第三章　线性方程组的数值解法（二）

--线性方程组的迭代解法

3.2 线性方程组的迭代解法

- 迭代法的基本思想
- Jacobi迭代法和Gauss－Seidel迭代法
- 迭代法的收敛性
- 超松弛迭代法
- 分块迭代法
- 极小化方法

3.2.1 迭代法的基本思想

例：求解方程组 $$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$$

其精确解是$x^*=(3,2,1)^T$.

现将原方程组改写为
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{8}(3x_2 - 2x_3 + 20) \\ x_2 = \dfrac{1}{11}(-4x_1 + x_3 + 33) \\ x_3 = \dfrac{1}{12}(-6x_1 - 3x_2 + 36) \end{cases}$$

简写为$x=B_0x+f$，其中

$$B_0=\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{bmatrix} \qquad f=\begin{bmatrix} \frac{20}{8} \\ \frac{33}{11} \\ \frac{36}{12} \end{bmatrix}$$

任取初始值，如取$x^{(0)}=(0,0,0)^T$，代入$x=B_0x+f$右边，若等式成立则求得方程组的解.

否则，得新值$x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)})^T=(2.5,3,3)^T$，再将$x^{(1)}$代入…

反复计算，得一向量序列$\{x^{(k)}\}$和一般的计算公式（迭代公式）：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 20) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(-4x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 33) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{12}(-6x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} + 36) \end{cases}$$

简写为$x^{(k+1)}=B_0x^{(k)}+f \quad (k=0,1,2,\ldots\ldots)$

迭代到第10次时有

$x^{(10)}=(3.000032,1.999838,0.999813)^T$

$\|\varepsilon^{(10)}\|_\infty=\|x^{(10)}-x^*\|=0.000187$

定义：

（1）对于给定方程组$x=Bx+f$，用迭代公式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ $(k=0,1,2,\ldots\ldots)$逐步代入求近似解的方法称**迭代法**；

（2）若$k\rightarrow\infty$时$\lim x^{(k)}$存在（记为x^*），称此迭代法收敛，显然x^*就是方程组的解，否则称迭代法发散；

（3）B称为**迭代矩阵**.

问题：

- 如何建立迭代格式？
- 收敛速度？
- 向量序列的收敛条件？
- 误差估计？

3.2.2 Jacobi迭代与Gauss－Seidel迭代

（一） Jacobi迭代法

设$Ax=b$，A非奇异，且对角元不为零，将原方程组改写为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

选取初始向量 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$

代入上面方程组右端得 $x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})$

又代入，反复继续，得迭代格式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(k)}-\cdots-a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(k)}-\cdots-a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}x_1^{(k)}-\cdots-a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

称Jacobi迭代法.

Jacobi迭代法的矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & & \dots & . \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ . \\ . \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & & \dots & . \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ . \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & & \cdots & \cdot \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \cdot \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

矩阵表示：

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J$$

计算公式为：

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} + \frac{b_i}{a_{ii}} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}]$$

(i=1,2,……,n)，(k=0,1,2,……表迭代次数)

将方程组$Ax=b$的系数矩阵A分解为：$A=D-L-U$

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad L=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

（$a_{ii}\neq 0$）

$$x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+f_J$$

$$U=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

则$B_J=I-D^{-1}A$

$=D^{-1}(L+U)$,

$f_J=D^{-1}b$,

称B_J为Jacobi迭代矩阵.

例1: 用Jacobi迭代法求解方程组，误差不超过10^{-4}.

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$$

解:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$f = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

取初值$x^{(0)} = [0 \ \ 0 \ \ 0]^T$,使用$Jacobi$迭代法

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f \quad (k = 0,1,2,\cdots n,\cdots)$$

$$x^{(1)} = B_J x^{(0)} + f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= [2.5,\ 3,\ 3]^T \qquad \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_2 = 4.924$$

$$x^{(2)} = B_J x^{(1)} + f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= [2.875,\ 2.3636, 1]^T \qquad \left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_2 = 2.1320$$

$$x^{(3)} = B_J x^{(2)} + f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.875 \\ 2.3636 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= [3.1364, 2.0455, 0.9716]^T \qquad \left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_2 = 0.4127$$

依此类推,得方程组满足精度的解为x_{12}:

$x_4 =$	3.0241	1.9478	0.9205	$d =$ 0.1573
$x_5 =$	3.0003	1.9840	1.0010	$d =$ 0.0914
$x_6 =$	2.9938	2.0000	1.0038	$d =$ 0.0175
$x_7 =$	2.9990	2.0026	1.0031	$d =$ 0.0059
$x_8 =$	3.0002	2.0006	0.9998	$d =$ 0.0040
$x_9 =$	3.0003	1.9999	0.9997	$d =$ 7.3612e-004
$x_{10} =$	3.0000	1.9999	0.9999	$d =$ 2.8918e-004
$x_{11} =$	3.0000	2.0000	1.0000	$d =$ 1.7669e-004
$x_{12} =$	3.0000	2.0000	1.0000	$d =$ 3.0647e-005

迭代次数:
12次

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0000 \\ 2.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

（二） Gauss－Seidel迭代法

若在迭代时尽量利用最新信息，则可将迭代格式变为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

称Gauss－Seidel迭代法.

计算公式:

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{11}}b_1$$

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}b_i$$

（i=2,3,……,n–1）

$$x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)} + \frac{1}{a_{nn}}b_n$$

即

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}]$$

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+2)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

故 $(D-L)x^{(k+1)} = b + Ux^{(k)}$

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

Gauss－Seidel迭代格式：

$$x^{(k+1)} = B_{G-S}\,x^{(k)} + f_{G-S}$$

其中 $B_{G\text{-}S}=(D-L)^{-1}U$ 称**Gauss－Seidel迭代矩阵**.

例2. 用Gauss-Seidel迭代法求解例1方程组

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$$

要求误差仍然不超过10^{-4}.

解: Gauss-Seidel迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) + 2.5 \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(-4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) + 3 \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}(-2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) + 3 \end{cases}$$

取初值$x^{(0)}=(0,0,0)^T$通过迭代，至第7步得到满足精度的解x_7:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2.5000 \quad 2.0909 \quad 1.2273 \quad d = 3.4825 \\
x_2 &= 2.9773 \quad 2.0289 \quad 1.0041 \quad d = 0.5305 \\
x_3 &= 3.0098 \quad 1.9968 \quad 0.9959 \quad d = 0.0465 \\
x_4 &= 2.9998 \quad 1.9997 \quad 1.0002 \quad d = 0.0112 \\
x_5 &= 2.9998 \quad 2.0001 \quad 1.0001 \quad d = 3.9735\text{e-}004 \\
x_6 &= 3.0000 \quad 2.0000 \quad 1.0000 \quad d = 1.9555\text{e-}004 \\
x_7 &= 3.0000 \quad 2.0000 \quad 1.0000 \quad d = 1.1576\text{e-}005
\end{aligned}
$$

从例1和例2可以看出，Gauss-Seidel迭代法的收敛速度比Jacobi迭代法要快.

Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法统称为**简单迭代法**.

3.2.3 迭代法的收敛性

设求解线性方程组的迭代格式为

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

而方程组的精确解为x^*，则

$$x^* = Bx^* + f$$

将上面两式相减,得

$$x^{(k+1)} - x^* = B(x^{(k)} - x^*)$$

令$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^* \quad k = 0,1,2,\cdots$

则 $\varepsilon^{(k+1)} = B\varepsilon^{(k)} = B^2\varepsilon^{(k-1)} = \cdots = B^{k+1}\varepsilon^{(0)}$

注意$\varepsilon^{(0)} = x^{(0)} - x^*$为非零常数向量

因此迭代法收敛的充要条件

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty}(x^{(k+1)} - x^*) = 0$$

可转变为 $\lim\limits_{k\to\infty} B^{k+1} = 0$

引理：迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

收敛的充要条件为 $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0.$

定理： 迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

收敛的充要条件为 **迭代矩阵的谱半径$\rho(B)<1$.**

证：对任何 n 阶矩阵B，都存在非奇矩阵P，使

$$B = P^{-1} J P$$

其中， J 为B的 Jordan 标准型.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}_{n\times n}$$

其中, J_i 为Jordan块

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

其中λ_i 是矩阵B的特征值， 由 $B = P^{-1} J P$

$$B^k = (P^{-1} J P)(P^{-1} J P) \cdots (P^{-1} J P) = P^{-1} J^k P$$

迭代法 $x^{(k+1)} = B x^{(k)} + f$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} J^k = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\lambda_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \max_{1\le i\le r} |\lambda_i| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{谱半径}\rho(B) < 1$$