学号________ 姓名________ 学院________

……密……封……线……以……内……答……题……无……效……

电子科技大学研究生试卷

（考试时间：____至_____，共__2_小时）

课程名称__图论及其应用_ 教师_______ 学时_60_ 学分____

教学方式__讲授_ 考核日期_2013__年_6__月__20__日 成绩______

考核方式：__________（学生填写）

一. 填空题(每空 2 分，共 20 分)

1. n 阶k正则图 G的边数m=-----。

2. 4 个顶点的不同构单图的个数为--------。

3. 完全偶图$K_{r,s}$ $(r,s \geq 2$且为偶数)，则在其欧拉环游中共含----条边。

4. 高为h的完全 2 元树至少有-------片树叶。

5. G由3个连通分支K_1,K_2,K_4组成的平面图,则其共有-------个面。

6. 设图G与K_5同胚，则至少从G中删掉-------条边，才可能使其成为可平面图。

7. 设G为偶图，其最小点覆盖数为α，则其最大匹配包含的边数为--------。

8. 完全图K_6能分解为 _______ 个边不重合的一因子之并。

9. 奇圈的边色数为 ______ 。

10. 彼得森图的点色数为 ______ 。

二. 单项选择(每题 3 分，共 15 分)

1. 下面说法错误的是( )

(A) 图G中的一个点独立集，在其补图中的点导出子图必为一个完全子图;

(B) 若图G连通，则其补图必连通;

(C) 存在 5 阶的自补图;

(D) 4 阶图的补图全是可平面图.

2. 下列说法错误的是（　）

(A) 非平凡树是偶图;

(B) 超立方体图(n方体, $n\geq 1$)是偶图;

(C) 存在完美匹配的圈是偶图;

(D) 偶图至少包含一条边。

3. 下面说法正确的是（　）

(A) 2 连通图一定没有割点（假定可以有自环）;

(B) 没有割点的图一定没有割边;

(C) 如果 3 阶及其以上的图G是块，则G中无环，且任意两点均位于同一圈上;

(D) 有环的图一定不是块。

4. 下列说法错误的是（　）

(A) 设$n(n\geq 3)$阶单图的最小度满足$\delta\geq\frac{n}{2}$，则其闭包一定为完全图;

(B) 设$n(n\geq 3)$阶单图的任意两个不邻接顶点u与v满足$d(u)+d(v)\geq n$，则其闭包一定为完全图;

(C) 有割点的图一定是非哈密尔顿图;

(D) 一个简单图G是哈密尔顿图的充要条件是它的闭包是哈密尔顿图。

5. 下列说法错误的是(　　)

(A) 极大平面图的每个面均是三角形;

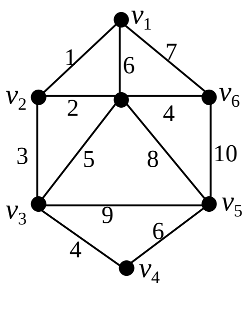
(B) 极大外平面图的每个面均是三角形;

(C) 可以把平面图的任意一个内部面转化为外部面;

(D) 连通平面图G的对偶图的对偶图与G是同构的。

三、 (10 分) 设$d_1,d_2,\cdots d_n$是n个不同的正整数，求证：序列$\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$不能是简单图的度序列。

四，(15 分) 在下面边赋权图中求：(1) 每个顶点到点v_1的距离(只需要把距离结果标在相应顶点处，不需要写出过程)；(2) 在该图中求出一棵最小生成树，并给出最小生成树权值(不需要中间过程，用波浪线在图中标出即可)； (3)，构造一条最优欧拉环游。



五. (10 分)　设T是完全m元树，i是分支点数，t是树叶数，求证:

$$(m-1)i = t-1$$

六.(10 分) 某大型公司 7 个不同部门有些公开职位，分别是(a):广告设计，(b): 营销，(c):计算师，(d)规划师，(e):实验师，(f): 财政主管，(g):客户接待。有 6 名应聘者前来申请这些职位，分别是:

Alvin(A):a, c, f;　Beverly(B): a, b, c, d, e, g;

Connie(C): c, f;　Donald(D): b,c,d,e,f,g;

Edward(E): a, c, f:　Frances(F): a, f.

(1)　用偶图为此问题建模;

(2)　这 6 名应聘者是否可以得到他们申请的职位? 为什么?

(注: 要求每位申请者只能获得一个职位，每个职位只能被一位申请者获得)

七、(10分)　有6名博士生要进行论文答辩，答辩委员会成员分别是

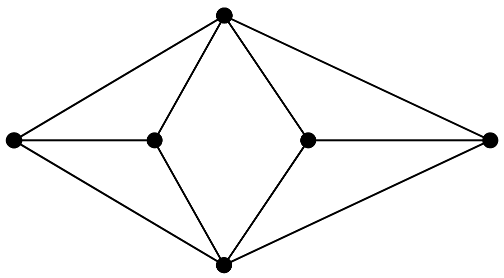
$A_1=$.{张教授，李教授，王教授}；$A_2=$.{赵教授，李教授，刘教授}；

$A_3=$.{张教授，王教授，刘教授}；$A_4=$.{赵教授，王教授，刘教授}；

$A_5=$.{张教授，李教授，孙教授}；$A_6=$.{李教授，王教授，刘教授}。

要使教授们参加答辩会不至于发生时间冲突，至少安排几次答辩时间段？请给出一种最少时间段下的安排。

八．(10分)求下图G的色多项式$P_k(G)$.并求出点色数。



2013年图论及其应用答案

一、

1、$\underline{\dfrac{nk}{2}}$ ；　2、$\underline{\quad 11 \quad}$；3、$\underline{\quad rs \quad}$；　4、$\underline{\quad h+1 \quad}$；　5、$\underline{\quad 4 \quad}$；

6、$\underline{\quad 1 \quad}$；　7、$\underline{\alpha}$ ；　8、$\underline{\quad 5 \quad}$；　9、$\underline{\quad 3 \quad}$；　10、$\underline{\quad 3 \quad}$；

二、B　D　C　C　B

三、证明：

因为 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 是 n 个不同的正整数，不妨假定 $1 \le d_1 < d_2 < \cdots < d_n$，

所以必然有 $d_n \ge n$。

因为在任何一个 n 阶简单图中，顶点度数的最大值必然不会超过 n-1，即在 n 阶简单图中不存在度数 $\ge n$ 的顶点。

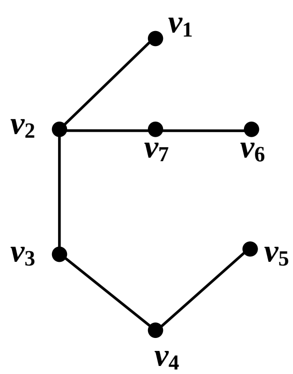
因此序列 $\pi = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 不能是简单图的度序列。

四、解：

(1) $d(v_1, v_1) = 0$,　$d(v_1, v_2) = 1$,　$d(v_1, v_3) = 4$,　$d(v_1, v_4) = 8$,

$d(v_1, v_5) = 11$,　$d(v_1, v_6) = 7$,　$d(v_1, v_7) = 3$；

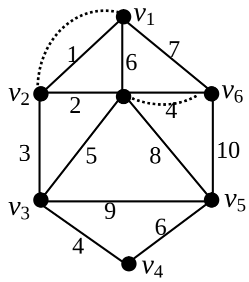
(2) 最小生成树为：



最小生成树的权值为 20。

(3) 因为图中有 4 个度数为奇数的顶点：v_1, v_2, v_6, v_7，所以至少需添加 2 条边。

在 v_1 与 v_2，v_6 与 v_7 之间分别添加一条边，得到欧拉多重图



可以验证在上述欧拉多重图中，每个圈上新添加的边的总权值没有超过整个圈的权值。

因此上述欧拉多重图的任何一个欧拉回路是原图的最优欧拉环游，其中一条为

$$v_1v_2v_3v_7v_5v_3v_4v_5v_6v_7v_2v_1v_7v_6v_1\text{。}$$

五、证明：

因为 T 具有 i 个分支点，t 片树叶，所以 T 共有 $i+t$ 个顶点。

由于 T 是有向树，所以 T 中共有 $i+t-1$ 条边。

因为 T 是完全 m 元树，每个分支点的出度均为 m。

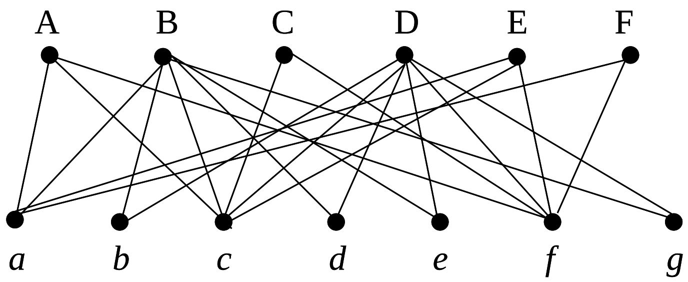
由于 T 具有 i 个分支点，所以 T 的出度之和为 mi。

在任何有向图中，出度之和等于边数，即 $mi = i + t - 1$，

整理得 $(m-1)i = t-1$。

六、解：

(1) 把每个职位、每位应聘者看成一个点，如果应聘者 x_i 申请职位 y_j，则在 x_i 与 y_j 对应的顶点之间连一条边，得到一个偶图 G，如下：



记 X={A, B, C, D, E, F}，Y={a, b, c, d, e, f, g}。

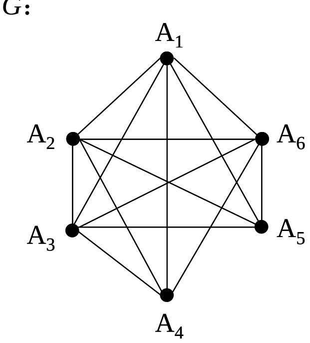
(2) 因为每位申请者只能获得一个职位，每个职位只能被一个申请者或者，每位应聘者能否得到他们申请的职位，取决于模型图中是否存在饱和 X 中每个点的匹配。

取集合 S={A, C, E, F}，则 $N(S)$={a, c, f}。

因为 $|S|>|N(S)|$，由 Hall 定理知，该图不存在饱和 X 中每个点的匹配，所以这 6 名应聘者不能同时得到他们申请的职位。

七、解：

把每个博士生看成一个顶点，如果两个博士生有共同的答辩委员会成员，则在这两个博士对应的顶点间连一条线，如图 G：



因为一个教授不能同时参加两个博士生的答辩，所以该问题为求解图 G 的点色数。

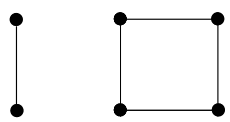
顶点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 导出的子图为 K_5，所以 $\chi(G) \geq 5$。

又因为 A_5 的度数为 4，所以 $\chi(G) = 5$。

其中一种安排如下：$\{A_1\}, \{A_2\}, \{A_3\}, \{A_4, A_5\}, \{A_6\}$。

八、解：

(1) 图 G 的补图 $\overline{G}$ 为



$\overline{G}$ 具有两个连通分支，分别记为 G_1 和 G_2。

G_1 的伴随多项式为 $h_1 = x + x^2$

G_2 的伴随多项式为 $h_2 = 2x^2 + 4x^3 + x^4$

所以 $\overline{G}$ 的伴随多项式为 $h = h_1 \times h_2 = 2x^3 + 6x^4 + 5x^5 + x^6$。

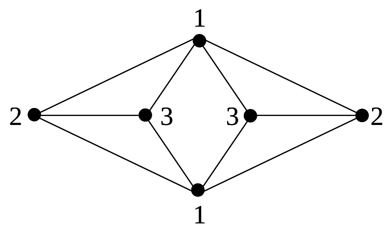
因此 G 的色多项式为 $P_k(G) = 2[k]_3 + 6[k]_4 + 5[k]_5 + [k]_6$，其中 $[k]_i = k(k-1)\cdots(k-i+1)$。

整理得

$$P_k(G) = k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8) = k^6 - 10k^5 + 41k^4 - 84k^3 + 84k^2 - 32k \text{。}$$

(2) 因为图 G 中包含三角形，所以 $\chi(G) \geq 3$。

用 3 种颜色可以给出图 G 的一种正常点着色，如图：



所以 $\chi(G) = 3$