《数值分析》第四章 思考题

1. 解线性方程组的迭代法与直接法相比哪些不同？

解：解方程的迭代法分为多种迭代法，迭代法适用于求解大规模稀疏矩阵的线性方程组。直接法适用于求解阶数比较低的线性方程组。

2. 雅可比迭代法中的迭代矩阵如何构造？

解：雅可比迭代法的矩阵表示，可以用矩阵分裂导出。传统的矩阵分裂法

是将方程组 Ax = b的系数矩阵 A 分为三部分之和，设

$$A = D - L - U$$

其中，主对角部分$D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$，$a_{ii} \neq 0$ （$i = 1, 2, \cdots, n$）；左下角和右上角部分取负值为

$$L = -\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

由于D^{-1}存在，将方程组$Ax = b$化为等价形式

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

雅可比迭代法矩阵表示为

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \ (k = 1, 2, \cdots, n)$$

迭代矩阵为

$$B_J = D^{-1}(L + U)$$

3. 迭代法中的迭代矩阵与方程组数值解误差有何关系？

解：迭代格式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \quad (k = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

经过证明过程得：

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = (I - B)^{-1} f$$

这也就是说明迭代法产生的序列收敛，且序列的极限是方程组$(I - B)^{-1}x = f$的解。

4. 迭代矩阵的幂级数有何数学意义？

解：

5. 矩阵的谱半径与矩阵的范数相比哪一个大？

解：设 n 阶矩阵 B 的特征值为λ_1，$\lambda_{2,}$ $\lambda_{3,}$ $\cdots\lambda_n$，则称

$$\rho(B) = \max_{1\le k\le n} |\lambda_k|$$

为矩阵 B 的谱半径。

谱半径与矩阵的算子范数之间如下关系：

$$\rho(B) \le \|B\|$$

6. 迭代法收敛定理对方程组数值解的误差是如何估计的？

解：如果迭代法收敛。当迭代次数足够大时，可用最后相邻两次迭代解的差替代最后一次迭代解的误差。

7. 如果系数矩阵是主对角占优矩阵，是否可用雅可比迭代法或赛德迭代法求解方程组？

   解：如果系数矩阵是严格主对角占优矩阵，可以用赛德尔迭代法求解。

8. 如果系数矩阵是实对称正定矩阵，是否可用雅可比迭代法或赛德迭代法求解方程组？

   解：如果系数矩阵是对称正定矩阵，可以用赛德尔迭代法求解。

9. 何谓共轭向量组？ 共轭向量组与正交向量组有何区别？

设 A 是 n 阶对称正定矩阵,非零向量 $p_1, p_2 \in R^n$

若 $(Ap_1, p_2)=0$, 则称向量 p_1, p_2 关于 A 共轭.

若 n 个非零向量 $p_1, p_2, \cdots, p_m \in R^n$ 满足:

$$(Ap_i, p_j)=0 \qquad (i\neq j;\ i, j = 1,2,\cdots,m)$$

则称向量 $p_1, p_2, \cdots, p_m$,关于 A 共轭

向量共轭是向量正交关系的推广。

10.何谓线性方程组的初等变分原理？ 初等变分原理有哪些应用？

解：对于一个系数矩阵为对称正定矩阵的线性方程组，求解过程可以与一个多元二次函数的极小值点相联系。设线性方程组 Ax = b的系数矩阵 A 是实对称正定矩阵，构造二次函数

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x), x \in R^n$$

由于 A 对称正定，故方程组 Ax =b 有唯一解x^*，且二次函数 f(x) 也有唯一的极小值点。线性方程组问题与二次函数极小值问题等价，称为初等变分原理。