Integraler

Sätt $F(x) = x^2$ och $f(x) = 2x$

Man vet att derivatan av F är f

$F(x) = x^2$ säges att vara en primitiv funktion till $f(x) = 2x$.

Anm $f(x) = 2x$ har många P.F.

$F(x) = x^2 + 1$ $\quad$ $F(x) = x^2 - 4$

och i allmänt $F(x) = x^2 + C$

där $C \in \mathbb{R}$ (godt. konstant)

är alla P.F till $f(x) = 2x$

Anm Definitionen med för att

$\int$

Beteckning

Man skriver

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

utläses integral av lilla f m.a.p. x är stor F

Anm Av definitionen följer att

$$\boxed{\int f'\,dx = f}$$ Samma f i båda led

$$\cancel{\int f'} = f$$

Ex $\int (x^2)'\,dx = x^2 + C$

Anm P.F kallas antiderivatan också

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

F är en P.F. till f

f är derivatan av F

Några kända integraler.

1 – α - formel

$$\boxed{\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C}$$

$\alpha \neq -1$

$$\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\cancel{\alpha+1}}\cdot\cancel{(\alpha+1)}\,x^{\alpha}$$

Ex

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx \qquad \alpha = 1/2$$

OK

$$= \frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1} + C = 2/3\, x^{3/2} + C$$

$$\int (x+1)\sqrt{x}\; dx$$

$$= \int (x+1)\, x^{1/2}\, dx = \int (x^{3/2} + x^{1/2})\, dx$$

$$= \int x^{3/2}\, dx + \int x^{1/2}\, dx$$

$$\frac{1}{3/2+1} x^{3/2+1} + \frac{1}{1/2+1} x^{1/2+1} + C$$

$$2/5\, x^{5/2} + 2/3\, x^{3/2} + C$$

Anm α - formel funkar för $\alpha \neq -1$

vad blir integral om $\alpha = -1$.

$$\int x^{-1}\, dx = \int 1/x\, dx = \ln x + C$$

Anm

$x > 0$

$y = \ln x \Rightarrow y' = 1/x$

$\Rightarrow \int 1/x \, dx = \ln x + C$

$x < 0$

$y = \ln(-x) \rightarrow y' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = 1/x$

$\Rightarrow \int 1/x \, dx = \ln(-x) + C$

Därför skriver att

$$\boxed{\int 1/x \, dx = \ln|x| + C}$$

Några andra kända integraler

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int 2^x \, dx =$$

$$\boxed{A = e^{\ln A}}$$

$$e^{\ln A} = t$$

$$\Downarrow$$

$$\ln e^{\ln A} = \ln t$$

$$\ln A \cdot \cancel{\ln e} = \ln t$$

$$\ln A = \ln t$$

$$A = t$$

$$\int 2^x \, dx = \int e^{\ln 2^x} \, dx = \int e^{x(\ln 2)} \, dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2} e^{x(\ln 2)} = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x + C$$

Anm

$$y = e^{3x} \longrightarrow y' = e^{3x} \cdot 3$$

inre derivatan

Vid derivering multiplicerar man med inre derivatan

Vid integrering gör vi omvänt dvs dividerar med inre

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{\text{Inre}}\, e^{3x} + C$$

$$= \frac{1}{3}\, e^{3x} + C$$

$y = \sin 4x \qquad y' = 4 \cdot \cos(4x)$

$$\int \sin(4x)\,dx = -\frac{1}{4} \cdot (\cos 4x)$$

$$\int 3^x\,dx = \int e^{\ln 3^x}\,dx$$

$$\boxed{A = e^{\ln A}}$$

$$= \int e^{(\ln 3)x}\,dx = \frac{1}{\ln 3}\cdot e^{(\ln 3)x}$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\,3^x + C$$

Viktig

$$y = \ln u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \ln(1+x^2) \longrightarrow y' = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\boxed{\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C}$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$$

$u = 1+x^4$

$u' = 4x^3$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$$

$$\int \frac{x^3}{1-x^4}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{-4x^3}{1-x^4}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|1-x^4| + C$$

Viktig

Man vet att

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C}$$

$y = \tan x \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad y' = \frac{(\cos x)\cdot \cos x - (-\sin x)\cdot \sin x}{\cos^2 x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

Hur man integrerar ?

Några Konkreta Metoder

Metod 1

(Derivatan framför)

Variabel substitution

(variabel byte)

Metod 2

Partial integration

Metod 3 Används vid integral av rationella funktioner.

Partial först

Vad är Partial och

När Används Partial ?

Man vet

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Integrera båda led

$$\cancel{\int (fg)'} = \int f'g + \int fg'$$

$$fg = \int f'g + \int fg'$$

Denna kan skrivas på två sätt

$$\boxed{\int fg' = fg - \int f'g} \quad 1$$

$$\boxed{\int f'g = fg - \int fg'} \quad 2$$

De är båda Partial

När Partial nr 1 användś ?

Man vet att

$\int e^x dx = e^x + c$, $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$,

$\int \cos x \, dx = \sin x + c$,

vad blir

$$\int x e^x \, dx \qquad \int x \sin x \, dx$$

$$\int x \cdot \cos x \, dx$$

(Vi kallar x för besvärlig eftersom utan x vet vi vad integralen blir)

Denna x kan försvinnas med partial (!).

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} \, dx = fg - \int f' g \, dx$$

$$\left(\begin{array}{l} f = x \longrightarrow f' = 1 \\ g' = e^x \longrightarrow g = e^x \end{array} \right)$$

$$= x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g'} \, dx \qquad = fg - \int f'g$$

14

$$\left(\begin{array}{l} f = x \rightarrow f' = 1 \\ g' = \sin x \rightarrow g = -\cos x \end{array} \right)$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= \underbrace{-x\cos x + \sin x + C}$$

$$-1\cdot\cancel{\cos x} + \underline{x\sin x} + \cancel{\cos x}$$

När anvender vi 2

$\int x \ln x \, dx$

$\int x \arcsin x \, dx$

$\int x \arccos x \, dx$

$\int x \arctan x \, dx$

Anm

x räknas inte som besvärlig eftersom utan x kan vi inte integralen heller.

$$\int \ln x \, dx = ?$$

$$\int \arcsin x \, dx = ?$$

I sådana fall använder vi andra partial.

$$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\ln x}_{g} \, dx$$

$f' = x \rightarrow f = \frac{1}{2}x^2$

$g = \ln x \rightarrow g' = \frac{1}{x}$

$$= fg - \int f g' = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\arctan x}_{g} \, dx$$

$$\left(\begin{array}{l} f' = x \longrightarrow f = \frac{1}{2} x^2 \\ g = \arctan x \longrightarrow g' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C$$

Anm

Besvärlig x^2 kan tas bort av

Partial nr 1 två gånger.

Ex

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} \, dx \qquad \left[\begin{array}{l} f = x^2 \longrightarrow f' = 2x \\ g' = e^x \longrightarrow g = e^x \end{array} \right]$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

$$\downarrow$$

$$x e^x - e^x + C$$

Svar:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$\int x^5 \ln x \, dx$ 18

(Det finns en fördel hos Partial 2

Jämfört med Partial 1)

Det behövs inte Partial 5 gången

$$\int \underbrace{x^5}_{f'} \underbrace{\ln x}_{g} \, dx \quad \left[\begin{array}{l} f' = x^5 \rightarrow f = \frac{1}{6}x^6 \\ \\ g = \ln x \rightarrow g' = 1/x \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{6} x^6 \ln x - 1/6 \int x^5 \, dx$$

$$= 1/6 \, x^6 \ln x - 1/36 \, x^6 + C$$

Anm

Ibland kan man slippa användning av Partial ① några gånger.

$$\underbrace{\int x^2 e^x\,dx} = \underbrace{(Ax^2+Bx+C)e^x} + D$$

Derivatan av $(Ax^2+Bx+C)e^x$ ska bli x^2e^x

$$y = (Ax^2+Bx+C)e^x$$

$$y' = (2Ax+B)e^x + (Ax^2+Bx+C)e^x$$

$$= \underbrace{(Ax^2+(2A+B)x+B+C)}_{=x^2} e^x$$

e^x

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \longrightarrow B = -2 \\ B + C = 0 \longrightarrow C = 2 \end{cases}$$

Svar:

$$\int x^2 e^x \, dx = \underline{\underline{(x^2 - 2x + 2)e^x}} + D$$