VECTORES

Concepto de Magnitud.

La observación de los objetos de la naturaleza permite identificar características medibles y comparables, independientes entre si. Por ejemplo, el igual peso de diferentes objetos con independencia de su volumen.

Si además de la igualdad puede definirse la suma, se dice que esa característica común observada es una magnitud.

Para poder medir una magnitud es preciso disponer de una unidad de medida, que es una parte de la misma magnitud. Por ejemplo, el metro es un segmento tomado como unidad para medir longitudes. La "medición" da lugar a la cantidad, que es el número que expresa cuántas veces la unidad está contenida en la porción de la magnitud medida.

Tipos de magnitudes.

Las magnitudes cuyas cantidades pueden ordenarse en forma creciente y pueden representarse por los puntos de una recta, se llaman ESCALARES. Por ejemplo, las masas de distintos cuerpos o sus calores específicos.

Hay magnitudes que no pueden ordenarse de ese modo. Por ejemplo, la posición de un punto en el espacio respecto de otro punto de referencia no sólo depende de la distancia que separa a ambos puntos (longitud), sino también de la dirección relativa del primero respecto del segundo. Estas magnitudes se denominan VECTORIALES.

La notación vectorial aporta una mayor sencillez en la descripción matemática de los fenómenos físicos.

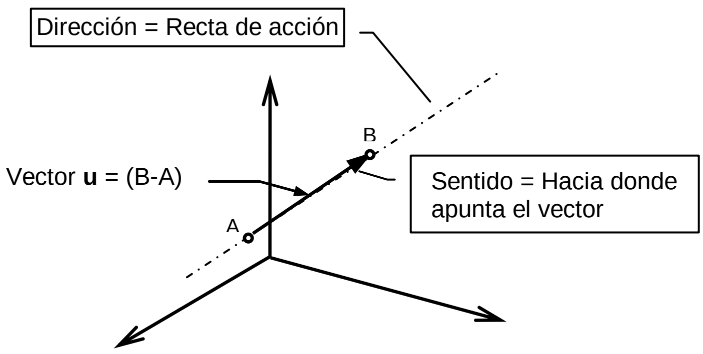
Muchas de las magnitudes que estudia la Física son vectoriales. Velocidades de los cuerpos, fuerzas actuantes en los mismos son ejemplos de aplicación de vectores.

Lo que se verá a continuación es cómo operar con vectores, independientemente de las magnitudes que ellos representan.

Vectores. Características y tipos de vectores.

Las magnitudes vectoriales están representadas por un segmento orientado en el espacio (flecha), que tiene:

- Una longitud definida por dos puntos (origen y extremo), que representa la cantidad expresada en una cierta escala, también denominado MÓDULO.
- Una DIRECCIÓN en el espacio, definida por una recta y todas sus paralelas.
- Un SENTIDO, determinado por el orden en que están tomados el origen y el extremo del vector sobre su dirección.



Esta definición responde a una clase de vectores denominados *vectores libres.* Dos vectores libres son iguales entre sí, si tienen iguales módulo, dirección y sentido, no importando el punto de origen, que puede ser cualquiera en el espacio. Ejemplo de vector libre es la velocidad de una masa de aire o de líquido que fluye sin torbellinos: vientos del SE a 40 km/h.

Vectores deslizables o axiales son aquellos en que, además de los tres atributos mencionados, interesa también la recta en la cual actúa el vector (recta de acción), aunque no la ubicación del vector sobre dicha recta. Una fuerza actuante sobre un cuerpo rígido es un ejemplo de vector deslizable.

Dos vectores deslizables de igual módulo, dirección y sentido, pero que actúan en rectas paralelas, de denominan *equipolentes*.

Vectores aplicados son aquellos de los cuales, además del módulo, la dirección, el sentido y la recta de acción, interesa el punto de aplicación sobre ésta. Un ejemplo de vector aplicado es una fuerza actuando sobre un cuerpo deformable.

Notación.

Un vector se indica por:

- La diferencia del extremo menos el origen: (B - A)
- Una letra, mayúscula o minúscula, en negrita. Eventualmente, con una raya o flecha sobrepuesta: $\mathbf{i}$; $\bar{\mathbf{H}}$; $\bar{\mathbf{u}}$

El módulo de un vector se lo indica encerrando su nombre entre barras o escribiendo la letra de su nombre en cursiva:

$$\operatorname{mod} \bar{\mathbf{u}} = |\mathbf{u}| = u$$

Versor.

Un vector de módulo unitario se denomina *versor*. Un versor define una recta orientada (dirección y sentido) en el espacio.

Operaciones con vectores.

Producto de un escalar por un vector: Si un vector **u** es multiplicado por un escalar a, se obtiene otro vector **v** tal que $|\mathbf{v}| = a|\mathbf{u}|$

Consecuencia: Si $\mathbf{u_0}$ es el versor que determina la dirección del vector **u**, puede escribirse:

$$\mathbf{u} = |\mathbf{u}|.\mathbf{u_0} \qquad \text{y también:} \qquad \mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

Suma de dos vectores deslizables: Para sumar dos vectores deslizables **u** y **v**, (Fig.1*a*) se construye un paralelogramo, cuyos lados son vectores equipolentes a los dados. Entonces, la diagonal de dicho paralelogramo es el vector equipolente a **u** + **v** (Fig. 1*b)*.

El vector suma se denomina *resultante*. La definición enunciada se denomina "regla del paralelogramo", que en el caso de las fuerzas tiene demostración experimental.

Para la suma de vectores libres se procede de la misma forma pero, por la naturaleza de estos vectores, no es necesario recurrir a vectores equipolentes.

Otra forma de realizar la suma de dos vectores es dibujando el vector equipolente de **u** a partir de un punto O_0 y a continuación de su extremo, el vector **v**. La resultante es el vector cuyo origen coincide con el origen de **u** y su extremo, con el extremo de **v**, es decir, el lado de cierre del polígono formado por **u** y **v** (Fig. 1*c*).

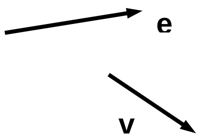


Fig. 1*a*

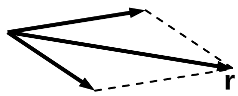


Fig. 1*b*

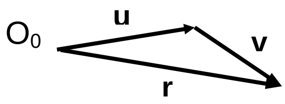


Fig. 1*c*

Aplicando el teorema del coseno (ver relaciones trigonométricas) setiene:

$$r^2 = u^2 + v^2 - 2.u.v.cos\ \varphi$$

siendo φ el ángulo comprendido entre los dos vectores. Se define como ángulo entre dos vectores al comprendido entre 0 y π radianes de las dos semirrectas trazadas desde un punto arbitrario, con la misma dirección y sentido que los vectores dados.

Para sumar varios vectores, se los dibuja uno a continuación del otro. La resultante es el vector que cierra el polígono así formado. (Fig. 2) En particular, si el extremo del último vector coincide con el origen del primero, la resultante es nula.

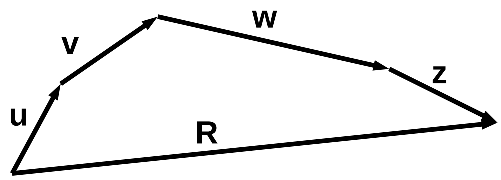


Fig. 2

Terna fundamental.

Sistemas de referencia

La descripción de un fenómeno físico requiere de un observador y de un sistema de referencia, al cual se referirán también las magnitudes vectoriales, que tendrán su expresión particular según el sistema adoptado. No obstante, las características y propiedades de un vector dependen de la magnitud que representa y no del sistema de referencia. Por ejemplo, una fuerza es una fuerza cualquiera sea el sistema de referencia al cual se la refiera.

Estos sistemas de referencia consisten en ternas de tres ejes, normalmente ortogonales, es decir, formando 90º entre sí. Pueden ser ternas cartesianas, cilíndricas, esféricas o intrínsecas. Nos referiremos exclusivamente a los sistemas cartesianos.

Terna cartesiana.

Una terna cartesiana (terna fundamental) está constituida por tres ejes ortogonales entre sí.

Sean **i, j, k** los versores que definen los ejes de la terna. Una terna es derecha o levógira si al girar **i** hacia **j** recorriendo el ángulo menor, el sentido de giro es aquel con que avanza un tornillo de rosca derecha (o tirabuzón) en la dirección positiva de **k**.

Si el sentido de giro corresponde a un tornillo de rosca izquierda, la terna se denomina izquierda o dextrógira. Se observa que es imposible pasar de una terna izquierda a otra derecha (y viceversa) mediante giros físicos.

Salvo indicación en contrario, en el estudio de los fenómenos que haremos siempre se utilizarán ternas derechas.

Proyección ortogonal de un vector sobre un eje.

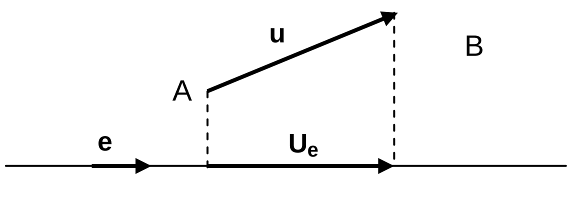


Fig. 3

La proyección ortogonal de un vector sobre un eje es el vector determinado por los pies de las perpendiculares al eje, ; por el origen y el extremo del vector. (Fig. 3)

La proyección sobre un eje de una suma de vectores es igual a la proyección de la resultante.

Expresión cartesiana de un vector.

Se denomina "componente de un vector según un eje" a la proyección de ese vector sobre dicho eje.

Dado el vector **u**, se tiene:

$\mathbf{u_x} = u_x\,\mathbf{i} = |\mathbf{u}|.\cos\alpha\,\mathbf{i}$

$\mathbf{u_y} = u_y\,\mathbf{j} = |\mathbf{u}|.\cos\beta\,\mathbf{j}$

$\mathbf{u_z} = u_z\,\mathbf{k} = |\mathbf{u}|.\cos\gamma\,\mathbf{k}$

donde α, β, γ son los ángulos que forma **u** con los versores **i** , **j** , **k**, respectivamente, cuyos cosenos se denominan cosenos directores de **u**.

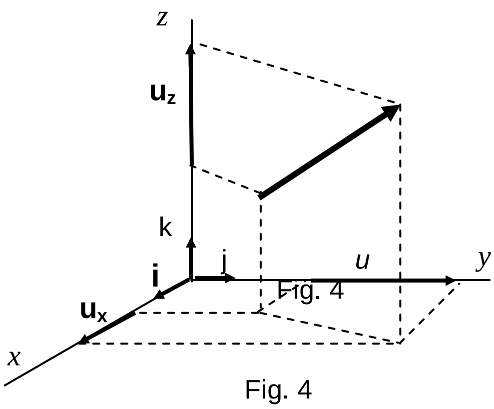


Fig. 4

De esta manera, la expresión cartesiana de un vector está dada por la suma de sus tres componentes:

$\mathbf{u} = \mathbf{u_x} + \mathbf{u_y} + \mathbf{u_z} = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}$

Las componentes de un versor son los cosenos directores del mismo, verificándose:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Vector Posición.

Se denomina vector posición al vector que ubica o referencia un punto del espacio respecto del origen de una terna.

Referencia del punto P respecto del origen O de la terna (Fig. 5): $\mathbf{R} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

El vector posición tiene su origen en el origen de la terna y su extremo en el punto referenciado.

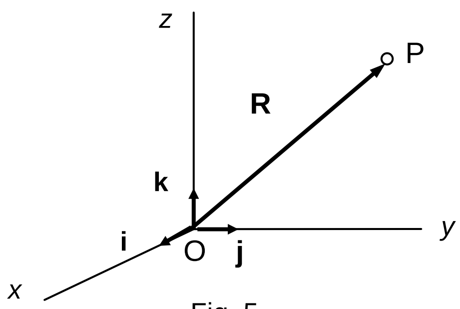


Fig. 5

Productos entre vectores.

Producto escalar.

El producto escalar de dos vectores **u** y **v** que forman un ángulo α entre sí es el número dado por

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u.v.\cos\alpha$$

Interpretación geométrica: Módulo de uno de los vectores por la proyección ortogonal del otro sobre el primero.

Propiedades: Si $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$; puede ser $\mathbf{u} = 0$ ó $\mathbf{v} = 0$ ó $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$

$m.(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = m.\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet m.\mathbf{v}$

$$\mathbf{w} \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \bullet \mathbf{u} + \mathbf{w} \bullet \mathbf{v}$$

Relaciones entre los versores de una terna: $\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{k} = 1$ $\quad \mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{i} = 0$

Expresión cartesiana del producto escalar: $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

Expresión cartesiana de la norma del vector (cuadrado del módulo)

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = (u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2 = |\mathbf{u}|^2$$

Producto vectorial.

El producto vectorial de dos vectores **u** y **v** que forman un ángulo α entre sí es el vector cuyo módulo vale $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = u.v.\text{sen}\,\alpha$; su dirección es perpendicular al plano definido por **u** y **v** y su sentido es el de avance de un tornillo de rosca derecha al girar **u** el ángulo α sobre **v**.

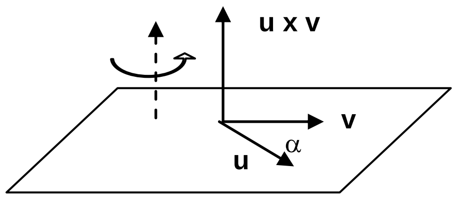


Fig. 6

Esta definición implica que el producto vectorial no es conmutativo, pues $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

Interpretación geométrica: El módulo del producto vectorial es igual al área del paralelogramo formado por los vectores que se multiplican.

Propiedades: Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$; puede ser $\mathbf{u} = 0$ ó $\mathbf{v} = 0$ ó $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

$$m.(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = m.\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times m.\mathbf{v}$$

$$\mathbf{w} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

$$\sum_i \mathbf{u}_\mathbf{i} \times \sum_\mathbf{j} \mathbf{v}_\mathbf{j} = \sum_{i,j} \mathbf{u}_\mathbf{i} \times \mathbf{v}_\mathbf{j}$$

Para los versores de una terna: $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$ $\quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

Expresión cartesiana del producto vectorial

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y.v_z - u_z.v_y)\,\mathbf{i} + (u_z.v_x - u_x.v_z)\,\mathbf{j} + (u_x.v_y - u_y.v_x)\,\mathbf{k}$$

Producto mixto o triple producto vectorial

$$\mathbf{w} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

El resultado es un escalar. Geométricamente equivale al volumen del paralelepípedo cuyos lados son iguales a los tres vectores.

Propiedades:

Si $\mathbf{w} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ es porque:

- por lo menos uno de los tres vectores es nulo.
- los tres vectores son coplanares.
- dos de los vectores son paralelos entre sí.

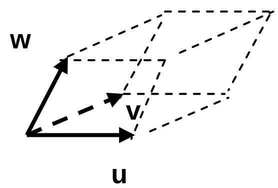


Fig. 7

La permutación cíclica del orden de escritura de los vectores en la operación no altera el resultado:

$$\mathbf{w} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \bullet (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

El escalar triple producto mixto equivale al desarrollo del siguiente determinante:

$$\mathbf{w} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} w_x & w_y & w_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Derivación de Vectores.

Las magnitudes físicas representadas por vectores suelen ser funciones de una o más variables, en particular del tiempo.

Analizaremos el caso de la variación temporal de un vector y el cálculo de su derivada.

El cambio de un vector puede ser debido a que su módulo varía (aumenta o disminuye) o porque el vector cambia de orientación en el espacio.

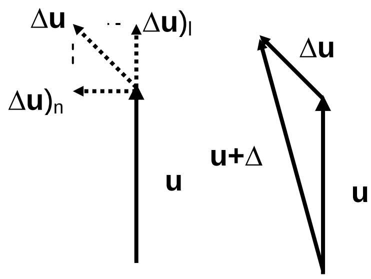


Fig. 8

Derivada de un vector de módulo constante que está cambiando de orientación.

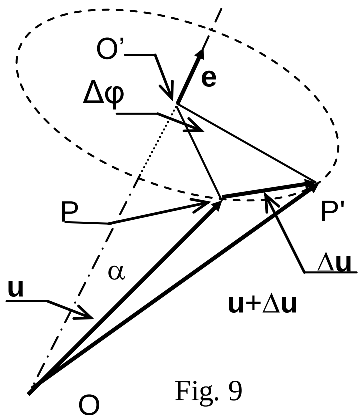


Fig. 9

Sea (P-O) = **u** un vector de módulo constante que gira alrededor de un eje definido por el versor **e**

Sea α el ángulo que forman **u** con **e**. En un lapso Δt el plano OO'P que estos vectores forman, gira un ángulo $\Delta\varphi$. El extremo P del vector **u** se moverá sobre una circunferencia perpendicular al eje **e** y cuyo radio vale (P-O') = $|\mathbf{u}|.sen\ \alpha$. La variación del vector es $\Delta\mathbf{u}$, coincidente con la cuerda correspondiente al arco PP' = Δs y la nueva posición del vector es (P'-O), cuyo módulo es igual al de **u**.

Para lapsos cada vez más pequeños, $\Delta\varphi$, $\Delta\mathbf{u}$ y Δs también disminuyen y P' tiende a P.

En el límite para $\Delta t \to 0$, $\Delta\varphi \to d\varphi$; $\Delta\mathbf{u} \to d\mathbf{u}$ y $\Delta s \to ds$

La relación entre $d\varphi$ y dt proporciona la variación del ángulo φ con el tiempo. A esta variación se la denomina *velocidad angular* y se la representa mediante un vector rotación $\boldsymbol{\omega}$ cuyo módulo vale $\frac{d\varphi}{dt}$, su recta de acción coincide con el eje de rotación y su sentido es tal que el avance corresponde al giro de un tornillo de rosca derecha.

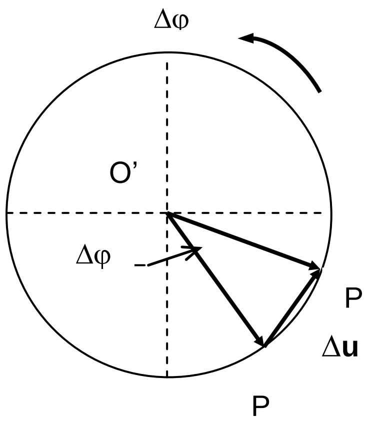


Fig. 10

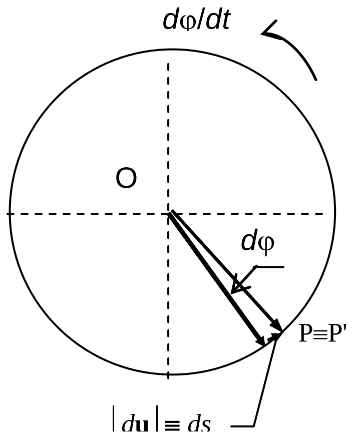


Fig 11

Por otra parte, $\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{e_t}$ es el versor tangente a la circunferencia de radio (P-O') y perpendicular al plano que forman **ω** y **u**.

Por lo tanto, la variación temporal de **u** (derivada de **u** respecto del tiempo) puede escribirse:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{ds}\frac{ds}{dt} = |\mathbf{u}| \operatorname{sen}\alpha \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e_t} = |\mathbf{u}|\,|\boldsymbol{\omega}|\, sen\ \alpha\, \mathbf{e_t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$$

Así pues, la variación temporal instantánea de un vector de módulo constante que está girando con velocidad angular ω, es igual al producto vectorial de la velocidad de giro por el vector dado.

Un caso particular importante de lo que acaba de verse es cuando el vector que gira es un versor. Si un versor **e** gira con velocidad **ω**, su derivada respecto del tiempo vale:

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$$

Derivada total de un vector.

La derivada total de un vector $\mathbf{u} = u\,\mathbf{u}_0$ que cambia su módulo y gira con velocidad de rotación **ω,** resulta:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d(u\mathbf{u_0})}{dt} = \frac{du}{dt}\mathbf{u}_0 + u\frac{d\mathbf{u_0}}{dt} = \frac{du}{dt}\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$$

El primer término corresponde a la variación de módulo. El segundo corresponde a la variación de orientación.