Лабораторная работа № 1

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Цель работы: получить навык проведения вычислительного эксперимента, направленного на решение задач интерполирования и аппроксимации функций.

Задания на лабораторную работу

Для всех задач задана одна и та же функция f(x), аналитическая на отрезке [a,b].

Построение интерполяционных многочленов

Задача 1. (1 балл)

1) Написать вычислительную программу на языке программирования С++ для построения интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ произвольной степени n по известным значениям функции $y_i=f(x_i)$, заданным на сетке узлов
$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$
2) Для каждого n=1,...15 построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ по значениям функции на равномерной сетке узлов
$$x_{i+1}=x_i+h,\quad x_0=a,\quad h=(b-a)/n$$
и найти оценку погрешности приближения функции
$$\Delta_n=\sup|f(x)-L_n(x)|,\quad x\in[a,b].$$
Оценку Δ_n провести численно посредством вычисления модуля ошибки приближений $|f(x)-L_n(x)|$ в узлах мелкой равномерной сетки, состоящей из ~10^5 узлов, с выбором максимального значения в качестве искомой оценки.
3) Построить график зависимости Δ_n от n определить оптимальную степень n_0, при которой погрешность минимальна.
4) Построить график ошибки приближения $f(x)-L_{n0}(x)$.

Задача 2. (1 балл)

1) Построить сетку узлов, составленных из нулей многочлена Чебышева степени n_0, найденной при решении предыдущей задачи:
$$x_i=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2n_0}\right),\ \ i=0,1,\ldots,n_0-1.$$
Найти численные значения заданной функции f(x) в этих узлах: $y_i=f(x_i)$.
2) С использованием написанной при решении Задачи 1 программы построить по этим данным многочлен Лагранжа $L_{n0}(x)$ степени n_0.
3) Найти оценку погрешности приближения функции Δ_{n0} и сравнить ее с известной теоретической минимальной оценкой погрешности интерполяции многочленом Лагранжа.

4) Выполнить сравнение двух многочленов Лагранжа $L_{n0}(x)$ на равномерной и неравномерной сетках, построенных в этой и предыдущей задачах.

Задача 3. (1 балл)

1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для построения интерполяционного многочлена Ньютона порядка n_0 (найдено при решении Задачи 1) на равномерной сетке через вычисление разделенных разностей.
2) Выполнить сравнение построенного многочлена Ньютона с аналогичным многочленом Лагранжа, построенного при решении задачи 1.

Тригонометрическая интерполяция

Задача 4. (1 балл)

1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++, осуществляющую интерполяцию функции g(t), $t\in[0,2\pi]$, заданной своими значениями $g(t_i)$ ($i=1,\ldots,2n+1$) в узлах $t_i = \frac{2\pi(i-1)}{2n+1}$ равномерной сетки, тригонометрическим многочленом $F_n(x)$ степени n:

$$F_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt).$$

2) Построить линейную замену переменных $x=\alpha t+\beta$, переводящую заданный отрезок [a,b] в отрезок $[0,2\pi]$. Выполнить эту замену переменных в аргументе функции f(x): $f(\alpha t+\beta)=g(t)$.
3) С использованием написанной программы провести вычислительный эксперимент по нахождению минимальной степени m тригонометрического многочлена, обеспечивающего приближение функции с указанным в задании предельным уровнем погрешности Δ:

$$\sup|g(t) - F_m(t)| \le \Delta.$$

Оценку погрешности производить по способу, описанному в Задаче 1.
4) Построить график ошибки приближения функции многочленом.

Наилучшее равномерное приближение

Задача 5. (2 балла)

1) Написать вычислительную программу на языке C++, позволяющую построить многочлен наилучшего равномерного приближения Q_n степени n для произвольного многочлена P_{n+1} степени n+1.
2) С использованием математического пакета (Maple или MATLAB) выполнить разложение заданной функции f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки (a+b)/2 и определить степень n, при которой соответствующий

многочлен $P_n(x)$, представляющий собой отрезок ряда Тейлора, приближает функцию f(x) с указанным в задании предельным уровнем погрешности Δ:

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k, \quad \sup|f(x) - P_n(x)| \le \Delta.$$

3) С использованием написанной программы телескопическим методом построить многочлен Q_m наилучшего равномерного приближения наименьшей степени m, обеспечивающий приближении исходной функции f(x) с той же точностью:

$$\sup|f(x) - Q_m(x)| \le \Delta.$$

4) Построить график ошибки приближения функции многочленом Q_m.

Интерполяция сплайнами

Задача 6. (4 балла)

1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для построения интерполирующего кубического сплайна по значениям функции, известным в узлах равномерной сетки.
2) С использованием написанной программы провести вычислительный эксперимент по определению минимального количества узлов равномерной сетки, обеспечивающих построение интерполирующего сплайна для заданной функции с указанным в задании предельным уровнем погрешности. Погрешность интерполяции оценивать способом, описанным в Задаче 1.
3) Построить график ошибки приближения заданной функции интерполирующим сплайном.

Теоретическая часть

Номер задачи	*Литература*
1	[1] (Глава 2, §2, §3)
2	[1] (Глава 2, §8, §9)
3	[1] (Глава 2, §4, §5), [2] (Глава II, §1, п.3)
4	[1] (Глава 4, §3)
5	[1] (Глава 4, §5, §6)
6	[2] (Глава II, §1, п.9), [1] (Глава 4, §8)

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы.

Индивидуальные задания для выполнения лабораторной работы №1

№ варианта	f(x)	[a,b]	Δ
1	$\frac{e^x}{1+x^2}$	[0,2]	$5\cdot10^{-4}$
2	$\sin(4x^2)$	[0,1]	10^{-5}
3	$x^3\sqrt{1-x^2}$	[-1/2,1/2]	10^{-6}
4	$x^2\cos(\pi x)$	[0,3/2]	10^{-6}
5	$e^{-x}\sin(x)$	[0,2π]	$2\cdot10^{-5}$
6	$x^2\arccos(0.9x)$	[0,1]	$2\cdot10^{-4}$
7	e^{-x^2}	[0,3]	10^{-4}
8	$\sin(x)+x\cos(x)$	[0,2π]	10^{-5}
9	$\ln(x+1)\sin(x)$	[0,3π]	$2\cdot10^{-3}$
10	$\frac{\arctan(x)}{1+x^2}$	[0,2]	10^{-3}
11	$x\sin(x)\cos(2x)$	[0,2]	10^{-7}
12	$\frac{\sin(x)}{x}$	[0,3π]	$5\cdot10^{-5}$
13	x^2e^{-2x}	[0,5]	$2\cdot10^{-5}$
14	$(3x-2)\tan(x^2)$	[0,1]	$5\cdot10^{-4}$
15	$x+\cos(x)$	[0,4π]	10^{-5}

По каждой решенной задаче в обязательном порядке оформляется отчет. Лабораторная работа считается выполненной, если набрано 6 и более баллов.