练习题

一、填空题

1. 函数 $f(X) = 2x_1^2 + 3x_2^2$ 在 $X = (0,1)^T$ 处的牛顿方向为 ____________.

2. $S = \{X \mid AX \geq b, X \geq 0\}$，$X^0 \in S$ 处的可行方向为____________.

3. 设 $f(X) = X^TQX + b^TX + c$，且 $Q = Q^T$，$X \in R^n$，$b \in R^n$，$c \in R$，考虑问题 $\min_{t>0} f(X^k + tP^k)$，则 X^k 在方向 P^k 上的最优步长 $t^* =$__________.

4. 判断下面的函数是否为凸函数：

   $f_1(X) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$，$f_2(X) = e^{x_1+x_2}$，$f_3(X) = f_1(X) + f_2(X)$，

   $f_4(X) = 3f(X)$

5. 若线性规划 $\max 3x_1 + 4x_2 + x_3$; $s.t.\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10; 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16;$ $x_i \geq 0, i = 1 \sim 3.$ 的最优解 $X^* = (6,2,0)^T$，那么其对偶线性规划的最优解为 $(1,1)^T$.

6. 在两阶段（单纯形）法中，若辅助线性规划的最优值不为零，那么原线性规划的最优解情况为_____________.

7. 若目标函数 $f(X)$ 一次连续可微，那么在迭代点 X^k 处沿下降方向 P^k 进行精确一维搜索后，$\nabla f(X^{k+1})^T P^k =$____________.

8. 写出二种具有二次收敛性的算法：____________.

9. 设 $f(x) = (x - 3/2)^2$，若用黄金分割法求解此问题，设初始搜索区间为 $[0,2]$，则第一次迭代后得到的搜索区间为____________.

10. 若算法得到的迭代点列为 $\{a^{2^k}\}$，$0 < a < 1$，则其收敛速度为__________.

11. 考虑约束优化 $\min\ -x_2\quad s.t.\ (3 - x_1)^3 - (x_2 - 2) \geq 0; 3x_1 + x_2 \geq 9.$ 其 KT 点为 $(3,2)^T, (2,3)^T$.

二、单纯形法：

1

$$\min -3x_1 - 5x_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_j \geq 0, i = 1,2. \end{aligned}$$

-36

A 三、考虑线性规划

K

$$\min f(X) = x_1 + \beta x_2$$

$$s.t.$$

$$-x_1 + x_2 \le 1$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 4$$

$$x_i \ge 0, i = 1, 2.$$

试用图解法讨论，当β取何值时，（1）以$(2,3)^T$为唯一最优解；（2）具有无穷多个最优解；（3）不存在有界的最优解。

四、两阶段法：

11

$$\min -x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$s.t.$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -4$$

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$x_j \ge 0, i = 1, \cdots, 4.$$

−6

五、已知用单纯形方法求解某一线性规划的初始单纯形表：

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	b
b 2	c 4	d -2	1	0	6
−1	3	e 2	0	1	1
a 5	−1	2	0	0	

和最终单纯形表

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	b
g 1	2	−1	1/2	0	f 3
h 0	i 5	1	1/2	1	4
0	−7	5 j	-3/2 k	0 1	

试求$a \sim l$.

√ 六、试用外点法求解如下约束优化问题

$(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$

$$\min f(X) = x_1^2 + x_2^2$$

$$s.t. \quad 2x_1 + x_2 - 4 \ge 0$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

七、已知下面线性规划的对偶规划的最优解为$(5/3, 7/3)^T$，试利用对偶理论求下面问题的最优解.

$\left(\frac{76}{57}, \frac{1}{3}, 0\right)$

$$\min\ 4x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$s.t.\quad \begin{aligned} & x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ & x_i \geq 0, i = 1,2,3. \end{aligned}$$

$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \\ f = 19/3 \end{cases}$

八、试叙述惩罚函数法的基本思想及其优缺点；并用外部惩罚函数法求解下面的优化问题：$(0,1)$

$$\min\ x_1^2 + x_2^2$$
$$s.t.\quad \begin{aligned} & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

$-2x_1 - x_2 \geq -2$

九、*Fletcher - Reeves* 共轭梯度法：这里 $X^0 = (5,5)^T$.

$(0,0)$

$$\min\ x_1^2 + 2x_2^2$$

十、写出 *Rosen* 梯度投影法：这里 $X^0 = (2,0)^T$.

$(0,0)^T$

(1)
$$\min\ f(X) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2$$
$$s.t.\quad \begin{aligned} & x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(2)
$$\min\ f(X) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_2$$
$$s.t.\quad \begin{aligned} & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_j \geq 0, j = 1,2. \end{aligned}$$

$(2,0)^T$

十一、求出下面问题的 *KT* 点.

$(3,-1)^T$

(1)
$$\min\ -14x_1 + x_1^2 - 6x_2 + x_2^2$$
$$s.t.\quad \begin{aligned} & -x_1 - x_2 + 2 \geq 0; \\ & -x_1 - 2x_2 + 3 \geq 0. \end{aligned}$$

(2)
$$\min\ -x_2$$
$$s.t.\quad \begin{aligned} & (3 - x_1)^2 - (x_2 - 2) \geq 0; \\ & 3x_1 + x_2 \geq 9. \end{aligned}$$

$(3,2)^T$

$(1,6)^T$

$(2,3)^T$