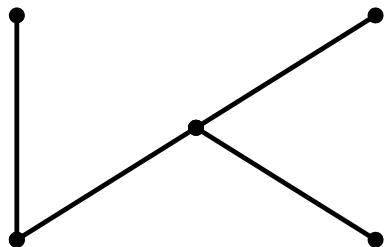


# 第三章 图的连通度

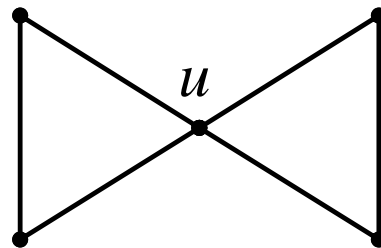
王 博

数学科学学院

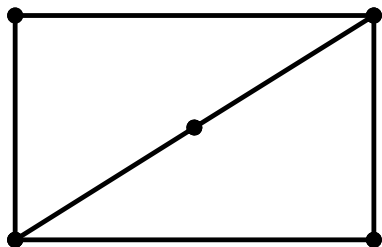
考察：



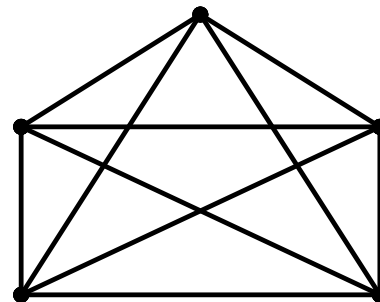
$G_1$ : 删去任意一条边后便不连通



$G_2$ : 删去任意一条边后仍连通，  
但删去点 $u$ 后便不连通；



$G_3$



$G_4$

$G_3$ 和 $G_4$ 删去任意一条边或任意一个点后仍连通，

但从直观上看 $G_4$ 的连通程度比 $G_3$ 高。

那么如何来刻画一个图的连通程度呢？

# 研究图的连通性的意义

研究图的连通性，主要研究图的连通程度的刻画，其意义是：

图论意义：图的连通程度的高低，是图的结构性质的重要表征，图的许多性质都与其相关，例如：连通图中任意两点间不相交路的条数就与图的连通程度有关。

实际意义：图的连通程度的高低，对应于通信网络“可靠性程度”的高低。

网络可靠性，是指网络运作的好坏程度，即指如计算机网络、通信网络等对某个组成部分崩溃的容忍程度。

## 3.1 割边、割点和块

## 3.2 连通度

## 3.3 应用

## § 3.1 割边、割点和块

### 割边及其性质

**定义1** 设 $e$ 是图 $G$ 的一条边，若 $\omega(G-e) > \omega(G)$ ，则称 $e$ 为 $G$ 的割边。 $\omega$ 是连通分支数

**例 (1)** 若 $G$ 连通，则割边是指删去后使 $G$ 不连通的边，故非平凡树的每条边均为割边。

(2) 图3-2中，边 $e_1$ 和 $e_2$ 为割边，而其余边均不为割边。

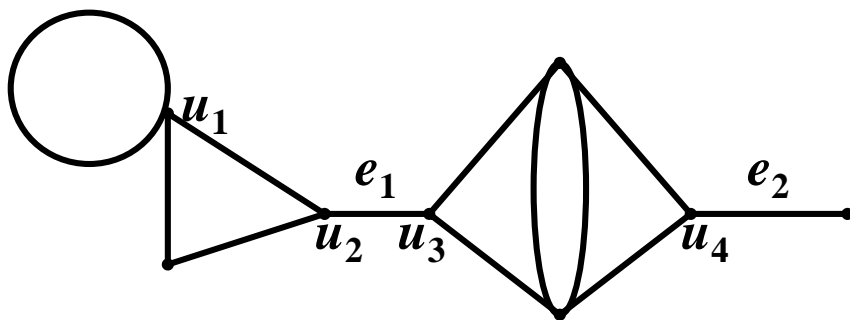


图3-2

**定理1**  $e$ 是图 $G$ 的割边当且仅当 $e$ 不在 $G$ 的任何圈中。

**推论** 设 $e$ 是连通图 $G$ 的任意一条边，若 $e$ 含在 $G$ 的某圈中，则 $G-e$ 仍连通。



**定理1**  $e$ 是图 $G$ 的割边当且仅当 $e$ 不在 $G$ 的任何圈中。

**证明** 我们不妨就假定 $G$ 连通。因为定理的结论若在 $G$ 的含 $e$ 的连通分支中成立，则必在 $G$ 中成立。

**必要性** [反证法]假设 $e$ 含在圈 $C$ 中。

任取 $G-e$ 中两个不同点 $x$ 和 $y$ ，下证 $G-e$ 中存在一条 $(x, y)$ 路。

因 $G$ 连通，故 $G$ 中存在 $(x, y)$ 路 $\Gamma$ 。

若 $\Gamma$ 不含 $e$ ，则 $\Gamma$ 也是 $G-e$ 中一条 $(x, y)$ 路；

若 $\Gamma$ 含 $e$ ，令 $P = C - e$ ， $e = uv$ ，可知 $P$ 是 $G-e$ 中一条 $(u, v)$ 路。用 $P$ 替换 $e$ 后也可得到 $G-e$ 中一条 $(x, y)$ 路。

即证  $G-e$ 连通，这与 $e$ 是割边矛盾，则 $e$ 不在 $G$ 的任何圈中。

**定理1**  $e$ 是图 $G$ 的割边当且仅当 $e$ 不在 $G$ 的任何圈中。

**证明** 因定理的结论若在 $G$ 的含 $e$ 的连通分支中成立，则必在 $G$ 中成立，所以我们不妨就假定 $G$ 连通。

**充分性** 设 $e = uv$ ，若 $e$ 不是 $G$ 的割边，则 $G-e$ 仍连通，从而在 $G-e$ 中存在 $(u, v)$  路 $P$ ，这样 $P+e$ 便是 $G$ 中含 $e$ 的圈,这与假设“ $e$ 不在 $G$ 的任何圈中矛盾”。所以 $e$ 是 $G$ 的割边

## § 3.1 割边、割点和块

### 割点及其性质

**定义2** 图 $G = (V, E)$  的顶点 $v$  称为**割点**, 如果 $E$  可划分为两个非空子集 $E_1$  和 $E_2$ , 使得 $G[E_1]$  和 $G[E_2]$  恰有一个公共顶点 $v$ 。

**例** 图3-2中,点 $u_1, u_2, u_3$ 和 $u_4$ 是割点,其余点均不为割点。

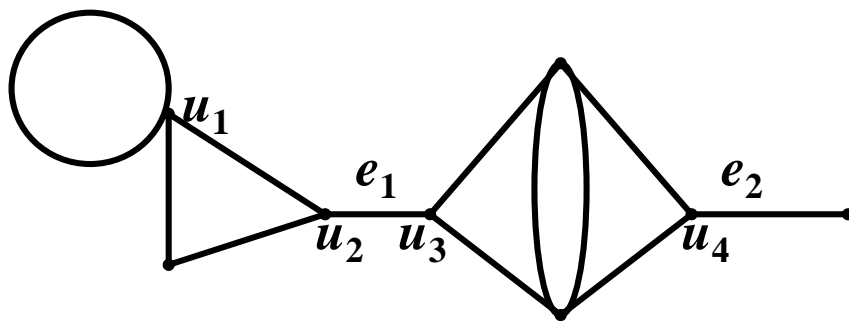


图3-2

**定义2** 图 $G = (V, E)$  的顶点 $v$  称为**割点**, 如果  $E$  可划分为两个非空子集  $E_1$  和  $E_2$ , 使得 $G[E_1]$  和  $G[E_2]$  恰有一个公共顶点 $v$ 。

说明: (1) 若 $\omega(G-v) > \omega(G)$ , 则  $v$  必为 $G$  的割点;

(2) 若 $G$ 无环且非平凡, 则 $v$ 是 $G$  的割点当且仅当
$$\omega(G-v) > \omega(G)$$

(3) 若无环图 $G$ 连通, 则割点是指删去该点使 $G$ 不连通的点。











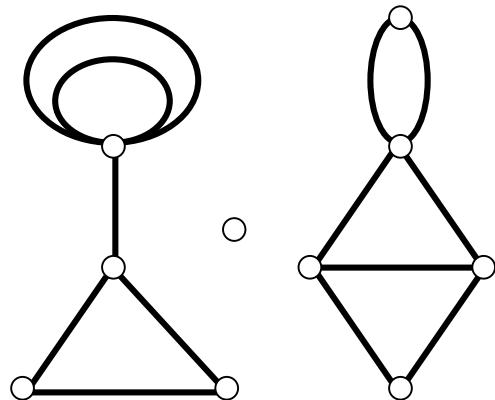
## § 3.1 割边、割点和块

块

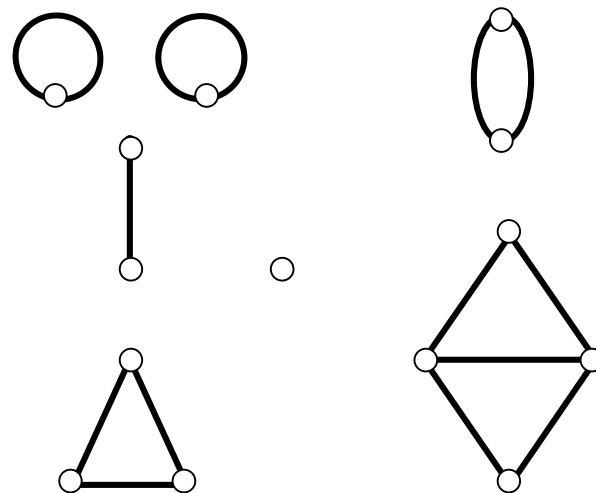
**定义3** 没有割点的连通图称为块。

若图 $G$ 的子图 $B$ 是块，且 $G$ 中没有真包含 $B$ 的子图也是块，则称 $B$ 是 $G$ 的块。

例 图 $G$ 如图 (a) 所示,  $G$ 的所有块如图 (b) 所示。



(a)



(b)

- 若 $e$ 是图 $G$ 的割边或 $e$ 是一个环, 则 $G[\{e\}]$ 是 $G$ 的块;
- $G$ 的仅含一个点的块或是孤立点,或是环导出的子图;
- 至少两个点的块无环, 至少三个点的块无割边。

**定理4** 设图 $G$ 的阶至少为3，则 $G$ 是块当且仅当 $G$ 无环并且任意两点都位于同一个圈上。

**证明 充分性** 此时 $G$ 显然连通。若 $G$ 不是块，则 $G$ 中存在割点 $v$ ，于是由定理3， $V(G-v)$ 可划分为两个非空顶点子集 $V_1$ 与 $V_2$ ，使 $x \in V_1$ ， $y \in V_2$ ，并且点 $v$ 在每一条 $(x, y)$ 路上。这表明 $x$ 与 $y$ 不可能位于同一个圈上，这与假设矛盾，所以 $G$ 是块。





**推论** 设 $G$ 的阶至少为3，则 $G$ 是块当且仅当 $G$ 无孤立点且任意两条边都在同一个圈上。

**证明 (充分性)** 设 $G$ 无孤立点且任意两条边都在同一个圈上。此时 $G$ 无环且任意两个点也在同一个圈上，由定理4知 $G$ 是块。



**推论** 设 $G$ 的阶至少为3，则 $G$ 是块当且仅当 $G$ 无孤立点且任意两条边都在同一个圈上。

**证明** (必要性) 设 $G$ 是块。任取 $G$ 中两条边 $e_1$ 和 $e_2$ 。在 $e_1$ 和 $e_2$ 的边上各插入一个新的顶点 $v_1$ 和 $v_2$ ，使 $e_1$ 和 $e_2$ 均成为两条边，记这样得到的图为 $G'$ 。

显然 $G'$ 是阶大于4的块，由定理4， $G'$ 中 $v_1$ 和 $v_2$ 位于同一个圈上，于是在 $G$ 中 $e_1$ 和 $e_2$ 位于同一个圈上。











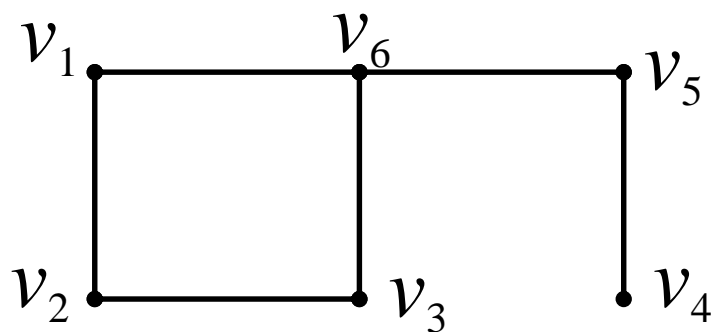
## § 3.2 连通度

### 概 念

本节及后几节所讨论的图均指无环图

**定义1** 给定图 $G$ ,  $V'$ 是  $V(G)$  的顶点子集,  
若 $G - V'$ 不连通, 则称  $V'$ 为 $G$  的顶点割。  
含有 $k$  个顶点的顶点割称为 $G$  的  $k$ -顶点割。  
 $G$ 中点数最少的顶点割称为最小点割。

**例1** 设图 $G$  如下图所示.





## 说明

1. 若 $G$ 是非平凡连通图，则 $v$ 是 $G$ 的割点，当且仅当  
 $\{v\}$ 是 $G$ 的  
1-顶点割。
2. 完全图没有顶点割；
3. 实际上也只有以完全图为生成子图的图没有顶点割。













## § 3.2 连通度

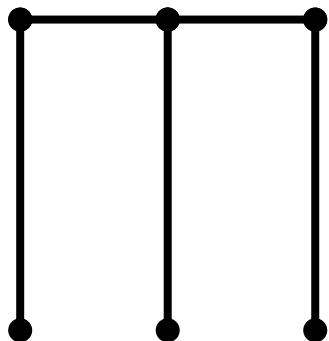
# 性 质



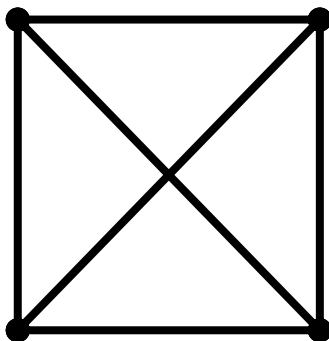
对图 $G$ 中任意的点 $x$ 和边 $e$ , 有

$$\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - x) \quad \lambda(G) - 1 \leq \lambda(G - e) \leq \lambda(G)$$

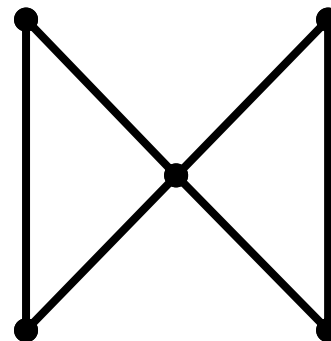
观察：两种连通度  $\kappa(G)$  和  $\lambda(G)$  有什么关系？



$G_1$



$G_2$



$G_3$







定理7 设 $G$ 是具有  $m$ 条边的 $n$ 阶连通图，则

$$\kappa \leq \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$$

证明 由  $2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq n\delta$ ，可得

$$\delta \leq 2m/n$$

由定理6， $\kappa \leq \delta$ ，再考虑到 $\kappa$ 是一个整数，所以

$$\kappa \leq \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\Delta(H) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$\delta(G) \geq \frac{n+k-2}{2}$$

$$\frac{n+k-2}{2}$$

$$\frac{n-k}{2}$$

$$\delta(H) \geq \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor$$



$$\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\lambda(G) = \delta(G)$$

$$P \leq \lambda(G)$$

$$2|E(G_1)| \geq P\delta(G) - \lambda(G)$$

$$2|E(G_1)| \geq P\delta(G) - \lambda(G) > \lambda(G)(P-1) \geq P(P-1) = 2|E(K_P)|$$

$$d_{G_1}(x) = d_G(x) \geq \delta(G)$$

$$|V(G_1)| \geq \delta(G) + 1$$

$$|V(G_2)| \geq \delta(G) + 1$$

$$\delta(G) < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

## § 3.2 连通度

# 敏格尔定理

有关图的连通性的一个基本的也是十分重要的结果是由敏格尔（Menger）于1927年所得。该定理首先揭示了图的连通度与顶点间的不相交路的数目之间的关系。

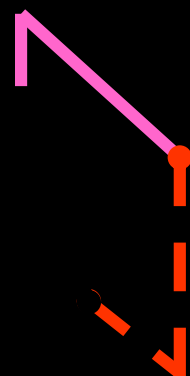
敏格尔(1902---1985) 奥地利杰出数学家，早年显示出数学物理天赋，1920年入维也纳大学学习物理，次年，由于参加德国物理学家Hans Hahn的“曲线概念的新意”讲座，而把兴趣转向了数学。因为Hans提到当时没有满意的曲线概念定义，包括大数学家康托、约当，豪斯道夫等都尝试过，没有成功。而且，认为不可能彻底解决。

但是，尽管作为几乎没有数学背景的本科生，通过自己的努力，敏格尔还是解决了该问题。由此，他就转向曲线和维数理论的研究。

敏格尔本科期间，身体很差，父母双亡。但在1924年在Hahn指导下完成了他的研究工作。1927年做了维也纳大学几何学首席教授，同年，发表了“ $n$ —弧定理”，即敏格尔定理。

敏格尔被认为是20世纪最杰出数学家之一。



















## § 3.3 应用

一个通讯网络可模型化为一个图，图中的点代表通讯站，边代表通讯线。这样，图的点（边）连通度对应最少的通讯站（线）数，它们的失灵会导致系统的通讯中断。即图的连通度对应系统的可靠性。

问题: 如何构造出在给定可靠性的条件下使成本尽量低的系统？

问题的图论提法： 对一个赋权图 $G$ ，试确定 $G$ 的一个具有最小权的 $k$  连通生成子图。

$$k \leq \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$$



$$m \geq \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$$

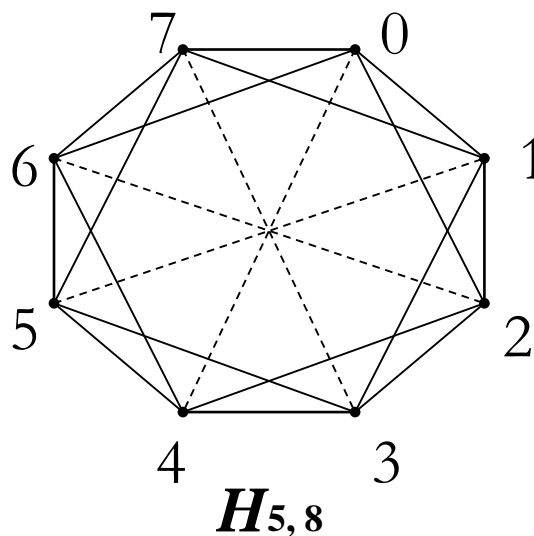
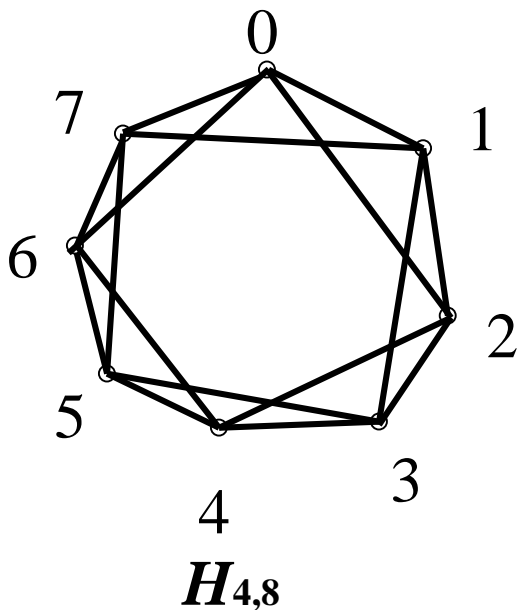
$$\left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$$

$H_{k,n}$ 的构造:

设 $V(H_{k,n}) = \{0,1,2,\dots, n-1\}$

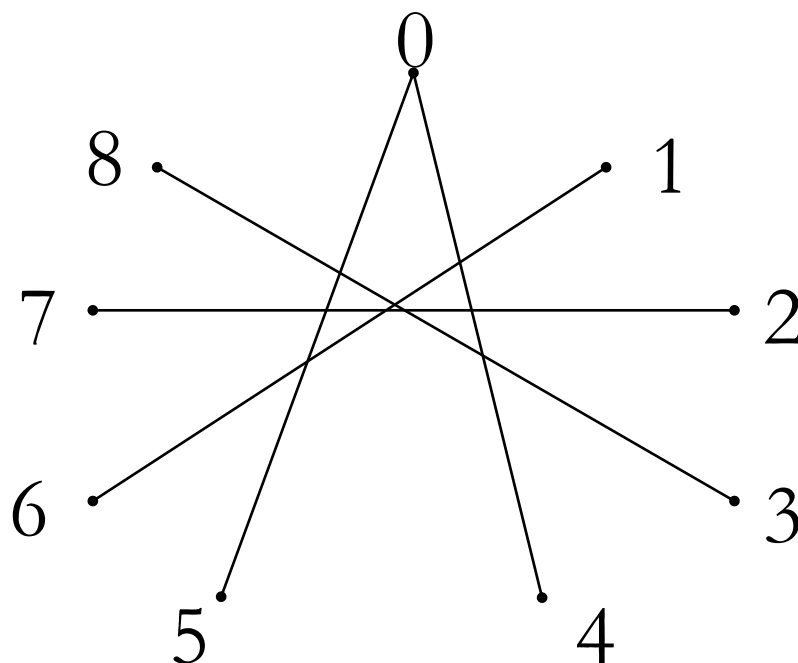
**情况1.**  $k$ 为偶。设 $k=2r$ 。此时 $0$ 与 $1,2,\dots, r$ 连线； $1$ 与 $2,3,\dots, r+1$ 连线；...； $n-1$ 与 $0,1,\dots, r-1$ 连线。如下图中的 $H_{4,8}$ 所示。

**情况2.**  $k=2r+1$ ， $n$ 为偶。先作 $H_{2r,n}$ ，再在 $i$ 与 $(i+n/2)$ 间添加边 $i(i+n/2)$  ( $1 \leq i \leq n/2$ )。如下图中的 $H_{5,8}$ 所示。



情况3.  $k = 2r + 1$ ,  $n$ 为奇。先作 $H_{2r,n}$ , 再在0和 $\frac{n-1}{2}$ ,  
0和 $\frac{n+1}{2}$ , 以及 $i$ 和 $i + \frac{n+1}{2}$  ( $1 \leq i \leq (n-1)/2$ ) 添加边。

如下图的 $H_{5,9}$  (图中只画了添加的边)。



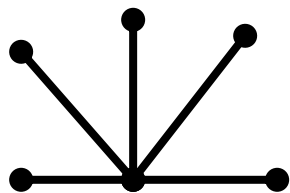
定理 由上述方法构造的 $H_{k,n}$ 是 $k$ 连通的。(证明略)



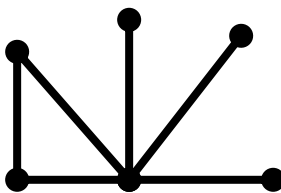
# 描述连通性的其它参数简介

## 1、图的坚韧度

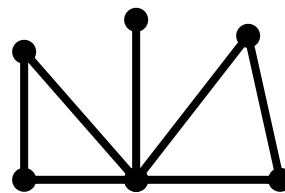
点和边连通度对图的连通性刻画存在明显不足，例如，我们观察如下3个图：



$G_1$



$G_2$



$G_3$

容易知道： $\kappa(G_1) = \kappa(G_2) = \kappa(G_3) = 1$

$$\lambda(G_1) = \lambda(G_2) = \lambda(G_3) = 1$$

于是，从点、边连通度角度不能刻画上面3个图的连通性程度的区别。很明显： $G_3$ 连通性高于 $G_2$ ,  $G_2$ 高于 $G_1$ 。

基于此，1996年，许进在电子学报发表文章，论述了用坚韧度来刻画图的连通程度比用连通度更精确。

定义1 用 $C(G)$ 表示图 $G$ 的全体点割集构成的集合，非平凡非完全图的坚韧度，记作 $\tau(G)$ ，定义为：

$$\tau(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{\omega(G-S)} \mid S \in C(G) \right\}$$

定义2 设 $G$ 是一个非完全 $n$  ( $n \geq 3$ )阶连通图， $S^* \in C(G)$ ，若 $S^*$ 满足：

$$\tau(G) = \frac{|S^*|}{\omega(G-S^*)}$$

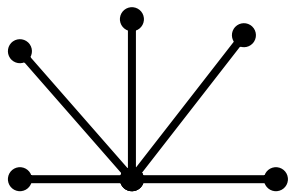
称 $S^*$ 是 $G$ 的坚韧集。

容易知道：坚韧集是那些顶点数尽可能少，但产生的分支数尽可能多的点割集，同时，坚韧集不唯一。

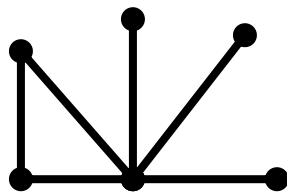
$$\tau(G) = \frac{|S^*|}{\omega(G - S^*)}$$

坚韧度与G的连通性有如何关系？

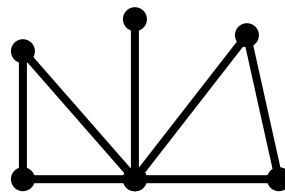
对于 $G_1$ 与 $G_2$ , 如果  $|S^*_1|=|S^*_2|$ , 但  $\omega(G_2 - S^*_2) < \omega(G_1 - S^*_1)$ , 那么  $\tau(G_2) > \tau(G_1)$ , 这说明, 坚韧度大的图连通性好。



$G_1$



$G_2$



$G_3$

容易算出:  $\tau(G_1) = 0.2$ ,  $\tau(G_2) = 0.25$ ,  $\tau(G_3) = 0.33$ ,  
于是 $G_3$ 比 $G_2$ 的连通性好,  $G_2$ 比 $G_1$ 的连通性好。

许进通过上面分析得出：

设 $G_1$ 与 $G_2$ 是两个非平凡非完全的连通图，若 $\tau(G_1) > \tau(G_2)$ ，则 $G_1$ 的连通性比 $G_2$ 好。因此，坚韧度可以作为网络容错性参数的度量。

许进还对坚韧度的界、取值范围以及坚韧度的计算问题作了一些探索。

仿照点坚韧度，可以定义边坚韧度：

$$\tau_1(G) = \min \left\{ \frac{|X|}{\omega(G - X)} \mid X \in CE(G) \right\}$$

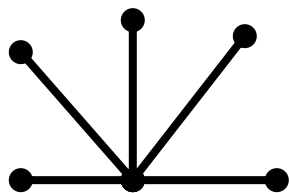
坚韧度的概念是图论学家Chvatal提出来研究图的哈密尔顿问题的一个图参数。

## 2、图的核度

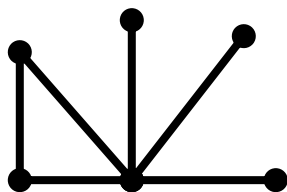
定义3 设 $G$ 是一个非平凡连通图，则称：

$$h(G) = \max \{ \omega(G - S) - |S| \mid S \in C(G) \}$$

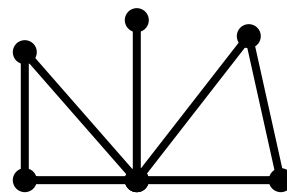
为图的核度。若 $S^*$ 满足： $h(G) = \omega(G - S^*) - |S^*|$  称 $S^*$ 为图的核。



$G_1$



$G_2$



$G_3$

容易算出： $h(G_1)=4$  ,  $h(G_2)=3$  ,  $h(G_3)=2$

一般地，核度越小，连通程度越高。

图的核度的界如何？特殊图的核度问题，核度的计算问题等都是值得研究的问题。

我国欧阳克智教授等把核度称为图的断裂度，国外图论学者称它为图的离散数。许进把它引进系统科学中，称它为系统的核度。由此，他建立了系统的核度理论而受到系统科学界的高度重视。

如何准确刻画图的连通性程度，现在还是一个有待进一步研究的问题。

关于这方面的研究文献很多，有兴趣可以查阅并作一些研究。

谢 谢！