第五章　数据插值方法

第五章　数据插值方法

- 插值的基本概念
- Lagrange插值
- 分段低次插值
- 均差与Newton插值
- Hermite插值
- 三次样条插值

5.1 插值的基本概念

插值： 研究用简单函数为各种离散数据建立连续数学模型的方法.

例. 某地区某年夏季时节间隔 30 天的日出日落时间为

	5月1日	5月31日	6月30日
日出	5：51	5：17	5：10
日落	19：04	19：38	19：50

试分析五、六月份日照时长随时间的变化规律.

日照时间的变化设为 $y(x)=a_0+ a_1x + a_2x^2$,

根据三组数据:

(1, 13.2167)， (31, 14.35)， (61, 14.6667)

导出关于a_0，a_1，a_2的线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 13.21 \\ a_0 + 31a_1 + (31)^2 a_2 = 14.35 \\ a_0 + 61a_1 + (61)^2 a_2 = 14.66 \end{cases}$$

求出a_0，a_1，a_2，即可得到5、6月份的日照时间的变化规律.

定义 已知函数$y=f(x)$在$[a,b]$有定义，且已知它在$n+1$个互异节点

$$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$$

上的函数值

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ \ldots,\ y_n=f(x_n),$$

若存在一个次数不超过n次的多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$$

满足条件 $P_n(x_k)=y_k \quad (k=0,1,\ldots,n)$

则称$P_n(x)$为$f(x)$的**n次插值多项式**.

点$x_0,x_1,\ldots,x_n$称**插值节点**，$f(x)$为**被插值函数**.

$[a,b]$称**插值区间**，点x称**插值点**.

插值点在插值区间内的叫**内插**，否则叫**外插**.

定理　n次插值问题的解是存在而且唯一的.

证明:

设　$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$

是$y=f(x)$在$[a,b]$上的$n+1$个互异节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$的插值多项式，则求$P_n(x)$问题归结为求系数$a_0,a_1,\ldots,a_n$.

由插值条件：$P_n(x_k)=y_k\quad(k=0,1,\ldots,n)$

得关于$a_0,a_1,\ldots,a_n$的$n+1$阶线性方程组

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

其系数行列式

$$V(x_0,x_1,\cdots x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 0}^{n}(x_i-x_j)$$

是范德蒙德（Vandermonde）行列式.

因 $x_i \neq x_j (i \neq j)$ 故上式不为0.

据克莱默（Cramer）法则，方程组解存在且唯一.

故$P_n(x)$存在且唯一.

5.2 Lagrange插值

一、线性插值与抛物插值

1. 线性插值：n=1情形

给定插值节点 x_0, x_1，$y_0=f(x_0)$，$y_1=f(x_1)$.

求线性插值多项式$L_1(x)=a_0+a_1x$，使满足：

$L_1(x_0)=y_0$, $L_1(x_1)=y_1$.

$y=L_1(x)$的几何意义就是过点(x_0, y_0)，(x_1, y_1)的直线.

$L_1(x)$的表达式：

点斜式： $$L_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

可改写为 $$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

由上式可以看出，$L_1(x)$是由两个线性函数

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

的线性组合得到，其系数分别为y_0，y_1. 即

$$L_1(x) = l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1$$

显然，$l_0(x)$及$l_1(x)$也是线性插值多项式，在节点x_0，x_1上满足条件：

$$l_0(x_0)=1\ ,\ l_0(x_1)=0.$$
$$l_1(x_0)=0\ ,\ l_1(x_1)=1.$$

即

$$l_k(x_j)=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}\qquad (j,k=0,1)$$

称$l_0(x)$及$l_1(x)$为线性插值**基函数**.

2. 抛物插值：n=2情形

假定插值节点为x_0, x_1, x_2，求二次插值多项式 $L_2(x)$，使 $L_2(x_j)=y_j \quad (j=0,1,2)$

$y=L_2(x)$的几何意义就是过(x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2) 三点的抛物线.

采用基函数方法，设

$$L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$$

此时基函数$l_0(x), l_1(x), l_2(x)$是二次函数.

基函数$l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$在节点上满足：

$$l_0(x_0)=1\ ,\ l_0(x_1)=0\ ,\ l_0(x_2)=0.$$

$$l_1(x_0)=0\ ,\ l_1(x_1)=1\ ,\ l_1(x_2)=0.$$

$$l_2(x_0)=0\ ,\ l_2(x_1)=0\ ,\ l_2(x_2)=1.$$

即

$$l_k(x_j)=\begin{cases}1 & j=k \\ 0 & j\neq k\end{cases} \qquad (j,k=0,1,2)$$

满足上式的插值基函数很容易求出.

如求$l_0(x)$：因x_1, x_2为其零点，故可表为

$$l_0(x) = A(x-x_1)(x-x_2)$$

其中A为待定系数，由$l_0(x_0)=1$，得

$$A = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

故

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

同理

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

显然 $L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$

满足条件 $L_2(x_j)=y_j \quad (j=0,1,2)$

将$l_0(x), l_1(x), l_2(x)$**代入得**

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

例 已知 $\sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3, \sqrt{16}=4$，求 $\sqrt{7}$.

解 取 $x_0=4, y_0=2$，$x_1=9, y_1=3$，$x_2=16, y_2=4$.

（1）线性插值：

取 $x_0=4, x_1=9$

$$L_1(x)=\frac{9-x}{9-4}\times 2+\frac{x-4}{9-4}\times 3$$

$$\sqrt{7}\approx L_1(7)=\frac{2}{5}(9-7)+\frac{3}{5}(7-4)=\frac{13}{5}=2.6$$

（2）抛物插值：

取x_0=4, x_1=9, x_2=16

$$\sqrt{7} \approx L_2(7)$$

$$=\frac{(7-9)(7-16)}{(4-9)(4-16)}\times 2+\frac{(7-4)(7-16)}{(9-4)(9-16)}\times 3+\frac{(7-4)(7-9)}{(16-4)(16-9)}\times 4$$

$$= 2.6286$$

$$\mathbf{(\sqrt{7} \approx 2.6458)}$$