计算方法

黄佳城 20420201151673

2021 年 03 月 16 日

问题 1：

一个骰子可以投出三个不同的结果，分别记为 A，B，及 C。若三个结果出现的概率分别为P_A，P_B，和P_C。且已知$\frac{P_A}{P_B}=3$，$\frac{P_B}{P_C}=2$，计算P_A，P_B，和P_C的值。

解：由题目可以如下方程组：

$$\begin{cases} P_A+P_B+P_C=1 \\ \dfrac{P_A}{P_B}=3 \\ \dfrac{P_B}{P_C}=2 \end{cases}$$

求解方程组可有：

$$\begin{cases} P_A=\dfrac{2}{3} \\ P_B=\dfrac{2}{9} \\ P_C=\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

问题 2：

用直接蒙特卡洛方法计算圆周率。

解：

（1）算法设计

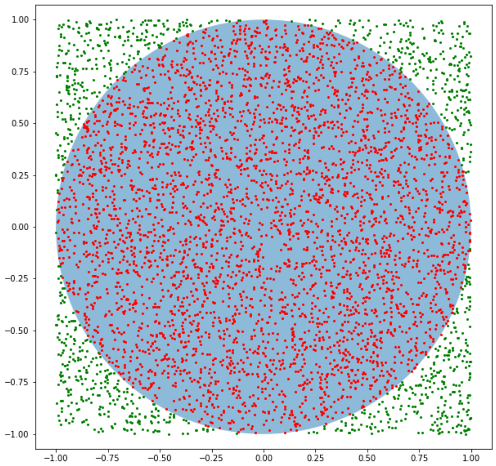

图 1 蒙特卡洛方法求圆周率

构造一个单位正方形和该正方形的内切圆，如向整个区域内随机投入点，根据点到原点的距离判断点是落在圆内还是在圆外，令落在圆内点的数目为$\boldsymbol{P_A}$，圆外为$\boldsymbol{P_B}$。由概率论可知：

$$\frac{P_A}{P_A+P_B}=\frac{S_{圆}}{S_{方}}=\frac{\pi}{4}$$

故 $\pi = 4 * \frac{P_A}{P_A+P_C}$

（2）运行结果

记 $P_A + P_B = N$ 为总的随机点个数，则图 2 显示了估算的圆周率随着 N 的增加的变化。

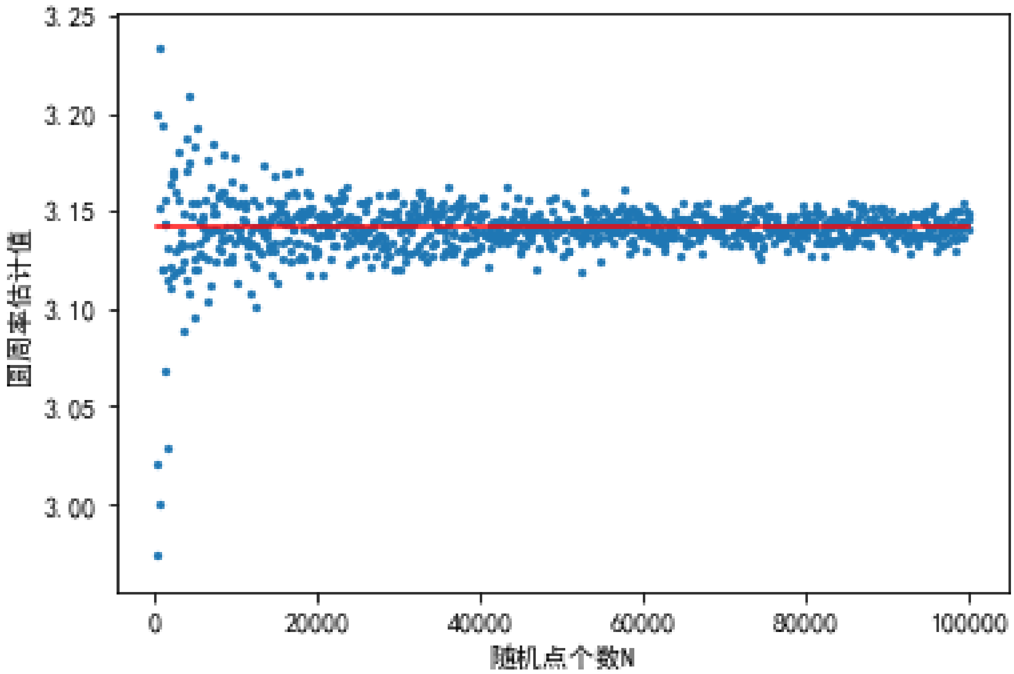

图 2 蒙特卡洛方法求圆周率（红线为圆周率的真实值）

代码可以在 https://github.com/Acpnohc/conputational_method_in_theory_physics/tree/main/hw1 被查阅。

（3）误差分析

根据独立同分布的中心极限定理，如果随机变量$\boldsymbol{X_1}$，$\boldsymbol{X_2}$\`\`\`\`\`\`\`\`\`$\boldsymbol{X_n}$独立同分布，且具有非 0 的方差σ^2，$\boldsymbol{f(X)}$为$\boldsymbol{X}$的概率分布函数，则：

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma}|\boldsymbol{X_N}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})|<x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

当N足够大时，

$$P\left(|\boldsymbol{X_N}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})|<\frac{\boldsymbol{\lambda_\alpha\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{N}}}\right)\approx 1-\boldsymbol{\alpha}$$

$\boldsymbol{\alpha}$为置信度。也即$|\boldsymbol{X_N}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})|<\frac{\lambda_\alpha\sigma}{\sqrt{N}}$ 近似的以概率$1-\boldsymbol{\alpha}$成立。

一般定义，$\frac{\boldsymbol{\lambda_\alpha \sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{N}}}$为蒙特卡罗方法的误差。

因此，可见如果蒙特卡洛的精度要提高 10 倍，则样本量要提高 10^2=100 倍。图 2 可以验证这个关系。