计算方法第三次作业

黄佳城 20420201151673

问题一

一维随机行走问题：设一人初始时刻位于坐标原点，之后每个时间单位等概率地向左或向右移动一步，记为一个单位长度。给出t步后，其各可能位移值的概率、平均位移、位移的方差的解析值，并与数值结果比较。当足够大时，该结果可用中心极限定理解释，将数值结果与中心极限定理结果进行比较。

解：

理论值：

该人的位移值$L = x_1 + \cdots + x_t$。其中x_i满足伯努利分布，其平均值为$\overline{x_i} = 0$，方差$Var(x_i) = 1$。当t足够大时，根据中心极限定理，位移值的平均值应为$\overline{L} = 0$，方差应为$Var(L) = t$，且位移值的概率满足如下高斯分布：$f_t(L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-L^2}{2t}}$。

解析值：

根据上述的几个解析解，包括位移值的平均值、方差以及概率分布，我们通过以下数值实验进行验证：t 从 1000 个单位长度开始，每次递增 1000 个单位长度到 10000 单位长度，每个t单独的取 1000 次随机行走的模拟，取系综平均，分别验证上述的解析解。结果如图 1-4 所示。

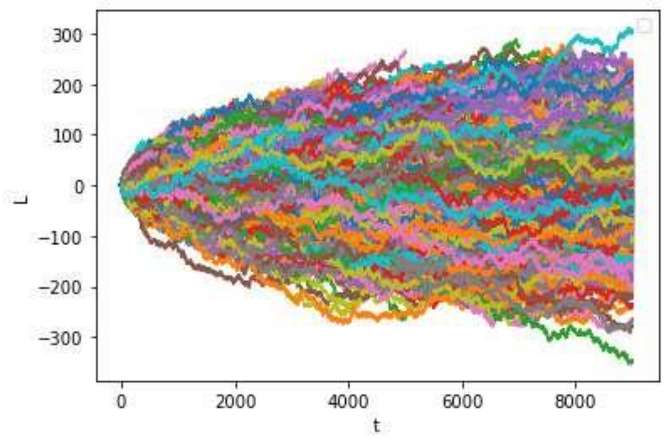

图 1 随机行走数值模拟，横轴为行走步数t，纵轴为位移值L

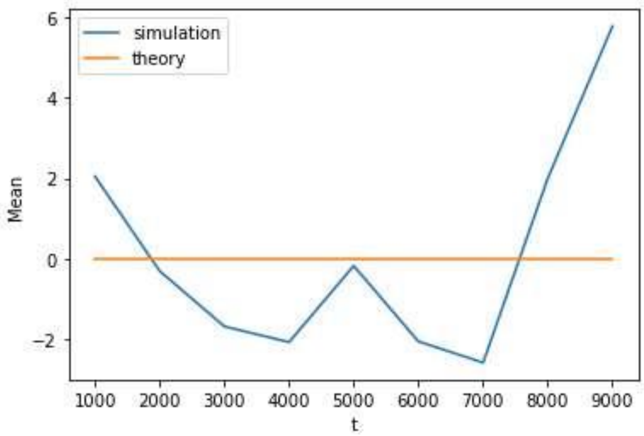

图 2 位移值的平均值随行走步数的关系，横轴为行走步数t，纵轴为位移值的方差，蓝色线为模拟，橙色线为理论值

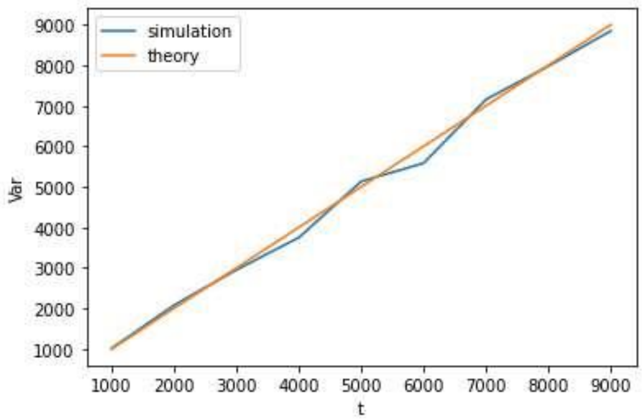

图 3 位移值的方差随行走步数的关系，横轴为行走步数t，纵轴为位移值的方差，蓝色线为模拟，橙色线为理论值

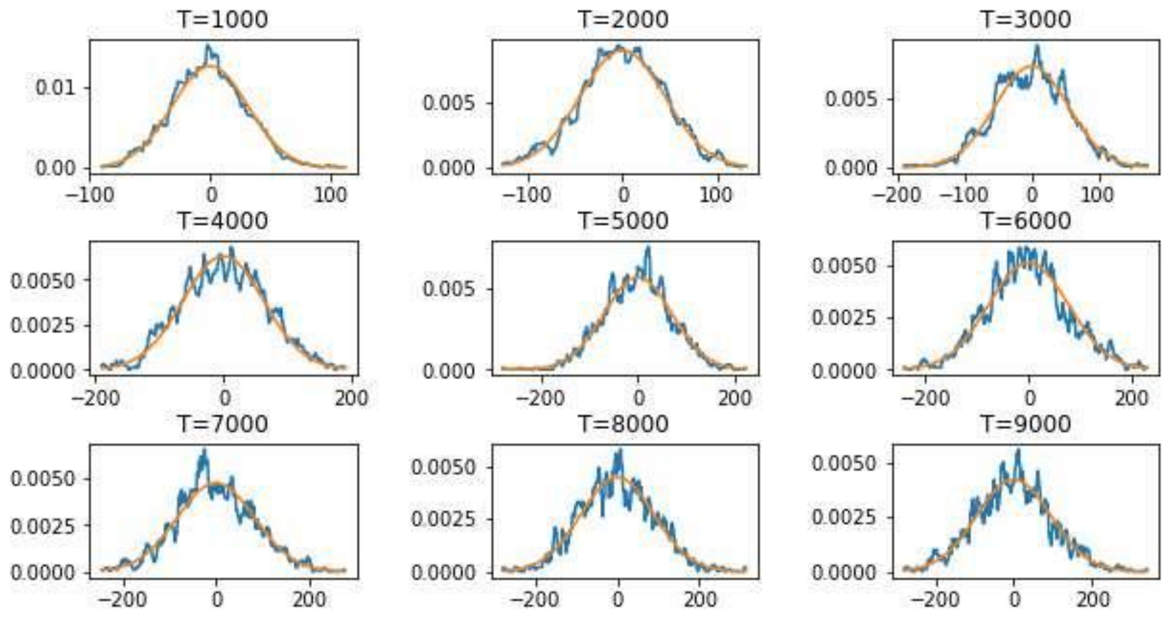

图 4 位移值的概率分布随行走步数的关系，横轴为位移值，纵轴为概率，蓝色线为模拟，橙色线为理论值，每个子图对应的行走步数位于子图的上方

注意到图 2 的偏差似乎比较大，但是一方面来说其绝对误差不大，在理论值上下徘徊。其二与我们取平均的系综数有关，图 5 补充了取平均的系综数为 100000 的结果，对比上面的 1000 个系综的结果，精度应该上升一位（数据量大了 100 倍，根据中心极限）。

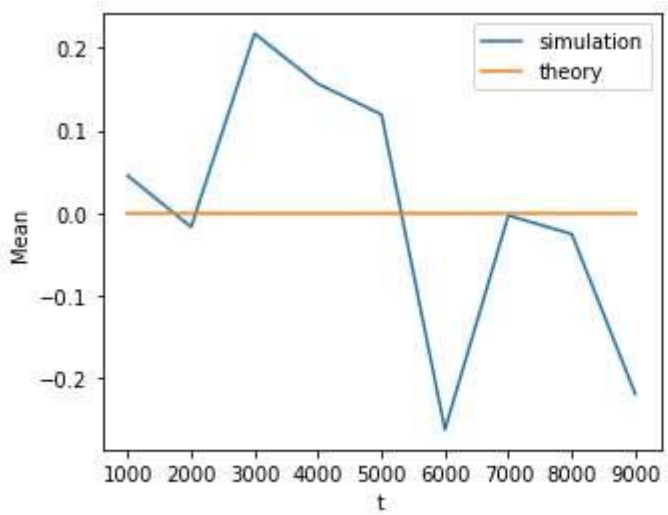

图 5 系综数为 100000 时，位移值的平均值随行走步数的关系，横轴为行走步数 t，纵轴为位移值的方差，蓝色线为模拟，橙色线为理论值

问题二

设物理量 A 随时间的变化是

$$A(\tau)=A_0\cos(2\pi\tau),\ (A_0=1)$$

物理量 B 随时间的变化是

$$B(\tau)=B_0 r,\ (B_0=1)$$

其中 r 是一个均匀分布于 (0.1) 的随机变量，计算 $\varphi_A(t)$、$\varphi_B(t)$，比较 $<A_i A_j>$ 与 $<A^2>$，并在可能的情况下和相应的理论值进行比较。

解：

理论值：

$$\varphi_A(t) = \frac{<A(0)A(t)> - <A>^2}{<A^2> - <A>^2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} A(\tau_0)A(\tau_0+t)d\tau_0 - [\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} A(\tau_0)d\tau_0]^2}{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} A^2(\tau_0)d\tau_0 - [\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} A(\tau_0)d\tau_0]^2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \cos(2\pi\tau_0)\cos(2\pi\tau_0+2\pi t)d\tau_0 - [\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \cos(2\pi\tau_0)d\tau_0]^2}{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \cos^2(2\pi\tau_0)d\tau_0 - [\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \cos(2\pi\tau_0)d\tau_0]^2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \cos(2\pi\tau_0)[\cos(2\pi\tau_0)\cos(2\pi t) - \sin(2\pi\tau_0)\sin(2\pi t)]d\tau_0 - [\lim\limits_{T\to\infty}[\frac{1}{2T\pi}\cos(2\pi\tau_0) - \frac{1}{2T\pi}\cos(2\pi\tau_0+2\pi T)]]^2}{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \frac{1+\cos(4\pi\tau_0)}{2}d\tau_0 - [\lim\limits_{T\to\infty}[\frac{1}{2T\pi}\cos(2\pi\tau_0) - \frac{1}{2T\pi}\cos(2\pi\tau_0+2\pi T)]]^2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \cos(2\pi\tau_0)[\cos(2\pi\tau_0)\cos(2\pi t) - \sin(2\pi\tau_0)\sin(2\pi t)]d\tau_0}{1+1}$$

$$= \frac{1}{4}\cos(t)$$

$$\varphi_B(t) = \frac{<B(0)B(t)> - <B>^2}{<B^2> - <B>^2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} B(\tau_0)B(\tau_0+t)d\tau_0 - \frac{1}{4}}{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} B^2(\tau_0)d\tau_0 - \frac{1}{4}} = \frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} B(\tau_0)B(\tau_0+t)d\tau_0 - \frac{1}{4}}{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} B^2(\tau_0)d\tau_0 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} B(\tau_0)B(\tau_0+t)d\tau_0 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} B(\tau_0)B(\tau_0+t)d\tau_0 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = ?\ ?$$

模拟值：

图 6-7 展示了 $\varphi_A(t)$ 、 $\varphi_B(t)$ 的数值模拟计算值。

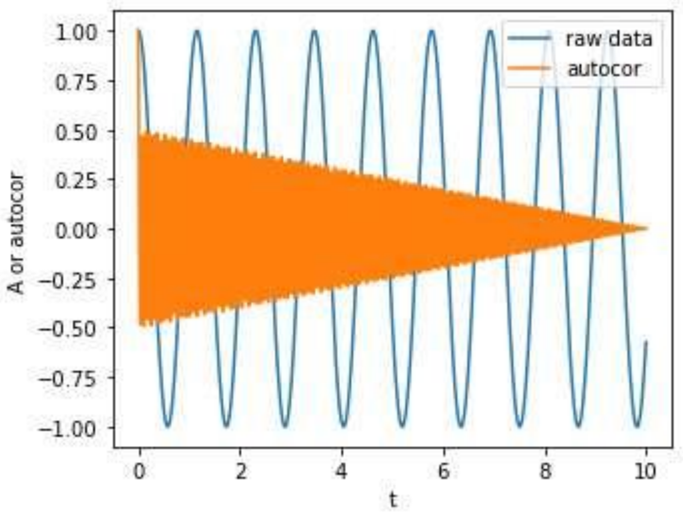

图 6 $\varphi_A(t)$ 的数值模拟计算值

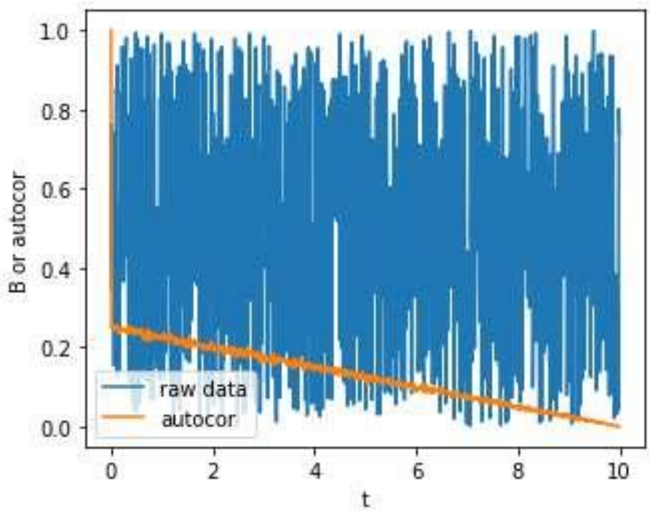

图 7 $\varphi_B(t)$ 的数值模拟计算值