2.4.2 简化Newton法（平行弦法）

迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - cf(x_k) \qquad （c\neq 0，k=0,1,\ldots\ldots）$$

迭代函数： $$\varphi(x) = x - cf(x)$$

- 若$|\varphi`(x)|=|1-cf`(x)|<1$，即取$0<cf`(x)<2$在x^*附近成立，则收敛.
- 若取$c=1/f`(x_0)$，则称简化Newton法.

2.4.3 弦截法（割线法）

在Newton迭代格式中，用差商近似导数，

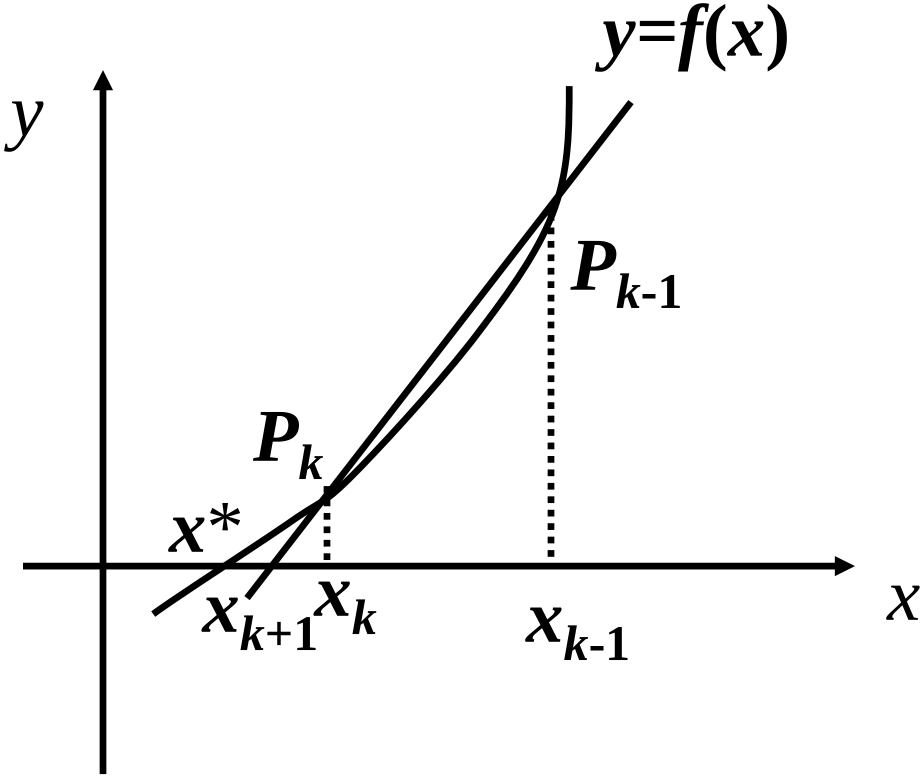
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

称弦截法.

弦截法的几何意义：



弦线P_kP_{k-1}的方程：

$$y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$

当$y=0$时，

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

例 用简化的Newton迭代法和弦截法计算方程

$x^3-3x+1=0$的根.

解： 设$f(x)=x^3-3x+1$，则$f`(x)=3x^2-3$

由简化的Newton法，得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}=x_k-\frac{x_k^3-3x_k+1}{3x_0^2-3}$$

由弦截法，得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

$$=x_k-\frac{x_k^3-3x_k+1}{x_k^2+x_k x_{k-1}+x_{k-1}^2-3}$$

简化Newton法

$x_0=0.5$
$x_1=0.3333333333$
$x_2=0.3497942387$
$x_3=0.3468683325$
$x_4=0.3473702799$
$x_5=0.3472836048$
$x_6=0.3472985550$
$x_7=0.3472959759$
$x_8=0.3472964208$
$x_9=0.3472963440$
$x_{10}=0.3472963572$
$x_{11}=0.3472963553$

弦截法

$x_0=0.5;$
$x_1=0.4;$
$x_2=0.3430962343$
$x_3=0.3473897274$
$x_4=0.3472965093$
$x_5=0.3472963553$
$x_6=0.3472963553$

要达到精度10^{-8}，简化Newton法迭代11次，弦截法迭代5次，Newton迭代法迭代4次.

无论前面哪种迭代法：

（Newton迭代法、简化Newton法、弦截法）

是否收敛均与初值的位置有关.

如 $f(x) = \arctan(x) = 0$ 精确解为 $x = 0$

Newton迭代法 $x_{k+1} = x_k - \arctan x_k \cdot (1 + x_k^2)$

取初值 $x_0 = 1$

$x_0 = 1$
$x_1 = -0.5708$
$x_2 = 0.1169$
$x_3 = -0.0011$
$x_4 = 7.9631\text{e-}010$
$x_5 = 0$

收敛

取初值 $x_0 = 2$

$x_0 = 2$
$x_1 = -3.54$
$x_2 = 13.95$
$x_3 = -279.34$
$x_4 = 122017$

发散

2.4.4 Newton下山法

- 为防止Newton法发散，可增加一个条件：$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$，满足该条件的算法称下山法.
- 可用下山法保证收敛，Newton法加快速度.

记

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda)x_k$$

（$0<\lambda\leq 1$,—下山因子）

即

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

称Newton下山法.

λ的选取：

从λ=1开始，逐次减半计算.

即按
$$\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots\cdots$$

的顺序，直到使下降条件$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$成立为止.

例：求解方程 $$\frac{x^3}{3}-x=0$$

要求达到精度 $|x_n-x_{n-1}|\le 10^{-5}$，取 $x_0=-0.99$.

解：先用Newton迭代法：$f`(x)=x^2-1$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-3x_k}{3(x_k^2-1)}$$

$$x_1=x_0-\frac{x_0^3-3x_0}{3(x_0^2-1)}=32.505829$$

$x_2=21.69118$　$x_3=15.15689$　$x_4=9.70724$

$x_5=6.54091$　$x_6=4.46497$　$x_7=3.13384$

$x_8=2.32607$　$x_9=1.90230$　$x_{10}=1.75248$

$x_{11}=1.73240$　$x_{12}=1.73205$　$x_{13}=1.73205$

需迭代13次才达到精度要求

- 用Newton下山法，结果如下：

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

k	下山因子	x_k	$f(x_k)$
$k=0$		$x_0 = -0.99$	$f(x_0) = 0.666567$
$k = 1$		$x_1 = 32.505829$	$f(x) = 11416.4$
	$\lambda = 0.5$	$x_1 = 15.757915$	$f(x) = 1288.5$
	$\lambda = 0.25$	$x_1 = 7.383958$	$f(x) = 126.8$
	$\lambda = 0.125$	$x_1 = 3.196979$	$f(x) = 7.69$
	$\lambda = 0.0625$	$x_1 = 1.103489$	$f(x) = -0.655$
$k = 2$		$x_2 = 4.115071$	$f(x) = 19.1$
	$\lambda = 0.5$	$x_2 = 2.60928$	$f(x) = 3.31$
	$\lambda = 0.25$	$x_2 = 1.85638$	$f(x) = 0.27$
$k = 3$		$x_3 = 1.74352$	$f(x) = 0.023$
$k = 4$		$x_4 = 1.73216$	$f(x) = 0.00024$
$k = 5$		$x_5 = 1.73205$	$f(x) = 0.00000$
$k = 6$		$x_6 = 1.73205$	$f(x) = 0.000000$

2.4.5 重根情形

设$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$,$m\geq 2$，m为整数，$g(x^*)\neq 0$，则x^*为方程$f(x)=0$的m重根.

此时有

$$f(x^*)=f`(x^*)=\ldots\ldots= f^{(m-1)}(x^*)=0,\ f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

《方法一》只要$f`(x_k)\neq 0$，仍可用Newton法计算，此时为线性收敛.

《方法二》若取

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$$

则φ`$(x^*)=0$，用迭代法求m重根，具2阶收敛，但要知道m.

《方法三》修正的牛顿迭代法

令 $$\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$$

则 $$\mu(x)=\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}$$

故x^*是$\mu(x)=0$的单根，对$\mu(x)$用Newton法，可得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{\mu(x_k)}{\mu'(x_k)}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{\left[f'(x_k)\right]^2-f(x_k)f''(x_k)}$$

它是二阶收敛的.

THE

END