二、Lagrange插值多项式

设有n+1个互异节点$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$，且

$$y_i = f(x_i) \qquad (i=0,1,2\ldots,n)$$

构造$L_n(x)$，使 $L_n(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,2,\ldots,n)$

定义 若n次多项式$l_j(x)$ $(j = 0,1,\ldots,n)$在n+1个节点$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$上满足条件

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \qquad (j,k=0,1,\ldots,n)$$

则称这n+1个n次多项式$l_0(x), l_1(x),\ldots, l_n(x)$为节点$x_0, x_1,\ldots,x_n$上的$n$次**插值基函数**.

由n=1,2时的讨论可得

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

或记为 $(k=0,1,2,\ldots,n)$

$$l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}\qquad(k=0,1,2,\ldots n)$$

故满足插值条件的多项式为

$$L_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots+l_n(x)y_n$$

称**Lagrange插值多项式**.

三、插值余项与误差估计

定义　若在$[a,b]$上用$L_n(x)$近似$f(x)$，则其截断误差

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$$

称**插值多项式的余项**.

定理　设 $f(x)$在$[a,b]$上具有n阶连续导数, 且

$f^{(n+1)}(x)$ 存在,节点$a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$，

$L_n(x)$是满足条件$L_n(x_j)=y_j$　$(j=0,1,2,\ldots,n)$的插值多项式，则对任何$x\in[a,b]$，插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\qquad \xi\in[a,b]$$

证明：　因为　$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$

显然在插值节点$x_i(i = 0,1,\cdots,n)$上

$$R_n(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0 \quad ,i = 0,1,\cdots,n$$

因此$R_n(x)$在$[a,b]$上至少有$n+1$个零点.

设

$$R_n(x) = K(x)\omega_{n+1}(x)$$

其中　$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$，　$K(x)$为待定函数

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = K(x)\omega_{n+1}(x)$$

$$f(x)-L_n(x)-K(x)\omega_{n+1}(x)=0$$

注意t与x的区别

若引入辅助函数$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)$

则有 $\varphi(x)=f(x)-L_n(x)-K(x)\omega_{n+1}(x)=0$

且 $\varphi(x_i)=f(x_i)-L_n(x_i)-K(x)\omega_{n+1}(x_i)$

$$=R_n(x_i)-K(x)\omega_{n+1}(x_i)=0 \quad i=0,1,\cdots,n$$

因此,若令$x\neq x_i$, $\varphi(t)$在区间$[a,b]$上至少有$n+2$个零点,即

$$\varphi(x)=0, \qquad \varphi(x_i)=0 \quad , \; i=0,1,2,\cdots,n$$

由于$L_n(x)$和$\omega_{n+1}(x)$为多项式,因此若$f(x)$可微,

则$\varphi(t)$也可微.

根据Rolle定理, $\varphi'(t)$在区间(a,b)上有至少$n+1$个零点;

再由Rolle定理, $\varphi''(t)$在区间(a,b)上有至少n个零点;

依此类推,

在区间(a,b)内至少有一个点ξ,使得$\varphi(t)$的$n+1$阶导数为零.

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$$

$$\boxed{\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)}$$

由于 $\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-L_n^{(n+1)}(t)-K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(t)$

因此 $\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-L_n^{(n+1)}(\xi)-K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi)$

$$=f^{(n+1)}(\xi)-K(x)\cdot(n+1)! \quad =0$$

$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

所以 $R_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x) \quad =\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

注：余项表达式只有在$f(x)$的高阶导数存在时才能使用，ξ通常不能具体给出，可求出

$$\max_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|=M_{n+1}$$

故$L_n(x)$逼近$f(x)$的截断误差限是

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

说明:

n=1时,

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)$$

$$(\xi\in[x_0,x_1])$$

n=2时,

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$(\xi\in[x_0,x_2])$$

- 当 $f(x)$ 是n次多项式时, $L_n(x)=f(x)$. 即n次多项式的n次插值函数即为该n次多项式本身.

例：若$f(x)=\sqrt{x}$，三个节点为144, 169, 225

试估计用*Lagrange*线性和二次插值做$f(175)$近似值的截断误差.

解： 设$R_1(x)$为*Lagrange*线性插值的余项

$R_2(x)$为二次*Lagrange*插值的余项

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \qquad f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$M_2=\max_{169\le x\le 225}|f''(x)| =|f''(169)| \le 1.14\times 10^{-4}$$

$$M_3=\max_{144\le x\le 225}|f'''(x)| =|f'''(144)| \le 1.51\times 10^{-6}$$

$$N_2 = |\omega_2(x)| = |(175-169)(175-225)| = 300$$

$$N_3 = |\omega_3(x)| = |(175-144)(175-169)(175-225)| = 9300$$

$$|R_1(x)| \le \frac{1}{2!}M_2 N_2 \le \frac{1}{2}\times 1.14\times 10^{-4}\times 300 \le 1.71\times 10^{-2}$$

$$|R_2(x)| \le \frac{1}{3!}M_3 N_3 \le \frac{1}{6}\times 1.51\times 10^{-6}\times 9300 \le 2.35\times 10^{-3}$$

从以上分析可知,在求$\sqrt{175}$时,

用*Lagrange*二次插值比线性插值的误差更小.

四、Lagrange反插值方法

定义（反插值问题）　设函数$y=f(x)$是单调连续函数，且已知$f(x)$在节点x_i $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ 处的函数值$f(x_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$，要求一点x^*，使得$f(x^*)=0$.

已知

x	x_0	x_1	…	x_n
$y=f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	…	$f(x_n)$

又因 $y=f(x)$是单调连续函数，故反函数$x=f^{-1}(y)$存在，并且有

y	$f(x_0)$	$f(x_1)$	…	$f(x_n)$
$x=f^{-1}(y)$	x_0	x_1	…	x_n

可以将问题分为两步：

（1）先求反函数的近似函数（用Lagrange插值）

以 $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1)$，…，$y_n=f(x_n)$ 为插值节点，$x_0, x_1, \ldots, x_n$为其节点处的函数值，应用Lagrange插值公式有

$$L_n(y)=\sum_{k=0}^{n} l_k(y)x_k$$

其中

$$l_k(y)=\frac{(y-y_0)\cdots(y-y_{k-1})(y-y_{k+1})\cdots(y-y_n)}{(y_k-y_0)\cdots(y_k-y_{k-1})(y_k-y_{k+1})\cdots(y_k-y_n)}$$

$$(k=0,1,2,\ldots,n)$$

（2）在上式中令y=0，即得x^*的近似值.

$$x^* \approx L_n(0) = \sum_{k=0}^{n} l_k(0) x_k$$

例 已知单调连续函数$y=f(x)$的函数值如下：

x_i	1.0	1.4	1.8	2.0
$f(x_i)$	–2.0	–0.8	0.4	1.2

试求方程$f(x)=0$在[1,2]内的近似根x^*.

解 由于函数$y=f(x)$单调连续，对它的反函数$x=f^{-1}(y)$进行三次Lagrange插值：

$$L_3(y)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}x_0+\frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}x_1$$

$$+\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}x_2+\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}x_3$$

$$=1.675+0.3271y-0.03125y^2-0.01302y^3$$

所以 $x^*\approx L_3(0)=1.675$

5.3 分段低次插值

高次插值的病态性质：

对于一个确定的区间，如果插值节点之间的距离较小，自然插值节点就增多，如果用一个多项式进行插值，次数就会升高，也就是说要用高次多项式插值.

但是否次数越高，插值多项式的逼近效果越好呢？

20世纪初，Runge就给出了一个等距节点插值多项式不收敛的例子.

Runge反例:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\qquad (-5\le x\le 5)$$

它在[–5,5]上各阶导数均存在，在该区间上取n+1个等距节点：

$$x_k=-5+10\frac{k}{n}\quad (k=0,1,\cdots,n)$$

构造拉格朗日插值多项式为：

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{1+x_j^2}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}$$

令 $x_{n-1/2}=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)$ 则 $x_{n-1/2}=5-\frac{5}{n}$

下表列出了n=2,4,…,20的$L_n(x_{n-1/2})$和$R(x_{n-1/2})$的值：

n	$f(x_{n-1/2})$	$L_n(x_{n-1/2})$	$R(x_{n-1/2})$
2	0.137931	0.759615	–0.621684
4	0.066390	–0.356826	0.423216
6	0.054463	0.607879	–0.553416
8	0.049651	–0.831017	0.880668
10	0.047059	1.578721	–1.531662
12	0.045440	–2.755000	2.800440
14	0.044334	5.332743	–5.288409
16	0.043530	–10.173867	10.217397
18	0.042920	20.123671	–20.080751
20	0.042440	–39.952449	39.994889

从表中可以看出，随着n的增加，$R(x_{n-1/2})$的绝对值几乎成倍地增加，这说明当n—>∞时$L_n(x)$在 [–5,5]上不收敛.

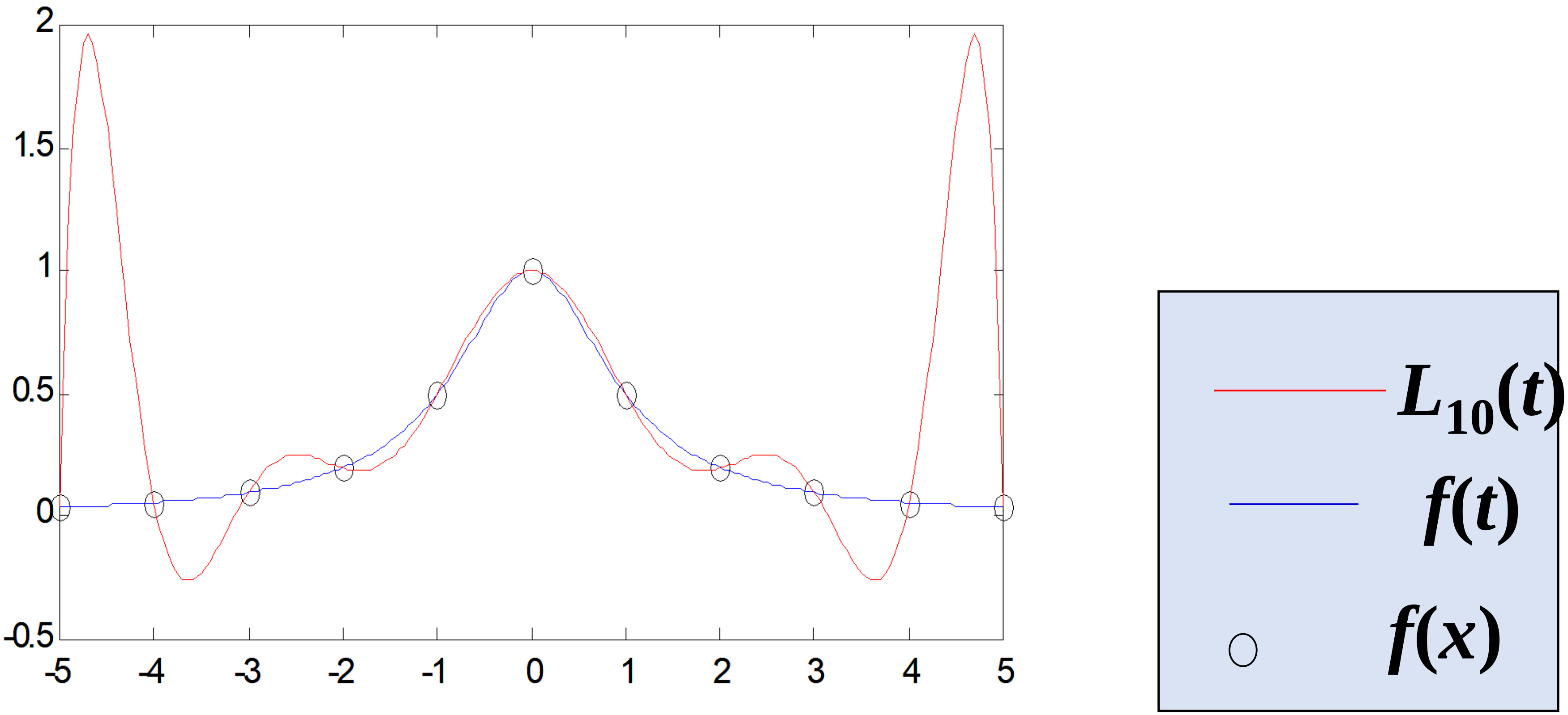
Runge证明了，存在一个常数$c\approx3.63$，使得当$|x|\le c$时，$\lim(L_n(x))=f(x)$ (n—>∞)；而当 $|x|>c$时，$L_n(x)$发散.

下图给出当n=10时，$y=L_{10}(x)$及$f(x)=1/(1+x^2)$在[–5,5]上的图形.

取$x_k = -5+k$ 计算: $f(x_k)$ $(k=0,1,\ldots,10)$

构造$L_{10}(x)$.

取:$t_k = -5+0.05k$ $(k=0,1,\ldots,200)$,计算: $L_{10}(t_k)$



一、分段线性Lagrange插值

1. 分段线性插值的构造

设插值节点为x_i，函数值为y_i，$i=0,1,2,\ldots\ldots,n$

$h_i=x_{i+1}-x_i$，$i=0,1,2,\ldots\ldots,n-1$,

任取两个相邻的节点x_k，x_{k+1}，形成一个插值区间$[x_k, x_{k+1}]$,

构造Lagrange线性插值

$$L_1^{(k)}(x)=y_k l_k(x)+y_{k+1} l_{k+1}(x) \qquad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

$$=y_k\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+y_{k+1}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

$$L_1(x)=\begin{cases} L_1^{(0)}(x) & x_0\le x<x_1 \\ L_1^{(1)}(x) & x_1\le x<x_2 \\ \vdots & \vdots \\ L_1^{(n-1)}(x) & x_{n-1}\le x\le x_n \end{cases}$$

显然 $L_1(x_i)=y_i$ $\quad i=0,1,2,\ldots,n$

我们称由上式构成的插值多项式$L_1(x)$为**分段线性 Lagrange插值多项式**.

设$x = x^*$为插值点

若$x_k \le x^* \le x_{k+1}$

则 $y^* = L_1(x^*) \quad = L_1^{(k)}(x^*)$

内插

$$= y_k \frac{x^* - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x^* - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

若$x^* \le x_0$

外插

取 $y^* = L_1(x^*) \quad = L_1^{(0)}(x^*) \quad = y_0 \frac{x^* - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x^* - x_0}{x_1 - x_0}$

若$x^* \ge x_n$

外插

取 $y^* = L_1(x^*) = L_1^{(n-1)}(x^*) = y_{n-1} \frac{x^* - x_n}{x_{n-1} - x_n} + y_n \frac{x^* - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

分段线性插值$y=L_1(x)$的图象

实际上是连接点(x_k, y_k),

$i=0,1,\cdots,n$的一条折线

故也称**折线插值**，如右图：

但曲线的光滑性较差，且在节点处有尖点.

如果增加节点的数量，减小步长，会改善插值效果.

因此，若$f(x)$在$[a,b]$上连续

则 $\lim\limits_{h\to 0} L_1(x) = f(x)$