二、三次Hermite插值的余项

定理： 设$f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，$f(x)$在(a,b)内有4阶导数，$H_3(x)$是满足插值条件

$$H(x_j)=y_j, H'(x_j)=m_j \qquad (j=0,1)$$

的三次Hermite插值函数，则对任意的$x\in[a,b]$，$H(x)$的插值余项为

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \quad (x_0\le\xi\le x_1)$$

证明： 由

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)$$

$$R_3(x_i)=f(x_i)-H_3(x_i)=0$$

$$R_3'(x_i)=f'(x_i)-H_3'(x_i)=0$$

$(i=0,1)$

可知，x_0，x_1均为$R_3(x)$的二重零点，因此可设

$$R_3(x)=K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$ 其中$K(x)$待定

构造辅助函数

$$\varphi(t)=f(t)-H_3(t)-K(x)(t-x_0)^2(t-x_1)^2$$

$$\varphi(x_i)=f(x_i)-H_3(x_i)-K(x)(x_i-x_0)^2(x_i-x_1)^2=0$$ （i=0,1）

$$\varphi(x)=f(x)-H_3(x)-K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2=0$$

因此φ(t)至少有5个零点.

连续4次使用Rolle定理可得，至少存在一点$\xi\in[x_0,x_1]$，使得

$$\varphi^{(4)}(\xi)=0$$

即 $$\varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!K(x) = 0$$

$$K(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

所以，两点三次Hermite插值的余项为

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \quad (x_0 \le \xi \le x_1)$$

例1. 已知$f(x)$在节点1,2处的函数值为$f(1)=2,\ f(2)=3$

$f(x)$在节点1,2处的导数值为$f'(1)=0,\ f'(2)=-1$

求$f(x)$的两点三次插值多项式,及$f(x)$在$x=1.5,1.7$处的函数值.

解: $x_0=1, x_1=2 \qquad y_0=2, y_1=3 \qquad y_0'=0, y_1'=-1$

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y_0'\beta_0(x)+y_1'\beta_1(x)$$

$$=y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+y_0'\left(x-x_0\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1'\left(x-x_1\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$H_3(x)=2\left(1+2(x-1)\right)\left(x-2\right)^2+3\left(1-2(x-2)\right)\ \left(x-1\right)^2$$
$$-\left(x-2\right)\left(x-1\right)^2$$
$$=-3x^3+13x^2-17x+9$$

$$f(1.5)\ \approx H_3(1.5)\ =2.625$$

$$f(1.7)\ \approx H_3(1.7)\ =2.931$$

作为多项式插值，三次已是较高的次数，次数再高就有可能发生Runge现象，因此，对有n+1个节点的插值问题，我们可以使用分段两点三次Hermite插值.

三、分段三次Hermite插值

设节点$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$，分段插值函数$H_n(x)$在两个相邻节点构成的小区间$[x_j, x_{j+1}]$(j=0,1,…n-1)上满足条件：

$$H(x_j) = y_j, H(x_{j+1}) = y_{j+1},$$
$$H'(x_j) = m_j, H'(x_{j+1}) = m_{j+1}$$

用三次Hermite插值，当$x \in [x_j, x_{j+1}]$时，有

$$H_n(x) = y_j \alpha_j(x) + y_{j+1}\alpha_{j+1}(x)$$
$$+ m_j \beta_j(x) + m_{j+1}\beta_{j+1}(x)$$

其中

$$\alpha_j(x)=(1+2\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j})(\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}})^2$$

$$\alpha_{j+1}(x)=(1+2\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}})(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j})^2$$

$$\beta_j(x)=(x-x_j)(\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}})^2$$

$$\beta_{j+1}(x)=(x-x_{j+1})(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j})^2$$

5.6 三次样条插值

因分段线性插值导数不连续，埃尔米特插值导数连续但需要已知，故引入样条插值概念.

样条：是指飞机或轮船等的制造过程中为描绘出光滑的外形曲线(放样)所用的工具.

样条本质上是一段一段的三次多项式拼合而成的曲线，在拼接处，不仅函数是连续的，且一阶和二阶导数也是连续的.

1946年，Schoenberg将样条引入数学，即所谓的样条函数.

（一）三次样条插值函数的定义：

定义： 给定区间[a,b]上的一个划分：

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

已知函数$f(x)$在点x_j上的函数值为

$$f(x_j) = y_j,\ (j = 0,1,2,\cdots,n)$$

如果存在分段函数

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_2(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \cdots\cdots & \\ S_n(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

满足下述条件：

(1) $S(x)$在每一个子区间$[x_{j-1}, x_j]$ ($j= 0,1,2,\cdots,n$)上是一个三次多项式；

(2) $S(x)$在每一个内接点x_j ($j= 1,2,\cdots,n-1$)上具有直到二阶的连续导数；

则称$S(x)$为节点$x_0,x_1,\ldots, x_n$ 上的三次样条函数.

若$S(x)$在节点$x_0,x_1,\ldots, x_n$ 上还满足插值条件：

(3) $S(x_j)= y_j$ ($j= 0,1,2,\cdots,n$)

则称$S(x)$为三次样条插值函数.（即全部通过样点的二阶连续可微的分段三次多项式函数）

（二）三次样条插值函数的确定：

由(1)知， $S(x)$在每一个小区间$[x_{j-1}, x_j]$上是一三次多项式，若记为$S_j(x)$，则可设

$$S_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j$$

要确定函数$S(x)$的表达式，须确定$4n$个未知系数$\{a_j$, b_j，c_j，$d_j\}$ $(j=1,2,\ldots,n)$.

由(2)知，$S(x)$，$S`(x)$，$S``(x)$在内节点$x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$上连续，则

$$S(x_j-0)=S(x_j+0)$$

$$S'(x_j-0)=S'(x_j+0)$$

$$S''(x_j-0)=S''(x_j+0) \qquad j=1,2,\ldots,n-1$$

可得$3n-3$个方程，又由条件(3)

$$S(x_j)=y_j \qquad j=0,1,\ldots,n$$

得$n+1$个方程，共可得$4n-2$个方程.

要确定$4n$个未知数，还差两个方程.

通常在端点$x_0=a, x_n=b$处各附加一个条件，称边界条件，常见有三类：

第一类：转角边界条件，即给定端点处的一阶导数值；

$$S'(x_0+0)=f'(x_0), S'(x_n-0)=f'(x_n)$$

第二类：弯矩边界条件，即给定端点处的二阶导数值；

$$S''(x_0+0)=f''(x_0), S''(x_n-0)=f''(x_n)$$

特例： $S''(x_0)=S''(x_n)=0$ —自然样条（最光滑）

第三类：周期边界条件，即当$f(x)$是以$b-a$为周期的周期函数时，则要求$S(x)$也是周期函数，这时边界条件应满足当$f(b)=f(a)$时，（即$f(x_0)=f(x_n)$）

$$S'(x_0)=S'(x_n),S''(x_0)=S''(x_n)$$

加上边界条件，即可得$4n$个方程，可唯一地确定$4n$个未知数.

例 已知$f(x)$：$f(-1)=1$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，求$f(x)$在$[-1,1]$上的三次自然样条插值函数.

解 设

$$S(x)=\begin{cases} a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1 & x\in[-1,0] \\ a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2 & x\in[0,1] \end{cases}$$

由插值条件和函数连续条件得:

$$-a_1+b_1-c_1+d_1=1$$

$$d_1=0 \qquad d_2=0$$

$$a_2+b_2+c_2+d_2=1$$

由一阶及二阶导数连续得： $c_1 = c_2 \quad b_1 = b_2$

由自然边界条件得：

$$-6a_1 + 2b_1 = 0 \qquad 6a_2 + 2b_2 = 0$$

联立上面8个方程，求解得

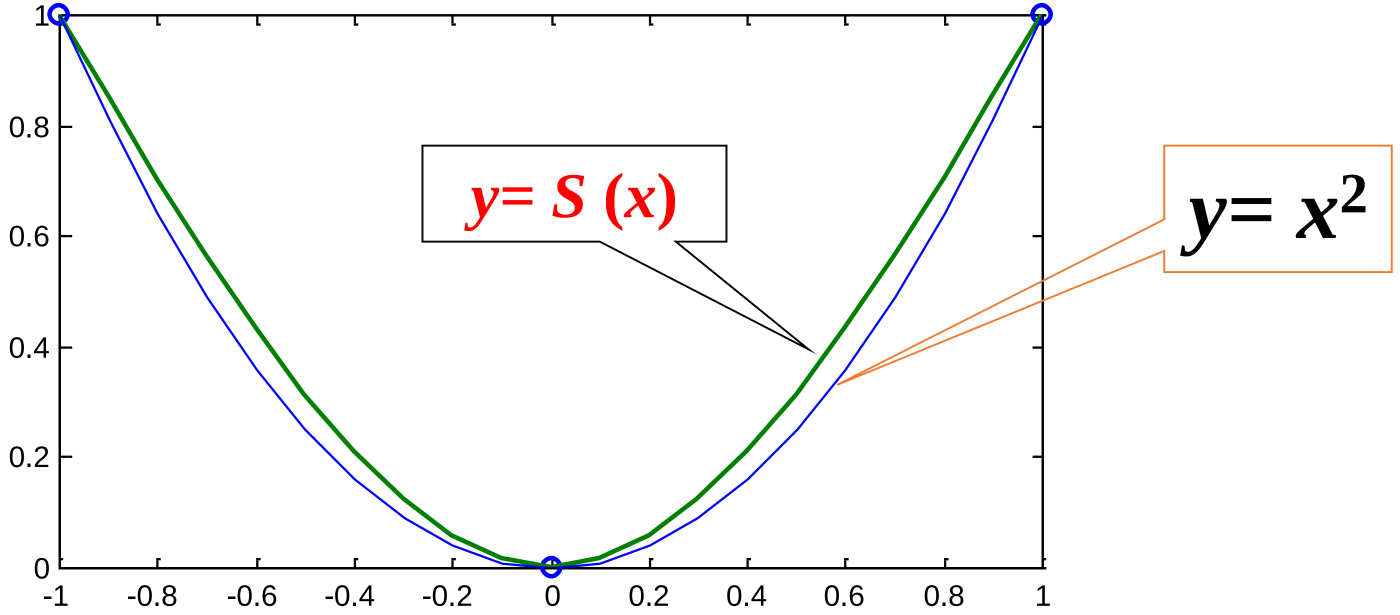
$$a_1 = -a_2 = \frac{1}{2}, b_1 = b_2 = \frac{3}{2}$$

$$c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$$

故

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 & x \in [-1, 0] \\ -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

插值效果如图所示：



（三）三次样条插值函数的构造：

（1）用一阶导数值构造三次样条插值函数

（m表达式，又称三转角算法）

设$S`(x_j)=m_j$，($j=0,1,2,\ldots,n$)

计算未知的m_j，即可通过分段三次Hermite插值得到分段三次样条插值多项式.

假设插值节点为等距节点，$h=x_{j+1}-x_j$，（$j=0,1,2,\ldots,n-1$）

当$x\in[x_j,x_{j+1}]$时，利用分段三次Hermite插值函数表示$S(x)$可得

$$S_{j+1}(x) = y_j\alpha_j(x) + y_{j+1}\alpha_{j+1}(x) + m_j\beta_j(x) + m_{j+1}\beta_{j+1}(x)$$

其中

$$\alpha_j(x) = (1 + 2\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j})(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}})^2$$

$$\alpha_{j+1}(x) = (1 + 2\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}})(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j})^2$$

$$\beta_j(x) = (x - x_j)(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}})^2$$

$$\beta_{j+1}(x) = (x - x_{j+1})(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j})^2$$

如何确定m_i?

利用样条插值函数二阶导数连续性

$$S''(x_j-0)=S''(x_j+0) \quad 即 \quad S_j''(x_j)=S_{j+1}''(x_j)$$

又

$$\begin{cases} \alpha_j''(x_j)=[\frac{-8}{h^3}(x_{j+1}-x)+(1+2\frac{x-x_j}{h})\frac{2}{h^2}]_{x=x_j}=-\frac{6}{h^2} \\ \alpha_{j+1}''(x_j)=[\frac{-8}{h^3}(x-x_j)+(1+2\frac{x_{j+1}-x}{h})\frac{2}{h^2}]_{x=x_j}=\frac{6}{h^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_j''(x_j)=[\frac{4}{h^2}(x-x_{j+1})+(x-x_j)\frac{2}{h^2}]_{x=x_j}=-\frac{4}{h^2} \\ \beta_{j+1}''(x_j)=[\frac{4}{h^2}(x-x_j)+(x-x_{j+1})\frac{2}{h^2}]_{x=x_j}=\frac{2}{h^2} \end{cases}$$

所以有 $$S''_{j+1}(x_j)=-\frac{6}{h^2}y_j+\frac{6}{h^2}y_{j+1}-\frac{4}{h}m_j-\frac{2}{h}m_{j+1}$$

同理得 $$S''_j(x_j)=\frac{6}{h^2}y_{j-1}-\frac{6}{h^2}y_j+\frac{2}{h}m_{j-1}+\frac{4}{h}m_j$$

上面两式右端相等，整理得

$$m_{j-1}+4m_j+m_{j+1}=\frac{3}{h}(y_{j+1}-y_{j-1}) \qquad (j=1,2,\ldots,n-1)$$

共$n-1$个方程，$n+1$个未知量.

补充自然样条的边界条件： $S''(x_0)=S''(x_n)=0$

得
$$\begin{cases} 2m_0+m_1=\dfrac{3}{h}(y_1-y_0) \\ m_{n-1}+2m_n=\dfrac{3}{h}(y_n-y_{n-1}) \end{cases}$$

令
$$g_0=\frac{3(y_1-y_0)}{h} \qquad g_n=\frac{3(y_n-y_{n-1})}{h}$$

$$g_j=\frac{3(y_{j+1}-y_{j-1})}{h} \qquad (j=1,2,\ldots,n-1)$$

可得具有n+1个方程，n+1个未知数的方程组：

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = g_0 \\ m_0 + 4m_1 + m_2 = g_1 \\ \cdots\cdots \\ m_{n-2} + 4m_{n-1} + m_n = g_{n-1} \\ m_{n-1} + 2m_n = g_n \end{cases}$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

用追赶法求解该方程组即可得m_j，由此得三次样条插值函数的表达式.

（2）用二阶导数值构造三次样条插值函数

（M表达式，又称三弯矩算法）

设$S``(x_j)=M_j$，$(j=0,1,2,\dots,n)$

记 $h_j=x_j-x_{j-1}$， $(j=1,2,\dots,n)$

因为$S(x)$是三次多项式，故$S``(x)$是线性函数.

按线性插值公式可得

$$S''(x)=\frac{x_j-x}{h_j}M_{j-1}+\frac{x-x_{j-1}}{h_j}M_j$$

积分两次得

$$S'(x)=-\frac{(x_j-x)^2}{2h_j}M_{j-1}+\frac{(x-x_{j-1})^2}{2h_j}M_j+c_1$$

$$S(x)=\frac{1}{6h_j}\left[(x_j-x)^3M_{j-1}+(x-x_{j-1})^3M_j\right]+c_1x+c_2$$

其中c_1，c_2为积分常数.

将$S(x_{j-1})=y_{j-1}$， $S(x_j)=y_j$代入上式，可确定c_1，c_2.

故

$$S(x)=\frac{1}{6h_j}\left[(x_j-x)^3M_{j-1}+(x-x_{j-1})^3M_j\right]$$
$$+(y_{j-1}-\frac{h_j^2}{6}M_{j-1})\frac{x_j-x}{h_j}+(y_j-\frac{h_j^2}{6}M_j)\frac{x-x_{j-1}}{h_j}$$

上式称M表达式，只需确定M_j，即可确定三次样条插值函数.

下面介绍如何确定M_j.

将M表达式两端对x求导，得

$$S'(x)=\frac{1}{2h_j}\left[-(x_j-x)^2M_{j-1}+(x-x_{j-1})^2M_j\right]$$

$$+\frac{1}{h_j}(y_j-y_{j-1})+\frac{h_j}{6}(M_{j-1}-M_j)$$

令$x=x_j$，得左导数

$$S'(x_j-0)=\frac{h_j}{6}M_{j-1}+\frac{h_j}{3}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}$$

令$x=x_{j-1}$，得右导数

$$S'(x_{j-1}+0)=-\frac{h_j}{3}M_{j-1}-\frac{h_j}{6}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}$$

故

$$S'(x_j+0)=-\frac{h_{j+1}}{3}M_j-\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}$$

因$S(x)$一阶导数连续，即

$$S'(x_j-0)=S'(x_j+0)$$

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1}-\frac{h_j}{3}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}=-\frac{h_{j+1}}{3}M_j-\frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}$$

整理得 $$\frac{h_j}{h_j+h_{j+1}}M_{j-1}+2M_j+\frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}M_{j+1}$$

$$=\frac{6}{h_j+h_{j+1}}\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}\right)$$

记

$$\mu_j=\frac{h_j}{h_j+h_{j+1}} \qquad \lambda_j=\frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}=1-\mu_j$$

$$d_j=\frac{6}{h_j+h_{j+1}}\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}\right)=6f(x_{j-1},x_j,x_{j+1})$$

则得关于M_j的n–1个方程:

$$\boxed{\mu_j M_{j-1}+2M_j+\lambda_j M_{j+1}=d_j} \qquad (j=1,2,\ldots,n-1)$$

对自然边界条件：$M_0=0$，$M_n=0$

对固定边界条件：

$$S'(x_0)=f'(x_0)=y_0',$$
$$S'(x_n)=f'(x_n)=y_n'$$

得 $$S'(x_0+0)=-\frac{h_1}{3}M_0-\frac{h_1}{6}M_1+\frac{y_1-y_0}{h_1}=y_0'$$

$$S'(x_n-0)=\frac{h_n}{6}M_{n-1}+\frac{h_n}{3}M_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}=y_n'$$

或记为

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n &= d_n \end{aligned}$$

其中

$$d_0 = \frac{6}{h_0}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right) \qquad d_n = \frac{6}{h_n}\left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

则求M_i的方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

对于周期边界条件：$y_0=y_n$，$M_0=M_n$

只需确定n个未知量$M_i(i=1,2,\ldots\ldots,n)$即可.

由

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j$$

当$j=n$时，

$$\mu_n M_{n-1} + 2M_n + \lambda_n M_1 = d_n$$

$$(M_{n+1} = M_1, y_{n+1} = y_1, h_{n+1} = h_1)$$

方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

上述方程组是关于$M_j(j=0,1,\ldots,n)$的三对角方程组.

M_j在力学上解释为细梁在x_j截面处的弯矩，称为$S(x)$的矩，故称三弯矩方程组.

该方程组是严格对角占优的三对角方程组，有唯一解，可用追赶法求解.

THE

END