ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
IEE2413 - Electrónica

Proyecto

Martín Díaz, Martín Moyano,
Benjamín Landeta, Sebastián Lorca

Fecha de entrega: 16 de junio de 2025

1. Investigación previa

1.1. La Transformada de Fourier Discreta

La DFT de una señal discreta $x[n]$, de longitud N, está definida como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, ..., N-1 \tag{1.1}$$

El cálculo directo de esta fórmula requiere $\mathcal{O}(N^2)$ operaciones complejas.

Idea general del algoritmo Cooley-Tukey: El algoritmo Cooley-Tukey se basa en el paradigma *divide and conquer*, y divide la DFT de tamaño N (donde N es potencia de dos, es decir, $N = 2^m$) en dos DFTs de tamaño $N/2$:

- Una que contiene los elementos en posiciones pares: $x[0], x[2], x[4], \ldots$
- Otra con los elementos en posiciones impares: $x[1], x[3], x[5], \ldots$

Utilizando esta separación, se puede reescribir la DFT como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] \cdot W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] \cdot W_N^{(2n+1)k} \tag{1.2}$$

donde $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ es la raíz N-ésima de la unidad.

Agrupando términos:

$$X[k] = E[k] + W_N^k \cdot O[k] \tag{1.3}$$

$$X[k+N/2] = E[k] - W_N^k \cdot O[k] \tag{1.4}$$

donde $E[k]$ es la FFT de los elementos pares y $O[k]$ la FFT de los impares. Esta descomposición se aplica recursivamente hasta que se obtienen DFTs de tamaño 1.

Etapas del algoritmo Radix-2:

1. **Bit-reversal:** Reordenamiento de los datos de entrada según el orden inverso de los bits del índice binario.
2. **Cálculo en etapas:** Se realizan $\log_2 N$ etapas, cada una combinando pares de subproblemas más pequeños usando operaciones llamadas *butterflies*.

3. **Butterfly operation:** Para cada par (a,b) y una raíz W_N^k, se computa:

$$a' = a + W_N^k \cdot b, \quad b' = a - W_N^k \cdot b \tag{1.5}$$

Complejidad computacional: Gracias a esta estructura recursiva, el algoritmo tiene una complejidad de:

$$\mathcal{O}(N \log_2 N) \tag{1.6}$$

lo que representa una mejora sustancial con respecto a la DFT directa.

Ejemplo para $N = 4$: Sea $x = [x_0, x_1, x_2, x_3]$, se procede como sigue:

- FFT de pares: $E[k] = x_0 + x_2 \cdot W_2^k$
- FFT de impares: $O[k] = x_1 + x_3 \cdot W_2^k$

Combinación:

$$X[0] = E[0] + W_4^0 \cdot O[0], \quad X[1] = E[1] + W_4^1 \cdot O[1] \tag{1.7}$$

$$X[2] = E[0] - W_4^0 \cdot O[0], \quad X[3] = E[1] - W_4^1 \cdot O[1] \tag{1.8}$$

2. Modulación AM

3. Demodulación AM