

## 计算方法

黄佳城 20420201151673

2021 年 04 月 27 日

Code:

[https://github.com/Acpnohc/computational\\_method\\_in\\_theory\\_physics/tree/main/hw10](https://github.com/Acpnohc/computational_method_in_theory_physics/tree/main/hw10)

### 问题 1:

产生  $10^5$  个均匀分布在区间  $(0, 1)$  上的随机数。将这些随机数乘以  $10^5$  后排序，并计算相邻两个数之间的间距，在根据这些间距画出他们的概率密度函数。

解:

数值解:

数值解如图 1 所示。

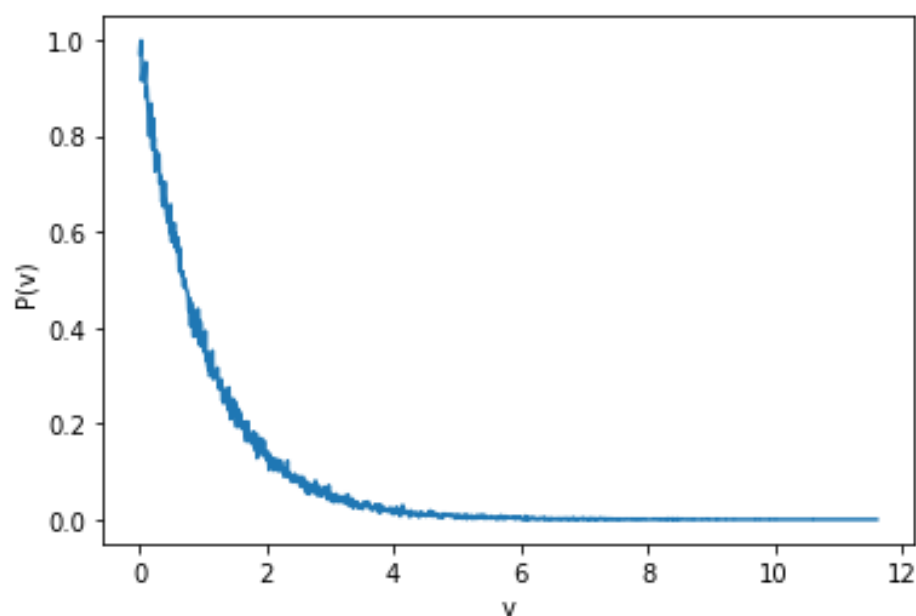


图 1 间距的概率密度函数

解析解（没推导完成，可以略去）:

这是一道顺序统计量问题，总体  $\xi$  满足分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{10^5} & 0 < x < 10^5 \\ 1 & x > 10^5 \end{cases}$$

其中，第  $k$  个顺序统计量的概率分布函数应为：

$$\begin{aligned} F_{\xi(k)}(x) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{F(x)} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt \end{aligned}$$

第  $k-1$  个顺序统计量的概率分布函数应为：

$$\begin{aligned} F_{\xi(k-1)}(x) &= \frac{n!}{(k-2)!(n-k+1)!} \int_0^{F(x)} t^{k-2} (1-t)^{n-k+1} dt \\ &= \frac{n!}{(k-2)!(n-k+1)!} \int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-2} (1-t)^{n-k+1} dt \end{aligned}$$

考虑第  $k$  个顺序统计量和第  $k-1$  个顺序统计量的差：

$$P(Y) = P(Y \leq y)$$

$$\begin{aligned} &= P\left(\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt - \frac{n!}{(k-2)!(n-k+1)!} \int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-2} (1-t)^{n-k+1} dt \leq y\right) \\ &= P\left(\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \left[\frac{1}{k} \int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt - \frac{1}{n-k+1} \int_0^{\frac{x}{10^5}} t^{k-2} (1-t)^{n-k+1} dt\right] \leq y\right) \end{aligned}$$