计算方法

黄佳城 20420201151673

2021 年 04 月 27 日

Code:

https://github.com/Acpnohc/conputational_method_in_theory_physics/tree/main/hw10

问题 1：

产生 10^5 个均匀分布在区间（0, 1）上的随机数。将这些随机数乘以 10^5 后排序，并计算相邻两个数之间的间距，在根据这些间距画出他们的概率密度函数。

解：

数值解：

数值解如图 1 所示。

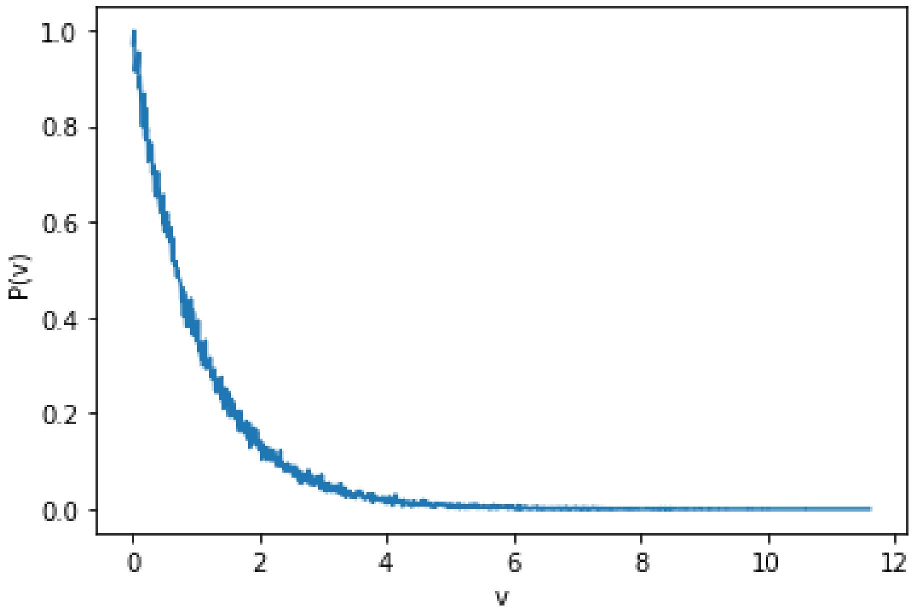

图 1 间距的概率密度函数

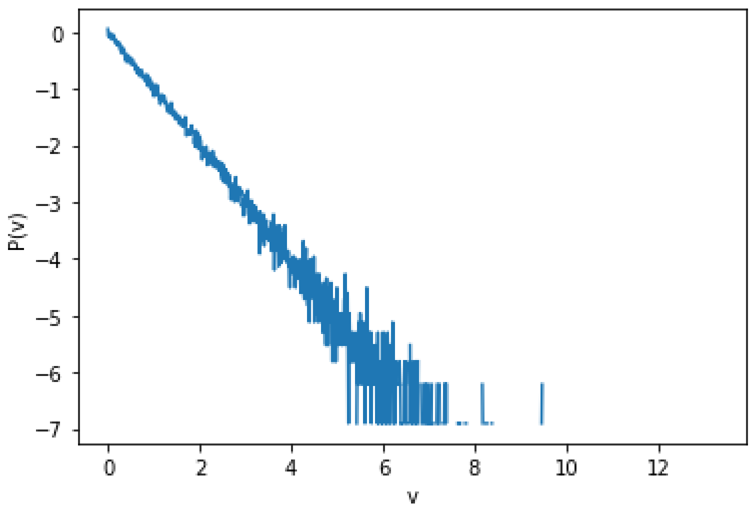

图 2 对数坐标下间距的概率密度函数

解析解（没推导完成，可以略去）:

这是一道顺序统计量问题，总体ξ满足分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{10^5} & 0<x<10^5\\ 1 & x>10^5\end{cases}$$

其中，第k个顺序统计量的概率分布函数应为:

$$F_{\xi(k)}(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt$$
$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt$$

第$k-1$个顺序统计量的概率分布函数应为:

$$F_{\xi(k-1)}(x)=\frac{n!}{(k-2)!(n-k+1)!}\int_0^{F(x)} t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}dt$$
$$=\frac{n!}{(k-2)!(n-k+1)!}\int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}dt$$

考虑第k个顺序统计量和第$k-1$个顺序统计量的差:

$$
\begin{aligned}
P(Y) &= P(Y \le y) \\
&= P\Big(\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt - \frac{n!}{(k-2)!(n-k+1)!}\int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}dt \le y\Big) \\
&= P\Big(\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}[\frac{1}{k}\int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,dt - \frac{1}{n-k+1}\int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-2}(1-t)^{n-k+1}dt] \le y\Big)
\end{aligned}
$$