图论及其应用

任课教师：杨春

Email: **yc517922@126.com**

数学科学学院

第四章 欧拉图与哈密尔顿图

主要内容

一、欧拉图与中国邮路问题

二、哈密尔顿图

三、度极大非哈密尔顿图与TSP问题

四、超哈密尔顿图问题

教学时数

安排8学时讲授本章内容

本次课主要内容

欧拉图与中国邮路问题

(一)、欧拉图及其性质

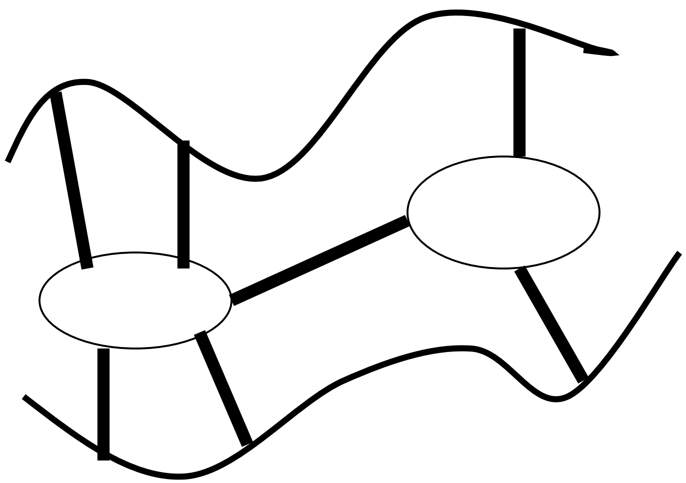
(二)、**Fleury**算法

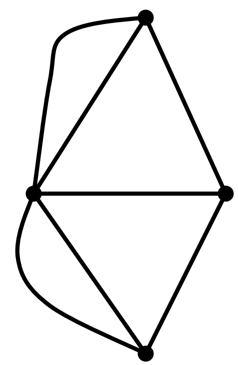
(三)、中国邮路问题

(一)、欧拉图及其性质

1、欧拉图的概念

(1)、问题背景---欧拉与哥尼斯堡七桥问题





问题：对于图G，它在什么条件下满足从某点出发，经过每条边一次且仅一次，可以回到出发点？

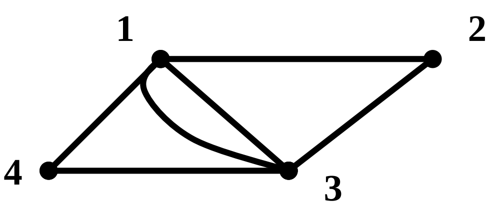
哥尼斯堡城(位于德国北部), 在欧拉的生活与图论历史中扮演着非常重要角色。因为它，产生了著名的欧拉图定理，因为它，产生了图论。

注：一笔画----中国古老的民间游戏

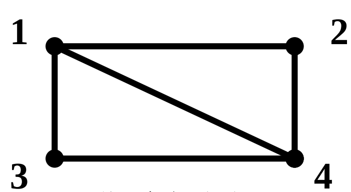
要求：对于一个图G，笔不离纸，一笔画成.

(2)、欧拉图概念

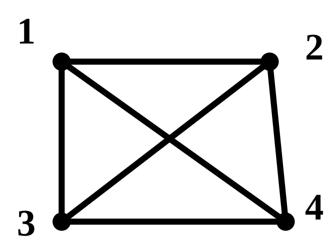
定义1 对于连通图**G**，如果**G**中存在经过每条边的闭迹，则称**G**为欧拉图，简称**G**为**E**图。欧拉闭迹又称为欧拉环游，或欧拉回路。



欧拉图



非欧拉图
有欧拉迹



非欧拉图
无欧拉迹

2、欧拉图的性质

定理1 下列陈述对于非平凡连通图G是等价的:

(1) G是欧拉图;

(2) G的顶点度数为偶数;

(3) G的边集合能划分为圈。

证明: (1)→(2)

由(1)，设 C是欧拉图G的任一欧拉环游，v是G中任意顶点，v在环游中每出现一次，意味在G中有两条不同边与v关联，所以，在G中与v关联的边数为偶数，即v的度数为偶数，由v的任意性，即证明(2)。

(2)→(3)

由于G是连通非平凡的且每个顶点度数为偶数，所以G中至少存在圈C_1,从G中去掉C_1中的边，得到G的生成

子图G_1,若G_1没有边，则(3)成立。否则，G_1的每个非平凡分支是度数为偶数的连通图，于是又可以抽取一个圈。反复这样抽取，$E(G)$最终划分为若干圈。

(3)→(1)

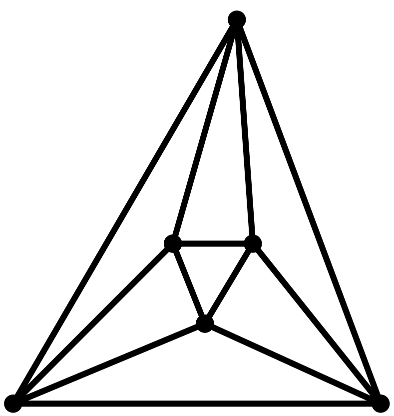
设C_1是G的边划分中的一个圈。若G仅由此圈组成，则G显然是欧拉图。

否则，由于G连通，所以，必然存在圈C_2,它和C_1有公共顶点。于是，$C_1 \cup C_2$是一条含有C_1与C_2的边的欧拉闭迹，如此拼接下去，得到包含G的所有边的一条欧拉闭迹。即证G是欧拉图。

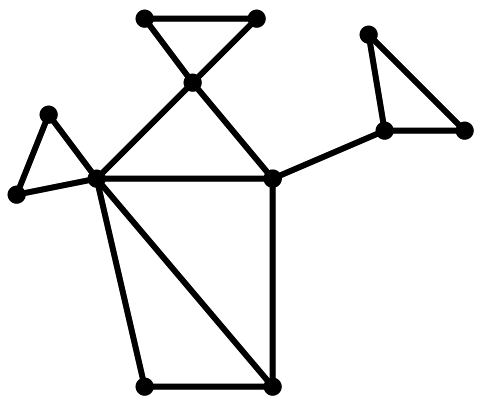
推论1 连通图G是欧拉图当且仅当G的顶点度数为偶。

推论2 连通非欧拉图G存在欧拉迹当且仅当G中只有两个顶点度数为奇数。

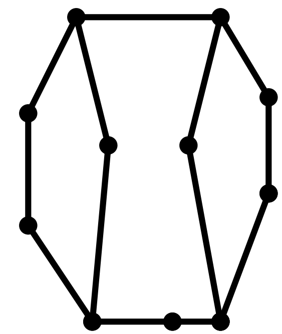
例1 下面图中谁是欧拉图？谁是非欧拉图但存在欧拉迹？谁是非欧拉图且不存在欧拉迹？



G_1



G_2



G_3

解：G_1是欧拉图；G_2是非欧拉图，但存在欧拉迹；G_3中不存在欧拉迹。

例2 证明：若G和H是欧拉图，则 [redacted] 是欧拉图。

证明：首先证明：对任意**u** $\in$**V(G), v** $\in$**V(H),**有：

$$d(u)+d(v)=d((u,v))$$

事实上，设**z**是**u**的任意一个邻点，一定有**(u, v)**的一个邻点**(z, v),**反之亦然。同理，对于**v**的任意一个邻点**w**，一定有**(u, v)**的一个邻点**(u, w),** 反之亦然。即**: (u, v)**在乘积图中邻点个数等于**u**在**G**中邻点个数与**v**在**H**中邻点个数之和。

所以，**G ,H**是欧拉图，那么 [redacted] 顶点度数为偶数。

其次证明： [redacted] 是连通的。

$$\forall (u_1,v_1),(u_2,v_2)\in V(G\times H)$$

由于**G, H**都是欧拉图，所以都连通。设最短的$\mathbf{u_1}$**--**$\mathbf{u_2}$路

最短的v_1--v_2路分别为： $u_1x_1x_2\cdots x_ku_2$　$v_1y_1y_2\cdots y_mv_2$

那么，由乘积图的定义：在乘积图中有路：

$$(u_1,v_1)(x_1,v_1)\cdots(x_k,v_1)(u_2,v_1)(u_2,y_1)\cdots(u_2,y_m)(u_2,v_2)$$

这样，我们证明了 [redacted] 是连通的且每个顶点度数为偶数。即它是欧拉图。

(二)、Fleury(弗勒里)算法

该算法解决了在欧拉图中求出一条具体欧拉环游的方法。方法是尽可能避割边行走。

算法:

(1)、 任意选择一个顶点v_0,置$w_0=v_0$;

(2)、 假设迹$w_i=v_0e_1v_1\ldots e_iv_i$已经选定，那么按下述方法从E-｛$e_1,e_2,\ldots,e_i$｝中选取边$e_{i+1}$:

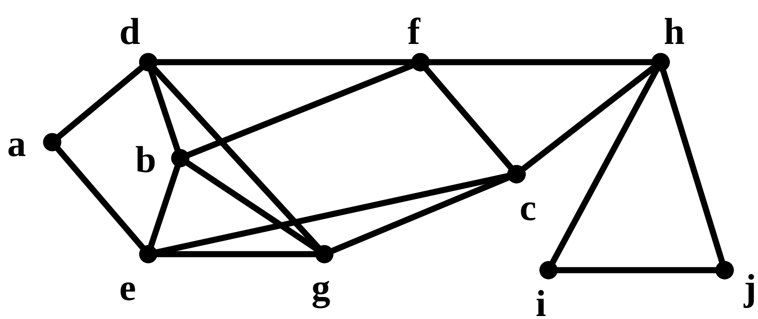
1)、 e_{i+1}与v_i相关联；

2)、除非没有别的边可选择，否则 e_{i+1}不能是

$G_i=G-$｛$e_1,e_2,\ldots,e_i$｝的割边。

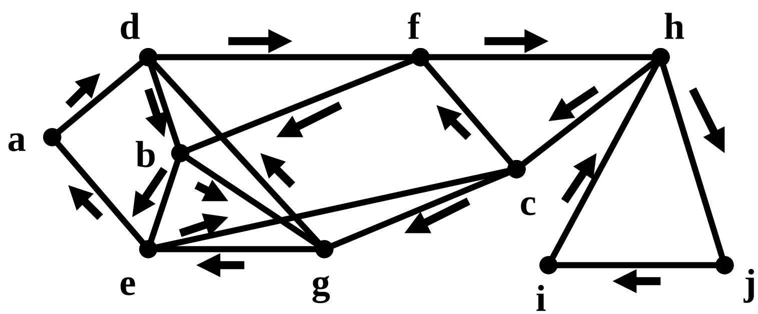
(3)、 当(2)不能执行时，算法停止。

例3 在下面欧拉图G中求一条欧拉回路。



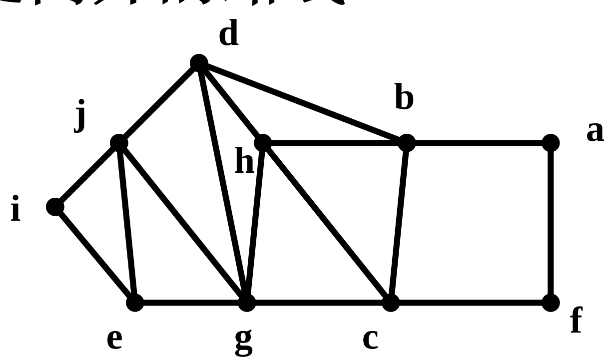
图G

解：



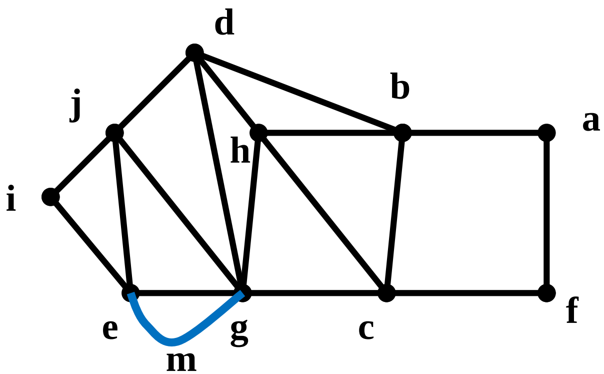
图G

例4 某博物馆的一层布置如下图，其中边代表走廊，结点e是入口，结点g是礼品店，通过g我们可以离开博物馆。请找出从博物馆e进入，经过每个走廊恰好一次，最后从g处离开的路线。



解：图中只有两个奇度顶点e和g,因此存在起点为e,终点为g的欧拉迹。

为了在G中求出一条起点为e,终点为g的欧拉迹，在e和g间添加一条平行边m



用Fleury算法求出欧拉环游为：

emgcfabchbdhgdjiejge

所以：解为：egjeijdghdbhcbafcg

例4 证明：若G有2k>0个奇数顶点，则存在k条边不重的迹$Q_1,Q_2,\ldots,Q_k$，使得：

$$E(G)=E(Q_1)\cup E(Q_2)\cup\cdots\cup E(Q_k)$$

证明：不失一般性，只就G是连通图进行证明。

设G=(n, m)是连通图。令v_l，v_2，…,v_k,v_{k+1},…,v_{2k}是G的所有奇度点。

在v_i与v_{i+k}间连新边e_i得图G*（1≦i≦k）. 则G*是欧拉图，因此，由Fleury算法得欧拉环游C.

在C中删去e_i（1≦i≦k).得k条边不重的迹Q_i（1≦i≦k):

$$E(G)=E(Q_1)\cup E(Q_2)\cup\cdots\cup E(Q_k)$$

(三)、中国邮路问题

1962年，中国数学家管梅谷提出并解决了“中国邮路问题”

1、问题

邮递员派信的街道是边赋权连通图。从邮局出发，每条街道至少行走一次，再回邮局。如何行走，使其行走的环游路程最短？

如果邮路图本身是欧拉图，那么由**Fleury**算法，可得到他的行走路线。

如果邮路图本身是非欧拉图，如何重复行走街道才能使行走总路程最短？

2、管梅谷的结论

定理2 若W是包含图G的每条边至少一次的闭途径，则W具有最小权值当且仅当下列两个条件被满足：

(1) G的每条边在W中最多重复一次；

(2) 对于G的每个圈上的边来说，在W中重复的边的总权值不超过该圈非重复边总权值。

证明："必要性"

首先，设G是连通非欧拉图，u与v是G的两个奇度顶点，把连接u与v的路上的边改为2重边，则路中的点的度数奇偶性没有改变，仍然为偶数，但u与v的度数由奇数变成了偶数。如果对G中每对奇度点都如此处理，则最终得到的图为欧拉图。设该图为G_1.

其次，对G_1作修改：

如果在G_1中，边e重复数大于2，则在G_1中删掉2条重复的e边后，所得之图仍然是包含G的欧拉图。

在G_1中，对每组平行边都做上面的处理，最后得到一个重复边数最多为1的包含G的欧拉图G_2。

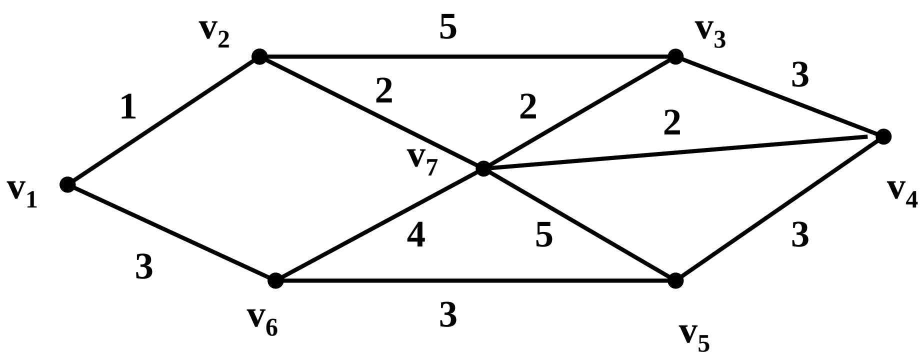
这说明，若W是包含G的所有边的欧拉环游，则G中每条边至多在W里出现两次。这就证明了(1).

又设C是G_2中任意一个圈，在该圈中，如果重复边的总权值超过该圈中非重复边总权值，那么可以把该圈中平行边改为非平行边，而把非平行边改为平行边，如此修改，得到的图仍然是包含G的欧拉图，但对应的欧拉环游长度减小了。

这就是说，只要对G_2的每个圈都作上面的修改，最后得到的图仍然为包含G的欧拉图，而最后的图正好满足(2).

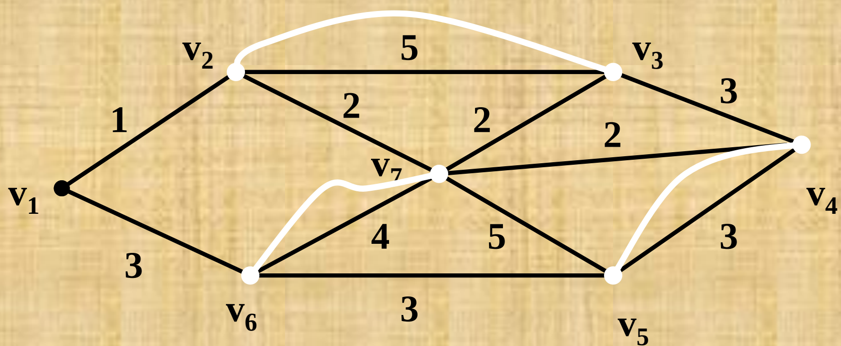
“充分性”(略)

例5 求包含下图G的一个最优欧拉环游。



G

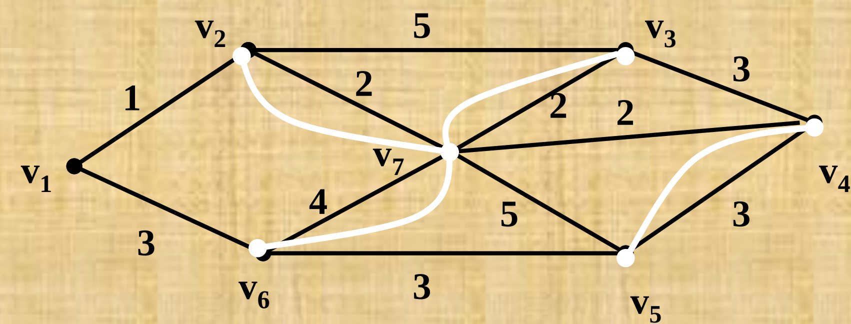
解：由定理2：



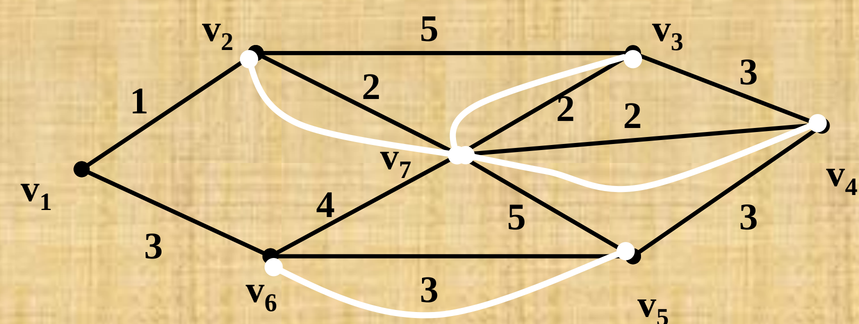
v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7
1
5
2
2
2
3
3
3
4
5
3

G

⇒

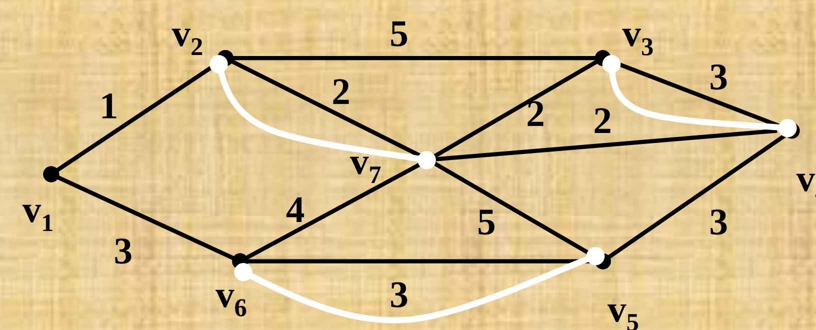


v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7
1
5
2
2
2
3
3
3
4
5
3



v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7
1
5
2
2
2
3
3
3
4
5
3

⇒



v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7
1
5
2
2
2
3
3
3
4
5
3

例6 如果一个非负权的边赋权图G中只有两个奇度顶点u与v,设计一个求其最优欧拉环游的算法。

解： 1、 算法

(1)、 在u与v间求出一条最短路P; (最短路算法)

(2)、 在最短路P上，给每条边添加一条平行边得G的欧拉母图G*;

(3)、 在G的欧拉母图G* 中用Fleury算法求出一条欧拉环游。

2、 算法证明

定理：用上面方法求出的欧拉环游是最优欧拉环游。

证明：设**u**与**v**是**G**的两个奇度顶点**,G***是**G**的任意一个欧拉母图。

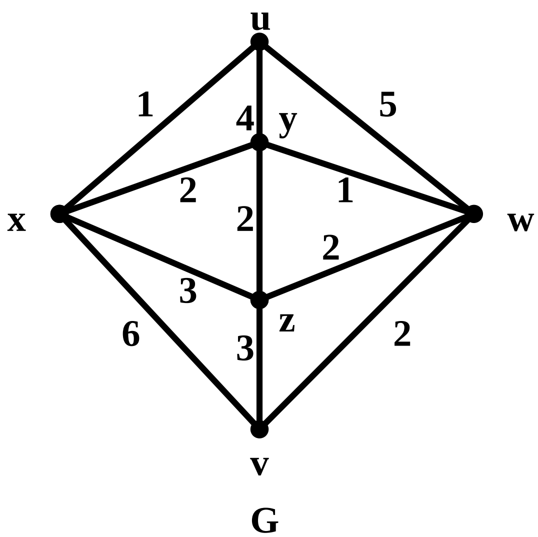
考虑**G*[E*-E]**, 显然它只有两个奇数顶点**u**与**v**, 当然它们必须在**G*[E*-E]**的同一个分支中，因此，存在**(u, v)**路**P***.

所以，

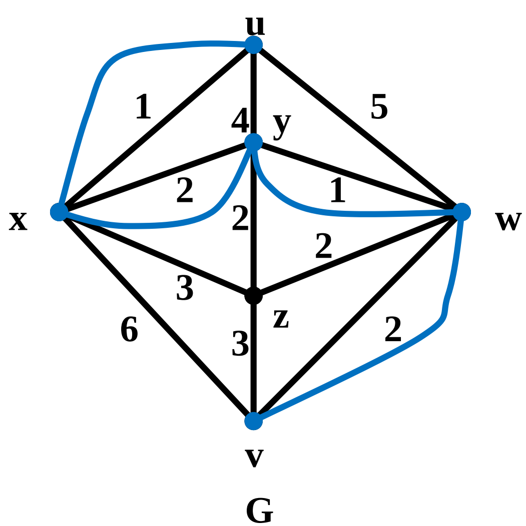
$$\sum_{e \in E^* - E} w(e) \geq w(P^*) \geq w(P)$$

即证明定理。

例如：求出下图的一条最优欧拉环游。



解：



最优欧拉环游：x u y w v z w y x u w v x z y x

作业

P97---99　习题4： 1, 2, 3, 7, 8, 9

图论及其应用

任课教师：杨春

Email: yc517922@126.com

数学科学学院

本次课主要内容

哈密尔顿图

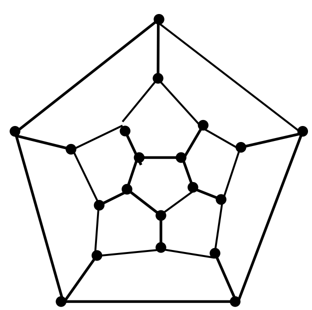
(一)、哈密尔顿图的概念

(二)、性质与判定

(一)、哈密尔顿图的概念

1、背景

1857年， 哈密尔顿发明了一个游戏(Icosian Game). 它是由一个木制的正十二面体构成，在它的每个棱角处标有当时很有名的城市。游戏目的是“环球旅行”。为了容易记住被旅游过的城市，在每个棱角上放上一个钉子，再用一根线绕在那些旅游过的城市上(钉子), 由此可以获得旅程的直观表示。



十二面体

哈密尔顿把该游戏以25英镑的价格买给了J.Jacques and Sons公司 (该公司如今以制造国际象棋设备而著名)，1859年获得专利权。但商业运作失败了。

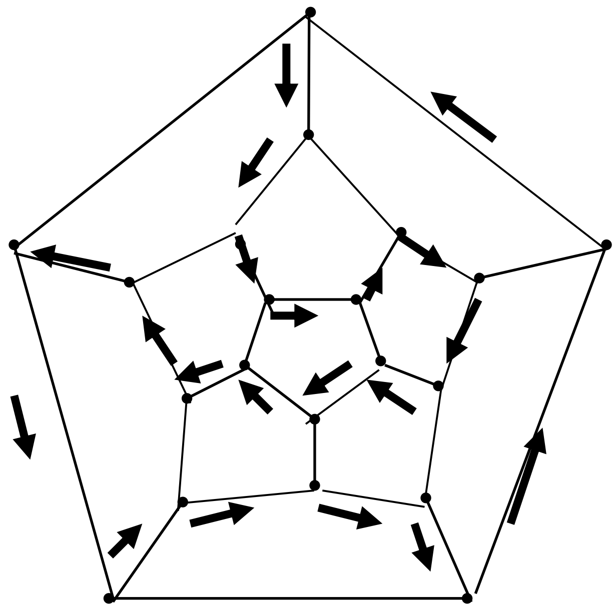
该游戏促使人们思考点线连接的图的结构特征。这就是图论历史上著名的哈密尔顿问题。

哈密尔顿(1805---1865),爱尔兰数学家。个人生活很不幸，但兴趣广泛：诗歌、光学、天文学和数学无所不能。他的主要贡献是在代数领域，发现了四元数(第一个非交换代数)，他认为数学是最美丽的花朵。

2、哈密尔顿图与哈密尔顿路

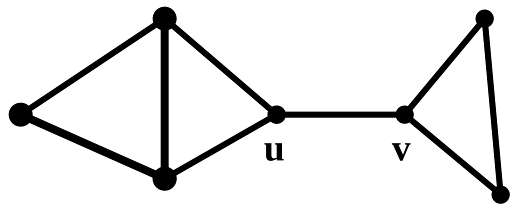
定义1 如果经过图G的每个顶点恰好一次后能够回到出发点，称这样的图为哈密尔顿图，简称H图。所经过的闭途径是G的一个生成圈，称为G的哈密尔顿圈。

例1、正十二面体是H图。



十二面体

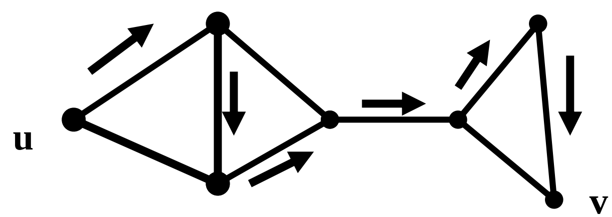
例2 下图G是非H图。



图G

证明：因为在G中，边uv是割边，所以它不在G的任意圈上，于是u与v不能在G的同一个圈上。故G不存在包括所有顶点的圈，即G是非H图。

定义2 如果存在经过G的每个顶点恰好一次的路，称该路为G的哈密尔顿路，简称H路。



图G

(二)、性质与判定

1、性质

定理1 (必要条件) 若G为H图，则对V(G)的任一非空顶点子集S，有：

$$\omega(G-S)\le |S|$$

证明：G是H图，设C是G的H圈。则对V(G)的任意非空子集S, 容易知道:

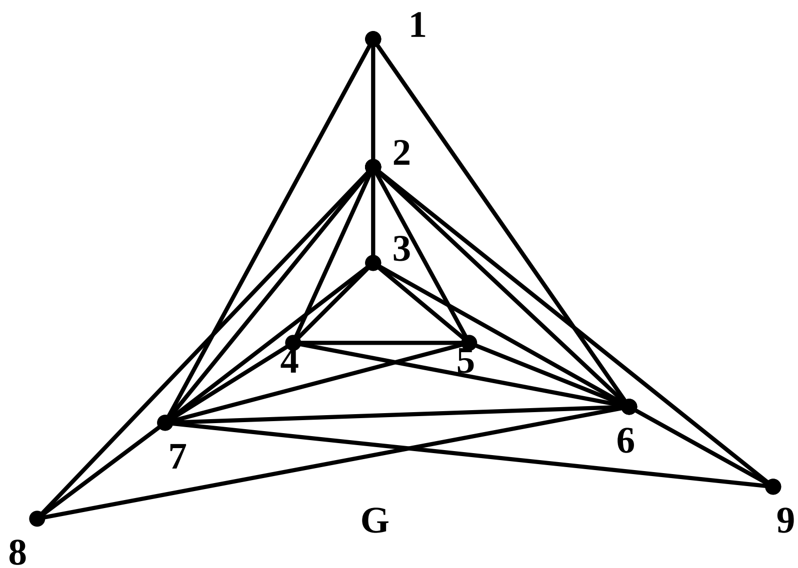
$$\omega(C-S)\le |S|$$

所以，有：

$$\omega(G-S)\le \omega(C-S)\le |S|$$

注：不等式为G是H图的必要条件，即不等式不满足时，可断定对应图是非H图。

例3 求证下图是非H图。



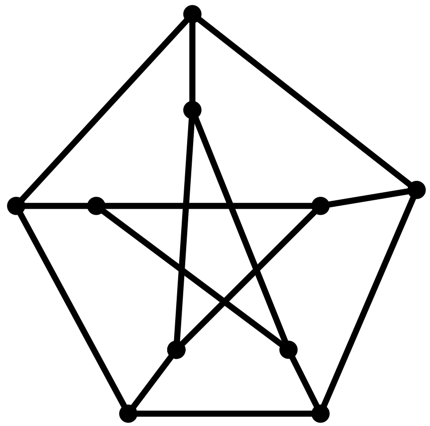
G

证明：取S={2, 7, 6} ,则有：$\omega(G-S)=4>\left|S\right|=3$

所以由定理1知，G为非H图。

注意：满足定理1不等式的图不一定是H图。

例如：著名的彼德森图是非H图，但它满足定理1的不等式。



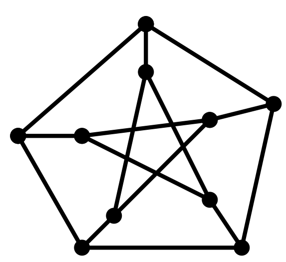
Peterson图

彼得森(1839----1910)，丹麦哥本哈根大学数学教授。家境贫寒，因此而辍过学。但19岁就出版了关于对数的专著。他作过中学教师，32岁获哥本哈根大学数学博士学位，然后一直在该大学作数学教授。

彼得森是一位出色的名教师。他讲课遇到推理困难时，总是说：“这是显而易见的”，并让学生自己查阅他的著作。同时，他是一位有经验的作家，论述问题很形象，讲究形式的优雅。

1891年，彼得森发表了一篇奠定他图论历史地位的长达**28**页的论文。这篇文章被公认是第一篇包含图论基本结论的文章。同时也是第一次在文章中使用“图”术语。

1898年，彼得森又发表了一篇只有**3**页的论文，在这篇文章中，为举反例构造了著名的彼得森图。



2、判定

图的H性判定是NP-困难问题。到目前为止，有关的定理有300多个，但没有一个是理想的。拓展H图的实用特征仍然被图论领域认为是重大而没有解决的问题。

图的哈密尔顿问题和四色问题被谓为挑战图论领域150年智力极限的总和。三位数学“诺奖”获得者ErdÖs、Whitney 、 Lovász 以及Dirac、Ore等在哈密尔顿问题上有过杰出贡献。

下面，介绍几个著名的定理。

定理2 (充分条件) 对于n≧3的单图G，如果G中有：

$$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$$

那么G是H图。

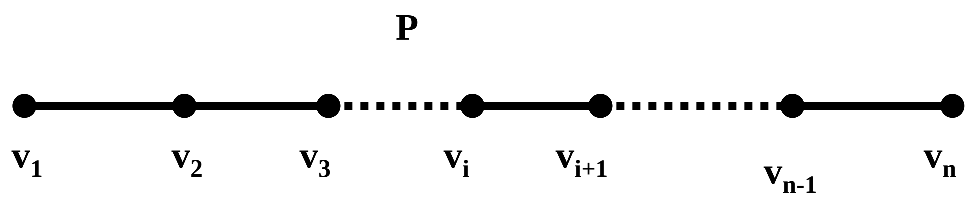
证明: 若不然，设G是一个满足定理条件的极大非H简单图。显然G不能是完全图，否则，G是H图。

于是，可以在G中任意取两个不相邻顶点u与v。考虑图G + u v，由G的极大性，G+ u v是H图。且G+ u v的每一个H圈必然包含边u v。

所以，在G中存在起点为u而终点为v的H路P。

不失一般性，设起点为u而终点为v的H路P为：

$$P = v_1 v_2 \cdots v_n, u = v_1, v_n = v$$



令： $$S = \left\{ v_i \,\middle|\, u v_{i+1} \in E(G) \right\}$$

$$T = \left\{ v_j \,\middle|\, v_j v \in E(G) \right\}$$

对于S与T, 显然，$v_n \notin S \cup T$

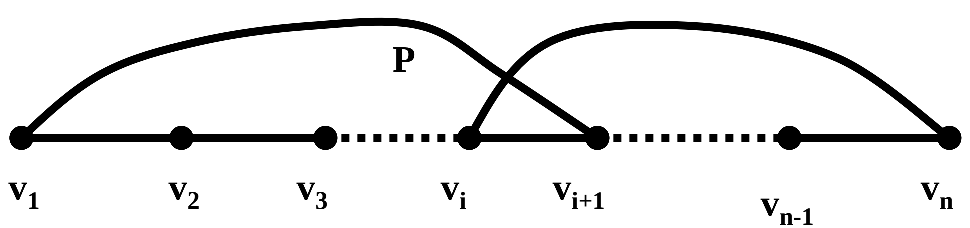
所以：$|S \cup T| < n$

另一方面：可以证明：$S \cap T = \Phi$

否则，设 $v_i \in S \cap T$

那么，由 $v_i \in S$有$\mathrm{v}_1 v_{i+1} \in E(G)$

由 $v_i \in T$有$\mathrm{v}_\mathrm{n} v_i \in E(G)$



这样在G中有H圈，与假设矛盾！

于是:

$$d(u)+d(v)=|S|+|T|=|S\cup T|+|S\cap T|<n$$

这与已知 $\delta(G)\geq\frac{n}{2}$ 矛盾!

注:该定理是数学家 Dirac在1952年得到的。该定理被认为是H问题的划时代奠基性成果。

Dirac曾经是丹麦奥尔胡斯大学知名教授,杰出的数学研究者。其父亲(继父)是在量子力学中做出卓越贡献的物理学家狄拉克,1933年获诺贝尔物理学奖。Dirac发表关于H问题论文39篇。他1952年的定理将永载史册!

1960年，美国耶鲁大学数学家奥尔院士考察不相邻两点度和情况，弱化了Dirac条件，得到一个光耀千秋的结果。

Ore发表关于H问题论文59篇。

定理3 (充分条件) 对于n≧3的单图G，如果G中的任意两个不相邻顶点u与v，有：

$$d(u)+d(v)\geq n$$

那么，G是H图。

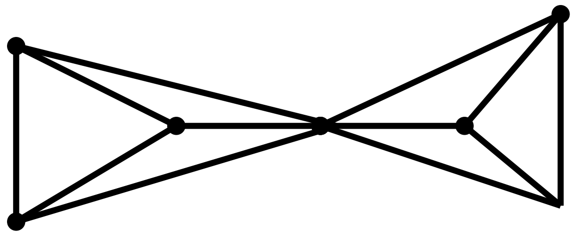
注: (1) 该定理证明和定理2可以完全一致！

(2) 该定理的条件是紧的。例如：设G是由K_{k+1}的一个顶点和另一个K_{k+1}的一个顶点重合得到的图，那么对于G

的任意两个不相邻顶点u与v，有：

$$d(u)+d(v)=2k=n-1$$

但G是非H图。



G=K_1+2(K_3)

1976年，牛津大学的图论大师Bondy(帮迪)等在Ore定理基础上，得到图G和它的闭包间的同哈密尔顿性。

注：帮迪的书《图论及其应用》是一本经典必读教材。有中译本和习题解答。吴望祖译 。

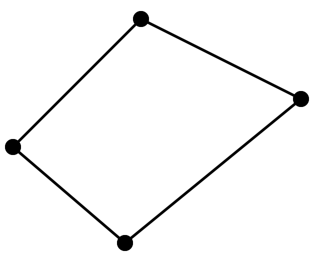
引理1 对于单图G，如果G中有两个不相邻顶点u与v，满足：

$$d(u)+d(v)\geq n$$

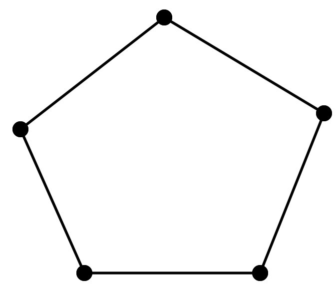
那么G是H图当且仅当G + u v是H图。

证明：略

定义3 在n阶单图中，若对d (u) + d (v) ≧n 的任意一对顶点u与v，均有u a dj v , 则称G是闭图。



非闭图



闭图

引理2 若G_1和G_2是同一个点集V的两个闭图，则$G=G_1\cap G_2$是闭图。

证明：任取$u, v\in V(G_1 \cap G_2)$，如果有：

$$d_G(u)+d_G(v)\ge n$$

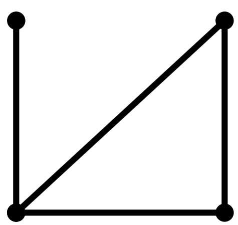
易知：

$$d_{G_1}(u)+d_{G_1}(v)\ge n, d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)\ge n$$

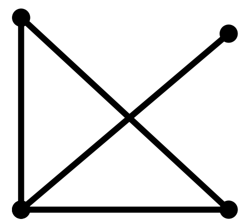
因G_1与G_2都是闭图，所以u与v在G_1与G_2中都邻接，所以，在G中也邻接。故G是闭图。

注：G_1与G_2都是闭图，它们的并不一定是闭图。

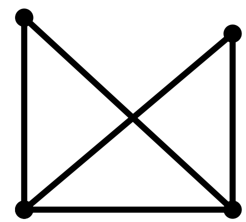
例如：



G_1



G_2

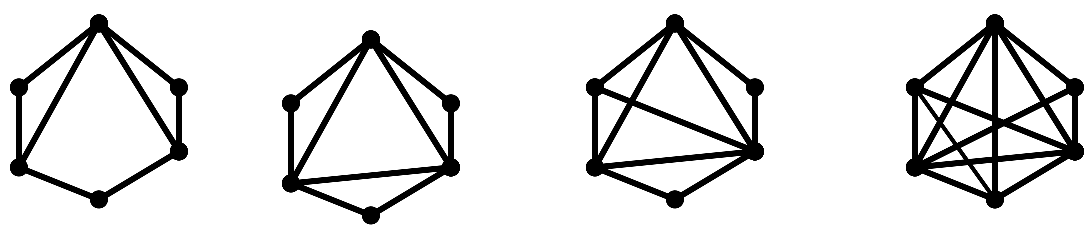


$G_1 \cup G_2$

尽管G_1与G_2是闭图，但其并不是闭图！

定义4 称 $\bar{G}$ 是图G的闭包，如果它是包含G的极小闭图。

注：如果G本身是闭图，则其闭包是它本身；如果G不是闭图，则由定义可以通过在度和大于等于n的不相邻顶点对间加边来构造G的闭图。例如：



G　　　　　　　　$\bar{G}$

引理3 图G的闭包是唯一的。(证明略)

定理4(帮迪——闭包定理) 图G是H图当且仅当它的闭包是H图。

证明：“必要性”显然。

“充分性”：假设G的闭包是H图，我们证明G是H图。

假设G的闭包和G相同，结论显然。

若不然，设e_i ($1 \leqq i \leqq k$)是为构造G的闭包而添加的所有边，由引理1，G是H图当且仅当$G+e_1$是H图，$G+e_1$是H图当且仅当$G+e_1+e_2$是H图,…, 反复应用引理1，可以得到定理结论。

由于完全图一定是H图，所以由闭包定理有：

推论1：设G是$n \geqq 3$的单图，若G的闭包是完全图，则G是H图。

由闭包定理也可以推出**Dirac**和**Ore**定理：

推论**1**：设**G**是**n**≧3的单图。

(1) 若δ(G)≧n/2, 则G是H图(Dirac定理);

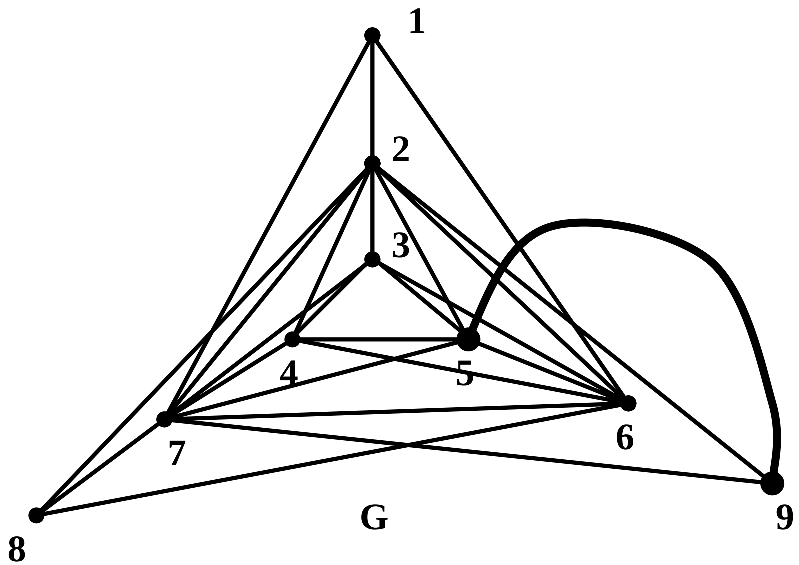
(2) 若对于G中任意不相邻顶点u与v，都有d(u)+d(v)≧n, 则G是H图.(Ore定理)

在闭包定理的基础上，**Chvátal**和帮迪进一步得到图的**H**性的度序列判定法。

定理**5(Chvátal——**度序列判定法**)** 设简单图**G**的度序列是$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$, 这里，$d_1 \leqq d_2 \leqq \cdots \leqq d_n$, 并且$n \geqq 3$. 若对任意的$m<n/2$, 或有 $d_m>m$, 或有$d_{n-m} \geqq n-m$, 则G是H图。

萨瓦达定理的证明方法：证**G**的闭包是完全图。

例4 求证下图是H图。



证明：在G中有：

$$d_1 = d_2 = d_3 = 3 \quad d_4 = d_5 = 5 \quad d_6 = 6 \quad d_7 = 7$$

$$d_8 = d_9 = 8$$

因n=9,所以，m=1,2,3,4

$$d_5=9-4=5, d_6=9-3=6, d_7=9-2=7, d_8=9-1=8$$

所以，由度序列判定法，**G**是**H**图。

注：哈密尔顿图研究简介

哈密尔顿问题的研究一直是图论热点。研究历史大致情况如下：

(1) 1952年**Dirac**定理是研究的奠基性结果；

(2) 1962年**Ore**定理是**Dirac**定理的重要推进；

(3) 1976年帮迪的闭包定理是**Ore**定理的重要推进；

(4) 1985年时任剑桥大学兼伦敦大学教授的**Nicos**在弱化**Ore**定理条件基础上推进了**Ore**定理；

(5) 1996年**GSU**计算机系五个特聘教授之一的**Chen**和**SCI**杂志《图论杂志》编委**Egawa**及**SCI**杂志《图论与组合》主编**Saito**等再进一步推进**Ore**定理。

(6) 2007年, 赖虹建教授统一上面全部结果(见美国 APP*l*. Math.Lett),似已是珠峰之极**.**

值得一提的是，福州大学的 范更华教授对H问题的研究也取得重要成就，他得出“范定理”：

范定理：若图中每对距离为2的点中有一点的度数至少是图的点数的一半，则该图存在哈密尔顿圈。

该成果获得中国2005年度国家自然科学二等奖。

作业

P97---99　习题4： 10，12

图论及其应用

任课教师：杨春

Email: **yc517922@126.com**

数学科学学院

本次课主要内容

度极大非哈密尔顿图与TSP问题

(一)、度极大非哈密尔顿图

(二)、TSP问题

(一)、度极大非哈密尔顿图

1、定义

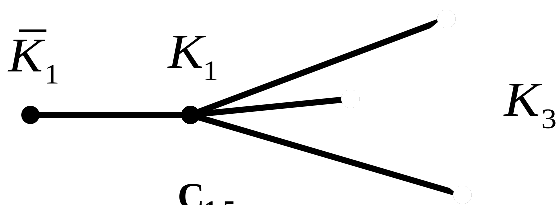
定义1 图G称为度极大非H图，如果它的度不弱于其它非H图。

2、C $_{m,n}$图

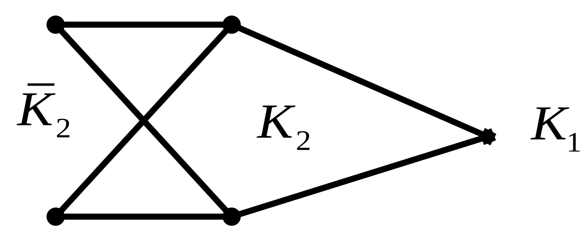
定义2 对于1≦ ｍ＜n/2 ， C $_{m,n}$ 图定义为：

$$C_{m,n}=K_m\vee(\bar{K}_m+K_{n-2m})$$

例如，作出$C_{1,5}$与$C_{2,5}$



$C_{1,5}$



$C_{2,5}$

3、$C_{m,n}$的性质

引理1 对于$1 \leqq m < n/2$ 的图$C_{m,n}$是非H图。

证明：取$S = V(k_m)$,则$\omega(G-S)=m+1>|S|=m$, 所以，由H图的性质知，G是非H图。

4、度极大非H图的特征

定理1 (Chvátal,1972)

若G是n≧3的非H单图，则G度弱于某个$C_{m,n}$图。

证明：设G是度序列为 $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$的非H单图，且$d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$, n≧3。

由度序列判定法：存在m<n/2,使得$d_m \le m$, 且$d_{n-m} < n-m$. 于是，G的度序列必弱于如下序列：

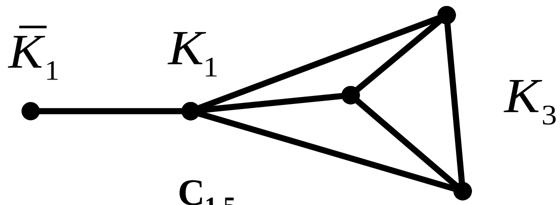
$$(\overbrace{m,m,\ldots,m}^{m},\overbrace{n-m-1,n-m-1,\ldots,n-m-1}^{n-2m},\overbrace{n-1,n-1,\ldots,n-1}^{m})$$

而上面序列正好是图$C_{m,n}$的度序列。

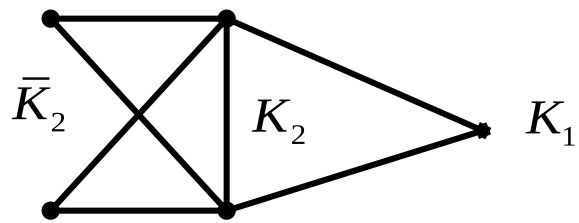
注：(1) 定理1刻画了非H单图的特征：从度序列角度看，$C_{m,n}$图族中某个图是某个n阶非H单图的极图。

(2) 定理的条件是充分条件而非必要条件。

例如：当n=5时，其度极大非H图族是：$C_{1,5}$与$C_{2,5}$



$C_{1,5}$



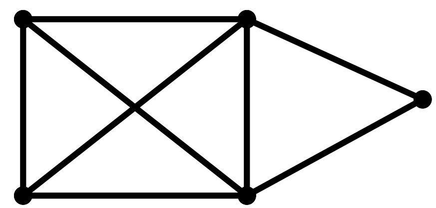
$C_{2,5}$

$C_{1,5}$的度序列是：(1,3,3,3,4), $C_{2,5}$的度序列是(2,2,2,4,4)。

而5阶圈C_5的度序列是: (2,2,2,2,2),尽管它度弱于$C_{2,5}$, 但是C_5是H图。

(3) 如果n阶单图G度优于所有的$C_{m,\ n}$图族，则G是H图。

例如：



G

G的度序列是(2,3,3,4,4),优于$C_{1,5}$的度序列(1,3,3,3,4)和$C_{2,5}$的度序列 (2,2,2,4,4)。所以可以断定G是H图。

推论 设G是n阶单图。若n≧3且

$$|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1$$

则G是H图；并且，具有n个顶点 $\binom{n-1}{2}+1$ 条边的非H图只有$C_{1,n}$以及$C_{2,5}$.

证明: (1) 先证明G是H图。

若不然，由定理1，G度弱于某个$C_{m,n}$,于是有：

$$
\begin{aligned}
|E(G)| &\le |E(C_{m,n})| = \frac{1}{2}\left[m^2+(n-2m)(n-m-1)+m(n-1)\right] \\
&= \binom{n-1}{2}+1-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-(m-1)(n-2m-1) \\
&\le \binom{n-1}{2}+1.
\end{aligned}
$$

这与条件矛盾！所以G是H图。

(2) 对于$C_{1,n}$,有：

$$|E(G)|=|E(C_{1,n})|=\binom{n-1}{2}+1.$$

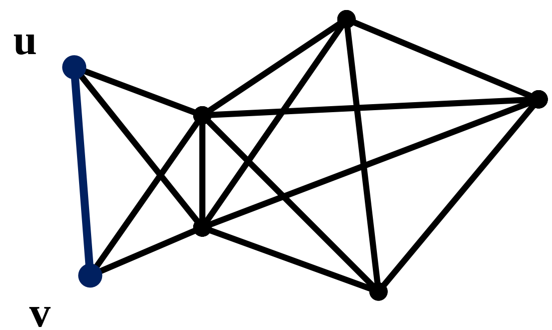
除此之外，只有当m=2且n=5时有：

$$|E(G)|=|E(C_{m,n})|=\binom{n-1}{2}+1.$$

这就证明了(2)。

注：推论的条件是充分而非必要的。

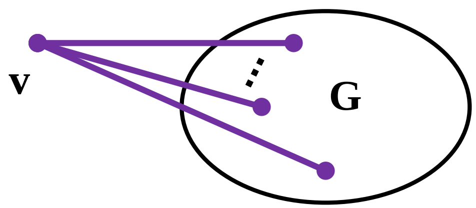
例如，在下图中，尽管$C_{2,7}$+uv的边数不满足推论不等式，可它是H图。



$C_{2,7}$+uv

例1 设G是度序列为$(d_1,d_2,\ldots,d_n)$的非平凡单图，且$d_1\leqq d_2\leqq\ldots\leqq d_n$。证明：若G不存在小于$(n+1)/2$的正整数m，使得：$d_m<m$且$d_{n-m+1}<n-m$,则G有H路。

证明：在G之外加上一个新点v,把它和G的其余各点连接得图G_1



G_1

G_1的度序列为：$(d_1+1,d_2+1,\ldots,d_n+1, n)$

由条件：不存在小于$(n+1)/2$的正整数m,使得$d_m+1\leqq m$, 且$d_{n-m+1}+1<n-m+1=(n+1)-m$。于是由度序列判定定理知：$G_1$是H图，得G有H路。

例2 一只老鼠吃3*3*3立方体乳酪。其方法是借助于打洞通过所有的27个1*1*1 的子立方体。如果它从一角上开始，然后依次走向未吃的立方体，问吃完时是否可以到达中心点？

解：如果把每个子立方体模型为图的顶点，且两个顶点连线当且仅当两个子立方体有共同面。那么，问题转化为问该图中是否存在一条由角点到中心点的H路。

如果起点作为坐标原点，那么27个子立方体可以编码为：
(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,1),…,(3,3,3)

容易知道：**G**是偶图，且如果**(1,1,1)**在**X**中，则中心点**(2,2,2)**必在**Y**中。

又容易知道：**|X|=14, |Y|=13.**

G中不存在由点**(1,1,1)**到点**(2,2,2)**的**H**路。否则，将**(1,1,1)**和**(2,2,2)**连线后得到的图G_1有**H**圈。

但是，G_1不能是**H**图。因为在G_1中，取**S=Y,**则可得到：$14=\omega(G_1-S)>|S|=13$.

故，老鼠最后不能到达中心点。

(二)、TSP问题

TSP问题即旅行售货员问题，是应用图论中典型问题之一。问题提法为：一售货员要到若干城市去售货，每座城市只经历一次，问如何安排行走路线，使其行走的总路程最短。

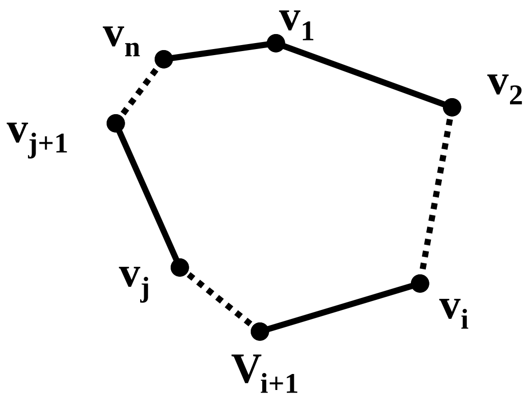
在赋权图中求最小**H**圈是**NP—**难问题。理论上也已经证明：不存在多项式时间近似算法，使相对误差小于或等于某个固定的常数 ε , 即便是ε=**1000**也是如此。

已经使用过的近似算法很多，如遗传算法、最邻近算法、最近插值法、贪婪算法和边交换技术等。

下面介绍边交换技术。

1、边交换技术

(1)、在赋权完全图中取一个初始H圈$C=v_1v_2,\ldots,v_nv_1$；

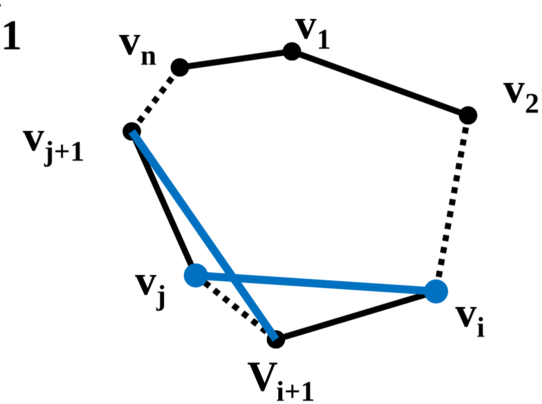


初始H圈C

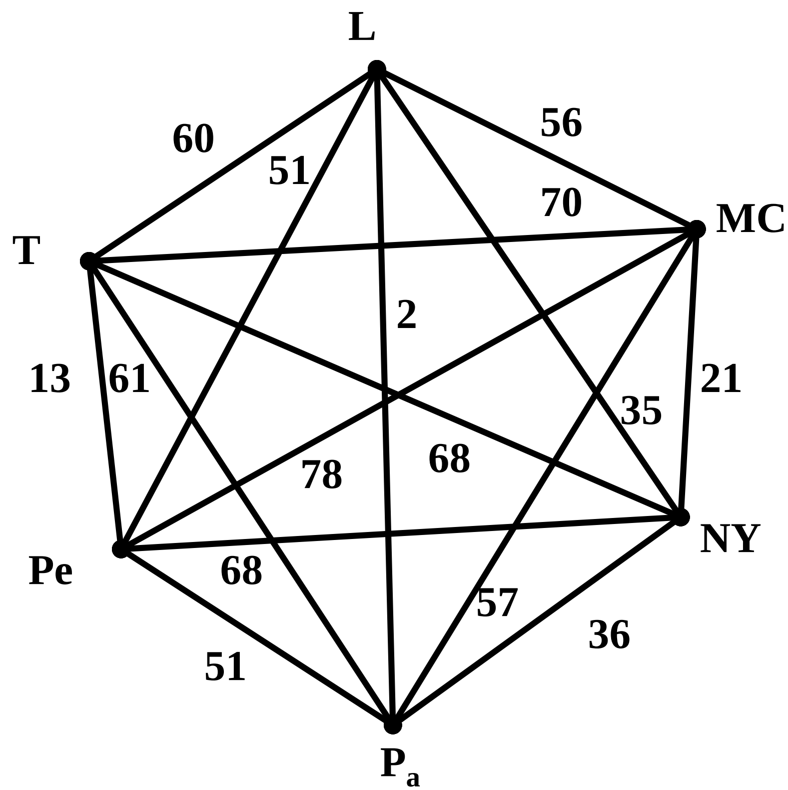
(2)、如果存在下图中红色边，

且$w(v_iv_{i+1})+w(v_jv_{j+1})\geqq w(v_iv_j)+w(v_{i+1}v_{j+1})$,则把C修改为：

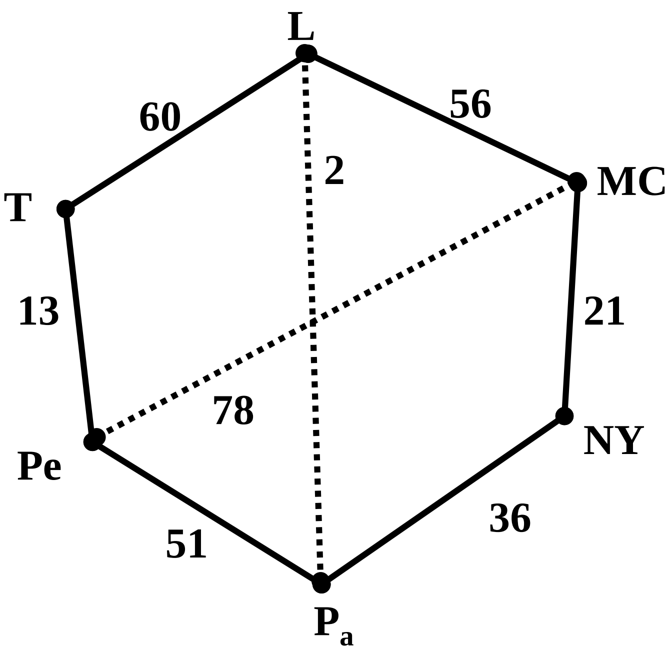
$C_1=v_1v_2,\ldots,v_iv_j\ldots v_{i+1}v_{j+1}\ldots,v_nv_1$

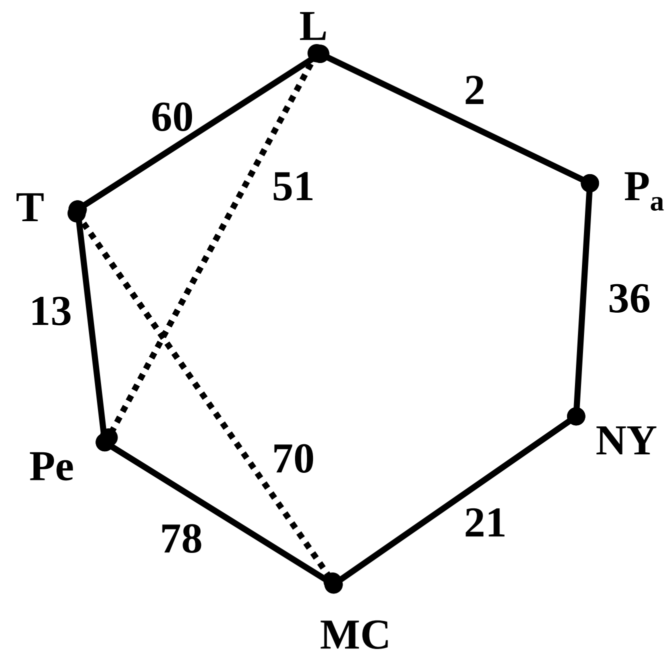


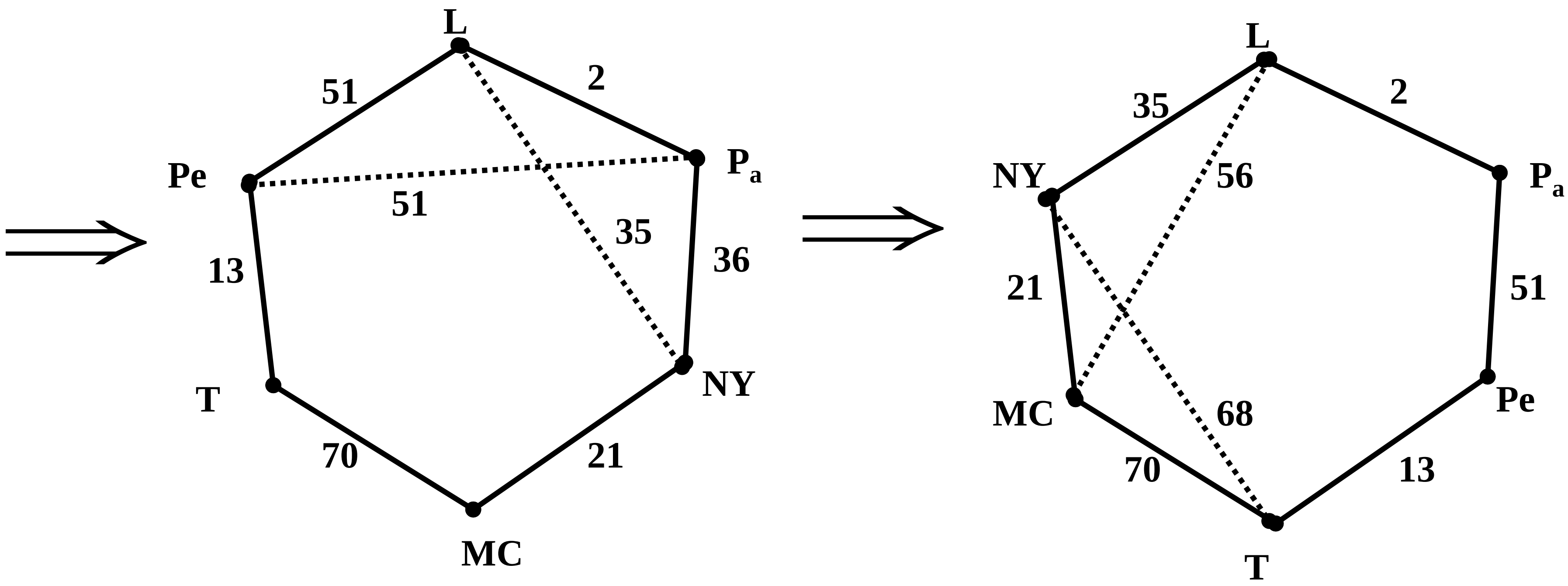
例3 采用边交换技术求赋权完全图的一个近似最优H圈。



解：取初始圈为：


L
60
56
2
MC
T
13
21
78
NY
Pe
51
36
Pa


L
2
60
51
Pa
T
13
36
NY
Pe
70
78
21
MC



于是，求出一个近似最优解为：**W(H) =192**

注：为了得到进一步的优解，可以从几个不同的初始圈开始，通过边交换技术得到几个近似最优解，然后从中选取一个近似解。

2、最优H圈的下界

可以通过如下方法求出最优H圈的一个下界:

(1) 在G中删掉一点v(任意的)得图G_1;

(2) 在图G_1中求出一棵最小生成树T;

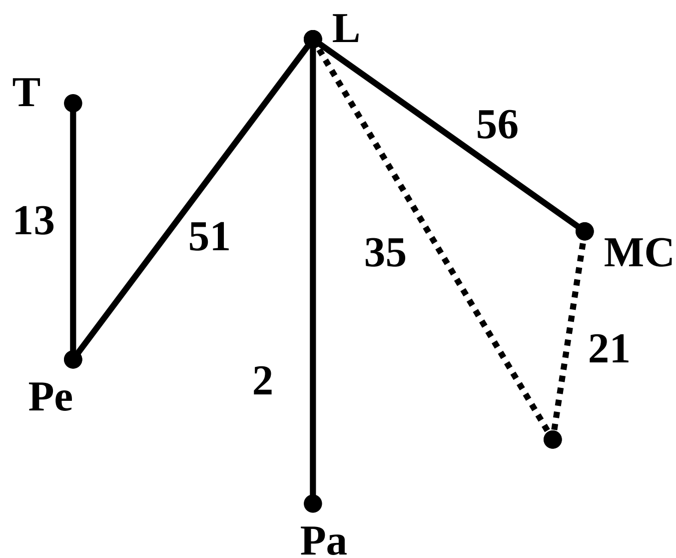
(3) 在v的关联边中选出两条权值最小者e_1与e_2.

若H是G的最优圈，则:

$$W(H) \geq W(T) + W(e_1) + W(e_2)$$

例如，估计例5中最优H圈的下界

解：在G中删掉点NY,求得G-NY的一棵最优生成树为：



所以，W(H)≧122+35+21=178.

作业

P97---99　习题4：13, 14，17

图论及其应用

任课教师：杨春

Email: **yc517922@126.com**

数学科学学院

本次课主要内容

超哈密尔顿图与超可迹图问题

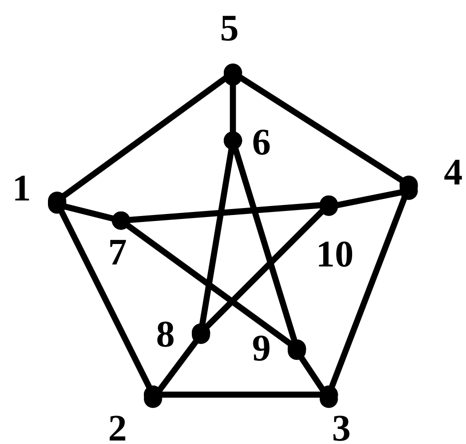
(一)、超H图与超可迹图

(二)、E图和H图的关系

(一)、超H图与超H迹

定义1 若图G是非H图，但对于G中任意点v,都有G-v是H图，则称G是超H图。

定理1 彼得森图是超H图。

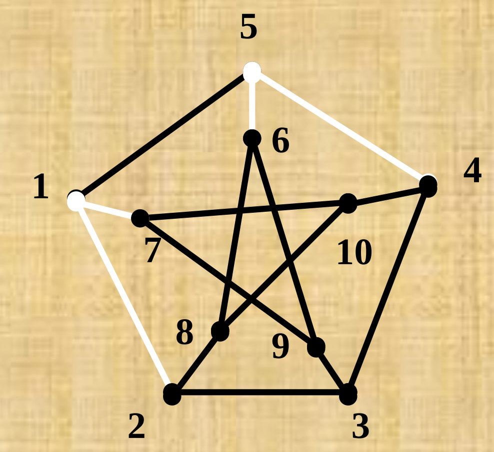


彼得森图

证明：(1) 证明彼得森图是非H图。

若不然，设C是G的H圈。

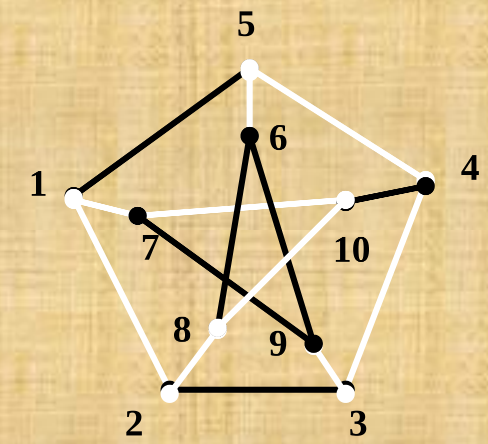
对于边12, 17,15来说，必然有两条边在C中。不失一般性，假定17,12在C中，那么，56，54也必然在C中。



彼得森图

又对于边28，23来说，在前面情况下，必有一条在C中。分两种情形讨论。

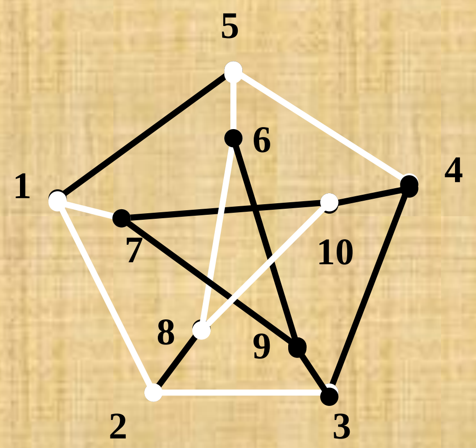
情形1：假如28在C中，则39，34在C中,从而7(10), 8(10)在C中



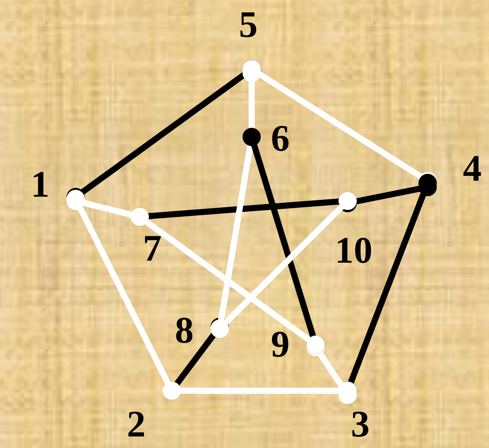
彼得森图

但这样得到圈：17(10)821。所以该情形不能存在。

情形2：假如23在C中，则86，8(10)在C中,从而39, 79在C中.



彼得森图



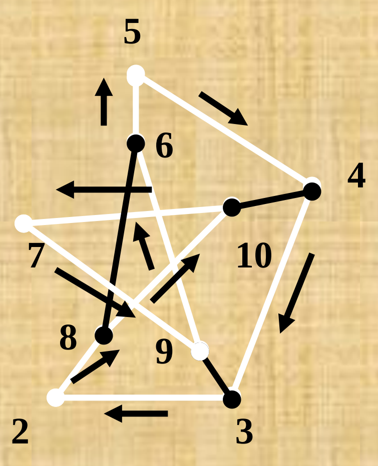
彼得森图

但这样得到圈：123971。所以该情形也不能存在。

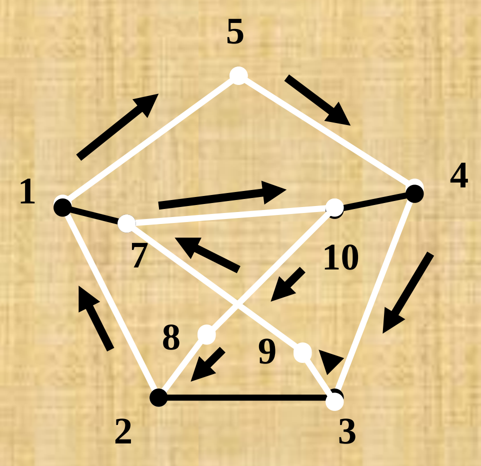
上面推理说明，G中不存在H圈，即彼得森图是非H图。

(2) 证明对任意点v，G-v是H图。

由对称性，只需考虑下面两种情形: (a) G-1,（b）G-6



G-1



G-6

(a) G-1中有H圈：54328(10)7965

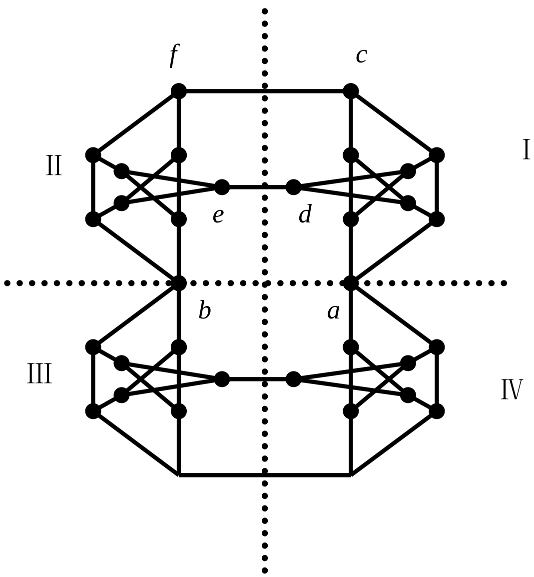
(b) G-6中有H圈：54397(10)8215

由(1)与(2)，G是超H图。

定义2 若G中没有H路，但是对G中任意点v，G-v存在H路，则称G是超可迹的。

数学家加莱曾经猜想：不存在超可迹的图。但该猜想被Horton和Thomassen以构图的方式否定了。

定理2 Thomassen图是超可迹图。

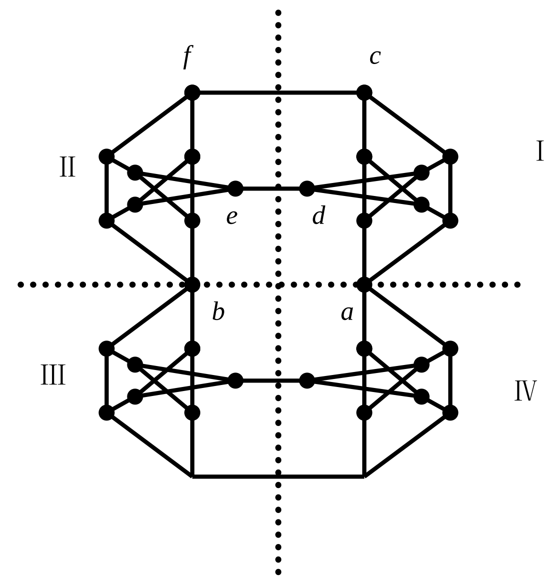


Thomassen图

定理证明分为两部分: (1) 证明G中不存在H路；(2) 证明对G中任意点v，有G-v存在H路。

(1) 证明G中不存在H路。

如图所示，将G用虚线分成对称的4部分： Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ 。



Thomassen图

假设G有H路P,设该路的起点为α，终点为β 。

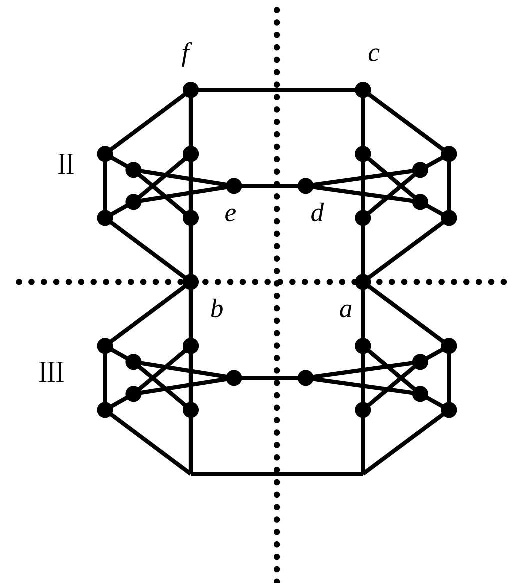
不失一般性，设α∈ I∪｛*a*｝。

断言1： I∪｛*a*｝ 中不存在以a , c , d三点中任意两点为端点的H路。

若不然，将推出彼得森图是H图。

断言2： I∪II ∪ ｛a， b｝ 中不存在以a为端点的H路。

若不然，设Q是一条以a为起点的I∪II ∪ ｛a， b｝ 中的H路。那么，从a出发，沿着该路行走有两种可能: (1) 遍历了I中所有点之后，从c或d进入II，但这形成了I ∪｛a｝中的以a, c或a, d为端点的H路，与断言1矛盾！



Thomassen图

(2) 没有遍历完I ∪｛a｝ 中的顶点，假若从c进入II，那么， 必须遍历完II ∪ ｛b｝ 的所有顶点后，才能从e进入I。但这也会与断言1产生矛盾。

由前面假设：**α∈ I∪｛*a*｝**。

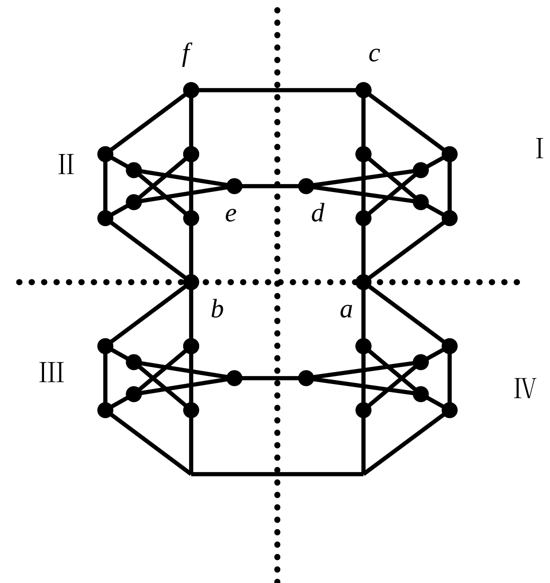
情形**1**：α = a

我们沿着**P**作如下的行进：

(1) 假设是由**a**进入**I**，要能够走完**P,** 必须遍历**I∪II** 的所有顶点后由**b**进入Ⅲ，但这与断言2矛盾！

(2) 假设是由**a**进入Ⅳ，要能够走完**P,**必须遍历Ⅲ∪Ⅳ 的所有顶点后由**b**进入Ⅱ，但这也与断言2矛盾！

所以，情形**1**不能成立！

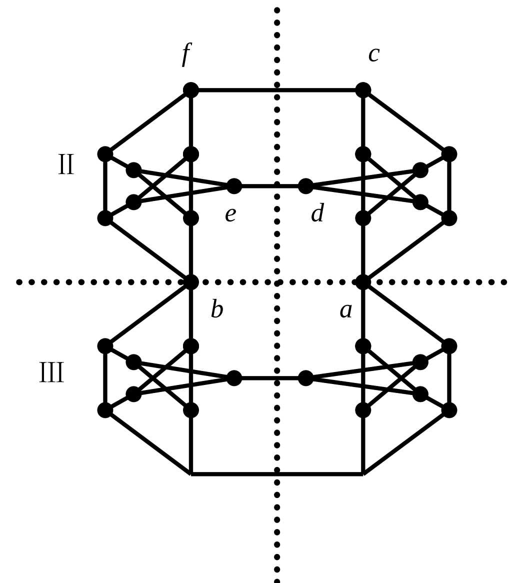


Thomassen图

情形2：α ≠ a

我们沿着P作如下的行进：

(1) 假设是由α遍历了I∪II ∪｛b｝所有顶点从a进入IV，这与断言2矛盾！同样，假设是由α遍历了I∪II ∪｛a｝所有顶点从b进入IV，这也与断言2矛盾！



Thomassen图

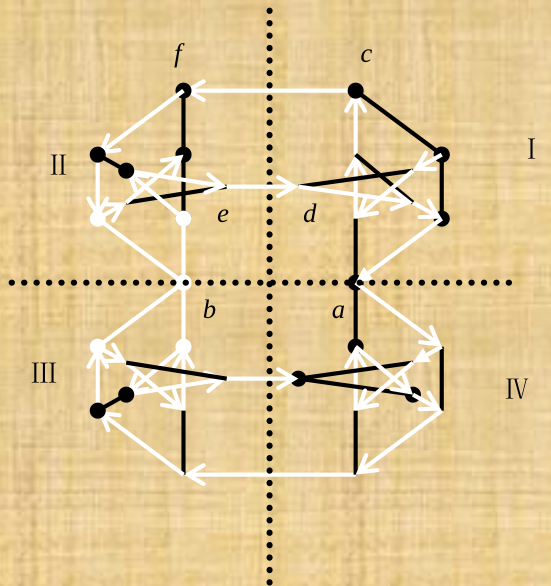
(2) 假设是由α开始，没有遍历I∪II ∪｛a ,b｝而从a或b进入Ⅲ∪Ⅳ，那么，要走完P, 都必须遍历完III∪IV的所有顶点后，才能重新进入I∪II 。但这要与断言2矛盾

所以，情形2也不能成立！

综合上面的论述：得G中没有H路。

(2) 证明对G中任意点v，有G-v存在H路。

由对称性：我们取b和III中顶点逐一分析即可。例如：



Thomassen图

综上所述：得Thomassen图是超可迹图。

关于H图的一些猜想

1、加莱猜想：不存在超可迹的图。

加莱猜想是错误的。**Thomassen**图否定了加莱猜想。

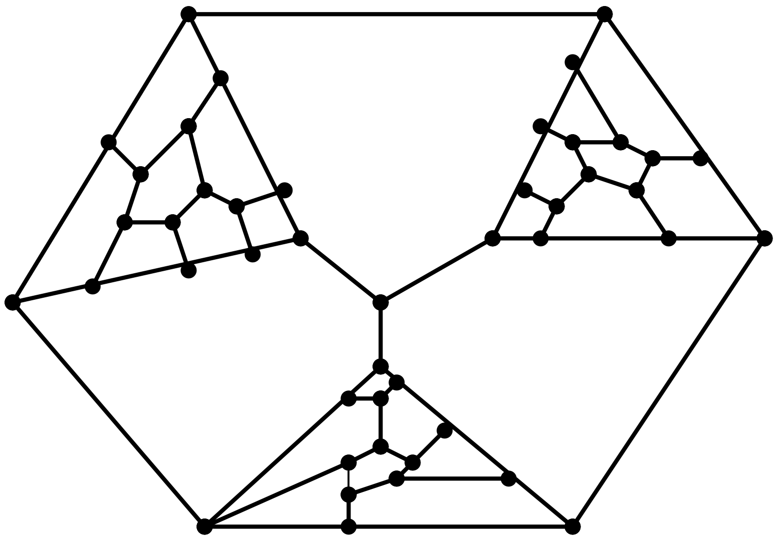
加莱**(1912---1992)** 匈牙利数学家。他和**Erdos,** 托兰是当时匈牙利国家数学竞赛获胜者，后来成为一生的朋友。

加莱深受哥尼的影响而对图论产生极大兴趣，以至于他对图论基础理论做出了重大贡献，推动了图论与组合数学的迅速发展。同时，他也是最早认识所谓的“极小--极大定理”重要性的数学家之一。

加莱为人谦虚低调，很少在公开场合露面。常常在赞扬别人工作时低估自己的成绩。不喜欢发表自己研究成果。

2、泰特猜想：任何3连通3正则可平面图是H图。

泰特猜想也是错误的。托特1946年构图否定了泰特猜想。



46个点的托特图

Lederberg等构造了最小的3连通3正则图非H图，有38个点。

如果泰特猜想正确，4色定理可得到证明。

托特(1917---2002) 英国著名数学家。1935年，入剑桥三一学院学习化学，并攻读了化学研究生，撰写了2篇化学论文。但是，他的兴趣是数学。在剑桥，他结识了3位数学专业的本科学生并成为终身朋友，合作发表数学论文。二战后，托特回到剑桥攻读数学研究生。研究生期间，发表了关于图的因子分解论文。在他的数学博士论文中，复兴了拟阵理论(惠特尼引入的).1948年博士毕业后，受20世纪伟大的几何学家Coxeter邀请前往多伦多大学任教，成为组合数学杰出学者。5年后到滑铁卢大学工作直到1984年退休。

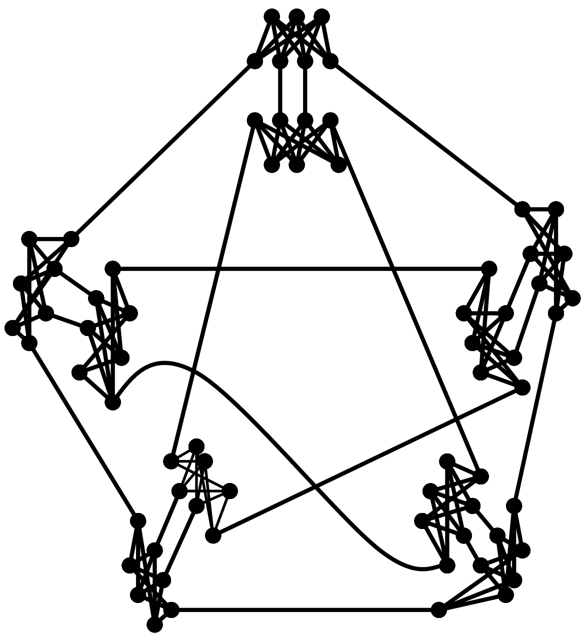
托特是20世纪伟大的数学家之一，在近代数学史上占有一定的地位。主要功绩是提出并证明了图的完美匹配定理。

托特还喜欢写诗，在1969年写了一首反映图论的诗：

哥尼斯堡的一些市民，
漫步在河畔。
在普雷格尔河旁，
有七座桥相伴。
“Euler,我们一起散步吧！”
那些市民在召唤。
“我们在这七座桥上漫步，
经过每座桥仅一次。”
“你们做不到”，Euler大声吼道。“结果就是这样，
岛屿作为顶点，
四个点有奇数度”。
从哥尼斯堡到哥尼的书，
图论的传说正是如此，
而且越来越精彩，
绽放在密歇根和耶鲁

3、纳什—威廉斯猜想：每个4连通4正则图是H图。

该猜想错误。Meredith构图对猜想进行了否定。

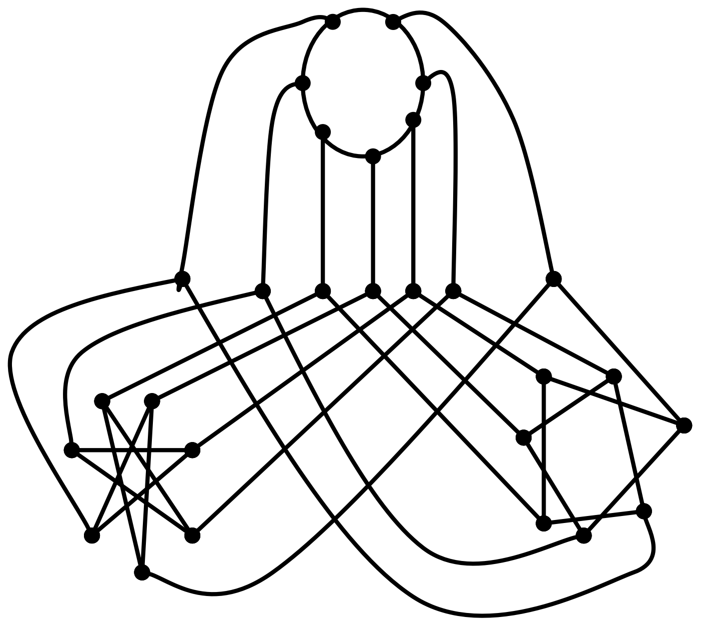


Meredith图

Meredith图是由彼得森图的每个顶点嵌入一个$K_{3,4}$作成。

4、托特猜想：每个3连通3正则偶图是H图。

该猜想错误。Coxeter构图对猜想进行了否定。



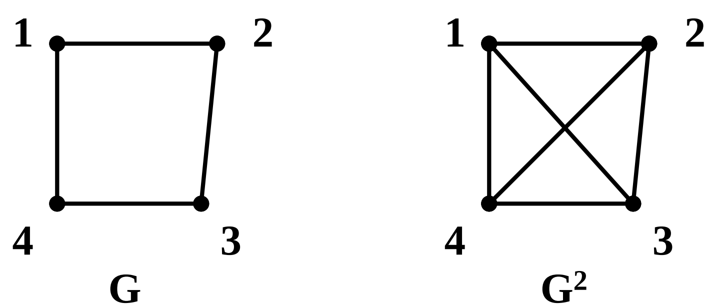
Coxeter图

5、普鲁默猜想：每个2连通图的平方是H图。

该猜想是正确的，已经得到证明。

定义：图G的平方G^2是这样的图:

$V(G^2)=V(G)\quad (u,v)\in E(G^2)\Leftrightarrow$ 在G中有：$d(u,v)\le 2$



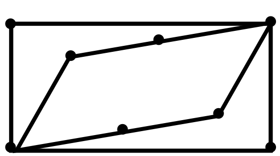
值得一提的是：在H问题研究中，H图中H圈的计数问题也是一个研究方向。

定理：每个3正则H图至少有3个生成圈。

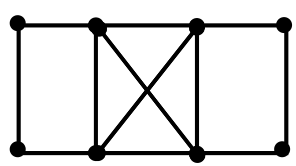
我院张先迪、李正良教授曾经也研究过H图中H圈的计数问题。90年在《系统科学与数学》学报上发表文章："有限循环群上Cayley有向图的H回路"，得到了该类图的H圈的计数公式。

(二)、E图和H图的关系

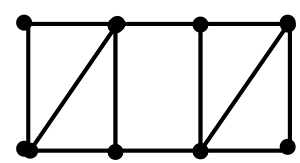
从表面上看，E图与H图间没有联系。因为我们可以不费力地找到: (1) E图但非H图；(2) E图且H图；(3) H图但非E图; (4) 非E图且非H图.



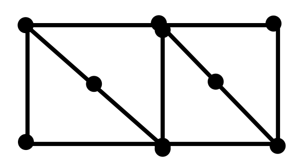
E图但非H图



E且H图



H但非E图



非E且非H图

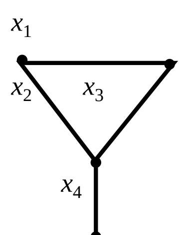
1、线图概念

定义3 设G是图，G的线图L(G)定义为：

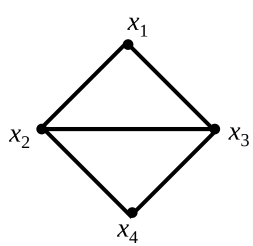
$$V(L(G)) = E(G)$$

$$(e_1, e_2) \in E(L(G)) \Leftrightarrow \text{在}G\text{中有：边}e_1\text{与}e_2\text{邻接}$$

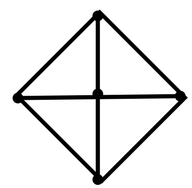
特别地，定义G的n次迭线图L^n(G) 为： $L^n(G) = L(L^{n-1}(G))$



G_1



$G_2=L(G_1)$


$L(G_2)=L(L(G_1))$

2、线图的性质

(1) 线图L(G)顶点数等于G的边数；若e=u v是G的边，则e作为L(G)的顶点度数为：d(e)=d(u)+d(v)-2 .

(2) 若G=(n, m), 则线图L(G) 边数为：

$$m(E(L(G)) = -m + \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d^2(v)$$

证明：由线图的定义，L(G)有m个顶点。对于G中任一顶点v，关联于该顶点的d(v)条边将产生L(G)中 $C_{d(v)}^2$ **条边。所以L(G)中的总边数为：**

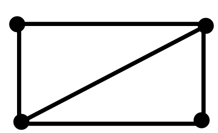
$$m(E(L(G)) = \sum_{v\in V(G)} C_{d(v)}^2 = \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v)\big(d(v)-1\big) = -m + \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d^2(v)$$

(3) 一个图同构于它的线图，当且仅当它是圈。

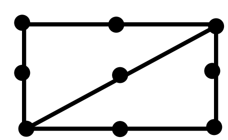
(4) 若图G和G_1有同构的线图，则除了一个是K_3而另一个是$K_{1,3}$外，G和G_1同构。(证明比较复杂)

3、从线图的角度考察E图与H图的关系

定义4 称S_n是图G的n次细分图，是指将G的每条边中都插入n个2度顶点。



G



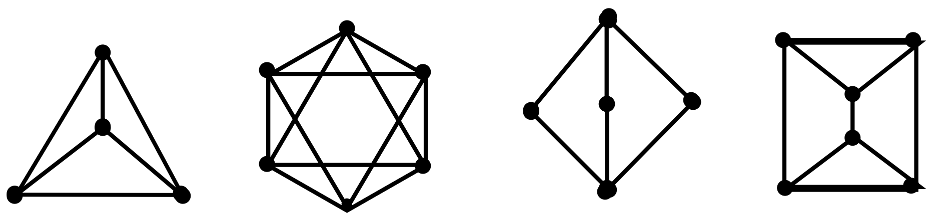
$S(G)$

又记：

$$L_n(G) = L(S_{n-1}(G))$$

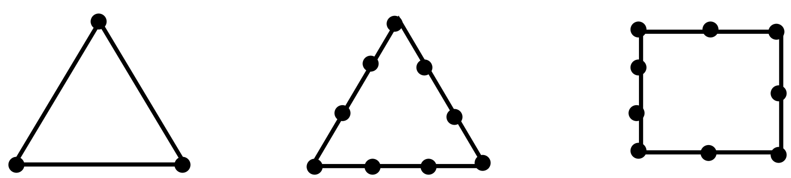
定理3 (1)若G是E图，则$L(G)$ 既是E图又是H图。
(2)若G是H图，则$L(G)$是H图。

注：该定理逆不成立。



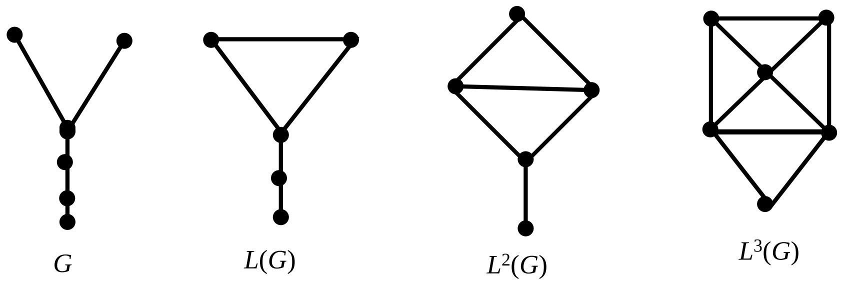
G_1 $L(G_1)$ G_2 $L(G_2)$

定理4 一个图G 是E图的充要条件是$L_3(G)$为H图



G $S_2(G)$ $L_3(G)$

定理5 （Chartarand）若G 是n个点的非平凡连通图，且不是一条路，则对所有$m \geq n$-3，$L_m(G)$ 是H图。



Thank You !