

二、Crout分解法：

将矩阵A分解为如下形式：

$$A = \bar{L}\bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{l}_{11} & & & \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{u}_{12} & \cdots & \bar{u}_{1n} \\ & 1 & \cdots & \bar{u}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

计算公式： $\bar{l}_{ir} = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} \bar{l}_{ik} \bar{u}_{kr}, \quad i = r, r+1, \dots, n$

$$\bar{u}_{rj} = (a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} \bar{l}_{rk} \bar{u}_{kj}) / \bar{l}_{rr}, \quad j = r+1, r+2, \dots, n$$

例： 求矩阵A的Crout分解：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 3/2 & -1/3 \\ 3 & 3/2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{l}_{22} \leftarrow 2 - (-1) \times (-\frac{1}{2}); \bar{l}_{32} \leftarrow 0 - 3 \times (-\frac{1}{2}); \bar{u}_{23} \leftarrow [0 - (-1) \times (-\frac{1}{2})] / (\frac{3}{2});$$

$$\bar{l}_{33} \leftarrow [3 - 3 \times (-\frac{1}{2}) - (\frac{3}{2}) \times (-\frac{1}{3})]$$

所以

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ 3 & 3/2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三、对称正定矩阵的Cholesky分解法（平方根法）

• 若 n 阶实矩阵 A 为对称正定矩阵，则：

(1) $A^T = A$;

(2) 对任意的 $X \neq 0$ ，有 $X^T A X > 0$;

(3) A 的各阶顺序主子式大于零.

故 A 可进行 LU 分解：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & u_{n-1,n} \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

记

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & u_{12} / u_{11} & \cdots & u_{1n} / u_{11} \\ & \mathbf{1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & u_{n-1,n} / u_{n-1,n-1} \\ & & & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$= DU_1$$

$$\text{则 } A=LDU_1 \quad \Rightarrow A^T = U_1^T D L^T \quad \Rightarrow U_1=L^T$$

$$\text{即 } A=LDL^T \quad \text{——称} A \text{的} LDL^T \text{分解}$$

若记

$$D = \text{diag}(u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}) = [\text{diag}(\sqrt{u_{11}}, \sqrt{u_{22}}, \dots, \sqrt{u_{nn}})]^2$$

$$\text{则 } U = DU_1 = D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} U_1$$

$$A = LU = LDU_1 = LD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} U_1$$

$$= LD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} L^T = (LD^{\frac{1}{2}})(LD^{\frac{1}{2}})^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$$

$$\text{——称} A \text{的} LL^T \text{分解}$$

LL^T 分解的计算公式:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

对A的第*i*行元素, 有 $\sum_{k=1}^j l_{ik} l_{jk} = a_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, i)$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad \text{对于 } i = 2, 3, \cdots, n$$

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}) / l_{jj} \quad l_{ii} = (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, i-1)$$

LDL^T 分解的计算公式：（无需开方，故称**改进的平方根法**）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ l_{21}d_1 & d_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1}d_1 & l_{n2}d_2 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$d_1 = a_{11}, \quad l_{21} = a_{21}/d_1, \quad \cdots, \quad l_{n1} = a_{n1}/d_1$$

$$d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} d_k l_{ik} \qquad l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}) / d_j$$

$$(i = 2, 3, \cdots, n; \quad j = 1, 2, \cdots, i-1)$$

应用Cholesky分解可将方程组 $Ax = b$ 分解为两个三角形方程组：

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$$

而应用改进的Cholesky分解可将方程组 $Ax = b$ 分解为下面的方程组：

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^T x = D^{-1} y \end{cases}$$

例：用改进的平方根法解方程组 $Ax=b$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 14 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 15 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

解：由 $d_1 = a_{11}, \quad l_{21} = a_{21}/d_1, \quad \cdots, \quad l_{n1} = a_{n1}/d_1$

得 $d_1=1, \quad l_{21}=2, \quad l_{31}=1, \quad l_{41}=-3$

又由 $d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} d_k l_{ik} \quad l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}) / d_j$

得 $d_2=1, \quad l_{32}=-2, \quad l_{42}=1, \quad d_3=9, \quad l_{43}=2/3, \quad d_4=1$

因此可得

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解方程组 $Ly=b$ ，得

$$\begin{cases} y_1 = b_1 = 1 \\ y_2 = b_2 - l_{21}y_1 = 0 \\ y_3 = b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 = 15 \\ y_4 = b_4 - l_{41}y_1 - l_{42}y_2 - l_{43}y_3 = 1 \end{cases}$$

解方程组 $L^T x = D^{-1}y$, 得

$$\begin{cases} x_4 = y_4 / d_4 = 1 \\ x_3 = y_3 / d_3 - l_{43}x_4 = 1 \\ x_2 = y_2 / d_2 - l_{32}x_3 - l_{42}x_4 = 1 \\ x_1 = y_1 / d_1 - l_{21}x_2 - l_{31}x_3 - l_{41}x_4 = 1 \end{cases}$$

最终求得方程组 $Ax=b$ 的解为

$$x=(1,1,1,1)^T$$

例：试用改进的choleskey分解法解方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

解：对系数矩阵A做Doolittle分解

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -0.25 & 2 & -2 \\ 0.25 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -0.25 & 1.75 & -1.75 \\ 0.25 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -0.25 & 1.75 & -1.75 \\ 0.25 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -0.25 & 1 & \\ 0.25 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1.75 & -1.75 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ -0.25 & 1 & \\ 0.25 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 1.75 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} = LDL^T$$

由 $Ly=b$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -0.25 & 1 & \\ 0.25 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{得 } y = \begin{bmatrix} 5 \\ -\frac{7}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{又 } D^{-1}y = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{由 } L^T x = D^{-1}y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{得 } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

四、三对角方程组的数值解法

三对角方程组形式如下：

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} |b_1| > |c_1| > 0 \\ |b_i| \geq |a_i| + |c_i| & \text{且 } a_i c_i \neq 0, \\ |b_n| > |a_n| > 0 \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1)$$

方法一：直接三角分解法

Step 1: 系数矩阵的三角分解: $A=LU$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_2 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ \gamma_2 & \delta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

计算公式:

$$\begin{cases} \delta_1 = b_1, \beta_1 = c_1 / \delta_1, \gamma_k = a_k \\ \delta_k = b_k - a_k \beta_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots, n) \\ \beta_k = c_k / \delta_k \quad (k = 2, 3, \dots, n-1) \end{cases}$$

Step 2: 求解下三角方程组 $Ly=f$

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ \gamma_2 & \delta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

计算公式:

$$\begin{cases} y_1 = f_1 / \alpha_1, \\ y_i = (f_i - a_i y_{i-1}) / \delta_i, \quad (i = 2, \dots, n) \end{cases}$$

Step 3: 求解上三角方程组 $Ux=y$

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

计算公式:

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - \beta_i x_{i+1}, \quad (i = n-1, \dots, 1) \end{cases}$$

例： 求解三对角方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -2 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -2 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & & \\ -1 & 5/2 & -4/5 & \\ & -2 & 12/5 & -5/6 \\ & & -3 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & 5/2 & & \\ & -2 & 12/5 & \\ & & -3 & 5/2 \end{bmatrix} \quad Ly = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [3, 8/5, 4/3, 2]^T$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & & \\ & 1 & -4/5 & \\ & & 1 & -5/6 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad Ux = \begin{bmatrix} 3 \\ 8/5 \\ 4/3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = [5, 4, 3, 2]^T$$

方法二：（追赶法）

基本思想：每一轮消元只对增广矩阵中某两行进行——将主对角元化为1，主对角元下方元素化为零。

即将其系数增广矩阵化为如下形式：

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & \beta_1 & & & & y_1 \\ & 1 & \beta_2 & & & y_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \beta_{n-1} & y_{n-1} \\ & & & & 1 & y_n \end{array} \right]$$

解三对角方程组 $Ax=b$ 的追赶法分“追”和“赶”两个环节：

◆ “追”的过程：（消元过程）

按顺序计算系数 $\beta_1 \rightarrow \beta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \beta_{n-1}$ 和
 $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \dots \rightarrow y_n$ ；

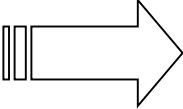
◆ “赶”的过程：（回代过程）

按逆序求出 $x_n \rightarrow x_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ 。

其系数增广矩阵为：

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & f_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & f_{n-1} \\ & & & a_n & b_n & f_n \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = c_1 / b_1$
 $y_1 = f_1 / b_1$


$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & y_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & f_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & f_{n-1} \\ & & & a_n & b_n & f_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & y_1 \\ & 1 & \beta_2 & & y_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & y_{n-1} \\ & & & & 1 & y_n \end{bmatrix}$$

- $\beta_i = c_i / (b_i - a_i \beta_{i-1})$, ($i = 2, 3, \dots, n - 1$)
- $y_i = (f_i - a_i y_{i-1}) / (b_i - a_i \beta_{i-1})$, ($i = 2, 3, \dots, n$)

例： 用追赶法求上例三对角方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -2 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解：

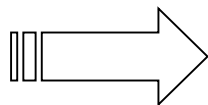
其系数增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 6 \\ -1 & 3 & -2 & & 1 \\ & -2 & 4 & -2 & 0 \\ & & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

《追赶法求解》

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 6 \\ -1 & 3 & -2 & & 1 \\ & -2 & 4 & -2 & 0 \\ & & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

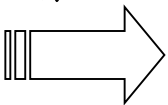
主元单位化



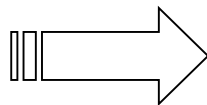
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\ -1 & 3 & -2 & & 1 \\ & -2 & 4 & -2 & 0 \\ & & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & & 4 \\ & -2 & 4 & -2 & 0 \\ & & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

消元

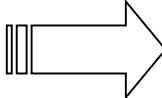


主元单位化



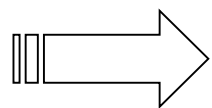
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & & \frac{8}{5} \\ & -2 & 4 & -2 & 0 \\ & & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ & -2 & 4 & -2 & 0 \\ & & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

消元


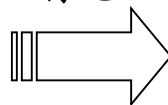
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & -2 & \frac{16}{5} \\ & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

主元单位化



$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \\ & & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

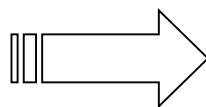
消元



$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{15}{6} & & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \\ & & 0 & \frac{15}{6} & 5 \end{bmatrix}$$

主元单位化



$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \\ & & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

回代可得

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.1.5 向量和矩阵的范数

- 向量的范数
- 矩阵的范数
- 谱半径、谱范数与方阵的 F -范数

(一) 向量的范数

定义 设向量 $x \in R^n$, 若 x 的某个非负实值函数 $N(x) = \|x\|$ 满足条件:

- (1) **非负性**: $\|x\| \geq 0$ 且 $\|x\| = 0$ 的充要条件是 $x = 0$;
- (2) **齐次性**: $\|kx\| = |k| \|x\| \quad (\forall k \in R)$;
- (3) **三角不等式**: 对 $\forall x, y \in R^n$, 有

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

则称 $N(x) = \|x\|$ 为 R^n 上的向量 x 的范数.

注：向量范数是向量长度概念的推广.例如

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

是向量 x 的范数.

定义 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, 则定义:

(1) 向量的“2-范数”: $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

(2) 向量的“ ∞ -范数”: $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$

(3) 向量的“1-范数”: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

(4) 向量的“ p -范数”: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$