二、Romberg求积算法

以复合梯形公式算法为例介绍：

将$[a,b]$ n等分，h为步长，复合梯形公式为

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$$

若将$[a,b]$ $2n$等分，即将求积区间$[x_k,x_{k+1}]$再二分一次，只增加一个分点$x_{k+1/2}=(x_k+x_{k+1})/2$，用复合梯形公式求得该区间的积分值为：

$$\frac{h}{4}[f(x_k) + 2f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})]$$

则

$$T_{2n}=\frac{h}{4}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+2\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(b)]$$

$$=\frac{h}{4}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

分析误差：

$$I-T_n=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta) \qquad \eta\in(a,b)$$

$$I-T_{2n}=-\frac{b-a}{12}(\frac{h}{2})^2f''(\bar{\eta}) \qquad \bar{\eta}\in(a,b)$$

假定 $f''(\eta)\approx f''(\bar{\eta})$

则有 $\dfrac{I-T_{2n}}{I-T_n}\approx\dfrac{1}{4}$ 即 $I-T_{2n}\approx\dfrac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$

若T_{2n}与T_n接近，则T_{2n}误差很小.

这种以计算结果估计误差的方法称事后误差估计法.

若用T_{2n}的误差作为T_{2n}的一种补偿，得

$$\bar{T}=T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$

可能是更好的结果.

由 $\bar{T}=\dfrac{4}{3}T_{2n}-\dfrac{1}{3}T_n$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})\right)-\frac{1}{3}T_n$$

$$\bar{T}=\frac{1}{3}T_n+\frac{4(b-a)}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{1}{3}[\frac{b-a}{2n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)]+\frac{4(b-a)}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{b-a}{6n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})]$$

$$=S_n$$

复合Simpson公式

即T_{2n}与T_n作线性组合，可得Simpson公式的值S_n.

考察Simpson方法，类似推导可得

$$\frac{I-S_{2n}}{I-S_n}\approx\frac{1}{16}$$

即

$$I\approx\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n=C_n$$

复合Cotes公式

重复上述过程，可得Romberg公式：

$$R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$$

上述讨论说明，由梯形公式出发，将$[a,b]$逐次二分可提高精度.

设 $$I - T_n = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) \qquad \eta \in (a,b)$$

若记T_n=$T(h)$，则

$$T(h) = I + \frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) \qquad \lim_{h\to 0} T(h) = T(0) = I$$

将$T(h)$展开成h^2的幂级数形式：

$$T(h) = I + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots + \alpha_k h^{2k} + \cdots$$

（其中α_k与h无关）

当[a,b]$2n$等分时，T_{2n}=$T(h/2)$，

$$T(\frac{h}{2}) = I + \alpha_1 (\frac{h}{2})^2 + \alpha_2 (\frac{h}{2})^4 + \cdots + \alpha_k (\frac{h}{2})^{2k} + \cdots$$

记
$$T_1(h)=\frac{4}{3}T(\frac{h}{2})-\frac{1}{3}T(h)$$

$$=I+\beta_1 h^4+\beta_2 h^6+\cdots \quad （\beta_1，\beta_2,\cdots与h无关）$$

则$T_1(h)$与I的近似阶为$O(h^4)$，且序列$T_1(h),T_1(h/2),\ldots\ldots$即Simpson序列$S_n,S_{2n},\ldots\ldots$.

又
$$T_1(\frac{h}{2})=I+\beta_1(\frac{h}{2})^4+\beta_2(\frac{h}{2})^6+\beta_3(\frac{h}{2})^8+\cdots$$

若令
$$T_2(h)=\frac{16}{15}T_1(\frac{h}{2})-\frac{1}{15}T_1(h)$$

则又可进一步消去h^4项.

记为 $T_2(h)=I+\gamma_1 h^6+\gamma_2 h^8+\cdots$ （γ_1，$\gamma_2,\cdots$与h无关）

序列$T_2(h)$,$T_2(h/2)$,……，即Cotes序列C_n,C_{2n},……，近似阶为$O(h^6)$.

继续下去，每加速一次，误差量级提高2阶.

一般地，若记$T_0(h)=T(h)$，则有

$$T_m(h)=\frac{4^m}{4^m-1}T_{m-1}(\frac{h}{2})-\frac{1}{4^m-1}T_{m-1}(h)$$

经过m次加速后， $T_m(h)=I+O(h^{2m+2})$

上述处理方法称理查森（Richardson）外推加速方法.

设以$T_0^{(k)}$表示二分k次后求得的梯形值，且以$T_m^{(k)}$表示序列$\{T_0^{(k)}\}$的m次加速值，则以外推公式

$$T_m(h) = \frac{4^m}{4^m - 1} T_{m-1}\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{4^m - 1} T_{m-1}(h)$$

得

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m}{4^m - 1} T_{m-1}^{(k+1)} - \frac{1}{4^m - 1} T_{m-1}^{(k)}$$

$(m=1,2,\ldots,k)$

称Romberg求积算法.

T表：

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m}{4^m - 1} T_{m-1}^{(k+1)} - \frac{1}{4^m - 1} T_{m-1}^{(k)}$$

k	h	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	$b-a$	$T_0^{(0)}$				
1	$\frac{b-a}{2}$	$T_0^{(1)}$	$T_1^{(0)}$			
2	$\frac{b-a}{4}$	$T_0^{(2)}$	$T_1^{(1)}$	$T_2^{(0)}$		
3	$\frac{b-a}{8}$	$T_0^{(3)}$	$T_1^{(2)}$	$T_2^{(1)}$	$T_3^{(0)}$	
4	$\frac{b-a}{16}$	$T_0^{(4)}$	$T_1^{(3)}$	$T_2^{(2)}$	$T_3^{(1)}$	$T_4^{(0)}$

计算过程：

（1）取$k=0$，$h=b-a$，求$T_0^{(0)}=h\,[f(a)+f(b)]\,/2$；

由$1\to k$（k为$[a,b]$二分次数）计算：

（2）求梯形值$T_0^{(k)}$；

（3）求加速值. 用Romberg求积公式逐个求出T表的第k行其余元素$T_j^{(k-j)}$，$j=1,2,\ldots,k$；

（4）若$|T_k^{(0)}-T_{k-1}^{(0)}|<\varepsilon$，则中止计算，并取$T_k^{(0)}\approx I$；否则，令$k+1\to k$，转(2)继续.

例3：用Romberg求积算法计算定积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

解：

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9451459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456901	0.9460833	0.9460831	0.9460831

例4：用Romberg求积算法计算定积分 $I=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx$

(取$|T_k^{(0)}-T_{k-1}^{(0)}|<10^{-5}$)

解：

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	0.5					
1	0.426777	0.402369				
2	0.407018	0.400432	0.400302			
3	0.401812	0.400077	0.400054	0.400050		
4	0.400463	0.400014	0.400009	0.400009	0.400009	
5	0.400118	0.400002	0.400002	0.400002	0.400002	0.400002

(I=0.4)