习　题

请尽可能提供程序

1. 用二分法求方程$x^2-x-1=0$的正根，要求误差<0.05。

2. 为求方程$x^3-x^2-1=0$在$x_0=1.5$附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式：

1）$x=1+1/x^2$，迭代公式$x_{k+1}=1+1/x_k^2$；2）$x^3=1+x^2$，迭代公式$x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$；

3）$x^2=\dfrac{1}{x-1}$，迭代公式$x_{k+1}=1/\sqrt{x_k-1}$；4）$x^2=x^3-1$，迭代公式$x_{k+1}=\sqrt{x_k^3-1}$。试分析每种迭代公式的收敛性。

3. 给定函数$f(x)$，设对一切 x，$f'(x)$存在且$0<m\le f'(x)\le M$，证明对于范围$0<\lambda<2/M$内的任意定数λ，迭代过程$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$均收敛于$f(x)$的根$x^*$。

4. 设 a 为正整数，试建立一个求$\frac{1}{a}$的牛顿迭代公式，要求在迭代公式中不含有除法运算，并考虑公式的收敛性。请提供程序。

5. 用 Gauss 消去法求解方程组：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -5\end{pmatrix}$$ （请提供程序）

用列主元 Gauss 消去法求解下列方程组：

（1）$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\ 8\\ 13\end{pmatrix}$$ （请提供程序）

6. 用追赶法解三对角方程组$Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}。$$

7. 设$P\in R^{n\times n}$且非奇异，又设$\|x\|$为R^n上一向量范数，定义$\|x\|_p=\|Px\|$。试证明$\|x\|_p$是R^n上向量的一种范数。

8. 用平方根法（Cholesky 分解）求解方程组：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

9. 用改进的平方根法（LDL^T 分解）求解方程组：

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 30 \end{pmatrix}。$$

10. 设方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases},$$

（a）考察用雅可比迭代法，高斯-赛德尔迭代法解此方程组的收敛性；

（b）用雅可比迭代法及高斯-赛德尔迭代法解此方程组，要求当 $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty < 10^{-4}$ 时迭代终止。

11. 设方程组

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{2} \\ x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + x_4 = \frac{1}{2} \end{cases},$$

（a）求解此方程组的雅克比迭代法的迭代矩阵B_0的谱半径；

（b）求解此方程组的高斯-赛德尔迭代法的迭代矩阵的谱半径；

（c）考察解此方程组的雅克比迭代法及高斯-赛德尔迭代法的收敛性。

12. 用 **SOR** 方法解方程组（取$\omega = 0.9$）

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases};$$

要求当$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty < 10^{-4}$时迭代终止。

13. 证明矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$$

对于$-\frac{1}{2}<a<1$是正定的，而雅克比迭代只对$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$是收敛的。

14. 给定线性方程组$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，用雅可比迭代法和高斯-塞德尔迭代法是否收敛?

15. 设线性方程组$Ax=b$的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 3\\ 1 & a & 2\\ -3 & 2 & a\end{pmatrix},$$

试求能使雅可比迭代法收敛的**a** 的取值范围。

16. 求一个次数不超过 4 次的多项式$P(x)$，使它满足:

$$P(0)=P'(0)=0,\ P(1)=P'(1)=1,\ P(2)=1.$$

17. 求出在$x=0,1,2$ 和 3 处函数$f(x)=x^2+1$的插值多项式.

18. 设$f(x)\in C^2[a,b]$且$f(a)=f(b)=0$，求证

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|.$$

19. 设 $f(x)=x^4$,试利用 L-余项定理写出以-1, 0, 1, 2为插值节点的三次插值多项式.