电子科技大学研究生试题

《图论及其应用》 (参考答案)

考试时间： **120** 分钟

一. 填空题 **(**每题 **3** 分，共 **18** 分**)**

1. **4** 个顶点的不同构的简单图共有 __**11**___个；

2. 设无向图 **G** 中有 **12** 条边，已知 **G** 中 **3** 度顶点有 **6** 个，其余顶点的度数均小于 **3**。则 **G** 中顶点数至少有 __**9**___个；

3. 设 **n** 阶无向图是由 **k(k**≥**2)**棵树构成的森林，则图 **G** 的边数 **m=** _**n-k**____**;**

4. 下图 **G** 是否是平面图？答 __是___**;** 是否可 **1-**因子分解？答 __是_**.**

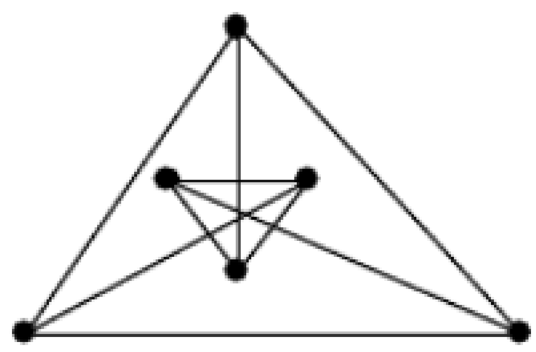


图 G

5. 下图 **G** 的点色数 $\chi(G)$ = ______**,** 边色数 $\chi'(G)$ = __**5**____。

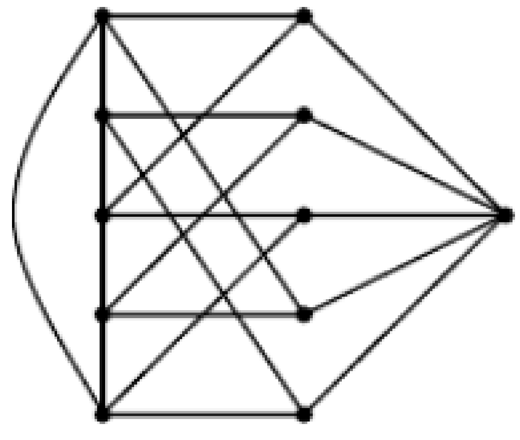


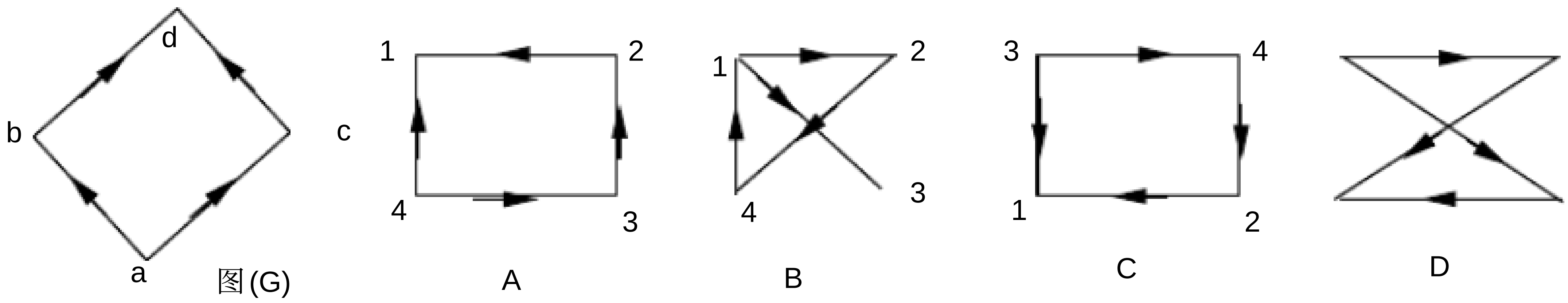
图 **G**

二．单项选择 **(**每题 **3** 分，共 **21** 分**)**

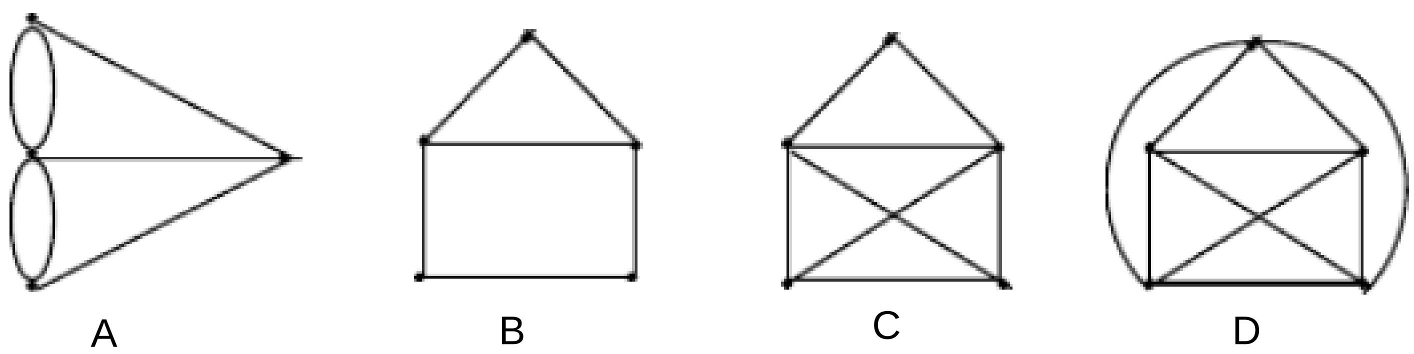
1. 下面给出的序列中，是某简单图的度序列的是 **(A)**

(A) (11123); (B) (233445); (C) (23445); (D) (1333).

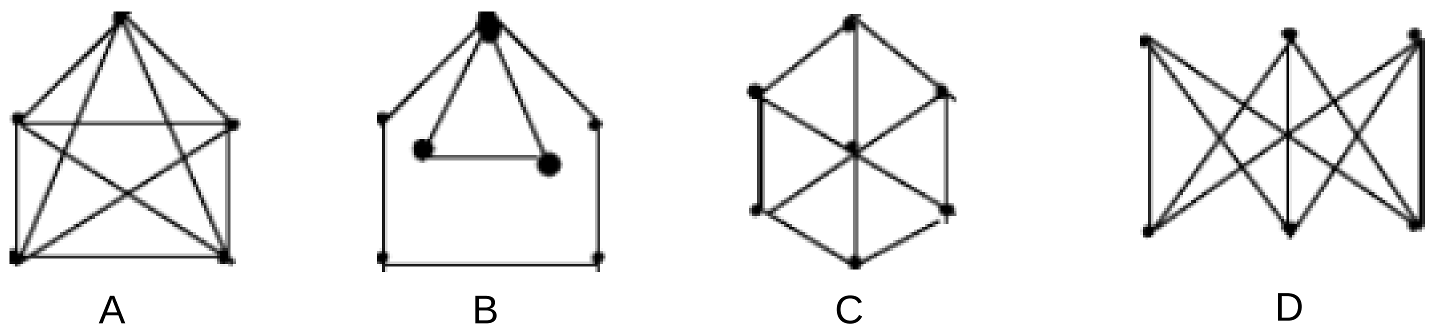
2. 已知图 **G** 如图所示，则它的同构图是（ **D** ）



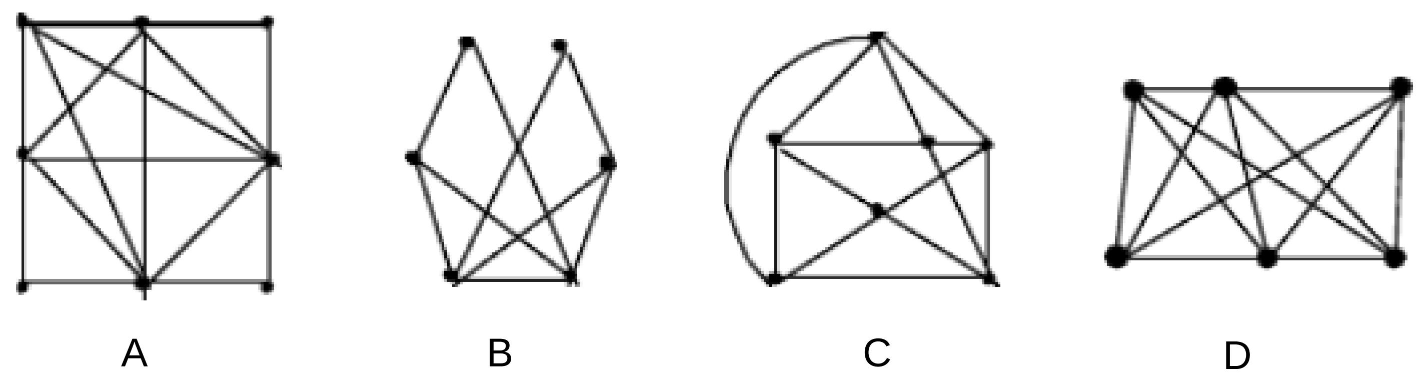
3. 下列图中，是欧拉图的是（ **D**）



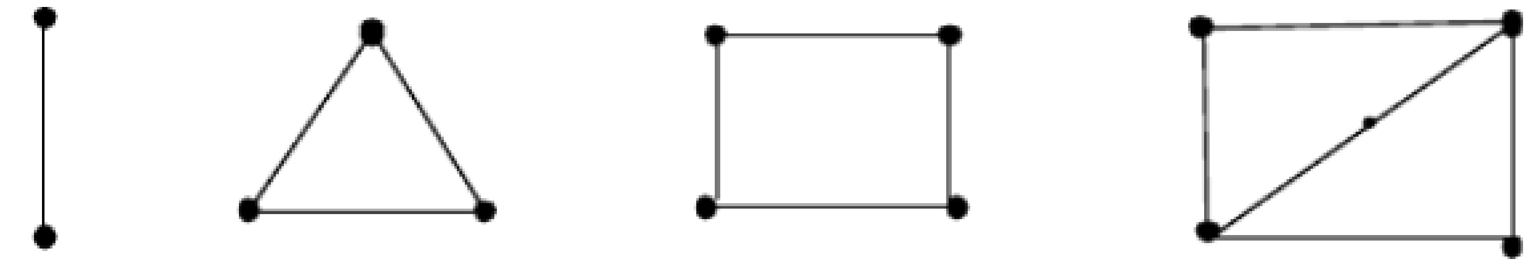
4. 下列图中，不是哈密尔顿图的是（ **B** ）



5. 下列图中，是可平面图的图的是（ **B** ）

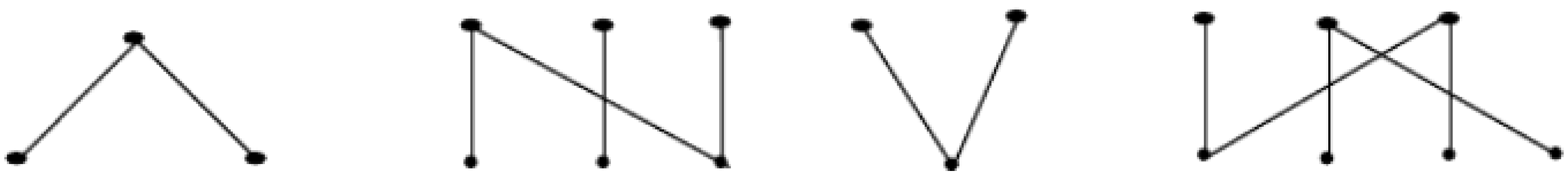


6. 下列图中，不是偶图的是（　 **B** ）



A　　B　　C　　D

7. 下列图中，存在完美匹配的图是（　 **B** ）



A　　B　　C　　D

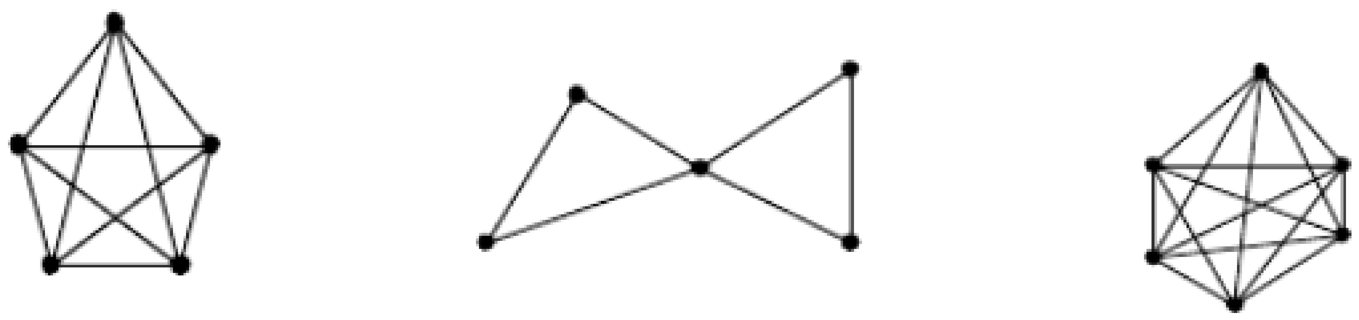
三. 作图 **(6** 分**)**

1. 画出一个有欧拉闭迹和哈密尔顿圈的图；

2. 画出一个有欧拉闭迹但没有哈密尔顿圈的图；

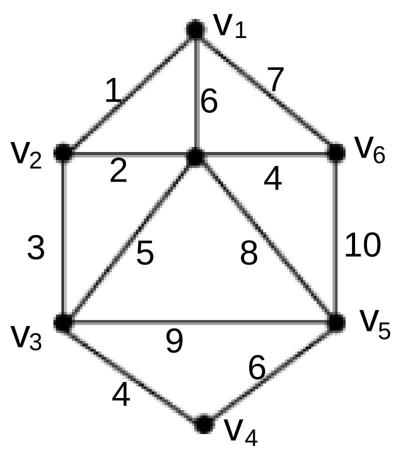
3. 画出一个没有欧拉闭迹但有哈密尔顿圈的图；

解：

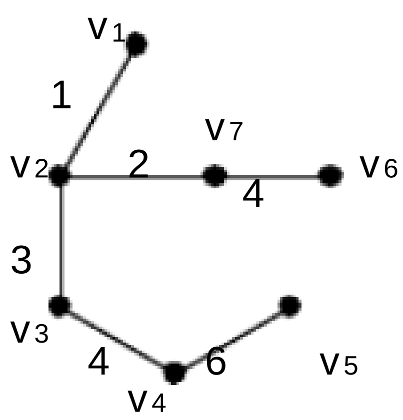


1　　2　　3

四. **(10** 分**)**求下图的最小生成树，并求其最小生成树的权值之和。



解：由克鲁斯克尔算法的其一最小生成树如下图：



最小生成树

权和为： **20.**

五. **(8** 分**)**求下图 **G** 的色多项式 $P_k(G)$.

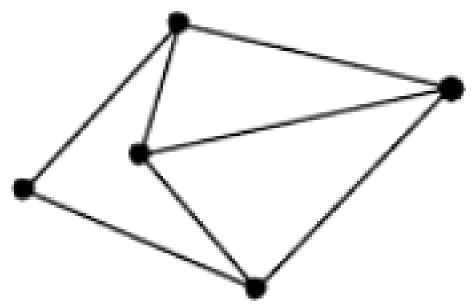


图 G

解：用公式 $P_k(G-e)=P_k(G)+P_k(G\bullet e)$，可得 **G** 的色多项式：

$P_k(G)=(k)_5+3(k)_4+(k)_3=k(k-1)^2(k-2)(k-3)$。

六. **(10** 分**)** 一棵树有 n_2 个顶点的度数为 **2**, n_3 个顶点的度数为 **3**, …, n_k 个顶点的度数为 **k**, 而其余顶点的度数为 **1**, 求 **1** 度顶点的个数。

解：设该树有 n_1 个 **1** 度顶点，树的边数为 **m.**

一方面： $2m=n_1+2n_2+\cdots+kn_k$

另一方面： $m=n_1+n_2+\cdots+n_k-1$

由上面两式可得： $n_1=n_2+2n_3+\cdots+(k-1)n_k$

七．证明：**(8 分)** 设 G 是具有二分类 (X,Y) 的偶图，证明 (1)G 不含奇圈；（2）若 $|X|\neq|Y|$，则 G 是非哈密尔顿图。

证明：(1) 若不然，设 $C=v_1v_2\cdots v_m v_1$ 为 G 的一个奇圈，不妨设 $v_1\in X$，则：$v_m\in X$，这样推出 v_1 与 v_m 邻接，与 G 是偶图矛盾。

(2)若 $|X|\neq|Y|$，设 $|X|>|Y|$，则 $\omega(G-Y)>|Y|$，由 H 图的必要条件，G 为非哈密尔顿图。

八．（8 分）设 G 是边数 m 小于 30 的简单连通平面图，证明 :G 中存在顶点 v，使 $d(v)\le 4$.

证明：若不然，则对任意的 $v\in V(G)$，有 $d(v)\ge 5$，这样，一方面有：

$$2m=\sum d(v)\ge 5n \qquad (1)$$

另一方面，G 为简单连通平面图，有：

$$m\le 3n-6 \qquad (2)$$

由(1)，$n\le\frac{2}{5}m$，把该式代入 (2)得：$m\ge 30$，与题设矛盾。

九．(8 分) 证明：每个没有割边的 3 正则图都有完美匹配。

证明：设 G 是没有割边的 3 正则图，S 是 V 的真子集，用 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 表示 G-S 的奇分支，并设 m_i 是一个顶点在 G_i 中，另一个端点在 S 中的那些边的条数。由于 G 是 3 正则图，所以

$$\sum_{v\in V(G)} d(v)=3|V(G_i)|, \qquad 1\le i\le n \qquad (1)$$

且

$$\sum_{v\in S} d(v)=3|S| \qquad (2)$$

由**(1)**式，$m_i=\sum_{v\in V(G_i)} d(v)-2|E(G_i)|$ 是奇数。又由于 **G** 没有割边，所以 $\mathbf{m_i \neq 1}$

因此，**$m_i \geq 3$， $1 \leq i \leq n$** **(3)**

由**(3)**可得：

$$o(G-S)=n\leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} m_i \leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} d(v)=|S|$$

由托特定理， **G** 中有完美匹配。