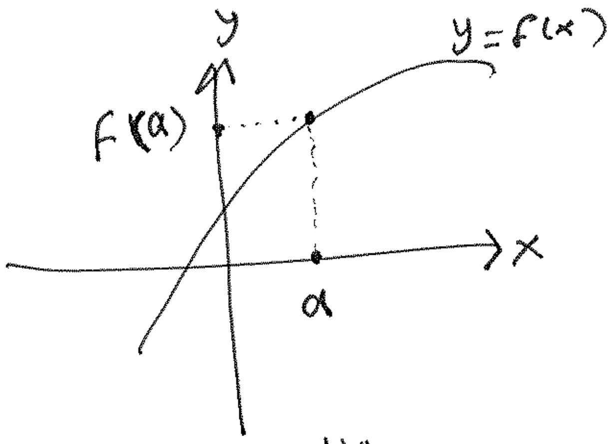
Kontinuitet

Man säger att funktionen $y = f(x)$

är kontinuerlig i punkt $x = a$

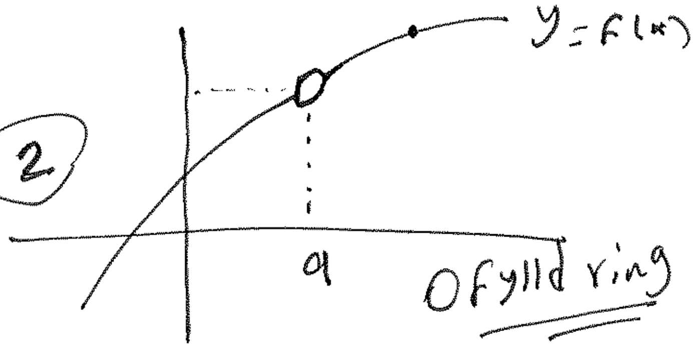
Om funktionen inte har hål

(ofylld ring) eller avbruten.



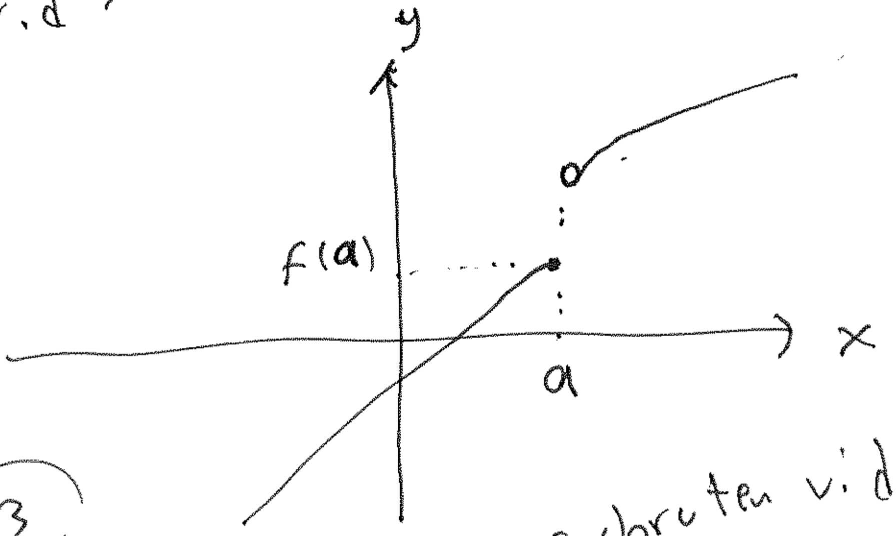
1

Kontinuerlig
vid $x = a$



2

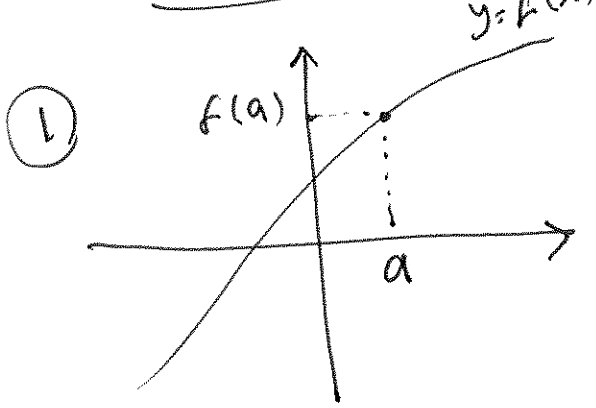
ej kontinuerlig
vid $x = a$

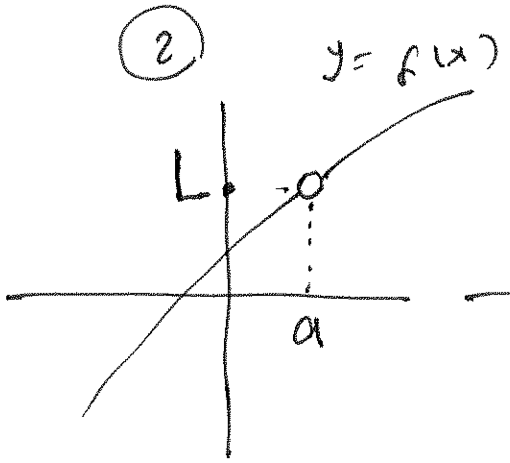


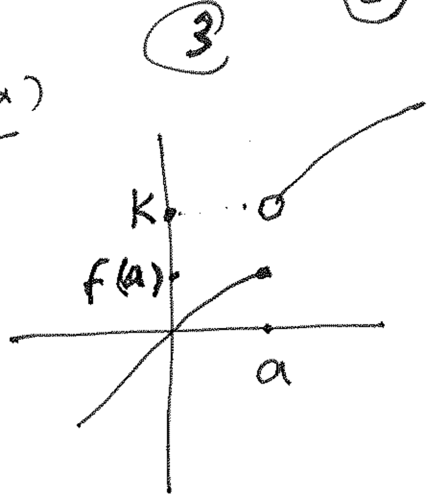
3

avbruten vid $x = a$.
ej kontinuerlig

Matematisk







I kurvan 1 har vi:

Vänste G.V existerar

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Höger G.V

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

I 2

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

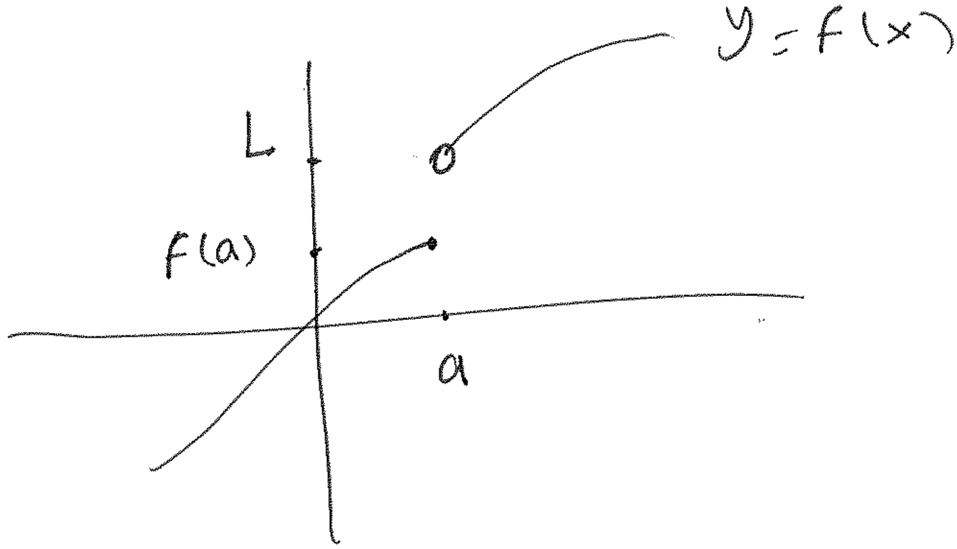
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

alltså existerar

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Men $f(a)$ finns inte

dvs $f(x)$ är ej definitrat i $x = a$



Höger G.V. existerar

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Vänster G.V existerar

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) \text{ existerar ej}}$$

Sammanfattning

$y = f(x)$ är kontinuerlig vid $x = a$

Om $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar och är

$= f(a)$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

ej kont. { I fall ofylld ring existerar $\lim_{x \to a} f(x) = L$ men $f(a)$ finns inte och

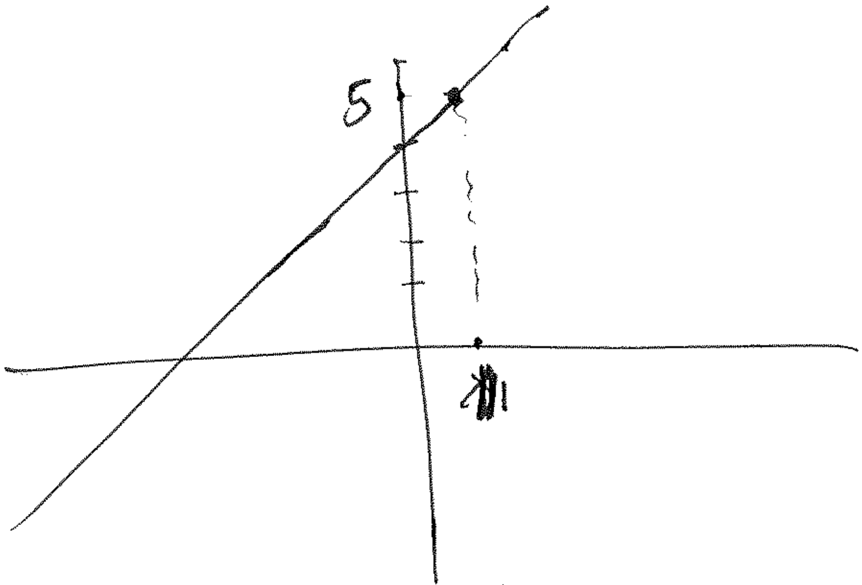
ej kont { I fall avbruten $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar ej

Ex

Sätt $f(x) = x+4$. Denna är en

rät linje som definierad överallt.

$y = x+4$



är kontinuerlig överallt. t.ex

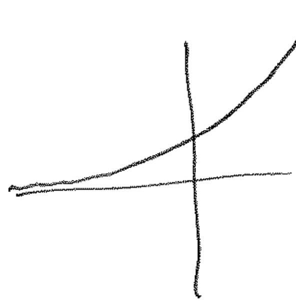
vid $x=1$

$$\boxed{\lim_{x \to 1} (x+4) = 5 = f(1)}$$

Anm $y = e^x$ $y = \ln x$ $y =$ Polynom

$y = \sin x$ $y = \cos x$

är kontinuerliga överallt.



Ofylld ring

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

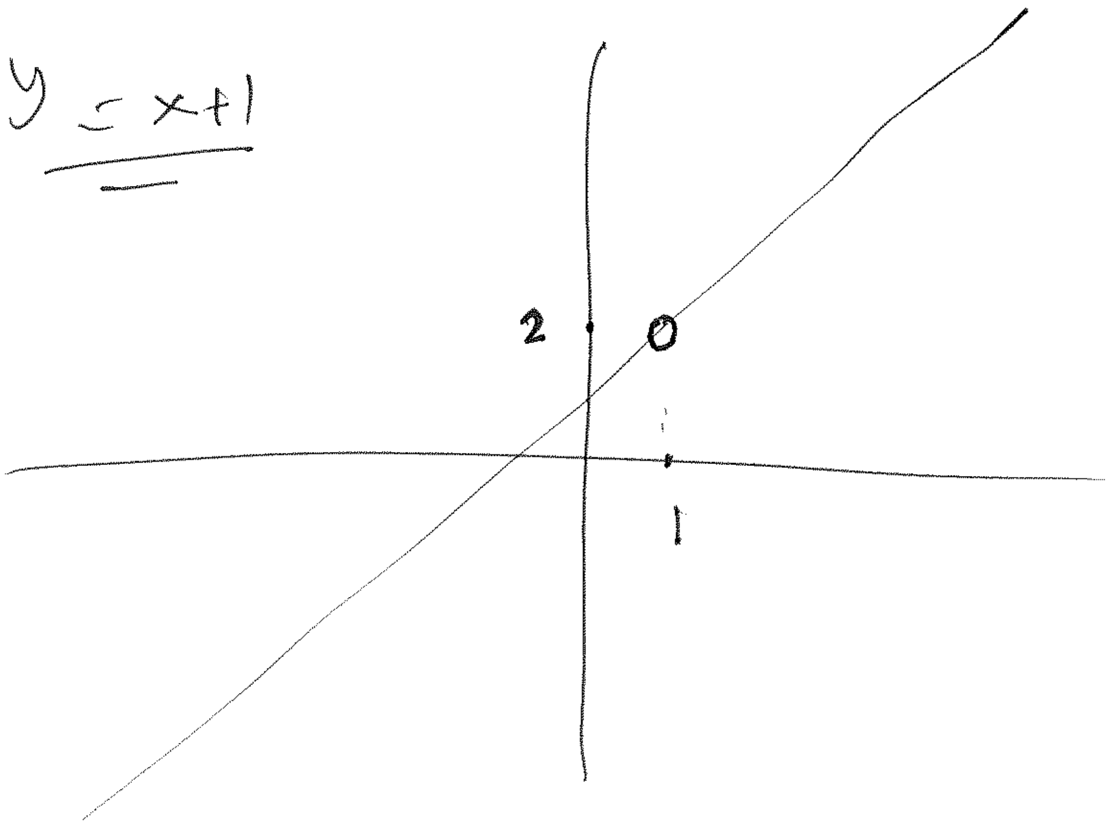
funktionen är ej definierat vid $x = 1$

$f(1)$ finns inte

för $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = x + 1$$

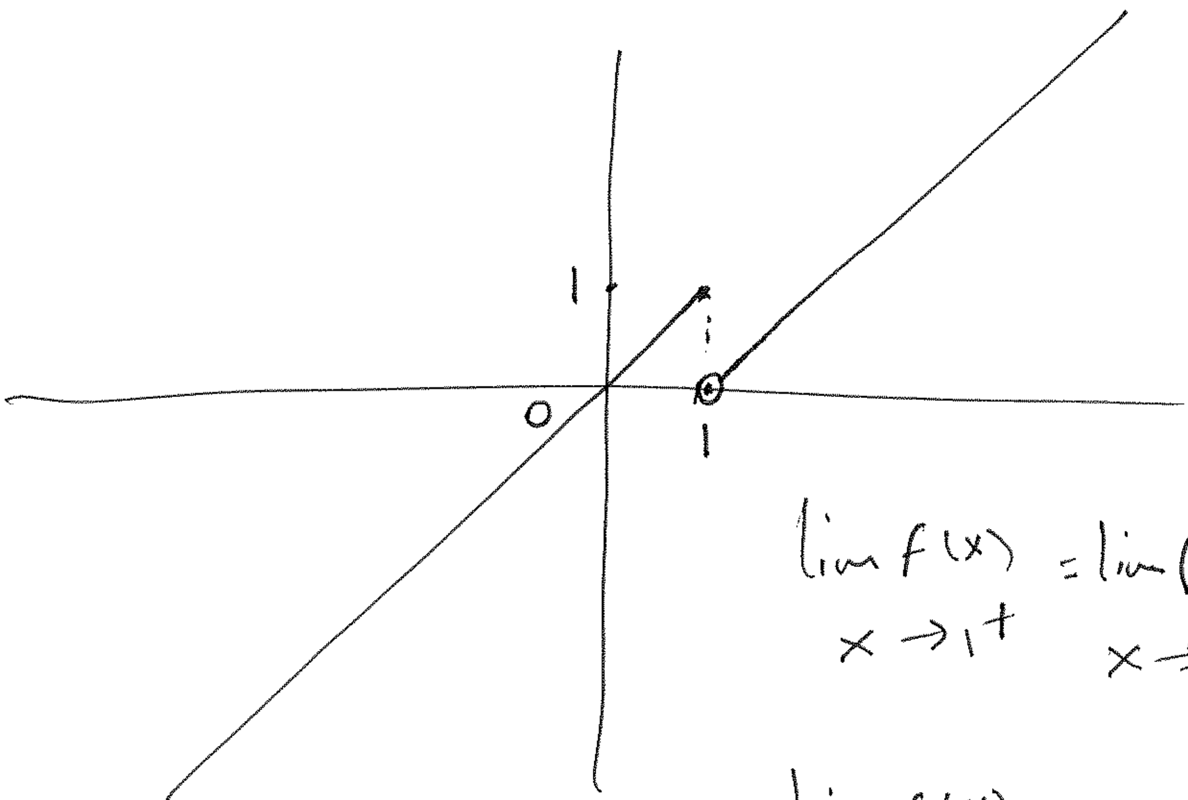
$y = x + 1$



Avbruten fall

stycKvis funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x-1) = 0$$

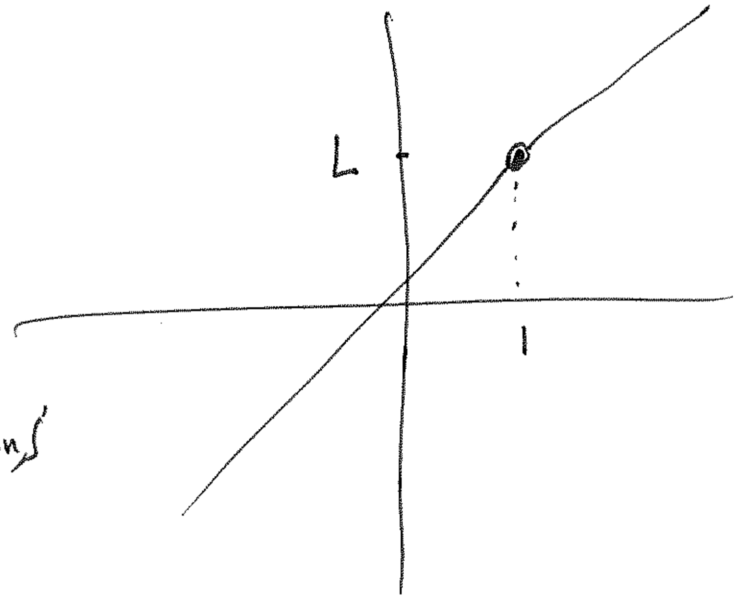
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} x = 1$$

$$f(1) = 1$$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ exist. ej

Hävbar diskontinuitet

I fall ofylld ring kan man reparera funktionen för att blir kontinuerlig genom att fylla i ofylld ringen



Matematisk

Vi vet att

$\lim_{x \to 1} f(x) = L$ finns

Men $f(1)$ finns inte

Vi definierar själv $\underline{\underline{f(1) = L}}$

Ex

Sätt $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

$f(x)$ är inte definierat i $x=0$

Definiera $f(0)$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig överallt.

Lösning: Vi beräkna $\lim_{x \to 0} f(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

l'Hôpital

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}}$$

är kont. överallt

5.11

Best. talet a så att

$$f(x) = \begin{cases} a e^{x+1} & x \leq -1 \\ 1 + ax & x > -1 \end{cases}$$

blir kontinuerlig vid $x = -1$

Villkor

$$\boxed{\text{H.G.V och V.G.V och } f(-1)}$$

alla måste vara lika

$-1 \quad \leftarrow x$

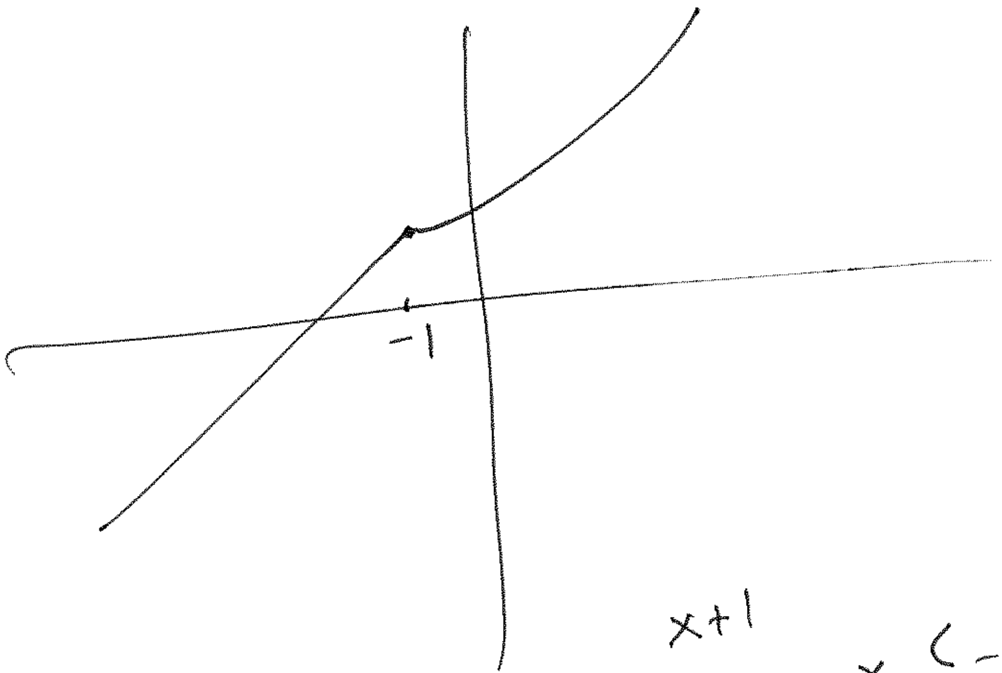
$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to -1} (1 + ax) = 1 - a$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to -1} a e^{x+1} = a e^0 = a$$

$$f(-1) = ae^{-1+1} = ae^{0} = a$$

$$1 - a = a$$

$$2a = 1 \qquad a = 1/2$$



$$f(x) = \begin{cases} 0.5\, e^{x+1} & x \le -1 \\ 0.5x + 1 & x > -1 \end{cases}$$

Derivering och Kedje regeln

$y = x^{\alpha} \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha - 1}$

$y = e^{x} \Rightarrow y' = e^{x}$

$y = \ln x \Rightarrow y' = 1/x$

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

$y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Olika beteckning för derivatan

y' $\quad f'(x)$ $\quad Dy$ $\quad Df(x)$

dy/dx utläses derivatan av y m.a.p. x

dy/dx är den bästa beteckning.

$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

$y = t^2 \Rightarrow y' = 2t$

Alltså y' visar inte vad variabel är. Men

$dy/dx = 2x$

$dy/dt = 2t$

<u>Kedje</u>

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

men

$y = e^{3x}$ vad är $y' = ?$

$y = \ln x \qquad y' = 1/x$

$y = \ln(x^2 + 3x + 1)$ vad är $y' = ?$

$y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x$

$y = \sin(x^2 + 3x) \Rightarrow y' = ?$

Den är Kedje regeln som svarar på sådana deriveringar.

Kedje regeln

Låt y vara en funktion av u

t.ex $y = u^2$

och låt u själv vara en funktion av x

t.ex. $u = 3x + 4$

I så fall blir självklart y en funktion av x t.ex. genom insättning.

$$y = u^2 \qquad u = 3x+4$$

$$y = (3x+4)^2$$

Vi har 3 st. funktioner och alltså 3 st. derivater

dy/du , $\dfrac{du}{dx}$ och

dy/dx

Det finns ett Samband mellan de 3 derivatorna.

$$\boxed{dy/dx = dy/du \cdot du/dx}$$

$y = u^2$ $\Downarrow$ $dy/du = 2u$

$u = 3x + 4$

$du/dx = 3$

$$y = (3x+4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$$

$$dy/dx = 18x + 24$$

$$18x + 24 = 2u \cdot 3 \ ?$$

$\downarrow$

$2(3x+4) \cdot 3$

$(6x+8) \cdot 3$

$18x + 24$

Tillämpning av kedje

$y = e^{3x}$ $\qquad y' = ?$

$y = e^{u}$ $\qquad u = 3x$

$\frac{dy}{du} = e^{u}$ $\qquad \frac{du}{dx} = 3$

$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot e^{u} = 3e^{3x}$

$$\boxed{y = e^{3x} \longrightarrow y' = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{inre derivatan}}}{3}e^{3x}}$$

$$y = e^{3x^2+5} \longrightarrow y' = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{inre}}}{6x} \cdot e^{3x^2+5}$$

$$y = x^{\alpha} \longrightarrow y' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$y = u^{\alpha} \longrightarrow y' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot \underbrace{u'}_{\text{inre}}$$

$$y = x^{3} \longrightarrow y' = 3x^{2}$$

$$y = (x^2 + 3x)^3 \longrightarrow y' = 3\underbrace{(x^2+3x)}_{u}{}^{2} \cdot \underbrace{(2x+3)}_{u'}$$

2

$$y = e^{x} \longrightarrow y' = e^{x}$$

$$y = e^{u} \longrightarrow y' = e^{u} \cdot u'$$

$$y = e^{x^2+5x} \longrightarrow y' = (2x+5)\, e^{x^2+5x}$$

$y = \ln x \longrightarrow y' = 1/x$

$y = \ln u \longrightarrow y' = 1/u \cdot u' = \frac{u'}{u}$

$y = \ln(x^2 + 3x) \quad y' = \frac{2x+3}{x^2+3x}$

$y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x$

$y = \sin u \longrightarrow y' = u' \cos u$

t.ex.

$y = \sin(x^2 + 3)$

$y' = 2x \cdot \cos(x^2 + 3)$

ändra alldrig vinkeln

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad y' = 1/2\, x^{-1/2}$$

$$y' = 1/2 \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y = \sqrt{x} \longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$y = \sqrt{U} \longrightarrow y' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$

$$y = \sqrt{x^2+3x} \qquad y' = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$$

$$y = \tan x \longrightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan U \longrightarrow y' = \frac{U'}{\cos^2 U}$$

$$y = \tan(x^2) \longrightarrow y' = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$

Derivatan av

$y = \arcsin x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arctan x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$y = \arccos x \longrightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

---

bevis

$y = \arcsin x \iff$

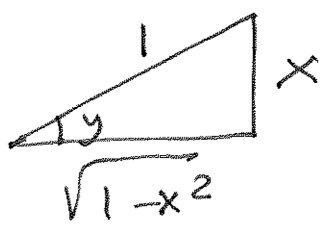
$\sin y = x$

derivera båda led

$y' \cos y = 1 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos y}$

$\sin y = x \rightarrow$ vad är $\cos y$

$\cancel{\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$



$$\cos y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arcsin x \longrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arcsin U \longrightarrow y' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$$

Ex

$$y = \arcsin(x^2+3x)$$

$$y' = \frac{2x+3}{\sqrt{1-(x^2+3x)^2}}$$

23

$y = \arccos x \rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arccos u \rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = \arctan x \rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$y = \arctan u \rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

Några derivering

$y = 2^x \rightarrow y' = x2^{x-1}$ fel

$y = 2^x \rightarrow y' = 2^x$ fel

$y = 2^x$

Applicera Ln

$\ln y = \ln 2^x$

$\ln y = (\ln 2)\, x$ derivera båda led

$\frac{y'}{y} = \ln 2 \Rightarrow y' = (\ln 2)\, y$

$y' = (\ln 2) \cdot 2^x$

$$\boxed{y = 2^x \longrightarrow y' = (\ln 2)\, 2^x}$$

$y = 3^x \longrightarrow y' = (\ln 3)\, 3^x$

$y = a^x \longrightarrow y' = (\ln a) \cdot a^x$

$$y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$x \cdot \ln x$$

$$x' \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$1 \cdot \ln x + x \cdot 1/x$$

$$\ln x + 1$$

$$y' = (\ln x + 1)\, y$$

$$y' = (\ln x + 1)\, x^x$$

$$\boxed{y = x^x \longrightarrow y' = (\ln x + 1)\, x^x}$$