注： 对角线上的元素$a_{k+1,k+1}^{(k)}$在Gauss消元法中作用突出，称约化的主元素.

定理： 约化的主元素$a_{k+1,k+1}^{(k)} \neq 0$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$的充分必要条件是矩阵A的各阶顺序主子式不为零. 即

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

推论: 如果A的顺序主子式$D_k \neq 0$ $(k=1,\cdots, n-1)$，则Gauss消元法中的约化主元可以表示为

$$\begin{cases} a_{11} = D_1 \\ a_{k+1,k+1}^{(k)} = D_{k+1} / D_k \qquad (k = 2, 3, ..., n-1) \end{cases}$$

例 用高斯消元法求解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 32 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 30 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{\substack{m_{21}=3/2 \\ m_{31}=4/2}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0.5 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & 22 & 20 \end{bmatrix} \xRightarrow{m_{32}=-3/0.5} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0.5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ & 0.5 & -4 \\ & & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -13,\ x_2 = 8,$

$x_3 = 2$

矩阵的三角分解:

对线性方程组$Ax=b$的系数矩阵A施行初等行变换相当于用初等矩阵左乘A，故第一次消元后方程组化为

$A^{(1)}x=b^{(1)}$，即$L_1Ax=A^{(1)}x$，$L_1b=b^{(1)}$，其中

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{bmatrix}$$

同理

$L_kA^{(k-1)}=A^{(k)}$

$L_kb^{(k-1)}=b^{(k)}$

其中 $$L_k=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{k,k-1} & \ddots & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & -m_{n,k-1} & & & 1 \end{bmatrix}$$

重复该过程，最后得

$$L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2L_1A = A^{(n-1)}$$

$$L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2L_1b = b^{(n-1)}$$

记U=$A^{(n\text{-}1)}$，则

$$A = L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1}U = LU$$

其中

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & & 1 \end{bmatrix}$$

将A 分解为单位下三角矩阵 L 和上三角矩阵 U的乘积的算法称为矩阵A的三角分解算法.

定理： 设A为n阶矩阵，若A的顺序主子式$D_i \neq 0$（i=1,2,…n-1），则A可分解为一个单位下三角矩阵L和一个上三角矩阵U的乘积，且这种分解是唯一的.

由Gauss消元过程可推得

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

U即为Gauss消元后所得的上三角方程组的系数矩阵.

例 对矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 作LU分解.

解 由Gauss消元法可得,

$$m_{21}=0,\quad m_{31}=2,\quad m_{32}=-1$$

故

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=LU$$

如果已经有 $A = LU$ 则 $AX = b$ => $LUX = b$,

记$UX = Y$， $LY = b$，则求解方程组分两步进行：

（1）求解方程组 $LY = b$ 得向量 Y 的值；

（L 是下三角矩阵，用顺代算法）

（2）求解方程组 $UX = Y$ 得向量 X 的值.

（U 是上三角矩阵，用回代算法）

3.1.3 Gauss列主元素消元法

基本思想： Gauss消元法中，若主元 $a_{kk}^{(k)}$ 太小会使误差增大，故应避免采用绝对值小的元素作主元. 最好每一步选取系数矩阵中（或消元后的低阶矩阵中）绝对值最大的元素作主元，以具较好的数值稳定性.

例： 求解方程组

$$\begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 \\ -2.000 & 1.072 & 5.643 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \end{bmatrix}$$

（用四位浮点数计算，精确解舍入到4位有效数字为：

$x_1^*=-0.4904, x_2^*=-0.05104, x_3^*=0.3675$）

解：《方法一》Gauss消元法

$$(A/b)=\begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 & 2.000 \\ -2.000 & 1.072 & 5.643 & 3.000 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ 0 & 2004 & 3005 & 1002 \\ 0 & 4001 & 6006 & 2003 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ 0 & 2004 & 3005 & 1002 \\ 0 & 0 & 5.000 & 2.000 \end{bmatrix}$$

- 其中， $m_{21}=-1.000/0.001=-1000$

  $m_{31}=-2.000/0.001=-2000$

  $m_{32}=4001/2004=1.997$

- 解为$x_1=-0.4000$，$x_2=-0.09980$，$x_3=0.4000$
- ($x_1^*=-0.4904$，$x_2^*=-0.05104$，$x_3^*=0.3675$)
- 显然，此解并不准确.

《方法二》交换行，避免绝对值小的主元作除数.

$$(A/b) = \begin{bmatrix} -2.000 & -1.072 & 5.643 & 3.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 & 2.000 \\ 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2.000 & -1.072 & 5.643 & 3.000 \\ 0 & 3.176 & 1.801 & 0.5000 \\ 0 & 2.001 & 3.003 & 1.002 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} -2.000 & -1.072 & 5.643 & 3.000 \\ 0 & 3.176 & 1.801 & 0.5000 \\ 0 & 0 & 1.868 & 0.6870 \end{bmatrix}$$

其中，$m_{21}=0.5000$

$m_{31}=-0.0005$

$m_{32}=0.6300$

解为$x_1=-0.4900$，$x_2=-0.05113$，$x_3=0.3678$

($x_1^*=-0.4904$，$x_2^*=-0.05104$，$x_3^*=0.3675$)

与方法一相比，此解显然要精确得多.

Gauss列主元素消元法的基本思想：

设$Ax=b$的增广矩阵为 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$

在A的第一列中选绝对值最大的元素作主元，设该元素所在行为第i_1行，交换第一行与第i_1行，进行第一次消元；再在第2—n行的第二列中选绝对值最大的元素作主元，设该元素所在行为第i_2行，交换第二行与第i_2行，进行第二次消元，……直到消元过程完成为止.

例： 用列主元素消元法求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

解： 第一列中绝对值最大是10，取10为主元

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 & 4 \\ 10 & -7 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ & -0.1 & 6 & 6.1 \\ & 2.5 & 5 & 2.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ & 2.5 & 5 & 2.5 \\ & & 6.2 & 6.2 \end{bmatrix}$$

- 第二列的后两个数中选出主元 2.5

$x_3=6.2/6.2=1$

$x_2=(2.5-5x_3)/2.5=-1$

$x_1=(7+7x_2-0x_3)/10=0$

$\Rightarrow$

$x_1=0$

$x_2=-1$

$x_3=1$

列主元矩阵的三角分解：

例： 对矩阵A做列主元三角分解：

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 6\\ 10 & -7 & 0\\ 5 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

解： 交换行变换 $E1 \leftrightarrow E2$

$$A \to P_1A=\begin{bmatrix}10 & -7 & 0\\ -3 & 2 & 6\\ 5 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$P_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$(-\frac{-3}{10}r1+r2)\rightarrow r2,\qquad (-\frac{5}{10}r1+r3)\rightarrow r3$$

$$P_1A\rightarrow F_1P_1A=\begin{bmatrix}10 & -7 & 0\\ & -0.1 & 6\\ & 2.5 & 5\end{bmatrix}$$

$$F_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -m_{21} & 1 & 0\\ -m_{31} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$r2\leftrightarrow r3$$

$$F_1P_1A\rightarrow P_2F_1P_1A=\begin{bmatrix}10 & -7 & 0\\ & 2.5 & 5\\ & -0.1 & 6\end{bmatrix}$$

$$P_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{-0.1}{2.5}r2 + r3\right) \to r3$$

$$F_2P_2F_1P_1A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ & 2.5 & 5 \\ & & 6.2 \end{bmatrix} \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

则列主元的Gauss变换可记为 $A^{(2)}=F_2\cdot P_2\cdot F_1\cdot P_1\cdot A$

记 $U=A^{(2)}=F_2\cdot(P_2F_1P_2)\cdot P_2P_1\cdot A$ （因$P_2\cdot P_2=I$）

$$P = P_2\cdot P_1 \qquad \tilde{F}_1 = P_2F_1P_2$$

则有 $U = F_2 \cdot \tilde{F}_1 \cdot P \cdot A$

若记 $L = \tilde{F}_1^{-1} \cdot F_2^{-1}$ 可得$PA = LU$

对于一般的n阶矩阵的列主元三角分解，通常令

$$P = P_n \cdots P_2 P_1 \qquad L = P(P_1 F_1^{-1} P_2 F_2^{-1} \cdots P_n F_n^{-1})$$

$$U = A^{(n)}$$

矩阵分解关系为 $PA = LU$

定理：（列主元素的三角分解定理）若A非奇异，则存在排列阵P使$PA = LU$，其中L为单位下三角阵，U为上三角阵.

全主元素消元法:

定义: 若 $$\left|a_{i_k j_k}^{(k-1)}\right| = \max_{\substack{k\le i\le n\\ k\le j\le n}} \left|a_{ij}^{(k-1)}\right|$$

则称 $a_{i_k j_k}^{(k-1)}$ 为全主元素.

全主元素消元法的基本思想:

经过行列互换，使得 $a_{i_k j_k}^{(k-1)}$ 位于经交换行和列后的等价方程组中的 $a_{kk}^{(k-1)}$ 位置，然后再实施消元.

注：全主元素消元法有可能改变未知数的顺序.

3.1.4 矩阵三角分解法

直接三角分解法：若将A分解为LU的积，则求$Ax=b$等价于求解两个三角形方程组：

（1）$Ly=b$，求y；　（2）$Ux=y$，求x.

（一） Doolittle分解法

（二） Crout分解法

（三） 对称正定矩阵的Cholesky分解法

（四） 三对角方程组的数值解法

一、Doolittle分解法：

设A非奇异，且$A=LU$，L为单位下三角阵，U为上三角阵，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

可得直接三角分解法解$Ax=b$的计算公式：

$u_{11}=a_{11}, \cdots, u_{1n}=a_{1n} \qquad m_{21}u_{11}=a_{21}, \cdots, m_{n1}u_{11}=a_{n1}$

$$\boxed{m_{21}=a_{21}/u_{11}, \cdots, m_{n1}=a_{n1}/u_{11}}$$

$m_{21}u_{12}+u_{22}=a_{22}, \cdots, m_{21}u_{1n}+u_{2n}=a_{2n}$

$$\boxed{u_{22}=a_{22}-m_{21}u_{12}, \cdots, u_{2n}=a_{2n}-m_{21}u_{1n}}$$

$m_{31}u_{12}+m_{32}u_{22}=a_{32}, \cdots, m_{n1}u_{12}+m_{n2}u_{22}=a_{n2}$

$$\boxed{m_{32}=(a_{32}-m_{31}u_{12})/u_{22}, \cdots, m_{n2}=(a_{n2}-m_{n1}u_{12})/u_{22}}$$

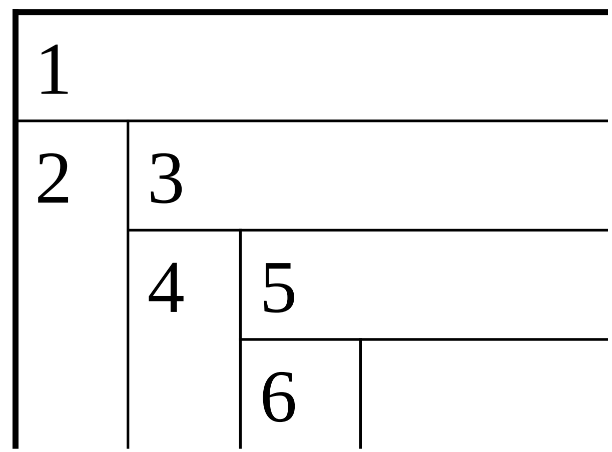
对A的元素a_{ij}，当 $j\geq k$ 和 $i\geq k$时

$$a_{kj}=\sum_{r=1}^{k-1}m_{kr}u_{rj}+u_{kj} \qquad a_{ik}=\sum_{r=1}^{k-1}m_{ir}u_{rk}+m_{ik}u_{kk}$$

矩阵L和矩阵U的元素计算公式：

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} m_{kr} u_{rj} \qquad m_{ik} = (a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} m_{ir} u_{rk}) / u_{kk}$$

计算秩序如图所示：



用Doolittle分解法求解线性方程组$Ax=b$的具体计算公式如下：

$$(1)u_{1j}=a_{1j}\,(j=1,2,\cdots n),m_{i1}=a_{i1}/u_{11}(i=2,3,\cdots,n)$$

$$(2)u_{kj}=a_{kj}-\sum_{r=1}^{k-1}m_{kr}u_{rj}\,(k=2,3,\cdots,n;\,j=k,k+1,\cdots,n)$$

$$(3)m_{ik}=(a_{ik}-\sum_{r=1}^{k-1}m_{ir}u_{rk})/u_{kk}(k=2,3,\cdots,n;i=k,k+1,\cdots,n)$$

$$(4)\begin{cases} y_1=b_1 \\ y_i=b_i-\sum_{r=1}^{i-1}m_{ir}y_r\,(i=2,3,\cdots,n) \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} x_n=y_n/u_{nn} \\ x_i=(y_i-\sum_{r=i+1}^{n}u_{ir}x_r)/u_{ii}(i=n-1,n-2,\cdots,1) \end{cases}$$

例： 用Doolittle法解方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解： 由Doolittle分解

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$u_{1j} = a_{1j}$$

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m_{21} & m_{31} & m_{41} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & -12 & 8.5 \end{pmatrix}$$

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} m_{kr} u_{rj}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & m_{32} & m_{42}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0 & 1 & -\frac{3}{11} & -\frac{6}{11}\end{pmatrix}^T$$

$$m_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} m_{ir} u_{rk}}{u_{kk}}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & u_{33} & u_{34}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & m_{43}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -9\end{pmatrix}^T$$

$$y_1 = b_1$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & u_{44}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

$=(1\quad 2\quad 3\quad 4)^T$

$$y_i = b_i - \sum_{r=1}^{i-1} m_{ir} y_r$$

解Ly＝b，得

$$\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y_4\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}10 & 20 & -17/11 & -16\end{pmatrix}^T$$

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$

解Ux＝y，得

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^T$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{r=i+1}^{n} u_{ir} x_r}{u_{ii}}$$

直接三角分解的Doolittle方法可用以下过程表示:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}
\end{pmatrix}
=
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{k=1}
\left(\begin{array}{c|ccc|c}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & y_1 \\
\hline
m_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\
m_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\
m_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4
\end{array}\right)
\xrightarrow{k=2}
\left(\begin{array}{c|c|cc|c}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & y_1 \\
\hline
m_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & y_2 \\
\cline{2-5}
m_{31} & m_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\
m_{41} & m_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4
\end{array}\right)
$$

$$\xrightarrow{k=3}\left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & y_1 \\ m_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & y_2 \\ m_{31} & m_{32} & u_{33} & u_{34} & y_3 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right)\xrightarrow{k=4} L\ \overset{U}{\left(\begin{array}{cccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ m_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ m_{31} & m_{32} & u_{33} & u_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & u_{44} \end{array}\right.}\ \overset{y}{\left|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array}\right)}$$

从上式最后一个矩阵中可知L，U，y，

然后解线性方程组$Ux=y$.

此方法称**紧凑格式的Doolittle分解法**。

紧凑格式的Doolittle分解法：

$$A \longrightarrow L - I + U$$

运算特点：

①旧元素减去左边行与顶上列向量的点积;

②计算行不用除法;

③计算列要除主对角元.

例： 用紧凑格式的Doolittle分解法解上例方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\ -3 & -4 & -12 & 13 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ 4 & 14 & 9 & -13 & 7 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\
-3 & -4 & -12 & 13 & 5 \\
1 & 2 & 3 & -4 & -2 \\
4 & 14 & 9 & -13 & 7
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{k=1}
\begin{pmatrix}
2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\
-\frac{3}{2} & -4 & -12 & 13 & 5 \\
\frac{1}{2} & 2 & 3 & -4 & -2 \\
2 & 14 & 9 & -13 & 7
\end{pmatrix}
\qquad
\xrightarrow{k=2}
\begin{pmatrix}
2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\
-\frac{3}{2} & 11 & -12 & \frac{17}{2} & 20 \\
\frac{1}{2} & -\frac{3}{11} & 3 & -4 & -2 \\
2 & -\frac{6}{11} & 9 & -13 & 7
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{k=3}
\begin{pmatrix}
2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\
-\frac{3}{2} & 11 & -12 & \frac{17}{2} & 20 \\
\frac{1}{2} & -\frac{3}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{17}{11} \\
2 & -\frac{6}{11} & \boxed{-9} & -13 & 7
\end{pmatrix}
\qquad
\xrightarrow{k=4}
\begin{pmatrix}
2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\
-\frac{3}{2} & 11 & -12 & \frac{17}{2} & 20 \\
\frac{1}{2} & -\frac{3}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{17}{11} \\
2 & -\frac{6}{11} & -9 & -4 & -16
\end{pmatrix}
$$

U

y

L

U

$$\xrightarrow{k=4} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\ -\frac{3}{2} & 11 & -12 & \frac{17}{2} & 20 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{17}{11} \\ 2 & -\frac{6}{11} & -9 & -4 & -16 \end{array}\right)$$

L y

$$\xrightarrow{\text{解}Ux=y} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 10 & 0 & -3 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 11 & -12 & \frac{17}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & 3 \\ 2 & -\frac{6}{11} & -9 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

x

所以

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$