Beräkning av D_f.

Anm. För att bestämma D_f för en given funktion f.

lägger vi märke till

1. Nämnare
2. rot (jämn index)
3. logaritm

1. I fall nämnare måste den vara $\neq 0$.

Ex $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

$x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$

$D_f = R - \{\pm 1\}$

2

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$x^2+1=0$ Saknar rot.

$D_f = R$

---

2 Rot med jämn index

$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt[4]{x^2-1}$

$\boxed{\cancel{y=\sqrt[3]{x}}}$

$\boxed{y=\sqrt[3]{x} \quad D_f = R}$

$\sqrt[3]{-1} = -1$ $\sqrt[3]{1} = 1$

$\sqrt[3]{0} = 0$

rot (jämn index)

under rot måste ≥ 0

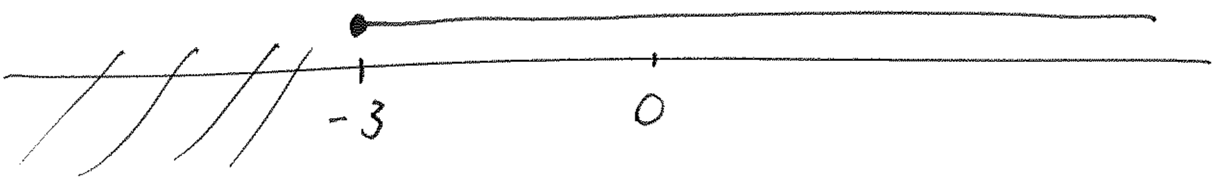
$\sqrt{-2}$ är ej def.

$\sqrt{-2} = x \Rightarrow x^2 = -2$ går inte

Ex $y = \sqrt{x+3}$

$x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

$D_f = \{x \geq -3\}$



$y = \sqrt{x^2+2x-3}$ för vilka x blir

$x^2+2x-3 \geq 0$

Tecken tabell

$x^2+2x-3 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1+3}$ $\begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

x		-3		1	
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$
	Svar	Svar		Svar	Svar

$D_f = \{x \leq -3\} \cup \{x \geq 1\}$

logaritm

logaritm är inte definirad för negativa och noll.

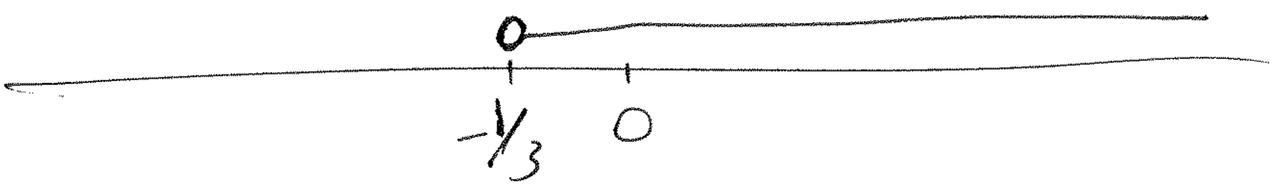
$y = \ln x \qquad \underline{x > 0}$

Ex Best. D_f för $y = \ln(3x+1)$

lösning: $3x + 1 > 0$

$$\iff x > -1/3$$

$$D_f = \{ x > -\tfrac{1}{3} \}$$



Bestäm D_f (6)

$$f(x) = \ln(x^2 - 2) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

Lösning:

$$\begin{cases} x^2 - 2 > 0 & (1) \quad (+) \\ x^2 + 2x - 3 > 0 & (2) \quad (+) \end{cases}$$

för vilka x gäller (1) och (2)

gör tecken tabell för båda.

$x^2 - 2 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{2}$

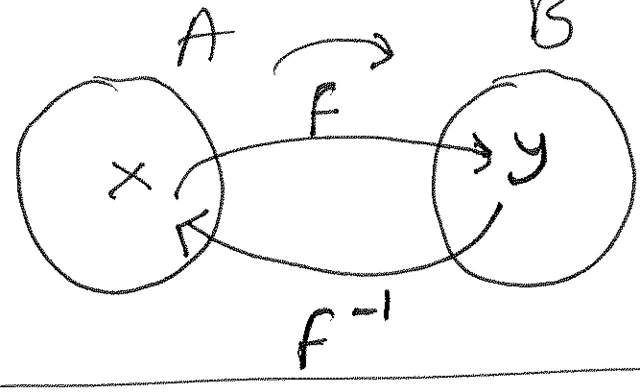
$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, -3$

x		-3		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$	
x^2-2	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^2+2x-3	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
	Svar								Svar

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\} \cup$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{2}\}$$

Invers av en funktion



$$\boxed{f(x) = y \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x}$$

$$f(1) = 3 \Longleftrightarrow f^{-1}(3) = 1$$

Vilka funktioner har invers? 8

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "f"] & y_1 \\
x_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
x_1 & y_1 \arrow[l] \arrow[dl, "f^{-1}"] \\
x_2 &
\end{tikzcd}$$

f är funktion

ej funktion

Svar: f har invers om den är Injektiv (1–1)

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r] & y_1 \\
x_2 \arrow[r] & y_2 \\
x_3 \arrow[r] & y_3
\end{tikzcd}$$

Ex

Kolla om $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

har invers. Bestäm inversen om den existerar.

$$f'(x) = \frac{T'N - N'T}{N^2} = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

S. växande $\Rightarrow$ 1 – 1

för att beräkna inversen sätter vi:

$y = \dfrac{x-1}{x+1}$ och löser för x.

$$\frac{y}{1} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\Rightarrow y(x+1) = x-1$$

$$yx - x = -1 - y$$

$$x(y-1) = -1-y \Rightarrow x = \frac{-1-y}{y-1}$$

$$\boxed{x = \frac{y+1}{1-y}}$$

$$\begin{tikzcd} \frac{y+1}{1-y} = x \arrow[r, bend left, "f"] & y = \frac{x-1}{x+1} \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$f^{-1}(y) = x$$

$$\boxed{f^{-1}(y) = \frac{y+1}{1-y}}$$

Eftersom använder vi mest bokstaven x för funktioner byter vi ut y mot x.

Skriver vi:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x-1}{x+1} \iff f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$f(1) = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\boxed{f(1) = 0}$$

$$f^{-1}(0) = \frac{0+1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\boxed{f^{-1}(0) = 1}$$

Styckvis funktion

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 2 \\ 3x & x > 2 \end{cases}$$

$f' > 0 \iff$ S. växande $\iff$ Injektiv
$f' < 0 \iff$ S. avtagande $\iff$ injektiv.

$\Updownarrow$

Invers finns

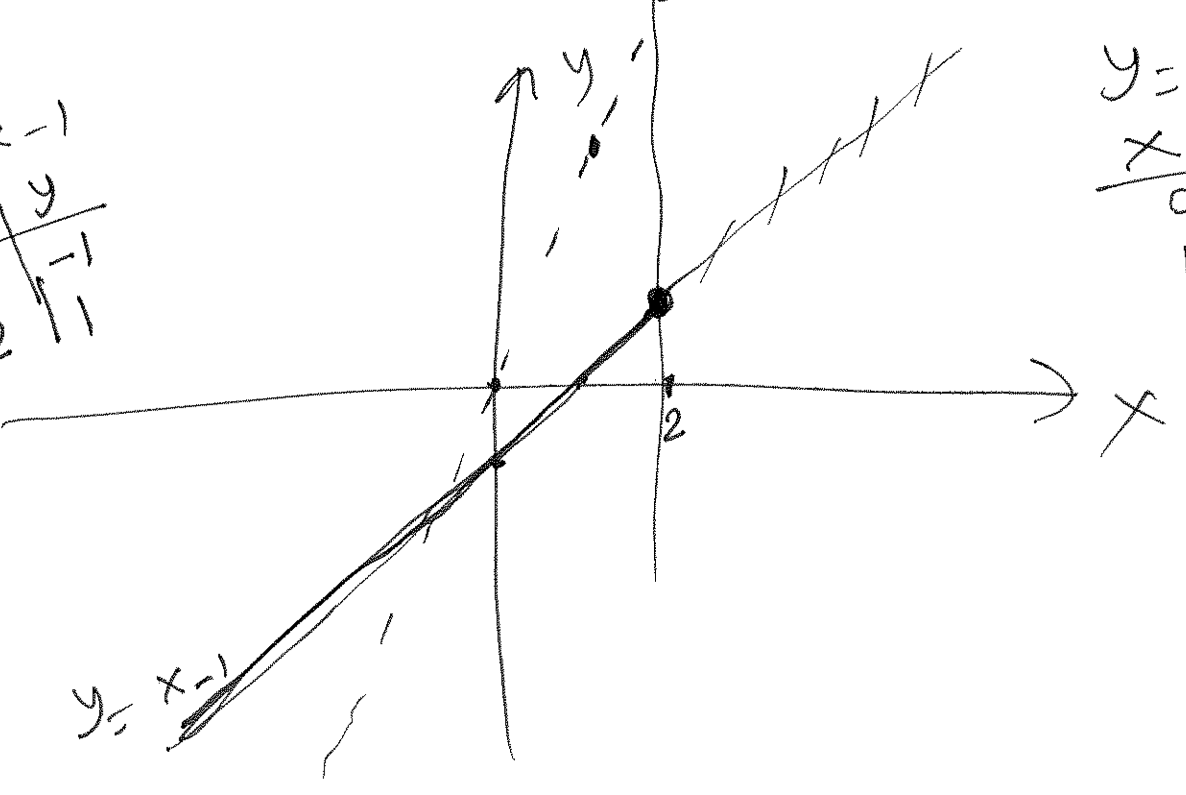
$$y = \begin{cases} x-1 & x \leq 2 \\ 3x & x > 2 \end{cases}$$

$y = x - 1$

x	y
0	−1
2	1

$y = 3x$

x	y
0	0
1	3



$$y = \begin{cases} x & x < 1 \\ 2x+1 & 1 \leq x < 3 \\ 1-x & x \geq 3 \end{cases}$$

Absolut belopp

$$|x| = x \qquad x \geq 0$$

$$|x| = -x \qquad x < 0$$

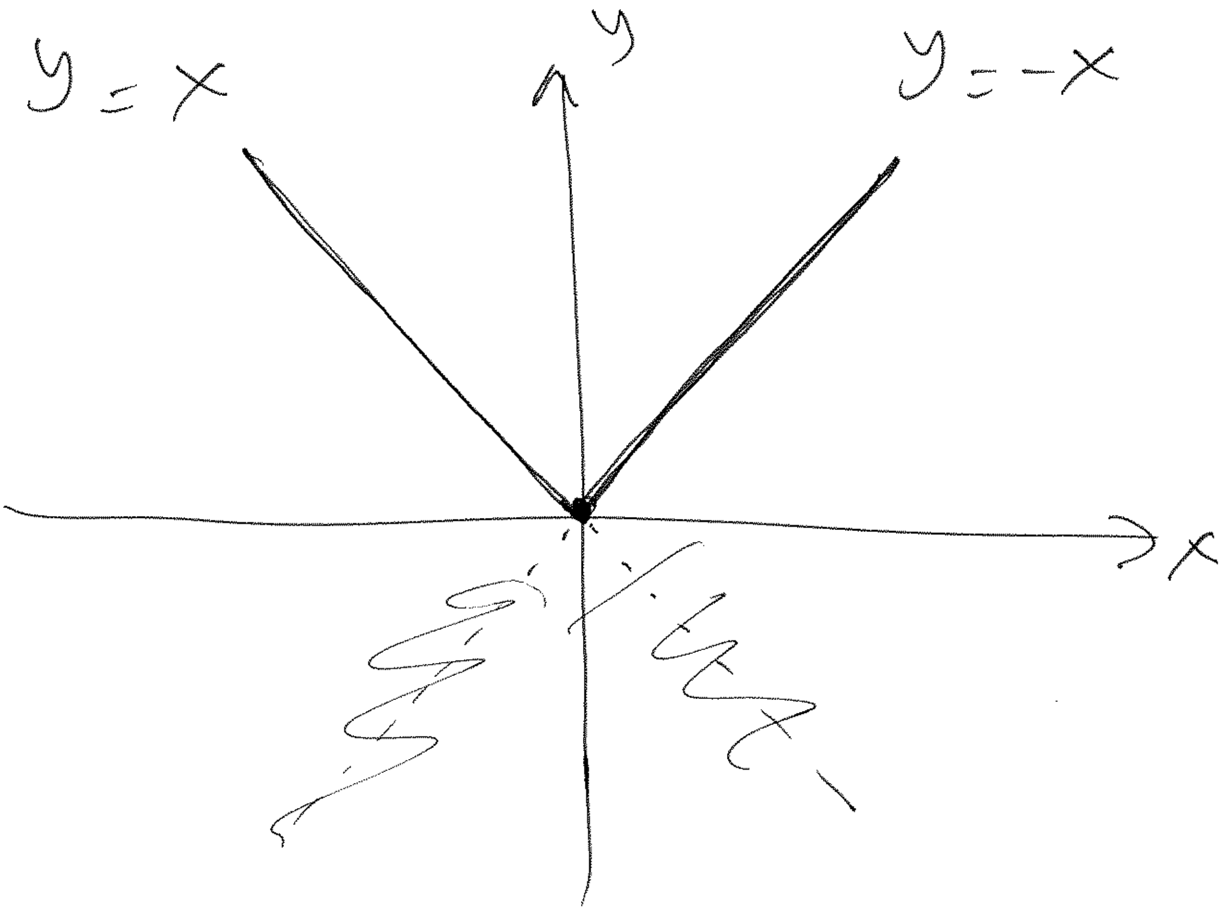
t.ex. $|5| = 5 \qquad |0| = 0$

$$|-5| = -(-5) = 5$$

Anm För att rita en funktion som innehåller $|\;|$ skriver vi funktionen som en styckvis funktion

Rita $y = |x|$

$$y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$y = |x|$ $D_f = R$

$V_f = R^+ \cup \{0\}$

$\boxed{y \geq 0}$

~~rit~~

$y = |2x-1|$ 14

skriv som styckvis och rita

lösning:

<u>teckentabell för $2x-1$</u>

$2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x		$\frac{1}{2}$	
$2x-1$	$-$	0	$+$
	$y=-(2x-1)$ $y=1-2x$		$y=2x-1$

$$\boxed{y = \begin{cases} 1-2x & x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}}$$

Samma sak för

$$y = |x-1| + |x+3|$$

lösning: gör teckentabell för båda $x-1$ och $x+3$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

x		-3		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$

$y=-(x-1)-(x+3)$	$y=-(x-1)+(x+3)$	$y=x-1$ $x+3$
$y=-x+1-x-3$	$y=-\cancel{x}+1+\cancel{x}+3$	$y=\underline{\underline{2x+2}}$
$\underline{\underline{y=-2x-2}}$	$\underline{\underline{y=4}}$	

$$y = \begin{cases} -2x-2 & x \leq -3 \\ 4 & -3 < x \leq 1 \\ 2x+2 & x > 1 \end{cases}$$

Elementära funktioner

(1) Polynom funktion

y = ett polynom kallas för polynom funktion

Ex

$$y = x + 1$$

$$y = x^2 - 4x + 1$$

$$y = x^5 + x^2 - 2x$$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}}$$

3 Rationella funktioner

$$y = \frac{\text{ett polynom}}{\text{ett annat polynom}}$$

kallas rationell funktion.

$$y = \frac{x-1}{x+1} \qquad y = \frac{x}{x^2-1}$$

$$y = \frac{x^3 + x^2 - 5}{x+1}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{rötterna till nämnare}\}$$

③

exponential funktioner

⑱

$y = a^x$ a är ett tal > 0

Kallas för exponential funktion.

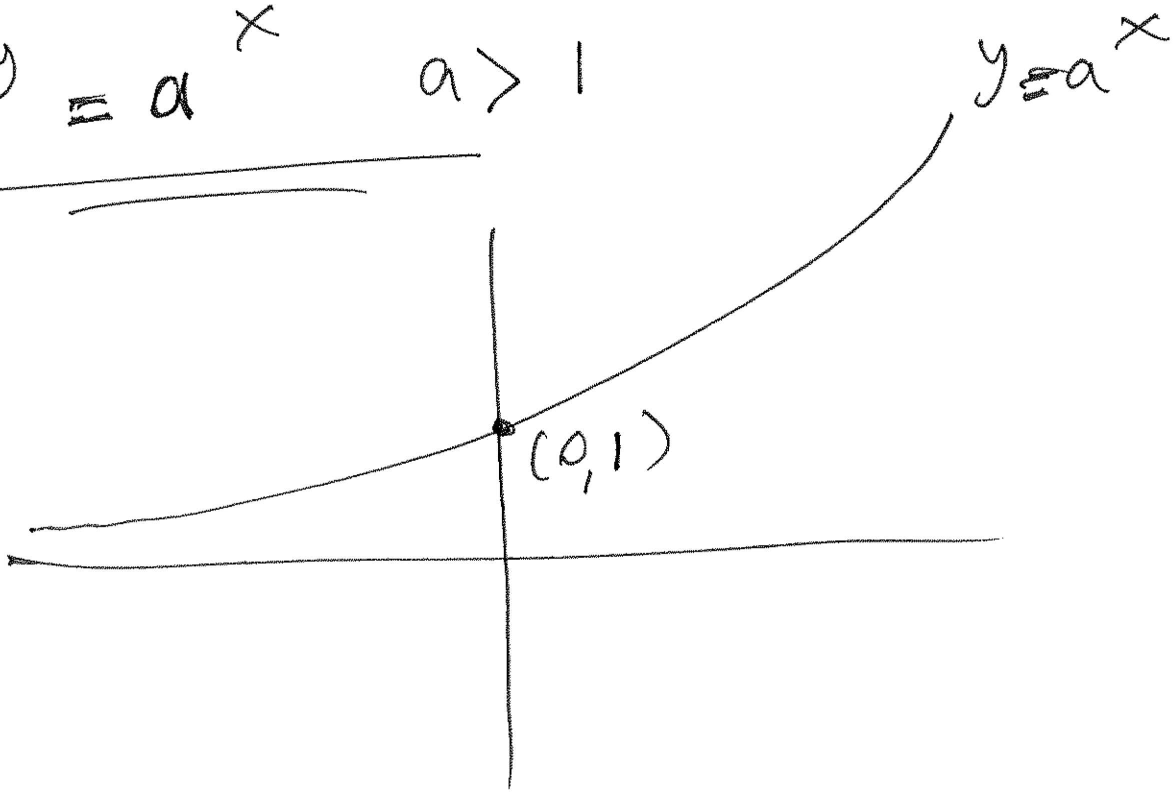
$y = x^2$

polynom

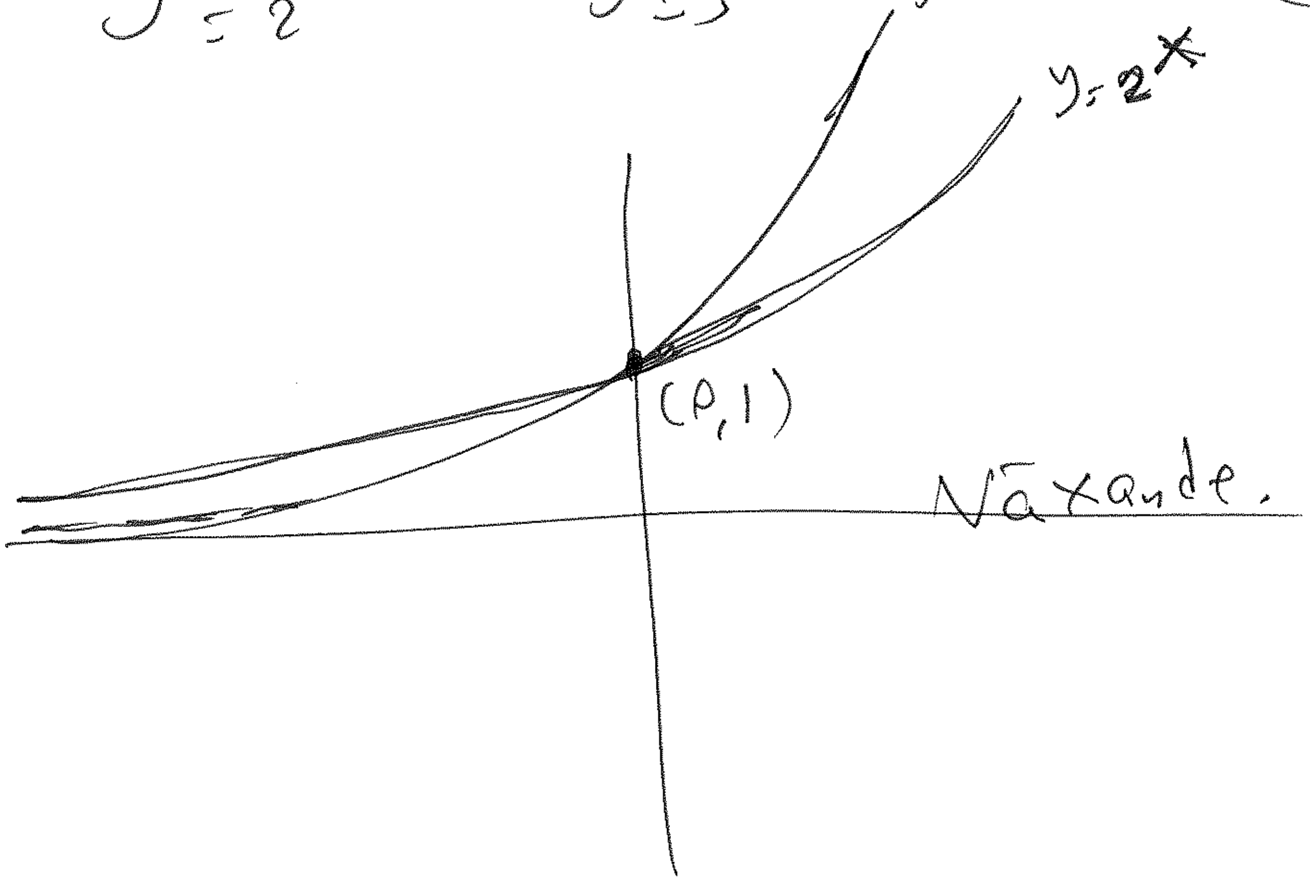
$y = 2^x$

exponential

$y = a^x$ $a > 1$

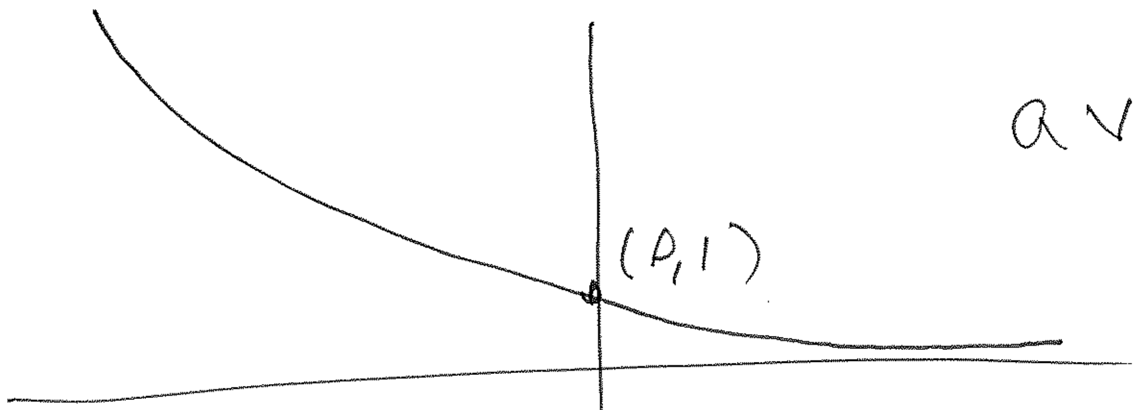


$y = 2^x \qquad y = 3^x$



$y = a^x \qquad a < 1$

avtagande



$y = 0.5^x \Longrightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$

$\boxed{y = \frac{1}{2^x}}$

$D_f = R$

$V_f = R^+ \quad \underline{y > 0}$

Anm exponential funktioner

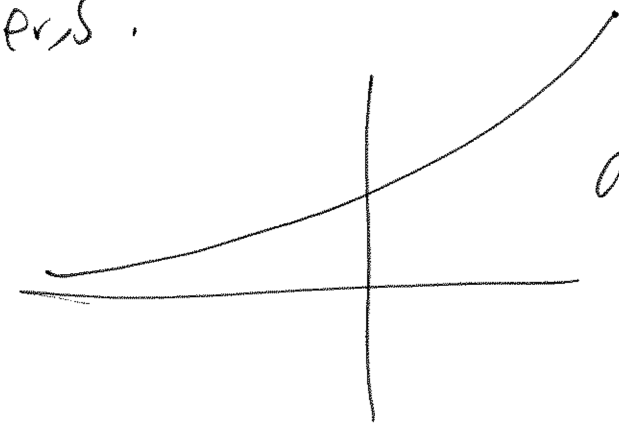
är s_växande eller

s_avtagande

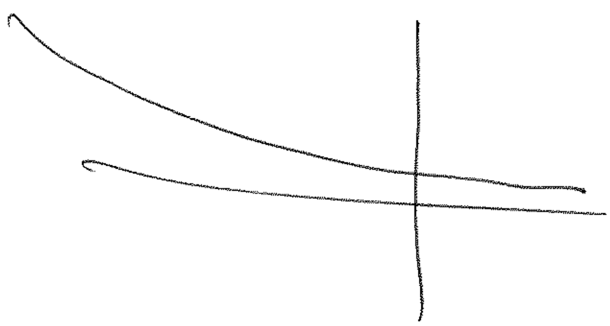
alltså är $\underline{1-1}$ och har

invers.

$y = a^x$



a > 1



a < 1

4 logaritm funktioner

Vi sade att $y = a^x$ har invers. Inversen betecknas med $\log_a$

$$x \underset{f^{-1} = \log_a}{\overset{f = \exp.}{\rightleftarrows}} y = a^x$$

$$\boxed{f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x}$$

$$\boxed{y = a^x \iff \log_a y = x}$$

logaritm av y i basen a är $= x$.

$$y = a^x \iff \log_a y = x$$

$$100 = 10^2 \iff \log_{10} 100 = 2$$

$$1000 = 10^3 \iff \log_{10} 1000 = 3$$

$\cancel{16} =$

$$32 = 2^5$$

$$\log_2 32 = 5$$

AnM $\quad \log_a 1 = 0$

$$\log_a 1 = t$$

$$\Longleftrightarrow 1 = a^t \Rightarrow t = 0$$

---

② $$\log_a a = 1$$

$$\log_a a = t \Longleftrightarrow a = a^t \Rightarrow t = 1$$

③ $$\log_a 0 = -\infty$$

$$\log_a 0 = t \qquad 0 = a^t$$

$$a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

exp

$y = a^x$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, bend left, "f"] & R^+ \arrow[l, bend left, "\log_a"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{y = \log_a x \qquad x > 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= V_f \\ D_f &= V_{f^{-1}} \end{aligned}}$$

logaritm lagarna.

1. $$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$$

2. $$\log_a(A/B) = \log_a A - \log_a B$$

3. $$\log_a A^p = p \log_a A$$

Bevis för 1

Sätt

$$\log_a A = t \quad , \quad \log_a B = s$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$A = a^t \qquad B = a^s$$

$$\Downarrow$$

$$AB = a^t \cdot a^s$$

$$AB = a^{t+s}$$

$$\Downarrow$$

$$\log_a(AB) = t + s$$

$$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$$

Ex

$$\log_2 32 = ?$$

$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \cdot \log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5$$

$$\log_{10} 100000 = \log_{10} 10^5 = 5 \cdot 1 = 5$$

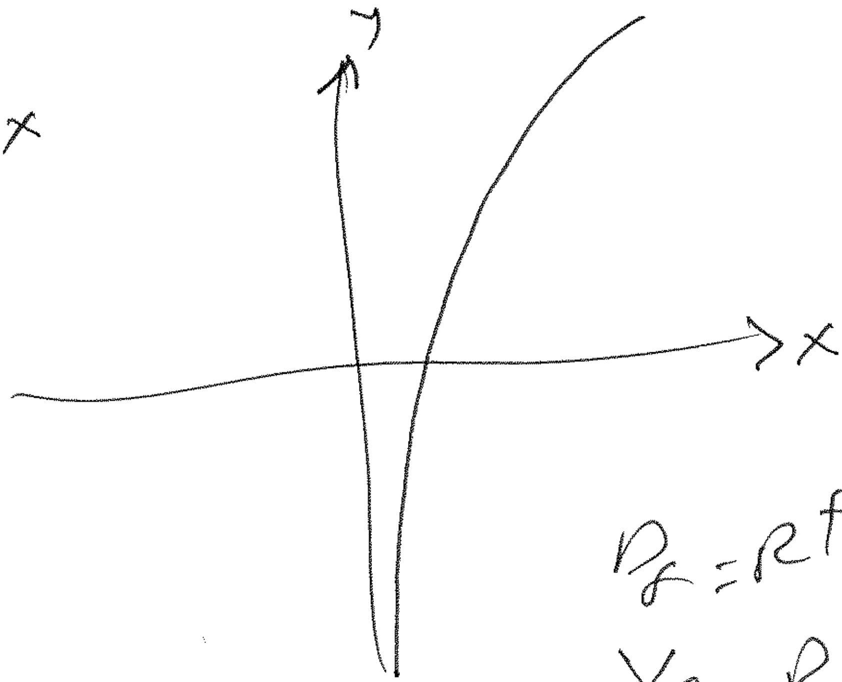
$$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{0.5} = 0.5 \cdot \log_2 2 = 0.5$$

$$\log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{3/2} = 1.5$$

---

exponential	Logarithm
$D_f = R$	$D_f = R^+$
$Y_f = R^+$	$Y_f = R$

$y = \ln x$



$D_f = R^+$

$Y_f = R$

Anm

Kurvan för f och kurvan för f^{-1} är ~~t~~ spegelbild av varandra m.a.p linjen $y = x$.