推论 若$\|B\|<1$，则迭代法$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$收敛.

（因为$\rho(B)\leq\|B\|$）

定理： 设x^*为方程组$Ax=b$的解，若$\|B\|<1$，则对迭代格式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$，有

（1）$$\|x^{(k)}-x^*\|\leq\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$$

（2）$$\|x^{(k)}-x^*\|\leq\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

证　由$\|B\|<1$，有　$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$

$$x^{(k+1)}-x^* = (Bx^{(k)}+f) - (Bx^*+f) = B(x^{(k)} - x^*)$$

$$\boxed{\| x^{(k+1)} - x^* \| \le \|B\| \, \| x^{(k)} - x^* \|}$$

所以

$$\|x^{(k)} - x^*\| = \|(x^{(k)} - x^{(k+1)}) + (x^{(k+1)} - x^*)\|$$

$$\le \|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| + \| x^{(k+1)} - x^*\|$$

$$\le \|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| + \|B\| \, \|x^{(k)} - x^*\|$$

$$= \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \|B\| \, \| x^{(k)} - x^*\|$$

所以 $$\| x^{(k)} - x^* \| \le \frac{1}{1-\| B \|} \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|$$

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = (Bx^{(k)} - f) - (Bx^{(k-1)} - f) = B(x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

$$\boxed{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \le \| B \| \, \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|}$$

故可得误差估计式:

$$\| x^{(k)} - x^* \| \le \frac{\| B \|}{1-\| B \|} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|$$

$$\| x^{(k)} - x^* \| \le \frac{\| B \|^k}{1-\| B \|} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$$

注：

（1）式 $\|x^{(k)}-x^*\| \le \dfrac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$

说明，只要$\|B\|$不是很接近1，当$x^{(k)}$和$x^{(k-1)}$很接近时，$x^{(k)}$也越接近x^*，故可用$\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$中止迭代.

（2）式 $\|x^{(k)}-x^*\| \le \dfrac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$

说明，$\|B\|$越小，$x^{(k)}$收敛越快，可作误差估计式.

例3. 判别下列方程组用Jacobi迭代法和Gauss－Seidel迭代法求解是否收敛:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解: (1) Jacobi迭代法的迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

显然B_J的几种常用算子范数$\|B_J\|>1$，故用其特征值判断.

$$\det(\lambda I - B_J) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 = 0$$

所以 $\lambda = 0 \quad \rho(B_J) = \max(|\lambda|) = 0 < 1$

即Jacobi迭代法收敛.

(2) Gauss－Seidel迭代法的迭代矩阵：

$$B_G = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

可得

$$\lambda = 0 \quad \lambda = 2$$

故 $\rho(B_G) = \max(|\lambda|) = 2 > 1$

所以Gauss-Seidel迭代法发散.

注：在例1和例2中，Gauss－Seidel迭代法收敛速度比Jacobi迭代法要高，但例3却说明Gauss－Seidel迭代法发散时而Jacobi迭代法却收敛，因此，不能说Gauss－Seidel迭代法比Jacobi迭代法更好.

迭代法收敛的其他结论：

定义 设$A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$，若

$$|a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\qquad(i=1,2,\ldots,n)$$

称A为**对角占优矩阵**，若不等式严格成立，

则称A为**严格对角占优矩阵**.

定理 若矩阵A是严格对角占优矩阵，则 A是非奇异矩阵.

证明： 只需要证明$Ax=0$只有零解即可. 可用反证法.

设方程组有非零解$x\neq0$，则x的各分量不全为零，不妨设

$$|x_k| = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

显然$x_k\neq0$，考虑方程组$Ax=0$的第k行，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = 0$$

即

$$a_{kk} x_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj} x_j$$

可得

$$|a_{kk}||x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j\right| \le \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}x_j|$$

$$\le \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\left(\max_{1\le j\le n}|x_j|\right) = |x_k|\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

由于$x_k\neq 0$，故

$$|a_{kk}| \le \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

与A为严格对角占优矩阵矛盾，故A为非奇异矩阵.

定理 若$Ax=b$中A为严格对角占优矩阵，则Jacobi迭代法和Gauss－Seidel迭代法均收敛.

证明： 因为系数矩阵A严格对角占优，所以

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad i = 1,2,3,\cdots,n$$

$$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 1 \quad i = 1,2,3,\cdots,n$$

(1)对于Jacobi迭代法，其迭代矩阵为 $B_J = D^{-1}(L+U)$

$$B_J = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B_J\|_\infty = \max_i \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}|a_{ij}| < 1$$

故Jacobi迭代法收敛.

(2)对于G－S迭代法，其迭代矩阵为 $B_G=(D-L)^{-1}U$

分析：要证G－S迭代法收敛，即证其迭代矩阵的谱半径$\rho(B)<1$，只要证明其特征值$|\lambda|<1$即可.

B_G的特征值λ满足 $\det(\lambda I-B_G)=0$

即 $\det[\lambda I-(D-L)^{-1}U]=0$

从而

$$\det(D-L)^{-1}\cdot\det[\lambda(D-L)-U]=0$$

因此

$$\det[\lambda(D-L)-U]=0$$

<以下用反证法> 由于 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

可得 $$|\lambda| \cdot |a_{ii}| > |\lambda| \cdot \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + |\lambda| \cdot \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

$$= |\lambda| \cdot \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + (|\lambda| - 1) \cdot \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

如果 $|\lambda| \geq 1$,则有

$$|\lambda| \cdot |a_{ii}| > |\lambda| \cdot \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

则$[\lambda(D-L)-U]$为严格对角占优矩阵

从而$\det[\lambda(D-L)-U]\neq 0$ 矛盾!

所以$|\lambda|<1$, 即$\rho(B_G)<1$,

由前述定理知，G－S迭代法收敛.

定理 若A为对称正定矩阵，则Gauss—Seidel迭代法收敛.

证明：由 $A = D - L - L^T$ 得 $B_{G\text{-}S} = (D - L)^{-1}L^T$

设λ为$B_{G\text{-}S}$的任一特征值， x 为其特征向量，则

$$(D - L)^{-1} L^T x = \lambda x \Rightarrow L^T x = \lambda (D - L) x$$

$$\Rightarrow x^T L^T x = \lambda x^T (D - L) x$$

记 $x^TDx=p$， $x^TL^Tx = x^TLx = a$ ， $\boxed{(Lx, x) = (x, Lx)}$

因A 正定，$a_{ii}>0$，故 $p>0$，且有

$x^TAx=x^T(D - L - L^T)x=p - a - a =p - 2a >0$

$$\lambda = \frac{x^T L^T x}{x^T (D-L) x} = \frac{a}{p-a}$$

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{p^2 - 2pa + a^2} = \frac{a^2}{p(p-2a) + a^2} < 1$$

所以，迭代矩阵 B_{G-S} 的谱半径 $\rho(B_{G-S}) < 1$，

故当方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 是对称正定矩阵时，Gauss－Seidel迭代法收敛.