Gränsvärde och kontinuitet.
(G.V.)

Låt $y = f(x)$ vara en funktion

Vi säger att $y = f(x)$ har

G.V. $= \underline{\underline{L}}$ då x går mot $\underline{\underline{a}}$.

Om

x ligger nära a (i ~~e~~ båda led) $\Rightarrow$ y ligger nära L

Ex Sätt $y = x+4$ och låt x går mot 1.

Anm <u>x går mot 1</u>

$$x \longrightarrow 1 \longleftarrow x$$

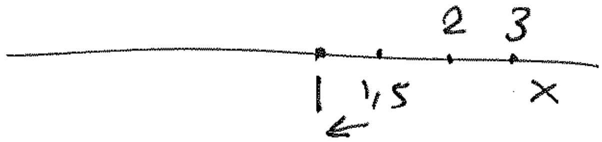
x kan närma sig 1 från höger

eller kan närma sig 1 från vänster.

$y = x + 4$ $\qquad x \to 1$

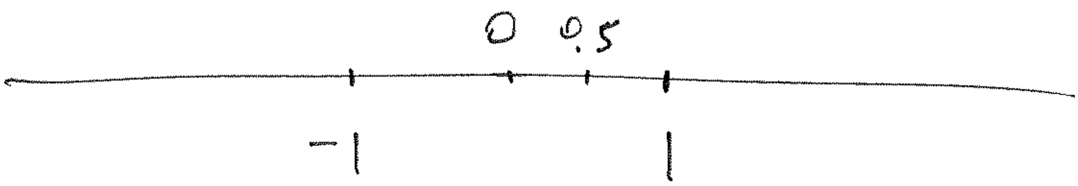
från höger

x	3	2	1.5	1.1	1.01	$\to 1$
y	7	6	5.5	5.1	5.01	$\to 5$



från vänster

x	−1	0	0.5	0.9	0.99	$\to 1$
y	3	4	4.5	4.9	4.99	$\to 5$



Vi säger att $y = x + 4$ har G.V $= 5$

då x går mot 1

Vi skriver

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

<u>Anm</u> <u>x går mot 1</u>

x närmar sig 1 från båda höger och vänster men blir aldrig $= 1$

<u>Def</u> <u>Höger G.V.</u>

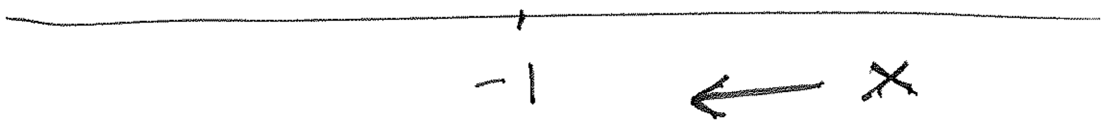
Vi kallas G.V et för H.G.V.

Om x närmar sig $\underline{a}$ från höger

$$\boxed{\text{H.G.V.} = \lim_{x \to a^+} f(x)}$$

Obs $x \to (-1)^+$ innebär bara att

x närmar sig -1 från höger



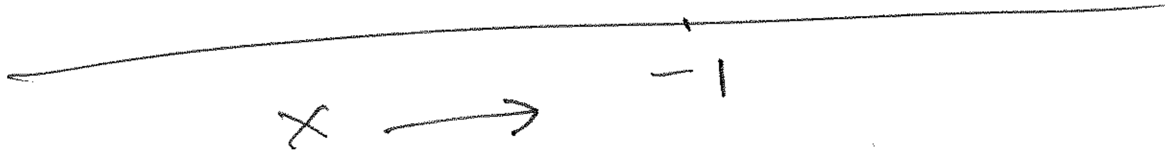
Def Vänster G.V.

Vi kallar G.V et för V. G. V.

om x närmar sig $\underline{a}$ från vänster.

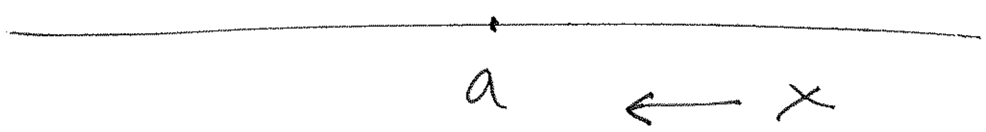
$$V.G.V = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Anm $x \to (-1)^-$ innebär att



Anm

I H.G.V. börjar x från talet större än a och närmar sig a



I V.G.V. börjar x från talen mindre än a och närmar sig a

Sats funktionen $y = f(x)$ har G.V $= L$ **omm** båda höger G.V. och V.G.V blir $= L$

Anm

Om H. G.V eller V. G.V

inte existerar eller om båda

exist. men de är olika säger

vi: $y = f(x)$ saknar G.V.

då $x \to a$.

Ex (En funktion som saknar G.V.)

Sker mest i styckvis fall.

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = x & x < 1 \\ y = x+1 & x \geq 1 \end{array}}$$

Vi kollar G.V et då $x \to 1$

<u>Höger G.V</u>

$1 \leftarrow x$

$x > 1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$$

<u>Vänster G.V</u>

$x \to 1$

$x < 1$

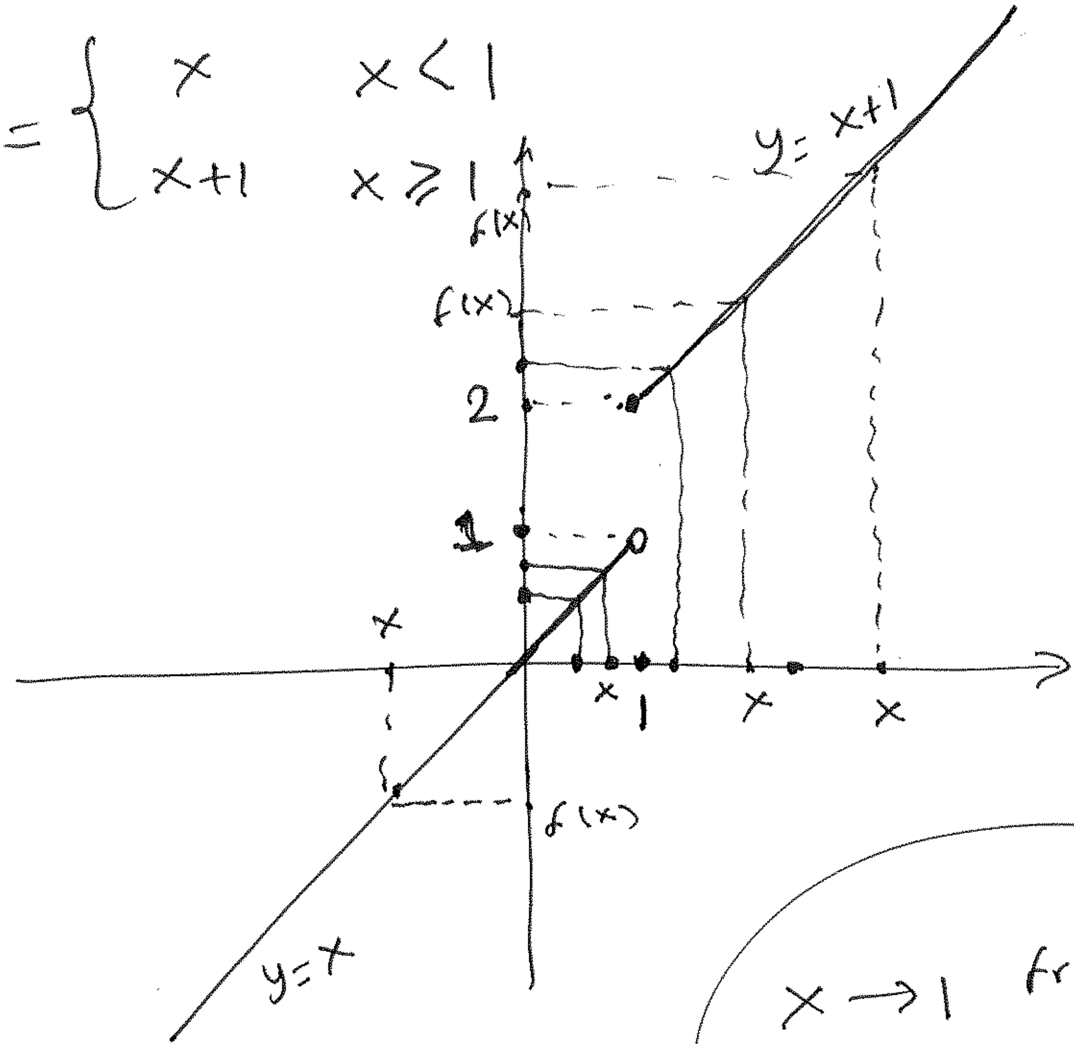
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

Vi säger att

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) \text{ exist ej}}$$

Geometrisk

$$y = \begin{cases} x & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$



$x \to 1$ från höger

$y \to 2$

$x \to 1$ från vänster

$\Downarrow$

$y \to 1$

<u>Anm</u> då x går mot <u>a</u>

behövs ej att funktionen vara

definierat i $x = a$

<u>Ex</u> Sätt $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

$f(x)$ är ej definierat i $x = 0$

$(D_f = R - \{0\}.)$

men vi pratar om G.V et

då x går mot 0.

För att kolla existens av G.V. et

beräknar vi H. G.V. och V. G.V.

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$0 \quad \leftarrow x$

$x > 0 \quad |x| = x$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$\underline{H.G.V = 1}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$x \rightarrow \quad 0$

$x < 0 \quad |x| = -x$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1$$

$V.G.V = -1$

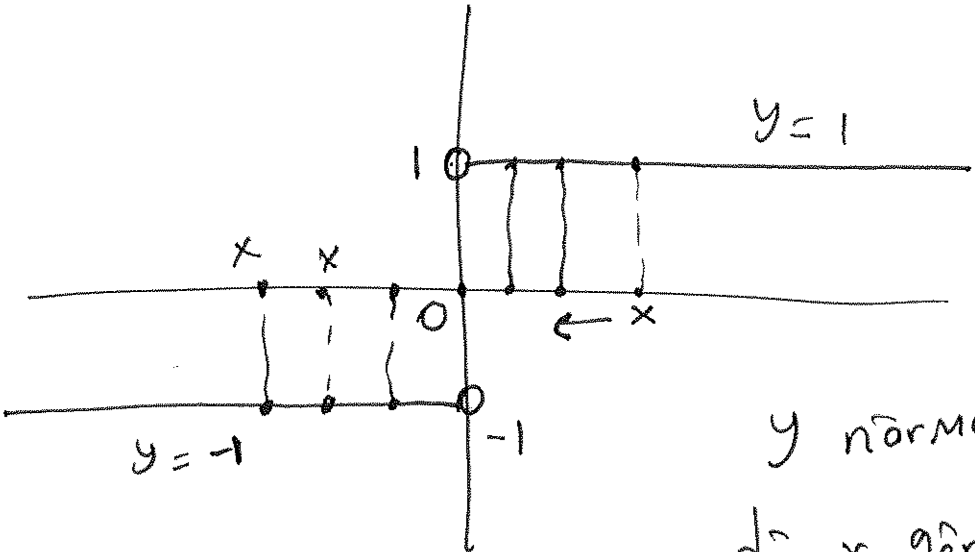
Resultat

$\lim_{x \to 0} f(x)$ ej exist.

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Geometrisk

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



y närmar sig 1
då x går mot 0
från höger

$$\lim_{x \to 0^+} y = 1$$

y närmar sig −1
då x går mot 0
från vänster

$$\lim_{x \to 0^-} y = -1$$

Ex

Ett ex. där G.V et existerar fast funktionen inte är definierat.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Denna function är ej definierat för $x = 1$

$$D_f = R - \{1\}$$

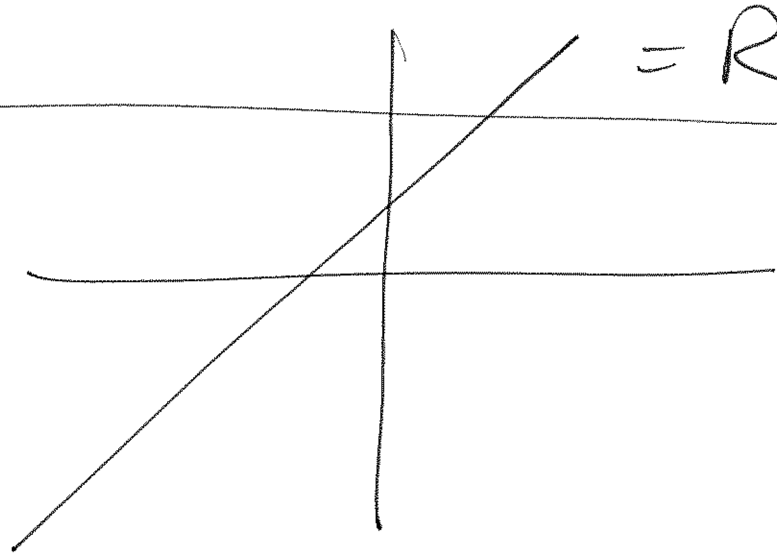
$x \neq 1$ $\quad f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = x+1$

Den enda skillnad mellan

$$y = \frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{och} \quad y = x+1$$

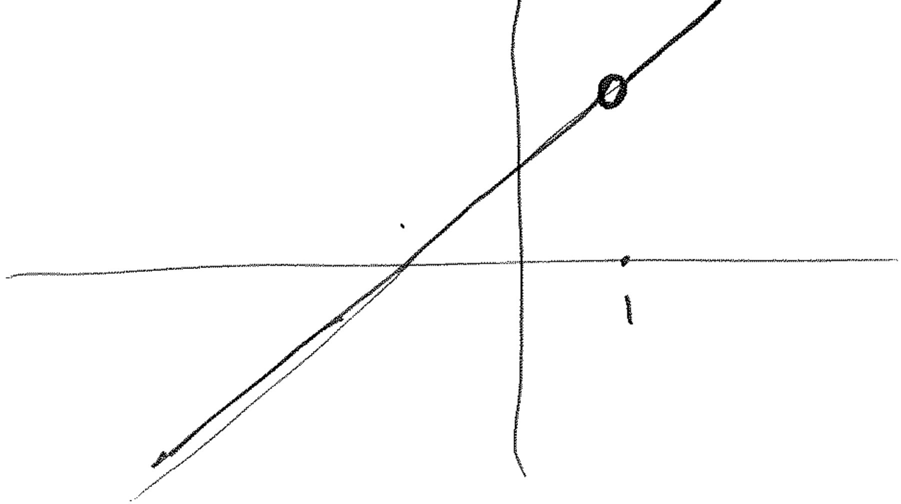
är att

$$\boxed{y = x+1 \text{ har definitions mängden } = R}$$



men

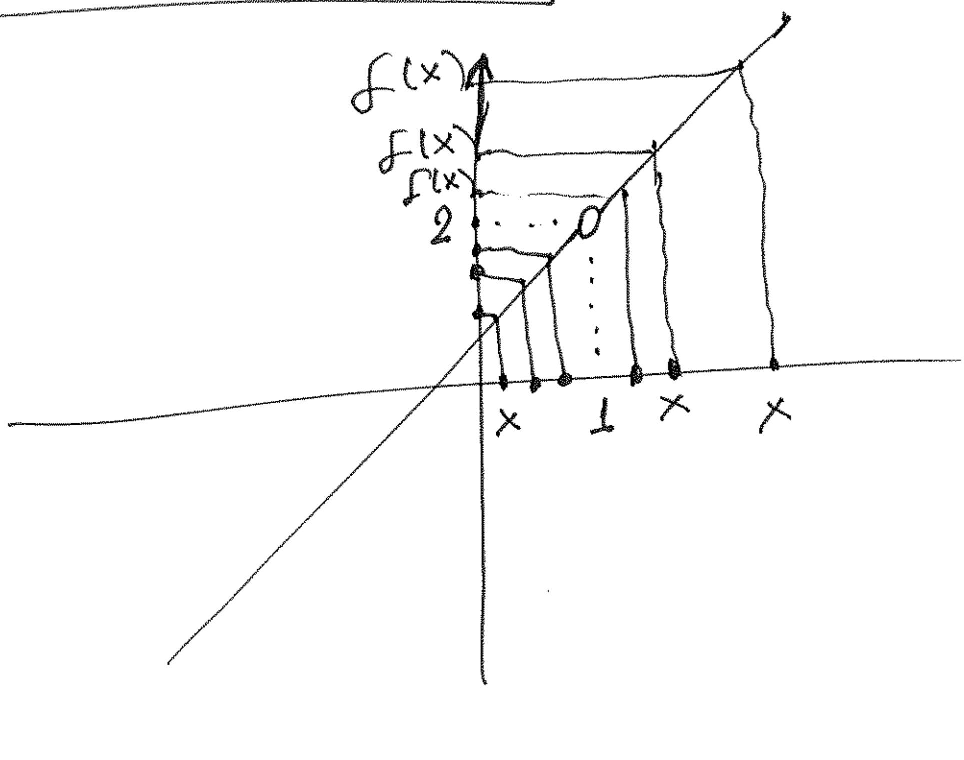
$$y = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \quad \text{har} \quad D_f = R - \{1\}$$



$$\lim_{\substack{x \to 1^+ \\ (x>1)}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 1^- \\ (x<1)}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 2}$$



Beräkning av G.V

I allmänn fall beräknar vi G.V et ~~[illegible]~~ då x går mot a

genom insettning av $x = a$

i funktionen.

$$\lim_{x \to 1} (x+4) = 1+4 = 5$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{2^2-1}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (e^x+1) = e^0+1 = 1+1 = 2$$

Anm (Viktig)

Om vid insättning får vi

uttrycketn av formen

$$\boxed{\frac{0}{0}\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad 0 \cdot \infty \qquad \infty - \infty}$$

behöver vi ytterliggare undersökning.

Anm Vi ved inte vad $\frac{0}{0}$ är.

Man säger att $\frac{0}{0}$ är obestämd.

$\frac{0}{0}$ kan vara 0, kan vara 1

kan vara 2 . . .

Ex $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\left(\text{Insättning ger } \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} \quad \left(\text{Insättning ger } \frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} (x+3) = 4$$

$0 \cdot \infty$

$0 \cdot$ ett tal $= 0$

men

$0 \cdot \infty$ är obestämd

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$$

x	100	1000	$\to \infty$
x^2	10000	1000,000	$\to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \left(x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} \right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1} = \infty \cdot 0$$

Å andra sidan

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Sammanfattning

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ och $\infty - \infty$

är obestämda