Beräkning av G.V då insättning ger $\frac{0}{0}$. ①

Fall 1 $f(x)$ är en rationell funktion.

dvs. $f(x) = \frac{\text{ett Polynom}}{\text{ett annat Poly.}}$

Metod 1

Ex: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 3}$ Insättning ger $\left(\frac{0}{0}\right)$

Faktorsatsen i Algebra $\Rightarrow$ båda

T och N är delbart med $(x-1)$

Dela både T och N med $(x-1)$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^2} - 1 & x - 1 \\ \hline -(\cancel{x^2} - x) & x + 1 \\ \hline x - 1 & \\ -(x - 1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\boxed{x^2 - 1 = (x-1)(x+1)}$$

$$\begin{array}{l} x^2 + x + 3 \\ \hline x^3 + 2x - 3 \quad \big| \; x - 1 \\ x^3 - x^2 \\ \hline x^2 + 2x - 3 \\ x^2 - x \\ \hline 3x - 3 \\ 3x - 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$

$$\boxed{x^3 + 2x - 3 = (x-1)(x^2+x+3)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+3)}$$

$$= (\text{insättning igen}) = \frac{2}{5}$$

Anm: Om vid insättning andra gången får $\frac{0}{0}$ igen måste vi repetera metoden.

Anm 2

Om $x \to -1$

båda T och N måste delas

med $x-(-1)$ dvs $\underline{(x+1)}$

Andra metod (lättare).

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3+2x-3} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

(Variabel byte)

$x \to 1$

$x-1 \to 1-1$

$x-1 \to 0$

Sätt $\boxed{x-1=t}$

$x \to 1$

$t \to 0$

$$x-1=t \qquad x\to 1 \qquad t\to 0 \longrightarrow \boxed{x=t+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^2-1}{(t+1)^3+2(t+1)-3}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t+\cancel{1}\cancel{-1}}{t^3+3t^2+3t+\cancel{1}+2t+\cancel{2}-\cancel{3}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{t^3+3t^2+5t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}[t+2]}{\cancel{t}[t^2+3t+5]}=2/5$$

Metod 3

L, Hospital regel (Hopital regel).

Sats

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 3} \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{3x^2 + 2} = 2/5$$

Fall 2 $\left(\frac{0}{0}\right)$

$f(x)$ är en kvot $\frac{T}{N}$

och det finns $\sqrt{}$ i T

eller N eller båda.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Metod Multiplicera båda T och N med Konjugat av T

$a-b$ kallas för Konjugat av $a+b$

$\overline{a+b}$ " " " $\overline{a-b}$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

(7)

Konjugat av $\underbrace{1}_{a}-\underbrace{\sqrt{x+1}}_{b}$ är

$$\underbrace{1}_{a}+\underbrace{\sqrt{x+1}}_{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x\quad(1+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1^2-(\sqrt{x+1})^2}{x(1+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-(x+\cancel{1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{-x}\ -1}{\cancel{x}(1+\sqrt{x+1})}$$

$$=\frac{-1}{2}$$

Andra metod på fall 2

(Hopital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1-(x+1)^{1/2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} \left(\frac{0}{0}\right) \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}{x-4},$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}} = 8 \cdot 4 = 32$$

<u>Sats</u> <u>Standard G.V.</u>

(1)- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = 1$$

<u>Hopital</u> $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\boxed{\text{Hopital} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1}$$

(3)

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Tillämpning av Standard G.V.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Sätt } 3x = t & x = t/3 \\ x \to 0 & \\ t \to 0 & \end{array}}$$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{2(t/3)} = \lim \frac{1}{2/3} \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}$ 1

$= 3/2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} \quad \left(\frac{0}{0}\right) = 5/4$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5\cancel{x}}{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4\cancel{x}} = 5/4 \; \frac{\lim \frac{\sin 5x}{5x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x}}$$

$$= 5/4$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{5 \cos 5x}{4 \cos 4x}$$

$$= 5/4$$

(Hopital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{4x}$$

$3x = t$

$x = t/3$

$x \to 0$

$t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{t} - 1}{t} = 1$$

12

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^{t} - 1}{4 \cdot t/3} = 3/4 \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{e^{t}-1}{t}}_{1} = 3/4$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{t} - 1}{4/3 \; t} = \underbrace{\frac{1}{4/3}}_{3/4} \lim_{t \to 0} \frac{e^{t}-1}{t}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 7x)}{5x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} 7x = t & \\ x = t/7 & t \to 0 \end{matrix}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1 + t)}{5/7 \cdot t} = 5/7$$

G.V. då $x \to \pm\infty$

V: ac~~ce~~septera att

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Fall 1 rationell

$$f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2+x-1}$$

$x \to \infty$

Anm G.V et blir antingen

0

eller

∞

eller ett tal

Metod

dela båda T och N med den

term som har högsta grad.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^3-x^2+3x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

dela allt med x^3

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0+0}$$

$$= 0$$

Amm

Svar $= 0$ om T' har mindre grad än

Nämnare.

Hopital fungerar också i $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^3-x^2+3x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{3x^2-2x+3}$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{6x-2} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+1}{x^2+2x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Svar $= \infty$ grad T $>$ grad N

Metod

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1+0}{0+0} = \infty$$

Samma grad

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1x^3+2x}{3x^3+x^2+1} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)$$

4:e Standard G. V.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$$

Tillämpning:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{5x}\right)^{3x} = ?$$

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} (1 + 1/t)^t = e}$$

$$\left(\begin{array}{l} -5x = t \\ x \to \infty \\ t \to -\infty \\ x = -t/5 \end{array} \right)$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3 \cdot \left(-\frac{t}{5}\right)}$$

$$\lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} = e$$

$$= \left(\lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} \right)^{-3/5} = e^{-3/5}$$

Jämförelse av $\begin{pmatrix} \text{exponential} \\ \text{potens} \\ \text{logaritm} \end{pmatrix}$

då $x \to \infty$

$$\lim_{t \to -\infty} \left(1 + 1/t\right)^{-3/5\, t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left[\left(1 + 1/t\right)^{t}\right]^{-3/5} = \left[\lim_{t \to -\infty} \left(1 + 1/t\right)^{t}\right]^{-3/5}$$

$$= e^{-3/5}$$

Jämförelse.

$f(x) = 2^x$ exp

$f(x) = x^2$ Potens

$f(x) = \lg x$ logaritm

$x \to \infty$

Sätt $x = 100$

$f(x) = 2^x$ $\quad 2^{100} = \underbrace{1267 \cdots 76}_{31 \text{ Siffror}}$

$f(x) = x^2 = 100^2 = 10000$

$f(x) = \lg x = \lg 100 = 2$

Vi ved att all 3 går mot ∞ men

exponential går fortast
Potens ligger efter och
logaritm ligger sist.

$$\begin{cases} 2^{\infty} = \infty \\ \infty^2 = \infty \\ \log \infty = \infty \end{cases}$$

Ex

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{\text{Potens}}{\text{exp}} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^5} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \qquad \frac{\text{exp}}{\text{Potens}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{5x^4}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{20x^3}{e^x}$$

$$= \lim \frac{60x^2}{e^x} = \lim \frac{120x}{e^x}$$

$$= \lim \frac{120}{e^x} = \frac{120}{\infty} = 0$$

5.5 (c)

21

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 e^x + 1}{x^2 e^{2x} - 2x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

<u>Metod</u> dela med den term som går fortast mot ∞.

$$x^3 e^x = x\,(x^2 e^x)$$

$$x^2 e^{2x} = e^x\,(x^2 e^x)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^3 e^x}{x^2 e^{2x}} + \dfrac{1}{x^2 e^{2x}}}{\dfrac{x^2 e^{2x}}{x^2 e^{2x}} - \dfrac{2x}{x^2 e^{2x}}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{e^x} - \frac{1}{x^2 e^{2x}}}{1 - \frac{2}{x e^{2x}}} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0$$

Ett ex på $\underline{\underline{\infty - \infty}}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x \right)$$

insättning $\infty - \infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - x \right)}{1} \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} + x \right)}{\left(\sqrt{x^2+2x} + x \right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x} + x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} + x}$$

$\sqrt{x^2} = \cancel{x}$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+2/x} + \cancel{x}} \qquad \frac{2\cancel{x}\ 2}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+2/x} + 1} = 1$$