收敛阶定义：

设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于方程$x=\varphi(x)$的根x^*，若迭代误差 $e_k=x_k-x^*$ 当$k\to\infty$时成立下列渐近关系式：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r}=c \qquad （c为常数，且c\neq 0）$$

则称迭代过程是r阶收敛的.

特别地，$r=1$时称线性收敛；

$r=2$时称平方收敛；

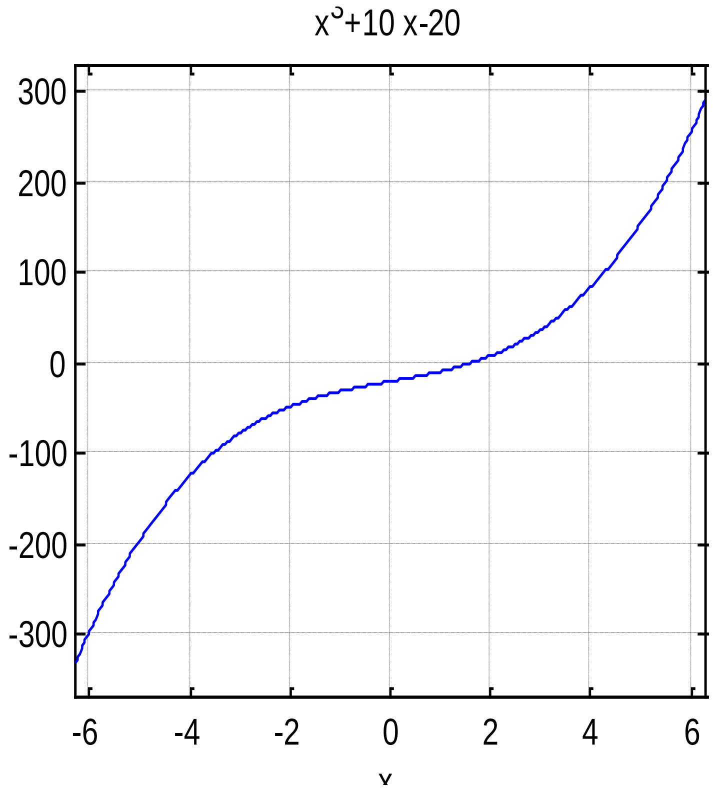
$r>1$时称超线性收敛.

且r 越大，收敛越快.

例： 求解方程 $x^3+10x-20=0$ 的根. 取 $x_0=1.5$，证明迭代法 $x_{n+1}=20/(x_n^2+10)$ 是线性收敛的.

证: 令 $f(x)=x^3+10x-20$,

首先绘出 $y=f(x)$ 图形：



可知方程的根 $x^*\approx 1.5$, 令

$$\varphi(x)=20/(x^2+10)$$

$$|\varphi'(x)|=40x/(x^2+10)^2$$

$$|\varphi'(x^*)|\approx|\varphi'(1.5)|=0.3998$$

显然,在x^*附近

$$|\varphi'(x)|<1 \qquad \varphi'(x)\neq 0$$

利用Lagrange中值定理, 有

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi_n)||x_n-x^*|$$

其中, ξ_n 介于x_n和x^*之间. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=\lim_{n\to\infty}|\varphi'(\xi_n)|=|\varphi'(x^*)|$$

由此可知, 这一序列的收敛阶数为1, 即迭代法是线性收敛.

定理： 设x^*为$x=\varphi(x)$的不动点，若$\varphi(x)$满足：

- （1） $\varphi(x)$在x^*附近是p次连续可微的$(p>1)$；
- （2） $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0, \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$

则迭代过程$x_{n+1}=\varphi(x_n)$在点x^*邻近是p阶收敛的.

证： 由Taylor公式

$$\varphi(x_n) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{1}{2!}\varphi''(x^*)(x_n - x^*)^2 + \cdots + \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n)(x_n - x^*)^p$$

得 $$|x_{n+1} - x^*| = |\varphi(x_n) - \varphi(x^*)| = \frac{|x_n - x^*|^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(\xi_n)| = \frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(x^*)|$$

故迭代过程$x_{n+1}=\varphi(x_n)$ p阶收敛.

2.3.3 迭代收敛的加速方法

一、Aitken加速收敛方法：

由微分中值定理，有

$$x_1 - x^* = \varphi(x_0) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_0 - x^*)$$

假定$\varphi`(x)$改变不大，近似取某个近似值L，则有

$$x_1 - x^* \approx L(x_0 - x^*)$$

同理

$$x_2 - x^* \approx L(x_1 - x^*)$$

两式相比，得
$$\frac{x_1 - x^*}{x_2 - x^*} \approx \frac{x_0 - x^*}{x_1 - x^*}$$

故

$$x^* \approx \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = \tilde{x}_0$$

类推可得

$$\tilde{x}_k = x_{k+2} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

上式即为Aitken加速收敛方法的迭代格式.

例： 分析数列 $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ 收敛于 $\frac{\pi}{4}$ 的速度快慢.

```
x0=1;f=1;n=1;
k=0;error=1;
while error>0.00001
   f=-f;n=n+2;
   x=x0+f/n;
   error=abs(x-x0);
   x0=x;k=k+1;
end
k, 4*x
```

k = 50000

ans = 3.1416

Aitken加速方法: $y_{k+2} = x_{k+2} - \dfrac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$

```
x1=1;x2=x1-1/3;x3=x2+1/5;
y0=x3; k=3;n=5;
f=1;error=1;
while error>0.00001
   y=x3-(x3-x2)^2/(x3-2*x2+x1);
   error=abs(y-y0);y0=y; k=k+1;
   x1=x2;x2=x3;
   f=-f;n=n+2;x3=x3+f/n;
end
k,4*y
```

```
k =    26

ans =    3.1416
```

二、Steffensen迭代法：

将Aitken加速技巧与不动点结合可得

$$y_k = \varphi(x_k) \qquad z_k = \varphi(y_k)$$

$$x_{k+1} = z_k - \frac{(z_k - y_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}$$

或将其写为 $\quad x_{k+1} = \Psi(x_k)$

$$\Psi(x) = \varphi(\varphi(x)) - \frac{[\varphi(\varphi(x)) - \varphi(x)]^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}$$

例 求方程 $3x^2 - e^x = 0$ 在[3,4]中的解.

解 由 $e^x = 3x^2$

取对数 $x = \ln 3x^2 = 2\ln x + \ln 3 = \varphi(x)$

构造迭代格式 $x_{k+1} = 2\ln x_k + \ln 3$

故 $\varphi'(x) = \dfrac{2}{x}$

当 $x \in [3,4]$时，$\varphi(x) \in [3,4]$，且

$\max|\varphi'(x)| \le \dfrac{2}{3} < 1$ 故迭代格式收敛.

取x_0=3.5，经计算可得迭代16次后x_{16}=3.73307，有6位有效数字.

若用steffensen迭代法加速，结果如下：

k	x_k	y_k	z_k
0	3.5	3.60414	3.66202
1	3.73444	3.73381	3.73347
2	3.73307		

说明steffensen迭代法的收敛速度比不动点迭代快得多.

例： 用steffensen迭代法求解方程 $x^3 - x - 1=0$.

解： 由前知，迭代格式 $x_{k+1}=x_k^3-1$ 是发散的. 现用steffensen迭代法计算. 取$\varphi(x)=x^3-1$，结果如下：

k	x_k	y_k	z_k
0	1.5	2.37500	12.3965
1	1.41629	1.84092	5.23888
2	1.35565	1.49140	2.31728
3	1.32895	1.34710	1.44435
4	1.32480	1.32518	1.32714
5	1.32472		

表明即使不动点迭代法不收敛，用steffensen迭代法仍可能收敛.

2.4 Newton迭代法

- Newton迭代法及其收敛性
- 简化Newton迭代法（平行弦法）
- 弦截法
- Newton下山法
- 重根情形

2.4.1 Newton迭代法及其收敛性

基本思想：将非线性方程逐步归结为某种线性方程求解.

设方程$f(x)=0$有近似根x_k（$f`(x_k)\neq 0$），将$f(x)$在x_k展开：　　　　（ξ在x和x_k之间）

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_k)^2$$

可设

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

故$f(x)=0$可近似表示为

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

记该线性方程的根为x_{k+1}，则

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad （k=0,1,\ldots\ldots）$$

即为Newton法迭代格式.

例：用Newton迭代法求方程 $x^3-3x-1=0$

在x_0=2附近的近似实根.

解：$f(x)=x^3-3x-1, f'(x)=3x^2-3$

迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-3x_k-1}{3x_k^2-3}$$

计算步骤如下:

（1）取初值x0=2;

（2）按照迭代公式计算x1;

（3）若|x1-x0|<=0.00001,终止迭代;否则,x0=x1;转(2);

（4）输出迭代次数和近似根.

MATLAB求解程序：

1.方程及一阶导函数计算：

```
function [fun,dfun]=fun0(x)
fun=x^3-3*x-1;%求原函数的值
dfun=3*x^2-3;%求一阶导数的值
```

2.计算主程序：

```
clear
x0=2;
[fun,dfun]=fun0(x0);
x1=x0-fun/dfun;i=1;
while abs(x1-x0)>1e-8
    x0=x1;
    [fun,dfun]=fun0(x0);
    x1=x0-fun/dfun;
    i=i+1;
end
disp('the solution is x1=')
x1
disp('the iter time is ')
i
```

计算结果为：

the solution is x1=

x1 =

1.8794

the iter time is

i =

4

可见经过4次迭代即到达要求的精度，原方程的一个近似实数根为1.8794.

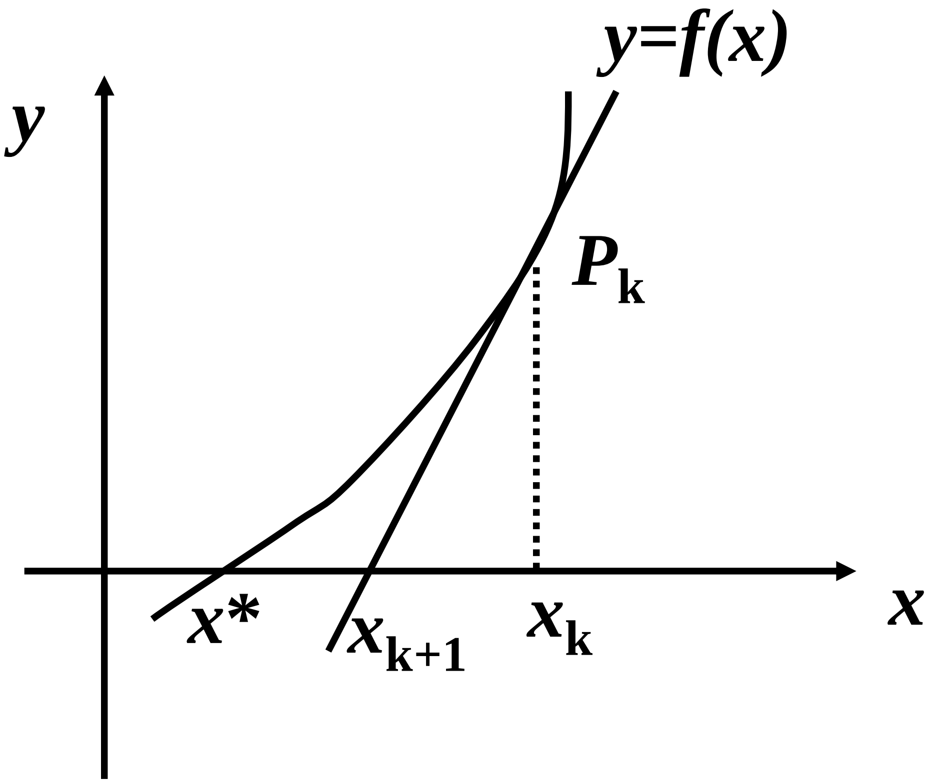
- **Newton迭代法的几何意义：** （亦称切线法）

切线方程

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

故

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



应用——求正数平方根算法

设 $C > 0$, $x = \sqrt{C}$ $\Rightarrow$ $x^2 - C = 0$

令 $f(x) = x^2 - C$, 则 $f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - C}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + \frac{C}{x_n}]$$

例： 设$C>0$，证明由迭代格式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{C}{x_n}\right)$ （$n=0$, 1，……)产生的迭代序列$\{x_n\}$，对任意的$x_0>0$，均收敛于$\sqrt{C}$;且具有 2 阶收敛速度.

分析： 由迭代格式，有 $$x_{n+1}=\frac{1}{2x_n}\left(x_n^2+C\right)$$

$$x_{n+1}-\sqrt{C}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{C}{x_n}\right)-\sqrt{C}$$

$$=\frac{1}{2x_n}\left(x_n^2-2x_n\sqrt{C}+C\right)=\frac{1}{2x_n}\left(x_n-\sqrt{C}\right)^2$$

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{C}}{\left(x_n-\sqrt{C}\right)^2}=\frac{1}{2x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=?$$

证明：由迭代格式，有

$$x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 + C\right)$$

等式两端同减$\sqrt{C}$，配方得

$$x_{n+1} - \sqrt{C} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{C}\right)^2$$

同理有

$$x_{n+1} + \sqrt{C} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n + \sqrt{C}\right)^2$$

将上面两式相除有

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{C}}{x_{n+1}+\sqrt{C}}=\left(\frac{x_n-\sqrt{C}}{x_n+\sqrt{C}}\right)^2$$

反复递推，得

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{C}}{x_{n+1}+\sqrt{C}}=\left(\frac{x_n-\sqrt{C}}{x_n+\sqrt{C}}\right)^2=\left(\frac{x_{n-1}-\sqrt{C}}{x_{n-1}+\sqrt{C}}\right)^{2\times 2}=\cdots=\left(\frac{x_0-\sqrt{C}}{x_0+\sqrt{C}}\right)^{2^{n+1}}$$

令 $q=\dfrac{x_0-\sqrt{C}}{x_0+\sqrt{C}}$ 则有 $\left(\dfrac{x_n-\sqrt{C}}{x_n+\sqrt{C}}\right)=q^{2^n}$

化简得

$$x_n=\sqrt{C}\,\frac{1+q^{2^n}}{1-q^{2^n}}\qquad\qquad \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$$

$$x_{n+1}-\sqrt{C}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{C}{x_n}\right)-\sqrt{C}$$

$$=\frac{1}{2x_n}\left(x_n^2-2x_n\sqrt{C}+C\right)\quad=\frac{1}{2x_n}\left(x_n-\sqrt{C}\right)^2$$

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{C}}{\left(x_n-\sqrt{C}\right)^2}=\frac{1}{2x_n}\qquad\qquad \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{C}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x_{n+1}-\sqrt{C}\right|}{\left|x_n-\sqrt{C}\right|^2}=\frac{1}{2\sqrt{C}}$$

由此可知，平方根迭代具有 2 阶收敛速度.

• **Newton迭代法的收敛性：**

迭代函数： $$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

设$f(x^*)=0$，$f`(x^*)\neq 0$，则$\varphi`(x^*)=0$，故Newton迭代法在x^*附近至少平方收敛.

定理：假设$f(x)$在x^*的某邻域内具有连续的二阶导数，且设$f(x^*)=0$，$f`(x^*)\neq 0$，则对充分靠近x^*的初始值x_0，Newton迭代法产生的序列$\{x_n\}$至少平方收敛于x^*.

例： 用Newton迭代法解方程 $xe^x - 1=0.$

解： $f`(x)=e^x+xe^x$，故Newton迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{e^{x_k} + x_k e^{x_k}} \quad 即 \quad x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + x_k}$$

取迭代初值x_0=0.5，结果如下：

k	x_k
0	0.5
1	0.57102
2	0.56716
3	0.56714

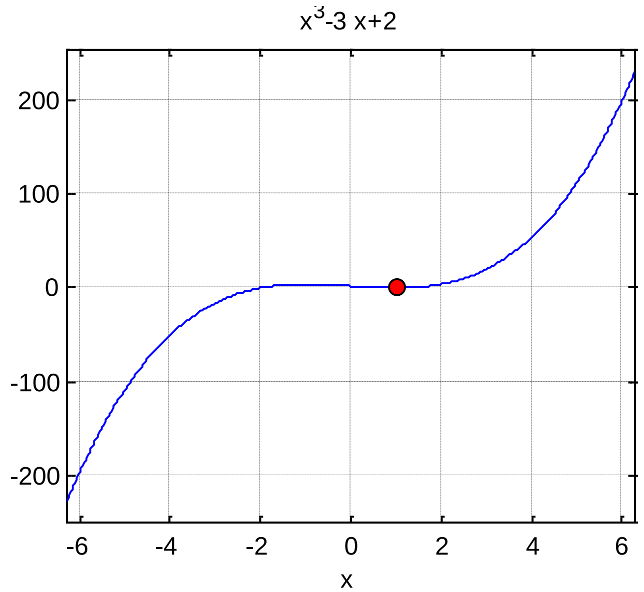
迭代3次即可得到精度为10^{-5}的近似解0.56714. 若用不动点迭代，达到同一精度需17次.

Newton迭代法的缺陷：

1.被零除错误

方程：$f(x)=x^3-3x+2=0$

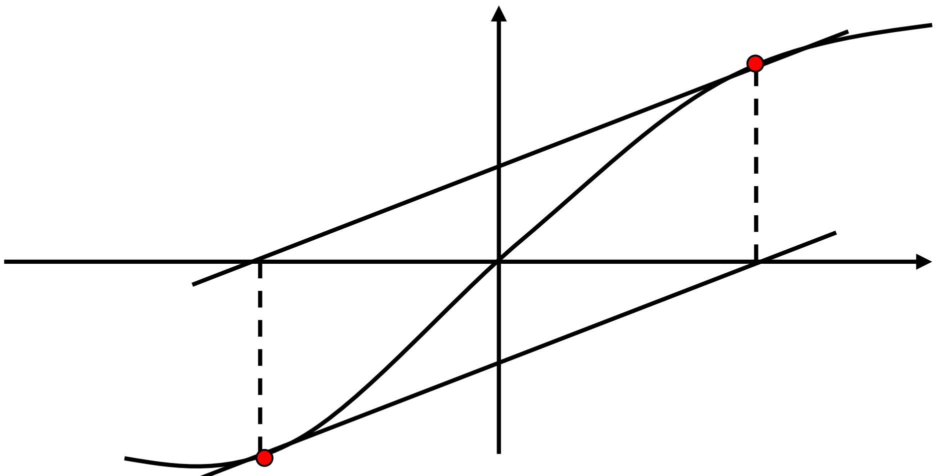
在重根$x^*=1$附近，$f'(x)$近似为零.



2.程序死循环

对 $f(x) = \arctan x$

存在 x_0，Newton迭代法陷入死循环.



$y = \arctan x$