1.3 数值运算的误差估计

1. 函数运算的误差估计：

设$y=f(x)$为一元函数，自变量准确值x^*，对应函数准确值$y^*=f(x^*)$，x误差为$e(x)$，误差限为$\varepsilon(x)$，函数近似值误差$e(y)$，误差限为$\varepsilon(y)$. 则

（可由Taylor公式推得）

$$\varepsilon(y) \approx |f'(x)|\,\varepsilon(x)$$

$$\varepsilon_r(y) \approx \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}\varepsilon_r(x)$$

对于多元函数 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

设准确值 $z^* = f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$

由多元函数Taylor公式，可得误差估计：

$$\varepsilon(z) \approx \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial z}{\partial x_k} \right| \varepsilon(x_k)$$

相对误差限为：

$$\varepsilon_r(z) \approx \sum_{k=1}^{n} \left| x_k \cdot \frac{\partial z}{\partial x_k} \right| \frac{\varepsilon_r(x_k)}{|z|}$$

2. 算术运算的误差估计：

两个近似数x_1, x_2，其误差限分别为$\varepsilon(x_1)$，$\varepsilon(x_2)$，它们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别为：

$$\varepsilon(x_1 \pm x_2) = \varepsilon(x_1) + \varepsilon(x_2)$$

$$\varepsilon(x_1 \cdot x_2) = |x_1|\varepsilon(x_2) + |x_2|\varepsilon(x_1)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{|x_1|\varepsilon(x_2) + |x_2|\varepsilon(x_1)}{|x_2|^2}$$

例4:

设$a=2.31,b=1.93,c=2.24$都是三位有效数字的近似数，令$p=a+bc$，求$\varepsilon(p)$和$\varepsilon_r(p)$，并判断p有几位有效数字.

解 由题知，$\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=\varepsilon(c)=0.005$

$$\varepsilon(p)=\varepsilon(a)+\varepsilon(bc)\approx\varepsilon(a)+|b|\,\varepsilon(c)+|c|\,\varepsilon(b)$$
$$=0.005+1.93\times0.005+2.24\times0.005=0.02585$$

又 $p=a+bc=2.31+1.93\times2.24=6.6332$

故 $\varepsilon_r(p)=\varepsilon(p)/|p|\approx0.02585/6.6332\approx0.0039=0.39\%$

因为 $\varepsilon(p)\approx0.02585<0.05=1/2\times10^{1-2}$

所以$p=6.6332$中只有两位有效数字.

1.4 数值运算中的一些基本原则

1. 避免除数的绝对值远小于被除数的绝对值;
2. 避免两个相近的数相减;
3. 防止大数“吃掉”小数现象;
4. 简化计算步骤，减少运算次数;
5. 选用数值稳定性好的算法.

1. 避免除数的绝对值远小于被除数的绝对值

设 $z=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$ 若 $|x| << |y|$,

因 $$\varepsilon\left(\frac{y}{x}\right)\approx\frac{|x|\varepsilon(y)+|y|\varepsilon(x)}{|x|^2}=\frac{\varepsilon(y)}{|x|}+\frac{|y|}{|x|^2}\varepsilon(x)$$

表明当 $|x|$ 相对太小时，商的绝对误差可能很大.

2. 避免两个相近的数相减

若$y\approx x$，设$z=y-x$，则$\varepsilon(z)=\varepsilon(y)+\varepsilon(x)$，

$$\varepsilon_r(z)\le\frac{|y|}{|z|}\varepsilon_r(y)+\frac{|x|}{|z|}\varepsilon_r(x)$$

当$y\approx x$时，$z\approx 0$，相对误差限会很大，导致结果有效数字位数减少.

避免两个相近的数相减方法：常用一些恒等变形实现.

如当x充分大时，

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

当x绝对值很小时，

$$1-\cos x=2\sin^{2}(\frac{x}{2})$$

$$e^{x}-1\approx x+\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+\cdots+\frac{1}{n!}x_{n}$$

3. 防止大数“吃掉”小数现象

原因： 计算机表示的数位数有限，很大的数和很小的数相加减时，很小的数会被“吃掉”（舍去）.

方法： 当绝对值悬殊的一系列数相加时，若有 $|x_1|>|x_2|>\ldots>|x_n|$，应按绝对值由小到大的顺序累加.

例　计算方程 $x^2-(10^9+1)x+10^9=0$ 的根.

算法一：利用求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

在计算机内， 10^9存为0.1×10^{10}，1存为0.1×10^{1}。做加法时，两加数的指数先向大指数对齐，再将浮点部分相加.

即1 的指数部分须变为10^{10}，则：$1 = 0.0000000001\times 10^{10}$，取单精度时就成为：

$10^9+1=0.10000000\times 10^{10}+0.00000000\times 10^{10}$
$=0.10000000\times 10^{10}$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 10^9, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$$

算法二： 先解出

$$x_1 = \frac{-b-sign(b)\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 10^9$$

再利用

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{c}{a \cdot x_1} = \frac{10^9}{10^9} = 1$$

例2（思考题）：

按从小到大、以及从大到小的顺序分别计算

$1 + 2 + 3 + \ldots + 40 + 10^9$

4. 简化计算步骤，减少运算次数 （即减少计算工作量）

如：　　计算

$$P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + \cdots + a_0$$

若直接求和，计算第k项时需n-k+1次乘法，故共需$n(n+1)/2$次“×”和n次“+”.

若将公式改写为：

$$P_n(x)=x(x\cdots(x(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \cdots + a_1) + a_0$$

则只需n次“×”，n次“+”，即秦九韶算法.

5. 选用数值稳定性好的算法

将输入数据有误差，但在运算过程中舍入误差不增长的算法称**数值稳定的**，否则是**数值不稳定的**.

只有数值稳定的数值方法才能给出可靠的计算结果.

例： 设有递推关系：$y_n = 10y_{n-1} - 1 \quad (n=1,2,\ldots)$

若取 $y_0^* = \sqrt{2} \approx 1.41$ （三位有效数字）

试估计计算到y_{10}时误差有多大?

解： 因 $y_0^* = \sqrt{2}, y_0 = 1.41$

而 $\left|y_0 - y_0^*\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \delta$

于是有

$$\left|y_1-y_1^*\right|=\left|10y_0-1-10y_0^*+1\right|=10\left|y_0-y_0^*\right|\le 10\delta$$

$$\left|y_2-y_2^*\right|=\left|10y_1-1-10y_1^*+1\right|=10\left|y_1-y_1^*\right|\le 10^2\delta$$

类推，有

$$\left|y_{10}-y_{10}^*\right|\le 10^{10}\delta$$

即计算到y_{10}，其误差限为$10^{10}\delta$，亦即若在y_0处有误差限为δ，则y_{10}的误差限将扩大10^{10}倍，可见这个计算过程是不稳定的.

THE

END