

第八章 常微分方程的数值解

第八章 常微分方程的数值解

- 引言
- 简单的数值方法
- **Runge-Kutta方法**
- 单步法的收敛性和稳定性
- 线性多步法
- 一阶常微分方程组和高阶方程

8.1 引言

在高等数学中我们见过以下常微分方程：

$$(1) \begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y'' = f(x, y, y') & a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0, y'(a) = \alpha \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y'' = f(x, y, y') & a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0, y(b) = y_n \end{cases}$$

(1), (2)式称为初值问题, (3)式称为边值问题.

在实际应用中还经常需要求解常微分方程组：

$$(4) \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) & y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) & y_2(x_0) = y_{20} \end{cases}$$

本章主要研究问题(1)的数值解法, 对(2)~(4)只作简单介绍.

考虑一阶常微分方程初值问题 (1)
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

其中, $y = y(x)$ 是未知函数, $y(x_0) = y_0$ 是初值条件, 而 $f(x, y)$ 是给定的二元函数.

由常微分方程理论知, 若 $f(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 连续且 f 满足对 y 的Lipschitz条件:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

(其中 L 为Lipschitz常数) 则初值问题 (1) 存在唯一的连续解.

求问题 (1) 的数值解, 就是要寻找解函数在一系列离散节点 $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$ 上的近似值 y_1, y_2, \dots, y_n .

为了计算方便, 可取 $x_n = x_0 + nh$, ($n=0, 1, 2, \dots$), h 称为步长.

- 常微分方程的数值解法有单步法和多步法之分:

- **单步法:** 在计算 y_{n+1} 时只用到前一点 y_n 的值;

- **多步法:** 计算 y_{n+1} 时不仅利用 y_n , 还要利用 y_{n-1}, y_{n-2}, \dots , 一般 k 步法要用到 $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-k+1}$.

8.2 简单的数值方法

一、欧拉 (Euler) 方法

在 $x = x_0$ 处，用差商代替导数：

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$$

由 $y'(x_0) = f(x_0, y_0), \quad y(x_0) = y_0$

得 $y(x_1) \approx y_0 + hf(x_0, y_0) = y_1$

同理，在 $x=x_n$ 处，用差商代替导数：

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

由 $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$

得 $y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y_n)$

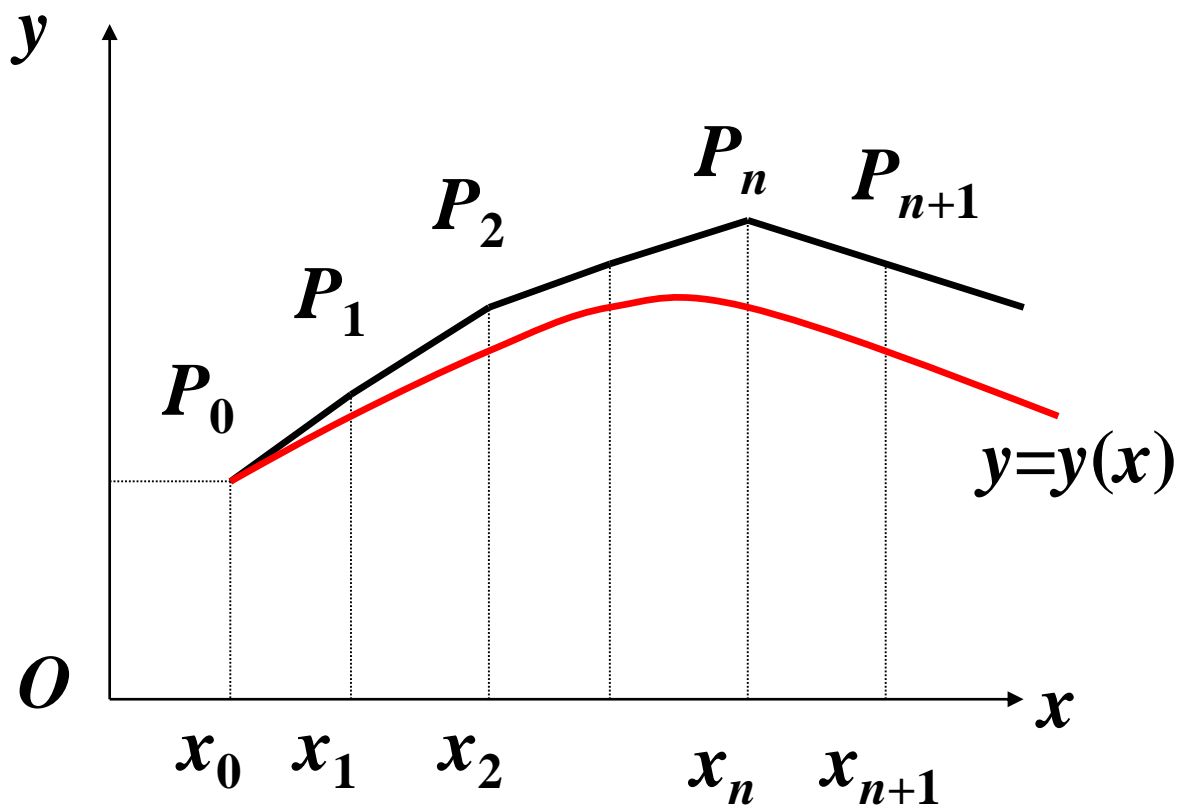
若记 $y(x_n) \approx y_n, \quad y(x_{n+1}) \approx y_{n+1}$

则上式可记为 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

此即为求解初值问题的**Euler方法**，又称**显式Euler方法**。

Euler方法的几何意义：

(Euler折线法)



例：用Euler方法求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - 2y^2 & (0 < x < 3) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

并将数值解和该问题的解析解比较.

解析解：

$$y(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

解： Euler方法的具体格式：

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{y_n}{x_n} - 2y_n^2\right)$$

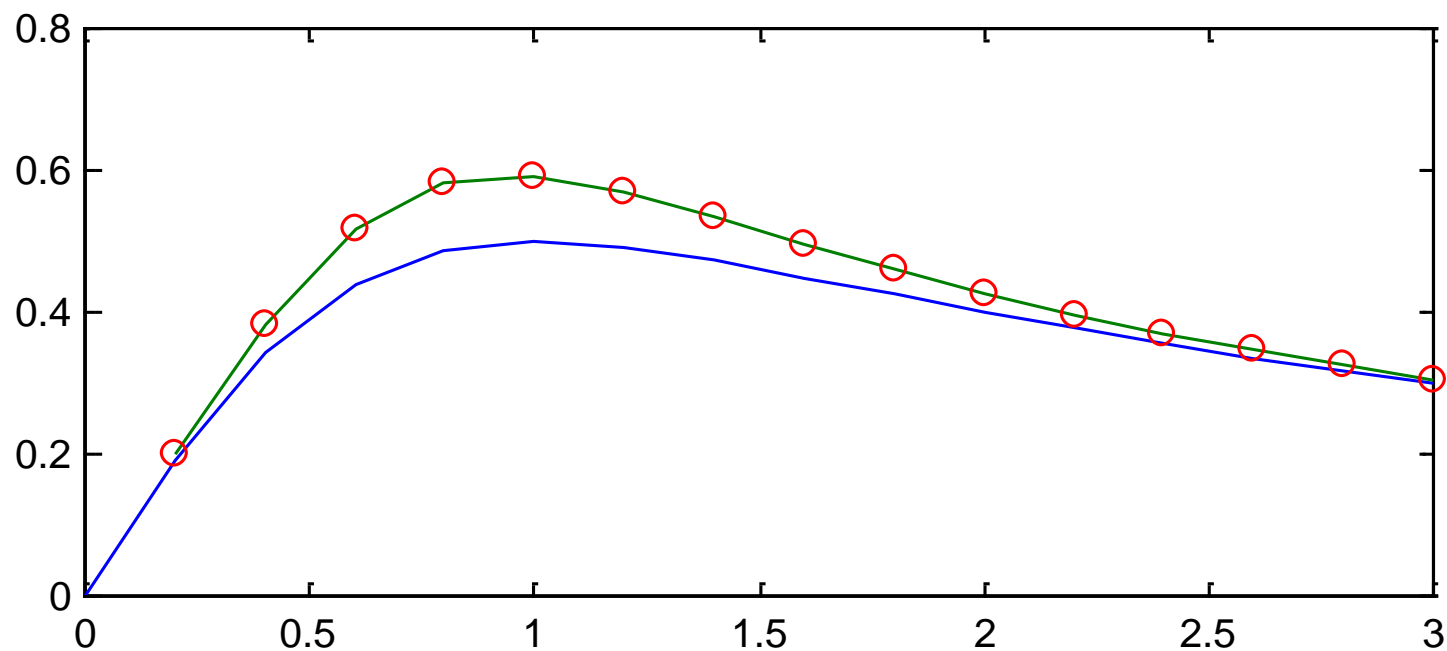
取 $h=0.2$, $x_n=nh, (n=0,1,2,\dots,15)$, $f(x,y)=y/x - 2y^2$ 计算中取 $f(0,0)=1$. 计算结果如下:

x_n	$y(x_n)$	y_n	$y_n-y(x_n)$
0.0	0	0	0
0.2	0.1923	0.2000	0.0077
0.4	0.3448	0.3840	0.0392
0.6	0.4412	0.5170	0.0758
0.8	0.4878	0.5824	0.0946
1.0	0.5000	0.5924	0.0924
1.2	0.4918	0.5705	0.0787
1.4	0.4730	0.5354	0.0624

x_n	$y(x_n)$	y_n	$y_n - y(x_n)$
1.6	0.4494	0.4972	0.0478
1.8	0.4245	0.4605	0.0359
2.0	0.4000	0.4268	0.0268
2.2	0.3767	0.3966	0.0199
2.4	0.3550	0.3698	0.0147
2.6	0.3351	0.3459	0.0108
2.8	0.3167	0.3246	0.0079
3.0	0.3000	0.3057	0.0057

由表中数据可以看到，微分方程初值问题的数值解和解析解的误差一般在小数点后第二位或第三位小数上，这说明Euler方法的精度是比较差的。

数值解和解析解的图示比较如下：



○：数值解；—：准确解

若直接对 $y'=f(x,y)$ 在 $[x_n, x_{n+1}]$ 积分,

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

利用数值积分中的左矩形公式:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx h \cdot f(x_n, y(x_n))$$

设 $y(x_n) = y_n$, 则得

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

此即为**Euler公式**.

若用右矩形公式:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx h \cdot f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

$$\text{得 } y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

上式称**后退的Euler方法**，又称**隐式Euler方法**。

可用迭代法求解：

$$\text{初值： } y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$\text{迭代： } y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) \quad k=0,1,\dots$$

$$\begin{aligned} \text{因 } \left| y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1} \right| &= h \left| f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right| \\ &\leq hL \left| y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1} \right| \end{aligned}$$

故当 $hL < 1$ 时，迭代法收敛。

二、梯形方法

由 $y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$

利用梯形求积公式：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]$$

得 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$

上式称**梯形方法**，是一种隐式方法。

用迭代法求解：

初值： $y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$

迭代： $y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})]$

$k=0,1,\dots$

因
$$\begin{aligned} |y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}| &= \frac{h}{2} |f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1})| \\ &\leq \frac{hL}{2} |y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}| \end{aligned}$$

故当 $hL/2 < 1$ 时，迭代法收敛。

由以上分析可以看出，隐式方法的计算比显式方法复杂，需要用迭代法求解非线性方程才能得出计算结果。

可采用将显式Euler格式与梯形格式结合使用的方法来避免求解非线性方程。

$$\text{记 } \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

——预测

再用梯形格式计算：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]$$

——校正

上面两式统称预测—校正法，

又称改进的Euler方法。

三、单步法的局部截断误差和精度

单步法的一般形式为：（ φ 与 f 有关）

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, y_{n+1}, h)$$

显式单步法形式为：

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$$

整体截断误差：从 x_0 开始，考虑每一步产生的误差，直到 x_n ，则有误差

$$e_n = y(x_n) - y_n$$

称为数值方法在节点 x_n 处的整体截断误差。

但 e_n 不易分析和计算，故只考虑从 x_n 到 x_{n+1} 的局部情况。

定义： 设 $y(x)$ 是初值问题(1)的精确解，则称

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi(x_n, y(x_n), h)$$

为显式单步法在节点 x_{n+1} 处的**局部截断误差**。

若存在最大整数 p 使局部截断误差满足

$$T_{n+1} = y(x_n + h) - y(x_n) - h\varphi(x_n, y_n, h) = O(h^{p+1})$$

则称显式单步法具有 **p 阶精度**或称 **p 阶方法**。

注：将 T_{n+1} 表达式各项在 x_n 处作Taylor展开，可得具体表达式。

Euler方法的局部截断误差：

(设 $y_n=y(x_n)$)

$$\begin{aligned}T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)) \\&= y(x_n + h) - y(x_n) - hy'(x_n) \\&= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(\varepsilon_n) - y(x_n) - hy'(x_n) \\&= \frac{h^2}{2} y''(\varepsilon_n) = \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3) \quad \varepsilon_n \in (x_n, x_{n+1})\end{aligned}$$

其中 $(h^2 / 2)y''(x_n)$ 称局部截断误差主项.

故 $T_{n+1}=O(h^2)$, $p=1$, 即Euler方法具1阶精度.

梯形方法的局部截断误差：

(设 $y_n=y(x_n)$)

$$\begin{aligned}T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2}[y'(x_n) + y'(x_{n+1})] \\&= hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) \\&\quad - \frac{h}{2}[y'(x_n) + y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2}y'''(x_n)] + O(h^4) \\&= -\frac{h^3}{12}y'''(x_n) + O(h^4)\end{aligned}$$

故 $T_{n+1}=O(h^3)$, $p=2$,

梯形方法具2阶精度.

局部截断误差主项为：

$$-(h^3/12)y'''(x_n)$$