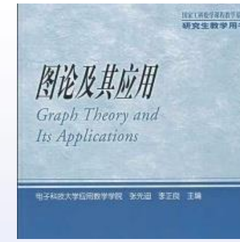
图论及其应用

任课教师：杨春

Email: yc517922@126.com

数学科学学院

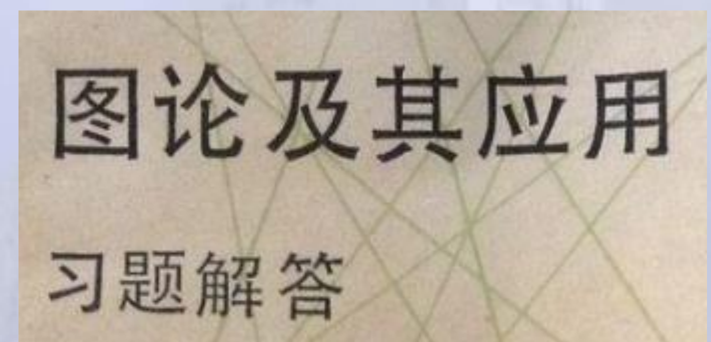
教材《图论及其应用》

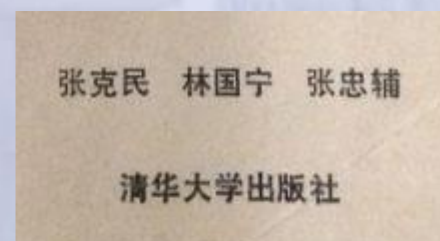


高等教育出版社

主编　张先迪、李正良

参考教材　美，帮迪《图论及其应用》





1、课程历史

在研究生中开设《图论及其应用》课程近30年。05年张先迪、李正良教授主持编写《图论及其应用》由高等教育出版社出版。2019年，课程被研究生院确定为第一批精品课程建设资助。

2、选课对象

面向全校硕士(主体）或博士选修，专业不限。每年近2500人选课。

3、课程内容

内容涉及教材前九章，它们是：图的基本概念，树，图的连通性，欧拉图与哈密尔顿图，匹配，平面图，图的着色，拉姆齐问题和有向图。

4、成绩评定

闭卷考试：卷面成绩占80%，平时成绩20%【平时成绩包括作业与考勤】。

5、课程组教师情况

目前课程组有教师8名：杨春、吕华众、王也洲、王博、张晓军、夏红、吴永科、邓志亮。

课程组老师教学经验丰富，全部属于“教学科研并重型” 教师。

课程组老师的希望是：争取早日把《图论及其应用》打造成为研究生喜爱的“金课”。

6、课程在线学习形式

主要形式：腾讯课堂直播+QQ分享屏幕(答疑讨论+QQ作业评讲+其它)；

预案：腾讯课堂(录播)+ QQ分享屏幕(答疑讨论+QQ作业评讲+其它).

要求：(1) 严格签到(助教统计记录)；(2) 直播或录播过程中积极互动；(3) 有问题及时提出；(4) 遵守课堂纪律；(5)不旷课，不早退。

“停课不停学” “在线学习，保证质量”

第一章 图的基本概念

讲授内容

一、图与简单图

二、子图与图运算

三、路与图的连通性

四、最短路及其算法

五、图的代数表示及其特征

六、极图

讲授时间：10学时

本次课内容

一、图论简介

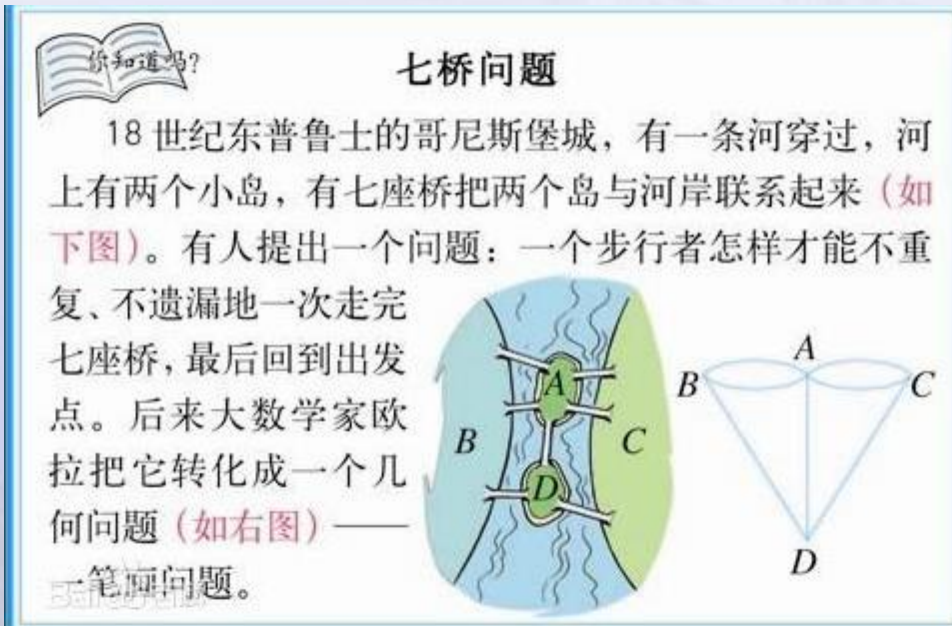
二、图的定义及其相关概念

三、图的同构

一、图论简介

(一)、发展历史

1、起源——哥尼斯堡七桥问题(1736年解决)


你知道吗？

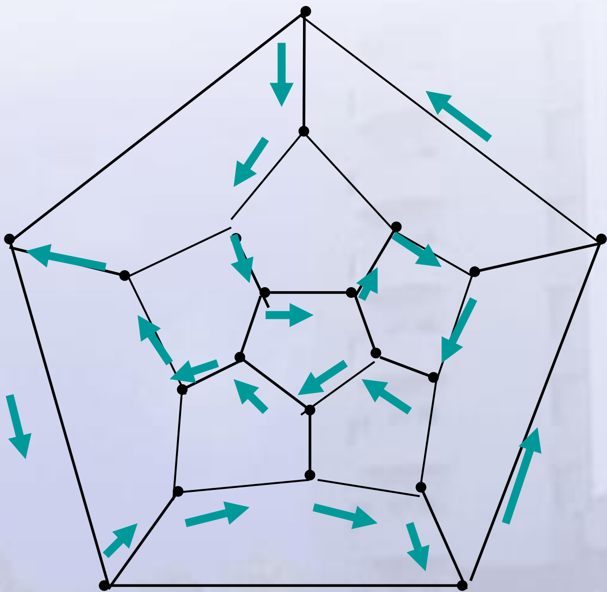
七桥问题

18 世纪东普鲁士的哥尼斯堡城，有一条河穿过，河上有两个小岛，有七座桥把两个岛与河岸联系起来（如下图）。有人提出一个问题：一个步行者怎样才能不重复、不遗漏地一次走完七座桥，最后回到出发点。后来大数学家欧拉把它转化成一个几何问题（如右图）——一笔画问题。

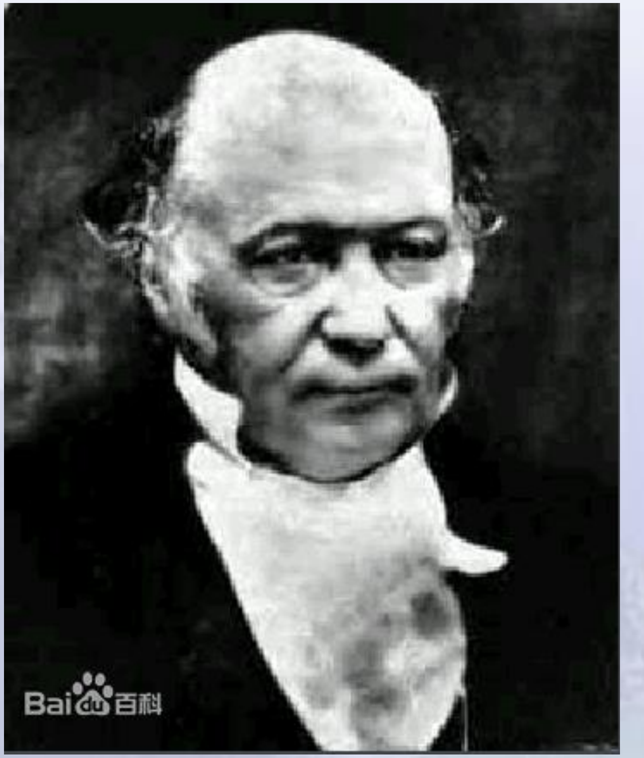
测试1：A 能按要求完成行走；B 不能按要求完成行走.

2、缓慢发展——十九世纪中叶到二十世纪中叶

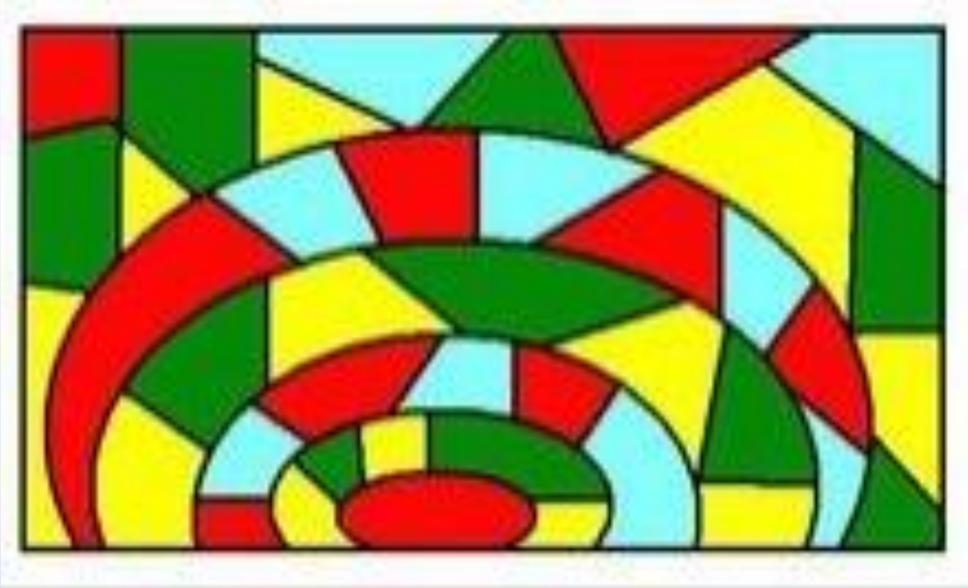
(1)周游世界问题(哈密尔顿问题,1857年)



十二面体



(2)四色问题(地图染色问题,1852年，格斯里)



还有所谓的克希荷夫生成树问题，欧拉多面体问题，图的平面性问题以及一些组合优化和运筹学等问题。

(3)第一本图论著作(哥尼【匈牙利】，1936年出版)

哥尼在这本书里，总结了当时所有的图论成果。书名叫《有限图与无限图理论).

3、快速发展——二十世纪中叶至今

经过最近几十年的发展，形成了一门独立学科。其典型分支包括：结构图论，代数图论，拓扑图论，网络图论，随机图论和极值图论。

(二)、图论所属学科

图论属于应用数学的一个分支，是研究“点”与“线”组成的“图形”问题的一门科学。

(三)、图论的应用

图论作为应用数学的一个分支，具有广泛的应用性。

图论的应用已经涵盖了人类学、计算机科学、化学、环境保护、非线性物理、心理学、社会学、交通管理、电信、网络科学以及数学本身等。

据我所知，已经有许多图论应用专著，如：

1、网络图论及其应用 科学出版社 陈树柏主编 科学出版社 1982.

2、图论在化学中的应用 科学出版社 ［罗］A.T.巴拉班编

科学出版社 1983.

3、图论及其在计算机科学中的应用 中国矿业大学出版社 周强 1995.

4、图论及其在图像处理中的应用 清华大学出版社 李艳灵编 2014.

两件有趣的事情【我记忆中的事】：

1、陈景润谈哥德巴赫猜想；

2、杨振宁80年代做过的一件事。

注：1、由于图论应用广泛，所以，我们开设的这门课程几乎适合我校全体研究生选修(硕士或博士)；

2、近年来，该门课程选修人数稳定在2500以上，受到了学生的喜爱和良好评价；

3、介绍图论的一些基本概念，基本理论以及具有广泛应用背景的经典图论算法，讲授60学时。

测试2： A 重点关注图论理论； B 重点关注图论应用。

托特1969年写了一首反映图论的诗：

哥尼斯堡的一些市民，
漫步在河畔。
在普雷格尔河旁，
有七座桥相伴。
“Euler，我们一起散步吧！”
那些市民在召唤。
“我们在这七座桥上漫步，
经过每座桥仅一次。”
“你们做不到”，Euler大声吼道。

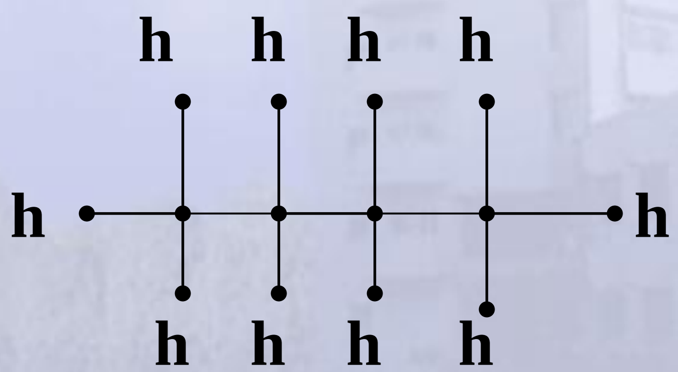
“结果就是这样，
岛屿作为顶点，
四个点有奇数度”。
从哥尼斯堡到哥尼的书，
图论的传说正是如此，
而且越来越精彩，
绽放在密歇根和耶鲁。

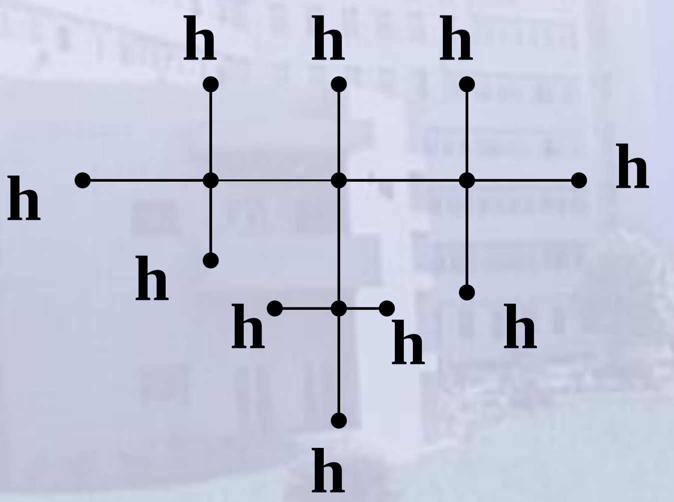
二、图的定义及其相关概念

(一)、什么是图?

1、C_4H_{10}的两种同分异构表示

用点抽象分子式中的碳原子和氢原子，用边抽象原子间的化学键。19世纪化学家凯莱用下面的图表示C_4H_{10}的两种同分异构：

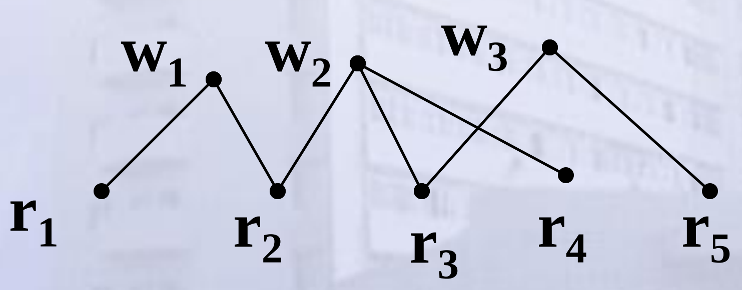




2、仓库和零售店之间的关系表示

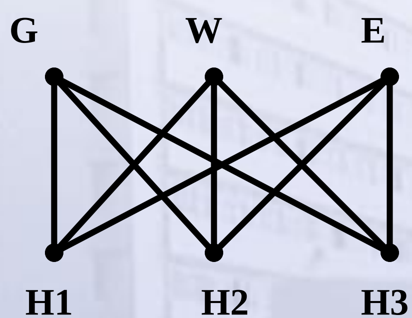
令$V=\{w_1,w_2,w_3,r_1,r_2,r_3,r_4,r_5\}$代表3个仓库和5个零售点；

$E=\{w_1r_1, w_1r_2, w_2r_2, w_2r_3, w_2r_4, w_3r_3, w_3r_5\}$代表每个仓库和每个零售店间的关联。则这种关系可以表示为：



3、3间房子和3种设施

要求把3种公用设施(煤气，水和电)分别用煤气管道、水管和电线连接到3间房子里。请用一种简单方式表示3间房子和3种设施的关系。



总结：1、上面问题的表示图都涉及到两个集合：其一是“点集合”，其二是“连线集合”；

2、在现实中，“点集合”可以代表“事物或对象的全体”，“连线集合”可以代表“事物或对象之间的某种联系或相互作用”。

在图论中，用来描述事物或对象之间联系或相互作用状态的一个概念，我们把它称为“图”。

定义1：一个图是一个序偶<V,E>，记为G=(V,E),其中：

(1) V是一个有限的非空集合，称为顶点集合,其元素称为顶点或点。用|V|表示顶点数；

(2) E是由V中的点组成的无序对构成的集合，称为边集，其元素称为边，且同一点对在E中可以重复出现多次。用|E|表示边数。

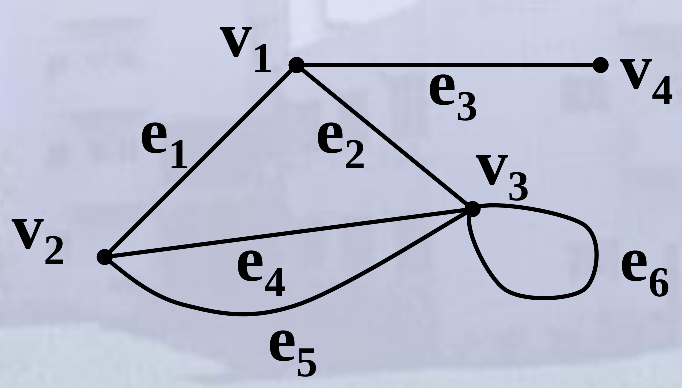
图可以用图形表示：V中的元素用平面上一个黑点表示，E中的元素用一条连接V中相应点对的任意形状的线表示。

例1、设图G＝<V,E>。这里V＝{v_1,v_2,v_3,v_4}，

E＝{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6}，

$e_1=(v_1, v_2)$，$e_2=(v_1, v_3)$，$e_3=(v_1, v_4)$，

$e_4=(v_2, v_3)$，$e_5=(v_3, v_2)$，$e_6=(v_3, v_3)$。



（二）、图的相关概念

1、有限图：顶点集和边集都有限的图称为有限图。

注：无限图也是大量存在的！如正整数集合上的“整除关系”图就是一个无限图。但我们课程只涉及“有限图”。

2、平凡图与空图：只有一个顶点的图称为平凡图；只有点没有边的图称为空图。

G_1：平凡图

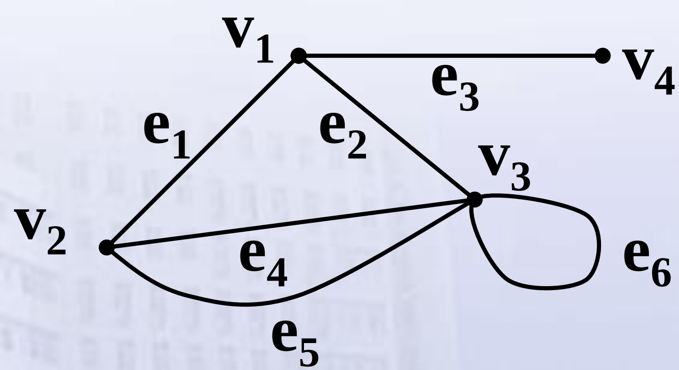
G_2：空图

3、n阶图：顶点数为n的图，称为n阶图。

4、(n, m) 图：顶点数为n的图，边数为m的图称为(n, m) 图。

G_1：5阶图

G_2：(4,5)图

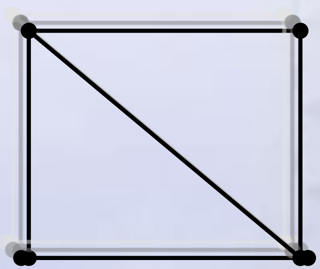


G_3：多重图

5、边的重数：连接两个相同顶点的边的条数称为边的重数；重数大于1的边称为重边。

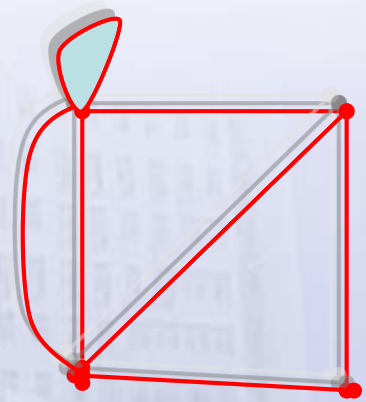
6、环：端点重合为一点的边称为环。

7、简单图：无环无重边的图称为简单图；其余的图称为复合图。



G_1:简单图

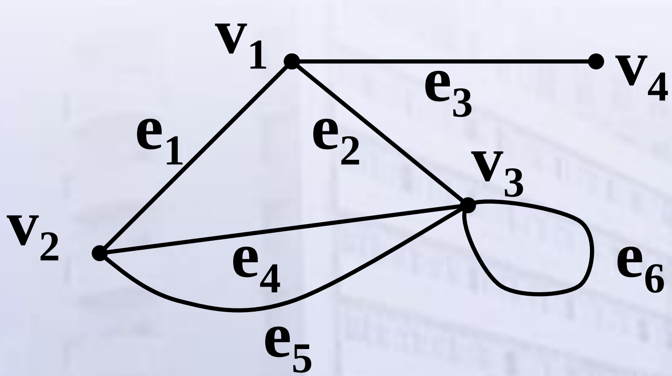
G_2:非简单图



G_3:非简单图

测试3：从研究的角度看，应当重点关注：A 简单图；B 非简单图。

8、顶点u与v相邻接：顶点u与v间有边相连接(u adjv)；其中u与v称为该边的两个端点。



注：规定一个顶点与自身是邻接的。

9、顶点u与边e相关联：顶点u是边e的端点。

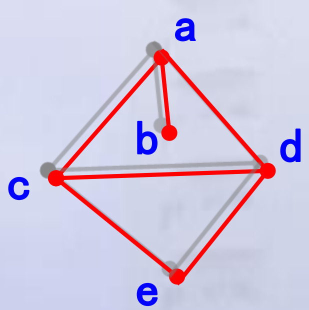
10、边e_1与边e_2相邻接：边e_1与边e_2有公共端点。

三、图的同构

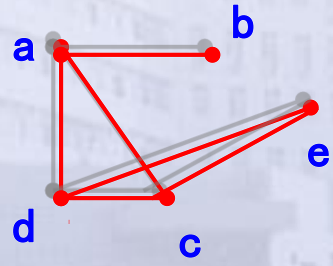
(一)、什么是图的同构问题?

1、已知V(G)= ｛a,b,c,d,e｝,E(G)= ｛ab, ac, ad, cd, ce, de｝.

请同学们迅速画出其图形。



G1



G2

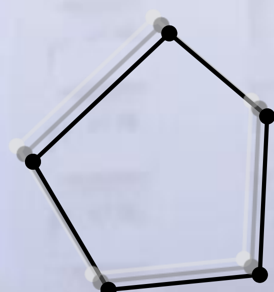
结论：(1) 同一个图； (2) 形式不同.

同一个图意味着：顶点数相同；边数相同；结构相同.

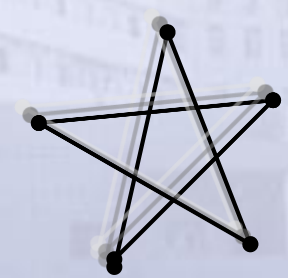
基于这样的考虑，图论中提出了图的同构概念！

2、图的同构问题是图论中的一个典型的、历史悠久的问题之一。它的含义是：如果顶点数相同、边数相同的两个图，其结构形式也相同，那么这两个图被称为同构。

再看一个典型例子：



G_1:五边形



G_2:五角星

(二)、如何定义图的同构问题？

根据图同构含义，借助数学上映射概念，可以给出图同构精确的数学定义：

定义2：设有两个图$G_1=(V_1,E_1)$和$G_2=(V_2,E_2)$,若在其顶点集合间存在双射，使得边之间存在如下关系：$u_1,v_1 \in V_1$, $u_2,v_2 \in V_2$，设$u_1 \leftrightarrow u_2$, $v_1 \leftrightarrow v_2$,; $u_1v_1 \in E_1$当且仅当$u_2v_2 \in E_2$, 且u_1v_1与u_2v_2的重数相同。称G_1与G_2同构，记为：

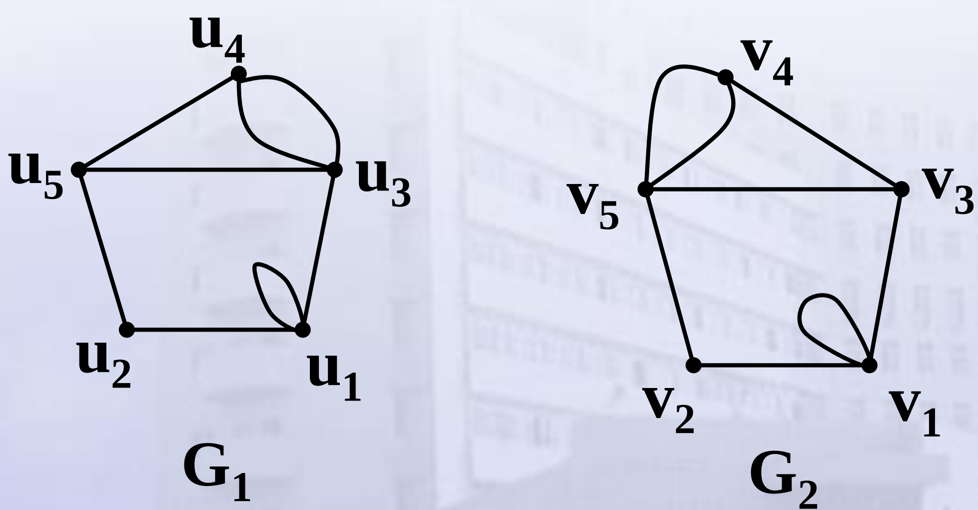
$$G_1 \cong G_2$$

注：1、图同构的两个必要条件：(1) 顶点数相同；(2) 边数相同。

2、随着学习的深入，以后还可以从顶点度或测地线角度给出判定定理。

有了同构定义，我们可以作一些严格的同构证明！

例2 下面两图同构吗？请给出证明。



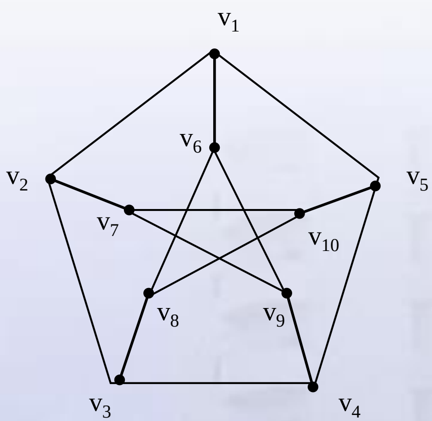
u1连的2度和4度

v1连的2度和3度

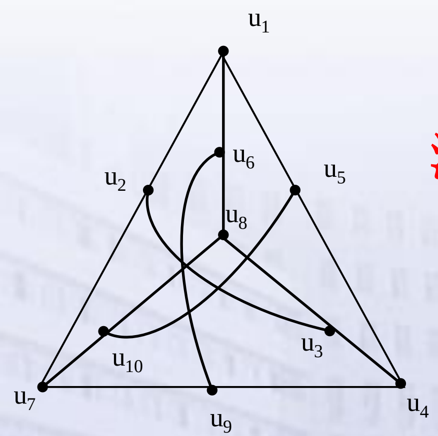
测试4： A 同构； B 不同构.

证明:u_1的两个邻接点与v_1的两个邻接点状况不同。两图不满足同构定义要求，所以，两图不同构。

例3 下面两图同构吗？请给出证明。



(a)



(b)

测试5：A 同构；B 同构.

证明:作映射f : $v_i \leftrightarrow u_i$ (i=1,2….10)

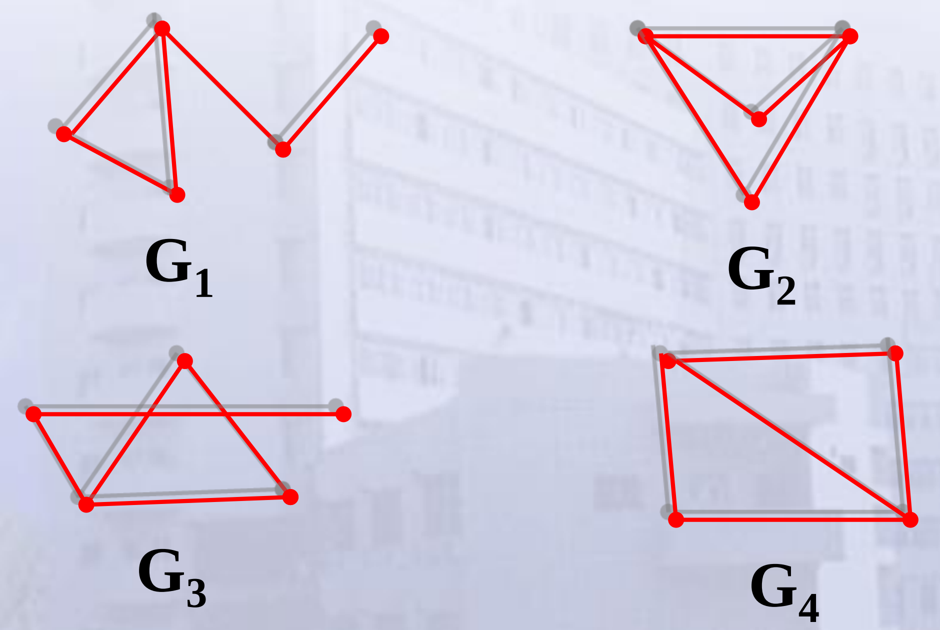
容易证明，对$\forall v_i v_j \in E$ ((a)),有f $(v_i, v_j) = u_i u_j \in E$ ((b)) $(1 \le i \le 10, 1 \le j \le 10)$.

由图的同构定义知，图(a)与(b)是同构的。

例4 如下同构图的对数为(　　)。

A 1　　B 2　　C 3　　D 4

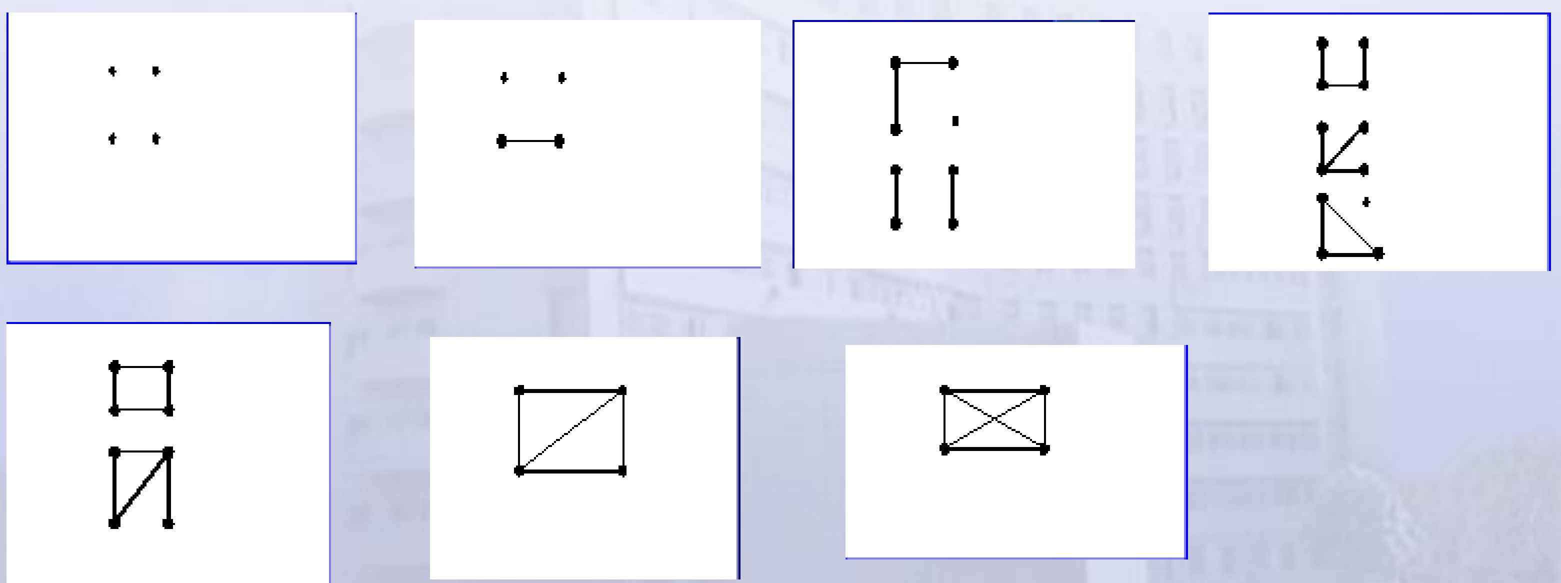
测试6：A 同构；B 不同构。



答案：B

例5 指出4个顶点的非同构的所有简单图【画同构图-挑战】。

分析：四个顶点的简单图最少边数为0，最多边数为6，所以可按边数进行枚举。



研究图的同构问题，核心是同构的判定问题！【挑战性】

(三)、图的同构判定问题

1、很有实际意义的问题

例如，制作的电路板必须和设计的电路图同构。由于电路板规模越来越大，同构判定成为很大的亟待解决的问题！

又如，系统工程中判定两个系统是否同构，在系统建模中非常重要！

再如，化学中研究分子的同分异构，本质上就是同构问题！

总之，在图论理论、模式识别、人工视觉、电路分析、分子结构等很多领域都有广泛应用。

2、研究现状

到目前，还不知道是否存在同构判定的好算法；甚至一般认为可能是一个NP难问题。

(1) 针对一些特殊图给出特定的判定算法；

(2) 开发出一些非多项式时间复杂性判定算法：如遗传算法、神经网络算法、粒子群算法等。

总之，图同构问题的研究还在继续，其核心是判定问题！同时，图同构的计数问题也是值得研究的问题。数学学院李正良、张先迪教授曾经用群论方法研究过相关问题，得到过有意义的结果。

作业

P29—P30 3, 4, 5, 6

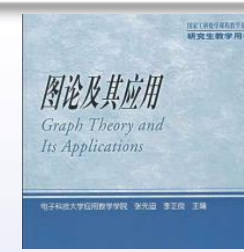
图论及其应用

任课教师：杨春

Email: yc517922@126.com

数学科学学院

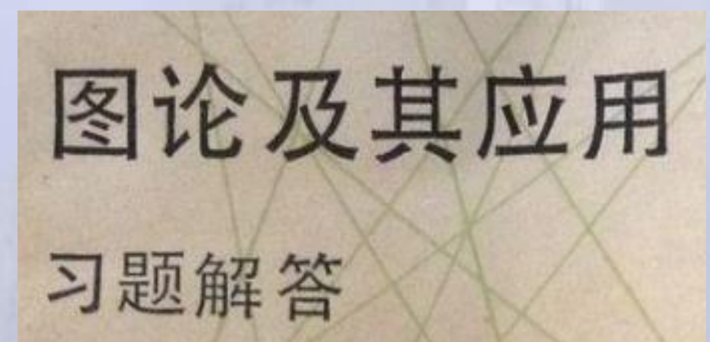
教材《图论及其应用》

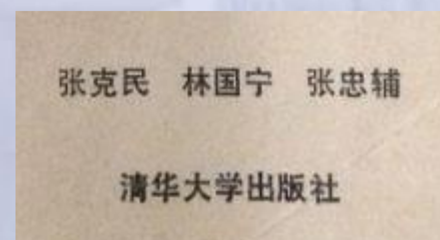


高等教育出版社

主编　张先迪、李正良

参考教材　美，帮迪《图论及其应用》





本次课内容

一、完全图、偶图与补图

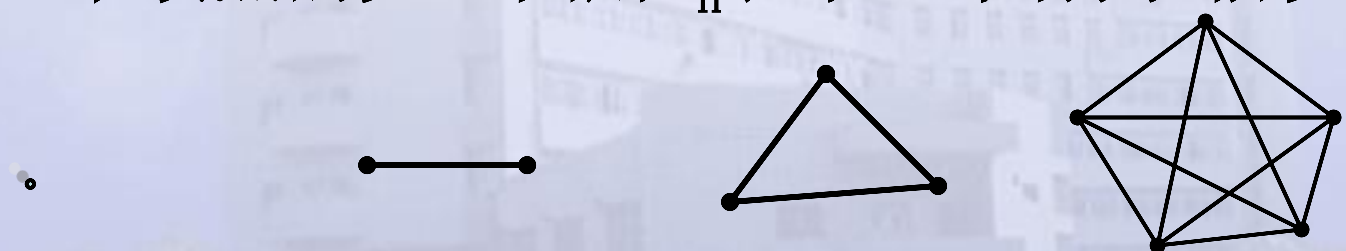
二、顶点的度与图的度序列

一、完全图、偶图与补图

(一)、完全图

1、在图论中，完全图是一个简单图，且任意一个顶点都与其它每个顶点有且只有一条边相连接。

2、n个顶点的完全图用K_n表示，常称为n阶完全图。



1阶完全图K_1　　2阶完全图K_2　　3阶完全图K_3　　5阶完全图K_5

注：有人认为符号来源于Kuratowski图论.

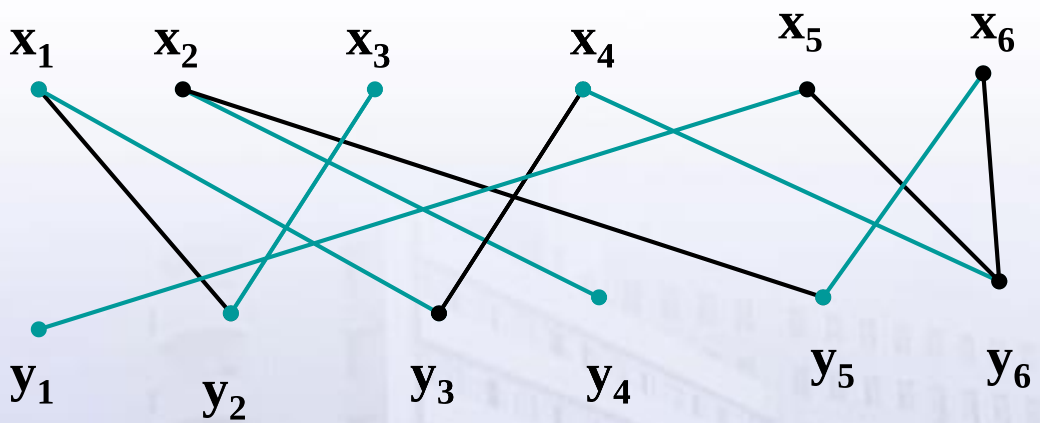
很明显，K_n的边数为：$m(K_n)=\frac{1}{2}n(n-1)$

完全图在图论中是一个很基本的图，经常用到。

(二)、偶图(双图或者二部图)

1、一个实例

例1 学校有6位教师将开设6门课程。六位教师的代号是x_i（i=1,2,3,4,5,6)，六门课程代号是y_i（i=1,2,3,4,5,6)。已知，教师x_1能够胜任课程y_2和y_3；教师x_2能够胜任课程y_4和y_5；教师x_3能够胜任课程y_2；教师x_4能够胜任课程y_6和y_3；教师x_5能够胜任课程y_1和y_6；教师x_6能够胜任课程y_5和y_6。请画出老师和课程之间的状态图。



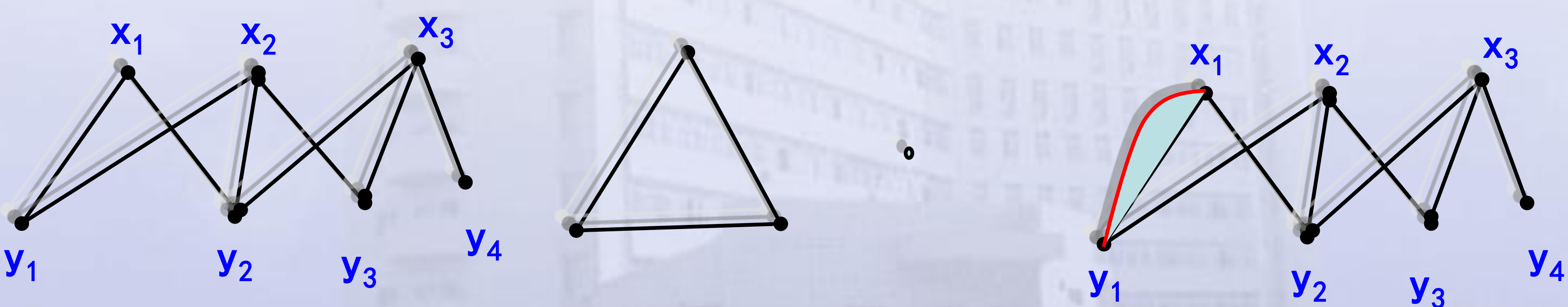
注：1、该例代表了两类事物之间联系问题；

2、这类图的特征：(1)顶点分成不相交的两部分；

(2)任意一条边两个端点分属于两部分顶点。

2、偶图的定义

定义1 所谓具有二分类（X, Y）的偶图（或二部图）是指一个图，它的点集可以分解为两个(非空)子集X和Y，使得每条边的一个端点在X中，另一个端点在Y中.



偶图G_1　　非偶图G_2　　非偶图G_3　　偶图G4

注：偶图中不能有环，不能有三角形！可以有重边！

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

3、完全偶图($K_{n1, n2}$)

定义2 完全偶图是指具有二分类（*X*, *Y*）的简单偶图，其中*X*的每个顶点与*Y*的每个顶点相连，若$|X|=n_1$，$|Y|=n_2$，则这样的偶图记为 $K_{n1, n2}$.

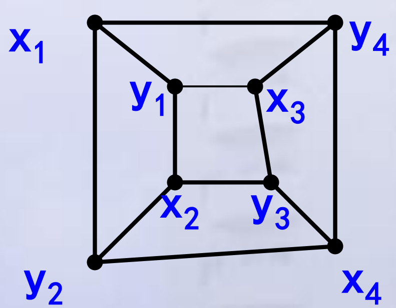


图1

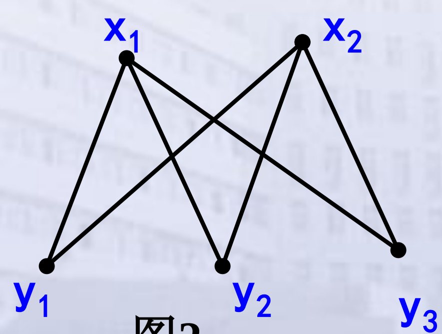


图2

图1是偶图，但非完全偶图，图2是$K_{2,3}$.

(三)、简单图的补图

在图论中，对于一个n阶简单图G，基于完全图K_n，定义了所谓的简单图G的补图。

1、简单图G的补图的定义

定义3 对于一个简单图$G=(V, E)$，令集合

$$E_1=\{uv \mid u \neq v, u, v \in V\}$$

则称图$H=(V, E_1 \backslash E)$为G的补图，记为 $H=\overline{G}$.

G_1

G_1的补图

G_2

G_2的补图

G_3

G_3的补图

几点说明: (1) 只有简单图才能定义补图；

(2) n阶简单图和其补图的顶点集合是相同的；

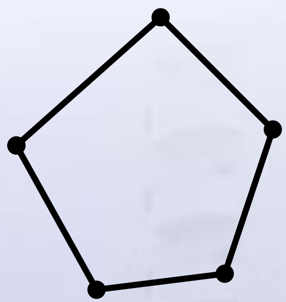
(3) n阶简单图任意一对顶点邻接的充分必要条件是这对顶点在其补图中不邻接；

(4) n阶简单图的边数与其补图的边数之和等于K_n的边数；

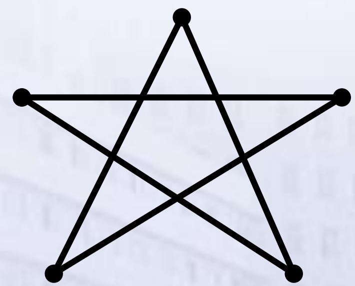
(5)补图是经常涉及的概念，在图结构分析中有重要的作用。

2、自补图的定义与性质

定义4 如果图G与其补图同构，则称G为自补图。

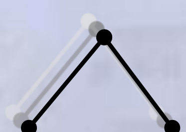


G_1

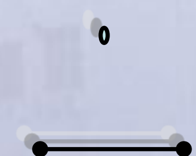


G_2

注：并不是任意一个简单图都是自补图，例如：



G



G 的补图

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

定理1：若n阶图G是自补图，则有：$n \equiv 0,1(\bmod 4)$.

证明：n阶图G是自补图，则有：

$$m(G)+m(\overline{G})=m(K_n)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

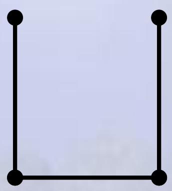
所以：$m(G)=\frac{1}{4}n(n-1)$

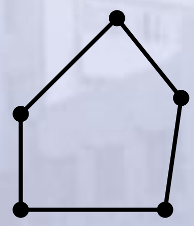
由于n是正整数，所以：$n \equiv 0,1(\bmod 4)$.

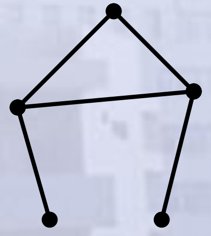
例2 在10个顶点以下的单图中，哪些阶数的图可能为自补图？画出8阶的4个自补图(共10个)。

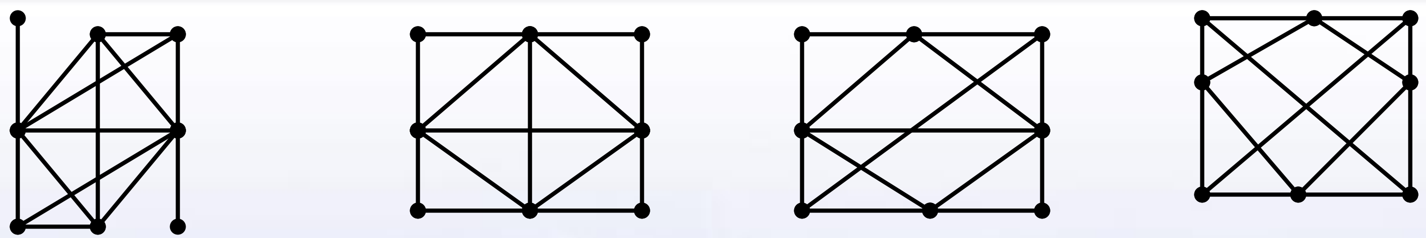
解：1、4、5、8、9阶图可能为自补图。情况是：
1阶图自补图是本身；4阶图的自补图只有一个；5阶图的自补图有2个；8阶自补图有10个；9阶以上的图的自补图构建很复杂(9阶的图有36个)。

参考书：自补图理论与应用，许进著 西电出版社.









注：1、自补图的研究开始于20世界60年代，由林格尔等3位数学家分别进行了独立研究。到目前，已经取得许多丰硕成果;

2、自补图的研究不仅有趣，而且在对角型拉姆齐数、图的香浓容量、图与其补图色多项式关系、强完美图猜想以及图的同构的测试问题等方面都有其重要的应用。

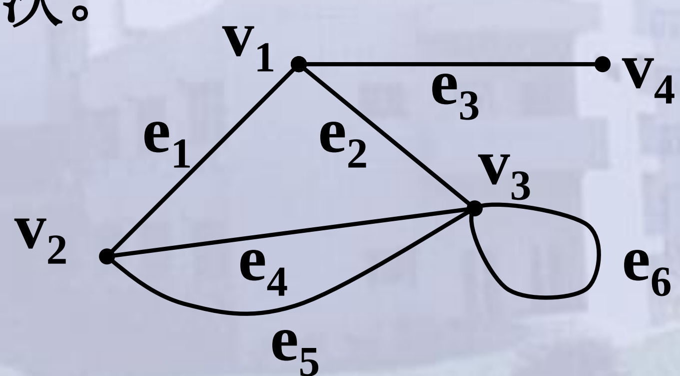
二、顶点的度与图的度序列

研究图的结构性质，需要定义描述图的结构性质的重要参数。

1、顶点的度及其性质

为了描述图中顶点与其它顶点的连接状态，或者说描述图的局部结构，图论中首先引入了顶点度概念。

定义5 *G*的顶点*v*的度*d* (*v*)是指*G*中与*v*关联的边的数目，每个环计算两次。

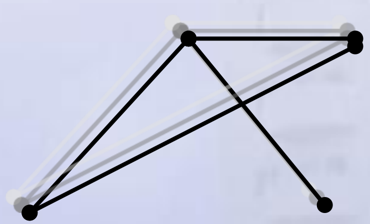


注：1、分别用δ(G)和Δ(G)表示图G的最小与最大度。

2、奇数度的顶点称为奇点，偶数度的顶点称偶点。

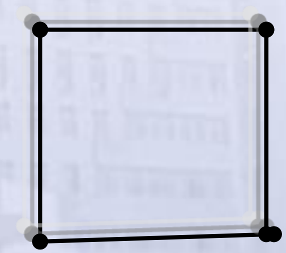
3、设$G = (V, E)$为简单图，如果对所有 $v \in V$ ，有

$d(v) = k$，称图G为k-**正则图**．



非正则图

1正则图



2正则图

定理2　图*G*= (*V*, *E*)中所有顶点的度的和等于边数*m*的2倍，即：

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

证明：由顶点度的定义知：图中每条边给图的总度数贡献2度，所以，总度数等于边数2倍。

注：该定理称为图论第一定理，是由欧拉提出的。欧拉发表论文886篇，著作90部。该定理还有一个名字：“握手定理”。

推论1 在任何图中，奇点个数为偶数。

证明：设V_1,V_2分别是G中奇点集和偶点集.则由握手定理有：

$$\sum_{v\in V_1} d(v)+\sum_{v\in V_2} d(v)=\sum_{v\in V} d(v)$$

是偶数。由于上式左边第二项是偶数， 所以左边第一项是偶数，于是奇度点个数必为偶数。

推论2 正则图的阶数和度数不同时为奇数 。

证明 ： 设G是k-正则图，若k为奇数，则由推论1知正则图G的点数必为偶数.

例3 Δ与δ是简单图G的最大度与最小度，求证：

$$\delta \le \frac{2m}{n} \le \Delta$$

证明：由握手定理有：

$$n\delta \le \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \le n\Delta$$

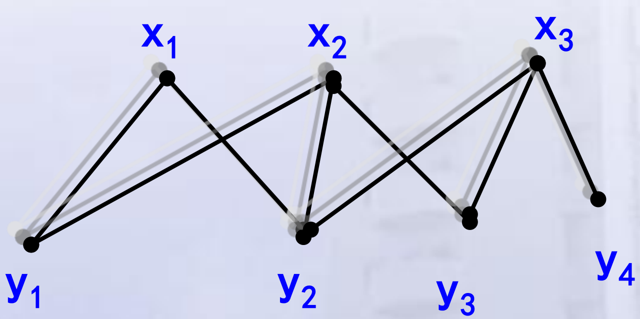
所以有：$\delta \le \frac{2m}{n} \le \Delta$.

注：1、握手定理及其推论在图的结构分析中常用！

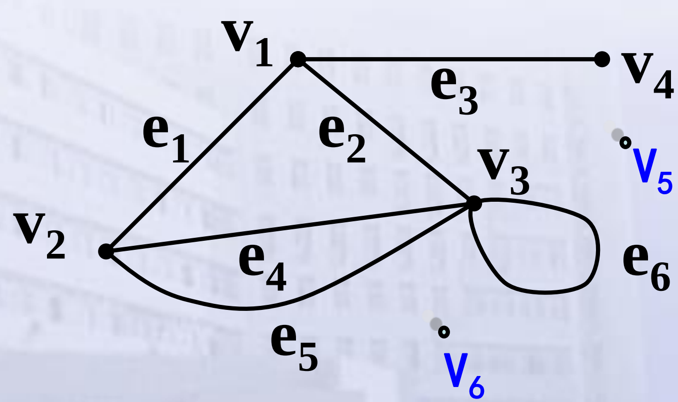
2、如果说顶点度描述图的局部结构，那么在某种程度上，一个图的所有顶点的度构成的序列可以描述图的整体结构状态。

2、图的度序列及其性质

定义6 一个图G的各个点的度$d_1, d_2,\ldots, d_n$构成的非负整数组$(d_1, d_2,\ldots, d_n)$称为G的度序列。



偶图G_1



G_2

偶图G_1的度序列为: (2, 3, 3, 2, 3, 2, 1)

图G_2的度序列为: (3, 3, 5, 1, 0, 0)

注：1、一个图的度序列与序列中元素排列无关；

2、给定一个图，只对应唯一一个度序列；

3、同构的图具有相同的度序列。

非负整数序列对应图吗？

定理3 非负整数组$(d_1,d_2,\ldots, d_n)$是图的度序列的充分必要条件是序列中元素总和为偶数。

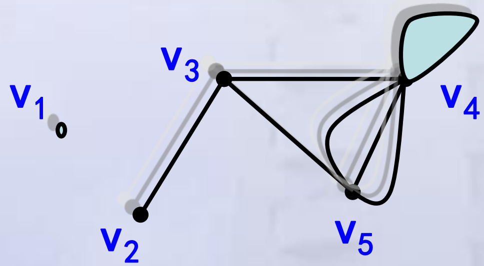
证明：必要性由握手定理立即得到。

如果 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数，则数组中为奇数的数字个数必为偶数。

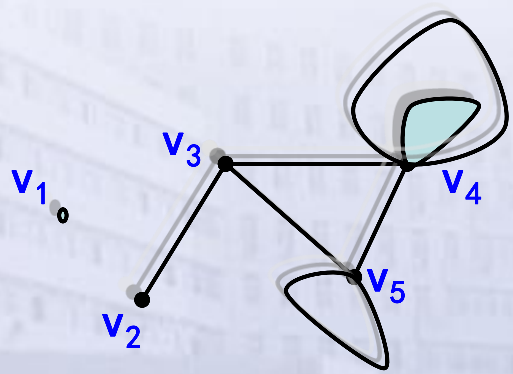
按照如下方式作图G:若d_i为偶数，则在与之对应的点作$d_i/2$个环；对于剩下的偶数个奇数，

两两配对后分别在每配对点间先连一条边，然后在每个顶点画d_j-1/2个环。该图的度序列就是已知数组。

例如对于 (0 , 1, 3, 4 , 6), 作出对应的图为:



G_1



G_2

但是，序列 (1, 1, 3, 2, 2, 4) 不对应任意的图。

3、图序列及其性质

下面研究一个非负整数序列是否对应简单图的问题。

定义7 一个非负整数组如果是某简单图的度序列，我们称它为可图序列，简称图序列。

定理4 非负整数组

$$\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n), d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n, \sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$$

是图序列的充分必要条件是：

$$\pi_1 = (d_2 - 1, d_3 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n)$$

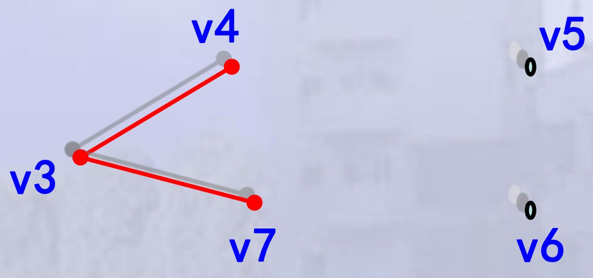
是图序列。

例4 $\pi = (6,5,4,3,2,2,2)$ 是否为图序列？如果是，作出对应的一个简单图。

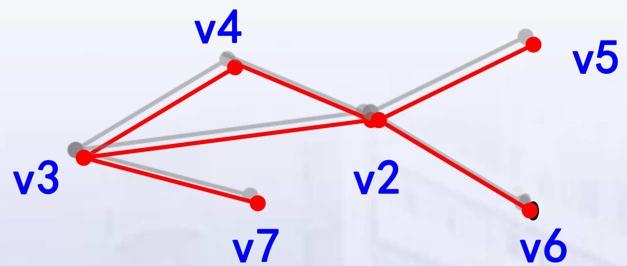
解：$\pi_1 = (4,3,2,1,1,1)$ $\pi_2 = (2,1,0,0,1)$

容易发现：$\pi_2 = (2,1,0,0,1)$ 是图序列，所以原来序列是图序列。

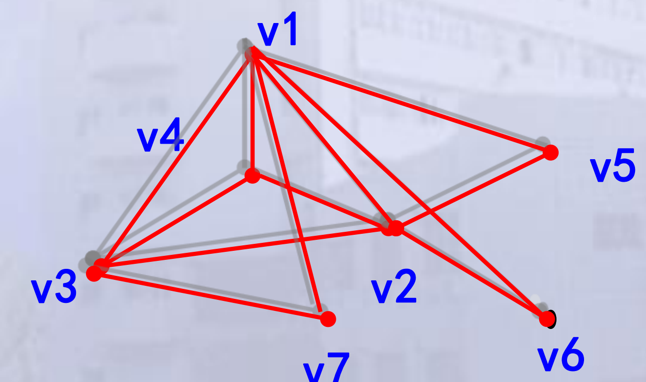
(1) $\pi_2 = (2,1,0,0,1)$ 对应的简单图为：



(2) $\pi_1 = (4, 3, 2, 1, 1, 1)$ 对应的简单图为：



(3) $\pi = (6, 5, 4, 3, 2, 2, 2)$ 对应的简单图为：



课外作业：根据定理4作一个图序列判定和作图软件。

著名数学家厄多斯在1960年也给出了一个图序列充要条件：

定理5 (厄多斯1960) 非负整数组

$$\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n),d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n,\sum_{i=1}^{n}d_i=2m$$

是图序列的充分必要条件是：

$$\sum_{i=1}^{r}d_i\leq r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{n}\min\{r,d_i\},1\leq r\leq n-1$$

注：该定理只能做判定。定理证明比较困难！

关于图序列问题，主要关注如下3点：

(1) 存在问题：什么样的非负整数组是图序列？

(2) 计数问题：一个图序列对应多少不同构的图？

(3) 构造问题：如何画出图序列对应的所有不同构图？

研究现状: (1)彻底解决了，(2)解决得不好，(3)没有解决。

同时，上世纪60年代以来，所谓的唯一图序列问题也得到了一定的研究。

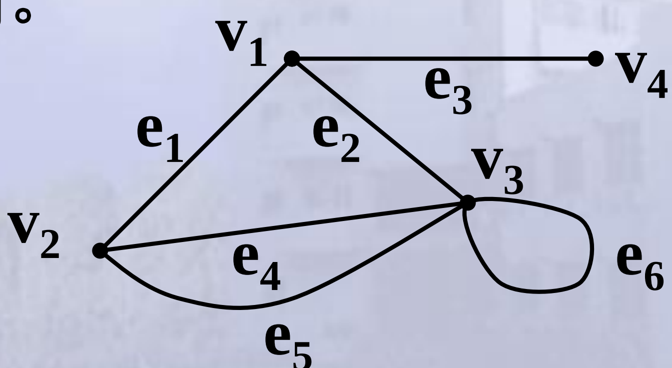
在图论中，特别是在当今复杂网络结构描述中，常涉及所谓的顶点度分布。下面介绍与之相关的图的频序列。

4、图的频序列及其性质

定义8 设n阶图G的各点的度取s个不同的非负整数$d_1,d_2,\ldots,d_s$。又设度为d_i的点有b_i个 ($i=1,2,\ldots,s$)，则

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = n$$

故非整数组$(b_1,b_2,\ldots,b_s)$是n的一个划分，称为G的频序列。



(1, 2, 1)

定理6　一个简单图G的n个点的度不能互不相同.

注：一个简单图频序列中 至少有一个元素大于或等于2。

证明： 因为图G为简单图，所以：$\triangle(G)\le n-1$。

情形1：若G没有孤立点，则 $1 \le d(v) \le n-1, \forall v \in V(G)$ **；**

由鸽笼原理：必有两顶点度数相同；

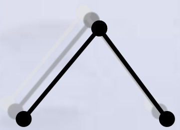
情形2：若G只有一个孤立点，设G_1表示G去掉孤立点后的部分，则： $1 \le d(v) \le n-2, \forall v \in V(G_1)$

由鸽笼原理：在G_1里必有两顶点度数相同；

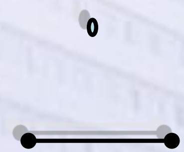
情形3：若G只有两个以上的孤立点，则定理显然成立。

定理7　一个n阶图G和它的补图有相同的频序列。（n≥2）

证明：　设图G的任一顶点v的度数为k,则该顶点在补图中的度数为n-1-k。因此：在G中有b个度数为k的顶点，则在补图中就有b个度数为n-1-k个顶点。



G



G的补图

图G和它的补图有相同的频序列: (1, 2) .

作业

P29—P30 8, 9, 10, 11

谢谢！

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

图论及其应用

任课教师：杨春

Email: yc517922@126.com

数学科学学院

教材《图论及其应用》

高等教育出版社

主编　张先迪、李正良

参考教材　美，帮迪《图论及其应用》

第一章 图的基本概念

本次课内容

一、子图的相关概念

二、几种典型的图运算

三、路与连通性

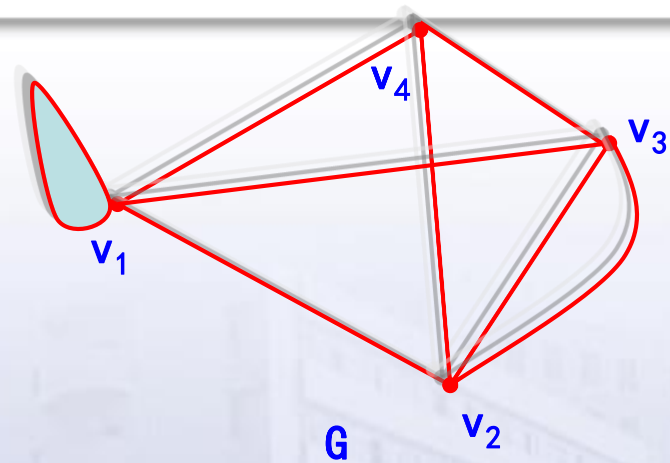
一、子图的相关概念

1、子图的概念

简单地说，图G的任意一非空部分(包括本身)都称为是图G的的一个子图。定义如下：

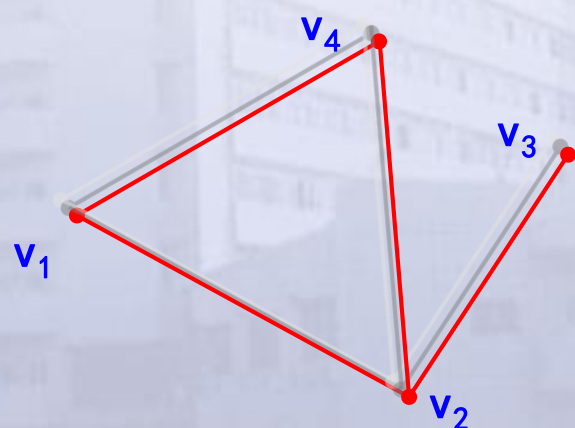
定义1 如果 $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$，且H中边的重数不超过G中对应边的条数，则称H为G的子图，记为 $H \subseteq G$。

当 $H \subseteq G, H \neq G$ 时，称H是G的真子图，记为 $H \subset G$

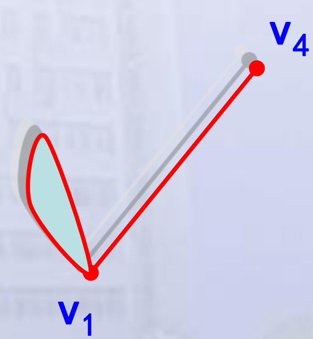


G

G_1



G_2



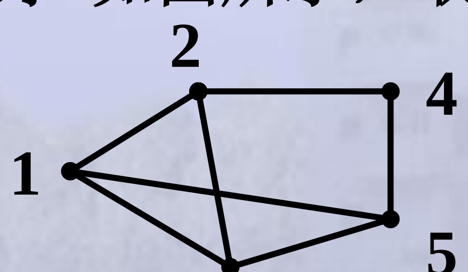
G_3

2、点与边的导出子图

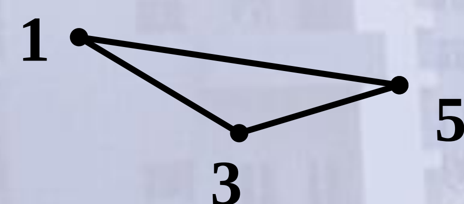
(1) 图G的顶点导出子图

定义2 如果 $V'\subseteq V(G)$，则以 V' 为顶点集，以两个端点均在 V' 中的边集组成的图，称为图G的点导出子图。记为：$G[V']$.

例1 如图所示，取 $V'=\{1,3,5\}$，求 $G[V']$.



图G

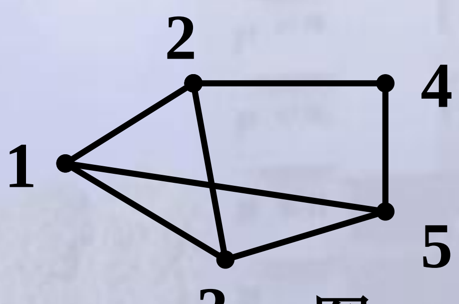


$G[V']$

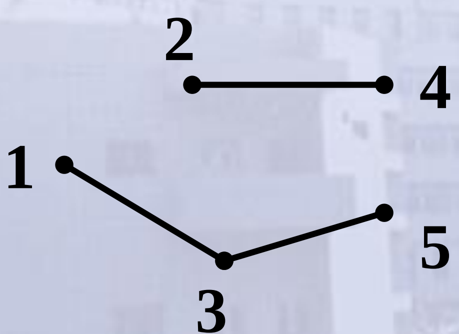
(2) 图G的边导出子图

定义3 如果 $E' \subseteq E(G)$ ，则以 E' 为边集，以 E' 中边的所有端点为顶点集组成的图，称为图G的边导出子图。记为: $G[E']$.

例2 如图所示，求 $G[E']$ 。其中 $E' = \{13, 24, 35\}$.



图G

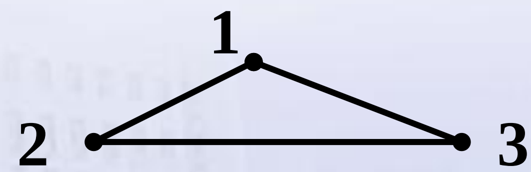


$G[E']$

3、图的生成子图

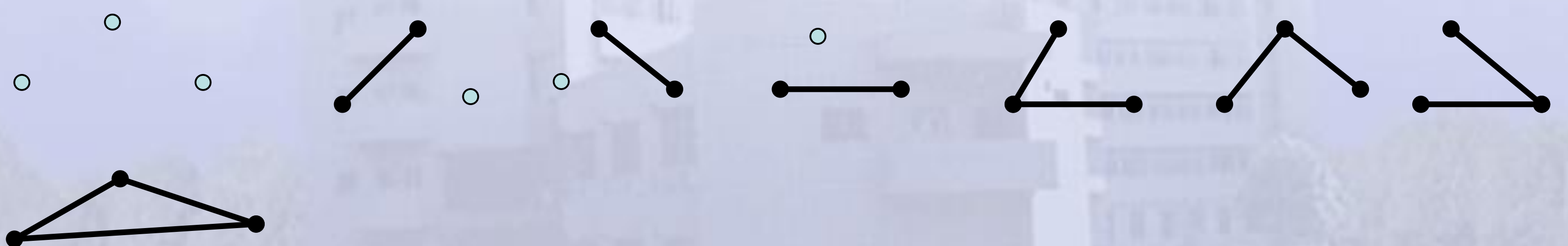
定义3 如果图G的一个子图包含G的所有顶点，称该子图为G的一个生成子图。

例2 如图所示，求G的所有生成子图。



图G

解：按边数分别求出：



定理1 简单图G=(n, m) 的所有生成子图个数为2^m.

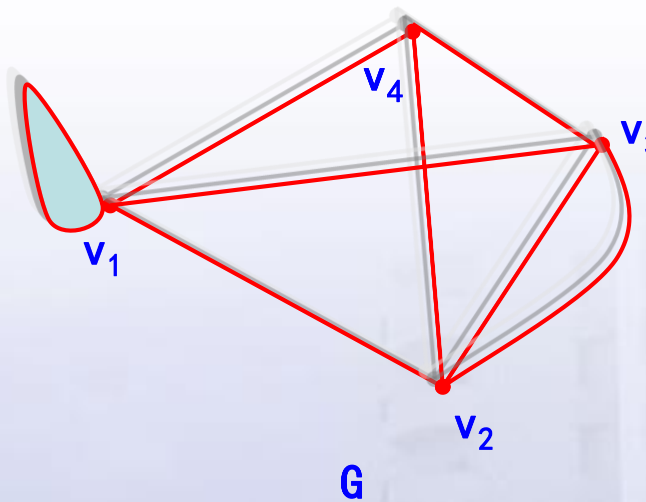
二、图运算

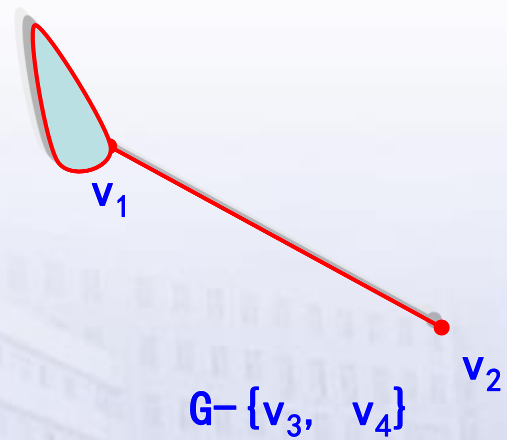
在图论中，将两个或更多的图按照某种方式合并，或者对一个图作某种形式的操作，可以得到很有意义的新图。将图合并或对一个图进行操作，称为图运算。图运算形式很多。

(一)、图的删点、删边运算

设 $V' \subseteq V(G)$，在G中删去 V' 中的顶点和G中与之关联的所有边的操作，称为删点运算。记为 $G-V'$.

特别地，如果只删去一个点v，则记为G-v.

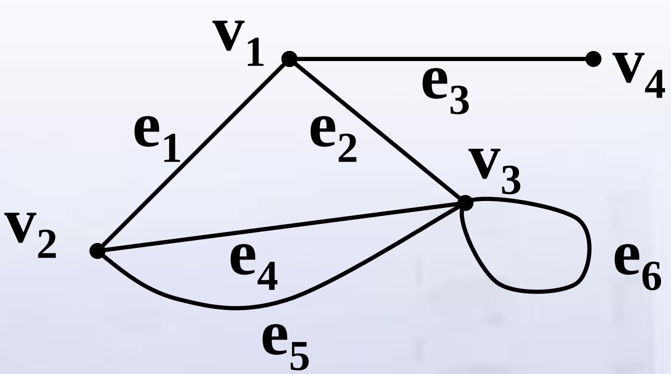




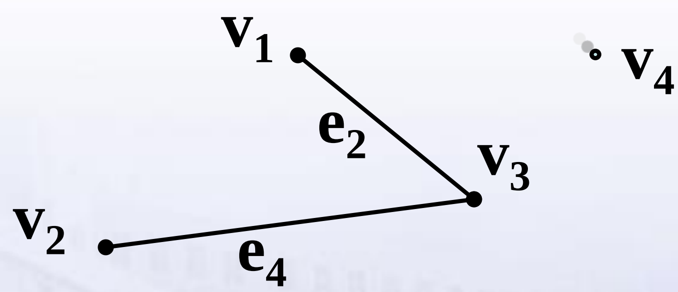
(2)、图的删边运算

设 $E' \subseteq E(G)$ ，在G中删去 E' 中的所有边的操作，称为删边运算。记为 $G - E'$.

特别地，如果只删去一条边e，则记为G-e.



G



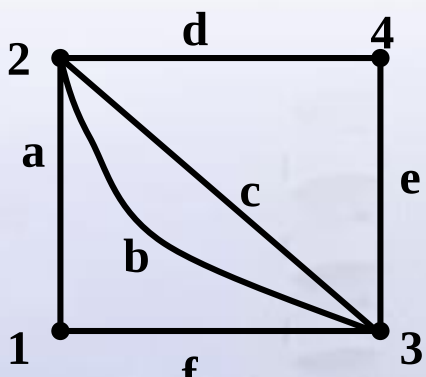
G−{ e_1， e_3， e_6， e_5 }

注：删点要删关联的边，删边不删关联的点！

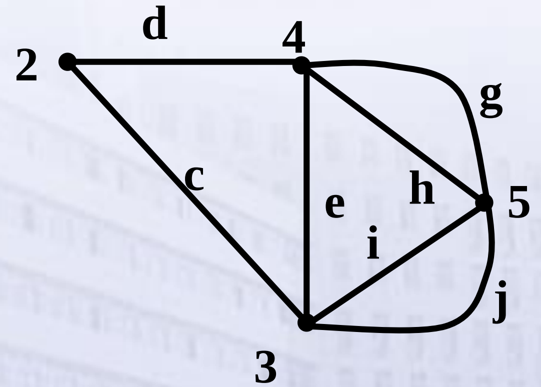
(二)、图的并运算

设G_1,G_2是G的两个子图，G_1与G_2并是指由 $V(G_1)\cup V(G_2)$ 为顶点集，以 $E(G_1)\cup E(G_2)$ 为边集组成的子图。记为: $G_1\cup G_2$.

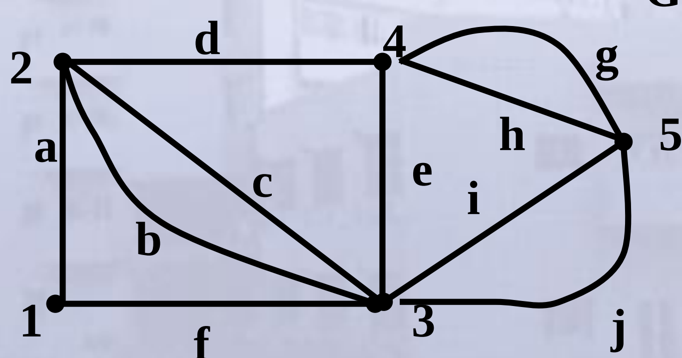
特别是，如果G_1,G_2不相交(没有公共顶点)，称它们的并为直接并，可以记为： $G_1 + G_2$



G_1



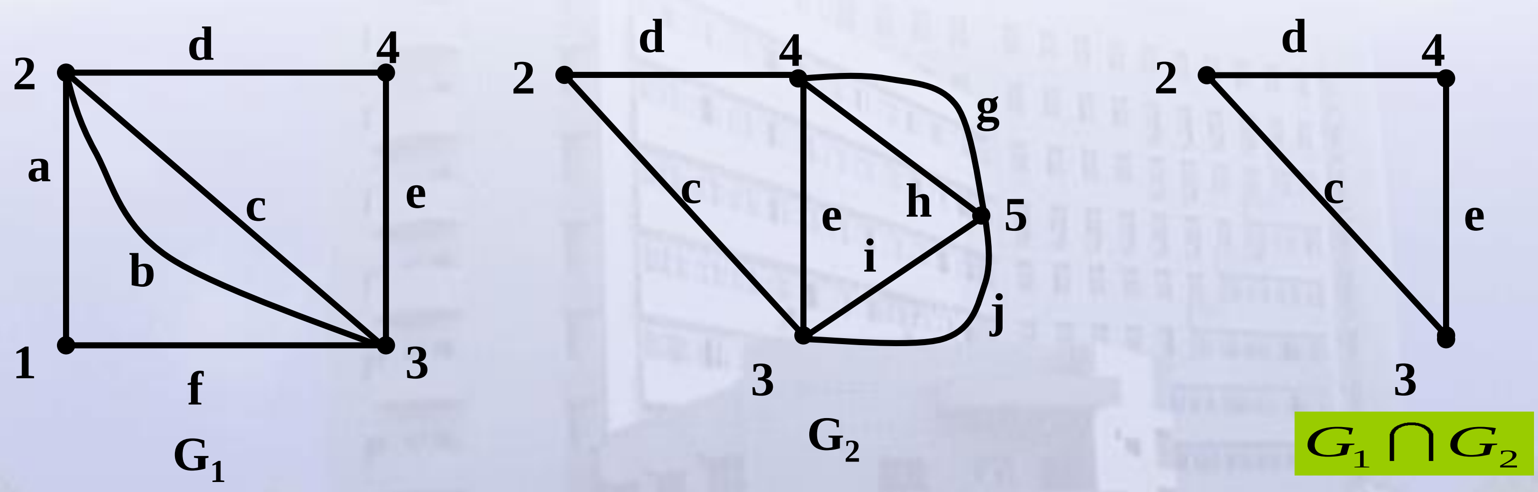
G_2



$G_1 \cup G_2$

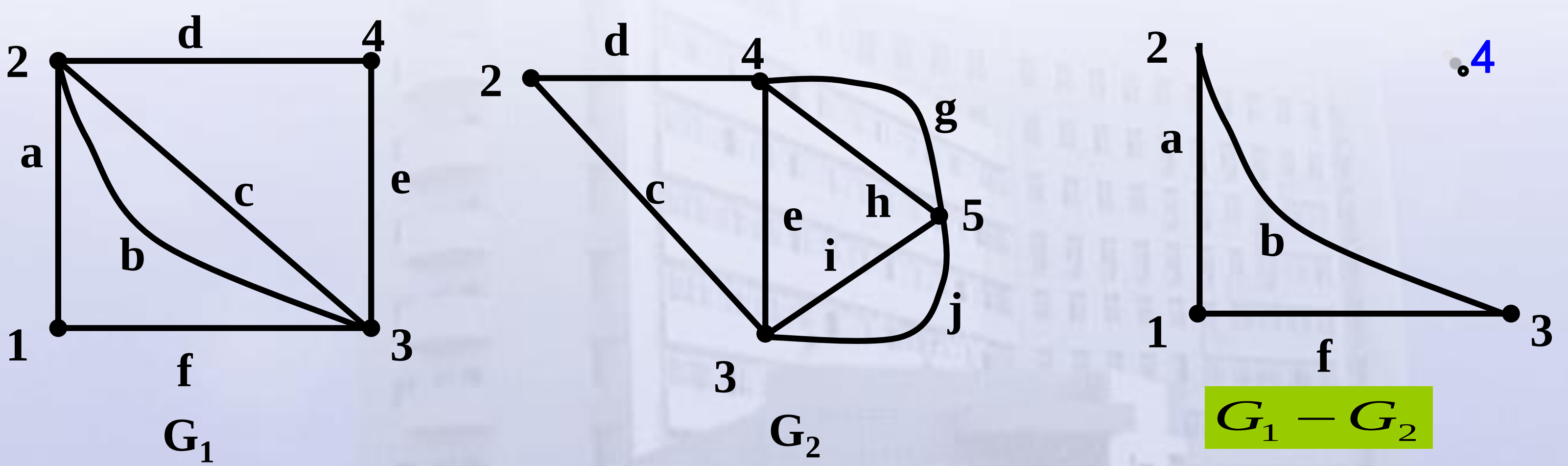
(三)、图的交运算

设G_1,G_2是G的两个子图，G_1与G_2交是指由 $V(G_1)\cap V(G_2)$ 为顶点集，以 $E(G_1)\cap E(G_2)$ 为边集组成的子图。记为: $G_1\cap G_2$.



(四)、图的差运算

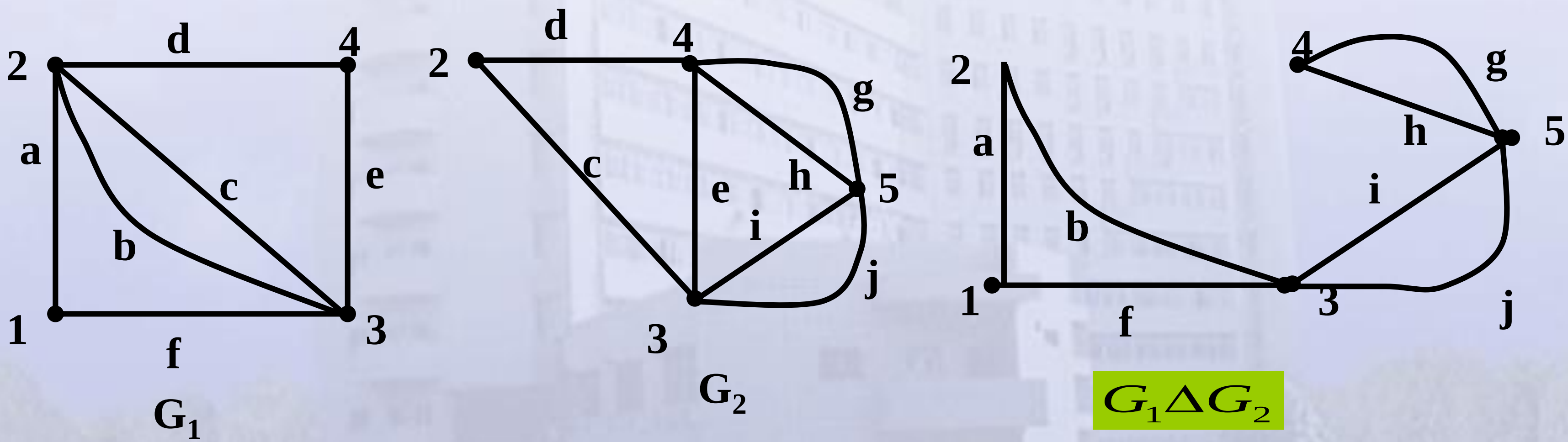
设G_1,G_2是两个图，G_1与G_2的差是指从G_1中删去G_2中的边得到的新图。记为G_1-G_2.



(五)、图的对称差运算(或环和运算)

设G_1,G_2是两个图，G_1与G_2的对称差定义为：

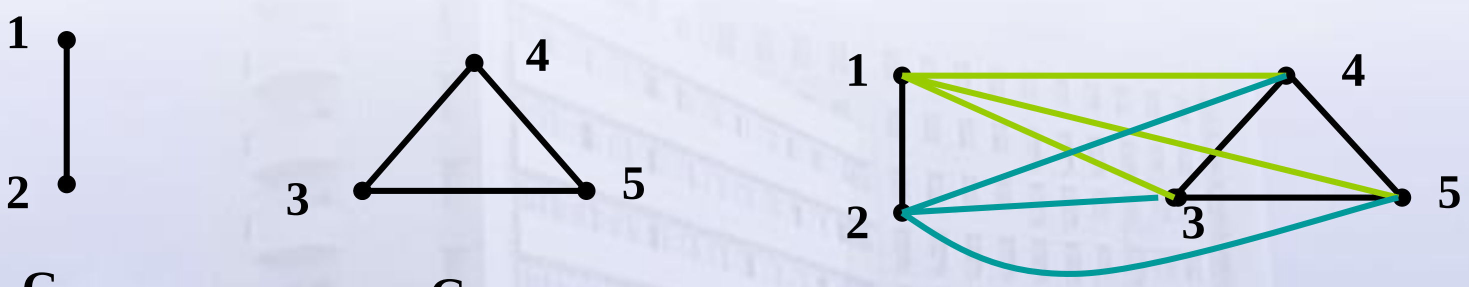
$$G_1 \Delta G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$$



注：对称差运算在图的结构分析中常用到！

(六)、图的联运算

设G_1,G_2是两个不相交的图，作G_1+G_2，并且将G_1中每个顶点和G_2中的每个顶点连接，这样得到的新图称为G_1与G_2的联图。记为：$G_1 \vee G_2$



G_1 G_2 $G_1 \vee G_2$

注：图的联运算是俄国数学家季科夫给出的。在图论研究中常使用！

(七)、图的积图

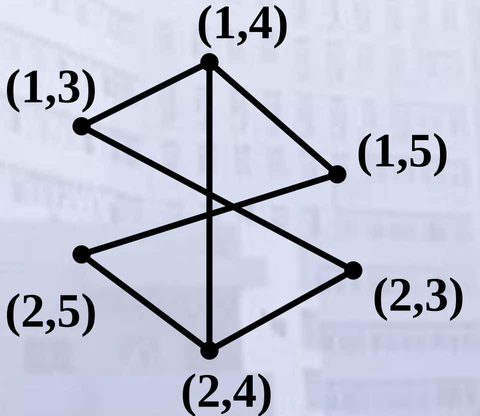
设 $G_1=(V_1,E_1), G_2=(V_2,E_2)$,是两个图。对点集 $V=V_1\times V_2$

的任意两个点$u=(u_1,u_2)$与$v=(v_1,v_2)$,当($u_1=v_1$和u_2adjv_2)或($u_2=v_2$和u_1adjv_1)时，把u与v相连。如此得到的新图称为G_1与G_2的积图。记为：

$$G=G_1\times G_2$$

G_1

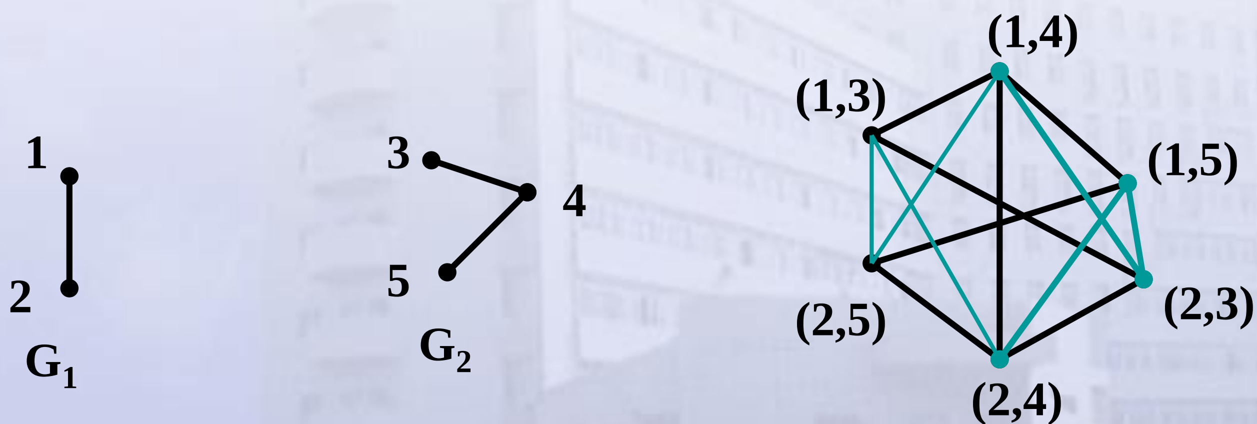
G_2



$$G=G_1\times G_2$$

(八)、图的合成图

设 $G_1=(V_1,E_1), G_2=(V_2,E_2)$，是两个图。对点集 $V=V_1\times V_2$ 的任意两个点$u=(u_1,u_2)$与$v=(v_1,v_2)$,当$(u_1 adj v_1)$或$(u_1=v_1$和$u_2 adj v_2)$时，把u与v相连。如此得到的新图称为G_1与G_2的合成图。记为$G=G_1[G_2]$.

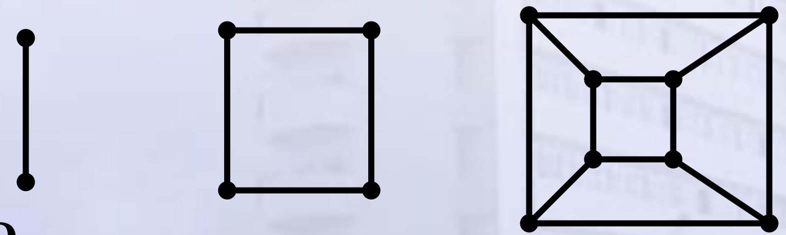


$G=G_1[G_2]$

注：图的积运算是网络构造的常用方法。并行计算机中的网络拓扑常采用所谓的“超立方体”结构。采用该结构可使网络具有较好的可靠性、较小的通信延迟和很好的可扩展性以及便于并行编程等优点。

“超立方体”可以采用积图来递归构造。定义如下：

(1) 1方体 $Q_1 = K_2$ ； (2) n方体 $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$.



Q_1 Q_2 Q_3

“超立方体”常采用下面简单的递归构造方法：

n方体Q_n的顶点可用一个长度为n的二进制码来表示。Q_n的顶点数目正好等于2^n个。

由n-1方体Q_{n-1}构造Q_n的方法是：将Q_{n-1}拷贝一个。将原Q_{n-1}每个顶点的码前再添加一个零，将拷贝得来的n-1方体每个顶点的码前面再添加一个1。然后在两个n-1方体之间连线：当且仅当两个顶点码只有一位对应位数字不同时，该两点连线。如此得到的图即为n方体

。关于n方体Q_n的性质研究，可以查阅到很多文献。经典文章是：

Saad Y, Schultz M H. Topological properties of hypercubes [J]. IEEE Trans. Comput . 1988, 37(7) : 867—872.

三、路与连通性

在图的结构分析中，特别注意关注图的连通性问题。

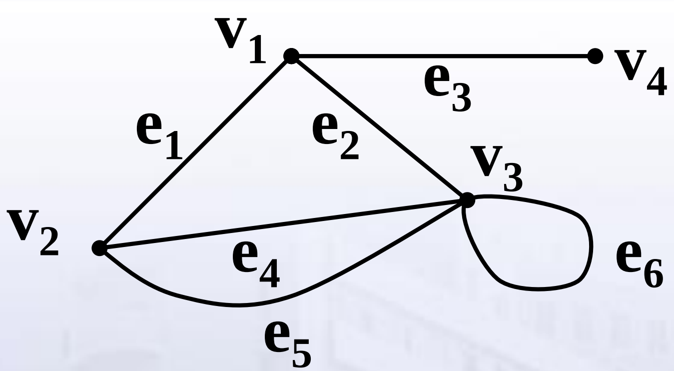
(一)、路与圈的相关概念

1、图中的途径

G 的一条途径（或通道或通路）是指一个有限非空序列：

$w = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \ldots e_k\ v_k$， 它的项交替地为顶点和边，使得$e_i$的端点是$v_{i-1}$和$v_i$ $(1 \le i \le k)$.

途径中边数称为途径的长度；v_0,v_k分别称为途径的起点与终点，其余顶点称为途径的内部点。



G

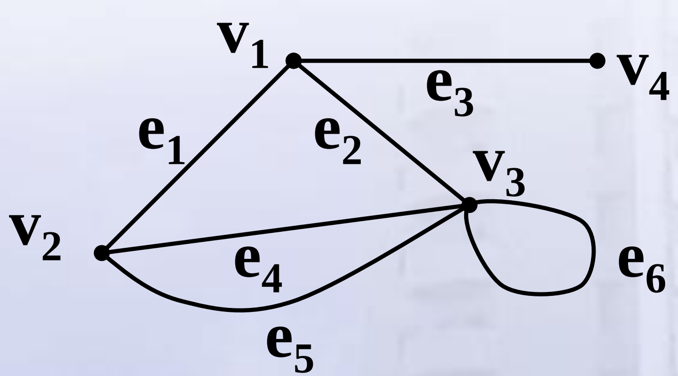
$w_1 = v_1e_3v_4e_3v_1e_2v_3e_6v_3e_5v_2$ ；

$w_2 = v_1e_1v_2e_1v_1e_2v_3e_6v_3e_4v_2$ ；

$w_3 = v_1e_2v_3$ 。

2、图中的迹

边不重复的途径称为图的一条迹。



G

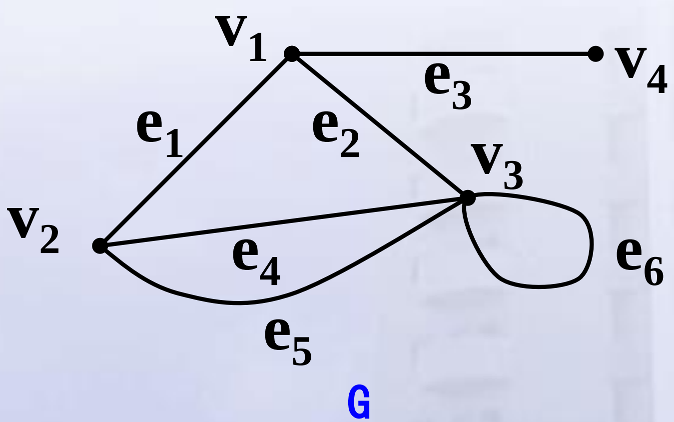
$w_1 = v_1e_3v_4e_3v_1e_2v_3e_6v_3e_5v_2$.非迹!

$w_2 = v_1e_1v_2e_1v_1e_2v_3e_6v_3e_4v_2$.非迹!

$w_3 = v_1e_2v_3\, e_6v_3e_5v_2$. 迹!

3、图中的路

顶点不重复的途径称为图的一条路。



$w_1= v_1e_3v_4e_3v_1e_2v_3e_6v_3e_5v_2$.非路！

$w_2= v_1e_1v_2e_1v_1e_2v_3e_6v_3e_4v_2$.非路！

$w_3= v_1e_2v_3\,e_6v_3e_5v_2$. 非路！

$w_4= v_1e_2v_3\,e_4v_2$. 路！

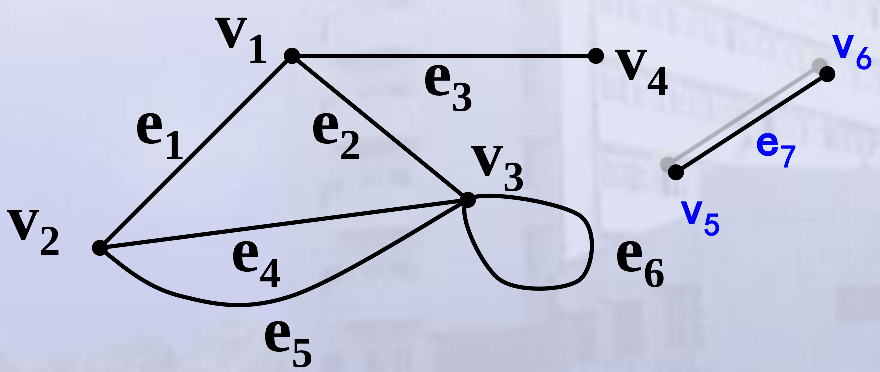
注：1、路是途径，也是迹，迹是途径；

2、起点与终点重合的途径、迹、路分别称为图的闭途径、闭迹 与圈。闭迹也称为回路。长度为k的圈称为k圈，k为奇数时称为奇圈，k为偶数时称为偶圈。

(二)、连通性的相关概念

1、图中两顶点的距离

图中顶点u与v的距离：u与v间最短路的长度称为u与v间距离。记为d (u, v)，如果u与v间不存在路，定义d (u, v)=∞.

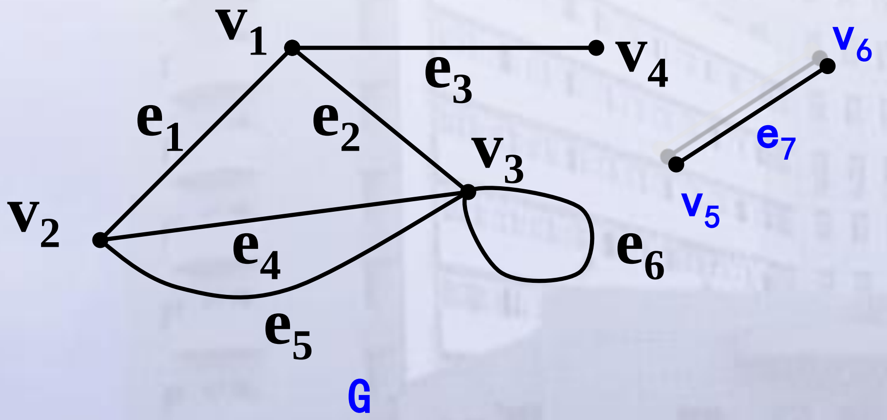


G

$d(v_2, v_4)=2$　　$d(v_2, v_1)= 1$　　$d(v_2, v_5)= \infty$

2、图中两顶点的连通性

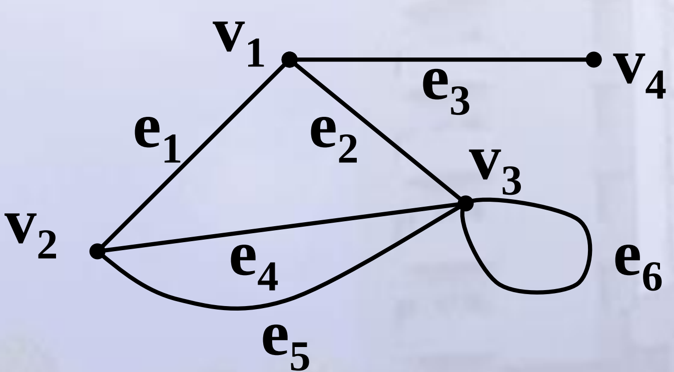
图G中点u与v说是连通的，如果u与v间存在途径。否则称u与v不连通。容易知道：点的连通关系是等价关系。



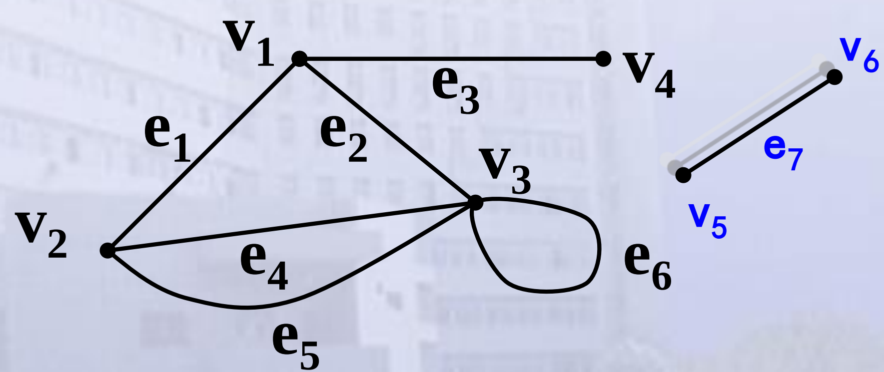
3、连通图与连通分支

(1) 如果图G中任意两点是连通的，称G是连通图，否则，称G是非连通图。

(2)非连通图中每一个极大连通部分，称为G的连通分支。G的连通分支的个数，称为G的分支数，记为 $\omega(G)$.



G1

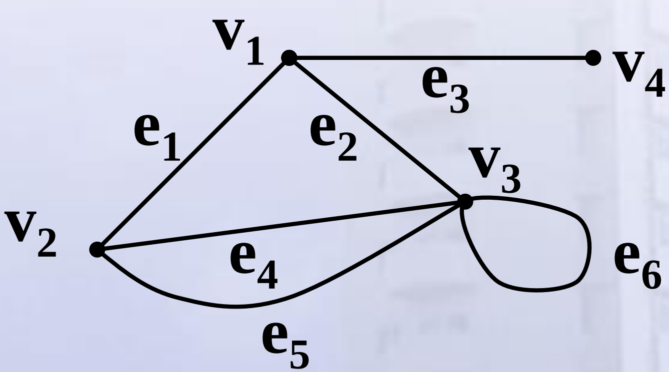


G2

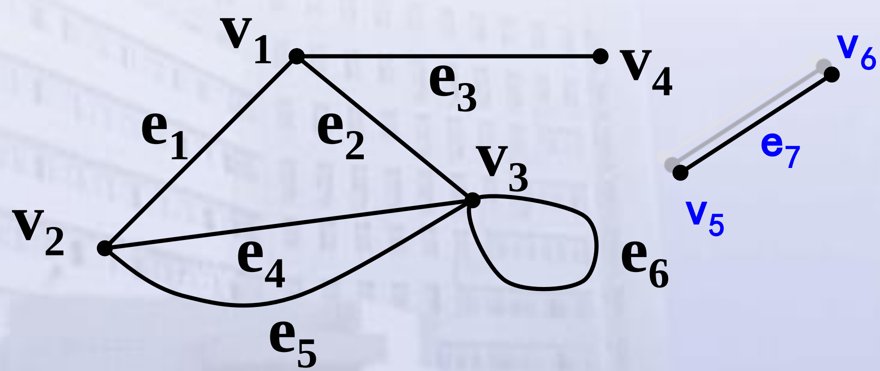
4、图的直径

连通图G的直径定义为：$d(G) = \max\{d(u,v) \mid u, v \in V(G)\}$；

如果G不连通，图G的直径定义为 $d(G) = \infty$.



G_1



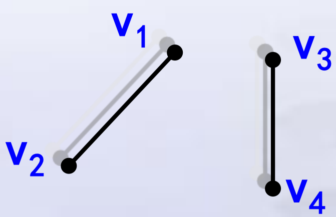
G_2

$d(G_1)=2.$

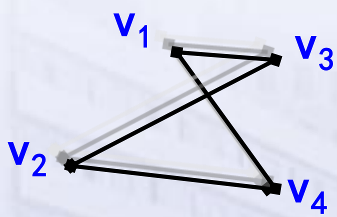
$d(G_2)= \infty.$

(三)、连通性性质

定理1：若图G不连通，则其补图连通。



G_1



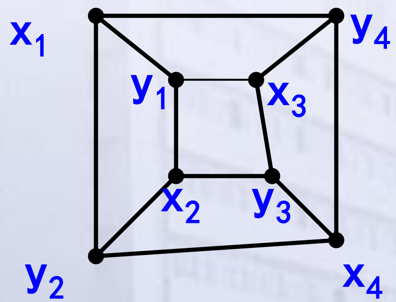
G的补图

证明：对 $\forall u,v \in V(\bar{G})$,如果u, v属于G的同一分支，设w是与u, v处于不同分支中的点，则在G的补图中，u与w, v与w分别邻接，于是，u与v在G的补图中是连通的。

如果u与v在G的两个不同分支中，则在G的补图中必然邻接，因此，也连通。

(四)、偶图的判定定理

从图的图形表示角度上看，如果一个偶图没有画成标准形式，我们需要仔细观察分析，才能确定它是偶图。



图G

有偶图的判定定理吗？

定理2 一个图是偶图当且当它不包含奇圈。

证明： 必要性：设G是具有二分类（X, Y）的偶图，并且 $C = v_0 v_1 \ldots v_k v_0$是$G$的一个圈。

不失一般性，我们假定$v_0 \in X$，那么：$v_{2i} \in X$，$v_{2i+1} \in Y$，即 $v_k \in Y$.

所以，C为偶圈。

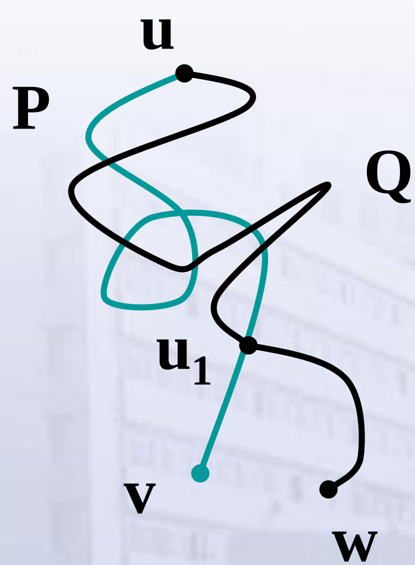
充分性： 在G中任意选取点u，定义V的分类如下：

$$X = \{x \mid d(u, x) \text{ 是偶数}，x \in V(G)\}$$

$$Y = \{y \mid d(u, y) \text{ 是奇数}，y \in V(G)\}$$

下面证明：对X中任意两点v与w，v与w不邻接即可！

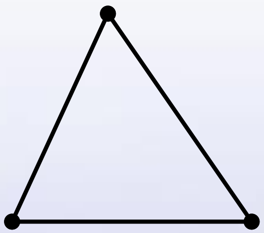
设v与w是X中任意两个顶点。P是一条最短(u , v)路， 而Q是一条最短的(u, w)路。



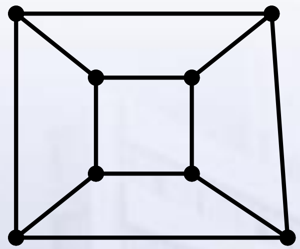
又设u_1是P和Q的最后一个交点。由于P, Q是最短路，所以，P,Q中u到u_1段长度相同，因此奇偶性相同。又P,Q的长均是偶数，所以，P,Q中u_1v段和u_1w段奇偶性相同。

如果v与w邻接，则可得到奇圈，矛盾！

指出下列图中哪些是偶图：

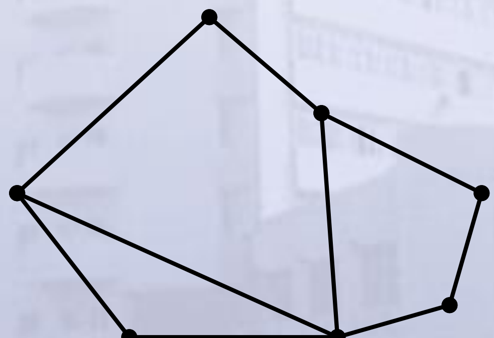


G_1



G_2

G_3



G_4

作业

P29—P30　13, 14, 20, 22

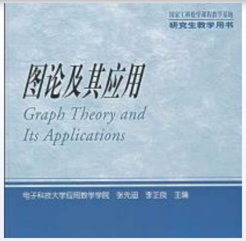
图论及其应用

任课教师：杨春

Email: yc517922@126.com

数学科学学院

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

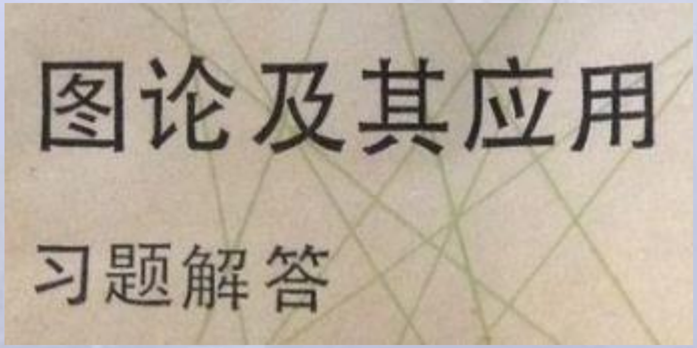


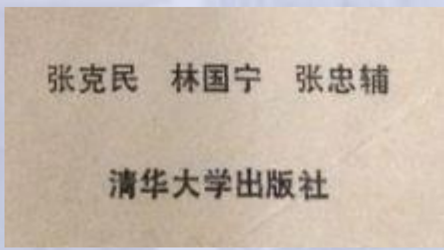
教材《图论及其应用》

高等教育出版社

主编 张先迪、李正良

参考教材 美，帮迪《图论及其应用》





本次课内容

一、图的代数表示

二、最短路算法

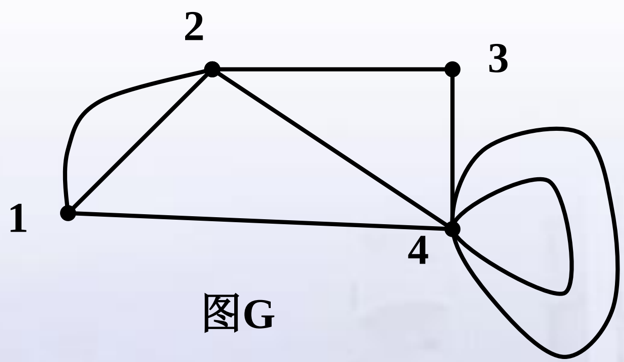
一、图的代数表示

在图论中，表示一个图主要有定义描述、图形表示和代数表示。代数表示是用所谓邻接矩阵或关联矩阵来表示一个图。

(一)、图的邻接矩阵

1、定义1 设G为n阶图，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})$,其中：

$$a_{ij}=\begin{cases} l, v_i\text{与}v_j\text{间边数} \\ 0, \quad v_i\text{和}v_j\text{不邻接} \end{cases}$$



图G

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2、邻接矩阵的性质

(1)非负性与对称性。

(2) 同一图的不同形式的邻接矩阵是相似矩阵。

(3) 如果G为简单图，则A(G)为布尔矩阵;行和(列和)等于对应顶点的度数；矩阵元素总和为图的总度数，也就是G的边数的2倍。

(4) G连通的充分必要条件是：A(G)不能与如下矩阵相似：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

证明：1) 必要性：

若不然：设A_{11}对应的顶点是$v_1,v_2,\ldots,v_k$，A_{22}对应的顶点为$v_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_n$。

显然，v_i (1≤i≤k) 与v_j (k+1≤j≤n)不邻接，即G是非连通图。矛盾！

2) 充分性

若不然：设G_1与G_2是G的两个不连通的部分，并且设$V(G_1)=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$, $V(G_2)=\{v_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_n\}$, 如果在写

G的邻接矩阵时，先排$V(G_1)$中点，再排$V(G_2)$中点，则G的邻接矩阵形式必为：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

这个性质说明：非连通图的邻接矩阵一定能够写成准对角矩阵形式。

(5) 定理1 设 $A^k(G)=(a_{ij}^{(k)})$ ，则 $a_{ij}^{(k)}$ 表示顶点 v_i 到顶点 v_j 的途径长度为k的途径条数。

证明：对k作数学归纳法证明。

当k=1时，由邻接矩阵的定义，结论成立；

设结论对k-1时成立。当为k时：

一方面：先计算 A^k .

$$A^k=A^{k-1}\cdot A=\left(a_{i1}^{(k-1)}a_{j1}+a_{i2}^{(k-1)}a_{j2}+\cdots+a_{in}^{(k-1)}a_{jn}\right)_{n\times n}$$

另一方面：考虑 v_i 到 v_j 的长度为k的途径:

设v_m是v_i到v_j的途径中点，且该点和v_j邻接。则v_i到v_j的经过v_m且长度为k的途径数目应该为：$a_{im}^{(k-1)} a_{mj}$

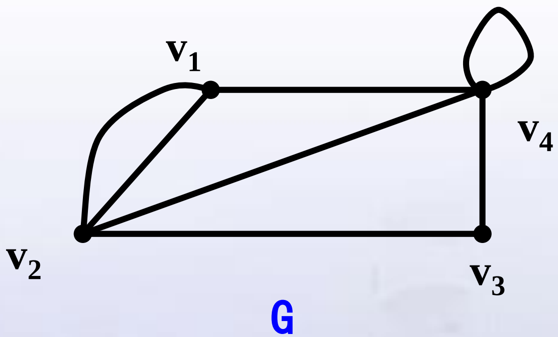
所以，v_i到v_j的长度为k的途径数目为：

$$a_{i1}^{(k-1)} a_{j1} + a_{i2}^{(k-1)} a_{j2} + \cdots + a_{in}^{(k-1)} a_{jn}$$

定理1得到证明。

如果G是简单图，我们得到如下推论：

推论: (1)A^2的元素$a_{ii}^{(2)}$是v_i的度数，A^3的元素$a_{ii}^{(3)}$是含v_i的三角形个数的2倍。



$$A(G)=\begin{pmatrix}0&2&0&1\\2&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$A^2(G)=\begin{pmatrix}5&1&3&3\\1&6&1&4\\3&1&2&2\\3&4&2&4\end{pmatrix}$$

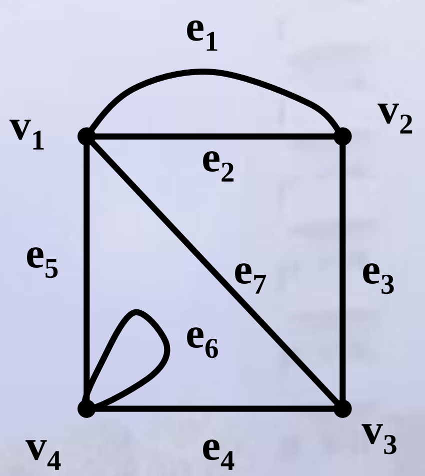
$$A^3(G)=\begin{pmatrix}5&16&4&12\\16&7&10&12\\4&10&3&8\\12&12&8&13\end{pmatrix}$$

所以，v_1到v_3的途径长度为2和3的条数分别为：3和4。

(二)、图的关联矩阵

1、定义2 若G是(n, m) 图。定义G的关联矩阵： $M(G)=(a_{ij})_{n\times m}$

其中： $a_{ij}=l, v_i$与e_j关联的次数（0, 1, 或2（环））.



$$M(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2、 关联矩阵的性质

(1) 关联矩阵的元素为0，1或2;

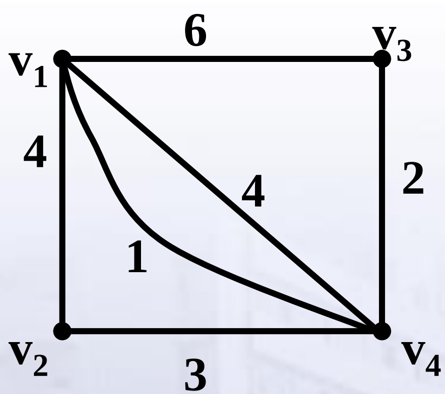
(2) 关联矩阵的每列和为2；每行的和为对应顶点度数.

二、最短路算法

(一)、几个相关概念

1、 边赋权图

在图G的每条边e上赋予一个实数w (e)后, 称G为边赋权图。被标上的实数称为边的权值。



G

注：权值的意义是广泛的。可以表示距离，可以表示交通运费，可以表示网络流量，在朋友关系图甚至可以表示友谊深度。但都可以抽象为距离。

2、边 赋权图中的最短路

设G为边赋权图。u与v是G中两点，在连接u与v的所有路中，路中各边权值之和最小的路，称为u与v间的最短路。

3、 算法

解决某类问题的一组有穷规则，称为算法。

4、 好算法

算法总运算量是问题规模的多项式函数时，称该算法为好算法。(问题规模：描述或表示问题需要的信息量)

算法中的运算包括算术运算、比较运算等。运算量用运算次数表示。

5、 算法分析

对算法进行分析，主要对时间复杂性进行分析。分析运算量和问题规模之间的关系。

(二)、最短路算法

1、最短路算法描述

1959年，旦捷希(Dantjig）发现了在赋权图中求由点a到点b的最短路好算法，称为顶点标号法。

$t(a_n)$: 点a_n的标号值，表示点 $a_1=a$ 到a_n的最短路长度；

$A_i=\{a_1,a_2, ..., a_i\}$:已经标号的顶点集合；

T_i : a_1到a_i的最短路上的边集合。

(1) 记 $a=a_1$, $t(a_1)=0$, $A_1=\{a_1\}$, $T_1=\varnothing$;

(2) 若已经得到 $A_i=\{a_1,a_2,\ldots,a_i\}$, 且对于 $1\leqslant n\leqslant i$, 已知 $t(a_n)$, 对每一个 $a_n\in A_i$, 求一点:

$$b_n^{(i)}\in N(a_n)-A_i=B_n^{(i)}$$

使得:

$$l(a_n b_n^{(i)})=\min_{v\in B_n^{(i)}} l(a_n v)$$

(3) 设有 m_i , $1\leqslant m_i\leqslant i$, 而 $b_{mi}^{(i)}$ 是使 $t(a_{m_i})+l(a_{m_i}b_{m_i}^{(i)})$ 取最小值, 令:

$$b_{m_i}^{(i)}=a_{i+1},\ t(a_{i+1})=t(a_{m_i})+l(a_{m_i}a_{i+1}),\ T_{i+1}=T_i\cup\{a_{m_i}a_{i+1}\}$$

(4) 若 $a_{i+1}=b$,停止, 否则, 记, $A_{i+1}=A_i\cup\{a_{i+1}\}$ 转(2).

2、时间复杂性分析

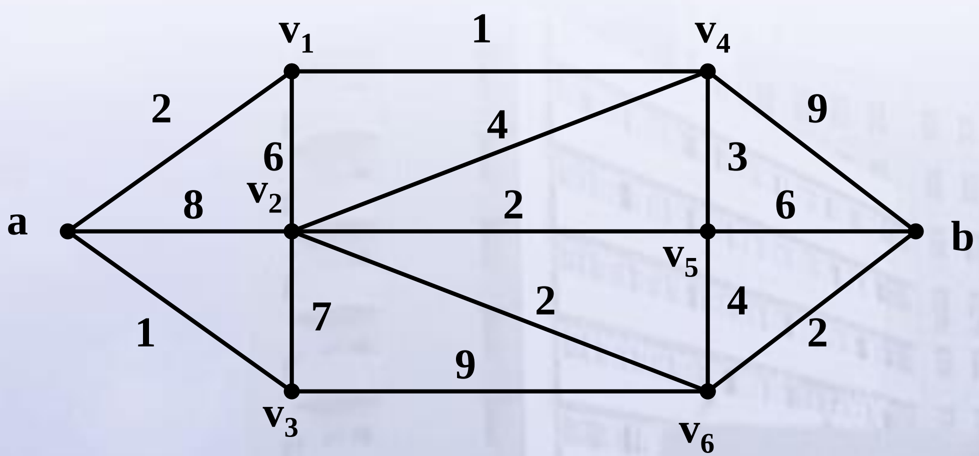
对第i次循环：步骤(2)要进行i次比较运算，步骤(3)要进行i次加法与i次比较运算。所以，该次循环运算量为3i .所以，在最坏的情况下，运算量为n^2级，是好算法。

3、算法证明(略)

定理1：算法中的函数$t(a_i)$给出了a与a_i的距离。

4、算法应用举例

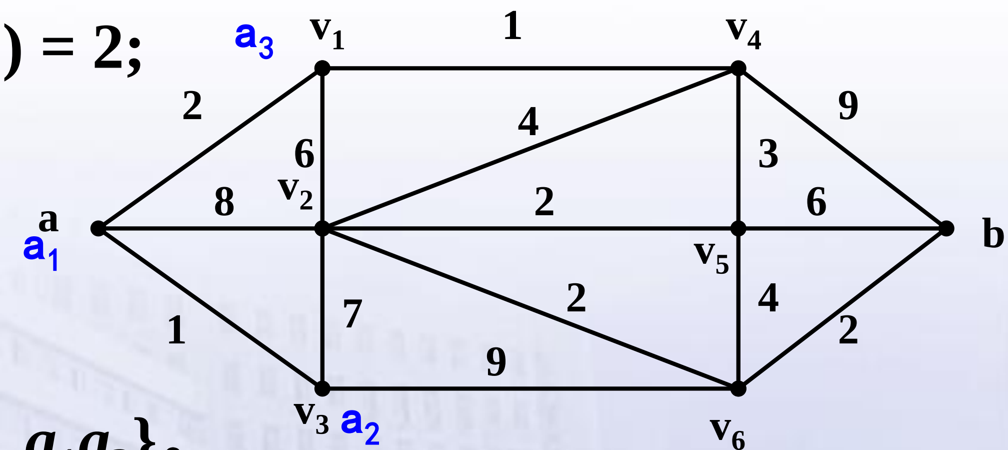
例1 如图所示，求点a到点b的距离。



解: 1、 $a = a_1$ $\quad t(a_1) = 0$， $A_1= \{a_1\}$, $T_1 = \Phi$ 。

2、 $a_1 \rightarrow v_3$ $\quad t(a_1) + w(a_1 v_3) = 1$;

$v_3 = a_2$ $\quad t(a_2) = 1$; $\quad A_2= \{a_1, a_2\}$, $\quad T_2 = \{a_1 a_2\}$。



3、(1) $a_1 \to v_1$，$t(a_1) + w(a_1v_1) = 2$;

$a_2 \to v_2$，$t(a_2) + w(a_2v_2) = 8$.

(2) $v_1 = a_3$ ，$t(a_3)=2$;

(3) $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$， $T_3 = \{a_1a_2, a_1a_3\}$。

4、(1) $a_1 \to v_2$，$t(a_1) + w(a_1v_2) = 8$;

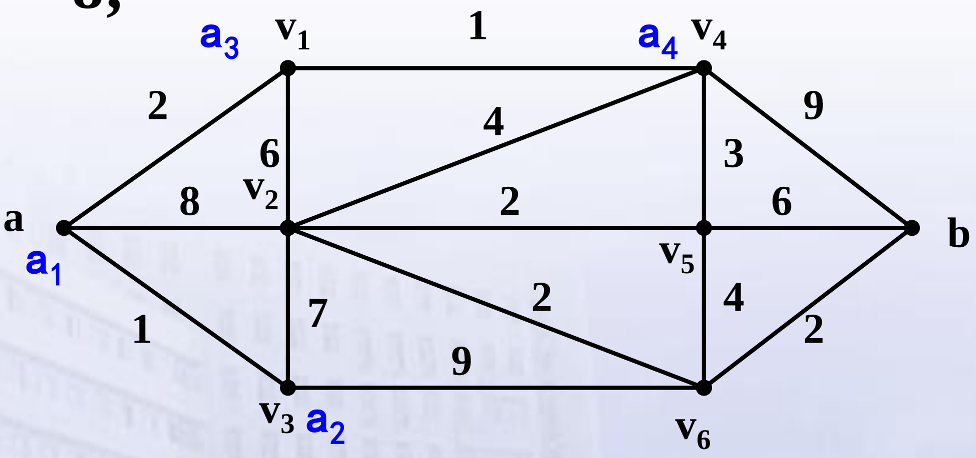
$a_2 \to v_2$，$t(a_2) + w(a_2v_2) = 8$;

$a_3 \to v_4$，$t(a_3) + w(a_3v_4) = 3$;

(2) $v_4 = a_4$ ，$t(a_4)=3$;

(3) $A_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$， $T_4 = \{a_1a_2, a_1a_3, a_3a_4\}$。

5、(1) $a_1 \rightarrow v_2$, $t(a_1) + w(a_1v_2) = 8$;



$a_2 \rightarrow v_2$, $t(a_2) + w(a_2v_2) = 8$;

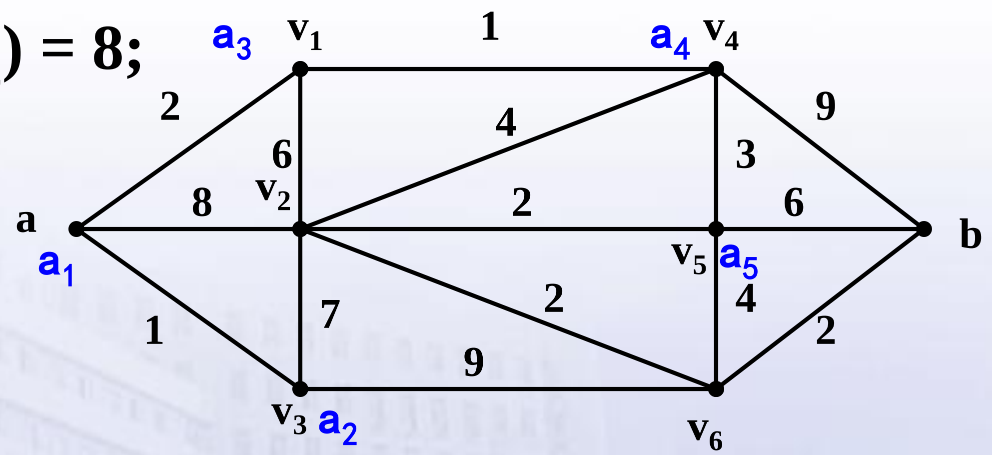
$a_3 \rightarrow v_2$, $t(a_3) + w(a_3v_2) = 8$;

$a_4 \rightarrow v_5$, $t(a_4) + w(a_4v_5) = 6$;

(2) $v_5 = a_5$, $t(a_5)=6$;

(3) $A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $T_5 = \{a_1a_2, a_1a_3, a_3a_4, a_4a_5\}$。

6、(1) $a_1 \rightarrow v_2$, $t(a_1) + w(a_1v_2) = 8$;



$a_2 \rightarrow v_2$, $t(a_2) + w(a_2v_2) = 8$;

$a_3 \rightarrow v_2$, $t(a_3) + w(a_3v_2) = 8$;

$a_4 \rightarrow v_2$, $t(a_4) + w(a_4v_2) = 7$;

$a_5 \rightarrow v_2$, $t(a_5) + w(a_5v_2) = 8$;

(2) $v_2 = a_6$, $t(a_6)=7$;

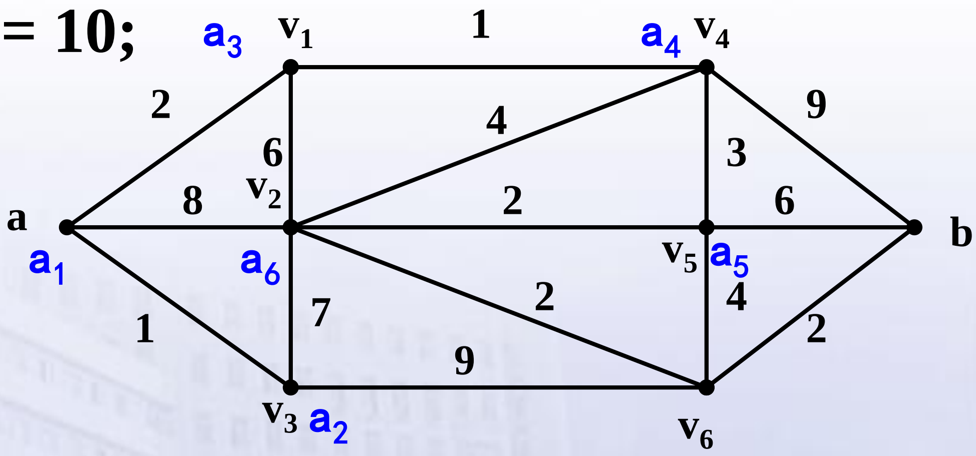
(3) $A_6= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $T_5 = \{a_1a_2, a_1a_3, a_3a_4, a_4a_5, a_4a_6\}$。

7、(1) $a_2 \to v_6$，$t(a_2) + w(a_2v_6) = 10$;

$a_4 \to b$，$t(a_4) + w(a_4b) = 12$;

$a_5 \to v_6$，$t(a_5) + w(a_5v_6) = 10$;

$a_6 \to v_6$，$t(a_6) + w(a_6v_6) = 9$;



(2) $v_6 = a_7$，$t(a_7)=9$;

(3) $A_7 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$,

$T_7 = \{a_1a_2, a_1a_3, a_3a_4, a_4a_5, a_4a_6, a_6a_7\}$。

8、(1) $a_4 \rightarrow b$, $t(a_4) + w(a_4b) = 12$;

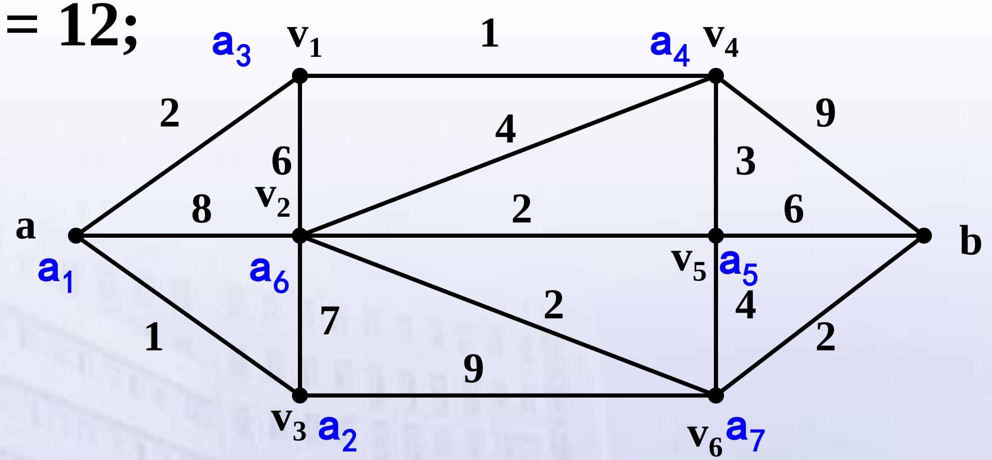
$a_5 \rightarrow b$, $t(a_5) + w(a_5b) = 12$;

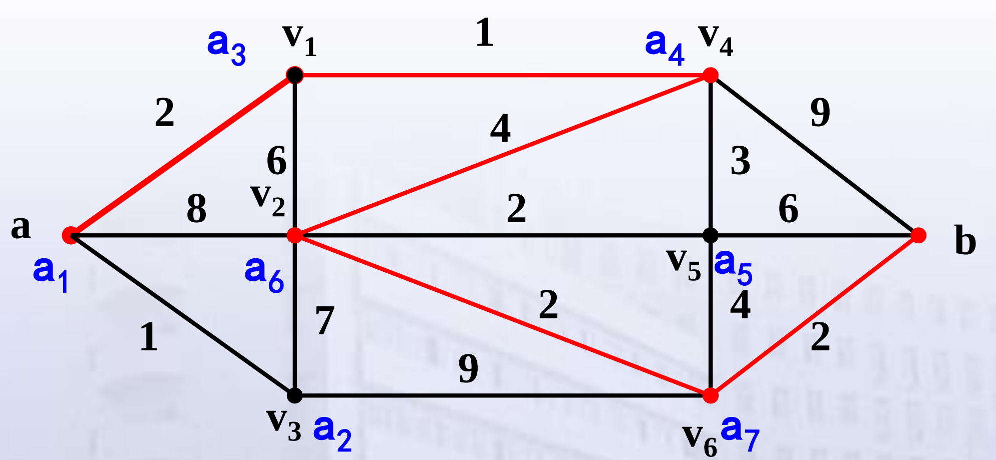
$a_7 \rightarrow b$, $t(a_7) + w(a_7b) = 11$;

(2) b $= a_8$, $t(a_8)=11$;

(3) $A_8 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$,

$T_8 = \{ a_1a_2, a_1a_3, a_3a_4, a_4a_5, a_4a_6, a_6a_7, a_7a_8\}$。





所以，**d (a , b) = 11.**

例2 某两人有一只8升的酒壶装满了酒，还有两只空壶，分别为5升和3升。求最少的操作次数能均分酒。

解：设x_1,x_2,x_3分别表示8,5,3升酒壶中的酒量。则

$$x_1+x_2+x_3=8, x_1\le 8, x_2\le 5, x_3\le 3.$$

容易算出(x_1,x_2,x_3) 的组合形式共24种。

每种组合用一个点表示，两点连线，当且仅当可通过倒酒的方式相互变换。

若各边赋权为1，则问题转化为在该图中求(8,0,0)到(4,4,0)的一条最短路。结果如下：

$$(8,0,0)\to(3,5,0)\to(3,2,3)\to(6,2,0)\to(6,0,2)\to(1,5,2)$$
$$\to(1,4,3)\to(4,4,0).$$

例3 在一河岸有狼，羊和卷心菜。摆渡人要将它们渡过河去，由于船太小，每次只能载一样东西。由于狼羊，羊卷心菜不能单独相处。问摆渡人至少要多少次才能将其渡过河？

分析：人，狼，羊，菜所有组合形式为：

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$$

但是以下组合不能允许出现：

狼羊菜，羊菜，狼羊，人，人狼，人菜，共6种。

岸上只能允许出现10种组合：

人狼羊菜，人狼羊，人狼菜，人羊，空，菜，羊，狼，狼菜，人羊菜。

每种情况用点表示.

两点连线，当且仅当两种情况可用载人(或加一物)的渡船相互转变。

每条边赋权为1

于是，问题转化为求由顶点“人狼羊菜”到顶点“空”的一条最短路。

结果为:

(1) 人狼羊菜→狼菜→人狼菜→狼→人狼羊→羊→人羊→空;

(2) 人狼羊菜→狼菜→人狼菜→菜→人羊菜→羊→人羊→空。

课外作业

某公司在六个城市C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6中有分公司，从C_i到C_j的直接航程票价记在下述矩阵的(i, j)位置上，∞表示没有直接航程。制作一张任意两城市间的最便宜的路线表。

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

作业

P29—P30　16

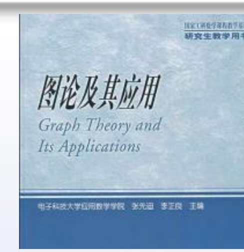
图论及其应用

任课教师：杨春

Email: yc517922@126.com

数学科学学院

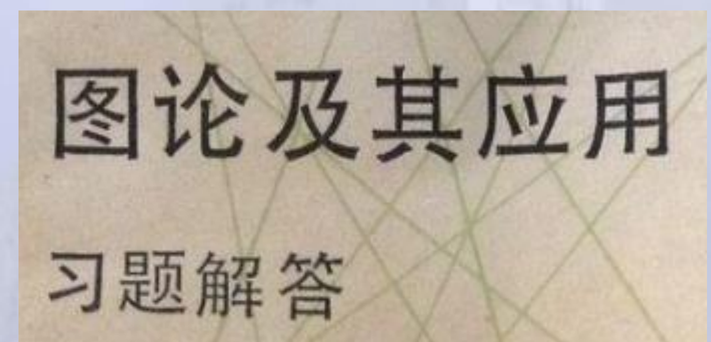
教材《图论及其应用》

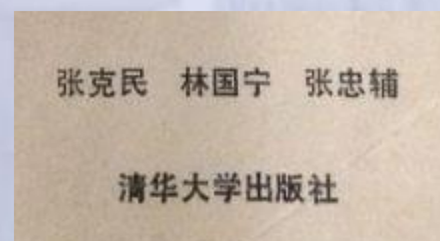


高等教育出版社

主编　张先迪、李正良

参考教材　美，帮迪《图论及其应用》





本次课内容

一、邻接谱、邻接代数与图空间

二、托兰定理

在图论中，代数图论是其重要分支。所谓代数图论，就是用代数方法研究图的结构性质，包括矩阵理论方法、群论方法等。代数图论已经广泛应用到数学、物理、网络技术和计算机科学中。在本课程中，我们只作一点简单认识。

一、邻接谱、邻接代数与图空间

(一)、图的邻接谱

1、定义1：图的邻接矩阵A(G)的特征值及其重数，称为G的邻接谱。

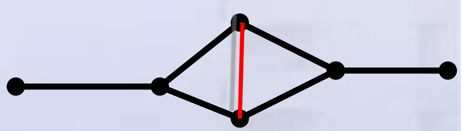
例如，我们能够容易求出完全图K_n的邻接谱为：

$$Spec(K_n)=\begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

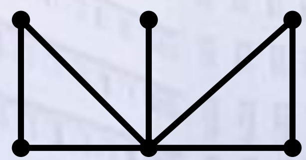
在邻接谱问题中，一个有趣的问题是“同谱图”问题。

定义2 若两个非同构的n阶图具有相同的谱，则称它们是同谱图。

例如，通过简单计算容易判定如下两图是同谱图。



G



H

2、邻接谱的两个性质

对图的邻接谱的研究形成了谱图理论的重要内容，得到了众多有用且优美的结果，作为简单认识，介绍两个结果。

定理1 设单图A(G)的谱为：$Spec(G)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s\\ m_1 & m_2 & \cdots & m_s\end{pmatrix}$

则：$\sum_{i=1}^{S} m_i\lambda_i^{2}=2m(G)$

注：定理1 给出了单图A(G)的谱与图的边数之间的关系。提示我们：通过研究邻接矩阵可以获取图的结构信息！也就是可以借助于矩阵理论方法研究图结构！实现图论的代数研究。

证明：由矩阵理论：$\sum_{i=1}^{S} m_i\lambda_i^{2}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(2)}$

因为G是单图，所以，$a_{ii}^{(2)}$表示点v_i的度数，由握手定理：

$$\sum_{i=1}^{S} m_i\lambda_i^{2}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(2)}=\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m(G)$$

例如，根据完全图的谱：$Spec(K_n)=\begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$，得到：

$$\sum_{i=1}^{s} m_i \lambda_i^{2} = (n-1)(-1)^2 + (n-1)^2 \times 1 = n(n-1) = 2m(K_n)$$

借助于矩阵理论方法研究图结构性质，要灵活应用矩阵理论结果！

定理2 设 λ 是单图G = (n, m)的任意特征值，则：

$$|\lambda| \le \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}$$

注：在图谱研究中(包括邻接谱，拉普拉斯谱，拟拉普拉斯谱等)，一个重要关注点之一是特征值模的上界估计。有趣的是，用不同的矩阵理论方法，可以获得不同的上界估计。

证明：不失一般性，设 $\lambda=\lambda_1$， λ_2， …， λ_n是G的全体特征值。

G是单图，有：$\lambda_1=-(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)\cdots(1)$

又由定理1，有：$\lambda_1^2=2m-\left(\lambda_2^2+\lambda_3^2+\cdots+\lambda_n^2\right)\cdots(2)$

对向量(1,1,…,1)与(λ_2, λ_3, λ_4, …, λ_n)用柯西不等式得：

$$\left|\lambda_2\cdot 1+\lambda_3\cdot 1+\cdots+\lambda_n\cdot 1\right|\le\sqrt{\lambda_2^2+\lambda_3^2+\cdots+\lambda_n^2}\cdot\sqrt{n-1}$$

该不等式结合(1)与(2)，容易得到：

$$|\lambda|\le\sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}$$

图的邻接谱起源于化学分子图结构研究(20世纪30年代)，1969年由萨克斯正式提出。到目前，理论内容宏大。在此仅作一点点介绍。有兴趣的同学可以参看：

【1】《Spectra of Graphs—Theory and Application》. D.M.Cvetkovic M.Doob H.Sachs.

【2】《Algebraic Graph Theory 》. N.Biggs.

(二)、图的邻接代数

图的邻接代数是与图的邻接矩阵相关联的一类代数。它是以邻接矩阵的多项式为元素构成的复数域上的向量空间。

1、图的邻接代数的定义

定义3：设A是无环图G的邻接矩阵，则：

$$\Lambda(G)=\left\{a_0E+a_1A+\cdots+a_kA^k \,\middle|\, a_i\in C, k\in Z^+\right\}$$

对于矩阵的加法和数与矩阵的乘法来说作成数域C上的向量空间，称该空间为图G的邻接代数。

注：向量空间的定义可简单地记为“非空”、“两闭”、“八条”.

2、图的邻接代数的维数特征

定理3：G为n阶连通无环图，则：

$$d(G)+1\le \dim \Lambda(G)\le n$$

证明： 由哈密尔顿—凯莱定理(见北大数学力学系《高等代数》)：$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n=0$

所以： $\dim\Lambda(G)\le n$.

下面证明：**E, A, A^2, … , A $^{d(G)}$** 线性无关！

若不然，则存在不全为零的数a_0 ,a_1 , … , $a_{d(G)}$,使：

$$a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_{d(G)}A^{d(G)}=0$$

设$a_{m-1}\neq 0$, 但当**k ≥ m** 时，有a_k =0. 于是有：

$$a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_{m-1}A^{m-1}=0,(a_{m-1}\neq 0)$$

假定：$v_1 v_2 \ldots v_{d(G)+1}$ 是G中一条最短的 $(v_1, v_{d(G)+1})$路.

于是，$d(v_1, v_m) = m-1$, $(m=1, 2, \ldots , d(G)+1)$

注意到：A^k的元素$a_{1m}^{(k)}$在 $k < m-1$ 时为零，而 $a_{1m}^{(m-1)} > 0$.

所以，$a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{m-1} A^{m-1}$ 的一行m列元为$a_{m-1} a_{1m}^{(m-1)} \neq 0$，这样有：

$$a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{m-1} A^{m-1} \neq 0$$

从而产生矛盾！证毕.

注：1、定理3是邻接代数的一个典型结论；

2、定理3中不等式的界是紧的，原因如下：

对于n点路来说，其直径d（G）= n-1，所以，此时该路的邻接代数的维数正好为n。

这就是说，如果G为n点路，那么：$\dim \Lambda(G) = n$

并且：$\dim \Lambda(G) = d(G) + 1$.

(三)、图空间

注：图空间概念是网络图论中的一个基本概念。研究通信网络，如果要用图论方法，建议参看陈树柏的《网络图论及其应用》，科学出版社，1982年。学习网络图论的主要基础是电工学与矩阵理论知识。

定理4：集合：

$$M=\{G_1,G_2,\cdots,G_N \mid G_i\text{为单图}G\text{的生成子图，}N=2^m\}$$

对于图的对称差运算和数乘运算：$0\bullet G_i=\Phi, 1\bullet G_i=G_i$

来说作成数域 **F = { 0, 1 }**上的**m**维向量空间。

证明: **(1)** 证明**M**是**F**上的向量空间，只需要验证“两闭”与“八条”即可。

（2） M的维数为m.

令 $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$

又令：$g_i=G[e_i],(1\le i\le m)$

可以证明：$g_1, g_2, \cdots, g_m$为M的一组基！

事实上：对 $\forall G_i \in M$

若$E(G_i)=\{e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{ik}\}$，则：$G_i = g_{i1} \Delta g_{i2} \Delta \cdots \Delta g_{ik}$

另一方面：若 $c_1 g_1 \Delta c_2 g_2 \Delta \cdots \Delta c_m g_m = \Phi$

则：$c_1=c_2= \cdots = c_m =0$

所以：$\dim(M) = m$

证明完毕.

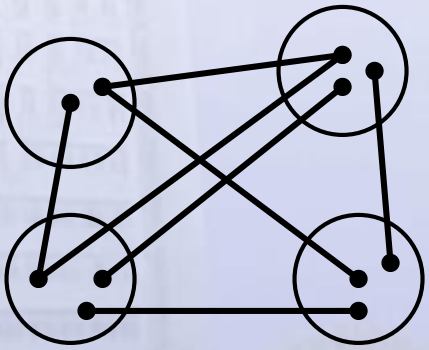
二、托兰定理

图论中，《极值图论》是研究满足某些性质的(最大或者最小)极值图问题，在许多学科、尤其是计算机学科中有非常重要的应用。我们只介绍极值图论的一个早期结果—托兰定理。主要目的是简单认识极值图论。

(一)、*l* 部图的概念与特征

定义4 若简单图G的点集V有一个划分：

$$V=\bigcup_{i=1}^{l} V_i, V_i \cap V_j = \Phi, i \neq j$$



4部图

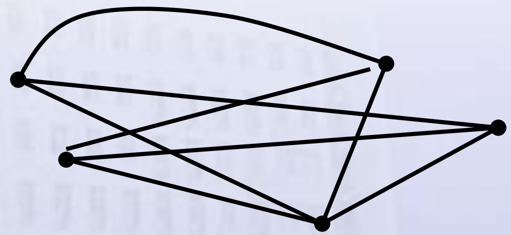
且所有的V_i非空，V_i内的点均不邻接，称G是一个*l* 部图。

定义5 如果在一个*l* 部图*G*中，任意部V_i中的每个顶点同G中其它各部中的每个顶点均邻接，称G为完全*l* 部图。记作：

$$G = K_{n_1, n_2, \cdots, n_l}, (n_i = |V_i|, 1 \le i \le l)$$

显然：

$$|V| = \sum_{i}^{l} n_i, \ m(G) = \sum_{1 \le i < j \le l} n_i n_j$$



$K_{1, 2, 2}$

定义6 如果在一个*n*个点的完全 *l* 部图*G*中有：$n = kl + r, 0 \le r < l$

$$|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_r| = k + 1 \qquad |V_{r+1}| = |V_{r+2}| = \cdots = |V_l| = k$$

则称*G*为*n*阶完全 *l* 几乎等部图，记为$T_{l,n}$.

定理5 n阶l部图G有最多边数的充要条件是$G\cong T_{l,n}$。

证明：首先有：$m(G)\le m(K_{n_1,n_2,\cdots,n_l})$

其次，考虑：$f(n_1,n_2,\cdots,n_l)=\sum_{i<j} n_i n_j, s.t. \sum_{i=1}^{l} n_i = n$

则 f 取最大值的充分必要条件为：$1\le i< j \le l$，有：$|n_i-n_j|\le 1$

而G的对应的顶点划分形成的 l 部图正好为$T_{l,n}$.

(二)、托兰定理

1、定义4 设G和H是两个n阶图，称G度弱于H，如果存在双射μ：V(G)→V(H)，使得：$\forall v \in V(G)$,有：$d_G(v) \le d_H(\mu(v))$

注意：(1) 两个n阶图可能不存在度弱关系：如(1, 2, 2, 7)与(3, 1, 4, 6)就不存在度弱关系；

(2) 若G度弱于H，一定有：$m(G) \le m(H)$！

但是，反过来不一定！

例如：(1, 1, 4, 2)与(3, 3, 3, 3)没有度弱关系！但后者边数显然大于前者！

定理6 若n阶简单图G不包含K_{l+1}，则G度弱于某个完全 l 部图 H，且若G具有与 H 相同的度序列，则:

$$G \cong H$$

定理7（Turán）若G是简单图，并且不包含 K_{l+1},则：

$$m(G) \leq m(T_{l,n})$$

仅当 $G \cong T_{l,n}$ 时，有 $m(G) = m(T_{l,n})$

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

托兰定理指出：不含K_l+1的极值图是完全l几乎等部图。托兰定理开启了极值图论研究的先河！特别是他的朋友，伟大数学家厄多斯是这个领域的杰出人物。

P. Erdös是数学界的传奇人物，国际图论大师，获过Wolf数学奖。他是20世纪最伟大的数学家之一，也是人类历史上发表数学论文最多的数学家(1000多篇),第二名是欧拉(837篇)。他于1996年9月20日因心脏病去世，享年83岁，他的逝世当时惊动了整个数学界。

参考书：《Extremal Graph theory》.Béla Bollobás.

(三)、托兰定理的应用

问题：工兵排雷问题

一个小组n个人在一个平原地区执行一项排雷任务。其中任意的两个人，若其距离不超过g米，则可用无线电保持联系；若发生触雷意外，地雷的杀伤半径为h米。问：在任意的两个人之间均能保持联系的条件下，平均伤亡人数最低的可能值为多少？

分析：(1)为保持通信，排雷工兵相互之间距离不能超过g米。因此，他们必须分布在直径是g米的圆形区域内.

(2) 若某人*A*触雷，则与*A*的距离大于*h*米的人将是安全的，但究竟哪个人会发生触雷意外，事先是不知道的，所以此问题实际上是求在任意的两个人之间的距离不超过*g*米的条件下，距离大于*h*米的人数对最多能达到多少对 。

(3) 如果有n个工兵：$\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, 每个工兵用一个点表示，两点连线，当且仅当他们距离大于h米.于是，问题转化为求一个与该连接方式对应的极图。

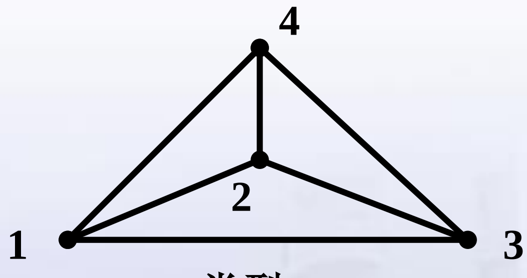
下面，以 $g=1, h=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 为例来分析该问题。

设A=｛$x_1,x_2,\ldots,x_n$｝是n个工兵集合。他们分布在直径为1的圆形区域内。以A中每个元素为顶点，两个顶点连线，当且仅当它们距离大于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。这样得到一个n阶图G.

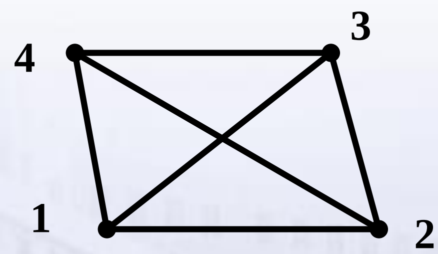
对于A中元素的每一分布，都会对应一个图，所以，所有的分布，将对应一个所谓的图族。在该图族中，存在一个图，其包含边数最多。下面求出该图。

首先，可以证明，上面的图族中每个图都不包含4阶完全图。

事实上，若在G中存在K_4, 则K_4的构型有如下两种类型：



类型1



类型2

在类型1中，由于∠123，∠124，∠324中至少有一个大于90度，由余弦定理，该三角所对的边中，至少有一条长度超过1，与要求相矛盾！

在类型2中，由于∠143，∠432，∠321，∠214中至少有一个大于等于90度，由余弦定理，该四角所对的边中，至少有一条长度超过1，与要求相矛盾！

所以，在G中不存在K_4。

其次，由托兰定理： $|E(G)| \le |E(T_{3,n})| = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$

上面结果表明：设$A=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$为任意一个直径为1的平面点集，则$A$中距离大于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的点对的最大数目为$\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$

下面，构造最优分布图:

(1) 将A分成三个子集如下：

$$A_1 = \left\{ x_1, x_2, \cdots, x_{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \right\} \quad A_2 = \left\{ x_{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1}, x_{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2}, \cdots, x_{\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor} \right\}$$

$$A_3 = \left\{ x_{\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1}, x_{\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 2}, \cdots, x_n \right\}$$

(2) 选择r，使 $0<r<(1-\frac{\sqrt{2}}{2})/4$, 以r为半径画三个圆，圆心分别相距1-2r.

(3) 将A_1, A_2, A_3中的点各放于一个圆中，并使 $d(x_1,x_n)=1$.

上世纪70年代末，极值图论已经形成了相对完整的理论体系，但还有很多引人入胜的公开性问题没有解决，所以，直到现在，它仍然是重要研究方向。但是，该方向是比较困难的数学研究方向之一。

谢谢！