算法1：（幂法）

1. 输入A,初始向量x,误差限ε,最大迭代次数N;

2. 置$k=1, \lambda=0; y=\dfrac{x}{\max(x)}$;

3. 计算$x=Ay, \quad \alpha=\max(x), \quad y=\dfrac{x}{\alpha}$;

4. 若 $|\lambda-\alpha| < \varepsilon$, 输出$\alpha, y$, 程序终止; 否则, 转5;

5. 若$k<N$, 置$k=k+1, \lambda=\alpha$,转3 ;

   否则输出失败信息, 程序终止.

例　用幂法求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

的按模最大的特征值.

取 $x^{(0)}=(0, 0, 1)^T$, 要求误差不超过10^{-3}.

解　$y^{(0)} = x^{(0)} = (0,0,1)^T,$

$x^{(1)} = Ay^{(0)} = (0,-1,2)^T,\quad \alpha_1 = \max(x^{(1)}) = 2,$

$y^{(1)} = \dfrac{x^{(1)}}{\alpha_1} = (0,-0.5, 1)^T$

$x^{(2)} = Ay^{(1)} = (0.5, -2, 2.5)^T,\ \alpha_2 = \max(x^{(2)}) = 2.5,$

$$y^{(2)} = \frac{x^{(2)}}{\alpha_2} = (0.2, -0.8, 1)^T$$

$$x^{(3)} = Ay^{(2)} = \left(1.2, -2.6, 2.8\right)^T, \ \alpha_3 = \max(x^{(3)}) = 2.8,$$

$$\alpha_4 = 2.9285714,$$

$$\alpha_5 = 2.9756097,$$

$$\alpha_6 = 2.9918619,$$

$$\alpha_7 = 2.9972799,$$

$$\alpha_8 = 2.9990924,$$

$$\alpha_9 = 2.9996973.$$

$$\because \left|\alpha_9 - \alpha_8\right| = \left|2.9996973 - 2.99909241\right| = 0.0006049 \ < 10^{-3}$$

$$\therefore \lambda_1 \approx \alpha_9 = 2.9996973.$$

幂法的适用范围：

- 幂法特别适用于求大型稀疏矩阵的主特征值和相应的特征向量.
- 幂法的收敛速度取决于比值$\left|\lambda_2/\lambda_1\right|$，即

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_{k+1}-\lambda_1}{\alpha_k-\lambda_1}\right|=\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$$

比值越接近1, 收敛速度越慢, 比值越接近0, 收敛越快.

- 若A的主特征值λ_1为实的m重根，即$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m$，且 $|\lambda_1|>|\lambda_{m+1}|\geq|\lambda_{m+2}|\geq\ldots\geq|\lambda_n|$，又设$A$有$n$个线性无关的特征向量，此时幂法仍然适用.

幂法的加速：

（一）原点移位法

λ_i是A的特征值，则$\lambda_i - \lambda_0$是$A - \lambda_0 I$的特征值

$$x^{(k+1)} = (A - \lambda_0 I) x^{(k)}$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_0)^{k+1} [\alpha_1 u_1 + (\frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0})^{k+1} \alpha_2 u_2 + \cdots (\frac{\lambda_n - \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0})^{k+1} \alpha_n u_n]$$

设A有特征值λ_i，且$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots$，取$\lambda_0$使得

$$|\lambda_1 - \lambda_0| > |\lambda_i - \lambda_0| \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

且 $$\frac{\max\limits_{i \neq 1} |\lambda_i - \lambda_0|}{|\lambda_1 - \lambda_0|} < \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$$

用幂法求$A - \lambda_0 I$的按模最大的特征值λ_1^*，

则$\lambda_1 = \lambda_1^* + \lambda_0$，这种方法称为原点移位法.

注：实际应用时，A的特征值不知道，λ无法确定，当收敛速度慢时，可以适当移动原点.

例 $$A=\begin{bmatrix}-4 & 14 & 0\\ -5 & 13 & 0\\ -1 & 0 & 2.8\end{bmatrix}$$

矩阵A的特征值为 $\lambda_1=6,\quad \lambda_2=3,\quad \lambda_3=2.8.$

直接应用幂法求矩阵A的主特征值时，

$$r=\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|=\frac{1}{2}.$$

用原点移位法求主特征值，取λ_0=2.9，此时

$$r=\left|\frac{\lambda_2-\lambda_0}{\lambda_1-\lambda_0}\right|=\frac{0.1}{3.1}=\frac{1}{31}.$$

故原点移位法的收敛速度要快得多.

(二)幂法的埃特肯（Aitken）加速

若$\{a_k\}$收敛于a, 且$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_{k+1}-a}{a_k-a}=c\neq 0$

即$\{a_k\}$线性收敛，当k充分大时,有

$$\frac{a_{k+1}-a}{a_k-a}\approx\frac{a_{k+2}-a}{a_{k+1}-a}$$

$$\Rightarrow \quad a\approx a_k-\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{a_{k+2}-2a_{k+1}+a_k}$$

把上式右端记为 $\hat{a}_k$

$$\hat{a}_k = a_k - \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k}$$

可以证明 $\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \hat{a}_k = a, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\hat{a}_k - a}{a_k - a} = 0. \end{cases}$ 即 $\hat{a}_k \to a$ 比 $a_k \to a$ 快.

- 用 $\{\hat{a}_k\}$ 逼近a, 这就是Aitken加速法.

- 将Aitken方法用于幂法产生的序列$\{\alpha_k\}$, 可加快幂法的收敛速度.

算法2：（幂法加速）

1.输入$A=(a_{ij})$,初始向量x,误差限ε,最大迭代次数N,

2.置$k=1$, $\alpha_0=0$, $\alpha_1=0$, $\lambda_0=1.0$, $y=\dfrac{x}{\max(x)}$,

3.计算 $x=Ay$，置$\alpha_2=\max(x)$，$y=\dfrac{x}{\max(x)}$,

4.计算$\lambda=\alpha_0-\dfrac{(\alpha_1-\alpha_0)^2}{\alpha_2-2\alpha_1+\alpha_0}$,

5.若$|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$，输出$\lambda, y$，程序终止，否则转6；

6.若$k<N$，置$\alpha_0=\alpha_1$，$\alpha_1=\alpha_2$, $\lambda_0=\lambda$，$k=k+1$，转3，

否则，输出失败信息，程序终止.

例 用Aitken加速法求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$

的按模最大的特征值和相应的特征向量, 取 $x^{(0)}=(0, 0, 1)^T$.

解

$$\hat{\alpha}_k=\alpha_k-\frac{(\alpha_{k+1}-\alpha_k)^2}{\alpha_{k+2}-2\alpha_{k+1}+\alpha_k}$$

$\alpha_1=2,$

$\alpha_2=2.5,$

$\alpha_3=2.8,$

$\alpha_4=2.9285714,$

$\alpha_5=2.9756097,$

$\alpha_6=2.9918619.$

$\hat{\alpha}_1=3.25,$

$\hat{\alpha}_2=3.024999,$

$\hat{\alpha}_3=3.0027472,$

$\hat{\alpha}_4=3.0004416.$

（三）对称矩阵的Rayleigh商加速法

定 义 设A对称，$x \neq 0$，则称

$$R(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

为x关于A的Rayleigh商.

公式

$$\begin{cases} y^{(k)} = \dfrac{x^{(k)}}{\max(x^{(k)})} \\ x^{(k+1)} = Ay^{(k)} \\ R(y^{(k)}) = \dfrac{(y^{(k)})^T x^{(k+1)}}{(y^{(k)})^T (y^{(k)})} \end{cases}$$

称为Rayleigh商加速法.

其中

$$R(y^{(k)}) \to \lambda_1, y^{(k)} \to \frac{u_1}{\max(u_1)}$$

注：有了$R(x^{(k)})$，$R(x^{(k+1)})$，$R(x^{(k+2)})$的值，可再用Aitken加速法得到的一个更好的近似值：

因为

$$\frac{R(x^{(k+2)})-\lambda_1}{R(x^{(k+1)})-\lambda_1} \approx \frac{R(x^{(k+1)})-\lambda_1}{R(x^{(k)})-\lambda_1}$$

所以

$$\lambda_1 \approx R(x^{(k+2)}) - \frac{[R(x^{(k+2)})-R(x^{(k+1)})]^2}{R(x^{(k+2)})-2R(x^{(k+1)})+R(x^{(k)})} = \lambda_1^{(k+2)}$$

4.3 反幂法

基本思想：　$Ax=\lambda x \Rightarrow x=A^{-1}(\lambda x)$, 则$A^{-1}x=\dfrac{1}{\lambda}x$

(1)A与A^{-1}的特征值互为倒数,特征向量不变,

求A的按模最小的特征值λ_n

$\Leftrightarrow$求A^{-1}的按模最大的特征值$\dfrac{1}{\lambda_n}$.

(2)计算$x^{(k+1)}=A^{-1}y^{(k)} \Leftrightarrow$解方程组$Ax^{(k+1)}=y^{(k)}$

定理 设A为非奇异矩阵且有n个线性无关的特征向量，其对应的特征值满足

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0,$$

则对任何初始非零向量$x^{(0)}$ ($t_n \neq 0$)，由反幂法构造的向量序列$\{x^{(k)}\}$, $\{y^{(k)}\}$满足

$$(1)\quad \lim_{k\to\infty} y^{(k)} = \frac{u_n}{\max(u_n)}$$

$$(2)\quad \lim_{k\to\infty} \max(x^{(k)}) = \frac{1}{\lambda_n}.$$

收敛速度比值为 $\left|\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|.$

带原点移位的反幂法：

在反幂法中也可用原点移位法来加速迭代过程或求其他特征值及特征向量.

设已知A的一个特征值 λ^* 的近似值 λ, 因为λ 接近λ^*，一般应有

$$0<|\lambda^*-\lambda|<<|\lambda_i-\lambda| \quad (\lambda_i\neq\lambda^*)$$

故$\lambda^*-\lambda$是矩阵$A-\lambda I$的按模最小的特征值，比值$|(\lambda^*-\lambda)/(\lambda_i-\lambda)|$较小. 因此对$A-\lambda I$用反幂法求$\lambda^*-\lambda$一般收敛很快，通常只要迭代二、三次就能达到较高的精度.

原点移位反幂法:

任取初始向量$x^{(0)}=y^{(0)}\neq 0$,

$$\begin{cases} x^{(k+1)}=(A-\lambda I)^{-1}y^{(k)} \\ y^{(k+1)}=\dfrac{x^{(k+1)}}{\max(x^{(k+1)})} \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

迭代向量$x^{(k+1)}$可以通过解方程组求得

$$(A-\lambda I)x^{(k+1)}=y^{(k)}$$

为了节省计算量，可以先对$A-\lambda I$作三角分解

$$A-\lambda I=LU$$

已知 $y^{(k)}$ 求 $x^{(k+1)}$ 可通过下列方式进行

$$(A-\lambda I)x^{(k+1)}=y^{(k)}$$

$$\Leftrightarrow LUx^{(k+1)}=y^{(k)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Lz^{(k+1)}=y^{(k)}, \\ Ux^{(k+1)}=z^{(k+1)}. \end{cases}$$

原点移位反幂法计算公式：

任取初始向量$x^{(0)}=y^{(0)}\neq 0$, 先对$A-\lambda I$作三角分解

$$A-\lambda I = LU$$

用下列计算公式构造向量序列 $\{x^{(k)}\}$, $\{y^{(k)}\}$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} Lz^{(k+1)} &= y^{(k)} \\ Ux^{(k+1)} &= z^{(k+1)} \qquad\qquad (k=0,1,2,\cdots). \end{aligned}\right\} \text{已知} y^{(k)} \text{求} x^{(k+1)}. \\ y^{(k+1)} = \dfrac{x^{(k+1)}}{\max(x^{(k+1)})} \end{cases}$$

在一定条件下，有

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = \dfrac{u}{\max(u)}$ (其中u为$\lambda*$所对应的特征向量)

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} \max(x^{(k)}) = \dfrac{1}{\lambda*-\lambda}$，即

$$\lambda + \frac{1}{\max(x^{(k)})} \to \lambda* \quad (k\to\infty)$$

算法3：（反幂法）

1.输入矩阵A,近似值λ,初始向量x,误差限ε,

最大迭代次数N;

2.置$k=1,\ \lambda_0=1, y=\dfrac{x}{\max(x)}$;

3.作三角分解$(A-\lambda I)=LU$;

4.解方程组$LUx=y(Lz=y,Ux=z)$;

5.$\mu=\max(x),\quad y=\dfrac{x}{\max(x)},\ \lambda^*=\lambda+\dfrac{1}{\mu}$;

6.若$|\lambda^*-\lambda_0|<\varepsilon$,输出$\lambda, y$,程序终止,否则转7;

7.若$k<N$,置$k=k+1,\ \lambda_0=\lambda^*$,转4,

否则输出失败信息,程序终止.

例：用反幂法求矩阵$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$

求按模最小的特征值及特征向量，取$x^{(0)}=(0,0,1)^T$.

解：求A按模最小的特征值及其特征向量

用反幂法

$$x^{(k+1)}=A^{-1}y^{(k)} \quad \Leftrightarrow Ax^{(k+1)}=y^{(k)}$$

将A进行LU分解，

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}=LU$$

$$y^{(0)} = x^{(0)} = (0,0,1)^T$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = A^{-1} y^{(0)} \Leftrightarrow LUx^{(1)} = y^{(0)}$$

$$Lz = y^{(0)} \qquad z = (0,0,1)^T$$

$$Ux^{(1)} = z \qquad x^{(1)} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T \qquad \mu = \frac{2}{3}$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{\mu} = 1.5 \qquad y^{(1)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)^T$$

$$Lz = y^{(1)} \qquad z = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4})^T$$

$$Ux^{(2)} = z \qquad x^{(2)} = (\frac{11}{24}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6})^T \qquad \mu = \frac{5}{6}$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{1}{\mu} = 1.2 \qquad y^{(2)} = (\frac{11}{20}, \frac{4}{5}, 1)^T$$

k	lambda	y1	y2	y3	err
1.0000	1.5000	0.2500	0.5000	1.0000	1.5000
2.0000	1.2000	0.5500	0.8000	1.0000	0.3000
3.0000	1.0714	0.7589	0.9286	1.0000	0.1286
4.0000	1.0244	0.8765	0.9756	1.0000	0.0470
5.0000	1.0082	0.9378	0.9918	1.0000	0.0162
6.0000	1.0027	0.9688	0.9973	1.0000	0.0055
7.0000	1.0009	0.9844	0.9991	1.0000	0.0018
8.0000	1.0003	0.9922	0.9997	1.0000	0.0006

THE

END