1.（0，-1）

考点	牛顿方向
优化类型	无约束优化问题
思路	二次函数近似目标函数，求近似最优值。（对负梯度方向进行旋转） $\nabla^2 f(X^k)P^k = -g^k$

2. $\{P \mid A'P \geq 0\}$

考点	可行方向
问题定义	存在$\delta \geq 0$对于 $\lambda \in (0,\delta)$，满足$X^{k+1} = X^k + \lambda P^k$在可行域内
思路	保证可行方向与**积极约束**的梯度夹角小于 90 度

3. $-\dfrac{\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}^k)^T \boldsymbol{P}^k}{2\cdot(\boldsymbol{P}^k)^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^k}$

考点	最优步长
问题定义	对一元函数$\varphi(t) = f(X^k + tP^k)$沿方向$P^k$求极小值的问题（一维搜索或直线搜索）
思路	最优质在梯度为 0 的地方取得

4.都是

考点	凸函数 （凸函数和严格凸函数）
问题定义	函数任意两点的连线在对应曲线的上方
思路	对应 Hesse 矩阵为正定矩阵，为严格凸函数； 半正定为凸函数

5. $(1,1)^T$.

考点	对偶线性规划 松弛定理
思路	➢ 对偶规划有最优解的充要条件： 两者都有可行解 ➢ $C^T X = b^T W$，则 X 与 W 为两个优化问题的最优解 ➢ 一个规划有最优解，则另一个必有最优解，且相等 ➢ 松弛定理，X,W 是可行解，则是最优解的充要条件： $(A^T W - C)^T X = 0$ $W^T(AX - b) = 0$

➢ 无最优解

考点	两阶段法
思路	➢ 构造辅助线性规划，求原规划初始可行解 ➢ 单纯型法求原规划可行解

7. 0　一维搜索

8. newton 共轭梯度 DPF Powell SR1

考点	二次收敛性（二次终止性）,不同于二次收敛速度
定义	在有限步数内达到最优解
算法	牛顿法： 对于二次凸函数，一步达到 共轭方向系列算法：共轭梯度法，DFP, SR1, Powell， n 个共轭梯度向量组， 最多 n 次达到最优解

9. $[3-\sqrt{5},2]$.

考点	黄金分割法
优化类型	无约束优化问题，精确一维搜索 适用于单峰函数 且函数要求不连续 $\begin{cases}\varphi(t1) > \varphi(t2) & \text{if } t_2 \le t^* \\ \varphi(t1) < \varphi(t2) & \text{if } t_1 \ge t^*\end{cases}$ ， $t_1 < t_2$
思路	在可行域[a,b]内插入两点，比较对应处函数值，每次迭代删除相同比例的区间。

10 二阶收敛

考点	收敛速度
问题定义	对于迭代点构成的序列$\{X^k\}$收敛到最优点的速度
思路	$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\left\Vert X^{k+1}-X^*\right\Vert}{\left\Vert X^k-X^*\right\Vert^p}=\beta \quad \begin{cases}p=1,\beta=0 & \text{超线性收敛} \\ p=1,\beta=1 & \text{次线性收敛} \\ p=1,0<\beta<1 & \text{线性收敛} \\ p>1 & \text{p阶收敛，必为超线性收敛}\end{cases}$

11. [3,2]

考点	KTT 点（优化问题）
问题定义	一阶必要条件， 潜在的最优解
思路	$\begin{cases}\text{线性组合} & \nabla f(X^*)=\sum\limits_{i\in I(X^*)}\lambda_i^*\nabla g_i(X^*)+\sum\limits_j\mu_i^*\nabla h_i(X^*) \\ \text{非负性} & \lambda_i^*\ge 0 \\ \text{互不松弛性} & \lambda_i^* g_i(X^*)=0\end{cases}$

涉及几种算法的解题步骤

算法	优化类型	思路	解题步骤
外点法（罚函数的一种）	约束优化问题 （可包含等式约束和不等式约束）	利用罚因子将约束化问题转化为非约束优化问题	1. 构建罚函数 2. 分情况讨论确定非约束优化问题，并进行舍去讨论 3．计算惩罚因子 m 构成的通项
Fletcher-Reeves 共轭梯度法	无约束优化问题	构造共轭方向，沿共轭方向搜索求最优解	1. 确定迭代点 X^{k+1} 处的**共轭方向** $P^{k+1} = -g^{k+1} + \alpha P^k$ $P^0 = -g^0$ 2. 沿共轭方向进行一维搜索，求下一个迭代点： $X^{k+1} = X^k + tP^k$ 终止条件判断：$\left\Vert g^{k+1}\right\Vert < \varepsilon$
Rosen 梯度投影法	约束优化问题 **线性约束**对应的非线性优化问题	构造投影矩阵，将不在可行域内的负梯度方向投影到约束条件的交线上，然后沿投影方向进行一维搜索，重复该过程。	1. 构建投影矩阵， $Q = I - N^T(NN^T)^{-1}N$ 2. 求 X^k 处梯度 g^k， 和投影向量 $P^k = -Qg^k$（该方向如果为 0，判断当前点是否为 KTT 点，如果不是，构造新的投影矩阵 $\overline{Q}$,重新构建投影向量） 3. 沿 P^k 进行一维搜索 $\min\limits_{0\le t_k \le \overline{t}_k} f(X^k + tP^k)$ 得到下一个迭代点 X^{k+1}

二、

$$\min -3x_1 - 5x_2$$

$s.t.$

$$x_1 + x_3 = 4$$
$$x_2 + x_4 = 6$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$
$$x_j \geq 0, i = 1,5.$$

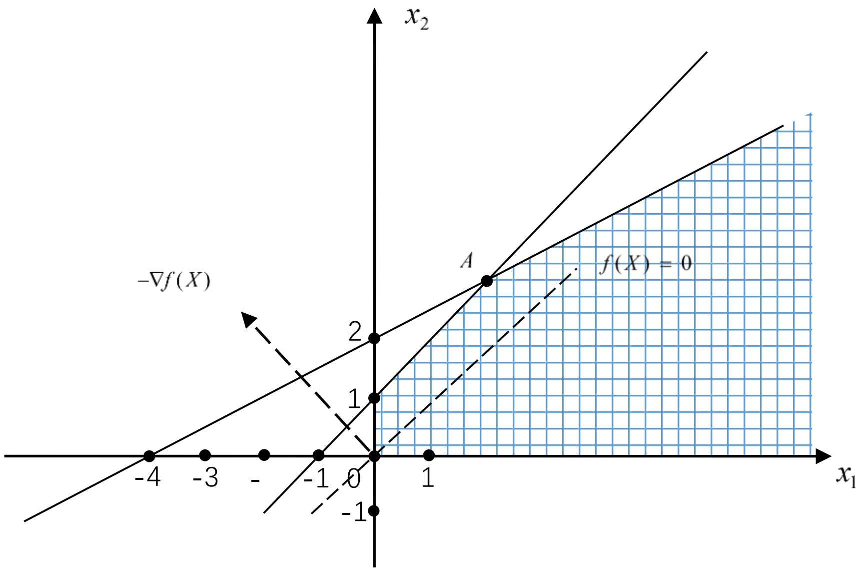
P1	P2	P3	P4	P5	
1	0	1	0	0	4
0	(1)	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18
3	5	0	0	0	0

1	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	6
(3)	0	0	-2	1	6
3	0	0	-5	0	-30

0	0	1	2/3	-1/3	2
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2
0	0	0	-3	-1	-36

三、参考：如下图所示，阴影部分为可行区域。当 $\beta = 0$ 时，显然点 $A = (2,3)^T$ 为最优解；当 $\beta \neq 0$ 时，因为 $(-1,-\beta)\left(1,-\frac{1}{\beta}\right)^T = 0$，所以直线 $f(X) = 0$ 与梯度 $-\nabla f(X)$ 垂直。

用单纯形法求解，



（1）要以 $(2,3)^T$ 为唯一最优解，则直线 $f(X) = x_1 + \beta x_2 = 0 - x_1 + 2x_2 = 4$

的斜率 $k = -\dfrac{1}{\beta}$ 必须小于直线 $-x_1 + x_2 = 1$ 的斜率 $k_1 = 1$，大于直线的斜率

$k_2 = \dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{2} < -\dfrac{1}{\beta} < 1$，所以有，$-2 < \beta < -1$。

（2）显然除了 $\beta = 0$ 外，$k = 1$ 或 $\dfrac{1}{2}$ 时，问题取得无穷多个最优解，即

$\beta = 0,-1,-2.$

（3）不存在有界最优解，就要 $-\dfrac{1}{\beta} < \dfrac{1}{2}$，即 $\beta < -2$

四、解：第一阶段：引入人工变量 x_5，构造辅助线性规划，

$$
\begin{aligned}
&\min\ x_5 \\
s.t.\ & \\
&-2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\
&x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \\
&x_j \geq 0, i = 1,\cdots,4.
\end{aligned}
$$

用单纯形法求解，

$P1_1$	P2	P3	P4	P5	b
−2	1	−1	1	0	4
(1)	2	0	0	1	6

1	2	0	0	0	6
0 1	5 2	−1 0	1 0	2 1	16 6
0	0	0	0	−1	0

第二阶段：

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	−1	0	−6
0	5	−1	1	16
1	2	0	0	6

所以最优解为$\boldsymbol{X}^* = (6,0,0,16)^{\boldsymbol{T}}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}^*) = -6$。