模拟题

1、考虑方程$x^2-3x+2=0$，迭代格式如下

$$x_{k+1}=x_k-\alpha\frac{x_k^2-3x_k+2}{2x_k-3},\qquad k=1,2,\cdots$$

分别求出使该迭代格式在$x^*=2$和$x^*=1$有局部收敛性的α范围.

解：$\varphi(x)=x-\alpha\dfrac{x^2-3x+2}{2x-3},\varphi'(x)=1-\alpha\dfrac{(2x-3)(2x-3)-2(x^2-3x+2)}{(2x-3)^2}$，$\varphi'(2)=\varphi'(1)=1-\alpha$

由局部收敛的条件知$|\varphi'(x^*)|=|1-\alpha|<1,0<\alpha<2$

2、根据下面数据求形如$\varphi(x)=a+bx^2$的最小二乘拟合曲线

x_i	−2	−1	0	1	2
y_i	2	1	−1	1	3

解 取基函数$\varphi_1(x)=1,\varphi_2(x)=x^2$，令

$$A=\begin{pmatrix}\varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1)\\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2)\\ \varphi_1(x_3) & \varphi_2(x_3)\\ \varphi_1(x_4) & \varphi_2(x_4)\\ \varphi_1(x_5) & \varphi_2(x_5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

记$x=(a,b)^T,y=(2,1,-1,1,3)^T$，求解法方程组$A^TAx=A^Ty$，即

$$\begin{bmatrix}5 & 10\\ 10 & 34\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}6\\ 22\end{bmatrix}$$

得$a=-\dfrac{8}{35},b=\dfrac{5}{7}$，最小二乘似合曲线为

$$\varphi(x)=-\frac{8}{35}+\frac{5}{7}x^2$$

3、给定方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$$

计算矩阵 **A** 的 **LU** 分解，并求出方程的解.

解：矩阵 **A** 的 **LU** 分解为

$$\mathbf{A}=\mathbf{LU}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ & 1 & 0 & 1\\ & & 2 & 1\\ & & & 2\end{pmatrix}$$

方程组的精确解为 $x=(-1,\ -1, 1, 1)^T$.

4. 给定求积公式 $\int_0^1 f(x)dx = Af(0)+Bf(0.5)+Cf'(0)$，试确定 A,B,C，使其代数精度尽可能的高，并指明此时求积公式的代数精度.

解：分别将 $f(x)=1,x,x^2$，代入求积公式，可得

$$\begin{cases} A+B=\int_0^1 1\cdot dx=1,\\ \frac{1}{2}B+C=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},\\ \frac{1}{4}B=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

解得 $A=-\frac{1}{3},B=\frac{4}{3},C=-\frac{1}{6}$，求积公式为

$$\int_0^1 f(x)dx\approx -\frac{1}{3}f(0)+\frac{4}{3}f(0.5)-\frac{1}{6}f'(0).$$

令 $f(x)=x^3$ 时求积公式不精确成立，从而精度为 2.

5. (10 分)证明解 $y'=f(x,y)$ 的梯形格式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

是二阶的，并求出局部截断误差的主项.

证：局部截断误差为

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

$$=hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)-\frac{h}{2}[y'(x_n)+y'(x_{n+1})]+\mathrm{O}(\mathbf{h}^4)$$

$$=hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)-\frac{h}{2}[y'(x_n)+y'(x_n)+hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)]+\mathrm{O}(\mathbf{h}^4)$$

$$=-\frac{h^3}{12}y'''(x_n)+\mathbf{O}(\mathbf{h}^4)$$

所以梯形方法是二阶方法，其局部截断误差的主项为$-\frac{h^3}{12}y'''(x_n)$.

6.用$n=2$高斯公式计算积分$\int_1^3 e^x \sin x dx$.

解:由于高斯求积公式为$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$,其中$x_k$是$P_{n+1}(x)$的零点. 首先将积分区间转化为$[-1,1]$.令$x=t+2$则$x\in[1,3]$时$t\in[-1,1]$.而

$$I=\int_1^3 e^x \sin x dx=\int_{-1}^{1} e^{t+2}\sin(t+2)dt \quad 令\ g(t)=e^{t+2}\sin(t+2)$$

两点公式为n=1的情况，高斯点取$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，求积系数均为1. 代入高斯积分公式得

$$I=\int_1^3 e^x \sin x dx=\int_{-1}^{1} e^{t+2}\sin(t+2)dt=e^{\frac{\sqrt{3}}{3}+2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{3}+2)+e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}+2}\sin(-\frac{\sqrt{3}}{3}+2)$$