|F_1F_2| = 2\sqrt{13}, k = \frac{2}{3}$; **б)** $|F_1F_2| = 20\sqrt{10}, k = \frac{1}{3}$.

6.108. Пусть эллипс γ имеет фокусы $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где $c > 0$, и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$. Зная, что $M(5;4) \in \gamma$, найти: **а)** сумму расстояний $|F_1M| + |F_2M|$ от точки M до фокусов эллипса; **б)** уравнения прямых, содержащих фокальные радиусы точки M.

6.109. Пусть гипербола γ имеет фокусы $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где $c>0$, и эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{5}{3}$. Зная, что $M\left(3\sqrt{2};4\right)\in\gamma$, найти: **а)** разность расстояний $|F_1M|-|F_2M|$ от точки M до фокусов гиперболы; **б)** уравнения асимптот гиперболы; **в)** уравнение прямых, содержащих фокальные радиусы точки M.

6.110. Пусть γ – эллипс или гипербола, $F(c;0)$ – фокус γ, $c>0$, ε – эксцентриситет γ, $\varepsilon\neq 0$, $d:\ x=\frac{a}{\varepsilon}$. Доказать, что если $d:\ x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ – уравнение директрисы γ, то $M(x;y)\in\gamma$ $\Leftrightarrow$ $|FM|=\varepsilon\cdot\rho(M,d)$.

6.111. Доказать, что расстояние от фокуса гиперболы $\gamma\ :\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ до ее асимптоты равно b.

6.112. Составить каноническое уравнение гиперболы γ, проходящей через точки $\left(3;\sqrt{2}\right)$ и $(4;3)$.

6.113. Доказать, исходя из определения, что кривая $\gamma\ :\ x^2=4y$ является параболой.

6.114. Найти уравнение касательной к параболе $y^2=2px$ в точке $M(x_0,y_0)$.

6.115. Доказать, что световые лучи, исходящие из фокуса параболы, после зеркального отражения от нее пойдут параллельно оси.

6.116. Записать уравнение окружности с центром в точке $C(1;2)$ радиуса 3.

6.117. Найти фокусы эллипса $\dfrac{(x-4)^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

6.118. Пусть даны точки $F_1(-4;0)$ и $F_2(4;0)$. Доказать, что для точки $M(x;y)$ верно равенство $|F_1M|+|F_2M|=10$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$.

6.119. Пусть даны точки $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$. Доказать, что для точки $M(x;y)$ верно равенство $||F_1M|-|F_2M||=8$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$.

6.120. Найти уравнение кривой γ в новой системе координат $\left\{O(0;0);\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$:

а) $\gamma\ : x^2-y^2=4;$ **б)** $\gamma\ : x^2+y^2=4;$

в) $\gamma\ : x^2=\frac{y}{\sqrt{2}};$ **г)** $\gamma\ :\ 2x^2+4y^2=1.$

6.121. Определить, какая кривая второго порядка содержит график функции $y=f(x)$:

а) $f(x)=\sqrt{1-2x-x^2};$ **б)** $f(x)=\sqrt{4x^2+16x+5};$

в) $f(x)=\sqrt{x+1}+x-1;$ **г)** $f(x)=x+\sqrt{2x^2-1}.$

В следующих упражнениях указать каноническое уравнение кривой γ и ее канонические координаты:

6.122. $\gamma\ :\ y^2+8y-9=0.$

6.123. $\gamma\ :\ x^2-16=0.$

6.124. $\gamma : x^2-4y^2-16=0.$

6.125. $\gamma : x^2+9y^2-81=0.$

6.126. $3x^2+2xy+3y^2-4=0.$

6.127. $\gamma : 2xy+1=0.$

6.128. $\gamma : x^2-2xy+y^2-12x+12y-13=0.$

6.129. $\gamma : x^2+6xy+9y^2-2x-6y+1=0.$

6.130. $x^2+2xy+y^2+4y+1=0.$

6.131. $13x^2-10xy+13y^2-10x+26y-59=0.$

ГЛАВА 7

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 7.1. Задача линейного программирования. Каноническая и стандартная формы

Основные сведения

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – множество, заданное системой ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n + b_1 * 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n + b_2 * 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n + b_m * 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

где каждый из знаков $*$ означает "≥" или "=". Предполагается, что система (7.1) содержит неравенства

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0. \tag{7.2}$$

Пусть также задана линейная функция

$$f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_0. \tag{7.3}$$

Множество X называется *допустимым*, а любая точка $\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in X$ – *допустимым решением*; функция f называется *целевой функцией*. *Задача линейного программирования* (ЛП) состоит в отыскании наибольшего или наименьшего значения целевой функции (7.3) на множестве допустимых решений. Записывается это следующим образом:

$$f(\bar{x}) \to \max\ (\min)$$

при $\quad \bar{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in X$.

Любая точка $\vec{x}^* \in X$, для которой $f(\vec{x}^*)$ – наибольшее (наименьшее) значение $f(\vec{x})$ на X, называется *оптимальным решением*.

Если система (7.1) состоит только из уравнений и неравенств вида (7.2), то говорят о *канонической форме* задачи ЛП, если же в системе (7.1) присутствуют только неравенства, то говорят о *стандартной форме* задачи ЛП. Если предполагается, что $x_1, x_2, ..., x_n$ – целые числа, то соответствующая задача называется *целочисленной*. Любая задача ЛП может быть сведена как к канонической, так и к стандартной форме.

Примеры

1. Стальные прутья длиной 110 см требуется разрезать на заготовки длиной 50, 45, 30 см. Заготовок длиной 50 см должно быть изготовлено не менее 20, длиной 45 см – не менее 40, длиной 30 см – не менее 60. Сколько прутьев и каким способом следует разрезать, чтобы получить указанное количество заготовок при минимальных отходах? Составить математическую модель этой задачи.

Решение. Нетрудно перебрать все возможные варианты разреза (табл. 7.1):

Таблица 7.1

Варианты разреза	Количество заготовок			Отходы
	50	45	30	
№ 1	2	–	–	10
№ 2	–	2	–	20
№ 3	–	–	3	20
№ 4	1	1	–	15
№ 5	1	–	2	0
№ 6	–	1	2	5

Пусть x_i – количество прутьев, разрезаемых по варианту с номером $i\,(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Набор натуральных чисел $x_1, x_2, ..., x_6$ составляет план разреза. Из условий задачи вытекают следующие ограничения на неизвестные $x_1, x_2, ..., x_6$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 + x_5 \geq 20, \\ 2x_2 + x_4 + x_6 \geq 40, \\ 3x_3 + 2x_5 + 2x_6 \geq 60, \\ x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, ..., 6). \end{cases} \tag{7.4}$$

Суммарное количество отходов описывается функцией

$$f = 10x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 5x_6.$$

В итоге приходим к следующей стандартной задаче ЛП:

$$f \to \min$$

при условиях (7.4).

Сформулированную задачу можно привести к канонической форме. Это достигается введением дополнительных (балансовых) переменных x_7, x_8, x_9:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 + x_5 = 20 + x_7, \\ 2x_2 + x_4 + x_6 = 40 + x_8, \\ 3x_3 + 2x_5 + 2x_6 = 60 + x_9, \\ x_1, x_2, ..., x_9 \geq 0. \end{cases}$$

2. На двух складах C_1 и C_2 имеется 50 и 100 тонн товара соответственно. Потребности магазинов M_1, M_2, M_3 в товаре соответственно равны 30, 40, 80 тонн. Известны тарифы перевозок $(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 100 & 300 & 600 \\ 200 & 400 & 0 \end{pmatrix}$, где c_{ij} – стоимость в рублях перевозки одной тонны товара со склада C_i в магазин M_j. Найти минимальный по стоимости план перевозки товара со складов в магазины.

Составить математическую модель этой задачи.

Решение. Пусть x_{ij} – количество товара в тоннах, предназначенное к перевозке из *i*-го склада в *j*-й магазин. Набор чисел

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

составляет план перевозок. Так как в данном случае суммарные запасы равны суммарным потребностям: 50 + 100 = 30 + 40 + 80, то с каждого склада должен быть вывезен весь товар. Это приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} = 100. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Поскольку потребность каждого магазина также должна быть удовлетворена, то имеем еще три уравнения:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} = 30, \\ &x_{12} + x_{22} = 40, \\ &x_{13} + x_{23} = 80. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Очевидно также, что

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23} \ge 0. \tag{7.7}$$

Суммарная стоимость всех перевозок задается линейной функцией

$$f = \sum c_{ij} x_{ij} = 100(x_{11} + 3x_{12} + 6x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22}). \tag{7.8}$$

В итоге имеем каноническую задачу линейного программирования:

$$f \to \min$$

при условиях (7.5) – (7.7).

Данная задача приводится к стандартной форме следующим образом. Преобразуем систему (7.5), (7.6) методом Гаусса к виду

$$\begin{cases} x_{11} = 30 - x_{21}, \\ x_{12} = 20 - x_{13} + x_{21}, \\ x_{22} = 20 + x_{13} - x_{21}, \\ x_{23} = 80 - x_{13} \end{cases} \tag{7.9}$$

с базисными неизвестными $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$ и свободными неизвестными x_{21} и x_{13}. В силу (7.7) справедливы неравенства

$$\begin{cases} 30 - x_{21} \ge 0, \\ 20 + x_{21} - x_{13} \ge 0, \\ 20 - x_{21} + x_{13} \ge 0, \\ 80 - x_{13} \ge 0, \end{cases} \tag{7.10}$$

$$x_{21} \ge 0,\ x_{13} \ge 0. \tag{7.11}$$

Заменив в (7.8) базисные неизвестные по формулам (7.9), приведем целевую функцию к виду $f = 100(170 + 7x_{13})$. Таким образом, получаем задачу линейного программирования в стандартной форме

$$f = 100(170 + 7x_{13}) \to \min$$

при условиях (7.10), (7.11), эквивалентную задаче в канонической форме.

Упражнения

Составить математическую модель задачи линейного программирования:

7.1. Для изготовления швейных изделий двух видов имеется 50 м ткани. Для шитья одного изделия каждого вида расходуется одно и то же количество ткани – 2 м. Составить план производства, обеспечивающий получение наибольшей выручки от продажи изделий, если цена одного изделия первого вида составляет 600 руб., а цена изделия второго вида – 200 руб., причем изделий каждого вида требуется изготовить не более 20.

7.2. Для изготовления изделий двух видов имеется 100 кг сырья. На изготовление одного изделия первого вида расходуется 2 кг сырья, а изделия второго вида – 4 кг. Составить план производства, обеспечивающий получение наибольшей выручки от продажи изделий, если отпускная стоимость одного изделия первого вида составляет 3000 руб., а изделия второго вида – 2000 руб., причем изделий первого вида требуется изготовить не более 40, а изделий второго вида – не более 20.

7.3. Известно, что 1 кг яблок стоит 30 руб., а 1 кг абрикосов – 60 руб. Сколько яблок и абрикосов должен потреблять человек в сутки, чтобы получить не менее 70 мг витамина C и не менее 2 мг витамина A при минимальных затратах на яблоки и абрикосы? Содержание витаминов A и C в яблоках и абрикосах указано в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Плоды	A (мг/кг)	C (мг/кг)
Яблоки	1	70
Абрикосы	24	75

7.4. Производственная мощность завода позволяет производить за месяц 200 электродвигателей типа A или 600 электродвигателей типа Б. Определить, сколько электродвигателей должен производить завод для достижения максимума прибыли от продажи товарной продукции, если цена двигателя типа A в три раза больше цены двигателя типа Б.

7.5. Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45 и 35 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40 и 30 штук. Определить, сколько прутьев по каждому из возможных способов следует разрезать, чтобы получить не менее необходимого количества заготовок каждого вида при минимальных отходах.

7.6. Металлические трубы длиной 9 м надо раскроить на заготовки трех видов длиной 2 м, 1,8 м и 1,2 м в количестве соответственно 160, 150, 70 штук. Сколько труб надо заказать, чтобы выполнить задание с минимальными отходами?

7.7. Какое максимальное количество комплектов прутьев длиной 1 м и 1,75 м в количестве 2 шт. и 1 шт. соответственно может поставить завод, используя однотипные заготовки длиной 4 м и 8 м в количестве 175 шт. и 125 шт. соответственно?

7.8. Необходимо распилить 100 бревен длиной 6 м каждое на бруски размерами 3 м, 2 м, 1,5 м. Определить оптимальный план распила, при котором будет получено максимальное число комплектов (в каждый комплект входят по одному бруску каждого из трех типов).

7.9. Для изготовления комплектов, состоящих из брусьев трех размеров 0,6 м, 1,5 м и 2,5 м в отношении 2:1:3 в комплекте, на распил поступают бревна длиной 3 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное количество комплектов, если известно, что на распил поступает 50 бревен и все бревна должны быть распилены.

7.10. Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сортов А и Б, смешивая три ингредиента: индийский, цейлонский и английский чай. В таблице приведены нормы расхода ингредиентов, объем запасов каждого ингредиента и прибыль от реализации 1 т чая сортов А и Б (табл. 7.3).

Таблица 7.3

Ингредиенты	Норма расхода (т/т)		Объем запасов, т
	А	Б	
Индийский чай	0,5	0,2	600
Цейлонский чай	0,2	0,6	870
Английский чай	0,3	0,2	430
Прибыль от реализации одной тонны продукции, тыс. руб.	320	290	–

Требуется составить план производства чая сортов А и Б с целью получения максимальной прибыли.

7.11. Механический цех может изготовить за смену 600 деталей первого сорта (№ 1) или 1200 деталей второго сорта (№ 2). Производственная мощность термического цеха, куда эти детали поступают на термообработку в тот же день, позволяет отработать за смену 1200 деталей № 1 или 800 № 2. Цены на детали одинаковые. Определить план выпуска деталей, при котором объем товарной продукции предприятия будет наибольшим, если механический цех работает в три смены, а термический – в две смены.

Таблица 7.4

Название цеха	Количество машин за год	
	Типа А	Типа Б
Кузовной	80	320
Шасси	110	110
Двигательный	204	120
Сборочный	160	80

7.12. Завод специализируется на капитальном ремонте автомашин типов А и Б. Производственные мощности цехов приведены в табл. 7.4.

Определить наиболее рентабельную производственную программу при условии, что прибыль от ремонта одной машины типов А и В соответственно равна 20000 и 24000 руб.

7.13. Для обеспечения перевозок нужно ежедневно формировать пассажирские и скорые поезда. В табл. 7.5 указаны наличный парк вагонов разных типов, из которых комплектуются данные поезда, и количество пассажиров, вмещающихся в каждый из типов вагонов:

Таблица 7.5

Поезда и парк вагонов	Вагоны				
	Багажный	Почтовый	Плацкартный	Купейный	Спальный
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	–	8	4	1
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Число пассажирских мест в плацкартном вагоне 58, в купейном вагоне – 40, в спальном вагоне – 32. Определить число скорых и пассажирских поездов, при которых количество перевозимых пассажиров достигает максимума.

Таблица 7.6

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Норма расхода	
		Изделие А	Изделие В
Сталь, кг	570	10	70
Цветные металлы, кг	490	90	50
Токарные станки, станко-ч	5600	300	400
Фрезерные станки, станко-ч	3400	200	100

7.14. Для изготовления двух видов изделий А и В фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. На изготовлении указанных изделий заняты токарные и фрезерные станки. В табл. 7.6 приведены запасы стали и цветных металлов, которыми располагает предприятие, ресурсы оборудования в станко-часах на единицу изделия.

Прибыль от продажи единицы изделия А составляет 3 тыс. руб., от продажи изделия В – 8 тыс. руб.

Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

7.15. Предполагается, что для производства зерна используются три вида ресурсов: трудовые (чел.-ч.), пахотные (га), производственные (машино-ч.). При этом могут использоваться три технологических процесса, характеризующиеся коэффициентами c_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), которые определяют количество i-го вида ресурса, необходимого для производства одной тонны зерна по j-й технологии. Коэффициенты и объем доступных ресурсов приведены в табл. 7.7.

Таблица 7.7

Виды ресурсов	Технологии			Объем
	1	2	3	
Трудовые	25	50	40	1000
Пахотные	50	100	125	11000
Производственные	20	10	5	1000

Определить технологический план производства зерна с целью получения максимального объема производства.

Таблица 7.8

Заводы	Производство цемента, т/сут.	Стоимость перевозки 1 т цемента, руб.		
		Комбинат 1	Комбинат 2	Комбинат 3
1	40	1000	1500	2500
2	60	2000	3000	3000
Потребность в цементе, т/сут.		50	20	30

7.16. В области имеются два цементных завода и три потребителя их продукции – домостроительные комбинаты. В табл. 7.8

указаны суточные объемы производства цемента, суточные потребности в нем комбинатов и стоимость перевозки 1 т цемента от каждого завода к каждому комбинату.

Требуется составить план суточных перевозок цемента с целью минимизации транспортных расходов.

7.17. Для уборки урожая с четырех полей требуется соответственно 15, 35, 21 и 24 человека, для чего наняли три артели, численностью 40, 30 и 25 человек. Как распределить их на работу, чтобы максимизировать валовой сбор, если производительность (в ц/чел в день) члена артели на соответствующих полях задается табл. 7.9?

Таблица 7.9

Артель \ Поле	1	2	3	4
1	9	7	5	5
2	6	8	5	7
3	9	6	8	5

7.18. Три предприятия-изготовителя, производящие сельскохозяйственные машины, снабжают своей продукцией пять кооперативов. Каждое предприятие имеет определенный план выпуска: первое предприятие – 200 ед., второе – 500 ед. и третье – 300 ед., а каждый кооператив – план поставок: первый кооператив – 150 ед., второй – 50 ед., третий – 100 ед., четвертый – 400 ед., пятый – 300 ед. Ниже приведены затраты в денежных единицах на перевозку единицы продукции с предприятий на пункты сбыта:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определить план перевозок, чтобы совокупные расходы по перевозке продукции с предприятий на пункты сбыта были минимальными.

7.19. Имеется три станка, на которых может изготовляться любое из четырех изделий. Задана матрица затрат $c = (c_{ij})$, где c_{ij} – затраты (в денежных единицах) на производство единицы изделия каждым станком, и матрица производительности станков $\lambda = (\lambda_{ij})$, где λ_{ij} – производительность в шт./ч при производстве каждого изделия $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$. Значения c_{ij} помещены в правом верхнем углу ячеек таблицы, а значения λ_{ij} – в нижнем левом углу. Известны ресурсы станков a_i, i = 1, 2, 3, в станко-часах и плановое задание по выпуску изделий b_j ($j = 1, 2, 3, 4$) единиц изделий. Требуется распределить производство изделий по станкам так, чтобы минимизировать суммарные затраты при выполнении планового задания.

Таблица 7.10

Ресурсы станков, станко-ч	Плановое задание по выпуску изделий, ед.			
	b_1=1000	b_2=800	b_3=600	b_4=280
a_1 =50	5 10	8 16	4 12	10 14
a_2 =80	8 15	7 24	9 18	6 21
a_3 =220	3 5	10 8	8 0	5 7

7.20. Цех изготовляет два вида продукции $П_1$ и $П_2$, которую отправляет на продажу. Для производства используется два вида сырья C_1 и C_2. Максимально возможные суточные запасы сырья на складе составляют 6 и 8 т соответственно. Расходы сырья для изготовления соответствующей продукции указаны в табл. 7.11. Известно, что суточный спрос на продукцию $П_2$ составляет не более 2 т и не превышает спрос на продукцию $П_1$ более чем на 1 т. Цех реализует 1 т продукции $П_1$ по цене 3000 руб., а продукцию $П_2$ – по 2000 руб. Найти количество продукции каждого вида, которое должен производить ежедневно цех, чтобы получить максимальный доход от реализации.

Таблица 7.11

Исходное сырье	Расход сырья на 1 т продукции		Суточный запас, т
	$П_1$	$П_2$	
C_1	1	2	6
C_2	2	1	8

7.21. Привести к стандартной форме следующие задачи ЛП:

а) $f = -x_1 - 3x_2 + 2x_4 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$

и $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3; \end{cases}$

б) $f = 3x_1 + 2x_3 - 3x_4 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$

и $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2; \end{cases}$

в) $f = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$

и $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$

г) $f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$

и $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$

§ 7.2. Графический метод решения задачи линейного программирования

Основные сведения

Рассматривается задача ЛП в стандартной форме при $n = 2$. Допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^2$ (заданное неравенствами) – выпуклое множество на плоскости Ox_1x_2. Целевая функция имеет вид $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Прямые вида $f = \alpha$, где α – постоянная, называются *линиями уровня.* Все линии уровня параллельны друг другу и перпендикулярны общему вектору нормали $\vec{c}=(c_1;c_2)$. Задача линейного программирования с двумя переменными допускает решение графическим методом, который состоит в следующем:

1) строится допустимое множество X;

2) если X – пустое множество, то задача неразрешима, так как система ограничений противоречива;

3) если X – непустое множество, то рассматриваются линии уровня $f=\alpha$. При монотонном увеличении α от $-\infty$ до $+\infty$ прямые $f=\alpha$ смещаются параллельно в направлении вектора $\vec{c}$. Если при таком перемещении линии уровня существует $\vec{x}^*=(x_1^*;x_2^*)$ – первая общая точка линии уровня и множества X, то $f(\vec{x}^*)$ – минимум f на множестве X. Если $\vec{x}^*$ – последняя точка пересечения линии уровня и множества X, то в этой точке достигается максимум f на множестве X. Если при неограниченном уменьшении параметра α прямая $f=\alpha$ пересекает множество X, то $\min f=-\infty$. Если аналогичное свойство справедливо при неограниченном увеличении параметра α, то $\max f=+\infty$.

Задачи линейного программирования общего вида допускают решение графическим методом, если их можно преобразовать к задаче с двумя независимыми переменными.

Примеры

1. Найти минимальное и максимальное значения целевой функции $f=x_1+x_2+3$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 16, \\ 2x_1+x_2\le 14, \\ 3x_1+x_2\ge 6, \\ x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. На рис. 7.1 изображены допустимое множество X, линия уровня $f=3$ и вектор нормали $\vec{c}=(1;\,1)$. Перемещая линию уровня по направлению вектора $\vec{c}$, находим сначала точку минимума целевой функции $\vec{x}_{\min} = A(2;0)$, $f_{\min} = 5$, а затем точку максимума $\vec{x}_{\max} = B(4;6)$, $f_{\max} = 13$.

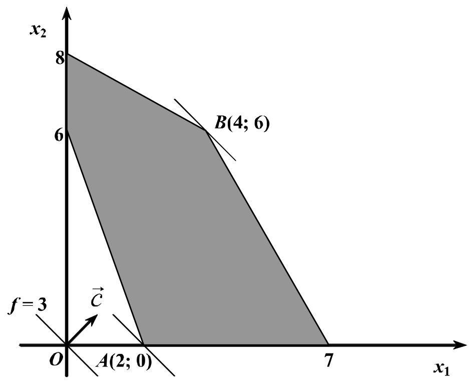

Рис. 7.1

2. Решить следующую задачу линейного программирования:

$$f = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_i \geq 0 \ \ (i = 1, \ldots, 5). \end{cases}$$

После исключения переменных x_3, x_4, x_5 получим задачу с двумя переменными:

$$\hat{f} = 5x_1 - 5x_2 + 4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решая последнюю задачу графическим методом (рис. 7.2), находим ее оптимальное решение $A(4;\ 1)$, $\hat{f}_{\max} = 19$.

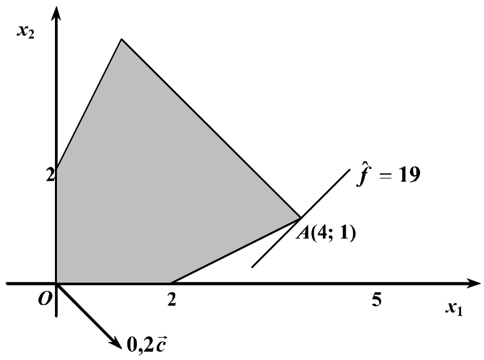

Рис. 7.2

Затем вычисляем значения переменных x_3, x_4, x_5 исходной задачи, соответствующие координатам точки A:

$$x_3^* = 9,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 0.$$

В результате получаем оптимальное решение исходной задачи:

$$\vec{x}^* = (4;\ 1;\ 9;\ 0;\ 0),\ f_{\max} = 19.$$

Упражнения

Решить графически следующие задачи линейного программирования:

7.22. $f = 2x_1 + 3x_2 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 18, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 25. \end{cases}$

7.23. $f = x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 - x_2 \ge -2. \end{cases}$

7.24. $f = x_1 + 3x_2 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 - x_2 \le -1, \\ 3x_1 - x_2 \ge -3. \end{cases}$

7.25. $f=-2x_1-x_2\to\min$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} x_1+x_2\ge 2,\\ x_1-x_2\le -1,\\ x_1\le 2.\end{cases}$

7.26. $f=3x_1+2x_2-4\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 6,\\ 2x_1-5x_2\ge -20,\\ 6x_1+x_2\le 36.\end{cases}$

7.27. $f=x_1+3x_2\to\min$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} x_1+x_2\ge 4,\\ -x_1+2x_2\le 2,\\ x_1-x_2\le 2.\end{cases}$

7.28. $f=2x_1+3x_2\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} x_1+2x_2\ge 4,\\ 2x_1-3x_2\ge -9,\\ 5x_1+3x_2\le 30.\end{cases}$

7.29. $f=3x_1-4x_2\to\min$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} 3x_1+x_2\ge 9,\\ x_1-2x_2\ge -4,\\ 3x_1-2x_2\le 6.\end{cases}$

7.30. $f=-2x_1+4x_2+6\to\min$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} x_1-3x_2\le 1,\\ x_1+x_2\le 5,\\ -x_1+x_2\le 2.\end{cases}$

7.31. $f=x_1+5x_2\to\min$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} x_1-2x_2\le 1,\\ -2x_1-3x_2\le -2,\\ -2x_1+x_2\le 2.\end{cases}$

7.32. $f=x_1+x_2\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} 4x_1+3x_2\le 12,\\ x_1+x_2\le 6,\\ -x_1+x_2\le 8.\end{cases}$

7.33. $f=x_1+2x_2+3\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} x_1+3x_2\le 11,\\ x_1-4x_2\le -3,\\ 2x_1-x_2\ge 1.\end{cases}$

7.34. $f=-x_1+x_2+1\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} 5x_1-2x_2\ge 3,\\ x_1-4x_2\le -3,\\ 2x_1+x_2\le 12.\end{cases}$

7.35. $f = 3x_1 + x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 3, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 33, \\ x_2 \geq 3. \end{cases}$

7.36. $f = x_1 + x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12. \end{cases}$

7.37. $f = x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8. \end{cases}$

7.38. $f = -2x_1 + x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6. \end{cases}$

7.39. $f = 2x_1 - 8x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -10, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 11. \end{cases}$

7.40. $f = -x_1 - x_2 + 1 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 - 4x_2 \geq -10, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 10. \end{cases}$

7.41. $f = x_1 - 4x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 23, \\ x_1 - 2x_2 \geq 1, \\ 2x_1 - x_2 \leq 1. \end{cases}$

7.42. $f = -3x_1 + x_2 + 10 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 \geq 11, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1. \end{cases}$

7.43. $f = 4x_1 - 2x_2 + 1 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 11, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 0. \end{cases}$

7.44. $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$

7.45. $f=-3x_1-2x_2+13\to\min$ при $\vec{x}\geq 0$ и $\begin{cases}2x_1+x_2\leq 8,\\ -x_1+x_2\leq 1,\\ x_1+x_3=4,\\ x_2\leq 2.\end{cases}$

7.46. $f=x_1+2x_2\to\max$ при $\vec{x}\geq 0$ и $\begin{cases}3x_1+x_2\geq 4,\\ 2x_1-3x_2\geq -12,\\ 2x_1+x_2\leq 12,\\ x_1-4x_2\leq -3.\end{cases}$

7.47. $f=-2x_1+5\to\min$ при $\vec{x}\geq 0$ и $\begin{cases}x_1-x_2\geq -1,\\ x_1+2x_2\leq 14,\\ 2x_1-x_2\leq 8,\\ x_1+3x_2\geq 11.\end{cases}$

7.48. $f=3x_1+2x_2\to\max$ при $\vec{x}\geq 0$ и $\begin{cases}x_1+2x_2\leq 6,\\ 2x_1+x_2\leq 8,\\ x_2-x_1\leq 1,\\ x_2\leq 2.\end{cases}$

7.49. $f=x_1-4x_2\to\min$ при $\vec{x}\geq 0$ и $\begin{cases}x_1-4x_2\geq -16,\\ 2x_1+3x_2\leq 23,\\ 2x_1-3x_2\leq 5,\\ 3x_1+4x_2\geq 16.\end{cases}$

7.50. $f=5x_2+2x_4-8\to\max$ при $\vec{x}\geq 0$ и $\begin{cases}x_1-5x_2+x_3=5,\\ -x_1+x_2+x_4=4,\\ x_1+x_2+x_5=8.\end{cases}$

7.51. $f=5x_1+2x_2-x_3\to\max,\min$ при $\vec{x}\geq 0$ и $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=4,\\ 4x_1-5x_2+x_4=10,\\ x_1+x_2+x_5=7.\end{cases}$

7.52. $f=x_1+2x_2+x_4+x_5+3\to\max,\min$

при $\vec{x}\geq 0$ и $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=12,\\ x_1-2x_2+x_4=-4,\\ -x_1+x_2+x_5=3.\end{cases}$

7.53. $f = 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 - 5 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18, \\ -x_1 + 4x_2 - x_5 = 8. \end{cases}$

7.54. $f = -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 - 5 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 25, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 6. \end{cases}$

7.55. $f = x_1 + x_2 - x_3 + x_5 + 15 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_4 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 2. \end{cases}$

7.56. $f = -x_2 - x_4 - 1 \to \max, \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 5. \end{cases}$

7.57. $f = 4x_2 - x_3 + 1 \to \max, \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 5. \end{cases}$

7.58. $f = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$

7.59. $f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

7.60. $f = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 6 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$

7.61. $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

7.62. $f = x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3. \end{cases}$

7.63. $f = -8x_1 + 2x_2 + 11 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7. \end{cases}$

7.64. $f = 9x_2 + 3x_3 + 2x_5 - 4 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

7.65. $f = 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 14 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 20, \\ 8x_1 - x_2 + x_5 = 16. \end{cases}$

7.66. $f = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3 \to \max, \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 9. \end{cases}$

§ 7.3. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Основные сведения

Для решения задач линейного программирования симплексным методом следует выполнить ряд подготовительных операций.

1. Привести задачу к каноническому виду.

2. Преобразовать систему ограничений (уравнений) к специальному виду, в котором переменные разделены на базисные и свободные, а соответствующее базисное решение – неотрицательное (оно называется допустимым базисным решением или опорным решением). Пример такой системы:

$$
\begin{cases}
x_1 + \dots + a_{1\,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\quad x_2 + \dots + a_{2\,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\quad\quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\quad\quad\quad x_r + a_{r\,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r,
\end{cases} \tag{7.12}
$$

где $x_1, x_2, \dots, x_r$ – базисные переменные, $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – свободные переменные $b_i \geq 0,\ i = 1, 2, \dots, r$.

3. Исключить из целевой функции базисные переменные с помощью (7.12) и записать ее в виде

$$
f + c_{r+1}x_{r+1} + \dots + c_n x_n = c_0. \tag{7.13}
$$

Коэффициенты $c_i,\ i = r+1, \dots, n$ называются *оценками* соответствующих переменных $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$.

Из (7.12), (7.13) следует, что на допустимом базисном решении

$$
\vec{x}_{баз} = (c_1;\ c_2;\ \dots;\ c_r;\ 0;\ 0;\ \dots;\ 0) \in \mathbb{R}^n
$$

целевая функция принимает значение $f(\vec{x}_{баз}) = c_0$.

После выполнения подготовительного этапа заполняется начальная симплекс-таблица (табл. 7.12):

Таблица 7.12

Б.н.	С.ч.	x_1	…	x_r	x_{r+1}	…	x_p	…	x_n	
x_1	b_1	1	…	0	$a_{1\,r+1}$	…	$a_{1\,p}$	…	$a_{1\,n}$	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_q	b_q	0	…	0	$a_{q\,r+1}$	…	$\boldsymbol{a_{q\,p}}$	…	$a_{q\,n}$	b_i/a_{ip} – min
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_r	b_r	0	…	1	$a_{r\,r+1}$	…	$a_{r\,p}$	…	$a_{r\,n}$	
f	c_0	0	…	0	c_{r+1}	…	c_p	…	c_n	

Здесь и ниже используются следующие сокращения:

1. Б.н. – базисные неизвестные.
2. С.ч. – свободные члены.

Таблица соответствует системе уравнений (7.12) с присоединенной целевой функцией (7.13). Последняя строка таблицы называется *строкой оценок*.

Пусть решается задача о нахождении минимума функции f. Тогда цель дальнейших симплексных преобразований таблиц состоит в нахождении новых допустимых базисных решений, на которых значение целевой функции уменьшается (или не увеличивается). Алгоритм симплексных преобразований следующий.

1. Если в строке оценок среди чисел c_k $(k \neq 0)$ имеется хотя бы одна положительная (например, c_p), а в соответствующем столбце (разрешающем столбце) хотя бы один положительный элемент, то решение может быть улучшено. Среди указанных положительных элементов столбца в качестве разрешающего элемента a_{ip} выбирается тот, которому отвечает минимальное отношение b_i / a_{ip}. Если имеется несколько элементов с подобным свойством, то в качестве разрешающего выбирается любой из них. В таблице таким элементом является a_{qp}. Далее над таблицей проводятся элементарные преобразования: переменная x_p становится базисной, а x_q – свободной. На новом базисном решении значение целевой функции не увеличивается, и снова анализируется строка оценок.

2. Если в строке оценок нет положительных чисел, то оптимальное решение найдено.

3. Если в строке оценок есть положительное число, а в соответствующем ей столбце нет положительных элементов, то задача линейного программирования не имеет решения. В задаче о нахождении минимума функции это обозначается так: $f_{\min} = -\infty$.

4. Если в последней строке нет положительных оценок, но при этом имеются свободные переменные, равные нулю, то задача имеет, по крайней мере, одно альтернативное решение (чтобы его получить, следует сделать еще одно преобразование, выбрав разрешающий столбец с нулевой оценкой).

Как правило, множество оптимальных решений совпадает с выпуклой оболочкой всех альтернативных (базисных) решений. Исключением является случай, когда в процессе перебора альтернативных решений возникает нулевая оценка, такая, что в соответствующем столбце нет положительных чисел.

При решении задачи о поиске максимума функции f алгоритм меняется только в том, что разрешающий столбец выбирается по отрицательной оценке в последней строке.

Примеры

1. Решить симплекс-методом задачу:

$$f = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 \to \min,$$

$$\vec{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \geq 0,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2. \end{cases}$$

Решение. Переменные x_3, x_4, x_5 – базисные. Исключив их из целевой функции, получаем $f + 6x_1 - 7x_2 = -3$. На исходном базисном решении $\vec{x}_{баз1} = (0; 0; 1; 1; 2)$ значение целевой функции $f(\vec{x}_{баз1}) = -3$.

Заполним начальную симплексную таблицу 7.13 и преобразуем ее.

Таблица 7.13

Б.н.	С.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	–1	1	1	0	0	
x_4	1	$\boxed{1}$	–1	0	1	0	1/1 = 1<2
x_5	2	1	1	0	0	1	2/1 = 2>1
f	–3	6	–7	0	0	0	
x_3	2	0	0	1	1	0	
x_1	1	1	–1	0	1	0	
x_5	1	0	2	0	–1	1	
f	–9	0	–1	0	–6	0	

Все оценки в последней строке неположительные, следовательно, получено оптимальное решение $\vec{x}^* = \vec{x}_{баз2} = (1; 0; 2; 0; 1)$, $f_{\min} = f(\vec{x}_{баз2}) = -9$. Заметим, что значения базисных переменных и целевой функции получены из первого столбца симплекс-таблицы.

2. Решить задачу линейного программирования:

$$f = -3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + 28 \to \max,$$

$$\vec{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4) \geq 0,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем целевую функцию: $f + 2x_1 + 3x_2 = 0.$ Система имеет исходное базисное решение $\vec{x}_{баз1} = (0; 0; 4; 24)$ со значением целевой функции $f(\vec{x}_{баз1}) = 0$. Заполним симплексную таблицу (табл. 7.14) и преобразуем ее в соответствии с алгоритмом.

Таблица 7.14

Б.н.	С.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	4	–2	$\boxed{1}$	1	0
x_4	24	3	–8	0	1
f	0	2	3	0	0
x_2	4	–2	1	1	0
x_4	56	–13	0	8	1
f	–12	8	0	–3	0

В последней строке есть положительная оценка $c_1 = 8,$ но в соответствующем столбце нет ни одного положительного элемента, следовательно, задача не имеет решения: $f_{\min} = -\infty.$

3. Решить задачу линейного программирования:

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2 \to \min,$$

$$\vec{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \geq 0,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 9. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Исходное базисное решение $\vec{x}_{баз1} = (0;\,0;\,9;\,8;\,9)$, $f(\vec{x}_{баз1}) = 28.$ Заполним начальную симплексную таблицу с учетом того, что $f + x_1 + x_2 = 28,$ и выполним последовательность преобразований таблиц в соответствии с алгоритмом симплекс-метода.

Б.н.	С.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	8	1	1	0	1	0	8/1 = 8 > 3
x_4	9	–2	3	1	0	0	
x_5	9	$\boxed{3}$	–2	0	0	1	9/3 = 3 < 8
f	28	1	1	0	0	0	

x_4	5	0	$\boxed{5/3}$	0	1	–1/3	5 / (5/3) = 3 < 9
x_3	15	0	5/3	1	0	2/3	15 / (5/3) = 9
x_1	3	1	–2/3	0	0	1/3	
f	25	0	5/3	0	0	–1/3	

x_2	3	0	1	0	3/5	–1/5	
x_3	10	0	0	1	–1	$\boxed{1}$	10/1 = 10 < 25
x_1	5	1	0	0	2/5	1/5	5 / (1/5) = 25
f	20	0	0	0	–1	0	

x_2	5	0	1	1/5	2/5	0
x_5	10	0	0	1	–1	1
x_1	3	1	0	–1/5	3/5	0
f	20	0	0	0	–1	0

Анализ третьей и четвертой таблиц показывает, что минимальное значение целевой функции $f_{\min} = 20$ достигается на соответствующих этим таблицам базисных решениях: $\vec{x}_{баз3} = (5;3;10;0;0)$ и $\vec{x}_{баз4} = (3;5;0;0;10)$. Следовательно, общее оптимальное решение имеет вид:

$$\vec{x}^* = t\,\vec{x}_{баз3} + (1-t)\,\vec{x}_{баз4} = t\cdot\left(5;3;10;0;0\right) + \left(1-t\right)\cdot\left(3;5;0;0;10\right) =$$
$$= \left(3+2t;\ 5-2t;\ 10t;\ 0;\ 10-10t\right),\ \ t\in[0,1].$$

Упражнения

Решить симплексным методом следующие задачи линейного программирования:

7.67. $f = 4x_1 + 8x_3 + x_4 - x_5 + 7 \to \max$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 3. \end{cases}$

7.68. $f = x_2 + x_4 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 12, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

7.69. $f = x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 - x_2 - x_5 = -2. \end{cases}$

7.70. $f = 3x_1 + 2x_2 - 4 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_4 = -20, \\ 6x_1 + x_2 + x_5 = 36. \end{cases}$

7.71. $f = -2x_1 + 4x_2 + 6 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 2. \end{cases}$

7.72. $f = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 - 15 \to \max$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 8. \end{cases}$

7.73. $f = 2x_1 - x_5 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - 2x_3 + x_5 = 12. \end{cases}$

7.74. $f = 2x_2 - x_4 + 8 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ 4x_1 - x_2 + x_5 = 8. \end{cases}$

7.75. $f=-5x_1+5x_5 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1+x_4-2x_5=1, \\ x_2-2x_4+x_5=2, \\ x_3+3x_4+x_5=3. \end{cases}$

7.76. $f=x_1-6x_2 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1-4x_2-x_3=-1, \\ x_1-4x_2+x_4=2, \\ x_1-6x_2-x_5=-4. \end{cases}$

7.77. $f=3x_3-4x_4+4x_5 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1+x_3+x_4=4, \\ x_1-x_3-x_5=-4. \end{cases}$

7.78. $f=-2x_1-3x_2+12 \to \min$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1+x_2 \leq 5, \\ 2x_1+x_2+x_3=9, \\ x_1+2x_2+x_4=7. \end{cases}$

7.79. $f=3x_2+x_3-1 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1-2x_2 \leq 1, \\ 3x_1-2x_2 \leq 4, \\ x_1-x_2-x_3=-1. \end{cases}$

7.80. $f=2x_1-x_2 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1-x_2 \leq 5, \\ 2x_1+3x_2 \leq 15, \\ -4x_1+x_2 \leq 5. \end{cases}$

7.81. $f=-x_1+4x_2+2x_4-x_5 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1-5x_2+x_3=5, \\ -x_1+x_2+x_4=4, \\ x_1+x_2+x_5=8. \end{cases}$

7.82. $f=14x_2+4x_3-28 \to \max$ при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -x_1+3x_2+x_3=9, \\ 2x_1+3x_2+x_4=18, \\ 2x_1-x_2+x_5=10. \end{cases}$

7.83. $f=-2x_1+2x_2+x_3+x_5-5 \to \max$,

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3=-4, \\ 5x_1+3x_2+x_4=25, \\ 2x_1-3x_2+x_5=6. \end{cases}$

7.84. $f = 2x_4 - 5x_5 - 7x_6 + 13 \to \min$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 + 3x_4 - 4x_5 + 2x_6 = 2, \\ x_2 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 6. \end{cases}$

7.85. $f = x_3 + 5x_5 - 24 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_5 + x_6 = 12, \\ x_2 + 5x_5 - x_6 = 30, \\ x_3 + x_5 - 2x_6 = 6, \\ x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 18. \end{cases}$

7.86. $f = -6x_2 + 3x_4 - 3x_5 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ x_2 - x_1 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_6 = 2. \end{cases}$

7.87. $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5. \end{cases}$

§ 7.4. Использование симплекс-метода для отыскания допустимого базисного решения. Метод искусственных переменных

Основные сведения

Для решения задачи линейного программирования симплексным методом необходимо, чтобы исходная система ограничений-уравнений имела вид, допускающий неотрицательное базисное решение. Если это требование не выполнено, то можно решить симплекс-методом вспомогательную задачу, что приведет систему ограничений к нужному виду. Алгоритм решения вспомогательной задачи следующий.

1. Исходная система ограничений- уравнений переписывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m, \end{cases} \tag{7.14}$$

где все свободные члены $b_i \geq 0$.

2. В каждое уравнение системы (7.14) вводятся *искусственные переменные* $y_1, y_2, \ldots, y_m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n + y_m = b_m, \end{cases} \tag{7.15}$$

Решение системы (7.15) $(x_1; x_2; \ldots; x_n; y_1; y_2; \ldots; y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$, а сама система имеет допустимое базисное решение

$$\vec{x}_{баз} = (0; 0; \ldots; 0; b_1; b_2; \ldots; b_m) \geq 0.$$

3. Рассматривается вспомогательная целевая функция

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = y_1 + y_2 + \cdots + y_m,$$

и симплексным методом решается задача линейного программирования

$$F \to \min,\ (x_1; x_2; \ldots; x_n; y_1; y_2; \ldots; y_m) \geq 0$$

при ограничениях (7.15).

Если эта задача имеет решение, то возможны два случая.

1) $\min F > 0$. Тогда исходная система (7.14) не имеет неотрицательных решений.

2) $\min F = 0$. Система (7.14) имеет неотрицательное базисное решение. Если в последней симплекс-таблице вспомогательной задачи все искусственные переменные – свободные, то из этой таб-

лицы несложно получить систему уравнений, эквивалентную (7.14) и преобразованную к виду, необходимому для решения исходной задачи линейного программирования.

Примеры

1. Преобразовать следующую систему уравнений к виду, допускающему неотрицательное базисное решение:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = -5. \end{cases} \tag{7.15}$$

Решение. Введем искусственные переменные y_1 и y_2 в двух последних уравнениях (в первом уравнении уже имеется базисная переменная x_3):

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 + y_1 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5 + y_2 = 5, \end{cases} \tag{7.16}$$

и рассмотрим вспомогательную целевую функцию $F = y_1 + y_2$. Учитывая (7.16), получаем $F - 3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 9$.

Решим задачу $F \to \min$, $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; y_1; y_2) \geq 0$ при ограничениях (7.16). Решение дано в виде последовательности симплекс-таблиц (табл. 7.15).

Таблица 7.15

Б.н.	С.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
x_3	1	3	–5	1	2	0	0	0
y_1	4	–2	2	0	–1	$\boxed{1}$	1	0
y_2	5	–1	3	0	–2	1	0	1
F	9	–3	5	0	–3	2	0	0

x_3	1	3	–5	1	2	0	0	0
x_5	4	–2	2	0	–1	1	1	0
y_2	1	1	$\boxed{1}$	0	–1	0	–1	1
F	1	1	1	0	–1	0	–2	0

x_3	6	8	0	1	–3	0	–5	5
x_5	2	–4	0	0	1	1	3	–2
x_2	1	1	1	0	–1	0	–1	1
F	0	0	0	0	0	0	–1	–1

Вспомогательная задача решена, $\min F = 0$, искусственные переменные y_1 и y_2 стали свободными переменными. Это означает, что система уравнений (7.15) преобразована к нужному виду

$$\begin{cases} 8x_1 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ -4x_1 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1, \end{cases}$$

допускающему неотрицательное базисное решение $\vec{x}_{баз} = (0; 1; 6; 0; 2)$.

Упражнения

Решить задачи линейного программирования, используя метод искусственных переменных:

7.88. $f = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \min,$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 4, \\ 11x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$

7.89. $f = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 6 \to \max,$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 3x_4 = 14, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

7.90. $f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$, при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

7.91. $f = 2x_1 + 3x_2 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 18, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 25. \end{cases}$

7.92. $f = x_1 + 3x_2 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_5 = -3. \end{cases}$

7.93. $f = -2x_1 - x_2 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_5 = 2. \end{cases}$

7.94. $f = x_1 + 3x_2 \to \min$ при и $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2. \end{cases}$

7.95. $f = 14 - x_2 - x_3 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 7. \end{cases}$

7.96. $f = 6x_1 - x_3 - 3 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_2 + x_3 + x_4 = 30, \\ 3x_1 - x_3 - x_5 = 6. \end{cases}$

7.97. $f = -12 - 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \to \min$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = -10, \\ 7x_1 + x_3 + 4x_4 = 42, \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 11. \end{cases}$

7.98. $f = x_3 + x_4 + x_5 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 23, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 1. \end{cases}$

7.99. $f = x_1 + 2x_2 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_5 = 12, \\ -x_1 + 4x_2 - x_6 = 3. \end{cases}$

7.100. $f = 2x_3 - 16 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_4 = 23, \\ 4x_1 + 11x_4 + x_5 = 28, \\ 4x_1 - 2x_3 - x_6 = 0. \end{cases}$

7.101. $f = -8x_1 + 2x_2 + 11 \to \min$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 8. \end{cases}$

7.102. $f = 9x_2 + 3x_3 + 2x_5 - 4 \to \max,$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - x_5 = -4, \\ 3x_1 - x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$

7.103. $f = x_2 + x_3 + x_5 - 14 \to \max,$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 9, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

§ 7.5. Взаимно двойственные задачи линейного программирования

Основные сведения

Следующие задачи линейного программирования в стандартной форме, записанные в матричной форме, называются симметричной парой *взаимно двойственных задач*:

Задача I

$$\begin{cases} A\vec{x} \le \vec{b}\,,\ \vec{x} \ge 0, \\ f = \vec{c}^{\,T}\vec{x} + c_0 \to \max \end{cases}$$

Задача II

$$\begin{cases} A^T\vec{y} \ge \vec{c}\,,\ \vec{y} \ge 0, \\ \varphi = \vec{b}^{\,T}\vec{y} + c_0 \to \min \end{cases}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

– матрица коэффициентов и транспонированная матрица; $\vec{x}=(x_1;x_2;\ldots;x_n)^T\geq 0$, $\vec{y}=(y_1;y_2;\ldots;y_m)^T\geq 0$ – столбцы неотрицательных неизвестных; $\vec{b}=(b_1;b_2;\ldots;b_m)^T$, $\vec{c}=(c_1;c_2;\ldots;c_n)^T$ – столбцы правых частей; c_0 – константа.

Решения задач I и II взаимосвязаны. Решив любую из них (*исходную задачу*), можно восстановить решение другой (*двойственной задачи*).

Первая теорема двойственности. *Если исходная задача имеет оптимальное решение, то и двойственная ей также имеет оптимальное решение. При этом оптимальные значения целевых функций обеих задач равны*:

$$f_{\max}=\varphi_{\min}.$$

Вторая теорема двойственности. *Оптимальные решения*

$$\vec{x}^*=(x_1^*;x_2^*;\ldots;x_n^*)^T \text{ и } \vec{y}^*=(y_1^*;y_2^*;\ldots;y_m^*)^T$$

пары двойственных задач связаны между собой следующими соотношениями:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ik}y_i^*-c_k\right)\cdot x_k^*=0,\ \left(k=1,\ldots,n\right),$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k^*-b_i\right)\cdot y_i^*=0,\ \left(i=1,\ldots,m\right).$$

Замечание. Если исходная задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции, то двойственная задача неразрешима из-за отсутствия допустимых решений (и наоборот).

Пусть теперь рассматривается общая задача линейного программирования. Приведем правила построения двойственной задачи. Матрицу коэффициентов при неизвестных дополним справа столбцом знаков неравенств $(\leq),(\geq)$ и равенств $(=)$ для соответствующих ограничений, а также столбцом правых частей. Снизу матрицу дополним строкой ограничений для неизвестных: $(\geq),(\leq)$, если $x_j\geq 0$; $(\sim)$ при отсутствии ограничения на знак неизвестной;

еще ниже добавим строку коэффициентов целевой функции. В результате получим следующую матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \le & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \ge & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & = & b_m \\ \ge & \le & \dots & \sim & & \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & & c_0 \end{pmatrix}_{\to\max} \tag{7.17}$$

Тогда аналогичная матрица двойственной задачи выглядит следующим образом:

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & \ge & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & \le & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & = & c_n \\ \ge & \le & \dots & \sim & & \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m & & c_0 \end{pmatrix}_{\to\min} \tag{7.18}$$

Из сравнения матриц (7.17) и (7.18) видно, что числовые части этих матриц получаются друг из друга транспонированием. Строка неравенств исходной задачи переходит без изменения в столбец неравенств двойственной задачи, причем символ $"\sim"$ переходит в знак $"="$. Столбец неравенств исходной задачи переходит в строку ограничений на неизвестные, причем знаки неравенства меняются на противоположные, а знаки $(=)$ на знаки $(\sim)$.

При этом для пары двойственных задач с матрицами (7.17) и (7.18) остаются в силе формулировки первой и второй теорем двойственности.

Преобразуем пару двойственных задач в стандартной форме к канонической форме. При этом в задаче I появятся n дополнительных неизвестных $x_{n+1}, \dots, x_{m+n}$ по числу основных ограничений, а в задаче II – m дополнительных неизвестных $y_{m+1}, \dots, y_{n+m}$. Поэтому число неизвестных в каждой задаче станет равным одному и тому же числу $m+n$. Можно установить взаимнооднозначное соответствие между этими неизвестными, а именно, основные неизвестные задачи I будут соответствовать дополнительным неизвестным задачи II, и дополнительные неизвестные задачи I – основным неизвестным задачи II.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & \dots & x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ y_{m+1} & \dots & y_{m+n} & y_1 & \dots & y_m \end{array}$$

Установленное соответствие позволяет находить решение двойственной задачи по заключительной симплекс-таблице основной задачи. А именно, выделим из последней симплекс-таблицы строку целевой функции. Если число, стоящее в ней, начиная со второго, взять с противоположным знаком, а затем воспользоваться соответствием между неизвестными обеих задач, то получим оптимальное решение двойственной задачи. Первое число в указанной строке дает искомый оптимум целевой функции.

Примеры

1. Сформулировать двойственную задачу линейного программирования для следующей задачи:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 \le 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge -1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 5, \\ \qquad\qquad x_1 \ge 0,\, x_2 \le 0, \end{cases}$$
$$f = x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4 \to \max.$$

Р е ш е н и е. Составим расширенную матрицу данной задачи:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & \le & 1 \\ 1 & -3 & 2 & \ge & -1 \\ 2 & 1 & 4 & = & 5 \\ \ge & \le & \sim & & \\ 1 & -2 & 4 & & -4 \end{pmatrix}_{\to\max.}$$

В соответствии с указанными правилами расширенная матрица двойственной задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & \geq & 1 \\ -1 & -3 & 1 & \leq & -2 \\ -1 & 2 & 4 & = & 4 \\ \geq & \leq & \sim & & \\ 1 & -1 & 5 & & -4 \end{pmatrix}_{\to \min.}$$

Поэтому развернутая запись двойственной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ -y_1 - 3y_2 + y_3 \leq -2, \\ -y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 4, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0, \end{cases}$$
$$\varphi = y_1 - y_2 + 5y_3 - 4 \to \min.$$

2. Найти решение следующей задачи линейного программирования, используя первую и вторую теоремы двойственности:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 1, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0, \end{cases}$$
$$\varphi = 16y_1 + 14y_2 - 6y_3 + 3 \to \min.$$

Решение. По общему правилу составим двойственную задачу:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + x_2 \leq 14, \\ -3x_1 - x_2 \leq -6, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$$
$$f = x_1 + x_2 + 3 \to \max.$$

Двойственная задача совпадает с задачей из § 7.2, которая была решена графическим методом, и ее оптимальное решение

$\vec{x}^*_{\max} = (x_1^*; x_2^*)^T = (4; 6)^T$, $f_{\max} = 13$. Чтобы найти оптимальное решение исходной задачи, заметим, прежде всего, что выполняются строгие неравенства $x_1^* > 0, x_2^* > 0$. Этим переменным соответствуют первые два неравенства исходной задачи, которые по второй теореме двойственности обращаются в равенства:

$$\begin{cases} y_1^* + 2y_2^* - 3y_3^* = 1, \\ 2y_1^* + y_2^* - y_3^* = 1. \end{cases}$$

Чтобы найти недостающее уравнение, подставим значения x_1^*, x_2^* в неравенства двойственной задачи:

$$\begin{cases} 4 + 2 \cdot 6 = 16, \\ 2 \cdot 4 + 6 = 14, \\ -3 \cdot 4 - 6 < -6. \end{cases}$$

Поскольку третье неравенство строгое, то по второй теореме двойственности соответствующая этому неравенству переменная $y_3^* = 0$. Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1^* + 2y_2^* - 3y_3^* = 1, \\ 2y_1^* + y_2^* - y_3^* = 1, \\ y_3^* = 0, \end{cases}$$

откуда $\vec{y}^*_{\min} = (y_1^*;\ y_2^*;\ y_3^*)^T = (1/3;\ 1/3;\ 0)^T$. При этом достигается минимум функции $\varphi = 16 \cdot \dfrac{1}{3} + 14 \cdot \dfrac{1}{3} + 3 = 13$, что совпадает с ранее найденным значением $f_{\max} = 13$.

3. Решить симплексным методом задачу ЛП. По заключительной таблице найти решение двойственной задачи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 18, \\ x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$z = 10x_1 + 9x_2 - 12 \to \max.$$

Р е ш е н и е. Для решения задачи ЛП симплекс-методом введем дополнительные переменные и изменим знак целевой функции $(f = -z)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 18, \\ \qquad x_j \ge 0, 1 \le j \le 5 \end{cases}$$

$$f = -10x_1 - 9x_2 + 12 \to \min.$$

Запишем исходную симплекс-таблицу для данной задачи и решим ее симплекс-методом (табл. 7.16):

Таблица 7.16

Б.н.	С.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	2	$\boxed{1}$	1	1	0	0
x_4	3	–1	1	0	1	0
x_5	18	1	–1	0	0	1
f	12	10	9	0	0	0
Б.н.	С.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	$\boxed{1}$	1	1	0	0
x_4	5	0	2	0	1	0
x_5	16	0	–2	0	0	1
f	–8	0	–1	–10	0	0

Поскольку в строке коэффициентов целевой функции все коэффициенты неположительные, то решение исходной задачи таково: $f_{\min} = -8$ на базисном решении $\vec{x} = (2; 0; 0; 5; 16)$. Поэтому исходная задача имеет решение $z_{\max}(2; 0) = 8$.

Двойственная задача к исходной выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 \ge 10, \\ y_1 + y_2 - y_3 \ge 9, \\ \quad y_1, y_2, y_3 \ge 0, \end{cases}$$
$$\varphi = 2y_1 + 3y_2 + 18y_3 - 12 \to \min.$$

Установим соответствие между неизвестными исходной и двойственной задач, записанными в канонической форме:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array},$$

поэтому из строки коэффициентов целевой функции последовательно находим:

$$y_4 = 0,\ y_5 = 1,\ y_1 = 10,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0.$$

Таким образом, решение двойственной задачи $\varphi_{\min} = 8$ на базисном решении $\vec{y} = (10; 0; 0; 0; 1)$.

Упражнения

7.104. Сформулировать двойственную задачу линейного программирования для следующих задач:

а) $f = 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 4 \to \max$

при $x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0$ и $\begin{cases} 5x_2 - 3x_3 \le -3, \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 \ge -2; \end{cases}$

б) $f = -5x_1 + 2x_2 + x_3 + 2 \to \min$

при $x_1 \ge 0,\ x_3 \le 0$ и $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le -2, \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1; \end{cases}$

в) $f = -4x_1 - 3x_2 + x_3 - 1 \to \max$

при $x_2 \ge 0, x_3 \le 0$ и $\begin{cases} -4x_1 \ge 3, \\ -5x_1 + 5x_2 - 4x_3 \le -4; \end{cases}$

г) $f = -x_1 + 3x_2 - 3 \to \min$

при $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_3 \ge 5; \end{cases}$

Сформулировать двойственную задачу линейного программирования для поставленной исходной задачи и решить ее графическим методом. Используя теоремы двойственности, найти оптимальное решение исходной задачи:

7.105. $f = 5x_1 + 53x_2 - 19x_3 \to \min$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -8x_1 + x_2 + 7x_3 \ge -7, \\ 7x_1 + 4x_2 - 11x_3 \ge 11. \end{cases}$

7.106. $f = -12x_1 + 51x_2 - 3x_3 \to \min$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -8x_1 + x_2 + 7x_3 \ge -23, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4. \end{cases}$

7.107. $f = -2x_1 + 38x_2 - 11x_3 \to \min$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 2. \end{cases}$

7.108. $f = 4x_1 + 114x_2 - 27x_3 \to \min$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -11x_1 + 5x_2 + 6x_3 \ge -6, \\ 5x_1 + 6x_2 - 11x_3 \ge 11. \end{cases}$

7.109. $f = 25x_1 + 64x_2 - 46x_3 \to \min$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -7x_1 + x_2 + 6x_3 \ge -4, \\ 8x_1 + 5x_2 - 13x_3 \ge 23. \end{cases}$

7.110. $f = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 \ge 36, \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \ge 24. \end{cases}$

7.111. $f = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 27, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 24. \end{cases}$

7.112. $f = 19x_1 + 13x_2 + 6x_3 + 5x_4 \to \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 4. \end{cases}$

7.113. $f = -4x_1 + 12x_2 + 12x_3 - 3x_4 \to \min$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 6, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 12. \end{cases}$

7.114. $f = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$

при $\vec{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 10, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4. \end{cases}$

7.115. Для данной задачи ЛП в стандартной форме сформулировать двойственную задачу. Привести исходную задачу к канонической форме и решить ее симплекс-методом. Из заключительной симплекс-таблицы найти решение двойственной задачи:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ -x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 20, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$z = 2x_1 + 4x_2 + 8 \to \max;$

б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 9, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 5, \\ -3x_1 + 11x_2 \leq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$z = 3x_1 + 9x_2 - 10 \to \max;$

в) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + 7x_2 \leq 4, \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 15, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$z = 9x_1 + 10x_2 + 6 \to \max;$

г) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 10, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 5, \\ -3x_1 + 13x_2 \leq 19, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$z = 6x_1 + 10x_2 - 2 \to \max.$

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. $\vec{x}=(-3;2;-5)$. **1.2.** $\vec{x}=(-5;-3;-2)$.

1.3. Система не совместна. **1.4.** Система не совместна.

1.5. $\vec{x}=(4+x_3;1-2x_3;x_3)$. **1.6.** $\vec{x}=(19-3x_3;3-x_3;x_3)$.

1.7. $\vec{x}=(8-9x_2;x_2;0;-10+11x_2)$, $(8;0;0;-10)$.

1.8. $\vec{x}=(0;-13-13x_4;-7-9x_4;x_4)$, $(0;-13;-7;0)$.

1.9. $\vec{x}=(1+3x_2;x_2;0;0)$, $(1;0;0;0)$.

1.10. $\vec{x}=(x_1;5-2x_1;1-5x_1;13-7x_1)$, $(0;5;1;13)$.

1.11. 10 изделий вида A, 20 – вида B, 5 – вида C. **1.12.** 2, 1 и 3 га/ч.

1.13. При $\alpha\neq -1$ система является определенной,

$\vec{x}=\left((5-3\alpha)\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha+1}\right),-\dfrac{\beta}{\alpha+1},3+\dfrac{3\beta}{\alpha+1}\right)$; при $\alpha=-1,\beta\neq 0$ система несовместна; при $\alpha=-1,\beta=0$ система является неопределенной,

$\vec{x}=(8-8x_2;x_2;3-3x_2)$.

1.14. а) при $\alpha\neq 1$ система является определенной,

$\vec{x}=\left(1+2\alpha-3\beta-\dfrac{5\beta}{\alpha-1};2-\dfrac{3\beta}{\alpha-1};\dfrac{\beta}{\alpha-1}\right)$; **б)** при $\alpha=1,\beta\neq 0$ система несовместна; **в)** при $\alpha=1,\beta=0$ система является неопределенной,

$\vec{x}=(3-5x_3;2-3x_3;x_3)$.

1.15. а) при $\alpha\neq -3$ система является определенной, $\vec{x}=\left(1;\dfrac{1-\beta}{\alpha+3};\dfrac{1-\beta}{\alpha+3}\right)$;

б) при $\alpha=-3,\beta\neq 1$ система несовместна; **в)** при $\alpha=-3,\beta=1$ система является неопределенной, $\vec{x}=(1;x_3;x_3)$.

1.16. $m=8$, $\vec{x}=(-17+8x_4;-8+4x_4;5-x_4;x_4)$.

1.17. $m=-5$, $\vec{x}= =(-66-21x_4;81+27x_4;60+19x_4;x_4)$.

1.18. $\vec{x}=(23;29;-42;-2)$. **1.19.** $\vec{x}=(1;2;3;4)$.

1.20. $\vec{x}=(159+52x_4;-145-49x_4;62+21x_4;x_4)$.

1.21. $\vec{x}=(6+x_3+x_4;3+x_3+x_4;x_3;x_4)$.

1.22. Система несовместна.

1.23. Система несовместна.

1.24. Такая система либо не имеет решений, например, $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x+y+z=1, \end{cases}$ либо имеет бесконечно много решений, например, $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

1.25. *Указание.* Общее решение содержит хотя бы одну свободную переменную.

1.26. Нет; если система имеет два решения, то общее решение содержит хотя бы одну свободную переменную, а тогда система имеет бесконечно много решений.

1.27. а) (9; –17; –2; 2); **б)** (13; 24; –24; 5); **в)** (28; 34; –44; 10).

1.28. а) $(0;1;2;-2)$; **б)** $\left(0;-\frac{2}{3};-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$; **в)** $\left(\frac{17}{3};-6;5;-\frac{10}{3}\right)$;
г) $\left(\frac{19}{3};-\frac{22}{3};\frac{13}{3};-\frac{8}{3}\right)$.

1.31. а) разность квадратных трехчленов может не быть квадратным трехчленом: $(x^2+x)-x^2=x$; **б)** сумма решений не является решением той же неоднородной системы; **в)** многочлен $\sqrt{2}(x^2+x+1)$ не является многочленом с целыми коэффициентами; **д)** координаты нулевого вектора рациональны.

1.32. 0.

1.33. В п. **а), б), г)** указаны подпространства.

1.35. а) $\vec{b}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$; **б)** $\vec{b}=\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3$; **в)** $\vec{b}=\vec{a}_1-\vec{a}_2-\vec{a}_3$; **г)** $\vec{b}=-2\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3$.

1.36. *Указание.* $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$. **а)** (3, 11, 19, 27); **б)** (6, 7, 8, 9); **в)** (100, 100, 100, 100).

1.37. а) λ любое; **б)** $\lambda\neq 12$; **в)** таких λ не существует.

1.38. $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{w}=2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$.

1.39. а) $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ состоит из векторов вида $(\alpha,0)$, $\vec{x}\notin L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;
б) $\vec{x}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\mathbb{R}^2$; **в)** $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ состоит из векторов вида $(\alpha,0,\beta)$, $\vec{x}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$; **г)** $\vec{x}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\mathbb{R}^3$.

1.40. *Указание.* Проверьте, что если $\vec{x},\vec{y}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, то $\vec{x}+\vec{y},\lambda\vec{x}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

1.41. а) $\lambda=5$; **б)** $\lambda=15$; **в)** таких λ нет.

1.42. а) нет; **б)** да.

1.46. Векторы $\vec{a},\vec{b}$ коллинеарны.

1.48. Допустим, что $\vec{c} = p_1\vec{x} + p_2\vec{a} + p_3\vec{b}, \vec{b} = q_1\vec{x} + q_2\vec{a};$ тогда исключая вектор $\vec{x}$ из этих равенств, получим представление вектора $\vec{c}$ через $\vec{a}, \vec{b}$, что невозможно.

1.49. Поскольку векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\vec{d} = (1; 1; 1; 1)$, то

а) $\dfrac{\vec{a}_1 + \vec{a}_n}{2} n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}; \dfrac{n(n+3)}{2}; \dfrac{n(n+5)}{2}; \dfrac{n(n+7)}{2} \right)$; **б)** $-n\vec{d}$.

1.50. Поскольку $\vec{d} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$, то имеем: $\vec{b} = 23\vec{a}_1 - 10\vec{d} = 23\vec{a}_1 - 10(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) =$ $= 33\vec{a}_1 - 10\vec{a}_2$, $\vec{c} = -7\vec{a}_1 + 140\vec{d} = -7\vec{a}_1 + 140(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = -147\vec{a}_1 + 140\vec{a}_2$.

1.51. *Указание.* Целочисленная линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ представима в виде суммы $x\vec{a}_1 + y\vec{d}$ для подходящих целых x; верно и обратное.

1.52. а) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$, $\vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4$; **б)** нельзя, поскольку третья координата у векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_5$ равна нулю, а у вектора $\vec{e}_3$ – единице; **в)** $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

1.55. а) $\vec{a}_E = (1, 1, 1)$, $\vec{b}_E = (2, 1, 1)$; **б)** $\vec{a}_E = \left(1; \dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$, $\vec{b}_E = \left(2; \dfrac{8}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

1.56. а) $\vec{a}_E = (4, -1, -1, -1)$, $\vec{b}_E = (2, -1, -2, 3)$; **б)** $\vec{a}_E = (2; 1; -1; 2)$, $\vec{b}_E = (4; 3; -2; -2)$.

1.57. *Указание.* Выполним замену переменной $t = x - 1$ и разложим многочлен по степеням новой переменной t. Имеем: $\vec{a} = x^2 + 2x - 1 =$ $= (t+1)^2 + 2(t+1) - 1 = t^2 + 4t + 2$. $\vec{a}_E = (2; 4; 1)$; $\vec{b}_E = (11; 10; 4)$.

1.58. $\vec{a}_E = (27; 23; 8; 1)$; $\vec{b}_E = (47; 59; 26; 4)$.

1.59. Да.

1.61. Нет.

1.62. Систему S можно расширить до линейно независимой системы S_1, добавив к ней вектор $\vec{t}$, который не выражается линейно через S (если такого вектора не существует, то S – базис). Расширяя последовательно S до S_1, S_1 до S_2 и т.д., получим через конечное число шагов базис пространства V.

1.65. Выберем базис E в подпространстве U и дополним его до базиса G пространства V. Поскольку в базисе G не меньше элементов, чем в E, то первое утверждение доказано. Второе утверждение доказывается аналогично.

1.66. а) $\vec a_2 = 2\vec a_1 - \vec a_4,\ \ \vec a_3 = 2\vec a_1 + \vec a_4$; **б)** $\vec a_1 = \vec a_2 + 2\vec a_4,\ \ \vec a_3 = 2\vec a_2 - 3\vec a_4$;
в) $\vec a_3 = \vec a_1 + \vec a_2,\ \ \vec a_4 = -2\vec a_1 + \vec a_2$; **г)** $\vec a_1 = -\vec a_2 + 2\vec a_4,\ \ \vec a_3 = \vec a_2 - \vec a_4$.

1.67. а) $\vec a_1 = \vec a_2 + \vec a_3$; $\vec a_2,\ \vec a_3,\ \vec a_4$ – базис; **б)** $\vec a_4 = \vec a_1 + \vec a_2 - \vec a_3$; $\vec a_1,\ \vec a_2,\ \vec a_3$ – базис; **в)** $\vec a_1 = -\vec a_2 + 2\vec a_3,\ \ \vec a_4 = -\vec a_2 + \vec a_3$; $\vec a_2,\ \vec a_3,\ \vec a_5$ – базис; **г)** $\vec a_3 = \vec a_2 + \vec a_4$, $\vec a_5 = \vec a_1 - \vec a_2 - \vec a_4$; $\vec a_1,\ \vec a_2,\ \vec a_4$ – базис.

1.68. а) Любые два вектора $\{\vec a_1, \vec a_4\},\ \{\vec a_2, \vec a_4\},\ \{\vec a_3, \vec a_4\}$ образуют базис;
б) базис содержит три вектора: любые два из векторов $\vec a_1, \vec a_2, \vec a_5$ и один из векторов $\vec a_3, \vec a_4$.

1.72. Справедливы утверждения **а)** и **в)**, утверждение **б)** неверно.

1.73. а) и **б)** следуют из аксиом 1) – 3), например, $\left(\vec a, \lambda\vec b\right) = \left(\lambda\vec b, \vec a\right) = \lambda\left(\vec b, \vec a\right) = \lambda\left(\vec a, \vec b\right)$; **в)** в силу **а)** $\left(\vec a, \vec b - \vec c\right) + \left(\vec a, \vec c\right) = \left(\vec a, \left(\vec b - \vec c\right) + \vec c\right) = \left(\vec a, \vec b\right)$;
г) в силу аксиомы 3) имеем: $\left(\vec 0, \vec a\right) = \left(\vec 0 + \vec 0, \vec a\right) = \left(\vec 0, \vec a\right) + \left(\vec 0, \vec a\right)$, откуда $\left(\vec 0, \vec a\right) = 0$ и ввиду аксиомы 1) $\left(\vec a, \vec 0\right) = \left(\vec 0, \vec a\right) = 0.$

1.74. а) поскольку $\left(\vec a, \vec a\right) = 0$, то в силу аксиомы 4) $\vec a = \vec 0$; **б)** имеем: $0 = \left(\vec x, \vec a\right) - \left(\vec x, \vec b\right) = \left(\vec x, \vec a - \vec b\right)$, откуда в силу **а)** получаем $\vec a - \vec b = \vec 0$ и $\vec a = \vec b$.

1.76. Скалярное произведение указано только в пункте **г)**.

1.77. Соотношения таковы: $\beta = \gamma,\ \ \alpha > 0,\ \ \delta > 0,\ \ \beta^2 - \alpha\delta < 0$. Заметим, что при любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ введенное правило удовлетворяет аксиомам 2) и 3) определения скалярного произведения. Аксиома 1) равносильна равенству $\beta = \gamma$. Для проверки аксиомы 4) рассмотрим $\left(\vec a, \vec a\right)$ при $a_1 = z, a_2 = t$, $\beta = \gamma$: $\left(\vec a, \vec a\right) = \alpha z^2 + 2\beta z t + \delta t^2$. Следовательно, в случае ненулевого вектора $\vec a$ имеем: $\left(\vec a, \vec a\right) > 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha > 0, \delta > 0, \beta^2 - \alpha\delta < 0$.

1.78. а) $|\vec a| = \sqrt6,\ \left|\vec b\right| = \sqrt2,\ \dfrac{\pi}{6}$; **б)** $|\vec a| = \sqrt3,\ \left|\vec b\right| = \sqrt2,\ \ \arccos\dfrac{\sqrt6}{3}$;
в) $|\vec a| = 2,\ \left|\vec b\right| = 2,\ \pi$; **г)** $|\vec a| = 3,\ \left|\vec b\right| = 3,\ \arccos\left(-\dfrac{4}{9}\right)$.

1.80. *Указание.* Запишите неравенство Коши – Буняковского для двумерного пространства со скалярным произведением **а)** $\left(\vec a, \vec b\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2$;
б) $\left(\vec a, \vec b\right) = \ = a_1 b_1 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + 5a_2 b_2$.

1.82. *Указание.* $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\ \vec{b}\right|^2+2\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

1.85. а) $\vec{a}_1=(1;\ -1;\ 2)$, $\vec{a}_2=(-2;\ 0;\ 1)$, $\vec{a}_3=(1;\ 5;\ 2)$; **б)** $\vec{a}_1=(-3;\ 2;\ 1)$, $\vec{a}_2=(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{a}_3=(1;\ 4;\ -5)$.

1.86. а) $\vec{a}_3=(2;\ 2;\ 1;\ 0)$, $\vec{a}_4=(-17;\ 10;\ 0;\ 1)$; **б)** $\vec{a}_3=(-8;\ 6;\ 0;\ 1)$, $\vec{a}_4=(1;\ -2;\ 1;\ 0)$; **в)** $\vec{a}_3=\ (-1;\ -2;\ 1;\ 0)$, $\vec{a}_4=(0;\ 1;\ 0;\ 1)$.

1.89. а) $\vec{e}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\ \frac{1}{2}-,\frac{1}{2}\right)$, $\vec{e}_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$, $\vec{e}_4=\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1.91. а) $\vec{x}=6\vec{a}_1-\vec{a}_2-2\vec{a}_3-\vec{a}_4$; **б)** $\vec{x}=9\vec{a}_1+7\vec{a}_2-21\vec{a}_3+5\vec{a}_4$.

1.92. $\vec{e}_1=(1;\ 0)$, $\vec{e}_2=(2;-1)$ – ортонормированный базис; **а)** $\vec{x}=-\vec{e}_2$; **б)** $\vec{x}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$; **в)** $\vec{x}=3\vec{e}_1-\vec{e}_2$; **г)** $\vec{x}=5\vec{e}_1+7\vec{e}_2$.

1.93. а) $\lambda(1;-2;\ 1),\lambda\in\mathbb{R}$; **б)** $\lambda(0;1;1;\ 1)+\mu(1;0;-2;\ -1),\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

1.94. а) $(1;-2;1;\ 0)$, $(2;1;0;\ 1)$; **б)** $(4;-3;2;\ 1)$. **1.97.** $S^{\perp}\supseteq T^{\perp}$.

Глава 2

2.1. а) $\begin{pmatrix}0&0&3\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}7&-3&1\end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix}3&-2\\5&7\\-1&4\end{pmatrix}$.

2.2. а) 0; **б)** 5.

2.6. а) $\begin{pmatrix}1&12\\19&-1\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}9&-17&-1\\-3&1&-10\end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix}-5&-8&7\\-19&6&-7\\-5&-15&3\end{pmatrix}$.

2.9. *mn*.

2.12. 6.

2.13. а) $AB=(1)$, $BA=\begin{pmatrix}2&-2&2\\3&-3&3\\2&-2&2\end{pmatrix}$; **б)** $AB=\begin{pmatrix}0&-1\\5&8\\7&11\end{pmatrix}$, BA не существует; **в)** $AB=\begin{pmatrix}7&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1&2&7\\5&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}$; **г)** AB не существует, $BA=\begin{pmatrix}4&4&0\end{pmatrix}$.

2.14. а) $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$.

2.15. 850 кг первого вида, 870 кг второго вида и 920 кг третьего вида.

2.16. $\begin{pmatrix} 10 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 40 & 130 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = 9000$ руб.

2.17. а) $(57; 114; 54; 63; 98)$; **б)** 1384.

2.18. $AE = EA = A$.

2.20. а) E_{12}; **б) 0**; **в)** E_{11}.

2.22. В матрице $E_{11}A$ ненулевой является только первая строка, которая совпадает с первой строкой матрицы A; в матрице $E_{12}A$ ненулевой является только первая строка, которая совпадает со второй строкой матрицы A.

2.24. а) верно; **б)** не верно, так как $(E_{11}E_{12}E_{22})^T = (E_{12})^T = E_{21}$,
$E_{11}{}^T E_{12}{}^T E_{22}{}^T = E_{11}E_{21}E_{22} = 0$.

2.25. а) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} \cos 4\alpha & -\sin 4\alpha \\ \sin 4\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$; **г)** запишем матрицу $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ в виде $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, где $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} \cos 8\varphi & -\sin 8\varphi \\ \sin 8\varphi & \cos 8\varphi \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & -\sin\frac{4\pi}{3} \\ \sin\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2.26. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, если n четно, и $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, если n нечетно;

б) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}$.

2.27. а) $\begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.28. **а)** $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

2.29. Условие коммутирования матриц равносильно равенствам **а)** и **б)**.

2.30. Да, верно, например, $(ABA)C = ABAC = ABCA = ACBA = CABA =$ $= C(ABA)$.

2.33. Утверждения пунктов **а)** и **в)** истинны.

2.35. E – ортогональная матрица, а $2E$ – нет. Если A и λA ортогональны, то $\lambda = \pm 1$.

2.37. На основании известных формул тригонометрии имеем:
$A = 2\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}(\cos\alpha \quad \sin\alpha) - E = 2\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2\cos^2\alpha - 1 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 2\sin^2\alpha - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$.

2.38. Поскольку $A^T = A$, то $AA^T - E = (E + \lambda Xx)^2 - E = 2\lambda Xx + \lambda^2 XxXx =$ $= (2+\lambda)\lambda Xx$. Если $Xx = 0$, то $x = xXx = 0$ и $1 = xX = 0$ – противоречие, значит, $\lambda = 0$ или $\lambda = -2$.

2.39. **а)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2.40. **а)** $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

2.41. **а)** 2; **б)** 3; **в)** 3; **г)** 2.

2.42. **а)** если $\lambda \neq 1$, то ранг равен 4; если же если $\lambda = 1$, то ранг равен 1; **б)** если $\lambda \neq \pm 3$, то ранг равен 4; если $\lambda = 3$ или $\lambda = -3$, то ранг равен 3.

2.43. **а)** либо не меняет ее ранга, либо увеличивает ранг на единицу.

2.45. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

2.49. **а)** (0; 0; 0; 0; 0; 0); **б)** $x_1 = x_4 - x_5$, $x_2 = x_4 - x_6$, $x_3 = x_4$; **в)** (13; 2; 7); **г)** (2; 1; –1).

2.50. **а)** (8; –6; 1; 0), (–7; 5; 0; 1); **б)** (2; 0; –5, 7); (0, 1, 5, –7);
в) (2; 0; 0; –3; 0), (0; 1; 0; –1; 0), (0; 0; 3; –4; –1); **г)** (14; 0; 0; –3; –8), (0; 42; 0; 3; 8), (0; 0; 42; –9; –10).

2.51. Данный вектор является решением системы, значит, его можно дополнить до базиса пространства решений, т.е. включить в некоторый фундаментальный набор решений. Общее решение имеет вид

$(x_1; x_2; x_3; -3x_1 - 3x_2 - x_3; 2x_1 + 2x_2)$.

Требуемый фундаментальный набор решений: (1; 0; 0; –3; 2), (0; 1; –4; 1; 2), (0; 0; 1; –1; 0). Для построения фундаментального набора решений достаточно придать свободным переменным значения так, чтобы соответствующие им решения были линейно независимы.

2.52. Для ответа на первый вопрос необходимо найти все значения параметра λ, при которых ранг системы равен двум. Находим единственное значение $\lambda = 0$. При данном значении параметра λ общее решение системы запишется так: $x_1 = 29x_3 + 15x_4, x_2 = 8x_3 + 5x_4$. Фундаментальный набор решений: $(1; 0; 29; 8)$, $(0; 1; 15; 5)$.

2.53. а) $5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$; **б)** $x_1 - x_3 = 0$; **в)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

2.54. Пусть U – подпространство в $\mathbb{R}^n$. Выбирая базис в $U^{\perp}$: $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m$, получим $\vec{x} \in U \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{a}_1) = 0, ..., (\vec{x}, \vec{a}_m) = 0$.

2.61. б) $\{2x + 2y = 1$.

2.62. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_2 - x_4 = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = -4. \end{cases}$

2.65. $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$. **2.66. а)** 1; **б)** –10; **в)** 20.

2.67. а) $x^3 - 3abx + a^3 + b^3$; **б)** $x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x + 2abc$.

2.68. Да, верно. **2.69.** Определитель умножится на 36.

2.70. а) $61a + 55b - 31c - 21d$; **б)** $2a - 8b + c + 5d$.

2.71. $a^5 + b^5$. **2.73.** $x^3 + \mathrm{tr}(A)x^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})x + \det(A)$.

2.74. а) $ab + bc + ca$; **б)** a^2; **в)** 8; **г)** 50. **2.76. а)** 2; **б)** $-\frac{3}{4}$.

2.78. Определитель умножится на $(-1)^{n-1}$.

2.84. Да, поскольку $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 204 & 0 & 4 \\ 527 & 2 & 7 \\ 255 & 5 & 5 \end{vmatrix}$, то из первого столбца можно вынести общий множитель 17.

2.86. Нет; если $I = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, то $\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} = 1$.

2.87. а) -3; **б)** 112; **в)** -53. **2.88. а)** -1; **б)** 10; **в)** 78.

2.89. а) 10; **б)** 1. **2.90. а)** $15 \cdot 5^3$; **б)** $-21 \cdot 6^4$.

2.91. а) 60; **б)** 21. **2.92. а)** -144; **б)** 23.

2.93. а) $(-1)^m$; **б)** $(-1)^m$; **в)** 1.

2.94. а) $x_1 = 2,\ \ x_2 = 3, \ldots,\ x_{n-1} = n$; **б)** $x_1 = a_1,\ \ x_2 = a_2, \ldots,\ x_{n-1} = a_{n-1}$.

2.95. а) $2^{n+1} - 1$; **б)** $\dfrac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$.

2.98. Да, верно.

2.99. Если в матрице A поменять местами первые две строки, то в матрице A^{-1} поменяются местами первые два столбца. Аналогично обстоит дело при перестановке столбцов.

2.101. Да, каждое из условий эквивалентно равенству $B = A^{-1}$.

2.102. Нет, поскольку $0 = |AB| = |A||B| = |B||A| = |BA| = 1$ – противоречие.

2.103. Нет; поскольку строки образуют арифметическую прогрессию, значит, они линейно зависимы.

2.104. Нет, три столбца линейно выражаются через два вектора $\vec{a}, \vec{b}$, значит, столбцы линейно зависимы и определитель равен 0.

2.105. а) $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; **в)** $\dfrac{1}{ab}\begin{pmatrix} b & -c \\ 0 & a \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$.

2.107. а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; **в)** $\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

2.108. а) $(-3; 0)$; **б)** $(4; -5)$; **в)** $(-2; 3)$.

2.109. а) $(1; -2; 1)$; **б)** $(3; 2; 2)$; **в)** $(-2; 5; 2)$; **г)** $(2; 1; 3)$.

2.110. Δ^{n-1}; поскольку $A \cdot \left(A^*\right)^T = \Delta \cdot E$, то $|A| \cdot \left|A^*\right| = \Delta^n$.

2.111. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -35 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 38 & -9 & 1 \end{pmatrix}$.

2.112. а) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 13 & 9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{pmatrix}$; **б)** $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; **в)** $-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $-\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -1 & -11 & -2 \\ -11 & -5 & 7 \\ -2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$. **2.113.** ± 1.

2.114. а) $A(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; **б)** $D\cdot A(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, где

$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица; тогда ее строки ортонормированны: $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1, ac+bd=0$. Следовательно, a,b,c,d можно записать в виде $a=\cos\alpha, b=\sin\alpha,$ $c=\cos\beta, d=\sin\beta$. Далее, $0=ac+bd=\cos(\alpha-\beta)$, откуда $\beta-\alpha=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,$ $k\in\mathbb{Z}$. Значит, $\beta=\alpha\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,$ $\cos\beta=\cos\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm\sin\alpha,$ аналогично, $\sin\beta=\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm\cos\alpha$. Из равенства $ac+bd=0$ вытекает, что знаки у выражений $\pm\sin\alpha,$ $\pm\cos\alpha$ должны быть противоположны. Если $|A|=1,$ то $A=A(\alpha)$. Если же $|A|=-1,$ то $D\cdot A$ ортогональна и $|DA|=1,$ значит, $D\cdot A=A(\alpha),$ откуда $A=D\cdot A(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

2.116. Для невырожденной верхней треугольной матрицы существует последовательность элементарных преобразований, которая приводит ее к единичной матрице.

2.117. *Указание.* Припишем к матрице B справа некоторую неотрицательную матрицу C и будем с помощью элементарных преобразований приводить матрицу B к единичной. Предположим по индукции, что на k -м шаге пара матриц $(B' \mid C')$ имеет вид:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & * & * \\ 0 & 1 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & b'_{kk} & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad b'_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} > 0, \quad C' \geq 0.$$

Будем считать по определению $\Delta_0 = 1$. При этом по предположению индукции все элементы матрицы B', отмеченные звездочками, неположительные. Проверим, что после очередного шага исключения с помощью элемента b'_{kk} ситуация сохранится. Деление k-й строки пары матриц $(B' \mid C')$ на положительный элемент b'_{kk} знаков элементов строки не изменяет. Элементы матриц B' и C' вне k-й строки пересчитываются по правилу прямоугольника: $b''_{ij} = \dfrac{b'_{ij}b'_{kk} - b'_{ik}b'_{kj}}{b'_{kk}} \leq 0$; $c''_{ij} = \dfrac{c'_{ij}b'_{kk} - c'_{ik}b'_{kj}}{b'_{kk}} \geq 0$. Осталось проверить, что $b''_{k+1,k+1} = \dfrac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}$. Но это следует из того, что на предыдущих шагах из углового определителя Δ_{k-1} вынесли множитель $\Delta_1 \cdot \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}} = \Delta_{k-1}$, следовательно, на k-м шаге – множитель $\Delta_{k-1} \cdot \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} = \Delta_k$. Поэтому искомое равенство следует из сравнения исходного определителя и определителя, получившегося после k шагов исключения и равного $\det\left(b''_{k+1,k+1}\right)$. В результате мы получим слева единичную матрицу, а справа неотрицательную матрицу. Если выбрать в качестве матрицы C единичную матрицу, то справа получится обратная матрица $B^{-1} \geq 0$.

2.118. а) несовместна; **б)** $(2; -1; 3)$; **в)** $(1; 2; -2)$.

2.119. 20; 15. **2.120.** 10 %; 20 %; 25 %.

2.122. а) если $\lambda = 2$, то система несовместна; если $\lambda \neq 2$, то система имеет единственное решение $\left(\dfrac{5\lambda - 26}{\lambda - 2}; \dfrac{-4\lambda + 16}{\lambda - 2}; 4\right)$; **б)** Если $\lambda = -2$, то система несовместна; если $\lambda \neq 1; -2$, то система имеет единственное решение $\left(-\dfrac{\lambda + 1}{\lambda + 2}; \dfrac{1}{\lambda + 2}; \dfrac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}\right)$; если $\lambda = 1$, то система имеет бесконечное множество решений $x + y + z = 1$.

2.123. $\lambda \neq 0, \ \ \lambda \neq 1.$

2.124. а) $\begin{pmatrix} -22 & -25 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} -29 & -12 \\ -106 & 44 \end{pmatrix}$.

2.125. а) $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \\ -152 & 112 & -87 \end{pmatrix}$; **б)** $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$Y = \dfrac{1}{29}\begin{pmatrix} 234 & -76 & -230 \\ -303 & 320 & 538 \\ 171 & -176 & -293 \end{pmatrix}$.

2.128. $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$. **2.129.** $\begin{pmatrix} C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

2.130. $P = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \\ -3 & -5 & -6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2.131. $P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$.

2.132. $X = (1;1;1)^T, X' = \left(1; \dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}\right)^T$; $Y = (2;1;1)^T, Y' = \left(2; \dfrac{8}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)^T$.

2.133. $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

2.137. $P^{-1}Q$.

Глава 3

3.1. а) 1; **б)** 3; **в)** 2; **г)** −1.
3.2. а) (−1; 1); **б)** (2; 1); **в)** (2; 3); **г)** (3; 4).
3.3. а) $18+i$; **б)** $-37+29i$; **в)** 10; **г)** −17.

3.4. а) $2a$; **б)** a^2+b^2; **в)** $2(a^2-b^2)$.

3.5. а) $ab-c^2-d^2$; **б)** $(a-b)^2$; **в)** $a^2+b^2+c^2+d^2$; **г)** −2.

3.6. а) $a-bi$; **б)** $-a+bi$.

3.7. $z+\overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, $z\cdot\overline{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$, $z-\overline{z} = \ = 2\operatorname{Im}(z)i$.

3.10. Пусть $z = a+bi, t = c+di$. Тогда тождество Эйлера в этих обозначениях имеет вид $(z\cdot\overline{z})(t\cdot\overline{t}) = (zt)\overline{(zt)}$.

3.11. а) $1-i$; **б)** $\frac{3+i}{5}$; **в)** $\frac{-5-12i}{13}$; **г)** $\frac{8-i}{5}$.

3.12. а) $\frac{4+3i}{5}$; **б)** i; **в)** $\frac{17+7i}{13}$; **г)** $\frac{30+65i}{41}$.

3.13. а) $\frac{2\left(a^2-b^2\right)}{a^2+b^2}$; **б)** $\frac{4abi}{a^2+b^2}$.

3.14. а) $(1;i)$; **б)** $(1+i;i)$; **в)** $(i;1+i)$; **г)** $(2-i;1+i)$.

3.15. а) $(1;2;3)$; **б)** $(3-11i;-3-9i;1-7i)$.

3.17. а) $1+i,\ 2-i$; **б)** $2+i,\ 3-i$; **в)** $2i-1, 3-i$; **г)** $2+i, 1-3i$.

3.18. а) $\pm 1, \pm i$; **б)** $-1, \omega, \overline{\omega}$, где $\omega=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$; **в)** $\pm 1, \pm\omega, \pm\overline{\omega}$; **г)** $-1, \omega, \overline{\omega}, \pm i$.

3.21. а) $U+W$; **б)** $U-W$; **в)** $U\cdot W^{-1}$; **г)** $U\cdot\left(W^{-1}\right)^T$.

3.23. а) 0; **б)** π; **в)** $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$.

3.25. а) $4\cos\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$; **б)** $2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$, $\frac{\alpha}{2}$.

3.30. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

3.33. а) вертикальная прямая; **б)** горизонтальная полоса; **в)** единичная окружность; **г)** кольцо; **д)** луч с выколотым началом; **е)** угол без вершины.

3.34. а) окружность единичного радиуса с центром в точке (0; 1); **б)** круг единичного радиуса с центром в точке (0; 1); **в)** тот же круг, но без границы; **г)** внешность того же круга.

3.35. а) Серединный перпендикуляр к отрезку; **б)** центр описанной окружности около треугольника.

3.36. а) $-i$; **б)** $3i-4$; **в)** 0; **г)** $i-1$.

3.37. а) $3(\cos 0+i\sin 0)$; **б)** $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; **в)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

3.38. а) $1-i\sqrt{3}=2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$; **б)** $-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$;

в) $1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$; **г)** $\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

3.40. а) $2\left[\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$; **б)** $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$;

в) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right]$; **г)** $\cos\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3.41. а) $4096(1+i)$; **б)** -2^{15}; **в)** $512\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

3.44. Сумма корней равна нулю, а произведение равно единице.

3.45. а) 0, так как сумма строк определителя является нулевой строкой;

б) -3, так как $\begin{vmatrix}1 & 1 & \omega\\ 1 & 1 & \omega^2\\ \omega^2 & \omega & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \omega\\ 0 & 0 & \omega^2-\omega\\ 0 & \omega-\omega^2 & 1-\omega^3\end{vmatrix}=\left(\omega^2-\omega\right)^2=\omega^2+\omega-2=-3$;

в) $-3\omega^2$.

3.47. а) множество U_{n+1} корней $(n+1)$-й степени из 1; **б)** $2\cdot U_{n+2}$;

в) $3\cdot U_{n+3}$.

3.48. Воспользоваться формулами $(\cos x+i\sin x)^2=\cos 2x+i\sin 2x$;

$(\cos x+i\sin x)^3= \;=\cos 3x+i\sin 3x$. В обоих случаях раскрыть скобки в левой части и приравнять отдельно действительные и мнимые части.

3.49. в) положим $z=\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}$, тогда для любого нечетного числа k

$z^k= \;=\cos\dfrac{k\pi}{9}+i\sin\dfrac{k\pi}{9}$. По формуле Муавра $z^{18}=1, z^9=-1$ и для любого натурального числа k $\overline{z}^k=z^{18-k}$. Поскольку $z^k+\overline{z}^k=2\cos\dfrac{k\pi}{9}$, то имеем:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\right)=\left(z+\overline{z}\right)+\left(z^3+\overline{z}^3\right)+\left(z^5+\overline{z}^5\right)+\left(z^7+\overline{z}^7\right)=$$

$$=z+z^3+z^5+z^7+z^{11}+z^{13}+z^{15}+z^{17}=1+z+z^3+z^5+z^7+z^9+z^{11}+z^{13}+z^{15}+z^{17}=$$

$$=1+\frac{z\left(z^{18}-1\right)}{z^2-1}=1.$$

3.50. а) $\dfrac{1}{4}$; **б)** $\dfrac{1}{2}$.

3.58. $f(z)$ делится на z^2-4z+5.

3.65. а) $z=1$ – корень кратности 3, $z=2$ – корень кратности 2, $z=3$ – простой корень; **б)** $z=2$ – корень кратности 3, $z=5$ – простой корень; **в)** $z=1$ – корень кратности 2, $z=2$ и $z=3$ – простые корни;

г) $z_k = \cos\frac{2\pi k}{7} + i\sin\frac{2\pi k}{7}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$ – простые корни.

3.67. а) $f(z) = (z-1)(z-2)(z-3)$; **б)** $f(z) = (z+1)(z-i)(z+i)$;

в) $f(z) = (z-i)(z+i)(z+2i)(z-2i)$; **г)** $f(z) = (z^2+z+1)^2 = (z-\omega)^2(z-\overline{\omega})^2$,

где $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

3.68. а) $f(z) = (z^2+2z+2)(z^2-2z+2)$;

б) $f(z) = (z^2+3)(z^2+3z+3)(z^2-3z+3)$;

в) $f(z) = (z^2+2z)^2 - 1 = (z^2+2z+1)(z^2+2z-1) = (z+1)^2(z+1+\sqrt{2})(z+1-\sqrt{2})$;

г) $f(z) = (z^2+1)^2 - (a+2)z^2 = (z^2+\sqrt{a+2}z+1)(z^2-\sqrt{a+2}z+1)$.

3.69. а) $(z^3-1)(z+1)$; **б)** $(z^5-1)(z^2+z+1)(z^2+1)(z+1)$.

3.70. а) $(z-1)^2(z-2)^3(z-3)(z-1-i)$; **б)** $(z-3+2i)^2(z-2-i)$.

3.71. а) $(z-2)^2(z-3)^2(z^2+1)(z^2-2z+2)$; **б)** $(z^2-2z+5)(z^2-4z+13)^3$.

3.72. а) $x=1$; **б)** $x_1=1, x_2=-3$; **в)** $x_1=3, x_2=4$.

3.73. $x_1=a, x_2=b$.

3.74. а) $(a-b)(b-c)(c-a)$; **б)** $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$. *Указание.* Рассмотрим кубический многочлен $W(x,b,c,d)$; его старший коэффициент равен $-W(b,c,d)$. Далее, он имеет корни b,c,d, значит, верно равенство $W(x,b,c,d) = -W(b,c,d)(x-b)(x-c)(x-d)$. Подставляя вместо переменной x число a, получим ответ.

Глава 4

4.12. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

4.13. а) $\mathrm{Ker}f = \{t(1,1), t\in\mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}\, f = \{t(1,0), t\in\mathbb{R}\}$; **б)** $\mathrm{Ker}f = \{t(-1,1), t\in\mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}f = \{t(1,1), t\in\mathbb{R}\}$; **в)** $\mathrm{Ker}f = \{t(-3,0,1), t\in\mathbb{R}\}$,
$\mathrm{Im}f = \{s(0,1,1) + t(0,0,1), s,t\in\mathbb{R}\}$.

4.14. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}f = 0$, $\mathrm{Im}f = \mathbb{C}$; **б)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}f = 0$, $\mathrm{Im}f = \mathbb{C}$.

4.15. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **4.16.** $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4.17. а) $\mathrm{Ker} f = \{t(1, 0, 1), t \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im} f = \{s(1, 2, 0) + t(0, 2, 1), s, t \in \mathbb{R}\}$;
б) $\mathrm{Ker} f = \{t(-2, -2, 1), t \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im} f = \{s(1, 0, 3) + t(0, 1, -1), s, t \in \mathbb{R}\}$.

4.18. Да.

4.19. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

4.20. а) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4.21. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 36 & 60 \\ -21 & -35 \end{pmatrix}$.

4.22. а) $\begin{pmatrix} -20 & -17 & 15 \\ 7 & 6 & -5 \\ -6 & -8 & 6 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 25 & 29 & 21 \\ -30 & -54 & -52 \\ 34 & 34 & 21 \end{pmatrix}$.

4.23. а) $\vec{x} = -8\vec{e}_1' + 23\vec{e}_2' + 9\vec{e}_3'$; **б)** $\vec{x} = -4\vec{e}_1' + 3\vec{e}_2' - 3\vec{e}_3'$;
в) $\vec{x} = -2\vec{e}_1' - 4\vec{e}_2' - 6\vec{e}_3'$.

4.34. $\begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. **4.35.** $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -14 & -5 \end{pmatrix}$.

4.39. $f(\lambda)$.

4.40. а) $\lambda_1 = 3$, $\vec{x} = a(1;-1)$; $\lambda_2 = 5$, $\vec{x} = a(1;1)$; $a \neq 0$; **б)** $\lambda_1 = -1$, $\vec{x} = a(-4;1)$; $\lambda_2 = 4$, $\vec{x} = a(1;1)$; $a \neq 0$; **в)** $\lambda_1 = -1$, $\vec{x} = a(1;-1)$; $\lambda_2 = 3$, $\vec{x} = a(1;1)$; $a \neq 0$; **г)** $\lambda_1 = 2$, $\vec{x} = a(2;1)$; $\lambda_2 = 3$, $\vec{x} = a(1;1)$; $a \neq 0$.

4.41. а) $\lambda_1 = 1$, $\vec{x} = a$; $\lambda_2 = -1$, $\vec{x} = ai$; $a \neq 0$; **б)** g не имеет (действительных) собственных значений.

4.45. n. **4.46.** n.

4.47. а) $(-1)^n$, **б)** $(-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(A)$; **в)** $|A|$.

4.50. $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$. **4.52.** Совпадают.

4.54. а) Совпадают; **б)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.55. а) $\lambda_1 = 1,\ \ \vec{x} = a(1;0;0);\ \ \lambda_2 = 2,\ \ \vec{x} = a(0;1;0);\ \ \lambda_3 = 3,\ \ \vec{x} = a(0;0;1);\ \ a \neq 0;$

б) $\lambda_1 = 1,\ \ \vec{x} = a(1;1;0);\ \ \lambda_2 = -1,\ \ \vec{x} = a(1;-1;0);\ \ \lambda_3 = 2,\ \ \vec{x} = a(0;0;1);\ \ a \neq 0;$

в) $\lambda_1 = 2,\ \ \vec{x} = a(1;0;0);\ \ a \neq 0;$ **г)** $\lambda_1 = 3,\ \ \vec{x} = a(1;0;0);\ \ \lambda_2 = 4,\ \ \vec{x} = a(4;1;1);$ $a \neq 0.$

4.56. Да; **а)** $\lambda_1 = 2,\ \ \vec{x} = (0;-1;1);\ \ \lambda_2 = 9,\ \ \vec{x} = (0;4;3);\ \ \lambda_3 = 1,\ \ \vec{x} = (-8;4;1);$

б) $\lambda_1 = 0,\ \ \vec{x} = (4;0;-1);\ \ \lambda_2 = 7,\ \ \vec{x} = (2;7;3);\ \ \lambda_3 = -2,\ \ \vec{x} = (2;-2;3);$

в) $\lambda_1 = -1,\ \ \vec{x} = (1;-1;1);\ \ \lambda_2 = 0,\ \ \vec{x} = (1;0;-1);\ \ \lambda_3 = 2,\ \ \vec{x} = (1;2;1);$

г) $\lambda_1 = 3,\ \ \vec{x}_1 = (1;2;0),\ \ \vec{x}_2 = (0;1;-1);\ \ \lambda_2 = 6,\ \ \vec{x} = (2;1;0).$

4.59. $(22;\ 31;\ 38)$.

4.65. fg.

4.66. Нет; если преобразование f в базисе (1; 0), (0; 1) имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то его матрица в базисе (1; 0), (0; 2) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. не является симметрической.

4.72. а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};\ \ \frac{1}{3}(-2;-2;1),\ \ \frac{1}{3}(1;-2;-2),\ \ \frac{1}{3}(-2;1;-2);$

б) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix};\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0),\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}(-1;1;1),\ \ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1;1;-2);$

в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(1;1;0),\ \ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1;1;2),\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}(1;-1;1).$

4.73. а) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$ **б)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$ **в)** $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

4.75. Пусть $\{\vec{e}_1;\vec{e}_2\}$, $\{\vec{e}_1';\vec{e}_2'\}$ – базисы в $\mathbb{R}^2$; f – линейное преобразование, переводящее первый базис во второй, т.е. $f(\vec{e}_1)=\vec{e}_1'$, $f(\vec{e}_2)=\vec{e}_2'$. Докажите, что f – ортогональное преобразование тогда и только тогда, когда выполнены условия: $(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=(\vec{e}_1';\vec{e}_1')$, $(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=(\vec{e}_2';\vec{e}_2')$, $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=(\vec{e}_1';\vec{e}_2')$.

4.77. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.78. а) Да, поскольку преобразование f в стандартном базисе имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; **б)** нет, поскольку преобразование f в стандартном базисе имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, которая не является ортогональной.

4.79. а) $(x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi; x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi)$, вектор повернется на угол α;

б) $(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi; -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi)$, вектор повернется на угол $(-\alpha)$;

в) $(x_1; -x_2)$, вектор отразится относительно оси абсцисс; **г)** $(-x_1; x_2)$, вектор отразится относительно оси ординат.

4.80. а) $\begin{pmatrix} 3 & -12 & 3 \\ -12 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

4.81. а) $\Phi = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$; **б)** $\Phi = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

в) $\Phi = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

4.82. а) $A' = P^TAP$; **б)** $(A')^T = (P^TAP)^T = P^TA^TP = A'$; **в)** $|A||A'| < 0$.

4.84. а) $\Phi = y_1^2 + 5y_2^2$, $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\Phi = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$,

$$C = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

4.85. а) $\Phi = -9y_1^2 + 9y_2^2 + 18y_3^2$, $C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\Phi = -2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2$,

$C = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$; **в)** $\Phi = 3y_1^2 - 9y_2^2 + 9y_3^2$, $C = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 4 & -\sqrt{2} \\ 3 & 1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

г) $\Phi = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$, $C = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

4.86. а) $\Phi = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2$; **б)** $\Phi = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$;

в) $\Phi = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$; **г)** $\Phi = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$.

4.87. а) $\Phi = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$;

б) $\Phi = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2$; **в)** $\Phi = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 - x_3^2$;

г) $\Phi = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 - (x_1 + x_3)^2$.

4.88. а) Φ_1, Φ_2; **б)** Φ_1, Φ_3.

4.89. $\Phi_1 = x_1^2 + x_2^2$, $\Phi_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$.

4.91. а) $\lambda > 2$; **б)** $-2 < \lambda < 2$; **в)** $-1 < \lambda < 0$.

4.92. а) да; **б)** нет.

4.95. *Указание.* Миноры формы $\Phi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ имеют вид $\Delta_1 = a_{11}$ и $\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; число $(-4\Delta_2)$ совпадает с дискриминантом квадратного трехчлена Ф. Заметим, что квадратный трехчлен принимает положительные значения, только если его старший коэффициент положителен, а дискриминант отрицателен.

Глава 5

5.1. а) $\lambda_A = 6$, $\vec{x}_A = t(1;1;2)^T, t > 0$; **б)** $\lambda_A = 5$, $\vec{x}_A = t(1;2;3)^T, t > 0$.

5.3. Нет, поскольку вектор $(1;1;1)^T$ является как левым, так и правым вектором Фробениуса этой матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5.4. а) $\lambda_A = 7$; **б)** $\lambda_A = 4$; **в)** $\lambda_A = 9$; **г)** $\lambda_A = 5$.

5.5. $\lambda_A = \max(\lambda_B, \lambda_D)$.

5.6. а) $\lambda_A = 4$, $\vec{p}_A = t(1;2)^T, t > 0$, $\vec{x}_A = t(2;1)^T, t > 0$; **б)** $\lambda_A = 6$, $\vec{p}_A = t(1;3)^T, t > 0$, $\vec{x}_A = t(2;1)^T, t > 0$.

5.8. а) $3, t(1;0;0), t > 0$; **б)** $2, t(1;1;0), t > 0$; **в)** $2, t(0;0;1), t > 0$; **г)** $6, t(4;4;5), t > 0$.

5.9. Выберем в качестве вектора Фробениуса $\vec{x}_A$ вектор, сумма координат которого равна единице, т.е. $I^T\vec{x}_A = 1$. Так как $A\vec{x}_A = \lambda_A\vec{x}_A$, то, умножая это равенство слева на I^T, получим: $\vec{c}^T\vec{x}_A = (I^T A)\vec{x}_A = I^T(A\vec{x}_A) = \lambda_A(I^T\vec{x}_A) = \lambda_A$, $\lambda_A = \vec{c}^T\vec{x}_A = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$. Отсюда следует, что
$s = s(x_1 + x_2 + x_3) \le \lambda_A \le S(x_1 + x_2 + x_3) = S$.

5.11. а) $3, t(1;1;1), t > 0$; **б)** $5, t(1;1;1), t > 0$; **в)** $9, t(0;0;1), t > 0$; **г)** $7, t(2;4;9), t > 0$.

5.12. а) $\alpha\lambda_A + \beta$; **б)** $(\lambda_A)^k$.

5.14. $a < 2 + \sqrt{3}$.

5.15. а) $a = 2$; **б)** $a = 11$; **в)** $a = 2 + \sqrt{3}$.

5.17. а), г) A продуктивна; **б), в)** A не продуктивна.

5.18. а) продуктивна; **б)** продуктивна. **5.19. а)** не продуктивна; **б)** не продуктивна.

5.20. *Указание.* **а)** сумма элементов каждого столбца меньше единицы; **б)** сумма элементов в каждой строке меньше 1.

5.21. а) $a < \sqrt{10} - 3$; **б)** $a < 5 - 2\sqrt{6}$; **в)** $a < \frac{1}{5}$; **г)** $a < \frac{1}{9}$.

5.22. а) $\alpha = \frac{7}{3} \approx 2{,}3333$; **б)** $\alpha = 49 - 20\sqrt{6} \approx 0{,}0102$; **в)** $\alpha = \frac{5\sqrt{13} - 18}{3} \approx 0{,}0093$.

5.24. *Указание.* Воспользоваться следствием из второго критерия продуктивности.

5.25. а) $A = B + C, C \ge 0$. Поскольку A продуктивна, то существует $P \ge 0$, такая, что $E = (E - A)P = (E - B)P - CP$, откуда $(E - B)P = E + CP$, значит, матрица B продуктивна; **б)** допустим от противного, что $\lambda_A < \lambda_B$. Тогда $\lambda_B > 0$ и $\lambda_A/\lambda_B < 1$. Далее, в силу второго критерия продуктивности матрица $A_1 = A/\lambda_B$ продуктивна, а $B_1 = B/\lambda_B$ – нет, поскольку $\lambda(A_1) = \lambda_A/\lambda_B < 1$, $\lambda(B_1) = \lambda_B/\lambda_B = 1$. Заметим, что $A_1 \ge B_1$ – противоречие с пунктом **а)**.

5.26. Поскольку A_1 продуктивна, то существует $P_1 \geq 0$, такая, что $(E - A_1)P_1 = E$. Тогда $(E - A)P = E + \vec{c}\vec{p}$, где $\vec{p}$ – вектор, состоящий из первых n чисел последней строки матрицы P_1, а P – матрица, полученная из матрицы P_1 вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Следовательно, матрица A продуктивна ввиду задачи 5.25.

5.27. *Указание.* Если A_1 продуктивна, то существует $P_1 \geq 0$, такая, что $(E - A_1)P_1 = E$. Тогда A и A^T продуктивны, значит, найдется $\vec{x} \geq 0$, такой, что $\vec{x}A^T = \vec{b}$. Умножить обе части равенства $(E - A_1)P_1 = E$ слева на матрицу $\begin{pmatrix} E & 0 \\ \vec{x} & 1 \end{pmatrix}$ и рассмотреть определители. В обратную сторону рассуждения аналогичны.

5.28. Да.

5.29. **а)** Продуктивна; **б)** сравнить матрицу A с матрицей $B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$, у которой число Фробениуса равно 1. По второму критерию продуктивности A не продуктивна.

5.31. **а)** $(0; 4)$; **б)** $(0; 5)$; **в)** $\left(0; \sqrt{21}\right)$; **г)** $\left(0; \dfrac{\sqrt{37} - 4}{3}\right)$.

5.32. **а)** $\vec{x} = (100; 40)$; **б)** 10 %, 55 %.

5.33. $A = \begin{pmatrix} 0,15 & 1,2 \\ 0,25 & 0,2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = (120; 70)$.

5.34. 25,17 %.

5.35. **а)** $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$; **б)** первая отрасль; **в)** $\vec{x} = \ = (122,0; 121,4; 65,2)$.

5.36. **а)** $\vec{p} = (9,94; 7,43; 6,15)^T$; **б)** 14,94%; 3,99%; 5,00%.

5.37. $\vec{x} = (102,1; 56,2; 28,3)$.

Глава 6

6.1. а) $(1;-2)$; **б)** $(1;1)$; **в)** $\left(-\frac{4}{5};-\frac{4}{5}\right)$ **г)** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

6.2. $a=4$.

6.4. а) $\frac{x+\frac{C}{A}}{B}=\frac{y}{-A}$; **б)** $\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)}=1$; **в)** $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$.

6.5. а) $y=x\sqrt{3}+\sqrt{5}$; **б)** $y=2x+3$.

6.7. $\frac{x}{-\frac{1}{3}}+\frac{y}{-\frac{1}{4}}=1$.

6.8. а) $x-y+3=0$; **б)** $4x+3y+1=0$.

6.9. а) $qx-py-aq+bp=0$; **б)** $bx+ay-ab=0$; **в)** $kx-y+b=0$.

6.10. а) $\vec{p}(1;\ k)$; **б)** $\vec{n}(k;-1)$; **в)** $m\ :\ x+ky=0$.

6.11. $\frac{|k_1k_2+1|}{\sqrt{k_1^2+1}\sqrt{k_2^2+1}}$.

6.12. а) $x=2+8t;\ y=-12t$; **б)** $\frac{x-2}{8}=\frac{y}{-12}$; **в)** $y=3-\frac{3}{2}x$; **г)** $3x+2y-6=0$;

д) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

6.13. $AB:\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{3}$; $BC:x+1=\frac{y-1}{2}$; $AC:x-3=y-4$.

6.14. $L\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3};\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$.

6.15. а) $x+2y-11=0$; **б)** $2x-y-2=0$.

6.16. $3x-5y-12=0$.

6.17. а) $x+2y-16=0$; **б)** $5x-3y-2=0$; **в)** $3x+2y-24=0$;
г) $7x-y-22=0$.

6.18. а) $\frac{x-7}{4}=\frac{y-6}{-7}$; **б)** $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{-1}$.

6.19. $L\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$. **6.20.** $\frac{x}{10}+\frac{y}{-15}=1$.

6.21. $\rho(M,l)=10$. **6.22.** $\rho(l_1,l_2)=\frac{6}{17}$.

6.23. $M\left(\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}};\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. **6.24.** $l\ :\ x-y-1=0$.

6.26. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y-4}{1}$. **6.27. а)** $A'(15;\ 29)$; **б)** $A'(13;18)$. **6.28.** $11x+22y+3=0$.

6.29. а) $16x+51y-67=0$; **б)** $49x+24y-73=0$; **в)** $3x-11y+8=0$.

6.30. а) $M\notin l$; **б)** $M\in l$.

6.31. а) $x=3-4t, y=5-4t, z=4-2t$; **б)** $\frac{x-3}{-4}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z-4}{-2}$.

6.32. а) $12x+8y+6z-24=0$; **б)** $x=2-4t_1-10t_2,\quad y=3+12t_1+9t_2,$

$z=4-8t_1+8t_2$; **в)** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.

6.33. а) $\pi\ :\ x-3y-5z+14=0$; **б)** $AB:\frac{x-3}{-4}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-1}{1}$,

$BC:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1},\quad AC:\frac{x-3}{-5}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-1}{2}$.

6.34. $a=-2$.

6.35. а) Пересекаются; **б)** параллельны; **в)** совпадают; **г)** скрещиваются.

6.36. а) Совпадают; **б)** параллельны; **в)** пересекаются по прямой.

6.37. а) $l\subset\pi$; **б)** параллельны; **в)** пересекаются.

6.38. $m\ :\ \frac{x-3}{-2}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-2}{3}$.

6.39. $l\ :\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{3}$.

6.40. а) $\pi\ :\ 5x+6y+7z+13=0$; **б)** $\pi\ :\ 3x+2y+4z+15=0$.

6.41. $M_0(-1;\ 1;-1)$. **6.42.** $l_0\ :\ \frac{x-1}{-25}=\frac{y-1}{20}=\frac{z-1}{9}$.

6.43. $M_0(1;-1;-1)$. **6.44. а)** 5; **б)** 1.

6.45. 2. **6.46.** 3. **6.47.** $3\sqrt{2}$.

6.48. а) $2\sqrt{2}$; **б)** $\sqrt{3}$. **6.49.** $\pi\ :\ 8x+11y-21z-77=0$.

6.50. а) $\frac{5}{7}$; **б)** $\frac{25}{29}$. **6.51. а)** $\frac{\pi}{4}$; **б)** $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{23}{25}$.

6.52. $\frac{x-1}{0}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-2}{4},\quad \{x=1, y=4-2t, z=2+4t\}$.

6.53. $3x+2y+10z+37=0$. **6.54.** $2x-3y+2z-5=0$.

6.55. $\pi\ :\ x+4y+2z-21=0$. **6.56.** $\pi\ :\ 5x+y-2z-7=0$.

6.58. $A'(-5;-2;9)$. **6.60.** $\pi: x+2y+z-8=0$. **6.61.** $A'(-4;-1;6)$.

6.62. 5. **6.63.** $a=0, b=0$. **6.64.** $\frac{2\pi}{3}$ или 120°. **6.66.** 7.

6.67. а) $A(-11;12;0;0)$, $\overrightarrow{p_1}=(13;-10;1;0)$, $\overrightarrow{p_2}=(-1;-1;0;1)$;

б) $A(16;-30;0;0)$, $\overrightarrow{p_1}=(-12;27;1;0)$, $\overrightarrow{p_2}=(9;-22;0;1)$.

6.68. $P(-1,-1,6,6)$. **6.70.** $P(1;2;4;7)$.

6.71. а) $M'(5;4;11;10)$; **б)** $M'(4;9;10;7)$; **в)** $M'(4;9;8;9)$.

6.74. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **6.75.** 1.

6.76. M_1. **6.82.** Да. **6.83.** $AP:PB=l:k$. **6.84.** Нет.

6.85. $1:3:6$. **6.87.** $AP:MP=3:1$. **6.92.** $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$.

6.93. а) $(0;1)$; **б)** $(4;5)$, $(5;4)$; **в)** $(2;3),(4;7),(6;4)$;

г) $(0;0)$, $(0;2)$, $(2;1)$, $(3;0)$; **д)** $(0;0)$, $(4;6)$, $(7;4)$, $(9;0)$.

6.94. а) $(0;0;1)$, $(3;0;4)$, $(0;4;5)$; **б)** $(3;0;4)$, $(0;2;3)$.

6.95. а) $(3;0;0;1)$, $(4;0;2;0)$, $(0;2;0;0)$; **б)** $(0;0;4;3)$, $(0;2;0;1)$, $(2;1;0;0)$, $(3;0;1;0)$.

6.96. $(0;0;0)$, $(10;0;0)$, $(0;5;0)$, $(0;0;4)$.

6.97. $(0;0;0)$, $(60;0;0)$, $(0;30;0)$, $(0;0;24)$, $(20;0;20)$, $(24;24;0)$.

6.98. 4, если $L\in(0;2]\cup[4;\infty)$; 5, если $L=3$; 6, если $L\in(2;3)\cup(3;4)$.

6.99. 3, если $K=15$; 4, если $K=25$; 5, если $K=35$; 6, если $K=45$.

6.100. а) $(10;5;0;5)$, $(0;15;10;15)$; **б)** $(2;3;0;14;0)$, $(4;7;0;0;14)$, $(6;4;14;0;0)$.

6.101. $(0;75;0;25)$, $(0;50;50;0)$, $(50;0;0;50)$, $(25;0;75;0)$.

6.102. 15.

6.103. а) $\begin{cases}5x+2y\ge-12,\\ x+8y\le 28,\\ 2x-3y\le-1;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}1\le x+y\le 3,\\ -1\le x-y\le 1;\end{cases}$ **в)** $\begin{cases}x-y\ge-2,\\ x+y\le 5,\\ x\ge 0,\\ 0\le y\le 3;\end{cases}$ **г)** $\begin{cases}x+y\le 3,\\ x\ge 0,\\ y\ge 1.\end{cases}$

6.104. 1. **а)** эллипс; **б)** 2, $\sqrt{2}$; **в)** $2\sqrt{2}$; **г)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2. **а)** гипербола; **б)** $\sqrt{3}, \sqrt{2}$; **в)** $2\sqrt{5}$; **г)** $\sqrt{\frac{5}{2}}$; **е)** $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$.

3. **а)** парабола; **г)** 1; $(5;4)$; **д)** $x = -3$.

4. **а)** гипербола; **б)** $1, 1$; **в)** $2\sqrt{2}$; **г)** $\sqrt{2}$; **е)** $y = \pm x$.

5. **а)** окружность; **б)** 3; **в)** 0; **г)** 0.

6.105. а) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$; **б)** $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$.

6.106. а) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$; **б)** $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$.

6.107. а) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$; **б)** $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{10^2} = 1$.

6.108. а) $|F_1M| + |F_2M| = 10\sqrt{2}$; **б)** $F_1M \, : \, \frac{x-5}{5+3\sqrt{2}} = \frac{y-4}{4}$,

$F_2M \, : \, \frac{x-5}{5-3\sqrt{2}} = \frac{y-4}{4}$.

6.109. а) $|F_1M| - |F_2M| = 6$; **б)** $y = \pm\frac{4}{3}x$; **в)** $F_1M \, : \, \frac{x+5}{5+3\sqrt{2}} = \frac{y}{4}$,

$F_2M \, : \, \frac{x-5}{3\sqrt{2}-5} = \frac{y}{4}$.

6.112. $\gamma \, : \, \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{7} = 1$.

6.113. *Указание.* Точки этой линии и только они одинаково удалены от фокуса $F(0;1)$ и директрисы $d \, : \, y = -1$.

6.114. $2yy_0 - 2px + y_0^2 = 0$.

6.116. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$.

6.117. $F_1(3;0)$, $F_2(5;0)$.

6.120. а) $zt = 2$; **б)** $z^2 + t^2 = 4$; **в)** $(z+t)^2 = z - t$; **г)** $3z^2 - 2zt + 3t^2 = 1$.

6.121. а) эллипс; **б)** гипербола; **в)** парабола; **г)** гипербола.

6.122. $y'^2 - 25 = 0$ – пара пересекающихся прямых, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+4 \end{pmatrix}$.

6.123. $y'^2 - 16 = 0$ – пара параллельных прямых, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

6.124. $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ – гипербола.

6.125. $\dfrac{x^2}{9^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ – эллипс.

6.126. $z^2+\dfrac{t^2}{2}=1$ – эллипс, где $\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

6.127. $z^2-t^2=1$ – гипербола, где $\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

6.128. $\gamma : y'^2-\dfrac{49}{2}=0,$ – пара параллельных прямых,

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

6.129. $\gamma\ :\ y'^2=0$ – пара совпадающих прямых, где

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.130. $y'^2=-\sqrt{2}x'$ – парабола, где $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.131. $\dfrac{x'^2}{3^2}+\dfrac{y'^2}{2^2}=1$ – эллипс, где $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Глава 7

7.21. а) $f=11x_3+19x_4+13\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} -4x_3-4x_4\le 5, \\ 5x_3+7x_4\le -6; \end{cases}$

б) $f=32x_3+24x_4-6\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} 7x_3+6x_4\le 2, \\ -10x_3-9x_4\le -2; \end{cases}$

в) $f=6x_3-2x_4+5\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} x_3-x_4\le 3, \\ -x_3+x_4\le 4; \end{cases}$

г) $f=-6x_3+2x_4-9\to\max$ при $\vec{x}\ge 0$ и $\begin{cases} 5x_3-3x_4\le -3, \\ 2x_3-x_4\le -3. \end{cases}$

7.22. $f_{\min}(3;2)=12$. **7.23.** $f_{\max}(4;6)=16$. **7.24.** $f_{\min}(1;2)=7$.
7.25. $f_{\min}=-\infty$. **7.26.** $f_{\max}(5;6)=23$. **7.27.** $f_{\min}(3;1)=6$.
7.28. $f_{\max}(3;5)=21$. **7.29.** $f_{\min}(2;3)=-6$. **7.30.** $f_{\min}(4;1)=2$.
7.31. $f_{\min}(1;0)=1$. **7.32.** $f_{\max}(0;4)=4$. **7.33.** $f_{\max}(5;2)=12$.
7.34. $f_{\max}(3;6)=4$. **7.35.** $f_{\min}(2;3)=9$. **7.36.** $f_{\max}(14;0)=14$.

7.37. Нет допустимых решений. **7.38.** $f_{\min}(10;9) = -11$.

7.39. $f_{\min}(2+4t;3+t) = -20, \quad t \in [0;1]$.

7.40. $f_{\max}(2+2t;3-2t) = -4, t \in [0;1]$.

7.41. Нет допустимых решений.

7.42. $f_{\max}(2+t;3+3t) = 7, t \in [0;1]$.

7.43. $f_{\min}(1+t;4+2t) = -3, t \ge 0$.

7.44. $f_{\max}(5;3) = 21$. **7.45.** $f_{\min}(3;2;1) = 0$.

7.46. $f_{\max}(3;6) = 15$. **7.47.** $f_{\min}(6;4) = -7$.

7.48. $f_{\max}(3;2) = 13$. **7.49.** $f_{\min}(4-4t;5-t) = -16, t \in [0;1]$.

7.50. $f_{\max}(2;6;33;0;0) = 2$.

7.51. $f_{\max}(5;2;8;0;0) = 21, \quad f_{\min}(0;4;0;30;3) = 8$.

7.52. $f_{\max} = +\infty, \quad f_{\min}(2;3;0;0;2) = 13$.

7.53. $f_{\max}(2;6;0;0;14) = 19, \quad f_{\min}(4;3;12;0;0) = 6$.

7.54. $f_{\max}(2;5;0;0;17) = 18, \quad f_{\min}(3;0;13;10;0) = 2$.

7.55. $f_{\max} = +\infty, \quad f_{\min}(2;2;7;0;0) = 12$.

7.56. $f_{\max}(2;0;8;0;1) = -1, \quad f_{\min}(4-4t;3+2t;0;5-2t;10t) = -9, \quad t \in [0;1]$.

7.57. $f_{\max}(1+2t;2-t;4-4t;3t;0) = 5, \quad t \in [0;1], \quad f_{\min}(1{,}8;0{,}4;0;0;2{,}4) = 2{,}6$.

7.58. $f_{\max}(0;4;0;0) = 4, \quad f_{\min} = -\infty$.

7.59. $f_{\max}(2t;3-2t;0;2-2t) = 5, \quad f_{\min}(0;0;1;1) = 4$.

7.60. $f_{\max}(1;0;0;4) = 3, \quad f_{\min}(0;1;0{,}25;0) = 1{,}75$.

7.61. $f_{\max}(3t;2{,}5-1{,}5t;0;1{,}5-1{,}5t) = 4, t \in [0;1], \quad f_{\min}(1;0;1;0) = 2$.

7.62. $f_{\max}(1;0;1;0) = 2, \quad f_{\min} = -\infty$.

7.63. $f_{\max}\left(\frac{4}{3};0;0;\frac{1}{3};\frac{13}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad f_{\min}\left(\frac{15}{8};0;\frac{13}{8};\frac{5}{2};0\right) = -4$.

7.64. $f_{\max} = +\infty, \quad f_{\min}(2;1;0;0;5) = 15$.

7.65. $f_{\max}(3;8;0;20;0) = 19, \quad f_{\min}(1;4;0;0;12) = 5$.

7.66. $f_{\max}(1;2;4;0;0) = 9, \quad f_{\min}(3;1;0;3;0) = 4$.

7.67. $f_{\max}(0;0;2;0;9) = 14$.

7.68. $f_{\max}(0;3t,0;3-3t;5-3t) = 3, \quad t \in [0;1]$.

7.69. $f_{\max}(4;6;10;0;0) = 16$.

7.70. $f_{\max}(5;6;9;0;0)=23.$

7.71. $f_{\min}(4;1;0;0;5)=2.$

7.72. $f_{\max}(0;8;8;30;0)=23.$

7.73. $f_{\max}=+\infty.$

7.74. $f_{\max}(1,5-1,5t;2+2t,0;4t;4+8t)=12,\ t\in[0;1].$

7.75. $f_{\min}(5;0;1;0;2)=-15.$

7.76. $f_{\min}(5+9t;1,5+1,5t,3t;3-3t;0)=12,\quad t\in[0;1].$

7.77. $f_{\max}(1;0;3;0;2)=17.$

7.78. $f_{\min}(3;2;1;0)=0.$

7.79. $f_{\max}(6;7;0)=20.$

7.80. $f_{\max}(6;1)=11.$

7.81. $f_{\max}(2;6;33;0;0)=22.$

7.82. $f_{\max}(6;2;9;0;0)=36.$

7.83. $f_{\max}(2;5;0;0;17)=18.$

7.84. $f_{\min}(5;0;0;0;1,5;1,5)=-5.$

7.85. $f_{\max}(0;0;9;7;7;5)=20.$

7.86. $f_{\min}(3;2;1;0;2;0)=-18.$

7.87. $f_{\min}(7,1;0;0;1,3;0;0,4)=7,1.$

7.88. $f_{\min}=-\infty.$ **7.89.** $f_{\max}(1;0;0;4)=3.$

7.90. $f_{\max}(3t;2,5-1,5t;0;1,5-1,5t)=4,\quad t\in[0;1].$

7.91. $f_{\min}(3;2;0;0;9)=12.$ **7.92.** $f_{\min}(1;2;0;0;4)=7.$

7.93. $f_{\min}=-\infty.$ **7.94.** $f_{\min}(3;1;0;3;0)=6.$

7.95. $f_{\max}(5;2;0;0;7)=12.$ **7.96.** $f_{\min}(2;3;0;15;0)=9.$

7.97. $f_{\min}(2+4t;3+t;0;7-7t;7t)=-20,\quad t\in[0;1].$

7.98. Нет допустимых решений.

7.99. $f_{\max}(3;6;11;0;0;18)=15.$

7.100. $f_{\min}(4-4t;5-t;0;t;12+5t;16-16t)=-16,\quad t\in[0;1].$

7.101. $f_{\min}(11;0;7;39;0)=-77.$

7.102. $f_{\max}=+\infty.$

7.103. Нет допустимых решений.

7.104. а) $\varphi = -3y_1 - 2y_2 + 4 \to \min$ при $y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0$ и $\begin{cases} 2y_2 \le 5, \\ 5y_1 - 5y_2 \ge 1, \\ -3y_1 - 2y_2 = -4; \end{cases}$

б) $\varphi = -2y_1 + y_2 + 2 \to \max$ при $y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0$ и $\begin{cases} -4y_1 - 5y_2 \ge -5, \\ 3y_1 + y_2 = 2, \\ -2y_1 + 2y_2 \le 1; \end{cases}$

в) $\varphi = 3y_1 - 4y_2 - 1 \to \min$ при $y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0$ и $\begin{cases} -4y_1 - 5y_2 = -4, \\ 5y_1 \ge -3, \\ -4y_2 \le 1; \end{cases}$

г) $\varphi = 3y_1 + 5y_2 - 3 \to \max$ при $y_2 \le 0$ и $\begin{cases} 3y_1 + 3y_2 \ge -1, \\ -2y_1 \ge 3, \\ 5y_1 - 4y_2 \ge 0; \end{cases}$

7.105. $f_{\min}(1;1;0) = 58$. **7.106.** $f_{\min}(3;1;0) = 15$.

7.107. $f_{\min}(3;2;0) = 70$. **7.108.** $f_{\min}(1;1;0) = 118$.

7.109. $f_{\min}(1;3;0) = 217$. **7.110.** $f_{\min}(8;2;0;0) = 52$.

7.111. $f_{\min}(2;0;0;5) = 12$. **7.112.** $f_{\min}(0;4;0;2) = 62$.

7.113. $f_{\min}(0;4;0;0) = 48$. **7.114.** $f_{\max} = +\infty$.

7.115. а) $z_{\max}(0;7) = w_{\min}(4;0;0) = 36$;

б) $z_{\max}(51;14) = w_{\min}(21;18;0) = 269$;

в) $z_{\max}(54;16) = w_{\min}(83;37;0) = 652$;

г) $z_{\max}(70;15) = w_{\min}(40;34;0) = 568$.

Учебное издание

Пчелинцев Сергей Валентинович
Бабайцев Владимир Алексеевич
Солодовников Александр Самуилович и др.

Сборник задач
по курсу «Математика в экономике»

Часть 1

Линейная алгебра, аналитическая геометрия
и линейное программирование

Заведующая редакцией *Л.А. Табакова*
Ведущий редактор *Л.Д. Григорьева*
Художественный редактор *Ю.И. Артюхов*
Технический редактор *Т.С. Маринина*
Корректоры *Н.Б. Вторушина, Н.П. Сперанская*
Оформление художника *Н.М. Биксентеева*

ИБ № 5338

Подписано в печать 26.08.2012. Формат $60x90^1/_{16}$
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная
Усл. п.л. 15,68. Уч.-изд. л. 14,16
Тираж 1500 экз. Заказ «С» 059

Издательство «Финансы и статистика»
101000, Москва, ул. Покровка, 7

Телефон (495) 625-35-02. Факс (495) 625-09-57
E-mail: mail@finstat.ru http://www.finstat.ru