第二章　非线性方程的求根方法

第二章　非线性方程的求根方法

- 引言
- 方程求根的二分法
- 迭代法及其收敛性
- Newton迭代法

2.1 引言

- 方程是科学研究中不可缺少的工具；
- 方程求解是科学计算中一个重要的研究对象；
- 几百年前就已经找到了代数方程中二次至四次方程的求根公式；
- 但是，对于更高次数的代数方程目前仍无有效的精确解法；
- 对于无规律的非代数方程的求解也无精确解法；
- 因此，研究非线性方程的数值解法成为必然.

非线性方程的一般形式：$f(x)=0$

代数方程：$f(x)=a_0+a_1x+\ldots\ldots+a_nx^n$ （$a_n\neq0$）

超越方程：$f(x)$中含三角函数、指数函数、或其他超越函数.

用数值方法求解非线性方程的步骤：

（1）找出隔根区间；（只含一个实根的区间称隔根区间）

（2）近似根的精确化. 从隔根区间内的一个或多个点出发，逐次逼近，寻求满足精度的根的近似值.

2.2 方程求根的二分法

定理1 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$连续，且$f(a)f(b)<0$，则方程$f(x)=0$在区间$[a,b]$内至少有一个根.

二分法的基本思想：

假定$f(x)=0$在$[a,b]$内有唯一单实根x^*，考察有根区间$[a,b]$，取中点$x_0=(a+b)/2$，若$f(x_0)=0$，则$x^*= x_0$，否则，

（1）若$f(x_0)f(a)>0$，则x^*在x_0右侧，令$a_1=x_0$， $b_1=b$;

（2）若$f(x_0)f(a)<0$，则x^*在x_0左侧，令$a_1=a$， $b_1= x_0$.

以$[a_1, b_1]$为新的隔根区间，且仅为$[a, b]$的一半，对$[a_1, b_1]$重复前过程，得新的隔根区间$[a_2, b_2]$,

如此二分下去，得一系列隔根区间：

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots\ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots\ldots$$

其中每个区间都是前一区间的一半，故$[a_k, b_k]$的长度：

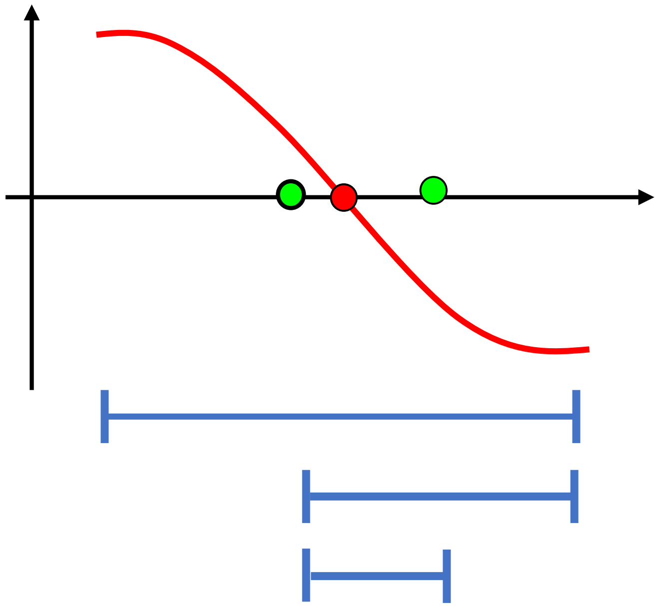
$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a)$$

当k趋于无穷时趋于0.

即若二分过程无限继续下去，这些区间最后必收敛于一点x^*，即方程的根.

每次二分后，取有根区间的中点$x_k = (a_k+b_k)/2$作为根的近似值，则可得一近似根序列：$x_0, x_1, x_2, \ldots$ 该序列必以根x^*为极限.

实际计算中，若给定充分小的正数ε_0和允许误差限ε_1，当$|f(x_n)| < \varepsilon_0$或$b_n - a_n < \varepsilon_1$时，均可取$x^* \approx x_n$.



- 二分法性质：
  - $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$;
  - $b_n - a_n = (b - a) / 2^n$

定理2 设x^*为方程$f(x)=0$在$[a, b]$内唯一根，且$f(x)$满足$f(a)f(b)<0$，则由二分法产生的第n个区间$[a_n, b_n]$ 的中点x_n满足不等式

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

证明：

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

二分法求解非线性方程的程序：

```
function [x,n]=bisection(f,a,b,d)
%二分法求方程的根：可以是代数方程，也可以是超越方程
%f是所要求解的函数
%a,b是求解区间
%d是求解精度
%输出x是方程的近似根，n是迭代步数
```

```
fa=f(a);fb=f(b);
n=1;%计数器初始化
if fa*fb>0,
 disp('所给区间内没有实数解！');
end
while 1%用while循环，未知循环次数，不好用for循环
    c=(a+b)/2;fc=f(c);
    if abs(fc)<d;
        x=c;
        break;
```

```
elseif fa*fc<0,
        b=c;
        fb=fc;
    else
        a=c;
        fa=fc;
    end
   n=n+1;
end
```

二分法求解非线性方程的优缺点：

- 计算过程简单，收敛性可保证；
- 对函数的性质要求低，只要连续即可.

- 收敛速度慢；
- 不能求复根和重根；
- 调用一次求解一个$[a, b]$间的多个根无法求得.