电子科技大学研究生试卷

考核日期 2012 年 12 月 18 日 （时间：晚上 19：30 至 21：30，共 2 小时）

课程编号 20006003 课程名称 最优化理论与应用（开卷） （班级 2 ）

任课教师 彭晓明 教学方式 堂上授课 学时 50 学分 2.5

开课学院 自动化工程学院 成绩

考核方式：__________（学生填写）

学院________ 姓名________ 学号________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

1. (10 分)对于下面的线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min\ & -5x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & 2x_1 + (1/2)x_2 \le 8, \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(a) 把上面问题改写为标准型(3 分)。

(b) 采用单纯形方法算法或者单纯形表计算本问题的最小值和对应的最小解 $[x_1^*, x_2^*]$(7 分).

2. (15 分)对于下面的函数：

$$f(x)=3x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+x_1^3+2x_1^4,$$

初始解 $x^{(0)}=\begin{bmatrix}0 & -2\end{bmatrix}^T$，解决下面问题：

(a) $p^{(0)}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$ 是否是一个在 $x^{(0)}$ 处使得 $f(x)$ 的函数值下降的方向(3 分)？

(b) 根据 Goldstein 条件(Goldstein conditions)，

$$f(x^{(k)})+(1-c)\alpha^{(k)}\nabla f\left(x^{(k)}\right)^T p^{(k)}\le f(x^{(k)}+\alpha^{(k)}p^{(k)})\le f(x^{(k)})+c\alpha^{(k)}\nabla f\left(x^{(k)}\right)^T p^{(k)}$$

，假设其中 $c=1/4$，计算使得 Goldstein 条件成立的步长 $\alpha^{(0)}$ 的取值范围(6 分)。

(c) 设置 $\alpha^{(0)}=5/2$ 采用 Fletcher-Reeves 方法(FR 方法)计算下一个迭代点 $x^{(1)}$ 和对应的 $p^{(1)}$ (6 分)。

3. (20 分)对于下面的优化问题：

$$\min_{x\in R^2} f(x) = -2x_1 + x_2$$
$$s.t. \quad (1-x_1)^3 - x_2 \ge 0,$$
$$x_2 + \frac{1}{4}x_1^2 - 1 \ge 0$$

本问题的最优解为 $x^* = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$。

解决以下问题：

(a) 在最优解处 LICQ 条件是否成立(3 分)？

(b) 在最优解处 KKT 条件是否满足(5 分)？

(c) 计算线性化可行方向集(set of linearized feasible directions) $F(x^*)$ 和关键锥(critical cone) $C(x^*, \lambda^*)$，其中 λ^* 为在问题(b)中得到的拉格朗日乘子(6 分)。

(d) 在最优解处是否满足二阶必要条件和二阶充分条件(6 分)？

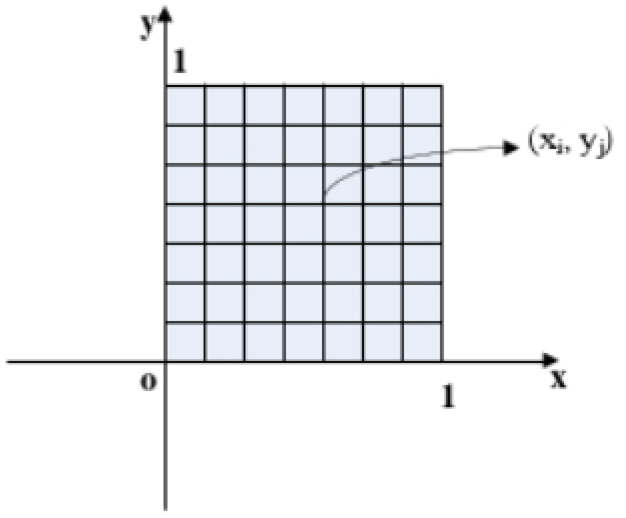
4. (20 分)假设接受一项治疗的病人在服药后在不同的时刻 t_j 抽取的血液中药物浓度为 y_j。我们需要建立一个模型 $\phi(x;t)$ 来预测在时刻 t 的药物浓度。已知模型 $\phi(x;t)$ 可以描述为

$$\phi(x;t) = x_1 + tx_2 + t^2 x_3 + x_4 e^{-x_5 t}.$$

我们需要确定其中的参数 $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$.为此，我们希望根据模型预测得到的 $\phi(x;t_j)$ 可以很好地吻合 y_j.假设我们在 200 个不同时刻 t_j ($j = 1 \sim 200$)检测得到了对应的 y_j ($j = 1 \sim 200$)，并且对参数 x 有一个初始估计 $x^{(0)}$，解决下面的问题：

(a) 采用高斯-牛顿法(Gauss-Newton Method)求解参数 x。要求：(I) 使用伪代码写出本问题的算法方案；(II) 自己设定合理的算法终止条件；(III) 如涉及梯度计算需要写出显式表达式。

5. (15 分)某连续函数 $z(x,y)$ 的定义域为 $S=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，该定义域为一个面积为 1 的正方形（如下图所示）。



现在要求解满足下面两个条件的函数 $z(x,y)$：

(i) $z(x,y)$ 在定义域 S 上的曲面积分 $A(z(x,y))$ 最小；

(ii) $z(x,y)$ 在定义域 S 的边界上的点 (x,y) 的取值为给定值。

根据曲面积分的定义，函数 $z(x,y)$ 在定义域 S 上的曲面积分可以写为

$$A(z(x,y))=\iint_{(x,y)\in S}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\,.$$

由于 $z(x,y)$ 是连续函数，所以在实际应用中需要离散化处理。为此，把定义域 S 所确定的正方形划分为很多个面积相同的正方形小网格（如上图所示），假设一共有 $q\times q$ 个小网格，这些小网格的四角一共可以确定 $(q+1)^2$ 个离散点 $\{(x_i,y_j)\,|\,0\le i\le q,0\le j\le q\}$，$(x_0,y_0)$ 对应原点 $o=(0,0)$，(x_q,y_q) 对应 $(1,1)$。其中位于定义域 S 边界上的点 (x_u,y_v) [共有 $4q$ 个]对应的函数值 $z(x_u,y_v)$ 为已知的给定值 b_{uv}.于是，本题的目的是求解剩余 $(q+1)^2-4q$ 个位于定义域 S 内部的点 $\{(x_r,y_s)\}$ 所对应的函数值 $\{z(x_r,y_s)\}$，满足上面的条件(i).

解决下面的问题：

(a) 写出符合题意要求的优化问题的具体形式。

6. (20 分)二维子空间最小化(2-dimensional subspace minimization)是一种信任域方法，其问题可以描述为：

$$\begin{aligned}&\min_{p} f + g^{T} p + \frac{1}{2} p^{T} B p \\ &s.t. \quad \|p\|_{2} \leq \Delta,\ p \in \operatorname{span}\left[g, B^{-1} g\right]\end{aligned},$$

其中 Δ 是信任域的半径，而 $p \in \operatorname{span}\left[g, B^{-1} g\right]$ 意味着 $p = \alpha g + \beta B^{-1} g$ (α 和 β 为两个实数)， $g = \nabla f$ ， B 是一个对称实矩阵。解决下面的问题：

(a) 当矩阵 B 为正定时，求解上面优化问题的最优解 p^* ，即对应的 $\left[\alpha^*, \beta^*\right]$.