

# 图论第三章

任课教师：杨春

Email: [yc517922@126.com](mailto:yc517922@126.com)

数学科学学院

# 第三章 图的连通性

## 主要内容

### 图的连通性刻画

- 一、割边、割点和块
- 二、图的连通度与敏格尔定理
- 三、图的宽直径简介

# 本次课主要内容

## 割边、割点和块

- (一)、割边及其性质
- (二)、割点及其性质
- (三)、块及其性质

# 研究图的连通性的意义

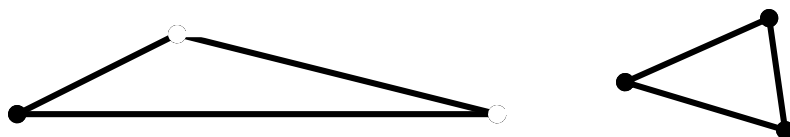
研究图的连通性，主要研究图的连通程度的刻画，其意义是：

图论意义：图的连通程度的高低，是图结构性质的重要表征，图的许多性质都与其相关，例如：连通图中任意两点间不相交路的条数就与图的连通程度有关。

实际意义：图的连通程度的高低，对应于通信网络“可靠性程度”的高低。

## (一)、割边及其性质

定义1 边 $e$ 为图 $G$ 的一条割边，如果  $\omega(G - e) > \omega(G)$  。



红色边为该图的割边

注：割边又称为图的“桥”。

图的割边有如下性质：

定理1 边  $e$  是图  $G$  的割边当且仅当  $e$  不在  $G$  的任何圈中。

证明：可以假设  $G$  连通。

“必要性”

若不然。设  $e$  在图  $G$  的某圈  $C$  中，且令  $e = uv$ 。

考虑  $P = C - e$ ，则  $P$  是一条  $u-v$  路。下面证明  $G-e$  连通。

对任意  $x, y \in V(G-e)$ ，由于  $G$  连通，所以存在  $x \rightsquigarrow y$  路  $Q$ 。若  $Q$  不含  $e$ ，则  $x$  与  $y$  在  $G-e$  里连通；若  $Q$  含有  $e$ ，则可选择路： $x \rightsquigarrow u P v \rightsquigarrow y$ ，说明  $x$  与  $y$  在  $G-e$  里也连通。所以，若边  $e$  在  $G$  的某圈中，则  $G-e$  连通。

但这与  $e$  是  $G$  的割边矛盾！

## “充分性”

如果 $e$ 不是 $G$ 的割边，则 $G-e$ 连通，于是在 $G-e$ 中存在一条 $u \cdots v$ 路，显然：该路并上边 $e$ 得到 $G$ 中一个包含边 $e$ 的圈，矛盾。

**推论1**  $e$ 为连通图 $G$ 的一条边，如果 $e$ 含于 $G$ 的某圈中，则 $G-e$ 连通。

**证明：**若不然， $G-e$ 不连通，于是 $e$ 是割边。由定理1， $e$ 不在 $G$ 的任意圈中，矛盾！

**例1 求证：**(1) 若 $G$ 的每个顶点的度数均为偶数，则 $G$ 没有割边；(2) 若 $G$ 为 $k$ 正则二部图( $k \geq 2$ )，则 $G$ 无割边。

**证明：**(1) 若不然，设 $e=uv$ 为 $G$ 的割边。则 $G-e$ 的含有顶点 $u$ (或 $v$ )的那个分支中点 $u$ (或 $v$ )的度数为奇，而其余点的度数为偶数，与握手定理推论相矛盾！

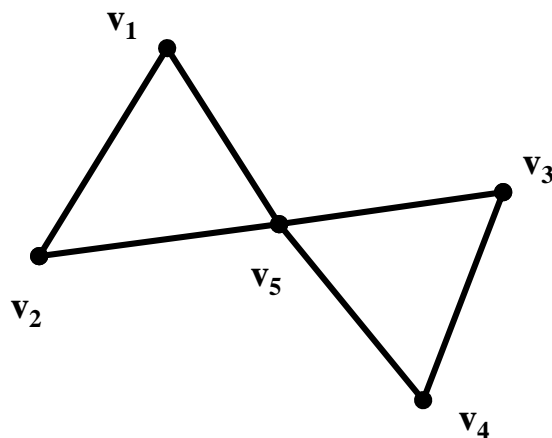
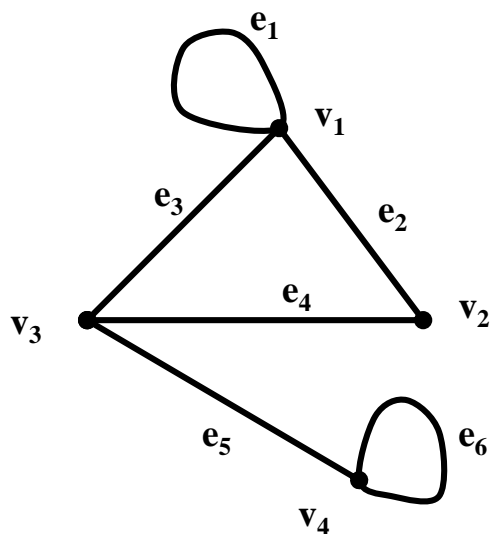
(2)若不然, 设 $e=uv$  为 $G$ 的割边。取 $G-e$ 的其中一个分支 $G_1$ , 显然,  $G_1$ 中只有一个顶点的度数是 $k-1$ ,其余点的度数为 $k$ 。并且 $G_1$ 仍然为偶图。

假若 $G_1$ 的两个顶点子集包含的顶点数分别为 $m$ 与 $n$ , 并且包含 $m$ 个顶点的顶点子集包含度为 $k-1$ 的那个点, 那么有:

$k m - 1 = k n$ 。但是因 $k \geq 2$ , 所以等式不能成立!

## (二)、割点及其性质

定义2 在 $G$ 中, 如果 $E(G)$ 可以划分为两个非空子集 $E_1$ 与 $E_2$ , 使 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 以点 $v$ 为公共顶点, 称 $v$ 为 $G$ 的一个割点。



在图 $G_1$ 中, 点 $v_1, v_4, v_3$ 均是割点; 在 $G_2$ 中,  $v_5$ 是割点。



定理2  $G$ 无环且非平凡，则 $v$ 是 $G$ 的割点，当且仅当

$$\omega(G - v) > \omega(G)$$

证明：“必要性”

设 $v$ 是 $G$ 的割点。则 $E(G)$ 可划分为两个非空边子集 $E_1$ 与 $E_2$ ,使 $G[E_1], G[E_2]$ 恰好以 $v$ 为公共点。

由于 $G$ 没有环，所以， $G[E_1], G[E_2]$ 分别至少包含异于 $v$ 的 $G$ 的点，这样， $G - v$ 的分支数比 $G$ 的分支数至少多1，所以：

$$\omega(G - v) > \omega(G)$$

“充分性”

由割点定义结论显然。

定理3  $v$  是树 $T$ 的顶点，则 $v$ 是割点，当且仅当 $v$ 是树的分支点。

证明：“必要性”

若不然，有 $d(v)=1$ ,即 $v$ 是树叶，显然不能是割点。

“充分性”

设 $v$ 是分支点，则 $d(v)>1$ .于是设 $x$ 与 $y$ 是 $v$ 的邻点，由树的性质，只有唯一路连接 $x$ 与 $y$ ，所以 $G-v$ 分离 $x$ 与 $y$ .即 $v$ 为割点。

定理4 设 $v$ 是无环连通图 $G$ 的一个顶点，则 $v$ 是 $G$ 的割点，当且仅当 $V(G-v)$ 可以划分为两个非空子集 $V_1$ 与 $V_2$ ,使得对任意 $x \in V_1, y \in V_2$ , 点 $v$ 在每一条 $x y$ 路上。

证明：“必要性”

$v$ 是无环连通图 $G$ 的割点，由定理2， $G-v$ 至少有两个连通分支。设其中一个连通分支顶点集合为 $V_1$ , 另外分支顶点集合为 $V_2$ , 即 $V_1$ 与 $V_2$ 构成 $V$ 的划分。

对于任意的 $x \in V_1, y \in V_2$ ，如果点 $v$ 不在某一条 $x y$ 路上，那么，该路也是连接 $G-v$ 中的 $x$ 与 $y$ 的路，这与 $x, y$ 处于 $G-v$ 的不同分支矛盾。

“充分性”

若 $v$ 不是图 $G$ 的割点，那么 $G-v$ 连通，因此在 $G-v$ 中存在 $x, y$ 路，当然也是 $G$ 中一条没有经过点 $v$ 的 $x, y$ 路。矛盾。

**例2 求证：**无环非平凡连通图至少有两个非割点。

**证明：**由于 $G$ 是无环非平凡连通图，所以存在非平凡生成树，而非平凡生成树至少两片树叶，它不能为割点，所以，它也不能为 $G$ 的割点。

**例3 求证：**恰有两个非割点的连通单图是一条路。

**证明：**设 $T$ 是 $G$ 的一棵生成树。由于 $G$ 有 $n-2$ 个割点，所以， $T$ 有 $n-2$ 个割点，即 $T$ 只有两片树叶，所以 $T$ 是一条路。这说明， $G$ 的任意生成树为路。

一个单图的任意生成树为路，则该图为圈或路，若为圈，则 $G$ 没有割点，矛盾，所以， $G$ 为路。

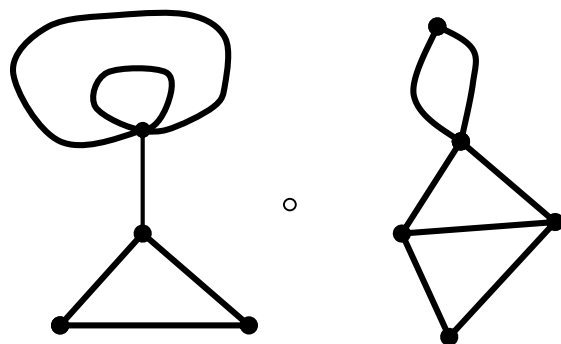
**例4 求证：**若 $v$ 是单图 $G$ 的割点，则它不是 $G$ 的补图的割点。

证明:  $v$  是单图  $G$  的割点, 则  $G-v$  至少两个连通分支。现任取  $x, y \in V(\bar{G}-v)$ , 如果  $x, y$  在  $G-v$  的同一分支中, 令  $u$  是与  $x, y$  处于不同分支的点, 那么, 通过  $u$ , 可说明,  $x$  与  $y$  在  $G-v$  的补图中连通。若  $x, y$  在  $G-v$  的不同分支中, 则它们在  $G-v$  的补图中邻接。所以, 若  $v$  是  $G$  的割点, 则  $v$  不是其补图的割点。

### (三)、块及其性质

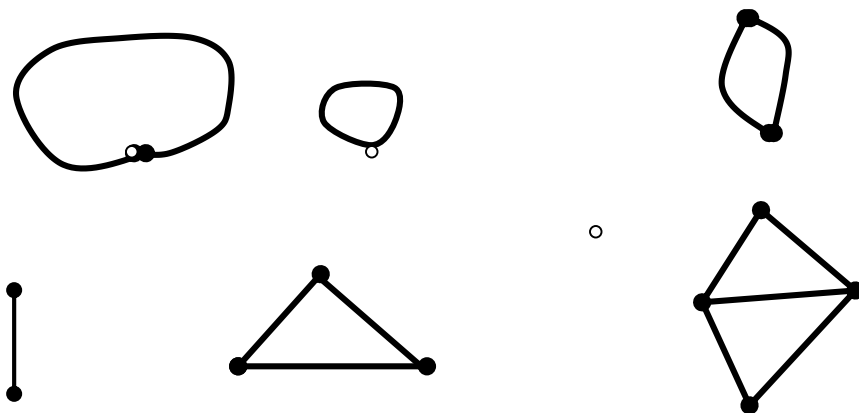
定义3 没有割点的连通图称为是一个块图, 简称块;  
 $G$  的一个子图  $B$  称为是  $G$  的一个块, 如果(1), 它本身是块;  
(2), 若没有真包含  $B$  的  $G$  的块存在。

例5 找出下图  $G$  中的所有块。



图G

解：由块的定义得：



**定理5** 若 $|V(G)| \geq 3$ , 则 $G$ 是块, 当且仅当 $G$ 无环且任意两顶点位于同一圈上。

**证明:** (必要性) 设 $G$ 是块。因 $|V(G)| \geq 3$ , 所以, 它不能有环。对任意 $u, v \in V(G)$ , 下面证明 $u, v$ 位于某一圈上。

对 $d(u, v)$  作数学归纳法证明。

当 $d(u, v) = 1$ 时, 由于 $G$ 是至少3个点的块, 所以, 边 $uv$ 不能为割边, 否则,  $u$ 或 $v$ 为割点, 矛盾。由割边性质,  $uv$ 必然在某圈中。

设当 $d(u, v) < k$  时结论成立。

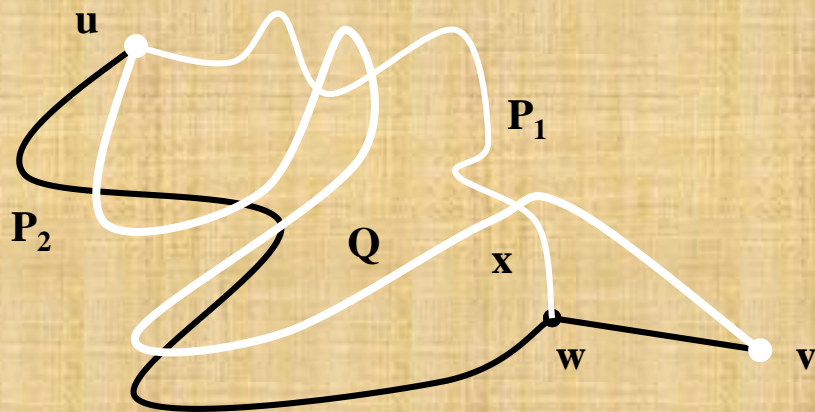
设 $d(u, v) = k$ 。

设 $P$ 是一条最短 $(u, v)$ 路,  $w$ 是 $v$ 前面一点, 则 $d(u, w) = k-1$

由归纳假设,  $u$ 与 $w$ 在同一圈 $C = P_1 \cup P_2$ 上。



考虑 $G-w$ . 由于 $G$ 是块, 所以 $G-w$ 连通。设 $Q$ 是一条在 $G-w$ 中的 $(u, v)$ 路, 并且设它与 $C$ 的最后一个交点为 $x$ 。





则 $uP_1xvwP_2$ 为包含 $u, v$ 的圈。

(充分性): 若 $G$ 不是块, 则 $G$ 中有割点 $v$ 。由于 $G$ 无环, 所以 $G-v$ 至少两个分支。设 $x, y$ 是 $G-v$ 的两个不同分支中的点, 则 $x, y$ 在 $G$ 中不能位于同一圈上, 矛盾!

**定理6** 点 $v$ 是图 $G$ 的割点当且仅当 $v$ 至少属于 $G$ 的两个不同的块。

证明: (必要性) 设 $v$ 是 $G$ 的割点。由割点定义:  $E(G)$ 可以划分为两个边子集 $E_1$ 与 $E_2$ 。显然 $G[E_1]$ 与 $G[E_2]$ 有唯一公共顶点 $v$ 。设 $B_1$ 与 $B_2$ 分别是 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 中包含 $v$ 的块, 显然它们也是 $G$ 的块。即证明 $v$ 至少属于 $G$ 的两个不同块。

(充分性) 如果 $v$ 属于 $G$ 的两个不同块, 我们证明:  $v$ 一定是图 $G$ 的割点。

如果包含 $v$ 的其中一个块是环，显然 $v$ 是割点；

设包含 $v$ 的两个块是 $B_1$ 与 $B_2$ 。如果包含 $v$ 的两个块不是环，那么两个块分别至少有两个顶点。假如 $v$ 不是割点，在 $B_1$ 与 $B_2$ 中分别找异于 $v$ 的一个点 $x$ 与 $y$ ,  $x \in V(B_1)$ ,  $y \in V(B_2)$ , 则在 $G-v$ 中有连接 $x$ 与 $y$ 的路 $P$ 。

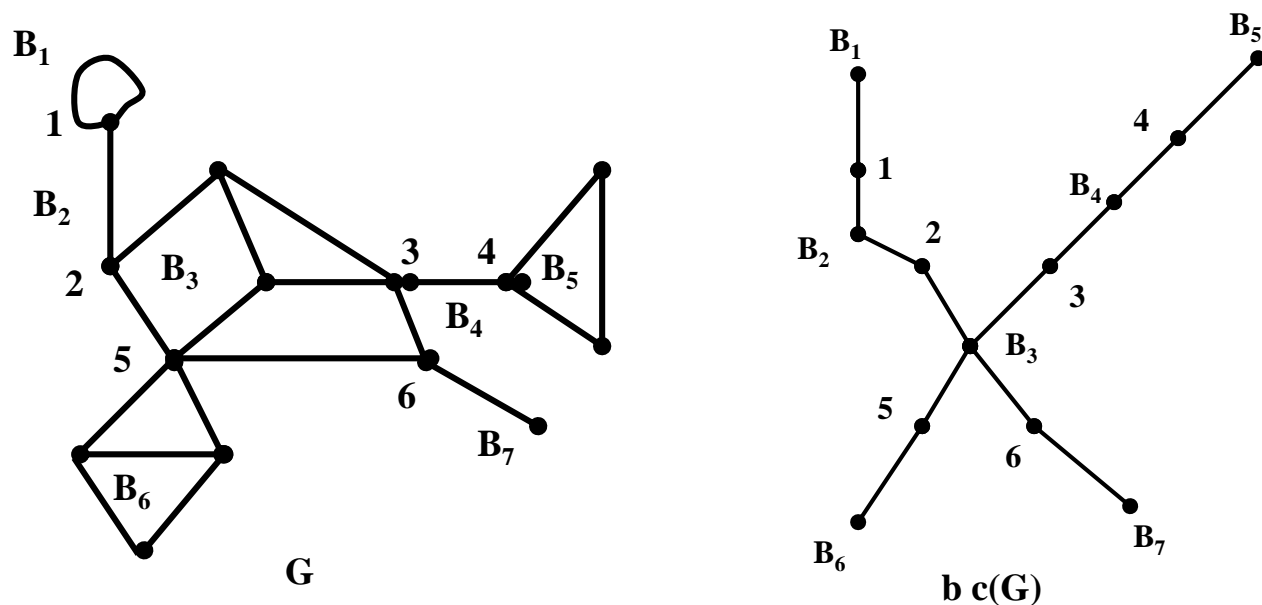
显然： $B_1 \cup B_2 \cup P$ 无割点。这与 $B_1, B_2$ 是块矛盾！

注：该定理揭示了图中的块与图中割点的内在联系：不同块的公共点一定是图的割点。也就是说，图的块可以按割点进行寻找。所以，该定理的意义在于：可以得到寻找图中全部块的算法。

为了直观反映图的块和割点之间的联系，引进所谓的块割点树。

设 $G$ 是非平凡连通图。 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 是 $G$ 的全部块，而 $v_1, v_2, \dots, v_t$ 是 $G$ 的全部割点。构作 $G$ 的块割点树  $bc(G)$ : 它的顶点是 $G$ 的块和割点，连线只在块割点之间进行，一个块和一个割点连线，当且仅当该割点是该块的一个顶点。

例6 画下图 $G$ 中的块割点树。



# 作业

**P65---66 习题3 : 1, 2, 3,5,7,8**

Thank You !









# 图论及其应用

任课教师：杨春

Email: [yc517922@126.com](mailto:yc517922@126.com)

数学科学学院

# 本次课主要内容

## 网络的容错性参数

(一)、连通度的概念与性质

(二)、描述连通性的其它参数简介(内容拓展)

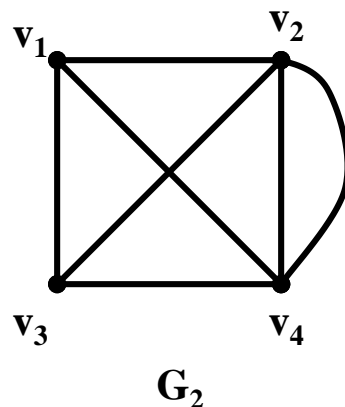
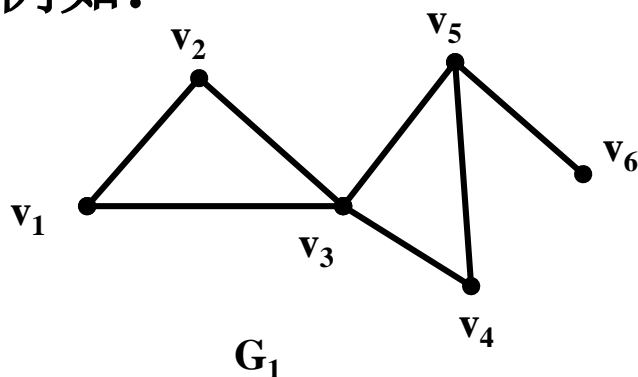
# (一)、连通度的概念与性质

## 1、点连通度与边连通度的概念

定义1 给定连通图 $G$ ，设  $V' \subseteq V(G)$ ，若 $G - V'$  不连通，称 $V'$ 为 $G$ 的一个点割集，含有 $k$ 个顶点的点割集

称为 $k$ 顶点割。 $G$ 中点数最少的顶点割称为最小顶点割。

例如：

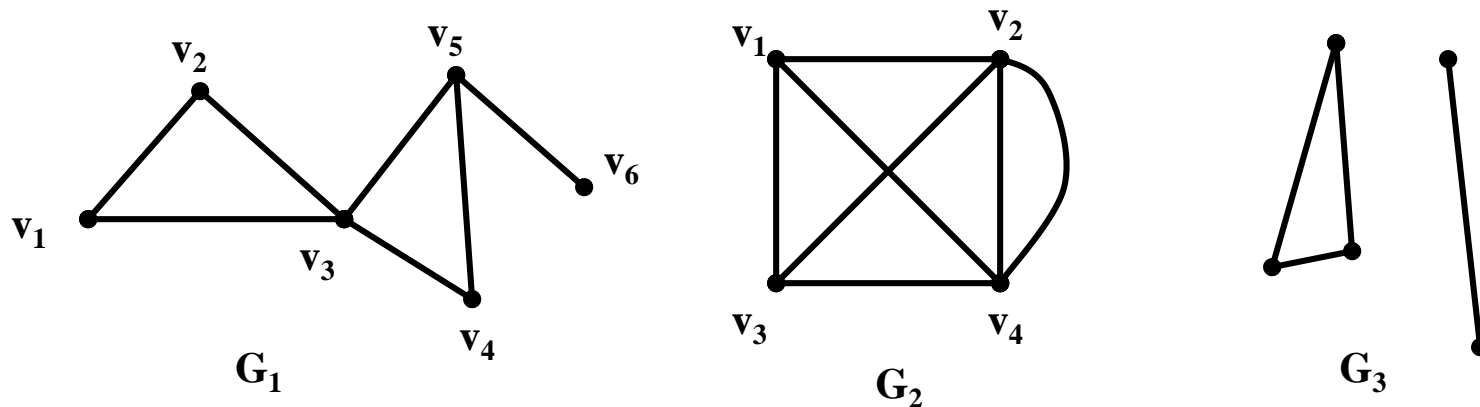


在 $G_1$ 中：  $\{v_3\}$ ， $\{v_5, v_3\}$ ， $\{v_5, v_4\}$  等是点割集。

在 $G_2$ 中没有点割集。

**定义2** 在 $G$ 中，若存在顶点割，称 $G$ 的最小顶点割的顶点数称为 $G$ 的点连通度；否则称 $n-1$ 为其点连通度。 $G$ 的点连通度记为 $k(G)$ ，简记为 $k$ 。若 $G$ 不连通， $k(G)=0$ 。

例如：



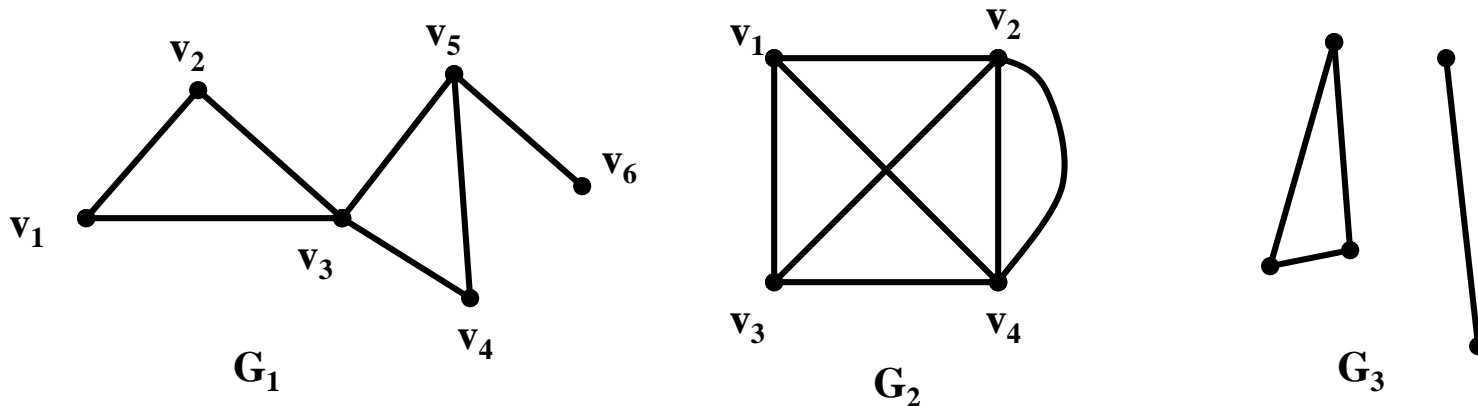
$G_1$ 的点连通度 $k(G_1)=1$

$G_2$ 的点连通度为 $k(G_2)=3$

$G_3$ 的点连通度为 $k(G_3)=0$

定义3 在 $G$ 中，最小边割集所含边数称为 $G$ 的边连通度。边连通度记为 $\lambda(G)$ 。若 $G$ 不连通或 $G$ 是平凡图，则定义 $\lambda(G)=0$

例如：



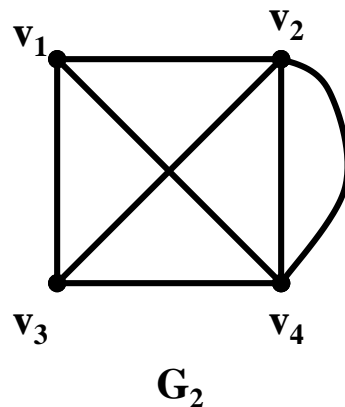
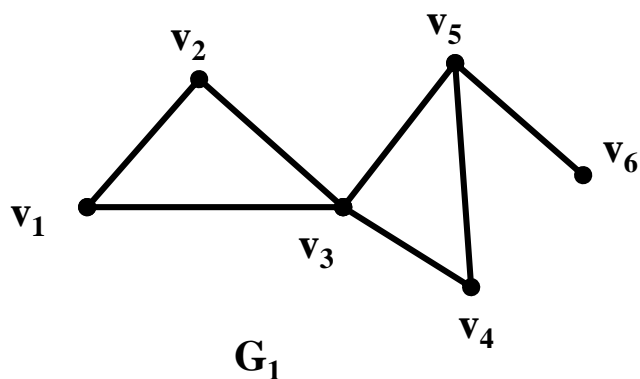
$G_1$ 的边连通度  $\lambda(G_1)=1$

$G_2$ 的边连通度为  $\lambda(G_2)=3$

$G_3$ 的边连通度为  $\lambda(G_3)=0$

**定义4** 在 $G$ 中, 若 $k(G) \geq k$ , 称 $G$ 是 $k$ 连通的; 若 $\lambda(G) \geq k$ , 称 $G$ 是 $k$ 边连通的。

例如:



$G_1$ 是1连通的, 1边连通的。但不是2连通的。

$G_2$ 是1连通的, 2连通的, 3连通的, 同时也是1边连通的, 2边连通的, 3边连通的。但不是4连通的。

## 2、连通度的性质

定理1 (惠特尼1932) 对任意图 $G$ ，有：

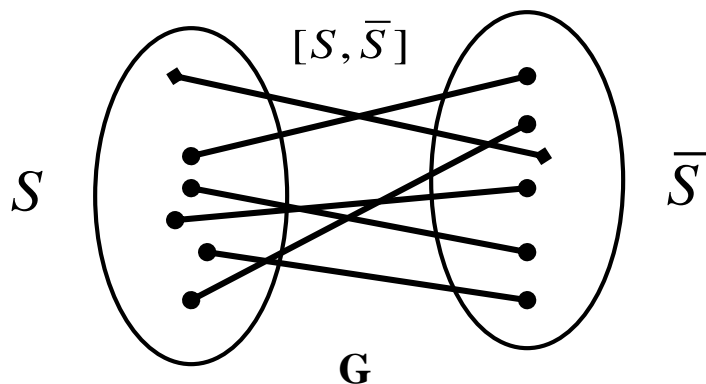
$$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

证明：(1) 先证明  $\lambda(G) \leq \delta(G)$

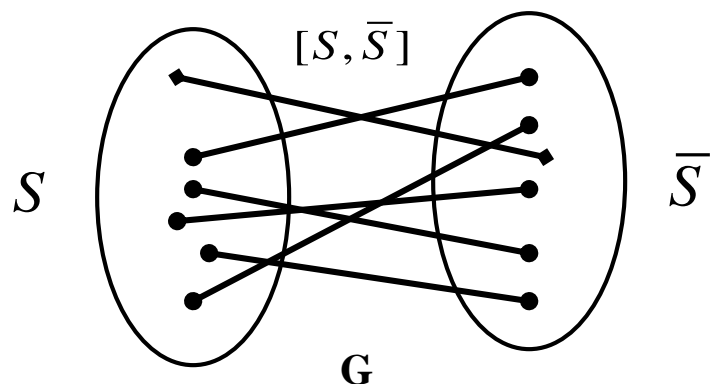
最小度顶点的关联集作成 $G$ 的分离集，所以：  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

(2) 再证明  $k(G) \leq \lambda(G)$

由定义， $k(G) \leq n - 1$ 。考虑最小边割集  $[S, \bar{S}]$



情形1  $S$ 中点与 $\bar{S}$ 中点均连接



则有：  $||[S, \bar{S}]|| = |S| \cdot |\bar{S}| \geq n - 1 \geq k(G)$

所以有：  $k(G) \leq \lambda(G)$ 。

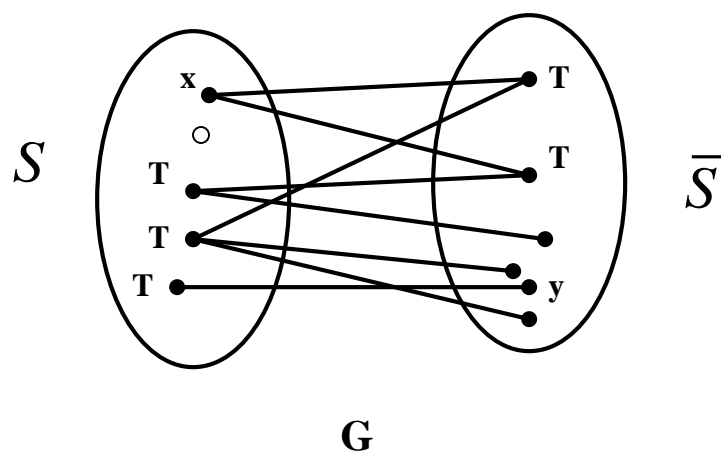
情形2  $S$ 中点与 $\bar{S}$ 中点不都连接

在这种情形下，取  $x \in S, y \in \bar{S}$ ，且 $x$ 与 $y$ 不邻接



令：

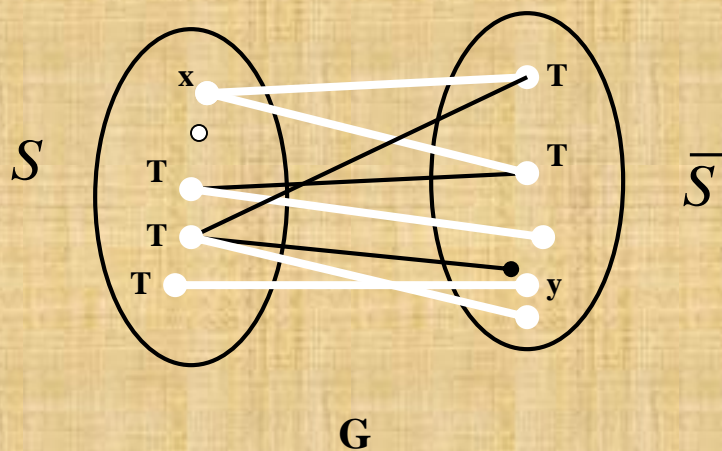
$$T = \{v \mid x \text{ adj } v, \text{ 且 } v \in \bar{S}\} \cup \{u \mid u \neq x, u \in S, \text{ 且 } u \text{ 在 } \bar{S} \text{ 中有邻点}\}$$



于是， $G$ 中任意一条 $(x, y)$ 路必然经过 $T$ 中一些点，所以， $T$ 为 $G$ 的一个点分离集。

在 $G$ 中取如下边集：

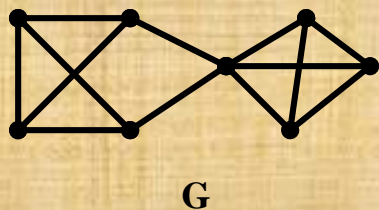
$$E_1 = \{xv \mid v \in \bar{S}\} \cup \{\text{从 } T \cap S \text{ 每个顶点取一条到 } \bar{S} \text{ 的边}\}$$



则：  $|E_1| = |T|$

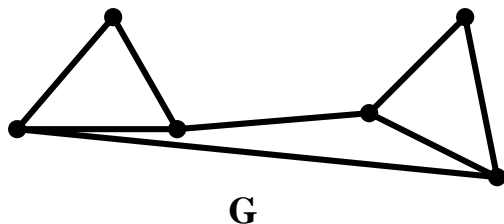
所以：  $\lambda(G) = |[S, \bar{S}]| \geq |E_1| = |T| \geq k(G)$

注： (1) 定理中严格不等式能够成立。



$k(G) = 1$  ,  $\lambda(G) = 2$  ,  $\delta(G) = 3$

(2) 定理中等式能够成立。



$$k(G) = \lambda(G) = \delta(G) = 2$$

(3) 哈拉里通过构图的方式已经证明：

对任意正整数 $a, b, c$ ,都存在图 $G$ , 使得：

$$k(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

(4) 惠特尼(1907---1989) 美国著名数学家。主要研究图论与拓扑学。先后分别在哈佛和普林斯顿高级研究院工作。他获过美国国家科学奖(1976), Wolf奖(1983), Steel奖(1985)。

惠特尼最初学习物理，在耶鲁大学获物理学学士学位后，又专攻音乐，获音乐学士学位。他一生热爱音乐，有高度音乐才华，会弹奏钢琴，演奏小提琴、中提琴、双簧管等乐器，曾担任普林斯顿交响乐团首席小提琴手。

1932年在他的数学博士论文中提出了上面定理。

值得一提的是，惠特尼创立了微分流形的拓扑学。在该领域，我国吴文俊等许多拓扑学家做出了贡献。

**定理2** 设 $G$ 是 $(n, m)$ 连通图，则：

$$k(G) \leq \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$$

证明：由握手定理： $2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq n\delta(G) \geq nk(G)$

所以:  $k(G) \leq \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$

哈拉里通过构图的方式证明了定理2的界是紧的。即存在一个 $(n, m)$  图 $G$ , 使得:  $k(G) = \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$

## 哈拉里图:涉及可靠性通信网络构建

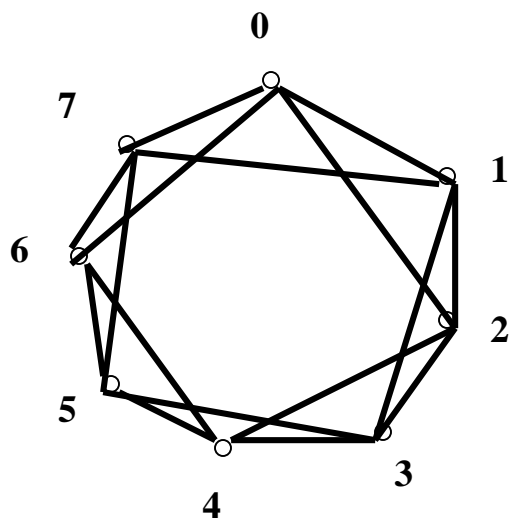
1962年, 数学家哈拉里构造了连通度是 $k$ , 边数为  $m = \left\lfloor \frac{nk}{2} \right\rfloor$  的图 $H_{k,n}$ , 称为哈拉里图。

(1)  $H_{2r,n}$

$$V(H) = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

$$E(H) = \{ij \mid |i - j| \leq r \text{ (取模 } n \text{ 的加法)}\}$$

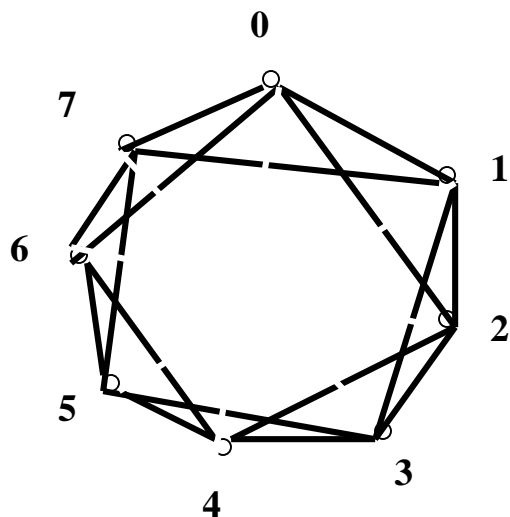
作 $H_{4,8}$



(2)  $H_{2r+1,n}$  ( $n$ 为偶数)

先作 $H_{2r,n}$ , 然后对 $1 \leq i \leq n/2$ ,  $i$ 与 $i+n/2$ 连线。

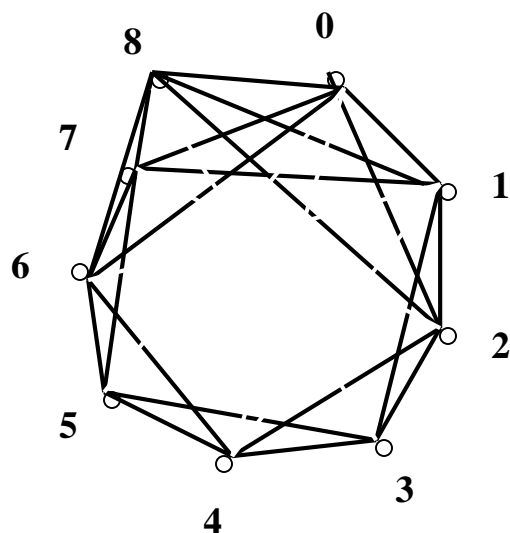
作 $H_{5,8}$



(3)  $H_{2r+1,n}$  ( $n$ 为奇数)

先作 $H_{2r,n}$ , 然后对 $1 \leq i \leq (n-1)/2$ ,  $i$ 与 $i+(n+1)/2$ 连线。同时,  $0$ 分别与 $(n-1)/2$ 和 $(n+1)/2$ 连线。

作 $H_{5,9}$



**定理3** 设 $G$ 是 $(n, m)$ 单图, 若  $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , 则 $G$ 连通。

**证明:** 若 $G$ 不连通, 则 $G$ 至少有两个连通分支, 于是, 至少有一个分支 $H$ , 使得:  $\delta(H) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , 这与条件矛盾。



**定理4** 设G是(n, m)单图, 若对任意正整数k, 有:

$$\delta(G) \geq \frac{n+k-2}{2}$$

则G是k连通的。

**证明:** 任意删去k-1个顶点, 记所得之图为H, 则:

$$\delta(H) \geq \delta(G) - (k-1) \geq \frac{n+k-2}{2} - k + 1 = \frac{n-k}{2}$$

由于  $\delta(H)$  是整数, 故:

$$\delta(H) \geq \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor$$

由定理3, H连通, 所以, G是k连通的。

定理5 设 $G$ 是 $n$ 阶单图，若  $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

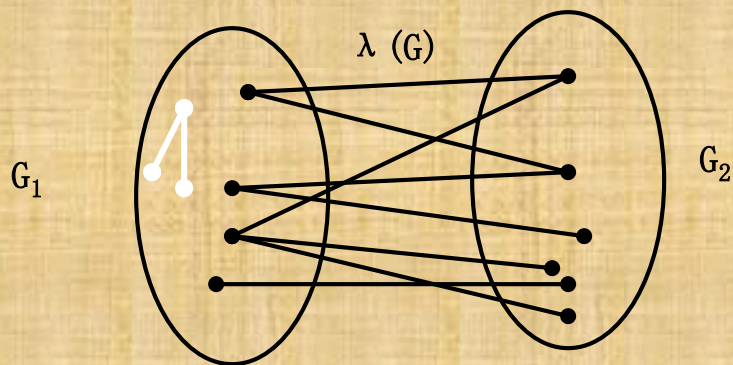
则有：  $\lambda(G) = \delta(G)$

证明：若不然，设  $\lambda(G) < \delta(G)$ .

设 $G$ 的边割为 $M$ ,且 $|M| = \lambda(G)$

设 $G-M$ 中 $G_1$ 分支中与 $M$ 相关联的顶点数为 $P$ ，显然有：

$$P \leq \lambda(G)$$



我们对 $G_1$ 中顶点数作估计：

由握手定理： $2|E(G_1)| \geq P\delta(G) - \lambda(G)$

又 $\lambda(G) < \delta(G)$ ，所以：

$$2|E(G_1)| \geq P\delta(G) - \lambda(G) > \lambda(G)(P-1) \geq P(P-1) = 2|E(K_P)|$$

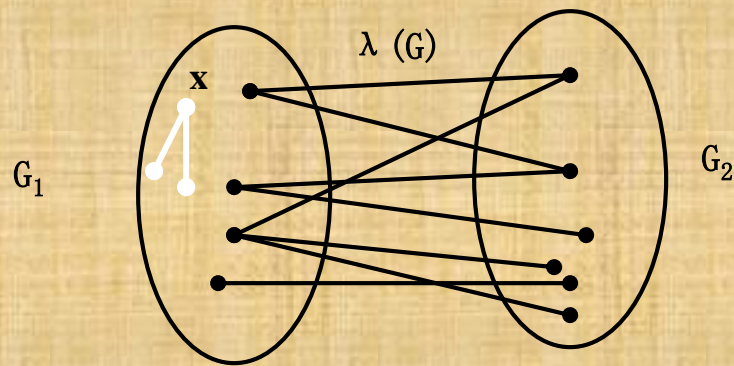
这说明： $G_1$ 中至少有一个顶点 $x$ 不与 $G_2$ 中顶点邻接。

而  $d_{G_1}(x) = d_G(x) \geq \delta(G)$

所以： $|V(G_1)| \geq \delta(G) + 1$

同理，有： $|V(G_2)| \geq \delta(G) + 1$

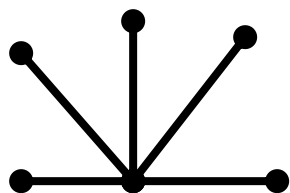
于是得  $\delta(G) < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ，矛盾！



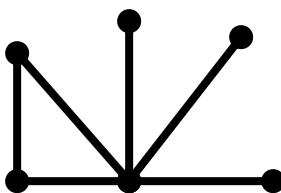
## (二)、描述连通性的其它参数简介(内容拓展)

### 1、图的坚韧度

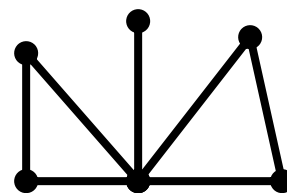
点和边连通度对图的连通性刻画存在明显不足，例如，我们观察如下3个图：



$G_1$



$G_2$



$G_3$

容易知道： $k(G_1)=k(G_2)=k(G_3)=1$

$\lambda(G_1)=\lambda(G_2)=\lambda(G_3)=1$

于是，从点、边连通度角度不能刻画上面3个图的连通性程度的区别。很明显： $G_3$ 连通性高于 $G_2$ ， $G_2$ 高于 $G_1$ 。

基于此，1996年，许进在电子学报发表文章，论述了用坚韧度来刻画图的连通程度比用连通度更精确。

定义1 用 $C(G)$ 表示图 $G$ 的全体点割集构成的集合，非平凡非完全图的坚韧度，记作 $\tau(G)$ ，定义为：

$$\tau(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{\omega(G-S)} \mid S \in C(G) \right\}$$

坚韧度的概念是图论学家Chvatal提出来研究图的哈密尔顿问题的一个图参数。

定义2 设 $G$ 是一个非完全 $n$  ( $n \geq 3$ ) 阶连通图， $S^* \in C(G)$ ，若 $S^*$ 满足：

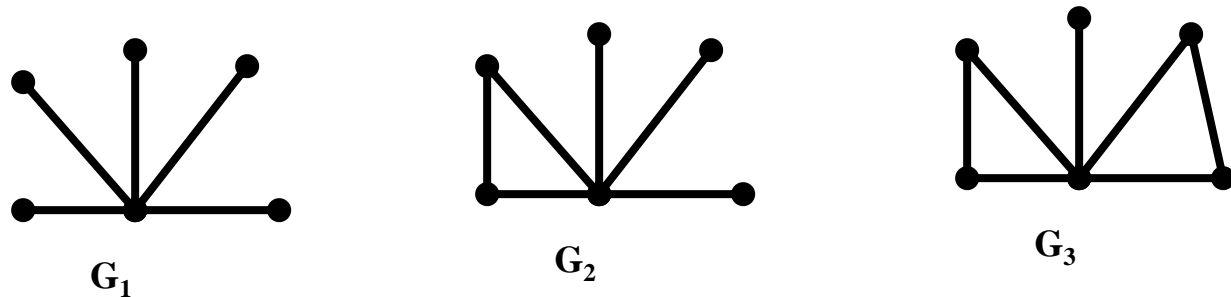
$$\tau(G) = \frac{|S^*|}{\omega(G-S^*)}$$

称 $S^*$ 是 $G$ 的坚韧集。

容易知道：坚韧集是那些顶点数尽可能少，但产生的分支数尽可能多的点割集，同时，坚韧集不唯一。

坚韧度与 $G$ 的连通性有何关系？

对于 $G_1$ 与 $G_2$ ，如果  $|S^*_1|=|S^*_2|$ ，但  $\omega(G_1 - S^*_1) < \omega(G_2 - S^*_1)$ ，那么  $\tau(G_1) > \tau(G_2)$ ，这说明，坚韧度大的图连通性好。



容易算出： $\tau(G_1) = 0.2$ ， $\tau(G_2) = 0.25$ ， $\tau(G_3) = 0.33$ ，于是 $G_3$ 比 $G_2$ 的连通性好， $G_2$ 比 $G_1$ 的连通性好。

许进通过上面分析得出：

设 $G_1$ 与 $G_2$ 是两个非平凡非完全的连通图，若 $\tau(G_1) > \tau(G_2)$ ，则 $G_1$ 的连通性比 $G_2$ 好。因此，坚韧度可以作为网络容错性参数的度量。

许进还对坚韧度的界、取值范围以及坚韧度的计算问题作了一些探索。

仿照点坚韧度，可以定义边坚韧度：

$$\tau_1(G) = \min \left\{ \frac{|X|}{\omega(G - X)} \mid X \in CE(G) \right\}$$

许进, 男, 1959年生, 陕西乾县人. 教授, 博士生指导教师. 理学、工学双博士。现任: 华中科技大学特聘教授, 华中科技大学分子生物计算机研究所所长; 华中科技大学系统科学研究所所长; 中国电路与系统学会委员; 中国电子学会图论与系统优化专业委员会副理事长; 湖北省运筹学会(筹委会)理事长。

## 2、图的核度

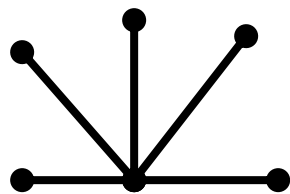
定义3 设 $G$ 是一个非平凡连通图, 则称:

$$h(G) = \max \{ \omega(G - S) - |S| \mid S \in C(G) \}$$

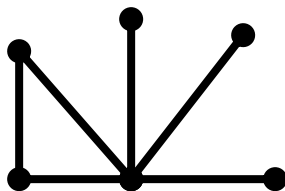
为图的核度。若 $S^*$ 满足:  $h(G) = \omega(G - S^*) - |S^*|$

称 $S^*$ 为图的核。

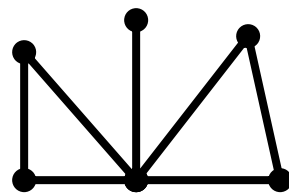




$G_1$



$G_2$



$G_3$

容易算出： $h(G_1)=4$  ,  $h(G_2)=3$  ,  $h(G_3)=2$

一般地，核度越小，连通程度越高。

图的核度的界如何？特殊图的核度问题，核度的计算问题等都是值得研究的问题。

我国欧阳克智教授等把核度称为图的断裂度，国外图论学者称它为图的离散数。许进把它引进系统科学中，称它为系统的核度。由此，他建立了系统的核度理论而受到系统科学界的高度重视。

如何准确刻画图的连通性程度，现在还是一个有待进一步研究的问题。

关于这方面的研究文献很多，有兴趣可以查阅并作一些研究。

# 作业

**P66---67 习题3 : 1 2, 13, 14, 20**













# 图论及其应用

任课教师：杨春

Email: [yc517922@126.com](mailto:yc517922@126.com)

数学科学学院

# 本次课主要内容

## 图的宽直径简介

(一)、敏格尔定理

(二)、图的宽直径相关概念

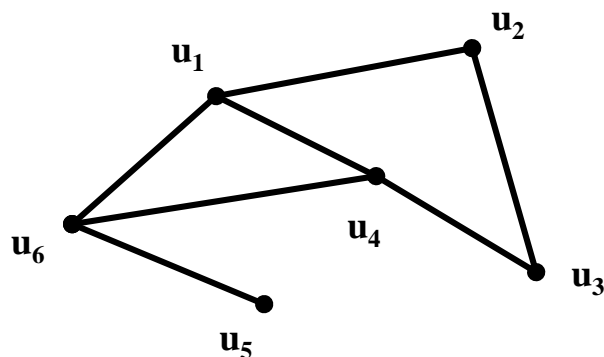
(三)、一些主要研究结果简介

## (一)、敏格尔定理

敏格尔定理是图的连通性问题的核心定理之一，它描述了图的连通度与连通图中不同点对间的不相交路数目之间的关系。

**定义1** 设 $u$ 与 $v$ 是图 $G$ 的两个不同顶点， $S$ 表示 $G$ 的一个顶点子集或边子集，如果 $u$ 与 $v$ 不在 $G-S$ 的同一分支上，称 $S$ 分离 $u$ 和 $v$ 。

例如：

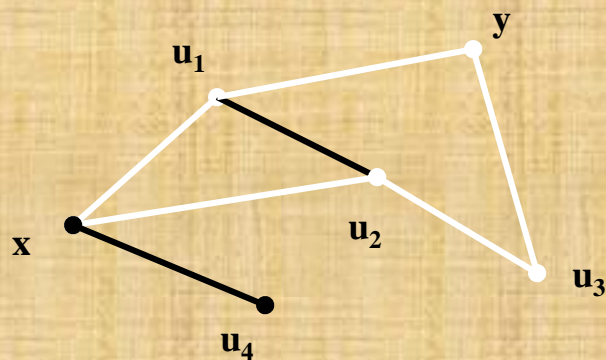


$\{u_1, u_4\}$  ,  $\{u_1u_2, u_1u_4, u_4u_5\}$  分离点 $u_2$ 与 $u_6$ 。

**定理1 (敏格尔1902---1985) (1)** 设 $x$ 与 $y$ 是图 $G$ 中的两个不相邻点，则 $G$ 中分离点 $x$ 与 $y$ 的最少点数等于独立的 $(x, y)$ 路的最大数目；

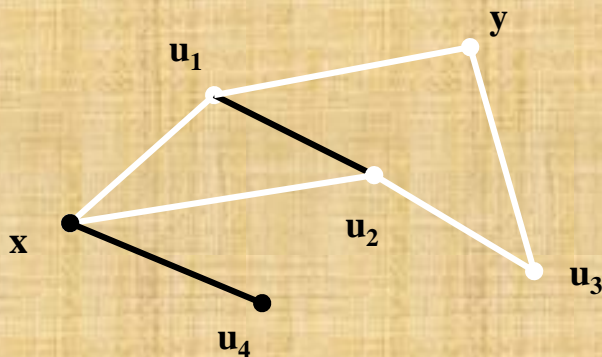
(2) 设 $x$ 与 $y$ 是图 $G$ 中的两个不同顶点，则 $G$ 中分离点 $x$ 与 $y$ 的最少边数等于 $G$ 中边不重的 $(x, y)$ 路的最大数目。

例如：



在该图中，独立的 $(x, y)$ 路最大条数是2，分离点 $x$ 与 $y$ 的最小分离集是  $\{u_1, u_2\}$ ，包含两个顶点。

又在该图中，边不重的 $(x, y)$ 路最大条数是2，分离点 $x$ 与 $y$ 的最小边分离集是  $\{xu_1, xu_2\}$ ，包含两条边。



该定理是图论中，也是通信理论中的最著名的定理之一，是由奥地利杰出数学家Menger在1927年发表的。

敏格尔(1902---1985) 早年显示出数学物理天赋，1920年入维也纳大学学习物理，次年，由于参加德国物理学家Hans Hahn的“曲线概念的新意”讲座，而把兴趣转向了数学。因为Hans提到当时没有满意的曲线概念定义，包括大数学家康托、约当，豪斯道夫等都尝试过，没有成功。

而且，认为不可能彻底解决。但是，尽管作为几乎没有数学背景的本科生，通过自己的努力，敏格尔还是解决了该问题。由此，他就转向曲线和维数理论的研究。

敏格尔本科期间，身体很差，父母双亡。但在1924年在Hahn指导下完成了他的研究工作。1927年做了维也纳大学几何学首席教授，同年，发表了“ $n$ —弧定理”，即敏格尔定理。

1930年，敏格尔来到匈牙利布达佩斯做访问，当时哥尼正在写一本书，要囊括图论中的所有知名定理。敏格尔向他推荐自己的定理，但哥尼最初不相信他，认为敏格尔定理一定不对，花了一个晚上找反例试图否定敏格尔定理，但没有成功，于是要了敏格尔的证明，终于把敏格尔定理加在了他的著作的最后一节。

敏格尔被认为是20世纪最杰出数学家之一。

哈恩 (1879~1968) 德国物理学家，化学家。最大的贡献是1938年和F.斯特拉斯曼一起发现核裂变现象。哈恩获得1944年诺贝尔化学奖。

借助于敏格尔定理，数学家惠特尼在1932年的博士论文中给出了 $k$ 连通图的一个美妙刻画。这就是人们熟知的所谓“敏格尔定理”

定理2 (惠特尼1932) 一个非平凡的图 $G$ 是 $k$  ( $k \geq 2$ ) 连通的，当且仅当 $G$ 的任意两个顶点 $u$ 与 $v$ 间，至少存在 $k$ 条内点不交的 $(u, v)$ 路。

证明: (必要性) 设 $G$ 是 $k$  ( $k \geq 2$ ) 连通的， $u$ 与 $v$ 是 $G$ 的两个顶点。

情形1: 如果 $u$ 与 $v$ 不相邻， $U$ 为 $G$ 的最小 $u$ -- $v$ 分离集,那么有

$|U| \geq k(G) \geq k$ , 于是由敏格尔定理，结论成立;

情形2: 若 $u$ 与 $v$ 邻接, 其中 $e=uv$ , 那么, 容易证明:  $G-e$ 是 $(k-1)$ 连通的。由情形1知:  $G-e$ 至少包含 $k-1$ 条内点不交的 $u-v$ 路, 即 $G$ 至少包含 $k$ 条内点不交的 $u-v$ 路。

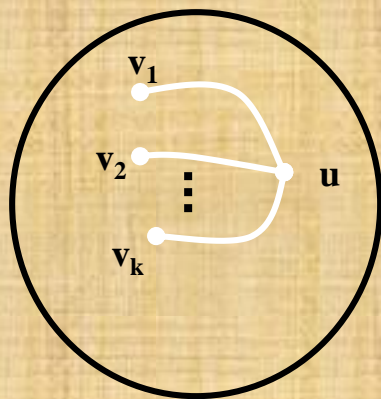
(充分性) 假设 $G$ 中任意两个顶点间至少存在  $k$  条内部不交路。设 $U$ 是 $G$ 的最小顶点割, 即 $|U|=k(G)$ 。令 $x$ 与 $y$ 是 $G-U$ 的处于不同分支的两个点。所以 $U$ 是 $x$ 与 $y$ 的分离集, 由敏格尔定理:  $|U| \geq k$ , 即证明 $G$ 是  $k$  连通的。

例1 设 $G$ 是 $k$ 连通图,  $S$ 是由 $G$ 中任意 $k$ 个顶点构成的集合。若图 $H$ 是由 $G$ 通过添加一个新点 $w$ 以及连接 $w$ 到 $S$ 中所有顶点得到的新图, 求证:  $H$ 是 $k$ 连通的。

证明: 首先, 分离 $G$ 中两个不相邻顶点至少要 $k$ 个点, 其次, 分离 $w$ 与 $G$ 中不在 $S$ 中顶点需要 $k$ 个顶点。因此 $H$ 是 $k$ 连通的。

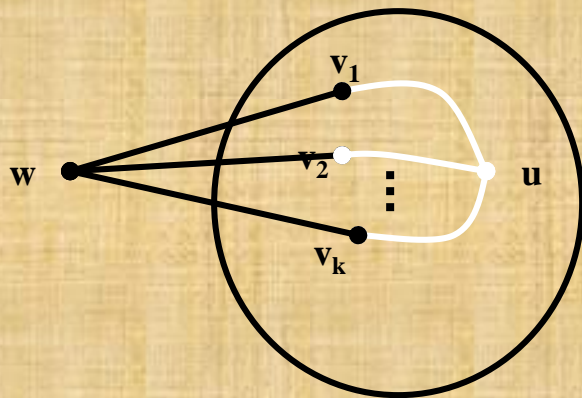


**例2** 设 $G$ 是 $k$ 连通图， $u, v_1, v_2, \dots, v_k$ 为 $G$ 中 $k+1$ 个不同顶点。求证： $G$ 中有 $k$ 条内点不交路 $(u, v_i)$  ( $1 \leq i \leq k$ )



$G$

**证明：** 在 $G$ 外添加一点 $w$ , 让 $w$ 与 $v_i$ 邻接 ( $1 \leq i \leq k$ ) 得 $H$ .



$H$

由例1,  $H$ 是 $k$ 连通的, 于是由定理2,  $u$ 与 $w$ 间存在 $k$ 条内点不交的 $u$ --- $w$ 路, 所以  $G$ 中有 $k$ 条内点不交路 $(u, v_i)$  ( $1 \leq i \leq k$ )。

对于边连通度, 有类似定理:

定理3 (惠特尼1932) 一个非平凡的图 $G$ 是 $k$  ( $k \geq 2$ ) 边连通的, 当且仅当 $G$ 的任意两个顶点间至少存在 $k$ 条边不重的 $(u, v)$ 路。

推论 对于一个阶至少为3的无环图 $G$ , 下面三个命题等价。

- (1)  $G$ 是2连通的;
- (2)  $G$ 中任意两点位于同一个圈上;
- (3)  $G$ 无孤立点, 且任意两条边在同一个圈上。

证明: (1)→(2)

$G$ 是2连通的,则 $G$ 的任意两个顶点间存在两条内点不交路 $P_1$ 与 $P_2$ ,显然这两条路构成包含该两个顶点的圈。

(2)→(3)

$G$ 无孤立点显然。设 $e_1$ 与 $e_2$ 是 $G$ 的任意两条边,在 $e_1$ 与 $e_2$ 上分别添加两点 $u$ 与 $v$ 得图 $H$ ,则 $H$ 是2连通的,由(1)→(2), $H$ 的任意两个顶点在同一个圈上,即 $u$ 与 $v$ 在同一个圈上,也即 $e_1$ 与 $e_2$ 在同一个圈上。

(3)→(1)

设 $u$ 与 $v$ 是无环图 $G$ 的任意两个不相邻顶点,由于 $G$ 无孤立点,所以可设 $e_1, e_2$ 分别与 $u, v$ 相关联。由(3), $e_1, e_2$ 在同一个圈上,所以 $u$ 与 $v$ 在同一个圈上,因此分离 $u$ 与 $v$ 至少要去掉两个顶点,即证明 $G$ 是2连通的。

## (二)、图的宽直径相关概念

### 1、问题背景

分析评价互联网络的性能有多个指标，如网络的开销(通信与材料开销),网络的容错性(连通性),网络中信息传递的传输延迟等。

所谓传输延迟，又称为时间延迟，是指信息从源传到目的地所需要的时间。

如何度量网络的传输延迟？

信息从源到目的地需要经过若干中间站存储和转发。因此，信息传输延迟可以用图的顶点间距离来度量。当然，每条边的长度可以定义为1.

于是，网络的最大通信延迟可以通过图的直径来度量。  
图的直径定义为：

$$d(G) = \max \{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$$

在信息的单路径传输中，分析通信延迟，只需要考虑网络的直径即可。

直径虽然能够刻画网络的通信延迟，但毕竟是在最坏情形下的通信延迟，而网络中大距离点对并不多，所以用直径对信息传输延迟进行描述，还有点不精细。于是，有如下平均距离的概念：

设 $G$ 是 $n$ 阶图( $n \geq 2$ )， $G$ 的平均距离  $\mu(G)$  定义为：

$$\mu(G) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v)$$

平均距离是网络信息平均传输延迟的度量。跟直径研究一样，平均距离问题也吸引很多学者的研究，有很多研究成果。

求平均距离的一个值得研究的方向是求平均距离算法复杂性。求平均距离的最著名的Fredman算法时间复杂性是 $O(n^2 + nm)$ ；求直径最著名算法是Floyd算法，时间复杂性是 $O(n^3)$ 。确定平均距离问题是否比确定所有距离容易？这还是一个没有完结的挑战性问题。

信息的单路径传输延迟用直径或平均距离刻画。但是，如果要一次传输的信息量较大，远远超出链路带宽，就需要所谓的分包传送。

所谓的分包传送，就是按照带宽要求，把信息在起点进行分割打包，每个信息小包按照若干内点不交路从起点传到终点。基于此，上世纪90年代初，D Frank等图论学者和一些计算机专家从图论角度对信息分包传送的若干问题展开研究。研究的典型问题是：

- (1) 分包传送的通信延迟度量；
- (2) 分包传送的路由选择，即网络中平行寻径算法；
- (3) 互联网络的设计与网络结构分析问题；
- (4) 基于分包传送下互联网络的容错分析。

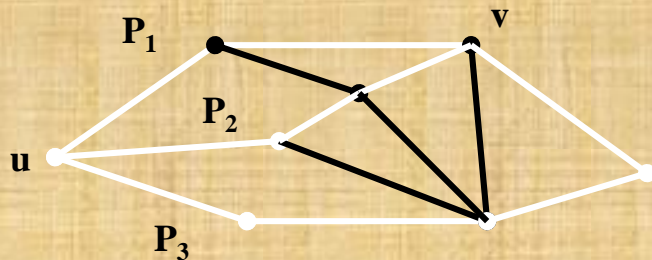
为了描述通信延迟，**D Frank**等拓展了图的普通距离和普通直径的概念，提出了用宽距离来描述点对间信息传递的通信延迟，而用所谓的宽直径来描述网络的最大通信延迟。由此而形成的组合网络理论研究成为最近**10**多年来图论和通信网络相结合的热点研究问题。

国内，中国科技大学以徐俊明为代表的研究团队取得了很多重要成果，在该领域处于世界领先水平，出版了专著《组合网络理论》，科学出版社，**2007**年。

## 2、宽直径相关概念

定义1 设 $x, y \in V(G)$ ,  $C_w(x, y)$ 表示 $G$ 中 $w$ 条内点不交路的路族， $w$ 称为路族的宽度， $C_w(x, y)$ 中最长路的路长成为该路族的长度，记为： $l(C_w(x, y))$ 。





图G

在上图中，G的一个宽度为3的u, v间的路族为：

$$C_3(u, v) = \{P_1, P_2, P_3\}$$

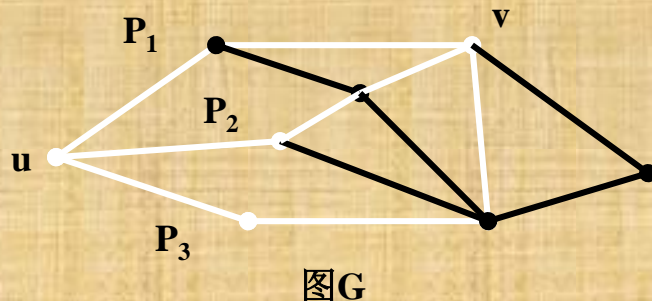
该路族的长度为：

$$l(C_3(u, v)) = l(P_3) = 4$$

注：路族也称为容器。

定义2 设 $x, y \in V(G)$ ，定义x与y间所有宽度为w的路族长度的最小值 $d_w(x, y)$ 为x与y间w宽距离，即：

$$d_w(x, y) = \min \{l(C_w(u, v)) : \forall C_w(u, v)\}$$



在上图中，G的一个宽度为3的u, v间的距离为：

$$d_3(u, v) = \min \{l(C_3(u, v)) : \forall C_3(u, v)\} = 3$$

注：x与y间长度等于w宽距离的路族称为x与y间最优路族。  
所以，求w宽距离，就是要找到最优路族。

定义3 设G是w连通的，G的所有点对间的w宽距离的最大值，称为G的w宽直径，记为 $d_w(G)$ 。即：

$$d_w(G) = \max \{d(x, y) : x, y \in V(G)\}$$

例3 求 $n$ 点圈 $C_n$ 和 $n$ 阶完全图 $K_n$ 的宽直径。

分析：对于 $C_n$ 来说，连通度为2，因此，可以求它的1直径和2直径；而对于 $K_n$ 来说，连通度是 $n-1$ ，所以，可以考虑它的1到 $n-1$ 直径。

解：(1)  $n$ 点圈 $C_n$ 的宽直径。

显然：  $d_1(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

因为 $C_n$ 中任意点对间只有一个唯一的宽度为2的路族，点对间的2距离就是该点对的唯一路族的长度。当 $x$ 与 $y$ 邻接时，路族的长度最长，为 $n-1$ ，所以，由宽直径定义得：

$$d_2(C_n) = n - 1$$

(2)  $K_n$ 的宽直径。

显然： $d_1(K_n) = 1$

对于任意的 $w(2 \leq w \leq n-1)$ , 点对间的最优路族长为2. 所以, 有:

$$d_w(K_n) = 2(2 \leq w \leq n-1)$$

注：从定义看出：对一般图来说，计算 $w$ 宽直径是一件很困难的工作。对宽直径的研究，主要是两方面：一是对一般图而言，研究 $w$ 宽直径的界；二是根据各种互联网络的结构特征，确定其宽直径。当然，研究宽直径与图的其它不变量之间的关系也是一个很有意义的方向。

### (三)、一些主要研究结果简介

经过10多年的研究，组合网络理论取得了很多有意义结果，同时也有许多公开性问题等待人们继续研究。

#### 1、一般图的 $w$ 宽直径

定理1 对于任意连通图 $G$ ,有:

$$d(G) = d_1(G) \leq d_2(G) \leq \cdots \leq d_w(G)$$

定理2 设 $G$ 是 $n$ 阶 $w$ 连通图,  $w \geq 2$ 。则:

$$2 \leq d_w(G) \leq n - w + 1$$

而且，上界和下界都能达到。

定理3 设 $G$ 是 $n$ 阶 $w$ 连通图,  $w \geq 2$ ,  $G$  满足如下条件:

$$d_G(x) + d_G(y) \geq n + w - 1, \forall x, y \in V(G)$$

那么,  $d_w(G)=2$ , 并且上面条件是紧的。

定理4 设 $G$ 是 $w$ 连通 $w$ 正则图,  $w \geq 2$ , 那么:

$$d_w(G) \geq d(G) + 1$$

定理5 设 $G$ 是 $n$ 阶 $w$ 连通 $w$ 正则无向图,  $w \geq 3$ , 那么:

$$d_w(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor$$

## 2、图运算与 $w$ 宽直径

**定理1** 设 $G_i$ 是 $w_i$ 连通有向图, 且:  $r_{w_i}(G) \leq d(G_i)$  ,  
 $1 \leq i \leq m$ . 如果  $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$ , , 那么:

$$d_w(G) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^m d(G_j) + 1; \sum_{j \neq i}^m d(G_j) + d_{w_i}(G_i); 1 \leq i \leq m \right\}$$

注: 该结果是由徐俊明得到的。

**定理2 (1)** 设 $G_i$ 是阶至少为3的 $w_i$ 连通无向图,  $i=1, 2, \dots, m$ 。  
 如果  $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$ , , 且  $w=w_1+w_2+\dots+w_m$ , 则:

$$d_w(G) \leq \max \left\{ \sum_{j \neq i}^m d(G_j) + d_{w_i}(G_i); 1 \leq i \leq m \right\}$$

(2) 设 $G$ 是 $w \geq 2$ 连通无向图.如果 $d_w(G)=d(G)+1$ ,则:

$$d_{1+w}(K_2 \times G) \leq d(G) + 2$$

(3) 设 $G_i$ 是 $w_i \geq 1$ 连通无向图,  $i=1,2$ 。如果 $G_i$ 是 $w_i$ 正则的, 且 $i=1$ 或 $2$ , 则:

$$d_{w_1+w_2}(G_1 \times G_2) \leq d(G_i) + 2$$

注: 该结果是由徐俊明得到的。

### 3、图参数与 $w$ 宽直径

图论中, 对图参数进行研究时, 一个自然的研究是考察研究的参数与其它参数之间的关系。因为很多图参数的计算是NP完全问题, 如果建立了参数之间的联系, 可以间接计算。



定理1 设G是w连通无向图,  $w \geq 2$ , 且  $\alpha(G)$  是G的独立数。  
则

$$d_w(G) \leq 2\alpha(G)$$

#### 4、宽直径与容错直径

容错直径的概念是由Krishnamoorthy等在1987年提出的, 它是度量容错网络的最大通信延迟的量。即一个网络G, 如果F是它的一个容错顶点集合, 则G-F是连通的, 它有一个确定直径, 容错直径就是基于这样的背景提出的。

定义1 设G是w连通无向图, 则对V(G)的任意子集F, 如果有 $|F| < w$ , 定义G的w-1容错直径 $D_w(G)$ 为:

$$D_w(G) = \max \left\{ d(G - F) \mid \forall F \subset V(G), |F| < w \right\}$$

从容错直径的定义可以看出，计算图的容错直径跟宽直径一样，非常困难，事实上，是**NP**完全问题。因此，对容错直径的研究，自然转移到对容错直径和宽直径之间的关系进行研究。

**定理1** 设 $G$ 是 $w$ 连通无向图,  $w \geq 2$ , 则有:

$$D_w(G) \leq d_w(G)$$

**定理2** 设 $G$ 是直径为 $d$ 的2连通图，则:

$$d_2(G) \leq \max \left\{ (d-1) \left( D_2 - \frac{1}{2}d - 1 \right) + 1, D_2 + 1 \right\}$$

定理3 设G是2连通无向图, 则有:

$$d_2(G) \leq \begin{cases} D_2 + 1, & \text{若 } d = 2; \\ (d - 1)(D_2 - 1), & \text{若 } d \geq 3 \end{cases}$$

定理4 设G是直径为2的2连通图, 则:  $d_2 = D_2 + 1$ 的充分必要条件是 $d_2 = 3$ 或 $d_2 = 4$ , 且达到 $d_2$ 值的任何两点必然邻接。

注: 关于容错直径和宽直径的关系研究文章不是很多, 主要是徐俊明发表的文章。

## 5、典型网络的w宽直径

经过近20年的研究, 已经确定出很多著名网络的容错直径与宽直径, 下面做总结性介绍。

### (1) 超立方体网络 $Q_n$

$$k(Q_n) = n \quad d(Q_n) = n$$

$$d_w(Q_n) = D_w(Q_n) = \begin{cases} n, & \text{若 } w \leq n-1 \\ n+1, & \text{若 } w = n. \end{cases}$$

### (2) de Bruijn 有向网络 $B(d, n)$ ( $d \geq 2, n \geq 1$ )

$$k(B(d, n)) = d - 1 \quad d(B(d, n)) = n$$

$$d_w(B(d, n)) = D_w(B(d, n)) = n + 1, \text{ 若 } w \leq d - 1$$

### (3) Kautz 有向网络 $K(d, n)$ ( $d \geq 2, n \geq 1$ )

$$k(K(d, n)) = d \quad d(K(d, n)) = n$$

$$d_w(K(d, n)) \leq \begin{cases} n+1, & \text{若 } w \leq d-2 \\ n+2, & \text{若 } w = d-1 \text{ 或 } d \end{cases}$$

$$D_w(K(d, n)) = d_w(K(d, n)) = \begin{cases} n+1, & \text{若 } w \leq d-1, \text{ 或 } w = d \text{ 且 } n = 2; \\ n+2, & \text{若 } w = d \text{ 或 } n \geq 3 \end{cases}$$

**(4) de Bruijn 无向网络UB (d , n) (d ≥ 2, n ≥ 1)**

$$k(UB(d, n)) = 2d - 2 \quad d(UB(d, n)) = n$$

$$d_{d-1}(UB(d, n)) \leq n + 1$$

$$D_2(UB(2, n)) = d_2(UB(2, n)) = n$$

**(5) 无向超环面C (d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub> , ..., d<sub>m</sub>)**

$$k(C(d_1, d_2, \dots, d_m)) = 2m$$

$$d(C(d_1, d_2, \dots, d_m)) = \sum_{i=1}^m \left\lfloor \frac{1}{2} d_i \right\rfloor$$

$$\text{令 } G = C(d_1, d_2, \dots, d_m)$$

$$d_{2m}(G) = \begin{cases} 2d(G) - 1, & \text{若 } G = C_{2w+1} \times C_3, w \geq 2; \\ 2d(G) - 2, & \text{若 } G = C_{2w+2} \times C_3, w \geq 2; \\ d(G) + 2, & \text{若 } G = C_d \times C_4, d \geq 9; \\ d(G) + 2, & \text{若 } G = C_d \times C_5, 9 \leq d \leq 13; \\ d(G) + 1, & \text{其他。} \end{cases}$$

(6) 有向超环面  $\vec{C}(d_1, d_2, \dots, d_m)$

$$d_n(\vec{C}) = \sum_{i=1}^n (d_i - 1) = d(\vec{C}) + 1$$

如果 $\mathbf{d}_1=\mathbf{d}_2=\dots=\mathbf{d}_n=\mathbf{d}$ , 则:

$$d_n(\vec{C}_n(d)) = d(\vec{C}_n(d)) = n(d-1) + 1$$

$$D_n(\vec{C}_n(d)) = d_w(\vec{C}_n(d)) = \begin{cases} n(d-1), & \text{若 } 1 \leq w \leq n-1 \\ n(d-1) + 1, & \text{若 } w = n \end{cases}$$

(7) 广义超立方体网络 $Q(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n)$

$$D_w(Q(d_1, d_2, \dots, d_n)) = d_w(Q(d_1, d_2, \dots, d_n))$$

$$= \begin{cases} n, & \text{若 } 1 \leq w \leq n-1 \\ n, & \text{若 } w = n \text{ 且至少存在两个 } d_i \geq 3; \\ n+1, & \text{若 } w = n \text{ 且至少存在一个 } d_i \geq 3; \\ n+1, & \text{若 } n+1 \leq w \leq d_1 + d_2 + \dots + d_n - n \end{cases}$$

## (8) 立方连通圈CCC(n)

$$k(CCC(n)) = 3 \quad d(CCC(n)) = \left\lfloor \frac{5}{2}n - 1 \right\rfloor$$

$$d_3(CCC(n)) = D_3(CCC(n)) = \left\lfloor \frac{5}{2}n + 2 \right\rfloor$$

除此之外，还确定了金字塔网、循环有向图、折叠超立方体、斐波拉齐超立方体、交叉超立方体、蝶形网和莫比乌斯超立方体等网络的宽直径与容错直径。



## 第一次上交作业

习题1： 4, 5, 11, 12, 17, 18.

习题2： 1, 9, 16.

习题3： 1, 3, 7, 12, 13.

作成Word文档上交。

Thank You !