二、Crout分解法：

将矩阵A分解为如下形式：

$$A = \bar{L}\bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{l}_{11} & & & \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{u}_{12} & \cdots & \bar{u}_{1n} \\ & 1 & \cdots & \bar{u}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

计算公式：

$$\bar{l}_{ir} = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} \bar{l}_{ik}\bar{u}_{kr}, \quad i = r, r+1, \cdots, n$$

$$\bar{u}_{rj} = (a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} \bar{l}_{rk}\bar{u}_{kj}) / \bar{l}_{rr}, \quad j = r+1, r+2, \cdots, n$$

例： 求矩阵A的Crout分解：

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&0\\3&0&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2&-1/2&-1/2\\-1&3/2&-1/3\\3&3/2&5\end{bmatrix}$$

$$\bar{l}_{22}\leftarrow 2-(-1)\times(-\frac{1}{2});\ \bar{l}_{32}\leftarrow 0-3\times(-\frac{1}{2});\ \bar{u}_{23}\leftarrow[0-(-1)\times(-\frac{1}{2})]/(\frac{3}{2});$$

$$\bar{l}_{33}\leftarrow[3-3\times(-\frac{1}{2})-(\frac{3}{2})\times(-\frac{1}{3})]$$

所以

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&3/2&0\\3&3/2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1/2&-1/2\\0&1&-1/3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

三、对称正定矩阵的Cholesky分解法（平方根法）

- 若n阶实矩阵A为对称正定矩阵，则：

（1）$A^T = A$；

（2）对任意的$X \neq 0$，有$X^TAX > 0$；

（3）A的各阶顺序主子式大于零.

故A可进行LU分解：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & u_{n-1,n} \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

记

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \cdots & u_{1n}/u_{11} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & u_{n-1,n}/u_{n-1,n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=DU_1$$

则 $A=LDU_1$ $\Rightarrow A^T = U_1^T D L^T$ $\Rightarrow U_1=L^T$

即 $A=LDL^T$ ——称A的LDL^T分解

若记

$$D=diag(u_{11},u_{22},\cdots,u_{nn})=[diag(\sqrt{u_{11}},\sqrt{u_{22}},\cdots,\sqrt{u_{nn}})]^2$$

则

$$U=DU_1=D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}U_1$$

$$A=LU=LDU_1=LD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}U_1$$

$$=LD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}L^T=(LD^{\frac{1}{2}})(LD^{\frac{1}{2}})^T=\tilde{L}\tilde{L}^T$$

——称A的LL^T分解

LL^T分解的计算公式：

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

对A的第i行元素，有 $\sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk} = a_{ij} \quad (j = 1,2,\cdots,i)$

$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ 对于 $i = 2,3,\cdots\cdots, n$

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}) / l_{jj} \qquad l_{ii} = (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$(j = 1,2,\cdots,i\text{-}1)$

LDL^T分解的计算公式：（无需开方，故称改进的平方根法）

$$A=\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&l_{21}&\cdots&l_{n1}\\&1&\cdots&l_{n2}\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}d_1&&&\\l_{21}d_1&d_2&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\l_{n1}d_1&l_{n2}d_2&\cdots&d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&l_{21}&\cdots&l_{n1}\\&1&\cdots&l_{n2}\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\cdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$d_1=a_{11},\quad l_{21}=a_{21}/d_1,\quad \cdots\cdots,\quad l_{n1}=a_{n1}/d_1$$

$$d_i=a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}d_kl_{ik}\qquad\qquad l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}d_kl_{jk})/d_j$$

$$(\,i=2,3,\cdots\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,i\text{-}1\,)$$

应用Cholesky分解可将方程组$Ax=b$分解为两个三角形方程组：

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$$

而应用改进的Cholesky分解可将方程组$Ax=b$分解为下面的方程组：

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^T x = D^{-1} y \end{cases}$$

例： 用改进的平方根法解方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 14 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 15 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

解：由 $d_1=a_{11}$，$l_{21}=a_{21}/d_1$，……，$l_{n1}=a_{n1}/d_1$

得 $d_1=1$，$l_{21}=2$，$l_{31}=1$，$l_{41}=-3$

又由 $d_i=a_{ii}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}d_k l_{ik}$ $\quad l_{ij}=(a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}d_k l_{jk})/d_j$

得 $d_2=1$，$l_{32}=-2$，$l_{42}=1$，$d_3=9$，$l_{43}=2/3$，$d_4=1$

因此可得

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & \frac{2}{3} & 1\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解方程组$Ly=b$，得

$$\begin{cases} y_1 = b_1 = 1 \\ y_2 = b_2 - l_{21}y_1 = 0 \\ y_3 = b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 = 15 \\ y_4 = b_4 - l_{41}y_1 - l_{42}y_2 - l_{43}y_3 = 1 \end{cases}$$

解方程组$L^T x = D^{-1} y$，得

$$\begin{cases} x_4 = y_4 / d_4 = 1 \\ x_3 = y_3 / d_3 - l_{43} x_4 = 1 \\ x_2 = y_2 / d_2 - l_{32} x_3 - l_{42} x_4 = 1 \\ x_1 = y_1 / d_1 - l_{21} x_2 - l_{31} x_3 - l_{41} x_4 = 1 \end{cases}$$

最终求得方程组$Ax = b$的解为

$$x = (1,1,1,1)^T$$

例： 试用改进的choleskey分解法解方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

解： 对系数矩阵A做Doolittle分解

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -0.25 & 2 & -2 \\ 0.25 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -0.25 & 1.75 & -1.75 \\ 0.25 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -0.25 & 1.75 & -1.75 \\ 0.25 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -0.25 & 1 & \\ 0.25 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ & 1.75 & -1.75 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ -0.25 & 1 & \\ 0.25 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 1.75 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} = LDL^T$$

由 $Ly=b$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -0.25 & 1 & \\ 0.25 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

得 $y=\begin{bmatrix} 5 \\ -\frac{7}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$

又 $D^{-1}y=\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 由 $L^T x = D^{-1} y$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.25 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

得 $x=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

四、 三对角方程组的数值解法

三对角方程组形式如下：

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

其中 $\begin{cases} |b_1| > |c_1| > 0 \\ |b_i| \geq |a_i| + |c_i| \\ |b_n| > |a_n| > 0 \end{cases}$ 且 $a_i c_i \neq 0$，$(i = 2，3，\ldots，n-1)$

方法一：直接三角分解法

Step 1：系数矩阵的三角分解：$A=LU$

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & & \\
a_2 & b_2 & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & \\
 & & a_n & b_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\delta_1 & & & \\
\gamma_2 & \delta_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \\
 & & \gamma_n & \delta_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & \beta_1 & & \\
 & 1 & \ddots & \\
 & & \ddots & \beta_{n-1} \\
 & & & 1
\end{bmatrix}
$$

计算公式：

$$
\begin{cases}
\delta_1 = b_1\ ,\ \ \beta_1 = c_1 / \delta_1\ , \gamma_k = a_k \\
\delta_k = b_k - a_k \beta_{k-1} \quad (k = 2, 3, \cdots, n) \\
\beta_k = c_k / \delta_k \qquad\qquad (k = 2, 3, \cdots, n-1)
\end{cases}
$$

Step 2： 求解下三角方程组 $Ly=f$

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ \gamma_2 & \delta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

计算公式：

$$\begin{cases} y_1 = f_1 / \alpha_1, \\ y_i = (f_i - a_i y_{i-1}) / \delta_i, \ (i = 2, \cdots n) \end{cases}$$

Step 3： 求解上三角方程组$Ux=y$

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

计算公式：

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - \beta_i x_{i+1}, \ (i = n-1, \cdots, 1) \end{cases}$$

例：　求解三对角方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -2 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -2 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & & \\ -1 & 5/2 & -4/5 & \\ & -2 & 12/5 & -5/6 \\ & & -3 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & 5/2 & & \\ & -2 & 12/5 & \\ & & -3 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad Ly = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [3,\ 8/5,\ 4/3,\ 2]^T$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & & \\ & 1 & -4/5 & \\ & & 1 & -5/6 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad Ux = \begin{bmatrix} 3 \\ 8/5 \\ 4/3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = [5,\ 4,\ 3,\ 2]^T$$

方法二：（追赶法）

基本思想： 每一轮消元只对增广矩阵中某两行进行——将主对角元化为1，主对角元下方元素化为零.

即将其系数增广矩阵化为如下形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & & y_1 \\ & 1 & \beta_2 & & & y_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \beta_{n-1} & y_{n-1} \\ & & & & 1 & y_n \end{bmatrix}$$

解三对角方程组$Ax=b$的追赶法分“追”和“赶”两个环节：

- “追”的过程：（消元过程）

  按顺序计算系数$\beta_1 \longrightarrow \beta_2 \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow \beta_{n-1}$和$y_1 \longrightarrow y_2 \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow y_n$;

- “赶”的过程：（回代过程）

  按逆序求出$x_n \longrightarrow x_{n-1} \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_1$.

其系数增广矩阵为：

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & & & & f_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & & & f_2 \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & f_{n-1} \\
 & & & a_n & b_n & f_n
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= c_1 / b_1 \\
y_1 &= f_1 / b_1
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{bmatrix}
1 & \beta_1 & & & & y_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & & & f_2 \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & f_{n-1} \\
 & & & a_n & b_n & f_n
\end{bmatrix}
$$

$$\Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \beta_1 & & & & y_1 \\ & 1 & \beta_2 & & & y_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \beta_{n-1} & y_{n-1} \\ & & & & 1 & y_n \end{array}\right]$$

- $\beta_i = c_i / (b_i - a_i\beta_{i-1})$, (i = 2, 3, …, n - 1)
- $y_i = (f_i - a_i y_{i-1}) / (b_i - a_i\beta_{i-1})$, (i = 2, 3, …, n)

例：　用追赶法求上例三对角方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -2 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解：

其系数增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 6 \\ -1 & 3 & -2 & & 1 \\ & -2 & 4 & -2 & 0 \\ & & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

《追赶法求解》

$$
\begin{bmatrix}
2 & -1 & & & 6 \\
-1 & 3 & -2 & & 1 \\
 & -2 & 4 & -2 & 0 \\
 & & -3 & 5 & 1
\end{bmatrix}
\xRightarrow{\text{主元单位化}}
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\
-1 & 3 & -2 & & 1 \\
 & -2 & 4 & -2 & 0 \\
 & & -3 & 5 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\xRightarrow{\text{消元}}
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\
0 & \frac{5}{2} & -2 & & 4 \\
 & -2 & 4 & -2 & 0 \\
 & & -3 & 5 & 1
\end{bmatrix}
\xRightarrow{\text{主元单位化}}
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\
0 & 1 & -\frac{4}{5} & & \frac{8}{5} \\
 & -2 & 4 & -2 & 0 \\
 & & -3 & 5 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\
0 & 1 & -\frac{4}{5} & & \frac{8}{5} \\
& -2 & 4 & -2 & 0 \\
& & -3 & 5 & 1
\end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{消元}}
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\
0 & 1 & -\frac{4}{5} & & \frac{8}{5} \\
& 0 & \frac{12}{5} & -2 & \frac{16}{5} \\
& & -3 & 5 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{主元单位化}}
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\
0 & 1 & -\frac{4}{5} & & \frac{8}{5} \\
& 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \\
& & -3 & 5 & 1
\end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{消元}}
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\
0 & 1 & -\frac{4}{5} & & \frac{8}{5} \\
& 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \\
& & 0 & \frac{15}{6} & 5
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\
0 & 1 & -\frac{4}{5} & & \frac{8}{5} \\
 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \\
 & & 0 & \frac{15}{6} & 5
\end{bmatrix}
\xRightarrow{\text{主元单位化}}
\begin{bmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & & & 3 \\
0 & 1 & -\frac{4}{5} & & \frac{8}{5} \\
 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \\
 & & 0 & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

回代可得

$$
x = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

3.1.5 向量和矩阵的范数

- 向量的范数
- 矩阵的范数
- 谱半径、谱范数与方阵的$F-$范数

（一）向量的范数

定义 设向量$x\in R^n$,若x 的某个**非负实值函数**$N(x)=\|x\|$满足条件：

- （1）**非负性**： $\|x\|\geq 0$且$\|x\|=0$的充要条件是$x=0$；
- （2）**齐次性**：$\|kx\|=|k|\ \|x\|$（$\forall k\in R$）；
- （3）**三角不等式**：对$\forall x,y\in R^n$, 有

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|;$$

则称$N(x)=\|x\|$为R^n 上的**向量x的范数**.

注：向量范数是向量长度概念的推广.例如

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

是向量 x 的范数.

定义 设$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n$,则定义：

（1）向量的“2—范数”：$\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

（2）向量的“∞—范数”：$\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$

（3）向量的“1—范数”：$\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$

（4）向量的“p—范数”：$\|x\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$