2.3 迭代法及其收敛性

- 不动点迭代法
- 不动点的存在性与迭代法的收敛性
- 迭代收敛的加速方法

迭代法的基本思想：

迭代法是一种逐次逼近的方法，用某个固定公式反复校正根的近似值，使之逐步精确化，最后得到满足精度要求的结果.

例：求方程 $x^3-x-1=0$ 在 $x=1.5$ 附近的一个根.

解：将所给方程改写成

$$x=\sqrt[3]{x+1}$$

假设初值$x_0=1.5$是其根，代入得

$$x_1=\sqrt[3]{x_0+1}=\sqrt[3]{1.5+1}=1.35721$$

$x_1 \neq x_0$，再将x_1代入得

$$x_2 = \sqrt[3]{x_1 + 1} = \sqrt[3]{1.35721 + 1} = 1.33086$$

$x_2 \neq x_1$，再将x_2代入得

$$x_3 = \sqrt[3]{x_2 + 1} = \sqrt[3]{1.33086 + 1} = 1.32588$$

如此下去，这种逐步校正的过程称为迭代过程.
这里用的公式称为迭代公式，即

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1} \qquad k=0,1,2,\ldots\ldots$$

迭代结果见下表：

k	x_k	k	x_k
0	1.5	5	1.32476
1	1.35721	6	1.32473
2	1.33086	7	1.32472
3	1.32588	8	1.32472
4	1.32494		

仅取六位数字，x_7与x_8相同，即认为x_8是方程的根.

$$x^* \approx x_8 = 1.32472$$

2.3.1 不动点迭代法

将连续函数方程$f(x)=0$改写为等价形式：$x=\varphi(x)$

其中$\varphi(x)$也是连续函数，称为迭代函数.

不动点：若x^*满足$f(x^*)=0$，则$x^*=\varphi(x^*)$；反之，若$x^*=\varphi(x^*)$，则$f(x^*)=0$，称x^*为$\varphi(x)$的一个不动点.

不动点迭代： $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ $(k=0,1,\ldots\ldots)$

若对任意$x_0\in[a,b]$，由上述迭代得序列$\{x_k\}$，有极限

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

则称迭代过程收敛，且$x^*=\varphi(x^*)$为$\varphi(x)$的不动点.

不动点迭代法的MATLAB程序：

```
function [root,n]=stablepoint_solver(phai,x0,tol)
if(nargin==2)
    tol=1.0e-5;
end
err=1;
root=x0;
n=0;
while(err>tol)
    n=n+1; %迭代次数
    r1=root;
    root=feval(phai,r1); %计算函数值
    err=abs(root-r1);
end
```

程序应用示例:

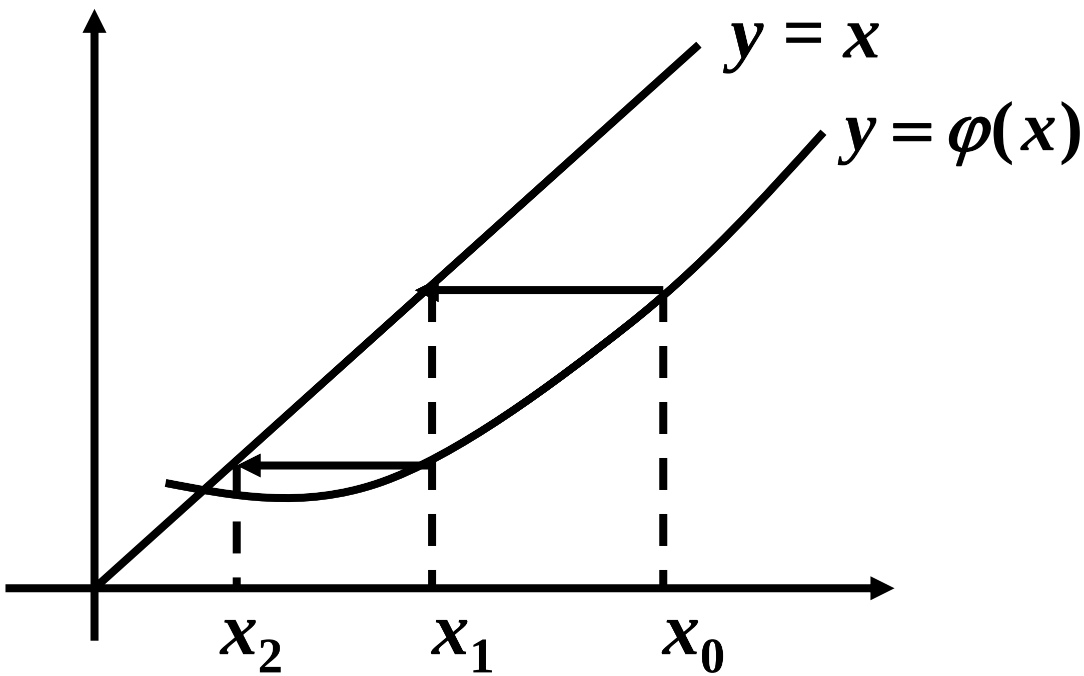
```
function testmain
% x^3-x-1=0
% =>x=(1+x)^(1/3)
ph=inline('(1+x)^(1/3)','x');
[root,n]=stablepoint_solver(ph,1)
```

运行结果:

```
root=1.3247
n=8
```

几何意义：

$$x=\varphi(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y=\varphi(x) \end{cases}$$



但迭代法并不总令人满意，如将前述方程$x^3-x-1=0$改写为另一等价形式：

$$x=x^3-1$$

建迭代公式： $x_{k+1}=x_k^3-1$

仍取初值$x_0=1.5$,

则有$x_1=2.375$， $x_2=12.396$，$x_3=1904$,

结果越来越大.

此时称迭代过程发散.

例: 已知方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有一个根，分别用以下两种格式进行迭代，分析迭代结果:

(1) $x = \sqrt{10 - x^3} / 2$ $\qquad \varphi(x) = \sqrt{10 - x^3} / 2$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$x_0 = 1.5$$

(2) $x = \sqrt{10 / (x + 4)}$ $\qquad \varphi(x) = \sqrt{10 / (x + 4)}$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$x_0 = 1.5$$

```
y=inline('0.5*sqrt(10-x^3)');
x0=1.5;eps=1;k=0;
while eps>0.00001
   x=y(x0);
   eps=abs(x-x0);
   x0=x;k=k+1;
end
```

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

```
roots([1,4,0,-10])
ans =
  -2.6826 + 0.3583i
  -2.6826 - 0.3583i
   1.3652
```

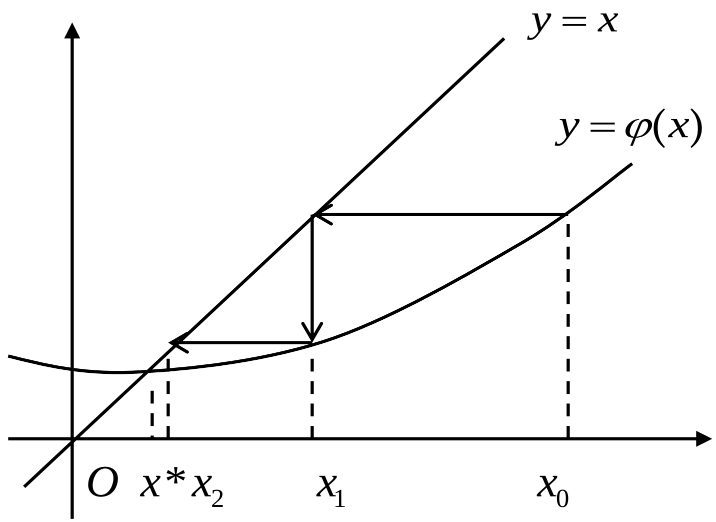
```
y=inline('sqrt(10/(4+x))');
x0=1.5;eps=1;k=0;
while eps>0.00001
   x=y(x0);
   eps=abs(x-x0);
   x0=x;k=k+1;
end
```

$k=16$

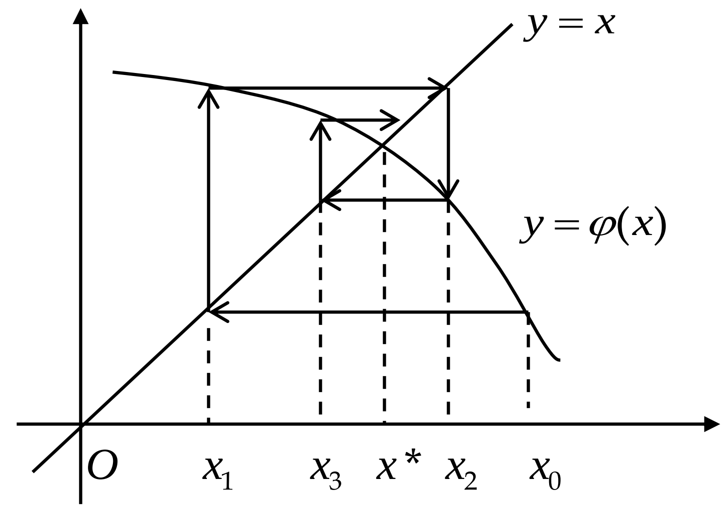
$x_0=1.3652$

$k=6$

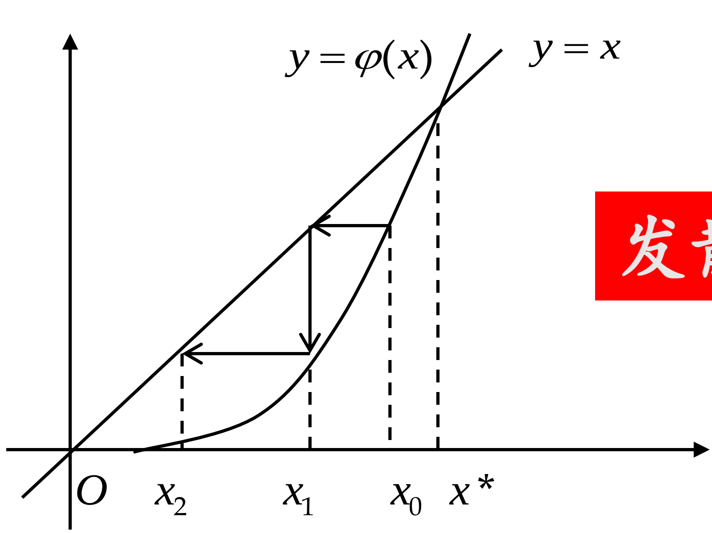
$x_0=1.3652$



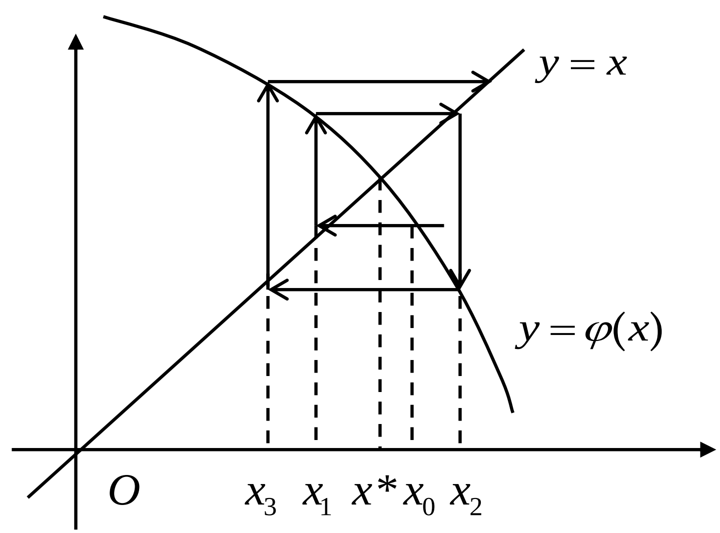
收敛



$\varphi(x)$在x^*附近较平缓



发散



$\varphi(x)$在x^*附近较陡峭

不动点迭代法需要研究的问题：

- 构造有效的迭代格式
- 选取合适的迭代初值
- 对迭代格式进行收敛性分析

2.3.2 不动点的存在性与迭代法的收敛性

定理3（存在性） 设$\varphi(x)\in C[a, b]$且满足以下两个条件：

- （1）对于任意$x \in[a, b]$，有$a\le\varphi(x)\le b$；
- （2）若$\varphi(x)$在$[a, b]$一阶连续，且存在常数$0<L<1$，使得对任意$x \in[a, b]$，成立

$$| \varphi`(x)| \le L$$

则$\varphi(x)$在$[a, b]$上存在唯一的不动点x^*.

不动点的存在性证明：

证： 若 $\varphi(a)=a$ 或 $\varphi(b)=b$

显然 $\varphi(x)$ 有不动点；

否则，设 $\varphi(a)\neq a$ $\varphi(b)\neq b$

则有 $\varphi(a)>a$ $\varphi(b)<b$ （因 $a\leq\varphi(x)\leq b$）

记 $\psi(x)=\varphi(x)-x$ 则有 $\psi(a)\cdot\psi(b)<0$

故存在 x^* 使得 $\psi(x^*)=0$

即 $\varphi(x^*)=x^*$ x^* 即为不动点.

不动点存在的唯一性证明：

设有 $x_1^* \neq x_2^*$, 使得 $\varphi(x_1^*) = x_1^*$ $\varphi(x_2^*) = x_2^*$

则 $|x_1^* - x_2^*| = |\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)| = |\varphi'(\xi)||x_1^* - x_2^*|$

其中，ξ介于 x_1^* 和 x_2^* 之间.

由定理条件 $|\varphi'(x)| \leq L < 1$

可得 $|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|$ 矛盾！

故 $x_1^* = x_2^*$，不动点唯一存在.

定理4（全局收敛性）

设$\varphi(x)\in C[a,b]$且满足以下两个条件：

（1）对于任意$x\in[a,b]$，有$a\le\varphi(x)\le b$；

（2）若$\varphi(x)$在$[a,b]$一阶连续，且存在常数$0<L<1$，使得对任意$x\in[a,b]$，成立$|\varphi`(x)|\le L$

则对任意$x_0\in[a,b]$，由$x_{n+1}=\varphi(x_n)$得到的迭代序列$\{x_n\}$收敛到$\varphi(x)$的不动点x^*，并有误差估计：

$$|x_n-x^*|\le\frac{1}{1-L}|x_{n+1}-x_n|$$

$$|x_n-x^*|\le\frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$$

证明：

$$\begin{cases} x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ x^* = \varphi(x^*) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} |x_n - x^*| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| \\ &= |\varphi'(\xi)||x_{n-1} - x^*| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |x_n - x^*| \le L|x_{n-1} - x^*|$$

$$|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*|$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| \le \lim_{n\to\infty} L^n |x_0 - x^*| = 0 \qquad (0<L<1)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ 故迭代格式收敛.

$$|x_n - x^*| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*|$$

$$\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x^*| \le |x_n - x_{n+1}| + L|x_n - x^*|$$

$$\Longrightarrow \quad (1-L)|x_n - x^*| \le |x_n - x_{n+1}|$$

$$\Longrightarrow \quad |x_n - x^*| \le \frac{1}{1-L}|x_{n+1} - x_n|$$

反复递推，可得误差估计式

$$|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

定理4给出的收敛性称全局收敛性，实际应用时通常只在不动点x^*邻近考察其收敛性，称局部收敛性.

定义 设$\varphi(x)$有不动点x^*，若存在x^*的某邻域R：$|x-x^*|\le\delta$，对任意$x_0\in R$，迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}\in R$且收敛到x^*，则称不动点迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$**局部收敛**.

定理5（局部收敛性） 设x^*为$\varphi(x)$的不动点，$\varphi`(x)$在$x^*$的某邻域连续，且$|\varphi`(x^*)|<1$，则不动点迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$局部收敛.

证明： 根据连续函数性质，因$\varphi`(x)$连续，存在$x^*$的某邻域$R$：$|x-x^*|\le\delta$，对任意$x\in R$，$|\varphi`(x)|\le L<1$，且

$$|\varphi(x)-x^*| = |\varphi(x)-\varphi(x^*)| = |\varphi`(\xi)|\,|x-x^*|$$

$$\le L\,|x-x^*| \le |x-x^*| \le \delta$$

即对任意$x\in R$，总有$\varphi(x)\in R$.

由全局收敛性定义知，迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$对于任意初值$x_0\in R$均收敛.

例 用不同方法求 $x^2-3=0$ 在x=2附近的根.

解: 格式（1） $$x_{k+1}=x_k^2+x_k-3$$

格式（2） $$x_{k+1}=\frac{3}{x_k}$$

格式（3） $$x_{k+1}=x_k-\frac{1}{4}(x_k^2-3)$$

格式（4） $$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{3}{x_k})$$

取x_0=2，对上述四种方法，计算三步所得结果如下：

k	x_k	(1)	(2)	(3)	(4)
0	x_0	2	2	2	2
1	x_1	3	1.5	1.75	1.75
2	x_2	9	2	1.73475	1.732143
3	x_3	87	1.5	1.732361	1.732051

注：x^*=1.7320508……