

División de Polinomios

El Algoritmo de división en $K[x]$ nos da la manera de dividir dos polinomios esto es, que si $p(x), q(x) \in K[x]$, siendo $q(x) \neq 0$, el Algoritmo de la división permite localizar unos únicos polinomios $c(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = q(x)c(x) + r(x)$, siendo $\deg(r) < \deg(q)$. A $r(x)$ se le llama resto de la división de $p(x)$ entre $q(x)$ y a $c(x)$ cociente de la división de $p(x)$ entre $q(x)$. La división del Algoritmo de la división consta de dos partes. En la primera se prueba la existencia de los polinomios $c(x)$ y $r(x)$ y en la segunda parte se prueba su unicidad. Para construir $c(x)$ y $r(x)$ se siguen los siguientes pasos:

1. Si $\deg(p) < \deg(q)$, se elige $c(x) = 0$ y $r(x) = p(x)$.
2. Si $n = \deg(p) \geq \deg(q) = m$ se elige $c_1(x) = a_n b_{-1}^{-1} x^{n-m}$, donde a_n es el coeficiente director de $p(x)$ y b_{-1}^{-1} es el coeficiente director de $q(x)$ y se toma $p_1(x) = p(x) - c_1(x)q(x)$.
3. Si $\deg(p_1) < \deg(q)$, entonces se toma $r(x) = p_1(x)$ y $c(x) = a_{-1}^{-1} n x^{n-m}$.
4. Si $\deg(p_1) \geq \deg(q)$, se reitera el paso 2 pero tomando como $p(x)$ a $p_1(x)$ y se construye un nuevo polinomio $p_2(x) = p_1(x) - c_2(x)q(x)$. Si $\deg(p_2) < \deg(q)$ se elige $c(x) = c_1(x) + c_2(x)$ y $r(x) = p_2(x)$ y si $\deg(p_2) \geq \deg(q)$ se repite el proceso con $p_2(x)$ y así sucesivamente. Observamos que como los polinomios $p_i(x)$ que se van construyendo verifican $\deg(p) > \deg(p_1) > \deg(p_2) > \dots$ llegar a un momento en el que el polinomio obtenido $p_i(x)$ sea de grado menor que $q(x)$. Para finalizar este apartado introducimos el concepto de dividir a : Definición. Sean $p(x), q(x) \in K[x]$, siendo $q(x) \neq 0$. Se dice que $q(x)$ divide a $p(x)$ si $r(x) = 0$, siendo $r(x)$ el resto de la división de $p(x)$ entre $q(x)$. Si $r(x) \neq 0$, entonces se dice que $q(x)$ no divide a $p(x)$. Si $q(x)$ divide a $p(x)$ se escribirá : $q(x)|p(x)$ y en caso contrario $q(x) \nmid p(x)$.

Algoritmo de la división

8.5.1 Definición.

Dados enteros a , b con $b \neq 0$ existen enteros q y r tales que

$$a = bq + r \text{ y } 0 \leq r < |b|$$

Al número a se le llama dividendo.

Al número b se le llama divisor.

Al número q se le llama cociente.

Al número r se le llama residuo.

En el caso particular que a y b sean enteros positivos, se trata de hallar el número de veces que el dividendo contiene al divisor. Este número se llama cociente, y lo que queda se llama residuo.

Ejemplo 5.

Si queremos hallar el resultado de dividir 19 entre 5 tenemos: $19=5 \times 3+4$, es decir, que el cociente es 3 y el residuo 4. Se puede observar que el residuo 4 es mayor que 0 y menor que 5 que es el divisor.

Ejemplo 6.

Si queremos hallar el resultado de dividir 23 entre 7 tenemos: $23=7 \times 3+2$, lo que quiere decir que el cociente es 3 y el residuo es 2.

Cuando el residuo es cero, se dice que la división es exacta y en este caso se cumple que el dividendo es igual al divisor por el cociente.

Si la división es exacta, se dice que el divisor b divide al dividendo a , y esto se simboliza de la manera siguiente $b|a$. Lo anterior motiva la siguiente definición.

Teorema del residuo

Generalmente cuando un polinomio es dividido entre un binomio hay un residuo.

Considere la función polinomial $f(x) = x^2 - 8x + 6$. Divida el polinomio entre el binomio $x - 2$.

Podemos realizar la división en cualquier método.

$$\begin{array}{r} x-6 \\ x-2 \overline{) x^2-8x+6} \\ \underline{x^2-2x} \\ -6x+6 \\ \underline{-6x+12} \\ -6 \end{array}$$

El residuo es -6.

Método división sintética

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -8 & 6 \\ & & 2 & -12 \\ \hline & 1 & -6 & -6 \end{array}$$

El residuo es -6.

Ahora compare el residuo de -6 en $f(2)$.

Des cuenta que el valor de $f(2)$ es el mismo que el residuo cuando el polinomio es dividido entre el binomio $x - 2$. Esto ilustra el teorema del residuo.

Si un polinomio $f(x)$ es dividido entre $x - a$, el residuo es la constante $f(a)$, y $q(x)$ es un polinomio con un grado menor que el grado de $f(x)$.

En otras palabras, el dividendo es igual al cociente por el divisor mas el residuo.

La división sintética es un proceso más sencillo para dividir un polinomio entre un binomio. Cuando es utilizada la división sintética para evaluar una función, es llamada la sustitución sintética.

