例 证明：$\|x\|_2$ 是 R^n 上的一种范数.

先证明柯西不等式：$|x^{\mathrm{T}}y| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

（当且仅当x与y线性相关时等号成立.）

(1) x, y线性无关：$\forall t \in R,\ tx + y \neq 0$，

$$\left(tx + y, tx + y\right) = t^2\left(x, x\right) + 2t\left(x, y\right) + \left(y, y\right) > 0,$$

$$\therefore\ \left[2\left(x, y\right)\right]^2 - 4\left(x, x\right)\left(y, y\right) < 0,$$

$$\left(x^T y\right)^2 = \left(x, y\right)^2 < \|x\|_2^2 \|y\|_2^2, \qquad \left|x^T y\right| < \|x\|_2 \|y\|_2 .$$

(2) x, y线性相关：设 $y = kx$，则

$$\left(x^T y\right)^2 = \left(x, y\right)^2 = \left(x, kx\right)^2 = k^2\left(x, x\right)^2 = \left(x, x\right)\left(kx, kx\right)$$

$$= \|x\|_2^2 \|y\|_2^2, \qquad \left|x^T y\right| = \|x\|_2 \|y\|_2 .$$

$$\|x+y\|_2^2=(x+y)^T(x+y)$$
$$=x^Tx+x^Ty+y^Tx+y^Ty$$
$$\le\|x\|_2^2+2|x^Ty|+\|y\|_2^2$$
$$\le\|x\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2+\|y\|_2^2$$

$\therefore\|x+y\|_2\le\|x\|_2+\|y\|_2$ (三角不等式成立)

又 $\|x\|_2=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}\ge 0$ (非负性成立)

$$\|\lambda x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)^2}=|\lambda|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=|\lambda|\cdot\|x\|_2$$

(齐次性成立)

故 $\|x\|_2$ 是 R^n 上的一种范数.

例：计算向量$x=(1,0,-1,2)^T$的三种常用范数.

解：

$$\|x\|_1 = |1| + |0| + |-1| + |2| = 4$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|1|, |0|, |-1|, |2|\} = 2$$

正交变换下向量2-范数不变性：

$$Q^TQ = I\,,\ y = Qx$$

$$\Rightarrow \quad \| y \|_2 = \| x \|_2$$

$$y^T y = (Qx)^T (Qx) = x^T Q^T Qx = x^T x$$

$$\Rightarrow \quad \|y\|_2 = \sqrt{y^T y} = \sqrt{x^T x} = \| x \|_2$$

定理 （范数的等价性）对任何向量$x \in R^n$,有

（1） $$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$$

（2） $$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

（3） $$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

证明（2）： $$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$\max_{1\le k\le n}|x_k| \le \|x\|_1 \le n \times \max_{1\le k\le n}|x_k|$$

所以 $$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

向量序列的收敛性：

定义： 在R^n中的一个向量序列$x^{(1)}$，$x^{(2)}$，……，$x^{(k)}$，……称为收敛于一个向量x，当且仅当

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x-x^{(k)}\right\|=0$$

或

设$\{x^{(k)}\}$为R^n中的一向量序列，$x^*\in R^n$，记$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})^T$，$x^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)^T$，若

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^* \qquad i=1,2,\ldots\ldots,n$$

则称$x^{(k)}$收敛于向量x^*，记为 $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$

（二） 矩阵的范数

定义 设矩阵$A\in R^{n\times n}$,若A的某个**非负实值函数**$N(A)=\|A\|$满足条件：

- （1）**非负性**： $\|A\|\geq 0$且$\|A\|=0$的充要条件是$A=0$；
- （2）**齐次性**：$\|kA\|=|k|\ \|A\|$（$\forall k\in R$）；
- （3）**三角不等式**：对$\forall A,B\in R^{n\times n}$，有

$$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|;$$

- （4）**相容性**：$\|AB\|\leq\|A\|\ \|B\|$；

则称$N(A)=\|A\|$为$R^{n\times n}$上的**矩阵A的范数**.

向量范数与矩阵范数的关系：

定义 对于给定的向量范数和矩阵范数，如果对任一个向量$X \in R^n$和任一个矩阵$A \in R^{n \times n}$都有不等式$\|AX\| \le \|A\|\,\|X\|$成立，则称所给矩阵范数与向量范数是相容的.

定义 设向量$x \in R^n$，矩阵$A \in R^{n\times n}$，且给定一种向量范数$\|x\|$，则定义

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

为矩阵A的范数，并称为A的**算子范数**.

注：矩阵算子范数由向量范数诱导出.

定理 由 $$\|A\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

定义的范数满足矩阵范数的定义.

证明:

（1）非负性: $\|A\|=\max\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|\geq 0$

$\|A\|=0$ 的充要条件是 $Ax=0(\forall x\in R^n)$

即 $A=0$.

（2）齐次性: 对任意的$k\in R$，有

$$\|kA\|=\max_{\|x\|=1}\|kAx\|=|k|\max_{\|x\|=1}\|Ax\|=|k|\|A\|$$

（3）三角不等式：

对任意的n阶方阵A和B，满足

$$\|A+B\| = \max_{\|x\|=1}\|(A+B)x\|$$

$$= \max_{\|x\|=1}\|Ax+Bx\|$$

$$\le \max_{\|x\|=1}\|Ax\| + \max_{\|x\|=1}\|Bx\|$$

$$= \|A\| + \|B\|$$

（4）相容性：

对任意的n阶方阵A和B，满足

$$\|AB\| = \max_{\|x\|=1} \|(AB)x\|$$

$$= \max_{\|x\|=1} \|A(Bx)\|$$

$$\le \|A\| \max_{\|x\|=1} \|Bx\|$$

$$= \|A\| \cdot \|B\|$$

定理 设矩阵$A \in R^{n\times n}$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

（1） $$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$ —列范数

（2） $$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

（3） $$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$ —行范数

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ 的各种范数.

解:

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \quad =7$$

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \quad =6$$

由 $A^TA=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -14\\ -14 & 20\end{pmatrix}$

其特征值为 $\lambda_1=15-\sqrt{221},\ \lambda_2=15+\sqrt{221}$

因此 $\|A\|_2=\sqrt{15+\sqrt{221}}=5.4650$

（三） 谱半径、谱范数与方阵的F—范数

定义 设n阶方阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$，则

称

$$\rho(A)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$$

为A的**谱半径**.（$|\lambda_i|$是λ_i的模）

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ 的谱半径.

解： $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 3 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)-6$

得 $\lambda_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{2}$ 因此 $\rho(A)=5.3723$

定理 （特征值上界）设$A \in R^{n\times n}$,则

$$\rho(A) \le \|A\|$$

即**A的谱半径不超过A的任何一种算子范数**.

证明： 设λ是A的一个特征值，且A的谱半径$\rho(A)=|\lambda|$，

u是对应于λ的特征向量，即$Au=\lambda u$,

故 $\|Au\| = |\lambda|\,\|u\|$

$$\rho(A) = |\lambda| = \frac{\|Au\|}{\|u\|} \le \max_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$$

定理 若$A\in R^{n\times n}$为对称阵，则

$$\|A\|_2=\rho(A)$$

故$\|A\|_2$又称为**谱范数**.

定义 设$A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$，则称

$$\|A\|_F=\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

为A的Frobenius范数，简称***F*一范数**.

3.1.6 误差分析

例 记方程组（1）
$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$$

为$Ax=b$， 其精确解为：$x_1^*=2$，$x_2^*=0$

现考察方程组（2）
$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2.0001\end{bmatrix}$$

将其表示为：$A(x+\delta x)=b+\delta b$

其中 $\delta b=(0,0.0001)^T$

设x为(1)的解，显然(2)的解为：$x+\delta x=(1,1)^T$

结论： （1）的常数项b的第二个分量只有1/10000的微小变化，方程组的解变化却很大.

定义　若矩阵A或常数项b的微小变化引起方程组$Ax=b$的解的巨大变化，则称此方程组为**病态方程组**，A为**病态矩阵**（相对方程组而言）；否则称方程组为**良态方程组**，A为**良态矩阵**.

研究方程组中A或b的微小误差对解的影响的分析称"**扰动分析**".

$Ax=b$的扰动方程组可记为$(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b$，其中$\delta A$叫$A$的**扰动矩阵**，$\delta x$和$\delta b$叫$x$和$b$的**扰动向量**.

设$Ax=b$的扰动方程组为$(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b$，下面进行扰动分析:

(1) $\delta A=0$，则$A(x+\delta x)=b+\delta b$，减去$Ax=b$，得

$$A\,\delta x=\delta b,$$

故 $\delta x=A^{-1}\,\delta b,$

即 $\|\delta x\|\le\|A^{-1}\|\,\|\delta b\|,$

又由$Ax=b$，有$\|b\|\le\|A\|\,\|x\|,$

所以
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

(2) $\delta b=0$，则 $(A+\delta A)(x+\delta x)=b$，减去 $Ax=b$，可得

$$A\,\delta x+\delta A(x+\delta x)=0,$$

故 $\quad \delta x=-A^{-1}\,\delta A(x+\delta x),$

即 $\quad \|\delta x\|\le\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\,\|x+\delta x\|,$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|}\le\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

定义　设A非奇异，称数 $\mathrm{cond}(A)=\|A^{-1}\|\,\|A\|$为矩阵$A$的**条件数**.

说明：

（1）条件数小，扰动引起的解的相对误差一定小；条件数大，扰动引起的解的误差可能很大.（条件数与所取的范数有关，最常用的是$\|\cdot\|_\infty$和$\|\cdot\|_2$）

（2）由于$\mathrm{cond}(A)=\|A\|\,\|A^{-1}\|\geq\|AA^{-1}\|=\|I\|=1$，故条件数是一放大的倍数，且总以1为下界.

（3）当A为正交矩阵（$A^{-1}=A^T$）时，有$\mathrm{cond}(A)_2=1$，所以正交矩阵的方程组是良态的.

例： 已知Hilbert矩阵

$$H_n=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

计算可得 $\mathrm{cond}(H_3)=748$

$\mathrm{cond}(H_6)=2.9\times 10^7$

$\mathrm{cond}(H_7)=9.85\times 10^8$

n越大，H_n的条件数越大，故Hilbert矩阵是一个典型的病态矩阵.

如

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad b+\delta b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3.1 \end{bmatrix}$$

可得

$$x=(27.0000\quad -192.0000\quad 210.0000)^T$$

$$x+\delta x=(30.0000\quad -210.0000\quad 228.0000)^T$$

残差向量： $r=b-Ax$ （x为$Ax=b$的近似解）

当r很小时，x是否为$Ax=b$的一个较好的近似解呢？

定理 （事后误差估计）设A非奇异，x^*和x分别是$Ax=b$的精确解和近似解，$r=b-Ax$为残差向量，则

$$\frac{\|x^*-x\|}{\|x^*\|} \le cond(A)\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

证明：

由 $Ax^* = b, r = b - Ax$

$$\Longrightarrow \quad x^* - x = A^{-1} r$$

$$\Longrightarrow \quad \|x^* - x\| \le \|A^{-1}\| \|r\|$$

又

$$\|b\| = \|Ax^*\| \le \|A\| \|x^*\|$$

得

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|} \le \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|} = cond(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$