П.Н. БРУСОВ, Т.В. ФИЛАТОВА,
Н.П. ОРЕХОВА, П.П. БРУСОВ

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Конспект лекций

Учебное пособие

КНОРУС • МОСКВА • 2015

KnorusMedia
электронные версии книг

УДК 681.140(075.8)
ББК 65.26я73
Б89

Брусов П.Н.

Б89 Финансовая математика. Конспект лекций : учебное пособие / П.Н. Брусов, Т.В. Филатова, Н.П. Орехова, П.П. Брусов. — М. : КНОРУС, 2015. — 152 с. — (Бакалавриат).

ISBN 978-5-406-03768-3

Предназначено для эффективной подготовки студентов к экзамену (зачету) по финансовой математике (основам финансовых вычислений). Будет полезно как при регулярном изучении предмета в течение семестра, так и для подготовки к экзамену (зачету) в условиях дефицита времени. Написано в соответствии с программой курса «Финансовая математика» для бакалавров.

Для студентов бакалавриата всех финансовых и экономических профилей, включая финансы и кредит, бухгалтерский учет и аудит, налоги, страхование, международные экономические отношения и др. Также будет полезно специалистам всех финансовых и экономических специальностей и всем желающим освоить количественные методы в финансах и экономике.

УДК 681.140(075.8)
ББК 65.26я73

Брусов Петр Никитович, Филатова Татьяна Васильевна,
Орехова Наталья Петровна, Брусов Павел Петрович

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Сертификат соответствия № РОСС RU. АЕ 51. Н 16509 от 18.06.2013.

Изд. № 6957. Подписано в печать 26.02.2014. Формат 60×90/16.
Гарнитура «NewtonC». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 4,45. Тираж 1000 экз. Заказ №

ООО «КноРус».
117218, г. Москва, ул. Кедрова, д. 14, корп. 2.
Тел.: 8-495-741-46-28.
E-mail: office@knorus.ru http://www.knorus.ru

Отпечатано в ГУП МО «Коломенская типография».
140400, Московская обл., г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2а.
Тел.: 8-496-618-69-33, 618-60-16. E-mail: bab40@yandex.ru

ISBN 978-5-406-03768-3

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для эффективной подготовки студентов к экзамену (зачету) по финансовой математике (основам финансовых вычислений). Оно будет эффективным как при регулярном изучении предмета в течение семестра, так и для подготовки к экзамену (зачету) в условиях дефицита времени, когда до него осталось «два дня и одна ночь». Оно написано на основе учебного пособия «Финансовая математика» для бакалавров П.Н. Брусова с соавторами (КНОРУС, 2-е изд., 2013). Последнее сокращено примерно на одну треть за счет исключения тем, безусловно важных, но которые обычно не изучаются в стандартных курсах для бакалавров объемом 3—4 кредита (это переменные ренты, портфели с неотрицательными компонентами, ряд свойств дюрации облигации и др.). Изучение этих тем возможно либо при выделении на предмет большего количества кредитов, либо факультативно.

В данном пособии сохранен дух и стиль упомянутого пособия «Финансовая математика»: по-прежнему дается вывод всех формул, сохранены практически все доказательства. Авторы убеждены (и многолетний опыт преподавания дисциплины в Финансовом университете при Правительстве РФ подтверждает это убеждение), что выводы и доказательства, производимые студентами самостоятельно, являются важными навыками, позволяющими студентам не только глубоко понимать предмет, но и выводить новые формулы для нестандартных реальных ситуаций.

Пособие написано в соответствии с программой курса «Финансовая математика» для бакалавров и включает в себя сведения по финансовой математике, знание которых необходимо не только каждому финансисту, но и каждому грамотному экономисту широкого профиля. Оно состоит из девяти лекций по теории процентов, финансовым потокам и рентам, доходности и риску финансовой операции, портфельному анализу, облигациям.

В каждой лекции пособия приведено много детально разобранных практических примеров.

От других учебников и учебных пособий оно отличается подробным и доступным изложением с выводом и доказательством всех утверждений, значительно более широким рассмотрением затронутых вопросов. Так, например, если во всех стандартных пособиях «Правило 70» (срок удвоения вклада при заданной процентной ставке) рассматривается только для случая сложных процентов, то в данном пособии рассмотрены случаи увеличения вклада в произвольное число раз для всех видов процентных ставок: сложных, простых, непрерывных и при кратном начислении процентов.

Учебное пособие предназначено для бакалавров всех финансовых и экономических профилей, включая финансы и кредит, бухгалтерский учет и аудит, налоги, страхование, международные экономические отношения и другие. Оно будет также полезно специалистам всех финансовых и экономических специальностей, а также всем, желающим освоить количественные методы в финансах и экономике.

ЛЕКЦИЯ 1

ТЕОРИЯ ПРОЦЕНТОВ

Проценты могут быть определены как компенсация, выплачиваемая заемщиком кредитору за использование капитала [1]. Поэтому проценты можно рассматривать как арендную плату, которую заемщик платит кредитору, чтобы компенсировать потери от неиспользования последним капитала за время займа. В общем случае капитал и проценты не обязательно представляют собой один и тот же товар. Однако мы будем рассматривать капитал и проценты, выраженные в одних и тех же терминах — в терминах денег.

Итак, кредитор предоставляет заемщику некоторую сумму денег; по истечении установленного срока заемщик должен вернуть наращенную сумму, равную сумме долга плюс проценты.

Эффективная ставка процента — это сумма, выплачиваемая заемщику (инвестору) в конце периода начисления за каждую единичную сумму, занятую (инвестируемую) в начале периода.

Обозначая наращенное значение единичной суммы в момент времени t через a_t, ставку процента — через i, а наращенное значение полной суммы — через S_t, имеем для первого периода начисления

$$i_1 = \frac{(1+i)}{1} = \frac{a_1 - a_0}{a_0} = \frac{S_1 - S_0}{S_0}, \tag{1.1}$$

для n-го периода начисления

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}. \tag{1.2}$$

Из этой формулы видно, что эффективная процентная ставка может меняться (и меняется) в зависимости от номера периода начисления, но, как будет показано ниже, в очень важном и широко применяемом случае сложных процентов эффективная процентная ставка для всех периодов начисления остается постоянной, т.е. для всех $n \geq 1$.

1.1. Простые проценты

Пусть S_0 — первоначальная сумма долга, i — ставка процента. В схеме простых процентов S_0 к концу единичного промежутка начисления (обычно это год) возрастет на iS_0, а наращенная сумма S_1 будет равна

$$S_1 = S_0 + iS_0 = S_0(1 + i). \tag{1.3}$$

К концу второго промежутка начисления первоначальная сумма долга S_0 возрастет еще на iS_0 и наращенная сумма станет

$$S_2 = S_1 + iP = S_0(1 + 2i). \tag{1.4}$$

К концу n-го промежутка начисления наращенная сумма будет

$$S_n = S_0(1 + ni). \tag{1.5}$$

Данная формула называется **формулой простых процентов**. Множитель $(1 + ni)$ называют **коэффициентом (множителем) наращения**, а величину ni — ставкой процентов за время n.

Таким образом, последовательность наращенных сумм S_1, S_2, ..., S_n является арифметической прогрессией с начальным членом S_0 и разностью iS_0.

Проценты за n лет можно представить в виде

$$I_n = S_0in. \tag{1.6}$$

Эффективная ставка процента в схеме простых процентов

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{(1+in)-(1+i(n-1))}{1+i(n-1)} = \frac{1}{1+i(n-1)} \tag{1.7}$$

убывает с ростом n.

Если на разных промежутках начисления процентов n_1, n_2, ..., n_m устанавливаются разные ставки процентов i_1, i_2, ..., i_m, то наращенная сумма S_n за время $n_1 + n_2 + ... + n_m$ будет равна

$$S_n = S_0\left(1+\sum_{k=1}^{m} n_k i_k\right). \tag{1.8}$$

Момент возврата ссуды может не указываться точно, а быть переменной величиной (например, в случае накопительного вклада до востребования). Тогда формула простых процентов приобретает следующий вид [4]:

$$S_t = S_0(1 + i(t - t_0)), \tag{1.9}$$

где t_0 — момент выдачи ссуды;
t — момент возврата долга с процентами.

В соответствии с формулой (1.9) накопленная сумма является линейной функцией времени. Графиком этой функции на плоскости время — деньги служит луч с начальной точкой (t_0, S_0) и угловым коэффициентом S_0i. Очевидно,

$$S_t' = S_0 i. \tag{1.10}$$

1.2. Сложные проценты

При наращении по схеме сложных процентов происходит ***реинвестирование***, ***или капитализация***, ***полученных процентов***; таким образом, при ставке i каждая следующая наращенная сумма возрастает на долю i от предыдущей суммы, в которой учтены проценты, начисленные в предыдущие периоды.

В схеме сложных процентов S_0 к концу единичного промежутка начисления возрастут на iS_0, а наращенная сумма S_1 будет равна

$$S_1 = S_0 + iS_0 = S_0(1 + i). \tag{1.11}$$

К концу второго промежутка начисления S_1 возрастут на iS_1 и наращенная сумма станет

$$S_2 = S_1 + iS_1 = S_1(1 + i) = S_0(1 + i)^2. \tag{1.12}$$

К концу n-го промежутка начисления наращенная сумма будет

$$S_n = S_0(1 + i)^n. \tag{1.13}$$

Формула (1.13) называется **формулой сложных процентов**. Таким образом, последовательность наращенных сумм S_0, S_1, S_2, ..., S_n является геометрической прогрессией с начальным членом S_0 и знаменателем прогрессии $q = (1 + i)$.

Эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов за n-й период начисления

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = \frac{i(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = i \tag{1.14}$$

не зависит от n и равна номинальной.

Наращенная сумма S_n пропорциональна начальной сумме S_0. Коэффициент пропорциональности $(1 + i)^n$ называют **множителем наращения**.

Проценты за n лет можно представить в виде

$$I_n = S_0[(1 + i)^n - 1]. \tag{1.15}$$

1.3. Кратное начисление процентов

Если начисление сложных процентов происходит несколько раз в году (m) (ежеквартально, ежемесячно и т.п.), то по истечении t лет наращенная сумма станет равной:

a) в случае простых процентов:

$$S(t, m) = S_0\left(1+\frac{i}{m}mt\right) = S_0(1+it),$$

т.е. наращенная сумма не зависит от кратности начисления. Этот вывод будет использован нами при рассмотрении непрерывного начисления процентов в случае простых процентов;

b) в случае сложных процентов:

$$S(t, m) = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}. \tag{1.16}$$

Эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов вырастает с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов. При этом эффективная процентная ставка практически выходит на насыщение при $m \geq 6 \div 10$, т.е. выше этой кратности начисления рост эффективной процентной ставки резко замедляется.

1.4. Непрерывное начисление процентов

Если частота начисления сложных процентов m неограниченно возрастает, то имеет место **непрерывное начисление процентов**. В этом случае по истечении t лет наращенная сумма будет равна:

a) в случае простых процентов:

$$S(t,\infty) = \lim_{m\to\infty} S(t,m) = \lim_{m\to\infty} S_0\left(1+\frac{i}{m}mt\right) = S_0(1+it),$$

т.е. наращенная сумма остается той же, что и при однократном начислении процентов. Этот вывод был сделан нами и в случае кратного начисления процентов. Оба вывода связаны с тем, что при любой кратности начисления процентов начисление производится на исходную сумму пропорционально времени вклада;

b) в случае сложных процентов:

$$S(t,\infty) = \lim_{m\to\infty} S(t,m) = \lim_{m\to\infty} S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt} = \\ = \lim_{m\to\infty} S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mit/i} = S_0 e^{it}. \tag{1.17}$$

Процентную ставку i в (1.17) называют также **силой роста** и обозначают обычно буквой δ. С учетом этого данную формулу можно записать так [4]:

$$S(t) = S_0 \cdot e^{\delta t}. \tag{1.18}$$

Пример 1.1. В банк положен депозит в размере 1000 руб. под 10% годовых по схеме сложных процентов. Найти величину депозита через три года при начислении процентов 1, 4, 6, 12 раз в году и в случае непрерывного начисления процентов.

По формуле (1.16) имеем

$$S_{3/1} = 1000(1 + 0{,}1)^3 = 1331 \text{ руб.},$$

$$S_{3/4} = 1000\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{3\cdot 4} = 1344{,}9 \text{ руб.},$$

$$S_{3/6} = 1000\left(1+\frac{0{,}1}{6}\right)^{3\cdot 6} = 1346{,}5 \text{ руб.},$$

$$S_{3/12} = 1000\left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{3\cdot 12} = 1348{,}2 \text{ руб.}$$

В случае непрерывного начисления процентов необходимо использовать формулу (1.17)

$$S_{3/\infty} = 1000e^{0{,}1\cdot 3} = 1349{,}6 \text{ руб.}$$

Проценты за три года составили (руб.):
— при однократном начислении процентов — 331;
— при четырехкратном — 344,9;
— при шестикратном — 346,5;
— при двенадцатикратном — 348,2;
— при непрерывном — 349,6.

Приходим к выводу, что наращенная сумма, как и величина процентных денег, в схеме сложных процентов возрастает с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов. Причем скорость роста обеих величин убывает с увеличением кратности начисления. (Доказательство этих фактов см. в параграфе 1.13.)

Пример 1.2. Вклад в размере 3000 руб. положен в банк на депозит 10 марта под 15% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик получит 22 октября?

Используем формулу (1.13) для наращения по схеме сложных процентов:

$$S_n = S_0(1 + i)^n.$$

Продолжительность финансовой операции (в долях периода)

$$n = \frac{t}{T} = \frac{20 + 30 \cdot 6 + 22}{365} = 0{,}608$$

(считается, что в месяце 30 дней, в году — 365), поэтому имеем

$$S_n = S_0(1 + i)^n = 3000(1 + 0{,}15)^{0{,}608} = 3266{,}07 \text{ руб.}$$

Итак, 22 октября вкладчик получит 3266,07 руб.

1.5. Эквивалентность процентных ставок в схеме сложных процентов

Рассмотрим процентные ставки, с использованием которых может быть описана модель процентного роста накопленной суммы в схеме сложных процентов.

Если указана ставка начисления i за период начисления T, то

$$S_t = S_0(1 + i)^{t/T}. \tag{1.19}$$

Если указана годовая ставка j и кратность начисления (в течение года) p, то

$$S_t = S_0(1 + j/p)^{pt}. \tag{1.20}$$

В этом случае говорят, что j — **номинальная ставка**.

При непрерывном начислении процентов

$$S_t = S_0 e^{\delta t}, \tag{1.21}$$

и сила роста δ называется также **непрерывной номинальной ставкой**.

Наконец, если указана **эффективная ставка** $i_{эфф}$, накопленная сумма определяется по формуле

$$S_t = S_0(1 + i_{эфф})^t. \tag{1.22}$$

Формулы (1.28)—(1.31) имеют вид:

$$S_t = S_0 a^t, \tag{1.23}$$

где a — соответствующий (нормированный) **коэффициент роста**.

В каждом случае a получается как годовой коэффициент наращения.

Ставки называются **эквивалентными**, если они имеют одинаковые коэффициенты роста. Это означает, что при одинаковой начальной сумме суммы, накопленные к любому моменту времени t по эквивалентным ставкам, совпадают.

Коэффициент роста a и эффективная ставка $i_{\text{эфф}}$ связаны простым соотношением

$$a = 1 + i_{\text{эфф}}. \tag{1.24}$$

С учетом этого можно сказать, что ставки эквивалентны, если совпадают эквивалентные им эффективные ставки.

Несложно указать соотношения, обеспечивающие эквивалентность ставок различных типов.

Если j — годовая ставка при кратности начисления p, то ей эквивалентна ставка $i_T = i_{1/p} = j/p$ за период $T = 1/p$. Эквивалентная эффективная ставка определяется формулой [4]

$$i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{j}{p}\right)^p - 1, \tag{1.25}$$

или

$$i_{\text{эфф}} = (1 + i_T)^{1/T} - 1. \tag{1.26}$$

Соответственно

$$j = p((1 + i_{\text{эфф}})^{1/p} - 1); \tag{1.27}$$

$$i_T = (1 + i_{\text{эфф}})^T - 1. \tag{1.28}$$

При непрерывном начислении процентов получаем [4]:

$$i_{\text{эфф}} = e^{\delta} - 1, \tag{1.29}$$

$$\delta = \ln(1 + i_{\text{эфф}}). \tag{1.30}$$

Ставки i_{T_1} и i_{T_2} с периодами начисления соответственно T_1 и T_2 эквивалентны, если

$$\left(1 + i_{T_1}\right)^{1/T_1} = \left(1 + i_{T_2}\right)^{1/T_2}. \tag{1.31}$$

Если на разных промежутках начисления процентов n_1, n_2, ..., n_m устанавливаются разные ставки процентов i_1, i_2, ..., i_m, то наращенная сумма S_n за время $n_1 + n_2 + ... + n_m$ будет равна

$$S_n = S_0(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_m)^{n_m} = S_0\prod_{k=1}^{m}(1+i_k)^{n_k}. \qquad (1.32)$$

1.6. Сравнение наращения по простой и сложной ставкам процента

При одной и той же ставке процента наращение по схеме простых процентов более выгодно для периода наращения менее года. Для периода наращения более года более выгодно наращение по схеме сложных процентов (рис. 1.1).

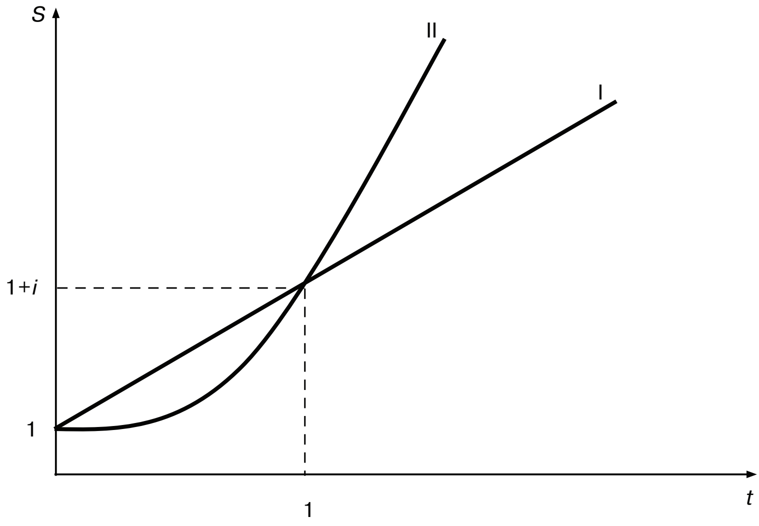

Рис. 1.1. Наращение по простой (I) и сложной (II) процентным ставкам

Кратное начисление процентов

В случае простых процентов при изменении кратности начисления процентов наращенная сумма

$$S_n = S_0(1 + i \cdot n)$$

не меняется, поскольку проценты начисляются каждый раз на исходную величину S_0.

В случае сложных процентов наращенная сумма $S_{n/m} = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}$ (здесь m — кратность начисления процентов) растет с ростом кратности начисления процентов m.

Для определения того, в каком случае та или иная схема начисления процентов более выгодна, приравняем наращенные суммы S_n, рассчитанные для простых и сложных процентов.

$$S_{n/m} = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} = S_0(1+i\cdot n).$$

Можно заметить, что данное равенство выполняется только при $n = 1/m$. Отсюда можно сделать вывод, что сложные проценты становятся выгоднее простых при сроке вклада до года и кратном начислении процентов, если срок больше, чем число, обратное кратности начисления ($n > 1/m$).

Итак, приходим к выводу: ***при кратном начислении процентов сложные проценты становятся выгоднее простых после первого начисления процентов***.

Проиллюстрируем этот вывод графически (рис. 1.2) для полугодового начисления процентов (кратность $m = 2$).

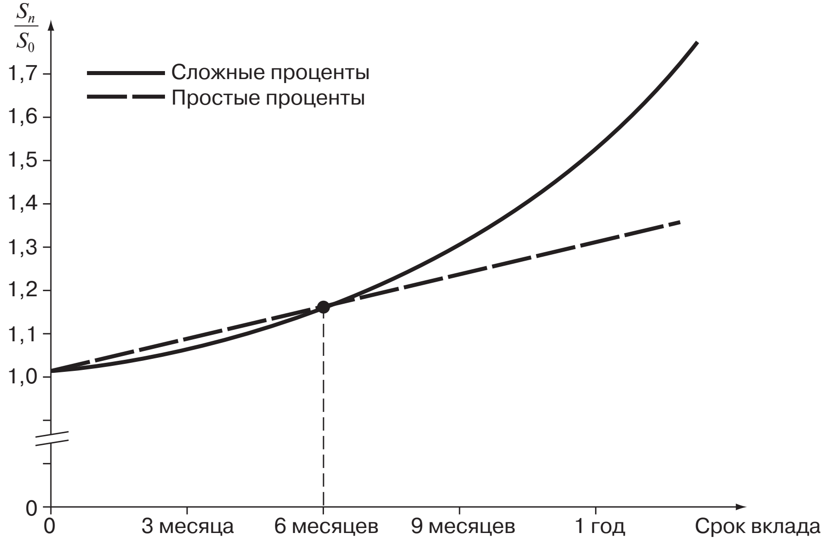

Рис. 1.2. Сравнение наращения в схемах простых и сложных процентов при полугодовом начислении процентов

1.7. Дисконтирование и удержание процентов

Дисконтирование и удержание процентов в определенном смысле являются обратными по отношению к начислению процентов. Различают *математическое дисконтирование* и *банковский учет*.

Математическое дисконтирование позволяет узнать, какую исходную сумму S_0 нужно вложить, чтобы получить по истечении t лет сумму S_t при начислении на S_0 процентов по ставке i.

В случае простых процентов

$$S_0 = S_t/(1 + ti). \tag{1.33}$$

В случае сложных процентов

$$S_0 = S_t/(1 + i)^t. \tag{1.34}$$

В случае непрерывного начисления процентов

$$S_0 = S_t/\exp(\delta t). \tag{1.35}$$

Величина S_0 называется **приведенным значением** величины S_t. Величины i и δ, которые ранее назывались процентными ставками, теперь означают **ставки дисконтирования**.

Банковский учет — это покупка банком денежных обязательств по цене меньшей номинальной, указанной в них суммы.

Примером денежных обязательств может служить **вексель** — долговая расписка, содержащая обязательство выплатить определенную денежную сумму (номинал) в определенный срок.

В случае покупки банком векселя говорят, что последний *учитывается*, а клиенту выплачивается сумма

$$S_n = S_0 - I_n, \tag{1.36}$$

где S_0 — номинальная сумма векселя;
S_n — цена покупки векселя банком за n лет до погашения;
I_n — дисконт, или доход банка (процентные деньги).

$$I_1 = S_0 d, \tag{1.37}$$

где d — учетная ставка (как правило, через d будем далее обозначать и ставку дисконтирования).

Учетная ставка может быть простой и сложной в зависимости от того, какая схема используется — простых или сложных процентов.

В случае простых процентов последовательность сумм, оставшихся после дисконта $\{S_n\}$, образует убывающую арифметическую прогрессию с общим членом $S_n = S_0(1 - nd)$, равным сумме, которую получит клиент за n лет до погашения.

В случае сложных процентов последовательность сумм, оставшихся после дисконта $\{S_n\}$, образует убывающую геометрическую прогрессию с общим членом $S_n = S_0(1 - d)^n$, равным сумме, которую получит клиент за n лет до погашения.

Необходимо учитывать, что в отличие от процентной ставки, которая определяется относительным приращением вклада за период $i = (S_n - S_0)/S_0$, ***учетная ставка*** определяется формулой $d = (S_n - S_0)/S_n$, где в знаменателе стоит наращенная S_n, а не исходная сумма S_0.

1.7.1. Сравнение дисконтирования по сложной и простой учетной ставкам

Для банка ситуация с дисконтированием является инверсной по отношению к наращению. Так, при сроке учета менее одного года банку выгоднее проводить дисконтирование по сложной учетной ставке (рис. 1.3) (наращение — по простой (рис. 1.1)), а при сроке учета более одного года — по простой учетной ставке (см. рис. 1.3) (наращение — по сложной (см. рис. 1.1)).

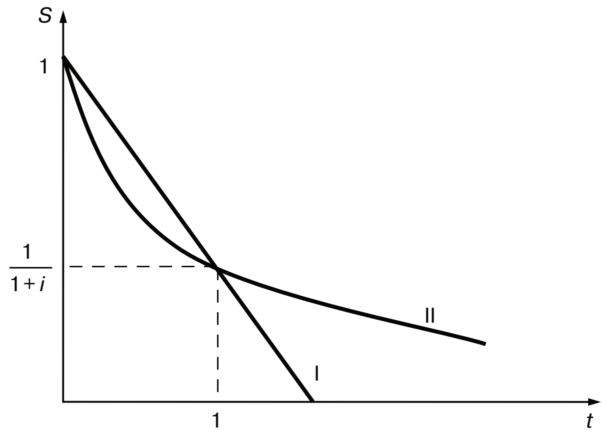

Рис. 1.3. Дисконтирование по простой (I) и сложной (II) процентным ставкам

Отметим, что при кратном начислении процентов простые проценты становятся выгоднее сложные после первого начисления процентов.

1.7.2. Эффективная учетная ставка

Пусть $d_{эфф}$ — годовая (эффективная) учетная ставка (ставка дисконтирования) при кратности начисления m. Эквивалентная эффективная учетная ставка определяется исходя из принципа эквивалентности

$$S_0\left(1-d_{эфф}\right)^n = S_0\left(1-\frac{d}{m}\right)^{n\cdot m}, \tag{1.38}$$

откуда

$$1-d_{эфф} = \left(1-\frac{d}{m}\right)^m, \tag{1.39}$$

или

$$d_{эфф} = 1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^m. \tag{1.40}$$

Обратно учетная ставка d выражается через эффективную учетную ставку $d_{эфф}$:

$$d = m\left(1-\sqrt[m]{1-d_{эфф}}\right). \tag{1.41}$$

Учетная ставка d и ставка процентов i приводят за промежуток времени t к одинаковому результату, если

$$S_0(1 + it) = S_t \quad \text{и} \quad S_0 = S_t(1 - dt), \tag{1.42}$$

т.е.

$$(1 + it)(1 - dt) = 1. \tag{1.43}$$

Последнее равенство можно преобразовать следующим образом:

$$i = d/(1 - td);\ d = i/(1 + ti). \tag{1.44}$$

Можно записать также соотношения между номинальными ставками наращения и дисконтирования

$$(1 + i/m)^m = (1 - d/p)^{-p}, \tag{1.45}$$

поскольку обе части уравнения равны $1 + i$.

При $m = p$ имеем

$$(1 + i/m)^m = (1 - d/m)^{-1}, \tag{1.46}$$

откуда

$$\frac{i}{m}-\frac{d}{m}=\frac{i}{m}\cdot\frac{d}{m}. \tag{1.47}$$

Если на разных промежутках дисконтирования n_1, n_2, ..., n_m устанавливаются разные ставки дисконтирования i_1, i_2, ..., i_m, то современная сумма S_n за время $n_1 + n_2 + ... + n_m$ будет равна

$$S_n = S_0(1+i_1)^{-n_1}(1+i_2)^{-n_2}\dots(1+i_m)^{-n_m} = S_0\prod_{k=1}^{m}(1+i_k)^{-n_k}. \qquad (1.48)$$

Пример 1.3. Какую сумму нужно положить на депозит под 12% годовых, чтобы через пять лет получить 500 000 руб.?

$$S_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n} = \frac{500\,000}{(1+0{,}12)^5} = \frac{500\,000}{1{,}7623} = 283\,713{,}43 \text{ руб.}$$

Пример 1.4. Вексель стоимостью 100 000 руб. учитывается за четыре года до погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Требуется найти сумму, получаемую векселедержателем, и величину дисконта.

Сумма, получаемая векселедержателем, равна

$$S_4 = S_0(1-d)^4 = 100\,000(1-0{,}15)^4 = 52\,200{,}6 \text{ руб.}$$

Величина дисконта равна

$$I_4 = S_0 - S_4 = 100\,000 - 52\,200{,}6 = 47\,799{,}3 \text{ руб.}$$

1.8. Мультиплицирующие и дисконтирующие множители

На практике для расчетов с простыми и сложными процентами пользуются таблицами мультиплицирующих и дисконтирующих множителей. Мультиплицирующий множитель показывает, во сколько раз возрастет за n лет исходная сумма, положенная в банк под i процентов годовых

$$M(n, i) = (1+i)^n, \qquad (1.49)$$

т.е. представляет собой будущую стоимость одной денежной единицы через n лет при ставке процента i. Дисконтирующий множитель показывает, какую часть составит исходная сумма, положенная в банк под i процентов годовых от суммы, наращенной к концу n-го года:

$$D(n, i) = 1/M(n, i) = (1+i)^{-n}, \qquad (1.50)$$

т.е. представляет собой *приведенную* или *современную* стоимость одной денежной единицы через n лет при ставке процента i.

1.9. «Правило 70»

Это правило позволяет ответить на вопрос: за сколько лет удвоится вклад, помещенный в банк под i процентов годовых? Ниже мы рассмотрим это правило в случае сложных, простых, непрерывных процентов, а также при кратном начислении процентов. Мы также рассмотрим срок увеличения вклада в произвольное число раз.

1.9.1. Сложные проценты

Удвоение капитала в схеме сложных процентов при ставке i происходит примерно за

$$T = \frac{70}{i} \text{ лет.} \tag{1.51}$$

(Ставка в (1.60) задается в процентах.) Это правило легко получить из формулы сложных процентов. Действительно, $2S_0 = S_0(1 + i)^T$, отсюда $\ln 2 = T \ln(1 + i)$. Разлагая $\ln(1 + i)$ по степеням i, получим $\ln(1 + i) \approx \approx i$. Следовательно, $\ln 2 \approx iT$, откуда $T \approx \ln 2/i$. Окончательно получаем $T \approx 69{,}3/i \approx 70/i$. На практике чаще используется «Правило 72», поскольку число 72 имеет больше делителей, чем 70.

Учет следующего (квадратичного) по i члена в разложении $\ln\left(1+i\right) \approx i - \frac{i^2}{2}$ дает результат $T \approx \frac{\ln 2}{i\left(1-\frac{i}{2}\right)}$, увеличивающий срок удвоения капитала $T \approx \frac{\ln 2}{i}\left(1+\frac{i}{2}\right)$ на $\Delta T \approx \frac{\ln 2}{2}$.

Пример 1.5. За сколько лет удвоится капитал в схеме сложных процентов при ставке 18% годовых?

$$T = 70/i = 70/18 = 3{,}89 \text{ лет.}$$

1.10. Обобщение «Правила 70»

1.10.1. Простые проценты

В случае простых процентов имеем

$$2S_0 = S_0(1 + Ti),$$

отсюда $2 = 1 + Ti$, откуда $T = 1/i$, или (если i выражена в процентах):

$$T = 100/i. \tag{1.52}$$

Таким образом, «Правило 70» в случае простых процентов заменяется «Правилом 100».

Пример 1.6. За сколько лет удвоится капитал в схеме простых процентов при ставке 18% годовых?

$$T = 100/i = 100/18 = 5{,}56 \text{ лет.}$$

Напомним, что в схеме сложных процентов удвоение при тех же условиях происходило за 3,89 лет.

1.10.2. Непрерывные проценты

При непрерывном начислении процентов имеем

$$2S_0 = S_0 e^{iT},$$

отсюда $\ln 2 = Ti$. Следовательно, $T = \ln 2/i$. Окончательно получаем

$$T \approx 69{,}3/i \approx 70/i. \qquad (1.53)$$

Данная формула формально совпадает с «Правилом 70» случая сложных процентов. Отметим, однако, что в данном случае формула $T = \ln 2/i$ является точной в отличие от случая сложных процентов, где точная формула для срока удвоения капитала имеет вид $T = \ln 2/\ln(1 + i)$, а формула $T = \ln 2/i$ получается после разложения в ряд по малым i функции $\ln(1 + i)$.

1.10.3. Кратное начисление процентов

В случае m-кратного начисления процентов за период имеем

$$2S_0 = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mT}.$$

Отсюда $\ln 2 = mT\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)$.

Таким образом, в этом случае имеем точную формулу

$$T = \frac{\ln 2}{m\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}. \qquad (1.54)$$

Разлагая $\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)$ по степеням i, получим $\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)\approx\frac{i}{m}$. Следовательно, $T \approx \ln 2/i$. Окончательно получаем $T \approx 69{,}3/i \approx 70/i$. То есть при кратном начислении процентов получаем, как и в случае однократного начисления процентов, «Правило 70». Из предыдущего известно, что наращенная сумма при кратном начислении процентов возрастает с ростом кратности начисления m, поэтому срок удвоения капитала должен убывать с ростом m, что противоречит «Правилу 70», поскольку в формулу $T \approx 70/i$ не входит m. Данное противоречие связано с использованием лишь первого приближения в разложении $\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)$ по степеням i. Уже учет следующего (квадратичного) по i-члена в разложении $\ln\left(1+\frac{i}{m}\right) \approx \frac{i}{m} - \frac{i^2}{2m^2}$ дает результат, зависящий от m:

$$T \approx \frac{\ln 2}{m\left(\frac{i}{m} - \frac{i^2}{2m^2}\right)} = \frac{\ln 2}{i\left(1 - \frac{i}{2m}\right)}. \tag{1.55}$$

Легко видеть, что с ростом m срок удвоения капитала убывает от

$$T_1 \approx \frac{\ln 2}{i\left(1 - \frac{i}{2}\right)} \tag{1.56}$$

(срока удвоения капитала в случае однократного начисления процентов) до

$$T_\infty = \frac{\ln 2}{i} \tag{1.57}$$

(случая непрерывного начисления процентов).

1.11. Увеличение капитала в произвольное число раз

Рассмотрим более общую задачу о сроке увеличения вклада в произвольное число раз (n) при данной процентной ставке i.

1.11.1. Простые проценты

В случае простых процентов имеем

$$nS_0 = S_0(1 + Ti),$$

отсюда $n = 1 + Ti$, откуда

$$T = (n - 1)/i. \tag{1.58}$$

Например, при ставке 10% годовых вклад вырастет в 4 раза за

$$T = (n - 1)/i = 3/0{,}1 = 30 \text{ лет.}$$

1.11.2. Сложные проценты

Рассмотрим задачу об увеличении капитала в произвольное (n) число раз в схеме сложных процентов при данной процентной ставке i. Это правило легко получить из формулы сложных процентов. Действительно, $nS_0 = S_0(1 + i)^T$, отсюда $\ln n = T\ln(1 + i)$. Разлагая $\ln(1 + i)$ по степеням i, получим $\ln(1 + i) \approx i$. Следовательно, $\ln n \approx iT$, откуда

$$T \approx \ln n/i. \tag{1.59}$$

Учет следующего (квадратичного) по i члена в разложении $\ln(1+i) \approx i - i^2/2$ дает результат

$$T \approx \frac{\ln n}{i\left(1-\frac{i}{2}\right)}, \tag{1.60}$$

увеличивающий срок роста капитала в n раз $T \approx \frac{\ln n}{i}(1+i/2)$ на $\Delta T \approx \ln n/2$.

Таким образом, при рассмотрении задачи об увеличении капитала в произвольное число раз (n) в схеме сложных процентов при данной процентной ставке i необходимо в «Правиле 70» лишь сделать замену

$$\ln 2 \to \ln n. \tag{1.61}$$

Пример 1.7. За сколько лет при ставке 10% годовых вклад вырастет в 4 раза в схеме простых процентов?

$$T = 100/i = 100/18 = 5{,}56 \text{ лет.}$$
$$T \approx \ln n/i \approx 10\ln 4 \approx 13{,}86 \approx 14 \text{ лет.}$$

1.11.3. Непрерывные проценты

При непрерывном начислении процентов имеем

$$nS_0 = S_0e^{iT},$$

отсюда $\ln n = Ti$. Следовательно,

$$T = \ln n/i. \tag{1.62}$$

Мы получили формулу, формально совпадающую со случаем сложных процентов. Отметим, однако, что в данном случае формула

$T = \ln n/i$ является точной в отличие от случая сложных процентов, где точная формула для срока увеличения капитала в n раз имеет вид $T = \ln n/\ln(1 + i)$, а формула $T = \ln n/i$ получается после разложения в ряд по малым i функции $\ln(1 + i)$. Ситуация аналогична случаю удвоения капитала, рассмотренному выше.

1.11.4. Кратное начисление процентов

При m-кратном начислении процентов за период имеем:

$$nS_0 = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mT}.$$

Отсюда

$$\ln n = mT\ln\left(1+\frac{i}{m}\right).$$

Таким образом, в этом случае имеем точную формулу

$$T = \frac{\ln n}{m\ln\left(1+\dfrac{i}{m}\right)}. \tag{1.63}$$

Разлагая $\ln\left(1+\dfrac{i}{m}\right)$ по степеням i, получим $\ln(1+\dfrac{i}{m}) \approx \dfrac{i}{m}$. Следовательно,

$$T \approx \ln n/i. \tag{1.64}$$

Из предыдущего известно, что наращенная сумма при кратном начислении процентов возрастает с увеличением кратности начисления m, поэтому срок увеличения капитала в n раз должен убывать с ростом m, что противоречит формуле (1.64), поскольку в нее не входит m. Данное противоречие связано с использованием лишь первого приближения в разложении $\ln(1 + i/m)$ по степеням i. Уже учет следующего (квадратичного) по i члена в разложении $\ln\left(1+\dfrac{i}{m}\right) \approx \dfrac{i}{m} - \dfrac{i^2}{2m^2}$ дает результат, зависящий от m:

$$T \approx \frac{\ln n}{m\left(\dfrac{i}{m}-\dfrac{i^2}{2m^2}\right)} = \frac{\ln n}{i\left(1-\dfrac{i}{2m}\right)}. \tag{1.65}$$

Легко видеть, что с ростом m срок увеличения капитала в n раз убывает от $T_1 \approx \dfrac{\ln n}{i\left(1-\dfrac{i}{2}\right)}$ (срока увеличения капитала в n раз в случае однократного начисления процентов) до $T_\infty = \dfrac{\ln n}{i}$ (случая непрерывного начисления процентов).

1.12. Влияние инфляции на ставку процента

1.12.1. Формула Фишера

Говорят, что инфляция составляет долю α в год, если стоимость товара за год увеличивается в $(1 + \alpha)$ раз [5]. Инфляция уменьшает реальную ставку процента. При инфляции деньги обесцениваются в $1 + \alpha$ раз, поэтому реальный эквивалент наращенной за год суммы $S = S_0(1 + i)$ будет в $(1 + \alpha)$ раза меньше:

$$S_\alpha = S/(1+\alpha) = S_0(1+i)/(1+\alpha) = S_0(1+\alpha-\alpha+i)/(1+\alpha) = \\ = S_0\left(1+(i-\alpha)/(1+\alpha)\right) = S_0(1+i_\alpha). \quad (1.67)$$

В (1.67) мы обозначили через i_α процентную ставку с учетом инфляции (i по-прежнему ставка процента без учета инфляции), для которой получили следующее выражение (формула Фишера):

$$i_\alpha = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}. \quad (1.68)$$

При малой инфляции реальная процентная ставка меньше номинальной примерно на величину инфляции. При достаточно высокой инфляции i_α может стать отрицательной. В такой ситуации кредитор будет работать себе в убыток, а заемщик обогащаться. Чтобы этого не произошло, необходимо скорректировать номинальную процентную ставку i, по которой происходит наращение (она должна, по крайней мере, превышать инфляцию: $i > \alpha$ и $i_\alpha > 0$). Для того чтобы номинальная процентная ставка i обеспечивала реальную процентную ставку i_α при годовой инфляции α, она должна удовлетворять уравнению $i = \alpha + i_\alpha(1 + \alpha)$. При малых i и α перекрестным членом $\alpha \cdot i_\alpha$ можно пренебречь и в этом (зачастую грубом) приближении номинальная процентная ставка i равна сумме эффективной процентной ставки i_α и темпа инфляции α: $i \approx \alpha + i_\alpha$. При этом эффективная процентная ставка i_α равна номинальной процентной ставке i, уменьшенной на темп инфляции α:

$$i_\alpha \approx i - \alpha. \quad (1.69)$$

Пример 1.8. Какую ставку должен установить банк, чтобы при инфляции 8% годовых он мог бы иметь 10%-ную доходность?

Решим уравнение Фишера $i_\alpha = \dfrac{i-\alpha}{1+\alpha}$ относительно i:

$$i = i_\alpha(1 + \alpha) + \alpha = 0{,}1(1 + 0{,}08) + 0{,}08 = 0{,}188 = 18{,}8\%.$$

Итак, ответ 18,8% на 0,8% превышает простой ответ 18%, получаемый из (1.69) простым сложением темпа инфляции и эффективной процентной ставки.

1.12.2. Темп инфляции за несколько периодов

Пусть темпы инфляции за последовательные периоды времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ равны $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ соответственно. Найдем темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$. Здравый смысл подсказывает, что темп инфляции — величина аддитивная, так что α, по крайней мере приближенно, равен сумме темпов инфляции $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha \approx \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n. \tag{1.70}$$

Ниже мы получим точное выражение для темпа инфляции за суммарный период времени t и увидим, насколько он отличается от интуитивного результата (1.70).

В конце первого периода наращенная сумма будет равна $S_1 = S_0(1 + i)$, а с учетом инфляции $S_1 = S_0(1+i)^{t_1} / (1+\alpha_1)$. В конце второго периода наращенная сумма будет равна $S_2 = S_0(1+i)^{t_1+t_2}$, а с учетом инфляции $S_2 = S_0(1+i)^{t_1+t_2} / (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$. В конце n-го периода наращенная сумма будет равна $S_n = S_0(1+i)^{t_1+t_2+\ldots+t_n}$, а с учетом инфляции она составит:

$$S_n = S_0(1+i)^{t_1+t_2+\ldots+t_n} / (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_n). \tag{1.71}$$

С другой стороны, при темпе инфляции α в конце периода t наращенная сумма будет равна

$$S_n = S_0(1 + i)^t/(1 + \alpha). \tag{1.72}$$

Приравнивая правые части (1.79) и (1.80), получаем

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_n) = 1 + \alpha. \tag{1.73}$$

Отсюда

$$\alpha = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_n) - 1. \tag{1.74}$$

Строгое доказательство этой формулы несложно получить методом математической индукции.

Отметим, что темп инфляции за n-периодов не зависит ни от длительности составляющих периодов, ни от периода t .

Для равных темпов инфляции $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$ (при этом промежутки времени могут оставаться произвольными и не равными друг другу) имеем

$$\alpha = (1 + \alpha_1)^n - 1. \tag{1.75}$$

Проанализируем отличие полученных результатов (1.74) и (1.75) от интуитивного выражения (1.70) и причину этого на примере временного периода, состоящего из двух периодов. Пусть темпы инфляции за два последовательных периода времени t_1, t_2 равны α_1, α_2 соответственно. Тогда по формуле (1.74) темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен

$$\alpha = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) - 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2. \tag{1.76}$$

Как видим, отличие от суммы темпов инфляции состоит в появлении перекрестного члена $\alpha_1\alpha_2$. Хотя этот член и является малой величиной более высокого порядка малости по сравнению с α_1 и α_2 при условии, что они малы, на практике необходимо их учитывать.

1.12.3. Синергетический эффект

Мы получили пример так называемого синергетического эффекта (т.е. эффект (результат) от двух (нескольких) частей больше аддитивного эффекта (простого суммирования)). Ответствен за синергетический эффект появляющийся перекрестный член $\alpha_1\alpha_2$. Он приводит к тому, что темп инфляции за два последовательных периода времени $t = t_1 + t_2$ оказывается больше суммы темпов инфляции.

Пример 1.9. Пусть темпы инфляции за два последовательных периода времени t_1 и t_2 равны 10 и 20% соответственно. Тогда по формуле (1.82) темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен:

$$\alpha = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) - 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}32,$$

т.е. 32%. Таким образом, отличие от суммы темпов инфляции составляет 2%.

Пример 1.10. Пусть темп инфляции за год α равен 20%. Найти темп инфляции за квартал α_1 при условии его постоянства.

Применим формулу

$$\alpha = (1 + \alpha_1)^n - 1.$$

Имеем

$$\alpha + 1 = (1 + \alpha_1)^n, \ \alpha_1 + 1 = \sqrt[n]{1 + \alpha}$$

и окончательно $\alpha_1 = \sqrt[n]{1+\alpha} - 1$. Подставив в это выражение $\alpha = 20\% = 0{,}2$, $n = 4$, получим для квартального темпа инфляции

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{1+\alpha} - 1 = \sqrt[4]{1{,}2} - 1 \approx 1{,}0466 - 1 = 0{,}0466 \approx 4{,}66\%.$$

Как видим, темп инфляции за квартал оказался ниже получаемого простым делением годового темпа инфляции на четыре, т.е. 20% : 4 = = 5%. Разница составляет 0,36%.

Пример 1.11. Решим обратную задачу. Пусть темп инфляции за месяц α_1 равен 2%. Найти темп инфляции за год α при условии постоянства темпа инфляции в течение года. Применим формулу $\alpha = (1 + \alpha_1)^n - 1$. Подставляя в нее $\alpha = 2\% = 0{,}02$, $n = 12$, получим для годового темпа инфляции

$$\alpha = (1 + \alpha_1)^{12} - 1 = (1 + 0{,}02)^{12} - 1 =$$
$$= (1{,}02)^{12} - 1 \approx 1{,}268 - 1 = 0{,}268 = 26{,}8\%.$$

Видим, что темп инфляции за год оказывается выше получаемого простым умножением месячного темпа инфляции на 12, т.е. 2% · 12 = = 24%. Разница составляет 2,8%.

По двум последним примерам можно сделать два вывода:

1) темп инфляции за суммарный период превышает сумму темпов инфляции за составляющие периоды;

2) темп инфляции за составляющий период оказывается меньше соответствующей ему доли темпа инфляции за суммарный период.

1.13. Эффективная процентная ставка

1.13.1. Эффективная ставка процента

Эффективная ставка процента — это сумма, выплачиваемая заемщику (инвестору) в конце периода начисления за каждую единичную сумму, занятую (инвестируемую) в начале периода. Обозначив наращенное значение единичной суммы в момент времени t через a_t, ставку процента — через i, а наращенное значение полной суммы — через S_t, для первого периода имеем начисления

$$i_1 = \frac{(1+i)}{1} = \frac{a_1 - a_0}{a_0} = \frac{S_1 - S_0}{S_0}, \tag{1.77}$$

для n-го периода начисления

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}. \tag{1.78}$$

Из формулы (1.78) видно, что эффективная процентная ставка может меняться и меняется в зависимости от номера периода начисления, однако, как будет показано ниже, в очень важном и широко применяемом случае сложных процентов эффективная процентная ставка остается постоянной для всех периодов начисления, т.е. для всех $n \geq 1$.

Эффективная ставка процентов может значительно отличаться от номинальной ставки, объявленной банком и фигурирующей в договоре банковского вклада или кредита. При вкладах она, как правило, оказывается меньше номинальной ставки (за счет инфляции, например) либо равна ей (однако она бывает и выше номинальной при кратном начислении процентов), а при взятии кредитов — выше. Эффективная ставка зависит от многих факторов: от кратности начисления процентов, от темпа инфляции, от номера периода начисления, от наличия и величины транзакционных издержек, от налогов и многих других. Ниже мы рассмотрим практически все перечисленные случаи.

1.13.2. Сложные проценты

Эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов для n-го периода начисления

$$i_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{S_0\left(1+i\right)^n - S_0\left(1+i\right)^{n-1}}{S_0\left(1+i\right)^{n-1}} = 1 + i - 1 = i \tag{1.79}$$

не зависит от n и равна номинальной.

1.13.3. Простые проценты

Эффективная ставка процента в схеме простых процентов для n-го периода начисления

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{\left(1+in\right) - \left(1+i\left(n-1\right)\right)}{1+i\left(n-1\right)} = \frac{i}{1+i\left(n-1\right)} \tag{1.80}$$

убывает с ростом n.

1.13.4. Кратное начисление процентов

При m-кратном начислении процентов наращенная за t лет сумма равна

$$S(t, m) = S_0\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}. \tag{1.81}$$

Найдем эффективную процентную ставку в случае кратного начисления процентов. Ее можно определить как такую процентную ставку, которая при однократном (за период) начислении процентов приводит к той же наращенной величине, что и при m-кратном. Приравнивая наращенные величины

$$S(t, m) = S_0\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = S_0\left(1 + i_{\text{эфф}}\right)^{t}, \tag{1.82}$$

получим эффективную процентную ставку в случае кратного начисления процентов

$$i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m} - 1. \tag{1.83}$$

Можно доказать, что эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов. При этом эффективная процентная ставка практически выходит на насыщение при $m \geq 6 \div 10$, т.е. выше этой кратности начисления рост эффективной процентной ставки резко замедляется. Для доказательства того, что эффективная процентная ставка растет с увеличением кратности начисления, необходимо показать, что производная эффективной процентной ставки по кратности начисления

$$di_{\text{эфф}}/dm > 0. \tag{1.84}$$

Для доказательства того, что рост эффективной процентной ставки с ростом m замедляется и выходит на насыщение, необходимо показать, что вторая производная эффективной процентной ставки по кратности начисления

$$\frac{d^2 i_{\text{эфф}}}{dm^2} < 0 \text{ и при } m \to \infty \frac{d^2 i_{\text{эфф}}}{dm^2} \to 0. \tag{1.85}$$

См. доказательство обоих фактов в [1].

1.13.5. Учет инфляции

При инфляции деньги обесцениваются в $1 + \alpha$ раз, поэтому реальный эквивалент наращенной за год суммы $S = S_0(1 + i)$ будет в $(1 + \alpha)$ раза меньше

$$S_\alpha = \frac{S}{1+\alpha} = S_0 \frac{1+i}{1+\alpha} = S_0 \frac{1+\alpha-\alpha+i}{1+\alpha} =$$
$$= S_0\left(1+\frac{i-\alpha}{1+\alpha}\right) = S_0(1+i_\alpha). \quad (1.86)$$

Здесь мы обозначили через i_α процентную ставку с учетом инфляции (i по-прежнему — ставка процента без учета инфляции), для которой получили формулу Фишера, определяющую эффективную процентную ставку при учете инфляции

$$i_{эфф} = i_\alpha = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}. \quad (1.87)$$

1.13.6. Учет налогов

А. Проценты по вкладу в банке не облагаются налогами, если они не превышают ставку рефинансирования Банка России (в настоящее время $i_0 = 8{,}25\%$). В противном случае с процентов, превышающих ставку рефинансирования Банка России, взимается налог $t = 35\%$. Проценты по вкладам в банках РФ достигают в настоящее время 12% и более, так что знание реальной (эффективной) процентной ставки крайне актуально.

Рассчитаем эффективную процентную ставку в этом случае. Рассмотрим один период начисления. Наращенная величина вклада в конце периода равна:

$$S = S_0\left[(1+i)-t(i-i_0)\right] = S_0\left[1+i(1-t)+ti_0\right] = S_0\left(1+i_{эфф}\right). \quad (1.88)$$

Отсюда для эффективной процентной ставки при наличии налогов получаем

$$i_{эфф} = i(1-t)+ti_0. \quad (1.89)$$

Пример 1.12. Вклад помещен в банк под 17% годовых. Найти эффективную процентную ставку.

Для нахождения эффективной процентной ставки используем формулу (1.89):

$$i_{эфф} = i(1-t)+ti_0 = 0{,}17(1-0{,}35)+0{,}35\cdot 0{,}0825 = 0{,}139\%.$$

Таким образом, реальная (эффективная) процентная ставка 13,9% оказывается на 3,1% ниже объявленной номинальной (17%).

В. **Налоговый щит.** При формировании системы управления финансовой структурой капитала российских компаний и адаптации классических методов финансового менеджмента к российским условиям одной из основных проблем является порядок покрытия процентов за кредиты. До введения в силу нового НК РФ процентные платежи, превышающие ставку рефинансирования плюс 3% маржи, покрывались не за счет себестоимости, а за счет чистой прибыли, т.е. прибыли после налогообложения. Таким образом, при использовании заемного капитала в России, по сравнению с использованием заемного капитала за рубежом, значительно снижался «налоговый щит». Это, безусловно, негативно отражалось на финансовом положении компаний. С введением в действие главы 25 НК РФ проценты по кредитам включаются в затраты в полной сумме, если ставка по кредиту не отклоняется более чем на 20% от ставки по другим кредитам, полученным на сопоставимых условиях (сумма, срок, обеспечение и т.д.) в том же квартале. Если таких кредитов не было, проценты учитываются в пределах ставки рефинансирования ЦБ РФ, увеличенной в 1,1 раза по рублевым кредитам и на 15% — по валютным. Обозначим эти предельные величины ($1{,}2 \cdot i_0$; $1{,}1 \cdot i_0$; $i_0 \cdot 1{,}15$) через i^*. Найдем эффективную кредитную процентную ставку в этом случае.

1. Если кредитная процентная ставка не превышает i^*, то реальная (эффективная) ставка по взятому кредиту D с учетом налога на прибыль компании t находится следующим образом:

$$iD - tiD = iD(1 - t) = i_{эфф}D, \tag{1.90}$$

откуда

$$i_{эфф} = i(1 - t). \tag{1.91}$$

Величина $(1 - t)$ называется **налоговым щитом,** который показывает финансовую выгоду компании от использования заемного капитала.

2. Если кредитная процентная ставка превышает i^*, то из платы за кредит iD вычитается лишь величина ti^*D, поэтому имеем

$$\begin{aligned} i_{эфф}D &= iD - ti^*D = iD - tiD + tiD - ti^*D = \\ &= D\left[(1-t) + t\left(i - i^*\right)\right] = D\left[(1-t) + t\Delta i\right], \end{aligned} \tag{1.92}$$

откуда

$$i_{эфф} = i\left(1 - t\right) + t\Delta i. \tag{1.93}$$

Пример 1.13. Кредит взят под 20% годовых. Найти эффективную кредитную процентную ставку, если ставка налога на прибыль составляет 20%, а ставка отсечения i^*(8,25% + 3% = 11,25%).

Используя формулу (1.93), имеем

$$i_{эфф} = i(1 - t) + t\Delta i = 0{,}2(1 - 0{,}2) + 0{,}2(0{,}2 - 0{,}1125) = 0{,}1775 = 17{,}75\%.$$

Таким образом, эффективная кредитная процентная ставка равна 18,31% вместо 20%.

ЛЕКЦИЯ 2

ТЕОРИЯ ПРОЦЕНТОВ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2.1. Эквивалентность различных процентных ставок

2.1.1. Эквивалентность простых и сложных процентов

Легко получить формулы эквивалентности простых и сложных процентов.

Так, в простейшем случае однократного начисления процентов имеем

$$S_0(1 + i_{\text{п}}n) = S_0(1 + i_c)^n, \tag{2.1}$$

откуда

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}\left[(1+i_c)^n - 1\right],\ i_c = \sqrt[n]{1+i_{\text{п}}n} - 1. \tag{2.2}$$

В случае m-кратного начисления процентов имеем за n-периодов

$$S_0(1+i_{\text{п}}n) = S_0\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{m\cdot n}, \tag{2.3}$$

откуда

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{n\cdot m} - 1\right],\ i_c = m\left(\sqrt[m\cdot n]{1+i_{\text{п}}n} - 1\right). \tag{2.4}$$

Пример 2.1. Найти простую процентную ставку $i_{\text{п}}$, эквивалентную сложной ставке в 15% для временнóго интервала в пять лет при ежемесячном начислении процентов.

Используя первую формулу из (2.4), получим

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{n\cdot m} - 1\right] = \frac{1}{5}\left[\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{5\cdot 12} - 1\right] = \frac{1}{5}\left[(1{,}15)^{60} - 1\right] = 0{,}2214,$$

т.е. эквивалентная простая процентная ставка $i_{\text{п}} = 22{,}14\%$.

2.1.2. Эквивалентность простых и непрерывных процентов

Аналогично можно рассмотреть и эквивалентность других процентных ставок, например простой и непрерывной

$$S_0(1+i_{\text{п}}n)=S_0e^{i_{\text{н}}\cdot n}, \tag{2.5}$$

$$i_{\text{п}}=\frac{1}{n}\left(e^{i_{\text{н}}\cdot n}-1\right),\ i_{\text{н}}=\frac{1}{n}\ln\left(1+i_{\text{п}}n\right). \tag{2.6}$$

Пример 2.2. Найти непрерывную процентную ставку $i_{\text{н}}$, эквивалентную простой ставке в 15% для временнóго интервала в пять лет.

Используя вторую формулу из (2.6), получим

$$i_{\text{н}}=\frac{1}{n}\ln\left(1+i_{\text{п}}n\right)=\frac{1}{5}\ln\left(1+0{,}15\cdot 5\right)=$$
$$=\frac{1}{5}\ln 1{,}75=\frac{1}{5}0{,}5596=0{,}1119,$$

т.е. эквивалентная непрерывная процентная ставка $i_{\text{н}}=11{,}19\%$.

2.1.3. Эквивалентность сложных и непрерывных процентов

Приравняем наращенные суммы в случае начисления сложных и непрерывных процентов за n-периодов

$$S_0(1+i_c)^n=S_0e^{i_{\text{н}}\cdot n}, \tag{2.7}$$

где $i_{\text{с}}$ — ставка сложных процентов;
$i_{\text{н}}$ — ставка непрерывных процентов.

Сокращая это равенство на S_0 и извлекая из обеих частей корень n степени (для сокращения n в показателе степени), получим

$$i_{\text{н}}=\ln\left(1+i_c\right),\ i_c=e^{i_{\text{н}}}-1. \tag{2.8}$$

2.2. Внутренняя норма доходности

2.2.1. Понятие внутренней нормы доходности

Рассмотрим подробно одно из наиболее важных понятий в теории инвестиций — внутреннюю норму доходности, а также исследуем зависимость чистого приведенного дохода (NPV) от ставки дисконтирования.

Инвестиционный процесс, описываемый финансовым потоком, имеет вид:

$$CF = \{(t_0, C_0), (t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n)\}. \tag{2.9}$$

Величина C_k (K = 0, 1, ..., n) представляет собой баланс инвестиционных затрат и чистого дохода за k-й период, актуализированный на конец этого периода. Отрицательный платеж в (2.9) означает, что инвестиционные затраты превысили чистый доход, положительный платеж означает, что чистый доход превысил инвестиционные затраты.

Посредством ставки приведения i рассчитаем текущую величину потока (2.9), называемую в данном контексте чистым приведенным доходом (NPV):

$$NPV(i) = \frac{C_0}{(1+i)^{t_0}} + \frac{C_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{t_2}} + \quad + \frac{C_n}{(1+i)^{t_n}}. \tag{2.10}$$

Если NPV имеет отрицательное значение, это означает, что доходы не окупают затрат при принятой норме доходности i.

Итак, рассмотрим зависимость NPV от ставки приведения (принятой нормы доходности) i. Сначала обратим внимание на простейший типичный случай, когда все затраты осуществляются в начальный момент, а затем инвестор начинает получать доходы. Пусть финансовый поток имеет вид:

$$CF = \{(0, -K), (1, C_1), (2, C_2), \ldots, (n, C_n)\}, \tag{2.11}$$

где $K > 0$ — начальные инвестиции, все платежи C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ неотрицательны, и среди них есть хотя бы один положительный.

Тогда

$$NPV(i) = -K + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^k}. \tag{2.12}$$

При $i > -1$ чистый приведенный доход $NPV(i)$ является убывающей функцией ставки приведения i (рис. 2.1).

С одной стороны, при i, стремящемся к -1 (справа), каждое слагаемое $\frac{C_k}{(1+i)^k}$ с положительным C_k стремится к бесконечности, а значит и сумма (2.12) стремится к бесконечности. Следовательно, $PV(i) > 0$ для i достаточно близких к -1. С другой стороны, при неограниченном росте i все слагаемые $\frac{C_k}{(1+i)^k}$ стремятся к нулю, а сумма (2.12) стремится к — K. Значит, $PV(i) < 0$ для достаточно больших i. Таким образом, при $i > -1$ непрерывная функция $PV(i)$, убывая, меняет знак с плюса на минус. Следовательно, $PV(i)$ обращается в ноль для некоторого $i = i_0$. Значение i_0 называют внутренней нормой доходности потока платежей (2.12).

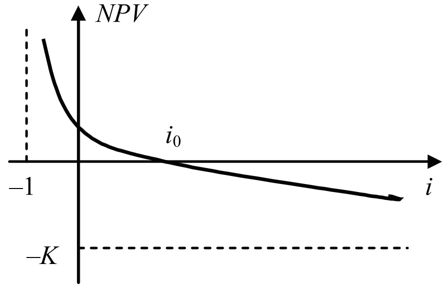

Рис. 2.1. Зависимость чистого приведенного дохода от ставки дисконтирования [4]

Внутренняя норма доходности служит границей процентных ставок, для которых проект имеет положительную и отрицательную приведенную стоимость: если $i > i_0$, то $PV(i) < 0$, если $i < i_0$, то $PV(i) > 0$. Так как $PV(0) = \sum_{k=1}^{n} C_k - K$, то $i_0 > 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{n} C_k > K$, т.е. нетто-сумма доходов превосходит начальные инвестиции.

Пример 2.3. Найти внутреннюю норму доходности потока

$$CF = \{(0, -8000), (1, 6000), (2, 5000)\}. \tag{2.13}$$

Составим уравнение:

$$-8000 + 6000(1 + i)^{-1} + 5000(1 + i)^{-2} = 0.$$

Заменяя $x = (1 + i)^{-1}$, получим квадратное уравнение

$$5000 \cdot x^2 + 6000 \cdot x - 8000 = 0,$$

или

$$5 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 8 = 0.$$

Решая его, находим

$$(1 + i)^{-1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{5} = \frac{-3 \pm 7}{5}.$$

Из двух корней –2 и 0,8 нам подходит второй. Решая уравнение

$$(1 + i)^{-1} = 0{,}8,$$

получаем $i \approx 0{,}25$.

Следовательно, внутренняя норма доходности потока (2.13) составляет 25%.

В общем случае говорят, что финансовый поток (2.9) обладает внутренней нормой доходности, если уравнение

$$NPV(i) = 0 \tag{2.14}$$

имеет единственное решение $i_0 > -1$; решение уравнения (2.10) называется внутренней нормой доходности потока (2.9).

2.3. Операции с валютой

Рассмотрим некоторые операции с валютой.

2.3.1. Депозиты с конверсией валюты и без конверсии

Возможность конвертации рублей в валюту и обратно валюты в рубли, а также возможность размещения на депозите как рублей, так и валюты увеличивают количество схем получения дохода с помощью депозитов. Сравним доходы от непосредственного размещения на депозите имеющихся денежных средств в национальной валюте (*RR*, *Russian ruble*) и через конвертацию национальной валюты в иностранную валюту (*FC*, *foreign currency*), размещение последней на депозите с последующей обратной конвертацией наращенной суммы в иностранной валюте в национальную.

2.3.1.1. Схема $FC \to RR \to RR \to FC$

Возможны четыре схемы получения дохода [2]:

1) $RR \to RR$;
2) $FC \to FC$;
3) $FC \to RR \to RR \to FC$;
4) $RR \to FC \to FC \to RR$.

Первая и вторая схемы не связаны с конвертацией валюты и достаточно полно описаны в предыдущих параграфах, тогда как третья и четвертая схемы предполагают конвертацию валюты в начале и конце финансовой операции.

Рассмотрим третью схему $FC \to RR \to RR \to FC$.

Введем обозначения:

P_{FC} — величина депозита в FC;
P_{RR} — величина депозита в RR;
S_{FC} — наращенная сумма в FC;

P_{RR} — наращенная сумма в *RR*;
K_0 — курс обмена $FC \to RR$ в начале операции;
K_1 — курс обмена $FC \to RR$ в конце операции;
n — срок депозита;
i — процентная ставка в *RR*;
j — процентная ставка в *FC*.

Операция состоит из трех этапов — конвертации иностранной валюты в национальную, размещения рублей на депозите с последующей обратной конвертацией наращенной суммы в иностранную валюту.

В результате всех этапов получим следующую наращенную сумму в иностранной валюте:

— в схеме простых процентов [2]:

$$S_{FC} = P_{FC}K_0(1 + in)/K_1; \tag{2.15}$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{FC} = P_{FC}K_0(1 + i)^n/K_1. \tag{2.16}$$

Множитель наращения (*M*) с учетом двойной конвертации имеет вид:

— в схеме простых процентов:

$$M = K_0\left(1+in\right)/K_1 = \frac{(1+in)}{K_1/K_0}; \tag{2.17}$$

— в схеме сложных процентов:

$$M = K_0\left(1+i\right)^n/K_1 = \frac{(1+i)^n}{K_1/K_0}. \tag{2.18}$$

Множитель наращения растет с повышением процентной ставки, срока депозита и начального обменного курса и убывает с ростом конечного обменного курса.

Найдем эффективную процентную ставку для операции в целом:

— в схеме простых процентов:

$$S_{FC} = P_{FC}K_0(1 + in)/K_1 = P_{FC}(1 + i_{эфф}n), \tag{2.19}$$

откуда

$$i_{эфф} = \frac{K_0(1+in)/K_1 - 1}{n} = \frac{M-1}{n}; \tag{2.20}$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{FC} = P_{FC}K_0(1 + i)^n/K_1 = P_{FC}(1 + i_{эфф})^n, \tag{2.21}$$

откуда

$$i_{эфф} = \frac{1+i}{\sqrt[n]{K_1/K_0}} - 1 = \sqrt[n]{M} - 1. \tag{2.22}$$

При $n = 1$

$$i_{эфф} = \frac{1+i}{K_1/K_0} - 1 = M - 1. \tag{2.23}$$

2.3.1.2. Схема $RR \to FC \to FC \to RR$

Теперь рассмотрим четвертую схему $RR \to FC \to FC \to RR$.

Операция состоит из конвертации национальной валюты в иностранную, размещения иностранной валюты на депозите с последующей обратной конвертацией наращенной суммы в национальную валюту.

В результате получим следующую наращенную сумму в национальной валюте:

— в схеме простых процентов:

$$S_{RR} = \frac{P_{RR}}{K_0}(1 + jn)\,K_1; \tag{2.24}$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{RR} = \frac{P_{RR}}{K_0}(1 + j)^n\,K_1. \tag{2.25}$$

Множитель наращения (M) с учетом двойной конвертации имеет вид:

— в схеме простых процентов:

$$M = \frac{K_1}{K_0}(1 + jn) = \frac{(1 + jn)}{K_0/K_1}; \tag{2.26}$$

— в схеме сложных процентов:

$$M = \frac{K_1}{K_0}(1 + j)^n = \frac{(1 + j)^n}{K_0/K_1}. \tag{2.27}$$

Множитель наращения растет с повышением процентной ставки, срока депозита, конечного обменного курса и убывает с ростом начального обменного курса.

Найдем эффективную процентную ставку для операции в целом:

— в схеме простых процентов:

$$S_{RR} = P_{RR}K_1(1 + in)/K_0 = P_{RR}(1 + i_{эфф}n), \tag{2.28}$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = \frac{K_1(1+in)/K_0 - 1}{n} = \frac{M-1}{n}; \tag{2.29}$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{RR} = P_{RR}K_1(1 + i)^n/K_0 = P_{RR}(1 + i_{\text{эфф}})^n, \tag{2.30}$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = \frac{1+i}{\sqrt[n]{K_0/K_1}} - 1 = \sqrt[n]{M} - 1. \tag{2.31}$$

При $n = 1$

$$i_{\text{эфф}} = \frac{1+i}{K_0/K_1} - 1 = M - 1. \tag{2.32}$$

Пример 2.4. Поместим 2000 дол. после конвертации на депозит под простые проценты ($i = 15\%$) сроком на два года. Курс продажи доллара на начало срока депозита составил 26 руб., курс покупки доллара в конце операции — 34 руб. Ставка для долларового депозита (j) равна 5%. Надо сравнить эффективность данной операции с эффективностью непосредственного помещения долларов на валютный депозит.

$$S_{FC} = P_{FC}K_0(1+in)/K_1 = 2000 \cdot \frac{26}{34}(1+0{,}15 \cdot 2) = 1988{,}24 \text{ дол.}$$

Непосредственное помещение долларов на валютный депозит даст наращенную сумму

$$S_{FC} = P_{FC}(1 + jn) = 2000(1 + 0{,}05 \cdot 2) = 2200 \text{ дол.}$$

Таким образом, выгоднее непосредственное помещение долларов на валютный депозит.

2.3.2. Бивалютная корзина

Бивалютная корзина — операционный ориентир курсовой политики Центрального банка Российской Федерации (ЦБ РФ), введенный 1 февраля 2005 г. для определения реального курса рубля по отношению к основным валютам: доллару и евро. В момент введения бивалютная корзина складывалась из 10% евро и 90% дол. Текущие значения установлены 8 февраля 2007 г.; бивалютная корзина состоит из 45% евро и 55% дол. ЦБ РФ устанавливает коридор допустимых колебаний бивалютной корзины, намерен постепенно расширять границы коридора бивалютной корзины, приближаться к свободному курсу рубля и к процессу инфляционного таргетирования. В начале февраля 2009 г. стоимость бивалютной корзины составляла 41 руб. Расчет стоимости бивалютной корзины дан в примере 1.20.

Пример 2.5. Рассчитаем стоимость бивалютной корзины (БК) на 21.10.2009 г. Курс доллара составил 29,19 руб., курс евро — 43,69 руб. С учетом структуры корзины получим

$$\text{БК} = 29{,}19 \cdot 0{,}55 + 43{,}69 \cdot 0{,}45 = 35{,}72.$$

Итак, стоимость бивалютной корзины равна 35,72 руб.

ЛЕКЦИЯ 3

ФИНАНСОВЫЕ ПОТОКИ, РЕНТЫ

3.1. Финансовые потоки (потоки платежей)

Финансовые потоки имеют довольно широкое распространение на практике. Примерами финансовых потоков являются: выплата заработной платы, оплата коммунальных платежей, арендная плата, выплаты в погашение потребительского кредита, кредита банка, налоговые платежи компании, регулярные взносы в пенсионный и другие фонды, выплаты процентов по ценным бумагам (акциям, облигациям и др.) и т.п. Практически любые регулярные (и нерегулярные) платежи представляют собой финансовые потоки. Так что важность их изучения трудно переоценить.

Теория финансовых потоков изложена во многих книгах по финансовой математике, мы будем придерживаться в основном изложения этой темы в [1], расширяя и углубляя его, делая более детальным.

Платеж P, произведенный в момент времени t, назовем **финансовым событием**, т.е. финансовое событие — это упорядоченная пара (P, t), либо (t, P), состоящая из величины платежа P и момента платежа t. Платежи могут быть со знаком плюс (поступления) или со знаком минус (выплаты).

Конечная или бесконечная последовательность финансовых событий

$$(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots, (P_n, t_n) \tag{3.1}$$

называется (конечным или бесконечным) **дискретным финансовым потоком**. Предполагается, что $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$. В случае бесконечного потока предполагается дополнительно, что t_k неограниченно возрастает с ростом k.

Финансовые потоки обозначаются символом CF (*cash flow*). Например, поток n-платежей $(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots , (P_n, t_n)$ записывается в виде:

$$CF = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots, (P_n, t_n)\}.$$

Графически финансовый поток может быть представлен различными способами, один из самых простых и практичных — точками на временно́й оси с обозначениями величин платежей (рис. 3.1).

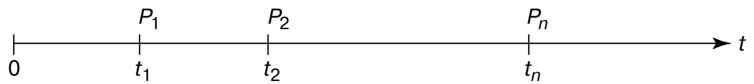

Рис. 3.1. Графическое изображение финансового потока

Финансовый поток можно охарактеризовать так называемой **платежной функцией**, которая каждому моменту времени t сопоставляет значение денежной суммы $C(t)$ так, что $C(t_k) = C_k$ и $C(t) = 0$, если t не совпадает ни с одним из моментов t_k, $k = 0, 1, \ldots$.

3.2. Текущая, современная, будущая, приведенная и конечная величины финансового потока

Пусть финансовый поток

$$CF = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots, (P_n, t_n), \ldots\}. \tag{3.2}$$

Напомним, что деньги имеют временну́ю ценность (см. лекцию 1). Это не позволяет непосредственно суммировать платежи, относящиеся к различным моментам времени. Для того чтобы вычислить *величину потока* в какой-то момент времени t, необходимо каждый платеж дисконтировать к этому моменту времени по некоторой процентной ставке i, которая предполагается известной и неизменной для всего потока, и затем суммировать эти дисконтированные платежи. Обычно дисконтирование происходит по схеме сложных процентов.

Сумма всех платежей денежного потока, приведенных к некоторому моменту времени t, называется **текущим**, или **приведенным**, **значением** потока (в момент времени t) и обозначается $PV_t(CF, i)$ (*present value*), или просто PV_t.

$$PV_t = \frac{P_0}{(1+i)^{t_0 - t}} + \frac{P_1}{(1+i)^{t_1 - t}} + \ldots \; . \tag{3.3}$$

В случае бесконечного потока текущее значение считается определенным лишь тогда, когда ряд в правой части (3.3) сходится.

Если $t_0 = 0$, текущее значение потока в начальный момент времени называется **современной величиной потока** и обозначается просто PV:

$$PV = P_0 + \frac{P_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{P_2}{(1+i)^{t_2}} + \dots .$$

Для момента $t > t_n$ величина потока равна

$$P = P_0\,(1+i)^{t-t_0} + P_1\,(1+i)^{t-t_1} + \ldots + P_n\,(1+i)^{t-t_n} = \sum_{k=0}^{n} P_k\,(1+i)^{t-t_k}\,. \quad (3.4)$$

Величину (3.4) называют **будущим накопленным значением** потока (3.2) и обозначают $FV_t(CF, i)$ (*future value*), или просто FV_t. В случае конечного потока

$$CF = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), ..., (P_n, t_n)\} \quad (3.5)$$

его величина на момент последнего платежа $t = t_n$, обозначаемая $FV(CF, i)$ или FV, называется **конечной величиной потока.** Она равна

$$FV = P_0(1+i)^{t_n-t_0} + P_1(1+i)^{t_n-t_1} + \ldots + P_{n-1}(1+i)^{t_n-t_{n-1}} + P_n. \quad (3.6)$$

Заменяя в (3.6) $t - t_k$ на $t - t_n + t_n - t_k$ и вынося общий множитель $(1+i)^{t-t_n}$, получим связь между величинами потока (3.5) в моменты времени t и t_n (при $t > t_n$)

$$FV_t = FV\,(1+i)^{t-t_n}\,. \quad (3.7)$$

Для конечного потока (3.5) и моментов τ и $t \geq t_n$ текущее значение PV_τ и будущее значение FV_t связаны соотношением

$$FV_t = PV_\tau(1 + i)^{t-\tau}. \quad (3.8)$$

3.3. Средний срок финансового потока

Средним сроком финансового потока [4]

$$CF = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \dots , (P_n, t_n)\} \quad (3.9)$$

относительно ставки дисконтирования i называют такой момент времени t, для которого

$$PV_t(CF) = P_1 + P_2 + \dots + P_n. \quad (3.10)$$

Последнее означает, что поток (3.9) и поток, состоящий из одного платежа $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ в момент времени t, имеют одинаковое текущее значение. Равенство (3.10) можно переписать следующим образом [4]:

$$\frac{P_1}{(1+i)^{t_1}}+\frac{P_2}{(1+i)^{t_2}}+\ldots+\frac{P_n}{(1+i)^{t_n}}=\frac{P_1+P_2+\ldots+P_n}{(1+i)^t}. \qquad (3.11)$$

Разлагая $(1 + i)^{-x}$ по степеням i (при $|i| < 1$), получим

$$(1+i)^{-x}=1-xi+\frac{x(x+1)}{2}i^2+\ldots .$$

Равенство (3.11) с точностью до слагаемых второго порядка малости (относительно i) запишется в виде:

$$P_1(1-t_1i)+\ldots+P_n(1-t_ni)=(P_1+\ldots+P_n)(1-ti).$$

Отсюда

$$t=\frac{P_1t_1+\ldots+P_nt_n}{P_1+\ldots+P_n}. \qquad (3.12)$$

Пример 3.1. Найти средний срок потока

$$CF=\{(0, 100), (1, 200), (2, 400), (3, 100)\}.$$

По формуле (3.12) имеем

$$t=\frac{P_1t_1+\ldots+P_nt_n}{P_1+\ldots+P_n}=\frac{100\cdot 0+200\cdot 1+400\cdot 2+100\cdot 3}{100+200+400+100}=\frac{1300}{800}=1{,}625,$$

т.е. $t = 1{,}625$.

Если все платежи положительные, то $t_1 < t < t_n$, т.е. t лежит между начальным и конечным моментами времени. В общем же случае (когда платежи могут быть разных знаков) средний срок потока может лежать вне временно́го интервала платежей.

3.4. Регулярные потоки платежей

3.4.1. Обыкновенные ренты

Поток положительных платежей, разделенных равными временны́ми интервалами, называется **финансовой рентой**, или просто **рентой**. Промежуток времени между двумя последовательными платежами называется **периодом ренты** (*rent period*, *payment period*). Считается, что каждый платеж производится либо в начале соответствующего ему периода, либо в конце. В первом случае ренту называют **авансо-**

вой, или **пренумерандо** (*annuity due*), во втором — **обыкновенной**, а также **подрасчетной**, или рентой **постнумерандо** (*ordinary annuity*). Ренты с конечным числом платежей называют **конечными**. Промежуток времени между началом первого периода и окончанием последнего называется **сроком** конечной ренты. Ренты с бесконечным числом платежей называют **бесконечными**, **вечными**, или **перпетуитетами** (*perpetuity*). Если все платежи равны между собой, ренту называют **постоянной**. (Значительная часть данной главы посвящена рассмотрению именно постоянных рент.)

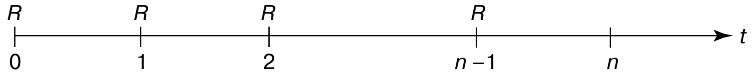

Рис. 3.2. Конечная годовая постоянная рента пренумерандо

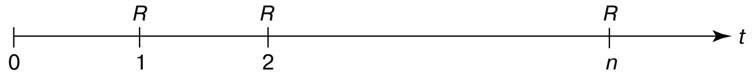

Рис. 3.3. Конечная годовая постоянная рента постнумерандо

Рента описывается следующими параметрами: размером отдельного платежа (член ренты), периодом и сроком ренты, процентной ставкой, числом платежей в году (p — срочные ренты, непрерывные ренты ($p \to \infty$)), а также методом (простые, сложные и непрерывные проценты) и частотой начисления процентов (ренты с ежегодным начислением процентов, с начислением k раз в году (k — кратные ренты), с непрерывным начислением).

Когда период постоянной ренты равен одному году, т.е. платежи производятся раз в год, ренту называют **годовой**, или **аннуитетом** (*annuity*) (рис. 3.2, 3.3). В русскоязычной литературе аннуитетом также называют постоянную ренту с произвольным периодом. В дальнейшем, если иное не оговорено, аннуитет будем называть рентой.

3.4.2. Коэффициенты приведения и наращения рент

3.4.2.1. Рента постнумерандо

Найдем текущую (приведенную) стоимость A ренты постнумерандо

$$\{(0, 0), (R, 1), (R, 2), ..., (R, n)\} \tag{3.13}$$

при процентной ставке i. По определению

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}. \tag{3.14}$$

Справа имеем сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $(1 + i)^{-1}$ и первым членом $R/(1 + i)$. Суммируя с помощью формулы для суммы n-членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, получаем:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.15}$$

Множитель при R в правой части (3.15) называют **коэффициентом приведения** годовой (обыкновенной) ренты. В финансовых вычислениях его принято обозначать символом $a_{\overline{n|}i}$. Таким образом,

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.16}$$

Коэффициент приведения ренты показывает, во сколько раз современная величина ренты больше величины платежа (годового).

Приведенная величина ренты $A = R \cdot a_{\overline{n|}i}$.

Наращенная сумма S ренты определяется равенством:

$$S = R(1 + i)^{n-1} + R(1 + i)^{n-2} + \ldots + R. \tag{3.17}$$

Справа имеем сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = (1 + i)$ и первым членом R (рассматривая сумму справа налево). Суммируя, получаем:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{3.18}$$

Множитель при R в правой части (3.18) называют **коэффициентом наращения** аннуитета и обозначают символом $s_{\overline{n|}i}$. Таким образом,

$$s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{3.19}$$

Коэффициент наращения ренты имеет смысл, аналогичный коэффициенту приведения ренты: он показывает, во сколько раз наращенная величина ренты больше величины платежа.

Из (3.19) следует, что коэффициент наращения аннуитета зависит только от его срока (числа членов) и процентной ставки. При этом связь коэффициентов наращения и приведения аннуитета имеет вид:

$$s_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i}(1+i)^n. \tag{3.20}$$

Коэффициенты $a_{\overline{n|}i}$ и $s_{\overline{n|}i}$ представляют собой приведенную величину и наращенную сумму соответственно единичного аннуитета:

$$H = \{(0, 0), (1, 1), (1,2), ..., (1, n)\}. \tag{3.21}$$

Аналогичная связь существует и между приведенной и наращенной величинами ренты постнумерандо

$$S = A(1 + i)^n. \tag{3.22}$$

3.4.2.2. Коэффициенты приведения и наращения за несколько соседних периодов

Вначале получим выражения для коэффициентов приведения и наращения за два соседних периода.

Если общий рассматриваемый срок равен $n = n_1 + n_2$, то, приводя ренту за каждый из периодов к началу первого периода и используя возможность складывать приведенные к одному моменту времени величины, получим:

$$A = A_1 + A_2, \tag{3.23}$$

$$Ra_{\overline{n|}i} = Ra_{\overline{n_1|}i} + Ra_{\overline{n_2|}i}(1+i)^{-n_1}, \tag{3.24}$$

откуда, сокращая обе части равенства на R, имеем

$$a_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n_1|}i} + a_{\overline{n_2|}i}\nu^{n_1} = a_{\overline{n_1|}i} + a_{\overline{n_2|}i}(1+i)^{-n_1}, \tag{3.25}$$

где $v = (1 + i)^{-1}$.

При выводе формулы (3.25) мы использовали тот факт, что для приведения платежа (в данном случае ренты за второй период, уже приведенной к концу первого периода) к началу первого периода необходимо его дисконтировать с периодом n_1.

Теперь получим выражение для коэффициента наращения за два соседних периода. Приводя ренту за каждый из периодов к концу второго периода и используя возможность складывать приведенные к одному моменту времени величины, получим

$$S = S_1 + S_2, \tag{3.26}$$

$$Rs_{\overline{n|}i} = Rs_{\overline{n_2|}i} + Rs_{\overline{n_1|}i}(1+i)^{n_2}, \tag{3.27}$$

откуда, сокращая обе части равенства на R , имеем

$$s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n_1}|i}\left(1+i\right)^{n_2} + s_{\overline{n_2}|i} = s_{\overline{n_1}|i}\cdot\nu^{-n_2} + s_{\overline{n_2}|i}. \qquad (3.28)$$

При выводе формулы (3.28) мы использовали тот факт, что для наращения платежа (в данном случае ренты за первый период, уже наращенной к началу второго периода) к концу второго периода необходимо его нарастить с периодом n_2.

Полученные выражения (3.25) и (3.28) легко обобщить на случай нескольких (k) соседних периодов $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$:

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n_1}|i} + a_{\overline{n_2}|i}\nu^{n_1} + a_{\overline{n_3}|i}\nu^{n_1+n_2} + \ldots + a_{\overline{n_k}|i}\nu^{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}}; \qquad (3.29)$$

$$s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n_k}|i} + s_{\overline{n_{k-1}}|i}\cdot\nu^{-n_k} + s_{\overline{n_{k-2}}|i}\cdot\nu^{-n_k-n_{k-1}} + \ldots + s_{\overline{n_1}|i}\cdot\nu^{-n_k-n_{k-1}-\ldots-n_2}. \qquad (3.30)$$

Пример 3.2. Найти коэффициент приведения за три соседних периода продолжительностью 1, 2 и 3 соответственно при ставке 10%.

Сначала определим коэффициенты приведения для каждого из периодов с помощью формулы (3.16)

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}.$$

Получаем

$$a_{\overline{n_1}|i} = \frac{1-\left(1+0{,}1\right)^{-1}}{0{,}1} = 0{,}909,\ a_{\overline{n_2}|i} = \frac{1-\left(1+0{,}1\right)^{-2}}{0{,}1} = 1{,}736,$$

$$a_{\overline{n_3}|i} = \frac{1-\left(1+0{,}1\right)^{-3}}{0{,}1} = 2{,}487.$$

Далее по формуле (3.29)

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n_1}|i} + a_{\overline{n_2}|i}\nu^{n_1} + a_{\overline{n_3}|i}\nu^{n_1+n_2} + \ldots + a_{\overline{n_k}|i}\nu^{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}}$$

имеем

$$a_{\overline{n}|i} = 0{,}909 + 1{,}736\cdot\frac{1}{1{,}1^{1}} + 2{,}487\cdot\frac{1}{1{,}1^{1+2}} = 0{,}909 + 1{,}578 + 1{,}869 = 4{,}356.$$

Результат легко проверить непосредственным вычислением коэффициента $a_{\overline{n}|i}$:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i} = \frac{1-\left(1+0{,}1\right)^{-6}}{0{,}1} = 4{,}355.$$

3.4.2.3. Рента пренумерандо

Найдем текущую (приведенную) стоимость $\ddot{A}$ ренты пренумерандо

$$\{(R, 0), (R, 1), (R, 2), \ldots, (R, n-1), (0, n)\} \tag{3.31}$$

при процентной ставке i. По определению,

$$A = R + \frac{R}{(1+i)} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}}. \tag{3.32}$$

Справа имеем сумму n-членов геометрической прогрессии со знаменателем $(1 + i)^{-1}$ и первым членом R. Суммируя с помощью формулы для суммы n-членов геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, получаем:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i). \tag{3.33}$$

Множитель при R в правой части (3.33) называют **коэффициентом приведения** ренты пренумерандо. В финансовых вычислениях его принято обозначать символом $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$. Таким образом,

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i). \tag{3.34}$$

Коэффициент приведения ренты пренумерандо показывает, во сколько раз современная величина ренты больше величины платежа (годового).

Приведенная величина ренты $\ddot{A} = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$.

Наращенная сумма $\ddot{S}$ ренты пренумерандо определяется равенством

$$\ddot{S} = R(1 + i)^n + R(1 + i)^{n-1} + \ldots + R(1 + i). \tag{3.35}$$

Справа имеем сумму n-членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = (1 + i)$ и первым членом $R(1 + i)$ (рассматривая сумму справа налево). Суммируя, получаем:

$$\ddot{S} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i). \tag{3.36}$$

Множитель при R в правой части (3.36) называют **коэффициентом наращения** ренты пренумерандо и обозначают символом $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$. Таким образом,

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i). \qquad (3.37)$$

Коэффициент наращения ренты пренумерандо имеет смысл, аналогичный коэффициенту приведения ренты пренумерандо: он показывает, во сколько раз наращенная величина ренты пренумерандо больше величины платежа.

Из (3.37) следует, что коэффициент наращения ренты пренумерандо, как и постнумерандо, зависит только от его срока (числа членов) и процентной ставки. При этом связь коэффициентов наращения и приведения ренты имеет вид, аналогичный случаю ренты постнумерандо,

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^n. \qquad (3.38)$$

Коэффициенты $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ и $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ представляют собой приведенную величину и наращенную сумму соответственно единичного аннуитета:

$$H = \{(1, 0), (1, 1), (1,2), ..., (0, n)\}. \qquad (3.39)$$

Аналогичная связь существует и между наращенной и приведенной величинами ренты пренумерандо

$$\ddot{S} = \ddot{A}(1+i)^n.$$

Видно, что формулы для вычисления приведенной величины и наращенной суммы (на конец года n) годовой авансированной ренты (пренумерандо) вида

$$\{(R, 0), (R, 1), ..., (R, n - 1), (0, n)\} \qquad (3.40)$$

получаются из (3.33) и (3.36) умножением на коэффициент $(1 + i)$.

3.4.2.4. Связь между приведенной величиной и наращенной суммой аннуитета

Для годовых рент постнумерандо (как будет показано ниже, и для p-срочных рент) с однократным начислением процентов в конце года существует связь между приведенной величиной и наращенной суммой аннуитета:

$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = S, \qquad (3.41)$$

т.е.

$$S = A(1 + i)^n = v^{-n}A. \qquad (3.42)$$

Здесь $v = (1 + i)^{-1}$.

Отсюда

$$A = S(1 + i)^{-n} = v^n S. \quad (3.43)$$

При начислении процентов k раз в году получаем

$$S = A(1 + i/k)^{kn}; \quad (3.44)$$

$$A = S(1 + i/k)^{-kn}. \quad (3.45)$$

Аналогичная связь, как отмечалось выше, существует и между коэффициентами приведения и наращения

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\left(1+i\right)^n = a_{\overline{n}|i}\nu^{-n},\ a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}\left(1+i\right)^{-n} = s_{\overline{n}|i}\nu^n. \quad (3.46)$$

3.4.2.5. Связь между коэффициентами приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо

Коэффициенты приведения и наращения значения годовой ренты пренумерандо принято обозначать соответственно символами $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ и $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$. Следующие соотношения, связывающие коэффициенты приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо, вытекают непосредственно из определений:

$$a_{\overline{n}|i} = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{\left(1+i\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(1+i\right)^{n-1}} = \left(1+i\right)a_{\overline{n}|i}; \quad (3.47)$$

$$s_{\overline{n}|i} = \left(1+i\right)^n + \left(1+i\right)^{n-1} + \ldots + \left(1+i\right) = \left(1+i\right)s_{\overline{n}|i}. \quad (3.48)$$

3.4.3. Расчет параметров ренты

Рассмотрим параметры, характеризующие ренту: размер отдельного платежа R, срок ренты n, процентную ставку i, наращенную сумму S, приведенную величину ренты A. Эти величины являются зависимыми, поэтому одни из них можно выразить через другие. Подобные расчеты применяются для нахождения неизвестных параметров ренты. При этом возможны различные случаи.

1. Пусть известны n, i, R. Тогда наращенную сумму S и приведенную величину ренты A можно найти по формулам

$$A = R \cdot a(n, i), \quad S = R \cdot \sigma(n, i), \quad (3.49)$$

где $a(n, i)$ и $s(n, i)$ — соответственно коэффициенты приведения и наращения ренты, их величины можно взять из соответствующих таблиц, зная срок ренты n и процентную ставку i.

2. Если известны A, i, R, то n находится из уравнения

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{3.50}$$

и равно

$$n = \left[-\frac{\ln(1-Ai/R)}{\ln(1+i)}\right], \tag{3.51}$$

где [...] означает целую часть числа.

Альтернативным методом определения n является решение уравнения $A = R \cdot a(n, i)$ относительно n. Имеем $A/R = a(n, i)$, далее находим n по таблице коэффициентов приведения ренты.

3. Аналогично предыдущему случаю, если известны Σ, i, R, то n находится из уравнения

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i} \tag{3.52}$$

и равно

$$n = \left[\frac{\ln(1+Si/R)}{\ln(1+i)}\right], \tag{3.53}$$

n может быть также найдено из уравнения $\mathrm{S} = R \cdot \sigma(n, i)$. Имеем $S/R = \sigma(n, i)$, далее находим n по таблице коэффициентов наращения ренты.

4. Если известны n, i, A, то $R = A/a(n, i)$.

5. Если известны n, i, S, то $R = S/\sigma(n, i)$.

6. Если заданы n, R, A, то процентная ставка i определяется из уравнения

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.54}$$

7. Если заданы n, R, S, то процентная ставка i определяется из уравнения

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \tag{3.55}$$

Уравнения п. 6 и 7 не решаются аналитически, их можно решить только приближенно. Для нахождения процентной ставки i можно использовать линейное приближение либо итерационный метод.

В линейном приближении, зная R и A (п. 6) или R и S (п. 7), сначала находим коэффициенты приведения (п. 6) или наращения (п. 7) по формулам (3.54) или (3.55)

$$a_{\overline{n}|i} = A/R; \quad s_{\overline{n}|i} = S/R. \tag{3.56}$$

Далее находим процентную ставку i по интерполяционной формуле

$$\frac{i-i_1}{i_2-i_1} = \frac{a-a_1}{a_2-a_1}, \tag{3.57}$$

где a_1 и a_2 — значения коэффициентов приведения или наращения при минимальной и максимальной процентной ставке (i_1 и i_2 соответственно);

a — значение коэффициента приведения или приращения при искомой процентной ставке i.

Оценка процентной ставки i по формуле (3.57) завышена при использовании коэффициента приведения и занижена — при использовании коэффициента наращения, при этом точность оценки растет с уменьшением интервала $i_2 - i_1$.

Пример 3.3. Найти срок ренты постнумерандо, если известны $S = 2000$, $I = 15\%$, $R = 100$.

Воспользуемся формулой (3.53)

$$n = \left[\frac{\ln(1+Si/R)}{\ln(1+i)}\right] = \left[\frac{\ln(1+2000\cdot 0{,}15/100)}{\ln(1+0{,}15)}\right] =$$
$$= \left[\frac{\ln 4}{\ln 1{,}15}\right] = \left[\frac{1{,}386}{0{,}140}\right] = [9{,}9] = 9.$$

Итак, срок ренты составляет 9 лет (если брать целую часть ее срока), точнее 9,9 года.

3.4.4. Вечные, срочные и непрерывные ренты

Рассмотрим вечную ренту

$$\{(0,0), (R,1), (R,2), \ldots\}. \tag{3.58}$$

Ее приведенная стоимость A определяется как сумма ряда

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots\ . \tag{3.59}$$

Суммируя бесконечно убывающую геометрическую прогрессию по формуле $S = \dfrac{a_1}{1-q}$ с $a_1 = \dfrac{R}{1+i}$, $q = \dfrac{1}{1+i}$, получаем:

$$A = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{R}{i}. \qquad (3.60)$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1/i, \qquad (3.61)$$

что согласуется с (3.60). С учетом этого полагаем

$$a_{\overline{\infty}|i} = 1/i. \qquad (3.62)$$

Равенство (3.60), записанное в виде

$$R = Ai, \qquad (3.63)$$

можно интерпретировать следующим образом: заплатив (отдав в долг «навсегда») сумму A, владелец вечной ренты получает право на получение рентных платежей, равных процентам на сумму A.

Наращенная величина вечной ренты и коэффициент наращения равны бесконечности. Для последнего имеем

$$s_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} (1+i)^n = a_{\overline{\infty}|i} \cdot \infty = \infty.$$

Пример 3.4. Найти размер вклада, обеспечивающего получение в конце каждого года 2000 руб. бесконечно долго при сложной ставке 14% годовых. По формуле (3.60)

$$A = \frac{R}{i} = \frac{2000}{0{,}14} = 14\ 285{,}71 \text{ руб.}$$

Итак, положив на вклад 14 285,71 руб. под 14% годовых, владелец вклада (и его наследники) будет получать 2000 руб. в конце каждого года бесконечно долго.

ЛЕКЦИЯ 4

ФИНАНСОВЫЕ ПОТОКИ, РЕНТЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

4.1. *p*-срочная рента

Когда рентный платеж R производится не единовременно (один раз в конце годового периода), а разбит на p одинаковых платежей, равномерно распределенных в течение года, то соответствующий поток платежей имеет вид:

$$CF = \{(R/p, 1/p), (R/p, 2/p), ..., (R/p, n - 1/p)), (R/p, n)\} \qquad (4.1)$$

и называется ***p*-срочной рентой** (рис. 4.1). Пусть при этом начисление процентов производится k раз в году. Рассмотрим следующие случаи:

$k = 1$, $k = p$, $k \neq p$.

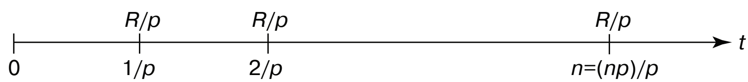

Рис. 4.1. *p*-срочная рента постнумерандо

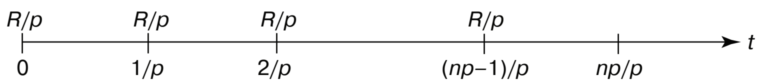

Рис. 4.2. *p*-срочная рента пренумерандо

4.1.1. *p*-срочная рента (случай *k* = 1)

Найдем приведенную величину p-срочной ренты постнумерандо. Всего за n лет производится np платежей по R/p каждый. Приводя их к $t = 0$, имеем

$$A^{(p)} = \frac{R}{p(1+i)^{1/p}} + \frac{R}{p(1+i)^{2/p}} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^{np/p}}. \qquad (4.2)$$

Суммируя геометрическую прогрессию с $a_1 = R/p$, $q = \dfrac{1}{(1+i)^{1/p}}$

и $n \to \nu\pi$, получаем **приведенную стоимость *p*-срочной ренты**:

$$A^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-np/p}}{1-(1+i)^{-1/p}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}. \tag{4.3}$$

Множитель

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} \tag{4.4}$$

называется **коэффициентом приведения p-срочной ренты**.

Вычислим теперь наращенную величину p-срочной ренты. За n лет производится np платежей по R/p каждый. Рента представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом R/p и знаменателем $(1 + i)^{1/p}$ (начиная считать с последнего платежа)

$$S^{(p)} = \frac{R}{p} + \frac{R}{p}(1+i)^{1/p} + \ldots + \frac{R}{p}(1+i)^{np/p}. \tag{4.5}$$

Находя ее сумму, получаем для **наращенной величины p-срочной ренты**

$$S^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = Rs^{(p)}_{\overline{n}|i}. \tag{4.6}$$

Множитель

$$s^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{p} \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1} \tag{4.7}$$

называется **коэффициентом наращения p-срочной ренты**.

4.1.2. Связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты

Установим связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты. Она легко получается из формул (4.4), (4.7) и имеет такой же вид, как и для обычной годовой ренты

$$S^{(p)} = A^{(p)} \cdot (1 + i)^{n}. \tag{4.5}$$

4.1.3. Непрерывная рента

Переходя к пределу при $p \to \infty$, получим непрерывный поток платежей с постоянной плотностью $\mu(t) = R$, так называемую *непрерывную ренту*.

Найдем предел $A^{(p)} = \dfrac{R}{p}\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}$ при $p \to \infty$. Используя правило Лопиталя, вычислим предел

$$\lim_{p\to\infty}\frac{(1+i)^{1/p}-1}{1/p} = \lim_{p\to\infty}\frac{(1+i)^{1/p}\left(-1/p^2\right)}{-1/p^2}\ln(1+i) = \ln(1+i).$$

Используя его, получим выражение для приведенной величины непрерывной ренты

$$A^{(\infty)} = \lim_{p\to\infty} A^{(p)} = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \qquad (4.8)$$

Коэффициент приведения равен

$$a^{(\infty)}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \qquad (4.9)$$

Для наращенной суммы и коэффициента наращения непрерывной ренты легко получаем из (4.8) и (4.9) формулы:

$$S = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}\cdot(1+i)^n = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)};$$

$$s^{(\infty)}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)}. \qquad (4.10)$$

Из полученных формул видно, что переход от дискретных рент к непрерывным приводит к увеличению коэффициентов приведения и наращения в $i/\ln(1 + i)$ раз, т.е. имеем следующую связь между коэффициентами

$$a^{(\infty)}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\ln(1+i)}a_{\overline{n}|i},\ s^{(\infty)}_{\overline{n}|i} = \frac{i}{\ln(1+i)}s_{\overline{n}|i}. \qquad (4.11)$$

4.1.4. *p*-срочная рента (случай $k \neq p$)

Рассмотрим наиболее общий случай — p-срочную ренту с начислением процентов k раз в году. Число членов ренты равно np, платежи по R/p каждый. Рента представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом R/p и знаменателем $(1 + i/k)^{k/p}$. Вычисляя ее сумму, получаем для *наращенной величины p-срочной ренты*

$$S^{(p)} = S^{(p)} = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i/k)^{(k/p)(np)}-1}{(1+i/k)^{k/p}-1} = R\cdot\frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} = Rs^{(p)}_{\overline{kn}|i/k}. \qquad (4.12)$$

Для приведенной стоимости ренты имеем

$$A^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \left[\frac{1}{(1+i/k)^{k/p}} + \frac{1}{(1+i/k)^{2k/p}} + \ldots \right] =$$

$$= \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i/k)^{-k/p} \left[1 - (1+i/k)^{-(k/p) np} \right]}{1 - (1+i/k)^{-(k/p)}} =$$

$$= R \cdot \frac{1 - (1+i/k)^{-nk}}{p \left[(1+i/k)^{k/p} - 1 \right]} = R a^{(p)}_{\overline{\overline{k}n}|i/k}. \qquad (4.13)$$

4.1.5. Связь между приведенной и наращенной величинами *p*-срочной ренты с *k*-кратным начислением процентов

В заключение установим связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты с k-кратным начислением процентов. Она легко получается из формул (4.12) и (4.13)

$$S_k^{(p)} = A_k^{(p)} (1+i/k)^{kn}, \; A_k^{(p)} = S_k^{(p)} (1+i/k)^{-kn}. \qquad (4.14)$$

4.1.6. *p*-срочная рента (случай *k* = *p*)

Число членов ренты равно числу начислений процентов, платежи по R/k каждый. Этот случай наиболее часто встречается на практике. Из (4.13), полагая $p = k$, получаем для приведенной стоимости ренты

$$A^{(p)} = \frac{R}{k} \cdot \frac{1 - (1+i/k)^{-nk}}{i/k} = R \cdot \frac{1 - (1+i/k)^{-nk}}{i}. \qquad (4.15)$$

Множитель

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i/p)^{-np}}{i} \qquad (4.16)$$

является коэффициентом приведения p-срочной ренты в случае $k = p$.

Для наращенной величины p-кратной ренты получаем

$$S^{(p)} = \frac{R}{k} \cdot \frac{(1+i/k)^{nk} - 1}{i/k} = R \cdot \frac{(1+i/k)^{nk} - 1}{i}. \qquad (4.17)$$

4.1.7. *p*-срочная рента с непрерывным начислением процентов

Используя формулу (4.13)

$$A_k^{(p)} = R \cdot \frac{1-\left(1+i/k\right)^{-nk}}{p\left[\left(1+i/k\right)^{k/p}-1\right]}$$

и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим для приведенной величины ренты

$$A_\infty^{(p)} = \lim_{k\to\infty} A_k^{(p)} = \lim_{k\to\infty} R \cdot \frac{1-\left(1+i/k\right)^{-nk}}{p\left[\left(1+i/k\right)^{k/p}-1\right]} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1},$$

$$A_\infty^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1}. \qquad (4.18)$$

Покажем, что связь между приведенной и наращенной величинами ренты с непрерывным начислением процентов имеет вид:

$$S_\infty^{(p)} = A_\infty^{(p)} \cdot e^{ni}. \qquad (4.19)$$

Отсюда получаем выражение для наращенной величины p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов

$$S_\infty^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1} \cdot e^{ni} = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1},$$

$$S_\infty^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1}. \qquad (4.20)$$

4.1.8. Непрерывная рента с *k*-кратным начислением процентов

Найдем приведенную величину непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов

$$A_{\infty,k} = \lim_{p\to\infty} R \frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}. \qquad (4.21)$$

Используя правило Лопиталя, получим

$$A_{\infty,k} = \lim_{p\to\infty} R\left[1-\left(1+i/k\right)^{-nk}\right]\frac{1/p}{\left[\left(1+i/k\right)^{k/p}-1\right]} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} R\left[1-\left(1+i/k\right)^{-nk}\right]\frac{-\left(1/p^2\right)}{\left(1+i/k\right)^{k/p} k\left(-1/p^2\right)\ln\left(1+i/k\right)} =$$

$$= R\frac{1-\left(1+i/k\right)^{-nk}}{k\ln\left(1+i/k\right)}. \tag{4.22}$$

Итак, для приведенной величины непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов имеем

$$A_{\infty,k} = R\cdot\frac{1-\left(1+i/k\right)^{-nk}}{k\ln\left(1+i/k\right)}. \tag{4.23}$$

Аналогично найдем наращенную величину непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов. Используя формулу

$$S^{(p)} = R\cdot\frac{\left(1+i/k\right)^{kn}-1}{p\left[\left(1+i/k\right)^{k/p}-1\right]} \tag{4.24}$$

и переходя к пределу при $p\to\infty$, имеем

$$S_{\infty,k} = \lim_{p\to\infty} R\cdot\frac{\left(1+i/k\right)^{kn}-1}{p\left[\left(1+i/k\right)^{k/p}-1\right]}. \tag{4.25}$$

Используя правило Лопиталя, получим

$$S_{\infty,k} = \lim_{p\to\infty} R\left[\left(1+i/k\right)^{nk}-1\right]\frac{1/p}{\left[\left(1+i/k\right)^{k/p}-1\right]} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} R\cdot\left[\left(1+i/k\right)^{nk}-1\right]\frac{-\left(1/p^2\right)}{\left(1+i/k\right)^{k/p} k\left(-1/p^2\right)\ln\left(1+i/k\right)} =$$

$$= R\cdot\frac{\left(1+i/k\right)^{nk}-1}{k\ln\left(1+i/k\right)}. \tag{4.26}$$

Итак, для наращенной величины непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов имеем

$$S_{\infty,k} = R\cdot\frac{\left(1+i/k\right)^{nk}-1}{k\ln\left(1+i/k\right)}. \tag{4.27}$$

4.1.9. Связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с *k*-кратным начислением процентов

В заключение установим связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов. Она легко получается из формул (4.23) и (4.27)

$$S_{\infty,k} = A_{\infty,k}(1+i/k)^{nk}. \qquad (4.28)$$

Пример 4.1. Требуется вычислить наращенную величину 8-летней 15%-ной непрерывной ренты с 12-кратным начислением процентов и рентным платежом $R = 150$.

По формуле (4.27)

$$S_{\infty,k} = R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{k\ln(1+i/k)}.$$

Имеем

$$S_{\infty,12} = 150\cdot\frac{(1+0{,}15/12)^{8\cdot 12}-1}{12\ln(1+0{,}15/12)} = 150\cdot\frac{2{,}296}{0{,}149} = 2311{,}41.$$

4.1.10. Непрерывная рента с непрерывным начислением процентов

Из формулы (4.23)

$$A_{\infty,k} = R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)}$$

легко получить приведенную величину непрерывной рента с непрерывным начислением процентов, переходя к пределу $k\to\infty$

$$A_{\infty,\infty} = \lim_{k\to\infty} R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)} = \lim_{k\to\infty} R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{\frac{k}{i}(-nk)\frac{i}{k}}}{\ln(1+i/k)^{\frac{k}{i}i}} = R\cdot\frac{1-e^{-ni}}{i}. \qquad (4.29)$$

Итак, для приведенной величины непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов получено выражение

$$A_{\infty,\infty} = R\cdot\frac{1-e^{-ni}}{i}. \qquad (4.30)$$

Аналогично найдем наращенную величину непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов.

В формуле

$$S_{\infty,k} = R \cdot \frac{\left(1+i/k\right)^{nk}-1}{k\ln\left(1+i/k\right)}, \tag{4.31}$$

переходя к пределу $k \to \infty$, получим

$$S_{\infty,\infty} = \lim_{k\to\infty} R \cdot \frac{\left(1+i/k\right)^{nk}-1}{k\ln\left(1+i/k\right)} = \lim_{k\to\infty} R \cdot \frac{\left(1+i/k\right)^{\frac{k}{i}(nk)\frac{i}{k}}-1}{\ln\left(1+i/k\right)^{\frac{k}{i}i}} = R \cdot \frac{e^{ni}-1}{i}. \tag{4.32}$$

Итак, для приведенной величины непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов получено выражение

$$S_{\infty,\infty} = R \cdot \frac{e^{ni}-1}{i}. \tag{4.33}$$

4.1.11. Связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов

В заключение отметим связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов. Ее легко получить из формул (4.30) и (4.33):

$$S_{\infty,\infty} = A_{\infty,\infty} \cdot e^{ni}. \tag{4.34}$$

4.1.12. Связь между приведенной и наращенной величинами произвольных рент

Проведенный анализ всех случаев связи между приведенной и наращенной величинами рент показывает, что коэффициент связи зависит *только* от кратности начисления процентов и не зависит от срочности ренты и любых других ее параметров.

Таким образом, имеем:

— при однократном начислении процентов:

$$S = A \cdot \left(1+i\right)^{n},\ A = S \cdot \left(1+i\right)^{-n}; \tag{4.35}$$

— при k-кратном начислении процентов:

$$S = A \cdot \left(1+i/k\right)^{kn},\ A = S \cdot \left(1+i/k\right)^{-kn}; \tag{4.36}$$

— при непрерывном начислении процентов:

$$S = A \cdot e^{ni},\ A = S \cdot e^{-ni}. \tag{4.37}$$

Пример 4.2. Вычислить приведенную и наращенную величины непрерывной 10-летней ренты с непрерывным начислением процентов с рентным платежом $R = 300$ при ставке 14% годовых.

По формуле (4.27) найдем приведенную величину ренты

$$A_{\infty,\infty} = R \cdot \frac{1-e^{-ni}}{i} = 300 \cdot \frac{1-e^{-10 \cdot 0,14}}{0,14} = 300 \cdot 5,38 = 1614.$$

Наращенную величину ренты можно найти либо по формуле (4.33)

$$S_{\infty,\infty} = R \cdot \frac{e^{ni}-1}{i} = 300 \cdot \frac{e^{10 \cdot 0,14}-1}{0,14} = 300 \cdot 21,823 = 6546,9,$$

либо используя связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов (4.27)

$$S_{\infty,\infty} = A_{\infty,\infty} \cdot e^{ni} = 1614 \cdot e^{10 \cdot 0,14} = 1614 \cdot 4,055 = 6544,8.$$

Возникшая небольшая разница ($2 : 6545 = 0,03\%$) связана с приближенными вычислениями по двум различным схемам.

4.2. Другие типы рент

4.2.1. Ренты пренумерандо

Как упоминалось выше, рентами пренумерандо называются ренты с платежами в начале периодов. По сравнению с рентой постнумерандо начисления на каждый член ренты (за исключением последнего) в данном случае выше в $(1 + i)$ раз за счет начислений за первый период. Поэтому наращенная сумма ренты пренумерандо $\ddot{S}$ в $(1 + i)$ раз больше наращенной суммы ренты постнумерандо

$$\ddot{S} = S(1+i). \tag{4.38}$$

Аналогичные соотношения имеют место для приведенных величин рент

$$\ddot{A} = A(1+i). \tag{4.39}$$

Как отмечалось в предыдущих разделах, коэффициенты приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо связаны соотношениями

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i},\; s_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i}. \tag{4.40}$$

Для годовой ренты с начислением процентов k раз в году имеем

$$\ddot{S} = S(1+i/k)^k,\; \ddot{A} = A(1+i/k)^k. \tag{4.41}$$

Для p-срочной ренты с начислением процентов k раз в году имеем

$$k = 1: S = S\left(1+i\right)^{1/p},$$

$$k \neq p: S = S\left(1+i/k\right)^{k/p}. \qquad (4.42)$$

Переходя в каждом из равенств (4.42) к пределу при $p \to \infty$, получаем, что для непрерывных рент (при любой кратности начисления процентов) выполняются соотношения

$$\ddot{S} = S, \;\; \ddot{A} = A. \qquad (4.43)$$

То есть для непрерывных рент понятия «пренумерандо» и «постнумерандо» отсутствуют (или совпадают) в силу стремления к нулю интервала между платежами.

Формулы (4.43) легко получить из выражений для приведенной величины и наращенной суммы p-срочной ренты пренумерандо и постнумерандо, переходя к пределу при $p \to \infty$.

Как изменяются приведенные и наращенные величины p-срочной ренты (пренумерандо и постнумерандо) с ростом срочности ренты p?

Можно показать, что для рент постнумерандо приведенная и наращенная величины растут с ростом срочности ренты p (с ростом числа платежей за период). Для рент же пренумерандо ситуация иная: с ростом срочности ренты p приведенная и наращенная величины убывают. Эти выводы имеют важное значение на практике при выборе схем оплаты (например, кредита).

Для доказательства достаточно рассмотреть обе ренты на временном интервале в один период с одним платежом и двумя. Для рент постнумерандо при появлении платежа $R/2$ в середине периода на него будут начислены проценты за полпериода, чего не было для годовой (обычной) ренты. Это ведет к росту приведенной и наращенной величин ренты с ростом срочности ренты p. Для рент же пренумерандо при появлении платежа $R/2$ в середине периода проценты в течение первой половины периода начисляются на сумму платежа $R/2$, а не R, как в случае годовой (обычной) ренты. Эта потеря в начисленных процентах и ведет к уменьшению приведенной и наращенной величин ренты с ростом срочности ренты p.

4.2.2. Ренты с платежами в середине периодов

Если платежи распределяются более или менее равномерно, но их поступление не приходится на начало либо конец периода, можно суммарные платежи за период относить на середины периодов. В этом случае приведенные и наращенные величины ренты равны соответствующим величинам ренты постнумерандо, наращенным за половину периода:

$$S_{1/2} = S(1 + i)^{1/2},\ A_{1/2} = A(1 + i)^{1/2} \text{ при } p = 1,\ k = 1; \quad (4.44)$$

$$S_{1/2} = S(1 + i)^{1/2p},\ A_{1/2} = A(1 + i)^{1/2p} \text{ при } p > 1,\ k = 1; \quad (4.45)$$

$$S_{1/2} = S(1 + i/k)^{k/2},\ A_{1/2} = A(1 + i/k)^{k/2}, \text{ при } p = 1,\ k > 1; \quad (4.46)$$

$$S_{1/2} = S(1 + i/k)^{k/2p},\ A_{1/2} = A(1 + i/k)^{k/2p}, \text{ при } p > 1,\ k > 1. \quad (4.47)$$

4.2.3. Немедленные и отложенные ренты

Немедленная рента — это рента, выплаты которой производятся в настоящее время (в начале или конце периодов). **Отсроченная рента** — это рента, начало выплат которой отложено на некоторое время t. Отсроченность ренты не влияет на ее наращенную величину, однако современная величина ренты ${}_tA$ при этом изменяется.

$${}_tA = A\nu^t = Ra_{\overline{n}|i}\nu^t. \quad (4.48)$$

В таблицах 4.1 и 4.2 дана сводка приведенной и наращенной величин рент постнумерандо и пренумерандо.

Таблица 4.1

Приведенная и наращенная величины рент постнумерандо

Тип ренты		Приведенная величина A	Наращенная величина S
Годовая		$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$R\frac{(1+i)^n-1}{i}$
Вечная		R/i	∞
p-срочная	$k = 1$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{1/p}-1}$
	$k \neq p$	$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}$
	$k = p$	$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{i}$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{i}$
Непрерывная		$R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}$	$R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)}$

Окончание

Тип ренты	Приведенная величина A	Наращенная величина S
p-срочная с непрерывным начислением процентов	$\frac{R}{p}\cdot\frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1}$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1}$
Непрерывная с k-кратным начислением процентов	$R\cdot\frac{1-\left(1+i/k\right)^{-nk}}{k\ln\left(1+i/k\right)}$	$R\cdot\frac{\left(1+i/k\right)^{nk}-1}{k\ln\left(1+i/k\right)}$
Непрерывная с непрерывным начислением процентов	$R\cdot\frac{1-e^{-ni}}{i}$	$R\cdot\frac{e^{ni}-1}{i}$

Таблица 4.2

Приведенная и наращенная величины рент пренумерандо

Тип ренты		Приведенная величина A	Наращенная величина S
Годовая		$R\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}\left(1+i\right)$	$R\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i}\left(1+i\right)$
Вечная		$R(1+i)/i$	∞
p-срочная	$k=1$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{\left(1+i\right)^{1/p}-1}\left(1+i\right)^{1/p}$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{\left(1+i\right)^{1/p}-1}\left(1+i\right)^{1/p}$
	$k\neq p$	$R\cdot\frac{1-\left(1+i/k\right)^{-nk}}{p\left[\left(1+i/k\right)^{k/p}-1\right]}\cdot\left(1+i/k\right)^{k/p}$	$R\cdot\frac{\left(1+i/k\right)^{kn}-1}{p\left[\left(1+i/k\right)^{k/p}-1\right]}\cdot\left(1+i/k\right)^{k/p}$
	$k=p$	$R\cdot\frac{1-\left(1+i/k\right)^{-nk}}{i}\cdot\left(1+i/k\right)$	$R\cdot\frac{\left(1+i/k\right)^{nk}-1}{i}\cdot\left(1+i/k\right)$
Непрерывная		$R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}$	$R\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)}$
p-срочная с непрерывным начислением процентов		$\frac{R}{p}\cdot\frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1}\cdot e^{i/p}$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1}\cdot e^{i/p}$
Непрерывная с k-кратным начислением процентов		$R\cdot\frac{1-\left(1+i/k\right)^{-nk}}{k\ln\left(1+i/k\right)}$	$R\cdot\frac{\left(1+i/k\right)^{nk}-1}{k\ln\left(1+i/k\right)}$
Непрерывная с непрерывным начислением процентов		$R\cdot\frac{1-e^{-ni}}{i}$	$R\cdot\frac{e^{ni}-1}{i}$

4.3. Сравнение финансовых потоков и рент

4.3.1. Общий принцип сравнения финансовых потоков и рент

Достаточно часто возникает необходимость выбора между несколькими рентами с разными параметрами. Для осознанного решения проблемы выбора необходимо уметь сравнивать ренты. Та же проблема возникает и при сравнении финансовых потоков более общего типа. Если сроки сравниваемых рент или финансовых потоков одинаковы, то необходимо сравнивать наращенные величины рент (потоков) и выбирать ту ренту (поток), наращенная величина которой больше.

Альтернативными способами выбора ренты (потока) является сравнение их современных (дисконтированных к начальному моменту времени) или приведенных (дисконтированных к некоторому моменту времени между начальным и конечным моментами) величин.

Рассмотрим два потока:

$$CF_1 = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), ..., (P_n, t_n)\} \tag{4.49}$$

и

$$CF_1 = \{(Q_0, t_0), (Q_1, t_1), ..., (Q_n, t_n)\},$$

отличающиеся лишь размерами платежей P_i и Q_i. Если сравнивать современные величины этих потоков, то результат сравнения в общем случае будет зависеть от ставки дисконтирования, т.е. при одной процентной ставке предпочтительным может оказаться первый поток, а при другой — второй. При некоторых условиях современная величина первого потока (ренты) будет больше современной величины второго потока (ренты) при любой ставке дисконтирования.

Очевидным достаточным условием этого является выполнение неравенств $P_i \geq Q_i$ для всех i. Еще одним достаточным условием предпочтительности первого потока (ренты) является $P \geq Q$, где $P = \sum_{i=0}^{n} P_i$, $Q = \sum_{i=0}^{n} Q_i$. Существуют и другие более слабые достаточные условия.

4.3.2. Сравнение годовых и срочных рент

Как упоминалось в предыдущем параграфе, при выборе рент необходимо сравнивать наращенные величины рент и выбирать ту из них, величина которой больше. Величина наращенной суммы ренты зависит от периода ренты и частоты начисления процентов. Если эти параметры ввести в качестве аргументов наращенной суммы ренты, то ее можно обозначить как $S(p, k)$. Таким образом, $S(p, k)$ — наращенная сумма p-кратной ренты с начислением процентов k раз в году.

Для рент с одинаковыми сроками, членами и размерами процентных ставок, отличающихся лишь двумя характеристиками — кратностью ренты и частотой начисления процентов из приведенных выше формул, можно получить ряд соотношений, полезных при предварительной оценке соглашения о ренте:

$$S(1,1) < S(1,k) < S(1,\infty) < S(p,1) < S(p,k) < S(p,k) < S(p,k) < S(p,\infty);$$
$$k > 1 \quad p > 1 \quad p > k > 1 \quad p = k > 1 \quad k > p > 1. \tag{4.50}$$

Из этих соотношений можно сразу оценить, что при равенстве всех остальных параметров рент при начислении процентов один раз в году p-кратная рента предпочтительней годовой с начислением процентов один раз в году. Также видно, что при k, $p > 1$ рента с $k > p$ будет предпочтительней ренты с $p > k$, т.е. рента с $k = 5$ и $p = 3$ предпочтительней ренты с $k = 3$ и $p = 5$.

Ренты с частотой начисления процентов равной кратности предпочтительней ренты с кратностью больше частоты начисления процентов ($p > k$), но менее предпочтительны, чем ренты с кратностью больше частоты начисления процентов ($k > p$).

4.4. Конверсия рент

Бывают ситуации, когда возникает необходимость изменить условия выплаты ренты, заменить одну ренту другой либо разовым платежом, либо, наоборот, заменить разовый платеж рентой, а также заменить несколько рент с разными параметрами одной. Во всех перечисленных выше случаях производится конверсия рент, подчиняющаяся простому правилу: современные величины старой (старых) и новой (новых) рент должны быть равны. Это следует из предположения, что конверсия рент не должна менять финансового положения сторон, т.е. должен соблюдаться принцип финансовой эквивалентности (принцип финансовой справедливости). Алгоритм расчета параметров новой ренты таков:

1. Определяется современная величина старой (старых) ренты.
2. В случае объединения рент эти величины складываются и дают современную величину новой ренты.

3. Зная современную величину новой ренты, по методу, описанному выше, рассчитываются параметры новой ренты, такие как размер отдельного платежа R, срок ренты n и процентная ставка i.

Рассмотрим такие виды конверсии рент, как изменение параметров ренты, замена одной ренты другой, выкуп ренты (замена ренты разовым платежом), рассрочка платежа (замена разового платежа рентой), а также консолидация (объединение) рент (замена нескольких рент с разными параметрами одной рентой).

4.4.1. Замена одной ренты другой

4.4.1.1. Изменение параметров ренты

На практике довольно часто возникает необходимость в изменении параметров ренты. Например, надо изменить срок ренты или величину рентного платежа либо изменить частоту выплат (срочность ренты) и т.д.

Алгоритм расчета параметров новой ренты такой же, как приведен выше: определяется приведенная величина старой ренты, которая будет равна приведенной величине новой ренты. Далее следует задать все параметры новой ренты, кроме одного, и из уравнения эквивалентности $A_1 = A_2$ найти недостающий параметр новой ренты.

Если задать такие параметры новой ренты, как размер отдельного платежа R и срок ренты n, можно из уравнения эквивалентности найти процентную ставку i либо при заданном сроке ренты n и процентной ставке i определить величину рентного платежа R и т.д. Возможны и более сложные случаи, в частности может возникнуть необходимость заменить годовую ренту p-срочной либо наоборот. Подобные и другие случаи рассмотрим более подробно.

4.4.1.2. Замена обычной ренты срочной

Приведем три примера замены одной ренты другой. В качестве первого примера рассмотрим замену годовой ренты с параметрами R_1, n_1 p-кратной рентой с параметрами R_2, n_2, p. Приравняем современные величины старой и новой рент:

$$R_1 a_{\overline{n_1}|i} = R_2 a^{(p)}_{\overline{n_2}|i}. \tag{4.51}$$

Из этого уравнения можно либо найти величину платежа срочной ренты R_2, если заданы ее срок n_2 и срочность p, либо определить срок ренты n_2, если заданы величина платежа R_2 и срочность ренты p.

В первом случае

$$R_2 = R_1 \frac{a_{\overline{n_1}|i}}{a^{(p)}_{\overline{n_2}|i}}. \tag{4.52}$$

Если сроки обеих рент, как и процентные ставки, одинаковы и отличаются только периодичностью рентных платежей (один платеж в год для первой ренты и p платежей в год для второй ренты), то платежи таких рент связаны соотношением

$$R_2 = R_1 \frac{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]}{i}. \tag{4.53}$$

Во втором случае для нахождения срока ренты n_2 находим сначала коэффициент приведения для p-срочной ренты

$$a^{(p)}_{\overline{n_2}|i} = \frac{A}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} a_{\overline{n_1}|i}. \tag{4.54}$$

Решая это уравнение относительно n_2, определим срок p-срочной ренты:

$$n_2 = \frac{\ln\left[1 - \frac{A}{R}\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right]^{-1}}{\ln(1+i)}. \tag{4.55}$$

Пример 4.3. Заменить обычную (годовую) ренту с параметрами $R_1 =$ $= 200$, $n = 5$, $i = 10\%$ срочной (квартальной) рентой с параметрами $R_2 = 100$, $i = 10\%$.

Найдем сначала приведенную величину годовой ренты

$$A = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 200 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} = 200 \cdot 3{,}79 = 758.$$

Далее находим срок 4-срочной ренты

$$n_2 = \frac{\ln\left[1 - \frac{A}{R_2}\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right]^{-1}}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left[1 - \frac{758}{100}\left[(1+0{,}1)^{1/4} - 1\right]\right]^{-1}}{\ln(1+0{,}1)} =$$

$$= \frac{1{,}699}{0{,}0953} = 17{,}83 \text{ года.}$$

4.4.1.3. Замена немедленной ренты отсроченной

В качестве второго примера рассмотрим замену немедленной ренты с параметрами R_1, n_1 отсроченной рентой с параметрами

R_2, n_2, t. Приравняем современные величины старой и новой рент:

$$R_1 a_{\overline{n_1}|i} = R_2 a_{\overline{n_2}|i} \nu^t, \tag{4.56}$$

где $v^t = (1 + i)^{-t}$. (4.57)

Из этого уравнения можно либо найти величину платежа отсроченной ренты R_2, если заданы ее срок n_2 и продолжительность отсрочки t, либо определить срок ренты n_2, если заданы величина платежа R_2 и продолжительность отсрочки t.

В первом случае величина платежа R_2 равна:

$$R_2 = R_1 \frac{a_{\overline{n_1}|i}}{a^{(p)}_{\overline{n_2}|i}} (1+i)^t. \tag{4.58}$$

Если сроки обеих рент равны, их платежи связаны соотношением

$$R_2 = R_1(1 + i)^t, \tag{4.59}$$

т.е. член отсроченной ренты равен наращенному за время отсрочки t члену немедленной ренты.

Во втором случае из равенства

$$R_1 a_{\overline{n_1}|i} = R_2 a_{\overline{n_2}|i} \nu^t \tag{4.60}$$

при заданных R_2 и t находим срок новой ренты (R_1 и n_1 известны). В случае сохранения размера члена ренты ($R_2 = R_1$) он определяется соотношением

$$n_2 = \frac{\ln\left[1 - \left[1 - (1+i)^{-n_1}\right](1+i)^t\right]}{\ln(1+i)}. \tag{4.61}$$

4.4.2. Консолидация рент

При замене нескольких рент одной равенство современных величин старых и новой рент имеет вид:

$$A = \sum_i A_i. \tag{4.62}$$

Это равенство позволяет найти только один параметр консолидирующей ренты (член ренты либо ее срок), при этом все остальные ее параметры должны быть заданы. В случае если неизвестен член ренты, то он для ренты постнумерандо со сроком n определяется по формуле

$$R = \frac{\sum_i A_i}{a_{\overline{n}|i}}. \tag{4.63}$$

Если же неизвестен срок консолидирующей ренты, то сначала находим коэффициент приведения

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{\sum_i A_i}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \tag{4.64}$$

откуда уже находим срок ренты

$$n = \frac{-\ln\left(1+i\sum_i A_i \big/ R\right)}{\ln(1+i)}. \tag{4.65}$$

Важным частным случаем консолидации рент является ситуация, когда член консолидирующей ренты равен сумме членов заменяемых рент. При одинаковой процентной ставке всех рент из условия финансовой эквивалентности получаем:

$$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum_j R_j\left[1-(1+i)^{-n_j}\right]}{i}, \tag{4.66}$$

откуда находим срок ренты

$$n = \frac{\ln R - \ln\sum_j R_j (1+i)^{-n_j}}{\ln(1+i)}. \tag{4.67}$$

4.4.3. Выкуп ренты

Выкупом ренты называется замена ренты единовременным платежом. Принцип финансовой эквивалентности здесь сводится к тому, что единовременный платеж P должен равняться современной величине выкупаемой ренты A:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = P. \tag{4.68}$$

По этой формуле определяется величина единовременного платежа при известных параметрах выкупаемой ренты: размере отдельного платежа R, сроке ренты n и процентной ставке i.

Пример 4.4. Заменить две ренты постнумерандо с параметрами

$$R_1 = 200,\ n_1 = 4,\ i_1 = 12\%, R_2 = 250,\ n_2 = 6,\ i_2 = 14\%$$

разовым платежом в момент времени $n = 4$, $t = 15\%$.

Вначале найдем приведенные величины обеих рент:

$$A_1 = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i_1} = 200 \cdot \frac{1-(1+0{,}12)^{-4}}{0{,}12} = 200 \cdot 3{,}037 = 607{,}47;$$

$$A_2 = R_2 \frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i_2} = 250 \cdot \frac{1-(1+0{,}14)^{-6}}{0{,}14} = 250 \cdot 3{,}889 = 972{,}17.$$

Теперь определим сумму приведенных величин обеих рент:

$$A = A_1 + A_2 = 607{,}47 + 972{,}17 = 1579{,}64.$$

Эта сумма должна равняться единовременному платежу, дисконтированному к начальному моменту времени:

$$A = \frac{P}{(1+i)^n}.$$

Отсюда $P = A(1+i)^n = 1579{,}64(1+0{,}15)^4 = 2762{,}80.$

$P = 2762{,}80.$

4.4.4. Рассрочка платежа

Рассрочкой платежа называется замена долга (единовременного платежа) рентой. При этом задаются все параметры ренты, кроме одного, а этот неизвестный параметр определяется из условия равенства долга современной величине вводимой ренты:

$$P = A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{4.69}$$

Пенсионная задача

В свете последних событий и принятых на излете 2013 г. решений в области пенсионного обеспечения (отказ от накопительной части пенсии, увеличение минимально необходимого стажа работы (с нынешних 5 лет до 15 лет к 2025 г.), поощрение более позднего выхода на пенсию, увеличение срока дожития с 18 до 19 лет и т.д. становится крайне актуальной проблема обеспечения своей старости самими пенсионерами. В связи с этим рассмотрим традиционную пенсионную задачу.

Пример 4.5. Предположим, вам 50 лет и в 60 лет вы намерены уйти на пенсию. Чтобы облегчить себе существование, вы хотите открыть пенсионный счет, на который в начале (или конце) каждого года вы собираетесь вносить вклад. На него будет начисляться, скажем, 8% годовых. По достижении пенсионного возраста (если вы не желаете проработать еще 5 лет без выхода на пенсию и увеличить свою пенсию в полтора раза либо 10 лет — и увеличить пенсию в два раза (вам просто известна средняя продолжительность жизни в стране — 69,8 года, причем мужчин — 64 года, женщин — 75,6 года)) вы будете получать ежегодно определенную сумму, размер которой мы сейчас и определим.

Для решения этой задачи необходимо приравнять наращенную сумму ваших вкладов на момент выхода на пенсию к приведенному к этой же дате потоку выплат: $\ddot{S} = \ddot{A}$ (пусть все выплаты производятся в начале периода).

Процентную ставку по вкладам после выхода на пенсию положим равной 5% (это согласуется с предпринимаемыми мерами Банка России «по регулированию процентных ставок коммерческих банков»).

Итак, вы кладете в начале каждого года по 60 000 руб. в течение 10 лет. Сколько же вы будете получать в начале каждого года после выхода на пенсию?

$$R_1 \frac{(1+i_1)^{n_1}-1}{i_1}(1+i_1) = R_2 \frac{1-(1+i_2)^{-n_2}}{i_2}(1+i_2);$$

$$60\,000 \frac{(1+0{,}08)^{10}-1}{0{,}08}(1+0{,}08) = R_2 \frac{1-(1+0{,}05)^{-18}}{0{,}05}(1+0{,}05);$$

$$938\,729{,}2 = R_2 \cdot 8{,}756;$$

$$R_2 = \frac{938\,729{,}2}{8{,}756} = 107\,579{,}2.$$

Вы будете получать 107 576,2 руб.

Пример 4.6. Женщина 40 лет открывает пенсионный счет, на который в конце каждого года вносит определенную сумму. На него начисляется 10% годовых. По достижении пенсионного возраста (пока 55 лет, но ходят слухи, что гендерные различия могут ликвидировать) она хочет получать 20 000 руб. Какую сумму в конце каждого года вносит женщина, если она доживет до средней продолжительности жизни 75,6 года?

Для решения этой задачи по-прежнему необходимо приравнять наращенную сумму вкладов на момент выхода на пенсию к приведенному к этой же дате потоку выплат: $\ddot{S} = \ddot{A}$ (все выплаты производятся в конце периода).

Итак, она кладет в конце каждого года по R_1 рублей в течение 15 лет, а получает 20 000 руб. в конце периода в течение 20,6 года.

Найдем R_1, если $i_2 = 4\%$.

$$R_1 \frac{(1+i_1)^{n_1} - 1}{i_1} = R_2 \frac{1-(1+i_2)^{-n_2}}{i_2};$$

$$R_1 \frac{(1+0{,}1)^{15} - 1}{0{,}1} = 20\,000 \frac{1-(1+0{,}04)^{-20{,}6}}{0{,}04};$$

$$R_1 \cdot 31{,}772 = 277\,113{,}78;$$
$$R_2 = 8721{,}95.$$

Она кладет 8721,95 руб. ежегодно.

Пример 4.7. Решим более сложную задачу. Пусть взносы делаются в конце каждого квартала, а деньги после выхода на пенсию снимаются ежемесячно, при этом ставки равны соответственно 9 и 4%. Каков должен быть ежеквартальный взнос, чтобы после выхода на пенсию вы получали ежемесячно 10 000 руб.?

Задача решается по той же схеме, только ренты постнумерандо теперь p-срочные.

$$\frac{R_1}{p_1} \cdot \frac{(1+i_1)^{n_1} - 1}{(1+i_1)^{1/p_1} - 1} = \frac{R_2}{p_2} \cdot \frac{1-(1+i_2)^{-n_2}}{(1+i_2)^{1/p_2} - 1};$$

$$\frac{R_1}{4} \cdot \frac{(1+0{,}09)^{10} - 1}{(1+0{,}09)^{1/4} - 1} = \frac{10000}{12} \cdot \frac{1-(1+0{,}04)^{-18}}{(1+0{,}04)^{1/12} - 1};$$

$$R_1 \cdot 15{,}7 = 128\,898{,}97;$$
$$R_1 = 8210{,}13.$$

Итак, ежеквартально в течение 10 лет нужно класть 8210,13 руб., чтобы после выхода на пенсию вы получали ежемесячно 10 000 руб.

С 1 января 2013 г. по решению правительства, принятому в рамках модернизации пенсионной системы, срок дожития, или, как его официально называют, «ожидаемый период выплаты трудовой пенсии по старости», — время, в течение которого, как полагает наше государство, пенсионеру придется выплачивать пенсию, — увеличивается с 216 месяцев (18 лет) до 228 месяцев (19 лет). Это снижает на 3% пенсии «новым пенсионерам», а как это изменит результат предыдущих примеров, предоставляем решить читателю.

ЛЕКЦИЯ 5

ДОХОДНОСТЬ И РИСК ФИНАНСОВОЙ ОПЕРАЦИИ

5.1. Доход и доходность финансовой операции

Финансовой называется любая операция, начальное и конечное состояние которой имеет финансовое (денежное) выражение (оценку) (P и P'). Одной из главных целей проведения любой финансовой операции является получение максимальной прибыли ($P' - P$), поэтому *прибыль* представляет собой одну из основных характеристик финансовой операции наряду с полученным в результате ее *доходом* (P'). Более точно финансовую операцию характеризует ее *доходность* (или эффективность) ($(P' - P)/P$). В условиях детерминированности, рассмотренных в предыдущих главах, доходность составляет вполне определенную величину, зависящую от процентной ставки, уровня инфляции и других факторов, которые предполагались нами известными.

5.1.1. Доходность за несколько периодов

Найдем доходность за несколько периодов, если доходность за каждый период известна. Пусть доходности за последовательные периоды времени $t_1, t_2, ..., t_n$ равны соответственно $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$. Найдем доходность μ за период $t = t_1 + t_2 + ... + t_n$. Здравый смысл подсказывает, что доходность — аддитивная величина, так что μ по крайней мере приближенно равна сумме доходностей за каждый период $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n. \tag{5.1}$$

Ниже получим точное выражение для доходности за суммарный период времени t и увидим, насколько она отличается от интуитивного результата (5.1).

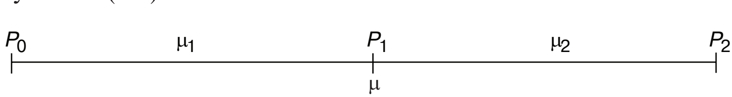

Рис. 5.1. К выводу формулы для доходности за два периода

Рассмотрим сначала два периода t_1 и t_2. Обозначив стоимость актива в моменты времени $t = 0$, $t = t_1$, $t = t_2$ через соответственно P_0, P_1, P_2 (рис. 5.1), имеем для доходностей за первый (μ_1) и второй (μ_2) периоды следующие выражения:

$$\mu_1 = \frac{P_1 - P_0}{P_0}, \ \mu_2 = \frac{P_2 - P_1}{P_1}. \tag{5.2}$$

Доходность μ за период $t = t_1 + t_2$ равна

$$\mu = \frac{P_2 - P_0}{P_0}. \tag{5.3}$$

Проведя почленное деление в (3.2) и (3.3), получим

$$\mu_1 = \frac{P_1}{P_0} - 1, \ \mu_2 = \frac{P_2}{P_1} - 1, \ \mu = \frac{P_2}{P_0} - 1. \tag{5.4}$$

Перенося -1 в левые части, имеем

$$\mu_1 + 1 = \frac{P_1}{P_0}, \ \mu_2 + 1 = \frac{P_2}{P_1}, \ \mu + 1 = \frac{P_2}{P_0}. \tag{5.5}$$

Перемножив первые два выражения, получим

$$(\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) = \frac{P_2}{P_0}. \tag{5.6}$$

Правая часть (5.6) равна правой части третьего уравнения в (5.5). Приравнивая их, получим

$$(\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) = \mu + 1 \tag{5.7}$$

или окончательно

$$\mu = (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) - 1. \tag{5.8}$$

Обобщая (5.8) на случай n-периодов (рис. 5.2), для доходности μ за период $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ имеем

$$\mu = (\mu_1 + 1) \cdot (\mu_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\mu_n + 1) - 1. \tag{5.9}$$

Строгое доказательство формулы (5.9) несложно получить методом математической индукции.

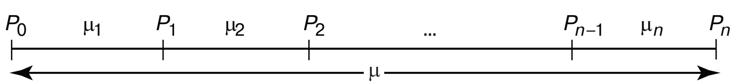

Рис. 5.2. К выводу формулы для доходности за несколько периодов

Отметим, что доходность за n-периодов не зависит как от длительности составляющих периодов, так и от периода t .

Полученный *результат для доходности за несколько периодов полностью аналогичен полученному нами ранее результату для темпа инфляции за несколько периодов*.

Для равных доходностей за отдельные периоды $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n$ (при этом промежутки времени могут оставаться произвольными и не равными друг другу) имеем

$$\mu = (1+\mu_1)^n - 1. \tag{5.10}$$

Проанализируем отличие полученных результатов (5.9) и (5.10) от интуитивного выражения (5.1) и причину этого на примере временнóго интервала, состоящего из двух периодов.

Пусть доходности за два последовательных периода времени t_1, t_2 равны соответственно μ_1, μ_2. Тогда по формуле (5.9) доходность μ за период $t = t_1 + t_2$ равна

$$\mu = (1+\mu_1)(1+\mu_2) - 1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_1\mu_2. \tag{5.11}$$

Как видим, отличие от суммы доходностей состоит в появлении перекрестного члена μ_1, μ_2. Хотя он и является малой величиной более высокого порядка малости по сравнению с μ_1, μ_2 при условии, что они малы, на практике необходимо их учитывать.

5.1.2. Синергетический эффект

Здесь, как и в случае темпа инфляции, мы имеем пример синергетического эффекта (т.е. эффект (результат) от двух (нескольких) частей больше аддитивного эффекта (простого суммирования)). Ответствен за синергетический эффект, как и в случае темпа инфляции, появляющийся перекрестный член μ_1, μ_2. Он приводит к тому, что доходность за два последовательных периода времени $t = t_1 + t_2$ оказывается больше суммы доходностей.

Пример 5.1. Пусть доходности за два последовательных периода времени t_1, t_2 равны 20 и 30% соответственно. Тогда по формуле (5.11) доходность μ за период $t = t_1 + t_2$ равна

$$\mu = (1+\mu_1)(1+\mu_2) - 1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_1\mu_2 = 0,2 + 0,3 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,56,$$

т.е. 56%. Таким образом, отличие от суммы доходностей составляет 6%.

Пример 5.2. Доходность актива за год μ равна 20%. Требуется найти доходность актива за квартал μ_1 при условии ее постоянства.

Применим формулу

$$\mu = (1+\mu_1)^n - 1.$$

Имеем

$$\mu + 1 = (1+\mu_1)^n,\ \mu_1 + 1 = \sqrt[n]{1+\mu}$$

и окончательно $\mu_1 = \sqrt[n]{1+\mu} - 1$.

Подставив в эту формулу μ = 20% = 0,2, n = 4, получим для квартальной доходности

$$\mu_1 = \sqrt[4]{1+\mu} - 1 = \sqrt[4]{1,2} - 1 \approx 1,0466 - 1 = 0,0466 \approx 4,66\%.$$

Видим, что доходность за квартал оказывается ниже получаемой простым делением годовой доходности на четыре, т.е. 20 : 4 = 5%. Разница составляет 5% – 4,66% = 0,36%.

Пример 5.3. Решим обратную задачу. Пусть доходность актива за месяц μ_1 равна 2%. Найти доходность актива за год μ при условии, что месячная доходность в течение года постоянна.

Применим формулу

$$\mu = (1+\mu_1)^n - 1.$$

Подставляя сюда μ = 2% = 0,02, n = 12, получим для годовой доходности

$$\mu = (1+\mu_1)^{12} - 1 = (1+0,02)^{12} - 1 =$$
$$= (1,02)^{12} - 1 \approx 1,268 - 1 = 0,268 = 26,8\%.$$

Оказывается, доходность за год выше получаемой простым умножением месячной доходности на двенадцать, т.е. 2% · 12 = 24%. Разница составляет 2,8%.

По двум последним примерам можно заключить, что, во-первых, доходность за суммарный период превышает сумму доходностей за составляющие периоды; во-вторых, доходность за составляющий период меньше соответствующей ему доли доходности за суммарный период.

5.2. Риск финансовой операции

Однако, как правило, большая часть финансовых операций проводится в условиях неопределенности, когда перечисленные выше и другие факторы либо неизвестны, либо являются случайными величинами, что приводит к неопределенности и доходности финансовой операции.

В этой ситуации финансовая операция характеризуется помимо доходности еще одной величиной, тесно связанной с доходностью и определяющей степень неопределенности данной финансовой операции, а именно *риском* финансовой операции.

Термин «риск» понимается далеко не однозначно. Отвлекаясь от того факта, что существуют разные типы финансовых рисков (банковский, кредитный, валютный, инвестиционный, депозитный, страховой, инфляционный, ценовой, риск ликвидности активов и др.), отметим, что даже общее определение этого понятия неясно, неоднозначно и противоречиво.

Интуитивно риск понимается как возможные потери, связанные с проведением финансовой операции в условиях неопределенности. Наличие неопределенности не позволяет предсказать заранее результат финансовой операции, поэтому при ее проведении возможны как прибыль, так и убыток (или меньшая прибыль по сравнению с той, которая могла бы быть). При таком понимании риска вероятность убытков или получения меньшей прибыли считается риском, а вероятность получения большей прибыли риском не считается.

Часто различают риск и неопределенность. Считается, что риск имеет место тогда, когда известны вероятности различных исходов финансовой операции. Если же вероятности исходов неизвестны, то соответствующая ситуация рассматривается как неопределенность. С нашей точки зрения, риск существует в обоих случаях, а различаются они полнотой информации, характеризующей риск. Рассмотрим различные случаи неопределенности.

Еще одним аспектом понятия «риск» является наличие рискующего (инвестора). Ряд авторов называют операцию рискованной, если она может иметь несколько исходов, не равноценных для инвестора. Таким образом, в их представлении понятие риска обязательно предполагает рискующего — того, к кому этот риск относится, кто озабочен результатом операции. Сам риск, по их мнению, возникает, «только если операция может окончиться исходами, не равноценными для него, несмотря на, возможно, все его усилия по управлению этой операцией».

Хотя такое определение риска на первый взгляд допустимо, оно представляется не вполне оправданным по крайней мере по двум причинам: во-первых, оно вуалирует объективный характер риска, который зачастую бывает вызван внешними, не зависящими от инвестора обстоятельствами, а во-вторых, оно приводит к неоправданному усложнению рассматриваемой ситуации, связанному с введением еще одной степени свободы, обусловленной наличием инвестора.

Наличие инвестора нужно учитывать только там, где это действительно необходимо, а именно при рассмотрении системы предпочтений индивида и функции полезности. Там появится третья характеристика финансовой операции, связанная с наличием инвестора (функция полезности, функция удовольствия или иная аналогичная величина).

Во всех остальных случаях мы будем исходить из следующего определения риска финансовой операции. **Риском финансовой операции** в условиях неопределенности называется отклонение доходности от среднего значения. Таким образом, возможность отклонения доходности в любую сторону (прибыль или убыток) считается риском.

Итак, в условиях неопределенности финансовая операция приобретает еще одну характеристику — риск и, значит, характеризуется двумя величинами: доходностью и риском.

Перейдем к количественной оценке риска.

5.2.1. Количественная оценка риска финансовой операции

Для количественной оценки риска необходимо знать вероятности различных исходов финансовой операции, а следовательно, и вероятности P_i ее различных доходностей q_i. Мы имеем случайную величину — доходность Q, с законом распределения $p_i = p(q_i)$. **Средней ожидаемой доходностью финансовой операции** называется математическое ожидание (среднее значение) случайной величины $Q : M(Q) = \sum_i q_i p_i$.

Дисперсией доходности *Q* финансовой операции называется математическое ожидание квадрата отклонения доходности от своего среднего значения, т.е. среднее значение случайной величины $\left(q - M(q)\right)^2$/ $D(Q) = M\left[\left(q - M(q)\right)^2\right]$.

Риском финансовой операции называется среднее квадратичное (стандартное) отклонение доходности $r(q) = \sigma(q) = \sqrt{D(q)}$.

В теории и на практике для определения риска иногда используется среднее квадратичное отклонение дохода *D*. Введенное таким образом определение риска не характеризует полностью риск финансовой операции, поскольку не связывает его со средней ее доходностью. Ясно, что среднее квадратичное отклонение дохода на 10 дол. для двух операций с доходом 50 и 1 000 000 дол. означает совершенно разный риск, который в первой операции велик, а во второй — пренебрежимо мал. Поэтому, конечно, в качестве меры риска гораздо более логично вводить величину не среднего квадратичного отклонения дохода $r(d)=\sigma(d)=\sqrt{D(d)}$, а относительного среднего квадратичного отклонения дохода (отношения среднего квадратичного отклонения дохода к среднему доходу) $r(d)=\dfrac{\sigma(d)}{M(d)}=\dfrac{\sqrt{D(d)}}{M(d)}$ либо, как это сделано выше, среднего квадратичного отклонения доходности. Ниже мы будем использовать обе альтернативные меры риска, отдавая предпочтение определению риска на основе доходности (а не дохода).

При увеличении масштаба операции в c раз, т.е. при увеличении всех значений случайного дохода в c раз, эффективность операции возрастает в c раз, риск — в $|c|$ раз, а средняя доходность не изменяется. Первое свойство следует из того, что постоянный множитель можно вынести из-под знака среднего, второе — из того, что постоянный множитель выносится из-под знака дисперсии в квадрате. Докажем второе свойство:

$$D(cX)=M\left[\left(cX-M(cX)\right)^2\right]=M\left[c^2\left(X-M(X)\right)^2\right]=$$
$$=c^2M\left[\left(X-M(X)\right)^2\right]=c^2D(X). \qquad (5.12)$$

Отсюда $r(cX)=\sigma(cX)=\sqrt{D(cX)}=\sqrt{c^2D(X)}=c\sqrt{D(X)}=cr(X)$.

При изменении всех доходов на одно и то же постоянное число эффективность операции также изменяется на это число, а риск не изменяется.

Отметим одну общую формулу, известную в теории вероятностей и полезную при вычислении дисперсии

$$D(X) = M(X^2) - m^2. \qquad (5.13)$$

Она легко выводится:

$$D(X)=M\left[(X-m)^2\right]=M\left(X^2-2mX+m^2\right)=$$
$$=M\left(X^2\right)-2mM(X)+M\left(m^2\right)=$$
$$=M\left(X^2\right)-2m^2+m^2=M\left(X^2\right)-m^2.$$

Средняя ожидаемая доходность операции $M(q)$ и ее риск $r(q)$ связаны неравенством Чебышева

$$P\left(q-M(q)\right)>\delta)\le r_q^2/\delta^2, \text{ или } P\left(q-M(q)\right)<\delta)>1-r_q^2/\delta^2. \qquad (5.14)$$

Смысл неравенства Чебышева состоит в утверждении, что вероятность того, что отклонение доходности операции от среднего значения превысит заданное число δ, ограничена сверху числом $r_q^2/\delta^2 = D/\delta^2$, или соответственно, что вероятность того, что отклонение доходности операции от среднего значения не превысит заданное число δ, ограничена снизу числом $1-r_q^2/\delta^2 = 1-D/\delta^2$. Таким образом, важность введения среднего квадратичного отклонения связана с тем, что оно определяет границы, в которых с заданной вероятностью следует ожидать значение случайной величины. Так, например, из неравенства Чебышева $P\left(\left|X-m\right|<\varepsilon\right)>1-D/\varepsilon^2$ следует «*правило* 3σ»: для любой случайной величины X выполняется неравенство

$$P\left(\left|X-m\right|<3\sigma\right)>1-D/9\sigma^2=8/9. \tag{5.15}$$

Это означает, что если известно среднее значение случайной величины и ее стандартное отклонение, то с вероятностью большей $^8/_9$ (89%) можно утверждать, что значение случайной величины будет находиться в интервале ($m - 3\sigma$, $m + 3\sigma$). То есть значения случайной величины вне этого интервала можно на практике не учитывать.

Более того, в действительности для большинства случайных величин, встречающихся на практике, такая вероятность значительно ближе к 1, чем 8/9. Так, при распределении случайной величины, близком к нормальному, с вероятностью 68% можно утверждать, что значение случайной величины X (в нашем случае доходности Q) находится в границах $M(q)\pm\sigma$, с вероятностью 95% — в пределах $M(q)\pm 2\sigma$, а с вероятностью 99,7% — в пределах $M(q)\pm 3\sigma$ и т.д.

Для распределения случайных величин особую роль в экономике и финансах (впрочем, как и в естественных науках) играют равномерное и нормальное распределения.

5.3. Финансовые операции в условиях неопределенности

5.3.1. Матрицы последствий и рисков

Степень неопределенности ситуации может быть различной. Если информация отсутствует, ситуация является полностью неопределенной. Если известны, скажем, вероятности различных исходов, ситуация вероятностна и лишь частично неопределенна. Рассмотрим обе ситуации и возможное поведение в них инвестора. Предположим, рассматривается вопрос о проведении финансовой операции. Результат ее неясен, поэтому анализируется несколько возможных решений и их последствий. Ситуация неопределенна, известно лишь, что реализуется какой-то из рассматриваемых вариантов. Если будет принято i-е решение, а ситуация есть j-я, то инвестор получит доход q_{ij}. Матрица $\|q_{ij}\|$ называется матрицей последствий (возможных решений). (Альтернативой матрице последствий, составленной из возможных доходов, является матрица последствий, составленная из возможных доходностей.) Какое решение должен принять инвестор? В этой неопределенной ситуации могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты инвестором. Многое будет зависеть, например, от его склонности к риску. Оценим риск в данной схеме. Начнем с риска, который несет i-е решение. Реальная ситуация неизвестна, но если бы инвестор ее знал, то выбрал бы наилучшее решение, которое приносит наибольший доход. Если ситуация j-я, то было бы принято решение, дающее доход $q_j = \max_i q_{ij}$. Значит, принимая i-е решение, мы рискуем получить не q_j, а только q_{ij}, т.е. принятие i-го решения несет риск недобрать $r_{ij} = q_j - q_{ij}$. Матрица $R = \|r_{ij}\|$ называется матрицей рисков.

Пример 5.4. Пусть матрица последствий есть

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу рисков, вычитая данный элемент из максимального в каждом столбце. Для максимального в каждом столбце элемента имеем:

$$q_1 = \max_i q_{i1} = 10;\ q_2 = \max_i q_{i2} = 6;\ q_3 = \max_i q_{i3} = 9;\ q_4 = \max_i q_{i4} = 8.$$

Теперь можем записать матрицу рисков как

$$R = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

5.3.2. Принятие решений в условиях полной неопределенности

Ситуация полной неопределенности характеризуется отсутствием любой дополнительной информации (например, о вероятностях тех или иных вариантов, реальной ситуации). Вместе с тем существуют правила-рекомендации по принятию решений и в этой ситуации.

5.3.2.1. Правило Вальда (правило крайнего пессимизма)

Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход: $a_i = \min_j q_{ij}$ (работаем с матрицей последствий). Но теперь выберем решение i_0 с наибольшим a_{i0}. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение i_0 такое, что $i_0 = \max_i \left(\min_j q_{ij}\right)$. Так, в нашем примере имеем $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 1$. Теперь из чисел 3, 6, 1 находим максимальное: 6. Значит, правило Вальда рекомендует принять *второе решение*.

5.3.2.2. Правило Сэвиджа (правило минимального риска)

При применении этого правила анализируется матрица рисков $R = \left\| r_{ij} \right\|$. Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max_j r_{ij}$. Но теперь выберем решение i_0 с наименьшим b_{i_0}. Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение i_0 такое, что $b_{i_0} = \min_i b_i \min_i \left(\max_j r_{ij}\right)$.

Так, в нашем примере имеем $b_1 = 7$, $b_2 = 2$, $b_3 = 8$. Теперь из чисел 7, 2, 8 находим минимальное: 2. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять *второе решение*.

5.3.2.3. Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Принимается решение *i*, при котором достигается максимум

$$\left[\lambda \min_j q_{ij} + (1-\lambda)\max_j q_{ij}\right],$$

где $0 \le \lambda \le 1$.

Значение λ выбирается из субъективных соображений. Если λ приближается к 1, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда; при приближении λ к 0 правило Гурвица приближается к правилу «розового оптимизма».

В нашем примере:

1. При $\lambda = {}^1/_2$ имеем

$$c_1 = \frac{1}{2}(3+6) = 4{,}5;\quad c_2 = \frac{1}{2}(6+10) = 8;\quad c_3 = \frac{1}{2}(1+9) = 5.$$

Выбирая максимальное значение c_i, равное 8, приходим к выводу, что правило Гурвица рекомендует *второе решение*.

2. Если выбрать $\lambda = {}^1/_4$, то

$$c_1 = \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{3}{4}\cdot 6 = 5{,}25;\;\; c_2 = \frac{1}{4}\cdot 6 + \frac{3}{4}\cdot 10 = 9;\;\; c_3 = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 9 = 7.$$

Выбирая максимальное значение c_i, равное 9, приходим к выводу, что правило Гурвица и в этом случае рекомендует *второе решение*.

3. Если выбрать $\lambda = {}^3/_4$, получим

$$c_1 = \frac{3}{4}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 6 = 3{,}75;\;\; c_2 = \frac{3}{4}\cdot 6 + \frac{1}{4}\cdot 10 = 7;\;\; c_3 = \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 9 = 3.$$

Выбирая максимальное значение c_i, равное 7, приходим к выводу, что правило Гурвица и в этом случае рекомендует *второе решение*.

Итак, все три правила (а правило Гурвица при всех трех значениях λ) рекомендуют *второе решение*, так что его и принимаем.

5.4. Принятие решений в условиях частичной неопределенности

Предположим, в рассматриваемой схеме известны вероятности того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется частичной неопределенностью. Решение в такой ситуации принимается в соответствии с одним из следующих правил.

5.4.1. Правило максимизации среднего ожидаемого дохода

Доход, получаемый фирмой при реализации i-го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения $p_j(q_{ij})$. Математическое ожидание $M(Q_i)$ и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый также Q_i. Итак, правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

Предположим, в нашем примере вероятности есть 1/5, 4/15, 4/15, 4/15. Тогда средний ожидаемый доход при каждом решении равен

$$M(Q_1) = \frac{1}{5}\cdot 3 + \frac{4}{15}(4+5+6) = 4{,}6;$$

$$M(Q_2) = \frac{1}{5}\cdot 10 + \frac{4}{15}(6+7+8) = 7{,}6;$$

$$M(Q_3) = \frac{1}{5}\cdot 2 + \frac{4}{15}(5+9+1) = 4{,}4.$$

Максимальный средний ожидаемый доход равен 7,6 и соответствует *второму решению*.

5.4.2. Правило минимизации среднего ожидаемого риска

Риск фирмы при реализации i-го решения является случайной величиной R_i с рядом распределения $p_j(r_{ij})$. Математическое ожидание $M(R_i)$ и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также $\overline{R}_i$. Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск. Вычислим средние ожидаемые риски при указанных выше вероятностях:

$$M(R_1)=\frac{1}{5}\cdot 7+\frac{4}{15}(2+4+2)=3{,}5(3);$$

$$M(R_2)=\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{4}{15}(0+2+0)=0{,}5(3);$$

$$M(R_3)=\frac{1}{5}\cdot 8+\frac{4}{15}(1+0+7)=3{,}7(3).$$

Получаем $\overline{R}_1=3{,}5(3); \overline{R}_2=0{,}5(3); \overline{R}_3=3{,}7(3)$. Минимальный средний ожидаемый риск равен 0,5(3) и соответствует все тому же *второму решению*. Отличие частичной (вероятностной) неопределенности от полной очень существенно. Конечно, принятие решений по правилам Вальда, Сэвиджа, Гурвица не является окончательным, лучшим (приведенный пример — исключение). Это только лишь первый шаг, некоторые предварительные соображения. Далее пытаются узнать что-то о вариантах реальной ситуации, прежде всего о возможности того или иного варианта, о его вероятности. Но когда мы начинаем оценивать вероятность варианта, это уже предполагает повторяемость рассматриваемой схемы принятия решений: это уже было в прошлом или это будет в будущем, или это повторяется где-то, например в филиалах фирмы.

5.4.3. Оптимальная (по Парето) финансовая операция

Итак, при попытке выбрать наилучшее решение мы столкнулись с тем, что каждое решение имеет две характеристики — средний ожидаемый доход и средний ожидаемый риск. Теперь имеем оптимизационную двухкритериальную задачу по выбору наилучшего решения. Существует несколько способов постановки таких оптимизационных задач.

Рассмотрим такую задачу в общем виде. Пусть A — некоторое множество операций, каждая операция a имеет две числовые характеристики $E(a)$, $r(a)$ (эффективность и риск, например) и разные операции обязательно различаются хотя бы одной характеристикой. При выборе наилучшей операции желательно, чтобы E было больше, а r меньше.

Будем говорить, что операция a доминирует над операцией b, и обозначать $a > b$, если $E(a) \geq E(b)$ и $r(a) \leq r(b)$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое. При этом операция a называется доминирующей, а операция b — доминируемой. Ясно, что ни при каком разумном выборе наилучшей операции доминируемая операция не может быть признана таковой. Следовательно, наилучшую операцию надо искать среди доминируемых операций. Множество этих операций называется множеством Парето, или множеством оптимальности по Парето.

На множестве Парето каждая из характеристик E, r — (однозначная) функция другой. Другими словами, если операция принадлежит множеству Парето, то по одной ее характеристике можно однозначно определить другую. Докажем это. Пусть a, b — две операции из множества Парето, тогда $r(a)$, $r(b)$ — числа. Предположим, $r(a) \leq r(b)$, тогда $E(a)$ не может быть равно $E(b)$, так как обе точки a, b принадлежат множеству Парето. Доказано, что по характеристике r можно определить характеристику E. Так же просто доказывается, что по характеристике E можно определить характеристику r.

Продолжим анализ приведенного примера. Рассмотрим графическую иллюстрацию (рис. 5.4). Каждую операцию (решение) (Q, R) отметим точкой на плоскости — доход откладываем по оси абсцисс, а риск — по оси ординат. Получили три точки и продолжаем анализ примера. Чем выше точка (Q, R), тем более рисковая операция, чем точка правее, тем она более доходная. Значит, нужно выбирать точку ниже и правее. В нашем случае множество Парето состоит только из одной *второй операции*.

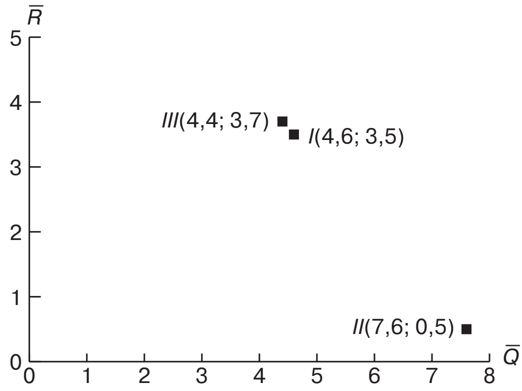

Рис. 5.4. Усредненные характеристики (Q, R) трех операций (решений)

Для нахождения лучшей операции иногда применяют подходящую взвешивающую формулу, которая выражает отношение инвестора к доходу и риску. Для операции Q с характеристиками $(\overline{R}, \overline{Q})$ взвешивающая формула дает одно число, по которому и определяют лучшую операцию. Например, пусть взвешивающая формула есть $f(Q) = 2\overline{Q} - \overline{R}$. Это означает, что инвестор согласен на увеличение риска операции на две единицы, если доход операции увеличивается при этом не менее чем на одну единицу. Тогда для финансовых операций нашего примера имеем:

$$f(Q_1) = 2 \cdot 4{,}6 - 3{,}5 = 5{,}7;$$
$$f(Q_2) = 2 \cdot 7{,}6 - 0{,}5 = 14{,}7;$$
$$f(Q_3) = 2 \cdot 4{,}4 - 3{,}7 = 5{,}1.$$

Видно, что *вторая операция — лучшая*, а третья — худшая.

5.4.4. Правило Лапласа равновозможности

Такое правило применяют в условиях полной неопределенности: все неизвестные вероятности p_j считают равными. После этого можно выбрать какое-нибудь из двух приведенных выше правил-рекомендаций принятия решений, т.е. правило максимизации среднего ожидаемого дохода или правило минимизации среднего ожидаемого риска.

ЛЕКЦИЯ 6

ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Главная цель любого инвестора — обеспечить максимальную доходность инвестиций. При реализации этой цели возникают как минимум две основные проблемы: первая — в какие активы из имеющихся и в каких пропорциях вкладывать средства? Вторая проблема заключается в том, что на практике, как известно, более высокий уровень доходности связан с более высоким риском. Поэтому инвестор может выбрать актив с высокой доходностью и большим риском или более-менее гарантированной низкой доходностью. Две описанные выше проблемы выбора и составляют проблему формирования инвестиционного портфеля, решение которой дает *теория портфеля*.

6.1. Доходность ценной бумаги и портфеля

Рынок ценных бумаг будем рассматривать как статический и исследуем его функционирование на фиксированном интервале времени, в течение которого инвестор владеет ценной бумагой, стоимость которой в начале интервала обозначим p_0, в конце интервала — p_1. Пусть d — дивиденды, выплаченные за рассматриваемый промежуток времени. Тогда **доходностью ценной бумаги** за этот интервал времени называется величина

$$r = (p_1 + d - p_0)/p_0. \tag{6.1}$$

Если не рассматривать дивиденды и другие величины, от которых зависит доходность (инфляция и т.п.), то формула (6.1) принимает максимально простой вид: $r = (p_1 - p_0)/p_0$.

Портфелем, состоящим из n видов ценных бумаг, называют вектор

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n), \tag{6.2}$$

где x_i — ценовая доля инвестиций в ценные бумаги вида i.

Доходностью портфеля *X* называют величину

$$r_X = \frac{p_{X_1} + d_X - p_{X_0}}{p_{X_0}}, \tag{6.3}$$

где p_{X_0} — стоимость портфеля в начале периода;
p_{X_1} — стоимость портфеля в конце периода;
d_x — дивиденды, полученные по всем бумагам портфеля.

Доходность портфеля *X* выражается формулой

$$r_X = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \ldots + x_n r_n, \tag{6.4}$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — доходности ценных бумаг, входящих в портфель *X*.

Для каждой ценной бумаги вида *i* из формулы (6.1) имеем

$$p_{i_1} = p_{i_0} + r_i p_{i_0} - d_i. \tag{6.5}$$

Умножая равенство (4.5) на множитель n_i — количество бумаг *i*-го вида в портфеле и складывая для всех *i*, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_1} + \sum_{i=1}^{n} n_i d_i = \sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_0} + \sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_0} r_i, \tag{6.6}$$

где $\sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_1} = p_{X_1}$ — стоимость портфеля в конце периода;
$n_i p_{i_0}$ — объем инвестиций в ценные бумаги вида *i*;
$\sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_0} = p_{X_0}$ — стоимость портфеля в начале периода;
$\sum_{i=1}^{n} n_i d_i = d_X$ — дивиденды, полученные по всем бумагам портфеля.

Следовательно,

$$p_{X_1} + d_X = p_{X_0} + \sum_{i=1}^{n} n_i p_{i_0} r_i. \tag{6.7}$$

Отсюда

$$r_X = \frac{p_{X_1} + d_X - p_{X_0}}{p_{X_0}^0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i p_{i_0}}{p_{X_0}^0} r_i = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i,$$

что доказывает формулу (6.4).

Стоимости ценных бумаг в начале периода p_{i_0} — детерминированные величины, в то время как в конце периода они уже являются случайными величинами, поэтому и доходности отдельных ценных бумаг и доходность всего портфеля являются случайными величинами, и мы их будем обозначать заглавными буквами R_i и R_X. Математическое ожидание доходности ценной бумаги называется ее эффективностью, а математическое ожидание доходности портфеля называется **эффективностью портфеля**.

Найдем выражения для эффективности портфеля $\mu = M(R_X)$ и дисперсии или квадрата риска $\sigma^2 = D(R_X)$ доходности портфеля R_X через соответствующие характеристики ценных бумаг.

Из формулы (6.4) и из свойств математического ожидания (математическое ожидание суммы всегда равно сумме математических ожиданий, константу можно выносить за знак математического ожидания) получим формулу для ожидаемой доходности портфеля:

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_n\mu_n, \tag{6.8}$$

где $\mu_1 = M(R_1)$, $\mu_2 = M(R_2)$, ..., $\mu_n = M(R_n)$ — эффективности ценных бумаг (математические ожидания доходностей ($R_1, R_2, \ldots, R_n$), составляющих портфель.

Обозначим через $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$ вектор эффективностей (ожидаемых доходностей) портфеля X, тогда формулу (6.8) можно записать в матричных обозначениях следующим образом:

$$\mu = \vec{\mu}^T X. \tag{6.9}$$

Для вычисления квадрата риска воспользуемся формулой

$$\sigma^2 = X^T V X, \tag{6.10}$$

где V — ковариационная матрица случайных величин R_1, R_2, ..., R_n.

В дальнейшем мы будем использовать матричные обозначения. При этом все векторы будут мыслиться векторами-столбцами. Обозначим вектор, состоящий из одних единиц, через $I = (1, 1, ..., 1)^T$.

Таким образом, с каждым портфелем X связаны две величины: эффективность (ожидаемая доходность) μ и риск σ. Инвестор хотел бы иметь такой портфель, который обеспечивал бы наибольшую ожидаемую доходность при минимальном риске. Такая задача, однако, противоречива, поскольку, вообще говоря, большая ожидаемая доходность влечет за собой увеличение риска. Поэтому можно рассмотреть следующие задачи:

1) найти портфель минимального риска при заданной его эффективности (при эффективности не менее заданной, при произвольной эффективности);

2) найти портфель максимальной эффективности при минимальном риске (при риске, не превышающем данный уровень).

В следующем параграфе будет рассмотрен портфель из двух бумаг как более простой случай и подробно исследованы основные свойства такого портфеля. Их знание значительно облегчит восприятие общего портфельного анализа, проводимого в последующих параграфах, в рамках которого будут рассмотрены портфели Марковица и Тобина.

6.2. Портфель из двух бумаг

6.2.1. Необходимые сведения из теории вероятностей

Дисперсия портфеля из двух бумаг равна

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2, \tag{6.11}$$

риск равен

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2},$$

где ρ_{12} — коэффициент корреляции двух бумаг;
σ_i — риск;
x_i — ценовая доля i-бумаги.

Доходность портфеля равна

$$\mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \tag{6.12}$$

где μ_i — эффективность i-бумаги.

Условие нормировки имеет вид

$$x_1 + x_2 = 1. \tag{6.13}$$

Ковариация доходностей определяется как

$$\mathrm{Cov}\left(r_i, r_j\right) = M\left(r_i \cdot r_j\right) - M\left(r_i\right) M\left(r_j\right); \tag{6.14}$$

$$\mathrm{Cov}\left(r_i, r_j\right) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j; \tag{6.15}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{Cov}\left(r_i, r_j\right)}{\sigma_i\sigma_j}; \tag{6.16}$$

$$\left|\rho_{ij}\right| \le 1. \tag{6.17}$$

В случае независимых случайных величин (доходностей) R_i, R_j $M(r_i \cdot r_j) = M(r_i)M(r_j)$, поэтому $\mathrm{Cov}(r_i, r_j) = 0$, т.е. ковариация является мерой зависимости случайных величин.

Ковариационная матрица — матрица, элементами которой являются соответствующие ковариации ценных бумаг. Так, для портфеля из трех бумаг имеем

$$\left\| \mathrm{cov}(r_1, r_2) \right\| = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(r_1,r_1) & \mathrm{cov}(r_1,r_2) & \mathrm{cov}(r_1,r_3) \\ \mathrm{cov}(r_2,r_1) & \mathrm{cov}(r_2,r_2) & \mathrm{cov}(r_2,r_3) \\ \mathrm{cov}(r_3,r_1) & \mathrm{cov}(r_3,r_2) & \mathrm{cov}(r_3,r_3) \end{pmatrix}; \qquad (6.18)$$

$$\left\| \rho(r_1, r_2) \right\| = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{cov}(r_1,r_1)}{\sigma_1^2} & \dfrac{\mathrm{cov}(r_1,r_2)}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{\mathrm{cov}(r_1,r_3)}{\sigma_1\sigma_3} \\ \dfrac{\mathrm{cov}(r_2,r_1)}{\sigma_2\sigma_1} & \dfrac{\mathrm{cov}(r_2,r_2)}{\sigma_2^2} & \dfrac{\mathrm{cov}(r_2,r_3)}{\sigma_2\sigma_3} \\ \dfrac{\mathrm{cov}(r_3,r_1)}{\sigma_3\sigma_1} & \dfrac{\mathrm{cov}(r_3,r_2)}{\sigma_3\sigma_2} & \dfrac{\mathrm{cov}(r_3,r_3)}{\sigma_3^2} \end{pmatrix}. \qquad (6.19)$$

С учетом того, что

$$\mathrm{Cov}(r_i, r_i) = M(r_i \cdot r_i) - M(r_i)M(r_i) = M(r_i^2) - M^2(r_i) = D(r_i) = \sigma_i^2,$$

получаем

$$\left\| \rho(r_i, r_j) \right\| = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\mathrm{cov}(r_1,r_2)}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{\mathrm{cov}(r_1,r_3)}{\sigma_1\sigma_3} \\ \dfrac{\mathrm{cov}(r_2,r_1)}{\sigma_2\sigma_1} & 1 & \dfrac{\mathrm{cov}(r_2,r_3)}{\sigma_2\sigma_3} \\ \dfrac{\mathrm{cov}(r_3,r_1)}{\sigma_3\sigma_1} & \dfrac{\mathrm{cov}(r_3,r_2)}{\sigma_3\sigma_2} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.20)$$

Пример 6.1. Дана ковариационная матрица $V = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 6 \\ -8 & 16 & -11 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти корреляционную матрицу.

По диагонали стоят дисперсии, поэтому для рисков бумаг имеем:

$$\sigma_1 = \sqrt{9} = 3,\ \sigma_2 = \sqrt{16} = 4,\ \sigma_3 = \sqrt{4} = 2.$$

Далее по формуле (6.16) $\rho_{ij} = \dfrac{\mathrm{Cov}(r_i, r_j)}{\sigma_i \sigma_j}$ вычисляем недиагональные члены (все диагональные члены корреляционной матрицы равны 1):

$$\rho_{12}=\frac{Cov(r_1,r_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{-8}{3\cdot 4}=-\frac{2}{3}=\rho_{21},$$

$$\rho_{13}=\frac{Cov(r_1,r_3)}{\sigma_1\sigma_3}=\frac{6}{3\cdot 2}=1=\rho_{31},$$

$$\rho_{23}=\frac{Cov(r_2,r_3)}{\sigma_2\sigma_3}=\frac{-11}{4\cdot 2}=-\frac{11}{8}=\rho_{32}.$$

Получаем следующую корреляционную матрицу

$$\left\|\rho\left(r_i,r_j\right)\right\|=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{11}{8} \\ 1 & -\frac{11}{8} & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Обратная задача нахождения ковариационной матрицы по заданной корреляционной матрице является неопределенной: она не имеет однозначного решения. Это следует из того, что в силу симметричности корреляционной матрицы заданы лишь три величины $\rho(r_1,r_2),\rho(r_1,r_3),\rho(r_2,r_3)$, что позволяет записать три уравнения:

$$\frac{cov(r_1,r_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\rho(r_1,r_2);\;\; \frac{cov(r_1,r_3)}{\sigma_1\sigma_3}=\rho(r_1,r_3);\;\; \frac{cov(r_2,r_3)}{\sigma_2\sigma_3}=\rho(r_2,r_3)$$

для шести неизвестных

$$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3;cov(r_1,r_2),cov(r_1,r_3),cov(r_2,r_3).$$

6.2.2. Случай полной корреляции

В случае полной корреляции

$$\rho_{12}=\rho=1. \tag{6.21}$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем:

$$\sigma^2=\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2+2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2x_1x_2=\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2+2\sigma_1\sigma_2x_1x_2=\left(\sigma_1x_1+\sigma_2x_2\right)^2.$$

Извлекая корень из обеих частей, получаем для риска портфеля

$$\sigma=\left|\sigma_1x_1+\sigma_2x_2\right|. \tag{6.22}$$

Поскольку все переменные неотрицательны, знак модуля можно опустить:

$$\sigma = \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2. \tag{6.23}$$

Заменяя $x_1 \to 1-t; x_2 \to t$, так что $x_1 + x_2 = 1$, получим:

$$\sigma = \sigma_1 (1-t) + \sigma_2 t. \tag{6.24}$$

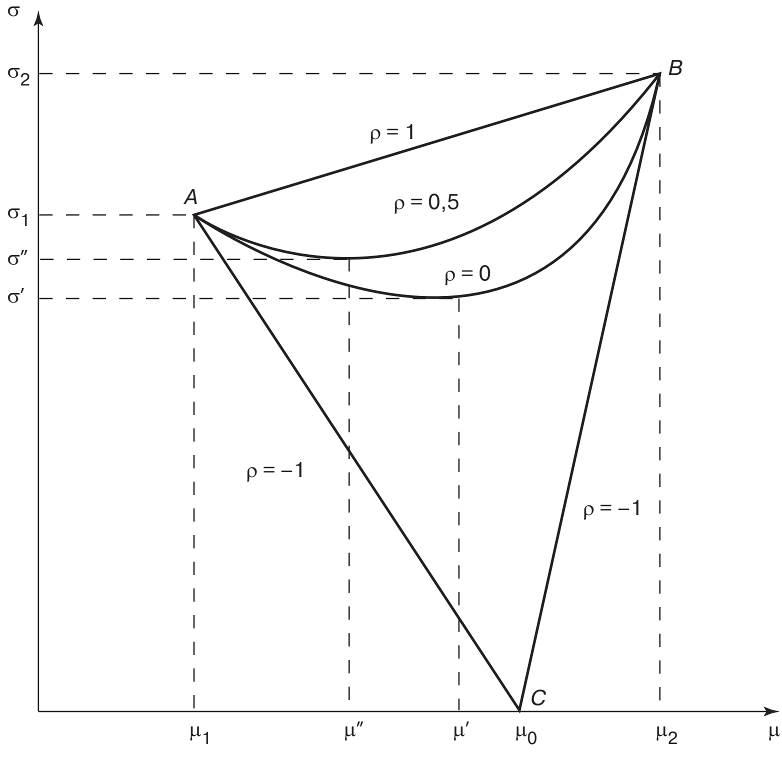

Рис. 6.1. Зависимость риска портфеля из двух бумаг от его эффективности при фиксированных параметрах обеих бумаг и увеличении коэффициента корреляции от –1 до 1.

Это уравнение отрезка [*AB*], где точки *A* и *B* имеют следующие координаты: $(\cdot)A = (\mu_1, \sigma_1); (\cdot)B = (\mu_2, \sigma_2)$ · *t* пробегает значения от 0 до 1. При $t = 0$ портфель находится в точке *A*, при $t = 1$ — в точке *B*. Таким образом, допустимое множество портфелей в случае полной корреляции ценных бумаг представляет собой отрезок [*AB*] (рис. 6.1).

Если инвестор формирует портфель минимального риска, он должен включить в него бумагу одного типа, имеющую меньший риск, в данном случае бумагу 1, и портфель в этом случае имеет вид $X = (1, 0)$. Доходность портфеля $\mu = \mu_1$.

При формировании портфеля максимальной доходности в него необходимо включить только бумагу, имеющую большую доходность, в данном случае бумагу 2, и портфель в этом случае имеет вид $X = (0, 1)$. Доходность портфеля $\mu = \mu_2$.

6.2.3. Случай полной антикорреляции

В случае полной антикорреляции

$$\rho_{12} = \rho = -1. \tag{6.25}$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 = \left(\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2\right)^2.$$

Извлекая корень из обеих частей, получаем для риска портфеля

$$\sigma = \left|\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2\right|. \tag{6.26}$$

Допустимое множество портфелей в случае полной антикорреляции ценных бумаг представляет собой два отрезка [*A*, *C*] и [*B*, *C*] (см. рис. 6.1). При полной антикорреляции возможен портфель нулевого риска (точка $C(\mu_0, 0)$). Найдем портфель нулевого риска и его доходность.

Из (6.26) имеем:

$$\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2 = 0. \tag{6.27}$$

Подставляя в (6.27) $x_2 = 1 - x_1$, получим

$$\sigma_1 x_1 - \sigma_2 \left(1 - x_1\right) = 0;$$

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}; \tag{6.28}$$

$$x_2 = 1 - x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \tag{6.29}$$

Таким образом, портфель нулевого риска имеет вид

$$X = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right), \tag{6.30}$$

а его доходность равна

$$\mu_0 = \frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}. \tag{6.31}$$

Отметим, что портфель нулевого риска не зависит от доходностей бумаг, а определяется только их рисками, причем ценовая доля одной бумаги пропорциональна риску другой.

Поскольку $|\rho| \le 1$, то все допустимые портфели находятся внутри ($|\rho| < 1$) или на границе ($|\rho| = 1$) треугольника ABC.

Пример 6.2. Для портфеля из двух бумаг с доходностью и риском соответственно (0,2; 0,5) и (0,4; 0,7) в случае полной антикорреляции найти портфель нулевого риска и его доходность.

Сначала по формуле (6.30) найдем портфель нулевого риска

$$X_0 = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) = \left(\frac{0,7}{0,5+0,7}, \frac{0,5}{0,5+0,7}\right) = (0,583;\, 0,417).$$

Затем по формуле (6.31) найдем его доходность

$$\mu_0 = \frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{0,2\cdot 0,7 + 0,4\cdot 0,5}{0,5+0,7} = 0,283.$$

Как видим, доходность портфеля является промежуточной между доходностями обеих бумаг (но при этом риск нулевой!).

Можно проверить результат для доходности портфеля, вычислив его по формуле (6.8):

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = 0,583\cdot 0,2 + 0,417\cdot 0,4 = 0,283.$$

6.2.4. Независимые бумаги

Для независимых бумаг

$$\rho_{12} = \rho = 0. \tag{6.32}$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2. \tag{6.33}$$

Найдем портфель минимального риска и его доходность и риск.

То есть необходимо минимизировать целевую функцию

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 \tag{6.34}$$

при условии

$$x_1 + x_2 = 1. \tag{6.35}$$

Это задача на условный экстремум, которая решается с помощью функции Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа и найдем ее экстремум

$$L = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \lambda\left(x_1 + x_2 - 1\right). \tag{6.36}$$

Для нахождения стационарных точек имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2\sigma_1^2 x_1 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2\sigma_2^2 x_2 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{6.37}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\sigma_1^2 x_1 = \sigma_2^2 x_2.$$

Далее, используя третье уравнение, имеем

$$\sigma_1^2 x_1 = \sigma_2^2 \left(1 - x_1\right).$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \; x_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Портфель

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right), \tag{6.38}$$

а его доходность

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{\mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \tag{6.39}$$

Риск портфеля равен

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^4 + \sigma_1^4 \sigma_2^4}{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)}{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)^2}} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}. \tag{6.40}$$

В случае трех бумаг прямой аналогии с формулой (6.38) нет (см. параграф 6.2.5).

Пример 6.3. С помощью формулы (6.40) легко продемонстрировать влияние диверсификации на риск портфеля. Пусть портфель состоит из двух независимых бумаг с рисками $\sigma_1 = 0{,}1$ и $\sigma_2 = 0{,}2$ соответственно. Вычислим риск портфеля по формуле (6.40)

$$\sigma = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} = \frac{0,1\cdot 0,2}{\sqrt{0,01+0,04}} \approx 0,0894.$$

Итак, риск портфеля $\sigma \approx 0,0894$ оказался ниже риска каждой из бумаг (0,1; 0,2). Это и есть иллюстрация принципа диверсификации: при «размазывании» портфеля по независимым бумагам его риск уменьшается.

6.2.5. Три независимые бумаги

Хотя этот случай выходит за рамки вопроса о портфеле из двух бумаг, мы рассматриваем его здесь как обобщение случая портфеля из двух бумаг.

Для независимых бумаг

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0. \tag{6.41}$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2. \tag{6.42}$$

Найдем портфель минимального риска, его доходность и риск. То есть необходимо минимизировать целевую функцию

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2$$

при условии

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \tag{6.43}$$

Это задача на условный экстремум решается с помощью функции Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа и найдем ее экстремум

$$L = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 + \lambda\left(x_1 + x_2 + x_3 - 1\right). \tag{6.44}$$

Для нахождения стационарных точек имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2\sigma_1^2 x_1 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2\sigma_2^2 x_2 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 2\sigma_3^2 x_3 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{6.45}$$

Вычитая из первого уравнения второе, затем третье, получаем

$$\sigma_1^2 x_1 = \sigma_2^2 x_2,\ \sigma_1^2 x_1 = \sigma_2^2 x_3.$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} x_1,\ x_3 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} x_1. \qquad (6.46)$$

Подставив (6.46) в условие нормировки

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \qquad (6.47)$$

получим

$$x_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} x_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} x_1 = 1. \qquad (6.48)$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}} = \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2}. \qquad (6.49)$$

Подставив полученное значение x_1 в (6.46), получим еще две компоненты портфеля

$$x_2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{\sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2}, \qquad (6.50)$$

$$x_3 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2}. \qquad (6.51)$$

Портфель имеет вид

$$X = \frac{1}{\sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2} \left(\sigma_2^2 \sigma_3^2; \sigma_1^2 \sigma_3^2; \sigma_1^2 \sigma_2^2 \right), \qquad (6.52)$$

а его доходность равна

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2 + \mu_2 \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \mu_3 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_2^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_3^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2}. \qquad (6.53)$$

Риск портфеля равен

$$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2x_1^2+\sigma_2^2x_2^2+\sigma_3^2x_3^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sigma_1^2\sigma_2^4\sigma_3^4+\sigma_2^2\sigma_1^4\sigma_3^4+\sigma_3^2\sigma_1^4\sigma_2^4\right)}{\left(\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2}}. \qquad (6.54)$$

Пример 6.4. Для портфеля из трех независимых бумаг с доходностью и риском соответственно (0,1; 0,4), (0,2; 0,6) и (0,4; 0,8) найти портфель минимального риска, его риск и доходность.

Портфель минимального риска имеет вид (6.52):

$$X=\frac{1}{\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\sigma_2^2\sigma_3^2;\sigma_1^2\sigma_3^2;\sigma_1^2\sigma_2^2\right)=$$

$$=\frac{\left(0,6^2\cdot0,8^2;\,0,4^2\cdot0,8^2;\,0,4^2\cdot0,6^2\right)}{0,6^2\cdot0,8^2+0,4^2\cdot0,8^2+0,4^2\cdot0,6^2}=\frac{(0,2304;\,0,1024;\,0,0576)}{0,2304+0,1024+0,0576}=$$

$$=\frac{(0,2304;\,0,1024;\,0,0576)}{0,3904}=(0,590;\,0,263;\,0,147).$$

Итак, $X=(0,590;\ 0,263;\ 0,147)$.

Риск портфеля минимального риска находится по формуле (6.54):

$$\sigma=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2}}=\frac{0,4\cdot0,6\cdot0,8}{\sqrt{0,6^2\cdot0,8^2+0,4^2\cdot0,8^2+0,4^2\cdot0,6^2}}=$$

$$=\frac{0,192}{\sqrt{0,2304+0,1024+0,0576}}=\frac{0,192}{\sqrt{0,3904}}=\frac{0,192}{0,6348}=0,307.$$

Наконец, доходность портфеля вычисляется по формуле (6.53):

$$\mu=\frac{\mu_1\sigma_2^2\sigma_3^2+\mu_2\sigma_1^2\sigma_3^2+\mu_3\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_3^2+\sigma_1^2\sigma_2^2}=$$

$$=\frac{0,1\cdot0,6^2\cdot0,8^2+0,2\cdot0,4^2\cdot0,8^2+0,4\cdot0,4^2\cdot0,6^2}{0,6^2\cdot0,8^2+0,4^2\cdot0,8^2+0,4^2\cdot0,6^2}=$$

$$=\frac{0,02304+0,02048+0,02304}{0,2304+0,1024+0,0576}=\frac{0,06656}{0,3904}=0,1705.$$

Как видно, риск портфеля меньше риска каждой отдельной бумаги, а доходность портфеля больше доходности первой бумаги, чуть меньше доходности второй и меньше доходности третьей бумаги.

6.2.6. Безрисковая бумага

Пусть одна из двух бумаг портфеля — безрисковая. Портфель из n-бумаг, включающий безрисковую, носит имя Тобина, впервые исследовавшего его, и обладает свойствами, существенно отличными от свойств портфеля, состоящего только из рисковых бумаг (см. параграф 6.4). Здесь же рассмотрим, как влияет включение безрисковой ценной бумаги в портфель из двух бумаг.

Итак, мы располагаем двумя бумагами: $1(\mu_1, 0)$ и $2(\mu_2, \sigma_2)$, при этом $\mu_1 < \mu_2$ (иначе необходимо было бы формировать портфель (1,0), состоящий только из безрисковой бумаги, и у нас был бы безрисковый портфель максимальной доходности).

Имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \\ &\sigma = \sigma_2 x_2, \\ &x_1 + x_2 = 1. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Из них легко получить допустимое множество портфелей

$$\mu = \mu_1 (1 - x_2) + \mu_2 x_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) x_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\sigma}{\sigma_2},$$

которое является отрезком

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\sigma}{\sigma_2}, \; 0 \le \sigma \le \sigma_2. \tag{6.56}$$

При $\sigma = 0$ портфель находится в точке $1(\mu_1, 0)$, а при $\sigma = \sigma_2$ — в точке $2(\mu_2, \sigma_2)$ (рис. 6.2).

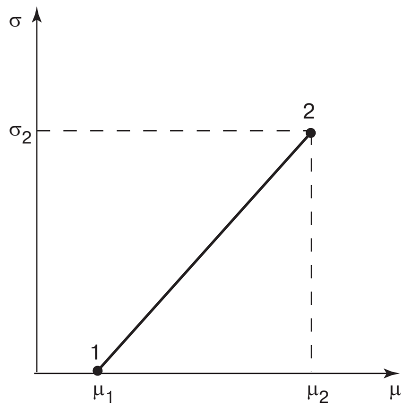

Рис. 6.2. Допустимое множество портфелей, состоящих из двух бумаг, одна из которых безрисковая

Хотя этот случай очень простой, тем не менее из него можно сделать два вывода:

1) допустимое множество портфелей не зависит от коэффициента корреляции (хотя обычно безрисковая ценная бумага считается некоррелированной с остальными (рисковыми) бумагами;
2) допустимое множество портфелей сузилось с треугольника до отрезка.

Аналогичный эффект имеет место и в случае портфеля Тобина.

В заключение приведем зависимость доходности и риска портфеля от доли безрисковой бумаги (рис. 6.3).

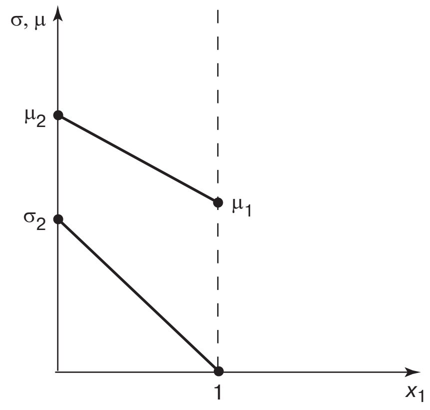

Рис. 6.3. Зависимость доходности и риска портфеля от доли безрисковой бумаги x_1

Риск портфеля линейно убывает от σ_2 при $x_1 = 0$ до нуля при $x_1 = 1$, при этом доходность также линейно убывает от μ_2 при $x_1 = 0$ до μ_1 при $x_1 = 1$.

6.2.7. Портфель заданной эффективности

В случае портфеля из двух бумаг задание эффективности портфеля либо его риска однозначно определяет портфель (за исключением случая $\mu_1 = \mu_2$, когда только задание риска портфеля однозначно определяет и сам портфель, подробнее см. ниже).

При задании эффективности портфеля он однозначно находится как решение системы

$$\begin{cases} \mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \tag{6.57}$$

а при задании риска портфеля — как решение системы

$$\begin{cases} \sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \tag{6.58}$$

Поэтому в случае портфеля из двух бумаг говорить о минимальной границе (минимальном риске портфеля при заданной его эффективности) не приходится. Рассуждения по этому поводу ошибочны.

Рассмотрим первый случай, когда задана эффективность портфеля. Предположим, $\mu_1 \neq \mu_2$. Портфель однозначно находится как решение системы (6.57):

$$\begin{cases} \mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Выразив x_2 из второго уравнения и подставив его в первое, получим:

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = x_1\mu_1 + (1 - x_1)\,\mu_2 = x_1(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2.$$

Отсюда находим

$$x_1 = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2},\ x_2 = \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 - \mu_2}. \tag{6.59}$$

Подставив данные выражения в выражение для квадрата риска портфеля, получим:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2(\mu - \mu_2)^2 + \sigma_2^2(\mu - \mu_1)^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)}{(\mu_2 - \mu_1)^2}. \tag{6.60}$$

Это уравнение ошибочно названо уравнением минимальной границы. На самом деле оно является уравнением (однозначной) связи риска портфеля с его эффективностью.

Лишь в случае $\mu_1 = \mu_2$, когда для всех значений x_1 и x_2 выполняется равенство $\mu = \mu_1 = \mu_2$ и допустимое множество портфелей с треугольника сужается до (вертикального) отрезка, можно говорить о минимальной границе, которая в этой ситуации состоит из единственной точки (μ, σ_1) (при $\sigma_1 < \sigma_2$) или (μ, σ_2) (при $(\sigma_1 > \sigma_2)$.

Рассмотрим разобранные выше различные предельные случаи.

1. ***Случаи полной корреляции*** ($\rho_{12} = 1$) и ***полной антикорреляции*** ($\rho_{12} = -1$).

Ввиду того что коэффициент корреляции ρ не превосходит по абсолютной величине 1, начнем исследование уравнения (6.60) для крайних значений $\rho = \pm 1$.

Вначале приведем общие соображения. Для $\rho = \pm 1$ известно, что случайные величины R_1 и R_2 линейно зависимы. Без ограничения общности можно считать, что $R_2 = aR_1 + b$. Тогда доходность портфеля запишется следующим образом:

$$R_X = x_1 R_1 + (1 - x_1) R_2 = (x_1 + a(1 - x_1)) R_1 + (1 - x_1) b.$$

Поэтому

$$\sigma^2 = (x_1 + a(1 - x_1))^2 \sigma_1^2, \ \mu = (x_1 + a(1 - x_1)) \mu_1 + (1 - x_1) b.$$

После исключения параметра x_1 получим соотношение вида:

$$\sigma^2 = (c\mu + d)^2,$$

т.е. риск как функция эффективности будет иметь форму отрезка либо угла (см. рис. 6.1).

Теперь исследуем уравнение (6.60) в случаях $\rho = \pm 1$.

Случай полной корреляции ($\rho_{12} = 1$):

$$\sigma = \left| \frac{\sigma_1 (\mu - \mu_2) - \sigma_2 (\mu - \mu_1)}{(\mu_2 - \mu_1)} \right|. \tag{6.61}$$

Случай полной антикорреляции ($\rho_{12} = -1$):

$$\sigma = \left| \frac{\sigma_1 (\mu - \mu_2) + \sigma_2 (\mu - \mu_1)}{(\mu_2 - \mu_1)} \right|. \tag{6.62}$$

2. ***Независимые бумаги*** ($\rho_{12} = 0$).

Уравнение (6.60) принимает вид:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 (\mu - \mu_2)^2 + \sigma_2^2 (\mu - \mu_1)^2}{(\mu_2 - \mu_1)^2}. \tag{6.63}$$

Далее будет показано, что для промежуточных значений коэффициента корреляции ρ риск портфеля как функция его эффективности имеет вид (6.71):

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}. \tag{6.64}$$

Если найти вид зависимости риска портфеля от его эффективности для фиксированного портфеля (μ_1, σ_1), (μ_2, σ_2), но при различных значениях коэффициента корреляции ρ, то можно прийти к следующему заключению: при увеличении коэффициента корреляции от -1 до 1 происходит уменьшение μ_M. При этом график зависимости риска портфеля от его эффективности становится все более вытянутым по оси абсцисс, т.е. при фиксированном изменении ожидаемой доходности μ увеличение риска σ становится все меньше (см. рис. 6.1).

Если представить, что $x_1 \in [0,1]$, а значит, и $x_2 \in [0,1]$, то из первой формулы (6.57) следует, что $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ в предположении $\mu_1 < \mu_2$, так как является их выпуклой комбинацией. Портфели составляют часть границы *AMB*, а именно ее часть, соединяющую точки (μ_1, σ_1) и (μ_2, σ_2) (см. рис. 6.1). Таким образом, в случае $n = 2$ и при дополнительном предположении $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ множество портфелей представляет собой куски гипербол или ломаных, соединяющих точки (μ_1, σ_1) и (μ_2, σ_2).

6.2.8. Портфель заданного риска

Допустим, задан риск портфеля.

Портфель теперь находится как (однозначное или двузначное) решение системы

$$\begin{cases} \sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \tag{6.65}$$

Выразив x_2 из второго уравнения и подставив его в первое, получим:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2\left(1 - x_1^2\right) + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1\left(1 - x_1\right). \tag{6.66}$$

После элементарных преобразований получаем квадратное уравнение для x_1:

$$x_1^2\left(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) + 2\sigma_2\left(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2\right)x_1 + \left(\sigma_2^2 - \sigma^2\right) = 0.$$

Решая это уравнение, находим x_1-компоненту портфеля

$$x_1 = \frac{-\sigma_2\left(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2\right) \pm \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}, \tag{6.67}$$

где

$$D = \sigma_2^2\left(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 - \left(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)\left(\sigma_2^2 - \sigma^2\right) =$$
$$= \sigma_1^2\left(\sigma^2 - \sigma_2^2 + \rho_{12}^2\sigma_2^2\right) + \sigma_2^2\sigma^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\sigma^2.$$

Для компоненты x_2 портфеля имеем:

$$x_2 = 1 - \frac{-\sigma_2\left(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2\right) \pm \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_1\left(\sigma_1 - \rho_{12}\sigma_2\right) \mp \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}. \qquad (6.68)$$

Таким образом, портфель при заданном риске портфеля σ (он входит в дискриминант D) имеет вид:

$$X = \left(\frac{-\sigma_2\left(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2\right) \pm \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}; \frac{\sigma_1\left(\sigma_1 - \rho_{12}\sigma_2\right) \mp \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\right). \qquad (6.69)$$

Рассмотрим разобранные выше различные предельные случаи.

1. ***Независимые бумаги*** ($\rho_{12} = 0$):

$$D = \sigma_1^2\left(\sigma^2 - \sigma_2^2\right) + \sigma_2^2\sigma^2; \qquad (6.70)$$

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2 \pm \sqrt{D}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \frac{\sigma_1^2 \mp \sqrt{D}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right). \qquad (6.71)$$

Это не найденный выше портфель минимального риска, имеющий вид $X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$, а портфель с риском σ.

2. ***Случай полной корреляции*** ($\rho_{12} = 1$):

$$D = \sigma_1^2\sigma^2 + \sigma_2^2\sigma^2 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma^2 = \sigma^2\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2; \qquad (6.72)$$

$$X = \left(\frac{-\sigma_2 \pm \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2}; \frac{\sigma_1 \quad \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2}\right). \qquad (6.73)$$

3. ***Случай полной антикорреляции*** ($\rho_{12} = -1$):

$$D = \sigma_1^2\sigma^2 + \sigma_2^2\sigma^2 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma^2 = \sigma^2\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)^2; \qquad (6.74)$$

$$X = \left(\frac{\sigma_2 \pm \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2}; \frac{\sigma_1 \quad \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2}\right). \qquad (6.75)$$

Отсюда легко получить портфель нулевого риска, положив $\sigma = 0$:

$$X = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}; \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right), \qquad (6.76)$$

естественно, совпадающий с полученным выше другим способом.

ЛЕКЦИЯ 7

ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

7.1. Портфели из *n*-бумаг. Портфели Марковица

7.1.1. Портфель минимального риска при заданной его эффективности

Первая из этих задач была поставлена и решена Марковицем. Итак, рассматриваем следующую задачу: требуется найти портфель $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, который минимизировал бы риск σ и обеспечивал заданную величину ожидаемой доходности μ.

В математической постановке задача выглядит следующим образом: найти минимум целевой функции

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{7.1}$$

при условиях

$$\vec{\mu}^T X = \mu; \tag{7.2}$$

$$I^T X = 1. \tag{7.3}$$

Заметим, что числовой множитель в целевой функции введен для удобства. Ищем минимум квадрата риска, это обусловлено также техническими соображениями. Условие (7.2) обеспечивает данный уровень эффективности. Условие (7.3) следует из определения вектора X.

Если дополнительно предполагать, что вектор X состоит из неотрицательных чисел

$$X \geq 0, \tag{7.4}$$

то компоненты X можно интерпретировать как доли инвестиций, вложенные в соответствующий актив. В общем случае среди чисел x_1, x_2, ..., x_n могут встречаться отрицательные, что означает долговое обязательство.

В дальнейшем мы предполагаем, что ковариационная матрица V положительно определена, а вектор эффективностей $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$ не коллинеарен вектору I, иными словами, не все эффективности равны.

Первое предположение, в частности, означает, что ковариационная матрица невырождена и выполняется на практике для рисковых активов (акций). В частности, существует обратная матрица V^{-1}, которая также положительно определена. Случай безрискового актива будет рассмотрен позже. При нарушении второго предположения поставленная задача имеет более простое решение, которое будет указано ниже.

Обратимся к следующим константам:

$$\alpha = I^T V^{-1} I, \beta = I^T V^{-1} \vec{\mu} = \vec{\mu}^T V^{-1} I, \gamma = \vec{\mu}^T V^{-1} \vec{\mu}, \delta = \alpha\gamma - \beta^2. \qquad (7.5)$$

Равенство для b следует из симметричности матрицы V^{-1}.

Докажем, что константы α, γ, δ положительные числа. Положительность чисел α, γ следует из того, что для любой положительно определенной матрицы M и любого ненулевого вектора W число $W^T M W$ будет положительно.

Для доказательства положительности числа δ в качестве вектора W рассмотрим вектор $\alpha\vec{\mu} - \beta I$. Он ненулевой, так как, по предположению, вектор эффективностей $\vec{\mu}$ не коллинеарен вектору I. Имеем

$$(\alpha\vec{\mu} - \beta I)^T V^{-1} (\alpha\vec{\mu} - \beta I) = \alpha^2\gamma - 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^2 = \alpha^2\gamma - \alpha\beta^2 = \alpha\delta > 0.$$

Поэтому $\delta > 0$.

Докажем, что задача нахождения оптимального портфеля с целевой функцией (7.1) при условиях (7.2)—(7.3) имеет единственное решение:

$$X = V^{-1}(\lambda I + \nu\vec{\mu}), \lambda = (\gamma - \beta\mu)/\delta, \nu = (\alpha\mu - \beta)/\delta. \qquad (7.6)$$

Целевая функция (7.1) является квадратичной формой с положительно определенной матрицей V. Всякая такая форма с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования приводится к виду $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$. При этом ограничения (7.2)—(7.3) превращаются в систему двух линейных уравнений относительно новых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Пусть P — плоскость в пространстве R^n (размерности $n - 1$ или $n - 2$), определяемая этими ограничениями. Исходная задача сводится к нахождению в плоскости P точки, ближайшей к началу координат. Как известно, такая задача имеет единственное решение.

Чтобы найти явные формулы (7.6), воспользуемся методом множителей Лагранжа. Рассмотрим функцию Лагранжа для оптимизационной задачи (7.1)—(7.3):

$$L(X,\lambda,\nu)=\frac{1}{2}X^TVX+\lambda\left(1-I^TX\right)+\nu\left(\mu-\vec{\mu}^TX\right).$$

Приравнивая к нулю производные по X, λ, ν, получим систему из трех уравнений

$$\begin{cases} VX=\lambda I+\nu\vec{\mu}, \\ I^TX=1, \\ \vec{\mu}^TX=\mu. \end{cases} \tag{7.7}$$

Выразим неизвестное X из первого уравнения

$$X=V^{-1}\left(\lambda I+\nu\vec{\mu}\right) \tag{7.8}$$

и подставим во второе и третье уравнения системы

$$\begin{cases} \alpha\lambda+\beta\nu=1, \\ \beta\lambda+\gamma\nu=\mu. \end{cases} \tag{7.9}$$

Определитель системы (7.9) $\delta\neq 0$ (мы доказали выше, что $\delta>0$), так что она имеет единственное решение

$$\lambda=\frac{\gamma-\beta\mu}{\delta},\ \nu=\frac{\alpha\mu-\beta}{\delta}. \tag{7.10}$$

Эти формулы вместе с равенством (7.8) дают решение оптимизационной задачи (7.1)—(7.3):

$$X=V^{-1}\left(\frac{\gamma-\beta\mu}{\delta}I+\frac{\alpha\mu-\beta}{\delta}\vec{\mu}\right). \tag{7.11}$$

Итак, для каждого значения ожидаемой доходности m имеется единственный портфель X, обеспечивающий минимальное значение риска $\sigma=\sigma_{\min}$, т.е. определена функция

$$\sigma=\sigma(\mu). \tag{7.12}$$

График функции (7.12) называют **минимальной границей**.

7.1.2. Минимальная граница и ее свойства

Далее рассмотрим решение еще двух задач о портфеле Марковица: портфеле минимального риска при эффективности не менее заданной и портфеле минимального риска при произвольной эффективности.

Для их решения воспользуемся уже полученным решением задачи о портфеле Марковица минимального риска при заданной его эффективности, а также представлением о *минимальной границе*, к подробному описанию которой мы переходим.

Как уже упоминалось, график зависимости минимального риска портфеля от его эффективности, т.е. график функции (7.12), называют *минимальной границей*. Покажем, что таковая представляет собой ветвь гиперболы, уравнение которой имеет вид:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}. \tag{7.13}$$

Для нахождения искомого уравнения достаточно подставить найденное решение X в выражение для σ:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= X^T V X = \left(V^{-1}(\lambda I + \nu\vec{\mu})\right)^T V \cdot V^{-1}(\lambda I + \nu\vec{\mu}) = \\ &= \left(\lambda I^T + \nu\vec{\mu}^T\right)V^{-1}(\lambda I + \nu\vec{\mu}) = \lambda^2\alpha + 2\lambda\nu\beta + \nu^2\gamma = \\ &= \lambda(\lambda\alpha + \nu\beta) + \nu(\lambda\beta + \nu\gamma).\end{aligned} \tag{7.14}$$

Подставляя значения для выражений в скобках из системы (7.9), имеем:

$$\sigma^2 = \lambda + \nu\mu = \frac{\gamma - \beta\mu}{\delta} + \frac{\alpha\mu - \beta}{\delta}\mu = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}, \tag{7.15}$$

откуда и получаем уравнение минимальной границы. Приведем его к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, или в наших переменных $\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{\mu^2}{b^2} = 1$. Для этого выделим полный квадрат в правой части уравнения

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\delta}\left[\left(\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right] = \frac{\alpha}{\delta}\left[\left(\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\delta}{\alpha^2}\right] = \frac{\alpha}{\delta}\left(\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}.$$

Каноническое уравнение минимальной границы имеет вид:

$$\alpha\sigma^2 - \frac{\alpha^2}{\delta}\left(\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 1,$$

или

$$\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{\tilde{\mu}^2}{b^2} = 1, \tag{7.16}$$

где

$$a^2 = 1/\alpha,\ b^2 = \delta/\alpha^2,\ \tilde{\mu} = \mu - \frac{\beta}{\alpha}. \tag{7.17}$$

Минимальная граница представляет собой ветвь гиперболы с асимптотами $\sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left|\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right|$ и абсолютным минимумом $M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$. Получим уравнение асимптот, которое имеет вид: $y = \pm\frac{b}{a}x$, или в наших переменных

$$\sigma = \pm\frac{a}{b}\tilde{\mu} = \pm\frac{a}{b}\left|\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{\delta\alpha}}\left|\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left|\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right|. \qquad (7.18)$$

Нетрудно видеть, что в вырожденном случае, когда все ожидаемые доходности совпадают и равны m, минимальная граница сводится к одной точке $M\left(\mu, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$, причем $X = \frac{1}{\alpha}V^{-1}I$.

График минимальной границы представлен на рис. 7.1. На нем AMB — минимальная граница, $M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$ — точка абсолютного минимума, пунктиром обозначены асимптоты.

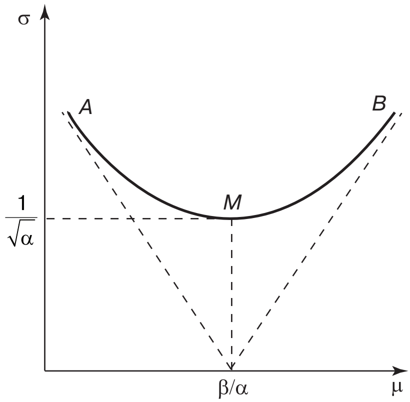

Рис. 7.1. Вид минимальной границы для портфеля Марковица

Поскольку инвестора интересует увеличение эффективности μ, то ясно, что он выберет точку на более доходной части минимальной границы, а именно на кривой MB, которая называется **эффективной границей**.

Пример 7.1. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 10\%$; $\mu_2 = 20\%$; $\mu_3 = 30\%$ и ковариационной матрицей

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти портфель минимального риска с доходностью $\mu = 25\%$ и его риск. Требуется написать уравнение минимальной границы.

Заметим, что V является положительно определенной. Найдем обратную матрицу V^{-1}:

$$V^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем константы α, β, γ, σ:

$$\alpha = I^T V^{-1} I,\ \beta = I^T V^{-1} \vec{\mu} = \vec{\mu}^T V^{-1} I,\ \gamma = \vec{\mu}^T V^{-1} \vec{\mu},\ \delta = \alpha\gamma - \beta^2,$$

где $I = (1, 1, 1)^T$, $\mu = (10; 20; 30)^T$.

$$\alpha = I^T V^{-1} I = \frac{1}{14}(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}(19, 5, 6) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{7},$$

$$\beta = I^T V^{-1} \vec{\mu} = \frac{1}{14}(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}(19, 5, 6) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{235}{7},$$

$$\gamma = \vec{\mu}^T V^{-1} \vec{\mu} = \frac{1}{14}(10, 20, 30) \cdot \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14}(230, 90, 150) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{4300}{7},$$

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2 = \frac{4300}{7} \cdot \frac{15}{7} - \left(\frac{235}{7}\right)^2 = \frac{9275}{49} = 189{,}3.$$

Найдем также константы λ и v:

$$\lambda = (\gamma - \beta\mu)/\delta \text{ и } \nu = (\alpha\mu - \beta)/\delta,$$

$$\lambda = (\gamma - \beta\mu)/\delta = \left(\frac{4300}{7} - \frac{235}{7} \cdot 25\right) \Big/ 189{,}3 = -225/189{,}3 = -1{,}19,$$

$$\nu = (\alpha\mu - \beta)/\delta = \left(\frac{15}{7} \cdot 25 - \frac{235}{7}\right) \Big/ 189{,}3 = 20/189{,}3 = 0{,}106.$$

Теперь определим портфель минимального риска с доходностью $\mu = 25\%$:

$$X = V^{-1}(\lambda I + \nu\vec{\mu}) = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1{,}19 + 0{,}106 \cdot 10 \\ -1{,}19 + 0{,}106 \cdot 20 \\ -1{,}19 + 0{,}106 \cdot 30 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}13\\ 0{,}93\\ 1{,}99\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}1{,}77\\ 3{,}59\\ 8{,}76\end{pmatrix}=\left(0{,}12;\ 0{,}26;\ 0{,}62\right)^T.$$

Таким образом, портфель минимального риска с доходностью $\mu =$ $= 25\%$ равен $X = (0{,}12; 0{,}26; 0{,}62)^T$: необходимо взять 12% бумаг первого вида, 26% — второго и 62% — третьего вида.

Найдем риск портфеля

$$\sigma=\sqrt{X^TVX}=\left(0{,}12;\ 0{,}26;\ 0{,}62\right)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 9 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}12\\ 0{,}26\\ 0{,}62\end{pmatrix}=$$

$$=\sqrt{\left(-0{,}14;\ 0{,}98;\ 1{,}96\right)\begin{pmatrix}0{,}12\\ 0{,}26\\ 0{,}62\end{pmatrix}}=\sqrt{1{,}4532}=1{,}205.$$

Риск портфеля оказался чуть больше риска первой бумаги ($\sigma_1 = 1$), но меньше риска второй ($\sigma_2 = 3$) и третьей ($\sigma_3 = 2$) бумаг. При этом его доходность (25%) на 15% больше доходности первой бумаги, на 5% больше доходности второй и лишь на 5% меньше доходности третьей бумаги.

Отметим интересный факт: доля (ценовая) второй бумаги в портфеле минимального риска оказалась выше доли первой более чем в 2 раза, притом что риск второй бумаги выше, чем риск первой, в 3 раза. Это означает, что риск портфеля в значительной степени зависит от корреляций бумаг, а не только от их индивидуальных рисков.

Запишем вид минимальной границы. По формуле (7.13)

$$\sigma=\sqrt{\frac{\alpha\mu^2-2\beta\mu+\gamma}{\delta}}.$$

Подставляя сюда найденные нами значения констант α, β, γ, δ, получим

$$\sigma=\sqrt{\frac{\frac{15}{7}\cdot\mu^2-2\cdot\frac{235}{7}\cdot\mu+\frac{4300}{7}}{\frac{9275}{49}}}=\sqrt{0{,}011\mu^2-0{,}355\mu+3{,}245}.$$

Итак, минимальная граница имеет вид:

$$\sigma=\sqrt{0{,}011\mu^2-0{,}355\mu+3{,}245},$$

или

$$31{,}6\cdot\sigma=\sqrt{11\mu^2-355\mu+3245}.$$

7.2. Портфели Тобина

Ситуация меняется кардинально, если на рынке есть безрисковая ценная бумага. Предполагается, что доходность безрисковой бумаги — случайная величина, не коррелированная с доходностью других — рисковых — бумаг, поэтому при наличии безрисковой бумаги в матрице ковариаций появляются нулевые строка и столбец, в силу чего рассуждения, использованные при рассмотрении портфелей Марковица, оказываются неверными. Эффективность безрисковой бумаги обозначим μ_f и будем считать ее положительной.

7.2.1. Портфель Тобина минимального риска из всех портфелей заданной эффективности

Итак, предположим, что вместе с n-рисковыми активами портфель инвестора включает безрисковую бумагу с детерминированной доходностью $\mu_f = R_f$ и долей в портфеле, составляющей x_f. При этом задача (6.57)—(6.59) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{7.14}$$

при условиях

$$\mu_f x_f + \vec{\mu}^T X = \mu, \tag{7.15}$$

$$x_f + I^T X = 1. \tag{7.16}$$

Выражение для квадрата риска не изменилось из-за безрисковости добавленного актива. В этом случае, впервые рассмотренном Тобиным, вид минимальной границы изменится.

Прежде всего переформулируем задачу (7.14)—(7.16). Для этого исключим переменную x_f из соотношений, умножив (7.16) на μ_f и вычтя из (7.16):

$$\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T X = \mu - \mu_f. \tag{7.17}$$

Для решения задачи (7.14), (7.17) составим функцию Лагранжа и запишем для нее необходимые условия экстремума:

$$L = \frac{1}{2}X^T VX - \lambda\left(\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T X - \mu + \mu_f\right).$$

$$\begin{cases} VX = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)\lambda, \\ \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T X = \mu - \mu_f. \end{cases} \tag{7.18}$$

Выразим X из первого уравнения системы (7.18) и подставим во второе

$$\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right)\lambda=\mu-\mu_f. \qquad (7.19)$$

Обозначим

$$d=\sqrt{\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right)}=\sqrt{\alpha\mu_f^2-2\beta\mu_f+\gamma}. \qquad (7.20)$$

Это определение корректно, поскольку векторы $\vec{\mu}$ и I не коллинеарны, а матрица V^{-1} положительно определена. Поэтому из (7.19)

$$\lambda=\frac{\mu-\mu_f}{d^2},$$

$$X=\frac{\mu-\mu_f}{d^2}V^{-1}\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right) \qquad (7.21)$$

— искомый вектор рисковых долей, безрисковая доля находится следующим образом из соотношения (4.121):

$$x_f=1-I^T X=1-\frac{\mu-\mu_f}{d^2}I^T V^{-1}\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right). \qquad (7.22)$$

Теперь нетрудно найти уравнение минимальной границы. Для этого достаточно подставить найденное X в выражение для квадрата риска

$$\sigma^2=\left(\frac{\mu-\mu_f}{d^2}\right)^2\left(V^{-1}\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right)\right)^T V V^{-1}\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right)=$$

$$=\left(\frac{\mu-\mu_f}{d^2}\right)^2\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right)=\left(\frac{\mu-\mu_f}{d}\right)^2.$$

Таким образом, уравнение минимальной границы

$$\sigma^2=\left(\frac{\mu-\mu_f}{d}\right)^2. \qquad (7.23)$$

Обычно предполагают, что ожидаемая доходность портфеля должна быть не меньше доходности безрискового актива, т.е. $\mu\geq\mu_f$. В противном случае следовало бы сформировать портфель только из него одного. Поэтому уравнение (7.23) превращается в линейное:

$$\sigma=\frac{\mu-\mu_f}{d}. \qquad (7.24)$$

Докажем, что прямая (7.24) является касательной к графику минимальной границы (6.69). Для доказательства найдем точки пересечения гиперболы (6.69) и прямой (7.24), решая совместно их уравнения, и убедимся, что такая точка одна. Приравнивая правые части (7.23) и (6.69), получим

$$\left(\frac{\mu-\mu_f}{d}\right)^2=\frac{\alpha\mu^2-2\beta\mu+\gamma}{\delta}. \tag{7.25}$$

Далее получим квадратное относительно m уравнение и найдем его корни:

$$\mu^2\left(\frac{\delta}{d^2}-\alpha\right)+2\mu\left(\beta-\frac{\delta}{d^2}\mu_f\right)+\left(\frac{\delta}{d^2}\mu_f^2-\gamma\right)=0. \tag{7.26}$$

Дискриминант данного уравнения равен нулю:

$$4\left(\beta-\frac{\delta}{d^2}\mu_f\right)^2-4\left(\frac{\delta}{d^2}-\alpha\right)\left(\frac{\delta}{d^2}\mu_f^2-\gamma\right)=0. \tag{7.27}$$

Это доказывает, что прямая (7.24) является касательной к графику минимальной границы (6.69).

Найдем теперь координаты точки касания (координаты касательного портфеля):

$$\mu=\frac{-2\left(\beta-\dfrac{\delta}{d^2}\mu_f\right)}{2\left(\dfrac{\delta}{d^2}-\alpha\right)}=-\frac{\beta d^2-\delta\mu_f}{\delta-\alpha d^2}=$$

$$=-\frac{\alpha\left(\gamma-\beta\mu_f\right)\left(\mu_f-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha^2\left(\mu_f-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2}=-\frac{\left(\gamma-\beta\mu_f\right)}{\alpha\left(\mu_f-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}.$$

Итак, эффективность касательного портфеля μ_T равна:

$$\mu_T=\frac{\gamma-\beta\mu_f}{\beta-\alpha\mu_f}. \tag{7.28}$$

Подставляя найденное значение эффективности μ_T в уравнение касательной, найдем риск касательного портфеля σ_T:

$$\sigma=\frac{\mu-\mu_f}{d}=\frac{\dfrac{\gamma-\beta\mu_f}{\beta-\alpha\mu_f}-\mu_f}{d}=$$

$$=\frac{\gamma-2\beta\mu_f+\alpha\mu_f^2}{d(\beta-\alpha\mu_f)}=\frac{d^2}{d(\beta-\alpha\mu_f)}=\frac{d}{(\beta-\alpha\mu_f)}.$$

Итак, для координат касательного портфеля имеем

$$\mu_T = \frac{\gamma - \beta\mu_f}{\beta - \alpha\mu_f}, \ \sigma_T = \frac{d}{\beta - \alpha\mu_f}. \tag{7.29}$$

При этом сам касательный портфель T находится из (7.21) подстановкой $\mu = \mu_T$:

$$T = \frac{\mu_T - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right). \tag{7.30}$$

Показать, что прямая (7.24) является касательной к графику минимальной границы (6.69), можно и геометрически (рис. 7.2). Всякий минимальный портфель является линейной комбинацией безрискового актива и рисковой части, лежащей на минимальной границе. Поэтому всякая такая точка лежит на луче FA, где точка F соответствует безрисковому активу. Из точки A можно переместиться вдоль горизонтальной оси в точку B, лежащую на касательной FT, у которой риск тот же, а доходность выше. Поэтому касательная FT является искомой минимальной границей.

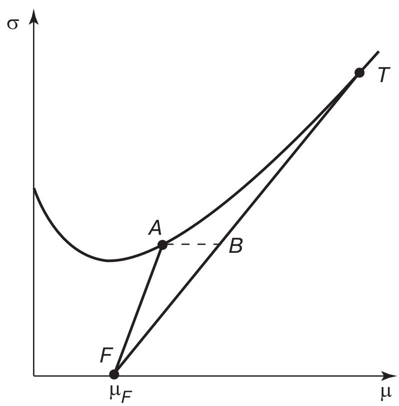

Рис. 7.2. Минимальная граница портфеля Тобина, касательный портфель

Точки минимальной границы представляются в виде линейной комбинации

$$M = \lambda F + (1 - \lambda)T,$$

причем при движении точки от F до T параметр l меняется от 1 до 0.

Пример 7.2. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 5% и двух рисковых с эффективностью соответственно 10 и 15% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}$. Найти портфели Тобина ожидаемой доходности 10, 11, 12% и минимального риска и их риски.

Из (7.20) и (7.21) имеем для параметра d и искомого портфеля X следующие выражения:

$$d = \sqrt{\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)},\ X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right).$$

1) $m = 10\%$.

Здесь $\vec{\mu} = (10; 15)^T, \mu = 10, \mu_f = 5$.

Вычислим параметр d:

$$d^2 = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{1}{299}(5; 10)\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{299}(130; 65)\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1300}{299} = 4{,}35.$$

Теперь можно найти портфель X:

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{10-5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= 0{,}00384 \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

$x_f = 1 - x_1 - x_2 = 0{,}25$.

Таким образом, портфель ожидаемой доходности 10% и минимального риска имеет вид:

$$X = (0{,}5;\ 0{,}25;\ x_f = 0{,}25).$$

Риск портфеля равен:

$$\sigma = \sqrt{X^T V X} = \sqrt{(0{,}5; 0{,}25)\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}} = \sqrt{(5{,}75; 11{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}} = 2{,}4.$$

Риск портфеля меньше риска каждой из рисковых бумаг, которые равны $\sqrt{9} = 3$ и $\sqrt{36} = 6$ соответственно для первой и второй бумаг;

2) $m = 11\%$.

Здесь $\vec{\mu} = (10; 15)^T$, $\mu = 11$, $\mu_f = 5$.

Параметр d по-прежнему равен 4,35.

Найдем портфель X:

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{11-5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299} \begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= 0{,}00461 \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

$x_f = 1 - x_1 - x_2 = 0{,}1.$

Таким образом, портфель ожидаемой доходности 11% и минимального риска имеет вид:

$$X = (0{,}6;\ 0{,}3;\ x_f = 0{,}1).$$

Риск портфеля равен:

$$\sigma = \sqrt{X^T V X} = \sqrt{(0{,}6;\ 0{,}3) \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}} = \sqrt{(6{,}9;\ 13{,}8) \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}} = 2{,}88.$$

Несмотря на увеличение требуемой доходности на 1%, риск портфеля остается меньше риска каждой из рисковых бумаг;

3) здесь $\vec{\mu} = (10;15)^T$, $\mu = 12$, $\mu_f = 5$.

Вычислим параметр d:

$$d^2 = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{1}{299}(5;\ 10) \begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{299}(130;\ 65) \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1300}{299} = 4{,}35.$$

Теперь можно найти портфель X:

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{12-5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299} \begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= 0{,}00538 \begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}35 \end{pmatrix}.$$

Сумма долей уже рисковых активов превышает единицу, поэтому сформировать портфель Тобина ожидаемой доходности 12% (и выше) и минимального риска не удается.

Пример 7.3. Для условия предыдущего примера надо найти касательный портфель, его ожидаемую доходность и риск. Итак, портфель состоит из трех ценных бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 5% и двух рисковых с эффективностью соответственно 10 и 15% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}$.

Искомый касательный портфель T имеет вид (7.26):

$$T = \frac{\mu_T - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right),$$

а для его координат из (7.25) имеем

$$\mu_T = \frac{\gamma - \beta\mu_f}{\beta - \alpha\mu_f},\ \sigma_T = \frac{d}{\beta - \alpha\mu_f}.$$

Из (7.20) имеем для параметра d следующее выражение:

$$d = \sqrt{\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)},$$

$$d^2 = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{1}{299}(5; 10)\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{299}(130; 65)\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1300}{299} = 4,35.$$

Найдем константы α, β, γ:

$$\alpha = I^T V^{-1} I,\ \beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = \vec{\mu}^T V^{-1} I,\ \gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu}.$$

Здесь $I = (1,\ 1)^T$, $\mu = (10,\ 15)^T$.

$$\alpha = I^T V^{-1} I = (1,\ 1)\cdot\frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{299}(31,\ 4)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{35}{299} = 0,117,$$

$$\beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = (1,\ 1)\cdot\frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{299}(31,\ 4)\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{370}{299} = 1,24,$$

$$\gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu} = (10,\ 15)\cdot\frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{299}(285,\ 85)\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{4125}{299} = 13,80.$$

Теперь найдем координаты касательного портфеля T:

$$\mu_T = \frac{\gamma - \beta\mu_f}{\beta - \alpha\mu_f} = \frac{13,8 - 1,24\cdot 5}{1,24 - 0,117\cdot 5} = \frac{7,6}{0,655} = 11,6,$$

$$\sigma_T = \frac{d}{\beta - \alpha\mu_f} = \frac{\sqrt{4,35}}{1,24 - 0,117\cdot 5} = \frac{2,086}{0,655} = 3,18.$$

И, наконец, найдем касательный портфель T:

$$T = \frac{\mu_T - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) =$$

$$= \frac{11,6 - 5}{4,35}\cdot\frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= 0,00507\begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6597 \\ 0,3298 \end{pmatrix}.$$

Итак, касательный портфель равен $T = (0,66; 0,33)$, т.е. он включает 66% первой бумаги и 33% второй бумаги и практически не включает безрисковую бумагу.

Риск касательного портфеля ($\sigma_T = 3,18$) чуть выше риска первой бумаги ($\sigma_1 = 3$) и почти вдвое меньше риска второй бумаги ($\sigma_2 = 6$).

Доходность касательного портфеля $m_T = 11,6\%$ является максимальной доходностью, при которой можно сформировать портфель минимального риска.

Учитывая в дополнение результаты предыдущего примера, можно сделать очевидный вывод, что с ростом доходности от 10 до 12% риск портфеля растет от 2,4% (при $m = 10\%$) до 2,88% (при $m = 11\%$) и далее до 3,18% (при $m = 11,6\%$ у касательного портфеля). А при $m > 11,6\%$ сформировать портфель минимального риска уже не удается.

7.3. Диверсификация портфеля

Диверсификация (от лат. *diversus* — разный и *facere* — делать, англ. *diversification*) в области финансов — это распределение инвестиций по разным финансовым инструментам.

Диверсификация инвестиционного портфеля — это распределение средств между различными объектами инвестирования с целью избежания серьезных потерь в случае падения цен одного или нескольких активов инвестиционного портфеля.

В основе метода диверсификации (применительно к некоррелированным финансовым операциям) лежит следующее утверждение (доказанное в том же параграфе): отношение риска (композитной) финансовой операции, состоящей из n некоррелированных финансовых операций, к ее среднему доходу обратно пропорционально $\sqrt{n}$ и, следовательно, с ростом n относительный риск композитной финансовой операции уменьшается.

Таким образом, относительный риск композитной финансовой операции с ростом n уменьшается. При доказательстве утверждения предполагалось, что доходы финансовых операций, составляющих операцию X, являются величинами одного порядка, равно как и их риски.

В том же параграфе доказано, что при увеличении числа некоррелированных операций их среднее арифметическое имеет эффективность порядка эффективности каждой из этих операций, а риск $\left(\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2} \Big/ n \propto 1 \Big/ \sqrt{n}\right)$ оказывается обратно пропорционален $\sqrt{n}$ и, следовательно, с ростом n уменьшается.

Этот эффект называется **эффектом диверсификации** и означает, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом либо отрицательно коррелированные операции. (Он также известен как принцип «не класть все яйца в одну корзину».) При такой стратегии эффективность финансовой операции либо портфеля усредняется, а риск уменьшается.

В более узком смысле вопрос о диверсификации портфеля рассмотрен. Там изучен вопрос об изменении минимальной границы при пополнении портфеля Марковица новым активом. Ответ на вопрос дает следующее утверждение.

Пусть к портфелю $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ добавили ценную бумагу, так что получился портфель $\tilde{X} = \left(X, x_{n+1}\right)$. Тогда для уравнений минимальных границ $\sigma_X\left(\mu\right)$ и $\sigma_{\tilde{X}}\left(\mu\right)$ для всех μ выполняется неравенство

$$\sigma_{\tilde{X}}\left(\mu\right) \le \sigma_X\left(\mu\right). \qquad (7.31)$$

Действительно, задача (7.1)—(7.3) для портфеля X является частным случаем аналогичной задачи для портфеля $\tilde{X}$, а именно надо положить $x_{n+1} = 0$. Отсюда следует неравенство (7.31).

Таким образом, пополнение портфеля новым активом по крайней мере не ухудшает ситуацию для инвестора, так как минимальный риск при той же доходности не увеличивается. На практике, однако, не всегда удается сформировать оптимальный портфель (портфель минимального риска), в этом случае риск портфеля при добавлении нового актива может возрасти.

В общем случае «размазывание» портфеля по большему числу некоррелированных либо отрицательно коррелированных ценных бумаг снижает риск портфеля.

ЛЕКЦИЯ 8

ОБЛИГАЦИИ

По источникам финансирования финансовые средства компании делятся на собственные, заемные, привлеченные и государственные. В качестве заемных средств помимо кредитов может выступать облигационный заем, или облигации, выпускаемые эмитентом для заимствования денежных средств. В качестве эмитента могут выступать государство, муниципалитет, корпорации, финансовые или коммерческие учреждения.

8.1. Основные понятия

Облигация — это ценная бумага, свидетельствующая о предоставлении ее обладателем эмитенту займа на фиксированный, обычно длительный срок, и обеспечивающая ее обладателю оговоренный доход. Этот доход обычно ниже, чем от других ценных бумаг, в то же время он более надежен и стабилен, чем, например, дивиденды по акциям, так как не зависит от колебаний коньюктуры. В связи с этим в облигации инвестируют свободные ресурсы пенсионные фонды, страховые компании, паевые инвестиционные фонды и т.д.

Облигацию характеризуют следующие параметры:

— **дата погашения** ($t = T$, где T — время обращения облигации с момента выпуска);

— **срок погашения** ($n = T - \tau$, где τ — текущая дата);

— **номинальная стоимость** (N) — сумма денег, выплачиваемая владельцу облигации на дату погашения. Номинальная стоимость обычно указывается на самой облигации;

— **выкупная стоимость** (если она отличается от номинальной);

— **купонный доход** (C) — постоянные платежи, которые выплачиваются владельцу ежегодно по **купонной ставке** (норма дохода) $c = C/N$. Если выплаты по купонам не предусмотрены, то такую облигацию называют **бескупонной**. Доход по ней образуется за счет курсовой разницы стоимости облигации.

8.2. Текущая стоимость облигации

С каждой облигацией связан поток платежей, состоящий из ежегодной выплаты купонного дохода и выплаты номинальной стоимости на дату погашения. Поэтому в момент времени t можно говорить о *текущей стоимости P* облигации. Пусть r — ставка рефинансирования (процентная ставка), а до погашения облигации осталось ровно n лет. Тогда имеем:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^k} + \frac{N}{(1+r)^n}. \tag{8.1}$$

Купонные платежи $C = cN$ образуют простую ренту, так что формулу (8.1) можно переписать в замкнутой форме

$$P = cN \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n}. \tag{8.2}$$

Пример 8.1. Надо найти текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1000 ден. ед., сроком погашения пять лет и ежегодными выплатами по купонной ставке 15% при годовой процентной ставке 20%. Имеем $N = 1000$, $n = 5$, $c = 0{,}15$, $r = 0{,}2$. Подставляя эти значения в формулу (8.2), получим:

$$P = cN \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} =$$

$$= 150 \frac{1-1{,}2^{-5}}{0{,}2} + 1000 \cdot 1{,}2^{-5} = 448{,}59 + 401{,}88 = 850{,}47 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, текущая стоимость облигации $P = 850{,}47$ ден. ед., что меньше номинальной стоимости.

8.3. Текущая доходность и доходность к погашению

Потенциальный инвестор, инвестирующий в облигации, должен сделать выбор между многими имеющимися на рынке облигациями. С этой целью он должен сравнить параметры различных облигаций, в качестве которых могут выступать различные показатели доходности, средний срок, дюрация, модифицированная дюрация, выпуклость и др. Рассмотрим основные параметры, по которым производится выбор облигаций, — показатели доходности, в качестве которых рассмотрим текущую доходность и доходность к погашению.

Купонная процентная ставка является измерителем доходности только в случае, когда облигация продается по номиналу, так что обратим внимание на текущую доходность и доходность к погашению. После выпуска облигации она поступает на рынок, где свободно продается и покупается по рыночной цене V, которая не совпадает с текущей стоимостью, рассчитанной по формулам (8.1), (8.2). При этом отношение рыночной цены облигации V к номиналу N называется **курсом облигации** (K):

$$K = \frac{V}{N} \cdot 100. \tag{8.3}$$

8.3.1. Текущая доходность облигации

Текущая доходность i-облигации равна отношению купонных выплат

$$cN = C \tag{8.4}$$

к рыночной цене облигации V:

$$i = \frac{cN}{V} = \frac{C}{V}. \tag{8.5}$$

Пример 8.2. Пусть курс облигации равен 105, купонный доход 15%. Требуется найти текущую доходность облигации. Подставив в (8.5) $V = KN/100$, получим:

$$i = 100c/K = 15/105 = 0{,}14285 = 14{,}285\%.$$

Таким образом, текущая доходность облигации равна 14,285%.

Отметим, что если купонные выплаты производятся p-раз в году по ставке c/p, то и в этом случае текущая доходность облигации рассчитывается по формуле (8.5). Из нее следует, что если облигация куплена с дисконтом ($V < N$), то текущая доходность облигации больше купонной ставки ($i > c$), если же облигация куплена с премией $V > N$, то текущая доходность облигации меньше купонной ставки ($i < c$).

Если купонные выплаты (купонный доход) изменяются во времени и известны их величины, то можно найти среднюю текущую доходность облигации:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{n} \frac{N}{V}. \tag{8.6}$$

Если по условиям эмиссии облигаций предусмотрен постоянный относительный прирост купонных выплат (купонного дохода) q, то купонные выплаты образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q: c, cq, cq^2, ...

Вычислив сумму n-членов геометрической прогрессии по формуле

$$S_n = c\frac{1-q^n}{1-q}, \tag{8.7}$$

получим выражение для средней купонной ставки

$$\overline{c} = c\frac{1-q^n}{1-q}\cdot\frac{1}{n}. \tag{8.8}$$

При этом текущая доходность таких облигаций равна

$$\overline{i} = \overline{c}\,\frac{N}{V}. \tag{8.9}$$

8.3.2. Доходность к погашению

Текущая доходность с точки зрения оценки эффективности инвестирования в облигации имеет существенный недостаток, поскольку не учитывает вторую часть дохода по облигациям — изменение стоимости облигации к концу ее срока. Поэтому достаточно сказать, что облигации с нулевым купонным доходом, текущая доходность которых равна нулю, зачастую оказываются весьма выгодными для инвестора при учете всего срока их жизни.

Более важным показателем является доходность к погашению ρ. Эта величина служит заменой процентной ставки r в ситуации, когда текущая стоимость P облигации не совпадает с ее рыночной стоимостью V.

Если известны рыночная цена облигации V, ее номинальная стоимость N, срок погашения n и купонная ставка c, то доходность к погашению определяют как решение уравнения:

$$V = \sum_{k=1}^{n}\frac{cN}{(1+\rho)^k} + \frac{N}{(1+\rho)^n}. \tag{8.10}$$

Суммируя геометрическую прогрессию в первом слагаемом с $a_1 = \frac{1}{(1+\rho)}$, $q = \frac{1}{(1+\rho)}$, получим эквивалентное уравнение для ρ:

$$V = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n}. \tag{8.11}$$

Проблема существования и единственности такого решения решается так же, как в случае определения внутренней нормы доходности потока платежей специального вида. А именно из формулы (8.10) видно, что правая часть является убывающей функцией от аргумента $\rho > -1$, принимающей любые положительные значения, так что для любого $V > 0$ имеется единственное решение уравнения (8.10).

При больших значениях n для нахождения доходности к погашению используют приближенные формулы. Ниже приведена одна из таких формул:

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)}. \tag{8.12}$$

Поделив обе части уравнения (5.11) на N, получим

$$K = c\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + (1+\rho)^{-n}. \tag{8.13}$$

Для вывода формулы (8.12) воспользуемся разложением в ряд

$$\frac{n\rho}{1-(1+\rho)^{-n}} = 1 + \frac{n+1}{2}\rho + \frac{n^2-1}{12}\rho^2 + \dots . \tag{8.14}$$

Формулу (8.13) перепишем в виде:

$$\frac{K-1}{n}\cdot\frac{n\rho}{1-(1+\rho)^{-n}} = c-\rho. \tag{8.15}$$

Подставим формулу (8.14) в (8.15), ограничившись только линейной частью разложения. Получим

$$\frac{K-1}{n}\left(1+\frac{n+1}{2}\rho\right) = c-\rho,$$

откуда

$$\rho = \frac{2(cn+1-K)}{K-1+(K+1)n}. \tag{8.16}$$

Для уточнения приближенных формул используют стандартные методы, например метод касательных Ньютона.

Можно показать, что если рыночная цена больше номинальной стоимости, то доходность к погашению меньше купонной ставки. Оказывается, что в общем случае выполняются следующие утверждения:

1) рыночная цена облигации равна ее номинальной стоимости, тогда и только тогда, когда доходность к погашению равна купонной ставке;

2) рыночная цена облигации больше ее номинальной стоимости, тогда и только тогда, когда доходность к погашению меньше купонной ставки;
3) рыночная цена облигации меньше ее номинальной стоимости, тогда и только тогда, когда доходность к погашению больше купонной ставки.

Доказательство следует из того факта, что функция $V = V(\rho)$ является убывающей в своей области определения, и все три утверждения следуют из равенства $V(c) = N$, которое непосредственно вытекает из формулы (8.11).

Пример 8.3. Как определить доходность к погашению облигации со сроком обращения восемь лет, номинальной стоимостью 3000 ден. ед. и купонной ставкой 8%, если: 1) она продается за 3000 ден. ед.; 2) ее рыночная цена увеличится на 10%; 3) уменьшится на 5%?

В первом случае облигация продается по номиналу, поэтому доходность к погашению равна купонной ставке $\rho = 8\%$.

Во втором случае облигация продается с премией за 3300 ден. ед., поэтому надо ожидать, что доходность к погашению упадет ниже 10%. Действительно, в этом случае $K = 1{,}1$, так что вычисления по формуле (8.12) дают следующее приближенное значение:

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)} = \frac{2(0{,}08\cdot 8+1-1{,}1)}{1{,}1-1+8(1+1{,}1)} = \frac{1{,}08}{16{,}9} = 0{,}0639 = 6{,}39\%.$$

В третьем случае облигация продается с дисконтом за 2850 ден. ед., поэтому, согласно теореме, доходность должна быть больше 8%. В этом случае $K = 0{,}95$.

Вычисления дают в этом случае $\rho = 8{,}87\%$.

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)} = \frac{2(0{,}08\cdot 8+1-0{,}95)}{0{,}95-1+8(1+0{,}95)} = \frac{1{,}38}{15{,}55} = 0{,}0887 = 8{,}87\%.$$

Заметим, что в рассмотренных случаях изменения доходности пропорциональны изменениям курса облигации $\frac{10\%}{5\%} \approx \frac{1{,}61\%}{0{,}87\%}$ $(2 \approx 1{,}85)$.

8.4. Зависимость доходности к погашению облигации от параметров

Исследуем зависимость доходности к погашению облигации от параметров, входящих в формулу (8.13)

$$K = c\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + (1+\rho)^{-n}, \tag{8.17}$$

где $K = \dfrac{V}{N}$ — курс акции.

Заметим, что $K = 1$, если облигация продается по номиналу, $K < 1$, если облигация продается с дисконтом, и $K > 1$, если облигация продается с премией.

Докажем, что если доходность облигации ρ не меняется в течение времени ее обращения, то величина дисконта или премии уменьшается при уменьшении срока ее обращения n. Формулу (8.17) перепишем в виде:

$$K = \frac{c + (\rho - c)(1+\rho)^{-n}}{\rho}. \tag{8.18}$$

Тогда при $\rho > c$ функция $K = K(n)$ убывает, так что при уменьшении n величина K увеличивается, а величина дисконта, равная $N - V = N(1 - K)$, уменьшается. Аналогично, при $\rho < c$ функция $K = K(n)$ возрастает, так что при уменьшении n величина K уменьшается, а величина премии, равная $V - N = N(K - 1)$, уменьшается. При данных условиях цена облигации с уменьшением срока ее обращения приближается к номинальной.

На рисунке 8.1 приведены графики зависимостей $K = K(n)$ для двух n-летних облигаций с одинаковым номиналом и одинаковой купонной ставкой. При этом доходность одной облигации (с дисконтом, см. нижний график, рис. 8.1) больше доходности второй (с премией, см. верхний график). На оси абсцисс указана временна́я шкала.

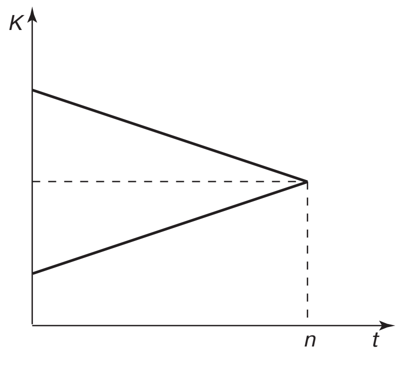

Рис. 8.1. Графики зависимостей $K = K(n)$ для двух n-летних облигаций с одинаковыми номиналом и купонной ставкой

Пример 8.4. Требуется найти изменение дисконта облигации со сроком обращения $n_1 = 7$ лет с номинальной стоимостью $N = 5000$ ден. ед., купонной ставкой $c = 8\%$ и доходностью к погашению $\rho = 10\%$ при продаже ее в настоящий момент и через год.

Дисконт I (разность между номиналом N и текущей рыночной стоимостью облигации V) при продаже ее в настоящий момент равен $I_1 = N - V_1$.

Вычислим текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_1 по формуле (8.11):

$$V_1 = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} =$$

$$= 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}1)^{-7}}{0{,}1} + 5000(1+0{,}1)^{-7} =$$

$$= 1947{,}37 + 2565{,}79 = 4513{,}16.$$

Дисконт I при продаже облигации через год равен $I_2 = N - V_2$.

Вычислим текущую рыночную стоимость облигации V_2 через год по той же формуле (8.11):

$$V_2 = 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}1)^{-6}}{0{,}1} + 5000(1+0{,}1)^{-6} =$$

$$= 1742{,}10 + 2822{,}37 = 4564{,}47 \text{ ден. ед.}$$

Теперь найдем величины дисконтов:

$$I_1 = N - V_1 = 5000 - 4513{,}16 = 486{,}84 \text{ ден. ед.},$$

$$I_2 = N - V_2 = 5000 - 4564{,}47 = 435{,}53 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, дисконт уменьшился с 486,84 до 435,53 ден. ед.

Докажем, что если доходность к погашению облигации не меняется в течение времени ее обращения, то величины дисконта или премии будут уменьшаться тем быстрее, чем меньше срок обращения.

Из математического анализа известно, что утверждение теоремы эквивалентно вогнутости функции $|V - N|$ или неравенству $|V - N|''_n < 0$. Иными словами, график $V(n)$ имеет форму, показанную на рис. 8.1. Для доказательства запишем формулу (5.11) в форме

$$V - N = N\left(\frac{c}{\rho} - 1 + \left(1 - \frac{c}{\rho}\right)(1+\rho)^{-n}\right). \tag{8.19}$$

Тогда

$$(V - N)''_n = N\left(1 - \frac{c}{\rho}\right)(1+\rho)^{-n}\ln^2(1+\rho). \tag{8.20}$$

Если облигация продается с премией, т.е. $\rho < c$, то $V > N$ и $|V - N| = V - N$. Тогда из формулы (8.20) видно, что $\left(V-N\right)''_n < 0$. Если же облигация продается с дисконтом, т.е. $\rho > c$, то $V < N$ и $|V - N| = N - V$. В этом случае также $\left(N-V\right)''_n < 0$.

Докажем, что уменьшение доходности облигации приведет к росту ее рыночной цены на величину большую, чем соответствующее уменьшение рыночной цены при увеличении доходности на ту же величину.

Речь идет о характере зависимости убывающей функции $V = V(\rho)$. Фиксируем доходность к погашению ρ и отступим от выбранного значения на величину $\Delta\rho > 0$ влево и вправо. При изменении доходности к погашению изменится и цена облигации. Положим,

$$\Delta V_1 = V\left(\rho - \Delta\rho\right) - V\left(\rho\right) > 0,$$
$$\Delta V_2 = V\left(\rho\right) - V\left(\rho + \Delta\rho\right) > 0.$$

Теорема утверждает, что выполняется неравенство

$$\Delta V_1 > \Delta V_2. \qquad (8.21)$$

Утверждение теоремы следует из выпуклости функции $V = V(\rho)$, а это свойство непосредственно вытекает из вида функции (8.10).

Пример 8.5. Найти изменение текущей рыночной стоимости облигации со сроком обращения $n_1 = 7$ лет с номинальной стоимостью $N = 5000$ ден. ед., купонной ставкой $c = 8\%$ и доходностью к погашению $\rho = 10\%$ при увеличении и уменьшении доходности к погашению на 2%.

1. Вычислим текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_0 по формуле (8.11) (см. пример 8.4):

$$V_0 = cN\frac{1-\left(1+\rho\right)^{-n}}{\rho} + N\left(1+\rho\right)^{-n} =$$
$$= 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-\left(1+0{,}1\right)^{-7}}{0{,}1} + 5000\left(1+0{,}1\right)^{-7} =$$
$$= 1947{,}37 + 2565{,}79 = 4513{,}16 \text{ ден. ед.}$$

2. Определим текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_1 при увеличении доходности к погашению на 2% по формуле (8.11)

$$V_1 = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} =$$

$$= 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}12)^{-7}}{0{,}12} + 5000(1+0{,}12)^{-7} =$$

$$= 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}12)^{-7}}{0{,}12} + 5000(1+0{,}12)^{-7} =$$

$$= 1825{,}50 + 2261{,}75 = 4087{,}25 \text{ ден. ед.}$$

Найдем изменение текущей рыночной стоимости облигации:

$$\Delta V_1 = V_1 - V_0 = 4087{,}25 - 4513{,}16 = -425{,}91 \text{ ден. ед.}$$

Итак, при увеличении доходности к погашению на 2% рыночная стоимость облигации снизилась на 425,91 ден. ед.

3. Вычислим теперь текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_2 при уменьшении доходности к погашению на 2% по той же формуле (8.11)

$$V_2 = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} =$$

$$= 0{,}08 \cdot 5000\frac{1-(1+0{,}08)^{-7}}{0{,}08} + 5000(1+0{,}08)^{-7} =$$

$$= 2082{,}55 + 2917{,}45 = 5000 \text{ ден. ед.}$$

Этот результат можно было предсказать, поскольку при уменьшении доходности к погашению на 2% она стала равной купонной ставке, а при этом рыночная стоимость облигации становится равной номинальной.

Найдем изменение текущей рыночной стоимости облигации:

$$\Delta V_2 = V_0 - V_1 = 5000 - 4513{,}16 = 486{,}84 \text{ ден. ед.}$$

Итак, при уменьшении доходности к погашению на 2% рыночная стоимость облигации снизилась на 486,84 ден. ед.

Отметим, что в соответствии с доказанным выше утверждением уменьшение доходности облигации привело к росту ее рыночной цены на величину (486,84) бóльшую, чем соответствующее уменьшение рыночной цены при увеличении доходности на ту же величину (425,91).

Следующее утверждение показывает зависимость относительного изменения цены облигации от купонной ставки. Докажем, что относительное изменение цены облигации (в %) в результате изменения доходности к погашению будет тем меньше, чем выше купонная ставка. Формулу (8.11) для цены облигации запишем в виде:

$$P(c) = N(ac + b), \tag{8.22}$$

где $a = \dfrac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} > 0$, $b = (1 + \rho)^{-n} > 0$, $c = (1 + \rho)^{-n} > 0$.

Дифференцируя (8.22) по c, получим

$$dP(c) = Nadc. \tag{8.23}$$

Заменив приращение функции дифференциалом и поделив (8.23) на (8.22), относительное приращение цены облигации запишем в виде:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{Na\Delta c}{N(ac+b)} = \frac{a\Delta c}{ac+b}. \tag{8.24}$$

Теперь утверждение следует из того, что $\dfrac{a}{ac+b}$ — убывающая функция от аргумента c при положительных значениях a, b.

8.5. Дополнительные характеристики облигации

8.5.1. Средний срок поступления дохода

Кроме доходности облигации необходимо также уметь оценивать ее риск, связанный со сроком облигации: чем больше срок до погашения, тем выше риск. Помимо непосредственно сроков надо учитывать распределение доходов во времени. Для такого рода оценки облигации вводят средний срок поступления дохода от облигации, исследуемый в данном параграфе.

Средний срок поступления дохода — это средняя взвешенная величина всех видов поступлений (доходов) от облигации. В качестве весов берутся суммы поступлений (доходов). Отметим, что *средний срок поступления дохода от облигации* отличается от *среднего срока жизни облигации*, который усредняет только сроки оплаты номинала облигаций (допускающих досрочное погашение), но не учитывает сроки выплат купонного дохода. Средний срок жизни облигации (t) определяется по формуле

$$\overline{t} = \sum_{i=1}^{k} x_i t_i, \tag{8.25}$$

где k — количество серий;

x_i — последовательные доли погашения облигаций, $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1.$ (8.26)

Средний срок поступления дохода от облигации (T) находим следующим образом:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}, \tag{8.27}$$

где Σ_i — сумма дохода;

n — срок облигации;

t_i — сроки поступления купонных доходов.

Расчет по формуле (8.27) можно упростить.

Сумма купонного дохода и номинала, стоящая в знаменателе, равна

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = cNn + N. \tag{8.28}$$

Сумма сроков, взвешенных по величине доходов, стоящая в числителе, равна

$$\sum_{i=1}^{n} t_i S_i = cN \sum_{i=1}^{n} t_i + nN. \tag{8.29}$$

$$T = \frac{cN \sum_{i=1}^{n} t_i + nN}{cNn + N}. \tag{8.30}$$

В случае $t_i = 1, 2, \ldots, n$ $\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{n(n+1)}{2}.$

Разделив числитель и знаменатель (8.30) на nN, получим

$$T = \frac{\frac{c(n+1)}{2} + 1}{c + \frac{1}{n}}. \tag{8.31}$$

Отметим, что средний срок поступления дохода от облигации не зависит от величины номинала. При этом чем больше купонный доход, тем меньше средний срок.

Купоны оплачиваются p-раз в году. Тогда для суммы сроков платежей имеем:

$$\sum_{i=1}^{np} t_i = \frac{np\left(n + 1/p\right)}{2}, \tag{8.32}$$

где n — срок облигации в годах;
$t_i = 1/p,\ 2/p, \ldots, n.$

Средний срок поступления дохода от облигации вместо формулы (8.31) определяется выражением

$$T = \frac{\dfrac{c\left(n + 1/p\right)}{p} + 1}{c + \dfrac{1}{n}}. \tag{8.33}$$

Увеличение кратности выплаты процентов по облигации снижает средний срок поступления дохода от облигации.

В заключение поясним смысл введенного понятия «средний срок поступления дохода от облигации». Он дает тот момент времени общего срока облигации, при котором суммы кредитных услуг (кредитная услуга — произведение суммы кредита на его срок) равны между собой до этого момента и после. Чем меньше средний срок, тем скорее владелец облигации получает от нее отдачу и, следовательно, тем меньше риск.

8.5.2. Дюрация облигации

Введенное выше понятие среднего срока поступления дохода от облигации имеет тот очевидный недостаток, что в нем игнорируется временна́я стоимость денег. Этот недостаток отсутствует в другой величине, учитывающей не размеры доходов, а их дисконтированные величины. Эта величина носит название дюрации.

Рассмотрим вначале общую ситуацию. Пусть имеется поток платежей

$$\left\{\left(t_1, R_1\right), \left(t_2, R_2\right), \ldots, \left(t_n, R_n\right)\right\}, \tag{8.34}$$

так что можно говорить о текущей стоимости P потока (8.34) относительно процентной ставки y:

$$P\left(y\right) = \sum_{k=1}^{n} R_k \left(1 + y\right)^{-t_k}. \tag{8.35}$$

Продифференцируем функцию (8.35) по аргументу y:

$$P'\left(y\right) = -\sum_{k=1}^{n} t_k R_k \left(1 + y\right)^{-t_k - 1} = -\frac{1}{1 + y} \sum_{k=1}^{n} t_k R_k \left(1 + y\right)^{-t_k} \tag{8.36}$$

и разделим обе части равенства (8.36) на $P(y)$. Получим соотношение

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = -\frac{1}{1+y}\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}} = -\frac{1}{1+y}\sum_{k=1}^{n} w_k t_k; \tag{8.37}$$

$$w_k = \frac{R_k (1+y)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}} = \frac{R_k (1+y)^{-t_k}}{P} \tag{8.38}$$

— весовые коэффициенты, определяющие вес каждого платежа R_k в текущей стоимости всего потока (8.34). Сумма всех весовых коэффициентов равна единице

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1. \tag{8.39}$$

Маколей ввел новое понятие — «дюрация (дюрация Маколея) потока платежей». **Дюрацией** потока платежей (8.39) называют величину

$$D = \sum_{k=1}^{n} w_k t_k. \tag{8.40}$$

Мы будем рассматривать в дальнейшем положительные потоки платежей. В этом случае все весовые коэффициенты w_k — положительные числа, сумма которых равна единице. Поэтому дюрация — это центр тяжести платежей на временно́й шкале (рис. 8.2).

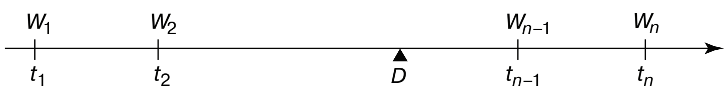

Рис. 8.2. Дюрация как центр тяжести платежей на временно́й шкале

Пример 8.6. Надо найти дюрацию потока платежей {(100, 1), (200, 2), (300, 3), (400, 4)} при процентной ставке $y = 12\%$.

Приведем поток к начальному моменту времени:

$$P = 100 \cdot 1{,}12^{-1} + 200 \cdot 1{,}12^{-2} + 300 \cdot 1{,}12^{-3} + 400 \cdot 1{,}12^{-4} =$$
$$= 89{,}29 + 159{,}44 + 213{,}53 + 254{,}21 = 716{,}47.$$

Далее найдем весовые коэффициенты по формуле (8.38)

$$w_k = \frac{R_k (1+y)^{-t_k}}{P},$$

$$w_1 = \frac{100 \cdot 1{,}12^{-1}}{716{,}47} = 0{,}125,\ w_2 = \frac{200 \cdot 1{,}12^{-2}}{716{,}47} = 0{,}223,$$

$$w_3 = \frac{300 \cdot 1{,}12^{-3}}{716{,}47} = 0{,}298,\ w_4 = \frac{400 \cdot 1{,}12^{-4}}{716{,}47} = 0{,}355.$$

Легко проверить, что сумма всех весов равна единице:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1.$$

Теперь по формуле (8.40) найдем

$$D = \sum_{k=1}^{4} w_k t_k = 0{,}125 \cdot 1 + 0{,}223 \cdot 2 + 0{,}298 \cdot 3 + 0{,}355 \cdot 4 = 2{,}885.$$

8.5.3. Свойства дюрации

Рассмотрим некоторые свойства дюрации для положительных потоков платежей.

1. Если $n = 1$, то $D = t_n$.Если $n > 1$, то $D < t_n$.

2. Выполняется соотношение

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = -\frac{D}{1+y} = -MD. \tag{8.41}$$

Эта формула является одной из основных формул, связанных с дюрацией. Она показывает, что дюрация, точнее модифицированная дюрация $MD = D/1 + y$, определяет чувствительность цены облигации к изменению уровня процентной ставки на рынке. В этом состоит основная ценность данного показателя. Модифицированная дюрация для облигации с выплатами купонного дохода p-раз в году равна $MD = \dfrac{D}{1 + y/p}$.

3. $D = D(y)$ — убывающая функция от процентной ставки y.

Первое свойство очевидно, второе есть непосредственное следствие равенства (8.37), доказательство третьего свойства приведено в [1].

Применим изложенный выше материал к случаю облигаций. Тогда поток платежей относительно процентной ставки (доходности к погашению) y имеет вид:

$$\{(1, cN), (2, cN), \ \dots, (n, cN + N)\},$$

где c — купонная ставка;
N — номинальная стоимость;
n — срок погашения.

Свойства 1—3 в случае облигаций формулируются следующим образом.

1. Для бескупонной облигации ($c = 0$) дюрация совпадает со сроком погашения $D = n$.

2. Для относительного изменения цены облигации $\frac{\Delta V}{V}$ при изменении доходности на Δy справедлива приближенная формула

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y. \tag{8.42}$$

3. $D = D(y)$ — убывающая функция относительно доходности к погашению y.

Приведем формулу для нахождения дюрации. Дюрация облигации не зависит от номинальной стоимости и дается формулой

$$D = \frac{1+y}{y} - \frac{n(c-y)+1+y}{c\left((1+y)^n - 1\right)+y}. \tag{8.43}$$

8.5.4. Выпуклость облигации

Выпуклостью облигации $W(y)$ при данной доходности y называют величину

$$W(y) = \frac{V''(y)}{V(y)}(1+y)^2. \tag{8.44}$$

Для нахождения выпуклости используют формулу, которая получается непосредственным дифференцированием формулы (5.10) с заменой переменной ρ на y:

$$W(y) = \frac{c}{K}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(1+y)^{-k} + \frac{n(n+1)}{K}(1+y)^{-n}. \tag{8.45}$$

Напомним, что c — купонная ставка, $K = V/N$ — курс облигации, n — срок погашения, y — доходность облигации. В принципе можно получить замкнутую формулу для выпуклости, аналогичную формуле (8.43) для дюрации, но мы этого делать не будем. Главное приложение выпуклости — это уточнение приближенной формулы (8.42). А именно справедливо утверждение, что для относительного изменения цены облигации $\Delta V/V$ при изменении доходности на Δy справедлива приближенная формула

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y + \frac{1}{2}W \cdot (\Delta y)^2. \tag{8.46}$$

Для доказательства формулы $D = \frac{P'_y}{\rho}(1+y)$ необходимо разложить функцию $V(y)$ в ряд Тейлора с точностью до члена второго порядка малости $(\Delta y)^2$.

На рисунке 8.3 показаны графики зависимостей $V = V(y)$ для двух облигаций, у которых при $y = y_0$ совпадают доходности и дюрации, однако выпуклость одной (показана штрихом) больше другой (сплошная линия).

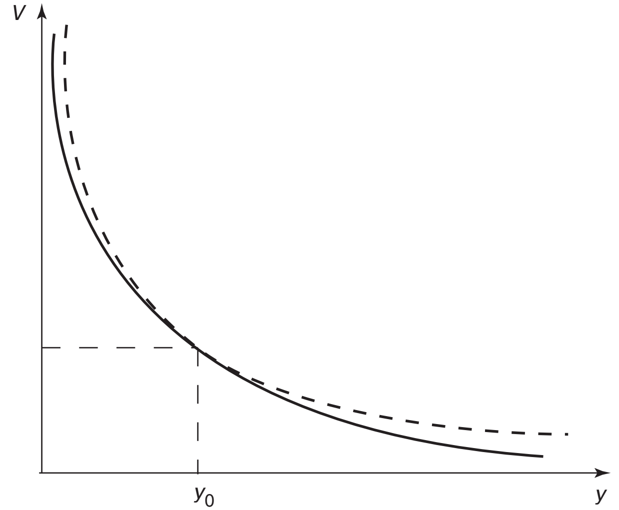

Рис. 8.3. Зависимости цены облигации V от доходности облигации y $V = V(y)$ для двух облигаций, у которых при $y = y_0$ совпадают доходности и дюрации

8.6. Иммунизация портфеля облигаций

Под **иммунизацией портфеля облигаций** понимается такое управление портфелем, которое позволяет сохранять уровень его доходности на протяжении некоторого периода, несмотря на скачки рыночной процентной ставки. Примером иммунизированного портфеля может служить портфель облигаций, принадлежащий, скажем, пенсионному фонду, если дюрация портфеля облигаций равна дюрации обязательств этого фонда.

ЛЕКЦИЯ 9

ПОРТФЕЛЬ ОБЛИГАЦИЙ

Портфель облигаций, состоящий из облигаций разных видов, сроков погашения, размеров купонного дохода и других характеристик, имеет свою доходность, средний срок поступлений, дюрацию, модифицированную дюрацию, выпуклость и иные параметры, характеризующие портфель в целом.

9.1. Доходность портфеля облигаций

Напомним, как определяется доходность отдельной облигации (параграф 8.3.2). Если известны рыночная цена облигации, ее номинальная стоимость N, срок погашения n и купонная ставка c, то доходность к погашению ρ определяют как решение уравнения

$$V = \sum_{k=1}^{n} \frac{cN}{(1+\rho)^k} + \frac{N}{(1+\rho)^n} \tag{9.1}$$

или эквивалентно, как решение уравнения

$$V = cN \frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n}. \tag{9.2}$$

При определении доходности портфеля облигаций она также находится как решение уравнения, в котором сумма приведенных величин общего потока доходов приравнивается к общей рыночной стоимости облигаций, составляющих портфель

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{(1+\rho)^i} = \sum_{k=1}^{m} q_k P_k, \tag{9.3}$$

где S_i — суммарный доход от облигаций в момент времени $t = i$;
q_k — количество облигаций вида k;
P_k — цена облигации вида k;
M — количество видов облигаций в портфеле;
n — максимальный срок выплаты дохода.

В общем случае решение уравнения (9.3) относительно процентной ставки (доходности портфеля) ρ находится итерационными методами, например методом Ньютона — Рафсона, или на основе линейной интерполяции. В последнем случае можно использовать формулу

$$\rho = \rho' + \frac{P' - P}{P' - P''}\left(\rho' - \rho''\right), \tag{9.4}$$

где ρ', ρ'' — минимальное и максимальное значения доходности портфеля облигаций, ограничивающие интервал, в пределах которого ожидается неизвестное значение доходности портфеля ρ;

P — рыночная стоимость портфеля;

P', P'' — расчетные стоимости портфеля при применении ставок ρ', ρ''.

Величину ставки удобнее определять не по формуле (9.4), а как среднюю взвешенную величину доходности всей совокупности облигаций. Теперь под ρ будем подразумевать среднюю взвешенную величину доходности. В качестве веса берется рыночная стоимость соответствующего количества облигаций ($q_k P_k$ или $q_k K_k$):

$$\rho = \frac{\sum_k \rho_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k} = \frac{\sum_k \rho_k q_k K_k}{\sum_k q_k K_k}, \tag{9.5}$$

где K_k — курс облигаций вида k.

Более адекватно, однако, использование в качестве весов произведение дюрации каждого вида облигации (D_k) на стоимость соответствующего количества облигаций:

$$\rho = \frac{\sum_k \rho_k D_k q_k P_k}{\sum_k D_k q_k P_k} = \frac{\sum_k \rho_k D_k q_k K_k}{\sum_k D_k q_k K_k}. \tag{9.6}$$

9.2. Средний срок поступления дохода портфеля облигаций

Средний срок поступления дохода портфеля облигаций в целом (T_0) находится как средняя взвешенная величина. В качестве весов берутся стоимости облигаций:

$$T_0 = \frac{\sum_k T_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k}, \tag{9.10}$$

где T_k — средний срок поступления дохода облигаций вида k.

Портфель с меньшим средним сроком поступления дохода при прочих равных условиях имеет меньший риск, чем с более длительным сроком.

9.3. Дюрация портфеля облигаций и его выпуклость

Дюрация — это средняя взвешенная продолжительность выплат доходов от облигации с весами, равными дисконтированным величинам доходов. Установим связь между дюрацией портфеля облигаций и дюрациями отдельных облигаций данного портфеля.

Пусть портфель состоит из двух облигаций с потоками доходов R_k и S_k и дюрациями

$$D_1 = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k}}{P_1} \text{ и } D_2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k S_k (1+y)^{-t_k}}{P_2}. \qquad (9.11)$$

Для объединенного потока доходов от двух облигаций имеем

$$D_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k} + \sum_{k=1}^{n} t_k S_k (1+y)^{-t_k}}{P_1 + P_2}. \qquad (9.12)$$

Если в портфеле q_1 и q_2 облигаций, то потоки доходов увеличиваются пропорционально этим величинам. Имеем

$$D_0 = \frac{q_1 \sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k} + q_2 \sum_{k=1}^{n} t_k S_k (1+y)^{-t_k}}{q_1 P_1 + q_2 P_2}. \qquad (9.13)$$

Из (9.11) следует, что

$$D_1 P_1 = \sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k} \text{ и } D_2 P_2 = \sum_{k=1}^{n} t_k S_k (1+y)^{-t_k},$$

поэтому

$$D_0 = \frac{D_1 q_1 P_1 + D_2 q_2 P_2}{q_1 P_1 + q_2 P_2}. \qquad (9.14)$$

Таким образом, приходим к выводу, что дюрация портфеля облигаций равна средней взвешенной дюраций отдельных облигаций данного портфеля с весами, равными стоимостям облигаций.

Обобщая (9.14) на случай m-видов облигаций, получим

$$D_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} D_k q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \sum_{k=1}^{m} D_k h_k, \tag{9.15}$$

где h_k — стоимостная доля облигаций вида k.

Стоимостную долю облигаций можно получить на основе не только цен облигаций, но и их курсов. В этом случае

$$h_k = \frac{q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \frac{q_k K_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k K_k}, \tag{9.16}$$

при этом

$$\sum_{k=1}^{m} h_k = 1. \tag{9.17}$$

Выпуклость портфеля облигаций (C_0), как и дюрация, есть средняя взвешенная выпуклость отдельных облигаций данного портфеля с весами, равными стоимостям облигаций, и определяется по формуле

$$C_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} C_k q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \sum_{k=1}^{m} C_k h_k. \tag{9.18}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В.* Финансовая математика : учеб. пособие М. : КНОРУС, 2013.
2. *Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В.* Задачи по финансовой математике. М. : КНОРУС, 2013.
3. *Брусов П.Н., Филатова Т.В.* Финансовая математика для магистров. М. : ИНФРА-М, 2014.
4. *Брусов П.Н., Филатова Т.В., Орехова Н.П.* Справочник по финансовой математике. М. : ИНФРА-М, 2014.

Тематическая подборка издательства «КНОРУС»

Брусов П.Н. Задачи по финансовой математике : учеб. пособие. М. : КНОРУС, 2014.

Брусов П.Н. Финансовая математика : учеб. пособие. М. : КНОРУС, 2013.

Брусов П.Н. Финансовый менеджмент. Математические основы. Краткосрочная финансовая политика : учеб. пособие. М. : КНОРУС, 2013.

Ширшов Е.В. Финансовая математика : учеб. пособие. М. : КНОРУС, 2014.

КОМПЕТЕНЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

1. Уметь вычислять наращенную сумму в случае простых и сложных процентов в случае кратного и непрерывного начисления процентов. Уметь сравнивать наращение по простой и сложной ставкам процента. Уметь проводить дисконтирование и удержание процентов. Уметь сравнивать дисконтирование по сложной и простой учетной ставкам. Уметь рассчитывать мультиплицирующие и дисконтирующие множители.

2. Знать и уметь применять «Правило 70», а также его обобщение на случай простых процентов («Правило 100»), непрерывных процентов, кратного начисления процентов. Уметь рассчитывать увеличение капитала в произвольное число раз в случае простых процентов, сложных процентов, непрерывных процентов, кратного начисления процентов.

3. Уметь учитывать влияние инфляции на ставку процента. Знать связь номинальной и реальной процентных ставок (формула Фишера). Уметь вычислять темп инфляции за несколько периодов. Владеть понятием синергетического эффекта в случае темпа инфляции за несколько периодов.

4. Владеть понятием эффективной процентной ставки. Уметь рассчитывать эффективную ставку процента для n-го периода начисления в случае простых процентов и сложных процентов. Уметь рассчитывать эффективную ставку процента в случае кратного начисления процентов в случае непрерывных процентов, а также с учетом инфляции и с учетом налогов. Знать эквивалентность различных процентных ставок (простых и сложных процентов, простых и непрерывных процентов, сложных и непрерывных процентов).

5. Уметь рассчитывать эффективность операций с валютой, доходность депозитов с конверсией валюты и без конверсии, мультивалютных депозитов.

6. Владеть понятием внутренней нормы доходности. Уметь вычислять внутреннюю норму доходности типичных инвестиционных потоков, а также финансовых потоков с чередованием положительных и отрицательных платежей.

7. Владеть понятием финансового потока. Уметь рассчитывать его приведенную и наращенную величины. Владеть понятием и уметь вычислять средний срок финансового потока.

8. Владеть понятием непрерывного потока платежей, уметь вычислять его наращенную и приведенную стоимости. Уметь вычислять наращенную и приведенную стоимости линейно изменяющегося и экспоненциально изменяющегося потоков платежей.

9. Владеть понятием регулярных потоков платежей, обыкновенных рент. Знать и уметь рассчитывать коэффициенты приведения и наращения рент постнумерандо и пренумерандо.

10. Уметь рассчитывать коэффициенты приведения и наращения ренты за несколько соседних периодов. Знать связь между приведенной величиной и наращенной суммой аннуитета. Знать связь между коэффициентами приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо. Уметь рассчитывать параметры ренты.

11. Владеть понятиями вечной, кратной и непрерывной ренты. Уметь рассчитывать их коэффициенты приведения и наращения. Знать связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты для разной кратности начисления процентов. Знать связь между приведенной и наращенной величинами произвольных рент.

12. Владеть понятиями рент с платежами в середине периодов, немедленных и отложенных рент. Владеть понятиями арифметических и геометрических рент, в том числе срочных и непрерывных.

13. Знать общий принцип сравнения финансовых потоков и рент и уметь их сравнивать. Уметь сравнивать годовые и срочные ренты. Уметь проводить конверсию рент:

– изменение параметров ренты;
– замену одной ренты другой;
– замену обычной ренты срочной;
– замену немедленной ренты отсроченной;
– консолидацию рент;
– выкуп ренты;
– рассрочку платежа.

14. Владеть понятиями дохода и доходности финансовой операции. Уметь рассчитывать доходность за несколько периодов. Владеть понятием синергетического эффекта в случае доходности за несколько периодов.

15. Владеть понятием риска финансовой операции. Знать различные количественные оценки риска финансовой операции. Знать выделенную роль равномерного и нормального распределений. Владеть понятием коррелированности финансовых операций. Владеть понятием стоимости под риском (*Value at risk*, *VaR*). Знать виды финансовых рисков. Знать методы уменьшения риска финансовых операций (диверсификация, хеджирование, опционы, страхование).

16. Уметь анализировать финансовые операции в условиях неопределенности. Владеть понятиями матриц последствий и рисков. Знать алгоритм принятия решений в условиях полной неопределенности. Знать правила минимакса: Вальда, Сэвиджа, Гурвица. Знать алгоритм принятия решений в условиях частичной неопределенности. Знать правило максимизации среднего ожидаемого дохода и правило минимизации среднего ожидаемого риска. Владеть понятием оптимальной (по Парето) финансовой операции. Знать правило Лапласа равновозможности.

17. Владеть понятием доходности и риска ценной бумаги и портфеля. Уметь анализировать портфель из двух ценных бумаг. Знать предельные случаи (полной корреляции и полной антикорреляции), промежуточные случаи. Уметь анализировать случаи независимых бумаг (две бумаги, три и более). Уметь анализировать портфель из двух ценных бумаг, одна из которых безрисковая. Уметь находить портфель заданной эффективности и портфель заданного риска из двух ценных бумаг.

18. Уметь находить портфели Марковица из n-бумаг (минимального риска при заданной эффективности, минимального риска с эффективностью не меньшей заданной, минимального риска).

19. Владеть понятием минимальной границы и знать ее свойства.

20. Уметь находить портфели Тобина из N-бумаг (минимального риска из всех портфелей заданной эффективности, максимальной эффективности из всех портфелей риска, не более заданного).

21. Уметь находить оптимальные неотрицательные портфели. Уметь рассчитывать доходность неотрицательного портфеля. Уметь анализировать неотрицательный портфель из двух и из трех бумаг. Уметь находить портфели с неотрицательными компонентами (максимальной эффективности, минимального риска). Владеть понятием диверсификация портфеля.

22. Владеть понятием облигации, ее текущей стоимости, текущей доходности и доходности к погашению. Знать зависимость доходности к погашению облигации от параметров. Знать дополнительные характеристики облигации:

– средний срок поступления дохода;

– дюрацию и ее свойства;

– выпуклость.

23. Владеть понятием иммунизации портфеля облигаций. Для портфеля облигаций уметь рассчитывать доходность, средний срок поступления дохода. Владеть понятиями и уметь рассчитывать дюрацию и выпуклость портфеля облигаций.