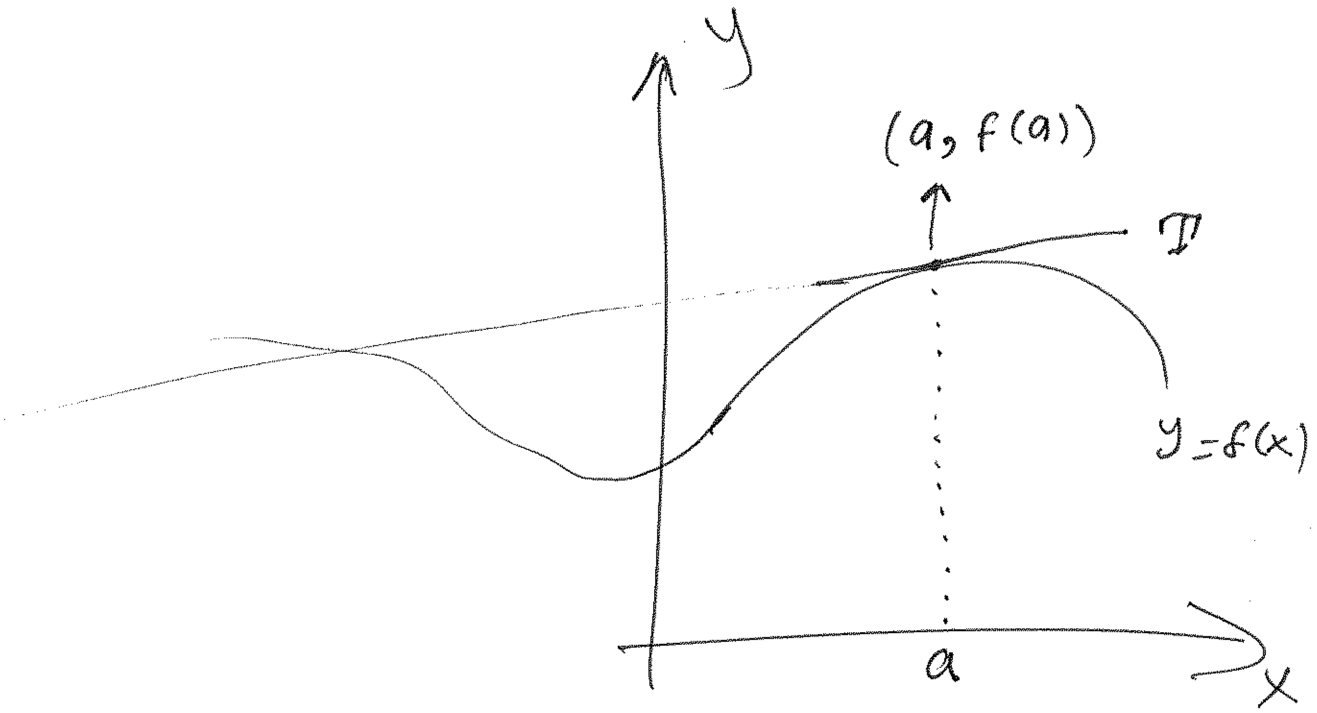
Tangentens ekvation



Hur bestämmer vi tangentens ekvation

Fall 1 given $y = f(x)$ och en punkt på kurvan

K = Riktning koefficient $= f'(a)$

punkt $(a, f(a))$

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

Bestäm tangentens ekvation till ②

kurvan $y = x^3 + 2x$ vid $\underline{x = 2}$

lösning:

$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 + 4 = 12$

Punkt på kurvan $= \underline{(2,12)}$

$f'(x) = 3x^2 + 2$

$K \underline{= f'(2) = 12 + 2 = 14}$

$y - 12 = 14(x - 2)$

$$\boxed{y = 14x - 16}$$

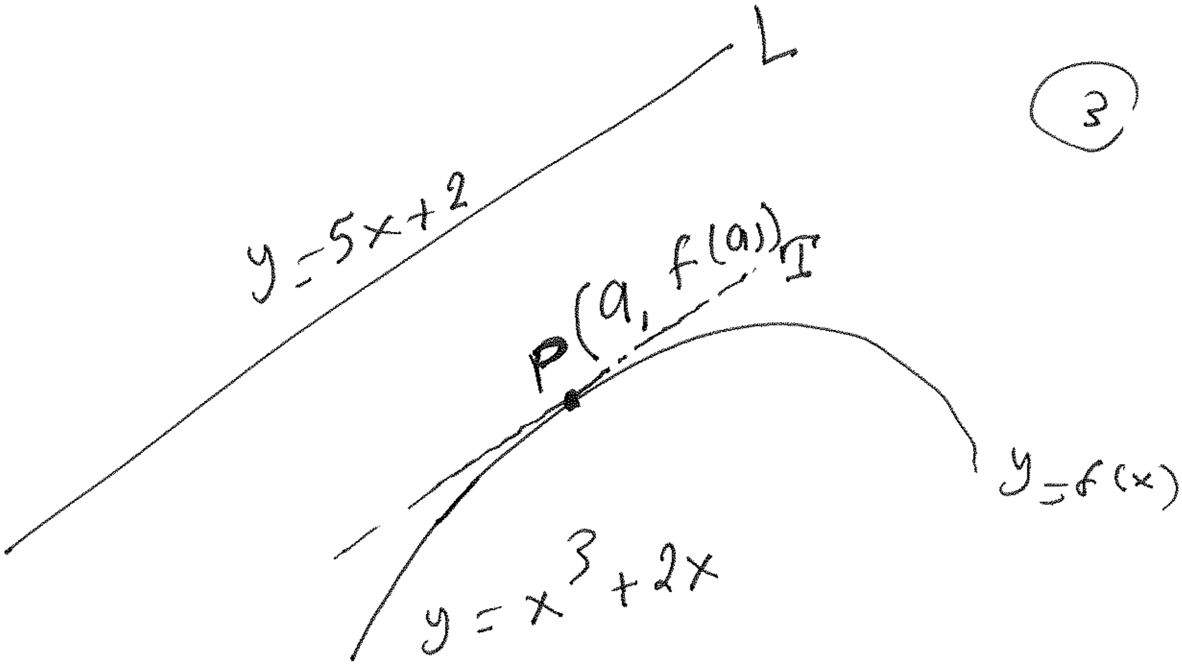
---

② Punkten på kurvan är ej given

Bestäm tangentens ekvation till kurvan

$y = x^3 + 2x$ som är parallell med

$y = 5x + 2$



lösning: vi bestämmer tangeringspunkten

P först $(a, f(a))$

$\underline{K_L = 5}$

Linjen L har $K=5$. Alltså måste linjen

T har också $\underline{K=5}$

$\underline{K_T = f'(a) = 5}$

$f(x) = x^3 + 2x$

$f'(x) = 3x^2 + 2$

$\underline{f'(a) = 3a^2 + 2}$

$f'(a) = 5$

$3a^2 + 2 = 5 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

$a = 1 \Rightarrow y = 1^3 + 2 = 3$

$a = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 + 2(-1) = -3$

Vi har två st. tangeringspunkt

$(1, 3)$ och $(1, -3)$

$\underline{\underline{K = 5}}$ $P(1,3)$

$\Downarrow$

$y - 3 = 5(x - 1)$

$\boxed{y = 5x - 2}$

Svar 1

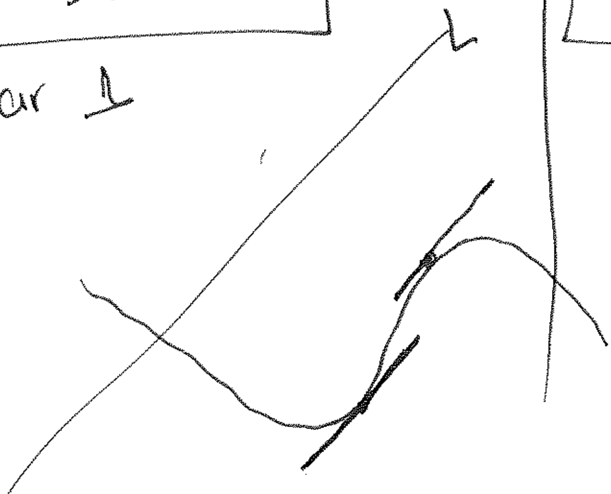
$K = 5$ $P(-1, -3)$

$\Downarrow$

$y + 3 = 5(x + 1)$

$\boxed{y = 5x + 2}$

Svar 2



Tangentens ekvation
då kurvan är på implicit form

Def Om en kurva är på form av

$y =$ kallas den för explicit form.

t.ex $y = x^2$ $y = x^5 + e^x$
$y = \sin x$
$y = \cos x + \ln x$

Annars kallas kurvan för Implicit
t.ex
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y^3 + xy^2 + x^5 = e^x y^5$$

Anm

Ibland kan man skriva om en Implicit kurva på explicit form.

t.ex

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{Implicit})$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{explicit})$$

Men

$$y^3 + xy^2 + x^5 = e^x y^5$$

kan ej lösas för y

dvs. kan inte skrivas på explicit form.

Ex Bestäm tangentens ekvation

till kurvan $x^3 + xy^3 + xy = 3$

som går genom punkten $(1,1)$

Lösning: Kolla först att punkten $(1,1)$

ligger faktisk på kurvan.

$1^3 + 1 \cdot 1^3 + 1 \cdot 1 = 3$ OK

Det räcker att bestämma K.

K = Derivatan i punkten

Vi deriverar implicit

Def Derivering av en implicit funktion kallas för implicit derivering

8

$$x^3 + xy^3 + xy = 3 \longrightarrow 0$$

$3x^2$

(Derivatan av x) $\cdot\, y^3$ $+\, x \cdot$ (Derivatan av y^3)

$1 \cdot y^3 + 3y^2 \cdot y'$

$1 \cdot y + xy'$

$$3x^2 + y^3 + 3y^2\underline{y'} + y + x\underline{y'} = 0$$

$$y'(3y^2 + x) = -3x^2 - y^3 - y$$

$$y' = \frac{-3x^2 - y^3 - y}{3y^2 + x}$$

$$K = y'(1,1) = \frac{-5}{4}$$

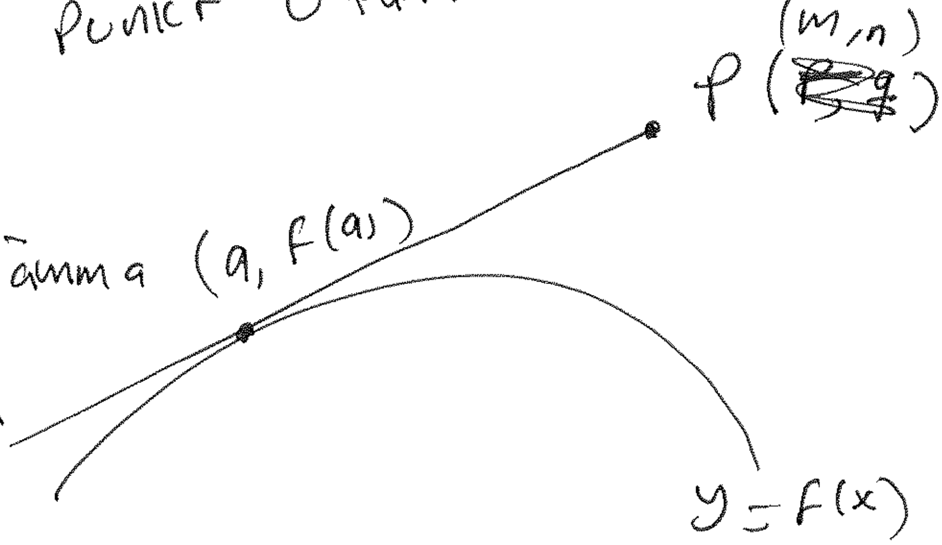
$$y - 1 = -5/4\,(x - 1)$$

$$y = -5/4\, x + 9/4 \longrightarrow \text{Svar}$$

Då punkten inte ligger på kurvan

Given $y = f(x)$

och en punkt utanför



Vi ska bestämma $(a, f(a))$

tangenten som

går genom P

I detta fall blir inte

$\boxed{K = f'(m) \quad \text{fel}}$

$K = f'(a)$ men vi har inte a.

Vi försöker att bestämma a

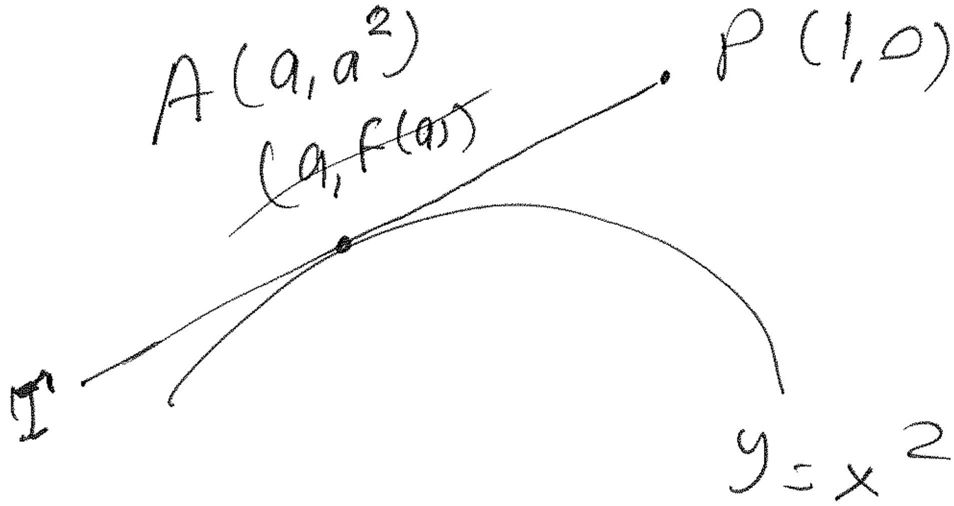
först

Ex

Bestäm tangentens ekvation
till kurvan $y = x^2$

Som gör genom $P(1,0)$

Lösning: Kolla först. Punkten Ligger
inte på kurvan.



K för T kan bestämmas på två sätt

① $K = f'(a) = 2a$

② $K = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{a-1}{a^2}$

$$\frac{a-1}{a^2} = \frac{2a}{1}$$

$$\Rightarrow \quad 2a^3 = a-1$$

$$2a^3 - a + 1 = 0$$

$a = -1$ Satisfierar ekvationen

$a = -1 \Rightarrow f(a) = f(-1) = (-1)^2 = 1$

$K = 2a = 2(-1) = -2$ $\quad P(1,0)$

$y - 0 = -2(x-1)$

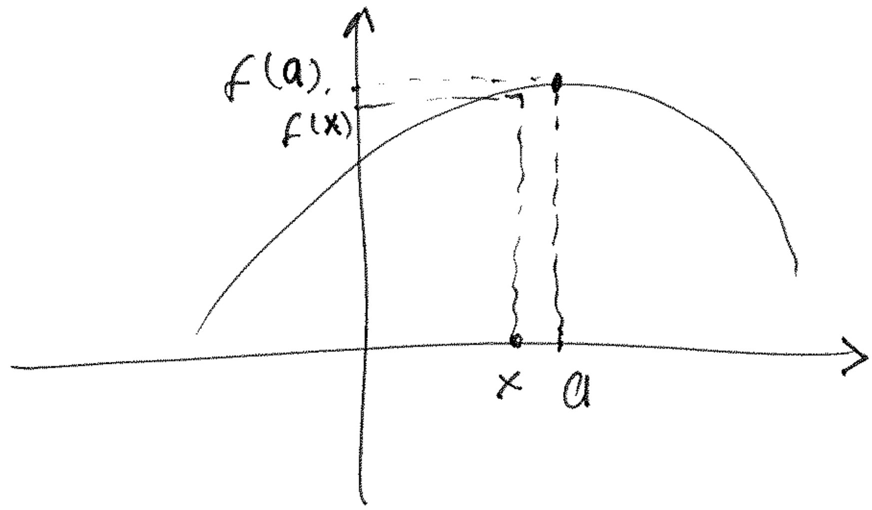
$$\boxed{y = -2x + 2}$$

Derivatans tillämpning.

Def Max (lokal Max)

Vi säger att $y = f(x)$ har Maximum i punkt $x = a$ om

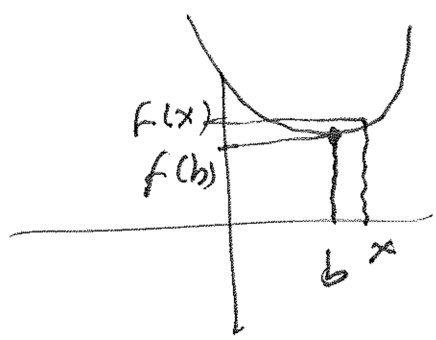
$f(x) \leq f(a)$ för alla x i närheten av a.



Min

$f(x)$ har minimum vid $x = b$

om $f(x) \geq f(b)$



Def Absolut Max
största värde

Vi säger att $f(x)$ har absolut Max

i $x = a$ om

$f(x) \leq f(a)$ för alla x.

Def Absolut Min eller Minsta värde

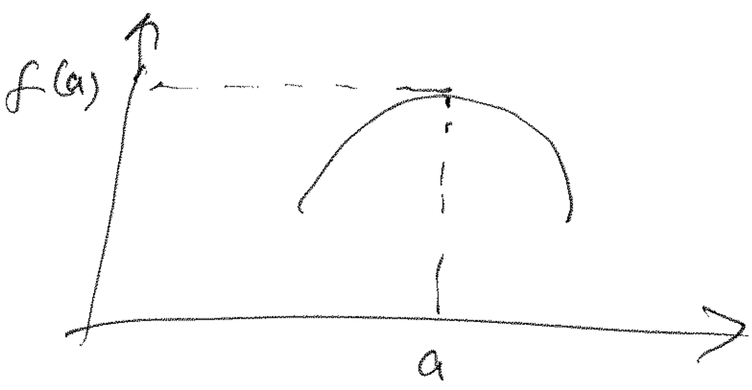
$f(x) \geq f(b)$ för alla x.

Anm

Man säger att $f(x)$ har

Max i $x = a$ men

själva Max $= f(a)$

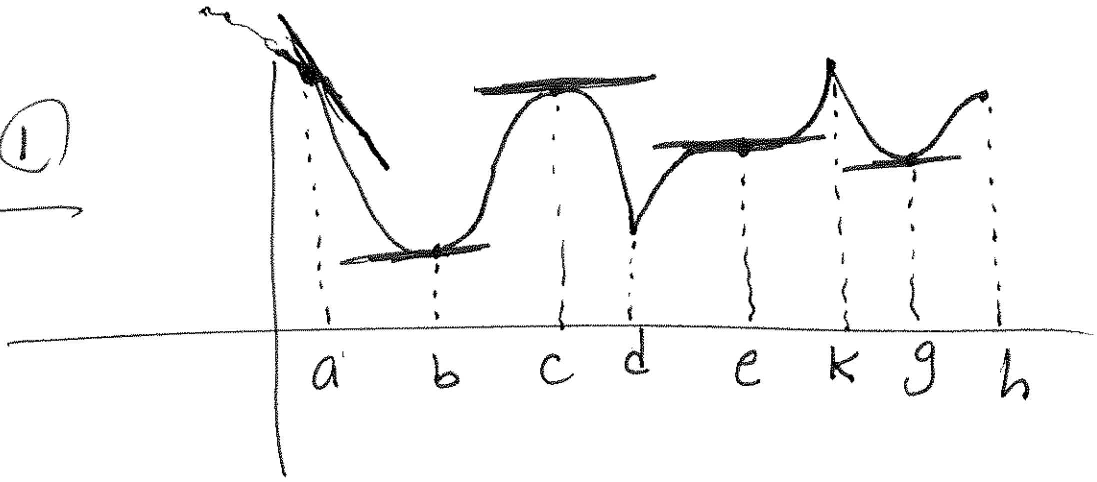


Två frågor

1. I vilka punkter kan en funktion $y = f(x)$ ha maximum eller minimum?

2. Villka funktioner har största och minsta värde?

Svar på 1



Max finns vid a, c, k, h

Min " " b, d, g

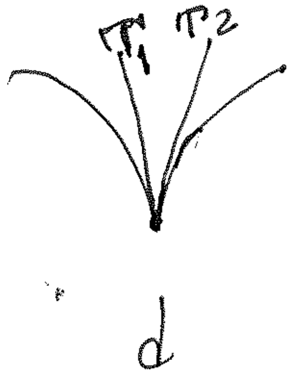
I fyra punkter är $f' = 0$

b, c, e, g

vid a har $f(x)$ Max

Men $f'(a) \neq 0$

vid d och K finns Min och Max men f' existerar inte i de två punkterna.



Svar på 1

Max och Min sker vid

1. Stationära punkter $f' = 0$

   b, c, g

2. Singulära punkter f' exist. ej

   d, K

3. vid ändpunkterna

   a, h

Anm

vid punkt e är $f'(e) = 0$

eftersom tangenten är vågrät

Men vi har inte Max eller Min

Sådana punkter kallas för Terrass punkt.

Ex

Var har $f(x) = x + 4$

Max eller Min? På $0 \leq x \leq 2$

Svar: $f'(x) = 1$

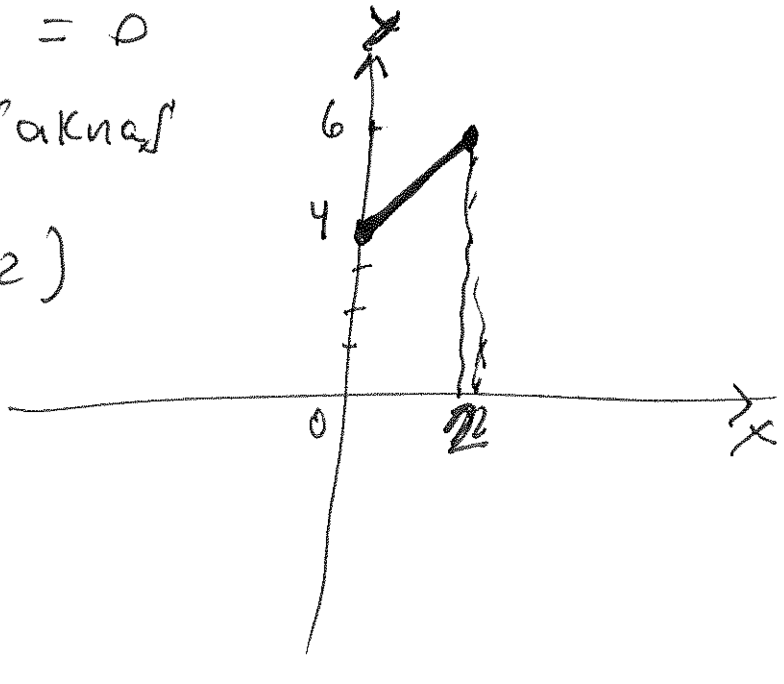
a) stationär punkt saknas eftersom f' blir aldrig $= 0$

b) Singulär punkt saknas

c) ändpunkter $(0, 2)$

$f(0) = 4$

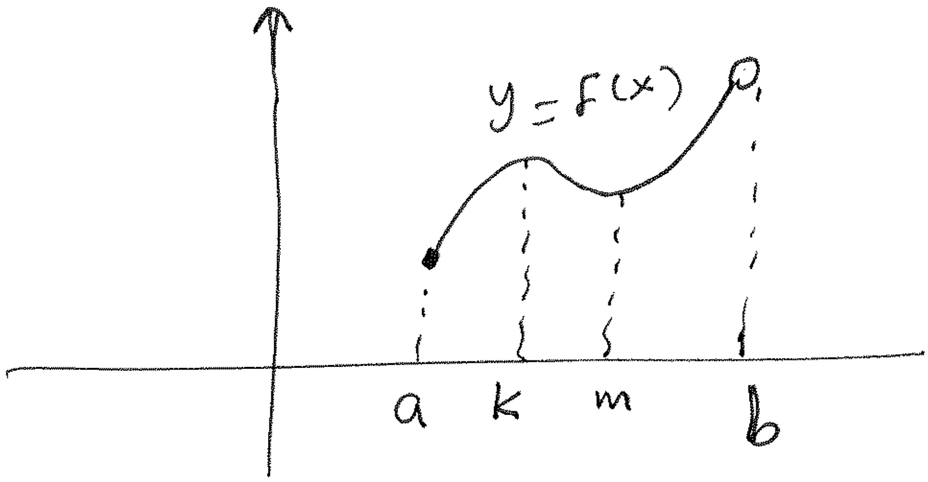
$f(2) = 6$



Svar på 2

vilka funktioner har största och minsta värde?

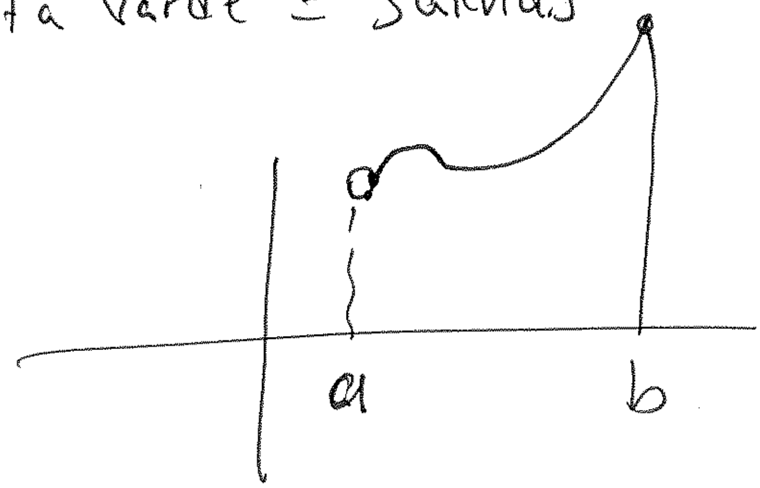
ex 1



är definierad på $[a, b)$

Minsta värde = $f(a)$
högsta värde = saknas

Ex 2



högsta = $f(a)$ $(a, b]$
minsta = saknas.

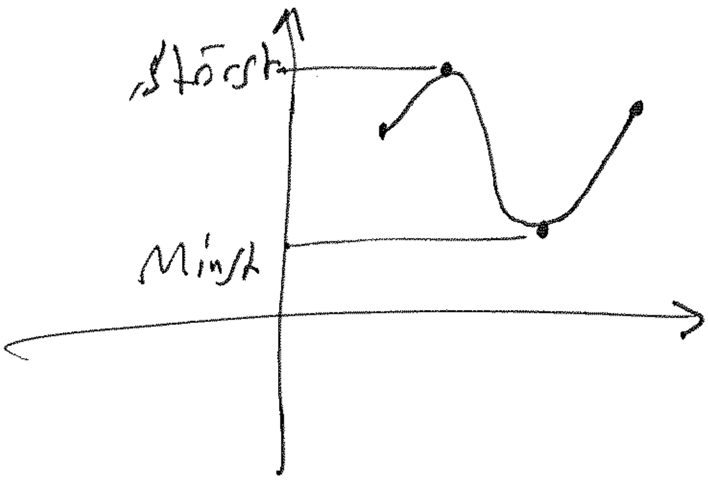
Svar på 2

Om båda ändpunkterna är med
dvs $f(x)$ är definierat på

$$[a, b]$$

garanteras existens av båda

största och minsta värde.



Def Klassificering av en stationär punkt.

Anta att $f(x)$ har derivatan

$= 0$ vid punkt $x = a$

Klassificering innebär att bestämma om

a) f har Max i $x = a$

b) f har Min i $x = a$

c) f har terrass punkt i $x = a$

Teckentabell för derivatan svarar.

x		a	
f'	$+$	0	$-$
	↗		↘

Max

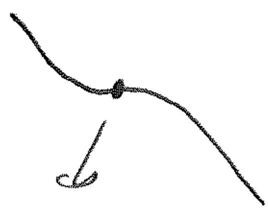
x		a	
f'	$-$	0	$+$
	↘		↗

Min

x		a	
f'	$+$	0	$+$

Terrass

x		a	
f'	$-$	0	$-$



Terrass

Ex

Klassificera alla stationär punkter till kurvan $y = x^3 - 6x$

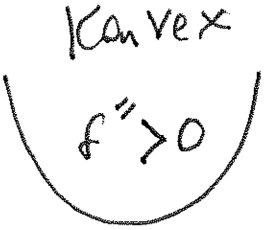
Lösning: Vi bestämma först alla stationära punkter.

$$y' = 3x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = 2 \qquad x = \pm\sqrt{2}$$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

Def Konvex och Konkav



Ex

I vilka intervall ~~har~~ är $f(x)$ konvex eller konkav ?

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Lösning: $f'(x) = 3x^2 - 12$

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x		0	
f''	$-$	0	$+$
	Konkav		Konvex