计算方法

黄佳城 20420201151673

2021 年 04 月 27 日

Code:

https://github.com/Acpnohc/conputational_method_in_theory_physics/tree/main/hw10

问题 1：

产生 10^5 个均匀分布在区间（0,1）上的随机数。将这些随机数乘以 10^5 后排序，并计算相邻两个数之间的间距，在根据这些间距画出他们的概率密度函数。

解：

数值解：

数值解如图 1 所示。

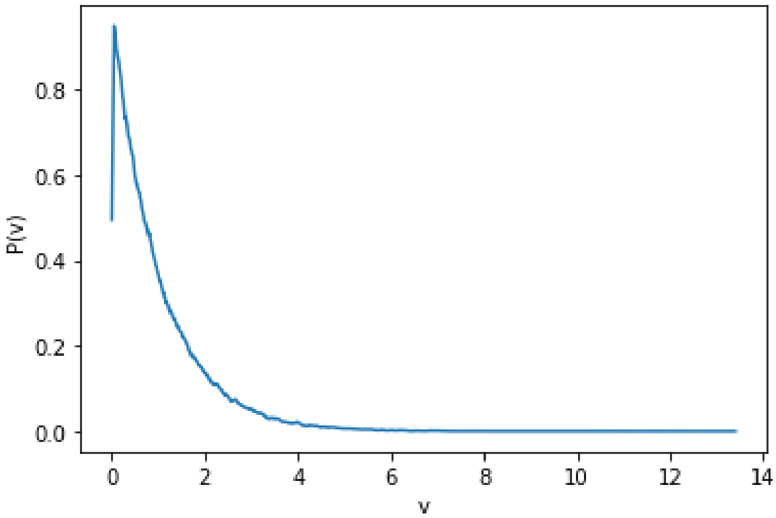

图 1 间距的概率密度函数

解析解（没推导完成，可以略去）：

这是一道顺序统计量问题，总体 ξ 满足分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{10^5} & 0<x<10^5\\ 1 & x>10^5\end{cases}$$

其中，第k个顺序统计量的概率分布函数应为：

$$\begin{aligned}F_{\xi(k)}(x)&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{F(x)}t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt\\&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{\frac{x}{10^5}}t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt\end{aligned}$$

第$k-1$个顺序统计量的概率分布函数应为：

$$\begin{aligned}F_{\xi(k-1)}(x)&=\frac{n!}{(k-2)!(n-k+1)!}\int_0^{F(x)}t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}dt\\&=\frac{n!}{(k-2)!(n-k+1)!}\int_0^{\frac{x}{10^5}}t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}dt\end{aligned}$$

考虑第k个顺序统计量和第$k-1$个顺序统计量的差：

$$\begin{aligned}P(Y)&=P(Y\le y)\\&=P(\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{\frac{x}{10^5}}t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt-\frac{n!}{(k-2)!(n-k+1)!}\int_0^{\frac{x}{10^5}}t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}dt\le y)\\&=P(\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}[\frac{1}{k}\int_0^{\frac{x}{10^5}}t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt-\frac{1}{n-k+1}\int_0^{\frac{x}{10^5}}t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}dt]\le y)\end{aligned}$$