①

$$\int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\arcsin x}_{g} \, dx \qquad \left(\begin{array}{l} f = x \\ g' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right)$$

$$= fg - \int fg' = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

D_ framför

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad \left[\begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ -2x \, dx = dt \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{t}} \frac{dt}{-2\cancel{x}} = -\tfrac{1}{2} \int t^{-1/2} \, dt$$

$$(\alpha = -\tfrac{1}{2}) \qquad \boxed{\int x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} t^{-1/2+1} + C$$

$$= -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

9.3

ⓐ $\int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\ln(x-1)}_{g}\, dx$ P.I

ⓑ $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ D_ framför $\int \frac{1}{x} \ln x\, dx$

ⓒ $\int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\ln(x^2+1)}_{g}\, dx$ P.I

ⓓ $\int x^2 \ln(1+x^3)\, dx$ D_ framför

$$\left(\begin{array}{l} 1+x^3 = t \\ 3x^2\, dx = dt \end{array}\right)$$

$$= \int \cancel{x^2} \cdot \ln t \cdot \frac{dt}{3\cancel{x^2}}$$ $\frac{1}{3} \int \ln t\, dt$ P.I.

$$\boxed{\int \ln t\, dt = t \ln t - t}$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+x^3)\ln|1+x^3| - 1 - x^3\right] + C$$

$$\int \underbrace{x^2}_{f'} \underbrace{\ln(1+x^3)}_{g}\, dx \qquad \left[\begin{array}{ll} f' = x^2 & f = \dfrac{x^3}{3} \\ g' = \dfrac{3x^2}{1+x^3} & \end{array}\right.$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(1+x^3) - \int \frac{\cancel{3}\, x^5}{1+x^3}\, dx$$

$\downarrow$

rationell funktion

Integral av Rationella funktioner

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$ där $P(x)$ och $Q(x)$

är två Polynom.

Vi betraktar två fall

<u>fall 1</u> Nämnare är ett Polynom av grad 1. $N = ax+b$

<u>Fall 2</u> Nämnare är ett Polynom av grad 2.

$$N = ax^2 + bx + c$$

<u>Anm</u> Vi kan anta alltid att

Täljare har grad mindre än Nämnare. eftersom annars kan vi göra division Algoritm först.

Ex

$$\frac{x^3+x-1}{x^2-x} \qquad \frac{\text{grad } 3}{\text{grad } 2}$$

$x+1$ Kvot

$$\begin{array}{l|l} x^3+x-1 & x^2-x \\ \cancel{x^3}-x^2 & \\ \hline x^2+x-1 & \\ x^2-x & \\ \hline 2x-1 & \end{array}$$

rest

$$\begin{array}{l|l} 45 & 7 \\ 42 & \\ \hline 3 & \end{array} \qquad 6$$

Kvot, rest

$$\frac{45}{7} = 6 + \frac{3}{7}$$

$$\int \frac{x^3+x-1}{x^2-x} = \int x+1 + \int \frac{2x-1}{x^2-x}$$

Nu har T grad 1

N grad 2

Fall 1

N har grad 1.

OBS: Division Algoritm behövs ej även om T har större grad än N.

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

Metod $\boxed{\text{Sätt } N = t}$

$$\begin{pmatrix} x+1 = t \\ dx = dt \end{pmatrix} \rightarrow x = t-1$$

$$\int \frac{(t-1)^2}{t}\,dt = \int \frac{t^2-2t+1}{t}\,dt$$

$$\int \left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt = \frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t| + C$$

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx = \frac{(x+1)^2}{2} - 2(x+1) + \ln|x+1| + C$$

Anm: Vi kunde göra D. A. först.

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{x-1} & \\
\cline{1-1}
x^2 & x+1 \\
\cline{2-2}
x^2+x & \\
\cline{1-1}
-x & \\
-x-1 & \\
\cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

$$= \int \left(x-1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$\frac{x^2}{2} - x + \ln|1+x| + C$$

Svar:

Fall 2

N är av grad 2.

3 st. olika möjligheter finns

a) N har två reella rötter

b) N har bara en rot (dubbelrot)

c) N saknar rot.

a) $$\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}\,dx$$

Anm

P. A. är nödvändig om T har större eller lika grad.

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow \underline{x=1}, \ \underline{x=-3}$$

två reella rötter.

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{(x+1)}{(x-1)(x+3)}\,dx$$

Vi måste göra partial bråks uppdelning (P. B. U)

Def P. B. U.

gemensam nämnare betyder att två bråk kan skrivas som en.

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\text{två}} = \underbrace{\frac{5}{6}}_{\text{en}}$$

Omvänt till gem. nämnare kallas P. B. U.

P.B.U betyder att

en kvot delas till två.

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

$$= \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3A - B}{(x-1)(x+3)}$$

$$(A+B)x + 3A - B = 1x + 1$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A - B = 1 \end{cases}$$

$$4A = 2 \longrightarrow A = 1/2 \qquad B = 1/2$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+3}$$

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+3)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + C$$

(b) N har dubbel rot

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx$$

(Anm. P.A. behövs ej även om T har $\geq$ grad.)

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x^2-2x+1 = (x-1)(x-1) = \underline{\underline{(x-1)^2}}$$

Metod $\boxed{x-1=t}$

$$\int \frac{x+2}{(x-1)^2}\,dx$$

$$\left(\begin{array}{c} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{array}\right)$$

$$=\int \frac{t+1\cancel{+2}^{\,3}}{t^2}\,dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)dt \qquad \cancel{= \ln t}$$

$$\int \frac{1}{t}\,dt=\ln t$$

$$\int \frac{3}{t^2}=3\int t^{-2} \qquad 3\,\frac{1}{-2+1}\,t^{-2+1}$$

$$-\frac{3}{t}$$

Svar. $\ln|x-1|-\dfrac{3}{x-1}+C$

$$\int \frac{x^4}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{(t+1)^4}{t^2}\,dt$$

$$\begin{pmatrix} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{pmatrix}$$

$$\int \frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}{t^2}\,dt$$

$$\int \left(t^2+4t+6+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$\downarrow$$

ln

$$\int \frac{x^4}{x^2-2x+1}\,dx$$

Ⓒ N Saknar rot.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

D.A är nödvändig.

$$\left(x^2+2x+2=0 \qquad x=-1\pm\sqrt{1-2} \quad -1\pm\sqrt{-1} \text{ går ej.} \right)$$

Metod: Kvadratkomplettera N.

$$x^2+2x+2=(x+1)^2-1+2$$

$$\boxed{x^2+2x+2=(x+1)^2+1}$$

$$\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx$$

$$x+1=t \qquad dx=dt$$

$$=\int \frac{1}{1+t^2}\,dt=\arctan t+C$$

$$=\arctan(x+1)+C$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t$$

Anm

Denna var enkel

$$\int \frac{1}{1+(x+1)^2} \qquad \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Ex 2 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

$$x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=-1\pm\sqrt{1-3}$$

Saknar rot.

Kvadrat Komplettering.

$$x^2+2x+3=(x+1)^2-1+3=(x+1)^2+2$$

$$\int \frac{1}{2+(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{2}}\,dx$$

$$\left[\frac{(x+1)^2}{2}=t^2 \Leftrightarrow (x+1)^2=2t^2 \qquad x+1=\sqrt{2}\,t\right]$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$$

$$\left(\begin{aligned} x+1&=\sqrt{2}\,t \\ dx&=\sqrt{2}\,dt \end{aligned}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot\sqrt{2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan t = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$\left(x^2+4x+5=0 \Rightarrow x=-2\pm\sqrt{4-5} \right)$$

Innan kvadrat komplettering.

$$N = x^2+4x+5 \Rightarrow N' = 2x+4$$

Konstruera $2x+4$ i täljare.

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+5}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+2-2}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+5}\,dx$$

N'

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+5}\,dx$$

18

N

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \boxed{\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx}$$

$$= \int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,dx = \arctan(x+2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-3)(x+5)}\,dx$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+5}$$