4.3 Raíces de un polinomio

Las raíces de un polinomio (también llamadas ceros de un polinomio) son los valores para los cuales, el valor numérico del polinomio es igual a cero.
Recordamos que para calcular el valor numérico de un polinomio hay que sustituir la variable del polinomio por un número. Cuando este valor sea cero, el número corresponderá con la raíz del polinomio

Vamos a verlo mejor con un ejemplo, que te ayudará a identificar los números que son raíces de un polinomio de los que no lo son.

Tenemos el siguiente polinomio:

$$P(x)=x^2+2x-8$$

Vamos a hallar el valor numérico del polinomio para cuando x=1. Para ello, sustituimos la x por 1 y operamos:

$$P(1)=1^2+2.1-8=1+2-8=-5$$

P(1)=-5, que es distinto de 0. Por tanto, 1 no sería un cero o raíz del polinomio P(x).
Vamos a probar con x=2:

$$P(2)=2^2+2.2-8=4+4-8=0$$

P(2)=0, luego 2 es un cero o raíz del polinomio P(x).
Ahora ya queda un poco más claro qué son las raíces de un polinomio ¿no?

Pero tranquilo, no tenemos que ir probando número por número hasta que nos encontremos con ellas.

Por cierto ¿cuántas raíces tiene un polinomio? ¿cómo podemos calcular las raíces de un polinomio de una forma más directa? Esto es lo que veremos en el siguiente apartado.

¿Cómo hallar las raíces de un polinomio?
Cuando buscamos las raíces de un polinomio, buscamos que P(x)=0, por tanto, si directamente igualamos el polinomio a 0, nos quedará una ecuación, cuyas soluciones serán las raíces del polinomio.

Por ejemplo, vamos a calcular las raíces del polinomio anterior. Para ello, lo igualamos a cero y procedemos a resolverlo:

$$x^2+2x-8=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.(-8)}}{2.1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm6}{2}$$

$$x_1=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

Al ser una ecuación de segundo grado, tenemos dos soluciones: x=2 y x=-4, que a su vez son las raíces del polinomio, como podemos comprobar sustituyendo esos números en el polinomio:

$$P(2)=2^2+2.2-8=4+4-8=0$$

$$P(-4)=(-4)^2+2.(-4)-8=16-8-8=0$$

Por tanto, para hallar directamente las raíces de un polinomio, únicamente tenemos que igualar éste a cero y resolver la ecuación.

Y ya no hay más raíces. El número de raíces coincide con el número de soluciones de la ecuación y como consecuencia, coincide con el grado del polinomio o de la ecuación:

Nº de raíces = Nº de soluciones = Grado de la ecuación

Para resolver las ecuaciones de grado igual o mayor a 3 tienes que utilizar la regla de ruffini.

Ahora ya tienes un poco más claro qué son las raíces y cómo se pueden calcular.

Teorema fundamental del álgebra

Carl Friedrch Gauss ha sido uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Contribuyó a muchas ramas de las matemáticas. En 1798, ¡ a los 20 años de edad !, Gauss demostró el teorema fundamental del Álgebra que dice lo siguiente:

Todo polinomio de grado n tiene n raíces.

Es decir que la ecuación

an xn + an-1 xn-1 + an-2 xn-2 + an-3 xn-3 + ... + a3 x3 + a2 x2 + a1 x + a0 = 0

tiene n soluciones. Recordemos que es esta página sólo tendremos polinomios con coeficientes enteros. Observa la tabla anterior, donde escribimos la función, las raíces y la gráfica y verifica que efectivamente para cada polinomio de grado n hay n raíces.

Una forma en la que podemos interpretar este teorema es como sigue, ya que se puede factorizar un polinomio dadas las raíces y hay n raíces para todo polinomio de este grado, entonces:

f(x) = an xn + an-1 xn-1 + an-2 xn-2 + an-3 xn-3 + ... + a3 x3 + a2 x2 + a1 x + a0 = (x - r1) (x - r2) ... (x - rn)

donde r1, r2, ... , rn son las raíces de f(x)

La demostración de este teorema queda lejos del objetivo de esta página sin embargo daremos algunas herramientas para encontrar las n raíces.

Conjunto de posibles raíces

Existe un método para encontrar un conjunto de números, los cuales pueden ser raíces de un polinomio. La regla que mencionarémos aquí es aplicable sólo para polinomios con el coeficiente de la potencia mayor de x igual a 1. Es decir, si f(x) = an xn + an-1 xn-1 + an-2 xn-2 + an-3 xn-3 + ... + a3 x3 + a2 x2 + a1 x + a0 tomarémos a an = 1. Esto es que sólo trabajarémos con polinomios de la siguiente forma:

f(x) = xn + an-1 xn-1 + an-2 xn-2 + an-3 xn-3 + ... + a3 x3 + a2 x2 + a1 x + a0

El conjunto de posibles raíces de f(x) se forma con los divisores de a0 (del término independiente), hay que considerar estos divisores tanto con signo positivo como con negativo.

La forma en que podemos usar esta información del término independiente es la siguiente, puesto que cualquier elemento de este conjunto puede ser raíz de f(x) hay que evaluar a f(x) en algun valor de este conjunto y si el resultado de la evaluación es cero, entonces ese valor escogido es raíz de f(x).

En la siguiente tabla mostramos varios polinomios, los divisores del término independiente y las raíces de los polinomios:

Función	Divisores del término independiente	Raíces
$f(x)= x^2 + x - 12$	1, 2, , 4, 6, 12, -1, -2, -3, , -6, -12	- 4 y 3
$f(x)= x^3 - 4 x^2 + x + 6$	1, , , 6, , -2, -3, -6	- 1, 2 y 3
$f(x)= x^4 - 5 x^2 + 4$	, , 4, , , -4	- 2, - 1, 1 y 2
$f(x)= x^3 - 2 x^2 - 5 x + 6$	, 2, , 6, -1, , -3, -6	1, - 2 y 3

¿Qué hacer cuando tengamos una raíz?

Con lo visto en los apartados anteriores tenemos las herramientas necesarias para encontrar las n raíces de un polinomio. Recordemos que para encontrar una raíz es necesario saber los divisores del término independiente y evaluar nuestro polinomio en con el valor escogido.

Además de haber encontrado una raíz usando el método anterior hemos hallado un factor de nuestro polinomio. Podemos estar seguros de que si r es una raíz de f(x) entonces al dividir f(x) / (x - r) tendrémos como resultado un polinomio de un grado menor a f(x) y como residuo cero.

Así hemos reducido nuestro prolema de encontrar n raíces en otro problema, el encontrar sólo n-1 raíces.