定义： 设$\varphi_n(x)$是$[a,b]$上首项系数$a_n\neq 0$的n次多项式，$\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数，如果多项式序列$\{\varphi_k(x)\}$ $(k=0,1,2,\ldots\ldots)$ 满足关系式

$$\left(\varphi_j(x),\varphi_k(x)\right)=\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases} 0 & j\neq k \\ A_k>0 & j=k \end{cases}$$

则称多项式序列$\{\varphi_k(x)\}(k=0,1,2,\ldots\ldots)$ 在$[a,b]$上带权正交;

$\varphi_n(x)$为区间$[a,b]$上带权$\rho(x)$的n次**正交多项式**.

幂函数系的正交化方法：

$$\begin{cases} \varphi_0(x) \equiv 1, \\ \varphi_{k+1}(x) = x^{k+1} - \sum_{j=0}^{k} \dfrac{(x^{k+1}, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)} \varphi_j(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \end{cases}$$

特点：

（1）$\varphi_k(x)$为最高项系数为1的k次多项式；

（2）当$k \neq j$时，$(\varphi_k, \varphi_j)=0$，且φ_k与任意次数小于k的多项式正交.

例4 取权函数$\rho(x)=x^2$，构造$[-1, 1]$上的正交多项式系$\{\varphi_k(x)\}$（$k=0,1,2,3$）.

解： 取$\varphi_0=1$,

$$\varphi_1(x)=x-\frac{(x,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)=x$$

$$\varphi_2(x)=x^2-\frac{(x^2,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\frac{(x^2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)$$

$$=x^2-\frac{3}{5}-0=x^2-\frac{3}{5}$$

$$\varphi_3(x) = x^3 - \frac{(x^3,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x) - \frac{(x^3,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x) - \frac{(x^3,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)}\varphi_2(x)$$

$$= x^3 - 0 - \frac{5}{7}x - 0 = x^3 - \frac{5}{7}x$$

故在区间[–1, 1]，权函数$\rho(x) = x^2$的正交多项式系为

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = x,$$

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{3}{5}, \qquad \varphi_3(x) = x^3 - \frac{5}{7}x.$$

一、勒让德（Legendre）多项式：

区间为$[-1,1]$，权函数$\rho(x)\equiv 1$时，由$\{1,x,\ldots,x^n,\ldots\}$正交化得到的多项式称为勒让德多项式，并用$P_0(x),P_1(x),\ldots,P_n(x),\ldots$表示.

1.表达式

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \qquad (n\geq 1)$$

2. 正交性

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}$$

3.递推式

$$\begin{cases} P_0(x)=1,\ P_1(x)=x, \\ P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \end{cases}$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=(35x^4-30x^2+3)/8 \qquad P_5(x)=(63x^5-70x^3+15x)/8$$

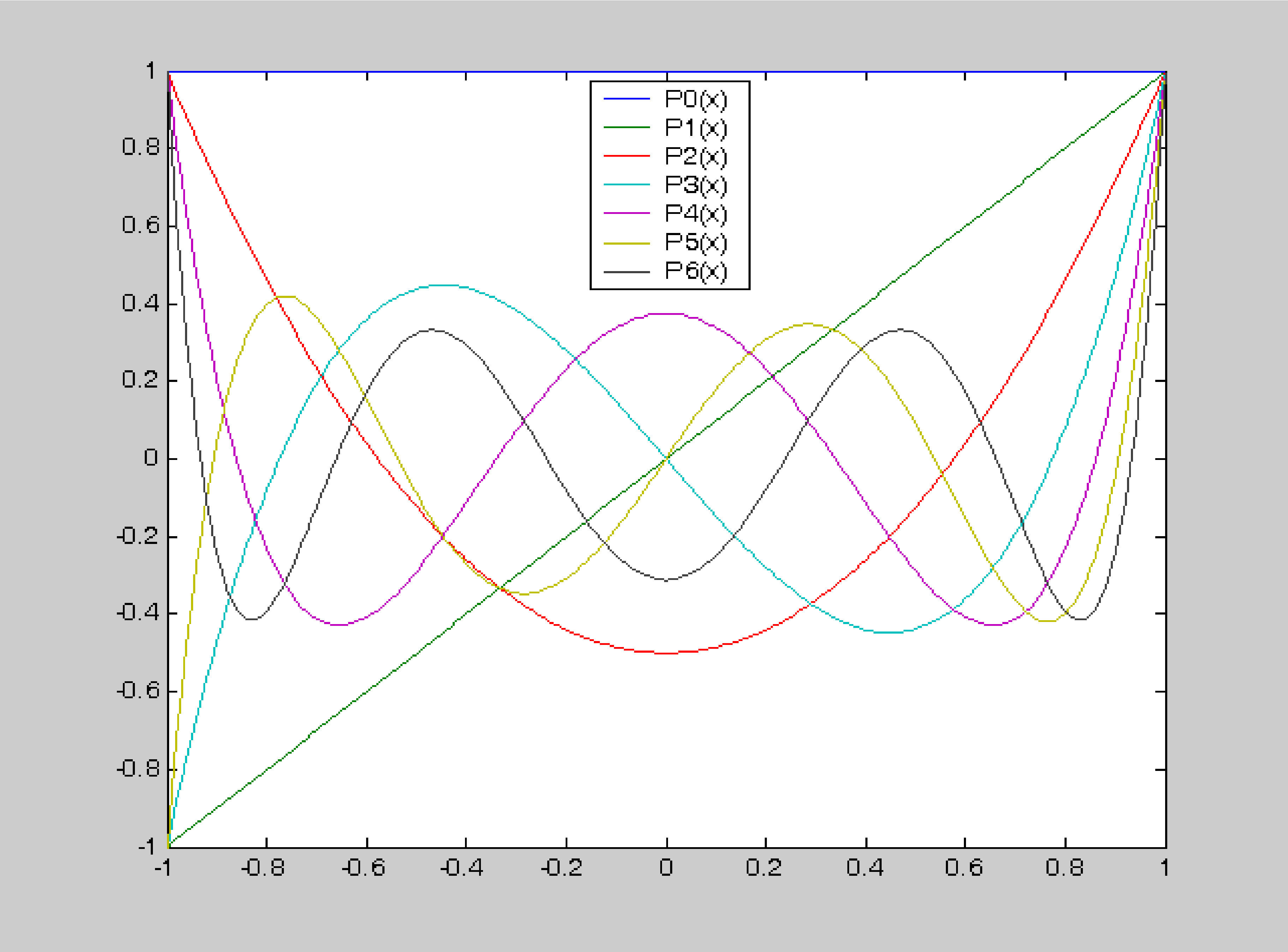
$$P_6(x)=(231x^6-351x^4+105x^2-5)/16 \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots$$

4.零点分布

$P_n(x)$在区间$[-1,1]$内有n个不同的实零点.

$P_2(x)$的两个零点: $x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \qquad x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$P_3(x)$的三个零点: $x_1=-\sqrt{\dfrac{3}{5}} \qquad x_2=0 \qquad x_3=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$



P0(x)
P1(x)
P2(x)
P3(x)
P4(x)
P5(x)
P6(x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

二、切比雪夫（Chebyshev）多项式：

当权函数 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

区间为[–1,1] 时，由$\{1,x,\ldots,x^n,\ldots\}$正交化得到的多项式就是切比雪夫多项式，它可表示为：

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad |x|\le 1$$

若令 $x=\cos\theta$

则 $T_n(x)=\cos n\theta,\quad 0\le\theta\le\pi$

$T_0(x)=1$, $T_1(x)=\cos\theta=x$, $T_2(x)=\cos 2\theta\cdots\cdots$

$$T_n(x)=\cos(n\theta),\cdots\cdots\cdots$$

切比雪夫多项式有如下重要性质：

1.递推公式:

由 $\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos(n\theta)-\cos(n-1)\theta$ 得

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (n \ge 1)$$

所以，

$$T_0(x)=1, T_1(x)=x,$$

$$T_2(x)=2x^2-1$$

$$T_3(x)=4x^3-3x$$

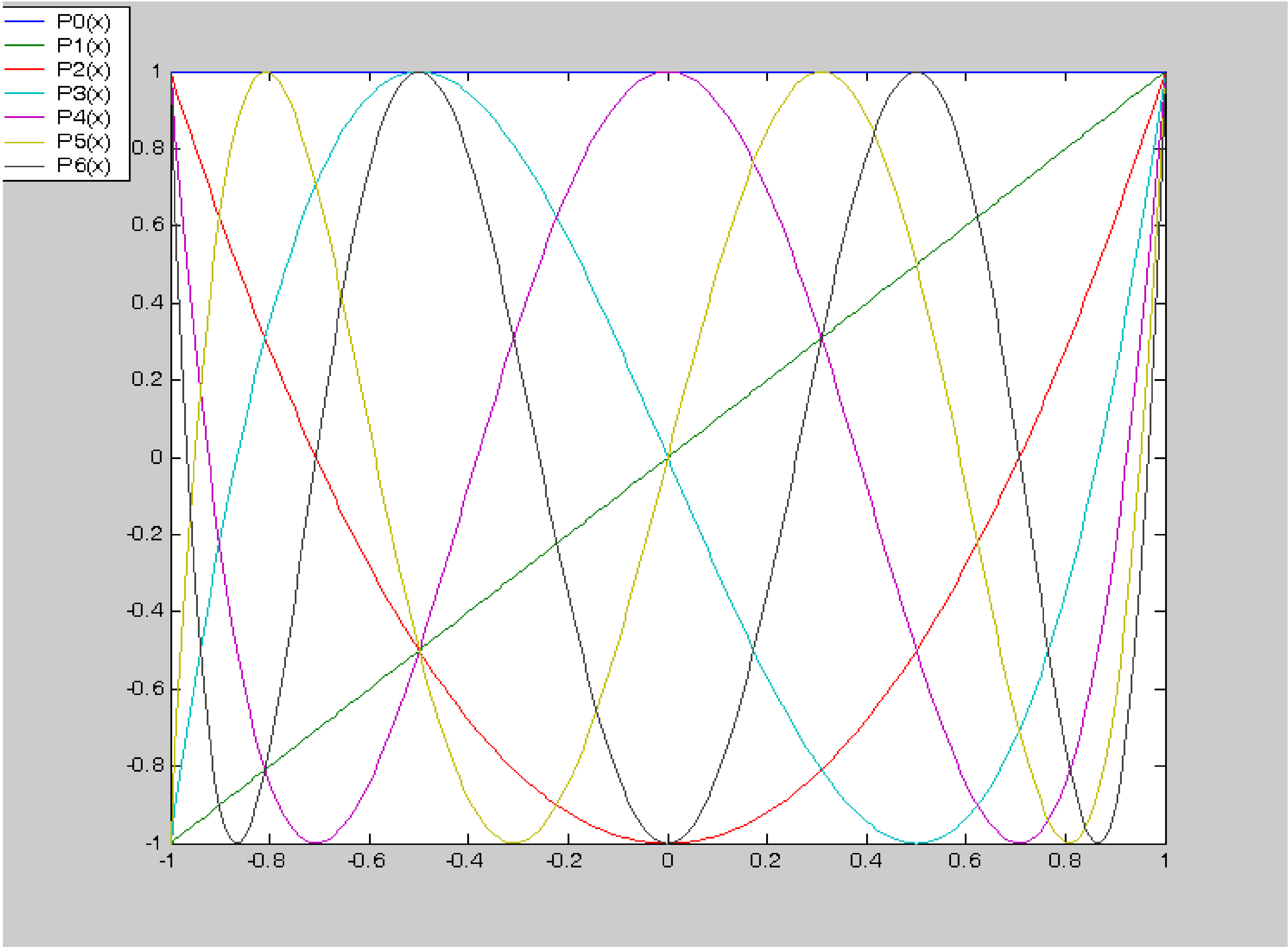
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$

$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$$

$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

由递推关系可得$T_n(x)$的最高次项系数是2^{n-1}，　$(n\ge1)$.


P0(x)
P1(x)
P2(x)
P3(x)
P4(x)
P5(x)
P6(x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

2.切比雪夫多项式的正交性

切比雪夫多项式在[–1 , 1]上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

正交，且

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0, & n\neq m;\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=m\neq 0;\\ \pi, & n=m=0;\end{cases}$$

事实上，令 $x=\cos\theta$ 则 $dx=-\sin\theta d\theta$

于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta=\begin{cases}0, & n\neq m;\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=m\neq 0;\\ \pi, & n=m=0;\end{cases}$$

3.切比雪夫多项式零点

$T_n(x)$在区间$[-1, 1]$内有n个零点.

$T_1=\cos\theta=x$

n阶Chebyshev多项式: $T_n=\cos(n\theta)$,

或 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$

取 $$n\arccos x=\frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

即 $$x_k=\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

三、其它常用的正交多项式:

正交多项式是与区间和权函数相关的, 不同的区间, 不同的权函数就给出了不同的正交多项式, 但一般都具有正交性质和三项递推性质.

1、第二类切比雪夫（Chebyshev）多项式：

区间： $[-1,1]$ 权函数： $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$

表达式： $$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}},$$

令 $x=\cos\theta$

可得

$$\int_{-1}^{1}U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\pi}\sin(n+1)\theta\sin(m+1)\theta d\theta=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n\end{cases}$$

递推公式：

$$U_0(x)=1, U_1(x)=2x,$$

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x),\quad (n=1,2,\cdots)$$

2、拉盖尔多项式:

区间: $[0,+\infty)$ 权函数: $\rho(x)=e^{-x}$

表达式: $$L_n(x)=e^{x}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

正交性: $$\int_0^{\infty} e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ (n!)^2, & m=n\end{cases}$$

递推公式:

$$L_0(x)=1, L_1(x)=1-x,$$

$$L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x), \quad (n=1,2,\cdots)$$

3、埃尔米特多项式：

区间： $(-\infty,+\infty)$ 权函数： $\rho(x)=e^{-x^2}$

表达式： $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

正交性： $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n\end{cases}$

递推公式：

$$H_0(x)=1, H_1(x)=2x,$$

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),\quad (n=1,2,\cdots)$$

6.3 最佳平方逼近

函数逼近：已知给定区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，用一个简单的、易于计算的函数$P(x)$来近似代替$f(x)$.

定义：设$\varphi_0(x), \varphi_1(x),\ldots, \varphi_n(x)$是$[a,b]$上线性无关的连续函数， $a_0,a_1,\ldots,a_n$是任意实数，则

$$S(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)$$

的全体是$C[a,b]$的一个子集，记为

$$\Phi=span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$$

并称$\varphi_0(x), \varphi_1(x),\ldots, \varphi_n(x)$是该集合的一个基底.

例如， $P_n=span\{1, x,\cdots\cdots, x^n\}$

表示由基底$1,x,\ldots,x^n$生成的普通多项式的集合.

定义：对于给定区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，如果存在函数$S^*(x)\in\Phi=span\{\varphi_0(x), \varphi_1(x),\ldots, \varphi_n(x)\}$使

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2 dx$$
$$=\min_{S(x)\in\Phi}\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2 dx$$

则称$S^*(x)$是$f(x)$在集合Φ中的**最佳平方逼近函数**.

当$\Phi=P_n=span\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$时，满足上述条件的$S^*(x)$是$f(x)$的**n次最佳平方逼近多项式**，简称**n次最佳平方逼近**.

设

$$S(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots\ldots + a_n\varphi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)$$

显然求最佳平方逼近函数

$$S^*(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^*\varphi_j(x)$$

的问题可归结为求其系数$a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*$,使多元函数

$$I(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \rho(x)[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)]^2 dx$$

取得最小值. 点$a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*$是$a_0, a_1, \ldots, a_n$的极值点.

利用多元函数求极值的必要条件，可得关于系数a_0，$a_1,\ldots,a_n$的n+1阶线性方程组，即正规方程组，其矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ \vdots \\ (\varphi_n,f) \end{pmatrix}$$

由于$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$,…, $\varphi_n(x)$线性无关，该方程组系数矩阵行列式不为零，故存在唯一解$a_k=a_k^*$（k=0,1,……n）.

例： 已知 $f(x)\in C[0, 1]$, 求多项式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$$

使得 $$L=\int_0^1 [P(x)-f(x)]^2 dx = \min$$

解： 令

$$L(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_0^1 [\sum_{j=0}^{n} a_j x^j - f(x)]^2 dx$$

$$L=\int_0^1 [\sum_{j=0}^{n} a_j x^j]^2 dx - 2\sum_{j=0}^{n} a_j \int_0^1 x^j f(x) dx + \int_0^1 [f(x)]^2 dx$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = 2\sum_{j=0}^{n} a_j \int_0^1 x^{j+k} dx - 2\int_0^1 x^k f(x) dx$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = 2\sum_{j=0}^{n} a_j \int_0^1 x^{j+k} dx - 2\int_0^1 x^k f(x) dx$$

令 $b_k = \int_0^1 x^k f(x) dx$ $\quad \frac{\partial L}{\partial a_k} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵是严重病态矩阵（Hilbert矩阵）.

例：在区间[1/4, 1]上给定函数$f(x)=\sqrt{x}$，求其在集合$span\{1,x\}$上$\rho(x)=1$的最佳平方逼近函数.

解：因正规方程组的矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ \vdots \\ (\varphi_n,f) \end{pmatrix}$$

由$\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$，$x\in[1/4, 1]$，故所求的最佳平方逼近函数可设为

$$P_1(x)=a_0^*+a_1^*x$$

先计算六个内积：

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}1^2dx=\frac{3}{4},\qquad (\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}xdx=\frac{15}{32}$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}x^2dx=\frac{21}{64}\qquad (\varphi_0,f)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\sqrt{x}dx=\frac{7}{12},$$

$$(\varphi_1,f)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}x\sqrt{x}dx=\frac{31}{80}$$

故正规方程组为
$$\begin{cases}\frac{3}{4}a_0^*+\frac{15}{32}a_1^*=\frac{7}{12}\\ \frac{15}{32}a_0^*+\frac{21}{64}a_1^*=\frac{31}{80}\end{cases}$$

解得 $a_0^*=\frac{10}{27},a_1^*=\frac{88}{135}$

故所求多项式函数为 $P_1(x)=\dfrac{10}{27}+\dfrac{88}{135}x$

上面方法中，需要计算六个积分值，同时还需要求解线性方程组，故计算量较大.

实际应用中，对于一般的基底 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots\ldots, \varphi_n(x)$，当 n 稍大时，求解正规方程组的工作量是很大的，若采用 $1, x, \ldots, x^n$ 作基底，当 $\rho(x)=1$ 时，虽然计算简单，但其正规方程组的系数矩阵往往是病态的，一般来说，当 $n\geq 4$ 时，其计算结果就不能令人满意.

可采用正交多项式作基底的方法使问题简化.

用正交多项式作最佳平方逼近:

设$P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$为区间$[a, b]$上的正交多项式,

即

$$(P_k, P_j) = \int_a^b \rho(x) P_k(x) P_j(x) dx = 0$$

$$(k \neq j, \ k, j = 0, 1, \cdots, n)$$

求 $P(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \cdots + a_n P_n(x)$

使 $$L = \int_a^b [P(x) - f(x)]^2 dx = \min$$

由正交多项式的性质，正规方程组

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ \vdots \\ (\varphi_n,f) \end{pmatrix}$$

可化为

$$\begin{pmatrix} (P_0,P_0) & & & \\ & (P_1,P_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & \cdots & (P_n,P_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_0,f) \\ (P_1,f) \\ \vdots \\ (P_n,f) \end{pmatrix}$$

即 $$(P_k, P_k)a_k = (P_k, f)$$

得 $$a_k = \frac{(P_k, f)}{(P_k, P_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

则

$$P(x) = \frac{(P_0, f)}{(P_0, P_0)} P_0(x) + \frac{(P_1, f)}{(P_1, P_1)} P_1(x) + \cdots + \frac{(P_n, f)}{(P_n, P_n)} P_n(x)$$

例：在区间[1/4, 1]上求函数$f(x) = \sqrt{x}$的最佳平方逼近函数.

解: 令 $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - 5/8$，则$P_0(x)$与$P_1(x)$正交，故取最佳平方逼近函数形式为

$$P(x) = a_0 + a_1(x - \frac{5}{8})$$

计算积分如下：

$$(P_0, P_0) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} 1^2 dx = \frac{3}{4},$$

$$(P_1, P_1) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} (x - \frac{5}{8})^2 dx = \frac{9}{256}$$

$$(P_0, f) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{7}{12},$$

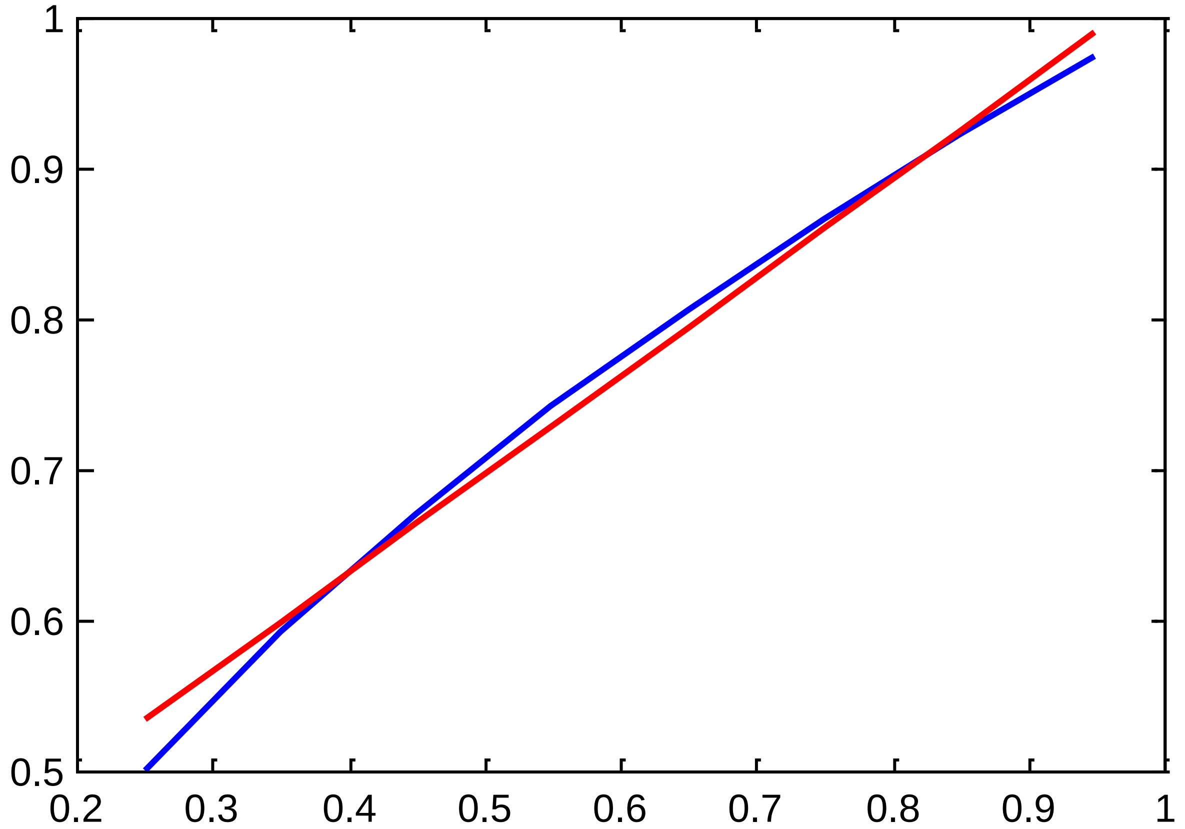
$$(P_1, f) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} (x - \frac{5}{8})\sqrt{x}dx = \frac{11}{480}$$

所以

$$a_0 = \frac{(P_0, f)}{(P_0, P_0)} = \frac{7}{9} \qquad a_1 = \frac{(P_1, f)}{(P_1, P_1)} = \frac{88}{135}$$

所求最佳平方逼近函数为:

$$P(x) = \frac{7}{9} + \frac{88}{135}(x - \frac{5}{8})$$



$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$P(x) = \frac{7}{9} + \frac{88}{135}\left(x - \frac{5}{8}\right)$$

THE

END