7.4 Gauss求积公式

公式
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

含2n+2个待定参数x_k, A_k (k=0,1,…,n)，当x取等距节点时得到的插值型求积公式的代数精度至少为n次，若适当选取x_k (k=0,1,…,n)，有可能使求积公式具2n+1次代数精度，这类求积公式称**Gauss求积公式**. x_k为**Gauss点**.

只要取 $f(x)=x^m$ 对m=0,1,……,2n+1精确成立，即

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m = \int_a^b x^m dx$$

解得A_k 及x_k即可得Gauss求积公式.

例5 构造下列积分的Gauss求积公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解： 令其对$f(x)=1$，x，x^2，x^3 精确成立，得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = \int_{-1}^{1} x dx = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \dfrac{2}{3} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = 1 \\ x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

故求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

上式即为两点Gauss求积公式，至少具3次代数精度.

注：对积分区间[a,b]，作变换 $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$

则 $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})dt$$

求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}})$$

由上例知，据定义求x_k，A_k，计算复杂. 故从分析Gauss点的特性来构造Gauss公式.

定理： 插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的节点$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$是Gauss点的充要条件是以这些节点为零点的多项式

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

与任何次数不超过n次的多项式$P(x)$带权正交，即

$$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)P(x)dx = 0$$

证明：

《必要性》

设$P(x)$为n次多项式，则$\omega_{n+1}(x)P(x)$为$2n+1$次多项式.

若$x_0,x_1,\ldots,x_n$是Gauss点，则求积公式对$f(x)=\omega_{n+1}(x)P(x)$精确成立，即

$$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)P(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k P(x_k)\omega_{n+1}(x_k)$$

$$\because \omega_{n+1}(x_k) = 0$$

$$\therefore \int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)P(x)dx = 0$$

《充分性》

对任意$2n+1$次多项式$f(x)$，用$\omega_{n+1}(x)$去除$f(x)$，记商为$P(x)$，余式为$Q(x)$，（其中$P(x)$，$Q(x)$都为n次多项式），即

$$f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + Q(x)$$

由 $$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)P(x)dx = 0$$

得 $$\int_a^b \rho(x)(f(x) - Q(x))dx = 0$$

即 $$\int_a^b \rho(x)f(x)dx=\int_a^b \rho(x)Q(x)dx$$

由于求积公式对n次多项式精确成立，则

$$\int_a^b \rho(x)Q(x)dx=\sum_{k=0}^{n} A_k Q(x_k)$$

又由$\omega_{n+1}(x_k)=0$知，$Q(x_k)=f(x_k)$

$$\therefore \int_a^b \rho(x)f(x)dx=\int_a^b \rho(x)Q(x)dx=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

求积公式对一切次数$\leq 2n+1$的多项式均精确成立，

故x_k为Gauss点.

几种常用的Gauss型求积公式：

对不同的 $\rho(x)$，选不同的正交多项式系，可导出不同的Gauss求积公式.

1、Gauss—Legendre求积公式：

Legendre多项式：区间为[–1,1]，$\rho(x)\equiv 1$，由 $\{1,x,\ldots,x_n,\ldots\}$正交化得到的多项式.

表达式：
$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \end{cases}$$

性质：（1）正交性：

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$$

（2）奇偶性： $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$

（3）递推关系：

$$\begin{cases}P(0)=1\\ P(1)=x\\ P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x)\end{cases}$$

$(n=1,2,\ldots\ldots)$

（4）$P_n(x)$在$[-1,1]$内有n个不同的实零点.

因Legendre多项式是[–1,1]上的正交多项式，故$P_{n+1}(x)$的零点就是求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的Gauss点，上式称**Gauss—Legendre求积公式**.

n=1时，可得两点Gauss—Legendre求积公式:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

n=2时，三点Gauss－Legendre求积公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f(-\frac{\sqrt{15}}{5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\frac{\sqrt{15}}{5})$$

当积分区间不是[–1,1]时，可如前作变换：

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}$$

二、Gauss－Chebyshev求积公式：

Chebyshev多项式是[–1,1]上 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式系.

表达式： $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$　　$(n=0,1,2,\ldots\ldots)$

n次Chebyshev多项式的零点为： $x_k=\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi$

以x_k为求积节点，计算可得　$A_k=\dfrac{\pi}{n}$　　$(k=1,2,\ldots\ldots,n)$

故n个求积节点的Gauss－Chebyshev求积公式为：

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$$

7.5 数值微分

先看一个实例:

已知20世纪美国人口的统计数据为：(单位:百万)

年份	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口	76.0	92.0	106.5	123.2	131.7	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4

试计算美国20世纪的(相对)年增长率.

若记t时刻的人口为$x(t)$，则人口的增长率为：

$$r(t)=\frac{dx/dt}{x(t)}$$

问题：dx/dt如何求？

基本思想：用函数值的线性组合近似函数在某点的导数值.

一、差商方法：

用差商近似导数，可得

向前差商：
$$f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

向后差商：
$$f'(a)\approx\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

中点方法：
$$f'(a)\approx\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

（h为步长）

误差分析：

利用Taylor展式，有

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2!}h^2f''(a)+\frac{1}{3!}h^3f'''(a)+\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(a)+\cdots\cdots$$

$$f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{1}{2!}h^2f''(a)-\frac{1}{3!}h^3f'''(a)+\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(a)-\cdots\cdots$$

故

$$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+O(h)\qquad=\frac{f(a)-f(a-h)}{h}+O(h)$$

$$=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}+O(h^2)$$

即中点方法的误差阶（$O(h^2)$）比前两种方法（$O(h)$）高.

二、插值型求导公式：

设函数$f(x)$不一定给出，但知道$f(x)$在节点处的函数值：

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

$$f(x_k) = f_k \; , k = 0, 1, \cdots, n$$

如果$f(x)$的$n+1$阶导数存在，由Lagrange插值可知：

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中$\xi \in [a,b]$并与x有关，　$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$

$L_n(x)$为$f(x)$的n次Lagrange插值多项式.

对上式两边求导,有

$$f'(x)=L_n'(x)+\frac{[f^{(n+1)}(\xi)]'}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x)$$

由于ξ与x有关，$[f^{(n+1)}(\xi)]$`将很难确定.

但是当$x=x_k$时，f`(x_k)可以求出：

$$f'(x_k)=L_n'(x_k)+\frac{[f^{(n+1)}(\xi)]'}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x_k)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_k)$$

$$=L_n'(x_k)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_k)$$

$$=L_n'(x_k)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)$$

$$k=0,1,\cdots,n$$

记
$$E_n(x_k)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)$$

则
$$f'(x_k)=L_n'(x_k)+E_n(x_k)\qquad k=0,1,\cdots,n$$

上式即称为插值型求导公式.

由于插值型求导公式采取的是n次Lagrange插值多项式,而高次插值会产生Runge现象,因此实际应用中多采用低次插值型求导公式.

下面给出几种低阶插值型求导公式：

1、两点公式： 当n=1时，

$$f'(x_k) = L_1'(x_k) + E_1(x_k) \qquad k = 0,1$$

由 $$L_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

得 $$L_1'(x) = f_0 \frac{1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{1}{x_1 - x_0}$$

$$E_1(x_k) = \frac{f''(\xi)}{2}(x_k - x_j) \qquad k = 0,1, j \neq k$$

若记$x_1 - x_0 = h$，则

$$f'(x_0) = L_1'(x_0) + E_1(x_0)$$

$$= \frac{1}{h}(f_1 - f_0) \quad - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

$$f'(x_1) = L_1'(x_1) + E_1(x_1)$$

$$= \frac{1}{h}(f_1 - f_0) \quad + \frac{h}{2} f''(\xi)$$

上面两式称为带余项的两点求导公式.

即

$$\boxed{f'(x_0) \approx f'(x_1) \approx \frac{1}{h}(f_1 - f_0)}$$

由于$E=O(h)$，故该求导公式的精度为1阶.

2、三点公式： 当n=2时，

$$f'(x_k) = L_2'(x_k) + E_2(x_k) \qquad k = 0, 1, 2$$

由

$$L_2(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

得

$$L_2'(x) = f_0 \frac{(x-x_1)+(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)+(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)+(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$E_2(x_k) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{2} (x_k - x_j)$$

若x_0,x_1,x_2为等距节点，即$h=x_1-x_0=x_2-x_1$，则

$$L_2'(x_0) = f_0 \frac{-3h}{2h^2} + f_1 \frac{-2h}{-h^2} + f_2 \frac{-h}{2h^2} \qquad = \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2)$$

$$L_2'(x_1) = f_0 \frac{-h}{2h^2} + f_1 \frac{h-h}{-h^2} + f_2 \frac{h}{2h^2} \qquad = \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2)$$

$$L_2'(x_2) = f_0 \frac{h}{2h^2} + f_1 \frac{2h}{-h^2} + f_2 \frac{3h}{2h^2} \qquad = \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2)$$

$$E_2(x_0) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \qquad = \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

$$E_2(x_1) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \qquad = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

$$E_2(x_2) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \qquad = \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

可得

$$\begin{cases} f'(x_0) = \dfrac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \dfrac{h^2}{3} f'''(\xi) \\ f'(x_1) = \dfrac{1}{2h}(-f_0 + f_2) - \dfrac{h^2}{6} f'''(\xi) \\ f'(x_2) = \dfrac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2) + \dfrac{h^2}{3} f'''(\xi) \end{cases}$$

上式称为带余项的三点求导公式.

其中 $f'(x_1) \approx \dfrac{1}{2h}(-f_0 + f_2)$

又称为中点公式，其精度稍高.

由于$E=O(h^2)$，故求导公式的精度为2阶.

3、五点公式：

当n=4时，

$$f'(x_k) = L_4'(x_k) + E_4(x_k) \qquad k = 0,1,2,3,4$$

$$\begin{cases}
f'(x_0) = \dfrac{1}{12h}(-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4) + \dfrac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi) \\
f'(x_1) = \dfrac{1}{12h}(-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4) - \dfrac{h^4}{20}f^{(5)}(\xi) \\
f'(x_2) = \dfrac{1}{12h}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4) - \dfrac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi) \\
f'(x_3) = \dfrac{1}{12h}(-f_0 + 6f_1 - 18f_2 + 10f_3 + 3f_4) - \dfrac{h^4}{20}f^{(5)}(\xi) \\
f'(x_4) = \dfrac{1}{12h}(3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4) + \dfrac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi)
\end{cases}$$

上式称为带余项的五点求导公式.

由于$E=O(h^4)$，故求导公式的精度为4阶.

综合考虑上述三种公式，可知五点公式的精度最高.

并且当步长h越小时，误差会越小.

但，是不是h越小公式精度越高呢?

由求导公式

$$f'(x_k)=L_n'(x_k)+E_n(x_k)\quad\begin{cases}k=0,1,\cdots,n\\ n=1,2,4\end{cases}$$

可发现

$$L_n'(x_k)=\frac{1}{a^{(k)}h}\sum_{j=0}^{n}A_j^{(k)}f_j \qquad 且 \qquad \sum_{j=0}^{n}A_j^{(k)}=0$$

当h充分小时，$f_j\,(j=0,1,\ldots,n)$会很接近.

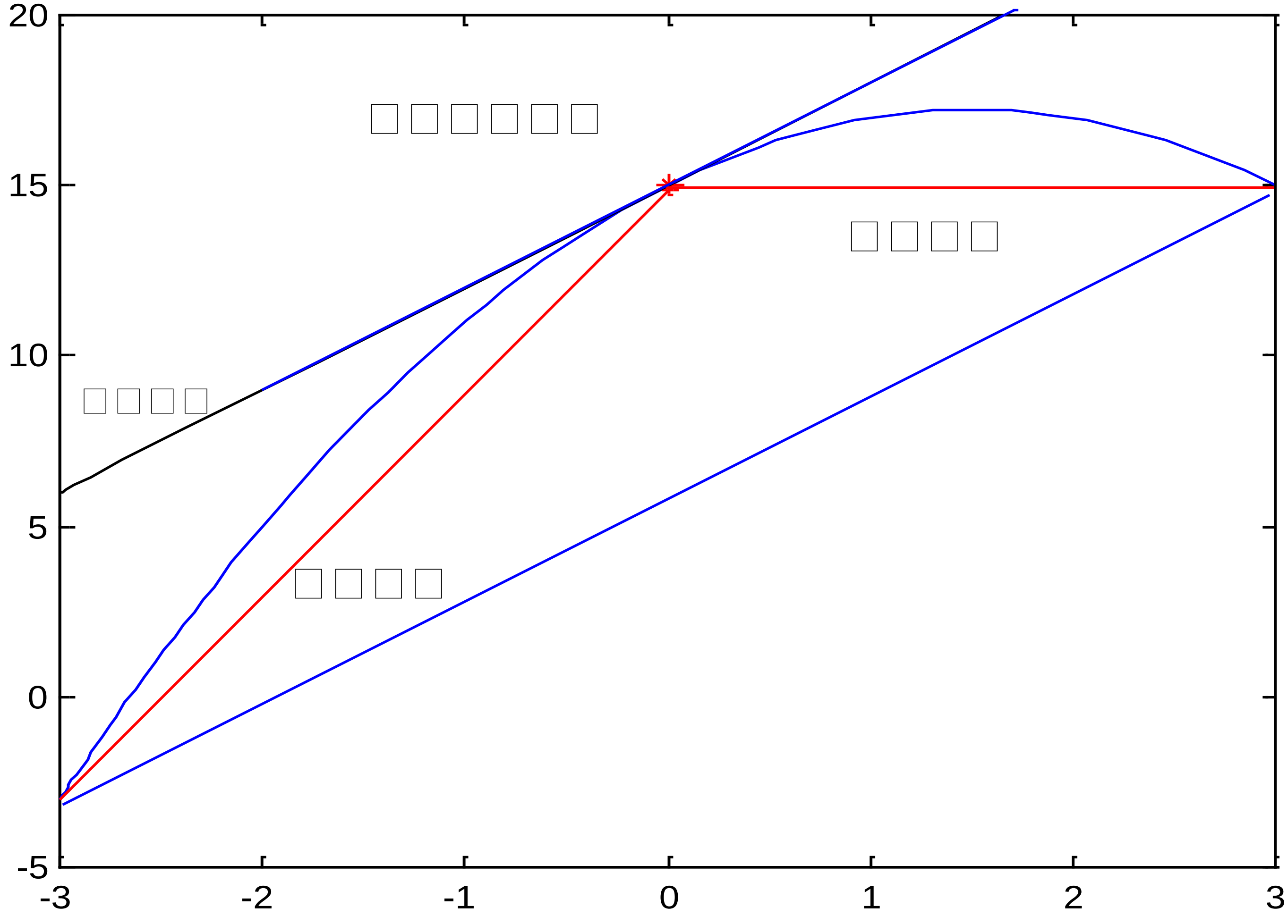
$\sum_{j=0}^{n} A_j^{(k)} f_j$ 中会出现相近数相减的情形，有效数字会严重损失，

同时 $L_n'(x_k)=\frac{1}{a^{(k)}h}\sum_{j=0}^{n} A_j^{(k)} f_j$ 中也会出现小数h作除数的现象，

导致 $L_n'(x_k)=\frac{1}{a^{(k)}h}\sum_{j=0}^{n} A_j^{(k)} f_j$ 的舍入误差可能会很大.

因此实际应用中步长h不能取太小的值.

两点公式和三点公式的比较图：



低阶插值型求导公式的分段构造：

由于高次插值的Runge现象，数值微分一般采用分段低次插值公式，常见的就是分段两点、三点和五点公式.

1、分段两点求导公式

已知 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b \qquad f(x_k) = f_k \, , k = 0,1,\cdots,n$

对于任取的相邻两点 $\quad x_k \, , x_{k+1} \, , k = 0,1,\cdots,n-1$

由两点公式有

$$\begin{cases} f'(x_k) \approx \dfrac{1}{h}(f_{k+1} - f_k) \\ \\ f'(x_{k+1}) \approx \dfrac{1}{h}(f_{k+1} - f_k) \end{cases} \qquad k = 0,1,\cdots,n-1$$

上式称为分段两点公式.

2、分段三点求导公式

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b \qquad f(x_k) = f_k \ , k = 0,1,\cdots,n$$

对于任取的相邻三点 $x_{k-1}, x_k \ , x_{k+1} \ , k = 1,2,\cdots,n-1$

由三点公式，有

$$\begin{cases} f'(x_k) \approx \dfrac{1}{2h}(-f_{k-1} + f_{k+1}) & k = 1,2,\cdots,n-1 \\ f'(x_0) \approx \dfrac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) & \\ f'(x_n) \approx \dfrac{1}{2h}(f_{n-2} - 4f_{n-1} + 3f_n) & \end{cases}$$

上式称为**分段三点公式**.

3.分段五点求导公式

由五点公式，有 $x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}$,$k = 2, 3, \cdots, n-2$

$$\begin{cases} f'(x_k) \approx \dfrac{1}{12h}(f_{k-2} - 8f_{k-1} + 8f_{k+1} - f_{k+2}) & k = 2, 3, \cdots, n-2 \\ f'(x_0) \approx \dfrac{1}{12h}(-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4) \\ f'(x_1) \approx \dfrac{1}{12h}(-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4) \\ f'(x_{n-1}) \approx \dfrac{1}{12h}(-f_{n-4} + 6f_{n-3} - 18f_{n-2} + 10f_{n-1} + 3f_n) \\ f'(x_n) \approx \dfrac{1}{12h}(3f_{n-4} - 16f_{n-3} + 36f_{n-2} - 48f_{n-1} + 25f_n) \end{cases}$$

例：　回到本节开始时的实例(美国人口)：

1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
76.0	92.0	106.5	123.2	131.7	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4

解：设t时刻的人口为$x(t)$,人口的增长率为$r(t)$

则　$$r(t)=\frac{dx/dt}{x(t)}$$

求增长率必须先求导数

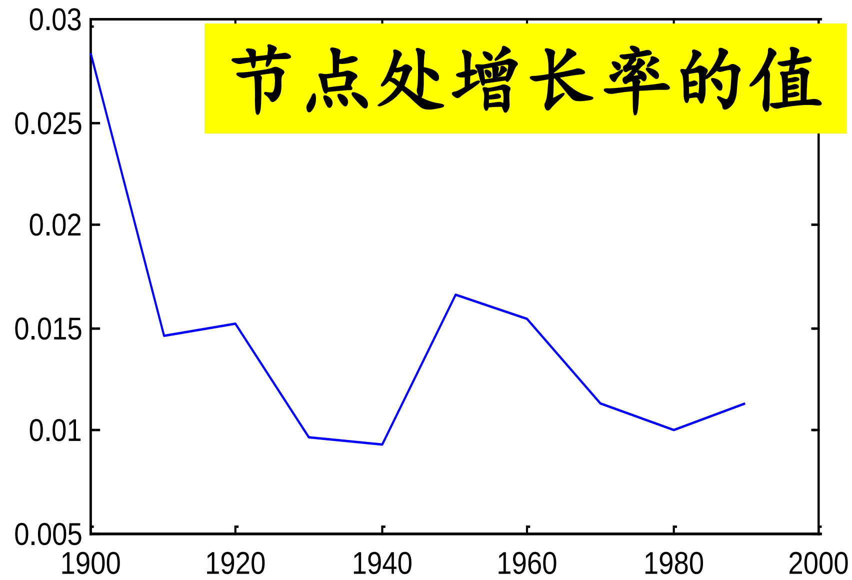
先用精度较高的分段五点公式求出节点处的导数值

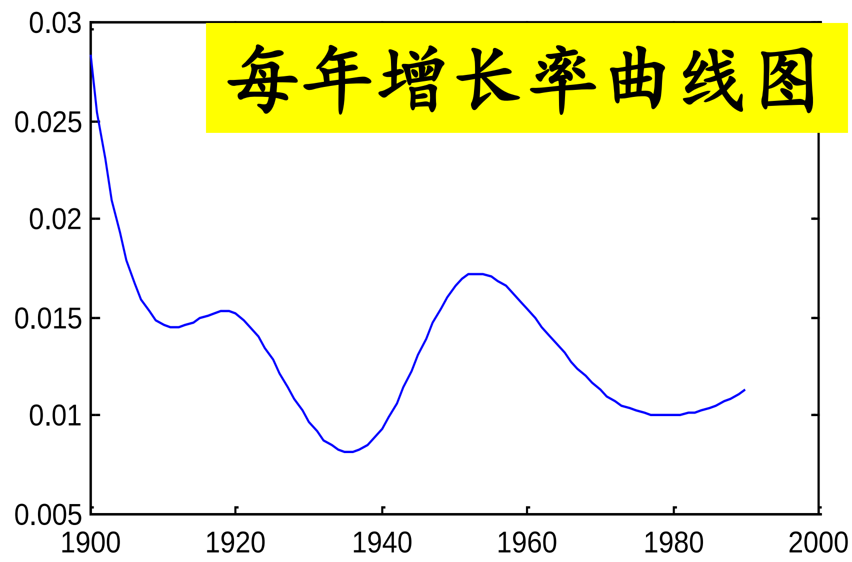
x'=2.1508　1.3458　1.6158　1.1908　1.2267　2.5000　2.7633　2.3075　2.2692　2.8358

$r=(dx/dt)/x$ =0.0283　0.0146　0.0152　0.0097　0.0093　0.0166　0.0154　0.0113　0.0100　0.0113

将节点处的增长率作三次样条插值:

年份	增长率
1900	0.0283
1901	0.0255
1902	0.0230
1935	0.0082
1936	0.0081
1937	0.0083
1953	0.0172
1954	0.0172
1979	0.0100
1980	0.0100
1981	0.0109
1989	0.0111
1990	0.0113





三、样条求导公式：

Lagrange插值型求导公式构造比较简单，但由于误差的原因，只能求出节点处的导数值.

故可采用三次样条插值的原理进行求导，即先作$f(x)$的三次样条插值多项式$S(x)$，再求$S(x)$在任意一点的一阶甚至二阶导数.

若求函数$f(x)$在节点处的一阶导数值，求解三对角方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$g_0 = \frac{3(y_1 - y_0)}{h}$$

$$g_n = \frac{3(y_n - y_{n-1})}{h}$$

$$g_j = \frac{3(y_{j+1} - y_{j-1})}{h}$$

$(j=1,2,\ldots,n\text{-}1)$

即可.

四、数值微分的外推算法：

利用一阶差商中的中点方法，有

$$f'(x) \approx G(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

对$f(x)$在x点作Taylor展开：

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) + \frac{1}{3!}h^3 f'''(x) + \frac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x) + \cdots\cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) - \frac{1}{3!}h^3 f'''(x) + \frac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x) - \cdots\cdots$$

故

$$G(h) = f'(x) + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots\cdots$$

以$h/2$代替上式中的h，有

$$G(\frac{h}{2}) = f'(x) + \frac{\alpha_1 h^2}{4} + \frac{\alpha_2 h^4}{16} + \cdots\cdots$$

所以有 $$\frac{4G(\frac{h}{2})-G(h)}{3}=f'(x)-\frac{\alpha_2 h^4}{4}+\cdots\cdots$$

上式是关于导数的逼近，截断误差为$O(h^4)$，这就是求数值导数的外推算法. 重复使用外推算法，对h逐次分半，若记$G_0(h)=G(h)$，则有

$$G_m(h)=\frac{4^m G_{m-1}(\frac{h}{2})-G_{m-1}(h)}{4^m-1}\qquad (m=1,2,\ldots\ldots)$$

计算过程：

$$\begin{tikzcd}
G(h) \arrow[d] & & & \\
G(\frac{h}{2}) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d] & G_1(h) \arrow[d] & & \\
G(\frac{h}{2^2}) \arrow[r, "(2)"] \arrow[d] & G_1(\frac{h}{2}) \arrow[r, "(3)"] \arrow[d] & G_2(h) \arrow[d] & \\
G(\frac{h}{2^3}) \arrow[r, "(4)"] & G_1(\frac{h}{2^2}) \arrow[r, "(5)"] & G_2(\frac{h}{2}) \arrow[r, "(6)"] & G_3(h)
\end{tikzcd}$$

误差：

$$\boxed{f'(x)-G_m(h)=O(h^{2(m+1)})}$$

例：用外推法计算 $f(x)=x^2e^{-x}$ 在x=0.5处的导数.

解：令

$$G(h)=\frac{1}{2h}\left[(\frac{1}{2}+h)^2e^{-(\frac{1}{2}+h)}-(\frac{1}{2}-h)^2e^{-(\frac{1}{2}-h)}\right]$$

当h=0.1，0.05，0.025时，由外推法表可得

$G(0.1)=0.4516049081$

$G(0.05)=0.4540761693$　　$G_1(0.1)=0.4548999231$

$G(0.025)=0.4546926288$　　$G_1(0.05)=0.4548981152$　　$G_2(0.1)=0.454897994$

f `(0.5)的精确值为0.454897994，可见当h=0.025时，用中点微分公式只有三位有效数字. 外推一次达五位，外推两次达9位.

THE

END